

Lehrstuhl für Integrierte Systeme
Technische Universität München

**Verfahren zum referenzdatenfreien Systemstart von
einzelträgerbasierten leitungsgebundenen
Übertragungssystemen**

Roland Zukunft

**Lehrstuhl für Integrierte Systeme
Technische Universität München**

**Verfahren zum referenzdatenfreien Systemstart von
einzelträgerbasierten leitungsgebundenen
Übertragungssystemen**

Roland Hans-Joachim Zukunft

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. K. Diepold

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. I. Ruge, em.
2. Hon.-Prof. Dr.-Ing. L. Gazsi, Universität Bochum
3. Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Utschick

Die Dissertation wurde am 20.01.2005 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik am 19.09.2005 angenommen.

Danksagung

Mein erster und besonderer Dank gilt meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr.-Ing. Ingolf Ruge, für die Motivation zu dieser Arbeit und für seine außergewöhnliche und engagierte Betreuung. Durch viele wertvolle Anregungen hat er die Durchführung dieser Arbeit maßgeblich unterstützt.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Lajos Gazsi möchte ich meinen herzlichen Dank für das von ihm gezeigte Interesse an dieser Arbeit und die Übernahme des Zweitreferats aussprechen. Ebenso möchte ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Utschick für die Übernahme des Drittreferats und Herrn Prof. Dr.-Ing. Klaus Diepold für die Übernahme des Vorsitzes der Prüfungskommission danken.

Ausdrücklich möchte ich mich bei Herrn Dr.-Ing. Heinrich Schenk bedanken, der mich während des gesamten Fortgangs der Arbeit sehr wirkungsvoll unterstützt hat und mich jederzeit von seinem umfangreichen Fachwissen profitieren ließ. Herr Dr. Schenk hat damit wesentlich zum Gelingen der Arbeit beigetragen.

Zu großem Dank bin ich den Mitgliedern des BridgeLab, namentlich Herrn Dr.-Ing. Christian Drewes, Herrn Dr.-Ing. Andreas Hutter, Herrn Dr.-Ing. Ralph Hasholzner, Herrn Sven Haar, Herrn Dr.-Ing. Thomas Winkovich, Herrn Dr.-Ing. Torsten Mahnke, Herrn Fabian Vogelbruch, Herrn Jürgen Regner, Herrn Thomas Magesacher und Herrn Winthir Brunnbauer verpflichtet, die mir bei den verschiedensten Problemen stets freundschaftlich geholfen haben.

Schließlich bedanke ich mich bei allen Mitarbeitern des Lehrstuhls für Integrierte Schaltungen für die angenehme und kollegiale Atmosphäre, in der diese Arbeit entstehen konnte. Besonders erwähnt werden sollen hier Herr Prof. sc. techn. Andreas Herkersdorf, Herr Dr.-Ing. Walter Stechele, Herr Dr.-Ing. Thomas Wild, Herr Dr.-Ing. Stephan Herrmann, Herr Wolfgang Kohtz, Frau Doris Zeller, Frau Gabriele Spöhrle und nicht zuletzt Frau Verena Draga.

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt Empfänger zur einzelträgerbasierten leitungsgebundenen Kommunikation. Zielsetzung ist die Optimierung der digitalen Schlüsselkomponenten, wobei das Hauptaugenmerk auf den Systemstart des digitalen Empfängers gelegt wird. Neben einer möglichst hohen Datenrate stellen eine geringe Implementierungskomplexität sowie eine niedrige Verlustleistung hier wichtige Entwurfskriterien dar.

In der Arbeit wird sowohl die Umsetzung des Eingangssignals auf die zur digitalen Verarbeitung erforderlichen Taktfrequenz, als auch die darauffolgende Entzerrung betrachtet. Zunächst wird eine rein digitale Abstratenumsetzung diskutiert, die eine Verarbeitung mit einer von der Abtastfrequenz unabhängige Symbolrate und somit eine freie Wählbarkeit der Bandbelegung erlaubt. Darüberhinaus wird die rein digitale Realisierung eines Systems zur Taktregelung ermöglicht, wodurch eine Reduktion des Anteils an analogen Bauteilen erreicht wird. Besonderer Wert wird in diesem Zusammenhang auf die Implementierung der beschriebenen Algorithmen gelegt. Es zeigt sich, dass abhängig vom Einsatzgebiet eine Verarbeitung im Bandpassbereich Vorteile gegenüber einer Basisbandverarbeitung zeigen kann. Verfahren, die auf eine derartige Verarbeitung optimiert sind, sind in der bestehenden Literatur allerdings kaum zu finden. In der vorliegenden Arbeit werden daher bekannte Algorithmen für eine Signalverarbeitung im Bandpassbereich erweitert.

Nachdem das Empfängereingangssignal auf die richtigen Rate umgesetzt wurde, kann es digital weiterverarbeitet werden. Zur möglichst sicheren Zurückgewinnung der Sendedaten müssen in einem nächsten Schritt die in einem realen System auftretenden Störungen weitgehend eliminiert werden. In der betrachteten Systemumgebung sind Hauptursachen dieser Störungen Signalverzerrungen, die etwa durch nichtideale Eigenschaften des Übertragungskanal und der Sende- und Empfangsfilter hervorgerufen werden, sowie additives Rauschen. Dieses Rauschen ist oftmals durch den Entstehungsprozess, bzw. durch analoge und digitale Empfangsfilter gefärbt.

Ein bewährtes Verfahren zur Minimierung der beschriebenen Störungen besteht in der Entzerrung des Eingangssignals. Hierbei werden durch Verzerrungen hervorgerufene Intersymbolinterferenzen weitgehend eliminiert und gleichzeitig das additive Rauschen weitgehend dekorreliert. Als besonders leistungsvoll erweisen sich in diesem Zusammenhang sogenannte entscheidungsrückgekoppelte Entzerrer, die zur Eliminierung von Intersymbolinterferenzen bereits entschiedene Symbole heranziehen.

In modernen Telekommunikationsstandards geht der Trend dahin, den Start des Systems ohne Verwendung einer bekannten Symbolfolge durchzuführen. Dies bringt eine Reihe von Vorteilen mit sich, etwa vereinfachte Interoperabilität, Standardisierung und Implementierung. Für lineare Entzerrer sind seit langem Methoden bekannt, die eine referenzdatenfreie Adaption erlauben und die gleichzeitig die Implementierungskomplexität nur geringfügig erhöhen. Schwieriger gestaltet sich eine referenzdatenfreie Adaption entscheidungsrückgekoppelter Entzerrer. Hierbei besteht das Hauptproblem darin, dass der Entzerrer, bedingt durch zurückgeführte fehlerhaft entschiedene Symbole, zu sogenannten falschen Lösungen konvergieren kann. In dieser Arbeit wird zur Lösung dieses Problems vorgeschlagen, zunächst mit Hilfe eines li-

nearen rekursiven Entzerrers eine Startlösung der Koeffizientengewichte zu erzeugen. Ausgehend von dieser Initialisierung wird die Konvergenz im laufenden Betrieb dadurch verbessert, dass sogenannte Soft-Entscheidungen im Rückführzweig verwendet werden. Schwierigkeiten bereitet die Sicherstellung der Stabilität des adaptiven Entzerrers zur Gewinnung der Startkoeffizienten. Hierfür werden zwei Verfahren vorgeschlagen die zu einer vergleichbaren Performance führen, die sich aber etwa in der Implementierungskomplexität unterscheiden. Die Wahl des geeigneten Verfahrens kann somit abhängig von der Einsatzumgebung erfolgen.

Für verschiedene Telekommunikationsstandards wird darüberhinaus die Zulassung verschiedener eng verwandter Modulationsverfahren diskutiert, wobei die Detektion des verwendeten Verfahrens im Empfänger erfolgen soll. Wie in der Arbeit gezeigt wird, kann dies bei Verwendung der beschriebenen Algorithmen ohne größeren Mehraufwand erfolgen. Anhand von Simulationen wird darüberhinaus gezeigt, dass ein referenzdatenfreier Systemstart bei Verwendung der beschriebenen Algorithmen auch bei noch nicht erfolgter Synchronisation erfolgen kann.

Abschließend wird die Implementierung der betrachteten Algorithmen diskutiert. Lag hierbei das Ziel in der Vergangenheit fast ausschließlich auf der Erzielung hoher Schaltgeschwindigkeiten und Integrationsdichten, so gewinnt in letzter Zeit die Minimierung der Verlustleistung wachsende Priorität, etwa um auf kostenintensive Kühlmaßnahmen verzichten zu können. In der Arbeit werden für verschiedene Entwurfsebenen anwendbare Verfahren diskutiert, die zu einer aufwands- und verlustleistungsarmen Realisierung beitragen.

Danksagung	III
Kurzfassung	V
Verzeichnis häufig verwendeter Symbole	XI
Transformationen, Funktionen und Operatoren	XVI
Abkürzungsverzeichnis	XIX
1. Einleitung	1
1.1. Überblick zur xDSL Technologie	2
1.2. Struktur und Einordnung der Arbeit	4
2. Datenübertragung bei leitungsgebundener Kommunikation	7
2.1. Modulationsverfahren	7
2.2. Eigenschaften des Übertragungskanal	9
2.3. Wichtige Teilsysteme des digitalen Empfängers	10
2.3.1. Synchronisation und Abtastratenumsetzung	11
2.3.2. Trägerphasenregelung	11
2.3.3. Entzerrung	11
2.4. Systemmodell bei Überabtastung des Empfangsfilters	12
3. Digitale Abtastratenumsetzung	17
3.1. Grundlagen	18
3.1.1. Möglichkeiten der Taktregelung	18
3.1.2. Abtastratenumsetzung	20
3.1.3. Hybrides Modell der Abtastratenumsetzung	21
3.1.4. Filter zur Abtastratenumsetzung	24
3.1.5. Vergleich von Anti-Image und Anti-Aliasing Filterung	26
3.2. Optimales Filter zur Abtastratenumsetzung	28
3.3. Implementierung der Filter zur Abtastratenumsetzung	31
3.3.1. Implementierung mit gespeicherter Impulsantwort	32
3.3.2. Implementierung in polynomischer Approximation (Farrow-Struktur) ...	37
3.3.2.1. Grundlagen und Standard Struktur	37
3.3.2.2. Verallgemeinerungen der Farrow-Struktur	41
3.3.2.3. Transponierte Farrow-Struktur	45
3.3.2.4. Approximation der Koeffizienten durch Kurvenanpassung	48
3.3.3. Exemplarischer Vergleich des Implementierungsaufwands	49
3.3.3.1. Kaskadierte Systeme	50
3.3.3.2. Ganzzahlige Dezimation anhand von Kammfiltern	50
3.3.3.3. Vergleich von Basisband- mit Bandpassverfahren	51

3.3.3.4. Exemplarischer Vergleich verschiedener Strukturen	52
3.4. Entwurf der Filter zur Abstratenumsetzung	54
3.4.1. Maximal Flacher Entwurf	55
3.4.1.1. Allgemeine Herleitung	55
3.4.1.2. Least Squares Entwurf der Farrow-Struktur Koeffizienten	56
3.4.2. Entwurf durch Minimierung der Fehlerquadrate	58
3.4.2.1. Entwurfsmethode	58
3.4.2.2. Least Squares Entwurf der Farrow-Struktur Koeffizienten	60
3.4.3. Chebychev Approximation	62
3.5. Vergleich der Filterfunktionen	62
3.6. Simulationsergebnisse	66
3.7. Zusammenfassung	70
4. Entzerrung	73
4.1. Entzerrerkonzepte	73
4.1.1. Lineare Entzerrer	74
4.1.2. Entscheidungsrückgekoppelte Entzerrer	76
4.1.3. Implementierung eines Entzerrers im Bandpassbereich	77
4.2. Optimale Koeffizienten beliebig langer Entzerrer	78
4.2.1. Optimale Koeffizienten eines linearen IIR Entzerrers	78
4.2.1.1. Bedingungen zur exakten Entzerrung	78
4.2.1.2. Nullstellenerzwingung	78
4.2.1.3. Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers	79
4.2.2. Optimale Koeffizienten des beliebig langen DFes	83
4.2.3. Mittlerer quadratischer Fehler beliebig langer Entzerrer	85
4.3. Wiener Filter bei endlichen Filterlängen	86
4.4. Vergleich der verschiedenen Entzerrer	89
4.4.1. Vergleich FIR und IIR MMSE-DFE	89
4.4.2. Vergleich MMSE-LE mit MMSE-DFE	90
4.4.3. Vergleich von FSE mit BSE	90
4.5. Fehlerfortpflanzungen beim DFE	91
4.6. Erwartungstreuer MMSE Entzerrer	93
4.7. Systemverhalten berechneter Entzerrer	94
4.8. Zusammenfassung	97
5. Adaptive Entzerrung	99
5.1. Transversalentzerrer	99
5.1.1. Der Least Mean Squares (LMS) Algorithmus	99
5.1.1.1. Schrittweite zur Adaption	100

5.1.1.2. Adaptionsgeschwindigkeit	102
5.1.1.3. Fehler im eingezwungenen Zustand	105
5.1.1.4. Verwendung einer variablen Schrittweite	106
5.1.1.5. Bei der Implementierung auftretende Probleme	107
5.1.1.6. Nichtlineare Effekte	109
5.1.2. Der Recursive Least Squares (RLS) Algorithmus	109
5.2. Entscheidungsrückgekoppelte Entzerrer	110
5.3. Rekursive Entzerrer	111
5.3.1. Exakter rekursiver LMS Algorithmus	112
5.3.2. Rekursiver LMS mit endlicher Speicherlänge	113
5.3.3. Feintuch Algorithmus	114
5.3.4. Weitere rekursive LMS Algorithmen	114
5.3.5. Simulationsergebnisse	115
5.4. Zusammenfassung	117
6. Referenzdatenfreie Entzerrung	119
6.1. Überblick zur referenzdatenfreien Entzerrung	120
6.1.1. Motivation	120
6.1.2. Möglichkeiten der referenzdatenfreien Entzerrung	120
6.1.2.1. Auf Statistiken zweiter Ordnung beruhende Algorithmen	121
6.1.2.2. Auf Statistiken höherer Ordnung beruhende Algorithmen	121
6.1.2.3. Vergleich der verschiedenen Algorithmenklassen	121
6.2. Der Constant Modulus Algorithmus und seine Varianten	122
6.2.1. Kostenfunktion	122
6.2.2. Der Constant Modulus Algorithmus für Transversalentzerrer	124
6.2.2.1. Vorschrift zur Koeffizientennachführung	124
6.2.2.2. Fehler des CMA im eingeschwungenen Zustand	126
6.2.2.3. Stationäre Punkte der Kostenfunktion	128
6.2.2.4. Initialisierung des CMA	130
6.2.2.5. Adaptionsgeschwindigkeit	130
6.2.2.6. CMA mit dekorreliertem Eingang	131
6.2.3. CMA für rekursive Entzerrer	133
6.2.3.1. Implementierung in direkter Form	133
6.2.3.2. Lattice Filter Implementierung des IIR-CMA	134
6.3. Strategien zur referenzdatenfreien (blinden) Entzerrung	138
6.3.1. Blinde Adaption eines Transversalentzerrers	138
6.3.2. Blinde Adaption eines entscheidungsrückgekoppelten Entzerrers	138
6.3.2.1. Verwendung von Soft-Entscheidungen	140
6.3.2.2. Getrennte Amplituden und Phasenentzerrung	142

6.3.2.3. Blinde Adaption anhand des IIR-CMA	143
6.3.2.4. Änderung der Struktur bei Verschlechterung des MSE	144
6.4. Blinde Entscheidung des Modulationsverfahrens	145
6.5. Simulationsergebnisse	146
6.6. Zusammenfassung	150
7. Aufwandsarme Implementierung	153
7.1. Verlustleistungsarme Implementierung auf algorithmischer Ebene	153
7.1.1. Quantisierung der Eingangssignale eines adaptiven Entzerrers	154
7.1.1.1. Verschiedene Arten der Quantisierung	154
7.1.1.2. Quantisierung mit zusätzlicher Addition eines Rauschterms	161
7.1.2. Vereinfachung des Entzerrers im laufenden Betrieb	162
7.2. Verlustleistungsarme Implementierung auf Hardwareebene	163
7.3. Verlustleistungsarme Implementierung auf VLSI-Ebene	164
7.4. Zusammenfassung	167
8. Diskussion und Ausblick	169
Appendix	175
Literaturverzeichnis	181

Verzeichnis häufig verwendeter Symbole

a	Koeffizientenvektor des AR Anteils des IIR Entzerrers
A	Übertragungsfunktion des AR Anteils des IIR Entzerrers
b	Anzahl an Bits zur Quantisierung
B	Bandbreite
B	MA Anteil des IIR Entzerrers (Vektor der Länge w der Polyphasen)
\mathbf{b}_l	Vektor der Länge w des l -ten Koeffizienten von B
c	Vektor der Länge w des n -ten Kanalkoeffizienten
$c^{(p)}$	Koeffizient p von $\mathbf{c}(n)$
C	Kanalfaltungsmatrix der Größe $(Nw \times N + N_C - 1)$
C	Übertragungsfunktion des Kanals (Vektor bestehend aus w Polyphasen)
$\tilde{\mathbf{C}}$	Übertragungsfunktion des Kanals nach Rauschdekorrelation
d	Koeffizientenvektor des Rückkoppelfilters des DFE
D	Ganzzahliger Anteil der Verzögerung
D	Übertragungsfunktion des Rückkoppelfilters des DFE
e	Fehlersignal, bzw. Innovation bei einem Prediktionsfilter
e_a	<i>A priori</i> Fehler, der sich bei Verwendung der noch nicht nachgestellten Koeffizientengewichte des Entzerrers ergibt
e_g	Quadratischer Restfehler bei der Approximation der Koeffizienten der Farrow-Struktur
e_p	<i>A posteriori</i> Fehler, der sich bei Verwendung der bereits nachgestellten Koeffizientengewichte des Entzerrers ergibt
e_t	Fehler des Abtastzeitpunktes
\mathbf{e}_δ	Vektor bestehend aus Eins an Position δ eine Eins und Null sonst
E	Einheitsmatrix
\mathbf{E}_δ	Matrix, bestehend aus einer Einheitsmatrix beginnend an Position $\{\delta, 1\}$ und Null sonst
f	Koeffizientenvektor eines Transversalentzerrers, bzw. des FFF eines DFE
f_0	Mittenfrequenz
f_i	Verarbeitungsfrequenz am Empfänger

f_N	Nyquistfrequenz
f_s	Geregelte Abtastfrequenz des Senders
f_T	Symbolrate (Baudrate)
F	Übertragungsfunktion des Vorwärtsezzerrers
\mathbf{g}_k	Vektor des k -ten Koeffizienten des SRC Filters in Standard Farrow-Struktur
$\tilde{\mathbf{g}}_k$	Vektor des k -ten Koeffizienten des SRC Filters in symmetrischer Farrow-Struktur
\mathbf{G}	Koeffizientenmatrix des SRC Filters in Farrow-Struktur
$\tilde{\mathbf{G}}$	Koeffizientenmatrix des SRC Filters in symmetrischer Farrow-Struktur
h_d	Diskrete Impulsantwort des quantisierten SRC Filters
h_{id}	Impulsantwort des idealen Interpolators
h_{an}	Impulsantwort des analogen Filters zur Abtastratenumsetzung im hybriden Modell
$\bar{h}_{an}, \bar{\bar{h}}_{an}$	Quantisierte Impulsantwort des SRC Filters nach Faltung mit ZOH, bzw. FOH
$h_{ZOH/FOH}$	Impulsantwort eines ZOH-, bzw. FOH-Gliedes
H	Filter zur Abtastratenumsetzung
H_{an}	Übertragungsfunktion des analogen Filters zur Abtastratenumsetzung im hybriden Modell
$\bar{H}_{an}, \bar{\bar{H}}_{an}$	Übertragungsfunktion des quantisierten SRC Filters nach Faltung mit ZOH, bzw. FOH
H_{id}	Übertragungsfunktion des idealen Interpolators
$H_{ZOH/FOH}$	Übertragungsfunktion eines ZOH-, bzw. FOH-Gliedes
j	Imaginäre Zahl $j = \sqrt{-1}$
J	Anzahl der verschiedenen Zweige einer Farrow-Struktur Implementierung
J	Kostenfunktion des LMS Algorithmus
J_l	Kostenfunktion des Tap-Leakage LMS Algorithmus
k	Ganzzahliger Index (verwendet für überabgetastete Signale)
\mathbf{k}	Koeffizientenvektor des rein rekursiven Filters in Lattice Filter Implementierung
K	Polynomischer Grad
l	Diskreter Zeitindex der digitalen Verarbeitung nach Abtastratenumsetzung, bzw. allgemeiner ganzzahliger Index
L	Gedächtnislänge des rekursiven LMS Algorithmus
\mathbf{m}	Vektor mit Potenzen von μ (siehe (3.47))

XIII

$\tilde{\mathbf{m}}$	Vektor mit Potenzen von $(2\mu - 1)$ (siehe (3.63))
m	Diskreter Zeitindex der unregelmäßigen Abtastung, bzw. allgemeiner Index
m_b	Basispunktindex der digitalen Interpolation
M	Grad des AR-Filters, bzw. des Rückkoppelentzerrers
M	Anzahl der Signalraumpunkte bei PAM, bzw. QAM
n	Ganzzahliger Index (verwendet für im Symboltakt abgetastete Signale)
n	Rauschsignal
\underline{n}	Vektor der Länge w , der die Rauschsignale innerhalb eines Symbolintervalls zusammenfasst
n_c	Konvergenzzeit als Anzahl der Adaptionsschritte, bis die Leistung des transienten Fehlers unter der des Fehlers im eingeschwungenen Zustand sinkt
N	Grad des Filters zur Abstratenumsetzung
N	Länge des MA-Filters, bzw. des Vorwärtsentzerrers
N_c	Kanallänge des diskreten Übertragungskanals
N	Spektrum des additiven Rauschens
p	Parameter zur Definition der Dispersionskonstante, üblicherweise gilt $p = 2$
p_E	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Fehlers des Abtastzeitpunktes
P_x	Empfangene Nutzsignalleistung
q	Parameter der verallgemeinerten CM Kostenfunktion, üblicherweise gilt $q = 2$
r	Empfangssignal
\underline{r}	Vektor der Länge w , der die Empfangssignale innerhalb eines Symbolintervalls zusammenfasst
R_v	AKF des analogen Eingangssignals am Empfänger nach analoger Filterung
s	Sendesignal
t	Zeitvariable
T	Symboldauer
T_s	Periodendauer des Abtasttaktes
T_i	Periodendauer am Ausgang des Interpolationsfilters
\mathbf{u}	Ausgangssignal des AR Filters (Vektor der Länge w der einzelnen Polyphasenkomponenten)
v	Eingangssignal am Empfänger nach analoger Filterung
\mathbf{v}	Vektor der Polyphasen in der Farrow-Struktur Implementierung
\mathbf{v}	Eigenvektor der Autokorrelationsmatrix
\mathbf{v}_Δ	Differenz der Koeffizientengewichte eines Filters von denen des Wiener Filters

v_h	Eingangssignal am Empfänger, das im hybriden Modell zurück in den analogen Bereich gewandelt wird.
v_{in}	Ungefiltertes analoges Eingangssignal am Empfänger
\mathbf{V}	Vandermonde Matrix mit Basis μ (siehe (3.84))
$\tilde{\mathbf{V}}$	Vandermonde Matrix mit Basis $(2\mu - 1)$
$\bar{\mathbf{V}}$	Matrix zur Bestimmung des SRC Filters beim maximal flachen Entwurf
\mathbf{V}_Δ	Autokorrelationsmatrix von \mathbf{v}_Δ
V	Spektrum des analogen Eingangssignals am Empfänger nach analoger Filterung
V_h	Spektrum von $v_h(t)$
\mathbf{w}	Vektor mit Potenzen von $e^{-j\omega}$ (siehe (3.46))
w	Überabtastfaktor der digitalen Verarbeitung
\mathbf{W}	Übertragungsfunktion des IIR-Entzerrers
x	Sendesymbol
\hat{x}	Entschiedenenes Symbol
x	Hilfsvariable
\mathbf{x}	Zustandsvektor des rein rekursiven Filters in Lattice Filter Implementierung
x	Sendesignal
y	Ausgangssignal des linearen Entzerrers im Symboltakt
\tilde{y}	Überabgetastetes Ausgangssignal des linearen Entzerrers
z	Ausgangssignal des entscheidungsrückgekoppelten Entzerrers
δ	Systemverzögerung
ϵ_{LMS-SS}	Fehlerleistung im eingeschwungenen Zustand am Ausgang eines mit dem LMS Algorithmus adaptierten Entzerrers
ϵ_{min}	Leistung des Fehlers am Ausgang des Wiener Filters
φ	Fehler der Trägerphase
Γ	Kombinierte Systemantwort von Kanal und Entzerrer
λ	Laufindex der einzelnen Polynome der verlängerten Farrow-Struktur
λ	Eigenwerte der Autokorrelationsmatrix
λ_l	Leckfaktor (<i>Leakage Faktor</i>) des Tap-Leakage LMS Algorithmus
v	Länge des zeitdiskreten Übertragungskanal
v	Ausgangssignal des AR Filters
μ	Intersymbolposition bei Standard Farrow-Struktur ($0 \leq \mu < 1$), FD

μ	Schrittweite eines adaptiven Algorithmus
$\tilde{\mu}$	Intersymbolposition bei transponierter Farrow-Struktur
$\hat{\mu}, \mu_{opt}$	Geschätztes, bzw. optimales FD
$\bar{\mu}, \bar{\bar{\mu}}$	Mit ZOH, bzw. FOH quantisiertes FD
γ_p	Dispersionskonstante des CMA, bzw. MMA
ρ	Ausgangssignal des AR Filters bei vertauschter Struktur
τ_g	Gruppenlaufzeit
τ_p	Phasenlaufzeit
ω	Auf die Verarbeitungsfrequenz normierte Kreisfrequenz
ω_0	Mittenkreisfrequenz
Θ	Phasengang
ζ_n	Ausgangssignal des MA Filters im Symboltakt

Transformationen, Funktionen und Operatoren

$E\{x(t)\} = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \tau p_x(\tau) d\tau$	Erwartungswert von $x(t)$ mit der Dichte $p_x(\tau)$
$E\{x_k\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n p_x(n)$	Erwartungswert von x_k
$\sigma_x^2 = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} (\tau - E\{x(t)\})^2 p_x(\tau) d\tau$	Varianz des Signals $x(t)$
$\kappa_x = \frac{E\{ x_k ^4\}}{E^2\{ x_k ^2\}}$	Normiertes Kurtosis von x_k . Beschreibt die Form der Wahrscheinlichkeitsdichte von x_k (siehe (6.8)).
$R_x(\tau) = E\{x(t)x(t+\tau)\}$	Autokorrelationsfunktion von $x(t)$
$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$	Fouriertransformation von $x(t)$
$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k}$	z -Transformation von x_k
$x_k = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{k-1} dz$	Inverse z -Transformation
$\text{sinc}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \\ \sin(\pi x)/(\pi x) & \text{sonst} \end{cases}$	Sinc-Funktion
$\text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\exp(t)}{t} dt$	Integraleponentialfunktion
$\text{Si}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\sin(t)}{t} dt$	Integralsinus
$a_k \otimes b_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$	Zeitdiskrete Faltung
$a(t) \otimes b(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} a(\tau) b(t-\tau) d\tau$	Zeitkontinuierliche Faltung
$X_{k,l}$	Element $\{k, l\}$ der Matrix \mathbf{X}
x_k	Element $\{k\}$ des Vektors \mathbf{x}

XVII

x^*

Konjugierter Wert von x

$\mathbf{X}^T, \mathbf{x}^T$

Transponierte der Matrix \mathbf{X} , bzw. des Vektors \mathbf{x}

$\mathbf{X}^H, \mathbf{x}^H$

Hermitisch Transponierte der Matrix \mathbf{X} , bzw. des Vektors \mathbf{x}

\mathbf{X}^{-1}

Inverse der Matrix \mathbf{X}

$\mathbf{X}^\dagger = (\mathbf{X}^H \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}$

Pseudoinverse der Matrix \mathbf{X}

$\text{Tr}(\mathbf{X})$

Spur der Matrix \mathbf{X}

$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^2}$

l_2 -Norm des Vektors \mathbf{x} der Länge N

Abkürzungsverzeichnis

2B1Q	Two-Binary One-Quaternary
4B3T	Four-Binary Tree-Ternary
A/D	Analog/Digital
ADC	Analog Digital Converter
ADSL	Asymmetric DSL
AKF	Autokorrelationsfunktion
APLMS	A posteriori LMS
AR	Autoregressiv
AWGN	Additives Weißes Gaußsches Rauschen
BB	Basisband
BIBO	Bounded Input Bounded Output
BP	Bandpassbereich
BS	Baud Spaced
BSE	Baud Spaced Equalizer
CAP	Carrierless Amplitude and Phase Modulation
CM	Constant Modulus
CMA	Constant Modulus Algorithm
D/A	Digital/Analog
DAC	Digital Analog Converter
DD	Decision Directed
DFE	Decision Feedback Equalizer
DMT	Discrete Multitone
DSL	Digital Subscriber Line
DSP	Digitaler Signalprozessor
ELMS	Extended LMS; entspricht dem Feintuch Algorithmus
EMSE	Excess MSE
ETSI	European Telecommunications Standards Institute
FBF	Feedback Filter
FD	Fractional Delay
FEXT	Far End Cross Talk
FFF	Feedforward Filter
FIR	Finite Impulse Response
FMLMS	Finite Memory LMS
FOH	First Order Hold
FS	Fractionally Spaced
FSE	Fractionally Spaced Equalizer
FSM	Finite State Machine
FTTC	Fiber To The Curb / Fiber To The Cabinet
GDPE	Generalized DFE
HARF	Hyperstable Adaptive Recursive Filter
HOS	Higher Order Statistics
I&D	Integrate and Dump
i.i.d.	Independent and identically distributed
IIR	Infinite Impulse Response

XX

ISDN	Integrated Services Digital Network
LE	Linearer Entzerrer
LMS	Least Mean Squares
LS	Least Squares
LSB	Least Significant Bit
LTI	Linear Time-Invariant
MA	Moving Average
MMA	Multi Modulus Algorithm
MMSE	Minimum Mean Square Error
MSE	Mean Square Error
MUD	Multiuser Detection
NEXT	Near End Cross Talk
OVM	Output Variance Minimization
PAM	Pulse Amplitude Modulation
PLL	Phase Locked Loop
PLR	Pseudolinear Regression
PS	Phase-Splitting
PSD	Power Spectral Density
QAM	Quadrature Amplitude Modulation
QPSK	Quaternary Phase Shift Keying
RLMS	Recursive LMS
SCA	Slow Convergency Assumption
SDSL	Symmetric DSL
SHARF	Simplified HARF
SHDSL	Single pair High bit rate DSL
SINR	Signal to Interference plus Noise Ratio
SNR	Signal to Noise Ratio
SOS	Second Order Statistics
SPR	Strictly Positive Real
SRC	Sampling Rate Conversion
SRRC	Square Root Raised Cosine
THP	Tomlison-Harashima Precoder
UMSE	Unbiased MSE
UTP	Unshielded Twisted Pair
VDSL	Very high bit rate DSL
VSS	Variable Step Size
ZF	Zero Forcing
ZOH	Zero Order Hold

1 Einleitung

Nur wenige Jahre nach der Entwicklung des ersten planar integrierten Transistors machte Gordon Moore die berühmt gewordene Entdeckung, dass die Anzahl der auf einem integrierten Schaltkreis implementierbaren Transistoren mit der Zeit exponentiell steigt [123]. Seine Voraussage, dass sich dieser Anstieg mit der selben Geschwindigkeit fortsetzen wird, hat sich bis heute bewahrheitet und es wird davon ausgegangen, dass sie noch mindestens bis zum Ende dieser Dekade ihre Gültigkeit behalten wird [124]. Eine ähnliche Beobachtung wurde etwa von Hossein Eslambolchi bezüglich der kommerziell verfügbaren Übertragungsraten in der Telekommunikation gemacht. Interessanterweise stimmt diese Steigerungsrate mit der des Mooreschen Gesetzes überein: Eine Verdoppelung tritt alle 18 Monate auf [27]. Auch hier wird davon ausgegangen, dass diese Steigerungsrate in den nächsten Jahren beibehalten werden kann. Im Gegensatz zum Mooreschen Gesetz der Mikroelektronik kann eine Grenze der Entwicklung - bei einer gegebenen nutzbaren Bandbreite und dem zugrundeliegenden Signal-Stör-Abstand - durch die von Shannon gefundene Kanalkapazität hier allerdings exakt angegeben werden. Zusammen mit der zunehmenden Vernetzung der einzelnen Rechner im Internet stellt die Steigerung der individuell zur Verfügung gestellten Datenraten eine wichtige Voraussetzung zum fortschreitenden Wandel von der Industrie- zur sogenannten Informationsgesellschaft dar.

Das Internet lässt sich grob in ein sogenanntes Kernnetz und den Teilnehmeranschlussbereich unterteilen. Hierbei ist das Kernnetz mittlerweile bereits sehr gut ausgebaut. Hier kommen inzwischen fast ausschließlich Glasfaserkabel zum Einsatz, deren erreichbare Übertragungsraten derzeit im Bereich von 40 GBit/s liegen. Durch den Verwendung von Multiplexverfahren, die auf der Verwendung unterschiedlicher Wellenlängen und Polarisationswinkel beruhen, wurden unter Laborbedingungen jedoch auch schon weit größere Datenraten im Bereich mehrerer TBit/s erreicht [20]. Im Teilnehmeranschlussbereich hingegen ist der Einsatz von Glasfaserkabeln üblicherweise mit zu hohen Kosten verbunden, so dass hier meist auf andere Übertragungsmedien zurückgegriffen wird, deren Eigenschaften die insgesamt erzielbaren Datenraten bestimmen. Die wesentlichen konkurrierenden Verfahren für die Überbrückung der sogenannten „letzten Meile“, sowie deren wichtigste Vor- und Nachteile sind [20], [37]:

xDSL — Hierbei bedeutet DSL *Digital Subscriber Line* und das „x“ bezeichnet die jeweilige Technologie. So steht etwa „A“ für *Asymmetric*, „S“ für *Symmetric*, „H“ für *High Speed* und „V“ für *Very High Speed*. Die älteste kommerziell genutzte DSL Technologie ist das *Integrated Service Digital Network* (ISDN). Bei der DSL Technologie wird das Telefonkabel zur Übertragung breitbandiger Dienste verwendet. Vorteile sind die bereits bestehende Infrastruktur und die Eigenschaft, dass jeder Teilnehmer mit einem physikalisch eigenen Kabel mit der Vermittlungsstelle verbunden ist, wodurch zum einen die individuelle Datenrate weitgehend garantiert werden kann und andererseits die Abhörsicherheit relativ hoch ist. Nachteilig ist, dass DSL nicht auf jeder Leitung einsetzbar ist, etwa wenn deren Länge zu groß ist oder wenn Spulen in der Leitung integriert sind. Ein Problem das durch die voranschreitende Verbreitung verschiedenartiger xDSL Systeme wachsende Bedeutung gewinnt, ist das Übersprechen von xDSL-Signalen auf benachbarten Leitungen.

Kabel (Cable TV, CATV) — Hier wird das zur Übertragung des Fernsehsignals eingesetzte Koaxialkabel zur Übertragung breitbandiger Dienste verwendet. Hauptvorteil ist die im privaten Bereich bestehende Infrastruktur, Hauptnachteil die Tatsache, dass es sich bei dem Fernsehkabel um ein von mehreren Teilnehmern gemeinsam genutztes Medium handelt, so dass die

dem einzelnen Nutzer zur Verfügung gestellte Bandbreite von der Anzahl aktiver Nutzer abhängt. Insgesamt sind mit dieser Technologie derzeit Summendatenraten von etwa 50 MBit/s erreichbar [20].

Power Line — Diese Technologie verwendet das Stromnetz zur Nachrichtenübertragung. Hier liegt der Hauptvorteil ebenfalls in der bestehenden Infrastruktur. Nachteilig ist wie beim Kabel, dass eine Leitung von mehreren Benutzern geteilt werden muss. Zudem sind die Eigenschaften des Stromnetzes für eine breitbandige Datenübertragung ziemlich ungünstig, so dass mit dieser Technologie nur relativ geringe Summendatenraten von wenigen MBit/s erreichbar sind. Besser ist diese Technologie hingegen für die Vernetzung innerhalb eines Hauses geeignet [37].

Wireless Local Loop — Vielversprechend erweist sich die Verwendung funkbasierter Verfahren im Teilnehmeranschlussbereich. Hier sind bidirektionale Datenraten von derzeit 155 MBit/s erreichbar. Als problematisch erweisen sich etwa die Kosten für den Aufbau eines flächendeckenden Netzes, sowie die prinzipielle Begrenztheit der verfügbaren Frequenzbereiche. Es ist davon auszugehen, dass diese Technik in absehbarer Zukunft fast ausschließlich im kommerziellen Bereich eingesetzt werden wird [20].

Satellitengestützte Verfahren — Satellitengestützte Verfahren besitzen den großen Nachteil, dass bedingt durch die große Entfernung zwischen Sender und Empfänger, eine breitbandige Übertragung nur dann möglich ist, wenn eine direkte Sichtverbindung besteht. Als am vielversprechendsten erscheinen hier Lösungen die auf im sogenannten *Low Earth Orbit* (LEO) stationierten Satelliten basieren. Derartige Satelliten bewegen sich jedoch relativ zur Erdoberfläche ziemlich schnell, so dass sich Zeitabschnitte guter Übertragungsqualität mit Abschnitten schlechterer Qualität abwechseln. Hauptproblem ist jedoch der kostenintensive Ausbau des erforderlichen Satellitennetzes, so dass derzeit nicht davon ausgegangen wird, dass dieses Verfahren in absehbarer Zeit einen breiten Einsatz finden wird [37].

Insgesamt stellt eine der vielversprechendsten Realisierungsmöglichkeiten eines breitbandigen Teilnehmeranschlusses die xDSL Technologie dar. Diese Technologie und insbesondere deren derzeit hochbitratigste Variante, das sogenannte VDSL, stellt die Grundlage dieser Arbeit dar. Im folgenden Kapitel wird ein kurzer Überblick über die verschiedenen xDSL Technologien mit Schwerpunkt VDSL gegeben. Kapitel 1.2 gibt anschließend eine Übersicht über den Rest der Arbeit.

1.1 Überblick zur xDSL Technologie

Wie bereits beschrieben, besteht der Hauptvorteil der xDSL Technologie in der bereits weitgehend vorhandenen Infrastruktur sowie in der Tatsache, dass jeder Teilnehmer durch ein eigenes physikalisches Kabel mit der Vermittlungsstelle verbunden ist. Als weiterer Vorteil erweist sich, dass bereits verschiedene DSL Verfahren standardisiert sind und sich im Einsatz befinden, so dass diese Technologien einen gewissen „Startvorteil“ gegenüber den meisten konkurrierenden Verfahren besitzt.

Limitierend wirkt bei einer breitbandigen Übertragung über das Telefonkabel einerseits die Dämpfung der Leitung und andererseits von benachbarten Kabel induziertes Nebensprechen. Das Nebensprechen lässt sich unterteilen in Störungen deren Quelle bezüglich des betrachteten Empfängers am nahen, bzw. fernen Ende der Leitung liegen. Die entsprechenden Störer werden dementsprechend als *Near End Crosstalk* (NEXT) und *Far End Crosstalk* (FEXT) bezeichnet.

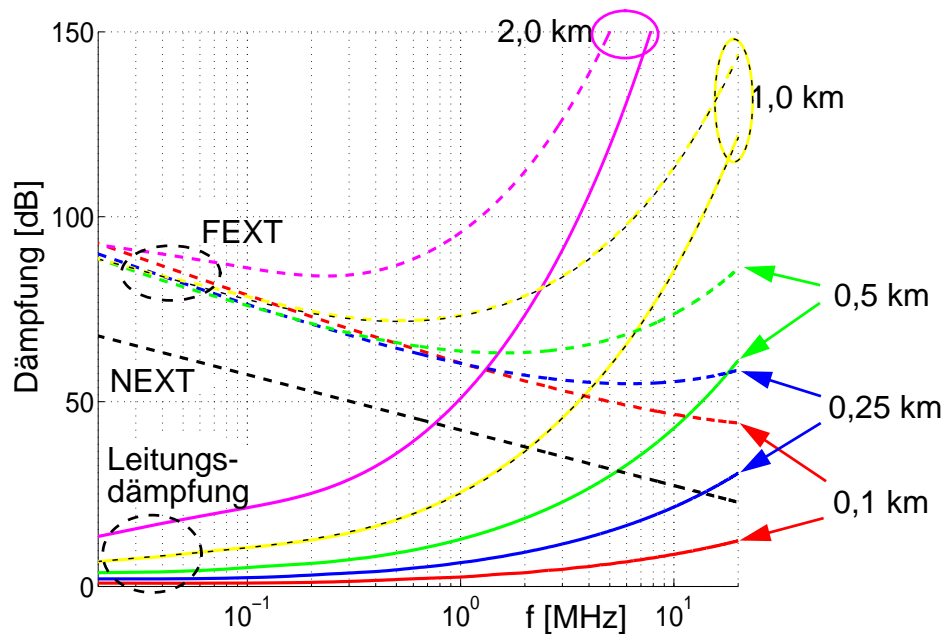


Bild 1.1: Exemplarischer Vergleich von Leitungsdämpfung und Nebensprechdämpfung bei Übertragung über die Kupferdoppelader

Der Verlauf der Leitungs- und Nebensprechübertragungsfunktionen als Funktion der Frequenz ist in Bild 1.1 exemplarisch für Leitungen verschiedener Länge und einem Durchmesser von 0,5 mm gezeigt. Zu beachten ist, dass sowohl die Frequenz, als auch die unterschiedlichen Dämpfungen im logarithmischen Maßstab aufgetragen sind. Man erkennt, dass sowohl Leitungs-, als auch FEXT Dämpfung mit der Länge ansteigen, während die NEXT Dämpfung nahezu unabhängig von der Leitungslänge ist. Mit steigender Frequenz erhöht sich die Leitungsdämpfung, die NEXT Dämpfung nimmt hingegen ab. Die FEXT Dämpfung nimmt hier zunächst ab, ab einer gewissen leitungsabhängigen Frequenz allerdings wieder zu. Man kann aus Bild 1.1 folgern, dass bei niedrigen Frequenzen die Leitungsdämpfung limitierend für die erzielbare Übertragungsrate wirkt, während der Einfluss des Nebensprechens vergleichsweise gering wiegt. Nachdem NEXT hier tolerierbar ist, ist es daher hier sinnvoll, ein bandbreiteneffizientes Gleichlageverfahren zu verwenden, bei dem in Upstream (US) und Downstream (DS) Richtung im gleichen Frequenzband gesendet wird. Erforderlich ist hierfür allerdings die Verwendung eines Echokompensators. Wichtige Systeme die in diesem Frequenzbereich eingesetzt werden sind ISDN, sowie SDSL und SHDSL. Bei höheren Frequenzbereichen werden die NEXT Störer derartig dominant, dass es vorteilhaft erscheint, auf Getrenntlageverfahren auszuweichen. Hier werden etwa ADSL und VDSL betrieben, die beide ein Frequenzgetrenntlageverfahren verwenden. Ein Überblick über die genannten xDSL Technologien ist in Tabelle 1.1 gegeben.

DSL System	Modulationsverfahren	Datenrate (Bit/s)		Bandbreite (Hz)
		DS	US	
ISDN (IDSL)	2B1Q, 4B3T	160 k	160 k	0 - 80 (120) k
SDSL	2B1Q, PAM	768 k	768 k	20 - 400 k
SHDSL	PAM	160 k - 2,32 M	160 k - 2,32 M	20 - 400 k
ADSL	DMT	32 k - 12 M	32 k - 1 M	20 - 1100 k
VDSL	DMT, QAM, CAP	13 - 52 M	1,5 M - 2,3 M	300 k - 30 M

Tabelle 1.1: Vergleich der wichtigsten xDSL Techniken

In dieser Arbeit wird exemplarisch einzelträgerbasiertes VDSL betrachtet. Die beschriebenen Verfahren sind allerdings nicht auf dieses System beschränkt. Eine Übersicht zu Einzelträger VDSL findet sich etwa in [131].

Im Laufe der Entstehung dieser Arbeit war die Standardisierung von VDSL noch im Gange. Inzwischen wurde in Nordamerika als Modulationsverfahren Discrete Multitone (DMT) festgesetzt, das zuständige europäische Standardisierungsinstitut (*European Telecommunications Standards Institute*, ETSI) hat jedoch auch QAM zugelassen. Für zukünftige Verfahren ist jedoch nur noch DMT vorgesehen [175]. Insgesamt ist jedoch davon auszugehen, dass sorgfältig entwickelte Einzelträger und Multiträger VDSL Systeme im Wesentlichen vergleichbare Übertragungsraten und Reichweiten aufweisen [69], [70]. Im Rahmen der Standardisierung wurden von Verfechtern beider Verfahren eine Reihe von Argumenten für die Überlegenheit des jeweilig favorisierten Verfahrens angebracht. Für die Verwendung einzelträgerbasierter Verfahren spricht etwa, dass sie mit weniger Aufwand realisierbar, besser erprobt, sowie verlustleistungsärmer implementierbar sind [70]. Eine verlustleistungsarme Implementierung ist gerade bei VDSL erstrebenswert, da hier etwa bei der sogenannten *Fiber to the Cabinet* (FTTC) Anwendung der Transceiver am sogenannten Netzwerkt-Ende in einem kleinen Schrank installiert wird, der sich durch limitierte Leistungskapazität und Größe auszeichnet [173]. In dieser Arbeit wird daher besonderer Wert auf die Implementierungskomplexität und insbesondere auf die Verlustleistung gelegt. Weitere wichtige Zielsetzungen bei der Entwicklung moderner Telekommunikationssysteme sind eine möglichst hohe Flexibilität in der Bandbelegung, sowie eine möglichst einfache Prozedur beim Systemstart.

Ein wichtiger Grundsatz zur Verringerung der Implementierungskomplexität und der Herstellungskosten besteht in der möglichst weitgehenden digitalen Realisierung der Funktionalität. Ein entscheidender Schritt hierfür ist die rein digitale Gestaltung eines Systems zur Abstratenumsetzung, das es erlaubt, den A/D Wandler ungesteuert zu betreiben. Dies ermöglicht bei einem Einzelträgersystem einerseits die freie Wählbarkeit der Symbolrate und somit der Bandbelegung und der Übertragungsgeschwindigkeit und andererseits die rein digitale Realisierung der Taktregelung.

Zur Vereinfachung des Systemstarts bieten sich Verfahren an, die eine Adaption des Empfängers auf den verwendeten Kanal ohne die Verwendung von Trainingssymbolen, also referenzdatenfrei, durchführen können. Neben einer starken Vereinfachung der sogenannten Handshake Prozedur beim Systemstart ermöglichen derartige Verfahren bei einer Aufteilung des Kanals unter verschiedenen Teilnehmern - wie es auch bei VDSL vorgesehen ist - eine Erhöhung der Datenrate. Die Durchführung eines referenzdatenfreien Systemstarts, bei unbekanntem Kanal, sowie nicht regeltem Abtasttakt und unter Umständen unbekanntem Modulationsverfahren, ist das Hauptziel der vorliegenden Arbeit. Besonderes Augenmerk wird hierbei auf die in der Literatur bisher nur spärlich betrachtete Signalverarbeitung im Bandpassbereich gelegt, deren Verwendung sich in vielen Einsatzgebieten als vorteilhaft erweist.

1.2 Struktur und Einordnung der Arbeit

Die vorliegende Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut: Zunächst werden in Kapitel 2 Grundlagen der einzelträgerbasierten drahtgebundenen Kommunikation aufgezeigt. Hier wird ein Überblick über den Sender, die Leitungseigenschaften, sowie über die Arbeitsweise eines für das betrachtete Anwendungsgebiet typischen Empfängers gegeben. Anschließend wird das in die-

ser Arbeit verwendete Kanalmodell erklärt.

In Kapitel 3 wird auf digitale Abstratenumsetzung eingegangen. Hierbei werden besonders zwei Techniken unterschieden, die spektrale Nullstellen entweder bei Vielfachen der Eingangsbzw. der Ausgangsfrequenz erzeugen können. Ein exemplarischer Implementierungsvergleich zeigt, dass unter gewissen Umständen durch Signalverarbeitung im Bandpassbereich aufwandsärmere Empfänger realisierbar sind, als bei einer Basisbandverarbeitung. Hierbei sind Techniken zur Abstratenumsetzung von Signalen im Bandpassbereich bisher in der Literatur kaum beschrieben. Im Anschluss werden verschiedene Methoden zum Entwurf von Filtern zur Abstratenumsetzung beschrieben. Hier wird gezeigt, wie sich für eine Signalverarbeitung im Bandpassbereich erforderliche Filter berechnen lassen. Die verschiedenen Filter lassen sich vorteilhaft in einer polynomischen Approximation implementieren. Entwurfsmethoden zur Generierung von Koeffizientensätzen dieser speziellen Strukturen werden ebenfalls angegeben. Anschließend werden die verschiedenen Entwurfsmethoden sowohl anhand der Filterfunktionen, als auch anhand von Zeitbereichssimulationen verglichen.

Anschließend wird in Kapitel 4 - Kapitel 6 auf Entzerrung eingegangen. Zunächst werden in Kapitel 4 optimale Koeffizientensätze linearer und entscheidungsrückgekoppelter Entzerrer für praktisch realisierbare Filterstrukturen sowie für den Grenzfall unbeschränkter Entzerrerrängen berechnet. Besonderes Augenmerk wird hierbei auf den Einfluss von farbigem Rauschen gelegt, das bei drahtgebundener Kommunikation, etwa durch Nebensprechstörungen, fast immer vorhanden ist.

In Kapitel 5 werden anschließend adaptive Verfahren zur Approximation der optimalen Koeffizientensätze im realen Betrieb aufgezeigt. Bei den betrachteten Anwendungsfällen erweisen sich hierbei relativ aufwandsarme Algorithmen als ausreichend, insbesondere bei Implementierung mit einer adaptiven Schrittweite zur Adaption. In Kapitel 5 werden derartige Algorithmen sowohl für transversale, für entscheidungsrückgekoppelte als auch für rekursive Entzerrer aufgezeigt. Hierbei muss bei der Adaption rekursiver Entzerrer darauf geachtet werden, dass das Systemverhalten stabil bleibt.

Die in Kapitel 5 gezeigten Verfahren funktionieren dann sehr gut, wenn der Entzerrer bereits so nahe an der optimalen Lösung ist, dass zur weiteren Adaption entscheidungsgestützte Verfahren eingesetzt werden können. In Kapitel 6 werden daher Algorithmen gezeigt die es erlauben, den Entzerrer am Start der Adaption, ohne die Verwendung von Trainingssymbolen, in einen derartigen Zustand zu überführen. Auch hierfür erweisen sich für die betrachteten Anwendungsfälle aufwandsarm implementierbare Algorithmen als ausreichend. Der am weitesten verbreitete derartige Algorithmus ist der sogenannte Constant Modulus Algorithmus (CMA). Er wird in Kapitel 6 zunächst detailliert beschrieben. Die Adaption transversaler Entzerrer anhand des CMA erweist sich als relativ problemlos. Bedingt durch Fehlentscheidung, die zu fehlerhafter Konvergenz des verwendeten Algorithmus führen können, treten bei der blinden Adaption entscheidungsrückgekoppelter Entzerrer jedoch zusätzliche Probleme auf. Hierfür wird vorgeschlagen, zunächst anhand eines rekursiven Algorithmus Startkoeffizienten zu generieren und die Adaption ausgehend von dieser Startlösung durch die Verwendung sogenannter softer Entscheidungen zu unterstützen. Zur Generierung von Startkoeffizienten werden zwei Techniken verglichen. Die erste basiert auf einer Dekorrelation des Empfangssignals, während die zweite einen rekursiven Filter anhand des CMA adaptiert. In dieser Arbeit werden für das erste Verfahren erforderliche Modifikationen zur Adaption eines Bandpassentzerrers beschrieben. Bei der zweiten betrachteten Methode sind derartige Modifikationen nicht erforderlich, jedoch kann hier die Stabilität des Systems nicht bewiesen werden, so dass eine Implementierung in Lattice Filter Struktur vorgeschlagen wird, die eine einfache Beobachtung der Stabilitätseigenschaften erlaubt. Desweiteren wird eine Technik zur Entscheidung des verwendeten Modulationsverfahrens vorgeschlagen. Kapitel 6 wird schließlich durch die Präsentation von Simulationsergebnissen abgeschlossen. Hierbei werden auch Ergebnisse von Simulationen des kompletten

Systemstarts gezeigt, bei denen zusätzlich zur blinden Entzerrung auch Synchronisation und Abstratenumsetzung simuliert werden.

Verschiedene Methoden zur verlustleistungsarmen Implementierung werden schließlich in Kapitel 7 aufgezeigt. Behandelt werden hier die algorithmische, die Hardware- und die VLSI Ebene. Insbesondere wird auf Vereinfachungen der Algorithmen eingegangen, die sich durch Quantisierung der Eingangsdaten ergeben. Hierbei erweist sich bei manchen der Algorithmen die zusätzliche Addition eines Rauschterms als sinnvoll, der statistische Eigenschaften der quantisierten Signale zu erhalten hilft.

Abgeschlossen wird die vorliegende Arbeit in Kapitel 8 durch eine Diskussion und einen Ausblick.

2 Datenübertragung bei leitungsgebundener Kommunikation

In diesem Kapitel werden Grundlagen der leitungsgebundenen Übertragung behandelt. Grundsätzlich wird bei einer Nachrichtenübertragung zunächst das Sendesignal durch Modulation spektral geformt und auf einen Kanal gegeben. Als Übertragungskanal wird in der vorliegenden Arbeit zumeist eine Kupferdoppelader angenommen. Bedingt durch die nichtidealen Eigenschaften des Kanals treten Verzerrungen des Sendesignals auf, zudem wird additives Rauschen eingekoppelt. An der Empfängerseite müssen daher verschiedene Maßnahmen zur Dekodierung des Signals ergriffen werden.

Zunächst werden die im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Modulationsverfahren in Kapitel 2.1 kurz betrachtet. Auf den Übertragungskanal wird anschließend in Kapitel 2.2 eingegangen. Wichtige Teilsysteme eines Empfängers, der zur Dekodierung eines Einzelträger-modulierten Signals üblicherweise Verwendung findet, werden in Kapitel 2.3 behandelt. Abschließend wird in Kapitel 2.4 das in dieser Arbeit verwendete Systemmodell vorgestellt, wobei besonders auf die Darstellung eines überabgetasteten linearen Entzerrers Wert gelegt wird.

2.1 Modulationsverfahren

Zur Übertragung digitaler Daten werden diese Daten allgemein zunächst mit Hilfe eines Kodierers entsprechenden Signalpunkten zugeordnet und diese anschließend durch Modulation einer Zeitfunktion zugeordnet. Hierbei ist die Art der Kodierung weitgehend durch die Modulationsart bestimmt.

Die zur Übertragung erforderliche Bandbreite B ergibt sich aus der Nyquist Bedingung im Frequenzbereich zu

$$B = f_T, \quad (2.1)$$

wobei f_T die Symbolrate darstellt. Hierbei besagt die Nyquistbedingung im Frequenzbereich, dass das Spektrum der mit f_T abgetasteten Impulsantwort des Übertragungssystems die Form $const \cdot \exp(-j2\pi f t_0)$ haben muss, wobei t_0 eine beliebige Verzögerung darstellt. Ist, wie allgemein üblich, das Sendespektrum auf den Bereich $f < f_T$ beschränkt, folgt daraus die bekannte Bedingung, dass der Betragsgang der System-Impulsantwort symmetrisch zu $f_T/2$ sein muss. Nachdem der Übertragungskanal normalerweise unbekannt ist, wendet man diese Bedingung meist auf die gemeinsame Impulsantwort von Sende- und Empfangsfilter an. In der Praxis verwendet man häufig sogenannte Wurzel Nyquist Roll-Off (*Square Root Raised Cosine*, SRRC) Filter, deren ideale gemeinsame Übertragungsfunktion im Bereich $(1-r)f_T/2 \leq f \leq (1+r)f_T/2$ durch eine Cosinus-förmig abfallende Flanke gekennzeichnet ist. Der Parameter r stellt hierbei den sogenannten Roll-off Faktor dar. Dieser legt fest, wie weit das Spektrum über die halbe Symbolrate hinausragt. Ein eng damit verwandter Parameter eines realen Sendefilters ist die sogenannte Excess Bandbreite, die festlegt, bei welcher Frequenz der

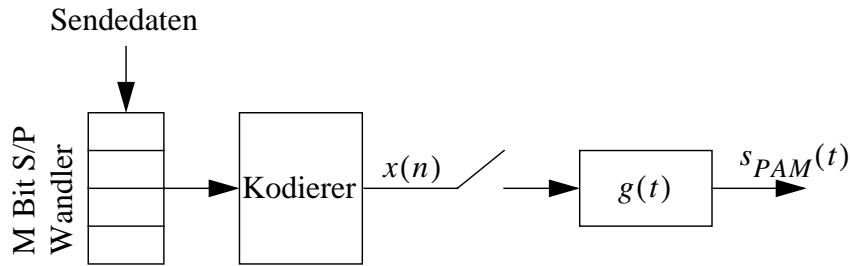


Bild 2.1: Blockschaltbild einer PAM Modulation

Betrag der Übertragungsfunktion um 6 dB abgefallen ist. Dieser Parameter wird meist auf f_T normiert und in Prozent angegeben.

In dieser Arbeit werden im Wesentlichen drei verschiedene einzelträgerbasierte lineare Modulationsverfahren behandelt, namentlich Puls Amplituden Modulation (PAM), Quadrature Amplituden Modulation (QAM) und Carrierless Amplitude/Phase (CAP) Modulation.

Zunächst wird die in Bild 2.1 dargestellte PAM betrachtet. Hier wird aus jeweils $ld(M)$ Bit des Sendedatenvektors ein reellwertiges Symbol $x(n)$ geformt. Hierbei kann $x(n)$ M verschiedene Amplitudenwerte annehmen. Allgemein bezeichnet M die Anzahl an Punkten der Signalraumkonstellation. Die abgetastete Symbolfolge wird mit einem Tiefpassfilter $g(t)$ gefaltet, so dass das Sendesignal $s_{PAM}(t)$ entsteht.

Bei der in Bild 2.2 gezeigten QAM wird aus M Bit ein komplexwertiges Symbol mit Realteil $x^I(n)$ und Imaginärteil $x^Q(n)$ gebildet, wobei - unter der Annahme dass M eine Quadratzahl ist - beide Anteile \sqrt{M} diskrete Amplitudenwerte annehmen können. Hierbei steht ‚I‘, bzw. ‚Q‘ für Inphase, bzw. Quadrature. Beide Anteile werden nach Abtastung mit einem Tiefpass $g(t)$ gefiltert, mit dem Träger $\cos(\omega_0 t)$, bzw. $-\sin(\omega_0 t)$ multipliziert und schließlich addiert:

$$s_{QAM}(t) = \cos(\omega_0 t) \sum_n x^I(n) g(t - nT) - \sin(\omega_0 t) \sum_n x^Q(n) g(t - nT) \quad (2.2)$$

Hierbei bezeichnet $\omega_0 = 2\pi f_0$ die Trägerkreisfrequenz, wobei f_0 die Trägerfrequenz darstellt.

Die in Bild 2.2 gezeigte Struktur zur QAM Signalformung erfordert bei einer digitalen Realisierung Multiplikationen im Abtasttakt. Sie lässt sich in eine äquivalente Struktur überführen, bei der erforderliche Multiplikationen lediglich im Symboltakt durchgeführt werden müssen. Zu diesem Zweck wird (2.2), unter Einführung des komplexen Sendesymbols $x(k) = x^I(k) + jx^Q(k)$, komplex angesetzt und folgendermaßen umgeformt:

$$s_{QAM}(t) = \Re \left\{ e^{j\omega_0 t} \sum_n x(n) g(t - nT) \right\} = \Re \left\{ \sum_n (x(n) e^{j\omega_0 nT}) (g(t - nT) e^{j\omega_0 (t - nT)}) \right\}. \quad (2.3)$$

Der erste Term des Ausdrucks auf der rechten Seite entspricht hierbei einer komplexen Drehung

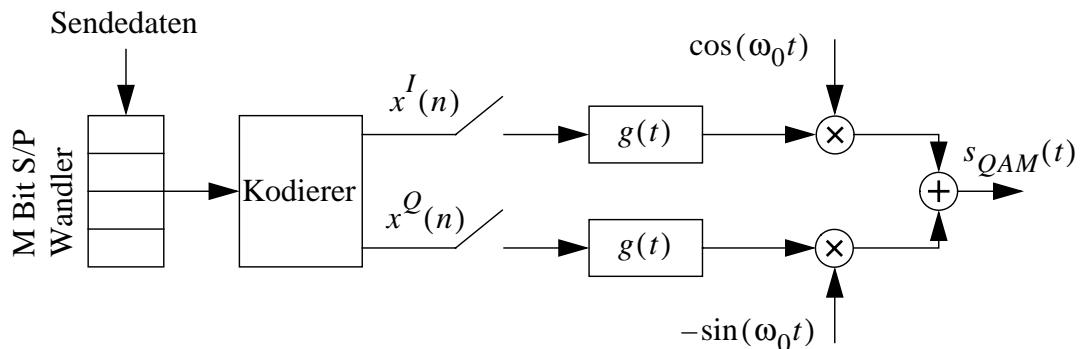


Bild 2.2: Blockschaltbild einer QAM Modulation

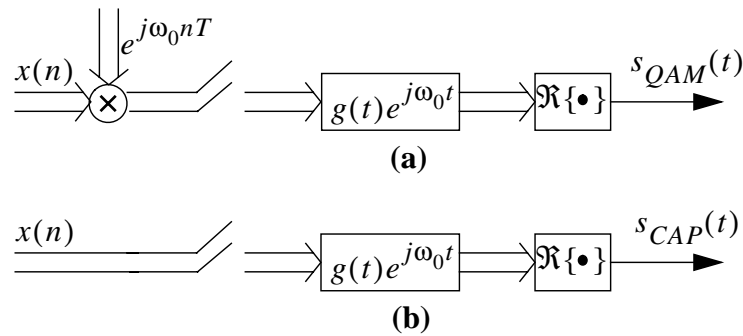


Bild 2.3: Blockschaltbild einer (a) Bandpass QAM und (b) CAP Modulation in komplexer Darstellung (ohne S/P Wandlung und Kodierung)

der Sendesymbole, was einer reinen Umkodierung entspricht. Der zweite Term entspricht der Faltung mit einem Bandpassfilter. Die Umkodierung der Sendesymbole ist in (2.3) lediglich vorhanden, um weiterhin ein QAM Signal zu erzeugen. Im Empfänger muss diese Drehung der Symbole wieder rückgängig gemacht werden. Da dieser Vorgang keinen wesentlichen Einfluss auf das Systemverhalten hat, kann er auch weggelassen werden, wodurch man die CAP Modulation erhält. Diese zeigt ein nahezu identisches Systemverhalten, ist aber nur in Spezialfällen genau identisch zur QAM. Zusammengefasst ist die CAP Signalformung gegeben durch

$$s_{CAP}(t) = \Re \left\{ \sum_n x(n) (g(t - nT) e^{j\omega_0(t-nT)}) \right\}. \quad (2.4)$$

In Bild 2.3 sind die Blockschaltbilder von QAM und CAP Modulation in komplexer Darstellung gezeigt.

In der Praxis ist meist eine maximale Bitfehlerrate (*Bit Error Rate*, BER) vorgegeben, deren Einhaltung am Empfänger garantiert werden muss. Bei gegebener Bandbreite kann man aus dem Signal-Störabstand (*Signal To Noise Ratio*, SNR) am Empfängereingang die maximale Stufenzahl M_{max} bestimmen, die ein Einhalten der BER garantiert. Somit ist die erzielbare Bitrate f_{Bit} zu

$$f_{Bit} = f_T \cdot \log_2(M_{max}) \quad (2.5)$$

gegeben. Der Zusammenhang zwischen BER und SNR für die beschriebenen Modulationsverfahren, unter der vereinfachenden Annahme dass ein Symbolfehler genau einem Bitfehler entspricht, findet sich etwa in [133].

2.2 Eigenschaften des Übertragungskanals

In diesem Abschnitt soll kurz auf Eigenschaften des physikalischen Übertragungskanals, sowie der in einem realen System vorhandenen analogen Komponenten eingegangen werden. Die in Kapitel 2.1 dargestellte Modulation wird in der Praxis meist rein digital realisiert. Anschließend wird das Signal D/A gewandelt und zumeist noch auf analoge Sendefilter gegeben, die ein schnelles Abklingen des Sendesignals in Frequenzbereichen außerhalb des Übertragungsbandes garantieren. Als weitere analoge Komponente ist speziell bei Gleichlageverfahren noch ein

sogenanntes Hybrid erforderlich, das Sende- und Empfangssignal trennt. Anschließend wird das elektrische Sendesignal durch einen sogenannten Line Driver verstärkt und auf die Leitung gegeben. Bedingt durch die nichtidealen Eigenschaften der Kupferdoppelader werden hier Signalverzerrungen hervorgerufen. Außerdem können in der Leitung nicht abgeschlossene Stichleitungen (sogenannte *Bridged Taps*) vorhanden sein, die die Übertragung erschweren. Speziell in langen Leitungen finden sich teilweise auch Spulen, die eine Übertragung bei höheren Frequenzbereichen verhindern können. Einzelheiten zur Modellierung der elektrischen Eigenschaften einer Kupferdoppelader finden sich etwa in [26] und [161]. Hier sind auch die wichtigsten analogen Komponenten, wie etwa das Hybrid, sowie analoge Filter ausführlich beschrieben.

Wie bereits in Kapitel 1 dargestellt, können zudem aus benachbarten Kabeln Signale übersprechen. Zudem kann durch weitere Störer, wie etwa Amateurfunk- oder Impulsstörer, hervorgerufenes Rauschen eingekoppelt werden. Eine Beschreibung der Rauschumgebung von xDSL Systemen findet sich etwa in [114].

Am Empfänger wird das Signal meist analog gefiltert und vorverstärkt. Das Differenzsignal der beiden Adern wird schließlich A/D gewandelt. Es gibt auch Bestrebungen, neben dem Differenzsignal auch die Spannung des Empfangssignals gegenüber der Erde zu verwenden, da sich daraus Rückschlüsse auf das Rauschen treffen lassen. Betrachtungen dazu finden sich in [115], werden aber im Rahmen dieser Arbeit nicht verfolgt.

2.3 Wichtige Teilsysteme des digitalen Empfängers

Auf der Empfangsseite wird schließlich versucht, aus dem Empfangssignal die Sendesymbolfolge zurückzugewinnen. Erschwert wird diese Aufgabe etwa durch Intersymbolinterferenzen (ISI), die durch Verzerrungen des Sendesignals verursacht werden, sowie durch additives Rauschen. Zudem sind weder der genaue Abtasttakt, noch die genauen Abtastzeitpunkte genau bekannt und müssen daher geschätzt werden.

Die Implementierung optimaler Empfängerstrukturen zur Rückgewinnung der Sendesymbolfolge (siehe etwa [51], [133]), wie etwa der des Maximum Likelihood Sequence Estimators (MLSE), erweist sich in der Praxis meist als deutlich zu aufwändig, weshalb man sich vereinfachter Verfahren bedient. Das Standardverfahren besteht darin, durch Filterung des Eingangssignals zunächst das Verhältnis der Leistung des Nutzsignals zu der Leistung der Störsignale zu maximieren. Dieser Vorgang wird allgemein als Entzerrung bezeichnet. Das Verhältnis von Signalleistung zu der Summe der Leistungen von ISI und Rauschen am Ausgang des Entzerrers wird als *Signal to Interference plus Noise Ratio*, SINR bezeichnet. Anschließend wird eine Symbolentscheidung durchgeführt und die entschiedenen Werte werden dekodiert. Alternativ kann der Dekodierer auch mit nicht entschiedenen Symbolen beaufschlagt werden. Voraussetzung zur korrekten Arbeitsweise des Entzerrers ist, dass die Eingangswerte synchron zu einem Vielfachen des Symboltaktes abgetastet sind, sowie bei einer Bandpass Modulation, wie etwa QAM, dass die Trägerphase richtig geschätzt wird.

Eine Möglichkeit, Entzerrung und Kodierung zu kombinieren, stellt die sogenannte Turbo Entzerrung dar, bei der auf sequentielle Art Information ausgetauscht wird, die bei Entzerrung, bzw. Dekodierung gewonnenen wird (siehe etwa [168], [174]). Bei geeigneter Kodierung sind

mit diesem Verfahren sehr geringe Bitfehlerraten erzielbar, bei fehlerkorrigierender Kodierung, wie der im Teilnehmeranschlussbereich häufig eingesetzten Reed Solomon Kodierung ist der erzielbare Gewinn hingegen relativ gering [127].

Ein ähnlicher Ansatz besteht auch zur Kombination von Synchronisation und Dekodierung. Beide Verfahren sind jedoch mit hohem Implementierungsaufwand verbunden und erzeugen zudem eine Systemverzögerung, die sich für manche Anwendungen als kritisch erweist. Im Rahmen dieser Arbeit werden derartige Ansätze daher nicht weiter verfolgt.

Im Folgenden sollen nun wichtige Teilsysteme eines Empfängers, wie er zur leitungsgebundenen Kommunikation im Teilnehmeranschlussbereich üblicherweise eingesetzt wird, beschrieben werden. Hierbei beschränkt sich diese Arbeit auf einzelträgerbasierte Systeme. Im Einzelnen werden in Kapitel 2.3.1 kurz Grundlagen von Synchronisation und Abstratenumsetzung beschrieben, in Kapitel 2.3.2 werden Prinzipien der Trägerphasenregelung und in Kapitel 2.3.3 der Entzerrung kurz beschrieben. Auf Kodierung wird im Rahmen dieser Arbeit nicht näher eingegangen.

2.3.1 Synchronisation und Abstratenumsetzung

Eine der wichtigsten und kritischsten Aufgaben eines digitalen Übertragungssystems ist die Synchronisierung von Sender und Empfänger [133]. Hierbei muss auf der Empfangsseite nicht nur die richtige Abtastfrequenz bestimmt werden, sondern auch der Zeitpunkt innerhalb des Symbolintervalls, bei dem der Abtastwert erzeugt wird. Dieser Zeitpunkt innerhalb des Symbolintervalls wird als Taktphase bezeichnet. Üblicherweise werden Abtastzeitwerte mit einer relativ hohen Frequenz erzeugt und anschließend zur Entzerrung auf ein Vielfaches w der Symbolrate dezimiert. Der Faktor w entspricht hierbei dem Überabtastfaktor. In modernen Empfängern geschieht diese Dezimation meist rein digital. Die größte Herausforderung besteht hierbei darin, möglichst wenig Rauschen in das Nutzsignalband zu falten. Dies wird genauer in Kapitel 3 betrachtet.

2.3.2 Trägerphasenregelung

Bei der Detektion eines QAM Signals ist neben der Taktphase auch die Trägerphase im Empfänger zu bestimmen. Bei einem CAP modulierten Signal, das dem Namen nach trägerlos ist, wird ebenfalls eine Trägerphasenregelung erforderlich, falls der Abtasttakt digital geregelt wird.

Als einfache Methode zur Trägerphasenregelung bietet sich das in [44] beschriebene Verfahren an, bei dem versucht wird, die Phasendifferenz des Ein- und Ausgangssignals des Symbolscheiders zu minimieren. Insgesamt ist diese Technik einfach realisierbar und gestattet eine sehr schnelle und genaue Regelung.

2.3.3 Entzerrung

Nach erfolgter Synchronisation besteht die Hauptaufgabe darin, durch Filterung die Einhaltung der Nyquistbedingung näherungsweise zu gewährleisten, also die Signalleistung der Intersymbolinterferenzen zu minimieren. Hierbei muss jedoch darauf geachtet werden, dass nicht gleichzeitig die Leistung des additiven Rauschens zu sehr erhöht wird. Falls das Rauschsignal spektral geformt ist, was in der Praxis etwa durch Verwendung eines Empfangsfilters fast immer ge-

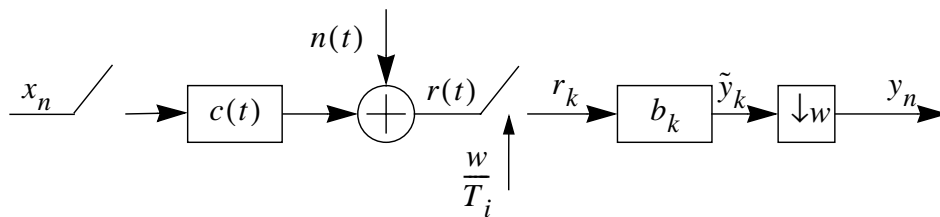


Bild 2.4: Modell eines Einkanal-Übertragungssystems mit überabgetastetem Empfänger

ben ist, lassen sich vorhandene Korrelationen dazu verwenden, die Leistung des additiven Rauschens zu minimieren. Das Optimum ist hierbei erreicht, wenn das Rauschen perfekt dekorreliert wird, und somit am Entzerrerausgang weiß ist. Auf Entzerrung wird genauer in Kapitel 4 - Kapitel 6 eingegangen.

Prinzipiell können Synchronisation und Entzerrung durch ein gemeinsames adaptives Filter erfolgen. Die Impulsantwort dieses Filters besteht dann aus der Faltungssumme der beiden Einzelfilter. Vorteil eines solchen Vorgehens ist, dass das Gesamtfilter so optimiert werden kann, dass der mittlere quadratische Fehler (MSE) am Entscheider minimiert wird. Derartige Gesamtfilter wurden bis jetzt allerdings fast ausschließlich für verzerrungsfreie Kanäle berechnet [92], [177]. Darüberhinaus sind bis jetzt keine Algorithmen bekannt, mit denen sich die Koeffizienten eines derartigen kombinierten Filters adaptiv einstellen lassen [92], [93].

In manchen Einsatzgebieten kann es sich als sinnvoll erweisen, einen Entzerrer als Mixed Signal System zu implementieren, also Teilsysteme des Entzerrers analog und andere digital zu realisieren [113]. In der Praxis verwendet man jedoch fast ausschließlich rein digitale Implementierungen.

2.4 Systemmodell bei Überabtastung des Empfangsfilters

In diesem Abschnitt soll das Systemmodell hergeleitet werden, das bei Verwendung eines überabgetasteten Empfangsfilters Anwendung findet. Speziell ist hier der lineare Entzerrer überabgetastet.

Zunächst soll das in Bild 2.4 gezeigte Modell eines Kommunikationssystems mit einem einzelnen Übertragungskanal betrachtet werden. Der Empfänger wird hier mit einer Rate $w \cdot f_T$ getaktet, wobei der Faktor w beschreibt, wie hoch das Eingangssignal am Empfänger im Vergleich zur Symbolrate f_T abgetastet wird. Im Fall von $w = 1$ spricht man von Verarbeitung im Symboltakt, der Entzerrer wird dann oft als *Baud Spaced (BS) Equalizer* (BSE) bezeichnet. Für $w > 1$ beträgt der zeitliche Abstand aufeinanderfolgender Eingangssignale ein Bruchteil $1/w$ der Symboldauer, weshalb man in diesem Fall auch von einem *Fractionally Spaced (FS) Equalizer* (FSE), bzw. von einem fraktionalen Entzerrer spricht. In dieser Arbeit ist n der Laufindex für Größen die mit f_T abgetastet sind und k für Größen die mit wf_T abgetastet sind. Darüberhinaus werden speziell in Kapitel 3 die beiden Laufindizes m und l eingeführt, die sich auf Signale beziehen, die mit einem unregelmäßigen, bzw. geregelten Takt abgetastet sind.

In dem in Bild 2.4. gezeigten Modell werden die Sendesymbole $x(n)$ zunächst auf das zeitkontinuierliche Filter $c(t)$ gegeben. Dieses Filter beinhaltet sowohl das Sendefilter, als auch den

physikalischen Übertragungskanal, sowie die analogen Komponenten des Empfängers und etwaig dort vorhandene digitale Filter zur Abstratenumsetzung. Hierbei wird davon ausgegangen, dass diese Module linear und zeitinvariant (*Linear Time-Invariant*, LTI) sind und somit durch die gemeinsame zeitkontinuierliche Impulsantwort $c(t)$ beschrieben werden können. Das additive zeitkontinuierliche Rauschsignal $n(t)$ wird als gaußverteilt angenommen. Auch bei diesem Signal sind die Einflüsse der analogen Empfangsfilter und eventuell vorhandener digitaler Abstratenumsetzfilter bereits enthalten. Das analoge Empfangssignal $r(t)$ ist somit gegeben durch

$$r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n c(t - nT - t_0) + n(t), \quad (2.6)$$

wobei die Größe t_0 eine beliebige zeitliche Verzögerung darstellt. Diese Summe aus gefiltertem Sendesignal und Rauschen wird im Modell schließlich mit der Frequenz w/T abgetastet. Das so erhaltene digitale Empfangssignal $r_k = r(kT/w)$ schreibt sich als

$$r\left(k\frac{T}{w}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n c\left(k\frac{T}{w} - nT - t_0\right) + n\left(k\frac{T}{w}\right). \quad (2.7)$$

In der Praxis wird meist ein kleiner Schwellwert für den Betrag der Kanalimpulsantwort definiert. Somit kann eine endliche Kanallänge N_c angenommen werden, die sich aus dem Zeitpunkt $t = N_c(T/w)$ ergibt, ab der der Betrag der Kanalimpulsantwort dauerhaft unter der gewählten Schranke liegt.

Das digitale Empfangssignal wird anschließend mit einem digitalen Filter $B(z)$ mit $w \cdot N$ Koeffizientengewichten b_k gefaltet. Das überabgetastete Ausgangssignal des linearen Filters sei im Folgenden mit \tilde{y}_k bezeichnet. Es schreibt sich als

$$\tilde{y}_k = \sum_{l=0}^{wN-1} b_l r\left((k-l)\frac{T}{w}\right). \quad (2.8)$$

Zum Erhalt der Symbolfolge $\{y_n\}$ wird von der Folge $\{\tilde{y}_k\}$ jeder w -te Wert selektiert, die Werte zu den restlichen Zeitpunkten werden nicht betrachtet. Da in dem Modell eine beliebige Verzögerung t_0 enthalten ist, ist es irrelevant, welcher Wert als Startwert gewählt wird. Der Index im Symbolintervall k berechnet sich also folgendermaßen

$$k = wn + \alpha, \quad (2.9)$$

wobei gilt $0 \leq \alpha \leq w - 1$. Die verschiedenen möglichen Ausgangssymbolfolgen werden durch einen hochgestellten Index charakterisiert. Somit gilt

$$y_n^{(\alpha)} = \sum_{l=\alpha}^{w(N-1)+\alpha} b_{lw} r\left(nT + (\alpha - lw)\frac{T}{w}\right). \quad (2.10)$$

Die zu $\alpha = 0$ korrespondierende Ausgangssequenz wird im Folgenden, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, als $\{y_n\}$ bezeichnet. Im Allgemeinen wird nur diese Symbolfolge und nicht die gesamte Folge $\{\tilde{y}_k\}$ explizit berechnet, so dass das Filter b_k intern auf Symbolrate läuft. Das zeitkontinuierliche Modell aus Bild 2.4 kann in die äquivalenten zeitdiskreten Modelle aus Bild 2.5 umgewandelt werden. Hierfür werden sowohl $c(t)$, als auch $n(t)$, mit der Frequenz wf_T abgetastet. Die sich ergebenden diskreten Größen sind somit

$$c_k = c\left(k\frac{T}{w} - t_0\right) \text{ und } n_k = n\left(k\frac{T}{w}\right). \quad (2.11)$$

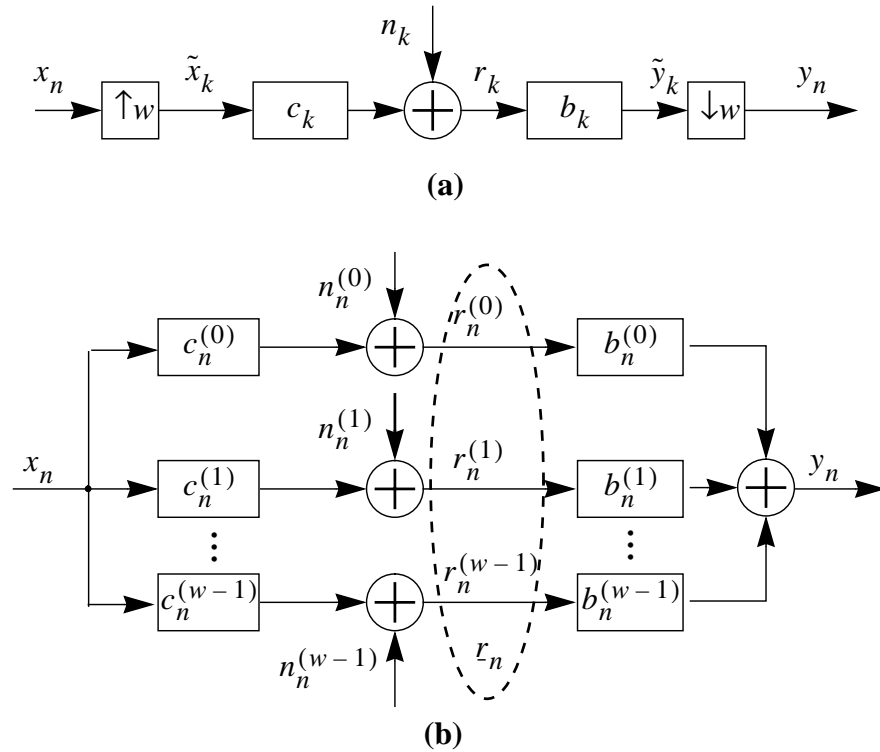


Bild 2.5: Systemmodell bei überabgetastetem Empfangsfilters
(a) Multiratenmodell (b) Multikanalmodell

Um die Sendesymbolfolge mit dem überabgetasteten Kanal c_k zu falten, muss zunächst eine Symbolfolge im Takt wf_T generiert werden. Diese mit $\{\tilde{x}_k\}$ bezeichnete Folge wird durch Auffüllen der Symbolfolge $\{x_n\}$ mit Nullen erzeugt, so dass gilt

$$\tilde{x}_k = \begin{cases} x_{k/w} & \text{für } k = 0, w, 2w, \dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.12)$$

Damit schreiben sich unter Verwendung von (2.11) Gleichung (2.7) als

$$r\left(k\frac{T}{w}\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{x}_l c\left((k-l)\frac{T}{w} - t_0\right) + n_k, \quad (2.13)$$

und Gleichung (2.8) als

$$\tilde{y}_k = \sum_{m=0}^{wN-1} b_m \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{x}_{l-m} c_{k-m-l} + n_{k-m} \right) = b_k \otimes (\tilde{x}_k \otimes c_k + n_k). \quad (2.14)$$

Das entsprechende Multiratenmodell ist in Bild 2.5a gezeigt. Es lässt sich ein äquivalentes Modell aufstellen, bei dem alle Signale mit der Symbolrate getaktet sind. Hierfür werden die überabgetasteten Filter, bzw. Abtastwertsequenzen in mehrere Einzelfilter, bzw. -sequenzen unterteilt, die jeweils mit der Symbolrate abgetastet sind. Das sich ergebende Multikanalmodell ist in Bild 2.5b gezeigt. Die einzelnen Größen schreiben sich als

$$b_n^{(\alpha)} = b_{w(n+1) - (\alpha+1)}, \quad r_n^{(\alpha)} = r\left(\left(n + \frac{\alpha}{w}\right)T\right), \quad (2.15)$$

$$n_n^{(\alpha)} = n\left(\left(n + \frac{\alpha}{w}\right)T\right) \text{ und } c_n^{(\alpha)} = r\left(\left(n + \frac{\alpha}{w}\right)T - t_0\right). \quad (2.16)$$

Die Indizierung der Polyphasen des Entzerrers wurde hierbei so gewählt, dass sie mit der des Eingangssignals übereinstimmt. Somit schreibt sich das Ausgangssignal im Symboltakt als

$$y_n = \sum_{l=0}^{N-1} (b_n^{(0)} r_{l-n}^{(0)} + \dots + b_n^{(w-1)} r_{l-n}^{(w-1)}). \quad (2.17)$$

Mit

$$r_n^{(\alpha)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_l c_{n-l}^{(\alpha)} + n_n^{(\alpha)} \quad (2.18)$$

lässt sich (2.17) schließlich schreiben als

$$y_n = \sum_{l=0}^{N-1} b_n^{(0)} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} x_l c_{n-l}^{(w-1)} + n_n^{(w-1)} \right) + \dots + \sum_{l=0}^{N-1} b_n^{(w-1)} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} x_l c_{n-l}^{(0)} + n_n^{(0)} \right). \quad (2.19)$$

Mit Hilfe des Faltungssymbols lässt sich (2.19) äquivalent umformen zu

$$y_n = x_n \otimes (b_n^{(0)} \otimes c_n^{(0)} + \dots + b_n^{(w-1)} \otimes c_n^{(w-1)}) + b_n^{(0)} \otimes n_n^{(0)} + \dots + b_n^{(w-1)} \otimes n_n^{(w-1)}. \quad (2.20)$$

Hierbei lässt sich die gemeinsame Impulsantwort von Kanal und Entzerrer schreiben als

$$\Gamma_n = b_n^{(0)} \otimes c_n^{(0)} + \dots + b_n^{(w-1)} \otimes c_n^{(w-1)}. \quad (2.21)$$

In Vektorschreibweise lässt sich (2.21) schreiben als

$$\Gamma = \mathbf{C} \mathbf{b}, \quad (2.22)$$

mit der Kanalfaltungsmatrix \mathbf{C} der Größe $(N \cdot w \times N + N_c - 1)$ definiert als

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}(0) & \mathbf{c}(1) & \dots & \mathbf{c}(N-1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{c}(0) & \mathbf{c}(1) & \dots & \mathbf{c}(N-1) & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \mathbf{c}(0) & & & & 0 \\ & \vdots & \vdots & & \ddots & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{c}(0) & \dots & \mathbf{c}(N-1) \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

wobei die Vektoren $\mathbf{c}(n)$ der Länge w , die die Koeffizienten der Kanalimpulsantwort innerhalb eines Symbolintervalls beinhalten, gegeben sind durch

$$\mathbf{c}(n) = \left[c^{(0)}(n) \ c^{(1)}(n) \ \dots \ c^{(w-1)}(n) \right]^T. \quad (2.24)$$

Der Vektor der Koeffizientengewichte des Entzerrers \mathbf{b} der Länge $N \cdot w$ ist gegeben durch

$$\mathbf{b} = \left[\mathbf{b}_0^T \ \mathbf{b}_1^T \ \dots \ \mathbf{b}_{N-1}^T \right]^T \quad \text{mit} \quad \mathbf{b}_n = \left[b_n^{(0)} \ b_n^{(1)} \ \dots \ b_n^{(w-1)} \right]^T, \quad (2.25)$$

wobei die Vektoren \mathbf{b}_n der Länge w wieder die Koeffizienten innerhalb eines Symbolintervalls zusammenfassen. Die gemeinsame, im Symboltakt gegebene Impulsantwort Γ von Kanal und Entzerrer ist ein Vektor der Länge $(N + N_c - 1)$.

Die Eingangsdaten des Entzerrers können vorteilhaft in einem Vektor $\mathbf{r}(n)$ der Länge $N \cdot w$ zusammengefasst werden, der wieder aus kleineren Vektoren $r(n)$ der Länge w zusammengesetzt ist. Um Mehrdeutigkeiten zu vermeiden werden die Vektoren, die Abtastwerte innerhalb eines Symbolintervalls zusammenfassen, hier durch Unterstreichen gekennzeichnet. Der Vek-

tor $\mathbf{r}(n)$ ist somit gegeben durch

$$\mathbf{r}(n) = \left[r(n)^T \ r(n-1)^T \ \dots \ r(n-N+1)^T \right]^T \text{ mit} \quad (2.26)$$

$$\underline{r}(n) = \left[r^{(0)}(n) \ r^{(1)}(n) \ \dots \ r^{(w-1)}(n) \right]^T. \quad (2.27)$$

Mit der Definition des Vektors der Rauschdaten $\mathbf{n}(n)$, der identisch zu $\mathbf{r}(n)$ aufgebaut ist mit

$$\mathbf{n}(n) = \left[\underline{n}(n)^T \ \underline{n}(n-1)^T \ \dots \ \underline{n}(n-N+1)^T \right]^T \quad (2.28)$$

und den Vektoren $\underline{n}(n)$ gegeben als

$$\underline{n}(n) = \left[n^{(0)}(n) \ n^{(1)}(n) \ \dots \ n^{(w-1)}(n) \right]^T, \quad (2.29)$$

lässt sich $\mathbf{r}(n)$ schreiben als

$$\mathbf{r}(n) = \mathbf{C}\mathbf{x}(n) + \mathbf{n}(n), \quad (2.30)$$

wobei $\mathbf{x}(n) = \left[\underline{x}(n) \ \underline{n}(n-1) \ \dots \ \underline{n}(n-N-N_c+1) \right]^T$ die letzten $(N+N_c-1)$ Sendedaten zusammenfasst. Der Entzerrerausgang $y(n)$ lässt sich schließlich schreiben als

$$y(n) = \mathbf{b}^T \mathbf{r}(n). \quad (2.31)$$

3 Digitale Abtastratenumsetzung

Zur Erzielung eines adäquaten Systemverhaltens bei einer digitalen Datenübertragung ist die Synchronität von Sender und Empfänger essentiell [133]. Da die Frequenz eines analogen Oszillators temperaturabhängig ist und darüberhinaus dazu tendiert sich mit der Zeit zu verändern, ist es erforderlich, die Abtastfrequenz des Empfängers ständig an die des Senders anzupassen. Normalerweise wird der A/D Wandler direkt mit der Taktinformation angesteuert. Die erforderliche Taktinformation wird üblicherweise aus dem Empfangssignal vor oder nach der Abtastung gewonnen. Eine wichtige Bestrebung bei der Implementierung digitaler Sender und Empfänger besteht jedoch darin, die Anzahl an erforderlichen analogen Bauelementen möglichst zu minimieren. Gründe hierfür sind etwa preiswertere Realisierung, höhere Flexibilität und geringere durch Alterung der Bauelemente verursachte Probleme bei der Realisierung einer digitalen Schaltung im Vergleich zu einer analogen.

Das grundlegende Problem einer rein digitalen Taktregelung besteht darin, dass die Werte des digitalen Signals nur zu bestimmten Zeitpunkten bekannt sind. Zur Synchronisation ist es jedoch erforderlich zwischen den Abtastwerten liegende Signalwerte zu interpolieren. Dies ist prinzipiell möglich, solange die Abtastfrequenz mindestens doppelt so hoch ist wie die höchste Frequenzkomponente des Signals [130], [153]. Zur idealen Bestimmung der Signalwerte zwischen den Abtastzeitpunkten ist jedoch ein nichtkausales, zeitlich unbegrenzt langes Filter notwendig. In der Praxis nähert man dieses ideale Filter durch ein kausales digitales Filter an. Da das zugrundeliegende digitale Filter im Zeitbereich als Verzögerungsglied mit einer Verzögerung μ mit $0 \leq \mu < 1$ aufgefasst werden kann, wird dieses Filter oft auch als *fractional delay* (FD) Element bezeichnet.

Zur reinen Synchronisation wird ein anderer Ansatz in [58] verfolgt. Die Idee ist, dass eine Abweichung der Abtastphase von ca. 2-3% vom Optimum noch praktisch keine Verschlechterung der Bitfehlerrate bewirkt, unter der Annahme dass der Entzerrer überabtastet und somit unempfindlich gegenüber der absoluten Abtastphase ist. Durch den Versatz des Abtasttaktes läuft die Abtastphase nun kontinuierlich bis zu einem kritischen Wert. Ist dieser erreicht, werden die Entzerrerkoeffizienten für diesen Versatz umgerechnet. Nachteilig an dem Verfahren ist vor allem, dass der adaptive Entzerrer selbst ebenfalls der sich ändernden Abtastphase folgt. Zudem ist es zur Abtastratenumsetzung nicht anwendbar.

Eine weitere Bestrebung bei der Realisierung digitaler Transceiver besteht darin, die Übertragungsbandbreite möglichst flexibel wählbar zu gestalten. Die historischen Ansätze zur Abtastratenumsetzung (*sampling rate conversion*, SRC) erlauben hierbei nur ganzzahlige Verhältnisse von Symbolrate zu Abtastfrequenz [33]. Später wurde vorgeschlagen, digitale Interpolationsfilter zur Abtastratenumsetzung einzusetzen, was die freie Wählbarkeit der Symbolrate unabhängig von der durch den Quarz vorgegebenen Abtastfrequenz erlaubt. Die Idee hierbei ist, die Symbolwerte zu den Abtastwerten im Zeitbereich so zu interpolieren, dass die zugrundeliegende Kurve möglichst glatt ist. Im Frequenzbereich kann dies so gedeutet werden, dass die beim Überabtasten entstehenden Replika, bzw. Pseudospektren (*Images*) eliminiert werden. Dieses Vorgehen ist für den Grenzfall eines unendlich langen Interpolationsfilters optimal. Für endlich lange Filter ist zur Dezimation allerdings ein Ansatz vorzuziehen, bei der das Optimierungsziel darin besteht, die informationstragenden Frequenzbereiche möglichst wenig zu stören [79]. Dieser Ansatz versucht daher, Signale, die in Frequenzbereichen liegen, die beim Dezimieren in das Übertragungsband gefaltet werden (*Aliasing*), zu eliminieren. Im Folgenden werden diese Filter daher als Anti-Image, bzw. Anti-Aliasing Filter bezeichnet. Nicht zu ver-

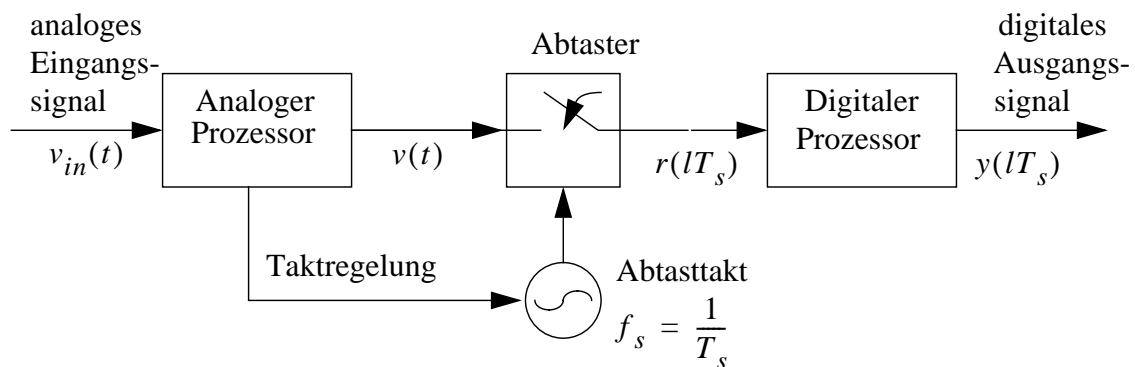


Bild 3.1: Analoge Taktregelung

wecheln ist das Anti-Aliasing Filter hierbei mit einem analogen Filter, das in der Regel vor der A/D-Wandlung zur Einhaltung des Abtasttheorems eingesetzt wird.

Die beiden Effekte Imaging und Aliasing werden in Kapitel 3.2 eingehend untersucht. Für den Spezialfall der reinen Synchronisation, bei der ausschließlich eine nichtganzzahlige Verzögerung eines Eingangssamples erreicht werden soll, sind beide Ansätze identisch. Für diese Anwendung ist allerdings meist kein explizites FD-Filter erforderlich, da der in einem digitalen Empfänger fast immer vorhandene Entzerrer diese Aufgabe implizit vornehmen kann [52].

Neben den in dieser Arbeit besprochenen Anwendungen Synchronisation und Abtastratenumsetzung werden SRC Filter noch in vielen anderen Bereichen eingesetzt. Hierzu gehören etwa Sprachkodierung, Modellierung der menschlichen Stimmbänder oder von akustischen Musikinstrumenten, sowie Anwendungen in der Videosignalverarbeitung wie Subpixel- oder Frameinterpolation [98].

Die drei beschriebenen grundlegenden Verfahren zur Abtastregelung werden zunächst in Kapitel 3.1 beschrieben und die Vorteile einer rein digitalen Regelung herausgearbeitet. Anschließend wird in Kapitel 3.2 ein Modell des digitalen Anti-Image und Anti-Aliasing Filters hergeleitet und es werden die Bedingungen eines optimalen Filters aufgezeigt. Implementierungsaspekte werden in Kapitel 3.3 behandelt. Schließlich werden in Kapitel mehrere Verfahren zum Entwurf digitaler Filter zur Abtastratenumsetzung gezeigt, wobei besonderer Wert auf die Signalverarbeitung im Bandpassbereich gelegt wird. Berechnete Dämpfungsverläufe in Kapitel 3.5, Simulationsergebnisse in Kapitel 3.6, sowie eine kurze Zusammenfassung in Kapitel 3.7 runden dieses Kapitel ab.

3.1 Grundlagen

3.1.1 Möglichkeiten der Taktregelung

Die Signalverarbeitung in einem digitalen Empfänger muss synchron zu den ankommenden Symbolen erfolgen. Der klassische Ansatz zur Synchronisation besteht in der Ansteuerung des Quarzes. Die beiden grundlegenden Möglichkeiten hierzu sind zum einen die in Bild 3.1 gezeigte analoge Regelung und die in Bild 3.2 gezeigte hybride Regelung [52]. Bei beiden Verfahren wird das analoge Eingangssignal $v_{in}(t)$ zunächst durch einen analogen Prozessor bearbeitet. Diese Verarbeitung beinhaltet etwa eine analoge Filterung zur Erzwingung der Ein-

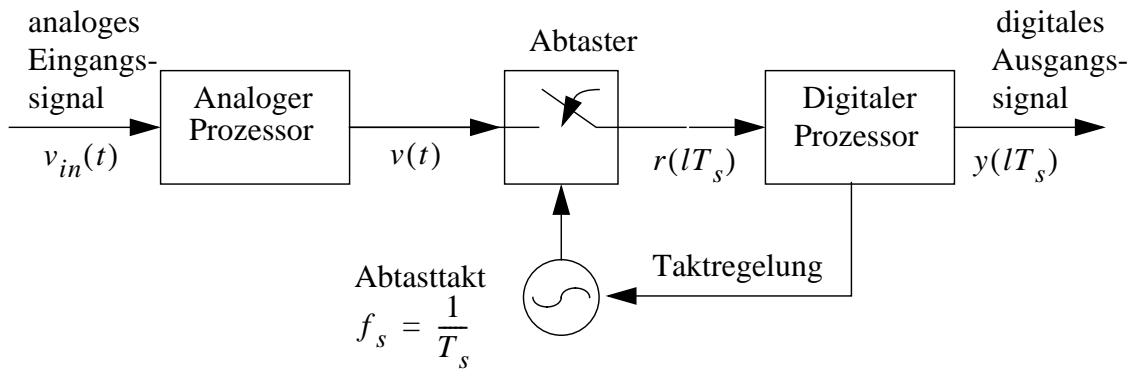


Bild 3.2: Hybride Taktregelung

haltung des Abtasttheorems. Das analoge Ausgangssignal $v(t)$ wird anschließend durch einen geregelten AD-Konverter im Takt

$$f_s = \frac{1}{T_s} \quad (3.1)$$

abgetastet. Dabei ist f_s der Abtasttakt und T_s die Periodendauer. Das digitale Ausgangssignal des Abtasters zum Zeitpunkt $t = lT_s$ wird mit $r(lT_s)$ bezeichnet. Es wird anschließend mit einem digitalen Prozessor zum Signal $y(lT_s)$ weiterverarbeitet. Bei der analogen Regelung wird die Taktinformation zur Steuerung des AD-Konverters vor der Abtastung aus dem zeitkontinuierlichen Signal erzeugt. Der Quarz wird mit einem sogenannten offenen Regelkreis gesteuert. Die benötigte analoge Signalverarbeitung macht diese Art der Synchronisation relativ aufwändig. Daher wird häufig die in Bild 3.2 gezeigte hybride Synchronisationstechnik eingesetzt, bei der die Taktinformation im digitalen Bereich gewonnen wird, der Takt aber weiterhin analog, durch direkte Steuerung des Quarzes geregelt wird. Die Rückkopplenschleife besteht üblicherweise aus einer Phasenregelschleife (*Phase Locked Loop*, PLL), die Art der Regelung wird als geschlossener Regelkreis bezeichnet.

Ein wesentliches Merkmal der beiden Schaltungen in Bild 3.1 und Bild 3.2 besteht darin, dass die Synchronisation jeweils durch direkte Regelung des Abtasttaktes erfolgt. Die Abtastfrequenz f_s ist bei den beiden zugrundeliegenden Verfahren identisch mit der Verarbeitungsfrequenz $f_i = 1/T_i$, wobei T_i die Periodendauer der Verarbeitung bezeichnet. Nachteilig ist, dass zur direkten Regelung des Quarzes analoge Komponenten erforderlich sind. Durch die Fortschritte in der Mikroelektronik ist es in den letzten Jahren möglich geworden, die Synchronisation rein digital durchzuführen, was die Einsparung dieser analogen Komponenten und dadurch eine Kostenreduktion erlaubt. Die Grundstruktur einer rein digitalen Taktregelung ist in Bild 3.3 gezeigt. Der Quarz zur Generierung des Abtasttaktes ist hier unregelt oder freilaufend, die Abtastung erfolgt asynchron zur Verarbeitung. Die Abtastwerte im Verarbeitungstakt f_i

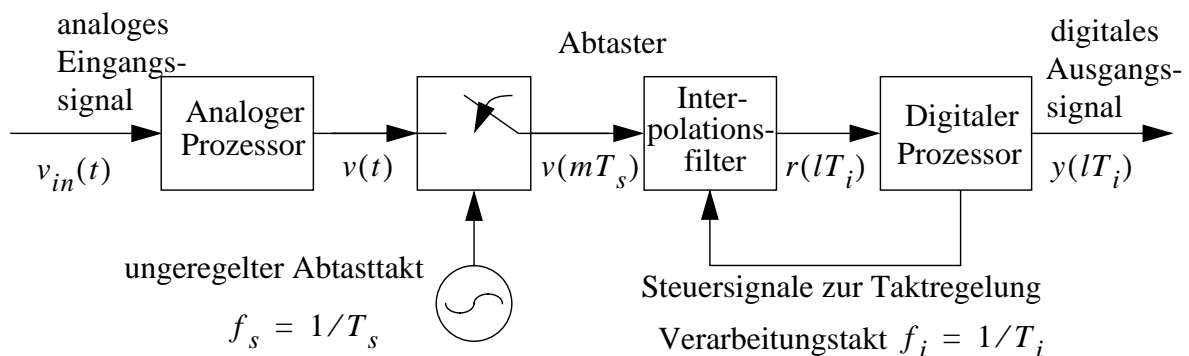


Bild 3.3: Rein digitale Taktregelung mit unreguliertem Quarz

werden durch Filterung erzeugt. Hierbei kann das Verhältnis T_i/T_s eine beliebige, irrationale Zahl sein. Das benötigte Filter berechnet die Werte zu den Zeitpunkten lT_i aus den Abtastwerten zu den Zeitpunkten mT_s . Hierbei gilt $T_i = wT$, wobei $T = 1/f_T$ das Zeitintervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden gesendeten Symbolen darstellt, f_T die Symbol- oder Baudrate bezeichnet und w ein kleiner Integerwert ist der angibt, wieviele Abtastwerte pro Symbol zur digitalen Signalverarbeitung herangezogen werden (siehe Kapitel 2.4). Das Filter zur Abtastratenumsetzung (SRC Filter) wird durch eine digitale Schaltung gesteuert, die normalerweise ähnlich funktioniert, wie die entsprechenden analogen Taktregelkriterien [42]. Da das Eingangssignal des digitalen Prozessors $r(lT_i)$ durch Filterung mit einem nichtidealen SRC Filter erzeugt wird, ist es nicht lediglich das abgetastete Signal des analogen Eingangssignals $v(t)$, sondern weist noch andere, ungewünschte Komponenten auf. Deshalb wird es hier, anders als in einem Großteil der Literatur, durch ein anderes Formelzeichen repräsentiert.

3.1.2 Abtastratenumsetzung

Wie bereits erwähnt, kann das SRC Filter ein beliebiges Verhältnis von Abtasttakt zu Verarbeitungstakt erzeugen, das heißt das Verhältnis T_i/T_s kann eine beliebige irrationale Zahl sein. Daher ist es mit der in Bild 3.4 gezeigten Struktur möglich, Daten mit beliebigem Symboltakt f_T zu verarbeiten, was zu einer großen Flexibilität in der Bandbelegung führt. Die freie Wählbarkeit des Symboltaktes gestattet es auch, die Bandbelegung rekonfigurierbar zu gestalten [76]. Zur Verarbeitung mit beliebigem Symboltakt ist im Sender ebenfalls ein SRC Filter erforderlich. Da hier aber keine Synchronisation erfolgen muss, ist hier keine Taktregelgeschleife erforderlich.

In Bild 3.4 sind die Abtastwerte des Ein- und Ausgangssignals eines digitalen SRC Filters, sowie das zugrundeliegende analoge Signal gezeigt. Das zeitkontinuierliche Eingangssignal $v(t)$ wird zunächst mit dem unregelmäßigen Takt f_s abgetastet. In Bild 3.4 ist das zeitkontinuierliche Signal gestrichelt eingezeichnet, die Abtastwerte vor der SRC sind durch Quadrate angedeutet. Um die Werte im Ausgangstakt T_i zu erhalten, müssen die Signalwerte zu den Zeitpunkten lT_i berechnet werden. Diese Signalwerte sind in Bild 3.4 durch Kreise gekennzeichnet. Um den Wert zum Zeitpunkt

$$t = lT_i = (m_b(lT_i) + \mu(lT_i))T_s \quad (3.2)$$

zu berechnen, wird das Eingangssample zum Zeitpunkt $m_b(lT_i)T_s$ durch Filterung um das Zeitintervall $\mu(lT_i)T_s$ verzögert. Hierbei bezeichnet

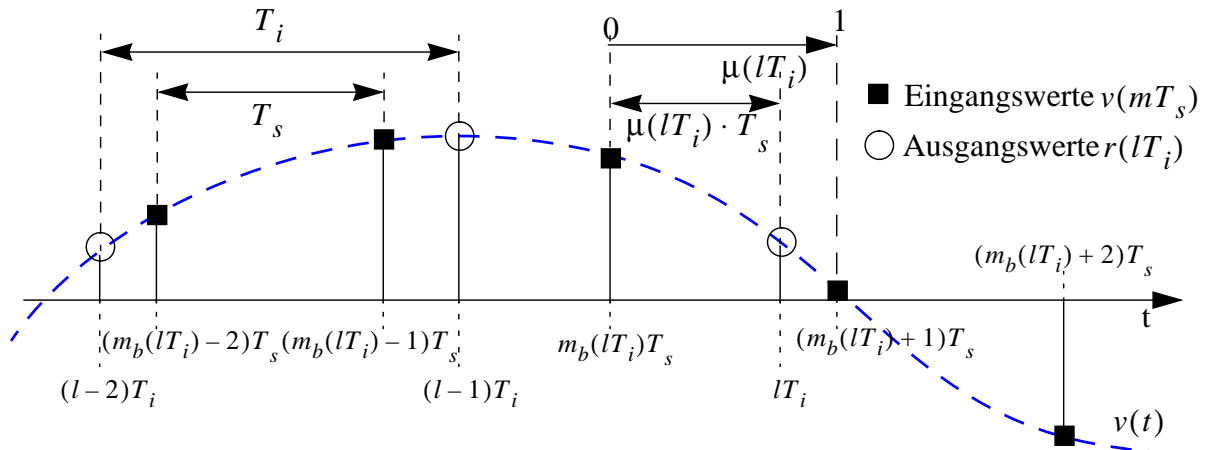


Bild 3.4: Abtastwerte am Ein- und Ausgang des SRC Filters

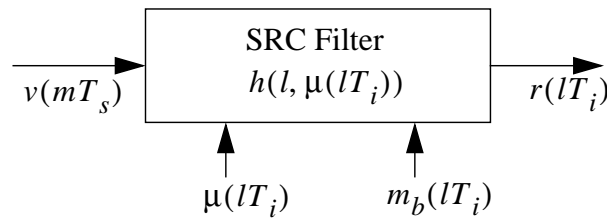


Bild 3.5: Blockschaltbild eines digitalen SRC Filters

$$m_b(lT_i) = \lfloor l(T_i/T_s) \rfloor, \tag{3.3}$$

den sogenannten Basispunktindex, wobei der Operator $\lfloor \bullet \rfloor$ Abrunden zum nächsten Integerwert bedeutet und

$$\mu(lT_i) = lT_i/T_s - m_b(lT_i) \tag{3.4}$$

die Intersymbolposition, bzw. das *Fractional Delay* (FD) darstellt. Für das FD gilt

$$0 \leq \mu(lT_i) < 1. \tag{3.5}$$

Bild 3.5 zeigt wie das SRC Filter $h(l, \mu(lT_i))$ gesteuert wird. Das Filter hat die zwei Kontrollparameter $\mu(lT_i)$ und $m_b(lT_i)$.

Während $m_b(lT_i)$ festlegt welche Abtastwerte zur Filteroperation herangezogen werden, legt das FD $\mu(lT_i)$ fest, wie diese Werte verarbeitet werden, bzw. um wieviel das zum Basispunktindex korrespondierende Eingangssample $v(m_b(lT_i)T_s)$ verzögert wird.

Prinzipiell kann man das FD auch auf die Eingangsrate beziehen. Dies erweist sich vor allem dann als sinnvoll, wenn Anti-Aliasing Filter entworfen werden. Das entsprechende FD $\tilde{\mu}(nT_s)$ berechnet sich dann nach [78] zu

$$\tilde{\mu}(mT_s) = \lceil (mT_s)/T_i \rceil - mT_s/T_i. \tag{3.6}$$

Von dieser Art der Darstellung wird etwa bei der Besprechung der transponierten Farrow-Struktur in Kapitel 3.3.2.3 ausgiebig Gebrauch gemacht.

3.1.3 Hybrides Modell der Abtastratenumsetzung

Eine Möglichkeit zur Beschreibung der digitalen Abtastratenumsetzung ist durch das in Bild 3.6 gezeigte hybride Modell [52], [135] gegeben, bei dem das digitale Eingangssignal $r(mT_s)$ zunächst D/A gewandelt wird, im analogen Bereich gefiltert und schließlich mit der Frequenz f_i abgetastet wird.

Das Signal $v(mT_s)$ entsteht durch Abtastung eines analoge Eingangssignals $v(t)$ mit der Eingangsabtastfrequenz $f_s = 1/T_s$, wobei gilt

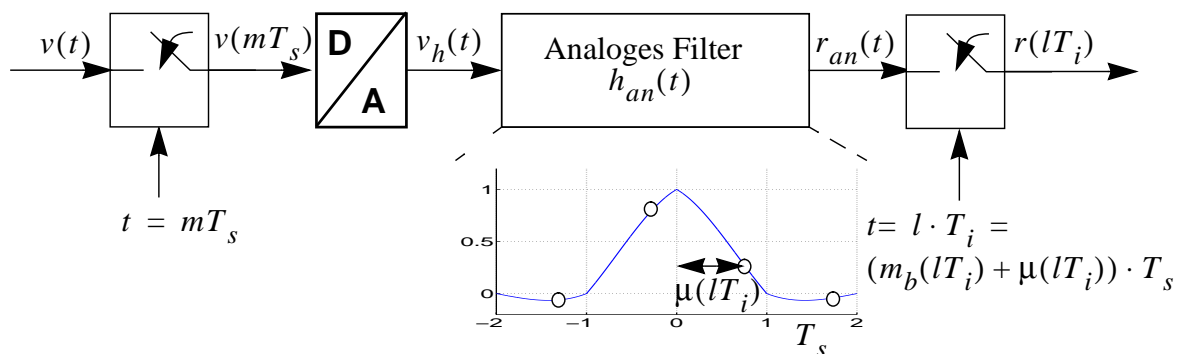


Bild 3.6: Hybrides Modell der Abtastratenumsetzung

$$m = \lfloor t/T_s \rfloor. \quad (3.7)$$

Das Spektrum des analogen Eingangssignals $V(f)$ ist in Bild 3.7a gezeigt. Es wird hierbei davon ausgegangen, dass das Abtasttheorem eingehalten wird, d.h. dass gilt [130], [153]

$$V(f) = 0 \quad \text{für } |f| > f_N = \frac{f_s}{2}, \quad (3.8)$$

so dass das zeitkontinuierliche bandbegrenzte Signal $v(t)$ aus dem abgetasteten Signal $v(mT_s)$ prinzipiell fehlerfrei zurückgewonnen werden kann. Die Frequenz f_N wird hierbei als Nyquistfrequenz bezeichnet [135], sie ist die höchste mit dem digitalen System noch auflösbare Frequenz [130], [153]. Die Einhaltung der Bedingung (3.8) wird in der Regel durch analoge Vorfilterung des Eingangssignals $r_{in}(t)$ erzwungen.

Die Abtastung mit f_s erzeugt periodische Images bei $k \cdot f_s$, wobei gilt $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Das entsprechende Signal $v(mT_s)$ wird zur Abtastratenumsetzung zunächst durch D/A-Wandlung zurück in den analogen Bereich gewandelt. Das Spektrum $V_h(f)$ des Ausgangssignals $v_h(t)$ dieses D/A-Wandlers ist in Bild 3.7b gezeigt.

Ursprünglich ging man davon aus, dass bei einer Abtastung des analogen Signals $v_h(t)$ mit der neuen Abtastfrequenz $f_i = 1/T_i$, wobei T_s/T_i eine irrationale Zahl ist, die Images in zufällige Bereiche des Übertragungsbandes gefaltet werden können [52], [98], [135]. Bei dieser Betrachtung müssen daher die Images von $V_h(f)$ mit einem Interpolationsfilter $h_{an}(t)$ eliminiert werden. Inzwischen werden derartige Interpolationsfilter meist nur noch bei einer Abtastratenerhöhung eingesetzt, was allgemein als Interpolation bezeichnet wird [78], [76], sowie zur reinen Synchronisation bei der gilt $T_s/T_i \approx 1$. Für den wichtigen Fall der Abtastratenreduktion müssen nicht die Images eliminiert werden, sondern die Signalanteile in den sogenannten Aliasingbändern möglichst stark gedämpft werden, da diese Anteile bei der Abtastung mit $1/T_i$ ins Übertragungsband gefaltet werden. Zunächst soll jedoch die etwas anschaulichere Interpolation beschrieben werden, bevor in Kapitel 3.1.4 näher auf die Abtastratenreduktion eingegangen wird.

Die Übertragungsfunktion eines analogen Interpolationsfilters $H_{an}(f)$ ist in Bild 3.7b schematisch gezeigt. Es wird hierbei davon ausgegangen, dass das Interpolationsfilter nicht optimal ist, dass heißt die Images nicht vollständig eliminiert. Wie in Bild 3.7c gezeigt ist, hat das Spektrum $R_{an}(f)$ des analogen Ausgangssignals

$$r_{an}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v_h(mT_s)h_{an}(t-mT_s) \quad (3.9)$$

dieses Filters deshalb noch Komponenten, die bei Vielfachen der Eingangsabtastfrequenz f_s angeordnet sind. Durch Abtastung mit der Ausgangsabtastfrequenz f_i werden diese Komponenten, wie in Bild 3.7d dargestellt, in das Basisband gefaltet. Außerdem wird das Spektrum $R(f)$ des zeitdiskreten Ausgangssignals

$$r(lT_i) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{an}(mT_s)h_{an}(lT_i-mT_s) \quad (3.10)$$

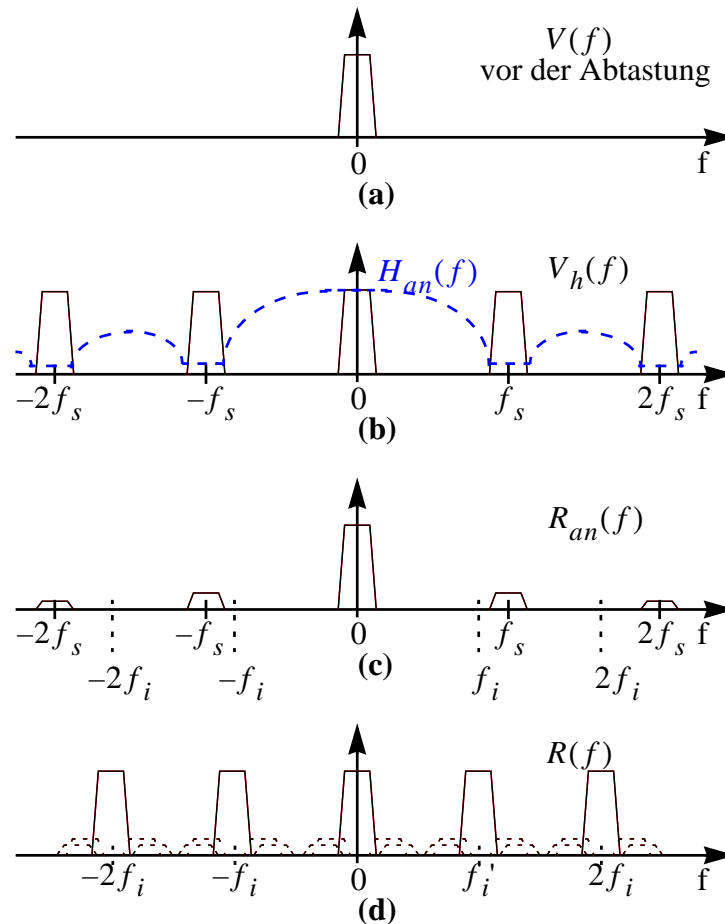


Bild 3.7: Spektren bei Interpolation: (a) Analoges Eingangssignal (b) Mit f_s abgetastetes Signal (c) Ausgang des nichtidealen Interpolationsfilters (d) Rekonstruiertes, mit f_i abgetastetes, Signal

durch die Abtastung periodisch in f_i .

Obwohl das Modell einen DAC, ADC und ein fiktives analoges Filter beinhaltet, kann das Ausgangssignal in (3.10) rein digital gewonnen werden, wenn die Sequenz der Eingangssignale $\{\tilde{v}(mT_s)\}$, die Impulsantwort des analogen Filters $h_{an}(t)$, sowie die Zeitpunkte lT_i und mT_s bekannt sind [52]. Hierfür wird die Indizierung in (3.10) geändert. Zunächst wird ein sogenannter Filterindex

$$n = m_b(lT_i) - m \quad (3.11)$$

definiert, wobei der Basispunktindex $m_b(lT_i)$ in (3.3) gegeben ist. Die Argumente in (3.10) lassen sich dann als $m = m_b(lT_i) - n$ und $(lT_i - mT_s) = (n + \mu(lT_i))T_s$ schreiben, mit $\mu(lT_i)$ gegeben in (3.4). Die Ausgangswerte werden zu den Zeitpunkten $lT_i = (n(lT_i) + \mu(lT_i))T_s$ berechnet. Somit kann (3.10) als

$$r(lT_i) = r((m_b(lT_i) + \mu(lT_i))T_s) = \sum_{n=-N_1}^{N_2} v((m_b(lT_i) - n)T_s) \cdot h_{an}((N_1 + n + \mu(lT_i))T_s) \quad (3.12)$$

geschrieben werden [52]. Hierbei wird davon ausgegangen, dass das digitale Interpolationsfilter $h(\mu(lT_i))$ ein FIR-Filter der Ordnung $N = N_1 + N_2$ ist. Gleichung (3.12) zeigt, wie das digitale Interpolationsfilter berechnet wird:

$$h(\mu(lT_i)) = h_{an}(t)|_{t=(N_1+n+\mu(lT_i))T_s} \quad \text{für } N_1 < n < N_2 \quad (3.13)$$

Das diskrete Filter ist also abhängig von dem Wert $\mu(lT_i)$, das heißt für jeden Wert der Inter-symbolposition muss ein eigener Koeffizientensatz berechnet werden. Insgesamt liegt den digitalen Filtern $h(\mu(lT_i))$ eine zeitdiskrete Impulsantwort zugrunde, die zur Analyse der digitalen Filterfunktionen herangezogen werden kann. Die Werte des diskreten Filters sind in Bild 3.6 durch Kreise angedeutet.

3.1.4 Filter zur Abtastratenumsetzung

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde davon ausgegangen, dass das Rauschen außerhalb des Nutzbandes vernachlässigbar ist. Daher wurde das Hauptaugenmerk darauf gelegt, die Images, die im hybriden Modell durch die D/A-Wandlung entstehen, zu dämpfen. Dieser Ansatz entspricht der klassischen Interpolation, bei der versucht wird, die Zwischenwerte einer an bestimmten Punkten gegebenen Funktion so zu bestimmen, dass die Gesamtkurve möglichst glatt ist, also einer Approximation im Zeitbereich [76], [78]. Die wesentliche Aufgabe der Signalverarbeitung besteht allerdings darin, die im Signal enthaltene Information möglichst gut zu erhalten. In diesem Fall sind daher Zwischenwerte eines zeitdiskreten Signals so zu bestimmen, dass das Signal im Nutzfrequenzband nicht gestört wird [78]. In Frequenzbereichen, die keine Information tragen, können hingegen beliebige Störungen in Kauf genommen werden. Aus diesen Betrachtungen folgt, dass bei der Abtastratenreduktion das Rekonstruktionsfilter nicht die Images auslöschen muss, sondern die Signale in den Frequenzbereichen, die bei der Abtastratenumsetzung in das Nutzband gefaltet werden (die sogenannten Aliasing-Regionen) möglichst gut dämpfen muss. Der Grund hierfür ist, dass in diesen Bereichen immer Rauschen vorhanden ist, das sonst ins Nutzband gefaltet wird. Außerdem können hier auch noch andere Störer angesiedelt sein (etwa FEXT), die nur unzulänglich analog weggefiltert wurden. Da bei der reinen Synchronisation Eingangs- und Ausgangsfrequenz nahezu gleich sind, sind hier Image- und Aliasingfilterung quasi identisch, so dass hier die Betrachtungen aus Kapitel 3.1.3 weiterhin gültig sind. Bei einer Abtastratenerhöhung ist das Ziel ebenfalls die möglichst vollständige Auslöschung der Images [10], [79].

Der Grund warum zur Abtastratenreduktion mit irrationalen Faktoren ursprünglich Interpolationsfilter (also Anti-Image Filter) verwendet wurden, liegt vor allem darin begründet, dass durch die Verwendung von Anti-Aliasing Filtern die erhaltene Signalkurve, wie bereits erwähnt, nicht mehr glatt ist und somit bei einer ersten Betrachtung im Zeitbereich als weniger vorteilhaft erscheint. Darüberhinaus sind zwar Anti-Aliasing Filter zur Dezimation mit einem festen Faktor, wie etwa die in Kapitel 3.3.3.2 erklärten Kammfilter, schon länger bekannt, zur Dezimation mit einem irrationalen Faktor wurden entsprechende Strukturen jedoch erst wesentlich später publiziert. Zu nennen ist hier insbesondere die transponierte Farrow-Struktur, die in Kapitel 3.3.2.3 näher besprochen wird. Außerdem wurde lange Zeit davon ausgegangen, dass bei einer Abtastratenumsetzung mit teilerfremden Abtastraten, das Spektrum aus zufälligen Frequenzbereichen in das Übertragungsband gefaltet wird. Dies wird etwa in [52] beschrieben, ist aber in der Praxis nicht zutreffend. In Bild 3.8 sind für beide Fälle der Anti-Aliasing und Anti-Image Filterung die Spektren an verschiedenen Stellen des hybriden Modells gezeigt. Hier wird im Gegensatz zu den Voraussetzungen in Bild 3.7 angenommen, dass zusätzliches weißes Rauschen vorhanden ist. Außerdem wird aus Gründen der Übersichtlichkeit angenommen, dass das analoge SRC Filter bei Anti-Image Filterung die Images perfekt eliminiert und bei Anti-Aliasing Filterung in den Aliasing-Regionen unendliche Dämpfung besitzt. Wie in Bild 3.8 zu erkennen ist, korrespondieren die Frequenzbereiche, die bei der Abtastratenumsetzung in das Übertragungsband

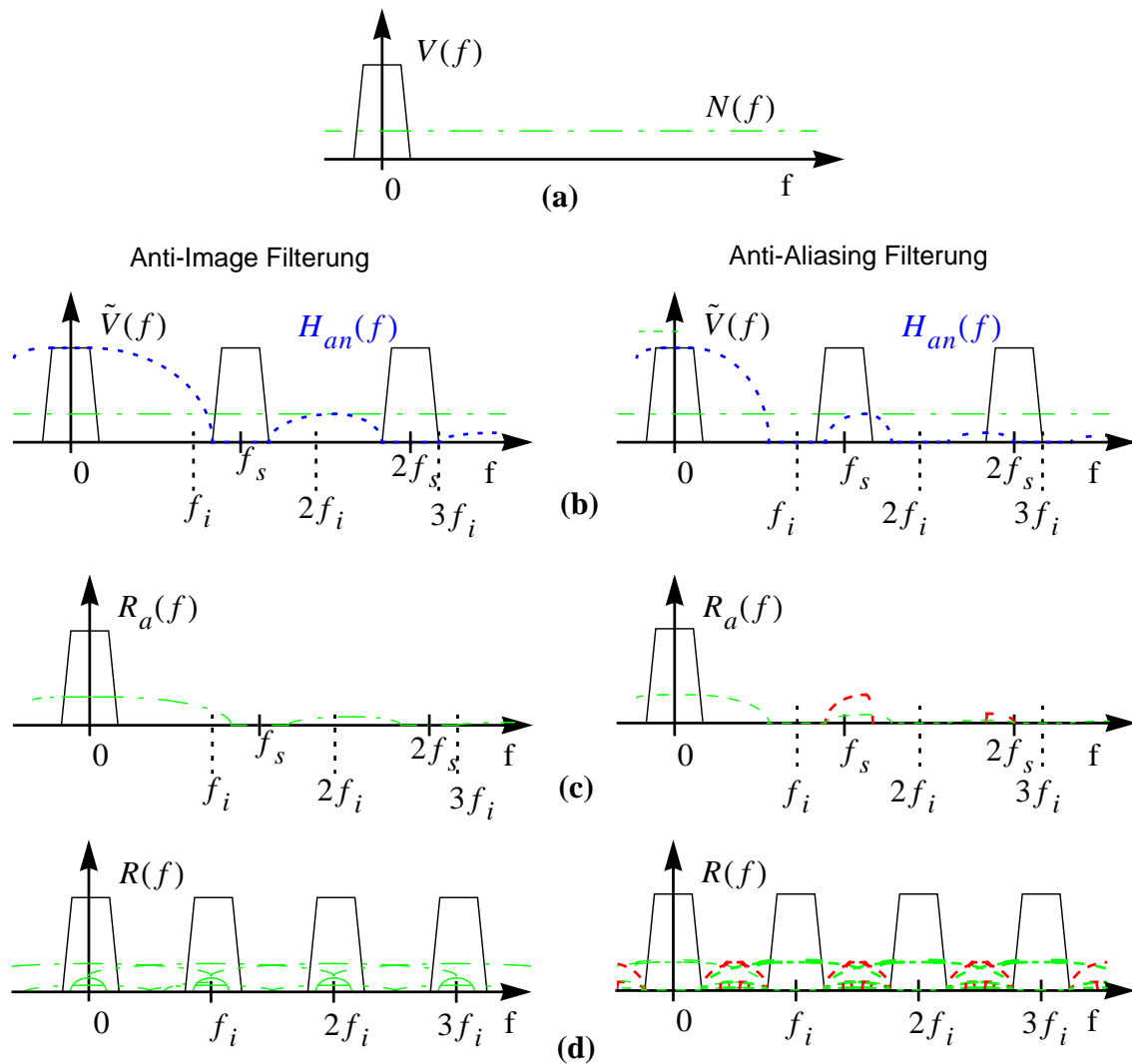


Bild 3.8: Spektren bei Anti-Image (links) und Anti-Aliasing Filterung (rechts) für Signalverarbeitung im Basisband mit zusätzlichem AWGN. (a) Eingangssignal (b) Analoges Eingangssignal und analoges Filter (c) Analoges Signal nach Filterung (d) Rekonstruiertes Signal.

gefaltet werden mit denen, bei denen die Images des rekonstruierten Signals liegen. Allgemein liegen bei einer Abtaststratenreduktion die Images des rekonstruierten Signals näher zusammen, als die des ursprünglichen Signals. Deshalb ist der Frequenzbereich, in dem das Anti-Aliasing Filter eine möglichst hohe Dämpfung erreichen soll, breiter als der des entsprechenden Anti-Image Filters. Dies liegt darin begründet, dass das Übertragungsband absolut gesehen bei beiden Verfahren gleich breit ist, bei Anti-Image Filterung die Verarbeitung allerdings im Eingangstakt und bei Anti-Aliasing Filterung im kleineren Ausgangstakt stattfindet. Daher sind bei der Anwendung zur Dezimation Anforderungen an ein Anti-Aliasing Filter im allgemeinen höher als an ein Anti-Image Filter.

Beim Vergleich der in Bild 3.8d gezeigten Spektren der rekonstruierten Signale fällt auf, dass bei Anti-Image Filterung Rauschen aus höheren Frequenzbereichen ins Übertragungsband gefaltet wird. Im Gegensatz dazu ist bei Anti-Aliasing Filterung zwar noch Signalleistung der Images vorhanden, diese wird aber nicht ins Übertragungsband gefaltet und stört das Signal somit nicht. Hier wird auch kein Rauschen in das Übertragungsband gefaltet, so dass der sich ergebende Signal Störabstand bei Anti-Aliasing Filterung größer ist als bei Anti-Image Filterung. Die erste Veröffentlichung, die eine Verwendung von Anti-Aliasing Filtern zur Abtaststratenre-

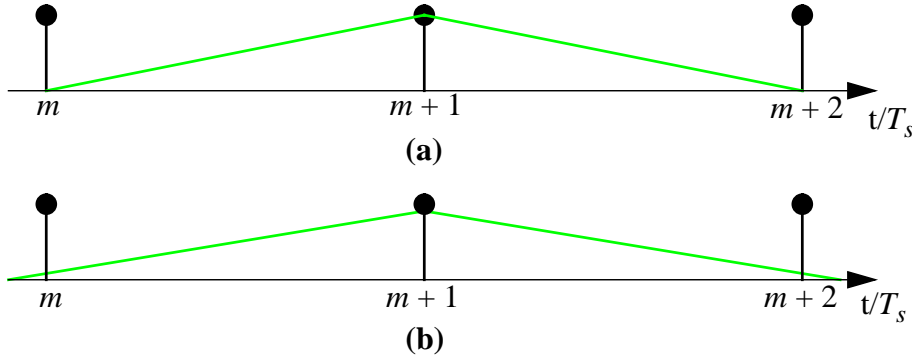


Bild 3.9: Impulsantwort eines Lagrangefilters erster Ordnung für (a) Anti-Image und (b) Anti-Aliasing Filterung. Eingezeichnet sind zusätzlich Abtastwerte für $\mu = 0$.

duktion beschreibt, datiert aus dem Jahr 1999 [76], jedoch wurde bereits ein Jahr früher eine Technik zum Patent angemeldet, bei der durch Abtastung der zeitkontinuierlichen Impulsantwort eines Interpolationsfilters mit einer neuen Abtastfrequenz die Umrechnung eines Anti-Image-Filters in ein Anti-Aliasing Filter gelingt [148]. Die Anwendung dieser Technik zur Taktregelung ist in [149] beschrieben.

3.1.5 Vergleich von Anti-Image und Anti-Aliasing Filterung

In diesem Abschnitt sollen im Zeitbereich auftretende Effekte von Anti-Image und Anti-Aliasing Filterung exemplarisch dargestellt werden. Die empfangene Signalfolge besteht hier aus einer Folge von Einsen. Zunächst sei das Signal nicht durch Rauschen gestört. Die Abtastratenumsetzung erfolgt durch ein Lagrangefilter erster Ordnung. Das Verhältnis T_s/T_i ist als 1,1 gewählt. Die Impulsantwort des Filters bei einer Anti-Image Filterung ist in Bild 3.9a gezeigt. Hier sind zusätzlich Abtastwerte für den Fall $\mu = 0$ eingezeichnet. Die Ausgangsfunktion ist gegeben durch

$$r(lT_i) = v((m_b(lT_i - 1))T_s)(1 - \mu(lT_i)) + v(m_b(lT_i)T_s)\mu(lT_i). \quad (3.14)$$

Zur Durchführung einer Anti-Aliasing Filterung muss die Impulsantwort des SRC Filters zeitlich um den Faktor T_s/T_i gestreckt werden und die Amplitude gleichzeitig um den identischen Faktor reduziert werden [75], [78]. Wie in Bild 3.9b zu erkennen ist, werden nun abhängig von μ zwei, bzw. drei Eingangswerte verarbeitet. Die Ausgangsfunktion bei Anti-Aliasing Filterung ist folgendermaßen gegeben

$$r(lT_i) = \begin{cases} \tilde{r}(n_1 T_s) + v((n_1 + 1)T_s)\tilde{\mu}((n_1 + 1)T_s) & \text{für } n_1 = 11, 22, 33, \dots \\ \tilde{r}(n_1 T_s) + v((n_1 + 1)T_s)(1 - \tilde{\mu}((n_1 + 1)T_s)) & \text{für } n_1 = 12, 23, 34, \dots, \\ \tilde{r}(n_1 T_s) & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.15)$$

wobei definiert wurde $\tilde{r}(n_1 T_s) = v(n_1 T_s)(1 - \tilde{\mu}(n_1 T_s)) + v(n_2 T_s)\tilde{\mu}(n_2 T_s)$. Die Größe $\tilde{\mu}(mT_s)$ ist hierbei in () definiert. Die Beziehungen der Basispunkte n_1 und n_2 sind genauer bei der Beschreibung der transponierten Farrow-Struktur in Kapitel 3.3.2.3 erklärt.

Die Ausgangssignale bei Anwendung der Anti-Image und Anti-Aliasing Filterung sind in Bild 3.10a als dunkle, bzw. helle Kurve gezeichnet. Man erkennt deutlich, dass bei Anti-Image Filterung die Abtastwerte durch eine glatte Kurve verbunden sind, während bei Anti-Aliasing Filterung, zu Zeitpunkten die einem Vielfachen von $10T_i$ entsprechen, ein zu hoher und anson-

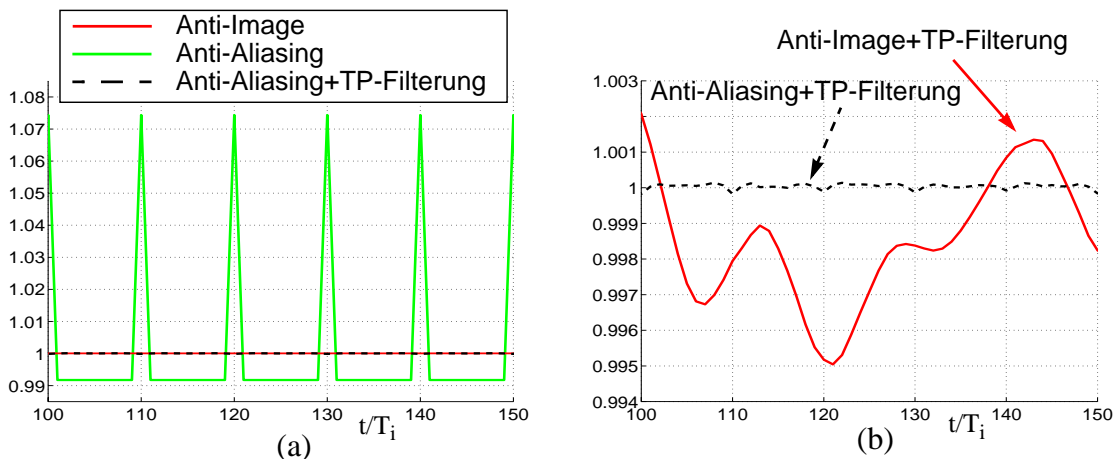


Bild 3.10: (a) Ausgangssignal bei Anti-Image, bzw. Anti-Aliasing Filterung. Der Ausgang des Anti-Aliasing Filters wird zusätzlich nach Tiefpassfilterung gezeigt. (b) Ergebnis bei hochpassgefiltertem AWGN

sten ein zu niedriger Ausgangswert berechnet wird. Dies kann als Summe des richtigen Signals, das hier ebenfalls eine Folge von Einsen darstellt, mit einem hochfrequenten Rauschterm aufgefasst werden. Dieser Rauschterm ist dann irrelevant, wenn das Signalspektrum im Basisband liegt. Durch Tiefpassfilterung, die etwa im Entzerrer stattfinden kann, kann der hochfrequente Störanteil dann eliminiert werden. In dem Beispiel wird das Ausgangssignal des Abtastratenumsetzers exemplarisch mit einem Root Raised Cosine Tiefpass der Ordnung 40, mit Roll Off Faktor 0,15 und normierter Übergangsbreite von 0,1 gefiltert. Das sich ergebende Signal ist in Bild 3.10a gestrichelt eingezeichnet. Man erkennt, dass dieses Signal annähernd die richtigen Werte aufweist. Der Vorteil der Anti-Aliasing Filterung im Vergleich zur klassischen Anti-Image Filterung wird deutlich, wenn das Empfangssignal mit additivem Rauschen behaftet ist. Dies ist in Bild 3.10b für additives gaußsches Rauschen gezeigt. Da die Abtastratenumsetzung auf das Rauschen im Übertragungsband kaum Einfluss hat, ist zur besseren Verdeutlichung das Rauschsignal hier als AWGN gewählt, das mit einem Hochpaßfilter der Ordnung 16 und normierten Grenzfrequenz 0,2 gefiltert wurde. Das Hochpaßfilter ist mit dem Parks/McClellan Algorithmus entworfen [132]. Die normierte AWGN Leistung beträgt $\sigma_n^2 = 1/1000$. Beide Signale wurden hier zusätzlich mit dem oben beschriebenen Tiefpass gefiltert. Man erkennt, dass das durchgezogene gezeichnete, durch Anti-Image Filterung gewonnene, Ausgangssignal wesentlich stärker durch das hochfrequente Rauschen gestört wird, als das gestrichelt gezeichnete, das durch Anti-Aliasing Filterung gewonnen wird. Dies liegt, wie in Kapitel 3.1.4 erklärt daran, dass das Rauschsignal bei Anti-Image Filterung teilweise in das Übertragungsband gefaltet wird, während bei Anti-Aliasing Filterung das Rauschsignal in den spektralen Bereichen gedämpft wird, die in das Signalband gefaltet werden.

Bei dem historischen Ansatz, bei dem ein Anti-Imaging oder Interpolationsfilter verwendet wird, wird deshalb stets davon ausgegangen, dass in den spektralen Bereichen, die bei Interpolation in das Signalband gefaltet werden, nur wenig Rauschleistung vorhanden ist. Da im Empfänger das Signal immer etwas verrauscht ist (etwa durch einen rauschenden AD-Wandler) muss das Empfangssignal vor der Abtastratenumsetzung gefiltert werden. Diese Vorfilterung gestaltet sich bei Anti-Image Filterung daher aufwändiger als bei Anti-Aliasing Filterung. Die Betrachtungen zeigen allerdings auch, dass im Sender die klassische Interpolation vorzuziehen ist, da das Signal hier grundsätzlich als rauschfrei angenommen werden kann.

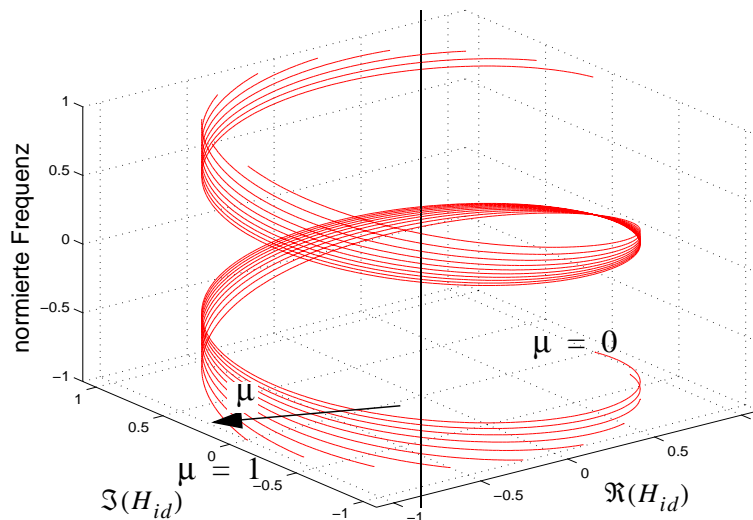


Bild 3.11: Frequenzgang des idealen SRC Filters für verschiedene Werte von μ als Funktion der normierten Frequenz

3.2 Optimales Filter zur Abstratenumsetzung

Nachdem das ideale SRC Filter eine Verzögerung um μ darstellt, ist seine Übertragungsfunktion in der z -Ebene formal gegeben durch [98]

$$H_{id}(z, \mu) = z^{-\mu}. \quad (3.16)$$

Die Übertragungsfunktion im Frequenzbereich ist mit $z = e^{-j\omega}$ gegeben durch [52], [144]

$$H_{id}(\omega, \mu) = e^{-j\omega\mu}, \quad (3.17)$$

wobei $\omega = 2\pi(f/f_i)$ die auf f_i normierte Kreisfrequenz ist. Transformiert man (3.17) mit Hilfe der zeitdiskreten inversen Fouriertransformation in den Zeitbereich, erhält man ein unendlich langes, nichtkausales Filter der Form [52], [144]

$$h_{id}(n) = \text{sinc}(n - \mu) \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}. \quad (3.18)$$

Die Funktion $\text{sinc}(x)$ ist hierbei folgendermaßen definiert:

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \\ \sin(\pi x)/(\pi x) & \text{sonst} \end{cases}. \quad (3.19)$$

Dieses Filter kann bei endlicher Ordnung N nur näherungsweise implementiert werden. Um eine kausale Impulsantwort zu gewährleisten, muss zusätzlich noch ein ganzzahliger Wert D zur gewünschten Verzögerung μ addiert werden. Diese Verzögerung D wird bei gerader Filterordnung üblicherweise zu $(N-1)/2$ gesetzt, bei ungerader Filterordnung entsprechend zu $N/2$ [98]. Somit ergibt sich als Zielfunktion im Frequenzbereich

$$H_{id}(\omega, \mu) = e^{-j\omega(D + \mu)}. \quad (3.20)$$

In Bild 3.11 ist diese Zielfunktion für verschiedene Werte von μ als Funktion der normierten

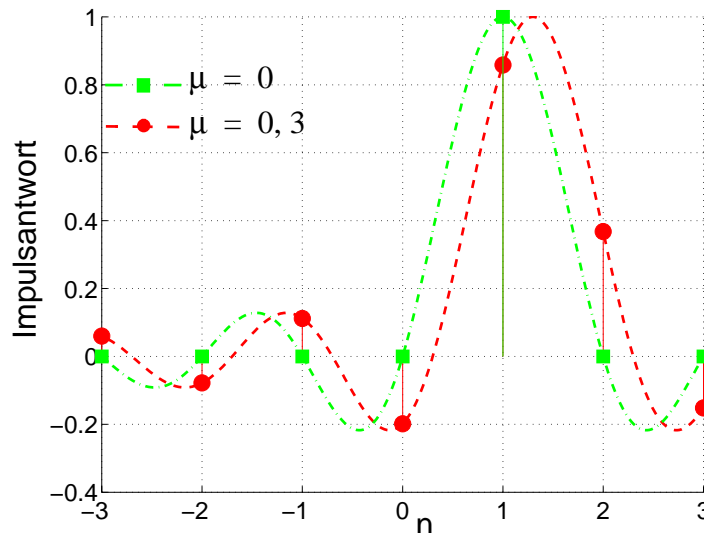


Bild 3.12: Impulsantwort des idealen SRC Filters mit einer zusätzlichen Verzögerung von $D = 1$ für $\mu = 0$ und $\mu = 0, 3$ in der Region $-3 < n < 3$

Frequenz gezeigt. Die ganzzahlige Verzögerung wurde zu $D = 1$ gewählt, so dass jede der Kurven im Bereich zwischen $0 \leq f < f_N$ einmal den Ursprung umkreist. Zu erkennen ist, dass sich alle Kurven für $f = 0$ im Punkt $\{1, 1\}$ schneiden. In Bild 3.12 ist die Impulsantwort des betrachteten Filters im Bereich $-3 < n < 3$ für die Werte $\mu = 0$ und $\mu = 0, 3$ gezeichnet. Die gestrichelten Linien repräsentieren hierbei die entsprechenden zeitkontinuierlichen sinc-Funktionen, die zu den Impulsantworten des SRC Filters im hybriden Modell korrespondieren. Die auf den Kurven liegenden Kreise, bzw. Quadrate markieren jeweils die diskreten Abtastwerte für $\mu = 0$ und $\mu = 0, 3$. Für den Fall $\mu = 0$ ist die Impulsantwort des digitalen Filters lediglich eine ganzzahlige Verzögerung von $D = 1$ Taktintervallen, während sie in den übrigen Fällen nichtkausal ist und sich in positiver und negativer Richtung unendlich ausdehnt.

Die Darstellung des komplexen Frequenzganges in Bild 3.11 ist relativ unanschaulich. Die beiden entscheidenden Größen der Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ sind der Betrag $|H(j\omega)|$ und der Phasengang

$$\Theta(\omega) = \arctan \frac{\Im\{H(j\omega)\}}{\Re\{H(j\omega)\}} \quad (3.21)$$

des jeweiligen, von μ abhängigen, digitalen Filters. Aus dem Phasengang $\Theta(\omega)$ lassen sich die Phasenlaufzeit

$$\tau_p = \frac{\Theta(\omega)}{\omega} \quad (3.22)$$

und die Gruppenlaufzeit

$$\tau_g = \frac{d\Theta(\omega)}{d\omega} \quad (3.23)$$

ableiten. Physikalisch lässt sich die Phasenlaufzeit als die Verzögerung der einzelnen Sinusschwingungen interpretieren, während die Gruppenlaufzeit die Verzögerung der Einhüllenden des Signals beschreibt. Der Amplitudengang des idealen SRC ist für $|f| \leq f_N$ identisch Eins. Die Phasen- und Gruppenlaufzeit ergeben sich jeweils zu $\tau_p = \tau_g = D + \mu$.

Eine Darstellungsmöglichkeit besteht in der Übertragungsfunktion des zugrundeliegenden zeitkontinuierlichen Filters im hybriden Modell. Für das ideale SRC Filter, mit der durch (3.18) gegebenen Impulsantwort, ergibt sich hierbei der ideale Tiefpass mit einer Grenzfrequenz von $f_N = 1/(2T_i)$, wobei die Nyquistfrequenz f_N die halbe Abtastfrequenz des rekonstruierten

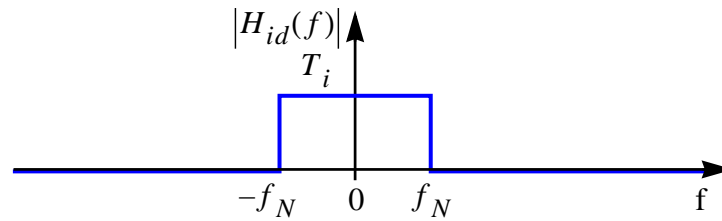


Bild 3.13: Amplitudengang des analogen Modells des idealen SRC Filters

Signals darstellt. Der Amplitudengang dieses idealen Filters ist in Bild 3.13 gezeigt. Die Aufgabe dieses Filters im hybriden Modell besteht darin, die beim D/A-Wandeln erzeugten Images des originalen Signals, sowie das gesamte Rauschen außerhalb des Nutzbandes, herauszufiltern. Das originale Signal, das im Bereich $-f_N < f < f_N$ liegt, darf hierbei nicht verändert werden, weshalb die Dämpfung hier T_i beträgt, bzw. 1 wenn die Abtastfrequenz des rekonstruierten Signals auf Eins normiert wird. Die Übertragungsfunktion $H_{id}(f)$ des idealen SRC Filters ist somit gegeben durch

$$H_{id}(f) = \begin{cases} T_i & \text{für } |f| < f_N \\ 0 & \text{für } |f| > f_N \end{cases} \quad (3.24)$$

In der Praxis ist es allerdings nicht erforderlich, dass die Übertragungsfunktion des zeitkontinuierlichen Filters im gesamten Bereich $|f| > f_N$ verschwindet. Für den Fall der Anti-Image Filterung, bei dem, wie in Kapitel 3.1.3 erläutert, das Spektrum des rekonstruierten Signals in einem rauschfreien Szenario erhalten bleiben soll, muss die Dämpfung in den Bereichen bei denen die Images angesiedelt sind maximal sein (vgl. Bild 3.8). Für den Fall der Abtastratenumsetzung, bei dem das Signalspektrum im Übertragungsband möglichst wenig gestört werden soll, muss die Dämpfung, wie in Kapitel 3.1.4 beschrieben, in den sogenannten Aliasingbändern gegen unendlich gehen.

Der Frequenzbereich, der beim Rekonstruieren in das Übertragungsband gefaltet wird, sei im Folgenden mit f_F bezeichnet. Er ist für die drei Fälle einer Signalverarbeitung im Basisband und einer reell-, bzw. komplexwertigen Signalverarbeitung im Bandpassbereich durch folgende Formeln gegeben:

$$f_F = \begin{cases} \left\{ kf_s - \frac{B}{2} \leq f \leq kf_s + \frac{B}{2} \right\} & \text{Basisband} \\ \left(\left\{ kf_s + f_0 - \frac{B}{2} \leq f \leq kf_s + f_0 + \frac{B}{2} \right\} \cup \left\{ (k+1)f_s - f_0 - \frac{B}{2} \leq f \leq (k+1)f_s - f_0 + \frac{B}{2} \right\} \right) & \text{Bandpass reellwertig} \\ \left\{ kf_s + f_0 - \frac{B}{2} \leq f \leq kf_s + f_0 + \frac{B}{2} \right\} & \text{Bandpass komplexwertig} \end{cases} \quad (3.25)$$

Hierbei bezeichnet B die Bandbreite des Übertragungsbandes, außerdem gilt $k = 1, 2, \dots$. Das optimale SRC Filter besitzt daher in den durch f_F gegebenen Frequenzbändern theoretisch eine unendliche Dämpfung, sowie im Übertragungsband eine Dämpfung von Eins. Die bis jetzt angegebenen optimalen Filter gelten für die Annahme eines optimalen Taktregelkreises. In der Realität ist der Schätzwert des richtigen Abtastzeitpunktes allerdings fehlerbe-

haftet. Der Fehler des Schätzwertes $e_t = \hat{\mu} - \mu_{opt}$ ist mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p_E(e_t)$ verteilt. Die Größe μ_{opt} bezeichnet hierbei die optimale Verzögerung, die Größe $\hat{\mu}$ die geschätzte. Es muss daher strenggenommen der Ausdruck

$$\int_{-\infty}^{\infty} (H_{id} - H(e_t)) p_E(e_t) de_t \quad (3.26)$$

minimiert werden. In der Praxis ist die Verteilung $p_E(e_t)$ allerdings kaum zu bestimmen und die Minimierung von (3.26) mathematisch schwierig [92], [93]. In [93] wurde auf heuristischem Weg allerdings gezeigt, dass das Filter mit dem kleinsten Fehler bei $e_t = 0$ diese Eigenschaft auch in der Umgebung behält. Grundsätzlich müsste man bei diesen Betrachtungen noch zwischen zufälligen und systematischen Abweichungen vom richtigen Abtastzeitpunkt unterscheiden, da ein in einem realen System fast immer vorhandene Entzerrer systematische Fehler zumindest teilweise korrigieren kann [134]. Dies gilt insbesondere bei der Verwendung von fraktionalen Entzerrern (siehe Kapitel 4.4.3).

Weiterhin wurden bei den bisherigen Betrachtungen die Einflüsse des Kanals sowie des zusätzlichen Rauschens nicht berücksichtigt. Bei einer globalen Betrachtung müsste als Zielfunktion der mittlerer quadratische Fehler (*Mean Square Error*, MSE) minimiert werden. Dieser ist unter der Annahme des richtigen Abtastzeitpunktes gegeben durch

$$\text{MSE}(e_t(k) = 0) = E\{x(k) - r([n(k) + \mu_{opt}(k)]T_s)\}^2, \quad (3.27)$$

wobei $x(k)$ das k -te Sendesymbol bezeichnet. Eine Berechnung des zur Minimierung des MSE optimalen SRC Filters wurde in [92], [93] für einen AWGN-Kanal durchgeführt. Ein AWGN-Kanal bezeichnet hierbei einen verzerrungsfreien Kanal der mit AWGN beaufschlagt wird. Im allgemeinen Fall ist diese Berechnung sehr schwierig und darüberhinaus sind bis jetzt keine adaptiven Algorithmen bekannt, die ein in diesem Sinne optimales SRC Filter für einen nichtidealen Kanal und/oder farbiges Rauschen approximieren. Deshalb werden in der Praxis die Einflüsse der Kanalverzerrungen und des additive Rauschen nach erfolgter Abstratenumsetzung und Synchronisation durch einen separaten Entzerrer (siehe Kapitel 4) minimiert.

Wird das Ausgangssignal des Filters zur Abstratenumsetzung mit einem weiteren Filter gefaltet, gestaltet es sich in der Praxis als vorteilhaft, nicht die einzelnen Impulsantworten zu optimieren, sondern die Gesamtimpulsantwort der Einzelfilter [121]. Dies ist etwa der bei einer Entzerrung im Symboltakt der Fall, bei dem das Ausgangssignal des Abstratenumsetzers normalerweise mit einem sogenannten signalangepassten (*Matched*) Filter beaufschlagt wird (siehe Kapitel 4.4.3).

3.3 Implementierung der Filter zur Abstratenumsetzung

In diesem Kapitel werden verschiedene Möglichkeiten zur Implementierung eines SRC Filters beschrieben. Eine grundsätzliche Variante besteht darin, können die Filterkoeffizienten nach einem gegebenen Algorithmus zu jedem Verarbeitungsschritt direkt zu berechnen. Eine Übersicht derartiger Möglichkeiten findet sich etwa in [98], in der Praxis werden sie allerdings kaum eingesetzt da sie sich als recht aufwändig erweisen. Eine zweite Methode besteht darin, Koeffizientensätze des digitalen Filters für verschiedene Werte von μ zu speichern und damit den

optimalen Koeffizientensatz für gegebenes μ anzunähern. Dies ist Inhalt von Kapitel 3.3.1. Ein weiteres, häufig eingesetztes Verfahren besteht darin, die einzelnen Koeffizienten der Impulsantwort der verschiedenen SRC Filter durch Polynome in μ anzunähern. Somit kann das Filter mit einem festen Koeffizientensatz implementiert werden. Dies wird in Kapitel 3.3.2 ausführlich beschrieben. In Kapitel 3.3.3 wird schließlich ein exemplarischer Vergleich des Implementierungsaufwands für verschiedene Realisierungen gegeben.

3.3.1 Implementierung mit gespeicherter Impulsantwort

Eine naheliegende Möglichkeit der Implementierung eines SRC Filters besteht darin, die Impulsantwort des zugrundeliegenden analogen Filters möglichst fein aufzulösen und zu speichern. Für einen gegebenen Wert von μ wird dann die Impulsantwort des gespeicherten Filters selektiert, dessen korrespondierende fraktionale Verzögerung der geforderten am nächsten kommt, oder es werden die verwendeten Koeffizienten durch Interpolation aus den Koeffizientensätzen mehrerer gespeicherter Filter berechnet.

Wenn 2^b Koeffizienten pro Zeitintervall T_s gespeichert werden, entspricht das einer Quantisierung von $\mu(l)$ mit 2^b gleichmäßig verteilte Quantisierungsstufen, wobei b die Anzahl der Bits zur Quantisierung angibt. Für die Koeffizienten des quantisierten Filters \bar{h}_{an} gilt dann

$$\bar{h}_{an}(n + \mu(l)) = h_{an}(n + \bar{\mu}(l)) \quad \text{für } 0 \leq n \leq N, \quad (3.28)$$

wobei $\bar{\mu}(l)$ der quantisierte Wert von $\mu(l)$ ist, der folgendermaßen berechnet werden kann:

$$\bar{\mu}(l) = \frac{\lfloor \mu(l) \cdot 2^b + 1/2 \rfloor}{2^b}. \quad (3.29)$$

Da ein SRC Filter mit geradem N in der Regel eine symmetrische Impulsantwort besitzt [11], reicht es in diesem Fall aus, eine Hälfte der Impulsantwort zu speichern, so dass man auf $2^b(N+1)/2$ zu speichernde Koeffizienten kommt.

In Bild 3.14a ist am Beispiel von $n = 0$ gezeigt, wie die quantisierten Werte $\bar{h}_{an}(\mu(l) + n)$ für $0 < n < N$ erhalten werden. Man kann weiterhin mit dem hybriden Modell rechnen, wenn man das zugrundeliegende analoge SRC Filter quantisiert. Die entsprechende stufenförmige Impulsantwort $\bar{h}_{an}(t)$ ist in Bild 3.14a gestrichelt eingezeichnet. Mathematisch erhält man diese Impulsantwort durch Abtastung des ursprünglichen Filters mit der Frequenz $2^b \cdot f_s$ - was der Faltung mit einer Dirac-Folge entspricht - und anschließender Faltung mit einem Halteglied erster Ordnung (Zero Order Hold, ZOH). Das entsprechende abgetastete Filter sei im folgenden mit $h_d(t)$ bezeichnet. In Bild 3.14a sind die von Null verschiedenen Werte dieses Filters durch

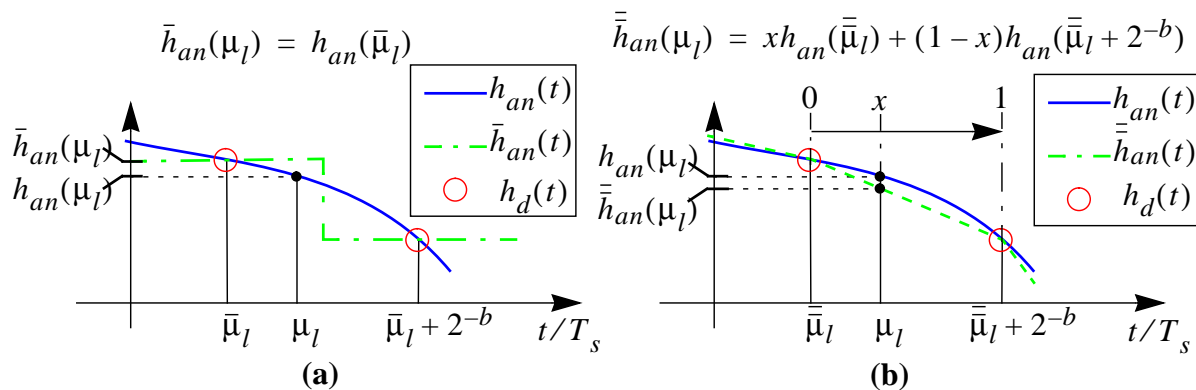


Bild 3.14: Quantisierung der Filterparameter am Beispiel $n = 0$ mit (a) Halteglied erster Ordnung und (b) Halteglied zweiter Ordnung

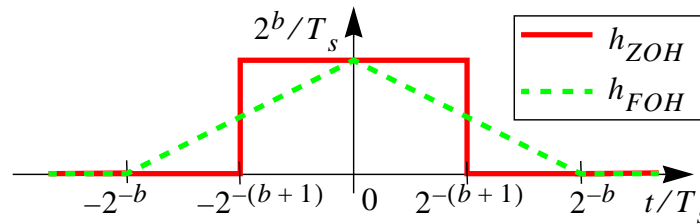


Bild 3.15: Impulsantwort des Halteglieds erster Ordnung (durchgezogene Linie) und zweiter Ordnung (gestrichelt)

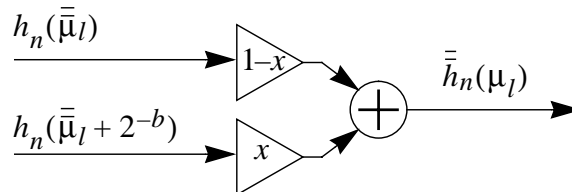


Bild 3.16: Berechnung des n -ten Filterparameters durch Lagrange Interpolation

Kreise angedeutet. Das Halteglied ist in Bild 3.15 gezeigt. Es hat die Impulsantwort

$$h_{ZOH} = \begin{cases} 2^b/T_s & \text{für } |t| < 2^{-(b+1)} \cdot T_s \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.30)$$

Man kann die Qualität des quantisierten Filters deutlich steigern, wenn man die verwendeten Koeffizienten durch Lagrange Interpolation zwischen benachbarten gespeicherten Werten ermittelt. Für den einfachsten Fall einer linearen Interpolation, die einer Lagrange Interpolation erster Ordnung entspricht, erhält man das mit $\bar{h}_{an}(\mu(l))$ bezeichnete Filters des hybriden Modells durch

$$\bar{h}_{an}(n + \mu(l)) = x \cdot h_{an}(n + \bar{\mu}(l)) + (1 - x) \cdot h_{an}((n + \bar{\mu}(l)) + 2^{-b}), \quad (3.31)$$

wobei gilt $x = 2^b \cdot (\bar{\mu}(l) - \mu(l))$ und $\bar{\mu}(l) = \lfloor \mu(l) \cdot 2^b \rfloor / 2^b$. Die Durchführung dieser linearen Interpolation ist in Bild 3.14b gezeigt. Mathematisch entspricht sie einer Faltung mit einem Halteglied erster Ordnung (*First Order Hold*, FOH), dessen, in Bild 3.15 gestrichelt gezeichnete, Impulsantwort durch

$$h_{FOH} = \begin{cases} 2^b/T_s - t & \text{für } |t| < 2^{-b} \cdot T_s \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.32)$$

gegeben ist.

In Bild 3.16 ist gezeigt, wie die Berechnung des so gemittelten quantisierten SRC Filters implementiert werden kann.

Bild 3.17 zeigt die Impulsantwort des zugrundeliegenden analogen Filters eines SRC Filters dritter Ordnung, sowie das entsprechende Filter $h_d(t)$ für $b = 3$. Bei dem SRC Filter handelt es sich um ein Chebychevfilter, das für den Frequenzbereich $0 \leq f \leq f_s/16$ entworfen wurde. Die entsprechenden Filter $\bar{h}_{an}(t)$ und $\bar{h}_{an}(t)$ sind in Bild 3.18a, bzw. Bild 3.18b gezeigt. Während man bei dem gleichmäßig quantisierten Filter in Bild 3.18a deutlich die einzelnen Stufen erkennen kann, ist das durch Lagrange Interpolation erhaltene Filter in Bild 3.18b optisch kaum vom ursprünglichen Filter $h_{an}(t)$ zu unterscheiden. Durch Verwendung eines Haltegliedes höherer Ordnung ließe sich die Qualität des SRC Filters weiter steigern, dies wird aufgrund des damit verbundenen Implementierungsaufwands allerdings nicht betrachtet.

Die bei der Quantisierung auftretenden Effekte lassen sich durch Transformation des zugrunde-

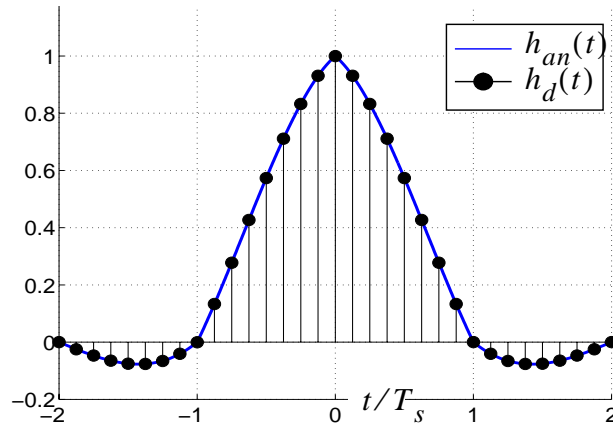


Bild 3.17: Beispiel der Impulsantwort eines SRC Filters: Zeitkontinuierliche Impulsantwort und diskrete Werte im Abstand 2^{-b}

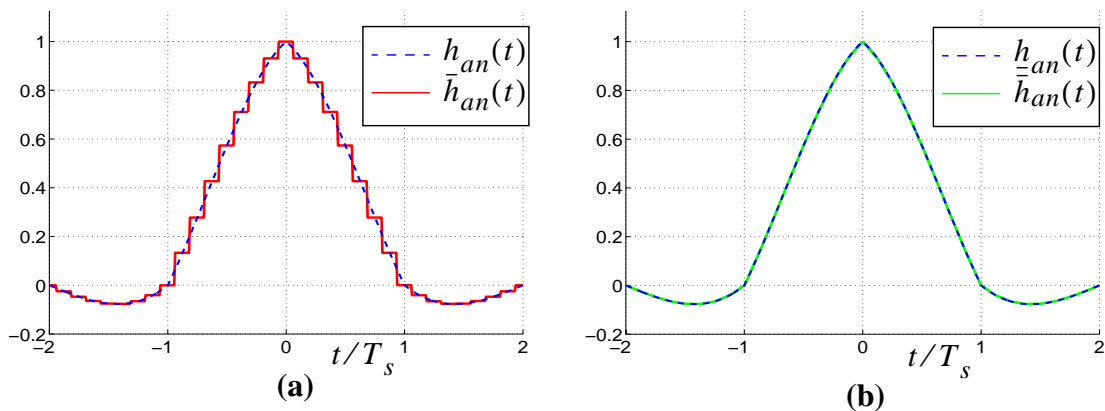


Bild 3.18: Impulsantwort des quantisierten Filters von (a) 3 Stufen Quantisierung (b) 3 Stufen Quantisierung und Faltung mit Lagrangefilter 1. Ordnung

liegenden analogen Filters in den Frequenzbereich einfach analysieren. Die Übertragungsfunktion des analogen Filters sei im Folgenden durch $H_{an}(f)$ bezeichnet. Das durch Abtastung mit $f_d = 2^b \cdot f_s$ entstehende Filter mit der Übertragungsfunktion $H_d(f)$ ist im Frequenzbereich periodisch mit f_d , besitzt also Images bei Vielfachen von f_d . Dieser Effekt ist für das Beispielfilter in Bild 3.19 gezeigt. Durch die Faltung mit dem entsprechenden Halteglied werden diese Images gedämpft. Im Frequenzbereich entspricht der Faltung hierbei eine Multiplikation der einzelnen Übertragungsfunktionen. Für die Verwendung eines ZOH, bzw. FOH sind diese Mul-

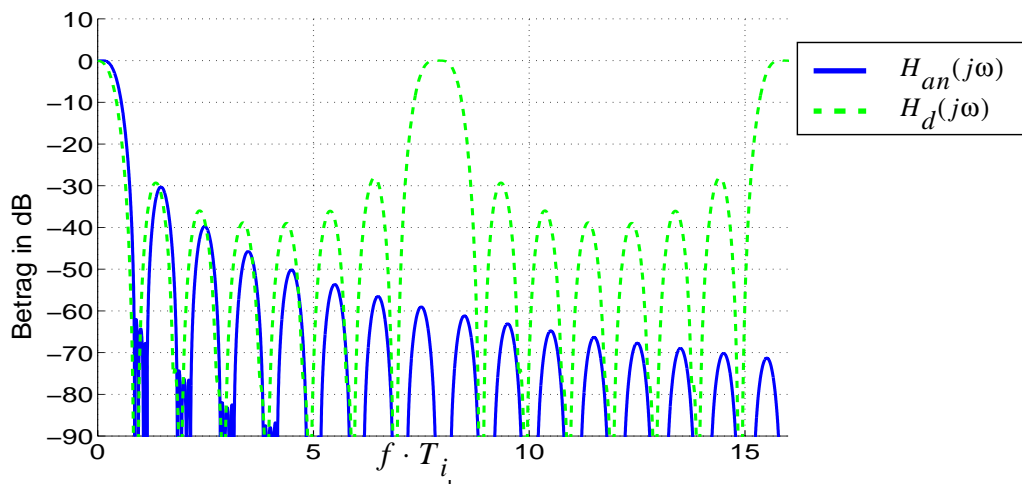


Bild 3.19: Übertragungsfunktion des analogen und des abgetasteten Filters

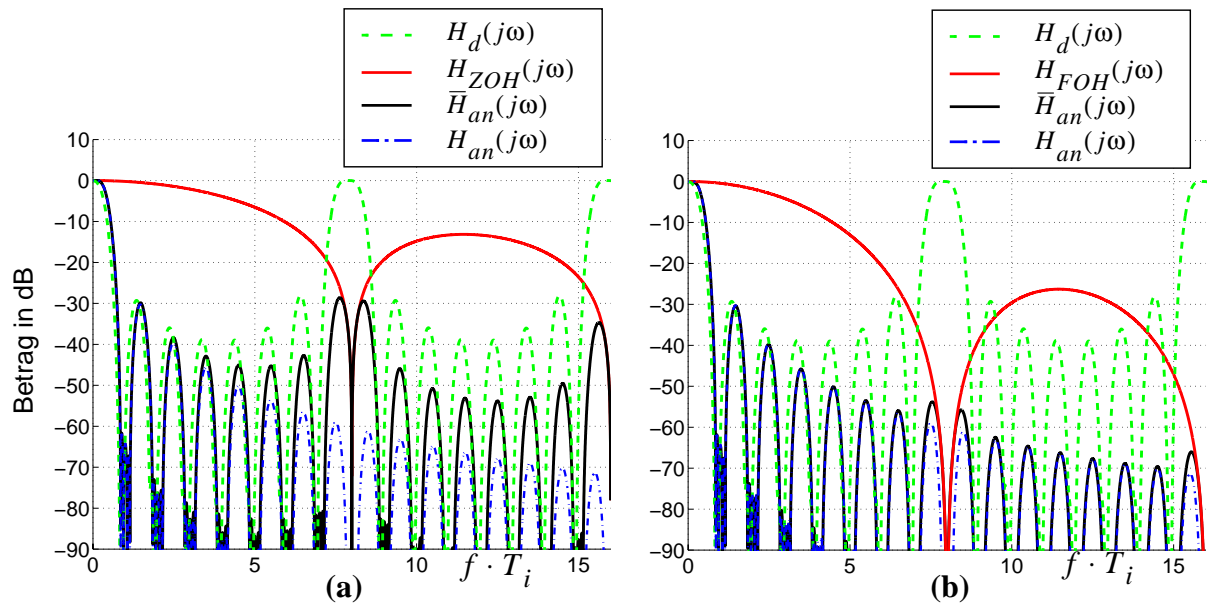


Bild 3.20: Übertragungsfunktion der Halteglieder und der analogen Filter nach Quantisierung mit 8 Bit und Filterung mit dem Halteglied (a) Zero Order Hold (ZOH) Filter und (b) First Order Hold (FOH)

Multiplikationsoperationen in Bild 3.20a, bzw. Bild 3.20b gezeigt. Die Übertragungsfunktion $H_{ZOH}(j\omega)$ des ZOH berechnet sich durch Fouriertransformation der Impulsantwort zu

$$H_{ZOH}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{ZOH}(t)e^{j\omega T} = \text{sinc}\left(f\frac{T}{2}\right). \quad (3.33)$$

Nachdem man die Impulsantwort des FOH durch folgende Faltung erhält:

$$h_{FOH}(t) = h_{ZOH}(t) * h_{ZOH}(t), \quad (3.34)$$

gilt für die Übertragungsfunktion des FOH:

$$H_{FOH}(j\omega) = (H_{ZOH}(j\omega))^2 = \left(\text{sinc}\left(f\frac{T}{2}\right)\right)^2. \quad (3.35)$$

Die Dämpfung eines FOH ist im logarithmischen Maßstab also doppelt so groß wie die des entsprechenden ZOH. Die Übertragungsfunktion des quantisierten Filters $\bar{H}_{an}(j\omega)$, bzw. des quantisierten gemittelten Filters $\bar{\bar{H}}_{an}(j\omega)$, erhält man zu

$$\bar{H}_{an}(j\omega) = H_{ZOH}(j\omega)H_{an}(j\omega) = \text{sinc}\left(f\frac{T}{2}\right)H_{an}(j\omega), \text{ bzw.} \quad (3.36)$$

$$\bar{\bar{H}}_{an}(j\omega) = H_{FOH}(j\omega)H_{an}(j\omega) = \left(\text{sinc}\left(f\frac{T}{2}\right)\right)^2 H_{an}(j\omega). \quad (3.37)$$

Dies ist in Bild 3.20a, bzw. Bild 3.20b gezeigt. Wie in [172] erläutert wurde, hat die Abtastung des SRC Filters verschiedene Effekte auf die Übertragungsfunktion des analogen Filters, dessen bedeutsamster durch gedämpfte Images bei Vielfachen von $2^B f_s$ auftritt. Er besteht darin, dass diese sogenannten Quantisierungsimages [172] in das Übertragungsband gefaltet werden können, wenn das rekonstruierte Signal $y(t)$ mit der Frequenz f_i abgetastet wird (vgl. Bild 3.6). Dies ist auch in Bild 3.20 zu erkennen.

Neben der Art des Haltegliedes und den Eckfrequenzen des Übertragungsbandes hängt die Amplitude der gedämpften Images im Wesentlichen von der zur Quantisierung verwendeten An-

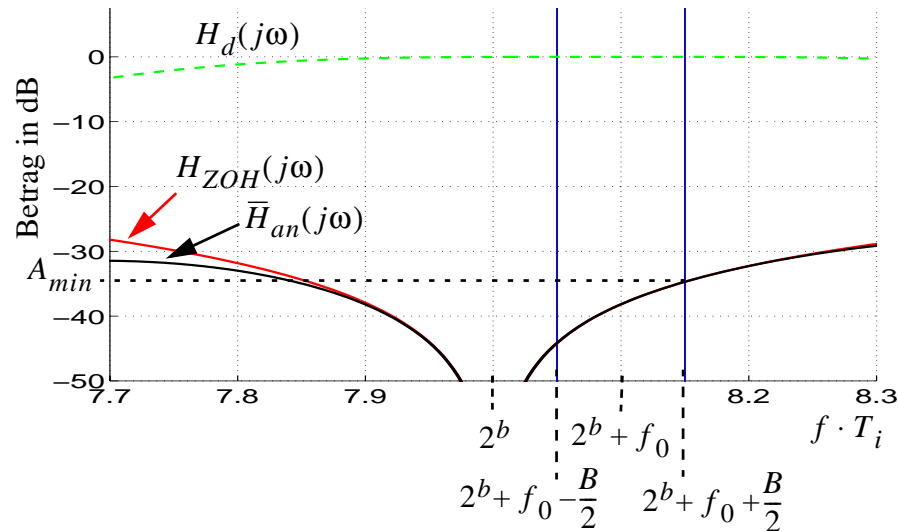


Bild 3.21: Übertragungsfunktion des analogen Modells für ein zugrundeliegendes quantisiertes komplexes digitales SRC Filter mit $f_0 = 0, 1 \cdot f_s < f_N$

zahl an Bits b ab. Für das Beispielfilter beträgt die minimale Dämpfung 28,62 dB bei $f = 7,63f_s$ für das ZOH und 53,83 dB bei $f = 7,54f_s$ für das FOH. Die Tatsache, dass die minimale Imagedämpfung von $\bar{H}_{an}(j\omega)$ in dB nicht doppelt so groß wie die von $H_{an}(j\omega)$ ist, resultiert daraus, dass die Frequenz bei der diese minimale Dämpfung auftritt bei Verwendung eines FOH im Vergleich zum ZOH kleiner wird. Entscheidend ist allerdings nicht die insgesamt minimale Imagedämpfung, sondern die minimale Dämpfung im durch (3.25) definierten Frequenzbereich f_F , der bei der Ratenumsetzung in das Übertragungsband gefaltet wird. Diese Dämpfung sei im Folgenden mit \hat{I}_{ZOH} bezeichnet. Sie lässt sich sehr gut durch folgende Formel approximieren [172], die die Dämpfung des ZOH bei der Bandpass-Grenze f_p angibt:

$$\hat{I}_{ZOH} = 1 / \text{sinc} \left(1 - \frac{f_p}{2^b f_s} \right). \quad (3.38)$$

Für das FOH gilt sinngemäß

$$\hat{I}_{FOH} = 1 / \left(\text{sinc} \left(1 - \frac{f_p}{2^b f_s} \right) \right)^2. \quad (3.39)$$

Die Bandpass-Grenze ist hierbei folgendermaßen definiert:

$$f_p = \begin{cases} f_0 + B/2 & \text{reellwertig, bzw. komplexwertig } f_0 < \frac{f_s}{2} \\ f_s - (f_0 + B/2) & \text{komplexwertig } f_0 > \frac{f_s}{2} \end{cases}. \quad (3.40)$$

Bei Abtastratenumsetzung im Bandpassbereich sinkt die sich ergebende Dämpfung nach (3.40) mit steigender Mittenfrequenz f_0 , weil die Übertragungsfunktion der verwendeten Halteglieder bei $2^b f_s$ eine Nullstelle aufweist und die Dämpfung um diese Frequenz relativ schnell abfällt. Aufgrund der Symmetrie der Übertragungsfunktion der Halteglieder um $2^b f_s$ steigt die Dämpfung für komplexwertige Filters zur Abtastratenumsetzung bei $f_0 > f_s/2$ für steigendes f_0 allerdings wieder an. Dieser Sachverhalt ist auch in Bild 3.21 zu erkennen.

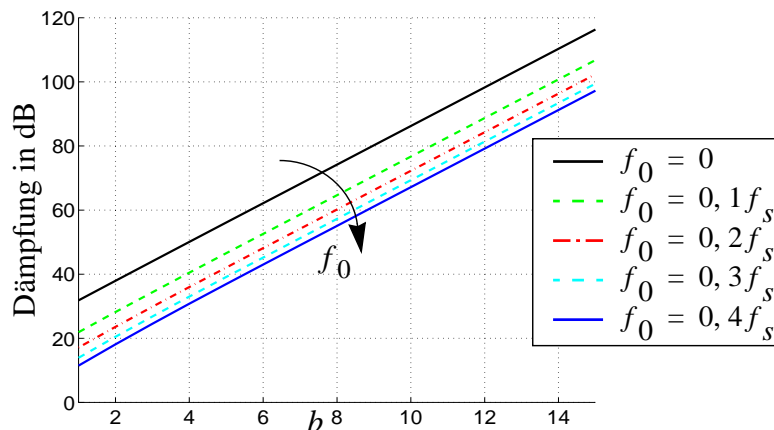


Bild 3.22: Minimale Dämpfung des quantisierten SRC Filters als Funktion der Anzahl der Quantisierungsbits für $B = 0, 1 \cdot f_s$ und ZOH Quantisierung

Für die Verwendung eines ZOH Gliedes ist in Bild 3.22 die minimale Dämpfung als Funktion von b für verschiedene Mittenfrequenzen gezeigt.

Man kann mit der beschriebenen Methode auch ein beliebiges Filter zur Abtastratenumsetzung verwenden [75], indem die analoge Impulsantwort dieses Filters möglichst fein aufgelöst gespeichert wird. Hierfür bietet sich im speziellen das sogenannte signalangepasste (*Matched*) Filter an, das in einem Empfänger, der einen auf Symbolrate laufenden Entzerrer beinhaltet, in der Regel implementiert ist. Die im Rahmen dieser Arbeit vorwiegend betrachteten Entzerrer, deren Eingangssignale mit einem Vielfachen des Symboltaktes aufgelöst sind, können allerdings implizit die Rolle des Matched Filters übernehmen (siehe Kapitel 4.4.3), so dass hier normalerweise keine weiteren digitalen Filterung erforderlich sind. Bei Entzerrung im Symboltakt ist die beschriebene Methode jedoch sehr interessant.

3.3.2 Implementierung in polynomischer Approximation (Farrow-Struktur)

Eine weitere erfolgversprechende Struktur zur Implementierung besteht in einer von Farrow vorgeschlagenen Architektur, bei der die zeitkontinuierliche Impulsantwort des SRC Filters abschnittsweise durch Polynome in μ approximiert wird [46]. Zunächst soll in Kapitel 3.3.2.1 die Grundstruktur erklärt werden. In Kapitel 3.3.2.2 und Kapitel 3.3.2.3 werden Verallgemeinerungen dieser Struktur und in Kapitel 3.3.2.4 schließlich eine Methode zur Approximation der Koeffizienten der verschiedenen Filterstrukturen beschrieben.

3.3.2.1 Grundlagen und Standard Struktur

Die Impulsantwort des digitalen Filters zur Abtastratenumsetzung kann folgendermaßen geschrieben werden

$$\mathbf{h}(\mu) = \left[h_0(\mu) \ h_1(\mu) \ \dots \ h_N(\mu) \right]^T, \quad (3.41)$$

wobei jeder Koeffizient h_n vom Bruchanteil der Verzögerung μ abhängt. Eine effiziente Implementierung des SRC Filters ist in der sogenannte Farrow-Struktur möglich, bei der jeder Koeffizient durch ein Polynom der Ordnung K in μ gegeben ist [46]

$$g_n(\mu) = \sum_{k=0}^K G_{n,k} \mu^k. \quad (3.42)$$

Hierbei bezeichnet $g_n(\mu)$ die Implementierung des n -ten Koeffizienten von $\mathbf{h}(\mu)$ in Farrow-Struktur. Der Vorteil dieser Darstellung ist, dass die Filterparameter $G_{n,k}$ konstant sind. Der einzige veränderliche Parameter ist die Intersymbolposition $\mu(lT_i)$. Darüberhinaus gestaltet sich die Steuerung von $\mu(lT_i)$ einfacher als bei einer Implementierung mit gespeicherten Koeffizientensätzen nach Kapitel 3.3.1. Die Auflösung der Intersymbolposition ist zudem bei dieser Implementieren nur durch die Auflösung der Arithmetik begrenzt und nicht durch die Größe des Speichers. Diese Eigenschaften machen die Farrow-Struktur sehr attraktiv für eine VLSI-Implementierung oder für eine Realisierung auf einem digitalen Signal Prozessor (DSP) [171]. Das Ausgangssignal des in Farrow-Struktur implementierten SRC Filters ergibt sich durch Substitution von (3.42) in (3.12) zu

$$r(lT_i) = \sum_{k=0}^K \sum_{n=0}^N v((m_b(lT_i) - n)T_s) \cdot G_{n,k} \mu(lT_i)^k = \sum_{k=0}^K \tilde{v}_k(lT_i) \cdot \mu(lT_i)^k, \quad (3.43)$$

wobei definiert wurde

$$\tilde{v}_k(lT_i) = \sum_{n=0}^N v((m_b(lT_i) - n)T_s) \cdot G_{n,k}. \quad (3.44)$$

Die Implementierung nach (3.43) ist in Bild 3.23 dargestellt. In einer konkreten Realisierung können die parallel eingezeichneten Verzögerungsglieder jeweils durch ein gemeinsames ersetzt werden. Die einzelnen Polyphasen des Filters für $k = 0, 1, \dots, K$ mit Impulsantwort $\tilde{v}_k(lT_i)$ sind in y -Richtung aufgetragen, während die Darstellung der einzelnen Koeffizienten für $n = 0, 1, \dots, N$ in x -Richtung dargestellt ist.

Im Frequenzbereich kann die Übertragungsfunktion des Filters durch

$$H(\omega, \mu) = \mathbf{w}^T \mathbf{G} \mathbf{m} = \mathbf{w}^T \mathbf{g}(\mu) \quad (3.45)$$

geschrieben werden [108], [162], wobei die Vektoren \mathbf{w} der Länge $N + 1$ und \mathbf{m} der Länge $K + 1$ durch

$$\mathbf{w} = \left[1 \ e^{-j\omega} \ e^{-2j\omega} \ \dots \ e^{-Nj\omega} \right]^T \quad \text{und} \quad (3.46)$$

$$\mathbf{m} = \left[1 \ \mu \ \mu^2 \ \dots \ \mu^K \right]^T \quad (3.47)$$

gegeben sind, die Matrix \mathbf{G} der Größe $(N + 1) \times (K + 1)$ und mit den Elementen $G_{n,k}$ die Filterparameter enthält und der Vektor $\mathbf{g}(\mu)$ der Länge $(N + 1)$ die Impulsantwort für gegebenes μ darstellt.

Für ungerades N ist die Impulsantwort des SRC Filters in der Regel symmetrisch zu $(N + 1)/2$ und hat somit eine lineare Phase [11]. Es gilt daher folgende Bedingung:

$$g_{N-n}(\mu) = g_n(1 - \mu) \quad (3.48)$$

für $n = 0, 1, \dots, (N - 1)/2$. Durch Einsetzen der Gleichung

$$g_n(\mu) = \sum_{m=0}^K G_{m,n} \mu^m \quad (3.49)$$

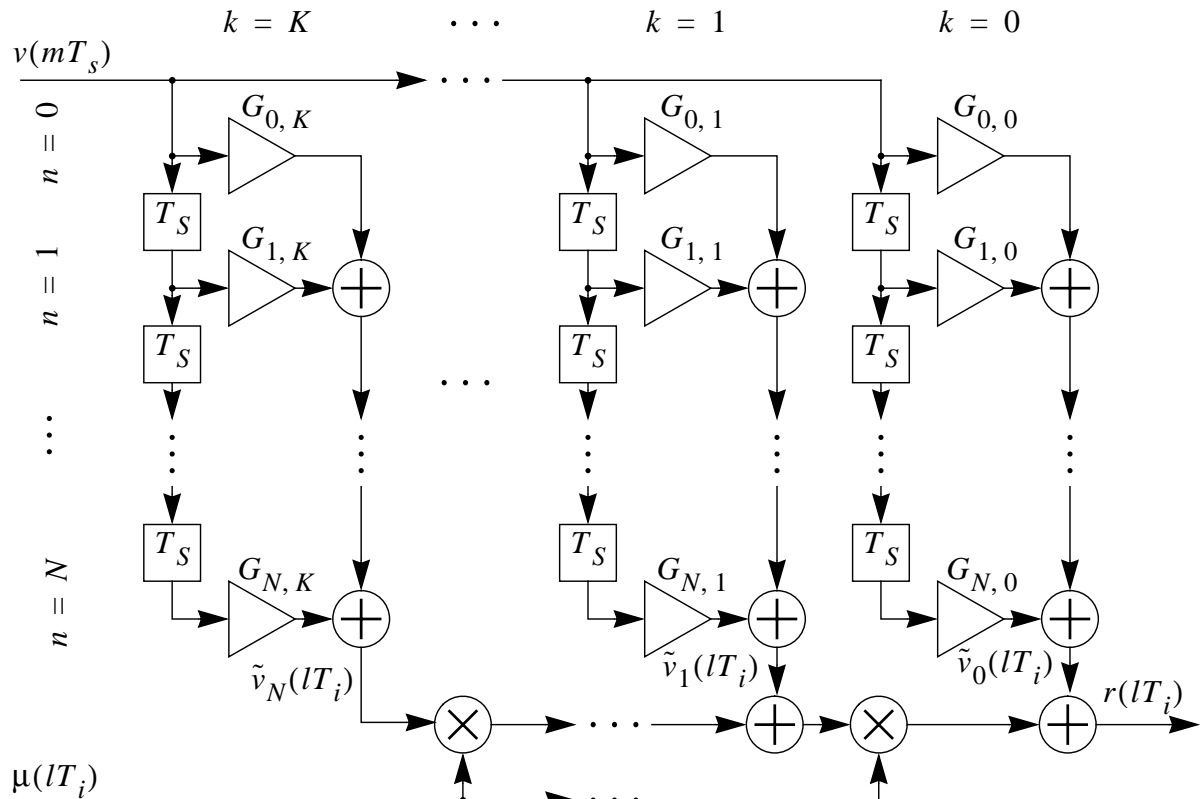


Bild 3.23: Abtastratenumsetzfilter in Farrow-Struktur mit Filterordnung N und polynomischem Grad K

in (3.48) und Ordnen nach Potenzen von μ kann man die Parameter $G_{m,n}$ für $n = \{(N-1)/2, \dots, N\}$ aus den restlichen Parametern herleiten. Unter Anwendung des binomischen Satzes für die Potenzen von $(1-\mu)$ [18]

$$(1-\mu)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \mu^k, \quad (3.50)$$

erhält man für die Elemente der orthogonalen oberen Dreiecksmatrix $\mathbf{U}(K)$ der Größe $(K+1) \times (K+1)$ zur Berechnung dieser Parameter

$$\begin{bmatrix} G_{0,N-n} & G_{1,N-n} & \dots & G_{K,N-n} \end{bmatrix}^T = \mathbf{U}(K) \begin{bmatrix} G_{0,n} & G_{1,n} & \dots & G_{K,n} \end{bmatrix}^T \quad (3.51)$$

schließlich

$$\mathbf{U}_{l,m}(K) = \begin{cases} (-1)^{m-1} \binom{m-1}{l-1} & \text{für } m \geq l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (3.52)$$

Aus der Symmetriebedingung (3.48) folgt nach (3.52) lediglich, dass die Parameter der Basisfunktion μ^K symmetrisch sind, mit

$$G_{K,N-n} = \begin{cases} G_{K,n} & K \text{ gerade} \\ -G_{K,n} & K \text{ ungerade} \end{cases}. \quad (3.53)$$

Um zu erreichen, dass die Parameter $G_{m,n}$ für alle $m \in K$ symmetrisch werden, müssen die einzelnen Filterparameter g_n nicht nach Potenzen von μ , sondern nach $2\mu - 1$ zu entwickeln

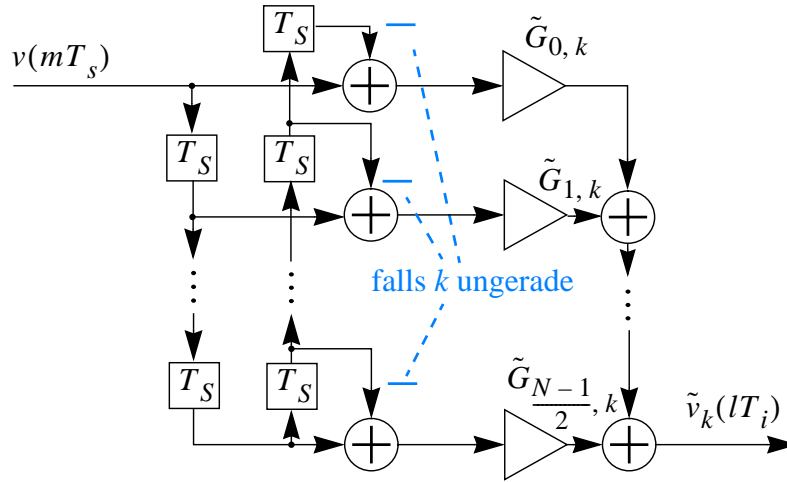


Bild 3.24: Berechnung des Ausgangssignals des k . Zweiges $\tilde{v}_k(lT_i)$ in modifizierter Farrow-Struktur für SRC Filter mit symmetrischer Impulsantwort

werden [169]. Die polynomischen Basisfunktionen $(2\mu - 1)^m$ sind im Wertebereich $0 \leq \mu < 1$ für gerade m achsensymmetrisch und für ungerade m punktsymmetrisch zu $\mu = 1/2$. Die entsprechende Implementierung wird als modifizierte Farrow-Struktur bezeichnet. Ihre Parameter werden im Folgenden mit $\tilde{G}_{m,n}$ bezeichnet. Aus der Symmetrie der Basisfunktionen folgt nun für Filter mit symmetrischer Impulsantwort nach (3.48) für $n = 0, 1, \dots, (N-1)/2$

$$\tilde{G}_{m, N-n} = \begin{cases} \tilde{G}_{m,n} & m \text{ gerade} \\ -\tilde{G}_{m,n} & m \text{ ungerade} \end{cases} \quad (3.54)$$

Die einzelnen Koeffizientengewichte sind durch

$$\tilde{g}_n(\mu) = \sum_{m=0}^K \tilde{G}_{m,n} (2\mu - 1)^m \quad (3.55)$$

gegeben. Die Implementierung der modifizierten Farrow-Struktur kann analog zu der in Bild 3.23 gezeigten Struktur erfolgen, mit dem Unterschied, dass die Filterkoeffizienten jetzt durch $\tilde{G}_{m,n}$ gegeben sind und dass die einzelnen Zweige mit $(2\mu - 1)$ statt mit μ multipliziert werden.

Der Vorteil der modifizierten Farrow-Struktur liegt in der Symmetriebedingung (3.54). Diese ermöglicht eine Verringerung der Anzahl an erforderlichen Multiplizierern im Vergleich zur normalen Farrow-Struktur, da die einzelnen Zweige nun wie in Bild 3.24 gezeigt implementiert werden können. Bei der normalen Farrow-Struktur kann diese Implementierung nur für den Zweig mit $k = K$ gewählt werden, wobei die Symmetriebedingung (3.53) ausgenutzt wurde. Insgesamt ergibt sich also, unter Berücksichtigung der Multiplikationen mit μ , eine Verringerung $\kappa(N, K)$ der Anzahl an Multiplizierern von

$$\kappa(N, K) = \frac{K(1 + N/2)}{K(1 + N) - N/2}. \quad (3.56)$$

Für große Werte von K geht der Wert von (3.56) gegen $1/2$.

Die Koeffizienten $\tilde{G}_{m,n}$ können aus den Parametern $G_{m,n}$ durch folgende Formel hergeleitet werden:

$$\begin{bmatrix} \tilde{G}_{0,n} & \tilde{G}_{1,n} & \dots & \tilde{G}_{K,n} \end{bmatrix}^T = \mathbf{T}^{-1}(K) \begin{bmatrix} G_{0,n} & G_{1,n} & \dots & G_{K,n} \end{bmatrix}^T \quad (3.57)$$

Durch Gleichsetzen der Gleichungen (3.49) und (3.55), Sortieren nach Potenzen von μ , und Anwendung des polynomischen Satzes für Potenzen von $(2\mu - 1)$

$$(2\mu - 1)^m = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (2\mu)^{m-k} \quad (3.58)$$

ergeben sich die Parameter der oberen Dreiecksmatrix $\mathbf{T}(K)$ der Größe $(K + 1) \times (K + 1)$ zu

$$\mathbf{T}(K)\{l, m\} = (-1)^{l+m} \binom{m-1}{m-l} 2^{m-1}, \quad (3.59)$$

wobei der sogenannte Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ für beliebige $n \in \mathfrak{N}$ und $k \in \mathfrak{N}$ folgendermaßen definiert ist [18]:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{für } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (3.60)$$

Die Inverse $\mathbf{T}^{-1}(K)$ zur Berechnung der symmetrischen Parameter $\tilde{G}_{m,n}$ aus den Parametern $G_{m,n}$ kann in expliziter Form geschrieben werden als [170]

$$\mathbf{T}^{-1}(K)\{l, m\} = \binom{m-1}{l-1} 2^{-m+1}. \quad (3.61)$$

Im Frequenzbereich kann das nach Potenzen von $(2\mu - 1)$ entwickelte Filter durch

$$H(\omega, \mu) = \mathbf{w}^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{m}} \quad (3.62)$$

geschrieben werden, wobei der Vektor $\tilde{\mathbf{m}}$ nun durch

$$\tilde{\mathbf{m}} = \left[1 \ (2\mu - 1) \ (2\mu - 1)^2 \ \dots \ (2\mu - 1)^K \right]^T \quad (3.63)$$

gegeben ist.

In Bild 3.25a ist die Impulsantwort eines komplexen SRC Filters gezeigt, das nach der in Kapitel 3.4.1 erklärten Methode, mit den Parametern $N = 3$, $K = 3$, $f_0 = 0,25$ und $B = 0,125$, entworfen wurde. Bild 3.25b zeigt die einzelnen Basisfunktionen für $k = 0, 1, 2, 3$ die sich bei einer Implementierung in der Standard Farrow-Struktur ergeben. Bild 3.25c zeigt im Vergleich dazu die Basisfunktionen die sich ergeben, wenn das selbe Filter in modifizierter Farrow-Struktur implementiert wird. Da hier die Basisfunktionen achsen-, bzw. punktsymmetrisch zum Ursprung sind, kann die Anzahl der benötigten Multiplizierer nach (3.56) um ca. 30% reduziert werden.

3.3.2.2 Verallgemeinerungen der Farrow-Struktur

Bei der bis jetzt besprochenen Farrow-Struktur wird die zeitkontinuierliche Impulsantwort $h(t)$ des SRC Filters durch abschnittsweise Polynome der Länge T_s angenähert. Eine Verallgemeinerung der Farrow-Struktur ist möglich, indem man Polynome beliebiger Länge als Basisfunktionen zulässt [78]. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass alle Basisfunktionen die gleiche Länge Δ besitzen.

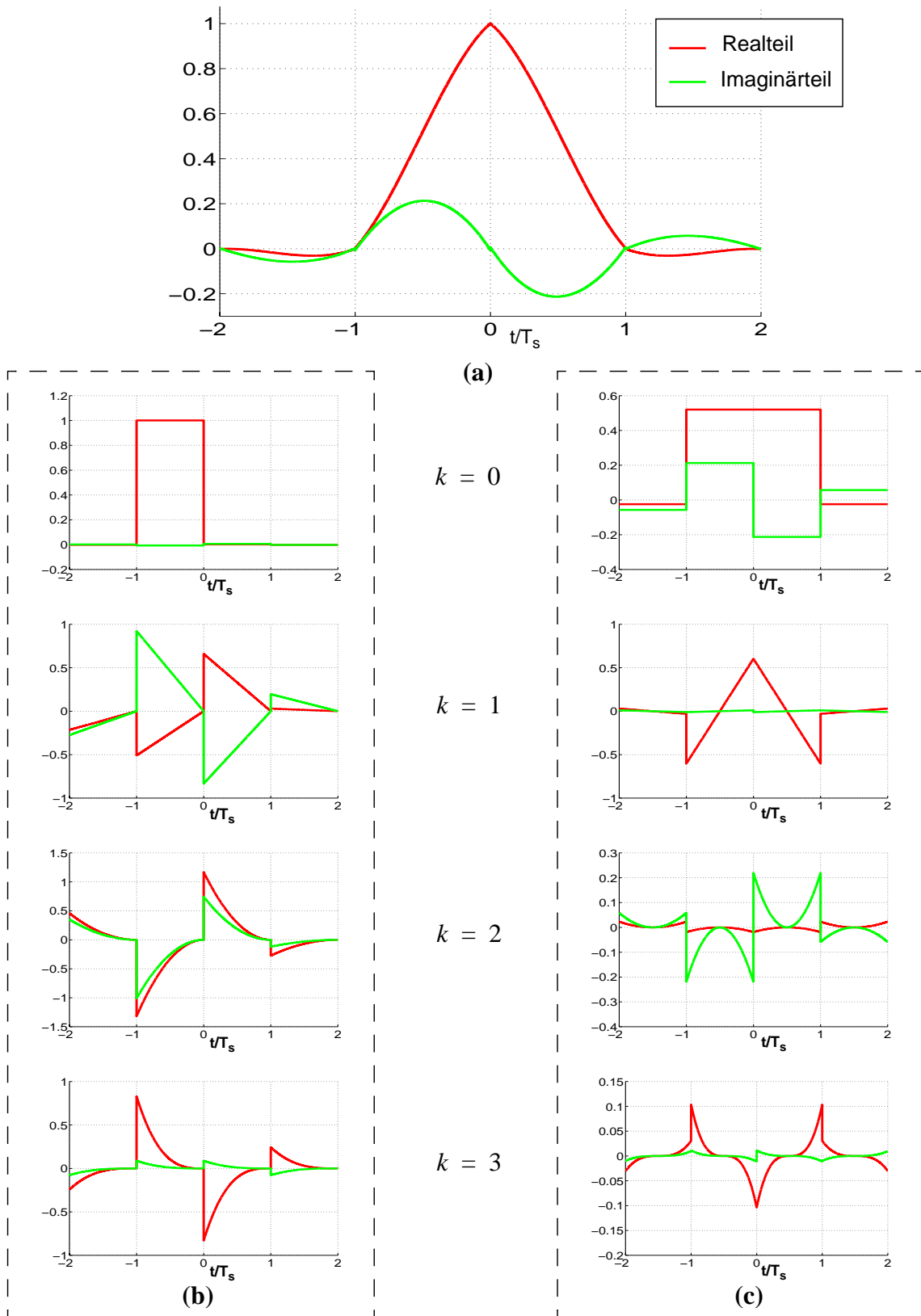


Bild 3.25: (a) Impulsantwort eines komplexen maximal flachen SRC Filters mit $N = 3$, $K = 3$, $f_0 = 0, 25f_N$ und $B = 0, 125$ und den Basisfunktionen für (b) Standard und (c) Symmetrische Farrow-Struktur Implementierung

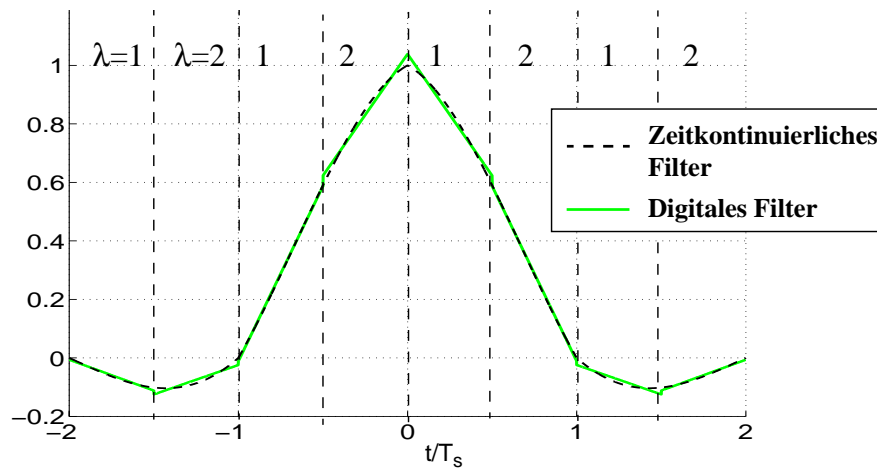


Bild 3.26: Impulsantwort eines SRC Filters mit $N = 3$, $K = 1$ und $J = 2$

Die polynomischen Basisfunktionen mit Grad K sind im Folgenden durch

$$g_n(t) = \begin{cases} \sum_{k=0}^K G_{n,k} \left(\frac{t}{\Delta}\right)^k & \text{für } 0 \leq t < \Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.64)$$

gegeben. Die abschnittsweise polynomische Impulsantwort, bestehend aus $(N + 1)$ Polynomen, ist dann gegeben durch

$$h(t) = \sum_{n=0}^N g_n(t - n \cdot \Delta) . \quad (3.65)$$

Gleichung (3.65) kann in äquivalenter Weise folgendermaßen geschrieben werden [78]:

$$h(t) = \begin{cases} g_{\lfloor \frac{t}{\Delta} \rfloor} \left(t - \lfloor \frac{t}{\Delta} \rfloor \Delta \right) & \text{für } 0 \leq t < N\Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (3.66)$$

Durch Substitution von (3.64) in (3.66) erhält man schließlich für $0 \leq t < N\Delta$ [78]

$$h(t) = \sum_{k=0}^K G_{n, \lfloor \frac{t}{\Delta} \rfloor} \left(\frac{t}{\Delta} - \lfloor \frac{t}{\Delta} \rfloor \right)^k . \quad (3.67)$$

Zwei spezielle Werte von Δ besitzen praktische Bedeutung. Es sind dies $\Delta = T_s/J$ und $\Delta = T_i/J$, wobei J eine natürliche Zahl ist. Der erste Wert führt für $J = 1$ zur normalen Farrow-Struktur [46] und für $J > 1$ zur verallgemeinerten, bzw. verlängerten (*Prolonged*) Farrow-Struktur [110], [136], wohingegen der zweite Wert zur transponierten Farrow-Struktur führt [79], [78]. Auch bei dieser zweiten Struktur gibt es je nach Wahl von J wieder eine gewöhnliche ($J = 1$) und eine verallgemeinerte ($J > 1$) Struktur.

Zunächst soll der erste Fall mit $\Delta = T_s/J$ näher untersucht werden. Hier wird die zeitkontinuierliche Impulsantwort durch Polynome angenähert, die im Vergleich zur normalen Farrow-Struktur um den Faktor J kürzer sind, wodurch sich, bei gleichem polynomischen Grad K , eine bessere Annäherung an die Zielfunktion ergibt. In Bild 3.26 ist das Prinzip für ein reellwertiges Filter der Ordnung $N = 3$ mit $K = 1$ und $J = 2$ gezeigt. Das Filter ist nach der in Kapitel

3.4.2 beschriebenen Least Squares Methode für $f_0 = 0,25 f_N$ und $B = 0,125$ entworfen. Die die Zielfunktion darstellende zeitkontinuierliche Filterimpulsantwort ist gestrichelt dargestellt. Sie wird hier durch Geradenstücke der Länge $\Delta = T_s/2$ angenähert. Ein Filterparameter wird nun, je nach Wert der Intersymbolposition der normalen Farrow-Struktur $lT_i/T_s - \lfloor lT_i/T_s \rfloor$, durch J verschiedene Polynome angenähert, was zu einer Filterstruktur mit veränderlichen Koeffizienten führt. Die einzelnen Zweige sind im Folgenden durch den Laufindex λ durchnummeriert, wobei gilt

$$\lambda = \lfloor J(lT_i/T_s - \lfloor lT_i/T_s \rfloor) \rfloor + 1. \quad (3.68)$$

Durch Einsetzen von $\Delta = T_s/J$ in (3.67) und Substitution in (3.12) ergibt sich zur Berechnung des Ausgangswertes des Abtastratenumsetzfilters folgende Gleichung, die als Verallgemeinerung von (3.43) aufgefasst werden kann:

$$r(lT_i) = \sum_{k=0}^K \tilde{v}_k(lT_i) \cdot \mu(lT_i)^k, \text{ mit} \quad (3.69)$$

$$\tilde{v}_k(lT_i) = \sum_{n=-N_1}^{N_2} v((m_b(l) - n + N_1)T_s) \cdot G_{n, m_b(l) - Jk}. \quad (3.70)$$

Die Intersymbolposition $\mu(lT_i) \in [0, 1)$ ist gegeben als

$$\mu(lT_i) = \frac{JlT_i}{T_s} - \left\lfloor \frac{JlT_i}{T_s} \right\rfloor \quad (3.71)$$

und der Basispunktindex $m_b(lT_i)$ durch

$$m_b(lT_i) = \left\lfloor \frac{JlT_i}{T_s} \right\rfloor. \quad (3.72)$$

Der Zusammenhang der Abtastzeitpunkte und der Intersymbolposition ist in Bild 3.27 für $J = 3$ schematisch gezeigt. Die Bereichsgrenzen der polynomischen Funktionen sind durch gestrichelt gezeichnete Linien angedeutet. Man erkennt, dass sich der Wert von $\mu(lT_i)$ als der zeitliche Abstand der Bereichsgrenze zum Zeitpunkt $t_J(lT_i)$ und dem aktuellen Ausgangssample ergibt. Hierbei ist der Zeitpunkt $t_J(lT_i)$ gegeben durch

$$t_J(lT_i) = \left(k + \left\lfloor \frac{J(lT_i - kT_s)}{T_s} \right\rfloor \right) T_s. \quad (3.73)$$

In Bild 3.27 gilt für das Ausgangssample zum Zeitpunkt lT_i etwa $t_J(lT_i) = (k + 1/3)T_s$, d.h. der Zeitpunkt des Eingangssamples ist quasi um $T_s/3$ verschoben

Ein Nachteil der verlängerten Farrow-Struktur besteht darin, dass die Symmetriebedingung (3.48) nicht ausgenutzt werden kann, um die Anzahl der erforderlichen Multiplizierer merklich zu minimieren. Lediglich für ungeradzahliges J kann die Symmetrie im mittleren Segment mit $\lambda = (J + 1)/2$ verwendet werden. Dies liegt daran, dass in den anderen Segmenten, bzw. für geradzahliges J die Symmetrie zwischen den Segmenten λ und $J - \lambda$ auftritt. Dies ist auch in Bild 3.28 zu sehen, in dem ein SRC Filter mit den Parametern des Filters in Bild 3.26 für $J = 3$ gezeigt ist. Die Symmetrie des mittleren Segments mit $\lambda = 2$ kann hier ausgenutzt werden. Werte des SRC Filters in diesem Segment sind durch Dreiecke angedeutet. Die Symmetrie der Segmente $\lambda = 1$ und $\lambda = 3$ kann hingegen nicht ausgenutzt werden, da zu einem gegebenen Zeitpunkt nur Filterwerte aus einem der beiden Segmente zur Berechnung erforderlich sind. Im

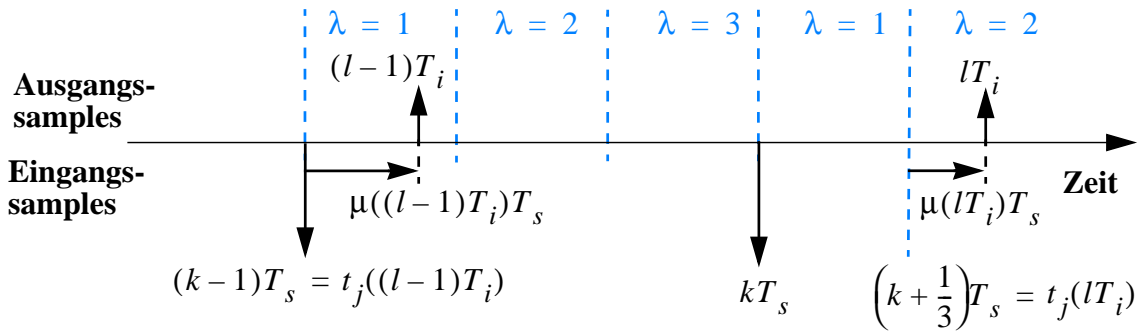


Bild 3.27: Intersymbolposition bei normaler Farrow-Struktur für $J = 3$

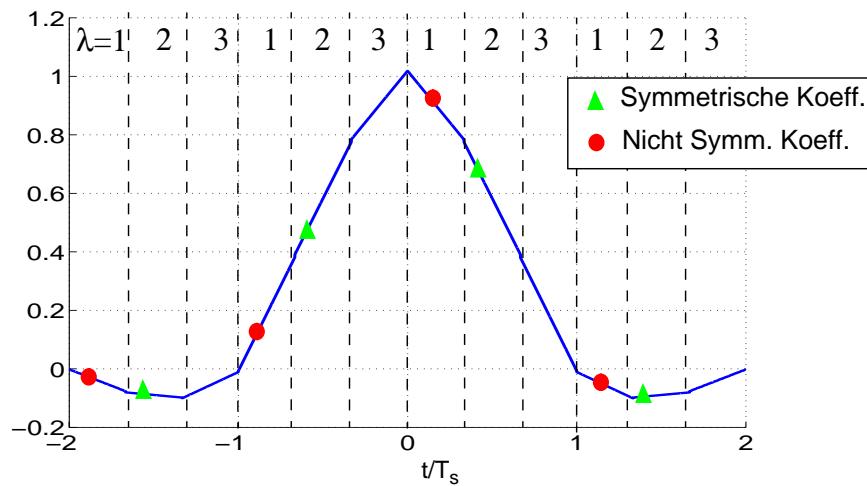


Bild 3.28: Symmetrien bei der Impulsantwort eines SRC Filters mit $J = 3$

Beispiel sind Filterwerte im ersten Segment durch Kreise angedeutet.

3.3.2.3 Transponierte Farrow-Struktur

Ein Nachteil der normalen und verlängerten Farrow-Struktur besteht bei der Anwendung zur Abtastratenumsetzung darin, dass die Filter nur Nullstellen bei Vielfachen der Eingangsfrequenz $1/T_s + f_0$ und $1/T_s - f_0$ erzeugen können [78]. Wie in Kapitel 3.1.4 erklärt, werden jedoch die Bereiche bei Vielfachen der Ausgangsfrequenz $1/T_i \pm f_0$ bei der Abtastratenumsetzung in das Übertragungsband gefaltet. Um Anteile in diesen Aliasing-Frequenzbändern wegzufiltern, muss als Verarbeitungsgeschwindigkeit des Filters zur Abtastratenumsetzung, die Ausgangsfrequenz $1/T_i$ gewählt werden. Dies ist möglich, wenn in (3.67) $\Delta = JT_i$ gewählt wird [75],[78]. Durch Substitution in (3.12) ergibt sich als Ausgangssignal

$$r(lT_i) = \sum_{n=n_1}^{n_2} \sum_{k=0}^K \tilde{v}_k(nT_i) G_{lJ - \left\lfloor nJ \left(\frac{T_s}{T_i} \right) \right\rfloor, k}, \text{ mit} \quad (3.74)$$

$$\tilde{v}_k(mT_s) = v(mT_s) \cdot \tilde{\mu}(mT_s)^k \quad (3.75)$$

und der Intersymbolposition $\tilde{\mu}(mT_s) \in [0, 1)$ gegeben als

$$\tilde{\mu}(mT_s) = \left\lfloor \frac{JmT_s}{T_i} \right\rfloor - \frac{JmT_s}{T_i}. \quad (3.76)$$

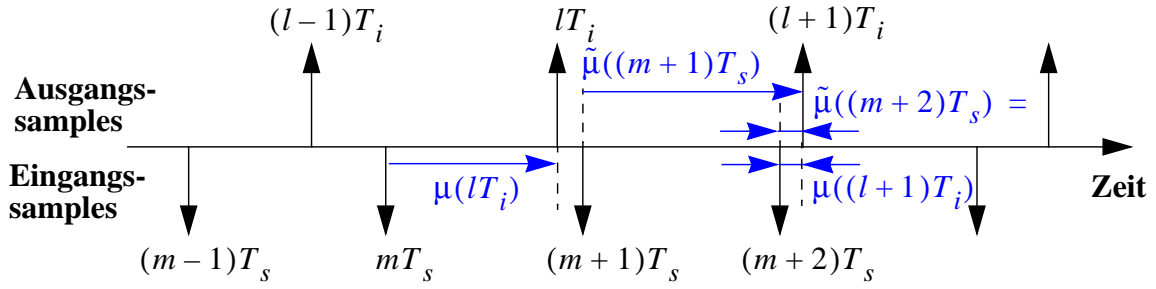


Bild 3.29: Intersymbolposition bei normaler und transponierter Farrow-Struktur ($J = 1$)

Die Bereichsgrenzen n_1 und n_2 der äußeren Summe in (3.74) ergeben sich mit

$$0 \leq lJ - \left\lceil nJ \left(\frac{T_s}{T_i} \right) \right\rceil < (N+1) \quad \text{zu} \quad (3.77)$$

$$n_1 = \begin{cases} \left(l - \frac{(N+1)}{J} \right) \frac{T_i}{T_s} + 1 & \text{für } \left(l - \frac{(N+1)}{J} \right) \frac{T_i}{T_s} \in \mathbb{Z} \\ \left\lceil \left(l - \frac{(N+1)}{J} \right) \frac{T_i}{T_s} \right\rceil & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und } n_2 = \left\lfloor l \frac{T_i}{T_s} \right\rfloor. \quad (3.78)$$

In Bild 3.29 sind die Verhältnisse der Abtastzeitpunkte mit den beiden Intersymbolpositionen $\mu(lT_i)$ und $\tilde{\mu}(mT_s)$ der normalen, bzw. transponierten Farrow-Struktur für $J = 1$ dargestellt. Während bei der normalen Struktur zu jedem Ausgangssample ein Wert von μ korrespondiert, kann es bei der transponierten Struktur vorkommen, dass mehrere Werte von $\tilde{\mu}$ dazu korrespondieren. Die zugrundeliegende Ursache ist, dass sich $\lceil mJ(T_s/T_i) \rceil$ bei einer Inkrementierung von n nicht notwendigerweise erhöht, da gilt $T_i > T_s$. In Bild 3.29 tritt dieser Fall für das Ausgangssample zum Zeitpunkt $(l+1)T_i$ auf, das zu den zwei Eingangssamples zu den Zeitpunkten $(m+1)T_s$ und $(m+2)T_s$ korrespondiert. Diese Eingangssamples werden daher mit dem identischen Koeffizientensatz gewichtet und die entsprechenden Ergebnisse werden zur Generierung des Ausgangswertes addiert.

In Bild 3.30 ist die Implementierung der transponierten Farrow-Struktur für $J = 1$ gezeigt. Die Summierung von aufeinanderfolgenden Werten, die zum identischen Ausgangssample korrespondieren, geschieht in Integrate and Dump (I&D) Blöcken. Für den Fall $J > 1$ bleibt die Struktur bestehen, lediglich die Koeffizienten $G_{n,k}$ werden zeitvariant.

Das Steuersignal zum Nullsetzen der (I&D) Blöcke wird gesetzt, wenn gilt $\tilde{\mu}(mT_s) > 1 - T_s/T_i$, da dann mit dem letzten Eingangssample ein Ausgangssample erzeugt wurde. Ein Ausgangssample wird erzeugt, wenn gilt $\tilde{\mu}(mT_s) \leq T_s/T_i$.

Bei der in Bild 3.30 gezeigten Implementierung werden alle Multiplizierer mit der hohen Rate $1/T_s$ getaktet. Da die Filterparameter $G_{n,k}$ zeitinvariant sind, ist es möglich, die I&D Blöcke vor die Multiplizierer mit diesen Parametern zu plazieren [9]. Da die I&D Blöcke implizit auch die Ratenumsetzung von $1/T_s$ auf $1/T_i$ übernehmen, sind die Multiplizierer dann mit der niedrigeren Rate getaktet. Die entsprechende Implementierung wird im Folgenden als Struktur 2 bezeichnet. Sie ist in Bild 3.31 gezeigt

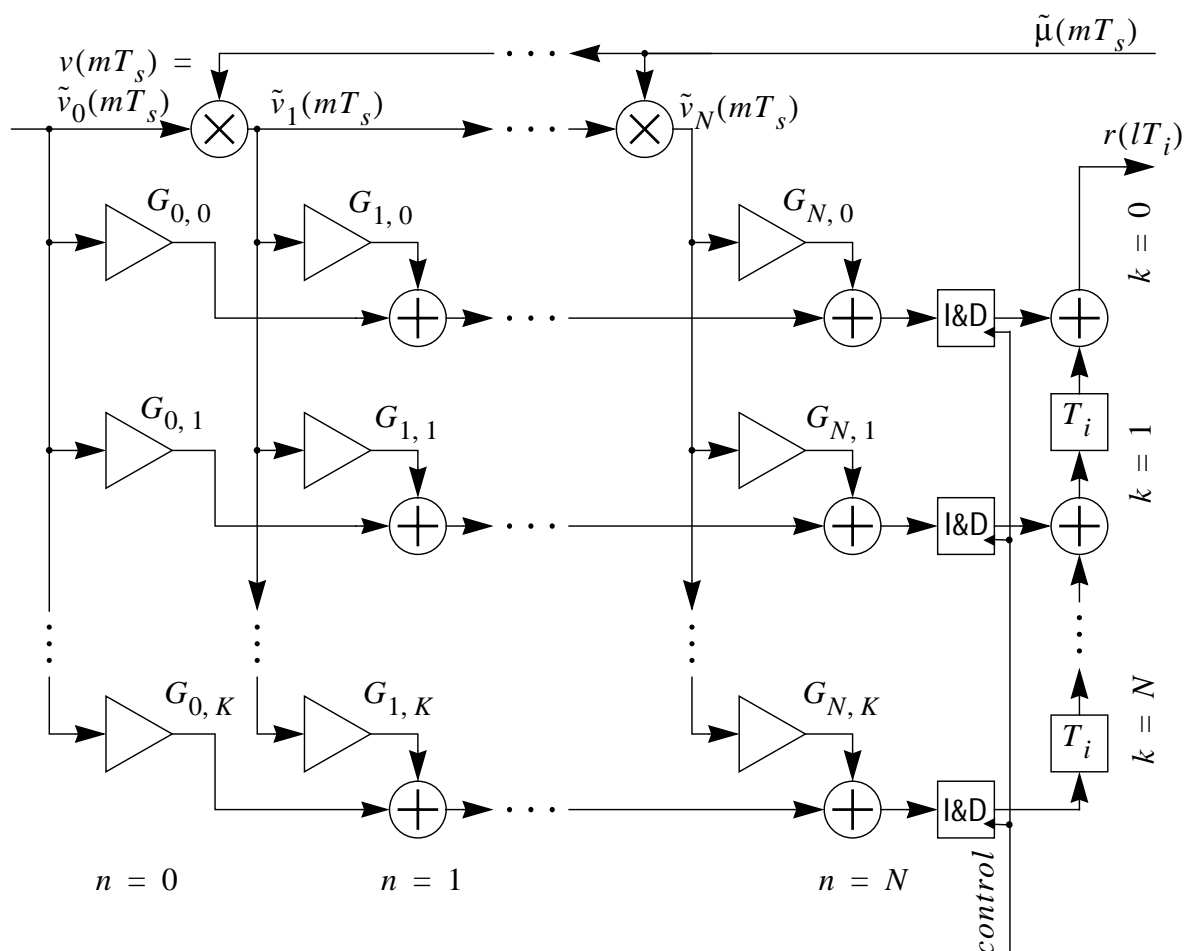


Bild 3.30: Abstratenumsetzfilter in transponierter Farrow-Struktur mit Filterordnung N und polynomischem Grad K implementiert in Struktur 1

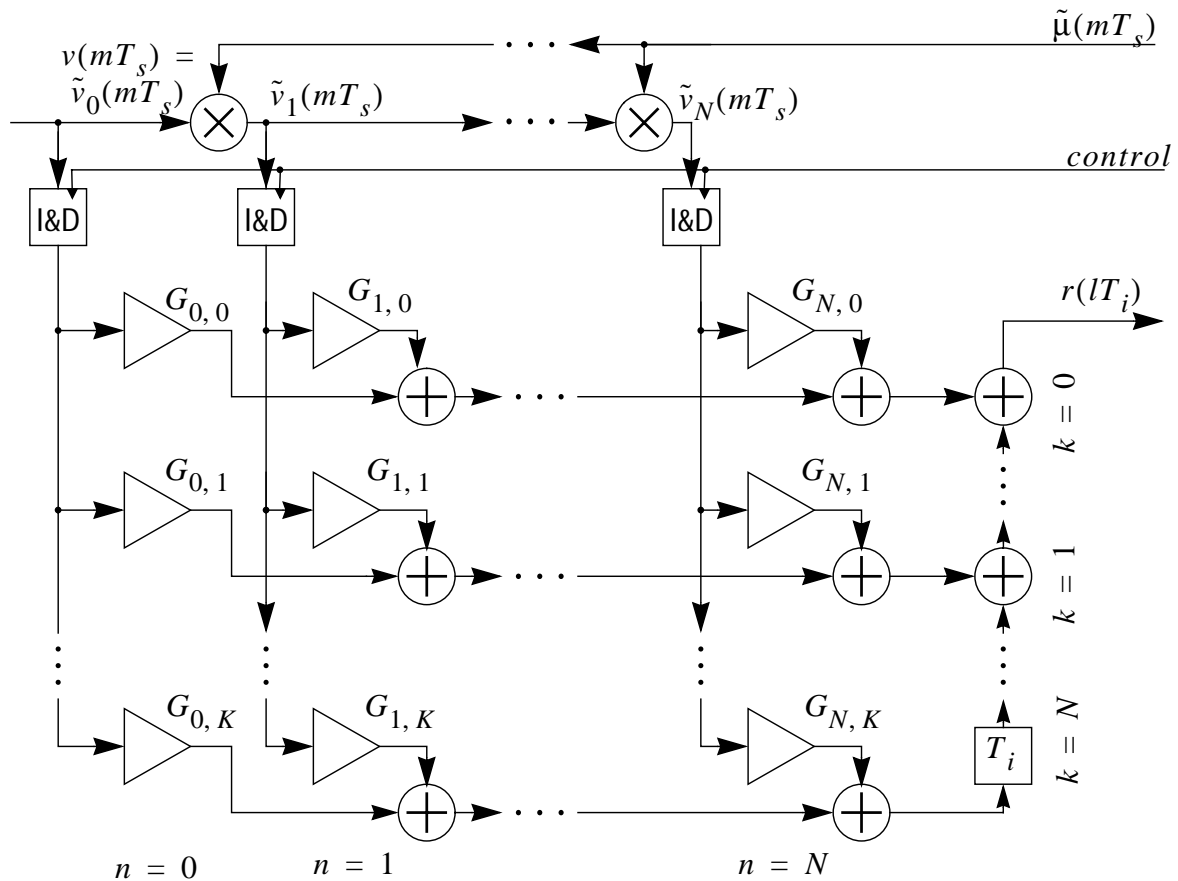


Bild 3.31: Dezimationsfilter in transponierter Farrow-Struktur (Struktur 2)

3.3.2.4 Approximation der Koeffizienten durch Kurvenanpassung

Eine Möglichkeit zur Generierung der Farrow-Matrix \mathbf{G} besteht in der polynomische Approximation einzelner Koeffizientensätze nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate (*least squares curve fitting*). Hierfür werden zunächst eine Anzahl von p Filterkoeffizientensätzen $\mathbf{h}(\mu_i)$, korrespondierend zu p verschiedenen Werten von μ_i , berechnet. Soll das Filter in Standard Farrow-Struktur entworfen werden, d.h. gilt $L = 1$, werden die Werte μ_i im Bereich $0 \leq \mu_i < 1$ gewählt. Ansonsten wird für jeden der L Zweige eine eigene Matrix \mathbf{G} entworfen, der Wertebereich μ_i im l -ten Zweig ist dann

$$l/L \leq \mu_i < (l+1)/L \text{ mit } l = 0, \dots, L-1. \quad (3.79)$$

Anschließend wird jeder Koeffizient g_n der Impulsantwort der Farrow-Struktur durch ein Polynom vom Grad K an die p entsprechenden Werte des Koeffizientensatzes $h_n(\mu_i)$ angenähert. Hierfür wird der quadratische Restfehler $e_g(g_n)$ zwischen den Werten des Koeffizientensatzes und dem Polynom in μ minimiert:

$$e_g(g_n) = \sum_{i=1}^p \left| h_n(\mu_i) - (G_{n,0} + G_{n,1}\mu_i + \dots + G_{n,K}\mu_i^K) \right|^2. \quad (3.80)$$

Die Minimierung von (3.80) geschieht durch Nullsetzen des Gradienten von $e_g(g_n)$ nach $G_{n,l}$ für $l = 0, \dots, K$ [72]. Dies schreibt sich in Vektorschreibweise (siehe Appendix 1) als

$$\nabla e_g(g_n) = \frac{\partial e_g(g_n)}{\partial \mathbf{g}^{(n)*}} = 0, \quad (3.81)$$

wobei der Vektor $\mathbf{g}^{(n)}$ der Länge $K + 1$ die n -te Spalte der Matrix \mathbf{G} repräsentiert. Dies führt nach einigen algebraischen Umformungen auf folgendes lineare Gleichungssystem [98]

$$\mathbf{V}\mathbf{g}^{(n)} = \mathbf{h}^{(n)}, \quad (3.82)$$

wobei der Vektor $\mathbf{h}^{(n)}$ der Länge p durch

$$\mathbf{h}^{(n)} = \left[h_n(\mu_1) \ h_n(\mu_2) \ \dots \ h_n(\mu_p) \right]^T \quad (3.83)$$

gegeben ist und $\bar{\mathbf{V}}$ eine Vandermonde Matrix der Größe $p \times (K + 1)$ der Werte μ_i ist

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & \mu_1 & \mu_1^2 & \dots & \mu_1^K \\ 1 & \mu_2 & \mu_2^2 & \dots & \mu_2^K \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & \mu_p & \mu_p^2 & \dots & \mu_p^K \end{bmatrix}. \quad (3.84)$$

Durch Bildung der Pseudoinversen $\mathbf{V}^\dagger = (\mathbf{V}^H \mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}$ kann die polynomische Approximation des n -ten Koeffizienten zu

$$\mathbf{g}^{(n)} = \mathbf{V}^\dagger \mathbf{h}^{(n)} \quad (3.85)$$

berechnet werden. Zur Approximation der Koeffizienten der modifizierten Farrow-Struktur genügt es, in (3.85) die Matrix \mathbf{V} durch eine Matrix $\bar{\mathbf{V}}$ zu ersetzen, bei der μ durch $(2\mu - 1)$ substituiert wird.

Die beschriebene polynomische Approximation funktioniert in der Praxis sehr gut, für zwei der im nächsten Abschnitt besprochenen Entwurfsverfahren lassen sich jedoch auch direkte Methoden zum Entwurf der Farrow-Koeffizienten angeben.

3.3.3 Exemplarischer Vergleich des Implementierungsaufwands

In diesem Abschnitt soll exemplarisch ein Vergleich verschiedener Strukturen zur Abtastratenumsetzung anhand des erforderlichen Implementierungsaufwandes durchgeführt werden. Besonders sollen Signalverarbeitung im Basisband und im Bandpassbereich gegenübergestellt werden. Allgemeine Aussagen sind hierbei allerdings nur bedingt zu treffen, da zum einen die erforderliche Dämpfung der eingesetzten SRC Filter stark von der Systemumgebung anhängt und andererseits verschiedene Methoden zur Abtastratenumsetzung nahezu beliebig kombinierbar sind, so dass das Finden einer optimalen Lösung sehr schwierig ist [75], [79]. Zu den erwähnten, die erforderliche Dämpfung beeinflussenden Parametern, gehören etwa Güte der analogen Vorfilterung, das SNR am Empfängereingang sowie die Charakteristik möglicherweise vorhandener Störer, die sich außerhalb des Übertragungsbandes befinden. Insbesondere ist bedeutend, ob die analoge Vorfilterung lediglich das Ziel hat, das Abtasttheorem am A/D-Wandler einzuhalten, oder ob auch die Leistung vorhandener Störkanäle bereits reduziert wird. Grundsätzlich ist es zwar sinnvoll, möglichst viel Störleistung bereits analog wegzufiltern, etwa um die erforderliche Auflösung des A/D-Wandlers gering zu halten, und um allgemein den Aufwand der digitalen Filterung zu minimieren, bei einer flexiblen Bandbelegung ist dies allerdings

nur bedingt möglich, weil die analogen Filter meist mit festen Parametern realisiert werden. Außerdem ist der Aufwand zur Abtastratenumsetzung stark vom Überabtastrfaktor am Eingang abhängig, der bestimmt, bei welchen Frequenzen die Wiederholungspektren auftreten.

3.3.3.1 Kaskadierte Systeme

Grundsätzlich gilt, dass der zur Filterung erforderliche Aufwand stark vom Überabtastrfaktor am Ausgang des SRC Filters abhängt, da dieser die Breite des Signalbandes im Vergleich zur Abtastrfrequenz am Ausgang des Filters angibt und somit die relative Größe des Frequenzbereichs in dem die geforderte Mindestdämpfung eingehalten werden muss. Daher liegt eine erfolgversprechende Strategie hierin, das System zur Abtastratenumsetzung kaskadiert zu gestalten, also den gesamten Dezimierungsfaktor in ein Produkt mehrerer kleinerer Faktoren zu zerlegen und diese einzelnen Faktoren in aufeinanderfolgenden Stufen zu realisieren. Grundsätzlich ist es auch möglich, die Rate zunächst zu erhöhen, um den Aufwand in der darauffolgenden Stufen gering zu halten [79]. Vorteil eines kaskadierten Systems ist, dass in Stufen mit hohem Überabtastrfaktor am Ausgang die Anforderungen an das eingesetzte SRC Filter relativ gering sind, so dass hier relativ kurze Filter verwendet werden können, deren Koeffizienten darüberhinaus mit relativ geringen Wortbreiten auskommen. Nachteilig ist hingegen, dass der Filteraufwand in der Regel ebenfalls proportional zur Ausgangsrate ist, da die erforderlichen Signalwerte im Takt dieser Rate berechnet werden.

Ein möglicher Ansatz besteht darin, zunächst ein Filter mit irrationaler Ratenumsetzung und hoher Ausgangsrate einzusetzen. Dieses Filter erzeugt am Ausgang einen ganzzahligen, oder zumindest rationalen Überabtastrfaktor, so dass die folgenden Stufen als Filter mit periodischen, bzw. festen Koeffizienten implementiert werden können [77]. Nachteilig an diesem Ansatz ist allerdings die relativ hohe Rate mit der dieses Filter betrieben wird.

3.3.3.2 Ganzzahlige Dezimation anhand von Kammfiltern

Bei Signalverarbeitung im Basisband bieten sich zu einer Dezimierung mit ganzzahligem Faktor etwa sogenannte Kammfilter [80] an (eine Verallgemeinerung zur Dezimation mit rationalen Faktoren ist in [74] gegeben). Im Gegensatz etwa zu den häufig verwendeten Lagrange Interpolationsfiltern, können Kammfilter auch zur Anti-Aliasing Filterung verwendet werden [74]. Sie bestehen aus einer Kaskade von Integratoren, die auf der hohen Eingangsrate laufen, gefolgt von einer gleichen Anzahl sogenannter Kammstufen, die auf der niedrigeren Ausgangsrate betrieben werden. Sie haben einen linearen Phasengang, können multipliziererrfrei betrieben werden, erfordern wenig Speicher und weisen eine reguläre Struktur auf. Der Amplitudengang zeigt Tiefpass-Charakteristik, wobei die Dämpfung bis zur ersten Nullstelle stetig zunimmt. Die Nullstellen sind hierbei bei Vielfachen von f_s/D angeordnet, wobei D ein Entwurfsparameter ist, der durch den Dezimationsfaktor vorgegeben ist. Durch eine Erhöhung der Filterordnung erhöht sich die Dämpfung in der Umgebung der Nullstellen erheblich, jedoch wird der Betragsgang auch bei niedrigen Frequenzen allgemein steiler. Durch die mit der Frequenz stark zunehmende Dämpfung ist die Anwendung dieser Filter auf relativ kleine Überabtastrfaktoren am Ausgang beschränkt, wodurch sich die Verwendung von Kammfiltern auf die ersten Stufen einer kaskadierten SRC Struktur beschränkt. Eine exemplarische Betragsgangfunktion eines Kammfilters 4. Ordnung mit $D = 7$, das nach der in [80] beschriebenen Methode entworfen wurde, ist in Bild 3.32 gezeigt. Die auf die Ausgangsfrequenz normierte Bandbreite beträgt hier $1/8$. Die Dämpfung in den Aliasingbändern beträgt mindestens 65 dB, die maximale

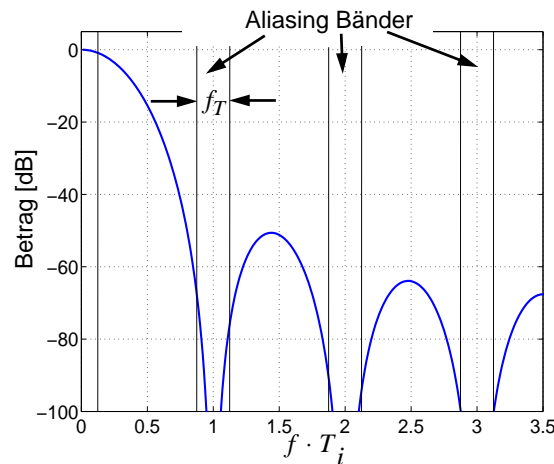


Bild 3.32: Betrag der Übertragungsfunktion eines Kammfilters 4. Ordnung

Dämpfung im Übertragungsband liegt bei 0,9 dB.

3.3.3.3 Vergleich von Basisband- mit Bandpassverfahren

Wesentliche, den Implementierungsaufwand betreffende, Unterschiede bei Entzerrung im Basisband und Entzerrung im Bandpassbereich sind:

- Zur Erzeugung des Basisbandsignals muss das reelle Eingangssignal zunächst mit $\cos \omega_0 kT$ und $-\sin \omega_0 kT$ multipliziert werden. Dies erfordert die Durchführung von $2f_a$ Multiplikationen pro Sekunde. Gleichzeitig wird dadurch ein Spektrum bei $-2f_0$ erzeugt, das durch anschließende Filterung eliminiert werden muss. Ein alternatives Vorgehen besteht darin, durch Filterung des Eingangssignals mit einem Hilbert Transformator zunächst das komplexwertige, sogenannte analytische Signal zu erzeugen, das keine Komponenten bei negativen Frequenzen aufweist, und dieses Signal anschließend ins Basisband zu transferieren. Bei einer Signalverarbeitung im Bandpassbereich fallen sowohl die zum Mischen erforderlichen Multiplikationen weg, als auch die Notwendigkeit, ein weiteres Signalband durch Filterung zu eliminieren.
- Bei einer Signalverarbeitung im Basisband müssen beide Komponenten des komplexwertigen Signals getrennt dezimiert werden, so dass der Aufwand im Vergleich zu einer Implementierung im Bandpassbereich zunächst verdoppelt ist. Allerdings gestaltet sich die Ratenumsetzung eines Signals bei höheren Frequenzen allgemein etwas aufwändiger als bei niedrigen, da das Zeitsignal sich schneller verändert, und es daher schwieriger wird, Werte zwischen den Abtastpunkten zu rekonstruieren. Darüberhinaus sind bei Verarbeitung im Basisband zur ganzzahligen Dezimation aufwandsarm implementierbare SRC Filter, wie etwa die bereits erwähnten Kammfilter, verfügbar.
- Zur Entzerrung im Bandpassbereich wird meist die in Kapitel 4.1.3 erklärte Struktur eingesetzt, die im Vorwärtszweig mit zwei reellwertigen Filtern auskommt. Zur Entzerrung im Basisband werden hingegen komplexwertige Filter verwendet. Unter der Annahme, dass eine komplexwertige Multiplikation vier reellwertigen entspricht, ist daher der Vorwärtsentzerrer eines Bandpassentzerrers bei gleichem w mit halbem Aufwand realisierbar. Üblicherweise wird ein Entzerrer im Bandpassbereich jedoch auf einer höheren Rate betrieben, wobei die Ursache zum Teil darin begründet liegt, dass bei Signalverarbeitung im Bandpassbereich üblicherweise keine Abtastratenumsetzung implementiert wird und daher lediglich die Abtastfrequenz so gering wie möglich gewählt wird, um Aliasing auszuschließen (siehe etwa [81]). Die Verwendung eines relativ hohen Überabtastfaktors im Entzerrer verringert jedoch auch deutlich die Anforderungen an das SRC Filter.

3.3.3.4 Exemplarischer Vergleich verschiedener Strukturen

Im Folgenden sollen nun exemplarisch verschiedene Strukturen in Bezug auf die benötigte Anzahl an Multiplikationen und Additionen pro Sekunde verglichen werden. Dies soll hier nur als grobe Abschätzung dienen, da weitere wichtige Parameter, wie etwa verwendete Wortbreiten, Größe von Koeffizientenregistern, Art der Implementierung (feste oder variable Koeffizienten) unberücksichtigt bleiben. Sofern FD-Filter verwendet werden, sind diese in Farrow-Struktur implementiert. Die untersuchten Strukturen sind im Einzelnen:

- (S1) SRC im Basisband (BB) durch ein Wurzel-Nyquist Roll-Off (*Square Root Raised Cosine*, SRRC) Filter mit gespeicherter überabgetasteter Impulsantwort.
- (S2) SRC im BB durch ein SRRC-Filter festem Koeffizientensatz, gefolgt von einem FD-Filter.
- (S3) SRC im BB durch ein einziges FD Filter.
- (S4) SRC im BB durch ein Kammfilter gefolgt von einem FD-Filter.
- (S5) SCR im BB durch ein Kammfilter, gefolgt von einem SRRC Filter mit gespeicherter überabgetasteter Impulsantwort.
- (S6) SCR im BB durch ein Kammfilter, gefolgt von einem FD Filter und einem SRRC Filter mit festem Koeffizientensatz.
- (S7) SRC im Bandpassbereich (BP) durch ein FD Filter. Hierbei ist die Mittenfrequenz im Vergleich zur Nyquistfrequenz f_N relativ niedrig (max. 0,5).
- (S8) SRC im BP wie (S7) mit Mittenfrequenz, die im Vergleich zu f_N relativ groß ist.

Die einzelnen Basisbandverfahren werden dabei noch verglichen für Entzerrung im Symboltakt, bzw. mit $w = 2$; bei dem Bandpassverfahren wird $w = 4$, bzw. $w = 6$ gewählt.

Folgende Parameter wurden für den Vergleich angesetzt:

- Zur Entzerrung wird ein DFE mit $N = 20$ Koeffizienten des Vorwärtsfilters bei den BB-Verfahren, bzw. $N = 20w/2$ bei dem BP-Verfahren. Das Rückkoppelfilter hat eine Länge von $M = 10$.
- Die Kammfilter haben 6. Ordnung und sind multipliziererfrei implementiert. Ihre Ausgangsrate beträgt etwa $4f_T$.
- Die Parameter der SRRC, bzw. FD Filter sind in Tabelle 3.1 gegeben. Hierbei ist L_{RRC} der Grad der SRRC-Filter, N , K und J sind die entsprechenden Parameter der Implementierung der FD Filter in Farrow-Struktur. Für $J = 1$ wurde von der Symmetriebedingung der modifizierten Struktur (siehe Kapitel 3.3.2.1) Gebrauch gemacht. Bei den Verfahren (S2) und (S6), die ein SRRC-Filter mit festem Koeffizientensatz verwenden, wird die Symmetrie der Impulsantwort zur Halbierung der Anzahl an Multiplikationen ausgenutzt. Bei (S1) und (S5) könnte die Anzahl der zu speichernden Koeffizienten durch eine Interpolation der Koeffizienten niedrig gehalten werden. Da die Größe des verwendeten Speichers hier jedoch nicht betrachtet wird, wird diese Technik nicht angewandt.

	(S1)		(S2)		(S3)		(S4)		(S5)		(S6)		(S7)		(S8)	
w	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	4	6	4	6
L_{SRRC}	12	10	12	10					5	4	5	3				
N			3	2	9	7	4	3			3	3	3	2	6	5
K			2	2	4	3	3	2			3	2	2	2	3	3
J			1	1	3	3	1	1			1	1	1	1	1	1

Tabelle 3.1: Parameter der verglichenen Strukturen

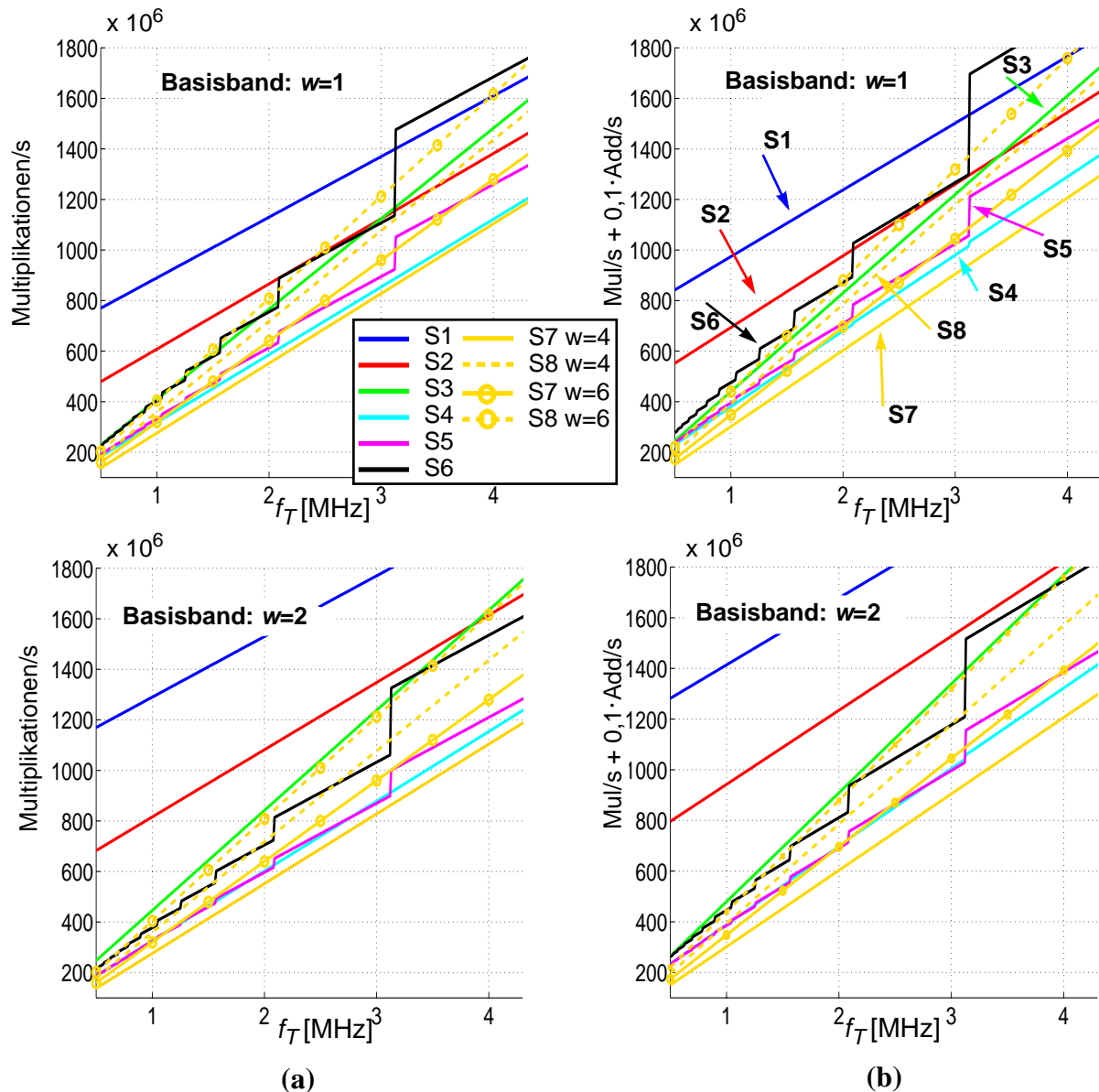


Bild 3.33: Exemplarischer Vergleich des Implementierungsaufwandes von SRC Strukturen als Funktion von f_T . Bei den BB-Verfahren ist $w=1$ (oben), bzw. $w=2$ (unten).

(a) Anzahl an Multiplikationen, (b) Anzahl an (Multiplikationen + Additionen/10).

Die berechneten Ergebnisse sind in Bild 3.33 in Abhängigkeit der Symbolrate gezeigt. Die beiden oberen Grafiken zeigen Ergebnisse der Basisbandverfahren mit Entzerrung im Symboltakt, die unteren entsprechend mit Entzerrung im halben Symboltakt. Die Ergebnisse der Bandpassverfahren wurde in alle Grafiken gezeichnet, von den Eigenschaften entspricht sie jedoch eher denen der Basisbandverfahren mit überabgetastetem Entzerrer. In Bild 3.33a finden sich die Multiplikationsoperationen pro Sekunde, in Bild 3.33b wurden die erforderlichen Additionen ebenfalls berücksichtigt, wobei vereinfachend angenommen wurde, dass eine Multiplikation dem Aufwand von zehn Additionen entspricht.

Man erkennt zunächst, dass bei den meisten BB Verfahren die erforderlichen Operationen für $w = 1$ und $w = 2$ vergleichbar sind, wobei (S1) und (S2) hier Ausnahmen darstellen. Diese beiden Verfahren sind aber ohnehin relativ aufwändig. Grund für dieses Ergebnis ist, dass der Aufwand für die Entzerrung - bei den hier als gleich angenommenen Entzerrernlängen - identisch ist. Für $w = 2$ muss die letzte Stufe des SRC Systems zwar Werte mit der doppelten Rate lie-

fern, allerdings sinken dadurch auch die Anforderungen an das Filter, so dass sich effektiv der Aufwand im Vergleich zu $w = 1$ nicht verdoppelt. Bei den BB Verfahren sind insbesondere die Strukturen vorteilhaft, die zunächst mit einem Kammfilter die Rate reduzieren und anschließend - entweder mit einem FD-Filter wie in (S4), oder mit einem SRRC-Filter wie in (S6) - die Ratenumsetzung mit einem irrationalen Faktor durchführen. Die Bandpassverfahren sind bei relativ niedrigen Mittenfrequenzen und $w = 4$ diesen Verfahren gleichwertig, bzw. sogar überlegen. Sie erscheinen insbesondere vorteilhaft, wenn man auch die erforderliche Anzahl an Additionen berücksichtigt. Ursache ist, dass die Kammfilter multipliziererfrei realisiert sind, zur Generierung der Ausgangswerte hier jedoch relativ viele Additionsoperationen erforderlich sind. Ist die Mittenfrequenz jedoch so hoch, dass zur Ratenumsetzung lange SRC Filter erforderlich sind, wirken die Basisband Verfahren attraktiver. Allerdings ist bei Basisbandverfahren mit $w = 2$ der Unterschied zu Bandpassverfahren mit $w = 4$ nicht dramatisch. Durch eine Erhöhung des Abtastfaktors in der ersten Stufe eines kaskadierten Systems lässt sich die Mittenfrequenz relativ zur Abtastrate reduzieren, so dass unter Umständen der Gesamtaufwand sinkt. Dieses Vorgehen wurde etwa in [77] zur Dezimation von Basisbandsignalen in einer stark veräuschten Umgebung angewandt. Unter Umständen lässt sich bei relativ niedrigen Mittenfrequenzen im Bereich bis etwa $0,5 \cdot f_N$ durch Reduktion des Überabtastfaktors auf 3 die Attraktivität einer Signalverarbeitung im Bandpassbereich weiter steigern.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass, falls das Eingangsspektrum im Vergleich zur Nyquistfrequenz bei relativ niedrigen Frequenzen angesiedelt ist, Bandpassverfahren günstig erscheinen, andernfalls - insbesondere wenn relativ viel Rauschen in Bereichen außerhalb des Nutzbandes vorhanden ist - Basisbandverfahren etwas günstiger erscheinen. Insgesamt lässt sich anhand der gefundenen Ergebnisse jedoch keine allgemeingültige Aussage treffen.

3.4 Entwurf der Filter zur Abtastratenumsetzung

In diesem Kapitel sollen Verfahren zum Entwurf von SRC Filtern angegeben werden. Zur Abschätzung der Qualität eines implementierten digitalen SRC Filters wird hierfür eine Fehlerfunktion $E(\omega, \mu)$ definiert, als die Differenz der Übertragungsfunktion des implementierten Filters $H(\omega, \mu) = \mathbf{w}^T \mathbf{g}(\mu)$ und der des idealen Filters $H_{id}(\omega, \mu)$ aus (3.20).

$$E(\omega, \mu) = H(\omega, \mu) - H_{id}(\omega, \mu) = \mathbf{w}^T \mathbf{g}(\mu) - e^{-j\omega(D+\mu)}. \quad (3.86)$$

Zum Entwurf eines digitalen SRC Filters wird diese Fehlerfunktion im Folgenden nach verschiedenen Kriterien minimiert. Die betrachteten Entwurfskriterien sind im Einzelnen der in Kapitel 3.4.1 betrachtete maximal flache Entwurf, bei der die ersten N Ableitungen von $E(\omega, \mu)$ bei einer Mittenkreisfrequenz ω_0 zu Null gesetzt werden, das in Kapitel 3.4.2 betrachtete Least Squares Verfahren, das das Integral des Betrags der quadrierten Fehlerfunktion in einem gegebenen Frequenzbereich minimiert, sowie das in Kapitel 3.4.3 betrachtete Chebychev oder Minmax-Kriterium, bei dem das Maximum des Betrags der Fehlerfunktion in einem gewissen Kreisfrequenzbereich $[\omega_1, \omega_2]$ minimiert wird.

3.4.1 Maximal Flacher Entwurf

3.4.1.1 Allgemeine Herleitung

Zum Entwurf eines maximal flachen FD Filters wird die Fehlerfunktion $E(\omega)$ bei einer Mittenkreisfrequenz ω_0 maximal flach angenähert, das heißt die ersten N Ableitungen der Fehlerfunktion werden für $\omega = \omega_0$ zu Null gesetzt. Dies führt zu folgendem linearen Gleichungssystem:

$$\left. \frac{d^n E(\omega)}{d\omega^n} \right|_{\omega=\omega_0} = 0 \quad \text{für } n = 0, 1, \dots, N. \quad (3.87)$$

In Matrixnotation kann die Lösung von (3.87) folgendermaßen geschrieben werden:

$$\mathbf{h}(\omega_0, \mu) = \bar{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{v}, \quad (3.88)$$

wobei die $(N+1) \times (N+1)$ Matrix $\bar{\mathbf{V}}$ und der $(N+1) \times 1$ Vektor \mathbf{v} gegeben sind durch

$$\bar{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} 1 & e^{-j\omega_0} & e^{-2j\omega_0} & \dots & e^{-Nj\omega_0} \\ 0 & e^{-j\omega_0} & 2e^{-2j\omega_0} & & Ne^{-Nj\omega_0} \\ 0 & e^{-j\omega_0} & 2^2 e^{-2j\omega_0} & & N^2 e^{-Nj\omega_0} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & e^{-j\omega_0} & 2^N e^{-2j\omega_0} & \dots & N^N e^{-Nj\omega_0} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (3.89)$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} e^{-j\omega_0 d} & de^{-j\omega_0 d} & \dots & d^N e^{-j\omega_0 d} \end{bmatrix}^T. \quad (3.90)$$

Die Variable d ist definiert als $D + \mu$.

Im Allgemeinen gibt die Lösung des linearen Gleichungssystems (3.88) für $\omega_0 \neq 0$ ein komplexwertiges digitales SRC Filter $\mathbf{h}(\omega_0, \mu)$. Soll ein reellwertiges SRC Filter entworfen werden, zerfällt jede Zeile des Gleichungssystems (3.88) (aufgelöst nach \mathbf{v}) in zwei Zeilen, so wird etwa aus der ersten Zeile

$$\begin{aligned} h_0 + h_1 \cos(\omega_0) + h_2 \cos(2\omega_0) &= \cos(d\omega_0) \\ h_1 \sin(\omega_0) + h_2 \sin(2\omega_0) &= \sin(d\omega_0) \end{aligned} \quad (3.91)$$

Das sich ergebende Gleichungssystem ist im Allgemeinen unterbestimmt und exakt nur lösbar, wenn die Mittenkreisfrequenz ω_0 zu 0 gesetzt wird, da dann jede zweite Zeile wegfällt und wieder ein bestimmtes lineares Gleichungssystem entsteht. Die Entwurfsmethode ist dann äquivalent zur klassischen Lagrange Interpolation und die Koeffizienten können in geschlossener Form gegeben werden als

$$h_n(\mu) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^N \frac{D-k}{n-k} \quad \text{für } n = 0, 1, \dots, N. \quad (3.92)$$

Zum Entwurf eines reellwertigen SRC Filters mit $\omega_0 \neq 0$ muss die Fehlerfunktion $E(\omega)$ so-

wohl bei der positiven Mittenkreisfrequenz ω_0 , als auch bei $-\omega_0$ maximal flach angenähert werden. Da sich die Anzahl der Anforderungen im Vergleich zum komplexwertigen Filter so verdoppelt, können nur die ersten $(N-1)/2$ Ableitungen bei $\omega = \pm\omega_0$ zu Null gesetzt werden, wobei N ungeradzahlig sein muss. $\bar{\mathbf{V}}$ und \mathbf{v} resultieren dann in

$$\bar{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} 1 & e^{-j\omega_0} & e^{-2j\omega_0} & \dots & e^{-Nj\omega_0} \\ 1 & e^{j\omega_0} & e^{2j\omega_0} & & e^{Nj\omega_0} \\ 0 & e^{-j\omega_0} & 2e^{-2j\omega_0} & & Ne^{-Nj\omega_0} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & e^{-j\omega_0} & 2 \frac{N-1}{2} e^{-2j\omega_0} & \dots & N \frac{N-1}{2} e^{-\left(\frac{N-1}{2}j\right)\omega_0} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (3.93)$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} e^{-j\omega_0 d} & e^{j\omega_0 d} & de^{-j\omega_0 d} & \dots & d \frac{N-1}{2} e^{j\omega_0 d} \end{bmatrix}^T. \quad (3.94)$$

Dies entspricht der gleichzeitigen getrennten Lösung der Gleichungssysteme die sich aus (3.88) durch Real- bzw. Imaginärteilbildung ergeben. Die so erhaltene Impulsantwort des SRC Filters wird, wie üblich, symmetrisch.

Eine zweite Möglichkeit zum Design eines reellwertigen maximal flachen digitalen SRC Filters besteht darin, das unterbestimmte Gleichungssystem der Struktur von (3.92) näherungsweise nach der Methode der minimalen Fehlerquadrate (Least Squares) zu bestimmen. Dieses Vorgehen hat die Vorteile, dass die Einschränkung der ungeradzahlig Filterordnung wegfällt, und dass näherungsweise die ersten N Ableitungen der Fehlerfunktion bei $\omega = \pm\omega_0$ zu Null gesetzt werden. Allerdings sind die Eigenschaften eines derartig entworfenen Filters in der Praxis wesentlich schlechter als wenn das Filter nach Gleichungen (3.88), (3.93) und (3.94) entworfen wird. Darüberhinaus ist die Impulsantwort in der Regel auch nicht mehr symmetrisch.

3.4.1.2 Least Squares Entwurf der Farrow-Struktur Koeffizienten

Da beim maximal flachen Entwurf die Filterkoeffizienten in geschlossener Form angegeben werden können, ist es möglich, durch die Methode der kleinsten Fehlerquadrate (*Least Squares*), die Koeffizienten \mathbf{G} einer Implementierung in Farrow-Struktur zu berechnen. Hierbei wird die Impulsantwort des Filters in Farrow-Struktur $\mathbf{g}(\mu)$ für $0 < \mu < 1$ möglichst gut an das optimale Filter $\mathbf{h}_{opt}(\mu)$ angenähert. Gesucht wird also der Koeffizientensatz, der die Kostenfunktion

$$\varepsilon(\mathbf{G}) = \int_{\mu=0}^1 |\mathbf{g}(\mu) - \mathbf{h}_{opt}(\mu)|^2 d\mu \quad (3.95)$$

minimiert. Mit Gleichung (3.49) in Matrixform $\mathbf{g}(\mu) = \mathbf{G}\mathbf{m}(\mu)$ und dem idealen Filter $\mathbf{h}_{opt}(\mu)$ nach Gleichung (3.88) wird (3.95) unter Vernachlässigung der Abhängigkeit von μ zu

$$\varepsilon(\mathbf{G}) = \int_{\mu=0}^1 (\mathbf{m}^H \mathbf{G}^H \mathbf{G} \mathbf{m} - 2\Re(\mathbf{v}^H \bar{\mathbf{V}}^{-1H} \mathbf{G} \mathbf{m}) + \mathbf{v}^H (\bar{\mathbf{V}}^{-1})^H \bar{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{v}) d\mu. \quad (3.96)$$

Mit den Rechenregeln $\mathbf{a}^H \mathbf{B} \mathbf{c} = \text{Tr}\{\mathbf{B} \mathbf{c} \mathbf{a}^H\}$ für beliebige Spaltenvektoren \mathbf{a} und \mathbf{c} der Größe

N und M sowie Matrizen \mathbf{B} der Größe $N \times M$, sowie $\text{Tr}\{\mathbf{AB}\} = \text{Tr}\{\mathbf{BA}\}$ für beliebige quadratische Matrizen gleicher Dimension (siehe etwa [89]), wobei $\text{Tr}\{\bullet\}$ der Spur-Operator ist, lässt sich Gleichung (3.96) schreiben als

$$\varepsilon(\mathbf{G}) = \int_{\mu=0}^1 (\text{Tr}\{\mathbf{Gmm}^H\mathbf{G}^H\} - 2\Re(\text{Tr}\{\mathbf{Gmv}^H(\bar{\mathbf{V}}^{-1})^H\}) + \mathbf{v}^H(\bar{\mathbf{V}}^{-1})^H\bar{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{v})d\mu. \quad (3.97)$$

Um den Koeffizientensatz \mathbf{G} zu finden der (3.97) minimiert, wird die Ableitung von Gleichung (3.97) bezüglich \mathbf{G}^* zu Null gesetzt. Mit den beiden, in [108] bewiesenen Rechenvorschriften

$$\nabla_{\mathbf{A}}\text{Tr}\{\mathbf{ABA}^H\} = 2\mathbf{AB} \text{ für hermitesche } \mathbf{A} \text{ und } \nabla_{\mathbf{A}}\text{Tr}\{\mathbf{AB}\} = \mathbf{B}^H, \quad (3.98)$$

für beliebige quadratische Matrizen gleicher Dimension ergibt sich

$$\int_{\mu=0}^1 (\mathbf{mm}^H\mathbf{G}^H - \mathbf{mv}^H(\bar{\mathbf{V}}^{-1})^H)d\mu = 0. \quad (3.99)$$

Der gesuchte Koeffizientensatz \mathbf{G} ist schließlich gegeben durch

$$\mathbf{G} = \mathbf{M}^{-1}\Psi(\bar{\mathbf{V}}^{-1})^H, \quad (3.100)$$

wobei die $(K+1) \times (K+1)$ Matrix \mathbf{M} gegeben ist als

$$\mathbf{M} = \int_0^1 \mathbf{mm}^H d\mu. \quad (3.101)$$

Die Elemente von \mathbf{M} berechnen sich zu $M_{I,J} = 1/(I+J-1)$. Die Matrix Ψ der Größe $(K+1) \times (N+1)$ ist gegeben durch

$$\Psi = \int_0^1 \mathbf{mv}^H d\mu, \text{ mit den Elementen} \quad (3.102)$$

$$\Psi_{I,J} = \int_0^1 \exp(j\omega_0(D+\mu))\mu^{I-1}(D+\mu)^{J-1} d\mu \quad (3.103)$$

für komplexwertige Filter, bzw.

$$\Psi_{I,J} = \begin{cases} \int_0^1 \exp(j\omega_0(D+\mu))\mu^{I-1}(D+\mu)^{(J-1)/2} d\mu & \text{für } J \text{ ungerade} \\ \int_0^1 \exp(-j\omega_0(D+\mu))\mu^{I-1}(D+\mu)^{(J-2)/2} d\mu & \text{für } J \text{ gerade} \end{cases} \quad (3.104)$$

für reellwertige Filter. Die Integrale der Gleichungen (3.103) bzw. (3.104) sind durch wiederholtes anwenden der Integrationsformel [18]

$$\int x^n \exp(ax) dx = \frac{1}{a} x^n \exp(ax) - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \exp(ax) dx \quad (3.105)$$

geschlossen lösbar, jedoch werden die Ausdrücke für $I > 1$ und/oder $J > 1$ sehr unübersichtlich. Die Elemente $\Psi_{I,J}$ lassen sich aber auch problemlos durch numerische Integration bestimmen.

3.4.2 Entwurf durch Minimierung der Fehlerquadrate

3.4.2.1 Entwurfsmethode

Zur Bestimmung des SRC Filters, das die Fehlerfunktion (3.86) im Kreisfrequenzbereich $[\omega_1, \omega_2]$ für gegebenes μ im Sinne des kleinsten quadratischen Fehlers minimiert, muss der Koeffizientenvektor $\mathbf{h}(\mu)$ gefunden werden, der - unter Vernachlässigung der Abhängigkeit von μ - die Fehlerfunktion $\varepsilon(\mathbf{h})$

$$\varepsilon(\mathbf{h}) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} |E(\omega, \mu)|^2 d\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} (\mathbf{h}^H \mathbf{w} \mathbf{w}^H \mathbf{h} - 2 \Re\{\mathbf{h}^T \mathbf{w} e^{j\omega(D+\mu)}\} + 1) d\omega \quad (3.106)$$

minimiert. Für reellwertige Filter vereinfacht sich Gleichung (3.106) zu

$$\varepsilon(\mathbf{h}) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} (\mathbf{h}^H \Re\{\mathbf{w} \mathbf{w}^H\} \mathbf{h} - 2 \mathbf{h}^T \Re\{\mathbf{w} e^{j\omega(D+\mu)}\} + 1) d\omega. \quad (3.107)$$

Für den in diesem Sinne optimalen Koeffizientenvektor \mathbf{h}_{opt} verschwindet der Gradient der Fehlerfunktion (3.106) mit Bezug zu \mathbf{h} , so dass gilt

$$\nabla \varepsilon(\mathbf{h})|_{\mathbf{h} = \mathbf{h}_{opt}} = \mathbf{0}. \quad (3.108)$$

Rechenregeln zur Ableitung der nicht analytischen Gleichung (3.106) nach dem komplexen Vektor \mathbf{h}^* finden sich in Appendix 1. Im Speziellen gilt hier

$$\nabla \varepsilon(\mathbf{h}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{h}^*} \varepsilon(\mathbf{h}) = \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial h_0^*} \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial h_1^*} \quad \dots \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial h_N^*} \right]^T. \quad (3.109)$$

Hiermit ist die Lösung von Gleichung (3.108) für komplexwertige \mathbf{g} gegeben durch

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} (\mathbf{w} \mathbf{w}^H \mathbf{h}_{opt} - \mathbf{w} e^{j\omega(D+\mu)}) d\omega = \mathbf{W} \mathbf{h}_{opt} - \mathbf{s} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{h}_{opt} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{s}, \quad (3.110)$$

wobei die $(N+1) \times (N+1)$ Matrix \mathbf{W} definiert ist als

$$\mathbf{W} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \mathbf{w} \mathbf{w}^H d\omega. \quad (3.111)$$

Die Elemente von \mathbf{W} sind gegeben als

$$W_{I,J} = -\frac{j}{I-J} (\exp(j\omega_2(I-J)) - \exp(j\omega_1(I-J))). \quad (3.112)$$

Für den Grenzfall $(I-J) \rightarrow 0$ gilt (z.B. nach der Regel von De l'Hôpital)

$$\lim_{(I-J) \rightarrow 0} W_{I,J} = \omega_2 - \omega_1. \quad (3.113)$$

Der Vektor \mathbf{s} der Länge $N+1$ ist gegeben als

$$\mathbf{s} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \mathbf{w} e^{j\omega(D+\mu)} d\omega \quad (3.114)$$

mit den Elementen

$$s_I = -\frac{j}{\chi}(\exp(j\omega_2\chi) - \exp(j\omega_1\chi)), \quad (3.115)$$

wobei definiert wurde $\chi = D + \mu + 1 - I$.

Simultan gilt für reellwertige Filter

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} (\Re\{\mathbf{W}\}\mathbf{h}_{opt} - \Re\{\mathbf{w}e^{j\omega(D+\mu)}\})d\omega = 0 \Leftrightarrow \mathbf{h}_{opt} = (\Re\{\mathbf{W}\})^{-1}\Re\{\mathbf{s}\}, \quad (3.116)$$

wobei die Matrixelemente von $\Re\{\mathbf{W}\}$ gegeben sind als

$$W_{I,J} = \omega_2 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_2}{\pi}(I-J)\right) - \omega_1 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_1}{\pi}(I-J)\right). \quad (3.117)$$

Die Elemente des Vektors $\Re\{\mathbf{s}\}$ sind gegeben durch

$$\Re\{\mathbf{s}\} = \omega_2 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_2}{\pi}\chi\right) - \omega_1 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_1}{\pi}\chi\right). \quad (3.118)$$

Für große Filterordnungen wird die Konditionierung der Matrix \mathbf{W} schlecht, das heißt die Berechnung ihrer Inversen zur Lösung des Gleichungssystems (3.110) wird numerisch schwierig. Die Kondition einer Matrix \mathbf{X} ist hierbei definiert als $\operatorname{cond}(\mathbf{X}) = \|\mathbf{X}\|\|\mathbf{X}^{-1}\|$. Die Konditionierung von \mathbf{W} wird insbesondere dann schlecht, wenn der normierte Kreisfrequenzbereich des Filters nahe bei 0, bzw. 1 liegt. Zur Abhilfe zum Entwurf sehr großer Abtastratenumsetzfilter kann die in [183] beschriebene, sogenannte Eigenfilter-Methode auf das gegebene Problem angewandt werden und somit die Berechnung der Inversen vermieden werden. Unter Anwendung dieser Methode wird die zu minimierende Kostenfunktion folgendermaßen normiert:

$$\varepsilon_{EF}(\mathbf{h}) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{|\mathbf{h}^H \mathbf{w} - H_{id}(\omega)|^2}{\beta^2 + \mathbf{h}^H \mathbf{h}} d\omega = \frac{\hat{\mathbf{h}}^H \hat{\mathbf{W}} \hat{\mathbf{h}}}{\hat{\mathbf{h}}^H \hat{\mathbf{h}}}. \quad (3.119)$$

Der Parameter β kann hierbei frei gewählt werden, wobei gilt, je größer β gewählt wird, desto näher ist die approximierte Lösung an der Least Squares Lösung. Im extremen Fall $\beta \rightarrow \infty$ stimmen die beiden Kostenfunktionen überein. Der Vektor $\hat{\mathbf{h}}$ ist definiert als $\hat{\mathbf{h}} = [\mathbf{g}^T \ -\beta]^T$, die Matrix $\hat{\mathbf{W}}$ mit Dimension $(N+2) \times (N+2)$ als

$$\hat{\mathbf{W}} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \hat{\mathbf{w}} \hat{\mathbf{w}}^H d\omega \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{w}} = [\mathbf{w}^T \ H_{id}/\beta]^T = [\mathbf{w}^T \ e^{-j\omega(D+\mu)}/\beta]^T. \quad (3.120)$$

Die Matrix $\hat{\mathbf{W}}$ lässt sich aus \mathbf{W} durch Erweiterung um je eine Zeile und Spalte erhalten, wobei die zusätzlichen Elemente gegeben sind durch

$$W_{N+2,I} = \begin{cases} \frac{j(\exp(-j\omega_2(D+\mu)(I-1)) - \exp(-j\omega_1(D+\mu)(I-1)))}{\beta(D+\mu)(I-1)} & 1 \leq I \leq N+1 \\ & \text{komplex} \\ \frac{\sin(\omega_2(D+\mu)(I-1)) - \sin(\omega_1(D+\mu)(I-1))}{\beta(D+\mu)(I-1)} & 1 \leq I \leq N+1 \\ & \text{reell} \\ (\omega_2 - \omega_1)/\beta^2 & I = N+2 \end{cases}. \quad (3.121)$$

$$W_{I,N+2} = W_{N+2,I}^*$$

Wie die Matrix \mathbf{W} , ist auch $\hat{\mathbf{W}}$ hermitisch und besitzt daher nur reelle Eigenwerte.

Zur Minimierung von (3.119) bezüglich \mathbf{g} genügt es, den zum minimalen Eigenwert von $\hat{\mathbf{W}}$

gehörenden Eigenvektor zu finden und ihn so zu skalieren, dass sein letztes Element gleich $-\beta$ wird [183]. Der so gefundene Vektor entspricht dem gesuchten \mathbf{h} .

3.4.2.2 Least Squares Entwurf der Farrow-Struktur Koeffizienten

Wie beim maximal flachen Entwurf können auch beim Least Squares Verfahren die Koeffizienten der Farrow-Struktur durch eine Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers angenähert werden. Hierfür muss (3.107) für alle μ minimiert werden, was zu folgender Gleichung führt:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{G}) &= \int_0^1 \int_{\omega_1}^{\omega_2} |E(\omega, \mu)|^2 d\omega d\mu = \\ &= \int_0^1 \int_{\omega_1}^{\omega_2} (\mathbf{w}^T \mathbf{G} \mathbf{m} \mathbf{m}^T \mathbf{G}^H \mathbf{w}^* - 2\Re\{\mathbf{w}^T \mathbf{G} \mathbf{m} e^{j\omega(D+\mu)}\} + 1) d\omega d\mu. \end{aligned} \quad (3.122)$$

Wie in [108] für den Spezialfall der Abtastratenumsetzung im Basisband gezeigt, kann (3.122) in Matrixnotation als

$$\varepsilon(\mathbf{G}) = \text{Tr}(\mathbf{M} \mathbf{G}^H \mathbf{W} \mathbf{G}) - 2\Re\{\text{Tr}(\mathbf{S} \mathbf{G})\} + \text{const} \quad (3.123)$$

geschrieben werden. Die Matrix \mathbf{S} der Größe $(K+1) \times (N+1)$ ist für komplexwertige Filter definiert als

$$\mathbf{S} = \int_0^1 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \mathbf{m} \mathbf{w}^T e^{j\omega(D+\mu)} d\omega d\mu = \int_0^1 \mathbf{m} \mathbf{w}_\mu d\mu, \quad (3.124)$$

wobei die Elemente des $(N+1)$ -Reihenvektors \mathbf{w}_μ durch

$$\mathbf{w}_{\mu_l} = \frac{j}{L} (\exp(j\omega_1 L) - \exp(j\omega_2 L)) \quad (3.125)$$

gegeben sind und L als $D + \mu - l + 1$ definiert ist. Für reellwertige Filter erhält man die Vektorelemente durch Realteilbildung von (3.125) als

$$\mathbf{w}_{\mu_l} = \omega_2 \text{sinc}\left(\frac{\omega_2 L}{\pi}\right) - \omega_1 \text{sinc}\left(\frac{\omega_1 L}{\pi}\right) \quad (3.126)$$

Mit den für $n > 0$ gültigen Rechenvorschriften [18]

$$\int x^n \exp(ax) dx = \frac{x^n}{a} \exp(ax) - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \exp(ax) dx, \quad (3.127)$$

$$\int x^n \sin(ax) dx = -\frac{x^n}{a} \cos(ax) + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos(ax) dx \quad \text{und} \quad (3.128)$$

$$\int x^n \cos(ax) dx = \frac{x^n}{a} \sin(ax) - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin(ax) dx \quad (3.129)$$

lassen sich die Elemente $S_{I,J}$ der Lösung von (3.124) für $I > 1$ in geschlossener Form darstellen, bzw. für $I = 1$ für komplexwertige Filter auf die Integraleponentialfunktion $\text{Ei}(x)$ [18]

$$\int \frac{\exp(ax)}{x} dx = \ln(x) + \frac{ax}{1 \cdot 1!} + \frac{(ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \dots ; \quad \text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\exp(t)}{t} dt, \quad (3.130)$$

bzw. für reellwertige Filter auf den Integralsinus $\text{Si}(x)$ [18]

$$\int \frac{\sin(ax)}{x} dx = \frac{ax}{1 \cdot 1!} - \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5 \cdot 5!} - \dots ; \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt \quad (3.131)$$

zurückführen. Gleichung (3.124) lässt sich jedoch auch problemlos numerisch lösen. Mit (3.98) lässt sich die Ableitung von $\varepsilon(\mathbf{G})$ nach \mathbf{G}^* schreiben als [108]

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{G}^*} \varepsilon(\mathbf{G}) = 2\mathbf{W}\mathbf{G}\mathbf{M} - 2\mathbf{S}^T, \quad (3.132)$$

so dass das SRC Filter durch folgende Formel berechnet werden kann

$$\mathbf{G} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{M}^{-1}. \quad (3.133)$$

Für die Berechnung reellwertiger Filter muss in (3.132) und (3.133) \mathbf{S} durch $\Re\{\mathbf{S}\}$ ersetzt werden.

Soll das digitale SRC Filter in modifizierter Farrow-Struktur implementiert werden, kann die Koeffizientenmatrix \mathbf{G} durch eine identische Berechnung ermittelt werden. Es muss hierfür lediglich in Gleichung (3.122) der Vektor \mathbf{m} durch den in Gleichung (3.63) definierten modifizierten Vektor $\tilde{\mathbf{m}}$ ersetzt werden. Die in Gleichung (3.101) eingeführte Matrix \mathbf{M} wird dann durch die modifizierte Matrix $\tilde{\mathbf{M}}$ substituiert, die durch

$$\tilde{\mathbf{M}} = \int_0^1 \tilde{\mathbf{m}} \tilde{\mathbf{m}}^T d\mu \quad (3.134)$$

gegeben ist. Die Elemente dieser Matrix sind gegeben durch

$$\tilde{M}_{I,J} = \begin{cases} 1/(I+J-1) & \text{für } I+J \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (3.135)$$

Koeffizienten der einzelnen Äste der sogenannten verlängerten Farrow-Struktur bekommt man auf äquivalente Art, wenn man in (3.101), bzw. (3.134) die entsprechenden Grenzen für μ einsetzt als $l/L \leq \mu \leq (l+1)/L$ für $0 \leq l \leq L-1$.

Die Berechnung der Inversen der Matrizen \mathbf{W} , bzw. \mathbf{M} in Gleichung (3.133) gestaltet sich für große N , bzw. K numerisch schwierig, da die Matrizen dann zunehmend schlechter konditioniert sind. Dies gilt insbesondere für \mathbf{W} im Falle von komplexwertigen Filtern, deren normierten Mittenkreisfrequenz nahe an 0, bzw. 1 liegt. In [108] wurde für reellwertige Basisbandfilter vorgeschlagen, die zu invertierenden Matrizen erst zu zerlegen und die Einzelmatrizen - die in der Regel besser konditioniert sind - getrennt zu invertieren. Im Falle von reellen Filtern kann man die in diesem Fall positiv definite Matrix \mathbf{W} , etwa durch Cholesky Faktorisierung, zerlegen in $\mathbf{W} = \mathbf{V}^H \mathbf{V}$. Für die inverse Matrix gilt dann $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{V}^H)^{-1}$, wobei die Matrix \mathbf{V}^{-1} leichter als \mathbf{W}^{-1} zu berechnen ist. Für nicht positiv definite Matrizen kann man anstelle der Cholesky Faktorisierung etwa auf eine Singulärwertzerlegung (*Singular Value Decomposition*) (siehe etwa [72]) zurückgreifen. Nachteil dieser Methoden ist allerdings, dass im Falle von schlecht konditionierten Matrizen auch die Matrixzerlegungen numerisch schwierig werden, so dass der Gewinn in der Praxis nicht allzu groß ist. Für große Filter ist es daher am zweckmäßigsten, zunächst einen Filtersatz für verschiedene Werte von μ durch den Eigenvektor-Ansatz nach Gleichung (3.119) zu entwerfen und die Matrix \mathbf{H} der Farrow-Struktur daraus nach (3.85) durch Kurvenanpassung nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate zu approximieren.

3.4.3 Chebychev Approximation

Beim Minmax-Entwurf wird im Gegensatz zu den anderen besprochenen Entwurfsmethoden explizit der betragsmäßige Maximalwert E_{max} der Fehlerfunktion (3.86) im spezifizierten Kreisfrequenzbereich ω_B minimiert. Die entsprechende Fehlernorm

$$E_{max}(\omega, \mu) = \max_{\omega \in \omega_B} \{|E(\omega)|\} \quad (3.136)$$

wird nach dem gleichnamigen russischen Ingenieur und Mathematiker auch Chebychev Norm genannt.

Zum Entwurf eines komplexwertigen Filters wird der gewünschte Kreisfrequenzbereich als $\omega_B = [\omega_1, \omega_2]$ gewählt. Zum Entwurf eines reellwertigen Filters ist zu beachten, dass diese Filter im Frequenzbereich symmetrisch zu $f = 0$ sind. Man erhält daher einen reellwertigen Filter, wenn man den gewünschten Kreisfrequenzbereich symmetrisch in positiven und negativen Frequenzen wählt, so dass gilt $\omega_B = \{[-\omega_2, -\omega_1] \cup [\omega_1, \omega_2]\}$.

Der SRC Filter kann mit der komplexen Erweiterung des Parks-McClellan Algorithmus approximiert werden [90], [91], [132]. Die Grundidee des komplexen Algorithmus besteht darin, die Übertragungsfunktion des approximierten Filters $H(\omega)$, sowie die Zielfunktion $H_{id}(\omega)$, durch den linearen Phasenterm $\exp(-j(N/2)\omega)$ zu teilen. Die resultierenden Terme

$$\tilde{H}(\omega) = H(\omega) \exp(j(N/2)\omega) \quad \text{und} \quad (3.137)$$

$$\tilde{H}_{id}(\omega) = H_{id}(\omega) \exp(j(N/2)\omega) \quad (3.138)$$

lassen sich dann als Summe von Sinus- und Kosinusterme schreiben [91]. Diese Basisfunktionen erfüllen die Haar-Bedingung [90]. Dies bedeutet, dass es für jeden N -dimensionalen Vektor κ_i und jedes Set aus N Basispunkten ω_i im Bereich ω_B eine eindeutige Lösung gibt für die gilt $\tau(\omega_i) = \kappa_i$, wobei τ die Summe von N Basisfunktionen ist, die jeweils mit einem komplexwertigen Faktor gewichtet sind. [90]. Somit ist gewährleistet, dass die optimale Lösung eindeutig ist und dass der optimale Fehler $E_{max}(\omega, \mu)$ an mindestens $N + 1$ Punkten auftritt. Die Strategie zur Approximation der Filterfunktion $H(\omega)$ besteht nun darin, $N + 1$ Punkte an denen $E(\omega, \mu) - E_{max}(\omega, \mu)$ zu finden und die Filterfunktion durch Interpolation zu gewinnen. Dieses Vorgehen wird ausgehend von einer beliebigen Startlösung, mit maximalem Fehler $E_{start}(\omega, \mu)$, so lange durchgeführt, bis Konvergenz auftritt [90], [91]. Der maximale Fehler verringert sich hierbei mit jedem Iterationsschritt, bzw. er bleibt unverändert, wobei der letztgenannte Fall anzeigt, dass der Algorithmus konvergiert ist.

Da die Filterkoeffizienten hier in iterativer Weise gefunden werden, ist es nicht möglich, wie bei den anderen beiden gezeigten Verfahren, eine Zielfunktion anzugeben, nach der die Koeffizienten der Farrow-Struktur optimiert werden. Der entsprechende Koeffizientensatz kann aber nach Gleichung (3.85) durch polynomische Kurvenanpassung approximiert werden.

3.5 Vergleich der Filterfunktionen

In diesem Abschnitt sollen die verschiedenen Entwurfsmethoden exemplarisch anhand von berechneten Filterfunktionen verglichen werden. Hierzu werden zunächst die Betragsfunktion

und Phasenlaufzeit der einzelnen, von μ abhängigen Filter verglichen. Anschließend werden die aussagekräftigeren Übertragungsfunktionen der zeitkontinuierlichen Filter im hybriden Modell gegenübergestellt und abschließend wird die Aliasing-Dämpfung der verschiedenen SRC Filter in Abhängigkeit von der Frequenz diskutiert.

Betrag der Übertragungsfunktion und Phasenlaufzeit der Einzelfilter

Zunächst sollen Filter, die mit den beschriebenen Verfahren entworfen wurden, exemplarisch anhand des Betrags der Übertragungsfunktion, sowie der Phasenlaufzeit der sich ergebenden Filter, für verschiedene Werte der fraktionalen Verzögerung verglichen werden. Die Implementierung erfolgt in symmetrischer Farrow-Struktur mit $K = 4$ und $J = 1$. Die weiteren Parameter sind zu $N = 3$, $f_0 = 0,4 \cdot f_N$ und $f_T = 0,25 \cdot f_N$ gewählt. In Bild 3.34a sind die beschriebenen Funktionen des entsprechenden maximal flachen Filters gezeigt, in Bild 3.34b und Bild 3.34c entsprechend die des LS und des Chebychev Filters. Man erkennt, dass bei allen drei Entwurfverfahren, im Bereich des Signalbandes, die gewünschte Dämpfung von Eins, sowie die gewünschte Verzögerung, die sich zu $\mu + 1$ ergibt, relativ gut eingehalten ist. Speziell bei der Betragsfunktion erkennt man, dass das maximal flache Filter in Bandmitte exakt eine Dämpfung von 0 dB aufweist, während die beiden anderen Verfahren auf unterschiedliche Art versuchen, im gesamten Signalband den Fehler möglichst zu minimieren. Weitergehende Aussagen sind allerdings anhand der gezeigten Grafiken kaum zu treffen

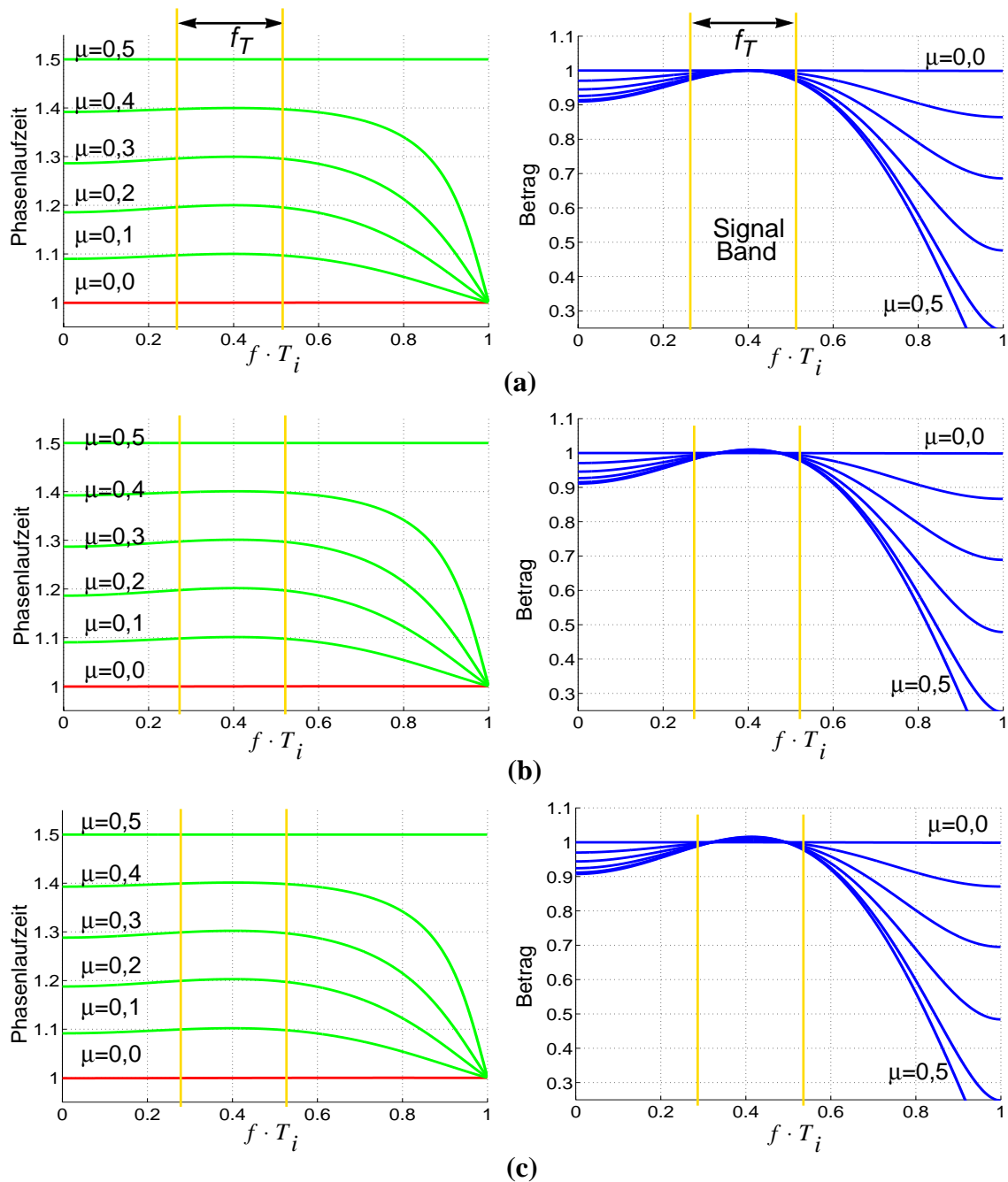


Bild 3.34: Vergleich der Phasenlaufzeit der Einzelfilter (links), sowie des Betrags der Übertragungsfunktion (rechts) in Abhängigkeit der fraktionellen Verzögerung für (a) Minmax, (b) Least Squares und (c) Chebyshev Entwurf

Übertragungsfunktion des zeitkontinuierlichen Filters der hybriden Struktur

Eine Funktion, die sich gut zur Darstellung von SRC Filtern eignet, ist der Betragsgang des zugrundeliegenden zeitkontinuierliche Filters der hybriden Struktur. Für das betrachtete Beispiel sind die derartigen Filterfunktionen in Bild 3.35a gezeigt. Bild 3.35b zeigt Ergebnisse des Entwurfs komplexwertiger Filter mit identischen Parametern. Man erkennt deutlich, dass alle entworfenen Filter im Bereich des Signalbandes eine Dämpfung nahe bei 0 dB aufweisen. In den Aliasing Bändern besitzen sie jeweils ihre maximale Dämpfung.

An den gezeigten Detailansichten des ersten Aliasingbandes erkennt man sehr gut die Auswir-

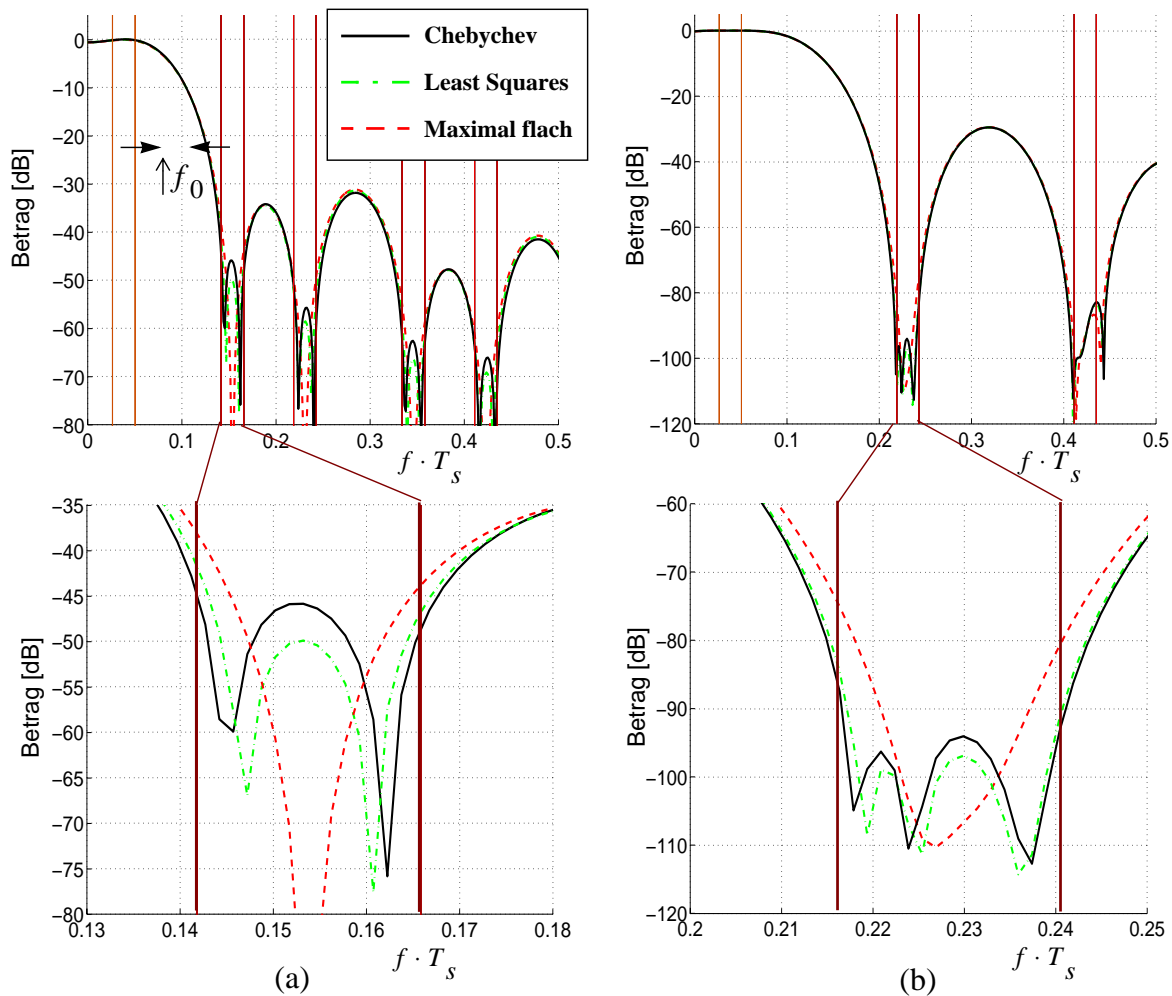


Bild 3.35: Vergleich des Betrags der Übertragungsfunktion des Filters der äquivalenten hybriden Struktur (a) reellwertige Filter, (b) komplexwertige Filter

kungen der verschiedenen Optimierungsverfahren. So sind die maximal flachen Filter im Bereich der jeweiligen Bandmitten den mit anderen Verfahren entworfenen Filtern stets überlegen. Entfernt man sich von dieser Frequenz, wird die Filterdämpfung allerdings kontinuierlich schlechter. Das Chebyshev Verfahren hingegen maximiert die minimale Dämpfung in den Aliasingbändern, während das Least Squares Verfahren eine geringere minimale Dämpfung zulässt. Im Mittel weisen mit diesem Verfahren entworfene Filter jedoch eine höhere Dämpfung im betrachteten Band auf. Zu beachten ist jedoch, dass alle Verfahren nicht direkt die Betragsfunktion optimieren, sondern den in (3.86) definierten Fehler minimieren.

Da ein reelles Filter im Bandpassbereich im Vergleich zu komplexwertigen Filtern zwei Aliasingregionen hat, ist hier die erzielbare Dämpfung geringer. Dies ist besonders dann der Fall, wenn die Mittenfrequenz des Übertragungsbandes erhöht wird. Dies kann anschaulich anhand von Bild 3.35a erklärt werden: Wird hier f_0 erhöht, bewegt sich das Übertragungsband in Richtung höherer Frequenzen, das erste Aliasingband hingegen entgegengesetzt in Richtung niedrigerer Frequenzen. Insgesamt nähern sich die Bereiche mit konträren Zielvorgaben einer Dämpfung von 0 dB, bzw. einer maximalen Dämpfung daher an, so dass der Betrag der Übertragungsfunktion das entsprechenden zeitkontinuierlichen Filters im hybriden Modell einen steileren Verlauf bekommt.

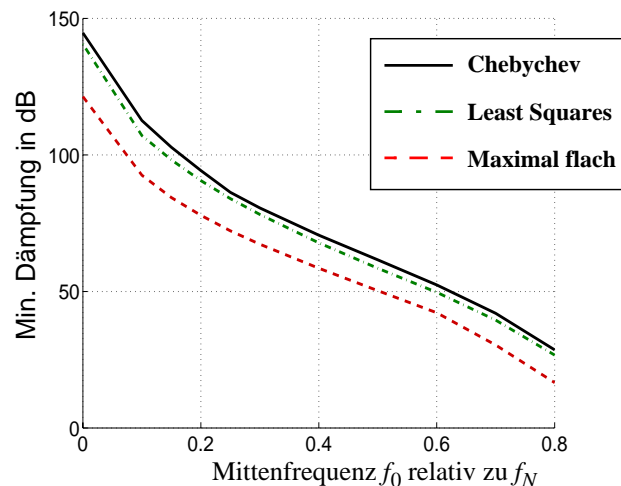


Bild 3.36: Abhängigkeit der minimalen Dämpfung von der Mittenfrequenz

Minimale Dämpfung in Abhängigkeit der Mittenfrequenz

Diese Abhängigkeit der minimalen Dämpfung in den Aliasing Regionen als Funktion der Mittenfrequenz soll als nächstes untersucht werden. Hierfür werden mit den beschriebenen Methoden entwickelte Filter exemplarisch für $N = 5$ verglichen. Die Implementierung erfolgt in Farrow-Struktur mit $K = 5$. Die Symbolrate beträgt $f_N/5, 2$. Das Ergebnis findet sich in Bild 3.36. Man erkennt zum einen, dass die minimale Dämpfung der maximal flachen Filter deutlich geringer ist, als die nach dem Chebychev, bzw. LS Verfahren optimierten. Hierbei zeigen die Chebychev Filter eine geringfügig größere Dämpfung als die LS Filter. Dies ergibt sich jedoch aufgrund der Zielfunktion der Chebychev Methode, die den maximalen Fehler minimiert und zeigt nicht, dass diese Methode zu besseren Ergebnissen führt als die LS Methode. Man erkennt, dass Filter, die zur SRC von Basisbandsignalen eingesetzt werden, eine deutlich höhere Dämpfung aufweisen, als Filter für Signalverarbeitung im Bandpassbereich. Im Bandpassbereich selbst nimmt die minimale Dämpfung bei einer Erhöhung der Mittenfrequenz um $f_N/10$ um etwa 10 dB ab. Dies zeigt, dass bei gleicher Überabtastrate am Ausgang des Filters, zur Abtastratenumsetzung von Bandpass-Signalen längere SRC Filter erforderlich sind, als bei der gleichen Operation im Basisband. Diese Aussage trifft bei der Verwendung komplexwertiger Filter zur Abtastratenumsetzung nicht mehr zu, allerdings steigt hier mit steigender Mittenfrequenz der erforderliche polynomische Grad einer Farrow-Struktur Implementierung [185]. Aufgrund des insgesamt höheren Aufwands - besonders auch in Bezug auf die nachfolgende Verarbeitung - werden komplexwertige SRC Filter hier jedoch nur am Rande betrachtet.

3.6 Simulationsergebnisse

In diesem Abschnitt sollen Abhängigkeiten des Verhalten eines Empfängers bezüglich der verschiedenen SRC Filter Parameter, sowie bezüglich des Rauschspektrums, untersucht werden. Hierfür werden die Ergebnisse verschiedener Zeitbereichssimulationen diskutiert. Bei den meisten dieser Simulationen ist im Empfänger ein adaptiver Entzerrer vorhanden, wie er in den betrachteten praktischen Systemen stets zum Einsatz kommt. Er minimiert Auswirkungen von Verzerrungen, die etwa durch den Übertragungskanal, aber auch durch das SRC Filter, verursacht werden. Außerdem korrigiert ein Entzerrer implizit einen falschen Abtastzeitpunkt [134].

Dies wird in Kapitel 4.4.3 näher betrachtet. Somit ist immer eine gewisse Kopplung von Taktregelung und Entzerrung gegeben. Die genaue Wirkungsweise des Entzerrers wird in Kapitel 4 dargestellt. Zeitbereichssimulationen, die die Auswirkungen eines Abtastratenumsetzfilters zeigen, finden sich in der Literatur bisher kaum.

Abhängigkeit des Systemverhaltens von der Mittenfrequenz bei Synchronisation

Die erste Simulation dient dem Vergleich der Abhängigkeit der Performance bezüglich der Mittenfrequenz für Anti-Image und Anti-Aliasing Filterung. Die Abtastfrequenz des Senders beträgt hier 20,3125 MHz, die des Empfängers 20,0 Mhz. Der Dezimationsfaktor des Empfängers beläuft sich somit auf 1,015625, was in etwa den Verhältnissen bei einer Anwendung zur reinen Synchronisation entsprechen kann. Die Mittenfrequenz des Sendefilters f_0 wurde von 0 bis 7,5 MHz variiert, die Bandbreite beträgt $f_T = 2,5$ MHz. Bei den SRC Filtern handelt es sich um Least Squares Filter mit den Parametern $K = 3$ und $J = 2$. Die Simulationen wurden jeweils für eine Filterordnung $N = 3$ und $N = 6$ durchgeführt. Um die Auswirkungen des SRC Filters zu bewerten, wurden die Simulationen für einen AWGN-Kanal mit einem SNR am Empfängereingang von 40 dB angesetzt. Bei dem Entzerrer handelt es sich um einen PS-FSE (siehe Kapitel 4.4.3), der 8-fach überabgetastet ist und eine Länge von 71 Koeffizienten besitzt. Da hier die Auswirkungen des SRC Filters untersucht werden sollen, ist der Entzerrer deutlich überdimensioniert. Die Simulationsergebnisse finden sich in Bild 3.37. Es ist zu erkennen, dass bei diesem Synchronisationsszenario das Anti-Image und das Anti-Aliasing Filter nahezu identisches Verhalten zeigen. Lediglich bei dem Filter 3. Ordnung ist die Performance des SRC Filters für hohe Frequenzen etwas schlechter. Darüberhinaus erkennt man, dass das SNR am Entscheidereingang, bei Verwendung des kürzeren Filters, ab einer Mittenfrequenz von etwa 4 MHz, mit steigendem f_0 sinkt. Bei Verwendung des längeren Filters kann dieses Verhalten erst ab etwa $f_0 = 7$ Mhz beobachtet werden. Abweichungen der erreichten SNR-Werte vom theoretischen Optimum liegen vor allem im adaptiven Entzerrer begründet, der mit dem sogenannten *Least Mean Squares* (LMS) Algorithmus trainiert wurde (siehe Kapitel 5).

Abhängigkeit des Systemverhaltens von der Mittenfrequenz bei Abtastratenreduktion

Bei dem nächsten Simulationsszenario wird das SRC Filter zur Abtastratenreduktion eingesetzt. Hierbei beträgt die Abtastfrequenz des Senders 32,5 MHz und die des Empfängers 20,0 MHz, so dass sich ein Dezimationsfaktor von 1,625 ergibt. Die restlichen Parameter entsprechen denen der vorangegangenen Simulation, mit der Ausnahme, dass das SNR am Empfängereingang zur besseren Verdeutlichung der auftretenden Effekte jetzt 30 dB beträgt. Die Ergebnisse dieser

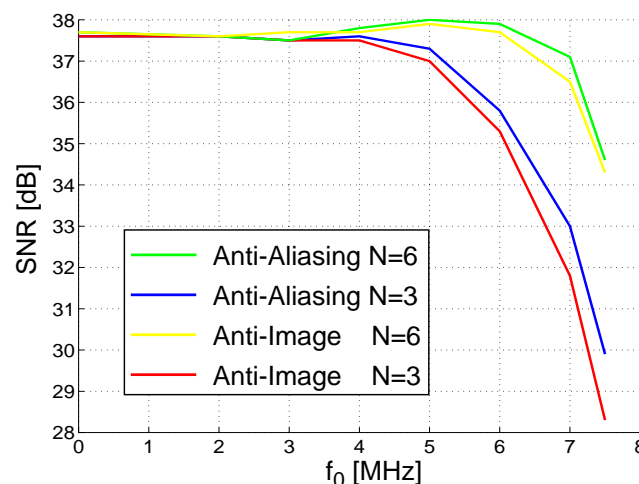


Bild 3.37: Auswirkung der Mittenfrequenz auf das SNR am Entscheidereingang bei Anti-Image und Anti-Aliasing Filterung für verschieden lange Filter zur Abtastratenumsetzung

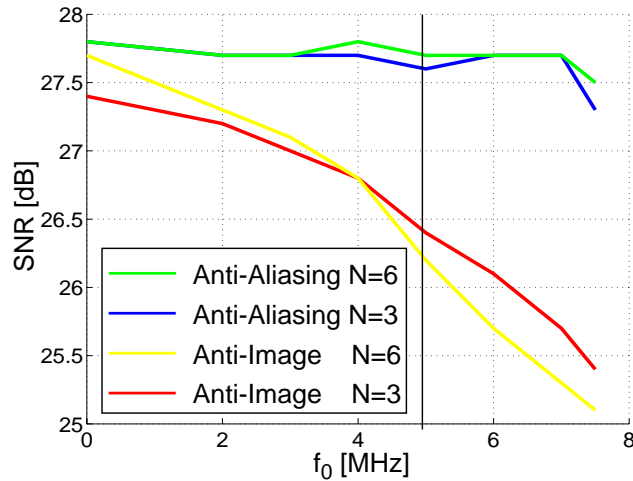


Bild 3.38: Auswirkung der Mittenfrequenz auf das SNR am Entscheidereingang bei Anti-Image und Anti-Aliasing Filterung für verschieden lange SRC Filter

Simulation finden sich in Bild 3.38. Es ist zu erkennen, dass bei diesem Szenario Anti-Image Filterung einer Anti-Aliasing Filterung bei allen Frequenzen unterlegen ist. Außerdem verschlechtert sich das Systemverhalten bei Verwendung eines Anti-Image Filters mit steigender Mittenfrequenz, während sie bei Verwendung eines Anti-Aliasing Filters nahezu konstant bleibt. Der Grund für das ungünstigere Verhalten des Anti-Image Filters liegt darin begründet, dass, wie in Kapitel 3.1.5 beschrieben, das Filter das in den Aliasingbändern vorhandene Rauschen nur unzureichend dämpft. Dies ist auch in Bild 3.39 zu erkennen, in dem die Dämpfungsverläufe der zugrundeliegenden Filter für $f_0 = 4$ MHz zu sehen sind. Das Anti-Aliasing Filter hingegen hat seinen Bereich maximaler Dämpfung genau in den Aliasingbändern. Diese Dämpfung sinkt zwar auch mit steigender Mittenfrequenz (vgl. Kapitel 3.5), jedoch ist der Anteil des weißen Rauschens, der sich direkt im Übertragungsband befindet, immer noch größer, als der Anteil der aus den Aliasingbändern ins Übertragungsband gefaltet wird, so dass das erzielbare SNR am Entscheidereingang mit steigender Mittenfrequenz nur geringfügig sinkt. Auffällig an den Simulationsergebnissen in Bild 3.38 ist, dass für Mittenfrequenzen die größer als etwa 4 MHz sind, das Anti-Image Filter mit $N = 6$ zu einem schlechteren SNR am Entscheidereingang führt, als das entsprechende kürzere Filter mit $N = 3$. Der Grund dafür ist, wie in

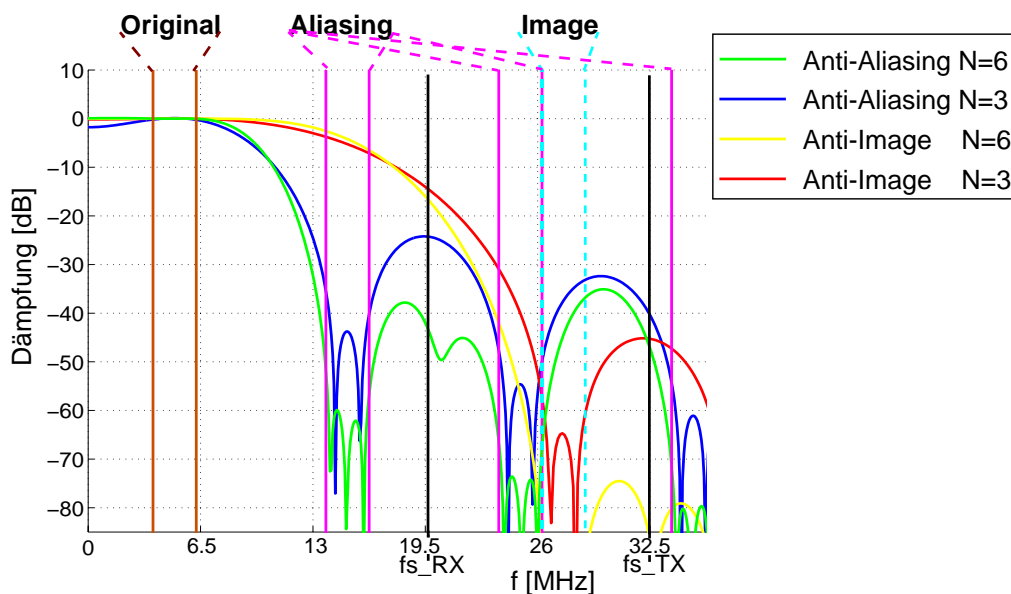


Bild 3.39: Dämpfungsverläufe der Anti-Image und Anti-Aliasing Filter für $f_0 = 4$ MHz

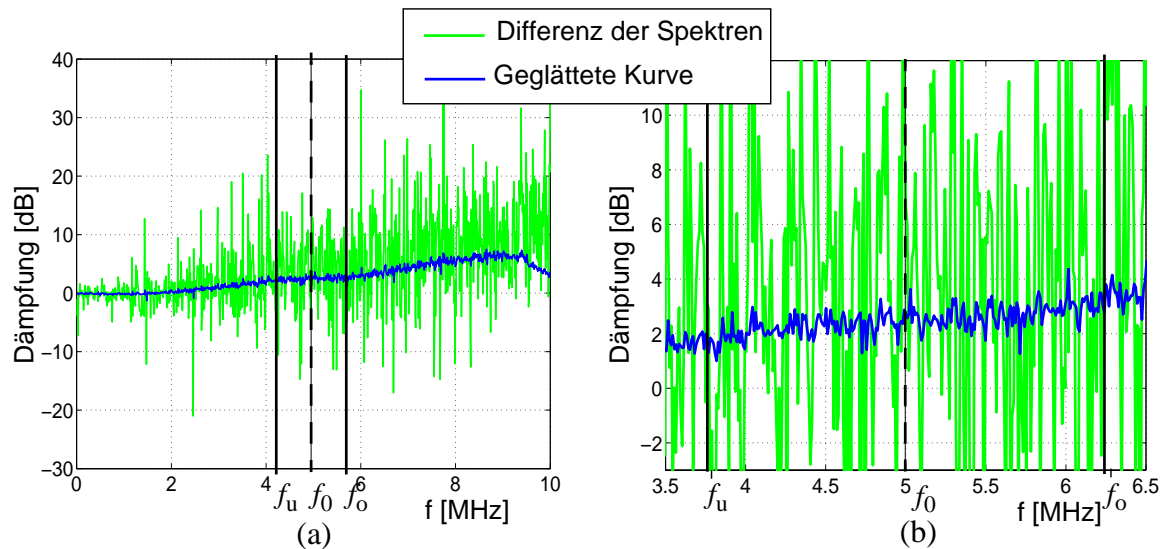


Bild 3.40: Differenz der Spektren des Rauschsignals am Ausgang des SRC Filters für Anti-Image und Anti-Aliasing Filterung für $f_0 = 5$ MHz und $N = 6$. (a) Darstellung für $0 \leq f \leq f_a/2$. (b) Darstellung im Bereich des Signalbandes

Bild 3.39 zu erkennen, dass das längere Filter zwar in den Bereichen in denen die Images angesiedelt sind eine höhere Dämpfung besitzt, dass allerdings in dem ersten Aliasingband die Dämpfung des kürzeren Filters höher ist und somit insgesamt weniger Rauschen in das Übertragungsband gefaltet wird.

Spektrum des gefilterten Rauschens bei Anti-Image und Anti-Aliasing Filterung

Dieser Effekt ist auch in Bild 3.40 zu erkennen. Hier wurde die Simulation für eine Mittenfrequenz von 5 MHz durchgeführt. Zur Verdeutlichung wurde hier lediglich weißes Rauschen angesetzt. In Bild 3.40 ist die Differenz des sich so ergebenden Rauschspektrum des Empfangssignals für Anti-Image und Anti-Aliasing Filterung gezeigt. Die Simulation wurde für 10^6 Symbole durchgeführt. Die sich ergebende Differenz der Spektren wurde in Bild 3.40 zusätzlich durch Tiefpassfilterung geglättet. Man erkennt, dass das Rauschspektrum in dem Übertragungsband für Anti-Image Filterung etwa um 2 dB größer ist als für Anti-Aliasing Filterung.

Abtastratenreduktion bei Vorhandensein eines starken Störers außerhalb des Übertragungsbandes

Die nächste Simulation zeigt die Auswirkung von farbigem Rauschen das durch Vorfilterung unzureichend gedämpft wurde. Die Spektren am Eingang des Empfängers, sowie das ideale Spektrum am Ausgang des Empfängers sind in Bild 3.41 gezeigt. Die Mittenfrequenz liegt hier bei 6 MHz. In dieser Simulation ist ein Störer mit Mittenfrequenz 14,35 MHz und Bandbreite 1,7 MHz vorhanden. Die spektrale Leistungsdichte des Störsignals ist um 20 dBm/Hz geringer als die des zu detektierenden Signals. Wie in Bild 3.41 zu erkennen ist, überlappt sich das Spektrum des Störers mit dem ersten Aliasingband. Daher ist es in diesem Fall besonders wichtig, dass das SRC Filter genau in diesem Bereich eine hohe Dämpfung aufweist, wie es bei Verwendung eines Anti-Aliasing Filters erfüllt ist. Zur Abtastratenumsetzung wird ein Least Squares Filter mit den Parametern $N = 3$, $K = 3$ und $J = 3$ verwendet. Bild 3.41 zeigt die Spektren nach der Abtastratenumsetzung bei Verwendung eines Anti-Image, bzw. eines Anti-Aliasing Filters. Die Spektren wurden jeweils getrennt für Signal und Rauschen aufgenommen. Es ist zu erkennen, dass die Spektren des gefilterten Sendesignals sich kaum unterscheiden, während das Rauschsignal bei Verwendung eines Anti-Image Filters im Bereich des Übertragungsbandes mit etwa 10 dB nur unzureichend gedämpft wird. Im Gegensatz dazu wird es bei Verwendung eines Anti-Aliasing Filters um etwa 70 dB mehr gedämpft.

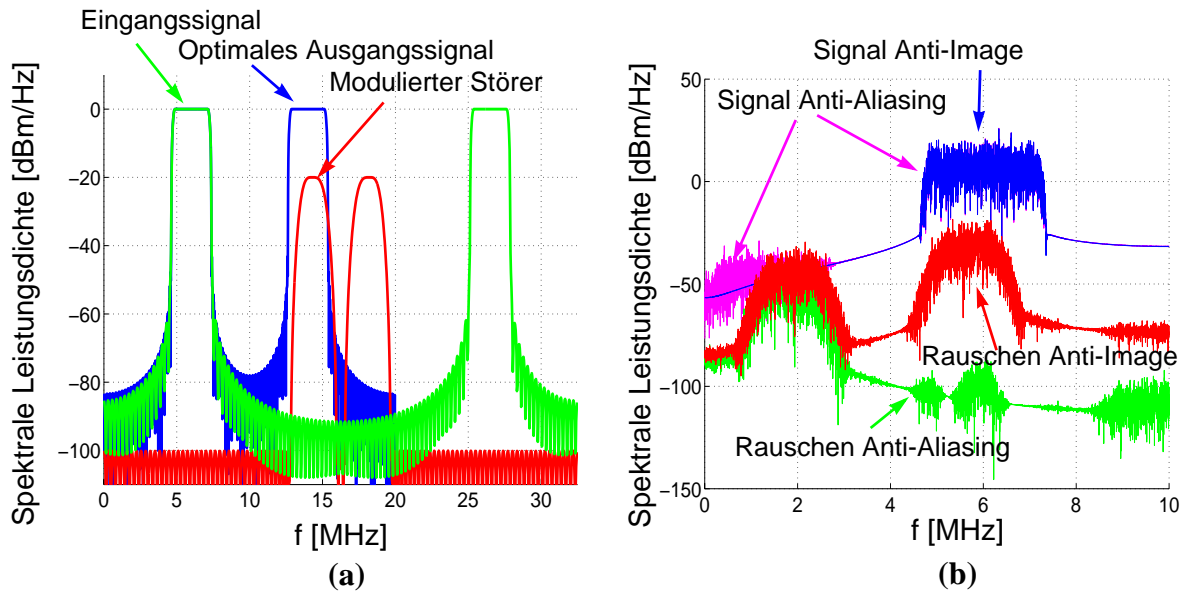


Bild 3.41: Spektren von Signal und Rauschen (a) am Eingang des SRC Filters, sowie optimales Spektrum am Ausgang (b) am Ausgang des SRC Filters

Zusammenfassend zeigen die Simulationen, dass bei Verwendung eines Anti-Aliasing Filters, zur Abtastratenumsetzung Filter relativ geringer Länge ausreichend sind. Dies gilt insbesondere auch bei einer Signalverarbeitung im Bandpassbereich. Lediglich bei sehr hohem SNR und einem Signalband, das im Vergleich zur Abtastfrequenz bei sehr großen Frequenzen angesiedelt ist, ist hier mit einer Verschlechterung des Systemverhaltens zu rechnen, bzw. ein höherer Aufwand zur Filterung erforderlich.

3.7 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden rein digitale Methoden zur Synchronisation, sowie zur Abtastratenumsetzung vorgestellt. Besonderer Wert wurde hierbei auf die Abtastratenumsetzung im Bandpassbereich gelegt, die in dieser Art noch nicht in der Literatur zu finden ist. Es stellt sich heraus, dass bei dem betrachteten Einsatzgebiet der drahtgebundenen Kommunikation, Signalverarbeitung im Bandpassbereich besonders dann vorteilhaft erscheint, wenn das Übertragungsband im Vergleich zur Nyquistfrequenz bei nicht zu hohen Frequenzen angeordnet ist. Insgesamt sind allgemeingültige vergleichende Aussagen bezüglich des Implementierungsaufwands verschiedener Strukturen allerdings nur bedingt zu treffen, da dieser zum einen stark von den Randparametern abhängt und andererseits kaskadierte Strukturen nahezu beliebig kombinierbar sind. Auch reicht zu einem allgemeinen Vergleich eine reine Betrachtung der erforderlichen Multiplikationen und Additionen pro Zeiteinheit nicht aus.

Speziell zur Dezimation mit einem irrationalen Verhältnis der Abtastfrequenz am Ein- und Ausgang besteht der historische Ansatz in einer Verwendung von Interpolationsfiltern. Durch geschickte Implementierungen, etwa mit Hilfe der transponierten Farrow-Struktur, ist jedoch auch in diesen Anwendungsfällen eine Anti-Aliasing Filterung möglich. Dies ist besonders bei einer Signalverarbeitung im Bandpassbereich von Bedeutung, da die verwendeten Bandpassfilter meist außerhalb des Frequenzbereiches maximaler Dämpfung nur eine relativ geringe Dämpfung

fung aufweisen. Bei der Verwendung von Anti-Aliasing Filtern ist die Performance bis zu relativ hohen Frequenzen nur wenig von der Trägerfrequenz abhängig.

Zur Implementierung wurden speziell zwei Verfahren als vorteilhaft herausgearbeitet. Bei dem ersten werden Impulsantworten des SRC Filters für verschiedene Werte der fraktionalen Verzögerung gespeichert. Im Betrieb wird dann zu jedem Zeitpunkt der Koeffizientensatz geladen, dessen korrespondierende Verzögerung dem aktuell geforderten μ am nächsten kommt. Verbessern kann man dieses Verfahren, indem man die aktuellen Koeffizientensätze aus mehreren gespeicherten interpoliert. Beim zweiten Verfahren wird die Impulsantwort des SRC Filters unter der Verwendung von Polynomen approximiert. Zur Implementierung bietet sich hier die sogenannte Farrow-Struktur an. Hierbei erweist sich insbesondere die transponierte Struktur als vorteilhaft, die sich zur Anti-Aliasing Filterung eignet, da sie Polynome mit einer Länge der Abtastperiode des Ausgangs verwendet und Übertragungsfunktionen damit implementierter Filter somit Nullstellen in den Aliasing Regionen aufweisen. Die Koeffizientensätze der Farrow-Struktur können durch eine einfache Modifikation symmetrisch gestaltet werden, was eine Reduzierung der erforderlichen Multiplikationen zur Erzeugung eines Ausgangssignals erlaubt. Für den Entwurf von SRC Filtern wurden drei verschiedene Verfahren angegeben, die das optimale Filter auf verschiedene Art approximieren. Es sind dies maximal flache Approximation einer gegebenen Frequenz, Minimierung der quadratischen Fehlabweichung von der Zielfunktion, sowie Approximation der Zielfunktion im Chebyshev Sinne. Die Koeffizienten einer Farrow-Struktur Implementierung lassen sich für die ersten beiden genannten Verfahren in geschlossener Form angeben, allgemein wurde dafür ein auf Kurvenanpassung beruhendes Verfahren vorgeschlagen.

Die beschriebenen Entwurfsmethoden wurden anschließend anhand sich ergebender Filterfunktionen verglichen. Hierbei zeigt sich, dass das maximal flache Verfahren, bei dem mit der Mittenfrequenz nur ein Entwurfparameter vorgegeben werden kann, den anderen beiden Verfahren insgesamt unterlegen ist. Bei dem Least Squares, sowie dem Chebyshev Verfahren kann als zusätzlicher Parameter die Bandbreite vorgegeben werden. Diese beiden Verfahren optimieren die Übertragungsfunktion in einem unterschiedlichen Sinne, mit diesen Verfahren entworfene SRC Filter zeigen aber insgesamt ein vergleichbares Verhalten.

Abschließend wurden Ergebnisse von Zeitbereichssimulationen gezeigt. Bei diesen Simulationen wurde ein adaptiver Entzerrer im Empfänger eingesetzt, der etwa Verzerrungen die das SRC Filter hervorruft in gewissem Maße korrigieren kann. Es zeigt sich, dass bei Vorhandensein eines adaptiven Entzerrers, relativ einfach zu implementierende SRC Filter in den meisten Fällen ausreichend sind. Allerdings muss spezieller Wert darauf gelegt werden, dass bei der Abstratenumsetzung möglichst wenig Rauschen in das Übertragungsband gefaltet wird.

Betont werden soll, dass sich die beschriebenen Techniken für beliebige Modulationsverfahren anwenden lassen. So erscheint etwa die Anwendung einer Abstratenumsetzung im Bandpassbereich für Discrete Multitone (DMT) modulierte Verfahren als sinnvoll. Bei diesem Verfahren wird das gesamte Übertragungsband durch Modulation mit einer inversen diskreten Fouriertransformation in mehrere Einzelbänder (Töne) zerlegt. In der Praxis werden meist die unteren Töne ausgeblendet, so dass das sich ergebende Signal eine Bandpasscharakteristik aufweist.

4 Entzerrung

Bei der Übertragung eines informationstragenden Signals zwischen zwei entfernten Punkten wird dieses Signal normalerweise gestört. Die Störungen bestehen hier aus additivem Rauschen, sowie aus Verzerrungen des Sendesignals, die durch die frequenzselektiven Eigenschaften des Übertragungskanals hervorgerufen werden. Auf der Empfangsseite versucht man daher die Auswirkungen dieser Störer möglichst zu minimieren. Wie in Kapitel 2.3 gezeigt, stellt die Entzerrung des Empfangssignals ein bewährtes, suboptimales Konzept zur Dekodierung des Empfangssignals dar.

In Kapitel 4.1 werden zunächst grundsätzliche Entzerrerstrukturen hergeleitet. Es sind dies im Wesentlichen der lineare Entzerrer (LE) und der entscheidungsrückgekoppelte Entzerrer (*Decision Feedback Equalizer*, DFE). Hier wird auch eine effektive Struktur zur Entzerrung im Bandpassbereich vorgestellt. Für beide Entzerrerstrukturen werden im Folgenden die optimalen Koeffizientengewichte zur Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers hergeleitet. Zunächst wird in Kapitel 4.2 der theoretische Fall beliebig langer Entzerrer untersucht. Die hier erhaltenen Lösungen gewähren einen tiefen Einblick in die Wirkungsweise der betrachteten Entzerrer. Mit praktisch realisierbaren Entzerrern endlicher Länge befasst sich Kapitel 4.3.

Anschließend werden in Kapitel 4.4 die erhaltenen Ergebnisse von beliebig langen und praktisch realisierbaren Entzerrern, sowie von linearen und entscheidungsrückgekoppelten Entzerrern verglichen. Hier werden darüber hinaus Vorteile herausgearbeitet, die fraktionale Entzerrer, im Vergleich zu Entzerrern deren Eingangsgrößen mit dem Symboltakt abgetastet sind, aufweisen.

Ein wichtiges Problem bei der Verwendung entscheidungsrückgekoppelter Entzerrer ist das mögliche Auftreten von Fehlerfortpflanzungen. Mit den Auswirkungen, sowie möglichen Gegenmaßnahmen dieses Effekts, beschäftigt sich Kapitel 4.5.

Weiterhin stellt sich heraus, dass die erhaltenen Koeffizientengewichte, die sich durch Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers ergeben, bei vorhandenem additivem Rauschen zu einem nicht mittelwertfreien Entzerrerausgangssignal führen. Zur Erzielung der minimalen Bitfehlerrate müssen sie daher, wie in Kapitel 4.6 gezeigt, noch skaliert werden. Anschließend werden in Kapitel 4.7, anhand der in diesem Kapitel gezeigten Verfahren, optimale Koeffizientengewichte praktisch realisierbarer Entzerrer für typische VDSL Szenarien berechnet und die damit erzielbaren SINR-Werte verglichen. In Kapitel 4.8 werden schließlich die wesentlichen Ergebnisse dieses Abschnitts zusammengefasst.

Da sowohl die Eigenschaften des Übertragungskanals, als auch die Störumgebung, für gewöhnlich nicht von vorneherein bekannt, und darüberhinaus unter Umständen auch zeitvariant sind, werden die in diesem Kapitel gefundenen optimalen Koeffizientensätze in der Praxis normalerweise durch adaptive Verfahren approximiert. Dies ist Inhalt von Kapitel 5.

4.1 Entzerrerkonzepte

In diesem Abschnitt werden zwei sehr häufig eingesetzte Entzerrertypen, namentlich in Kapitel

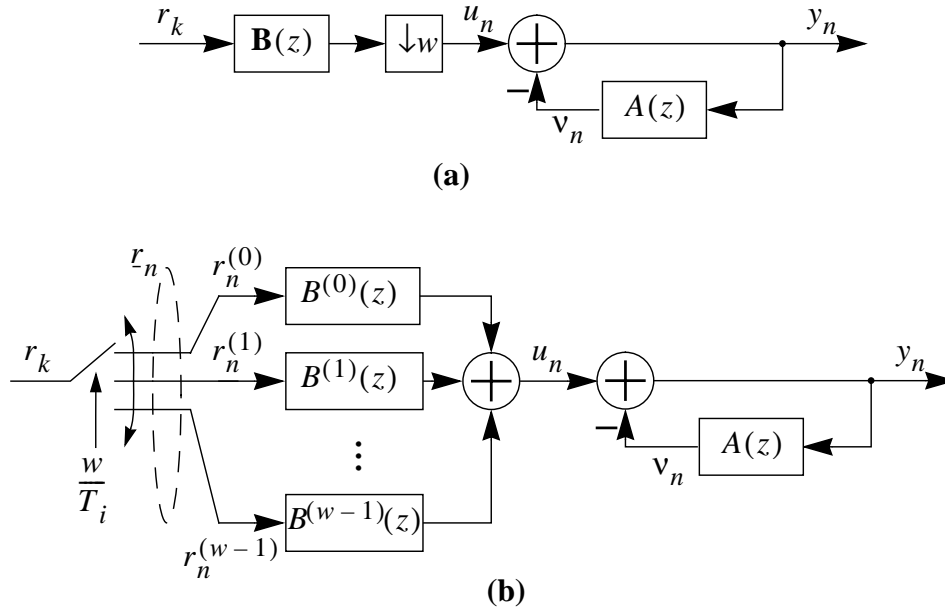


Bild 4.1: Linearer IIR Entzerrer in Standard Implementierung
(a) Multiratenmodell, (b) Multikanalmodell

4.1.1 der lineare Entzerrer und in Kapitel 4.1.2 der entscheidungsrückgekoppelte Entzerrer vorgestellt. Eine wesentliche Begründung für die weite Verbreitung dieser Entzerrertypen liegt in ihrer relativ einfachen Realisierbarkeit. In Kapitel 4.1.3 werden schließlich noch Unterschiede von Entzerrung im Basisband- und im Bandpassbereich beschrieben.

4.1.1 Lineare Entzerrer

Zunächst soll der lineare Entzerrer betrachtet werden, der in Bild 4.1a als Multiratenfilter und in Bild 4.1b als Multikanalfilter dargestellt ist. Das Multiraten-, bzw. Multikanalmodell wurde hierbei in Kapitel 2.4 erläutert. Der Entzerrer ist als IIR Filter implementiert, der sich aus einem rein rekursiven, sogenannten *Auto Regressive* (AR) Filter, und einem transversalen, sogenannten *Moving Average* (MA) Filter, zusammensetzt.

Das MA Filter sei allgemein um den Faktor w überabgetastet. Die z -Transformierte seiner Impulsantwort ist durch einen Vektor $\mathbf{B}(z)$ der Länge w gegeben, dessen Komponenten $B^{(k)}(z)$ die einzelnen Polyphasen repräsentieren. Er ist gegeben durch

$$\mathbf{B}(z) = [B^{(0)}(z) \ B^{(1)}(z) \ \dots \ B^{(w-1)}(z)]^T = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 z^{-1} + \dots + \mathbf{b}_{N-1} z^{-N+1}, \quad (4.1)$$

wobei die einzelnen Komponenten des Vorwärtsfilters (*Feedforward Filter*, FFF) \mathbf{b}_n durch die in (2.25) definierten $w \times 1$ -Vektoren $\mathbf{b}_n = [b_n^{(0)} \ b_n^{(1)} \ \dots \ b_n^{(w-1)}]^T$ gegeben sind, die die Filterkoeffizienten der einzelnen Polyphasen beinhalten. Die Größe N bezeichnet die Länge von $\mathbf{B}(z)$ in Symbolen. Insgesamt hat das Filter also $w \cdot N$ Parameter.

Das gemeinsame AR Filter der Länge M sei durch $A(z) = a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}$ gegeben. Die Übertragungsfunktion des gesamten IIR Filters ist somit gegeben durch

$$\frac{\mathbf{B}(z)}{1 + A(z)} = \frac{\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 z^{-1} + \dots + \mathbf{b}_{N-1} z^{-N+1}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}}. \quad (4.2)$$

Aus Stabilitätsgründen muss das gemeinsame Nennerpolynom in (4.2) minimalphasig sein. Das Signal am Entzerrerausgang kann somit als

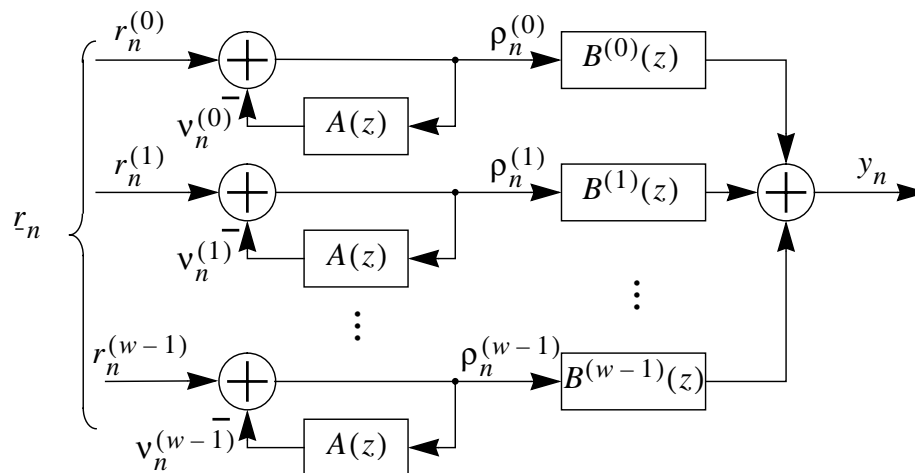


Bild 4.2: Äquivalente Struktur zu Bild 4.1b

$$y(n) = \mathbf{b}^T \frac{\mathbf{r}(n)}{1 + A(q)} \quad (4.3)$$

geschrieben werden. Hierbei bezeichnet q den Verschiebeoperator, d.h. $qx(n) = x(n-1)$. Diese Darstellung wurde hier anstelle der z -Transformierten gewählt, weil die Größen in (4.3) im Zeitbereich gegeben sind.

Die in (4.3) auftretenden Vektoren \mathbf{b} und $\mathbf{r}(n)$, die jeweils die Länge $N \cdot w$ besitzen, sind in (2.25) - (2.27) definiert. Wird das IIR Filter mit einem festen Koeffizientensatz implementiert, sind beide Teilfilter LTI Systeme. In diesem Fall kann man die Verarbeitungsreihenfolge, also die Anordnung des AR und des MA Filters, vertauschen. Dies weist unter Umständen bei einer adaptiven Koeffizienteneinstellung Vorteile auf (siehe z.B. Kapitel 5.3 und Kapitel 6.3.2.2), allerdings ist anzumerken, dass die Voraussetzung der Zeitinvarianz in diesem Fall nicht mehr gilt, so dass die Verarbeitungsreihenfolge nur näherungsweise, unter der Voraussetzung einer kleinen Schrittweite zur Koeffizientennachführung, austauschbar ist. Bei Betrachtung des Multikanalmodells von Bild 4.1b wird deutlich, wie man verfahren muss, wenn man die Reihenfolge des MA und des AR Filters vertauscht. Für den Fall fester Koeffizientengewichte gilt für das Ausgangssignal $y(n)$

$$\begin{aligned} y(n) &= u(n) - \sum_{l=1}^M a(l)y(n-l) = u(n) - a(n) \otimes y(n-1) \\ &= \sum_{\alpha=0}^{w-1} r^{(\alpha)}(n) \otimes b^{(\alpha)}(n) - a(n) \otimes y(n-1) \\ &= \sum_{\alpha=0}^{w-1} (r^{(\alpha)}(n) \otimes b^{(\alpha)}(n) - a(n) \otimes r^{(\alpha)}(n-1) \otimes b^{(\alpha)}(n-1)) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Das AR Filter $A(z)$ muss also in allen einzelnen Polyphasen des Empfangsfilters implementiert werden. Die entsprechende Struktur ist in Bild 4.2 gezeigt. Eine identische Struktur kann prinzipiell auch für das Multiratenmodell von Bild 4.1a gegeben werden, diese ist jedoch aufwändiger herzuleiten, da das MA und das AR Filter auf unterschiedlichen Raten laufen und somit zusätzliche Elemente zur Ratenanpassung erforderlich sind.

Die Verwendung eines rekursiven Filters zur Entzerrung bringt eine Reihe von Vorteilen. So kann allgemein ein MA Kanal mit einem AR Entzerrer gleicher Länge exakt invertiert werden. In [126] wurde gezeigt, dass ein rekursiver Entzerrer im Vergleich zu einem linearen Entzerrer gleicher Länge allgemein ein besseres Systemverhalten zeigt (siehe auch [107]).

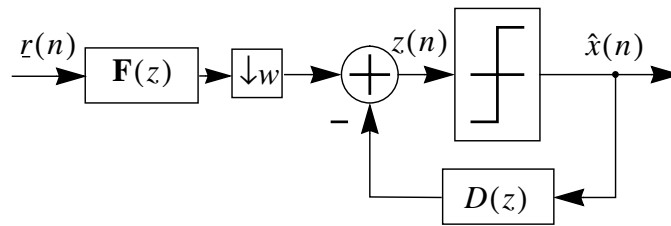


Bild 4.3: Modell eines DFE

4.1.2 Entscheidungsrückgekoppelte Entzerrer

Nachteilig an der Verwendung eines linearen Entzerrers ist, dass hier bei Frequenzen, die durch den Entzerrer eine Verstärkung erfahren, immer auch das Rauschen verstärkt wird. Dies tritt besonders deutlich bei Kanälen die tiefe Einbrüche im Frequenzgang zeigen auf. Weist die Kanalübertragungsfunktion sogar Nullstellen auf, wird Entzerrung durch einen LE unmöglich, da bei den entsprechenden Frequenzen eine unendliche Verstärkung auftreten müsste. Kanäle mit Nullstellen treten etwa bei Basisband xDSL-Verfahren, wie ISDN und SHDSL, auf. Hier sperren die auf der Sende- und Empfangsseite vorhandenen Übertrager die Gleichstromkomponenten, also den Frequenzbereich um 0 Hz. Unter der Annahme korrekter Entscheidungen lassen sich jedoch die Nachläufer der Kanalimpulsantwort prinzipiell exakt eliminieren. Hierfür wird ein zweites Filter $D(z)$ eingeführt, dessen Eingangssignale die bereits entschiedenen Symbole $\hat{x}(n)$ sind, und dessen Impulsantwort durch die um T verzögerten Nachläufer der gemeinsamen Impulsantwort von Kanal und Vorwärtsentzerrer gegeben ist. Der Ausgang des Rückkoppelers (*Feedback Filter*, FBF) $D(z)$ wird dann vom Ausgang des Vorwärtsfilters subtrahiert. Durch den Symbolentscheider ist der so erhaltene DFE nichtlinear. Das Blockschaltbild eines DFE ist in Bild 4.3 gezeigt. Zur Unterscheidung mit dem LE wird das FFF hier mit $\mathbf{F}(z)$ bezeichnet. Durch den im Rückkoppelzweig befindlichen Entscheider ist die Stabilität des Systems sichergestellt, auch wenn $D(z)$ nicht minimalphasig ist. Hauptvorteil des DFE ist, dass die am Eingang des Rückkoppelers anliegenden entschiedenen Symbole - unter der Annahme richtiger Entscheidungen - rauschfrei sind. Daher trägt das Rückkoppelers nicht zur Rauschverstärkung bei.

Die Koeffizienten eines transversalen Entzerrers lassen sich allgemein in einen Hauptwert (*Cursor*), sowie in Koeffizienten davor (*Precursor*) und danach (*Postcursor*) unterscheiden. Die Precursor-Koeffizienten entzerren hierbei die Vorläufer, die Postcursor-Koeffizienten die Nachläufer der Kanalimpulsantwort. Im Gegensatz dazu werden beim DFE die Nachläufer durch $D(z)$ eliminiert. Trotzdem sind im allgemeinen die Postcursor-Koeffizienten von $\mathbf{F}(z)$ von Null verschieden, da $\mathbf{F}(z)$ nicht nur die Aufgabe hat, die Kanalimpulsantwort zu entzerren, sondern auch das Rauschen zu decorrelieren, also weiß zu machen. Lediglich wenn das additive Rauschen am Eingang des linearen Entzerrers bereits weiß ist, kann auf die Postcursor-Koeffizienten des Vorwärtsfilters verzichtet werden. Dieser Fall tritt aber in der Praxis quasi nicht auf, da die Eingangssignale in der Regel bereits eine Vorfilterung erfahren haben.

Eine alternative Implementierung eines DFE wurde in [15] vorgeschlagen. Hierbei wird, wie in Bild 4.4 gezeigt, das Rückkoppelers zur Prediktion des Ausgangssignals des Vorwärtsfilters verwendet, so dass diese Struktur in der Literatur auch als *prädiktiver DFE* zu finden ist. Es lässt sich zeigen, dass der mit dieser Struktur erreichbare MSE, im Falle eines unendlich langen Vorwärtsfilters, zu der des in Bild 4.3 gezeigten normalen DFE identisch ist [133]. In diesem Fall sind auch die optimalen Koeffizientensätze beider Strukturen identisch [134]. Bei einer adaptiven Realisierung des prädiktiven DFE erweist es sich jedoch als nachteilig, dass beide Einzelfilter mit unterschiedlichen Fehlerkriterien adaptiert werden. Der Standard DFE, dessen Einzelfilter gemeinsam den MSE minimieren, zeigt daher in diesem Fall allgemein ein besseres

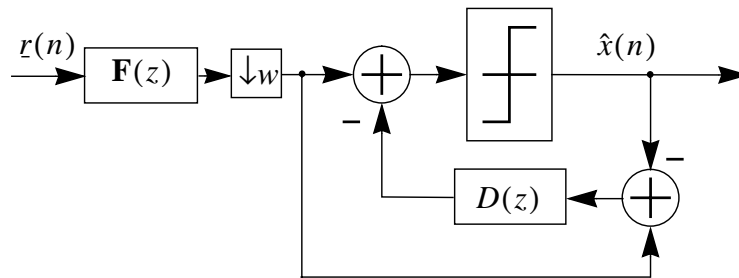


Bild 4.4: Modell eines prädiktiven DFE

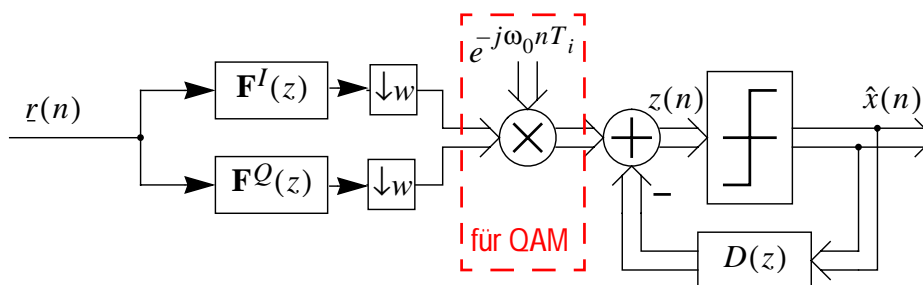


Bild 4.5: DFE implementiert mit einem PS-FSE für QAM, bzw. CAP Übertragung

Verhalten [133]. Wie etwa in [133] und [134] gezeigt, lässt sich der prädiktive DFE jedoch im Gegensatz zum Standard DFE gut mit einem Viterbi Dekoder kombinieren. Als Eingangssignal des Viterbi Dekoders wird in diesem Fall das Ausgangssignal des Vorwärtsfilters verwendet, das Rückkoppelfilter ist lediglich zur Adaption vorhanden. Dieser Ansatz wird in dieser Arbeit jedoch nicht weiter verfolgt.

4.1.3 Implementierung eines Entzerrers im Bandpassbereich

Eine effektive Art zur Implementierung eines Entzerrers für Bandpass-modulierte Signale ist durch das sogenannte *Phase Splitting FSE* (PS-FSE) [53], [81], [125] gegeben, bei dem das lineare Filter im Bandpassbereich betrieben wird. Das reellwertige Eingangssignal wird durch das Vorwärtsfilter dabei in Inphase- und Quadraturkomponente aufspaltet. Hierfür besteht das gesamte Filter aus zwei reellwertigen Einzelfiltern, deren Impulsantworten im idealen Fall zueinander Hilbert transformiert sind. Diese Filter sind in Bild 4.5 mit $F^I(z)$ und $F^Q(z)$ bezeichnet, wobei die hochgestellten Indizes für Inphase-, bzw. Quadratur-Komponente stehen. Das Ausgangssignal des Filters kann somit als komplexwertig aufgefasst werden. Da das Filter im Bandpassbereich betrieben wird, läuft es intern meist auf einer relativ hohen Rate $w \cdot f_T$, wobei w hier etwa im Bereich von drei bis zehn liegen kann. Intern dezimiert das Filter jedoch, so dass nur Ausgangswerte im Symboltakt erzeugt werden. Vorteile dieses Verfahrens sind, dass die Multiplizierer zum Mischen in das Basisband wegfallen und die Trägerfrequenz nicht mehr exakt geschätzt werden muss. Außerdem wird eine vorgeschaltete Abtastratenumsetzung vereinfacht, da die Übertragungsfunktionen der dafür verwendeten Filter nur in einem relativ kleinen Frequenzbereich optimiert werden müssen und diese Filter zudem ein reellwertiges Eingangssignal aufweisen. Genauere Untersuchungen hierzu finden sich in Kapitel 3.5.

Für den Fall, dass am Sender QAM verwendet wird, muss der Ausgang des Transversalentzerrers, wie in Kapitel 2.1 erklärt, gedreht werden, bei CAP Modulation ist hingegen keine derartige Drehung erforderlich. Die für beide Modulationsverfahren sehr ähnliche Entzerrerstruktur wird in Kapitel 6.4 zur blinden Entscheidung des Modulationsverfahrens verwendet.

4.2 Optimale Koeffizienten beliebig langer Entzerrer

In diesem Abschnitt werden in Kapitel 4.2.1 und Kapitel 4.2.2 die - in einem gewissen Sinne - optimalen Koeffizientengewichte des LE und des DFE für den Grenzfall beliebig langer Entzerrer hergeleitet. Anschließend werden in Kapitel 4.2.3 die mit den beiden Entzerrertypen minimal erreichbaren Restfehler berechnet.

4.2.1 Optimale Koeffizienten eines linearen IIR Entzerrers

In diesem Abschnitt werden optimale Entzerrerkoeffizienten eines beliebig langen linearen Entzerrers hergeleitet. Zunächst werden in Kapitel 4.2.1.1 Bedingungen aufgezeigt, bei denen ein lineares Filter einen Kanal perfekt entzerren kann. Diese Bedingungen sind zwar in der Praxis quasi nie gegeben, dennoch sind die Ergebnisse von einem theoretischen Standpunkt aus betrachtet sehr interessant. In der Praxis lässt sich die Kanalimpulsantwort bei gleichzeitig vorhandenem Rauschen nur näherungsweise entzerren. Wichtige Optimierungskriterien zum Entzerrerdentwurf sind hierbei das in Kapitel 4.2.1.2 beschriebene Verfahren zur Nullstellenerzwingung, sowie das in Kapitel 4.2.1.3 beschriebene Verfahren, das zur Erzielung des minimalen mittleren quadratischen Fehlers (*minimum mean squared error*, MMSE) am Entzerrerausgang führt.

4.2.1.1 Bedingungen zur exakten Entzerrung

Unter bestimmten Bedingungen lässt sich durch Überabtastung ein Kanal mit einem FIR Filter endlicher Länge exakt entzerren. Die erforderlichen Bedingungen sind, dass kein Rauschen vorhanden ist, die einzelnen Polyphasen (vgl. Kapitel 2.4) keine gemeinsamen Nullstellen aufweisen und der lineare Entzerrer mindestens die Länge $N_C - 1$ besitzt. Dann ist das Gleichungssystem

$$B^{(0)}(z^{-1})C^{(0)}(z^{-1}) + \dots + B^{(w-1)}(z^{-1})C^{(w-1)}(z^{-1}) = z^{-\delta}, \quad (4.5)$$

das die z -Transformierte der in (2.22) definierten, im T -Raster gegebenen gemeinsamen Kanal-Entzerrer Impulsantwort Γ angibt, exakt lösbar [147], [167]. Das Symbol δ bezeichnet hierbei die Systemverzögerung, also die mit T normierte Zeit zwischen dem Senden und der Detektion eines beliebigen Symbols. In der Praxis ist naturgemäß mindestens die Voraussetzung der Rauschfreiheit verletzt. Trotzdem ist dieses Ergebnis in der Theorie sehr interessant und dient etwa häufig als Grundlage zum Entwurf von blinden Adaptionsalgorithmen, die auf Statistiken zweiter Ordnung basieren (siehe Kapitel 6.1.2.1).

4.2.1.2 Nullstellenerzwingung

Ein wichtiges Kriterium zur Berechnung eines in einem gewissen Sinn optimalen Koeffizien-

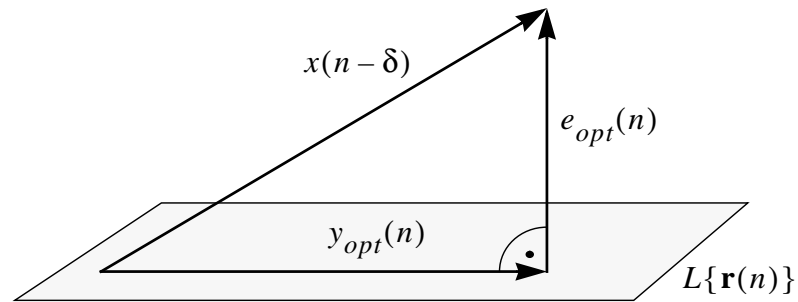


Bild 4.6: Geometrisches Analogon des Orthogonalitätstheorems

tensatzes ist das sogenannte *Zero Forcing* (ZF) Kriterium. Im Grenzfall, dass der Entzerrer unendlich lang und nichtkausal ist, invertiert ein damit berechneter Entzerrer den Kanalfrequenzgang und eliminiert somit die ISI am Entzerrerausgang. Für den Entzerrer $\mathbf{W}_{ZF}(z)$ gilt daher in diesem Fall

$$\mathbf{W}_{ZF}(z) = \mathbf{C}(z)^{-1}, \quad (4.6)$$

wobei die Invertierung hier komponentenweise zu verstehen ist. Hierbei ist $\mathbf{W}_{ZF}(z)$ ein $w \times 1$ Vektor von im Grenzfall unendlich langen IIR Filtern. Der Name ZF resultiert daher, dass die Gesamtimpulsantwort am Entzerrerausgang zu den Abtastzeitpunkten mit Ausnahme des Hauptwertes Nulldurchgänge hat. Es wird also die Einhaltung des Nyquist Theorems durch den Entzerrer erzwungen. Für den Fall, dass die Entzerrerrlänge endlich ist, gelten diese Aussagen nur noch näherungsweise. Nachteilig am ZF-Entzerrer ist, dass durch die Invertierung des Kanals das Rauschen in manchen Frequenzbereichen verstärkt wird.

4.2.1.3 Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers

Im Gegensatz zum ZF Entzerrers minimiert der MMSE, bzw. Wiener Entzerrer den Erwartungswert des quadrierten Fehlers am Entzerrerausgang $E(|e(n)|^2)$. Der Wert $e(n)$ ist hierbei die Differenz des entzerrten Signals vom Sendesignal. Er setzt sich aus gefiltertem Rauschen und Rest-ISI zusammen. Das MMSE Kriterium ist daher ein Kompromiss zwischen optimaler Kanalinvertierung, also minimaler Rest-ISI und minimaler Rauschverstärkung.

Grundsätzlich kann ein lineares Filter $\mathbf{W}(z)$ ein Ausgangssignal $y(n)$ erzeugen, das eine beliebige Linearkombination der Eingangssignale $\mathbf{r}(n)$ ist

$$y(n) = \mathbf{w}^T \mathbf{r}(n-l). \quad (4.7)$$

Das durch den Koeffizientenvektor \mathbf{w} gegebene Filter hat hier im theoretischen Grenzfall unendlich viele Koeffizienten. Der Vektor \mathbf{w} setzt sich analog zu \mathbf{b} in (2.25) zusammen aus Teilvektoren \mathbf{w}_n der Länge w , die gegeben sind durch

$$\mathbf{w}_n = \left[w_n^{(0)} \quad w_n^{(1)} \quad \dots \quad w_n^{(w-1)} \right]^T. \quad (4.8)$$

Betrachtet man die Signale am Entzerrereingang als Vektoren, dann liegt das Ausgangssignal in dem von diesen Vektoren aufgespannten Raum [72]. In Bild 4.6 ist dieser Raum mit $L\{\mathbf{r}(n)\}$ bezeichnet. Liegt das Sendesymbol $x(n-\delta)$ außerhalb dieses Vektorraumes, gilt für den optimalen MMSE-Schätzwert $y_{opt}(n)$, dass der resultierende minimale Fehler $e_{opt}(n) = x(n-\delta) - y_{opt}(n)$ orthogonal zu den Eingangssignalen und somit zu $L\{\mathbf{r}(n)\}$ ist. Dies bedeutet, dass der im MMSE-Sinn optimale Fehler unkorreliert mit den beobachteten Daten ist. Mathematisch lässt sich diese Bedingung schreiben als

$$\text{cov}[e_{opt}(n), \mathbf{r}(n-k)] = \mathbf{0}^T, \quad (4.9)$$

wobei gilt $\text{cov}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = E(\mathbf{x}\mathbf{y}^H) - E(\mathbf{x})E(\mathbf{y}^H)$. Falls keine a priori Information der gesendeten Signale vorliegt, vereinfacht sich dies zu $\text{cov}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = E(\mathbf{x}\mathbf{y}^H)$. In diesem Fall bedeutet dies, dass die Sendesignale voneinander statistisch unabhängig und gleichverteilt sind. Schreibt man das Fehlersignal $e(n)$ als

$$e(n) = x(n-\delta) - \mathbf{w}^T \mathbf{r}(n-l), \quad (4.10)$$

dann gilt für das im MMSE-Sinn optimale (Wiener) Filter $\mathbf{W}_{opt}(z)$,

$$E(x(n-\delta)\mathbf{r}^H(n-k)) - E\left(\left\{\sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{w}_{opt,l}^T \mathbf{r}(n-l)\right\} \mathbf{r}^H(n-k)\right) = \mathbf{0}^T. \quad (4.11)$$

Da im Rest dieses Kapitels im Wesentlichen Wiener Filter berechnet werden, wird auf die explizite Mitführung des Subscripts „opt“ verzichtet. Mit Definition des Kreuzkorrelationsvektors $\mathbf{p}_{xr}(k) = E(x(n-\delta)(\mathbf{r}^H(n-k)))$ der Dimension $1 \times N \cdot w$ und der Autokorrelationsmatrix $\mathbf{R}_r(k) = E(\mathbf{r}(n)\mathbf{r}^H(n-k))$ der Dimension $N \cdot w \times N \cdot w$ lässt sich (4.11) schreiben als

$$\mathbf{p}_{xr}(n) - \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{w}^T(l) \mathbf{R}_r(n-l) = \mathbf{0}^T. \quad (4.12)$$

Durch z -Transformation von (4.12) gelangt man schließlich zu der Gleichung

$$\mathbf{S}_{xr}(z) - \mathbf{W}^T(z) \mathbf{S}_r(z) = \mathbf{0}^T, \quad (4.13)$$

wobei

$$\mathbf{S}_{xr}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{p}_{xr}(k) z^{-k} = z^{-\delta} \mathbf{C}^H(1/z^*) \quad (4.14)$$

die z -Transformierte der Kreuzkorrelation $\mathbf{p}_{xr}(k)$ bezeichnet und

$$\mathbf{S}_r(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{R}_r(k) z^{-k} = \mathbf{C}(z) \mathbf{C}^H(1/z^*) + \mathbf{R}_n(z) \quad (4.15)$$

das Leistungsdichtespektrum (*Power Spectral Density*, PSD) der Sequenz $\{\mathbf{r}(n)\}$ in der z -Ebene darstellt. Die Größe $\mathbf{R}_n(z) = \mathbf{C}_n(z) \mathbf{C}_n^H(1/z^*)$ bezeichnet die Rauschkorrelationsmatrix der Dimension $w \times w$. Das Wiener Filter ist somit gegeben durch

$$\mathbf{W}^T(z) = \mathbf{S}_{xr}(z) \mathbf{S}_r(z)^{-1} = z^{-\delta} \mathbf{C}^H(1/z^*) \cdot (\mathbf{C}(z) \mathbf{C}^H(1/z^*) + \mathbf{R}_n(z))^{-1}. \quad (4.16)$$

Um das Filter $\mathbf{W}(z)$ nach (4.2) in einen AR Anteil $A(z)$ und einen MA Anteil $\mathbf{B}(z)$

$$\mathbf{W}(z) = \frac{\mathbf{B}(z)}{1 + A(z)} \quad (4.17)$$

aufzuteilen, wird in (4.16) $\mathbf{S}_r(z)$ zunächst durch spektrale Faktorisierung [32], [143] geschrieben als

$$\mathbf{S}_r(z) = \mathbf{C}(z) \mathbf{C}^H(1/z^*) + \mathbf{R}_n(z) = \mathbf{G}(z) \gamma \mathbf{G}^H(1/z^*), \quad (4.18)$$

wobei γ eine konstante $w \times w$ Matrix ist und $\mathbf{G}(z)$ der selben Dimension kausal, monisch¹ sowie minimalphasig ist.

1. Monisch bedeutet, dass die Einträge für z^{-1} Eins sind.

Die mehrdimensionale spektrale Faktorisierung in (4.18) lässt sich in zwei Teile aufspalten. Zunächst wird durch ein skalares Filter $D_n(z)$ das Rauschen dekorreliert. Die Größen nach Filterung mit diesem Rausch-Dekorrelationsfilter $D_n(z)$ werden im Folgenden durch $(\tilde{\bullet})$ bezeichnet. Das Spektrum $\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{r}}(z) = D_n(z)\mathbf{S}_{\mathbf{r}}(z)D_n^*(1/z^*)$ hat mit $\tilde{\mathbf{C}}(z) = \mathbf{C}(z)D_n(z)$ die Form

$$\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{r}}(z) = \tilde{\mathbf{C}}(z)\tilde{\mathbf{C}}^H(1/z^*) + \tilde{\mathbf{R}}_n = \tilde{\mathbf{G}}(z)\tilde{\gamma}\tilde{\mathbf{G}}^H(1/z^*), \quad (4.19)$$

wobei $\tilde{\mathbf{R}}_n = \text{diag}(\sigma_{n(k)}^2)$ die Diagonalmatrix der Dimension w darstellt, die die Rauschleistungen der einzelnen Polyphasen $\sigma_{n(k)}^2$ beinhaltet. Für den skalaren Fall kann in (4.25) die Größe $\tilde{\gamma}$ als die sogenannte mittlere Systemenergie (*System Average Energy*) [32] aufgefasst und durch folgende Gleichung berechnet werden

$$\log\left(\frac{\gamma}{\sigma_n^2}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log\left(\frac{1}{\sigma_n^2} |S_r(\theta)|^2 + 1\right) d\theta, \quad (4.20)$$

wobei der Logarithmus jede beliebige (gemeinsame) Basis haben kann.

Mit der Berechnungsvorschrift zur Matrixinversion [18] folgt aus (4.19) für das AR Filter

$$\tilde{\mathbf{G}}(z)^{-1} = \frac{\text{adj}(\tilde{\mathbf{G}}(z))}{\det(\tilde{\mathbf{G}}(z))} = \frac{\text{adj}(\tilde{\mathbf{G}}(z))}{1 + A(z)}. \quad (4.21)$$

Da $\tilde{\mathbf{G}}(z)$ minimalphasig ist, ist das AR-Filter $1/(\det(\tilde{\mathbf{G}}(z))) = 1/(1 + A(z))$ kausal und stabil. Im skalaren Fall ist der Zähler von (4.21) identisch Eins. Der Anteil $(\tilde{\gamma}\tilde{\mathbf{G}}^H(1/z^*))^{-1} \cdot \text{adj}(\tilde{\mathbf{G}}(z))$ ist Bestandteil von $\mathbf{B}(z)$. Die Größe $1 + A(z)$ lässt sich mit den Ergebnissen aus [107]

$$\det(\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{r}}(z)) = \det(\tilde{\mathbf{C}}(z)\tilde{\mathbf{C}}^H(1/z^*) + \tilde{\mathbf{R}}_n) = (1 + \tilde{\mathbf{C}}^H(1/z^*)\tilde{\mathbf{R}}_n^{-1}\tilde{\mathbf{C}}(z))\det(\tilde{\mathbf{R}}_n) \quad (4.22)$$

$$= (1 + \tilde{\mathbf{C}}^H(1/z^*)\tilde{\mathbf{R}}_n^{-1}\tilde{\mathbf{C}}(z))\det(\tilde{\mathbf{R}}_n) = \det(\tilde{\mathbf{G}}(z)\tilde{\gamma}\tilde{\mathbf{G}}^H(1/z^*)), \quad (4.23)$$

als der minimalphasige Faktor der skalaren Größe

$$1 + \tilde{\mathbf{C}}^H\left(\frac{1}{z^*}\right)\tilde{\mathbf{R}}_n^{-1}\tilde{\mathbf{C}}(z) = \prod_{k=1}^w \sigma_{n_k}^2 + \sum_{k=1}^w \tilde{C}_k(z)\tilde{C}_k^H\left(\frac{1}{z^*}\right) \prod_{\substack{l=1 \\ k \neq l}}^w \sigma_{n_l}^2 \quad (4.24)$$

schreiben. Für den Fall, dass die Rauschleistung in allen Polyphasen gleich groß ist, kann (4.24) geschrieben werden als

$$(\sigma_n^2)^{w-1} \left(\sigma_n^2 + \tilde{\mathbf{C}}(z)\tilde{\mathbf{C}}^H\left(\frac{1}{z^*}\right) \right) = (\sigma_n^2)^{w-1} \cdot \tilde{\mathbf{G}}(z)\tilde{\gamma}\tilde{\mathbf{G}}^H\left(\frac{1}{z^*}\right). \quad (4.25)$$

Das Filter $1/(1 + A(z))$ kann daher als Dekorrelationsfilter des überabgetasteten Eingangssignals $\tilde{\mathbf{r}}(n)$ aufgefasst werden, das Korrelationen zwischen $\{\tilde{\mathbf{r}}(k)\}$ und $\{\tilde{\mathbf{r}}(k + iw)\}$ eliminiert, wobei gilt $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ [186]. Das Filter ist also ein lineares Prediktionsfilter, das einen Symbolschritt vorausberechnet. Tastet man den Ausgang $\mathbf{u}(n)$ dieses Filters im Symboltakt ab, ist das sich ergebenden Signals weiß, aber noch nicht entzerrt. Das entsprechende Spektrum, das auch als sogenanntes gefaltetes Spektrum bezeichnet wird, ist daher flach. Das Signal $\mathbf{u}(n)$ wird auch als Innovation bezeichnet, da es jeweils nur die Informationen enthält, die nicht aus den davor liegenden Empfangsdaten ableitbar sind. Zu beachten ist, dass die einzelnen Polyp-

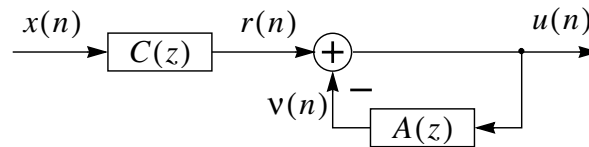


Bild 4.7: Prinzip eines rekursiven Prediktors im skalaren Fall

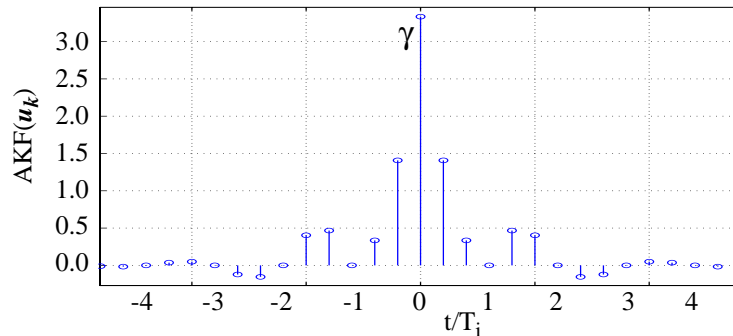


Bild 4.8: Dekorrelation eines überabgetasteten Signals im Zeitbereich

hasen des Ausgangssignals nicht weiß sind.

In Bild 4.7 ist das Prinzip der linearen Prediktion für den skalaren, rauschfreien Fall gezeigt. Das Sendesignal $x(n)$ wird hier wie üblich auf den Kanal $C(z)$ gegeben und so das Ausgangssignal $r(n)$ gebildet. Ein linearer Prediktor $1/(1 + A(z))$ versucht nun, aus den zurückliegenden Signalen, das Eingangssignal des Kanals als $v(n)$ zu schätzen. Das ideale $A(z)$ ist somit der minimalphasige Anteil von $C(z)$. Der Prediktionsfehler $r(n) - v(n)$ entspricht der neuen Information, bzw. Innovation, die nicht aus Signalwerten zu davorliegenden Zeitpunkten ableitbar ist. Dieses Signal wird daher vorteilhaft als Eingang des Prediktors verwendet.

Die Interpretation der Dekorrelation eines überabgetasteten Signals im Zeitbereich ist in Bild 4.8 verdeutlicht. Abgebildet ist die AKF eines dekorrelierten, dreifach überabgetasteten Signals. Man erkennt, dass diese Funktion bei ganzzahligen Werten von t/T_i - mit Ausnahme des Ursprungs - Nullstellen aufweist. Am Ursprung tritt, wie in Kapitel 4.2.3 beschrieben, die mittlere Systemenergie γ auf. Da Korrelationen, die zwischen den einzelnen Polyphasen bestehen, nicht eliminiert wurden, sind die restlichen Funktionswerte beliebig. Bild 4.10 zeigt das Leistungsdichtespektrum eines zweifach überabgetasteten Basisbandsignals vor (links) und nach (rechts) Dekorrelation. Die Spektren wurden anhand von Simulationen eines QAM VDSL Systems gewonnen, wobei die verwendete Leitung hier der im VDSL Standard [176] definierte sogenannte Kanal 4 ist, der zwei Bridged Taps aufweist. Die Topologie dieses Kanals ist in Bild 4.9 gezeigt. Für die Simulation wurde l_4 zu 850m gewählt, das Sendespektrum reicht von 3,1 MHz bis 5 MHz und zusätzlich sind 5 FEXT Störer bei 400m Entfernung vorhanden, die im selben Frequenzband senden. Man erkennt in Bild 4.10, dass das Ausgangsspektrum einen relativ flachen Verlauf im Bereich des Übertragungsbandes aufweist. Im Prinzip ist das Spektrum flach, wenn die Abtastrate auf Symbolrate reduziert wird, wobei das Spektrum gefaltet wird. Da außerhalb des Übertragungsbandes die spektrale Leistungsdichte sehr gering ist, ist dies in diesem Fall quasi gleichbedeutend, dass innerhalb dieses Bandes das Spektrum bereits flach ist.

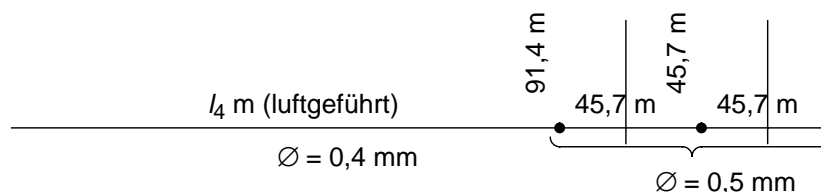


Bild 4.9: Kanal 4 des VDSL Standard [176]

Zur Entzerrung von $\mathbf{u}(n)$ ist ein zweites Filter erforderlich, das sogenannte Innovations Postfilter $\mathbf{B}(z)$ [107]. Für dieses Filter gilt

$$\mathbf{B}(z) = \text{adj}(\tilde{\mathbf{G}}(z)) \tilde{\mathbf{S}}_{\text{rx}}(z) \cdot \left(\tilde{\gamma} \tilde{\mathbf{G}}^H \left(\frac{1}{z^*} \right) \right)^{-1} = z^{-\delta} \tilde{\mathbf{C}}^H \left(\frac{1}{z^*} \right) \text{adj}(\tilde{\mathbf{G}}(z)) \cdot \left(\tilde{\gamma} \tilde{\mathbf{G}}^H \left(\frac{1}{z^*} \right) \right)^{-1}. \quad (4.26)$$

Dies kann interpretiert werden als ein signalangepasstes (*Matched*) Filter $\tilde{\mathbf{C}}^H(1/z^*)$ gefolgt von einem Vorwärts-Prediktionsfilter. Im skalaren Fall vereinfacht sich (4.26) zu der bekannten Identität [99], [134]

$$\mathbf{B}(z) = z^{-\delta} \tilde{\mathbf{C}}^H \left(\frac{1}{z^*} \right) \left(\tilde{\gamma} \tilde{\mathbf{G}}^H \left(\frac{1}{z^*} \right) \right)^{-1}. \quad (4.27)$$

Die Impulsantwort des in (4.26) bzw. (4.27) gegebenen MA Filter ist allerdings sowohl in positiver, als auch in negativer Zeitpunktrichtung unendlich und daher nicht realisierbar. Das entsprechende realisierbare Filter $\bar{\mathbf{B}}(z)$ muss kausal sein und ist gegeben durch

$$\bar{\mathbf{B}}(z) = [\mathbf{B}(z)]_+, \quad (4.28)$$

wobei $[\mathbf{B}(z)]_+ = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{B}_k z^{-k}$ den kausalen Anteil von $\mathbf{B}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{B}_k z^{-k}$ bezeichnet. Falls das Rauschsignal am Empfängereingang farbig ist, ist das Rausch-Dekorrelationsfilter $\mathbf{D}_n(z)$ ebenfalls Bestandteil von $\mathbf{B}(z)$, bzw. $\bar{\mathbf{B}}(z)$. Hierbei ist im Fall, dass das Rauschfilter $\mathbf{C}_n(z)$ rein rekursiv ist, das entsprechende inverse Dekorrelationsfilter $\mathbf{D}_n(z)$ ein FIR Filter. Ist das Rauschfilter hingegen ein FIR Filter, so ist $\mathbf{D}_n(z)$ ein AR Filter. Dies kann in diesem Fall entweder durch ein eigenes rein rekursives Filter realisiert werden, oder durch Faltung der theoretisch unendlich langen Impulsantwort dieses Filters mit $\mathbf{B}(z)$ aus (4.26).

4.2.2 Optimale Koeffizienten des beliebig langen DFEs

In diesem Abschnitt sollen die Koeffizientengewichte des im MMSE Sinn optimalen DFE berechnet werden. Der ZF-DFE ist aus diesem Ergebnis leicht ableitbar, indem in den entsprechenden Berechnungsvorschriften die Rauschleistung zu Null gesetzt wird. In diesem Kapitel wird - wie allgemein üblich - angenommen, dass der DFE keine Fehlentscheidungen produziert. Betrachtungen zu möglicherweise auftretenden Fehlerfortpflanzungen finden sich in Kapitel 4.5.

Nach dem in Bild 4.11 gezeigten Modell ist der MMSE-DFE Koeffizientensatz gegeben durch [15]:

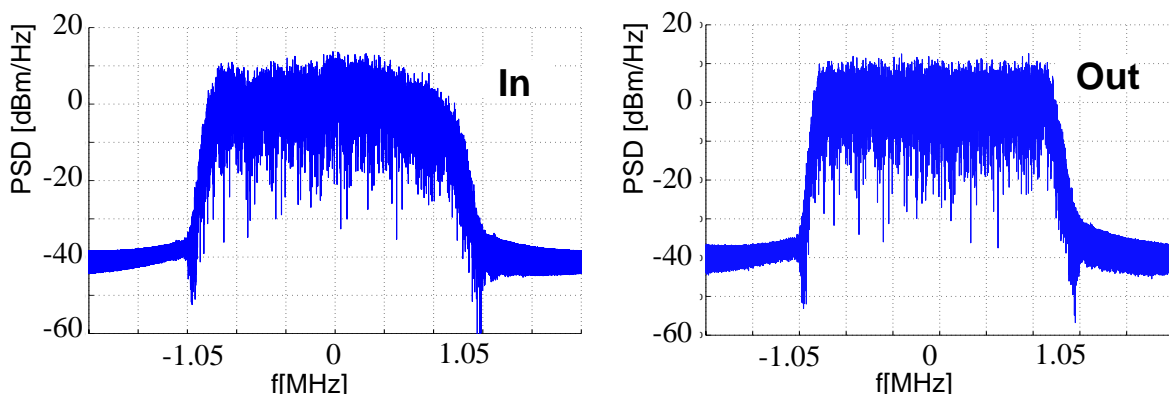


Bild 4.10: Dekorrelation eines überabgetasteten Signals im Frequenzbereich

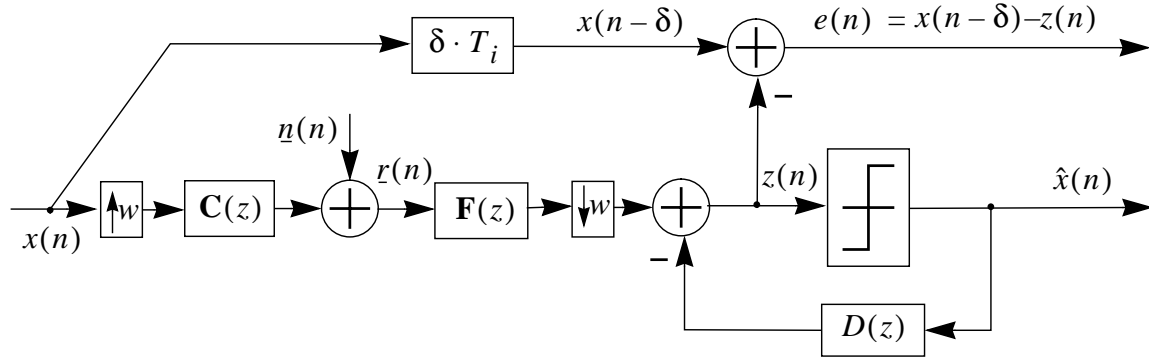


Bild 4.11: Modell zur Berechnung der optimalen DFE Koeffizienten im MMSE-Sinn

$$\{\mathbf{f}, \mathbf{d}\} = \arg \min_{\mathbf{f}, \mathbf{d}} \{|e(n)|^2\} = \arg \min_{\mathbf{f}, \mathbf{d}} \{|x(n-\delta) - \mathbf{f}^T \mathbf{r}(n) + \mathbf{d}^T \hat{\mathbf{x}}(n)|^2\}. \quad (4.29)$$

Hierbei beinhalten die Vektoren \mathbf{f} der Länge $N \cdot w$ und \mathbf{d} der Länge M die Koeffizienten des FFF, bzw. FBF. Der Vektor $\hat{\mathbf{x}}(n)$ setzt sich folgendermaßen zusammen:

$$\hat{\mathbf{x}}(n) = [\hat{x}(n-1) \hat{x}(n-2) \dots \hat{x}(n-M)]^T. \quad (4.30)$$

Unter der Annahme, dass keine Fehlentscheidungen auftreten, lässt sich schreiben $\hat{x}(n) = x(n-\delta)$. Für das Fehlersignal $e(n) = x(n-\delta) - z(n)$ gilt dann

$$e(n) = x(n-\delta) - \mathbf{f}^T \mathbf{r}(n) + \mathbf{d}^T \mathbf{x}(n), \quad (4.31)$$

bzw. in der z -Ebene

$$e(z) = -\mathbf{F}^T(z) \mathbf{r}(z) + (D(z) + 1)x(z). \quad (4.32)$$

Zunächst sollen die Koeffizientensätze hergeleitet werden, die sich für beliebig lange Filterordnungen des Vorwärtsfilters N und des Rückkoeffizientensatzes M ergeben. Zur Berechnung des im MMSE-Sinn optimalen Koeffizientensatzes wird erneut vom Orthogonalitätsprinzip Gebrauch gemacht, das sich in der z -Ebene schreibt als

$$\mathbf{S}_{e\mathbf{r}}(z) = \mathbf{0}^T = \mathbf{F}^T(z) \mathbf{S}_{\mathbf{r}}(z) - (D(z) + 1) \mathbf{S}_{x\mathbf{r}}(z). \quad (4.33)$$

Unter der Voraussetzung, dass das Rauschen weiß ist, sowie in allen Teilkanälen mit gleicher Leistung auftritt, lässt sich (4.33) unter der Verwendung von (4.14) und (4.15) umformen zu

$$\mathbf{0}^T = \mathbf{F}^T(z) \left(\mathbf{C}(z) \mathbf{C}^H\left(\frac{1}{z^*}\right) + \sigma_n^2 \mathbf{I}_p \right) - (D(z) + 1) \mathbf{C}^H\left(\frac{1}{z^*}\right). \quad (4.34)$$

Ist das Rauschen gefärbt, muss die p -dimensionale Einheitsmatrix durch die entsprechende Rauschmatrix der selben Dimension ersetzt werden. In diesem Fall kann formal wieder ein Rauschdekorrelationsfilter $D_n(z)$ vorgeschaltet werden und mit dem entsprechenden äquivalenten Kanal $\tilde{\mathbf{C}}(z) = \mathbf{C}(z) D_n(z)$ sowie mit AWGN gerechnet werden. Das Filter $D_n(z)$ muss anschließend in das berechnete $\mathbf{F}(z)$ eingerechnet werden. Mit der in (4.15) gegebenen spektralen Faktorisierung, die sich bei weißem Rauschen als

$$\mathbf{S}_{\mathbf{r}} = \mathbf{C}(z) \mathbf{C}^H(1/z^*) + \sigma_n^2 \mathbf{I}_{p \times p} = \gamma \mathbf{G}(z) \mathbf{G}^H(1/z^*) \quad (4.35)$$

schreibt, folgt aus (4.34)

$$\mathbf{F}^T(z) = (D(z) + 1)\mathbf{C}^H\left(\frac{1}{z^*}\right)\left(\gamma\mathbf{G}(z)\mathbf{G}^H\left(\frac{1}{z^*}\right)\right)^{-1}, \quad (4.36)$$

so dass sich das Leistungsdichtespektrum des Fehlersignals $S_{ee}(z) = e(z)e^H(1/z^*)$ schreiben lässt als

$$\begin{aligned} S_{ee}(z) &= (D(z) + 1)(1 - \mathbf{C}^H(z) \cdot (\gamma\mathbf{G}(z)\mathbf{G}^H(1/z^*))^{-1} \cdot \mathbf{C}(1/z^*)) (D^*(1/z^*) + 1) \\ &= (D(z) + 1)(1 - \text{Tr}\{\mathbf{C}^H(z) \cdot \mathbf{S}_{\mathbf{r}}^{-1} \cdot \mathbf{C}(1/z^*)\}) (D^*(1/z^*) + 1) \\ &= (D(z) + 1)(\sigma_n^2 \text{Tr}\{\mathbf{S}_{\mathbf{r}}^{-1}\}) (D^*(1/z^*) + 1) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Bei der zweiten Umformung wurde von (4.34) sowie von der Rechenregel $\mathbf{a}^H\mathbf{B}\mathbf{c} = \text{Tr}\{\mathbf{B}\mathbf{c}\mathbf{a}^H\}$ Gebrauch gemacht (vgl. die Herleitung von (3.97)). Zur Erzielung der minimalen Fehlerleistung muss das Spektrum $S_{ee}(z)$ weiß sein [32], d.h. das optimale Filter $D(z)$ ist analog zu (4.21) gegeben durch die Determinante von $\mathbf{G}(z)$. Dies ist der minimalphasige Anteil des Nenners der zweiten Identität von (4.37), also von $\mathbf{S}_{\mathbf{r}}(z)$. Somit sind für den Grenzfall nichtkausaler unendlich langer Entzerrer die Vorwärts- und Rückwärtsfilter des LE und des DFE identisch. Wie erwähnt, ist das Dekorrelationsfilter des Rauschens Bestandteil des Vorwärtsentzerrers. Ist das Rauschfilter FIR, so ist das entsprechende Dekorrelationsfilter AR. Als Vorwärtsfilter kann dann auch ein allgemeines IIR Filter fungieren [163]. Dies ist auch dann vorteilhaft, wenn der Kanal einen AR Anteil besitzt. Das Filter $D(z)$ kann theoretisch ebenfalls vorteilhaft durch ein IIR Filter ersetzt werden, allerdings treten Effekte der Fehlerfortpflanzung dann in erheblich stärkerem Ausmaß als beim konventionellen DFE auf. Ein DFE, der im Vorwärts- und/oder Rückkoppelzweig IIR Filter aufweist, wird Verallgemeinerter DFE (*Generalized DFE*, GDFE) genannt. Berechnungsvorschriften der Koeffizientensätze eines derartigen Entzerrers finden sich in [163]. Dort werden auch Erweiterungen des DFEs zur Mehrbenutzer Detektion (*Multiuser Detection*, MUD) angegeben.

Den Koeffizientensatz eines ZF-DFE erhält man, wenn man bei der entsprechenden Berechnungsvorschrift des MMSE-DFE die Rauschleistung zu Null setzt.

4.2.3 Mittlerer quadratischer Fehler beliebig langer Entzerrer

Der MSE ist allgemein gegeben durch das Integral der PSD des Fehlersignals am Entscheidungspunkt

$$\text{MSE} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{ee}(e^{j\omega}) d\omega. \quad (4.38)$$

Da der MMSE-LE formal aus dem MMSE-DFE durch Setzen von $D(z) = 0$ hergeleitet werden kann, folgt für den LE aus (4.37)

$$\text{MSE}_{\text{MMSE-LE}} = \frac{\sigma_n^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Tr}\{(\mathbf{S}_{\mathbf{r}}(e^{j\omega}))^{-1}\} d\omega. \quad (4.39)$$

Dieser Ausdruck lässt sich nach [107] umformen in

$$\text{MSE}_{\text{MMSE-LE}} = \frac{\sigma_n^2}{2\pi \cdot \det(\gamma)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|1 + A(e^{j\omega})|^2} d\omega. \quad (4.40)$$

In [107] wurde gezeigt, dass dieser Wert dem Hauptwert, also dem Koeffizienten an der Position δ der Gesamtimpulsantwort bestehend aus Kanal und Entzerrer, entspricht. Für den

MMSE-DFE folgt aus (4.37) für den skalaren Fall mit $D(z)D^H(1/z^*) = G(z)G^H(1/z^*)$

$$\text{MSE}_{\text{MMSE-DFE}} = \frac{1}{\gamma} \sigma_n^2. \quad (4.41)$$

In [107] ist der MSE des MMSE-DFE für den Fall eines überabgetasteten Vorwärtsfilters gegeben. In diesem Fall muss im Nenner von (4.41) die Determinante von γ gebildet werden. Auch beim MMSE-DFE entspricht der MSE dem Hauptwert der Gesamtimpulsantwort, wenn diese als $\mathbf{F}^T(z)\mathbf{C}(z) - z^{-\delta}D(z)$ definiert wird [107]. Das Verhältnis des MSE der beiden untersuchten Entzerrer ergibt sich schließlich zu:

$$\frac{\text{MSE}_{\text{MMSE-LE}}}{\text{MSE}_{\text{MMSE-DFE}}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|1 + A(e^{j\omega})|^2} d\omega \geq 1. \quad (4.42)$$

Es zeigt sich hierbei, dass aufgrund der Definition des SNR, der im MMSE Sinn optimale Entzerrer nicht der ist, der die Fehlerwahrscheinlichkeit minimiert. Die Ursache dieses Effekts besteht darin, dass der MMSE Entzerrer nicht erwartungstreu ist, da sein Ausgang mit einem SNR-abhängigen Wert skaliert ist. Dies wird näher in Kapitel 4.6 besprochen. Hier wird auch eine Möglichkeit zur Kompensation dieser Skalierung beschrieben.

4.3 Wiener Filter bei endlichen Filterlängen

In diesem Abschnitt werden die im MMSE Sinn optimale Entzerrer endlicher Länge berechnet. Im Gegensatz zu Entzerrern unbeschränkter Länge hängt hier das Systemverhalten von der sich ergebenden Systemverzögerung ab. Im Folgenden wird der Wiener Entzerrer, wie im Fall unbeschränkter Filterlängen, durch Minimierung des MSE berechnet. Durch eine Maximierung des SNR am Entscheidungspunkt

$$\text{SNR} = \frac{\left| \sum_{v=0}^N \mathbf{f}^T(v) \mathbf{c}(\delta - v) \right|^2}{\text{E}\{e(n)e(n)^H\}} \quad (4.43)$$

gelangt man, wie in [56] und [57] gezeigt, zu identischen Ergebnissen.

Bei endlichen Filterlängen lässt sich der optimale Koeffizientensatz des DFE sehr elegant herleiten, wenn (4.31) in folgender Form umgeschrieben wird [2], [31]

$$e(n) = x(n - \delta) - \tilde{\mathbf{c}}_{DFE}^T \cdot \tilde{\mathbf{r}}(n). \quad (4.44)$$

Hierbei ist

$$\tilde{\mathbf{c}}_{DFE} = \left[\mathbf{f}^T \quad -\mathbf{d}^T \right]^T \quad (4.45)$$

der zusammengesetzte Spaltenvektor aus dem $w \cdot N$ -dimensionalen Koeffizientenvektor des Vorwärtsfilters \mathbf{f} und dem M -dimensionalen Koeffizientenvektor des Rückkoeffizientenfilters \mathbf{d} . Der zusammengesetzte Regressorvektor ist gegeben als

$$\tilde{\mathbf{r}}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(n) \\ \mathbf{x}(n - \delta) \end{bmatrix}, \quad (4.46)$$

mit $\mathbf{r}(n)$ definiert in (2.26) und $\mathbf{x}(n - \delta)$ definiert als Spaltenvektor der letzten M , um δ verzögerten, Sendesymbole. Mit Anwendung des Orthogonalitätstheorems $E\{e(n)\tilde{\mathbf{r}}(n)\} = \mathbf{0}$ und den Definitionen der Kreuzkorrelationsfunktion des Sendesymbols mit den Empfangsdaten

$$\mathbf{p}_{\tilde{\mathbf{r}}\tilde{\mathbf{r}}^H} = E\{x(n - \Delta)\tilde{\mathbf{r}}^H(n)\} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{\mathbf{x}\mathbf{r}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{e}_\delta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.47)$$

sowie der Autokorrelationsfunktion der Empfangsdaten

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{r}}} = E\{\tilde{\mathbf{r}}(n)\tilde{\mathbf{r}}^H(n)\} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{r}} & \mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{x}} \\ \mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{x}} & \mathbf{I}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{C}^H + \mathbf{R}_{\mathbf{n}} & \mathbf{C}\mathbf{E}_\delta \\ \mathbf{E}_\delta^T \mathbf{C}^H & \mathbf{I}_M \end{bmatrix}, \quad (4.48)$$

folgt für die Koeffizienten des MMSE-DFE

$$\tilde{\mathbf{c}}_{DFE} = \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{r}}}^{-1} \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{r}}\mathbf{x}}. \quad (4.49)$$

Hierbei stellt $\mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{r}} = E\{\mathbf{x}(n - \delta)\mathbf{r}^H(n)\}$ die Kreuzkorrelationsmatrix des Empfangsdatenvektors mit dem Sendedatenvektor der Länge M dar. Die Kanalfaltungsmatrix \mathbf{C} ist in (2.23)-(2.24) definiert. Die Rauschautokorrelationsmatrix $\mathbf{R}_{\mathbf{n}}$ ist gegeben durch

$$\mathbf{R}_{\mathbf{n}} = \mathbf{n}(n)\mathbf{n}^H(n), \quad (4.50)$$

wobei der Vektor $\mathbf{n}(n)$ in (2.28) definiert wurde. Der Vektor \mathbf{e}_δ der Länge N_c hat in Reihe δ eine Eins und an den restlichen Positionen eine Null. Die $(N + N_c) \times M$ Matrix \mathbf{E}_δ besteht aus einer Einheitsmatrix der Dimension $\min(M, N + N_c + \delta - 1)$ beginnend an Position $\{\delta, 1\}$ und Nullen an den restlichen Einträgen. Somit sind ihre ersten $(\delta - 1)$ Reihen, sowie je nachdem welche der Größen M und $(N + N_c + \delta - 1)$ kleiner sind, ihre letzten Reihen, bzw. Spalten mit Nullen gefüllt. Im Grenzfall verschwindenden Rauschens kann das Gleichungssystem (4.49) überbestimmt sein, für den realistischen Fall, dass additives Rauschen am Entzerrereingang anliegt, ist die Invertierbarkeit von $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{r}}}$ in der Regel jedoch sichergestellt.

Für den Fall, dass ein in Kapitel 4.1.3 beschriebener PS-FSE implementiert werden soll, sind die Einträge der Kanalmatrix reellwertig. Wird, wie bei einem Bandpassverfahren üblich, eine komplexwertige Modulation, wie etwa QAM oder CAP verwendet, ist der Kreuzkorrelationsvektor $\mathbf{p}_{\mathbf{x}\mathbf{r}}$ komplexwertig. Somit erhält man ein komplexwertiges Vorwärtsfilter, dessen Realteil der Inphasekomponente und dessen Imaginärteil entsprechend der Quadraturkomponente des PS-FSE entspricht. Für den Fall, dass die Entzerrerränge N gegen unendlich geht, bilden beide Anteile ein Hilbertpaar. Diese Eigenschaft gilt jedoch näherungsweise auch für endliches N [81], [125].

Im Gegensatz zu den Verhältnissen bei unendlich langem Vorwärtsfilters hängt die Performance des endlich langen DFE bzw. LE von der gewählten Systemverzögerung δ ab. Die optimale Verzögerung δ_{opt} , die zum Entzerrer mit minimalen MMSE führt, kann im Allgemeinen nur durch Probieren gefunden werden, sie liegt für genügend langes N jedoch in der Regel nahe an $N - 1$ [2].

Während mit Ausnahme von trivialen Kanälen, die keine Speichereinheiten besitzen, DFEs mit einer unendlichen Anzahl an Koeffizienten grundsätzlich ein höheres SNR am Entscheidereingang zeigen als entsprechende lineare Entzerrer, gilt dies für realisierbare DFEs mit einer endlichen Anzahl an Koeffizienten nicht mehr zwingend. Die Bedingungen, unter denen der

Wiener DFE ein linearer Entzerrer ist, also sämtliche Koeffizientengewichte des Rückkoppelers verschwinden, sind in [156] gezeigt.

Eine sehr elegante Herleitung der Koeffizientengewichte eines DFE mit endlicher Anzahl an Koeffizienten findet sich in [2]. Voraussetzung ist hier allerdings, dass die Anzahl an Koeffizienten des Rückkoppelzweiges optimal ist, d.h. in Falle von weißem Rauschen mindestens so groß ist wie die Länge der diskreten Kanalimpulsantwort. Ist das additive Rauschen gefärbt, muss das FBF - entgegen den Aussagen in [2] - sogar so lange sein wie der äquivalente Kanal des dekorrelierten (*prewhitened*) Systems. Andernfalls werden mit dieser Methode die ersten Koeffizienten des AR Filters des unendlich langen linearen Entzerrers berechnet, jedoch nicht die des Rückkoppelers des DFE. Ist das Rückkoppelers mit $M \geq N_c$ ausreichend lang, können die Filterparameter durch Cholesky Faktorisierung gefunden werden und viele Eigenschaften des DFEs mit unendlicher Koeffizientenanzahl sind auf den so erhaltenen DFE übertragbar. Die Cholesky Faktorisierung ist das Analogon der spektralen Faktorisierung für eine endliche Anzahl an Dimensionen. Eine Übersicht zur Cholesky Faktorisierung findet sich etwa in [2]. Der MMSE Koeffizientensatz lässt sich nach [2] durch folgende Faktorisierung finden:

$$\mathbf{I}_{N+N_c} + \mathbf{C}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{C} = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^H, \quad (4.51)$$

wobei \mathbf{L} eine $N + N_c$ -dimensionale, monische untere Dreiecksmatrix ist und \mathbf{D} eine Diagonalmatrix der selben Dimension. Die optimale Systemverzögerung δ_{opt} ist dann die Spalte, in der \mathbf{D} den maximalen Wert besitzt, der äquivalent zu $1/\text{MMSE}$ ist. Für den Fall, $M \geq N_c$ kann δ_{opt} daher analytisch gefunden werden. Der optimale FBF ergibt sich dann zu

$$\mathbf{d} = \mathbf{L} \mathbf{e}_{\delta_{opt}+1} \quad (4.52)$$

und das optimale Vorwärtsfilter \mathbf{f} zu

$$\mathbf{f}^T = \mathbf{d}^H (\mathbf{I}_{N+N_c} + \mathbf{C}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{R}_n^{-1} = \mathbf{e}_{\delta_{opt}+1}^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{R}_n^{-1} \cdot \text{MMSE}. \quad (4.53)$$

Gleichung (4.51) entspricht formal (4.23), die sich im Fall eines im Symboltakt betriebenen Vorwärtsfilters schreibt als

$$1 + \tilde{\mathbf{C}}^H(1/z^*) \tilde{\mathbf{R}}_n^{-1} \tilde{\mathbf{C}}(z) = \tilde{\mathbf{G}}(z) \gamma \tilde{\mathbf{G}}^H(1/z^*). \quad (4.54)$$

Eine Erweiterung dieser Gleichungen für den Fall, dass die Sendesignale korreliert sind, ist durch einfache Substitution der Einheitsmatrizen in (4.51) und (4.53) durch die entsprechende Autokorrelationsmatrix des Sendesignals möglich [2]. Aus (4.53) folgt, dass ein Rausch-Dekorrelationsfilter implizit Bestandteil des Vorwärtsentzerrers des DFE ist. Durch Vorfilterung mit einem Rausch-Dekorrelationsfilter, das aus der Cholesky-Faktorisierung des Rauschprozesses

$$\mathbf{R}_n^{-1} = \frac{1}{\sigma_n^2} \mathbf{L}_n \mathbf{L}_n^H \quad (4.55)$$

gewonnen werden kann, vereinfachen sich die Gleichungen (4.51) - (4.53). Die Matrix \mathbf{L}_n ist hierbei eine monische obere Dreiecksmatrix der Dimension von \mathbf{R}_n . Das Dekorrelationsfilter ist in diesem Fall FIR und gegeben durch die erste Spalte von \mathbf{L}_n^H . Würde in (4.55) die Matrix \mathbf{R}_n faktorisiert, wäre das sich ergebende Filter das korrespondierende AR Filter. Die äquivalente Kanalmatrix ist gegeben durch $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{L}_n^H \mathbf{C}$. Somit folgt

$$\mathbf{I}_{N+N_c} / \sigma_n^2 + \tilde{\mathbf{C}}^H \tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{L}} \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{L}}^H, \quad (4.56)$$

$$\tilde{\mathbf{d}} = \tilde{\mathbf{L}} \tilde{\mathbf{e}}_{\delta_{opt}+1}, \quad (4.57)$$

$$\tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\mathbf{d}}^H (\mathbf{I}_{N+N_c} / \sigma_n^2 + \tilde{\mathbf{C}}^H \tilde{\mathbf{C}})^{-1} \tilde{\mathbf{C}}^H = \tilde{\mathbf{e}}^T \delta_{opt+1} \tilde{\mathbf{L}}^{-1} \tilde{\mathbf{C}}^H \cdot \text{MMSE} / \sigma_n^2. \quad (4.58)$$

Die Größen $\tilde{\bullet}$ beziehen sich hierbei wieder auf das System mit vorgeschaltetem Rausch-Dekorrelationsfilter.

Der MMSE für das gewählte δ ergibt sich für die optimalen Koeffizienten zu

$$\text{MMSE}(\delta) = E\{e(n)e(n)^H\} = 1 - \tilde{\mathbf{c}}_{DFE}^T \tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}\mathbf{x}} = 1 - \mathbf{f}^T \mathbf{p}_{\mathbf{r}\mathbf{x}}. \quad (4.59)$$

Die zweite Identität in (4.59) folgt aus der Tatsache, dass der Rückkoeffizientenfilter keinen Beitrag zum Fehlersignal liefert. Setzt man in (4.45) $\tilde{\mathbf{c}}_{DFE} = \mathbf{f}$, so erhält man die entsprechenden Gleichungen des FIR-LE. Der Koeffizientensatz des IIR-LE endlicher Länge wurde etwa in [107], für den Fall $M \geq N_{\tilde{C}}$, wobei $N_{\tilde{C}}$ die Länge des äquivalenten weißen Rauschkanals ist, mit Hilfe der Kalman Filter Theorie berechnet. Ist dies nicht gegeben, kann man die Koeffizienten folgendermaßen berechnen: Wie im Fall unendlich langer Filter wird zunächst durch spektrale Faktorisierung das optimale Filter $A(z)$ berechnet. Ist M kleiner als $N_{\tilde{C}}$, so kann durch den AR Filter nur die Impulsantwort bis zur Länge M dekorreliert werden, auf den Rest der Impulsantwort hat das Filter keinen Einfluss, so dass das Filter endlicher Länge in diesem Fall aus den ersten M Koeffizienten des berechneten $A(z)$ besteht. Nun kann durch Faltung des Kanals mit dem AR Filter die Impulsantwort des entsprechenden dekorrelierten (*prewhitened*) Systems berechnet werden und für diese mit (4.47) - (4.59) der optimalen Koeffizientensatz des MA Filters. Hierbei wird davon ausgegangen, dass dieses MA Filter das Rauschen perfekt dekorreliert. Ist das Rauschen nicht weiß, so lässt sich die Dekorrelation in der Praxis nur näherungsweise durchführen, so dass die berechneten Koeffizienten dann nur eine Näherung darstellen. Diese ist allerdings für genügend langes N sehr gut.

4.4 Vergleich der verschiedenen Entzerrer

4.4.1 Vergleich FIR und IIR MMSE-DFE

Beim Vergleich des realisierbaren MMSE-DFE endlicher Länge mit dem nicht realisierbaren unendlicher Länge fallen folgende Merkmale auf [2]

- Die Filter $\mathbf{F}(z)$ und $D(z)$ sind jeweils lineare Rückwärts-, bzw. Vorwärts-Prediktionsfilter.
- $\mathbf{F}(z)$ beinhaltet in beiden Fällen ein Rauschdekorrelationsfilter und ein Matched Filter.
- Für den Fall unendlich langer Filter ist $D(z)$ ein exaktes Dekorrelationsfilter der Fehler-Kovarianzmatrix und daher minimalphasig. Diese Eigenschaften sind im Fall endlich langer Filter nicht mehr zwingend erfüllt.
- Für den Fall unendlich langer Filter beinhaltet $\mathbf{F}(z)$ ein maximalphasiges exaktes Dekorrelationsfilter der Kanalautokorrelationsmatrix. Das entsprechende Filter endlicher Länge ist im Allgemeinen gemischtphasig und kein optimales Dekorrelationsfilter [2].
- In beiden Fällen ist die Fehlersequenz am Entzerrerausgang aufgrund von Vorläufer-ISI nicht gaußverteilt [2]. Sie ist für den Grenzfall unendlicher Filterlängen weiß, ansonsten im allgemeinen Fall gefärbt. In [107] wurde gezeigt, dass im Falle von weißem Rauschen am Entzerrereingang und für genügend lange Filter, die Fehlersequenz am Entzerrerausgang in diesem Fall ebenfalls weiß ist.

- Beide Entzerrer sind nicht erwartungstreu (*biased*). Dies wird in Kapitel 4.6 genauer untersucht.

4.4.2 Vergleich MMSE-LE mit MMSE-DFE

Beim Vergleich des MMSE-LE mit dem MMSE-DFE ergeben sich folgende wichtige Gemeinsamkeiten und Unterschiede

- Für den Fall genügend langer Filter korrespondieren die Koeffizientensätze des Vorwärts- und Rückkoppelfilters, d.h. $\mathbf{B}(z) = \mathbf{F}(z)$ und $A(z) = D(z)$ [99]. Genügend lang bedeutet hierbei, dass die Systemverzögerung δ mindestens so groß ist, wie die um Eins verminderte Länge des äquivalenten weißen Rauschkanals $N_{\tilde{C}}$, sowie dass gilt $M \geq N_{\tilde{C}}$. Insbesondere gilt dies, wenn die Filterlängen (und damit auch die Systemverzögerung) gegen unendlich gehen. Für kleinere Filterlängen gilt diese Äquivalenz nur noch näherungsweise. Für den Fall $\delta \geq N_{\tilde{C}} - 1$ wurde in [107] allerdings gezeigt, dass der DFE mit den Koeffizienten des korrespondierenden IIR MMSE-LE die gesamte Postcursor ISI eliminiert.
- Das Filter $A(z)$ ist unabhängig von der Filterlänge immer minimalphasig. Dies ist aus Gründen der Stabilität erforderlich. Im Gegensatz dazu befindet sich im Rückführzweig des DFE ein Entscheider, der die Stabilität des Systems auch bei nicht minimalphasigem $D(z)$ sicherstellt.
- Die Fehlersequenz des MMSE-LE ist im Allgemeinen gefärbt. Die des MMSE-DFE ist für den Grenzfall genügend langer Filter weiß [2].

4.4.3 Vergleich von FSE mit BSE

In diesem Abschnitt sollen Entzerrer die mit der Symbolrate getaktet werden (BSE) mit denen, die auf einer um den Faktor w höheren Rate laufen (FSE), verglichen werden. Der Hauptunterschied beider Entzerrer besteht darin, dass bei Verwendung eines BSE normalerweise das Abtast-Theorem (siehe Kapitel 3.1.3) verletzt wird, bei Verwendung eines FSE wird es hingegen eingehalten. Ursache dafür ist, dass praktisch realisierbare Sendefilter eine gewisse Exzess Bandbreite besitzen, also dass das Spektrum nicht auf $f_T/2$ begrenzt ist. Bei den häufig verwendeten, sogenannten Nyquist-Roll-Off Filtern, bezeichnet etwa der Roll-Off Faktor, wie weit sich das Spektrum über den Bereich der halben Symbolrate ausdehnt.

Grundsätzlich ist daher ein BSE wesentlich empfindlicher in Bezug auf die Abtastphase, als ein FSE. Dies kann anschaulich so interpretiert werden, dass sich bei Abtastung im Symboltakt das Signalspektrum mit den Wiederholerspektren im Bereich der Nyquistfrequenz $f_T/2$ überlappt. Da am Eingang des Entzerrers im Allgemeinen die Nyquistbedingung (siehe Kapitel 2.1) nicht eingehalten wird, kann diese Überlappung abhängig von der Abtastphase konstruktiv oder destruktiv sein. Ein FSE kann hingegen das ganze Signalspektrum auflösen und zeigt diesen Effekt daher nicht. Weist der Kanal im Bereich der Bandgrenzen große Verzerrungen des Phasenganges auf, wird ein BSE unabhängig von der Abtastphase ein schlechteres Systemverhalten zeigen, als ein FSE [134].

Prinzipiell zeigt auch ein DFE im Vergleich zu einem LE ein unempfindlicheres Systemverhalten bezüglich der Abtastphase. Ursache dafür ist, dass das Vorwärtsfilter eines DFE mehr Freiheitsgrade besitzt als ein LE, da es den Kanal nicht invertieren muss, sondern die kombinierte Impulsantwort aus Kanal und Vorwärtsentzerrer nach dem Hauptwert beliebige von Null verschiedene Werte aufweisen kann [134].

Die Empfindlichkeit des BSE von der Abtastphase ist insbesondere bei einem blind startenden System (siehe Kapitel 6) von Nachteil, da hier zu Beginn der Übertragung zunächst eine Abtastphase gefunden werden muss, die zu einem, zur Konvergenz der Entzerrer genügend großen SINR führen kann. Zusätzlich erschwert wird diese Prozedur dadurch, dass alle bekannten Algorithmen zur Synchronisation eines im Symboltakt abgetasteten Signals unterschiedene Symbole verwenden. Daher ist es in diesem Fall schwierig, gleichzeitig zu synchronisieren und den Entzerrer zu adaptieren. Diese Probleme fallen bei einem System, das mit einer höheren Rate abgetastet wird, weg. Ein weiteres Problem bei Verwendung eines entscheidungsgestütztes Taktregelkriterium ist eine auftretende Verkopplung von Entzerrung und Synchronisation, die spezielle Maßnahmen zur Sicherstellung der Systemstabilität erfordern (siehe etwa [66] - [68]). Allgemein ist bekannt, dass das optimale Empfangsfilter eines linearen Systems ein Kanal-Matched Filter, gefolgt von einem transversalen BSE, darstellt [51], [134]. Ein FSE kann die gemeinsame Impulsantwort bestehend aus Matched Filter und Entzerrer aufgrund der Einhaltung des Abtasttheorems erzeugen (unter der Berücksichtigung der endlichen Entzerrerlänge). Ein BSE hingegen kann keine signalangepasste Filterung durchführen und benötigt daher ein Vorfilter, das aber in der Regel nicht an den Kanal angepasst werden kann. Somit zeigt, bei gleicher Entzerrerlänge in Symbolängen, ein FSE prinzipiell ein besseres Systemverhalten als ein BSE. In der Praxis ist ein FSE meist auch bei gleicher Anzahl an Koeffizienten dem BSE überlegen. Darüberhinaus ist auch der Implementierungsaufwand, aufgrund des nicht erforderlichen expliziten Matched Filters, bei einem FSE meist geringer. Zu beachten ist allerdings, dass die Eingänge des FSE mit der um w höheren Abtastfrequenz bereitgestellt werden müssen. Dies ist etwa bei Systemen, die einen Echokompensator beinhalten, mit relativ großem Aufwand verbunden. Bei den hier betrachteten Systemen, die in Frequenzgetrenntlage betrieben werden, ist dies jedoch nicht gegeben. Wie in Kapitel 3.5 gezeigt, hat bei der Verwendung eines vor dem Entzerrer befindlichen Filters zur Abstratenumsetzung, eine höhere Eingangsfrequenz des Entzerrers den Vorteil, dass die Anforderungen an das SRC Filter sinken. Aus diesen Gründen wird im Rahmen dieser Arbeit Entzerrung mit einem Vielfachen des Symboltakts bevorzugt. Ein exemplarischer Vergleich des Systemverhaltens der beiden Entzerrertypen wird am Beispiel eines Einzelträger VDSL Szenariums in Kapitel 4.7 gegeben.

4.5 Fehlerfortpflanzungen beim DFE

Der größte Nachteil des DFE besteht darin, dass bei einer Fehlentscheidung das falsch entschiedene Symbol zurück geführt wird, was zu Fehlerfortpflanzungen (*error bursts*) führen kann. Dies führt, insbesondere bei hohen Fehlerraten, zu einer Verschlechterung des Systemverhaltens, bei niedrigen Fehlerraten ist dieses Phänomen normalerweise vernachlässigbar. Die Anhäufungen von Fehlern sind bei Fehlerraten, bei denen ein Empfänger üblicherweise betrieben wird, nicht katastrophal, das heißt die auftretenden Folgen von Fehlentscheidungen sind zeitlich begrenzt [134]. Prinzipiell ist insbesondere bei betragsmäßig großen Koeffizienten im Rückkoppelfilter auch ein instabiles Verhalten des DFE in dem Sinn möglich, dass bedingt durch Fehlerfortpflanzungen die Fehlerrate signifikant über dem Wert liegt, der sich bei richtigen Entscheidungen ergeben würde [111]. Zur Abschätzung der Fehlerwahrscheinlichkeit bei Verwendung eines DFE wird meist der Zustand des Rückkoppelfilters als Markov-Kette, bzw. Finite State Machine (FSM) beschrieben. Bei bekannten Übergangswahrscheinlichkeiten kann dann die Fehlerwahrscheinlichkeit berechnet werden. Die Berechnung der Übergangswahrschein-

lichkeiten ist allerdings extrem aufwändig [31], [38]. Eine obere Schranke für die Fehlerwahrscheinlichkeit eines DFE wurde in [38] gegeben. Diese ist für hohes SNR, also das Szenario in denen DFEs üblicherweise eingesetzt werden, bei binärer Modulation durch $2^J \cdot \text{BER}$ gegeben. Hierbei ist J die Anzahl der Koeffizienten des Rückkoeffizientenfilters, nach denen das Auge offen ist, und BER bezeichnet die Bitfehlerrate ohne Fehlerfortpflanzungen. In neueren Untersuchungen (vgl. z.B. [111], [180] und die darin enthaltenen Referenzen) wurde jedoch gezeigt, dass die Bitfehlerrate eines DFE in der Praxis meist signifikant unter der in [38] angegebenen Schranke liegt. In [180] wurde eine Methode zur näherungsweise Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten einer Markov-Kette angegeben, die eine relativ rasche Abschätzung der Fehlerrate eines realen DFE erlaubt. Hierzu werden nur die Wahrscheinlichkeiten der Übergänge von einem fehlerfreien Ausgangszustand zu einem fehlerbehafteten Zustand innerhalb einer Zeitspanne von n Symboltakten bestimmt. Für ein genügend großes n kann diese Wahrscheinlichkeit als Näherung für das Auftreten dieses Fehlerereignisses im eingeschwungenen Zustands dienen. Durch Summation aller möglichen Fehlerereignisse kann somit die Fehlerwahrscheinlichkeit abgeschätzt werden. Ein ähnliches Verfahren wurde in [111] verwendet zur Abschätzung der Grenze, in Bezug auf die Größe der Koeffizienten im Rückkoeffizientenfilter, bei der die Fehlerfortpflanzungen des DFEs katastrophal werden.

Prinzipiell ist die Wahrscheinlichkeit von Fehlerfortpflanzungen bei DFEs, deren Rückkoeffizientenfilter betragsmäßig große Koeffizientengewichte aufweisen, besonders groß. Daher kann man mit Entwurfsmethoden, die den gewichteten Betrag dieser Gewichte zur zu minimierenden Kostenfunktion addieren, unter Umständen DFEs erhalten, die eine geringere Symbolfehlerwahrscheinlichkeit aufweisen, als der nach (4.29) entworfene MMSE-DFE. Ansätze zum Entwurf derartiger Optimierungsfunktionen finden sich etwa in [96].

Man kann das Auftreten von Fehlerfortpflanzungen auch ganz ausschließen, indem man das FBF vom Empfänger in den Sender verlagert [71], [164]. Man spricht in diesem Fall von Vorkodierung (*Precoding*). Die Koeffizienten des Filters im Rückführzweig sind hier bei Implementierung im Sender, bzw. Empfänger identisch. Bei der gebräuchlichsten derartigen Methode, dem sogenannten Tomlinson-Harashima Precoding (THP), wird im Sender, anstelle des in der Rückkoppelschleife des DFE enthaltenen Entscheiders, ein Modulo-Operator verwendet. Diese Modulo-Operation bewirkt effektiv eine Erweiterung des Signalraums der Sendesymbole und stellt sicher, dass die Sendesignale beschränkt bleiben. Sie muss im Empfänger durch einen weiteren Modulo-Operator rückgängig gemacht werden. Bei einer digitalen Implementierung werden diese Modulo-Operationen bedingt durch die endlichen Wortbreiten automatisch durchgeführt. Nachteilig am THP ist, dass sich die Sendeleistung um den Faktor $M^2/(M^2 + 1)$ für PAM, bzw. $M/(M + 1)$ für QAM leicht erhöht. Hierbei bezeichnet M die Anzahl der Signalraumpunkte. Dieser Effekt fällt jedoch bei einer Vergrößerung der Stufenzahl zunehmend geringer ins Gewicht. Ein weiterer Vorteil des THP ist, dass dieses Verfahren in einfacher Weise mit kodierter Modulation, speziell mit dem sogenannten Trellis-Shaping kombiniert werden kann [50]. Dies ist bei Verwendung eines DFE nicht, bzw. nur eingeschränkt möglich, da hier die Entscheidungen sofort getroffen werden und die entschiedenen Werte zurück geführt werden. Vergleiche von THP mit anderen Vorkodierschemen für die Anwendung bei leitungsgebundener Übertragung finden sich in [50]. Es stellt sich hierbei heraus, dass THP den konkurrierenden Verfahren insgesamt überlegen ist, weshalb hier auf diese alternativen Vorkodierer nicht eingegangen wird. Da diese Techniken jedoch Einfluss auf den Sender haben, müssen sie genau standardisiert werden und stellen somit kein Unterscheidungsmerkmal eines Transceivers dar.

Bei der Verwendung von THP wird beim Systemstart ein DFE am Empfänger adaptiert. Nach Konvergenz werden dessen Koeffizienten an den Sender übermittelt und damit die Vorkodierung durchgeführt. Die Koeffizienten des Rückkoeffizientenfilters am Empfänger werden daraufhin zu Null gesetzt. Ein weiterer Vorteil dieses Verfahrens im Vergleich zum DFE besteht darin,

dass sich THP mit einem Viterbi Dekoder kombinieren lässt. Ein Tomlinson-Harashima Vorkodierer ist etwa bei SHDSL standardisiert, nicht aber bei Einzelträger-VDSL oder etwa bei Gigabit Ethernet [26], [161].

4.6 Erwartungstreuer MMSE Entzerrer

Ist die Sendeleistung σ_x^2 nicht wie in (4.20) zu 1 normiert, schreibt sich die mittlere Systemenergie eines skalaren Systems als

$$\log(\gamma/\sigma_n^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log((\sigma_x^2/\sigma_n^2)|S_r(\theta)|^2 + 1) d\theta. \quad (4.60)$$

Das SNR des unendlich langen MMSE-DFE schreibt sich dann als

$$\text{SNR}_{\text{MMSE-DFE}} = \sigma_x^2 / \text{MSE}_{\text{MMSE-DFE}} = \gamma / \sigma_n^2. \quad (4.61)$$

Aus (4.60) folgt für den Grenzfall $\text{SNR} = \sigma_x^2/\sigma_n^2 \rightarrow 0$, dass die Größe γ/σ_n^2 gegen Eins geht. Dies ist aber nach (4.61) das SNR am Ausgang des DFE. Dies liegt daran, dass das Ausgangssignal des DFE für $\text{SNR} \rightarrow 0$ gegen Null geht. Allgemein gilt, dass bei nichtverschwindender Rauschleistung das Ausgangssignal des Entzerrers gestaucht, also nicht erwartungstreu (*biased*) ist. Das Fehlersignal am DFE-Ausgang beinhaltet daher auch einen Selbst-Interferenz-Term [32]. Offensichtlich ist es sinnvoller den SNR-Wert am Ausgang des DFE als $\text{SNR}_{\text{MMSE-DFE}} - 1$ zu definieren [133], da dieser Wert für verschwindendes SNR am Entzerrereingang ebenfalls gegen Null geht.

Grundsätzlich kann man für einen erwartungstreuen Empfänger das SNR durch folgende Formel beschreiben [32]

$$\text{SNR}_{\text{U}} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_{n,\text{U}}^2}, \quad (4.62)$$

wobei das Subscript U für ungestaucht (erwartungstreu, *unbiased*) steht. Unter der Bedingung, dass Signal x und Rauschen n unkorreliert sind, kann durch Skalierung des Ausgangs des Empfängers um einen Faktor α das SNR maximiert werden

$$\sigma_n^2 = |\alpha|^2 \sigma_{n,\text{U}}^2 + |1 - \alpha|^2 \sigma_x^2. \quad (4.63)$$

Der so modifizierte Empfänger ist dann für $\alpha \neq 1$ nicht mehr erwartungstreu. Das SNR eines derartig skalierten Empfängers schreibt sich als

$$\text{SNR} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2} = \frac{\sigma_x^2}{|\alpha|^2 \sigma_{n,\text{U}}^2 + |1 - \alpha|^2 \sigma_x^2}, \quad (4.64)$$

wobei der Term $|1 - \alpha|^2 \sigma_x^2$ die sogenannte Eigeninterferenz darstellt. Durch Nullsetzung der Ableitung von (4.64) nach α kann der zu maximalem SNR führende, als α_{opt} bezeichnete, Wert von α berechnet werden als:

$$\alpha_{opt} = \frac{1}{1 + 1/(\text{SNR}_{\text{U}})} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_{n,\text{U}}^2} \quad (4.65)$$

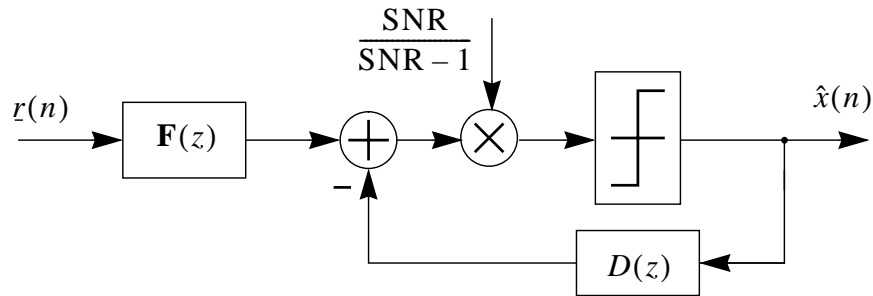


Bild 4.12: Blockschaltbild des erwartungstreuen (unbiased) DFE

Durch Einsetzen in (4.64) erhält man so den maximalen Wert des SNR am Empfänger Ausgang

$$\text{SNR} = 1 + \text{SNR}_{\text{U}}. \quad (4.66)$$

Diese SNR-Maximierung ist allerdings ein reines Artefakt der SNR-Definition. Da der Entscheider nach den ‚richtigen‘ Signalwerten entscheidet, erhöht die Skalierung die Fehlerwahrscheinlichkeit. Filter, die nach dem MMSE-Kriterium entworfen werden, sind bei nichtverschwindender Rauschleistung grundsätzlich nicht erwartungstreu, d.h. ihr Ausgang ist gestaucht. Nach dem ZF-Kriterium entworfene Filter sind hingegen erwartungstreu, da die Rauschleistung hier keinen Einfluss auf die Entzerrparameter besitzt. Für einen unendlich langen Entzerrer findet sich eine explizite Herleitung von (4.66) in [32], für das Pendant des endlich langen Entzerrers in [2]. In [32] wurde vorgeschlagen, den Entzerrerausgang zu entstauchen um so die Fehlerwahrscheinlichkeit zu minimieren. Dies geschieht durch einfache Multiplikation des Ausgangssignals mit

$$\frac{1}{\alpha_{\text{opt}}} = \frac{\text{SNR}_{\text{MMSE-DFE}}}{\text{SNR}_{\text{MMSE-DFE}} - 1} = \frac{\text{SNR}_{\text{MMSE-DFE}}}{\text{SNR}_{\text{MMSE-DFE,U}}}, \quad (4.67)$$

wobei $\text{SNR}_{\text{MMSE-DFE,U}} = \text{SNR}_{\text{MMSE-DFE}} - 1$ das SNR am Ausgang des erwartungstreuen MMSE – DFE beschreibt. Eine identische Formel kann für den MMSE – LE angegeben werden. Bild 4.12 zeigt ein Blockschaltbild des erwartungstreuen, bzw. unbiased DFE.

4.7 Systemverhalten berechneter Entzerrer

Im Folgenden sollen realisierbare Transversalentzerrer und DFEs für Entzerrung im T -, bzw. $T/2$ -Raster für reale VDSL Szenarien anhand von SINR Werten am Ausgang der berechneten Wiener Filter verglichen werden. Hierbei werden ebenfalls Abschätzung der optimalen Entzerrlängen gegeben. In diesem Abschnitt werden exemplarisch Basisbandentzerrer verglichen, da nur bei Signalverarbeitung im Basisband Entzerrung im Symboltakt möglich ist. Die Performance eines Entzerrers im Bandpassbereich ist jedoch mit einem Basisband FSE vergleichbar.

Empfindlichkeit von der Abtastphase

Zunächst soll die Empfindlichkeit der Performance in Bezug auf die Abtastphase exemplarisch verglichen werden. Als Kanal ist hier der in [176] definierte und in Bild 4.9 gezeigte VDSL 4 Kanal, der sogenannte Bridged Taps beinhaltet, mit einer Leitungslänge $l_4 = 800\text{m}$ gewählt.

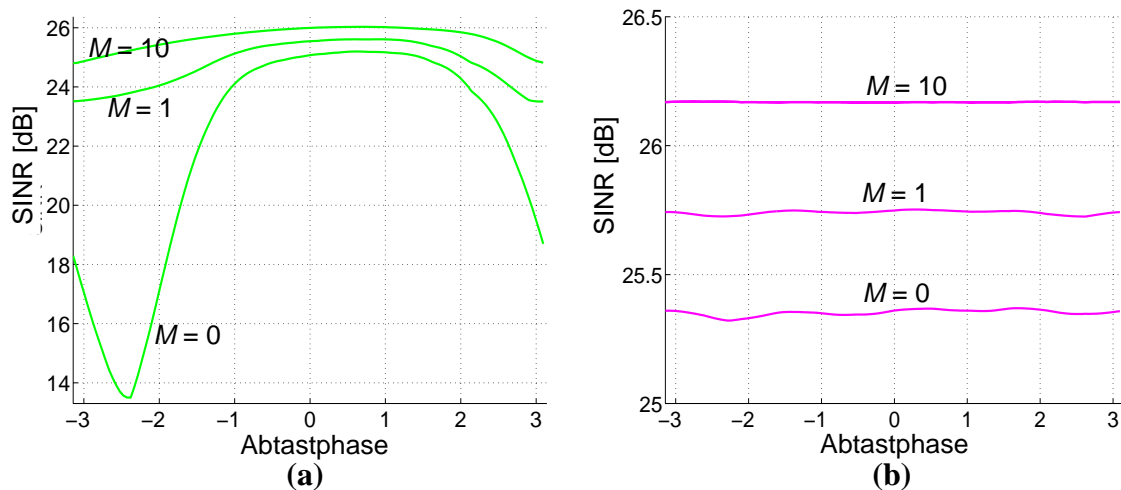


Bild 4.13: Abhängigkeit des erreichbaren SINR von der Abtastphase
(a) $w = 1$, (b) $w = 2$

Die Systemumgebung entspricht einem möglichen VDSL Szenario. So ist die Sendeleistung auf -60 dBm/Hz normiert und am Empfängereingang liegt AWGN mit einer spektralen Leistungsdichte von -140 dBm/Hz an. Als Sende-, bzw. Empfangsfilter wurden exemplarisch Wurzel-Nyquist Roll-Off Filter mit Grad 15 verwendet, die einen Roll-Off Faktor von 10% besitzen. Die Abtastfrequenz beträgt 25 MHz, die Bandbreite 2,5 MHz und die Mittenfrequenz 4,05 MHz. Die verwendete Modulation ist 16-QAM. Im Rahmen dieser Simulation wurde weder FEXT noch NEXT angesetzt. Zunächst haben die Vorwärtsfilter $N = 20$ Koeffizienten.

In Bild 4.13 sind berechnete SINR Werte als Funktion der normierten Abtastfrequenz für verschiedene Längen des Rückkoppelfilters M aufgetragen. Hierbei zeigt Bild 4.13a Berechnungsergebnisse für BSE und Bild 4.13b für FSE mit $w = 2$. Zu beachten ist insbesondere die unterschiedliche Skalierung der y -Achsen. Man erkennt, dass für $M = 0$, also im Falle eines reinen Transversalentzerrers, das Systemverhalten sehr stark von der Abtastphase abhängt. Bereits ein einziger Koeffizient im Rückkoppelzweig lässt diese Empfindlichkeit enorm sinken und steigert gleichzeitig das erreichbare SINR um etwa 0,5 dB. Eine Verlängerung auf $M = 10$ hat auf das erreichbare SINR einen ähnlichen Effekt. Im Gegensatz dazu ist die Performance des FSE grundsätzlich nahezu unabhängig vom Abtastzeitpunkt. Eine Vergrößerung von M hat einen nahezu ebenso großen Einfluss auf das erreichbare SINR wie beim BSE. Zu beachten ist, dass das erzielbare SINR des FSE dem des BSE im betrachteten Fall um etwa 0,15 dB überlegen ist.

Abhängigkeit der Performance von der Entzerrerrlänge

In Bild 4.14 sind die erzielbaren SINR Werte als Funktion der Entzerrerrlänge für das gleiche Szenario genauer betrachtet. Hierbei ist jeweils die optimale Abtastphase gewählt. Aufgetragen ist das SINR des Wiener Filters als Funktion der Länge des Vorwärtsfilters N und parametrisiert nach M . Bild 4.14a zeigt wieder Ergebnisse des BSE und Bild 4.14b die des FSE. Auch hier sind die y -Achsen jeweils unterschiedlich normiert. Man erkennt, dass sowohl für $w = 1$, als auch für $w = 2$ das erzielbare SINR bei einer Vergrößerung des Vorwärtsfilters bis etwa einer Länge von 20 Koeffizienten steigt und danach nahezu konstant bleibt. Grundsätzlich ist diese Abhängigkeit bei kurzen Rückkoppelfiltern stärker ausgeprägt. Bei einer Verlängerung des FBF steigt das SINR bis etwa in einen Bereich von $M = 6$ merklich an, darüber ist auch hier die Abhängigkeit sehr gering. Darüberhinaus ist zu erkennen, dass speziell für kurze Filter der FSE ein besseres Verhalten zeigt als der BSE. Bei langen Filtern liegt der Unterschied im erreichbaren SINR hingegen nur bei etwa 0,15 dB.

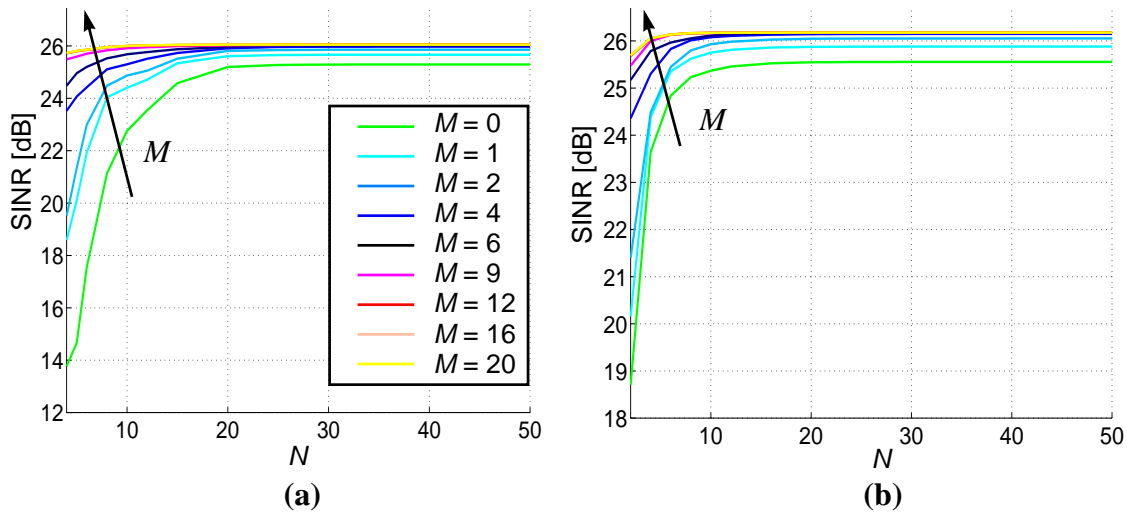


Bild 4.14: Abhängigkeit des erreichbaren SINR von der Entzerrerrlänge bei jeweils optimaler Abtastphase (a) $w = 1$, (b) $w = 2$

Abhängigkeit der Performance von der Leitungslänge

Als letztes ist in Bild 4.15 für einen ausreichend langen FSE mit $N = 20$ und $M = 10$ das erzielbare SINR als Funktion der Leitungslänge aufgetragen. Eine derartige Betrachtung ist zwar jenseits des Fokus der Arbeit, passt an dieser Stelle thematisch aber gut. Die Leitung ist ETSI 1, was einem UTP Kabel mit Durchmesser 0,5 mm entspricht. Bei den in Bild 4.15a gezeigten Berechnungen befinden sich hier fünf FEXT-Störer in einer Entfernung von 400 m zum Empfänger. Hierbei ist die Sende PSD der Störer identisch zu der des Nutzsignals. Die restlichen Parameter entsprechen denen der vorhergehenden Berechnungen. Man erkennt, dass das erzielbare SINR bei Angaben in dB nahezu linear mit der Leitungslänge sinkt, wobei die Abnahme etwa 3,75 dB pro 100 Metern entspricht. Für die in Bild 4.15b gezeigten Berechnungen wurde angenommen, dass sich die FEXT-Störer am anderen Leitungsende befinden, d.h. die Leitungslänge der Störer entspricht der des Senders. Bei dieser Kurve ist zu erkennen, dass das erreichbare SINR in Abhängigkeit von der Leitungslänge in einem weiten Bereich wesentlich langsamer sinkt, als bei einer fest angenommenen Leitungslänge der Störsignale. Im Bereich der Leitungslänge zwischen etwa 400m und 900 m beträgt die SINR Abnahme etwa 0,75 dB pro 100 m. Wird die Leitung weiter vergrößert, überwiegt der Effekt der Dämpfung des Sendesignals den Effekt der Abnahme der empfangenen Störleistung wieder deutlich, so dass ab etwa

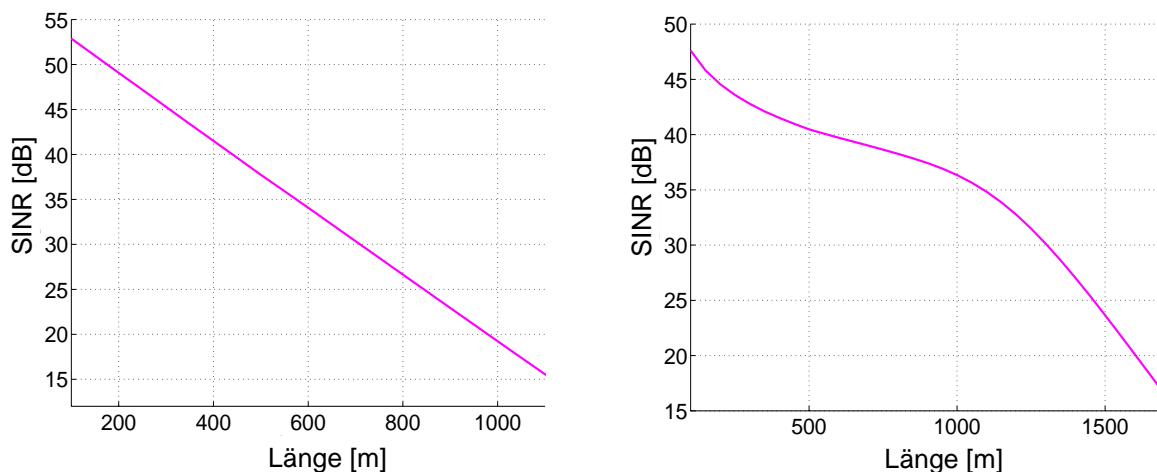


Bild 4.15: Abhängigkeit des erreichbaren SINR von der Leitungslänge (a) FEXT-Länge = 400m, (b) FEXT-Länge = Leitungslänge

1100 m Leitungslänge die mittlere SINR Abnahme pro 100 m zusätzlicher Länge ebenfalls bei etwa 3,75 dB liegt. Man erkennt aus den Berechnungen, dass in US Richtung Signale von Sendern, die weit von der CO entfernt sind, stark durch die Leitung gedämpft werden und von anderen Sendern, die näher an der CO plaziert sind, stark gestört werden. Daher sollen Sender, die nahe an der CO sind, mit vergleichsweise geringen Sendeleistungen senden. Die genannte Maßnahme wird auch als *Power Back Off* bezeichnet. Eine Übersicht über verschiedene dafür einsetzbare Verfahren findet sich etwa in [84].

Allgemeinere Untersuchungen des Verhaltens von Einzelträger VDSL Systemen finden sich etwa in [1], [64], [65], [81] und [83].

4.8 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden zunächst optimale Koeffizientensätze beliebig langer, sowie praktisch realisierbarer, linearer und entscheidungsrückgekoppelter Entzerrer berechnet. Als Optimierungskriterium erwies sich vor allem die Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers am Entscheider als sinnvoll. Für beliebig lange Entzerrer zeigte sich, dass bei weißem Rauschen das Rückkoeffizientenfilter bei beiden Strukturen ein Dekorrelationsfilter des Eingangssignals darstellt. Für den Fall, dass das Eingangssignal überabgetastet ist, wurde Dekorrelation hierbei im Frequenzbereich so gedeutet, dass das gefaltete Spektrum einen konstanten Amplitudengang besitzt. Im Zeitbereich weist die Autokorrelationsfunktion, mit Ausnahme des Ursprungs, bei Vielfachen der Symboldauer Nullstellen auf. Auch die Koeffizientengewichte der beiden Vorwärtsfilter sind im genannten Grenzfall identisch. Bei einem Vergleich der verschiedenen Filterstrukturen erwiesen sich für einen Einsatz bei drahtgebundener Kommunikation fraktionale Entzerrer als vorteilhaft. Dies gilt insbesondere, wenn die Adaption der Entzerrer im praktischen Betrieb referenzdatenfrei erfolgen soll. Hauptgrund dafür ist die geringe Abhängigkeit der Performance vom Abtastzeitpunkt, sowie die hier gegebene Möglichkeit, die Synchronisation ohne die Verwendung unterschiedlicher Symbole durchzuführen. Nachteilig ist, dass Filter die vor dem Entzerrer angeordnet sind, Ausgangsdaten mit einer höheren Rate generieren müssen. Dies gilt insbesondere für Basisbandverfahren mit Echokompensator.

Anschließend wurden Verfahren angegeben, um die Auswirkungen der Fehlerfortpflanzung bei entscheidungsrückgekoppelten Entzerrern zu berechnen und zu minimieren.

Die berechneten Wiener Filter erweisen sich zwar als optimal im Sinne des MMSE, allerdings nicht in Bezug auf die BER. Dies liegt daran, dass sie bei vorhandenem Rauschen durch Skalierung des Ausgangs insgesamt die Leistung aus Rest-ISI und gefiltertem Rauschen verringern, dadurch aber nicht mehr erwartungstreu sind. Durch einfache Skalierung des Entzerrerausgangs kann dieser Effekt jedoch eliminiert werden.

Abschließend wurden für typische Einzelträger VDSL-Szenarien die sich ergebenden SINR Werte bei der Verwendung optimaler Entzerrer verglichen. Hierbei stellte sich heraus, dass FSEs und BSEs normalerweise bei gleicher Anzahl an Koeffizienten ähnliches Verhalten zeigen, wobei fraktionale Entzerrer normalerweise geringfügig höheres SINR am Ausgang aufweisen. Somit ist der Aufwand für die Entzerrung bei beiden Verfahren identisch. Als Richtwert zur erforderlichen Entzerrerrlänge wurde für Überabtastrfaktoren von eins, bzw. zwei eine Länge des FFE von etwa 20 Koeffizienten und des FBF von etwa 10 Koeffizienten gefunden. Diese Werte sind aber abhängig von der Systemumgebung. Abschließend wurde die Abhängigkeit der erzielbaren Performance von der Leitungslänge diskutiert. Hierfür wurden zwei Szenarien ver-

glichen, bei denen FEXT Störer entweder immer im selben Abstand, bzw. bei einer Entfernung, die der Leitungslänge entspricht, auftreten. Dieses zweite System kann als relativ optimistischer Fall eines Systems angesehen werden, bei dem Power Back-Off angewandt wird. Bei diesem System zeigt der betrachtete Empfänger, bei Leitungslängen die größer als die fest gewählte Entfernung des ersten Szenarios sind, ein deutlich verbessertes Verhalten.

5 Adaptive Entzerrung

In der Praxis sind die Eigenschaften des Übertragungskanals, sowie des additiven Rauschens, in der Regel nicht bekannt. Daher können die optimalen Koeffizientengewichte eines eingesetzten Entzerrers nicht, wie in Kapitel 4 beschrieben, berechnet werden, sondern müssen mit Hilfe adaptiver Verfahren approximiert werden. Zwei grundlegende Techniken sind hierbei deterministische und stochastische Gradientenverfahren. Beide Verfahren können dazu eingesetzt werden, um den Erwartungswert des Entscheidungsfehlers zu minimieren. Hierbei wird bei den deterministischen Verfahren die Erwartungswertbildung durch eine Mittelwertbildung angenähert, bei den stochastischen Verfahren wird vereinfachend der jeweils aktuelle Fehler als Erwartungswert angenommen. Es liegt auf der Hand, dass die deterministischen Verfahren in aller Regel einen schnelleren Adaptionsverlauf zeigen, dieser muss jedoch mit einem höheren Implementierungsaufwand erkaufte werden. Da bei der hier betrachteten leitungsgebundener Kommunikation die Geschwindigkeit der Adaption kein entscheidender Parameter ist, liegt der Fokus dieser Arbeit auf den stochastischen Gradientenalgorithmien, deren prominentester der *Least Mean Squares* (LMS) Algorithmus ist. Deterministische Verfahren, wie der *Recursive Least Squares* (RLS) Algorithmus, werden nur am Rande betrachtet.

Zunächst wird in Kapitel 5.1 auf die Adaption von Transversalentzerrern eingegangen. In Kapitel 5.2 wird anschließend auf die Modifikationen eingegangen, die bei der Adaption eines entscheidungsrückgekoppelten Entzerrers erforderlich sind. Anschließend wird in Kapitel 5.3 die Adaption von rein rekursiven Entzerrern beschrieben. Hierbei liegt der Fokus auf einer Amplitudenentzerrung, was einer linearen Prediktion entspricht. Von dieser Technik wird in Kapitel 6.3.2 im Rahmen der blinden Adaption von DFEs intensiv Gebrauch gemacht. Die Ergebnisse dieses Abschnitts werden in Kapitel 5.4 zusammengefasst und diskutiert.

5.1 Transversalentzerrer

5.1.1 Der Least Mean Squares (LMS) Algorithmus

Der Erwartungswert des quadratischen Fehlers am Ausgang eines Transversalentzerrers ist ein quadratischer Ausdruck der Koeffizientengewichte. Er ist gegeben als

$$J(n) = E\{|e(n)|^2\} = E\{|x(n - \delta) - \mathbf{f}^T(n)\mathbf{r}(n)|^2\} = 1 - \mathbf{f}^H(n)\mathbf{p}_{\mathbf{r}\mathbf{x}} - \mathbf{p}_{\mathbf{r}\mathbf{x}}^H\mathbf{f}(n) + \mathbf{f}^H(n)\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}\mathbf{f}(n). \quad (5.1)$$

Bedingt durch die positive Definitheit der Autokorrelationsmatrix $\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}$ [36], [112] hat (5.1) ein einziges Minimum, das durch die diskrete Wiener-Hopf Gleichung (4.49) gegeben ist. Darüberhinaus lässt sich zeigen [112], dass die Hyperflächen mit konstantem MSE, im durch die Filterkoeffizienten aufgespannten N -dimensionalen Raum, Ellipsoide sind, deren Hauptachsen durch die Eigenvektoren der Autokorrelationsmatrix $\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}$ gegeben sind. Aufgrund dieser Eigenschaften ist es grundsätzlich möglich, den linearen Entzerrer durch ein Gradientensuchver-

fahren zu adaptieren. Minimiert wird daher der Gradient der Kostenfunktion (5.1) in Bezug auf den Vektor der Entzerrerparameter. Mit den Ergebnissen aus Appendix 1 ist dieser Gradient gegeben durch

$$\nabla_{\mathbf{f}} J(n) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{f}^*} J(n) = -2\mathbf{p}_{\mathbf{r}_x} + 2\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}} \mathbf{f}(n). \quad (5.2)$$

Das exakte Gradientensuchverfahren besteht darin, die Koeffizientengewichte geringfügig, also gewichtet mit einer kleinen Schrittweite μ , in negativer Richtung des Gradienten zu korrigieren. Allerdings sind in der Praxis die Autokorrelationsmatrix $\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}$ sowie der Kreuzkorrelationsvektor $\mathbf{p}_{\mathbf{r}_x}$ unbekannt und müssen geschätzt werden. Das einfachste Schätzverfahren besteht darin, die Werte zum momentanen Zeitindex n als Schätzwerte zu verwenden. Somit schreibt sich die geschätzte Autokorrelationsmatrix als $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}(n) = \mathbf{r}^*(n)\mathbf{r}^T(n)$ und der geschätzte Kreuzkorrelationsvektor als $\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}_x}(n) = \mathbf{r}^*(n)\hat{x}(n)$, wobei hier zusätzlich das entschiedene Symbol $\hat{x}(n)$ als Schätzwert des Sendesymbols $x(n)$ angenommen wurde. Diese Vereinfachungen führen zu dem sogenannte *Least Mean Squares* (LMS) Algorithmus. Er ist gegeben durch

$$\mathbf{f}(n+1) = \mathbf{f}(n) + \mu \mathbf{r}^*(n)(\hat{x}(n) - \mathbf{r}^T(n)\mathbf{f}(n)) = \mathbf{f}(n) + \mu \mathbf{r}^*(n)e(n). \quad (5.3)$$

Der LMS Algorithmus ist ein stochastisches Gradientensuchverfahren, da in jedem Schritt die Veränderung eine zufällige Richtung hat und nur im Mittel in Richtung des Gradienten zeigt. Daher ist die Konvergenzgeschwindigkeit des LMS Algorithmus relativ gering. Eine Abschätzung findet sich in Kapitel 5.1.1.2.

Üblicherweise wird der Ausgang des Vorwärtsentzerrers zur Trägerphasenregelung, wie in Kapitel 2.3.2 beschrieben, mit einem Wert $e^{j\varphi}$ multipliziert, also in der komplexen Ebene gedreht. In diesem Fall muss das Fehlersignal zum Nachführen des Koeffizientensatzes $\mathbf{f}(n)$ mit dem konjugiert komplexen Wert $e^{-j\varphi}$ multipliziert werden, also in der komplexen Ebene quasi zurückgedreht werden.

Der LMS Algorithmus kann als ein Repräsentant der allgemeinen Gruppe von stochastischen Gradientenalgorithmien aufgefasst werden, die die Entzerrerparameter nach folgender Gleichung nachführen [3], [4]:

$$\mathbf{f}(n+1) = \mathbf{f}(n) + \mu \mathbf{r}^*(n)f(e(n)). \quad (5.4)$$

Zu dieser Gruppe von Algorithmen gehören unter anderem der Least Mean Forth (LMF) Algorithmus mit $f(e(n)) = e^3(n)$ und der Sign-Error LMS Algorithmus mit $f(e(n)) = \text{sgn}(e)$. In [3] und [4] wurde, unter den sehr allgemeinen Annahmen, dass das Rauschen i.i.d., unabhängig von den Sendesymbolen, mittelwertfrei und gaußverteilt ist, sowie dass der Entzerrer lang genug ist, so dass $e(n)$ nach dem zentralen Grenzwertsatz näherungsweise ebenfalls als gaußverteilt angenommen werden kann, gezeigt, dass, bis auf eine Skalierungskonstante die in die Schrittweite gerechnet werden kann, der LMS Algorithmus der optimaler Algorithmus der Familie der adaptiven Gradientenalgorithmien nach (5.4) ist.

Der Berechnungsaufwand des LMS Algorithmus ist relativ gering, kann aber etwa durch nicht-lineare, vorzeichenbasierte Varianten noch verringert werden. Hierbei wird entweder vom Regressorvektor $\mathbf{r}(n)$, vom Fehlerterm $e(n)$, bzw. von beiden nur das Vorzeichen zur Berechnung des Korrekturterms verwendet. Auf diese Algorithmen wird genauer in Kapitel 7.1.1 eingegangen.

5.1.1.1 Schrittweite zur Adaption

Der einzige Parameter des LMS Algorithmus ist die Schrittweite μ . Die klassische Obergrenze

von μ , unter der die Stabilität des LMS Algorithmus gewährleistet ist, wurde in [48] mit Hilfe der Unabhängigkeitsannahme [179], [21], [36] gefunden als

$$\mu < 2 / (3 \text{Tr}\{\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}\}). \quad (5.5)$$

Unter Verwendung der Unabhängigkeitsannahme werden aufeinanderfolgende Eingangsvektoren des Entzerrers $\mathbf{r}(n)$ als statistisch unabhängig angenommen. Somit gilt für die Autokorrelationsmatrix $\mathbf{V}_{\Delta}(n)$ des Koeffizientenfehlervektors $\mathbf{v}_{\Delta}(n) = \mathbf{f}_{opt} - \mathbf{f}(n)$, der die Differenz der aktuellen Koeffizientengewichte von denen des Wiener Filters angibt,

$$\mathbf{V}_{\Delta}(n) = E\{\mathbf{v}_{\Delta}(n)\mathbf{v}_{\Delta}^H(n)\} = \mu N \mathbf{E}. \quad (5.6)$$

Die Leistung der Fluktuation der Koeffizientengewichte ist mit dieser klassischen Näherung also für alle Koeffizienten gleich, sowie unkorreliert. Diese Annahme vereinfacht die Behandlung des LMS Algorithmus ganz erheblich, in der Praxis wird sie allerdings stark verletzt. So wird ein Eingangsvektor zum Zeitpunkt n aus dem Vektor zum Zeitpunkt $(n-1)$ durch elementweises Verschieben der Koeffizienten um eine Position gebildet, lediglich der erste Eintrag stellt einen neuen Wert dar. Trotz dieser Inkonsistenz lassen sich viele Eigenschaften des LMS Algorithmus auch mit dieser Annahme plausibel machen [36], [158]. Es lässt sich allerdings zeigen, dass (5.6) auch dann erfüllt ist, wenn das Rauschen am Entzerrerausgang weiß ist [21], was für genügend lange Entzerrer im eingeschwungenen Zustand näherungsweise gegeben ist, bzw. wenn die Schrittweite μ gegen Null geht [120]. Daher wurden viele Aussagen, die mit Hilfe der Unabhängigkeitsvoraussetzung getroffen wurden, im Rahmen aufwändigere Untersuchungen, die von dieser Annahme keinen Gebrauch machen, bestätigt.

Durch den Zusammenhang der zeitlichen und räumlichen Komponente, der bei Verzögerungsleitung durch die elementweise Verschiebung der einzelnen Registerinhalte zu jedem Zeitpunkt gegeben ist, konnten in [22] Methoden der Wellentheorie erfolgreich auf die Analyse des LMS Algorithmus angewandt werden. Für lange Filter wurde dadurch, ohne Verwendung der Unabhängigkeitsannahme, folgende Stabilitätsbedingung gefunden:

$$\mu < \frac{1}{N[P_r]_{max}}. \quad (5.7)$$

Hierbei bezeichnet $[P_r]_{max}$ das Maximum der spektralen Leistungsdichte des durch die Kanalübertragungsfunktion verzerrten Sendesignals. Mit $NP = \text{Tr}\{\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}\}$ stellt (5.5) eine sehr gute Näherung dieses Wertes dar. Ein weiterer Wert für die maximale Schrittweite des LMS Algorithmus wurde - unter etwas spezielleren Annahmen, jedoch ebenfalls ohne Verwendung der klassischen Unabhängigkeitsannahme - in [112] zu

$$\mu < 2 / (\text{Tr}\{\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}\}) \quad (5.8)$$

berechnet. Dieser Wert ist im allgemeinen etwas größer als der durch (5.7) gegebene. Es ist hierbei in [22] anhand von Simulationen gezeigt, dass der LMS Algorithmus tatsächlich instabil werden kann, wenn die Schrittweite größer als die in [112] angegebene Grenze wird. Dieses Verhalten konnte im Rahmen dieser Arbeit bestätigt werden, allerdings treten Instabilitäten, für Werte von μ zwischen den durch (5.7) und (5.8) gegebenen Grenzen liegen, in der Praxis nur bei unrealistisch großem additivem Rauschen am Entzerrereingang auf. In [112] wird herausgestellt, dass die Grenze (5.8) lediglich von der leicht meßbaren Empfangsleistung des Signals abhängt und nicht von dessen spektraler Formung. Dies ist bei der in [22] gefundenen Grenze offensichtlich nicht mehr der Fall.

Als optimale Schrittweite im Sinne maximaler Adaptionsgeschwindigkeit wurde in [48], [112]

$$\mu_{opt} \approx 1 / (3 \text{Tr}\{\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}\}) \quad (5.9)$$

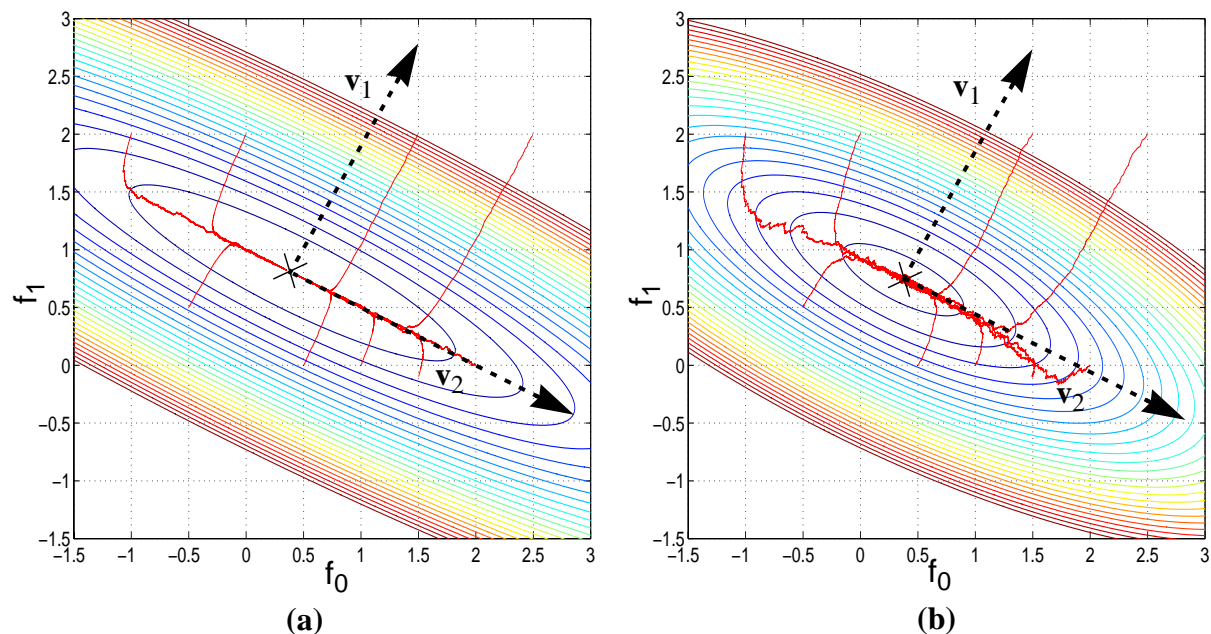


Bild 5.1: MSE- Fehleroberfläche eines überabgetasteten Kanals (a) rauschfrei und (b) mit AWGN, so dass der Rauschabstand am Entzerrereingang 13 dB beträgt

als Richtwert angegeben. Im stationären Betrieb wählt man ohnehin meist Schrittweiten, die wesentlich kleiner sind als die in (5.7)-(5.9) gegebenen Werte. Hauptgrund dafür ist, dass die, durch das Koeffizientenrauschen induzierte Verschlechterung des MSE, mit steigender Schrittweite wächst. Dies wird in Kapitel 5.1.1.3 genauer untersucht.

5.1.1.2 Adaptionsgeschwindigkeit

In [112] wurde gezeigt, dass die Adaptionkurven des LMS Algorithmus unterschiedliche Adaptionsgeschwindigkeiten zeigen, wobei die Adaption zu Beginn schneller erfolgt als zu späteren Zeitpunkten. Ursache hierfür ist, dass die Adaption, im durch die Entzerrerkoeffizienten aufgespannten N -dimensionalen Raum, in Richtung der Eigenvektoren von $\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}$ mit den Zeitkonstanten

$$\tau_i = 1/(4w\mu\lambda_i) \quad (5.10)$$

erfolgt, wobei λ_i der zum i -ten Eigenvektor \mathbf{v}_i korrespondierende Eigenwert ist. Zu Beginn der Adaption erfolgt die Konvergenz daher sehr schnell in Richtung der Eigenvektoren mit den kleinsten Zeitkonstanten, also den größten korrespondierenden Eigenwerten. Sobald in diesen Richtungen das Optimum erreicht ist, erfolgt die Adaption in Richtung der Eigenvektoren mit korrespondierenden größeren Zeitkonstanten, so dass die Adaptionsgeschwindigkeit abnimmt. Im Gegensatz zu den Ergebnissen in [112], ist Gleichung (5.10) zum einen auf die Fehlerleistung bezogen und zum anderen auf die Anzahl der Symbole am Filterausgang, so dass der Überabtastrfaktor w in den Nenner aufgenommen wurde.

Besonders deutlich wird das beschriebene Verhalten für einen Entzerrer mit zwei Koeffizienten und einen Kanal dessen Autokorrelationsmatrix einen relativ großen und einen vergleichsweise kleinen Eigenwert besitzt. Die besprochene Eigenschaft tritt aber immer auf, mit Ausnahme des trivialen Falles eines Eingangssignals mit flachem Leistungsdichtespektrum, für den alle Eigenwerte von $\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}$ identisch sind.

Dieser Zusammenhang ist in Bild 5.1 für einen Entzerrer mit zwei Koeffizienten, der auf der doppelten Symbolrate läuft, gezeigt. Der in [88] vorgeschlagene Kanal besitzt im $T/2$ -Raster

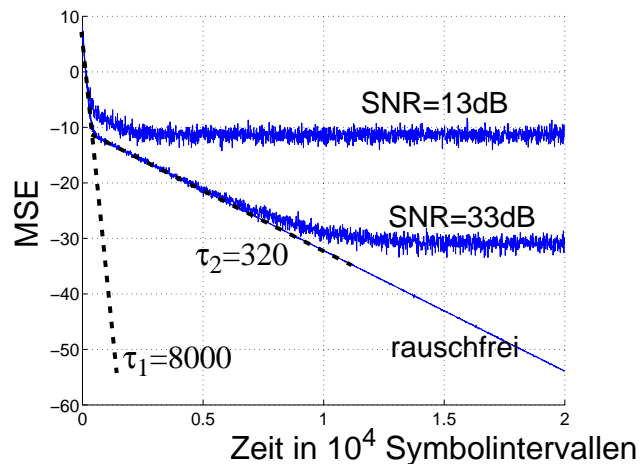


Bild 5.2: Verlauf des MSE der Simulationen aus Bild 5.1 für den Startwert $[2,5 \ 2,0]^T$ als Funktion der Zeit.

die Koeffizienten $[1,0 \ 0,5 \ 0,1 \ -0,2]^T$. Die Eigenwerte der korrespondierenden Kanalautokorrelationsmatrix betragen $\lambda_1 = 1,25$ und $\lambda_2 = 0,05$. In Bild 5.1 ist die LMS-Fehleroberfläche dieses Kanals für eine Systemverzögerung $\delta = 0$ als Funktion der Filterparameter gezeigt. Hierbei wurde in Bild 5.1a kein Rauschen angesetzt, in Bild 5.1b wurde AWGN mit $\sigma_n^2 = 0,1$ zugeführt, so dass sich ein SNR am Empfängereingang von 13 dB ergibt. Das verwendete Modulationsverfahren ist BPSK.

In Bild 5.1 sind die sogenannten unimodalen Kostenfunktion gezeigt, die zu einer bestimmten Systemverzögerung und einer definierten Orientierung der Signalraumkonstellation korrespondieren. Grund dafür ist, dass die Adaption des LMS Algorithmus im entscheidungsgestützten Modus verläuft, bei dem diese beiden Parameter bereits vorgegeben sind. In Kapitel 6 werden in Bild 6.1 für den gleichen Kanal Kostenfunktionen eines referenzdatenfreien (blinden) Entzerralgorithmus gezeigt, die im Gegensatz zu den hier gezeigten Grafiken mehrere Minima aufweisen, die zu verschiedenen Werten der genannten Parameter korrespondieren.

Man erkennt in Bild 5.1a und b, dass die LMS Fehleroberfläche, wie beschrieben, ein Ellipsoid mit den jeweiligen Hauptachsen \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 darstellt. In den beiden Bildern sind diese Hauptachsen eingezeichnet. Zusätzlich ist die Position des jeweiligen Minimums der Kostenfunktion als Kreuz dargestellt. Dieses Minimum liegt im rauschfreien Fall bei $[0,400 \ 0,800]^T$, bei zusätzlichem Rauschen liegt es bei $[0,370 \ 0,741]^T$. Außerdem ist die Fehleroberfläche in Bild 5.1b aufgrund des gefilterten Rauschens auch steiler. Im rauschfreien Fall kann der Entzerrer den Kanal theoretisch perfekt entzerren, andernfalls liegt das mit dem verwendeten Entzerrer erreichbare SINR bei 11,3 dB. In Bild 5.1a und b finden sich zusätzlich simulierte Trajektorien der Entzerrerparameter für verschiedene, willkürlich gewählte, Startpunkte und eine gewählte Schrittweite μ des Entzerrers von 0,005. Es ist zu sehen, dass die Entzerrerparameter sich zunächst sehr schnell in Richtung von \mathbf{v}_1 , mit zugehörigem Eigenwert $\lambda_1 = 1,25$ verändern, anschließend erfolgt die Adaption in Richtung von \mathbf{v}_2 , mit zugehörigem Eigenwert $\lambda_2 = 0,05$. Die beiden Zeitkonstanten ergeben sich nach (5.10) zu $\tau_1 = 8000$ und $\tau_2 = 320$.

In Bild 5.2 sind die MSE-Werte der Kurven in Bild 5.1a und b aufgetragen, die zu dem Startwert $[2,5 \ 2,0]^T$ korrespondieren. Hierbei wurden jeweils die Ergebnisse aus 10 verschiedenen Simulationen gemittelt. Zusätzlich ist noch eine Kurve aufgenommen, die bei einem SNR-Wert von 33 dB aufgenommen wurde.

Die Konvergenzzeit n_c wird üblicherweise als die mittlere Anzahl an Adaptionsschritten definiert, nach der die Leistung des „transienten Fehlersignals“ am Ausgang des Entzerrers kleiner als die Fehlerleistung im eingeschwungenen Zustand ist [112]. Der transiente Fehler ist hierbei als Differenz des aktuellen Fehlers $e(n)$ vom Fehler im eingeschwungenen Zustand definiert.

Die klassischen Verfahren zur Berechnung dieser Zeitkonstante setzen die Unabhängigkeitsannahme (siehe Kapitel 5.1.1.1) voraus. Unter der wesentlich allgemeineren Annahmen, dass das Eingangssignal $\mathbf{r}(n)$ des Entzerrers unabhängig von $e(n)$ ist, was bei langen Filtern in guter Näherung gegeben ist, wurde in [112] folgende Formel für n_c hergeleitet:

$$n_c = 1 + \frac{Nr_\lambda}{2\mu w \text{Tr}\{\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}\}} \left(\ln\left(\frac{P_{\tilde{y}}}{\varepsilon_{min}}\right) + \ln\left(\frac{2}{\mu \text{Tr}\{\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}\}}\right) \right) \quad \text{mit} \quad (5.11)$$

$$r_\lambda = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \lambda_k \sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k}. \quad (5.12)$$

Für die in Bild 5.2 gezeigten Simulationen beträgt die so berechnete Konvergenzzeit ca. $15000T$ bei einem SNR am Entscheidungseingang von 33 dB, bzw. $3200T$ bei einem SNR von 13 dB.

Hierbei ist der Term vor der Klammer in (5.11) im Wesentlichen indirekt proportional zur mittleren Adaptionsgeschwindigkeit, also zur logarithmischen MSE Verbesserung pro Zeiteinheit. Der Ausdruck in der Klammer gibt hingegen an, wann der stationäre MSE-Wert erreicht ist und die Adaption somit stoppt. Der erste Term dieses Ausdrucks ist in der Regel dominierend, sein Argument ist das erreichbare SINR. Das Argument des zweiten Terms gibt hingegen die durch die Adaption hervorgerufene Fehlabweichung an. Die wesentlichen Parameter, von denen die Konvergenzzeit abhängt, sind

- die Verteilung der Eigenwerte der Autokorrelationsmatrix $\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}$, wobei die schnellste Konvergenz bei einem flachen Spektrum erfolgt, bei dem gilt $r_\lambda = 1$. Generell gilt, dass die Eigenwertverteilung (der sogenannte *eigenvalue spread*) eine untere Schranke zu dem Verhältnis des Maximums der spektralen Leistungsdichte S_{max} zu deren Minimum S_{min} darstellt, dass also gilt

$$\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \leq \frac{S_{max}}{S_{min}}, \quad (5.13)$$

wobei mit zunehmender Anzahl an Koeffizienten die Schranke einen immer besseren Schätzwert darstellt [72]. Die Eigenwertverteilung findet auf indirektem Weg über die Größe r_λ Einzug in (5.11). Es gilt also näherungsweise, dass je stärker der Eingang des Entzerrers korreliert ist, bzw. je weniger flach das Leistungsdichtespektrum am Eingang des Entzerrers ist, desto länger die zur Adaption benötigte Zeit beträgt. Dies kann geometrisch so interpretiert werden, dass nach (5.4) die Adaption parallel zu den Eingangsvektoren $\mathbf{u}(n)$ erfolgt. Je stärker die Sequenz der Eingangssignale korreliert ist, desto kleiner ist im Mittel der Winkel zwischen aufeinanderfolgenden Eingangsvektoren und desto langsamer erfolgt daher die Adaption [157]. Daraus folgt auch, dass fraktionale Entzerrer allgemein eine größere Konvergenzzeit aufweisen als BSEs, da hier aufeinanderfolgende Eingangssignale in der Regel stärker korreliert sind.

- die Anzahl an Entzerrerkoeffizienten N . Hierbei ist zu beachten, dass gilt $P_x = \text{Tr}\{\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}\}/N$, wobei P_x die empfangene Nutzsignalleistung ist, so dass der zweite Term von (5.11), anders als in [112] angegeben, nicht direkt proportional zu N ist. Trotzdem gilt diese Proportionalität näherungsweise, da r_λ langsam mit steigendem N zunimmt und auch das durch $P_{\tilde{y}}/\varepsilon_{min}$ gegebene SINR am Entzerrerausgang mit steigendem N steigt. Der zweite Term in der Klammer in (5.11) sinkt hingegen mit steigender Filterlänge, dieser Term ist jedoch in der Regel wesentlich kleiner als der erste. Zusammenfassend sind die beiden wesentlichen Effekte die, dass mit steigender Filterlänge das erreichbare SNR steigt, so dass zum Erreichen dieses höheren Wertes mehr Adaptionschritte erforderlich sind und zum anderen, dass mit steigender Filterlänge die

Anzahl der Dimensionen des durch die Entzerrerkoeffizienten aufgespannten Raumes steigt, so dass im Mittel das Verhältnis von größtem zu kleinstem Eigenwert von $\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}$ ebenfalls zunimmt.

- die Schrittweite μ . Die Adaptiondauer nimmt erwartungsgemäß mit steigender Schrittweite fast proportional ab. Allerdings ist zu beachten, dass der zweite Term in der Klammer in (5.11), der eine Funktion der durch die Adaption verursachten Rauschleistung ist, ebenfalls langsam mit steigender Schrittweite sinkt, so dass die Abhängigkeit insgesamt leicht überproportional ist.
- das SNR. Wie bereits bei der Abhängigkeit von der Entzerrerrlänge beschrieben, steigt die Adaptiondauer mit dem SNR am Entzerrereingang.

Die erste beschriebene Eigenschaft, dass die Adaption um so langsamer erfolgt, je kleiner der Winkel zwischen aufeinanderfolgenden Eingangsvektoren ist, wurde in [157] zur Beschleunigung des LMS Algorithmus verwendet. Die Idee besteht hierbei darin, mit Hilfe des bekannten Gram-Schmittsche Orthogonalisierungsverfahrens, aufeinanderfolgende Eingangsvektoren zu orthogonalisieren. Wird der gewünschte Ausgang sowie das Fehlersignal in gleicher Weise umgerechnet wie das Eingangssignal, konvergiert dieser modifizierte Algorithmus schneller als der originale LMS Algorithmus.

5.1.1.3 Fehler im eingezwungenen Zustand

Entzerrer die durch einen stochastischen Gradientenalgorithmus adaptiert werden, wie etwa der LMS Algorithmus oder der in Kapitel 6.2 untersuchte CMA, zeigen einen zusätzlichen MSE (*excess* MSE, EMSE), der durch Adaptions-, bzw. Gradientenrauschen hervorgerufen wird. Dies liegt daran, dass die Koeffizientengewichte durch die nichtverschwindende Adaptionsschrittweite um die optimalen Gewichte schwanken. Unter den realistischen Annahmen, dass Rauschen und Sendesignal unkorreliert sind, sowie dass der Entzerrer genügend lang ist, so dass $\mu^2 \|\mathbf{r}(n)\|^2$ näherungsweise statistisch unabhängig von $|e(n)|^2$ ist, wurde in [181] folgende Abschätzung der Fehlerleistung ϵ_{LMS-SS} im eingezwungenen Zustand am Ausgang eines mit dem LMS Algorithmus adaptierten linearen Entzerrers gegeben:

$$\epsilon_{LMS-SS} = \frac{2\mu\epsilon_{min}\text{Tr}(\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}})}{2 - \mu\text{Tr}(\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}})}. \quad (5.14)$$

Zur Herleitung von (5.14) in [181] wurde das Rauschen als weiß angenommen, die zur Analyse des LMS Algorithmus üblicherweise getroffene Unabhängigkeitsannahme allerdings nicht verwendet. Diese Annahme ist zwar sehr unrealistisch [36], [112] trotzdem stimmen die damit gefundenen Näherungen erstaunlich gut mit (5.14) überein. Für kleine Schrittweiten kann der zweite Term des Nenners von (5.14) gegenüber dem ersten vernachlässigt werden, so dass folgende Vereinfachung getroffen werden kann

$$\epsilon_{LMS-SS} = \mu\epsilon_{min}\text{Tr}(\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}})/2 \quad \text{für kleine } \mu. \quad (5.15)$$

Für das zugrundeliegende Szenario der in Bild 5.2 gezeigten Simulationsergebnisse ergeben sich mit (5.14) Werte von 11,3 dB, bzw. 31,0 dB. Diese Werte stimmen sehr gut mit den Simulationsergebnissen überein.

Anhand von (5.14) und (5.15) kann man erkennen, dass der EMSE näherungsweise proportional zur Schrittweite, zum MSE des Wiener Filters und über die Größe $\text{Tr}(\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}) = NP_x$ auch zur Länge des linearen Entzerrers ist. Daher gibt es bei einer festen Schrittweite eine optimale Entzerrerrlänge. Wählt man den Entzerrer länger als diese optimale Länge, nimmt zwar der Wert ϵ_{min} weiter ab (mit Ausnahme von trivialen Kanälen, die bereits perfekt entzerrt werden), der MSE am Entzerrerausgang steigt jedoch, da die größere Anzahl an Koeffizienten durch die Ad-

aption ein größeres Koeffizientenrauschen induzieren. Eine Verbesserung ist daher nur durch eine gleichzeitige Reduktion der Schrittweite möglich. Daher besteht eine bewährte Strategie darin, zu Beginn der Adaption die Schrittweite relativ groß und den Entzerrer relativ kurz zu wählen. Nachdem dieser sogenannte Start-Entzerrer adaptiert wurde, wird dann die Anzahl an Koeffizienten erhöht und die Schrittweite gleichzeitig verringert. Diese Strategie ist besonders dann von Vorteil, wenn der Start der Adaption untrainiert, also blind erfolgt, da die dann eingesetzten Adaptionsverfahren in der Regel ein sehr viel größeres EMSE zeigen, als der LMS Algorithmus [87]. Blinde Adaptionsverfahren werden genauer in Kapitel 6 behandelt.

5.1.1.4 Verwendung einer variablen Schrittweite

Wie bereits erwähnt, wird die geringe Komplexität des LMS Algorithmus durch eine langsame Adaptionsgeschwindigkeit erkauft. Zu Beginn der Adaption, wenn die Koeffizientengewichte noch weit vom theoretischen Optimum entfernt sind, lässt sich die Konvergenzgeschwindigkeit durch Vergrößerung der Schrittweite erhöhen. Wenn die Koeffizientengewichte zu einem späteren Zeitpunkt nahe am Optimum liegen, sollte die Schrittweite allerdings wieder abgesenkt werden, da in diesem Fall der EMSE dominiert. Es ist naheliegend, die Schrittweite direkt als Funktion des Fehlerterms $e(n)$ zu implementieren. In der Literatur sind eine Reihe derartiger adaptiver Schrittweitenalgorithmen beschrieben. Ein häufig verwendeter, einfach implementierbarer Algorithmus ist der in [97] beschriebene *Variable Step Size* (VSS) Algorithmus. Er startet mit dem Wert $\mu(0) = \mu_{max}$ und berechnet zu jedem Zeitschritt die Schrittweite $\mu(n+1)$ nach folgender Rechenvorschrift:

$$x = \alpha_1 \mu(n) + \alpha_2 |e(n)|^2 \text{ und} \quad (5.16)$$

$$\mu(n+1) = \begin{cases} \mu_{max} & \text{für } x \geq \mu_{max} \\ x & \text{für } \mu_{min} \leq x \leq \mu_{max} \\ \mu_{min} & \text{für } x \leq \mu_{min} \end{cases} \quad (5.17)$$

Hierbei gilt $0 < \mu_{min} < \mu_{max}$, wobei μ_{max} maximal so groß gewählt werden darf, dass der Algorithmus nach (5.7) stabil bleibt. Die Parameter $0 < \alpha_1 < 1$ und $\alpha_2 > 0$ werden in der Regel auf heuristische Weise anhand von Simulationsergebnissen eingestellt. In [97] sind als typischer Werte bei PAM $\alpha_1 = 0,97$ und $\alpha_2 = 4,8 \cdot 10^{-4}$ angegeben. Der VSS Algorithmus ist recht anschaulich und funktioniert in der Praxis bei geeigneter Wahl der Parameter sehr gut. Er genügt aber keinen Optimalitätskriterien. Ein Algorithmus, der versucht die optimale Schrittweite, die sich durch Nullsetzen der partiellen Ableitung der zusätzlichen Fehlerleistung $|\mathbf{v}_{\Delta}^T(n)\mathbf{r}(n)|^2$ nach $\mu(k)$ ergibt, ist etwa in [95] gegeben. Hierbei ist der zusätzliche Fehler definiert als die Differenz zwischen aktuellem Fehler und Fehler des Wiener Filters. Andere Algorithmen, wie etwa der in [6] beschriebene, berücksichtigen die Empfindlichkeit der einzelnen Koeffizientengewichte nach der Schrittweite und berechnen für das Nachstellen jedes einzelnen Koeffizienten eine eigene Schrittweite. Nachteilig an diesen, sowie weiteren beschriebenen Algorithmen (siehe etwa die Referenzen in [6] und [95]) ist jedoch, dass sie deutlich mehr Berechnungsaufwand erfordern als der einfache VSS Algorithmus. Deshalb werden in der Praxis meist heuristische Verfahren, wie etwa der VSS Algorithmus bevorzugt, denen einfachen Berechnungsvorschriften zugrundeliegen. Im Rahmen von leitungsgebundener Kommunikation führen aufwändigere Verfahren in der Regel zu keiner signifikanten Verbesserungen des Systemverhaltens. In anderen Einsatzgebieten, wie etwa im Mobilfunk, kann sich die Verwendung derartiger Techniken, beispielsweise zur Verfolgung zeitvarianter Kanäle, hingegen durchaus als sinnvoll erweisen.

Die Stabilität von LMS Algorithmen mit variabler Schrittweite wird etwa in [55] behandelt. Die Hauptaussage dieser Veröffentlichung besteht darin, dass bei Algorithmen, die zur Berechnung der Schrittweite nur Daten von zurückliegenden Zeitpunkten berücksichtigen, die bekannte Stabilitätsbedingung für den LMS Algorithmus mit fester Schrittweite (5.7) ihre Gültigkeit behält. Dies ist etwa für den VSS Algorithmus nach (5.16) - (5.17) der Fall. Werden hingegen auch Daten zum aktuellen Zeitpunkt berücksichtigt, ist diese Bedingung nicht mehr ausreichend. In diesem Fall muss die Schrittweite kleiner sein als durch (5.7) gegeben. Eine explizite Berechnung der Stabilitätsgrenze eines derartig modifizierten LMS Algorithmus ist in [55] allerdings nicht gegeben. Deshalb ist es in der Praxis ratsam, von derartigen Algorithmen keinen Gebrauch zu machen.

5.1.1.5 Bei der Implementierung auftretende Probleme

Ein Problem, das bei der Implementierung des LMS Algorithmus mit endlichen Wortlängen auftritt, ist die sogenannte Parameter Drift. Dies ist eine versteckte Instabilität, da die beobachtbaren Signale des Algorithmus stabil bleiben, während die internen Parameter sehr groß werden und theoretisch sogar nach unendlich wachsen können [152]. Durch eine Aufteilung des durch die informationstragenden Eingangsgrößen des Entzerrers aufgespannten Vektorraums in verschiedene Unterräume lässt sich zeigen, dass das erwähnte Problem auftreten kann, wenn Komponenten des Regressorvektors nicht beständig Energie beinhalten [152], [141]. Bei einer Eigenkomposition des Entzerrereingangsvektors spannen diese Komponenten den Vektorraum auf, deren Eigenwerte sehr klein, bzw. identisch Null sind. Der entsprechende Unterraum wird auch als nicht angeregt (*un-excited*) bezeichnet. Aufgrund von Fehlern, die durch endliche Wortlängen hervorgerufen werden, können die Parameter dieses Unterraumes unkontrolliert driften, ohne dass sich das beobachtbare Verhalten des Entzerrers entscheidend ändert. Allgemein gilt, dass sich bei Änderung des Koeffizientenvektors \mathbf{f} von seinem Optimum \mathbf{f}_{opt} in Richtung eines Eigenvektors \mathbf{v}_i mit korrespondierendem Eigenwert λ_i

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_{opt} + x\mathbf{v}_i, \quad (5.18)$$

der MSE sich von seinem Optimum, dem MMSE um

$$\text{MSE} = \text{MMSE} + x^2\lambda_i \quad (5.19)$$

entfernt [111]. Sehr kleinen Eigenwerte λ_i erlauben somit eine substantielle Änderung des Koeffizientenvektors, ohne dass eine signifikante Erhöhung des MSE auftritt. Ursache der Parameter Drift können etwa nichtmittelwertfreie Variablen sein, die durch Effekte endlicher Wortbreiten aus ursprünglich mittelwertfreien Variablen entstehen [129]. Die induzierte langsame Parameter Drift führt bei einer Implementierung mit begrenzter Wortlänge zu Problemen, die zu instabilem Verhalten des Algorithmus führen können. Besonders häufig taucht dieses Phänomen bei FSEs auf, bei denen sehr häufig Eigenvektoren der Kanalautokorrelationsmatrix nahe Null sind.

Abhilfe kann man etwa durch einen sogenannten Leckfaktor (*Leakage Factor*) λ_l [59], [72] schaffen, bei dem alle Koeffizienten periodisch mit einem Parameter multipliziert werden, der wenig kleiner als Eins ist. Diese Variante des LMS Algorithmus wird als Tap-Leakage LMS Algorithmus bezeichnet. Die durch die Multiplikation der Entzerrerparameter erreichte numerische Stabilität wird durch eine geringfügige Vergrößerung des Erwartungswertes des Fehlers am Entzerrerausgang erkaufte. Der Tap-Leakage LMS Algorithmus versucht die Drift der Entzerrerparameter $\mathbf{f}(n)$ zu minimieren, indem zur Kostenfunktion ein Wert addiert wird, der proportional zur betragsmäßige Größe von $\mathbf{f}(n)$ ist. Die modifizierte Kostenfunktion ist daher gegeben durch

$$J_l(n) = E\{|e(n)|^2\} + \frac{\lambda_l}{\mu} \|\mathbf{f}(n)\|. \quad (5.20)$$

Dies führt zu folgendem Algorithmus

$$\mathbf{f}(n+1) = (1 - \lambda_l)\mathbf{f}(n) + \mu \mathbf{r}^*(n)e(n). \quad (5.21)$$

Nachteil des Tap-Leakage LMS Algorithmus ist, wie bereits erwähnt, dass die Entzerrerparameter nicht mehr mittelwertfrei sind, was zu einer Erhöhung des MSE führt. Ein Algorithmus, der diesen Nachteil zumindest minimiert, ist der sogenannte Zirkulare Tap-Leakage Algorithmus [129]. Dieser Algorithmus multipliziert in jedem Iterationsschritt nur einen Koeffizienten des Entzerrers mit $(1 - x\lambda_l)$, wobei die Größe x von der Größe des betrachteten Koeffizienten abhängt. Sie ist bis zu einem gewissen Schwellwert Null und steigt dann bis zu einem definierten Maximalwert an. Details dieses Algorithmus können in [129] gefunden werden. Naturgemäß minimiert dieser Algorithmus den zusätzlichen MSE im Vergleich zum Tap-Leakage LMS Algorithmus, da nur betragsmäßig kritisch große Koeffizientengewichte manipuliert werden. In [129] wird gezeigt, dass dieser Algorithmus für den Fall, dass die Kanalautokorrelationsmatrix keine Eigenwerte hat die nahe bei Null sind, zu Parameterschätzungen führt, die frei von systematischen Fehlern sind. Wie in [141] jedoch angemerkt wird, ist dies genau der Fall, bei dem der Standard LMS Algorithmus in einer stationären Umgebung ebenfalls keine Drift-Probleme zeigt.

Ein in letzter Zeit veröffentlichter Algorithmus, der in allen Fällen zu von systematischen Fehlern freien Parameterschätzungen führt, ist der sogenannte Subspace Leaky LMS Algorithmus [141]. Dieser Algorithmus versucht den nicht angeregten Unterraum durch ein eigenes stochastisches Gradientenverfahren zu verfolgen und wendet ein Leakage-Signal nur auf diesen Unterraum an. Hierfür wird das Skalarprodukt dieses Unterraumes mit dem Vektor der Koeffizientengewichte zur Kostenfunktion (5.1) addiert, es wird also eine Größe addiert, die angibt, wie weit sich die Filterparameter in Richtung des unerwünschten Unterraumes verändert haben. Nachteilig an dem Verfahren ist, dass es den Berechnungsaufwand relativ deutlich, wenn auch linear mit der Anzahl der Entzerrerkoeffizienten, erhöht. Im Folgenden werden deshalb nur die beiden zuerst beschriebenen Algorithmen betrachtet, die bei passender Wahl des Leakage-Faktors ebenfalls das MSE nur sehr geringfügig erhöhen.

Ein weiteres Problem, das bei der Implementierung mit fester Wortlänge auftreten kann, ist, dass der Algorithmus die Adaption aufgibt, wenn die Koeffizientengewichte relativ nahe am Optimum liegen. Dies liegt darin begründet, dass der Schätzwert des Gradienten in (5.3) nicht verrauscht genug ist. Der Korrekturterm des k -ten Parameters, der durch μe_r gegeben ist, ist dann kleiner als der Wert des kleinsten Bits (*Least Significant Bit*, LSB). Eine Maßnahme die gegen diesen Effekt getroffen werden kann ist eine möglichst große Wahl der Schrittweite μ , was allerdings wieder zu größerem EMSE führt. Eine andere Maßnahme, die allerdings prinzipiell den gleichen Nachteil hat, besteht darin, den Entzerrereingang mit einem zusätzliches Rauschsignal zu beaufschlagen. Ein derartiges Signal wird im Allgemeinen als *Dither-Signal* bezeichnet. Dieses Dither-Signal hat die Eigenschaft, einen Quantisierer zu linearisieren [62]. Diese Eigenschaft wird in Appendix 3 näher betrachtet. Der Schätzwert des Gradienten wird dadurch wieder so verrauscht, dass im Mittel noch eine Adaption erfolgt. Es zeigt sich, dass bei Verwendung des Tap-Leakage LMS Algorithmus, das Lecksignal als additives Rauschen aufgefasst werden kann, das die Funktion des Dither-Signals übernehmen kann [72]. Wird ein explizites Dither-Signal addiert, kann dessen PSD so geformt werden, dass es vom Entzerrer größtenteils weggefiltert wird und somit das Systemverhalten kaum negativ beeinflusst [72].

5.1.1.6 Nichtlineare Effekte

Wie bereits erläutert, wird durch die Adaption eines Entzerrers ein zusätzliches Gradientenrauschen induziert, das den resultierenden MSE im Normalfall größer werden lässt, als den MMSE des korrespondierenden Wiener Filters. Unter gewissen Umständen gibt es jedoch einen Bereich der Schrittweite μ , für den der MSE eines adaptierten linearen Entzerrers unter dem des korrespondierenden Wiener Filters liegt, der den Grenzfall $\mu \rightarrow 0$ darstellt [140]. Dies ändert nichts an der Tatsache, dass das Wiener Filter der optimale MSE Schätzer ist, wenn alle Daten eine mittelwertfreie gaußsche Verteilung aufweisen. Allerdings verwendet das Wiener Filter nur Statistiken zweiter Ordnung, der LMS Algorithmus hingegen hat wesentlich mehr Informationen zur Verfügung, die in einer impliziten Art ausgenutzt werden können. Dies liegt in der rekursiven Art der Koeffizientennachführung (5.3) begründet. Im Speziellen verwendet der LMS Algorithmus implizit zurückliegende Eingangsdatenvektoren $\mathbf{r}(k-1)$, $\mathbf{r}(k-2)$, ..., sowie Fehlerterme $e(k-1)$, $e(k-2)$, ..., in denen implizit auch Information über zurückliegende entschiedene Symbole enthalten ist [140]. Diese Informationen sind ähnlich denen, die das Rückkoppelfilter eines DFE zur Eliminierung der Postcursor ISI verwendet. Der LMS Algorithmus verarbeitet diese Informationen allerdings auf eine andere, mehr implizite Art.

Zur Analyse dieses Effekts ist es notwendig, die aus der Unabhängigkeitsannahme ableitbare Gleichung (5.6) fallen zu lassen, die für $\mu \rightarrow 0$ näherungsweise gilt [120], da die Schrittweite zur Verwendung der zusätzlichen Informationen relativ groß sein muss. In [140] wurde gezeigt, dass es für sehr schmalbandiges, also stark korreliertes Rauschen eine optimale Schrittweite gibt, für die gilt $\sigma_{LE-LMS} < \sigma_{LE-MMSE}$. Für größere Schrittweiten steigt der MSE dann aufgrund von Gradientenrauschen wieder an. Es wurde aber durch Simulationen gezeigt, dass die Wiener-Lösung des DFE dem adaptierten linearen Entzerrer beim Minimieren des MSE überlegen ist. Die Simulationen und Berechnungen in [140] wurden für einen verzerrungsfreien Übertragungskanal angestellt.

5.1.2 Der Recursive Least Squares (RLS) Algorithmus

Reicht die Adaptionsgeschwindigkeit des LMS Algorithmus selbst mit adaptiver Schrittweite nicht aus, muss auf komplexere Algorithmen zurückgegriffen werden. Der wohl wichtigste dieser Algorithmen ist der sogenannte *Recursive Least Squares* (RLS) Algorithmus [60], der in [134] ausführlich diskutiert wird. Er minimiert in jedem Iterationsschritt den zeitlichen Mittelwert der mit einem Gewichtungsfaktor $\lambda \in [0, 1]$ bewerteten Fehlerquadrate

$$E_{RLS}(n) = \sum_{v=1}^n \lambda^{n-v} |e_p(n, v)|^2. \quad (5.22)$$

Die Größe $e_p(n, v) = x(v - \delta) - \mathbf{f}^T(n) \mathbf{r}(v)$ bezeichnet hierbei den a posteriori Fehler zum Zeitpunkt v , der sich unter Verwendung der Koeffizientengewichte zum Zeitpunkt n ergibt. Der Gewichtungsfaktor λ legt hierbei fest, wie stark zeitlich zurückliegende Werte berücksichtigt werden. Äquivalent zur Herleitung des zeitdiskreten Wiener-Filters (4.49) wird der Koeffizientenvektor $\mathbf{f}(n)$ durch Nullsetzen der Ableitung von (5.22) nach $\mathbf{f}(n)$ gebildet:

$$\mathbf{f}(n) = \tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^{-1}(n) \tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}x}(n). \quad (5.23)$$

Die geschätzte Autokorrelationsmatrix der Größe $N \times N$ ist hierbei gegeben durch [134]

$$\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}(n) = \sum_{v=1}^n \lambda^{n-v} \mathbf{r}^*(v) \mathbf{r}^T(v) = \lambda \tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}(n-1) + \mathbf{r}^*(n) \mathbf{r}^T(n), \quad (5.24)$$

Zu (5.24) wird üblicherweise noch eine mit einem kleinen positiven Parameter skalierte, Einheitsmatrix addiert, die die Nichtsingularität von $\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}(n)$ sicherstellt. Der geschätzte Kreuzkorrelationsvektor der Länge N ist gegeben durch [134]

$$\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}x}(n) = \sum_{v=1}^n \lambda^{n-v} \mathbf{r}^*(v) x(n-v) = \lambda \tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}x}(n-1) + \mathbf{r}^*(n) x(n). \quad (5.25)$$

Ähnlich wie beim LMS Algorithmus (5.3), kann auch hier eine rekursive Adaptionvorschrift der Entzerrerkoeffizienten hergeleitet werden:

$$\mathbf{f}(n+1) = \mathbf{f}(n) + \mu \mathbf{k}(n) e(n), \quad (5.26)$$

wobei

$$\mathbf{k}(n) = \tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^{-1}(n) \mathbf{r}^*(v) \quad (5.27)$$

der Vektor der Kalmanverstärkung ist. Auch für die Berechnung von $\mathbf{k}(n)$ und $\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^{-1}(n)$ lassen sich explizite Berechnungsvorschriften finden [60], [134], die die Komplexität des so entstandenen Kalman RLS Algorithmus auf die Ordnung N^2 bringen. Andere Algorithmen, wie etwa der *Fast Kalman Algorithmus* [45], [134], der ohne explizite Berechnung der Matrix $\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^{-1}(n)$ auskommt, erlauben eine weitere Reduktion der benötigten Operationen pro Zeitschritt. Eine detaillierte Übersicht der verschiedenen Varianten des RLS Algorithmus findet sich etwa in [72], [133], [134]. Mit der Implementierung von RLS Algorithmen befasst sich etwa [36].

Durch die explizite Berechnung der inversen geschätzten Autokorrelationsmatrix in (5.27) ist die Adaptiongeschwindigkeit des RLS Algorithmus nahezu unabhängig von den Eigenwerten von $\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}$ und ändert sich im Laufe der Adaption kaum. Diese Inverse ersetzt formal die Schrittweite μ des LMS Algorithmus. Somit stehen beim RLS Algorithmus anstelle der Schrittweite μ nun N Parameter zur Nachstellung der Entzerrerkoeffizienten zur Verfügung, die optimal an den Kanal angepasst sind. Dies erklärt die deutlich größere Adaptiongeschwindigkeit des RLS Algorithmus. Dieses Verhalten versuchen die in Kapitel 5.1.1.4 vorgestellten LMS Algorithmen, die N verschiedene adaptiven Schrittweiten berechnen, zu simulieren. Ein Problem des RLS Algorithmus ist - neben der relativ hohen Komplexität - ein mögliches Stabilitätsproblem, das bei einer Implementierung mit endlichen Wortlängen auftreten kann und dessen Ursache in der Akkumulationen von Rundungsfehlern über lange Zeiträume liegt.

Da sich diese Arbeit auf zeitinvariante, bzw. nur sehr langsam zeitvariante Kanäle beschränkt, für deren Entzerrung die Konvergenzgeschwindigkeit des LMS Algorithmus in aller Regel ausreichend groß ist, wird auf den RLS Algorithmus im Folgenden nicht näher eingegangen.

5.2 Entscheidungsrückgekoppelte Entzerrer

Für den Fall, dass das Auge am Entscheidereingang geöffnet ist, lassen sich die wesentlichen Ergebnisse aus Kapitel 5.1.1 auf den DFE übertragen. Hierfür werden, wie bei der Herleitung

der optimalen Koeffizientengewichte des realisierbaren DFE in (4.44) - (4.49), die folgenden Größen verwendet: der in (4.45) definierte, jetzt zeitvariante, zusammengesetzte Koeffizientenvektor $\tilde{\mathbf{c}}_{DFE}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(n)^T & -\mathbf{d}(n)^T \end{bmatrix}^T$, sowie der in (4.46) definierte zusammengesetzte Regressorvektor $\tilde{\mathbf{r}}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}^T(n) & \hat{\mathbf{x}}^T(n - \delta) \end{bmatrix}^T$. Geht man analog zur Herleitung des LMS Algorithmus für den Transversalentzerrer nach (5.1) - (5.3) vor, erhält man folgende Gleichung zur Nachführung der Koeffizienten eines DFE nach dem LMS Algorithmus:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{c}}_{DFE}(n+1) &= \tilde{\mathbf{c}}_{DFE}(n) + \mu \tilde{\mathbf{r}}^*(n)(\hat{x}(n) - \tilde{\mathbf{r}}^T(n)\tilde{\mathbf{c}}_{DFE}^*(n)), \text{ bzw.} \\ &= \tilde{\mathbf{c}}_{DFE}(n) + \mu \tilde{\mathbf{r}}^*(n)e(n) \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}(n+1) \\ \mathbf{d}(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(n) \\ \mathbf{d}(n) \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \mathbf{r}^*(n) \\ -\hat{\mathbf{x}}^*(n - \delta) \end{bmatrix} e(n). \quad (5.29)$$

5.3 Rekursive Entzerrer

Im Vergleich zu dem in Kapitel 4.1.2 eingeführten DFE, dessen Adaption mit dem LMS Algorithmus in Kapitel 5.2 behandelte wurde, führen die hier behandelten Entzerrer das nicht entschiedene Ausgangssignal des Entzerrers zurück. Dies hat besonders beim Systemstart Vorteile, da in diesem Stadium die Fehlerrate allgemein ziemlich hoch ist. Nachteilig ist aber, dass durch den fehlenden Entscheider im Rückführzweig die Amplitude der rückgeführten Signale prinzipiell nicht beschränkt ist und deshalb ein instabiles Systemverhalten auftreten kann. Die Sicherstellung der Stabilität ist daher ein wesentliches Kriterium beim Entwurf eines Algorithmus zur adaptiven Einstellung eines rekursiven Entzerrers.

In diesem Kapitel wird ausschließlich die Adaption eines AR, also rein rekursiven Entzerrers behandelt. Diese Entzerrer werden in Kapitel 6.3.2 zur blinden Adaption entscheidungsrückgekoppelter Entzerrer eingesetzt. Hierbei wird in diesem Kapitel der Entzerrer zur reinen Amplitudenentzerrung eingesetzt. Dies entspricht, wie in Kapitel 4.2.1.3 gezeigt, einer linearen Prediktion. Im Gegensatz dazu wird in Kapitel 6.2.3 die blinde Adaption eines ARMA Filters anhand des CMA behandelt.

Da bei rekursiven Entzerrern das Ausgangssignal zurückgeführt wird, müssen zur exakten Berechnung des Gradienten des Fehlersignals bezüglich der Entzerrerkoeffizienten die Ausgangssignale des Entzerrers zu allen zurückliegenden Zeitpunkten mit den jeweils aktuellen Parametern neu berechnet werden. Dies wird genauer in Kapitel 5.3.1 gezeigt. Da dieses Vorgehen im praktischen Betrieb nicht möglich ist, müssen Vereinfachungen des exakten rekursiven LMS Algorithmus gefunden werden. Verschiedene Ansätze dazu finden sich in Kapitel 5.3.2 bis Kapitel 5.3.4. Hierbei wird auch auf die Stabilität der einzelnen Algorithmen behandelt. Es stellt sich heraus, dass die Stabilität einzelner der hier behandelten Algorithmen - zu nennen ist hier besonders der in Kapitel 5.3.3 gezeigte, sogenannte Feintuch Algorithmus - in der Praxis garantiert werden kann. Daher können diese Algorithmen in direkter Form implementiert werden. Ein derartiger Stabilitätsbeweis ist hingegen für die in Kapitel 6.2.3 behandelten blinden Algorithmen bisher nicht bekannt. Für diese Algorithmen wird daher in Kapitel 6.2.3.2 eine Implementierung in Lattice Struktur gezeigt, anhand derer eine einfache Beobachtung des Verhaltens möglich wird. Die verschiedenen gezeigten Algorithmen werden in Kapitel

5.3.5 anhand von Simulationen verglichen.

5.3.1 Exakter rekursiver LMS Algorithmus

Zur exakten Berechnung des LMS Algorithmus eines rein rekursiven Filters muss das Fehler-signal des Filters $e(n)$, nach den M einzelnen Filterparametern abgeleitet werden. Die einzel-nen Filterkoeffizienten $\{a_m\}$ werden dann in Richtung des negativen Gradienten korrigiert. Im Spezialfall der linearen Prediktion entspricht das Ausgangssignal des Filters, wie in Kapitel 4.2.1.3 gezeigt, dem Fehlersignal und schreibt sich zu

$$e(n) = r(n) - \sum_{l=1}^M a_l(n-1)e(n-l) = r(n) - \mathbf{a}^T(n-1)\mathbf{e}(n-1). \quad (5.30)$$

Hierbei hat der sogenannte Regressorvektor $\mathbf{e}(n-1)$ der Länge M die Form $\mathbf{e}(n-1) = [e(n-1) \ e(n-2) \ \dots \ e(n-M)]^T$.

Der Gradient von $e(n)$ bezüglich der Filterparameter $a_m(n)$ sei im Folgenden mit $\mathbf{v}_m(n)$ be-zeichnet. Er berechnet sich als

$$\mathbf{v}_m(n) = \frac{\partial}{\partial a_m^*} e(n) = e(n-m) - \sum_{l=1}^M a_l \mathbf{v}_m(n-l). \quad (5.31)$$

Somit schreibt sich der IIR-LMS Algorithmus als

$$a_m(n) = a_m(n-1) + \mu e(n) \mathbf{v}_m^*(n-l) \Big|_{\mathbf{a} = \mathbf{a}(n-1)}, \quad (5.32)$$

wobei μ eine kleine, positive Schrittweite darstellt. Problematisch an der Nachstellvorschrift (5.32) ist, dass für die Berechnung zum Zeitpunkt n , die Gradienten mit den Filterwerten zum Zeitpunkt $n-1$ berechnet werden müssen. Bedingt durch die rekursive Natur des Filters müs-sen zu dieser Berechnung die Werte von \mathbf{v} und e zu jedem Zeitpunkt $0 \leq p \leq n-1$ für die ak-tuellen Entzerrerparameter vorliegen. Somit müssen die Gleichungen (5.30) und (5.31) für die Filterparameter $\mathbf{a}(n-1)$ für alle Zeitpunkte neu berechnet werden. Die mit den Koeffizienten-gewichten $\mathbf{a}(n-1)$ berechneten Innovationen und Gradienten des Zeitpunktes p werden im Folgenden als $e^{n-1}(p)$, bzw. $\mathbf{v}_m^{n-1}(p)$ bezeichnet. Hierbei unterstreicht der hochgestellte In-dex die Abhängigkeit der Innovation, bzw. des Gradienten zum Zeitpunkt p von den zukünfti-gen Filterparametern zum Zeitpunkt $n-1$. Der exakte IIR LMS Algorithmus mit den Startwerten $\mathbf{a}(0) = \mathbf{0}$ und $e(n) = \mathbf{v}(n) = 0$ für $n < 0$ ist in Tabelle 5.1 gegeben.

Insgesamt wächst sowohl der benötigte Speicherbedarf, als auch die Anzahl an durchzuführen-Operationen linear mit der Zeit an, so dass der exakte LMS Algorithmus in der Praxis nicht implementierbar ist und somit vereinfacht werden muss.

Zeitpunkt	Innovation	Gradient
$p < 0$	$e^{n-1}(p) = 0$ für $p < 0$	$v_m^{n-1}(p) = 0$ für $p < 0$
$p = 0$	$e^{n-1}(0) = x(0)$	$v_m^{n-1}(0) = e^{n-1}(0)$
$p = 1$	$e^{n-1}(1) = r(1) - \sum_{l=1}^M a_l(n-1)e^{n-1}(1-l)$	$v_m^{n-1}(1) = e^{n-1}(1) - \sum_{l=1}^M a_l(n-1)v_m^{n-1}(1-l)$
...
$p = n-1$	$e^{n-1}(n-1) = r(n-1) - \sum_{l=1}^M a_l(n-1)e^{n-1}(n-1-l)$	$v_m^{n-1}(n-1) = e^{n-1}(n-1) - \sum_{l=1}^M a_l(n-1)v_m^{n-1}(n-1-l)$
Nachführen der Koeffizienten		
$p = n$	$a_m(n) = a_m(n-1) + \mu e^{n-1}(n-1)v_m^{n-1*}(n-m)$ für $1 \leq m \leq M$	

Tabelle 5.1: Operation des exakten IIR LMS Algorithmus zu verschiedenen Zeitpunkten

5.3.2 Rekursiver LMS mit endlicher Speicherlänge

Die naheliegendste Vereinfachung des exakten rekursiven LMS Algorithmus besteht darin, die Werte von e und v nur für die Zeitpunkte $n-L \leq p \leq n-1$ neu zu berechnen und die Werte zu den weiter zurückliegenden Zeitpunkten als fest anzunehmen. Der Wert L bezeichnet hierbei die sogenannte Gedächtnislänge, der Algorithmus wird als *Finite Memory LMS* (FMLMS) bezeichnet. Die Anzahl an benötigten Multiplikationen pro Ausgangswert des FMLMS beträgt $(2L+2)M$.

Der Spezialfall $L = 1$ wird als Rekursiver LMS (RLMS), bzw. *Output Variance Minimization* (OVM) Algorithmus bezeichnet. Wie in [85] und [159] gezeigt, kann man diesen Algorithmus auch mit der Annahme herleiten, dass die Schrittweite μ klein genug ist, dass gilt

$$\mathbf{a}(n-1) \cong \mathbf{a}(n-2) \cong \dots \cong \mathbf{a}(n-M-1). \quad (5.33)$$

Diese Annahme einer langsamen Konvergenz wird auch als *Slow Convergency Assumption* (SCA) bezeichnet.

Die Struktur des RLMS Algorithmus ist in Bild 5.3 gezeigt. Es ist zu erkennen, dass das zum Nachführen der Koeffizienten erforderliche Signal $v(n)$ durch Filterung des Ausgangssignals

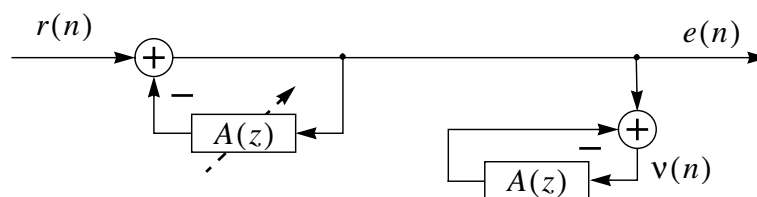


Bild 5.3: Struktur des RLMS Algorithmus

mit einem zweiten rein rekursiven Filter erzeugt wird, wobei dieses zweite Filter den selben Koeffizientensatz aufweist, wie das adaptive Filter.

5.3.3 Feintuch Algorithmus

Die weitere Vereinfachung mit $L = 0$ führt schließlich zum von Feintuch veröffentlichten, sogenannten *Extended LMS* (ELMS) Algorithmus [47], [86]. Dieser Algorithmus stellt eine sehr grobe Vereinfachung dar, die eigentlich erst im eingeschwungenen Zustand getroffen werden kann, da die Werte $e(n)$ hier als unabhängig von den Filterparametern angenommen werden. Der Algorithmus schreibt sich daher als

$$\mathbf{a}(n) = \mathbf{a}(n-1) + \mu e(n) \mathbf{e}^*(n-1). \quad (5.34)$$

Er geht aus dem RLMS Algorithmus durch Weglassen des zweiten rekursiven Filters zur Berechnung des Regressorsignals $v(n)$ hervor, approximiert dieses Signal also durch $e(n) \approx v(n)$. Da das Regressorsignal somit (pseudo)linear approximiert wird, wird die Berechnungsvorschrift auch als Pseudolinear Regression (PLR) Algorithmus bezeichnet. Aus offensichtlichen Gründen taucht die Bezeichnung „rekursiv“ bei diesem Algorithmus nicht auf [112]. Hauptvorteil des Feintuch Algorithmus ist, dass er nicht, wie die anderen beschriebenen Algorithmen, instabil werden kann. Dies liegt an der Eigenschaft der sogenannten Selbst-Stabilisierung, die von Macchi in [112] bewiesen wurde. Diese Eigenschaft lässt sich zusammenfassend so beschreiben, dass sobald sich eine Polstelle des AR Filters $A(z)$ außerhalb des Einheitskreises bewegt, ein Signal generiert wird, das diese Postelle wieder zurück in den Einheitskreis bewegt. In [112] wurde bewiesen, dass der Feintuch Algorithmus dadurch insgesamt ein stabiles Verhalten zeigt. In [25] wurde allerdings angemerkt, dass der Entzerrer zu Zeitpunkten, an denen sich eine Postelle außerhalb des Einheitskreises bewegt, ein sehr schlechtes Systemverhalten aufweisen kann. Dieses Verhalten tritt allerdings bei genügend kleiner Schrittweite in der Praxis lediglich beim Systemstart auf. Bei Simulationen anhand realistischer xDSL Kanäle konnte es nicht beobachtet werden. Unabhängig davon wurde die Stabilität allgemeiner PLR Algorithmen in [138] bewiesen.

Die Konvergenz des Feintuch Algorithmus, sowie des RLMS Algorithmus, zum globalen Minimum der Kostenfunktion wurde für den Fall, dass der Entzerrer genügend lang ist, in [104] bewiesen. Für den Fall, dass der Entzerrer zur exakten Dekorrelation des Eingangssignals nicht lang genug ist, spricht man auch von sogenanntem *Undermodelling*. In diesem Fall stimmen die stationären Punkte beider Algorithmen allgemein nicht mehr mit den globalen Minima der Kostenfunktion überein, liegen in der Regel aber in einer engen Nachbarschaft. [104]

5.3.4 Weitere rekursive LMS Algorithmen

Der Vollständigkeit halber sollen noch zwei weitere Algorithmen zur Adaption eines AR Filters betrachtet werden, der *Hyperstable Adaptive Recursive Filter* (HARF) Algorithmus, sowie der eng verwandte *A Posteriori LMS* (APLMS) Algorithmus. Grundidee des HARF Algorithmus, sowie des vereinfachten *Simplified HARF* (SHARF) ist, im Rückführzweig ein zweites Filter einzusetzen, dass die Stabilität des Algorithmus sicherstellen soll. Hauptproblem hierbei ist, dass zum Entwurf dieses Kompensationsfilters prinzipiell Kenntnisse des Übertragungskanals erforderlich sind. Im Rahmen dieser Arbeit wird die vereinfachte Form des Algorithmus verwendet, die in [112] im Aufgabengebiet der linearen Prediktion definiert wurde.

Der vereinfachte HARF Algorithmus nach [112] ist ähnlich zu dem in Kapitel 5.3.2 behandelten

RLMS mit endlicher Speicherlänge. Er verwendet zur Berechnung von $\mathbf{e}(n-1)$ einen Wert von $L = 2$, zur Berechnung des Gradienten verfährt er hingegen identisch wie der Feintuch Algorithmus mit $L = 0$. Es wird hier also keine adaptive Filterung durchgeführt. Somit ist dieser Algorithmus ebenfalls ein Repräsentant der PLR Familie. Aus dieser Eigenschaft lässt sich auch die Stabilität des Algorithmus ableiten (siehe [112], [138]).

Der APLMS ist im Prinzip identisch zum Feintuch Algorithmus, mit der einzigen Änderung, dass zur Berechnung des Korrekturterms der *a posteriori* Prediktionsfehler verwendet wird, im Vergleich zum *a priori* Fehler, der beim Feintuch Algorithmus Verwendung findet. Hierbei stellt der *a posteriori* Fehler $e_p(n)$ die Innovation dar, die bei Verwendung der bereits nachgestellten Filterparameter $\mathbf{a}(n)$ zum Zeitpunkt n berechnet wird:

$$e_p(n) = r(n) - \mathbf{a}(n)\mathbf{e}(n-1). \quad (5.35)$$

Zur Verwendung des *a priori* Fehlers finden hingegen die Filterkoeffizienten $\mathbf{a}(n-1)$ Verwendung (siehe (5.30)). Die Filterkoeffizienten werden gleichartig wie in (5.34) nachgestellt:

$$\mathbf{a}(n) = \mathbf{a}(n-1) + \mu e_p(n)\mathbf{e}(n-1). \quad (5.36)$$

Auf den ersten Blick scheint es unmöglich das System (5.35) und (5.36) zu lösen, da zur Berechnung des *a posteriori* Fehlers die nachgestellten Filterkoeffizienten benötigt werden, andererseits zum Nachstellen der *a posteriori* Fehler aber bereits erforderlich ist. Der *a posteriori* Fehler kann allerdings aus dem *a priori* Fehler erhalten werden. So erhält man durch Einsetzen von (5.36) in (5.30) folgende Formel zur Berechnung von $e_p(n)$

$$e_p(n) = \frac{e(n)}{(1 + \mu|\mathbf{e}(n-1)|^2)} = \frac{\bar{\mu}(n)}{\mu}e(n). \quad (5.37)$$

Hierbei wurde die sogenannte normierte Schrittweite $\bar{\mu}(n)$ folgendermaßen definiert:

$$\bar{\mu}(n) = \frac{\mu}{(1 + \mu|\mathbf{e}(n-1)|^2)}. \quad (5.38)$$

Der APLMS Algorithmus ist somit identisch zum HARF Algorithmus mit der einzigen Änderung, dass anstelle der festen Schrittweite μ die normierte Schrittweite $\bar{\mu}(n)$ verwendet werden muss. Nachteilig am APLMS Algorithmus ist die zur Berechnung von $\bar{\mu}(n)$ benötigte Divisionsoperation. Beide beschriebenen Algorithmen zeigen, wie in [112] bewiesen wurde, ebenfalls ein stabiles Systemverhalten.

5.3.5 Simulationsergebnisse

In diesem Kapitel sollen die verschiedenen rekursiven Algorithmen anhand von Simulationen verglichen werden.

Der Eingang der linearen Prediktoren ist hier im Symbolrastraster gegeben. Die Impulsantwort des linearen Kanals sei $[0,2 \ 1,0 \ 0,98 \ 0,5 \ 0,1]^T$. Als Modulationsverfahren ist BPSK gewählt, außerdem wurde AWGN an den Entzerrereingang gegeben. Das SNR beträgt 23dB. Die optimale Lösung des AR Filters, die dem minimalphasigen Anteil des Kanals entspricht, lässt sich durch spektrale Faktorisierung finden als $\mathbf{a}_{\text{opt}} = [1,1579 \ 0,7216 \ 0,2220 \ 0,0251]^T$. Die Entzerrereingänge beträgt zunächst $M=2$ und reicht somit zur exakten Dekorrelation nicht aus. Dies entspricht dem beschriebenen Undermodellung.

In Bild 5.4 ist für die verschiedenen Algorithmen der Verlauf der Entzerrerkoeffizienten über

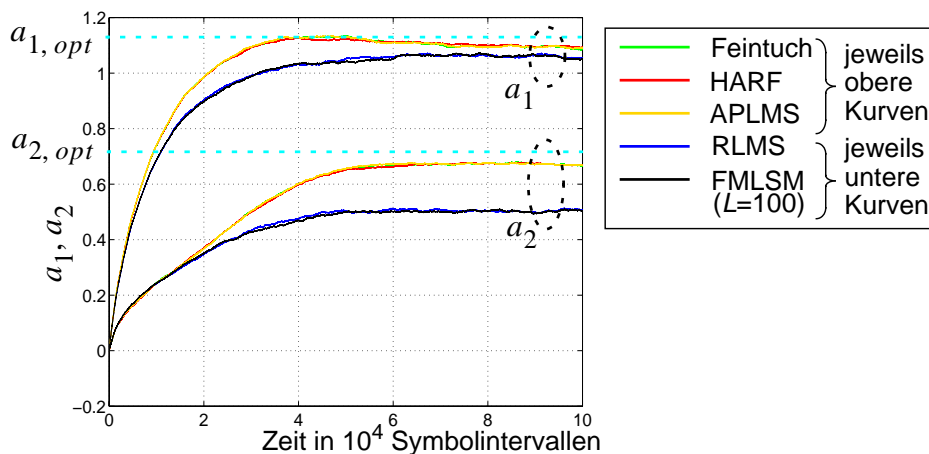


Bild 5.4: Vergleich der verschiedenen rekursiven Algorithmen für Entzerrer ungenügender Länge

die Zeit gezeigt. Man erkennt, dass die PLR Algorithmen, also der Feintuch, HARF und APLMS Algorithmus ein fast identisches Verhalten zeigen. Bei Anwendung dieser Algorithmen ergibt sich ein Koeffizientensatz, dessen einzelne Gewichte geringfügig kleiner als die optimalen sind. Die Adaption anhand des RLMS, bzw. des FMLMS Algorithmus mit einer extrem großen Gedächtnislänge L von 100, verläuft ebenfalls nahezu identisch. Beide Algorithmen erzeugen hier Koeffizientengewichte, die weiter von der optimalen Lösung entfernt sind, als bei Anwendung eines der PLR Algorithmen. Diese Eigenschaft gilt aber nicht im Allgemeinen. Die Tatsache, dass sich mit beiden Algorithmen bei Undermodelling nicht die optimalen Koeffizientengewichte einstellen, liegt wie in [104] gezeigt daran, dass in diesem Fall die Minimierung der Varianz des Entzerrerausgangs nicht der exakten Kostenfunktion eines Dekorrelators entspricht und ist daher keine Eigenschaft der eingesetzten Algorithmen.

In Bild 5.5 sind Ergebnisse einer Simulation mit ausreichend langen Entzerrern der Länge $M = 4$ gezeigt. Hier zeigen ebenfalls die verschiedenen PLR und FMLMS Algorithmen quasi identisches Systemverhalten. Deshalb werden nur Ergebnisse des Feintuch, sowie des RLMS Algorithmus gezeigt. Man erkennt, dass bei diesen Simulationen beide Algorithmen Koeffizientengewichte generieren, die sehr nahe am Optimum liegen. Hierbei erfolgt die Adaption des RLMS Algorithmus etwas langsamer als die des Feintuch Algorithmus. Bei beiden Algorithmen ist zu beobachten, dass die Koeffizienten mit betragsmäßig kleinen optimalen Gewichten zunächst in die falsche Richtung adaptiert werden. Dieses Verhalten tritt beim Feintuch Algorithmus vergleichsweise etwas stärker auf.

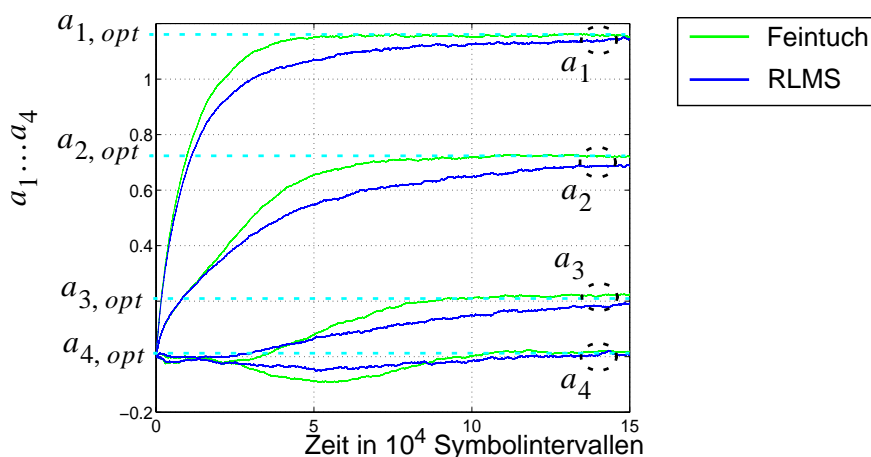


Bild 5.5: Vergleich der verschiedenen rekursiven Algorithmen für ausreichend lange Entzerrer

5.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden Algorithmen zur adaptiven Entzerrung vorgestellt. Für Transversalentzerrer konnte gezeigt werden, dass der LMS Algorithmus, der den stochastische Gradientenalgorithmus zur Minimierung des MSE darstellt, für die Anwendung im Bereich der leitungsgebundenen Kommunikation ausreichend schnell konvergiert. Zur gleichzeitigen Optimierung der Konvergenzgeschwindigkeit und des MSE im eingeschwungenen Zustand ist es ratsam, die Schrittweite als Funktion der Fehlerleistung zu implementieren. Hierbei kann auf einfache Verfahren, wie etwa den VSS Algorithmus, zurückgegriffen werden. Zur Vermeidung unerwünschter Effekte, die bei der Implementierung auftreten können, wird der Koeffizientenvektor regelmäßig mit einem sogenannten Leakage Faktor, der geringfügig kleiner als Eins ist, multipliziert. Dies ist insbesondere bei der Adaption von FSEs erforderlich, da hierbei aufeinanderfolgende Eingangssignale stark korreliert sind. Die wesentlichen Ergebnisse des LMS Algorithmus für Transversalentzerrer können auf den DFE übertragen werden.

Anschließend wurden verschiedene Algorithmen zur Adaption eines rein rekursiven Entzerrers vorgestellt und verglichen. Diese Entzerrer werden im Rahmen dieser Arbeit zur reinen Amplitudenentzerrung eingesetzt, was einer linearen Prediktion entspricht. Es stellt sich heraus, dass der exakte LMS Algorithmus zur Adaption eines rekursiven Entzerrers nicht praktikabel ist und vereinfacht werden muss. Ein weiteres Problem rekursive Entzerrer besteht darin, dass sie, wenn ihre Koeffizientengewichte adaptiv eingestellt werden, prinzipiell instabiles Verhalten zeigen können. Als vereinfachte Algorithmen sind besonders die sogenannten PLR Algorithmen interessant, da für sie Stabilität garantiert werden kann. Sie verwenden zur Berechnung der Signale, die zum Nachführen der Koeffizienten erforderlich sind, keine zusätzliche Filterung. Der einfachste dieser Algorithmen, der sogenannte Feintuch Algorithmus, hat die gleiche Komplexität wie der LMS Algorithmus zur Adaption eines Transversalentzerrers. Dieser Algorithmus konvergiert im Fall ausreichender Entzerrerlänge zum globalen Minimum der exakten Kostenfunktion und zeigt auch für nicht ausreichende Länge ein gutes Systemverhalten. Daher erweist sich dieser Algorithmus für den Anwendungsfall der linearen Prediktion als am besten geeignet.

6 Referenzdatenfreie Entzerrung

Sofern die Koeffizienten eines adaptiven Entzerrers genügend nahe am theoretischen Optimum sind, so dass nur wenige fehlerhafte Entscheidungen getroffen werden, also das Auge geöffnet ist, ist das Nachführen der Entzerrerkoeffizienten relativ unproblematisch. Man kann dann auf konventionelle, entscheidungsgestützte Algorithmen, wie etwa den in Kapitel 5 ausführlich besprochenen LMS Algorithmus, zurückgreifen. Entscheidend ist jedoch, einen Empfänger beim Start der Adaption in einen derartigen konvergierten Zustand zu bringen. Bei dem üblichen Ansatz wird der Entzerrer anhand einer, in definierten Zeitschlitzen gesendeten bekannten Symbolfolge, der sogenannten Trainingssequenz, adaptiert. Dieses Vorgehen, das auch als Training mit idealer Referenz bezeichnet [178] wird, gestattet bereits beim Systemstart die Verwendung entscheidungsgestützter Algorithmen. Die Übertragung einer Trainingssequenz bringt jedoch einige Nachteile, wie etwa eine Reduzierung der Nettodatenrate, mit sich, die im Einzelnen in Kapitel 6.1.1 besprochen werden. Daher ist in modernen Telekommunikationsstandards meist keine Trainingssequenz vorgesehen. Konvergenz des Entzerralgorithmus muss dann ohne Kenntnis der Sendesymbole erreicht werden. Zur Adaption können in diesem Fall statistische Eigenschaften des Empfangssignals verwendet werden, die sich etwa aus der verwendeten Signalraumkonstellation ableiten lassen. Man spricht in diesem Fall von referenzdatenfreier oder blinder Entzerrung.

Zunächst wird in Kapitel 6.1 ein allgemeiner Überblick zur referenzdatenfreien Entzerrung gegeben. Kapitel 6.2 befasst sich anschließend mit den sogenannten Bussgang Algorithmen. Dies sind stochastische Gradientenverfahren, die zur Adaption eine nichtlineare Funktion des Signals am Entzerrerausgang verwenden. Da der gedächtnislose Entscheider ebenfalls als nichtlineare Funktion aufgefasst werden kann, gehört auch der LMS Algorithmus zu dieser Klasse von Algorithmen. Bei geeigneter Wahl der Nichtlinearität können Bussgang Algorithmen vorteilhaft zur blinden Entzerrung eingesetzt werden.

Anschließend werden in Kapitel 6.3 Strategien zum blinden Systemstart und zum Wechsel in den entscheidungsgestützten Modus diskutiert. Hierbei werden in Kapitel 6.3.1 Transversalentzerrer und in Kapitel 6.3.2 entscheidungsrückgekoppelte Entzerrer betrachtet. Schließlich werden in Kapitel 6.4 noch Verfahren behandelt, wie auch das verwendete Modulationsverfahren zwischen QAM und CAP blind entschieden werden kann.

Simulationsergebnisse werden in Kapitel 6.5 gezeigt. Für ein System, bei dem der Entzerrer auf einem Vielfachen der Symbolrate (*Fractionally Spaced Equalization*, FSE) läuft, wird auch der Start des gesamten Systems, also inklusive Abtastumsetzung und Synchronisation, behandelt. Ist das Eingangssignal des Entzerrers hingegen mit der Symbolrate abgetastet, treten zusätzliche Probleme beim Systemstart auf. Insbesondere sind in der Literatur keine Verfahren beschrieben, die eine Synchronisation anhand von im Symboltakt abgetasteten Signalen ohne Verwendung entschiedener Symbole durchführen können. Darüberhinaus ist in diesem Fall, wie in Kapitel 4.4.3 beschrieben, das Systemverhalten stark von der Abtastphase abhängig, das Finden einer nahezu optimalen Abtastphase stellt aber ebenfalls ein nichttriviales Problem dar. Im laufenden Betrieb bereiten schließlich Kopplungen des Entzerrers mit der Taktregelung Probleme. Die Behandlung derartiger Systeme würde daher den Rahmen dieser Arbeit sprengen, weshalb für eine ausführliche Behandlung der beschriebenen Probleme und möglicher Lösungsansätze auf [66] - [68] verwiesen wird.

Die wesentlichen Ergebnisse dieses Abschnitts werden schließlich in Kapitel 6.6 zusammengefasst.

6.1 Überblick zur referenzdatenfreien Entzerrung

Das Interesse an referenzdatenfreier Entzerrung wurde etwa ab 1980 in größerem Umfang geweckt, wobei es auch davor schon vereinzelt Veröffentlichungen wie etwa 1975 die von Sato [142] gab. Der kommerzielle Einsatz begann etwa 1990 [88] im Rahmen von drahtloser Kommunikation. Später kamen weitere Einsatzgebiete wie etwa digitales Kabelfernsehen hinzu. In diesem Abschnitt soll zunächst in Kapitel 6.1.1 kurz die Motivation für den Einsatz blinder Entzerrverfahren besprochen werden. Anschließend werden in Kapitel 6.1.2 verschiedene Möglichkeiten zur referenzdatenfreien Adaption eines Entzerrers aufgezeigt.

6.1.1 Motivation

Einer der wesentlichen Motivationsgründe für den Einsatz blinder Entzerrverfahren ist die damit in Punkt-zu-Multipunkt (P2MP), bzw. Rundfunk Szenarien erzielbare höhere Nettodatenrate. Ursache ist, dass sich in einem derartigen Einsatzgebiet zu beliebigen Zeitpunkten Empfänger zuschalten können. Da diese Modems zum Start der Übertragung zunächst an die jeweiligen Kanaleigenschaften adaptiert werden müssen, müsste in diesem Fall eine Trainingssequenz entweder periodisch übertragen oder von jedem neuen Teilnehmer angefordert werden. Effektiv sinkt durch ein derartiges Vorgehen die Nettodatenrate.

Dieses Argument wurde auch bei DSL Übertragungstechniken, wie etwa VDSL, in einer sogenannten *Fiber to the Curb* (FTTC) Netzwerkarchitektur [178] angeführt, da in diesem Szenario ein Anschluss mehrere Modems bedienen kann [82].

Eine weitere Motivation für den Einsatz referenzdatenfreier Entzerrung besteht in einer vereinfachten Implementierbarkeit, da die beim Systemstart ablaufende Prozedur weniger komplex wird und darüberhinaus das Speichern einer Trainingssequenz entfällt. Auch die Standardisierung und Interoperabilität von Modems wird durch blinde Entzerrung vereinfacht. Darüberhinaus vereinfacht sich auch der Neustart eines Modems, der erforderlich werden kann, wenn etwa durch eine abrupte Änderung der Kanaleigenschaften oder das Auftreten eines starken Störers, die BER zu stark steigt.

All diese Argumente führen dazu, dass in modernen einzelträgerbasierten Telekommunikationsstandards zumeist keine Trainingsfolge mehr definiert wird [176]. Bei Verfahren die auf Multiträgerübertragung basieren ist hingegen nach derzeitigem Stand der Technik eine Trainingssequenz erforderlich, was als großer Nachteil der entsprechenden Modulationsverfahren, wie etwa DMT, angesehen wird.

6.1.2 Möglichkeiten der referenzdatenfreien Entzerrung

In diesem Kapitel sollen verschiedene Methoden beschrieben werden, die zur referenzdatenfreien Adaption eines Entzerrers eingesetzt werden können. Es sind dies zum einen in Kapitel 6.1.2.1 beschriebene Methoden, die auf Statistiken zweiter Ordnung (*Second Order Statistics*, SOS) des Empfangssignales beruhen. Diese Methoden beruhen auf der Zyklstationarität des

Eingangssignals im Falle von Überabtastung, bzw. der Verwendung mehrerer Sensoren. Die zweite Klasse von Algorithmen verwendet Statistiken höherer Ordnung (*Higher Order Statistics*, HOS), wobei dies entweder auf implizite oder auf explizite Art und Weise geschehen kann. Diese beiden Algorithmenklassen werden kurz in Kapitel 6.1.2.2 vorgestellt. In Kapitel 6.1.2.3 werden die verschiedenen Verfahren kurz verglichen. Es stellt sich dabei heraus, dass im Anwendungsgebiet der leitungsgebundenen Kommunikation die Verwendung des sogenannten Constant Modulus (CM) Algorithm (CMA), der HOS auf implizite Art verwendet, am geeignetsten erscheint. Dieser Algorithmus wird daher in Kapitel 6.2 ausführlich besprochen.

6.1.2.1 Auf Statistiken zweiter Ordnung beruhende Algorithmen

Zunächst sollen Algorithmen betrachtet werden, die auf der Verwendung von SOS, also von Auto- und Kreuzkorrelationsfunktionen beruhen. Normalerweise enthalten diese Statistiken zwar Informationen über den Amplituden-, nicht jedoch über den Phasengang der Kanalübertragungsfunktion. Zur reinen Amplitudenentzerrung, also zur linearen Prediktion (siehe Kapitel 5.3), sind SOS daher grundsätzlich ausreichend. Ist die Autokorrelationsfunktion, wie bei digital modulierten Signalen, hingegen periodisch, kann prinzipiell auch Information über den Phasengang aus den SOS gewonnen werden. Voraussetzung zur blinden Adaption ist hierbei die Überabtastung des Eingangssignals, bzw. die Verwendung mehrerer Sensoren, die die Autokorrelationsfunktion zyklstationär macht. Die Ausnutzung der Zyklstationarität zur blinden Adaption wurde 1994 erstmals von Tong [165] beschrieben. Nachteilig an diesen Verfahren ist, dass meist die Kanallänge vorgegeben werden muss und die Algorithmen empfindlich auf diesen vorgegebenen Wert reagieren.

6.1.2.2 Auf Statistiken höherer Ordnung beruhende Algorithmen

Statistiken höherer Ordnung beinhalten grundsätzlich Informationen zum Amplituden- und Phasengang der Kanalübertragungsfunktion. Hierbei bezeichnen HOS Verallgemeinerungen der Kovarianzfunktion und beinhalten Erwartungswerte des Produkts des Originalsignals mit mehreren zeitverschobenen Versionen dieses Signals. So wird etwa der Kumulant vierter Ordnung $R(m, n, l)$ des Signals $r(n)$ gebildet als $R(m, n, l) = E\{r(k)r(k+m)r(k+n)r(k+l)\}$. Grundsätzlich kann man die betrachtete Algorithmenklasse in zwei Subklassen unterteilen, zum einen Methoden, die expliziten Gebrauch von HOS machen und zum anderen Methoden, die hiervon impliziten Gebrauch machen. Allgemein sind die expliziten Verfahren relativ aufwändig zu implementieren, da zur Schätzung dieser Statistiken in der Praxis Mittelungen über viele Zeitabschnitte durchgeführt werden müssen. Vorteilhaft ist, dass sie insgesamt eine schnelle Adaption erlauben.

Zu Verfahren, die von HOS implizit Gebrauch machen, gehören etwa die Bussgang Algorithmen. Algorithmen dieser Klasse ersetzen den Symbolschätzer des LMS Algorithmus durch einen allgemeinen nichtlinearen Schätzer und weisen deshalb eine Implementierungskomplexität auf, die in der Größenordnung der des LMS Algorithmus liegt. Das erste derartige Verfahren wurde 1975 von Sato [142] veröffentlicht. Der klassische, 1978 von Godard eingeführte CMA [61] ist der bis heute am meisten zur blinden Entzerrung eingesetzte Algorithmus. Er wird in Kapitel 6.2 ausführlich beschrieben.

6.1.2.3 Vergleich der verschiedenen Algorithmenklassen

In diesem Abschnitt sollen die verschiedenen Algorithmenklassen in Bezug auf Implementie-

rungsaufwand und auf die Güte der sich einstellenden stationären Lösung verglichen werden. Da bei einem Einsatz im Gebiet der leitungsgebundenen Übertragungstechnik die Adaptionsgeschwindigkeit von sekundärer Bedeutung ist, wird dieser Eigenschaft hier nur wenig Gewicht beigemessen.

Bezüglich des Implementierungsaufwandes sind Algorithmen, die HOS auf explizite Art verarbeiten, ganz klar den anderen beiden Verfahren unterlegen und werden im Rahmen dieser Arbeit daher nicht weiter behandelt. Bussgang Algorithmen sind mit ihrem dem LMS Algorithmus vergleichbaren Aufwand unter diesem Gesichtspunkt den beiden anderen Verfahren vorzuziehen.

Vergleiche bezüglich des Systemverhaltens wurden etwa in [40] und [119] beschrieben. Ein Ergebnis dieser Veröffentlichungen ist, dass Verfahren, die auf SOS beruhen, sehr sensitiv auf die vorgegebene Länge der Kanalimpulsantwort reagieren, d.h. sie konvergieren nur sehr schlecht, wenn der Kanal als zu lang oder zu kurz angenommen wird. Bei den sogenannten Bussgang Algorithmen ist nachteilig, dass ihr Verhalten kritisch von der gewählten Initialisierung abhängt. Abgesehen von dieser Eigenschaft, sind sie den auf SOS beruhenden Algorithmen aber in fast allen Belangen überlegen. Daher konzentriert sich diese Arbeit auf Bussgang Algorithmen und speziell auf deren mit Abstand prominentesten Vertreter, den CMA. Auf den genannten Nachteil, der kritischen Abhängigkeit von der Initialisierung, wird in Kapitel 6.2.2.4 näher eingegangen.

6.2 Der Constant Modulus Algorithmus und seine Varianten

Wie in Kapitel 6.1.2.3 erläutert, beschränkt sich diese Arbeit bei der referenzdatenfreien Adaption transversaler Entzerrer auf Bussgang-Algorithmen, die den Fehlerterm $e(n)$ nach der Vorschrift

$$e(n) = g(y(n)) - y(n) \quad (6.1)$$

berechnen, und die Entzerrerkoeffizienten analog zu (5.3) und (5.4) durch ein stochastisches Gradientenverfahren nachstellen. Hierbei steht $g(\bullet)$ für eine beliebige nichtlineare Funktion. Der Wert $\hat{x}(n) = g(y(n))$ fungiert bei den Bussgang-Algorithmen als Schätzwert von $x(n)$. Er wird mit einem nichtlinearen gedächtnisfreien Schätzer erzeugt, der die Rolle des Symbolschalters beim LMS Algorithmus übernimmt. Nach der Definition des Fehlerterms in (6.1) ist der LMS Algorithmus ebenfalls ein Repräsentant der Bussgang Algorithmen. Der große Vorteil dieser Klasse von Algorithmen liegt darin, dass die Implementierung identisch zu der des LMS Algorithmus erfolgen kann und in der Startphase lediglich ein anderer Symbolschätzer verwendet werden muss. Die Komplexität ist deshalb vergleichbar mit der des LMS Algorithmus und der Entzerrer kann, sobald das Verfahren konvergiert ist, sehr leicht auf den entscheidungsgestützten Modus umgestellt werden.

6.2.1 Kostenfunktion

Der wohl am meisten eingesetzte Algorithmus zur blinden Entzerrung ist der Godard [60], bzw.

Constant Modulus Algorithm. Das zugehörige CM Kriterium minimiert die Dispersion des Empfängers über die Dispersionskonstante γ_p

$$\gamma_p = \frac{\mathbb{E}\{|x|^{2p}\}}{\mathbb{E}\{|x|^p\}}, \quad (6.2)$$

wobei p eine frei wählbare Konstante ist. Ein CM Empfänger ist daher durch ein lokales Minimum der CM Kostenfunktion

$$J_{CM} = \mathbb{E}\left\{(|y|^p - \gamma_p)^2\right\} \quad (6.3)$$

charakterisiert. Zur Herleitung des klassischen CMA wird in (6.2) und (6.3) $p = 2$ gewählt, für $p = 1$ erhält man den Sato Algorithmus [142]. Es existieren auch weitergehende Verallgemeinerungen, bei denen die Quadratbildung in (6.3) durch eine allgemeine Potenz von q ersetzt wird. Der so erhaltene Algorithmus wird dann als CMA p-q bezeichnet, so dass der klassische CMA auch als CMA 2-2 und der Sato Algorithmus als CMA 2-1 in der Literatur zu finden sind. In dieser Arbeit wird unter der Bezeichnung CMA immer der CMA 2-2 verstanden. Die Minimierung von J_{CM} mit $p = 2$ kann so interpretiert werden, dass in der komplexen Ebene die Signalraumkonstellation des Entzerrerausganges möglichst gut an einen Kreis mit Radius $\sqrt{\gamma_2}$ angeglichen wird. Durch die Betragsbildung ist die CM Kostenfunktion im Allgemeinen invariant bezüglich einer möglichen Drehung der Signalraumkonstellation. Diese Eigenschaft ist im Falle einer QAM Konstellation zu Beginn der Übertragung von Vorteil, da das Verhalten des Entzerrers nicht von der - ebenfalls zu diesem Zeitpunkt nicht genau bekannten - Trägerphase beeinflusst wird. Eine explizite Schätzung des Phasenfehlers φ ist anhand der Signale vor der Entzerrung im Allgemeinen sehr aufwändig, so dass eine Entkopplung des Adaptionsalgorithmus von der Lage der Signalraumkonstellation positiv zu bewerten ist [87]. Der Entzerrerausgang muss dann allerdings durch Drehung um einen Winkel φ in die richtige Orientierung überführt werden. Diese Aufgabe kann etwa eine Trägerphasenregelung übernehmen. Falls die gesendete Signalraumkonstellation symmetrisch zu einer Drehung von $\pi/2$ ist, wie es etwa bei QAM der Fall ist, kann die Phase prinzipiell nur bis auf Vielfache von $\pi/2$ bestimmt werden. Diese Tatsache ist aber bei Verwendung einer differentiellen Kodierung irrelevant.

Das CM Kriterium kann leicht in Inphase- und Quadraturkomponente separiert werden, so dass das sogenannte Multi Modulus (MM) Kriterium entsteht, welches durch folgende Kostenfunktion charakterisiert ist:

$$J_{MM} = \mathbb{E}\left\{\left(|y^I|^{2p} - \tilde{\gamma}_p\right)^2 + \left(|y^Q|^{2p} - \tilde{\gamma}_p\right)^2\right\}. \quad (6.4)$$

Die Terme y^I und y^Q bezeichnen hier jeweils die Inphase, bzw. Quadraturkomponente von y . Die modifizierte Dispersionskonstante $\tilde{\gamma}_p$ erhält man durch Substitution von x in (6.2) durch x^I , bzw. x^Q . Die Minimierung der MM Kostenfunktion kann bei der üblichen Wahl von $p = 2$ als die möglichst genaue Anpassung der Signalraumkonstellation am Ausgang des Entzerrers an ein Quadrat mit Kantenlänge $2\sqrt{\tilde{\gamma}_2}$ interpretiert werden.

Die MM Kostenfunktion ist nicht mehr rotationsinvariant, so dass ein mit den MM Kriterium adaptierter Entzerrer sich automatisch auf die richtige Lage der Signalraumkonstellation einstellt. Dieser Vorteil ist in der Praxis allerdings meist zu vernachlässigen, da im Allgemeinen der Ausgang des Vorwärtsentzerrers, etwa durch eine Trägerphasenregelung (siehe Kapitel 2.3.2), immer in die richtige Lage gedreht werden wird. Andererseits ist der MMA geringfügig aufwändiger zu implementieren als der CMA.

Hauptvorteil der CM Kostenfunktion ist, dass der erwartungstreue (*unbiased*) MSE (UMSE)

(vgl. Kapitel 4.6) des korrespondierenden CM Empfängers nahe am theoretischen Minimum des Wiener Filters liegt und zwar unabhängig von der Entzerrerrlänge und von der Rauschumgebung [147]. Dies bedeutet, dass ein CM Empfänger eine skalierte Version des MMSE Empfängers ist. Daher kann ein während des Systemstarts mit dem CMA trainierter Entzerrer den Startkoeffizientensatz eines mit dem LMS adaptierten Entzerrers generieren.

6.2.2 Der Constant Modulus Algorithmus für Transversalentzerrer

6.2.2.1 Vorschrift zur Koeffizientennachführung

Der CMA ist das stochastische Gradientensuchverfahren der CM Kostenfunktion. Der Gradient von J_{CM} bezüglich $\mathbf{f}(n)$ ist gegeben durch

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{f}^*(n)} J_{CM}(f) = 2E \left\{ \mathbf{r}^*(n) y(n) \left(|\mathbf{f}(n)^T \mathbf{r}(n)|^2 - \gamma_2 \right) \right\}, \quad (6.5)$$

wobei gilt $y(n) = \mathbf{f}(n)^T \mathbf{r}(n)$. Hierbei wurde Gleichung (A8) aus Appendix 2 verwendet:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{f}^*} |y(n)|^2 = 2y(n) \mathbf{r}(n). \quad (6.6)$$

Identisch zur Herleitung des LMS Algorithmus in (5.1) - (5.3), kann der CMA aus dem Gradienten seiner Kostenfunktion bezüglich der Entzerrerparameter (6.5) durch Auslassen des Erwartungswertoperators und anschließender geringfügiger Korrektur von $\mathbf{f}(n)$ in die entgegengesetzte Richtung des Gradienten erhalten werden:

$$\mathbf{f}(n+1) = \mathbf{f}(n) - \mu \mathbf{r}^*(n) y(n) (|y(n)|^2 - \gamma_2). \quad (6.7)$$

Auf die selbe Art und Weise kann der MM Algorithmus (MMA) aus (6.4) erhalten werden. In Tabelle 6.1 sind für eine Reihe von PAM und QAM Signalraumkonstellationen die Dispersionskonstanten des CMA und MMA für $p = 1$ und $p = 2$ gegeben. Die Sendeleistung σ_x^2 ist hierbei auf Eins normiert.

Die CM Kostenfunktion nach (6.3) lässt sich für den hier betrachteten Fall $p = 2$ folgendermaßen schreiben

$$J_{CM} = E\{|y(n)|^4\} - 2\sigma_x^2 \kappa_x E\{|y(n)|^2\} + \sigma_x^4 \kappa_x^2. \quad (6.8)$$

Hierbei bezeichnet κ_x das normierte Kurtosis der Sendedaten. Das Kurtosis ist ein Maß, das die Steilheit einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion beschreibt. Das normierte Kurtosis einer Verteilungsfunktion $x(n)$ ist definiert als

$$\kappa_x = \frac{E\{|x(n)|^4\}}{E^2\{|x(n)|^2\}} = \frac{E\{|x(n)|^4\}}{\sigma_x^4}. \quad (6.9)$$

Das Kurtosis einer Gaußverteilung wird im Folgenden durch κ_g bezeichnet. Für eine komplexwertige Verteilung gilt $\kappa_g = 3$, für eine reellwertige $\kappa_g = 2$. Entsprechend wird eine Verteilung mit $\kappa_x < \kappa_g$ als sub-Gauß und eine Verteilung mit $\kappa_x > \kappa_g$ als super-Gauß bezeichnet, wobei eine sub-Gauß-Verteilung stärker gewölbt ist als eine Gauß-Verteilung. Ist die Sendeleistung auf Eins normiert, entspricht das normierte Kurtosis der Dispersionskonstante des entsprechenden Modulationsverfahrens. Das Kurtosis einer PAM, bzw. QAM Konstellation ist

	CMA		MMA	
	$p = 1$	$p = 2$	$p = 1$	$p = 2$
4-QAM	1,00	1,00	0,71	0,5
8-QAM	1,06	1,32	0,79	0,82
16-QAM	1,06	1,32	0,79	0,82
32-QAM	1,06	1,31	0,81	0,94
64-QAM	1,06	1,38	0,81	0,88
128-QAM	1,06	1,34	0,82	0,96
256-QAM	1,07	1,40	0,81	0,90
512-QAM	1,06	1,35	0,83	0,97
1024-QAM	1,07	1,40	0,82	0,90
2-PAM	1,00	1,00	1,00	1,00
4-PAM	1,12	1,64	1,12	1,64
8-PAM	1,15	1,76	1,15	1,76

Tabelle 6.1: Dispersionskonstanten des CMA und MMA mit $p = 1$ und $p = 2$ für verschiedene Signalraumkonstellationen bei normierter Sendeleistung

grundsätzlich kleiner als κ_g , nähert sich diesem jedoch für steigende Stufenzahlen an. Der allgemeine Ausdruck für (6.8) ist sehr unübersichtlich. Er findet sich etwa in [88]. Deutlich vereinfachen lässt sich (6.8) etwa für die Spezialfälle einer PAM, bzw. QAM Signalraumkonstellation. Mit den Definitionen der gemeinsamen Kanal-Entzerrerimpulsantwort Γ der Länge N_Γ nach (2.22), sowie der 2., bzw. 4. Potenz der l_2 -Norm eines Vektors \mathbf{x}

$$\|\mathbf{x}\|_2^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^2, \text{ bzw. } \|\mathbf{x}\|_2^4 = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} |x_k|^2 |x_m|^2, \quad (6.10)$$

schreibt sich die CM Kostenfunktion für eine PAM Quelle und einen reellwertigen Kanal als

$$J_{CM, PAM} = \sigma_x^4 (\kappa_x - 3) \sum_{k=0}^{N_\Gamma-1} \Gamma_k^4 + 3\sigma_x^4 \|\Gamma\|_2^4 + \sigma_n^4 (\kappa_n - 3) \sum_{k=0}^{N-1} f_k^4 + 3\sigma_n^4 \|\mathbf{f}\|_2^4 + \quad (6.11)$$

$$6\sigma_x^2 \sigma_n^2 \|\Gamma\|_2^2 \|\mathbf{f}\|_2^2 - 2\sigma_x^2 \kappa_x (\sigma_x^2 \|\Gamma\|_2^2 + \sigma_n^2 \|\mathbf{f}\|_2^2) + \sigma_x^4 \kappa_x^2$$

und für eine QAM Quelle als

$$J_{CM, QAM} = \sigma_x^4 \kappa_x \sum_{k=0}^{N_\Gamma-1} \Gamma_k^4 + 2\sigma_x^4 \sum_{k=0}^{N_\Gamma-1} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^{N_\Gamma-1} |\Gamma_k|^2 |\Gamma_m|^2 + \sigma_n^4 \kappa_n \sum_{k=0}^{N-1} f_k^4 + \quad (6.12)$$

$$2\sigma_n^4 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^{N-1} |f_k|^2 |f_m|^2 + 4\sigma_x^2 \sigma_n^2 \|\Gamma\|_2^2 \|\mathbf{f}\|_2^2 - 2\sigma_x^2 \kappa_x (\sigma_x^2 \|\Gamma\|_2^2 + \sigma_n^2 \|\mathbf{f}\|_2^2) + \sigma_x^4 \kappa_x^2$$

In [147] wurde unter sehr allgemeinen Bedingungen gezeigt, dass ein CM Schätzer robust be-

züglich des MSE ist. Den Ausführungen in [147] liegt ein Systemmodell mit vektorwertigem FIR/IIR Kanal sowie vektorwertigem FIR/IIR Schätzer mit festlegbarer Anzahl an justierbaren Parametern zugrunde. Den verschiedenen Störern können zudem beliebige Verteilungsfunktionen zugrunde liegen. Somit beinhaltet das Systemmodell auch die hier betrachteten Szenarien der leitungsgebundenen Kommunikation mit Nebensprechstörern.

6.2.2.2 Fehler des CMA im eingeschwungenen Zustand

Eine Berechnung des MSE ε_{CMA-SS} eines mit dem CMA trainierten Transversalentzerrers unter idealen Bedingungen im eingeschwungenen Zustand findet sich in [49] sowie in etwas allgemeinerer Form in [117]. Er ist gegeben durch

$$\varepsilon_{CMA-SS} = \mu \text{Tr}(\mathbf{R}_{rr}) \frac{(\sigma_s^2 \gamma_p^2 - 2E\{|s(n)|^4\} \gamma_p + E\{|s(n)|^6\})}{6\sigma_s^2 - 2\gamma_p} \quad (\text{rauschfrei}). \quad (6.13)$$

Hierbei entspricht das MSE aufgrund der idealen Bedingungen dem EMSE. Diese Bedingungen sind hierbei die gleichen wie bei Herleitung zu (4.5), namentlich verschwindendes Rauschen, ein überabgetasteter Kanal dessen Subkanäle keine gemeinsamen Nullstellen aufweisen, sowie ein ausreichend langer Entzerrer. Nach (6.13) ist der EMSE des mit einem CMA adaptierten Entzerrers direkt proportional zur Schrittweite, sowie über die Größe der Autokorrelationsmatrix \mathbf{R}_{rr} auch über die Entzerrerrlänge. Es lässt sich durch Umformung von (6.13) zeigen, dass der EMSE des CMA Entzerrers für eine CM Quelle gegen Null geht und andererseits für PAM, bzw. für QAM bei steigender Stufenzahl ansteigt [87]. Allgemeiner lässt sich zeigen, dass der EMSE mit steigendem normierten Kurtosis der Quelle ansteigt, sofern die Verteilung der Sendesymbole, wie allgemein üblich, sub-Gauß ist.

Allgemein gültige Abschätzungen des Fehlers und EMSE eines mit dem CMA trainierten FIR, bzw. IIR Entzerrers wurden von Zeng [182] und Schniter [147] gegeben. Hierbei sind die Ergebnisse der Berechnung nach Zeng u.U. etwas genauer als die in [147], sie haben allerdings den Nachteil, nicht in geschlossener Form angebar zu sein und sind darüberhinaus nicht so allgemein gültig wie die von Schniter, da zu ihrer Herleitung von reellwertigen Sendesignalen, unkorreliertem additiven Rauschen, einem FIR Kanal, sowie einem FIR Entzerrer ausgegangen wird. Da diese Einschränkungen für die Herleitung der Ergebnisse in [147] nicht erforderlich sind, sollen im Folgenden kurz die Ergebnisse der Berechnung nach Schniter diskutiert werden. Beide Veröffentlichungen geben an, dass das EMSE des CMA Empfängers im Vergleich zum Wiener Empfänger in der Größenordnung vom Quadrat des MMSE liegt.

In [147] sind zwei verschiedene Abschätzungen des UMSE eines CMA Empfängers angegeben. Die erste gibt das UMSE in Abhängigkeit des normierten Kurtosis des Ausgangssignals des korrespondierenden Wiener Empfängers an. Zur Herleitung wird davon ausgegangen, dass der Sender des gewünschten Signals von $K - 1$ Sendern gestört wird, wobei die insgesamt K Sender jeweils einen eigenen Übertragungskanal zum betrachteten Empfänger besitzen. Bei den Störern handelt es sich entweder um Signale, die auf den betrachteten Empfänger übersprechen und deren Quelle üblicherweise ein Kurtosis kleiner als κ_g hat, oder es handelt sich um weißes Rauschen mit Kurtosis κ_g .

Im Folgenden seien κ_{min} , bzw. κ_{max} das Minimum, bzw. Maximum der $(K + 1)$ Kurtosis-Werte der verschiedenen Sender. Mit κ_m wird das Kurtosis des Ausgangs des Wienerschätzers bezeichnet. Folgende Größen beziehen diese Werte auf das Kurtosis des Senders κ_x :

$$\rho_{min} = \frac{\kappa_g - \kappa_{min}}{\kappa_g - \kappa_x}, \quad \rho_{max} = \frac{\kappa_g - \kappa_{max}}{\kappa_g - \kappa_x}, \quad \rho_m = \frac{\kappa_g - \kappa_m}{\kappa_g - \kappa_x}. \quad (6.14)$$

Für eine Vielzahl von Fällen ist $\kappa_x = \kappa_{min}$ und somit $\rho_{min} = 1$. Dies gilt etwa dann, wenn ein QAM Signal durch Nebensprechen, sowie additives gaußsches Rauschen gestört wird, und die Signale der Nebensprechstörer ebenfalls QAM bzw. CAP moduliert sind, mit einer Stufenzahl, die mindestens so groß wie die des gesendeten Signals ist. Das UMSE eines CM-Empfängers kann als Funktion des Kurtosis des Ausgangs eines Wiener-Schätzers mit Systemverzögerung δ folgendermaßen angegeben werden [147]:

$$UMSE_{CMA, \delta} \leq \frac{1 - \sqrt{(\rho_{min} + 1)\rho_m - \rho_{min}}}{\rho_{min} + \sqrt{(\rho_{min} + 1)\rho_m - \rho_{min}}} \sigma_x^2. \quad (6.15)$$

Für den wichtigen Fall $\rho_{min} = 1$ vereinfacht sich (6.15) zu

$$UMSE_{CMA, \delta} \leq \frac{(1 - \sqrt{2\rho_m - 1})^2}{2 - 2\rho_m} \sigma_x^2. \quad (6.16)$$

Es ist ebenfalls möglich, diese Größe in Abhängigkeit des UMSE des Wiener-Schätzers mit Systemverzögerung δ , der im Folgenden mit $UMSE_{m, \delta}$ bezeichnet ist, anzugeben. Für den relevanten Fall $\kappa_{max} \leq \kappa_g$, also falls keine der Wahrscheinlichkeitsdichten super-Gauß ist, gilt unter sehr allgemeinen Voraussetzungen [147]

$$UMSE_{CMA, \delta} \leq \frac{1 - \sqrt{(\rho_{min} + 1)(1 + (UMSE_{m, v})/\sigma_x^2)^{-2} - \rho_{min}}}{\rho_{min} + \sqrt{(\rho_{min} + 1)(1 + (UMSE_{m, v})/\sigma_x^2)^{-2} - \rho_{min}}} \sigma_x^2, \quad (6.17)$$

bzw. für $\rho_{min} = 1$ und eine auf 1 normierte Sendeleistung σ_x^2

$$UMSE_{CMA, \delta} \leq \frac{(1 - \sqrt{2(1 + UMSE_{m, v})^{-2} - 1})^2}{2 - 2(1 + UMSE_{m, v})^{-2}}. \quad (6.18)$$

Hierbei sind die Abschätzungen nach (6.15), bzw. (6.16) mindestens so genau wie die nach (6.17), bzw. (6.18). Eine Abschätzung des zusätzlichen UMSE eines CMA Schätzers im Vergleich zum korrespondierenden Wiener Schätzer kann für $\kappa_{max} \leq \kappa_g$ in folgender Form gegeben werden:

$$UMSE_{CMA, \delta} - UMSE_{m, \delta} \leq \frac{1}{2\sigma_x^2} \rho_{min} UMSE_{m, \delta}^2 + f(UMSE_{m, \delta}^3). \quad (6.19)$$

Das zusätzliche UMSE ist also durch das Quadrat des minimalen UMSE nach oben begrenzt, so dass ein CM Schätzer nach (6.19) robust im Sinne des MSE ist. In [147] wurde durch Simulationen gezeigt, dass die angegebenen Schranken sehr nahe an den tatsächlichen Werten sind. Andererseits lässt sich aus (6.19) auch folgern, dass die Koeffizientengewichte eines mit dem CMA adaptierten Entzerrers unter allgemeinen Bedingungen nahe an der Wiener Lösung liegen. Eine exaktere Beweisführung dieser Aussage findet sich etwa in [63] für Entzerrer der Länge zwei, sowie in [147] für beliebige Entzerrerlängen.

Es soll an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen werden, dass die Hauptaufgabe des CMA ist, Entzerrparameter zu liefern, die als Startlösung des Entzerrers im entscheidungsgestützten Betrieb verwendet werden können. Die Performance eines mit dem CMA adaptierten Entzerrers ist daher nicht von entscheidender Bedeutung, wesentlich wichtiger ist, dass der sich ergebende Koeffizientensatz nahe an einem Minimum der Wiener Kostenfunktion liegt, die einer Systemverzögerung mit relativ geringem SINR entspricht.

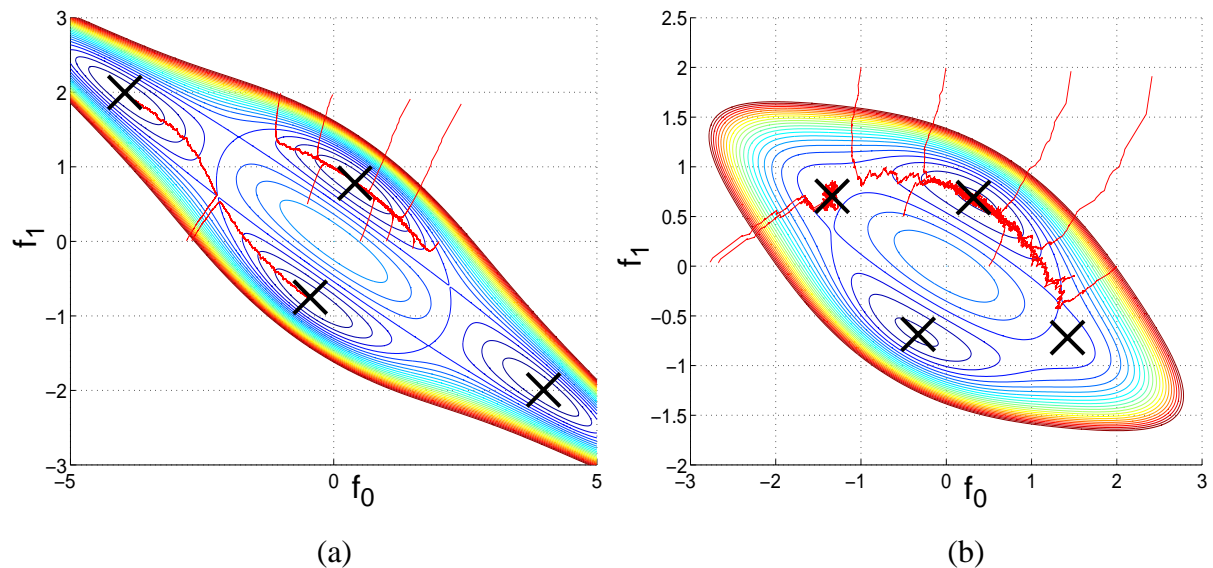


Bild 6.1: CM Kostenfunktionen eines überabgetasteten Kanals (a) Rauschfrei
(b) Mit AWGN: Störabstand am Entzerrereingang = 13 dB

6.2.2.3 Stationäre Punkte der Kostenfunktion

Im Folgenden sollen anhand einfacher Beispiele einige grundlegende Eigenschaften des CMA verdeutlicht werden. Wie in [87] und [88] vorgeschlagen, werden hierfür die CM Fehleroberflächen für einen Entzerrer der Länge zwei grafisch dargestellt. Für Entzerrer mit einer größeren Anzahl an Koeffizienten lässt sich keine derartige Veranschaulichung finden. Die für die untersuchten, sehr kurzen, Entzerrer gefundenen Ergebnisse gelten im Allgemeinen aber auch für Entzerrer größerer Länge [88]. Zunächst werden in Bild 6.1a und Bild 6.1b CM Fehleroberflächen für die gleichen Szenarien gezeigt, wie die, die in Bild 5.1a und Bild 5.1b zu den entsprechenden Grafiken des LMS geführt haben. Zu beachten ist die unterschiedliche Achsenskalierungen in Bild 6.1. Im Gegensatz zu Bild 5.1 ist hier die sogenannte zusammengesetzte Kostenfunktion gezeigt, die aus folgenden Gründen mehrere Minima aufweist: Zunächst existieren Drehungen der Signalraumkonstellation, die bei Verwendung einer differentiellen Kodierung zu identischen Ergebnissen führen. So sind bei einer PAM-Kodierung etwa die detektierten Sequenzen $y(n) = x(n - \delta)$ und $y(n) = -x(n - \delta)$ gleichwertig. Bei einer QAM-Kodierung kann eine Drehung der Konstellation um $(\pi/2)$ zugelassen werden. Die Kostenfunktionen in Bild 6.1 sind daher punktsymmetrisch zum Ursprung. Die zweite Ursache für das Auftreten mehrerer Minima liegt darin begründet, dass die Systemverzögerung δ $N/w + 1$ verschiedene Werte annehmen kann. Diese verschiedenen Systemverzögerungen führen im Allgemeinen zu unterschiedlichem Systemverhalten. Eine Initialisierung eines mit dem CMA adaptierten Entzerrers, die zu einer Systemverzögerung mit hohem SINR führt, ist daher von entscheidender Bedeutung. Es sei hier noch angemerkt, dass auch die Fehleroberflächen des LMS - bei Berücksichtigung der verschiedenen möglichen δ -Werte, sowie der möglichen Signalraumdrehungen, die gleiche Anzahl an Minima aufweist. Wie in Kapitel 5.1.1.2 beschrieben, sind im entscheidungsgestützten Modus diese Parameter bereits bestimmt, weshalb die in Bild 5.1 gezeigten korrespondierenden Kostenfunktionen des LMS Algorithmus nur ein Minimum aufweisen. Im Gegensatz dazu kann für einen unbekanntem Kanal bei Verwendung des CMA anhand der Initialisierung keine eindeutige Aussage getroffen werden, welche Systemverzögerung und welche Drehung der Signalraumkonstellation sich im eingeschwungenen Zustand einstellen wird.

Die Fehleroberfläche in Bild 6.1a entspricht einem idealen Szenario, bei der ein linearer Entzerrer die Kanalimpulsantwort theoretisch perfekt entzerren kann (vgl. die Kommentare bei

(4.5), bzw. (6.13)). Unter diesen idealen Bedingungen zeigen alle Minima der Kostenfunktion einen verschwindenden Restfehler und die zu den Minima der CMA und LMS Kostenfunktionen korrespondierenden Koeffizientensätze stimmen exakt überein. Fügt man Rauschen hinzu, bewegen sich die Minima der CM Kostenfunktion jeweils in Richtung des Ursprungs, allerdings unterschiedlich schnell. Außerdem verändern sich die Fehlerterme der zu verschiedenen Systemverzögerungen gehörenden Minima unterschiedlich, so dass neben den globalen Minima nun auch lokale Minima entstehen. Dies ist in Bild 6.1b verdeutlicht. Man erkennt, dass sich vor allem die Positionen der lokalen Minima stark in Richtung des Ursprungs verschieben, während sich die Positionen der globalen Minima nur wenig ändern. Entsprechendes gilt auch für die LMS Kostenfunktion. Die zu den Minima gehörenden Entzerrerkoeffizienten entsprechen nun nicht mehr exakt denen des MSE Empfängers, liegen aber weiterhin in einer nahen Umgebung, so dass ein mit CMA gefundener Koeffizientensatz als gute Startlösung des mit dem LMS Algorithmus adaptierten Entzerrers fungieren kann. Allerdings ist es wichtig, den Entzerrer derart zu initialisieren, dass die Adaption zu einem Koeffizientenvektor nahe eines globalen Minimums führt. Für das gewählte Szenario beträgt etwa das zu den lokalen Minima der LMS Kostenfunktion korrespondierende MSE 0,667, das zu den globalen Minima korrespondierende hingegen 0,0741. Prinzipiell kann sich bei Verwendung fraktionaler Entzerrer, wie in [30] gezeigt, durch zusätzliches Rauschen die Fehleroberfläche auch derart verformen, dass einzelne lokale Minima ganz verschwinden.

In Bild 6.1 sind simulierte Trajektorien gezeichnet, die zu verschiedenen Initialisierungen gehören. Die Initialisierungsvektoren entsprechen denen, die für die Simulationen zu Bild 5.1 Verwendung fanden. Die zugehörigen Trajektorien konvergieren in das Minimum, das in unmittelbarer Nachbarschaft dessen der LMS Kostenfunktion liegt, wenn die identische Systemverzögerung und Drehung der Signalraumkonstellation zugrundegelegt wird. Zusätzlich wurden noch zwei nahe beieinanderliegende Startpunkte zur Adaption gewählt, von denen aus die Adaption zu anderen Minima erfolgt. Diese Punkte liegen bei $[-2,7 \ 0,0]^T$, bzw. bei $[-2,5 \ 0,0]^T$. Im in Bild 6.1a dargestellten rauschfreien Fall verlaufen die zu diesen Startwerten nahe an einem Sattelpunkt vorbei und führen schließlich zu zwei unterschiedlichen Minima, die im rauschfreien Fall allerdings beide zu einem MSE von Null führen. Bei zusätzlichem Rauschen enden beide Trajektorien in einem lokalen Minimum. Dies ist in Bild 6.1b zu sehen. Man erkennt auch, dass im Bereich dieses lokalen Minimums, aufgrund des hier relativ flachen Verlaufs der CM Fehleroberfläche, die Entzerrerkoeffizienten ziemlich stark um das lokale Minimum fluktuieren. Aus diesen Beobachten lässt sich allerdings nicht folgern, dass die globalen Minima in einer verrauschten Systemumgebung allgemein eine größere Anziehungskraft besitzen als im rauschfreien Fall.

Ist der Entzerrer zu kurz, um den Kanal auch im rauschfreien Zustand perfekt zu entzerren, spricht man von sogenanntem „*Undermodelling*“. Nach dieser Definition ist ein im Symboltakt laufender Entzerrer immer „*undermodelled*“. Die Konsequenzen daraus sind ähnlich wie die von zusätzlichem Rauschen. So zeigen die mit unterschiedlichen δ -Werten korrespondierenden Minima im Allgemeinen einen unterschiedlichen MSE und die Position der Minima unterscheidet sich geringfügig von der der LMS Kostenfunktion.

Die Verwendung von höherstufiger PAM oder QAM Konstellationen, bei denen einzelne Signalpunkte nicht auf einem Kreis liegen, lässt die Position der Minima unverändert, allerdings wird die Kostenfunktion im Allgemeinen flacher, was zu einer langsameren Adaption und größerem Koeffizientenrauschen im eingeschwungenen Zustand führt.

Neben den beschriebenen Minima besitzt eine CM Kostenfunktion allgemein noch die anderen möglichen Extremwerte Maxima und Sattelpunkte. Hierbei lässt sich zeigen, dass die Kostenfunktion für beliebige Anordnungen immer genau ein Maximum besitzt, das im Ursprung angesiedelt ist. Kritischer als Maxima sind allerdings Sattelpunkte. In der Umgebung eines Sattelpunktes ist die Steigung der Kostenfunktion allgemein sehr flach, so dass die Adaptions-

geschwindigkeit relativ langsam ist, wenn sich die Entzerrerkoeffizienten in der Nähe eines Sattelpunktes befinden. Dieser Effekt tritt allgemein bei geringem Rauschen stärker auf, als bei einem stark verrauschten Kanal. Im mehrdimensionalen Fall kann eine Trajektorie an mehreren Sattelpunkten vorbei verlaufen, so dass hier - abhängig von der Initialisierung - starke Unterschiede in der Adaptionsgeschwindigkeit auftreten können.

Allgemein kann die Kostenfunktion eines blinden Adaptionsverfahrens neben den beschriebenen längenabhängigen auch noch kostenabhängige lokale Minima aufweisen [103]. Diese liegen in der Adaptionsvorschrift des Algorithmus selbst begründet. In [35] wurde jedoch gezeigt, dass derartige Minima bei der CM Kostenfunktion grundsätzlich nicht auftreten. Dies ist ein großer Vorteil des CMA im Vergleich etwa zum Sato Algorithmus und vielen anderen, bei denen diese Eigenschaft nicht gegeben ist [103]. Im Gegensatz dazu sind, trotz der starken Verwandtschaft des MMA und des CMA, für den MMA in der Literatur kostenabhängige lokale Minima beschrieben [178]. Allerdings findet sich in der Literatur keine umfassende Charakterisierung der lokalen Minima der MMA Kostenfunktion [54]. Daher wird in dieser Arbeit der CMA gegenüber dem MMA bevorzugt.

6.2.2.4 Initialisierung des CMA

Wie bereits erwähnt, ist die Initialisierung des Entzerrers von großer Wichtigkeit. Meist wird die sogenannte „*Single Spike*“ Initialisierung angewandt, bei der der Entzerrer mit einem Vektor \mathbf{e}_8 initialisiert wird, wobei die Position der Eins dieses Vektors meist in der Mitte des Entzerrers liegt. Diese Position soll hierbei die Systemverzögerung bestimmen. Bei fraktionalen Entzerrern werden normalerweise w nebeneinanderliegende Koeffizienten mit $(1/\sqrt{w})$ initialisiert.

Die Initialisierung eines in Kapitel 4.1.3 vorgestellten PS-FSE muss so erfolgen, dass die Inphase- und Quadratur Komponente des Entzerrers ein Hilbert-Paar bilden. Eine erfolgversprechende Strategie besteht etwa darin, die Impulsantwort des komplexwertigen Bandpass Sendefilters als Startkoeffizientensatz zu verwenden.

Eine elegantere Methode zum Einstellen der Systemverzögerung ist durch den in [166] und [43] vorgeschlagenen sogenannten *Channel Surfing* Re-Initialisierungs-Algorithmus gegeben. Hierbei wird der Entzerrer zunächst beliebig initialisiert und anhand des CMA adaptiert. Anschließend berechnet man aus dem so erhaltenen Koeffizientensatz und einer gemittelten Kovarianzmatrix der Signalwerte am Entzerrereingang eine neue Startlösung, die zu einer Systemverzögerung führt, die geringfügig kleiner oder größer ist, als die, die sich anhand der ersten Initialisierung ergeben hat. Hierbei wird jedoch nicht der Startkoeffizientensatz einfach verschoben, sondern es wird anhand der Startlösung der Kanal geschätzt. Diese Prozedur wird solange durchgeführt, bis die optimale Systemverzögerung gefunden ist. Die optimale Verzögerung entspricht hierbei der Position eines Fensters der Länge $(N + 1)$, die die meiste Energie der Kanalimpulsantwort beinhaltet [105]. Die beschriebene Technik ist relativ aufwändig, da zunächst aus möglichst vielen Abtastwerten eine Kovarianzmatrix berechnet werden muss und diese anschließend noch invertiert werden muss.

6.2.2.5 Adaptionsgeschwindigkeit

Auf die Adaptionsgeschwindigkeit des CMA soll hier nur kurz eingegangen werden, da der Fokus dieser Arbeit auf Systemen mit quasistationären Kanälen liegt und hier in aller Regel beim Systemstart ausreichend Zeit für die ein-, bzw. mehrmalige Adaption des Entzerrers zur Verfügung steht. In der Literatur wurde dieses Thema bis jetzt aufgrund der großen Komplexität nur am Rande betrachtet (siehe etwa [87]). Hauptproblem einer globalen Betrachtung ist, dass die

Adaptionsgeschwindigkeit des CMA stark von der Initialisierung abhängt, da abhängig davon die Trajektorien mehr oder weniger nah an einzelnen Sattelpunkten der Kostenfunktion vorbeilaufen. Wie bereits beschrieben, verläuft die Adaption in unmittelbarer Umgebung eines Sattelpunktes allgemein recht langsam.

In der Nähe eines Minimums kann als Näherung der Zeitkonstante τ_{CMA} des CMA folgende Abschätzung gegeben werden [87]

$$\frac{1}{2w\mu(\kappa_g - \kappa_x)\lambda_{max}} \leq \tau_{CMA} \leq \frac{1}{2w\mu(\kappa_g - \kappa_x)\lambda_{min}}, \quad (6.20)$$

wobei diese Zeitkonstante wieder einerseits auf die Fehlerleistung und andererseits auf die Anzahl der Signalwerte am Entzerrerausgang bezogen wurde. Mit λ_{max} und λ_{min} ist der größte, bzw. kleinste Eigenwert der Kanalautokorrelationsmatrix \mathbf{R}_{rr} bezeichnet. Analog zum LMS konvergiert der CMA in der Nähe eines lokalen Minimums zunächst in Richtung des Eigenwertes der MSE Kostenfunktion mit der korrespondierenden größten Zeitkonstante. Im Vergleich zur entsprechenden Zeitkonstante des LMS (vgl. (5.10)) fällt der zusätzliche Term $(\kappa_g - \kappa_x)$ im Nenner von (6.20) ins Auge. Dieser Ausdruck beschreibt die Steilheit der lokal approximierten CMA Kostenfunktion im Vergleich zur LMS Kostenfunktion und ist eine Funktion der Signalraumkonstellation. Eine Erhöhung des Kurtosis der Quelle κ_x führt zu einer Verlangsamung der Adaptionsgeschwindigkeit. Bei einer PAM, bzw. QAM Konstellation entspricht dies einer Vergrößerung der Stufenzahl. Nähert sich κ_x im Grenzfall dem Kurtosis einer Gaußverteilung κ_g , geht die Adaptionsgeschwindigkeit gegen Null.

6.2.2.6 CMA mit dekorreliertem Eingang

Eine Möglichkeit zur Verbesserung der Adaptionseigenschaften des CMA liegt in der Dekorrelation seiner Eingangssignale. Man spricht in diesem Fall vom sogenannten dekorrelierten, bzw. *Prewhitened* CMA [102], [106]. In [102] wurde gezeigt, dass die Adaption des Prewhitened CMA das Systemverhalten eines CMA-Entzerrers zeigt, der im gemeinsamen Entzerrer-Kanal Raum adaptiert wird. Daraus wurde in [102] gefolgert, dass die Adaption des Prewhitened CMA im Falle einer weiten Streuung der Eigenwerte von \mathbf{R}_{rr} schneller erfolgt, als die des Standard CMA. In [28] wurde dieses Verhalten anschaulicher dadurch begründet, dass die Dekorrelation der Eingangssignale bereits einer Amplitudenentzerrung entspricht und der betrachtete Entzerrer daher nur noch den Phasengang korrigieren muss (vgl. Kapitel 4.2.1). Dies gilt exakt für ein genügend langes optimales Dekorrelationsfilter, ansonsten zumindest näherungsweise.

Dieses Verhalten ist in Bild 6.2 für einen fraktionalen Entzerrer mit $w = 2$ gezeigt. Die Kanalimpulsantwort ist im $T/2$ -Raster durch $[0,1 \ 0,2 \ 1,0 \ 0,4 \ 0,3 \ -0,2 \ -0,3 \ 0,1 \ 0,05]^T$ gegeben, außerdem wurde AWGN zugeführt, das zu einem SNR am Entzerrereingang von 40 dB führt. Das verwendete Modulationsverfahren ist BPSK. Dieser Kanal wurde zunächst mit dem Standard-CMA mit Schrittweite $\mu = 0,002$ entzerrt, wobei ein Entzerrer mit 24 Koeffizienten Verwendung fand. Zum Start wurden zwei der Entzerrerkoeffizienten zu $1/\sqrt{2}$ gesetzt. Die Position dieser sogenannten Spikes lag, wie allgemein üblich, in der Mitte des Entzerrers. Anschließend wurde die Adaption wiederholt und an den Entzerrereingang ein adaptives, rein rekursives Dekorrelationsfilter der Länge 6 gesetzt. Dieses Filter wurde nach dem Feintuch-Algorithmus (siehe Kapitel 5.3.3) mit einer Schrittweite von 0,0002 adaptiert. Als letztes wurde das optimale Dekorrelationsfilter berechnet und das Entzerrereingangssignal (Nutzsignal und Rauschen) mit der Impulsantwort dieses Filters gefiltert. Die so entstandene Kanalimpulsantwort mit optimalem Dekorrelationsfilter wurde anschließend ebenfalls mit dem CMA entzerrt. Die Simulationsergebnisse finden sich in Bild 6.2. Man erkennt, dass die perfekte Dekorrelation der

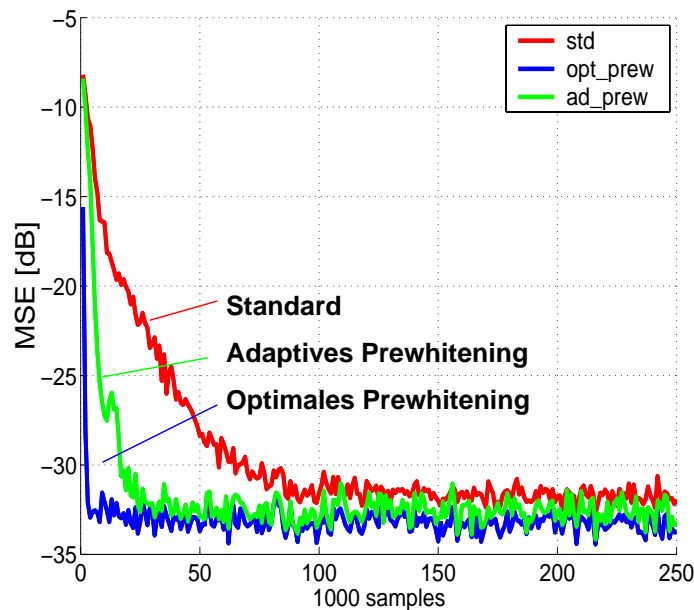


Bild 6.2: Trainingskurve eines CMA in normaler Implementierung, sowie bei optimaler, bzw. adaptiver Dekorrelation der Eingangssignale

Eingangssignale zu einer deutlich schnelleren Adaption führt. Außerdem führt sie hier auch zu einem niedrigeren MSE. Da der MSE aber stark von der sich einstellenden Systemverzögerung abhängt, lässt sich hieraus keine allgemeine Aussage treffen. In der Praxis muss man durch wiederholte Initialisierung daher, wie in Kapitel 6.2.2.4 beschrieben, versuchen, eine nahezu optimale Systemverzögerung einzustellen. Die adaptive Dekorrelation führt zu ähnlich gutem Verhalten wie die optimale, wenn man berücksichtigt, dass das verwendete AR Filter eine gewisse Zeit zur Adaption benötigt. Im eingeschwungenen Zustand ist der MSE bei Verwendung des adaptiven Filters, aufgrund des Adaptionsrauschens, etwas größer als das bei Verwendung des optimalen. Durch Verwendung einer adaptiven Schrittweite ließe sich dieses zusätzliche Rauschen minimieren (vgl. Kapitel 5.1.1.4).

Ein sogenannter *Channel Surfing* Algorithmus zur Reinitialisierung des Vorwärtsentzerrers wurde auch für den Prewhitened CMA angegeben [105]. Hier wird die Tatsache verwendet, dass sich Wiener Empfänger der Systemverzögerungen δ und $\delta + n$, bei nicht vorhandenen Korrelationen des Entzerrereingangssignals, lediglich durch eine Verschiebung um n unterscheiden. Da die lokalen Minima der CMA und der LMS Kostenfunktion im durch die Entzerrerkoeffizienten aufgespannten Raum eng benachbart liegen, kann somit durch Verschieben des mit dem CMA erhaltenen Koeffizientenvektors mit Systemverzögerung δ um n eine Startlösung des Entzerrers für die Systemverzögerung $\delta + n$ angegeben werden. Zusätzlich wurde in [105] ein heuristisches Verfahren zum Auffinden der optimalen Systemverzögerung gegeben. Da die Impulsantwort am Entzerrereingang nach Dekorrelation minimalphasig ist, besitzt sie ihre betragsmäßig größten Werte am Anfang und klingt am Ende aus. Die optimale Systemverzögerung liegt deshalb bei NT/w . Stellt sich durch Adaption mit dem CMA ein Koeffizientensatz mit $\delta < N$ ein, so sollten die letzten $N - \delta$ Koeffizienten des Entzerrers nahe bei Null sein. Zum Einstellen des optimalen δ wird der Koeffizientensatz nun um $N - \delta$ Stellen verschoben und die ersten $N - \delta$ Koeffizienten werden mit Null initialisiert. Anschließend wird die Adaption mit diesem Koeffizientensatz erneut durchgeführt. Die Schwierigkeit bei diesem heuristischen Verfahren besteht ganz offensichtlich darin, aus dem verrauschten Koeffizientensatz diejenigen Koeffizienten zu bestimmen, die nahe an Null sind. Großer Vorteil der Reinitialisierung des sogenannten Prewhitened CMA, im Vergleich zum Standard CMA ist, dass hier der Koeffizientensatz nur verschoben wird und keine zusätzlichen Berechnungen durchgeführt

werden müssen. Darüberhinaus zeigt sich in der Praxis, dass der Prewhitened CMA allgemein wesentlich unempfindlicher gegenüber der gewählten Initialisierung ist, als der Standard CMA [184]. Dies liegt vor allem daran, dass durch Dekorrelation die Impulsantwort, wie erwähnt, ihre betragsmäßig größten Werte am Anfang aufweist.

6.2.3 CMA für rekursive Entzerrer

Durch die Betrachtungen in [147] konnte gezeigt werden, dass auch bei Verwendung eines IIR Entzerrers die globalen Minima eines mit dem CMA adaptierten Entzerrers nahe an denen des Wiener Filters liegen. Im Rahmen dieser Arbeit wird der IIR-CMA in Kapitel 6.3.2.3 zur Generierung von Startkoeffizienten eines blind adaptierten DFE verwendet.

Zunächst wird in Kapitel 6.2.3.1 eine Herleitung des IIR-CMA gegeben. Da für diesen rekursiven Algorithmus die Stabilität nicht bewiesen werden kann, wird anschließend in Kapitel 6.2.3.2 eine Implementierung in Lattice Filter Struktur vorgeschlagen.

6.2.3.1 Implementierung in direkter Form

Zuerst soll der IIR-CMA in direkter Form hergeleitet werden. Der Ausgang dieses Filters ist gegeben durch

$$y(n) = \mathbf{r}(n)^T \mathbf{b}(n-1) - \mathbf{y}(n-1)^T \mathbf{a}(n-1). \quad (6.21)$$

Der IIR-CMA berechnet sich identisch zu dem in Kapitel 6.2 gegebenen FIR-CMA als stochastisches Gradientenverfahren der in (6.3) gegebenen Kostenfunktion

$$J_{CM} = E \left\{ (|y|^2 - \gamma_2)^2 \right\}. \quad (6.22)$$

Identisch zur Herleitung des rekursiven LMS in Kapitel 5.3 tritt hier das Problem auf, dass zur Berechnung des exakten Gradienten der Kostenfunktion (6.22) nach den Koeffizienten $\mathbf{a}(n-1)$, die Werte von $y(n)$ für alle zurückliegende Zeitpunkte anhand der aktuellen Filterparameter neu berechnet werden müssten. Es wird daher zunächst von der Annahme einer langsamen Konvergenz ausgegangen. Dies führt zu einem Algorithmus der vergleichbar mit dem in Kapitel 5.3 untersuchten RLMS ist.

Mit dieser Näherung und den Gleichungen aus Appendix 2 sowie [17] und [25] gilt für die Implementierung des CMA eines rekursiven Filters in direkter Form:

$$b_i^{(l)}(n+1) = b_i^{(l)}(n) - \mu \zeta_i^{(l)*}(n) y(n) (|y(n)|^2 - \gamma_2), \quad (6.23)$$

$$\zeta_i^{(l)}(n) = r^{(l)}(n-i) - \sum_{k=1}^M a_k(n-1) \zeta_i^{(l)}(n-k), \quad (6.24)$$

$$a_i(n+1) = a_i(n) + \mu \psi_i^*(n) y(n) (|y(n)|^2 - \gamma_2), \quad (6.25)$$

$$\psi_i(n) = y(n-i) - \sum_{k=1}^M a_k(n-1) \psi_i(n-k). \quad (6.26)$$

Identisch zur Implementierung des rekursiven LMS in Kapitel 5.3, müssen daher hier ebenfalls, wie in Bild 6.3 gezeigt, sogenannte Regressor Prefilter verwendet werden. Man erkennt, dass

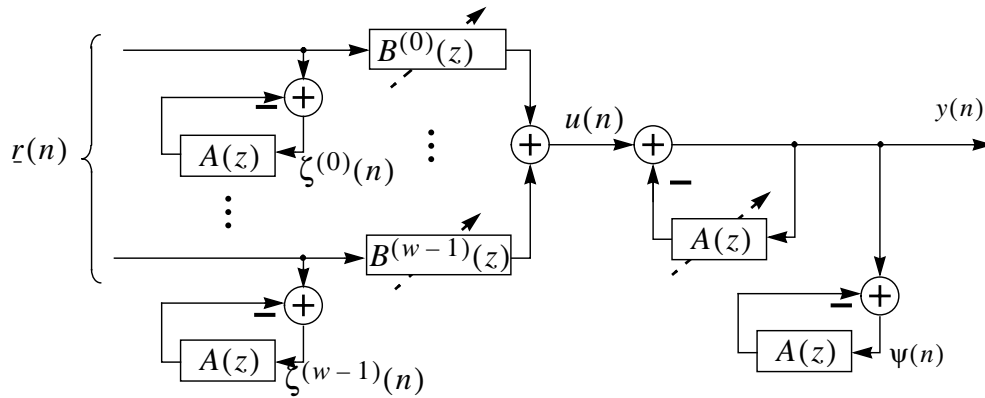


Bild 6.3: Implementierung des rekursiven CMA in direkter Form

die adaptiven Filter, die in Bild 6.3 durch einen schräg verlaufenden, gestrichelten Pfeil dargestellt sind, wie bei einer üblichen IIR Filterstruktur mit festen Parametern angeordnet sind. Zusätzlich sind noch verschiedene rein rekursive Filter vorhanden, die die Regressor Signale erzeugen, die zur Nachführung der Filterkoeffizienten erforderlich sind. Die Vereinfachung, diese Regressor-Prefilter zu vernachlässigen und statt (6.24), bzw. (6.26) sogenannte Feintuch Updates zu verwenden (siehe Kapitel 5.3.3) kann hier ebenfalls durchgeführt werden. Angewandt auf das Regressorsignal des MA Filters in (6.23) vereinfacht sich (6.24) zu $\zeta_i^{(l)}(n) = r^{(l)}(n - i)$. Wendet man die Feintuch Vereinfachung auf das Regressorsignal des AR Filters in (6.25) an vereinfacht sich (6.26) zu $\psi_i(n) = y(n - i)$.

6.2.3.2 Lattice Filter Implementierung des IIR-CMA

Die Stabilität des IIR-CMA in direkter Form konnte bis jetzt nicht bewiesen werden. Daher wird in diesem Abschnitt eine Implementierung des IIR Entzerrers in Lattice Filter Struktur vorgeschlagen, die ein einfaches Verfolgen der Stabilitätseigenschaften des Algorithmus erlaubt [188]. Die Struktur des Lattice Filters ist in Bild 6.4 gezeigt. Das Filter ist kaskadiert, was bedeutet, dass der MA und der AR Anteil als jeweils eigenes Filter implementiert sind [122]. Somit kann das MA Filter, das hier vor dem AR Filter angeordnet ist, identisch zu der direkten Struktur implementiert werden. Das AR Filter ist in der sogenannten Zwei-Multiplizierer Lattice Filter Struktur implementiert. Die Verwendung dieser speziellen Struktur liegt darin begründet, dass damit - im Gegensatz etwa zur häufig verwendeten normalisierten Struktur - auch

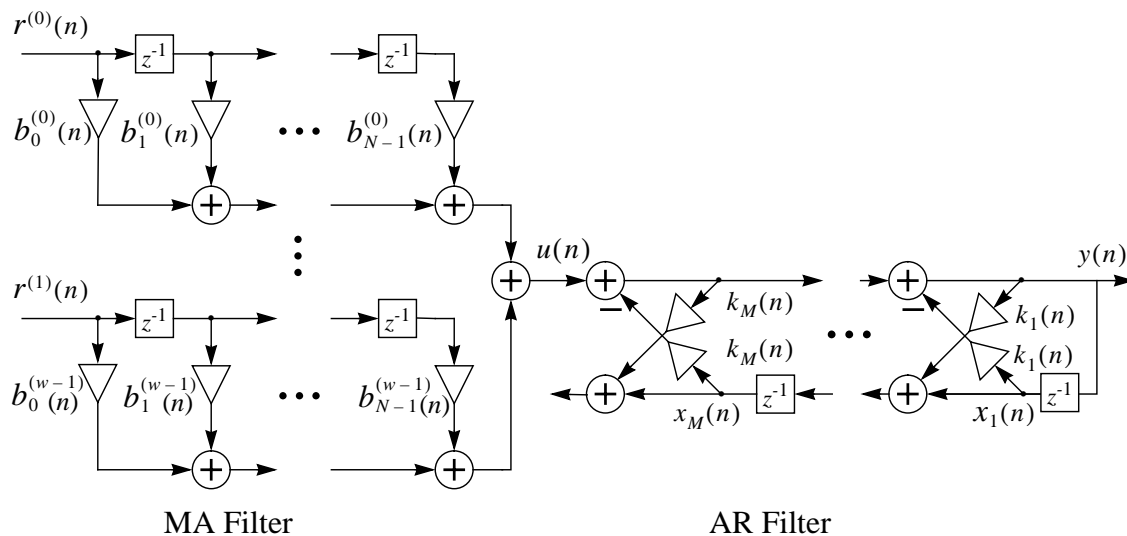


Bild 6.4: Lattice Filter Implementierung eines IIR Entzerrers

komplexwertige Koeffizienten dargestellt werden können [17], [137]. Eine IIR-CMA Implementierung in normalisierter Lattice-Struktur für die Entzerrung von PAM-Signalen wurde in [139] vorgeschlagen.

Das AR Filter besitzt M Koeffizienten, die im folgenden Vektor zusammengefasst sind:

$$\mathbf{k}(n) = \left[k_1(n) \ k_2(n) \ \dots \ k_M(n) \right]^T. \quad (6.27)$$

Der Zustandsvektor des Lattice Filters ist gegeben durch

$$\mathbf{x}(n) = \left[x_1(n) \ x_2(n) \ \dots \ x_M(n) \right]^T. \quad (6.28)$$

Damit ergibt sich der Entzerrerausgang $y(n)$ zu

$$y(n) = \mathbf{b}^T(n-1)\mathbf{r}(n) - \mathbf{k}^T(n-1)\mathbf{x}(n), \quad (6.29)$$

wobei $\mathbf{b}(n)$ und $\mathbf{r}(n)$ in (2.25), bzw. (2.26) definiert sind. Man kann aus Bild 6.4 ableiten, dass der Zustandsvektor zum Zeitpunkt $n+1$ gegeben ist durch

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{Q}(n)\mathbf{x}(n) + \mathbf{p}(n)u(n), \quad (6.30)$$

wobei, wie üblich $u(n)$, den Ausgang des Vorwärtsfilters bezeichnet, der Vektor $\mathbf{p}(n)$ der Länge M gegeben ist durch

$$\mathbf{p}(n) = \left[1 \ k_1(n) \ k_2(n) \ \dots \ k_{M-1}(n) \right]^T, \quad (6.31)$$

und die $M \times M$ Matrix $\mathbf{Q}(n)$, unter Vernachlässigung der zeitlichen Abhängigkeiten, gegeben ist durch

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 & -k_3 & \dots & -k_M \\ (1-k_1^2) & -k_1k_2 & -k_1k_3 & \dots & -k_1k_M \\ 0 & (1-k_2^2) & -k_2k_3 & \dots & -k_2k_M \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & (1-k_M^2) - k_{M-1}k_M \end{bmatrix}. \quad (6.32)$$

Die Überwachung der Stabilität des Filters in Lattice Struktur ist sehr einfach, da ausschließlich sichergestellt werden muss, dass alle Repräsentanten des Koeffizientenvektors $\mathbf{k}(n)$ betragsmäßig kleiner als 1 bleiben [17], [137]. Streng genommen garantiert diese Aussage *bounded input bounded output* (BIBO)¹ Stabilität nur im eingeschwungenen Zustand. In der Praxis gilt sie für kleine Schrittweiten aber auch für adaptive Systeme [17].

Die Entzerrerparameter können im Vektor $\mathbf{w}_l(n)$ zusammengefasst werden, wobei das Subscript l die Lattice Struktur bezeichnet:

$$\mathbf{w}_l(n) = \left[\mathbf{b}^T(n) \ \mathbf{k}^T(n) \right]^T. \quad (6.33)$$

Sie werden zur Minimierung der in (6.3) definierten CM Kostenfunktion optimiert

$$J(\mathbf{w}_l) = E\{(|y|^2 - \gamma)^2\}. \quad (6.34)$$

Wie üblich bei der Herleitung eines stochastischen Gradientenverfahrens, wird hierfür die Er-

1. BIBO Stabilität bedeutet, dass der Ausgang eines Systems für beschränkte Eingangssignale beschränkt bleibt.

wartungswertbildung vernachlässigt, der Gradient in Bezug auf die Entzerrerparameter gebildet und die Entzerrerparameter gewichtet mit einer kleinen positiven Schrittweite μ in die entgegengesetzte Richtung korrigiert:

$$\mathbf{w}_l(n+1) = \mathbf{w}_l(n) - \frac{1}{2} \mu \left. \frac{\partial J}{\partial \mathbf{w}_l^*} \right|_{\mathbf{w}_l(n)} = \mathbf{w}_l(n) - \mu (|y(n)|^2 - \gamma) \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}_l^*} |y(n)|^2. \quad (6.35)$$

Wie in [122] gezeigt, kann der Gradient auf der rechten Seite von (6.35) geschrieben werden als

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}_l^*} |y(n)|^2 = \frac{\partial \mathbf{w}_d^T}{\partial \mathbf{w}_l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}_d^*} |y(n)|^2, \quad (6.36)$$

wobei $\mathbf{w}_d = [\mathbf{b}^T \mathbf{a}^T]^T$ das korrespondierende, in (6.23) - (6.26) gegebene, Filter in direkter Form ist. Der Zusammenhang zwischen $\mathbf{k}(n)$ und $\mathbf{a}(n)$ ist durch die $M \times M$ Transformationsmatrix $\mathbf{T}_{M(n-1)}$ gegeben [122] als $\mathbf{a}(n)^T = \mathbf{k}(n)^T \mathbf{T}_{M(n-1)}$, wobei \mathbf{T} rekursiv definiert ist mit $\mathbf{T}_1 = 1$,

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k_1 & 1 \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{T}_m = \begin{bmatrix} & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & \mathbf{T}_{m-1} & & 0 \\ & & & & \\ k_{m-1} & [k_{m-1} \cdot k_2 & k_{m-1} \cdot k_3 & \dots & k_{m-1} \cdot k_{m-2}] & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{T}_{m-1}. \quad (6.37)$$

Durch Verwendung der üblichen Annahme einer langsamen Konvergenz, also $\mathbf{w}_d(n) \cong \mathbf{w}_d(n-1)$, kann das Gradientensignal des Filters in direkter Form geschrieben werden wie in (6.23) - (6.26). Durch Ableitung der Koeffizienten der direkten Struktur nach den Koeffizienten der Lattice Struktur

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \mathbf{a}^T = \mathbf{T}(n-1) + \mathbf{k}(n) \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}^H} \mathbf{T}(n-1) \quad (6.38)$$

lässt sich schreiben

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} |y(n)|^2 = -2y(n) \left(\mathbf{x}_A(n)^* + \mathbf{k}(n) \frac{d}{d\mathbf{k}} \mathbf{x}_A(n)^* \right), \quad (6.39)$$

wobei

$$\mathbf{x}_A(n) = \mathbf{T}(n-1) \mathbf{y}_A(n) \quad (6.40)$$

der Zustandsvektor des Lattice Filters mit Koeffizientenvektor $\mathbf{k}(n-1)$ und Eingangssignal $y(n)$ ist. Durch erneutes Anwenden der Annahme einer langsamen Konvergenz [122] lässt sich das Ausgangssignal dieses Filters $\mathbf{y}_A(n)$ schreiben als

$$\mathbf{y}_A(n) = [\psi(n) \ \psi(n-1) \ \dots \ \psi(n-(M+1))]^T. \quad (6.41)$$

Analog wird $\mathbf{r}_A(n)$ gebildet durch w Lattice Filter des selben Koeffizientenvektors. Die l -te Komponente von $\mathbf{r}_A(n)$ ist der Ausgang des Filters mit Eingang $\mathbf{r}^{(l)}(n)$ und Zustandsvektor $\mathbf{x}^{(l)}_R(n)$

$$\mathbf{r}_A^{(l)}(n) = [\zeta^{(l)}(n) \ \zeta^{(l)}(n-1) \ \dots \ \zeta^{(l)}(n-(M+1))]^T. \quad (6.42)$$

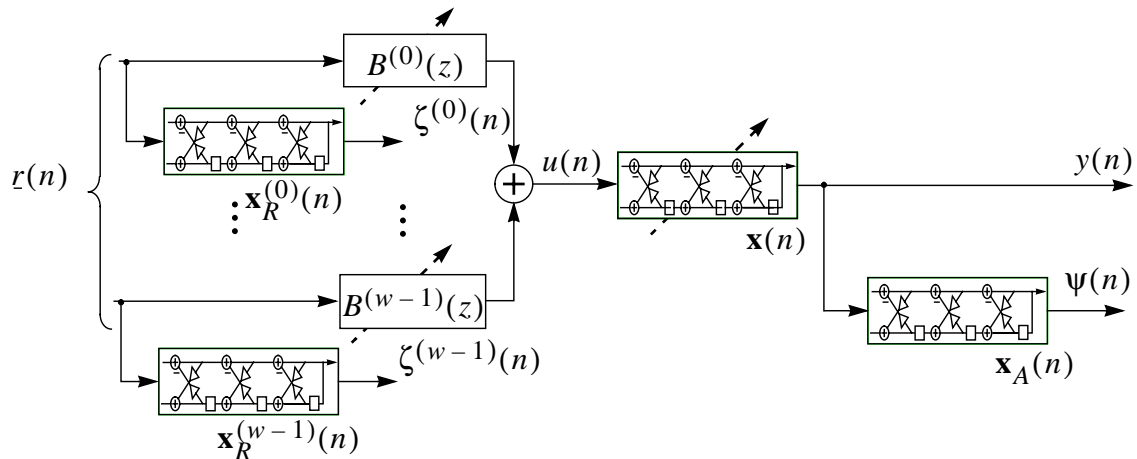


Bild 6.5: Lattice Filter Implementierung des IIR CMA

Miao zeigte in [122] für die Berechnung des rekursiven LMS Algorithmus in Lattice Struktur, dass der zweite Term in (6.38) zu Null gesetzt werden kann, wenn man erneut davon ausgeht, dass die Konvergenz langsam erfolgt. Somit vereinfacht sich (6.39) zu

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} |y(n)|^2 = -2y(n) \mathbf{x}_A(n)^* . \quad (6.43)$$

Die verschiedenen Lattice-Filter sind mit dieser Vereinfachung schließlich gegeben durch:

$$\mathbf{x}_R^{(l)}(n) = \mathbf{Q}(n-1) \mathbf{x}_R^{(l)}(n-1) + \mathbf{p}(n-1) r^{(l)}(n) , \quad (6.44)$$

$$\zeta^{(l)}(n) = -\mathbf{k}^T(n-1) \mathbf{x}_R^{(l)}(n-1) + r^{(l)}(n) , \quad (6.45)$$

$$\mathbf{x}_A(n) = \mathbf{Q}(n-1) \mathbf{x}_A(n-1) + \mathbf{p}(n-1) y(n) , \quad (6.46)$$

$$\psi(n) = -\mathbf{k}(n-1) \mathbf{x}_A(n) + y(n) . \quad (6.47)$$

Gleichung (6.35) lässt sich schließlich schreiben als

$$\begin{bmatrix} b(n) \\ k(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b(n-1) \\ k(n-1) \end{bmatrix} - \mu (|y(n)|^2 - \gamma_2) y(n) \begin{bmatrix} \mathbf{r}_A(n)^H \\ \mathbf{x}_A(n)^H \end{bmatrix} . \quad (6.48)$$

Die Implementierung des CMA in Lattice Filter Struktur ist identisch zu der in Bild 6.3 gezeigten Standardstruktur, wenn man in Bild 6.3 die rein rekursiven Filter $A(z)$ durch die entsprechenden Lattice Filter ersetzt. Sie ist in Bild 6.5 gezeigt.

Auch bei der Lattice Filter Implementierung können, wie in Kapitel 6.2.3.1 für die Implementierung in direkter Form erklärt, sogenannte Feintuch Näherungen zur Vereinfachung angewandt werden und somit auf die Vorfilter verzichtet werden. Durch Anwendung auf den Gradienten des MA Filters wird (6.45) $\zeta^{(l)}(n) = r^{(l)}(n)$, so dass gilt $\mathbf{r}_A^{(l)}(n) \cong r^{(l)}(n)$ und somit auf das Lattice Filter mit Zustandsvektor $\mathbf{x}_R^{(l)}(n)$ verzichtet werden kann. Analog kann durch Anwendung auf den Gradienten des AR Filters in (6.46) $\mathbf{x}_A(n)$ durch $\mathbf{x}(n)$ ersetzt werden, so dass das Lattice Filter mit Zustand $\mathbf{x}_A(n)$ redundant wird [188]. In Kapitel 6.5 wird anhand von Simulationen gezeigt, dass für praktische Szenarien die Feintuch Näherungen sehr gutes Systemverhalten zeigen.

6.3 Strategien zur referenzdatenfreien (blinden) Entzerrung

In diesem Kapitel werden Strategien zur referenzdatenfreien Entzerrung besprochen. Die in Kapitel 6.3.1 beschriebene Adaption von Transversalentzerrern erweist sich hierbei als relativ problemlos. Im Gegensatz kann die Kostenfunktion von in Kapitel 6.3.2 behandelten DFEs lokale Minima aufweisen, so dass hier auf spezielle Techniken zurückgegriffen werden muss.

6.3.1 Blinde Adaption eines Transversalentzerrers

Die blinde Adaption eines Transversalentzerrers ist mit dem in Kapitel 6.2.2 beschriebenen CMA, aufgrund der Tatsache, dass die lokalen Minima der CMA Kostenfunktion in der Nähe der der LMS Kostenfunktion liegen, sehr einfach. Nachdem die Performance im Startmodus nicht relevant ist, ist hier die Verwendung einer adaptiver Schrittweite zur Koeffizientennachführung kaum erforderlich. Unter Umständen ist es vorteilhaft, den Entzerrer vor der Umstellung in den entscheidungsgestützten Modus mit einem Reinitialisierungsalgorithmus für verschiedene Systemverzögerungen zu adaptieren und so die Verzögerung auswählen zu können, die zum maximalen SINR führt. Dies ist besonders bei Verwendung des Prewhitened CMA praktikabel, da hierbei zur Änderung der Systemverzögerung keine expliziten Berechnungen durchgeführt werden müssen. Der Zeitpunkt zum Umschalten in den entscheidungsgestützten Modus wird üblicherweise durch den am Entzerrerausgang gemessene MSE bestimmt. Der festgelegte Schwellwert ist hierbei von der Signalraumkonstellation abhängig und wird so definiert, dass bei seinem Erreichen das Auge geöffnet ist, so dass die weitere Adaption mit Hilfe des LMS Algorithmus erfolgen kann. Da beim CMA der kritische Pfad relativ lang ist, sind oftmals Vereinfachungen der Berechnungsvorschrift erforderlich. Hierauf wird näher in Kapitel 7.1.1 eingegangen.

6.3.2 Blinde Adaption eines entscheidungsrückgekoppelten Entzerrers

Die blinde Adaption eines DFE stellt im Gegensatz zu der eines Transversalentzerrers eine wesentlich größere Herausforderung dar, weil, bedingt durch den Entscheider im Rückführzweig, ein DFE zu einer falschen Lösung konvergieren kann. Entsprechende lokale Minima der Kostenfunktion eines DFE werden durch Fehlentscheidungen hervorgerufen [24], [118]. Insbesondere kann eine fehlerhafte Konvergenz auch bei einer Initialisierung im Ursprung erfolgen. Diese Eigenschaft ist in Bild 6.6 exemplarisch anhand eines minimalphasigen Kanals mit der in [24] vorgeschlagenen Impulsantwort $[1 \ 0,9 \ 0,8]^T$ gezeigt. Der verwendete DFE hat im Vorwärtszweig $N = 1$ und im Rückkoppelzweig $M = 2$ Koeffizienten. Das verwendete Modulationsverfahren ist BPSK. Zunächst sei kein Rauschen vorhanden. Bei richtigen Entscheidungen kann ein Rückkoppelzweig mit dem Koeffizientenvektor $[0,9 \ 0,8]^T$ die Nachläufer exakt eliminieren und somit den Kanal perfekt entzerren. Bild 6.6a zeigt die Kostenfunktion des DFE. Sie weist ein unerwünschtes lokales Minimum bei etwa $[0,37 \ -0,033]^T$ auf.

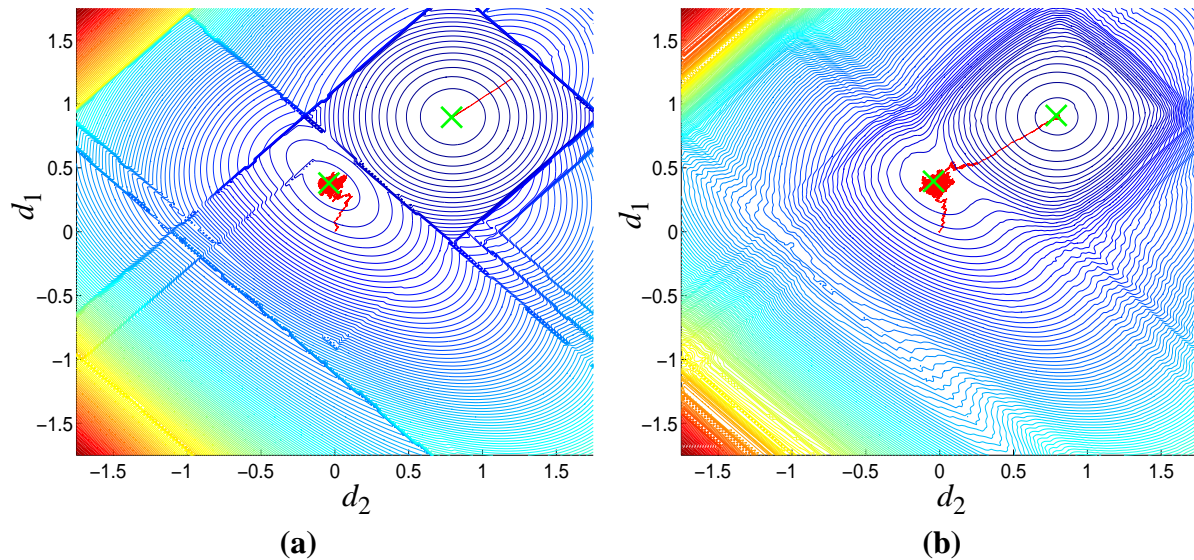


Bild 6.6: Exemplarische Kostenfunktion eines DFE (a) Rauschfrei (b) SNR = 20 dB

Zusätzlich sind in Bild 6.6a zwei Trajektorien eingezeichnet, die durch Simulationen mit einer Schrittweite von 0,002 gewonnen wurden. Man erkennt, dass bei einer Initialisierung im Ursprung Konvergenz zum lokalen Minimum erfolgt. Da die Entscheidungsfehler im Bereich dieses Minimums relativ groß sind, zittert die Trajektorie stark um das lokale Minimum. Bei einer Initialisierung mit $[1,2 \ 1,2]^T$ erfolgt hingegen Konvergenz zum globalen Minimum.

Bild 6.6b zeigt die Kostenfunktion die entsteht, wenn zum Entzerrereingang AWGN hinzugeführt wird, so dass sich ein SNR von 20 dB ergibt. Man erkennt, dass durch das zusätzliche Rauschen die Fehleroberfläche wesentlich glatter wird, da wie in Appendix 3 gezeigt, durch Rauschen die Kennlinie eines Quantisierers - wie ihn auch der Symbolentscheider darstellt - geglättet wird. Hier wird ebenfalls eine simulierte Trajektorie gezeigt, die sich bei einer Initialisierung im Ursprung ergibt. Die Konvergenz erfolgt zunächst in das lokale Minimum. Da dieses hier jedoch wesentlich flacher ausgeprägt ist als im rauschfreien Fall, gelingt es dem Entzerrer nach einer gewissen Zeit, dieses lokale Minimum zu verlassen und ins globale Minimum zu konvergieren.

In Kapitel 6.3.2.1 wird gezeigt, dass diese Glättung der Kostenfunktion vorteilhaft durch einen Soft-Entscheider erfolgen kann. Als sinnvolle Wahl eines Soft-Entscheidungers erweist sich hierbei derjenige Entscheider, der im entscheidungsgestützten DFE Modus zu minimalem MSE führt. Im allgemeinen Fall reicht die Glättung der Fehleroberfläche aber zur blinden Adaption eines DFE nicht aus. Dies gilt insbesondere bei höherstufiger Modulation und bei Kanälen, die viele Nachläufer aufweisen. Daher wird als Strategie hier vorgeschlagen, zunächst mit einem IIR Entzerrer, also durch eine Struktur ohne Entscheider, Startkoeffizienten zu generieren, die nahe am Optimum des Wiener DFE (siehe Kapitel 4.2.2) liegen. Zwei derartige Verfahren werden in Kapitel 6.3.2.2 und Kapitel 6.3.2.3 beschrieben. Mit dem so gefundenen Koeffizientensatz wird der DFE mit Soft-Entscheider initialisiert und weiter im entscheidungsgestützten Betrieb adaptiert. Diesem Verfahren liegt als Idee zugrunde, dass - wie in Kapitel 4.4.1 gezeigt - für den Fall eines unendlich langen Entzerrers, sowie weißen Rauschens, die Koeffizientensätze des IIR Entzerrers und des DFE übereinstimmen, d.h. dass sich für $N \rightarrow \infty$ und $M \geq N_c$, beide Entzerrerstrukturen den gleichen optimalen Koeffizientensatz teilen, dass also gilt $\mathbf{F}(z) = \mathbf{B}(z)$ und $D(z) = A(z)$ [99]. Im Falle endlicher Koeffizientensätze oder von farbigem Rauschen stimmen die optimalen Koeffizientensätze nicht mehr zwingend überein. Trotzdem können die Gewichte des IIR Filters als Startkoeffizientensatz des DFE verwendet werden, insbesondere wenn die weitere Adaption durch Soft-Entscheidungen unterstützt wird. In Kapitel 6.3.2.4 wird

schließlich gezeigt, wie zu verfahren ist, wenn eine erneute Initialisierung erforderlich ist. Die Konvergenz der beschriebenen Verfahrens zum globalen Minimum kann nicht bewiesen werden, die Wahrscheinlichkeit einer falschen Lösung wird allerdings im Vergleich zu etwa den in [99] und [25] vorgeschlagenen Verfahren, die lediglich eine Startlösung bestimmen, deutlich erhöht. Im Laufe dieser Arbeit wurde die Zuverlässigkeit des beschriebenen Verfahrens anhand umfangreicher Simulationen gezeigt.

6.3.2.1 Verwendung von Soft-Entscheidungen

Wie beschrieben, kann durch die Verwendung von Soft-Entscheidungen die Fehlerfunktion des DFE geglättet werden und somit können lokale Minima möglicherweise eliminiert, oder zumindest weniger anziehend gestaltet werden [94], [118].

Hier wird zu diesem Zweck der Soft-Entscheider verwendet, der den MSE des DFE minimiert, da dieser im DD Modus gewinnbringend verwendet werden kann. Außerdem scheint er zu Beginn der Adaption des DFE vorteilhaft, weil er im Falle von niedrigem SINR, also unsicheren Entscheidungen, wesentlich glatter verläuft, als bei relativ hohem SINR, bei dem er sich dem harten Entscheider annähert. Somit werden, falls der Koeffizientensatz des DFE weit vom Optimum entfernt ist, bei einer falschen Entscheidungen betragsmäßig kleinere Fehlerwerte zurückgeführt, so dass Fehlentscheidungen im Mittel weniger dramatische Auswirkungen haben. Zu beachten ist, dass in Bereichen eines lokalen Minimums der Kostenfunktion das sich ergebende SINR in der Regel deutlich größer ist, als im Bereich des globalen Minimums. Die Kennlinie des beschriebenen Soft-Entscheidungers ist gegeben durch

$$\psi(y(n)) = \frac{\sum_{S \in \Omega} S \exp((-S^*S + (y(n))^*S + S^*y(n))/\sigma_\eta^2)}{\sum_{S \in \Omega} \exp((-S^*S + (y(n))^*S + S^*y(n))/\sigma_\eta^2)}, \quad (6.49)$$

wobei Ω die Signalraumkonstellation darstellt und σ_η^2 die Varianz der Summe aus Rest-ISI und gefiltertem Rauschen darstellt. Für quadratische Konstellationen lässt sich (6.49) durch Separation in den reellen und imaginären Anteil vereinfachen [187]. Hierfür wird vorgeschlagen, jeden Anteil durch abschnittsweise Tangens Hyperbolicus Funktionen zu approximieren. Zu diesem Zweck werden die Anteile in $\sqrt{M} - 1$ Regionen aufgeteilt, wobei M die Anzahl an Signalraumpunkten darstellt. Der Realteil von $\psi(y(n))$ ergibt sich dann zu

$$\Re(\tilde{\psi}(y(n))) = kp + \frac{p}{2} \tanh\left(\frac{p(\Re(y(n)) - kp)}{\sigma_\eta^2}\right), \quad (6.50)$$

wobei p der betragsmäßig kleinste Realteil der möglichen Sendesymbole darstellt und die Größe k definiert wird als

$$\tilde{k} = 2 \cdot \text{round}\left(\Re\left(\frac{y(n)}{2p}\right)\right); \quad k = \begin{cases} \tilde{k} & \text{für } \tilde{k} < \sqrt{M} - 2 \\ \sqrt{M} - 2 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.51)$$

Der Imaginärteil von $\psi(y(n))$ hat die selbe Form.

Ein Vergleich der so erhaltenen vereinfachten Soft-Entscheidung mit dem exakten aus (6.49)

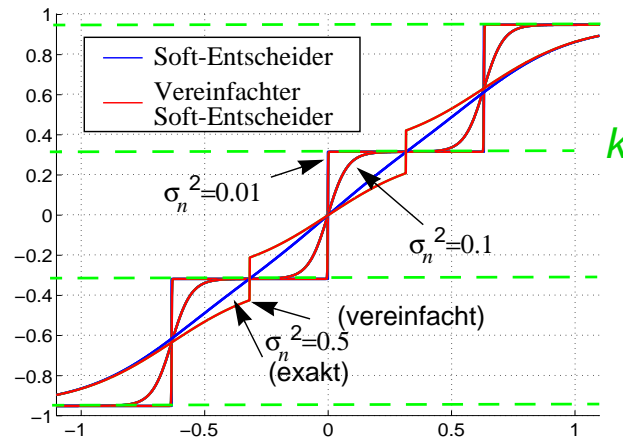


Bild 6.7: Kennlinie des Soft-Entscheidungers für 16-QAM, sowie der vereinfachten Version

findet sich in Bild 6.7 für 16-QAM. Dargestellt ist hier der Realteil der Kennlinien beider Entscheider für verschiedene Leistungen des Fehlersignals als Funktion der Entscheidungseingangsgröße $y(n)$. Man erkennt, dass für kleine Rauschleistungen beide Kennlinien nahezu identisch sind. Sie sind in diesem Fall auch nah an der des harten Entscheiders. Bei größeren Rauschleistungen werden beide Kurven glatter, stimmen allerdings so lange noch gut überein, wie die vereinfachte Kennlinie in der Mitte zwischen zwei Entscheidungsgrenzen stetig verläuft. Ist dies nicht mehr gegeben, unterscheiden sich beide Kurven für Werte die weit von den möglichen Punkten der Signalraumkonstellation entfernt liegen erheblich. In diesem Fall ist das Rauschen aber so groß, dass ein Betrieb des DFE nicht sinnvoll erscheint und der Entzerrer als IIR Filter des Start-Modus implementiert sein sollte.

In Bild 6.8 ist die Kostenfunktion des DFE im rauschfreien Fall bei der Verwendung von Soft-Entscheidungen nach (6.50) gezeigt. In dem betrachteten Szenario ist das lokale Minimum durch diese Technik nicht ganz verschwunden, es ist aber so flach geworden, dass ein adaptiver DFE aus diesem Minimum entkommen kann. Dies ist an der ebenfalls eingezeichneten Trajektorie, die zu einer Initialisierung im Ursprung korrespondiert, zu erkennen. Diese Eigenschaft lässt sich jedoch im allgemeinen Fall, speziell bei der Verwendung von höherstufiger Modulation, nicht beweisen. Deshalb besteht, wie bereits beschrieben, der zweite Punkt der vorgeschlagenen Strategie, in der Generierung von Startkoeffizienten.

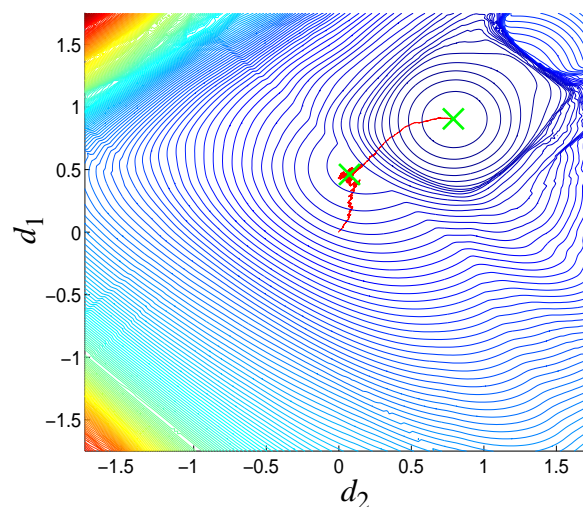


Bild 6.8: Kostenfunktion des DFE bei Verwendung eines Soft-Entscheidungers

6.3.2.2 Getrennte Amplituden und Phasentzerrung

Ein elegantes Verfahren zur Generierung eines Startkoeffizientensatzes wurde in [99], [100], [186] vorgeschlagen. Es beruht darauf, dass, wie in Kapitel 4.4.1 gezeigt, im Fall beliebig langer Filter das Rückkoppelfilter des DFE zur reinen Amplitudenentzerrung dient, während das entsprechende Vorwärtsfilter den Phasengang entzerrt. In [107] wurde zudem gezeigt, dass bei weißem Rauschen, und falls die Systemverzögerung δ mindestens so groß ist wie die um Eins verringerte Kanallänge N_c , der FBF des Start-DFE die Eigenschaft hat, alle ISI Komponenten auszulöschen. Dies gilt auch dann, wenn die entstehende DFE Struktur weit vom Optimum entfernt ist.

In [104] wurde gezeigt, dass bei ausreichend langen Entzerrern sowohl der RLMS, als auch der Feintuch Algorithmus einen einzigen stationären Punkt aufweisen, der mit dem Minimum der Fehleroberfläche übereinstimmt, sofern $\mathbf{B}(z)$ als Funktion von $A(z)$ optimiert ist.

Verhalten bei farbigem Rauschen

Wenn das immer vorhandene additive gaußsche Rauschen korreliert ist, stimmen die Koeffizientensätze - auch im Grenzfall unendlich langer Filter - nicht mehr überein. In diesem Fall dekorreliert das optimale Filter $\mathbf{F}(z)$ implizit das Rauschen. Zum Erhalt exakter Startwerte für $D(z)$, müsste ein explizites Rausch-Dekorrelationsfilter vor dem Eingang von $A(z)$ plaziert werden. Dies liegt daran, dass $A(z)$ die Summe von Signal und Rauschen dekorreliert, das Filter $D(z)$ hingegen mit rauschfreien Signalen beaufschlagt wird. In einem praktischen System ist die Implementierung eines derartigen Filter aber meist nicht möglich.

Der Fall, dass das Empfangssignal eine ähnliche AKF aufweist wie das additive Rauschen, ist etwa bei FEXT-dominierter Übertragung, wie es etwa üblicherweise bei VDSL der Fall ist, recht wahrscheinlich, da hier das Rauschsignal weitgehend die gleiche Leitungsdämpfung erfährt wie das Sendesignal. Hierbei ist allerdings zu beachten, dass der Grenzfall, dass Rauschen und Empfangssignal gleich gefärbt sind, den schlechtesten Fall charakterisiert, weil in diesem Fall das im Vorwärtsfilter implizit enthaltene Rausch Dekorrelationsfilter bereits die Kanal-Nachläufer entzerrt, d.h. in diesem Fall ergeben sich die Koeffizienten des Rückkoppelfilters des Wiener DFE zu Null.

Rauschdekorrelation

Eine Möglichkeit um auch in diesem Fall die richtigen Koeffizienten zu erhalten, besteht darin, zunächst vor dem Start der Nachrichtenübertragung anhand eines FIR Filters das Empfangssignal, das in diesem Fall nur aus Rauschen besteht, zu dekorrelieren. Nach Konvergenz dieses FIR-Filters werden dessen Koeffizienten eingefroren und die Übertragung wird gestartet. Nun wird das Filter $A(z)$ am Ausgang des Rauschdekorrelationsfilters adaptiert. Nach dessen Konvergenz werden die Koeffizienten ebenfalls eingefroren und das FIR-Filter wird an den Ausgang von $A(z)$ verlagert. Dieses FIR-Filter wird nun, wie üblich, mit dem CMA adaptiert. Da das Vorwärtsfilter nun die Aufgabe der Rauschdekorrelation übernehmen muss, ist es naheliegend, den Koeffizientensatz des MA Dekorrelationsfilters als Startlösung dieses Filters zu verwenden. In diesem Fall muss der Koeffizientensatz allerdings zusätzlich noch mit der gewünschten Verzögerung beaufschlagt werden. Nachdem auch dieses Filter adaptiert ist, wird die Struktur des Entzerrers wie bereits beschrieben zu der des DFE geändert. Da bei diesem Verfahren zu Beginn kein Sendesignal vorhanden ist, ist diese Möglichkeit nur in einem Punkt-zu-Punkt Szenario gegeben. In der Praxis zeigt sich aber, dass ein derartiger Startkoeffizientensatz kaum zu besseren Ergebnissen führt, als die Standard Prozedur.

Implementierung im Bandpassbereich

Bei einer Implementierung im Bandpassbereich ist zu beachten, dass ein hierbei günstigerweise

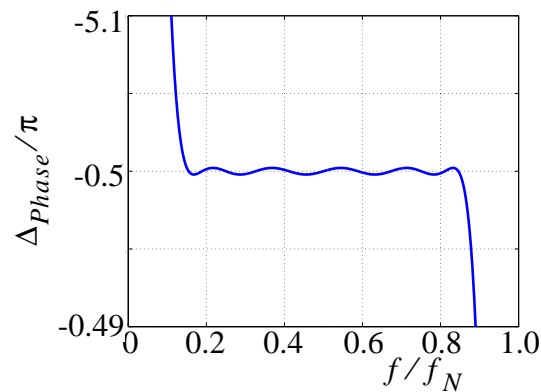


Bild 6.9: Phasendifferenz eines Hilbert Filters 5. Ordnung basierend auf gekoppelten Allpässen nach [151]

eingesetzter PS-FSE (siehe Kapitel 4.1.3) die Aufteilung des Entzerrereingangssignals in Inphase- und Quadraturkomponente implizit vornimmt. Bei der beschriebenen Struktur ist jedoch das Rückkoppelndfilter vor dem Vorwärtsfilter angeordnet, so dass die genannte Aufspaltung explizit erfolgen muss [187]. Dies ist daher erforderlich, weil das Rückkoppelndfilter des DFE mit komplexen Symbolen, also Symbolen die nach Inphase- und Quadraturkomponente aufgeteilt sind, beaufschlagt wird, und somit auch das Eingangssignal des Filters $A(z)$ im Startmodus in Inphase- und Quadraturkomponente aufgeteilt sein muss. Eine explizite Phasenaufteilung kann mit Hilfe eines Hilbert Filters erfolgen. Ist dieses Filter optimal, besitzen beide Zweige des Vorwärtsfilters nun theoretisch einen identischen Koeffizientensatz. Daher kann eine von Hedge und Shanbag in [73] vorgeschlagene Low Power Technik verwendet werden, bei der beide Komponenten des FFF mit einer gemeinsamen Einheit zum Nachführen der Koeffizienten betrieben werden. Wird diese Technik nicht eingesetzt, kann im entscheidungsgestützten Modus des DFE auf das Hilbert Filter wieder verzichtet werden. Die Koeffizienten dieses Filters können dann etwa langsam auf Null gesetzt werden, so dass das FFF die Phasenaufteilung wieder implizit vornimmt [187]. Die nicht mehr verwendeten Register des Filters können anschließend etwa zur Verlängerung des FFF verwendet werden.

Naturgemäß ist ein praktisch realisiertes Hilbert Filter in Bereichen nahe der halben Nyquistfrequenz nahezu optimal und im Bereich um $f = 0$, aufgrund des Phasensprungs den die optimale Übertragungsfunktion hier aufweist, relativ schlecht. Daher ist die beschriebene Low Power Technik nur sinnvoll einsetzbar, wenn das Frequenzband nahe an der halben Nyquistfrequenz liegt. Andernfalls führt die nicht optimale Phasenaufteilung zu einer Verschlechterung des erreichbaren SINR, so dass vorgeschlagen wird, im normalen Betrieb auf das Hilbert Filter zu verzichten. Das Hilbert Filter wird hier exemplarisch mit der in [151] von Schüßler und Steffen veröffentlichten Methode, die auf der Verwendung gekoppelter Allpässe basieren, entworfen. Die entstehenden Einzelfilter kommen mit sehr wenigen von Null, bzw. Eins verschiedenen Koeffizienten aus und tragen so nur sehr wenig zur gesamten Verlustleistung bei. In Bild 6.9 ist die Phasendifferenz eines derartigen Hilbert Filters 5. Ordnung dargestellt. Dieses Filter weist lediglich 5 Koeffizienten auf, die von Null, bzw. Eins verschieden sind.

6.3.2.3 Blinde Adaption anhand des IIR-CMA

Ein weiteres Verfahren zur Generierung von Startkoeffizienten besteht darin, im Startmodus den Entscheider wegzulassen und beide Filter anhand des CMA zu adaptieren. Diese Verfahren wurden bereits in [23] und [25] vorgeschlagen, allerdings ohne theoretische Begründung. Erst Schniter konnte in [147] zeigen, dass die sich so ergebenden Filterkoeffizienten nahe an der Wienerlösung des entsprechenden IIR Filters liegen. Da diese Lösung für den Fall unendlich

langer Entzerrer der des DFE entspricht, kann sie als Startlösung fungieren. Bezüglich endlicher Filterlängen und farbigem Rauschen gilt hier das selbe wie beim in Kapitel 6.3.2.2 beschriebenen sogenannten Prewhitened Approach.

Im Startmodus kann die Stabilität des IIR-CMA nicht bewiesen werden, so dass hier vorgeschlagen wird, die in Kapitel 6.2.3.2 gezeigte Lattice Filter Implementierung zu verwenden. Im DD Modus des DFE ist durch den im Rückkoppelzweig vorhandenen Entscheider die Stabilität hingegen garantiert, so dass das Rückkoeffizientenfilter $D(z)$ in direkter Form implementiert werden kann. Die Ausführung des LMS Algorithmus auf einem in direkter Struktur implementierten Filter hat den Vorteil weniger Rechenoperationen zu benötigen, als auf einem in Lattice Struktur implementierten Filter. Ein rekursiver Algorithmus für die Berechnung von \mathbf{a} (in (6.52) mit $\mathbf{a}^{(M)}$ bezeichnet) aus dem Koeffizientenvektor des Lattice Filters \mathbf{k} kann anhand von Gleichung (6.37) gewonnen werden. Er ist gegeben durch:

$$\mathbf{a}^{(1)} = k_1, \quad \mathbf{a}^{(m)} = \begin{bmatrix} a_1^{(m-1)} + a_{m-1}^{(m-1)} k_m \\ a_2^{(m-1)} + a_{m-2}^{(m-1)} k_m \\ \vdots \\ a_{m-1}^{(m-1)} + a_1^{(m-1)} k_m \\ k_m \end{bmatrix}. \quad (6.52)$$

Diese Berechnung kann offline erfolgen, wenn man voraussetzt, dass der Kanal nur langsam zeitveränderlich ist. Hierbei bedeutet eine offline-Berechnung, dass die Koeffizienten des Lattice-Filters ausgelesen werden und anschließend, etwa in einem Mikrocontroller, in die des Rückkoeffizientenfilters umgerechnet werden, wobei diese Berechnung nicht zeitkritisch ist. Anschließend werden die so gewonnenen Koeffizienten in das Rückkoeffizientenfilter geschrieben.

6.3.2.4 Änderung der Struktur bei Verschlechterung des MSE

Wenn der MSE im Verarbeitungsmodus über einen vorher spezifizierten Schwellwert steigt, so dass die Einhaltung der geforderten BER nicht mehr gewährleistet ist, wird die Struktur des Entzerrers zurück in die des Start Modus transferiert. Eine derartige Verschlechterung des MSE kann etwa durch eine plötzliche Änderung der Kanaleigenschaften oder durch das Auftreten eines neu hinzukommenden starken Störers erfolgen. Da das Rückkoeffizientenfilter im allgemeinen nicht minimalphasig ist, kann nicht - wie etwa in [99] für das auf Dekorrelation basierende Verfahren vorgeschlagen - der Koeffizientensatz des Rückkoeffizientenfilter als Initialisierungsvektor des AR Filters genommen werden. Daher wird hier vorgeschlagen, die einzelnen Koeffizienten des AR Filters in diesem Fall mit Null zu initialisieren. Die Koeffizienten des Vorwärtsfilters können hingegen in jedem Fall als neuer Startkoeffizientensatz des MA Filters Verwendung finden.

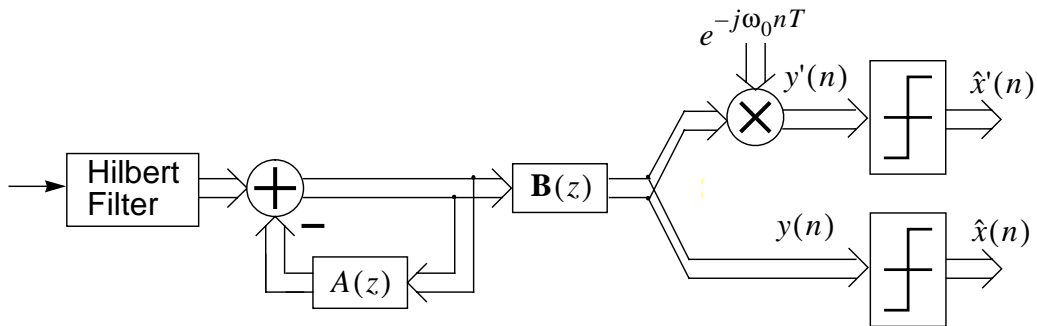


Bild 6.10: Grundidee zur Bestimmung des Modulationsverfahrens

6.4 Blinde Entscheidung des Modulationsverfahrens

Die blinde Entscheidung des Modulationsverfahrens ist etwa im Einzelträger-VDSL Standard [176] gefordert. Hierbei wird anhand der empfangenen Daten entschieden, ob das im Sender eingesetzte Modulationsverfahren QAM oder CAP ist. Ein Algorithmus zur gleichzeitigen Adaption von Transversalentzerrern bei QAM und CAP Signalen wurde in [53], [131] und [178] vorgestellt. Dieser Algorithmus verwendet den MMA und adaptiert den linearen Entzerrer entweder gleichzeitig, oder abwechselnd mit dem QAM, bzw. CAP Fehlerterm. In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass bei einer Entzerrung im Bandpassbereich, sowohl die in Kapitel 6.3.2.2 gezeigte Struktur, die auf getrennter Amplituden- und Phasentzerrung basiert, als auch die in Kapitel 6.3.2.3 beschriebene Technik, die eine Entzerrung anhand des IIR-CMA vornimmt, eine einfache blinde Entscheidung des Modulationsverfahrens erlaubt.

Das hier vorgestellte Verfahren basiert - ebenso wie das in [53] gezeigte - auf der engen Verwandtschaft von QAM und CAP (siehe etwa Kapitel 2.1 und [53]). Speziell wird hier davon Gebrauch gemacht, dass sich im Bandpassbereich QAM und CAP modulierte Signale nur durch eine zusätzliche Drehung der Symbole in der komplexen Ebene unterscheiden. Auf die Adaption eines mit dem CMA trainierten Entzerrers hat, aufgrund der Rotationsinvarianz dieses Algorithmus, das verwendete Modulationsverfahren keinen Einfluss. Auch das beim Prewhitened Approach verwendete Dekorrelationsfilter adaptiert sich unabhängig vom Modulationsverfahren, weil es mit Statistiken zweiter Ordnung adaptiert wird und somit blind bezüglich des Phasenganges, also auch bezüglich einer möglichen Drehung der Symbole, ist.

Ob im Sender QAM oder CAP Modulation verwendet wird, kann theoretisch anhand der Berechnung der beiden Erwartungswerte

$$\begin{aligned} E\{|y'(n) - \hat{x}'(n)|\} - E\{|y(n) - \hat{x}(n)|\} &< 0 \rightarrow \text{QAM} \\ &> 0 \rightarrow \text{CAP} \end{aligned} \quad (6.53)$$

festgestellt werden. Wie in Bild 6.10 gezeigt, korrespondieren die Werte $y(n)$ und $\hat{x}(n)$ hierbei zu einem Empfänger ohne Symboldrehung und die Werte $y'(n)$ und $\hat{x}'(n)$ entsprechend zu einem Empfänger mit zusätzlicher Drehung. In der Praxis wird die Erwartungswertbildung in (6.53) durch eine Mittelung über eine gewisse Anzahl p an Symbolen angenähert. Die beiden Erwartungswerte müssen jedoch nicht gleichzeitig berechnet werden, da in Abschnitten in denen die Symbole fehlerhaft gedreht werden, der sich ergebende MSE relativ groß ausfällt. Somit ergibt sich eine einfache Technik zur Bestimmung des Modulationsverfahrens durch alternierendes An- und Ausschalten des Symboldrehers in Bild 6.10 für jeweils p Symbole. Der sich

hierbei ergebende MSE wird jeweils ermittelt. Fällt er unter einen vorher spezifizierten, von der Signalraumkonstellation abhängigen Wert, wird analog zum Vorgehen bei bekanntem Modulationsverfahren in den DD Modus umgeschaltet. Ist zu diesem Zeitpunkt der Symboldreher aktiv, ist das Modulationsverhalten zu QAM bestimmt, andernfalls zu CAP. Auf den Schätzer des Trägerphasenfehlers hat dieses Vorgehen keinen kritischen Einfluss, da in Abschnitten, in denen der Entzerrerausgang fehlerhaft gedreht wird, der Phasenfehler als Zufallssignal aufgefasst werden kann. Die fehlerhafte Nachführung mittelt sich im Laufe eines solchen Abschnitts daher heraus.

Im Fall, dass das Modulationsverfahren anhand der beschriebenen Technik zu QAM bestimmt wurde, müssen die Koeffizientengewichte des Rückkoppelfilters vor der Änderung der Entzerrerstruktur zu der des DFE noch umgerechnet werden. Ursache ist, dass das Rückkoppelfilter des DFE mit entschiedenen Symbolen beaufschlagt wird, die bereits zurückgedreht wurden, während der Eingang des Rückkoppelfilters der Struktur beim Systemstart nicht gedreht wurde. Dies kann durch Betrachtung des Entzerrerausgangs in der Startphase einfach veranschaulicht werden [186], [187]:

$$y(k) = u(k) - \sum_{p=1}^M a(p)y(k-p). \quad (6.54)$$

Wird dieses Signal zurückgedreht, wie es bei einer QAM Modulation eigentlich geschehen müsste, wird (6.54) zu

$$y(k)e^{-j\omega_0 T} = u(k)e^{-j\omega_0 T} - \sum_{p=1}^M \tilde{a}(p)y(k-p)e^{-j(p+1)\omega_0 T}. \quad (6.55)$$

Man erkennt, dass (6.54) und (6.55) übereinstimmen, wenn die Koeffizientengewichte in (6.55) gedreht werden. Dies bedeutet, dass die Koeffizientengewichte des Rückkoppelfilters in der Startphase, die im Folgenden mit a_{IIR} bezeichnet werden, gedrehte Repräsentanten der mit a_{DD} gegebenen Koeffizientengewichte während des normalen Betriebs sind:

$$a_{DD}(k) = a_{IIR}(k)e^{j\omega_0 k T}. \quad (6.56)$$

Diese einfache Berechnung kann ebenfalls offline, also im Laufe mehrerer Verarbeitungsschritte, etwa unter Verwendung eines Mikrocontrollers, erfolgen.

6.5 Simulationsergebnisse

Im Folgenden werden Ergebnisse des Whitening Approaches und des IIR CMA Verfahrens für verschiedene Testkanäle sowie für VDSL-Szenarien verglichen. Wichtigstes Kriterium ist hierbei, wie nahe die Startlösung an der Lösung des Wiener-DFE liegt, also insbesondere ob die Startlösung des DFE das Auge öffnet. Darüberhinaus ist das SINR von Interesse, das der Startentzerrer nach Konvergenz aufweist, sowie das SINR, das sich nach Adaption des DFE einstellt. Ein letztes Kriterium ist noch die Konvergenzgeschwindigkeit.

Whitening Approach im Bandpassbereich

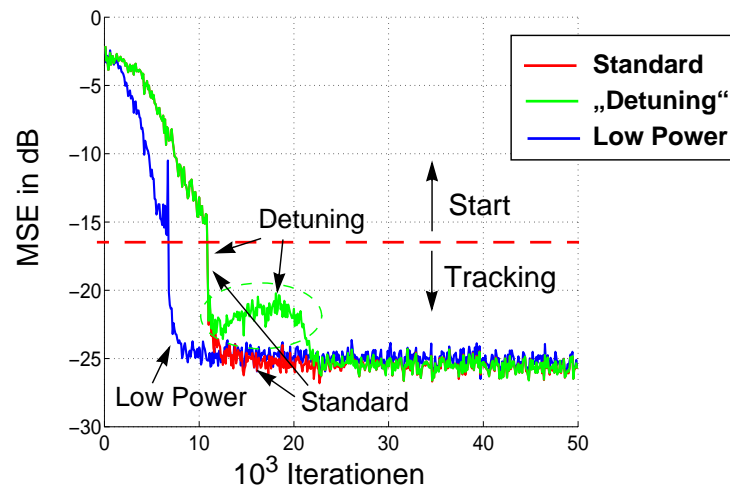


Bild 6.11: Whitening Approach im Bandpassbereich

Zunächst wird der sogenannte Whitening Approach im Bandpassbereich simuliert. Hierfür werden die drei verschiedenen in Kapitel 6.3.2.2 vorgeschlagenen Verfahren verglichen. Die Simulationsumgebung ist ähnlich der in [53] vorgeschlagenen und orientiert sich an einem Szenario das vom ATM Forum [5] definiert wurde. Die Leitung hat eine Länge von 300 m und einen Durchmesser von 0,5 mm. Die Symbolrate liegt bei 25,92 MHz, die Mittenfrequenz bei 17,5 MHz und der Überabtastrfaktor bei 3. Die Excess Bandbreite des Sendefilters beträgt 15%. Am Entzerrereingang liegt AWGN der Varianz 10^{-5} an. Das FFF hat eine Länge von 49 Koeffizienten und wird mit dem Koeffizientensatz des Sendefilters initialisiert. Das FBF hat eine Länge von 10. Das Modulationsverfahren ist 16-CAP. Das Hilbert Filter besitzt 10 Koeffizienten, wovon die Hälfte das Gewicht Null besitzen. Das Umschalten zum DD Modus geschieht bei einem gemessenen MSE von -17 dB. In Bild 6.11 sind Ergebnisse der drei Verfahren gezeigt. Das Standard Verfahren, bei dem auch während des normalen Betriebs das Eingangssignal mit einem Hilbert Transformator (HT) gefiltert wird, sowie das sogenannte „Detuning“-Verfahren, das die Koeffizientengewichte des HT nach Konvergenz langsam auf Null setzt, zeigen nahezu identische Performance. Während des Detunings ist allerdings das SINR am Entzerrerausgang kurzzeitig erhöht, da sich der Koeffizientensatz des FFF in dieser Periode stark ändern muss. Das sogenannte Low-Power Verfahren, das die Koeffizientensätze der beiden FFF gemeinsam nachführt, zeigt bei der gewählten Systemumgebung einen etwa 0,3 dB größeren MSE, als die beiden anderen Verfahren. Dieser Wert ist stark von den Systemparametern, wie etwa der Rauschleistung, der Mittenfrequenz oder der Länge des HT abhängig.

IIR-CMA

Als nächstes sollen Simulationsergebnisse des IIR-CMA Verfahrens gezeigt werden. Die Simulationsumgebung ist ähnlich der des Whitening Approaches, mit der Ausnahme, dass die Mittenfrequenz nun bei 15 MHz liegt und die Rauschleistung verdoppelt wurde. In Bild 6.12a ist ein Vergleich des exakten Algorithmus mit den verschiedenen Algorithmen, die Feintuch Näherungen zur Koeffizientennachführung verwenden, gezeigt. Man erkennt, dass durch diese Näherungen praktisch keine Verschlechterung des Verhaltens auftreten.

Blinde Entscheidung des Modulationsverfahrens

Bild 6.12b zeigt für das selbe Szenario Ergebnisse einer blinden Entscheidung des Modulationsverfahrens. Hierfür werden für QAM und CAP Modulation Ergebnisse von Simulationen mit bekanntem und unbekanntem Modulationsverfahren verglichen. Man erkennt, dass bei unbekanntem Modulationsverfahren, in Zeitabschnitten in denen der Symboldreher einen fehlerhaften Ausgang produziert, sehr groß wird. Dies hat aber keinen Einfluß auf die Adaption. Außerdem ist zu erkennen, dass QAM und CAP zu quasi identischem Systemverhalten führen. Simulationen eines ähnlichen Szenarios unter der Verwendung des Whitening Approach finden sich in [187]. Auch hier zeigen alle Verfahren nahezu identische Performance.

Vergleich des Whitening Approach mit dem IIR-CMA

Als nächstes soll die Qualität der Startlösung, die sich mit den beiden in Kapitel 6.3.2.2 und Kapitel 6.3.2.3 vorgestellten Methoden ergibt, verglichen werden. Um das Verhalten besser vergleichen zu können, wird hier ein Kanal gewählt, dessen Entzerrung mit einem linearen Entzerrer Probleme bereitet. Dieser Kanal ist um den Faktor zwei überabgetastet und die Impulsantworten der beiden Subkanäle weisen sowohl gemeinsame Nullstellen auf, als auch Nullstellen die in der z -Ebene nahe am Einheitskreis liegen. Somit weist dieser Kanal Eigenschaften auf, die eine Entzerrung mit einem Transversalenzerrer stark erschweren. Die Nullstellen der beiden Subkanäle des Beispielkanals sind gegeben durch $\{0,3+0,4j; 0,3-0,39j; -1,5+0,1j; 0,15+0,1j; 0,85+0,55j; 1,1\}$ und $\{0,3+0,4j; 0,3-0,42j; 0,4+0,5j; 0,3j; -0,72+0,68j; -0,4-0,3j\}$. Die Empfangsleistung wurde auf Eins normiert. Außerdem wurde AWGN der normierten Varianz 10^{-5} an den Entzerrereingang gegeben.

Die Entzerrer besitzen jeweils $N = 20$ und $M = 10$ Speicherelemente. Bei der CMA Methode wird bei beiden Filtern von der Feintuch Näherungen Gebrauch gemacht. Die Schrittweiten betragen jeweils 10^{-4} bei den AR Filtern und 10^{-3} bei den MA Filtern. Unabhängig von dem erreichten MSE wurde die Struktur nach 950 000 Iterationen in die des DFE geändert. Nach dieser Zeit kann davon ausgegangen werden, dass die Startentzerrer konvergiert sind. Hier wurde zunächst zum Vergleich der Performance der DFE-Startlösung die weitere Adaption eingefro-

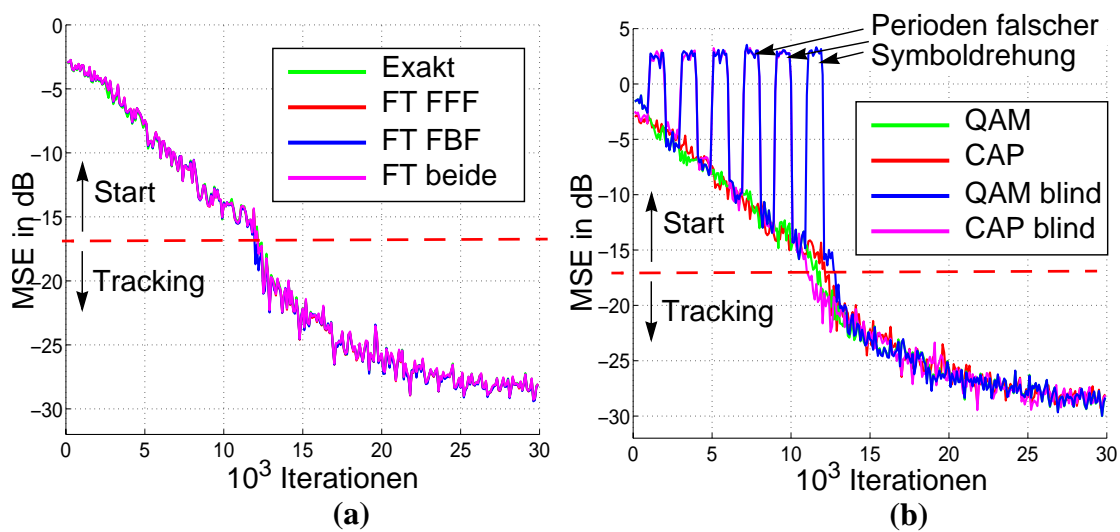


Bild 6.12: Blinde Adaption eines DFE mit dem IIR-CMA (a) Vergleich exakter Algorithmus mit Feintuch (FT) Näherungen im Vorwärts-, Rückkoppel-, bzw. beiden Filtern (b) Blinde Entscheidung des Modulationsverfahrens

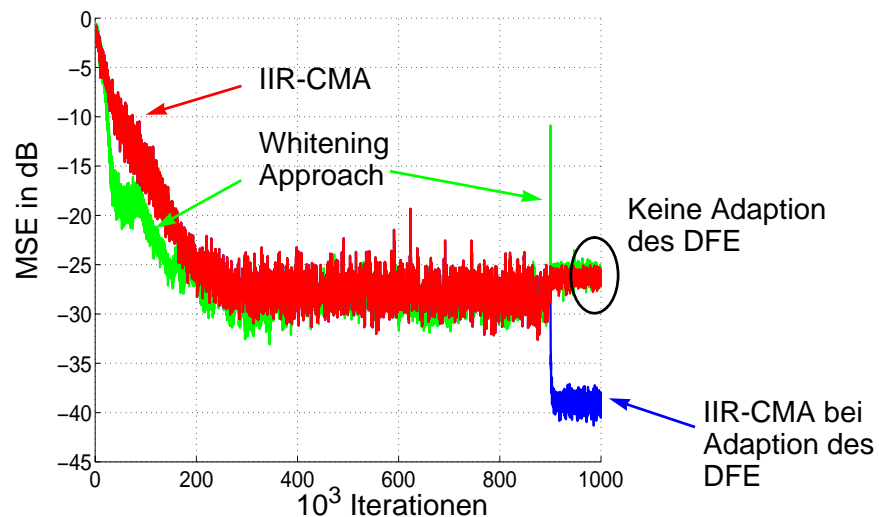


Bild 6.13: Exemplarischer Vergleich von Lernkurven eines referenzdatenfreien Systemstarts eines DFE

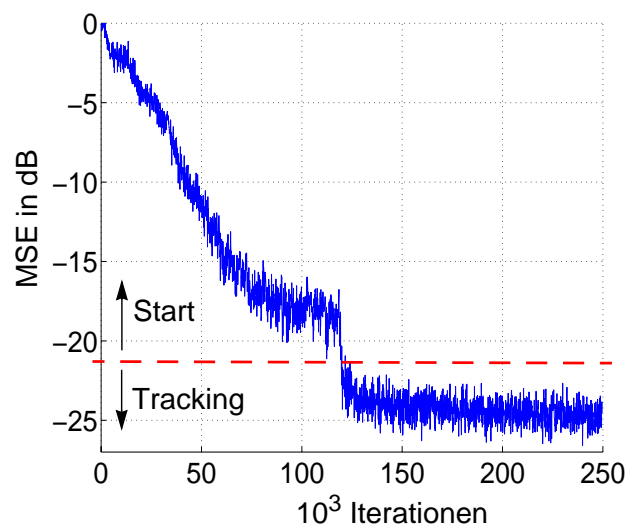


Bild 6.14: Kombination von Abstratenumsetzung, Synchronisation und blinder Entzerrung

ren. In Bild 6.13 sind die Ergebnisse dieser Simulationen gezeigt. Man erkennt, dass bei Verwendung des Whitening Approaches eine geringfügig schnellere Adaption erfolgt, als bei Verwendung des IIR-CMA. Nach dem Umschalten in den DFE Modus zeigt der Whitening Approach eine kurze Phase mit sehr vielen Symbolfehlern. Dies liegt darin begründet, dass hier die Anordnung der Filter vertauscht wird und somit zunächst falsche Werte in den einzelnen Registern gespeichert sind. Dies hat aber keinen Einfluss auf die weitere Adaption. Da beim IIR-CMA die Anordnung der Filter nicht verändert wird, tritt dieser Effekt hier nicht auf. In Bild 6.13 sind zusätzlich noch Simulationsergebnisse für eine weitere Adaption des DFE gezeigt. Man erkennt, dass im entscheidungsgestützten Modus die weitere Adaption sehr schnell erfolgt.

Kombinierte Synchronisation, Abstratenumsetzung und blinde Entzerrung

Bild 6.14 zeigt eine Adaptionskurve, die bei gemeinsamer Simulation von Abstratenumsetzung, Synchronisation und blinder Entzerrung entstand. Zur Taktregelung wurde hier exemplarisch eine sogenannte Digital Spectral Line Methode verwendet, die in [160] speziell für CAP-VDSL optimiert wurde. Ziel dieser Simulation ist zu zeigen, dass prinzipiell ein blinder System-

start mit unbekanntem Kanal, Rauschen und Taktversatz anhand der im Rahmen dieser Arbeit gezeigten Methoden möglich ist. Die Taktregelung selbst wurde jedoch nicht optimiert, da dies den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde. Als Leitung ist hier eine 1200m langes ETSI4-Kabel angenommen, das Modulationsverfahren ist 64-CAP, mit Mittenfrequenz 1,5 MHz und Bandbreite 1,1 MHz. Die Sendefilter besitzen 15% Excess Bandbreite. Als Rauschen wurde an den Empfängereingang AWGN mit Varianz $5 \cdot 10^{-4}$ angelegt. Zur Entzerrung wurde ein DFE mit 10-fach überabgetastetem FFF der Länge 201, sowie einem Rückkoppelfilter der Länge 10 verwendet. Die Überabtastrate des Senders beträgt 12. Dies entspricht auch der normierten Abtastrate des Empfängers, so dass hier um den Faktor 1,2 dezimiert werden muss. Die Adaption des DFE erfolgt mit der in Kapitel 6.3.2.3 beschriebenen IIR-CMA Technik. Die FFF werden hierbei mit zueinander Hilbert transformierten Bandpässen initialisiert. Außerdem wurde angenommen, dass der Empfänger einen Taktversatz zum Sender von 42 ppm besitzt. Die Synchronisation und Dezimation erfolgt mit einem FD Filter 4. Ordnung, das durch Polynome 4. Ordnung approximiert ist. Dieses Filter wurde nach der in Kapitel 3.4.2.2 gezeigten Least Squares Methode berechnet und in Farrow-Struktur implementiert.

6.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden Verfahren zur blinden Entzerrung vorgestellt. Diese haben die Aufgabe die Entzerrerkoeffizienten bei Beginn der Übertragung so gut zu adaptieren, dass das Auge geöffnet ist, so dass im weiteren Verlauf die in Kapitel 5 vorgestellten entscheidungsgestützten Adaptionsverfahren eingesetzt werden können.

Von den verschiedenen Möglichkeiten zur blinden Adaption eines FIR Filters erweisen sich im Rahmen der leitungsgebundenen Kommunikation besonders die sogenannten Busgang Algorithmen als erfolgversprechend, die implizit Statistiken höherer Ordnung verarbeiten. Von diesen wiederum erscheint der CMA vorteilhaft, da er zum einen eine ähnliche Komplexität wie der LMS Algorithmus aufweist und andererseits keine kostenabhängigen lokalen Minima besitzt. Wie jeder blinde Algorithmus kann er allerdings zu längenabhängigen lokalen Minima konvergieren. Daher ist die Art der Initialisierung besonders wichtig. Bei der Verwendung des sogenannten Prewhitened CMA, bei dem das Eingangssignal des transversalen Entzerrers durch Prediktion dekorreliert wird, kann die Systemverzögerung eines adaptierten Entzerrers ohne explizit vorzunehmende Berechnungen verändert werden, so dass hier auf heuristische Art und Weise sehr einfach die optimale Systemverzögerung und somit das globale Minimum der Kostenfunktion gefunden werden kann. Zur Adaption des Dekorrelationsentzerrers können etwa die in Kapitel 5.3 beschriebenen rekursiven LMS Algorithmen herangezogen werden.

Anschließend wurde die blinde Adaption entscheidungsrückgekoppelter Entzerrer diskutiert. Hier ergibt sich das Problem, dass die Kostenfunktion eines DFE aufgrund des Symbolentscheiders lokale Minima aufweisen kann, so dass die Adaption mit einer Struktur ohne Entscheider starten muss. Als erfolgversprechend erweist sich die Strategie, einen Startkoeffizientensatz mit Hilfe eines rekursiven Entzerrers zu erzeugen und im entscheidungsgestützten Modus einen Soft-Entscheider zu verwenden. Ein derartiger Entscheider hat die Eigenschaft, die Fehlerfunktion des DFE zu glätten, so dass die Konvergenz zum globalen Minimum deutlich wahrscheinlicher wird. Darüberhinaus senkt bei passender Wahl der Kennlinie ein Soft-Entscheider allgemein auch die BER am Ausgang eines DFE. Zur Generierung des Startkoeffizientensatzes wurden zwei verschiedene Techniken diskutiert. Beide beruhen auf der in Kapitel 4.4.2 gezeig-

ten Äquivalents des MMSE Koeffizientensatzes eines IIR Entzerrers mit denen des DFE, im Falle von weißem Rauschen und beliebig langen Entzerrern. Diese Übereinstimmung gilt im praktischen Betrieb zwar nicht mehr exakt, der gefundene Koeffizientensatz des IIR Entzerrers kann aber trotzdem als Startlösung des DFE fungieren. Das erste Verfahren verwendet die Tatsache, dass der FBF eines DFE, für den Grenzfall unbeschränkt langer Entzerrer, ein Dekorrelationsfilter des Eingangssignals darstellt. Somit wird bei diesem Verfahren die Entzerrung in Amplituden- und anschließender Phasenentzerrung aufgeteilt. Im Startmodus entspricht dies daher, falls die Phasenentzerrung mit dem CMA erfolgt, dem Prewhitened CMA. Da bei Entzerrung im Bandpassbereich normalerweise die Aufteilung in Inphase- und Quadraturkomponente durch das FFF erfolgt, hier aber zunächst ein AR Filter angeordnet ist, muss diese Aufteilung hier explizit, etwa durch ein Hilbert Filter erfolgen, wenn die Koeffizienten des AR Filters als Startkoeffizientensatz des FBF fungieren sollen. Dieses Hilbert Filter erlaubt die identische Gestaltung der beiden FFF und somit die Verwendung einer Low Power Architektur. Andernfalls können die Koeffizientengewichte des Hilbert Filter im DD Modus allmählich zu Null gesetzt werden.

Als zweite Möglichkeit zur Generierung von Startkoeffizientengewichten wurde ein IIR CMA Entzerrer betrachtet. Da für diesen Algorithmus Stabilität nicht bewiesen werden kann, wurde eine Implementierung in Lattice Filter Struktur vorgeschlagen, die eine einfache Beobachtung des Verhaltens des adaptiven Algorithmus erlaubt. Nach erfolgter Adaption wird die Struktur ebenfalls in die des DFE geändert. Da nun durch den Entscheider im Rückführzweig Stabilität garantiert werden kann, kann das Lattice Filter in ein Filter in Standard Implementierung, das insgesamt weniger Berechnungsaufwand erfordert, umgewandelt werden.

Als letztes wurde gezeigt, dass mit beiden Verfahren die blinde Adaption des Modulationsverfahrens zwischen QAM und CAP auf sehr einfache Art erfolgen kann. Dies ist etwa bei einigen Varianten des Einzelträger VDSL Standards gefordert [53], [176].

Anhand von Simulationen wurden abschließend das Verhalten der vorgeschlagenen Verfahren verdeutlicht. Die beiden Initialisierungsmethoden eines DFE wurden exemplarisch anhand eines Beispielkanals verglichen. Hierbei zeigte sich, dass beide Verfahren ein sehr ähnliches Verhalten zeigen. Dies gilt insbesondere bei der Entzerrung realistischer Kanäle im Teilnehmeranschlussbereich, die meist wesentlich bessere Eigenschaften aufweisen, als der verwendete Beispielkanal.

Abschließend wurden Ergebnisse gezeigt, bei dem die blinde Entzerrung eines im Bandpassbereich operierenden DFE mit Synchronisation und Abtastratenumsetzung gemeinsam simuliert wurden. Dies entspricht somit einem kompletten referenzdatenfreien Systemstart.

7 Aufwandsarme Implementierung

Während in der Vergangenheit das Ziel der Forschungsaktivitäten im Bereich hochintegrierter digitaler Schaltungen im Wesentlichen auf die Erzielung hoher Schaltgeschwindigkeiten und hoher Integrationsdichten gerichtet war, erlangte in letzter Zeit die Minimierung der Verlustleistung immer höhere Priorität [145]. Ein wichtiger Grund für diese teilweise Neuausrichtung liegt in der Wärmeentwicklung begründet, die eine mit hoher Taktrate betriebene hochintegrierte Schaltung aufweist. Dies erfordert kostenintensive Maßnahmen zur Kühlung und erschwert eine weitere Integration. Bei portablen Geräten liegt ein weiterer wichtiger Grund für die Notwendigkeit einer Verlustleistungsminimierung in der Begrenztheit der Batteriekapazität.

Speziell bei der xDSL-Übertragungstechnik ist eine Begrenzung der Wärmeentwicklung der implementierten Transceiver von großem Interesse, da dies auf der Vermittlungsseite erlaubt, mehrere Transceiver auf einem Chip zu integrieren, und somit die Kosten zu senken. Zudem ist oftmals die Möglichkeit einer Fernspeisung von Transceivern erwünscht. Die erklärte Obergrenze der Leistungsaufnahme eines VDSL Transceivers liegt bei einem Einsatz in der sogenannten First Mile bei etwa 1,0 Watt [69].

Grundsätzlich verbraucht eine anwenderspezifische Schaltung wesentlich weniger Leistung als ein DSP, auf dem die gleiche Funktionalität implementiert ist, so dass beim Entwurf verlustleistungsarmer hochintegrierter Schaltungen fast ausschließlich eine Full Custom Designmethode zum Einsatz kommt [145]. Neben der Verlustleistungsminimierung ist ein weiteres wichtiges Ziel beim Entwurf einer digitalen Schaltung aus Kostengründen jedoch auch ein möglichst geringer Flächenverbrauch.

In diesem Kapitel werden Möglichkeiten zur Minimierung der Verlustleistungen auf verschiedenen Architekturebenen diskutiert. Grundsätzlich lässt sich hierbei auf höheren Ebenen mehr Verlustleistung einsparen, als dies auf niedrigeren Ebenen der Fall ist (siehe etwa [8]), der Einsatz von sogenannten Low Power Techniken ist jedoch auf allen Ebenen des Entwurf sinnvoll [145]. Zunächst werden in Kapitel 7.1 verschiedene Methoden auf algorithmischer Ebene besprochen. Methoden auf Hardware-, bzw. VLSI-Ebene sind Inhalt von Kapitel 7.2, bzw. Kapitel 7.3. Auf Techniken die sich auf Transistorebene anwenden lassen wird in dieser Arbeit nicht eingegangen. Für eine derartige Betrachtung sei etwa auf [145] verwiesen. Eine Zusammenfassung in Kapitel 7.4 rundet diesen Abschnitt ab.

7.1 Verlustleistungsarme Implementierung auf algorithmischer Ebene

Zunächst werden verschiedene Techniken erläutert, die zur Minimierung der Verlustleistung, bzw. der benötigten Chipfläche, durch algorithmische Umformungen eingesetzt werden können. Speziell werden Algorithmen zur Adaption von Entzerrern betrachtet. Eine wichtige derartige Technik besteht in der Quantisierung der Eingangsgrößen, die zur Berechnung der Nachstellgröße der Koeffizientengewichte Verwendung finden. Verschiedene Möglichkeiten der Quan-

tisierung sowie der Minimierung der damit zwangsläufig einhergehenden Verschlechterung des Systemverhaltens sind Inhalt von Abschnitt 7.1.1. Eine weitere Möglichkeit der Verlustleistungsreduktion besteht darin, abhängig von der erreichten BER die verwendeten Entzerrer gezielt zu vereinfachen, etwa indem die Anzahl der Koeffizienten reduziert wird. Dadurch werden bewusst Performance-Einbußen in Kauf genommen, so dass derartige Techniken nur anwendbar sind, wenn die erzielte BER geringer als gefordert ist. Derartige Methoden werden in Abschnitt 7.1.2 behandelt.

7.1.1 Quantisierung der Eingangssignale eines adaptiven Entzerrers

Wie erwähnt, besteht eine Möglichkeit zur Vereinfachung adaptiver Algorithmen in der Quantisierung der Signale, die zur Berechnung der Koeffizientenachstellgröße erforderliche sind. Somit können zur Berechnung dieser Größen erforderliche Multiplikationsoperationen, je nach Art der Quantisierung, durch Table-Lookup, Verschiebeoperationen (*Shifter*) oder XOR-Berechnungen implementiert werden. Verschiedene Arten der Quantisierung werden in Abschnitt 7.1.1.1 beschrieben.

Nachteile, die eine Quantisierung im betrachteten Anwendungsgebiet mit sich bringen, sind einerseits eine reduzierte Adaptionsgeschwindigkeit und andererseits ein sich vergrößernder Fehler im eingeschwungenen Zustand. Eine Ursache dieser EMSE Zunahme liegt in der Vergrößerung des kleinsten möglichen Korrekturterms. Dies kann durch eine adaptive Schrittweite des Entzerrers relativ gut ausgeglichen werden.

Ein weiteres Problem, das eine Quantisierung mit sich bringt, liegt darin begründet, dass das Quantisierungsrauschen nicht weiß und darüberhinaus nicht unabhängig vom Eingangssignal ist [16]. Somit unterscheidet sich das Verhalten des quantisierten Algorithmus unter Umständen vom nicht quantisierten. Durch Addition eines zusätzlichen Rauschsignals vor der Quantisierung kann versucht werden, die Information, die durch den Quantisierungsprozess verloren geht, zu erhalten. Auf den ersten Blick erscheint die Addition eines Rauschsignals zwar widersinnig, man kann aber erwarten, dass ein stochastischer Gradientenalgorithmus mit kleiner Adaptions-Schrittweite das sich ergebende weiße Quantisierungsrauschen herausmittelt. Es kann gezeigt werden, dass bei richtiger Wahl der zusätzlichen Rauschleistung das Verhalten des quantisierten Algorithmus im Mittel identisch zum ursprünglichen nichtquantisierten ist, allerdings wird der EMSE zwangsläufig größer. Quantisierung mit zusätzlicher Addition eines Rauschsignals ist Inhalt von Abschnitt Kapitel 7.1.1.2.

Bei allen adaptiven Algorithmen wird die Schrittweite μ vorteilhaft als Zweierpotenz gewählt. Erforderliche Multiplikation mit μ können somit durch Verschiebe-Operationen implementiert werden.

7.1.1.1 Verschiedene Arten der Quantisierung

In Bild 7.1 sind exemplarisch Histogramme gezeigt, die die relative Häufigkeit des Auftretens der Amplitude des Fehlerterms bei der Adaption anhand des LMS und CM Algorithmus zeigen. Die verwendete Modulation ist hier 8-PAM mit den Amplitudenstufen $\{\pm 1; \pm 3; \pm 5; \pm 7\}$. Das entsprechende in Bild 7.1a gezeigte Histogramm des LMS Fehlerterms $e_{LMS}(n) = \hat{y}(n) - y(n)$ legt nahe, dass die Amplitudenverteilung von e_{LMS} näherungsweise als Gauss-verteilt angenommen werden kann. Im Gegensatz dazu ist die in Bild 7.1b gezeigte Verteilung des CMA Fehlerterms $e_{CMA}(n) = y(n)(|y(n)|^2 - \gamma_2)$ wesentlich unregelmäßiger aufgebaut, weil für höherstufige Modulation selbst bei perfekter Entzerrung der Fehlerterm hier

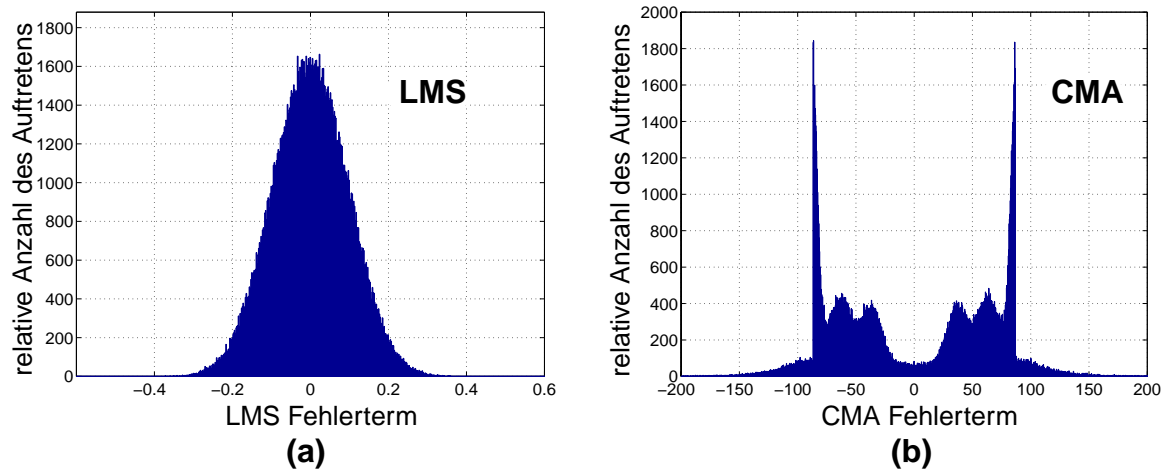


Bild 7.1: Exemplarische Histogramme der Häufigkeit des Fehlerterms am Beispiel von 8-PAM (a) LMS Algorithmus (b) CMA

nicht gegen Null geht, sondern abhängig vom Sendesymbol verschiedene diskrete Werte annimmt. Man erkennt, dass anschaulich gesprochen beim LMS Algorithmus bereits das Vorzeichen des Fehlerterms einen Großteil der Information beinhaltet, während beim CMA relativ viel Information in der Amplitude des Fehlerterms enthalten ist. Daher ist es beim LMS Algorithmus naheliegend, durch Quantisierung des Fehlerwertes bzw. auch der Eingangsdaten, die Berechnungen, die zur Nachführung der Koeffizienten erforderlich sind, zu vereinfachen. Beim CMA kann man hingegen erwarten, dass eine Quantisierung des Fehlerterms das Verhalten des Algorithmus relativ stark beeinflusst, so dass hier spezielle Maßnahmen erforderlich sind, um die Konvergenz eines derartig vereinfachten Algorithmus weiterhin sicherzustellen. Hierbei ist die grobe Form der Histogramme weitgehend unabhängig von der Systemumgebung [41].

Zunächst sollen in diesem Kapitel grundlegende Quantisierungstypen vorgestellt werden. Ein einheitlicher Quantisierer mit geradzahligem Anzahl an Quantisierungsstufen bildet ein Eingangssignal in ein Signal mit Wertebereich $\pm\{\Delta/2, 3\Delta/2, \dots, ((K-1)\Delta)/2\}$ ab. Hierbei ist K die Anzahl an gleichmäßig verteilten Quantisierungsstufen und Δ der Abstand zwischen den einzelnen Stufen. Der Ausgang eines Quantisierers mit Eingangssignal $x(n)$ ist

$$\hat{x}(n) = Q(x), \quad (7.1)$$

wobei $Q(\bullet)$ den Quantisierungsoperator beschreibt. Bild 7.2a zeigt die Kennlinie eines derartigen Quantisierers. Da beim Eingangswert Null die Ausgangskennlinie einen Sprung von $-\Delta$ auf Δ aufweist, wird dieser Quantisierer auch als Mid-Rise Quantisierer bezeichnet. Im Gegensatz dazu hat der in Bild 7.2 (b) dargestellte sogenannte Mid-Tread Quantisierer die Null als

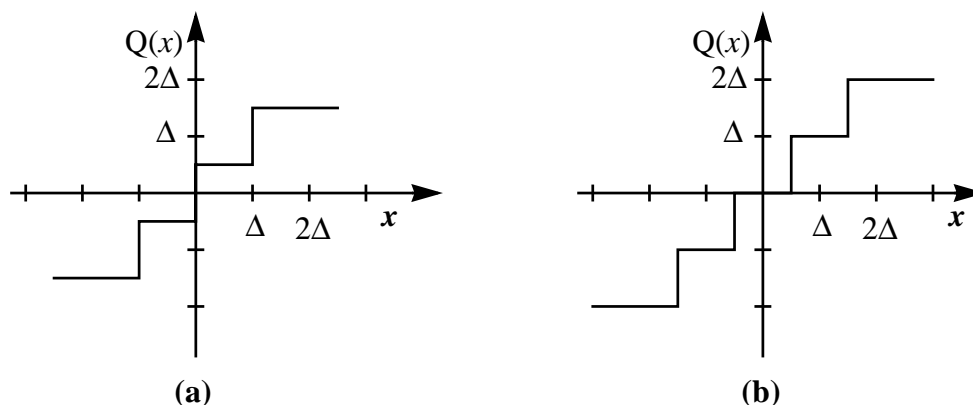


Bild 7.2: Quantisierungskennlinie eines gleichverteilten Mid-Rise (a) und Mid-Tread (b) Quantisierers

mögliches Ausgangssignal. Zu beachten ist, dass die beiden in Bild 7.2 gezeigten Quantisierungsarten einer Rundung entsprechen und daher mittelwertfrei sind. Im Gegensatz dazu führt die einfacher zu realisierende Quantisierung durch Abschneiden, also Nichtverwendung der LSBs, zu nicht mittelwertfreien Signalen, da die Kennlinie eines derartigen Quantisierers zum Ursprung unsymmetrisch ist. Quantisierung der Eingangswerte durch Abschneiden kann bei einem adaptiven Algorithmus etwa zu dem in Kapitel 5.1.1.5 beschriebenen Parameter Drift Phänomen führen.

Die einfachste Quantisierung besteht darin, statt eines Signals nur dessen Vorzeichen heranzuziehen, was als 1-Bit Quantisierung aufgefasst werden kann. Ein relativ häufig verwendeter, nichtgleichförmiger Quantisierer wird als Power-of-2 (Po2) Quantisierer bezeichnet. Er hat als Ausgangswertebereich $\pm\{0, 2^0\Delta, 2^1\Delta, 2^2\Delta, \dots\}$. Bei einer digitalen Darstellung berücksichtigt er nur das MSB und gewichtet den Ausgang mit der Quantisierungsgröße Δ . Grundlegende Eigenschaften eines Quantisierers finden sich in Appendix 3.

Zunächst sollen verschiedene Möglichkeiten aufgezeigt werden, wie durch Quantisierung der Eingangssignale die Koeffizientennachführung eines adaptiven Entzerrers multipliziererfrei realisiert werden kann.

Vereinfachung des LMS Algorithmus

Der Standard-LMS Algorithmus schreibt sich nach (5.3) als $\mathbf{f}(n+1) = \mathbf{f}(n) + \mu e(n)\mathbf{r}^*(n)$, wobei der Koeffizientenvektor $\mathbf{f}(n)$ sowie der Regressorvektor der Eingangsdaten $\mathbf{r}(n)$ jeweils die Länge $w \cdot N$ besitzen. Im Folgenden sei $w = 1$, die erzielten Ergebnisse lassen sich aber einfach für die Verwendung eines überabgetasteten Eingangssignals erweitern.

Zusätzlich zu den Verschiebeoperationen, die durch die Multiplikation mit der Schrittweite erforderlich sind, sind zur Implementierung der Koeffizientennachführung des reellwertigen LMS Algorithmus jeweils N Additions- und Multiplikationsoperationen mit einer Auflösung der Eingangs-Wortbreite erforderlich. Unter der Annahme, dass eine komplexe Multiplikation vier reellen entspricht, werden beim komplexwertigen Algorithmus hierfür jeweils $4N$ reellwertige Operationen erfordert. Durch Vorzeichen-basierte Quantisierung der Eingangsgrößen ergeben sich drei mögliche Varianten, je nachdem ob die Quantisierung auf das Fehlersignal $e(n)$, den Eingangsdatenvektor $\mathbf{r}(n)$ oder beide Signale angewandt wird. Diese Algorithmen werden als Sign-Error (S-E), Sign-Data (S-D) und Sign-Sign (S-S) LMS Algorithmus bezeichnet. Sie wurden für reellwertige Signalverarbeitung bereits 1965 durch Lucky vorgeschlagen [109]. Durch die Definition des komplexen Vorzeichen-Operators

$$\text{csgn}(y) = \text{sgn}(\Re(y)) + j\text{sgn}(\Im(y)) \quad (7.2)$$

können sie direkt auf komplexwertige Signalverarbeitung übertragen werden. Durch Verwendung einer Vorzeichen-basierten Quantisierung lassen sich Multiplizieroperationen einsparen, während die Anzahl an Additionen unverändert bleibt. Bei Verwendung einer Schrittweite der Form 2^{-L} , wobei L eine ganze Zahl ist, können sämtliche dieser Vereinfachungen multipliziererfrei implementiert werden. Sie unterscheiden sich aber, wie in Tabelle 7.1 gezeigt, in der Anzahl der benötigten Verschiebeoperationen. Der S-S LMS Algorithmus kommt sogar ohne Verschiebeoperationen aus. Darüberhinaus ist hier jeweils ein Eingangssignal der benötigten Addierer eine Zweierpotenz. Man kann bei diesem Algorithmus die Schrittweite aber auch frei wählbar gestalten und benötigt dann Additionen in der Eingangswortbreite.

Eine weitere Vereinfachung des LMS Algorithmus wurde in [39] und später erneut in [116] vorgestellt. Dieses Verfahren benötigt nur eine geringfügig größere Anzahl an Operationen zur Koeffizienten-Nachführung als der S-S LMS Algorithmus und zeigt nur eine geringfügig langsamere Adaptionsgeschwindigkeit als der ursprüngliche Algorithmus [39], [134]. Dies ist der sogenannte Po2 LMS, der zur Quantisierung jeweils das MSB verwendet. Bei komplexwertiger Signalverarbeitung existiert zudem eine modifizierte Version, die diese Art der Quantisie-

nung erneut auf das Ergebnis anwendet [116].

Eine Übersicht der erforderlichen Anzahl an Multiplikationen, Additionen und Verschiebeoperationen zur Nachführung eines Entzerrerkoeffizienten findet sich in Tabelle 7.1. Hier zeigt sich, dass der Po2 und der S-S LMS Algorithmus nahezu identische Komplexität aufweisen. Bei beiden Algorithmen sind auch die erforderlichen Additionen einfach implementierbar, da ein Summand jeweils ein (S-S LMS und Po2 LMS), bzw. maximal zwei Bit Wortbreite aufweist.

Algorithmus	Korrekturterm für Koeffizient k	Implementierungsaufwand (# Mul/ # Add/ # Shift)	
		reell	komplex
LMS	$\mu e x_k^*$	$N / N / N$	$4N / 4N / 2N$
S-E LMS	$\mu \text{csgn}(e) x_k^*$	$0 / N / N$	$0 / 4N / 2N$
S-D LMS	$\mu e \text{csgn}(x_k^*)$	$0 / N / 1$	$0 / 4N / 2$
S-S LMS	$\mu \text{csgn}(e) \text{csgn}(x_k^*)$	$0 / N / 0$	$0 / 4N / 0$
Po2 LMS	$Q(\mu e) Q(x_k)$ (reell) $Q(\mu e^R) Q(x_k^R) + Q(\mu e^I) Q(x_k^I) +$ $j(Q(\mu e^I) Q(x_k^R) - Q(\mu e^R) Q(x_k^I))$ (komplex)	$0 / N / 0$	$0 / 4N / 0$
Modifizierter Po2 LMS (komplex)	$Q\{Q(\mu e^R) Q(x_k^R) + Q(\mu e^I) Q(x_k^I)\} +$ $jQ\{Q(\mu e^I) Q(x_k^R) - Q(\mu e^R) Q(x_k^I)\}$	---	$0 / 4N / 0$

Tabelle 7.1: Vergleich verschiedener LMS Algorithmen bezüglich Korrekturterm und Implementierungsaufwand für reell- und komplexwertige Signalverarbeitung

Ein exemplarischer Vergleich des Verhaltens der verschiedenen Algorithmen basierend auf Simulationen findet sich in Bild 7.3. Die Simulationsumgebung besteht hier aus einer 1000 m langen Leitung mit 0,5 mm Durchmesser, einer Sendeleistung von -60 dBm/Hz und AWGN mit einer Varianz von -140 dBm/Hz. Weitere Störer wurden im Rahmen dieser Simulation nicht angesetzt. Die Bandbreite des Sendefilters beträgt 2,5 MHz, die Mittenfrequenz 4,05 MHz und das Modulationsverfahren ist 16-QAM. Die Sende-, bzw. Empfangsfilter sind SRRC Filter mit Grad 15 und Roll-Off Faktor 10%. Der FIR Entzerrer ist im $T/2$ -Raster abgetastet und besitzt $N = 20$ Koeffizienten

Es zeigt sich, dass speziell durch Vorzeichenbildung des Fehlerterms viel Information verloren geht. Durch Einführung einer adaptiven Schrittweite μ kann ein Großteil der MSE-Verschlechterung ausgeglichen werden (siehe Kapitel 5.1.1.4). So konvergiert der S-S LMS Algorithmus mit variablem μ in dem gezeigten Beispiel schneller als der Standard LMS Algorithmus und zeigt im eingeschwungenen Zustand ein ähnliches Verhalten. In der Praxis ist bei allen Algorithmen die Implementierung eines variablen μ sinnvoll. Die Lernkurven des normalen, bzw. modifizierten Po2 LMS Algorithmus unterscheiden sich nur geringfügig von denen des originalen Algorithmus.

Insgesamt erscheint daher der Po2 LMS als die günstigste Alternative der dargestellten Algorithmen, aber auch der S-S LMS Algorithmus wirkt bei Verwendung einer variablen Schrittwei-

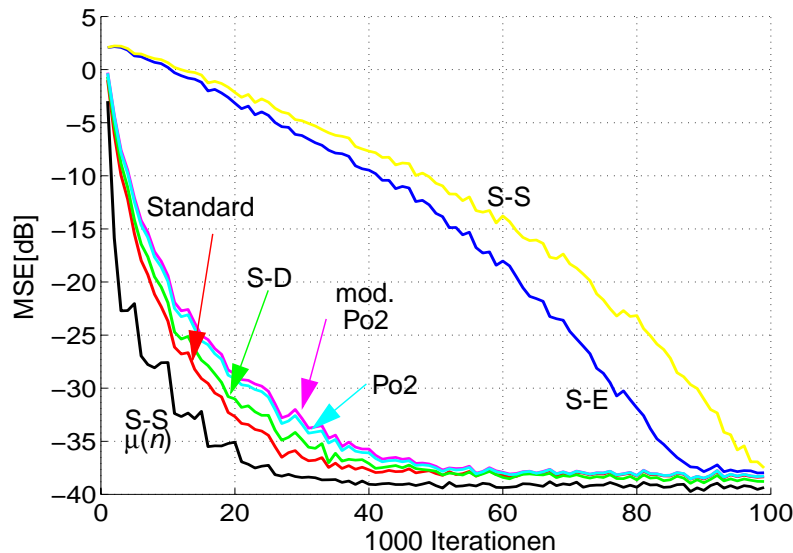


Bild 7.3: Lernkurve des LMS Algorithmus und vereinfachter Varianten

te sehr attraktiv.

Vereinfachung des CMA

Bei einer Betrachtung des in (6.7) gegebenen CMA

$$\mathbf{f}(n+1) = \mathbf{f}(n) - \mu \mathbf{r}^*(n) y(n) (|y(n)|^2 - \gamma_2) \quad (7.3)$$

fällt auf, dass hier innerhalb einer Iteration zunächst der Entzerrerausgang $y(n)$ berechnet werden muss, und aus diesem anschließend der Fehlerterm $e(n) = y(n)(|y(n)|^2 - \gamma_2)$ generiert wird. Anschließend muss dieser noch mit dem Regressorvektor multipliziert werden. Speziell beim CMA sind daher algorithmische Vereinfachungen oftmals nicht nur zur Minimierung der Chipfläche und der Verlustleistung erforderlich, sondern auch zur Minimierung des kritischen Pfades.

Eine Möglichkeit der Vereinfachung des CMA besteht darin, das Eingangssignal $y(n)$ zu quantisieren, so dass der Fehlerterm $e(n)$ durch Table Look-up gewonnen werden kann [41]. Dadurch werden zwar nur wenige erforderliche Multiplikationsoperationen eingespart, allerdings verringert sich die Länge des kritischen Pfades bedeutend. Als günstige Art der Quantisierung erweist sich hier etwa eine ähnliche Operation, wie sie auch der Symbolentscheider durchführt. Günstiger als die Mid-Rise Kennlinie des Entscheiders erweist sich jedoch eine Mid-Tread Kennlinie, deren Unstetigkeitsstellen genau in den Punkten der Signalraumkonstellation auftreten. Diese Technik wurde in [41] vorgeschlagen, jedoch in dieser Veröffentlichung nur auf reellwertige Signalverarbeitung angewandt. Im Rahmen der Entstehung dieser Arbeit zeigte sich jedoch, dass speziell bei komplexwertiger Signalverarbeitung diese Art der Quantisierung sogar zu einem besseren Verhalten führen kann, als es der Standard CMA aufweist. Die Ursache liegt vermutlich darin begründet, dass sich dieser Algorithmus in mancherlei Hinsicht ähnlich zum LMS, bzw. zum S-S LMS verhält. So ist bei einer 16-QAM Signalraumkonstellation die Inphasekomponente des Fehlerterm $e^I(n)$ im Bereich der Signalpunkte der Inphasekomponente des Entzerrerausgangs bei $y^I(n) = 3/\sqrt{10}$ für $1/\sqrt{10} < y^R(n) < 3/\sqrt{10}$ gegeben durch

$$e^I(n) \approx \begin{cases} 0,33 & \text{für } 1/\sqrt{10} < y^I(n) < 3/\sqrt{10}, \\ -0,86 & \text{für } y^I(n) > 3/\sqrt{10} \end{cases}, \quad (7.4)$$

so dass der Fehlerwert ähnlich zu dem des S-E LMS ist. Zum Start der Adaption ist das Verhalten des Algorithmus hingegen ähnlich dem des Standard CMA. Dies ist auch in Bild 7.4 zu er-

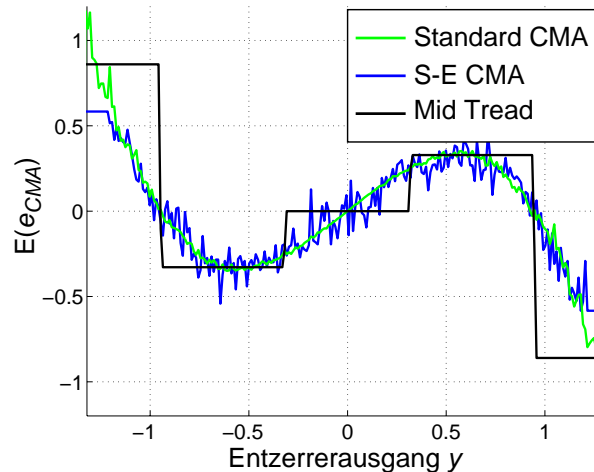


Bild 7.4: Erwartungswert des Fehlers als Funktion des Entzerrerausgangs

kennen. Hier ist der Erwartungswert des Imaginärteil des Fehlerterms des Mid Tread (M-T) CMA für $3/(2\sqrt{10}) < \Re\{y(n)\} < 5/(2\sqrt{10})$ gezeigt.

Insgesamt ist das Verhalten dieses Algorithmus ähnlich dem des Standard CMA, der bei geöffnetem Auge in den entscheidungsgestützten Modus gewechselt wird. Trotzdem sind die Eigenschaften des M-T CMA sehr interessant. Naheliegend ist es, den M-T CMA weiter zu vereinfachen und statt des Fehlerterms, der bei diesem Algorithmus ohnehin nur eine begrenzte Anzahl an Werten annehmen kann, dessen Vorzeichen zur Berechnung heranzuziehen. Dieser Algorithmus, der hier als Sign-Error (S-E) M-T CMA bezeichnet wird, ist in der Literatur noch nicht beschrieben.

Eine weitere Möglichkeit der Vereinfachung besteht darin, vom Fehlerterm $e(n)$ lediglich das Vorzeichen zu verwenden [19], [146], was als Sign-Error (S-E) CMA bezeichnet wird. Prinzipiell kann auch beim CMA eine Vereinfachung angegeben werden, bei der das Vorzeichen der Regressorsignale verwendet wird, anhand von Simulationen lässt sich allerdings zeigen, dass dieser vereinfachte Algorithmus ein relativ schlechtes Systemverhalten aufweist. Daher wird diese Vereinfachung hier, ebenso wie in der bestehenden Literatur, nicht weiter verfolgt.

Ein Vergleich des Implementierungsaufwandes der verschiedenen Algorithmen findet sich in Tabelle 7.2. Die Quantisierung des Eingangssignals durch eine Mid-Rise, bzw. Mid-Tread Kennlinie wurde hier mit Q abgekürzt. Zu erkennen ist, dass diese Quantisierung alleine den erforderlichen Implementierungsaufwand noch nicht entscheidend reduziert. Wie erwähnt führt sie jedoch zu einer Reduzierung des kritischen Pfades. Eine erhebliche Reduzierung des Aufwandes ist durch den S-E CMA und insbesondere durch einen S-E Q CMA möglich.

Nachteil des S-E CMA ist, dass dieser Algorithmen, aufgrund des Quantisierungsrauschens das sowohl farbig, als auch mit den Eingangsdaten korreliert ist, ein anderes Verhalten aufweisen als der originale CMA. Dies tritt zwar prinzipiell auch bei den Vorzeichen-basierten Vereinfachungen des LMS Algorithmus auf, jedoch sind hier aufgrund der Gaussverteilung des Fehlerterms Auswirkungen einer Quantisierung nicht so gravierend wie beim CMA. Daher soll im nächsten Abschnitt eine Technik erläutert werden, durch die das Verhalten des quantisierten CMA dem des originalen ähnlich wird.

Algorithmus	Korrekturterm für Koeffizient k	Implementierungsaufwand (# Mul/ # Add/ # Shift/ # Tbl Look-up)	
		reell	komplex
CMA	$\mu x_k^* y (y ^2 - \gamma_2)$	$N+3 / N+1 / N / 0$	$4N+4 / 4N+1 / 2N / 0$
S-E CMA	$\mu x_k^* \text{csgn}(y (y ^2 - \gamma_2))$	$2 / N+1 / N / 0$	$4 / 4N+1 / 2N / 0$
Q CMA	$\mu x_k^* Q(y) (Q(y) ^2 - \gamma_2)$	$N / N / N / 1$	$4N / 4N / 2N / 2$
S-E Q CMA	$\mu x_k^* \text{csgn}(Q(y) (Q(y) ^2 - \gamma_2))$	$0 / N / N / 1$	$0 / 4N / 2N / 2$

Tabelle 7.2: Vergleich verschiedener CM Algorithmen bezüglich Korrekturterm und Implementierungsaufwand für reell- und komplexwertige Signalverarbeitung

In Bild 7.5 sind Ergebnisse eines simulativen Vergleichs der verschiedenen Algorithmen gezeigt. Die Simulationsumgebung ist identisch zu der, die in Bild 7.3 für den Vergleich der verschiedenen LMS Algorithmen herangezogen wurde. Die Schrittweite wurde hier so gewählt, dass das Produkt aus μ und dem jeweiligen Erwartungswert des Absolutwertes des Fehlerterms bei allen Algorithmen identisch ist. Beim Standard CMA wird $\mu = 2^{-12}$ gewählt. Man erkennt, dass die Quantisierung mit einer Mid-Rise Kennlinie hier zu deutlich schlechteren Ergebnissen als beim Standard CMA führt. Bei Quantisierung mit einer Mid-Tread Kennlinie ist das MSE im eingeschwungenen Zustand hingegen geringer als beim Standard CMA, was auf die beschriebene Ähnlichkeit mit einem entscheidungsgestützten Algorithmus zurückzuführen ist. Die weitere Quantisierung dieses Algorithmus, bei der statt des Fehlerterms nur dessen Vorzeichen zur weiteren Berechnung herangezogen wird, hat kaum einen Einfluss auf das Adaptionsverhalten, da bei diesem Algorithmus der Fehlerterm ohnehin nur wenige verschiedene Werte annehmen kann. Zusätzlich sind in Bild 7.5 Kennlinien gezeigt, die bei Verwendung eines zusätzlichen Rauschterms resultieren. Diese werden im folgenden Abschnitt diskutiert.

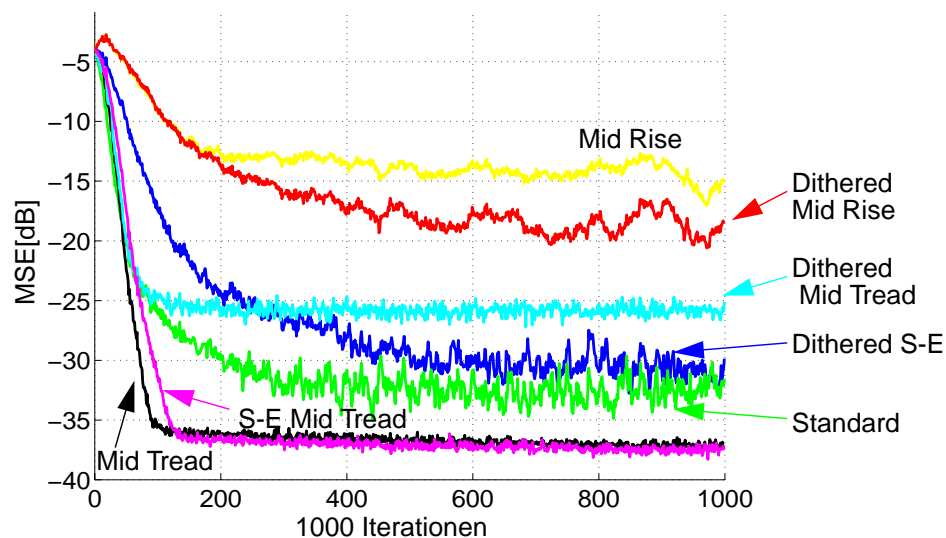


Bild 7.5: Vergleich des CMA mit verschiedenen vereinfachten Algorithmen anhand von Lernkurven für 16-QAM

7.1.1.2 Quantisierung mit zusätzlicher Addition eines Rauschterms

Wie bereits erwähnt, ist es durch zusätzliche Addition eines Rauschsignals vor der Quantisierung möglich, die Annahme Bennetts zu erfüllen, also das Quantisierungsrauschen weiß und unkorreliert vom Eingangssignal zu gestalten. Dieses zusätzliche Rauschsignal wird im Folgenden durch $w_d(n)$ bezeichnet, der Subscript d steht hier für „dither“. Man spricht in diesem Fall von einem *Dithered Quantizer*. Allerdings ergibt sich durch die Addition vom $w_d(n)$ zwangsläufig eine größere Leistung des Quantisierungsrauschens. Wie sich im Folgenden zeigen wird, ist diese Addition besonders beim vorzeichenbasierten CMA vorteilhaft, der durch dieses Vorgehen wesentlich robuster wird. Grundlegende Eigenschaften des Dithered Quantizers finden sich in Appendix 3.

Vorgeschlagen wurde der sogenannte Dithered Sign-Error CMA in [19] und näher analysiert etwa in [146]. In der in [146] gegebene Form ist er mit dem komplexwertigen Dither Term $d(n)$ gegeben durch

$$\mathbf{f}(n+1) = \mathbf{f}(n) - \mu \alpha \mathbf{r}^*(n) (y(n)(|y(n)|^2 - \gamma_2) + \alpha d(n)). \quad (7.5)$$

Der Wert α ist hier eine Skalierungskonstante. In [146] wurden verschiedene, konstellationsabhängige Werte für α angegeben, je nachdem für welchen Wertebereich des Eingangsfehlers der vereinfachte Algorithmus das Verhalten des originalen CMA imitieren soll. Zusätzlich wurde das von α abhängige EMSE in [146] abgeschätzt. Solange das Verhalten des Algorithmus ähnlich dem des CMA ist, ist allerdings der genaue Wert des EMSE nicht von entscheidender Bedeutung. Die Erwartungswerte des Realteils der Fehlerterme des Dithered S-E CMA, sowie des Standard CMA sind in Bild 7.4 gezeigt. Diese sind simulativ durch Mittelwertbildung ermittelt. Da sowohl der Realteil, als auch der Imaginärteil des CMA-Fehlerterms eine Funktion der Inphase- und Quadraturkomponente von $y(n)$ ist, sind hier nur Werte für $3/(2\sqrt{10}) < \Re\{y(n)\} < 5/(2\sqrt{10})$ gezeigt. Als Skalierungskonstante α des Ditherterms ist der in [146] vorgeschlagene Wert 0,5837 gewählt. Man erkennt, dass der mittlere Fehlerwert des Dithered S-E CMA in einem weiten Bereich identisch zu dem des Standard CMA ist. Allerdings kann der Real-, bzw. Imaginärteil des Fehlerterms betragsmäßig nicht größer als α werden.

Zu beachten ist, dass die Komplexität dieses Algorithmus etwas höher als die des normalen S-E CMA ist. Wählt man α näherungsweise als Zweierpotenz, werden bei reellwertiger Signalverarbeitung im Vergleich zu den Werten in Tabelle 7.2 zusätzlich eine Addition und zwei Verschiebeoperationen erforderlich. Diese Werte verdoppeln sich bei komplexwertiger Signalverarbeitung. Zusätzlich muss noch das Rauschsignal erzeugt werden.

In Bild 7.5 sind zusätzlich zu den in Kapitel 7.1.1.1 diskutierten Lernkurven auch Ergebnisse von Simulationen verschiedener Algorithmen mit zusätzlichem Rauschterm gezeigt. Bei den Algorithmen mit Quantisierung des Eingangssignals $y(n)$ wurde dieser Wert vor der Quantisierung mit dem Dither Signal beaufschlagt. Es zeigt sich, dass hierbei bei Verwendung einer Mid Rise Quantisierung das Verhalten des Algorithmus durch den zusätzlichen Rauschterm besser wird, bei Mid Tread Quantisierung hingegen schlechter. Beides ist anschaulich damit erklärbar, dass durch den zusätzlichen Rauschterm das Verhalten ähnlich zu dem des Standard CMA wird, sich allerdings das EMSE erhöht. Zusätzlich findet sich in Bild 7.5 eine Lernkurve des Dithered S-E CMA. Dieser Algorithmus imitiert den CMA, zeigt allerdings einen etwas größeren EMSE. Im Vergleich zu dem - in Bild 7.5 aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht gezeigten - S-E CMA sind die mit dem Dithered S-E CMA erhaltenen Symbole am Entzerrerausgang erwartungstreu. Bei Verwendung des S-E CMA ist die erhaltene Signalraumkonstellation am Ausgang des Entzerrers in diesem Fall hingegen skaliert.

Auch zur Implementierung eines durch Quantisierung vereinfachten LMS Algorithmus wurden

Varianten mit zusätzlichem Rauschterm vorgeschlagen [154]. Im Speziellen wurden hierbei Probleme behandelt, die sich ergeben können, dass durch Quantisierung der geschätzte Gradient nicht mehr verrauscht genug ist, so dass der Algorithmus seine Adaption einstellt. Durch einen Dither Term kann der Quantisierungsprozess insgesamt linearisiert werden, so dass der Algorithmus seinen Lernprozess fortsetzt. Durch spektrale Formung des zusätzlichen Rauschterms, so dass der Entzerrer dieses Rauschen wegfiltern kann, lässt sich, wie in [155] gezeigt, auch das durch den Dither Term induzierte EMSE begrenzen. Ähnliche Effekte lassen sich jedoch auch durch eine adaptive Schrittweite, sowie, wie in Kapitel 5.1.1.5 beschrieben, durch die Verwendung eines Leckfaktors erreichen. Zur einfachen Implementierung wird hierbei ein Leckfaktor günstigerweise in der Form $\lambda_l = 1 - 2^{-L}$ gewählt, wobei L eine ganze Zahl ist.

7.1.2 Vereinfachung des Entzerrers im laufenden Betrieb

In diesem Abschnitt werden Möglichkeiten zur Verlustleistungsminimierung besprochen, die darauf basieren, dass Entzerrer üblicherweise für Worst-Case Szenarien entworfen werden und daher in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle überdimensioniert sind. Darüberhinaus differieren die Anforderung an die Bitfehlerrate abhängig von der Applikation, so sind etwa bei Sprache, je nach Art des Encoders, BER im Bereich 10^{-2} - 10^{-5} tolerierbar, bei Videotelephonie etwa 10^{-7} , bei HDTV hingegen nur von 10^{-13} [14]. Falls sich in einem Anwendungsszenario eine deutlich geringere als die geforderte Bitfehlerrate ergibt, kann der Entzerrer daher gezielt vereinfacht werden, etwa indem seine Länge verkürzt wird. Im Gegensatz zu den in Kapitel 7.1.1 besprochenen Maßnahmen, die auf Umformungen des Koeffizienteneinstellalgorithmus basieren, ist die Anwendbarkeit der hier gezeigten Techniken also nicht immer gewährleistet. Bei leitungsgebundener Kommunikation sind sie um so effektiver einsetzbar, je kürzer die Leitung ist und je weniger Nebensprechen eingekoppelt wird. Wird von Power Back Off Gebrauch gemacht, profitieren gerade die Transceiver am wenigsten von den gezeigten Maßnahmen, die am weitesten von der Vermittlungsstelle entfernt sind und somit mit der größten Leistung senden.

Zur Steuerung der einzelnen Techniken wird hier anstelle der BER der leichter zu bestimmende gemittelte quadratische Fehler $\overline{MSE}(n)$, der eine Näherung des MSE darstellt, am Entscheidungspunkt zugrundegelegt. Diese Größe wird im praktischen Betrieb, etwa zur Einstellung der Schrittweiten der adaptiven Entzerrer, in der Regel ohnehin bestimmt.

Eine Möglichkeit zur Verlustleistungsminimierung besteht darin, nach erfolgter Konvergenz des Entzerrers, die Häufigkeit der Koeffizienteneinstellungen zu verringern, bzw. die Koeffizientengewichte ganz einzufrieren, solange $\overline{MSE}(n)$ unterhalb einer gewissen Schwelle liegt. Eine weitere Maßnahme besteht darin, die Entzerrerränge schrittweise zu verkürzen, solange $\overline{MSE}(n)$ im erwünschten Bereich bleibt. Dies ist deshalb möglich, weil die Koeffizienten am Anfang und vor allem am Ende des Entzerrers in der Regel betragsmäßig sehr klein sind und nur wenig Beitrag zum Ergebnis liefern. Eine dritte Möglichkeit besteht schließlich darin, die Wortlänge der Koeffizientengewichte zu verringern. Dies kann erreicht werden, indem die LSB-Bits einzeln abschaltbar gestaltet werden, eine einfacher zu realisierende Möglichkeit besteht allerdings darin, den Entzerrerausgang mit einer Konstante A , die als Zweierpotenz gewählt ist, zu multiplizieren. Solange nun der gemittelte Fehler im gewünschten Bereich liegt, wird A verdoppelt, die Entzerrerkoeffizienten werden gleichzeitig halbiert, also nach rechts geschoben und erhalten so an den MSB-Stellen nach und nach Nullen. Die Multiplikation des Entzerrerausgangs mit A wird ebenfalls durch einen Shifter realisiert [8]. Die Steuerung der

beschriebenen Techniken ist in Bild 7.6 gezeigt.

7.2 Verlustleistungsarme Implementierung auf Hardwareebene

Sowohl die Verlustleistung adaptiver, als auch mit festen Koeffizientensätzen implementierter Filter lässt sich auf Hardwareebene minimieren, indem man die Filter so realisiert, dass etwa

- Auftretende kritische Pfade kurz sind, so dass langsame und somit kleinere und verlustleistungsrärmere Addierer und Multiplizierer verwendet werden können.
- Register möglichst an Stellen plaziert werden, an denen die erforderlichen Wortbreiten relativ gering sind.
- Die Anzahl an Registern insgesamt klein gehalten wird.
- Der Ausgang eines Registers an möglichst wenigen logischen Gattern anliegt, so dass die Lastkapazitäten nicht zu groß werden.
- Die Schalthäufigkeit an den Registern möglichst minimiert wird.

Eine Reihe von Techniken zum Erreichen dieser Ziele sind etwa in [8] und [34] ausführlich beschrieben. In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Ideen angedeutet.

Zunächst sollen die zwei grundlegenden Architekturen zur Implementierung eines FIR Filters beschrieben werden. Es sind dies die in Bild 7.7a gezeigte direkte Form und die in Bild 7.7b gezeigte transponierte Form. Nachteil der direkten Form ist, dass der kritische Pfad durch einen Multiplizierer und alle Addierer verläuft, so dass diese Implementierung sehr langsam ist, bzw. schnelle Module benötigt. Dieser Nachteil ist in der äquivalenten transponierten Form dadurch vermieden, dass die Register sich hier im Ausgangspfad befinden, so dass der kritische Pfad jetzt nur noch einen Multiplizierer und einen Addierer umfasst. Dies wird allerdings mit den Nachteilen großer Wortbreiten und damit breiter Register, sowie einer hohen Eingangskapazität der Anordnung erkauft. Eine Möglichkeit zum Umgehen des zweiten Nachteils liegt in der zusätzlichen Einführung einzelner Register im Eingangs- und Ausgangspfad, was aber ebenfalls zu einer Erhöhung der Verlustleistung führt. Ein erfolgversprechender Kompromiss besteht darin, eine sogenannte hybride Struktur zu implementieren, bei der einzelne Register sowohl im Eingangs-, als auch im Ausgangspfad implementiert werden, ihre Anzahl insgesamt aber nicht verändert wird. Ein derartiges FIR Filter ist in Bild 7.7c gezeigt. Die vorteilhafte hybride Struk-

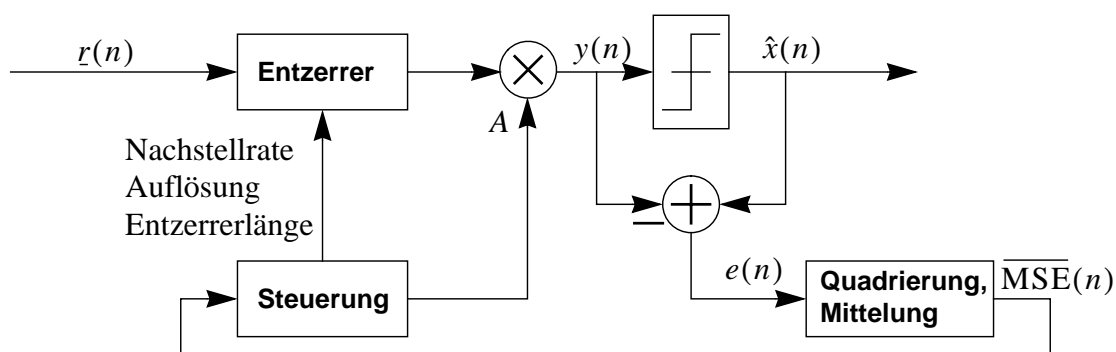


Bild 7.6: Steuerung der verschiedenen Maßnahmen zur gezielten Vereinfachung eines linearen Entzerrers im laufenden Betrieb

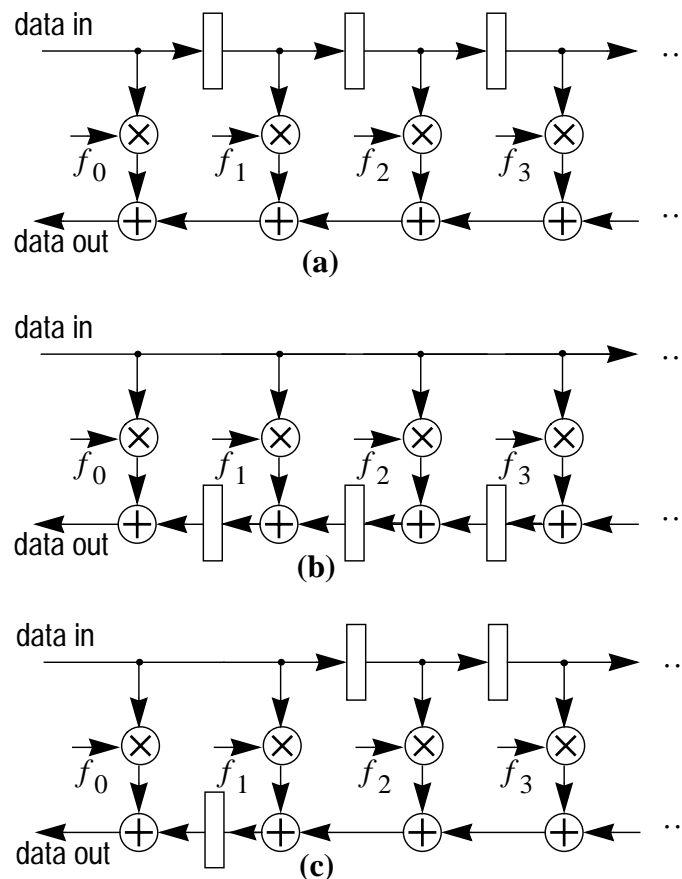


Bild 7.7: Implementierung eines FIR Filters in (a) direkter, (b) transponierter und (c) hybrider Form

tur kann auch zur Implementierung adaptiver Filter verwendet werden, wenn man berücksichtigt, dass die Signale zum Nachführen der Koeffizienten, entsprechend zu den Registern im Ausgangspfad, ebenfalls verzögert werden [8].

Nachdem fraktionale Entzerrer intern dezimieren und somit nur Ausgangssignale im Symboltakt berechnen, können hier die einzelnen Multiplizierer jeweils für nacheinander w Berechnungen verwendet werden. Die Eingangswerte können dann vorteilhaft aus einer FIFO gelesen werden, so dass sie nur im Symboltakt um jeweils w Register verschoben werden. Insgesamt verringert sich durch ein derartiges Vorgehen die Schaltheufigkeit. Eine auf dieser Idee basierende Struktur ist sehr ausführlich in [34] beschrieben.

7.3 Verlustleistungsarme Implementierung auf VLSI-Ebene

Auf VLSI-Ebene kann die Verlustleistung und benötigte Chip Fläche etwa durch die Auswahl der Multiplizierer- und Addierer Architekturen reduziert werden. Eine häufig angewandte Technik bei der Implementierung digitaler Filter besteht in der Verwendung von Booth Kodierung und entsprechender Multiplizierer [8]. In 2003 wurde von Choo jedoch eine Technik [29] veröffentlicht, mit der angewandt auf die Implementierung eines DFE, eine Reduzierung der

Verlustleistung um etwa 10% im Vergleich zu einer Implementierung mit Booth Multiplizierern erreicht wurde. Diese Technik beruht auf einer verteilten Berechnung und kann etwa für die Implementierung digitaler Filter erfolgversprechend eingesetzt werden. Sie soll in diesem Kapitel kurz vorgestellt werden.

Die Grundidee besteht darin, dass in einem digitalen Filter jeder Eingangswert zu verschiedenen Zeitpunkten mit verschiedenen Koeffizienten multipliziert wird. Somit kann durch die Vorausberechnung von Basisoperationen für die einzelnen Eingangswerte, die dann zwischen den verschiedenen Multiplikationen aufgeteilt werden, insgesamt eine Reduzierung der Komplexität erreicht werden. Im Folgenden wird die Technik zunächst kurz für Vorzeichen/Betrag-kodierte Zahlen vorgestellt. Anschließend werden Änderungen beschrieben, die bei Verwendung der häufiger eingesetzten Zweierkomplementdarstellung erforderlich sind.

Zur Berechnung von Basisoperationen wird ein Eingangswert des Filters x_i der Länge N Bit in kleinere Bitsequenzen $\alpha_{k,i}$ der Länge M zerlegt. Man kann x_i aus diesen Sequenzen durch $L = N/M$ Additionen und Verschiebeoperationen berechnen, wobei davon ausgegangen wird, dass L eine ganze Zahl ist:

$$x_i = \sum_{k=0}^{L-1} 2^{kL} \alpha_{k,i}. \quad (7.6)$$

Soll die Wortbreite am Eingang N etwa 8 Bit betragen, und die Wortbreite der kleineren Sequenzen M 4 Bit, so wird die Eingangsgröße in zwei Teile von je 4 Bit zerlegt und der MSB-Anteil um 4 Stellen nach links geschoben. Die Multiplikation von x_i mit einem Filterkoeffizienten f kann dann durch folgende Operation beschrieben werden:

$$x_i f = \sum_{k=0}^{L-1} 2^{kL} (\alpha_{k,i} f). \quad (7.7)$$

Werden die Produkte $\alpha_{k,i} f$ für alle möglichen Werte von α im Voraus berechnet, kann (7.7) durch wenige Schiebeoperationen und Additionen dargestellt werden. Explizit müssen die Ergebnisse für $\alpha = \{1, 3, \dots, N-1\}$ vorrausberechnet werden, die restlichen können durch Verschiebeoperationen gewonnen werden. Für Vorzeichen/Betrag-kodierte Dualzahlen ist die Architektur zur Multiplikation eines 8 Bit Eingangssignals x_k mit einem 8 Bit Koeffizienten in Bild 7.8 dargestellt. Der Koeffizient sei hier 150, bzw. in dualer Darstellung 10010110. Der MSB-Anteil α_1 ist dual 1001, der LSB-Anteil α_0 beträgt 0110. Der Anteil α_0 wird als $0011 \ll 1$ dargestellt, wobei $x \ll n$ bedeutet, dass x dual um n Positionen nach links geschoben wird. Die Berechnung der vorrausberechneten Werte kann durch wenige Additions- und Verschiebeoperationen geschehen, so wird etwa $11x$ als $x \ll 3 + 3x$ dargestellt.

Wesentlich häufiger als die Vorzeichen/Betrag-Darstellung, wird die Kodierung im Zweierkomplement verwendet. Hier ergibt sich das Vorzeichen der Zahl durch das MSB, wobei Null einer positiven und Eins einer negativen Zahl entspricht. Null selbst wird als positiv aufgefasst. Insgesamt entsteht so eine unsymmetrische Zahlendarstellung. Eine N -Bit Zahl wird folgendermaßen dargestellt:

$$A = -2^{N-1} a_{N-1} + \sum_{i=0}^{N-2} 2^i a_i. \quad (7.8)$$

Eine negative Zahl $-A$ wird durch Komplementbildung von A und anschließender Addition von Eins erzeugt:

$$-A = 1 - 2^{N-1} \overline{a_{N-1}} + \sum_{i=0}^{N-2} 2^i \overline{a_i}. \quad (7.9)$$

Ein Vorteil der Zweierkomplementdarstellung besteht darin, dass positive und negative Zahlen

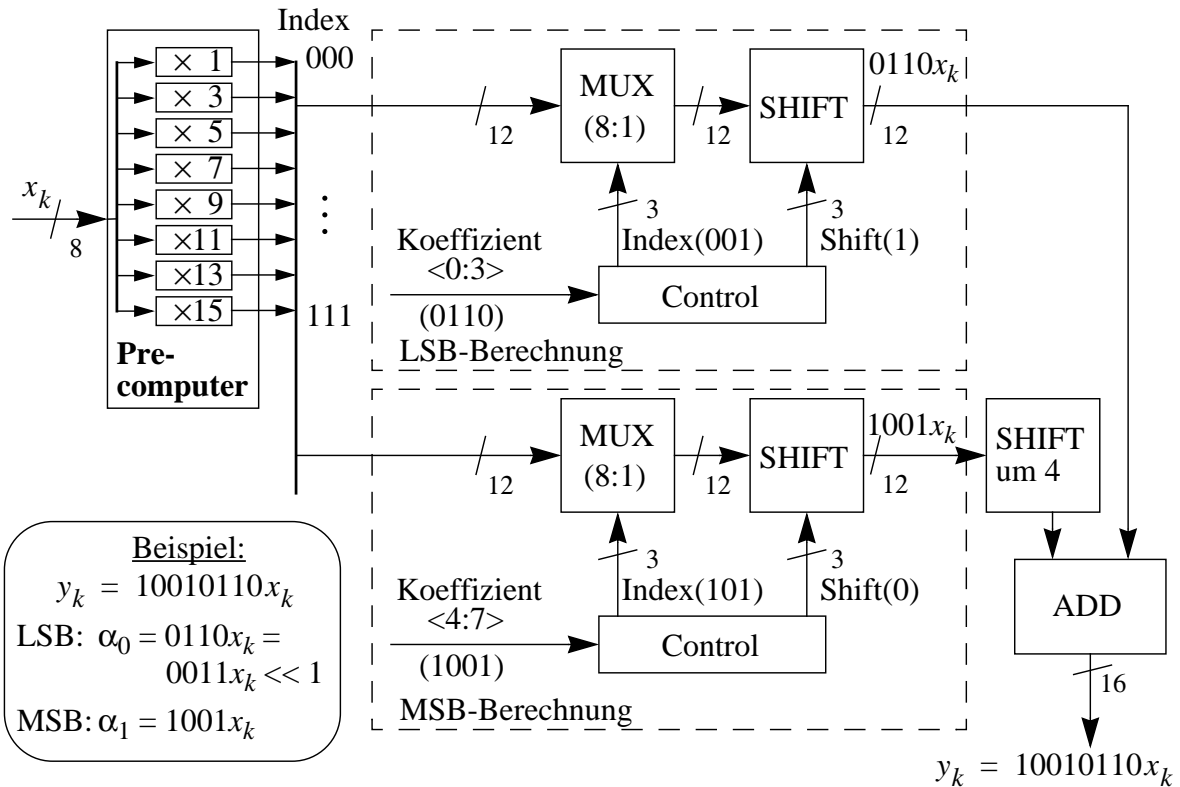


Bild 7.8: Multiplizierarchitektur mit verteilter Berechnung

direkt addiert werden können.

Durch Anwendung der Rechenregel (7.9) kann das $2N - 1$ -Bit lange Produkt zweier N -Bit Zahlen $P = AB$ durch die Summe positiver Bitprodukte dargestellt werden [13], [29]:

$$P = \sum_{i=0}^{N-2} \sum_{j=0}^{N-2} 2^{i+j} + 2^{2N-2} a_{N-1} b_{N-1} + 2^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{N-2} 2^i \overline{a_i b_{N-1}} + \sum_{j=0}^{N-2} 2^j \overline{b_j a_{N-1}} \right) + 2^N - 2^{2N-1} \quad (7.10)$$

Die Subtraktion von 2^{2N-1} entspricht nach (7.9) hierbei der Addition einer Eins an der MSB-Stelle. Gleichung (7.10) wird als Baugh-Wooley-Algorithmus bezeichnet. Hiermit ist es möglich, die besprochene Architektur, die auf dem Verschieben der Partialprodukte beruht, für im Zweierkomplement kodierte Zahlen zu übernehmen. Für die Multiplikation von zwei 4-Bit Zahlen ist der Baugh-Wooley-Algorithmus in Bild 7.9 gezeigt. Zur Implementierung der Architektur muss noch berücksichtigt werden, dass beim Verschieben zusätzliche Korrekturvektoren addiert werden müssen, weil bei einer Verschiebung nach links um L Stellen die L LSB-Stellen des Multiplikanden Null sind, so dass durch die NAND-Operation mit dem Vorzeichen des Multiplikators Einsen erzeugt werden [29].

Die beschriebene Technik kann einfach auf andere Filterstrukturen angewandt werden, etwa auf FSE, die Farrow-Struktur oder auf Lattice Filter. Voraussetzung dafür, dass sie zu einer Reduzierung der Verlustleistung führt, ist allerdings, dass die Filterlängen genügend lang sind, so dass gleiche Eingangswerte mit ausreichend vielen Koeffizienten multipliziert werden.

				a_3	a_2	a_1	a_0
			\times	b_3	b_2	b_1	b_0
				a_3b_0	a_2b_0	a_1b_0	a_0b_0
	$+$			a_3b_1	a_2b_1	a_1b_1	a_0b_1
		$\overline{a_3b_2}$	$\overline{a_2b_2}$	a_1b_2	a_0b_2		
	a_3b_3	$\overline{a_2b_3}$	$\overline{a_1b_3}$	a_0b_3			
	1		1				
P_7	P_6	P_5	P_4	P_3	P_2	P_1	P_0

Bild 7.9: Multiplikation zweier 4-Bit Zahlen im Zweierkomplement mit dem Baugh-Wooley Algorithmus

7.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden Verfahren zur Minimierung der Verlustleistung auf verschiedenen Ebenen des Entwurfs behandelt. Grundsätzlich lassen sich auf höheren Ebenen meist größere Effekte erzielen, insgesamt ist ein Einsatz derartiger Methoden jedoch auf allen Entwurfebene sinnvoll [145]. Zunächst wurden verschiedene Methoden auf algorithmischer Ebene diskutiert. Die erste gezeigte Technik vereinfacht die Berechnung zur Nachführung der Koeffizientengewichte eines adaptiven Algorithmus durch Quantisierung der Eingangsgrößen. Für den LMS Algorithmus erwies sich hier vor allem eine Quantisierung in Zweierpotenzen als sinnvoll. Beim CMA erwies sich diese Art der Quantisierung als nicht praktikabel, da hier die Größe der Fehlerwerte nicht gaußverteilt ist. Hier erwies sich eine Quantisierung der Fehlerterms mit zusätzlichem Rauschterm als vorteilhaft, die zwar den EMSE erhöhen, das Verhalten des Algorithmus jedoch weitgehend unverändert lassen. Zu beachten ist, dass beim CMA, wie in Kapitel 6.2.2.2 beschrieben, die Größe des EMSE nicht entscheidend ist. Bessere Eigenschaften als dieser sogenannte Dithered Sign-Error CMA zeigte jedoch ein auf sogenannter Mid-Tread Quantisierung des Entzerrerausgangs beruhender Algorithmus. Diese Quantisierung hat zur Folge, dass der Entzerralgorithmus sich zu Beginn der Adaption ähnlich zum CMA verhält, bei geöffnetem Auge jedoch auch Verwandtschaft zum LMS zeigt. Bei dieser Art der Quantisierung können Multiplikationen, die zur Berechnung des Fehlerwerts erforderlich sind, durch Table Look-Up ersetzt werden. Ein weiterer Vorteil der beschriebenen Technik besteht darin, dass hier eine Quantisierung des Fehlerterms durch Vorzeichenbildung fast keine Verluste mit sich bringt, da dieser Term ohnehin nur quantisierte Amplitudenwerte annehmen kann. Insgesamt ist dieser sogenannte Sign-Error Mid-Tread CMA daher der am aufwandsärmsten zu implementierende, er weist andererseits aber mit die besten Eigenschaften auf.

Als weiteres wurden auf algorithmischer Ebene Techniken beschrieben, die auf einer gezielten Vereinfachung des Entzerrers im eingeschwungenen Zustand basieren und anwendbar sind, falls die erzielte BER geringer als gefordert ist. Somit kann die Anwendbarkeit derartiger Techniken nicht garantiert werden. Sie ist darüberhinaus gerade bei Transceivern, die am Ende einer langen Leitung liegen, und die daher eine hohe Sendeleistung aufweisen, kaum gegeben.

Auf Hardwareebene wurden verschiedene Implementierungsmethoden digitaler Filter aufgezeigt und verglichen. Für die Implementierung fraktionaler Entzerrer erweisen sich insbesondere FIFO Strukturen für die Speicherung der Eingangssignale als vorteilhaft, da diese insgesamt

die Schalzhäufigkeit verringern.

Schließlich wurde auf VLSI Ebene noch eine Technik zur Implementierung von Filterstrukturen beschrieben, die darauf beruht, dass hier gleiche Eingangsgrößen nacheinander mit verschiedenen Koeffizienten multipliziert werden, so dass bei Verwendung relativ langer Filter, durch die Bereitstellung von zu den Eingangswerten korrespondierenden Basisoperationen der Multiplikationen, insgesamt Verlustleistung eingespart werden kann.

8 Diskussion und Ausblick

Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit liegt auf Empfängern für einzelträgerbasierte leitungsgebundene Übertragungssysteme, wobei schwerpunktmäßig eine Signalverarbeitung im Bandpassbereich betrachtet wurde. Näher betrachtet wurde die rein digitale Realisierung eines Systems zur Abstratenumsetzung, das insbesondere bei einer Bandpassverarbeitung Probleme bereitet, sowie die referenzdatenfreie Entzerrung. Darüberhinaus wurde der Start des gesamten Empfängers untersucht.

Bei der Entwicklung nachrichtentechnischer Systeme werden allgemein große Anstrengungen unternommen, um einen möglichst großen Anteil der Funktionalität digital realisieren zu können. Hauptgründe dieser Bestrebungen sind etwa eine bessere Kosteneffizienz, sowie geringere, durch Alterung der Bauelemente hervorgerufene Probleme, die eine digitale Schaltung im Vergleich zu einer analogen aufweist. Darüberhinaus kann eine digitale Schaltung wesentlich einfacher rekonfigurierbar gestaltet werden.

Eine wichtige Möglichkeit zur Reduktion des Anteils an analogen Bauelementen bietet die rein digitale Realisierung eines Systems zur Abstratenumsetzung, die es erlaubt, den A/D Wandler mit einer ungesteuerten Abtastfrequenz zu betreiben. Die zur weiteren Verarbeitung erforderlichen im Verarbeitungstakt abgetasteten Empfangssignale werden aus den Abtastwerten dann durch digitale Filterung gewonnen. Dieses Vorgehen erlaubt zum einen die rein digitale Realisierung des Taktregelkreises und zum anderen die Verwendung einer beliebigen Verarbeitungsfrequenz, so dass etwa die Symbolrate und damit die Übertragungsbandbreite frei wählbar gestaltet werden kann.

Die Signalverarbeitung in einem digitalen Sender, bzw. Empfänger kann prinzipiell sowohl im Bandpass-, als auch im Basisbandbereich erfolgen. Bei einer rein digitalen Abstratenumsetzung besteht ein Vorteil der Verarbeitung im Basisbandbereich darin, dass hier zwischen den Abtastwerten liegende Signalwerte - zumindest bei einer reellwertigen Signalverarbeitung - prinzipiell einfacher gewonnen werden können, da sich das zugrundeliegende zeitkontinuierliche Signal im Basisbandbereich weniger schnell verändert, als das entsprechende auf eine Trägerfrequenz modulierte Signal. Nachteilig ist, dass zum einen Operationen zur Erzeugung des Basisbandsignals erforderlich sind und dass zum anderen dadurch, dass das Basisbandsignal allgemein komplexwertig ist, der Inphase- und Quadraturanteil dieses Signals getrennt auf die neue Verarbeitungsrate umgesetzt werden muss. Ein allgemeiner Vergleich, welches Verfahren insgesamt aufwandsärmer implementierbar ist, lässt sich allerdings nur bedingt treffen, da der erforderliche Aufwand sehr stark von der Systemumgebung abhängig ist. Auch sind nahezu beliebig viele Möglichkeiten zur Konstruktion eines System zur Abstratenumsetzung vorhanden. In dieser Arbeit wurde ein grober Implementierungsvergleich gegeben, der verschiedene Systeme anhand der erforderlichen Additions- und Multiplikationsoperationen vergleicht. Weitere Parameter, wie etwa der Speicherbedarf oder die verwendeten Wortbreiten, blieben bei dieser Abschätzung allerdings unberücksichtigt. Der durchgeführte Vergleich deutet an, dass man durch Signalverarbeitung im Bandpassbereich unter gewissen Umständen zu einem Gesamtsystem gelangen kann, das aufwandsärmer implementierbar ist als ein vergleichbares Basisbandsystem. Wichtigste Voraussetzung hierfür ist, dass das Übertragungsband im Vergleich zur Abtastfrequenz des A/D Wandlers bei nicht zu hohen Frequenzen angesiedelt ist. Diese Bedingung ist bei einem einzelträgerbasierten VDSL System nach ETSI [176], unter der Annahme, dass alle Signalbänder mit der gleichen Frequenz abgetastet werden, zumindest für beide Up-

stream Bänder sowie das untere Downstream Band gegeben. Unter Umständen kann die Einhaltung dieser Bedingung auch dadurch erzwungen werden, dass in einem ersten Schritt der Abtastratenumsetzung die Abtastfrequenz erhöht wird. Insgesamt sind für das Treffen genauerer Aussagen jedoch weitere Untersuchungen erforderlich, wobei sich spezielle Aussagen ohnehin nur anhand einer praktischen Realisierung treffen lassen.

In dieser Arbeit wurden drei verschiedene Methoden zum Entwurf digitaler Filter zur Abtastratenumsetzung beschrieben, die die ideale, nicht realisierbare Filterübertragungsfunktion approximieren. Hierbei wurden neben den aus der Literatur bekannten Entwurfsmethoden für Filter die im Basisbandbereich operieren, auch Erweiterungen dieser Methoden für Bandpassfilter angegeben. Als günstige Entwurfsmethoden erwiesen sich die auf einer Approximation der Zielfunktion im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate, sowie im Chebychev Sinne beruhenden Verfahren. Beide Techniken verwenden die Eckfrequenzen des Übertragungsbandes als Entwurfsparameter und sind daher meist dem dritten untersuchten Verfahren überlegen, bei dem die Zielfunktion lediglich bei einer speziellen Frequenz optimal angenähert wird.

Zur Implementierung wurden zwei verschiedene Techniken verglichen. Bei der ersten wird die fein aufgelöste Impulsantwort des zugrundeliegenden zeitkontinuierlichen Filters gespeichert. Als Parameter des digitalen Abtastratenumsetzfilters wird dann zu jedem Zeitschritt derjenige Koeffizientensatz geladen, der zu einer Verzögerung führt, die die geringste Differenz zur aktuell geforderten hat. Dieses Verfahren kann dadurch verbessert werden, dass der verwendete Koeffizientensatz durch Interpolation aus mehreren benachbarten gespeicherten Koeffizientensätzen gewonnen wird.

Eine zweite betrachtete Realisierung basiert auf einer abschnittsweise polynomischen Approximation der Filterimpulsantwort. Durch die sogenannte Farrow-Struktur ist eine günstige Implementierung dieses Verfahrens gegeben. Diese weist den Vorteil auf, dass im laufenden Betrieb die Filterparameter konstant sind. Durch günstige Wahl der Basispolynome kann von Symmetriebedingungen der Impulsantwort Gebrauch gemacht und so die erforderliche Anzahl an Multiplikationsoperationen minimiert werden. Mit der ursprünglich angegebenen Farrow-Struktur ist lediglich eine Anti-Image Filterung möglich, eine vor kurzem vorgeschlagene Modifikation erlaubt jedoch auch die Realisierung einer Anti-Aliasing Filterung, wodurch sich diese Technik sehr gut zur Implementierung eines Filters zur Abtastratenumsetzung eignet. In dieser Arbeit wurden Methoden zur Generierung der Parameter einer Farrow-Struktur Realisierung der durch die beschriebenen Entwurfsmethoden gewonnenen Filter hergeleitet. Beim Least Squares Entwurf sowie beim maximal flachen Entwurf lassen sich die Koeffizienten prinzipiell in geschlossener Form berechnen. Allgemein ist eine Approximation der gesuchten Parameter durch Kurvenanpassung möglich, bei der zunächst zu verschiedenen Verzögerungen korrespondierende Filter berechnet werden und aus diesen dann durch Minimierung des quadratischen Fehlers die Koeffizienten der polynomischen Approximation gewonnen werden.

Ein Vergleich der verschiedenen Filterentwurfsmethoden zeigte, dass auch bei einer Signalverarbeitung im Bandpassbereich bis zu relativ hohen Mittenfrequenzen verhältnismäßig aufwandsarm implementierbare Filter zur Erzielung einer adäquaten Performance ausreichend sind, sofern von der Methode der Anti-Aliasing Filterung Gebrauch gemacht wird.

Nachdem etwa durch Anwendung eine der beschriebenen Techniken die Abtastwerte des Empfangssignals in einem Vielfachen des Symboltaktes vorliegen, kann die weitere Verarbeitung erfolgen. Entscheidend zur Minimierung der Bitfehlerrate ist, dass die Summe von Intersymbolinterferenzen und Rauschen minimiert wird. Somit können die Sendedaten mit hoher Wahrscheinlichkeit aus dem Empfangssignal zurückgewonnen werden. Neben der beschriebenen rein auf Entzerrung beruhenden Technik gibt es eine Reihe anderer, die die Erzielung einer niedrigeren Bitfehlerrate erlauben, wie etwa die in Kapitel 2.3 erwähnte MLSE, bzw. die sogenannte Turbo Entzerrung, bei der Entzerrer und Dekodierer auf sequentielle Art intrinsische In-

formation austauschen. Diese Techniken sind jedoch in der Praxis derzeit kaum realisierbar. Durch die Fortschritte der Mikroelektronik ist eine Einsetzbarkeit derartiger Verfahren in der Zukunft jedoch absehbar.

Zunächst wurden für verschiedene Entzerrer Berechnungsvorschriften der Koeffizientengewichte angegeben, die zu einer Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers führen. Betrachtet wurden lineare, sowie entscheidungsrückgekoppelte Entzerrer, deren Eingangssignale im Symboltakt, bzw. in einem Vielfachen davon abgetastet sind. Interessant ist hierbei, dass im Grenzfall unendlicher langer Entzerrer, sowie bei weißem Rauschen, die optimalen Koeffizientengewichte eines linearen IIR Entzerrers mit dem eines DFE übereinstimmen. In diesem Fall erfolgt die Amplitudenentzerrung durch das Rückkoppelndfilter, während das Vorwärtsfilter die Phase entzerrt. Bei dem Vorhandensein farbigen Rauschens lassen sich diese Ergebnisse erweitern, indem ein weiteres Filter zur Rauschdekorrelation eingeführt wird, das Bestandteil des Vorwärtsfilters ist.

Wird eine Trainingssequenz übertragen oder sind die Parameter des Entzerrers bereits nahe am Optimum, kann die Adaption im entscheidungsgestützten Modus, etwa durch den LMS Algorithmus erfolgen. Bei der Standardisierung einzelträgerbasierter Übertragungssysteme wird jedoch in der Regel keine Trainingssequenz mehr vereinbart, so dass der Systemstart referenzdatenfrei, bzw. blind erfolgen muss. Dies bringt eine Reihe von Vorteilen mit sich, so wird etwa die Prozedur beim Systemstart insgesamt vereinfacht. In einem Punkt-zu-Multipunkt Szenario erhöht sich auch die erzielbare Nettodatenrate. Dies ist auch bei VDSL gegeben, wenn an einem Teilnehmeranschluss mehrere Transceiver betrieben werden. Bei DMT gestaltet sich die Realisierung eines Systemstart ohne die Verwendung einer bekannten Symbolfolge wesentlich aufwändiger als bei einzelträgerbasierten Verfahren. Die Ermöglichung eines blinden Systemstarts war daher ein wichtiges Argument für die Wahl von QAM/CAP als Modulationsverfahren, das im Rahmen der Standardisierung von VDSL von den entsprechenden Interessensgruppen ins Feld geführt wurde.

In dieser Arbeit wurde zunächst dasjenige Verfahren bestimmt, das für die blinde Entzerrung eines Transversalentzerrers in der betrachteten Systemumgebung am vorteilhaftesten erscheint. Die Wahl fiel hier auf den CMA, der zum einen nur eine geringfügig höhere Implementierungskomplexität als der LMS Algorithmus aufweist und zum anderen unter idealen Bedingungen zum globalen Minimum der LMS Kostenfunktion konvergiert. Auch bei Verletzungen der idealen Bedingungen zeigt der CMA grundsätzlich ein gutes Systemverhalten. Der einzige Nachteil, den dieser Algorithmus allerdings mit fast allen blinden Entzerralgorithmen teilt, liegt darin, dass er kritisch auf die Wahl der Initialisierung reagiert, da diese implizit die Systemverzögerungen bestimmt. Daher ist es sinnvoll, beim Systemstart den Entzerrer nacheinander so zu initialisieren, dass die insgesamt günstigste Systemverzögerung gefunden werden kann. Hierfür erweist sich eine Variante des CMA als vorteilhaft, bei der durch ein zusätzliches Filter zunächst das Eingangssignal dekorreliert wird, da somit durch koeffizientenweises Verschieben der Gewichte eines mit beliebiger Initialisierung adaptierten Entzerrers die zu einer gewünschten Systemverzögerung korrespondierenden Koeffizientengewichte gewonnen werden können, die als neue Startlösung dienen können.

Die beschriebene Dekorrelation kann etwa anhand eines rein rekursiven Prediktionsfilters erfolgen, das als Amplitudenentzerrer interpretiert werden kann. Zu seiner Adaption wurden verschiedene Algorithmen verglichen. Es erwies sich gerade der Algorithmus mit der geringsten Komplexität, der sogenannte Feintuch Algorithmus, am vorteilhaftesten, da für diesen zum einen Stabilität garantiert werden kann und weil er zudem unabhängig von der Filterlänge gute Konvergenzeigenschaften aufweist.

Soll der CMA in einem System mit hoher Symbolrate eingesetzt werden, sind meist Vereinfach-

chungen der Berechnungsvorschrift erforderlich, da dieser Algorithmus einen sehr langen kritischen Pfad aufweist.

Eine derartige Möglichkeit besteht darin, vom berechneten Fehlerterm nur das Vorzeichen zu verwenden. In dieser Grundform ist das Verhalten des Algorithmus allerdings unter Umständen sehr schlecht. Durch Addition eines zusätzlichen Rauschterms kann das Quantisierungsrauschen, das durch die Vorzeichenbildung hervorgerufen wird, jedoch weiß und unkorreliert zu den Eingangssignalen des Algorithmus geformt werden. Somit weist der Algorithmus im Mittel ein Systemverhalten auf das identisch zum originalen CMA ist, allerdings vergrößert sich der EMSE. Dieser EMSE ist bei einem blinden Verfahren allerdings nicht von primärer Bedeutung, wichtiger ist, dass die sich einstellenden Koeffizientengewichte nahe am theoretischen Optimum liegen. Die Erzeugung des zusätzlichen Rauschens und der damit erforderliche Aufwand wurde im Rahmen dieser Arbeit nicht beachtet.

Eine weitere Möglichkeit der Vereinfachung besteht in der Quantisierung des Entzerrerausgangssignals $y(n)$. Interessanterweise sind durch eine derartige Quantisierung Varianten des CMA möglich, die ein besseres Systemverhalten aufweisen als die nicht quantisierte Version. Dies wurde in Kapitel 7 derartig gedeutet, dass der Algorithmus sich beim Start der Adaption ähnlich zum CMA verhält, später jedoch auch Eigenschaften eines entscheidungsgestützten Algorithmus aufweist. Somit ist mit diesem Algorithmus ein sanfter Übergang von der Startphase in den entscheidungsgestützten Modus möglich. Es soll hier allerdings betont werden, dass nicht gezeigt wurde, dass dieser Algorithmus keine kostenabhängigen lokalen Minima aufweist. Plausibilitätsannahmen, sowie Simulationsergebnisse legen dies zwar nahe, trotzdem sollte dieser Algorithmus theoretisch noch besser durchleuchtet werden. Durch eine weitere Quantisierung des mit diesem Algorithmus erzeugten Fehlerterms verändert sich das Verhalten des Algorithmus nur wenig, allerdings sinkt der Implementierungsaufwand ganz erheblich.

Die referenzdatenfreie Adaption eines DFE gestaltet sich im allgemeinen schwieriger als die eines linearen Entzerrers. Dies liegt darin begründet, dass, falls die Koeffizientengewichte weit vom Optimum entfernt liegen, der im Rückkoppelzweig des Entzerrers befindliche Entscheider in der Regel relativ viele Fehlentscheidungen produziert, wodurch die Konvergenz zu einer falschen Konstellation führen kann. Durch die Verwendung von Soft-Entscheidungen kann die Wahrscheinlichkeit dafür zwar minimiert werden, dies ist jedoch im allgemeinen nicht ausreichend. Daher wurde zusätzlich die Generierung von Startkoeffizienten vorgeschlagen. Hierfür wird ein linearer rekursiver Entzerrer angesetzt, bei dem im Rückführzweig keine Entscheidung stattfindet. Wie bereits beschrieben, sind unter bestimmten Bedingungen die Koeffizienten eines rekursiven MMSE Entzerrers identisch zu denen des MMSE-DFE. Die erforderlichen Bedingungen sind, dass zum einen weißes Rauschen am Entzerrereingang anliegt und zum anderen, dass das Vorwärtsfilter des Entzerrers beliebig lang ist. Beide Bedingungen sind in praktisch realisierbaren Systemen in der Regel verletzt, so dass die gefundenen Startlösungen nur näherungsweise den optimalen Koeffizientengewichten eines DFE entspricht. In der Arbeit wurden zwei verschiedene Techniken zur Erzeugung eines Startkoeffizientensatzes untersucht. Die erste verwendet als Startlösung direkt den Koeffizientensatz, der sich bei Adaption des Prewhitened CMA ergibt. Voraussetzung ist, dass die Dekorrelation anhand eines rein rekursiven Filters erfolgt, andernfalls muss der sich ergebende Parametersatz für die Verwendung als DFE Initialisierungsvektor umgerechnet werden. Ein Nachteil dieses Verfahrens besteht darin, dass bei einer Signalverarbeitung im Bandpassbereich die Aufteilung des Empfangssignals in Inphase- und Quadraturkomponente hier explizit erfolgen muss, etwa indem ein Hilbert Transformator vorgeschaltet wird. Theoretisch sind die Koeffizientensätze der beiden Zweige des Vorwärtsfilters dann identisch, so dass unter Umständen nur eine Einheit zum Nachführen der Koeffizienten erforderlich ist. Zumindest in der Startphase kann ein Einsatz dieser Technik erfolgversprechend sein. Im normalen Betrieb des DFE kann der Vorwärtsfilter dann die Auftei-

lung des Eingangssignals wieder implizit vornehmen, was etwa dadurch erreicht werden kann, dass die Koeffizienten des Hilbert Filters allmählich zu Null gesetzt werden. Bei der zweiten beschriebenen Technik wird zur Adaption des Start-Entzerrers ein IIR-CMA verwendet. Somit werden beide Filter des IIR Entzerrers hier anhand des gleichen Kriteriums adaptiert. Wie beim rekursiven LMS Algorithmus können auch hier Vereinfachungen basierend auf sogenannten Feintuch Updates angegeben werden, die das Verhalten des Algorithmus kaum beeinflussen. Da für diesen Algorithmus die Stabilität bis jetzt nicht bewiesen werden konnte, wurde in dieser Arbeit eine Implementierung in Lattice Filter Struktur vorgeschlagen, die eine einfache Beobachtung der Filtereigenschaften zulässt. Da ein DFE hingegen grundsätzlich ein stabiles Verhalten zeigt, wurde noch eine Berechnungsvorschrift zur Umrechnung des Koeffizientensatzes des Lattice Filters in den des entsprechenden direkten Filters angegeben. Anhand von Simulationen zeigten beide beschriebenen Algorithmen sehr ähnliche Eigenschaften. Somit kann die Wahl des eingesetzten Algorithmus etwa aufgrund der Systemparameter erfolgen. Ist das Übertragungsband nahe an der halben Nyquistfrequenz, so dass beim Systemstart die beschriebene Low Power Methode angewandt werden kann, bzw. erfolgt die Signalverarbeitung im Basisband, wird vorgeschlagen vom sogenannten Whitening Approach Gebrauch zu machen. Andererseits wird vorgeschlagen, den IIR-CMA zu verwenden, der in Lattice Filter Implementierung zwar etwas aufwändiger ist, dafür aber kein zusätzliches Hilbert Filter erfordert.

Die blinde Entscheidung des Modulationsverfahrens zwischen QAM und CAP wird in manchen Standards gefordert, bzw. wird dies diskutiert. Bei einer Entzerrung im Bandpassbereich gestaltet sich dies sehr einfach, da sich beide Verfahren hier nur durch das Zuschalten, bzw. Weglassen einer zusätzlichen Symbolrotation unterscheiden. Nachdem der CMA grundsätzlich rotationsinvariant ist, und zudem die erforderliche Trägerphasenregelung ein sehr schnelles Einschwingverhalten aufweist, kann bei einem Transversalentzerrer durch wiederholtes Zu-, bzw. Abschalten des Symbolrotierers und gleichzeitiger Messung des sich ergebenden MSE sehr einfach auf das im Sender eingesetzte Modulationsverfahren geschlossen werden. Doch auch bei der blinden Adaption eines DFE ist diese Entscheidung relativ einfach. Bei Verwendung des Whitening Approach wird das Rückkoeffizientenfilter anhand einer Dekorrelation eingestellt, die lediglich anhand von Statistiken zweiter Ordnung erfolgt und somit keinerlei Phaseninformation auswertet. Bei Verwendung des IIR-CMA wird wieder von der Rotationsinvarianz des CMA Gebrauch gemacht. Bei beiden Verfahren müssen allerdings die Koeffizientengewichte des Rückkoeffizientenfilter bei Umschalten in den DFE Modus umgerechnet werden, falls das Modulationsverfahren QAM ist, da in diesem Fall die Symbolrotation vor der Entscheidung erfolgt.

In dieser Arbeit wurde anhand von Simulationen gezeigt, dass anhand der beschriebenen Techniken der Systemstart bei unbekanntem Kanal und nicht perfekter Takt- und Trägersynchronisation referenzdatenfrei erfolgen kann. Als Taktregelkriterium wurde hier von einer Spectral Line Methode Gebrauch gemacht, diese wurde jedoch nicht optimiert. Somit wurde hier auch kein Vergleich zwischen Entzerrung im Basisband- und Bandpassbereich gegeben. Unter Umständen kann mit der beschriebenen Technik auch bei Entzerrung im Basisbandbereich die Synchronisation in der Startphase im Bandpassbereich erfolgen. Dies kann vor allem dann vorteilhaft eingesetzt werden, wenn die Entzerrung im Symboltakt erfolgt, da keine Techniken bekannt sind, die eine Taktsynchronisation anhand von nicht entschiedenen Signalen im T -Raster durchführen können.

Aus verschiedenen Gründen gewinnt eine verlustleistungsarme Implementierung immer mehr an Bedeutung. Zu diesen Gründen gehören etwa Probleme, die durch die Wärmeentwicklung der Bauteile auftreten, sowie Begrenztheit der Kapazität bzw. Leistung der Stromversorgung

bei portablen, bzw. ferngespeisten Geräten. In dieser Arbeit wurden verschiedene Techniken erläutert, die zu einer verlustleistungsarmen Implementierung beitragen. Wie beim CMA können auch beim LMS Algorithmus algorithmischen Vereinfachungen durch Quantisierung der Eingangssignale durchgeführt werden. Die Verschlechterungen die eine derartige Vereinfachung mit sich bringt, können weitgehend durch die Verwendung einer variablen Schrittweite ausgeglichen werden. Weitere Vereinfachungen können getroffen werden, falls die erreichte BER geringer als gefordert ist. In diesem Fall können etwa die verwendeten Entzerrer, bzw. die Wortbreiten der implementierten Register verkleinert werden. Nachteilig an diesen Techniken ist, dass deren Verwendbarkeit nicht garantiert werden kann. Kritisch angemerkt werden muss vor allem, dass diese Verfahren gerade dann kaum anwendbar sind, wenn der Transceiver in einer relativ schlechten Systemumgebung betrieben wird und somit die erforderliche Sendeleistung relativ hoch ist. Dies ist jedoch genau dann der Fall, wenn eine Minimierung der Verlustleistung dringend erforderlich scheint.

Weitere Maßnahmen zur Begrenzung der Leistungsaufnahme wurden auf Hardware- und VLSI-Ebene vorgestellt. Auch auf Transistorebene kann, etwa durch die Absenkung der Schwellspannung, Verlustleistung eingespart werden. Dies hat etwa Auswirkungen auf die Geschwindigkeit der verwendeten Operationen. Somit besteht eine vielversprechende Technik darin, Transistoren zu verwenden die verschiedene Schwellspannungen aufweisen und zeitlich kritische Operationen aus Transistoren hoher Schwellspannung aufzubauen, unkritischere hingegen mit geringerer Schwellspannung. Auf derartige Betrachtungen wurde in dieser Arbeit jedoch nicht näher eingegangen, da dies stark von der verwendeten Technologie sowie den vorhandenen Bauteil-Bibliotheken abhängt.

Betrachtungen zu analogen Komponenten fanden in dieser Arbeit nur am Rande statt. Zwar erlauben die Fortschritte der Mikroelektronik eine fortschreitende digitale Realisierung der Funktionalität, jedoch bleibt immer noch ein wichtiger Anteil, der analog realisiert werden muss und der in der Regel einen beträchtlichen Beitrag zur Verlustleistung liefert. Hierzu gehören neben Verstärkern und Wandlern etwa analoge Empfangsfilter, die nicht nur zur Einhaltung des Abtasttheorems erforderlich sind, sondern deren Aufgabe auch darin besteht, die Leistung in Nachbarkanälen zu reduzieren und somit zum einen eine geringere Auflösung des A/D Wandlers zu ermöglichen und zum anderen die digitale Signalverarbeitung entscheidend zu vereinfachen. Insgesamt gilt es, einen guten Abtausch zu finden zwischen dem Aufwand, der in analoge und in digitale Komponenten investiert wird.

Appendix

A.1 Ableitung nach komplexwertigen Größen

Für analytische Funktionen f , die den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen genügen [18] gelten folgende Bedingungen für die Ableitung nach einer komplexen Größe $w = w^R + jw^I$

$$\frac{\partial}{\partial w^R} f^R = \frac{\partial}{\partial w^I} f^I, \quad \frac{\partial}{\partial w^R} f^I = -\frac{\partial}{\partial w^I} f^R. \quad (\text{A.1})$$

Somit verschwindet die Ableitung von f nach w^* . Diese Funktionen sind im Sinne der klassischen Funktionentheorie differenzierbar. Die in dieser Dissertation häufig vorkommende Funktion $f(z) = |z|^2 = zz^*$ genügt jedoch nicht den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen. Derartige Funktionen sind allerdings nach der allgemeinen Ableitungsregel [72]

$$\frac{\partial f}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial w^R} - j \frac{\partial}{\partial w^I}, \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial f}{\partial w^*} = \frac{\partial}{\partial w^R} + j \frac{\partial}{\partial w^I} \quad (\text{A.2})$$

differenzierbar. Identisch gilt für die Ableitung nach einem komplexwertigen Vektor $\mathbf{w} = \mathbf{w}^R + j\mathbf{w}^I$ der Länge l die allgemeingültige Formel [72]

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial w_0^R} - j \frac{\partial}{\partial w_0^I} \\ \frac{\partial}{\partial w_1^R} - j \frac{\partial}{\partial w_1^I} \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial w_{L-1}^R} - j \frac{\partial}{\partial w_{L-1}^I} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

sowie nach dem konjugiert komplexen Vektor $\mathbf{w}^* = \mathbf{w}^R - j\mathbf{w}^I$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}^*} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial w_0^R} + j \frac{\partial}{\partial w_0^I} \\ \frac{\partial}{\partial w_1^R} + j \frac{\partial}{\partial w_1^I} \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial w_{L-1}^R} + j \frac{\partial}{\partial w_{L-1}^I} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Der Operator (A.4) wird allgemein als Gradient bezüglich eines komplexwertigen Vektors \mathbf{w}

bezeichnet und auch als $\nabla_{\mathbf{w}}$, bzw. nur ∇ geschrieben. Speziell gilt für die Betragsfunktion $|\mathbf{w}|^2 = \mathbf{w}^H \mathbf{w}$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}^*} \mathbf{w}^H \mathbf{w} = \mathbf{w}, \quad (\text{A.5})$$

sowie für den allgemeineren Fall der quadratischen Form $\mathbf{w}^H \mathbf{A} \mathbf{w}$, wobei \mathbf{A} eine beliebige hermitesche Matrix ist,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}^*} \mathbf{w}^H \mathbf{A} \mathbf{w} = 2\mathbf{A} \mathbf{w}. \quad (\text{A.6})$$

A. 2 Ableitung des Betragsquadrates des Entzerrerausgangssignals nach den Entzerrerkoeffizienten

In diesem Abschnitt wird das Betragsquadrat des Ausgangssignals eines adaptiven Entzerrers nach den Entzerrerkoeffizienten abgeleitet. Diese Ableitung wird etwa in Kapitel 6.2.2 zur Berechnung des CMA für transversale Entzerrter und in Kapitel 6.2.3 für rekursive Entzerrter verwendet. Nach den Regeln von Appendix 1 gilt mit für die Ableitung von $|y(n)|^2$ nach \mathbf{f}^* :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{f}^*} |y(n)|^2 &= 2 \left(y^{\text{R}}(n) \frac{\partial}{\partial \mathbf{f}} y^{\text{R}}(n) + y^{\text{I}}(n) \frac{\partial}{\partial \mathbf{f}} y^{\text{I}}(n) \right) = \\ &2 \left(\underbrace{y^{\text{R}}(n) \frac{\partial}{\partial \mathbf{f}^{\text{R}}} y^{\text{R}}(n)}_{\mathbf{t}^{(1)}(n)} + \underbrace{y^{\text{I}}(n) \frac{\partial}{\partial \mathbf{f}^{\text{R}}} y^{\text{I}}(n)}_{\mathbf{t}^{(2)}(n)} + \underbrace{j y^{\text{R}}(n) \frac{\partial}{\partial \mathbf{f}^{\text{I}}} y^{\text{R}}(n)}_{\mathbf{t}^{(3)}(n)} + \underbrace{j y^{\text{I}}(n) \frac{\partial}{\partial \mathbf{f}^{\text{I}}} y^{\text{I}}(n)}_{\mathbf{t}^{(4)}(n)} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Bei der Verwendung eines transversalen Entzerrers gilt $y(n) = \mathbf{f}(n)^T \mathbf{r}(n)$, so dass sich (A.7) hier zu

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{f}^*} |y(n)|^2 = 2y(n) \mathbf{r}(n) \quad (\text{A.8})$$

vereinfacht. Bei Verwendung eines rein rekursiven Entzerrers nach (6.21)

$$y(n) = \mathbf{b}(n-1)^T \mathbf{r}(n) - \mathbf{a}(n-1)^T \mathbf{y}(n-1) \quad (\text{A.9})$$

tritt - äquivalent zur Herleitung des rekursiven LMS in Kapitel 5.3 - das Problem auf, dass für die Berechnung zum Zeitpunkt n die Gradienten mit den Filterwerten zum Zeitpunkt $n-1$ berechnet werden müssen.

Für komplexwertige Eingangssignale $\mathbf{r}(n)$ des Entzerrers lässt sich (A.9) folgendermaßen in Real- und Imaginärteil aufspalten:

$$y_n^{\text{R}} = (\mathbf{b}_{n-1}^{\text{R}})^T \mathbf{r}_n^{\text{R}} - (\mathbf{b}_{n-1}^{\text{I}})^T \mathbf{r}_n^{\text{I}} + (\mathbf{a}_{n-1}^{\text{R}})^T \mathbf{y}_n^{\text{R}} - (\mathbf{a}_{n-1}^{\text{I}})^T \mathbf{y}_n^{\text{I}}, \quad (\text{A.10})$$

$$y_n^{\text{I}} = (\mathbf{b}_{n-1}^{\text{R}})^T \mathbf{r}_n^{\text{I}} + (\mathbf{b}_{n-1}^{\text{I}})^T \mathbf{r}_n^{\text{R}} + (\mathbf{a}_{n-1}^{\text{R}})^T \mathbf{y}_n^{\text{I}} + (\mathbf{a}_{n-1}^{\text{I}})^T \mathbf{y}_n^{\text{R}}. \quad (\text{A.11})$$

Unter der Standardannahme, dass die Konvergenz langsam verläuft, kann man näherungsweise setzen $\mathbf{a}(n-1) \cong \mathbf{a}(n)$ und $\mathbf{b}(n-1) \cong \mathbf{b}(n)$. Damit lassen sich die jeweils i -ten Komponenten der Vektoren $\mathbf{t}^{(1)}(n) - \mathbf{t}^{(4)}(n)$ in (A.7) für die Ableitung des Entzerrerausgangs nach $\mathbf{b}(n-1)$ schreiben als

$$\mathbf{t}^{(1)}_i(n) = y^{\mathbf{R}}(n) \left(\mathbf{r}^{\mathbf{R}}(n-i) + \sum_{k=1}^M \left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{b}_i^{\mathbf{R}}} y^{\mathbf{R}}(n-k) a^{\mathbf{R}}(k) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}_i^{\mathbf{R}}} y^{\mathbf{I}}(n-k) a^{\mathbf{I}}(k) \right) \right), \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{t}^{(2)}_i(n) = y^{\mathbf{I}}(n) \left(\mathbf{r}^{\mathbf{I}}(n-i) + \sum_{k=1}^M \left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{b}_i^{\mathbf{R}}} y^{\mathbf{R}}(n-k) a^{\mathbf{I}}(k) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}_i^{\mathbf{R}}} y^{\mathbf{I}}(n-k) a^{\mathbf{R}}(k) \right) \right), \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{t}^{(3)}_i(n) = jy^{\mathbf{R}}(n) \left(-\mathbf{r}^{\mathbf{I}}(n-i) + \sum_{k=1}^M \left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{b}_i^{\mathbf{I}}} y^{\mathbf{R}}(n-k) a^{\mathbf{R}}(k) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}_i^{\mathbf{I}}} y^{\mathbf{I}}(n-k) a^{\mathbf{I}}(k) \right) \right), \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{t}^{(4)}_i(n) = jy^{\mathbf{I}}(n) \left(\mathbf{r}^{\mathbf{R}}(n-i) + \sum_{k=1}^M \left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{b}_i^{\mathbf{I}}} y^{\mathbf{R}}(n-k) a^{\mathbf{I}}(k) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}_i^{\mathbf{I}}} y^{\mathbf{I}}(n-k) a^{\mathbf{R}}(k) \right) \right). \quad (\text{A.15})$$

Insgesamt gilt somit für $\frac{\partial}{\partial b_i^{(l)}} |y(n)|^2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b_i^{(l)}} |y(n)|^2 &= 2y^{\mathbf{R}}(n) \left(r^{(l)*}(n-i) + \sum_{k=1}^M \frac{\partial}{\partial b_i^{(l)}} (-y^{\mathbf{R}}(n-k) a^{\mathbf{R}}(k) + y^{\mathbf{I}}(n-k) a^{\mathbf{I}}(k)) \right) \\ &+ 2jy^{\mathbf{I}}(n) \left(r^{(l)*}(n-i) + \sum_{k=1}^M j \frac{\partial}{\partial b_i^{(l)}} (y^{\mathbf{R}}(n-k) a^{\mathbf{I}}(k) + y^{\mathbf{I}}(n-k) a^{\mathbf{R}}(k)) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Gleichung (A.16) lässt sich folgendermaßen vereinfachen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b_i^{(l)}} |y(n)|^2 &= 2y(n) r^{(l)*}(n-i) \\ &- 2y^{\mathbf{R}}(n) \Re \left(\sum_{k=1}^M \frac{\partial}{\partial b_i^{(l)}} (y^*(n-k) a^*(k)) \right) - 2y^{\mathbf{I}}(n) \Im \left(\sum_{k=1}^M \frac{\partial}{\partial b_i^{(l)}} (y^*(n-k) a^*(k)) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Unter Definition einer Variablen $\zeta_i^{(l)}(n)$, die gegeben ist durch

$$\zeta_i^{(l)}(n) = r^{(l)}(n-i) - \left(\sum_{k=1}^M a_k(n-1) \zeta_i^{(l)}(n-k) \right), \quad (\text{A.18})$$

lässt sich (A.17) schließlich schreiben als

$$\frac{\partial}{\partial b_i^{(l)}} |y(n)|^2 = 2y(n) \zeta_i^{(l)}(n)^*. \quad (\text{A.19})$$

Die Größe $\zeta_i^{(l)}(n)$ lässt sich hierbei als Ausgang eines rekursiven Filters mit dem Koeffizientenvektor $\mathbf{a}(n-1)$ und dem Eingangssignal $r^{(l)}(n)$ interpretieren. Analog kann für die Ableitung von $|y(n)|^2$ nach der i -ten Komponente von $\mathbf{a}(n)$ hergeleitet werden

$$\frac{\partial}{\partial a_i} |y(n)|^2 = -2y(n) \psi_i(n)^*, \quad (\text{A.20})$$

wobei $\psi_i(n)$ definiert ist als

$$\psi_i(n) = y(n-i) - \sum_{k=1}^M a_k(n-1)\psi_i(n-k) \quad (\text{A.21})$$

und $\psi(n)$ definiert werden kann als Ausgang eines rekursiven Filters mit dem Koeffizientenvektor $\mathbf{a}(n-1)$ und dem Eingangssignal $y(n)$.

A.3 Eigenschaften eines Quantisierers mit zusätzlichem Rauschterm

Bei der Analyse von Quantisierern wird zumeist auf das sogenannte lineare Modell zurückgegriffen, welches das Quantisierungsrauschen als Sequenz von normalverteilten Zufallsvariablen auffasst, die untereinander und mit dem Eingangssignal unkorreliert sind. Bild A.1 zeigt das resultierende additive Rauschmodell eines Quantisierers. Wie von Bennett [16] gezeigt wurde, ist dieses einfache Modell dann gültig, wenn die Anzahl an Quantisierungsstufen K groß, der Abstand zwischen den Quantisierungsstufen Δ klein und die Verteilungsdichtefunktion des Eingangssignals glatt ist. Der sowohl einfach zu beschreibende als auch zu realisierende Quantisierer ist deshalb in der Praxis erstaunlich schwierig analytisch beschreibbar, was in der Nichtlinearität seiner Kennlinie begründet liegt [62].

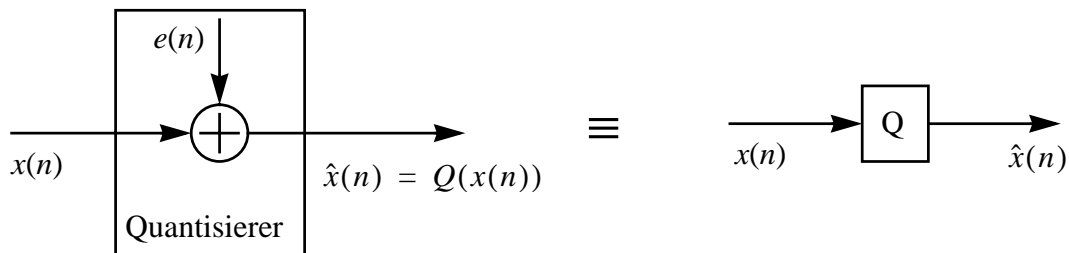


Bild A.1: Additives Rauschmodell eines Quantisierers

Die Standardimplementierung eines Dithered Quantizers zeigt Bild A.2a. Bei der in Bild A.2b gezeigten Variante wird das Rauschsignal nach der Quantisierung wieder abgezogen. Dies führt zwar zu verbesserten statistischen Eigenschaften, wird aber aus verschiedenen Gründen nur relativ selten eingesetzt [62]. Für die hier besprochene Anwendung ist sie unpraktikabel, weil der Wertebereich des Ausgangssignals nicht mehr diskret ist.

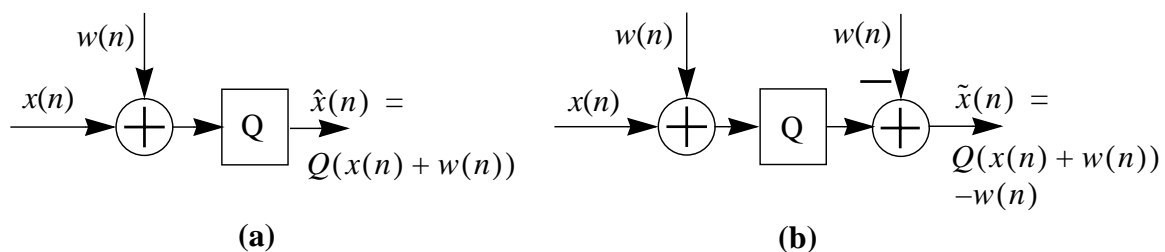


Bild A.2: Quantisierer mit additivem Rauschterm (Dithered Quantizer) in Standardausführung (Nonsubtractive Dither) (a) und mit nachträglicher Subtraktion des Rauschsignal (Subtractive Dither) (b)

Zwei Größen sind zur statistischen Beschreibung eines Quantisierers bedeutsam: Der Quanti-

sierungsfehler $e(n)$, der die Differenz zwischen Ausgang und Eingang des Quantisierers bezeichnet

$$e(n) = Q(x(n) + w(n)) - (x(n) + w(n)), \quad (\text{A.22})$$

sowie das Quantisierungsrauschen $\varepsilon(n)$, das den Gesamtfehler zwischen Ausgang und ursprünglichem Eingang $x(n)$ bezeichnet und durch folgende Gleichung gegeben ist

$$\varepsilon(n) = Q(x(n) + w(n)) - x(n) = e(n) + w(n). \quad (\text{A.23})$$

Die grundlegende statistische Eigenschaft eines dithered Quantizers wurde von Schuchman bewiesen [150]. Er zeigte, dass der Quantisierungsfehler $e(n)$ einheitlich in $(-\Delta/2, \Delta/2]$ verteilt und unkorreliert mit dem Eingangssignal $r(n)$ ist, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(B1) Der Quantisierer wird nicht übersteuert in dem Sinn, dass der Quantisierungsfehler betragsmäßig größer als $\Delta/2$ werden kann. Dies bedeutet, dass der Eingang des Quantisierers nicht größer als $N\Delta/2$ werden kann, wobei N die Anzahl der Stufen repräsentiert.

(B2) Die durch $M_w(ju) = E(e^{juw})$ gegebene charakteristische Funktion der PDF des zusätzlichen Rauschsignals hat Nullstellen bei Vielfachen von $2\pi/\Delta$.

Die Schuchman-Bedingung ist beispielsweise erfüllt, wenn das additive Rauschsignal gleichverteilt in $(-\Delta/2, \Delta/2]$ ist. Die charakteristische Funktion hat dann die Form

$$M_w(ju) = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{e^{juw}}{\Delta} dw = \frac{\sin(u(\Delta/2))}{\Delta/2}. \quad (\text{A.24})$$

Allerdings folgt aus der Erfüllung der Schuchman-Bedingung nicht, dass auch das Quantisierungsrauschen $\varepsilon(n)$ unabhängig vom Eingangssignal, gleichverteilt und weiß ist. Diese statistische Eigenschaft gilt nur für den Subtractive Dither aus Bild 1b. Außerdem soll hier noch angemerkt werden, dass die strenge Erfüllung von (B1) den dynamischen Aussteuerbereich des Quantisierers einschränkt, da die Summe aus Eingangssignal und zusätzlichem Rauschsignal beschränkt sein muss. In [62] wurde gezeigt, dass unter der weiteren Bedingung an das additive Rauschsignal $w(n)$

$$\left. \frac{d^k}{dk} M_w(j\Psi) \right|_{\Psi = \frac{2\pi l}{\Delta}} = 0 \quad \text{für } l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (\text{A.25})$$

das k -te konditionelle Moment des Quantisierungsrauschens unabhängig vom Eingangssignal ist. Speziell gilt für $k = 1$, dass $\varepsilon(n)$ und $x(n)$ unkorreliert sind und dass $\varepsilon(n)$ selbst weiß ist und für $k = 2$, dass die Leistung des Quantisierungsrauschens $E(\varepsilon^2)$ die Summe aus der Leistung des additiven Rauschterms $E(w^2)$ und der Leistung des Rauschens des Quantisierers selbst ist. Dieser letzte Term ist für den gleichverteilten Quantisierer durch $\Delta^2/12$ gegeben. Für das häufig verwendete gleichverteilte Rauschen ist die Bedingung (25) nur für $k = 1$ erfüllt, d.h. die Rauschleistung ist dann nicht unabhängig vom Eingangssignal [62]. Dies kann erreicht werden, wenn man als Dither-Term die Summe zweier gleichverteilter Zufallszahlen nimmt, die PDF des Dither-Signals hat dann eine Dreiecksverteilung. Die Leistung des Quantisierungsrauschens berechnet sich dann zu

$$E\{\varepsilon^2\} = E\{w^2\} + \Delta^2/12, \quad (\text{A.26})$$

d.h. sie ist die Summe der Leistungen des Dither-Signals und des Quantisierungsrauschens. Allgemein gilt für den einheitlichen Quantisierer, dass die ersten k Momente des Quantisierungsrauschens unabhängig vom Eingangssignal sind, wenn der Rauschterm W die Summe aus k

unabhängigen gleichverteilten Zufallsgrößen ist. Allerdings muss diese Eigenschaft mit steigendem Quantisierungsrauschen $E\{\varepsilon^2\}$ erkaufte werden. Das Quantisierungsrauschen ist für diese Art des Dither-Signals durch folgende Formel gegeben:

$$E\{\varepsilon^2\} = (k + 1)\Delta^2/12. \quad (\text{A.27})$$

Ein weiterer Nachteil, mit dem diese größere statistische Unabhängigkeit erkaufte werden muss, besteht darin, dass der Aussteuerbereich des Quantisierers weiter sinkt, da der Wertebereich des Dither-Signals proportional zu k ist.

Literaturverzeichnis

- [1] N. Al-Dhahir, "Analytic performance evaluation of MMSE-DFE on twisted-pair lines", *IEEE Sign. Proc. Letters*, Vol. 4, Nr. 4, pp. 103-105, April 1997.
- [2] N. Al-Dhahir und J.M. Cioffi, "MMSE decision-feedback equalizers: Finite-length results", *IEEE Trans. Info. Theory*, Vol. 41, Nr. 4, pp. 961-975, Juli 1995.
- [3] T.Y. Al-Naffouri und A.H. Sayed, "Adaptive filters with error nonlinearities: Mean-square analysis and optimum design", *EURASIP Journ. on Appl. Sign. Proc.*, Nr. 4, pp. 192-205, Dez. 2001.
- [4] T.Y. Al-Naffouri und A.H. Sayed, "Optimum error nonlinearities for long adaptive filters", *Proc. Int. Conf. Acoust., Speech, and Sign. Proc. (ICASSP '98)*, Vol. 2, pp. 1373-1376, Orlando, FL, Mai 2002.
- [5] ATM Forum Technical Committee, "155.52 Mb/s physical layer specification for category-3 unshielded twisted pair", *ATM Forum/95-1176R2*, Okt. 1995.
- [6] W.P. Ang und B. Farhang-Boroujeny, "A new class of gradient adaptive step-size LMS algorithms", *IEEE Trans. Sign. Proc.*, Vol. 49, Nr. 4, pp. 805-810, Apr. 2001.
- [7] S.L. Ariyavisitakul und Ye Li, "Joint coding and decision feedback equalization for broadband wireless channels", *IEEE Journ. on Sel. Areas in Comm.*, Vol. 16, Nr. 9, pp. 1670-1678, Dez. 1998.
- [8] K. Azadet und C.J. Nicole, "Low-power equalizer architectures for high-speed modems", *IEEE Comm. Mag.*, Vol. 36, Nr. 10, pp. 118-126, Okt. 1998.
- [9] D. Babic, T. Saramäki und M. Renfors, "Implementation of the transposed Farrow structure", *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Syst. (ISCAS-02)*, Vol. 4, pp. 5-8, Phoenix, AZ, Mai 2002.
- [10] D. Babic, V. Lehtinen und M. Renfors, "Discrete-time modeling of polynomial-based interpolation filters in rational sampling rate conversion", *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Syst. (ISCAS-03)*, Vol. 4, pp. 321-324, Bangkok, Thailand, Mai 2003.
- [11] D. Babic, T. Saramäki und M. Renfors, "Prolonged transposed polynomial-based filters for decimation", *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Syst. (ISCAS-03)*, Vol. 4, pp. 317-320, Bangkok, Thailand, Mai 2003.
- [12] J. Balakrishnan, H. Viswanathan und C.R. Johnson, Jr., "Decision device optimization for soft decision feedback equalization", *Proc. Conf. on Inform. Sciences and Syst.*, Princeton, NJ, März 2000.
- [13] C.R. Baugh und B.A. Wooley, "A two's complement parallel array multiplication algorithm", *IEEE Trans Comput.*, Vol. 22, Nr. 12, pp. 1045-1047, Dez. 1973.
- [14] M. Beck, "Dual latency in xDSL", *IEEE 802.3ah Ethern. Fst. Mile Task For.*, Edinburgh, GB, Mai 2002, http://www.ieee802.org/3/efm/public/may02/beck_2_0502.pdf.
- [15] C.A. Belfiore und J.H. Park, Jr. "Decision feedback equalization", *Proc. IEEE*, Vol. 67, Nr. 8, pp. 1143-1156, Aug. 1979.
- [16] W.R. Bennett und O. Macchi, "Spectra of quantized signals", *Bell Syst. Tech. Journ.*, Vol. 27, pp. 446-472, Juli 1948.
- [17] A. Bouttier, "A truly recursive blind equalization algorithm", *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, and Sign. Proc. (ICASSP '98)*, Vol. 6, pp. 3381-3384, Seattle, WA, Mai 1998.
- [18] I.N. Bronstein und K.A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Nauka, Moskau, 1991.
- [19] D.R. Brown, P. Schniter und C.R. Johnson, Jr., "Computationally efficient blind equali-

- zation”, *Proc. Allerton Conf. on Comm., Control, and Comp.*, pp. 54-63, Monticello, IL, Sept. 1997.
- [20] F. Büllingen und P. Stamm, *Entwicklungstrends im Telekommunikationssektor bis 2010*, Studie im Auftr. des Bundesmin. für Wirtsch. und Techn., Wiss. Inst. für Kommunikationsdienste GmbH, Ban Honnef, Deutschland, Apr. 2001.
- [21] H.J. Butterweck, “The independence assumption: A dispensable tool in adaptive filter theory”, *Sign. Proc.*, Vol. 57, Nr. 3, pp. 305-310, März 1997.
- [22] H.J. Butterweck, “A wave theory of long adaptive filters”, *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, Vol. 48, Nr. 6, pp. 739-747, Juni 2001.
- [23] F.R.P. Calvacanti und J.C.M. Mota, “Predictive blind equalization with the constant modulus criterion”, *Proc. IEEE Sign. Proc. Workshop on Sign. Proc. Advanc. in Wireless Comm.*, Paris, Frankreich, pp. 49-52, Apr. 1997.
- [24] R.A. Casas, C.R. Johnson, Jr., R.A. Kennedy, Z. Ding und R. Malmut, “Blind adaptive decision feedback equalizers: A class of channels resulting in ill-convergence from a zero initialization”, *Int. Journ. adapt. Contr. Sign. Proc.*, Vol. 12, Nr. 2, pp. 173-193, März 1998.
- [25] R.A. Casas, C.R. Johnson, Jr., J. Harp und S. Caffee, “On initialization strategies for blind adaptive DFEs”, *Proc. IEEE Wireless Comm. and Networking Conf.*, New Orleans, LA, pp. 792-796, Sept. 1999.
- [26] W.Y. Chen, *DSL—Simulation techniques and standards development for digital subscriber line systems*, Macmillan Technical Publishing, Indiananapolis, IN, 1998.
- [27] S. Cherry, “Edholm’s law of bandwidth”, *IEEE Spectrum*, p. 50, Juli 2004.
- [28] C-Y. Chi, C-Y. Chen, C-H. Chen und C-C. Feng, “Batch processing algorithms for blind equalization using higher-order statistics”, *IEEE Sign. Proc. Mag.*, Vol. 20, Nr. 1, pp. 25-49, Jan. 2003.
- [29] H. Choo, K. Muhammed und K. Roy, “Two’s complement computation sharing multiplier and it’s application to high performance DFE”, *IEEE Trans. Sign. Proc.*, Vol. 51, Nr. 2, pp. 458-469, Feb. 2003.
- [30] W. Chung und J.P. LeBlanc, “The local minima of fractionally-spaced CMA blind equalizer cost function in the precence of channel noise”, *IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, and Sign. Proc. (ICASSP ’98)*, Vol. 6, pp. 3345-3348, Seattle, WA, Mai 1998.
- [31] J.M. Cioffi, “Advanced digital communication”, *Course Reader in EE379C*, Stanford University, CA, 2000.
- [32] J.M. Cioffi, G. Dudevoir, M. Eyuboglu und G. D. Forney Jr., “MMSE decision-feedback equalizers and coding — Part I”, *IEEE Trans. Comm.*, Vol. 43, Nr. 10, pp. 2582-2594, Okt. 1995.
- [33] R. E. Crochiere und L. R. Rabiner, *Multirate digital signal processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.
- [34] T.C. Denk, C.J. Nicol, P. Larsson und K. Azadet, “Reconfigurable hardware for efficient implementation of programmable FIR filters”, *Proc. Int. Conf. Acoust., Speech, and Sign. Proc. (ICASSP ’98)*, Vol. 5, pp. 3005-3008, Seattle, WA, Mai 1998.
- [35] Z. Ding, R.A. Kennedy, B.D.O. Anderson und C.R. Johnson, Jr., “Ill-convergence of Godard blind equalizers in data communication systems”, *IEEE Trans. Comm.*, Vol. 39, Nr. 9, pp. 1313-1327, Sept. 1991.
- [36] C. Drewes, *Schnell konvergierende adaptive Entzerrer für breitbandige Funkzugangsnetze*, Dissertation, Technische Universität München, Nov. 1999.
- [37] C. Drewes, W. Aicher und J. Hausner, “The wireless art and the wired force of subscriber access”, *IEEE Comm. Mag.*, Vol. 39, Nr. 5, pp. 118-124, Mai 2001.
- [38] D.L. Duttweiler, J.E. Mazo und D.G. Messerschmitt, “An upper bound of the error probability in decision-feedback equalization”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol. 20, Nr. 4, pp. 490-497, Juli 1974.
- [39] D.L. Duttweiler, “Adaptive filter performance with nonlinearities in the correlation multiplier”, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Sign. Proc.*, Vol. 30, Nr. 8, pp. 578-586, Aug. 1982.

- [40] T.J. Endres, S.D. Halford, C.R. Johnson, Jr. und G.B. Giannakis, "Simulated comparisons of blind equalization algorithms for cold start-up applications", *Int. Journ. adapt. Contr. Sign. Proc.*, Vol. 12, Nr. 3, pp. 283-301, Mai 1998.
- [41] T.J. Endres, S.N. Hulyalkar, C.H. Strolle und T.A. Schaffer, "Low-complexity and low-latency implementation of the Godard/CMA update", *IEEE Trans. Comm.*, Vol. 49, Nr. 2, pp. 219-225, Feb. 2001.
- [42] L. Erup, F.M. Gardner und F.A. Harris, "Interpolation in digital modems — Part II: Implementation and performance", *IEEE Trans. Comm.*, Vol. 41, Nr. 6, pp. 998-1008, Juni 1993.
- [43] S. Evans und L. Tong, "Online adaptive reinizialization of the constant modulus algorithm", *IEEE Trans. Comm.*, Vol. 48, Nr. 4, pp. 537-539, Apr. 2000.
- [44] D.D. Falconer, "Jointly adaptive equalization and carrier recovery in two-dimensional data communication systems", *Bell Syst. Tech. Journ.*, Vol. 55, Nr. 3, pp. 317-334, März 1976.
- [45] D.D. Falconer und L. Ljung, "Application of fast Kalman estimation to adaptive equalization", *IEEE Trans. Comm.*, Vol. 26, Nr. 10, pp. 1439-1446, Okt. 2001.
- [46] C.W. Farrow, "A continuously variable delay element", *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Syst. (ISCAS-88)*, Vol. 3, pp. 2641-2645, Espoo, Finnland, Juni 1988.
- [47] P.L. Feintuch, "An adaptive recursive LMS filter", *IEEE Proc.*, Vol. 64, Nr. 11, pp. 1622-1624, Nov. 1976.
- [48] A. Feuer und E. Weinstein, "Convergence analysis of LMS filters with uncorrelated Gaussian data", *IEEE Trans. Acoust. Speech, and Sign. Proc.*, Vol. 33, Nr. 2, pp. 222-230, Feb. 1985.
- [49] I. Fijalkow, C.E. Manlove und C.R. Johnson, Jr., "Adaptive fractionally spaced blind CMA equalization: Excess MSE", *IEEE Trans. Sign. Proc.*, Vol. 46, Nr. 1, pp. 227-231, Jan. 1998.
- [50] R.F.H. Fischer und B. Huber, "Comparison of precoding schemes for digital subscriber lines", *IEEE Trans. Comm.*, Vol. 45, Nr. 3, pp. 334-343, März 1997.
- [51] G.D. Forney, Jr., "Maximum-likelihood sequence estimation of digital sequences in the precence of intersymbol interference", *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol. 18, Nr. 2, pp. 363-378, März 1972.
- [52] F.M. Gardner, "Interpolation in digital modems — Part I: Fundamentals", *IEEE Trans. Comm.*, Vol. 41, Nr. 3, pp. 502-508, März 1993.
- [53] L.M. Garth, J. Yang und J.J. Werner, "Blind equalization algorithms for dual-mode CAP-QAM reception", *IEEE Trans. Comm.*, Vol. 49, Nr. 3, pp. 455-466, März 2001.
- [54] L.M. Garth, "A dynamic convergence analysis of blind equalization algorithms", *IEEE Trans. Comm.*, Vol. 49, Nr. 4, pp. 624-634, Apr. 2001.
- [55] S.B. Gelfand, Y. Wei und J.V. Krogmeier, "The stability of variable step-size LMS algorithms", *IEEE Trans. Sign. Proc.*, Vol. 47, Nr. 12, pp. 3277-3288, Dez. 1999.
- [56] W. Gerstacker, "An alternative approach to minimum mean-squared error DFE with finite length constraints", *Int. Journ. of Electr. and Comm. (AEÜ)*, Vol. 50, Nr. 1, pp. 27-31, Jan. 1996.
- [57] W. Gerstacker und J. Huber, "Maximum SNR decision-feedback equalization with FIR filters: Filter optimization and a signal processing application", *Proc. Int. Conf. on Comm. (ICC '96)*, pp. 1188-1192, Dallas, TX, Juni 1996.
- [58] B.R. Ghosh und D.G. Messerschmitt, "Asynchronous adaptive equalization in voiceband data modems", *Proc. Int. Conf. Acoust., Speech, and Sign. Proc. (ICASSP '92)*, Vol. 4, pp. 485-488, San Francisco, CA, März 1992.
- [59] R.D. Gitlin, H.C. Meadors, Jr. und S.B. Weinstein, "The tap-leakage algorithm: An algorithm for the stable operation of a digitally implemented, fractionally spaced equalizer", *Bell Syst. Tech. Journ.*, Vol. 61, Nr. 8, pp. 1817-1839, Okt. 1982.
- [60] D.N. Godard, "Channel equalization using a Kalman filter for fast data transmission", *IBM Journ. Res. Develop.*, Vol. 18, pp. 267-273, Mai 1974.

- [61] D.N. Godard, "Self-recovering equalization and carrier tracking in two-dimensional data communication systems", *IEEE Trans. Comm.*, Vol. 28, Nr. 11, pp. 1867-1875, Nov. 1980.
- [62] R.M. Gray und T.G. Stockmann, "Dithered quantizers", *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol. 39, Nr. 3, pp. 805-812, Mai 1993.
- [63] M. Gu und L. Tong, "Geometric characterizations of constant modulus receivers", *IEEE Trans. Sign. Proc.*, Vol. 47, Nr. 10, pp. 2745-2756, Okt. 1999.
- [64] S. Haar, R. Zukunft und T. Magesacher, "Evaluation of decision feedback equalization in VDSL environment", *Proc. IEEE Emerg. Tech. Symp. (ETS2001)*, Dallas, TX, pp. 12-16, Sept. 2001.
- [65] S. Haar, R. Zukunft, and T. Magesacher, "On VDSL performance and hardware implications for single carrier modulation transceivers", *Proc. Int. Conf. on Autom. and Inform.: Theory and Appl.*, Skiathos, Griechenland, Sept. 2001.
- [66] S. Haar, R. Zukunft und F. Vogelbruch, "A timing recovery criterion derived from the tap weights of a decision feedback equalizer for QAM digital subscriber line systems", *Proc. IEEE Int. Conf. on Dig. Sign. Proc. (DSP2002)*, Santorini, Greece, Vol. 1, pp. 1281-1284, July 2002.
- [67] S. Haar, D. Daecke, R. Zukunft und T. Magesacher, "Equalizer-based symbol-rate timing recovery for digital subscriber line systems", *Proc. IEEE Globecom 2002*, Taipei, Taiwan, Vol. 1, pp. 312-316, Nov. 2002.
- [68] S. Haar, D. Daecke, R. Zukunft und F. Vogelbruch, "Analysis of equalizer-based baud-spaced timing recovery for digital subscriber line systems", *Proc. 36th Asilomar Conf. Sign., Syst., and Comp.*, Pacific Grove, CA, pp. 403-407, Nov. 2002.
- [69] S. Haas, "QAM-based VDSL", *IEEE 802.3ah Ethern. First Mile Task Force*, Edinburgh, GB, Mai 2002, http://www.ieee802.org/3/efm/public/may02/haas_2_0502.pdf.
- [70] S. Haas, "Choose wisely between QAM and DMT for VDSL", *Comm. Syst. Design*, pp. 32-36, Sept. 2002.
- [71] H. Harashima und H. Miyakawa, "Matched-transmission technique for channels with intersymbol interference", *IEEE Trans. Comm.*, Vol. 20, Nr. 8, pp. 774-780, Aug. 1972.
- [72] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1996.
- [73] R. Hedge und N.R. Shanbhag, "A low-power phase-splitting adaptive equalizer architecture for high bit-rate communication systems", *IEEE Trans. Sign. Proc.*, Vol. 47, Nr. 3, pp. 911-915, März. 1999.
- [74] M. Henker, T. Hentschel und G. Fettweis, "Time-variant CIC-Filters for sample rate conversion with arbitrary rational factors", *Proc. 6th IEEE Int. Conf. on Electr., Circuits, and Syst. (ICECS 99)*, Vol. 1, pp 67-70, Pafos, Griechenland, Sept. 1999.
- [75] M. Henker und G. Fettweis, "Combined filter for sample rate conversion, matched filtering, and symbol synchronization in software radio terminals", *Proc. European Wireless*, pp. 61-66, VDE Verlag Berlin Offenbach, Dresden, Germany, Sept. 2000.
- [76] T. Hentschel, M. Henker und G. Fettweis, "The digital front-end of software radio terminals", *IEEE Pers. Comm.*, Vol. 6, Nr. 4, pp. 40-46, Aug. 1999.
- [77] T. Hentschel und G. Fettweis, "Sample rate conversion for software radio", *IEEE Comm. Mag.*, Vol. 38, Nr. 8, pp. 142-150, Aug. 2000.
- [78] T. Hentschel und G. Fettweis, "Continuous-time digital filters for sample-rate conversion in reconfigurable radio terminals", *Proc. of the European Wireless*, pp. 55-59, VDE Verlag Berlin Offenbach, Dresden, Germany, Sept. 2000.
- [79] T. Hentschel, *Multirate systems for sample rate conversion in software radio terminals*, Dissertation, Technische Universität Dresden, Sept. 2001.
- [80] E. Hogenauer, "Digital filters for decimation and interpolation", *IEEE Trans. Acoust., Speech, and Sign. Proc.*, Vol. 29, Nr. 2, pp. 155-162, April 1981.
- [81] G-H. Im und K-M. Kang, "Performance of a hybrid decision feedback equalizer structure for CAP-based DSL systems", *IEEE Trans. Sign. Proc.*, Vol. 49, Nr. 8, pp. 1768-1785, Aug. 2001.

- [82] G-H. Im und D-H. Kim, "All digital timing recovery and programmable gain amplifier controller for VDSL transmission", *IEEE Trans. Consumer Electr.*, Vol. 47, Nr. 4, pp. 743-752, Nov. 2001.
- [83] G-H. Im, "Performance of a 51.84-Mb/s VDSL Transceiver over the loop with bridged taps", *IEEE Trans. Comm.*, Vol. 50, Nr. 5, pp. 711-717, Mai 2002.
- [84] K.S. Jacobsen, "Methods of upstream power backoff on very high-speed digital subscriber lines", *IEEE Comm. Mag.*, Vol. 39, Nr. 3, pp. 210-216, März 2001.
- [85] C.R. Johnson, Jr., "Adaptive IIR filtering: Current results and open issues", *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol. 30, Nr. 2, pp. 237-250, März 1984.
- [86] C.R. Johnson, Jr. und M.G. Larimore, "Comments on 'An adaptive recursive LMS filter'", *Proc. IEEE*, Vol. 65, Nr. 9, pp. 1402-1404, Sept. 1997.
- [87] C.R. Johnson, Jr. et al., "The Core of FSE-CMA behavior theory", in *Unsupervised Adaptive Filtering*, Simon Haykin, ed., Wiley, New York, 1999.
- [88] C.R. Johnson, Jr., et al., "Blind Equalization using the constant modulus criterion: A review", *Proc. IEEE*, Vol. 86, Nr. 6, pp. 1927-1950, Okt. 1998.
- [89] T. Kailath, A. Sayed und B. Hassibi, *Linear Estimation*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2000.
- [90] L. Karam und J.H. McClellan, "Complex Chebyshev approximation for FIR filter design", *IEEE Trans. Circuits Syst. - II: Analog and Dig. Sign. Proc.*, Vol. 42, Nr. 4, pp. 207-216, März 1995.
- [91] L. Karam und J.H. McClellan, "Chebyshev digital FIR filter design", *Sign. Proc.*, Vol. 76, Nr. 1, pp. 17-36, Juli 1999.
- [92] D. Kim, *Synchronization for all digital receivers*, Dissertation, Stanford University, Jan. 1997.
- [93] D. Kim, M. J. Narashima und D. C. Cox, "Design of optimal interpolation filters for symbol timing recovery", *IEEE Trans. Comm.*, Vol. 45, Nr. 7, pp. 877-884, Juli 1997.
- [94] Y-H. Kim und S. Shamsunder, "Adaptive algorithms for channel equalization with soft decision feedback", *IEEE Journ. on Sel. Areas in Comm.*, Vol. 16, Nr. 9, pp. 1660-1669, Dez. 1998.
- [95] S. Koike, "A class of adaptive step-size control algorithms for adaptive filters", *IEEE Trans. Sign. Proc.*, Vol. 50, Nr. 6, pp. 1315-1326, Juni 2002.
- [96] R.L. Kosut, W. Chung, C.R. Johnson, Jr. und S.P. Boyd, "On achieving reduced error propagation sensitivity in DFE design via convex optimization", *Proc. 9th Conf. on Dec. and Cont.*, Sydney, Australia, pp. 4320-4323, Dez. 2000.
- [97] R.H. Kwong und E.W. Johnston, "A variable step size LMS algorithm", *IEEE Trans. Sign. Proc.*, Vol. 40, Nr. 8, pp. 1633-1642, Juli 1992.
- [98] T.I. Laakso, V. Välimäki, M. Karjalainen und U.K. Laine, "Splitting the unit delay", *IEEE Sign. Proc. Mag.*, Vol. 13, Nr. 1, pp. 30-60, Jan. 1996.
- [99] J. Labat, O. Macchi und C. Laot, "Adaptive decision feedback equalization: Can you skip the training period?", *IEEE Trans. Comm.*, Vol. 46, Nr. 7, pp. 921-930, Juli 1998.
- [100] J. Labat und C. Laot, "Blind adaptive multiple-input decision-feedback equalizer with a self-optimized configuration", *IEEE Trans. Comm.*, Vol. 49, Nr. 4, pp. 646-654, Apr. 2001.
- [101] C. Lawson und R. Hanson, *Solving Least Squares Problems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974.
- [102] J.P. LeBlanc und I. Fijalkow, "Blind adapted, pre-whitened constant modulus algorithm", *Proc. Int. Conf. on Comm. (ICC'2001)*, Vol. 8, pp. 2438-2442, St. Petersburg, Russland, Juni 2001.
- [103] Y. Li, J.R. Liu und Z. Ding, "Length- and cost-dependent local minima of unconstrained blind channel equalizers", *IEEE Trans. Sign. Proc.*, Vol. 44, Nr. 11, pp. 2726-2735, Nov. 1996.
- [104] R. López-Valcarce und F. Pérez-González, "On blind adaptive algorithms for IIR equali-

- zers”, *Proc. DSP Workshop*, Hunt, TX, Okt. 2000.
- [105] R. López-Valcarce und F. Pérez-González, “Efficient reinizialization of the prewhitened constant modulus algorithm”, *IEEE Comm. Letters*, Vol. 5, Nr. 12, pp. 488-490, Dez. 2001.
- [106] R. López-Valcarce und F. Pérez-González, “Analysis of the prewhitened constant modulus cost function”, *Proc. Int. Conf. Acoust., Speech, and Sign. Proc. (ICASSP '02)*, Vol. 3, pp. 2641-2644, Orlando, FL, Mai 2002.
- [107] R. López-Valcarce, “Realizable linear and decision feedback equalizers: Properties and connections”, *IEEE Trans. Sign. Proc.*, Vol. 52, Nr. 3, pp. 757-773, März 2004.
- [108] W-S. Lu und T-B. Deng, “An improved weighted least-squares design for variable fractional delay FIR filters”, *IEEE Trans. Circuits Syst. - II: Analog and Dig. Sign. Proc.*, Vol. 46, Nr. 8, pp. 1035-1040, Aug. 1999.
- [109] R. Lucky, “Automatic equalization for digital communication”, *Bell Syst. Tech. Journ.*, Vol. 44, Nr. 4, pp. 547-588, Apr. 1965.
- [110] L. Lundheim und T.A. Ramstad, “An efficient and flexible structure for decimation and sample rate adaptation in software radio receivers”, *Proc. ACTS Mobile Comm. Summit*, pp. 663-68, Sorrento, Italien, Juni 1999.
- [111] C. Lütkemeyer und T.G. Noll, “A probability state model for the calculation of the BER degradation due to error propagation in decision feedback equalizers”, *Proc. IEEE Dig. Sign. Proc. Workshop*, Bryce Canyon, UT, Aug. 1998.
- [112] O. Macchi, *Adaptive Processing*, Wiley, Chichester, England, 1995.
- [113] T. Magesacher, S. Haar, R. Zukunft, P. Ödling, T. Nordström und P. O. Börjesson, “Splitting the recursive least-squares algorithm”, *Proc. Int. Symp. on Sign. Proc. and its Appl. (ISSPA2001)*, Kuala Lumpur, Vol. 1, pp. 319-322, Aug. 2001.
- [114] T. Magesacher, S. Haar und R. Zukunft, “Analysis of the noise environment in future twisted pair access technologies”, *Proc. IEEE Emerg. Tech. Symp. (ETS2001)*, Dallas, TX, pp. 118-122, Sept. 2001.
- [115] T. Magesacher, P. Ödling, P.O. Börjesson, W. Henkel, T. Nordström, R. Zukunft und S. Haar, “On the capacity of the copper cable channel using the common mode”, *Proc. IEEE Globecom 2002*, Taipei, Taiwan, Vol.2, pp.1269-1272, Nov. 2002.
- [116] S.S. Mahant-Shetti, S. Hosur und A. Gatherer, “The log-log LMS algorithm”, *Proc. Int. Conf. Acoust., Speech, and Sign. Proc. (ICASSP '97)*, Vol. 3, pp. 2357-2360, München, Deutschland, Apr. 1997.
- [117] J. Mai und A.H. Sayed, “A feedback approach to the steady-state performance of fractionally spaced blind adaptive equalizers”, *IEEE Trans. Sign. Proc.*, Vol. 48, Nr. 1, pp. 80-91, Jan. 2000.
- [118] S. Marcos, S. Cherif und M. Jaidane, “Blind cancellation of intersymbol interference in decision feedback equalizers”, *Proc. Int. Conf. Acoust., Speech, and Sign. Proc. (ICASSP '95)*, Detroit, MI, Vol. 2, pp. 1073-1076, Mai 1995.
- [119] L. Mazet, P. Ciblat und P. Loubaton, “Fractionally spaced blind equalization: CMA versus second order based methods”, *Proc. IEEE Workshop on Sign. Proc. Adv. Wireless Comm.*, pp. 231-234, Annapolis, MD, Mai 1999.
- [120] J.E. Mazo, “On the independence theory of equalizer convergence”, *Bell Syst. Tech. Journ.*, Vol. 58, Nr. 5, pp. 963-993, Mai 1979.
- [121] A. Menkhoff und P. Schöllhorn, Erfinder; Infineon Technologies AG, Anmelder, “Digitale Filterkombination”, Dt. Patentanmeldung DE 199 48 898 A1, Mai 2001.
- [122] K.X. Miao, H. Fan und M. Doroslovacki, “Cascade lattice IIR adaptive filters”, *IEEE Trans. Sign. Proc.*, Vol. 42, Nr. 4, pp. 721-741, Apr. 1994.
- [123] G.E. Moore, “Cramming more components onto integrated circuits”, *Electronics*, Vol. 38, Nr. 8, pp. 114-117, Apr. 1965, online verfügbar unter: <ftp://download.intel.com/research/silicon/moorespaper.pdf>.
- [124] G.E. Moore, “No exponential is forever: But forever can be delayed!”, *Proc. IEEE Solid-State Circ. Conf. (SSCC)*, Vol. 1, pp. 20-23, San Francisco, CA, Feb. 2003.

- [125] K.H. Mueller und J.J. Werner, "A hardware efficient passband equalizer structure for data transmission", *IEEE Trans. Comm.*, Vol. 30, Nr.3, pp. 538-541, März 1982.
- [126] B. Mulgrew und C.F.N. Cowan, "An adaptive Kalman equalizer: Structure and performance", *IEEE Sign. Proc. Letters*, Vol. 35, Nr.12, pp. 1727-1735, Dez. 1987.
- [127] K.R. Narayanan, "Effect of precoding on the convergence of turbo equalization for partial response channels", *IEEE Journ. on Select. Areas in Comm.*, Vol. 19, Nr. 4, pp. 686-698, Apr. 2001.
- [128] V.H. Nascimento und A.H. Sayed, "On the learning mechanism of adaptive filters", *IEEE Trans. Sign. Proc.*, Vol. 48, Nr. 6, pp. 1609-1625, Juni 2000.
- [129] V.H. Nascimento und A.H. Sayed, "Unbiased and stable leakage-based adaptive filters", *IEEE Trans. Sign. Proc.*, Vol. 47, Nr. 12, pp. 3261-3276, Dez. 2000.
- [130] H. Nyquist, "Certain topics in telegraph transmission theory", *Trans. AIEE*, Vol. 47, pp. 617-644, Apr. 1928.
- [131] V. Oksman und J.-J. Werner "Single-carrier modulation technology for very high-speed digital subscriber line", *IEEE Comm. Mag.*, Vol. 38, Nr. 3, pp. 82-89, Mai 2000.
- [132] T.W. Parks und J.H. McClellan, "Chebyshev approximation for nonrecursive digital filters with linear phase", *IEEE Trans. Circuits Theory*, Vol. CT-12, Nr. 4, pp. 189-194, März 1972.
- [133] J.G. Proakis, *Digital Communications*, McGraw-Hill, New York, 1995.
- [134] S.U.H. Qureshi, "Adaptive equalization", *Proc. IEEE*, Vol. 73, Nr. 9, pp. 1349-1387, Sept. 1995.
- [135] T.A. Ramstad, "Digital methods for conversion between arbitrary sampling frequencies", *IEEE Trans. Acoust., Speech, and Sign. Proc.*, Vol. ASSP-32, Nr. 3, pp. 577-591, Juni 1984.
- [136] T.A. Ramstad, "Fractional rate decimator and integrator design", *Proc. IX. European Sign. Proc. Conf. (EUSIPCO '98)*, pp. 1949-1952, Rhodos, Griechenland, Sept. 1998.
- [137] P.A. Regalia, *Adaptive IIR Filtering in Signal Processing and Control*, Marcel Dekker, New York, NY, 1995.
- [138] P.A. Regalia, M. Mboup und M. Ashari, "Existence of stationary points for pseudo-linear regression identification algorithms", *IEEE Trans. Autom. Contr.*, Vol. 44, Nr. 5, pp. 994-998, Mai 1999.
- [139] P.A. Regalia, "On the convergent points of blind adaptive IIR equalizers", *Proc. IEEE/EU-RASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing*, Baltimore, MD, Juni 3-6, 2001.
- [140] M. Reuter und J.R. Zeidler, "Nonlinear effects in LMS adaptive equalizers", *IEEE Trans. Sign. Proc.*, Vol. 47, Nr. 6, pp. 2570-2579, Juni 1999.
- [141] B.D. Riglin und P. Schniter, "Subspace leaky LMS", *IEEE Sign. Proc. Letters*, Vol. 11, Nr. 2, pp. 136-139, Jan. 2004.
- [142] Y. Sato, "A method of self-recovering equalization for multi-level amplitude modulation", *IEEE Trans. Comm.*, Vol. 23, Nr. 6, pp. 679-682, Juni 1975.
- [143] A.H. Sayed und T. Kailath, "A survey of spectral factorization methods", *Numer. Linear Algebra Appl.*, Vol. 8, pp. 467-496, 2001.
- [144] R.W. Schafer und L.R. Rabiner, "A digital signal approach to interpolation", *Proc. IEEE*, Vol. 61, Nr. 6, pp. 692-703, Juni 1973.
- [145] C.V. Schimpfle, *Entwurfsmethoden für verlustarme integrierte Schaltungen*, Dissertation, Technische Universität München, Mai 2000.
- [146] P. Schniter und C.R. Johnson, Jr., "Dithered signed-error CMA: The complex-valued case", *Proc. 32nd Asilomar Conf. Sign., Syst., and Comp.*, Vol. 2, pp. 1143-1147, Pacific Grove, CA, Nov. 1998.
- [147] P. Schniter und C.R. Johnson, Jr., "Bounds for the MSE Performance of constant modulus estimators", *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol. 46, Nr. 7, pp. 2544-2560, Nov. 2000.

- [148] P. Schöllhorn, Erfinder; Siemens AG, Anmelder, "Verfahren zur Berechnung der Koeffizienten eines nichtrekursiven digitalen Filters", Dt. Patent DE 198 29 289 C2, Jan. 2000.
- [149] P. Schöllhorn, Erfinder; Siemens AG, Anmelder, "Verfahren zur digitalen Taktrückgewinnung und selektiven Filterung", Dt. Patentanmeldung DE 198 29 290 A1, Jan. 2000.
- [150] L. Schuchmann, "Dither signals and their effect on quantization noise", *IEEE Trans. Comm. Techn.*, Vol. 12, pp. 162-165, Dez. 1964.
- [151] H.W. Schüßler und P. Steffen, "Halfband filters and Hilbert transformers", *Circuits Syst. Sig. Proc.*, Vol. 17, Nr. 2, , pp. 137-164, 1998.
- [152] W.A. Sethares, D.A. Lawrence, C.R. Johnson, Jr. und R.R. Bitmead, "Parameter drift in LMS adaptive equalizers", *IEEE Trans. Acoust., Speech, and Sign. Proc.*, Vol. 34, Nr. 4, pp. 868-879, Aug. 1986.
- [153] C. E. Shannon, "Communication in the presence of noise", *Proc. Institute of Radio Engineers*, Vol. 37, Nr.1, pp. 10-21, Jan. 1949.
- [154] D.T. Sherwood und N.J. Bershad, "Quantization effects in the complex LMS adaptive algorithm: Linearization using dither — Theory", *IEEE Trans. Circuits Syst.*, Vol. 34, Nr.7, pp. 848-854, Juli 1987.
- [155] D.T. Sherwood und N.J. Bershad, "Quantization effects in the complex LMS adaptive algorithm — Linearization using dither — Applications", *IEEE Trans. Circuits Syst.*, Vol. 35, Nr.4, pp. 466-470, April 1988.
- [156] W. Shi und R. Wesel, "The effect of mismatch on decision-feedback equalization and Tomlinson-Harashima precoding", *Proc. 32nd Asilomar Conf. Sign., Syst., and Comp.*, pp. 1743-1747, Pacific Grove, CA, Nov. 1998.
- [157] H-C. Shin und W-J. Song, "Convergence acceleration of the LMS algorithm using successive data orthogonalization", *Proc. IASTED Int. Conf. on Sign. and Image Proc. (SIP2001)*, Honolulu, HI, Aug. 2001.
- [158] H-C. Shin, A.H. Sayed und W-J. Song, "Performance analysis of adaptive filters without the independence assumptions", *IEEE Trans. Sign. Proc.*, zur Veröffentlichung akzeptiert; online verfügbar auf http://cspl.postech.ac.kr/research/research_publication_body.htm.
- [159] T. Söderström, L. Ljung und I. Gustavsson, "A theoretical analysis of recursive identification methods", *Automatica*, Vol. 14, Nr. 3, pp. 231-244, Mai 1978.
- [160] Y. Song, K. Lee und B. Kim, "A low jitter digital timing synchronizer for CAP-based VDSL system", *Proc. Europ. Solid-State Circuits Conf.*, pp. 168-171, Villach, Österreich, Sept. 2001
- [161] T. Starr, J.M. Cioffi und P. Silverman, *Understanding digital subscriber line technology*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999.
- [162] A. Tarczynski, G.D. Cain, E. Hermanowicz und M. Rojewski, "WLS design of variable frequency response FIR filters", *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Syst. (ISCAS-97)*, Vol. 4, pp. 2244-2247, Hong Kong, Juni 1997.
- [163] C. Tidestav, A. Ahlén und M. Sternad, "Realizable MIMO decision feedback equalizers: Structure and design", *IEEE Trans. Sign. Proc.*, Vol. 49, Nr. 1, pp. 121-133, Jan. 2001.
- [164] M. Tomlinson, "New automatic equaliser employing modulo arithmetic", *Electron. Lett.*, Vol. 7, Nr. 7, pp. 138-139, März 1971.
- [165] L. Tong, G. Xu und T. Kailath, "Blind identification and equalization based on second-order statistics: A time-domain approach", *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol. 40, Nr. 2, pp. 340-349, März 1994.
- [166] L. Tong und H.H. Zeng, "Channel surfing reinitialization for the constant modulus algorithm", *IEEE Sign. Proc. Letters*, Vol. 4, Nr. 3, pp. 85-87, März 1997.
- [167] J.R. Treichler, I. Fijalkow und C.R. Johnson, Jr., "Fractionally spaced equalizers: How long should they really be?", *IEEE Sign. Proc. Mag.*, Vol 13, Nr. 5, pp. 65-81, Mai 1996.
- [168] M. Tüchler, R. Koetter und A. Singer, "Turbo equalization: Principles and new results", *IEEE Trans. Comm.*, Vol. 50, Nr. 5, pp. 754-767, Mai 2002.

- [169] J. Vesma und T. Saramäki, "Interpolation filters with arbitrary frequency response for all-digital receivers", *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Syst. (ISCAS-96)*, Atlanta, GA, pp. 568-571, Mai 1996.
- [170] J. Vesma und T. Saramäki, "Optimization and efficient implementation of FIR filters with adjustable fractional delay", *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Syst. (ISCAS-97)*, Vol. 4, pp. 2256-2259, Hong Kong, Juni 1997.
- [171] J. Vesma, *Optimization and Applications of Polynomial-Based Interpolation Filters*, Dissertation, Tampere University of Technology, Juni 1999.
- [172] J. Vesma, F. Lopez, T. Saramäki und M. Renfors, "The effects of quantizing the fractional interval in interpolation filters", *Proc. IEEE Nordic Signal Processing Symp. (Norsig 2000)*, Kolmården, Schweden, Juni 2000.
- [173] P. Vetter, D. Goderis, L. Verpooten und A. Granger, "System aspects of APON/VDSL deployment", *IEEE Comm. Mag.*, Vol. 38, Nr. 5, pp. 66-72, Mai 2000.
- [174] F. Vogelbruch, R. Zukunft und S. Haar, "16-QAM turbo equalization based on minimum mean squared error linear equalization", *Proc. 36th Asilomar Conf. Sign., Syst., and Comp.*, Pacific Grove, CA, Vol. 2, pp. 1943-1947, Nov. 2002.
- [175] J. Walko, "DMT setzt sich als VDSL-Standard durch", *EE-Times*, May 2004, online verfügbar unter <http://www.eetimes.de/at/news/showArticle.jhtml?articleID=20300541>.
- [176] Q. Wang (Editor) *TIE1.4, VDSL metallic interface, Draft Trial-Use Standard*, Feb. 2001.
- [177] G. Watkins, "Optimal Farrow coefficients for symbol timing recovery", *IEEE Comm. Letters*, Vol. 5, Nr. 9, pp. 381-383, Sept. 2001.
- [178] J.-J. Werner, J. Yang, D.D. Harman und G.A. Dumont, "Blind equalization for broadband access", *IEEE Comm. Mag.*, Vol. 37, Nr. 4, pp. 87-93, Apr. 1999.
- [179] B. Widrow und S. Stearns, *Adaptive Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1985.
- [180] T.J. Willink und P.H. Wittke, "Evaluation of the effects of intersymbol interference in decision feedback equalizers", *IEEE Trans. Comm.*, Vol. 48, Nr. 4, pp. 629-636, Apr. 2000.
- [181] N.R. Yousef und A.H. Sayed, "A unified approach to the steady-state and tracking analyses of adaptive filters", *IEEE Trans. Sign. Proc.*, Vol. 49, Nr. 2, pp. 314-324, Feb. 2001.
- [182] H.H. Zeng, L. Tong und C.R. Johnson, Jr., "An analysis of constant modulus receivers", *IEEE Trans. Sign. Proc.*, Vol. 47, Nr.11, pp. 2990-2999, Nov. 1999.
- [183] C. Zhang und T. Chen, "Towards optimal least square filters using the eigenfilter approach", *Proc. Int. Conf. Acoust., Speech, and Sign. Proc. (ICASSP-2002)*, Vol.4, pp. 4171-4175, Orlando, FL, Mai 2002.
- [184] R. Zukunft, S. Haar und T. Magesacher, "A comparison of different blind equalization techniques for xDSL-transceivers", *Proc. IEEE Emerg. Tech. Symp. (ETS2001)*, Dallas, TX, pp. 7-11, Sept. 2001.
- [185] R. Zukunft, S. Haar und T. Magesacher, "Digital interpolation in the passband domain", *Proc. Int. Conf. Acoust., Speech, and Sign. Proc. (ICASSP-2002)*, Orlando, FL, Vol. 2, pp. 1545-1548, Mai 2002.
- [186] R. Zukunft, S. Haar und T. Magesacher, "A blind adaptation algorithm for decision feedback equalizers with fractionally-spaced feedforward filters", *Proc. IEEE Int. Conf. on Dig. Sign. Proc. (DSP2002)*, Santorini, Griechenland, Juli 2002.
- [187] R. Zukunft, S. Haar und F. Vogelbruch, "An initialization strategy for blind adaptive decision feedback equalizers for dual-mode CAP-QAM reception", *Proc. 36th Asilomar Conf. Sign., Syst., and Comp.*, Pacific Grove, CA, Vol. 2, pp. 1238-1242, Nov. 2002.
- [188] R. Zukunft, S. Haar und T. Magesacher, "A blind adaptation algorithm for decision feedback equalization for dual-mode CAP-QAM reception", *Proc. IEEE Globecom 2002*, Taipei, Taiwan, Vol. 1, pp. 307-311, Vol. 2, pp. 779-782, Nov. 2002.

