

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN  
INSTITUT FÜR ENERGIETECHNIK MW7

LEHRSTUHL UND LABORATORIUM  
FÜR HYDRAULISCHE MASCHINEN UND ANLAGEN

# Numerische Simulation der Strömungswechselwirkung in einem Tandemgitter mit schwingender Vorleitschaufel

Chaoxiang Yang

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Th. Sattelmayer

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. habil. R. Schilling
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. habil. R. Friedrich

Die Dissertation wurde am 18.01.2001 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 24.04.2001 angenommen.





# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftler Mitarbeiter am Lehrstuhl für Hydraulische Maschinen und Anlagen der Technischen Universität München.

Mein herzlichster Dank gilt Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. R. Schilling für die Betreuung dieser Arbeit. Sie entstand aufgrund seiner Anregung und wurde von ihm durch fachliche Diskussionen und Ratschläge gefördert. Die Durchzuführen der Arbeit an seinem Lehrstuhl wird mir immer in freudiger Erinnerung bleiben.

Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. R. Friedrich gebührt mein Dank für sein anhaltendes Interesse an meiner Arbeit und der daraus resultierenden freundlichen Übernahme des Koreferats. Herrn Prof. Dr.-Ing. Th. Sattelmayer danke ich für die Übernahme des Vorsitzes der Prüfungskommission und die reibungslose Durchführung des Promotionsverfahrens.

Weiterhin gilt mein Dank dem akademischen Oberrat Herrn Dr.-Ing. W. Knapp und Frau A. Lang für vielseitige Unterstützung. Ferner gilt mein Dank Herrn Dr.-Ing. W. Yuan und Herrn Dr.-Ing. M. Schuster, die mir einen guten Start gaben.

Inbesondere bedanke ich mich bei Frau Dipl.-Ing. S. Thum, Herrn Dipl.-Math. techn. W. Maurer, Herrn Dipl.-Phys. N. Müller sowie Herrn Dr.-Ing. A. Müller für die Übernahme der Sprachkorrektur meiner Arbeit, für viele wertvolle Anregungen und freundschaftliche Ratschläge. Mein Dank gilt ebenso allen Mitarbeitern des Lehrstuhls für Hydraulische Maschinen und Anlagen, die im wissenschaftlichen, technischen und administrative Bereich beim Fortgang der Arbeit mitgeholfen haben. Dabei möchte ich besonders die Namen von Herren Dipl.-Ing. S. Krämer, Dipl.-Ing. M. Frobenius, Dipl.-Ing. Th. Lepach, Dipl.-Ing. Ch. Böhm, Dipl.-Ing. B. Szilágyi, Dipl.-Ing. Ch. Steinbrecher nennen.

München, im Mai 2001

YANG Chaoxiang

*Für Lu Wei*

# Inhaltsverzeichnis

<b>Verwendete Formelzeichen und Abkürzungen</b>	<b>VI</b>
<b>Zusammenfassung</b>	<b>1</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>2</b>
1.1 Einführung . . . . .	2
1.2 Stand der Technik . . . . .	3
1.3 Zielsetzung . . . . .	7
<b>2 Theoretische Grundlagen und Modellbildung</b>	<b>9</b>
2.1 Die Ausgangsgleichungen in kartesischen Koordinaten . . . . .	9
2.2 Navier-Stokes Gleichungen unter Berücksichtigung der Gitterbewegung	10
2.3 Modellierung turbulenter Strömungen . . . . .	13
2.3.1 Direkte numerische Simulation . . . . .	13
2.3.2 Grobstruktur-Simulation . . . . .	13
2.3.3 Reynolds-Mittelung . . . . .	13
2.3.4 Nullgleichungsmodell . . . . .	15
2.3.5 Das Standard $k - \varepsilon$ Turbulenzmodell . . . . .	16
2.3.6 Das RNG $k - \varepsilon$ Turbulenzmodell . . . . .	18
<b>3 Numerische Lösung der Erhaltungsgleichungen</b>	<b>20</b>
3.1 Diskretisierung der Erhaltungsgleichungen . . . . .	20
3.1.1 Definition des Kontrollvolumens . . . . .	20
3.1.2 Berechnung der Zellvolumina . . . . .	21
3.1.3 Approximation der Oberflächenintegrale . . . . .	22
3.1.4 Diskretisierung der Raumerhaltungsgleichung . . . . .	24
3.1.5 Diskretisierung der konvektiven Terme . . . . .	26

3.1.6	Diskretisierung der diffusiven Terme . . . . .	26
3.1.7	Diskretisierung der Druckterme . . . . .	28
3.1.8	Diskretisierung der Quellterme . . . . .	29
3.1.9	Diskretisierung der Zeitterme . . . . .	29
3.2	Implizites Druckkorrektur Verfahren . . . . .	31
3.3	Anfangs- und Randbedingungen . . . . .	36
3.3.1	Anfangsbedingungen . . . . .	36
3.3.2	Einströmrand . . . . .	36
3.3.3	Ausströmtränder . . . . .	37
3.3.4	Periodische Ränder . . . . .	37
3.3.5	Symmetrische Ränder . . . . .	38
3.3.6	Wände . . . . .	38
3.4	Normierung . . . . .	44
3.5	Lösung des Gleichungssystems . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Netzgenerierung und Parallelisierung</b>	<b>48</b>
4.1	Erzeugung nicht bewegter Netze . . . . .	48
4.1.1	O-Netze . . . . .	49
4.1.2	H-Netze . . . . .	50
4.1.3	Block-Netze . . . . .	51
4.2	Erzeugung von relativ zueinander bewegten Netzen . . . . .	52
4.2.1	Einfache Kinematikbedingung . . . . .	52
4.2.2	Kontinuierliche Übergangskinetik . . . . .	53
4.2.3	Snapping-Grid-Algorithmus . . . . .	54
4.2.4	Kinetikbedingung für blockweise H-Netze . . . . .	55
4.2.5	Kinetikbedingung für blockweise H-O-Netze . . . . .	57
4.3	Parallelisierung . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Validierung des Turbulenzmodells</b>	<b>60</b>
5.1	Strömung um das schwingende NACA0012-Profil . . . . .	60
5.1.1	Die anliegende Grenzschichtströmung . . . . .	60
5.1.2	Deep Dynamic Stall . . . . .	61
5.2	Bewertung der Ergebnisse . . . . .	66

<b>6</b>	<b>Strömung durch Einzelgitter und Tandemgitter</b>	<b>67</b>
6.1	Versuchsanlage . . . . .	67
6.2	Versuchsbedingungen . . . . .	69
6.3	Simulation am Einzelgitter . . . . .	70
6.3.1	Einfluß der reduzierten Frequenz . . . . .	76
6.3.2	Einfluß der Amplitude . . . . .	81
6.3.3	Einfluß des Anstellwinkels . . . . .	85
6.3.4	Verluste und Schwingleistung . . . . .	90
6.4	Simulation am Tandemgitter . . . . .	92
6.4.1	Strömungsfeld und Umlenkung . . . . .	92
6.4.2	Referenzuntersuchung . . . . .	92
6.4.3	Einfluß der reduzierten Frequenz . . . . .	98
6.4.4	Einfluß der Amplitude . . . . .	101
6.4.5	Einfluß des Anstellwinkels . . . . .	104
6.5	Wanddruckverteilung . . . . .	108
6.5.1	Verluste und Schwingleistung . . . . .	111
<b>7</b>	<b>Bewertung und Ausblick</b>	<b>120</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>123</b>
	<b>Anhang</b>	<b>130</b>
<b>A</b>	<b>Auswertung zeitveränderlicher Strömungsfelder</b>	<b>130</b>
A.1	Strömungsumlenkung . . . . .	130
A.2	Auftrieb und Drehmomente . . . . .	132
A.3	Verluste und Inputleistung . . . . .	134

# Verwendete Formelzeichen und Abkürzungen

## Abkürzungen

1D	eindimensional
2D	zweidimensional
3D	dreidimensional
CDS	Central Differencing Scheme
CFD	Computational Fluid Dynamics
DNS	Direkte Numerische Simulation
E3D	dreidimensionale Euler Strömungsrechnung
KE	$k - \varepsilon$ - Turbulenzmodell
LES	Large Eddy Simulation
LOS	Low Order Scheme
LU	Lower-Upper
NACA	National Advisory Committee for Aeronautics
NS3D	dreidimensionale Navier-Stokes Strömungsrechnung
PISO	Pressure Implicit with Splitting of Operators
PM	Prandtl'sches Mischungsweglängenmodell
Q3D	quasi-dreidimensionale Strömungsrechnung
SCL	Space Conservation Law
RANS	Reynolds-gemittelte Navier-Stokes Strömungsrechnung
SIP	Strongly Implicit Procedure
SIMPLE	Semi Implicit Methode for Pressure Linked Equations
SIMPLER	Semi Implicit Methode for Pressure Linked Equations Revised
SIMPLEC	Semi Implicit Methode for Pressure Linked Equations Consistent
UDS	Upwind Differencing Scheme

## Lateinische Zeichen

$A$	Fläche; Flächenintegral; Koeffizient; Konstante
$B$	Bottom
$C$	Konstante; normierte Absolutgeschwindigkeit
$C_0$	Referenzgeschwindigkeit
$C_A$	Auftriebsbeiwert
$C_M$	Momentenbeiwert
$C_p$	Druckbeiwert
$E$	East; turbulenter, kinetischer Energieinhalt; normierte Dissipationsrate
$F$	Fluß durch eine Zellgrenzfläche
$J$	Jacobi Determinante
$Hz$	Hertz
$K$	normierte turbulente kinetische Energie
$L$	Punktabstand; Sehnenlänge, Flügellänge
$M$	Drehmoment;
$N$	North; Zahl der Gitterpunkte
$O$	Größenordnung
$P$	normierter Druck; Punkt; Leistung; Forcing Function
$P_{inp}$	Inputleistung
$P_k$	Produktionsterm
$Q$	Quellterm; Forcing Function
$Re$	Reynolds-Zahl
$S$	South
$T$	Top; Zeitspanne
$Tu$	Turbulenzgrad
$V$	Volumen
$\dot{V}$	Volumenänderung pro Zeit
$W$	West
$X$	normierte $x$ - Koordinate
$Y$	normierte $y$ - Koordinate
$Z$	normierte $z$ - Koordinate

<b>A</b>	Koeffizientenmatrix
<b>C</b>	Koeffizientenmatrix
<b>I</b>	Einheitstensor
<b>M</b>	Koeffizientenmatrix
<b>S</b>	Deformationstensor
<b>T</b>	Spannungstensor
$\vec{c}$	Vektor der Absolutgeschwindigkeit
$\vec{c}_n$	Vektor der Netzgeschwindigkeit
$\vec{f}$	Flußvektor
$\vec{i}$	Einheitsvektor
$\vec{n}$	Normalenvektor
$\vec{q}$	Vektor der Erhaltungsgrößen
$\vec{q}_c$	Volumetrischer Quellterm der Impulsgleichung
$\vec{q}_\phi$	Volumetrischer Quellterm der generischen Transportgleichung
$\vec{r}$	Ortsvektor
$\vec{t}$	Tangentialvektor
$a$	normierte Drehachse
$b$	Bottom Zellgrenzfläche
$c$	Absolutgeschwindigkeit; Koeffizient
$c_k$	Kolmogorov Konstante
$d$	Konstante
$e$	Exzentrizität; East Zellgrenzfläche
$f$	Fluß; Strömungsgröße; Frequenz; Wölbung
$g$	Erdbeschleunigung; Strömungsgröße; Koeffizient
$h$	Filterfunktion
$i$	Index für die $x$ - Richtung; Komponente des Einheitsvektors
$j$	Index für die $y$ - Richtung
$k$	Index für die $z$ - Richtung; turbulente, kinetische Energie; reduzierte Frequenz
$l$	Sehnenlänge; Längenmaß
$\dot{m}$	Massenstrom
$mm$	Millimeter
$n$	Normalenrichtung; Iterationszähler; Drehzahl; North Zellgrenzfläche



$p$	Druck;
$q$	Wert im Zellmittelpunkt; Geschwindigkeit; Forcing Function
$s$	South Zellgrenzfläche
$t$	Zeit; Top Zellgrenzfläche; Tangentialrichtung; Teilung
$u$	Geschwindigkeitskomponente; Umfangsgeschwindigkeit
$v$	Geschwindigkeitskomponente
$w$	Geschwindigkeitskomponente; West Zellgrenzfläche
$x$	$x$ - Koordinate
$y$	$y$ - Koordinate
$z$	$z$ - Koordinate

### Griechische Zeichen

$\Gamma$	Diffusionskoeffizient; Zirkulation
$\Delta$	Differenzenwert; Laplace-Operator
$\alpha$	Blendungsfaktor; Konstante; Anstellwinkel
$\dot{\alpha}$	Winkelgeschwindigkeit
$\alpha_T$	Anstellwinkel der nachgeschalteten Schaufel
$\alpha_V$	Anstellwinkel der Vorleitschaufel
$\alpha_{mV}$	mittlerer Amplitudenwinkel der Vorleitschaufel
$\alpha_p$	Parameter für SIP
$\Delta\alpha$	Amplitudenwinkel
$\beta$	Blendungsfaktor
$\delta$	Schichtdicke; Differentialoperator; Kronecker Symbol
$\varepsilon$	Dissipationsrate; Abbruchkriterium
$\eta$	körperorientierte Koordinate; Wirkungsgrad; Kolmogorovsches Mikromaß; Dimensionslose Ähnlichkeitsvariable
$\zeta_{v1}$	Beiwerte des Totaldrucktransports
$\zeta_{v2}$	Beiwerte der zeitlichen Änderung der kinetischen Energie
$\zeta_v$	Verlustbeiwerte
$\Delta\zeta_v$	Beiwerte die der Abnahme der Leistungsverluste
$\kappa$	von Kármán Konstante
$\lambda$	Eigenwert; Interpolationsfaktor; bezogene Schwingleistung

$\mu$	dynamische Viskosität; körperorientierte Koordinate
$\nu$	kinematische Viskosität
$\xi$	körperorientierte Koordinate
$\varrho$	Dichte
$\sigma$	Konstante
$\tau$	Schubspannung; Normalspannung
$\phi$	Variable; skalare Transportgröße
$\psi$	Variable; Gradient
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit; Kreisfrequenz

### Tiefgestellte Zeichen

<i>A</i>	Fläche
<i>Ein</i>	Einströmrand
<i>Max</i>	Maximalwert
<i>Res</i>	resultierende Größe
<i>Richt</i>	Richtwert
<i>P</i>	Punkt P
<i>S</i>	Tetraederspitze
<i>Wand</i>	Wand
<i>eff</i>	effektiv
<i>i</i>	Gitterebene; Laufindex
<i>j</i>	Gitterebene; Laufindex
<i>k</i>	turbulente, kinetische Energie; Index in $z$ - Richtung; Laufindex
<i>n</i>	Netzgeschwindigkeit; Normalkomponente
<i>ne</i>	north-east
<i>nw</i>	north-west
<i>p</i>	parallel
<i>ref</i>	referenz
<i>sym</i>	symmetrisch
<i>se</i>	south-east
<i>sw</i>	south-west
<i>t</i>	turbulent; tangential; Tangentialkomponente
<i>u</i>	Umfangskomponente
<i>vis</i>	viskos

$x$	x-Komponente
$y$	y-Komponente
$z$	z-Komponente
$\varepsilon$	Dissipationsrate
$\mu$	viskos
$\tau$	Schubspannung

### Hochgestellte Zeichen

$T$	transponierte Größen
$H$	hohe Ordnung
$L$	niedrige Ordnung
$c$	konvektiv
$d$	diffusiv
$n$	Iterationszähler
$neu$	neuer Wert
$m$	Iterationszähler
$+$	dimensionslose Werte der Turbulenzmodelle
$*$	aus den diskretisierten Impulsgleichungen berechnete Werte; reduzierte Werte; modifizierte Werte; dimensionslose Werte
$o$	Referenzwert
$'$	Werte der Schwankungsbewegung; korrigierte Werte
$''$	zweifach korrigierte Werte

### Kopfnoten

—	Reynolds-gemittelte Werte; an die Zellgrenzflächen interpolierte Werte; impulsgemittelte Werte; zeitlich gemittelte Werte
---	---



# Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein auf Messungen gestütztes Berechnungsverfahren erstellt, mit dem die aktive Kontrolle einer turbulent dreidimensionalen und instationär abgelösten Strömung durch beliebige Vorleitgitter und Stufen hydraulischer Strömungsmaschinen zeitecht simuliert werden kann. Aufgrund der fremderregten Drehschwingbewegung einzelner Schaufeln im Gitterverband ist eine Verbesserung der Energieumsetzung und der Zuverlässigkeit teillastbetriebener hydraulischer Maschinen zu erwarten. Vor diesem Hintergrund wird in der vorliegenden Arbeit die Strömungswechselwirkung in einem stehenden Einzel- und Tandemgitter, mit jeweils einer schwingenden Schaufel bzw. Vorleitschaukel, als zunächst vereinfachtes Modell numerisch untersucht.

Um eine inkompressible Strömung auf bewegten Rechengittern zu beschreiben, wird eine gemischte Lagrange-Euler-Formulierung der integralen Erhaltung für Raum, Masse und Impuls angewendet. Die Lösung des Systems partieller Differentialgleichungen wird mittels eines verbesserten SIMPLE Algorithmus durchgeführt. Zur Turbulenzmodellierung wird ein modifizierter Prandtl'scher Mischungsweglängenansatz und das  $k - \varepsilon$  Turbulenzmodell verwendet. Um die Flexibilität zu erhöhen, werden verschiedene Algorithmen für kinematisch bewegte Rechengitter im Verfahren erweitert. Um die Rechenzeiten bei der Simulation des komplexen Systems senken zu können, werden die MPI-Bibliotheken zur Parallelisierung verwendet.

Zur Validierung des Verfahrens wird zunächst die vollturbulente Umströmung eines dynamisch schwingenden Tragflügelprofils untersucht. Die numerischen Ergebnisse werden mit den analytischen Lösungen sowie den Meßwerten anderer Autoren verglichen. Sie zeigen eine sehr gute Übereinstimmung.

Daraufhin wird an einem stehenden Einzel- bzw. Tandemgitter mit jeweils einer schwingenden Schaufel bzw. Vorleitschaukel eine gründliche theoretisch-numerische Untersuchung vorgenommen. Die Ergebnisse stimmen mit den Messungen von WERDECKER [22] qualitativ gut überein. Weiterhin wird die Energiegleichung hinsichtlich der Strömungsverluste ausgewertet und analysiert. Im Fall des Einzelgitters beträgt die Schwingenergie 1% der dynamischen Leistung und die Verringerung der Energieverluste 3%. Im Fall des Tandemgitters beträgt diese bezogene Schwingleistung nur bis zu 0.6%, die Energieverluste werden jedoch um 3.7% verringert.

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Einführung

Die numerische Strömungsmechanik stellt zusammen mit den heutigen leistungsfähigen Rechnern eine vorteilhafte Ergänzung zu Experimenten dar. Die Anwendung von Computational Fluid Dynamics (CFD)-Codes bietet eine Vielzahl von neuen Analysemöglichkeiten, die das Optimierungspotenzial von Produkten entscheidend erweitert.

Auf dem Gebiet der hydraulischen Maschinen liegt ein Schwerpunkt der heutigen Forschung und Entwicklung bei der Verbesserung des Teillastverhaltens. Seit Mitte des 19. Jahrhunderts haben hydraulische Maschinen einen hohen Wirkungsgrad und Zuverlässigkeitsstandard erreicht. Moderne Francis Turbinen haben Spitzenwirkungsgrade von über 96% und Nutzungsdauern von weit mehr als 30 Jahren. Das Verbesserungspotential im Bestpunkt ist daher weitgehend ausgeschöpft. Mit zunehmender Drosselung des Volumenstroms kommt es zur Fehlanströmung der Beschaufelung. Insbesondere bei einfach regulierten Maschinen sinkt mit dem Volumenstrom die Güte der Energieumsetzung und die Verluste steigen. In diesem Zusammenhang wird das Betriebsverhalten der Maschinen zunehmend instationär, da periodisch abschwimmende Ablösungen verstärkt auftreten. Die damit verbundenen Druck- und Geschwindigkeitsschwankungen beeinträchtigen insgesamt die Zuverlässigkeit.

Experimentelle Untersuchungen von JARIUS und SIEKMANN [31] an einem Profil mit variabler Wölbung in einem Wasserkanal sowie Luftversuche von PIZIALI [53] an einem schwingenden Flügel haben eindeutig gezeigt, daß wesentlich höhere Auftriebskoeffizienten erreichbar sind als im statischen Fall. Basierend auf diesen Erkenntnissen soll der Arbeitsbereich axial durchströmter hydraulischer Maschinen erheblich erweitert werden. Dies läßt sich z.B. durch eine Vorleitbeschaufelung mit einer oder mehreren schwingenden Schaufeln oder entsprechenden Klappen erzielen, wobei die über die periodisch bewegten Vorleitschaufeln oder Klappen dem

Fluid zugeführte Energie die Strömung stabilisieren und das Umlenkvermögen des Vorleitrades erheblich verbessern soll. In der Folge kann eine insgesamt verbesserte Energieumsetzung in der Axialstufe erwartet werden.

Die Kontrolle der hochgradig instationären und turbulenten Strömung in Stufen hydraulischer Strömungsmaschinen ist auf aktive und passive Weise möglich. Im Rahmen des Forschungsvorhabens am Lehrstuhl für Hydraulische Maschinen und Anlagen (LHM) soll jedoch nur die aktive Kontrolle hochbelasteter Lauf- radströmungen betrachtet werden, die durch eine aktiv schwingende Bewegung einzelner Schaufeln im Gitterverband erfolgen. Dies wird von experimenteller sowie numerischer Seite untersucht.

Damit lassen sich die Einflüsse der wesentlichen Parameter, reduzierte Frequenz  $k$ , Schwingungsamplitude  $\Delta\alpha$  und mittleres Anstellwinkel von Vorleitschaufel und Laufradschaufel  $\alpha_{mV}$  und  $\alpha_T$  auf die Strömungsumlenkung und die Verluste für ein Einzelgitter und ein Tandemgitter effizient numerisch studieren. Daher sind ergänzend zur numerischen Simulation experimentelle Untersuchungen notwendig. Durch die enge Zusammenarbeit zwischen Numerik und Experiment können die verwendeten Rechenmodelle sorgfältig abgestimmt werden, um so zuverlässige Simulationswerkzeuge für die Berechnung von instationären Strömungsvorgängen bereitzustellen.

## 1.2 Stand der Technik

Die Forschung auf dem Gebiet der Grenzschichtbeeinflussung hat in neuerer Zeit eine besondere Bedeutung vor allem in der Luftfahrttechnik erfahren, wo man an der Verhinderung der Ablösung besonders stark interessiert ist, um einen größtmöglichen Auftrieb bei geringem Widerstand oder andererseits minimalen Widerstand bei großem Auftrieb zu erzielen, vgl. [49], [46]. Verschiedene Möglichkeiten zur aktiven Beeinflussung der Grenzschicht und der Ablöseerscheinungen wurden bereits von PRANDTL [73] untersucht. In seiner ersten Arbeit zur Grenzschicht ist zur Prüfung grundlegender Vorstellungen die künstliche Beeinflussung der Scherschicht zwischen Wand und Außenströmung beschrieben. SCHLICHTING [65] und LACHMANN [35] nennen unter anderem folgende Möglichkeiten zur Grenzschichtbeeinflussung:

- Mitbewegen der Wand
- Absaugen der Grenzschicht
- Einblasen in die Grenzschicht

Die Grenzschichtprofile unterscheiden sich bei turbulenten, instationären Körperumströmungen und im Ablöseverhalten gegenüber dem quasistationären Vergleichsfall

ganz erheblich. Sowohl die Form und die Dicke des Ablöseprofils als auch der Ort der Ablösung sind mit stationären Ergebnissen nicht vergleichbar. Das gilt insbesondere für die vollständig abgelöste Strömung über ein Tragflächenprofil bei hohem Anstellwinkel oder bei dynamischer Bewegung. Die damit verbundene, instationäre Grenzschichtablösung sowie das Wiederanlegen wird als Dynamic Stall bezeichnet. Dieses Phänomen ist in zahlreichen Experimenten untersucht worden, z.B. von HOFFMANN [26], MCCROSKEY [45] und PIZIALI [53]. Eine Klassifikation der beobachteten Erscheinungsformen sowie weiterführende Betrachtungen zur Strömungsphysik des Dynamic Stall Phänomens finden sich bei CARR [8], GEISSLER [23] und CHANDRASEKHARA [10].

Die Maßnahmen zur Grenzschichtbeeinflussung sind bei Strömungsmaschinen im Vergleich zur Luftfahrttechnik weniger erforscht. Arbeiten, die im Grundsatz auf eine Applikation aktiver Maßnahmen zur Grenzschichtbeeinflussung ausgerichtet sind, stammen von BUFFUM ET AL. [7], JARIUS [30], und SOLOVITZ [67].

Die numerische Simulation der inkompressiblen dreidimensionalen Strömung sowie die aktive Kontrolle einer turbulenten und instationären abgelösten Strömung durch Beschaukelungen zeitlich veränderlicher Anstellwinkel erfordert die zeitechte Lösung der 3D Navier-Stokes Gleichungen unter Verwendung eines geeigneten Turbulenzmodells. Darüber hinaus erfordert die Variation der Frequenz und des Anstellwinkels sowie der Amplituden

- die Berücksichtigung der entsprechenden Beschleunigungsterme in den Bewegungsgleichungen und
- ein zeitlich veränderliches, konturangepaßtes Rechnernetz.

Dazu finden sich in der Literatur eine Reihe von Lösungsansätzen, vgl. [11], [51], [19], [57], [58], [87], [47]. Zur zeitechten Lösung der Navier-Stokes Gleichungen stehen grundsätzlich zwei Verfahren zur Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes und des Druckfeldes zur Auswahl, d.h. die

- Artificial Compressibility Verfahren nach einem Ansatz von CHORIN [11] sowie
- Druckkorrektur-Verfahren nach PATANKAR und SPALDING [51].

Bei den Artificial Compressibility Verfahren wird in der Kontinuitätsgleichung ein künstlicher Kompressibilitätsterm eingeführt, so daß sich die Kontinuitätsgleichung analog zu den Impulsgleichungen hyperbolisch formulieren läßt. Bei der Verwendung eines Artificial Compressibility Verfahrens muß neben dem Pseudo-Zeitschritt noch ein physikalischer Zeitschritt eingeführt werden, um instationäre Strömungen berechnen zu können. Diese Vorgehensweise hat sich bei Problemen mit vernachlässigbarem Reibungseinfluß bewährt, wo relativ grobe Rechenetze bereits eine



sehr gute Lösung zulassen, vgl. [57]. Die Lösung von Problemen mit signifikantem Einfluß der Reibung erfordert jedoch je nach Größe der Reynolds-Zahl eine sehr feine Netzauflösung in der Wandnähe, was bei den hyperbolischen Verfahren zu sehr kleinen Pseudo-Zeitschritten und somit zu sehr großen Rechenzeiten führt.

Dennoch ist dieses Verfahren von verschiedenen Autoren zur Berechnung instationärer Profilmströmungen eingesetzt worden, vgl. [71], [79], [87]. Dagegen unterliegen die Druckkorrekturverfahren, bei denen die Korrektur des Druckfeldes mit Hilfe einer elliptischen Differentialgleichung berechnet wird, diesen Einschränkungen im Zeitschritt nicht, so daß von deutlich kürzeren Integrationszeiten ausgegangen werden kann. Deshalb werden diese Verfahren auch zur Berechnung realer instationärer Strömungsvorgänge vorgeschlagen, u.a von FERZIGER, PERIĆ [19], und in kommerziellen Codes eingesetzt, z.B. in TASCflow [9].

Bei beiden Lösungsverfahren wird davon ausgegangen, daß nach jedem Zeitschritt die zeitechte Lösung dann erreicht ist, wenn die Divergenz des berechneten Strömungsfeldes kleiner als ein vorgegebenes Abbruchkriterium wird, vgl. PERIC und LILEK [42].

Unabhängig von dem gewählten Lösungsverfahren muß die Turbulenz der a priori instationären Strömung mit ausreichender Genauigkeit beschrieben werden.

Reynolds-gemittelte Rechenverfahren erfassen die zeitlichen und räumlichen Feinstrukturen der Turbulenz nicht. Jedoch lassen sich durch ihren Einsatz enorme Einsparungen an Rechenzeit gegenüber Direkter Numerischer Simulation (DNS) oder einer Grobstruktursimulation, Large Eddy Simulation (LES), erzielen. Zwar enthalten Zweigleichungsmodelle instationäre Terme, jedoch zielen diese nicht auf eine Beschreibung der Feinstrukturschwankungen der Turbulenz ab. Alle statistischen Modelle sind auf der Grundlage stationärer Strömungszustände entwickelt worden, und bisher ist kein statistisches Modell zur Beschreibung instationärer, turbulenter Strömungen bekannt, vgl. EKATERINARIS [17]. Andererseits bewegen sich die Hauptstrukturen der instationären Strömung in viel größeren Zeitskalen als die der turbulenten Fluktuationen. Im Hinblick darauf werden dieselben statistischen Turbulenzmodelle ohne Modifikation zur Beschreibung der instationären Strömung herangezogen.

Die numerischen Untersuchungen zeigen, daß die instationäre zeitechte Strömung um schwingende Profile bereits mit algebraischen Turbulenzmodellen im Rahmen der Meßunsicherheit vorausberechnet werden kann, z.B. mit dem modifizierten Prandtl'schen Mischungswegansatz von FISCHER [16]. Diese Strömung kann auch mit Eingleichungsmodellen, z.B. von BALDWIN und BARTH [3], qualitativ gut vorhergesagt werden, vgl. LEE ET AL.[41], GUILMINEAU ET AL.[15]. Die erreichbare Genauigkeit hängt jedoch ganz entscheidend von der präzisen Vorhersage der

Transition, d.h. des Umschlagpunktes von laminarer zu turbulenter Strömung, ab. Aufgrund der hochgradig instationären Strömung zwischen Leit- und Laufradbeschaukelungen von hydraulischen Strömungsmaschinen kann davon ausgegangen werden, daß die Strömung sowohl im Vorleitrad als auch im Laufrad voll turbulent ist.

Im Rahmen verschiedener Forschungsvorhaben wurden am Lehrstuhl für Hydraulische Maschinen und Anlagen (LHM) sehr effiziente CFD-Codes zur Berechnung der idealisierten, reibungsfreien jedoch drehungsbehafteten Strömung sowie der realen turbulenten Strömung durch Beschaukelungen von hydraulischen Maschinen entwickelt, vgl. [64], [61], [57], [58], [54], [63], [32]:

- Quasi-3D Euler Code (EQ3D) nach WU [82], SCHILLING [60] für stationäre Strömung (EQ3D).
- 3D Euler Code (E3D) nach CHORIN [11] für stationäre Strömung (E3D) und instationäre zeitechte Strömung (E3DZ) vgl. SCHILLING [64] und LAKSHMINARAYANA [37].
- 3D Navier-Stokes Code (NS3D) nach FERZIGER und PERIĆ [19] für stationäre Strömung (NS3D) und instationäre zeitechte Strömung (NS3DZ).

Numerische Methoden zur Lösung instationärer Strömungen mit bewegten Randgeometrien können nach heutigem Stand in zwei Gruppen unterteilt werden. Zur ersten Gruppe gehören die sogenannten Euler Methoden, bei denen ein im Raum fixiertes Gitter eingesetzt wird. Die Bewegung der Randkurve wird dabei durch das Ausblocken von Gitterzellen verfolgt. Diese Vorgehensweise wurde u.a. von AMSDEN ET AL. [1] mit Erfolg bei der Berechnung des Ladungswechsels eines Zweitakt-Kolben Motors angewendet. Der Vorteil besteht darin, daß nur ein einziges, ortsfestes Netz generiert werden muß. Zusätzliche Netzanpassungen im Verlauf der Strömungsrechnung sind dann nicht mehr notwendig. An Zellen, die im Verlauf der Rechnung zu- bzw. abgeschaltet werden, müssen jedoch für jede Strömungsvariable mehrere Interpolationsschritte durchgeführt werden. Diese sind verhältnismäßig teuer und zerstören ohne zusätzliche Maßnahmen die konservativen Eigenschaften von Lösungsverfahren. Ihre Genauigkeit wird hierdurch stark beeinträchtigt.

Bei der zweiten Gruppe von Verfahren, den Lagrange- oder Lagrange-Euler Verfahren, wird die Kinematik der Gebietsränder durch ein bewegtes Gitter verfolgt. Die Verwendung dieses Ansatzes verlangt die exakte und konservative Formulierung der Erhaltungsgleichungen für ein im Raum frei bewegliches Kontrollvolumen.

Nach TRULIO und TRIGGER [75] muß hierfür zusätzlich die sogenannte Raumerhaltungsgleichung, das Space Conservation Law (SCL), erfüllt werden. In [12] formulieren DEMIRDŽIĆ und PERIĆ das SCL als geometrische Randbedingung und zeigen, daß ihre ungenaue Behandlung zu großen Fehlern in Form von künstlichen Massenquellen und -senken führt. Mit einem verfeinerten Ansatz zur Berechnung der Gitterbewegung [13] berechnen sie dann die Strömung durch einen 2D Kanal, dessen Querschnitt von einer zeitlich wandernden Delle verengt wird. Ihre Methode ermöglicht, die Bewegung der Querschnittsränder genau abzubilden und so eine sehr exakte und konservative Formulierung des Problems aufzustellen. Diesen Vorschlag modifizieren YUAN ET AL. [87], [88], zur Berechnung der freien Oberflächenproblematik bei der Saugrohr-Unterwasser-Wechselwirkung und implementiert SCHUSTER [47] zur Simulation gehäuseloser, hydraulischer Strömungsmaschinen. Ein Vorschlag zur Verallgemeinerung dieses Ansatzes findet sich bei LAI und PRZEKWAS [36]. Sie schlagen ein Triangulationsverfahren vor, das auch im dreidimensionalen Raum die Netzflüsse exakt berechnen und somit die Konservativität des Verfahrens gewährleisten kann.

### 1.3 Zielsetzung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit “Vergrößerung des Arbeitsbereiches hydraulischer Strömungsmaschinen durch eine bewegte Vorleitschaufel“ ist, eine gezielte Verbesserung des Betriebsverhaltens hydraulischer Strömungsmaschinen insbesondere bei Teillast zu erreichen. Dabei wird ein verbesserte Energieumsetzung und eine höheres Umlenkverhalten erwartet.

Die aktive Kontrolle der stark umgelenkten Strömung in Vorleitgittern hydraulischer Strömungsmaschinen mit einer schwingenden Schaufel soll mit einem erprobten numerischen Verfahren (NS3DZ) simuliert werden.

Bei der numerischen Simulation wird jeweils davon ausgegangen, daß die in das Vorleitgitter eintretende Strömung und somit auch die Strömung im nachfolgenden Laufrad voll turbulent ist.

Um das Betriebsverhalten hydraulischer Strömungsmaschinen bei Vordrallregelung wirkungsvoll verbessern zu können, sollen drei Ziele verfolgt werden.

#### 1. Erstellen eines automatischen Netzgenerators

Bei der Simulation der Strömungsvorgänge in dem Vorleitrad mit periodisch veränderlichen Anstellwinkeln werden zeitveränderliche Netze verwendet. Zu diesem Zweck muß für das Einzelprofil zuerst ein Kinematikmodul entwickelt werden,

um die veränderliche Geometrie zu jedem Zeitpunkt exakt beschreiben zu können.

2. Nachrechnung einer aus der Literatur bekannten Umströmung des Tragflügelprofils NACA0012 mit periodisch veränderlichen Anstellwinkeln  $\alpha(t)$

Bei niederfrequenten Änderungen des Anstellwinkels  $\alpha(t) = \alpha_m + \Delta\alpha \sin(\omega t)$  um die Mittellage  $\alpha_m$  sollen die Simulationen mit den verfügbaren Turbulenzmodellen mit den Messungen aus der Literatur verglichen werden. Durch die Variation der mittleren Schwingungsamplitude werden der Strömung verschiedene Ablösungsformen aufgeprägt.

3. Numerischen Simulation der Strömung durch ein Einzelgitter und ein Tandemgitter

Berechnung eines Einzelgitters und eines Tandemgitters, bestehend aus einem Vorleitgitter und einem nachgeschalteten Gitter, das mit einer schwingfähigen Schaufel ausgerüstet ist. Bei dem Tandemgitter ist die schwingfähige Schaufel Teil des Vorleitgitters. In Abhängigkeit von der Schwingfrequenz, der Amplitude und dem Anstellwinkel läßt sich eine instationäre Strömung erzeugen.

Im Blickpunkt der Betrachtungen soll die Wechselwirkung der Schwingbewegung der Schaufel mit der Gitterströmung stehen. In Relation zur Strömung mit fixierter Schaufel sollen folgende Untersuchungen durchgeführt werden:

- Untersuchung des Geschwindigkeitsfeldes und der Umlenkung der Strömung
- Untersuchung des Wanddruckverlaufes
- Untersuchung der Kraft- und Drehmomentenwirkung auf die Schaufeln
- Energiebilanz

Neben dem grundlegenden Nachweis und der Beschreibung der Wechselwirkung zwischen der schwingenden Schaufel und der Gitterströmung ist die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit die Analyse der Einflüsse technisch relevanter Parameter. Darüber hinaus soll das bestehende Verbesserungspotenzial teillastbetriebener hydraulischer Strömungsmaschinen besser beurteilt werden können. Die Ergebnisse sollen mit Experimenten von WERDECKER [22] verglichen werden.

# Kapitel 2

## Theoretische Grundlagen und Modellbildung

In diesem Kapitel werden die wesentlichen theoretischen Grundlagen behandelt, die für das Rechenverfahren von Bedeutung sind. Desweiteren wird auf die verwendete Diskretisierung des beschreibenden Gleichungssystems eingegangen.

### 2.1 Die Ausgangsgleichungen in kartesischen Koordinaten

Den Ausgangspunkt zur Berechnung einer dreidimensionalen, instationären, inkompressiblen und reibungsbehafteten Strömung bilden die Navier-Stokes Gleichungen. Zusammen mit der Kontinuitätsgleichung lauten sie nach FERZIGER und PERIĆ [19] für ein absolutes System in differentieller Form:

$$\operatorname{div} \vec{c} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \vec{c}}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{c}\vec{c} + \frac{p}{\varrho}\mathbf{I}) = 2\operatorname{div}[\mu\frac{1}{2}(\operatorname{grad}\vec{c} + (\operatorname{grad}\vec{c})^T)] \quad (2.2)$$

sowie integraler Form:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \varrho dV + \iint_A \varrho \vec{c} \cdot \vec{n} dA = 0, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_V \varrho \vec{c} dV + \iint_A \varrho \vec{c} \cdot \vec{n} dA &= \iint_A -p \vec{n} dA \\ + \iint_A 2[\mu\frac{1}{2}(\operatorname{grad}\vec{c} + (\operatorname{grad}\vec{c})^T)] \vec{n} dA. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Die Impulsgleichung 2.4 wird als die Navier-Stokes Gleichung bezeichnet. In der Literatur und auch im folgenden bezieht sich der Ausdruck „Navier-Stokes Gleichungen“ jedoch auf den die Strömung beschreibenden Satz Gleichungen bestehend aus den Impulsgleichungen und der Kontinuitätsgleichung. Diese werden an einem im Raum feststehenden Kontrollvolumen mit dem Volumen  $V$  und der Oberfläche  $A$  hergeleitet.

## 2.2 Navier-Stokes Gleichungen unter Berücksichtigung der Gitterbewegung

Bei der Berechnung von Strömungen auf einem zeitlich veränderlichen Rechengebiet ist die Netzbewegung bei der Lösung des Gleichungssystems zu berücksichtigen. Viele hydrodynamische Probleme betreffen jedoch die Strömungen, deren Ränder sich relativ zu einem absoluten Koordinatensystem bewegen. Einige klassische Anwendungsfälle sind die Kolbenbewegung bei der Berechnung der Strömung durch einen Verbrennungsmotor sowie die Strömung mit freier Oberfläche. Ein weiterer Anwendungsfall ist die Strömung mit schwingenden Vorleitschaufeln, die im Rahmem dieser Arbeit behandelt wird. Dies bedeutet, daß die Randbedingungen zeitlich nicht konstant sind und sich das Volumen  $V = V(t)$  mit den sich bewegenden Oberflächen  $A = A(t)$  zeitlich verändert. In diesem Falle müssen die Rechnetze den Rändern folgen.

Im folgenden Beispiel wird der Einfluß der Netzbewegung an der 1D Kontinuitätsgleichung wie bei FERZIGER und PERIĆ [19] hergeleitet:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho c)}{\partial x} = 0. \quad (2.5)$$

Nach dem Integrieren der Gleichung über ein Kontrollvolumen, dessen Rändern sich zeitlich verändern, erhält man:

$$\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial \varrho}{\partial t} dx + \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial(\varrho c)}{\partial x} dx = 0. \quad (2.6)$$

Mit Hilfe der Leibniz-Regel für den ersten Term resultiert folgende Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \varrho dx - \left[ \varrho_2 \frac{dx_2}{dt} - \varrho_1 \frac{dx_1}{dt} \right] + \varrho_2 c_2 - \varrho_1 c_1 = 0. \quad (2.7)$$

Die Ableitung  $\frac{dx}{dt}$  stellt die Geschwindigkeit dar, mit der sich das Netz bewegt. Wird sie als  $c_n$  bezeichnet, erhalten wir:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho dx + \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial}{\partial x} [\rho(c - c_n)] dx = 0. \quad (2.8)$$

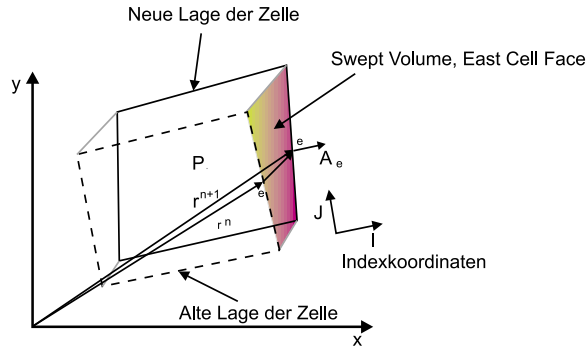


Bild 2.1: Swept Volume einer East-Zellwand im 2D-Fall

Für die Kontinuitätsgleichung der 3D Strömung ergibt sich wie für die 1D Strömung nach Anwendung der Leibniz-Regel:

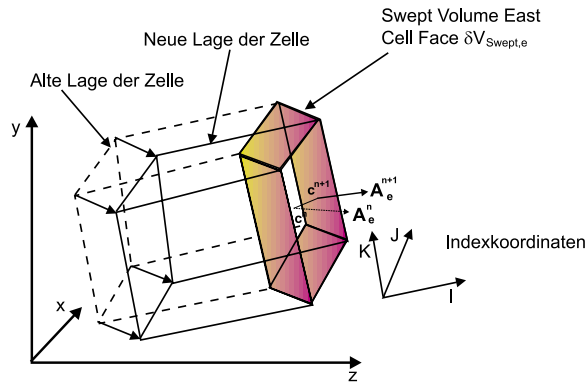


Bild 2.2: Swept Volume einer East-Zellwand im 3D-Fall

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho dV - \iint_{A(t)} \rho \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{n} dA + \iint_{A(t)} \rho \vec{c} \cdot \vec{n} dA = 0, \quad (2.9)$$

bzw.

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho dV + \iint_{A(t)} \rho (\vec{c} - \vec{c}_n) \cdot \vec{n} dA = 0. \quad (2.10)$$

Falls die Geschwindigkeit der Fluide gleich Null ist, folgt aus Gl. 2.10:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho dV - \iint_{A(t)} \rho \vec{c}_n \cdot \vec{n} dA = 0. \quad (2.11)$$

Gleichung 2.11 ist das sog. Space Conservation Law bzw. die Raumerhaltungsgleichung. Ihre Bedeutung wird in der Abb. 2.1 und Abb. 2.2 für den zwei- und dreidimensionalen Fall dargestellt. Die Differenz  $\delta V$  zwischen dem alten und dem neuen Zellvolumen ist gleich der Summe der von den bewegten Zellwänden innerhalb eines Zeitschritts überstrichenen Teilvolumina. Da die Position des bewegten Gitters zu jedem Zeitschritt bekannt ist, ergibt sich das Swept Volume in jeder der drei Raumrichtungen als Volumen des Würfels, der von einer Zellwand des Zeitschritts  $n$  und der korrespondierenden Zellwand des neuen Zeitschritts  $n + 1$  gebildet wird, vgl. Kap. 3.1.4.

Analog zur Herleitung der Kontinuitätsgleichung liefert der Erhaltungssatz die instationären Impulsgleichungen für zeitabhängige Randbedingungen in integraler Form:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho c_i dV + \int_{A(t)} \rho c_i [(\vec{c} - \vec{c}_n) \cdot \vec{n}] dA = \int_{A(t)} (\tau_{ij} \vec{i}_j - p \vec{i}_i) \vec{n} dA, \quad (2.12)$$

mit  $i = x, y, z$  und  $j = x, y, z$ .

Falls die Netzgeschwindigkeit gleich der Geschwindigkeit der Fluide an jeder Zellfläche ist, sind die zweiten Integrale der linken Seite der Gleichungen Null und es ergeben sich die Erhaltungsgleichungen in Lagrange'scher Form. Bewegen sich die Ränder nicht, erhält man die Erhaltungsgleichungen in Euler'scher Form.

Im Vergleich zu Kapitel 2.1 ist die Netzgeschwindigkeit  $\vec{c}_n$  in den Gleichungen enthalten. Das Volumen jedes Elementes hängt von der Zeit ab und muß daher bei der Ableitung berücksichtigt werden.

Gleichung 2.10 und Gleichung 2.12 wurden direkt für die beweglichen Kontrollvolumina auf dem kartesischen Koordinatensystem abgeleitet. Diese Gleichungen werden beim Druckkorrektur-Verfahren verwendet.



## 2.3 Modellierung turbulenter Strömungen

Für die numerische Simulation realer Strömungen gibt es im wesentlichen drei Ansätze, die Direkte Numerische Simulation (DNS), die Grobstruktur-Simulation (LES) und die Lösung der Reynolds-gemittelten Navier-Stokes Gleichungen (RANS).

### 2.3.1 Direkte numerische Simulation

Obwohl die direkte Lösung der in Kapitel 2.1 und Kapitel 2.2 abgeleiteten Navier-Stokes Gleichungen, die genaueste Methode zur Berechnung einer turbulenten Strömung ist, ist ihr Einsatz für die Simulation von Beschleunigungen hydraulischer Strömungsmaschinen zu unwirtschaftlich, da pro Raumrichtung  $Re_l^{3/4}$  Gitterpunkte verwendet werden müssen. Nach SCHILLING [64] sind für die Berechnung einer realen Laufradströmung mit DNS (Direct Numerical Simulation) etwa  $N \simeq 10^{10}$  Gitterpunkte notwendig, so daß die Lösung technischer Problemstellungen bei hohen Reynolds-Zahlen Rechenzeiten von vielen Monaten erfordern würde, vgl. FRIEDRICH [21].

### 2.3.2 Grobstruktur-Simulation

Die Grobstruktur-Simulation löst die Wirbel, die durch das Rechenetz erfaßt werden können direkt auf, nur der Bereich, der nicht explizit simuliert werden kann, wird modelliert. Die Maschenweite der zu verwendenden Rechenetze hierfür ist größer als die Kolmogorovsche Längenskala und auch die Auflösung in Zeitrichtung kann gröber erfolgen, als bei der Direkten Numerischen Simulation. Für den technisch interessanten Reynolds-Zahl-Bereich ist der modellierte Anteil allerdings immer noch sehr hoch. Desweiteren ist auch hier eine instationäre Rechnung erforderlich, was den zeitlichen Aufwand für eine Simulationsrechnung und die anfallende Datenmenge deutlich erhöht, vgl. WENGLER [78].

### 2.3.3 Reynolds-Mittelung

Nach dem Ansatz von Reynolds wird eine turbulente Strömung  $\phi$  in eine zeitlich gemittelte Strömung  $\bar{\phi}$  und in eine ungeordnete, unregelmäßige Schwankungsbewegung  $\phi'$  aufgespalten.

$$\phi(\vec{x}, t) = \bar{\phi}(\vec{x}) + \phi'(\vec{x}, t) \quad (2.13)$$

Die turbulenzbedingten Fluktuationen der Dichte und der Viskosität werden hier vernachlässigt, da die Schwankungen dieser Größen bei den hier betrachteten

Strömungen eine untergeordnete Rolle spielen.

Die zeitlich gemittelte Größe ergibt sich nach Gl. 2.14 zu

$$\bar{\phi}(\vec{x}) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \phi(\vec{x}, t) dt, \quad (2.14)$$

wobei der zeitliche Mittelwert des Schwankungsanteils  $\bar{\phi}'(\vec{x}, t)$  verschwindet:

$$\bar{\phi}'(\vec{x}) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \phi'(\vec{x}, t) dt = 0 \quad (2.15)$$

Falls eine instationäre Strömung betrachtet wird, läßt sich die mittlere Strömungsgröße  $\bar{\phi}$  durch

$$\bar{\phi}(x, y, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi(x, y, z, t), \quad (2.16)$$

berechnen. Dabei wird der gleiche Strömungsablauf  $n$ -mal wiederholt und jeweils zur gleichen Zeit  $t$  am gleichen Ort  $(x, y, z)$  die Strömungsgröße  $\phi$  bestimmt. Diese Mittelung wird Ensemble Mittelung genannt, vgl. WILCOX [81], [80], und kann für beliebige Strömungen verwendet werden.

Führt man die Reynoldsschen Ansätze (Gl. 2.13) in die NS-Gleichungen 2.2 ein, erhält man formal dieselben Gleichungen für die gemittelten Größen:

$$\frac{\partial(\rho \bar{c}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{c}_i \bar{c}_j + \bar{p})}{\partial x_j} = \mu \frac{\partial^2 \bar{c}_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\rho \overline{c'_i c'_j}). \quad (2.17)$$

Darin entsprechen die Indizes  $i$  und  $j$  jeweils einer  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Richtung. In der Gleichung treten zusätzlich die Reynolds-Spannungen auf, die das Produkt der Schwankungsgrößen  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  enthalten:

$$\tau_{t,ij} = -\rho \overline{c'_i c'_j}, \quad (2.18)$$

bzw.

$$\mathbf{T}_t = -\rho \overline{\vec{c}' \vec{c}'}. \quad (2.19)$$

Da diese scheinbare Schubspannungen a priori unbekannt sind, entsteht durch die Reynolds-Mittelung somit ein Schließungsproblem für das Gleichungssystem. Eine Möglichkeit zur Schließung ist die Turbulenzmodellierung, die im Rahmen dieser Arbeit verwendet wird.

Eines der am häufigsten verwendeten Konzepte zur Turbulenzmodellierung beruht auf der Wirbelviskositätsannahme, die 1877 von BOUSSINESQ [6] eingeführt wurde. Das bekannteste Modell, das auf dieser Annahme basiert, ist ein Zweigleichungsmodell, das  $k - \varepsilon$  Modell. Im Hinblick auf möglichst kurze Rechenzeiten wird zunächst ein algebraisches Nullgleichungsmodell verwendet.

### 2.3.4 Nullgleichungsmodell

Die Nullgleichungsmodelle, wie z. B. von BALDWIN und LOMAX [4], CEBECI und SMITH [72], PRANDTL [55] usw., gelten streng nur für ebene Strömungen und erfordern eine besondere Anpassung, wenn dreidimensionale Strömungen berechnet werden sollen. So hat FISCHER [16] mit einem auf dreidimensionale Strömungen erweiterten Prandtl'schen Mischungswegansatz bei der numerischen Berechnung von Spaltströmungen in Turbomaschinen gute Ergebnisse erzielen können. Deshalb wurde das Mischungsweglängenmodell gewählt.

Der Zusammenhang zwischen der turbulenten Viskosität  $\mu_t$  und den lokalen Geschwindigkeitsgradienten ist in dem modifizierten Prandtl'schen Mischungswegansatz der folgenden Weite

$$\mu_t = \varrho l_m^2 \sqrt{2 \nabla \vec{c} : \mathbf{S}} \quad (2.20)$$

beschrieben. In Gl. 2.20 stellt „:“ das doppelte Skalarprodukt und  $\mathbf{S}$  den Deformationsgeschwindigkeitstensor mit

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\nabla \vec{c} + (\nabla \vec{c})^T) \quad (2.21)$$

dar. Das doppelte Skalarprodukt zweier Matrizen  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{N}$  ist definiert als:

$$\mathbf{M} : \mathbf{N} = \text{spur}(\mathbf{M}^T \mathbf{N}) \quad (2.22)$$

Mit dieser Definition ergibt sich die turbulente Viskosität wie folgt:

$$\begin{aligned} \mu_t = \varrho l_m^2 \sqrt{2 \left[ \left( \frac{\partial c_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial c_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial c_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial c_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial c_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial c_x}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial c_z}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial c_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial c_y}{\partial z} \right)^2 + 2 \left[ \frac{\partial c_x}{\partial y} \frac{\partial c_y}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial z} \frac{\partial c_z}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial x} \frac{\partial c_x}{\partial z} \right]} \quad (2.23) \end{aligned}$$

Bei der Berechnung auf dem zeitlich beweglichen Rechnernetz wird für die Berechnung von  $\mu_t$  in Gl. 2.21 die Geschwindigkeit  $(\vec{c} - \vec{c}_n)$  anstelle von  $\vec{c}$  verwendet.

Die einzige verbleibende Konstante in diesem Turbulenzmodell, die kalibriert werden muß, ist die Mischungsweglänge  $l_m$ .

Mit dieser relativ einfachen und vor allem sehr schnellen Berechnung der turbulenten dynamischen Viskosität lassen sich, wie die Vergleichsrechnungen zeigen, sehr gute Ergebnisse erzielen.

### 2.3.5 Das Standard $k - \varepsilon$ Turbulenzmodell

Das Standard  $k - \varepsilon$  Turbulenzmodell von LAUNDER und SPALDING [40] hat in den letzten zwanzig Jahren bei der numerischen Simulation turbulenter Strömungen, die von wissenschaftlicher wie auch ingenieur-praktischer Bedeutung sind, eine zentrale Rolle gespielt. Im Rahmen dieser Arbeit wird grundsätzlich das  $k - \varepsilon$  Turbulenzmodell verwendet. Das Modell beruht auf der Wirbelviskositätsannahme [6], die besagt, daß die Komponenten der turbulenten Spannungen proportional zum gemittelten Deformationstensor sind. Die Reynoldsschen Spannungen werden wie folgt ausgedrückt:

$$\mathbf{T}_t = -\left(\frac{2}{3}\rho k + \mu_t \operatorname{div} \vec{c}\right) \mathbf{I} + \mu_t [\operatorname{grad} \vec{c} + (\operatorname{grad} \vec{c})^T]. \quad (2.24)$$

Für inkompressible Fluide gilt:

$$\mathbf{T}_t = -\frac{2}{3}\rho k \mathbf{I} + \mu_t [\operatorname{grad} \vec{c} + (\operatorname{grad} \vec{c})^T], \quad (2.25)$$

bzw.

$$\tau_{t,ij} = -\overline{\rho c'_i c'_j} = -\frac{2}{3}\delta_{ij}\rho k + \mu_t \left( \frac{\partial \bar{c}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{c}_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.26)$$

wobei der Kronecker Operator  $\delta_{ij} = 1$  für  $i = j$  ist. Die turbulente bzw. Wirbelviskosität  $\mu_t$  bzw.  $\nu_t$  wird aus der turbulenten kinetischen Energie  $k$  und der Dissipationsrate  $\varepsilon$  wie folgt berechnet:

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad \mu_t = \rho \nu_t, \quad (2.27)$$

mit

$$k = \frac{1}{2} \overline{c'_i c'_i}, \quad \varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial c'_i}{\partial x_j} \frac{\partial c'_i}{\partial x_j}}. \quad (2.28)$$

Die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die spezifische turbulente kinetische Energie  $k$  und die Dissipationsrate  $\varepsilon$  sind wie folgt gegeben:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho k c_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + (P_k - \rho \varepsilon), \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \varepsilon c_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + \frac{\varepsilon}{k} (c_{\varepsilon 1} P_k - c_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon), \quad (2.30)$$

mit den Diffusionskoeffizienten:

$$\Gamma_k = \mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_k}, \quad \Gamma_\varepsilon = \mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}. \quad (2.31)$$

Der Einfachheit halber bezeichnen hier  $c_i$  und  $p$  statt  $\bar{c}_i$  und  $\bar{p}$  die Reynoldsen gemittelten Größen. In den Gleichungen bezeichnet  $P_k$  die Produktionsrate der turbulenten kinetischen Energie:

$$P_k = \tau_{t,ij} \frac{\partial c_i}{\partial x_j}. \quad (2.32)$$

Einsetzen von Gleichung 2.26 liefert die Produktionsrate für inkompressible Fluide:

$$P_k = \mu_t \left( \frac{\partial c_i}{\partial x_j} + \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial c_i}{\partial x_j}. \quad (2.33)$$

Die im Standard  $k - \varepsilon$  Modell verwendeten empirischen Konstanten sind in Tabelle 2.1 angegeben:

$c_\mu$	$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$	$c_{\varepsilon 1}$	$c_{\varepsilon 2}$
0.09	1.0	1.3	1.44	1.92

Tabelle 2.1: Empirische Konstanten des Standard  $k - \varepsilon$  Turbulenzmodells

Wie bei LILEK [43] werden folgende Integralformen für die beweglichen Rechennetze bei der Implementierung verwendet:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \int \int \rho k dV + \int \int_{A(t)} [\rho k (\vec{c} - \vec{c}_n) - \Gamma_k \text{grad} k] \cdot \vec{n} dA = \int \int \int_{V(t)} (P_k - \rho \varepsilon) dV, \quad (2.34)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \int \rho \varepsilon dV + \int_{A(t)} [\rho \varepsilon (\vec{c} - \vec{c}_n) - \Gamma_\varepsilon \text{grad} \varepsilon] \cdot \vec{n} dA = \int_{V(t)} \int \int \frac{\varepsilon}{k} (c_{\varepsilon 1} P_k - c_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon) dV. \quad (2.35)$$

### 2.3.6 Das RNG $k - \varepsilon$ Turbulenzmodell

Das RNG- $k - \varepsilon$ -Modell stellt eine Erweiterung des obigen Standard- $k - \varepsilon$ -Modells dar. Die Hauptkritik, die gegen das  $k - \varepsilon$  Turbulenzmodell vorgebracht wurde, ist, daß dieses Modell nicht systematisch aus den Navier-Stokes Gleichungen abgeleitet wurde [69]. YAKHOT und ORSZAG [83] wendeten die Theorie der „Renormalization Group“ auf die Navier-Stokes Gleichungen an und haben das RNG  $k - \varepsilon$  Turbulenzmodell für hydrodynamische Turbulenz hergeleitet. Die RNG-Theorie benutzt keine Koeffizienten, die experimentell bestimmt worden sind. Das neu entstandene  $k - \varepsilon$  Turbulenzmodell hat dieselbe Form wie das Standard  $k - \varepsilon$  Turbulenzmodell. Die Unterschiede zwischen dem RNG  $k - \varepsilon$  Turbulenzmodell und dem Standard  $k - \varepsilon$  Turbulenzmodell zeigen sich nur in den geringfügig modifizierten Koeffizienten, die in der Tabelle 2.2 aufgelistet sind [83], [69].

$c_\mu$	$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$	$c_{\varepsilon 1}$	$c_{\varepsilon 2}$
0.085	0.7179	0.7179	1.063	1.72

Tabelle 2.2: Empirische Konstanten des originalen RNG  $k - \varepsilon$  Turbulenzmodells

Bei der Verwendung dieses originären RNG  $k - \varepsilon$  Turbulenzmodells treten einige Schwierigkeiten auf. Insbesondere ist die Konstante  $c_{\varepsilon 1} = 1.063$  nahe bei  $c_{\varepsilon 1} = 1$ , die einen singulären Punkt der  $\varepsilon$ -Gleichung darstellt, vgl. [69], [84]. YAKHOT und seine Mitarbeiter [84] modifizierten das originale RNG  $k - \varepsilon$  Turbulenzmodell. Im Produktionsterm der  $\varepsilon$ -Gleichung wurde ein nichtlinearer Koeffizient eingefügt, der von der Deformationsrate abhängt und bei Strömungen mit starken Deformationen sehr wichtig ist. Der komplette Satz der Koeffizienten ist in Tabelle 2.3 angegeben:

mit der dimensionslosen Hilfsfunktion  $\eta$

$$\eta = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}} \quad (2.36)$$

Die in Gl. 2.36 enthaltene Größe  $S_{ij}$  bezeichnet die Komponenten des Tensors der Verformungsgeschwindigkeiten.

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial c_i}{\partial x_j} + \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.37)$$

$c_\mu$	$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$	$c_{\varepsilon 1}$	$c_{\varepsilon 2}$
0.085	0.7179	0.7179	$1.42 - \frac{\eta(1-\eta/\eta_0)}{1+\beta\eta^3}$	1.68
<b>oder</b>				
$c_\mu$	$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$	$c_{\varepsilon 1}$	$c_{\varepsilon 2}$
0.085	0.7179	0.7179	1.42	$1.68 + \frac{\eta(1-\eta/\eta_0)}{1+\beta\eta^3}$

Tabelle 2.3: Empirische Konstanten des nichtlinearen RNG  $k - \varepsilon$  Turbulenzmodells

Der Koeffizient  $\eta_0$  ist mit  $\eta_0 = 4.38$  festgelegt worden und  $\beta$  ist eine Konstante,  $\beta = 0.012$ , die so ausgeählt wurde, daß sich die von-Karman-Konstante 0.4 ergibt.

# Kapitel 3

## Numerische Lösung der Erhaltungsgleichungen

### 3.1 Diskretisierung der Erhaltungsgleichungen

Die Erhaltungsgleichungen werden nach der Finiten-Volumen Methode diskretisiert. Bei diesem Verfahren werden Orts- und Zeitdiskretisierung der integralen Grundgleichungen voneinander getrennt durchgeführt. Bei der Ortsdiskretisierung der Navier-Stokes Gleichung in Integralform handelt es sich um die Änderung der Flüsse über das Kontrollvolumen und um die Berechnung der Quellterme. Das Rechengebiet wird hierbei in zeitlich konstante „Finite Volumen“ unterteilt, in denen die eigentliche Integration der Erhaltungsgleichung durchgeführt wird. Die Bilanzierung von Flüssen erfolgt über die Grenzflächen dieses Kontrollvolumens. Für die Zeitdiskretisierung wird ein vollimplizites Verfahren verwendet. Die Anordnung der Variablen sind nicht versetzt, sog. „Colocated Arrangement“. Bei dieser Anordnung werden die Geometriedaten an den Netzknoten und alle Variablen an den Zellmittelpunkten gespeichert.

#### 3.1.1 Definition des Kontrollvolumens

Die Knotenpunkte eines Kontrollvolumens werden in nachfolgender Weise bezeichnet [19].  $\mathbf{P}$  ist der Zellmittelpunkt des betrachteten Kontrollvolumens. Die Bezeichnung der Zellmittelpunkte der Nachbarzellen erfolgt nach den Himmelsrichtungen Nord („North“), Süd („South“), Ost („East“) und West („West“). Im zweidimensionalen Fall werden die Zellkanten mit Kleinbuchstaben der jeweiligen Himmelsrichtung bezeichnet.

Im Dreidimensionalen wird der Punkt oberhalb mit  $\mathbf{Top}$  und der unterhalb gelegene Punkt mit  $\mathbf{Bottom}$  bezeichnet. In der Abb. 3.1 ist eine solche typische Anordnung



mit ihren Bezeichnungen und den entsprechenden Normalenvektoren für den zwei- bzw. dreidimensionalen Fall skizziert.

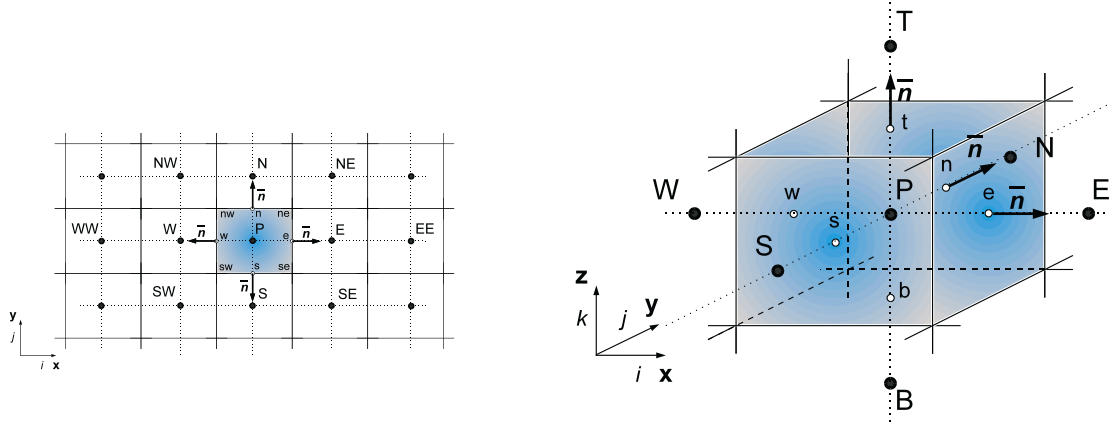


Bild 3.1: Typische Bezeichnungen am kartesischen 2D und 3D Kontrollvolumen

### 3.1.2 Berechnung der Zellvolumina

Das Rechengebiet wird allgemein in eine finite Anzahl von hexaederförmigen Kontrollvolumina eingeteilt. Im Fall orthogonaler Netze haben die Zellen die Form eines Würfels, s. Abb. 3.1, oder eines Quaders. Bei der Berechnung von Strömungen durch Turbomaschinenbeschauelungen liegen in der Regel nicht-orthogonale Rechnernetze vor, d.h. die Zellen haben allgemeine Hexaederformen, s. Abb. 3.2.

Zur genauen Berechnung des Zellvolumens wird die hexaederförmige Zelle, s. Abb. 3.2, in sechs Pyramiden unterteilt, deren gemeinsame Spitze sich im Inneren der Zelle befindet. Diese Pyramiden werden durch eine Diagonale in der jeweiligen viereckigen Basis in je zwei Tetraeder unterteilt, s. Abb. 3.3.

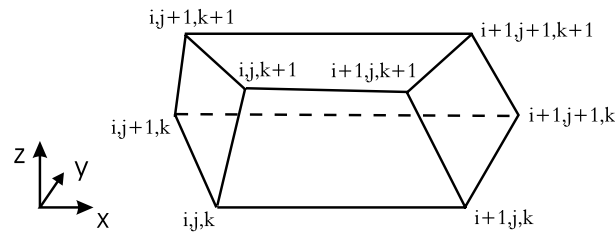


Bild 3.2: Hexaederische Zelle im Berechnungsgebiet

Durch diese Vorgehensweise wird die bei Turbomaschinen häufig auftretende Krümmung der Zellflächen besser berücksichtigt. Das Volumen des Tetraeders wird

mit Hilfe des Spatprodukts berechnet. Damit gilt für das Volumenelement, s. Abb. 3.3:

$$V = V_{P_{yr.1}} + V_{P_{yr.2}} + V_{P_{yr.3}} + V_{P_{yr.4}} + V_{P_{yr.5}} + V_{P_{yr.6}} \quad (3.1)$$

mit:

$$V_{P_{yr.1}} = V_{Tet.123S} + V_{Tet.341S}, \quad V_{P_{yr.2-6}} \text{ analog}$$

$$V_{P_{yr.1}} = \frac{1}{6} ((\vec{r}_{2S} \times (\vec{r}_{23} \times \vec{r}_{21}) + (\vec{r}_{4S} \times (\vec{r}_{41} \times \vec{r}_{43})))$$

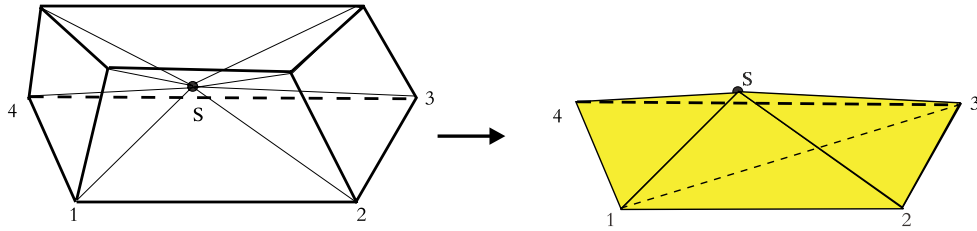


Bild 3.3: Pyramide 1 im Zellvolumen aufgeteilt in zwei Tetraeder

Die Erhaltungsgleichungen werden über die Hexaeder integriert, wobei die zu berechnenden Variablen in den Mittelpunkten des Kontrollvolumens liegen.

Diese Methode ist konservativ, solange die Oberflächenintegrale, welche die konvektiven und diffusiven Flüsse enthalten, für beide Nachbarzellen an der Zellgrenzfläche gleich sind.

Die Finite Volumen Methode kann auf alle Rechenetzformen angewendet werden. Besonders bei komplexen Geometrien und Rechengebieten hat die Finite Volumen Diskretisierung ihre Vorteile. Ein Nachteil im Vergleich zur Finiten Differenzen Methode ist, daß eine Diskretisierung mit höherer als zweiter Ordnung sehr aufwendig ist.

### 3.1.3 Approximation der Oberflächenintegrale

Der Nettofluß  $f$ , ob konvektiv oder diffusiv, durch die Oberfläche des betrachteten Kontrollvolumens, siehe Abb. 3.1, kann aus der Summe der sechs Teilflüsse durch die jeweilige Zellgrenzfläche berechnet werden.

$$\int \int_A f dA = \sum_{i=1}^6 \int \int_{A_i} f dA \quad (3.2)$$

$$i = n, s, e, w, t, b$$

Zur exakten Lösung des Integrals muß aber der Integrand  $f$  auf der gesamten Fläche  $A_i$  jeder Zellgrenzfläche bekannt sein. Der Fluß  $F_i$ , das heißt das Integral über der Fläche  $A_i$ , kann durch das Produkt des Integranden  $f_i$  im Flächenmittelpunkt und der Fläche angenähert werden.

$$F_i = \int \int_{A_i} f dA = \bar{f}_i A_i \approx f_i A_i \quad (3.3)$$

Ist  $f_i$  am Zellmittelpunkt der Zellgrenzfläche bekannt, so handelt es sich um eine Approximation zweiter Ordnung.

Die Variablenwerte sind aber in den Kontrollvolumenmittelpunkten abgespeichert. Somit muß der Integrand durch eine geeignete Interpolation an der Zellgrenzfläche bestimmt werden. Zur Interpolation einer beliebigen Variablen  $\phi$  an die jeweilige Zellgrenzfläche gibt es verschiedene Möglichkeiten. Die verwendeten Methoden sollen hier kurz am Beispiel der Grenzfläche „ $e$ “ beschrieben werden.

#### • Upwind Interpolation (UDS)

Bei dieser Interpolationsmethode, auch „Upwind Differencing Scheme“ genannt, wird einfach der stromaufwärts gelegene Wert verwendet. Hieraus ergibt sich für die Variable  $\phi$  im Mittelpunkt der Zellgrenzfläche  $e$ , vgl. Abb. 3.4, abhängig von der Strömungsrichtung  $((\vec{c} - \vec{c}_n) \vec{n})_e$

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P & \text{falls } ((\vec{c} - \vec{c}_n) \vec{n})_e > 0 \\ \phi_E & \text{falls } ((\vec{c} - \vec{c}_n) \vec{n})_e < 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Das UDS ist eine Approximation erster Ordnung, die bedingungslos stabil arbeitet, jedoch den Nachteil hat, numerisch diffusiv zu sein. Um dies zu vermeiden, muß eine Interpolation höherer Ordnung verwendet werden.

#### • Linear Interpolation (CDS)

Hierbei wird die Variable  $\phi_e$  durch eine lineare Interpolation „Central Differencing Scheme“ zwischen den beiden nächstliegenden Zellmittelpunkten bestimmt. Es folgt für die Variable

$$\phi_e = \phi_E \lambda_e + \phi_P (1 - \lambda_e) \quad (3.5)$$

mit dem linearen Interpolationsfaktor

$$\lambda_e = \frac{L_{P,e}}{L_{P,E}} \quad (3.6)$$

Durch eine Taylorreihenentwicklung läßt sich zeigen, daß der Abbruchfehler der Gleichung 3.5 zweiter Ordnung ist. Da das CDS, wie alle Approximationen höherer Ordnung, Oszillationen und Instabilitäten hervorrufen kann, soll dies durch ein sogenanntes „Deferred Correction“ Schema vermieden werden.

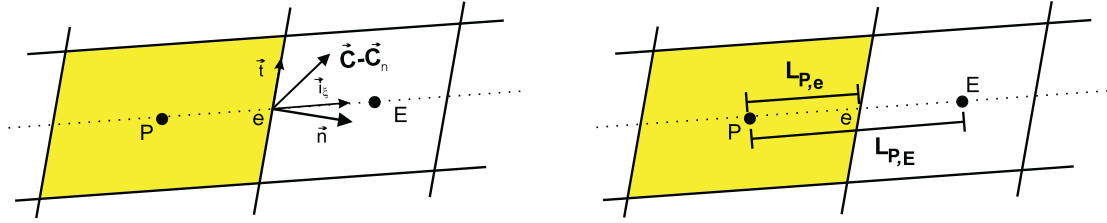


Abb. 3.4: Berechnung der Variablen an den Zellgrenzflächen durch Upwind Interpolation und eine lineare Interpolation

### • „Deferred Correction“ Schema

Mit Hilfe eines „Deferred Correction“ Schemas läßt sich eine Approximation niedriger Ordnung mit einer Approximation höherer Ordnung verbinden. Auf diese Weise können trotz ausreichender Genauigkeit Oszillationen weitestgehend vermieden werden. Wird eine Approximation der Flüsse höherer Ordnung in expliziter Form verwendet und mit einer Approximation niedriger Ordnung, die nur die Werte der unmittelbaren Nachbarn benötigt, in impliziter Form kombiniert, vereinfacht sich außerdem die Implementierung bei nichtlinearen Systemen. Bei der expliziten Form werden zur Berechnung des Flusses die Werte des vorangegangenen Iterationsschrittes  $n$  verwendet, um den Fluß zum neuen Iterationsschritt  $n+1$  zu berechnen. KHOSLA und RUBIN [33] haben diese Aufspaltung erstmals vorgeschlagen. Sie wurde von einigen Autoren wie BAUER [5], ORTH [50] und PERIC [19] übernommen.

Bei Verwendung des „Upwind Differencing Scheme (UDS)“ niedriger Ordnung und des „Central Differencing Scheme (CDS)“ höherer Ordnung ergibt sich [19]:

$$F_e^{n+1} = (F_e^{UDS})^{n+1} + \beta(F_e^{CDS} - F_e^{UDS})^n \quad (3.7)$$

Durch den Blendungsfaktor  $\beta$  läßt sich das Verhältnis der Approximation niedriger Ordnung und der Approximation höherer Ordnung für  $0 \leq \beta \leq 1$  gewichten.

### 3.1.4 Diskretisierung der Raumerhaltungsgleichung

Bei der hier behandelten Problemklasse ist die Kinematik des Gitters durch eine analytische Beziehung vorgeschrieben. Daher können die Netzgeschwindigkeiten  $\vec{c}_n$ , die in den konvektiven Flüssen der Gl. 2.10, 2.12 und 2.34 sowie 2.35 auftreten, durch eine konservative Approximation der diskretisierten Raumerhaltungsgleichung

2.11 berechnet werden. Die diskretisierte Raumerhaltungsgleichung führt in einem impliziten Euler Schema auf die Gleichung:

$$\frac{V_P^{n+1} - V_P^n}{\Delta t} = \sum_l \int_{A_l} \vec{c}_n \cdot d\vec{A} = \sum_l \frac{\Delta V_l^{n+1}}{\Delta t} = \sum_l \dot{V}_l^{n+1} \quad (3.8)$$

mit  $l = e, w, s, n, b, t$ .

$V_P^{n+1}$  und  $V_P^n$  bezeichnen das Volumen der Zelle  $P$  zu den Zeiten  $t^{n+1}$  und  $t^n$ . Während des Zeitintervalls  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  wird dabei das Volumen  $\Delta V_l^{n+1}$  durchstrichen, s. Abb. 3.5. Zur Erhaltung der konservativen Eigenschaften des Verfahrens muß dieses Volumen exakt im Sinne der Diskretisierung ermittelt werden. Hierfür schlägt LAI [36] ein Triangulationsverfahren vor und beweist die konservativen Eigenschaften seines Berechnungsansatzes. Ein mathematisch äquivalenter Vorschlag zur Volumenberechnung findet sich auch bei KROLL [34], der aus Gründen der besseren Kompatibilität in das bestehende Rechenverfahren übernommen wurde.

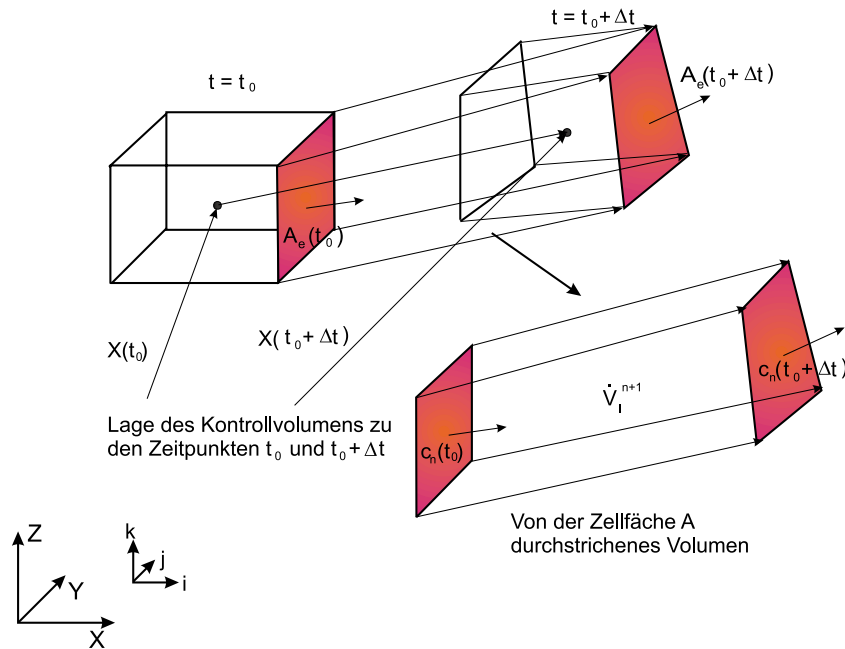


Abb. 3.5: Zeitlich durchstrichenes Zellvolumen

Hierzu wird das von der Zellfläche durchstrichene Volumen  $V_l$  durch die in Kap. 3.1.1 beschriebene Methode exakt berechnet.

### 3.1.5 Diskretisierung der konvektiven Terme

Zur Berechnung der konvektiven Flüsse für eine beliebige Transportgröße  $\phi$  mit Hilfe von Gleichung 3.3

$$F_e^c = \int \int_{A_e} \varrho \phi (\vec{c} - \vec{c}_n) \vec{n} dA \approx \dot{m}_e \phi_e \quad (3.9)$$

ergibt sich bei der Verwendung des „Deferred Correction“ Schemas folgende Form:

$$\begin{aligned} (F_e^c)^{n+1} &= \underbrace{(\max(\dot{m}_e, 0)\phi_P + \min(\dot{m}_e, 0)\phi_E)}_{\text{impliziter Teil mit UDS}}^{n+1} \\ &+ \beta \left( \underbrace{(\dot{m}_e(1 - \lambda_e)\phi_P + \dot{m}_e \lambda_e \phi_E)}_{\text{expliziter Teil mit CDS}} - \underbrace{(\max(\dot{m}_e, 0)\phi_P + \min(\dot{m}_e, 0)\phi_E)}_{\text{expliziter Teil mit UDS}} \right)^n \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dabei wird von einem bekannten Massenstrom  $\dot{m}_e$  durch die Zellgrenzfläche ausgegangen. Er läßt sich mit

$$\dot{m}_e = \int \int_{A_e} \varrho \vec{w} \vec{n} dA \approx (\varrho (\vec{c} - \vec{c}_n) \vec{n})_e A_e \quad (3.11)$$

annähern.

### 3.1.6 Diskretisierung der diffusiven Terme

Für den diffusiven Fluß der  $i$  - ten Impulsgleichungen durch die Zellgrenzfläche  $e$  gilt:

$$F_e^d = \int \int_{A_e} \mu \text{grad } c_i \vec{n} dA + \int \int_{A_e} \mu \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \vec{i}_j \vec{n} dA \quad (3.12)$$

Der zweite Term des diffusiven Flusses wird explizit diskretisiert, da er im Vergleich zum ersten relativ klein ist. Nachfolgend soll die implizite Diskretisierung des ersten Terms beschrieben werden.

Der diffusive Fluß wird entsprechend Gleichung 3.3 angenähert. Verwendet man ein lokales orthogonales Koordinatensystem  $(n, t, s)$  mit dem Ursprung im Zellflächenmittelpunkt  $e$ , siehe Abb. 3.4, ergibt sich eine Approximation in einfacher Weise, da nur die Ableitung in  $n$  - Richtung, d. h. in Normalenrichtung, zum diffusiven Fluß beiträgt:

$$\int_{A_e} \mu \operatorname{grad} c_i \vec{n} dA \approx (\mu_e \operatorname{grad} c_i \vec{n})_e A_e = \mu_e \left( \frac{\partial c_i}{\partial n} \right)_e A_e \quad (3.13)$$

Ist die Verbindungslinie zwischen den beiden Zellvolumenmittelpunkten  $P$  und  $E$ , das heißt die  $\xi$  - Richtung annähernd orthogonal zur Zellgrenzfläche  $e$ , kann  $\partial\phi/\partial n$  durch  $\partial\phi/\partial\xi$  angenähert werden. MUZAFERIJA [48] schlägt für diesen Fall folgende implizite Flußapproximation für den ersten Term von Gleichung 3.12 vor:

$$(F_e^d)^{n+1} = \mu_e \left( \frac{\partial c_i}{\partial \xi} \right)_e^{n+1} A_e = \mu_e A_e \left( \frac{c_{iE} - c_{iP}}{L_{P,E}} \right)^{n+1} \quad (3.14)$$

Dabei ist  $L_{P,E}$  der Abstand zwischen den Punkten  $P$  und  $E$ . Es handelt sich um eine Approximation zweiter Ordnung, wenn die Verbindungslinie von  $P$  und  $E$  orthogonal zur Zellgrenzfläche ist. Für nicht orthogonale Netze verwendet MUZAFERIJA folgendes „Deferred Correction“ Schema:

$$(F_e^d)^{n+1} = \underbrace{\mu_e A_e \left( \frac{\partial c_i}{\partial \xi} \right)_e^{(n+1)}}_{\text{impliziter Teil}} + \underbrace{\mu_e A_e \left[ \overline{\left( \frac{\partial c_i}{\partial n} \right)_e} - \overline{\left( \frac{\partial c_i}{\partial \xi} \right)_e} \right]^n}_{\text{expliziter Teil}} \quad (3.15)$$

Entsprechend der Diskretisierung der konvektiven Terme wird der erste Teil implizit zum Iterationsschritt  $n + 1$  und der zweite Teil explizit zum Iterationsschritt  $n$  betrachtet. Die Ableitungen des expliziten Anteils werden aus den Ableitungen der Zellmittelpunkte interpoliert, was durch einen Strich über den Ableitungen angedeutet ist.

Die Ermittlung der Ableitungen im Zellmittelpunkt erfolgt mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes:

$$\int_V \frac{\partial c_i}{\partial x_j} dV = \int_A c_i \vec{i}_j \vec{n} dA \approx \sum_k c_{ki} A_k^j \quad (3.16)$$

mit  $k = n, s, e, w, t, b$

Hieraus folgt für den jeweiligen Zellmittelpunkt  $P$ :

$$\left( \frac{\partial c_i}{\partial x_j} \right)_p \approx \frac{\sum_k c_{ki} A_k^j}{\Delta V} \quad (3.17)$$





### 3.1.8 Diskretisierung der Quellterme

Die Quellterme in den Impulsgleichungen werden über das finite Volumen integriert. Da man davon ausgeht, daß der im Zellmittelpunkt gespeicherte Wert  $q_P$  dem Mittelwert der betrachteten Größe innerhalb des Zellvolumens entspricht, ergibt sich für  $Q_P$ :

$$Q_p = \int \int \int_V q dV = \bar{q} \Delta V \approx q_P \Delta V \quad (3.20)$$

Das Volumen der Zelle ist dabei  $\Delta V$ . Die Genauigkeit dieser Approximation ist zweiter Ordnung. Sie ist sogar exakt, falls sich  $q$  innerhalb des finiten Volumens  $\Delta V$  linear ändert oder konstant ist. Alle explizit erfaßten, konvektiven und diffusiven Terme der Diskretisierung werden zu den diskretisierten Quelltermen addiert.

### 3.1.9 Diskretisierung der Zeitterme

Bei der Simulation von instationären Strömungen gibt es in den Impulsgleichungen zusätzliche Zeitterme  $\frac{d(\rho c_i)}{dt}$ , die diskretisiert werden müssen. In der Numerik wird die Zeit als vierte Koordinatenrichtung betrachtet. Im Unterschied zu den räumlichen Koordinaten hat die Zeit nur einen Einfluß in eine Richtung. Da nur ein Einfluß in die Zukunft besteht, ist die instationäre Strömung ein parabolisches Problem in Zeitrichtung im Gegensatz zum elliptischen Problem der drei Raumrichtungen. Bei PERIC [19] werden mehrere Möglichkeiten der Diskretisierung in Zeitrichtung aufgezeigt. Verwendet wurde hier die „Implicit Euler“ Methode und die „Three Time Level“ Methode. Der Vorteil dieser beiden Methoden ist, daß sie sich ineinander überführen lassen.

#### • „Implicit Euler“ Methode

Die „Implicit Euler“ Methode ist eine Möglichkeit, die instationären Terme erster Ordnung zu integrieren. Die Ableitung in Zeitrichtung einer Größe  $\phi$  wird durch eine einfache Differenz

$$\frac{d}{dt} \int \int \int_{V(t)} \rho \phi dV \approx \frac{\rho}{\Delta t} ((\Delta V \phi)_P^{n+1} - (\Delta V \phi)_P^n) \quad (3.21)$$

angenähert. Bei einer impliziten Methode werden alle Flüsse und Quellterme zum unbekanntem neuen Zeitschritt  $n+1$  betrachtet. Es entsteht ähnlich wie bei stationären Berechnungen ein System algebraischer Gleichungen. Der einzige Unterschied besteht darin, daß der implizite Anteil des diskretisierten Zeitterms  $\frac{\rho}{\Delta t} \Delta V_P^{n+1}$  zu

den zentralen Koeffizienten und der explizite Anteil  $\frac{\rho}{\Delta t} (\Delta V \phi)_P^n$  zu den Quelltermen hinzuaddiert wird.

• „Three Time Level“ Methode

Die „Three Time Level“ Methode ist eine implizite Methode zweiter Ordnung in Zeitrichtung. Bei dieser Methode folgt aus einem parabolischen Ansatz in zeitlicher Richtung:

$$\frac{d}{dt} \int \int \int_{V(t)} \rho \phi dV \approx \frac{\rho}{2\Delta t} (3(\Delta V \phi)_P^{n+1} - 4(\Delta V \phi)_P^n + (\Delta V \phi)_P^{n-1}) \quad (3.22)$$

Führt man einen Blendungsfaktor  $\beta_t$  ein, so kann eine Mischform der „Implicit Euler“ Methode erster Ordnung und „Three Time Level“ Methode zweiter Ordnung verwendet werden. Die „Three Time Level“ Methode mit Berücksichtigung von zwei vorangegangenen Zeitschritten  $n$  und  $n - 1$  neigt bei größeren Zeitschritten zu Oszillationen. Durch das Blenden mit der „Implicit Euler“ Methode lassen sich diese vermeiden.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \int \int_{V(t)} \rho \phi dV &\approx \frac{\rho}{2\Delta t} ((2 + \beta_t)(\Delta V \phi)_P^{n+1} - \\ &(2 + 2\beta_t)(\Delta V \phi)_P^n + \beta_t(\Delta V \phi)_P^{n-1}) \quad (3.23) \\ \forall \beta_t &= 0, \dots, 1 \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich ein impliziter Anteil  $\frac{\rho}{2\Delta t} ((2 + \beta_t)(\Delta V)_P^{n+1}$  und ein expliziter Anteil  $\frac{\rho}{2\Delta t} (2 + 2\beta_t)(\Delta V)_P^n + \beta_t(\Delta V)_P^{n-1}$ .

Die Diskretisierung der Gleichungen für  $k$  und  $\varepsilon$ , vgl. Kap. 2.2, erfolgt in gleicher Weise wie die der Impulsgleichungen in Kapitel 3.1.5 und Kapitel 3.1.6. Der Quellterm der Transportgleichung für die Dissipationsrate  $\varepsilon$  wird nach [58] und [9] behandelt.

## 3.2 Implizites Druckkorrektur Verfahren

Im vorangegangenen Kapitel wurde für die Approximation des konvektiven Flusses zunächst angenommen, daß die Massenströme an den Zellflächen bekannt sind. Zur Bestimmung der Strömungsgrößen unter Erhaltung der Masse wird ein Druckkorrektur-Verfahren angewendet, das aus der Kontinuitätsgleichung abgeleitet wird. Für den entwickelten CFD-Code kommt der weitverbreitete SIMPLE (Semi IMplicit procedure for Pressure-Linked Equations) -Algorithmus, s. z.B. PATANKAR [52], zur Anwendung. Die für konturangepaßte Rechenetze erforderlichen Erweiterungen dieser Methode sowie eine umfassende Diskussion finden sich bei FERZIGER und PERIĆ [19].

### Druckkorrekturgleichung auf nicht bewegten Netzen

Es handelt sich bei den Impulsgleichungen um ein nichtlineares Gleichungssystem. Sie werden voll implizit diskretisiert und können unter Abspaltung des Druckterms auf die folgende Form gebracht werden:

$$A_P^{c_i} c_{i,P}^{n+1} + \sum_l A_l^{c_i} c_{i,l}^{n+1} = Q_{c_i}^{n+1} - \left( \frac{\delta p^{n+1}}{\delta x_i} \right)_P \quad (3.24)$$

Der Index  $l$  bezeichnet die Nachbarpunkte und  $Q$  beinhaltet die eigentlichen Quellterme sowie alle explizit berechneten Terme der Impulsgleichungen. Wegen der schon erwähnten Nichtlinearitäten und der wechselseitigen Koppelung der Impulsgleichungen kann das System algebraischer Gleichungen 3.24 nicht direkt gelöst werden, da sowohl die Koeffizienten  $A$  als auch die Quellterme von den unbekanntem Geschwindigkeiten  $c_i^{n+1}$  abhängen. Die Lösung erfolgt deshalb in einem iterativen Prozeß. Die Iterationen, bei denen die Koeffizienten  $A$  und der Quellterm  $Q$  jeweils neu berechnet werden, bezeichnet man als äußere Iterationen. Dagegen wird bei den inneren Iterationen ein lineares System mit konstanten Koeffizienten  $A$  und konstantem Quellterm  $Q$  gelöst. Zur besseren Darstellung wird deshalb im folgenden der äußere Iterationszähler  $m + 1$  verwendet, der dem Iterationsschritt  $n + 1$  entspricht (vgl. auch Abb. 3.9):

$$A_P^{c_i} c_{i,P}^{(m+1)*} + \sum_l A_l^{c_i} c_{i,l}^{(m+1)*} = Q_{c_i}^m - \left( \frac{\delta p^m}{\delta x_i} \right)_P \quad (3.25)$$

Die Impulsgleichungen werden im Laufe des Lösungsprozesses sequentiell gelöst. Weil dabei der Druckgradient der vorherigen äußeren Iteration  $m$  verwendet wird, erfüllen die aus Gleichung 3.25 berechneten Geschwindigkeiten mit Index  $*$  im allgemeinen die Kontinuitätsgleichung nicht. Deswegen werden die aus den Impulsgleichungen berechneten Geschwindigkeiten mit dem Index  $*$  bezeichnet. Um auch die Kontinuitätsgleichung zu erfüllen, werden der Druck und die Geschwindigkeiten korrigiert (Index  $'$ ):

$$p^{m+1} = p^m + p' \quad \text{und} \quad c_i^{m+1} = c_i^{(m+1)*} + c'_i \quad (3.26)$$

Werden diese Beziehungen in die diskretisierten Impulsgleichungen (Gl. 3.24 bzw. Gl. 3.25) eingesetzt, so erhält man für die  $i$ -te Impulsgleichung eine Beziehung für die Geschwindigkeitskorrektur  $c'_{i,P}$  als Funktion der Druckkorrektur  $p'$  an einem Punkt  $P$ :

$$c'_{i,P} = \tilde{c}'_{i,P} - \frac{1}{A_P^{c_i}} \left( \frac{\delta p'}{\delta x_i} \right)_P \quad \text{mit} \quad \tilde{c}'_{i,P} = - \frac{\sum_l A_l^{c_i} c'_{i,l}}{A_P^{c_i}} \quad (3.27)$$

Wird Gleichung 3.26 zusammen mit Gleichung 3.27 in die diskretisierte Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\delta c_i^{(m+1)}}{\delta x_i} \quad (3.28)$$

eingesetzt, so erhält man eine Gleichung für die Druckkorrektur:

$$\frac{\delta}{\delta x_i} \left[ \frac{1}{A_P^{c_i}} \left( \frac{\delta p'}{\delta x_i} \right) \right]_P = \left[ \frac{\delta(c_i^{(m+1)*})}{\delta x_i} \right]_P + \left[ \frac{\delta(\tilde{c}'_i)}{\delta x_i} \right]_P \quad (3.29)$$

Um die problematische Bestimmung des letzten Terms, der die unbekanntes Geschwindigkeitskorrekturen der Nachbarnpunkte  $\tilde{c}'_i$  beinhaltet, zu vermeiden, wird er bei dem von PATANKAR [52] entwickelten SIMPLE-Algorithmus einfach vernachlässigt. Die Geschwindigkeitskorrekturen ergeben sich mit dieser Vereinfachung nach dem Lösen der Druckkorrektur Gleichung 3.29 aus der so vereinfachten Gleichung 3.27:

$$c'_{i,P} = - \frac{1}{A_P^{c_i}} \left( \frac{\delta p'}{\delta x_i} \right)_P \quad (3.30)$$

Dadurch ist aber die Druck- und Geschwindigkeitskoppelung mit dem SIMPLE-Algorithmus nur unvollständig beschrieben. Deshalb ist eine Unterrelaxation sowohl für das Druck- als auch für das Geschwindigkeitsfeld notwendig. Die Vernachlässigung hat jedoch den Vorteil, daß die Matrix für die Druckkorrektur Gleichung im dreidimensionalen Fall eine siebendiagonale Form hat und mit effizienten Lösungsverfahren, wie z.B. dem SIP-Verfahren nach STONE [70], gelöst werden kann.

Das von VAN DOORMAAL und RAITHBY [76] (1984) entwickelte SIMPLEC-Verfahren, bei dem mit

$$\tilde{c}'_{i,P} \approx -c'_{i,P} \frac{\sum_l A_l^{c_i}}{A_P^{c_i}} \quad (3.31)$$

angenommen wird, daß die Geschwindigkeitskorrekturen in den Nachbarzellen genauso groß sind wie an dem betrachteten Punkt, führt zu der verbesserten Geschwindigkeitskorrektur:

$$c'_{i,P} = -\frac{1}{A_P^{c_i} + \sum_l A_l^{c_i}} \left( \frac{\delta p'}{\delta x_i} \right)_P \quad (3.32)$$

Entgegen der von SCHÖNUNG [66] vertretenen Auffassung konnte im vorliegenden Fall mit dem SIMPLEC-Verfahren keine deutliche Verbesserung der Konvergenzrate festgestellt werden. Bei den weiteren Betrachtungen wurde deshalb der SIMPLE-Algorithmus zu Grunde gelegt.

Die Standardversion des SIMPLE-Verfahrens wurde zuerst für versetzte Gitter entwickelt. Bei der Verwendung von „colocated“ Variablen und nicht-orthogonalen Rechnernetzen muß der SIMPLE-Algorithmus leicht modifiziert werden, vgl. [56], [44], [19]. Das Ziel der Druckkorrektur ist es, daß der Nettofluß durch ein betrachtetes Kontrollvolumen gleich Null ist und somit die Kontinuität erfüllt wird. Dafür müssen die Massenströme an den Zellgrenzflächen berechnet werden. Da die Geschwindigkeiten nur in den Kontrollvolumenmittelpunkten gespeichert sind, muß eine geeignete Interpolation durchgeführt werden. Bei der Interpolation der Geschwindigkeiten an die Zellgrenzflächen werden sie durch die Subtraktion der Differenz zwischen dem Druckgradienten an der Zellgrenzfläche und dem aus den Zellmittelpunkten interpolierten Druckgradienten korrigiert:

$$c_{i,e}^{(m+1)*} = \overline{(c_i^{(m+1)*})_e} - \Delta V_e \overline{\left( \frac{1}{A_P^{c_i}} \right)_e} \left[ \left( \frac{\delta p}{\delta x_i} \right)_e - \overline{\left( \frac{\delta p}{\delta x_i} \right)_e} \right] \quad (3.33)$$

Dadurch werden Oszillationen vermieden und eine relativ starke Koppelung des Druck- und Geschwindigkeitsfeldes auch bei nicht versetzten Rechengittern erreicht. Da auf nicht-orthogonalen Netzen nur die Normalkomponente der Geschwindigkeiten zum Massenstrom beiträgt, ergibt sich für die Normalgeschwindigkeit am Beispiel der East-Zellfläche  $e$  folgende Form:

$$c_{n,e}^{(m+1)*} = \overline{(c_n^{(m+1)*})_e} - \Delta V_e \overline{\left( \frac{1}{A_P^{c_n}} \right)_e} \left[ \left( \frac{\delta p}{\delta n} \right)_e - \overline{\left( \frac{\delta p}{\delta n} \right)_e} \right] \quad (3.34)$$

mit

$$A_P^{c_n} = A_P^{c_i}. \quad (3.35)$$

Nach Ferziger und Perić [19] wird Gleichung 3.34 vereinfacht, indem die Normalenrichtung  $n$  durch die Verbindungslinie der Punkte  $P$  und  $E$ , die  $\xi$ -Richtung ersetzt wird:

$$\left(\frac{\delta p}{\delta n}\right)_e \approx \left(\frac{\delta p}{\delta \xi}\right)_e = \frac{p_E - p_P}{L_{P,E}}. \quad (3.36)$$

Wie bei der Diskretisierung der diffusiven Terme schon erwähnt, sind alle überstrichenen Größen aus den Zellmittelpunktwerten interpoliert. Der Term  $\frac{\delta p}{\delta n}$  wird dabei für stark nicht-orthogonale Netze in der bei RITZINGER [58] beschriebenen Weise diskretisiert. Somit ergibt sich für den Massenstrom durch die Zellgrenzfläche  $e$ , siehe auch Abb. 3.6:

$$\begin{aligned} \dot{m}_e^* = & \varrho \sum_j (\bar{c}_j^{(m+1)*} A^j)_e - (\varrho \Delta V A)_e \overline{\left(\frac{1}{A_P^{c_n}}\right)}_e \left[ \frac{p_E - p_P}{L_{P',E'}} - \overline{\left(\frac{\delta p}{\delta n}\right)}_e + \right. \\ & \left. + \left( \frac{(\text{grad } p)_P(\vec{r}_{P'} - \vec{r}_P) - (\text{grad } p)_E(\vec{r}_{E'} - \vec{r}_E)}{L_{P',E'}} \right)_e \right]^m \end{aligned} \quad (3.37)$$

Die mit dieser Gleichung berechneten Massenflüsse erfüllen jedoch die Kontinuitätsgleichung nicht. Deshalb muß zur Erfüllung der Kontinuitätsgleichung eine entsprechende Massenkorrektur eingeführt werden. Aus Gleichung 3.37 erhält man:

$$\dot{m}'_e = -(\varrho \Delta V A)_e \overline{\left(\frac{1}{A_P^{c_n}}\right)}_e \left(\frac{\delta p'}{\delta n}\right)_e \approx -(\varrho \Delta V A)_e \overline{\left(\frac{1}{A_P^{c_n}}\right)}_e \frac{p'_E - p'_P}{L_{P',E'}} \quad (3.38)$$

Mit der gleichen Approximation für die anderen Zellgrenzflächen erhält man die endgültige Druckkorrektur Gleichung für stark nicht-orthogonale Netze:

$$\sum_c \dot{m}'_c + \Delta \dot{m} = 0 \quad \text{mit} \quad \Delta \dot{m} = \sum_c \dot{m}_c^* \quad \text{und} \quad c = e, w, n, s, t, b \quad (3.39)$$

Der korrigierte Druck und die korrigierten Geschwindigkeiten werden schließlich nach der Lösung der Druckkorrektur Gleichung 3.39 mit Hilfe der Gleichung 3.30 und Gleichung 3.25 berechnet.

## Druckkorrekturgleichung auf relativ zueinander bewegten Netzen

Bei der Berechnung auf dem zeitlich beweglichen Rechnetz wird die Geschwindigkeit  $(\vec{c} - \vec{c}_n)$  statt  $\vec{c}$  für die Abschätzung der Massenflüsse verwendet. Einsetzen von  $(\vec{c} - \vec{c}_n)$  anstelle  $\vec{c}$  in Gleichung 3.37 ergibt

$$\begin{aligned} \dot{m}_e^* = & \varrho \sum_j ((c_j - c_{nj})^{(m+1)*} A^j)_e - (\varrho \Delta V A)_e \left( \frac{1}{A_P^{c_n}} \right)_e \left[ \frac{p_E - p_P}{L_{P',E'}} - \left( \frac{\delta p}{\delta n} \right)_e + \right. \\ & \left. + \left( \frac{(\text{grad } p)_P (\vec{r}_{P'} - \vec{r}_P) - (\text{grad } p)_E (\vec{r}_{E'} - \vec{r}_E)}{L_{P',E'}} \right)_e \right]^m \end{aligned} \quad (3.40)$$

Nach dem Einsetzen von Gleichung 3.40 und Gleichung 3.38 in Kontinuitätsgleichung 2.10 ergibt sich die Druckkorrekturgleichung auf dem beweglichen Rechnetz:

$$\frac{\delta(\varrho \Delta V)}{\delta t} + \sum_c \dot{m}_c^* + \sum_c \dot{m}'_c = 0. \quad (3.41)$$

Im Vergleich zur Gleichung 3.38 ist hier der Zeitterm zusätzlich vorhanden. Die Gleichung kann in algebraischer Form formuliert werden:

$$A_P p'_P + \sum_l A_l p'_l = - \left[ \frac{\delta(\varrho \Delta V)}{\delta t} + \sum_c \dot{m}_c^* \right], \quad (3.42)$$

mit  $l = E, W, S, N, B, T$ .

Diese Gleichung hat dieselbe Form wie die diskretisierte Impulsgleichung. Der korrigierte Druck und die korrigierten Geschwindigkeiten werden schließlich nach der Lösung der Druckkorrekturgleichung durch Gleichung 3.26 bestimmt.

Hier muß erklärt werden, daß zum Bilden der Koeffizienten  $A_P$  und  $A_l$  in Gleichung 3.42 die Massenkorrektur (Gl. 3.30) verwendet wird, die aus der Gleichung 3.30 stammt. Die Geschwindigkeitskorrekturgleichung 3.30 ist theoretisch nicht mehr geeignet für die beweglichen Rechnetze. Statt Gleichung 3.30 soll folgende Formulierung verwendet werden:

$$c'_i - c_{ni}' = - \frac{1}{A_P^{c_i}} \left( \frac{\delta p'}{\delta x_i} \right)_P. \quad (3.43)$$

Falls die Netzgeschwindigkeit  $\vec{c}_n$  vorgeschrieben wird, ist  $c'_n$  Null und die Formulierung 3.43 führt zu Gleichung 3.30. Ist dies nicht der Fall, muß die Netzgeschwindigkeit als ein Teil der Lösung berechnet werden und die Implementierung wird sehr kompliziert. Der Einfachheit halber wird im Rahmen dieser Arbeit der Term  $c'_n$

vernachlässigt. Um diesen Fehler möglichst klein zu halten, wird ein Unterrelaxationsparameter  $\alpha$  für die Geschwindigkeitskorrektur sowie Druckkorrektur verwendet:

$$p^{m+1} = p^s + \alpha p', \quad (3.44)$$

$$c_i^{m+1} = c_i^{(m+1)*} + \alpha c_i'. \quad (3.45)$$

Nach den numerischen Erfahrungen ist ein Unterrelaxationsparameter  $\alpha$  bis 0.3 möglich.

### 3.3 Anfangs- und Randbedingungen

Die numerische Lösung des Systems instationärer Erhaltungsgleichungen stellt ein gemischtes Anfangswert-Randwertproblem dar. Nur bei Vorgabe der erforderlichen Anfangs- und Randbedingungen kann die Lösung eindeutig sein. Man kann dafür entweder Funktionswerte (Dirichlet-Bedingung) oder Gradienten (Neumann-Bedingung) am Rand vorschreiben. Die Genauigkeit und die Stabilität eines Rechenverfahrens hängt in starkem Maße von der Wahl und Implementierung der Anfangs- und Randbedingungen ab. Im folgenden wird auf die in diesem Verfahren verwendeten typischen Anfangs- und Randbedingungen ausführlicher eingegangen.

#### 3.3.1 Anfangsbedingungen

Anfangsbedingungen beschreiben den physikalischen Zustand des Fluides zur Zeit  $t = 0$ . Die Formulierung der Anfangsbedingungen beeinflusst die Genauigkeit der Berechnung. Von einer falschen Formulierung der Anfangsbedingungen ausgehend kann man keine richtige zeitechte numerische Lösung finden.

Durch die Belegung aller in den Zeitableitungen vorkommenden Größen zur Zeit  $t = 0$  werden Anfangsbedingungen definiert. Die Anfangslösung muß sämtliche Erhaltungsgleichungen im Rahmen des Diskretisierungsfehlers erfüllen. Bei dem hier verwendeten Verfahren mit drei Zeitebenen, vgl. Gl. 3.22, werden alle alten Zeitebenen mit denselben Anfangswerten belegt. Diese Approximation entspricht dann einer Anfangsbedingung erster Ordnung. Im Falle der instationären NS-Lösung wird eine auskonvergierte stationäre Lösung der NS-Gleichungen als Startlösung verwendet.

#### 3.3.2 Einströmrand

An Einströmrandern werden die Geschwindigkeitskomponenten direkt vorgeschrieben. Dies kann ein repräsentativer Zuströmgeschwindigkeitsvektor im kartesischen



Koordinatensystem  $\vec{c}_{inlet} = (c_x, c_y, c_z)^T$  sein. Desweiteren besteht die Möglichkeit, nur einen Richtungsvektor, z.B. drallfreie Zuströmung, und den Gesamtmassenstrom durch die Eintrittsfläche vorzuschreiben. Durch die Vorgabe des Massenstroms am Einströmrand ergibt sich die Randbedingung für die Druckkorrektur aus Gleichung 3.23. Die Ableitung der Druckkorrektur  $\frac{\partial p'}{\partial n}$  muß am Eintritt Null sein. Der statische Druck  $p$  wird aus den Druckwerten innerhalb des Strömungsfeldes extrapoliert. Die turbulente kinetische Energie  $k$  und die Dissipationsrate  $\varepsilon$  werden am Einströmrand folgendermaßen vorgeschrieben:

$$k = \frac{3}{2}(Tu \cdot c_{inlet})^2 ; \varepsilon = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{L} \quad (3.46)$$

Dabei entspricht  $c_{inlet}$  dem Betrag der Absolutströmungsgeschwindigkeit am Eintritt,  $Tu$  dem Turbulenzgrad und  $L$  dem Längenmaß der Turbulenz, vgl. [19], [9] und [50].

### 3.3.3 Ausströmränder

Am Ausströmrand wird der statische Druck  $p$  vorgeschrieben. Er kann entweder konstant über die gesamte Fläche  $p = p_{out}$  oder als Mittelwert  $\bar{p} = p_{out}$  vorgegeben werden, wobei der statische Druck aus dem Strömungsfeld extrapoliert wird. Die Druckkorrektur  $p'$ , die Geschwindigkeiten  $c$ , die turbulente kinetische Energie  $k$  und die Dissipationsrate  $\varepsilon$  werden immer extrapoliert. Die Geschwindigkeiten werden aus den Gradienten im Strömungsfeld extrapoliert. Um negative Rückwirkungen dieser Annahme auf das Feld stromaufwärts zu vermeiden, sollte die Lage des Ausströmrands möglichst weit stromabwärts gewählt werden.

### 3.3.4 Periodische Ränder

Die Verwendung periodischer Randbedingungen führt bei impliziter Kopplung der Randwerte auf zusätzliche Diagonalen in der Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$  und beschränkt so den Einsatz effizienter, linearer Gleichungslöser. Jedoch kann die siebendiagonale Matrixstruktur aufrecht erhalten werden, wenn die Randwerte explizit erfaßt und somit den Quelltermen zugeschlagen werden. Hierzu werden die Variablen der vorhergehenden Iteration periodisch verschoben. Die Ermittlung der Flüsse sowie der übrigen Quellterme erfolgt dann analog der Berechnung an Zellgrenzflächen innerhalb des Felds.

### 3.3.5 Symmetrische Ränder

Bei symmetrischen Rändern treten weder konvektive noch diffusive Flüsse senkrecht zu den Berandungsflächen auf. Entsprechend der Symmetriebedingung verschwinden also alle Schubspannungen sowie alle Gradienten normal zur Zellfläche. Lediglich die Normalspannungen  $\tau_{nn}$  sind ungleich Null. Aus der resultierenden Kraftwirkung

$$\vec{f}_{sym} = \int_{A_{sym}} \vec{n} \tau_{nn} dA \approx (\vec{n} \tau_{nn} A)_{sym} \quad (3.47)$$

können die diffusiven Flüsse ermittelt werden. So berechnet sich der diffusive Fluß der  $c_x$ -Komponente an der Zellgrenzfläche 'e' zu:

$$f_x = \int_{A_{sym}} (\tau_{xx} \vec{i} + \tau_{yx} \vec{j} + \tau_{zx} \vec{k}) \cdot \vec{n} dA \approx (n_x \tau_{nn} A)_e \quad (3.48)$$

Auch bei dieser Formulierung entfällt wiederum die Zerlegung des Flusses in seine  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Komponenten. Alle anderen skalaren Transportgrößen werden unter der zuvor getroffenen Annahme  $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$  auf die Zellflächenränder extrapoliert.

### 3.3.6 Wände

Die Geschwindigkeiten an den Wänden können auf Grund der Haftbedingung, je nachdem, ob es sich um eine ruhende oder eine bewegte Wand handelt, wie folgt definiert werden:

$$\begin{aligned} \text{Ruhende Wand:} \quad & \vec{c} = \vec{0} \\ \text{Bewegte Wand:} \quad & \vec{c} = \vec{c}_W \end{aligned} \quad (3.49)$$

Da alle betrachteten Wände fluidundurchlässig sind, ist der Massenfluß und damit auch der konvektive Fluß durch jede Wand gleich Null.

Die Behandlung der Wandschubspannungen, d.h. der viskosen Flüsse an den Wänden, erfolgt wie bei PERIĆ [19] und ORTH [50]. Die Wandschubspannung  $\tau_w$  wird in ihre Normalkomponente  $\tau_{nn}$  senkrecht zur Wand, in ihre Tangentialkomponente  $\tau_{nt}$  in Richtung der Wandschubspannung und in eine Komponente  $\tau_{ns}$ , die senkrecht auf diesen beiden steht, zerlegt. Für ruhende und bewegte Wände gilt:

$$\text{Ruhende Wand:} \quad \tau_{nn} = 2\mu \left( \frac{\partial c_n}{\partial n} \right) = 0; \tau_{nt} = 2\mu \left( \frac{\partial c_t}{\partial n} \right); \tau_{ns} = 0 \quad (3.50)$$

$$\text{Bewegte Wand: } \tau_{nn} = 2\mu \left( \frac{\partial c_{n,W}}{\partial n} \right) = 0; \tau_{nt} = 2\mu \left( \frac{\partial c_{n,W}}{\partial n} \right); \tau_{ns} = 0 \quad (3.51)$$

Den Formeln 3.50 liegt die Annahme zugrunde, daß sich die Richtung des Geschwindigkeitsvektors  $\vec{c}$  zwischen dem ersten Punkt und der Wand nicht ändert. Im dreidimensionalen Fall wird der Tangentialvektor  $\vec{t}$  aus der Geschwindigkeit parallel zur Wand  $\vec{c}_p$  bestimmt:

$$\vec{t} = \frac{\vec{c}_p}{|\vec{c}_p|} \quad (3.52)$$

mit

$$\vec{c}_p = \vec{c} - (\vec{c} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} \quad (3.53)$$

Für den Betrag des Tangentialgeschwindigkeitsvektors  $c_t$  ergibt sich somit:

$$c_t = \vec{c} \cdot \vec{t} = c_x t_x + c_y t_y + c_z t_z \quad (3.54)$$

Durch Integration der Wandschubspannung (Gl. 3.50 oder Gl. 3.51) erhält man die viskosen Flüsse für die drei Impulsgleichungen:

$$\vec{f}_W = \int \int_{A_W} \vec{t} \tau_{nt} dA = \begin{pmatrix} f_{xW} \\ f_{yW} \\ f_{zW} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} (t_x \tau_{nt} A)_W \\ (t_y \tau_{nt} A)_W \\ (t_z \tau_{nt} A)_W \end{pmatrix} \quad (3.55)$$



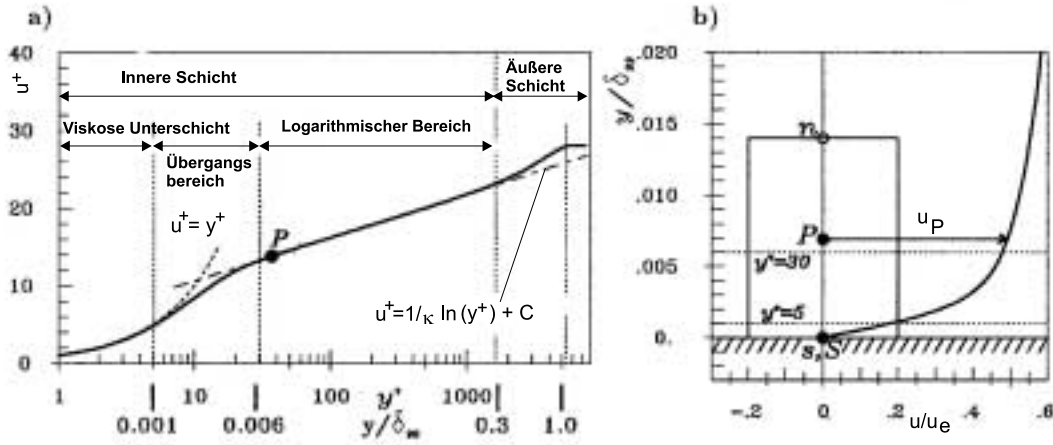


Abb. 3.8: a) Geschwindigkeitsprofil einer turbulenten Grenzschicht und deren charakteristische Zone (Innere Schicht) und b) das der Wand nächste Kontrollvolumen des numerischen Gitters

Die Beschreibung der Strömung in Wandnähe, die eigentlich einen lokalen Gleichgewichtszustand voraussetzt, erfolgt in den meisten Fällen mittels Wandfunktion. Betrachtet man eine dünne Scherschicht, die der inneren Schicht der Grenzschicht entspricht, vgl. Abb. 3.8, so kann man den konvektiven Transport sowie die Variablenänderung (Gradienten) in Strömungsrichtung vernachlässigen. Wendet man diese, als sog. Couettesche Randbedingungen bekannte Annahmen auf die Gleichung für die kinetische Turbulenzenergie an, so ergibt sich  $P_k = \varepsilon$ , d.h. lokales Gleichgewicht, d.h. die Produktion ist etwa gleich Dissipation:

$$-\overline{\rho c'_i c'_j} \frac{\partial u_t}{\partial n} = \rho \varepsilon. \quad (3.57)$$

Es wird weiterhin angenommen, daß die laminare Scherspannung im Vergleich zum turbulenten Anteil vernachlässigbar ist, und damit entspricht die „totale Scherspannung“  $\tau_{tot}$  der turbulenten Spannung ( $\tau_{tot} = \tau_{turb}$ ). Unter diesen Bedingungen kann mit ausreichender Genauigkeit die turbulente (Reynoldssche) Scherspannung in Gl. 3.57 mittels der Boussinesq'schen Korrelation (1877) [6] ausgedrückt werden:

$$-\overline{c'_i c'_j} = \nu_t \frac{\partial u_t}{\partial n}, \quad (3.58)$$

wobei die turbulente Viskosität die im Rahmen der  $k - \varepsilon$  Modellierung formulierte Definition ( Gl. 2.27:  $\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$ ) annimmt. Das Einsetzen in Gleichung 3.57 ergibt den folgenden Ausdruck für die turbulente Spannung:

$$\tau_{turb} = -\overline{\rho c'_i c'_j} = \rho c_\mu^{1/2} k. \quad (3.59)$$

Dadurch läßt sich die Dissipationsrate  $\varepsilon$  wie folgt berechnen:

$$\varepsilon = -\overline{c'_i c'_j} \frac{\partial u_t}{\partial n} = c_\mu^{1/2} k \frac{\partial u_t}{\partial n}, \quad (3.60)$$

Unter der Annahme, daß der Wert der turbulenten Spannung in diesem Gebiet dem Wert der Wandschubspannung entspricht

$$\tau_{turb} = \tau_w, \quad (3.61)$$

ergibt sich ein Ausdruck für die Schubspannungsgeschwindigkeit:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = c_\mu^{1/4} k^{1/2}. \quad (3.62)$$

Ein turbulentes Grenzschichtprofil, das in Abb. 3.8 dimensionslos dargestellt ist, wird in mehrere Bereiche aufgeteilt. Die verwendeten Größen  $u^+$  und  $y^+$  sind dabei wie folgt definiert.

$$u^+ = \frac{u_t}{u_\tau}, \quad y^+ = \frac{u_\tau \Delta y}{\nu}, \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (3.63)$$

Die Berechnung der Wandschubspannung erfolgt bei der Verwendung des logarithmischen Wandgesetzes anstelle des linearen Ansatzes  $u^+ = y^+$  durch Lösen der folgenden transzendenten Gleichung nach  $u_\tau$

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + C \quad (3.64)$$

wobei die darin enthaltenen Konstanten im entwickelten Programm auf  $\kappa = 0.41$  und  $C = 5.2$  gesetzt wurden. Um die Wandschubspannung mittels des Wandgesetzes (Gl. 3.64) ausdrücken zu können, formuliert man den Ausdruck für  $\tau_{wall}$  folgendermaßen um:

$$\tau_w = \rho u_\tau^2 = \rho u_\tau u_\tau = \rho c_\mu^{1/4} \sqrt{k} \frac{u_t}{u^+}. \quad (3.65)$$

Das Einsetzen von Gleichung 3.64 in Gleichung 3.65 liefert die folgende Form für das logarithmische Gebiet [19], [29]:

$$\tau_w = \rho c_\mu^{1/4} \sqrt{k} \kappa \frac{u_t}{\ln(y^+ e^{\kappa C})}. \quad (3.66)$$

Damit der Wert der Dissipation nach Gleichung 3.60 berechnet werden kann, wird die Ableitung der Geschwindigkeit durch Einsetzen der Gleichung 3.63 bestimmt:

$$\frac{\partial u_t}{\partial n} = \frac{u_\tau^2}{\nu} \frac{du^+}{dy^+}. \quad (3.67)$$

Nach dem Einsetzen in Gleichung 3.60 erhält man:

$$\varepsilon = \frac{c_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa y}. \quad (3.68)$$

Für die korrekte Anwendung des logarithmischen Wandgesetzes ist es erforderlich, daß der wandnächste Rechenpunkt im logarithmischen Bereich der Grenzschicht, d.h. bei hydraulisch glatten Wänden im Intervall  $30 < y^+ < 500$  zu liegen kommt. Da der Wert von  $y^+$  vorab nicht bekannt sondern Ergebnis der Rechnung ist, muß nach einer Simulationsrechnung geprüft werden, ob das verwendete Rechenetz dieser Anforderung genügt.

Treten während der Rechnung  $y^+$ -Werte kleiner als 30 auf, wird die dimensionslose Geschwindigkeit  $u^+$  entweder aus dem linearen Wandgesetz oder einer stetig und stetig differenzierbaren Übergangsfunktion bestimmt. Zusammengefaßt läßt sich die Berechnung von  $u^+$  wie folgt darstellen:

$$u^+ = \begin{cases} y^+ & \text{für } y^+ \leq 5 \\ d_1 y^{+3} + d_2 y^{+2} + d_3 y^+ + d_4 & \text{für } 5 < y^+ \leq 30 \\ \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + C & \text{für } y^+ > 30 \end{cases} \quad (3.69)$$

Die Koeffizienten  $d_i$  des Ausgleichspolynoms dritter Ordnung sind in Tab. 3.1 aufgeführt.

$c_\mu$	$\kappa$	$C$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$
0.09	0.41	5.2	$6.4264E - 04$	$-5.2113E - 02$	1.4729	-1.1422

Tabelle 3.1: Empirische Konstanten des Wandgesetzes

Die Werte für  $k$  und  $\varepsilon$  wird in der Wandnächsten Zelle ersetzt durch:

$$k_P = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad \text{und} \quad \varepsilon_P = \frac{u_\tau^3}{\kappa y}, \quad (3.70)$$

wobei  $P$  den wandnächsten Zellmittelpunkt kennzeichnen soll.

### 3.4 Normierung

Um das Gleichungssystem in geeigneter Weise numerisch behandeln zu können, werden die Variablen entsprechend der Tab. 3.2 normiert, d. h. dimensionslos gemacht. Als Referenzdichte  $\varrho^\circ$  wird die Dichte des Mediums verwendet, so daß die normierte Dichte  $\varrho^*$  stets Eins ist. Für die Referenzlänge  $x_{ref}$  und -geschwindigkeit  $u_{ref}$  werden die Skalen eingesetzt, die üblicherweise das Strömungsproblem charakterisieren.

Dimensionsbehaftete Variablen	Dimensionslose Variablen
$t$	$\frac{x_{ref}}{u_{ref} t} = Sr$
$x, y, z$	$\frac{x}{x_{ref}}, \frac{y}{x_{ref}}, \frac{z}{x_{ref}} = X, Y, Z$
$c_x, c_y, c_z$	$\frac{c_x}{u_{ref}}, \frac{c_y}{u_{ref}}, \frac{c_z}{u_{ref}} = C_x, C_y, C_z$
$\varrho$	$\frac{\varrho}{\varrho^\circ} = \varrho^* \equiv 1$
$p$	$\frac{p}{\varrho^\circ u_{ref}^2} = P$
$\mu, \mu_{eff}, \mu_t$	$\frac{\mu}{\varrho^\circ x_{ref} u_{ref}}, \frac{\mu_{eff}}{\varrho^\circ x_{ref} u_{ref}}, \frac{\mu_t}{\varrho^\circ x_{ref} u_{ref}} = Re^{-1}, Re_{eff}^{-1}, Re_t^{-1}$
$k$	$\frac{k}{u_{ref}^2} = K$
$\epsilon$	$\frac{\epsilon}{u_{ref}^3 / x_{ref}} = E$

Tabelle 3.2: Dimensionslose Variablen



### 3.5 Lösung des Gleichungssystems

Wenn die Approximationen für die einzelnen Terme in die Erhaltungsgleichungen eingesetzt werden, folgt für jedes Kontrollvolumen eine algebraische Gleichung folgender Form:

$$A_P \Phi_P + \sum_l A_l \Phi_l = Q_P, \quad (3.71)$$

mit  $l = W, E, S, N, B, T$ .

Die Koeffizienten  $A_l$  in der Gleichung enthalten Beiträge aus der LOS-Approximation der konvektiven, vgl. Gl. 3.10, und der diffusiven Flüsse, vgl. Gl. 3.15; in  $A_P$  ist zusätzlich der Beitrag des instationären Termes enthalten. Die detaillierten Ausdrücke für die Koeffizienten  $A_P$  und  $A_l$  können anhand der Gleichung 2.12 und Gleichung 2.10 abgeleitet werden. Der Index  $l$  erstreckt sich nur auf die unmittelbaren Nachbarn des Punktes  $P$ . Im Quellterm  $Q_P$  der Impulsgleichungen sind beispielsweise alle „explizit“ behandelten Anteile der konvektiven und diffusiven Flüsse, des Druckterms, der alten Werte aus der Zeitdiskretisierung sowie der volumetrischen Quellen zusammengefaßt.

Die Impulsgleichungen sowie die Druckkorrekturgleichung werden sequentiell gelöst. Da die Gleichungen nichtlinear und gekoppelt sind, wird diese Sequenz als äußere Iteration wiederholt, die mit Iterationsindex  $s$  bezeichnet wird. Aus Stabilitätsgründungen müssen die Änderungen der Variablen während einer äußeren Iteration durch Unterrelaxation begrenzt werden. Der bei der Gleichung 3.71 erhaltene neue  $\phi$ -Wert  $\phi^{new}$  wird mit

$$\Phi^{m+1} = \phi^m + \alpha_\phi (\phi^{new} - \phi^m), \quad (3.72)$$

unterrelaxiert, wobei  $\alpha_\phi$  zwischen  $0 < \alpha_\phi < 1$  gewählt wird. Wird dieser Ausdruck in Gleichung 3.71 eingesetzt, so erhält man:

$$\frac{A_P}{\alpha_\phi} \phi^{m+1} + \sum_l A_l \phi_l^{m+1} = Q_P + \frac{1 - \alpha_\phi}{\alpha_\phi} A_P \phi^m. \quad (3.73)$$

Bei dieser Vorgehensweise wird die Diagonaldominanz der Lösungsmatrix deutlich erhöht. Die modifizierte Gleichung wird innerhalb innerer Iterationen gelöst.

Die algebraischen Gleichungssysteme für die einzelnen Variablen werden ebenfalls iterativ gelöst. Diese Iterationen werden innere Iterationen genannt. Da sich die Koeffizienten und die Quellterme auf der rechten Seite in den algebraischen Gleichungen im Verlaufe der äußeren Iterationen ändern, muß die jeweilige Gleichung beim aktuellen inneren Iterationsschritt nicht exakt gelöst werden.

Für diese inneren Iterationen wird das auf einer unvollständigen LU-Zerlegung („Lower-Upper“-Zerlegung) basierende SIP Verfahren nach STONE [70] verwendet.

Der iterative Lösungsprozeß des gesamten Gleichungssystems läßt sich wie folgt zusammenfassen:

1. Einlesen der Geometrie und Erzeugen einer Startlösung.
2. Berechnung der zeitabhängigen Gebietsgrenzen für den aktuellen Zeitschritt. Ihre Lage ist durch eine Rechenvorschrift a priori bekannt.
3. Anpassung des Rechnernetzes und Prüfung der Netzqualität.
4. Berechnung der von den Zellflächen durchstrichenen Volumina.
5. Sequentielle Lösung der Impulsgleichung mit SIP.
6. Lösen der lokalen Druckkorrekturgleichung mit SIP. Korrektur des Drucks und der Geschwindigkeiten.
7. Bestimmung der turbulenten Viskosität  $\mu_t$  entweder mit dem Nullgleichungsmodell oder dem  $k - \epsilon$  Modell
8. Falls das Konvergenzkriterium noch nicht erfüllt ist, muß eine neue Iteration mit Punkt 5 begonnen werden.
9. Ergebnisse für den aktuellen Zeitschritt ausgeben.
10. Beginn der nächsten Zeititeration: Fortschreiten um ein weiteres Zeitinkrement  $\Delta t$  und Rückkehr zu Punkt 2, bis die maximale Zahl der vorgeschriebenen Zeitschritte erreicht ist.

Ein schematischer Programmablaufplan ist in Abb. 3.9 dargestellt.

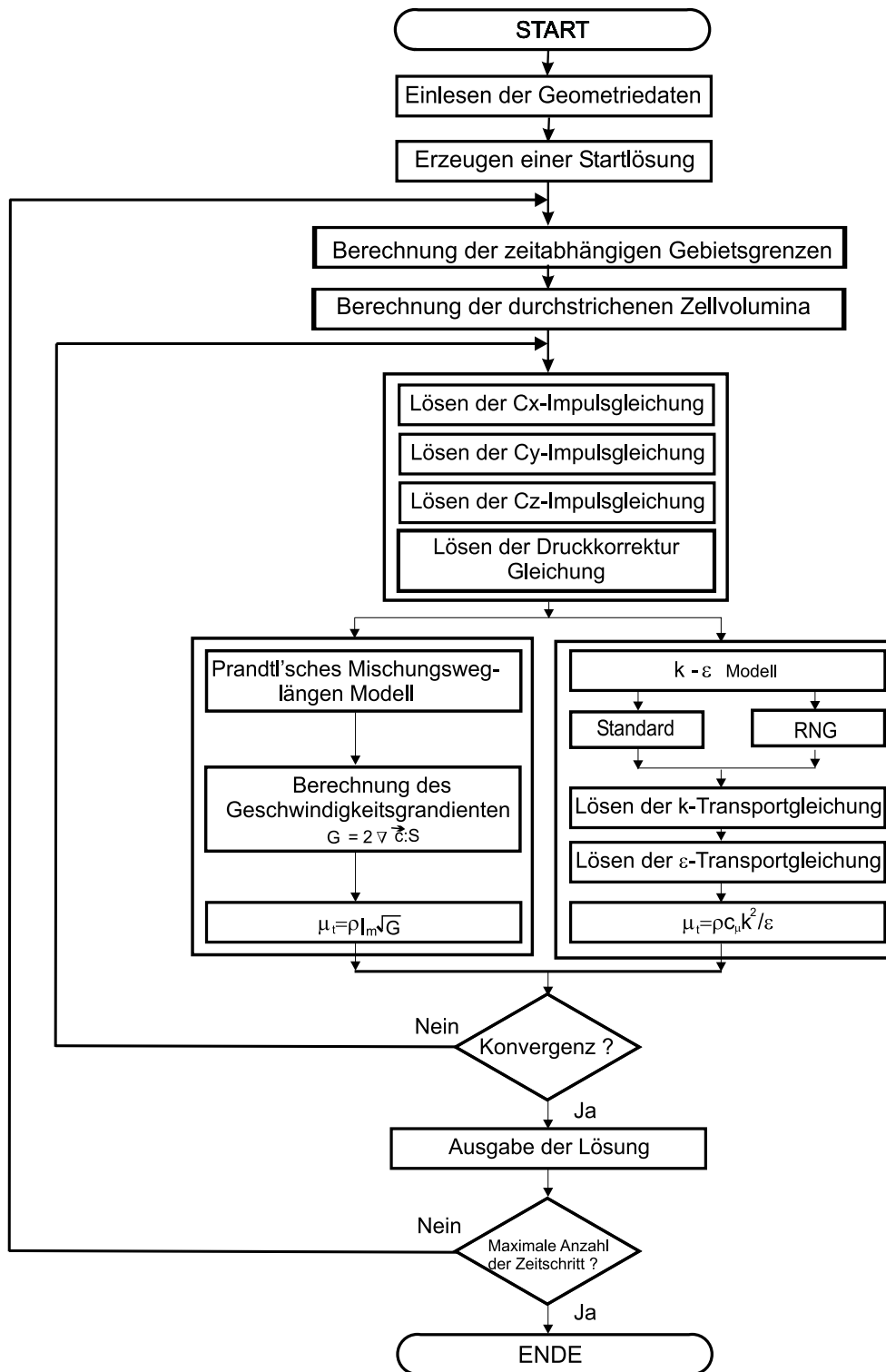


Abb. 3.9: Ablaufdiagramm des Berechnungsverfahrens

# Kapitel 4

## Netzgenerierung und Parallelisierung

Da die Lage der Profilloberfläche wegen der Schaufelschwingung von der Zeit abhängt, muß die Netzgenerierung in einen stationären und einen instationären Teil aufgeteilt werden. Die Erstellung des stationären Startnetzes erfolgt vor der gesamten fluiddynamischen Rechnung. Um die Strömung um die periodisch schwingende Schaufel berechnen zu können, muß die zeitabhängige Netzgenerierung dagegen in den instationären Ablauf eingebunden werden. Daher muß das Netz während der Rechnung für die sich gerade ergebende Profillage ständig erneuert werden.

Abhängig vom Verlauf der Netzlinien werden die Rechennetze im wesentlichen in drei Typen eingeteilt: den O-, C- und H-Typ. Im Rahmen dieser Arbeit werden die Rechnungen mit H- oder O-Netzen und mit einer H-O-Netz-Kombination durchgeführt.

### 4.1 Erzeugung nicht bewegter Netze

Für die durchgeführten Untersuchungen mit fixierter Vorleitschaufel wird das stationäre Startnetz, das ursprünglich zur Erzeugung von H-Netzen für Turbomaschinengitter entworfen wurde, übernommen. Dies beruht wesentlich auf den Arbeiten von SCHILLING [62],[59], HAAS [24] und FERNANDEZ [18] und wurde zur Erzeugung von C- und O-Netzen lediglich leicht modifiziert. Die Abbildungsfunktionen des elliptischen Differentialgleichungssystems haben im zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem ein Poisson-Gleichungssystem zu erfüllen, vgl. THOMPSON ET AL. [28], wobei für die zweiten Ableitungen der transformierten Koordinaten gilt:

$$\Delta\mu = P(x, y), \quad (4.1)$$

$$\Delta\eta = Q(x, y). \quad (4.2)$$

Die Netzgenerierung erfolgt zunächst zweidimensional, gesondert für jeden Geometrieschnitt, mittels eines elliptischen Berechnungsansatzes. Unter Verwendung der körperorientierten Koordinaten  $(\mu, \eta)$  wird der in kartesischen Koordinaten dargestellte Rechenraum auf ein Rechteckgebiet abgebildet. Die Transformation selbst erfolgt durch das Lösen zweier partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Koordinaten  $(x, y)$ . Mit den sogenannten Forcing Functions  $P$  und  $Q$  nach SORENSON [68] lautet das Gleichungssystem zur Berechnung der Netzkoordinaten  $(x, y)$  als Funktion von  $(\mu, \eta)$ :

$$g_{22} x_{\mu\mu} + 2g_{12} x_{\mu\eta} + g_{11} x_{\eta\eta} + J^2 P x_{\mu} + J^2 Q x_{\eta} = 0 \quad (4.3)$$

$$g_{22} y_{\mu\mu} + 2g_{12} y_{\mu\eta} + g_{11} y_{\eta\eta} + J^2 P y_{\mu} + J^2 Q y_{\eta} = 0 \quad (4.4)$$

Hierbei berechnen sich die Metrikoeffizienten und die Jakobi-Determinante zu:

$$g_{11} = x_{\mu}^2 + y_{\mu}^2 \quad (4.5)$$

$$g_{22} = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 \quad (4.6)$$

$$g_{12} = -(x_{\mu}x_{\eta} + y_{\mu}y_{\eta}) \quad (4.7)$$

$$J = (x_{\mu}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\mu}) \quad (4.8)$$

Die Diskretisierung erfolgt mit einem Node-Centered Finite Differenzen Schema. Zur Stabilisierung und Konvergenzbeschleunigung wird ein einfaches Upwind Differencing-Schema erster Ordnung verwendet, vgl. SCHILLING [62]. Das Gleichungssystem wird schließlich mit einem zweidimensionalen SIP nach STONE [70] gelöst.

Nach der schichtweisen Netzgenerierung für jeden Geometrieschnitt erfolgt eine algebraische Vernetzung in Richtung der dritten Raumachse. Die Netzpunkte werden hierbei entsprechend ihres Indexes mit den oberhalb bzw. unterhalb liegenden Nachbarn verbunden. Mittels linearer Interpolation können auf diese Weise beliebig viele Zwischenebenen eingeführt werden, vgl. [86].

### 4.1.1 O-Netze

Am Testbeispiel der Strömung um das Profil wird in dieser Arbeit das O-Netz verwendet. Für das Profil verteilen sich die Punkte im Gebiet nahe der Vorder-

und Hinterkante dichter als in anderen Gebieten. Auf dem Fernfeldrand werden die Punkte etwa gleichmäßig verteilt. Zwischen dem Körper und dem Fernfeldrand werden weitere geometrisch erzeugte Linien eingefügt. Da die Gradienten der Geschwindigkeit in Wandnähe sehr groß sind, ist bei der Berechnung eine sehr starke Konzentration von Netzlinien in Wandnähe erforderlich. Bild 4.1 zeigt das erforderliche Netz in der physikalischen Ebene. Vom Körper zum Fernfeldrand vergrößern sich die Entfernungen der Linien. In der z-Richtung werden die x-y-Ebenen gleichmäßig verteilt.

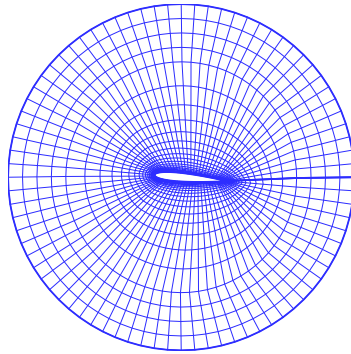


Abb. 4.1: Innerer Teil des O-Netzes um ein NACA0012-Profil.

### 4.1.2 H-Netze

Die Rechenetze eines Einzelgitters und eines Tandemgitters werden auf das H-Netz angewendet. Bei Berechnung der Vorleitgitter wird ein H-Netz verwendet, dargestellt in Abb. 4.2. Hierbei sieht man, daß das Netz an den Wänden zur Auflösung der Grenzschichten verdichtet ist.

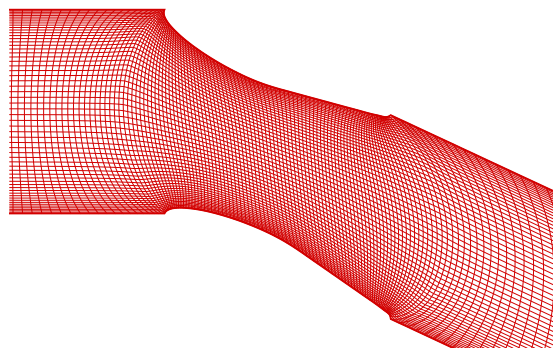


Abb. 4.2: Teil des H-Netzes der Vorleitgitter

### 4.1.3 Block-Netze

Das Rechengebiet des Einzelgitters und des Tandemgitters wird in Teilgebiete zerlegt. Es wird durch eine Netztopologie mit Hilfe H-Netzen bzw. HO-Netz-Kombinationen vernetzt, vgl. Abb. 4.3 und Abb. 4.4 bzw. Abb. 4.5.

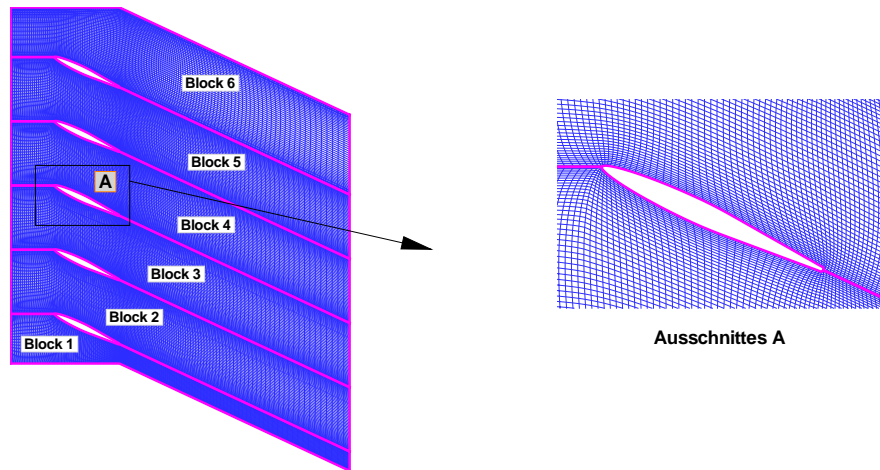


Abb. 4.3: Blockvernetzung des Einzelgitters durch H-Netze

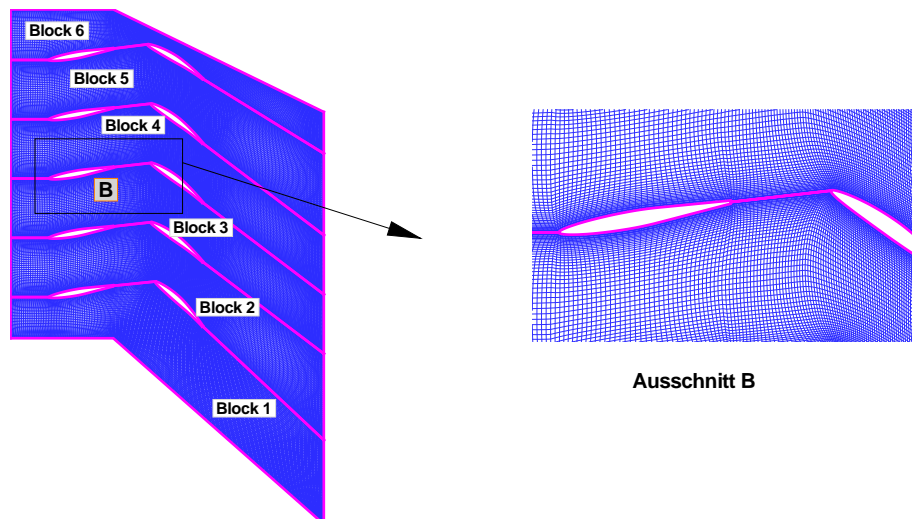


Abb. 4.4: Blockvernetzung des Tandemgitters durch H-Netze

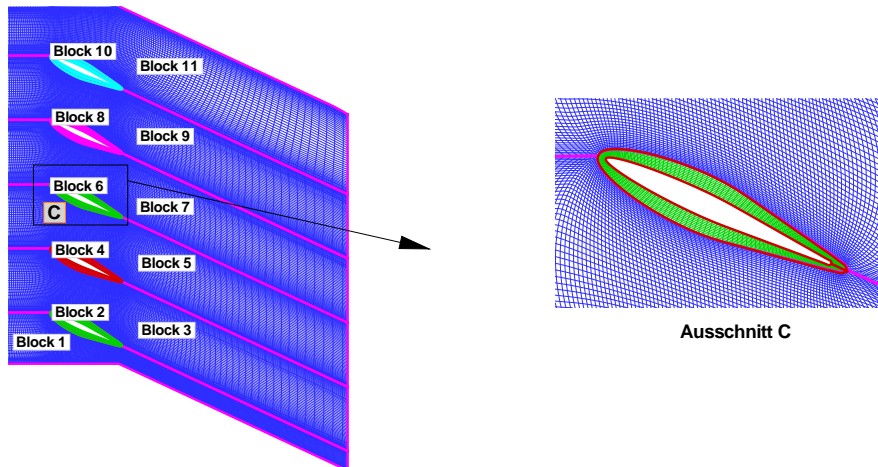


Abb. 4.5: Blockvernetzung des Einzelgitters durch HO-Netze

## 4.2 Erzeugung von relativ zueinander bewegten Netzen

Bei der Berechnung instationärer Vorgänge wird der Körper nach jedem Zeitschritt der Strömungsberechnung bewegt. Die umströmte Konfiguration führt eine zeitlich veränderliche Bewegung aus. Das Netz kann deformiert werden.

### 4.2.1 Einfache Kinematikbedingung

Im Falle der instationären Strömung um ein schwingendes Profil wird das gesamte Netz in zwei Teile gegliedert. Das innere Teilnetz schwingt um eine Achse entsprechend der Bewegung des Profils, vgl. Abb. 4.6, während das andere in Ruhe bleibt. Das heißt, die Netzgeschwindigkeit des inneren Teilnetzes wird nach der Bewegung des Profils vorgeschrieben, während die Punkte auf dem Fernfeldrand in ihrer ursprünglichen Lage festgehalten werden.

Bei der Berechnung der Strömung um ein sich nach vorne bewegendes NACA0012-Profil wird das Netz mit dem NACA0012-Profil fest verbunden und zusammen mit ihm bewegt. Die Punkte des Rechengebietes werden nicht in ihrer ursprünglichen Lage festgehalten, sondern in Zeitrichtung bewegt, d.h. die Netzpunkte erfahren keine zeitliche Deformierung, sondern nur eine zeitliche Verschiebung.



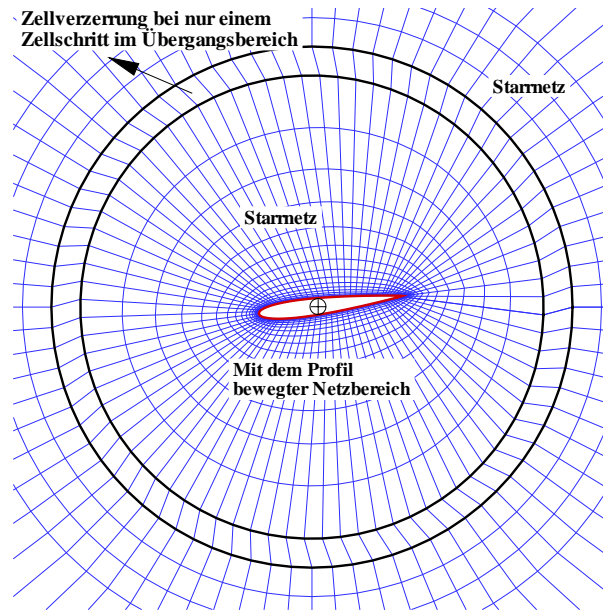


Abb. 4.6: Zeitlich veränderliches Netz um ein NACA-Profil

Mit fortschreitender Verdrehung der Gebiete gegeneinander werden Zellen in den Kontaktbereichen zunehmend verzerrt. Die Approximation der Differentialgleichungen in diesen Bereichen ist nicht mehr ausreichend genau. Dieser Algorithmus ist nur für kleine Amplituden ( $\Delta\alpha < 8^\circ$ ) geeignet, da große Amplituden im Übergangsbereich große Zellverzerrungen liefern.

## 4.2.2 Kontinuierliche Übergangskinetik

Die Zellverzerrung im Übergangsbereich wird durch Implementierung mehrerer Zellschichten durch eine Übergangsfunktion im Übergangsbereich verbessert, vgl. Abb. 4.7. Der Gitteränderungswinkel  $\gamma(t)$  wird im Übergangsbereich durch eine Übergangsfunktion

$$\psi(j) = 1 - 3\left(\frac{j - j_{end}}{j_{beg} - j_{end}}\right)^2 + 2\left(\frac{j - j_{end}}{j_{beg} - j_{end}}\right)^3 \quad (j_{beg} \leq j \leq j_{end}) \quad (4.9)$$

$$\gamma(t) = \psi(j)\alpha(t) \quad \text{mit} \quad \alpha(t) = \Delta\alpha \sin(\omega t) \quad (4.10)$$

so berechnet, daß die Vernetzung in einer leichten Zellverzerrung an den Kontaktbereichen resultiert. Die Zellverzerrung wird kontinuierlich von 0 bis zur maximal schwingenden Amplitude in mehreren Zellschichten leicht geändert. Mit dieser Vernetzung kann man schwingende Amplituden in einem großen Bereich berechnen.

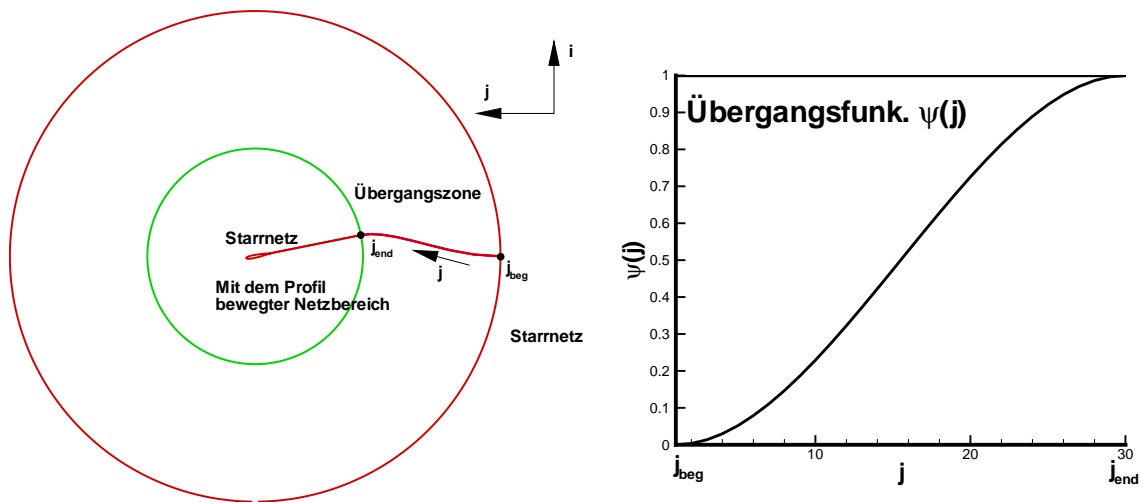


Abb. 4.7: Zeitlich veränderliches Netz um ein NACA-Profil

### 4.2.3 Snapping-Grid-Algorithmus

Um das Profil in beliebigem Winkel rotieren zu lassen, wird der Snapping-Grid-Algorithmus für O-Netze benutzt. Um die ausreichende Netzqualität in der Übergangszone sicherzustellen, wird dieser Bereich bei Bedarf durch den Snapping-Grid-Algorithmus neu vernetzt, vgl. SCHUSTER [47].

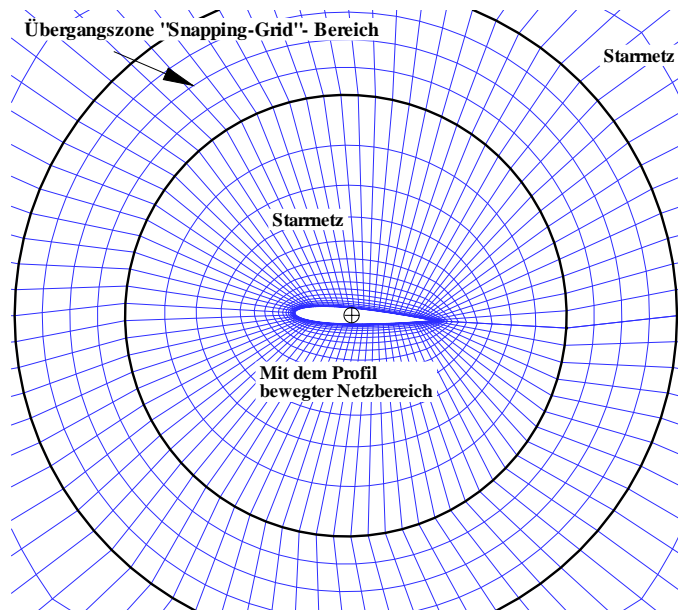


Abb. 4.8: Snapping-Grid

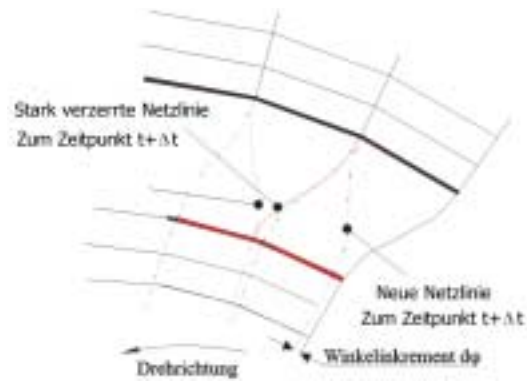


Abb. 4.9: Neuvernetzung der Übergangszone

Hierzu berechnet der Algorithmus zunächst entsprechend den kinematischen Vorgaben, die neue Position des Rechengitters. Bei Überschreiten eines zulässigen Verzerrungskriteriums schnappen die Netzlinien zur nächstgünstigeren Position um, wobei der innere Bereich der Übergangszone mittels einer Spline-Interpolation neu vernetzt wird, vgl. Abb. 4.9.

#### 4.2.4 Kinematikbedingung für blockweise H-Netze

Das Berechnungsnetz für Einzel- und Tandemgitter wird zuerst blockweise als H-Netz betrachtet, vgl. Abb. 4.3 und Abb. 4.4. Um eine schwingende Schaufel in Einzel- und Tandemgitter zu simulieren, wird die bewegte H-Netz-Topologie um die schwingende Schaufel in 6 Subblöcke unterteilt. Um die Netzqualität zu gewährleisten, wird jeder Subblock des bewegten Netzes mit der in Kap. 4.2.2 beschriebenen Übergangsfunktion in das Verfahren implementiert, d.h. in Subblock 2 wird in  $j$ -Richtung die Übergangsfunktion wie Gl. 4.9 verwendet. In diesem Bereich ist der Gitteränderungswinkel gleich  $\gamma(t) = \psi(j)\alpha(t)$ , vgl. Abb. 4.10. In Subblock 5 wird entgegen der  $j$ -Richtung dieselbe Funktion benutzt.

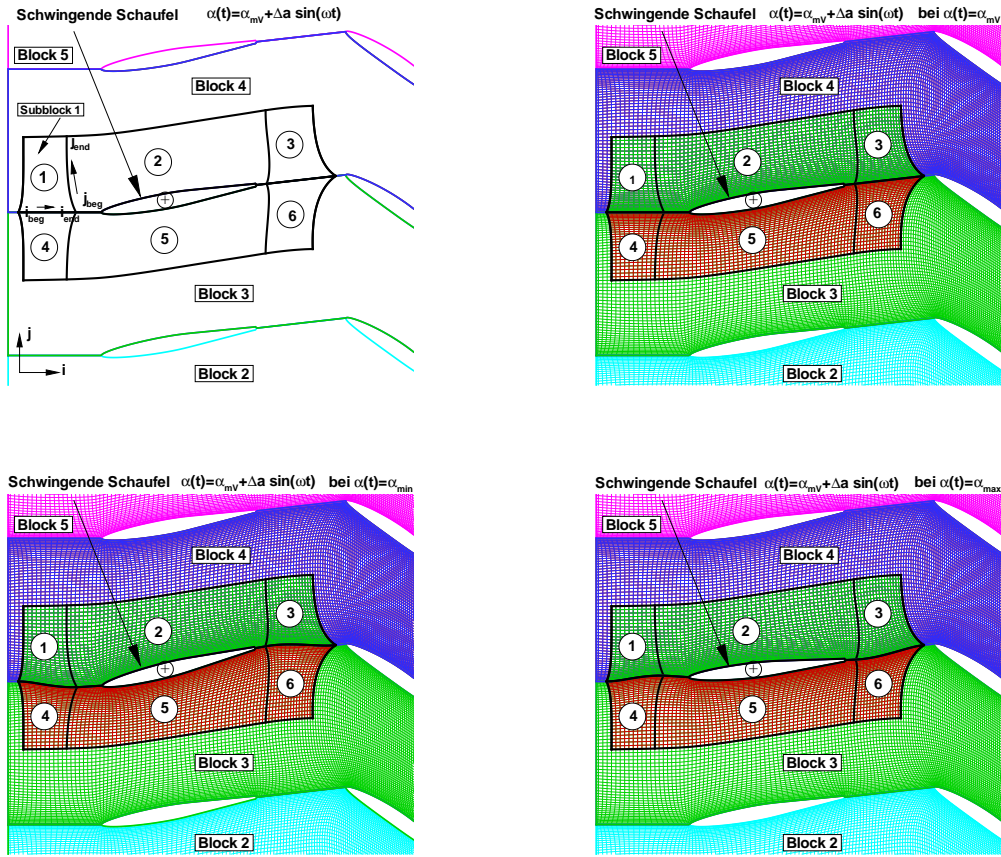


Abb. 4.10: Zeitlich veränderliches H-Netz um die Vorleitschaufel

In Subblock 1 wird entgegen der  $i$ -Richtung

$$\psi(i) = 1 - 3 \left( \frac{i - i_{end}}{i_{beg} - i_{end}} \right)^2 + 2 \left( \frac{i - i_{end}}{i_{beg} - i_{end}} \right)^3 \quad (i_{bed} \leq i \leq i_{end}) \quad (4.11)$$

bzw.  $j$ -Richtung

$$\psi(j) = 1 - 3 \left( \frac{j - j_{end}}{j_{beg} - j_{end}} \right)^2 + 2 \left( \frac{j - j_{end}}{j_{beg} - j_{end}} \right)^3 \quad (j_{bed} \leq j \leq j_{end}) \quad (4.12)$$

verwendet. Die Gitteränderungswinkel werden in diesem Gebiet mit Gl. 4.13 berechnet.

$$\gamma(t) = (1 - \psi(i))\psi(j)\alpha(t) \quad (4.13)$$

In Subblock 3 wird wie in Subblock 1 in  $i$ - sowie in  $j$ -Richtung die entsprechende Übergangsfunktion verwendet. Auf Subblock 4 wird in  $j$ - und entgegen der  $i$ -Richtung und auf Subblock 6 in  $i$ - und entgegen der  $j$ -Richtung die entsprechende Übergangsfunktion angewendet. In Abb. 4.10 ist das bewegte Netz in verschiedenen Phasenlagen dargestellt.

## 4.2.5 Kinematikbedingung für blockweise H-O-Netze

Um die gleichbleibende Netzqualität in Wandnähe zu gewährleisten, ist der Innenbereich des Rechengitters fest mit der Flügeloberfläche verbunden. In diesem Bereich wird Subblock 7 mit einer O-Netz-Topologie vernetzt, vgl. Abb. 4.11. Er rotiert wie ein Starrkörper mit. Der Außenbereich des Gitters (Subblöcke 1-6) bewegt sich wie unter der in Kap. 4.2.4 beschriebenen Kinematikbedingung. Die daraus resultierende Relativbewegung führt zu einer Netzverzerrung im Übergangsbereich, wie sie in Abb. 4.11 schematisch dargestellt ist.

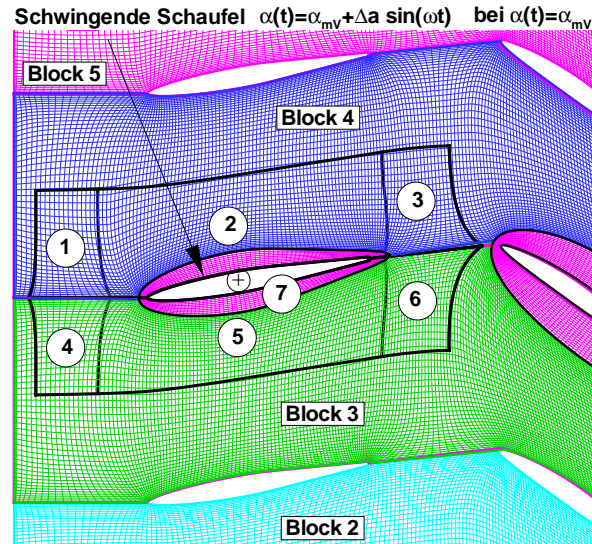


Abb. 4.11: Zeitlich veränderliches H-O-Netz um die Vorleitschaufel

## 4.3 Parallelisierung

Die Grundlage für eine effiziente Parallelisierung des Berechnungsprozesses bildet das Multiple-Instruction-Multiple-Data Konzept (MIMD) nach FLYNN [20]. Hiernach arbeitet eine Mehrzahl von Prozessoren unabhängig voneinander ihr Programm mit ihrer eigenen Rechengeschwindigkeit ab. Es wird unterschieden, ob dabei auf einen gemeinsamen Arbeitsspeicher zugegriffen wird, das Shared Memory, oder jeder Prozessor auf seinen eigenen Arbeitsspeicher zugreifen kann, das Distributed Memory.

Abb. 4.12 zeigt schematisch die Gebietsstruktur der in Kap. 4.3 zu behandelnden Einzelgitter. Ihr kann entnommen werden, daß für jeden Iterationsschritt insgesamt 10 Sende- sowie Empfangsoperationen durchgeführt werden müssen.

Um einen Informationsaustausch zwischen den Prozessen reibungslos zu gestalten, wird ein Leitsystem eingeführt [47], das die Koordination der Datenströme überwacht und steuert. Dies geschieht durch eine übergeordnete Instanz, einen Masterprozeß, der den Datentransfer zwischen den eigentlichen Berechnungsprozessen, den Slaveprozessen, überwacht und koordiniert.

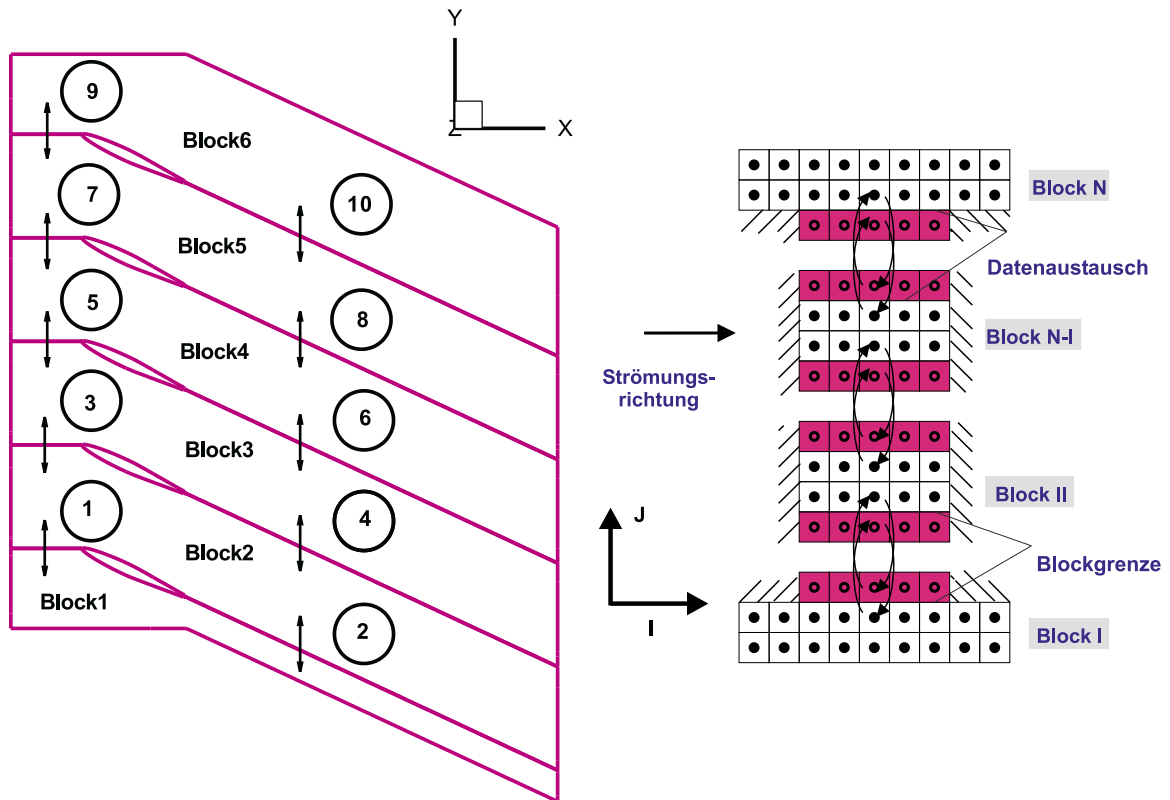


Abb. 4.12: Verknüpfungsstruktur des Einzelgitters

Der Masterprozeß erstellt zunächst eine Kommunikationstabelle, die alle synchronen Sende- und Empfangsschritte auflistet. Ein Optimierungsalgorithmus errechnet dann die optimale Abfolge gleichzeitig möglicher Sende- und Empfangsschritte. Entsprechend dieser optimierten Kommunikationstabelle werden nun für jedes einzelne Untergebiet individuelle Kommunikationstabellen errechnet, die dann vom Masterprozess an die Slaveprozesse übergeben werden.

Jedes Untergebiet besitzt seine eigene Kommunikationstabelle. In dieser ist die Reihenfolge jeder Kommunikationsoperation eindeutig festgelegt. Entsprechend dieser Vorschrift transferieren nun die Slaveprozesse untereinander selbständig ihre Daten bei jedem einzelnen Iterationsschritt. Der Masterprozess überwacht nunmehr ausschließlich Konvergenzdaten und übermittelt allgemein gültige Betriebsparameter. Die Abb. 4.13 zeigt einen Ausschnitt dieses Kommunikationsmodells für das in 6 Blöcke aufgeteilte Einzelgitter. So kann im Falle der gewählten Verknüpfung beim Einzelgitter die Zahl der Kommunikationsschritte von ursprünglich 20 sequentiellen

Teilschritten an 10 Schnittstellen auf insgesamt 4 synchrone Schritte reduziert werden.

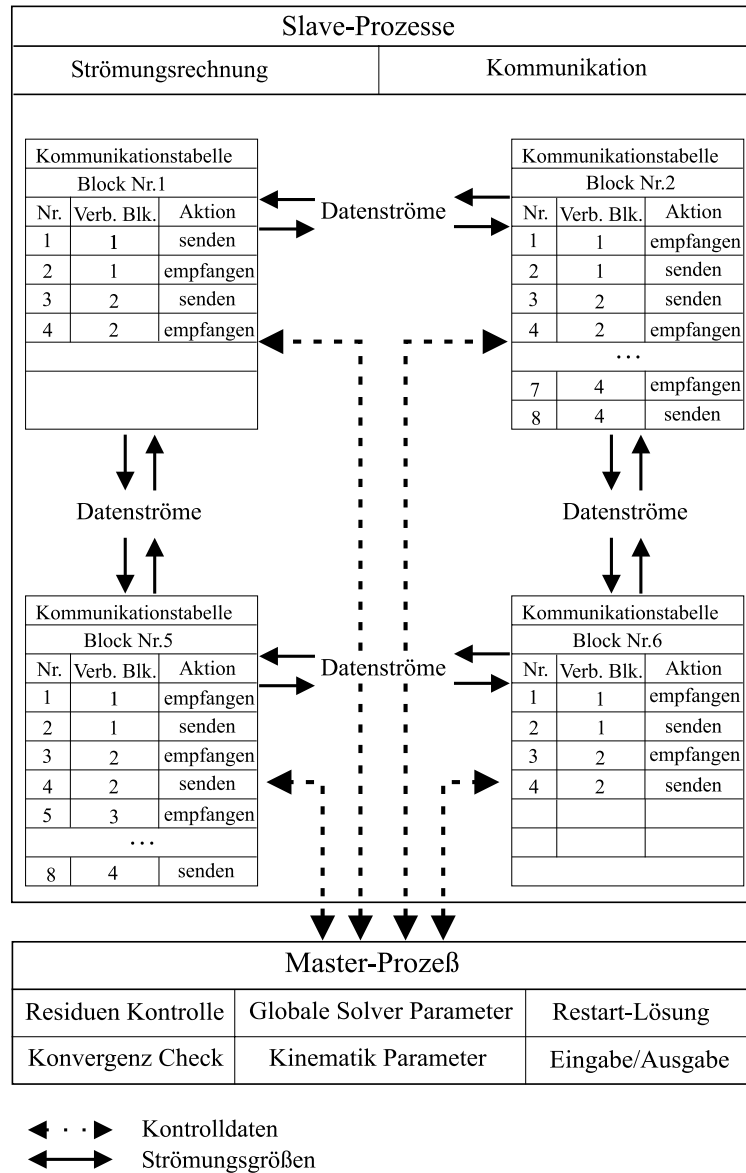


Abb. 4.13: Kommunikationstabelle nach dem Master-Slave Konzept

# Kapitel 5

## Validierung des Turbulenzmodells

### 5.1 Strömung um das schwingende NACA0012-Profil

Zuerst wurde das schwingende NACA0012-Profil validiert, da hierzu umfangreiche Versuchsergebnisse aus der Literatur entnommen werden können.

Die Strömung um einen Tragflügel mit NACA0012-Profil wird mit dem zeitlichen Verlauf des Anstellwinkels  $\alpha(t) = \alpha_m + \Delta\alpha \sin(\omega t)$  simuliert, wobei  $k = \frac{\omega L}{2C_0}$  die reduzierte Frequenz,  $\omega$  die zirkulare Frequenz und  $\alpha_m$  und  $\Delta\alpha$  der mittlere Anstellwinkel und die schwingende Amplitude sind. Das Tragflächenprofil führt Drehschwingungen um eine Drehachse  $a$  aus, die als  $a = \frac{x_D}{L}$  festgelegt wird, wobei  $x_D$  der Abstand zwischen der Achse und der Nase des Profils und  $L$  die Profilhöhe ist.

#### 5.1.1 Die anliegende Grenzschichtströmung

In Fall 1 werden die Parameter wie folgt gewählt: reduzierte Frequenz  $k = 0.4$ ; Amplitude der Schwingung  $\Delta\alpha = 6.74^\circ$ ; schwingende Achse  $a = 0.37$ ; auf die Profilhöhe bezogene Reynolds-Zahl  $Re = 1.0 \cdot 10^6$ . Diese Parameter entsprechen den experimentellen Bedingungen von HALFMAN [25]. Weitere Testfälle werden in Tabelle 5.1 gegenübergestellt.

Die Berechnung wird unter der Anwendung des Nullgleichungsmodells und des  $k - \varepsilon$  Modells durchgeführt. Das bewegte Netz wird als Snapping-Grid Algorithmus für O-Netze unter Anwendung des Nullgleichungsmodells benutzt. Bei Anwendung des  $k - \varepsilon$  Modells wird der in Kap. 4.3 beschriebene bewegte Netz-Algorithmus verwendet.



schwingendes NACA0012-Tragfögelprofil			
Parameter	Fall 1	Fall 2	Fall 3
Reduzierte Frequenz $k$ [–]	0.40	0.30	0.10
Amplitude $\Delta\alpha$ [°]	6.74	13.48	10.0
Mittlerer Anstellwinkel $\alpha_m$ [°]	0.0	0.0	10.0
Drehachse $a$ [–]	0.37	0.37	0.25
Reynolds-Zahl $Re$ [–]	$1.0 \cdot 10^6$	$1.0 \cdot 10^6$	$4.0 \cdot 10^6$

Tabelle 5.1: Parameter der drei Testfälle

Das Profil wird am Anfang mit dem Winkel Null in ruhender Strömung angestellt, d.h.  $\alpha_m = 0.0$ . Eine aus konvergierte stationäre Lösung wird als Startlösung verwendet. Jeder Zyklus der Schwingung wird in 50 Zeitschritte eingeteilt. Da die Schwingung ein periodischer Vorgang ist, wird der Schwingungszyklus wiederholt, bis sich auch eine periodische Strömung einstellt, was nach etwa drei Zyklen der Berechnung der Fall ist. Bei dem Prandtl’schen Mischungsweglängenmodell wird zur Anpassung die relative Mischungsweglänge  $L_m = 0.45 \cdot 10^{-3}$  gewählt, die auf der Basis der Kalibrierung mit den Meßergebnissen von RITZINGER [58] bestimmt wurde. In Abb. 5.1 und 5.2 werden die Auftriebsbeiwerte und die Momentenbeiwerte in Abhängigkeit von Anstellwinkel bzw. Zeit dargestellt. Die Übereinstimmung der numerischen Ergebnisse des Prandtl’schen Mischungsweglängenmodells und Standard  $k - \varepsilon$  Modell mit den von HALFMAN [25] berichteten experimentellen Werten sowie mit den analytischen Lösungen kann als sehr gut bezeichnet werden.

In Fall 2 wird mit höherer Amplitude  $\Delta\alpha = 13.48^\circ$  und kleinerer Frequenz  $k = 0.3$  gerechnet. In diesem Fall liegt die Grenzschicht im wesentlichen an. Der Vergleich der berechneten Hystereseschleifen für den Auftriebsbeiwert  $C_A$  und den Momentenbeiwert  $C_M$  mit dem Experiment zeigt, daß die mit beiden Modellen berechneten Werte sich in guter Übereinstimmung mit dem Experiment befinden, vgl. Abb. 5.3 und 5.4. Der numerische Aufwand des  $k - \varepsilon$  Modelles ist um sieben mal höher als beim Prandtl’schen Mischungsweglängenmodell.

### 5.1.2 Deep Dynamic Stall

In Fall 3 wird ein weiterer Schritt über den typischen Deep Dynamic Stall mit dem RNG  $k - \varepsilon$  Modell simuliert. Die Ergebnisse werden mit den Rechnungen von DIDAR [14] und den Experimenten MCCROSKEY ET AL. [77] verglichen. Die Strömungsbedingungen in diesem Fall sind  $\alpha_m = 10^\circ$ ,  $\Delta\alpha = 10^\circ$ ,  $k = 0.1$  und  $Re = 4.0 \cdot 10^6$ , vgl. Tabelle 5.1. Die Simulation der Profilmströmung für den Bereich großer Anstellwinkel stellt höchste Anforderungen an das verwendete Turbulenzmodell. Abb. 5.5 zeigt einen von DIDAR [14] durchgeführten Vergleich der

$C_A - \alpha(t)$ - und  $C_M - \alpha(t)$ -Hystereseschleife zwischen dem Baldwin-Lomax-Modell und dem Johnson-King-Modell sowie dem Experiment. Während der Aufwärtsbewegung ist die Übereinstimmung beider Modelle sehr gut. Die Vorhersage der  $C_A$ -Werte im Bereich maximaler Anstellwinkel weist jedoch kleine Abweichungen auf und die Berechnung liefert etwas kleinere Werte als das Experiment. Aber für die Abwärtsbewegung ist das Verhalten der beiden Modelle sehr unterschiedlich. Das Baldwin-Lomax-Modell zeigt bei  $\alpha = 20^\circ$  kleine  $C_A$ -Werte und eine große Abweichung zum Experiment. In der Nähe von  $\alpha = 18^\circ$  erreicht die  $C_A - \alpha(t)$  Kurve ähnliche Werte wie das Experiment, bei weiterem fallend Werten weicht jedoch die  $C_A - \alpha(t)$  Kurve stark von der experimentellen Kurve ab. Somit ist die Vorhersage des Deep Dynamic Stall mit Baldwin-Lomax-Modell sehr ungenau. Dagegen zeigt das Johnson-King-Modell während der Abwärtsbewegung im Vergleich mit dem Experiment eine wesentlich Übereinstimmung und liefert deutlich höhere Genauigkeit als Baldwin-Lomax-Modell.

Die mit dem Prandtl'schen Mischungsweglängenmodell und dem RNG  $k - \epsilon$ -Modell in der vorliegenden Arbeit berechneten Auftriebs- und Momentenbeiwerte sind in Abb. 5.6 graphisch zusammengefaßt. Die Hystereseschleifen der  $C_A$ - und  $C_M$ -Werte werden mit befriedigender Genauigkeit abgebildet. Zwar lassen sich die Meßergebnisse nicht exakt mit den Simulationsergebnissen zur Deckung bringen, jedoch können die Tendenz und der qualitative Verlauf der Beiwerte zufriedenstellend reproduziert werden. Die Genauigkeit liegt zwischen dem Baldwin-Lomax-Modell und dem Johnson-King-Modell, mit Tendenz zum Johnson-King-Modell.

Hingegen zeigen Lösungen, die mit dem Prandtl'schen Mischungsweglängenmodell und dem Baldwin-Lomax-Modell berechnet wurden, zu gering ausgeprägte Ablösungserscheinungen der Strömung. Die hieraus berechneten Verläufe der Beiwerte zeigen deshalb deutliche Abweichungen.

Die berechneten Lösungen mit dem RNG  $k - \epsilon$ -Modell und dem Johnson-King-Modell zeigen ein instationäres Strömungsfeld, das durch starke Ablösungserscheinungen charakterisiert ist. Es entwickeln sich große Rezirkulationsgebiete noch bevor das Flügelprofil mit seinem maximalen Anstellwinkel ausgelenkt wird. Die Struktur des instationären Strömungsfelds ist für drei Flügelanstellungen  $\alpha = 19^\circ$ ,  $\alpha = 17^\circ$  und  $\alpha = 10^\circ$  in Abb. 5.7 mit Baldwin-Lomax-Modell und dem Johnson-King-Modell bzw. dem RNG  $k - \epsilon$ -Modell verdeutlicht. Bei dem Anstellwinkel  $\alpha = 19^\circ$  hat sich ein deutlich erkennbarer Primärwirbel bei dem Johnson-King-Modell und dem RNG  $k - \epsilon$ -Modell gebildet.

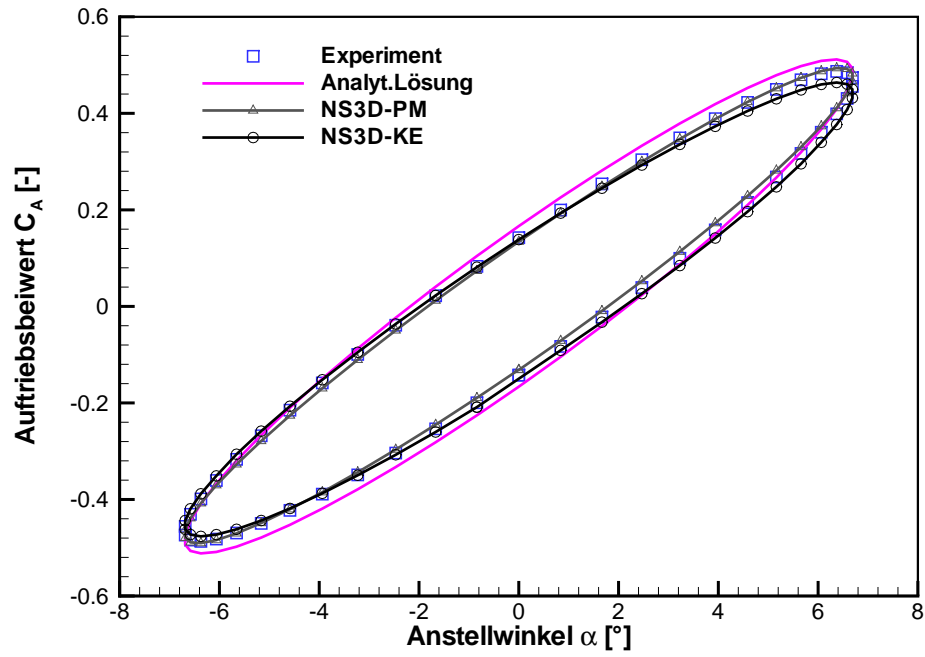


Abb. 5.1: Auftriebsbeiwerte des schwingenden NACA0012 Profils, Fall1.

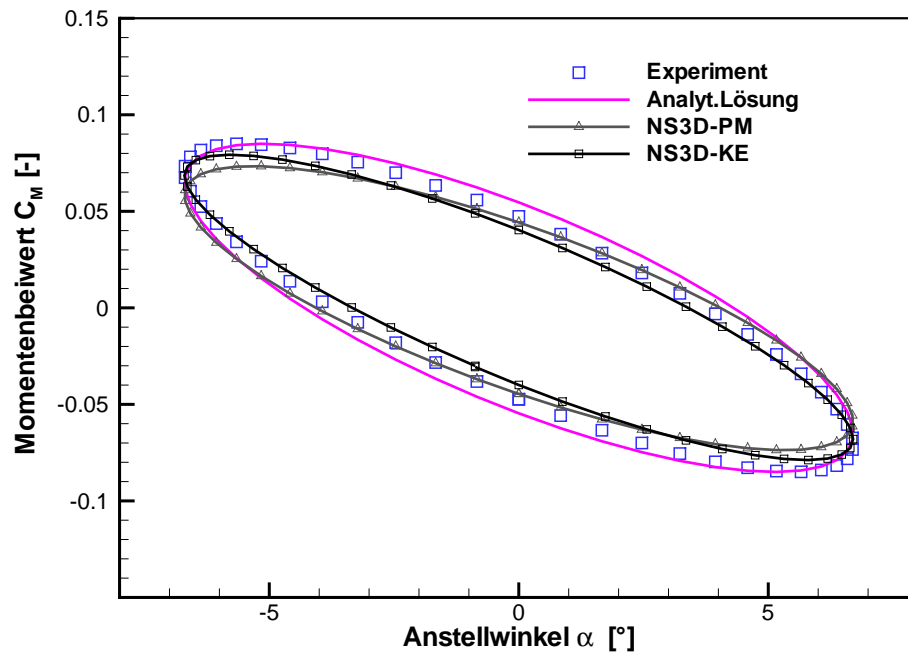


Abb. 5.2: Momentenbeiwerte des schwingenden NACA0012-Profiles, Fall1.

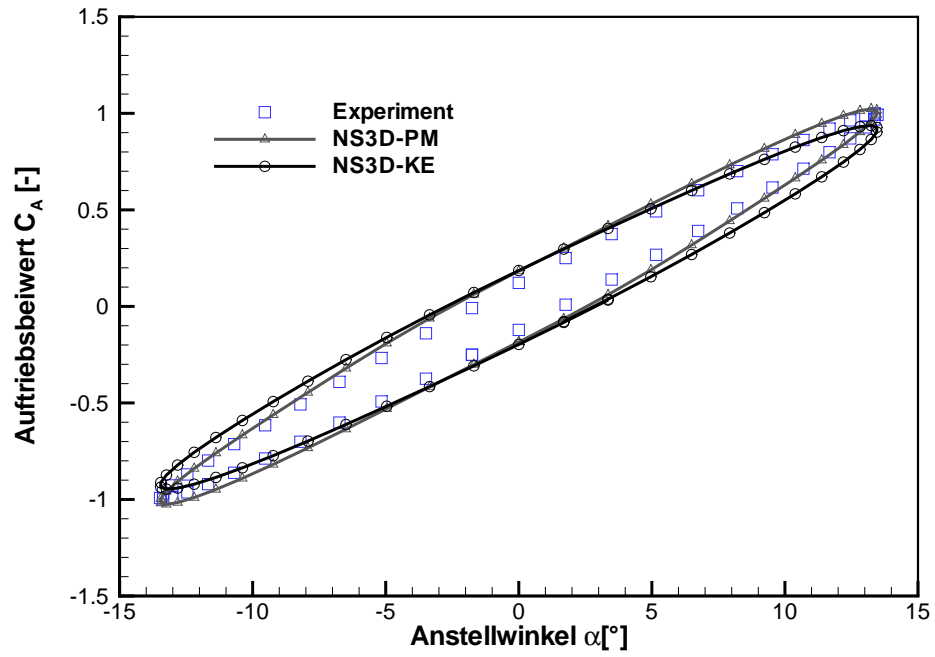


Abb. 5.3: Auftriebsbeiwerte des schwingenden NACA0012 Profils, Fall2.

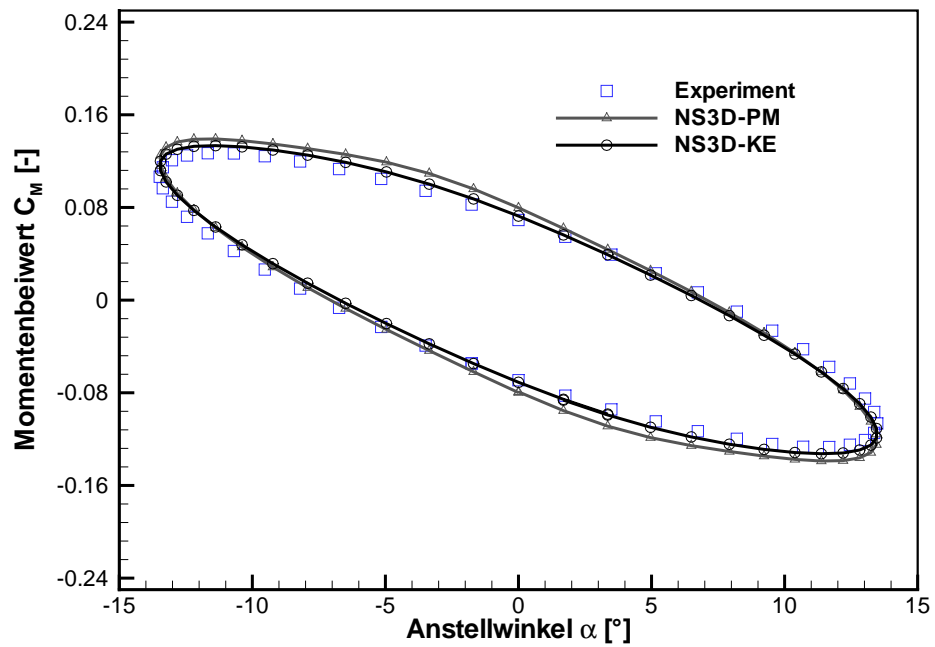


Abb. 5.4: Momentenbeiwerte des schwingenden NACA0012-Profiles, Fall2.

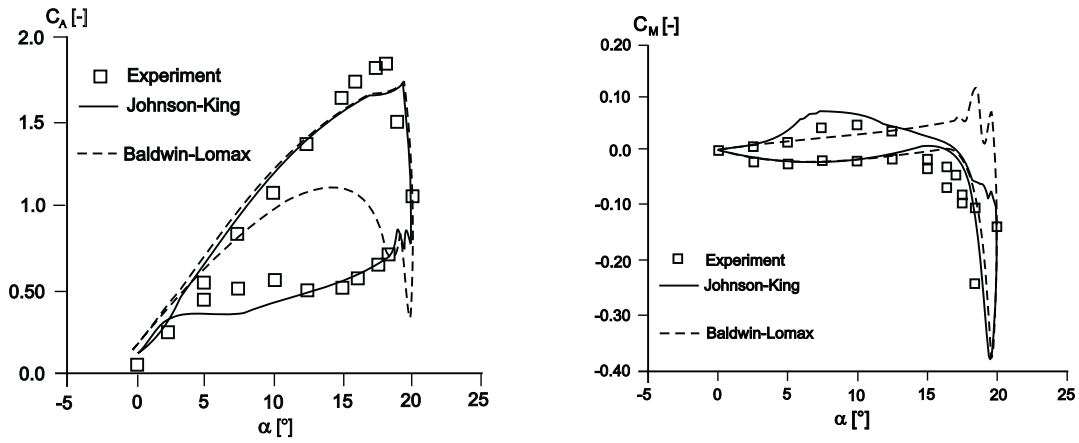


Abb. 5.5: Auftriebsbeiwerte und Momentenbeiwerte des schwingenden NACA0012 Profils, Fall3, nach DIDAR [14]

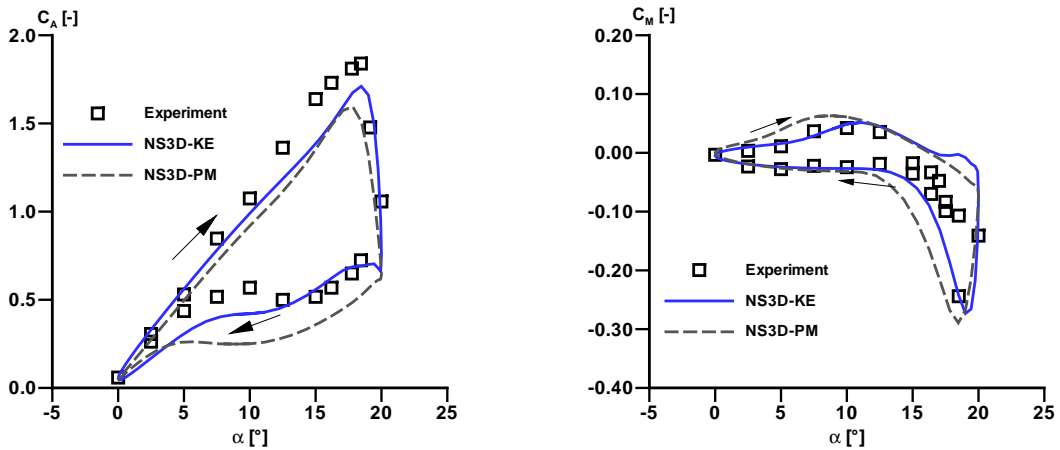


Abb. 5.6: Auftriebsbeiwerte und Momentenbeiwerte des schwingenden NACA0012 Profils, Fall3, im Vergleich zu den Experimenten von McCROSKEY ET AL. [77]

Dieser ist dabei aufzuplatzen, während an der Hinterkante des Profils bereits ein neuer, sekundärer Wirbel entsteht. Die Ablösung des Primärwirbels zieht einen Abfall des Auftriebs sowie einen Abfall des Flügelmoments nach sich. Während der sich anschließenden Abwärtsbewegung verbleibt die Strömung einen großen Zeitanteil dieser Schwingungsperiode abgelöst, so daß sich die beobachteten Hystereseeffekte einstellen.

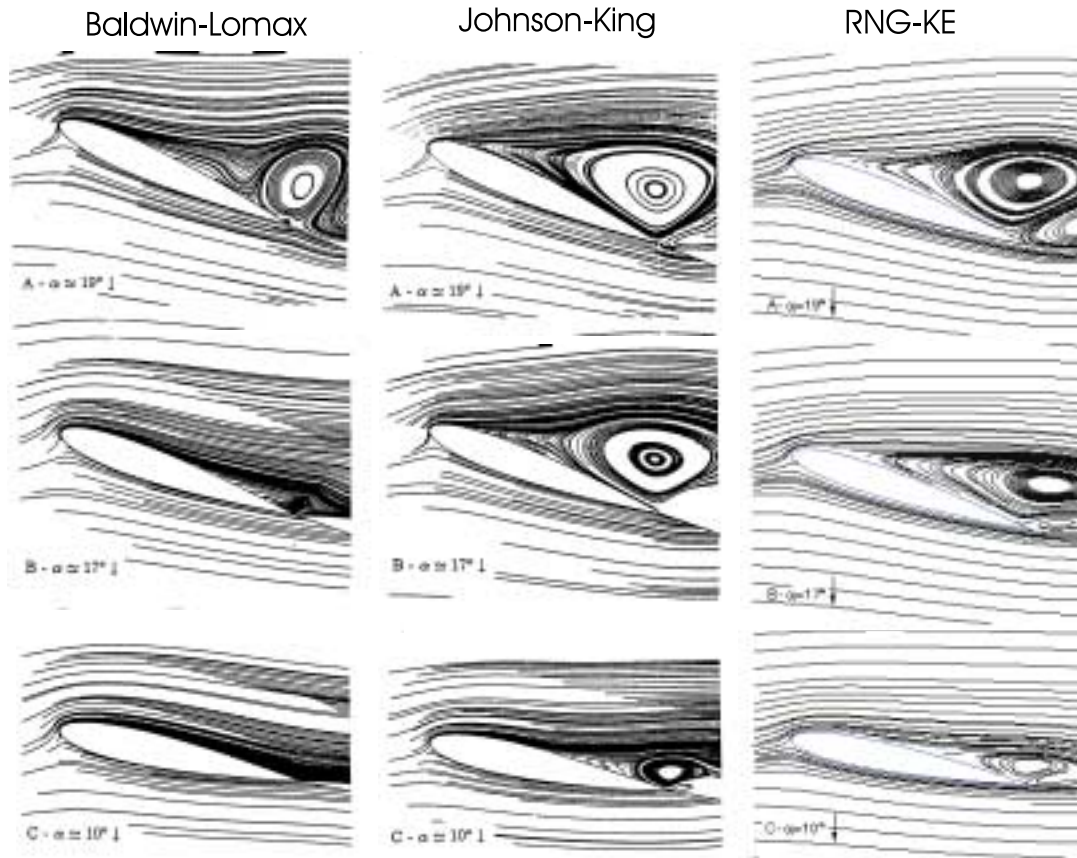


Abb. 5.7: Stromlinienverlauf der abgelösten Strömung während der Abwärtsbewegung, Fall3.

## 5.2 Bewertung der Ergebnisse

Die Simulation der turbulenten Umströmung eines schwingenden Flügelprofils stellt hohe Anforderungen an das Verfahren. Die Güte der Simulationsergebnisse wird maßgeblich von der Wahl des eingesetzten Turbulenzmodells bestimmt. So können unter Verwendung des  $k - \epsilon$  Modells und des Prandtl'schen Mischungsweglängenmodells für die Bereiche der anliegenden Strömung gute Übereinstimmungen mit den experimentellen Daten erzielt werden. Zwischen den Ergebnissen des Standard  $k - \epsilon$ -Modells und des RNG  $k - \epsilon$ -Modells für die anliegende Grenzschichtströmung bestehen keine wesentlichen Unterschiede. Für die stark abgelöste Profilmströmung ist das Ergebnis des RNG  $k - \epsilon$ -Modells etwas besser. Bei der Vorhersage des Deep Dynamic Stall ist das Baldwin-Lomax-Modell und das Prandtl'sche Mischungsweglängenmodell ungenau, dagegen liefert das Johnson-King-Modell hohe Genauigkeit.

# Kapitel 6

## Strömung durch Einzelgitter und Tandemgitter

Die Berechnungen von Einzel- und Tandemgitter werden mit den Experimenten von WERDECKER [22] verglichen. Die Experimente wurden am Luftversuchsstand I des Laboratoriums für Hydraulische Maschinen und Anlagen der Technischen Universität München durchgeführt, vgl. [22].

und Anlagen

### 6.1 Versuchsanlage

Die Versuchsanordnung besteht aus einem Tandemgitter mit Vorleit- und Laufradschaufel, die in In Abb. 6.1 skizziert ist.

Sämtliche Schaufeln können einzeln montiert werden und sind durch eine Klemmleiste auf der Rückseite der Versuchsanordnung fixiert. Auf diese Weise können sowohl Versuche an einer einzelnen Schaufel als auch am Einzel- und Tandemgitter durchgeführt werden. Die gewünschten Schaufelwinkel sind mit Hilfe eingravierter Winkelskalen einstellbar. Im Fall der Gitteruntersuchung ist die Teilung für beide Gitter durch die Bohrungsabstände vorgegeben und beträgt  $100\text{ mm}$ . Pro Gitter werden fünf Schaufeln eingesetzt. Aufgrund einer langlochgeführten Klemmleiste ist das Tandemgitter in  $y$ -Richtung verschieblich. Der Abstand der Zapfenachsen in  $x$ -Richtung beträgt  $165\text{ mm}$ .

In Tab. 6.1 sind die Profilparameter eingetragen. Das Schaufelprofil des Tandemgitters unterscheidet sich von dem des Einzelgitters nur durch die Wölbung.

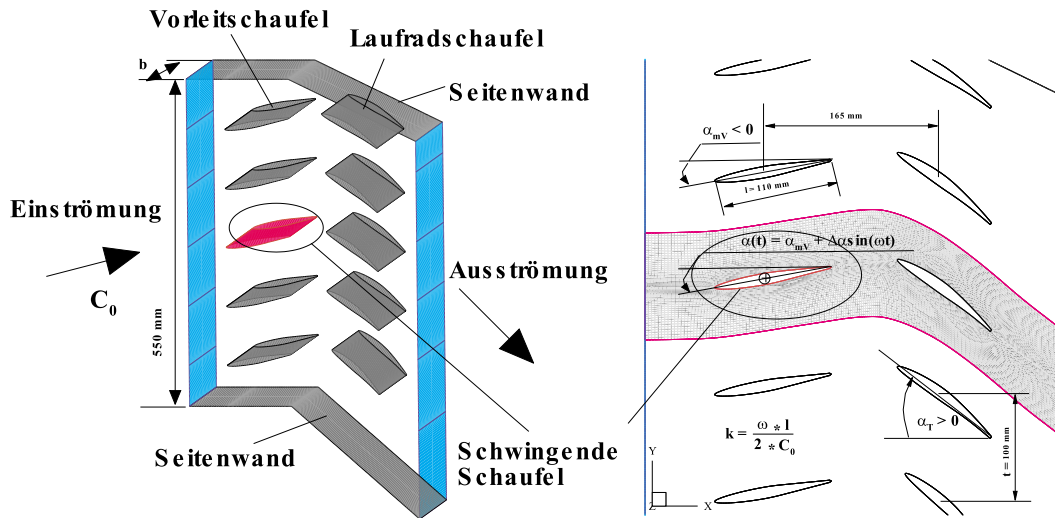


Abb. 6.1: Versuchsanordnung mit Tandemgitter

	Vorleit-Schaukel	Laufrad-Schaukel
Sehnenlänge $l$ [mm]	110	110
Zapfenachse $x_f$ [mm]	45.65	45.65
Profildicke $d$ [mm]	11	11
Hinterkantendicke $d_H$ [mm]	2	2
Wölbung $f$ [mm]	0	4.17

Tabelle 6.1: Profilparameter der Versuchsschaukeln

Die mit einem Schwingungsantrieb versehene Schaufel befindet sich in der Mitte der ersten Gitterreihe. Im Rahmen einer Voruntersuchung von HÖVEL [27] wurden verschiedene Antriebskonzepte hinsichtlich folgender Kriterien untersucht:

- Darstellung von Frequenzen bis 120 Hz
- sinusförmige Schwingung
- Erfassung der Schwingungsphasenlage
- Einstellung unterschiedlicher Amplituden



## 6.2 Versuchsbedingungen

Die Wahl der Strömungsgeschwindigkeit am Eintritt der Versuchsanordnung unterliegt konträren Forderungen. Zum einen soll die Geschwindigkeit groß sein, so daß große Reynolds-Zahlen darstellbar sind. Anzustreben sind Reynolds-Zahlen größer als  $5 \cdot 10^5$ , um eine bei hydraulischen Maschinen vorherrschende vollturbulente Strömung zu erreichen. Zum anderen darf die Geschwindigkeit  $c_o$  nicht zu groß sein, um mit dem aus mechanischen Gründen nach oben begrenzten Frequenzbereich  $0 \leq f \leq 120 Hz$  den gewünschten Bereich der reduzierten Frequenz  $0 \leq k \leq 3.75$

$$k = \frac{\pi f l}{c_o} \quad (6.1)$$

fahren zu können.

Für die Druckmessungen kommt noch eine weitere Forderung zur Wahl der Geschwindigkeit hinzu. Um den Meßbereich der instationären Druckaufnehmer besser ausnutzen zu können, sind hohe Differenzdrücke gegenüber der Umgebung erforderlich. Dieser Zusammenhang fordert große Geschwindigkeiten in der Versuchsanordnung.

Den beschriebenen Forderungen wird dadurch Rechnung getragen, daß für die Geschwindigkeits- und Druckmessungen unterschiedliche Geschwindigkeiten eingestellt werden. Zusammen mit den Reynolds-Zahlen sind die Geschwindigkeiten in Tabelle 6.2 eingetragen.

	$c_o [m/s]$	$Re = \frac{c_o l}{\nu} [-]$
Geschwindigkeitsmessungen	11.0	$0.8 \cdot 10^5$
Druckmessungen	16.8	$1.2 \cdot 10^5$

Tabelle 6.2: Geschwindigkeiten und Reynolds-Zahlen der Untersuchungen

Die angegebenen Reynolds-Zahlen werden mit der Sehnenlänge  $l$  der Schaufeln als charakteristischem Längenmaß gebildet. Zur Sicherstellung einer vollturbulenten Außenströmung durchströmt die Luft am Eintritt der Versuchsanordnung ein Turbulenzgitter mit einer Maschenweite von  $9 \text{ mm}$  und einem Drahtdurchmesser von  $0.75 \text{ mm}$ . Der Turbulenzgrad im Einströmbereich ist nahe zu konstant und beträgt  $3\%$ . Zusätzlich wurde an der Schaufelvorderkante ein Turbulenzdraht mit  $0.12 \text{ mm}$  Durchmesser angeklebt, um ein definierter Transitionsunkt der Grenzschichtströmung zu erzwingen.

## 6.3 Simulation am Einzelgitter

Im folgenden wird die Strömung um eine schwingende Schaufel im Einzelgitter simuliert. Das Strömungsgebiet des Einzelgitters wird in 6 Blockabschnitte untergliedert, die, wie in Kap.4.6 dargestellt, jeweils mit der H-Netz Topologie vernetzt werden. Alle Ränder der Berechnungsblöcke müssen bei der Simulation mit Randbedingungen belegt werden. Neben Ein- und Abströmbedingungen wird den Rändern auf den Seitenwänden und den Oberflächen aller fixierter Schaufeln die Eigenschaft „ruhende Wand“ zugeordnet. Den Rändern auf den Oberflächen der schwingenden Schaufel wird die Eigenschaft „bewegte Wand“ gegeben, vgl. Abb. 6.1 sowie Abb. 4.12. Die Belegung der sich im Inneren befindlichen Gebietsränder erfolgt durch den parallelen Datenaustausch mit den gekoppelten Nachbarblöcken, vgl. Kap. 4.3.

Tabelle 6.3 enthält die Parameter der Simulation am Einzelgitter. Diese Parameter entsprechen den Experimenten von WERDECKER [22]. Es wird jeweils eine Simulation mit fixierter und schwingender Schaufel durchgeführt. Dabei sind der Anstellwinkel der fixierten Schaufel und der mittlere Anstellwinkel der schwingenden Schaufel identisch. Für die Turbulenzmodellierung bei der Simulation wird das Standard  $k-\varepsilon$  Modell verwendet. Für die Bewegung der Netze wird der in Kap. 4.7 beschriebene Algorithmus angewendet.

<b>fixierte Schaufel</b>	
Anstellwinkel $\alpha$ [°]	25.0
<b>schwingende Schaufel</b>	
Reduzierte Frequenz $k$ [–]	2.5
Amplitude $\Delta\alpha$ [°]	3.75
Mittlerer Anstellwinkel $\alpha_m$ [°]	25.0
Reynolds-Zahl $Re$ [–]	$0.8 \cdot 10^5$
<b>Netzknoten-Anzahl</b>	
Block 1 : $I \times J \times K$	$140 \times 40 \times 3$
Block 2 : $I \times J \times K$	$140 \times 60 \times 3$
Block 3 : $I \times J \times K$	$140 \times 60 \times 3$
Block 4 : $I \times J \times K$	$140 \times 60 \times 3$
Block 5 : $I \times J \times K$	$140 \times 60 \times 3$
Block 6 : $I \times J \times K$	$140 \times 50 \times 3$

Tabelle 6.3: Parameter und Netzknoten der Referenzuntersuchung am Einzelgitter

Zuerst wird die fixierte Schaufel betrachtet. Die Strömung wird als stationär angenommen. Abb. 6.2 zeigt das dimensionslose Geschwindigkeitsfeld  $c/c_{ref}$  um die betrachtete Schaufel für Experiment und Simulation. Im Geschwindigkeitsfeld ist zusätzlich der Stromlinienverlauf eingezeichnet. Die Stromlinien zeigen bei der fixierten Schaufel eine zu erwartende weitgehende Ablösung der Strömung auf der Saugseite. Die Simulationsergebnisse stimmen relativ gut mit dem Experiment [22] überein.

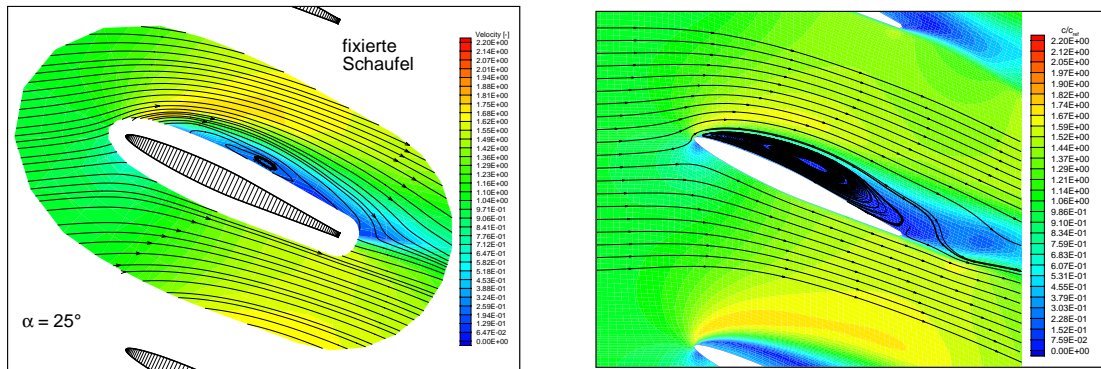


Abb. 6.2: Dimensionsloses Geschwindigkeitsfeld bei der Referenzuntersuchung mit fixierter Schaufel. Links Experiment, rechts Simulation

Anschließend wird die schwingende Schaufel simuliert. Die stationäre Lösung wird als Startlösung verwendet. Es werden 10 Perioden mit jeweils 60 Zeitschritte berechnet. Als Turbulenzmodell wird wiederum das Standard  $k - \varepsilon$  Modell verwendet. In Abb. 6.3 wird die dimensionslose turbulente kinetische Energie bei der Referenzuntersuchung für die Abwärtsbewegung bei einem Anstellwinkel von  $\alpha = 25^\circ \downarrow$  im gesamten Rechengebiet dargestellt. Der Einfluß der Schwingung auf die Strömung ist deutlich. Das Ergebnis der Simulation liefert detaillierte Informationen über die Struktur der hochturbulenten Strömung. Diese werden maßgeblich durch instationäre Reibungseffekte induziert. Die zeitliche Entwicklung der Strömungsgrößen gibt Aufschluß über Wirbelstrukturen und das dynamische Verhalten der schwingenden Schaufel.

In Abb. 6.4 sind die dimensionslosen Geschwindigkeitsfelder und zusätzlich der Stromlinienverlauf für die Referenzuntersuchung  $k = 2.5$ , d.h.  $f = 80Hz$  im Experiment, bei verschiedenen Phasenlagen  $\alpha = 25^\circ \downarrow$ ,  $\alpha = \alpha_{min} = 21.25^\circ$ ,  $\alpha = 25^\circ \uparrow$  und  $\alpha = \alpha_{max} = 28.75^\circ$  gegenüber gestellt. Die Symbole  $\downarrow$  und  $\uparrow$  kennzeichnen die Bewegungsrichtung der Schaufel im Sinne eines abnehmenden bzw. zunehmenden Anstellwinkels.

Die Übereinstimmung von Experiment und Simulation ist relativ gut. Allerdings liefert die Berechnung an der Hinterkante eine zusätzliche Wirbelbildung. Dort ist

die Simulation ungenau im Vergleich zum Experiment, da relativ dicke Hinterkante der Schaufel mit einem relativ groben Netz beschreiben wurde.

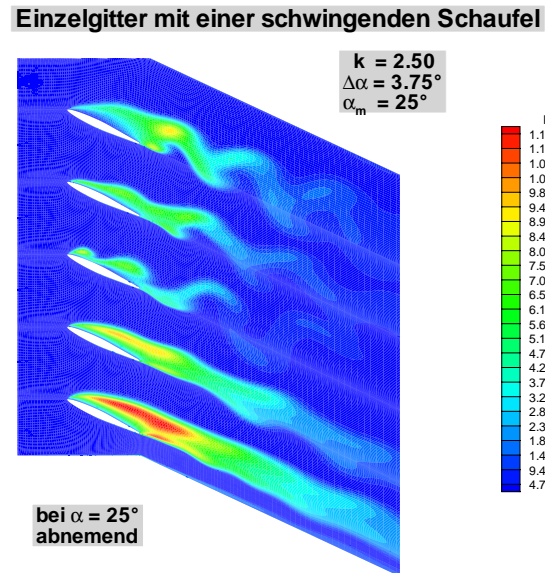


Abb. 6.3: Berechnete dimensionslose turbulente kinetische Energie der Referenzuntersuchung

Die berechneten Ergebnisse mit dem Standard  $k - \varepsilon$ -Modell zeigen instationäre Strömungsfelder, die durch drei Wirbel charakterisiert sind. Es sind dies der Vorder- und Hinterkantenwirbel sowie ein sich negativ drehender Wirbel an der saugseitigen Hinterkante. Dieser Wirbel ist der abgeschwommene Rest des Vorderkantenwirbels einer vorausgegangenen Periode.

Im Gegensatz zur fixierten Schaufel mit konstanter Vorderkantenwirbelintensität, steigt bei der schwingenden Schaufel während der Phase zunehmenden Anstellwinkels die Intensität des Vorderkantenwirbels stark an. Nach Überschreiten des maximalen Anstellwinkels löst sich dieser Wirbel von der Vorderkante und schwimmt mit ca.  $0.4 \cdot C_0$  in der Außenströmung entlang des saugseitigen Profilrückens ab. Dieser Vorgang wiederholt sich periodisch.

Das simulierte instationäre Strömungsfeld während der Abwärtsbewegung bei  $\alpha = 25^\circ \downarrow$  ist in guter Übereinstimmung mit dem Experiment.

Die Interaktion des abschwimmenden Wirbels und des Hinterkantenwirbels beeinflusst den Stromlinienverlauf. Der Einfluß der Hinterkante auf die Simulation ist bei dieser Phasenlage deutlich zu sehen.

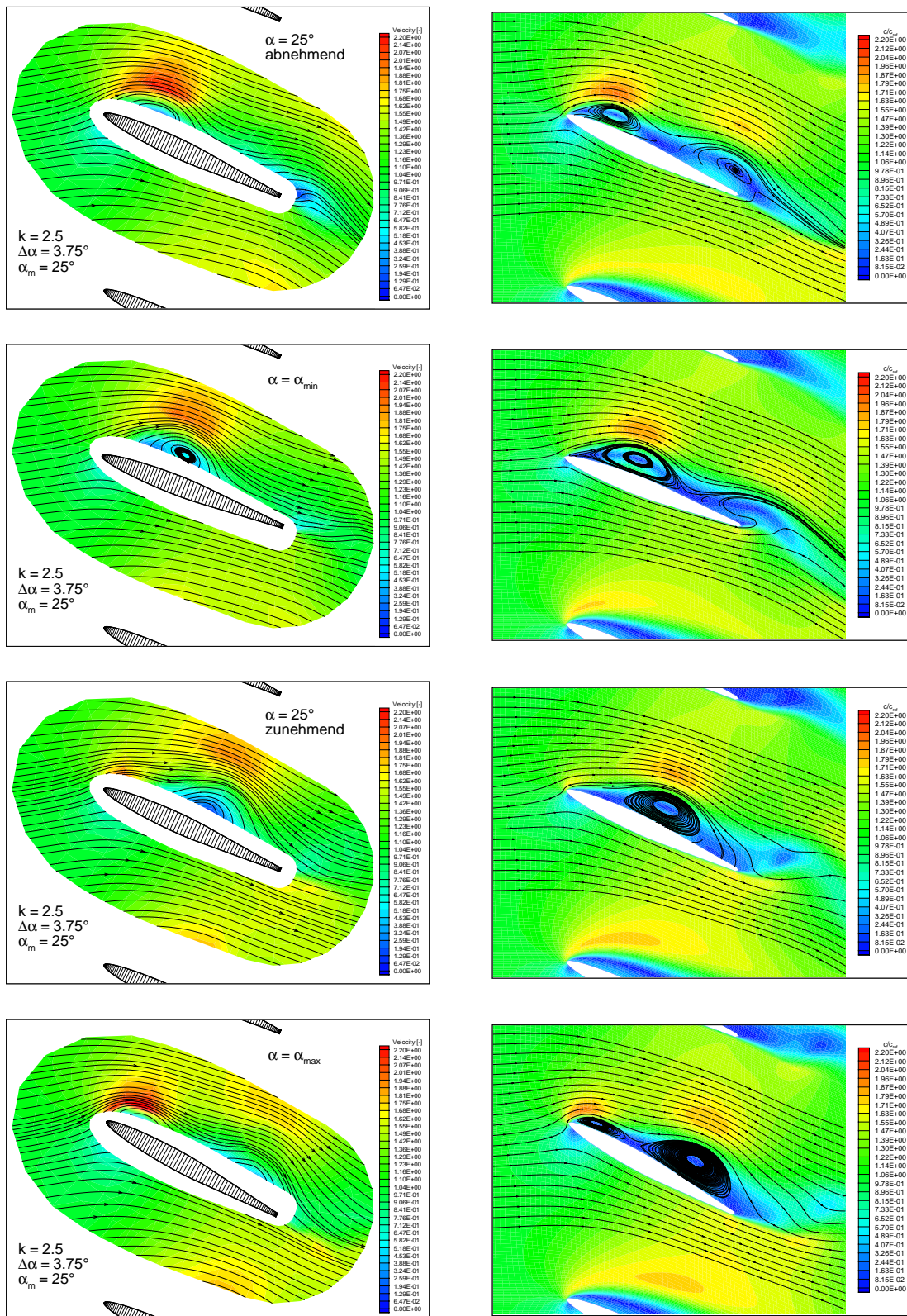


Abb. 6.4: Dimensionslose Geschwindigkeitsfelder für die Referenzuntersuchung  $k = 2.5$  bei verschiedenen Phasenlagen. Links Experiment, rechts Simulation.

Bei  $\alpha = \alpha_{min}$  befindet sich der Wirbel der vorangegangenen Periode bereits etwa eine halbe Sehnenlänge stromab der Hinterkante und ist auf der Abbildung des Experiments kaum noch zu erkennen. Die Simulation liefert bei dieser Phasenlage einen zusätzlichen Hinterkantenwirbel und somit eine Abweichung vom Experiment. Entsprechend gering ist sein Einfluß auf die Umlenkung. Das in dieser Phase vorherrschende breite Minimum der Umlenkung resultiert aus der konstanten Intensität des Hinterkantenwirbels. Während der Phase zunehmenden Anstellwinkels steigt die Umlenkung moderat an.

Die Übereinstimmung der Wirbelstrukturen von Simulation und Experiment bei  $\alpha = 25^\circ \uparrow$  kann als sehr gut bezeichnet werden. Der Vorderkantenwirbel ist etwa bis zur Mitte der Schaufel abgeschwommen. Am Stromlinienbild wird die positive Wirkung dieses Wirbels auf die Umlenkung deutlich. An der Schaufelhinterkante kommt die Strömung zum Anliegen und der negative Einfluß des Hinterkantenwirbels wird weitgehend kompensiert. Mit weiter zunehmendem Anstellwinkel steigt die Umlenkung an.

Bei  $\alpha = \alpha_{max}$  hat sich bereits ein neuer Vorderkantenwirbel gebildet. Die Intensität des Hinterkantenwirbels ist im Vergleich zum Experiment etwas erhöht, aber im Vergleich zu  $\alpha = 25^\circ \uparrow$  hat sie abgenommen. Der positive Einfluß des abschwimmenden Vorderkantenwirbels dominiert weiterhin die Strömung. In der folgenden Phase des abnehmenden Anstellwinkels steigt die Umlenkung auf ihren Maximalwert, im Experiment bei  $\alpha \approx 27.8^\circ$ , in der Simulation bei  $\alpha \approx 28^\circ$ , und fällt dann wieder ab, vgl. Abb. 6.5. Es ergibt sich eine sehr kleine Phasendifferenz zwischen Experiment und Berechnung.

Im folgenden wird die Strömungsumlenkung im Detail ausgewertet. Die Auswertungsansätze sind im Anhang A erläutert. Abb. 6.5 zeigt den Verlauf der Hystereseschleife für die dimensionslosen Umlenkung  $\Delta c_y / c_o$  über dem Anstellwinkel  $\alpha$  im Vergleich zum Experiment.

Der Umlaufsinn der Umlenkungsverläufe ist durch Pfeile gekennzeichnet. Bei den Verläufen besteht eine Hysterese zwischen der Phase zunehmenden und abnehmenden Anstellwinkels. Der zeitliche Mittelwert der Umlenkung ist etwa gleich zwischen Experiment und Berechnung. Aufgrund der Wirkung des abschwimmenden Wirbels kommt es zu keiner ausgeprägten Ablösung. Die Ausdehnung des Ablösegebiets verringert sich, so daß eine deutlich höhere Umlenkung erzielt wird. Der Mittelwert der Umlenkung ist bei der schwingenden Schaufel für  $k = 2.50$  um den Faktor 1.4 höher als bei der fixierten Schaufel.

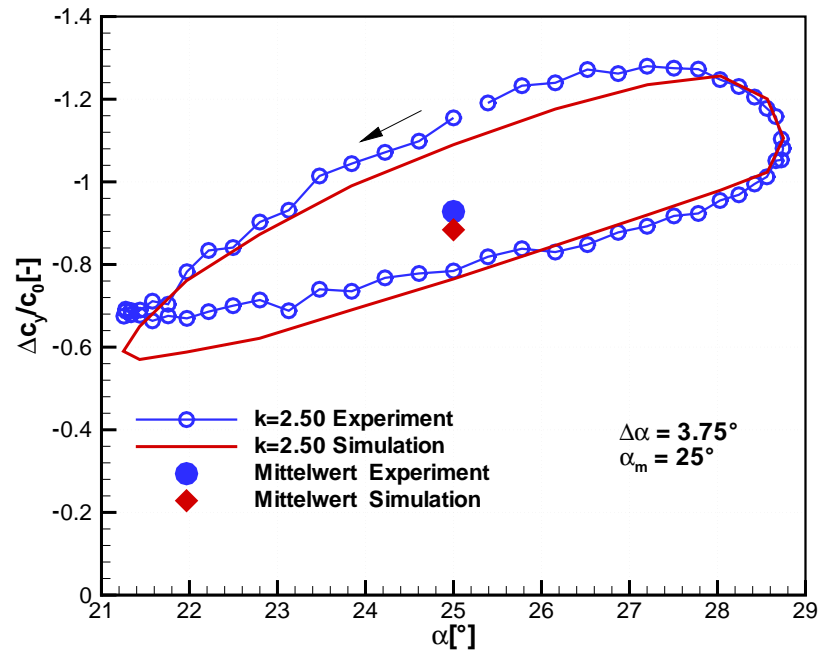


Abb. 6.5: Dimensionslose Umlenkung  $\Delta c_y/c_o$  über dem Anstellwinkel  $\alpha$  für die reduzierte Frequenz  $k = 2.50$

### 6.3.1 Einfluß der reduzierten Frequenz

Eine Parameterstudie über zwei weitere reduzierte Frequenzen,  $k = 1.25$  und  $k = 3.75$ , wird ausgehend von der Referenzuntersuchung, vgl. Tabelle 6.3, durchgeführt. Eine weitere über die Schwingungsamplitude und den mittleren Anstellwinkel folgt in Kap. 6.3.2 und Kap. 6.3.3. Für alle Berechnungen wird dieselbe Startlösung verwendet. Abb. 6.6 und Abb. 6.7 zeigen das dimensionslose Geschwindigkeitsfeld  $c/c_{ref}$  einschließlich Stromlinienverlauf um die betrachtete Schaufel für Experiment und Simulation. Die in den Abbildungen enthaltenen Ergebnisse der Simulation stimmen mit dem Experiment gut überein.

Bei der reduzierten Frequenz  $k = 1.25$  löst sich während der Abwärtsbewegung bei  $\alpha = 25^\circ \downarrow$  gerade ein Teil des Vorderkantenwirbels ab. Stromab dieses Wirbels zeigt der Verlauf der Stromlinien eine an der Hinterkante anliegende Strömung. Während dieser Phase ist die Intensität des Hinterkantenwirbels gering. Die Strömungsstruktur bei dieser Phase stimmt sehr gut mit dem Experiment überein.

Bei  $\alpha = \alpha_{min}$  ist der Wirbel bis zur Hinterkante abgeschwommen und es kommt zur Interaktion mit dem entgegengesetzt drehenden Hinterkantenwirbel. Dadurch entsteht am Berührungsgebiet beider Wirbel ein quer zur Hauptströmungsrichtung gerichteter Stromlinienverlauf. Im Zusammenhang mit der beginnenden Phase zunehmenden Anstellwinkels verursacht dieser Stromlinienverlauf eine Verstärkung und Einschnürung des Hinterkantenwirbels. Dabei erstreckt sich der Hinterkantenwirbel zunehmend in den Bereich des saugseitigen Nachlaufs. Dies wirkt sich negativ auf die Umlenkung aus. Der Vorderkantenwirbel tritt in der Berechnung nicht so ausgeprägt zutage wie in der Messung.

Während der Aufwärtsbewegung bei  $\alpha = 25^\circ \uparrow$  nimmt die Intensität des Hinterkantenwirbels bereits wieder ab. Die Intensität des Hinterkantenwirbels ist im Vergleich zum Experiment etwas größer. Er wirkt sich ebenfalls negativ auf die Umlenkung aus.

Die Wirbelstruktur in der Simulation bildet sich bei  $\alpha = \alpha_{max}$  sehr ähnlich wie im Experiment aus. Der Einfluß des Hinterkantenwirbels ist gering. Unterdessen hat die Intensität des Vorderkantenwirbels stark zugenommen und die Strömung bleibt im Bereich der Hinterkante anliegend. Mit abnehmendem Anstellwinkel wirkt sich dies positiv auf die Umlenkung aus.

Bei der reduzierten Frequenz  $k = 3.75$  ist während der Phase abnehmenden Anstellwinkels die Umlenkung vorwiegend konstant. Bei  $\alpha = 25^\circ \downarrow$  sind es wiederum drei Wirbel, die die Strömung charakterisieren. Zu erkennen sind der Vorder- und Hinterkantenwirbel sowie der abschwimmende Teil des Vorderkantenwirbels einer vorausgegangenen Periode. Bemerkenswert ist, daß sich der Hinterkantenwirbel in



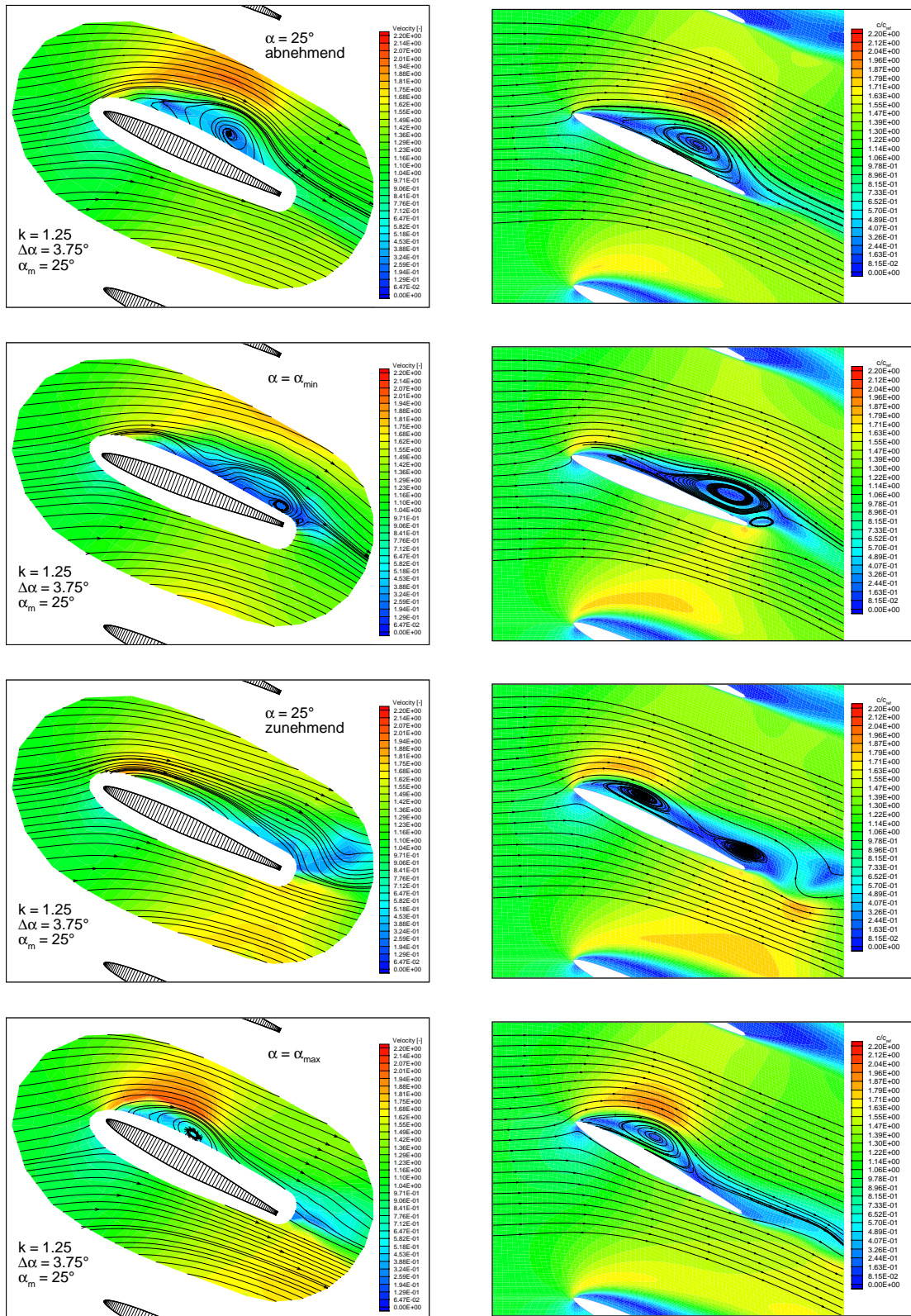


Abb. 6.6: Dimensionslose Geschwindigkeitsfelder für die Referenzuntersuchung  $k = 1.25$  bei verschiedenen Phasenlagen. Links Experiment, rechts Simulation.

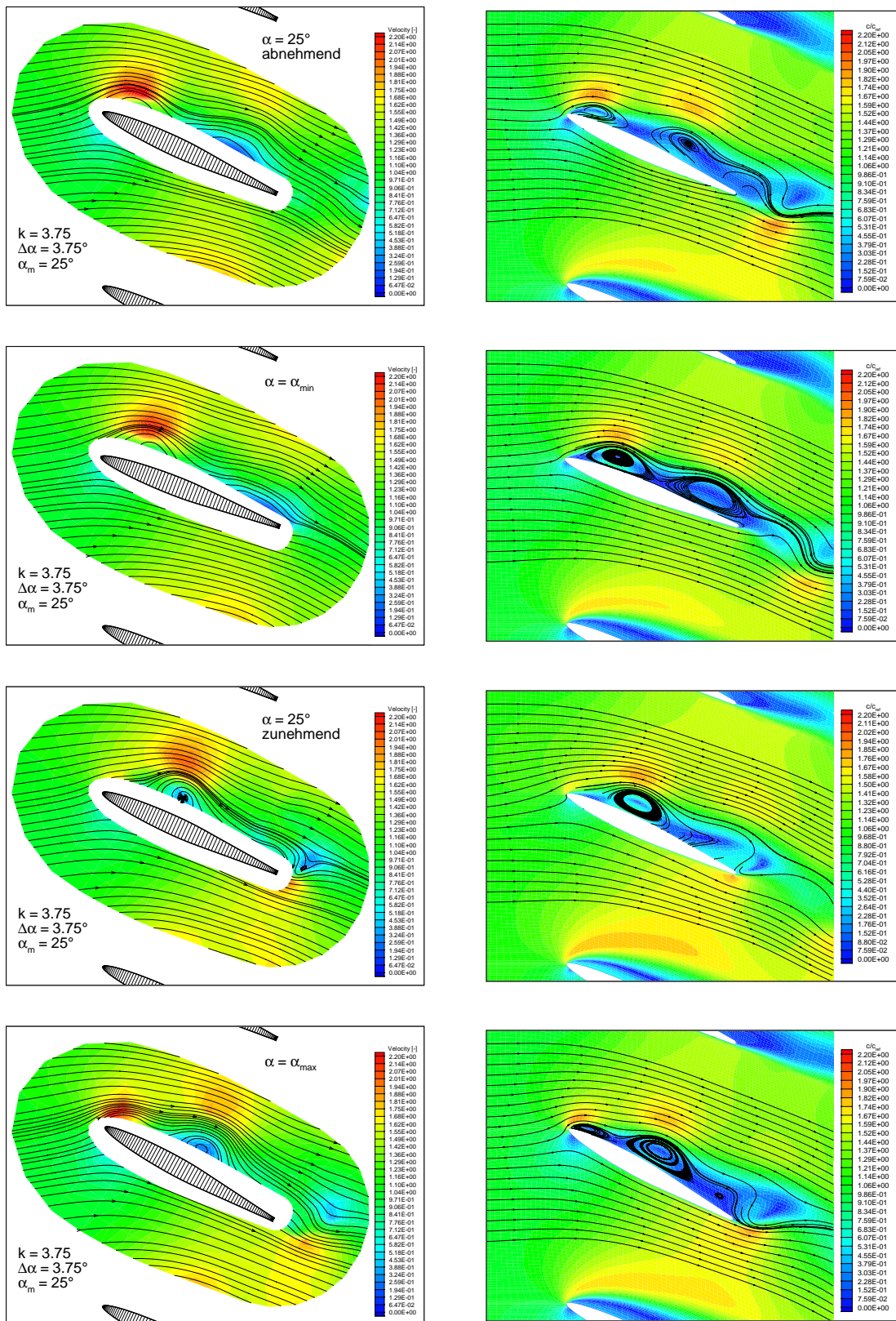


Abb. 6.7: Dimensionslose Geschwindigkeitsfelder für die Referenzuntersuchung  $k = 3.75$  bei verschiedenen Phasenlagen. Links Experiment, rechts Simulation.

dieser Phasenlage nahezu vollständig von der Schaufel gelöst hat und abschwimmt. Der kurze Abstand zwischen den beiden rechtsdrehenden Vorderkantenwirbeln resultiert aus der kleinen Periodendauer im Vergleich zur Wirbelabschwimmdauer entlang einer Sehnenlänge. Anhand der Stromlinien erkennt man, daß sich der kurze Abstand der beiden Vorderkantenwirbel negativ auf die Umlenkung auswirkt.

Bei  $\alpha = \alpha_{min}$  ist wiederum ein Hinterkantenwirbel zu erkennen. Der abschwimmende Vorderkantenwirbel befindet sich nahe der Hinterkante. Ähnlich wie bei  $k = 1.25$  verläuft das Berührungsgebiet zwischen den beiden Wirbeln quer zur Hauptströmungsrichtung. Die durch diese Interaktion induzierte Strömung verstärkt das Einschnüren und die Intensität des Hinterkantenwirbels. Im weiteren Verlauf zunehmenden Anstellwinkels fällt die Umlenkung ab. Bei  $\alpha = 25^\circ \uparrow$  ist der beschriebene Einschnürvorgang weiter fortgeschritten. Am Stromlinienverlauf ist der Einfluß beider Wirbel deutlich feststellbar. Erkennbar ist auch die starke Wirkung des Vorderkantenwirbels.

Bei  $\alpha = \alpha_{max}$  steht der Hinterkantenwirbel im Zusammenhang mit der sich umkehrenden Schaufelbewegung unmittelbar vor der Ablösung von der Hinterkante. Der Vorderkantenwirbel hat sich bereits von der Vorderkante gelöst und ist bis zur Mitte der Schaufel abgeschwommen. Dadurch kompensiert er die negative Wirkung des in den saugseitigen Nachlauf ragenden Hinterkantenwirbels. An der Vorderkante ist bereits ein neuer Vorderkantenwirbel entstanden.

Um den Einfluß der reduzierten Frequenz auf die Umlenkung besser beurteilen zu können, wird die zeitlich gemittelte Strömungsumlenkung mit experimentell ermittelten Referenzdaten verglichen. In Abb. 6.8 ist die mittlere Umlenkung über der reduzierten Frequenz aufgetragen. Die reduzierte Frequenz  $k = 0$  steht für die fixierte Schaufel. Die periodische mittlere Umlenkung steigt mit der reduzierten Frequenz an und erreicht bei  $k = 2.5$  ein Maximum. Gegenüber  $k = 0$  ist die Umlenkung um ca. den Faktor 1.4 höher. Die Umlenkung fällt für  $k > 2.5$  ab.

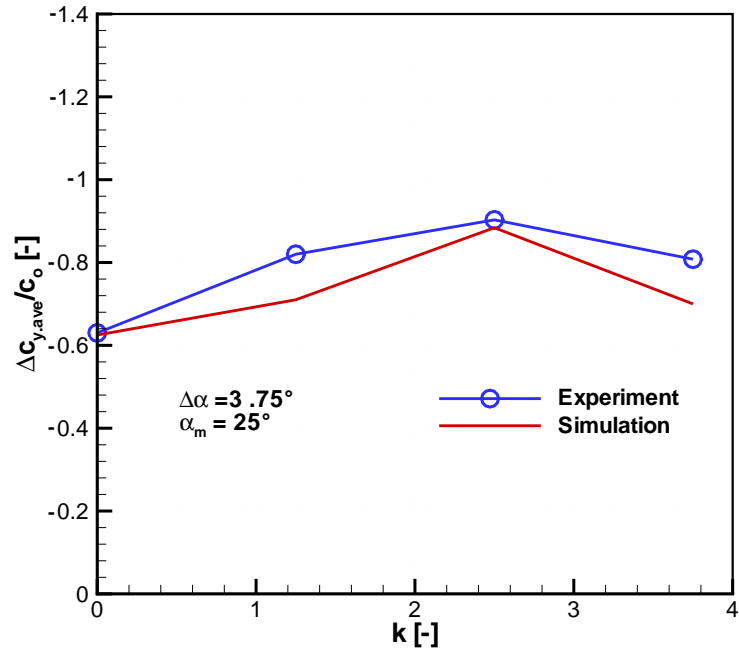


Abb. 6.8: Dimensionslose mittlere Umlenkung  $\Delta c_{y,ave}/c_o$  über der reduzierten Frequenz  $k$

Die Ergebnisse der Simulation ergeben eine Abweichung zum Experiment. Die mittlere Umlenkung ist bei  $k = 1.25$  und  $k = 3.75$  kleiner als im Experiment. Dies liegt am Einfluß der Profilhinterkante und auch am verwendeten Turbulenzmodell.



### 6.3.2 Einfluß der Amplitude

Ausgehend von der Referenzuntersuchung, vgl. Tabelle 6.3, werden zwei weitere Amplituden,  $\Delta\alpha = 1.25^\circ$  und  $\Delta\alpha = 6.25^\circ$ , simuliert. In den Abbildungen 6.9 und 6.10 sind die dimensionslosen Geschwindigkeitsfelder für  $\Delta\alpha = 1.25^\circ$  und  $\Delta\alpha = 6.25^\circ$  bei vier Schaufelanstellwinkeln  $\alpha = 25^\circ \downarrow$ ,  $\alpha = \alpha_{min} = 21.25^\circ$ ,  $\alpha = 25^\circ \uparrow$  und  $\alpha = \alpha_{max} = 28.75^\circ$  für das Experiment bzw. für die Simulation dargestellt. Das Strömungsfeld und das Wirbelsystem der Berechnung bei  $\Delta\alpha = 1.25^\circ$  stimmen befriedigend mit dem Experiment überein. Die Übereinstimmung bei  $\Delta\alpha = 3.75^\circ$  und  $\Delta\alpha = 6.25^\circ$  ist besser als bei  $\Delta\alpha = 1.25^\circ$ .

Bei  $\Delta\alpha = 1.25^\circ$  erkennt man an den Stromlinien deutlich die abschwimmende Ablöseblase auf der Saugseite. Im Vergleich zur Amplitude  $\Delta\alpha = 3.75^\circ$  ist bei  $\Delta\alpha = 1.25^\circ$  die Intensität des abschwimmenden Wirbels gering. Die Amplitude  $\Delta\alpha = 3.75^\circ$  entspricht der Referenzuntersuchung, vgl. Abb. 6.4. Aufgrund der schwächeren Kippbewegung der Schaufelnase löst sich nur ein kleiner Teil des Vorderkantenwirbels. Im Verlauf des Abschwimmens dieses rechtsdrehenden Wirbels kommt es zu einer Verbesserung der Umlenkung und zur Abschwächung der negativen Wirkung des Hinterkantenwirbels. Entsprechend der geringen Intensität des abschwimmenden Wirbels ist der Einfluß auf die Umlenkung gering.

Anhand der Geschwindigkeitsfelder wird bei der Amplitude  $\Delta\alpha = 6.25^\circ$  deutlich, daß aufgrund der starken Kippbewegung der Schaufelnase ein großer Teil des Vorderkantenwirbels ablöst. Der im weiteren Verlauf abschwimmende Wirbel beeinflußt die Umlenkung stark.

Die Intensität des Hinterkantenwirbels ändert sich während einer Periode erheblich. Bei  $\alpha = 25^\circ \downarrow$  wird die Intensität des Hinterkantenwirbels durch den abschwimmenden Wirbel geschwächt. Entsprechend groß ist die Umlenkung in dieser Phasenlage. Ab  $\alpha = \alpha_{min}$  kommt es bei zunehmendem Anstellwinkel zu einer starken Zunahme des Hinterkantenwirbels. Im Zusammenhang mit der großen Schwingbewegung der Hinterkante ragt der Hinterkantenwirbel in den saugseitigen Nachlauf der Schaufel. Dieser Effekt mindert die Umlenkung.

Der Einfluß der Amplitude äußert sich in der Intensität der auftretenden Wirbel. Mit steigender Amplitude wächst der Anteil des Vorderkantenwirbels, der sich aufgrund der Kippbewegung der Schaufelnase ablöst, und der Hinterkantenwirbel ragt zunehmend in den saugseitigen Bereich des Nachlaufs.

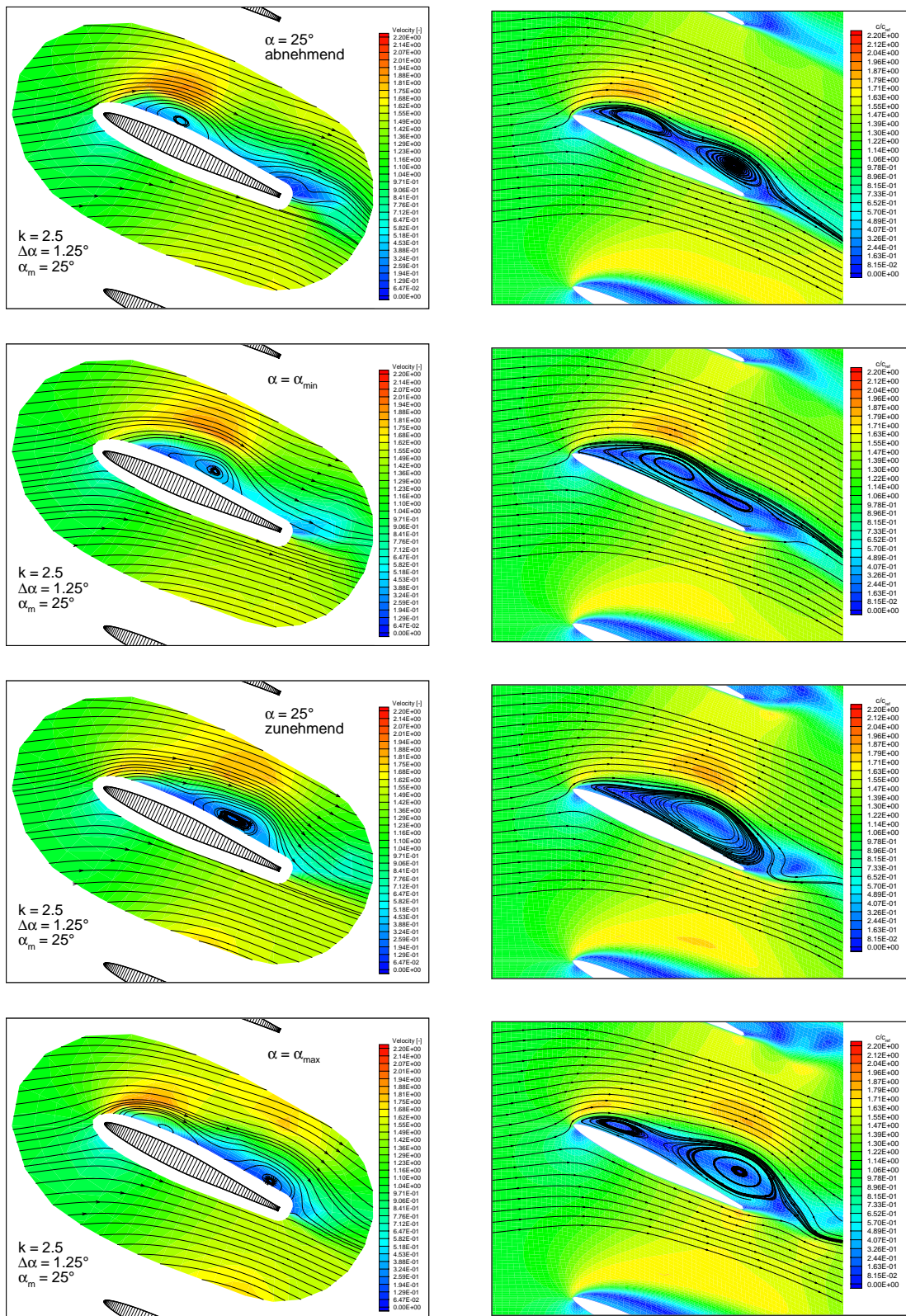


Abb. 6.9: Dimensionslose Geschwindigkeitssfelder für  $\Delta\alpha = 1.25^\circ$  bei verschiedenen Phasenlagen. Links Experiment, rechts Simulation.

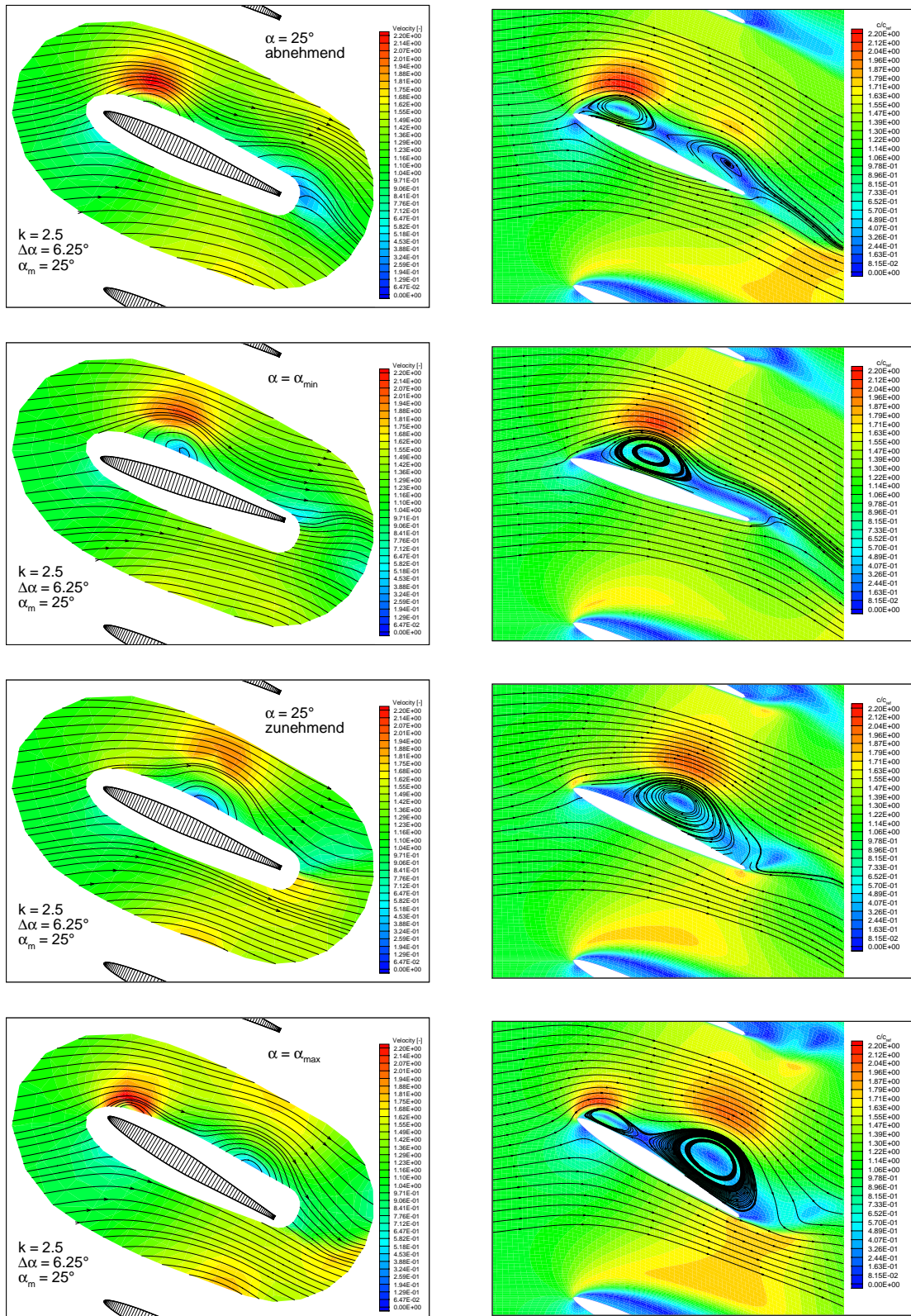


Abb. 6.10: Dimensionslose Geschwindigkeitsfelder für  $\Delta\alpha = 6.25^\circ$  bei verschiedenen Phasenlagen. Links Experiment, rechts Simulation.

In Abb. 6.11 ist die mittlere berechnete Umlenkung zusammen mit experimentell ermittelten Referenzdaten über der Amplitude aufgetragen. Die Berechnung zeigt, daß die periodische mittlere Umlenkung mit zunehmender Amplitude ansteigt. Bei kleiner Amplitude zeigten die Ergebnisse, die mit dem  $k-\epsilon$ -Modell berechnet wurden, deutliche Abweichungen vom Experiment. Die gemittelte Umlenkung fällt bei  $\Delta\alpha = 1.25^\circ$  um etwa 13% geringer aus als die gemessene. Mit zunehmender Amplitude stimmen die Ergebnisse wieder besser mit dem Experiment überein.

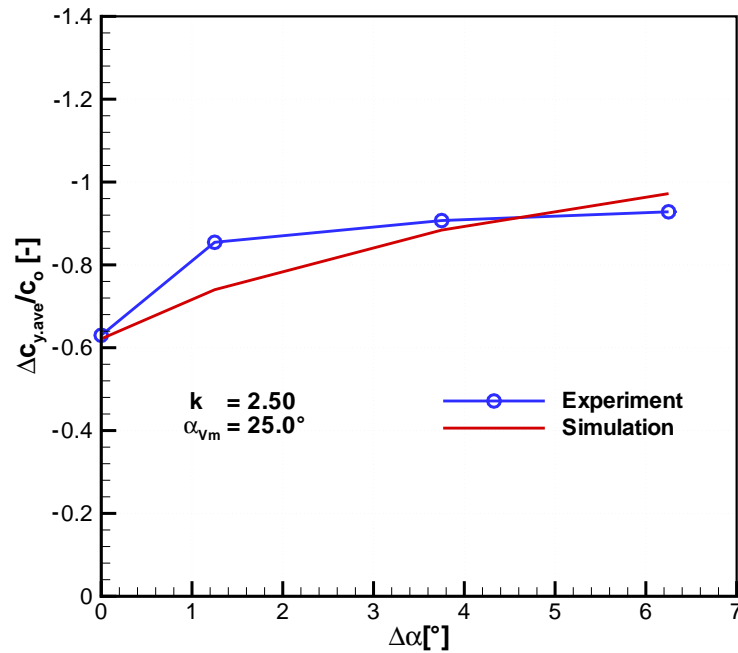


Abb. 6.11: Dimensionslose mittlere Umlenkung  $\Delta c_{y,ave}/c_o$  über der Amplitude  $\Delta\alpha$

Insbesondere ist die Neigung der experimentellen und numerischen Kurve unterschiedlich. Die mittlere Umlenkung des Experiments steigt bis  $\Delta\alpha = 3.75^\circ$  an und fällt dann leicht ab, während sie in der Simulation stetig zunimmt.



### 6.3.3 Einfluß des Anstellwinkels

Zur Simulation des Einflusses des Anstellwinkels wird der Anstellwinkel sowohl bei fixierter als auch bei schwingender Schaufel variiert. Den Fall der fixierten Schaufel dokumentiert Abb. 6.12. Es sind jeweils die dimensionslosen Geschwindigkeitsfelder für die Anstellwinkel  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\alpha = 25^\circ$  und  $\alpha = 30^\circ$  dargestellt. Die Ergebnisse der Simulationsrechnungen zeigen gute Übereinstimmung mit dem Experiment.

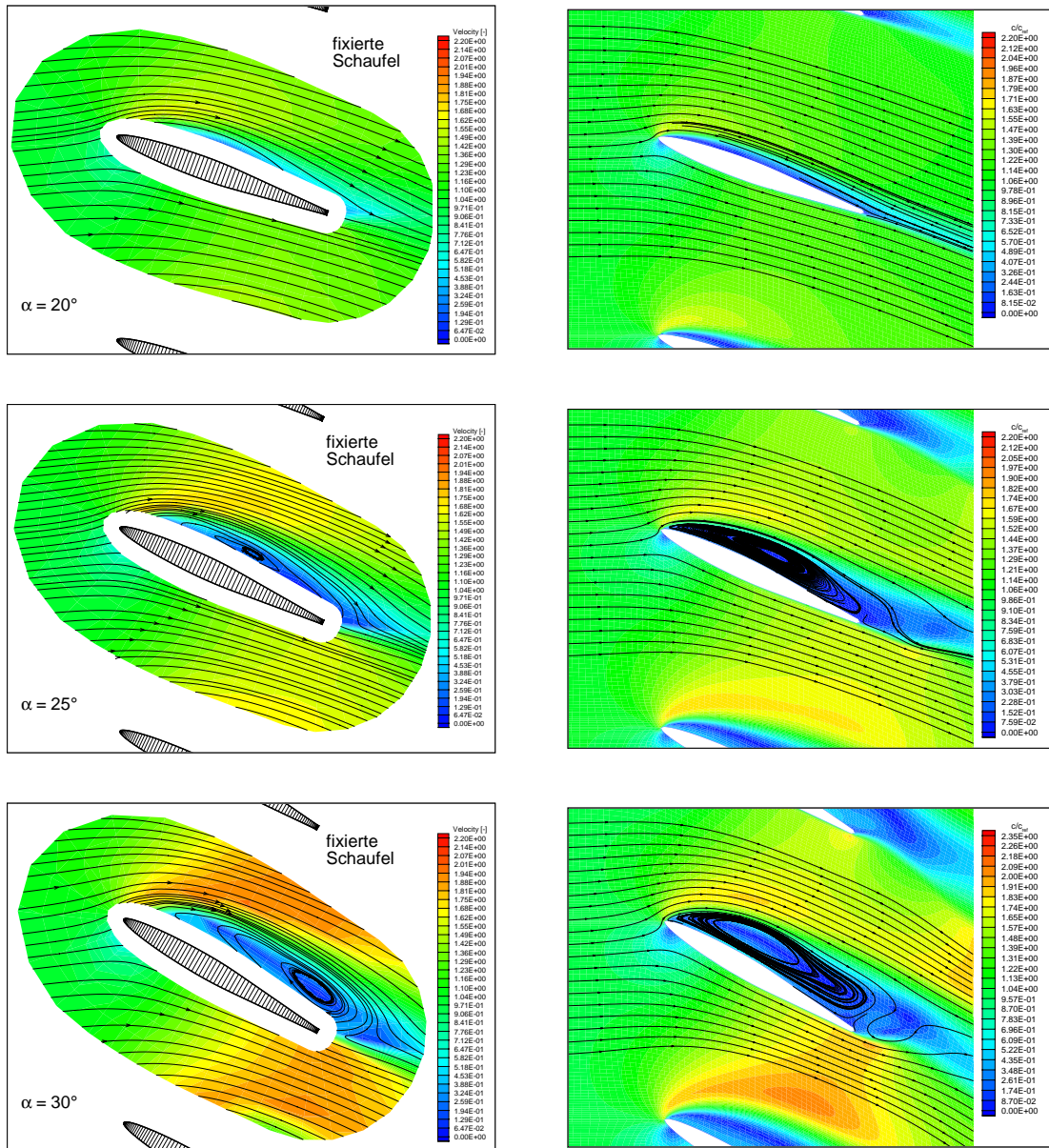


Abb. 6.12: Dimensionslose Geschwindigkeitsfelder für die Anstellwinkel  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\alpha = 25^\circ$  und  $\alpha = 30^\circ$  bei fixierter Schaufel. Links Experiment, rechts Simulation.

Der erwartete Zusammenhang, daß sich das Ablösegebiet mit zunehmendem Anstellwinkel vergrößert, wird bestätigt. Die Intensität des Vorder- und Hinterkantenwirbels nimmt mit dem Anstellwinkel zu. Bei  $\alpha = 30^\circ$  erstreckt sich der Vorderkantenwirbel bis zur Hinterkante, und die Strömung ist vollständig abgelöst.

Für den Fall der schwingenden Schaufel werden, ausgehend von der Referenzuntersuchung, zwei weitere mittlere Anstellwinkel untersucht.

In den Abbildungen 6.13 und 6.14 sind die dimensionslosen Geschwindigkeitsfelder für  $\alpha_m = 20^\circ$  und  $\alpha_m = 30^\circ$  bei den Anstellwinkeln  $\alpha = 25^\circ \downarrow$ ,  $\alpha = \alpha_{min} = 21.25^\circ$ ,  $\alpha = 25^\circ \uparrow$  und  $\alpha = \alpha_{max} = 28.75^\circ$  im Vergleich zum Experiment dargestellt. Der mittlere Anstellwinkel  $\alpha_m = 25^\circ$  entspricht der Referenzuntersuchung, vgl. Abb. 6.4. Die Ergebnisse von Simulation und Experiment zeigen eine gute Übereinstimmung.

Bei  $\alpha_m = 20^\circ$  ist wiederum ein periodisches Abschwimmen des Vorderkantenwirbels feststellbar. Abb. 6.13 zeigt den Vergleich der gemessenen und berechneten instationären Strömungsfelder. Die Rechnung zeigt, daß bei  $\alpha_m = 20^\circ$  eine schwach ausgeprägte abschwimmende Wirbelstruktur vorhanden ist. Im Vergleich zur Referenzuntersuchung ist die Intensität des Vorderkantenwirbels gering. Im Zusammenhang mit dem geringen Anstellwinkel löst sich durch die Kippbewegung der Vorderkante ein großer Teil des Vorderkantenwirbels und schwimmt entlang der Saugseite ab. Da der Mittelwert der Umlenkung klein ist, verursacht der abschwimmende Vorderkantenwirbel eine starke Umlenkungshysterese.

Abb. 6.14 zeigt, daß bei  $\alpha_m = 30^\circ$  die numerischen Ergebnisse im Vergleich zum Experiment besser sind als bei  $\alpha_m = 20^\circ$ . Prinzipiell sind die gleichen Ablösungen und Wirbelinteraktionen zu beobachten. Im Vergleich zur Referenzuntersuchung ist die Intensität des Vorderkantenwirbels stärker. Die Geschwindigkeits- und Wirbelintensitätsverläufe bei  $\alpha = 30^\circ \downarrow$  verdeutlichen diesen Zusammenhang.

Naturgemäß steigt mit zunehmendem Anstellwinkel die Umlenkung in einem Gitter an. Dieser Zusammenhang gilt bei fixierter und schwingender Schaufel im Gitterverband gleichermaßen. In Abb. 6.15 ist die mittlere Umlenkung über dem mittleren Anstellwinkel mit den experimentellen Daten aufgetragen.

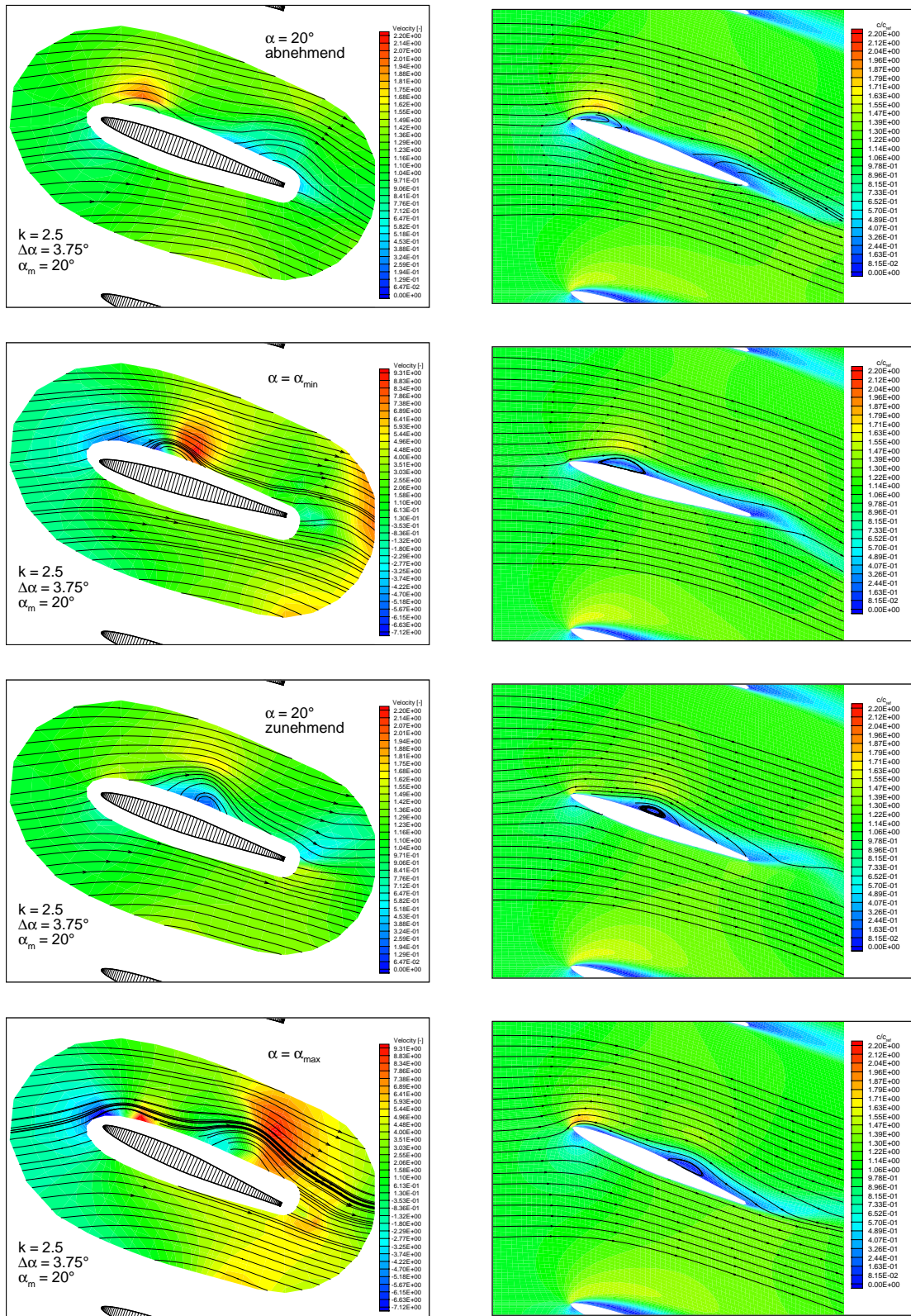


Abb. 6.13: Dimensionslose Geschwindigkeitssfelder für  $\alpha_m = 20^\circ$  bei verschiedenen Phasenlagen. Links Experiment, rechts Simulation.



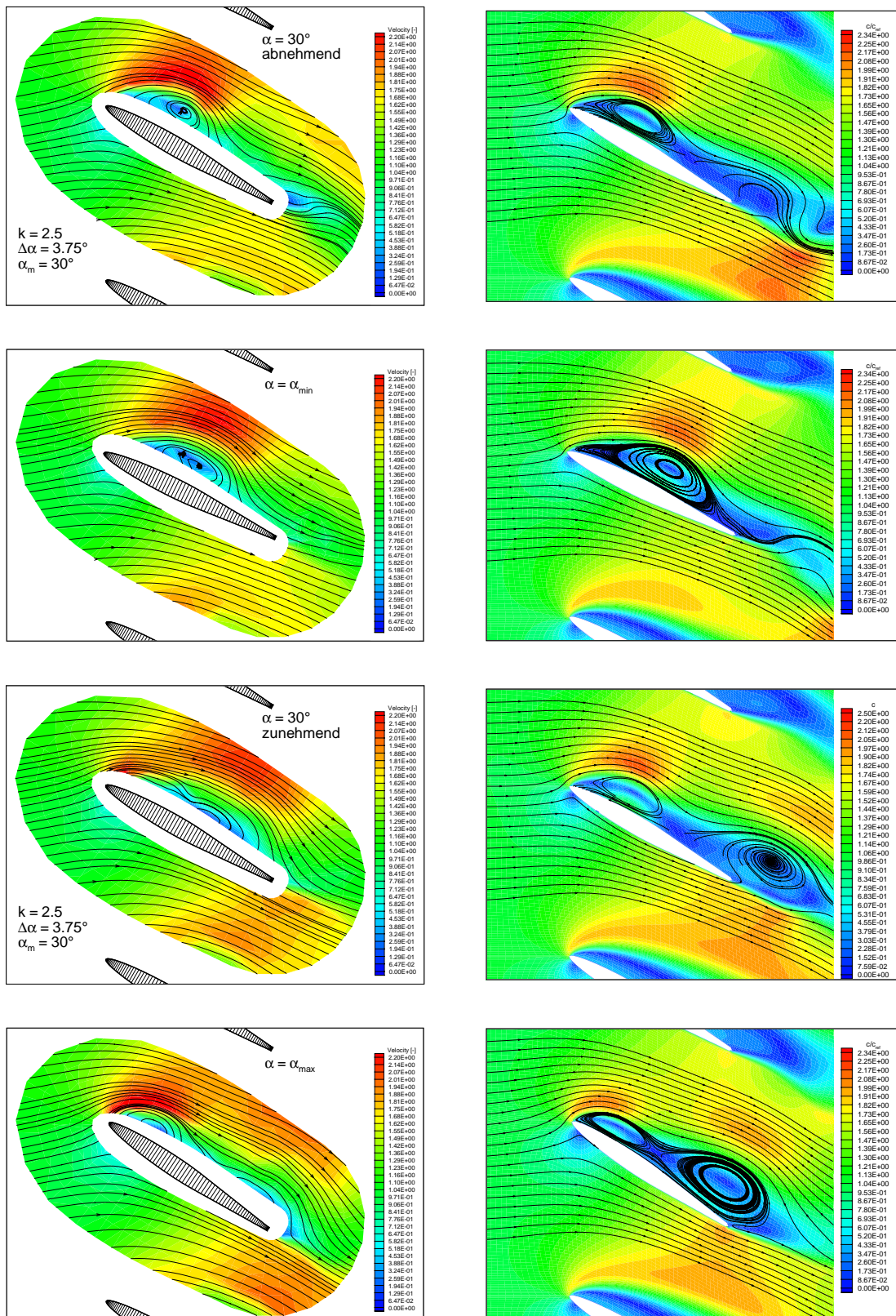


Abb. 6.14: Dimensionslose Geschwindigkeitssfelder für  $\alpha_m = 30^\circ$  bei verschiedenen Phasenlagen. Links Experiment, rechts Simulation.

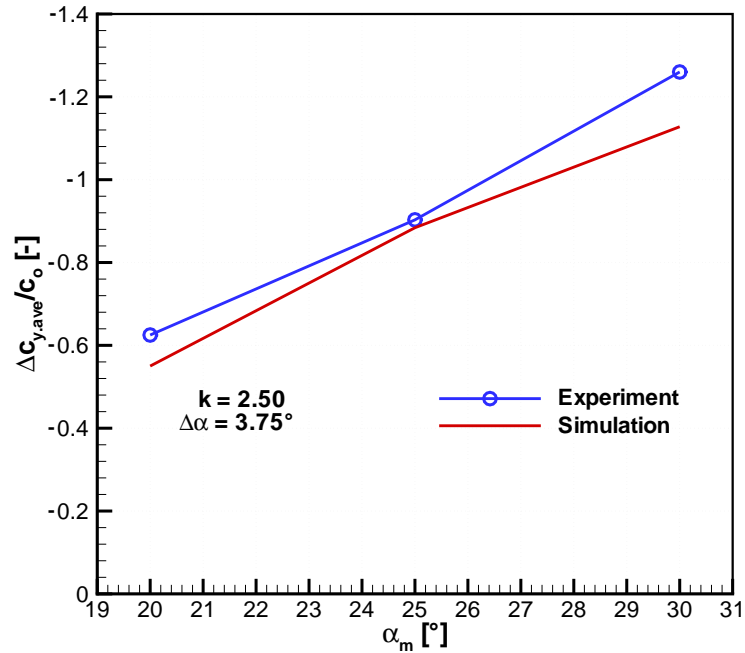


Abb. 6.15: Dimensionslose mittlere Umlenkung  $\Delta c_{y,ave}/c_o$  über dem mittleren Anstellwinkel  $\alpha_m$

Gegenüber der Umlenkung bei fixierter Schaufel sind die größten Effekte durch eine schwingende Schaufel bei  $\alpha_m = 30^\circ$  zu erzielen. In diesem Fall erhöht sich die Umlenkung um ca. den Faktor 1.45. Offensichtlich ist eine vollständige Ablösung des abschwimmenden Vorderkantenwirbels von der Vorderkante nicht erforderlich, um einen positiven Einfluß auf die Umlenkung zu erreichen.

Bei  $\alpha_m = 20^\circ$  ist die mit schwingender Schaufel erzielte Umlenkung nur um den Faktor 1.1 höher als bei fixierter Schaufel.

Bei  $\alpha_m = 25^\circ$  stimmt das Ergebnis der Simulation am besten mit dem Experiment überein.

### 6.3.4 Verluste und Schwingleistung

Im folgenden wird die Energiegleichung hinsichtlich der Strömungsverluste ausgewertet und analysiert. In Tabelle 6.4 sind die Parameter zur Auswertung der Inputleistung und der Strömungsverluste am Einzelgitter eingetragen. Die Definition der Beiwerte ist in Anhang A erläutert.

Der Leistungsverlust der fixierten Schaufel ist nach der Energiegleichung A.32 zu bestimmen. Dabei liefert nur der Totaldrucktransport einen Beitrag zur Verlustleistung.

Zur Bestimmung des Leistungsverlustes der schwingenden Schaufel sind nach der Energiegleichung A.28 drei Terme zu berücksichtigen. Es sind dies der instationäre Term, der Totaldruckterm und der Schwingleistungsterm. Die Schwingleistung wird nach Gleichung A.14 berechnet.

<b>fixierte Schaufel</b>	
Anstellwinkel $\alpha$ [°]	25.0
<b>schwingende Schaufel</b>	
Reynolds-Zahl $Re$ [–]	$1.25 \cdot 10^5$
Reduzierte Frequenz $k$ [–]	0.82, 1.65
Amplitude $\Delta\alpha$ [°]	3.75
Mittlerer Anstellwinkel $\alpha_m$ [°]	25.0

Tabelle 6.4: Parameter zur Auswertung der Inputleistung und der Strömungsverluste am Einzelgitter

Die resultierenden Verlustbeiwerte des Totaldrucktransports, der zeitlichen Änderung der kinetischen Energie und der Schwingleistung werden am Einzelgitter bei schwingender Schaufel mit den über eine Periode gemittelten Werten ermittelt. Die Werte sind auf die Strömungsleistung der Zuströmgeschwindigkeit  $\frac{\rho}{2}c_o^3bt$  bezogen.

In Abb. 6.16 sind die Beiwerte für die Abnahme der Verlustleistung  $\Delta\zeta_v$  und die Zunahme der zugeführten Schwingleistung  $\lambda$  in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz  $k$  aufgetragen. Die berechneten Beiwerte ergeben eine zufriedenstellende Übereinstimmung mit dem Experiment. Im Fall des Einzelgitters liegt der größte Effekt bei ca.  $k = 1.65$  (entspricht  $f = 80Hz$  im Experiment). Dort beträgt die Schwingenergie nur bis 1% der dynamischen Leistung und die Verringerung der

Energieverluste 3%.

Die Vorhersage der  $\Delta\zeta_v$ - und  $\lambda$ -Beiwerte bei  $k = 1.65$  weist Abweichungen zum Experiment auf. Dies liegt daran, daß die kinetische Energie aufgrund der Schwingbewegung starke Fluktuationen aufweist. Bei der Bildung des zeitlichen Mittelwertes der Verlustleistung spielt die zeitliche Änderung der kinetischen Energie jedoch eine Rolle. Ihr Betrag verschwindet bei Mittelung über eine Periode nicht. Im Experiment wurde dies nicht berücksichtigt. Somit sind die experimentellen Beiwerte mit einer großen Unsicherheit behaftet, so daß hier lediglich Tendenzen betrachtet werden können. Dies wird in Kap. 6.5.1 genau analysiert.

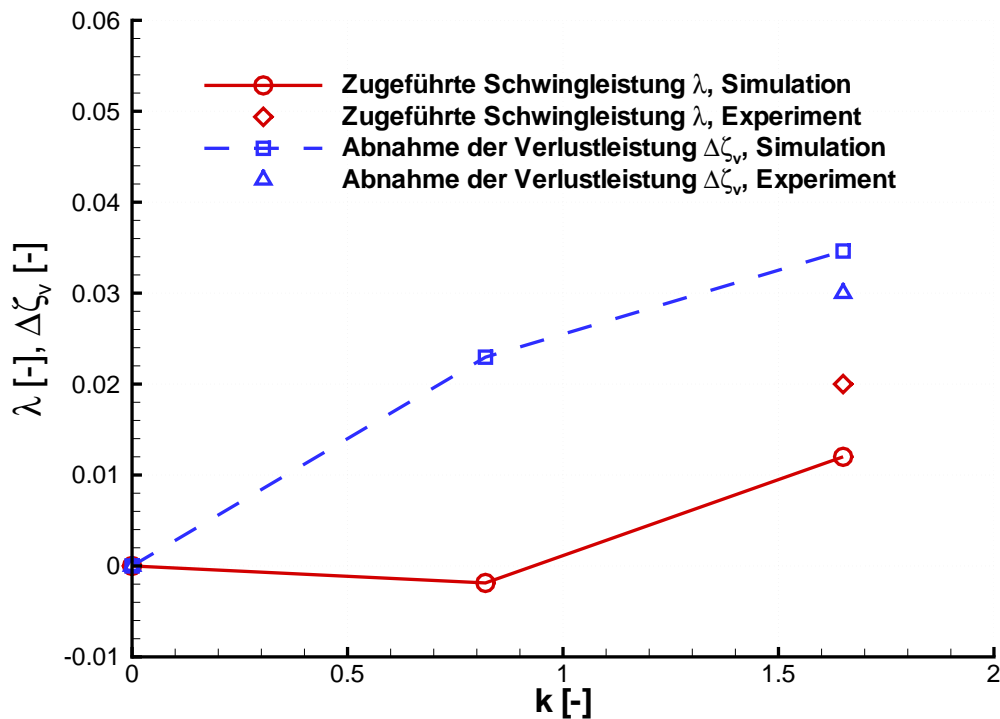


Abb. 6.16: Beiwerte für die Abnahme der Verlustleistung  $\Delta\zeta_v$  und die Zunahme der zugeführten Schwingleistung  $\lambda$  in Abhängigkeit von der reduzierten Frequenz  $k$

## 6.4 Simulation am Tandemgitter

Das Tandemgitter besteht aus einem Vorleitgitter und einem nachgeschalteten Gitter. Der Aufbau des Tandemgitters ist identisch mit dem Experiment von WERDECKER [22]. Die schwingfähige Schaufel befindet sich im Vorleitgitter und entspricht damit dem Versuchsaufbau in Kap. 6.3. Das Gesamtrechnengebiet des Tandemgitters wird in 6 Blockabschnitte untergliedert, wobei jeder Block, wie in Kap. 4.1.3 erläutert, mit der H-Netz Topologie vernetzt wird, vgl. Abb. 4.4. Bei schwingender Vorleitschaufel ergibt sich im nachgeschalteten Gitter, insbesondere an der nachgeschalteten Schaufel, eine instationäre Zuströmung. Die Auswirkung dieser instationären Zuströmung auf die Umströmung der Schaufel wird im folgenden genauer untersucht.

Die Berechnungen sind analog zum Einzelgitter. Es wird systematisch der Einfluß der reduzierten Frequenz, der Amplitude und des Anstellwinkels des nachgeschalteten Gitters untersucht. Für eine gegebene Parametereinstellung werden sowohl die Strömungsumlenkung bestimmt als auch die Verluste und Schwingleistung analysiert.

### 6.4.1 Strömungsfeld und Umlenkung

Die Untersuchung des Einflusses der genannten Parameter auf das Strömungsfeld und auf die Umlenkung basiert auf einer Referenzuntersuchung. Ausgehend von den Referenzparametern wird jeweils nur ein Parameter variiert. Die anderen beiden Parameter werden konstant gehalten. Die Ergebnisse werden wiederum mit denen von WERDECKER [22] verglichen.

### 6.4.2 Referenzuntersuchung

Tabelle 6.5 enthält die Parameter und Netzknoten-Anzahl der Referenzuntersuchung am Tandemgitter. Dies wird mit fixierter und schwingender Vorleitschaufel durchgeführt. Der Anstellwinkel der fixierten Vorleitschaufeln und der mittlere Anstellwinkel der schwingenden Vorleitschaufel sind identisch. Die Berechnungen werden mit Hilfe des Standard  $k - \epsilon$  Modells durchgeführt. Es werden 10 Zyklen berechnet, wobei jeder Zyklus in 60 Zeitschnitte unterteilt ist. Im Falle des bewegten Netzes wird der in Kap. 4.7 beschriebene Algorithmus angewendet.



fixierte Vorleitschaufel	
Anstellwinkel der Vorleitschaufel $\alpha_V$ [°]	-10.0
Anstellwinkel der nachgeschalteten Schaufel $\alpha_T$ [°]	37.0
schwingende Vorleitschaufel	
Reduzierte Frequenz $k$ [-]	2.5
Amplitude $\Delta\alpha$ [°]	3.75
Mittlerer Anstellwinkel der Vorleitschaufel $\alpha_{mV}$ [°]	-10.0
Anstellwinkel der nachgeschalteten Schaufel $\alpha_T$ [°]	37.0
Reynolds-Zahl $Re$ [-]	$0.8 \cdot 10^5$
Netzknoten-Anzahl	
Block 1 : $I \times J \times K$	$204 \times 40 \times 3$
Block 2 : $I \times J \times K$	$204 \times 60 \times 3$
Block 3 : $I \times J \times K$	$204 \times 60 \times 3$
Block 4 : $I \times J \times K$	$204 \times 60 \times 3$
Block 5 : $I \times J \times K$	$204 \times 60 \times 3$
Block 6 : $I \times J \times K$	$204 \times 50 \times 3$

Tabelle 6.5: Parameter und Netzknoten der Referenzuntersuchung am Tandemgitter

Zuerst wird mit fixierter Schaufel gerechnet. Die Strömung wird als stationär angenommen. Abb. 6.17 zeigt das dimensionslose Geschwindigkeitsfeld  $c/c_{ref}$  um die betrachtete Schaufel für das Experiment und die Simulation. Im Geschwindigkeitsfeld ist zusätzlich der Stromlinienverlauf eingezeichnet. Im Fall der fixierten Vorleitschaufel stellt sich eine vollständige Ablösung ein. Anhand des Stromlinienverlaufs erkennt man die Ausdehnung des Rezirkulationsgebietes. Die Simulationsergebnisse stimmen gut mit dem Experiment [22] überein. Das Ablösungsgebiet ist etwas kleiner als beim Experiment. Das hat seine Ursache in dem verwendeten Turbulenzmodell.

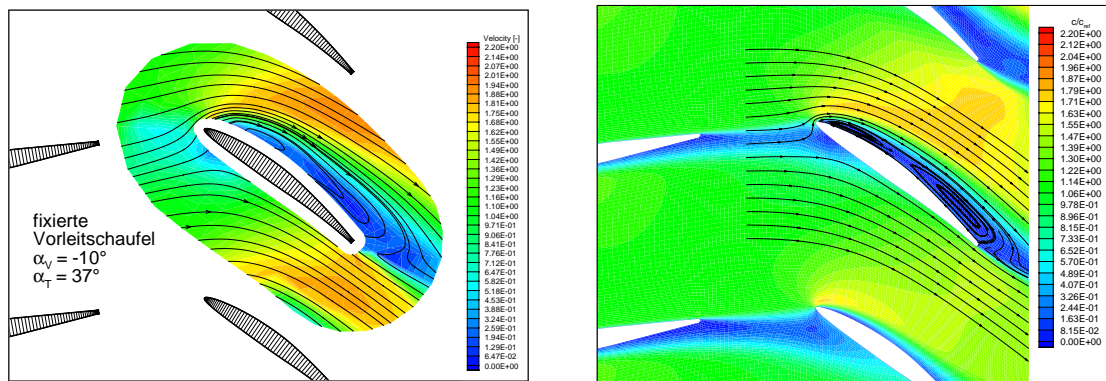


Abb. 6.17: Dimensionsloses Geschwindigkeitsfeld bei der Referenzuntersuchung mit fixierter Vorleitschaufel. Links Experiment, rechts Simulation.

Im folgenden wird mit schwingender Schaufel gerechnet. Die Startlösung basiert auf der oben ausgewerteten stationären Lösung. Im Fall der schwingenden Vorleitschaufel ist prinzipiell eine Analogie zur schwingenden Schaufel im Einzelgitter festzustellen. Das die Strömung charakterisierende Wirbelsystem besteht ebenso aus einem Vorderkantenwirbel, einem abschwimmenden Vorderkantenwirbel einer vorhergehenden Periode und einem Hinterkantenwirbel. Offenbar bewirkt die sich periodisch ändernde Zuströmung durch die sinusförmig schwingende Vorleitschaufel ähnliche Strömungsphänomene wie die Kippbewegung der Schaufelnase an der schwingenden Schaufel im Einzelgitter. In beiden Fällen ist die Strömung durch einen sich periodisch verändernden Inzidenzwinkel charakterisiert. Ausgehend von der Hinterkante der Vorleitschaufel schwimmen alternierend positiv und negativ drehende Wirbel ab. Die zeitlich variable Zuströmung verhindert die Ausbildung einer Ablösung.

In Abb. 6.18 wird die dimensionslose instationäre turbulente kinetische Energie bei der Referenzströmung für die Abwärtsbewegung bei Anstellwinkel  $\alpha_V = -10^\circ \downarrow$  im Gesamtberechnungsgebiet dargestellt. Das Ergebnis der Simulation liefert detaillierte Informationen über die Struktur der hochturbulenten Strömung. Im gesamten Gebiet ist die Strömung unsymmetrisch. Abb. 6.18 zeigt in einer Momentaufnahme die von Kanal zu Kanal unterschiedliche instationäre Strömung. Der Einfluß der Schwingung auf die Strömung ist deutlich.

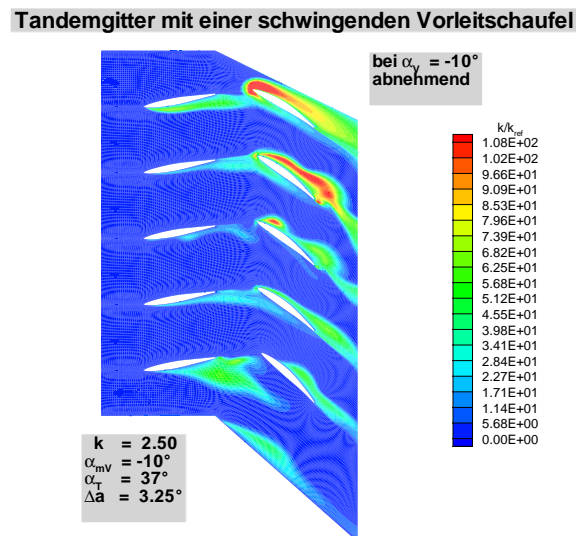


Abb. 6.18: Berechnete dimensionslose turbulente kinetische Energie der Referenzströmung

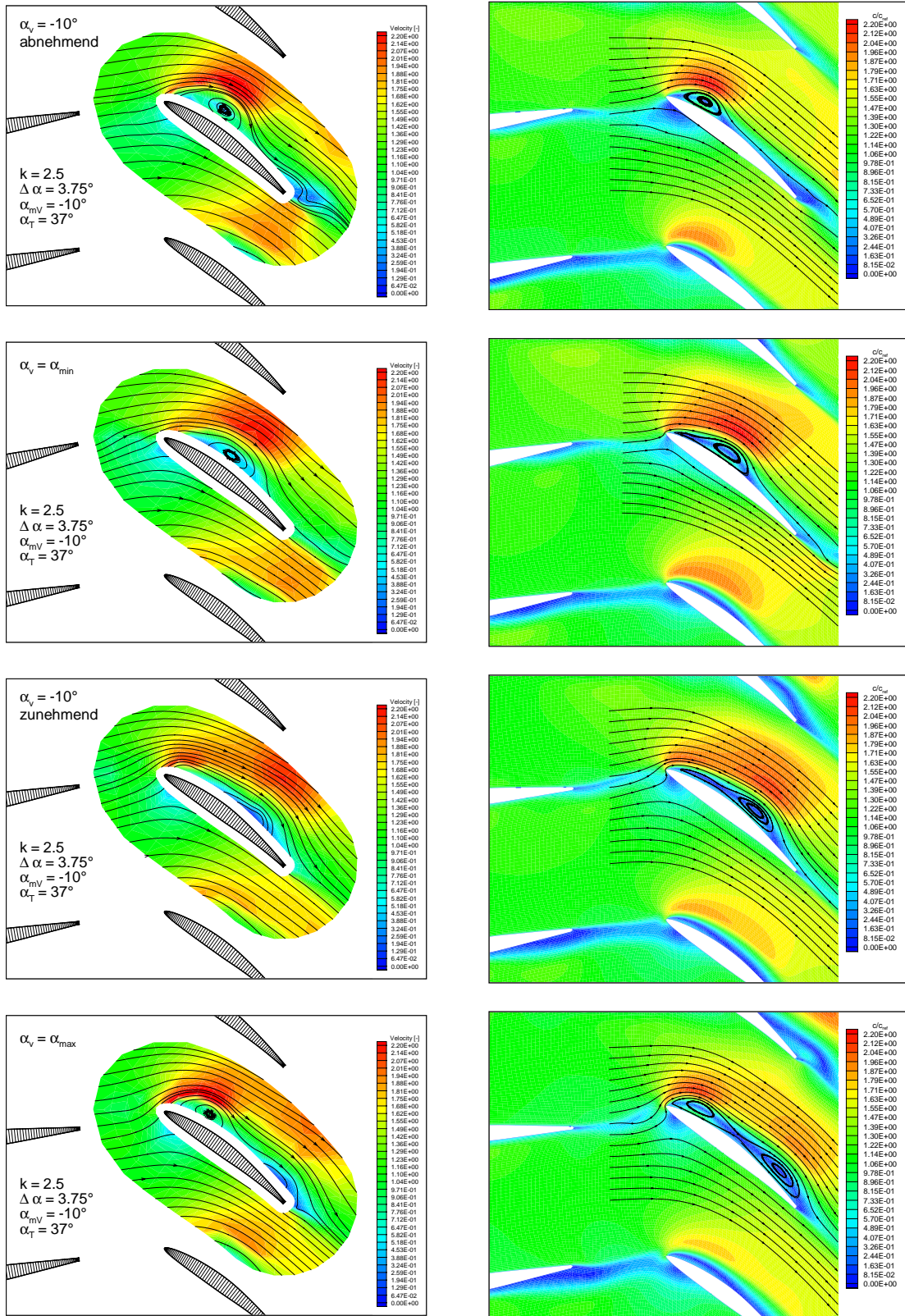


Abb. 6.19: Dimensionslose Geschwindigkeitsfelder für die Referenzuntersuchung  $k = 2.5$  bei verschiedenen Phasenlagen. Links Experiment, rechts Simulation.

Abb. 6.19 zeigt für vier verschiedene Phasenlagen die instationären Geschwindigkeitsfelder aus Simulation und Experiment. Im Vergleich zur vollständigen Ablösung bei fixierter Vorleitschaufel zeigt die Strömung bei schwingender Vorleitschaufel nur lokale Ablösegebiete. Die numerischen Ergebnisse stimmen recht gut mit dem Experiment überein, vgl. Abb. 6.19. Bei  $\alpha_V = \alpha_{max} = -6.25^\circ$  ist eine lokale Hinterkantenablösung deutlicher sichtbar als beim Experiment.

Bei  $\alpha_V = -10^\circ \downarrow$  kommt es im Berührungsgebiet des abschwimmenden Vorderkantenwirbels und des Hinterkantenwirbels zu einer starken Krümmung der Stromlinien. Dieser Zusammenhang läßt auf ein lokales Rezirkulationsgebiet an der saugseitigen Hinterkante schließen. Während des weiteren Verlaufes wird die Intensität des Hinterkantenwirbels durch den entgegengesetzt drehenden, abschwimmenden Vorderkantenwirbel geschwächt. Der im Vergleich zum moderaten Inzidenzwinkel unverhältnismäßig große Vorderkantenwirbel wird zunehmend instabil.

Bei  $\alpha_V = \alpha_{min} = -13.75^\circ$  zeigt der Vorderkantenwirbel eine deutliche Ablösezone. Ein großer Teil des Vorderkantenwirbels wird unter der Wirkung der Außenströmung stromabwärts transportiert. Der in dieser Phasenlage schwache Hinterkantenwirbel hat nur geringen Einfluß auf die Umlenkung. Am Wirbelintensitätsfeld erkennt man einen zusätzlichen, negativ drehenden Wirbel in kurzer Entfernung stromauf der Vorderkante. Es handelt sich hierbei um einen von der Hinterkante der Vorleitschaufel abschwimmenden Wirbel.

Bei  $\alpha_V = -10^\circ \uparrow$  ist bereits ein großer Teil des Vorderkantenwirbel abgeschwommen. Dennoch hat sich der abschwimmende Teilwirbel nicht vom Vorderkantenwirbel gelöst. Wegen der in dieser Phasenlage starken Fehlanströmung (großer Inzidenzwinkel) kommt es zu einer Intensitätszunahme des Vorderkantenwirbels.

Bei  $\alpha_V = \alpha_{max} = -6.25^\circ$  hat sich der abschwimmende Vorderkantenwirbel vollständig separiert. In der Wechselwirkungszone mit dem Hinterkantenwirbel kommt es zu einer lokalen Hinterkantenablösung. Der Effekt auf die Umlenkung ist jedoch gering. Aufgrund der weiterhin vorliegenden starken Fehlanströmung nimmt die Intensität des Vorderkantenwirbels weiter zu. Am Wirbelintensitätsfeld erkennt man einen positiv drehenden Wirbel in kurzer Entfernung stromauf der Vorderkante. Es handelt sich hierbei um einen erneut von der Hinterkante der Vorleitschaufel abschwimmenden Wirbel. Die Phasenverschiebung zum ebenso von der Hinterkante der Vorleitschaufel abschwimmenden negativ drehenden Wirbel beträgt  $180^\circ$ .

Abb. 6.20 zeigt den Verlauf der dimensionslosen Umlenkung  $\Delta c_y/c_o$  über dem Anstellwinkel  $\alpha_V$  für Vorleitschaufel und nachgeschaltete Schaufel im Vergleich zum Experiment.

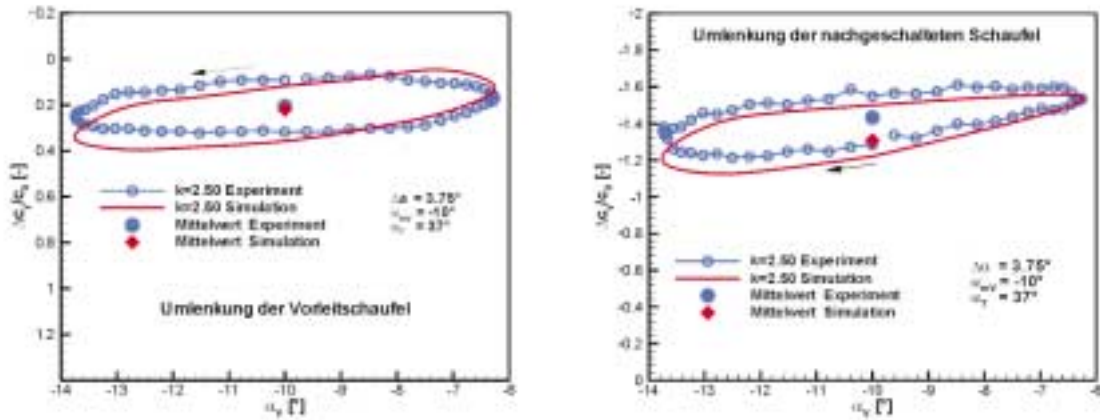


Abb. 6.20: Dimensionslose Umlenkung  $\Delta c_y/c_o$  über dem Anstellwinkel  $\alpha_V$  für reduzierte Frequenz  $k = 2.50$

Der Umlaufsinn der Umlenkungsverläufe ist jeweils durch Pfeile gekennzeichnet. Erwartungsgemäß besteht eine Umlenkungshysterese zwischen der Phase des zunehmenden und abnehmenden Anstellwinkels. Für die Vorleitschaufel ist der periodische Mittelwert der Umlenkung etwa gleich für Experiment und Berechnung. Für die nachgeschaltete Schaufel ergibt sich eine Abweichung. Der berechnete periodische Mittelwert liegt etwas unter dem des Experimentes.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß die Schwingbewegung der Vorleitschaufel einen starken Einfluß auf die Strömung und Umlenkung der nachgeschalteten Schaufel hat. Während der Phase großer Inzidenzwinkel kommt es zu einer starken Zunahme der Intensität des Vorderkantenwirbels. Bei der darauffolgenden Phase kleiner Inzidenzwinkel ist die Intensität des Vorderkantenwirbels unverhältnismäßig groß. Der Vorderkantenwirbel bzw. ein Teil desselben wird durch die tendenziell eher schaufelkongruente Außenströmung von der Vorderkante gelöst und schwimmt ebenso wie bei der schwingenden Schaufel im Einzelgitter mit ca. 40% der Außenströmungsgeschwindigkeit ab. Bis zum Erreichen der Hinterkante verringert sich die Intensität um ca. 60%. Dieser Vorgang wiederholt sich periodisch, so daß sich keine großflächige Ablösung ausbilden kann. Im Zusammenhang mit der Wirkung des abschwimmenden Vorderkantenwirbels entstehen nur lokale Ablösungen.

### 6.4.3 Einfluß der reduzierten Frequenz

Ausgehend von der Referenzuntersuchung am Tandemgitter, vgl. Tabelle 6.5, werden zwei weitere reduzierte Frequenzen berechnet. In Abb. 6.21 sind die dimensionslosen instationären Geschwindigkeitsfelder für die reduzierten Frequenzen  $k = 1.25$  und  $k = 3.75$  bei den Anstellwinkeln  $\alpha_V = \alpha_{min} = -13.75^\circ$  und  $\alpha_V = \alpha_{max} = -6.25^\circ$  dargestellt. Das Strömungsfeld und Wirbelsystem der Berechnung für  $k = 1.25$  stimmen befriedigend mit dem Experiment überein. Die Übereinstimmung für  $k = 3.75$  ist sogar noch besser.

Für  $k = 1.25$  erkennt man an den Stromlinienverläufen großflächige Ablösungen und Rezirkulationen bei allen Phasenlagen. Im Vergleich zur Referenzuntersuchung mit  $k = 2.5$  ändert sich die Zuströmung der Schaufel. Entsprechend ist die Zeitdauer, in der die Schaufel mit großen Inzidenzwinkeln fehlangeströmt wird, doppelt so groß, und der Strömung bleibt doppelt so viel Zeit zur Ausbildung einer Vorderkantenablösung. Der abschwimmende Teil des Vorderkantenwirbels benötigt nur ca. die Hälfte der Periodendauer um bis zur Hinterkante abzuschwimmen. Entsprechend kann er seinen positiven Einfluß auf die Umlenkung nur kurz ausüben. Während der restlichen Periodendauer wird die Umlenkung durch den Hinterkantenwirbel negativ beeinflusst.

Bei  $k = 3.75$  erkennt man anhand der Geschwindigkeitsfelder und Wirbelintensität wiederum ein die Umlenkung stark beeinflussendes System aus Vorderkantenwirbel, abschwimmendem Vorderkantenwirbel und Hinterkantenwirbel. Entsprechend der im Vergleich zur Referenzuntersuchung um 50% gesteigerten reduzierten Frequenz benötigt der Vorderkantenwirbel etwa die 1.5-fache Periodendauer, um bis zur Hinterkante abzuschwimmen. Der dadurch bedingte kurze Abstand der beiden negativ drehenden Wirbel, des Vorderkantenwirbels und des abschwimmenden Vorderkantenwirbels, beeinflusst die Umlenkung negativ. Dieser Zusammenhang zeigt sich anhand des Stromlinienverlaufs bei beiden Phasenlagen.



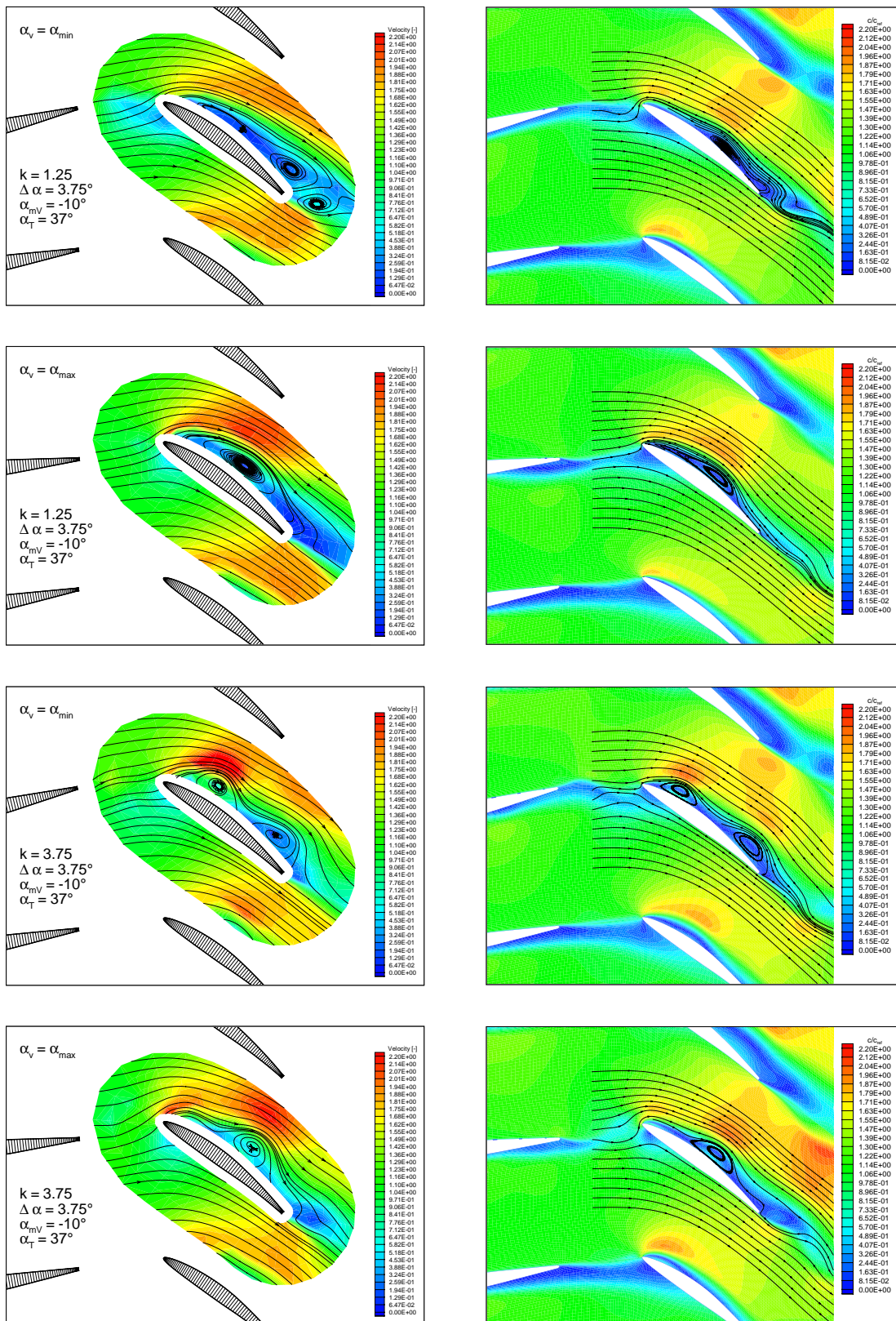


Abb. 6.21: Dimensionslose Geschwindigkeitsfelder für  $k = 1.25$  und  $k = 3.75$  bei verschiedenen Phasenlagen. Links Experiment, rechts Simulation.

Die reduzierte Frequenz hat einen starken Einfluß auf das Niveau und den Verlauf der Umlenkung im Tandemgitter. Um den Einfluß der reduzierten Frequenz auf die Umlenkung besser beurteilen zu können, wird die zeitlich gemittelte Strömungsumlenkung mit experimentell ermittelten Referenzdaten verglichen. Es zeigen sich ähnliche Strömungsphänomene wie bei der Umströmung einer schwingenden Schaukel im Einzelgitter. In Abb. 6.20 ist die mittlere Umlenkung über der reduzierten Frequenz aufgetragen. Die reduzierte Frequenz  $k = 0$  steht für die fixierte Vorleit-schaukel. Die periodische mittlere Umlenkung steigt mit der reduzierten Frequenz an und erreicht bei  $k = 2.5$  ein Maximum.

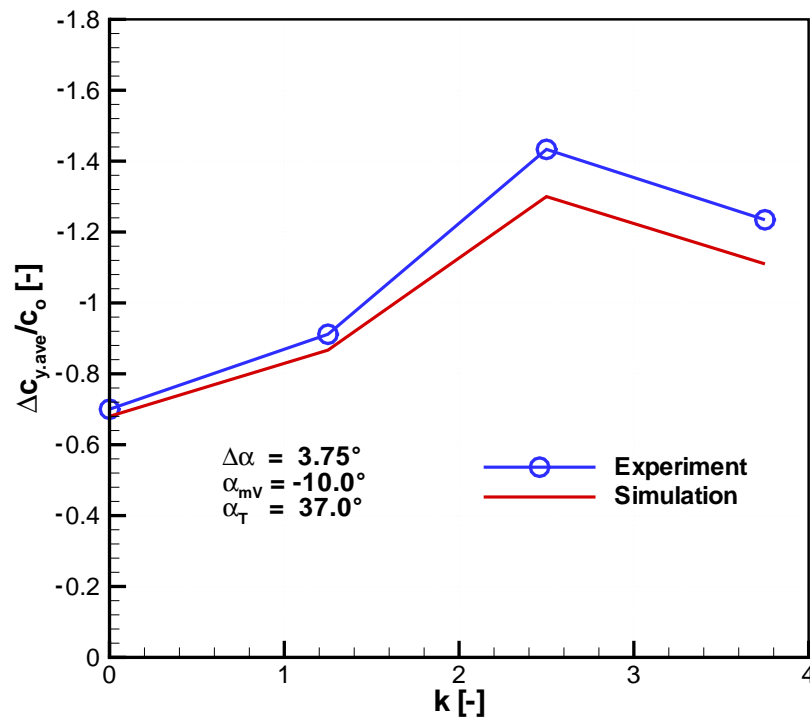


Abb. 6.22: Dimensionslose mittlere Umlenkung  $\Delta c_{y,ave}/c_o$  über der reduzierten Frequenz  $k$

Insbesondere ist die Steigung der experimentellen und numerischen Kurve unterschiedlich. Die Berechnung liefert kleinere Werte als das Experiment.



#### 6.4.4 Einfluß der Amplitude

Eine Parameterstudie für zwei weitere Amplituden wird ausgehend von der Referenzuntersuchung am Tandemgitter, vgl. Tabelle 6.5, durchgeführt. In Abb. 6.23 ist die Momentaufnahme dimensionsloser Geschwindigkeitsfelder für die Amplituden  $\Delta\alpha = 1.25^\circ$  und  $\Delta\alpha = 6.25^\circ$  bei den Anstellwinkeln  $\alpha_V = \alpha_{min} = -11.25^\circ$  und  $\alpha_V = \alpha_{max} = -8.75^\circ$  dargestellt. Die Amplitude  $\Delta\alpha = 3.75^\circ$  entspricht der Referenzuntersuchung, vgl. Abb. 6.19. Die Übereinstimmung der numerischen Ergebnisse des Standard  $k - \epsilon$  Modells mit denen des Experimentes von WERDECKER [22] ist gut.

Bei  $\Delta\alpha = 1.25^\circ$  ist die Änderung des Inzidenzwinkels vergleichsweise gering. Entsprechend gering ist die Intensitätsänderung der die Umlenkung beeinflussenden Wirbel. Prinzipiell kommt es jedoch zum gleichen Phänomen des periodischen Abschwimmens eines Teils des Vorderkantenwirbels, ähnlich wie bei der Referenzuntersuchung. Die Umlenkung steigt zwischen den beiden Phasenlagen  $\alpha_V = -11.25^\circ = \alpha_{min}$  und  $\alpha_V = -8.75^\circ = \alpha_{max}$  etwa um den Faktor 1.4.

Bei  $\Delta\alpha = 6.25^\circ$  ist die Umlenkung am größten, vgl. Abb. 6.24. Aufgrund der großen Amplitude ändert sich der Inzidenzwinkel während einer Periode stark. Anhand der Wirbelintensitätsfelder ist zu erkennen, daß die Intensität der von der Vorleit-schaufel abschwimmenden Wirbel verhältnismäßig groß ist. Für das die Umlenkung beeinflussende Wirbelsystem sind wiederum die gleichen Zusammenhänge wie bei der Referenzuntersuchung festzustellen. Aufgrund der verstärkten instationären Zu-strömbedingungen sind die Effekte jedoch ausgeprägter.

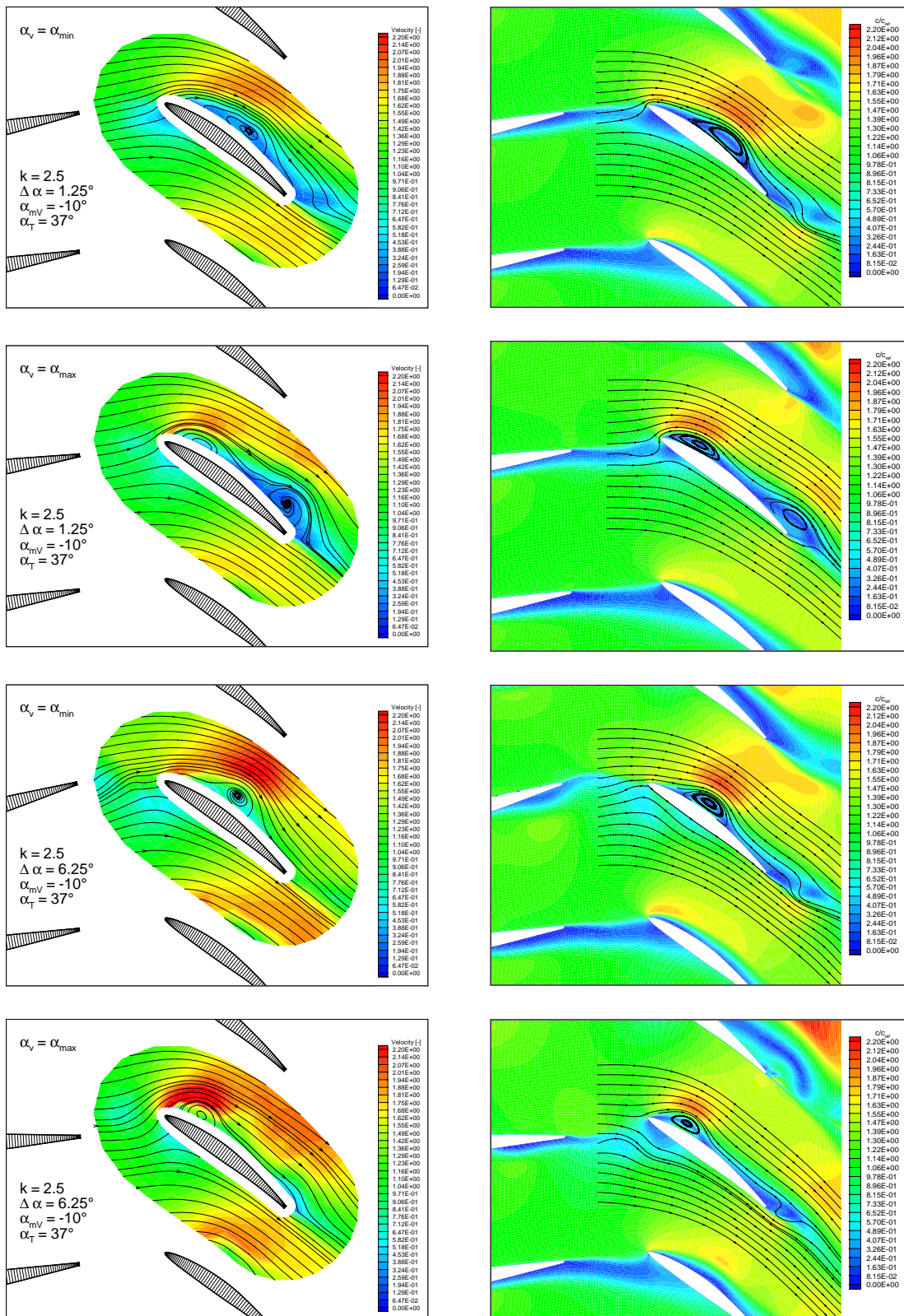


Abb. 6.23: Dimensionslose Geschwindigkeitsfelder für  $\Delta\alpha = 1.25^\circ$  und  $\Delta\alpha = 6.25^\circ$  bei verschiedenen Phasenlagen. Links Experiment, rechts Simulation.

Der Einfluß der Amplitude der schwingenden Vorleitschaufel äußert sich in der Intensität der auftretenden Wirbel. Mit steigender Amplitude wächst der sich lösende und abschwimmende Anteil des Vorderkantenwirbels. In Abb. 6.24 ist der Mittelwert der Umlenkung über der Amplitude aufgetragen. Die Amplitude  $\Delta\alpha = 0^\circ$  steht für die fixierte Vorleitschaufel. Die numerische Berechnung liefert geringere mittlere Umlenkungswerte als das Experiment.

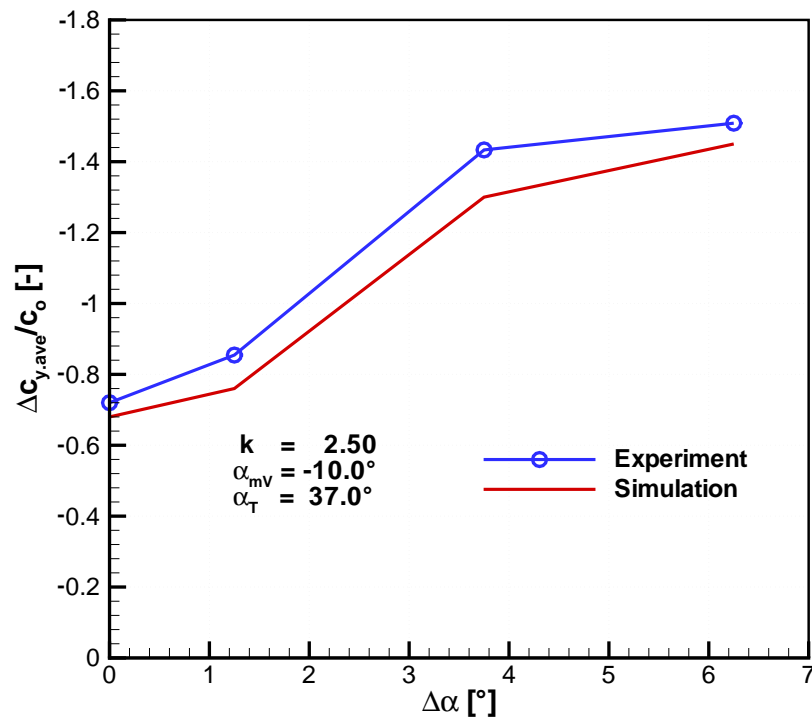


Abb. 6.24: Dimensionslose mittlere Umlenkung  $\Delta c_{y,ave}/c_o$  über der Amplitude  $\Delta\alpha$

Die berechnete gemittelte Umlenkung fällt bei  $\Delta\alpha = 3.75^\circ$  etwa um 10% geringer aus als im Vergleich zum gemessenen Wert. Die gemittelte Umlenkung steigt bei kleinen Amplituden steil an. Bei höheren Amplituden wird die Zunahme der Umlenkung geringer. Zwischen  $\Delta\alpha = 3.75^\circ$  und  $\Delta\alpha = 6.25^\circ$  beträgt die Zunahme der mittleren Umlenkung nur noch etwa 7%. Die gemessene gemittelte Umlenkung wächst für  $\Delta\alpha \leq 3.75^\circ$  mit steigender Amplitude nur noch wenig. In der Simulation dagegen ist der Anstieg größer. Im Diagramm ist deutlich der Einfluß der Amplitude auf die Umlenkung zu sehen.

### 6.4.5 Einfluß des Anstellwinkels

Zur Beurteilung des Einflusses des Anstellwinkels des nachgeschalteten Gitters auf das Strömungsfeld und die Umlenkung erfolgt sowohl für die fixierte als auch für die schwingende Vorleitschaufel. Zu diesem Zweck werden ausgehend von der Referenzuntersuchung am Tandemgitter, vgl. Tabelle 6.5, zwei weitere Anstellwinkel betrachtet. Die berechneten dimensionslosen Geschwindigkeitsfelder für die fixierte Vorleitschaufel sind bei den Anstellwinkeln  $\alpha_T = 25^\circ$ ,  $\alpha_T = 31^\circ$  und  $\alpha_T = 37^\circ$  in Abb. 6.25 für Messung und Rechnung dargestellt. Der Anstellwinkel  $\alpha_T = 37^\circ$  entspricht dem Referenzfall und die zugehörigen Felder sind bereits in Abb. 6.17 gezeigt. Zum besseren Vergleich werden diese Felder jedoch in Abb. 6.25 nochmals dargestellt. Es zeigt sich bei Experiment und Simulation, daß mit zunehmendem Anstellwinkel die Ausdehnung der Ablösung stark zunimmt. Während bei  $\alpha_T = 25^\circ$  nur eine lokale Ablösung an der Vorderkante vorhanden ist, liegt bei  $\alpha_T = 37^\circ$  eine von der Saugseite vollständig abgelöste Strömung vor. Für die Umlenkung ergibt sich dadurch nur ein schwacher Anstieg über dem Anstellwinkel.

In Abb. 6.26 sind die dimensionslosen Geschwindigkeitsfelder von Messung und Rechnung für  $\alpha_T = 25^\circ$  und  $\alpha_T = 31^\circ$  bei den Vorleitschaufelwinkeln  $\alpha_V = -10^\circ \downarrow$ ,  $\alpha_V = \alpha_{min} = -13.75^\circ$ ,  $\alpha_V = -10^\circ \uparrow$  und  $\alpha_V = \alpha_{max} = -6.25^\circ$  dargestellt. Der Vorleitschaufelwinkel  $\alpha_T = 37^\circ$  entspricht der Referenzuntersuchung, vgl. Abb. 6.19.

Im Vergleich zum Referenzfall und dem Experiment ist bei  $\alpha_T = 25^\circ$  die Außenströmungsgeschwindigkeit gering. Entsprechend gering ist auch die Geschwindigkeit, mit der abgelöste Teile des Vorderkantenwirbels entlang der Saugseite abschwimmen. Im Zusammenhang mit der im Verhältnis zur Frequenz geringen Strömungsgeschwindigkeit ergibt sich ein geringer Abstand der periodisch abschwimmenden Vorderkantenwirbel. Effektiv ist die reduzierte Frequenz der beobachteten Strömung größer als bei der Referenzuntersuchung, sofern man zur Bildung der reduzierten Frequenz die Geschwindigkeit der Außenströmung einsetzt. Auf die Umlenkung haben die in kurzer Folge abschwimmenden Wirbel kaum Auswirkungen. Wie die Untersuchung mit fixierter Vorleitschaufel zeigt, treten bei  $\alpha_T = 25^\circ$  ohnehin nur lokale Vorderkantenablösungen auf, so daß die Umlenkung generell hoch ist.

Der beim Anstellwinkel  $\alpha_T = 25^\circ$  erläuterte Zusammenhang gilt bei  $\alpha_T = 31^\circ$  ebenso, jedoch in abgeschwächter Form. Aufgrund der gesteigerten Außenströmungsgeschwindigkeit ist der Abstand der abschwimmenden Vorderkantenwirbel größer. Gegenüber der fixierten Vorleitschaufel ist eine größere Umlenkung zu beobachten. Im Vergleich zum Referenzfall läßt sich folgende Aussage ableiten: Je stärker die Ablösung bei fixierter Vorleitschaufel, desto größer ist die Verbesserung der Umlenkung durch die Schwingbewegung.

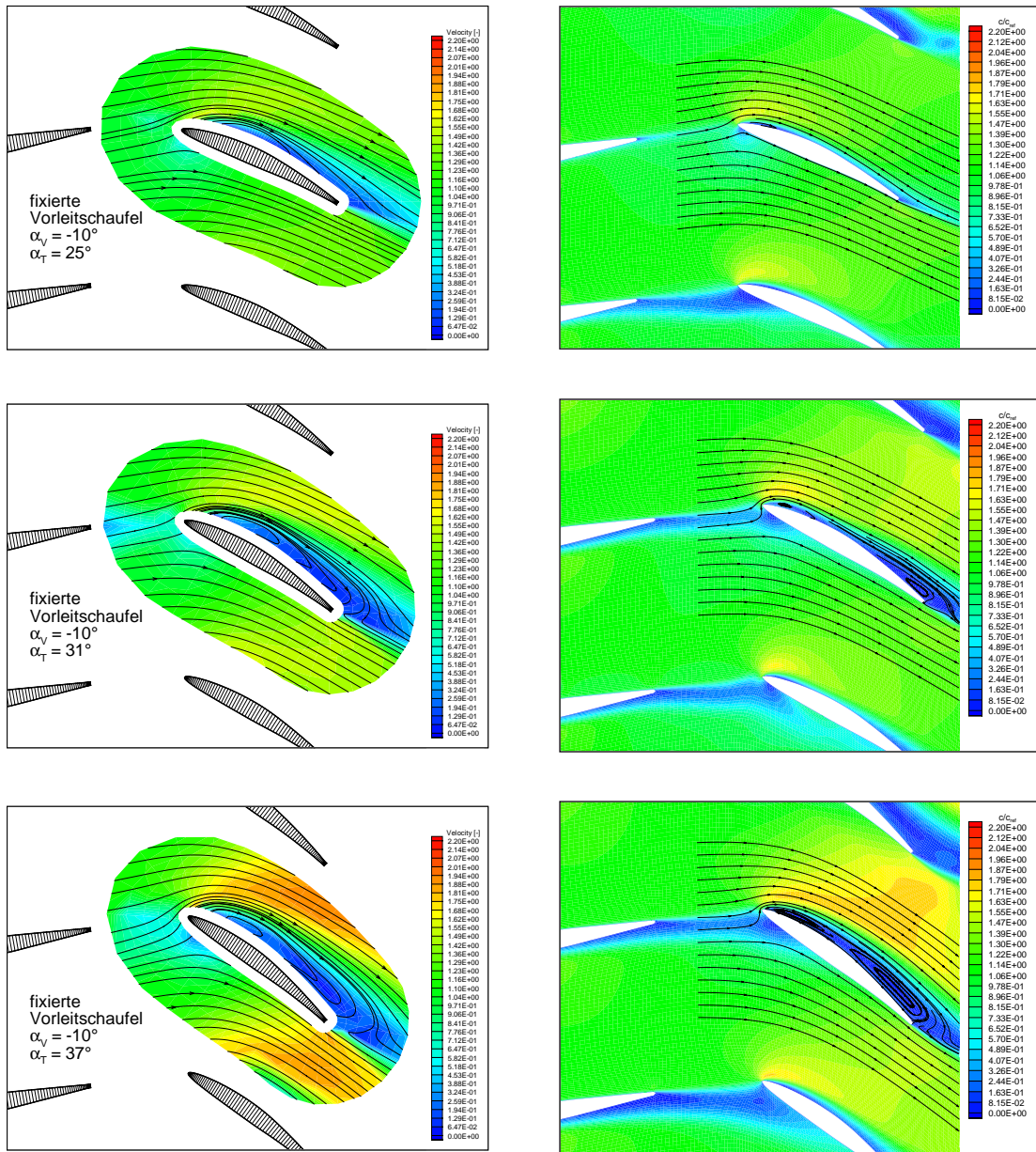


Abb. 6.25: Dimensionslose Geschwindigkeitsfelder für die Anstellwinkel  $\alpha_T = 25^\circ$ ,  $\alpha_T = 31^\circ$  und  $\alpha_T = 37^\circ$  bei fixierter Schaufel. Links Experiment, rechts Simulation.



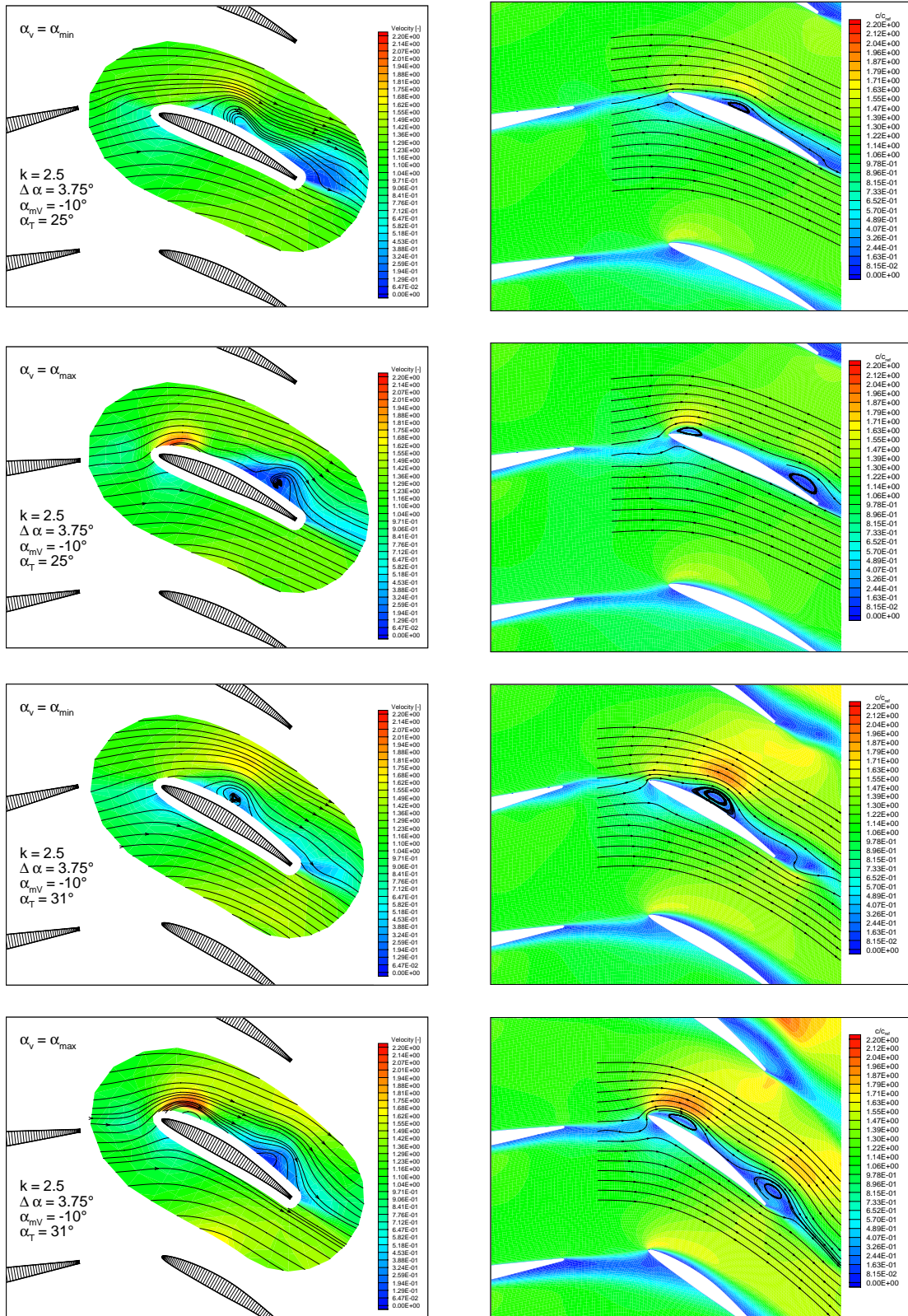


Abb. 6.26: Dimensionslose Geschwindigkeitsfelder für  $\alpha_T = 25^\circ$  bei verschiedenen Phasenlagen. Links Experiment, rechts Simulation.

In Abb. 6.27 ist die mittlere Umlenkung über dem Vorleitschaufelwinkel aufgetragen. Die Mittelwerte der Umlenkung aus der Berechnung sind bei den drei Anstellwinkeln niedriger als bei denen aus der Messung. Bei  $\alpha_T = 37^\circ$  z.B. weicht die mittlere Umlenkung um etwa 11% ab.

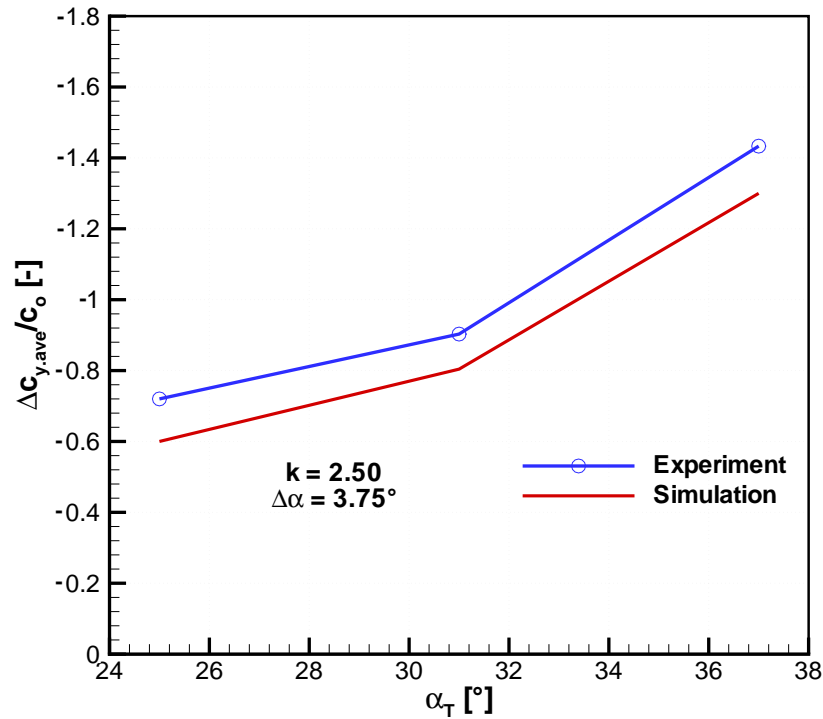


Abb. 6.27: Dimensionslose mittlere Umlenkung  $\Delta c_{y,ave}/c_o$  bei schwingender über dem Anstellwinkel  $\alpha_T$

Der größte Effekt durch die schwingende Schaufel ist bei großen Anstellwinkeln zu erzielen. Für  $\alpha_T = 37^\circ$  nimmt die Umlenkung etwa um den Faktor 1.96 zu. Ein signifikanter Effekt durch instationäre Zuströmung ist nur bei großen Anstellwinkeln und entsprechend stark abgelöster Strömung zu erzielen.

## 6.5 Wanddruckverteilung

In diesem Abschnitt werden die berechneten Druckbeiwerte auf der Schaufeloberfläche von fixierter Vorleitschaufel und schwingender Vorleitschaufel mit den experimentell ermittelten Daten verglichen.

In Abb. 6.28 ist die Verteilung des Druckbeiwertes auf der nachgeschalteten Schaufeloberfläche gezeigt. Der Verlauf des berechneten Druckbeiwertes gibt insgesamt die Tendenzen der gemessenen Daten wieder. Das Verfahren liefert für die fixierte Vorleitschaufel eine sehr gute Vorhersage der Druckverteilung im Staupunkt. Dagegen ist sie messtechnisch schwierig zu erhalten.

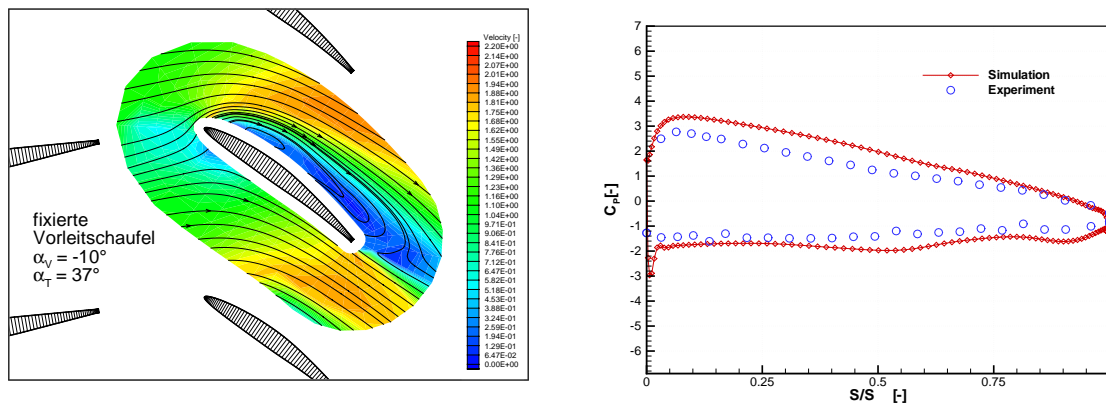


Abb. 6.28: Dimensionsloses Geschwindigkeitsfeld und Druckbeiwertverteilung für die fixierte Vorleitschaufel

Da der Wanddruck aus der Geschwindigkeitsverteilung resultiert, ist zur besseren Interpretation der Ergebnisse zusätzlich das Geschwindigkeitsfeld des Experimentes dargestellt. Korrespondierend mit der Zunahme der Außenströmungsgeschwindigkeit erkennt man auf der Druckseite eine Abnahme des Druckes in Strömungsrichtung. Der Staupunkt befindet sich ein kurzes Stück stromab der Vorderkante. Infolge der vollständigen Ablösung herrscht auf der Saugseite eine weitgehend konstanter Wanddruck.

Abb. 6.29 zeigt die berechneten und experimentellen Druckbeiwertverteilungen und die Geschwindigkeitsverteilung bei schwingender Vorleitschaufel für die Anstellwinkel  $\alpha_V = -10^\circ \downarrow$ ,  $\alpha_V = \alpha_{min} = -13.75^\circ$ ,  $\alpha_V = -10^\circ \uparrow$  und  $\alpha_V = \alpha_{max} = -6.25^\circ$ . Die Darstellung erfolgt analog zur fixierten Vorleitschaufel in Abb. 6.28. Der Vergleich mit dem Experiment zeigt, daß das Verfahren die Druckbeiwerte qualitativ richtig voraussagt.



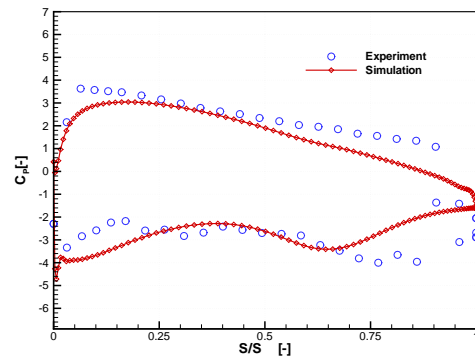
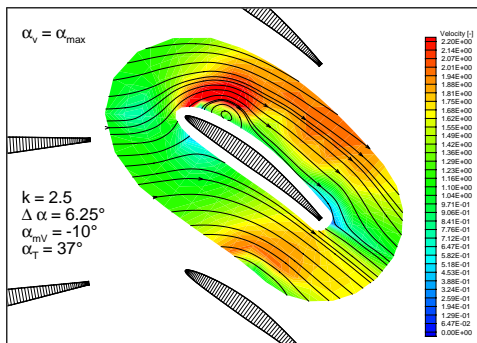
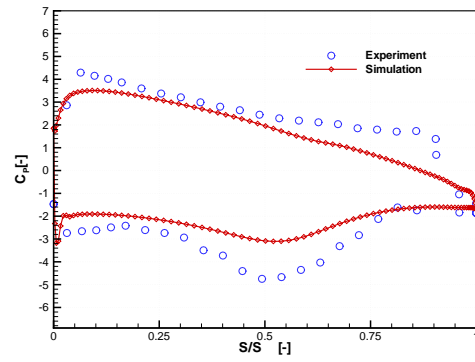
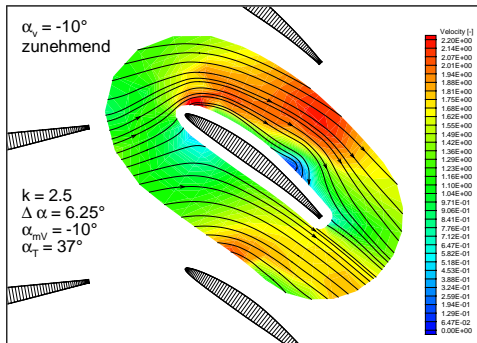
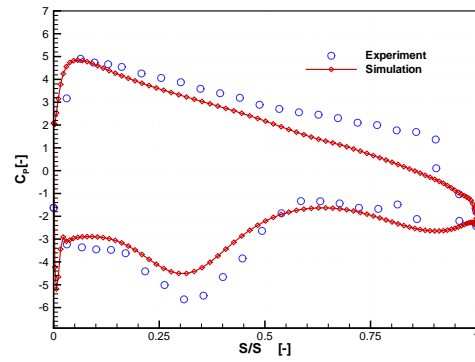
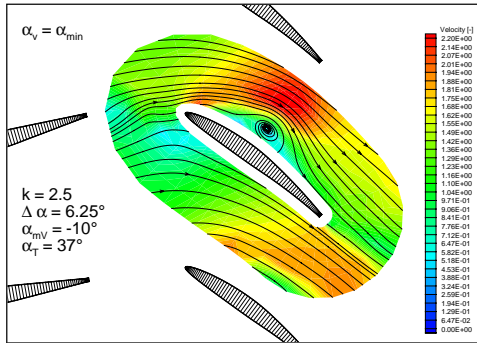
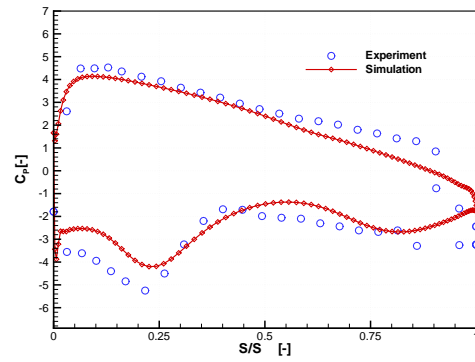
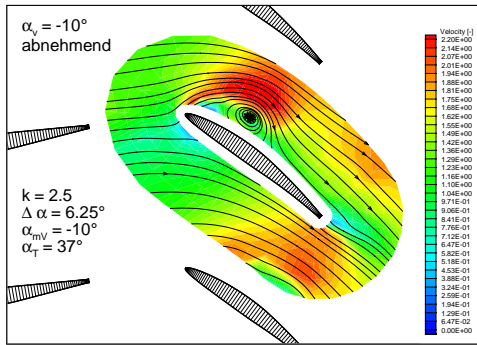


Abb. 6.29: Dimensionslose Geschwindigkeitsfelder und Druckbeiwertverteilungen für die schwingende Vorleitschaufel bei verschiedenen Phasenlagen

Bei dem Anstellwinkel  $\alpha_V = -10^\circ \downarrow$  stimmt der Verlauf des Druckbeiwertes der Berechnung sehr gut mit dem Experiment überein. Dagegen zeigt sich für  $\alpha_V = -10^\circ \uparrow$ , daß auf der Saugseite bei ca. 50% Sehnenlänge größere Abweichungen zum Experiment vorhanden sind. Bei der Hinterkante weichen Messung und Rechnung ab. Ein Grund dafür ist, daß das Standard  $k - \varepsilon$  Modell zur Abbildung großer Druckschwankungen ungeeignet ist.

Durch die instationäre Zuströmung ergibt sich eine periodische Änderung des Staudruckes und Verschiebung des Staupunktes. Korrespondierend mit dem abschwimmenden Wirbel entsteht ein örtlich veränderliches Gebiet niedrigen Wanddruckes auf der Saugseite. Der Ort dieses Gebietes liegt ein kurzes Stück stromab des Wirbelzentrums. Im Vergleich zum Experiment liegt der Ort dieses Gebietes etwas zu weit stromaufwärts für die Anstellwinkel  $\alpha_V = -10^\circ \uparrow$  und  $\alpha_V = \alpha_{max} = -6.25^\circ$ . Der Wirbel induziert in seinem Nachlauf eine auf die Schaufeloberfläche gerichtete Strömung, so daß das Fluid in die Grenzschicht transportiert wird. Dadurch ergibt sich eine lokale Erhöhung der Strömungsgeschwindigkeit in Wandnähe und der Wanddruck sinkt.

Im Vergleich zur Wanddruckverteilung bei fixierter Vorleitschaufel ist der mittlere Wanddruck auf der Saugseite stets kleiner und auf der Druckseite größer. Dieser Zusammenhang bestätigt die Beobachtung der stärkeren Umlenkung bei schwingender Vorleitschaufel. Durch die instationäre Zuströmung ist mit einer Zunahme des Auftriebs und des Widerstandes zu rechnen.

Die Größe des Druckes im wirbelbeeinflussten Wandabschnitt nimmt im Verlauf der Abschwimmbewegung ab. Offensichtlich besteht ein Zusammenhang mit der Intensität des abschwimmenden Wirbels. Da dessen Intensität bis zum Erreichen der Hinterkante um ca. 60% abnimmt, vgl. Abschnitt 6.4.2, verringert sich der Transport des Fluids in die Grenzschicht während der Abschwimmbewegung, und der Druck steigt an.

Abb. 6.29 zeigt deutlich den Einfluß der sich bewegenden Vorleitschaufel auf die Druckverteilung für die nachfolgende Schaufel. Durch die schwingende Vorleitschaufel verursachte dynamische Druckänderung ergibt sich eine Druckschwankungsbewegung. Die Bandbreite der Druckschwankung bei der Messung ist größer als bei der Berechnung. Ein Vergleich der gemessenen und berechneten Druckbeiwerte zeigt, daß nur eine qualitative Voraussage möglich ist.

### 6.5.1 Verluste und Schwingleistung

Die Schwingleistung und die Strömungsverluste am Tandemgitter werden analog zum Einzelgitter analysiert und ausgewertet. In Tabelle 6.6 sind die Parameter zur Auswertung der Inputleistung und der Strömungsverluste am Tandemgitter eingetragen.

Die Schwingleistung wird nach Gleichung A.14 berechnet. Nach Gleichung A.28 sind zur Bestimmung des Verlustes drei Terme zu bestimmen. Es sind dies der instationäre Term, der Totaldruckterm und der Schwingleistungsterm. Die Berechnung der Beiwerte ist in Anhang A erläutert.

fixierte Schaufel	
Anstellwinkel $\alpha_V$ [°]	-10.0
schwingende Schaufel	
Reynolds-Zahl $Re$ [–]	$1.25 \cdot 10^5$
Reduzierte Frequenz $k$ [–]	1.65, 2.50, 3.75
Amplitude $\Delta\alpha$ [°]	3.75
Mittlerer Anstellwinkel $\alpha_{mV}$ [°]	-10.0

Tabelle 6.6: Parameter zur Auswertung der Inputleistung und der Strömungsverluste am Tandemgitter

Zuerst wird die Schwingleistung bestimmt. In Abb. 6.30 sind das resultierende Drehmoment  $M$ , die Schwingleistung  $P_{inp}$  sowie die normierte Schwingleistung  $P_{inp}/P_{ref}$  über dem Anstellwinkel  $\alpha_V$  aufgetragen, vgl. 6.30 und 6.31. Die zeitlich gemittelte Schwingleistung ist in Abb. 6.31 verdeutlicht. Die berechnete gemittelte normierte Schwingleistung ist 0.00573. Der gemessene Wert beträgt 0.

Zur Bestimmung der Strömungsverluste werden die Ergebnisse mit der fixierten Schaufel und der schwingenden Schaufel ausgewertet. Für die Umströmung der fixierten Schaufel liefert nur der Totaldrucktransport einen Beitrag zur Verlustleistung. Wegen der näherungsweise stationären Strömung verschwindet der instationäre Term und, da die Schaufel fixiert ist, wird keine Schwingleistung übertragen. Zur Normierung wird wiederum die Strömungsleistung der Zuströmgeschwindigkeit  $\frac{\rho}{2}c_o^3bt$  verwendet. Der Beiwert wird als  $\zeta_{v0} = \zeta_v(k = 0)$  bezeichnet, vgl. A.32.

In Abb. 6.32 und Abb. 6.33 sind über eine Periode gemittelte Werte für den Totaldrucktransport, die zeitliche Änderung der kinetischen Energie und die Schwingleistung am Tandemgitter bei schwingender Schaufel für  $k = 1.65$  dargestellt. Die Werte sind auf die Strömungsleistung der Zuströmgeschwindigkeit  $\frac{\rho}{2}c_o^3bt$  bezogen. Der daraus resultierende Verlustbeiwert ist  $\zeta_v(k)$ .

Die kinetische Energie weist aufgrund der Schwingbewegung starke Fluktuationen auf. Zur Bildung des zeitlichen Mittelwertes der Verlustleistung spielt die zeitliche Änderung der kinetischen Energie deshalb eine wesentliche Rolle. Da jedoch im Experiment die zeitliche Änderung der kinetischen Energie nicht berücksichtigt wurde, ist eine quantitative Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung nicht zu erwarten, vgl. Tabelle 6.7. Für den Einzelgitterfall spielt die zeitliche Änderung der kinetischen Energie nur eine kleine Rolle, da ihr Betrag bei Mittelung über eine Periode sehr klein ist. Der berechnete Beiwert gibt deshalb die Tendenz der gemessenen Daten im Fall des Einzelgitters wieder vgl. Kap. 6.3.4.

Reduzierte Frequenz	Beiwerte	Experiment	Simulation
$k = 0$	$\zeta_{v0}[-]$	0.59	0.56870
$k = 1.65$	$\zeta_{v1}[-]$	0.63	0.58549
	$\zeta_{v2}[-]$	0.00	-0.05936
	$\lambda[-]$	0.00	0.00575
	$\zeta_v[-]$	0.63	0.53185
	$\Delta\zeta_v[-]$	-0.04	0.03685

Tabelle 6.7: Vergleich der Beiwerte von Experiment und Simulation bei reduzierten Frequenzen  $k = 0$  und  $k = 1.65$

Analog zu  $k = 1.65$  werden zwei weitere reduzierte Frequenzen  $k = 2.50$  und  $k = 3.75$  ausgewertet und analysiert. In den Abbildungen 6.34 - 6.41 sind Schwingleistung und Strömungsverluste dargestellt.

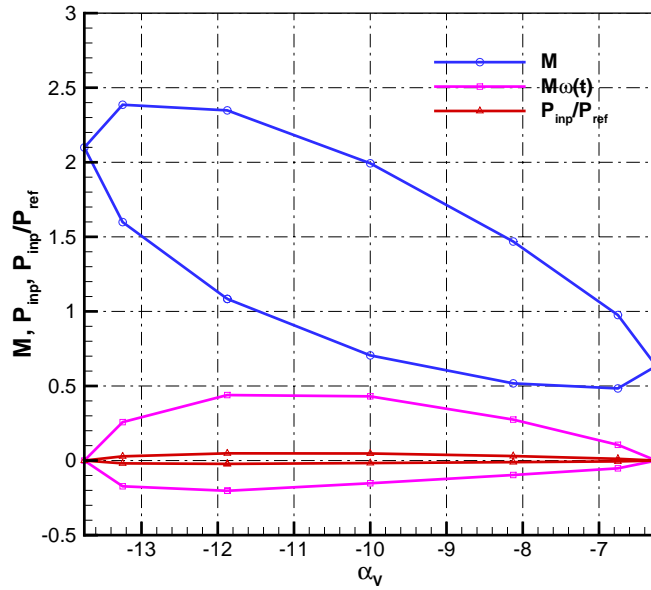


Abb. 6.30: Zur Bestimmung der Schwingleistung für  $k = 1.65$

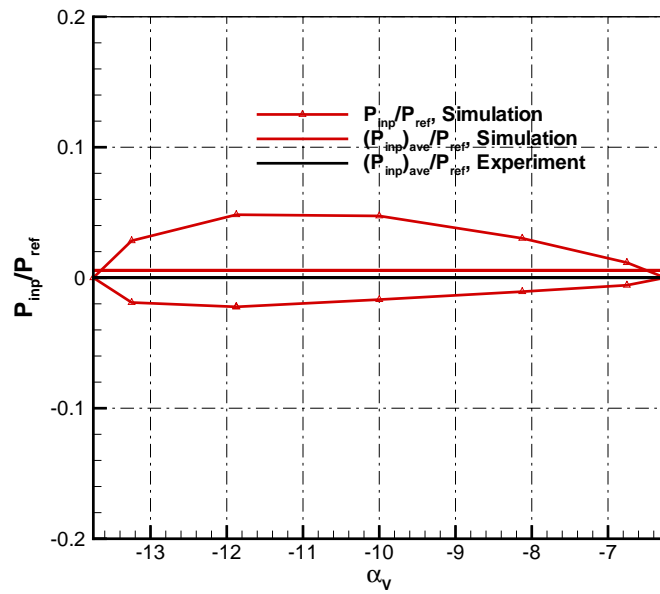


Abb. 6.31: Zur Bestimmung der Schwingleistung für  $k = 1.65$

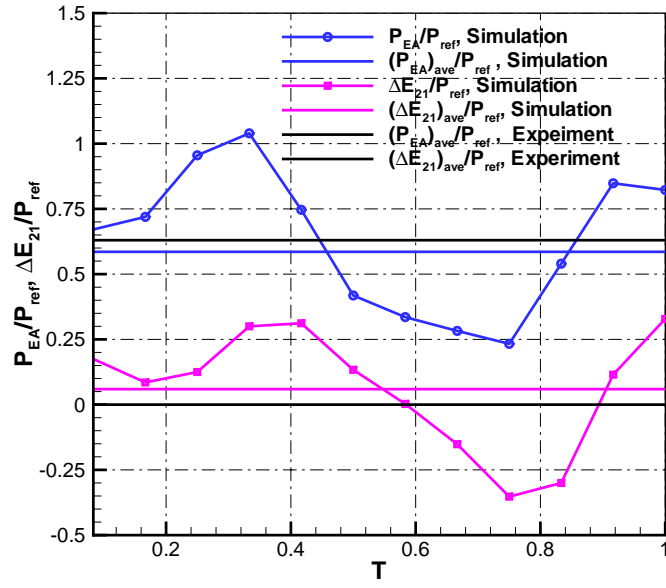


Abb. 6.32: Leistungsbeiträge durch den Totaldrucktransport und die zeitliche Änderung der kinetischen Energie über die Zeit für  $k = 1.65$

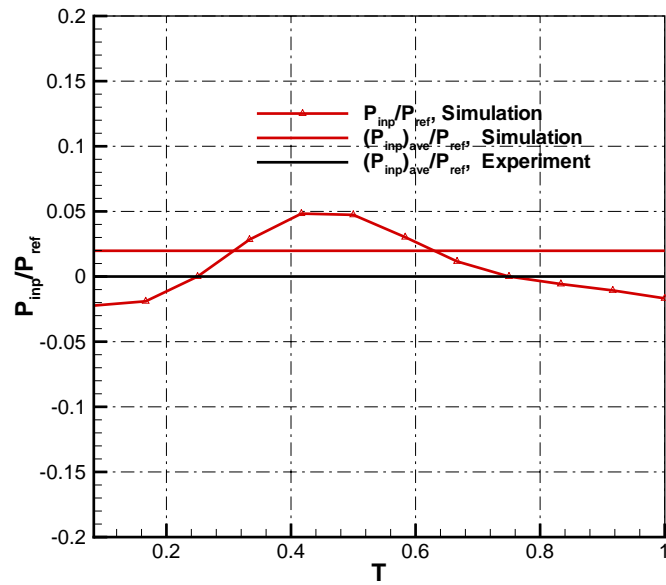


Abb. 6.33: Leistungsbeiträge durch die Schwingleistung über die Zeit für  $k = 1.65$

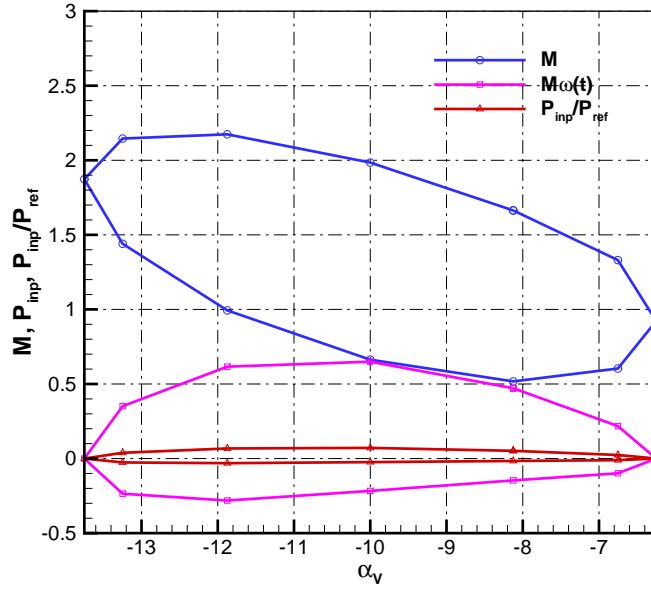


Abb. 6.34: Zur Bestimmung der Schwingleistung für  $k = 2.50$

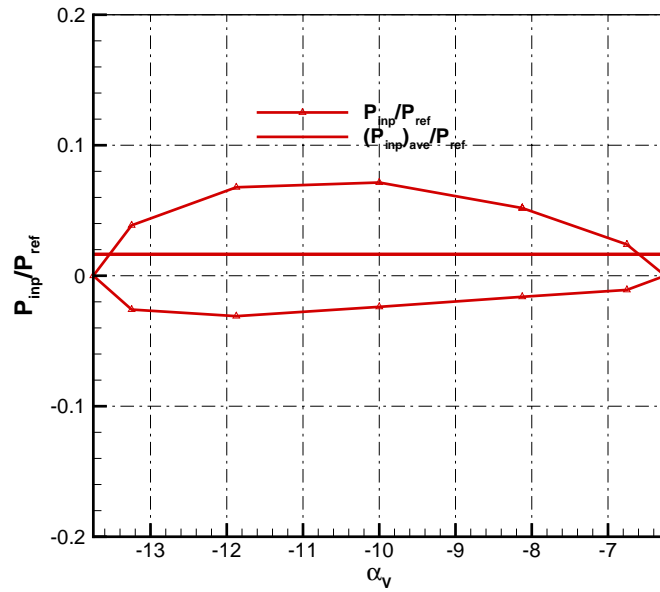


Abb. 6.35: Zur Bestimmung der Schwingleistung für  $k = 2.50$

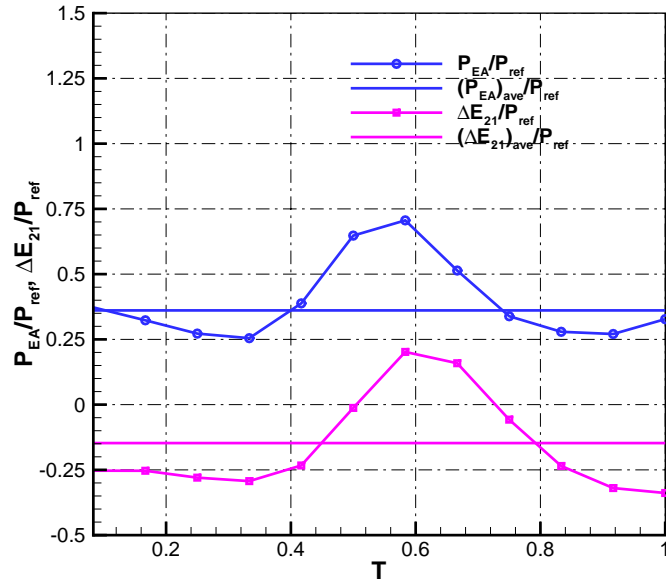


Abb. 6.36: Leistungsbeiträge durch den Totaldrucktransport und die zeitliche Änderung der kinetischen Energie über die Zeit für  $k = 2.50$

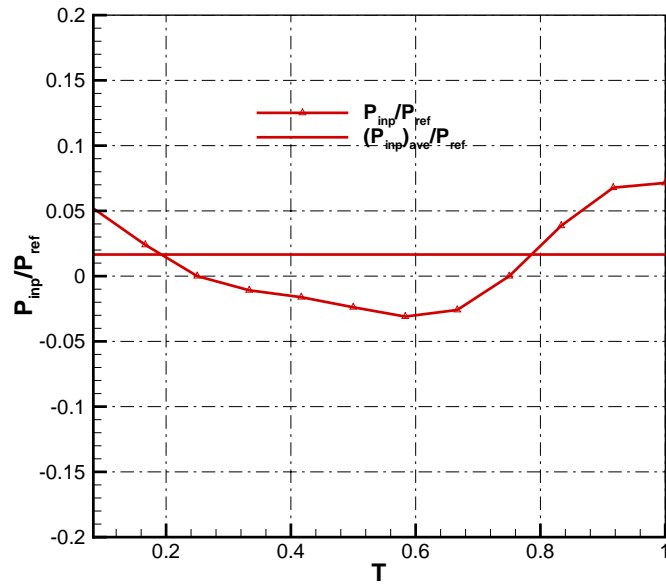


Abb. 6.37: Leistungsbeiträge durch die Schwingleistung über die Zeit für  $k = 2.50$



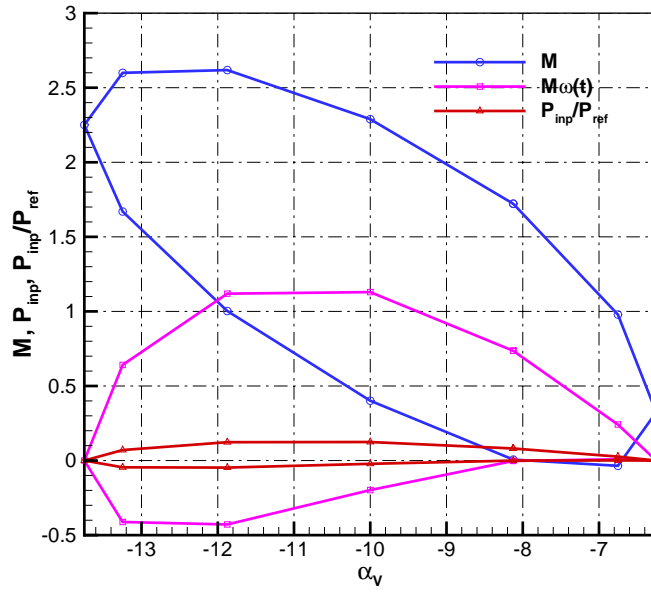


Abb. 6.38: Zur Bestimmung der Schwingleistung für  $k = 3.75$

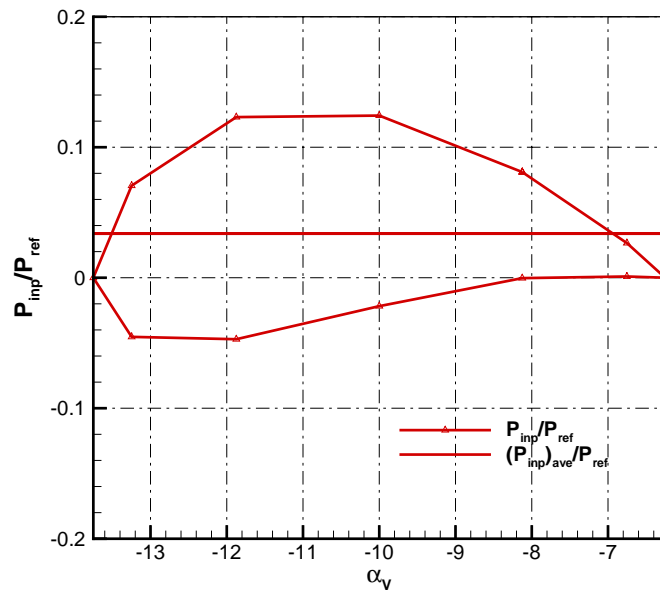


Abb. 6.39: Zur Bestimmung der Schwingleistung für  $k = 3.75$

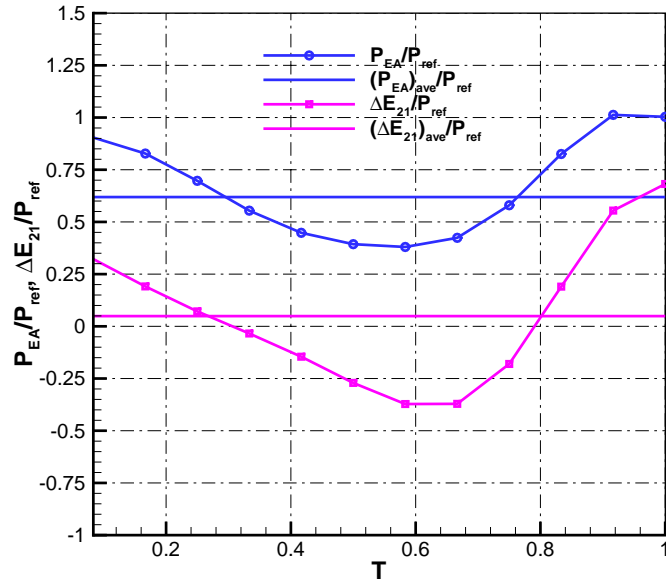


Abb. 6.40: Leistungsbeiträge durch den Totaldrucktransport und die zeitliche Änderung der kinetischen Energie über die Zeit für  $k = 3.75$

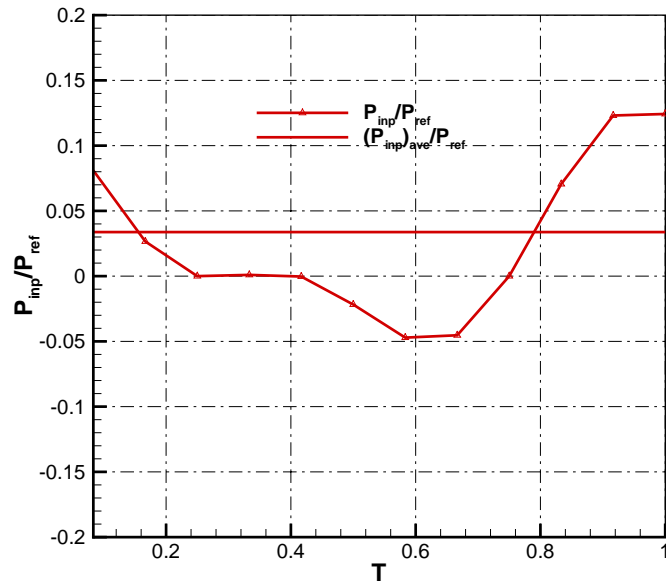


Abb. 6.41: Leistungsbeiträge durch die Schwingleistung über die Zeit für  $k = 3.75$

In Abb. 6.42 sind die Beiwerte für die Abnahme der Verlustleistung  $\Delta\zeta_v$  und die Zunahme der zugeführten Schwingleistung  $\lambda$  in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz  $k$  aufgetragen. Die Inputleistung nimmt mit der reduzierten Frequenz zu. Die Abnahme der Leistungsverluste steigt mit der reduzierten Frequenz an, erreicht bei  $k = 2.50$  ein Maximum und fällt dann wieder ab. Im Fall des Tandemgitters liegen die größten Effekte bei ca.  $k = 1.65$ . Dort beträgt die Schwingenergie nur bis 0.6% der dynamischen Leistung und die Abnahme der Verlustleistung 3.7%.

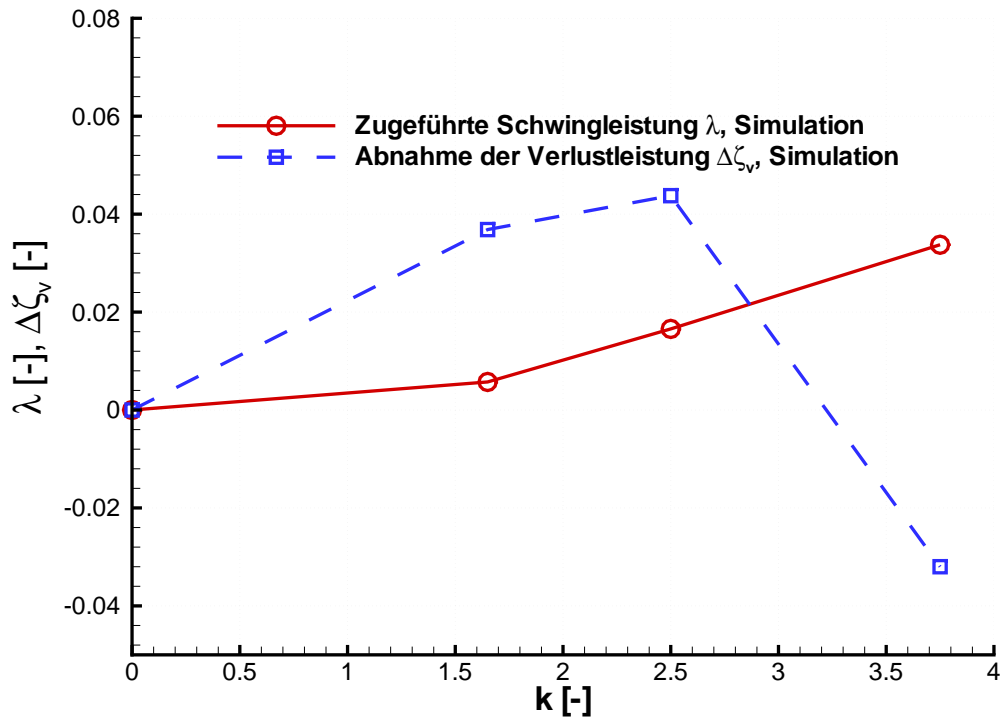


Abb. 6.42: Beiwerte für die Abnahme der Verlustleistung  $\Delta\zeta_v$  und die Zunahme der zugeführten Schwingleistung  $\lambda$  in Abhängigkeit von der reduzierten Frequenz  $k$

# Kapitel 7

## Bewertung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Strömungswechselwirkung im Tandemgitter mit schwingender Vorleitschaufel numerisch untersucht. Das vorgestellte Berechnungsverfahren stellt ein leistungsfähiges Werkzeug zur Simulation von inkompressiblen, instationären abgelösten Strömungen auf zeitlich veränderlichen Gittern dar. Um die Flexibilität zu erhöhen, werden verschiedene Algorithmen für kinematisch bewegte Rechengitter erweitert. Durch die Blockstrukturierung und Parallelisierung wird eine zusätzliche Effizienzsteigerung erzielt.

Die Validierung des Verfahrens anhand der Testfälle zeigt die sehr gute Übereinstimmung der Berechnungsergebnisse mit den Referenzlösungen. Für die Berechnung der turbulenten Umströmung eines schwingenden NACA0012 Tragflügelprofils werden ein modifizierter Prandtl'scher Mischungsweglängenansatz und das  $k - \varepsilon$  Turbulenzmodell eingesetzt. Mit dem modifizierten Prandtl'schen Mischungsweglängenansatz können im Fall anliegender Strömung gute Ergebnisse bei vergleichsweise niedrigem Rechenaufwand erzielt werden. Im Bereich der vollständig abgelösten Strömung sind dagegen erhebliche Abweichungen zu den experimentellen Referenzdaten festzustellen. Die Verwendung des RNG  $k - \varepsilon$ -Modells bringt eine Verbesserung der Berechnungsergebnisse. Dabei muß jedoch der etwa siebenfache Rechenaufwand eingesetzt werden.

Die gewonnenen Erkenntnisse über das instationäre Ablöseverhalten am schwingenden Einzelflügel können erfolgreich zur Analyse der Strömung für schwingende Vorleitschaufeln am Einzelgitter und Tandemgitter herangezogen werden. So werden vom Verfahren die grundlegenden physikalischen Effekte des Dynamic Stalls reproduziert. Daraufhin wird ein stehendes Einzel- und Tandemgitter mit jeweils einer schwingenden Schaufel bzw. Vorleitschaufel unter Verwendung des  $k - \varepsilon$  Turbulenzmodells eingehend numerisch untersucht. Die Ergebnisse, die mit Messungen von WERDECKER [22] qualitativ gut übereinstimmen, liefern detaillierte Informationen über die Struktur der hochgradig instationären und turbulenten Strömung. Diese ist zudem durch instationäre Wirbelstrukturen gekennzeichnet.

Außerdem wird die Energiegleichung hinsichtlich der Strömungsverluste ausgewertet und analysiert.

Die Berechnungsergebnisse belegen, daß durch eine lokal instationäre Strömung, aufgeprägt durch eine sinusförmige Drehschwingbewegung einer Schaufel, das Ablöseverhalten der Gitterströmung positiv beeinflusst werden kann. Die hierbei wirksamen Mechanismen sind der Grenzschichtbeeinflussung durch Einblasen von Fluid in die Grenzschicht ähnlich. Die Simulationen bestätigen die Erwartung, daß durch die Schwingbewegung eine Verbesserung der Energieumsetzung und der Zuverlässigkeit teillastbetriebener hydraulischer Maschinen möglich ist. Die Strömungsumlenkung kann in Abhängigkeit von der Frequenz, der Amplitude und des mittleren Anstellwinkels deutlich erhöht werden.

Im Fall des Einzelgitters beträgt die Schwingenergie 1% der dynamischen Leistung und die Verringerung der Energieverluste 3%. Im Fall des Tandemgitters beträgt diese bezogene Schwingleistung nur bis zu 0.6%, die Energieverluste werden jedoch um 3.7% verringert.

Es existiert eine optimale Kombination, bei der der größte Effekt auftritt. Im Fall des Einzelgitters liegt dieser Betriebspunkt bei einer reduzierten Frequenz von  $k = 2.50$  mit einer Amplitude von  $\Delta\alpha \approx 4^\circ$  und  $\alpha_m = 30^\circ$ . Im Fall des Tandemgitters liegt die optimale Kombination bei einer reduzierten Frequenz von  $k = 2.50$  mit einer Amplitude von  $\Delta\alpha \approx 4^\circ$  und  $\alpha_{mV} = -10^\circ$  sowie  $\alpha_T = 37^\circ$ .

Zur Erweiterung und Verfeinerung des Berechnungsverfahrens ergeben sich zahlreiche Möglichkeiten. Die entkoppelte Berechnung der einzelnen Strömungsgrößen erlaubt es ohne großen Aufwand zusätzliche Transportgleichungen in den Code zu implementieren. Dies eröffnet die Möglichkeit zusätzliche Turbulenzmodelle zu integrieren oder auch kompressible Strömungen durch die Lösung der Energiegleichung zu berechnen. Um bei vollständig abgelösten Strömungen gute Simulationsgenauigkeiten zu erzielen, geht der Trend daher hin zur Grobstruktursimulation (LES). Diesbezüglich besteht die Möglichkeit, das Rechenverfahren durch Modifikation des Gleichungslösermoduls für den Einsatz auf Großrechneranlagen anzupassen. Damit lassen sich aufwendige und umfassende Parameterstudien sowie Simulationsrechnungen ganzer Turbomaschinen realisieren. Das Verfahren eignet sich daher besonders zur Optimierung des instationären Strömungsverhaltens dieses Maschinentyps.

Um dem übergeordneten Ziel der Teillastverbesserung hydraulischer Maschinen näher zu kommen, sind Untersuchungen an einem Kreisgitter mit rotierendem Laufrad notwendig. Dazu muß das Verfahren leicht modifizieren werden.

Die experimentellen Untersuchungen von JARIUS [30] und theoretisch-numerische

Untersuchungen von YANG [85] am einzelnen Vorleitgitter mit schwingender Klappe zeigen, daß eindeutig eine verbesserte Energieumsetzung möglich ist. Im Hinblick auf eine Applikation in hydraulischen Maschinen ist die Schwingung einer Schaufel aufgrund der großen Drehmomente, der Lagerung und des Antriebs problematisch. Daher ist die Untersuchung weiterer, technisch einfacherer Konfigurationen, die der Strömung einen instationären Charakter aufzuprägen, sinnvoll. Beispiele hierzu sind eine schwingende Leitklappe an der Schaufelvorder- oder hinterkante sowie eine periodische Profiladaption durch eine elastische Membran auf der Schaufeloberfläche. Um diese Strömungsphänomene zu untersuchen, steht das Verfahren schon zur Verfügung. Lediglich die Geometrie und die Rechnetze sind anzupassen.

# Literaturverzeichnis

- [1] AMSDEN, A. A. ; O'ROURKE, P. J. ; BUTLER, T. D. ; MEINTJES, K. ; FANSLER, T. D.: Comparisons of Computed and Measured Three-Dimensional Velocity Fields in a Motored Two-Stroke Engine. In: *SAE Paper* (1992), Nr. 920418
- [2] BAEHR, H. D.: *Thermodynamik*. New York, Heidelberg, Berlin : Springer-Verlag, 1992
- [3] BALDWIN, B. S. ; BARTH, T. J.: A One-Equation Turbulence Transport Model for High-Reynolds Number Wall-Bounded Flows. In: *NASA TM-102847* (1990), August
- [4] BALDWIN, B. S. ; LOMAX, H.: Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows. In: *AIAA Paper 78-257* (1978), January
- [5] BAUER, H.-J.: *Überprüfung numerischer Ansätze zur Beschreibung turbulenter elliptischer Strömungen in komplexen Geometrien mit Hilfe konturangepaßter Koordinaten*, Universität Karlsruhe, Diss., 1989
- [6] BOUSSINESQ, J.: Essai sur La Théorie Des Eaux Courantes. In: *Mem. Présenté Acad. Sci.* 23 (1877), S. 46. – Paris
- [7] BUFFUM, D. H. ; CAPECE, V. R. ; KING, A. J. ; EL-AINI, Y. M.: Experimental Investigations of Unsteady Flows at Large Angles in a Linear Oscillating Cascade / National Aeronautics and Space Administration. 1996. – Forschungsbericht
- [8] CARR, L. W. ; CHANDRASEKHARA, M. S. ; BROCK, N. J.: Quantitative Study of Unsteady Compressible Flow on an Oscillating Airfoil. In: *Journal of Aircraft* Vol. 31, No. 4 (1994), S. pp. 892–898
- [9] CFX-TASCFLOW: *User Documentation*. Version 2.9. Waterloo-Ontario, Canada: AEA Technology, 1999
- [10] CHANDRASEKHARA, M. S. ; CARR, L. W. ; WILDER, M. C.: Interferometric Investigations of Compressible Dynamic Stall over a Transiently Pitching Airfoil. In: *AIAA Journal* Vol. 32, No. 3 (1994), S. pp . 586–593

- [11] CHORIN, A.J.: A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems. In: *Journal of Computational Physics* 2 (1967), S. 12–26
- [12] DEMIRDŽIĆ, I. ; PERIĆ, M.: Space Conservation Law in Finite Volume Calculations of Fluid Flow. In: *Int. J. Numerical Methods in Fluids* 8 (1988), S. 1037–1050
- [13] DEMIRDŽIĆ, I. ; PERIĆ, M.: Finite Volume Method for Prediction of Fluid Flow in Arbitrarily Shaped Domains with Moving Boundaries. In: *Int. J. Numerical Methods in Fluids* 10 (1990), S. 771–790
- [14] DINDAR, M. ; KAYMAK, U.: Effect of Turbulence Modelling on Dynamic Stall of a NACA 0012 Airfoil. In: *AIAA Paper 92-0027* (1992)
- [15] E. GUILMINEAU, J. P. ; QUEUTEY, P.: Unsteady Two-Dimensional Turbulent Viscous Flow past Aerofoils. In: *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 25 (1997), S. 315 – 366
- [16] E.FISCHER: *Numerische Berechnung von Spaltströmungen in Turbomaschinengittern*, Technische Universität München, Diss., 1996
- [17] EKATERINARIS, J. A. ; PLATZER, M. F.: Progress in the Analysis of Blade Stall Flutter. In: TANIDA, Y. (Hrsg.) ; NAMBA, M. (Hrsg.): *Unsteady Aerodynamics and Aeroelasticity of Turbomachines*. Elsevier, 1995, S. 287– 301
- [18] FERNANDEZ, A.: *Strömungstechnische Optimierung von Beschaufelungen hydraulischer Maschinen*, Technische Universität München, Diss., 1997
- [19] FERZINGER, J. H. ; PERIĆ, M.: *Computational Methods for Fluid Dynamics*. 2. Aufl. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 1997. – ISBN 3 540 59434 5
- [20] FLYNN, M.: Very High-Speed Computing Systems. In: *Proc. of the IEEE* 54, 1966, S. 1901– 1909
- [21] FRIEDRICH, R.: Grundlagen turbulenter Strömungen und numerische Simulation / Technische Universität München. 1999. – Vorlesungsunterlagen
- [22] F.WERDECKER: *Strömungswechselwirkung in einem Tandemgitter mit schwingender Vorleitschaufel*, Technische Universität München, Diss., 2000
- [23] GEISSLER, W. ; CARR, L.W. ; CEBECI, T.: *Unsteady Separation Characteristics of Airfoils Operating under Dynamic Stall Conditions*, Garmisch-Partenkirchen, September 22-25, 1986
- [24] HAAS, H.: *Integriertes numerisches System zur Nachrechnung der Strömung durch beliebige Beschaufelungen*, Technische Universität München, Diss., 1995
- [25] HALFMAN, R.L.: Experimental Aerodynamic Derivatives of a Sinusoidally Oscillating Airfoil in Two-Dimensional Flow / NASA Report 1108. 1952. – Forschungsbericht



- [26] HOFFMANN, K.: *Komponenten für Unterwasserhandhabungssysteme*. VDI-Verlag Düsseldorf, Universität Hannover, Diss., 1991. – ISBN 3-18-140201-X, Fortschr.-Ber. VDI Reihe 1, Nr. 202
- [27] HÖVEL, M.: *Konstruktion eines Schwingungsantriebes*, Lehrstuhl für Hydraulische Maschinen und Anlagen, TU München, Studienarbeit, 1999
- [28] J. F. THOMPSON, Z.U.A. W. ; MARTIN, C.W.: *Numerical Grid Generation*. North-Holland, 1985
- [29] JAKIRLIĆ, S.: Reynolds-Spannungs-Modellierung komplexer turbulenter Strömungen / Technische Universität Erlangen-Nürnberg. 1997. – Diss.
- [30] JARIUS, K. ; SIEKMANN, H. E.: Control of turbulent shear layers in turbomachinery / Technical University Berlin. 1998. – Forschungsbericht
- [31] JARIUS, M. ; SIEKMANN, H. E.: Control of turbulent shear layers in turbomachinery / Technical University Berlin. 1997. – Forschungsbericht
- [32] J.FRITZ: *Strömungswechselwirkung in hydraulischen Maschinen*, Technische Universität München, Diss., 1999
- [33] KOHSAL, P. K. ; RUBIN, S. G.: A Diagonal Dominant Second-Order Accurate Implicit Scheme. In: *Computers Fluids* 2 (1974), S. 207–209
- [34] KROLL, N.: Berechnung von Strömungsfeldern um Propeller und Rotoren im Schwebeflug durch die Lösung der Euler-Gleichungen / DLR. 1989 (FB 89-37). – Forschungsbericht
- [35] LACHMANN, G. V.: *Boundary layer and flow control*. London : Pergamon Press, 1961
- [36] LAI, Y. G. ; PRZEKwas, A. J.: A Finite Volume Method for Fluid Flow Simulations with Moving Boundaries. In: *Comp. Fluid Dyn.* 2 (1994), S. 19–40
- [37] LAKSHMINARAYANA, B.: An Assessment of Computational Fluid Dynamic Techniques in the Analysis and Design of Turbomachinery - The 1990 Freeman Scholar Lecture. In: *ASME J. Fluids Engrg.* 113 (1991), September, S. 315–352
- [38] LASCHKA, B.: *Strömungsmechanik II*, Lehrstuhl für Fluidmechanik, TU München, Vorlesungsbegleitendes Manuskript, 1993
- [39] LAUNDER, B.P. ; SPALDING, D.B.: *Mathematical Models of Turbulence*. London : Academic Press, 1972
- [40] LAUNDER, B.P. ; SPALDING, D.B.: The numerical computation of turbulent flows. In: *Computer Methods in applied mechanics and engineering* 3 (1974), S. 269–289

- [41] LEE, Y. T. ; KIRIS, C. ; ROGERS, S. E. ; ZAWADZKI, I. ; KWAK, D.: Steady and Unsteady Multi-Foil Interactions by Navier Stokes and Euler Calculatons. In: TANIDA, Y. (Hrsg.) ; NAMBA, M. (Hrsg.): *Unsteady Aerodynamics and Aeroelasticity of Turbomachines*. Elsevier, 1995, S. 93 – 107
- [42] LILEK, Z. ; PERIĆ, M.: A fourth-order finite volume method with colocated variable arrangement. In: *Computers and Fluids* 24 (1995), S. 239–252
- [43] Ž. LILEK: *Ein Finite-Volumen Verfahren zur Berechnung von inkompressiblen und kompressiblen Strömungen in komplexen Geometrien mit beweglichen Rändern und freien Oberflächen*, Universität Hamburg, Diss., 1995
- [44] MAJUMDAR, S. ; RODI, W. ; ZHU, J.: Three-Dimensional Finite-Volume Method for Incompressible Flows with Complex Boundaries. In: *ASME J. Fluids Engrg.* 114 (1992), S. 496–503
- [45] MCALISTER, K. W. ; CARR, L. W. ; MCCROSKEY, W. J.: Dynamic Stall Experiments on the NACA 0012 Airfoil / National Aeronautics and Space Administration. 1978. – Forschungsbericht
- [46] MERTENS, J.: Reduktion aerodynamischer Widerstand (RaWid) im Luftfahrtforschungsprogramm des BMFT. In: *Strömungen mit Ablösung*. Deutsche Gesellschaft für Luft- und Raumfahrt, Bonn, 1994, S. 323–327
- [47] M.SCHUSTER: *Simulation gehöuselooser,hydraulischer Strömungsmaschinen*, Technische Universität München, Diss., 2000
- [48] MUZAFERIJA, S.: *Adaptive Finite Volume Method For Flow Predictions Using Unstructured Meshes and Multigrid Approach*, University of London, PhD Thesis, 1994
- [49] NEITZKE, K.-P.: Experimentelle Untersuchungen zu auftriebsinduzierten Strömungen. In: *Lasermethoden in der Strömungstechnik*. Berlin, 1996
- [50] ORTH, A.: *Mehrgittermethode zur Berechnung inkompressibler, stationärer Strömungen mit krummlinigen Berandungen*, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen, TH Karlsruhe, Dissertation, 1991
- [51] PATANKAR, S. V. ; SPALDING, D. B.: A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows. In: *Int. Journal Heat Mass Transfer* 15 (1972), S. 1787–1806
- [52] PATANKAR, S.V.: *Numerical heat transfer and fluid flow*. New York : McGraw-Hill, 1980
- [53] PIZIALI, R. A.: 2-D and 3-D Oscillating Wing Aerodynamics for a Range of Angles of Attack Including Stall / National Aeronautics and Space Administration. 1994. – Forschungsbericht

- [54] P.KLEMENT: *Vergleich verschiedener Turbulenzmodelle zur Berechnung realer Strömungen in Laufrädern*, Technische Universität München, Diss., 1997
- [55] PRANDTL, L.: *Führer durch die Strömungslehre* / Braunschweig. 1965. – Vieweg
- [56] RHIE, C. M. ; CHOW, W. L.: A Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Isolated Airfoil with Trailing Edge Separation. In: *AIAA Journal* 21 (1983), S. 1525 – 1532
- [57] RIEDEL, N.: *Rotor-Stator Wechselwirkung in hydraulischen Maschinen*, Technische Universität München, Diss., 1997
- [58] RITZINGER, S.: *Simulation realer Laufradströmungen*, Technische Universität München, Diss., 1997
- [59] SCHILLING, R.: Numerical Calculation of the Q3D Incompressible, Inviscid Flow in Turbomachines. In: *11th IAHR Symposium*. Amsterdam, 1982
- [60] SCHILLING, R.: CFD Aided Design of Hydraulic Machinery Bladings. In: VELENSEK, B. (Hrsg.): *CFD'91 Intensive Course on Computational Fluid Dynamics*. Ljubljana, 1991
- [61] SCHILLING, R.: CFD Aided Design von Beschaufelungen hydraulischer Maschinen. In: *Forschung im Ingenieurwesen-Engineering Research* (1994), S. 302–306
- [62] SCHILLING, R. Rechnergestützte Entwicklung von Strömungsmaschinen. Vorlesungsbegleitende Unterlagen. 1996
- [63] SCHILLING, R. ; ASCHENBRENNER, Th. ; BADER, R. ; KLEMENT, P. ; RICHTER, R.: Numerical Loss Analysis in Hydraulic Machinery. In: *Hydraulic Machinery and Cavitation, Proc. of the XIX IAHR Symposium, Volume I*. Singapore, 1998, S. 19–32
- [64] SCHILLING, R. ; RIEDEL, N. ; RITZINGER, S.: A Critical Review of Numerical Models Predicting the Flow through Hydraulic Machinery Bladings. In: *17th IAHR Symposium, Section on Hydraulic Machinery and Cavitation*, 1994. – Beijing
- [65] SCHLICHTING, H.: *Grenzschicht-Theorie*. Karlsruhe : Verlag G. Braun, 1965
- [66] SCHÖNUNG, B. E.: *Numerische Strömungsmechanik*. Berlin : Springer-Verlag, 1990
- [67] SOLOVITZ, S. A. ; EATON, J. K.: Aeroelastic Control Using Redundant Microactuators. In: *3rd ASME/JMSE Joint Fluids Engineering Conference*. San Francisco, USA, July 1999

- [68] SORENSON, R. L.: A Computer Program to Generate Two-Dimensional Grids about Airfoils and other Shapes by the Use of Poisson's Equation / NASA, Ames Research Center. 1981. – TM-81198
- [69] SPEZIALE, C. G.: Analysis of an RNG Based Turbulence Model for Separated Flows. In: *Int. J. Engng Sci.* 30 (1992), Nr. 10, S. 1379–1388
- [70] STONE, H. L.: Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 5 (1968), S. 530 – 558
- [71] TAYLOR, L.K.: *Unsteady Three-Dimensional Incompressible Algorithm Based on Artificial Compressibility*, Mississippi State University, MS., Diss., 1991
- [72] T.CEBECI ; SMITH, A. M.: *Analysis of Turbulent Boundary Layers*. New York : Academic Press, 1974
- [73] TOLLMIEN, W. ; SCHLICHTING, H. ; GRÖTLER, H.: *Ludwig Prandtl Gesammelte Abhandlungen zur angewandten Mechanik, Hydro- und Aerodynamik*. Berlin, Göttingen, Heidelberg : Springer-Verlag, 1961
- [74] TRUCKENBRODT, E.: *Fluidmechanik Band 1, Grundlagen und elementare Strömungsvorgänge dichtebeständiger Fluide*. New York, Heidelberg, Berlin : Springer-Verlag, 1980
- [75] TRULIO, J. G. ; TRIGGER, K. R.: Numerical Solution of the One-Dimensional Hydrodynamic Equations in an Arbitrary Time-Dependent Coordinate System / Univ. of California Lawrence Radiation Lab Rep. 1961. – UCLR-6522
- [76] VAN DOORMAL, J. P. ; RAITHBY, G. D.: Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flows. In: *Numer. Heat Transfer* 7 (1984), S. 147–163
- [77] W. J. MCCROSKEY, L. W. C. ; MCALISTER: Dynamic Stall Experiments on Oscillating Airfoils. In: *AIAA Journal* 14 (1976), Jan, Nr. 1
- [78] WENGLER, H. ; WERNER, H.: Large-eddy Simulation of Turbulent Flow over sharp-edged obstacles in a plate channel / Institut für Strömungsmechanik und Aerodynamik, Universität der Bundeswehr München. 1990. – Institutsbericht
- [79] WHITFIELD, D. L. ; TAYLOR, L. K.: *Numerical Solution of the Two-Dimensional Time-Dependent Incompressible Euler Equations*, Mississippi State University, Mississippi State, NASA-CR-195775, April 1994. – MS 39762
- [80] WILCOX, D.C.: Comparison of Two-Equation Models for Boundary Layers with Pressure Gradient. In: *AIAA Journal* 31 (1993), S. 1414–1421
- [81] WILCOX, D.C.: *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, La Canada, California., 1998

- [82] WU, C. H.: A General Theory of the 3D Flow in Subsonic and Supersonic Turbomachines of Axial, Radial and Mixed Flow Type. In: *NACA, TN-2604* (1952)
- [83] YAKHOT, V. ; ORSZAG, S. A.: Renormalization Group Analysis of Turbulence. I. Basic Theory. In: *Journal of Scientific Computing* 1 (1986), Nr. 1
- [84] YAKHOT, V. ; ORSZAG, S.A. ; THANGAM, S. ; GATSKI, T.B. ; SPEZIALE, C.: Development of Turbulence Models for Shear Flows by a Double Expansion Technique. In: *The Physics of Fluids A* 4 (1992), S. 1510–1520
- [85] YANG, C. ; SCHILLING, R.: *Numerische Simulation einer schwingenden Vorleitschaufel*, Lehrstuhl für Hydraulische Maschinen und Anlagen, TU München, 9. Numerik Workshop, 1999
- [86] YANG, C. ; SCHUSTER, M. ; SZILAGYI ; SCHILLING, R.: *Multi-Block Grid Generation Voith-Schneider-Propeller Configurations*, Lehrstuhl für Hydraulische Maschinen und Anlagen, TU München, - Interner Bericht, 1998
- [87] YUAN, W.: *Simulation der Saugrohr-Unterwasser-Wechselwirkung*, Technische Universität München, Diss., 1999
- [88] YUAN, W. ; SCHUSTER, M. ; YANG, C. ; SCHILLING, R.: Three-Dimensional Time Accurate Simulation for Unsteady Incompressible Flow. In: *Proc. of the 3rd International Conference on Hydroscience and Engineering*. Cottbus/Berlin, August 1998

# Anhang A

## Auswertung zeitveränderlicher Strömungsfelder

### A.1 Strömungsumlenkung

Zur Charakterisierung der Strömungsumlenkung in einem Schaufelgitter verwendet man im allgemeinen die Zirkulation  $\Gamma$ . Die Zirkulation ist eine rein kinematische Größe und ist definiert als das Linienintegral der Geschwindigkeit über eine geschlossene Kurve (S). Dabei ist die Kurve (S) so zu legen, daß die Teilkurven a-d und b-c kongruent und im Abstand einer Teilung verlaufen, vgl. Abb. A.1(links).

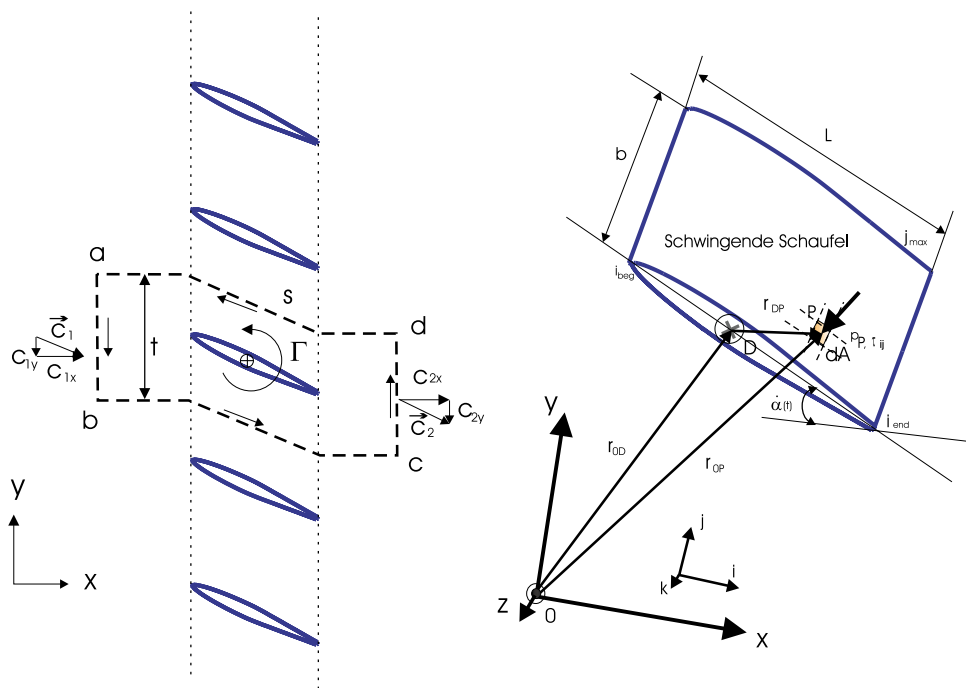


Abb. A.1: Kontrolllinie um eine Schaufel und Berechnungsskizze

$$\Gamma = \oint_{(S)} \vec{c} \cdot d\vec{s} \quad (\text{A.1})$$

Überlagerung einer Zirkulationsströmung ergibt nach Kutta-Joukowski einen Auftrieb  $A$ , vgl. LASCHKA [38]:

$$A = -\rho b c_0 \Gamma \quad (\text{A.2})$$

Bei der Auswertung des Linienintegrals, ist der Integrationsweg im mathematisch positiven Sinne, d.h. entgegen dem Uhrzeigersinn, zu durchlaufen. Entsprechend durchläuft man die obere Teilkurve d-a gegenüber der unteren Teilkurve b-c in entgegengesetzter Richtung. Wegen der Kongruenz beider Teilkurven und der somit gleichen Strömungszustände an gegenüberliegenden Punkten liefern beide Teilkurven zusammengenommen keinen Beitrag zur Zirkulation. Es verbleiben demnach nur die Beträge der parallel zur Gitterfront verlaufenden Teilkurven a-b und c-d. Mit  $c_{1y} < 0$  und  $c_{2y} < 0$  und  $|c_{2y}| > |c_{1y}|$  ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\Gamma = (c_{2y} - c_{1y})t < 0 \quad (\text{A.3})$$

Somit ist die Umlenkung der Strömung  $\Delta c_y$  vom Querschnitt 1 nach 2 ( $c_{2y} - c_{1y}$ ) negativ und durch den Quotienten aus der Zirkulation und der Teilung bestimmt. Für das Problem einer schwingenden Schaufel im Gitterverband sind auf den Teilkurven b-c und d-a die Strömungszustände an gegenüberliegenden Punkten im allgemeinen unterschiedlich. Zur Bestimmung der Umlenkung sind auch die Integrale für beide Teilkurven auszuwerten. Sinngemäß beschreibt jedoch weiterhin der Quotient aus Zirkulation und Teilung die Umlenkung.

Um eine Kennzahl für die Umlenkung zu erhalten wird nachfolgend die dimensionslose Umlenkung  $\Delta c_y / c_o$  definiert:

$$\frac{\Delta c_y}{c_o} = \frac{c_{2y} - c_{1y}}{c_o} = \frac{\Gamma}{c_o t} \quad (\text{A.4})$$

Zur Normierung wird die ungestörte Zuströmgeschwindigkeit verwendet. Mit ausreichendem Abstand von der Gitterfront am Eintritt entspricht  $c_o$  der Geschwindigkeit  $c_1$ .

## A.2 Auftrieb und Drehmomente

- Teilkraft  $\vec{df}_P$  am Oberflächenpunkt P des Flügels:

$$\vec{df}_P = \mathbf{T}_{ij} \vec{n} dA \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{T}_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} - p_P & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} - p_P & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} - p_P \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

mit den Größen, vgl. Abb. A.1(rechts):

$\mathbf{T}_{ij}$  = Spannungstensor

$\vec{n}$  = Flächennormalenvektor

$p_P$  = Druck im Punkt P

$\tau_{ij}$  = Schub- / Normalspannung im Punkt P

$dA$  = Betrag des Flächenelements

- Resultierende Kraft  $\vec{F}$ :

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{k_{max}} \sum_{i=i_{beg}}^{i_{end}} \vec{df}_P \quad (\text{A.7})$$

mit  $j = j_{max}$  = Index der Oberflächen der schwingenden Schaufel für j

- Resultierendes Moment  $\vec{M}_{Schaufel}$

Teildrehmoment am Flügel gegenüber dem Drehpunkt D

$$\begin{aligned} d\vec{M}_D &= \vec{r}_{DP} \times \vec{df}_P = \begin{bmatrix} x_P - x_D \\ y_P - y_D \\ z_P - z_D \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} df_{P,x} \\ df_{P,y} \\ df_{P,z} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (y_P - y_D) \cdot df_{P,z} - (z_P - z_D) \cdot df_{P,y} \\ (z_P - z_D) \cdot df_{P,x} - (x_P - x_D) \cdot df_{P,z} \\ (x_P - x_D) \cdot df_{P,y} - (y_P - y_D) \cdot df_{P,x} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$



mit

$\vec{r}_{DP}$  = Verbindungsvektor von Punkt D und P

$x_P, y_P, z_P$  = Koordinaten der Punkte

$d\vec{M}_D$  = durch die Kraft  $d\vec{f}_P$  im Punkt D induziertes Teildrehmoment

- Schaufeldrehmoment

$$\vec{M}_{Schaufel} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \sum_{i=i_{beg}}^{i_{end}} \sum_{k=1}^{k_{max}} d\vec{M}_D \quad (\text{A.9})$$

### Berechnungsformeln für die Kennwerte

- Auftrieb:

$$A = A_y \quad (\text{A.10})$$

- Auftriebsbeiwert:

$$C_A = \frac{2 \cdot A}{\rho \cdot c_0^2 \cdot L \cdot b} \quad (\text{A.11})$$

- Drehmoment:

$$M = M_z \quad (\text{A.12})$$

- Drehmomentenbeiwert:

$$C_M = \frac{2 \cdot M_z}{\rho \cdot c_0^2 \cdot L^2 \cdot b} \quad (\text{A.13})$$

## A.3 Verluste und Inputleistung

- Inputleistung

Inputleistung durch schwingende Schaufel:

$$P_{inp} = M\dot{\alpha}(t) \quad (\text{A.14})$$

$\dot{\alpha}(t)$  ist die zeitliche Änderung des Schaufelwinkels.

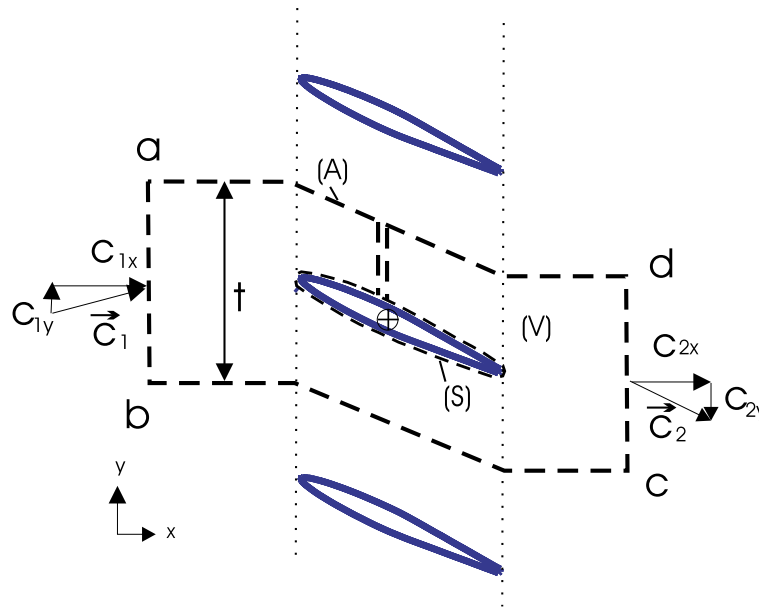


Abb. A.2: Kontrollvolumen um eine Schaufel

- Energiegleichung

Im folgenden wird der von Truckenbrodt [74] und Baehr [2] allgemein formulierte Energiesatz der Fluidmechanik auf das Problem der Umströmung einer schwingenden Schaufel angewandt. Auf diese Weise lassen sich die Verluste und die durch die Schwingbewegung ausgetauschte Strömungsleistung bestimmen.

Der Energiesatz besagt, daß die zeitliche Änderung der kinetischen Energie  $E$  der in einem System enthaltenen Masse gleich der zeitlichen Änderung der im und am System verrichteten Arbeit  $W$  ist. Die zeitliche Änderung der verrichteten Arbeit wird als Leistung  $P$  bezeichnet. Formal gilt:

$$\frac{dE}{dt} = P \quad (\text{A.15})$$

Wegen der EULERschen Betrachtungsweise im ortsfesten Kontrollvolumen besteht die zeitliche Änderung der kinetischen Energie aus einer lokalen und einer konvektiven Änderung:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial t} + \int_{(A)} \frac{\rho}{2} c^2 dQ + \int_{(S)} \frac{\rho}{2} c^2 dQ \quad (\text{A.16})$$

(A) und (S) sind die Kontrollraumgrenzen, vgl. Abb. A.2.

Für die kinetische Energie  $E$  gilt:

$$E = \int_{(V)} \frac{\rho}{2} c^2 dV \quad (\text{A.17})$$

(V) ist das Kontrollvolumen. Da die Schaufeloberfläche undurchlässig für das Fluid ist, verschwindet der körpergebundene Teil der konvektiven Änderung.

– Stationäre Energiebilanz

$$\int_{(A)} \frac{\rho}{2} c^2 dQ = -P_v - \int_{(A)} p dQ \quad (\text{A.18})$$

– Instationäre Energiebilanz

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \frac{\rho}{2} c^2 dV + \int_{(A)} \frac{\rho}{2} c^2 dQ = -P_v - \int_{(A)} p dQ \quad (\text{A.19})$$

– Instationäre Energiebilanz mit der Inputenergie

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \frac{\rho}{2} c^2 dV + \int_{(A)} \frac{\rho}{2} c^2 dQ = -P_v - \int_{(A)} p dQ + P_{inp} \quad (\text{A.20})$$

Unter Berücksichtigung, daß für das Volumenstromdifferential  $dQ = \vec{c} \cdot d\vec{A}$  gilt, ergibt sich nach Umstellung:

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \frac{\rho}{2} c^2 dV + P_v = - \int_{(A)} \left( \frac{\rho}{2} c^2 + p \right) (\vec{c} \cdot d\vec{A}) + P_{inp} \quad (\text{A.21})$$

Gleichung A.21 besagt, daß die zeitliche Änderung der kinetischen Energie plus die Dissipationsleistung im Systemvolumen gleich der über die Kontrollraumgrenzen transportierten Strömungsleistung plus der dem System zugeführten Inputleistung ist. Der Konvektionsterm beschreibt den Transport von Strömungsleistung (Totaldrucktransport) über die äußere Kontrollraumgrenze und ist positiv, wenn dem System Strömungsleistung zugeführt wird.

Für die Totaldruckleistung  $P$  gilt:

$$P = \int_{(A)} \left( \frac{\rho}{2} c^2 + p \right) (\vec{c} \cdot d\vec{A}) \quad (\text{A.22})$$

Über eine Periode  $T$  zeitlich gemittelte Leistung:

$$\overline{P_{Ein}} = \frac{1}{T} \int_0^T P_{Ein} dt \quad (\text{A.23})$$

$$\overline{P_{Aus}} = \frac{1}{T} \int_0^T P_{Aus} dt \quad (\text{A.24})$$

$$\overline{\Delta E_{21}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{E_2 - E_1}{\Delta t} dt \quad (\text{A.25})$$

$$\overline{P_{inp}} = \frac{1}{T} \int_0^T P_{inp} dt \quad (\text{A.26})$$

folgt:

$$\overline{P_{Ein}} + \overline{P_{inp}} = \overline{P_v} + \overline{\Delta E_{21}} + \overline{P_{Aus}} \quad (\text{A.27})$$

$$\overline{\Delta E_{21}} + \overline{P_v} = -\overline{\Delta P_{E-A}} + \overline{P_{inp}} \quad (\text{A.28})$$

$$\overline{\Delta P_{E-A}} = \overline{P_{Aus}} - \overline{P_{Ein}} \quad (\text{A.29})$$

$$\overline{P_v} = -\overline{\Delta P_{E-A}} - \overline{\Delta E_{21}} + \overline{P_{inp}} \quad (\text{A.30})$$

Zur Bildung des dimensionslosen Verlustbeiwertes  $\zeta_v$  wird folgende Definition verwendet:

$$P_{ref} = \frac{1}{2} \rho c_o^3 t b \quad (\text{A.31})$$

$$\zeta_{v0} = \zeta_v(k=0) = \frac{\overline{P_{Ein}} - \overline{P_{Aus}}}{P_{ref}} \quad (\text{A.32})$$

$$\zeta_v = \zeta_v(k) = \frac{-\overline{\Delta P_{E-A}}}{P_{ref}} - \frac{\overline{\Delta E_{21}}}{P_{ref}} + \frac{\overline{P_{inp}}}{P_{ref}} \quad (\text{A.33})$$

Mit der Beiwertschreibweise folgt:

$$\zeta_v = \zeta_v(k) = \zeta_{v1} + \zeta_{v2} + \lambda \quad (\text{A.34})$$

Nach Gleichung A.34 sind zur Bestimmung des Verlustbeiwertes  $\zeta_v$  drei Beiwerte zu bestimmen. Es sind dies der Beiwert  $\zeta_{v1}$  des Totaldrucktransports, der Beiwert  $\zeta_{v2}$  der zeitlichen Änderung der kinetischen Energie beschreibt und der Beiwert  $\lambda$  der Inputleistung.

- dimensionslose Beiwerte für die Abnahme der Leistungsverluste

$$\Delta\zeta_v = \zeta_{v0} - \zeta_v \quad (\text{A.35})$$