

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN  
INSTITUT FÜR ENERGIETECHNIK MW7

LEHRSTUHL UND LABORATORIUM  
FÜR HYDRAULISCHE MASCHINEN UND ANLAGEN

**Sensitivitätsanalyse für die Optimierung  
strömungsführender Bauteile**

Barnabás Szilágyi

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen  
Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender:	Univ.-Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. habil. R. Friedrich
Prüfer der Dissertation:	
1.	Univ.-Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. habil. R. Schilling
2.	Univ.-Prof. Dr.-Ing. H. Baier

Die Dissertation wurde am 15.11.2001 bei der Technischen Universität München  
eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 25.04.2002 angenommen.



# Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand in den Jahren 1997-2001 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Hydraulische Maschinen und Anlagen der Technischen Universität München.

Mein Dank gilt Herrn **Univ.-Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. habil. R. Schilling** für die Betreuung der Arbeit sowie die Möglichkeit, am Lehrstuhl für Hydraulische Maschinen promovieren zu können.

Ebenso möchte ich mich bei Herrn **Univ.-Prof. Dr.-Ing. H. Baier** für die freundliche Übernahme des Koreferates sowie Herrn **Univ.-Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. habil. R. Friedrich** für den Vorsitz der Prüfungskommission und die reibungslose Durchführung des Promotionsverfahrens danken.

Mein Dank gilt dem akademischen Oberrat Herrn **Dr.-Ing. W. Knapp** und Frau **A. Lang** für ihre Hilfe im administrativen Bereich.

Gerne möchte ich an dieser Stelle allen meinen Kollegen Dank aussprechen. Insbesondere möchte ich mich bei meinen Kollegen **Dr.-Ing. A. Müller** und **Dr.-Ing. R. Reinelt** für die mehrjährige Zusammenarbeit am LHM bedanken. Besonderer Dank geht auch an meine Kollegen **Dipl.-Ing. S. Thum**, **Dipl.-Ing. C. Böhm**, **Dipl.-Ing. W. Mauer** und **Dipl.-Ing. W. Rohne** für ihre Hilfsbereitschaft.

Abschließend möchte ich mich ganz besonders bei meiner Frau **Beáta** für ihre Unterstützung und Geduld bedanken.

München, Mai 2002

Barnabás Szilágyi



# Inhaltsverzeichnis

<b>Nomenklatur</b>	<b>III</b>
<b>1 Einführung</b>	<b>2</b>
1.1 Problemstellung . . . . .	2
1.2 Zielsetzung . . . . .	2
<b>2 Stand des Wissens</b>	<b>4</b>
2.1 Anwendungen mit strukturierten Gittern . . . . .	6
2.2 Anwendungen mit unstrukturierten Gittern . . . . .	7
<b>3 Sensitivitätsanalyse in der Optimierung</b>	<b>9</b>
3.1 Optimierungsparameter . . . . .	9
3.2 Sensitivitätsanalyse . . . . .	12
3.3 Simultane Strömungsanalyse und Optimierung . . . . .	18
<b>4 Herleitung des diskreten Gleichungssystems</b>	<b>22</b>
4.1 Strömungsproblem . . . . .	22
4.2 Finite-Elemente-Diskretisierung . . . . .	24
4.2.1 Variationsformulierung . . . . .	24
4.2.2 Diskretisierung . . . . .	26
4.3 Herleitung der Sensitivitätsgleichungen . . . . .	29
4.3.1 Herleitung der Randbedingungen für die Sensitivitäten . . . . .	32
<b>5 Lösung der Sensitivitätsgleichungen</b>	<b>36</b>
5.1 Lineares Mehrgitterverfahren . . . . .	41

5.2	Nichtlineares Mehrgitterverfahren . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Testfälle</b>	<b>45</b>
6.1	Rotierender Zylinder . . . . .	45
6.2	Joukowsky-Profil . . . . .	49
6.2.1	Symmetrisches Joukowsky-Profil . . . . .	50
6.2.2	Allgemeines Joukowsky-Profil . . . . .	56
6.3	Ebener Diffusor . . . . .	62
6.3.1	Analyse der Sensitivitäten . . . . .	71
6.4	Schaufelgitter . . . . .	75
6.4.1	Optimierung der Schaufelanströmung . . . . .	77
6.4.2	Optimierung der Schaufelbelastung . . . . .	79
<b>7</b>	<b>Bewertung und Ausblick</b>	<b>88</b>
7.1	Sensitivitätsanalyse . . . . .	88
7.2	Die Optimierungsstrategie . . . . .	89
<b>A</b>	<b>Sequentielle lineare Programmierung (SLP)</b>	<b>92</b>
A.1	Validierung des Algorithmus . . . . .	95
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>99</b>

## Nomenklatur

Innerhalb dieser Dissertation gilt die Konvention, daß Vektorfelder im Gegensatz zu skalarwertigen Funktionen **fett** gedruckt sind. Vektoren sind mit Klein-, Matrizen mit Großbuchstaben bezeichnet. Im folgenden sind die wesentlichen Bezeichnungen aufgelistet. Die Bedeutung lokaler Hilfsgrößen ist dem jeweiligen Kontext zu entnehmen.

### Akronyme

1D	eindimensional
2D	zweidimensional
3D	dreidimensional
ADIFOR	Automatic Differentiation of Fortran
AR	Aspect Ratio
AVM	Adjoint Variable Method
BiCGStab	Biconjugate Gradient Stabilized
CFD	Computational Fluid Dynamics
CG	Conjugate Gradient
CONSIST	Objektorientierte Simulationsbibliothek
DDM	Direct Differentiation Method
FAS	Full Approximation Scheme von Brandt
FEM	Finite-Elemente-Methode
FV	Finite Volumen
FD	Finite Differenzen
IIM	Incremental Iterative Method
ILU	Incomplete Lower-Upper
KP	Kontrollpunkt
LHM	Lehrstuhl für Hydraulische Maschinen und Anlagen
MDO	Multidisziplinäre Design Optimierung
MG	Multigrid
MFLOPS	Million Floating Point Operations Per Second
MPI	Message Passing Interface
NAND	Nested Analysis and Design
SA	Sensitivitätsanalyse
SAADO	Simultaneous Aerodynamic Analysis and Design Optimization
SAND	Simultaneous Analysis and Design
SIMPLE	Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations
SLP	Sequentielle Lineare Programmierung

### Lateinische Zeichen

$A$	Koeffizientenmatrix, Konstante
$B$	Diskreter Divergenz- und Gradientenoperator, Konstante
$C$	Prekonditioner
$E$	Effizienz

$F$	Zielfunktion
$G$	Ungleichheitsfunktion
$H$	Gleichheitsfunktion
$I$	Einheitsmatrix, Prolongations- und Restriktionsoperator
$L$	Strömungsgleichungen allgemein
$M$	Massenmatrix
$N$	Anzahl der Operationen
$\mathcal{R}$	Menge der reellen Zahlen
$R$	Rotationsmatrix, Reaktionsmatrix
$S$	Ansatzraum für FE, Konvektionsmatrix
$T$	Zelle
$V$	Volumen
$Z$	Anzahl der Schaufel
$a$	Bilinearform, Radius des Bildkreises
$b$	Bilinearform
$c$	Bilinearform
$c$	Absolutgeschwindigkeit
$e$	Bezeichnung für eine Kante bzw. Seite, deren Länge bzw. Fläche
$f$	Problemfunktion, Quellterm
$g$	Quellterm
$h$	Maschenweite, Diffusorhöhe
$i$	Inzidenzwinkel
$i$	komplexe imaginäre Einheit
$l$	Zähler für MG-Level, Länge der Platte im Kap. 6
$m$	Anzahl der Gleichungsfunktionen, Kovarianz
$n$	Dimension der Designvariablen, Bilineare Form
$\mathbf{n}$	äußerer Normaleneinheitsvektor
$p$	statischer Druck, Anzahl der Ungleichungsfunktionen
$q$	Testfunktion
$r$	Radius, Korrelationskoeffizient
$s$	Bogenlänge
$\mathbf{r}$	Ortsvektor
$u$	Geschwindigkeitskomponente in $x$ -Richtung
$\mathbf{u}$	Führungsgeschwindigkeit
$v$	Geschwindigkeitskomponente in $y$ -Richtung
$\mathbf{v}$	Testfunktion
$w$	komplexe Geschwindigkeit oder Geschwindigkeitskomponente in $z$ -Richtung
$\mathbf{w}$	Relativgeschwindigkeit
$x$	Raumkoordinate
$\mathbf{x}$	Ortsvektor, Vektor der Designvariablen
$y$	Raumkoordinate
$z$	Raumkoordinate, komplexe Zahl



**Griechische Zeichen**

$\Delta$	Differenz
$\Gamma$	Rand des Kontrollraums
$\Omega$	Kontrollraum
$\alpha$	allgemeine Bezeichnung für Designparameter, Interpolationsfaktor
$\beta$	Strömungswinkel
$\gamma$	Rechengitter, Konstante für MG oder linearisierte Ungleichungsfunktion
$\delta$	Teilungswinkel
$\epsilon$	Konvergenzkriterium
$\varepsilon$	Konvergenzkriterium
$\zeta$	lokale Koordinate, komplexe Zahl
$\eta$	linearisierte Gleichungsfunktion, lokale Koordinate
$\lambda$	adjoint-Vektor
$\nu$	kinematische Viskosität
$\xi$	lokale Koordinate
$\rho$	Dichte, Spektralradius
$\sigma$	Streuung
$\tau$	Zelle auf der Referenzebene
$\phi, \phi$	allgemeine Strömungsgröße
$\phi$	linearisierte Zielfunktion
$\psi$	Transformationsoperator, Druckzahl
$\omega, \omega$	Winkelgeschwindigkeit

**Tiefgestellte Zeichen**

<i>in</i>	Einströmrand
<i>out</i>	Ausströmrand
<i>P+</i>	Periodischer Rand
<i>P-</i>	Periodischer Rand
<i>Blade</i>	Wand
<i>Blade EU</i>	Euler-Wand
<i>Blade NS</i>	Navier-Stokes-Wand
<i>h</i>	diskret
<i>u</i>	<i>u</i> -Komponente
<i>v</i>	<i>v</i> -Komponente
<i>w</i>	<i>w</i> -Komponente
<i>c</i>	<i>c</i> -Komponente
<i>p</i>	<i>p</i> -Komponente
$\alpha$	abgeleitet nach $\alpha$
<i>D</i>	Diffusor
<i>re</i>	Real
<i>id</i>	Ideal
<i>s</i>	Schaufel
<i>th</i>	theoretisch

**Sonstige Bezeichnungen**

$H^1(\Omega)$	Sobolevraum über $\Omega$
$\mathbf{H}^1(\Omega)$	Sobolevraum vektorwertiger Funktionen über $\Omega$
$L^2(M)$	Lebesgue-Raum der über $M$ quadratisch integrierbaren Funktionen
$\text{diag}(S)$	Diagonalanteil von $S$
$\mathcal{O}(h^\gamma), \mathcal{O}(N)$	asymptotisch $\sim h^\gamma, \sim N$
$Re$	Reynolds-Zahl
$Ta$	Taylor-Zahl
$c_p$	Druckkoeffizient
$\Re$	Reeller Teil einer komplexen Zahl
$\Im$	Imaginärer Teil einer komplexen Zahl

## Zusammenfassung

Das Thema dieser Dissertation ist die semi-analytische Berechnung von Strömungssensitivitäten und die Anwendung der berechneten Sensitivitäten in einem gradientenbasierten Optimierungsverfahren. Die Herleitung der Sensitivitätsgleichungen erfolgt mit einem diskreten Ansatz, wobei die Ausgangsgleichungen – die Grundgleichungen des Strömungsproblems – zunächst diskretisiert und das resultierende diskrete Gleichungssystem differenziert werden. Die Diskretisierung der Grundgleichungen erfolgt mit einem nichtkonformen Finite-Elemente-Ansatz auf unstrukturierten Netzen. Die iterative Lösung der diskreten Gleichungssysteme wird mit einem doppelt eingeschachtelten Mehrgitterverfahren beschleunigt. Für die Druck-Geschwindigkeits-Kopplung wird ein modifiziertes SIMPLE-Verfahren eingesetzt. Die Implementierung der Theorie wird anhand von drei analytischen Testfällen validiert. Für den reibungsbehafteten Fall werden die Gleichungen für Strömung und Sensitivitäten zwischen zwei konzentrischen Zylindern analytisch hergeleitet. Für den reibungsfreien Fall werden die analytischen Lösungen von Druck und Geschwindigkeiten mit Hilfe der konformen Abbildung um Tragflügelprofile erstellt. An zwei praxisrelevanten strömungstechnischen Problemen wird die Anwendbarkeit der Sensitivitätsanalyse sowohl für die traditionelle Optimierungsstrategie als auch für die Strategie der simultanen Strömungsanalyse und Optimierung demonstriert. Darüber hinaus werden weitere Anwendungsmöglichkeiten diskutiert.

Wesentliche Vorteile des Verfahrens sind der Gewinn an Rechenzeit, die Anwendbarkeit alternativer Optimierungsstrategien und durch den Einblick in den Parameterraum eine stärkere Kontrolle der Parametrisierung.



# Kapitel 1

## Einführung

### 1.1 Problemstellung

Die numerische Optimierung basiert auf mathematischen Methoden, um ein globales Extremum der Zielfunktion, definiert in der Regel mit Nebenbedingungen, finden zu können. Wenn die Auswertung der Zielfunktion und Nebenbedingungen aufwendig ist, wie das bei nichtlinearen Strömungsanalysen der Fall ist, sind Optimierungsverfahren von nullter Ordnung häufig aufgrund der hohen Rechenzeiten nicht mehr brauchbar. In diesem Fall werden gradientenbasierte Optimierungsverfahren eingesetzt. Mit Hilfe der berechneten Gradienten, auch *Sensitivitätsableitungen* genannt, werden die Designparameter so modifiziert, daß die Zielfunktion einen immer "besseren" Wert zurückliefert, ohne dabei die Nebenbedingungen zu verletzen.

Sensitivitätsableitungen können auch mit Finiten Differenzen berechnet werden. Die Berechnung kann aber nicht nur sehr aufwendig sein, sondern auch ungenaue Gradientennäherung wiedergeben, wenn der Vorgang nicht überwacht wird. Der bevorzugte Weg ist deshalb die semi-analytische Berechnung von Sensitivitäten. Dies erfordert neben der Strömungsberechnung noch eine zusätzliche Simulation, die auch *Sensitivitätsanalyse* genannt wird.

### 1.2 Zielsetzung

Der Einsatz mathematischer Optimierungsverfahren im Entwurfsprozeß soll die Entwicklungszeiten wesentlich verkürzen und die Entwicklungskosten deutlich senken. Um die Optimierung noch effizienter durchführen zu können, werden immer neuere und effizientere Methoden und Strategien eingesetzt und getestet. Die vorliegende Arbeit soll einen weiteren Beitrag zur numerischen Optimierung von Strömungsmaschinen durch die Anwendung von Sensitivitätsanalyse leisten.

Die primäre Aufgabe ist dabei, einen Computercode zu erstellen, der die effiziente und genaue Berechnung von Sensitivitäten ermöglicht. Diese sollen dann in einem

gradientenbasierten Optimierungsverfahren die FD-Gradientenberechnung ersetzen. Durch die Verwendung der Sensitivitätsanalyse lassen sich nicht nur die Gradienten effizienter berechnen. Darüber hinaus gelingt es, Einblick in den Parameterraum zu gewinnen.

Die Verwendung der Sensitivitätsanalyse bietet jedoch auch andere Vorteile an. Es lassen sich Optimierungsstrategien anwenden, die für die herkömmliche Gradientenauswertung nicht eingesetzt werden konnten. Eine dieser Strategien ist die SAADO-Methode, die in dieser Arbeit in Verbindung mit der Sensitivitätsanalyse Anwendung findet.

Der Berechnungscode für die Sensitivitäten wird anhand von drei analytischen Testfällen validiert. Mit Hilfe zweier Optimierungsprobleme wird die Effizienz der Sensitivitätsanalyse gemessen und mit anderen Optimierungskonzepten verglichen.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich wie folgt: Nach einem kurzen Überblick über den Stand des Wissens werden in Kapitel 3 die einzelnen Möglichkeiten für die Sensitivitätsanalyse betrachtet und die Verbindung zwischen SA und Optimierung erläutert. In Kapitel 4 werden die diskreten Sensitivitätsgleichungen und Randbedingungen hergeleitet. Der Lösung der Gleichungen in Kapitel 5 folgen dann Anwendungsbeispiele in Kapitel 6. Abschließend werden in Kapitel 7 die wesentlichen Aspekte zusammengefaßt und durch Bemerkungen zu Entwicklungstendenzen ergänzt. Im Anhang A ist der für die Optimierung eingesetzte, mit MPI parallelisierte SLP-Algorithmus erläutert.

# Kapitel 2

## Stand des Wissens

Die Grundgleichungen bei der Optimierung von Strömungsmaschinen sind nichtlineare partielle Differentialgleichungen. Die Ableitung der Grundgleichungen für die Sensitivitäten kann auf zwei Wegen erfolgen.

Die *Kontinuums-* oder *Variationsapproximation* bevorzugt die Differentiation gegenüber der Diskretisierung. Die Differentiation kann entweder *direkt* oder durch Einführung von Lagrange-Multiplikatoren ausgeführt werden. Letzteres hat sich in der Fachliteratur als *adjoint-Methode* etabliert. Die Lagrange-Multiplikatoren sind durch kontinuierliche, lineare und mit den Strömungsgleichungen gekoppelte Gleichungssysteme definiert. Die hergeleiteten Gleichungen werden anschließend diskretisiert und gelöst.

Bei der *diskreten Approximation* werden die Strömungsgleichungen zuerst diskretisiert und dann differenziert. Der diskrete Weg – ähnlich der Kontinuumsapproximation – kann in direkte Differentiation und adjoint-Methode unterteilt werden. Die Diskussion des Kontinuumsansatzes mit Lagrange-Multiplikator kann in [2, 11, 57, 58, 87] nachgelesen werden, während der Kontinuumsansatz mit direkter Differentiation in [17] und [42] diskutiert wird. Weitere Anhaltspunkte für die diskrete Approximation findet man bei HOU [54].

All die benötigten Linearisierungen und Ableitungen für den diskreten Ansatz – aber genauso auch für den Kontinuumsansatz – von Hand durchzuführen und dann noch das Programm zu erstellen, das diese Terme numerisch auswertet, kann selbst mit dem einfachsten Turbulenzmodell äußerst aufwendig sein. Eine vielversprechende Lösung für dieses Problem ist die automatische Differentiation, bei der alle Ableitungen vom Computer durchgeführt werden. Ein solches Programmpaket ist z. B. ADI-FOR (**A**utomatic **D**ifferentiation of **F**ortran), vgl. [13, 14] und [16]. Es wurde bislang für aerodynamische Optimierungsprobleme mit Erfolg eingesetzt, vgl. [44, 77, 101] und [102]. Als Input für das Programm stellt man die Zielfunktion mit den Nebenbedingungen und den Code des Strömungslösers zur Verfügung und erhält als Output einen Computercode, der in der Lage ist, Sensitivitäten zu berechnen.

Die Wahl des passenden SA-Ansatzes (direkt oder adjoint) hängt von dem gestellten

Optimierungsproblem ab und ist unabhängig davon, ob die Linearisierung von Hand oder durch automatische Differentiation erfolgt. Der Rechenaufwand der direkten Methode ist proportional zur Anzahl der Designparameter, da für jeden Designparameter ein lineares Gleichungssystem gelöst werden muß, um die zugehörigen Sensitivitäten zu ermitteln. Bei der adjoint-Formulierung ist der Aufwand zur Anzahl der Restriktionen proportional. Neben der Zielfunktion wird für jede Restriktion, bei der die Feldgrößen in die Funktion eingehen, ein lineares Gleichungssystem gelöst. Im Fall einer Multidisziplinären Design Optimierung (MDO) werden in der Regel jeder Restriktion Lagrange-Parameter zugeordnet.

Die ersten Veröffentlichungen über Designoptimierung sind in der Flugzeugindustrie Mitte der siebziger Jahre entstanden, vgl. [50, 51] und [108]. Sie beschäftigten sich in erster Linie mit Tragflügeldesign. Die Grundgleichungen der SA waren die linearen Potentialgleichungen. Die Gradientenberechnungen erfolgten mit Finiten Differenzen. Diese Anwendungen konnten aufgrund des verwendeten Modells nichtlineare Effekte nicht wiedergeben. Um analytische Gradienten für viskose, inkompressible Fluide berechnen zu können, entwickelte sich gleichzeitig eine andere Technik, das *Optimal Control*, vgl. [41, 81] und [82].

Die Fortschritte in der Computerentwicklung ermöglichten es, Mitte der achtziger Jahre, Strömungssimulationen basierend auf kompressiblen Euler- und Navier-Stokes-Gleichungen durchzuführen. Diese Simulationen waren jedoch auf einfache Geometrien beschränkt. SOBIESCANSKI-SOBIESKI [95] war der erste, der die Strömungsanalyse mit einer Formsensitivitätsanalyse ergänzte. Nach dieser Pionierarbeit sind dann mit stetig wachsender Computerleistung zahlreiche Studien veröffentlicht worden, welche die Strömungssimulation, Sensitivitätsanalyse und numerische Optimierung gekoppelt haben, vgl. [63, 72, 74, 77, 87]. Zu den größten Schwierigkeiten gehörten und gehören auch heute noch der enorme Speicheraufwand und die großen Rechenzeiten, wenn nichtlineare Strömungsgleichungen gelöst werden müssen. Während in der Strömungsanalyse iterative Verfahren für die Lösung des algebraischen Gleichungssystems von Anfang an eingesetzt werden konnten, war das bei der Sensitivitätsanalyse wegen der schlechten Kondition der Jacobi-Matrix nicht möglich. Deshalb wurden direkte Lösungsverfahren bevorzugt, was zur Folge hatte, daß die dünnbesetzten Matrizen während der Lösung aufgefüllt wurden. Wesentliche Ersparnisse an Arbeitsspeicher ([72, 74, 75]) können durch die Verwendung der sog. *Incremental Iterative Method* (IIM) erreicht werden, vgl. [63].

Auch zur Lösung des Problems großer Rechenzeiten sind einige Methoden in den letzten Jahren entwickelt worden, wie z. B. die mit simultaner Strömungsanalyse und Designoptimierung arbeitende *SAND* [48, 53, 78, 89], *one-shot* [65] und *pseudotime*-Methode [56, 99] sowie parallele Lösungsstrategien, vgl. [77, 85].

Die numerische Strömungsanalyse wird heute unabhängig von der Komplexität des zu modellierenden Problems bereits sehr erfolgreich eingesetzt, wohingegen die Anwendung der Sensitivitätsanalyse für komplexere Probleme gerade am Anfang steht. Die größte Schwierigkeit liegt offensichtlich in der Generierung eines einfachen strukturierten Gitters. Um jedoch industriennahe Probleme effizient berechnen zu können,



müssen einige *Domain-Decomposition-Techniken* in den Design-Code eingebaut werden. Solche Techniken, welche auf die Verwendung von strukturierten Netzen basieren, sind *Multiblock* [3, 38] oder *überlappender Algorithmus* (auch als *Chimera* [97] bekannt) [9, 68]. Wenn aber die Flexibilität des Programms zunimmt, so wird auch die Komplexität des Algorithmus größer. Da sich die Anwendungsmöglichkeiten der Sensitivitätsanalyse noch immer entwickeln, werden große Anstrengungen unternommen, in Design-Codes mit strukturierten Netzen Domain-Decomposition-Algorithmen zu implementieren.

Eine Alternative zu den Methoden mit strukturierten Netzen und Domain-Decomposition, ist die Anwendung von solchen Methoden die auf unstrukturierten Gittern basieren. Mit diesen Strategien sind zusammengesetzte Gebiete einfacher und effizienter zu vernetzen. Ein weiteres Merkmal dieser Strategien ist, daß sie der Geometrie angepaßt werden können. Nur dort, wo es nötig ist, wird das Gitter verfeinert, um bessere Kontrolle über den gitterabhängigen Diskretisierungsfehler zu haben. Den aktuellen Stand der Technik in der Strömungsanalyse mit unstrukturierten Netzen faßt VENKATAKRISHNAN [111] zusammen, und er diskutiert in seiner Monographie die zukünftigen Forschungsrichtungen.

Im weiteren wird ein kurzer Überblick über die Anwendungen der Sensitivitätsanalyse mit strukturierten und unstrukturierten Gittern gegeben.

## 2.1 Anwendungen mit strukturierten Gittern

Die Implementierung von Domain-Decomposition-Methoden konzentriert sich hauptsächlich auf Anwendungen mit Multiblock-Gittern. In diese Richtung haben auch REUTER ET AL. [86] den Kontinuumsansatz von JAMESON [58] ergänzt, um einen adjoint-Multiblock-Multigrid-Löser zu erhalten. In [86] wird dieser reibungsfreie Ansatz für das Tragflügeldesign eines Business-Jets getestet. In [85] wird der Code parallelisiert und auf ein komplettes Flugzeug angewendet. JAMESON ET AL. [59] haben den Code weiterentwickelt und mit diffusiven Termen ergänzt. Die Viskosität und der Wärmeleitkoeffizient werden allerdings als Konstante angenommen und nicht differenziert.

ELESHAKY und BAYSAL [30] haben ein diskretes adjoint-Multiblock-Lösungsverfahren entwickelt und auf eine rotationsymmetrische Düse angewendet. Dieser Ansatz wurde später von LACASSE und BAYSAL [66] für eine zweidimensionale Designoptimierung von Flugzeugbauteilen mit Hilfe der laminaren Navier-Stokes-Gleichungen eingesetzt.

Andere Domain-Decomposition-Methoden sind u. a. die von TAYLOR [101] und TAYLOR ET AL. [102], bei denen der Strömungslöser CFL3D [104] differenziert wird, um eine diskrete Sensitivitätsanalyse durchführen zu können. Diese Arbeiten benutzen das automatische Differentiationspaket ADIFOR und lösen die Gleichungen mit der IIM.

Eine weitere Anwendung mit automatischer Differentiation findet man bei GREEN ET AL. [44]. Dabei wird der 3D-Grenzschicht-Navier-Stokes-Löser TLNS3D [110] nach den Designparametern und den viskosen Modellparametern differenziert. Es werden vor allem die Clauser- und die Van Driest-Konstante im algebraischen Baldwin-Lomax Turbulenzmodell untersucht. Das Ziel dieser Arbeiten war zu beweisen, daß durch Differenzieren von modernen CFD-Codes genaue Sensitivitätsableitungen erzielt werden können.

## 2.2 Anwendungen mit unstrukturierten Gittern

Die ersten Anwendungen mit unstrukturierten Gittern sind Anfang der 90er Jahren entstanden. BEUX UND DERVIEUX [11] führten für eine zweidimensionale Düse eine Sensitivitätsanalyse durch. Sie benutzten eine Kontinuum-Adjoint-Methode, aber für die Computerimplementation wurde auf den diskreten Ansatz zurückgegriffen. NEWMAN ET AL. [76] entwickelten auf der Basis der Euler-Gleichungen einen zweidimensionalen und später auch einen dreidimensionalen [74] diskreten Sensitivitätsanalyse-Ansatz, der für die Designoptimierung von Tragflügeln benutzt wurde. In den Arbeiten von NEWMAN ist auch eine Diskussion über die Einflüsse der räumlichen Diskretisierung auf die Genauigkeit sowohl für die Strömungs- als auch für die Sensitivitätsanalyse zu finden.

In [74–76] werden auch für unstrukturierte Netze Gittersensitivitäten bezüglich der geometrischen Designvariablen durch Differenzieren des Gittergenerators und der Gitteradaptionsroutinen mit ADIFOR ausgewertet. Wenn man den Code für Form-Sensitivitätsanalyse erstellt hat, bleibt lediglich die Oberflächenmodellierung von der gegebenen Konfiguration abhängig. Um auch dieses Problem zu lösen, erweist sich ADIFOR als ein zuverlässiges und effizientes Tool.

ELLIOT UND PERAIRE [31] haben ebenfalls einen reibungsfreien, unstrukturierten, diskreten adjoint-Ansatz verwendet, um die Druckverteilung um einen Zwei-Elemente-Tragflügel zu optimieren. Dieser Ansatz wurde für das *Inverse Design* eines kompletten Flugzeugs verwendet [32]. Mittlerweile wurde der Code auch durch die viskosen Terme ergänzt, und der Widerstandskoeffizient bei laminaren Strömung optimiert [33]. In [31–33] sind die Gittersensitivitäten analytisch berechnet.

Erste Anwendungen der SA in der Medizin sind bei BURGREN UND ANTAKI [22] und BURGREN ET AL. [23] zu finden. Sie benutzen CFD-basierte Designoptimierung, um den Wirkungsgrad einer Herzpumpe zu verbessern. Die dabei eingesetzten Methoden werden auch für Designaufgaben in der Aerodynamik verwendet.

ANDERSON UND VENKATAKRISHNAN [2] entwickelten ein Verfahren auf der Basis von unstrukturierten Gittern, das sowohl für die Computerimplementation als auch für die Herleitung des Sensitivitätsproblems auf einem Kontinuum-Adjoint-Ansatz basiert. In [2] werden die Grenzen des Kontinuum-Adjoint-Ansatzes diskutiert und ein diskretes Verfahren entwickelt, bei dem einige der bei dem Kontinuumansatz festgestellten Mängel behoben sind.

Darauf basierend entwickelten ANDERSON UND BONHAUS [61] einen vollständig diskreten Adjoint-Ansatz und implementierten Module für Navier-Stokes-Simulationen. Das dabei benutzte Ein-Gleichungs-Turbulenzmodell von SPALART UND ALLMARAS [96] wurde von Hand differenziert. Mit einem  $k - \epsilon$  Turbulenzmodell mit Wandfunktion hat MOHAMMADI [69] in zwei Dimensionen mit einem diskreten Adjoint-Ansatz den Widerstandsbeiwert von Tragflügeln optimiert.

Der hier vorgestellte Überblick faßt die bedeutendsten und interessantesten Anwendungen zusammen. Die meisten Anwendungen stammen aus dem Bereich der Aerodynamik und der Flugzeugindustrie. Wegen der sehr hohen Reynolds-Zahlen liefern die vereinfachten Modelle, wie die Anwendung der Potentialtheorie oder die Lösung der Euler-Gleichungen, bereits sehr gute Ergebnisse. Daher sind Simulationen mit solchen vereinfachten Modellen mit den Navier-Stokes-Simulationen nicht gleichzusetzen, jedoch brauchbar. So entwickelte sich auch die Sensitivitätsanalyse von der Potentialtheorie zu den Navier-Stokes-Simulationen mit statistischen Turbulenzmodellen und von einfachen, strukturierten zu Multiblock oder unstrukturierten Gittern.

# Kapitel 3

## Sensitivitätsanalyse in der Optimierung

In diesem Kapitel wird die Problematik der Parametrisierung und Modellierung verdeutlicht. Nach dieser Einführung wird der Zusammenhang zwischen Optimierung und Sensitivitätsanalyse hergestellt und die verschiedenen Möglichkeiten für die Sensitivitätsberechnungen kurz diskutiert.

### 3.1 Optimierungsparameter

Betrachtet man die Strömung in einer klassischen Strömungsmaschine radialer Bauart, so wird sie von den folgenden Bauteilen beeinflusst:

- die rotierende und stehende Nabe,
- die rotierende und stehende Deckscheibe,
- der Inducer- bzw. die Vorleitradbeschaufelung,
- die Laufradbeschaufelung,
- und die Leitradbeschaufelung.

Diese Bauteile bilden die strömungsführende Geometrie einer Strömungsmaschine, und sie werden grundsätzlich durch die Oberflächen der Beschaufelungen und die Rotationsflächen der Nabe und der Deckscheibe beschrieben, s. Abbildung 3.1. Dabei werden die Rotationsflächen durch ihre jeweiligen Meridiankonturen repräsentiert. In der Praxis werden die Schaufeloberflächen durch B-Spline-Flächen mathematisch modelliert, während die Meridiankonturen sowohl als B-Spline-Kurven als auch durch Polygonzüge beschrieben werden können. In Abbildung 3.2 sind die Describerpunkte der B-Spline-Fläche einer Turbinenschaufel dargestellt.

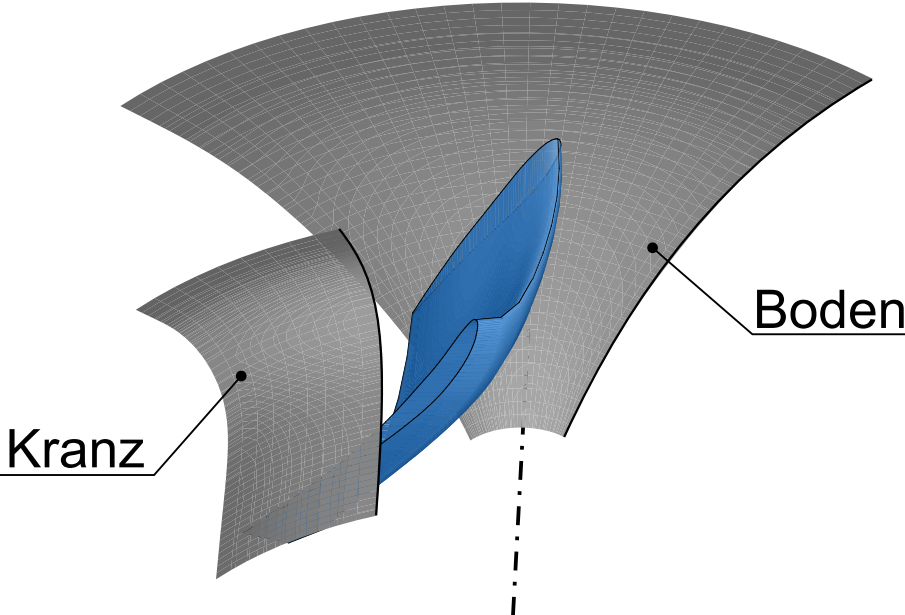


Abbildung 3.1: Darstellung der Schaufel- und Rotationsflächen einer Francis-Turbine

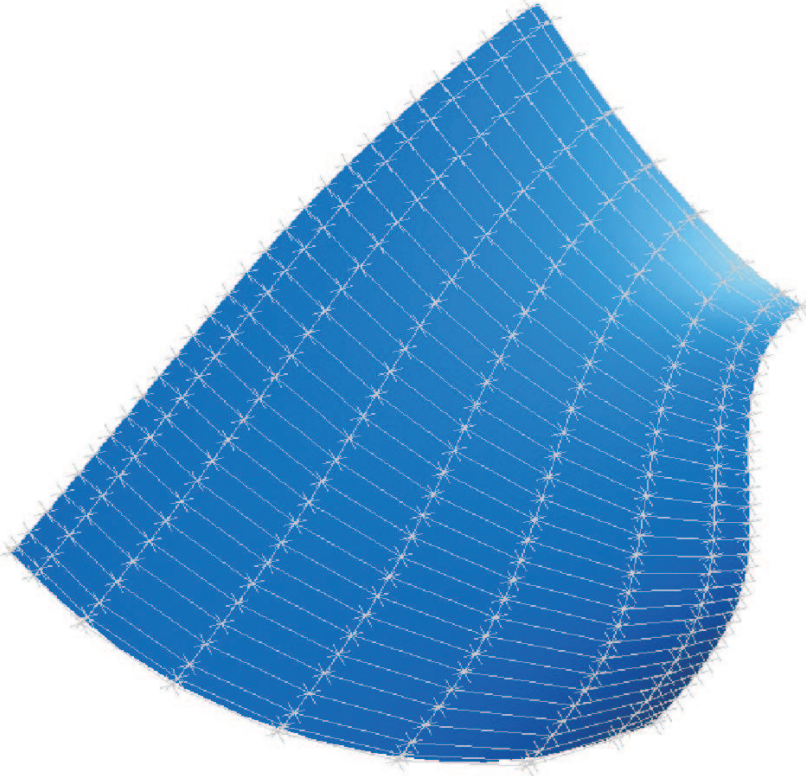
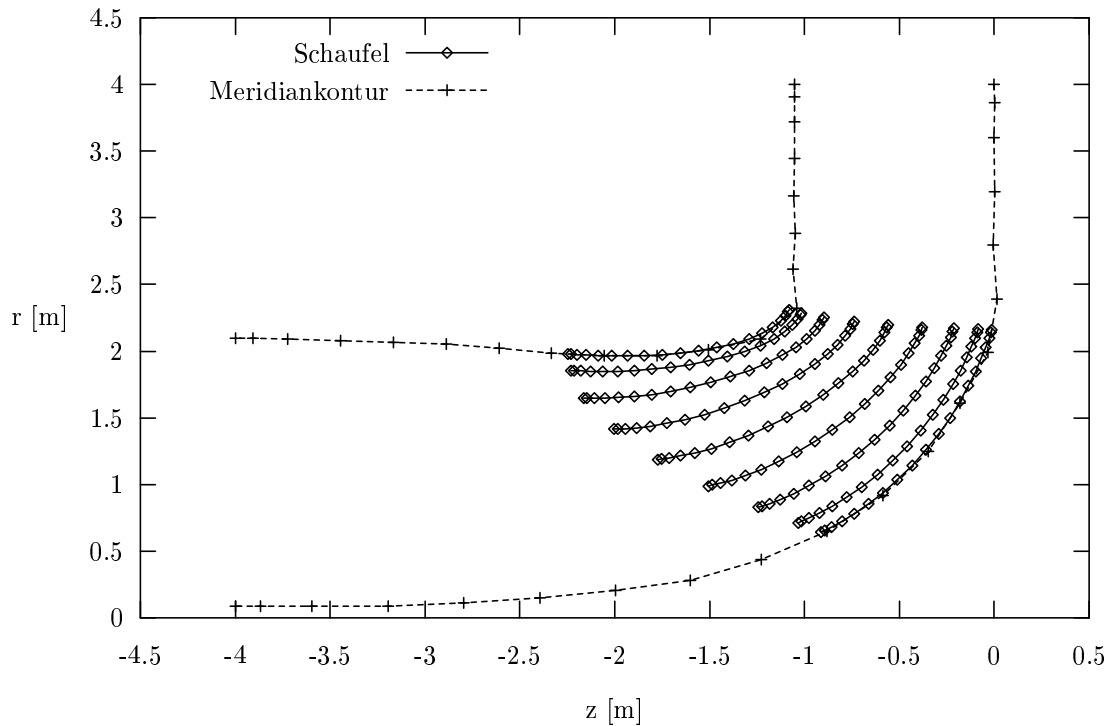


Abbildung 3.2: Parametrisierung der Skelettfläche einer Turbinenschaufel



**Abbildung 3.3:** Describer der Schaufel und Meridiankontur

Abbildung 3.3 zeigt den Meridianschnitt einer Turbine. Eingezeichnet sind außer den Describerpunkten der Meridiankontur der Nabe und Deckscheibe, auch die Describer der Skelettfläche der Schaufel.

Die Geometrieparametrisierung muß im Hinblick auf die Anwendung eines numerischen Optimierungsverfahrens folgende Forderungen erfüllen. Zum einen muß die Geometrie durch einen Satz von Optimierungsparametern modifizierbar sein. Zum anderen ist ein höchst mögliches Maß an Genauigkeit und an Flexibilität für den Optimierungsansatz zu gewährleisten. Beide Forderungen werden durch eine Entkoppelung von Design- und Modifikationsparametern erfüllt.

Um die Anzahl der Optimierungsparameter möglichst klein halten zu können, werden nicht die Designparameter als Optimierungsparameter eingesetzt. Die Designparameter bilden die Basis der Geometriebeschreibung. Die Geometrieänderungen, die durch den Optimierer vorgeschrieben werden, erfolgen durch eine Modifikation der Describer. Diese Describer werden im Optimierer als Parameter definiert und die Änderungen in eine neue Schaufelform umgesetzt.

Die Definition der Schaufeloberfläche erfolgt durch die Dickenüberlagerung des Schaufelprofils normal zur Skelettfläche, wobei der geometrische Ort durch die normierte Bogenlänge der jeweiligen Skelettlinie bestimmt ist. Mit dieser Definition werden für die Optimierung die folgenden Geometrielemente parametrisiert:

- Skelettfläche der Schaufel,

- Dickenverteilung der Schaufel (symmetrisch oder unsymmetrisch),
- Meridiankontur der Nabe und der Deckscheibe,
- Ein- und Austrittskante der Schaufel.

Die Describerpunkte der Splines für die genannten Geometrieelemente bilden den Parametersatz für die numerische Optimierung von Strömungsmaschinen. Obwohl bei der Optimierung von Strömungsmaschinen die Designparameter mit den Optimierungsparametern nicht notwendigerweise identisch sind, kommt im weiteren das Wort "Designparameter" in seiner ursprünglichen Bedeutung nicht mehr vor. Der Einfachheit halber werden die Optimierungsparameter als "Designparameter" bezeichnet.

Weitere Details der Parametrisierung der einzelnen Geometrieelemente sowie die Optimierungsphilosophie am LHM findet man bei WÖHLER [115].

## 3.2 Sensitivitätsanalyse

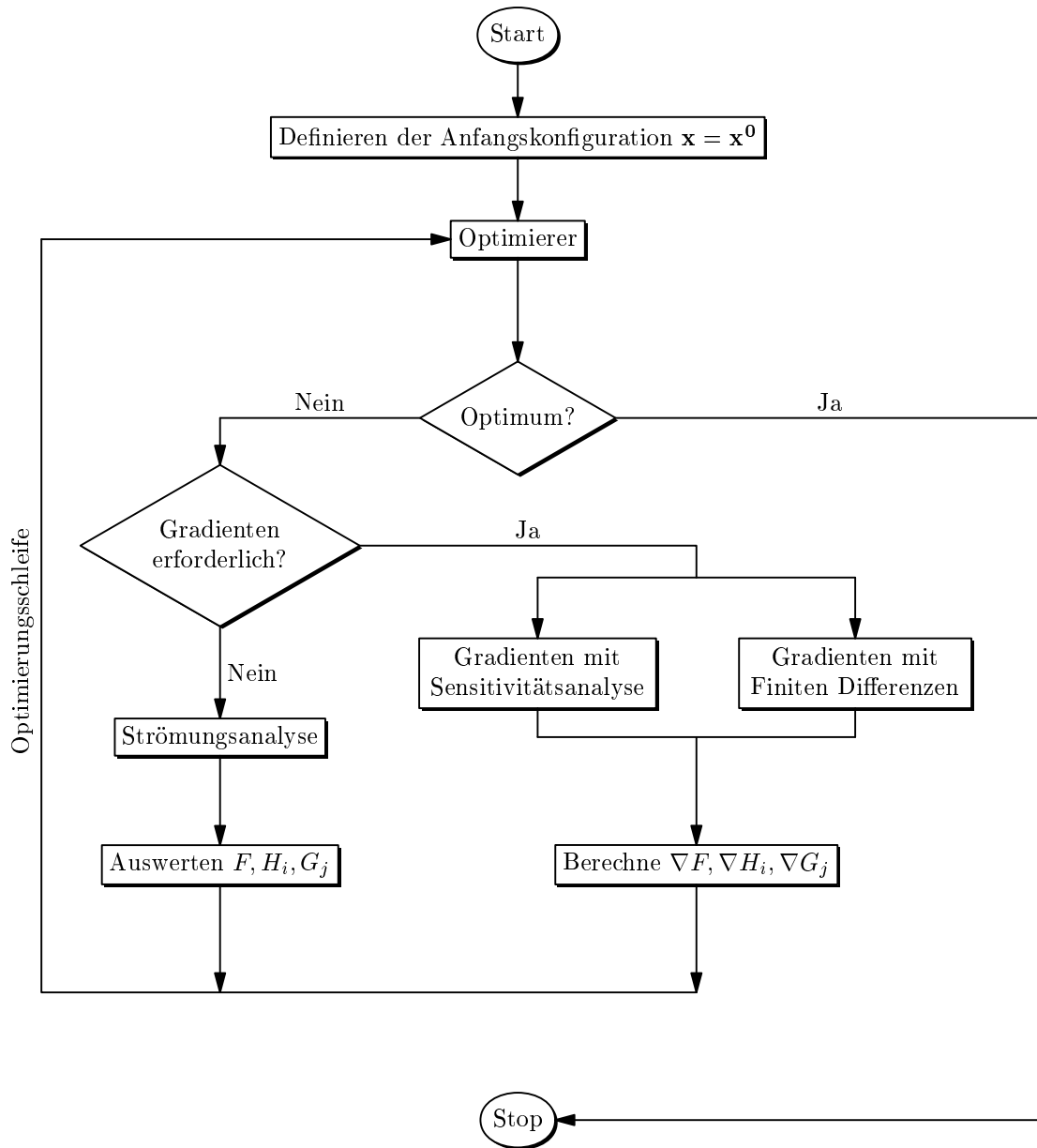
Zur Beschreibung der Sensitivitätsanalyse bei der Optimierung von Strömungsmaschinen wird von einem allgemeinen Optimierungsproblem ausgegangen. Es läßt sich folgenderweise formulieren

$$\begin{aligned} & \text{Minimiere } F(\mathbf{x}) && (3.1) \\ \text{mit den Nebenbedingungen } & H_i(\mathbf{x}) = 0, && i = 1, \dots, m \\ & G_j(\mathbf{x}) \leq 0, && j = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

wo  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ ,  $F : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ ,  $H_i : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ ,  $G_j : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ . Bei der Optimierung von Strömungsmaschinen ist die Zielfunktion  $F$  eine Funktion des Druck- und/oder des Geschwindigkeitsfeldes. In den Funktionen  $H_i$  sind die Gleichheits- und in den Funktionen  $G_j$  die Ungleichheitsnebenbedingungen enthalten. Dazu passende Beispiele werden in Kapitel 6 detailliert diskutiert. Im weiteren werden diese Funktionen einfach Problemfunktionen genannt und mit  $f_k$  bezeichnet. Der Laufindex  $k$  nimmt dabei die Werte von 1 bis  $m + p + 1$  auf.

Um Optimierung mit Hilfe der Sensitivitätsanalyse durchführen zu können, braucht man ein auf Gradientenberechnung basiertes Optimierungsverfahren. Der Verlauf der Optimierung in so einem Verfahren mit bzw. ohne Gradientenberechnung wird in Abbildung 3.4 dargestellt.

Bei den auf einer Gradientenberechnung basierten Optimierungsverfahren wird also in jedem Iterationsschritt der Gradient der Problemfunktionen  $\nabla f_k$  berechnet. In der Regel erfolgt dies durch Finite-Differenzen-Approximation. Eine Approximation erster Ordnung



**Abbildung 3.4:** Flußdiagramm eines Optimierungsverfahrens mit und ohne Sensitivitätsanalyse

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i} = \frac{f_k(x_i + dx_i) - f_k(x_i)}{dx_i} + \mathcal{O}(dx_i) \quad i = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

bedeutet in jedem Optimierungsschritt  $n$  Funktionsaufrufe. Eine FD-Gradientenberechnung läßt sich in den Optimierer sehr einfach implementieren. Der Nachteil ist jedoch, daß sich diese Art der Gradientenberechnung als sehr aufwendig und ungenau erweisen kann.

Aus Sicht der Optimierung kann die Berechnung der Gradienten als ein Baustein des



Gesamtverfahrens interpretiert werden, der sich nach Wahl des Benutzers auf Sensitivitätsanalyse oder Finite Differenzen stützt (s. Abbildung 3.4). So eine Alternative zu FD-Gradientenberechnung ist die Sensitivitätsberechnung.

Bei der Sensitivitätsberechnung wird die Funktion  $f_k$  als  $f_k(\gamma(\mathbf{x}), \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}))$  angenommen, wobei der Vektor  $\mathbf{x}$  für die Designparameter steht;  $\gamma$  bedeutet das Gitter und  $\boldsymbol{\phi}$  die berechneten Strömungsgrößen, d. h. Druck und Geschwindigkeit. Mit Hilfe der Kettenregel und der obigen Annahme differenziert man  $f_k$  nach  $\mathbf{x}$  und erhält:

$$\nabla f_k = \frac{df_k}{dx_i} \mathbf{i}_i = \left( \underbrace{\frac{\partial f_k}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}}_I + \underbrace{\frac{\partial f_k}{\partial \boldsymbol{\phi}} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x_i}}_{II} \right) \mathbf{i}_i \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

Der erste Term in Gleichung (3.3) bedeutet die Gittersensitivität und der zweite Term die Strömungssensitivität. Der erste Term soll erst dann berücksichtigt werden, wenn die Geometrieänderung solche Bereiche beeinflußt, in denen die Zielfunktion definiert wird. Werden also z. B. Druckwerte von der Schaufeloberfläche in die Zielfunktion aufgenommen, wobei das Schaufelprofil zu optimieren ist, dann muß bei der Gradientenbildung auch die Gittersensitivität mitberücksichtigt werden. Werden jedoch Strömungsgrößen aus dem Ein- und Ausströmbereich genommen, dann ist in der Regel die Gittersensitivität vernachlässigbar klein, da in diesen Bereichen die Vernetzung nicht geändert wird. In diesem Fall reduziert sich der ganze Ausdruck auf den zweiten Term. Dabei läßt sich in Kenntnis der Problemfunktion  $\frac{\partial f_k}{\partial \boldsymbol{\phi}}$  explizit berechnen, wobei  $\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x_i}$  der Strömungssensitivitätsvektor ist. Die Sensitivität der Strömungsgröße  $\boldsymbol{\phi}$  gibt die Antwort auf die Änderung der Designvariable  $x_i$ . Die Berechnung dieser Größe ist das Thema des Kapitels 4.

Zur Berechnung des Strömungssensitivitätsvektors  $\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x_i}$  stellt man die Strömungsgrundgleichungen in Residuumform auf

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (3.4)$$

Dabei kann es sich bei Gleichung (3.4) um algebraische Gleichungssysteme, gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen, Integralgleichungen usw. handeln. Außerdem kann  $\mathbf{L}$  eine einfache Gleichung oder auch ein Gleichungssystem sein. Voraussetzung ist, daß eine Lösung zu Gleichung (3.4) existiert und zwar in der Form  $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})$ . In dieser Arbeit entspricht (3.4) den diskretisierten, laminaren Navier-Stokes- bzw. Euler-Gleichungen im rotierenden System.

Um die Bestimmungsgleichung für die Strömungssensitivitäten zu gewinnen, muß die totale Ableitung von (3.4) gebildet werden. Somit gilt

$$\frac{d\mathbf{L}}{dx_i} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \boldsymbol{\phi}} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x_i} = \mathbf{0} \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

Das Umordnen der Gleichung (3.5) führt auf eine allgemeine Form der Sensitivitätsgleichung, mit dem gesuchten Sensitivitätsvektor als Unbekannte.

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i} \quad (3.6)$$

Gleichung (3.6) ist allgemeingültig für jede Art von Sensitivitätsanalyse. Bezüglich der Natur von  $\mathbf{L}$  und der Herleitung der Lösung zu diesem Problem sind noch einige Kategorisierungen nötig.

Bislang wurde keine konkrete Annahme hinsichtlich der Natur der Grundgleichungen  $\mathbf{L} = \mathbf{0}$  getroffen. Um auf ein algebraisches Problem zu kommen, dessen Lösung die gesuchte Strömungssensitivität ist, gibt es grundsätzlich zwei Möglichkeiten. Bei der ersten soll das kontinuierliche Strömungsproblem zunächst nach den Designparametern abgeleitet und dann die resultierenden kontinuierlichen Sensitivitätsgleichungen mit einem beliebigen Diskretisierungsverfahren diskretisiert werden. Dagegen wird bei der zweiten das Strömungsproblem mit einem Diskretisierungsverfahren diskretisiert und danach das resultierende algebraische System nach den Designparametern abgeleitet.

Die erste Möglichkeit wird als *Kontinuumsapproximation* und die zweite als *diskrete Approximation* bezeichnet. Beide Wege können noch weiter nach der Art der Berechnung der Sensitivitäten unterteilt werden. Die direkte Lösung der Aufgabe (3.6) wird *Direct Differentiation Method* (DDM) genannt. Wird aber das Problem mit Hilfe eines Lagrange-Multiplikators gelöst, bezeichnet man das Verfahren als *Adjoint Variable Method* (AVM).

In der AVM wird für jede Problemfunktion  $f_k$  ein zusätzlicher Parametervektor  $\lambda_k$  eingeführt, der durch die Gleichung

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \phi} \right]^T \lambda_k = \left( \frac{\partial f_k}{\partial \phi} \right)^T \quad k = 1, \dots, m + p + 1 \quad (3.7)$$

definiert wird. Um den Sinn von Gleichung (3.7) zu verstehen, muß zuerst (3.6) in den Strömungssensitivitätsterm der Gleichung (3.3) eingesetzt werden. Dann ergibt sich:

$$\frac{\partial f_k}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \frac{\partial f_k}{\partial \phi} \left[ \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \phi} \right]^{-1} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i}. \quad (3.8)$$

Jetzt können die ersten zwei Multiplikatoren des Produktes auf der rechten Seite mit (3.7) umformuliert werden. Damit ergibt sich für die gesamten Strömungssensitivitäten:

$$\frac{\partial f_k}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \lambda_k^T \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i} \quad k = 1, \dots, m + p + 1. \quad (3.9)$$

I. DIREKTE METHODE

II. ADJOINT-VARIABLE-METHODE

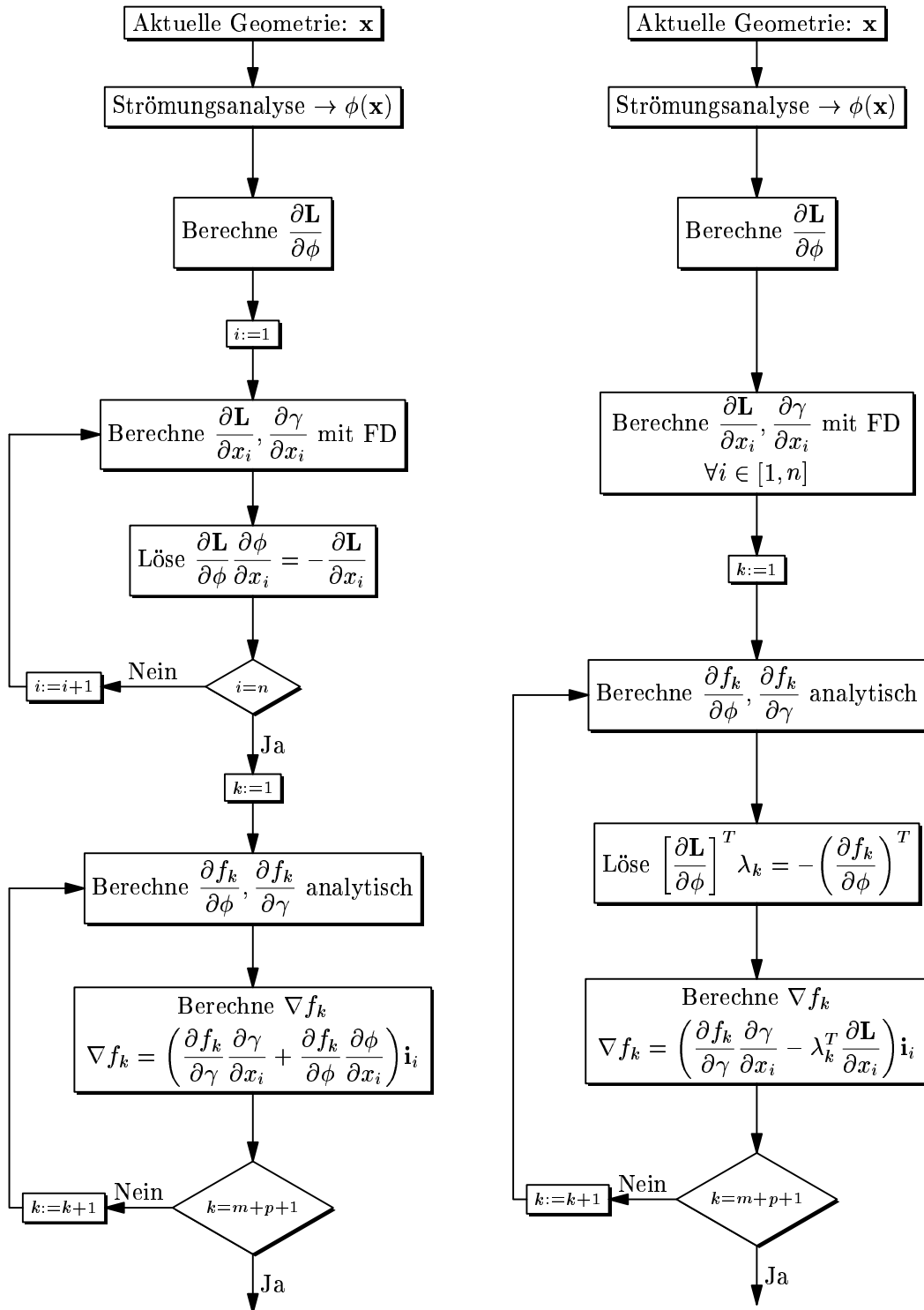


Abbildung 3.5: Vergleich der beiden Optimierungsmethoden

Bei dem Adjoint Variable Method wird also Gleichung (3.6) für jede Problemfunktion  $f_k$  einmal gelöst. Das Einsetzen von  $\lambda_k$  in (3.9) ergibt dann die Gesamtsensitivität. Der Verlauf der Optimierung ist für die beiden Methoden in Form eines Flußdiagrammes in Abbildung 3.5 dargestellt. Die beiden Flußdiagramme können im Optimierer in Abbildung 3.4 für den Baustein "Gradienten mit Sensitivitätsanalyse" eingesetzt werden.

Die Ableitungen  $\frac{\partial f_k}{\partial \phi}$  und  $\frac{\partial f_k}{\partial \gamma}$  können in Kenntnis der Problemfunktionen  $f_k$  analytisch durchgeführt werden. Die Berechnung der Terme  $\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i}$  und  $\frac{\partial \gamma}{\partial x_i}$  erfolgt mit Finiten Differenzen. Daher kommt auch die Bezeichnung *semi-analytische Sensitivitätsanalyse*.

Anzumerken ist, daß Gleichung (3.7) keine Ableitungen nach  $x_i$  enthält und so die Vektoren  $\lambda_k$  für jeden Designparameter dieselben bleiben. Um die Gleichung (3.9) auszuwerten, müssen die Terme  $\partial \mathbf{L} / \partial x_i$  für jeden Designparameter berechnet werden. Dies entspricht bei der DDM dem Aufstellen der rechten Seite in Gleichung (3.6). Ist also die Anzahl der Problemfunktionen geringer als die Anzahl der Designparameter, bedeutet die AVM dementsprechend weniger Rechenaufwand. Ein wesentlicher Vorteil der DDM ist jedoch, daß die Strömungssensitivitäten explizit berechnet werden und nicht nur die Gesamtsensitivität wie bei der AVM in Gleichung (3.9). Das ermöglicht eine schnelle Neuberechnung des Strömungsfeldes. HAFTKA UND GÜRDAL [49] haben diese Technik bei Strukturoptimierungsaufgaben angewendet. Mit linearer Extrapolation läßt sich das Strömungsfeld in der Nachbarschaft des aktuellen Parametersatzes berechnen:

$$\phi(x_i^* + \Delta x_i) \approx \phi(x_i^*) + \left. \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right|_{x_i^*} \cdot \Delta x_i, \quad (3.10)$$

wo  $x_i^*$  den aktuellen Designparameter bezeichnet. Ein weiterer Vorteil der explizit berechneten Strömungssensitivitäten ist, daß man dadurch in den Parameterraum Einblick hat und diese gleichzeitig als Fehlerschätzer der Parametrisierung verwendet werden können. Dies wird in Kapitel 6 an zwei Optimierungsbeispielen demonstriert.

Eine weitere Anwendungsmöglichkeit der Sensitivitätsanalyse bietet sich bei den sog. SAND-Techniken, wo die Strömungsanalyse und Designoptimierung in dieselben Iterationsschleife eingebettet sind. Im folgenden wird diese Technik erklärt.

### 3.3 Simultane Strömungsanalyse und Optimierung

Bei der herkömmlichen Designoptimierung werden die Designvariablen und Strömungsgrößen in zwei ineinander geschachtelten Iterationsschleifen berechnet. Für jeden Schritt in der äußeren Designschleife wird das Strömungsproblem in der inneren Schleife exakt oder zumindest bis zu einem sehr kleinen Abbruchkriterium gelöst. Dann erfolgt die Aktualisierung in den Designgrößen und dieser Prozess wiederholt sich solange, bis auch in den Designgrößen Konvergenz erreicht ist. In der angelsächsischen Fachliteratur wird dies *NAND* (*Nested Analysis and Design*) genannt. Bei simultaner Strömungsanalyse und Designoptimierung (*SAND*, *Simultaneous Analysis and Design*) werden sowohl die Strömungsgrößen als auch die Designvariablen in derselben Iterationschleife untergebracht und gleichzeitig aktualisiert. Während bei der traditionellen NAND-Methode die Designgrößen mit den Strömungsgrößen schwach gekoppelt sind, entsteht bei der SAND-Methode zwischen Design und Strömung eine stärkere Kopplung, die zu geringeren Optimierungszeiten führt.

In Abbildung 3.6 sind die schematischen Flußdiagramme der beiden Methoden dargestellt. In Wirklichkeit gibt es eine ganze Fülle von Optimierungsmethoden, die sich zwischen den beiden Strategien befinden. So markieren die beiden Flußdiagramme eigentlich die Extrema des Anwendungsbereiches. Eine gute Zusammenfassung und Diskussion der einzelnen Methoden findet man bei NEWMAN [73]. Im weiteren wird eine SAND-Variante, genannt *SAADO* (*Simultaneous Aerodynamic Analysis and Design Optimization*), vorgestellt, die eine effiziente Anwendungsmöglichkeit der Sensitivitätsanalyse darstellt.

Die erste Anwendung der Methode, welche eine quasi-1D Eulersche Berechnung einer Düse war, präsentierte HOU ET AL [55]. Dann folgte ein 2D-Beispiel [53], die Berechnung turbulenter Strömung um einen Tragflügel, und letztendlich ein dreidimensionales Eulersches Beispiel [46] ebenfalls an einem Tragflügelprofil.

Die SAADO-Prozedur formuliert das Optimierungsproblem (3.1) in folgende Form um:

$$\underset{\mathbf{x}, \boldsymbol{\phi}}{\text{Minimiere}} \quad F(\boldsymbol{\phi}, \gamma(\mathbf{x})) \quad (3.11)$$

$$\text{mit den Nebenbedingungen} \quad G_i(\boldsymbol{\phi}, \gamma(\mathbf{x})) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.12)$$

$$H_j(\boldsymbol{\phi}, \gamma(\mathbf{x})) = 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (3.13)$$

$$\text{und} \quad \mathbf{L}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{x}) = 0. \quad (3.14)$$

Diese Formulierung behandelt die Strömungsgrößen als unabhängige Optimierungsparameter und betrachtet dadurch die Strömungsgleichungen als Nebenbedingun-

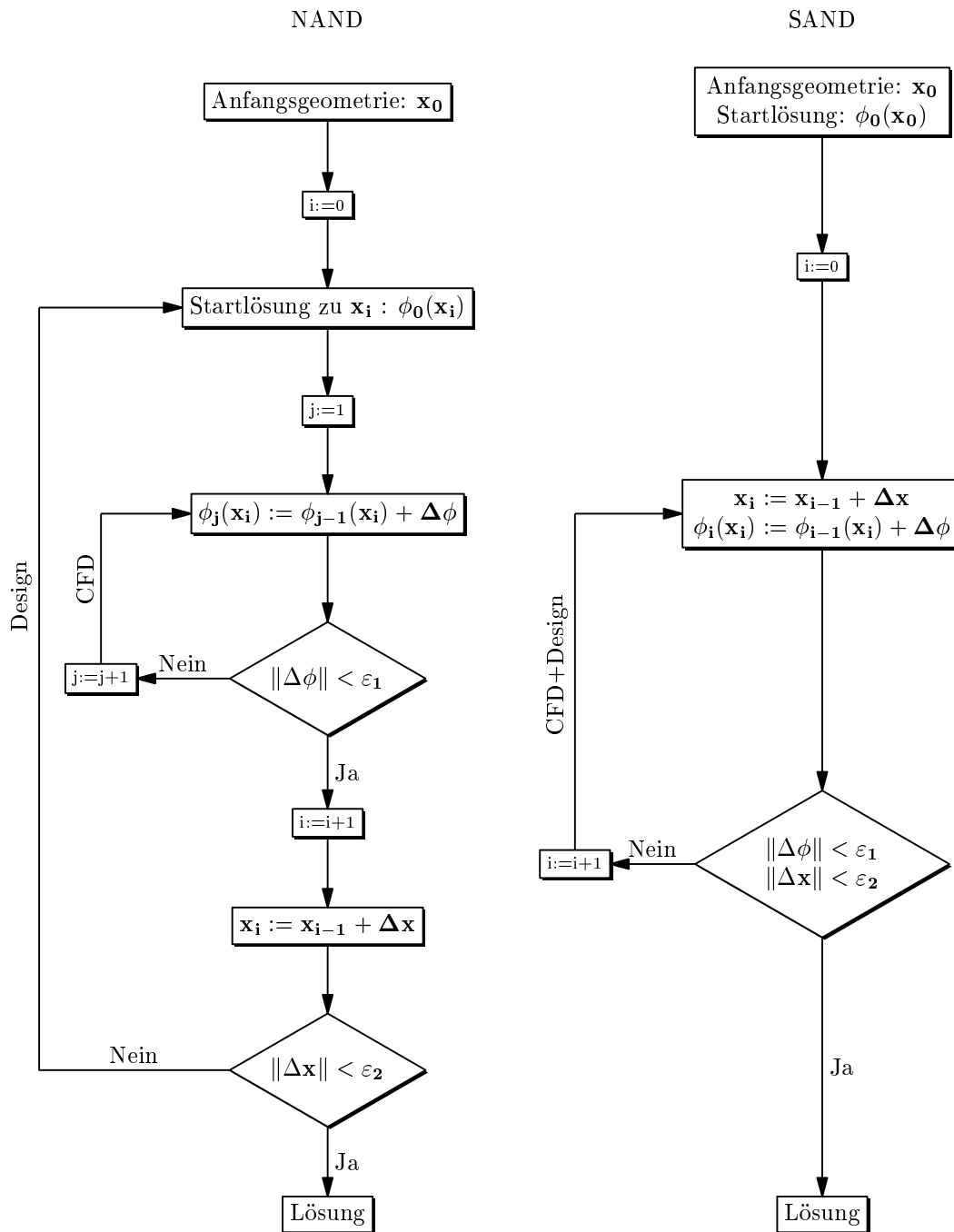


Abbildung 3.6: Flußdiagramm der konventionellen (NAND) und der simultanen Strömungsanalyse und Optimierung (SAND) Methode

gen. Da die Gleichung (3.14) nur im Optimum erfüllt werden muß, werden die Strömungsgrößen - im Gegensatz zu konventionellen Methoden - nicht in jedem Optimierungsschritt exakt bestimmt. Dies bringt eine wesentliche Rechenzeiterparnis mit sich, was sich aber durch die große Anzahl von Optimierungsvariablen sehr leicht in zusätzlichen Rechenaufwand umwandeln läßt. Deshalb werden am ursprünglichen Problem noch einige Änderungen vorgenommen. So werden die Gleichungen

(3.11)-(3.14) sowohl nach den Designvariablen  $\mathbf{x}$  als auch nach den Strömungsgrößen  $\phi$  linearisiert:

$$\text{Minimiere}_{\Delta \mathbf{x}, \Delta \phi} \left\{ F(\phi, \gamma) + \frac{\partial F}{\partial \phi} \Delta \phi + \frac{\partial F}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} \right\} \quad (3.15)$$

$$\text{mit} \quad G_i(\phi, \gamma) + \frac{\partial G_i}{\partial \phi} \Delta \phi + \frac{\partial G_i}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} \leq 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.16)$$

$$H_j(\phi, \gamma) + \frac{\partial H_j}{\partial \phi} \Delta \phi + \frac{\partial H_j}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} = 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (3.17)$$

$$\text{und} \quad \mathbf{L}(\phi, \mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \phi} \Delta \phi + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} = 0. \quad (3.18)$$

Die Gleichungen (3.15)-(3.18) sind die linearisierten Analoga der Gleichungen (3.11)-(3.14). Die direkte Lösung des linearisierten Problems ist wegen der großen Anzahl von Designparametern noch immer problematisch. Diese Schwierigkeit läßt sich aber mit der Verwendung von Sensitivitätsanalyse (DDM oder AVM) beheben. Gleichung (3.18) bildet eine lineare Relation zwischen  $\Delta \phi$  und  $\Delta \mathbf{x}$ :

$$\Delta \phi = \Delta \phi_1 + \Delta \phi_2 \Delta \mathbf{x}, \quad (3.19)$$

wobei sich der Vektor  $\Delta \phi_1$  und die Matrix  $\Delta \phi_2$  durch die Lösung der folgenden Gleichungen ergeben:

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \phi} \Delta \phi_1 = -\mathbf{L}(\phi, \mathbf{x}) \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \phi} \Delta \phi_2 = -\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{x}}. \quad (3.21)$$

Die Anzahl der Spalten der Matrix  $\Delta \phi_2$  ist identisch mit der Anzahl der Designvariablen in  $\mathbf{x}$ .

Durch Einsetzen der Gleichung (3.19) in die Gleichungen (3.15)-(3.18) stellt sich ein linearisiertes Problem, in dem der einzige unabhängige Parameter der Vektor  $\Delta \mathbf{x}$  ist:

$$\text{Minimiere}_{\Delta \mathbf{x}} \left\{ F(\phi, \gamma) + \frac{\partial F}{\partial \phi} \Delta \phi_1 + \left( \frac{\partial F}{\partial \phi} \Delta \phi_2 + \frac{\partial F}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \mathbf{x}} \right) \Delta \mathbf{x} \right\} \quad (3.22)$$

mit

$$G_i(\phi, \gamma) + \frac{\partial G_i}{\partial \phi} \Delta \phi_1 + \left( \frac{\partial G_i}{\partial \phi} \Delta \phi_2 + \frac{\partial G_i}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \mathbf{x}} \right) \Delta \mathbf{x} \leq 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.23)$$

$$H_j(\phi, \gamma) + \frac{\partial H_j}{\partial \phi} \Delta \phi_1 + \left( \frac{\partial H_j}{\partial \phi} \Delta \phi_2 + \frac{\partial H_j}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \mathbf{x}} \right) \Delta \mathbf{x} = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.24)$$

Das obige Optimierungsproblem kann nun für  $\Delta \mathbf{x}$  mit beliebigen Optimierungsverfahren gelöst werden. Die entsprechenden Änderungen in  $\Delta \phi$  können mit der Lösung von (3.18) oder äquivalent mit der Lösung der Gleichungen (3.19)-(3.21) ermittelt werden. In dieser Arbeit wird das Optimierungsproblem mit dem in Anhang A beschriebenen SLP-Verfahren gelöst. Der Korrekturterm in  $\phi$  besteht aus zwei Teilen:  $\Delta \phi_1$  und  $\Delta \phi_2$ . Der erste entsteht durch eine immer besser auskonvergierte Lösung, der zweite durch die Änderung der Designvariablen. Wird das Strömungsproblem immer genauer gelöst, so liefert  $\Delta \phi_2$  eine immer bessere Approximation der Strömungssensitivitäten  $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}$ . Das Erscheinen von  $\Delta \phi_1$  unterscheidet dieses Verfahren von den herkömmlichen NAND-Methoden.

Die Berechnung des Terms  $\Delta \phi$  erfolgt in dieser Arbeit mit Hilfe der DDM. Er könnte auch mit der AVM berechnet werden. Auf eine ausführliche Beschreibung der Formulierung für die AVM wird hier aber verzichtet und auf [46] verwiesen, wo die Gleichungen für beide Fälle hergeleitet werden.



# Kapitel 4

## Herleitung des diskreten Gleichungssystems

### 4.1 Strömungsproblem

Im vorigen Kapitel wurde die Verwendung der Sensitivitätsanalyse in der Optimierung erläutert und ein Algorithmus vorgestellt, dessen Effizienz auf semi-analytischer Berechnung der Sensitivitäten basiert. Um aber die Sensitivitätsanalyse in der Optimierung nutzen zu können, sind einige Vorarbeiten nötig. Dieses Kapitel beschäftigt sich hauptsächlich mit der Herleitung der diskreten Sensitivitätsgleichungen und der zugehörigen Randwerte.

Das entwickelte 3D-Euler-Verfahren basiert auf der Lösung der 3D-Navier-Stokes-Gleichungen zur Berechnung stationärer und laminarer Strömung inkompressibler Fluide. Die Diskretisierung, Lösungsstrategie und Anwendungen für reine Euler-Probleme sind bei MÜLLER [70] und MÜLLER UND SZILÁGYI [71] ausführlich beschrieben. Im folgenden werden daher die dreidimensionalen laminaren Navier-Stokes-Gleichungen im rotierenden System als Ausgangsgleichungen betrachtet und alle Ableitungen diesbezüglich vorgenommen. Auf die Eulersche Form kommt man dann durch Vernachlässigung der viskosen Terme und durch Neudefinition der Randbedingungen auf der festen Wand. Dies wird an der entsprechenden Stelle explizit für beide Fälle mit der Abkürzung *Eu* für Euler und mit *NS* für Navier-Stokes gekennzeichnet.

Das Strömungsproblem läßt sich in Vektorschreibweise wie folgt definieren:

$$(\mathbf{w} \cdot \nabla^T) \mathbf{c} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \Delta \mathbf{c} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{c} = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (4.2)$$

Mit den Bezeichnungen eines in Abbildung 4.1 schematisch dargestellten Laufrad-

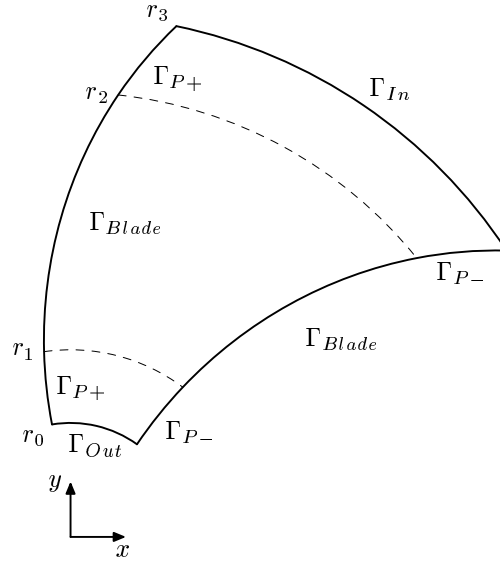


Abbildung 4.1: Kontrollraum und Randbedingungen

kanals lassen sich die für Strömungsmaschinen üblichen Randbedingungen im Cartesischen Koordinatensystem folgendermaßen formulieren:

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_{in} \quad \text{auf } \Gamma_{In} \quad (4.3)$$

$$p = p_{out} \quad \text{auf } \Gamma_{Out} \quad (4.4)$$

$$p_{p+} = p_{p-} \quad \text{auf } \Gamma_{P-} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{c}_{p+} = R(\delta)\mathbf{c}_{p-} \quad \text{auf } \Gamma_{P-} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad \text{auf } \Gamma_{Blade|Eu} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_{Blade|NS}. \quad (4.8)$$

Dabei bezeichnen  $\Gamma_{In}$  den Einströmrand,  $\Gamma_{Out}$  den Ausströmrand und  $\Gamma_{P+} \cup \Gamma_{P-}$  den periodischen Rand, wobei sich  $\Gamma_{P+}$  ergibt, wenn man  $\Gamma_{P-}$  bezüglich der  $z$ -Achse um den Teilungswinkel  $\delta = 2\pi/Z$  gegen den Uhrzeigersinn dreht.  $Z$  ist dabei die Schaufelzahl. Alle übrigen Ränder, wie Nabe, Deckscheibe und Schaufeloberfläche sind mit  $\Gamma_{Blade}$  bezeichnet.

Die Geschwindigkeitsverteilung am Eintritt,  $\mathbf{c}_{in}$ , bzw. Druckverteilung am Kontrollraumaustritt,  $p_{out}$ , ist gegeben. Die Führungsgeschwindigkeit wird definiert durch  $\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$ . Der äußere Normaleneinheitsvektor ist mit  $\mathbf{n}$  bezeichnet.  $p_{p+}$  bzw.  $p_{p-}$  sind statische Drücke an sich entsprechenden periodischen Punkten.

Analoge Definitionen gelten für die Geschwindigkeiten, wobei die Geschwindigkeitsvektoren  $\mathbf{c}_{p+}$  und  $\mathbf{c}_{p-}$  nicht identisch sind, sondern den Winkel  $\delta$  einschließen. Mit  $R(\delta)$  ist demzufolge die Drehung bezüglich der  $z$ -Achse um den Winkel  $\delta$  gegen den Uhrzeigersinn bezeichnet:

$$R(\delta) = \begin{pmatrix} \cos(\delta) & -\sin(\delta) & 0 \\ \sin(\delta) & \cos(\delta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Größe  $\rho$  bezeichnet die Dichte und  $\nu$  die kinematische Viskosität. Das kontinuierliche Strömungsproblem ist damit vollständig definiert.

An dieser Stelle muß man sich entscheiden, in welcher Reihenfolge die Diskretisierung und Differentiation vorgenommen werden sollen. In dieser Arbeit wird der diskrete Ansatz bevorzugt, d. h. es werden zuerst die Strömungsgleichungen diskretisiert und dann die diskretisierten Gleichungen nach den Designparametern abgeleitet.

## 4.2 Finite-Elemente-Diskretisierung

Für die Diskretisierung von Strömungsproblemen sind die Finiten Volumen und Finiten Elemente die zuverlässigsten und meist verwendeten Diskretisierungsmethoden. Die Vor- und Nachteile der Methoden werden hier nicht im Detail beschrieben. In dieser Arbeit wird eine Finite-Elemente-Diskretisierung verwendet. Als Grundlage dient einerseits die Arbeit von MÜLLER [70] andererseits die von ihm erstellte C++-Programmbibliothek CONSIST.

### 4.2.1 Variationsformulierung

Der Theorie über Finite Elemente folgend, vgl. z.B. BATHE [7] oder ZIENKIEWICZ [116], wird (4.1) mit einem *geeigneten* Vektorfeld  $\mathbf{v}$  und (4.2) mit einer *geeigneten* skalarwertigen Funktion  $q$  multipliziert und jeweils über  $\Omega$  integriert:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} ((\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla^T) \mathbf{c}) \cdot \mathbf{v} + ((\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{v}) + \left( \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot \mathbf{v} \right) - (\nu \Delta \mathbf{c} \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} &= 0 \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{c} \, d\mathbf{x} &= 0. \end{aligned}$$

Um das Variationsproblem formulieren zu können, werden folgende Definitionen benötigt:

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &:= \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{c} \in \mathbb{H}^1(\Omega) : \mathbf{c} = \mathbf{c}_{in} \text{ auf } \Gamma_{In}, \mathbf{c}_{p+} = R(\delta) \mathbf{c}_{p-} \text{ auf } \Gamma_{P-}, \\ \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \text{ auf } \Gamma_{Blade|Eu}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{u} \quad \text{auf } \Gamma_{Blade|NS} \end{array} \right\}, \\ \mathbb{V} &:= \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v} \in \mathbb{H}^1(\Omega) : \mathbf{v} = 0 \text{ auf } \Gamma_{In}, \mathbf{v}_{p+} = R(\delta) \mathbf{v}_{p-} \text{ auf } \Gamma_{P-}, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ auf } \Gamma_{Blade|Eu}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_{Blade|NS} \end{array} \right\} \quad \text{und} \\ Q &:= L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Mit  $\mathbb{H}^1(\Omega)$  ist dabei der Sobolevraum vektorwertiger Funktionen bezeichnet, deren Komponenten allesamt im  $H^1(\Omega)$  enthalten sind, d. h.  $\mathbb{H}^1(\Omega) := H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ . Für die Konstruktion des  $H^1(\Omega)$  sei auf BRAESS [18] verwiesen.

Mit Hilfe der oben eingeführten Räume und der ersten Greenschen Formel

$$\int_V \nabla f \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = - \int_V f \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial V} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (4.9)$$

lautet die Variationsformulierung von (4.1), (4.2) mit  $f := -p$  unter Einbeziehung der Randwerte (4.3)–(4.7) wie folgt:

Finde ein Paar  $(\mathbf{c}, p) \in \mathbb{H} \times Q$  so, daß

$$\int_{\Omega} ((\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla^T) \mathbf{c}) \cdot \mathbf{v} + ((\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{v}) - \frac{1}{\rho} p \nabla \cdot \mathbf{v} + \nu \nabla \mathbf{c} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \frac{1}{\rho} \int_{\Gamma_{Out}} p_{out} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V} \quad (4.10)$$

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{c} \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall q \in Q. \quad (4.11)$$

Die zusätzlichen Terme

$$\frac{1}{\rho} \left( \int_{\Gamma_{In}} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{Blade}} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{P-}} p_{p-} \mathbf{v}_{p-} \cdot \mathbf{n}_{p-} + p_{p+} \mathbf{v}_{p+} \cdot \mathbf{n}_{p+} \, d\Gamma \right)$$

entfallen; der erste Term wegen  $\mathbf{v} = 0$  auf  $\Gamma_{In}$ , der zweite Term wegen  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  auf  $\Gamma_{Blade}$  und die beiden letzten wegen  $p_{p+} = p_{p-}$ ,  $\mathbf{v}_{p+} = R(\delta) \mathbf{v}_{p-}$  und  $\mathbf{n}_{p+} = -R(\delta) \mathbf{n}_{p-}$  jeweils auf  $\Gamma_{P-}$ .

Mit denselben Überlegungen entfallen die einzelnen Terme aus dem Randintegral des viskosen Termes

$$\nu \left( \int_{\Gamma_{In}} \nabla \mathbf{c}_{in} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{Blade}} \nabla \mathbf{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{P-}} \nabla \mathbf{c}_{p-} \mathbf{v}_{p-} \cdot \mathbf{n}_{p-} + \nabla \mathbf{c}_{p+} \mathbf{v}_{p+} \cdot \mathbf{n}_{p+} \, d\Gamma \right).$$

Da der Druck bis auf eine Integrationskonstante bestimmt ist, kann das Druckniveau beliebig festgesetzt werden. So geht die Druckvorgabe am Ausströmrand als natürliche Randbedingung in diese Formulierung ein. Das übliche Vorgehen in diesem Fall ist, daß man einen konstanten Druck  $p_{out} = 0$  vorgibt, damit der Term  $\int_{\Gamma_{Out}} p_{out} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma$  zu Null wird und nicht weiter berücksichtigt werden muß. Diese Art der Behandlung von Randbedingungen wird auch als *do nothing*-Bedingung bezeichnet.

Mit den Definitionen der folgenden Bi- und Trilinearformen

$$a(\mathbf{c}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \nabla \mathbf{c} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \quad \text{auf } \mathbb{H} \times \mathbb{H}$$

$$b(p, \mathbf{v}) := - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \quad \text{auf } \mathbb{H} \times Q$$

$$c(\mathbf{c}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \quad \text{auf } \mathbb{H} \times \mathbb{H}$$

und

$$n(\mathbf{w}, \mathbf{c}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} ((\mathbf{w} \cdot \nabla^T) \mathbf{c}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \quad \text{auf } \mathbb{H} \times \mathbb{H} \times \mathbb{H}$$

lassen sich (4.10) und (4.11) folgendermaßen formulieren:

Finde ein Paar  $(\mathbf{c}, p) \in \mathbb{H} \times Q$ , so daß

$$n(\mathbf{w}, \mathbf{c}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{c}, \mathbf{v}) + \frac{1}{\rho} b(p, \mathbf{v}) + \nu a(\mathbf{c}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V} \quad (4.12)$$

$$b(q, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall q \in Q. \quad (4.13)$$

## 4.2.2 Diskretisierung

Um das Problem (4.12) und (4.13) mittels der Finite-Elemente-Methode approximieren zu können, führen wir diskrete Räume  $\mathbb{H}_h$  und  $L_h$  ein, wobei  $h > 0$  die zur Zerlegung  $\mathbf{T}_h$  zugehörige Gitterweite ist. Entsprechend den diskreten Räumen  $\mathbb{H}_h$  und  $L_h$ , die aus elementenweise Polynomfunktionen bestehen, definieren wir diskrete Bi- und Trilinearformen  $a_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{c}_h)$ ,  $b_h(\mathbf{v}_h, p_h)$ ,  $c_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{c}_h)$  und  $n_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{c}_h, \mathbf{v}_h)$ . Die diskrete Formulierung des Problems (4.12) und (4.13) lautet:

Finde ein Paar  $(\mathbf{c}_h, p_h) \in \mathbb{H}_h \times Q_h$  so, daß

$$n_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{c}_h, \mathbf{v}_h) + c_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{c}_h) + \frac{1}{\rho} b_h(\mathbf{v}_h, p_h) + \nu a_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{c}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbb{V}_h \quad (4.14)$$

$$b_h(\mathbf{c}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h. \quad (4.15)$$

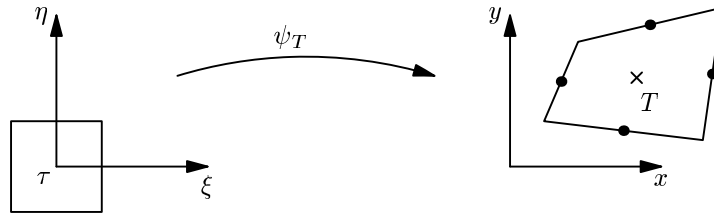
Das hier verwendete Element ist das von RANNACHER und TUREK [83] entwickelte Finite Element. Dieses Element ist eine Verallgemeinerung des Crouzeix-Raviart-Elementes [27] auf Quadrilateralen in zwei und auf Hexalateralen in drei Raumdimensionen. Die Freiheitsgrade für die Geschwindigkeitsunbekannten sind dabei mit den Kanten- bzw. Seitenmittelpunkten assoziiert und ordnen jeder Ansatzfunktion den Mittelwert über die jeweilige Kante bzw. Seite zu. Der Druck ist stückweise konstant.

Auf eine detaillierte Diskussion dieses Elementes wird hier nicht eingegangen. Für Einzelheiten diesbezüglich kann bei MÜLLER [70] und SCHREIBER [93] nachgelesen werden. Hier folgt nur eine kurze Definition des Elementes und der zugehörigen Räume, um das diskrete Problem (4.14) und (4.15) formulieren zu können.

Der rotiert bilineare Ansatz des Rannacher-Turek-Elementes lautet

$$S_h(T) := \{ \hat{s} \circ \psi_T^{-1} : \hat{s} \in \text{span}\{1, \xi, \eta, \zeta, \xi^2 - \eta^2, \eta^2 - \zeta^2\} \}^3. \quad (4.16)$$

Diese Definition entspricht der üblichen Vorgehensweise; d. h. die Basisfunktionen werden auf dem Referenzelement  $\tau := [-1, 1]^3$  spezifiziert und mittels der Transformation  $\psi_T : \tau \rightarrow T$  auf eine beliebige Zelle  $T \in \mathbf{T}_h$  transportiert, vgl. Abbildung 4.2.



**Abbildung 4.2:** Transformation auf das Referenzelement

Die Freiheitsgrade sind durch folgende Funktionale gegeben:

$$F_{e_h}(\mathbf{s}_h) := \frac{1}{|e_h|} \int_{e_h} \mathbf{s}_h \, d\Gamma. \quad (4.17)$$

Jeder Seite  $e_h$  einer Zelle  $T \in \mathbf{T}_h$  ist also der Mittelwert von  $\mathbf{s}_h$  über  $e_h$  zugeordnet. Die entsprechenden diskreten Räume sind dann durch

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_h := \{ & \mathbf{s}_h \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) : \mathbf{s}_h|_T \in S_h(T) \text{ für } T \in \mathbf{T}_h, \\ & \text{die linearen Funktionale (4.17) sind stetig über innere Zellflächen,} \\ & F_{e_h}(\mathbf{s}_h) = \frac{1}{|e_h|} \int_{e_h} \mathbf{c}_{in} \, d\Gamma \text{ für Zellflächen } e_h \text{ auf } \Gamma_{In} \} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_h := \{ & \mathbf{s}_h \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) : \mathbf{s}_h|_T \in S_h(T) \text{ für } T \in \mathbf{T}_h, \\ & \text{die linearen Funktionale (4.17) sind stetig über innere Zellflächen,} \\ & F_{e_h}(\mathbf{s}_h) = 0 \text{ für Zellflächen } e_h \text{ auf } \Gamma_{In} \} \end{aligned}$$

definiert.

Der Druck wird stückweise konstant angenommen:

$$Q_h := \{q_h \in L^2(\Omega) : q_h|_T = \text{const. für } T \in \mathbf{T}_h\}.$$

Da es sich hier um einen nichtkonformen Ansatz handelt, werden die entsprechenden diskreten Bi- und Trilinearformen wie üblich elementenweise definiert:

$$a_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{c}_h) := \sum_{T \in \mathbf{T}_h} \int_T \nabla \mathbf{c}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \quad \text{auf } \mathbb{H}_h \times \mathbb{H}_h, \quad (4.18)$$

$$b_h(\mathbf{v}_h, p_h) := - \sum_{T \in \mathbf{T}_h} p_h|_T \int_T \nabla \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \quad \text{auf } \mathbb{H}_h \times Q_h, \quad (4.19)$$

$$c_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{c}_h) := \sum_{T \in \mathbf{T}_h} \int_T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c}_h) \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \quad \text{auf } \mathbb{H}_h \times \mathbb{H}_h, \quad (4.20)$$

$$n_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{c}_h, \mathbf{v}_h) := \sum_{T \in \mathbf{T}_h} \int_T ((\mathbf{w}_h \cdot \nabla^T) \mathbf{c}_h) \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \quad \text{auf } \mathbb{H}_h \times \mathbb{H}_h \times \mathbb{H}_h. \quad (4.21)$$

Die Integration in der Bilinearform (4.18) erfolgt mit Hilfe der Gauß-Quadratur, vgl. BRONSTEIN [20], S. 763.

Für die Diskretisierung der Bilinearform (4.19) erhält man:

$$b_h(\mathbf{v}_h, p_h) = - \sum_{T \in \mathbf{T}_h} p_h|_T Q_T(\mathbf{v}_h) \quad \text{mit } Q_T(\mathbf{v}_h) := \sum_{e_h \in E_T} |e_h| F_{e_h}(\mathbf{v}_h) \cdot \mathbf{n}_h.$$

Mit  $E_T$  sind dabei die Randseiten der Zelle  $T$ , mit  $|e_h|$  die Fläche der Seite  $e_h$  und mit  $\mathbf{n}_h$  der äußere Normaleneinheitsvektor bezüglich  $e_h$  bezeichnet.

Die diskrete Kontinuitätsforderung entspricht im Fall des Divergenzoperators wegen der stückweise konstanten Funktionen von  $Q_h$ , dem Prinzip der lokalen Volumenerhaltung, wie sie auch vom Finite-Volumen-Verfahren vorausgesetzt wird; d. h. die Summe der diskreten Volumenströme über die Zellflächen verschwindet für jede Zelle.

Für die Diskretisierung (4.20) wird die übliche *Lumping*-Technik (vgl. GROSSMANN und ROOS [45]) verwendet. Das bedeutet eine spezielle Substitution des Integrals durch eine Näherungsformel. In diesem Fall führt diese Substitution auf die folgende Form:

$$c_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{c}_h) := \sum_{T \in \mathbf{T}_h} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c}_h) \cdot dV, \quad (4.22)$$

in der die Größe  $dV$  das Volumen von  $T$  bezeichnet.

Problematischer ist die Diskretisierung des Konvektionsoperators (4.21). Das hier verwendete Upwind-Verfahren ist im wesentlichen dasselbe, das auch bei der auf Erhaltungssätzen basierenden Finite-Volumen-Methode benutzt wird. Es werden um die Freiheitsgrade Kontrollvolumina gebildet, und unter Verwendung des Integral-satzes von Gauß wird die Trilinearform approximiert. Die Vorgehensweise ist bei MÜLLER [70] ausführlich beschrieben.

Das Gleichungssystem mit den Gleichungen (4.14) und (4.15) kann somit in Matrix-form wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} S & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

wobei die Matrix  $B$  den diskretisierten Divergenzoperator bezeichnet, deren Transponierte  $B^T$  für die hier gewählte Diskretisierung gerade der diskrete Gradientoperator ist. Die Matrix  $S$  beinhaltet den diskreten Konvektionsoperator (4.21), den diskreten Laplace-Operator (4.18) und die aus der Diskretisierung des Coriolis-Terms (4.20) resultierende Matrix  $\omega M_l$ . Die Matrix  $S$  hat somit die folgende Blockstruktur:

$$S = \begin{pmatrix} S_{uu} & -\omega M_l & 0 \\ \omega M_l & S_{vv} & 0 \\ 0 & 0 & S_{ww} \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Sie ist entsprechend den drei kartesischen Richtungen zerlegt. Die Diagonalblöcke, die die interne Kopplung zwischen Geschwindigkeitskomponenten in  $x$ -,  $y$ - bzw.  $z$ -Richtung repräsentieren, sind zudem identisch, d. h. es gilt:

$$S_{uu} = S_{vv} = S_{ww}. \quad (4.25)$$

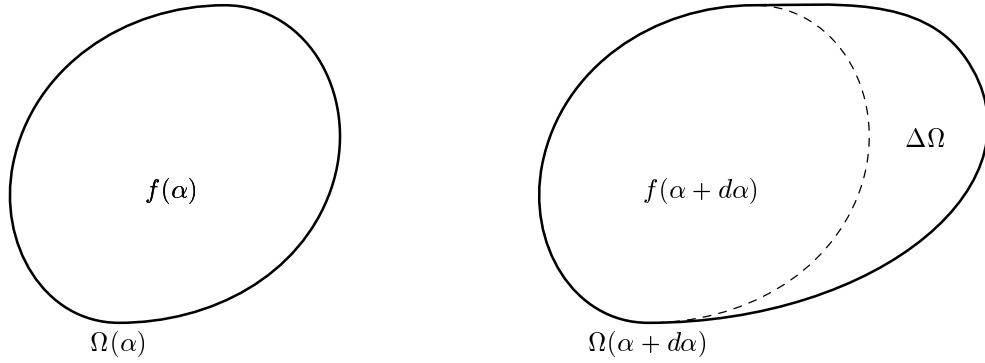
Die Geschwindigkeitskopplung zwischen  $u$ - und  $v$ -Komponenten tritt lediglich aufgrund des Coriolis-Terms (4.20) auf und wird durch die Diagonalmatrix  $\omega M_l$  erfaßt.  $M_l$  bezeichnet dabei die  $L^2$ -Massenmatrix, die durch die oben erwähnten *Lumping*-Techniken entsteht.

### 4.3 Herleitung der Sensitivitätsgleichungen

Die meisten diskreten Sensitivitätsansätze basieren auf dem System (4.23) und differenzieren nach den Designparametern. Die Finite-Elemente-Diskretisierung bietet aber auch eine andere Möglichkeit. Anstatt (4.23) als Ausgangsgleichung zu nehmen, wird auf die diskrete Variationsformulierung zurückgegriffen und die Gleichungen (4.14) und (4.15) werden differenziert.

Da es sich hier aber um eine Integralgleichung handelt, deren Integrationsgebiet selbst von den Designparametern abhängig sein kann, muß die Differentiation in





**Abbildung 4.3:** Geometrische Darstellung der Leibniz-Regel, Gleichung (4.26)

besonderer Weise durchgeführt werden. Die Integration wird dabei entsprechend der *Leibniz-Regel* [64] ausgeführt. Sei  $f : \mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}$  eine allgemeine Funktion und  $\alpha$  der Parameter, von dem das Integrationsgebiet abhängt, dann erhält man mit der Leibniz-Regel:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{\Omega(\alpha)} f(\mathbf{r}, \alpha) dV = \int_{\Omega(\alpha)} \frac{\partial f(\mathbf{r}, \alpha)}{\partial \alpha} dV + \int_{\Gamma(\alpha)} f(\mathbf{r}(s), \alpha) \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha} ds, \quad (4.26)$$

wo  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}^3$ ,  $\mathbf{n}$  der äußere Normaleneinheitsvektor und  $\Gamma(\alpha)$  der Rand von  $\Omega(\alpha)$  ist. Die obige Gleichung bedeutet, daß die Änderung eines Integrals bezüglich des Parameters  $\alpha$  einerseits durch die Änderung des Integranden  $f$  über dem ursprünglichen Integrationsgebiet und andererseits durch die Änderung des Integrationsgebietes  $\Omega$  selbst erfolgt. Eine geometrische Interpretation dieser Regel ist in Abbildung 4.3 dargestellt. Die Anwendung der Leibniz-Regel auf Erhaltungsgleichungen wird als Reynoldsches Transporttheorem bezeichnet. So läßt sich u. a. auch der Impulssatz für Flüssigkeiten mit Hilfe der Leibniz-Regel aus dem 2. Satz von Newton herleiten, s. [26].

Mit Hilfe von (4.26) werden im weiteren die diskreten Sensitivitätsgleichungen abgeleitet, wobei  $\alpha$  der Designparameter ist. Durch Differenzieren der Gleichungen (4.18)-(4.21) nach  $\alpha$  erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} a_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{c}_h) = a_h(\mathbf{v}_{h,\alpha}, \mathbf{c}_h) + a_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{c}_{h,\alpha}) + \hat{a}_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{c}_h), \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} b_h(\mathbf{v}_h, p_h) = b_h(\mathbf{v}_{h,\alpha}, p_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_{h,\alpha}) + \hat{b}_h(\mathbf{v}_h, p_h), \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} c_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{c}_h) = c_h(\mathbf{v}_{h,\alpha}, \mathbf{c}_h) + c_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{c}_{h,\alpha}) + \hat{c}_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{c}_h), \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} n_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{c}_h, \mathbf{v}_h) &= n_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{c}_h, \mathbf{v}_{h,\alpha}) + n_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{c}_{h,\alpha}, \mathbf{v}_h) + \\ & n_h(\mathbf{w}_{h,\alpha}, \mathbf{c}_h, \mathbf{v}_h) + \hat{n}_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{c}_h, \mathbf{v}_h), \end{aligned} \quad (4.30)$$

wobei  $\mathbf{v}_{h,\alpha}$ ,  $p_{h,\alpha}$ ,  $\mathbf{c}_{h,\alpha}$ ,  $\mathbf{w}_{h,\alpha}$  jeweils die nach  $\alpha$  differenzierten Größen bezeichnen und

die mit  $\hat{\cdot}$  bezeichneten Bi- und Trilinearformen die durch Verwendung der Leibniz-Regel entstandenen Randintegralterme bedeuten:

$$\hat{a}_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{c}_h) := \sum_{T \in \mathbf{T}_h} \int_{\partial T} \nabla \mathbf{c}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h \frac{d\mathbf{n}}{d\alpha} ds \quad (4.31)$$

$$\hat{b}_h(\mathbf{v}_h, p_h) := - \sum_{T \in \mathbf{T}_h} p_h|_T \int_{\partial T} \nabla \cdot \mathbf{v}_h \frac{d\mathbf{n}}{d\alpha} ds \quad (4.32)$$

$$\hat{c}_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{c}_h) := \sum_{T \in \mathbf{T}_h} \int_{\partial T} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c}_h) \cdot \mathbf{v}_h \frac{d\mathbf{n}}{d\alpha} ds \quad (4.33)$$

$$\hat{n}_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{c}_h, \mathbf{v}_h) := \sum_{T \in \mathbf{T}_h} \int_{\partial T} ((\mathbf{w}_h \cdot \nabla^T) \mathbf{c}_h) \cdot \mathbf{v}_h \frac{d\mathbf{n}}{d\alpha} ds. \quad (4.34)$$

Terme, die mit  $\hat{\cdot}$  bezeichnet sind und die die Ableitungen der Basisfunktion  $\mathbf{w}_{h,\alpha}$  enthalten, bilden dann die rechte Seite des aufzustellenden Gleichungssystems. In diesen Termen sind alle Komponenten bekannt. Insbesondere enthalten sie keine Ableitungen der Geschwindigkeit oder des Druckes. Als diskretes Sensitivitätssystem erhält man damit:

$$\begin{aligned} n_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{c}_{h,\alpha}, \mathbf{v}_h) + n_h(\mathbf{w}_{h,\alpha}, \mathbf{c}_h, \mathbf{v}_h) + c_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{c}_{h,\alpha}) + \frac{1}{\rho} b_h(\mathbf{v}_h, p_{h,\alpha}) + \nu a_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{c}_{h,\alpha}) = \\ -n_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{c}_h, \mathbf{v}_{h,\alpha}) - c_h(\mathbf{v}_{h,\alpha}, \mathbf{c}_h) - b_h(\mathbf{v}_{h,\alpha}, p_h) - a_h(\mathbf{v}_{h,\alpha}, \mathbf{c}_h) \\ -\hat{n}_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{c}_h, \mathbf{v}_h) - \hat{c}_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{c}_h) - \hat{b}_h(\mathbf{v}_h, p_h) - \hat{a}_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{c}_h) \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$b_h(\mathbf{c}_{h,\alpha}, q_h) = -b_h(\mathbf{c}_h, q_{h,\alpha}) - \hat{b}_h(\mathbf{c}_h, q_h). \quad (4.36)$$

Im obigen System entspricht (4.35) der Gleichung (4.14) und (4.36) der Gleichung (4.15) im Gleichungssystem des Strömungsproblems. Als neue Glieder erscheinen in Gleichungen (4.35) und (4.36) die rechten Seiten und in (4.35) der erste Term. Die anderen Terme sind bereits bekannt.

Der erste Term in (4.35) wird auch als reaktiver Term bezeichnet. Dieser Term tritt auch bei der Lösung des Strömungsproblems auf, wenn die nichtlineare Iteration mit dem Newton-Verfahren durchgeführt wird. Das Newton-Verfahren benötigt die Frechét-Ableitungen des kontinuierlichen oder diskreten Navier-Stokes-Operators. Als Resultat dieser Ableitungen ergibt sich ein System, das ähnlich dem in Gleichungen (4.35)-(4.36) ist. Die Assemblierung dieses Termes erfolgt ähnlich wie beim Coriolis-Term. Das Ergebnis ist eine spezielle Massenmatrix, die die Gradienten des Geschwindigkeitsfeldes enthält. Auf die Rolle dieses Termes und die Schwierigkeiten, die er verursacht, wird in Kapitel 5 näher eingegangen.

Das Gleichungssystem (4.35)-(4.36) hat in Matrixschreibweise die folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} S + R & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\alpha \\ p_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \quad (4.37)$$

wobei die Matrizen  $B$  und  $S$  analog zu (4.23) definiert sind. Der unbekannte Vektor  $[c_\alpha, p_\alpha]^T$  ist der gesuchte Sensitivitätsvektor, und die rechte Seite  $[f, g]^T$  enthält neben den Randbedingungen auch die in (4.35) und (4.36) erschienenen Terme. Die Matrix  $R$  ist der reaktive Term in Matrixform und hat folgende Blockstruktur:

$$R = \begin{pmatrix} R_{uu} & R_{uv} & R_{uw} \\ R_{vu} & R_{vv} & R_{vw} \\ R_{wu} & R_{wv} & R_{ww} \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Für die Blockmatrix  $S + R$  in (4.37) ergibt sich damit:

$$S + R = \begin{pmatrix} S_{uu} + R_{uu} & -\omega M_l + R_{uv} & R_{uw} \\ \omega M_l + R_{vu} & S_{vv} + R_{vv} & R_{vw} \\ R_{wu} & R_{wv} & S_{ww} + R_{ww} \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

Ein großer Unterschied zu dem in (4.23) definierten System ist, daß bisher durch den Coriolis-Term und die periodischen Randbedingungen nur  $u - v$  und durch die Eulerschen Randbedingungen ausschließlich am Rand zusätzliche  $u - w$  und  $v - w$  Kopplungen aufgetreten sind. Nun entstehen in (4.37) durch die Matrix  $R$  alle möglichen Kopplungen und das für jeden Freiheitsgrad, wobei  $R$  wie alle anderen Matrizen schwach besetzt ist.

Das Gleichungssystem für das Sensitivitätsproblem ist damit definiert. Um die Herleitung des diskreten Gleichungssystems zu vervollständigen, müssen nur noch aus den Gleichungen (4.3)-(4.7) für das diskrete Sensitivitätsproblem (4.35)-(4.36) die Randbedingungen hergeleitet werden.

### 4.3.1 Herleitung der Randbedingungen für die Sensitivitäten

Wenn die Sensitivitätsgleichungen aus den Matrixgleichungen des Strömungsproblems hergeleitet werden, werden während der Ableitung auch die diskretisierten Randbedingungen differenziert. In diesem Fall wird aber als Basis die diskrete Variationsformulierung (4.14) und (4.15) genommen, und die Randbedingungen müssen explizit definiert werden.

Für die Herleitung der Randbedingungen für das Sensitivitätsproblem (4.35)-(4.36) geht man genauso vor wie bei der Herleitung des Gleichungssystems. Die Randbedingungen des Strömungsproblems (4.3)-(4.7) werden nach einem Designparameter

abgeleitet, der auch hier mit  $\alpha$  bezeichnet wird. Es werden insgesamt vier verschiedene Arten von Randbedingungen unterschieden, und zwar Periodizität, Dirichlet-, Euler- und Ausströmrandbedingungen. Die Ausströmbedingungen sind bereits durch die Vorgabe des statischen Druckes am Ausströmrand im Strömungsproblem eingebaut und so differenziert worden. Sie benötigen keine zusätzliche Behandlung.

Periodizität gilt nicht als echte Randbedingung. Die periodischen Koeffizienten sind ganz normale Einträge in der Matrix. Da man aber die Kopplungen zwischen den einzelnen Geschwindigkeitskomponenten nicht implizit in der Matrix haben will, werden sie eliminiert. Außerdem enthält die Bedingung keine gitterspezifische Information, sondern lediglich eine kinematische, die von der Änderung des Rechengebietes unabhängig ist. Übrig bleiben die Dirichletschen und Eulerschen Ränder. Für diese werden im weiteren die Randbedingungen hergeleitet.

### Dirichlet-Randbedingungen

Allgemeine Formulierung der Dirichlet-Bedingung heißt in diesem Fall, daß der Funktionswert am Rand nur vom Designparameter abhängen kann. Dabei bezeichnet  $\mathbf{w}$  die Größe, für die Dirichlet-Randbedingungen gesetzt werden, d. h.: es ist  $\mathbf{w} = \mathbf{f}(\alpha)$ . Dabei kann sich der Punkt auf dem Rand bewegen, wenn sich der Wert von  $\alpha$  auch ändert. Das bedeutet für  $\mathbf{w}$  die folgende funktionale Abhängigkeit:

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}(\alpha), \alpha) = \mathbf{f}(\alpha), \quad (4.40)$$

wobei  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}^3$  gilt. Wird nun die totale Ableitung bezüglich des Parameters  $\alpha$  gebildet, erhält man

$$\frac{D\mathbf{w}}{D\alpha} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} = \frac{d\mathbf{f}}{d\alpha}. \quad (4.41)$$

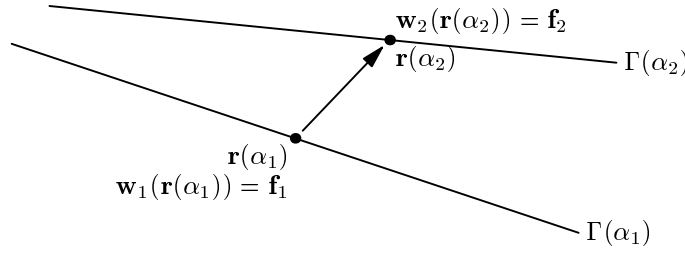
Damit ist die Randbedingung für die Sensitivität von  $\mathbf{w}$  mit  $\mathbf{w}_\alpha = \partial \mathbf{w} / \partial \alpha$ :

$$\mathbf{w}_\alpha = \frac{d\mathbf{f}}{d\alpha} - \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \quad (4.42)$$

oder in anderer Schreibweise

$$\mathbf{w}_\alpha = \mathbf{f}_\alpha - \nabla \mathbf{w} \cdot \mathbf{r}_\alpha. \quad (4.43)$$

Mit Hilfe geometrischer Überlegungen gelangt man auch auf anderem Wege zu diesem Ergebnis. Dabei bezeichnen in Abbildung 4.4  $\Gamma(\alpha_1)$  und  $\Gamma(\alpha_2)$  die Ränder des zu den Designparametern  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  gehörigen Rechengebietes, und  $\mathbf{r}(\alpha_1)$  und  $\mathbf{r}(\alpha_2)$  dieselben Punkte auf den beiden Konfigurationen. Weiterhin sind auf den unterschiedlichen Konfigurationen unterschiedliche Geschwindigkeitsfelder  $\mathbf{w}_1$  und  $\mathbf{w}_2$  definiert, wobei  $\mathbf{w}_1(\mathbf{r}(\alpha_1)) = \mathbf{f}_1$  und  $\mathbf{w}_2(\mathbf{r}(\alpha_2)) = \mathbf{f}_2$ . Um die Sensitivitäten berechnen



**Abbildung 4.4:** Geometrische Interpretation der Randbedingungen

zu können, wird eine Finite-Differenzen-Approximation verwendet. Dabei muß darauf geachtet werden, daß die Auswertung am selben Ort durchgeführt wird. Will man die Sensitivitäten im Punkt  $\mathbf{r}(\alpha_2)$  berechnen, so muß das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{w}_1$  an diesen Punkt interpoliert werden, da es dort nicht definiert ist. Mit  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha_2) - \mathbf{r}(\alpha_1)$  ergibt sich:

$$\mathbf{w}_1(\mathbf{r}_2(\alpha)) = \mathbf{w}_1(\mathbf{r}_1(\alpha)) + \frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial \mathbf{r}} \cdot \Delta \mathbf{r}. \quad (4.44)$$

Damit erhält man die Gleichung der Sensitivität in der folgenden Form:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_\alpha &= \frac{\mathbf{w}_2(\mathbf{r}_2(\alpha)) - \mathbf{w}_1(\mathbf{r}_2(\alpha))}{\Delta \alpha} = \frac{\mathbf{w}_2(\mathbf{r}_2(\alpha)) - \mathbf{w}_1(\mathbf{r}_1(\alpha)) - \frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial \mathbf{r}} \cdot \Delta \mathbf{r}}{\Delta \alpha} \\ &= \frac{\Delta \mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial \mathbf{r}} \cdot \Delta \mathbf{r}}{\Delta \alpha} = \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta \alpha} - \frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta \alpha}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Ersetzt man die Differenzenquotienten durch Differentialquotienten und läßt den Index in  $\mathbf{w}_1$  weg, erhält man Gleichung (4.42).

### Euler-Randbedingungen

Aus der (4.7) folgt, daß am Eulerschen Rand die Relativgeschwindigkeit keine Normalkomponente haben darf. Formal gilt:

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (4.46)$$

Verwendet man genau dieselbe Methode wie im Dirichletschen Fall und bildet die totale Ableitung von (4.46), ergibt sich:

$$\frac{D(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})}{D\alpha} = \mathbf{n} \frac{D\mathbf{w}}{D\alpha} + \mathbf{w} \frac{d\mathbf{n}}{d\alpha} = \mathbf{n} \left( \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \right) + \mathbf{w} \frac{d\mathbf{n}}{d\alpha} = 0. \quad (4.47)$$

Mit derselben Notation wie oben und nach  $\mathbf{w}_\alpha$  aufgelöst, erhält man:

$$\mathbf{w}_\alpha \cdot \mathbf{n} = - \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \mathbf{n} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_\alpha \quad (4.48)$$

oder

$$\mathbf{w}_\alpha \cdot \mathbf{n} = - ((\mathbf{w} \cdot \nabla^T) \mathbf{r}_\alpha) \mathbf{n} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_\alpha. \quad (4.49)$$

Aus den Gleichungen (4.43) und (4.49) ist ersichtlich, daß die Randbedingungen des Sensitivitätsproblems von der Lösung des Strömungsproblems abhängen. Der Diskretisierungsfehler kommt daher bei der Sensitivitätsanalyse zweimal vor. Während bei der Strömungsanalyse die Randbedingungen in der Regel von der Auflösung des Gebietes unabhängig sind und Diskretisierungsfehler nur die inneren Bereiche betreffen, werden bei der Sensitivitätsanalyse nicht einmal die Randbedingungen exakt erfüllt. Dieser Fehler ist selbstverständlich konsistent und verschwindet mit immer feiner werdender Auflösung.

# Kapitel 5

## Lösung der Sensitivitätsgleichungen

In der numerischen Strömungsmechanik hat man mit mathematischen Aufgaben zu tun, die den Bereich von einfachen linearen algebraischen Gleichungen bis zu Systemen von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen umfassen. Die Lösung dieser Probleme erfolgt mit Hilfe der numerischen Mathematik. Bei der Lösung sind einige Gesichtspunkte besonders zu beachten. Ziel ist es, in der Tabelle 5.1 möglichst

- nach oben zu gehen, um die Nichtlinearitäten zu vermeiden (Linearisierung),
- nach oben zu gehen, um die Gleichungen zu vereinfachen (Diskretisierung),
- nach links zu gehen, um die Anzahl der Gleichungen zu reduzieren; dies ist jedoch schwierig zu verwirklichen, da mit der Diskretisierung die Anzahl der Gleichungen stark ansteigt.

Die Lösung an den leer gelassenen Stellen in Tabelle 5.1 ist äußerst umständlich oder unmöglich.

Typ	1	wenig (3–5)	viel (10–50)	sehr viel (>1000)
l. AGL	trivial	einfach	schwierig	sehr schwierig
nl. AGL	einfach	schwierig	sehr schwierig	
l. GDGL	einfach	schwierig	sehr schwierig	
nl. GDGL	schwierig	sehr schwierig		
l. PDGL	schwierig	sehr schwierig		
nl. PDGL	sehr schwierig			

**Tabelle 5.1:** Klassifizierung der Gleichungen der numerischen Strömungsmechanik nach der Schwierigkeit der Lösung. Abkürzungen: l: lineare, nl: nichtlineare, GL: Gleichung, DGL: Differentialgleichung, A: algebraische, G: gewöhnliche, P: partielle

In unserem Fall hat man zunächst mit nichtlinearen PDGLn (Strömungsproblem) zu tun, bei denen der Linearisierung die Diskretisierung folgt, so daß man in der rechten oberen Ecke der Tabelle landet. Nach der Strömungsanalyse hat man lineare PDGLn (Sensitivitätsproblem) zu lösen, nach deren Diskretisierung man sich an derselben Stelle in der Tabelle wie bei der Strömungsanalyse wiederfindet. Die effiziente Lösung des resultierenden Systems ist das Thema dieses Kapitels.

Die Lösung der nach der Diskretisierung entstandener Gleichungen erfolgt üblicherweise nicht mit direkten Methoden, wie z. B. Gauß-Elimination, sondern mit Hilfe von iterativen Lösungsverfahren. Dies hat grundsätzlich drei Gründe: Der erste ist der enorme Aufwand an Arbeitsspeicher, der zweite ist der große Rechenaufwand, und der dritte ist der Rundungsfehler bei großen Systemen. Wird ein Problem mit  $N$  diskreten Punkten approximiert, so wird der Speicheraufwand für einen direkten Weg mit  $\mathcal{O}(N^2)$  und die Rechenzeit mit  $\mathcal{O}(N^3)$  proportional. Bei einem iterativen Lösungsverfahren ist aber sowohl der Speicher- als auch der Rechenaufwand nur mit  $\mathcal{O}(N)$  proportional, vorausgesetzt das Lösungsverfahren basiert auf einem Mehrgitterverfahren.

Anders ist es bei der Lösung der Sensitivitätsgleichungen. Bis zur Mitte der neunziger Jahre wurden die Gleichungen fast ausschließlich mit direkten Methoden gelöst. Solange die Anwendungen vereinfachte 2D-Beispiele waren, traten noch keine großen Schwierigkeiten auf. Als dann die technischen Voraussetzungen für die Berechnung dreidimensionaler Probleme theoretisch gegeben waren, hatte man noch mit der Speicherkapazität zu kämpfen. Als vorläufige Lösung boten sich die "off-core" Löser an, die die Matrizen partitioniert und für die Lösung gerade nicht gebrauchte Daten auf der Festplatte gespeichert haben.

Dann haben KORIVI ET AL. [63] für die Lösung der Sensitivitätsgleichungen eine Iteration konstruiert, die als "Incremental Iterative Method" bezeichnet wird. Es ist im wesentlichen dieselbe iterative Strategie, die bei den meisten CFD-Codes eingesetzt wird. Die Grundaufgabe ist, das folgende lineare Problem zu lösen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (5.1)$$

Dies wird durch eine *präkonditionierte Richardson-Iteration* erzielt:

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + C^{-1}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^n), \quad (5.2)$$

wobei die Indizes den aktuellen Iterationsstand bezeichnen, und die Matrix  $C$  der Präkonditionierer ist. Mit dieser Strategie lassen sich Probleme mit schlecht-konditionierten und nicht diagonaldominanten Koeffizientenmatrizen lösen. Für den Strömungslöser werden häufig auch Diskretisierungsschemata von höherer Ordnung auf diese Weise implementiert. Im Bereich der Finite-Volumen-Methode wird dies *deferred correction* genannt. Dieses Verfahren wurde in der Mitte der siebziger Jahre von KOSHLA UND RUBIN [62] eingeführt.



Die Iteration (5.2) ist jedoch nur bedingt konvergent und zwar genau dann, wenn

$$\rho(I - C^{-1}A) < 1, \quad (5.3)$$

d. h. der Spektralradius der Matrix  $I - C^{-1}A$  kleiner als 1 ist. In der Praxis bedeutet dies, daß der Präkonditionierer nicht "sehr weit" von  $A$  liegen darf, was jedoch von Problem zu Problem unterschiedlich und auch vom Gitter abhängig ist.

In dem vorliegenden Fall entspricht (5.1) der Gleichung (4.37). Die Iteration (5.2) könnte direkt auf (4.37) angewendet werden. Da die Koeffizientenmatrix aber indefinit ist, würde ihre Verwendung nur weitere Probleme bereiten. Stattdessen wird auf die Koeffizientenmatrix in (4.37) eine Block-Gauß-Elimination angewendet und man erhält:

$$\begin{pmatrix} S + R & B^T \\ 0 & B(S + R)^{-1}B^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\alpha \\ p_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^T f \\ B(S + R)^{-1}f - g \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Damit werden die Geschwindigkeiten vom Druck entkoppelt. Wird dann diese Strategie in ein Defekt-Korrektur-Verfahren (5.2) eingebunden, so ergibt sich ein Druckkorrekturverfahren.

Nun ist die Aufgabe, für die beiden Koeffizientenmatrizen des entkoppelten Systems (Druck und Geschwindigkeit) einen brauchbaren Präkonditionierer zu finden. Für den Druck-Präkonditionierer ist eine häufig verwendete Approximation die folgende:

$$(S + R)^{-1} \approx \text{diag}(S)^{-1}. \quad (5.5)$$

Bei TUREK [107] findet man auch andere Ansätze für dieses Problem und auch Vergleiche der Präkonditionierer für die einzelnen Problemklassen. In Gleichung (5.5) wird die Inverse der Matrix  $(S + R)$  einfach durch die Inverse des Diagonalanteils von  $S$  ersetzt. Das dadurch resultierende Verfahren stammt von PATANKAR [80] und wird als SIMPLE-Verfahren bezeichnet. Der Druckpräkonditionierer hat damit die folgende Form:

$$P = B \text{diag}(S)^{-1} B^T. \quad (5.6)$$

Für die Konstruktion des Geschwindigkeitspräkonditionierers wurden die folgenden Gesichtspunkte in Betracht gezogen:

1. Da die einzelnen Diagonalblöcke in Gleichung (4.25) identisch sind, würde man aus Speichergründen nicht die ganze Matrix abspeichern, sondern nur einen der Diagonalblöcke. Aus dem Präkonditionierer des Geschwindigkeitsproblems werden daher alle Nebendiagonalblöcke gestrichen. Analog wurde bei dem Strömungslöser bezüglich der Coriolis-Terme vorgegangen, vgl. [70].

- Das Vorzeichen und die Größe der Einträge der aus der Diskretisierung der reaktiven Termen resultierenden Matrix  $R$  sind weder vorhersehbar noch kontrollierbar. Würde diese Matrix zu dem Diagonalblock von  $S$  addiert, entstünden diagonale Einträge, die Null oder sogar negativ sind. Daher werden auch die Diagonalblöcke von  $R$  aus dem Präkonditionierer entfernt. Damit bleiben nur die mit dem Upwind erster Ordnung diskretisierten konvektiven Terme und die diffusiven Terme im Navier-Stokesschen Fall übrig.

Somit gestaltet sich die Iteration (5.2) für das Sensitivitätsproblem wie folgt:

### Defekt-Korrektur-Iteration

- Berechne das aktuelle Residuum

$$\begin{pmatrix} r_c \\ r_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f - (S + R)c_\alpha^n - B^T p_\alpha^n \\ g - Bc_\alpha^n \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

- Löse approximativ das Sensitivitätsproblem mit dem Residuum als rechte Seite

$$\begin{pmatrix} S + R & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta c_\alpha \\ \Delta p_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_c \\ r_p \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

- Korrigiere die vorhergehende Iterierte

$$\begin{pmatrix} c_\alpha^{n+1} \\ p_\alpha^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\alpha^n \\ p_\alpha^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta c_\alpha \\ \Delta p_\alpha \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Für die Lösung der Gleichung (5.8) werden dann die oben erläuterten Näherungen eingeführt. Man erhält dann folgende Iteration:

### SIMPLE-Iteration

- Löse das präkonditionierte Problem für Sensitivitäten der Geschwindigkeiten mit dem Residuum als rechte Seite

$$\tilde{S}\Delta c_\alpha = r_c. \quad (5.10)$$

2. Löse das präkonditionierte Problem für Sensitivitäten des Druckes mit dem Residuum und mit den im Punkt 1. berechneten Korrekturen als rechte Seite

$$P\Delta p_\alpha = r_p - B\Delta c_\alpha. \quad (5.11)$$

3. Korrigiere zusätzlich die berechneten Geschwindigkeitskorrekturen (SIMPLE-Korrektur)

$$\Delta c_\alpha = \Delta c_\alpha + \text{diag}(S)^{-1}B^T\Delta p_\alpha. \quad (5.12)$$

Wie bereits erwähnt, sind für die Konvergenz der obigen Iteration in der Praxis keine Aussagen zu machen, die die Stabilität der Iteration gewährleisten oder klar definierte Grenzen für den Präkonditionierer setzen könnten. Die bei großen Systemen eher theoretische Bedingung  $\rho(I - C^{-1}A) < 1$  leistet keine Abhilfe. In der Praxis hilft üblicherweise nur das numerische Experiment und die Verstärkung der Diagonaldominanz des Präkonditionierers durch Unterrelaxation zugunsten der Stabilität und zuungunsten der Konvergenzgeschwindigkeit.

Bei der Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen mit Hilfe von Mehrgitterstrategien macht man üblicherweise die Erfahrung, daß bei kleinen Rossby-Zahlen, also stark durch den Coriolis-Term beeinflussten Problemen, auf den unteren Gittern Konvergenzprobleme auftreten, die dann aber mit feiner werdender Gitterauflösung verschwinden. Dies liegt daran, daß der Anteil von  $A$ , der nicht in den Präkonditionierer  $C$  einfließt, so groß wird, daß die Bedingung (5.3) nicht mehr erfüllt wird. Da aber die Einträge aus dem Coriolis-Term in der Matrix mit  $\mathcal{O}(h^3)$ , die aus den konvektiven und diffusiven Termen aber nur mit  $\mathcal{O}(h^2)$  skaliert sind, gehen sie schneller gegen Null, wenn die Maschenweite  $h$  mit der Verfeinerung des Gitters auch gegen Null geht.

Eine ähnliche Situation tritt auch im Rahmen des Sensitivitätsproblems auf. Zusätzlich zum Coriolis-Term sind noch reaktive Terme enthalten, die grundsätzlich mit derselben Massenmatrix skaliert sind wie der Coriolis-Term und daher auch schneller verschwinden als die konvektiven und diffusiven Terme. Der Unterschied ist jedoch, daß während bei dem Coriolis-Term die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  vom Gitter unabhängig ist, dies für die Gradienten in den reaktiven Termen nicht der Fall ist. Da sie numerisch auf dem zugrundeliegenden Gitter berechnet werden, können sie mit feiner werdender Auflösung besser wiedergegeben und so Gradientenspitzen besser aufgelöst werden. Deshalb kann das Lösungsverhalten kritisch werden, wenn sich im Rechengelände Singularitäten befinden, wie z. B. scharfe Kanten, Diskontinuitäten in den Randbedingungen.

Für die Konvergenz der SIMPLE-Iteration sind auch die Lösungen der unteren Teilprobleme (5.10) und (5.11) wesentlich. Für die Schnelligkeit des Gesamtverfahrens sind effiziente Lösungen dieser beiden Teilprobleme ausschlaggebend. Da die SIMPLE-Approximation nur eine schwache Kopplung zwischen den Sensitivitäten der Geschwindigkeit und des Druckes erzeugt, ist es unnötig, die Gleichungen (5.10) und (5.11) sehr genau zu lösen. In der Praxis reicht es aus, wenn das Residuum um einen Faktor 0.1 bis 0.4 fällt. Es gibt andere Strategien, bei denen die beiden

unteren Probleme sehr genau gelöst und dann die neuen Werte so bestimmt werden, daß der Fehler zwischen den neuen Werten und der exakten Lösung minimal wird, vgl. [107].

Im vorliegenden Fall werden bei der Lösung des Strömungsproblems gut bewertete Verfahren eingesetzt. So wird für die Lösung von (5.10) das Bi-CGStab von VAN DER VORST [112] eingesetzt, und für die Lösung von (5.11) ein lineares Mehrgitterverfahren konstruiert. Auch die SIMPLE-Iteration wird in eine Mehrgitter-Schleife eingebettet. Bei der Strömungsanalyse handelt es sich um ein nichtlineares Mehrgitterverfahren, während die Sensitivitätsberechnung ein lineares Problem darstellt. Dennoch wurde das nichtlineare Mehrgitterverfahren beibehalten, weil dadurch die Kopplung zwischen Geschwindigkeit und Druck auch auf den unteren Ebenen eingeht. Bei einem linearen Mehrgitter werden nur die Residuen auf den unteren Ebenen dargestellt und nicht die physikalischen Größen. Die Verwendung eines nichtlinearen Mehrgitterverfahrens in der hier gegebenen Situation kann daher als eine Art Variablentransformation aufgefaßt werden. Ähnliches Vorgehen findet man bei linearen Mehrgitterstrategien, wenn lokale Verfeinerungen eingesetzt werden, siehe [10].

Die Verwendung von Mehrgitterverfahren hat sich bei CFD-Codes als Standard etabliert. Die erste Anwendung von Mehrgitterverfahren in der Sensitivitätsanalyse stammt von JAMESON [58] aus dem Ende der achtziger Jahre. Die größte Schwierigkeit liegt hier in der Komplexität des verwendeten Codes und der Herleitung der auf den einzelnen Ebenen benötigten Ableitungen.

Der Mehrgitteralgorithmus wird u. a. in [19], [47] oder [114] ausführlich beschrieben. Da aber der Algorithmus auf einer nichtkonformen FEM-Diskretisierung basiert, müssen einige Ergänzungen vorgenommen werden. Im folgenden wird daher sowohl für den linearen als auch für den nichtlinearen Fall der Verlauf kurz beschrieben.

## 5.1 Lineares Mehrgitterverfahren

Mit einem linearen Mehrgitterverfahren wird das folgende lineare Problem gelöst

$$A_L u_L = f_L, \quad (5.13)$$

wobei  $L$  den Index der feinsten Ebene bezeichnet,  $A_L$  die Koeffizientenmatrix;  $u_L$  und  $f_L$  sind der Vektor der Unbekannten und die rechte Seite. Gleichung (5.13) entspricht hier dem Druckproblem (5.11). Im weiteren wird eine Reihe von verschachtelten Gittern indiziert mit  $l$ ,  $l = 0, \dots, L$  angenommen, die jeweils mit der Maschenweite  $h_l$  assoziiert sind. Auf jedem dieser Gitter sollen die Koeffizientenmatrix der Grobgittergleichung  $A_l$  und auf dem feinsten Gitter  $L$  die rechte Seite  $f_L$  sowie eine Anfangslösung  $u_L^0$  definiert sein. Ferner wird angenommen, daß ein Glättungsoperator  $S$  verfügbar sei, um den Fehler in  $u_l^p$  zu glätten und  $u_l^{p+q}$  durch  $S^q(u_l^p, f_l)$  zu erhalten, wo  $p$  und  $q$  die Anzahl der durchgeführten Glättungsschritte bezeichnen. Der Mehrgitteralgorithmus für die Lösung von (5.13) wird rekursiv

definiert.

MGM( $l, u_l^0, f_l, \gamma$ )

Wenn  $l = 0$ , dann  $u_l = A_l^{-1} f_l$ .

Ansonsten:

Führe  $m_l$  Vorglättungsschritte auf  $u_l^0$  mit  $S$  durch, um  $u_l^{m_l}$  zu erhalten:

$$u_l^{m_l} = S^{m_l}(u_l^0, f_l).$$

Berechne das restringierte Residuum mit dem Restriktionsoperator  $I_l^{l-1}$ :

$$f_{l-1} = I_l^{l-1}(f_l - A_l u_l^{m_l})$$

$$u_{l-1}^0 = 0$$

rufe MGM( $l - 1, u_{l-1}^0, f_{l-1}, \gamma$ )  $\gamma$  mal auf, um  $u_{l-1}^\gamma$  zu erhalten.

Berechne  $u_l^{m_l+1}$  mit dem Prolongationsoperator  $I_{l-1}^l$  durch:

$$u_l^{m_l+1} = u_l^{m_l} + \alpha_l I_{l-1}^l u_{l-1}^\gamma,$$

wobei  $\alpha_l$  fest oder adaptiv gewählt werden kann, so daß der Fehler

$u_l^{m_l+1} - u_l$  in einer entsprechenden Norm minimal wird.

Führe  $n_l$  Nachglättungsschritte auf  $u_l^{m_l+1}$  durch, um  $u_l^{m_l+n_l+1}$  zu erhalten:

$$u_l^{m_l+n_l+1} = S^{n_l}(u_l^{m_l+1}, f_l).$$

Das Durchführen einer Iteration mit MGM( $L, u_L^0, f_L, \gamma$ ) liefert die neue Näherungslösung  $u_L^{m_L+n_L+1}$ . Die Anwendung des obigen Algorithmus auf dem Level  $L$  stellt die Näherungslösung zu (5.13) sicher. Jeder Aufruf des Algorithmus wird als ein Zyklus der Mehrgitteriteration bezeichnet. Für  $\gamma = 1$  hat man einen V-Zyklus, für  $\gamma = 2$  einen W-Zyklus.

Ein äußerst wichtiger Schritt ist die Wahl des Parameters  $\alpha_l$ . Der Grund dieses zusätzlichen Schrittes stammt aus der Art der Behandlung der nichtkonformen Finiten Elemente. Im Gegenteil zu konformen Finiten Elementen, die die beste Approximation der Grobgitterlösung  $u_{l-1}^\gamma$  bezüglich der Energie-Norm garantieren, geht diese Eigenschaft bei nichtkonformen Finiten Elementen verloren.

Die Minimierung des Fehlers  $u_l^{m_l+1} - u_l$  ergibt in der Energie-Norm

$$\alpha_l = \frac{\langle f_l - A_l u_l^{m_l}, I_{l-1}^l u_{l-1}^\gamma \rangle_l}{\langle A_l I_{l-1}^l u_{l-1}^\gamma, I_{l-1}^l u_{l-1}^\gamma \rangle_l}$$

und in der "Defekt"-Norm

$$\alpha_l = \frac{\langle f_l - A_l u_l^{m_l}, A_l I_{l-1}^l u_{l-1}^\gamma \rangle_l}{\langle A_l I_{l-1}^l u_{l-1}^\gamma, A_l I_{l-1}^l u_{l-1}^\gamma \rangle_l}.$$

Die Klammern  $\langle \cdot, \cdot \rangle_l$  bezeichnen das Euklidische Skalarprodukt auf dem Level  $l$ .

## 5.2 Nichtlineares Mehrgitterverfahren

Das mit einem nichtlinearen Mehrgitterverfahren zu lösende Problem läßt sich auf Level  $l$  schreiben als

$$L_l(u_l) = f_l. \quad (5.14)$$

Wie im linearen Fall ergibt sich eine Reihe von verschachtelten Gittern mit  $l$ ,  $l = 0, \dots, L$ , indiziert, und auf jeder Ebene wird das Sensitivitätsproblem definiert und diskretisiert in der Form von (5.14). Außerdem steht ein nichtlinearer Glätter  $S$ , hier die SIMPLE-Iteration, zur Verfügung.

Der rekursive nichtlineare Mehrgitteralgorithmus wird wie folgt definiert:

NLMGM( $l, u_l^0, f_l, \gamma$ )

Wenn  $l = 0$ , dann  $u_l = S(u_l^0, f_l)$ .

Ansonsten:

Führe  $m_l$  Vorglättungsschritte auf  $u_l^0$  mit  $S$  durch, um  $u_l^{m_l}$  zu erhalten:

$$u_l^{m_l} = S^{m_l}(u_l^0, f_l).$$

Berechne das restringierte Residuum mit dem Restriktionsoperator  $I_l^{l-1}$ :

$$\tilde{u}_{l-1} = I_l^{l-1} u_l^{m_l}$$

$$f_{l-1} = I_l^{l-1}(f_l - A_l u_l^{m_l})$$

$$u_{l-1}^0 = \tilde{u}_{l-1}$$

rufe NLMGM( $l-1, u_{l-1}^0, f_{l-1}, \gamma$ )  $\gamma$  mal auf, um  $u_{l-1}^\gamma$  zu erhalten.

Berechne  $u_l^{m_l+1}$  mit dem Prolongationsoperator  $I_{l-1}^l$  durch:

$$u_l^{m_l+1} = u_l^{m_l} + \alpha_l I_{l-1}^l (u_{l-1}^\gamma - \tilde{u}_{l-1}),$$

wobei  $\alpha_l$ , ähnlich dem linearen Fall, fest oder adaptiv gewählt

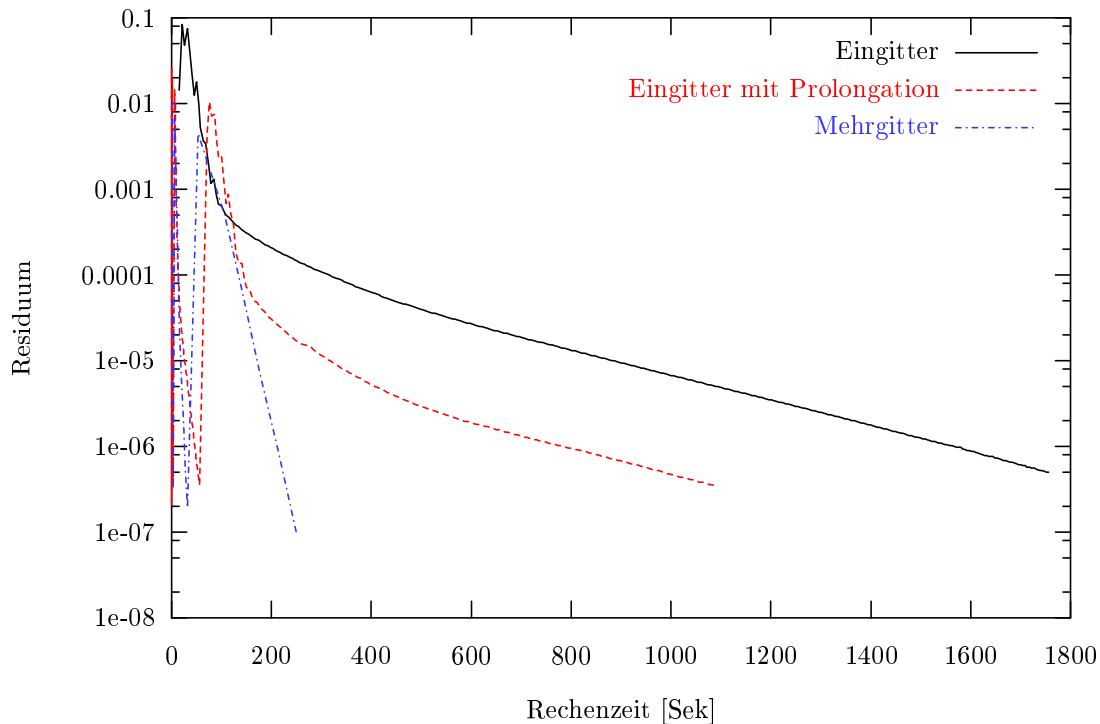
werden kann, so daß der Fehler  $u_l^{m_l+1} - u_l$  in einer entsprechenden Norm minimal wird.

Führe  $n_l$  Nachglättungsschritte auf  $u_l^{m_l+1}$  durch, um  $u_l^{m_l+n_l+1}$  zu erhalten:

$$u_l^{m_l+n_l+1} = S^{n_l}(u_l^{m_l+1}, f_l).$$

Die Restriktions- und Prolongationsoperatoren sind bei SCHREIBER [93] ausführlich erklärt.

Der Glättungsoperator für das nichtlineare Mehrgitterverfahren ist die SIMPLE-Iteration, Gleichungen (5.10)-(5.12). Dabei müssen in jeder Iteration zwei lineare Probleme gelöst werden. Für die Geschwindigkeitssensitivitäten (5.10) wird das Bi-CGStab-Verfahren von VAN DER VORST [112] verwendet; auch ohne Präkonditionierer realisiert es die benötigte Genauigkeit mit Konvergenzraten 0.5 – 0.8. Für die Berechnung des Druckproblems (5.11) wird ein lineares Mehrgitterverfahren eingesetzt. Als Glätter erweist sich ILU als optimal. Mit Hilfe der adaptiven Schrittweitenkontrolle liegen die Konvergenzraten unter 0.1 unabhängig vom gestellten Problem.



**Abbildung 5.1:** Vergleich der Rechenzeiten für das Diffusorproblem im Kapitel 6 für Ein- und Mehrgitterverfahren

Bei der Anwendung eines nichtlinearen Mehrgitterverfahrens in der Sensitivitätsanalyse kann man ein ähnliches Verhalten beobachten wie bei der Strömungsanalyse. Es ist bekannt, daß Mehrgitterverfahren bei den durch die Diffusion dominierten Problemen effizienter sind. Die Ersparnisse sind nahezu identisch mit denen, die man aus der Strömungsanalyse bereits kennt. Auch in diesem Fall sind die nichtlinearen Konvergenzraten vom Verhalten des SIMPLE-Algorithmus abhängig. Dies zeigt sich insbesondere bei verzerrten Gittern.

Die Abbildung 5.1 zeigt einen Vergleich der Rechenzeiten für das Diffusorproblem aus Kapitel 6. Neben dem Mehrgitterverfahren sind auch die Rechenzeiten für die Eingitterlösung mit und ohne Prolongation dargestellt. Für das Eingitterverfahren mit Prolongation werden dieselben Gitter zur Verfügung gestellt wie für das Mehrgitterverfahren. So werden vom Grobgitter immer gute Startwerte auf das aktuelle Feingitter transferiert.

# Kapitel 6

## Testfälle

Um neu entwickelte Codes zu validieren, werden die Ergebnisse üblicherweise mit denen von bereits validierten Codes verglichen. Da für diese Arbeit keine vergleichbaren Codes zur Verfügung standen, wurde der Code anhand analytischer Lösungen validiert.

Für die Navier-Stokes-Gleichungen gibt es im allgemeinen Fall keine analytischen Lösungen, so daß sie nur mit Hilfe numerischer Methoden lösbar sind. Entweder durch die Vereinfachung der Geometrie und Randbedingungen und/oder durch physikalische Annahmen können jedoch Terme aus dem nichtlinearen System gestrichen werden, so daß am Ende gewöhnliche oder lineare partielle Differentialgleichungen übrig bleiben, für welche analytische Lösungen existieren.

Im folgenden wird je ein Testfall für reibungsfreie und reibungsbehaftete Strömungen präsentiert. Für den Navier-Stokesschen Fall wird der Code am rotierenden Zylinder validiert, während für den Eulerschen Fall eine analytische Lösung mit Hilfe der Potentialtheorie hergeleitet wird. Zugrunde liegt dabei das Joukowski-Profil.

Anschließend folgen noch zwei Optimierungsbeispiele; ein ebener Diffusor als Navier-Stokesscher Testfall und für den Eulerschen Fall ein zweidimensionales Schaufelgitter. Anhand dieser Testfälle werden die Anwendungsmöglichkeiten der Sensitivitätsanalyse demonstriert.

### 6.1 Rotierender Zylinder

Der rotierende Zylinder ist ein klassischer Fall der Strömungslehre, für den im Bereich laminarer Strömung eine exakte Lösung existiert. Zwischen zwei konzentrischen Zylindern befindet sich ein viskoses Medium. Die Zylinder werden mit den Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1$  und  $\omega_2$  gedreht, siehe Abbildung 6.1.

Die analytische Lösung findet man u. a. bei ZIEREP [117]. Die Geschwindigkeitsverteilung ist demnach längs des Radius  $r$  gegeben durch:



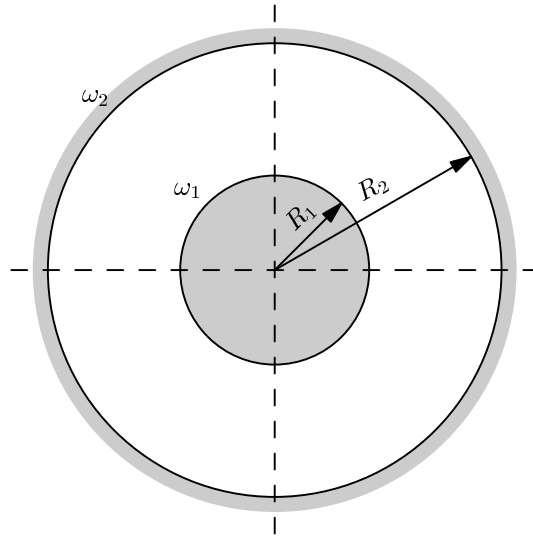


Abbildung 6.1: Rotierender Zylinder

$$v(r) = Ar + \frac{B}{r}, \quad (6.1)$$

wobei die Konstanten  $A$  und  $B$  mit Hilfe der Randbedingungen  $v(R_1) = \omega_1 R_1$  und  $v(R_2) = \omega_2 R_2$  sich als

$$A = \frac{\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad B = \frac{R_1^2 R_2^2 (\omega_1 - \omega_2)}{R_2^2 - R_1^2}$$

ergeben. In radialer Richtung gilt die Beziehung  $dp/dr = \rho \cdot v^2/r$ , aus der durch Integration die Druckverteilung  $p(r)$  folgt:

$$p(r) = p(R_1) + \rho \left[ \frac{A^2}{2} (r^2 - R_1^2) + 2AB \ln \frac{r}{R_1} + \frac{B^2}{2} \left( \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{r^2} \right) \right]. \quad (6.2)$$

Die Gleichungen (6.1) und (6.2) haben im Bereich laminarer Strömung ihre Gültigkeit nur innerhalb eines gewissen Bereichs. Durch die unterschiedlichen Winkelgeschwindigkeiten entsteht eine instabile Zentrifugalkraftschichtung, so daß sich beim Überschreiten einer kritischen Umfangsgeschwindigkeit in axialer Richtung periodisch angeordnete, torusförmige Wirbel, die sog. Taylor-Görtler-Wirbel ausbilden. Der Übergang von der Grundströmung in die periodische Wirbelströmung wird durch die Taylor-Zahl charakterisiert. Mit  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ ;  $\Delta R = R_2 - R_1$  und  $Re_1 = \Delta\omega \cdot R_1^2/\nu$  erhält man:

$$Ta = Re_1 \cdot \sqrt{\left( \frac{\Delta R}{R_1} \right)^3}, \quad (6.3)$$

Level	$\ \mathbf{c} - \mathbf{c}_{h,\alpha}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ p - p_{h,\alpha}\ _{L^2(\Omega)}$
0	0.2363	0.2852
1	0.1166	0.1252
2	0.0526	0.0487
3	0.0269	0.023

**Tabelle 6.1:**  $L^2(\Omega)$ -Fehler für den rotierenden Zylinder

wobei die Größe  $\nu$  die kinematische Viskosität bezeichnet. Aus der linearen Stabilitätstheorie ergibt sich die Grenze bei  $Ta = 41.33$ , siehe BÜHLER [21].

Aus der analytischen Lösung des Strömungsproblems kann man nun eine exakte Lösung für das Sensitivitätsproblem herleiten. Als unabhängige geometrische Größe bieten sich die Radien der Zylinder an. In der vorliegenden Arbeit wird der Radius des kleineren Zylinders  $R_1$  als Sensitivitätsparameter verwendet. Die Lösung des Sensitivitätsproblems liefert somit die Antwort auf die Änderung des Radius des inneren Zylinders.

Zunächst werden die "Konstanten"  $A$  und  $B$  nach  $R_1$  differenziert:

$$\frac{dA}{dR_1} = A_\alpha = \frac{2R_1R_2^2(\omega_2 - \omega_1)}{(R_1^2 - R_2^2)^2}, \quad \frac{dB}{dR_1} = B_\alpha = -\frac{2R_1R_2^4(\omega_2 - \omega_1)}{(R_1^2 - R_2^2)^2}.$$

Damit lautet die analytische Lösung für die Sensitivität der Umfangsgeschwindigkeit:

$$v_\alpha(r) = A_\alpha r + \frac{B_\alpha}{r} \quad (6.4)$$

und für die des Druckes:

$$p_\alpha(r) = p_\alpha(R_1) + \rho [AA_\alpha(r^2 - R_1^2) - A^2R_1] + \rho \left[ 2 \ln \frac{r}{R_1} (A_\alpha B + AB_\alpha) - 2 \frac{AB}{R_1} + BB_\alpha \left( \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{r^2} \right) - \frac{B^2}{R_1^3} \right]. \quad (6.5)$$

In der Tabelle 6.1 sind die  $L^2(\Omega)$ -Fehler der berechneten Geschwindigkeits- und Drucksensitivität bezüglich der exakten Lösung (6.4) und (6.5) aufgelistet. Beide Größen zeigen ein Abklingverhalten etwas über 1. Ordnung. Das ergibt sich aus einer Mischung der konvektiven Terme, die mit dem Upwindverfahren 1. Ordnung diskretisiert sind, und der diffusiven Termen, die mit 2. Ordnung approximiert sind.

In den Abbildungen 6.2 und 6.3 sind die Verteilungen der Druck- und Geschwindigkeitssensitivitäten im Zylinderspalt dargestellt. Die unterschiedliche Länge der einzelnen Kurven läßt sich damit erklären, daß die dargestellten Werte direkt dem

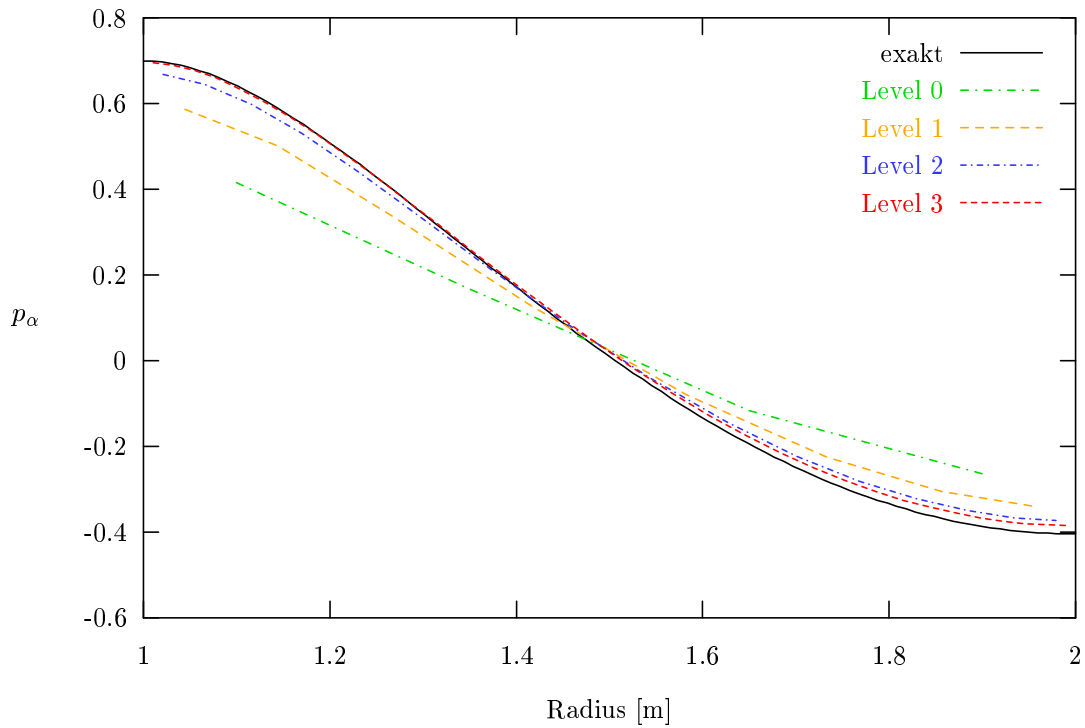


Abbildung 6.2: Sensitivitäten des Druckes für den rotierenden Zylinder

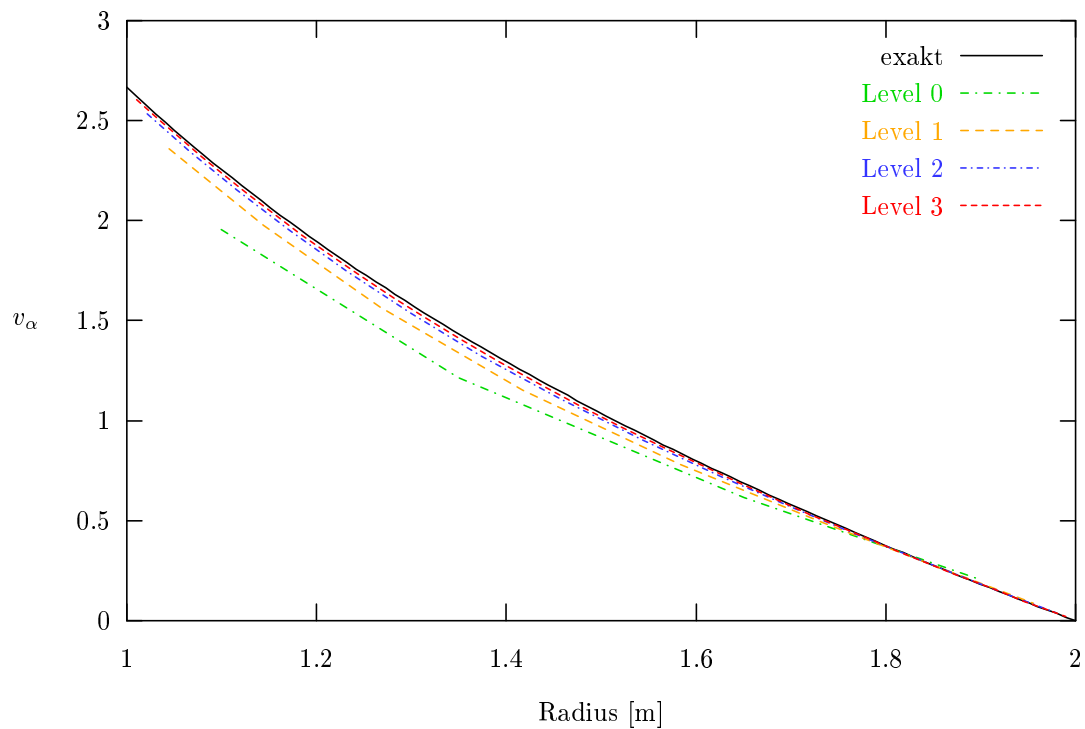


Abbildung 6.3: Sensitivitäten der Umfangsgeschwindigkeit für den rotierenden Zylinder

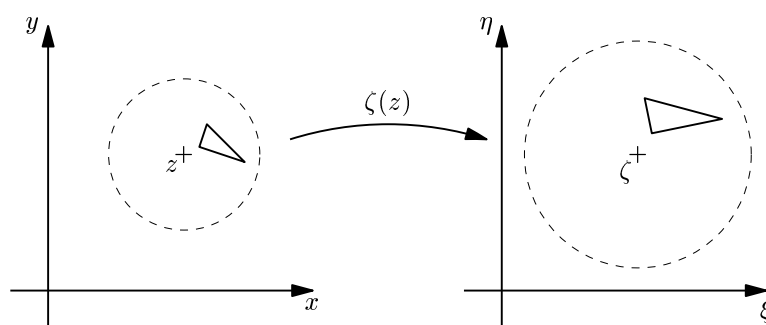
Berechnungsort – Zellenmittelpunkt beim Druck, bzw. Zelloberflächenmittelpunkt bei den Geschwindigkeiten – zugeordnet sind.

Bei größeren  $R_1$ -Werten verringert sich die Spaltenbreite  $R_2 - R_1$  notwendigerweise. In einem engeren Spalt bauen sich kleinere Druckunterschiede zwischen dem inneren und äußeren Zylinder auf. Wird das Druckniveau identisch mit dem mittleren Druck im Spalt gewählt so führt dies am inneren Zylinder zu steigenden, am äußeren zu sinkenden Druckwerten. Dieser Vorgang ist der Sensitivitätsverteilung in Abbildung 6.2 zu entnehmen.

Weder die Dirichlet-Randbedingungen am äußeren Zylinder noch der Radius  $R_2$  sind von der Änderung von  $R_1$  betroffen. So sind auch die Sensitivitäten an dieser Stelle gleich Null. Am inneren Zylinder sind die Randwerte von  $R_1$  unabhängig, der Ort, an dem die Werte definiert sind, ändert sich jedoch. Außerdem sind am Rand Geschwindigkeitsgradienten vorhanden. So ergeben sich nach Gleichung (4.43) Sensitivitäten am inneren Zylinder, die von Null verschieden sind.

## 6.2 Joukowski-Profil

Bei der Methode der konformen Abbildung werden die  $z$ - und  $\zeta$ -Ebene betrachtet. Ist dabei die Funktion  $\zeta(z)$  gegeben, wird jedem Punkt  $z$  der  $z$ -Ebene ein eindeutig festgelegter Punkt  $\zeta$  der  $\zeta$ -Ebene zugeordnet. Durch die Funktion  $\zeta(z)$  werden beide Bereiche aufeinander abgebildet. Ist diese Abbildung analytisch, d. h. werden die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt, dann hat  $d\zeta/dz$  an jeder Stelle des betrachteten Bereichs einen bestimmten, von Null verschiedenen Wert, und die Abbildung  $\zeta(z)$  wird als *konform* bezeichnet. Das bedeutet auch, daß Schnittwinkel von Kurven durch  $z$  in Größe und Drehsinn gegenüber der Abbildung  $\zeta(z)$  invariant sind. So wird z. B. ein unendlich kleines Dreieck in einer Umgebung von  $z$  in ein ähnliches Dreieck der  $\zeta$ -Ebene abgebildet, s. Abbildung 6.4. Insbesondere bildet



**Abbildung 6.4:** Geometrische Darstellung der Konformität

jede konforme Abbildung orthogonale Koordinatenlinien auf zueinander orthogonale Kurvenscharen der  $\zeta$ -Ebene ab. Diese Eigenschaft der konformen Abbildung findet vor allem bei der Generierung orthogonaler Rechenetze Verwendung und wird auch in dieser Arbeit eingesetzt, s. Abbildungen 6.7 und 6.13.

In dieser Arbeit wird jedoch auf eine andere Anwendungsmöglichkeit Wert gelegt. Durch den Riemannschen Abbildungssatz (vgl. [20] S. 533) ist es immer möglich,

eine beliebig gestaltete Körperform auf einen Kreis abzubilden und zwar so, daß einem beliebigem Punkt des Kreises ein Punkt der gegebenen Kontur und dem Kreismittelpunkt ein Punkt im Innern der Kontur entspricht. Dieser Satz ist besonders geeignet, Strömungsbilder um Tragflügelprofile zu erstellen, wobei die Strömung um die gegebene Kontur mittels einer analytischen Funktion auf die bekannte Funktion um einen Kreis zurückgeführt wird. Mit der bekannten komplex konjugierten Geschwindigkeit  $\bar{w}(z)$  um den Kreis läßt sich das Strömungsfeld um die vorgegebene Kontur in der  $\zeta$ -Ebene wie folgt definieren:

$$\bar{w}(\zeta) = \frac{dz}{d\zeta} \bar{w}(z). \quad (6.6)$$

Näheres über konforme Abbildung findet man z. B. bei TRUCKENBRODT [106]. Im folgenden werden zwei Anwendungen der konformen Abbildung präsentiert, bei denen die Joukowsky-Abbildung verwendet wird.

Die Joukowskysche Abbildungsfunktion [60] ist gegeben durch

$$\zeta = z + \frac{a^2}{z}. \quad (6.7)$$

Sie bildet die Strömung um einen Zylinder mit Radius  $a$  (Bildkreis) in der  $z$ -Ebene auf die Strömung entlang einer ebenen Platte der Länge  $l = 4a$  in der  $\zeta$ -Ebene ab. Bei anderer Wahl des Bildkreises lassen sich tragflügelartige Profile, die sogenannten Joukowsky-Profile, abbilden. Dabei wird der Bildkreis mit Radius  $R$  um den Ursprung mit  $z_0 = x_0 + iy_0$  verschoben. Dabei beschreibt  $x_0$  die Dicke und  $y_0$  charakterisiert die Wölbung des Profils.

Im folgenden werden die Lösungen des Strömungs- sowie des Sensitivitätsproblems für zwei verschiedene  $z_0$  hergeleitet. Im ersten Fall wird der Imaginärteil gleich Null gesetzt, wodurch symmetrische Profilformen entstehen. Im zweiten Fall hingegen wird eine allgemeine Konfiguration betrachtet, bei der sich sowohl der Real- als auch der Imaginärteil von  $z_0$  von Null unterscheiden.

### 6.2.1 Symmetrisches Joukowsky-Profil

Die Abbildung 6.5 zeigt die geometrische Darstellung der Funktion für  $\Im(z_0) = 0$ . Für das Sensitivitätsproblem wird  $x_0$ , der Realteil von  $z_0$ , als Designparameter gewählt. In Abbildung 6.6 ist die Verformung des Profils für unterschiedliche  $x_0$  Werte dargestellt.

Ein Spezialfall der Joukowsky-Abbildung ergibt sich, wenn  $y_0 = 0$ , und der Bildkreis mit dem Einheitskreis nur einen gemeinsamen Punkt bei  $z = a$  hat. Mit dieser Transformation entsteht ein symmetrisches Tropfenprofil. Die Transformation (6.7) lautet unter dieser Voraussetzung:

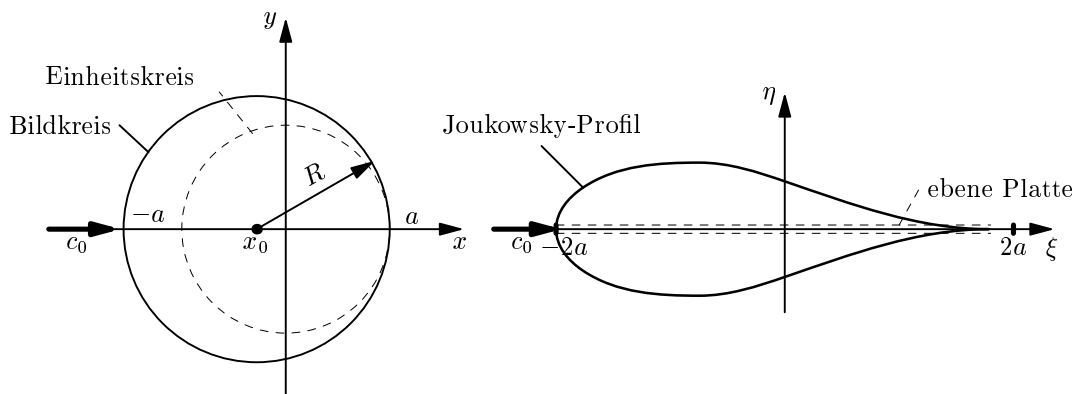


Abbildung 6.5: Geometrische Darstellung der Joukowskyschen Transformation

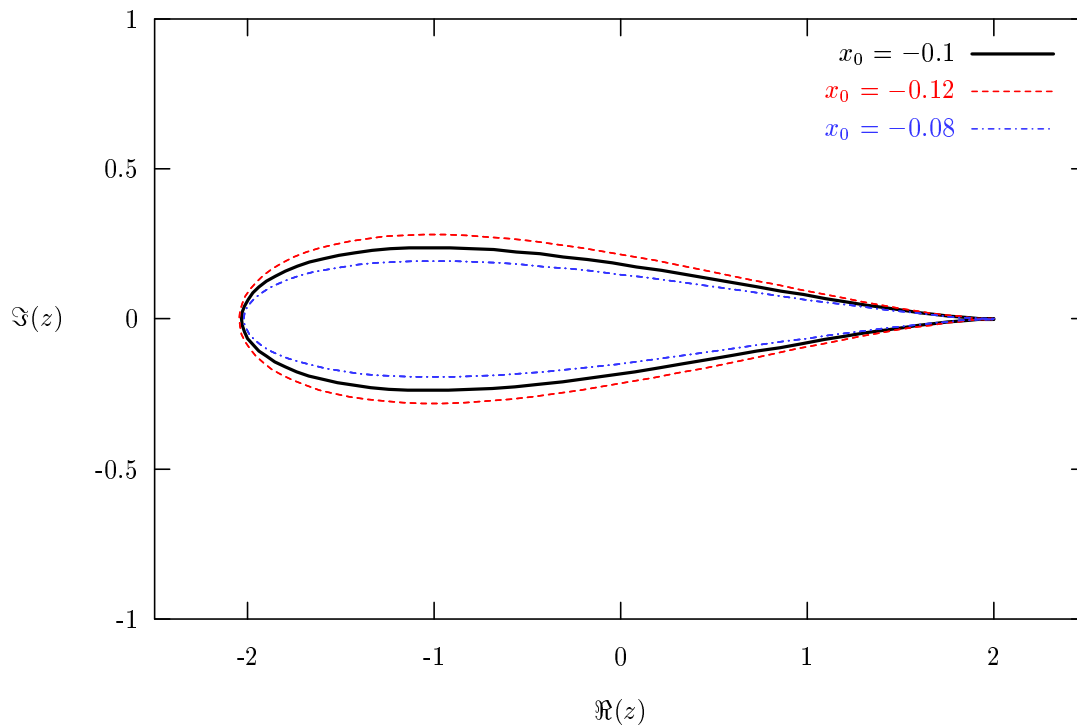


Abbildung 6.6: Änderung der Profilform für  $a = 1.0$  mit unterschiedlichen  $x_0$ -Werten

$$\zeta = z - x_0 + \frac{a^2}{z - x_0}. \tag{6.8}$$

Für die Rücktransformation gilt:

$$z = \zeta + \sqrt{\frac{\zeta^2}{4} - a^2} + x_0. \tag{6.9}$$

Das "Maß der Verzerrung" ergibt sich aus der folgenden Ableitung:

$$\frac{d\zeta}{dz} = 1 - \frac{a^2}{(z - x_0)^2}. \quad (6.10)$$

Die konjugiert komplexe Geschwindigkeit um einen Kreis ist gegeben durch

$$\bar{w}(z) = u - iv = c_0 \left[ 1 - \left( \frac{R}{z} \right)^2 \right], \quad (6.11)$$

wobei  $c_0$  die Strömungsgeschwindigkeit der ungestörten Strömung bedeutet.

Das Geschwindigkeitsfeld um den Tragflügel in der  $\zeta$ -Ebene ergibt sich mit (6.6) und (6.10) wie folgt:

$$\bar{w}(\zeta) = c_0 \frac{1 - \left( \frac{R}{z} \right)^2}{1 - \left( \frac{a}{z - x_0} \right)^2}. \quad (6.12)$$

Um einen Ausdruck für die Druckberechnung zu erhalten, verwendet man die Bernoulli-Gleichung und erhält:

$$p = \rho \frac{c_0^2 - w\bar{w}}{2} + p_0. \quad (6.13)$$

Somit existiert eine analytische Lösung für das Strömungsproblem. Um nun ein Sensitivitätsproblem zu definieren, benötigt man eine implizite Geometriegröße, für deren Änderung die Systemantwort gesucht wird. Eine Lösung könnte sein, die Verschiebung  $x_0$  des Bildkreises um den Ursprung als "Designparameter" zu nehmen. Um eine analytische Lösung für das dadurch gestellte Sensitivitätsproblem zu erhalten, müssen die Gleichungen (6.12) und (6.13) nach  $x_0$  abgeleitet werden.

Zuvor muß jedoch  $z$  in Gleichung (6.12) mit (6.9) auf  $\zeta$  transformiert werden. Sonst würden sich Sensitivitäten ergeben, die auf der  $z$ -Ebene zum selben  $z$ -Wert gehören und nicht diejenigen, die auf der  $\zeta$ -Ebene zum selbem  $\zeta$ -Wert gehören. Die Rücktransformation kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$z = z' + x_0, \quad (6.14)$$

wobei  $z'$  den von  $\zeta$  abhängigen Term in (6.9) bezeichnet. Außerdem soll der Radius des Bildkreises  $R$  auch eine Funktion von  $x_0$  sein, damit wir für jede Wahl von  $x_0$  ein Tropfenprofil erhalten. Es gilt also:  $R = a + x_0$ . Setzt man nun diese Abhängigkeit für  $R$  und (6.14) für  $z$  in (6.12) ein, erhält man:

$$\bar{w}(\zeta) = c_0 \frac{1 - \left( \frac{a+x_0}{z'+x_0} \right)^2}{1 - \left( \frac{a}{z'} \right)^2}. \quad (6.15)$$

Level	$\ \mathbf{c} - \mathbf{c}_h\ _{L^2(\Omega)}$	$\ p - p_h\ _{L^2(\Omega)}$
0	1.1632	0.9818
1	0.5459	0.4142
2	0.2949	0.2079
3	0.1509	0.0979

**Tabelle 6.2:**  $L^2(\Omega)$ -Fehler für den Joukowski-Testfall "Tropfenprofil"

Das Differenzieren von (6.15) liefert:

$$\bar{w}_\alpha(\zeta) = -2c_0 \frac{(a + x_0) z'^2}{(z' + a)(z' + x_0)^3} \quad (6.16)$$

und die Rücktransformation von  $z'$  auf  $z$ :

$$\bar{w}_\alpha(\zeta) = -2c_0 \frac{R(z - x_0)}{z^3(z + a - x_0)}. \quad (6.17)$$

Die Differentiation von (6.13) ist damit leicht durchzuführen. Als Ergebnis erhält man die Drucksensitivitäten:

$$p_\alpha = -\rho \frac{w_\alpha \bar{w} + w \bar{w}_\alpha}{2} + p_{\alpha 0}. \quad (6.18)$$

Tabelle 6.2 enthält die  $L^2(\Omega)$ -Fehler der berechneten Geschwindigkeits- und Drucksensitivitäten bezüglich der exakten Lösung. Sowohl der Geschwindigkeits- als auch der Druckfehler zeigen ein Abklingverhalten von 1. Ordnung in der  $L^2(\Omega)$ -Norm, welches der Upwind-Approximation der konvektiven Terme und der stückweise konstanten Approximation des Druckes entspricht.

In Abbildung 6.7 sind das feinste verwendete Rechennetz und die berechneten Isolien der Drucksensitivität dargestellt. Die Abbildungen 6.8 - 6.10 zeigen die graphischen Darstellungen der für Druck und Geschwindigkeit in Tabelle 6.2 aufgelisteten Werte.

Mit Hilfe der in Abbildung 6.6 dargestellten Profile lassen sich die Sensitivitätsverteilungen verstehen. Die Änderungen am Designparameter  $x_0$  führen auf unterschiedlich dicke Profile. Die Dickenänderung beeinflusst den Druck und die Geschwindigkeiten vor allem im ersten Drittel der Skelettlinie. Dies ist auch den Sensitivitäten zu entnehmen, die in diesem Bereich ihre Maxima und auf dem Rest der Skelettlinie Werte um Null aufnehmen.

Aus Symmetriegründen wurde für die Berechnung nur die Hälfte des Rechengitters verwendet. Das feinste Gitter besteht aus  $97 \times 49 \times 9$  Zellen und die Grobgitter entstehen jeweils durch Weglassen jeder zweiten Zelle aus dem aktuellen Feingitter.



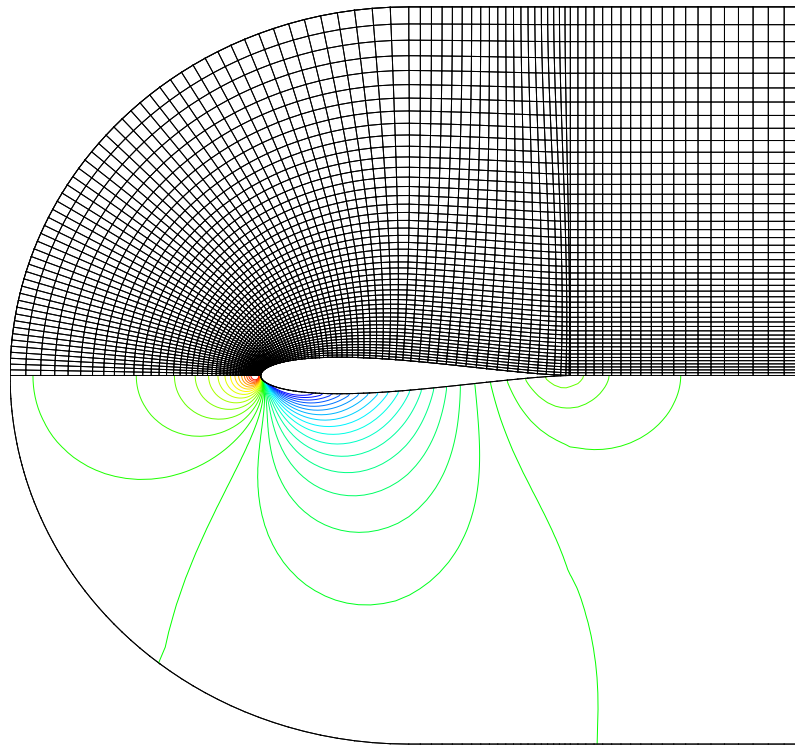


Abbildung 6.7: Rechennetz und berechnete Isolinien der Drucksensitivität auf Level 3

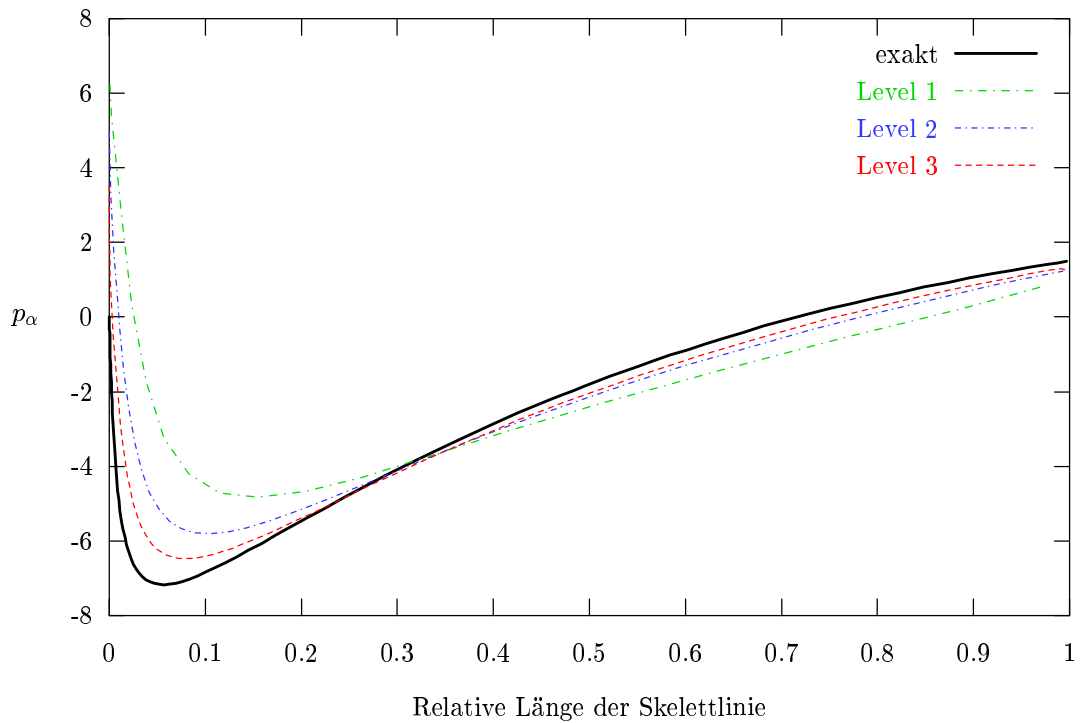
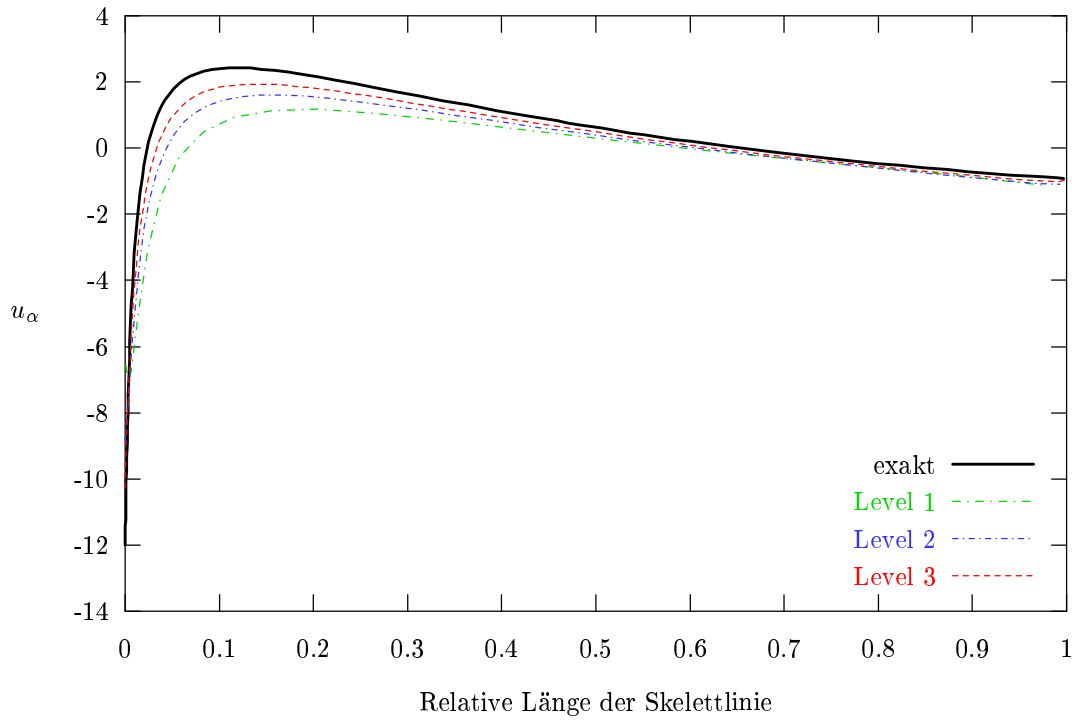
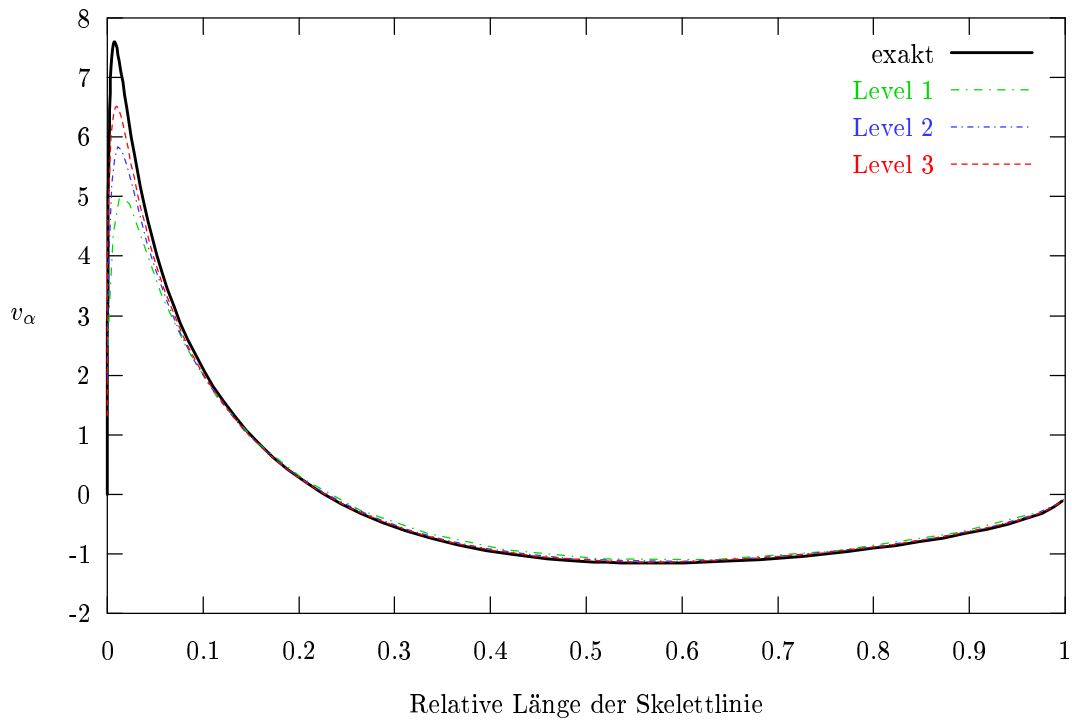


Abbildung 6.8: Berechnete Drucksensitivitäten verglichen mit der analytischen Lösung auf dem Profil



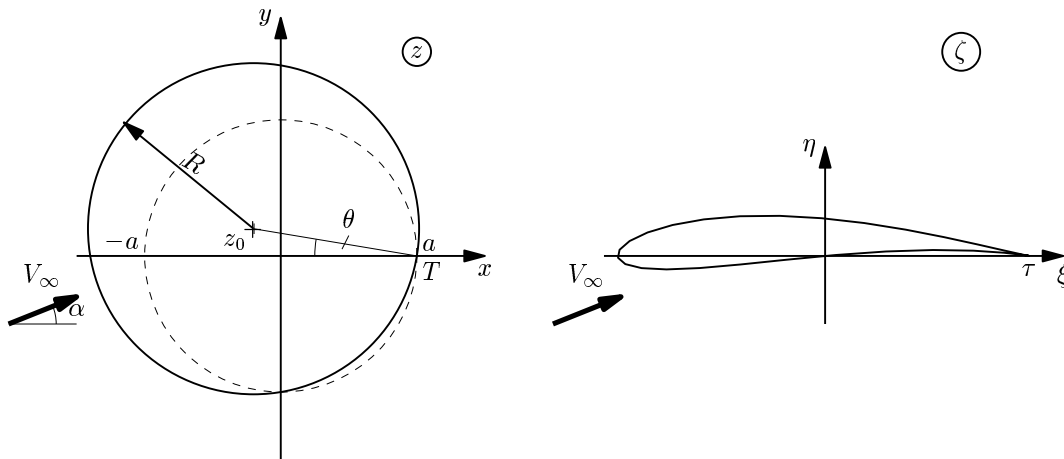
**Abbildung 6.9:** Berechnete Sensitivitäten der Geschwindigkeit in  $x$ -Richtung verglichen mit der analytischen Lösung auf dem Profil



**Abbildung 6.10:** Berechnete Sensitivitäten der Geschwindigkeit in  $y$ -Richtung verglichen mit der analytischen Lösung auf dem Profil

### 6.2.2 Allgemeines Joukowski-Profil

Zur Verallgemeinerung der Joukowski-Transformation wird eine allgemeine Verschiebung  $z_0$  gewählt. Als unabhängiger Designparameter wird der Imaginärteil  $y_0$  definiert. Für diesen Fall entstehen allgemeine, d. h. gewölbte Profile. Unter diesen ist der Fall, daß der Bildkreis den Einheitskreis im Punkt  $T = (a, 0)$  schneidet, vgl. Abbildung 6.11. So erhält man eine Erweiterung des im vorherigen Abschnitt behandelten Falles, ein "gewölbtes Tropfenprofil". In Abbildung 6.12 sind Profile für verschiedene  $y_0$ -Werte dargestellt.



**Abbildung 6.11:** Geometrische Darstellung der Joukowskyschen Transformation für einen allgemeinen Fall

Die Transformation und Rücktransformation lassen sich analog zu den Gleichungen (6.8) und (6.9) schreiben als:

$$\zeta = z - z_0 + \frac{a^2}{z - z_0} \tag{6.19}$$

und

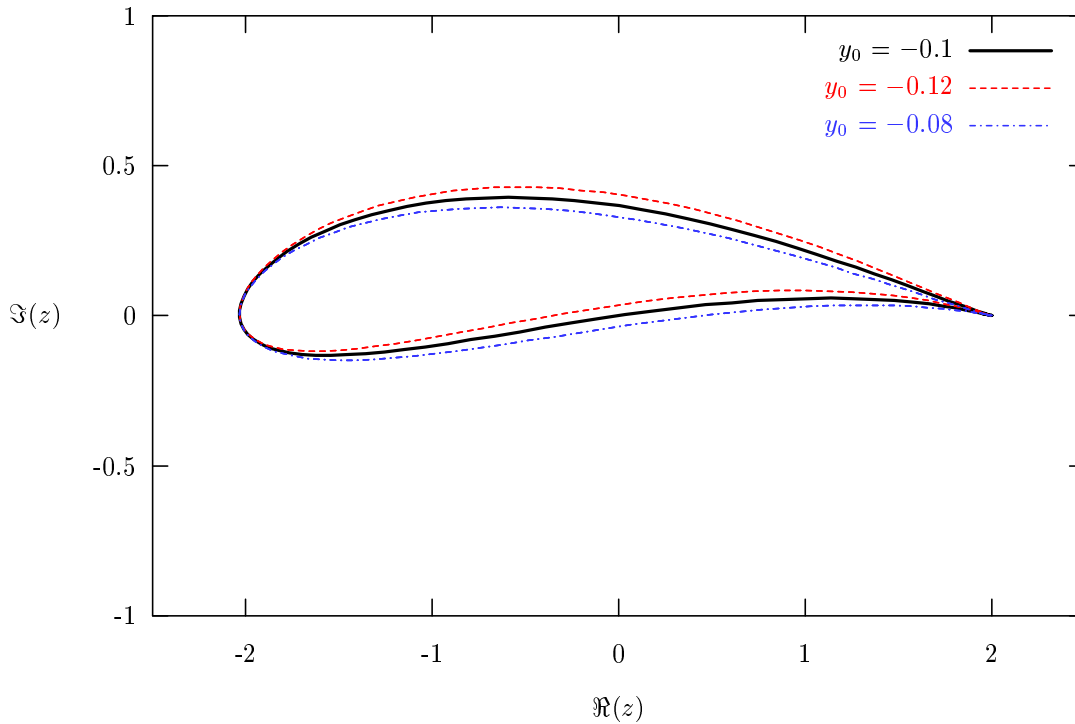
$$z = \zeta + \sqrt{\frac{\zeta^2}{4} - a^2} + z_0. \tag{6.20}$$

Dasselbe gilt auch für die Ableitung der Transformation:

$$\frac{d\zeta}{dz} = 1 - \frac{a^2}{(z - z_0)^2}. \tag{6.21}$$

Die konjugiert komplexe Geschwindigkeit um einen Kreiszyylinder mit Zirkulation ist gegeben durch:

$$\bar{w}(z) = u - iv = \bar{V}_\infty - V_\infty \frac{R^2}{z^2} + \frac{\Gamma}{2\pi iz}, \tag{6.22}$$



**Abbildung 6.12:** Änderung der Profilform für  $a = 1.0$  und  $x_0 = 0.1$  mit unterschiedlichen  $y_0$ -Werten.

wobei  $V_\infty = |v_\infty| e^{i\alpha}$  und  $\bar{V}_\infty = |v_\infty| e^{-i\alpha}$  die ungestörte Strömung und ihre Konjugierte in komplexer Schreibweise weit vom Körper entfernt sind und  $\alpha$  den Winkel bezeichnet, den die Strömung im Unendlichen mit der horizontalen Achse einschließt. Die Größe  $\Gamma$  ist die Zirkulation um den Kreiszyylinder, deren Größe noch unbekannt ist. Die Bestimmung der Zirkulation erfolgt mit Hilfe der folgenden Überlegung: In Abbildung 6.11 bezeichnet der Punkt  $T$  am Kreis den Punkt der in der  $\zeta$ -Ebene auf den Punkt  $\tau$  abgebildet wird. Um im Punkt  $\tau$  (Hinterkante des Profils) eine endliche Geschwindigkeit erhalten zu können, muß die Geschwindigkeit im Sinne der Kutta-Joukowskysche Abströmbedingung (s. [106], S. 220) im Punkt  $T$  verschwinden. Es gilt also:

$$\bar{w}(z_T) = \bar{V}_\infty - V_\infty \frac{R^2}{z_T^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i z_T} = 0. \quad (6.23)$$

Die Koordinaten des Punktes  $z_T$  im Koordinatensystem des Bildkreises ( $R$ ) lassen sich als  $z_T = R e^{i\theta}$  schreiben, wobei  $\theta$  im Sinne der Abbildung 6.11 zu verstehen ist. Setzt man diesen Ausdruck und den für die ungestörte Strömung  $V_\infty$  in Gleichung (6.23) ein, erhält man:

$$|v_\infty| e^{-i\alpha} - |v_\infty| e^{i\alpha} \frac{1}{e^{2i\theta}} + \frac{\Gamma}{2\pi i R e^{i\theta}} = 0. \quad (6.24)$$

Nach Auflösung ergibt sich für  $\Gamma$ :

$$\Gamma = 2\pi i R |v_\infty| (e^{i(\alpha-\theta)} - e^{-i(\alpha-\theta)}), \quad (6.25)$$

oder

$$\Gamma = 4\pi R |v_\infty| \sin(\theta - \alpha). \quad (6.26)$$

Der Winkel  $(\theta - \alpha)$  ist der Anströmwinkel. Wird das Profil mit  $\alpha = \theta$  angeströmt, dann verschwindet die Zirkulation automatisch, und es entsteht kein Auftrieb um das Profil.

Mit den Gleichungen (6.22) und (6.26) erhält man das Geschwindigkeitsfeld um den Kreiszyylinder. Transformiert man dieses Strömungsfeld mit Gleichung (6.6) von der  $z$ -Ebene auf die  $\zeta$ -Ebene, erhält man die Strömung um das Profil:

$$\bar{w}(\zeta) = \frac{\bar{V}_\infty - V_\infty \frac{R^2}{z^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi z}}{1 - \frac{a^2}{(z-z_0)^2}} \quad (6.27)$$

mit (6.26) für die Zirkulation  $\Gamma$ . Der Druck berechnet sich – wie im symmetrischen Fall – mit (6.13):

$$p = \rho \frac{v_\infty^2 - w\bar{w}}{2} + p_\infty. \quad (6.28)$$

Nun kann man aus den Gleichungen (6.27) und (6.28) auch für das Sensitivitätsproblem eine analytische Lösung herleiten. Dafür wird der Imaginärteil  $y_0$  von  $z_0$  als unabhängige Variable gewählt und dabei darauf geachtet, daß der Bildkreis den kritischen Punkt  $T$  immer schneidet. Dies führt auf die Bedingung:

$$R = \sqrt{(a - x_0)^2 + y_0^2}. \quad (6.29)$$

Außerdem hängt auch der Winkel  $\theta$  von  $y_0$  ab:

$$\theta = \arctan\left(\frac{y_0}{a + x_0}\right). \quad (6.30)$$

Damit ist auch der Ausdruck für  $\Gamma$  (6.26) eine Funktion von  $y_0$ .

Vor dem Differenzieren von (6.27) führt man dieselbe Transformation durch wie beim symmetrischen Fall und setzt

$$z = z' + z_0 \quad (6.31)$$

in Gleichung (6.27) ein. Als Ergebnis erhält man das Geschwindigkeitsfeld in direkter Abhängigkeit von  $\zeta$ :

Level	$\ \mathbf{c} - \mathbf{c}_h\ _{L^2(\Omega)}$	$\ p - p_h\ _{L^2(\Omega)}$
0	1.5427	1.2192
1	0.6833	0.5603
2	0.3501	0.2791
3	0.1632	0.1311

**Tabelle 6.3:**  $L^2(\Omega)$ -Fehler für den allgemeinen Joukowski-Testfall

$$\bar{w}(\zeta) = \frac{\bar{V}_\infty - V_\infty \frac{R^2}{(z'+z_0)^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi(z'+z_0)}}{1 - \left(\frac{a}{z'}\right)^2}, \quad (6.32)$$

wobei die mit  $z'$  gekennzeichneten Terme die in Gleichung (6.20) den von  $\zeta$  abhängigen Term bezeichnen, d. h.  $z' = f(\zeta)$ . Differenzieren von (6.32) nach  $y_0$  liefert:

$$\bar{w}_\alpha(\zeta) = \frac{-2V_\infty \frac{y_0}{(z'+z_0)^2} + 2iV_\infty \frac{R^2}{(z'+z_0)^3} + \frac{\Gamma_\alpha}{2\pi i(z'+z_0)} - \frac{\Gamma}{2\pi i(z'+z_0)^2}}{1 + \left(\frac{a}{z'}\right)^2}$$

und nach der Rücktransformation von  $z'$  auf  $z$ :

$$\bar{w}_\alpha(\zeta) = \frac{1}{1 + \left(\frac{a}{z-z_0}\right)^2} \left( -2V_\infty \frac{y_0}{z^2} + 2iV_\infty \frac{R^2}{z^3} + \frac{\Gamma_\alpha}{2\pi i z} - \frac{\Gamma}{2\pi i z^2} \right), \quad (6.33)$$

wobei

$$\Gamma_\alpha = \frac{\partial \Gamma}{\partial y_0} = 4\pi |v_\infty| \left( \frac{y_0}{R} \sin(\theta - \alpha) + \frac{R}{a + x_0} \frac{\cos(\theta - \alpha)}{1 + \left(\frac{y_0}{a+x_0}\right)^2} \right). \quad (6.34)$$

Die Drucksensitivität berechnet sich wie in Gleichung (6.18):

$$p_\alpha = -\rho \frac{w_\alpha \bar{w} + w \bar{w}_\alpha}{2} + p_{\alpha\infty} \quad (6.35)$$

Mit den Gleichungen (6.33) und (6.35) existiert nun auch für das Sensitivitätsproblem eine analytische Lösung. Für die Berechnung werden auch in diesem Fall eine Reihe von sukzessiv verfeinerten Gittern herangezogen, von denen das feinste in Abbildung 6.13 dargestellt ist. Die auf diesem Gittern berechneten Isolinien der Drucksensitivität sind in Abbildung 6.14 dargestellt. Für die Berechnung wurde der Radius des Einheitskreises  $a = 1.0$  gewählt und  $z_0 = 0.1(1, i)$  gesetzt. Der Anströmwinkel beträgt  $\alpha = 10^\circ$ . In Tabelle 6.3 sind die Ergebnisse numerisch zusammengefaßt.

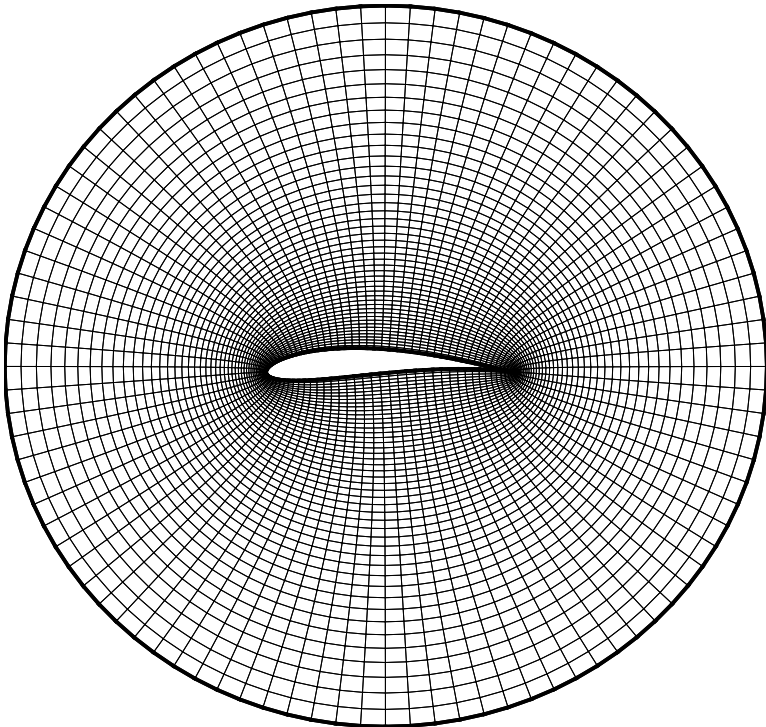


Abbildung 6.13: Verwendetes Rechnennetz für den allgemeinen Joukowski-Testfall

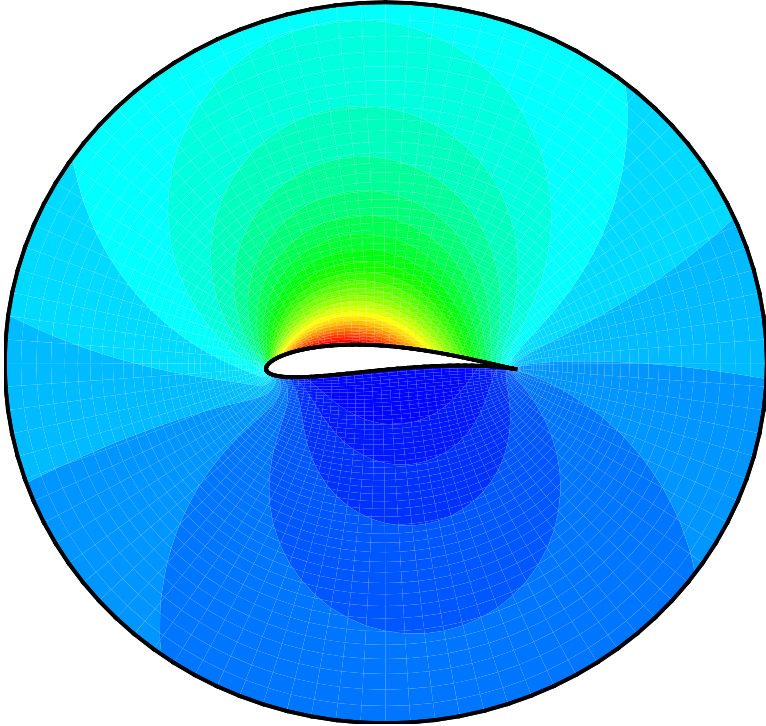
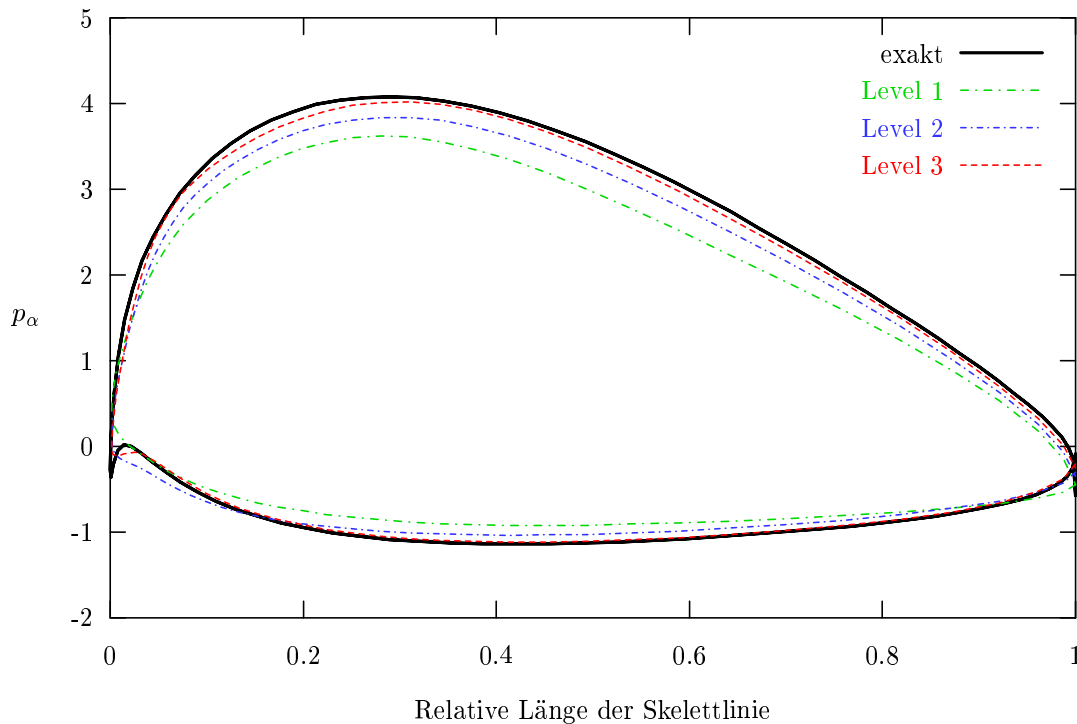


Abbildung 6.14: Berechnete Isolinien der Drucksensitivität auf Level 3



**Abbildung 6.15:** Berechnete Drucksensitivitäten verglichen mit der analytischen Lösung auf dem Profil für den allgemeinen Joukowski-Testfall

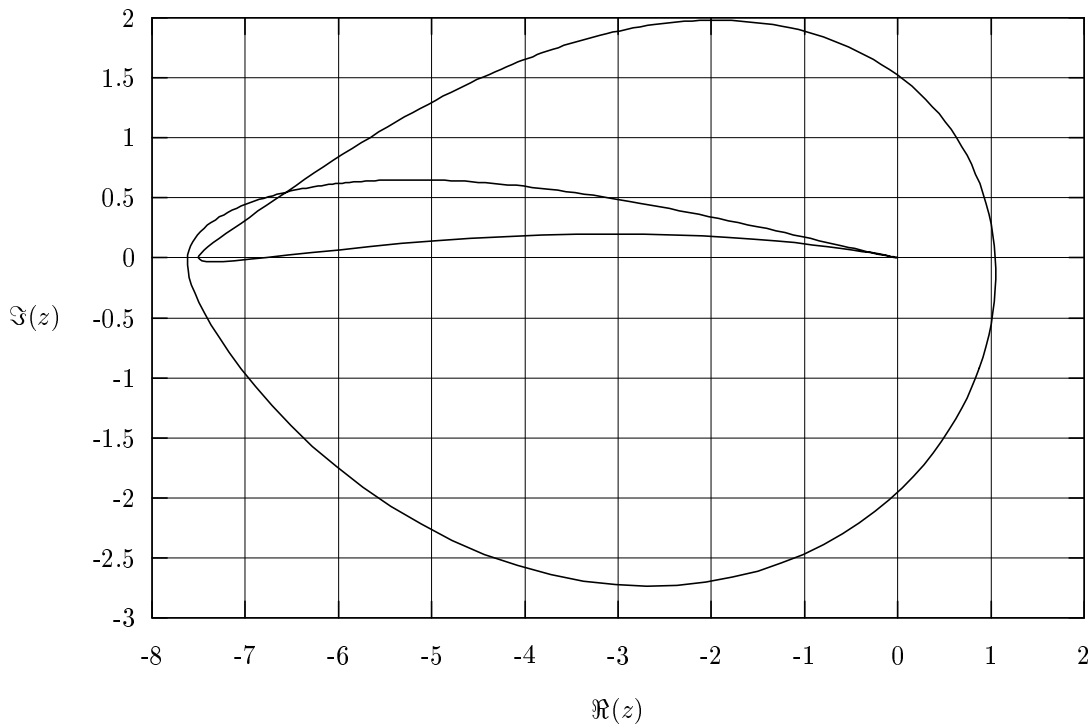
Das Konvergenzverhalten ist mit dem des symmetrischen Falles zu vergleichen. In Abbildung 6.15 wird zusätzlich die auf dem Profil berechnete Drucksensitivität mit der exakten Lösung verglichen.

Die Sensitivitätsverteilung wird auch in diesem Fall mit Hilfe der Abbildung 6.12 verständlich gemacht. Die Änderung der Wölbung durch den Designparameter  $y_0$  betrifft vor allem den mittleren Bereich der Skelettlinie. Dies spiegelt sich auch in der Sensitivitätsverteilung des Druckes wider. Während die Sensitivität ihr Extremum bei 30% der Skelettlinielänge auf der Druck- und bei 40% auf der Saugseite annimmt, fällt sie im Nasen- und Hinterkantenbereich auf Null ab.

Bei der Betrachtung noch allgemeinerer Probleme, die ebenfalls mit Hilfe konformer Abbildung gelöst wurden, wie z. B. des Axialgitters von GOSTELOW [43], stößt man auf das Problem, daß sich die Rücktransformation in expliziter Form nicht mehr darstellen läßt und so die Ableitung nach frei gewählten Geometriegrößen nicht möglich ist. Es gilt generell, daß analytische Lösungen für Druck und Geschwindigkeiten mit Hilfe konformer Abbildung auf der  $\zeta$ -Ebene dargestellt werden können, jedoch mit  $z$ -Werten im Funktionsargument. Solange man nur an der Lösung der Strömungsgrößen interessiert ist, erhält man damit relativ einfache Ausdrücke. Will man aber die Funktionen der Strömungsgrößen nach Geometriegrößen auf der  $\zeta$ -Ebene ableiten, benötigt man die Rücktransformation, und kommt so auf das bereits oben erläuterte Problem.

Eine zusätzliche Schwierigkeit entsteht durch die Definition der Quadratwurzel für





**Abbildung 6.16:** Eine typische Bahn des Funktionsarguments für ein allgemeines Joukowski-Profil

komplexe Zahlen  $z$ . B. in Gleichung (6.9). Die Standardbibliotheksfunktion  $\text{sqrt}()$  liefert Werte mit dem Phasenwinkel im Bereich von  $[-\pi/2; \pi/2]$  zurück. Da die Quadratwurzel eine mehrdeutige und mehrwertige Funktion ist, reicht auch eine Ausweitung des Parameterraums von  $\text{sqrt}()$  auf  $[-\pi; \pi]$  nicht völlig aus. Da sich die Wurzel auf unterschiedlichen Riemann-Ebenen befinden können, könnte die richtige Riemann-Ebene ermittelt werden, in dem man dem Funktionsargument folgt. In Abhängigkeit davon, aus welcher Richtung es die positive reelle Achse schneidet, wird der Zähler der aktuellen Riemann-Ebene vergrößert oder verkleinert. Für weitere detailliertere Beschreibung siehe [71]. Abbildung 6.16 zeigt die Bahn des Funktionsarguments für ein allgemeines Joukowski-Profil, wobei  $y_0 \neq 0$  vorausgesetzt ist.

### 6.3 Ebener Diffusor

Die Anwendung der Sensitivitätsanalyse für Optimierungsprobleme wird zuerst an einem Diffusorproblem demonstriert. Das ist ein klassischer Testfall für die Untersuchung von Optimierungsalgorithmen, auf der Basis eines Navier-Stokes-Verfahrens. So gibt es auch zahlreiche Literaturstellen, in denen das Problem untersucht worden ist. Details über die Optimierung von geraden, ebenen, laminaren Diffusorströmungen sind z. B. bei CABUK ET AL [25], MADSEN [67] und SVENNINGSSEN ET AL [98] nachzulesen.

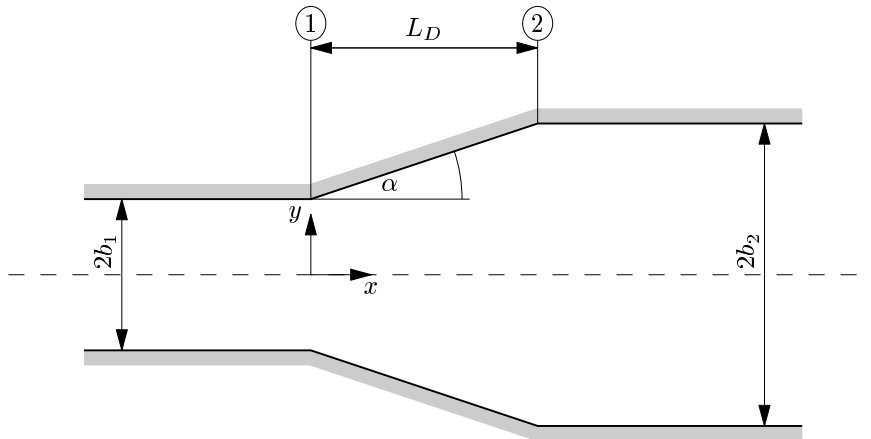


Abbildung 6.17: Diffusor

Die Diffusorgeometrie ist in der Abbildung 6.17 schematisch dargestellt. Bei festgehaltenen  $L_D/b_1$ - und  $b_2/b_1$ -Verhältnissen wird das Wandprofil des Diffusors optimiert. Die Zielfunktion ist der Diffusorwirkungsgrad, der als der Quotient der idealen und realen statischen Druckerhöhung zwischen den Querschnitten 1 und 2 definiert ist.

$$\eta_D = \frac{\Delta p_{re}}{\Delta p_{id}} = \frac{p_2 - p_1}{\frac{\rho}{2} u_1^2 \left[ 1 - \frac{1}{AR^2} \right]} \quad (6.36)$$

Der lokale Druckkoeffizient wird definiert als  $c_p := \frac{(p_2 - p_1)}{\frac{\rho}{2} u_1^2}$  und der berechnete Verlauf für die in Abbildung 6.17 gezeigte Geometrie ist in Abbildung 6.18 dargestellt.

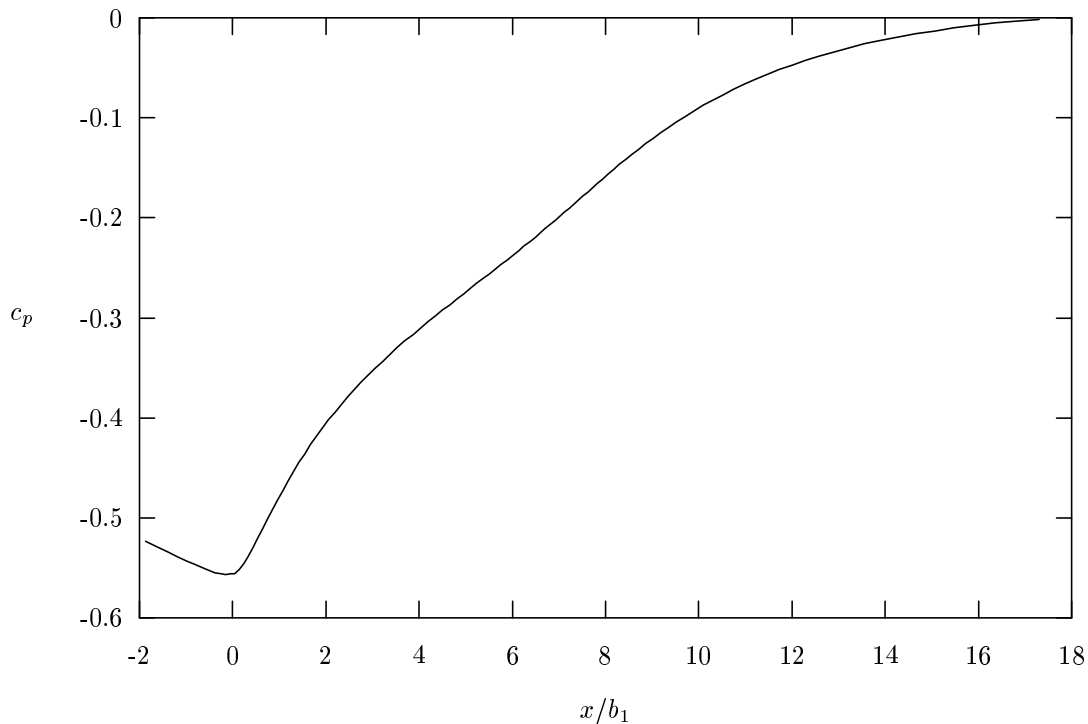
In Gleichung (6.36) bezeichnet  $u_1$  die Einströmgeschwindigkeit, die Größe  $AR = b_2/b_1$  steht für das Flächenverhältnis der Querschnitte 1 und 2. Die Parameter des Diffusors sind in Tabelle 6.4 aufgelistet.

Mit diesen Angaben ergibt sich eine Reynolds-Zahl  $Re = 400$ , bei der die Strömung noch laminar verläuft.

Das Wandprofil wird durch B-Spline-Kurven approximiert, und die  $y$ -Koordinaten der Kontrollpunkte werden als freie Optimierungsparameter gewählt. Der erste und letzte Kontrollpunkt wird immer festgehalten. Die Angaben über die Anzahl der

$b_1$	10	mm
$b_2$	16.8	mm
$L_D$	75.6	mm
$u_1$	0.02	$\frac{m}{s}$
$\rho$	1000	$\frac{kg}{m^3}$
$\nu$	$10^{-6}$	$\frac{m^2}{s}$

Tabelle 6.4: Daten des zu optimierenden Diffusors

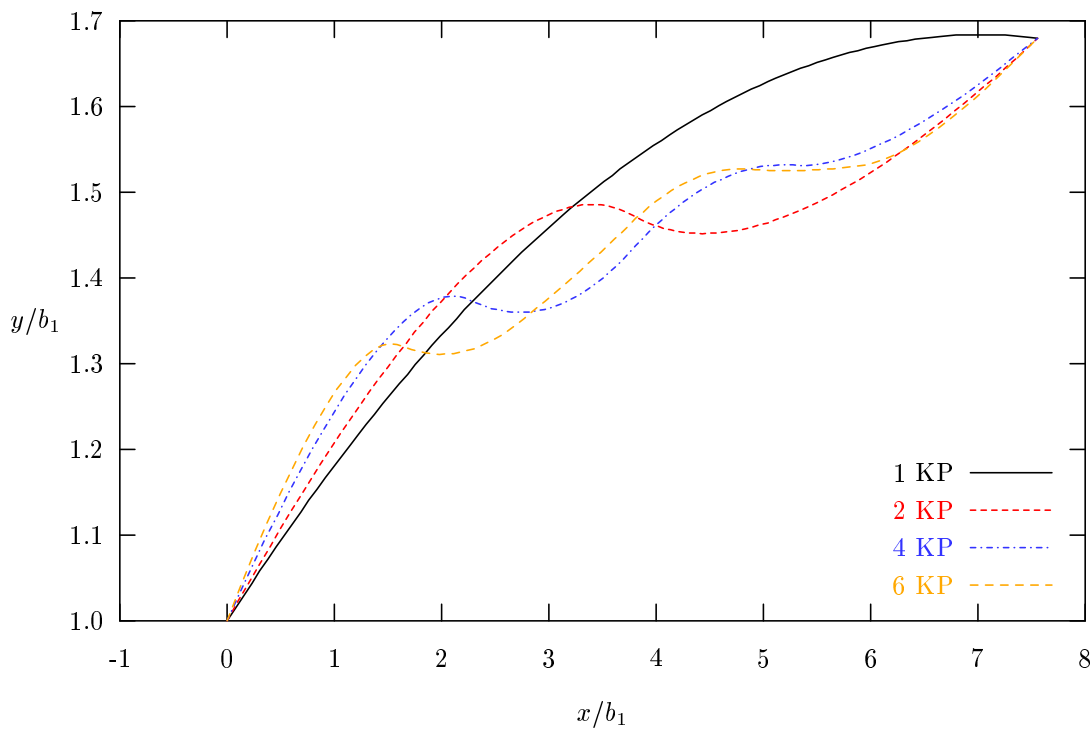


**Abbildung 6.18:** Lokaler Druckkoeffizient im Diffusor

Kontrollpunkte beziehen sich im weiteren immer auf die Anzahl der freigegebenen Kontrollpunkte. Die berechneten Wandprofile sind in Abbildung 6.19 dargestellt.

Die Profile mit 4 bzw. 6 Kontrollpunkten unterscheiden sich kaum. Dies zeigt sich auch an der Änderung der Zielfunktion, die sich mit dem Wechsel von 4 auf 6 Kontrollpunkte nur um 0.1% verbessert. Auch die Gesamtänderung der Zielfunktion von der Startgeometrie,  $\eta_D = 78.38\%$ , auf die mit 6 Kontrollpunkten beschriebenen Geometrie beträgt kaum 4%. Dieses Ergebnis verwundert nicht, da die Optimierung letztendlich auf die Minimierung der Wandschubspannungen hinausläuft. Bei der gegebenen Geometrie löst die Strömung im Diffusor ab. Für die Optimierung bedeutet dies, daß ein Wandprofil gesucht wird, bei dem die Ablösung möglichst klein gehalten wird oder sogar verschwindet, so daß die entstehende Strömung gerade an der Grenze zur Ablösung liegt und die Wandschubspannungen demzufolge verschwinden. Aus Abbildung 6.21 sind die Wandschubspannungsverteilungen, bezogen auf die Wandschubspannung  $\tau_w^*$  im Eintrittsquerschnitt, für die einzelnen Konfigurationen abzulesen. Die welligen Formen für 4 und 6 Kontrollpunkte im Diffusorbereich deuten darauf hin, daß die Ablöseblase auf mehrere kleinere Ablösewirbel unterteilt wurde, s. Abbildung 6.20. In [25] wird auf der Basis dieses Phänomens sogar eine Optimierungsstrategie konstruiert.

In [36] und [37] wird das Wandprofil durch eine Parabel zweiten Grades dargestellt. Durch diese Modellannahme wird die Wandkontur durch einen Parameter beschrieben. Die optimale Geometrie wird in beiden Arbeiten durch glockenförmige Konturen dargestellt. Diese Ergebnisse sind qualitativ auch in dieser Arbeit im Fall



**Abbildung 6.19:** Berechnete Wandprofile für unterschiedliche Anzahl von Kontrollpunkten

eines Kontrollpunktes bestätigt worden.

Durch Verwendung mehrerer Kontrollpunkte für die Spline-Approximation haben SVENNINGSSEN ET AL [98] ähnlich profilierte Konturen erzielt wie die in Abbildung 6.19.

Bei solchen mehrfach profilierten Konturen treten jedoch fertigungstechnische Probleme auf. Deshalb könnte die Aufgabe z.B. lauten, ein optimales Profil zu finden, das jedoch keine Inflectionen mehr enthält. Eine Lösung wäre in diesem Fall, das hier mit einem Kontrollpunkt optimierte Profil zu nehmen. Die andere ist, einen Ausgleichsspline auf das mit 6 Kontrollpunkten optimierte Profil zu legen. Abbildung 6.23 zeigt das Kontrollpolygon und den Spline für diesen Fall. Mit dieser Konfiguration wurde ein Wirkungsgrad  $\eta_D = 81.30\%$  erzielt. Dieser Wert liegt zwischen den mit ursprünglich 2 bzw. 4 Kontrollpunkten errechneten Werten. Daß mit 2 Kontrollpunkten ein besseres Profil gefunden wurde, liegt an der nichtäquidistanten Verteilung der Kontrollpunkte, die für diese Konfiguration gewählt wurde, s. Abbildung 6.23. Um die Anzahl der Kontrollpunkte zu minimieren und gleichzeitig das optimale Profil zu erhalten, wäre statt der hier verwendeten äquidistanten Parametrisierung eine nichtäquidistante besser geeignet. Diese Aussage wird im nächsten Kapitel auch mit Hilfe der Sensitivitätsanalyse bestätigt.

Die Optimierung wurde mit dem im Anhang A beschriebenen SLP-Algorithmus durchgeführt und für jeden Fall aus der Anfangsgeometrie gestartet. Als Konvergenzkriterium wurde die relative Änderung der Zielfunktion bezogen auf ihren Be-

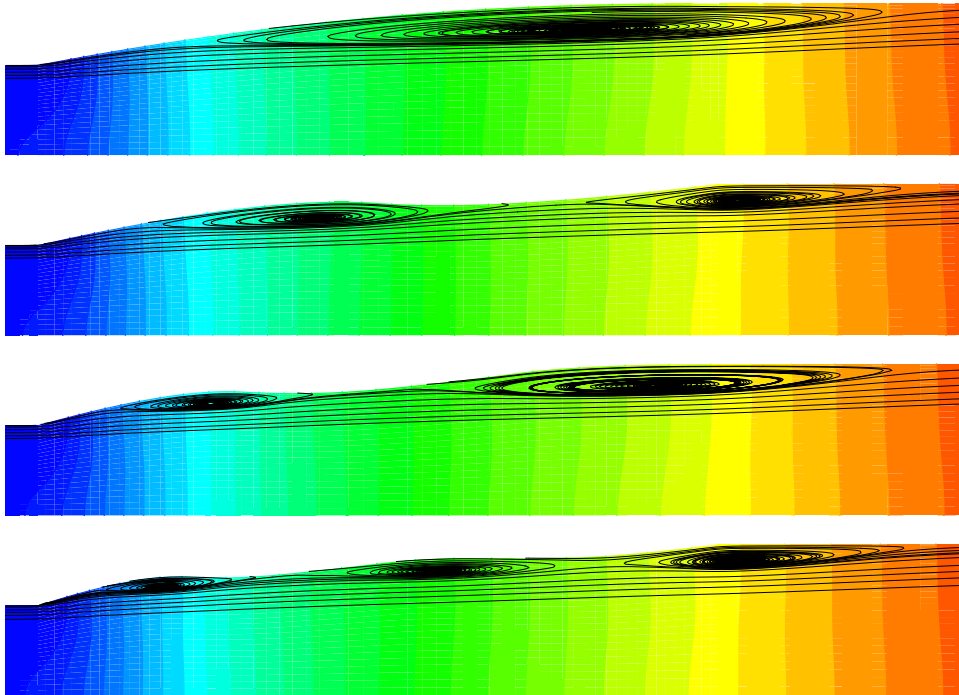


Abbildung 6.20: Konturplots des Druckes und Stromlinien für Diffusoren mit 1,2,4 und 6 Kontrollpunkten

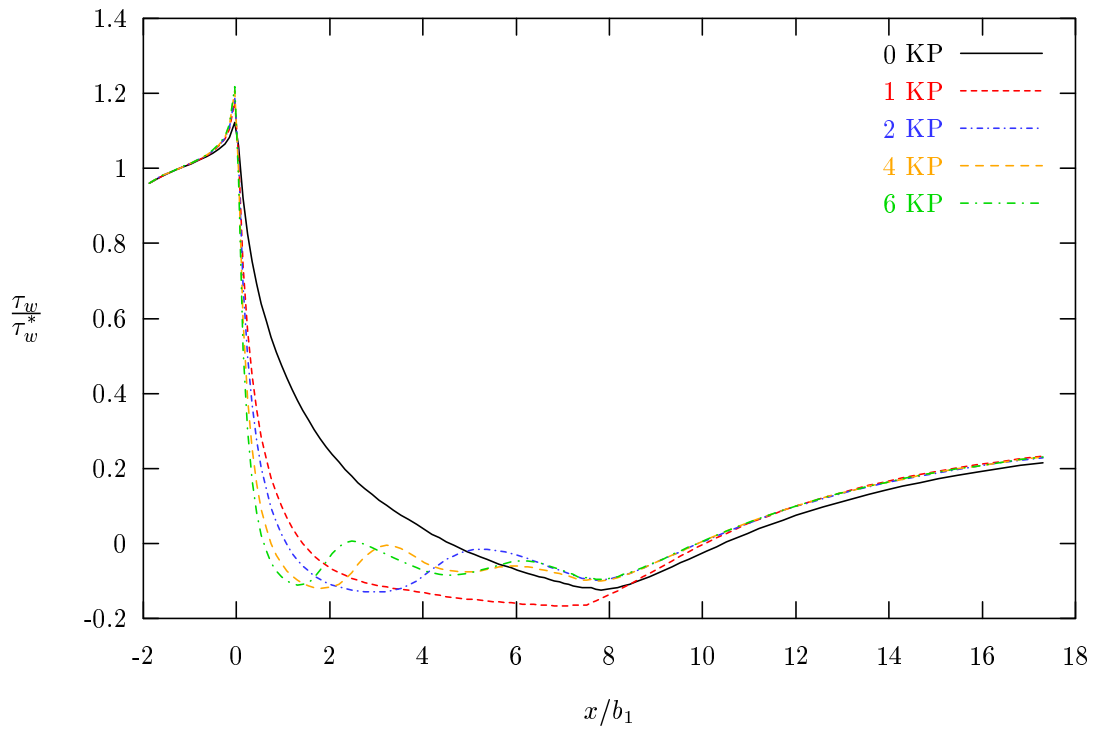


Abbildung 6.21: Verlauf der bezogenen Wandschubspannung

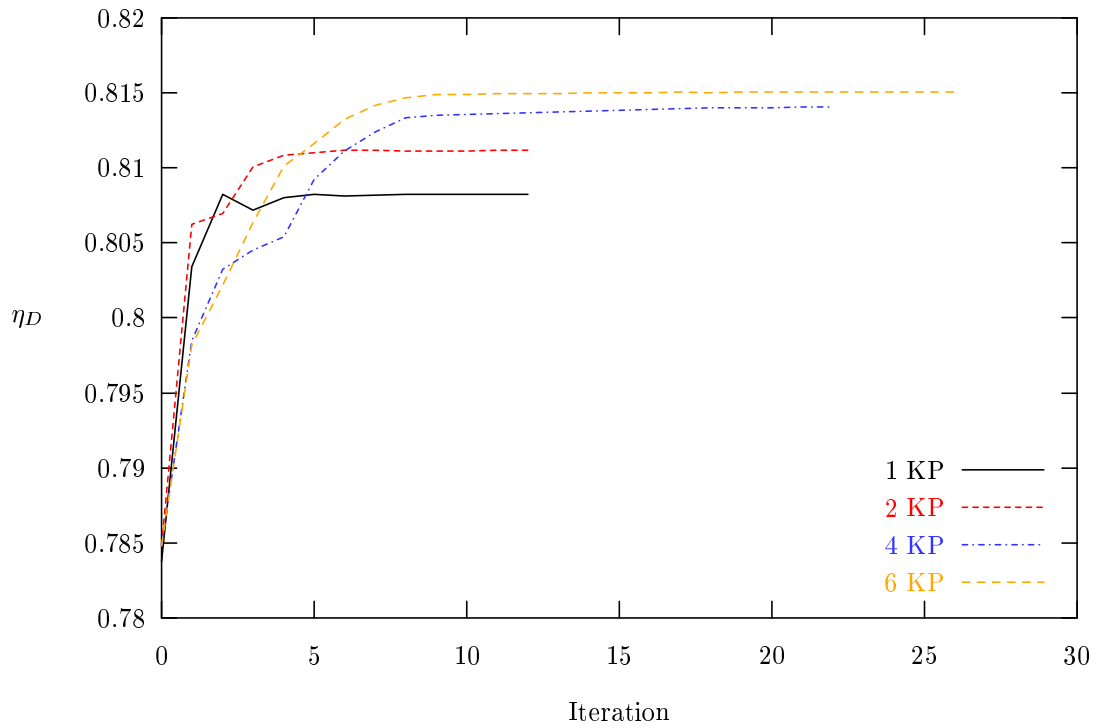


Abbildung 6.22: Verlauf der Optimierung mit dem SLP-Algorithmus

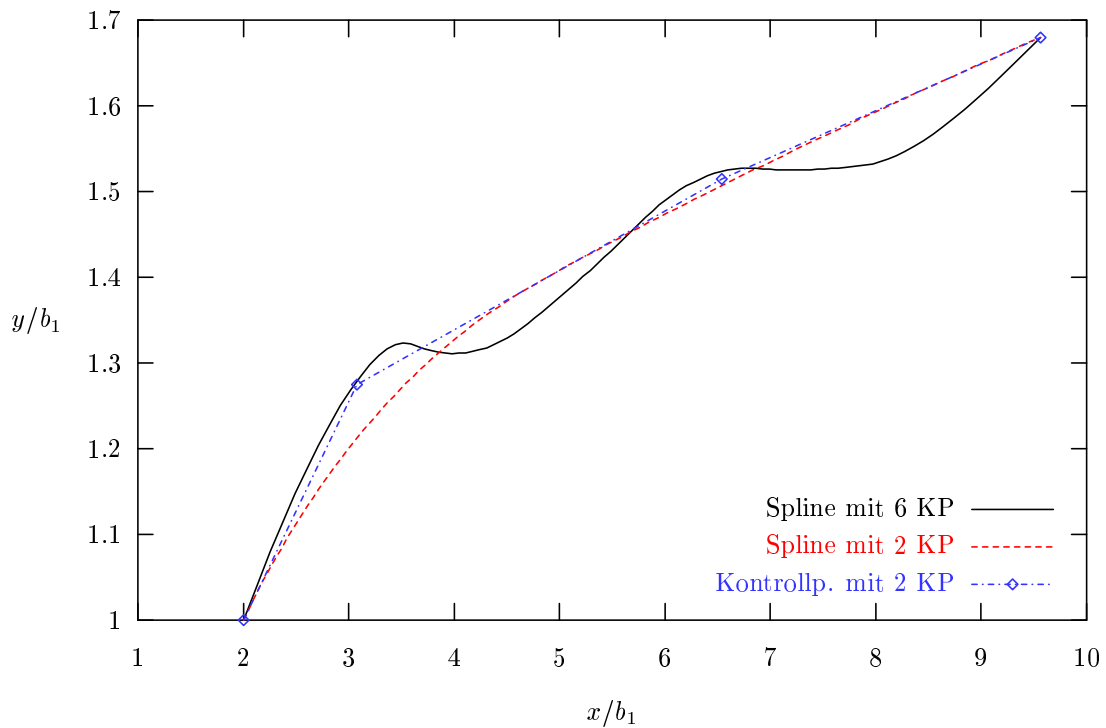
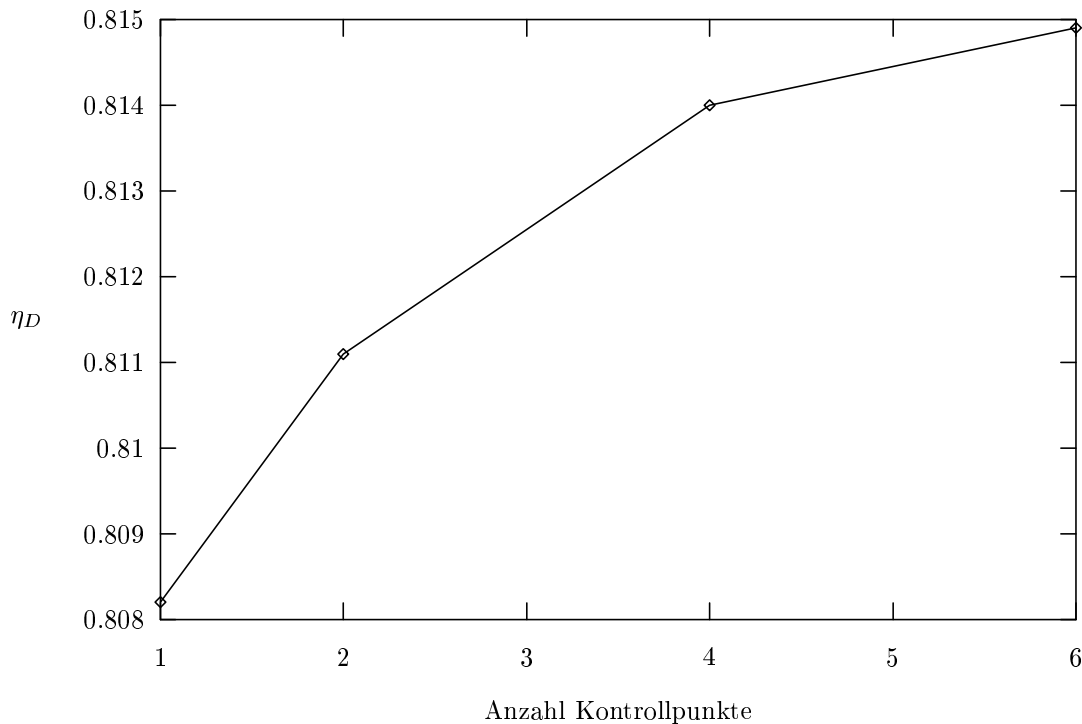


Abbildung 6.23: Spline mit 6 Kontrollpunkten und der Ausgleichsspline und sein Kontrollpolygon mit 2 Kontrollpunkten

Kontrollpunkte	$\epsilon$	Iterationen	$F^0$	$F^*$
1	$10^{-5}$	12	0.7837	0.8082
2	$10^{-5}$	12	0.7837	0.8111
4	$10^{-6}$	22	0.7837	0.8140
6	$10^{-6}$	26	0.7837	0.8149

**Tabelle 6.5:** Angaben der Optimierung des Diffusorproblems mit Sensitivitätsanalyse



**Abbildung 6.24:** Diffusorwirkungsgrad als Funktion der Anzahl der Kontrollpunkte

trag im Startpunkt gesetzt:  $\epsilon = \frac{F^i - F^{i+1}}{F^0}$ . Die Einstellungen für die einzelnen Fälle sind Tabelle 6.5 zu entnehmen. Abbildung 6.24 zeigt die Entwicklung des Wirkungsgrades in Abhängigkeit von der Anzahl der Kontrollpunkte.

Als Überprüfung der Richtigkeit der mit SA berechneten Diffusoren wurde die Optimierung auch mit einer Finite-Differenzen-Approximation wiederholt. Für die Verwendung der Sensitivitätsanalyse wurden zwei Optimierungsstrategien untersucht. Bei der ersten wird die Optimierung auf konventioneller Art mit dem NAND-Verfahren durchgeführt. Nur die Gradientenberechnung erfolgte statt mit Finiten Differenzen mit einer analytischen Sensitivitätsberechnung. Rechenzeitunterschiede können so nur durch die unterschiedliche Art der Gradientenberechnungen entstehen. Bei der zweiten Strategie wird statt des herkömmlichen NAND das im Kapitel 3 beschriebene SAADO-Verfahren (*Simultaneous Aerodynamic Analysis and Design Optimization*) mit Sensitivitätsanalyse eingesetzt. Für die SAADO-Strategie werden noch zusätzliche Informationen über die Lösungsgenauigkeiten im Laufe der Opti-

Kontrollpunkte	SA [min]/[-]	SAADO [min]/[-]	FD 1.O. [min]/[-]	FD 2.O. [min]/[-]
1	54/12	24/12	60/13	96/12
2	54/12	24/12	61/13	96/11
4	94/22	43/23	105/24	171/23
6	110/26	49/28	123/29	201/27

**Tabelle 6.6:** Vergleich der Rechenzeiten und der Anzahl der Iterationen bei parallelisierter Optimierung. Die Anzahl der verwendeten Prozessoren war identisch mit der Anzahl der Kontrollpunkte. (Prozessor: 800 MHz PIII, mit LINPACK1000 [29] : 43 MFLOPS)

mierung benötigt. In diesem Fall wurde die Iterationszahl der Optimierung mit SA zugrundegelegt, und die Lösungsgenauigkeit linear nach der Formel

$$\varepsilon_{SAADO} = \varepsilon_{SA} + \max\left(\frac{N_{SA} - i}{N_{SA}}, 0\right) \cdot (\varepsilon_0 - \varepsilon_{SA}) \quad (6.37)$$

berechnet. Die Variablen  $\varepsilon_{SA}$ ,  $\varepsilon_{SAADO}$  und  $\varepsilon_0$  sind die Abbruchkriterien für die Strömungsanalyse bei Optimierung mit SA, mit der SAADO-Strategie und am Beginn der SAADO-Strategie. Die Größe  $N_{SA}$  ist die Anzahl der Iterationen, die bei der Optimierung mit SA benötigt wird.

In Tabelle 6.6 sind die Rechenzeiten für die einzelnen Konfigurationen mit Sensitivitätsanalyse NAND und SAADO, Finiten Differenzen von erster bzw. zweiter Ordnung aufgelistet. Für die Optimierung wurde die parallelisierte Version des SLP-Algorithmus verwendet und zwar so, daß die verwendete Anzahl der Prozessoren immer mit der Anzahl der Kontrollpunkte identisch war. Deshalb gibt es eine Abhängigkeit der Rechenzeiten nur von der Anzahl der durchgeführten Iterationen und nicht von der Anzahl der Kontrollpunkte.

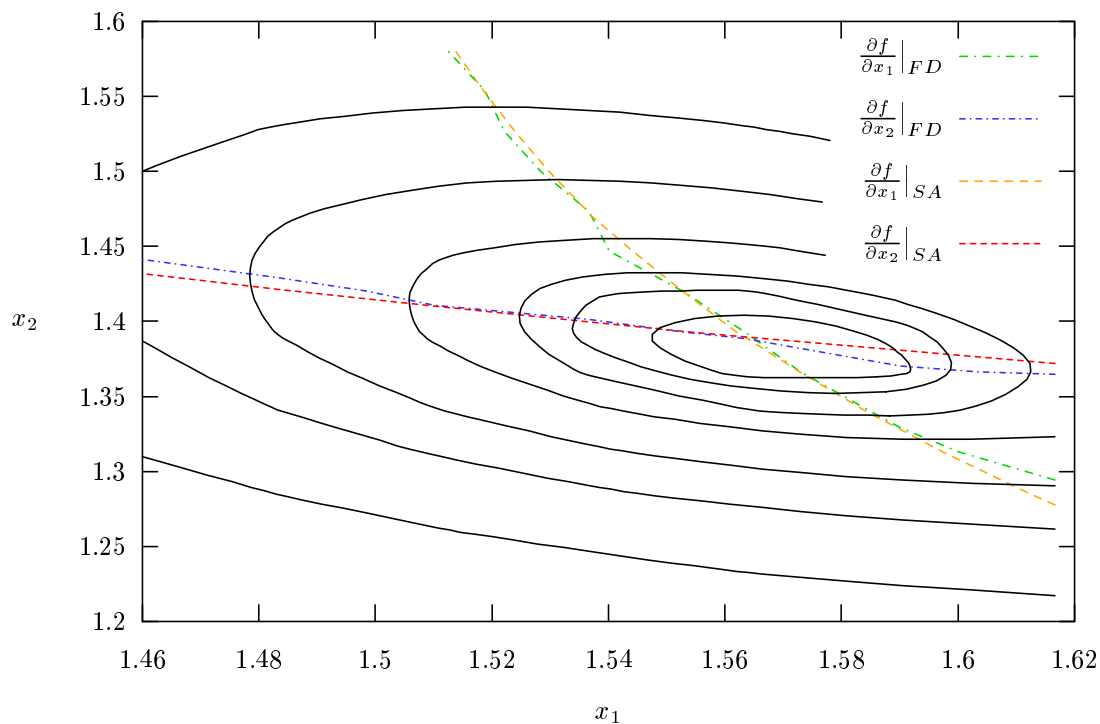
Eine Sensitivitätsanalyse ist etwa 25 – 30% schneller als eine Strömungsanalyse. Dies ergibt sich durch Verwendung gleicher Bedingungen, d. h. für beide Fälle wird ein Mehrgitterverfahren eingesetzt und dasselbe Konvergenzkriterium gesetzt. Die Konvergenzraten liegen in dem Bereich wie die der Strömungsanalyse. So zeigt sich als einzige Ersparnis das Aufstellen der Koeffizientenmatrizen, was bei der SA nur einmal geschieht.

Der Grund, weshalb diese Beschleunigung in Tabelle 6.6 nicht erkennbar ist, liegt an der Parallelisierung des Optimierungsalgorithmus. Parallelisiert wurden die Teile der SLP, in der die Gradienten berechnet wurden, also genau der Bereich, in dem auch die Sensitivitätsanalyse stattfindet. Tabelle 6.7 zeigt wieder die Rechenzeiten, aber diesmal für nur einen Prozessor. Der Vorteil der SAADO-Prozedur liegt neben der effizienten Gradientenberechnung in der Strömungsanalyse, die in diesem Fall keine voll auskonvergierte Lösungen liefern muß. Am Anfang werden die Strömungsprobleme nur grob gelöst und wenn die Lösung sich dem Optimum nähert, wird auch die Lösungsgenauigkeit gesteigert. Die benötigte Anzahl an Iterationen war für jede Optimierungsstrategie ungefähr die gleiche, siehe Tabelle 6.6.



Kontrollpunkte	SA	SAADO	FD 1.O.	FD 2.O.
1	54	24	60	96
2	72	39	84	228
4	193	130	237	413
6	305	215	383	695

**Tabelle 6.7:** Vergleich der Rechenzeiten auf einem Prozessor



**Abbildung 6.25:** Vergleich der partiellen Ableitungen der Zielfunktion berechnet mit SA und FD

Die unterschiedlichen Gradientenberechnungen mit 1, 2 und 4 Kontrollpunkten resultieren in Diffusoren, bei denen die Zielfunktion innerhalb des vorgegebenen Toleranzbereiches liegt. Für den Fall mit 6 Kontrollpunkten in Abhängigkeit von den Startwerten und der Art der Gradientenberechnung ergeben sich unterschiedliche Konfigurationen. Das bedeutet, daß der Optimierer ein lokales Optimum gefunden hat. Auf dieses Phänomen haben auch SVENNINGSSEN ET AL [98] hingewiesen. Daß es sich hier tatsächlich um lokale Optima handelt, sieht man daran, daß neben entsprechend kleinen Move Limits und mit der optimalen Lösung gestartet, alle drei Varianten dasselbe Optimum liefern.

Für den Fall mit zwei Kontrollpunkten wurden zusätzlich im Bereich von  $[14.6, 16.2] \times [12.8, 15.6]$  des Parameterraums mit der Maschenweite von 0.1 die Ableitungen der Zielfunktion mit Finiten Differenzen und Sensitivitätsberechnungen bestimmt. In Abbildung 6.25 sind die Isolinien  $\partial f / \partial x_i = 0$ , mit  $i = 1, 2$  für unterschiedliche Berechnungen der Gradienten dargestellt. Im Schnittpunkt der jeweiligen Kurven-

Paare (FD und SA) befindet sich das Optimum. Erkennbar ist, daß der Optimierer mit unterschiedlicher Gradientenberechnung das gleiche Optimum findet.

### 6.3.1 Analyse der Sensitivitäten

Ein zusätzlicher Vorteil der Sensitivitätsberechnung neben dem Geschwindigkeitsgewinn ist die Möglichkeit, in den Parameterraum Einblick zu gewinnen. Kann in Gleichung (3.3) die Gittersensitivität vernachlässigt werden, so erscheint die Strömungssensitivität als ein Skalierungsfaktor der Zielfunktionsgradienten. Im Falle einer linearen Zielfunktion ist sie selbst der Gradient. So kann mit der Berechnung der Sensitivitäten der einzelnen Designparameter ermittelt werden, wie stark der gegebene Parameter das Problem beeinflusst. Ändert sich also ein Parameter, erwartet man eine Antwort, wie darauf die Zielfunktion reagiert, wie das System auf die Änderung antwortet.

Um das Übertragungsverhalten zu messen, werden in dieser Arbeit zwei Möglichkeiten in Erwägung gezogen. Die erste ist, die Norm des gegebenen Sensitivitätsvektors zu bilden. Wird die Norm eines Designparameters kleiner bzw. größer als die der anderen, so trägt der untersuchte Parameter zur Änderung der Zielfunktion geringer bzw. stärker bei. Die andere Möglichkeit untersucht die Kopplung unter den einzelnen Parametern. Mit Hilfe einer Korrelationsanalyse kann festgestellt werden, wie stark zwei beliebige Designparameter voneinander abhängig sind. Im folgenden wird die Mathematik dieser statistischen Methode erläutert.

Es sind zwei Sensitivitätsvektoren  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$  und  $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^n$  gegeben, deren Mittelwerte wie folgt definiert sind:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{und} \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i.$$

Damit lassen sich die quadratischen Streuungen

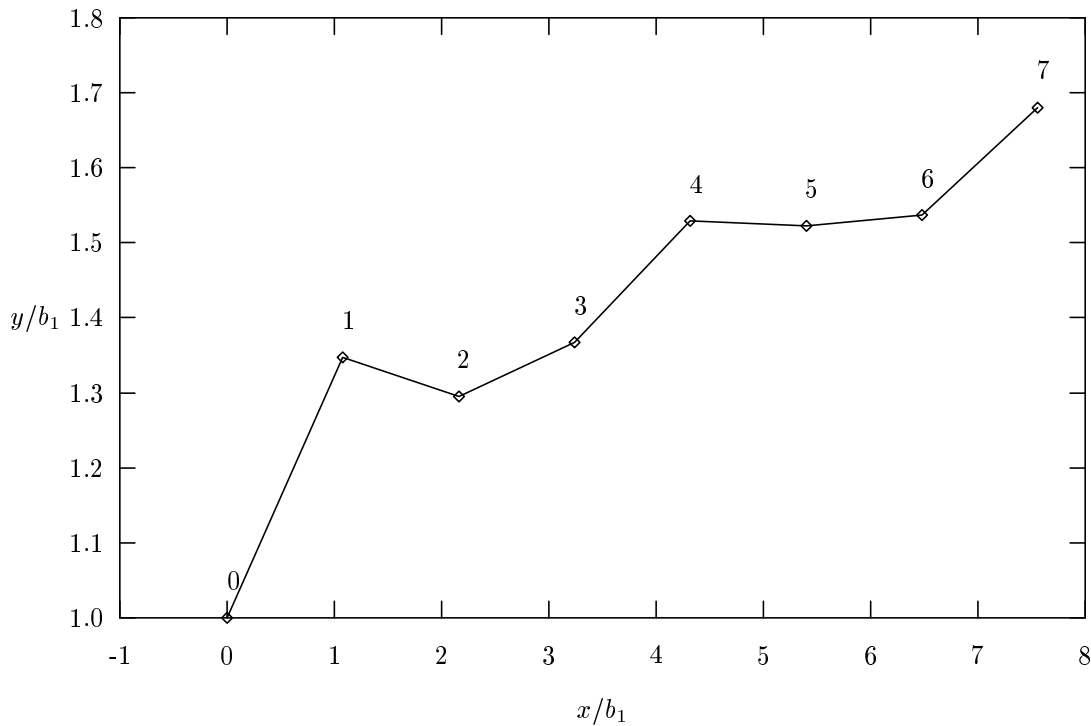
$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{und} \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

und die Kovarianz

$$m_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

definieren. Der empirische Korrelationskoeffizient  $r_{xy}$  ergibt sich daraus als der Quotient der Kovarianz und der beiden Streuungen:

$$r_{xy} = \frac{m_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}.$$



**Abbildung 6.26:** Kontrollpunkte des Splines für das Diffusorproblem

Ist  $|r_{xy}|$  sehr nah bei 1, dann ist die Kopplung zwischen  $x$  und  $y$  sehr stark. Liegt aber  $|r_{xy}|$  sehr nah bei 0, ist die Kopplung sehr schwach oder es gibt gar keine. Die lineare Korrelationsanalyse analysiert nur lineare Zusammenhänge und gibt keinerlei Auskunft über eventuelle nichtlineare Kopplungen zweier Vektorfelder.

Bei zusammengesetzten, dreidimensionalen Parametrisierungen, wie z. B. bei der Parametrisierung der Meridianebene und der Schaufeloberfläche bei Strömungsmaschinen, hat man häufig keine Anhaltspunkte dafür, ob die Kontrollpunkte der Splines an der optimalen Stelle liegen oder ob von zwei Kontrollpunkten beide unbedingt nötig sind. Für den hier vorgestellten Testfall sind solche Überlegungen wegen der Einfachheit der Parametrisierung nicht nötig. Er kann aber dazu dienen, die aufgestellte Theorie zu überprüfen. Da es sich um eine eindimensionale Parametrisierung handelt, weiß man in der Regel, wie die Kontrollpunkte sinnvoll gesetzt werden sollen und welches Verhältnis unter ihnen zu erwarten ist.

Tabelle 6.8 faßt die Normen der Sensitivitäten für die Konfiguration mit 6 freigegebenen Kontrollpunkten zusammen. Für die Korrelationsanalyse werden zusätzlich die ersten und letzten Kontrollpunkte, in Abbildung 6.26 Kontrollpunkte 0 und 7, bei der Sensitivitätsanalyse berücksichtigt. Bildet man nun die Korrelation jedes Kontrollpunktes mit jedem, erhält man eine symmetrisch besetzte Matrix, vgl. Abbildung 6.27. Die mit sich selbst gebildeten Korrelationen der einzelnen Einträge sind 1. Außerdem ist zu erwarten, daß in Richtung der unteren linken Ecke der Matrix die Werte gegen Null gehen, d. h. je ferner der Nachbar liegt, mit dem die Korrelation gebildet wird, desto schwächer ist die Kopplung zwischen den beiden zu

erwarten.

KP	$\frac{\ u_\alpha\ }{\ u_\alpha\ _{max}}$	$\frac{\ v_\alpha\ }{\ v_\alpha\ _{max}}$	$\frac{\ p_\alpha\ }{\ p_\alpha\ _{max}}$
1	1.0	1.0	1.0
2	0.555	0.504	0.673
3	0.236	0.254	0.265
4	0.763	0.518	0.918
5	0.784	0.415	0.969
6	0.652	0.372	0.795

**Tabelle 6.8:** Normen der einzelnen Sensitivitäten bezogen auf das Maximum

$$\begin{matrix}
 & KP_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & KP_7 \\
 KP_0 & \left( \begin{matrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0.366 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0.094 & 0.694 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0.008 & 0.022 & 0.123 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0.051 & 0.044 & 0.041 & 0.573 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0.039 & 0.042 & 0.034 & 0.186 & 0.624 & 1 & \cdot \\ \cdot & 0.021 & 0.040 & 0.024 & 0.091 & 0.178 & 0.515 & 1 \\ KP_7 & 0.002 & 0.026 & 0.010 & 0.052 & 0.071 & 0.160 & 0.667 & 1 \end{matrix} \right)
 \end{matrix}$$

**Abbildung 6.27:** Korrelationsmatrix mit 6 freien Kontrollpunkten

Auffallend ist in Abbildung 6.27, daß die Kopplungen 0 – 1 und 2 – 3 im Vergleich zu den anderen relativ gering ist. Das bestätigt auch die Entwicklung des Wandprofils mit feiner werdender Parametrisierung, vgl. Abbildung 6.19. Während im hinteren Bereich die Profile mit 4 und 6 Kontrollpunkten fast identisch sind, ändert sich das Profil im Einflußbereich, wenn die Anzahl der Kontrollpunkte größer wird. Insofern kann man diese Information als Fehlerschätzer für die Parametrisierung verwenden. Ähnlich wie beim Rechengitter des Strömungslösers könnte in diesem Bereich das Gitter - im gegebenen Fall die Parametrisierung - verfeinert werden, entweder durch Verschiebung der vorhandenen Kontrollpunkte oder durch Einsetzen neuer Kontrollpunkte im betroffenen Bereich. Hier wird die zweite Möglichkeit gewählt, und zwischen den Kontrollpunkten 0 – 1 und 2 – 3 wird noch je ein Kontrollpunkt eingesetzt, so daß das Profil insgesamt mit 10 Kontrollpunkten beschrieben wird.

Das neue, mit 8 Kontrollpunkten optimierte Kontrollpolygon ist gemeinsam mit dem alten in Abbildung 6.28 dargestellt. Abbildung 6.29 zeigt die Splines der Kontrollpolygone der Abbildung 6.28. Im zusätzlich verfeinerten Bereich hat sich der Spline deutlich verändert. Die Korrelationsmatrix in Abbildung 6.30 der verfeinerten Geometrie zeigt keine ausgeprägt starken oder schwachen Kopplungen mehr unter den Kontrollpunkten.

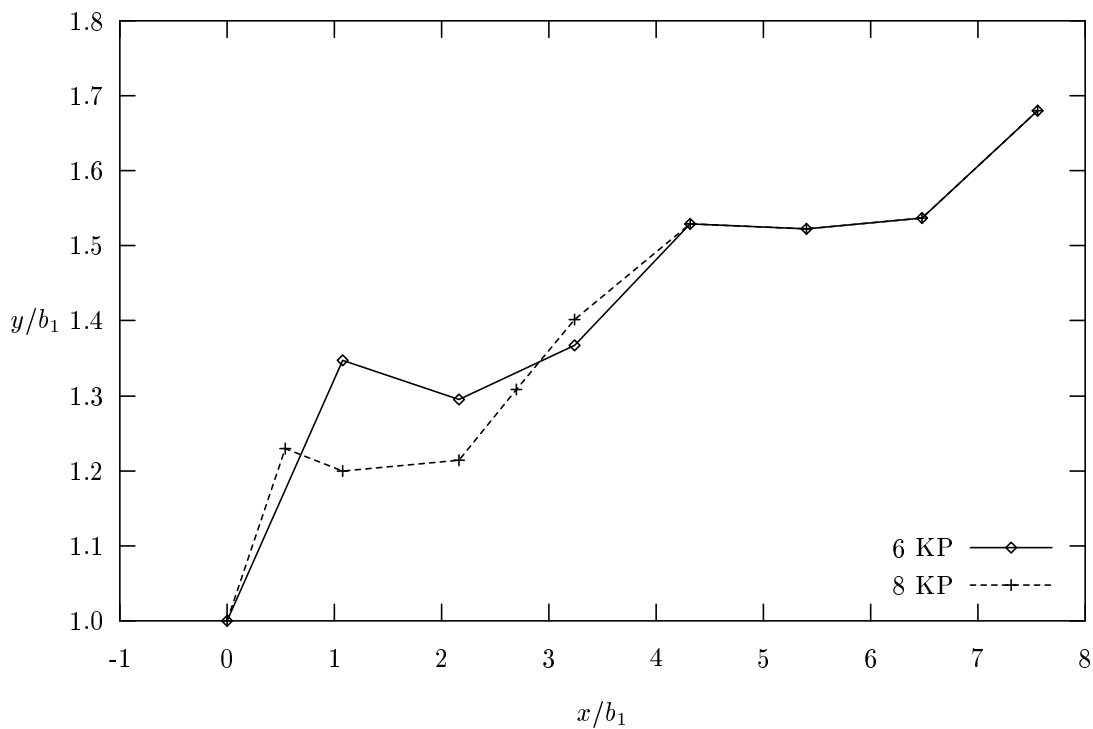


Abbildung 6.28: Optimierte Kontrollpolygone mit 6 bzw. 8 freigegebenen Kontrollpunkten

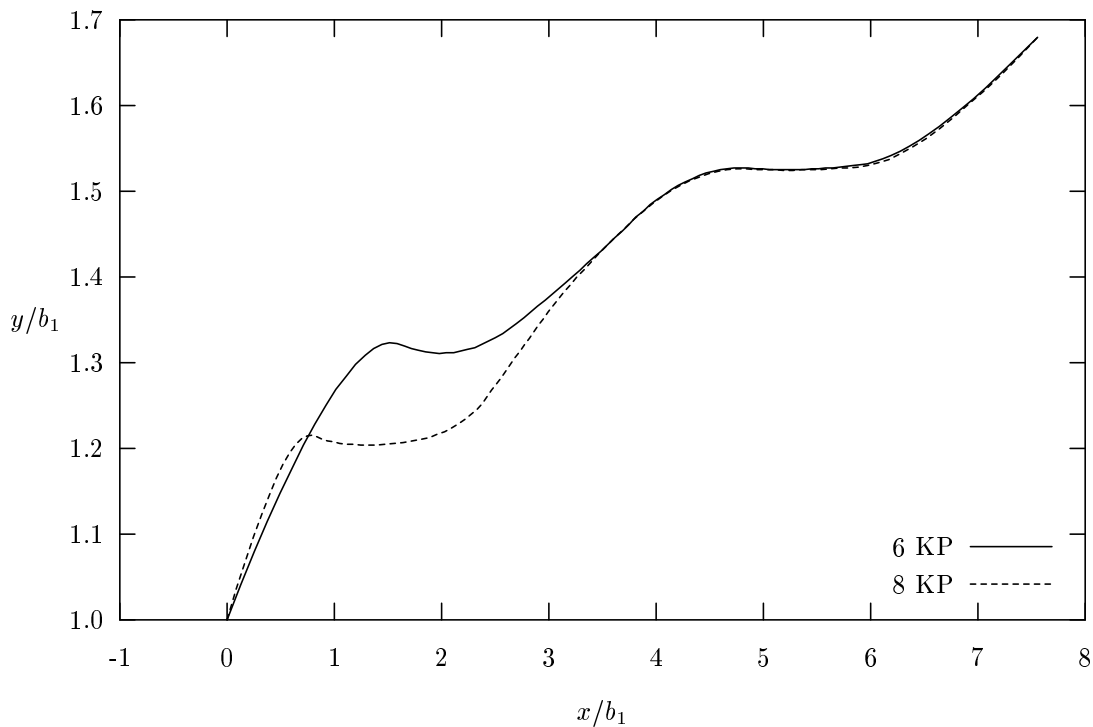


Abbildung 6.29: Splines der Kontrollpolygone in Abbildung 6.28

$$\begin{array}{c}
 KP_0 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 KP_9
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 KP_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & KP_9 \\
 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0.751 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0.199 & 0.493 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0.124 & 0.162 & 0.614 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0.107 & 0.052 & 0.162 & 0.505 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0.082 & 0.037 & 0.127 & 0.259 & 0.519 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0.048 & 0.018 & 0.086 & 0.168 & 0.219 & 0.638 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0.034 & 0.008 & 0.072 & 0.143 & 0.167 & 0.263 & 0.611 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0.015 & 0.004 & 0.055 & 0.115 & 0.130 & 0.150 & 0.177 & 0.518 & 1 & \cdot & \cdot \\
 0.003 & 0.012 & 0.028 & 0.064 & 0.073 & 0.076 & 0.071 & 0.160 & 0.663 & 1 & 1
 \end{pmatrix}$$

Abbildung 6.30: Korrelationsmatrix mit 8 freien Kontrollpunkten

## 6.4 Schaufelgitter

Als Testfall für die Strömung eines reibungsfreien Fluides wird wie bei ASCHENBRENNER [5] ein zweidimensionales Schaufelgitter verwendet, siehe Abbildung 6.31. Ursprünglich stammt die Testgeometrie aus dem Pfeiderer-Institut der TU Braunschweig und ist der abgewinkelte Außenschnitt des Axialventilators 7151. Die logarithmische Skelettlinie wird durch einen B-Spline mit sieben Kontrollpunkten approximiert und so an der Ein- und Austrittskante leicht geändert. Als Dickenverteilung kommt ein an der Hinterkante aufgedickter Tropfen der NACA 65-Reihe zur Anwendung. Das verwendete Rechennetz und die berechnete Druckverteilung für die Anfangskonfiguration können den Abbildungen 6.32 und 6.33 entnommen werden.

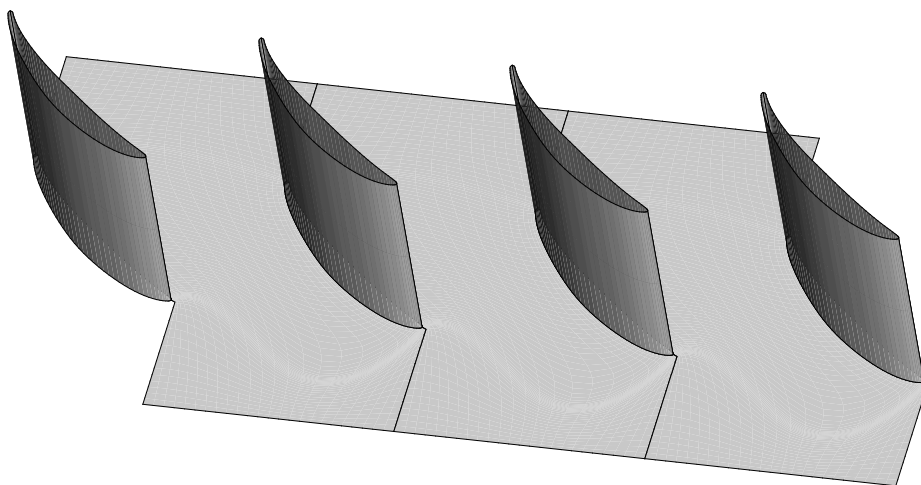


Abbildung 6.31: Zweidimensionales Schaufelgitter

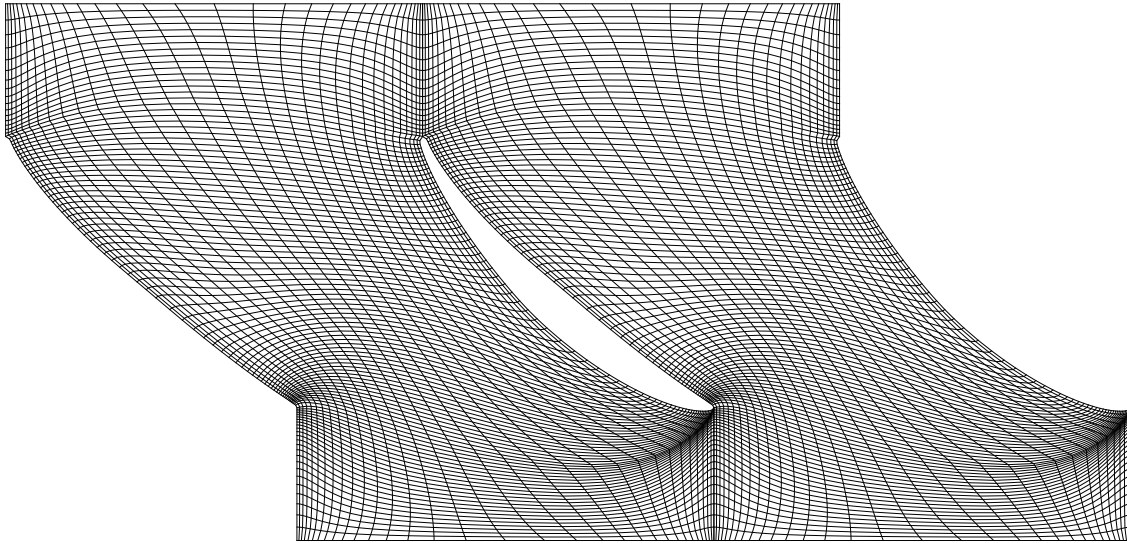


Abbildung 6.32: Rechenetz für das Schaufelgitter

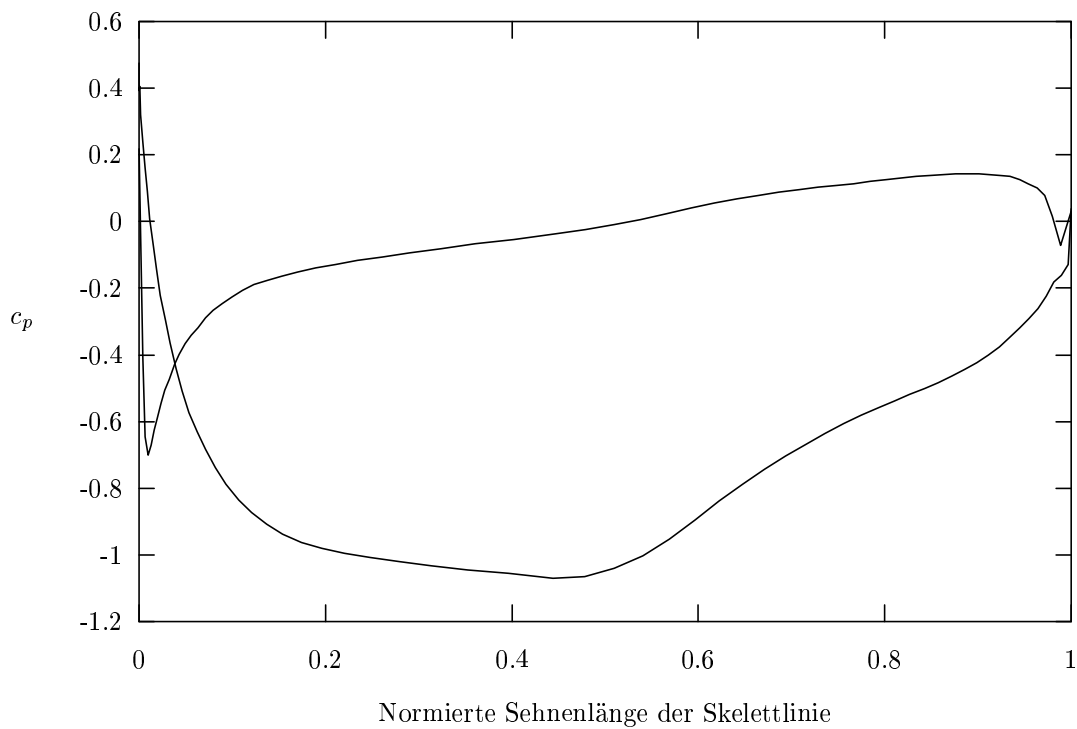


Abbildung 6.33: Druckverteilung des originären Schaufelgitters

Bei der Optimierung von Strömungsmaschinen sind verschiedene Kriterien zu beachten. Da sie sich teilweise entgegenwirken, ist es meist nicht möglich alle Bedingungen zu erfüllen. Als Ergebnis der Optimierung erhält man eine Reihe von Pareto-optimalen Lösungen, die sich je nach definierter Wichtigkeit der einzelnen Teilzielfunktionen unterscheiden können. Ein guter Überblick über die Kriterien, die ins Optimierungssystem des LHM aufgenommen wurden, ist bei WÖHLER [115]

nachzulesen. Diese Kriterien sind in der folgenden Liste zusammengefaßt:

1. Optimierung der Verluste und dadurch des Wirkungsgrades
2. Optimierung der Schaufelbelastung
3. Optimierung der Sekundärströmungen
4. Gewährleisten der Kavitationssicherheit
5. Optimierung der Drallschichtung am Austritt
6. Optimierung der Anströmung der Beschau felung
7. Einhalten der geforderten Umlenkung

In dem gegebenen Fall wird die Anzahl der verwendbaren Kriterien durch die Annahme einer reibungsfreien und zweidimensionalen Strömung eingeschränkt. So entfällt als Kriterium die Optimierung der Drallschichtung und der Sekundärströmung wegen der Zweidimensionalität des Problems und die Optimierung des Wirkungsgrades aufgrund der Reibungsfreiheit. Unter den restlichen Kriterien werden im folgenden die Optimierung der Anströmung und die Optimierung der Schaufelbelastung untersucht.

### 6.4.1 Optimierung der Schaufelanströmung

Um die Strömungsführung im Eintrittsbereich der Schaufel zu verbessern, soll die Anströmung des Schaufelgitters optimiert werden. Da die Originalgeometrie mit einem etwas zu steilen Winkel, entsprechend einem Betriebspunkt in Überlast, angeströmt wird, kommt es zu einer Überkreuzung der Druckverteilung im Eintrittsbereich, vgl. Abbildung 6.33.

Als Zielfunktion wird der Betrag des Inzidenzwinkels  $i$ , der Differenz des Schaufelwinkels  $\beta_{s1}$  und des Strömungswinkels  $\beta_1$ , definiert:

$$i = \beta_{s1} - \beta_1.$$

Aus den sieben Describern werden die ersten zwei, D1 und D2, freigegeben. Da der Strömungswinkel unabhängig vom Schaufelprofil und somit auch vom Strömungsfeld ist, ist es kein echtes Optimierungsproblem. Da physikalische Größen in die Zielfunktion nicht eingehen, ist es unerheblich, ob die Gradientenberechnung mit SA oder FD erfolgt. Man könnte sogar bei der Gradientenberechnung auf die Lösung der Strömungs- oder Sensitivitätsgleichungen völlig verzichten, da letztendlich nur Geometriedaten für die Zielfunktion gebraucht werden. Um den SLP-Algorithmus zu testen, wurde dies aber nicht mitberücksichtigt und auch am Verlauf der Optimierung nichts geändert.



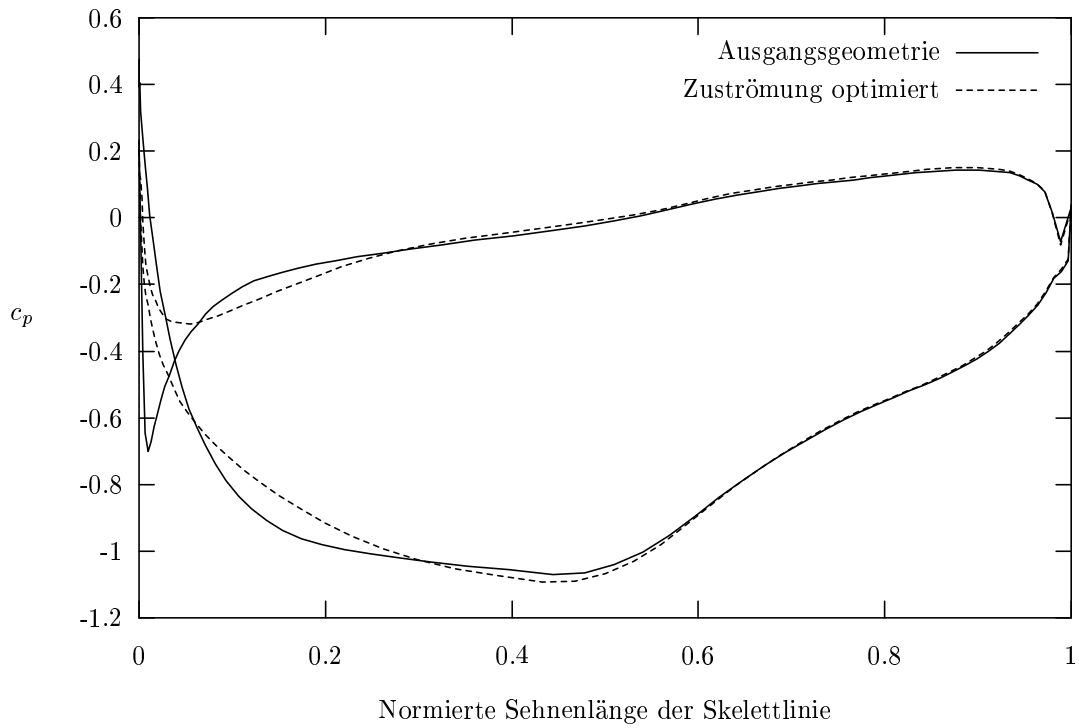


Abbildung 6.34: Vergleich der Druckverteilungen bei Optimierung der Anströmung

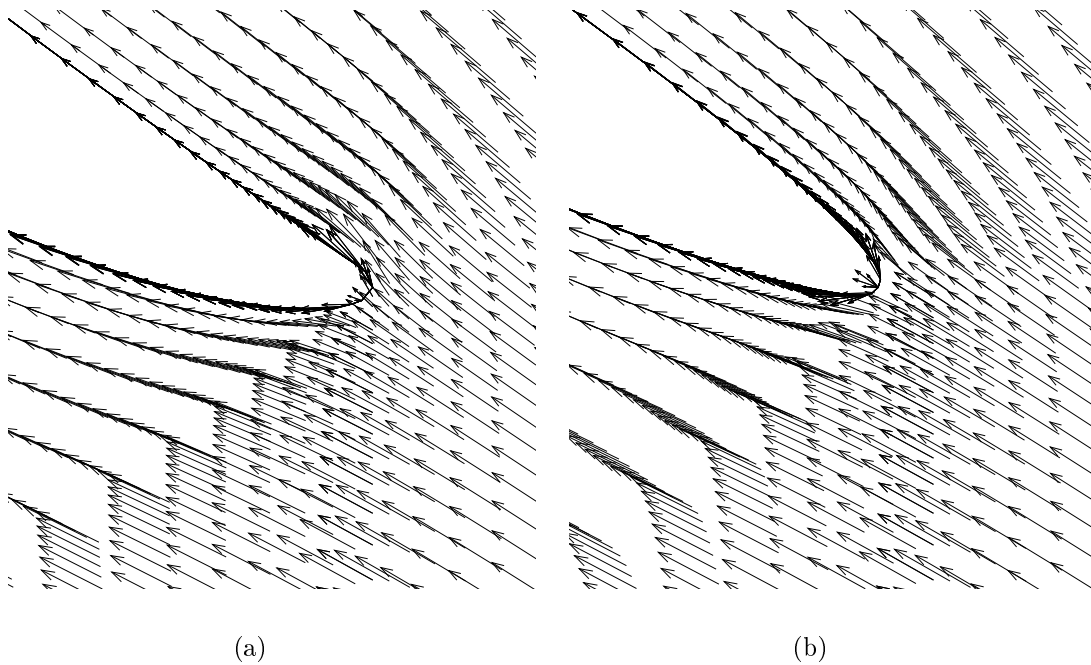
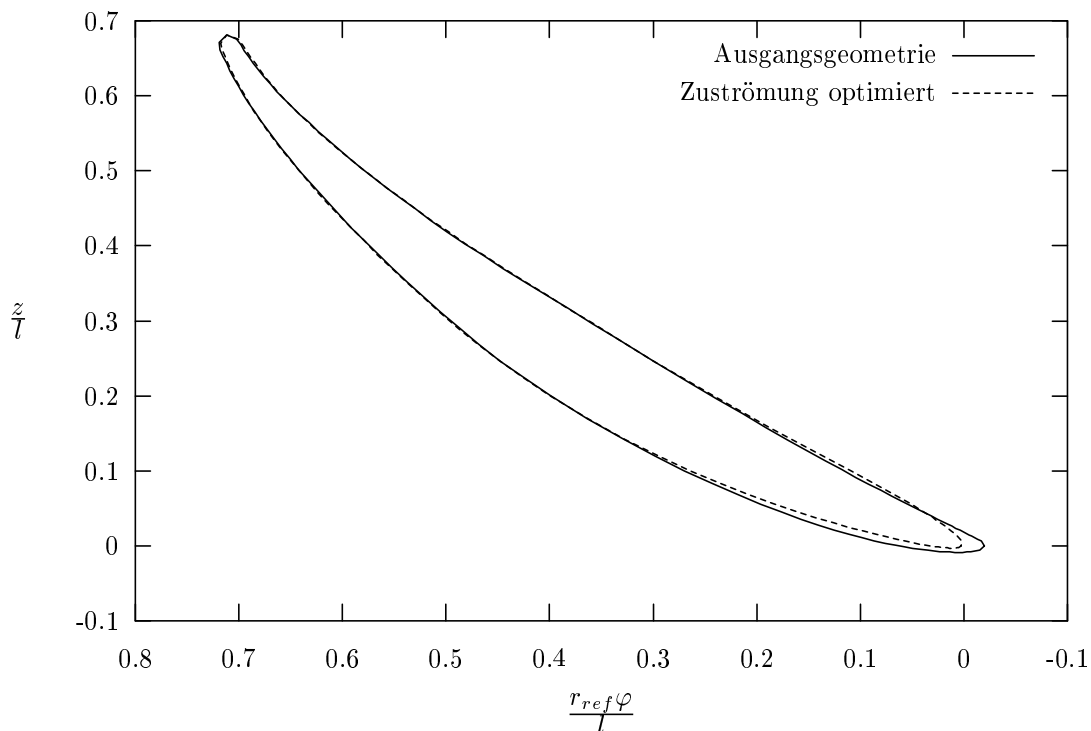


Abbildung 6.35: Initiale (a) und optimierte Anströmung (b)



**Abbildung 6.36:** Vergleich der Geometrien bei der Optimierung der Anströmung

Spielen die Gradienten der Strömungsgrößen in der Zielfunktion keine Rolle, so kann man mit deren Hilfe den Einfluß der Designparameter auf die Zielfunktion nicht analysieren. Eine anschließende Analyse der Sensitivitäten ist deshalb nicht möglich.

In Abbildung 6.34 sind die ursprünglichen und optimierten Druckverteilungen, in der Abbildung 6.35 die Vektorfelder vor und nach der Optimierung dargestellt. Durch die lokal stoßfreie Anströmung ergeben sich wesentlich geringere Druckgradienten im Eintrittsbereich. Das optimierte Schaufelprofil ist Abbildung 6.36 zu entnehmen.

### 6.4.2 Optimierung der Schaufelbelastung

Die Grundlage geringer Strömungsverluste ist im wesentlichen eine konstante Energieumsetzung entlang der Schaufel. Dies bedeutet, daß bei einer optimalen Druckverteilung keine ausgeprägten Minima oder Maxima auftreten.

Sowohl die Originalgeometrie als auch die bereits auf die Schaufelanströmung optimierte Geometrie haben zwischen 20% und 50% der Schaufellänge ein ausgeprägtes Belastungsmaximum. Danach wird die Druckdifferenz rasch kleiner. Verwendet man für die Strömungsberechnung ein Navier-Stokes-Verfahren, resultiert der rasche Druckanstieg auf der Saugseite zusammen mit der starken Krümmung in einer Ablösung der Strömung am Austritt, vgl. [5]. Durch eine gleichmäßigere Druckbelastung der Schaufel kann dies verhindert werden. Die Aufgabe besteht demnach

darin, die Druckverteilung so zu optimieren, daß eine über der Lauflänge möglichst konstante Druckdifferenz und ein möglichst linearer Druckanstieg entsteht.

Für die Definition der Zielfunktion gibt es in der Praxis zwei Möglichkeiten:

- Ist eine gewünschte Druckverteilung bekannt, so wird als Zielfunktion die Norm der Abweichung der aktuellen Druckverteilung von der als Ziel gesetzten definiert.

$$F_{\Delta c_p}(\mathbf{x}) = \|c_{p,soll}(\mathbf{x},s) - c_p(\mathbf{x},s)\| \quad (6.38)$$

Die Größen  $\mathbf{x}$  und  $s$  bezeichnen den Vektor der Designparameter und die Bogenlänge der Skelettlinie. Diese Art der Definition der Zielfunktion wird auch *Inverse Design* genannt.

- Um eine gleichmäßige Druckverteilung zu erhalten, werden die Differenzen zwischen einer mittleren  $\Delta \bar{c}_p$

$$\Delta \bar{c}_p(\mathbf{x}) = \frac{1}{s_2(\mathbf{x}) - s_1(\mathbf{x})} \int_{s_1(\mathbf{x})}^{s_2(\mathbf{x})} \Delta c_p(\mathbf{x},s) ds \quad (6.39)$$

und der lokalen Druckdifferenz zwischen Druck- und Saugseite  $\Delta c_p$

$$\Delta c_p(\mathbf{x},s) = c_{p,DS}(\mathbf{x},s) - c_{p,SS}(\mathbf{x},s)$$

minimiert:

$$F_{\Delta c_p}(\mathbf{x}) = \|\Delta \bar{c}_p(\mathbf{x}) - \Delta c_p(\mathbf{x},s)\|. \quad (6.40)$$

Für die Optimierung der Schaufelbelastung wird zunächst der zweite Ansatz verwendet.

### Mittlere Druckdifferenz als Zielfunktion

Da die Zielfunktionsauswertung in dem Bereich stattfindet, in dem auch Geometriemodifikationen vorgenommen werden, muß man bei der Gradientenberechnung in geeigneter Weise vorgehen. Explizite Gitterterme, wie Flächengrößen, Volumina, usw., kommen in der Zielfunktion nicht vor, so daß der erste Term in Gleichung (3.3) weiterhin keine Rolle spielt. Für die Zielfunktion wird aber über die Bogenlänge der Skelettlinie integriert, deren Grenzen vom Parametervektor  $\mathbf{x}$  abhängig sind. Wird dann das Integral nach  $\mathbf{x}$  abgeleitet, um den Ausdruck der Zielfunktion für die Sensitivitätsberechnung zu erhalten, muß ein Integral mit veränderlichen Integrationsgrenzen differenziert werden. Dies erfolgt erneut mit Hilfe der Leibniz-Regel (4.26). Wird in Gleichung (6.40) die  $L_2$ -Norm eingesetzt, so erhält man:

$$F_{\Delta c_p}(\mathbf{x}) = \sqrt{\int_{s_1(\mathbf{x})}^{s_2(\mathbf{x})} (\Delta \bar{c}_p(\mathbf{x}) - \Delta c_p(\mathbf{x}, s))^2 ds} \quad (6.41)$$

und damit die Ableitung

$$\begin{aligned} \nabla F_{\Delta c_p}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{A} \int_{s_1(\mathbf{x})}^{s_2(\mathbf{x})} 2 (\Delta \bar{c}_p(\mathbf{x}) - \Delta c_p(\mathbf{x}, s)) (\Delta \bar{c}_p^\alpha(\mathbf{x}) - \Delta c_p^\alpha(\mathbf{x}, s)) ds + \\ &\quad \frac{1}{A} s_2^\alpha(\mathbf{x}) (\Delta \bar{c}_p(\mathbf{x}) - \Delta c_p(\mathbf{x}, s_2(\mathbf{x})))^2 - \\ &\quad \frac{1}{A} s_1^\alpha(\mathbf{x}) (\Delta \bar{c}_p(\mathbf{x}) - \Delta c_p(\mathbf{x}, s_1(\mathbf{x})))^2 \end{aligned}$$

mit

$$A = 2 \cdot \sqrt{\int_{s_1(\mathbf{x})}^{s_2(\mathbf{x})} (\Delta \bar{c}_p(\mathbf{x}) - \Delta c_p(\mathbf{x}, s))^2 ds}.$$

Die mit  $\alpha$  indizierten Größen bezeichnen die Ableitungen nach dem Parametervektor  $\mathbf{x}$ . Da der Druckkoeffizient  $c_p$  eine lineare Funktion des Druckes ist, stehen in seinen Ableitungen nach  $\mathbf{x}$  dementsprechend die Drucksensitivitäten.

Zusätzlicher Erklärung bedarf noch die Definition der mittleren Druckdifferenz  $\Delta \bar{c}_p$ . Auch in Gleichung (6.39) sind die Integrationsgrenzen von  $\mathbf{x}$  abhängig. So muß bei der Auswertung von  $\Delta \bar{c}_p^\alpha(\mathbf{x})$  die Leibniz-Regel erneut angewendet werden:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{c}_p^\alpha(\mathbf{x}) &= \frac{d\Delta \bar{c}_p}{d\mathbf{x}} = -\frac{s_2^\alpha(\mathbf{x}) - s_1^\alpha(\mathbf{x})}{(s_2(\mathbf{x}) - s_1(\mathbf{x}))^2} \int_{s_1(\mathbf{x})}^{s_2(\mathbf{x})} \Delta c_p(\mathbf{x}, s) ds + \\ &\quad \frac{\int_{s_1(\mathbf{x})}^{s_2(\mathbf{x})} \Delta c_p^\alpha(\mathbf{x}, s) ds + s_2^\alpha(\mathbf{x}) \Delta c_p(\mathbf{x}, s_2(\mathbf{x})) - s_1^\alpha(\mathbf{x}) \Delta c_p(\mathbf{x}, s_1(\mathbf{x}))}{s_2(\mathbf{x}) - s_1(\mathbf{x})}. \end{aligned}$$

Als Ausgangsgeometrie wird die im Kapitel 6.4.1 bezüglich der Schaufelanströmung bereits optimierte Geometrie gewählt. Um den dort berechneten Betriebspunkt während der Optimierung beizubehalten, müssen zwei zusätzliche Nebenbedingungen formuliert werden. Diese sind die mit der Anfangskonfiguration berechnete theoretische Druckzahl  $\psi_{th} = 1.046$  und der bereits optimierte Anströmwinkel  $\beta_1 = 58.36^\circ$ .

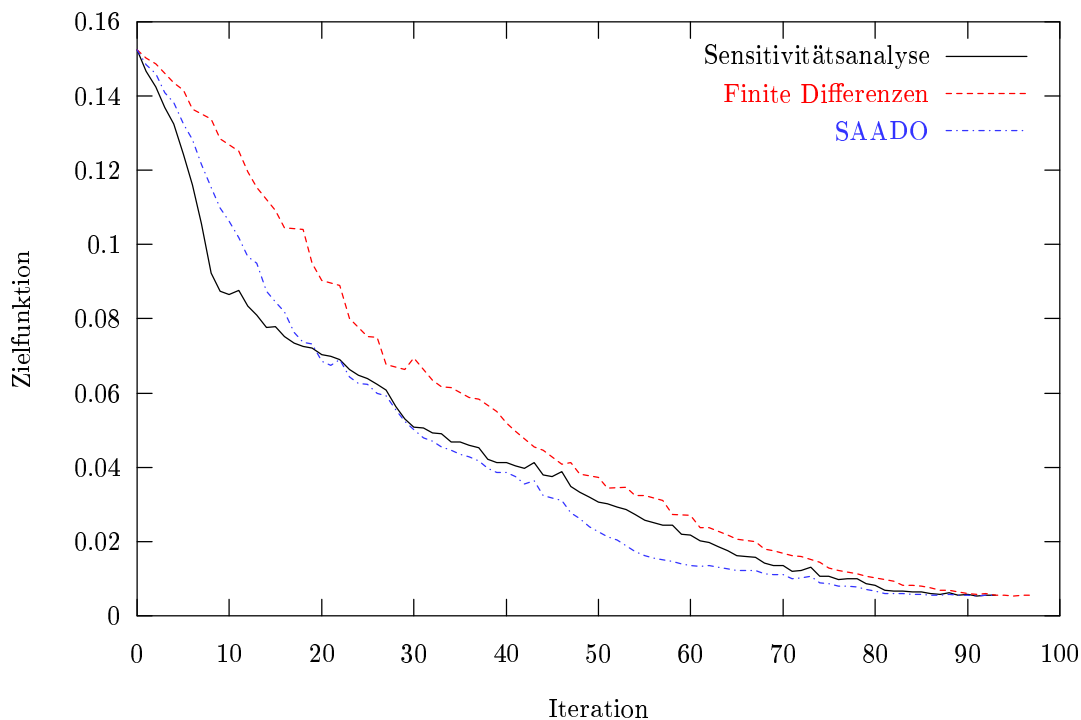
	SA	SAADO	FD 1.O.
Iteration	93	96	97
Rechenzeit [min]	372	181	436

**Tabelle 6.9:** Vergleich der Rechenzeiten bei Optimierung der Schaufelbelastung. Rechnerkonfiguration wie in der Tabelle 6.6

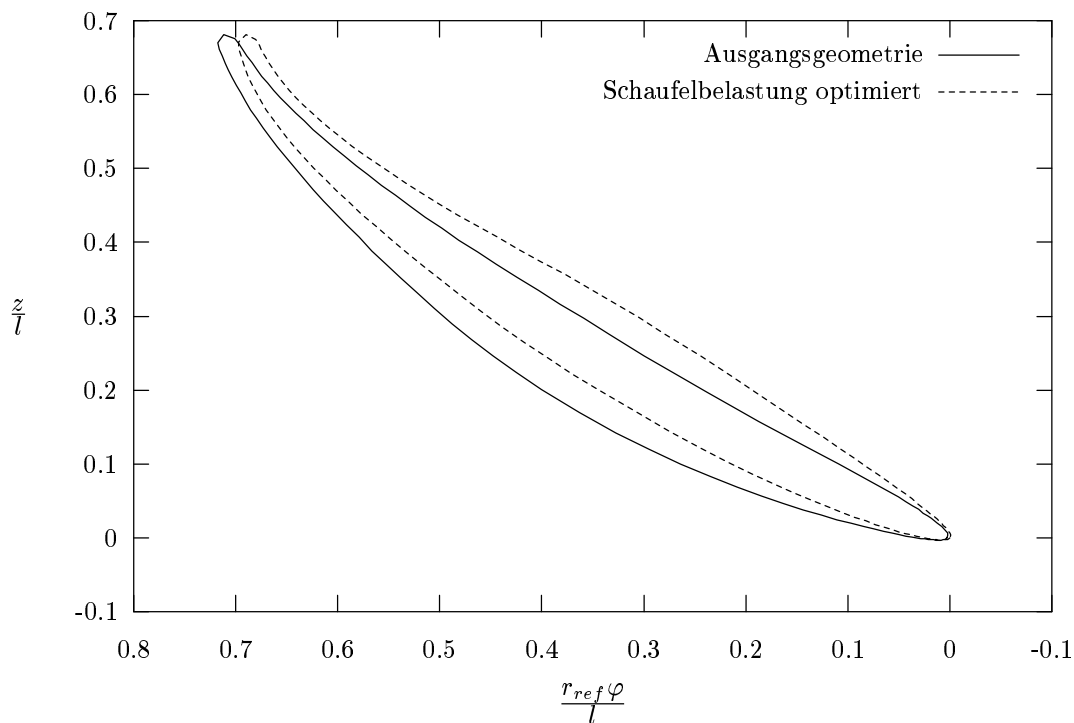
Aus numerischen Gründen wird für beide Kriterien eine Toleranz von  $\varepsilon = 10^{-2}$  zugelassen. Verläßt die aktuelle Lösung diesen Bereich, wird die Lösung vom Optimierer als unzulässig betrachtet.

Die Optimierung wurde ähnlich wie beim Diffusorproblem mit SA, SAADO und Finiten Differenzen 1. Ordnung durchgeführt. Auf eine Optimierung mit Finiten Differenzen 2. Ordnung wurde verzichtet. Sie würde keine zusätzliche Information liefern. Das Konvergenzkriterium für die Strömungsanalyse in der SAADO-Strategie wird weiterhin nach Gleichung (6.37) gesteuert. Die Rechenzeiten für die einzelnen Fälle sind in Tabelle 6.9 zusammengefaßt. Abbildung 6.37 zeigt den Konvergenzverlauf der Optimierung für unterschiedliche Gradientenberechnungen.

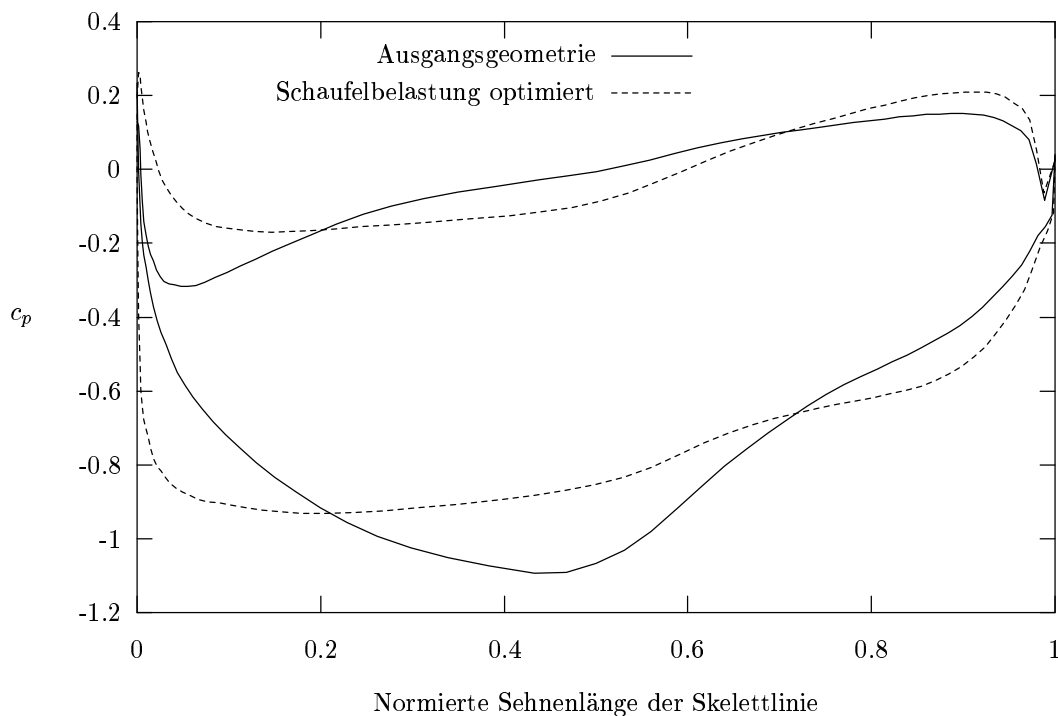
Das im Laufe der Optimierung gefundene Profil ist in Abbildung 6.38 zusammen mit dem Ausgangsprofil dargestellt. Um die Belastung in der ersten Hälfte der Schaufel zu reduzieren, wird die Krümmung im vorderen Bereich der Schaufel deutlich reduziert. Die erforderliche Umlenkung wird dann durch eine stärkere Krümmung in der



**Abbildung 6.37:** Konvergenzverlauf des SLP-Verfahrens mit unterschiedlichen Gradientenberechnungen



**Abbildung 6.38:** Vergleich der Profilgeometrien bei der Optimierung der Schaufelbelastung. Zielfunktion: Mittlere Druckdifferenz



**Abbildung 6.39:** Vergleich der Druckverteilungen bei der Optimierung der Schaufelbelastung. Zielfunktion: Mittlere Druckdifferenz

zweiten Hälfte erzielt.

Die optimierte Geometrie erfüllt die geforderten Bedingungen. Von 10% bis 90% der Sehnenlänge ist der Druckunterschied zwischen Druck- und Saugseite überall mit der mittleren Druckdifferenz identisch, vgl. Abbildung 6.39. Für die Beseitigung der leichten Dellen in der Mitte der Druckseite und bei 60% der Sehnenlänge der Saugseite ist die Zielfunktion ungeeignet. Um linear ansteigende Druckverteilungen zu erzielen, wird in der Regel die gewünschte Verteilung vorgegeben.

### *Inverse Design*

Eine Möglichkeit, eine Zieldruckverteilung zu errechnen, besteht darin, zunächst den Verlauf des statischen Druckes zwischen Vorder- und Hinterkante zu berechnen, um die Steigung der Geraden zu erhalten. Dann wird die Lage der Geraden durch den mittleren Druckunterschied eingestellt. Die Zielfunktion ist dann, wie bereits oben erklärt, die Differenz der aktuellen Druckverteilung und der vorgeschriebenen. Auf dasselbe Ergebnis kommt man, wenn man mit Hilfe von linearer Regression die geforderte Verteilung berechnet. Dabei werden sowohl auf die Druckwerte der Druckseite als auch der Saugseite Geraden gelegt, so daß die Differenz zwischen den berechneten Werten und den Geraden minimal wird. Der Vorteil dabei ist, daß man auf die Berechnung des statischen Druckes an der Vorder- und Hinterkante verzichten kann. Obwohl das nur ein einfaches Postprocessing-Problem ist, kann es besonders bei unstrukturierten Gittern sehr aufwendig sein.

Die Aufgabe der linearen Regression formuliert sich dann wie folgt: Auf eine Punktmenge  $(x_i, y_i)$  mit  $N$  Punkten wird eine Gerade

$$y(x) = y(x; a, b) = ax + b$$

gelegt, so daß die Größe  $T(a, b)$

$$T(a, b) = \sum_{i=1}^N (y_i - (ax_i + b))^2$$

minimal wird. Die Voraussetzung dafür ist, daß die partiellen Ableitungen von  $T$  nach  $a$  und  $b$  verschwinden:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial T}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^N x_i (y_i - ax_i - b) \\ 0 &= \frac{\partial T}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - b). \end{aligned}$$

Mit den folgenden Abkürzungen

$$S_x = \sum_{i=1}^N x_i, \quad S_y = \sum_{i=1}^N y_i, \quad S_{xx} = \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad \text{und} \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

resultiert daraus ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} aS_x + bN &= S_y \\ aS_{xx} + bS_x &= S_{xy}, \end{aligned}$$

dessen Lösung lautet:

$$\begin{aligned} a &= \frac{NS_{xy} - S_x S_y}{NS_{xx} - (S_x)^2} \\ b &= \frac{S_{xx} S_y - S_x S_{xy}}{NS_{xx} - (S_x)^2}. \end{aligned}$$

Die berechneten Geraden werden dann in Gleichung (6.38) für  $c_{p,soll}$  eingesetzt. Diese Definition der Zielfunktion entspricht einem *Inverse Design*-Vorgehen, da dem Optimierer eine Zieldruckverteilung vorgegeben wird. Die Optimierungsaufgabe besteht darin, ein Schaufelprofil zu ermitteln, das der Zieldruckverteilung optimal entspricht.

Die Optimierungsergebnisse mit der so definierten Zielfunktion, Gleichung (6.38) sind in den Abbildungen 6.40 und 6.41 dargestellt. Die optimierte Druckverteilung konnte die vorgegebene Zieldruckverteilung nur auf der Saugseite gut annähern. Ein Grund dafür könnte die zu grobe Parametrisierung der Skelettlinie sein. Eine Lösung wäre, zusätzliche Kontrollpunkte in den Spline aufzunehmen und die Optimierung zu wiederholen. Dasselbe Problem stellt sich auch bei industriellen Problemen, wo man aus Rechenzeitgründen auf eine sehr feine Parametrisierung der Geometrie verzichten muß. Zu untersuchen bleibt, ob und inwieweit eine feinere Auflösung der Geometrie die Ergebnisse beeinflusst.

Analog zum Fall in Kapitel 6.3 werden auch hier die Sensitivitätskorrelationen berechnet. Wie man Abbildung 6.42 entnehmen kann, entstehen zwischen den einzelnen Kontrollpunkten weder ausgeprägt starke noch schwache Kopplungen. Eine zusätzliche Verfeinerung würde demzufolge keine wesentlichen Änderungen ergeben.

Um das zu überprüfen, wurde eine Berechnung mit 11 Kontrollpunkten durchgeführt. Der Vergleich der Druckverteilungen bestätigt die Ergebnisse der Korrelationsanalyse, s. Abbildung 6.43.

Auch mit feinerer Auflösung der Skelettlinie kommt die Druckverteilung auf der Druckseite der Zielverteilung nicht näher. Mit großer Wahrscheinlichkeit liegt es an der Dickenverteilung des verwendeten NACA-Profiles. Solange die Zielfunktion



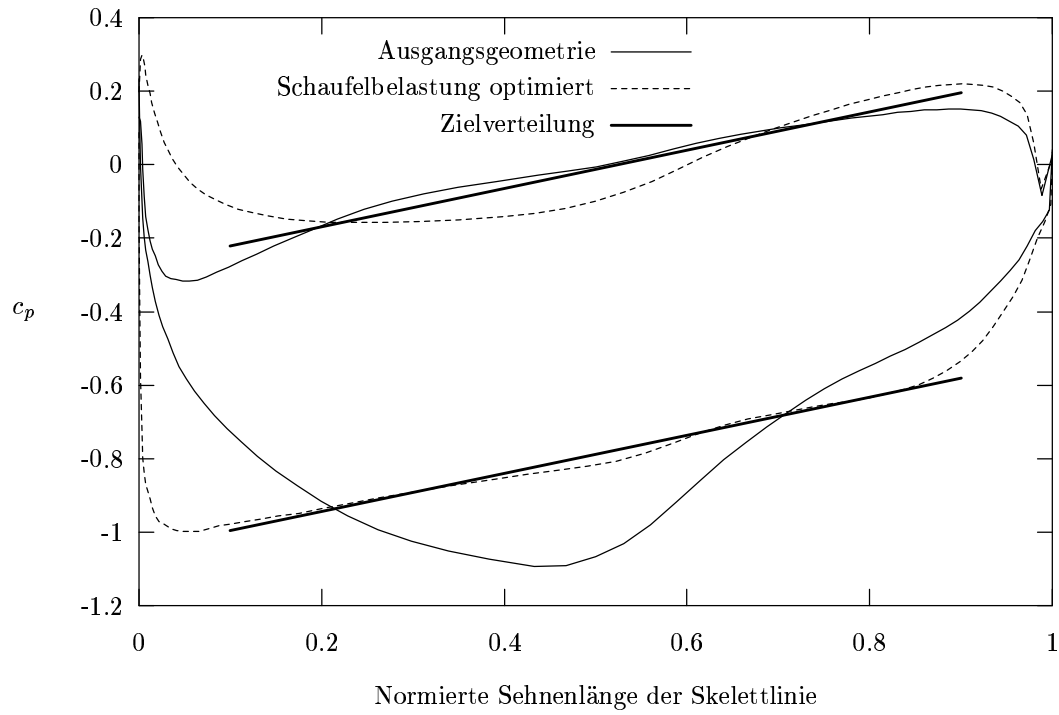


Abbildung 6.40: Vergleich der Druckverteilungen bei Optimierung der Schaufelbelastung. Zielfunktion: Gleichung (6.38)

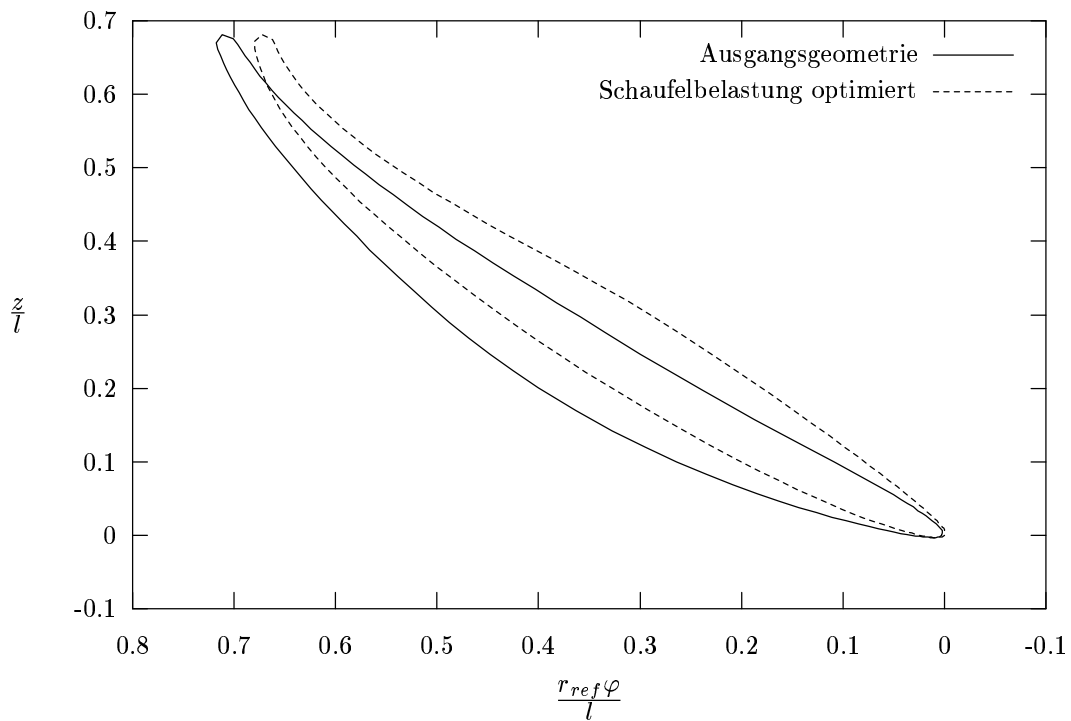


Abbildung 6.41: Vergleich der Geometrien bei Optimierung der Schaufelbelastung. Zielfunktion: Gleichung (6.38)

$$\begin{matrix}
 & KP_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & KP_7 \\
 KP_1 & \left( \begin{array}{ccccccc}
 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0.638 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0.433 & 0.594 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0.025 & 0.322 & 0.562 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0.073 & 0.180 & 0.335 & 0.557 & 1 & \cdot & \cdot \\
 0.087 & 0.165 & 0.222 & 0.265 & 0.675 & 1 & \cdot \\
 KP_7 & 0.037 & 0.158 & 0.154 & 0.197 & 0.273 & 0.626 & 1
 \end{array} \right)
 \end{matrix}$$

Abbildung 6.42: Korrelationsmatrix mit 6 freien Kontrollpunkten

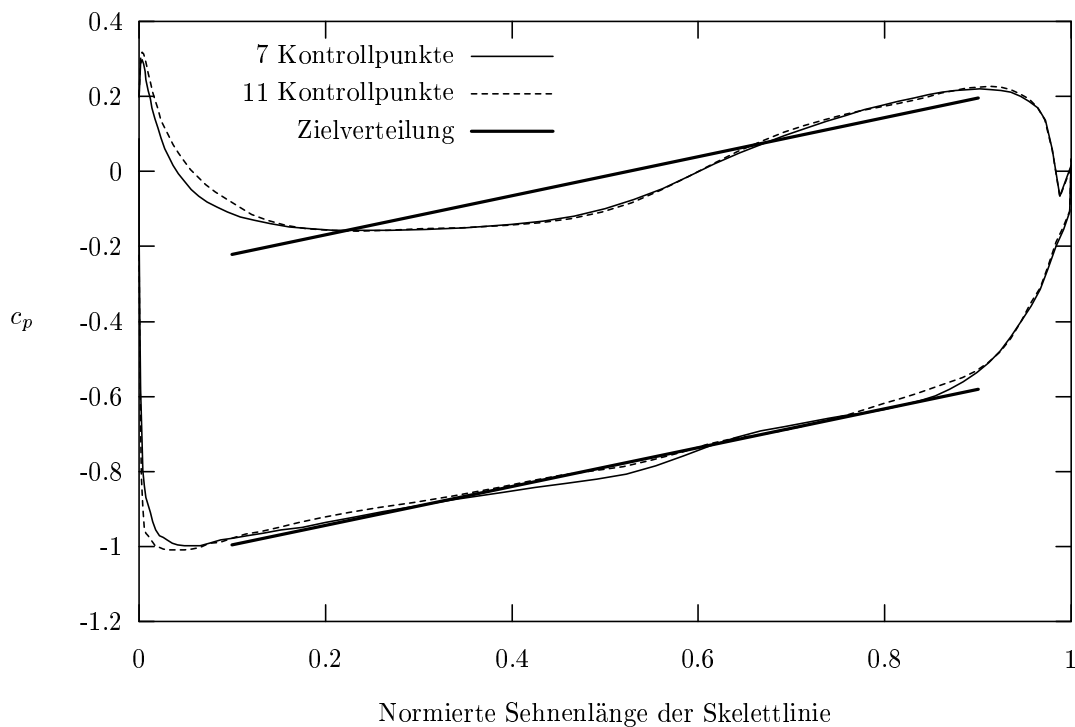


Abbildung 6.43: Vergleich der Druckverteilungen bei Optimierung der Schaufelbelastung für 7 bzw. 11 Kontrollpunkte

nur Druckdifferenzen zwischen Druck- und Saugseite enthält, kann der Optimierer ein optimales Profil finden. Sind aber auch Informationen bezüglich des Verlaufs der Verteilungen in der Zielfunktion enthalten, ist die Freigabe der Form der Skelettlinie allein nicht mehr ausreichend. Als zusätzlichen Optimierungsparameter benötigt der Optimierer die Dickenverteilung, um auch für den *Inverse Design* Fall ein Optimum finden zu können.

# Kapitel 7

## Bewertung und Ausblick

In der CFD-basierten Optimierung stellt die Reduktion der langen Optimierungszeiten, die sich vor allem durch die aufwendige Auswertung der Zielfunktion ergeben, ein zentrales Problem dar. Das Optimierungsproblem bekommt dadurch neben den physikalischen Nebenbedingungen auch rechentechnische sowie ökonomische Nebenbedingungen. Um diese zu erfüllen, muß man in der Regel die Dimension der Geometrieparametrisierung und/oder die des Rechengitters der Strömungsanalyse verringern. Außerdem soll das für die Zielfunktionsauswertung verwendete physikalische Modell ein möglichst einfaches sein, d. h. anstelle eines Navier-Stokes-Verfahrens ein Euler-Verfahren oder anstelle eines Euler-Verfahrens ein Potentialverfahren. Da die Qualität der Lösung und die benötigte Rechenzeit in vielen Fällen widersprüchliche Ziele sind, ist auch für dieses Problem – ähnlich wie bei der Designoptimierungsaufgabe von Strömungsmaschinen – nur eine Pareto-optimale Lösung möglich.

Durch Verwenden moderner numerischer Methoden und CFD-Techniken lassen sich die Optimierungszeiten jedoch erheblich reduzieren. Die Verwendung von Mehrgitterstrategien in der Strömungsanalyse ist somit eine geeignete Maßnahme. In den kommerziellen Software-Paketen im CFD-Bereich ist dies in der Regel auch der Fall. Was die Optimierungstools betrifft, sind sie ebenfalls mit den modernsten Optimierungsverfahren ausgerüstet. Darin werden jedoch das CFD- und das Design-Problem getrennt behandelt, und die beiden Probleme sind miteinander nur sehr schwach gekoppelt. In der vorliegenden Arbeit wird versucht, von der traditionellen Betrachtung der CFD- und Design-Probleme wegzukommen. Im folgenden werden die einzelne Bausteine erläutert.

### 7.1 Sensitivitätsanalyse

Die Grundlage des Optimierungssystems ist neben dem Strömungslöser ein Rechen-code, der Strömungssensitivitäten in effizienter Weise berechnen kann. Der entwickelte Code bietet durch die Verwendung unstrukturierter Netze die Flexibilität, auch komplexe Konfigurationen zu vernetzen und durch das implementierte Mehrgitter-

verfahren die Strömungssensitivitäten effizient zu ermitteln. Weder die erste noch die zweite Eigenschaft gehört momentan zu den Standardtechniken in diesem Bereich.

Die Diskretisierung mit einem nichtkonformen Finite-Elemente-Ansatz beschränkt sich aber nur auf die stationäre laminare Navier-Stokes- und die Euler-Gleichungen. Eine weitere Einschränkung ist, daß die konvektiven Terme für den Eulerschen Fall nur mit Upwind 1. Ordnung diskretisiert wurden. Die Diskretisierung der konvektiven Terme höherer Ordnung wurde für das Navier-Stokes-Verfahren u.a. von TUREK [107] mit Stromlinien-Diffusion und Samarskij-Upwind mit Erfolg implementiert, was aber nach REINELT [84] für den Eulerschen Fall keine Verbesserung der Genauigkeit bringt. Die Untersuchungen von [84] zeigen jedoch auch, daß ein Finite-Volumen-Verfahren zur Lösung der Euler-Gleichungen eine Diskretisierung höherer Ordnung ermöglicht und die Genauigkeit bereits beim Upwind deutlich über der des FEM-Ansatzes liegt.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird die SA in herkömmliche Optimierungsstrategien als Baustein eingesetzt und liefert bei derselben Lösungsqualität etwa um 20-30% kürzere Rechenzeiten. Man findet jedoch auch zahlreiche Literaturstellen, wo die Lösung des Sensitivitätsproblems nicht iterativ sondern direkt z. B. mit Gauss-Elimination durchgeführt wird, s. [67] und [98]. Bei diesen Anwendungen ist eine Rechenzeiterparnis nicht unbedingt selbstverständlich.

Um eine zusätzliche Analyse der Sensitivitäten durchführen zu können, wird bei der Sensitivitätsberechnung der direkte Weg (DDM) gewählt. Ist die Anzahl der Designvariablen aber höher als die der Problemfunktionen, empfiehlt sich die adjoint-Formulierung (AVM) als optimales Verfahren. Die Weiterentwicklung des vorliegenden Codes hinsichtlich AVM bedeutet keine wesentliche Schwierigkeit. Die Berechnung der Jacobi-Matrix in Gleichung (3.6) und (3.7) erfolgt für beide Methoden auf demselben Weg. Für die DDM ist sie bereits implementiert. Für die AVM müßte man lediglich die Verwaltung der berechneten Sensitivitätsvektoren ändern und ein zusätzliches Vektor-Vektor-Produkt implementieren.

## 7.2 Die Optimierungsstrategie

Um die SA in die Optimierung integrieren zu können, braucht man ein gradientenbasiertes Optimierungsverfahren. Eine Möglichkeit besteht darin, die Finite-Differenzen-Gradientenberechnung durch eine Sensitivitätsanalyse zu ersetzen.

Die andere Möglichkeit bewirkt eine Änderung der Optimierungsstrategie. Während bei herkömmlichen Optimierungsstrategien die CFD- und Optimierungsiteration miteinander nur schwach gekoppelt sind, wird hier die Kopplung dadurch verstärkt, daß die beiden Iterationen (Design- und Strömungsgrößen) gleichzeitig behandelt werden. Mit der in dieser Arbeit verwendeten SAND-Variante, SAADO, konnte ein Rechenzeitgewinn von 40 – 60% gegenüber der Finite-Differenzen-Variante erzielt werden, je nachdem ob die Optimierung mit oder ohne Parallelisierung durchgeführt wurde. In [46] wird SAADO mit diversen Optimierern getestet und liefert ähnliche

Ergebnisse wie in dieser Arbeit.

Durch die in [39] beschriebenen Methode konnten die Rechenzeiten für zwei- und dreidimensionale laminare Navier-Stokes-Probleme sogar um eine Größenordnung reduziert werden. Der große Vorteil dieses Verfahrens liegt darin, daß die "rauhes Zielfunktionen" kein Problem mehr für den Optimierer bedeuten. Die Rauheit einer Zielfunktion bei CFD-Anwendungen entsteht dadurch, daß bei FD-Gradientenberechnung das Abbruchkriterium für das iterative Lösungsverfahren – relativ zu den verwendeten Differenzabständen – zu hoch ist. Bei kontinuierlich geänderter Geometrie kann aber die Rauheit mit entsprechend gesetztem Abbruchkriterium geglättet werden, so daß auch gradientenbasierte Optimierungsverfahren für die Optimierung eingesetzt werden können. Das Problem der hohen Rechenzeiten, besonders bei kleinen Differenzabständen, wird mit der Verwendung von SAADO umgangen.

Der einzige Schwachpunkt des Verfahrens besteht darin, daß das Konvergenzkriterium für die Strömungsanalyse im Laufe der Optimierung gesteuert werden muß. In Gleichung (6.37) sind Informationen aus Optimierungen mit anderen Methoden eingebaut. Stehen keine Erfahrungswerte zur Verfügung, wie es bei industriellen Problemen in der Regel der Fall ist, muß die Vorgabe des Konvergenzkriteriums völlig dem Benutzer überlassen werden.

Um die Startwertproblematik der Optimierung zu umgehen, werden häufig hierarchische Optimierungsstrategien eingesetzt. Eine Möglichkeit ist, die eingesetzten CFD-Modelle hierarchisch aufzubauen. Die Anwendung dieser Strategie auf Strömungsmaschinen findet man u. a. bei RICHTER ET AL [88] oder bei SCHILLING ET AL [92]. Die Geometrieoptimierung wird mit einem Potentialverfahren begonnen. Dann folgt ein Euler- und anschließend ein Navier-Stokes-Verfahren.

Die andere Möglichkeit besteht darin, die numerische Auflösung sowohl des Optimierungsproblems als auch des CFD-Problems hierarchisch zu organisieren. So wird ein zunächst grob parametrisiertes Design-Problem mit einem grob aufgelösten CFD-Problem gelöst. Dann erfolgt eine Verfeinerung, und der Prozeß wird mit größerer Anzahl an Designparametern und Gitterpunkten wiederholt. Das Verfahren läßt sich effizient in eine SAND-Strategie einbinden. Da man dabei auf unterschiedlichen Gittern arbeitet, bietet sich die Möglichkeit an, das Ganze im Rahmen eines Mehrgitterverfahrens zu implementieren. Dabei wird die Mehrgittertechnik nicht nur für das CFD-Problem eingesetzt, sondern auch für das Designproblem. Das entstehende Multilevel-Verfahren wird auch als "One-Shot-Method" bezeichnet, um damit die Effizienz des Verfahrens anzudeuten. Die Optimierung erfolgt etwa "in einem Schuß" und die insgesamt benötigte Rechenzeit beträgt in der Regel nur das Dreif- bis Fünffache der Rechenzeit der zugehörigen Strömungsanalyse. Bisher sind allerdings nur sehr wenige Anwendungen mit diesem Verfahren bekannt geworden. BEUX UND DERVIEUX [12] haben eine Düse zweidimensional mit den Euler-Gleichungen berechnet. TA'ASAN ET AL [100] haben als Anwendung der Potentialtheorie zweidimensionale NACA-Profil optimiert. Als Vorteil dieser Strategie kann man ihre Effizienz erwähnen, der Nachteil ist im enormen Implementierungsaufwand zu sehen. Strömungsanalyse, Sensitivitätsanalyse und Optimierer müssen in demselben

Code integriert und miteinander auf mehreren Verfeinerungsleveln verbunden werden.

Bis diese Methoden aber auch für industrielle Anwendungen ausgereift sind, werden einige Jahre vergehen. Der Entwicklungstrend der Designoptimierung geht jedenfalls in die Richtung, statt NAND-Optimierungsstrategien SAND-Anwendungen im Multilevelkontext zu verwenden. Das Potential, das in der Anwendung von SA und SAND-Strategien liegt ist bei weitem noch nicht ausgeschöpft. In dieser Arbeit wurde versucht, einige herauszugreifen und näher zu untersuchen.

# Anhang A

## Sequentielle lineare Programmierung (SLP)

Um Optimierung mit Hilfe der Sensitivitätsanalyse durchführen zu können, braucht man ein auf Gradientenberechnung basiertes Optimierungsverfahren. Da bis jetzt am LHM für die Optimierung von Strömungsmaschinen grundsätzlich nur ableitungsfreie Algorithmen eingesetzt wurden, vgl. [5, 35, 115], mußte im Rahmen dieser Arbeit ein gradientenbasiertes Optimierungsverfahren entwickelt werden. Der grundsätzliche Unterschied zwischen den beiden Methoden ist in Abbildung 3.4 in einem Flußdiagramm dargestellt.

Das Optimierungsverfahren ist in diesem Sinne ein unentbehrliches Hilfsmittel der anderen Verfahren und kann als ein "Nebenprodukt" dieser Arbeit betrachtet werden. Das gewählte SLP-Verfahren zeichnet sich in keiner Hinsicht unter den anderen aus, aber samt seinen Schwächen und Stärken gilt es als ein zuverlässiges, effizientes und vor allem relativ einfach implementierbares Verfahren. Obwohl ARORA [4] es für die Lösung allgemeiner Design-Optimierungsaufgaben in der Industrie nicht für geeignet hält, wurde es erfolgreich in der Strukturoptimierung [6] und auch im CFD-Design, s. z. B. [67] und [98] eingesetzt.

Der SLP-Algorithmus gehört zu der Gruppe der Approximationsverfahren, die mit Gradienten erster Ordnung arbeiten. Wie man es von einem Approximationsverfahren erwartet, wird in den einzelnen Optimierungsschritten nicht die ursprüngliche Aufgabe, sondern eine vereinfachte Ersatzaufgabe gelöst. Dabei werden zu Beginn eines Iterationsschrittes die ursprünglichen in der Regel nichtlinearen Programmfunktionen durch explizite Funktionen (z. B. Polynome) approximiert, deren Auswertung mit sehr geringem Aufwand möglich ist. Eine besonders einfache Form der obigen Approximation ist, wenn die Approximationsfunktionen linear sind. Dadurch erhält man anstelle einer nichtlinearen Optimierungsaufgabe eine Reihe linearer Aufgaben. Dazu sind die Taylor-Reihenentwicklung der Zielfunktion, deren Restriktion an der Stelle  $\mathbf{x}^k$  und die Vernachlässigung der Terme höherer als erster Ordnung notwendig. Mit der Notation (3.1) lautet dies dann:

$$\begin{aligned}
 F(\mathbf{x}) &\rightarrow \varphi(\mathbf{x}) = F^k + \nabla F^k \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) \\
 H_i(\mathbf{x}) &\rightarrow \eta_i(\mathbf{x}) = H_i^k + \nabla H_i^k \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) \\
 G_j(\mathbf{x}) &\rightarrow \gamma_j(\mathbf{x}) = G_j^k + \nabla G_j^k \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k).
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Daraus ergibt sich die linearisierte Optimierungsaufgabe:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimiere } \varphi(\mathbf{x}) && \tag{A.2} \\
 \text{mit den Nebenbedingungen} & \eta_i(\mathbf{x}) = 0, && i = 1, \dots, m \\
 & \gamma_j(\mathbf{x}) \leq 0, && j = 1, \dots, p.
 \end{aligned}$$

Das resultierende lineare Problem (A.2) kann nun mit dem Simplex-Verfahren [28] effizient gelöst werden. Dann wird die ursprüngliche Aufgabe an der Stelle  $\mathbf{x}^{k+1}$  erneut linearisiert und der beschriebene Vorgang wiederholt, bis die Lösung die Konvergenzkriterien erfüllt.

Aufgabe (A.2) hat aber nur in einer beschränkten Umgebung der Zwischenlösung  $\mathbf{x}^k$  ihre Gültigkeit. So kann es auch passieren, daß die Lösung von (A.2) im Unendlichen liegt oder bei Nebenbedingungen am Rand des zulässigen Bereiches. Daher wird die linearisierte Aufgabe mit zusätzlichen Restriktionen, mit sog. *Move Limits*, versehen. Sie bedeuten zusätzliche untere und obere Schranken für die Designvariablen und lassen die Zwischenlösungen den Zulässigkeitsbereich nicht verlassen. Die Größe der Move Limits wird während der Optimierung verändert und zwar so, daß die Schranken im Laufe der Iteration immer kleiner werden. Formal sieht dies wie folgt aus:

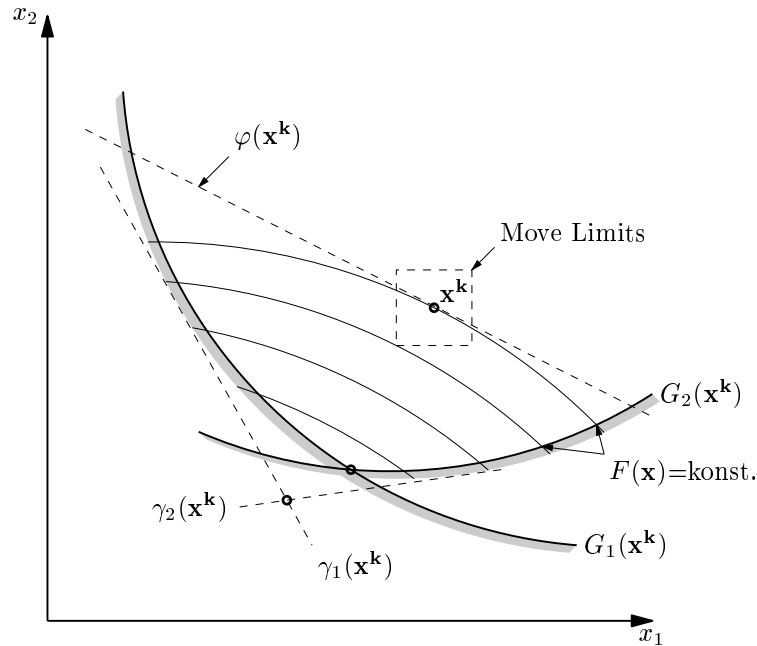
$$x_i^k - dx_i^k \leq x_i^k \leq x_i^k + dx_i^k. \tag{A.3}$$

Wie  $dx_i^k$  geändert wird, bestimmt maßgeblich die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens. Im Gegensatz zu den in [6] beschriebenen festen Vorschriften werden die Move Limits in dieser Arbeit adaptiv geändert. Verhält sich die Designvariable  $x_i^k$  monoton, so wird  $dx_i^k$  vergrößert. Zeigt sie aber Oszillationen, so wird  $dx_i^k$  verringert. In Abbildung A.1 wird die Linearisierung und die Bedeutung der Move Limits geometrisch dargestellt.

Um die Geschwindigkeit der Optimierung zu verbessern, bietet sich neben einer guten Wahl für das Optimierungsverfahren die Parallelisierung als Alternative an. Können die Zielfunktionen nur skalar ausgewertet werden – wie in unserem Fall – sollte das Optimierungsverfahren parallelisiert werden. Dabei ist eine Möglichkeit, die Gradientenberechnung auf die zur Verfügung stehenden Prozessoren aufzuteilen.

Bei der Parallelisierung von Strömungslösern entstehen die größten Effizienzverluste durch großen Kommunikationsaufwand. In jeder Iteration werden die Werte an





**Abbildung A.1:** Geometrische Interpretation der Linearisierung und der Bedeutung der Move Limits

den Blockrändern ausgetauscht und abhängig von der Blocktopologie kann dies aufwendiger sein als die Lösung des gegebenen Blockproblems. In unserem Fall ist die Kommunikation praktisch vernachlässigbar. In jeder Iteration muß lediglich ein einziger Wert dem Masterprozeß übergeben werden. Die dazu benötigte Zeit ist im Vergleich zu der, die man für die Zielfunktionsberechnung braucht, um mehrere Größenordnungen kleiner. Das Problem tritt in diesem Fall bei der Parallelisierbarkeit des Algorithmus auf. Da nur die Gradientenberechnung parallelisiert wird, bleibt der Rest skalar und so auch die Berechnung der Zielfunktion am Anfang jeder Iteration.

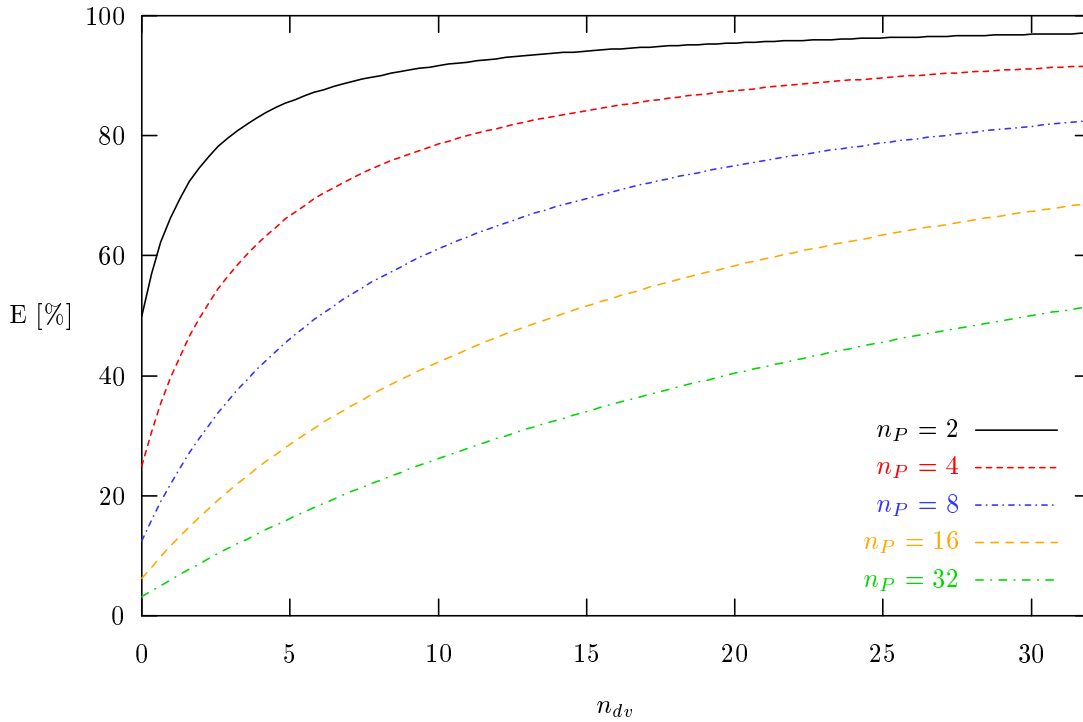
Die Effizienz  $E$  der Parallelisierung ist definiert durch:

$$E = \frac{T_1}{n_P \cdot T_P}. \quad (\text{A.4})$$

Dabei bezeichnen  $T_1$  die Rechenzeit auf einem Prozessor und  $T_P$  die auf  $n_P$  Prozessoren. Wird nur ein Teil,  $q \cdot N$ , aller Operationen  $N$  des vorliegenden Algorithmus parallelisiert und bleibt der Rest,  $(1 - q) \cdot N$ , skalar, dann ergibt sich für die Effizienz:

$$E = \frac{1}{n_P} \frac{tN}{qtN/n_P + (1 - q)tN} = \frac{1}{q + (1 - q)n_P}, \quad (\text{A.5})$$

wobei  $t$  die Dauer für die Durchführung einer Operation bezeichnet. Dauert die Gradientenberechnung ungefähr so lange wie die Zielfunktionsberechnung, dann gilt:



**Abbildung A.2:** Abhängigkeit der Effizienz der Parallelisierung von der Anzahl der Designvariablen für unterschiedliche Anzahl von Prozessoren

$$q \approx \frac{n_{dv}}{n_{dv} + 1}, \quad (\text{A.6})$$

und damit ergibt sich für die Effizienz:

$$E = \frac{n_{dv} + 1}{n_{dv} + n_P}. \quad (\text{A.7})$$

In Abbildung A.2 ist die Funktion (A.7) graphisch dargestellt. Erkennbar ist, daß je größer der Quotient  $\frac{\text{Anzahl Designvariablen}}{\text{Anzahl Prozessoren}}$  ist, desto besser wird die Effizienz der Parallelisierung. Die Implementierung der Parallelisierung erfolgte mit dem Software-Paket MPI (Message Passing Interface) [94].

## A.1 Validierung des Algorithmus

Die Validierung erfolgt mit Hilfe eines in [52] beschriebenen Testfalls. Die Rosenbrock- oder auch "Bananen"-Funktion ist wie folgt definiert:

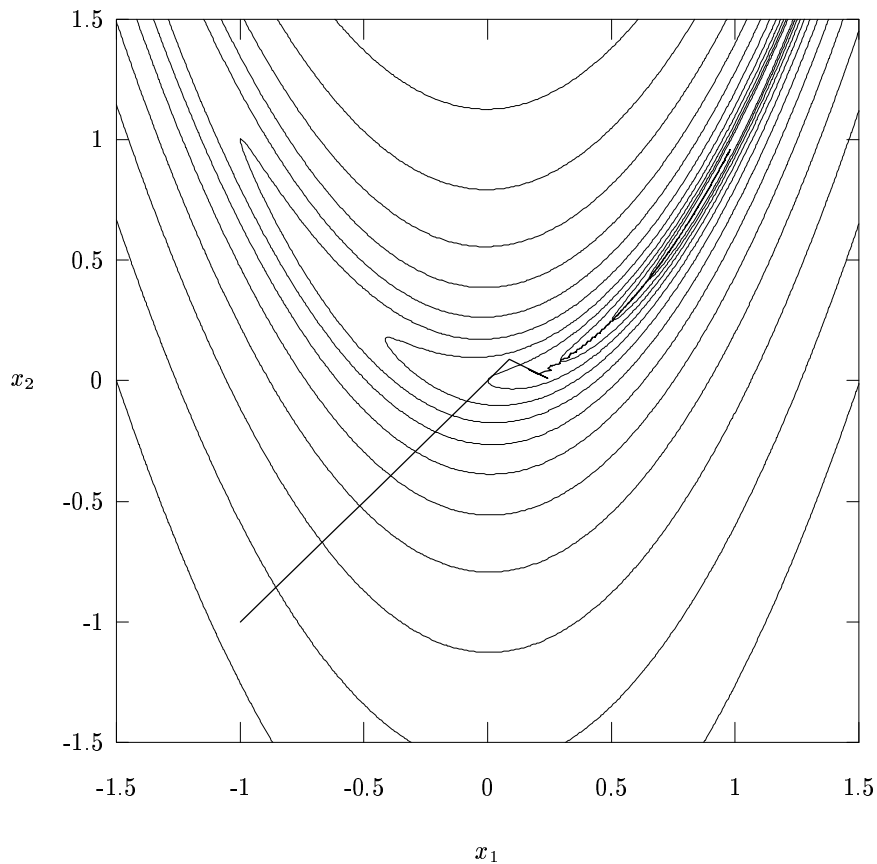
$$f(x) = \sum_{i=2,4,6,\dots,n} [(1 - x_{i-1})^2 + 100(x_i - x_{i-1}^2)^2].$$

Opt. Variablen	Zielfunktionsaufrufe	$ F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}^*) $
2	91	1.1e-4
4	206	1.3e-4
8	642	2.1e-4
16	1543	3.8e-4

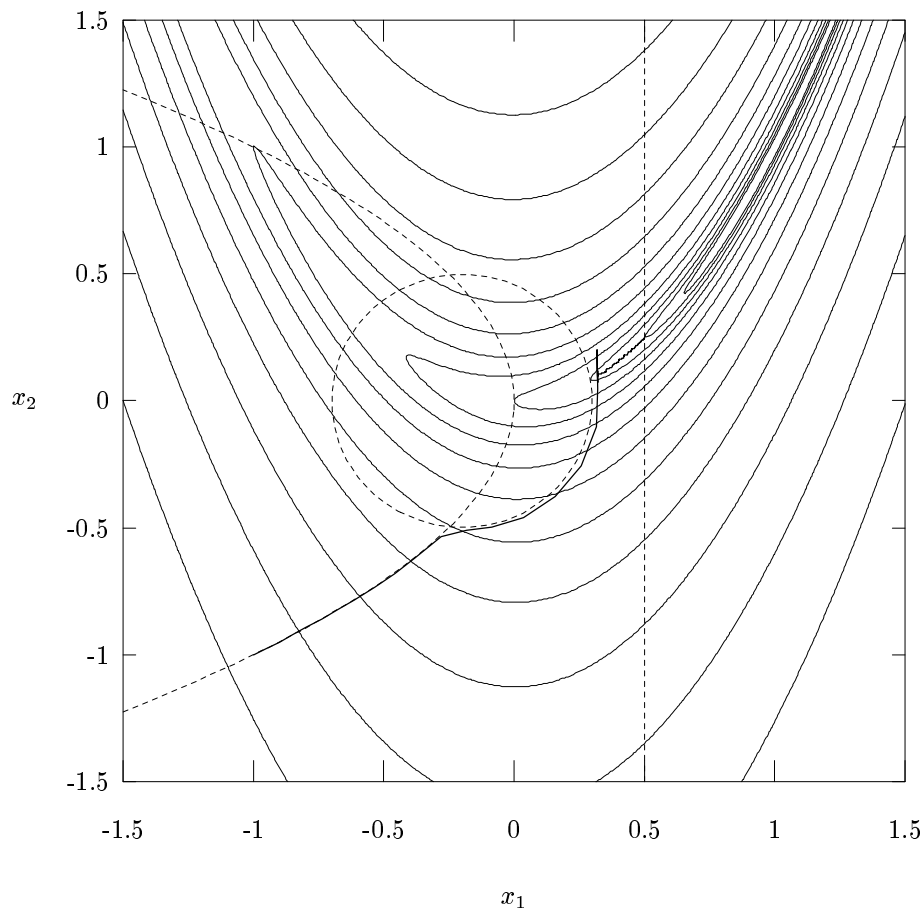
**Tabelle A.1:** Ergebnisse für die Rechnungen mit der Rosenbrock-Funktion

Das Minimum der Funktion liegt im Punkt  $[1, \dots, 1]^T$  und beträgt 0. Zu diesem Wert führt der Weg für das Optimierungsverfahren durch ein langes flaches gekrümmtes Tal, vgl. Abbildung A.3. Der Testfall wird in der Regel für die Beurteilung diverser Optimierungsalgorithmen verwendet.

Die Minimumsuche wurde für  $n = 2, 4, 8$  und 16 Optimierungsvariablen durchgeführt. Der Startvektor war in jedem Fall der Punkt  $[-1, \dots, -1]^T$  und das Abbruchkriterium, daß die Änderung der Zielfunktion kleiner als  $\epsilon = 1e^{-5}$  sein sollte. Die Ergebnisse der Optimierungen sind in Tabelle A.1 zusammengefaßt. Ein zweidimensionaler Konturplot und der Verlauf der Suche für  $n = 2$  sind in Abbildung A.3 dargestellt.



**Abbildung A.3:** Verlauf der Optimierung für die Rosenbrock-Funktion.  
Startpunkt:  $[-1, -1]^T$ , Optimum :  $[1, 1]^T$



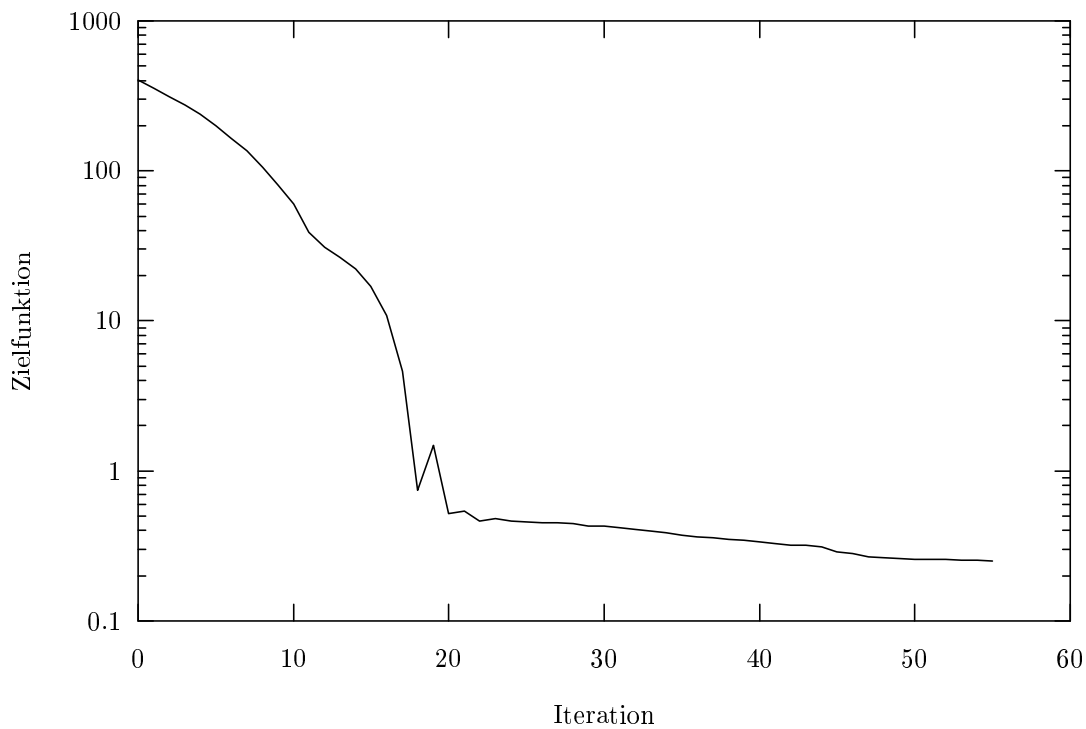
**Abbildung A.4:** Verlauf der Optimierung für die Rosenbrock-Funktion mit nichtlinearen Nebenbedingungen. Startpunkt:  $[-1, -1]^T$ , Optimum :  $[0.5, 0.25]^T$

In einem weiteren Testfall wird die Rosenbrock-Funktion für  $n = 2$  mit nichtlinearen Nebenbedingungen versehen, so daß eine restringierte Optimierungsaufgabe entsteht. Die Nebenbedingungen sind:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2^2 &\geq 0 \\ (x_1 + 0.2)^2 + x_2^2 &\geq 0.25 \\ x_1 &\leq 0.5. \end{aligned}$$

Als Startpunkt wird auch in diesem Fall  $[-1, -1]^T$  gewählt. Das Optimum liegt wegen der Bedingung  $x_1 < 0.5$  bei  $[0.5, 0.25]^T$ . Das Konvergenzkriterium wird nicht verändert. Die Nebenbedingungen und der Verlauf der Optimierung sind in Abbildung A.4, der Konvergenzverlauf in Abbildung A.5 dargestellt.

Die Nebenbedingungen bedeuten für den Optimierer zusätzliche Hindernisse im Parameterraum. Ohne diese Hindernisse verlief die Optimierung wie in Abbildung A.3. Da die Anfangswerte der Move Limits in beiden Richtungen identisch waren,



**Abbildung A.5:** Konvergenzverlauf der Optimierung für die Rosenbrock-Funktion mit Nebenbedingungen.

nähert sich der Optimierer unter  $45^\circ$  der Lösung. Im restringierten Fall jedoch findet er eine andere Bahn und zwar am Rand des zulässigen Bereichs. Nachdem die Restriktionen keine Rolle mehr spielen, verläuft die Optimierung wie im Fall ohne Restriktionen.

Ziel der vorliegenden Arbeit war es nicht, das Verfahren hinsichtlich der Effizienz zu beurteilen, weshalb auf einen Vergleich mit anderen Methoden verzichtet wurde.

# Literaturverzeichnis

- [1] AGARD-FDP-VKI (Hrsg.): *Optimum Design methods in Aerodynamics* 1994
- [2] ANDERSON, W. K. ; VENKATAKRISHNAN, V.: Aerodynamic Design Optimization on Unstructured Grids with a Continuous Adjoint Formulation. In: *AIAA Paper 97-0643* (1997), Jan.
- [3] ARABSHAHI, S. ; WHITFIELD, D. L.: A Multiblock Approach to the Three-Dimensional Unsteady Euler Equations About a Wing-Pylon-Store Configuration. In: *AIAA Paper 89-3401* (1989), Aug.
- [4] ARORA, Jasbir S.: *Introduction to Optimum Design*. London : McGraw Hill, 1989 (McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering)
- [5] ASCHENBRENNER, Thomas: *Entwurf strömungsoptimaler Beschaukelungen*. Technische Universität München, Lehrstuhl und Laboratorium für Hydraulische Maschinen und Anlagen, Dissertation, 1998
- [6] BAIER, H. ; SEESSELBERG, Ch. ; SPECHT, B.: *Optimierung in der Strukturmechanik*. Braunschweig; Wiesbaden : Vieweg, 1994
- [7] BATHE, K.-J.: *Finite-Elemente-Methoden: Matrizen und lineare Algebra, die Methode der finiten Elemente, Lösung von Gleichgewichtsbedingungen und Bewegungsgleichungen*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1986
- [8] BAYSAL, O. (Hrsg.): *Multidisciplinary Applications of CFD* 1991
- [9] BAYSAL, O. ; FOULADI, K. ; LESSARD, V. R.: Multigrid and Upwind Viscous Flow Solver on 3-D Overlapped and Embedded Grids. In: *AIAA Journal* 29 (1991), Nr. 4, S. 903–910
- [10] BECKER, R.: *An Adaptive Finite Element Method for the Incompressible Navier-Stokes Equations on Time-Dependent Domains*, Universität Heidelberg, Doktorarbeit, 1995
- [11] BEUX, F. ; DERVIEUX, A.: Exact-Gradient Shape Optimization of a 2D Euler Flow. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 12 (1992), Nr. 3, 4, S. 281–302

- [12] BEUX, F. ; DERVIEUX, A.: A Hierarchical Approach for Shape Optimization. 1993 ( 1868). – Forschungsbericht
- [13] BISCHOF, C. ; CARLE, A. ; CORLISS, G. ; GRIEWANK, A. ; HOVLAND, P.: ADIFOR: Generating Derivative Codes from Fortran Programs. In: *Scientific Programming* 1 (1992), Nr. 1, S. 11–29
- [14] BISCHOF, C. ; CARLE, A. ; KHADEMI, P. ; MAUER, A.: ADIFOR 2.0: Automatic Differentiation of Fortran 77 Programs. In: *IEEE Computational Science and Engineering* 3 (1996), Nr. 3, S. 18–32
- [15] BISCHOF, C. ; CORLISS, G. ; GREEN, L. ; GRIEWANK, A. ; HAIGLER, K. ; NEWMAN, P.: Automatic Differentiation of Advanced CFD Codes for Multi-disciplinary Design. In: *Computing Systems in Engineering* 3 (1992), Nr. 6, S. 625–637
- [16] BISCHOF, C. ; GRIEWANK, A.: ADIFOR: A Fortran System for Portable Automatic Differentiation. In: *AIAA Paper 92-4744* (1992), Sept.
- [17] BORGGGAARD, J. T. ; BURNS, J. ; CLIFF, E. M. ; GUNZBURGER, M. D.: Sensitivity Calculations for 2-D Inviscid Supersonic Forebody Problem. In: *Identification and Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*. Philadelphia : SIAM Publications, 1993, S. 14–24
- [18] BRAESS, D.: *Finite Elemente*. Springer Verlag, 1992
- [19] BRANDT, A.: *Multigrid techniques: 1984 guide with applications to fluid dynamics*. St. Augustin : Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, 1984 (GMD–Studien Nr. 85)
- [20] BRONSTEIN, I. N. ; SEMENDJAJEW, K. A.: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 1981
- [21] BÜHLER, K. ; KIRCHARTZ, K. R. ; WIMMER, M.: Strömungsmechanische Instabilitäten. In: *Strömungsmechanik und Strömungsmaschinen* 40 (1989), S. 99–126
- [22] BURGREN, G. W. ; ANTAKI, J. F.: CFD-Based Design Optimization of a Three-Dimensional Rotary Blood Pump. In: *AIAA Paper 96-4185* (1996), Sept.
- [23] BURGREN, G. W. ; ANTAKI, J. F. ; GRIFFITH, B. P.: A Design Improvement Strategy for Axial Blood Pumps Using Computational Fluid Dynamics. In: *American Society for Artificial Internal Organs Journal* 42 (1996), S. M354–M369
- [24] CARLE, A. ; GREEN, L. L. ; BISCHOF, C. H. ; NEWMAN, P. A.: Applications of Automatic Differentiation in CFD. In: *AIAA Paper 94-2197* (1994), June

- [25] ÇABUK, Hayri ; MODI, Vijay: Optimum plane diffusers in laminar flow. In: *Journal of Fluid Mechanics* 237 (1992), S. 373–393
- [26] CHORIN, A. ; MARSDEN, J.: *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer Verlag, 1993
- [27] CROUZEIX, M. ; RAVIART, P. A.: Conforming and non-conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations. In: *R.A.I.R.O* (1973), Nr. R-3, S. 77–104
- [28] DANTZIG, G. B.: *Linear programming and extensions*. NJ., Princeton, USA : University Press, 1963
- [29] DONGARRA, J. ; BUNCH, C. ; MOLER, C ; STEWART, C. W.: *LINPACK User's Guide*. Philadelphia : SIAM, 1979
- [30] ELESKAKY, M. E. ; BAYSAL, O.: Shape Optimization of a 3D Nacelle near a Flat Plate Wing Using Multiblock Sensitivity Analysis. In: *AIAA Paper 94-0160* (1994), Jan.
- [31] ELLIOT, J. ; PERAIRE, J.: Aerodynamic Design and Using Unstructured Meshes. In: *AIAA Paper 96-1941* (1996), June
- [32] ELLIOT, J. ; PERAIRE, J.: Practical 3D Aerodynamic Design and Optimization Using Unstructured Grids. In: *AIAA Paper 96-4170* (1996), Sept.
- [33] ELLIOT, J. ; PERAIRE, J.: Aerodynamic Optimization on Unstructured Meshes with Viscous Effects. In: *AIAA Paper 97-1849* (1997), July
- [34] FEIEREISEN, W. J. (Hrsg.) ; LACER, A. K. (Hrsg.): *Computational Aerosciences Workshop 95* 1996
- [35] FERNÁNDEZ, Antonio: *Strömungstechnische Optimierung von Beschaukelungen hydraulischer Maschinen*. Technische Universität München, Lehrstuhl und Laboratorium für Hydraulische Maschinen und Anlagen, Dissertation, 1997
- [36] GERSTEN, K. ; HÄRTL, A. P. ; PAGENDARM, H.-G.: Optimierung von Diffusoren bezüglich der Diffusorströmung und der Diffusorwände / Forschungsberichte VDI. 1987 ( 133). – Forschungsbericht. Reihe 7: Strömungstechnik
- [37] GERSTEN, K. ; HÄRTL, A. P. ; PAGENDARM, H.-G.: Optimierung von Diffusoren durch Kontinuierung der Wände auf der Basis des Grenzschichtkonzeptes / Forschungsberichte VDI. 1989 ( 159). – Forschungsbericht. Reihe 7: Strömungstechnik
- [38] GHAFARI, F. ; LUCKRING, J. M. ; THOMAS, J. L. ; BATES, B. L. ; BIEDRON, R. T.: Multiblock Navier-Stokes Solutions About the F/A-18 Wing-LEX-Fuselage Configurations. In: *Journal of Aircraft* 30 (1993), Nr. 3, S. 293–303



- [39] GHATTAS, O. ; BARK, J.-H.: Optimal Control of Two- and Three-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Flows. In: *Journal of Computational Physics* 136 (1997), S. 231–244
- [40] GILL, Philip E. ; MURRAY, Walter ; WRIGHT, Margaret H.: *Practical Optimization*. 8. London : Academic Press Limited, 1991
- [41] GLOWINSKI, R. ; PIRONNEAU, O.: On the Numerical Computation of the Minimum-Drag Profile in Laminar Flow. In: *Journal of Fluid Mechanics* 72 (1975), S. 385–389
- [42] GODFREY, A. G. ; CLIFF, E. M.: Direct Calculation of Aerodynamic Force Derivatives: A Sensitivity-Equation Approach. In: *AIAA Paper 98-0393* (1998), Jan.
- [43] GOSTELOW, J. P.: Potential Flow through Cascades - A Comparison between Exact and Approximate Solutions / ARC. 1965 ( CP No. 807). – Forschungsbericht
- [44] GREEN, L. L. ; NEWMAN, P. A. ; HAIGLER, K. J.: Sensitivity Derivatives for Advanced CFD Algorithms and Viscous Modelling Parameters via Automatic Differentiation. In: *Journal of Computational Physics* 125 (1996), Nr. 2, S. 313–324
- [45] GROSSMANN, C. ; ROOS, H.: *Numerik partieller Differentialgleichungen*. 2. Auflage. Teubner, 1994
- [46] GUMBERT, C. R. ; HOU, G. J. W. ; NEWMAN, P. A.: Simultaneous Aerodynamic Analysis and Design Optimization (SAADO) for a 3-D Rigid Wing. In: *AIAA Paper 99-3296* (1999)
- [47] HACKBUSCH, W.: *Computational Mathematics*. Bd. 4 : Multigrid Methods and Applications. Berlin : Springer-Verlag, 1985
- [48] HAFTKA, R. T.: Simultaneous Analysis and Design. In: *AIAA Journal* 23 (1985), Nr. 7, S. 1099–1103
- [49] HAFTKA, R. T. ; Z., Gürdal: *Elements of Structural Optimization*. 3. Dordrecht : Kluwer Academic Press, 1992 (Solid mechanics and its applications)
- [50] HICKS, R. M. ; HENNE, P. A.: Wing Design by Numerical Optimization. In: *AIAA Paper 77-1247* (1977), Aug.
- [51] HICKS, R. M. ; MURMAN, E. M. ; VANDERPLAATS, G. N.: An Assesment of Airfoil Design by Numerical Optimization. In: *NASA TM-3092* (1974), July
- [52] HOCK, W. ; SCHITTKOWSKI, K.: *Test Examples for Nonlinear Programming Codes*. Springer, 1981 (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems)

- [53] HOU, G. J.-W. ; KORIVI, V. M. ; TAYLOR, A. C. ; III, V. ; NEWMAN, P. A.: Simultaneous Aerodynamic Analysis and Design Optimization (SAADO) of Turbulent Transonic Airfoil Using a Navier-Stokes Code with Automatic Differentiation (ADIFOR). In: Feiereisen (Hrsg.) ; Lacer (Hrsg.) (siehe [34])
- [54] HOU, G. J.-W. ; TAYLOR, A.C. I. ; KORIVI, V. M.: Discrete Shape Sensitivity Equations for Aerodynamic Problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37 (1994), Nr. 14, S. 2251–2266
- [55] HOU, G. J.-W. ; TAYLOR, A.C. I. ; MANI, S. V.: Simultaneous Aerodynamic Analysis and Design Optimization. In: *Abstracts from 2nd U.S. national Congress on Computational Mechanics* (1993), Aug, S. 130
- [56] IOLLO, A. ; KURUVILA, G. ; TA'ASAN, S.: Pseudo-Time Method for Optimal Shape Design Using the Euler Equations. In: *ICASE Report 95-59* (1995), Aug.
- [57] IOLLO, A. ; SALAS, M. ; TA'ASAN, S.: Shape Optimization Governed by the Euler Equations Using an Adjoint Method. In: *Institute for Computer Applications in Science and Engineering Rept.* 93-78 (1993), Nov.
- [58] JAMESON, A.: Aerodynamic Design via Control Theory. In: *Journal of Scientific Computing* 3 (1988), Nr. 3, S. 233–260
- [59] JAMESON, A. ; PIERCE, N. A. ; MARTINELLI, L.: Optimum Aerodynamic Design Using the Navier-Stokes Equations. In: *AIAA Paper 97-0101* (1997), Jan.
- [60] JOUKOWSKY, N.: Aerodynamic Design via Control Theory. In: *Zeitung für Flugtechnik und Motorluftschiff* 1 (1910), S. 281–284
- [61] K., Anderson W. ; BONHAUS, D. L.: Aerodynamic Design on Unstructured Grids for Turbulent Flows. In: *NASA TM 112867* (1997)
- [62] KHOSLA, P. K. ; RUBIN, S. G.: A Diagonally Dominant Second-Order Accurate Implicit Scheme. In: *Computers and Fluids* 2 (1974), S. 207–209
- [63] KORIVI, V. M. ; TAYLOR, A. C. I. ; NEWMAN, P. A. ; HOU, G. J.-W. ; JONES, H. E.: An Approximate Factored Incremental Strategy for Calculating Consistent Discrete CFD Sensitivity Derivatives. In: *Journal of Computational Physics* 113 (1994), Nr. 2, S. 336–346
- [64] KORN, G. A. und Korn T. M.: *Mathematical Handbook for Scientist and Engineers, Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review.* 2. Düsseldorf : McGraw-Hill, 1968
- [65] KURUVILA, G. ; TA'ASAN, S. ; SALAS, M. D.: Airfoil Optimizations by the One-Shot Method. In: AGARD-FDP-VKI (Hrsg.) (siehe [1])

- [66] LACASSE, J. M. ; BAYSAL, O.: Shape Optimization of Single- and Two-Element Airfoils on Multiblock Grids. In: *AIAA Paper 94-4273* (1994), Sept.
- [67] MADSEN, Jens I.: *Design Optimization of Internal Flow Devices*, Aalborg University, Diplomarbeit, 1998
- [68] MEAKIN, R. L.: Moving Body Overset Grid Methods for Complete Aircraft Tiltrotor Simulations. In: *AIAA Paper 93-3350* (1993), July
- [69] MOHAMMADI, B.: Optimal Shape Design, Reverse Mode of Automatic Differentiation and Turbulence. In: *AIAA Paper 97-0099* (1997), Jan.
- [70] MÜLLER, A.: *Objektorientierte Strukturen für adaptive Multilevelverfahren zur Strömungssimulation*, Technische Universität München, Doktorarbeit, 2000
- [71] MÜLLER, A. ; SZILÁGYI, B.: Nonconforming Finite Element Approximation of Steady, Incompressible 3D Euler Equations in a Rotating Frame of Reference. In: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* (Eingereicht zur Veröffentlichung)
- [72] NEWMAN, J. C. I.: *Integrated Multidisciplinary Design Optimization Using Discrete Sensitivity Analysis for Geometrically Complex Aeroelastic Configurations*, Virginia Polytechnic Inst. and State University, Doktorarbeit, 1997
- [73] NEWMAN, J. C. I. ; HOU, G. J.-W. ; TAYLOR, A. C. I.: Observations Regarding Use of Advanced CFD Analysis, Sensitivity Analysis, and Design Codes in MDO. In: *ICASE Report 96-16, NASA CR 198293* (1996), March
- [74] NEWMAN, J. C. I. ; TAYLOR, A. C. I.: Three-Dimensional Aerodynamic Shape Sensitivity Analysis and Design Optimization Using the Euler Equations on Unstructured Grids. In: *AIAA Paper 96-2464* (1996), June
- [75] NEWMAN, J. C. I. ; TAYLOR, A. C. I. ; BARNWELL, R. W.: Aerodynamic Shape Sensitivity Analysis and Design Optimization of Complex Configurations Using Unstructured Grids. In: *AIAA Paper 97-2275* (1997), June
- [76] NEWMAN, J. C. I. ; TAYLOR, A. C. I. ; BURGEEEN, G. W.: An Unstructured Grid Approach to Sensitivity Analysis and Shape Optimization Using the Euler Equations. In: *AIAA Paper 95-1646* (1995), June
- [77] OLOSO, A. ; TAYLOR, A. C. I.: Aerodynamic Shape-Sensitivity Analysis and Design Optimization on the IBM-SP2 Using the 3D Euler Equations. In: *AIAA Paper 97-2273* (1997), June
- [78] OROZCO, C. ; GHATTAS, O.: Optimum Design of Systems Governed by Non-linear Partial Differential Equations. In: *AIAA Paper 92-4836* (1992), Sept
- [79] PATANKAR, S. V.: *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. 1. Washington, London, New York : Hemisphere Publishing Corporation, 1980

- [80] PATANKAR, S. V. ; SPALDING, D. B.: A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows. In: *Int. Journal of Heat and Mass Transfer* 15 (1972), S. 1787–1806
- [81] PIRONNEAU, O.: On Optimum Profiles in Stokes Flow. In: *Journal of Fluid Mechanics* 59 (1973), S. 117–128
- [82] PIRONNEAU, O.: On Optimum Design in Fluid Mechanics. In: *Journal of Fluid Mechanics* 64 (1974), S. 97–110
- [83] RANNACHER, R. ; TUREK, S.: A Simple Nonconforming Quadrilateral Stokes Element. In: *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 8 (1992), S. 97–111
- [84] REINELT, R.: *Simulation inkompressibler Strömungen mit unstrukturierten Gittern*, Technische Universität München, Doktorarbeit, 2001
- [85] REUTHER, J. ; JAMESON, A. ; ALONSO, J. J. ; RIMLINGER, M. J. ; SAUNDERS, D.: Constrained Multipoint Aerodynamic Optimization Using an Adjoint Formulation and Parallel Computers. In: *AIAA Paper 97-0103* (1997), Jan.
- [86] REUTHER, J. ; JAMESON, A. ; FARMER, J. ; MARTINELLI, L. ; SAUNDERS, D.: Aerodynamic Shape Optimization of Complex Aircraft Configurations via an Adjoint Formulation. In: *AIAA Paper 96-0094* (1996), Jan.
- [87] REUTHER, J. J.: *Aerodynamic Shape Optimization Using Control Theory*, University of California, Doktorarbeit, 1996
- [88] RICHTER, R. ; WÖHLER, M. ; SCHILLING, R.: Optimization System for Hydraulic Machinery. In: *Proceedings of the FEDSM99: 3rd ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference*. San Francisco, California, USA, July 18–23 1999
- [89] RIZK, M. H.: Application of the Single-Cycle Optimization Approach to Aerodynamic Design. In: *Journal of Aircraft* 22 (1985), Nr. 6, S. 509–515
- [90] RIZK, M. H.: Optimizaiton by Updating Design Parameters as CFD Iterative Flow Solutions Evolve. In: Baysal (Hrsg.) (siehe [8])
- [91] SCHÄFER, M ; TUREK, S. ; DURST, F. ; KRAUSE, E. ; RANNACHER, R.: Benchmark Computations of Laminar Flow Around a Cylinder. In: HIRSCHEL, E. (Hrsg.): *Notes on Numerical Fluid Mechanics* Bd. 52. Vieweg, 1996, S. 547–566
- [92] SCHILLING, R. ; RICHTER, R. ; THUM, S. ; WÖHLER, M.: Real-Time Design and Numerical Optimization of Hydraulic Machinery Bladings. In: HAN, J.-C. (Hrsg.): *Proceedings of the 8th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery, ISROMAC-8* Bd. 1. Honolulu, Hawaii, USA, March

- [93] SCHREIBER, P.: *Eine nichtkonforme Finite-Elemente-Methode zur Lösung der inkompressiblen 3-D Navier-Stokes Gleichungen*, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, Diss., 1996
- [94] SNIR, M. ; OTTO, S. W. ; HUSS-LEDERMANN, S. ; W., Walker D. ; DONGARRA, J.: *MPI: The Complete Reference*. London : MIT Press, 1996
- [95] SOBIESZCZANSKI-SOBIESKI, J.: The Case for Aerodynamic Sensitivity Analysis. In: ADELMAN, H. M. (Hrsg.) ; HAFTKA, R. T. (Hrsg.): *Sensitivity Analysis in Engineering*. NASA, 1987, S. 77–96
- [96] SPALART, P. R. ; ALLMARAS, S. R.: A One Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows. In: *AIAA Paper 92-0439* (1992), Jan.
- [97] STEGER, J. L. ; DOUGHERTY, F. C. ; BENEK, J. A.: A Chimera Grid Scheme. In: *Advances in Grid Generation* 5 (1983), S. 59–69
- [98] SVENNINGSEN, Kaj H. ; MADSEN, Jens I. ; HASSING, Niels H. ; PÄUKER, Wolfgang H. G.: Optimization of flow geometries applying quasianalytical sensitivity analysis. In: *Applied Mathematical Modelling* 20 (1996), March, S. 214–224
- [99] TA'ASAN, S.: Pseudo-Time Methods for Constrained Optimization Problems Governed by PDE / Institute for Computer Applications in Science and Engineering. 1995 ( 95-32). – Forschungsbericht
- [100] TA'ASAN, S. ; KURUVILA, G. ; D., Salas M.: Aerodynamic Design and Optimization in One Shot / American Institut of Aeronautics and Astronautics. 1992 ( AIAA-92-0025). – Forschungsbericht
- [101] TAYLOR, A. C. I.: Automatic Differentiation of Advanced Flow-Analysis Codes in Incremental Iterative Form for Multidisciplinary Applications / Old Dominion University. Old Dominion University, Norfolk, VA, 1996 ( 77). – Final Rept., Master Contract NAS1-19858
- [102] TAYLOR, A. C. I. ; OLOSO, A. ; NEWMAN, J. C. I.: CFL3D.ADII (Version 2.0): An Efficient, Accurate, General-Purpose Code for Flow Shape-Sensitivity Analysis. In: *AIAA Paper 97-2204* (1997), June
- [103] THOMAS, A. ; SMITH, R. E. ; TIWARI, S. N.: Aerodynamic Shape Optimization of Blended Surfaces Representing HSCT-Type Configurations. In: *AIAA Paper 95-1826* (1995), June
- [104] THOMAS, J. L. ; KRIST, S. T. ; ANDERSON, W. K.: Navier-Stokes Computations of Vortical Flows over Low Aspect Ratio Wings. In: *AIAA Journal* 28 (1990), Nr. 2, S. 205–212
- [105] THOMAS, J. L. ; WALTERS, R. W. ; REU, T. ; GHAFARI, F. ; WESTON, R. P. ; LUCKRING, J. M.: A Patched-Grid Algorithm for Complex Configurations Directed Toward the F/A-18 Aircraft. In: *AIAA Paper 89-0121* (1989), Jan.

- [106] TRUCKENBRODT, E.: *Fluidmechanik*. Springer Verlag, 1992
- [107] TUREK, S.: *Efficient Solvers for Incompressible Flow Problems. An Algorithmic and Computational Approach*. Springer, 1999
- [108] VANDERPLAATS, G. N. ; HICKS, R. M.: Numerical Airfoil Optimization Using Reduced Number of Design Coordinates. In: *NASA TM-73151* (1976), July
- [109] VANDERPLAATS, Garret N.: *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*. London : McGraw Hill, 1984 (McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering)
- [110] VATSA, V. N. ; WEDAN, B. W.: Development of a Multigrid Code for 3-D Navier-Stokes Equations and Its Application to a Grid-Refinement Study. In: *Journal of Computers and Fluids* 18 (1990), Nr. 4, S. 391–403
- [111] VENKATAKRISHNAN, V.: Perspektive on Unstructured Grid Flow Solvers. In: *AIAA Journal* 34 (1996), Nr. 3, S. 533–547
- [112] VAN DER VORST, H. A.: Bi-CGSTAB: A Fast and Smoothly Converging Variant of Bi-CG for the Solution of Nonsymmetric Linear Systems. In: *SIAM J. for Sci. Stat. Comput.* 13 (1992), March, Nr. 2, S. 631–644
- [113] WALTERS, R. W. ; REU, T. ; MCGRORY, W. D. ; THOMAS, J. L. ; RICHARDSON, P. F.: A Longitudinally-Patched Grid Approach with Applications to High Speed Flows. In: *AIAA Paper 88-0715* (1988), Jan.
- [114] WESSELING, P.: *An Introduction to Multigrid Methods*. Chichester : John Wiley & Sons, 1992
- [115] WÖHLER, Marcus: *Hierarchische Optimierung von Beschaufelungen hydraulischer Maschinen*. Technische Universität München, Lehrstuhl und Laboratorium für Hydraulische Maschinen und Anlagen, Dissertation, 1999
- [116] ZIENKIEWICZ, O. C.: *The Finite Element Method*. 3. London : McGraw Hill, 1977
- [117] ZIEREP, J. ; BÜHLER, K.: *Strömungsmechanik*. Heidelberg : Springer Verlag, 1991