

Lehrstuhl für Entwurfsautomatisierung
Technische Universität München

Entwurfsverfahren zum impliziten funktionalen Test
analoger integrierter Schaltungen

Volker Glöckel

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Klaus Diepold
Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Kurt Antreich, em. (komm. Ltg)
2. Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Doris Schmitt-Landsiedel

Die Dissertation wurde am 14. Mai 2003 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik am 19. April 2004 angenommen.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Entwurfsautomatisierung der Technischen Universität München.

Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Kurt Antreich möchte ich ganz herzlich für die Unterstützung bei der Durchführung dieser Arbeit danken. Seine wertvollen Anregungen und Ratschläge sowie seine großzügige Förderung trugen maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit bei.

Frau Univ.-Prof. Dr.rer.nat. Doris Schmitt-Landsiedel danke ich für die Übernahme des Korreferates und das damit bekundete Interesse an meiner Arbeit.

Das kollegiale Umfeld trägt wesentlich zum Gelingen einer Arbeit bei. Ich möchte mich deshalb ganz besonders bei den Mitgliedern der Analoggruppe Dr.-Ing. Helmut Gräß, Prof. Dr.-Ing. Walter Lindermeir, Dipl.-Ing. Michael Pronath, Dr.-Ing. Martin Ruhwandl, Dr.-Ing. Frank Schenkel, Dr.-Ing. Robert Schwencker, Dipl.-Ing. Guido Stehr, Dr.-Ing. Gunther Strube und Dr.-Ing. Stephan Zizala für die gute Atmosphäre, die vielen Anregungen und besonders für die konstruktive Kritik, die zum Aufspüren von Schwachpunkten unumgänglich ist, bedanken.

Während meiner Zeit am Lehrstuhl hatte ich die Gelegenheit, mehrmonatige Aufenthalte bei den Firmen IBM Forschungslabor, Zürich, Motorola Semiconducteurs S.A., Toulouse und Motorola Geschäftsbereich Halbleiter, München wahrzunehmen. Für die hervorragende Zusammenarbeit, die vielfältigen Erkenntnisse und Erfahrungen bin ich im besonderen Herrn Univ.-Prof. Dr. sc.techn. Andreas Herkersdorf und Dr. Pascal Caunegre sehr dankbar.

Nicht zuletzt danke ich allen Mitarbeitern des Lehrstuhls für ihr kooperatives Interesse und die Bereitstellung einer reibungslos funktionierenden Arbeitsumgebung sowie meiner Familie, die mich jederzeit gerne unterstützt hat.

München, im Juli 2004
Volker Glöckel

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Aufgabe des Schaltungstests	2
1.2	Impliziter funktionaler Test	3
1.3	Toleranzentwurf	5
1.4	Stand der Technik	6
1.5	Merkmale und Ziele der Arbeit	11
2	Definition der Testentwurfsaufgabe	15
2.1	Testentwurfsaufgabe	15
2.2	Gebiete im Raum der statistischen Parameter	20
2.2.1	Funktionierende und fehlerhafte Schaltungen	20
2.2.2	Angenommene und aussortierte Schaltungen	21
2.2.3	Grenzparametersätze	21
2.2.4	Ausbeute	22
2.2.5	Fehlentscheidungen	22
2.3	Formulierung mit Messfehlern	24
2.3.1	Messfehlerbehaftete Testbeobachtungen, Testeigenschaften und Testspezifikationen	24
2.3.2	Zufallsexperiment	25
2.3.3	Ereignisse	25
2.3.4	Annahme- und Ablehnungswahrscheinlichkeit einer Schaltung	26
2.3.5	Grenzparametersätze	28
2.3.6	Zielgrößen	29
2.4	Quadraturverfahren	31
2.5	Worst-Case-Parametersatz	32
2.5.1	Berechnungsansatz	33
2.5.2	Vereinbarung	34
3	Demonstratorschaltungen und Validierverfahren	35
3.1	Demonstratorschaltungen	35
3.2	Monte-Carlo-Validierverfahren	38
3.2.1	Abschätzen der Zielgrößen	38
3.2.2	Effizienzsteigerung	39
3.2.3	Bewerten des Simulationsaufwands	41
4	Testentwurf mit linearisierter Betriebs- und Testeigenschaft	43
4.1	Entwerfen einer Testspezifikation	44
4.1.1	Linearisieren der Betriebseigenschaft	44

4.1.2	Linearisieren der Testbeobachtungen	44
4.1.3	Bestimmen der Testentwurfparameter	45
4.2	Bewerten eines Testentwurfs	46
4.2.1	Ereignisse	46
4.2.2	Annahme- und Ablehnungswahrscheinlichkeit einer Schaltung	48
4.2.3	Zielgrößen	49
4.3	Kostenoptimales Justieren der Testspezifikation	50
4.4	Grundlegende Zusammenhänge	51
4.4.1	Konkurrenz der Zielgrößen	51
4.4.2	Einfluss des Worst-Case-Abstands und des Streuungsverhältnisses auf die Zielgrößen	52
4.5	Berechnen einer Testspezifikation	54
4.6	Experimentelle Ergebnisse	56
4.6.1	Testentwurf	56
4.6.2	Validieren	58
4.6.3	Untersuchung zum systematischen Fehler	60
5	Testentwurf mit nichtlinearer Betriebs- und Testeigenschaft	65
5.1	Entwerfen einer Testspezifikation	66
5.2	Bewerten eines Testentwurfs	68
5.2.1	Bestimmen der Integrationsgrenze s_g	70
5.2.2	Bestimmen der Integrationsgrenze s_t	71
5.2.3	Anmerkung zum Thema Ausbeuteschätzung	72
5.3	Kostenoptimales Justieren der Testspezifikation	73
5.4	Berechnen einer Testspezifikation	73
5.5	Experimentelle Ergebnisse	74
5.5.1	Linearisierung \bar{f}	74
5.5.2	Testentwurf	76
5.5.3	Untersuchung zum Messfehler	79
6	Testentwurf, mit Messfehlern und nichtlinearer Betriebs- und Testeigenschaft	81
6.1	Entwerfen einer Testspezifikation	82
6.1.1	Integration nach $s_{2:n_s}$	84
6.1.2	Integration nach s_1	86
6.2	Berechnen einer Testspezifikation	87
6.3	Experimentelle Ergebnisse	89
6.3.1	Testentwurf	90
6.3.2	Schätzgenauigkeit der Zielgrößen	91
6.3.3	Verfahrensvergleich	92
6.3.4	Vergleich der Simulationskosten	93
7	Zusammenfassung	95
A	Zusammenstellung ergänzender Formeln	101
A.1	Wahrscheinlichkeitsverteilungen	101
A.1.1	Normalverteilung	101
A.1.2	χ^2 -Verteilung	102
A.2	Bedingte Wahrscheinlichkeit	103
A.3	Vektornormen	103

A.4	Koordinatentransformation	104
A.5	Metrischer Raum	104
A.6	Interpolation durch ein Polynom 2-ten Grades	104
A.7	Singulärwertzerlegung	105
A.8	Wahl eines Parametersatzes innerhalb eines Teilbereichs	105
B	Zusammenstellung verwendeter Symbole	107
	Literaturverzeichnis	113
	Kurzfassung	123

Kapitel 1

Einleitung

Der Produktionstest integrierter Schaltungen (*integrated circuits*, IC) ist im Produktionsablauf ein maßgeblicher Kostenfaktor, der durch zunehmende Schaltungskomplexität weiter an Bedeutung gewinnt [SEM01]. Auffällig ist dabei der überaus hohe Kostenanteil analoger und gemischt analog-digitaler (*mixed-signal*) Systemkomponenten im Vergleich zu ihrem Flächenanteil.

Eine wesentliche Ursache für die hohen Kosten beim analogen Schaltungs- und Testentwurf ist der niedrige Automatisierungsgrad. Während die Schaltungssynthese und Testsynthese bei digitalen Schaltungen in automatisierten Schritten erfolgt, werden analoge Komponenten und deren Test überwiegend von Hand und damit kosten- und zeitintensiv entworfen.

Bei digitalen Komponenten erleichtern die binär kodierbaren zeit- und wertdiskreten Signale die getrennte Betrachtung von Schaltungsstruktur und physikalischen Eigenschaften der Realisierung. Dies ermöglicht eine Modellierung der Schaltungsfunktion auf hohem Abstraktionsniveau beim Schaltungs- und Testentwurf. Die zeitlich aufeinander folgenden Signalverarbeitungsschritte können damit durch einfache Ursache-Wirkungs-Beziehungen sogar hierarchisch im Baukastenprinzip beschrieben werden, ohne dass sich nebenläufige Strukturen gegenseitig beeinflussen.

Die zeit- und wertkontinuierlichen Signale bei analogen Komponenten erschweren hingegen durch eine starke Verflechtung von Struktureigenschaften mit physikalischen Realisierungseigenschaften eine höhere Abstraktion. Daraus resultiert eine Struktur- und Realisierungsvielfalt, die typischerweise zu vielen spezifischen Entwurfsabläufen führt und bis heute einen ausreichenden Automatisierungsgrad der Schaltungs- und Testentwurfsschritte verhindert.

Die Weiterentwicklung der Produktionsverfahren verschärft fortwährend die Kostensituation beim Test. Durch kontinuierlich verbesserte Produktionsverfahren können immer komplexere Systeme auf einem Chip integriert werden, wodurch die zu testende Schaltungsfunktionalität ständig zunimmt. Die Testdauer als wesentlicher Kostenfaktor kann jedoch nicht schritt haltend mit den verbesserten Produktionsverfahren verkürzt werden. Die steigenden Anforderungen an die Messgenauigkeit und das Ziel einer kurzen Testdauer bewirken im Gegenteil immer höhere Kosten der Testausrüstung. Der Testkostenanteil bei der Herstellung einer Schaltung nimmt deshalb zu.

Um dieser Entwicklung entgegen zu wirken, werden zunehmend Testschaltungen oder Teile davon direkt auf dem Chip integriert (BIST, *build in self test*) oder der Testablauf durch Parallelisieren beschleunigt. Durch ein Ineinandergreifen von Schaltungsentwurf und vorgezogenem Testentwurf wird beim sog. *concurrent engineering* Schaltungswissen für den Testentwurf verfügbar und Testanforderungen, wie die Zugriffsmöglichkeit auf schaltungsinterne Signale, können rechtzeitig in den Schaltungsentwurf einfließen.

Die vorliegende Arbeit stellt Lösungsansätze und Verfahren zur Unterstützung des Testentwurfs vor.

1.1 Aufgabe des Schaltungstests

Beim Schaltungsentwurf steht die Erfüllung der mit dem Kunden vereinbarten Anforderungen im Vordergrund. Bei der anschließenden Herstellung der Schaltung wirken sich unvermeidbare Schwankungen von Prozessgrößen oder Materialdefekte auf das Verhalten der Schaltungen aus, so dass keine produzierte Schaltung den anderen gleicht. Um festzustellen, ob die einzelnen Schaltungen auch nach der Produktion den Anforderungen genügen, sind sie einem Test zu unterziehen.¹

Unter dem Begriff *Testentwurf* werden alle – im wesentlichen drei – Aufgaben zusammengefasst, die den automatisierten Test einer Schaltung vorbereiten. Erstens sind Kriterien festzulegen, die die Schaltung beim Test erfüllen muss, um die korrekte Funktion der Schaltung gemäß den Anforderungen sicher stellen zu können. Hierzu zählen die Auswahl der zu überprüfenden Anforderungen sowie das Festlegen der Messverfahren und der einzuhaltenden Grenzwerte. Zweitens muss der Testaufbau zusammengestellt werden. Dazu sind z. B. zu verwendende Messgeräte auszuwählen und eine Adapterplatine zu entwerfen, auf die die zu testende Schaltung gesteckt wird, um eine Verbindung mit dem Testautomaten herzustellen. Und drittens muss ein Testprogramm für den Testautomaten kodiert und überprüft werden, welches den automatischen Ablauf der Tests steuert. Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der ersten Aufgabe, dem Entwurf von Testkriterien.

Einerseits hat eine Schaltung also Anforderungen an die Funktion zu erfüllen, die dem Kunden garantiert werden und andererseits werden diese Anforderungen beim Test mit davon unvermeidbar abweichenden Testkriterien überprüft. Um die Unterschiede zwischen den Anforderungen an die Funktion und den Kriterien beim Test beschreiben zu können, wird zwischen den beiden Seiten Betrieb und Test unterschieden. Auf der Betriebsseite werden Anforderungen an die Schaltung formuliert, die sich auf den Einsatz der Schaltung beim Kunden beziehen und auf der Testseite die Kriterien, die die Schaltung zum Bestehen des Tests erfüllen soll.

Die Anforderungen an eine Schaltung werden durch Spezifikationen beschrieben, die im Datenbuch aufgeführt sind. Sie geben an, welche Bedingungen die Eigenschaften der Schaltung einhalten müssen. Zur Kennzeichnung der Betriebsseite werden diese Spezifikationen mit *Betriebsspezifikationen* und die zugehörigen Schaltungseigenschaften mit *Betriebseigenschaften* bezeichnet. Anhand der Betriebsspezifikationen kann eine Schaltung einer von zwei Gruppen zugewiesen werden: den *funktionierenden Schaltungen* oder den *fehlerhaften Schaltungen*. Eine funktionierende Schaltung muss alle Betriebsspezifikationen erfüllen. Sobald eine Betriebsspezifikation verletzt wird, ist die Schaltung fehlerhaft.

In Veröffentlichungen zum Testentwurf wird üblicherweise zwischen parametrischen und katastrophalen Fehlerursachen unterschieden. Abweichungen von Parametern des Herstellungsprozesses wie Dotierspannungen oder Maskenversatz können zu so großen Änderungen einiger Schaltungseigenschaften führen, dass Betriebsspezifikationen verletzt werden. Die parametrischen Abweichungen wirken sich meist auf größere Bereiche einer Schaltung aus. Dagegen werden katastrophale Fehler durch lokale Defekte der Schaltung hervorgerufen, wie Kurzschlüsse durch Partikel oder Leitungsunterbrechungen durch Risse. Parametrische Fehler sind dabei wesentlich bedeutender, hauptsächlich weil sie schwerer zu erkennen sind und meist die katastrophalen Fehler dominieren² [SN99].

Funktionierende und fehlerhafte Schaltungen aus dem Herstellungsprozess werden, wie in Abbildung 1.1 dargestellt, dem Test zugeführt. Der Test erfolgt, indem die Kriterien für jede Schaltung ausgewertet werden. Die Kriterien werden, wie auf der Betriebsseite, durch Spezifikationen

¹Der Test integrierter Schaltungen wird im Überblick in [GBVL97] beschrieben, genauso wie die historische Entwicklung der Testverfahren und zukünftige Trends.

²Ein Fehler dominiert einen anderen, wenn die Erkennung des einen Fehlers notwendigerweise den anderen erkennt.

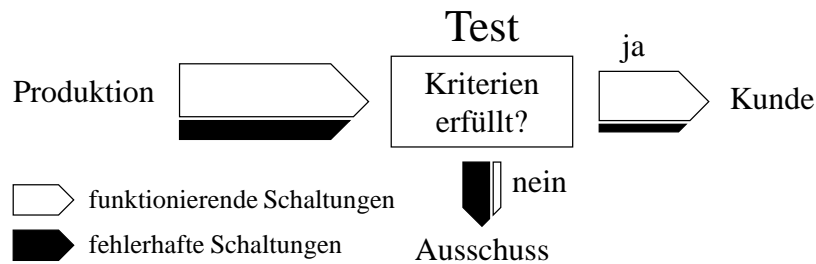


Abbildung 1.1: Testsituation.

beschrieben, die Bedingungen an Schaltungseigenschaften formulieren. Die Begriffe *Testspezifikation* und *Testeigenschaft* sollen zur Unterscheidung von der Betriebsseite dienen. Die Testspezifikationen ordnen eine Schaltung einer von zwei weiteren Gruppen zu: den *angenommenen Schaltungen* oder den *aussortierten Schaltungen*. Nur Schaltungen, die alle Testspezifikationen erfüllen, bestehen den Test, sie werden angenommen. Alle anderen Schaltungen werden aussortiert.

Es ist zu beachten, dass die funktionierenden und die fehlerhaften Schaltungen auf die Betriebsspezifikationen und davon getrennt die angenommenen und die aussortierten Schaltungen auf die Testspezifikationen bezogen definiert werden.³ Idealerweise sollten ausschließlich funktionierende Schaltungen beim Test angenommen werden und alle fehlerhaften Schaltungen aussortiert werden.

Die Unterscheidung zwischen Betrieb und Test ermöglicht die mit dem Test einhergehenden Fehlentscheidungen zu quantifizieren. Bei einer Fehlentscheidung stimmt die Testentscheidung aufgrund der Testspezifikation nicht mit dem Erfüllen der Anforderung gemäß der Betriebsspezifikation überein. Es werden zwei Arten von Fehlentscheidungen unterschieden. Einerseits können funktionierende Schaltungen fälschlicherweise aussortiert werden. Dieser Anteil wird nicht verkauft und erhöht damit die Produktionskosten des Herstellers. Andererseits können fehlerhafte Schaltungen an Kunden ausgeliefert werden. Schadenersatz, Ansehensverlust und ein möglicherweise reduzierter Marktanteil des Herstellers sind die Folge. Zu Fehlentscheidungen beim Test kommt es durch unvermeidbare Messfehler, wie z. B. durch thermisches Rauschen, weil Signale auf den Leitungen verfälscht werden oder die Signale zum Anregen der Schaltung in der Praxis nicht in idealer Form erzeugt werden können [BR01].

Die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten dieser Fehlentscheidungen sind die zentralen Ziel- und Bewertungsgrößen bei den in dieser Arbeit vorgestellten Testentwurfverfahren. *Ausbeuteeinbuße* bezeichnet dabei die Wahrscheinlichkeit für aussortierte, funktionierende Schaltungen und *Fehlerdurchlässigkeit* die Wahrscheinlichkeit für angenommene, fehlerhafte Schaltungen.

1.2 Impliziter funktionaler Test

Bei dem bisher in der Praxis für analoge Schaltungen üblichen spezifikationsbasierten Test werden die in der Betriebsspezifikation spezifizierten Betriebseigenschaften, wie die Leerlaufverstärkung oder Einschwingzeit eines Operationsverstärkers, beim Test gemessen und mit dem Spezifikationswert verglichen [MSV94]. Dieses Vorgehen wird auch als *funktionaler Test* [BD89] oder *expliziter funktionaler Test* [PC96] bezeichnet, weil dabei die Funktion der analogen Schaltung direkt gemäß der Betriebsspezifikation überprüft wird.

³Im Gegensatz dazu werden z. B. in [BR01] funktionierende und fehlerhafte Schaltungen abhängig vom Bestehen des Tests definiert.

In der Praxis stößt die Durchführbarkeit des expliziten funktionalen Tests zunehmend an seine Grenzen. Wie die Erfahrung zeigt, erschwert die Komplexität der Schaltungen z. B. den Zugriff auf zu testende Komponenten. Signale werden durch immer länger werdende Leitungen und immer höhere Taktraten verfälscht, d. h. sie werden für den Test unbrauchbar. Implizite funktionale Testverfahren [VC00, PC97, VC97, PC96] heben die Beschränkung des expliziten funktionalen Tests auf die alleinige Messung und Auswertung der Betriebseigenschaft auf. Sie ermöglichen das Messen und Auswerten anderer von der Betriebseigenschaft abweichender Schaltungseigenschaften, die beim Test leichter erfassbar sind und als *Testbeobachtungen* bezeichnet werden.

Testbeobachtungen sind vom Testentwickler auszuwählen. Sie sollen mit vergleichsweise kleinem Aufwand bestimmt werden können und aussagekräftig sein. So wird z. B. in [VCC02b] das Spektrum des ins Basisband transformierten transienten Ausgangssignals einer HF-Schaltung zum Testen ausgewertet. In [VCC02a] wird das transiente Ausgangssignal einer Operationsverstärkerschaltung direkt verwendet und Ergebnisse in einer Produktionsumgebung mit 587 gehäuteten ICs präsentiert. In [LVG98, GPG01] wird das Spektrum des Versorgungsstromes zum Testen ausgewertet und in [LGA99, WGS98, Lin96, LGA95] mittels DC- und AC-Eigenschaften auf transiente Schaltungseigenschaften geschlossen. Verschiedene Teststrategien bezüglich Messung und Auswertung des Versorgungsstromes werden in [MVSC00] in einer Produktionsumgebung untersucht und mit dem expliziten funktionalen Test überprüft und verglichen. Fourier- und Wavelet-Koeffizienten der abgetasteten Signale am Differenzgang eines CMOS Bandpassfilters werden in [PGG00] untersucht. Und der Ansatz in [BD89] ist, Messungen, die zur Verkürzung der Testdauer entfernt werden, über Regressionsmodelle aus den anderen durchgeführten Messungen zu schätzen. Diese Schätzwerte werden dann mit der Spezifikation ausgewertet. Generell wird beim impliziten funktionalen Test auf der Grundlage der Testbeobachtungen auf das Einhalten der Betriebsspezifikation geschlossen. Dies ist möglich, weil sich die Schwankungen des Herstellungsprozesses auf größere Bereiche der Schaltung auswirken. Anhand der Auswirkung der Prozessschwankungen auf die Testbeobachtungen kann somit auch auf deren Auswirkung auf die Betriebseigenschaft geschlossen werden [VCC02b, VCC02a, LGA99, LVG98, Lin96, LGA95].

Der Fokus dieser Arbeit liegt auf dem automatisierten Entwurf von Testspezifikationen für den impliziten funktionalen Test und auf Analyseverfahren, mit denen die Güte einer entworfenen Testspezifikation bewertet werden kann. Mit den Analyseverfahren können in der Entwurfsphase eines Tests Teststrategien mit verschiedenen Testbeobachtungen bewertet und verglichen werden und hinsichtlich der Teststrategie und der verwendeten Testbeobachtungen eine Auswahl getroffen werden.

Implizite funktionale Testverfahren können Auswege aus dem sich durch immer höhere Schaltungskomplexität und durch weiterentwickelte Produktionsverfahren verschärfenden Testdilemma bieten. Im Anschluss werden einige Anwendungsbeispiele aufgezeigt.

Der eingeschränkte Zugriff auf zu testende analoge Schaltungskomponenten wird zusätzlich erschwert durch immer komplexere Systeme und die Einbettung in eine gemischt analog-digitale Schaltungsumgebung. Außerdem führen zunehmende Taktraten zu Signalverfälschungen. Implizite funktionale Testverfahren schaffen hier über den expliziten funktionalen Test hinaus weitere Ansatzpunkte, weil z. B. Eigenschaften indirekt über vor- oder nachgeschaltete Komponenten gemessen oder auch Versorgungsströme zum Test herangezogen werden können.

Die Betriebseigenschaften sind als Ziel und Ergebnis des Toleranzentwurfs sowie geeigneter Layoutverfahren unempfindlich gegenüber Schwankungen des Herstellungsprozesses. Die verbleibenden Abweichungen der Eigenschaften sind gering und gehen bei der Messung dieser Eigenschaften möglicherweise im unvermeidbaren Messrauschen unter, so dass ein expliziter funktionaler Test erschwert wird. Ein Messen anderer, empfindlicherer Eigenschaften zusammen mit impliziten funktionalen Testverfahren kann dann zu einem wesentlich robusteren Test der Be-

triebsspezifikationen führen.

Implizite funktionale Testverfahren können auch dann in Betracht gezogen werden, wenn der Aufwand zur Nachbildung der Betriebsbedingungen, wie z. B. Lastkapazitäten, für einen expliziten funktionalen Test zu hoch ist, die Betriebsspezifikation aber dennoch mit einem Test überprüft werden soll. Ein impliziter funktionaler Test mit Eigenschaften, die unter Normalbedingungen oder zumindest einfacher erzeugbaren Bedingungen gemessen werden, vermeidet diesen Aufwand.

Zur Reduktion der Gesamttestzeit kann bei impliziten funktionalen Testverfahren derselbe Satz von Messungen zum Test aller Betriebsspezifikationen verwendet werden. Für jede einzelne Betriebsspezifikation wird dann eine eigene Auswertevorschrift für den Satz von Testbeobachtungen entworfen. Damit kann die Anzahl aller zum Test einer Schaltung durchzuführenden Messungen klein gehalten werden.

Generell kommen implizite funktionale Testverfahren immer dann in Frage, wenn aus Aufwandsgründen Testkosten eingespart werden sollen. Dem Vorteil der leichter messbaren Eigenschaften und den dadurch kostengünstigeren Tests steht in der Entwurfsphase der Aufwand zum Entwurf der Testspezifikation gegenüber.

1.3 Toleranzentwurf

Das Verknüpfen von Toleranz- und Testentwurf birgt Potential zu mehr Effizienz beim Testentwurf für analoge Schaltungen hinsichtlich der Verfahren und der Arbeitsorganisation. Einerseits kann beim Testentwurf auf beim Toleranzentwurf erarbeitetes Wissen aufgebaut werden und andererseits können Anforderungen aus dem Testentwurf rechtzeitig in den Schaltungsentwurf einfließen.

Das Ziel des Toleranzentwurfs, ist die Bauelementewerte einer Schaltung (z. B. Transistorlängen und -weiten, Kapazitäts- und Widerstandswerte) bei fest vorgegebener Struktur so zu dimensionieren, dass die Schaltung sowohl robust gegenüber Einflüssen der Betriebsumgebung als auch gegenüber Prozessschwankungen ist. Dieses Ziel schließt eine hohe Produktionsausbeute ein, d. h. einen hohen Anteil funktionierender Schaltungen aller hergestellten Schaltungen.

Verfahren zum Toleranzentwurf lassen sich in statistische und deterministische Verfahren einteilen. Die statistischen Verfahren verwenden als Optimierziel zumeist die Produktionsausbeute, die dabei mit Monte-Carlo-Verfahren abgeschätzt wird. Die deterministischen Verfahren beruhen oft auf einer geometrischen Approximation des durch die Betriebsspezifikationen gegebenen Parameterbereichs der funktionierenden Schaltungen, der als Akzeptanzgebiet bezeichnet wird. Neuere Verfahren basieren auf Robustheitsmaßen, welche die Robustheit einer Spezifikation gegenüber den statistischen Parametern, mit denen die Schwankungen des Herstellungsprozesses modelliert werden und den Betriebsparametern beschreiben: Performance Scores [DK95], Linearized Performance Penalties (LPP) [KD95], Worst-Case-Abstände [AGW94, Grä93, Wie94, SGA99, AEG⁺00, SPZ⁺01], Capability Potential Index und Capability Performance Index [AS94, DG98].

Die auf Worst-Case-Abständen beruhenden Verfahren bilden aus zwei Gründen eine hervorragende Basis für Lösungsverfahren zum Testentwurf. Zum einen ist das den Verfahren zu Grunde liegende parametrische Fehlermodell in der Lage, die Verletzung der Betriebsspezifikationen durch ein gleichzeitiges Abweichen mehrerer statistischer Parameter zu beschreiben. Dies ist auch für robuste Testverfahren von grundlegender Bedeutung, da praktisch nie nur einzelne Prozessparameter schwanken. Zum anderen ist der beim Toleranzentwurf bestimmte Worst-Case-Parametersatz für den Testentwurf von zentraler Bedeutung. In der Umgebung dieses Parametersatzes trägt ein Abweichen der Testspezifikation von der Betriebsspezifikation am stärksten zur Auftrittswahrscheinlichkeit von Fehlentscheidungen beim Test bei. Die Kenntnis des Worst-Case-Parame-

tersatzes alleine reicht beim Testentwurf jedoch nicht aus. Zum Erkennen von Fehlentscheidungen muss speziell die Abweichung der Testspezifikation von der Betriebsspezifikation über den gesamten problemrelevanten Parameterbereich erfasst werden. Hierzu liefert diese Arbeit einen grundlegenden Beitrag.

1.4 Stand der Technik

Der Schaltungstest ist seit jeher ein fester Bestandteil des Herstellungsprozesses integrierter Schaltungen. Der Test erfüllt dabei nicht nur seine grundsätzliche Aufgabe der Qualitätssicherung durch Identifizieren und Aussortieren fehlerhafter Schaltungen. Er wird darüber hinaus eingesetzt, um den Schaltungsentwurf, die Produktionsverfahren und den Test selbst aus ökonomischer Sicht zu optimieren. Prozessgrößen können überwacht und somit z. B. eine Drift erkannt werden. Das beim Test erzeugte Datenmaterial wird auch zur Fehlerdiagnose ausgewertet. So können Fehlerursachen erkannt und behoben werden, um die Ausbeute und damit den Gewinn des Herstellers zu erhöhen. Die vielseitigen Aspekte des Test werden in einer Vielzahl von anwendungsspezifischen Veröffentlichungen dokumentiert. Eine Übersicht bieten die Veröffentlichungen [Vin98, Mil98, LGA99, BR01, GBVL97, Rob97]. Darüber hinaus wird in [GR00] ein Überblick über CAD (*computer aided design*) Werkzeuge zum Entwurf analoger und gemischt analog-digitaler integrierter Schaltungen gegeben. Er umfasst unter anderem Simulation und Modellierung, Synthese und Optimierung sowie den Test, wobei der Schwerpunkt auf der Schaltungs- und Layoutsynthese liegt. Hierbei werden die Unterschiede im Automatisierungsgrad der einzelnen Entwurfsschritte deutlich. Defekte bei analogen Schaltungen werden in [SN99] zusammenfassend dargestellt. Daraus werden Fehlermodelle sowie Metriken zur Bewertung der Qualität eines Testentwurfs abgeleitet. Die Tendenz zur Integration ganzer Systeme auf einem Chip, SOCs (*system on a chip*), ist ungebrochen. [ZDR00] beschreibt die Trends und Anforderungen zum Test eines SOCs.

Im Gegensatz zu den zahlreichen Veröffentlichungen über anwendungsspezifische Testverfahren wird zu allgemeinen den Testentwurf automatisierenden Verfahren vergleichsweise wenig publiziert. Im folgenden wird eine Auswahl der den Testentwurf automatisierenden Verfahren zusammengestellt. Dabei wurden auch Themengebiete des Tests berücksichtigt, die über die Arbeit hinaus gehen. Der Schwerpunkt liegt auf Beiträgen, die in den letzten Jahren erschienen sind. Frühere Beiträge sind in den oben genannten Übersichtsartikeln zu finden.

Mit der primären Testaufgabe vor Augen fehlerhafte Schaltungen bei der Produktion auszusortieren, beschäftigen sich **Fehlererkennungsverfahren** mit dem Entwurf geeigneter Testkriterien. Dabei wird zwischen den spezifikationsbasierten Verfahren und den defektorientierten Verfahren unterschieden.

Bei den **spezifikationsbasierten Verfahren** sollen parametrische Abweichungen der Bauelementewerte, die zu einer Spezifikationsverletzung führen, erkannt werden. In der Praxis gewinnen diese Fehler gegenüber den katastrophalen Fehlern immer mehr an Bedeutung. Zugleich sind sie am schwersten zu erkennen [SN99].

Bei den Ansätzen [LGA99, LVG98, Lin96, LGA95, PC96] ist eine Schaltung fehlerhaft, wenn die Abweichungen der Prozessparameter vom Nominalwert so groß werden, dass mindestens eine Betriebsspezifikation verletzt wird. Zum Test werden charakteristische Beobachtungen (*characteristic observations*) ausgewertet, die den Testbeobachtungen in dieser Arbeit entsprechen. Sie sollen möglichst einfach und kostengünstig sein. Um den Rückschluss von den charakteristischen Beobachtungen auf das Einhalten der einzelnen betrachteten Spezifikationen zu ermöglichen, wird ein Monte-Carlo-Verfahren angewendet. Für eine Stichprobe von Schaltungen wird die

Spezifikation durch Simulation ausgewertet und die Schaltungen den zwei Klassen funktionierende Schaltungen bzw. fehlerhafte Schaltungen zugeordnet. Mit einer Diskriminanzanalyse wird dann eine Klassifikation vorgenommen, wobei die berechnete Diskriminanzfunktion als Testspezifikation verwendet wird. [LGA99, LVG98, Lin96, LGA95] verwenden die logistische Diskriminanzanalyse und *Importance Sampling* Verfahren, [PC96] den Fisher-Ansatz. Die Verfahren in [LGA99, LVG98, Lin96, LGA95] werden robust gegenüber Messfehlern entworfen. Als ein wesentlicher Beitrag der vorliegenden Arbeit werden statt der Diskriminanzanalyse simulations-effizientere Lösungsverfahren vorgeschlagen.

In [VCC02a] werden Messwerte der transienten Ausgangssignale einer Schaltung zum Test verwendet. Diese werden im Gegensatz zu den eben beschriebenen Ansätzen [LGA99, LVG98, Lin96, LGA95] nicht linear kombiniert, sondern über komplexere und vermeintlich genauere Modelle (MARS, *multivariate adaptive regression splines*) ausgewertet. Die Modelle werden mit Regressionsverfahren erstellt. Die Genauigkeit, mit der die Parameter der Modelle geschätzt werden können, bleibt jedoch in [VCC02a] unberücksichtigt. Bei gleicher Anzahl Stützpunkte sinkt mit zunehmender Anzahl zu schätzender Modellparameter die Genauigkeit. Dies ist besonders problematisch, da bei multivariaten Modellen die Anzahl der Modellparameter im Vergleich zur Ordnung der Modelle überproportional anwächst. Noch dazu wird zur Modellerstellung ein simulationsintensives einfaches stochastisches Experiment im Vergleich zum *Importance Sampling* Verfahren in [LGA99, LVG98, Lin96, LGA95] eingesetzt. Um den Messfehlereinfluss und Modellfehler zu reduzieren, wird in [VCC02a] außerdem der Verlauf der transienten Eingangssignale optimiert. Dazu wird ein genetischer Ansatz verwendet. Teure Schaltungssimulationen werden durch Modelle ersetzt.

Bei dem als Signaturtest bezeichneten Testverfahren [VCC02b] wird das Spektrum des ins Basisband transformierten Ausgangssignals der zu testenden HF-Schaltung als Signatur ausgewertet. Im linearen Modell werden dazu die Schaltungseigenschaften durch die Signaturen vorhergesagt.

Nach [PC97] werden lineare analoge Schaltung zum Test zwischen DA- und AD-Wandler eingebettet. Als Eingangsmuster wird eine mit einem rückgekoppelten Schieberegister erzeugte digitale Sequenz angelegt. Die Testentscheidung erfolgt anhand der digitalen Ausgangsdaten. Die Testkriterien werden mit einer Diskriminanzanalyse anhand von Trainingsdaten bestimmt, die mit Monte-Carlo-Verfahren bestimmt werden.

Defektorientierte Verfahren sind auf das Erkennen katastrophaler Fehler ausgerichtet. Bei defektorientierten Verfahren werden mögliche Fehler der Schaltung modelliert, in die Schaltung injiziert und dann simuliert. Durch einen Vergleich mit dem fehlerfreien Fall wird dann versucht Fehler zu erkennen.

In [Hof02] werden Kurzschlüsse und Leitungsunterbrechungen mit kleinen bzw. großen Widerständen modelliert. Fehler werden erkannt, wenn das schlauchförmige Toleranzgebiet des Ausgangssignals verlassen wird.

Abweichungen einzelner Parameter unter Berücksichtigung der üblichen Toleranzen aller anderen Parameter werden in [ACK99] als Fehler definiert. Die Aufgabe des Testentwurfs beinhaltet dann diese Fehler zu erkennen, ohne dass die Abweichungen anderer Parameter den Fehler maskieren. Um dies zu erreichen wird ein Optimierproblem formuliert, welches mit Intervallverfahren gelöst wird.

Bei dem Ansatz [ECM93] kommen stochastische Verfahren zur Anwendung. Für jeden in die Schaltung injizierten Fehler wird eine Stichprobe bezüglich der Prozessverteilung simuliert. Eine Diskriminanzanalyse dient dann zum Klassifizieren der fehlerhaften bzw. funktionierenden Schaltungen auf der Basis von DC- und Kleinsignal AC-Messungen. Das Annahmekriterium einer Schaltung wird dabei als Hypothesentest formuliert.

In [WGS98] wird eine Diskriminanzfunktion als Testspezifikation verwendet. Dabei entschei-

det ein Verhältnis von Wahrscheinlichkeiten über die Annahme bzw. Ablehnung einer Schaltung. Die Testspezifikationen werden so entworfen, dass die Wahrscheinlichkeit von Fehlentscheidungen beim Test minimiert wird. Für jeden angenommenen Fehler sowie für die funktionierenden Schaltungen ist dabei jeweils eine als normalverteilt angenommene Verteilung der Simulationsergebnisse mit einem Monte-Carlo-Verfahren abzuschätzen.

In [MS96] werden zur Defekterkennung Abtastwerte des transienten Ausgangssignals mit einem neuronalen Netz ausgewertet.

In [HK93] werden nicht Schaltungseigenschaften spezifiziert sondern Bauelementewerte. Dies beruht auf der Idee, dass alle Bauelemente einer Schaltungen funktionieren müssen, um eine funktionierende Schaltung zu erhalten. Abweichungen der Bauelementewerte sollen beim Test durch Auswerten von Schaltungseigenschaften erkannt werden. Zur Fehlererkennung werden lineare Modelle der Schaltungseigenschaften eingesetzt, um Einzelabweichungen identifizieren zu können. Problematisch wird die Erkennung der Abweichungen von mehreren Bauelementewerten, da es zur Überlagerung der Effekte auf die Schaltungseigenschaften kommt. Dieses Problem tritt bei dem in [LGA99, LVG98, Lin96, LGA95] und in der vorliegenden Arbeit verwendeten Fehlermodell nicht auf. Denn der Worst-Case-Parametersatz beschreibt die wahrscheinlichste Verletzung einer einzelnen Betriebsspezifikation auf Grund der kleinsten Abweichung aller Parameter vom Nominalwert (Mehrfachfehlermodell). Die zur Testentscheidung nötige Verknüpfung aller Spezifikationen erfolgt anschließend durch eine einfach durchzuführende UND-Verknüpfung.

Besondere Beachtung finden *floating gate* (schwebendes Gate) Defekte, wobei das Gate des Transistors durch eine Leitungsunterbrechung vom Rest der Schaltung abgetrennt wird. Hierbei ist die Funktion des Transistors von der unbekanntem Ladung am Gate abhängig, die nicht mehr kontrolliert werden kann.

In [BF99] wird für diesen Defekt ein kapazitives Fehlermodell vorgestellt.

Eine Beziehung zwischen der Ladung am Gate und der beim Test ausgewerteten Signale wird in [PGA02] hergestellt. Die Signale werden dann so ausgewählt, dass jeder Defekt für beliebige Ladung am Gate sicher erkannt wird.

Die Aufgabe der **Fehlersimulation** ist einerseits die Antwort einer fehlerhaften Schaltung zu bestimmen und andererseits die Simulationen zeiteffizient zu gestalten.

In [HC98] soll Rechenzeit bei der transienten Simulation langer Fehlerlisten eingespart werden. Die Idee ist, die funktionierende Schaltung und alle injizierten Fehler gleichzeitig zu simulieren. Die Schaltungsteile, die von einem injizierten Fehler nicht oder nur wenig betroffen sind, können dann erkannt und nur einmal berechnet werden.

Um Monte-Carlo-Simulationen zu beschleunigen wird in [CLM97] ein hierarchischer Ansatz gewählt. Die Schaltung wird dabei in Blöcke zerlegt und diese durch Modelle ersetzt. Die Blöcke in denen die Fehler injiziert werden, werden auf Transistorebene simuliert.

Die zunehmend höhere Integration der integrierten Schaltungen erschwert beim Test den Zugriff auf schaltungsinterne Signale. Beim Messen werden die Signale auf den immer länger werdenden Leitungen zunehmend verfälscht. Mit **BIST**-Verfahren (*build-in self test*) wird versucht die Beobachtbarkeit zu verbessern, indem Testschaltungen oder zumindest Teile davon direkt auf dem Chip integriert werden. Damit werden die Anforderungen an die externen Testautomaten geringer und diese damit günstiger. Außerdem bietet BIST die Möglichkeit zum Parallelisieren der Tests.

In [HAR00] wird dazu ein in CMOS integrierter Prototyp für eine Testhardware vorgestellt, mit der alle analogen Komponenten der Schaltung einzufassen sind.

Die in [BF01] vorgestellte BIST-Struktur erkennt Fehler an der Formveränderung von Lissajous-Kurven.

Ansatz [SSMM99] greift, wenn mindestens zwei identische Signalpfade auf dem Chip nahe beieinander integriert sind. Zum Test werden paarweise die Ausgangssignale dieser Pfade mitein-

ander verglichen.

[AKS98] stellt eine BIST-Hardware zum Test von AD- und DA- Wandlern vor.

Wenn fehlerhafte Schaltungen frühzeitig beim Test erkannt werden, kann die **durchschnittliche Testdauer** einer Schaltung reduziert werden.

Durch eine optimale Reihenfolge bezüglich Erkennungsrate fehlerhafter Schaltungen und Dauer der Tests wird in [MSV94, HMK90] die durchschnittliche Testdauer reduziert.

In [JV01] werden dagegen die durchzuführenden Tests selbst nach deren Dauer und der Erkennungsrate fehlerhafter Schaltungen mit einer Heuristik optimiert.

Der Ansatz [PTC99] verfolgt das Ziel, die von der Prüfspitze zurückgelegte Weglänge beim *Wafer Probe Test* zu verkürzen.

Ein anderer Ansatz, Kosten beim Test einzusparen, ist die **Reduktion der Testanzahl**. Hierzu wird üblicherweise aus einer größeren Menge Tests eine geeignete Auswahl getroffen.

In [CL02, HMK90, SSS89, SK96] werden Fehler über spezifikationsverletzende Abweichungen einzelner Prozessparameter definiert. Mit einem linearen Modell der Beziehung zwischen den Prozessparametern und den Messungen σ werden dann Tests ausgewählt, mit denen die Prozessparameter möglichst robust bestimmt werden können [HMK90, SSS89, SK96]. Parameterintervalle werden dagegen in [CL02] bei der Auswahl betrachtet.

In [BD89, BD88] wurde ein Verfahren mit dem Namen *predictive subset testing* vorgestellt. Tests zu einzelnen Betriebsspezifikationen werden dabei eingespart, wenn die Betriebseigenschaft über ein polynomiales Regressionsmodell aus den Messwerten zu anderen durchgeführten expliziten funktionalen Tests bestimmt werden kann.

Diagnose-verfahren werden normalerweise nur auf fehlerhafte Schaltungen angewendet, um die Ursache für das Fehlverhalten der Schaltung zu finden. Da diese Verfahren selten beim Produktionstest eingesetzt werden, ist die Anforderung an eine kurze Testdauer nicht so hoch wie bei der Fehlererkennung. Bei simulationsbasierten Verfahren kann zwischen Verfahren mit *Simulation vor dem Test* und *Simulation nach dem Test* unterschieden werden.

Bei Verfahren mit **Simulation vor dem Test** werden Fehler einer Fehlerliste in die Schaltung injiziert und diese simuliert. Die Signaturen oder andere Unterscheidungsmerkmale werden dann in einem Verzeichnis abgelegt. Während des darauf folgenden Tests wird die Antwort jeder Schaltung mit denen im Verzeichnis verglichen und dabei der wahrscheinlichste Fehler bestimmt.

Das Fehlermodell in [SHK01] umfasst Kurzschlüsse und Leitungsunterbrechungen, mit Ausnahme am Gate, die mit Widerständen modelliert werden. Es wird eine zeitsparende Simulationsmethode basierend auf den Empfindlichkeiten der Schaltungseigenschaften zu diesen Widerständen vorgeschlagen, die das adjungierte Netzwerk verwendet, um mehrere Fehler parallel simulieren zu können.

In [AA01, AA00] wird eine Auswahl aussagekräftiger Fourier- und Waveletkoeffizienten aller Knotenspannungen der Schaltung mit einem neuronalen Netz ausgewertet. Das Netz ist zuvor mit Trainingsdaten zu trainieren. Der in [AA00] präsentierte Ansatz beschränkt sich dabei auf lineare Schaltungen.

Die zum Test durchgeführten elektrischen Messungen werden in [GND⁺02] zunächst über ein lineares Modell in Prozessparameter transformiert. Dazu wird eine *principal component* Analyse durchgeführt, um eine eindeutige Abbildung zu ermöglichen. Die spezifizierten Schaltungseigenschaften werden dann über multivariate, polynomiale Modelle niedriger Ordnung aus den bestimmten Parameterwerten berechnet.

Neben den DC-Werten ausgewählter Knotenspannungen werden in [EGEY99] auch einzelne Fourierkoeffizienten ausgewertet. Die Fehlerklassifikation erfolgt mit einem neuronalen Netz (*learning vector quantization neuronal network, LVQ NN*).

Um die Ursache für Schwankungen der Schaltungseigenschaften über den Waver zu ermitteln,

wird in [CC01] eine Methode vorgestellt, die Bauelementewerte zu bestimmen. Dazu werden Testverfahren verwendet, die automatisch mit einem genetischen Ansatz derart optimiert werden, dass die Bauelementewerte eindeutig bestimmbar sind. Messfehler werden berücksichtigt und zeitintensive Schaltungssimulationen durch Regressionsmodelle ersetzt.

Fehlerursachen, die man nicht unterscheiden kann, bilden so genannte **ambiguity groups**. Im linearen Modell der Schaltungseigenschaften zu den Parametern sind die zu einer *ambiguity group* gehörenden Gradienten linear abhängig. Es ist deshalb nicht möglich zu bestimmen welcher oder welche der Parameter einer *ambiguity group* für die Abweichung einer Schaltungseigenschaft vom Nominalwert sorgt. [SPM⁺00] bietet eine Übersicht über Verfahren, mit denen *ambiguity groups* bestimmt werden können.

Symbolische Analyseverfahren werden in [FGL⁺98] zur Diagnose eingesetzt.

Bei Methoden, die **Simulation nach dem Test** einsetzen, liegen die Messergebnisse einiger Schaltungseigenschaften zu Beginn vor. Es sollen nachträglich Schaltungsparameter gefunden werden, so dass die Simulationsergebnisse möglichst gut mit den Messwerten übereinstimmen. Es sollen also zu gegebenen Schaltungseigenschaften die zugehörigen Schaltungsparameter bestimmte werden. Diese Abbildung ist im Normalfall nicht eindeutig. Sind die Parameterwerte bestimmt, werden sie mit vorgegebenen Toleranzen verglichen. Parameterwerte außerhalb der Toleranzen bedeuten Fehler.

In [CC99] wird mit Regressionsmodellen, die mit Simulationsdaten erzeugt werden, eine Beziehung zwischen Messwerten ausgewählter Schaltungseigenschaften und den Schaltungsparametern hergestellt. Zu gegebenen Messwerten werden dann die Schaltungsparameter mit dem Newton-Raphson Verfahren bestimmt.

Die Aufgabe der **Testmustergenerierung** ist die Testmuster so auszuwählen oder zu erzeugen, dass sich fehlerhafte Schaltungen in den Ausgangssignalen möglichst gut von funktionierenden Schaltungen unterscheiden. Die Teststimuli werden dazu parametrisiert und in einem Optimierungsvorgang die Erkennbarkeit von Fehlern maximiert.

In [Bur01, GC99] wird dazu eine Kostenfunktion aufgestellt und die Höhe der am Schaltungseingang angelegten Folge rechteckiger Pulse optimiert.

Stückweise lineare Stimuli werden in [VC00, CC00] generiert. Das Verfahren [VC00] basiert auch für nichtlineare Schaltungen auf Empfindlichkeiten. Fehler werden dabei über die spezifikationsverletzende Auslenkung einzelner Schaltungsparameter definiert, wobei jedoch Schwankungen aller Prozessparameter berücksichtigt werden.

[CC00] verwendet genetische Algorithmen um die Spannungswerte des Stimulus in regelmäßigen Zeitabständen zu bestimmen.

Stimuli in unterschiedlichen Frequenzen werden in [HKSZ99, HKSZ98] generiert. Die zur Optimierung verwendete Kostenfunktion erfasst die Einstellbarkeit und die Beobachtbarkeit aller Knotenspannungen. [HKSZ99] ist dabei eine Erweiterung von [HKSZ98] um parametrische Fehler.

Ungenauigkeiten bei der Generierung der Eingangssignale werden in [DSGH99] berücksichtigt. Verschiedene Modelle der Schaltungseigenschaften über den Parametern werden zur Einsparung von Simulationskosten bei der Lösung des Optimierproblems untersucht und miteinander verglichen.

In [VC97] werden neben der Optimierung der Pulsbreite der pulsförmigen Stimuli auch die optimalen Messzeitpunkte am Ausgangssignal bestimmt. Fehler werden über spezifikationsverletzende Auslenkungen einzelner Parameter definiert, wobei für alle anderen Parameter Auslenkungen von einem Prozent vom Nominalwert wegen der Prozessschwankungen zulässig sind.

Ansätze für **Teststrategien** liefern die folgenden Veröffentlichungen.

In [PC99] werden lineare, zeitinvariante Schaltungen zum Test zwischen einem DA-Wandler

und einem AD-Wandler eingebettet. Die digitale Impulsantwort wird mit einem neuronalen Netz ausgewertet.

Mit einer Testschaltung werden in [AK97b, AK97a] Schaltungsblöcke zum Oszillieren gebracht. Zu große Abweichungen der Oszillationsfrequenz werden dabei als Fehler gewertet.

[SSdG96] verfolgt den Ansatz, die Versorgungsspannung zu rampen. Dadurch werden die Transistoren in verschiedenen Arbeitsbereichen betrieben. Anhand des Versorgungsstromes können dann, durch Auswertung mit einem neuronalen Netz, Fehler erkannt werden.

1.5 Merkmale und Ziele der Arbeit

Implizite funktionale Testverfahren ermöglichen, andere Eigenschaften beim Test zu messen und auszuwerten als die spezifizierten Betriebseigenschaften. Da die Betriebsspezifikationen dem Kunden garantiert werden, entsteht die Aufgabe des *Entwurfs einer Testspezifikation*, die per Rückschluss eine Aussage über das Einhalten dieser Betriebsspezifikationen ermöglicht. Diese Entwurfsaufgabe soll so formuliert werden, dass sie nicht auf spezielle Schaltungstypen, wie z. B. Operationsverstärker oder Filterschaltungen, oder auf bestimmte, z. B. transiente, Schaltungseigenschaften beschränkt ist und eine möglichst allgemeine Anwendbarkeit der vorgestellten Verfahren sichergestellt wird.

Außerdem sollen die Eigenschaftsauswertungen der vorgestellten Verfahren mit beliebigen Simulatoren auf unterschiedlichen Modellierungsebenen der Schaltung erfolgen können. Bei Analogschaltungen ist dies meist die Transistorebene. Die Verwendung *etablierter Simulatoren* nutzt im Gegensatz zu proprietären Lösungen den immensen Entwicklungs- und Wartungsaufwand sowie den Anpassungsaufwand an neue Technologien, der in diese Werkzeuge geflossen ist.

Die Testentwurfverfahren sollen weiterhin auf dem Toleranzentwurf aufbauen, um die beim Toleranzentwurf gesammelten Erkenntnisse für den Testentwurf nutzbar zu machen. Deshalb soll von einem *für Toleranzentwurf und Testentwurf gemeinsamen parametrischen Fehlermodell* ausgegangen werden. Es beschreibt das Verletzen der Betriebsspezifikation aufgrund von herstellungsbedingten Parameterabweichungen, die statistisch modelliert werden. Dieses Fehlermodell ist aufwendig, ermöglicht jedoch die Abweichung von mehreren Parametern effizient zu beschreiben. Des weiteren decken Tests für die schwerer detektierbaren parametrischen Fehler zumeist auch die katastrophalen Fehler [SN99, MSV94, LGA99] ab.

Für den Einsatz der Verfahren in der Praxis ist wichtig, dass eine *Bewertung der Güte eines Testentwurfs und der Vergleich mit anderen Testentwürfen* möglich ist. Dies soll anhand der Größen Ausbeuteeinbuße und Fehlerdurchlässigkeit erfolgen, die trotz unterschiedlicher ausgewerteter Eigenschaften, verschiedener betrachteter Betriebsspezifikationen oder Schaltungen unterschiedlicher Dimensionierung oder Topologie vergleichbar sind. Die Größen Ausbeuteeinbuße und Fehlerdurchlässigkeit geben die Auftrittswahrscheinlichkeiten der beiden Fehlentscheidungen beim Test an. Sie stehen beim Entwurf der Testspezifikation und der Bewertung von Testentwürfen im Mittelpunkt.

Zufällige Fehler beim Messen der Testbeobachtungen beeinflussen unmittelbar die Testentscheidung und wirken sich somit auf die Wahrscheinlichkeit von Fehlentscheidungen aus. Es ist deshalb notwendig, die zufälligen Messfehler in den Zielgrößen Ausbeuteeinbuße und Fehlerdurchlässigkeit zu berücksichtigen.

Die Zielgrößen werden in dieser Arbeit als bestimmte mehrdimensionale Integrale formuliert. Die Integrationsvariablen sind dabei die statistischen Parameter mit denen die Prozessschwankungen im Fehlermodell beschrieben werden. Diese Integrale sind nicht analytisch lösbar. Ihre Werte müssen deshalb mit Quadraturverfahren abgeschätzt werden. Dabei ist zu beachten, dass

die zur Abschätzung benötigten Auswertungen von Schaltungseigenschaften für verschiedene Parametersätze auf Simulationen beruhen. Analoge Schaltungssimulationen sind zeitaufwendig, eine Simulation dauert mehrere Sekunden bis hin zu über einer Stunde. Da zum Testentwurf mehrere Eigenschaftsauswertungen benötigt werden, wird die *Rechenzeit der Entwurfsalgorithmen von der Simulationsdauer dominiert*. Die Rechenzeit für die Entwurfsalgorithmen selbst ist klein. Das Ziel der vorliegenden Arbeit sind deshalb *auf niedrige Simulationskosten optimierte Entwurfsverfahren*, die trotzdem qualitativ hochwertige Testentscheidungen ermöglichen. Damit die Schätzverfahren mit möglichst wenigen Eigenschaftsauswertungen auskommen, muss die darin enthaltene Information möglichst gut genutzt werden. In dieser Arbeit werden Verfahren für den Entwurf von Testspezifikationen vorgestellt, die an die Ergebnisse des Toleranzentwurfs anknüpfen und niedrige Simulationskosten aufweisen. Ihre Simulationseffizienz beruht im wesentlichen auf folgenden Ansatzpunkten:

- Anhand der Betriebsspezifikation werden funktionierende und fehlerhafte Schaltungen unterschieden. Im Parameterraum ergibt sich daraus eine Grenzfläche zwischen Parametersätzen, die funktionierende Schaltungen bzw. fehlerhafte Schaltungen charakterisieren. Diese Grenzfläche ist aufgrund der Nichtlinearität der Betriebseigenschaft ebenfalls nichtlinear und die sie bildenden Parametersätze, die sog. Grenzparametersätze, sind nicht bekannt. Beim Toleranzentwurf wird jedoch einer der Grenzparametersätze, der Worst-Case-Parametersatz, bestimmt. Er liegt im Zentrum des für den Testentwurf relevanten Parameterbereichs. Eine Linearisierung der Grenzfläche im Worst-Case-Parametersatz nähert deshalb die Grenzfläche im problemrelevanten Bereich oft ausreichend genau an. Sie kann mit kleinem Simulationsaufwand bestimmt werden. Auch für die simulationseffiziente Bestimmung weiterer Grenzparametersätze der nichtlinearen Grenzfläche kann diese Linearisierung die Grundlage bilden. Die linearisierte Grenzfläche zwischen den funktionierenden und den fehlerhaften Schaltungen ist deshalb Ausgangspunkt für alle in dieser Arbeit entwickelten Ansätze.
- Bei den zur Abschätzung der Zielgrößen Ausbeuteeinbuße und Fehlerdurchlässigkeit benötigten Quadraturverfahren wird zwischen stochastischen und deterministischen Verfahren unterschieden [Hab70]. Stochastische Quadraturverfahren weisen eine von der Dimension des Integrationsgebiets unabhängige Konvergenzrate auf; diese ist jedoch klein. Deterministische Verfahren konvergieren, allerdings nur bei kleiner Dimension, wesentlich schneller. Um die Vorteile beider Verfahrenstypen für simulationseffiziente Testentwurfsverfahren zu nutzen, können die mehrdimensionalen Integrale beider Zielgrößen getrennt und unterschiedlich betrachtet werden. Die Trennung erfolgt anhand der linearisierten Grenzfläche in einen dazu senkrechten und einen dazu parallelen Anteil. Für den eindimensionalen Integralanteil senkrecht zur linearisierten Grenzfläche, für den viele Eigenschaftsauswertungen benötigt werden, kann ein schnell konvergierendes deterministisches Quadraturverfahren eingesetzt werden. Die verbleibenden $n - 1$ Dimensionen des Parameterraums parallel zur linearisierten Grenzfläche, deren Anzahl von der Anwendung abhängt, können mit einem stochastischen Quadraturverfahren aufgefangen werden.
- Zur Abschätzung des eindimensionalen Integralanteils senkrecht zur linearisierten Grenzfläche sind wiederholt Schaltungseigenschaften, die Betriebseigenschaft und die Testbeobachtungen, auszuwerten. Um den dafür benötigten Simulationsaufwand zu reduzieren, können diese Schaltungseigenschaften durch Interpolationsmodelle ersetzt werden. Die im vorhergehenden Punkt beschriebene Trennung der Integrale unterstützt hierbei die Verwendung mehrerer, jedoch ausschließlich eindimensionaler Interpolationsmodelle, deren Interpolati-

onsgebiet auf den problemrelevanten Bereich beschränkt ist. Dadurch können die Interpolationsmodelle präzise bestimmt werden und zeitaufwendige Simulationen ohne Genauigkeitsverlust bei dem deterministischen Quadraturverfahren eingespart werden.

Zum Entwurf einer Testspezifikation werden drei Verfahren vorgestellt, die sich in den Ansätzen unterscheiden und verschiedene Ausbaustufen derselben Entwurfsaufgabe darstellen. Das erste Verfahren verwendet durch vereinfachende Annahmen nur die linearisierte Grenzfläche des ersten Ansatzpunkts und hat damit den kleinsten Simulationsaufwand. Ab dem zweiten Verfahren kommen dann alle Ansatzpunkte zur Anwendung. Zur Aufwandserleichterung wird beim ersten und zweiten Verfahren die Entwurfsaufgabe in zwei getrennte Schritte zerlegt. Das dritte Verfahren hat zwar denselben Simulationsaufwand wie das zweite Verfahren, die Entwurfsaufgabe wird jedoch in einem Schritt mit einem mehrdimensionalen Optimierverfahren gelöst.

Während dieser Arbeit entstanden die Veröffentlichungen [GPG01, PGG00, FGF00, FGD00, PGGA00, PGGA99, FG97]. Die Testentwurfsverfahren wurden implementiert und im Experiment auf industrielle Schaltungen angewendet. Ein experimenteller Vergleich mit einem Importance Sampling Verfahren aus dem Stand der Technik in Kapitel 6 zeigt bei gleichem Simulationsaufwand eine um durchschnittlich über zweieinhalb Größenordnungen kleinere Varianz der Schätzung der Zielgrößen.

In Kapitel 2 werden die Grundlagen beschrieben und die Zielgrößen formuliert. Die Schaltung und die Teststrategie mit denen die vorgestellten Verfahren demonstriert werden, werden in Kapitel 3 vorgestellt, genauso wie Verfahren zum Validieren der Lösungsansätze. In den Kapiteln 4, 5 und 6 werden dann drei Testentwurfsverfahren vorgestellt und Ergebnisse präsentiert. Kapitel 7 fasst abschließend die wesentlichen Punkte der Arbeit zusammen.

Kapitel 2

Definition der Testentwurfsaufgabe

Bei den in dieser Arbeit vorgestellten Testentwurfs- und Analyseverfahren stellen die Auftretswahrscheinlichkeiten von Fehlentscheidungen beim Test die Ziel- und Bewertungsgrößen dar. Aufbauend auf der Beschreibung der Testentwurfsaufgabe an einem idealisierten Modell werden zunächst die Fehlentscheidungen und dann deren Auftretswahrscheinlichkeiten definiert. Da die beim Test unvermeidbaren Messfehler großen Einfluss auf die Robustheit einer Testentscheidung haben, wird die Formulierung der Zielgrößen anschließend um die Messfehler erweitert. Am Ende des Kapitels wird das Optimierproblem zum Bestimmen des Worst-Case-Parametersatzes formuliert, der die simulationseffiziente Lösung des Testentwurfsansatzes ermöglicht und die Verknüpfung von Testentwurf und Toleranzentwurf darstellt.

2.1 Testentwurfsaufgabe

Zur Beschreibung der Schaltungseigenschaften und deren Betriebs- und Testspezifikationen beim Testentwurf werden Parameter für Bauelementewerte der Schaltung eingeführt. Es wird zwischen den *statistischen Parametern*

$$\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n_s}, \quad \mathbf{s} \sim N_{n_s}(\mathbf{s}_0, \mathbf{C}_s) \quad (2.1)$$

und den *Betriebsparametern*

$$\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{n_\theta}, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathcal{B} = \{\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\theta}_L \leq \boldsymbol{\theta} \leq \boldsymbol{\theta}_U\} \quad (2.2)$$

unterschieden. Alle weiteren Bauelementewerte und die Topologie der Schaltung sind während des Testentwurfs konstant. Mit den *statistischen Parametern* \mathbf{s} wird das unvermeidbare Streuen des Herstellungsprozesses, z. B. das Schwanken der Oxiddicke oder der Dotierung, statistisch modelliert. Sie werden als n_s -dimensional normalverteilt mit dem Erwartungswert \mathbf{s}_0 und der Kovarianzmatrix \mathbf{C}_s angenommen. Statistische Parameter, die anderen Verteilungen unterliegen, z. B. logarithmisch normalverteilt sind, können in normalverteilte Zufallsgrößen transformiert werden [Esh92]. Da die bei der Produktion einer Schaltung vorherrschenden Bedingungen durch einen Parametersatz \mathbf{s} beschrieben werden, repräsentiert ein Satz statistischer Parameter \mathbf{s} genau eine hergestellte Schaltung. Die durch die *Betriebsparameter* $\boldsymbol{\theta}$ beschriebenen *Betriebsbedingungen* sind dagegen über die Lebensdauer einer Schaltung einer ständigen Änderung unterworfen. Im Betrieb tritt eine Schaltung in Wechselwirkung mit ihrer Umgebung, z. B. durch Energiefluss, Informationsfluss und Wärmeleitung. Deshalb werden mit den Betriebsparametern $\boldsymbol{\theta}$ die im Betrieb der Schaltung variablen Größen wie Temperatur oder Versorgungsspannungen beschrieben. Weil

die Schaltung innerhalb eines Bereichs dieser Parameter funktionieren soll, z. B. bei einer Temperatur von -40°C bis 120°C , ist für die Betriebsparameter ein *Betriebsparameterbereich* \mathcal{B} durch Untergrenzen θ_L und Obergrenzen θ_U festgelegt.

Jede spezifizierte *Betriebseigenschaft* f einer Schaltung, wie z. B. die Leerlaufverstärkung oder die Bandbreite eines Operationsverstärkers, ist eine Funktion der statistischen Parameter \mathbf{s} und der Betriebsparametern $\boldsymbol{\theta}$:

$$\mathbf{s}, \boldsymbol{\theta} \mapsto f(\mathbf{s}, \boldsymbol{\theta}), \quad f \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Die Parameter können mit einem Simulator wie SPICE [Nag75], ELDO [ANA92], SABER [VVS87] oder TITAN [FWZ⁺92] auf die Betriebseigenschaften abgebildet werden. Die Abbildung ist im allgemeinen eindeutig; eine eindeutige Rückabbildung der Eigenschaften in den Parameterraum existiert jedoch normalerweise nicht.

Mit einer Betriebseigenschaft f lässt sich eine *Betriebsspezifikation*

$$\forall_{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{B}} f(\mathbf{s}, \boldsymbol{\theta}) \leq f_B, \quad f_B \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

formulieren. Sie beschreibt die Anforderung an die Betriebseigenschaft f für eine funktionierende Schaltung unter Betriebsbedingungen. Die im Datenbuch dokumentierten Betriebsspezifikationen können für jede Betriebseigenschaft sowohl eine Untergrenze f_L als auch eine Obergrenze f_U enthalten. Die Formulierung aus Gleichung (2.4) umfasst den allgemeinen Fall $\forall_{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{B}} f_L \leq f(\mathbf{s}, \boldsymbol{\theta}) \leq f_U$ durch:

$$\forall_{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{B}} f(\mathbf{s}, \boldsymbol{\theta}) \leq f_U, \quad f_U \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

$$\forall_{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{B}} -f(\mathbf{s}, \boldsymbol{\theta}) \leq -f_L, \quad f_L \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Alle n_t zu testenden Betriebsspezifikationen einer Schaltung können in Vektorschreibweise zusammengefasst werden

$$\forall_{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{B}} \mathbf{f}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\theta}) \leq \mathbf{f}_B, \quad \mathbf{f}, \mathbf{f}_B \in \mathbb{R}^{n_t}, \quad (2.7)$$

wobei $\mathbf{f} = [f_1, \dots, f_{n_t}]^T$ und $\mathbf{f}_B = [f_{B,1}, \dots, f_{B,n_t}]^T$ ist.¹ Beim Testentwurf sollen für diese n_t Betriebsspezifikationen Tests entworfen werden.

Jede bei impliziten funktionalen Testverfahren ausgewertete Schaltungseigenschaft, eine sog. *Testbeobachtung* o , unterliegt ebenfalls den Schwankungen des Herstellungsprozesses. Eine Testbeobachtung o ist deshalb eine Funktion der statistischen Parameter \mathbf{s} :

$$\mathbf{s} \mapsto o(\mathbf{s}), \quad o \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

Um einen robusten Test bei einem impliziten funktionalen Testverfahren zu erhalten, ist es normalerweise nötig, mehrere Testbeobachtungen o beim Test der Schaltung auszuwerten:

$$\mathbf{s} \mapsto \mathbf{o}(\mathbf{s}), \quad \mathbf{o} \in \mathbb{R}^{n_o}, \quad (2.9)$$

wobei $\mathbf{o} = [o_1, \dots, o_{n_o}]^T$ und n_o deren Anzahl ist.

Für die Testbeobachtungen \mathbf{o} werden im Gegensatz zu den Betriebseigenschaften \mathbf{f} keine Parameter für Umgebungsbedingungen eingeführt, da diese beim Test fest sein müssen. Um die Reproduzierbarkeit eines Tests zu gewährleisten, müssen bei wiederholter Messung einer Testbeobachtung o unabhängig von Zeit und Ort der Messung immer dieselben Bedingungen vorherrschen

¹In Gleichung (2.7) und im weiteren beschreibt „ \leq “ eine komponentenweise partielle Ordnungsrelation des \mathbb{R}^n mit $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ falls $\forall_{i=1}^n x_i \leq y_i$. Eine partielle Ordnungsrelation ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch.

[BR01]. Beim Test umfassen die Umgebungsbedingungen auch Größen des Testaufbaus, wie z. B. die Frequenz oder Amplitude einer Sinusschwingung zur Anregung der Schaltung oder den Wert einer kapazitiven Last. Soll eine Schaltungseigenschaft zum Test unter z. B. zwei verschiedenen Temperaturen ausgewertet werden, so werden dafür zwei Testbeobachtungen o eingeführt.

Durch Einführen einer aus den Testbeobachtungen o durch Linearkombination berechneten Eigenschaft, der sog. *Testeigenschaft*

$$t(\mathbf{o}(\mathbf{s}), \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{o}(\mathbf{s}), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_o}, \quad (2.10)$$

lässt sich die *Testspezifikation*

$$t(\mathbf{o}(\mathbf{s}), \mathbf{x}) \leq t_B, \quad t_B \in \mathbb{R} \quad (2.11)$$

kompakt formulieren, wobei $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_{n_o}]$ ist. Zur Unterscheidung wird die in der Testspezifikation verwendete Eigenschaft t , analog zu einer spezifizierten *Betriebseigenschaft* f , als die *Testeigenschaft* bezeichnet und werden die durch Messung beim Test an der Schaltung beobachteten Eigenschaften o als *Testbeobachtungen* bezeichnet. Der Ansatz, die *Testeigenschaft* t durch Linearkombination der Testbeobachtungen o zu bestimmen, ist sehr allgemein. Er umfasst zum Beispiel auch

$$t(\mathbf{o}, \mathbf{x}) = x_1 o_1 + x_2 \underbrace{o_1^2}_{o_2} + x_3 \underbrace{\log_{10}(o_1)}_{o_3}, \quad (2.12)$$

da er linear in den Parametern \mathbf{x} ist. Terme wie $x_1 \exp(x_2 o_1)$, der nichtlinear in x_2 ist, werden dagegen nicht erfasst. Die Testspezifikation gibt einerseits die Auswertevorschrift für die Testbeobachtungen o an und beschreibt andererseits die Bedingung für eine beim Test anzunehmende Schaltung. Beim Testentwurf sind die n_o Gewichte der Linearkombination \mathbf{x} sowie der Spezifikationswert t_B für vorgegebene Testbeobachtungen o zu bestimmen. Die $n_o + 1$ Parameter \mathbf{x} und t_B werden deshalb als *Testentwurfparameter* bezeichnet. Generell sind Ansätze mit einer kleinen Anzahl Testentwurfparameter zu bevorzugen, da mit zunehmender Anzahl bei gleicher Genauigkeitsanforderung der Simulationsaufwand beim Testentwurf steigt [Seb77]. Bei der Formulierung der Testspezifikation nach Gleichung (2.11) hängt die Testentscheidung ausschließlich von dem statistischen Parametersatz \mathbf{s} ab. Sie wird also der Aufgabe des Tests gerecht, die Auswirkungen des Herstellungsprozesses auf die zu testende Schaltung zu überprüfen.

Der Testentwurf erfolgt spezifikationsweise, d. h. zu jeder Betriebsspezifikation wird eine zugehörige Testspezifikation entworfen. Die Anzahl der Testspezifikationen ist demnach gleich der Anzahl Betriebsspezifikationen: n_t . Mit den in Vektoren zusammengefassten *Testeigenschaften* $\mathbf{t} = [t_1, \dots, t_{n_t}]^T$ und den zugehörigen Spezifikationswerten $\mathbf{t}_B = [t_{B,1}, \dots, t_{B,n_t}]^T$ kann mit der Matrix der Gewichte $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n_t}]^T$ die Bestimmungsgleichung aller *Testeigenschaften*

$$\mathbf{t}(\mathbf{o}(\mathbf{s}), \mathbf{X}) = \mathbf{X} \mathbf{o}(\mathbf{s}), \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^{n_t}, \quad \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n_t \times n_o} \quad (2.13)$$

sowie alle Testspezifikationen

$$\mathbf{t}(\mathbf{o}(\mathbf{s}), \mathbf{X}) \leq \mathbf{t}_B, \quad \mathbf{t}_B \in \mathbb{R}^{n_t} \quad (2.14)$$

angegeben werden.

An Abbildung 2.1 soll die Aufgabenstellung des impliziten funktionalen Testentwurfs näher erklärt werden. Da die Entwurfsaufgabe für alle Spezifikationen identisch ist, wird sie für eine Spezifikation beschrieben. Der Ursprung des oben dargestellten Koordinatensystems mit zwei statistischen Parametern ist der Nominalparametersatz \mathbf{s}_0 , der den Entwurfsunkt der Schaltung

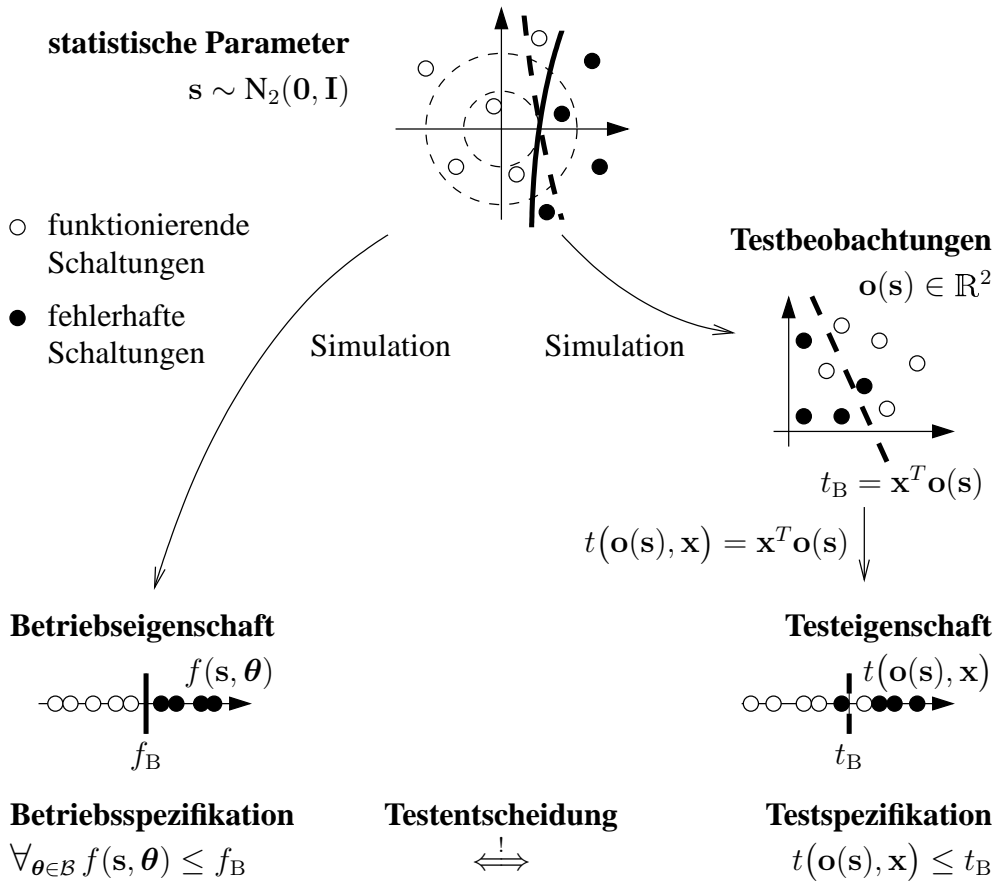


Abbildung 2.1: Aufgabenstellung des impliziten funktionalen Testentwurfs.

kennzeichnet. Abweichungen im Herstellungsprozess führen zu Abweichungen in den statistischen Parametersätzen s , mit denen die Schwankungen des Herstellungsprozesses modelliert werden. Die konzentrischen Kreise geben Isodensiten² der im Bild als standardnormalverteilt ($s_0 = \mathbf{0}$, $C_s = \mathbf{I}$) angenommenen statistischen Parameter s an. Einige Parametersätze sind durch Punkte gekennzeichnet; sie repräsentieren jeweils eine zu testende Schaltung. Zu jeder Schaltung gibt es in jedem der vier dargestellten Koordinatensysteme genau einen Punkt. Durch Simulation können zu einem Satz statistischer Parameter s die Betriebseigenschaft f und die Testbeobachtungen \mathbf{o} bestimmt werden. Durch Auswerten der Betriebsspezifikation mit der simulierten Betriebseigenschaft f kann festgestellt werden, ob die durch s repräsentierte Schaltung funktioniert oder fehlerhaft ist. Funktionierende Schaltungen werden durch helle Punkte und fehlerhafte Schaltungen mit dunklen Punkten dargestellt. Durch die Betriebsspezifikation gibt es im Raum der Betriebseigenschaft f und der statistischen Parameter s disjunkte Gebiete der funktionierenden und fehlerhaften Schaltungen. Mit den Betriebsspezifikationen und den statistischen Parametern ist das parametrische Fehlermodell definiert. Eine Schaltung ist genau dann fehlerhaft, wenn die Abweichung der statistischen Parameter s vom Nominalparametersatz s_0 zur Verletzung der Betriebsspezifikation führt. Die durchgezogene gekrümmte Linie stellt die statistischen Parametersätze s an der Grenze zwischen den Gebieten der funktionierenden und der fehlerhaften Schaltungen dar. Sie werden als Grenzparametersätze der Betriebsspezifikation bezeichnet. An den Grenzparametersätzen wird die Betriebsspezifikation gerade eben noch erfüllt. Im n_s -dimensionalen Raum der statistischen

²Orte gleicher Wahrscheinlichkeitsdichte

Parameter s bilden die Grenzparametersätze eine $(n_s - 1)$ -dimensionale Fläche.

Auf der rechten Seite von Abbildung 2.1 ist ein Raum mit beispielhaft zwei Testbeobachtungen \mathbf{o} dargestellt. Die Testbeobachtungen \mathbf{o} werden beim Testentwurf simuliert und während des Tests an der Schaltung beobachtet. Die linear kombinierten Testbeobachtungen \mathbf{o} ergeben die Testeigenschaft t , die in der Testspezifikation ausgewertet wird. Da eine Schaltung entweder beim Test angenommen oder aussortiert wird, trennt auch die Testspezifikation die Schaltungen in komplementäre Gebiete und zwar im Raum der Testeigenschaft t , der Testbeobachtungen \mathbf{o} und der statistischen Parameter s ; im Gegensatz zur Betriebsspezifikation jedoch in die Gebiete der angenommenen bzw. aussortierten Schaltungen. Die Grenzparametersätze der Testspezifikation bilden im Raum der Testbeobachtungen \mathbf{o} die gestrichelt eingezeichnete $(n_t - 1)$ -dimensionale Ebene und im Raum der statistischen Parameter s eine $(n_s - 1)$ -dimensionale Fläche

Die Aufgabe des Testentwurfs ist, die Testspezifikation durch Bestimmen der Testentwurfparameter \mathbf{x} und t_B so zu entwerfen, dass im Raum der statistischen Parameter das Gebiet der angenommenen mit dem der funktionierenden Schaltungen bzw. das Gebiet der aussortierten mit dem der fehlerhaften Schaltungen möglichst gut übereinstimmt. Bei einem idealen Test ohne jegliche Fehlentscheidungen wären diese Gebiete sogar identisch. Dies würde auch beinhalten, dass die Grenzparametersätze der Betriebs- und der Testspezifikation im Raum der statistischen Parameter identisch wären. Anders ausgedrückt, würde bei einem idealen Test für jede hergestellte Schaltung die Testentscheidung aufgrund der Testspezifikation mit dem Einhalten der Betriebsspezifikation übereinstimmen:

$$\forall_{\theta \in \mathcal{B}} f(\mathbf{s}, \boldsymbol{\theta}) \leq f_B \stackrel{!}{\iff} t(\mathbf{o}(\mathbf{s}), \mathbf{x}) \leq t_B, \quad \text{für alle } s, \quad (2.15)$$

was unten im Bild durch das Äquivalenzzeichen dargestellt wird. Dies lässt sich nicht nur für einzelne, sondern auch für alle n_t Spezifikationen einer Schaltung formulieren:

$$\forall_{\theta \in \mathcal{B}} \mathbf{f}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\theta}) \leq \mathbf{f}_B \stackrel{!}{\iff} \mathbf{t}(\mathbf{o}(\mathbf{s}), \mathbf{X}) \leq \mathbf{t}_B, \quad \text{für alle } s, \quad (2.16)$$

was gleichbedeutend ist mit

$$\forall_{i=1}^{n_t} \forall_{\theta \in \mathcal{B}} f_i(\mathbf{s}, \boldsymbol{\theta}) \leq f_{B,i} \stackrel{!}{\iff} t_i(\mathbf{o}(\mathbf{s}), \mathbf{x}_i) \leq t_{B,i}, \quad \text{für alle } s. \quad (2.17)$$

Bei einem nicht idealen Test mit Fehlentscheidungen stimmen die durch die Betriebs- und die Testspezifikation gegebenen Gebiete im Raum der statistischen Parameter s nicht überein. Dies macht sich auch im Raum der Testbeobachtungen \mathbf{o} und in dem Raum der Testeigenschaft t durch funktionierende bzw. fehlerhafte Schaltungen bemerkbar, die bezüglich der Testspezifikation im „falschen“ Gebiet liegen.

Stochastische Ansätze zum Testentwurf setzen zumeist im Raum der Testbeobachtungen an. Die Testspezifikation wird dabei als Klassifikator betrachtet, der die Klassen der funktionierenden und fehlerhaften Schaltungen möglichst gut trennen soll [LGA99, Lin96, LGA95, Lin97]. Die hier vorgestellten Verfahren zielen dagegen darauf ab, im Raum der statistischen Parameter die Gebiete der funktionierenden und fehlerhaften Schaltungen mit denen der angenommenen und aussortierten Schaltungen in Deckung zu bringen.

Abschließend soll nicht unerwähnt bleiben, dass die für den impliziten funktionalen Test eingeführte Notation auch den expliziten funktionalen Test als Spezialfall einschließt. Beim expliziten funktionalen Test wird die Betriebseigenschaft f unter dem für die Betriebsspezifikation kritischen Worst-Case-Betriebsparametersatz $\boldsymbol{\theta}_W$ gemessen und ausgewertet. Dies kann als impliziter funktionaler Test mit genau einer $(n_o = 1)$ Testbeobachtung $o(\mathbf{s}) = f(\mathbf{s}, \boldsymbol{\theta}_W)$ betrachtet werden. Für $x = 1$ und $t_B = f_B$ entspricht dann die Testspezifikation der Betriebsspezifikation.

2.2 Gebiete im Raum der statistischen Parameter

Im vorhergehenden Abschnitt wurden im Raum der statistischen Parameter s die Gebiete der funktionierenden und fehlerhaften bzw. der angenommenen und aussortierten Schaltungen an Abbildung 2.1 verbal beschrieben. Die mathematische Formulierung der Gebiete erfolgt hier durch Mengen statistischer Parametersätze s . Darauf aufbauend können dann Fehlentscheidungen beim Test mit Mengenoperationen formuliert werden. Die Zielgrößen der vorgestellten Verfahren sind die Auftretswahrscheinlichkeiten dieser Fehlentscheidungen.

Zu Fehlentscheidungen kommt es sowohl durch systematische als auch durch zufällige oder statistische Fehler. Die systematischen Fehler äußern sich dadurch, dass die durch die Betriebs- und die Testspezifikation gegebenen Gebiete im Raum der statistischen Parameter nicht exakt übereinstimmen. Die zufälligen Fehler werden bei der Messungen der Testbeobachtungen durch Messfehler hervorgerufen. Bei wiederholter Messung, selbst unter gleichen Bedingungen, weichen die einzelnen Messwerte voneinander ab, sie streuen. Durch einen systematischen Fehler ist also die Testentscheidung per Entwurf unrichtig, durch einen zufälligen Fehler wird die Testentscheidung dagegen unsicher. Beide Fehlerarten sind praktisch unvermeidbar. Das Ziel des Testentwurfs muss deshalb sein, die Auswirkung beider Fehlerarten so zu minimieren, dass Fehlentscheidungen möglichst selten auftreten.

Die Gebiete werden sowohl bezüglich einzelner Spezifikationen als auch für alle n_t Spezifikationen einer Schaltung als Mengen formuliert. Zur Unterscheidung werden die Mengen bezüglich aller Spezifikationen mit einem hochgestellten „*“ gekennzeichnet. Des Weiteren wurde zu Gleichung (2.3) bereits angemerkt, dass die Rückabbildung der Schaltungseigenschaften f und o in den Parameterraum s normalerweise nicht existiert. Die Mengen werden deshalb über die Betriebs- bzw. die Testspezifikation formuliert, welche die durchführbare Abbildung von s nach f bzw. o beinhalten.

Zur Vereinfachung der Darstellung werden im folgenden zunächst nur die systematischen Fehler betrachtet. Im darauffolgenden Abschnitt wird dann das Modell um die zufälligen Fehler erweitert.

2.2.1 Funktionierende und fehlerhafte Schaltungen

Das Gebiet der bezüglich einer einzelnen Betriebsspezifikation *funktionierenden (guten) Schaltungen* ist gegeben durch die Menge

$$\mathcal{G} = \left\{ s \in \mathbb{R}^{n_s} \mid \forall_{\theta \in \mathcal{B}} f(s, \theta) \leq f_B \right\} \quad (2.18)$$

aller Parametersätze s , für die die Betriebseigenschaft $f(s, \theta)$ unter Betriebsbedingungen aus dem Betriebsparameterbereich \mathcal{B} die Betriebsspezifikation erfüllt. Die Menge \mathcal{G} ist streng genommen eine Menge von statistischen Parametersätzen s . Sie kann aber auch als Menge der funktionierenden Schaltungen betrachtet werden, weil jeder Satz statistischer Parametersätze s eine Schaltung repräsentiert. Dies gilt gleichermaßen für alle im Raum der statistischen Parametersätze eingeführten Mengen.

Weil eine Schaltung alle Betriebsspezifikationen erfüllen muss, lässt sich das Gebiet der funktionierenden Schaltungen bezüglich aller Betriebsspezifikationen neben der Beschreibung über alle Betriebsspezifikationen auch als Schnittmenge der Mengen \mathcal{G}_i aller einzelnen Betriebsspezifikationen aus Gleichung (2.18) formulieren:

$$\mathcal{G}^* = \left\{ s \in \mathbb{R}^{n_s} \mid \forall_{\theta \in \mathcal{B}} f(s, \theta) \leq f_B \right\} = \bigcap_{i=1}^{n_t} \mathcal{G}_i. \quad (2.19)$$

Eine Schaltung erfüllt entweder die Betriebsspezifikationen oder eben nicht. Deshalb sind das Gebiet der funktionierenden und das der fehlerhaften Schaltungen komplementär. Die Menge *fehlerhafter Schaltungen* lässt sich deshalb als Differenzmenge zur Grundmenge der statistischen Parameter \mathbb{R}^{n_s} ausdrücken:

$$\mathcal{F} = \mathbb{R}^{n_s} \setminus \mathcal{G} = \left\{ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n_s} \mid \exists_{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{B}} f(\mathbf{s}, \boldsymbol{\theta}) > f_B \right\}, \quad (2.20)$$

$$\mathcal{F}^* = \mathbb{R}^{n_s} \setminus \mathcal{G}^* = \left\{ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n_s} \mid \exists_{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{B}} \mathbf{f}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\theta}) \not\leq \mathbf{f}_B \right\} = \bigcup_{i=1}^{n_t} \mathcal{F}_i. \quad (2.21)$$

Die Menge der funktionierenden und die der fehlerhaften Schaltungen sind folglich disjunkt $\mathcal{G} \cap \mathcal{F} = \emptyset$ bzw. $\mathcal{G}^* \cap \mathcal{F}^* = \emptyset$ und es gilt offensichtlich: $\mathcal{G} \cup \mathcal{F} = \mathbb{R}^{n_s}$ bzw. $\mathcal{G}^* \cup \mathcal{F}^* = \mathbb{R}^{n_s}$. Für einen Parametersatz $\mathbf{s} \in \mathcal{F}$ existiert ein Betriebsparametersatz $\boldsymbol{\theta}$ aus dem Betriebsparameterbereich \mathcal{B} , für den die Betriebsspezifikation verletzt wird, bzw. für $\mathbf{s} \in \mathcal{F}^*$ einer, für den mindestens eine aller Betriebsspezifikationen verletzt wird.³ \mathcal{F}^* ist deshalb die Vereinigungsmenge bezüglich der Mengen \mathcal{F}_i aller einzelnen Betriebsspezifikationen aus Gleichung (2.20).

2.2.2 Angenommene und aussortierte Schaltungen

Die Gebiete der angenommenen und der aussortierten Schaltungen lassen sich wie die Gebiete der funktionierenden und der fehlerhaften Schaltungen formulieren, wobei die Betriebsspezifikation durch die Testspezifikation zu ersetzen ist. Für die Mengen der *angenommenen Schaltungen* \mathcal{A} und \mathcal{A}^* erfüllt jedes $\mathbf{s} \in \mathcal{A}$ die Testspezifikationen bzw. jedes $\mathbf{s} \in \mathcal{A}^*$ ausnahmslos alle n_t Testspezifikationen:

$$\mathcal{A} = \left\{ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n_s} \mid t(\mathbf{o}(\mathbf{s}), \mathbf{x}) \leq t_B \right\}, \quad (2.22)$$

$$\mathcal{A}^* = \left\{ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n_s} \mid \mathbf{t}(\mathbf{o}(\mathbf{s}), \mathbf{X}) \leq \mathbf{t}_B \right\} = \bigcap_{i=1}^{n_t} \mathcal{A}_i. \quad (2.23)$$

Die Mengen der *aussortierten (rejected) Schaltungen* \mathcal{R} und \mathcal{R}^* sind entsprechend die Komplementärmengen zu den angenommenen Schaltungen:

$$\mathcal{R} = \mathbb{R}^{n_s} \setminus \mathcal{A}, \quad \mathcal{R}^* = \mathbb{R}^{n_s} \setminus \mathcal{A}^* = \bigcup_{i=1}^{n_t} \mathcal{R}_i. \quad (2.24)$$

Es gilt analog $\mathcal{A} \cap \mathcal{R} = \emptyset$ und $\mathcal{A}^* \cap \mathcal{R}^* = \emptyset$ sowie $\mathcal{A} \cup \mathcal{R} = \mathbb{R}^{n_s}$ und $\mathcal{A}^* \cup \mathcal{R}^* = \mathbb{R}^{n_s}$.

2.2.3 Grenzparametersätze

Die Menge der *Grenzparametersätze einer Betriebsspezifikation* \mathcal{S} beschreibt die Menge der statistischen Parametersätze \mathbf{s} an der Grenze zwischen funktionierenden und fehlerhaften Schaltungen bezüglich einer Betriebsspezifikation:

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n_s} \mid \max_{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{B}} (f(\mathbf{s}, \boldsymbol{\theta})) = f_B \right\}. \quad (2.25)$$

Für die statistischen Parametersätze $\mathbf{s} \in \mathcal{S}$ erfüllt die Betriebseigenschaft f unter den ungünstigsten Betriebsbedingungen $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{B}$ gerade noch die Betriebsspezifikation nach Gleichung (2.4).

³ $\mathbf{x} \not\leq \mathbf{y}$ falls $\exists_{i=1}^n x_i > y_i$ für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (vgl. Fußnote 1).

Auch für eine Testspezifikation lässt sich eine Menge der *Grenzparametersätze der Testspezifikation* \mathcal{S}^t definieren. Sie beschreibt die Menge der statistischen Parametersätze \mathbf{s} an der Grenze zwischen angenommenen und aussortierten Schaltungen:

$$\mathcal{S}^t = \{ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n_s} \mid t(\mathbf{o}(\mathbf{s}), \mathbf{x}) = t_B \}. \quad (2.26)$$

2.2.4 Ausbeute

Mit der Menge der funktionierenden Schaltungen \mathcal{G}^* kann eine der möglichen Zielgrößen des Toleranzentwurfs, die *parametrische Produktionsausbeute* Y^* (*parametric yield*), angegeben werden. Sie beschreibt die Wahrscheinlichkeit, mit der eine funktionierende Schaltung hergestellt wird, wobei ausschließlich parametrische Fehler berücksichtigt werden:

$$Y^* = P(\mathcal{G}^*) = \int_{\mathcal{G}^*} \text{pdf}^N(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0, \mathbf{C}_s) \partial \mathbf{s}. \quad (2.27)$$

Die Ausbeute ergibt sich durch Integration der Verteilungsdichte der normalverteilten statistischen Parameter

$$\text{pdf}^N(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0, \mathbf{C}_s) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\mathbf{C}|}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{s} - \mathbf{s}_0)^T \mathbf{C}_s^{-1} (\mathbf{s} - \mathbf{s}_0)\right) \quad (2.28)$$

über dem Gebiet der funktionierenden Schaltungen \mathcal{G}^* . Das Ziel des Toleranzentwurfs ist die Schaltung so zu dimensionieren, dass die Ausbeute Y^* maximiert wird. Auch beim Toleranzentwurf kann eine spezifikationsweise Betrachtung den Entwurf vereinfachen. Die Ausbeute bezüglich einer einzelnen Betriebsspezifikation ergibt sich durch Ersetzen von \mathcal{G}^* durch \mathcal{G} in Gleichung (2.27):

$$Y = P(\mathcal{G}) = \int_{\mathcal{G}} \text{pdf}^N(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0, \mathbf{C}_s) \partial \mathbf{s}. \quad (2.29)$$

Beim Testentwurf ist die Dimensionierung der Schaltung und damit auch die Produktionsausbeute fest vorgegeben.

2.2.5 Fehlentscheidungen

Beim Testentwurf sind die Wahrscheinlichkeiten von Fehlentscheidungen die Zielgrößen. Sie können, wie die Produktionsausbeute, mit Integralen beschrieben werden. Dabei interessieren im Gegensatz zur Ausbeute nicht die funktionierenden Schaltungen, sondern die Schaltungen, die Fehlentscheidungen unterliegen. Davon gibt es zwei Arten: die aussortierten, funktionierenden Schaltungen für eine einzelne Spezifikation $\mathcal{R}\mathcal{G}$ bzw. für alle Spezifikationen $\mathcal{R}\mathcal{G}^*$:

$$\mathcal{R}\mathcal{G} = \mathcal{R} \cap \mathcal{G} = \{ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n_s} \mid \mathbf{s} \in \mathcal{R} \wedge \mathbf{s} \in \mathcal{G} \}, \quad \mathcal{R}\mathcal{G}^* = \mathcal{R}^* \cap \mathcal{G}^* \quad (2.30)$$

und die angenommenen, fehlerhaften Schaltungen $\mathcal{A}\mathcal{F}$ bzw. $\mathcal{A}\mathcal{F}^*$:

$$\mathcal{A}\mathcal{F} = \mathcal{A} \cap \mathcal{F} = \{ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n_s} \mid \mathbf{s} \in \mathcal{A} \wedge \mathbf{s} \in \mathcal{F} \}, \quad \mathcal{A}\mathcal{F}^* = \mathcal{A}^* \cap \mathcal{F}^*. \quad (2.31)$$

Die Schnittmengen der Fehlentscheidungen sind im Venndiagramm in Abbildung 2.2 durch Schraffur veranschaulicht. Die durch Kreise dargestellten Mengen der funktionierenden Schaltungen \mathcal{G} und der angenommenen Schaltungen \mathcal{A} kämen bei einem idealen Test genau übereinander zu liegen.

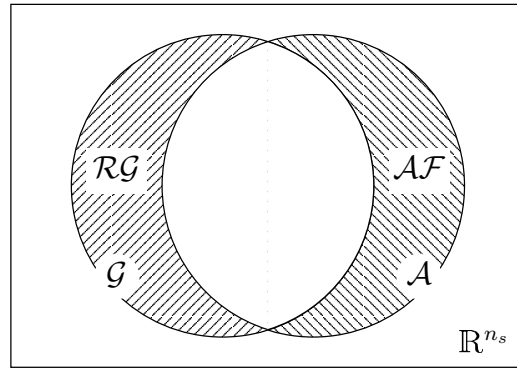


Abbildung 2.2: Schnittmengen der Fehlentscheidungen.

Die Auftretswahrscheinlichkeiten von Fehlentscheidungen ergeben sich durch Integration der Dichte über den Gebieten der Fehlentscheidungen:

$$P_{\mathcal{RG}} = P(\mathcal{RG}) = \int_{\mathcal{RG}} \text{pdf}^N(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0, \mathbf{C}_s) \partial \mathbf{s}, \quad (2.32)$$

$$P_{\mathcal{AF}} = P(\mathcal{AF}) = \int_{\mathcal{AF}} \text{pdf}^N(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0, \mathbf{C}_s) \partial \mathbf{s}, \quad (2.33)$$

$$P(\mathcal{RG}^*) = \int_{\mathcal{RG}^*} \text{pdf}^N(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0, \mathbf{C}_s) \partial \mathbf{s}, \quad (2.34)$$

$$P(\mathcal{AF}^*) = \int_{\mathcal{AF}^*} \text{pdf}^N(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0, \mathbf{C}_s) \partial \mathbf{s}. \quad (2.35)$$

Die Wahrscheinlichkeit für aussortierte, funktionierende Schaltungen $P(\mathcal{RG})$ wird im weiteren als *Ausbeuteeinbuße* $P_{\mathcal{RG}}$ bezeichnet, da dieser Schaltungsanteil die Produktionsausbeute verkleinert. Die Wahrscheinlichkeit für angenommene, fehlerhafte Schaltungen $P(\mathcal{AF})$ wird dagegen mit *Fehlerdurchlässigkeit* $P_{\mathcal{AF}}$ bezeichnet, weil dieser Anteil Schaltungen den Test unerkannt passiert.

Der Wertebereich der Auftretswahrscheinlichkeiten Ausbeuteeinbuße, Fehlerdurchlässigkeit und auch der Ausbeute aus Gleichung (2.29) ist das abgeschlossene Intervall zwischen Null und Eins: $[0, 1]$. Bei einem idealen Test ohne Fehlentscheidungen verschwinden die Mengen der Fehlentscheidungen: $\mathcal{RG} = \emptyset$ und $\mathcal{AF} = \emptyset$; die Ausbeuteeinbuße und die Fehlerdurchlässigkeit sind dann gleich Null: $P_{\mathcal{RG}} = 0$ und $P_{\mathcal{AF}} = 0$. Beim Entwurf einer Testspezifikation sollen deshalb $P_{\mathcal{RG}}$ und $P_{\mathcal{AF}}$ minimiert werden:

$$P(\mathcal{RG}) \xrightarrow{!} \min, \quad P(\mathcal{AF}) \xrightarrow{!} \min. \quad (2.36)$$

Ausbeuteeinbuße $P_{\mathcal{RG}}$, Fehlerdurchlässigkeit $P_{\mathcal{AF}}$ und Ausbeute Y sind Größen, die eine Bewertung eines Testentwurfs ermöglichen. Während die Ausbeute den zum Test angelieferten Anteil guter Schaltungen angibt, quantifizieren Ausbeuteeinbuße und Fehlerdurchlässigkeit die beiden Arten von Fehlentscheidungen beim Test. Die Ausbeuteeinbuße und die Fehlerdurchlässigkeit stellen dabei die Beziehung zwischen der Testspezifikation und der Betriebsspezifikation her. Alle drei Größen sind unabhängig von den physikalischen Größen und Einheiten der Schaltungsparameter und Schaltungseigenschaften, wodurch ein direkter Vergleich von verschiedenen Testentwürfen auch für unterschiedliche Spezifikationen und Schaltungen möglich ist. So können beim Testentwurf verschiedene Teststrategien bezüglich der verwendeten Schaltungsanregung, der ausgewählten Testbeobachtungen \mathbf{o} und der eingesetzten Messverfahren untersucht und verglichen

werden.⁴

2.3 Formulierung mit Messfehlern

Bei Fehlentscheidungen und deren Auftretswahrscheinlichkeiten sollen neben systematischen Fehlern nun auch zufällige Fehler durch Messfehler berücksichtigt werden. Messfehler wirken sich auf die beim Test gemessenen Werte der Testbeobachtungen aus und können so die Testentscheidung beeinflussen.

Die Beschreibung erfolgt über ein kombiniertes Zufallsexperiment, welches einerseits die Prozessschwankungen bei der Herstellung der Schaltung und andererseits die zufälligen Messfehler beim Test berücksichtigt.

2.3.1 Messfehlerbehaftete Testbeobachtungen, Testeigenschaften und Testspezifikationen

Die Testbeobachtungen werden beim Test gemessen, wobei eine Wechselwirkung des Messobjekts mit dem Messgerät entsteht. Die störende Rückwirkung des Messgerätes und der Umgebung auf das Messobjekt lässt sich praktisch nie vollständig vermeiden. Die dadurch entstehenden Fehler können nach den bestehenden Korrekturmöglichkeiten in systematische und zufällige Fehler unterteilt werden [Sch92]. Die systematischen Fehler sind bekannt, sie können aus den Messwerten heraus gerechnet werden. Für die Testbeobachtungen wird deshalb angenommen, dass sie um die systematischen Messfehler bereinigt wurden. Zufällige Fehler werden durch nicht beeinflussbare Änderungen der Messgeräte und der Umgebung hervorgerufen. Sie schwanken nach Betrag und Vorzeichen. Zufällige Messfehler haben zur Folge, dass die wiederholte Messung derselben Größe verschiedene Messwerte ergibt. Dadurch ist es möglich, dass dieselbe Schaltung aufgrund wiederholter Messungen manchmal angenommen und manchmal abgelehnt wird. Wirken genügend unabhängige Einflussgrößen, so sind die Messwerte normalverteilt [Sch92].

Zur Berücksichtigung der zufälligen Fehler werden *messfehlerbehaftete Testbeobachtungen*

$$\tilde{\mathbf{o}} = \mathbf{o} + \boldsymbol{\epsilon}_o, \quad \boldsymbol{\epsilon}_o \in \mathbb{R}^{n_o}, \quad \boldsymbol{\epsilon}_o \sim N_{n_o}(\mathbf{0}, \mathbf{C}_o) \quad (2.37)$$

eingeführt, die normalverteilt $\tilde{\mathbf{o}} \sim N_{n_o}(\mathbf{o}, \mathbf{C}_o)$ sind. Der Messfehleranteil $\boldsymbol{\epsilon}_o$ hat den Erwartungswert $\mathbf{0}$ sowie die Kovarianzmatrix \mathbf{C}_o , die als gegeben vorausgesetzt wird.

In der Testspezifikation wird die Testeigenschaft t ausgewertet. t ergibt sich nach Gleichung (2.10) durch Linearkombination aus den Testbeobachtungen \mathbf{o} . Der Messfehler pflanzt sich dabei von den Testbeobachtungen \mathbf{o} auf die Testeigenschaften t fort. Wegen des linearen Zusammenhangs ist jede *messfehlerbehaftete Testeigenschaft*

$$\tilde{t} = \mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{o}} = \mathbf{x}^T \mathbf{o} + \mathbf{x}^T \boldsymbol{\epsilon}_o = t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \in \mathbb{R}, \quad \epsilon_t \sim N_1(0, C_t) \quad (2.38)$$

ebenfalls normalverteilt $\tilde{t} \sim N_1(t, C_t)$. Der Messfehler ϵ_t hat den Erwartungswert $\mathbf{x}^T \mathbf{0} = 0$ und die Varianz

$$C_t = \text{cov}(\epsilon_t) = \mathbf{x}^T \text{cov}(\boldsymbol{\epsilon}_o) \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{C}_o \mathbf{x} = \|\mathbf{M} \mathbf{x}\|_2^2 = \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{M}}^2, \quad \mathbf{M}^T \mathbf{M} = \mathbf{C}_o, \quad (2.39)$$

⁴Die in [SN99] definierten Wahrscheinlichkeiten *yield coverage* Y_c und *defect level* D können aus den hier definierten Größen abgeleitet werden. Y_c gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der eine funktionierende Schaltung beim Test angenommen wird: $Y_c = \frac{P(\mathcal{A} \cap \mathcal{G})}{P(\mathcal{G})} = \frac{Y - P_{\mathcal{R}\mathcal{G}}}{Y}$ und D den Anteil fehlerhafter Schaltungen aller beim Test angenommenen Schaltungen: $D = \frac{P(\mathcal{A}\mathcal{F})}{P(\mathcal{A})} = \frac{P_{\mathcal{A}\mathcal{F}}}{Y - P_{\mathcal{R}\mathcal{G}} + P_{\mathcal{A}\mathcal{F}}}$. Für einen größeren Worst-Case-Abstand $\beta_W > 3$ nach Gleichung (2.70) gilt: $Y \rightarrow 1$ und $P_{\mathcal{R}\mathcal{G}}, P_{\mathcal{A}\mathcal{F}} \rightarrow 0$, wodurch: $Y_c \approx 1 - P_{\mathcal{R}\mathcal{G}}$ bzw. $D \approx P_{\mathcal{A}\mathcal{F}}$.

die sich durch lineare Transformation⁵ aus den Zufallsgrößen ϵ_o ergibt [FH84].⁶ Die messfehlerbehaftete Testeigenschaft ist damit von t und ϵ_t abhängig. Sie soll die Testspezifikation

$$\tilde{t}(t(\mathbf{o}(\mathbf{s}), \mathbf{x}), \epsilon_t(C_t)) \leq t_B \quad (2.40)$$

erfüllen.

Alle messfehlerbehafteten Testeigenschaften \tilde{t} einer Schaltung ergeben sich aus den messfehlerbehafteten Testbeobachtungen $\tilde{\mathbf{o}}$ entsprechend mit Gleichung (2.13):

$$\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{X} \tilde{\mathbf{o}} = \mathbf{X} \mathbf{o} + \mathbf{X} \epsilon_o = \mathbf{t} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \in \mathbb{R}^{n_t}, \quad \epsilon_t \sim N_{n_t}(\mathbf{0}, \mathbf{C}_t). \quad (2.41)$$

Der Messfehler $\epsilon_t = [\epsilon_{t,1}, \dots, \epsilon_{t,n_t}]^T$ hat den Erwartungswert $\mathbf{0}$ und die Kovarianzmatrix

$$\mathbf{C}_t = \text{cov}(\epsilon_t) = \mathbf{X} \text{cov}(\epsilon_o) \mathbf{X}^T = \mathbf{X} \mathbf{C}_o \mathbf{X}^T. \quad (2.42)$$

Alle Testspezifikationen einer Schaltung lassen sich damit unter Berücksichtigung des Messfehlers durch

$$\tilde{t}(\mathbf{t}(\mathbf{o}(\mathbf{s}), \mathbf{X}), \epsilon_t(\mathbf{C}_t)) \leq t_B \quad (2.43)$$

beschreiben.

2.3.2 Zufallsexperiment

Die Testentscheidung ist nach Gleichung (2.43) einerseits von den Schwankungen des Herstellungsprozesses, die mit den statistischen Parametern \mathbf{s} modelliert werden, und andererseits von den Messfehlern ϵ_t bzw. ϵ_t abhängig. Wir kombinieren die beiden Zufallsexperimente Herstellungsprozess und Messung und beschreiben die Testentscheidung als zweistufiges Zufallsexperiment [BH85]. In der ersten Stufe „ziehen“ wir eine Schaltung aus der „Urne des Herstellungsprozesses“ und erhalten einen Parametersatz \mathbf{s} als Ergebnis. In der zweiten Stufe messen wir die Testbeobachtungen dieser Schaltung, wobei ein Parameter bzw. ein Parametersatz des Messfehlers ϵ_t bzw. ϵ_t aus der „Urne der Messung“ gezogen wird. Die beiden Zufallsgrößen \mathbf{s} und ϵ_t bzw. ϵ_t können als Zweitupel angegeben werden: (\mathbf{s}, ϵ_t) bzw. (\mathbf{s}, ϵ_t) , welches einen Versuchsausgang, also ein Ergebnis, des zweistufigen Zufallsexperiments beschreibt. Die Zufallsvektoren \mathbf{s} , ϵ_t bzw. ϵ_t werden wie bisher gemäß der Gleichungen (2.1), (2.38) und (2.41) als normalverteilt $\mathbf{s} \sim N_{n_s}(\mathbf{s}_0, \mathbf{C}_s)$, $\epsilon_t \sim N_1(0, C_t)$ bzw. $\epsilon_t \sim N_{n_t}(\mathbf{0}, \mathbf{C}_t)$ angenommen.

Im folgenden werden in Erweiterung zum vorhergehenden Kapitel 2.2 die Mengen der funktionierenden bzw. der fehlerhaften Schaltungen und der angenommenen bzw. der aussortierten Schaltungen als Mengen von Ergebnistupeln (\mathbf{s}, ϵ_t) bzw. (\mathbf{s}, ϵ_t) des zweistufigen Zufallsexperiments beschrieben. Damit werden anschließend die Mengen der Fehlentscheidungen und deren Auftrittswahrscheinlichkeiten formuliert.

2.3.3 Ereignisse

Um die Fehlentscheidungen beim Test wieder als Schnittmengen angeben zu können, werden die Ereignisse der funktionierenden, fehlerhaften, angenommenen und aussortierten Schaltungen um

⁵Siehe Gleichung (A.3) auf Seite 101.

⁶Zur verwendeten Euklidischen Norm und gewichteten Norm siehe Anhang A.3.

den Messfehler erweitert und als Mengen der Tupel (\mathbf{s}, ϵ_t) bzw. (\mathbf{s}, ϵ_t) beschrieben. Die Grundmenge auf der diese Mengen definiert sind, lässt sich als Produktmenge des Raums der statistischen Parameter \mathbb{R}^{n_s} aus Gleichung (2.1) und des Raums der Messfehler \mathbb{R} bzw. \mathbb{R}^{n_t} aus den Gleichungen (2.38) bzw. (2.41) formulieren:

$$\mathbb{R}^{n_s+1} = \mathbb{R}^{n_s} \times \mathbb{R} = \{(\mathbf{s}, \epsilon_t) \mid \mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n_s} \wedge \epsilon_t \in \mathbb{R}\}, \quad (2.44)$$

$$\mathbb{R}^{n_s+n_t} = \mathbb{R}^{n_s} \times \mathbb{R}^{n_t} = \{(\mathbf{s}, \epsilon_t) \mid \mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n_s} \wedge \epsilon_t \in \mathbb{R}^{n_t}\}. \quad (2.45)$$

Aus statistischer Sicht beschreibt \mathbb{R}^{n_s+1} bzw. $\mathbb{R}^{n_s+n_t}$ den Ergebnisraum des zweistufigen Zufallsexperiments, also die Menge aller möglichen Versuchsausgänge.

Die Mengen werden wieder bezüglich der Betriebs- und der Testspezifikation definiert. Die eingeführten Bezeichnungen für die Mengen \mathcal{G} , \mathcal{F} , \mathcal{A} und \mathcal{R} werden deshalb beibehalten und zur Unterscheidung mit einer Tilde ergänzt. Die Mengen bezüglich aller Spezifikationen werden weiterhin mit „*“ gekennzeichnet.

Funktionierende und fehlerhafte Schaltungen sind durch die Betriebsspezifikation definiert. Weil Messfehler nicht in die Betriebsspezifikation nach Gleichung (2.4) bzw. (2.7) eingehen, sind die Mengen nur um die Zufallsgrößen ϵ_t bzw. ϵ_t zu erweitern:

$$\tilde{\mathcal{G}} = \{(\mathbf{s}, \epsilon_t) \in \mathbb{R}^{n_s+1} \mid \mathbf{s} \in \mathcal{G}\}, \quad \tilde{\mathcal{F}} = \mathbb{R}^{n_s+1} \setminus \tilde{\mathcal{G}}, \quad (2.46)$$

$$\tilde{\mathcal{G}}^* = \{(\mathbf{s}, \epsilon_t) \in \mathbb{R}^{n_s+n_t} \mid \mathbf{s} \in \mathcal{G}^*\}, \quad \tilde{\mathcal{F}}^* = \mathbb{R}^{n_s+n_t} \setminus \tilde{\mathcal{G}}^*. \quad (2.47)$$

Die Annahme einer Schaltung beim Test hängt nun neben den Bedingungen bei der Herstellung der Schaltung auch von dem Messergebnis und damit vom Messfehler ab. Die Mengen der angenommenen Schaltungen werden deshalb abhängig von der messfehlerbehafteten Testspezifikation aus Gleichung (2.40) bzw. (2.43) definiert:

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{(\mathbf{s}, \epsilon_t) \in \mathbb{R}^{n_s+1} \mid \tilde{t}(t(\mathbf{o}(\mathbf{s}), \mathbf{x}), \epsilon_t(C_t)) \leq t_B\}, \quad (2.48)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}^* = \{(\mathbf{s}, \epsilon_t) \in \mathbb{R}^{n_s+n_t} \mid \tilde{t}(t(\mathbf{o}(\mathbf{s}), \mathbf{X}), \epsilon_t(\mathbf{C}_t)) \leq t_B\}. \quad (2.49)$$

Die Mengen der aussortierten Schaltungen sind wieder komplementär:

$$\tilde{\mathcal{R}} = \mathbb{R}^{n_s+1} \setminus \tilde{\mathcal{A}}, \quad \tilde{\mathcal{R}}^* = \mathbb{R}^{n_s+n_t} \setminus \tilde{\mathcal{A}}^*. \quad (2.50)$$

Mit den Mengen $\tilde{\mathcal{G}}$, $\tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{\mathcal{A}}$ und $\tilde{\mathcal{R}}$ können die Fehlentscheidungen wieder als Schnittmengen formuliert werden. Die Mengen $\widetilde{\mathcal{R}\mathcal{G}}$ und $\widetilde{\mathcal{R}\mathcal{G}}^*$ beschreiben Schaltungen, die die Betriebsspezifikation erfüllen und beim Test aussortiert werden:

$$\widetilde{\mathcal{R}\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{R}} \cap \tilde{\mathcal{G}}, \quad \widetilde{\mathcal{R}\mathcal{G}}^* = \tilde{\mathcal{R}}^* \cap \tilde{\mathcal{G}}^* \quad (2.51)$$

und $\widetilde{\mathcal{A}\mathcal{F}}$ und $\widetilde{\mathcal{A}\mathcal{F}}^*$ Schaltungen, die beim Test angenommen werden, obwohl sie die Betriebsspezifikation verletzen:

$$\widetilde{\mathcal{A}\mathcal{F}} = \tilde{\mathcal{A}} \cap \tilde{\mathcal{F}}, \quad \widetilde{\mathcal{A}\mathcal{F}}^* = \tilde{\mathcal{A}}^* \cap \tilde{\mathcal{F}}^*. \quad (2.52)$$

2.3.4 Annahme- und Ablehnungswahrscheinlichkeit einer Schaltung

Die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Schaltung beim Test angenommen oder abgelehnt wird, hängt einerseits von dem statistischen Parametersatz \mathbf{s} ab, der die Bedingungen während der Herstellung

beschreibt, und andererseits vom Messfehler ϵ_t bzw. ϵ_t . In diesem Abschnitt betrachten wir zunächst eine Schaltung mit dem Parametersatz s und möchten wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit diese Schaltung beim Test auf Grund des Messfehlers ϵ_t bzw. ϵ_t angenommen oder abgelehnt wird. Dazu werden die Ereignisse a : »eine Schaltung erfüllt die messfehlerbehaftete Testspezifikation; sie wird angenommen (*accepted*)« und r : »eine Schaltung verletzt die messfehlerbehaftete Testspezifikation; sie wird aussortiert (*rejected*)« eingeführt. Die *Annahmewahrscheinlichkeit*

$$P_s^a = P_s(a) = P_s((s, \epsilon_t) \in \tilde{\mathcal{A}}) \quad \text{bzw.} \quad P_s^a = P_s((s, \epsilon_t) \in \tilde{\mathcal{A}}^*) \quad (2.53)$$

ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, mit der das Ereignis a für eine Schaltung mit dem statistischen Parametersatz s eintritt. Die Annahmewahrscheinlichkeit ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Versuchsausgänge (s, ϵ_t) bzw. (s, ϵ_t) bei denen die Schaltung s angenommen wird. Entsprechend ist die *Ablehnungswahrscheinlichkeit*

$$P_s^r = P_s(r) = P_s((s, \epsilon_t) \in \tilde{\mathcal{R}}) \quad \text{bzw.} \quad P_s^r = P_s((s, \epsilon_t) \in \tilde{\mathcal{R}}^*) \quad (2.54)$$

die Wahrscheinlichkeit, mit der die Schaltung s abgelehnt wird.

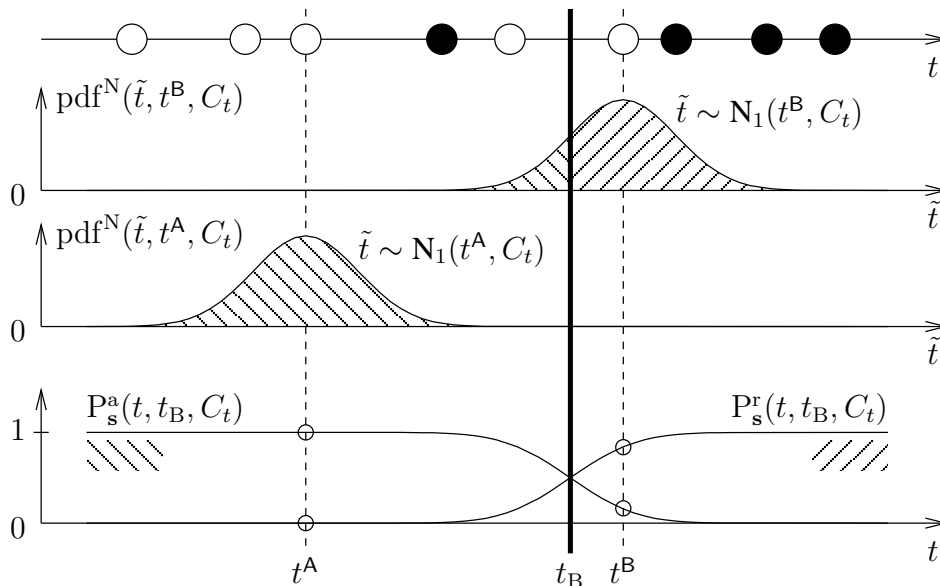


Abbildung 2.3: Annahme- und Ablehnungswahrscheinlichkeit einer Schaltung.

Anhand von Abbildung 2.1 auf Seite 18 wurde die Aufgabenstellung des Testentwurfs ohne Berücksichtigung von Messfehlern erklärt. An Abbildung 2.3 soll nun der Einfluss der Messfehler auf die Testentscheidung veranschaulicht werden. Die Darstellung der Testeigenschaft t mit den durch Punkten gekennzeichneten Testeigenschaftswerten einiger Schaltungen oben in Abbildung 2.3 wurde aus Abbildung 2.1 übernommen. Für zwei dieser Schaltungen A und B mit den Testeigenschaften t^A und t^B ist in Abbildung 2.3 die Verteilungsdichte $\text{pdf}^N(\tilde{t}, t, C_t)$ für die messfehlerbehaftete Testeigenschaft $\tilde{t} \sim N_1(t, C_t)$ aus Gleichung (2.38) dargestellt. t^A und t^B geben dabei den Erwartungswert der Verteilung an. Gilt für den beim Test durch Messung ermittelten Wert \tilde{t} : $\tilde{t} \leq t_B$, dann wird die Schaltung gemäß der Testspezifikation nach Gleichung (2.40) angenommen, für $\tilde{t} > t_B$ dagegen abgelehnt. Die Annahmewahrscheinlichkeit $P_s^a(t, t_B, C_t)$ einer Schaltung ergibt sich demnach durch Integration der Dichte über $\tilde{t} \leq t_B$, dem Bereich einer erfüllten Testspezifikation. Die Ablehnungswahrscheinlichkeit $P_s^r(t, t_B, C_t)$ einer Schaltung lässt sich

dann durch Integration der Dichte über $\tilde{t} > t_B$, dem Bereich einer verletzten Testspezifikation, bestimmen.

$$\begin{aligned} P_s^a(t, t_B, C_t) &= P_s \left\{ \tilde{t} \left(t(\mathbf{o}(\mathbf{s}), \mathbf{x}), \epsilon_t(C_t) \right) \leq t_B \right\} = \text{cdf}^N(t_B, t, C_t) \\ P_s^r(t, t_B, C_t) &= P_s \left\{ \tilde{t} \left(t(\mathbf{o}(\mathbf{s}), \mathbf{x}), \epsilon_t(C_t) \right) > t_B \right\} = 1 - \text{cdf}^N(t_B, t, C_t) \end{aligned} \quad (2.55)$$

cdf^N ist dabei die Verteilungsfunktion der Normalverteilung:⁷

$$\text{cdf}^N(t_B, t, C_t) = P\{\tilde{t} \leq t_B\} = \int_{-\infty}^{t_B} \text{pdf}^N(\tilde{t}, t, C_t) \partial \tilde{t}. \quad (2.56)$$

Für eine Schaltung gibt es also jeweils genau einen Wert für die Annahmewahrscheinlichkeit P_s^a und einen für die Ablehnungswahrscheinlichkeit P_s^r , die unten in Abbildung 2.3 für die beiden Schaltungen eingetragen sind. Die dargestellten Kurven sind die Annahmewahrscheinlichkeit P_s^a und die Ablehnungswahrscheinlichkeit P_s^r als Funktion der Testeigenschaft t . Da die Ereignisse a und r komplementär sind, gilt: $P_s^a + P_s^r = 1$. Während Schaltung A wegen $t^A \ll t_B$ mit hoher Wahrscheinlichkeit angenommen wird, ist bei Schaltung B die Wahrscheinlichkeit einer Ablehnung höher und die Testentscheidung unsicherer als bei Schaltung A. Der Einfluss des Messfehlers auf die Testentscheidung ist von der Varianz C_t abhängig. Je kleiner C_t ist, desto schmaler wird der Bereich um den Spezifikationswert t_B in dem die Testentscheidung vom Messfehler beeinflusst wird. Beim Testentwurf kann auf C_t nach Gleichung (2.39) einerseits durch C_o , der Kovarianzmatrix des Messfehlers der Testbeobachtungen ϵ_o , und andererseits durch die Testentwurfparameter \mathbf{x} Einfluss genommen werden.

Durch Austauschen der Testspezifikation in Gleichung (2.55) kann die Annahme- und die Ablehnungswahrscheinlichkeit einer Schaltung bezüglich aller n_t Testspezifikationen angegeben werden:

$$\begin{aligned} P_s^a(\mathbf{t}, \mathbf{t}_B, \mathbf{C}_t) &= P_s \left\{ \tilde{\mathbf{t}} \left(\mathbf{t}(\mathbf{o}(\mathbf{s}), \mathbf{X}), \epsilon_t(\mathbf{C}_t) \right) \leq \mathbf{t}_B \right\}, \\ P_s^r(\mathbf{t}, \mathbf{t}_B, \mathbf{C}_t) &= P_s \left\{ \tilde{\mathbf{t}} \left(\mathbf{t}(\mathbf{o}(\mathbf{s}), \mathbf{X}), \epsilon_t(\mathbf{C}_t) \right) \not\leq \mathbf{t}_B \right\}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Der Messfehler der Testbeobachtungen ϵ_o wurde in Gleichung (2.37) als normalverteilt angenommen. In Gleichung (2.12) wurde jedoch gezeigt, dass der Ansatz der Testeigenschaft t als Linearkombination der Testbeobachtungen \mathbf{o} auch berechnete Testbeobachtungen wie $o_2 = o_1^2$ oder $o_3 = \log_{10}(o_1)$ ermöglicht. Auch wenn o_1 normalverteilt ist, o_2 und o_3 sind es nicht. Generell ist die Verwendung von Testbeobachtungen o möglich, die nicht normalverteilt sind. Dazu müssen die jeweiligen Verteilungen, die sich auf die Testeigenschaft t fortpflanzen, bei der Annahme- und Ablehnungswahrscheinlichkeit P_s^a und P_s^r entsprechend berücksichtigt werden.

2.3.5 Grenzparametersätze

Auch die Grenzparametersätze der Betriebs- und der Testspezifikation unter Berücksichtigung des Messfehlers ϵ_t müssten auf dem Raum \mathbb{R}^{n_s+1} aus Gleichung (2.44) definiert werden. Für die Darstellung in den weiteren Kapiteln ist jedoch die Betrachtung im Raum der statistischen Parameter \mathbb{R}^{n_s} interessanter. Da die Betriebsspezifikation unabhängig vom Messfehler ist, gilt die Definition der Menge der Grenzparametersätze \mathcal{S} aus Gleichung (2.25) auch für eine Betrachtung mit Messfehlern. In die Testspezifikation aus Gleichung (2.40) geht jedoch der Messfehler ein.

⁷Siehe auch Gleichung (A.2) auf Seite 101.

Um die Menge der Grenzparametersätze der Testspezifikation dennoch im Raum der statistischen Parameter \mathbb{R}^{n_s} beschreiben und veranschaulichen zu können, geschieht dies für einen bestimmten Wert des Messfehlers. Wird der Erwartungswert $\epsilon_t = 0$ gewählt, so sind die Menge

$$\mathcal{S}_{\epsilon_t=0}^t = \left\{ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n_s} \mid \tilde{t}(t(\mathbf{o}(\mathbf{s}), \mathbf{x}), 0) = t_B \right\} \quad (2.58)$$

und \mathcal{S}^t aus Gleichung (2.26) identisch, da $\tilde{t}(t, 0) = t$ gilt. Während \mathcal{S}^t eine harte Grenze zwischen den angenommenen und aussortierten Schaltungen beschreibt, ist die Grenze bei $\mathcal{S}_{\epsilon_t=0}^t$ jedoch durch den Messfehler ϵ_t aufgeweicht. Der fließende Übergang zwischen angenommenen und aussortierten Schaltungen wird unten in Abbildung 2.3 deutlich. Die Parametersätze $\mathbf{s} \in \mathcal{S}_{\epsilon_t=0}^t$ kennzeichnen dabei exakt den Schnittpunkt der Kurven P_s^a und P_s^r der Annahme- und der Ablehnungswahrscheinlichkeit.

2.3.6 Zielgrößen

Die Auftretswahrscheinlichkeiten der Zufallsereignisse $\widetilde{\mathcal{RG}}$, $\widetilde{\mathcal{AF}}$, $\widetilde{\mathcal{RG}}^*$ und $\widetilde{\mathcal{AF}}^*$ sollen in diesem Abschnitt formuliert werden. Dazu wird das zweistufige Zufallsexperiment am Baumdiagramm in Abbildung 2.4 veranschaulicht. In einem Prozess werden Schaltungen hergestellt, aus denen

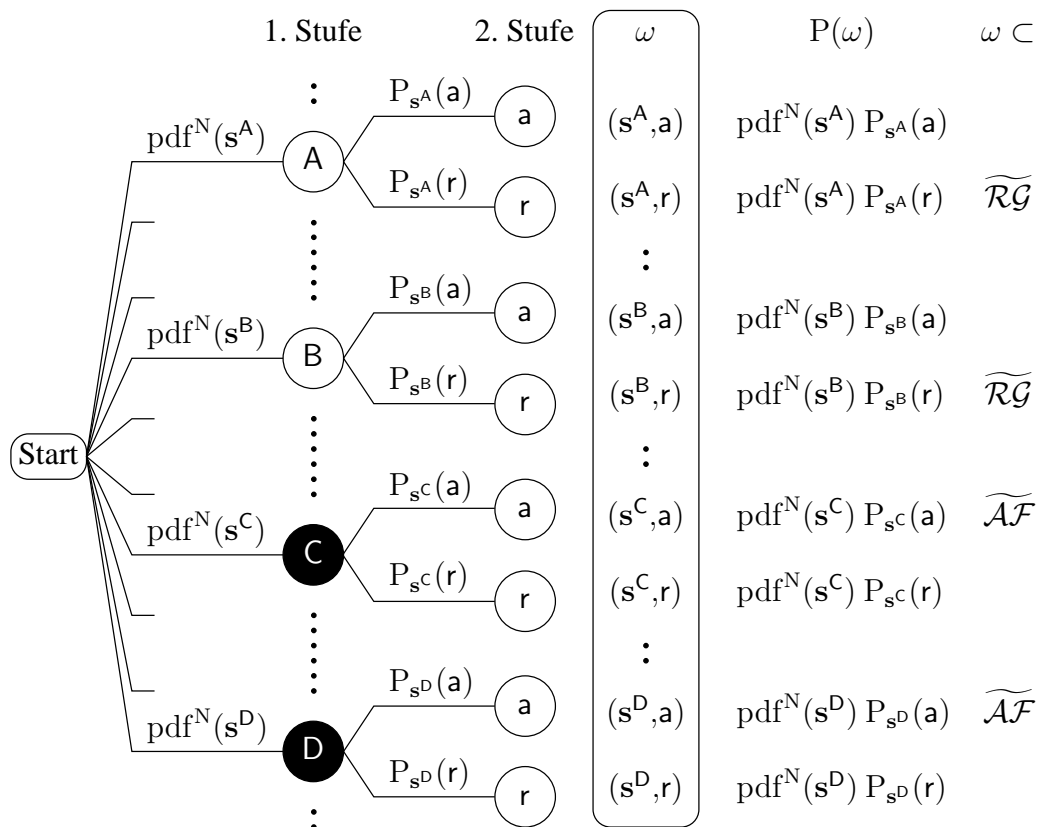


Abbildung 2.4: Baumdiagramm zum zweistufigen Zufallsexperiment.

wir die vier Schaltungen A, B, C und D heraus greifen. Wir gehen davon aus, dass die Schaltungen A und B mit den statistischen Parametersätzen s^A und s^B die Betriebspezifikation erfüllen: $s^A, s^B \in \widetilde{\mathcal{G}}$ und die Schaltungen C und D mit s^C bzw. s^D diese verletzen: $s^C, s^D \in \widetilde{\mathcal{F}}$. In Abbildung 2.4 sind die funktionierenden Schaltungen in der ersten Stufe wieder als helle Punkte und die fehlerhaften als dunkle Punkte dargestellt. In der zweiten Stufe sind alle Versuchsergebnisse, die zur

Annahme bzw. Ablehnung der Schaltungen führen, mit den oben eingeführten Ereignissen a und r zusammengefasst worden. Die Annahme- und die Ablehnungswahrscheinlichkeit einer Schaltung P_s^a und P_s^r wurden im vorhergehenden Abschnitt formuliert und sind auf den Zweigen zur zweiten Stufe des Baumes angegeben. Die statistischen Parameter s wurden in Gleichung (2.1) als normalverteilt angenommen, weshalb auf den Zweigen zu den Schaltungen die Dichtewerte der statistischen Parametersätze s angegeben sind. Dabei wurde im Bild eine standardisierte Dichte⁸ mit $s_0 = \mathbf{0}$ und $C_s = \mathbf{I}$ angenommen und die Dichte der Normalverteilung aus Gleichung (2.28) mit $\text{pdf}^N(s) = \text{pdf}^N(s, \mathbf{0}, \mathbf{I})$ abgekürzt. Es wird davon ausgegangen, dass sich die Produktion der Schaltungen und die Messung beim darauf folgenden Test nicht gegenseitig beeinflussen, d. h. stochastisch unabhängig sind. Die Dichte des Versuchsergebnisses (s, ϵ_t) bzw. (s, ϵ_t) ergibt sich deshalb aus dem Produkt der Dichte des statistischen Parametersatzes s und der Dichte der Messfehler ϵ_t bzw. ϵ_t : z. B. $\text{pdf}^N((s, \epsilon_t)) = \text{pdf}^N(s, s_0, C_s) \text{pdf}^N(\epsilon_t, 0, C_t)$.⁹ Entsprechend sind für die Ereignisse (s, a) und (s, r) die Produkte aus der Dichte der statistischen Parameter $\text{pdf}^N(s)$ und der Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse a und r in der vorletzten Spalte der Abbildung angegeben. Durch Summieren dieser Produkte können dann die gesuchten Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse $\widetilde{\mathcal{RG}}$ und $\widetilde{\mathcal{AF}}$ bzw. $\widetilde{\mathcal{RG}}^*$ und $\widetilde{\mathcal{AF}}^*$ berechnet werden. Dabei sind, wie in der rechten Spalte angegeben, für $\widetilde{\mathcal{RG}}$ die Terme für funktionierende Schaltungen $s \in \widetilde{\mathcal{G}}$ mit der Ablehnungswahrscheinlichkeit P_s^r und für $\widetilde{\mathcal{AF}}$ die Terme für fehlerhafte Schaltungen $s \in \widetilde{\mathcal{F}}$ mit der Annahmewahrscheinlichkeit P_s^a zu berücksichtigen:

$$P(\widetilde{\mathcal{RG}}) = \int_{\mathcal{G}} \text{pdf}^N(s, s_0, C_s) P_s^r(t, t_B, C_t) \partial s, \quad (2.59)$$

$$P(\widetilde{\mathcal{AF}}) = \int_{\mathcal{F}} \text{pdf}^N(s, s_0, C_s) P_s^a(t, t_B, C_t) \partial s, \quad (2.60)$$

$$P(\widetilde{\mathcal{RG}}^*) = \int_{\mathcal{G}^*} \text{pdf}^N(s, s_0, C_s) P_s^r(t, t_B, C_t) \partial s, \quad (2.61)$$

$$P(\widetilde{\mathcal{AF}}^*) = \int_{\mathcal{F}^*} \text{pdf}^N(s, s_0, C_s) P_s^a(t, t_B, C_t) \partial s. \quad (2.62)$$

Die Begriffe *Ausbeuteeinbuße* und *Fehlerdurchlässigkeit* aus Kapitel 2.2.5 werden auch für die Wahrscheinlichkeiten $P_{\widetilde{\mathcal{RG}}} = P(\widetilde{\mathcal{RG}})$ und $P_{\widetilde{\mathcal{AF}}} = P(\widetilde{\mathcal{AF}})$ beibehalten:

$$P_{\widetilde{\mathcal{RG}}}(t, t_B, C_t) = P(\widetilde{\mathcal{RG}}), \quad P_{\widetilde{\mathcal{AF}}}(t, t_B, C_t) = P(\widetilde{\mathcal{AF}}). \quad (2.63)$$

Die Wahrscheinlichkeiten $P(\widetilde{\mathcal{RG}})$ und $P(\widetilde{\mathcal{AF}})$ beinhalten auch den messfehlerlosen Fall der Wahrscheinlichkeiten $P(\mathcal{RG})$ und $P(\mathcal{AF})$ aus den Gleichungen (2.32) und (2.33). Zur messfehlerlosen Betrachtung gelangt man durch Eliminieren des Messfehlers per Grenzübergang, was im folgenden für den allgemeineren Fall aller n_t Spezifikationen gezeigt wird. Durch Grenzübergang $C_t \rightarrow \mathbf{0}$ folgt für die Annahme- und die Ablehnungswahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} \lim_{C_t \rightarrow \mathbf{0}} P_s^a(t, t_B, C_t) &= h(t_B - t), \\ \lim_{C_t \rightarrow \mathbf{0}} P_s^r(t, t_B, C_t) &= 1 - h(t_B - t), \end{aligned} \quad (2.64)$$

wobei h die Einheitssprungfunktion ist:

$$h(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.65)$$

⁸Zur Transformation siehe Anhang A.1.1 auf Seite 101.

⁹Zum Produktsatz siehe auch Anhang A.2 auf Seite 103.

Dies in die Gleichungen (2.61) und (2.62) eingesetzt, ergibt eine andere Darstellung der Integrale $P(\mathcal{RG}^*)$ und $P(\mathcal{AF}^*)$ aus den Gleichungen (2.34) und (2.35).

Die Ausbeuteeinbuße und die Fehlerdurchlässigkeit sind konkurrierende Größen. Wenn einfach alle Schaltungen ausgeliefert werden würden, dann werden keine funktionierenden Schaltungen fälschlicherweise aussortiert, die Ausbeuteeinbuße wäre dann gleich Null: $P_{\mathcal{RG}} = 0$. Umgekehrt könnte eine Fehlerdurchlässigkeit Null erreicht werden: $P_{\mathcal{AF}} = 0$, wenn alle Schaltungen aussortiert würden. Ein kostenoptimaler Kompromiss kann gefunden werden, indem eine Kostenfunktion eingeführt wird, welche die mit Fehlentscheidungen verbundenen Kosten in Bezug setzt. Beispiele für Kostenfunktionen sind:

$$K(P_{\mathcal{RG}}, P_{\mathcal{AF}}, \nu) = \nu P_{\mathcal{RG}} + (1 - \nu) P_{\mathcal{AF}}, \quad (2.66)$$

$$K(P_{\mathcal{RG}}, P_{\mathcal{AF}}, \nu) = \sqrt{\nu P_{\mathcal{RG}}^2 + (1 - \nu) P_{\mathcal{AF}}^2}, \quad (2.67)$$

wobei durch die Wahl von $\nu \in [0, 1]$ die eine oder die andere Zielgröße in höherem Maße gewichtet wird.

Bei den Zielgrößen handelt es sich um n_s -dimensionale Integrale nach s , die nicht analytisch lösbar sind. Zur Bestimmung der Testspezifikation und zum Bewerten der Testentwürfe müssen diese Integrale abgeschätzt werden.

2.4 Quadraturverfahren

Nicht analytisch lösbare Integrale, wie die Zielgrößen Ausbeuteeinbuße und Fehlerdurchlässigkeit, können mit Quadraturverfahren abgeschätzt werden. Allgemein werden mit Quadraturverfahren alle Verfahren bezeichnet, mit denen Näherungswerte für bestimmte Integrale berechnet werden können. Es werden dabei deterministische (Gauß, Newton-Cotes) und stochastische (Monte-Carlo-Verfahren) Quadraturverfahren unterschieden [Hab70].

Um Quadraturverfahren untereinander zu vergleichen, wird die Genauigkeit der Verfahren mit dem Aufwand diese Genauigkeit zu erreichen in Bezug gesetzt. Dabei wird der Aufwand durch die Anzahl N der benötigten Funktionsauswertungen quantifiziert, was beim Testentwurf dem Simulationsaufwand entspricht. Die Genauigkeit der Verfahren wird dann in der Theorie durch den absoluten Fehler des Schätzwertes zum wahren Wert des Integrals als Funktion von N ausgedrückt [Hab70, Fis99]. Deterministische Quadraturverfahren haben eine Konvergenzrate von $O(N^{-i/n})$, wobei i die Anzahl der existierenden und stetigen Ableitungen und n die Dimension des Integrationsgebiets des Integranden angibt. Stochastische Verfahren konvergieren mit $O(N^{-1/2})$ [Hab70, Fis99]. Die schnellsten Verfahren für eindimensionale Integrale sind demnach deterministische Quadraturverfahren. Bei zunehmender Dimension n schwindet der Vorteil der besseren Konvergenzrate jedoch schnell. Da die Konvergenzrate der stochastischen Verfahren unabhängig von n ist, sind sie die bevorzugten Verfahren für höhere Dimension n . Ein weiterer Vorteil für stochastische Verfahren ist, dass deterministische Quadraturverfahren höhere Anforderungen an die Existenz und Stetigkeit der Ableitungen des Integranden stellen als stochastische Verfahren. Stochastische Verfahren haben indes das Manko einer ziemlich langsamen Konvergenzrate von $N^{-1/2}$. Die Effizienz der Monte-Carlo-Abschätzung kann jedoch durch Techniken wie *Importance Sampling* erhöht werden. Diese Techniken werden untereinander über die Varianz der Schätzung verglichen.

Beim Testentwurf haben die Zielgrößen ein n_s -dimensionales Integrationsgebiet. Die Bedingung existierender und stetiger Ableitungen ist für die Betriebseigenschaft f und die Testbeobachtungen o praktisch nicht überprüfbar. Sie liegen nicht analytisch vor und werden durch Simulation

ausgewertet. Der Einsatz stochastischer Verfahren liegt deshalb nahe [Lin97]. In der vorliegenden Arbeit werden auf Grund von Problemwissen effizientere Verfahren entwickelt, die Simulationskosten einsparen. Die hier vorgestellten Verfahren verwenden dazu einen ausgezeichneten statistischen Parametersatz, den Worst-Case-Parametersatz, der beim Toleranzentwurf bestimmt wird.

2.5 Worst-Case-Parametersatz

Beim Toleranzentwurf soll eine Dimensionierung der Schaltung bestimmt werden, bei der die Produktionsausbeute maximal ist. Dazu werden in [AGW94, Grä93, Wie94, SGA99, AEG⁺00, SPZ⁺01] iterative Verfahren vorgeschlagen. Im Raum der statistischen Parameter \mathbf{s} werden die Abstände vom Entwurfspunkt \mathbf{s}_0 zu den Grenzparametersätzen jeder Betriebsspezifikation bestimmt und dann durch Ändern der Dimensionierung der jeweils kleinste Abstand maximiert. Beim Toleranzentwurf werden dabei Bauelementewerte wie die Transistorlängen und -weiten eingestellt.

Die Menge der Grenzparametersätze der Betriebsspezifikation \mathcal{S} nach Gleichung (2.25) enthält einen ausgezeichneten Parametersatz, den *Worst-Case-Parametersatz* \mathbf{s}_W , der den kleinsten Abstand vom Erwartungswert \mathbf{s}_0 der Verteilung hat. Dieser Abstand wird mittels der Mahalanobis-Distanz gemessen:

$$\beta^2(\mathbf{s}) = (\mathbf{s} - \mathbf{s}_0)^T \mathbf{C}_s^{-1} (\mathbf{s} - \mathbf{s}_0), \quad \beta^2 \in \mathbb{R}_0^+. \quad (2.68)$$

$\beta^2(\mathbf{s}) = \text{konst}$ beschreibt eine Isodensite. Isodensiten bilden bei einer Normalverteilung konzentrische Ellipsoide um den Erwartungswert \mathbf{s}_0 . Der *Worst-Case-Parametersatz* \mathbf{s}_W ist der Grenzparametersatz $\mathbf{s}_W \in \mathcal{S}$, der auf der Isodensite mit der höchsten Verteilungsdichte liegt:

$$\mathbf{s}_W = \underset{\mathbf{s} \in \mathcal{S}}{\text{argmin}} \beta^2(\mathbf{s}). \quad (2.69)$$

Der *Worst-Case-Abstand* ist dann der Abstand vom Nominalparametersatz \mathbf{s}_0 zum Worst-Case-Parametersatz \mathbf{s}_W :

$$\beta_W = \begin{cases} +\sqrt{\beta^2(\mathbf{s}_W)} & \text{falls } \mathbf{s}_0 \in \mathcal{G} \\ -\sqrt{\beta^2(\mathbf{s}_W)} & \text{falls } \mathbf{s}_0 \in \mathcal{F}. \end{cases} \quad (2.70)$$

Der Worst-Case-Abstand β_W gibt den Abstand der Betriebsspezifikation vom Nominalpunkt \mathbf{s}_0 in Vielfachen der Streuung des Herstellungsprozesses an. Das Vorzeichen des Worst-Case-Abstands β_W wird so festgelegt, dass der Abstand genau dann positiv ist, wenn \mathbf{s}_0 Element der Menge der funktionierenden Schaltungen ist.

Der Worst-Case-Parametersatz \mathbf{s}_W ist für den Toleranz- und den Testentwurf von großer Bedeutung, da in seiner näheren Umgebung fehlerhafte Schaltungen am häufigsten auftreten. Die Betriebsspezifikation wird also mit großer Wahrscheinlichkeit von Schaltungen \mathbf{s} in seiner Umgebung verletzt. Die Eigenschaft des Worst-Case-Parametersatzes \mathbf{s}_W , der Grenzparametersatz mit der höchsten Verteilungsdichte zu sein, hat speziell für den Testentwurf noch eine weitere Bedeutung. Ein Abweichen der Testspezifikation von der Betriebsspezifikation wird in der Umgebung des Worst-Case-Parametersatzes \mathbf{s}_W mit der höchsten Verteilungsdichte gewichtet und trägt so am stärksten zu Wahrscheinlichkeit von Fehlentscheidungen bei. Für den Testentwurf ist es deshalb nötig, eine gute Übereinstimmung der Testspezifikation mit der Betriebsspezifikation in der Umgebung des Worst-Case-Parametersatzes zu erreichen.

Beim Test ist das Einhalten aller Betriebsspezifikationen bezüglich der Abweichung aller statistischer Parameter zu überprüfen. Die hier vorgestellten Verfahren gehen dazu spezifikationsweise vor. Mit dem Worst-Case-Parametersatz werden die Abweichungen aller statistischen Parameter

vom Nominalwert $s_W - s_0$ bezüglich einer Betriebsspezifikation beschrieben und darauf aufbauend die Testspezifikation entworfen. Die Testentscheidung bezüglich aller Spezifikationen kann dann einfach durch UND-Verknüpfen der Entscheidungen bezüglich einzelner Spezifikationen getroffen werden. Der umgekehrter Ansatz, zunächst die Auswirkung einzelner Parameter auf alle Spezifikationen zu betrachten, schränkt die Beobachtbarkeit mehrerer Parameterabweichungen wegen der Überlagerung der Effekte einzelner Parameterabweichungen auf die Schaltungseigenschaften, wie bei [HK93], stark ein.

Die Kosten beim Test können auch durch eine geschickte Reihenfolge der nacheinander mit einer Schaltung durchzuführenden Tests reduziert werden. Da eine Schaltung, sobald sie eine Testspezifikation verletzt, fehlerhaft ist, kann sie aussortiert und alle weiteren Tests eingespart werden. Damit sinkt die durchschnittliche Testzeit einer Schaltung. Die wichtigsten Kriterien zum Festlegen einer Testreihenfolge sind die Dauer jedes Test und der jeweilige Anteil erkannter fehlerhafter Schaltungen [BR01]. Zum letzteren kann der Worst-Case-Abstand als Kriterium herangezogen werden. Da er ein Maß für die Ausbeute bezüglich einer Betriebsspezifikation ist, gibt er auch den Anteil der von einem Test erkennbaren fehlerhaften Schaltungen an.

2.5.1 Berechnungsansatz

Da für technisch relevante Schaltungen im allgemeinen keine eindeutige Abbildung vom Raum der Betriebseigenschaften f in den Parameterraum der statistischen Parameter s und der Betriebsparameter θ existiert, können die Grenzparametersätze \mathcal{S} nicht analytisch berechnet werden.

Zum Bestimmen des Worst-Case-Parametersatzes wird zunächst der *Worst-Case-Betriebsparametersatz*

$$\theta_W = \operatorname{argmax}_{\theta \in \mathcal{B}} f(s_0, \theta) \quad (2.71)$$

bestimmt. Der Worst-Case-Betriebsparametersatz θ_W liegt meist in einer Ecke des Betriebsparameterbereiches \mathcal{B} und kann dann über eine Empfindlichkeitsanalyse unabhängig von den statistischen Parametern s ermittelt werden. Der Worst-Case-Parametersatz lässt sich danach mit den Grenzparametersätzen einer Betriebsspezifikation unter Worst-Case-Betriebsbedingungen

$$\mathcal{S}_\theta = \{s \in \mathbb{R}^{n_s} \mid f(s, \theta_W) = f_B\} \quad (2.72)$$

durch

$$s_W = \operatorname{argmin}_{s \in \mathcal{S}_\theta} \beta^2(s) \quad (2.73)$$

bestimmen. Die Lösung von (2.73) kann mit einem Lagrange-Ansatz [Pap91] iterativ berechnet werden, indem $f(s, \theta_W)$ bezüglich s in eine Taylorreihe entwickelt wird, die nach dem linearen [Grä93] oder quadratischen [AEG⁺00] Term abgebrochen wird. Die Bedingungen für das Optimum von Gleichung (2.73) lassen sich mit der Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(s, \lambda) = \frac{1}{2} \beta^2(s) - \lambda (f(s, \theta_W) - f_B), \quad \mathcal{L} \in \mathbb{R} \quad (2.74)$$

formulieren, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ einen Lagrange-Parameter darstellt. Die hinreichenden Bedingungen für ein lokales Minimum sind

$$\nabla_s \mathcal{L}(s, \lambda) = \mathbf{0}, \quad (2.75)$$

$$\nabla_\lambda \mathcal{L}(s, \lambda) = 0 \quad (2.76)$$

und eine positiv semidefinite Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion in s [Pap91]. In [AGW94, Wie94, SGA99, AEG⁺00, SPZ⁺01] werden auf SQP-Verfahren beruhende Berechnungsverfahren

vorgestellt, deren Simulationsaufwand linear abhängig von der Anzahl n_s statistischer Parameter ist. Beim Testentwurf wird davon ausgegangen, dass der Worst-Case-Parametersatz \mathbf{s}_W aus dem Toleranzentwurf bekannt ist.

2.5.2 Vereinbarung

Die Darstellung der Verfahren in den folgenden Kapiteln kann an einigen Stellen durch Wahl vorteilhafter Koordinaten für die statistischen Parameter \mathbf{s} vereinfacht werden. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird eine standardisierte Verteilung der statistischen Parameter \mathbf{s} angenommen:

$$\mathbf{s} \sim \mathbf{N}_{n_s}(\mathbf{0}, \mathbf{I}). \quad (2.77)$$

Der Entwurfspunkt der Schaltung ist dann der Ursprung des Koordinatensystems: $\mathbf{s}_0 = \mathbf{0}$ und die Kovarianzmatrix die Einheitsmatrix: $\mathbf{C}_s = \mathbf{I}$. Die Verteilungsdichte kann dann kurz mit

$$\text{pdf}^N(\mathbf{s}) = \text{pdf}^N(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0, \mathbf{C}_s) \quad (2.78)$$

angegeben werden. Die Transformation zur Standardisierung wird in Anhang A.1.1 beschrieben.

Mit der standardisierten Verteilung gilt für den Parameterabstand aus Gleichung (2.68):

$$\beta^2(\mathbf{s}) = \mathbf{s}^T \mathbf{s} = \|\mathbf{s}\|_2^2. \quad (2.79)$$

Für den Worst-Case-Parametersatz nach Gleichung (2.70) folgt:

$$\beta_W = \begin{cases} +\sqrt{\beta^2(\mathbf{s}_W)} = +\|\mathbf{s}_W\|_2 & \text{falls } \mathbf{s}_0 = \mathbf{0} \in \mathcal{G} \\ -\sqrt{\beta^2(\mathbf{s}_W)} = -\|\mathbf{s}_W\|_2 & \text{falls } \mathbf{s}_0 = \mathbf{0} \in \mathcal{F}. \end{cases} \quad (2.80)$$

Des weiteren ist sinnvoll, das standardisierte Koordinatensystem so zu rotieren, dass der Worst-Case-Parametersatz ein Punkt auf der s_1 -Achse des Koordinatensystems ist:

$$\mathbf{s}_W = \beta_W \mathbf{e}_1. \quad (2.81)$$

Dabei ist $\mathbf{e}_i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T$ ein Einheitsvektor $\|\mathbf{e}_i\| = 1$ mit einer 1 an der i -ten Stelle. Der Basiswechsel wird in Anhang A.4 beschrieben.

Kapitel 3

Demonstratorschaltungen und Validierverfahren

Um den Einsatz der in den weiteren Kapiteln vorgestellten Lösungsansätze demonstrieren zu können, wurden diese implementiert und Testentwürfe für insgesamt 15 Betriebsspezifikationen zweier Beispielschaltungen durchgeführt und bewertet. Die zur Demonstration verwendeten Schaltungen und die Teststrategie werden hier beschrieben. Außerdem wird ein stochastisches Quadraturverfahren zur Bewertung eines Testentwurfs vorgestellt, mit dem die vorgestellten Lösungsverfahren validiert und die im weiteren vorgestellten Bewertungsverfahren verglichen werden.

3.1 Demonstratorschaltungen

Die im folgenden vorgestellten Entwurfsverfahren zum impliziten funktionalen Test werden an zwei CMOS-Schaltungen demonstriert. Die erste Schaltung ist der Miller Operationsverstärker (M-OP) aus Abbildung 3.1, eine typische Analogschaltung. Für jede der sieben in Tabelle 3.1

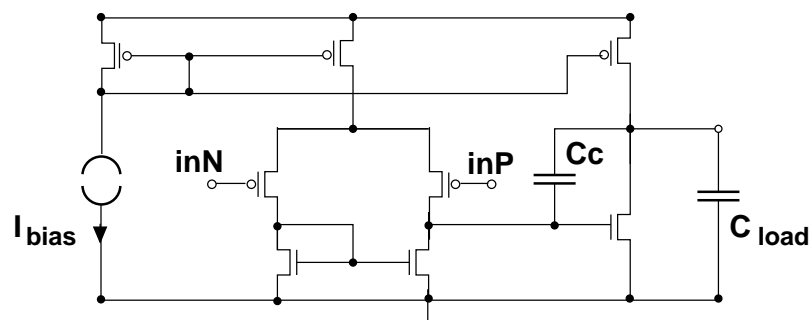


Abbildung 3.1: Topologie des Miller Operationsverstärkers (M-OP).

aufgeführten Betriebsspezifikationen werden in den folgenden Kapiteln Testentwürfe mit den dort vorgestellten Verfahren durchgeführt. Es sind sowohl transiente, als auch AC und DC Eigenschaften mit unteren bzw. oberen Grenzwerten spezifiziert.

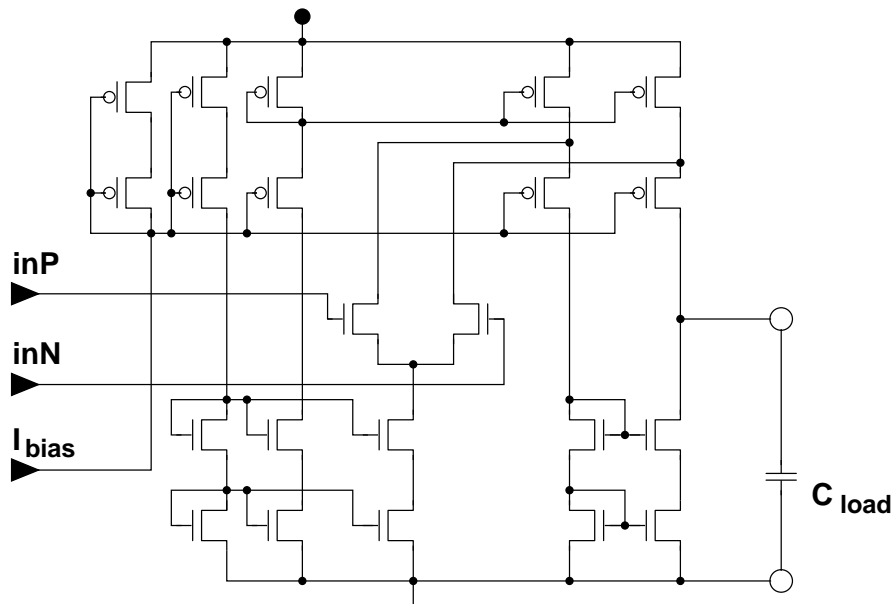
Die Betriebsbedingungen dieser Schaltung werden mit den Betriebsparametern Versorgungsspannung V_{dd} , Referenzstrom I_{bias} und Lastkapazität C_{load} modelliert. Für sie wurden folgende Betriebsparameterbereiche festgelegt: $4,5V \leq V_{dd} \leq 5,5V$, $9,5\mu A \leq I_{bias} \leq 10,5\mu A$ und $10pF \leq C_{load} \leq 30pF$.

Leerlaufverstärkung	A_0	\geq	85 dB
Verstärkungs-Bandbreite-Produkt	GBW	\geq	$5 \text{ M} \frac{1}{\text{s}}$
Phasenrand	Φ_M	\geq	60°
Flankensteilheit fallend	SR_f	\leq	$-6 \frac{\text{V}}{\mu\text{s}}$
Flankensteilheit steigend	SR_r	\geq	$5 \frac{\text{V}}{\mu\text{s}}$
Betriebsspannungsdurchgriff	PSRR	\geq	90 dB
Leistung	power	\leq	1,5 mW

Tabelle 3.1: Betriebsspezifikationen des Miller Operationsverstärkers (M-OP).

Die Streuung des Herstellungsprozesses wird mit $n_s = 7$ statistischen Parametern s beschrieben. Die dafür verwendeten Daten stammen für diese und die zweite Beispielschaltung von einem Fertigungsprozess aus der Industrie.

Die zweite Beispielschaltung ist der *Folded-cascode* Operationsverstärker (F-OP) aus Abbildung 3.2. Die in Tabelle 3.2 angegebenen Betriebsspezifikationen umfassen wieder transiente, AC

Abbildung 3.2: Topologie des *Folded-cascode* Operationsverstärkers (F-OP).

und DC Eigenschaften.

Die Betriebsbedingungen des *Folded-cascode* Operationsverstärkers werden mit den Betriebsparametern Versorgungsspannung V_{dd} , Referenzstrom I_{bias} , Lastkapazität C_{load} und Temperatur T mit den Bereichen: $4,7\text{V} \leq V_{dd} \leq 5,3\text{V}$, $7,5\mu\text{A} \leq I_{bias} \leq 13\mu\text{A}$, $3,25\text{pF} \leq C_{load} \leq 3,75\text{pF}$ und $-40^\circ\text{C} \leq T \leq +80^\circ\text{C}$ modelliert.

Würde man die beiden Schaltungen explizit funktional testen, dann wären zunächst für den Test einer Betriebsspezifikation die für diese Betriebsspezifikation kritischsten Betriebsbedingungen zu erzeugen bzw. einzustellen. Dann könnte die Betriebseigenschaft gemessen und zuletzt der Messwert mit der Betriebsspezifikation ausgewertet werden. Dieser Ablauf wiederholt sich zu jeder Betriebsspezifikation der beiden Schaltungen.

Im Gegensatz zum funktionalen Test sollen die Betriebseigenschaften nicht unter den jeweils kritischsten Betriebsbedingungen sondern unter nominellen Betriebsbedingungen, z. B. bei Raum-

Leerlaufverstärkung	A_0	\geq	65 dB
Amplitudenreserve	GM	\geq	25 dB
Transitfrequenz	f_t	\geq	12 MHz
3dB-Eckfrequenz	f_{3dB}	\geq	2,1 kHz
Phasenrand	Φ_M	\geq	75 °
Flankensteilheit steigend	SR _r	\geq	8,5 $\frac{V}{\mu s}$
Betriebsspannungsdurchgriff	PSRR	\geq	80 dB
Leistung	power	\leq	2 mW

Tabelle 3.2: Betriebsspezifikationen des *Folded-cascode* Operationsverstärkers (F-OP).

temperatur statt bei den kritischen $+80^\circ\text{C}$, gemessen und ausgewertet werden. Weil die Betriebs-eigenschaften normalerweise nichtlinear bezüglich der Betriebsparameter sind, ist der Test dann nicht aussagekräftig. Die Folge sind deutlich mehr Fehlentscheidungen. Da aber zum Test einer Schaltung nicht nur eine Betriebsspezifikation überprüft wird, stehen auch Messergebnisse zu anderen Betriebsspezifikationen zur Auswertung zur Verfügung. Für den impliziten funktionalen Test der beide Schaltungen wird deshalb in dieser Arbeit beispielhaft die folgende, nahe liegende Teststrategie verfolgt. Es werden zwar die Betriebseigenschaften gemessen, jedoch nicht unter den jeweils kritischsten Betriebsbedingungen sondern für den Test aller Betriebsspezifikationen gleich bei nominalen Betriebsbedingungen. Um dennoch einen aussagekräftigen Test zu erhalten, werden zum Test jeder Betriebsspezifikation jeweils alle zur Verfügung stehenden Messwerte der Schaltung ausgewertet.¹ Die Betriebseigenschaften unter nominalen Betriebsbedingungen werden als Testbeobachtungen verwendet. So ergeben sich für den Miller Operationsverstärker $n_o = 7$ und für den *Folded-cascode* Operationsverstärker $n_o = 8$ Testbeobachtungen. Für die Testbeobachtungen des Miller Operationsverstärkers werden die Betriebsbedingungen $V_{dd} = 5,0\text{V}$, $I_{bias} = 10\mu\text{A}$ und $C_{load} = 20\text{pF}$ gewählt und für den *Folded-cascode* Operationsverstärker $V_{dd} = 5,0\text{V}$, $I_{bias} = 10\mu\text{A}$, $C_{load} = 3,5\text{pF}$ und $T = +27^\circ\text{C}$.

Mit der hier vorgestellten Teststrategie soll gezeigt werden, dass der Schritt vom expliziten funktionalen Test zum impliziten funktionalen Test nicht groß sein muss. Im Vergleich zum expliziten funktionalen Test werden gleich viele Messungen durchgeführt. Jedoch wird durch das Verwenden einheitlicher Betriebsbedingungen der Testaufbau vereinfacht, und damit der Zeitbedarf zu dessen Entwurf. Außerdem sind während des Tests für die zu testende Schaltung nur ein einziges Mal die Betriebsbedingungen einzustellen, wodurch die Testdauer reduziert werden kann.

Selbstverständlich beschränkt sich der implizite funktionale Test bei der Wahl der Testbeobachtungen nicht auf die spezifizierten Betriebseigenschaften unter normalen Betriebsbedingungen. In [GPG01] wird zum Beispiel das Spektrum des Versorgungsstromes der Schaltung zum impliziten funktionalen Test ausgewertet und in [PGG00] die Verwendung von Fourierkoeffizienten eines Ausgangssignals als Testbeobachtungen mit Waveletkoeffizienten verglichen.

Für die unvermeidbaren zufälligen Messfehler ϵ_o der messfehlerbehafteten Testbeobachtungen \tilde{o} aus Gleichung (2.37) kann davon ausgegangen werden, dass sie stochastisch voneinander unabhängig sind. Die Kovarianzmatrix C_o ist damit eine Diagonalmatrix. Der Messfehler ist von dem Messgerät abhängig, das beim Test verwendet wird. Die Hersteller der Messgeräte geben meist eine Garantiefehlergrenze an, die üblicherweise vom eingestellten Messbereich abhängig ist [Sch92]. So gibt z. B. Teradyne für die Strommessung im Messbereich bis $200\mu\text{A}$ ihres J750 Testautomaten einen maximalen Fehler von 0,5% an. In dieser Arbeit wurde deshalb für jede Test-

¹Diese Teststrategie ähnelt der in [BD89]. Dort werden Test eingespart, indem aus den Messwerten anderer durchgeführter Test die Messwerte der eingesparten Tests per Regression geschätzt werden.

beobachtung genau ein Messbereich ermittelt. Dabei wurde jeder Messbereich so groß gewählt, dass er die Messwerte der jeweiligen Testbeobachtung für die Testentwürfe zu allen Betriebsspezifikationen aufnehmen kann. Die Streuung des zufälligen Messfehlers wurde dann mit 1% vom Messbereich relativ groß angenommen. Unsichere Messergebnisse stellen für den Testentwurf eine größere Herausforderung dar und es ist mit einer schlechteren Bewertung der Testentwürfe zu rechnen. Die Quadrate dieser Streuungen bilden die Hauptdiagonale der Kovarianzmatrix C_o aus Gleichung (2.37).

Zur Simulation der Schaltungen wurde der Infineon interne, analoge Schaltungssimulator TITAN [FWZ⁺92] verwendet. Die bei den Verfahren entstehenden Simulationsaufträge wurden an das Schaltungssyntheseprogramm WICKED [AEG⁺00] übergeben, das die Simulationen auf mehreren Rechnern verteilt durchführt und die Simulationsergebnisse automatisch sammelt und auswertet. Der überwiegende Teil der Berechnungen wurde mit dem numerischen Mathematikprogramm GNU octave durchgeführt. Teilweise sind die Verfahren bereits in C⁺⁺ implementiert und in WICKED integriert.

3.2 Monte-Carlo-Validierverfahren

Zum Validieren der in den weiteren Kapiteln vorgestellten Verfahren wird hier ein stochastisches Quadraturverfahren zum Abschätzen der Zielgrößen vorgestellt. Bei stochastischen Quadraturverfahren wird das abzuschätzende Integral durch ein Zufallsproblem mit derselben Lösung ersetzt, welches dann in einem Zufallsexperiment mit Monte-Carlo-Verfahren gelöst wird.

3.2.1 Abschätzen der Zielgrößen

Im weiteren wird eine einzelne Betriebs- bzw. Testspezifikation betrachtet. Die Integrale nach s der Zielgrößen Ausbeuteeinbuße und Fehlerdurchlässigkeit

$$P_{\widetilde{\mathcal{RG}}} = P(\widetilde{\mathcal{RG}}) = \int_{\mathcal{G}} \text{pdf}^N(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0, \mathbf{C}_s) P_{\mathbf{s}}^r(t, t_B, C_t) \partial \mathbf{s}, \quad (3.1)$$

$$P_{\widetilde{\mathcal{AF}}} = P(\widetilde{\mathcal{AF}}) = \int_{\mathcal{F}} \text{pdf}^N(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0, \mathbf{C}_s) P_{\mathbf{s}}^a(t, t_B, C_t) \partial \mathbf{s} \quad (3.2)$$

aus den Gleichungen (2.59) und (2.60) sollen mit Monte-Carlo-Verfahren abgeschätzt werden. Sind $\mathbf{s}^{(1)}, \dots, \mathbf{s}^{(N)}$ zufällige Stichprobenelemente der normalverteilten statistischen Parametersätze $\mathbf{s} \sim N(\mathbf{s}_0, \mathbf{C}_s)$, dann können die Zielfunktionen mit

$$\ddot{P}_{\widetilde{\mathcal{RG}}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{s}^{(i)} \in \mathcal{G}) P_{\mathbf{s}^{(i)}}^r(t, t_B, C_t), \quad (3.3)$$

$$\ddot{P}_{\widetilde{\mathcal{AF}}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{s}^{(i)} \in \mathcal{F}) P_{\mathbf{s}^{(i)}}^a(t, t_B, C_t) \quad (3.4)$$

abgeschätzt werden [Fis99]. Durch Generieren einer normalverteilten Stichprobe wird der Herstellungsprozess nachgebildet. Die Wahrscheinlichkeit mit der ein bestimmtes Ereignis eintritt, z. B. das der abgelehnten, funktionierenden Schaltungen, kann dann durch den Anteil aller Stichprobenelemente abgeschätzt werden, die zum Eintritt dieses Ereignisses führen. Mit der δ -Funktion

$$\delta(a) = \begin{cases} 1, & \text{falls } a \iff \text{wahr} \\ 0, & \text{falls } a \iff \text{falsch} \end{cases} \quad (3.5)$$

wird gemäß der Betriebsspezifikation jedes Stichprobenelement $s^{(i)}$, $i = 1, \dots, N$ einer der beiden Zielgrößen zugeordnet, je nachdem ob es sich um eine funktionierende $s^{(i)} \in \mathcal{G}$ oder eine fehlerhafte Schaltung $s^{(i)} \in \mathcal{F}$ handelt. Dazu wird die Betriebseigenschaft $f(s, \theta_W)$, mit θ_W aus Gleichung (2.71), unter den kritischsten Betriebsbedingungen simuliert und mit der Betriebsspezifikation ausgewertet. Auf Abbildung 2.1 bezogen, bilden die Stichprobenelemente $s^{(1)}, \dots, s^{(N)}$ eine Punktwolke im Raum der statistischen Parameter s und die δ -Funktion dient dazu, entweder die hellen oder die dunklen Punkte auszuwählen.

Die Annahme- und die Ablehnungswahrscheinlichkeit P_s^a und P_s^r werden, wie in Kapitel 2.3.4 beschrieben, analytisch berechnet. Hierzu werden zunächst die Testbeobachtungen o simuliert, dann die Testeigenschaft t berechnet und abschließend P_s^a oder P_s^r für die betrachtete Testspezifikation ausgewertet.

3.2.2 Effizienzsteigerung

Wie in Kapitel 2.4 beschrieben, werden Quadraturverfahren allgemein mit der Genauigkeit der Abschätzung und dem Aufwand diese Genauigkeit zu erreichen verglichen. Um die Genauigkeit der Abschätzung um eine Dezimalstelle, also z. B. von 5% auf 0,5%, zu erhöhen muss bei der Konvergenzrate der stochastischen Quadraturverfahren $N^{-\frac{1}{2}}$ die Mächtigkeit N der Stichprobe im günstigsten Fall um den Faktor 100 erhöht werden. Um den unvermeidbar hohen Simulationsaufwand zu vermeiden, können durch Effizienz steigernde Verfahren praktisch bessere Konvergenzraten erzielt werden. Stochastische Quadraturverfahren werden deshalb untereinander hauptsächlich über die Varianz der Schätzung, hier $\text{var}(P_{\mathcal{RG}})$ und $\text{var}(P_{\mathcal{AF}})$, verglichen [Hab70, Fis99]. Effizienz steigernde Verfahren ermöglichen mit geringerem Aufwand eine Schätzung mit kleinerer Varianz zu erreichen [ZS95].

Mit der oben beschriebenen normalverteilten Stichprobe $N(s_0, C_s)$ wird der Herstellungsprozess nachgebildet. Da der Toleranzentwurf das Ziel einer möglichst hohen Ausbeute Y hat, wird die Stichprobe viele funktionierende und eher wenig fehlerhafte Schaltungen enthalten. Die Grenzparametersätze der Betriebsspezifikation werden deshalb einen größeren Abstand vom Nominalparametersatz und damit eine relativ kleine Dichte haben (vgl. Abbildung 2.1). Die Auftretswahrscheinlichkeit von Stichprobenelementen in den für den Testentwurf interessanten Gebieten \mathcal{RG} und \mathcal{AF} der Zielgrößen ist folglich gering. Es können also nur wenige Stichprobenelemente zum Abschätzen der Zielgrößen verwendet werden. Eine Möglichkeit die Effizienz der Abschätzung zu erhöhen, ist vermehrt Stichprobenelemente in das interessante Gebiet der Fehlentscheidungen zu verlegen. Zu diesem Zweck dienen *Importance Sampling* Verfahren.

Der Worst-Case-Parametersatz s_W ist ein Parametersatz, der im interessanten Gebiet liegt. Da er durch die höchste Dichte aller Grenzparametersätze ausgezeichnet ist, liegt er zentral im interessanten Gebiet. Um mehr Stichprobenelemente im Gebiet der Fehlentscheidungen zu erhalten, kann die oben beschriebene Stichprobe in zwei normalverteilte Stichproben mit den Erwartungswerten s_0 und s_W : $N(s_0, C_s)$ und $N(s_W, C_s)$ aufgeteilt werden [LGA99, Lin96, Lin97]. Mit den Mächtigkeiten N_0 und N_W der beiden Stichproben ergibt sich die zur Validierung verwendete Dichte

$$\text{pdf}^V(s, N_0, s_0, N_W, s_W, C_s) = \frac{N_0}{N_0 + N_W} \text{pdf}^N(s, s_0, C_s) + \frac{N_W}{N_0 + N_W} \text{pdf}^N(s, s_W, C_s) \quad (3.6)$$

aus der Überlagerung der beiden Dichten $\text{pdf}^N(s, s_0, C_s)$ und $\text{pdf}^N(s, s_W, C_s)$. Sie werden mit dem jeweiligen Anteil der Stichprobenelemente gewichtet.

Die Dichte pdf^V weicht für $N_W > 0$ von der für den Herstellungsprozess angenommenen Dichte $\text{pdf}^N(s, s_0, C_s)$ ab. Zum rechnerischen Ausgleich wird jedes Stichprobenelement mit einer

sog. *Importance Sampling* Funktion

$$\phi(\mathbf{s}, N_0, \mathbf{s}_0, N_W, \mathbf{s}_W, \mathbf{C}_s) = \frac{\text{pdf}^N(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0, \mathbf{C}_s)}{\text{pdf}^V(\mathbf{s}, N_0, \mathbf{s}_0, N_W, \mathbf{s}_W, \mathbf{C}_s)} \quad (3.7)$$

gewichtet [Fis99]:

$$\ddot{P}_{\widetilde{\mathcal{RG}}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{s}^{(i)} \in \mathcal{G}) \phi(\mathbf{s}^{(i)}, N_0, \mathbf{s}_0, N_W, \mathbf{s}_W, \mathbf{C}_s) P_{\mathbf{s}^{(i)}}^r(t, t_B, C_t), \quad (3.8)$$

$$\ddot{P}_{\widetilde{\mathcal{AF}}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{s}^{(i)} \in \mathcal{F}) \phi(\mathbf{s}^{(i)}, N_0, \mathbf{s}_0, N_W, \mathbf{s}_W, \mathbf{C}_s) P_{\mathbf{s}^{(i)}}^a(t, t_B, C_t). \quad (3.9)$$

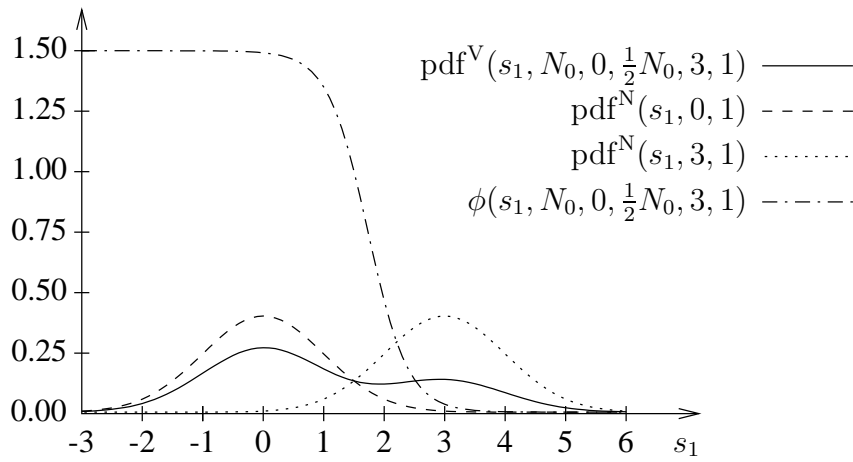


Abbildung 3.3: *Importance Sampling* Verteilung und *Importance Sampling* Funktion für $N_W = \frac{1}{2} N_0$ und $\beta_W = 3$.

Zur Analyse der *Importance Sampling* Funktion wird auf das in Kapitel 2.5.2 eingeführte standardisierte und gedrehte Koordinatensystem zurückgegriffen. Durch Ausnutzen der Separierbarkeit der multivariaten Dichte in Produkte univariater Dichten vereinfacht sich Gleichung (3.7) zu:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{s}, N_0, \mathbf{0}, N_W, \beta_W \mathbf{e}_1, \mathbf{I}) &= \frac{(N_0 + N_W) \text{pdf}^N(\mathbf{s}, \mathbf{0}, \mathbf{I})}{N_0 \text{pdf}^N(\mathbf{s}, \mathbf{0}, \mathbf{I}) + N_W \text{pdf}^N(\mathbf{s}, \beta_W \mathbf{e}_1, \mathbf{I})} \\ &= \frac{(N_0 + N_W) \prod_{i=1}^{n_s} \text{pdf}^N(s_i, 0, 1)}{N_0 \prod_{i=1}^{n_s} \text{pdf}^N(s_i, 0, 1) + N_W \text{pdf}^N(s_1, \beta_W, 1) \prod_{i=2}^{n_s} \text{pdf}^N(s_i, 0, 1)} \\ &= \frac{1 + \frac{N_W}{N_0}}{1 + \frac{N_W}{N_0} \frac{\text{pdf}^N(s_1, \beta_W, 1)}{\text{pdf}^N(s_1, 0, 1)}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Der Quotient der Wahrscheinlichkeitsdichten im Nenner

$$\frac{\text{pdf}^N(s_1, \beta_W, 1)}{\text{pdf}^N(s_1, 0, 1)} = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(s_1 - \beta_W)^2\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2}s_1^2\right)} = \exp\left(-\frac{1}{2}\beta_W^2\right) \exp(\beta_W s_1) \quad (3.11)$$

ist eine Exponentialfunktion in s_1 mit konstantem Vorfaktor. Die Dichte der Gesamtverteilung wird folglich ausschließlich in der Koordinate s_1 verändert, die die Gerade durch s_0 und s_W beschreibt. Der Wertebereich der *Importance Sampling* Funktion ϕ ist auf das Intervall $[0, 1 + \frac{N_W}{N_0}]$ beschränkt. Einzelne Stichprobenelemente werden deshalb maximal mit dem Faktor $1 + \frac{N_W}{N_0}$ gewichtet. In Abbildung 3.3 sind beispielhaft für ein Verhältnis der Stichprobenmchtigkeiten von $\frac{N_W}{N_0} = \frac{1}{2}$ und einem Worst-Case-Abstand von $\beta_W = 3$ neben der zur Validierung verwendeten Dichte pdf^V auch die zu Grunde liegenden normalverteilten Dichten sowie die zugehörige *Importance Sampling* Funktion dargestellt.

3.2.3 Bewerten des Simulationsaufwands

Der Simulationsaufwand der vorgestellten Testentwurfsverfahren wird mit der Anzahl der durchzuführenden Simulationen bewertet. Das Bestimmen der Betriebseigenschaft $f(s, \theta_W)$ und der Testbeobachtungen $o(s)$ zu einem statistischen Parametersatz s wird dabei als eine Simulation gewertet, selbst dann, wenn im Verfahren z. B. nur die Betriebseigenschaft f benötigt wird. Eine Simulation kann dabei sowohl DC, AC als auch transiente Schaltungseigenschaften umfassen. Simulationen von Betriebseigenschaften f mit voneinander abweichenden Betriebsparametersätzen θ zählen extra.

Kapitel 4

Testentwurf mit linearisierter Betriebs- und Testeigenschaft

Der Worst-Case-Abstand ist ein Robustheitsmaß, mit dem beim Toleranzentwurf die zu maximierende Produktionsausbeute simulationseffizient abgeschätzt werden kann [AGW94, Grä93, Wie94, SGA99, AEG⁺00, SPZ⁺01]. Die Basis für die Ausbeuteschätzung ist die Bestimmung des Worst-Case-Parametersatzes s_W durch eine simulationsbasierte Optimierung, wobei die Berücksichtigung der meist schwachen Nichtlinearität der betrachteten Betriebseigenschaft f unerlässlich ist. Mit den Verfahren aus [AGW94, Grä93, Wie94, SGA99, AEG⁺00, SPZ⁺01] kann der Worst-Case-Parametersatz präzise bestimmt werden. Mit Hilfe des Worst-Case-Parametersatzes s_W kann die Ausbeute anschließend durch Linearisieren der Betriebseigenschaft f in s_W mit für den Toleranzentwurf ausreichender Genauigkeit abgeschätzt werden. Der Worst-Case-Abstand β_W und die Ausbeuteschätzung Y können dabei ohne weiteren Simulationsaufwand rein rechnerisch bestimmt werden.

Die Linearisierung der Betriebseigenschaft f vereinfacht die Ausbeuteschätzung stark, da die leicht gekrümmte Fläche der Grenzparametersätze \mathcal{S} im Raum der statistischen Parameter \mathbb{R}^{n_s} durch eine wegen des Linearisierungspunktes ausgezeichnete Ebene angenähert wird. Da der Linearisierungspunkt s_W die höchste Dichte aller Grenzparametersätze \mathcal{S} hat, ist die Linearisierung im Bereich hoher Dichte genau. Mit größer werdendem Abstand vom Linearisierungspunkt nimmt der Linearisierungsfehler zu. Da jedoch mit zunehmendem Abstand vom Linearisierungspunkt die Dichte abnimmt, geht der Linearisierungsfehler in immer geringerem Maß in die Ausbeute ein. Die Linearisierung kann alleine durch Kenntnis des Worst-Case-Parametersatzes berechnet werden.

Die in diesem Kapitel vorgestellten Verfahren zum Testentwurf bauen auf dieser Linearisierung der Betriebseigenschaft f in s_W auf. Die für den Testentwurf zusätzlich benötigten Testbeobachtungen o werden ebenfalls im Worst-Case-Parametersatz s_W linearisiert. Die Testbeobachtungen werden dann so linear kombiniert, dass im linearen Modell das Gebiet der angenommenen Schaltungen mit dem der funktionierenden Schaltungen bzw. das Gebiet der aussortierten Schaltungen mit dem der fehlerhaften Schaltungen in Deckung gebracht wird. Dieser Ansatz führt zu einer stark vereinfachten Formulierung der Zielgrößen Ausbeuteeinbuße und Fehlerdurchlässigkeit und zu einem Verfahren mit dem geringsten Simulationsaufwand aller in der Arbeit vorgestellten Verfahren. Darüber hinaus wird das Visualisieren von grundlegenden Zusammenhängen beim Testentwurf ermöglicht, wie z. B. dem zwischen den konkurrierenden Zielgrößen Ausbeuteeinbuße und Fehlerdurchlässigkeit.

Die Aufgabe, die Testspezifikation zu entwerfen, wird zur Vereinfachung in zwei Schritte zerlegt. Zuerst werden die Testentwurfparameter x und t_B im linearen Modell so bestimmt, dass das Gebiet der angenommenen Schaltungen mit dem der funktionierenden Schaltungen überein-

stimmt. Anschließend wird die Testspezifikation kostenoptimal bezüglich t_B justiert, wobei der Messfehler ϵ_t berücksichtigt wird.

Im weiteren werden zunächst die Gleichungen zur Bestimmung der Testentwurfsparameter \mathbf{x} und t_B im ersten Schritt hergeleitet. Daraufhin wird die Bewertung des Testentwurfs unter Berücksichtigung des Messfehlers formuliert. Die zur Bewertung hergeleiteten Zielgrößen werden anschließend zum kostenoptimalen Justieren erweitert. Es folgt die Darstellung grundlegender Zusammenhänge beim Testentwurf. Zur Demonstration der Testentwurfsverfahren an den Beispielschaltungen wird zunächst die Vorgehensweise zur Berechnung der Testspezifikation bzw. zur Bewertung des Testentwurfs beschrieben bevor Ergebnisse präsentiert werden. Den Schluss bildet eine Untersuchung und Visualisierung des systematischen Fehlers von Fehlentscheidungen.

4.1 Entwerfen einer Testspezifikation

Zum Entwurf der Testspezifikation werden die Betriebseigenschaft f und die messfehlerlosen Testbeobachtungen \mathbf{o} linearisiert. Darauf aufbauend werden die Testentwurfsparameter \mathbf{x} und t_B bestimmt.

4.1.1 Linearisieren der Betriebseigenschaft

Die Linearisierung der Betriebseigenschaft f nach den statistischen Parameter \mathbf{s} im Worst-Case-Parametersatz \mathbf{s}_W ist:

$$\bar{f}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\theta}_W) = f_B + f_s^T (\mathbf{s} - \mathbf{s}_W). \quad (4.1)$$

Dabei wurde berücksichtigt, dass der Worst-Case-Parametersatz ein Grenzparametersatz $\mathbf{s}_W \in \mathcal{S}$ nach Gleichung (2.25) ist und deshalb die Betriebseigenschaft f im Linearisierungspunkt \mathbf{s}_W gleich dem Spezifikationswert ist: $f(\mathbf{s}_W, \boldsymbol{\theta}_W) = f_B$. f_s bezeichnet den Gradienten der Betriebseigenschaft f nach \mathbf{s} in \mathbf{s}_W unter den ungünstigsten Betriebsbedingungen $\boldsymbol{\theta}_W$:

$$f_s = \nabla_{\mathbf{s}} f(\mathbf{s}_W, \boldsymbol{\theta}_W), \quad f_s \in \mathbb{R}^{n_s}. \quad (4.2)$$

Die mit den statistischen Parametern \mathbf{s} modellierten Schwankungen des Herstellungsprozesses wirken sich auf die linearisierte Betriebseigenschaft \bar{f} aus. Wegen der in Gleichung (2.1) angenommenen Normalverteilung der statistischen Parameter \mathbf{s} und des linearen Zusammenhangs zwischen \mathbf{s} und \bar{f} in Gleichung (4.1) ist \bar{f} ebenfalls normalverteilt: $\bar{f} \sim N_1(\bar{f}(\mathbf{s}_0, \boldsymbol{\theta}_W), \sigma_{\bar{f}}^2)$. Für den Erwartungswert und die Varianz von $\bar{f}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\theta}_W)$ gilt dabei mit den Rechenregeln aus Gleichung (A.3) auf Seite 101:

$$E(\bar{f}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\theta}_W)) = f_B + f_s^T (E(\mathbf{s}) - \mathbf{s}_W) = \bar{f}(\mathbf{s}_0, \boldsymbol{\theta}_W), \quad (4.3)$$

$$\text{cov}(\bar{f}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\theta}_W)) = f_s^T \mathbf{C}_s f_s = \sigma_{\bar{f}}^2. \quad (4.4)$$

4.1.2 Linearisieren der Testbeobachtungen

Die Testbeobachtungen \mathbf{o} werden ebenfalls nach \mathbf{s} in \mathbf{s}_W linearisiert:

$$\bar{\mathbf{o}}(\mathbf{s}) = \mathbf{o}_W + \mathbf{o}_s^T (\mathbf{s} - \mathbf{s}_W). \quad (4.5)$$

\mathbf{o}_W bezeichnet dabei den Wert der Testbeobachtungen \mathbf{o} in \mathbf{s}_W :

$$\mathbf{o}_W = \mathbf{o}(\mathbf{s}_W), \quad \mathbf{o}_W \in \mathbb{R}^{n_o} \quad (4.6)$$

und \mathbf{o}_s die Jakobi-Matrix von \mathbf{o} nach \mathbf{s} in \mathbf{s}_W :

$$\mathbf{o}_s = \mathfrak{J}_s \mathbf{o}(\mathbf{s}_W), \quad \mathbf{o}_s \in \mathbb{R}^{n_s \times n_o}. \quad (4.7)$$

Mit den linearisierten Testbeobachtungen $\bar{\mathbf{o}}$ aus Gleichung (4.5) folgt für die Testeigenschaft t nach Gleichung (2.10):

$$t(\bar{\mathbf{o}}(\mathbf{s}), \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \bar{\mathbf{o}}(\mathbf{s}) = \mathbf{x}^T \mathbf{o}_W + (\mathbf{o}_s \mathbf{x})^T (\mathbf{s} - \mathbf{s}_W). \quad (4.8)$$

$t(\bar{\mathbf{o}}(\mathbf{s}), \mathbf{x})$ ist demnach linear in den statistischen Parametern \mathbf{s} und wird kurz als *linearisierte Testeigenschaft* bezeichnet.

4.1.3 Bestimmen der Testentwurfparameter

Unter Vernachlässigung des Messfehlers ist im linearisierten Modell der Betriebseigenschaft f und der Testeigenschaft t der in Kapitel 2.1 beschriebene ideale Test möglich. Dazu muss das Gebiet der angenommenen Schaltungen mit dem der funktionierenden Schaltungen bzw. das Gebiet der aussortierten Schaltungen mit dem der fehlerhaften Schaltungen in Deckung gebracht werden.

Das Ersetzen der Betriebseigenschaft f und der Testbeobachtungen \mathbf{o} durch deren Linearisierungen in der den idealen Test beschreibenden Gleichung (2.15):

$$\bar{f}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\theta}_W) \leq f_B \stackrel{!}{\iff} t(\bar{\mathbf{o}}(\mathbf{s}), \mathbf{x}) \leq t_B, \quad \text{für alle } \mathbf{s} \quad (4.9)$$

und das Einsetzen der Gleichungen (4.1) und (4.8) ergibt:

$$f_s^T (\mathbf{s} - \mathbf{s}_W) \leq 0 \stackrel{!}{\iff} (\mathbf{o}_s \mathbf{x})^T (\mathbf{s} - \mathbf{s}_W) + \mathbf{x}^T \mathbf{o}_W - t_B \leq 0, \quad \text{für alle } \mathbf{s}. \quad (4.10)$$

Multipliziert man die beiden Ausdrücke einer Ungleichung mit einem beliebigen positiven Faktor $\alpha \in \mathbb{R}^+$, so erhält man eine äquivalente Ungleichung [BS91, Verträglichkeitssatz]. Es gilt deshalb auch:

$$\alpha f_s^T (\mathbf{s} - \mathbf{s}_W) \leq \alpha 0 \stackrel{!}{\iff} (\mathbf{o}_s \mathbf{x})^T (\mathbf{s} - \mathbf{s}_W) + \mathbf{x}^T \mathbf{o}_W - t_B \leq 0, \quad \text{für alle } \mathbf{s}. \quad (4.11)$$

α kann so gewählt werden, dass die Terme der beiden Ungleichungen für alle \mathbf{s} gleich sind. Es folgt:

$$\alpha f_s^T (\mathbf{s} - \mathbf{s}_W) = (\mathbf{o}_s \mathbf{x})^T (\mathbf{s} - \mathbf{s}_W) + \mathbf{x}^T \mathbf{o}_W - t_B. \quad (4.12)$$

Die Bestimmungsgleichungen für die gesuchten Testentwurfparameter \mathbf{x} und t_B der Testspezifikation aus Gleichung (2.11) ergeben sich dann durch einen Koeffizientenvergleich der in $(\mathbf{s} - \mathbf{s}_W)$ linearen Terme:

$$\mathbf{o}_s \mathbf{x} = \alpha f_s, \quad (4.13)$$

$$t_B = \mathbf{x}^T \mathbf{o}_W. \quad (4.14)$$

Erfüllen \mathbf{x} und t_B die Gleichungen (4.13) und (4.14), dann sind im linearisierten Modell die Gebiete der angenommenen Schaltungen \mathcal{A} und der funktionierenden Schaltungen \mathcal{G} im Raum der statistischen Parameter \mathbb{R}^{n_s} identisch: $\mathcal{A} = \mathcal{G}$ und damit auch die Gebiete der aussortierten \mathcal{R} und der fehlerhaften Schaltungen \mathcal{F} : $\mathcal{R} = \mathcal{F}$. Verbleibt beim Lösen von Gleichung (4.13) dagegen ein Residuum

$$\mathbf{r} = \alpha f_s - \mathbf{o}_s \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad (4.15)$$

weichen die Gebiete voneinander ab, d.h. Fehlentscheidungen sind mit einer höheren Wahrscheinlichkeit zu erwarten.

Der Einfluss des Faktors α sowie des Messfehlers auf die Zielgrößen Ausbeuteeinbuße und Fehlerdurchlässigkeit wird später in Kapitel 4.2.2 betrachtet. Der Messfehler geht dabei über die Varianz $C_t = \mathbf{x}^T \mathbf{C}_o \mathbf{x}$ nach Gleichung (2.39) in die Zielgrößen ein.

4.2 Bewerten eines Testentwurfs

Die Bewertung des Testentwurfs erfolgt durch die in Kapitel 2 eingeführten Zielgrößen Ausbeuteeinbuße und Fehlerdurchlässigkeit. Sie basiert in diesem Kapitel auf der linearisierten Betriebseigenschaft \bar{f} und der linearisierten Testeigenschaft $t(\bar{o}, \mathbf{x})$, d. h. unter Vernachlässigung des systematischen Fehlers. Die durch Messfehler verursachten zufälligen Fehler sollen jedoch berücksichtigt werden.

Diese Annahmen werden gemacht, da zum Erfassen des systematischen Fehlers die nichtlinearen Funktionsverläufe der Betriebs- und der Testeigenschaft ausgewertet werden müssten. Durch Vernachlässigen des systematischen Fehlers kann auf den dazu benötigten Simulationsaufwand verzichtet werden. Die Berücksichtigung des durch den Messfehler verursachten zufälligen Fehlers ist dagegen rein rechnerisch möglich.

Für die weitere Darstellung wird für die statistischen Parameter \mathbf{s} von dem in Kapitel 2.5.2 beschriebenen standardisierten und rotierten Koordinatensystem ausgegangen, indem nach Gleichung (2.81) $\mathbf{s}_W = \beta_W \mathbf{e}_1$ gilt. Des Weiteren wird vorausgesetzt, dass das Gleichungssystem (4.13) ohne Residuum

$$\mathbf{r} = \alpha \mathbf{f}_s - \mathbf{o}_s \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (4.16)$$

gelöst werden kann, d. h. \mathbf{f}_s liegt im Bildbereich der Jakobi-Matrix \mathbf{o}_s : $\mathbf{f}_s \in \text{bild}(\mathbf{o}_s)$. Diese Annahme ermöglicht im Verlauf der Herleitung die Integrale der Zielgrößen nach \mathbf{s} auf eindimensionale Integrale zu reduzieren. Auf den Fall $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ wird am Ende dieses Abschnittes kurz eingegangen.

$\mathbf{f}_s \in \text{bild}(\mathbf{o}_s)$ beschreibt die Anforderung an die Wahl der Testbeobachtungen um Gleichung (4.16) zu erfüllen. Da beim Entwurf einer Testspezifikation ausschließlich der eine Vektor \mathbf{f}_s durch \mathbf{o}_s gemäß Gleichung (4.13) nachgebildet werden soll, wird im günstigsten Fall dazu nur eine Testbeobachtung benötigt: $n_o \geq 1$.¹ Die Forderung, dass $\text{bild}(\mathbf{o}_s)$ den gesamten Raum der statistischen Parameter \mathbb{R}^{n_s} aufspannt, würde dagegen eine wesentlich härtere Anforderung an die Wahl und die Anzahl $n_o \geq n_s$ der Testbeobachtungen stellen.

Im Folgenden werden die messfehlerbehafteten Zielgrößen wie in Kapitel 2.3 jedoch unter Berücksichtigung der Linearisierungen, der Wahl des Koordinatensystems und dem verschwindenden Residuum hergeleitet.

4.2.1 Ereignisse

Die Mengen der funktionierenden, fehlerhaften, angenommenen und aussortierten Schaltungen $\tilde{\mathcal{G}}$, $\tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{\mathcal{A}}$ und $\tilde{\mathcal{R}}$ werden in Anlehnung an Kapitel 2.3.3 formuliert.

In $\tilde{\mathcal{G}}$ und $\tilde{\mathcal{F}}$ geht die linearisierte Betriebseigenschaft \bar{f} aus Gleichung (4.1) ein. Es wird zunächst gezeigt, dass der Gradient \mathbf{f}_s der Betriebseigenschaft f in \mathbf{s}_W im angenommenen Koordinatensystem durch

$$\mathbf{f}_s = \sigma_{\bar{f}} \mathbf{e}_1 \quad (4.17)$$

darstellbar ist. Mit der Lagrange-Funktion von Gleichung (2.74) lässt sich zeigen, dass der Gradient \mathbf{f}_s kollinear mit dem Vektor \mathbf{s}_W ist. Die notwendige Bedingung aus Gleichung (2.75) für ein Minimum der Lagrange-Funktion ist im Worst-Case-Parametersatz \mathbf{s}_W , der Lösung des Optimierungsproblems aus Gleichung (2.73), erfüllt. Mit dem Gradienten der linearisierten Betriebseigenschaft im Lösungspunkt \mathbf{s}_W : \mathbf{f}_s aus Gleichung (4.2) folgt:

$$\nabla_{\mathbf{s}} \mathcal{L}(\mathbf{s}_W, \lambda) = \mathbf{s}_W - \lambda \mathbf{f}_s \stackrel{!}{=} \mathbf{0}. \quad (4.18)$$

¹Dieser günstigste Fall: $n_o = 1$ trifft für den expliziten funktionalen Test wegen $t = o = f$ zu.

f_s und $s_W = \beta_W \mathbf{e}_1$ sind deshalb kollinear. Für die Norm des Gradienten f_s : $\|f_s\|_2 = \sqrt{f_s^T f_s}$ folgt wegen der Standardisierung aus Gleichung (4.4): $\|f_s\|_2 = \sigma_{\bar{f}}$. Das noch zu bestimmende Vorzeichen ergibt sich aus einer Überlegung. Wird die Spezifikation aus Gleichung (2.4) durch Vergrößern des Spezifikationswertes f_B gelockert, dann wird der Worst-Case-Abstand β_W nach Gleichung (2.70) größer und $f(s_W, \theta_W)$ nimmt zu. Der Gradient f_s , der die Richtung des stärksten Anstiegs von f angibt, ist folglich wie \mathbf{e}_1 orientiert, d. h. in der Richtung, in der der Worst-Case-Abstand β_W zunimmt. Wie in Abbildung 4.1 dargestellt ist, sind also für $\beta_W > 0$ f_s und s_W

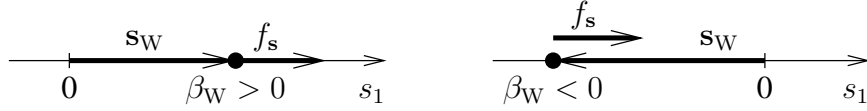


Abbildung 4.1: Orientierung des Gradienten der Betriebseigenschaft f_s und des Vektors des Worst-Case-Parametersatzes s_W im standardisierten und rotierten Koordinatensystem.

gleichermaßen und für $\beta_W < 0$ entgegengesetzt orientiert. \square

Das Einsetzen von f_s aus Gleichung (4.17) und s_W aus (2.81) in die linearisierte Betriebseigenschaft $\bar{f}(s, \theta_W)$ aus Gleichung (4.1):

$$\bar{f}(s, \theta_W) = f_B + \sigma_{\bar{f}} (\mathbf{e}_1^T \mathbf{s} - \beta_W) \quad (4.19)$$

zeigt, dass \bar{f} ausschließlich von der Koordinate $s_1 = \mathbf{e}_1^T \mathbf{s}$ des Vektors \mathbf{s} abhängig ist. Die Linearisierung ermöglicht damit, die Betriebsspezifikation $\bar{f}(s, \theta_W) \leq f_B$ im Raum der statistischen Parameter \mathbb{R}^{n_s} zu formulieren:

$$s_1 \leq \beta_W. \quad (4.20)$$

Mit (4.20) gilt für die Mengen \mathcal{G} der funktionierenden und \mathcal{F} der fehlerhaften Schaltungen aus den Gleichungen (2.18) und (2.20)

$$\mathcal{G} = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n_s} \mid s_1 \leq \beta_W\}, \quad \mathcal{F} = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n_s} \mid s_1 > \beta_W\}. \quad (4.21)$$

Die Menge der Grenzparametersätze aus Gleichung (2.72) wird mit (4.19) zur Ebene:

$$\mathcal{S}_\theta = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n_s} \mid s_1 = \beta_W\}. \quad (4.22)$$

Die um die Messfehlergröße erweiterten Mengen $\tilde{\mathcal{G}}$ und $\tilde{\mathcal{F}}$ wurden in Gleichung (2.46) abhängig von \mathcal{G} bzw. \mathcal{F} definiert; (2.46) gilt deshalb mit \mathcal{G} und \mathcal{F} aus (4.21) weiterhin.

Wir wenden uns nun den Mengen bezüglich der Testspezifikation $\tilde{\mathcal{A}}$ und $\tilde{\mathcal{R}}$ zu. Die Testspezifikation der Gleichung (2.40) wird zunächst mit $\tilde{t} = t + \epsilon_t$ aus Gleichung (2.38) umgeformt

$$t(\mathbf{o}(\mathbf{s}), \mathbf{x}) + \epsilon_t(C_t) \leq t_B. \quad (4.23)$$

Für die linearisierte Testeigenschaft $t(\bar{\mathbf{o}}(\mathbf{s}), \mathbf{x})$ aus Gleichung (4.8) gilt mit $\mathbf{o}_s \mathbf{x} = \alpha f_s$ aus Gleichung (4.16), und Einsetzen von f_s aus Gleichung (4.17) und s_W aus (2.81):

$$t(\bar{\mathbf{o}}(\mathbf{s}), \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{o}_W + \alpha \sigma_{\bar{f}} (\mathbf{e}_1^T \mathbf{s} - \beta_W). \quad (4.24)$$

Damit ist $t(\bar{\mathbf{o}}(\mathbf{s}), \mathbf{x})$ genauso wie \bar{f} ausschließlich von der Koordinate s_1 abhängig. Die linearisierte Testeigenschaft $t(\bar{\mathbf{o}}(\mathbf{s}), \mathbf{x})$ aus Gleichung (4.24) und der Spezifikationswert t_B aus (4.14) werden dann in Gleichung (4.23) eingesetzt:

$$\alpha \sigma_{\bar{f}} (s_1 - \beta_W) + \epsilon_t(C_t) \leq 0. \quad (4.25)$$

Die Testspezifikation unterscheidet sich damit von der Betriebsspezifikation aus Gleichung (4.20) nur durch einen additiven Term:

$$s_1 + \frac{\epsilon_t(C_t)}{\alpha \sigma_{\bar{f}}} \leq \beta_W. \quad (4.26)$$

Für die Mengen angenommener und aussortierter Schaltungen folgt aus (4.26):

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{(\mathbf{s}, \epsilon_t) \in \mathbb{R}^{n_s+1} \mid s_1 + \epsilon_t/(\alpha \sigma_{\bar{f}}) \leq \beta_W\}, \quad (4.27)$$

$$\tilde{\mathcal{R}} = \{(\mathbf{s}, \epsilon_t) \in \mathbb{R}^{n_s+1} \mid s_1 + \epsilon_t/(\alpha \sigma_{\bar{f}}) > \beta_W\}. \quad (4.28)$$

Die Mengen $\widetilde{\mathcal{RG}}$ und $\widetilde{\mathcal{AF}}$ der Fehlentscheidungen beim Test sind gemäß der Gleichungen (2.51) und (2.52) Schnittmengen der eben formulierten Mengen $\tilde{\mathcal{G}}$, $\tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{\mathcal{A}}$ und $\tilde{\mathcal{R}}$. Sie sind auf der Grundmenge \mathbb{R}^{n_s+1} nach Gleichung (2.44) definiert, die den Raum der statistischen Parameter \mathbf{s} und den des Messfehlers ϵ_t umfasst. Die Abhängigkeit der Mengen $\widetilde{\mathcal{RG}}$ und $\widetilde{\mathcal{AF}}$ von der nichtlinearen Betriebseigenschaft f und den nichtlinearen Testbeobachtungen \mathbf{o} bzw. der Testeigenschaft t wurden im Vergleich zu Kapitel 2.3 durch Linearisieren eliminiert. Die auf diesen Ereignissen definierten Wahrscheinlichkeiten können deshalb ohne zusätzlichen Simulationsaufwand ausgewertet werden.

4.2.2 Annahme- und Ablehnungswahrscheinlichkeit einer Schaltung

Die Annahme- und die Ablehnungswahrscheinlichkeit wurden in Kapitel 2.3.4 für eine Schaltung mit dem statistischen Parametersatz \mathbf{s} als Integral der Dichte der Messfehlerverteilung über dem Gebiet einer erfüllten bzw. verletzten Testspezifikation eingeführt. Das Einsetzen der Testspezifikation von Gleichung (4.26) in die Annahme- und die Ablehnungswahrscheinlichkeit von Gleichung (2.55):

$$\begin{aligned} P_s^a &= P_s \{s_1 + \epsilon_t(C_t)/(\alpha \sigma_{\bar{f}}) \leq \beta_W\}, \\ P_s^r &= P_s \{s_1 + \epsilon_t(C_t)/(\alpha \sigma_{\bar{f}}) > \beta_W\} \end{aligned} \quad (4.29)$$

zeigt, dass nach der Linearisierung ausschließlich die Koordinate s_1 vom statistischen Parametersatz \mathbf{s} für P_s^a und P_s^r relevant ist.

Wird in $\text{cdf}^N(t_B, t, C_t)$ aus Gleichung (2.55) t_B aus Gleichung (4.14) und $t(\bar{\mathbf{o}}(\mathbf{s}), \mathbf{x})$ aus Gleichung (4.24) eingesetzt und anschließend nach Gleichung (A.7) auf Seite 102 standardisiert, so folgt für die Annahme- und die Ablehnungswahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P_s^a(s_1, \beta_W, \kappa) &= \text{cdf}^N\left(\frac{\beta_W - s_1}{\kappa}, 0, 1\right), \\ P_s^r(s_1, \beta_W, \kappa) &= 1 - \text{cdf}^N\left(\frac{\beta_W - s_1}{\kappa}, 0, 1\right). \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{C_t}}{\alpha \sigma_{\bar{f}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{\alpha^2} \text{cov}(\epsilon_t)}{\text{cov}(\bar{f}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\theta}_W))}} = \sqrt{\frac{(\frac{1}{\alpha} \mathbf{x})^T \mathbf{C}_o(\frac{1}{\alpha} \mathbf{x})}{f_s^T f_s}}, \quad \kappa \in \mathbb{R}^+ \quad (4.31)$$

fasst dabei das Verhältnis der Standardabweichung des Messfehlers ϵ_t und der Standardabweichung der in \mathbf{s}_W linearisierten Betriebseigenschaft \bar{f} aus den Gleichungen (2.39) und (4.4) zusammen. Um Gleichung (4.13): $\mathbf{o}_s(\frac{1}{\alpha} \mathbf{x}) = f_s$ zu erfüllen, ist die Vektorlänge von $\frac{1}{\alpha} \mathbf{x}$ fix. Durch ein Ändern der Vektorlänge der Entwurfsparameter \mathbf{x} kann folglich κ und damit auch P_s^a und P_s^r nicht beeinflusst werden, da diese Änderung durch α kompensiert wird. In (4.13) und allen davon abgeleiteten Gleichungen kann deshalb $\frac{1}{\alpha} \mathbf{x}$ durch \mathbf{x} mit fixer Vektorlänge substituiert werden.

4.2.3 Zielgrößen

Bei den Zielgrößen aus Kapitel 2.3.6 werden nun die in Gleichung (4.30) hergeleiteten Annahme- und Ablehnungswahrscheinlichkeiten berücksichtigt. Da diese nur von der Koordinate s_1 abhängen und ein standardisiertes Koordinatensystem für \mathbf{s} vorausgesetzt wurde, können die Integrationsvariablen getrennt werden. Die Wahrscheinlichkeit für aussortierte, funktionierende Schaltungen $P_{\widetilde{\mathcal{RG}}} = P(\widetilde{\mathcal{RG}})$ aus Gleichung (2.59):

$$\begin{aligned}
 P_{\widetilde{\mathcal{RG}}} &= \int_{\mathcal{G}} \text{pdf}^N(\mathbf{s}, \mathbf{0}, \mathbf{I}) P_{\mathbf{s}}^r(s_1, \beta_W, \kappa) \partial \mathbf{s} \\
 &= \int_{-\infty}^{\beta_W} \text{pdf}^N(s_1) P_{\mathbf{s}}^r(s_1, \beta_W, \kappa) \partial s_1 \cdot \underbrace{\prod_{i=2}^{n_s} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{pdf}^N(s_i) \partial s_i}_{=1} \\
 &= \int_{-\infty}^{\beta_W} \text{pdf}^N(s_1) P_{\mathbf{s}}^r(s_1, \beta_W, \kappa) \partial s_1 = P_{\widetilde{\mathcal{RG}}}(\beta_W, \kappa)
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

reduziert sich deshalb auf ein eindimensionales Integral nach s_1 . Der Integrationsbereich für die einzelnen Koordinaten s_1 bis s_{n_s} ergibt sich aus Gleichung (4.21).

Für die Wahrscheinlichkeit angenommener, fehlerhafter Schaltungen $P_{\widetilde{\mathcal{AF}}} = P(\widetilde{\mathcal{AF}})$ aus Gleichung (2.60) gilt entsprechend:

$$\begin{aligned}
 P_{\widetilde{\mathcal{AF}}} &= \int_{\mathcal{F}} \text{pdf}^N(\mathbf{s}, \mathbf{0}, \mathbf{I}) P_{\mathbf{s}}^a(s_1, \beta_W, \kappa) \partial \mathbf{s} \\
 &= \int_{\beta_W}^{+\infty} \text{pdf}^N(s_1) P_{\mathbf{s}}^a(s_1, \beta_W, \kappa) \partial s_1 = P_{\widetilde{\mathcal{AF}}}(\beta_W, \kappa).
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

$P_{\widetilde{\mathcal{RG}}}$ und $P_{\widetilde{\mathcal{AF}}}$ aus den Gleichungen (4.32) und (4.33) bewerten mit den Parametern β_W aus (2.70) und κ aus (4.31) den Testentwurf aus Kapitel 4.1, wobei der Messfehler berücksichtigt und der systematische Fehler vernachlässigt wird.

Selbstverständlich ist auch im Fall $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, also für $\mathbf{o}_s \mathbf{x} \neq f_s$, eine Bewertung eines Testentwurfs möglich, d. h. wenn die Bedingung aus Gleichung (4.16) nicht vorausgesetzt wird. Ohne die Zielgrößen formulieren zu wollen, möchte ich den Lösungsweg kurz skizzieren. Die Vektoren $\mathbf{o}_s \mathbf{x}$ und f_s spannen im Raum der statistischen Parameter \mathbb{R}^{n_s} eine zweidimensionale Ebene auf. Das Koordinatensystem der statistischen Parameter \mathbf{s} kann dann so gewählt werden, dass zusätzlich zu den in Kapitel 2.5.2 genannten Bedingungen die Basisvektoren der Koordinaten s_1 und s_2 die durch $\mathbf{o}_s \mathbf{x}$ und f_s gegebene Ebene aufspannen. Wie in Abbildung 4.2 beispielhaft veranschaulicht,

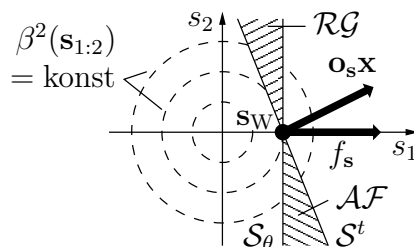


Abbildung 4.2: Integrationsgebiet der Zielgrößen im Fall $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$.

sind die Vektoren $\mathbf{o}_s \mathbf{x}$ und f_s Normalenvektoren der beiden Ebenen der Grenzparametersätze. Bei der Berechnung der Zielgrößen sind, wie in Gleichung (4.32), die trennbaren Integrale nach

den Koordinaten s_3 bis s_{n_s} gleich Eins. Der verbleibende nicht trennbare Integralanteil nach $s_{1:2}$, dessen Integrationsgebiet in Abbildung 4.2 für die beiden Zielgrößen unterschiedlich schraffiert dargestellt ist, lässt sich nicht analytisch lösen. Er kann jedoch mit Quadraturverfahren mit ausreichender Genauigkeit abgeschätzt werden. Von bekanntem s_W , \mathbf{o}_s \mathbf{x} und f_s ausgehend, werden zur Abschätzung ebenfalls keine Schaltungssimulationen benötigt.

4.3 Kostenoptimales Justieren der Testspezifikation

Die in Kapitel 4.1 entworfene Testspezifikation soll nun bezüglich des Messfehlers justiert werden. Das Justieren baut auf der in Kapitel 4.2 beschriebenen Bewertung des Testentwurfs auf. Der systematische Fehler bleibt weiterhin unberücksichtigt. Das Justieren soll durch Einstellen eines kostenoptimalen Spezifikationswertes t_B durch Minimieren einer Kostenfunktion, wie z. B. die der Gleichungen (2.66), erfolgen. Die Kostenfunktion bewertet die mit Fehlentscheidungen verbundenen Kosten auf der Basis der Zielgrößen $P_{\overline{\mathcal{RG}}}$ und $P_{\overline{\mathcal{AF}}}$ aus den Gleichungen (4.32) und (4.33). $P_{\overline{\mathcal{RG}}}$ und $P_{\overline{\mathcal{AF}}}$ werden deshalb im weiteren zum Justieren erweitert.

Gleichung (4.14) zur Berechnung des Spezifikationswertes t_B wird zum Justieren um den Justierparameter β_Δ erweitert, der die Differenz zu t_B aus Gleichung (4.14) in Vielfachen der Streuung der linearisierten Betriebseigenschaft \bar{f} angibt:

$$t_B(\beta_\Delta) = \mathbf{x}^T \mathbf{o}_W + \sigma_{\bar{f}} \beta_\Delta. \quad (4.34)$$

Dieser Ansatz wird gewählt, damit der Justierparameter β_Δ unabhängig von der Empfindlichkeit $\sigma_{\bar{f}}$ der Betriebseigenschaft ist. Für die Testspezifikation aus Gleichung (4.23) ergibt sich dann mit t_B aus Gleichung (4.34):

$$s_1 + \epsilon_t(C_t)/\sigma_{\bar{f}} \leq \beta_W + \beta_\Delta. \quad (4.35)$$

Im Vergleich zu Gleichung (4.26) addiert sich zum Worst-Case-Abstand β_W noch der Justierparameter β_Δ hinzu.

Die Menge der Grenzparametersätze $\mathcal{S}_{\epsilon_t=0}^t$ aus Gleichung (2.58) zur Testspezifikation aus Gleichung (4.35):

$$\mathcal{S}_{\epsilon_t=0}^t = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n_s} \mid s_1 = \beta_W + \beta_\Delta\} \quad (4.36)$$

beschreibt eine Ebene, die im linearisierten Modell beim Justieren über den Justierparameter β_Δ parallel² verschoben wird.³ Im Verlauf der Herleitung nach Kapitel 4.2 ist mit t_B aus Gleichung (4.34) statt aus (4.14) praktisch nur bei der Annahme- und der Ablehnungswahrscheinlichkeit β_W durch $\beta_W + \beta_\Delta$ zu ersetzen:

$$\begin{aligned} P_s^a(s_1, \beta_W + \beta_\Delta, \kappa) &= \text{cdf}^N\left(\frac{\beta_W + \beta_\Delta - s_1}{\kappa}, 0, 1\right), \\ P_s^r(s_1, \beta_W + \beta_\Delta, \kappa) &= 1 - P_s^a(s_1, \beta_W + \beta_\Delta, \kappa). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Für die Zielgrößen folgt:

$$P_{\overline{\mathcal{RG}}}(\beta_W, \kappa, \beta_\Delta) = \int_{-\infty}^{\beta_W} \text{pdf}^N(s_1, 0, 1) P_s^r(s_1, \beta_W + \beta_\Delta, \kappa) \partial s_1, \quad (4.38)$$

$$P_{\overline{\mathcal{AF}}}(\beta_W, \kappa, \beta_\Delta) = \int_{\beta_W}^{+\infty} \text{pdf}^N(s_1, 0, 1) P_s^a(s_1, \beta_W + \beta_\Delta, \kappa) \partial s_1. \quad (4.39)$$

²Die Parallelverschiebung trifft für die nichtlineare Testeigenschaft t wegen deren Krümmung nur annähernd für kleine Änderungen von β_Δ zu.

³Eine Drehung der Ebene könnte über die Testentwurfparameter \mathbf{x} erreicht werden. Dann wäre $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ und die Zielgrößen müssten wie am Ende von Kapitel 4.2.3 beschrieben abgeschätzt werden.

Mit $P_{\widehat{\mathcal{R}\mathcal{G}}}$ und $P_{\widehat{\mathcal{A}\mathcal{F}}}$ aus den Gleichungen (4.38) und (4.39) kann ein Justieren durch Minimieren einer Kostenfunktion, z. B. der linearen aus Gleichung (2.66), über β_{Δ} erfolgen:

$$\min_{\beta_{\Delta}} K(P_{\widehat{\mathcal{R}\mathcal{G}}}(\beta_{\mathcal{W}}, \kappa, \beta_{\Delta}), P_{\widehat{\mathcal{A}\mathcal{F}}}(\beta_{\mathcal{W}}, \kappa, \beta_{\Delta}), \nu). \quad (4.40)$$

Aus der Lösung des Optimierproblems: β_{Δ} folgt mit Gleichung (4.34) der gesuchte Spezifikationswert $t_{\mathcal{B}}$. Die Bewertung des Testentwurfs ist dann durch $P_{\widehat{\mathcal{R}\mathcal{G}}}$ und $P_{\widehat{\mathcal{A}\mathcal{F}}}$ gegeben.

Die fünf Größen Ausbeuteeinbuße $P_{\widehat{\mathcal{R}\mathcal{G}}}$, Fehlerdurchlässigkeit $P_{\widehat{\mathcal{A}\mathcal{F}}}$, Worst-Case-Abstand $\beta_{\mathcal{W}}$, Streuungsverhältnis κ und Justierparameter β_{Δ} beschreiben die Testentwurfsaufgabe im linearisierten Modell. Unter Vernachlässigung des systematischen Fehlers können damit grundlegende Zusammenhänge des Testentwurfs beschrieben werden.

4.4 Grundlegende Zusammenhänge

In den nächsten beiden Abschnitten soll dargestellt werden, wie sich die beiden Zielgrößen Ausbeuteeinbuße $P_{\widehat{\mathcal{R}\mathcal{G}}}$ und Fehlerdurchlässigkeit $P_{\widehat{\mathcal{A}\mathcal{F}}}$ zueinander verhalten und welchen Einfluss die Parameter Worst-Case-Abstand $\beta_{\mathcal{W}}$, Streuungsverhältnis κ und Justierparameter β_{Δ} auf sie ausüben.

4.4.1 Konkurrenz der Zielgrößen

Die Beziehung der beiden Zielgrößen zueinander lässt sich gut durch eine graphische Darstellung der Justieraufgabe aus Kapitel 4.3 veranschaulichen. In Abbildung 4.3 sind dazu die Graphen der beiden Zielgrößen Ausbeuteeinbuße und Fehlerdurchlässigkeit, $P_{\widehat{\mathcal{R}\mathcal{G}}}(\beta_{\mathcal{W}}, \kappa, \beta_{\Delta})$ und $P_{\widehat{\mathcal{A}\mathcal{F}}}(\beta_{\mathcal{W}}, \kappa, \beta_{\Delta})$, aus den Gleichungen (4.38) und (4.39) über dem Justierparameter β_{Δ} dargestellt. Beim Justieren sind der Worst-Case-Abstand $\beta_{\mathcal{W}}$ und das Streuungsverhältnis κ fix. Für die Graphen in Abbildung 4.3 wurde $\beta_{\mathcal{W}} = 1$ und $\kappa = 0,1$ gewählt. Da in den beiden Formeln der Zielgrößen β_{Δ} nur in Summe mit $\beta_{\mathcal{W}}$ auftritt, wurde auf der Abszisse $\beta_{\mathcal{W}} + \beta_{\Delta}$ angetragen.

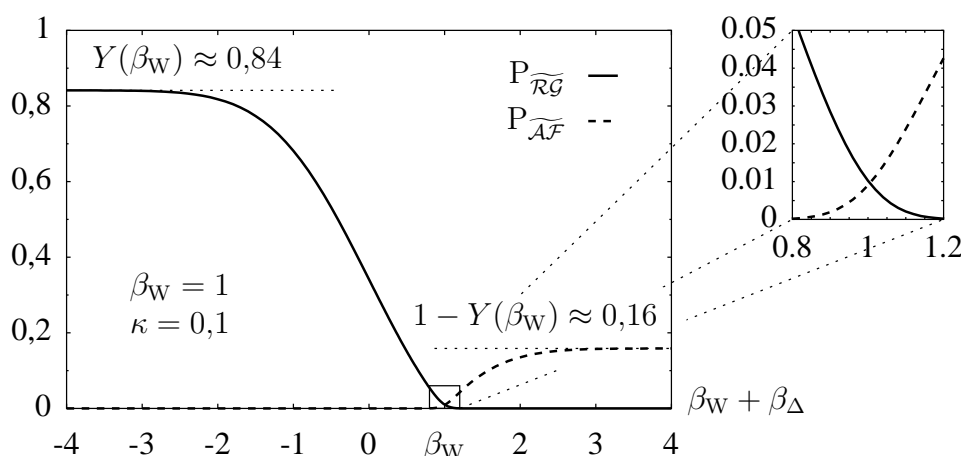


Abbildung 4.3: Ausbeuteeinbuße $P_{\widehat{\mathcal{R}\mathcal{G}}}$ und Fehlerdurchlässigkeit $P_{\widehat{\mathcal{A}\mathcal{F}}}$ über dem Justierparameter β_{Δ} für $\beta_{\mathcal{W}} = 1$ und $\kappa = 0,1$.

Zum Justieren wird von der in Kapitel 4.1 entworfenen Testspezifikation ausgegangen. Für diese Testspezifikation ist $\beta_{\Delta} = 0$.⁴ Die zugehörigen Werte der beiden Zielgrößen: $P_{\widehat{\mathcal{R}\mathcal{G}}}(1, 0, 1, 0) =$

⁴Für $\beta_{\Delta} = 0$ ist $t_{\mathcal{B}}$ nach Gleichung (4.34) mit $t_{\mathcal{B}}$ aus Gleichung (4.14) identisch.

0,0103 und $P_{\widetilde{\mathcal{AF}}}(1, 0, 1, 0) = 0,00905$ sind in der Ausschnittsvergrößerung rechts oben im Bild bei $\beta_W + \beta_\Delta = 1$ zu finden. Die Menge der Grenzparametersätze der Testspezifikation $\mathcal{S}_{\epsilon_t=0}^t$ enthält für $\beta_\Delta = 0$ nach Gleichung (4.36) den Worst-Case-Parametersatz $s_W = \beta_W \mathbf{e}_1$.

Verschiebt man die Grenzparametersätze $\mathcal{S}_{\epsilon_t=0}^t$ durch ein $\beta_\Delta < 0$ in die Menge der funktionierenden Schaltungen hinein,⁵ werden zunehmend funktionierende Schaltungen fälschlicherweise aussortiert, wodurch die Ausbeuteeinbuße $P_{\widetilde{\mathcal{RG}}}$ ansteigt. Einhergehend werden zunehmend mehr fehlerhafte Schaltungen aussortiert und die Fehlerdurchlässigkeit $P_{\widetilde{\mathcal{AF}}}$ sinkt gegen Null. Da höchstens alle funktionierenden Schaltungen aussortiert werden können, steigt die Ausbeuteeinbuße maximal auf den Anteil der funktionierenden Schaltungen an, der durch die Ausbeute Y angegeben wird. Auf Grund der Linearisierung der Betriebseigenschaft f lässt sich Y rein rechnerisch bestimmen. Mit \mathcal{G} aus Gleichung (4.21) folgt für die Ausbeute aus Gleichung (2.29):

$$\begin{aligned} Y(\beta_W) &= P(\mathcal{G}) = \int_{\mathcal{G}} \text{pdf}^N(\mathbf{s}, \mathbf{0}, \mathbf{I}) \partial \mathbf{s} \\ &= \int_{-\infty}^{\beta_W} \text{pdf}^N(s_1) \partial s_1 \cdot \prod_{i=2}^{n_s} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{pdf}^N(s_i) \partial s_i = \text{cdf}^N(\beta_W). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Im umgekehrten Fall, also für $\beta_\Delta > 0$ werden mehr Schaltungen beim Test angenommen, auch mehr fehlerhafte, wodurch die Fehlerdurchlässigkeit $P_{\widetilde{\mathcal{AF}}}$ steigt. Sie ist durch den Anteil der fehlerhaften Schaltungen $1 - Y(\beta_W)$ begrenzt.⁶ Die Ausbeuteeinbuße $P_{\widetilde{\mathcal{RG}}}$ geht dagegen gegen Null.

Zum Justieren wird β_Δ so gewählt, dass das Wertepaar der Zielgrößen $P_{\widetilde{\mathcal{RG}}}(1, 0, 1, \beta_\Delta)$ und $P_{\widetilde{\mathcal{AF}}}(1, 0, 1, \beta_\Delta)$ die Kosten minimiert. Der Spezifikationswert $t_B(\beta_\Delta)$ der Testspezifikation kann dann nach Gleichung (4.34) berechnet werden.

4.4.2 Einfluss des Worst-Case-Abstands und des Streuungsverhältnisses auf die Zielgrößen

Neben dem Justierparameter β_Δ beeinflussen der Worst-Case-Abstand β_W und das Streuungsverhältnis κ die Zielgrößen. Dies soll anhand von Abbildung 4.4 veranschaulicht werden. Die Zielgrößen $P_{\widetilde{\mathcal{RG}}}$ und $P_{\widetilde{\mathcal{AF}}}$ sind im halb logarithmischen Maßstab über β_W angetragen. Dadurch wird deren Größenordnung über den gesamten dargestellten Bereich von β_W deutlich. Für die Abbildungen 4.4(a) bis 4.4(d) wurde das Streuungsverhältnis κ von $\kappa = 10$ bis $\kappa = 0.01$ jeweils um den Faktor 10 verkleinert. Der Justierparameter ist konstant $\beta_\Delta = 0$.

Der auf der Abszisse angegebene Worst-Case-Abstands β_W gibt den Abstand des Worst-Case-Parametersatzes s_W und damit den Abstand der Menge der Grenzparametersätze der Betriebsspezifikation \mathcal{S}_θ aus Gleichung (4.22) zum Nominalparametersatz s_0 an. Befinden sich Grenzparametersätze nahe des Nominalparametersatzes s_0 , $\beta_W \approx 0$, so gehen Fehlentscheidungen wegen der hohen Dichte der statistischen Parameter $\text{pdf}^N(\mathbf{s})$ stärker in die Zielgrößen ein, als am Rand der Verteilung. Die Zielgrößen werden deshalb mit zunehmendem Abstand $|\beta_W|$ vom Nominalpunkt s_0 kleiner.

Ist die Streuung des Messfehlers deutlich größer als die Streuung der Betriebseigenschaft, $\kappa = 10$, so sind die Messungen unsicher und beim Test Fehlentscheidungen relativ häufig zu erwarten. Je kleiner das Streuungsverhältnis κ wird und damit der Messfehlereinfluss desto kleiner werden auch die Zielgrößen. Das Bestreben des Toleranzentwurfs, die Betriebseigenschaften möglichst

⁵Für ein $\beta_\Delta < 0$ wird der Spezifikationswert t_B kleiner.

⁶Die Mengen der funktionierenden Schaltungen und die der fehlerhaften Schaltungen sind komplementär (vgl. Kap. 2.2.1).

unempfindlich gegenüber den Schwankungen des Herstellungsprozesses zu entwerfen, vergrößert κ und verschlechtert damit die Qualität des Tests, wenn die Messunsicherheiten nicht entsprechend reduziert werden. Konträr zu diesem Effekt, verbessert die Verringerung von $\sigma_{\bar{f}}$ jedoch meist die Qualität des Tests durch eine Zunahme des Worst-Case-Abstands β_W .

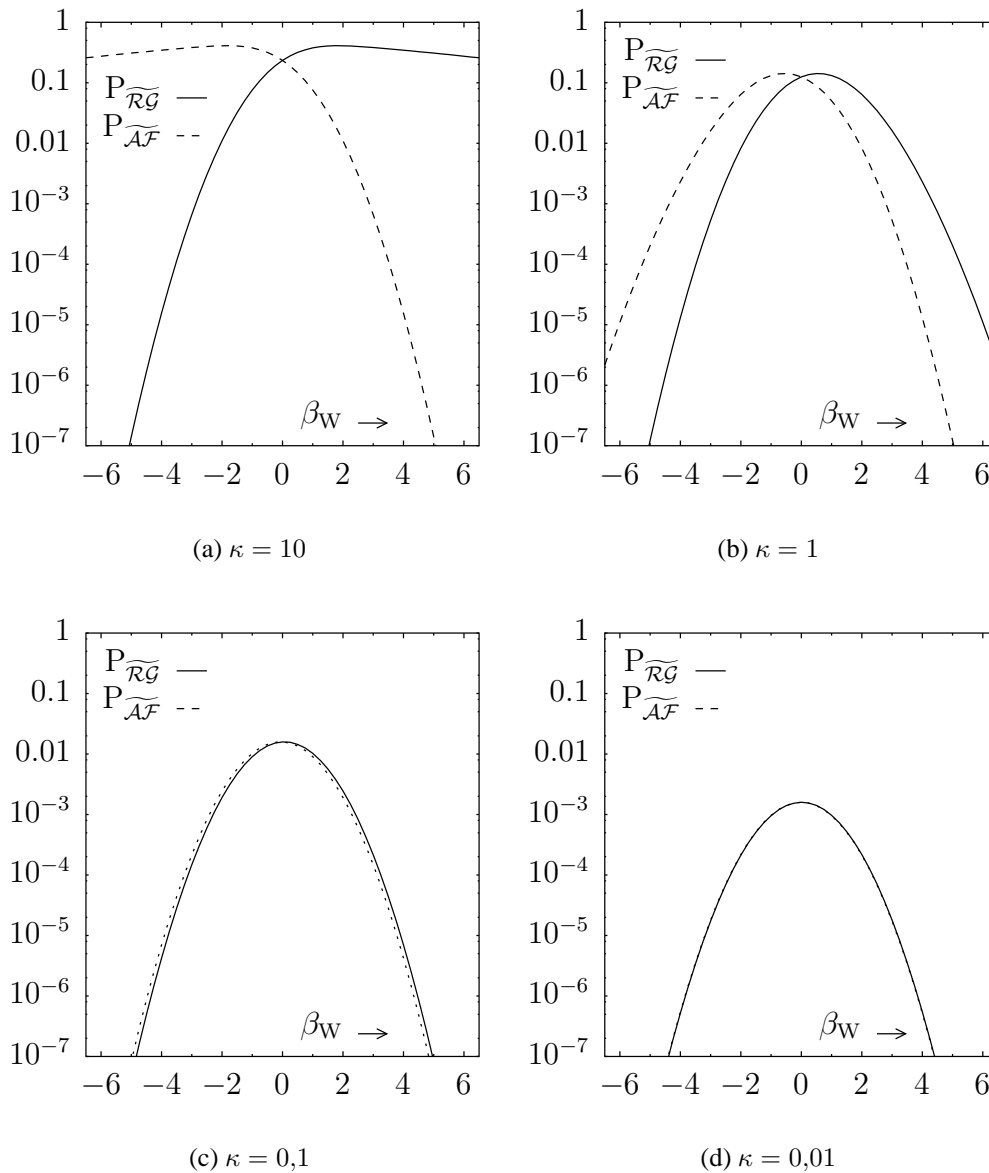


Abbildung 4.4: Einfluss des Worst-Case-Abstands β_W und des Streuungsverhältnisses κ auf die Zielgrößen $P_{\widetilde{RG}}$ und $P_{\widetilde{AF}}$ für $\beta_{\Delta} = 0$.

Die in dieser Arbeit vorgestellte Formulierung der Zielgrößen ermöglicht die Ziele für einen Testentwurf mit möglichst wenig Fehlentscheidungen zu beschreiben.

- Beim Schaltungsentwurf ist die Schaltung möglichst so zu entwerfen, dass der Worst-Case-Abstand β_W und damit die Ausbeute Y möglichst groß ist.
- Für den Test sind Messungen zu wählen, die mit möglichst kleinem Messfehler gemessen werden können.

Da, wie am Ende von Kapitel 2.1 erwähnt, die Formulierung des impliziten funktionalen Tests auch den expliziten funktionalen Test umfasst, treffen diese Aussagen auch für den expliziten funktionalen Test zu.

Darüber hinaus schafft die Beziehung zwischen dem Worst-Case-Abstand β_W und den Zielgrößen $P_{\widetilde{\mathcal{RG}}}$ und $P_{\widetilde{\mathcal{AF}}}$ die Möglichkeit bereits beim Schaltungsentwurf durch eine gezielte Einstellung der Worst-Case-Abstände aller Spezifikationen die Wahrscheinlichkeit von Fehlentscheidungen beim Test einer Schaltung $P(\mathcal{RG}^*)$ und $P(\mathcal{AF}^*)$ aus Gleichung (2.32) zu minimieren. Testentwürfe für einzelne Spezifikationen deren Bewertung durch die Zielgrößen zu hoch ist, können durch Vergrößern der Worst-Case-Abstände verbessert werden. Die Vergrößerung von Worst-Case-Abständen einzelner Spezifikationen ist jedoch nur zu Lasten der Worst-Case-Abstände anderer Spezifikationen möglich, wodurch sich die Testentwürfe zu diesen Spezifikationen verschlechtern. Die Bewertung eines Testentwurfs könnte dann als Kriterium beim Toleranzentwurf nach [AGW94, Grä93, Wie94, SGA99, AEG⁺00, SPZ⁺01] berücksichtigt werden.

Aus Abbildung 4.4 wird auch ersichtlich, dass sich die Graphen der Zielgrößen mit kleiner werdendem Streuungsverhältnis $\kappa \rightarrow 0$ immer mehr aneinander annähern. Außerdem sind die Graphen zueinander achsensymmetrisch zu $\beta_W = 0$. Auf ein beliebiges β_Δ erweitert gilt:

$$\begin{aligned}
P_{\widetilde{\mathcal{RG}}}(-\beta_W, \kappa, -\beta_\Delta) &= \int_{-\infty}^{-\beta_W} \text{pdf}^N(s_1) \int_{(-\beta_W + \beta_\Delta) - s_1 / \kappa}^{\infty} \text{pdf}^N(\tilde{t}) \partial \tilde{t} \partial s_1 \\
&= \int_{+\infty}^{+\beta_W} \text{pdf}^N(-s_1) \int_{-((\beta_W + \beta_\Delta) - (-s_1)) / \kappa}^{-\infty} \text{pdf}^N(-\tilde{t}) (-\partial \tilde{t}) (-\partial s_1) \\
&= \int_{\beta_W}^{\infty} \text{pdf}^N(s_1) \int_{-\infty}^{((\beta_W + \beta_\Delta) - s_1) / \kappa} \text{pdf}^N(\tilde{t}) \partial \tilde{t} \partial s_1 \\
&= P_{\widetilde{\mathcal{AF}}}(\beta_W, \kappa, \beta_\Delta).
\end{aligned} \tag{4.42}$$

4.5 Berechnen einer Testspezifikation

Zum Entwurf einer Testspezifikation wird vorausgesetzt, dass die statistischen Parameter s inklusiv ihrer Dichte sowie der Worst-Case-Parametersatz s_W aus dem Toleranzentwurf bekannt sind. Außerdem wird angenommen, dass sich der Testingenieur für die Testbeobachtungen \mathbf{o} entschieden hat und die zugehörigen Messfehler ϵ_o samt Dichte bekannt sind.

Um die gesuchten Testentwurfparameter \mathbf{x} und t_B der Testspezifikation mit den Gleichungen (4.13) und (4.14) berechnen zu können, sind die Werte der Testbeobachtungen \mathbf{o}_W sowie die Gradienten der Betriebs- und der Testbeobachtungen in s_W : f_s und \mathbf{o}_s gemäß der Gleichungen (4.6), (4.2) und (4.7) durch Simulation zu bestimmen. Dadurch sind dann die Linearisierungen der Betriebseigenschaft und der Testbeobachtungen der Gleichungen (4.1) und (4.5) gegeben. Falls der Simulator, wie der hier verwendete TITAN, keine Empfindlichkeiten ausgibt, können die Gradienten f_s und \mathbf{o}_s über Differenzenquotienten bestimmt werden [Dre75]. Dabei empfiehlt sich zentrale Differenzenquotienten zu verwenden mit einer beidseitigen Auslenkung eines jeden Parameters s_i in der Größenordnung eines Sigmas. Wie in Kapitel 4.2.1 gezeigt, könnte f_s auch aus dem Worst-Case-Parametersatz s_W über den Lagrange-Ansatz berechnet werden. Bei dem in Kapitel 5.5.1 beschriebenen Experiment hat sich jedoch gezeigt, dass beim Bestimmen von f_s über Differenzenquotienten die Linearisierung die Fläche der Grenzparametersätze besser annähert.

Ein anschließendes Standardisieren der statistischen Größen s und ϵ_o ist für die weiteren Berechnungen von Vorteil. Die statistischen Parameter s werden wie in Kapitel 2.5.2 und Anhang A.1.1 beschrieben standardisiert, die Messfehler ϵ_o nach Anhang A.1.1: $\epsilon_o \sim N_{n_o}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$.

Ein Ziel beim Lösen von Gleichung (4.13) ist ein möglichst kleines Residuum $\mathbf{r} = \mathbf{f}_s - \mathbf{o}_s \mathbf{x}$ nach Gleichung (4.15). Ein möglichst kleines Residuum bewirkt auch einen möglichst kleinen Winkel zwischen den Vektoren \mathbf{f}_s und $\mathbf{o}_s \mathbf{x}$. Aus Abbildung 4.2 auf Seite 49 wird ersichtlich, dass die Gebiete der Fehlentscheidungen \mathcal{RG} und \mathcal{AF} kleiner werden, je kleiner der Winkel $\angle(\mathbf{f}_s, \mathbf{o}_s \mathbf{x})$ zwischen den Normalenvektoren der Linearisierungsebenen \mathbf{f}_s und $\mathbf{o}_s \mathbf{x}$ ist. Das andere Ziel ist ein möglichst geringer Messfehlereinfluss auf die Zielgrößen, d. h. ein möglichst kleines $C_t = \|\mathbf{x}\|_2^2$ nach Gleichung (2.39). Es kann deshalb vorteilhaft sein, ein etwas größeres Residuum zuzulassen, um den Messfehlereinfluss zu reduzieren. Dies kann durch ein regularisiertes Ausgleichsproblem [PW01]

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{f}_s - \mathbf{o}_s \mathbf{x}\|_2^2 + \mu^2 \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (4.43)$$

erreicht werden. Die Lösung dazu kann durch Lösen der regularisierten Normalgleichung

$$(\mathbf{o}_s^T \mathbf{o}_s + \mu^2 \mathbf{I}) \mathbf{x} = \mathbf{o}_s^T \mathbf{f}_s \quad (4.44)$$

bestimmt werden. Trägt man $C_t = \|\mathbf{x}\|_2^2$ über μ graphisch an, so fällt C_t typischerweise für μ nahe Null stark ab, macht einen Knick und hat für größeres μ dann nur noch ein geringes Gefälle. Den Regularisierungsparameter μ wählt man dann für einen guten Kompromiss im Bereich des Knicks. Wenn man bedenkt, dass bei diesem Ansatz der nichtlineare Eigenschaftsverlauf der Betriebs- und der Testeigenschaft durch die Linearisierung unberücksichtigt bleibt, ist an dieser Stelle eine Lösung in der Nähe des Optimums vollkommen ausreichend. Gleichung (4.44) kann mit einer Singulärwertzerlegung der Matrix $(\mathbf{o}_s^T \mathbf{o}_s + \mu^2 \mathbf{I})$ berechnet werden.⁷

Zum Justieren kann graphisch, wie in Kapitel 4.4.1 beschrieben, verfahren werden oder das Optimierproblem aus Gleichung (4.40) gelöst werden. Dazu bieten sich das Intervallhalbierungsverfahren oder der Goldene-Schnitt-Algorithmus [Pap91, GMW81] mit z. B. dem Startintervall für β_Δ : $[-1, 1]$ an. Zur dazu benötigten Auswertung der Zielgrößen der Gleichungen (4.38) und (4.39) ist κ nach Gleichung (4.31) zu berechnen. β_W ist aus dem Toleranzentwurf bekannt.

Je nach Teststrategie kann es vorkommen, dass der Testingenieur zunächst mehr Testbeobachtungen in Betracht zieht, als im Endeffekt beim Test durchgeführt werden sollen. Es ist also eine Auswahl der Testbeobachtungen \mathbf{o} zu treffen, um die Anzahl der Testbeobachtungen n_o zu reduzieren. Dabei ist zu beachten, dass beim Entfernen einer Testbeobachtung zwar der Messaufwand und damit die Testdauer kleiner wird, die Zielgrößen Ausbeuteeinbuße und Fehlerdurchlässigkeit jedoch größer werden. Solange die Anzahl der verwendeten Testbeobachtungen größer als die Anzahl der statistischen Parameter bleibt: $n_o > n_s$, kann zunächst ein Testentwurf mit allen Testbeobachtungen durchgeführt werden und die Auswahl durch Null setzen der betragsmäßig kleinsten Vektorkomponenten von \mathbf{x} erfolgen. Dieses heuristische Verfahren wird ausführlich in [CB00, Fei94] diskutiert. Anschließend sollte die Testspezifikation mit der reduzierten Anzahl Testbeobachtungen neu berechnet werden. Für den Fall $n_o \leq n_s$ konnte keine zufrieden stellende Heuristik gefunden werden, die Enumeration vermeidet. Bei allen in dieser Arbeit vorgestellten Ergebnissen wurden ohne Auswahl alle in Kapitel 3.1 aufgeführten Testbeobachtungen verwendet.

Mit dem Problem der Testauswahl beschäftigen sich auch die Arbeiten [HMK90, SSS89, SK96]. Dort werden jedoch Fehler über spezifikationsverletzende Abweichungen einzelner Prozessparameter s definiert. Mit einem linearen Modell der Beziehung zwischen den Prozessparametern und den Messungen \mathbf{o} werden dann Tests ausgewählt, mit denen die Prozessparameter möglichst robust bestimmt werden können.

⁷Zur Singulärwertzerlegung siehe auch Anhang A.7 auf Seite 105.

4.6 Experimentelle Ergebnisse

Das in diesem Kapitel vorgestellten Testentwurfsverfahren, das im folgenden mit LIN-V bezeichnet wird, soll nun auf jede Betriebsspezifikation der beiden Demonstratorschaltungen aus Kapitel 3.1 angewendet werden. Die Berechnung der Testentwurfsparameter, das Justieren und die Bewertung erfolgen wie im Abschnitt 4.5 beschrieben.

4.6.1 Testentwurf

In den Tabellen 4.1(a) und 4.1(b) sind zu jeder Betriebseigenschaft der beiden Schaltungen die für die Testentwurfsverfahren charakteristischen Größen angegeben. Aufgeführt sind der Worst-Case-Abstand β_W , das Streuungsverhältnis κ sowie der Schätzwert für die Ausbeute $Y(\beta_W)$ nach Gleichung (4.41). $Y(\beta_W)$ bzw. $1 - Y(\beta_W)$ in ppm (*parts per million*, Teile je einer Million) geben nach Abbildung 4.3 die Obergrenzen der Zielgrößen $P_{\overline{RG}}$ und $P_{\overline{AF}}$ an. Für die Demonstration

f	β_W	κ	$Y(\beta_W)$	$1 - Y(\beta_W)$ [ppm]
A_0	4,46	0,41	0,9999960	4,0
GBW	3,42	0,12	0,99968	320
Φ_M	3,36	0,19	0,99961	390
SR_f	4,19	0,025	0,999986	14
SR_r	2,17	0,25	0,985	15000
PSRR	3,21	0,046	0,99933	670
power	2,90	0,033	0,9981	1900

(a) M-OP

f	β_W	κ	$Y(\beta_W)$	$1 - Y(\beta_W)$ [ppm]
A_0	2,51	0,27	0,9939	6100
GM	2,94	0,14	0,9983	1700
f_t	4,13	0,085	0,999982	18
f_{3dB}	2,93	0,28	0,9983	1700
Φ_M	3,21	0,15	0,99933	670
SR_r	2,89	0,057	0,9981	1900
PSRR	3,92	0,18	0,999956	44
power	2,90	0,020	0,9981	1900

(b) F-OP

Tabelle 4.1: Charakteristische Größen des Testentwurfs.

der Testentwurfsverfahren wurden die Schaltungen so vorbereitet, dass alle Worst-Case-Abstände β_W zwischen 2 und 4,5 Sigma liegen. Dies wurde erreicht, indem mit WICKED [AEG⁺00] zuerst ein Toleranzentwurf durchgeführt wurde und anschließend die Betriebsspezifikationen mit sehr großen Worst-Case-Abständen auf die in den Tabellen 3.1 und 3.2 angegebenen Werte angezogen wurden. Bei kleineren Worst-Case-Abständen β_W wird, wie aus Abbildung 4.4 ersichtlich, die Abweichung der Testspezifikation von der Betriebsspezifikation durch größere Werte der Zielgrößen Ausbeuteeinbuße und Fehlerdurchlässigkeit bewertet. Damit ist die Qualität der Entwurfsverfahren besser beurteilbar.

Zu jeder Betriebsspezifikation der beiden Schaltungen wurde ein Testentwurf durchgeführt. Zum Justieren wurde für die Kostenfunktion angenommen, dass die Folgekosten einer dem Kunden ausgelieferten, fehlerhaften Schaltung zehn mal größer sind als die einer abgelehnten, funktionierenden Schaltung. Es wird deshalb von der linearen Kostenfunktion aus Gleichung (2.66) mit $\lambda = \frac{1}{11}$ ausgegangen:

$$K \left(P_{\widetilde{\mathcal{RG}}}, P_{\widetilde{\mathcal{AF}}}, \frac{1}{11} \right) = \frac{1}{11} (P_{\widetilde{\mathcal{RG}}} + 10 P_{\widetilde{\mathcal{AF}}}). \quad (4.45)$$

Die Justierparameter β_Δ am Optimum und die zugehörige Bewertung der Testentwürfe mit den Zielgrößen nach Kapitel 4.2 sind in Tabelle 4.2 aufgeführt. Bei z. B. der Betriebseigenschaft GBW

f	β_Δ	$P_{\widetilde{\mathcal{RG}}}$ [ppm]	$P_{\widetilde{\mathcal{AF}}}$ [ppm]	K [ppm]	$\ddot{P}_{\widetilde{\mathcal{RG}}}$ [ppm]	$\ddot{P}_{\widetilde{\mathcal{AF}}}$ [ppm]	\ddot{K} [ppm]
A ₀	0,158	7,3	1,9	2,4	0,15	3,3	3,0
GBW	-0,112	210	11	30	210	4,7	23
Φ_M	-0,136	400	27	61	260	1,4	25
SR _f	-0,030	2,2	0,09	0,28	1,6	0,0	0,1
SR _r	-0,210	14000	860	2100	11000	0,0	1000
PSRR	-0,054	150	5,8	19	170	6,9	22
power	-0,042	290	9,4	35	84	0,0	7,7

(a) M-OP

f	β_Δ	$P_{\widetilde{\mathcal{RG}}}$ [ppm]	$P_{\widetilde{\mathcal{AF}}}$ [ppm]	K [ppm]	$\ddot{P}_{\widetilde{\mathcal{RG}}}$ [ppm]	$\ddot{P}_{\widetilde{\mathcal{AF}}}$ [ppm]	\ddot{K} [ppm]
A ₀	-0,190	6900	470	1100	14000	1300	2500
GM	-0,132	1100	58	160	2800	17	270
f_t	-0,084	9,9	0,48	1,3	7,7	1,0	1,6
f_{3dB}	-0,158	2300	190	380	2000	420	560
Φ_M	-0,128	510	29	73	210	170	170
SR _r	-0,066	500	20	63	550	12	60
PSRR	-0,118	50	3,6	7,8	150	3,7	17
power	-0,026	170	5,4	20	470	2,3	45

(b) F-OP

Tabelle 4.2: Bewertung der Testentwürfe.

aus Tabelle 4.2(a) wurde beim Justieren die kostenoptimale Lösung $K = 30$ bei $\beta_\Delta = -0,112$ gefunden. Von einer Million Schaltungen werden 210 fälschlicherweise aussortiert obwohl sie funktionieren und 11 akzeptiert obwohl sie fehlerhaft sind. Mit $\beta_W = 3,42$ und $\kappa = 0,12$ aus Tabelle 4.1(a) entspricht dies unter Berücksichtigung von $\beta_\Delta = -0,112$ der nach Abbildung 4.4(c) erwarteten Größenordnung. Bei der Eigenschaft SR_r derselben Schaltung M-OP kommt es zu den meisten Fehlentscheidungen. Bei dem kleinsten aller Worst-Case-Abstände von nur $\beta_W = 2,17$ und dem großen Messfehlereinfluss von $\kappa = 0,25$ entspricht dies nach Abbildung 4.4 ebenfalls den Erwartungen. Auf $\ddot{P}_{\widetilde{\mathcal{RG}}}$, $\ddot{P}_{\widetilde{\mathcal{AF}}}$ und \ddot{K} wird im nun folgenden Abschnitt eingegangen.

4.6.2 Validieren

Zum Überprüfen dieser Ergebnisse werden die Testentwürfe auch mit dem zum Validieren in Kapitel 3.2 beschriebenen Monte-Carlo-Verfahren bewertet, das im folgenden mit VAL-V bezeichnet wird. Die damit ermittelten Zielgrößen $\ddot{P}_{\overline{RG}}$ und $\ddot{P}_{\overline{AF}}$ sind in Tabelle 4.2 aufgeführt. Für die Mächtigkeiten der beiden Stichproben für das *Importance Sampling* wurde $N_0 = N_W = 600$ verwendet. In Abbildung 4.5 werden $P_{\overline{RG}}$ und $\ddot{P}_{\overline{RG}}$ sowie $P_{\overline{AF}}$ und $\ddot{P}_{\overline{AF}}$ gegenübergestellt. Zu jedem

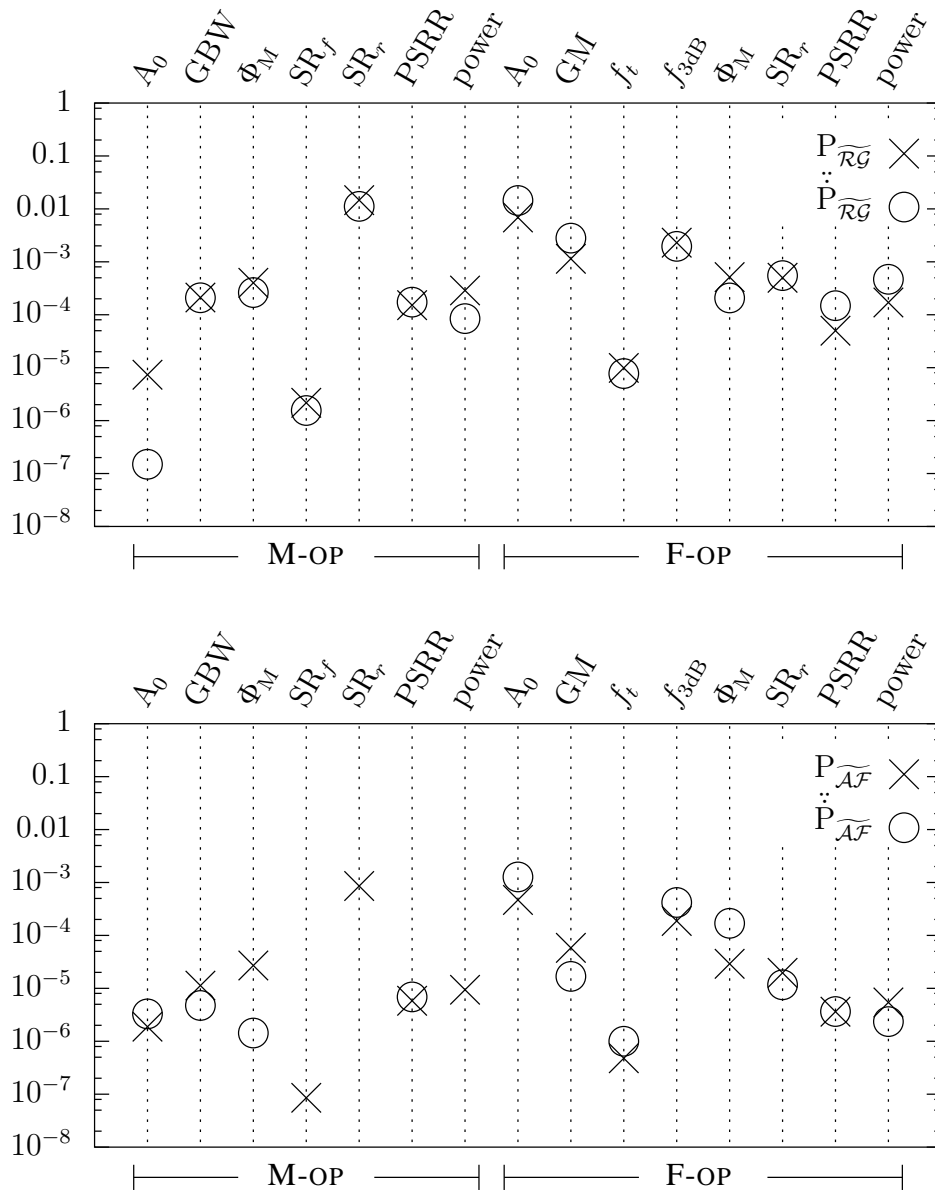


Abbildung 4.5: Vergleich der Abschätzungen der Zielgrößen Ausbeuteeinbuße $P_{\overline{RG}}$ (oben) und Fehlerdurchlässigkeit $P_{\overline{AF}}$ (unten) aus Tabelle 4.2 mit denen nach dem Verfahren VAL-V aus Kapitel 3.2. Werte kleiner 10^{-8} sind nicht dargestellt.

Testentwurf werden die zum Justieren verwendeten Zielgrößen $P_{\overline{RG}}$ und $P_{\overline{AF}}$ durch ein Kreuz sowie die mit VAL-V bestimmten Zielgrößen $\ddot{P}_{\overline{RG}}$ und $\ddot{P}_{\overline{AF}}$ durch einen Kreis dargestellt. Werte kleiner 10^{-8} wurden in Abbildung 4.5 weggelassen. Idealerweise überlagern sich bei der Aus-

beuteeinbuße bzw. bei der Fehlerdurchlässigkeit das Kreuz und der Kreis wie beim Testentwurf zur Betriebsspezifikation PSRR des Miller Operationsverstärkers (M-OP.PSRR). Trotz des systematischen Fehlers durch Linearisieren der Betriebs- und der Testeigenschaften bei $P_{\mathcal{RG}}$ und $P_{\mathcal{AF}}$ ergibt sich eine erstaunlich gute Übereinstimmung der beiden Abschätzungen der Zielgrößen.

Analog zu der Kostenfunktion aus Gleichung (4.45) kann eine Kostenfunktion über die mit VAL-V abgeschätzten Zielgrößen $\ddot{P}_{\mathcal{RG}}$ und $\ddot{P}_{\mathcal{AF}}$ formuliert werden:

$$\ddot{K} = K \left(\ddot{P}_{\mathcal{RG}}, \ddot{P}_{\mathcal{AF}}, \frac{1}{11} \right) = \frac{1}{11} (\ddot{P}_{\mathcal{RG}} + 10 \ddot{P}_{\mathcal{AF}}). \quad (4.46)$$

Der Vergleich von K und \ddot{K} in Tabelle 4.2 zeigt, dass die Ergebnisse die gleiche Größenordnung aufweisen.

Die Unterschiede bei der Abschätzung der Zielgrößen mit LIN-V bzw. VAL-V werden durch graphische Veranschaulichung an der Justieraufgabe deutlich. Dazu werden in Abbildung 4.6 die

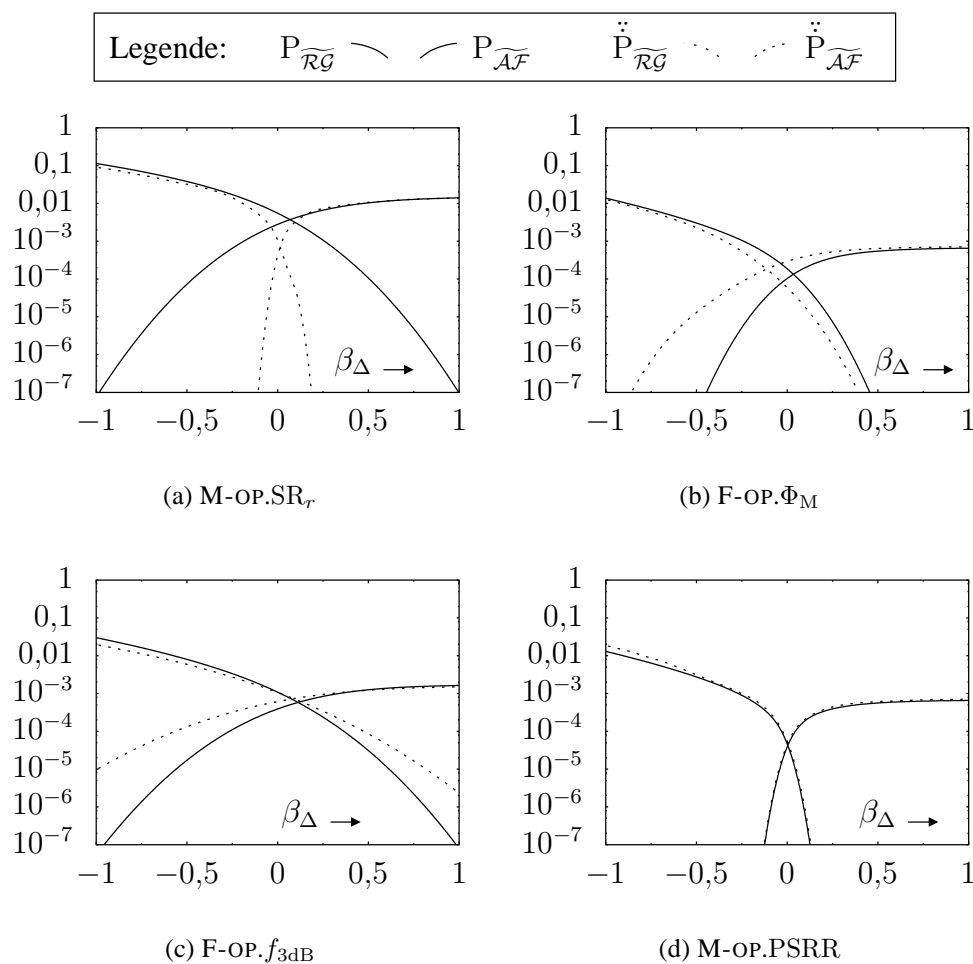


Abbildung 4.6: Vergleich der Zielgrößen $P_{\mathcal{RG}}$ und $P_{\mathcal{AF}}$ mit $\ddot{P}_{\mathcal{RG}}$ und $\ddot{P}_{\mathcal{AF}}$ für ausgewählte Spezifikationen von schlechtester 4.6(a) bis bester 4.6(d) Übereinstimmung.

Zielgrößen $P_{\mathcal{RG}}$, $P_{\mathcal{AF}}$, $\ddot{P}_{\mathcal{RG}}$ und $\ddot{P}_{\mathcal{AF}}$ graphisch über dem Justierparameter β_{Δ} im halb logarithmischen Maßstab angetragen. Eine möglichst gute Übereinstimmung der Zielgrößen $P_{\mathcal{RG}}$ und $P_{\mathcal{AF}}$

mit $\ddot{P}_{\overline{RG}}$ und $\ddot{P}_{\overline{AF}}$ ist besonders im Bereich des Minimums der verwendeten Kostenfunktion wichtig. Wie aus Tabelle 4.2 ersichtlich, treten die Minima für die Kostenfunktion aus Gleichung 4.45 im Bereich $\beta_{\Delta} \in [-0,3, 0,2]$ auf. Durch visuelles Sortieren von schlechter bis guter Übereinstimmung ergab sich die Reihung:

M-OP.SR _r ,	M-OP.A ₀ ,	M-OP.power,	F-OP.power,
F-OP.Φ _M ,	M-OP.Φ _M ,	F-OP.GM,	F-OP.A ₀ ,
F-OP.PSRR,	F-OP.f _{3dB} ,	M-OP.SR _f ,	F-OP.SR _r ,
F-OP.f _t ,	M-OP.GBW,	M-OP.PSRR.	

In Abbildung 4.6 sind die Graphen mit schlechtester 4.6(a), zwei mit mittlerer 4.6(b) und 4.6(c) sowie mit bester 4.6(d) Übereinstimmung dargestellt. Bei der Hälfte der untersuchten Testentwürfe stimmt das Modell mit linearisierter Betriebs- und Testeigenschaft mit den Ergebnissen des wesentlich simulationsintensiveren Monte-Carlo-Verfahrens VAL-V überein. Die schlechte Übereinstimmung bei M-OP.SR_r in Abbildung 4.6(a) führt zu den in Tabelle 4.2(a) aufgeführten hohen Kosten des Testentwurfs.

Im Hinblick auf genauere Abschätzungen der Zielgrößen soll im folgenden der systematische Fehler durch das Linearisieren der Betriebs- und der Testeigenschaft untersucht werden.

4.6.3 Untersuchung zum systematischen Fehler

Die Ursache für den zu Fehlentscheidungen führenden systematischen Fehler ist der durch die Linearisierung unberücksichtigt gebliebene nichtlineare Eigenschaftsverlauf der Betriebseigenschaft f und der Testbeobachtungen o . Die durch den systematischen Fehler verursachten Fehlentscheidungen werden in diesem Abschnitt mit der Stichproben der obigen Ergebnisse mit VAL-V visualisiert. Dabei werden für jedes Stichprobenelement erstens die Abstände zu den Ebenen der Grenzparameter einerseits der linearisierten Betriebs- und andererseits der linearisierten Testspezifikation, zweitens die Dichte jedes Stichprobenelements bezüglich der Prozessverteilung und drittens die Übereinstimmen der Testentscheidung mit dem Einhalten der Betriebsspezifikation sichtbar gemacht.

Eine Darstellung, die diese Anforderungen erfüllt, wird anhand von Abbildung 4.7 erläutert. Die Darstellung erfolgt auf der Grundlage des standardisierten und rotierten Koordinatensystems

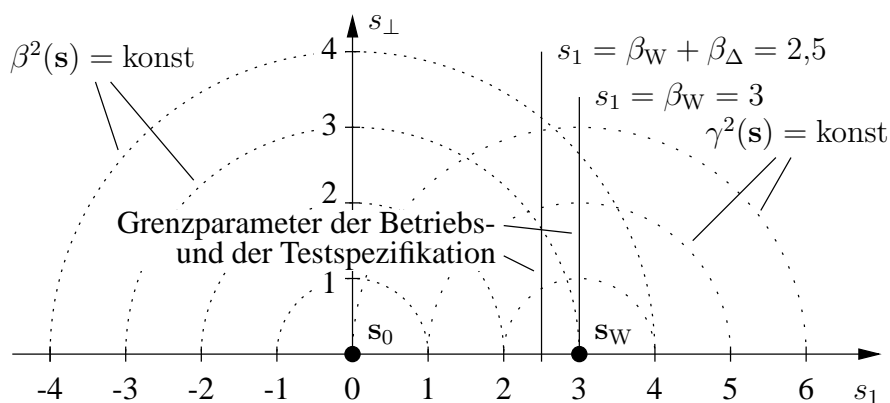


Abbildung 4.7: Darstellung zum systematischen Fehler; eingezeichnete Spezifikationen für $\beta_W = 3$ und $\beta_{\Delta} = -0,5$.

nach Kapitel 2.5.2. Um im Raum der statistischen Parameter \mathbb{R}^{n_s} den Abstand der Stichprobenelemente zu den parallelen Ebenen der Grenzparametersätze der Betriebs- sowie der Testspezifikation

aus den Gleichungen (4.22) und (4.36) visualisieren zu können, wird die zu diesen Ebenen senkrechte Koordinate s_{\perp} als Abszisse angetragen. Zur Reduktion des n_s -dimensionalen Raums der statistischen Parameter \mathbb{R}^{n_s} auf die zweidimensionale Darstellungsebene wird auf der Ordinate die Norm der übrigen Koordinaten $\mathbf{s}_{2:n_s} = [s_2, \dots, s_{n_s}]^T$ angetragen:

$$s_{\perp} = \|\mathbf{s}_{2:n_s}\|_2 = \sqrt{\mathbf{s}_{2:n_s}^T \mathbf{s}_{2:n_s}} = \sqrt{\sum_{i=2}^{n_s} s_i^2}, \quad s_{\perp} \in \mathbb{R}_0^+. \quad (4.47)$$

In dieser Darstellung repräsentiert eine zur s_1 -Achse parallele Gerade $s_{\perp} = \text{konst}$ die $(n_s - 1)$ -dimensionale Mantelfläche eines in s_1 unendlich ausgedehnten Zylinders um die s_1 -Achse mit Radius s_{\perp} . Die Wahl der Koordinaten hat außerdem den Vorteil, dass bei gleicher Skala der Abszisse und der Ordinate die Isodensiten $\beta^2(\mathbf{s}) = \text{konst}$ der Verteilungsdichte der statistischen Parameter \mathbf{s} , mit β nach Gleichung (2.68), Halbkreise um den Ursprung bilden:

$$\beta^2(\mathbf{s}) = \|\mathbf{s}\|_2^2 = \mathbf{s}^T \mathbf{s} = s_1^2 + \mathbf{s}_{2:n_s}^T \mathbf{s}_{2:n_s} = s_1^2 + s_{\perp}^2 = \text{konst}. \quad (4.48)$$

Des Weiteren kann zur Beurteilung des systematischen Fehlers auch der Abstand der Stichprobenelemente vom Linearisierungspunkt, dem Worst-Case-Parametersatz \mathbf{s}_W , mit dem Parameterabstand

$$\gamma(\mathbf{s})^2 = \|\mathbf{s} - \mathbf{s}_W\|_2^2 = (\mathbf{s} - \beta_W \mathbf{e}_1)^T (\mathbf{s} - \beta_W \mathbf{e}_1) = (s_1 - \beta_W)^2 + s_{\perp}^2, \quad \gamma^2 \in \mathbb{R}_0^+ \quad (4.49)$$

gemessen werden. Parametersätze mit gleichem Abstand vom Linearisierungspunkt \mathbf{s}_W liegen auf Halbkreisen um \mathbf{s}_W .

Die Menge der Grenzparametersätze der linearisierten Betriebsspezifikation aus Gleichung (4.22) wird durch die Halbgerade $s_1 = \beta_W$ beschrieben, in Abbildung (4.7) beispielhaft für $\beta_W = 3$. Aus der Abbildung wird außerdem ersichtlich, dass sich im Worst-Case-Parametersatz \mathbf{s}_W die Isodensite $\beta^2(\mathbf{s}) = \beta_W^2 = \text{konst}$ und die Betriebseigenschaft f berühren, d. h. die Tangentialebenen sind identisch. Dies ist die geometrische Deutung der notwendigen Bedingung aus Gleichung (2.75) für ein Optimum des Optimierproblems aus Gleichung (2.73) zur Bestimmung des Worst-Case-Parametersatzes \mathbf{s}_W . Die Ebene der Grenzparameter zur linearisierten Testspezifikation aus Gleichung (4.36) wird ebenfalls durch eine Halbgerade dargestellt und ist zu der der Betriebsspezifikation parallel, in der Abbildung um $\beta_{\Delta} = -0,5$, verschoben.

Für die in Kapitel 3.2.2 beschriebene Stichprobe wird ein *Importance Sampling* Verfahren eingesetzt, bei dem zwei normalverteilte Stichproben mit den Erwartungswerten \mathbf{s}_0 und \mathbf{s}_W verwendet werden: $\text{pdf}_{n_s}^N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ und $\text{pdf}_{n_s}^N(\beta_W \mathbf{e}_1, \mathbf{I})$. $\beta^2(\mathbf{s}) = \text{konst}$ und $\gamma^2(\mathbf{s}) = \text{konst}$ beschreiben die Isodensiten dieser beiden Verteilungen. In Abbildung (4.7) sind einige Isodensiten der beiden Verteilungen durch konzentrische, gepunktete Halbkreise im Abstand von einem Sigma eingezeichnet. Um die Verteilung der Stichprobenelemente entlang der Koordinatenachsen zu untersuchen, werden die beiden Dichten zunächst nach den Koordinaten s_1 und $\mathbf{s}_{2:n_s}$ getrennt:

$$\text{pdf}_{n_s}^N(\mathbf{s}, \mathbf{0}, \mathbf{I}) = \text{pdf}_1^N(s_1, 0, 1) \text{pdf}_{n_s-1}^N(\mathbf{s}_{2:n_s}, \mathbf{0}, \mathbf{I}), \quad (4.50)$$

$$\text{pdf}_{n_s}^N(\mathbf{s}, \beta_W \mathbf{e}_1, \mathbf{I}) = \text{pdf}_1^N(s_1, \beta_W, 1) \text{pdf}_{n_s-1}^N(\mathbf{s}_{2:n_s}, \mathbf{0}, \mathbf{I}). \quad (4.51)$$

s_1 ist demnach normalverteilt mit $s_1 \sim N_1(0, 1)$ bzw. $s_1 \sim N_1(\beta_W, 1)$. $\mathbf{s}_{2:n_s}$ ist für beide Verteilungen gleichermaßen normalverteilt $\mathbf{s}_{2:n_s} \sim N_{n_s-1}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$. Wegen $s_{\perp}^2 = \mathbf{s}_{2:n_s}^T \mathbf{s}_{2:n_s}$ ist s_{\perp}^2 χ^2 -verteilt bzw. die auf der Ordinate angetragene Koordinate s_{\perp} χ -verteilt. Die Dichte der χ -Verteilung $\text{pdf}_{n_s-1}^X(s_{\perp})$ geht durch die Substitution $s_{\perp} = \sqrt{\mathbf{s}_{2:n_s}^T \mathbf{s}_{2:n_s}}$ aus der Dichte der Normalverteilung hervor und kann, genauso wie die Normalverteilung, mit der Gammafunktion $\Gamma(x)$ berechnet

werden:

$$\text{pdf}_n^{\chi}(x) = \frac{2 x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})}, \quad x \geq 0. \quad (4.52)$$

Weitere Information zur χ -Verteilung ist in Anhang A.1.2 zusammengestellt. Darunter findet sich in Gleichung (A.13) auch die Verteilungsfunktion $\text{cdf}_n^{\chi}(x)$ der χ -Verteilung. In Abbildung 4.8 wird

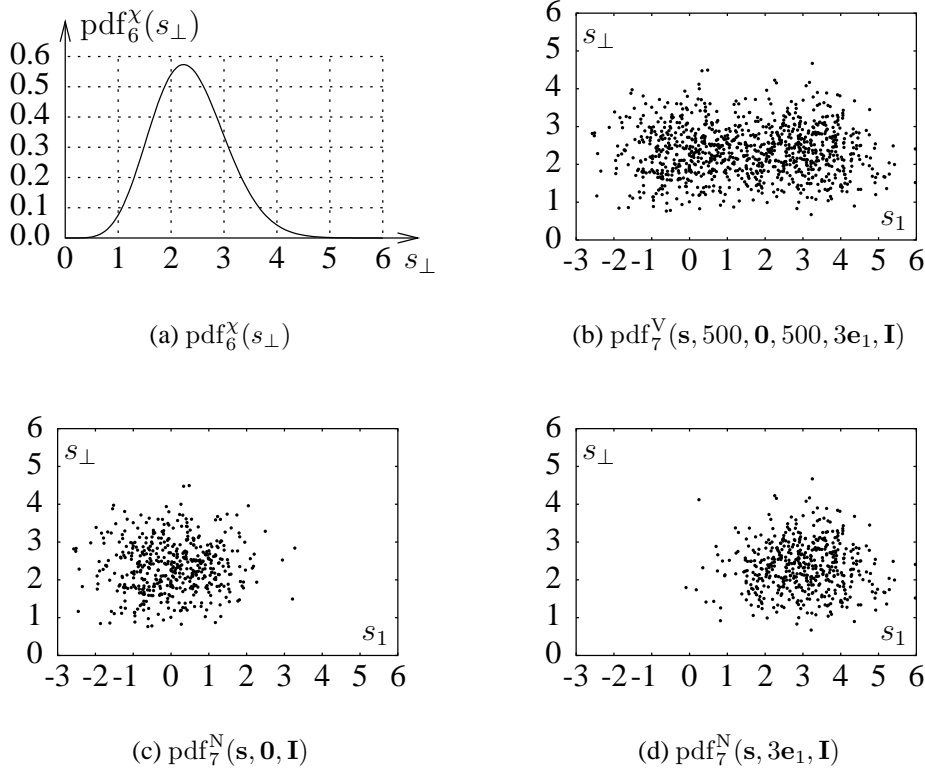


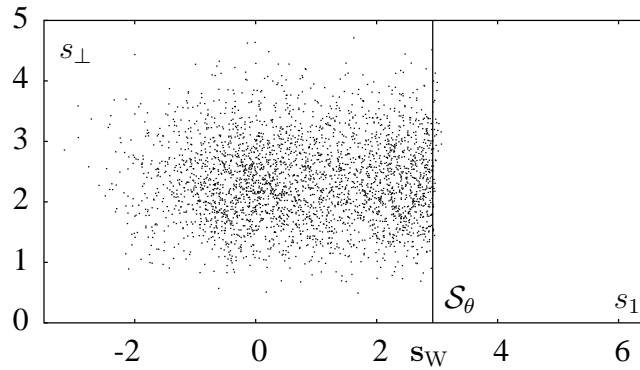
Abbildung 4.8: Darstellung einer Validierungsstichprobe für $n_s = 7$.

für $n_s = 7$ und $\beta_{\text{W}} = 3$ die Dichte $\text{pdf}_{n_s-1}^{\chi}(s_{\perp})$ sowie eine Validierungsstichprobe pdf_7^{V} und ihre beiden Teilstichproben pdf_7^{N} mit je 500 Elementen veranschaulicht.

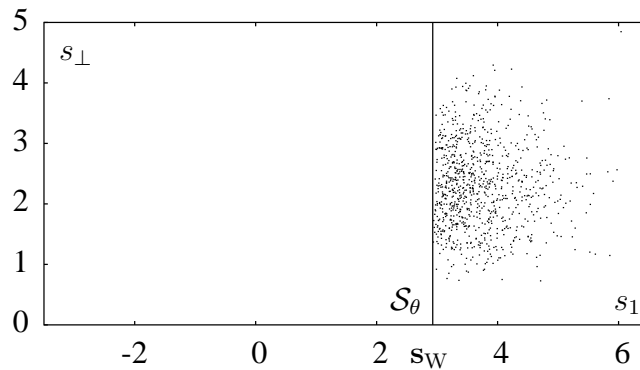
Schließlich können die Stichprobenelemente je nach Zugehörigkeit zu den Mengen \mathcal{G} , \mathcal{F} , \mathcal{A} , \mathcal{R} , \mathcal{RG} oder \mathcal{AF} z. B. mit verschiedenen Farben, Symbolen oder in unterschiedlichen Bildern dargestellt werden. Wegen der Überlagerung der Koordinaten $s_{2:n_s}$ auf der Ordinate s_{\perp} werden Fehlentscheidungen auf beiden Seiten der Ebene \mathcal{S} bzw. $\mathcal{S}_{\text{et}=0}^t$ auftreten. Da beim Entwurf der Testspezifikation der Fehler durch das Restglied der Linearisierung quadratisch mit dem Abstand $\gamma(s)$ vom Linearisierungspunkt s_{W} zunimmt, ist zu erwarten, dass Fehlentscheidungen auf einen Bereich begrenzt sind, der auf beiden Seiten durch einen Ast einer Parabel, mit der s_1 -Achse als Parabelachse, begrenzt wird.

Für die folgenden Betrachtungen wurde F-OP. $f_{3\text{dB}}$ ausgewählt und eine Validierungsstichprobe in Abbildung 4.9 wie eben beschrieben dargestellt. In Abbildung 4.9(a) sind die funktionierenden Schaltungen $s^{(i)} \in \mathcal{G}$ der Stichprobe, in Abbildung 4.9(b) die fehlerhaften $s^{(i)} \in \mathcal{F}$ und in Abbildung 4.9(c) all jene die Fehlentscheidungen unterliegen $s^{(i)} \in \mathcal{RG} \cup \mathcal{AF}$ eingezeichnet. Qualitativ sehen sich Abbildung 4.9 und die zu den Testentwürfen der anderen Betriebsspezifikationen recht ähnlich. Die abgebildeten Daten weisen eine mittlere Anzahl Elemente mit Fehlentscheidungen $|\mathcal{RG} \cup \mathcal{AF}| = 84$ auf und diese Elemente bilden in Abbildung 4.9(c) einen der breitesten

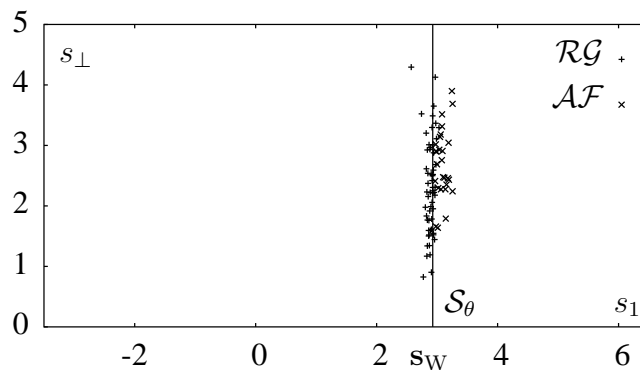
Trichter um die Grenzparametersätze \mathcal{S}_θ . Die Validierungsstichprobe wurde entsprechend Kapitel 3.2 mit $N_0 = N_W = 2000$, also insgesamt $N_0 + N_W = 4000$ Stichprobenelementen, erzeugt. Da die Grenzparameter $\mathcal{S}_{\epsilon_t=0}^t$ der linearisierten Testspezifikation, wie aus Tabelle 4.2 ersichtlich, nur um $\beta_\Delta = -0.158$ parallel zu den eingezeichneten Grenzparametern \mathcal{S}_θ der linearisierten Betriebsspezifikation verschoben sind, wurde auf deren Darstellung zur besseren Übersichtlichkeit verzichtet.



(a) $s^{(i)} \in \mathcal{G}$



(b) $s^{(i)} \in \mathcal{F}$



(c) $s^{(i)} \in \mathcal{RG} \cup \mathcal{AF}$

Abbildung 4.9: Visualisierung des systematischen Fehlers für F-OP. $f_{3\text{dB}}$ mit $N_0 = N_W = 2000$.

Abbildung 4.9 zeigt vier für den Testentwurf wesentliche Merkmale, die bei allen bisher untersuchten Testentwürfen zutreffen:

1. Die Ebene der Grenzparametersätze der linearisierten Betriebsspezifikation nach Gleichung

(4.22) ist eine sehr gute Näherung für die Fläche der Grenzparametersätze der nichtlinearen Betriebspezifikation \mathcal{S}_θ . Dies ist aus den Abbildungen 4.9(a) und 4.9(b) ersichtlich, da \mathcal{S}_θ die Mengen der funktionierenden Schaltungen \mathcal{G} und die der fehlerhaften \mathcal{F} sehr gut trennt, d. h. funktionierende und fehlerhafte Schaltungen überlappen in der Darstellung nur wenig.

2. Da die funktionierenden \mathcal{G} und die fehlerhaften Schaltungen \mathcal{F} außerdem nur in der Nähe der Grenzparametersätze \mathcal{S}_θ überlappen und nirgendwo sonst im Raum der statistischen Parameter \mathbb{R}^{n_s} ,⁸ sind die Gebiete der funktionierenden bzw. fehlerhaften Schaltungen zusammenhängend. Sie weisen deshalb keine Lücken auf.
3. Abbildung 4.9(c) verdeutlicht die Lage der Fehlentscheidungen. Sie befinden sich ausschließlich in der Umgebung der Grenzparameter. Sie werden in der Darstellung wegen des quadratischen Restglieds bei der Linearisierung der Betriebs- bzw. der Testspezifikation zu beiden Seiten von \mathcal{S}_θ bzw. $\mathcal{S}_{\epsilon_t=0}^t$ von einem Parabelast begrenzt.
4. Es wird vor Augen geführt, welcher geringer Anteil der Stichprobenelemente trotz *Importance Sampling* Verfahren in diesem problemrelevanten Bereich liegt. Für die in Abbildung 4.9 dargestellte Stichprobe sind es $|\mathcal{RG} \cup \mathcal{AF}| = 84$ Elemente die Fehlentscheidungen unterliegen von insgesamt $N_0 + N_W = 4000$; das ist nur jedes 50-ste Element.

Für den Testentwurf bedeuten die ersten drei Punkte, dass sich der für die Testentwurfsverfahren zu berücksichtigende Parameterbereich im Raum \mathbb{R}^{n_s} auf die Umgebung der Grenzparametersätze \mathcal{S}_θ einschränken lässt. Nach dem vierten Punkt sind in Anbetracht des immensen Simulationsaufwands Ansätze, die auf dieser Art von Stichproben basieren [LGA99] unwirtschaftlich. Für bessere Testentwurfsverfahren werden also Methoden benötigt, die diesen problemrelevanten Raum stärker ausleuchten. Die Zielsetzung bei den weiteren Verfahren sind deshalb simulationseffiziente Entwurfsmethoden, die unter Berücksichtigung der Nichtlinearitäten die Erfassung des systematischen Fehlers ermöglichen. Dazu wird allerdings ein höherer Simulationsaufwand nötig sein als in diesem Ansatz.

⁸Problemrelevant ist der Bereich mit nicht verschwindend kleiner Dichte um den Erwartungswert \mathbf{s}_0 (z. B. $|\beta(\mathbf{s})| \leq 8$ mit β^2 nach Gleichung (2.68)).

Kapitel 5

Testentwurf mit nichtlinearer Betriebs- und Testeigenschaft

Durch das Linearisieren der Betriebseigenschaft und der Testeigenschaft im vorhergehenden Kapitel wurde die systematische Fehlerursache für Fehlentscheidungen beim Test vernachlässigt. Die am Ende des Kapitels veranschaulichte Abweichung der Betriebs- und Testeigenschaft von deren Linearisierungen lässt jedoch die Berücksichtigung der Nichtlinearität beim Testentwurf als sinnvoll erscheinen.

Für den im Anschluss vorgestellten Ansatz wird die Aufgabe eine Testspezifikation zu entwerfen wieder in zwei Teile zerlegt. Die Testentwurfparameter werden im Gegensatz zum vorhergehenden Ansatz jetzt unter Berücksichtigung der nichtlinearen Betriebs- und Testeigenschaft berechnet. Anschließend ist wieder ein kostenoptimales Justieren bezüglich der Fehlerdurchlässigkeit und der Ausbeuteeinbuße möglich.

Schaltungen die Fehlentscheidungen unterliegen, liegen im Raum der statistischen Parameter zwischen den Flächen der Grenzparametersätze der Betriebs- und der Testspezifikation. Je besser die Fläche der Grenzparametersätze der Testspezifikation sich an die der Betriebsspezifikation annähert, also je kleiner der Abstand zwischen diesen Flächen ist, desto kleiner ist das Integrationsgebiet der Zielgrößen und damit die Auftrittswahrscheinlichkeit von Fehlentscheidungen. An den Grenzparametersätzen nehmen die Betriebs- und die Testeigenschaft per Definition den jeweiligen Spezifikationswert an. Der Abstand zwischen den Flächen der Grenzparametersätze ist folglich genau dann umso kleiner, je besser der nichtlineare Eigenschaftsverlauf der Testeigenschaft mit dem der Betriebseigenschaft im Bereich der Spezifikationswerte übereinstimmt. Somit kann die Nichtlinearität der Schaltungseigenschaften beim Testentwurf durch Approximieren der Betriebseigenschaft durch die zu entwerfende Testeigenschaft berücksichtigt werden.

Für die Approximation ist der Verlauf weder der nichtlinearen Betriebs- noch der nichtlinearen Testeigenschaft im Voraus bekannt. Zum Erfassen der Genauigkeit der Approximation zwischen der Betriebs- und der Testeigenschaft müssen diese Schaltungseigenschaften an mehreren Stellen mit Simulationen ausgewertet werden. Der Simulationsaufwand ist dadurch höher als im vorhergehenden Ansatz.

Zur anschließenden Bewertung des Testentwurfs werden die Zielgrößen Ausbeuteeinbuße und Fehlerdurchlässigkeit mit Quadraturverfahren abgeschätzt. Mit der Kenntnis der Linearisierung der Betriebseigenschaft im Worst-Case-Parametersatz aus dem vorhergehenden Kapitel kann diese Abschätzung simulationseffizient erfolgen. Kern des Verfahrens ist die punktweise Abstandsbestimmung zwischen den Grenzparametersätzen der Betriebs- und der Testspezifikation, die senkrecht zur Linearisierung der Betriebseigenschaft erfolgt. Die Grenzparametersätze werden dabei zur Reduktion des Simulationsaufwands mit einem Interpolationsansatz bestimmt. Die Simula-

tionspunkte können dafür so gewählt werden, dass eine gemeinsame Nutzung für Entwurf und Bewertung möglich wird.

Die Bestimmung einiger Grenzparametersätze der Betriebsspezifikation bei der Bewertung der Testspezifikation schafft die Möglichkeit, die Produktionsausbeute genauer als über die Linearisierung der Betriebseigenschaft im Worst-Case-Parametersatz abzuschätzen. Auf diese Möglichkeit der Ausbeuteschätzung wird im Anschluss an die Bewertung des Testentwurfs eingegangen.

Im folgenden wird der Entwurf der Testspezifikation durch Approximieren der Betriebseigenschaft durch die Testeigenschaft beschrieben. Es folgt die Bewertung des Testentwurfs, die Ausbeuteschätzung und das Justieren. Berechnungsverfahren und Ergebnisse bilden den Schluss.

5.1 Entwerfen einer Testspezifikation

Die Testentwurfparameter \mathbf{x} und t_B werden in diesem Ansatz so bestimmt, dass die Testeigenschaft t die Betriebseigenschaft f möglichst gut approximiert. Zur Vermeidung von Fehlentscheidungen muss die Approximation dabei für $f = f_B$ und $t = t_B$ besonders genau sein. Dies folgt aus der Definition der Menge der Grenzparametersätze zur Betriebsspezifikation aus Gleichung (2.72) und aus der Menge der Grenzparametersätze zur Testspezifikation aus Gleichung (2.26). Diese Mengen begrenzen die relevanten Gebiete der Fehlentscheidungen \mathcal{RQ} und \mathcal{AF} im Raum der statistischen Parameter \mathbb{R}^{n_s} . Dieses Problemwissen ermöglicht eine Beschränkung des Approximationsgebiets auf die Umgebung dieser Grenzparametersätze. Kleinere Approximationsgebiete bewirken normalerweise reduzierten Simulationsaufwand beziehungsweise höhere Approximationsgenauigkeit.

Bei der Approximation wird eine nicht oder nur mit hohem Aufwand erfassbare Funktion, beim Testentwurf die Betriebseigenschaft f , durch eine berechnete und mit geringerem Aufwand bestimmbare Funktion, hier die Testeigenschaft t , ersetzt. Für den Ansatz der Approximation wird der Weg gewählt, die Betriebseigenschaft f durch die Testeigenschaft t zu approximieren. Die *approximierte Betriebseigenschaft*

$$\hat{f}(\mathbf{s}, \mathbf{x}, k) = t(\mathbf{o}(\mathbf{s}), \mathbf{x}) + k = \mathbf{x}^T \mathbf{o}(\mathbf{s}) + k \quad (5.1)$$

wird als Summe der Testeigenschaft t mit einer Konstanten k angesetzt. Über k werden die Spezifikationswerte f_B und t_B bei der Approximation berücksichtigt.

Während der gesuchte Testentwurfparameter \mathbf{x} bei der Approximation direkt bestimmt wird, ist der Spezifikationswert der Testspezifikation t_B noch aus k zu berechnen. Dies wird nun gezeigt. Wird in der Betriebsspezifikation die Betriebseigenschaft f durch deren Approximation \hat{f} ersetzt, so sind, bei geeigneter Wahl von t_B , die Grenzparametersätze der Betriebs- und der Testspezifikation identisch. Dieser Zusammenhang wird verwendet, um t_B zu berechnen. Durch Ersetzen von f durch \hat{f} in der Bedingung der Grenzparametersätze \mathcal{S}_θ aus Gleichung (2.72):

$$\hat{f}(\mathbf{s}, \mathbf{x}, k) = t(\mathbf{o}(\mathbf{s}), \mathbf{x}) + k = f_B \quad (5.2)$$

und Einsetzen der Bedingung $t = t_B$ der Grenzparametersätze \mathcal{S}^t aus Gleichung (2.26) folgt:

$$t_B = f_B - k. \quad (5.3)$$

Durch die Parameter \mathbf{x} und k , die bei der Approximation ermittelt werden, ist neben \mathbf{x} damit auch t_B bekannt, wodurch alle gesuchten Testentwurfparameter der Testspezifikation aus Gleichung (2.11) bestimmt sind. \square

Im folgenden wird auf Grund der Eigenschaften der Approximationsaufgabe ein geeignetes Approximationsverfahren ausgewählt und beschrieben. Generell handelt es sich um eine lineare Approximation, da \hat{f} linear in den Parametern \mathbf{x} und k angesetzt wurde [Seb77]. Da die Betriebseigenschaft f eine Fläche über dem Raum der statistischen Parameter \mathbb{R}^{n_s} bildet, handelt es sich außerdem um eine mehrdimensionale Approximation.

Bei den Zielgrößen wird die Auftretswahrscheinlichkeit von Fehlentscheidungen durch Integration über dem kontinuierlichen Gebiet der Fehlentscheidungen bestimmt. Für die Approximation wären deshalb kontinuierliche Approximationsverfahren wünschenswert, die das Integral der Abweichungen zwischen \hat{f} und f über dem Approximationsgebiet minimieren. Die Testbeobachtungen \mathbf{o} und die Betriebseigenschaft f können jedoch nur für einzelne Parametersätze \mathbf{s} und nur mit hohem Simulationsaufwand bestimmt werden. Deshalb kommen nur diskrete Approximationsverfahren [PW01] in Frage, die zur Approximation mehrere Stützpunkte verwenden. Ein Stützpunkt besteht aus der Stützstelle, den Testbeobachtungen \mathbf{o} , und dem zugehörigen Stützwert, der zu approximierenden Betriebseigenschaft f . Für einen Stützpunkt sind die Testbeobachtungen \mathbf{o} und die Betriebseigenschaft f für denselben statistischen Parametersatz \mathbf{s} zu bestimmen. Zu p verschiedenen Parametersätzen \mathbf{s}_i , $i = 1, \dots, p$ können die Stützstellen

$$\hat{\mathbf{o}}_i = \mathbf{o}(\mathbf{s}_i), \quad i = 1, \dots, p \quad (5.4)$$

und die Stützwerte

$$\hat{f}_i = f(\mathbf{s}_i, \boldsymbol{\theta}_W), \quad i = 1, \dots, p \quad (5.5)$$

durch Simulation ermittelt werden.

Wie eingangs beschrieben, soll die Approximation im Bereich der Grenzparametersätze möglichst genau sein. Bis auf den Worst-Case-Parametersatz \mathbf{s}_W sind jedoch keine Grenzparametersätze bekannt. Wie in Kapitel 4 festgestellt wurde, sind die nichtlinearen Flächen der Grenzparametersätze in der Nähe ihrer Linearisierung aus Gleichung (4.22) bzw. (4.36) zu finden. Deshalb ist es sinnvoll, die Parameter \mathbf{s}_i der Stützpunkte in die Umgebung der durch Gleichung (4.22) beschriebenen Linearisierung zu legen. Um den Abstand der beiden Flächen der Grenzparametersätze möglichst großflächig zu erfassen, sind die Parametersätze \mathbf{s}_i entlang der Linearisierung zu verteilen. Dabei ist die Wahrscheinlichkeitsdichte $\text{pdf}^N(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0, \mathbf{C}_s)$ der statistischen Parameter \mathbf{s} in noch näher zu erklärender Weise zu berücksichtigen.

An allen Stützpunkten gilt gleichermaßen:

$$\hat{f}_i = \hat{f} + r_i = \mathbf{x}^T \hat{\mathbf{o}}_i + k + r_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad (5.6)$$

wobei r_i das Residuum zwischen dem wahren Wert \hat{f}_i und dem geschätzten Wert \hat{f} aus Gleichung (5.1) ist: $r_i = \hat{f}_i - \hat{f}$, $i = 1, \dots, p$. Die p Gleichungen aus (5.6) können auch als Gleichungssystem dargestellt werden:

$$\begin{bmatrix} \hat{f}_1 \\ \vdots \\ \hat{f}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\mathbf{o}}_{11} & \dots & \hat{\mathbf{o}}_{1n_o} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \hat{\mathbf{o}}_{p1} & \dots & \hat{\mathbf{o}}_{pn_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n_o} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_p \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

oder

$$\hat{\mathbf{f}} = \hat{\mathbf{O}} \begin{bmatrix} k \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} + \mathbf{r}, \quad (5.8)$$

wobei mit $\hat{\mathbf{o}}_{ij}$ die j -te Komponente des Vektors $\hat{\mathbf{o}}_i$ bezeichnet wurde.

Normalerweise werden die Stützwerte der Betriebseigenschaft \hat{f} nicht exakt durch die Testeigenschaft approximiert werden können, d. h. das Gleichungssystem (5.8) ist für $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ nicht lösbar.

Es verbleiben Residuen $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$. Die Parameter \mathbf{x} und k des Gleichungssystems (5.8) können dann mit der Methode der kleinsten Quadrate [TB97, Dre75], auch als diskrete Gauß-Approximation bezeichnet [PW01], bestimmt werden. Dabei sollen die Residuen möglichst klein sein:

$$\min_{\mathbf{x}, k} \|\mathbf{r}\|_2^2. \quad (5.9)$$

Weiterhin ist nicht zu erwarten, dass die Testbeobachtungen linear unabhängig sind. Beim Lösen von Gleichung (5.9) besteht folglich Lösungsvielfalt. Diese Freiheit wird genutzt, um den Messfehlereinfluss zu minimieren.

$\|\mathbf{r}\|_2^2$ ist die Metrik der Approximation:

$$\Phi(\hat{f}, f) = \|\mathbf{r}\|_2^2 = \sum_{i=1}^p r_i^2 = \sum_{i=1}^p \left(\hat{f}_i - \hat{f}(s_i, \mathbf{x}, k) \right)^2. \quad (5.10)$$

Metriken quantifizieren wie gut eine Funktion eine andere approximiert, hier die Testeigenschaft t die Betriebseigenschaft f . Es ist anzumerken, dass die Metrik Φ sich von den in Kapitel 2 hergeleiteten Zielgrößen $P_{\mathcal{RG}}$ und $P_{\mathcal{AF}}$ aus den Gleichungen (2.32) und (2.33) unterscheidet. Die Zielgrößen können nicht direkt zur Approximation verwendet werden, da sie die an eine Metrik gestellten Bedingungen verletzen.¹ Die Metrik Φ ist jedoch so gewählt, dass mit kleiner werdender Metrik auch eine Verbesserung der Zielgrößen zu erwarten ist. Die mit den beiden Arten von Fehlentscheidungen $P_{\mathcal{RG}}$ und $P_{\mathcal{AF}}$ verbundenen Kosten werden in der Metrik gleichwertig zusammen gefasst. Unterschiedliche Kosten können durch ein nachträgliches Justieren bezüglich einer Kostenfunktion, z. B. der linearen aus Gleichung (2.66), berücksichtigt werden.

Wegen der Normalverteilung der statistischen Parameter haben die Residuen der verschiedenen Stützpunkte unterschiedlich starken Einfluss auf die Zielgrößen. Um die Dichte $\text{pdf}^N(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0, \mathbf{C}_s)$ in der Metrik berücksichtigen zu können, sind die Parameter s_i der Stützpunkte gemäß der Normalverteilung zu verteilen oder es ist zu jedem Stützpunkt ein Gewicht $w_i > 0$ einzuführen:

$$\Phi(\hat{f}, f) = \sum_{i=1}^p w_i r_i^2. \quad (5.11)$$

Mit der positiv definiten Diagonalmatrix der Gewichte $\sqrt{w_i}$, $i = 1, \dots, p$:

$$\mathbf{W} = \text{diag}(\sqrt{w_1}, \dots, \sqrt{w_p}) \quad (5.12)$$

gilt statt Gleichung (5.9) dann:

$$\min_{\mathbf{x}, k} \|\mathbf{W}\mathbf{r}\|_2^2 = \min_{\mathbf{x}, k} \left\| (\mathbf{W}\hat{\mathbf{f}}) - (\mathbf{W}\mathbf{O}) \begin{bmatrix} k \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \right\|_2^2. \quad (5.13)$$

5.2 Bewerten eines Testentwurfs

Während der Entwurf der Testspezifikation in Kapitel 5.1 indirekt über eine Metrik erfolgt, sollen bei der Bewertung eines Testentwurfs die Zielgrößen $P_{\mathcal{RG}}$ und $P_{\mathcal{AF}}$ aus den Gleichungen (2.32) und (2.33) direkt abgeschätzt werden. Die Zielgrößen $P_{\mathcal{RG}}$ und $P_{\mathcal{AF}}$ sind Wahrscheinlichkeiten, die als Integral der Wahrscheinlichkeitsdichte $\text{pdf}^N(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0, \mathbf{C}_s)$ über die Bereiche $\widetilde{\mathcal{RG}}$ bzw. $\widetilde{\mathcal{AF}}$ definiert sind. Da die Zielgrößen nicht analytisch berechenbar sind, müssen sie mit Quadraturverfahren abgeschätzt werden. Das im folgenden für die Zielgrößen $P_{\mathcal{RG}}$ und $P_{\mathcal{AF}}$ hergeleitete

¹Die an eine Metrik gestellten Bedingungen sind in Anhang A.5 auf Seite 104 aufgeführt.

Verfahren kann für die Bewertung eines Testentwurfs mit den Zielgrößen $P_{\widehat{\mathcal{RG}}}$ und $P_{\widehat{\mathcal{AF}}}$ um Messfehler erweitert werden. Für die statistischen Parameter s wird wieder von den in Kapitel 2.5.2 eingeführten Koordinaten ausgegangen.

Im Vergleich zu der Abschätzung der Zielgrößen mit dem Importance Sampling Verfahren aus Kapitel 3.2 können mit dem im vorhergehenden Kapitel erarbeiteten Problemwissen die Zielgrößen effizienter abgeschätzt werden. Erstens lässt sich mit dem Wissen über die Integrationsgebiete \mathcal{RG} und \mathcal{AF} das Gebiet der Parameter s in dem die Betriebseigenschaft und die Testbeobachtungen simuliert werden im Vergleich zu dem in Kapitel 3.2 vorgestellten Monte-Carlo-Verfahren auf den relevanten Bereich beschränken. Und zweitens lässt sich das Integral der Zielgrößen teilen und in einer Dimension analytisch berechnen. Der mit Quadraturverfahren abzuschätzende, verbleibende Integralanteil der Zielgrößen reduziert sich um eine Dimension. Dies trägt speziell bei stochastischen Quadraturverfahren zur Reduktion der Varianz der Schätzung bei [Fis99] und hilft so den Simulationsaufwand zu reduzieren.

Die Integrationsgebiete der abzuschätzenden Zielgrößen $P_{\mathcal{RG}}$ und $P_{\mathcal{AF}}$ werden durch zwei Flächen begrenzt, die einerseits durch die Menge der Grenzparametersätze zur Betriebsspezifikation \mathcal{S}_θ aus Gleichung (2.72) und andererseits durch die Menge der Grenzparametersätze zur Testspezifikation \mathcal{S}^t aus Gleichung (2.26) beschrieben werden. Für die Schätzung der Zielgrößen ist dieses Integrationsgebiet zu erfassen. Dazu ist von Vorteil, dass die beiden nichtlinearen Flächen im relevanten Bereich hoher Wahrscheinlichkeitsdichte nahe ihrer aus dem vorhergehenden Kapitel bekannten Linearisierungen verlaufen. Einzelne Grenzparametersätze können deshalb robust durch Suchverfahren senkrecht zu den Linearisierungen bestimmt werden.

Die beiden Linearisierungen konnten in den Gleichungen (4.22) und (4.36) alleine durch die Koordinate s_1 ausgedrückt werden. Wie anschließend gezeigt wird, lässt sich der eindimensionale Integralanteil der Zielgrößen senkrecht zu den beiden Linearisierungen, also per Integration nach s_1 , mit hoher Genauigkeit berechnen. Die dazu benötigten Integrationsgrenzen, die beiden Grenzparametersätze der Betriebs- und der Testspezifikation, können durch ein Beschränken des Suchraums auf eine eindimensionale, zur s_1 -Achse parallelen Gerade $s(s_1) = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_{2:n_s} \end{bmatrix}$ durch Interpolationsverfahren effizient bestimmt werden. Für die Integration nach den verbleibenden $n_s - 1$ Koordinaten $s_{2:n_s}$ können stochastische oder deterministische Quadraturverfahren gewählt werden. Die Stützstellen zu den Koordinaten $s_{2:n_s}$ dieses Integrationsverfahrens geben die Lage für mehrere zur s_1 -Achse parallele Geraden vor. Zu jeder dieser Geraden bzw. für jeden Koordinatensatz $s_{2:n_s}$ werden die Koordinaten s_g und s_t so bestimmt, dass $\begin{bmatrix} s_g \\ s_{2:n_s} \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} s_t \\ s_{2:n_s} \end{bmatrix}$ Grenzparametersätze der Betriebs- bzw. der Testspezifikation sind:

$$\begin{bmatrix} s_g \\ s_{2:n_s} \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_\theta, \quad \begin{bmatrix} s_t \\ s_{2:n_s} \end{bmatrix} \in \mathcal{S}^t. \quad (5.14)$$

Die Integrationsgrenzen des Integrals nach s_1 : s_g und s_t ergeben sich als nahezu senkrechter Schnitt der durch $s(s_1) = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_{2:n_s} \end{bmatrix}$ gegebenen Geraden mit den Flächen der Grenzparametersätze \mathcal{S}_θ bzw. \mathcal{S}^t . Die ermittelten Werte sind deshalb sehr genau.

Je nachdem, ob $s_g < s_t$ oder $s_g > s_t$ ist, trägt das Intervall $[s_g, s_t]$ bzw. $[s_t, s_g]$ zur Zielgröße Fehlerdurchlässigkeit $P_{\mathcal{AF}}$ oder Ausbeuteeinbuße $P_{\mathcal{RG}}$ bei. Die beiden Fälle sind in Abbildung 5.1 für den oben gekennzeichnet Ausschnitt der Wahrscheinlichkeitsdichte $\text{pdf}^N(s) = \text{pdf}_{n_s-1}^N(s_{2:n_s}) \text{pdf}_1^N(s_1)$ mit $\text{pdf}_{n_s-1}^N(s_{2:n_s}) = \text{konst}$ veranschaulicht.

Wird das Integral nach s_1 an den Stützstellen $s_{2:n_s,i}$, mit $i = 1, \dots, p$ ausgewertet, wobei $s_{t,i}$

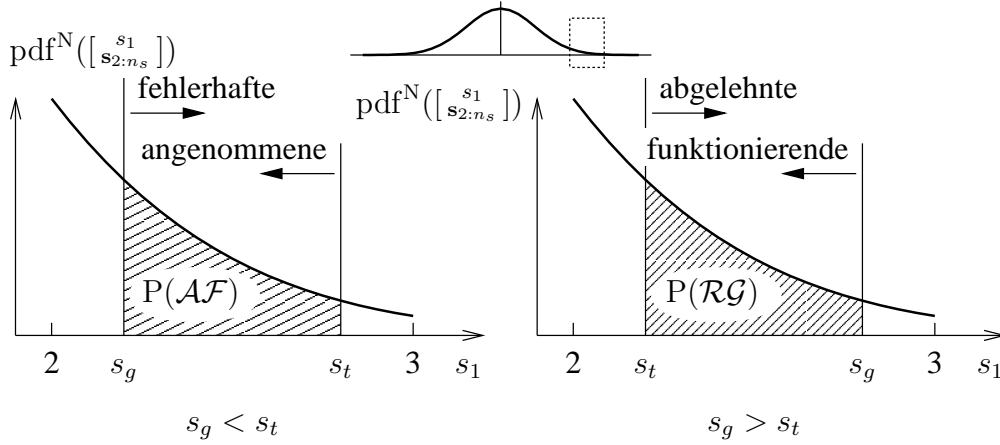


Abbildung 5.1: Zuordnung der Integrationsbereiche zu den Zielgrößen.

und $s_{g,i}$ die zugehörigen Integrationsgrenzen bezeichnen, dann können die Zielgrößen durch

$$\hat{P}_{\mathcal{RG}} = \sum_{i=1}^p W_i \begin{cases} 0 & s_{g,i} \leq s_{t,i} \\ \int_{s_{t,i}}^{s_{g,i}} \text{pdf}^N(s_1) \partial s_1 & s_{t,i} < s_{g,i}, \end{cases} \quad (5.15)$$

$$\hat{P}_{\mathcal{AF}} = \sum_{i=1}^p W_i \begin{cases} 0 & s_{t,i} \leq s_{g,i} \\ \int_{s_{g,i}}^{s_{t,i}} \text{pdf}^N(s_1) \partial s_1 & s_{g,i} < s_{t,i}. \end{cases} \quad (5.16)$$

abgeschätzt werden. Die Gewichte W_i ergeben sich aus dem Quadraturverfahren für den Integralanteil nach $s_{2:n_s}$. Für ein einfaches Monte-Carlo-Verfahren, bei dem die Punkte $s_{2:n_s,i}$ aus der Normalverteilung $N_{n_s-1}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ erzeugt werden, gilt z. B. $W_i = \frac{1}{p}$, $i = 1, \dots, p$. Effizientere stochastische Verfahren für die Integration nach $s_{2:n_s}$ werden in [GM98] vorgestellt. Ein deterministisches Quadraturverfahren wird im nachfolgenden Kapitel 6 vorgestellt. Die Fallunterscheidung dient der in Abbildung 5.1 verdeutlichten Zuordnung eines Integrationsbereichs zur jeweiligen Zielgröße.

Zur Berechnung werden die beiden Integrale von $\text{pdf}^N(s_1)$ über den Intervallen $[s_t, s_g]$ bzw. $[s_g, s_t]$ durch $\text{cdf}^N(s_g) - \text{cdf}^N(s_t)$ bzw. $\text{cdf}^N(s_t) - \text{cdf}^N(s_g)$ ersetzt:

$$\hat{P}_{\mathcal{RG}} = \sum_{i=1}^p W_i \begin{cases} 0 & s_{g,i} \leq s_{t,i} \\ \text{cdf}^N(s_{g,i}) - \text{cdf}^N(s_{t,i}) & s_{t,i} < s_{g,i}, \end{cases} \quad (5.17)$$

$$\hat{P}_{\mathcal{AF}} = \sum_{i=1}^p W_i \begin{cases} 0 & s_{t,i} \leq s_{g,i} \\ \text{cdf}^N(s_{t,i}) - \text{cdf}^N(s_{g,i}) & s_{g,i} < s_{t,i}. \end{cases} \quad (5.18)$$

Im Weiteren wird das Bestimmen der Koordinaten s_g und s_t der Grenzparametersätze zu vorgegebenen Koordinaten $s_{2:n_s}$ beschrieben. Die eingangs erwähnte Abschätzung der Zielgrößen unter Berücksichtigung von Messfehlern $P_{\mathcal{AF}}$ und $P_{\mathcal{RG}}$ wird erst in Kapitel 6.1 beschrieben.

5.2.1 Bestimmen der Integrationsgrenze s_g

Die Koordinate s_g soll so bestimmt werden, dass der Parametersatz $[s_{2:n_s}^{s_g}]$ der vorgegebenen Gerade $s(s_1) = [s_{2:n_s}^{s_1}]$ ein Grenzparametersatz der Betriebsspezifikation $[s_{2:n_s}^{s_g}] \in \mathcal{S}_\theta$ aus Gleichung (2.72) ist. Um den Simulationsaufwand zu begrenzen, wird die Betriebseigenschaft f entlang der

Geraden $\mathbf{s}(s_1) = \begin{bmatrix} s_1 \\ \mathbf{s}_{2:n_s} \end{bmatrix}$ in der Umgebung der Ebene $s_1 = \beta_W$ aus Gleichung (4.22) interpoliert.² Der s_1 -Wert innerhalb des Interpolationsintervalls an dem das Interpolationsmodell von f den Spezifikationswert f_B annimmt, ist dann die gesuchte Koordinate s_g .

Die zur Interpolation verwendete Funktion ist passend zum Eigenschaftsverlauf der Betriebseigenschaft zu wählen. Für die in dieser Arbeit präsentierten Beispiele eignen sich Polynome zweiten Grades:

$$\check{f}(s_1) = as_1^2 + bs_1 + c, \quad \check{f}, a, b, c \in \mathbb{R}. \quad (5.19)$$

Um die Unbekannten a , b und c zu bestimmen, werden drei Stützstellen $s_{1,j}$, $j = 1, 2, 3$ und die zugehörigen Stützwerte $f_j = f(\begin{bmatrix} s_{1,j} \\ \mathbf{s}_{2:n_s} \end{bmatrix})$, $j = 1, 2, 3$, die durch Simulation bestimmt werden, benötigt. Bei der Interpolation nimmt das Polynom an den Stützstellen exakt die Stützwerte an, so dass sich die Unbekannten aus den Bedingungen $\check{f}(s_{1,j}) = f_j$, $j = 1, 2, 3$ bestimmen lassen. Verfahren hierzu sind in Anhang A.6 beschrieben.

Aus praktischer Erfahrung erscheint die Wahl einer Stützstelle in der Ebene $s_1 = \beta_W$ und der beiden anderen mit einem Abstand von einem Sigma davon sinnvoll:

$$s_{1,1} = \beta_W - 1 < s_{1,2} = \beta_W < s_{1,3} = \beta_W + 1. \quad (5.20)$$

Im praktisch relevanten Fall gilt für die zugehörigen Stützwerte $f_1 < f_2 < f_3$. Um Extrapolation zu vermeiden, muss für die Stützwerte außerdem $f_1 \leq f_B \leq f_3$ gelten. In seltenen Fällen ist der Abstand der Stützstellen zu vergrößern oder das Intervall geeignet zu verschieben.

Die Koordinate s_g des Grenzparametersatzes ergibt sich gemäß Gleichung (2.72) durch Lösen von

$$\check{f}(s_g) = f_B \quad \wedge \quad s_g \in [s_{1,1}, s_{1,3}]. \quad (5.21)$$

5.2.2 Bestimmen der Integrationsgrenze s_t

Die Aufgabe die Koordinate s_t zu bestimmen, ähnelt dem für s_g beschriebenen Ansatz. Da die Testeigenschaft t jedoch eine Linearkombination der Testbeobachtungen \mathbf{o} ist, wird hier zunächst jede Testbeobachtung o , genauso wie oben die Betriebseigenschaft f , durch ein Polynom zweiter Ordnung interpoliert. Diese n_o verschiedenen und voneinander unabhängigen Modelle können in Vektorschreibweise zusammengefasst werden:

$$\check{\mathbf{o}}(s_1) = \mathbf{a}s_1^2 + \mathbf{b}s_1 + \mathbf{c}, \quad \check{\mathbf{o}}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n_o}. \quad (5.22)$$

Zur Interpolation werden für alle Testbeobachtungen \mathbf{o} dieselben Stützstellen wie bei der Interpolation der Betriebseigenschaft verwendet. Die Unbekannten \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} ergeben sich mit den Stützwerten $\mathbf{o}_j = \mathbf{o}(\begin{bmatrix} s_{1,j} \\ \mathbf{s}_{2:n_s} \end{bmatrix})$, $j = 1, 2, 3$ entsprechend aus den Bedingungen: $\check{\mathbf{o}}(s_{1,j}) = \mathbf{o}_j$, $j = 1, 2, 3$.

Aus den Interpolationsmodellen der Testbeobachtungen wird dann die interpolierte Testeigenschaft t berechnet. Sie ist ebenfalls ein Polynom zweiten Grades:

$$t(\check{\mathbf{o}}(s_1), \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \check{\mathbf{o}}(s_1) = (\mathbf{x}^T \mathbf{a}) s_1^2 + (\mathbf{x}^T \mathbf{b}) s_1 + (\mathbf{x}^T \mathbf{c}). \quad (5.23)$$

Damit wird die gesuchte Koordinate s_t gemäß Gleichung (2.26), genauso wie s_g mit (5.21), durch

$$t(\check{\mathbf{o}}(s_t), \mathbf{x}) = t_B \quad \wedge \quad s_t \in [s_{1,1}, s_{1,3}]. \quad (5.24)$$

bestimmt.

²Die eindimensionale Modellierung der Betriebseigenschaft entlang der zur s_1 -Achse parallelen Geraden erfolgt für jeden Parametersatz $\mathbf{s}_{2:n_s,i}$, $i = 1, \dots, p$ extra. Dies hat im Vergleich zu einem mehrdimensionalen Modell über den gesamten Raum der statistischen Parameter \mathbf{s} den Vorteil einer wesentlich höheren Genauigkeit.

Zusammenfassend lässt sich zum Simulationsaufwand feststellen, dass sich die beiden Grenzparametersätze $[\mathbf{s}_{2:n_s}^{s_g}] \in \mathcal{S}_\theta$ und $[\mathbf{s}_{2:n_s}^{s_t}] \in \mathcal{S}^t$ zu dem vorgegebenen Koordinatensatz $\mathbf{s}_{2:n_s}$ mit insgesamt drei Simulationen bestimmen lassen. Der Simulationsaufwand steigt mit zunehmender Anzahl Summanden p in den Gleichungen (5.15) und (5.16) linear an.

5.2.3 Anmerkung zum Thema Ausbeuteschätzung

Mit den zur Bewertung eines Testentwurfs ermittelten Grenzparametersätzen $[\mathbf{s}_{2:n_s,i}^{s_{g,i}}]$, $i = 1, \dots, p$ kann die parametrische Ausbeute Y aus Gleichung (2.29), also die Wahrscheinlichkeit für das Herstellen einer funktionierenden Schaltung bezüglich einer Spezifikation, mit

$$Y = P(\mathcal{G}) = \int_{\mathcal{G}} \text{pdf}^N(\mathbf{s}) \partial \mathbf{s} \approx \sum_{i=1}^n W_i \int_{-\infty}^{s_{g,i}} \text{pdf}^N(s_1) \partial s_1 = \sum_{i=1}^n W_i \text{cdf}^N(s_{g,i}) \quad (5.25)$$

abgeschätzt werden. Das durch \mathcal{G} gegebene Integrationsgebiet $s_1 \leq s_{g,i}$ wurde bereits zur Abschätzung der Ausbeuteeinbuße $\hat{P}_{\mathcal{R}\mathcal{G}}$ benötigt und ist aus Abbildung 5.1 ersichtlich. Für W_i gilt das zu den Gleichungen (5.15) und (5.16) geschriebene.

Im Vergleich zu den Verfahren mit Worst-Case-Abständen [AGW94, Grä93, Wie94, SGA99, AEG⁺00, SPZ⁺01], bei denen Y aus Gleichung (2.29) mit dem linear angenäherten Gebiet \mathcal{G} aus Gleichung (4.21) abgeschätzt wird, wird in Gleichung (5.25) der nichtlineare Verlauf der Betriebseigenschaft berücksichtigt. Während beim Toleranzentwurf die Auswirkung des Linearisierungsfehlers in Bezug auf die Auftrittswahrscheinlichkeit der Menge der funktionierenden Schaltungen \mathcal{G} aus Gleichung (2.18) vernachlässigt werden kann, fällt er beim Testentwurf bei den wesentlich kleineren Auftrittswahrscheinlichkeiten der Fehlentscheidungen bezüglich der Mengen $\mathcal{R}\mathcal{G}$ und $\mathcal{A}\mathcal{F}$ ins Gewicht.

Die Abschätzung der Ausbeute bezüglich aller Spezifikationen $Y^* = P(\mathcal{G}^*)$ kann in Anlehnung an das von Feldmann und Director [FD93] vorgeschlagene Verfahren erfolgen. Mit dem Divergenzsatz von Gauß wird dort das Volumenintegral der Ausbeute aus Gleichung (2.27) in ein Oberflächenintegral des Gebiets \mathcal{G}^* umgewandelt, das mit stochastischen Quadraturverfahren abgeschätzt wird. Unter Verwendung der hier eingeführten Notation wird dazu im Raum der statistischen Parameter \mathbb{R}^{n_s} eine Stichprobe \mathbf{s}_i , $i = 1, \dots, p$ gemäß der Normalverteilung $N_{n_s}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ erzeugt und dann per Liniensuche entlang von zu allen Koordinatenachsen parallelen Geraden durch die Stichprobenelemente $\mathbf{s}(x) = x\mathbf{e}_j + \mathbf{s}_i$, $j = 1, \dots, n_s$ und $i = 1, \dots, p$ die Grenzparametersätze der Betriebsspezifikation an der Oberfläche des Gebiets \mathcal{G}^* bestimmt.

In [FD93] wird das durch Worst-Case-Parametersätze vorhandene Problemwissen nicht genutzt. Dadurch ergeben sich bei der Bestimmung der Grenzparametersätze wesentliche Unterschiede. Im Gegensatz zu [FD93] wird in dieser Arbeit die Suchrichtung für die Grenzparametersätze systematisch bestimmt. Die in Kapitel 2.5.2 beschriebene Wahl des Koordinatensystems erfolgt spezifikationsweise und anhand des Worst-Case-Parametersatzes \mathbf{s}_W . Das in [FD93] beschriebene Problem mit Suchrichtungen nahezu parallel zu den Grenzparametersätzen kann hier nicht auftreten, da hier s_g fast senkrecht zu der Fläche \mathcal{S}_θ aus Gleichung (2.72) bestimmt wird. Da die ungefähre Lage der Grenzparametersätze durch die Linearisierung \mathcal{S}_θ aus Gleichung (4.22) bekannt ist, kann ferner der Suchraum auf der Geraden zur Reduktion des Simulationsaufwands stark auf die Umgebung der Ebene $s_1 = \beta_W$ eingeschränkt werden. Dies ermöglicht außerdem statt der lokalen, mehrdimensionalen Modelle in [FD93, FD91] wesentlich genauere eindimensionale Interpolationsverfahren zu verwenden.

5.3 Kostenoptimales Justieren der Testspezifikation

Wie in Kapitel 4.3 erläutert, hat das Justieren das Ziel die durch Fehlentscheidungen beim Test entstehenden Kosten bezüglich der konkurrierenden Größen Ausbeuteeinbuße $P_{\mathcal{RG}}$ und Fehlerdurchlässigkeit $P_{\mathcal{AF}}$ zu minimieren. Wie in Gleichung (4.34) kann dazu additiv ein Justierparameter in Gleichung (5.3) eingeführt werden:

$$t_B = f_B - k + \sigma_{\bar{f}} \beta_{\Delta}. \quad (5.26)$$

Damit hängen die Koordinaten $s_{t,i}$ der Grenzparametersätze nach Gleichung (5.24) vom Justierparameter β_{Δ} ab. Da die Nichtlinearität der Betriebseigenschaft bei $\hat{P}_{\mathcal{RG}}$ und $\hat{P}_{\mathcal{AF}}$ berücksichtigt wird, werden bei einer Änderung von t_B über β_{Δ} die Grenzparametersätze \mathcal{S}^t nur näherungsweise parallel verschoben. Die Koordinaten $s_{t,i}$ sind folglich abhängig von β_{Δ} zu bestimmen. Da die Koordinate s_t der Grenzparametersätze durch Interpolation bestimmt wird, fällt zum Justieren, zumindest solange die Interpolationsintervalle nicht verlassen werden, kein zusätzlicher Simulationsaufwand an. Für die Zielgrößen aus den Gleichungen (5.17) und (5.18) gilt damit:

$$\hat{P}_{\mathcal{RG}}(\beta_{\Delta}) = \sum_{i=1}^p W_i \begin{cases} 0 & s_{g,i} \leq s_{t,i}(\beta_{\Delta}) \\ \text{cdf}^N(s_{g,i}) - \text{cdf}^N(s_{t,i}(\beta_{\Delta})) & s_{t,i}(\beta_{\Delta}) < s_{g,i}, \end{cases} \quad (5.27)$$

$$\hat{P}_{\mathcal{AF}}(\beta_{\Delta}) = \sum_{i=1}^p W_i \begin{cases} 0 & s_{t,i}(\beta_{\Delta}) \leq s_{g,i} \\ \text{cdf}^N(s_{t,i}(\beta_{\Delta})) - \text{cdf}^N(s_{g,i}) & s_{g,i} < s_{t,i}(\beta_{\Delta}). \end{cases} \quad (5.28)$$

Das Optimierziel kann z. B. mit der Kostenfunktion K aus Gleichung (2.66) abhängig von den Zielgrößen $\hat{P}_{\mathcal{RG}}$ und $\hat{P}_{\mathcal{AF}}$ formuliert werden:

$$\min_{\beta_{\Delta}} K(\hat{P}_{\mathcal{RG}}(\beta_{\Delta}), \hat{P}_{\mathcal{AF}}(\beta_{\Delta}), \nu). \quad (5.29)$$

Ein Justieren der Testspezifikation unter Berücksichtigung des Messfehlers kann entsprechend mit der in Kapitel 6.1 beschriebenen Abschätzung der messfehlerbehafteten Zielgrößen erfolgen.

5.4 Berechnen einer Testspezifikation

Vorbereitend werden, wie in Kapitel 4.5 beschrieben, die Linearisierungen der Betriebseigenschaft und der Testbeobachtungen der Gleichungen (4.1) und (4.5) bestimmt und die Standardisierungen durchgeführt.

Um Simulationen einzusparen, können zur Approximation dieselben Simulationenpunkte verwendet werden wie zum Bestimmen der Grenzparametersätze beim anschließenden Justieren oder Bewerten. Da es nicht schwer sein dürfte für das Approximieren und das Justieren bzw. Bewerten verschiedene Stützpunkte zu verwenden, wird nachfolgend der vereinende Ansatz beschrieben. Dabei stellt die Interpolation beim Justieren höhere Anforderungen an die Wahl der Stützpunkte. Es wird deshalb aus der Sicht des Justierens beschrieben und der Simulationsplan dann für das Approximieren übernommen.

Zuerst werden für das stochastische oder deterministische Quadraturverfahren p Stützstellen $s_{2:n_s,i}$ bestimmt. Für die anschließenden Ergebnisse wurde eine Stichprobe der Mächtigkeit p aus der Normalverteilung $N_{n_s-1}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ gezogen. Weitere Verfahren werden z. B. in [GM98] diskutiert. Für die Gewichte W_i aus den Gleichungen (5.15) und (5.16) gilt dann $W_i = \frac{1}{p}$, $i = 1, \dots, p$. Anschließend sind die Stützstellen um die Koordinate s_1 zu ergänzen. Da für die Interpolation beim

Justieren und gleichermaßen für die Approximation der Bereich zwischen den Grenzparametersätzen der Betriebs- und der Testspezifikation relevant ist, dürften Simulationspunkte auf der Linearisierung der Betriebseigenschaft sowie beidseitig in einem Abstand von einem Sigma davon: $\left[\begin{smallmatrix} \beta_W - 1 \\ \mathbf{s}_{2:n_s,i} \end{smallmatrix} \right]$, $\left[\begin{smallmatrix} \beta_W \\ \mathbf{s}_{2:n_s,i} \end{smallmatrix} \right]$, $\left[\begin{smallmatrix} \beta_W + 1 \\ \mathbf{s}_{2:n_s,i} \end{smallmatrix} \right]$, $i = 1, \dots, p$ für die meisten Testentwürfe geeignet sein. Für die ermittelten $3p$ Simulationspunkte werden dann die Betriebseigenschaft f und die Testbeobachtungen \mathbf{o} simuliert. Dabei sind Transformationen zu den Standardisierungen aus Kapitel 4.5 entsprechend zu berücksichtigen.

Der Entwurf der Testspezifikation erfolgt dann folgendermaßen: Zur Approximation wird das Gleichungssystem (5.8) für die $3p$ Simulationspunkte aufgestellt und mit Gleichung (5.9) bzw. (5.13) die Parameter \mathbf{x} und k bestimmt. t_B wird mit Gleichung (5.3) berechnet.

Für das Bewerten des Testentwurfs werden zunächst die Integrationsgrenzen der Integration in s_1 nach Kapitel 5.2.1 bzw. 5.2.2 bestimmt. Die Zielgrößen \hat{P}_{RG} und \hat{P}_{AF} ergeben sich dann als gewichtete Summe dieser Integrale nach den Gleichungen (5.17) und (5.18).

Beim Justieren der Testspezifikation ändern sich die Grenzparametersätze der Testspezifikation und damit die Integrationsgrenzen $s_{t,i}$ der Integrale in s_1 . Sie sind deshalb mit dem Interpolationsverfahren abhängig von β_Δ zu bestimmen. Das Minimieren der Kosten nach Gleichung (5.29) kann wie in Kapitel 4.5 z. B. graphisch, mit dem Intervallhalbierungsverfahren oder dem Goldenen-Schnitt-Algorithmus erfolgen.

5.5 Experimentelle Ergebnisse

Alle in dieser Arbeit vorgestellten Testentwurfsverfahren profitieren auf verschiedene Weise von der Linearisierung der Betriebseigenschaft im Worst-Case-Parametersatz \mathbf{s}_W . Die nach Kapitel 5.2.1 bestimmten Grenzparametersätze $\left[\begin{smallmatrix} s_{g,i} \\ \mathbf{s}_{2:n_s,i} \end{smallmatrix} \right]$ schaffen nun die Möglichkeit zu überprüfen, wie gut die Linearisierung \bar{f} nach Gleichung (4.1) mit dem nichtlinearen Verlauf der Betriebseigenschaft f übereinstimmt. Dies wird in Abschnitt 5.5.1 untersucht. In Abschnitt 5.5.2 folgen die Ergebnisse zu dem eben vorgestellten Testentwurfsverfahren, das im weiteren mit APP-V bezeichnet wird, und in Abschnitt 5.5.3 eine Untersuchung zum Einfluss des Messfehlers auf die Zielgrößen.

5.5.1 Linearisierung \bar{f}

In Abschnitt 4.5 werden zur Bestimmung der Linearisierung \bar{f} nach Gleichung (4.1) drei Verfahren genannt. Erstens besteht die Möglichkeit, dass der Simulator den zur Simulation benötigten Gradienten f_s ausgibt. Da dies vom verwendeten Simulator nicht unterstützt wird, kann diese Methode nicht in die folgende Untersuchung eingehen. Zweitens kann der Gradient über Differenzenquotienten berechnet werden, im folgenden mit Δ -V bezeichnet, und drittens folgt der Gradient aus dem Lagrange-Ansatz zur Bestimmung des Worst-Case-Parametersatzes, hier mit \mathcal{L} -V gekennzeichnet.

Für die Ergebnisse in Tabelle 5.1 wurde die Linearisierung \bar{f} einmal mit Δ -V und zum Vergleich einmal mit \mathcal{L} -V ermittelt. In der Tabelle ist jeweils die Summe der Abstandsquadrate aller Grenzparametersätze $\left[\begin{smallmatrix} s_{g,i} \\ \mathbf{s}_{2:n_s,i} \end{smallmatrix} \right]$ der nichtlinearen Betriebsspezifikation von der mit Δ -V bzw. \mathcal{L} -V bestimmten Ebene der linearisierten Betriebsspezifikation angegeben. Je kleiner diese Summe ist, desto besser ist die Linearisierung für den Testentwurf geeignet. Zum Bestimmen der Grenzparametersätze wurde wie in Abschnitt 5.4 beschrieben vorgegangen. Während mit \mathcal{L} -V der Gradient die sehr genaue Lösung eines Optimierproblems ist, wird mit dem Differenzenquotienten der Eigenschaftsverlauf der nichtlinearen Betriebseigenschaft f durch die Auslenkung nicht nur

f	\mathcal{L} -V	Δ -V	\angle	f	\mathcal{L} -V	Δ -V	\angle
A_0	3,68	3,55	3,4°	A_0	4,44	2,76	14,9°
GBW	0,83	0,74	1,3°	f_{3dB}	1,82	1,58	2,6°
Φ_M	0,63	0,55	0,9°	f_t	0,40	0,36	0,6°
power	0,15	0,13	0,3°	GM	1,71	1,79	1,1°
PSRR	1,71	1,29	3,0°	Φ_M	1,34	1,09	0,9°
SR_f	0,35	0,27	0,6°	PSRR	5,65	0,79	0,9°
SR_r	0,06	0,06	0,1°	power	1,07	0,49	2,2°
				SR_r	0,66	0,62	0,9°

(a) M-OP

(b) F-OP

Tabelle 5.1: Quadratsumme der Abstände zwischen den Grenzparametersätzen $\begin{bmatrix} s_{g,i} \\ s_{2:n_s,i} \end{bmatrix}$ der nicht-linearen Betriebsspezifikation und deren Linearisierung. Bestimmung der Linearisierung mit Differenzenquotienten: Δ -V bzw. aus dem Lagrange-Ansatz: \mathcal{L} -V. Unter \angle ist der Winkel zwischen den Gradienten f_s der beiden Berechnungsmethoden Δ -V und \mathcal{L} -V in DEG angegeben.

in s_W sondern über einen größeren Bereich berücksichtigt.³ Wie das Experiment zeigt, hat für den Testentwurf letzteres eine größere Bedeutung. In Abbildung 5.2 werden die Daten aus Tabelle 5.1 graphisch miteinander verglichen, wobei \mathcal{L} -V 100% entspricht. Mit der Ausnahme von F-OP.GM

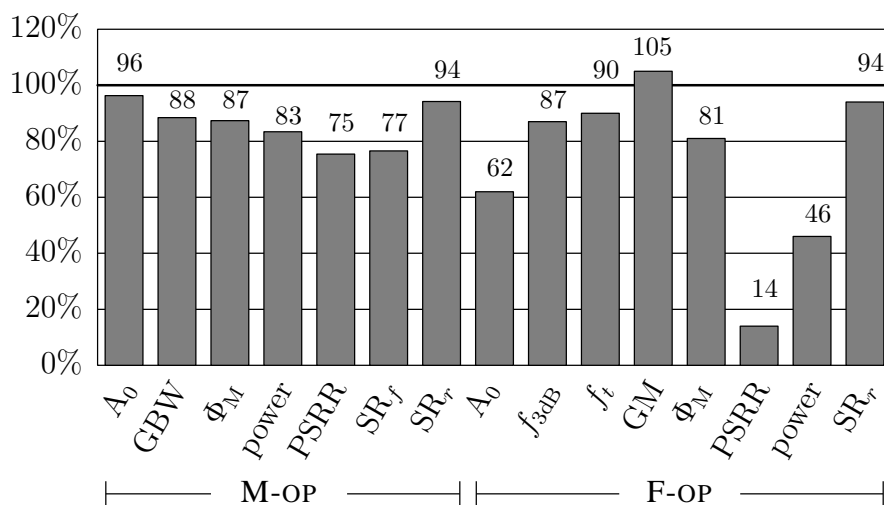


Abbildung 5.2: Vergleich der Quadratsummen der Abweichungen der Verfahren Δ -V und \mathcal{L} -V (100%).

nähert die Linearisierung mit Δ -V den nichtlinearen Verlauf von f besser an als die Linearisierung mit \mathcal{L} -V. Während für eine vereinfachte Darstellung der Testentwurfsverfahren einheitlich \mathcal{L} -V gewählt wurde, kam bei den Experimenten durchwegs Δ -V zum Einsatz.

Der Winkel zwischen den Gradienten f_s der beiden mit Δ -V bzw. \mathcal{L} -V bestimmten Linearisierungen, die ja Normalenvektoren zur Ebene der linearisierten Grenzparameter sind, ist in Tabelle

³Beim Verfahren mit Differenzenquotienten wird der Eigenschaftsverlauf zunächst mit einem Polynom hier 2-ten Grades modelliert und dann das Modell in s_W linearisiert.

5.1 unter \angle in DEG angegeben. Es ist zu erkennen, dass der Winkel meist im Bereich von nur einem Grad liegt.

Beim Toleranzentwurf ist der systematische Fehler durch die Linearisierung der Betriebsspezifikation vernachlässigbar. Er wirkt sich, wie aus Tabelle 5.2 ersichtlich, kaum auf die Abschätzung der Ausbeute aus. Es werden die Abschätzungen der Ausbeute $Y(\mathcal{G})$ nach Gleichung (5.25), bei der die Nichtlinearität der Betriebsspezifikation berücksichtigt wird, und $Y(\beta_W)$ nach Gleichung (4.41) mit linearisierter Betriebsspezifikation miteinander verglichen.

f	$Y(\mathcal{G})$	$Y(\beta_W)$	f	$Y(\mathcal{G})$	$Y(\beta_W)$
A ₀	0,999990	0,999996	A ₀	0,9933	0,9939
GBW	0,99966	0,99968	GM	0,9984	0,9983
Φ_M	0,99962	0,99961	f_t	0,999982	0,999982
SR _f	0,999985	0,999986	f_{3dB}	0,9986	0,9983
SR _r	0,985	0,985	Φ_M	0,99922	0,99933
PSRR	0,99925	0,99933	SR _r	0,9982	0,9981
power	0,9982	0,9981	PSRR	0,999954	0,999956
			power	0,9983	0,9981

(a) M-OP

(b) F-OP

Tabelle 5.2: Vergleich der Ausbeuteschätzungen $Y(\mathcal{G})$ und $Y(\beta_W)$ mit und ohne Berücksichtigung der Nichtlinearität nach den Gleichung (5.25) und (4.41).

Während zum Toleranzentwurf die Ausbeute maximiert wird, werden die Ausbeuteeinbuße und die Fehlerdurchlässigkeit beim Testentwurf minimiert. Weil diese Zielgrößen wesentlich kleiner als die Ausbeute sind, wirkt sich der systematische Fehler stärker auf die Zielgrößen aus als auf die Ausbeute. Dies wurde bereits in Kapitel 4.6.3 untersucht und gezeigt.

Die Abschätzung der Ausbeute $Y(\mathcal{G})$ nach Gleichung (5.25) ist, genauso wie die Testentwurfsverfahren in diesem und dem nächsten Kapitel, abhängig von der Genauigkeit mit der die Grenzparameter $\left[\begin{smallmatrix} s_{g,i} \\ s_{2:n_s,i} \end{smallmatrix} \right]$ bestimmt werden können. Zur Kontrolle kann die Betriebseigenschaft in den Grenzparametersätzen simuliert $f\left(\left[\begin{smallmatrix} s_{g,i} \\ s_{2:n_s,i} \end{smallmatrix} \right]\right)$ und mit dem Spezifikationswert f_B verglichen werden. Bei allen Betriebsspezifikationen der beiden Beispielschaltungen stimmt $f\left(\left[\begin{smallmatrix} s_{g,i} \\ s_{2:n_s,i} \end{smallmatrix} \right]\right)$ präzise mit f_B überein.⁴ Dazu trägt wesentlich die Verwendung eindimensionaler Modelle im Verfahren nach Kapitel 5.2.1 bei.

5.5.2 Testentwurf

Bei den Testentwürfen wurde wie in Abschnitt 5.4 beschrieben vorgegangen. Für den Unterraum parallel zur Linearisierung wurde der Monte-Carlo-Ansatz verwendet. Im Hinblick auf Vergleichsmöglichkeiten mit dem Verfahren im nächsten Kapitel, wurde dabei für die Stichprobenmächtigkeit $p = 361$ gewählt. Zum Justieren wurde die aus Gleichung (4.45) bekannte Kostenfunktion jedoch mit den Zielgrößen diese Kapitels aus den Gleichungen (5.27) und (5.28) verwendet:

$$\hat{K}_{C_t \rightarrow 0} = K \left(\hat{P}_{\mathcal{RG}}, \hat{P}_{\mathcal{AF}}, \frac{1}{11} \right) = \frac{1}{11} (\hat{P}_{\mathcal{RG}} + 10 \hat{P}_{\mathcal{AF}}). \quad (5.30)$$

⁴Gleiches wurde für die Testeigenschaft t an den nach Kapitel 5.2.2 bestimmten Grenzparametersätzen der Testspezifikation $f\left(\left[\begin{smallmatrix} s_{t,i} \\ s_{2:n_s,i} \end{smallmatrix} \right]\right)$ und den Grenzwert der Testspezifikation t_B festgestellt.

Da das Justieren auch mit den noch herzuleitenden messfehlerbehafteten Zielgrößen $\hat{P}_{\mathcal{RG}}$ und $\hat{P}_{\mathcal{AF}}$ aus Kapitel 6.1 möglich ist, werden die Ergebnisse damit zum Vergleich im folgenden gleich mit aufgeführt. Für den Vergleich ist dabei vollkommen ausreichend zu wissen, dass bei den Zielgrößen $\hat{P}_{\mathcal{RG}}$ und $\hat{P}_{\mathcal{AF}}$ der Messfehler neben der Nichtlinearität der Schaltungseigenschaften f und t mit in die Abschätzung eingeht. Die zugehörige Kostenfunktion ist:

$$\hat{K} = K \left(\hat{P}_{\mathcal{RG}}, \hat{P}_{\mathcal{AF}}, \frac{1}{11} \right) = \frac{1}{11} (\hat{P}_{\mathcal{RG}} + 10 \hat{P}_{\mathcal{AF}}). \quad (5.31)$$

Bewertungen der Testentwürfe sind in den Tabelle 5.3 und 5.4 angegeben. Bei den Ergebnissen der Tabelle 5.3 wurde zum Justieren die messfehlerlose Kostenfunktion $\hat{K}_{C_t \rightarrow 0}$ verwendet. Es sind die messfehlerlosen Größen $\hat{P}_{\mathcal{RG}}$, $\hat{P}_{\mathcal{AF}}$ und $\hat{K}_{C_t \rightarrow 0}$ angegeben. Für Tabelle 5.4 wurde dagegen die messfehlerbehaftete Kostenfunktion \hat{K} verwendet. Entsprechend sind die messfehlerbehafteten Größen $\hat{P}_{\mathcal{RG}}$, $\hat{P}_{\mathcal{AF}}$ und \hat{K} angegeben. Zum Validieren sind in beiden Tabellen außerdem die Kosten der mit dem Validierverfahren VAL-V abgeschätzten Zielgrößen $\ddot{P}_{\mathcal{RG}}$ und $\ddot{P}_{\mathcal{AF}}$ sowie die zugehörigen Kosten nach Gleichung (4.46) angegeben. Dabei werden in beiden Fällen Messfehler berücksichtigt.

f	$\hat{P}_{\mathcal{RG}}$ [ppm]	$\hat{P}_{\mathcal{AF}}$ [ppm]	$\hat{K}_{C_t \rightarrow 0}$ [ppm]	$\ddot{P}_{\mathcal{RG}}$ [ppm]	$\ddot{P}_{\mathcal{AF}}$ [ppm]	\hat{K} [ppm]
A ₀	2,1	0,12	0,3	12	1,4	2,3
GBW	9,4	0,23	1,1	47	29	30
Φ _M	7,7	0,51	1,2	110	40	46
SR _f	1,4	0,04	0,2	0,1	0,0	0,0
SR _r	310	8,4	36	3400	1900	2000
PSRR	5,8	0,06	0,6	34	58	56
power	4,3	9,8	9,3	0,0	0,0	0,0

(a) M-OP

f	$\hat{P}_{\mathcal{RG}}$ [ppm]	$\hat{P}_{\mathcal{AF}}$ [ppm]	$\hat{K}_{C_t \rightarrow 0}$ [ppm]	$\ddot{P}_{\mathcal{RG}}$ [ppm]	$\ddot{P}_{\mathcal{AF}}$ [ppm]	\hat{K} [ppm]
A ₀	2200	130	310	4900	750	1100
GM	150	8,3	21	200	51	64
f_t	0,91	0,02	0,1	3,1	1,4	1,5
f_{3dB}	130	6,7	18	200	73	84
Φ _M	100	4,3	13	110	22	30
SR _r	20	2,7	4,2	91	77	78
PSRR	12	0,33	1,4	53	7,5	12
power	77	2,4	9,2	71	75	74

(b) F-OP

Tabelle 5.3: Bewertung der Testentwürfe. Zum Justieren wurde die *messfehlerlose* Kostenfunktion $\hat{K}_{C_t \rightarrow 0}$ verwendet.

Bei den Ergebnissen mit messfehlerlosen Zielgrößen werden weder beim Approximieren noch beim Justieren mit $\hat{K}_{C_t \rightarrow 0}$ Messfehler berücksichtigt. Dies führt dazu, dass beim Validieren die

Testentwürfe unter Berücksichtigung des Messfehlers mit \ddot{K} meist schlechter bewertet werden. Dass dennoch \ddot{K} in der Hälfte der Fälle kleiner als bei LIN-V aus Tabelle 4.2 ist, zeigt wie wichtig die Berücksichtigung der nichtlinearen Eigenschaftsverläufe der Betriebs- und der Testeigenschaft ist.

f	$\hat{P}_{\overline{\mathcal{R}\mathcal{G}}}$ [ppm]	$\hat{P}_{\overline{\mathcal{A}\mathcal{F}}}$ [ppm]	\hat{K} [ppm]	$\ddot{P}_{\overline{\mathcal{R}\mathcal{G}}}$ [ppm]	$\ddot{P}_{\overline{\mathcal{A}\mathcal{F}}}$ [ppm]	\ddot{K} [ppm]
A_0	13	1,5	2,5	14	1,2	2,4
GBW	140	6,1	19	140	5,8	18
Φ_M	290	16	40	290	11	37
SR_f	1,5	0,05	0,2	0,1	0,0	0,0
SR_r	8800	400	1100	9400	420	1200
PSRR	150	6,1	19	160	6,6	20
power	5,2	11	10	0,0	0,0	0,0

(a) M-OP

f	$\hat{P}_{\overline{\mathcal{R}\mathcal{G}}}$ [ppm]	$\hat{P}_{\overline{\mathcal{A}\mathcal{F}}}$ [ppm]	\hat{K} [ppm]	$\ddot{P}_{\overline{\mathcal{R}\mathcal{G}}}$ [ppm]	$\ddot{P}_{\overline{\mathcal{A}\mathcal{F}}}$ [ppm]	\ddot{K} [ppm]
A_0	6700	390	970	8000	360	1100
GM	470	20	61	400	14	48
f_t	10	0,48	1,4	9,1	0,3	1,1
f_{3dB}	520	20	66	440	18	56
Φ_M	240	9,5	30	200	6,9	25
SR_r	360	15	46	320	11	39
PSRR	42	2,7	6	83	3,8	11
power	350	13	44	220	18	36

(b) F-OP

Tabelle 5.4: Bewertung der Testentwürfe. Zum Justieren wurde die *messfehlerbehaftete* Kostenfunktion \hat{K} verwendet.

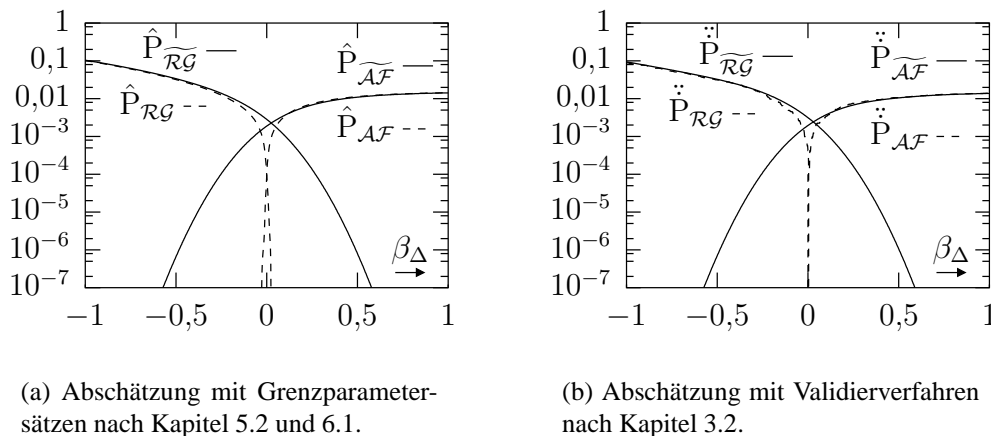
Werden beim Justieren die messfehlerbehafteten Zielgrößen verwendet, verbessern sich die Ergebnisse deutlich. Das ändert jedoch nichts daran, dass bei der Bestimmung der Parameter \mathbf{x} der Messfehler in beiden bisher vorgestellten Verfahren nicht direkt berücksichtigt wird. Da bei der Approximation eine möglichst gute Übereinstimmung von t mit f an mehreren Stützstellen erzwungen wird, kann $\|\mathbf{x}\|$ und damit der Messfehler stark ansteigen. Der Einfluss des Messfehlers konkurriert dabei mit der Approximationsgenauigkeit. Das anschließende Justieren verändert über β_Δ ausschließlich t_B . Auch wenn zum Justieren messfehlerbehaftete Zielgrößen (Tabelle 5.4) verwendet werden, die Varianz des Messfehlers C_t hängt nach Gleichung (2.39) ausschließlich von $\|\mathbf{x}\|$ ab und kann durch das Justieren nicht beeinflusst werden.

Im folgenden werden die verschiedenen Abschätzungen der Zielgrößen an einem Beispiel visualisiert und miteinander verglichen.

5.5.3 Untersuchung zum Messfehler

Der Unterschied zwischen den messfehlerbehafteten und den messfehlerlosen Zielgrößen wird am Beispiel M-OP.SR_r gezeigt. Der Unterschied besteht bei allen Betriebspezifikationen und ist, wie wir anschließend sehen werden, von der Größe des Messfehlereinflusses auf die Testentscheidung abhängig.

In Abbildung 5.3 sind verschiedene Abschätzungen der Zielgrößen wieder über dem Justierparameter β_Δ im halb logarithmischen Maßstab dargestellt. Die in diesem Kapitel hergeleiteten



(a) Abschätzung mit Grenzparametersätzen nach Kapitel 5.2 und 6.1.

(b) Abschätzung mit Validierverfahren nach Kapitel 3.2.

Abbildung 5.3: Vergleich von verschiedenen Abschätzungen der Zielgrößen.

Zielgrößen \hat{P}_{RG} und \hat{P}_{AF} ohne Messfehler sind in Abbildung 5.3(a) angetragen, genauso wie die um den Messfehler erweiterten Zielgrößen \hat{P}_{RG} und \hat{P}_{AF} , die in Kapitel 6.1 hergeleitet werden. Während die messfehlerlosen und messfehlerbehafteten Zielgrößen bei großen Werten sehr gut übereinstimmen, wirkt sich der Messfehler im Bereich um $\beta_\Delta = 0$ deutlich aus. Dies ist leider genau der Bereich, auf dem beim Testentwurf und speziell beim Justieren der Fokus liegt. Die Ursache dafür ist bekannt. In diesem Bereich ist $t \approx t_B$. Die Annahme- bzw. die Ablehnungswahrscheinlichkeit wechselt dort bei den messfehlerbehafteten Größen, wie in Abbildung 2.3 dargestellt, kontinuierlich ihren Wert, während bei den messfehlerlosen Größen ein Sprung nach Gleichung (2.64) auftritt. Dieser Unterschied sorgt für die in Abbildung 5.3 dargestellten Abweichungen.

Das Streuungsverhältnis κ aus Gleichung (4.31), das die Standardabweichung des Messfehlers mit der Standardabweichung der Betriebseigenschaft $f(s, \theta_W)$ in s_W auf Grund von Schwankungen des Herstellungsprozesses ins Verhältnis setzt, ist ein Anhaltspunkt für den Einfluss des Messfehlers auf die Testentscheidung. Über alle in den Tabellen 5.3 und 5.4 aufgeführten Testentwürfe korreliert der Quotient $\frac{\hat{K}}{\hat{K}_{C_t \rightarrow 0}}$ und das Streuungsverhältnis κ im jeweiligen Optimum des messfehlerbehafteten Justierproblems stark mit 0,75.

Zum Validieren dieser Abschätzungen sind in Abbildung 5.3(b) die mit VAL-V bestimmten Zielgrößen \ddot{P}_{RG} und \ddot{P}_{AF} dargestellt. Im Gegensatz zu \hat{P}_{RG} und \hat{P}_{AF} berücksichtigen \ddot{P}_{RG} und \ddot{P}_{AF} den Messfehler. \ddot{P}_{RG} und \ddot{P}_{AF} lassen sich durch den Grenzübergang $C_t \rightarrow 0$, in Anlehnung

an Gleichung (2.64), aus $\ddot{P}_{\widehat{\mathcal{R}\mathcal{G}}}$ und $\ddot{P}_{\widehat{\mathcal{A}\mathcal{F}}}$ aus den Gleichungen (3.8) und (3.9) herleiten:

$$\ddot{P}_{\mathcal{R}\mathcal{G}} = \lim_{C_t \rightarrow 0} \ddot{P}_{\widehat{\mathcal{R}\mathcal{G}}}, \quad (5.32)$$

$$\ddot{P}_{\mathcal{A}\mathcal{F}} = \lim_{C_t \rightarrow 0} \ddot{P}_{\widehat{\mathcal{A}\mathcal{F}}}. \quad (5.33)$$

Der Verlauf der mit durchgezogener Linie gezeichneten messfehlerbehafteten Zielgrößen $\hat{P}_{\widehat{\mathcal{R}\mathcal{G}}}$ und $\hat{P}_{\widehat{\mathcal{A}\mathcal{F}}}$ aus Abbildung 5.3(a) stimmt sehr gut mit dem von $\ddot{P}_{\widehat{\mathcal{R}\mathcal{G}}}$ und $\ddot{P}_{\widehat{\mathcal{A}\mathcal{F}}}$ aus Abbildung 5.3(b) überein. Dies trifft ebenso für die gestrichelt dargestellten messfehlerlosen Zielgrößen $\hat{P}_{\mathcal{R}\mathcal{G}}$ und $\hat{P}_{\mathcal{A}\mathcal{F}}$ aus Abbildung 5.3(a) sowie $\ddot{P}_{\mathcal{R}\mathcal{G}}$ und $\ddot{P}_{\mathcal{A}\mathcal{F}}$ aus Abbildung 5.3(b) zu. Bei genauerer Betrachtung der messfehlerlosen Größen wird jedoch ein wesentlicher Unterschied offensichtlich: Die Kurven $\hat{P}_{\mathcal{R}\mathcal{G}}$ und $\hat{P}_{\mathcal{A}\mathcal{F}}$ in Abbildung 5.3(a) sind glatt, wohingegen $\ddot{P}_{\mathcal{R}\mathcal{G}}$ und $\ddot{P}_{\mathcal{A}\mathcal{F}}$ in Abbildung 5.3(b) stufenförmig sind. Dies liegt daran, dass $\hat{P}_{\mathcal{R}\mathcal{G}}$ und $\hat{P}_{\mathcal{A}\mathcal{F}}$ nach den Gleichungen (5.17) und (5.18) gewichtete Summen glatter Funktionen sind. $\ddot{P}_{\mathcal{R}\mathcal{G}}$ und $\ddot{P}_{\mathcal{A}\mathcal{F}}$ weisen dagegen beim Passieren eines jeden Stichprobenelements, z. B. wie in der Abbildung mit β_{Δ} , eine Stufe auf. Bei den messfehlerbehafteten Zielgrößen $\ddot{P}_{\widehat{\mathcal{R}\mathcal{G}}}$ und $\ddot{P}_{\widehat{\mathcal{A}\mathcal{F}}}$ tritt dieser Effekt nicht so stark in Erscheinung, weil die Stufen durch den Messfehler abgerundet werden. Die Stichprobenelemente sind jedoch für die Abschätzung der messfehlerbehafteten und der messfehlerlosen Zielgrößen identisch. Wie aus Abbildung 4.9(c) ersichtlich, sind aus der Stichprobe des Validierverfahrens für die Abschätzung der Zielgrößen nur sehr wenige Stichprobenelemente überhaupt relevant. Der überwiegende Teil der Stichprobenelemente liegt dagegen außerhalb des Integrationsgebiets der Zielgrößen. Da die in dieser Arbeit vorgestellten Abschätzungen sowohl der messfehlerlosen als auch der messfehlerbehafteten Zielgrößen $\hat{P}_{\mathcal{R}\mathcal{G}}$ und $\hat{P}_{\mathcal{A}\mathcal{F}}$ bzw. $\hat{P}_{\widehat{\mathcal{R}\mathcal{G}}}$ und $\hat{P}_{\widehat{\mathcal{A}\mathcal{F}}}$ glatt sind, eignen sie sich im Vergleich zu Verfahren auf der Basis der Validierungsstichprobe hervorragend für Optimierverfahren.

Die bisher vorgestellten Verfahren sind für Extreme besonders gut geeignet. LIN-V aus Kapitel 4 ist ideal für möglichst lineare Betriebs- und Testeigenschaften. Dabei greift dann beim Justieren auch die Berücksichtigung des Messfehlers. APP-V aus diesem Kapitel ist dagegen für Fälle gut geeignet in denen der Messfehler vernachlässigbar ist, die Betriebs- und die Testeigenschaft jedoch nichtlinearen Verlauf aufweisen. Das im folgenden vorgestellte Verfahren zielt auf nichtlineare Schaltungseigenschaften und Messfehler gleichermaßen ab und findet durch ein Optimierproblem über alle Testentwurfparameter \mathbf{x} und t_B einen kostenoptimalen Kompromiss.

Kapitel 6

Testentwurf, mit Messfehlern und nichtlinearer Betriebs- und Testeigenschaft

Der Entwurf der Testspezifikation erfolgt in diesem Ansatz durch Optimieren einer Kostenfunktion der Zielgrößen Ausbeuteeinbuße und Fehlerdurchlässigkeit über alle Testentwurfparameter. In den dazu verwendeten Zielgrößen wird sowohl die Nichtlinearität der Betriebs- und der Testbeobachtungen als auch der Messfehler, d. h. der systematische und der zufällige Fehler, berücksichtigt. Dadurch wird bei der Optimierung ein kostenoptimaler Kompromiss zwischen Ausbeuteeinbuße und Fehlerdurchlässigkeit in Bezug auf beide Fehlerarten gefunden.

In den vorhergehenden Ansätzen wurde der Entwurf der Testspezifikation in zwei Schritte aufgeteilt. Zunächst wurden die Testentwurfparameter in Kapitel 4 mit linearisierten bzw. in Kapitel 5 mit nichtlinearen Schaltungseigenschaften berechnet. Ein kostenoptimaler Kompromiss zwischen Fehlerdurchlässigkeit und Ausbeuteeinbuße konnte davon getrennt erst durch ein Justieren ermittelt werden. Messfehler wurden ebenfalls erst beim Justieren berücksichtigt. Das Justieren erfolgte ausschließlich bezüglich des Spezifikationswertes t_B der Testspezifikation und nicht über alle Testentwurfparameter x und t_B . Durch die Optimierung über alle Testentwurfparameter und die Berücksichtigung beider Fehlerarten in den Zielgrößen werden hier dagegen beide Schritte vereint.

Die Zielgrößen wurden in den vorhergehenden Kapiteln zum Testentwurf durch Ersatzgrößen ersetzt. In Kapitel 4 wurden die nichtlineare Betriebseigenschaft und die nichtlinearen Testbeobachtungen durch ihre Linearisierungen und in Kapitel 5 die beiden Zielgrößen zur Approximation durch eine Metrik ersetzt. In diesem Ansatz werden die Zielgrößen dagegen in einer Kostenfunktion vereint und diese direkt minimiert.

Der Simulationsaufwand bleibt im Vergleich zum Ansatz von Kapitel 5 gleich. Andererseits ist eine Funktion mehrerer Variablen mit einem iterativen Verfahren zu optimieren und es steigt der Rechenaufwand zur Abschätzung der Zielgrößen unter Berücksichtigung des Messfehlers. In Kapitel 5 konnte beim Abschätzen der Zielgrößen mit Quadraturverfahren der Integralanteil in einer Dimension analytisch berechnet werden. Bei der Erweiterung des Ansatzes um Messfehler muss auch in dieser Dimension ein Quadraturverfahren verwendet werden. Da es sich um ein eindimensionales Integral handelt, eignen sich dazu deterministische Quadraturverfahren. Die Integration der anderen Integralanteile kann je nach der Dimension $n_s - 1$ wie in Kapitel 5 mit stochastischen oder deterministischen Quadraturverfahren erfolgen. Während in Kapitel 5 ein Monte-Carlo-Verfahren beschrieben wurde, wird hier ein deterministischer Ansatz vorgestellt.

Eine Bewertung des Testentwurfs erfolgt in jedem Schritt der Optimierung durch die zur Optimierung ausgewerteten messfehlerbehafteten Zielgrößen. Gesonderte Bewertungsverfahren wie in den vorhergehenden Kapiteln sind deshalb nicht nötig.

Weiterhin wird der Entwurf der Testspezifikation und die Berechnungsverfahren beschrieben. Abschließend werden Ergebnisse präsentiert.

6.1 Entwerfen einer Testspezifikation

Zum Bestimmen der Testentwurfparameter \mathbf{x} und t_B wird eine Kostenfunktion, z. B. aus Gleichung (2.66) oder (2.67), über \mathbf{x} und t_B minimiert:

$$\min_{\mathbf{x}, t_B} K(P_{\widetilde{\mathcal{RG}}}, P_{\widetilde{\mathcal{AF}}}, \nu). \quad (6.1)$$

Dazu sind die messfehlerbehafteten Zielgrößen Ausbeuteeinbuße $P_{\widetilde{\mathcal{RG}}}$ und Fehlerdurchlässigkeit $P_{\widetilde{\mathcal{AF}}}$ aus den Gleichungen (2.59) und (2.60) abzuschätzen. Es wird dabei wieder von dem in Kapitel 2.5.2 beschriebenen Koordinatensystem ausgegangen.

Die Abschätzung der Zielgrößen $P_{\widetilde{\mathcal{RG}}}$ und $P_{\widetilde{\mathcal{AF}}}$ ist eine Erweiterung des Ansatzes aus Kapitel 5.2 um den Messfehler. Wie im folgenden gezeigt wird, unterscheiden sich dabei die Zielgrößen im Endeffekt im Integrationsgebiet und im Integranden kommt die durch den Messfehler bedingte Annahme- bzw. Ablehnungswahrscheinlichkeit hinzu.

Generell profitiert dieser Ansatz zur Abschätzung der Zielgrößen von dem gleichen Problemwissen, welches auch in Kapitel 5.2 zur Effizienzsteigerung im Vergleich zum Importance Sampling Verfahren aus Kapitel 3.2 beiträgt. So bleibt die Möglichkeit der Einschränkung des Gebiets des Simulationsplanes auf den problemrelevanten Bereich erhalten. Weiterhin gewinnt dieser Ansatz wieder durch die Aufteilung des Integrationsgebiets anhand der Linearisierung im Worst-Case-Parametersatz in einen eher senkrechten bzw. parallelen Anteil zur leicht nichtlinearen Fläche der Grenzparametersätze an Effizienz. Aufgrund der Berücksichtigung des Messfehlers ist allerdings der Integralanteil senkrecht zur Fläche der Grenzparametersätze nicht mehr analytisch berechenbar. Die Abschätzung dieses eindimensionalen Integralanteils erfolgt mit einem deterministischen Quadraturverfahren. Zur Vermeidung von über den Ansatz von Kapitel 5.2 hinausgehenden Simulationsaufwand wird dazu der Eigenschaftsverlauf der Testeigenschaft im relevanten Bereich modelliert.

Im Gegensatz zu Kapitel 5.2 sind die Integrationsgebiete der messfehlerbehafteten Zielgrößen $P_{\widetilde{\mathcal{RG}}}$ und $P_{\widetilde{\mathcal{AF}}}$ die Gebiete der funktionierenden bzw. fehlerhaften Schaltungen \mathcal{G} und \mathcal{F} . Aufgrund des Funktionsverlaufs der Annahme- bzw. der Ablehnungswahrscheinlichkeit kann der Berechnungsaufwand jedoch auf das Gebiet um die Grenzparametersätze beschränkt werden.

Wie in Kapitel 5.2 ist eine separate Betrachtung des Integralanteils senkrecht zur Ebene der in s_W linearisierten Fläche der Grenzparameter \mathcal{S}_θ aus Gleichung (4.22) sinnvoll. Dazu wurde in Kapitel 5.2 auch beschrieben, wie zu einem vorgegebenen Parametersatz $\mathbf{s}_{2:n_s}$ die Integrationsgrenze s_g des eindimensionalen Integrales nach s_1 bestimmt werden kann, so dass $[\mathbf{s}_{2:n_s}^{s_g}] \in \mathcal{S}$ ein Grenzparametersatz ist. So sind mit der Funktion $s_g = s_g(\mathbf{s}_{2:n_s})$ die Integrationsgrenzen für die Integrationsgebiete \mathcal{G} und \mathcal{F} der Integrale $P_{\widetilde{\mathcal{RG}}}$ und $P_{\widetilde{\mathcal{AF}}}$ zu jeder Integrationsvariablen explizit angebar:

$$P_{\widetilde{\mathcal{RG}}} = \iint_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{s_g(\mathbf{s}_{2:n_s})} \text{pdf}^N(\mathbf{s}) P_s^r(t(\mathbf{o}(\mathbf{s}), \mathbf{x}), t_B, C_t) \partial s_1 \partial \mathbf{s}_{2:n_s}, \quad (6.2)$$

$$P_{\widetilde{\mathcal{AF}}} = \iint_{-\infty}^{+\infty} \int_{s_g(\mathbf{s}_{2:n_s})}^{+\infty} \text{pdf}^N(\mathbf{s}) P_s^a(t(\mathbf{o}(\mathbf{s}), \mathbf{x}), t_B, C_t) \partial s_1 \partial \mathbf{s}_{2:n_s}. \quad (6.3)$$

Die Integrationsgrenzen bezüglich der einzelnen Koordinaten folgen z. B. aus dem linearisierten Modell von \mathcal{G} bzw. \mathcal{F} aus Gleichung (4.21).

In Gleichung (6.2) und (6.3) ist die Wahrscheinlichkeitsdichte $\text{pdf}^N(\mathbf{s})$ separierbar: $\text{pdf}^N(\mathbf{s}) = \text{pdf}^N(\mathbf{s}_{2:n_s}) \text{pdf}^N(s_1)$. Die Annahmewahrscheinlichkeit P_s^a bzw. die Ablehnungswahrscheinlichkeit P_s^r einer Schaltung sind gemäß Gleichung (2.55) Funktionen von $t(\mathbf{o}(\mathbf{s}), \mathbf{x})$, t_B und C_t :

$$P_s^a(t, t_B, C_t) = 1 - P_s^r(t, t_B, C_t) = \int_{-\infty}^{t_B} \text{pdf}^N(\tilde{t}, t, C_t) \partial \tilde{t}. \quad (6.4)$$

Davon ist nur die Testeigenschaft t über die Testbeobachtungen \mathbf{o} eine Funktion der Integrationsvariablen \mathbf{s} . Die Trennung der Integrationsvariablen in s_1 und $\mathbf{s}_{2:n_s}$ ist auch für P_s^a und P_s^r vorteilhaft, da sich die Testeigenschaft wie die Betriebseigenschaft bezüglich $\mathbf{s}_{2:n_s}$, also parallel zur Linearisierung, kaum ändert.

$$P_{\widetilde{\mathcal{RG}}} = \iint_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{s_g(\mathbf{s}_{2:n_s})} \text{pdf}^N(\mathbf{s}_{2:n_s}) \text{pdf}^N(s_1) P_s^r\left(t(\mathbf{o}([\mathbf{s}_{2:n_s}^{s_1}]), \mathbf{x}), t_B, C_t\right) \partial s_1 \partial \mathbf{s}_{2:n_s}, \quad (6.5)$$

$$P_{\widetilde{\mathcal{AF}}} = \iint_{-\infty}^{+\infty} \int_{s_g(\mathbf{s}_{2:n_s})}^{+\infty} \text{pdf}^N(\mathbf{s}_{2:n_s}) \text{pdf}^N(s_1) P_s^a\left(t(\mathbf{o}([\mathbf{s}_{2:n_s}^{s_1}]), \mathbf{x}), t_B, C_t\right) \partial s_1 \partial \mathbf{s}_{2:n_s}. \quad (6.6)$$

Die Integration nach $\mathbf{s}_{2:n_s}$ kann je nach der Dimension $n_s - 1$ mit stochastischen oder deterministischen Quadraturverfahren durchgeführt werden. Mit den Stützstellen $\mathbf{s}_{2:n_s,i}$, $i = 1, \dots, p$ der Quadraturformel können die Integrale nach s_1 und $\mathbf{s}_{2:n_s}$ getrennt werden. Dies wird hier im Gegensatz zu Kapitel 5.2 für ein deterministisches Quadraturverfahren gezeigt. Bei deterministischen Quadraturverfahren wird das Integrationsgebiet, hier der Unterraum \mathbb{R}^{n_s-1} der Koordinaten $\mathbf{s}_{2:n_s}$, durch ein Gitter von stückweise glatten Flächen in eine endliche Anzahl p von Teilbereichen B_i mit dem Volumen $\Delta V_i = \int_{B_i} \partial \mathbf{s}_{2:n_s}$, $i = 1, \dots, p$ zerlegt. In jedem der Teilbereiche B_i wird ein beliebiger Parametersatz $\mathbf{s}_{2:n_s,i} \in B_i$ als Stützstelle gewählt. An jeder der p Stützstellen $\mathbf{s}_{2:n_s,i}$ ist der Integrand auszuwerten. Die Summe dieser Werte im Produkt mit den zugehörigen Volumina ΔV_i approximiert den Wert des Integrals [BS91, MV97]. Mit der Integrationsgrenze $s_{g,i} = s_g(\mathbf{s}_{2:n_s,i})$ zu jeder Stützstelle $\mathbf{s}_{2:n_s,i}$ folgt:

$$\hat{P}_{\widetilde{\mathcal{RG}}} = \sum_{i=1}^p \int_{B_i} \text{pdf}^N(\mathbf{s}_{2:n_s}) \partial \mathbf{s}_{2:n_s} \int_{-\infty}^{s_{g,i}} \text{pdf}^N(s_1) P_s^r\left(t(\mathbf{o}([\mathbf{s}_{2:n_s,i}^{s_1}]), \mathbf{x}), t_B, C_t\right) \partial s_1, \quad (6.7)$$

$$\hat{P}_{\widetilde{\mathcal{AF}}} = \sum_{i=1}^p \int_{B_i} \text{pdf}^N(\mathbf{s}_{2:n_s}) \partial \mathbf{s}_{2:n_s} \int_{s_{g,i}}^{+\infty} \text{pdf}^N(s_1) P_s^a\left(t(\mathbf{o}([\mathbf{s}_{2:n_s,i}^{s_1}]), \mathbf{x}), t_B, C_t\right) \partial s_1. \quad (6.8)$$

In diesen Gleichungen wurden $P_{\widetilde{\mathcal{RG}}}$ und $P_{\widetilde{\mathcal{AF}}}$ durch $\hat{P}_{\widetilde{\mathcal{RG}}}$ und $\hat{P}_{\widetilde{\mathcal{AF}}}$ ersetzt, um zu verdeutlichen, dass die Zielgrößen durch die Quadraturverfahren abgeschätzt werden. Die Integration von $\text{pdf}^N(\mathbf{s}_{2:n_s})$ über den Teilbereichen B_i kann, bei geeigneter Wahl der Zerlegung, analytisch und damit genau berechnet werden.

Die exakten Werte der Zielgrößen $P_{\widetilde{\mathcal{RG}}}$ und $P_{\widetilde{\mathcal{AF}}}$ könnten im Riemannschen Sinne durch fortschreitende Verfeinerung des Gitters ermittelt werden. Dadurch geht die Maschenweite gegen Null und die Anzahl der Teilbereiche p gegen Unendlich. Durch den Grenzübergang $p \rightarrow \infty$ ergeben sich die exakten Werte der Zielgrößen:

$$P_{\widetilde{\mathcal{RG}}} = \lim_{p \rightarrow \infty} \hat{P}_{\widetilde{\mathcal{RG}}} \quad \text{bzw.} \quad P_{\widetilde{\mathcal{AF}}} = \lim_{p \rightarrow \infty} \hat{P}_{\widetilde{\mathcal{AF}}}. \quad (6.9)$$

Der Grenzübergang kann praktisch nicht durchgeführt werden, da zum Auswerten des Integrals nach s_1 analoge Schaltungssimulationen benötigt werden. Der Simulationsaufwand begrenzt dadurch die Anzahl der Teilbereiche p . Durch problemangepasste Verfahren kann jedoch die Genauigkeit der Abschätzung erhöht werden. Wesentlichen Anteil daran hat die getrennte Betrachtung der Integrationsvariablen s_1 der Zielgrößen. Da der Integrand in linearer Näherung für $\mathbf{s}_{2:n_s}$

konstant ist, kann dem Abschätzen des problemrelevanten Integralanteils nach s_1 mehr Aufwand zugemessen werden als dem Anteil nach $s_{2:n_s}$.

Im weiteren wird auf die Integralanteile nach $s_{2:n_s}$ und s_1 der Gleichungen (6.7) und (6.8) genauer eingegangen.

6.1.1 Integration nach $s_{2:n_s}$

Die Isodensiten $\text{pdf}^N(\mathbf{s}_{2:n_s}) = \text{konst}$ der standardisierten Normalverteilung sind Kugeln mit dem Ursprung $\mathbf{s}_0 = \mathbf{0}$ als Zentrum. Eine Zerlegung des Unterraums \mathbb{R}^{n_s-1} durch konzentrische Kugeln ist deshalb vorteilhaft [GM98]. Zur Beschreibung der Zerlegung mit Kugeln bietet sich ein Koordinatenwechsel für die Koordinaten $\mathbf{s}_{2:n_s}$ in ein beliebiges Polarkoordinatensystem mit demselben Ursprung $\mathbf{s}_0 = \mathbf{0}$ an. Sei $\mathbf{s}_{2:n_s} = s_\perp \mathbf{z}$ mit $\mathbf{z}^T \mathbf{z} = 1$, so dass $s_\perp = \|\mathbf{s}_{2:n_s}\|_2$ aus Gleichung (4.47) gilt. Ein Kugelring im Unterraum \mathbb{R}^{n_s-1} kann dann alleine durch die radiale Komponente $s_\perp = \|\mathbf{s}_{2:n_s}\|_2$ beschrieben werden:

$$\int_{a \leq \|\mathbf{s}_{2:n_s}\|_2 < b} \text{pdf}_{n_s-1}^N(\mathbf{s}_{2:n_s}) \partial \mathbf{s}_{2:n_s} = \text{cdf}_{n_s-1}^\chi(b) - \text{cdf}_{n_s-1}^\chi(a). \quad (6.10)$$

Durch die Substitution von $\|\mathbf{s}_{2:n_s}\|_2$ durch s_\perp im Integral wird die Dichte der Normalverteilung $\text{pdf}_{n_s-1}^N(\mathbf{s}_{2:n_s})$ zur Dichte der χ -Verteilung $\text{pdf}_{n_s-1}^\chi(s_\perp)$ mit $n_s - 1$ Freiheitsgraden, deren Verteilungsfunktion

$$\text{cdf}_{n_s-1}^\chi(x) = \int_0^x \text{pdf}_{n_s-1}^\chi(s_\perp) \partial s_\perp \quad (6.11)$$

ist.¹

Um im Unterraum der Koordinaten $\mathbf{s}_{2:n_s}$ die Nichtlinearität des Integranden, das Integral nach s_1 , zu erfassen, wird jeder Kugelring weiter segmentiert. In Abbildung 6.1 ist diese Zerlegung für

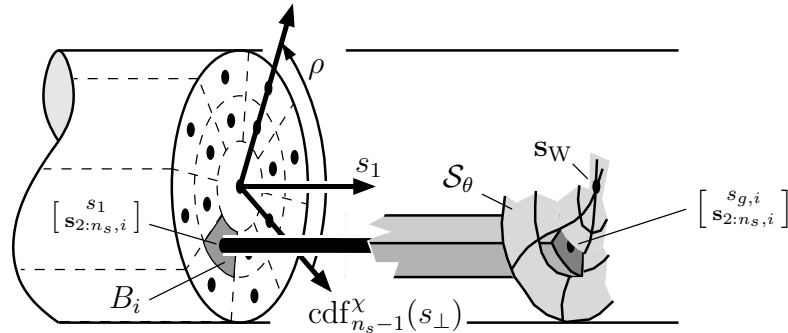


Abbildung 6.1: Zerlegung des transformierten Raums der statistischen Parameter \mathbb{R}^{n_s} für $n_s = 3$.

den Unterraum \mathbb{R}^{n_s-1} der Koordinaten $\mathbf{s}_{2:n_s}$ für $n_s = 3$ links in der Schnittebene veranschaulicht. Für $n_s = 3$ ist der Unterraum \mathbb{R}^{n_s-1} die Ebene der Koordinaten s_2 und s_3 . Diese Ebene wird in Abbildung 6.1 durch Polarkoordinaten $(\text{cdf}_{n_s-1}^\chi(s_\perp), \rho)$ beschrieben, wobei die radiale unbeschränkte Koordinate $s_\perp = \|\mathbf{s}_{2:3}\|_2 \in [0, \infty)$ über die Verteilungsfunktion der χ -Verteilung in eine beschränkte Koordinate $\text{cdf}_{n_s-1}^\chi(s_\perp) \in [0, 1]$ transformiert wurde. Der Unterraum \mathbb{R}^{n_s-1} beschränkt sich dann auf das Volumen der Einheitskugel; im Bild der Fläche des Einheitskreises. Für die Winkelkoordinate ρ gilt: $\rho \in [0, 2\pi)$.² Die Kugelringe aus Gleichung (6.10) werden im

¹ $\text{cdf}_{n_s-1}^\chi(x)$ kann nach Gleichung (A.13) auf Seite 103 berechnet werden.

²Das \mathbf{z} der Polarkoordinaten aus der theoretischen Betrachtung wäre damit z. B. : $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \cos(\rho) \\ \sin(\rho) \end{bmatrix}$.

Bild zu Kreisringen. Von den beispielhaft drei dargestellten Kreisringen sind die beiden äußeren segmentiert. Die gestrichelten Kreise und Linien bilden das Gitter der Zerlegung. Ein daraus entstehender Teilbereich B_i ist grau unterlegt und zu allen Teilbereichen ist eine Stützstelle $s_{2:n_s,i}$ als Punkt eingezeichnet.

Der innerste Kugelring wird nicht segmentiert, da für diesen Teilbereich die Koordinaten $s_{2:n_s}$ des gegebenen Worst-Case-Parametersatzes s_W als Stützstelle verwendet werden können.³ Das Integral über einen Teilbereich B_i aus den Gleichungen (6.7) bzw. (6.8) kann einfach bestimmt werden, wenn der zugehörige Kugelring $a \leq s_\perp < b$ mit radialen Flächen in p z. B. gleich große Segmente zerlegt wird:

$$\begin{aligned} W_i &= \int_{B_i} \text{pdf}^N(\mathbf{s}_{2:n_s}) \partial \mathbf{s}_{2:n_s} = \frac{1}{p} \int_a^b \text{pdf}_{n_s-1}^X(s_\perp) \partial s_\perp \\ &= \frac{1}{p} (\text{cdf}_{n_s-1}^X(b) - \text{cdf}_{n_s-1}^X(a)), \quad W_i \in \mathbb{R}_0^+. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Die p Stützstellen dieses Kugelrings können dann gleichmäßig z. B. über die Kugeloberfläche der Kugel mit Radius

$$\text{cdf}_{n_s-1}^X(s_\perp) = \frac{1}{2} (\text{cdf}_{n_s-1}^X(a) + \text{cdf}_{n_s-1}^X(b)) \quad (6.13)$$

verteilt werden. Die Mitte eines Teilbereichs bezüglich der Wahrscheinlichkeitsverteilung der statistischen Parameter, d. h. die Mitte zwischen $\text{cdf}_{n_s-1}^X(a)$ und $\text{cdf}_{n_s-1}^X(b)$, stellt eine gute Wahl für eine Stützstelle dar, wenn die Zerlegung so erfolgt, dass der Integrand innerhalb eines Teilbereichs einigermäßen linear ist.⁴ $s_\perp \in [a, b]$ aus Gleichung (6.13) kann durch Nullstellensuche der Funktion

$$\text{cdf}^X(s_\perp) - \frac{1}{2} (\text{cdf}_{n_s-1}^X(a) + \text{cdf}_{n_s-1}^X(b)) = 0 \quad (6.14)$$

mit Newton-Raphson oder Intervallhalbierung mit dem Startintervall $[a, b]$ erfolgen.

Das Integral über einen Teilbereich B_i in den Gleichungen (6.7) und (6.8) kann mit der eingeführten Zerlegung exakt bestimmt werden. Es gibt die Auftrittswahrscheinlichkeit W_i eines Parametersatz $s_{2:n_s}$ im Teilbereich B_i an.

Die Anzahl der Zylinderringe und die Häufigkeit deren Segmentierung ist von der Nichtlinearität der Betriebseigenschaft f und der Testbeobachtungen \mathbf{o} abhängig. Sind diese ziemlich linear, reicht eine grobe Zerlegung mit wenigen Teilbereichen und der Simulationsaufwand zur Abschätzung des Integrals nach s_1 beschränkt sich auf wenige Teilbereiche. Bei stärker nichtlinearen Eigenschaften wird durch eine feinere Zerlegung bei höherem Simulationsaufwand eine genauere Approximation erreicht.

Um bei der Lösung der Optimieraufgabe aus Gleichung (6.1) mit iterativen Verfahren Unstetigkeit bei den wiederholt abzuschätzenden Zielgrößen zu vermeiden, sollten die Stützstellen $s_{2:n_s}$ während der Optimierung nicht verändert werden, d. h. sie sind einmal vor der Optimierung zu bestimmen [GMW81].

Mit W_i aus Gleichung (6.12) gilt für $\hat{P}_{\widehat{\mathcal{RG}}}$ und $\hat{P}_{\widehat{\mathcal{AF}}}$ aus den Gleichungen (6.7) und (6.8):

$$\hat{P}_{\widehat{\mathcal{RG}}} = \sum_{i=1}^p W_i \int_{-\infty}^{s_{g,i}} \text{pdf}^N(s_1) P_s^r \left(t(\mathbf{o}([s_{2:n_s,i}^{s_1}]), \mathbf{x}), t_B, C_t \right) \partial s_1, \quad (6.15)$$

$$\hat{P}_{\widehat{\mathcal{AF}}} = \sum_{i=1}^p W_i \int_{s_{g,i}}^{+\infty} \text{pdf}^N(s_1) P_s^a \left(t(\mathbf{o}([s_{2:n_s,i}^{s_1}]), \mathbf{x}), t_B, C_t \right) \partial s_1. \quad (6.16)$$

³Außerdem ist s_W ein Grenzparametersatz, d. h. die Integrationsgrenze s_g ist mit s_W aus Gleichung (2.81) durch $s_g = \beta_W$ gegeben.

⁴Dies folgt aus dem Mittelwertsatz der Integration. Vergleiche hierzu Anhang A.8 auf Seite 105.

6.1.2 Integration nach s_1

Für die gegebenen Parametersätze $\mathbf{s}_{2:n_s,i}$, $i = 1, \dots, p$ ist die Integration nach s_1 auszuführen. Wie z. B. an den Gleichungen (6.7) und (6.8) ersichtlich, unterscheiden sich die Integrationsintervalle der beiden Zielgrößen. Anhand von Abbildung 6.1 wurde bisher die Zerlegung des Unterraums \mathbb{R}^{n_s-1} der Koordinaten $\mathbf{s}_{2:n_s}$ erklärt. Durch Hinzunahme der Koordinate s_1 entsteht ein n_s -dimensionaler, unendlich ausgedehnter Zylinder mit der Koordinatenachse s_1 als Zylinderachse. Die ausschnittsweise eingezeichneten Grenzparametersätze der Betriebsspezifikation \mathcal{S}_θ teilen diesen Zylinder in das Gebiet funktionierender Schaltungen \mathcal{G} , im Bild links davon, und das Gebiet fehlerhafter Schaltungen \mathcal{F} , rechts davon. In jedem Teilbereich B_i wird die gekrümmte Fläche der Grenzparametersätze \mathcal{S}_θ durch eine Ebene im durch die Stützstelle $\mathbf{s}_{2:n_s,i}$ gegebenen Grenzparametersatz $\left[\begin{smallmatrix} s_{g,i} \\ \mathbf{s}_{2:n_s,i} \end{smallmatrix} \right]$ angenähert. Für einen Teilbereich ist dies im Bild dargestellt. Das links der Ebene hervorgehoben dargestellte Teilgebiet der funktionierenden Schaltungen \mathcal{G} zählt zur Ausbeuteeinbuße, das nicht dargestellte Gebiet der fehlerhaften Schaltungen \mathcal{F} rechts davon zur Fehlerdurchlässigkeit.

Der Wert des Integrals der Zielgrößen über jedem dieser Teilgebiete wird durch das Produkt aus W_i mit dem über dem Teilbereich als konstant angenommenen Integral nach s_1 , das in $\mathbf{s}_{2:n_s,i}$ ausgewertet wird, approximiert. $\mathbf{s}_{2:n_s,i}$ bestimmt die in Abbildung 6.1 für B_i eingezeichnete Gerade $\left[\begin{smallmatrix} s_1 \\ \mathbf{s}_{2:n_s,i} \end{smallmatrix} \right]$, entlang der das eindimensionale Integral nach s_1 ausgewertet wird. Im weiteren werden wir uns der Berechnung dieses Integrals nach s_1 zuwenden.

Das Bestimmen der Integrationsgrenze s_g wurde bereits in Kapitel 5.2.1 beschrieben. Die Betriebseigenschaft f wurde dabei eindimensional nach s_1 modelliert und s_g durch Interpolation bestimmt.

Das Integral nach s_1 ist nicht analytisch lösbar. Da es eindimensional ist, wird es wegen der schnelleren Konvergenzrate mit deterministischen Quadraturverfahren abgeschätzt. Dabei ist die Nichtlinearität der Testeigenschaft t als Variable der Annahme- bzw. Ablehnungswahrscheinlichkeit P_s^a und P_s^r zu beachten. Um Schaltungssimulationen an den Stützstellen des Quadraturverfahrens zur Bestimmung von t zu vermeiden, wird t durch das in Kapitel 5.2.2 beschriebene, eindimensionale Modell nach s_1 : $t(\check{\sigma}(s_1), \mathbf{x})$ aus Gleichung (5.23) ersetzt. Dadurch wird erreicht, dass nur zum Erstellen der Modelle Simulationen benötigt werden. Während des iterativen Optimierverfahrens zur Lösung von Gleichung (6.1) sind dann keine weiteren Simulationen nötig.

Bei der Optimierung ist das Integral nach s_1 der beiden Zielgrößen in jedem Schritt des Optimierverfahrens für alle p Teilbereiche B_i auszuwerten. Um den dabei anfallenden Berechnungsaufwand zu reduzieren, kann die Eigenschaft der Annahme- bzw. der Ablehnungswahrscheinlichkeit P_s^a und P_s^r effizienzsteigernd genutzt werden. P_s^a und P_s^r sind Verteilungsfunktionen der Normalverteilung, die über große Bereiche des Integrationsgebiets näherungsweise Null oder Eins sind:

$$P_s^a(t, t_B, C_t) = 1 - P_s^r(t, t_B, C_t) = \int_{-\infty}^{t_B} \text{pdf}^N(\tilde{t}, t, C_t) \partial \tilde{t} \\ \approx \begin{cases} 0 & \text{für } \frac{t_B - t}{\sqrt{C_t}} < -\mu \\ \text{cdf}^N(t_B, t, C_t) & \text{für } -\mu \leq \frac{t_B - t}{\sqrt{C_t}} \leq \mu \\ 1 & \text{für } \mu < \frac{t_B - t}{\sqrt{C_t}}. \end{cases} \quad (6.17)$$

μ ist der Schwellwert für die Näherung, der gemäß der Genauigkeitsanforderung zu wählen ist. Das mit Quadraturverfahren zu bearbeitende, unbeschränkte Integrationsgebiet wird durch die Näherung beschränkt und stark eingegrenzt. Um das Integrationsintervall der Integrale nach s_1 bezüglich der Näherung in Teilintervalle zu zerlegen, sind die in Gleichung (6.17) für t gegebenen

Intervalle auf s_1 abzubilden. Das mittlere der drei Intervalle $\frac{t_B - t}{\sqrt{C_t}} \in [-\mu; \mu]$ wird nach $s_1 \in [s_l; s_u]$ mit

$$t(\check{\mathbf{o}}(s_u), \mathbf{x}) = t_B + \mu\sqrt{C_t}, \quad (6.18)$$

$$t(\check{\mathbf{o}}(s_l), \mathbf{x}) = t_B - \mu\sqrt{C_t} \quad (6.19)$$

abgebildet. s_l ist kleiner als s_u , da die Testeigenschaft t gemäß der Testspezifikation aus Gleichung (2.11) für angenommene Schaltungen kleiner als für abgelehnte Schaltungen und s_1 nach Gleichung (4.21) für funktionierende Schaltung kleiner als für fehlerhafte ist. s_l und s_u können wie s_t in Kapitel 5.2.2 bestimmt werden.

Mit s_l , s_u und der Zerlegung gemäß Gleichung (6.17) können die Integrale nach s_1 in den Gleichungen (6.15) und (6.16) umformuliert werden:

$$\hat{P}_{\widetilde{\mathcal{RG}}} = \sum_{i=1}^p W_i \begin{cases} 0 & s_{g,i} \leq s_{l,i} \\ \int_{s_{l,i}}^{s_{g,i}} \text{pdf}^N(s_1) \left(1 - \text{cdf}^N\left(t_B, t(\check{\mathbf{o}}(s_1), \mathbf{x}), C_t\right)\right) \partial s_1 & s_{l,i} < s_{g,i} \leq s_{u,i} \\ \int_{s_{l,i}}^{s_{u,i}} \text{pdf}^N(s_1) \left(1 - \text{cdf}^N\left(t_B, t(\check{\mathbf{o}}(s_1), \mathbf{x}), C_t\right)\right) \partial s_1 + \\ \int_{s_{u,i}}^{s_{g,i}} \text{pdf}^N(s_1) \partial s_1 & s_{u,i} < s_{g,i}, \end{cases} \quad (6.20)$$

$$\hat{P}_{\widetilde{\mathcal{AF}}} = \sum_{i=1}^p W_i \begin{cases} 0 & s_{u,i} \leq s_{g,i} \\ \int_{s_{g,i}}^{s_{u,i}} \text{pdf}^N(s_1) \text{cdf}^N\left(t_B, t(\check{\mathbf{o}}(s_1), \mathbf{x}), C_t\right) \partial s_1 & s_{l,i} \leq s_{g,i} < s_{u,i} \\ \int_{s_{g,i}}^{s_{l,i}} \text{pdf}^N(s_1) \partial s_1 + \\ \int_{s_{l,i}}^{s_{u,i}} \text{pdf}^N(s_1) \text{cdf}^N\left(t_B, t(\check{\mathbf{o}}(s_1), \mathbf{x}), C_t\right) \partial s_1 & s_{g,i} < s_{l,i}. \end{cases} \quad (6.21)$$

Die beiden Integrale von $\text{pdf}^N(s_1)$ über den Intervallen $[s_u, s_g]$ bei $\hat{P}_{\widetilde{\mathcal{RG}}}$ und $[s_g, s_l]$ bei $\hat{P}_{\widetilde{\mathcal{AF}}}$ werden zur Berechnung durch $\text{cdf}^N(s_g) - \text{cdf}^N(s_u)$ bzw. $\text{cdf}^N(s_l) - \text{cdf}^N(s_g)$ ersetzt. Die verbleibenden, ebenfalls eindimensionalen Integrale können z. B. mit dem gaußschen Quadraturverfahren [BS91] berechnet werden.

Die messfehlerlosen Zielgrößen aus den Gleichungen (5.15) und (5.16) des vorhergehenden Kapitels sind, dasselbe Quadraturverfahren für die Integration nach $s_{2:n_s}$ vorausgesetzt, ein Sonderfall der Gleichungen (6.20) und (6.21). Durch Eliminieren des Messfehlers per Grenzübergang $C_t \rightarrow 0$ werden die Annahme- und die Ablehnungswahrscheinlichkeiten P_s^a und P_s^r aus Gleichung (2.55), wie in Gleichung (2.64) gezeigt, zu Sprungfunktionen. Durch den Grenzübergang gilt weiterhin $s_l = s_u$ und damit $s_t = s_l = s_u$. Für $C_t \rightarrow 0$ sind damit die Zielgrößen aus den Gleichungen (6.20) und (6.21) identisch mit denen aus den Gleichungen (5.15) und (5.16).

6.2 Berechnen einer Testspezifikation

Das Berechnen einer Testspezifikation gliedert sich einerseits in das Abschätzen der Zielgrößen und andererseits in das Optimierverfahren zum Minimieren der Kostenfunktion.

Zur Abschätzung der Zielgrößen wird wieder ein Simulationsplan benötigt, der vom Ablauf her wie in Kapitel 5.4 beschrieben erstellt wird. Da hier ein deterministisches Verfahren für die Integration nach $s_{2:n_s}$ gezeigt werden soll, besteht der Unterschied in der Wahl der Stützstellen.⁵ Nach Kapitel 6.1.1 ist es vorteilhaft, die Stützstellen für einen Kugelring gleichmäßig über eine

⁵In [GM98] werden verschiedene hierfür geeignete Integrationsverfahren diskutiert.

Kugeloberfläche zu verteilen, deren Radius s_{\perp} in der Mitte bezüglich der Wahrscheinlichkeitsverteilung liegt. Damit können die Gewichte W_i nach Gleichung (6.12) und der Kugelradius s_{\perp} nach Gleichung (6.13) berechnet werden. Die Koordinaten der Stützstellen für einen Kugelring können bestimmt werden, indem z. B. die Koordinatenachsen des kartesischen Raums der Parameter $s_{2:n_s}$ mit einer Kugel mit dem gewünschten Radius s_{\perp} geschnitten werden. Weitere Stützstellen können durch Schnittpunkte mit Winkelhalbierenden etc. hinzugefügt werden. Besteht, wie in Abbildung 6.1, die Zerlegung aus zwei Kreisringen mit je acht Stützstellen und dem zentralen Teilbereich um den Worst-Case-Parametersatz, so hat die Zerlegung insgesamt $p = 17$ Teilbereiche. Sollen diese Teilbereiche alle gleiche Wahrscheinlichkeit haben: $W_i = \frac{1}{17}$, so ist der Radius s_{\perp} der Stützstellen des inneren der beiden Kreisringe durch $\text{cdf}^x(s_{\perp}) = \frac{1}{17} + \frac{1}{2} \frac{8}{17}$ nach Gleichung (6.13) zu bestimmen. Während der Optimierung wird für die einzelnen Auswertungen der Zielgrößen dieselbe Zerlegung verwendet. Die Stützstellen und W_i sind deshalb nur einmal zu Beginn der Optimierung zu berechnen.

Für die Integration nach s_1 wird wie in Kapitel 6.1.2 beschrieben vorgegangen. Vorbereitend werden die Integrationsgrenze s_g und alle Modelle der Testbeobachtungen $\check{o}(s_1)$ bestimmt. Daraus kann dann in jedem Iterationsschritt der Optimierung zunächst das Modell der Testeigenschaft $t(\check{o}(s_1), \mathbf{x})$ linear kombiniert werden, woraus sich die Integrationsgrenzen s_l und s_u z. B. für $\mu = 7$ berechnen lassen. Um Extrapolation zu vermeiden, sind dabei die Gültigkeitsbereiche der Modelle zu überwachen und gegebenenfalls anzupassen. Für die Integration nach s_1 in den Gleichungen (6.20) und (6.21) der beiden Zielgrößen wird das Trapezverfahren gewählt. Zur Auswertung des Integranden an den Stützstellen des Trapezverfahrens wird dabei das Modell der Testeigenschaft verwendet. Das Trapezverfahren verwendet äquidistante Stützstellen. Wenn diese Stützstellen auf einem festen Raster gewählt werden, hat dies für ein iteratives Optimierverfahren den großen Vorteil einer stetigen Abschätzung der Kostenfunktion. Werden die Stützstellen dagegen bei jedem Iterationsschritt neu festgelegt, kann die abgeschätzte Kostenfunktion unstetig werden, was zu Zyklen bei der Optimierung führen kann. Der Genauigkeitsverlust, den Integrationsverfahren mit äquidistanten Stützstellen gegenüber denen mit geeigneter gewählten Stützstellen haben [Dre75], lässt sich hier durch eine höhere Anzahl an Stützstellen ausgleichen.⁶ Der Abstand der Stützstellen wird zu Beginn sinnvollerweise je nach den Genauigkeitsanforderungen abhängig von der Streuung des Messfehlers C_t gewählt: z. B. $\frac{1}{3} \sqrt{C_t}$.⁷

Nach Gleichung (6.1) ist eine eindimensionale Kostenfunktion über einem $(n_o + 1)$ -dimensionalen Parameterraum der Parameter \mathbf{x} und t_B zu minimieren. Die eingeführten Kostenfunktionen sind Linearkombinationen der Zielgrößen $P_{\widehat{RG}}$ und $P_{\widehat{AF}}$, die stetig, aber weder konvex noch konkav sind. Das mit dem anschließend beschriebenen Verfahren ermittelte lokale Optimum konnte jedoch, zumindest an den untersuchten Beispielen, bei diversen Untersuchungen nicht übertroffen werden. Dazu wurde die Optimierung mit verschiedenen, sinnvoll gewählten Startpunkten wiederholt oder die Kostenfunktion entlang von Geraden durch die Optimierlösung visualisiert. Die Optimieraufgabe scheint also bezüglich Finden des globalen Optimums gutmütig zu sein.

Die grundsätzliche algorithmische Struktur einer Optimierung beginnt mit der Wahl eines Startpunktes. Dann wird eine Suchrichtung bestimmt und eine eindimensionale Linienoptimierung in dieser Richtung durchgeführt. Das Bestimmen der Suchrichtung und die Linienoptimierung werden dann iterativ wiederholt, bis ein Abbruchkriterium erfüllt ist [Pap91, GMW81].

Als Startpunkt für die Optimierung wird jeweils die bessere der justierten Lösungen mit den Verfahren LIN-V aus Kapitel 4 oder APP-V aus Kapitel 5 verwendet. Dabei ist es sinnvoll zum Justieren bereits die messfehlerbehafteten Zielgrößen $\hat{P}_{\widehat{RG}}$ und $\hat{P}_{\widehat{AF}}$ zu verwenden.

⁶Die Rechenzeit zur Auswertung dieser zusätzlichen Stützstellen über das Modell ist gering.

⁷Da sich C_t nach Gleichung (2.39) während der Optimierung ändert, ist dessen Wert im Startpunkt der Optimierung zu verwenden.

Es hat sich gezeigt, dass die Suchrichtungsbestimmung und die Linienoptimierung mit \mathbf{x} und t_B im Wechsel vorteilhafter war als eine gemeinsame Suchrichtungsbestimmung und Linienoptimierung mit $[\mathbf{x}^T, t_B]^T$. Während einer Iteration wird deshalb zunächst für \mathbf{x} und anschließend für t_B eine Suchrichtung bestimmt und die Linienoptimierung durchgeführt. Für $C_t > 0$ sind die Zielgrößen stetig ableitbar; die Suchrichtungen ließen sich also durch Gradienten bestimmen. Es ist jedoch zu beachten, dass die Ableitung der Annahme- bzw. der Ablehnungswahrscheinlichkeit für $C_t \rightarrow 0$ zur Dirac-Funktion wird.⁸ Für den anzustrebenden Fall kleiner Streuung des Messfehlers sind deshalb gradientenbasierte Verfahren problematisch. Beim derzeitigen Stand der Implementierung wird deshalb das Gauß-Seidel-Verfahren angewendet [Pap91]. Dabei wird zufällig eine Basis für den Raum der Optimierparameter \mathbf{x} bestimmt und dann eine achsenparallele Suche zu jeder Koordinate durchgeführt. Daran anschließend wird eine Koordinatensuche nach t_B durchgeführt. Der darauf folgende Optimierschritt wird mit einer neuen Basis fortgesetzt.

Der Funktionsverlauf der Kostenfunktion ist in Suchrichtung typischerweise ein u-förmiges Tal, welches zu beiden Seiten in einem Hochplateau endet. Die Hochplateaus ergeben sich daraus, dass eine der beiden Zielgrößen den Maximalwert annimmt, während die andere Zielgröße Null wird. Die Kostenfunktion bleibt somit konstant. Die Anfangsschrittweite für die Liniensuche bzw. je nach verwendetem Verfahren das Startintervall sind deshalb sorgfältig zu wählen. Hier hat sich ein erweiterter Goldene-Schnitt-Algorithmus bewährt. Der Goldene-Schnitt-Algorithmus verkleinert iterativ ein Intervall indem das gesuchte Minimum liegt. Dazu werden vier Punkte verwendet, deren Abstandverhältnis über die Iterationsschritte konstant bleibt. Wird das Startintervall entweder zu klein gewählt, um die gegenüberliegende Seite des u-förmigen Tales zu erreichen, oder zu groß, so dass drei der vier Punkte auf dem gegenüberliegenden Plateau zu liegen kommen, dann liegt das Minimum am Rand und nicht innerhalb des Intervalls. In einem solchen Fall kann die Methode der Intervallverkleinerung des Goldenen-Schnitt-Algorithmus in umgekehrter Richtung zur zügigen und systematischen Intervallvergrößerung solange eingesetzt werden, bis das Minimum innerhalb des Intervalls liegt. Dabei ist sichergestellt, dass an dem kleinsten Funktionswert, der zu Beginn aus dem vorhergehenden Optimierschritt übernommen wird, festgehalten wird.

Zur Vermeidung numerischer Probleme ist hilfreich, dass sich ein Skalieren der Testentwurfparameter \mathbf{x} und t_B mit einem beliebigen positiven Faktor $\alpha \in \mathbb{R}^+$: $\alpha\mathbf{x}$ und αt_B auch in diesem Ansatz nicht auf die Zielgrößen auswirkt. Dies wird nun gezeigt. Die Skalierung wirkt sich auf t nach Gleichung (2.10) linear: αt und auf C_t nach Gleichung (2.39) quadratisch: $\alpha^2 C_t$ aus. Für z. B. die Annahmewahrscheinlichkeit aus Gleichung (2.55) folgt:

$$\begin{aligned} P_s^a(\alpha t, \alpha t_B, \alpha^2 C_t) &= \text{cdf}^N(\alpha t_B, \alpha t, \alpha^2 C_t) = \text{cdf}^N\left(\frac{\alpha t_B - \alpha t}{\sqrt{\alpha^2 C_t}}, 0, 1\right) \\ &= \text{cdf}^N(t_B, t, C_t) = P_s^a(t, t_B, C_t), \end{aligned} \quad (6.22)$$

wozu die Standardisierung aus Gleichung (A.7) verwendet wurde. P_s^a , genauso wie P_s^r , ist damit invariant bezüglich der Skalierung der Testentwurfparameter mit α und damit auch die Zielgrößen $P_{\mathcal{RG}}^{\widetilde{}}$ und $P_{\mathcal{AF}}^{\widetilde{}}$. \square

6.3 Experimentelle Ergebnisse

Im folgenden werden in Abschnitt 6.3.1 Ergebnisse zu Testentwürfen mit dem eben vorgestellten Verfahren, das mit OPT-V bezeichnet wird, präsentiert. Die Genauigkeit der Abschätzungen der Zielgrößen einerseits mit dem Validierverfahren VAL-V und andererseits mit OPT-V werden in

⁸Nach Gleichung (2.64) werden P_s^a und P_s^r für $C_t \rightarrow 0$ zur Sprungfunktion.

Abschnitt 6.3.2 untersucht. Dies geschieht durch einen Vergleich der Standardabweichung der Schätzungen. Den Schluss bildet ein Vergleich der drei vorgestellten Verfahren LIN-V, APP-V und OPT-V.

6.3.1 Testentwurf

Mit dem Verfahren OPT-V wurden Testentwürfe für die in den Tabellen 3.1 und 3.2 aufgeführten Betriebsspezifikationen durchgeführt. Dabei wurden zur Integration nach $s_{2:n_s}$ $p = 361$ Stützpunkte verwendet. Dies ergibt sich aus dem Worst-Case-Parametersatz s_W im Zentrum und 5 Ringen mit je 2 Stützpunkten auf den 6 Koordinatenachsen und $2 \binom{6}{2} = 30$ Winkelhalbierenden. Zum Validieren wurden wieder $N_0 = N_W = 600$ Simulationen verwendet. Die Zielgrößen $\hat{P}_{\widehat{RG}}$, $\hat{P}_{\widehat{AF}}$, $\ddot{P}_{\widehat{RG}}$ und $\ddot{P}_{\widehat{AF}}$ sowie die Kosten \hat{K} und \ddot{K} aus den Gleichungen (5.31) und (4.46) mit denen die Testentwürfe bewertet wurden, sind in Tabelle 6.1 eingetragen. Da beim Entwurfsverfahren

f	$\hat{P}_{\widehat{RG}}$ [ppm]	$\hat{P}_{\widehat{AF}}$ [ppm]	\hat{K} [ppm]	$\ddot{P}_{\widehat{RG}}$ [ppm]	$\ddot{P}_{\widehat{AF}}$ [ppm]	\ddot{K} [ppm]
A_0	8,2	0,54	1,2	7,8	0,24	0,93
GBW	130	5,7	17	120	5,3	16
Φ_M	160	6,9	21	160	5,3	20
SR_f	1,3	0,04	0,15	0,38	0,03	0,07
SR_r	1700	55	210	2100	64	250
PSRR	160	5,8	19	160	6,3	20
power	43	1,4	5,2	0,08	0,02	0,03

(a) M-OP

f	$\hat{P}_{\widehat{RG}}$ [ppm]	$\hat{P}_{\widehat{AF}}$ [ppm]	\hat{K} [ppm]	$\ddot{P}_{\widehat{RG}}$ [ppm]	$\ddot{P}_{\widehat{AF}}$ [ppm]	\ddot{K} [ppm]
A_0	6200	380	910	7700	350	1000
GM	610	25	79	530	16	62
f_t	8,7	0,39	1,1	7,8	0,27	0,95
f_{3dB}	490	20	63	430	16	53
Φ_M	250	9,7	31	200	7,9	25
SR_r	310	11	38	250	6,9	29
PSRR	37	2,2	5,4	83	2,4	9,7
power	290	10	35	160	17	30

(b) F-OP

Tabelle 6.1: Bewertung der Testentwürfe.

OPT-V die Nichtlinearität der Schaltungseigenschaften f und t sowie der Messfehler gleichermaßen berücksichtigt werden, stimmen die Ergebnisse im Rahmen der Genauigkeit sehr gut mit den Validiererergebnissen überein. Im folgenden soll die Schätzgenauigkeit mit der die Kosten \hat{K} bzw. \ddot{K} abgeschätzt werden können untersucht werden.

6.3.2 Schätzgenauigkeit der Zielgrößen

Die Genauigkeit der Abschätzung der Zielgrößen soll mit der Standardabweichung der Zielgrößen untersucht werden. Betrachtet werden die Zielgrößen $\hat{P}_{\mathcal{RG}}$ und $\hat{P}_{\mathcal{AF}}$ im Vergleich mit $\ddot{P}_{\mathcal{RG}}$ und $\ddot{P}_{\mathcal{AF}}$. Zur Berechnung der Standardabweichungen dieser Zielgrößen wird ein *Resampling* Verfahren eingesetzt [DH97]. Die Schätzwerte der Zielgrößen werden dabei als normalverteilte Zufallsgrößen betrachtet. Für die Zielgrößen $\ddot{P}_{\mathcal{RG}}$ und $\ddot{P}_{\mathcal{AF}}$, die mit dem Verfahren VAL-V aus Kapitel 3.2 bestimmt werden, wird folgendermaßen verfahren. Um die Standardabweichung der Zielgrößen bei einer Stichprobe mit einer bestimmten Mächtigkeit, hier $N_0 = N_W = 600$, ermitteln zu können, wird beim *Resampling* Verfahren zunächst eine größere Stichprobe erzeugt. Für die folgenden Ergebnisse waren dies $N_0 = N_W = 1050$ Elemente. Daraus werden wiederholt, hier 10 000 mal, Stichproben der Mächtigkeit $N_0 = N_W = 600$ gezogen und die Zielgrößen damit abgeschätzt. Mit diesen 10 000 verschiedenen Schätzwerten der Zielgrößen kann dann deren Streuung berechnet werden [Kre75]. Zusammenfassend wurden für die Bestimmung der Schätzgenauigkeit der Zielgrößen $\hat{P}_{\mathcal{RG}}$ und $\hat{P}_{\mathcal{AF}}$ insgesamt $N_0 + N_W = 1200$ Elemente aus einer *Resampling* Stichprobe mit Mächtigkeit $N_0 + N_W = 2100$ gezogen.

Für die Bestimmung der Streuung der Zielgrößen $\hat{P}_{\mathcal{RG}}$ und $\hat{P}_{\mathcal{AF}}$ sollen jeweils genauso viele Stichprobenelemente verwendet werden wie für $\ddot{P}_{\mathcal{RG}}$ und $\ddot{P}_{\mathcal{AF}}$. Für $\hat{P}_{\mathcal{RG}}$ und $\hat{P}_{\mathcal{AF}}$ sind dabei die Simulationen für die Integration nach s_1 laut Kapitel 6.1.2 zu berücksichtigen. Da für die Integration nach s_1 je drei Simulationen benötigt werden, verbleiben für die Integration nach $s_{2:n_s}$ $\frac{1200}{3} = 400$ Stichprobenelemente, die aus eine *Resampling* Stichprobe mit $\frac{2100}{3} = 700$ Elementen gezogen werden.

Aus den mit dem *Resampling* Verfahren ermittelten Standardabweichungen der Zielgrößen wurde die Standardabweichung der jeweiligen Kostenfunktion \hat{K} und \ddot{K} berechnet. Sie sind in Tabelle 6.2 angegeben und der dazwischen liegende Faktor wird in Abbildung 6.2 veranschaulicht.

f	std(\hat{K})	std(\ddot{K})	f	std(\hat{K})	std(\ddot{K})
A_0	0,18	0,11	A_0	9,7	540
GBW	0,10	2,3	GM	6,2	9,0
Φ_M	0,068	2,7	f_t	0,0065	0,16
SR_f	0,0034	0,029	f_{3dB}	0,50	8,1
SR_r	1,7	47	Φ_M	0,64	6,0
PSRR	0,12	3,6	SR_r	1,1	6,9
power	0,046	2,4	PSRR	0,066	1,6
			power	0,21	8,7

(a) M-OP

(b) F-OP

Tabelle 6.2: Standardabweichung der Kostenschätzungen in ppm.

Die Standardabweichung der Kostenfunktion \ddot{K} ist im Durchschnitt über alle Testentwürfe um den Faktor 21 größer als die von \hat{K} . Um bei \ddot{K} dieselbe Genauigkeit wie bei \hat{K} zu erhalten, müsste der Simulationsaufwand bei dem Validierverfahren mindestens um den Faktor $21^2 = 441$ gesteigert werden.⁹

⁹Dies folgt aus der direkten Proportionalität zwischen der Standardabweichung der Schätzung mit einem stochas-

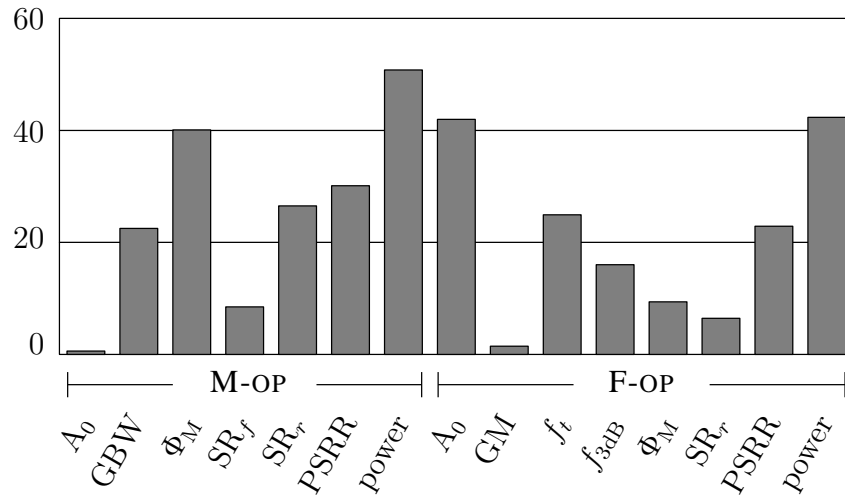


Abbildung 6.2: Vergleich der Standardabweichungen der Kostenschätzungen. Es ist der Faktor $\frac{\text{std}(\hat{\hat{K}})}{\text{std}(\hat{K})}$ dargestellt.

6.3.3 Verfahrensvergleich

Der Vorteil des Verfahrens OPT-V wird durch einen Vergleich mit den beiden anderen vorgestellten Verfahren LIN-V und APP-V offensichtlich. In Tabelle 6.3 und Abbildung 6.3 werden die Ergebnisse der Verfahren LIN-V, APP-V und OPT-V gegenübergestellt. Die Bewertung erfolgt für alle drei Verfahren gleichermaßen mit der Kostenfunktion \hat{K} ; also dem genauesten Verfahren.

f	LIN-V	APP-V	OPT-V	f	LIN-V	APP-V	OPT-V
A_0	4,5	2,8	1,2	A_0	1300	1000	910
GBW	25	18	17	GM	280	80	79
Φ_M	25	39	21	f_t	2,1	1,4	1,1
SR_f	0,24	0,86	0,15	f_{3dB}	490	63	63
SR_r	970	1100	210	Φ_M	206	32	31
PSRR	21	19	19	SR_r	67	47	38
power	26	11	5,2	PSRR	9,5	5,9	5,4
				power	59	43	35

(a) M-OP

(b) F-OP

Tabelle 6.3: Verfahrensvergleich anhand der Kostenfunktion \hat{K} [ppm].

Die Testentwürfe mit dem Verfahren LIN-V werden in Tabelle 6.3 mit \hat{K} bewertet, wobei die Nichtlinearität der Schaltungseigenschaften f und t berücksichtigt wird. Im Gegensatz dazu beruht die Bewertung derselben Testentwürfe in Tabelle 4.2 mit K auf den Linearisierungen \tilde{f} und $t(\bar{o}, \mathbf{x})$. Die Abweichungen zwischen diesen Bewertungen sind rein auf den systematischen Fehler zurückzuführen und stimmen mit denen aus Kapitel 4.6.2 überein, dem Vergleich mit dem Validierverfahren VAL-V.

tischen Verfahren und $\frac{1}{\sqrt{N}}$, wobei N die Mächtigkeit der Stichprobe ist [Hab70].

Die Ergebnisse des Verfahrens APP-V stammen aus der Ermittlung der Startlösung für OPT-V. Für die Ergebnisse mit APP-V und OPT-V wurde deshalb gleichermaßen der in diesem Kapitel beschriebene Simulationsplan zur deterministischen Integration nach $s_{2:n_s}$ zu Grunde gelegt. Dies ermöglicht einen Vergleich der Ergebnisse aus den Tabellen 5.4 bzw. 6.3 bezüglich des Integrationsverfahrens im Unterraum $s_{2:n_s}$. Die jeweilige Bewertungen mit \hat{K} zeigt im Vergleich, dass bei identischem Simulationsaufwand das deterministische und das stochastische Integrationsverfahren bei der Integration nach $s_{2:n_s}$ gleichwertige Ergebnisse liefern.

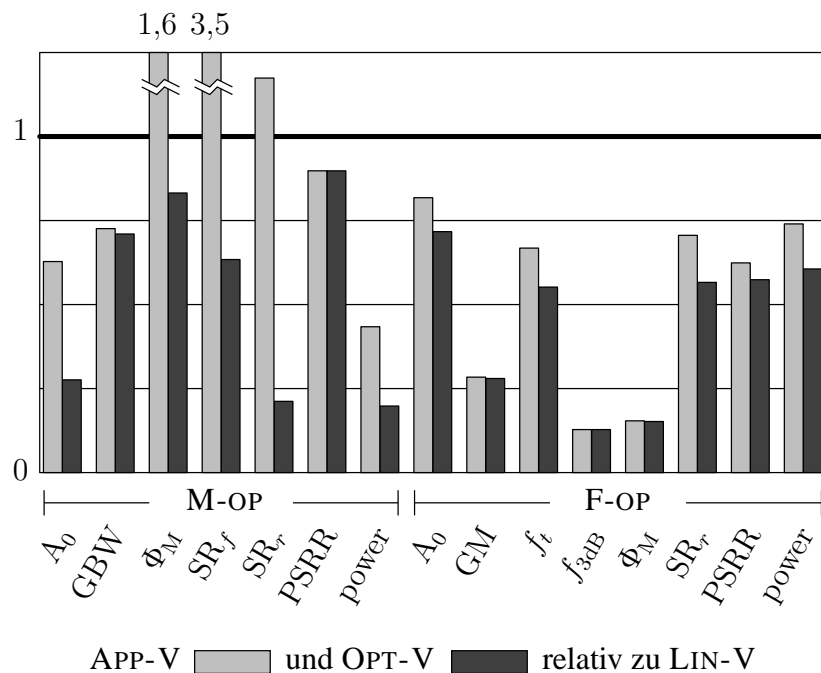


Abbildung 6.3: Verfahrensvergleich anhand der Kostenfunktion \hat{K} . Die Ergebnisse zu APP-V und OPT-V sind relativ zu LIN-V angetragen. Werte kleiner 1 zeigen Verbesserungen im Vergleich zu LIN-V.

In Abbildung 6.3 werden die Daten aus Tabelle 6.3 visualisiert. Die Ergebnisse der beiden simulationsintensiveren Verfahren APP-V und OPT-V sind relativ zu LIN-V angetragen. Ein Balken der Höhe 1 entspricht deshalb den Kosten von LIN-V. Die beiden Verfahren mit dem höheren Simulationsaufwand bewirken meist deutlich bessere Testentwürfe. Es ist ersichtlich, dass OPT-V in jedem Fall bessere Testentwürfe als LIN-V erzeugt, da die Kosten für Fehlentscheidungen geringer sind. Beim Vergleich von OPT-V mit APP-V und LIN-V kann festgestellt werden, dass die durchgängige und gemeinsame Berücksichtigung der Messfehler und der Nichtlinearität von f und t in vielen Fällen zu einer signifikanten und in einem Drittel der Fälle sogar zu einer beträchtlichen Kostenreduktion führt.

6.3.4 Vergleich der Simulationskosten

Der Simulationsaufwand für die vorgestellten Verfahren ergibt sich folgendermaßen. Für die Linearisierungen \bar{f} und $t(\bar{o}, \mathbf{x})$ mit zentrierten Differenzenquotienten fallen bei den Verfahren LIN-V, APP-V und OPT-V $2n_s + 1$ Simulationen an. Bei den Verfahren APP-V und OPT-V kommen insgesamt noch $3p$ Simulationen hinzu: p für die Integration nach $s_{2:n_s}$ mal 3 für das verwendete Interpolationsverfahren bei der Integration nach s_1 . Zur Validierung mit VAL-V werden $N_0 + N_W$

Simulationen benötigt. Mit $n_s = 7$, $p = 361$ und $N_0 = N_W = 600$ wurden bei den Ergebnissen der Tabellen 4.2, 5.3, 5.4, 6.1 und 6.3 damit im Vergleich insgesamt

LIN-V	APP-V	OPT-V	VAL-V
15	1098	1098	1200

Simulationen verwendet.

Kapitel 7

Zusammenfassung

Die Herstellung integrierter Schaltungen ist ein komplexer Prozess, der Schwankungen unterliegt und bei dem Defekte auftreten. Ein anschließender Test zur Erkennung fehlerhafter Schaltungen ist deshalb unabdingbar. Im Gegensatz zum automatisierten Testentwurf für digitale Schaltungen erfolgt der Testentwurf für analoge und analog-digitale Schaltungen noch immer größtenteils manuell und unter großem Zeitaufwand. Mit dem Ziel die damit verbundenen Kosten zu reduzieren, stellt diese Arbeit effiziente Verfahren zum automatisierten Testentwurf für analoge und analog-digitale Schaltungen bereit.

Zwischen dem Hersteller einer Schaltung und dessen Kunden werden üblicherweise Anforderungen an die Schaltung in Form von Betriebsspezifikationen vereinbart. Die Betriebsspezifikationen garantiert der Hersteller dem Kunden. Durch Testen stellt der Hersteller sicher, dass jede ausgelieferte Schaltung allen Betriebsspezifikationen genügt. Dazu werden Eigenschaften der Schaltung gemessen und mit den für den Test erstellten Vorschriften, den sog. Testspezifikationen, ausgewertet. Wenn eine Schaltung alle diese Testspezifikationen erfüllt und damit den Test besteht, geht der Hersteller davon aus, dass sie auch alle Betriebsspezifikationen erfüllt. Die Schaltung wird dem Kunden ausgeliefert.

Um die Funktion der Schaltung beim Test zu überprüfen, ist es nahe liegend, die Betriebsspezifikation direkt als Testspezifikation zu verwenden. Diese übliche Vorgehensweise, der sog. explizite funktionale Test oder spezifikationsbasierte Test, stößt jedoch durch die immer höhere Integration der Schaltungen zunehmend an seine Grenzen. Einen Ausweg bieten implizite funktionale Testverfahren. Dabei wird vom Messen der in der Betriebsspezifikation spezifizierten Schaltungseigenschaft abgewichen und das Messen mehrerer anderer, als Testbeobachtungen bezeichneter Schaltungseigenschaften zugelassen. Durch die freie Wahl dieser Testbeobachtungen erleichtern implizite funktionale Testverfahren den Test schwieriger zu überprüfender Betriebsspezifikationen. Auf das Einhalten der Betriebsspezifikation kann bei impliziten Testverfahren durch Auswerten der Testbeobachtungen geschlossen werden. Diese Arbeit stellt dazu drei Berechnungsansätze für Testspezifikationen vor, die diesen Rückschluss ermöglichen.

Beim Test können zwei Arten von Fehlentscheidungen auftreten. Funktionierende Schaltungen können fälschlicherweise aussortiert und fehlerhafte Schaltungen fälschlicherweise dem Kunden ausgeliefert werden. Die Auftrittswahrscheinlichkeiten dieser beiden Arten von Fehlentscheidungen, die Ausbeuteeinbuße und die Fehlerdurchlässigkeit, sind die fundamentalen Ziel- und Bewertungsgrößen der vorgestellten Testentwurfverfahren. Die Ausbeuteeinbuße und die Fehlerdurchlässigkeit sind konkurrierende Größen. Zum Bestimmen von Testspezifikationen werden die beiden Arten von Fehlentscheidungen entsprechend ihrer Auftrittswahrscheinlichkeiten gewichtet und in einer zu minimierenden Kostenfunktion vereint.

Um die Fehlentscheidungen beim Test besser beschreiben zu können, wird bei der Problemfor-

mulierung strikt zwischen der Betriebsumgebung und der Testumgebung der Schaltung unterschieden. In der Betriebsumgebung sind die dem Kunden garantierten Anforderungen an die Schaltung mit den Betriebsspezifikationen spezifiziert. Zusätzlich werden Arbeitsbereiche von Betriebsparametern, z. B. der Umgebungstemperatur, beim Einsatz der Schaltung modelliert. Die Testumgebung dagegen umfasst den Testaufbau und die Messung der Testbeobachtungen. Während über die Betriebsspezifikation die funktionierenden und die fehlerhaften Schaltungen definiert werden, ergeben sich aus der Testspezifikation die angenommenen und die aussortierten Schaltungen.

Das zugrunde liegende Fehlermodell zur Unterscheidung der funktionierenden und der fehlerhaften Schaltungen basiert auf Betriebsspezifikationen und berücksichtigt die Schwankungen des Herstellungsprozesses über ein stochastisches Modell von Transistorparametern. Bei einer fehlerhaften Schaltung führen Abweichungen der Bauelementewerte von den Nominalwerten zum Verletzen mindestens einer Betriebsspezifikation. Da in der Praxis bei der Herstellung nicht nur einzelne Parameter schwanken, erfasst das Fehlermodell Spezifikationsverletzungen bei einer gleichzeitigen Abweichung mehrerer Transistorparameter vom Nominalwert. Dieses parametrische Fehlermodell ist aufwendig, führt jedoch zu Tests für die schwer detektierbaren parametrischen Fehler. Diese Tests überdecken auch die katastrophalen Fehler durch z. B. lokale Defekte oder Verunreinigungen.

Wird beim Testentwurf dasselbe parametrische Fehlermodell wie beim vorausgehenden Toleranzentwurf verwendet, so kann vorhandenes Wissen aus dem Toleranzentwurf für den Testentwurf genutzt werden. Die vorgestellten Testentwurfsverfahren bauen auf den Erkenntnissen aus den Toleranzentwurfsverfahren mit Worst-Case-Abständen auf. Der beim Toleranzentwurf für jede Betriebsspezifikation bestimmte Worst-Case-Parametersatz ist dabei auch für den Testentwurf von zentraler Bedeutung. Er ist einer der Grenzparametersätze an der durch die Betriebsspezifikation gegebenen Grenze zwischen den funktionierenden und den fehlerhaften Schaltungen. Ein Grenzparametersatz ist ein Parametersatz von Bauelementewerten für den die Betriebsspezifikation gerade eben noch erfüllt ist. Entlang der Grenzparametersätze treten beim Test die Fehlentscheidungen auf. Der Worst-Case-Parametersatz zeichnet sich nun durch die höchste Wahrscheinlichkeitsdichte bezüglich aller Grenzparametersätze aus. Treten beim Test in dessen Umgebung Fehlentscheidungen auf, so wirken sich diese wegen der hohen Dichte stark auf die Zielgrößen bzw. die Kosten aus. Beim Entwurf der Testspezifikation liegt deshalb der Fokus auf dem Grenzverlauf zwischen den funktionierenden und den fehlerhaften Schaltungen in der Umgebung des Worst-Case-Parametersatzes. Die Konzentration auf diesen problemrelevanten Bereich ist ein wesentlicher Faktor für die Effizienz der vorgestellten Testentwurfsverfahren.

Durch Messen der Testbeobachtungen und durch Auswerten der Testspezifikationen wird über das Annehmen oder das Aussortieren der Schaltungen entschieden. Dabei beeinflussen unvermeidbare zufällige Messfehler die Testentscheidung. Diese Messfehler werden deshalb bei der Formulierung der Zielgrößen berücksichtigt und gehen in die Zielgrößen Ausbeuteeinbuße und Fehlerdurchlässigkeit und damit auch in die Kostenfunktion ein. Die Berücksichtigung von Messfehlern ist so ein wesentlicher Bestandteil der vorgestellten Testentwurfsverfahren.

Die vorgestellten Verfahren sind simulationsbasiert und nutzen damit das in etablierte Simulatoren geflossene Fachwissen und den beträchtlichen Entwicklungsaufwand dieser Simulationswerkzeuge. Durch Simulation können zu Parametersätzen die zugehörigen Schaltungseigenschaften eindeutig bestimmt werden. Die umgekehrte Abbildung von Schaltungseigenschaften auf Parametersätze ist im allgemeinen nicht eindeutig. Bei den Testentwurfsverfahren wird deshalb auf die Rückabbildung verzichtet. Analoge Schaltungssimulationen sind zeitaufwendig. Der Rechenaufwand bei simulationsbasierten Entwurfsmethoden wird sogar im wesentlichen durch die Zahl analoger Schaltungssimulationen bestimmt. Das Ziel simulationseffizienter Entwurfsverfahren ist deshalb, die durch Simulation erhaltene Information möglichst optimal zu nutzen, um

die Anzahl durchzuführender Schaltungssimulationen zu minimieren.

In der Arbeit werden drei Verfahren vorgeschlagen, mit denen zu jeder Betriebsspezifikation einer Schaltung eine zugehörige Testspezifikation entworfen werden kann. Mit dem Ziel die Kosten von Fehlentscheidungen zu minimieren, betrachten alle drei Verfahren die Grenzparametersätze der Betriebs- sowie der Testspezifikation. Während die Grenzparametersätze der Betriebsspezifikation eine Grenzfläche zwischen den funktionierenden und den fehlerhaften Schaltungen bilden, ergeben die Grenzparametersätze der Testspezifikation eine Grenzfläche zwischen den beim Test angenommenen und den aussortierten Schaltungen. Die Testspezifikation wird bei allen Verfahren als eine Linearkombination der Testbeobachtungen angesetzt, deren Gewichte durch das Testentwurfsverfahren bestimmt werden. Die Grenzfläche der Testspezifikation ist von dieser Linearkombination abhängig. Die Linearkombination wird so berechnet, dass die Grenzfläche der Testspezifikation mit der Grenzfläche der Betriebsspezifikation so gut übereinstimmt, dass möglichst alle funktionierenden Schaltungen beim Test angenommen werden bzw. möglichst alle fehlerhaften Schaltungen aussortiert werden. Die drei vorgestellten Verfahren berücksichtigen dabei die Nichtlinearität der Grenzflächen und die zufälligen Messfehler in unterschiedlicher Art und Weise. Dadurch unterscheiden sich die Verfahren auch im Simulationsaufwand.

Der erste Ansatz hat den kleinsten Simulationsaufwand. Es werden Linearisierungen der Grenzflächen der Betriebsspezifikation und der Testspezifikation verwendet, die simulationseffizient bestimmt werden können. Die Linearkombination der Testbeobachtungen wird dabei so bestimmt, dass die Grenzfläche der Testspezifikation mit der Grenzfläche der Betriebsspezifikation in linearer Näherung übereinstimmt. Bei diesem Ansatz ist die Wahl des Worst-Case-Parametersatzes als Linearisierungspunkt entscheidend. Er sorgt dafür, dass im problemrelevanten Bereich der Linearisierungsfehler am kleinsten ist. So werden die tatsächlich nichtlinearen Grenzflächen der Betriebs- und der Testspezifikation in vielen Fällen ausreichend genau angenähert. In einem zweiten Schritt, dem Justierschritt, werden die Kosten bezüglich der beiden konkurrierenden Arten von Fehlentscheidungen beim Test minimiert. Dabei wird durch Einstellen des Spezifikationswertes die Testspezifikation entweder angezogen oder gelockert. Der Messfehlereinfluss auf die Testentscheidung wird in beiden Schritten berücksichtigt. Im ersten Schritt erfolgt dies durch geeignete Lösungsverfahren für das sich ergebende Gleichungssystem und im zweiten Schritt durch Berücksichtigen der Messfehler in den zum Justieren verwendeten Zielgrößen Ausbeuteeinbuße und Fehlerdurchlässigkeit.

Durch das Linearisieren vereinfacht sich die Formulierung der beiden Zielgrößen Ausbeuteeinbuße und Fehlerdurchlässigkeit stark. Es lassen sich dann fundamentale Größen identifizieren, die den Testentwurf charakterisieren. Durch Abschätzen der beiden Zielgrößen im linearen Modell kann der Testingenieur im Voraus kritische, schwer zu testenden Betriebsspezifikationen erkennen. Er kann dann rein rechnerisch und ohne zeitaufwendige Schaltungssimulationen die Beziehungen der Größen zueinander verstehen lernen und so Maßnahmen im Hinblick auf einen kostengünstigeren Test überprüfen.

Beim zweiten Testentwurfsverfahren wird die Grenzfläche der Testspezifikation durch ein Approximationsverfahren an die Grenzfläche der Betriebsspezifikation angenähert. Durch das Approximationsverfahren wird die Nichtlinearität der Grenzflächen sowohl der Betriebsspezifikation als auch der Testspezifikation berücksichtigt. Die zur Approximation benötigten Stützpunkte werden über den problemrelevanten Bereich entlang der linearen Näherung der Grenzflächen um den Worst-Case-Parametersatz als Zentrum verteilt. Die Approximation ist deshalb im problemrelevanten Bereich hoher Wahrscheinlichkeitsdichte sehr genau, was die Auftrittswahrscheinlichkeit von Fehlentscheidungen beim Test minimiert.

Wie beim ersten Testentwurfsverfahren wird die Testspezifikation in einem zweiten Schritt kostenoptimal justiert. Dazu sind die Zielgrößen Ausbeuteeinbuße und Fehlerdurchlässigkeit unter

Berücksichtigung der Nichtlinearität der Schaltungseigenschaften zu bestimmen. Die Zielgrößen sind dann mehrdimensionale Integrale, die nicht analytisch lösbar sind und deshalb mit Quadraturverfahren abgeschätzt werden. Ein Aufteilen des Parameterraums in einen zu der Grenzfläche der Betriebsspezifikation in linearer Näherung senkrechten und einen dazu parallelen Unterraum trägt dabei wesentlich zur Steigerung der Simulationseffizienz der Abschätzung bei. Für die Parametersätze der nichtlinearen Grenzfläche ist die spezifizierte Schaltungseigenschaft per Definition konstant gleich dem Spezifikationswert. Parallel zur linearen Näherung dieser Grenzfläche ändert sich folglich die spezifizierte Schaltungseigenschaft kaum. Für den eindimensionalen, senkrechten Unterraum wird deshalb ein genaues deterministisches Integrationsverfahren eingesetzt, bei dem die Stützstellen nahe beieinander liegen. Um den Simulationsaufwand an den Stützstellen zu begrenzen, werden die Schaltungseigenschaften mit Interpolationsverfahren bestimmt. Auf Grund der Interpolation in nur einer Dimension und der Einschränkung des Interpolationsgebiets auf den problemrelevanten Bereich stimmen die interpolierten Werte mit den tatsächlichen Eigenschaftswerten präzise überein. Für den $(n - 1)$ -dimensionalen Unterraum parallel zur Grenzfläche, über den sich die nichtlineare Schaltungseigenschaft wenig ändert, kommt ein Monte-Carlo-Verfahren zum Einsatz, dessen Konvergenz von der Dimension des Integrationsgebiets unabhängig ist. Die Stützstellen haben hier wesentlich größeren Abstand zueinander und werden gemäß der Prozessverteilung über den problemrelevanten Bereich verteilt.

Sowohl für die Approximation im ersten Schritt des Verfahrens als auch das Justieren im zweiten Schritt werden Stützstellen benötigt, an denen Schaltungseigenschaften durch Simulation zu bestimmen sind. Durch eine geschickte Wahl können dieselben Stützstellen sowohl für das Approximieren als auch für das Justieren verwendet werden. Der Simulationsaufwand fällt dann nur einmal an.

Beim Abschätzen der Zielgrößen zum Justieren werden einige Grenzparametersätze der Betriebsspezifikation für Integrationsgrenzen bestimmt. Mit diesen Grenzparametersätzen ist über das Thema des Testentwurfs hinaus eine simulationseffiziente Abschätzung der parametrischen Prozessausbeute möglich. Diese Ausbeuteschätzung berücksichtigt über den Stand der Technik hinaus simulationseffizient den nichtlinearen Verlauf der durch die Grenzparametersätze der Betriebsspezifikation gegebenen Grenzfläche.

Beim dritten Testentwurfsverfahren wird die Trennung in zwei Entwurfsschritte aufgehoben und die Testspezifikation mit einem iterativen Optimierverfahren bestimmt. Dabei werden die Kosten unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Nichtlinearität der Grenzflächen der Betriebs- und der Testspezifikation sowie des zufälligen Messfehlers minimiert. So wird das Kostenminimum im Gleichgewicht zwischen Messfehlereinfluss und Nichtlinearität gefunden. Als Startlösung der Optimierung wird die bessere Lösung eines der beiden ersten Ansätze verwendet. Die Abschätzung der Zielgrößen Ausbeuteeinbuße und Fehlerdurchlässigkeit erfolgt wie beim vorhergehenden Ansatz durch Quadraturverfahren. Dabei trägt das Aufspalten des Parameterraums in zwei Unterräume parallel und senkrecht zur Grenzfläche der Betriebsspezifikation wieder zur Simulationseffizienz bei. Der Simulationsaufwand fällt bei diesem Ansatz nur einmal zu Beginn des Optimierverfahrens an und ist gleich dem des vorhergehenden Ansatzes. Der Aufwand für das Optimierverfahren ist jedoch höher als beim Approximationsverfahren.

Die drei Testentwurfsverfahren zum impliziten funktionalen Test werden an insgesamt 15 Betriebsspezifikationen zweier Beispielschaltungen demonstriert und untereinander verglichen. Dabei hat sich gezeigt, dass der erste Ansatz für die nahezu lineare Grenzfläche vieler Betriebsspezifikationen geeignet ist. Die Einfachheit, mit der bei diesem Ansatz die Testentwurfsaufgabe formuliert wird, ist zudem eine ideale Grundlage für Diagnoseverfahren zum Testentwurf. Der zweite Ansatz greift bei nichtlinearen Grenzflächen, wobei der Messfehlereinfluss nicht zu groß werden darf. Der dritte, aufwendigste Ansatz erfasst dann darüber hinaus auch alle restlichen Fälle

mit nichtlinearen Grenzflächen und größerem Einfluss des Messfehlers.

Zum Validieren der vorgestellten Testentwurfsverfahren und zum Bewerten der Testentwürfe wird ein stochastisches Verfahren verwendet, welches unter dem Begriff *Importance Sampling* bekannt ist und anderen Testentwurfsverfahren aus dem Stand der Technik als Grundlage dient. Mit ihm können Schätzwerte für die beiden Zielgrößen Ausbeuteeinbuße und Fehlerdurchlässigkeit berechnet werden, die einerseits zum Validieren der Ergebnisse mit den vorgestellten Verfahren und andererseits als Referenz für einen Vergleich mit dem Stand der Technik dienen. Außerdem beruhen einige vorgestellte Analyseverfahren zum Testentwurf auf der Stichprobe des Validierverfahrens. Die Genauigkeit mit der die Zielgrößen mit dem Validierverfahren geschätzt werden können, ist über den Simulationsaufwand einstellbar, der vergleichsweise hoch ist. Bei gleichem Simulationsaufwand zeigt das dritte vorgeschlagene Testentwurfsverfahren im Vergleich zum Validierverfahren eine wesentlich höhere Genauigkeit durch eine um durchschnittlich zweieinhalb Größenordnungen kleinere Varianz der Schätzwerte. Um die hohe Genauigkeit des vorgestellten Verfahrens zu erreichen, müsste der Simulationsaufwand beim Validierverfahren um mindestens den Faktor 450 erhöht werden.

Die vorgeschlagenen Verfahren zum Testentwurf analoger integrierter Schaltungen beruhen auf einer möglichst allgemein gültigen Formulierung der Testentwurfsaufgabe, ermöglichen dadurch tiefere Problemeinsichten und tragen in vielfältiger Weise zum Fortschritt des impliziten funktionalen Tests analoger integrierter Schaltungen bei.

Anhang A

Zusammenstellung ergänzender Formeln

A.1 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

A.1.1 Normalverteilung

Definition A.1 Der Zufallsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ heißt n -dimensional normalverteilt $\mathbf{x} \sim N_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{C})$ mit Erwartungswert \mathbf{x}_0 und Kovarianzmatrix \mathbf{C} , falls die Dichte durch

$$\text{pdf}^N(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \mathbf{C}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\mathbf{C}|}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\right) \quad (\text{A.1})$$

gegeben ist, wobei \mathbf{C} positiv definit ist [FH84].

Die Verteilungsfunktion der eindimensionalen, normalverteilten Zufallsvariable $x \sim N_1(x_0, \sigma^2)$ mit Erwartungswert x_0 und Varianz σ^2 ist:

$$\text{cdf}^N(u, x_0, \sigma^2) = P\{x \leq u\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^u \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - x_0)^2}{\sigma^2}\right) \partial x. \quad (\text{A.2})$$

Standardisierung

Für Erwartungswerte und Kovarianzmatrizen gelten die Rechenregeln:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}) &= \mathbf{A} E(\mathbf{x}) + \mathbf{b}, \\ \text{cov}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}) &= \mathbf{A} \text{cov}(\mathbf{x}) \mathbf{A}^T, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

wobei \mathbf{x} ein Zufallsvektor und \mathbf{A} und \mathbf{b} geeignet dimensioniert seien [FH84].

Sei $\mathbf{x} \sim N_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{C})$ und $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, wobei \mathbf{A} eine $(m \times n)$ -Matrix mit $\text{rang}(\mathbf{A}) = m \leq n$ ist. Dann ist $\mathbf{y} \sim N_m(\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{A}^T)$ [FH84, Satz 3.4].

Ist $\mathbf{x} \sim N_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{C})$, so kann durch die spezielle lineare Transformation

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0) \quad (\text{A.4})$$

mit $\mathbf{M}^T \mathbf{M} = \mathbf{C}^{-1}$ *standardisiert* werden, d. h. es ist $\mathbf{y} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ [FH84].

Die Matrixfaktorisierung $\mathbf{M}^T \mathbf{M} = \mathbf{C}^{-1}$ kann mit der Cholesky-Zerlegung berechnet werden, doch kann bei schlecht konditionierter Matrix \mathbf{C} der numerische Fehler der Matrix \mathbf{M} groß werden. Stattdessen kann \mathbf{M} durch die Eigenwertzerlegung $\mathbf{C} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T$ bestimmt werden. \mathbf{V}

ist dabei die orthogonale Matrix ($\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^T$) der Eigenvektoren und $\mathbf{\Lambda}$ die Diagonalmatrix der Eigenwerte. Für die Matrix \mathbf{M} sowie ihre Inverse und Transponierte gilt dann:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{V}^T & \text{und} & & \mathbf{M}^{-1} &= \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \\ \mathbf{M}^T &= \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{-1/2} & & & \mathbf{M}^{-T} &= \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{V}^T. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Die Diagonalmatrizen $\mathbf{\Lambda}^{1/2}$ und $\mathbf{\Lambda}^{-1/2}$ können elementweise berechnet werden.

Die Transformationen für den Gradienten $f_{\mathbf{x}}$ und die hessesche Matrix $f_{\mathbf{xx}}$ der nach dem quadratischen Term abgebrochenen Taylorentwicklung einer Funktion f in \mathbf{x}^* ergeben sich unmittelbar aus

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}^*) + f_{\mathbf{x}}^T(\mathbf{x}^*) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T f_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}^*) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \\ &= f(\mathbf{x}^*) + f_{\mathbf{x}}^T(\mathbf{x}^*) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \\ &\quad + (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{M} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*))^T f_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}^*) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*), \\ f(\mathbf{y}) &= f(\mathbf{x}^*) + (\mathbf{M}^{-T} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*))^T (\mathbf{y} - \mathbf{y}^*) \\ &\quad + (\mathbf{y} - \mathbf{y}^*)^T (\mathbf{M}^{-T} f_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}^*) \mathbf{M}^{-1}) (\mathbf{y} - \mathbf{y}^*), \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

wobei $\mathbf{y}^* = \mathbf{y}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{M}(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0)$ ist.

Die Verteilungsfunktion $\text{cdf}^N(u, x_0, \sigma^2)$ aus Gleichung (A.2) kann mit der eindimensionalen, linearen Transformation $y = \frac{x-x_0}{\sigma} \sim N_1(0, 1)$ standardisiert werden. Durch Einsetzen von $x = \sigma y + x_0$ und $\partial x = \sigma \partial y$ in (A.2) folgt:

$$\begin{aligned} \text{cdf}^N(u, x_0, \sigma^2) &= P\{x \leq u\} = P\left\{y \leq \frac{u - x_0}{\sigma}\right\} \\ &= \text{cdf}^N\left(\frac{u - x_0}{\sigma}, 0, 1\right). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

A.1.2 χ^2 -Verteilung

Definition A.2 Die im Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ zusammengefassten Zufallsgrößen seien unabhängig und standardnormalverteilt $\mathbf{x} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$. $\chi^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{x} \sim \chi^2(n)$ heißt dann χ^2 -verteilt mit n Freiheitsgraden [FH84].

Mit der Gammafunktion

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-t} t^{a-1} \partial t, \quad a > 0 \quad (\text{A.8})$$

ist die Verteilungsdichte der χ^2 -Verteilung mit $x \geq 0$ [GT96]:

$$f(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})}. \quad (\text{A.9})$$

Die Verteilungsfunktion der χ^2 -Verteilung mit $x \geq 0$ ist:

$$F(x) = \Gamma_{\frac{x}{2}}\left(\frac{n}{2}\right), \quad (\text{A.10})$$

wobei $\Gamma_x(a)$ die unvollständige Gammafunktion

$$\Gamma_x(a) = \frac{\int_0^x e^{-t} t^{a-1} \partial t}{\Gamma(a)}, \quad x \geq 0, a > 0 \quad (\text{A.11})$$

ist.

Für die in der Arbeit verwendete Verteilungsdichte der χ -Verteilung wird mit $\chi = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$:

$$\text{pdf}_n^\chi(x) = \frac{2 x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})}, \quad x \geq 0 \quad (\text{A.12})$$

und die zugehörige Verteilungsfunktion:

$$\text{cdf}_n^\chi(x) = \Gamma_{\frac{x^2}{2}}\left(\frac{n}{2}\right), \quad x \geq 0 \quad (\text{A.13})$$

eingeführt [BS91].

A.2 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Definition A.3 (Ω, P) sei ein Wahrscheinlichkeitsraum mit dem Ergebnisraum Ω und der Wahrscheinlichkeitsverteilung P . Ist $B \subseteq \Omega$ ein Ereignis mit positiver Wahrscheinlichkeit und $A \subseteq \Omega$ ein beliebiges Ereignis, dann heißt

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (\text{A.14})$$

die (bedingte) Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B . [BH85].

Satz A.1 (Produktsatz) Ist $P(A) \neq 0$, so gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) P_A(B) \quad (\text{A.15})$$

[BH85].

A.3 Vektornormen

Distanzen in Vektorräumen werden mit Normen erfasst. Eine Vektornorm (auch Vektorlänge oder Betrag eines Vektors) ist eine Funktion $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die drei Bedingungen erfüllt.

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ und $\|\mathbf{x}\| = 0$, dann und nur dann, wenn $\mathbf{x} = 0$ ist,
 2. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$,
 3. $\|a\mathbf{x}\| = |a|\|\mathbf{x}\|$
- (A.16)

mit $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}$ [BS91, TB97, GvL96].

Die wichtige Klasse der p -Normen ist definiert durch:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}. \quad (\text{A.17})$$

In dieser Arbeit wird die Euklidische Norm, $p = 2$, verwendet:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}. \quad (\text{A.18})$$

Gewichtete Normen $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{W}}$ mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n,m}$ können als p -Norm geschrieben werden:

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{W}} = \|\mathbf{W}\mathbf{x}\|_2. \quad (\text{A.19})$$

A.4 Koordinatentransformation

Definition A.4 Beim Übergang von einer Basis $B = \{\mathbf{B}\}$ mit den Basisvektoren \mathbf{B} eines Vektorraums \mathbf{V} zu einer Basis $B' = \{\mathbf{B}'\}$ mit den Basisvektoren \mathbf{B}' ändern sich die Koordinaten des Vektors $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$. Es seien \mathbf{a} die Koordinaten von \mathbf{x} zur Basis B und \mathbf{a}' die Koordinaten von \mathbf{x} zur Basis B' . Hängen die Basisvektoren \mathbf{B} von B mit den Basisvektoren \mathbf{B}' von B' über die Gleichung $\mathbf{B}' = \mathbf{A}\mathbf{B}$ zusammen, so gilt für die Koordinaten \mathbf{a} und \mathbf{a}' desselben Vektors \mathbf{x} : $\mathbf{a}' = \mathbf{A}^{-T}\mathbf{a}$ [BS91].

Die zum Basiswechsel in Kapitel 2.5.2 benötigte Transformationsmatrix \mathbf{A} kann mit der Singulärwertzerlegung¹ des Vektors \mathbf{s}_W : $(\mathbf{U}, |\beta_W| \mathbf{e}_1, v) = \text{svd}(\mathbf{s}_W)$ bestimmt werden: $\mathbf{A} = v \mathbf{U}$. Dabei ist $v = \pm 1$, $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$ und $\mathbf{s}_W = |\beta_W| \mathbf{U} \mathbf{e}_1 v^T$. Die Multiplikation von \mathbf{U} mit $v = \pm 1$ sorgt dafür, dass der Worst-Case-Parametersatz genau dann auf dem positiven Teil der s_1 -Achse liegt, wenn $\beta_W > 0$ gilt.

A.5 Metrischer Raum

Definition A.5 Eine Menge X von Elementen x, y, z, \dots heißt *metrischer Raum*, wenn jedem Paar x, y eine nicht negative Zahl $\varrho(x, y)$ zugeordnet ist, die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $\varrho(x, y) = 0$ dann und nur dann, wenn $x = y$ ist,
 2. $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ (Symmetriebedingung),
 3. $\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$ (Dreiecksungleichung).
- (A.20)

Das Funktional ϱ heißt *Metrik des Raums*, und die Zahl $\varrho(x, y)$, die der Wert dieses Funktionals für ein bestimmtes Paar x, y ist, heißt *Entfernung* zwischen den Elementen x und y [Dre75].

A.6 Interpolation durch ein Polynom 2-ten Grades

Die Aufgabe der Interpolation ist, zu drei Punkten $P(x_i, y_i), i = 0, 1, 2$ ein Polynom zweiten Grades zu finden, das an den Stützstellen x_i gerade die Stützwerte y_i annimmt.

Mit dem Ansatz

$$y(x) = ax^2 + bx + c \quad (\text{A.21})$$

sind die Koeffizienten so zu bestimmen, dass $y(x_i) = ax_i^2 + bx_i + c = y_i$ für alle $i \in \{0, 1, 2\}$ gilt. Dieses Vandermondesche lineare Gleichungssystem ist bei paarweise verschiedenen Punkten P eindeutig lösbar.

Alternativ dazu macht das Verfahren von Newton [Sto76] den Ansatz:

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1). \quad (\text{A.22})$$

Aus den Bedingungen $y(x_i) = y_i, i = 0, 1, 2$ lassen sich die Koeffizienten schrittweise bestimmen:

$$a_0 = y_0, \quad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \quad a_2 = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}. \quad (\text{A.23})$$

¹Siehe Anhang A.7.

A.7 Singularwertzerlegung

Die Singularwertzerlegung (*singular value decomposition*, SVD) $(\mathbf{U}, \mathbf{S}, \mathbf{V}) = \text{svd}(\mathbf{M})$ ist eine bis auf Vorzeichen eindeutige Faktorisierung einer Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times m}$: $\mathbf{M} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T$, wobei $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ orthogonal sind und $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ eine Diagonalmatrix der nicht negativen Singulärwerte ist.

A.8 Wahl eines Parametersatzes innerhalb eines Teilbereichs

Für eine beliebige lineare Belegungsfunktion $f(\mathbf{x}) = \mathbf{n}^T \mathbf{x} + c$ über einen Bereich $B = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ mit dem Volumen $V(B)$ lässt sich mit dem

Satz A.2 (Mittelwertsatz der Integration) Ist f im abgeschlossenen Bereich B stetig, so existiert ein $\mathbf{c} \in B$ für das

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f(\mathbf{x}) \partial \mathbf{x} = f(\mathbf{c}) V(B) \quad (\text{A.24})$$

gilt [MV97].

bei geradlinigen Koordinaten durch Ausführen der Integration zeigen, dass \mathbf{c} gleich dem Mittelpunkt des Bereichs B ist:

$$\mathbf{c} = \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{b}). \quad (\text{A.25})$$

Anhang B

Zusammenstellung verwendeter Symbole

\forall	Allquantor
\exists	Existenzquantor
$[a, b]$	Abgeschlossenes Intervall von a bis b : $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x \leq b\}$
$[a, b)$	Links geschlossenes, rechts offenes Intervall von a bis b : $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x < b\}$
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
$\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}^*)$	Gradient der Funktion $f \in \mathbb{R}$ nach $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ in \mathbf{x}^* : $\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}^*) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \left[\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} \right]^T$
$\mathfrak{J}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$	Funktionalmatrix oder jacobische Determinante der Vektorfunktion $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ nach $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ in \mathbf{x}^* : $\mathfrak{J}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_m} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^*)}{\partial x_m} \end{bmatrix}$
\mathcal{A}	Menge der angenommenen Schaltungen bezüglich einer Spezifikation, Seite 21
\mathcal{A}^*	Menge der angenommenen Schaltungen, Seite 21
$\tilde{\mathcal{A}}$	Menge der angenommenen Schaltungen bezüglich einer Spezifikation im Modell mit Messfehlern, Seite 26
$\tilde{\mathcal{A}}^*$	Menge der angenommenen Schaltungen im Modell mit Messfehlern, Seite 26
\mathcal{AF}	Menge der angenommenen, fehlerhaften Schaltungen bezüglich einer Spezifikation, Seite 22
\mathcal{AF}^*	Menge der angenommenen, fehlerhaften Schaltungen, Seite 22
$\widetilde{\mathcal{AF}}$	Menge der angenommenen, fehlerhaften Schaltungen bezüglich einer Spezifikation im Modell mit Messfehlern, Seite 26
$\widetilde{\mathcal{AF}}^*$	Menge der angenommenen, fehlerhaften Schaltungen im Modell mit Messfehlern, Seite 26

α	Skalar, Seite 45
\mathcal{B}	Betriebsparameterbereich, Seite 15
β	Parameterabstand von s_0 , Seite 32
β_{Δ}	Justierparameter, Seite 50
β_W	Worst-Case-Abstand, Seite 32
B_i	Teilbereich des Integrationsgebiets, Seite 83
cdf^{χ}	Wahrscheinlichkeitsfunktion der χ -Verteilung, Seite 103
cdf^N	Wahrscheinlichkeitsfunktion der Normalverteilung, Seite 101
C_o	Kovarianzmatrix der Messfehler aller Testbeobachtungen, Seite 24
C_s	Kovarianzmatrix der statistischen Parameter, Seite 15
C_t	Varianz des Messfehlers einer Testeigenschaft, Seite 24
C_t	Kovarianzmatrix der Messfehler aller Testeigenschaften, Seite 25
ϵ_o	Messfehler der Testbeobachtungen, Seite 24
ϵ_t	Messfehler einer Testeigenschaft, Seite 24
ϵ_t	Messfehler aller Testeigenschaften, Seite 25
\mathcal{F}	Menge der fehlerhaften Schaltungen bezüglich einer Spezifikation, Seite 21
\mathcal{F}^*	Menge der fehlerhaften Schaltungen, Seite 21
$\tilde{\mathcal{F}}$	Menge der fehlerhaften Schaltungen bezüglich einer Spezifikation im Modell mit Messfehlern, Seite 26
$\tilde{\mathcal{F}}^*$	Menge der fehlerhaften Schaltungen im Modell mit Messfehlern, Seite 26
f	Betriebseigenschaft, Seite 16
\mathbf{f}	Vektor der Betriebseigenschaften, Seite 16
\bar{f}	Linearisierte Betriebseigenschaft, Seite 44
\check{f}	Interpolierte Betriebseigenschaft, Seite 71
\hat{f}	Approximierte Betriebseigenschaft, Seite 66
\acute{f}_i	Stützwert der Betriebseigenschaft, Seite 67
$\acute{\mathbf{f}}$	Stützwerte der Betriebseigenschaft, Seite 67
f_B	Spezifikationswert einer Betriebsspezifikation, Seite 16
\mathbf{f}_B	Spezifikationswerte aller Betriebsspezifikationen, Seite 16

f_L	unterer Spezifikationswert für eine Betriebseigenschaft, Seite 16
f_U	oberer Spezifikationswert für eine Betriebseigenschaft, Seite 16
f_s	Gradient der Betriebseigenschaft bezüglich der statistischen Parameter im Worst-Case-Parametersatz, Seite 44
γ	Parameterabstand von s_W , Seite 61
\mathcal{G}	Menge der funktionierenden Schaltungen bezüglich einer Spezifikation, Seite 20
\mathcal{G}^*	Menge der funktionierenden Schaltungen, Seite 20
$\tilde{\mathcal{G}}$	Menge der funktionierenden Schaltungen bezüglich einer Spezifikation im Modell mit Messfehlern, Seite 26
$\tilde{\mathcal{G}}^*$	Menge der funktionierenden Schaltungen im Modell mit Messfehlern, Seite 26
h	Einheitssprungfunktion, Seite 30
κ	Streuungsverhältnis, Seite 48
k	Parameter der Approximation, Seite 66
K	Kostenfunktion, Seite 31
$\hat{K}_{C_t \rightarrow 0}$	Abschätzung der Kosten ohne Messfehler, Seite 76
\hat{K}	Abschätzung der Kosten, Seite 77
\ddot{K}	Monte-Carlo-Abschätzung der Kosten, Seite 59
λ	Lagrange-Parameter, Seite 33
μ	Intervallgrenze, Seite 86
\mathbf{M}	$\mathbf{M}^T \mathbf{M} = \mathbf{C}_o$, Seite 24
N	Mächtigkeit einer Stichprobe, Seite 38
N_0	Mächtigkeit einer Stichprobe, Seite 39
N_W	Mächtigkeit einer Stichprobe, Seite 39
n_o	Anzahl Testbeobachtungen, Seite 16
n_s	Anzahl statistischer Parameter, Seite 15
n_t	Anzahl zu testender Spezifikationen, Seite 16
n_θ	Anzahl Betriebsparameter, Seite 15
ν	Gewichtsfaktor der Kostenfunktion, Seite 31
o	Testbeobachtung, Seite 16
\mathbf{o}	Vektor der Testbeobachtungen, Seite 16

\bar{o}	Vektor der linearisierten Testbeobachtungen, Seite 44
\tilde{o}	Messfehlerbehaftete Testbeobachtungen, Seite 24
\check{o}	Interpolierte Testbeobachtungen, Seite 71
\acute{O}	Systemmatrix der Approximation, Seite 67
\acute{o}_i	Stützwerte der Testbeobachtungen, Seite 67
o_s	Funktionalmatrix oder Jakobi-Determinante der Testbeobachtungen o im Worst-Case-Parametersatz, Seite 45
o_W	Testbeobachtungen im Worst-Case-Parametersatz, Seite 44
p	Anzahl Stützstellen, Seite 67
P_{AF}	Fehlerdurchlässigkeit ohne Messfehler, Seite 23
\hat{P}_{AF}	Abschätzung der Fehlerdurchlässigkeit ohne Messfehler, Seite 70
\ddot{P}_{AF}	Monte-Carlo-Abschätzung der Fehlerdurchlässigkeit ohne Messfehler, Seite 80
$P_{\widetilde{AF}}$	Fehlerdurchlässigkeit, Seite 30
$\hat{P}_{\widetilde{AF}}$	Abschätzung der Fehlerdurchlässigkeit, Seite 83
$\ddot{P}_{\widetilde{AF}}$	Monte-Carlo-Abschätzung der Fehlerdurchlässigkeit, Seite 40
pdf^χ	Dichte der χ -Verteilung, Seite 103
pdf^N	Dichte der Normalverteilung, Seite 101
pdf^V	Zur Monte-Carlo-Validierung verwendete Dichte, Seite 39
ϕ	Importance Sampling Funktion, Seite 40
Φ	Metrik der Approximation, Seite 68
P_{RG}	Ausbeuteeinbuße ohne Messfehler, Seite 23
\hat{P}_{RG}	Abschätzung der Ausbeuteeinbuße ohne Messfehler, Seite 70
\ddot{P}_{RG}	Monte-Carlo-Abschätzung der Ausbeuteeinbuße ohne Messfehler, Seite 80
$P_{\widetilde{RG}}$	Ausbeuteeinbuße, Seite 30
$\hat{P}_{\widetilde{RG}}$	Abschätzung der Ausbeuteeinbuße, Seite 83
$\ddot{P}_{\widetilde{RG}}$	Monte-Carlo-Abschätzung der Ausbeuteeinbuße, Seite 40
P_s^a	Annahmewahrscheinlichkeit, Seite 28
P_s^r	Ablehnungswahrscheinlichkeit, Seite 28
\mathcal{R}	Menge der aussortierten Schaltungen bezüglich einer Spezifikation, Seite 21

\mathcal{R}^*	Menge der aussortierten Schaltungen, Seite 21
$\widetilde{\mathcal{R}}$	Menge der aussortierten Schaltungen bezüglich einer Spezifikation im Modell mit Messfehlern, Seite 26
$\widetilde{\mathcal{R}}^*$	Menge der aussortierten Schaltungen im Modell mit Messfehlern, Seite 26
\mathcal{RG}	Menge der aussortierten, funktionierenden Schaltungen bezüglich einer Spezifikation, Seite 22
\mathcal{RG}^*	Menge der aussortierten, funktionierenden Schaltungen, Seite 22
$\widetilde{\mathcal{RG}}$	Menge der aussortierten, funktionierenden Schaltungen bezüglich einer Spezifikation im Modell mit Messfehlern, Seite 26
$\widetilde{\mathcal{RG}}^*$	Menge der aussortierten, funktionierenden Schaltungen im Modell mit Messfehlern, Seite 26
r_i	Residuum, Seite 67
\mathbf{r}	Vektor der Residuen, Seite 45
\mathcal{S}	Menge der Grenzparametersätze einer Betriebsspezifikation, Seite 21
$\sigma_{\bar{f}}$	Streuung der linearisierten Betriebseigenschaft bezüglich s , Seite 44
\mathbf{s}	Vektor der statistischen Parameter, Seite 15
s_0	Erwartungswert der statistischen Parameter, Seite 15
s_g	Integrationsgrenze, Seite 69
s_l	Integrationsgrenze, Seite 87
s_{\perp}	Radiale Komponente von $s_{2:n_s}$, Seite 61
\mathcal{S}^t	Menge der Grenzparametersätze einer Testspezifikation, Seite 22
s_t	Integrationsgrenze, Seite 69
$\mathcal{S}_{\epsilon_t=0}^t$	Menge der Grenzparametersätze einer Testspezifikation für den Erwartungswert des Messfehlers $\epsilon_t = 0$, Seite 29
\mathcal{S}_{θ}	Menge der Grenzparametersätze einer Betriebsspezifikation für $\theta = \theta_W$, Seite 33
s_u	Integrationsgrenze, Seite 87
s_W	Worst-Case-Parametersatz, Seite 32
θ	Vektor der Betriebsparameter, Seite 15
θ_L	Vektor der unteren Grenzwerte der Betriebsparameter, Seite 15
θ_U	Vektor der oberen Grenzwerte der Betriebsparameter, Seite 15
θ_W	Worst-Case-Betriebsparametersatz, Seite 33

t	Testeigenschaft, Seite 17
\mathbf{t}	Vektor der Testeigenschaften, Seite 17
t_B	Spezifikationswert einer Testspezifikation, Seite 17
\mathbf{t}_B	Spezifikationswerte aller Testspezifikationen, Seite 17
\tilde{t}	Messfehlerbehaftete Testeigenschaft, Seite 24
$\tilde{\mathbf{t}}$	Messfehlerbehaftete Testeigenschaften, Seite 25
\mathbf{W}	Gewichtsmatrix der Approximation, Seite 68
w_i	Gewicht eines Stützpunktes der Approximation, Seite 68
W_i	Auftrittswahrscheinlichkeit einer Schaltung im Teilbereich B_i , Seite 85
x_i	Testentwurfparameter, Seite 67
\mathbf{X}	Matrix der Testentwurfparameter, Seite 17
\mathbf{x}	Vektor der Testentwurfparameter, Seite 17
Y	Ausbeute bezüglich einer Spezifikation, Seite 22
Y^*	Ausbeute, Seite 22
\mathbf{z}	Polarkoordinaten, Seite 84

Literaturverzeichnis

- [AA00] AMINIAN, MEHRAN und FARZAN AMINIAN: *Neural-Network Base Analog-Circuit Fault Diagnosis Using Wavelet Transform as Preprocessor*. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing, Seite 151, 2000.
- [AA01] AMINIAN, FARZAN und MEHRAN AMINIAN: *Fault Diagnosis of Nonlinear Analog Circuits Using Neural Networks with Wavelet and Fourier Transforms ans Preprocessors*. Journal of Electronic Testing, Seite 471, 2001.
- [ACK99] ABDERRAHMAN, A., E. CERNY, and B. KAMINSKA: *Worst case tolerance analysis and CLP-based multifrequency test generation for analog circuits*. IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Circuits and Systems, 18(3):332–345, March 1999.
- [AEG⁺00] ANTREICH, K., J. ECKMUELLER, H. GRAEB, M. PRONATH, F. SCHENKEL, R. SCHWENCKER, and S. ZIZALA: *WiCkeD: Analog circuit synthesis incorporating mismatch*. In *IEEE Custom Integrated Circuits Conference (CICC)*, pages 511–514, May 2000.
- [AGW94] ANTREICH, K., H. GRAEB, and C. WIESER: *Circuit analysis and optimization driven by worst-case distances*. IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Circuits and Systems, 13(1):57–71, January 1994.
- [AK97a] ARABI, K. and B. KAMINSKA: *Oscillation built-in self test (OBIST) scheme for funtional and structural testing of analog and mixed-signal integrated circuits*. In *IEEE International Test Conference (ITC)*, pages 786–795, 1997.
- [AK97b] ARABI, K. and B. KAMINSKA: *Testing analog and mixed-signal integrated circuits using oscillation-test method*. IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Circuits and Systems, 16(7):745, 1997.
- [AKS98] ARABI, KARIM, BOZENA KAMINSKA, and MOHAMAD SAWAN: *On chip testing data converters using static parameters*. IEEE Transactions on VLSI Systems, pages 409–419, 1998.
- [ANA92] ANACAD GMBH, Ulm: *ELDO: Analog and System Simulation*, 1992.
- [AS94] AFTAB, S. A. and M. A. STYBLINSKI: *IC variability minimization using a new C_p and C_{pk} based variability/performance measure*. IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS), pages 149–152, 1994.
- [BD88] BROCKMAN, J. and S. DIRECTOR: *Predictive subset testing for IC performance*. IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design (ICCAD), pages 336–339, 1988.

- [BD89] BROCKMAN, J. and S. DIRECTOR: *Predictive subset testing: optimizing IC parametric performance testing for quality, cost, and yield*. IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing (SM), 2:104–113, 1989.
- [BF99] BROSA, ANNA M. and JOAN FIGUERAS: *Characterization of floating gate defects in analog cells*. Journal of Electronic Testing, 14:23–31, 1999.
- [BF01] BROSA, ANNA MARIA and JOAN FIGUERAS: *Digital signature proposal for mixed-signal circuits*. Journal of Electronic Testing, page 385, 2001.
- [BH85] BARTH, FRIEDRICH und RUDOLF HALLER: *Stochastik Leistungskurs*. Ehrenwirth Verlag GmbH, 3. Auflage, 1985.
- [BR01] BURNS, MARK und GORDON W. ROBERTS: *An Introduction to Mixed-Signal IC Test and Measurement*. Oxford University Press, New York, 2001.
- [BS91] BRONSTEIN, I.N. und K.A. SEMENDJAJEW: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Nauka, B.G. Teubner, Verlag Harri Deutsch, Moskau, Leipzig, Thun und Frankfurt/Main, 1991.
- [Bur01] BURDIEK, BERNHARD: *Generation of Optimum Test Stimuli for Nonlinear Analog Circuits using Nonlinear Programming and Time-Domain Sensitivities*. In: *Design, Automation and Test in Europe (DATE)*, Seite 603, 2001.
- [CB00] COUVREUR, CHRISTOPHE und YORAM BRESLER: *On the Optimality of the Backward Greedy Algorithm for the Subset Selection Problem*. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, Seiten 797–808, 2000.
- [CC99] CHERUBAL, S. and A. CHATTERJEE: *Parametric fault diagnosis for analog systems using functional mapping*. In *Design, Automation and Test in Europe (DATE)*, pages 195–200, March 9–12 1999.
- [CC00] CHAKRABARTI, SUDIP and ABHIJIT CHATTERJEE: *Partial simulation-driven ATPG for detection and diagnosis of faults in analog circuits*. In *IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design (ICCAD)*, 2000.
- [CC01] CHERUBAL, SASIKUMAR and ABHIJIT CHATTERJEE: *Test generation based diagnosis of device parameters for analog circuits*. In *Design, Automation and Test in Europe (DATE)*, 2001.
- [CL02] CHANG, SOON-JYH and CHUNG LEN LEE: *Structural fault based specification reduction for testing analog circuits*. Journal of Electronic Testing, page 571, 2002.
- [CLM97] CHAO, CHIEH-YUAN, HUNG-JEN LIN, and LINDA MILOR: *Optimal testing of VLSI analog circuits*. IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Circuits and Systems, 16(1):58–77, January 1997.
- [DG98] DEBYSER, GEERT and GEORGES GIELEN: *Efficient analog circuit synthesis with simultaneous yield and robustness optimization*. In *IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design (ICCAD)*, 1998.

- [DH97] DAVISON, A. C. and D. V. HINKLEY: *Bootstrap methods and their application*. Cambridge Series on Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 1997.
- [DK95] DHARCHOUDHURY, A. and S. M. KANG: *Worst-case analysis and optimization of VLSI circuit performances*. IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Circuits and Systems, 14(4):481–492, April 1995.
- [Dre75] DRESZER, JERZY: *Mathematik Handbuch*. Verlag Harri Deutsch, Zürich–Frankfurt/Main–Thun, 1975.
- [DSGH99] DEVARAYANADURG, GIRI, MANI SOMA, PRASHANT GOTETI, and SAM D. HUYNH: *Test set selection for structural faults in analog IC's*. IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Circuits and Systems, 18(7):1026–1038, July 1999.
- [ECM93] EPSTEIN, B. R., M. CZIGLER, and S. R. MILLER: *Fault detection and classification in linear integrated circuits: An application of discrimination analysis and hypothesis testing*. IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Circuits and Systems, 12:102–113, 1993.
- [EGEY99] EL-GAMAL, M. A. and M. F. ABU EL-YAZEED: *A combined clustering and neural network approach for analog multiple hard fault classification*. Journal of Electronic Testing, pages 207–217, 1999.
- [Esh92] ESHBAUGH, KEVIN S.: *Generation of correlated parameters for statistical circuit simulation*. IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Circuits and Systems, 11(10):1198–1206, October 1992.
- [FD91] FELDMANN, P. and S. DIRECTOR: *A macromodeling based approach for efficient IC yield optimization*. IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS), pages 2260–2263, 1991.
- [FD93] FELDMANN, P. and S. DIRECTOR: *Integrated circuit quality optimization using surface integrals*. IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Circuits and Systems, 12:1868–1879, 1993.
- [Fei94] FEIVESON, A. H.: *Finding the best regression subset by reduction in nonfull-rank cases*. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 15:194–204, 1994.
- [FG97] FRÖHLICH, NORBERT and VOLKER GLÖCKEL: *Copart: A new k-way partitioning tool*. Technical Report TUM-LRE-97-3, Technische Universität München, 1997.
- [FGD00] FRÖHLICH, NORBERT, VOLKER GLÖCKEL, and GEORG DENK: *A new multi-way partitioning method for parallel circuit simulation*. In *SFB 342 Methods and Tools for the Efficient Use of Parallel Systems*, pages 235–249. TU-München, 2000.
- [FGF00] FRÖHLICH, NORBERT, VOLKER GLÖCKEL, and JOSEF FLEISCHMANN: *A new partitioning method for parallel simulation of vlsi circuits on transistor level*. In *Design, Automation and Test in Europe (DATE)*, pages 679 – 684, March 2000.

- [FGL⁺98] FEDI, G., R. GIOMI, A. LUCHETTA, S. MANETTI, and M. C. PICCIRILLI: *On the application of symbolic techniques to the multiple fault location in low testability analog circuits*. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing, 45(10):1383, 1998.
- [FH84] FAHRMEIR, LUDWIG and ALFRED HAMERLE: *Multivariate statistische Verfahren*. Walter de Gruyter, Berlin, 1984.
- [Fis99] FISHMAN, GEORGE S.: *Monte Carlo Concepts, Algorithms, and Applications*. Springer New-York, 1999.
- [FWZ⁺92] FELDMANN, U., U. WEVER, Q. ZHENG, R. SCHULTZ, and H. WRIEDT: *Algorithms for modern circuit simulation*. Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik (AEÜ), 46:274–285, 1992.
- [GBVL97] GROCHOWSKI, ANDREW, DEBASHIS BHATTACHARYA, T. R. VISWANATHAN, and KEN LAKER: *Integrated circuit testing for quality assurance in manufacturing: History, current status, and future trends*. IEEE Transactions on Circuits and Systems CAS, 44(8):610–633, August 1997.
- [GC99] GOMES, ALFRED V. and ABHIJIT CHATTERJEE: *Minimal length diagnostic tests for analog circuits using test history*. In *Design, Automation and Test in Europe (DATE)*, pages 189–194, March 9–12 1999.
- [GM98] GENZ, ALAN and JOHN MONAHAN: *Stochastic integration rules for infinite regions*. SIAM Journal on Scientific Computation, 19(2):426–439, 1998.
- [GMW81] GILL, PHILIP E., WALTER MURRAY, and MARGARET H. WRIGHT: *Practical Optimization*. Academic Press. Inc., London, 1981.
- [GND⁺02] GUARDIANI, CARLO, PATRICK MC NAMARA, LIDIA DALDOSS, STEFANO ZANELLA, SHARAD SAXENA, SULI LIU, and WEI XIANG: *Analog ip testing: Diagnosis and optimization*. In *Design, Automation and Test in Europe (DATE)*, page 192, 2002.
- [GPG01] GLÖCKEL, VOLKER, MICHAEL PRONATH und HELMUT GRÄB: *Deterministischer parametrischer Testentwurf für analoge integrierte Schaltungen mit Testbeobachtungen unter Anwendung von Ergebnissen aus dem Toleranzentwurf*. In: *ITG/GMM/GI Testmethoden und Zuverlässigkeit von Schaltungen und Systemen*, Seiten 5.2.1–4, Februar 2001.
- [Grä93] GRÄB, H.: *Schaltkreisoptimierung mit Worst-Case-Abständen als Zielgrößen*. Doktorarbeit, Technische Universität München, 1993.
- [GR00] GIELEN, GEORGES G. E. und ROB A. RUTENBAR: *Computer-Aided Design of Analog and Mixed-Signal Integrated Circuits*. Proceedings of the IEEE, 88(12):1825–1852, Dezember 2000.
- [GT96] GREINER, M. und G. TINHOFER: *Stochastik für Studienanfänger der Informatik*. Carl Hanser Verlag, München, 1996.
- [GvL96] GOLUB, GENE H. and CHARLES F. VAN LOAN: *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 3. edition, 1996.

- [Hab70] HABER, SEYMOUR: *Numerical evaluation of multiple integrals*. SIAM Review, pages 481–526, December 1970.
- [HAR00] HAFED, MOHAMED, NAZMY ABASKHAROUN, and GORDON W. ROBERTS: *A stand-alone integrated test core for time and frequency domain measurements*. In *IEEE International Test Conference (ITC)*, 2000.
- [HC98] HOU, JUNWEI and ABHIJIT CHATTERJEE: *CONCERT: A concurrent transient fault simulator for nonlinear analog circuits*. In *IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design (ICCAD)*, 1998.
- [HK93] HAMIDA, N. B. and B. KAMINSKA: *Multiple fault analog circuit testing by sensitivity analysis*. *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, 4:231–243, 1993.
- [HKSZ98] HUYNH, SAM D., SEONGWON KIM, MANI SOMA, and JINYAN ZHANG: *Testability analysis and multi-frequency ATPG for analog circuits and systems*. In *IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design (ICCAD)*, page 376, 1998.
- [HKSZ99] HUYNH, SAM D., SEONGWON KIM, MANI SOMA, and JINYAN ZHANG: *Automatic analog test signal generation using multifrequency analysis*. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, 46(5):565–576, May 1999.
- [HMK90] HEMINK, G., B. MEIJER, and H. KERKHOFF: *Testability analysis of analog systems*. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Circuits and Systems*, 9:573–583, 1990.
- [Hof02] HOFFMANN, CHRISTOPH: *A new design flow and testability measure for the generation of a structural test and bist for analogue and mixed-signal circuits*. In *Design, Automation and Test in Europe (DATE)*, page 197, 2002.
- [JV01] JIANG, WANLI and BAPIRAJU VINNAKOTA: *Defect-oriented test scheduling*. *IEEE Transactions on VLSI Systems*, page 427, 2001.
- [KD95] KRISHNA, K. and S. W. DIRECTOR: *The linearized performance penalty (LPP) method for optimization of parametric yield and its reliability*. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Circuits and Systems*, 14(12):1557–1568, December 1995.
- [Kre75] KREYSZIG, E.: *Statistische Methoden und ihre Anwendungen*. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1975.
- [LGA95] LINDERMEIR, WALTER M., HELMUT E. GRAEB, and KURT J. ANTREICH: *Design based analog testing by characteristic observation inference*. In *IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design (ICCAD)*, pages 620–626, San Jose, California, November 1995.
- [LGA99] LINDERMEIR, WALTER M., HELMUT E. GRÄB, and KURT J. ANTREICH: *Analog testing by characteristic observation inference*. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Circuits and Systems*, 18(9):1353–1368, September 1999.

- [Lin96] LINDERMEIR, WALTER M.: *Design of robust test criteria in analog testing*. In *IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design (ICCAD)*, pages 604–611, San Jose, California, November 1996.
- [Lin97] LINDERMEIR, WALTER MATTHIAS: *Testentwurf für analoge integrierte Schaltungen mit charakteristischen Beobachtungen*. Doktorarbeit, Technische Universität München, 1997.
- [LVG98] LINDERMEIR, WALTER M., THOMAS J. VOGELS, and HELMUT GRÄB: *Analog test design with IDD measurements for the detection of parametric and catastrophic faults*. In *Design, Automation and Test in Europe (DATE)*, pages 822–827, Paris, France, February 1998.
- [Mil98] MILOR, LINDA S.: *A tutorial introduction to research on analog and mixed-signal circuit testing*. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, 45(10):1389–1407, October 1998.
- [MS96] MATERKA, A. and M. STRZELECKI: *Parametric testing of mixed-signal circuits by ann processing of transient responses*. *Journal of Electronic Testing*, 9:187–202, 1996.
- [MSV94] MILOR, L. and A. L. SANGIOVANNI-VINCENTELLI: *Minimizing production test time to detect faults in analog circuits*. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Circuits and Systems*, 13:796–813, 1994.
- [MV97] MEYBERG, K. and P. VACHENAUER: *Höhere Mathematik I*. Springer-Lehrbuch, 1997.
- [MVSC00] MANHAEVE, H., J. VERFAILLIE, B. STRAKA, and J. P. CORNIL: *Application of supply current testing to analogue circuits, towards a structural analogue test methodology*. *Journal of Electronic Testing*, page 227, 2000.
- [Nag75] NAGEL, L.: *SPICE2: A computer program to simulate semiconductor circuits*. Ph. D. dissertation, Univ. of California, Berkeley, 1975.
- [Pap91] PAPAGEORGIOU, M.: *Optimierung*. Oldenbourg, München, 1991.
- [PC96] PAN, CHEN-YANG and KWANG-TIN CHENG: *Implicit functional testing for analog circuits*. In *IEEE VLSI Test Symposium*, page 489, 1996.
- [PC97] PAN, CHEN-YANG and KWANG-TING CHENG: *Pseudorandom testing for mixed-signal circuits*. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Circuits and Systems*, 16(10):1173–1185, October 1997.
- [PC99] PAN, CHEN-YANG and KWANG-TING (TIM) CHENG: *Test generation for linear time-invariant analog circuits*. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, 46(5):554–564, May 1999.
- [PGA02] PRONATH, M., H. GRAEB, and K. ANTREICH: *A test design method for floating gate defects (FGD) in analog integrated circuits*. In *Design, Automation and Test in Europe (DATE)*, 2002.

- [PGG00] PRONATH, MICHAEL, VOLKER GLOECKEL, and HELMUT GRAEB: *A parametric test method for analog components in integrated mixed-signal circuits*. In *IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design (ICCAD)*, pages 575–561, 2000.
- [PGGA99] PRONATH, MICHAEL, VOLKER GLÖCKEL, HELMUT GRÄB und KURT ANTREICH: *Simulationsbasierter Testentwurf für gemischt analog-digitale Systeme*. *it+ti Informationstechnik und Technische Informatik*, 41(2):42–45, März 1999.
- [PGGA00] PRONATH, MICHAEL, VOLKER GLÖCKEL, HELMUT GRÄB und KURT ANTREICH: *Testentwurf für analoge Komponenten gemischt analog-digitaler Schaltungen basierend auf dem Übertragungsverhalten*. In: *Architekturentwurf für eingebettete Systeme (AES)*, Seiten 158–163, Januar 2000.
- [PTC99] PENDURKAR, RAJESH, CRAIG TOVEY, and ABHIJIT CHATTERJEE: *Single-probe traversal optimization for testing of MCM substrate interconnections*. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Circuits and Systems*, 18(8):1178–1191, August 1999.
- [PW01] PREUSS, WOLFGANG und GÜNTER WENISCH: *Lehr- und Übungsbuch Numerische Mathematik*. Fachbuchverlag Leipzig, 2001.
- [Rob97] ROBERTS, GORDON W.: *Improving the testability of mixed-signal integrated circuits*. In *IEEE Custom Integrated Circuits Conference (CICC)*, page 214, 1997.
- [Sch92] SCHRÜFER, E.: *Elektrische Meßtechnik*. Studienbücher der technischen Wissenschaften. Carl Hanser Verlag, München Wien, 5. Auflage, 1992.
- [Seb77] SEBER, G.: *Linear Regression Analysis*. John Wiley & Sons, 1977.
- [SEM01] SEMATECH: *International technology roadmap for semiconductors 2001*. <http://public.itrs.net>, 2001.
- [SGA99] SCHENKEL, FRANK, HELMUT GRÄB, and KURT ANTREICH: *Ausbeuteanalyse unter Berücksichtigung lokaler und globaler Parameterschwankungen*. In *GME/ITG-Diskussionssitzung Entwicklung von Analogschaltungen mit CAE-Methoden*, 1999.
- [SHK01] SAAB, KHALED, NAIM BEN HAMIDA, and BOZENA KAMINSKA: *Closing the gap between analog and digital testing*. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Circuits and Systems*, 20(2):307–314, February 2001.
- [SK96] SPAANDONK, J. V. and T. A. M. KEVENAAR: *Selecting measurements to test the functional behavior of analog circuits*. *Journal of Electronic Testing*, 9:9–18, 1996.
- [SN99] SUNTER, STEPHEN and NAVEENA NAGI: *Test metrics for analog parametric faults*. In *17th IEEE VLSI Test Symposium*, pages 226–234, 1999.
- [SPM+00] STARZYK, J. A., JING PANG, S. MANETTI, M. C. PICCIRILLI, and G. FEDI: *Finding ambiguity groups in low testability analog circuits*. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 47(8):1125–1137, August 2000.

- [SPZ⁺01] SCHENKEL, F., M. PRONATH, S. ZIZALA, R. SCHWENCKER, H. GRAEB, and K. ANTREICH: *Mismatch analysis and direct yield optimization by spec-wise linearization and feasibility-guided search*. In *ACM/IEEE Design Automation Conference (DAC)*, pages 858–863, 2001.
- [SSdG96] SOMAYAJULA, S. A. S., E. SANCHEZ SINENCIO, and J. PINEDA DE GYVEZ: *Analog fault diagnosis based on ramping power supply current signature clusters*. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, 43(10):703–712, October 1996.
- [SSMM99] SIDIROPULOS, M., V. STOPJAKOVA, H. MANHAEVE, and V. MUSIL: *An analog self-test based on differential IDD monitoring supported by differential IOUT checking*. *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, 21(1):33–44, October 1999.
- [SSS89] STENBAKKEN, G. N., T. M. SOUDERS, and G. W. STEWART: *Ambiguity groups and testability*. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 38(5):941–947, October 1989.
- [Sto76] STOER, J.: *Einführung in die Numerische Mathematik 1*. Springer, Berlin, 1976.
- [TB97] TREFETHEN, LLOYD N. and DAVID BAU: *Numerical linear algebra*. siam, 1997.
- [VC97] VARIYAM, P. N. and A. CHATTERJEE: *Test generation for comprehensive testing of linear analog circuits using transient response sampling*. In *IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design (ICCAD)*, 1997.
- [VC00] VARIYAM, PRAMODCHANDRAN N. and ABHIJIT CHATTERJEE: *Specification-driven test generation for analog circuits*. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Circuits and Systems*, 19(10):1189–1201, October 2000.
- [VCC02a] VARIYAM, PRAMODCHANDRAN N., SASIKUMAR CHERUBAL, and ABHIJIT CHATTERJEE: *Prediction of analog performance parameters using fast transient testing*. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Circuits and Systems*, 21(3):349–361, March 2002.
- [VCC02b] VOORAKARANAM, R., S. CHERUBAL, and A. CHATTERJEE: *A signature test framework for rapid production testing of RF circuits*. In *Design, Automation and Test in Europe (DATE)*, page 186, 2002.
- [Vin98] VINNAKOTA, BAPIRAJU: *Analog and Mixed-Signal Test*. Prentice-Hall PTR, 1998.
- [VVS87] VLACH, M., J. VLACH, and K. SINGHAL: *SABER: A design tool for analog systems*. Analogy Inc., Beaverton, U.S.A., 1987.
- [WGS98] WANG, ZHIHUA, GEORGES GIELEN, and WILLY SANSEN: *Probabilistic fault detection and the selection of measurements for analog integrated circuits*. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Circuits and Systems*, 17(9):862–872, 1998.
- [Wie94] WIESER, CLAUDIA: *Schaltkreisanalyse mit Worst-Case Abständen*. Doktorarbeit, Technische Universität München, 1994.

- [ZDR00] ZORIAN, YERVANT, SUJIT DEY und MICHAEL J. RODGERS: *Test of Future System-on-Chips*. In: *IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design (ICCAD)*, Seite 392, 2000.
- [ZS95] ZHANG, J. C. and M. A. STYBLINSKI: *Yield and Variability Optimization of Integrated Circuits*. Kluwer Academic Publishers, 1995.

Kurzfassung

Diese Arbeit stellt simulationsbasierte Verfahren zum aufwendigen Entwurf von Testkriterien für analoge integrierte Schaltungskomponenten vor, nach denen Schaltungen beim Test angenommen oder aussortiert werden. Dabei werden mit robusten Optimierverfahren unter Berücksichtigung von Messfehlern die Zielgrößen Ausbeuteeinbuße und Fehlerdurchlässigkeit minimiert, die die Qualität eines Tests bestimmen. Zur effizienten Berechnung der Zielgrößen profitieren die Verfahren von bereits vorhandenen Ergebnissen des Schaltungsentwurfs und der Ausbeuteoptimierung und halten durch eine geschickte Verbindung deterministischer und stochastischer Ansätze den Simulationsaufwand klein. Ein Vergleich mit dem Stand der Technik zeigt die Effizienz der Testentwurfsverfahren.