

Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik der Technischen Universität München

Nichtlineare Filterverfahren mit Anwendungen auf Lokalisierungsprobleme

Kai Peter Briechele

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Klaus Diepold

Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Günther Schmidt (em.)
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Uwe Hanebeck,
Universität Karlsruhe (TH)

Die Dissertation wurde am 25. März 2003 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik am 15. September 2003 angenommen.

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner viereinhalbjährigen Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik der Technischen Universität München.

Mein besonderer Dank gilt dem Lehrstuhlinhaber, Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Günther Schmidt, der mir die Durchführung der Forschungstätigkeiten, auf welchen die vorliegende Arbeit basiert, ermöglichte und durch Ratschläge und Diskussionen unterstützte.

Mein Dank gilt Prof. Dr.-Ing. Klaus Diepold für die Übernahme des Vorsitzes in der Prüfungskommission. Danken möchte ich Prof. Dr.-Ing. Uwe Hanebeck für die freundliche Übernahme des Korreferats, sein Interesse an meiner Arbeit und die langjährige fruchtbare Zusammenarbeit.

Meinen Kollegen am Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik bin ich durch die gute Zusammenarbeit, zahlreiche interessante fachliche Diskussionen und ihre große Hilfsbereitschaft sehr verbunden. Ebenso möchte ich mich bei den Herren Jaschik, Gradl, Kubick und Lowitz aus der elektrischen und mechanischen Werkstatt für die gute Zusammenarbeit beim Aufbau der Experimentalplattform ROMAN II bedanken.

Nicht zuletzt möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken, die mich immer auf meinem Weg unterstützt haben.

München, im März 2003

Kai Briechle

Für meine Eltern und
meine Schwester

Inhaltsverzeichnis

Konventionen und Symbolik	VIII
Kurzfassung	XII
1 Einführung	1
1.1 Einleitung	1
1.2 Problemstellung	2
1.2.1 Modellierung des Systems	2
1.2.2 Zielsetzung	5
1.3 Stand des Wissens	6
1.3.1 Optimale Filterverfahren	6
1.3.2 Einordnung nichtlinearer Filterverfahren	8
1.3.3 Fazit	11
1.4 Inhaltsübersicht	11
2 Nichtlineare Filterverfahren im Hyperraum	13
2.1 Einleitung	13
2.2 Dichterepräsentationen im Hyperraum	14
2.2.1 Transformation des Filterproblems	15
2.2.2 Pseudo-Gaußdichten	16
2.2.3 Pseudo-Ellipsoidale Mengen	16
2.3 Filterung im Hyperraum	19
2.3.1 Grundprinzip	19
2.3.2 Filteralgorithmus für Pseudo-Gaußdichten	23
2.3.3 Filteralgorithmus für pseudo-ellipsoidale Mengen	24
2.4 Berechnung der Messunsicherheit \mathcal{V}_k^*	26
2.4.1 Berechnung der Messunsicherheit \mathcal{V}_k^* im Falle stochastischer Fehler	27
2.4.2 Berechnung der Messunsicherheit \mathcal{V}_k^* im Falle mengenbegrenzter Fehler	27
2.5 Beispiel: Nichtlineare Abstandsmessung	32
2.6 Der Prädiktionsschritt der Hyperraumfilterung	34
2.7 Diskussion	35
3 Nichtlineare Filterverfahren basierend auf Gaussian-Mixture-Dichten	38
3.1 Einleitung	38
3.1.1 Motivation für den Einsatz nichtlinearer Filterverfahren auf der Basis von Gaussian-Mixture-Dichten	38
3.1.2 Beispiel: Nichtlineare Abstandsmessung	39
3.2 Dichterepräsentation durch Gaussian-Mixture-Dichten	41
3.3 Stand der Technik	44

3.4	Optimale Filterung mit Formapproximation: Das <i>PGME</i> -Verfahren	45
3.4.1	Grundidee der Filterung mit Formapproximation	46
3.4.2	Ein quadratisches Gütemaß für die Ähnlichkeit von Wahrscheinlichkeitsdichten	48
3.5	Der Filterschritt des <i>PGME</i> -Verfahrens	50
3.5.1	Progressionsverfahren mit Parametrisierung der Messunsicherheit	51
3.5.2	Das quadratische Gütemaß G für den Filterschritt	53
3.5.3	Berechnung des Gradienten	55
3.5.4	Parametrische Adaption	56
3.5.5	Strukturelle Adaption	64
3.5.6	Effiziente Berechnung des Gütemaßes	68
3.5.7	Algorithmischer Ablauf des <i>PGME</i> -Filterschrittes	70
3.6	Der Prädiktionsschritt des <i>PGME</i> -Verfahrens	71
3.6.1	Lineare Prädiktion	71
3.6.2	Nichtlineare Prädiktion mit Minimierung eines quadratischen Gütemaßes G	73
3.7	Diskussion	73
4	Experimentelle Validierung	76
4.1	Fallbeispiel 1: Lokalisierung im Falle relativer Winkelmessungen	76
4.1.1	Einleitung	76
4.1.2	Beschreibung der Lokalisierungsaufgabe	76
4.1.3	Motivation des gewählten Ansatzes	78
4.1.4	Lokalisierung im Falle relativer Winkelmessungen mit nichtlinearen Filterverfahren	80
4.1.5	Ergebnisse	83
4.1.6	Diskussion	85
4.2	Fallbeispiel 2: Lokalisierung von Mobiltelefonen	87
4.2.1	Einleitung	87
4.2.2	Beschreibung der Lokalisierungsaufgabe	87
4.2.3	Modellierung des Systems	89
4.2.4	Parameteridentifikation für das Testszenario	92
4.2.5	Nichtlineare Lokalisierung mit Abstandsmessungen	95
4.2.6	Ergebnisse	97
4.2.7	Diskussion	102
5	Zusammenfassung und Ausblick	103
5.1	Zusammenfassende Bewertung	103
5.2	Ausblick	105
A	Filterverfahren für lineare Systeme	106
A.1	Kalman-Filter	106
A.2	Mengenbasierte Zustandsschätzung für lineare Systeme	106
A.2.1	Filterschritt	107
A.2.2	Prädiktionsschritt	108

B	Optimale mengenbasierte Filterverfahren	109
B.1	Optimales rekursives Filterverfahren für mengenbasierte Unsicherheitsmodellierung	109
C	Filterverfahren auf der Basis von Matrixabschätzungen	110
C.1	Einleitung	110
C.2	Problemstellung	110
C.3	Matrixabschätzungen	111
C.4	Anwendung der Matrixabschätzungen	112
C.4.1	Prädiktionsschritt des Filterverfahrens im Falle unbekannter Korrelationen	112
C.4.2	Filterschritt des Filterverfahrens im Falle unbekannter Korrelationen	113
C.4.3	Optimale Parameter für den Prädiktions- und den Filterschritt . .	114
C.5	Diskussion	115
D	Herleitung des CI-Filterschrittes	117
D.1	Beweis des CI-Filterschrittes mit Hilfe einer Matrixapproximation	117
D.2	Herleitung des optimalen Prädiktionsparameters	118
D.3	Herleitung des optimalen Fusionsparameters	119
	Literaturverzeichnis	121

Konventionen und Symbolik

Konventionen

a	Skalar
\underline{a}	Spaltenvektor
\underline{a}^T	Zeilenvektor
\mathbf{A}	Matrix
\mathbf{A}^T	Transponierte Matrix
$\tilde{*}$	Wahrer Wert der Größe *
$\hat{*}$	Nominaler Wert der Größe *
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
$\text{atan2}(x, y)$	arctan-Funktion zweier Argumente
$E[x]$	Erwartungswert der Zufallsvariable x

Symbolik

Symbole für Zustandsraumbeschreibungen

\mathcal{S}	Dynamisches System
\mathcal{S}_L	Lineares dynamisches System
\underline{x}_k	Zustandsvektor zum Zeitpunkt k
\underline{z}_k	Messvektor
\underline{u}_k	Eingangsgrößenvektor
\underline{w}_k	Vektor des Systemrauschens
\underline{v}_k	Vektor des Messrauschens
\mathbf{Z}^k	Menge aller Messungen \underline{z}_i bis zum Zeitpunkt k
$\underline{f}_k(\cdot)$	Nichtlinearer Funktionenvektor der Systemdynamik
$\underline{h}_k(\cdot)$	Nichtlinearer Funktionenvektor der Messungen
\mathbf{A}_k	Systemmatrix für ein lineares System
\mathbf{B}_k	Eingangsmatrix
\mathbf{H}_k	Messmatrix
N	Dimension des Zustandsraums

Symbole für das Hyperraum-Filterverfahren

Räume, Mannigfaltigkeiten, Transformationen

S	Zustandsraum, Originalraum \mathbb{R}^N
S^*	Hyperraum \mathbb{R}^{L_x}
T	Messraum \mathbb{R}^M
T^*	Messhyperraum \mathbb{R}^{L_z}
N	Dimension des Zustandsraums

M	Dimension des Messraums
L_x	Dimension des Hyperraums
L_z	Dimension des Messhyperraums
U^*	Universelle Mannigfaltigkeit
W^*	Mannigfaltigkeit des Messrauschens
$\underline{\mathbf{T}}(\cdot)$	Nichtlineare Transformation in den Hyperraum
$\underline{\eta}_k(\cdot)$	Nichtlineare Transformation in den Messhyperraum

Mengen

\mathcal{X}_k	Menge von Zuständen
$\tilde{\mathcal{X}}_k$	Wahre Menge von Zuständen
\mathcal{X}_k^*	Pseudo-ellipsoidale Menge im Hyperraum S^*
\mathcal{X}_k^p	Priore Menge geschätzter Zustände
\mathcal{X}_k^e	Posteriore Menge geschätzter Zustände
\mathcal{V}_k	Menge aller möglichen Zustände des Messrauschens
\mathcal{W}_k	Menge aller möglichen Zustände des Systemrauschens
\mathcal{V}_k^*	Pseudo-ellipsoidale Menge aller möglichen Zustände des Messrauschens im Hyperraum T^*
$\tilde{\mathcal{V}}_k^*$	Wahre Menge aller möglichen Zustände des Messrauschens im Hyperraum T^*
\mathcal{U}_k	Menge aller möglichen Eingangsgrößen
$\tilde{\mathcal{Z}}_k^*$	Approximierte Menge aller transformierten Messungen im Hyperraum
$\tilde{\mathcal{Z}}_k^*$	Wahre Menge aller transformierten Messungen im Hyperraum
\mathcal{R}_k^*	Menge in Form eines Hyperquaders

Intervalle

\mathcal{I}	Skalares Intervall
v^L	Untere Intervallgrenze für das Messrauschen
v^U	Obere Intervallgrenze für das Messrauschen
z^L	Untere Intervallgrenze für die transformierte Messung \tilde{z}_k
z^U	Obere Intervallgrenze für die transformierte Messung \tilde{z}_k

Sonstige Symbole

$\hat{\underline{x}}_k$	Mittelpunktvektor einer ellipsoidalen Menge bzw. Erwartungswert einer Gaußdichte
$\hat{\underline{x}}_k^*$	Mittelpunktvektor einer pseudo-ellipsoidalen Menge bzw. Erwartungswert einer Pseudo-Gaußdichte
$\bar{\underline{v}}_k^*$	Messrauschen im Hyperraum S^*
\underline{v}_k^*	In Abhängigkeit von \underline{z}_k transformiertes Messrauschen im Hyperraum S^*
$\hat{\underline{v}}_k$	Mittelpunktvektor der ellipsoidalen Menge des Messrauschens \underline{v}_k bzw. Erwartungswert des Messrauschens

$\hat{\underline{v}}_k^*$	Mittelpunktvektor der pseudo-ellipsoidalen Menge des Messrauschens \underline{v}_k^* im Hyperraum
$\hat{\underline{v}}_k^*$	Erwartungswert der Pseudo-Gaußdichte $f_v^*(\underline{v}_k^*)$
\mathbf{C}_k	Positiv definite, symmetrische Matrix die eine Gaußdichte bzw. eine ellipsoidale Menge definiert
\mathbf{C}_k^*	Positiv definite, symmetrische Matrix die eine Pseudo-Gaußdichte bzw. eine pseudo-ellipsoidale Menge definiert
$\bar{\mathbf{C}}_k^{v,*}$	Positiv definite, symmetrische Matrix die die Pseudo-Gaußdichte des Messrauschens \underline{v}_k^* definiert
\mathbf{V}^*	Positiv definite, symmetrische Matrix die die pseudo-ellipsoidale Menge \mathcal{V}_k^* des Messrauschens definiert
\bar{z}_k	Transformierte Messung
\hat{z}_k	Nominalwert der Schätzung für die transformierte Messung
$f^*(\cdot)$	Wahrscheinlichkeitsdichte im Hyperraum
$f_v^*(\cdot)$	Wahrscheinlichkeitsdichte des Messrauschens im Hyperraum
\mathbf{G}_k^*	Transformationsmatrix des Messrauschens im Hyperraum

Symbole für das PGME-Filterverfahren

Wahrscheinlichkeitsdichten

$f(\cdot)$	Allgemeine Wahrscheinlichkeitsdichte
$\tilde{f}(\cdot)$	Wahre, theoretisch exakte Wahrscheinlichkeitsdichte
$f(\underline{z}_k \underline{x}_k)$	Likelihoodfunktion: Wahrscheinlichkeitsdichte von \underline{z}_k unter der Bedingung \underline{x}_k
$f(\underline{x}_{k+1} \underline{x}_k)$	Zustandstransitionsfunktion: Wahrscheinlichkeitsdichte von \underline{x}_{k+1} unter der Bedingung \underline{x}_k
$f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$	Approximierende Gaussian-Mixture-Dichte
$f_{A,j}(\cdot)$	j-te Komponente der Gaussian-Mixture-Dichte $f_A(\cdot)$
$f_p(\underline{x}_{k+1})$	Prädizierte Dichte zum Zeitpunkt $k + 1$
$f_e(\underline{x}_k)$	Posteriore Dichte nach Filterschritt zum Zeitpunkt k
$\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau)$	Wahre, parametrisierte Wahrscheinlichkeitsdichte
$\tilde{f}_e(\underline{x}_k, \tau)$	Wahre, parametrisierte Wahrscheinlichkeitsdichte im Filterschritt
$f_v(\underline{v}_k)$	Wahrscheinlichkeitsdichte des Messrauschens \underline{v}_k
$f_w(\underline{w}_k)$	Wahrscheinlichkeitsdichte des Systemrauschens \underline{w}_k
$\mathcal{N}(\cdot)$	Gauß'sche Normaldichte

Parameter einer Gaussian-Mixture-Dichte

$\underline{\eta}$	Parametervektor der approximierenden Gaussian-Mixture-Dichte $f_A(\cdot)$
$(w_{jk}^p)^2$	Quadriertes Gewicht, j-te prädizierte Dichte
$\underline{\mu}_{j,k}^p$	Erwartungswert, j-te prädizierte Dichte
$\mathbf{C}_{j,k}^p$	Kovarianzmatrix, j-te prädizierte Dichte
$(w_{jk}^e)^2$	Quadriertes Gewicht, j-te posteriore Dichte

$\underline{\mu}_{j,k}^e$	Erwartungswert, j-te posteriore Dichte
$\underline{C}_{j,k}^e$	Kovarianzmatrix, j-te posteriore Dichte

Sonstige Symbole

\mathcal{T}	Raum der Parameter $\underline{\eta}$
G	Quadratisches Gütekriterium
K	Anzahl der Parameter von $f_A(\cdot)$
\underline{C}_k^v	Kovarianzmatrix des Messrauschens \underline{v}_k
\underline{C}_k^w	Kovarianzmatrix des Systemrauschens \underline{w}_k
$\bar{h}(\cdot)$	Linearisierte Messfunktion
\underline{e}_i	i -ter Einheitsvektor
α_t	skalarer Schrittweitenparameter

Experimentelle Validierung

Lokalisierung des mobilen Roboters ROMAN II

R	Mobiler Roboter
L_i	Landmarke Nr. i
\mathcal{C}_k	Bogenförmige Menge aller Zustände, die durch eine relative Winkelmessung definiert sind
\mathcal{M}_k	Sichelförmige Menge aller Zustände, die durch eine unsicherheitsbehaftete relative Winkelmessung definiert sind
$\hat{\gamma}_k^{i,j}$	Gemessener relativer Winkel zu zwei Landmarken L_i, L_j
$\epsilon_k^{v,i,j}$	Grenze für die Unsicherheit der Messung $\hat{\gamma}_k^{i,j}$
\mathcal{X}_k^M	Menge aller Lagen, die durch die Messung definiert ist

Lokalisierung von DECT-Mobiltelefonen

B_l	Basisstation Nr. l
M	DECT-Mobiltelefon
\underline{x}_M	Zustandsvektor, Position des Mobiltelefons M
$\underline{z}_{M,k}$	Gemessene Signalleistungen in dBm
$v_{l,k}$	Messrauschen der Signalleistungsmessung für Basisstation B_l
$\bar{v}_{l,k}$	Messrauschen der transformierten Signalleistungsmessung für B_l
P_S	Mittlere empfangene Signalleistung
S_0	Weltkoordinatensystem
\mathbf{D}_l	Matrix, die die Signalausbreitungsrichtung charakterisiert
$\underline{x}_{B,l}$	Ort maximaler prädizierter Signalleistung
$\underline{\eta}_{M,l}$	Parameter des Signalausbreitungsmodells für Basisstation B_l
σ_l^x	Ortsabhängige Standardabweichung des Modellfehlers der Signalleistung
σ_l^t	Zeitabhängige Standardabweichung der empfangenen Signalleistung

Nichtlineare Filterverfahren mit Anwendungen auf Lokalisierungsprobleme

Diese Arbeit beschreibt zwei neuartige nichtlineare Filterverfahren und deren Anwendung auf prototypische Lokalisierungsprobleme. Das erste vorgestellte Verfahren beruht auf einer Transformation des Filterproblems in einen höherdimensionalen Raum. Durch Anwendung eines linearen Filterverfahrens in diesem höherdimensionalen Raum wird der Filterschritt des nichtlinearen Filterproblems im Originalraum berechnet. Das Verfahren wird sowohl für den Fall einer stochastischen als auch einer mengenbasierten Unsicherheitsmodellierung hergeleitet. Im stochastischen Fall ermöglicht es für polynomiale Messfunktionen unter schwachen Voraussetzungen die analytische Berechnung der exakten, optimalen Lösung nach Bayes. Das zweite vorgestellte Filterverfahren verwendet Gaussian–Mixture–Dichten als angenommene Dichtebeschreibung. Die Kernidee dieses Verfahrens ist, die gesuchten, optimalen Parameter der angenommenen Dichtebeschreibung im Rahmen eines Progressionsverfahrens zu bestimmen. Dabei wird die angenommene Dichtebeschreibung kontinuierlich einer geeignet definierten parametrisierten Dichte nachgeführt, die am Ende der Progression der gesuchten, posterioren Dichte entspricht. Das Verfahren nimmt automatisch eine Anpassung der Anzahl an Mixture–Dichten vor, wenn die integrale quadratische Abweichung zwischen der angenommenen Dichte und der parametrisierten Dichte eine vorgegebene Grenze überschreitet. Die Leistungsfähigkeit der vorgestellten Verfahren wurde mit Experimenten zur Lokalisierung des mobilen Roboters ROMAN II mittels absoluter Winkelmessungen und zur Lokalisierung eines Mobilgerätes in einem DECT–Mobilfunknetzwerk demonstriert.

Nonlinear Filtering Algorithms with Applications to Localization Problems

This thesis proposes two novel nonlinear filtering algorithms and describes their application to prototypical localization problems. The first algorithm is based on a transformation of the original problem to a higher dimensional space. Applying a linear filtering algorithm in this higher dimensional space yields the solution for the filtering step in the original space. This novel filtering method is derived both for the case of a stochastic and a set–based uncertainty representation. In the stochastic case, it allows analytic calculation of the optimal bayesian solution for polynomial measurement equations under weak assumptions. The second proposed filtering algorithm uses gaussian mixture densities as an assumed density representation. The key idea of this method is to determine the optimal parameters of the assumed density based on progressive processing. For that purpose, a suitably defined parameterized density is continually tracked, yielding the desired density at the end of the progression. The filtering method automatically adapts the number of mixture densities, if the deviation between the parameterized density and the assumed density exceeds a predefined threshold. The effectiveness of the proposed filtering methods has been demonstrated by means of two prototypical scenarios, where the position of the mobile service robot ROMAN II was estimated based on absolute bearing measurements and a mobile handset was localized in a DECT communication network.

Kapitel 1

Einführung

1.1 Einleitung

Im alltäglichen Leben löst man, ohne es bewusst wahrzunehmen, ständig komplizierte Schätzaufgaben. Kommt man zum Beispiel in eine zunächst unbekannt erscheinende Umgebung, sieht sich dort um und erkennt einen oder möglicherweise mehrere, von früher bekannte Gegenstände wieder, kann man an Hand dieser Beobachtungen rekonstruieren, an welcher Stelle man sich selbst befindet. Technisch betrachtet wurde dabei das Problem gelöst, die eigene Position relativ zu bekannten Merkmalen in der Umgebung zu schätzen.

Wie im täglichen Leben ist auch einer Vielzahl technisch relevanter Aufgabenstellungen ein Schätzproblem unterlagert. Das bedeutet, dass die internen Zustände eines Systems, welche oft nicht direkt beobachtbar sind, aus Sensormessungen rekonstruiert werden müssen. Diese Messungen stehen in einem funktionalen Zusammenhang zu den gesuchten, internen Zuständen und sind gewöhnlich mit Unsicherheiten behaftet. Zur Lösung des Schätzproblems wird daher ein Algorithmus benötigt, der mit Hilfe einer quantitativen Beschreibung des Systemverhaltens sowie der Beziehungen zwischen den gesuchten internen Zuständen und den zugehörigen Messungen eine Schätzung für die internen Zustände berechnet. Dabei müssen die auftretenden Unsicherheiten in den Messungen berücksichtigt werden. Für viele Fragestellungen ist darüber hinaus eine Quantifizierung der Unsicherheit der Schätzung notwendig, damit diese in übergeordneten Verarbeitungsschritten sinnvoll weiterverwendet werden kann.

Mit der breiten Verfügbarkeit preisgünstiger, leistungsfähiger Rechner ist auch die Verbreitung und die Komplexität technischer Systeme gestiegen, die auf Zustandsschätzverfahren zurückgreifen. Zu den Anwendungsfeldern, in denen derartige Verfahren als Kernkomponente technischer Systeme eingesetzt werden, zählen unter anderem die die Spracherkennung [97], Sensordatenfusion in Sensornetzwerken [23, 56], Visualisierung von Daten [12] oder die Handschrifterkennung [109]. Eine Problemklasse, in der Zustandsschätzverfahren besondere Bedeutung erlangt haben, ist das eingangs am Menschen veranschaulichte Problem der Lokalisierung bewegter Systeme. Anwendungen umfassen die Lokalisierung von Fahrzeugen [6, 39], mobilen Servicerobotern [52, 54, 80, 81, 117, 120], Flugzeugen [7], Schiffen [63], U-Booten [69], die Verfolgung kleiner beweglicher Ziele für militärische Anwendungen [30, 96] oder von Personen im Bereich der mobilen Servicerobotik [78, 79]. Neuere Entwicklungen auf diesem Gebiet sind die gleichzeitige Lokalisierung eines mobilen Systems und die Kartierung seiner Umgebung, welche im Bereich der mobilen Servicerobotik

große Bedeutung hat [19, 20, 24, 39, 104, 105, 121, 122]. In letzter Zeit wurden derartige Lokalisierungsverfahren des Weiteren auf die Lokalisierung mobiler Kommunikationsgeräte, wie Mobiltelefone [47, 48, 91, 94, 118, 129] oder Funkethernetkarten [64] übertragen.

Die Mehrzahl der beschriebenen Anwendungen wurde bisher mit vergleichsweise einfachen Zustandsschätzverfahren, wie zu Beispiel dem bekannten Extended–Kalman–Filter (*EKF*) [115] realisiert [47, 55, 95]. Diese stellen vergleichsweise geringe Anforderungen an die verfügbare Rechenkapazität. Neuere, leistungsfähigere Verfahren erschließen dagegen Anwendungen, bei denen die Annahmen, welche linearisierenden Schätzverfahren wie dem *EKF* zu Grunde liegen, nicht mehr gültig sind, siehe zum Beispiel [8, 29, 35, 63, 118]. Diese Anwendungen sind dadurch gekennzeichnet, dass die ihnen zu Grunde liegende Systembeschreibung *Nichtlinearitäten* beinhaltet, die nicht adäquat durch eine Linearisierung approximiert werden können. Des Weiteren entsprechen die auftretenden Wahrscheinlichkeitsdichten der geschätzten Zustände bei diesen Anwendungen im Allgemeinen nicht der üblicherweise angenommenen Gaußdichte, die auch als Normaldichte bezeichnet wird.

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Herleitung von neuartigen *nichtlinearen Filteralgorithmen*, mit denen Zustandsschätzprobleme für nichtlineare Systeme im oben beschriebenen Sinne in systematischer Weise behandelt werden können. Die praktische Anwendbarkeit auf Lokalisierungsprobleme wird an Hand zweier prototypischer Problemstellungen demonstriert.

1.2 Problemstellung

1.2.1 Modellierung des Systems

Für die Schätzung eines unbekanntes Systemzustandes \underline{x} eines dynamischen Systems \mathcal{S} mit der Hilfe von Filterverfahren wird eine quantitative Beschreibung des Systemverhaltens benötigt. Im Folgenden wird für die Systemmodellierung der zeitdiskrete Zustandsraumansatz gewählt, das heißt, das dynamische System \mathcal{S} wird durch einen Zustandsvektor \underline{x}_k und Differenzgleichungen beschrieben, die die Entwicklung des Systems über der Zeit t zu diskreten Zeitpunkten t_k beschreiben [99]. Der Zustandsvektor \underline{x}_k beinhaltet alle Information, die benötigt wird, um den Momentanzustand des Systems \mathcal{S} eindeutig zu beschreiben.

Des Weiteren sollen für die Schätzung des Systemzustandes \underline{x} unsichere Beobachtungen z_i , $i = 1 \dots M$ zur Verfügung stehen, die zu festen, diskreten Zeitpunkten t_k erfolgen. Sie werden in einem Messvektor \underline{z}_k zusammengefasst, der üblicherweise eine kleinere Dimension hat, als der Zustandsvektor \underline{x}_k . $\mathbf{Z}^k := \{\underline{z}_0, \underline{z}_1, \dots, \underline{z}_k\}$ sei die Menge aller Messungen bis zum Zeitpunkt k .

Für die Modellierung der Unsicherheiten in der Fortschreibung des Systemzustandes und in den Beobachtungen lassen sich zwei Hauptklassen von Unsicherheitsmodellen unterscheiden [99]: 1.) Die wahrscheinlichkeitstheoretische Modellierung, welche Unsicherheiten durch Zufallsprozesse beschreibt und 2.) die mengenbasierte Modellierung, bei der Unsicherheiten durch Mengen möglicher Werte für die betrachtete, unsichere Größe beschrieben werden.

Eine Vielzahl von Anwendungen stützt sich auf die *wahrscheinlichkeitstheoretische Modellierung* der auftretenden unsicheren Größen. Diese erlaubt die Anwendung von Standardverfahren zur Filterung, wie dem *Kalman*-Filter [58] im Falle linearer Systeme oder dem *EKF* im Falle nichtlinearer Systeme [55, 85, 95]. Die zu Grunde liegende Annahme gauß'scher weißer Rauschprozesse ist jedoch schon für die Primärunsicherheiten, also das System- und das Messrauschen, schwer zu verifizieren [74] und ist für nichtlineare Systeme für die zu schätzenden Zustandsgrößen in der Regel ungültig. Um die Divergenz des Filterverfahrens zu vermeiden, gibt es die Möglichkeit, eine Adaption der Rauschparameter vorzunehmen [55], eine Bank einfacher Filter zur Verfolgung mehrerer Hypothesen zu verwenden [54], oder nichtlineare Filterverfahren einzusetzen [2, 4, 5, 7, 15, 16, 62, 102], die die Beschreibung komplexer Wahrscheinlichkeitsverteilungsdichten ermöglichen. Eine Alternative zu dieser Vorgehensweise ist es, zu robusten Filterverfahren wie dem Covariance Intersection Filter (*CI*) [57, 127] oder neuartigen Filterverfahren zur Filterung im Falle begrenzter Korrelationen [128] überzugehen. Die Fehler, welche durch Linearisierung der System- und Messgleichungen entstehen, werden dabei konservativ abgeschätzt.

Sind die Wahrscheinlichkeitsverteilungsdichten und die zeitliche Struktur der auftretenden Unsicherheiten unbekannt, aber Amplitudengrenzen gegeben, bietet sich eine *mengenbasierte Modellierung* des betrachteten Systems an [74, 77]. Mengenbasierte Filteralgorithmen ergeben *garantiert konservative* Filterergebnisse für beliebig korrelierte und auch rein deterministische Rauschprozesse [40]. Wird eine ellipsoidale mengenbasierte Unsicherheitsbeschreibung [21, 99] für lineare oder linearisierte Systeme verwendet, sind die resultierenden Filteralgorithmen dem *CI*-Filter ähnlich. Im Gegensatz zum *CI*-Filter beziehen sie jedoch den aktuellen Messwert in die Schätzung der Unsicherheit mit ein, eine kurze Übersicht dieser Algorithmen ist in Anhang A.2 wiedergegeben. Die Vor- und Nachteile mengenbasierter Filterung im Vergleich zu stochastischen Verfahren werden in der Einleitung zu Kapitel 2 ausführlich diskutiert.

1.2.1.1 Modellierung des Systems im Falle stochastischer Unsicherheiten

Im Falle der *wahrscheinlichkeitstheoretischen Modellierung* werden die auftretenden unsicheren Größen des Modells durch Zufallsprozesse beschrieben. Eine einfache, häufig verwendete Beschreibung ist der weiße Gaußprozess [99]. Im Allgemeinen sind die auftretenden Zufallsprozesse jedoch durch kompliziertere Wahrscheinlichkeitsverteilungsdichten charakterisiert. Zudem ist die Annahme weißer Zufallsprozesse nicht immer zutreffend, so dass für die Beschreibung der unsicheren Größen gegebenenfalls auch farbige Zufallsprozesse betrachtet werden müssen. Die Beschreibung eines allgemeinen, dynamischen Systems \mathcal{S} mit stochastischen Unsicherheiten ist durch

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{f}_k(\underline{x}_k, \underline{u}_k, \underline{w}_k) \quad , \quad (1.1)$$

$$\underline{z}_k = \underline{h}_k(\underline{x}_k, \underline{v}_k) \quad , \quad (1.2)$$

gegeben, wobei $\underline{f}_k(\cdot) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^R \times \mathbb{R}^{N_w} \rightarrow \mathbb{R}^N$ die gewöhnlich nichtlineare Systemgleichung und $\underline{h}_k(\cdot) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N_v} \rightarrow \mathbb{R}^M$ die Messgleichung mit Messvektor \underline{z}_k ist. N , R und M sind dabei die Dimensionen des Zustands- des Steuer- und des Messvektors, und N_w , N_v sind die Dimensionen des System- bzw. des Messrauschens. \underline{x}_k ist der Zustandsvektor des Systems zum Zeitpunkt k , \underline{u}_k der Vektor der Steuergrößen, und \underline{w}_k der Vektor des

Systemrauschens. Analog dazu ist \underline{v}_k der Vektor des Messrauschens. \underline{w}_k und \underline{v}_k können beliebige Rauschprozesse sein, deren Wahrscheinlichkeitsverteilungsdichten im Allgemeinen eine Funktion der Zeit t_k sind.

Ein wichtiger Spezialfall der allgemeinen Systembeschreibung gemäß (1.1), (1.2) sind Systeme mit mittelwertfreiem, additivem, weißen Rauschen. Die allgemeine Systembeschreibung (1.1), (1.2) geht dann in

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{f}_k(\underline{x}_k, \underline{u}_k) + \underline{w}_k, \quad (1.3)$$

$$\underline{z}_k = \underline{h}_k(\underline{x}_k) + \underline{v}_k \quad (1.4)$$

über. Diese gängige Art der Unsicherheitsmodellierung für dynamische Systeme ist für eine große Klasse praktisch relevanter Systeme näherungsweise zutreffend [41]. Die Einschränkung auf *weiße* Rauschprozesse bedeutet, dass das Systemrauschen \underline{w}_k zum Zeitpunkt k unabhängig von dem Systemzustand \underline{x}_k und dem Systemrauschen \underline{w}_l zu jedem anderen Zeitpunkt l ist, also

$$\begin{aligned} f_{\underline{w}_k \underline{w}_l}(\underline{w}_k, \underline{w}_l) &= f_{\underline{w}_k}(\underline{w}_k) f_{\underline{w}_l}(\underline{w}_l) \quad \forall k, l, \quad k \neq l \\ f_{\underline{w}_k \underline{x}_k}(\underline{w}_k, \underline{x}_k) &= f_{\underline{w}_k}(\underline{w}_k) f_{\underline{x}_k}(\underline{x}_k) \quad \forall k, l. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Dabei ist $f_{\underline{w}_k}(\underline{w}_k)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte des Systemrauschens zum Zeitpunkt k , $f_{\underline{x}_k}(\underline{x}_k)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte des Systemzustandes zum Zeitpunkt k und $f_{\underline{w}_k \underline{w}_l}(\underline{w}_k, \underline{w}_l)$ die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte des Systemrauschens zu zwei verschiedenen Zeitpunkten k und l . Analog gilt mit obiger Annahme für das Messrauschen

$$\begin{aligned} f_{\underline{v}_k \underline{v}_l}(\underline{v}_k, \underline{v}_l) &= f_{\underline{v}_k}(\underline{v}_k) f_{\underline{v}_l}(\underline{v}_l) \quad \forall k, l, \quad k \neq l \\ f_{\underline{v}_k \underline{x}_k}(\underline{v}_k, \underline{x}_k) &= f_{\underline{v}_k}(\underline{v}_k) f_{\underline{x}_k}(\underline{x}_k) \quad \forall k, l, \\ f_{\underline{v}_k \underline{w}_l}(\underline{v}_k, \underline{w}_l) &= f_{\underline{v}_k}(\underline{v}_k) f_{\underline{w}_l}(\underline{w}_l) \quad \forall k, l, \end{aligned} \quad (1.6)$$

das heißt, es wird angenommen, dass das Messrauschen \underline{v}_k zum Zeitpunkt k unabhängig von dem Systemzustand \underline{x}_k und dem Messrauschen \underline{w}_l zu jedem anderen Zeitpunkt l ist, sowie dass \underline{v}_l und \underline{w}_k gegenseitig unabhängig sind. Rauschprozesse, die den Annahmen (1.5) bzw. (1.6) genügen, werden auch als weiße Prozesse im strikten Sinne bezeichnet [99]. Für die in Kapitel 3 behandelten, nichtlinearen Filterverfahren auf der Basis von Gaussian-Mixture-Dichten wird angenommen, dass die auftretenden Rauschprozesse im strikten Sinne weiße Rauschprozesse sind, was die rekursive Anwendung des Satzes von Bayes ermöglicht.

1.2.1.2 Modellierung des Systems im Falle mengenbegrenzter Unsicherheiten

Für den Fall der Unsicherheitsmodellierung durch Mengen wird angenommen, dass die auftretenden unsicheren Größen \underline{w}_k und \underline{v}_k in (1.1), (1.2) amplitudenbegrenzt gemäß $\underline{w}_k \in \mathcal{W}_k$ und $\underline{v}_k \in \mathcal{V}_k$ seien [74, 77, 112]. Dabei ist \mathcal{W}_k bzw. \mathcal{V}_k die Menge aller möglichen Werte der Zustände \underline{w}_k bzw. \underline{v}_k zum Zeitpunkt k . Das bedeutet, dass keine Information über die Art oder Verteilung der auftretenden Unsicherheiten außer ihrer Mengenbegrenztheit für die Modellierung verwendet wird. Dies kann für praktische Anwendungen, in denen Wahrscheinlichkeitsdichten von Rauschprozessen unter Umständen nur schwer zu bestimmen oder zu verifizieren sind, von großer Bedeutung sein [40, 74]. Im Gegensatz

zur stochastischen Unsicherheitsmodellierung werden des Weiteren keine Annahmen über die zeitliche Struktur der Zufallsprozesse gemacht. Daraus folgt, dass auch vollständig korrelierte oder deterministische Rauschprozesse korrekt durch die mengenbasierte Modellierung erfasst werden. Ein einfaches, in der Praxis häufig auftretendes Beispiel für eine vollständig korrelierte Unsicherheit ist ein unbekannter konstanter Bias [99]. Analog zum Fall stochastischer Unsicherheiten kann das mengenbegrenzte Unsicherheitsmodell auf den Spezialfall von Systemen mit additivem, weißen Rauschen gemäß (1.3) übertragen werden. Ein mengenbegrenzter, weißer Prozess ist analog zu stochastischen, weißen Prozessen dadurch charakterisiert, dass er keine zeitliche Struktur aufweist [99]. Dies führt auf die Systembeschreibung

$$\begin{aligned}\underline{x}_{k+1} &= \underline{f}_k(\underline{x}_k, \underline{u}_k) + \underline{w}_k, \quad \underline{w}_k \in \mathcal{W}_k, \\ \underline{z}_k &= \underline{h}_k(\underline{x}_k) + \underline{v}_k, \quad \underline{v}_k \in \mathcal{V}_k,\end{aligned}\tag{1.7}$$

welche in Kapitel 2 die Grundlage für die Formulierung eines neuartigen, nichtlinearen Filteralgorithmus im Falle mengenbegrenzter Unsicherheiten bildet. Die resultierenden Größen in (1.7) werden auch als unbekannte, aber amplitudenbegrenzte Prozesse (englisch: „unknown-but-bounded“) bezeichnet.

1.2.2 Zielsetzung

Das in dieser Arbeit betrachtete Problem der Zustandsschätzung besteht darin, mit Hilfe vorliegender Messungen \underline{z}_k eine Schätzung $\hat{\underline{x}}_k$ für den nicht direkt beobachtbaren Zustandsvektor \underline{x}_k eines gegebenen Systems \mathcal{S} zu bestimmen. Dabei wird im Folgenden stets davon ausgegangen, dass das System beobachtbar ist, und die gewünschte Schätzung tatsächlich berechenbar ist.

Für die Berechnung dieser Schätzung sollen *rekursive Filteralgorithmen* eingesetzt werden, die im Gegensatz zu Einschrittalgorithmen mit jedem Zeitschritt k eine Schätzung unter Verwendung der aktuellen Messung \underline{z}_k berechnen, und keine gespeicherten Messungen benötigen. Unterscheiden lassen sie sich ferner von so genannten Glättungsverfahren, die neben den Messungen bis zum Zeitpunkt k auch zukünftige Messungen $\underline{z}_{k+1}, \dots, \underline{z}_{k+L}$ in die Berechnung der Schätzung für den Systemzustand einbeziehen.

Unter einer Schätzung wird im Folgenden eine quantitative Aussage über den Systemzustand \underline{x}_k selbst, sowie der damit verbundenen Unsicherheit verstanden. Im Falle einer *stochastischen Unsicherheitsmodellierung* wird eine Schätzung durch die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte des Zustandes \underline{x}_k unter der Bedingung, dass die Messungen \mathbf{Z}^k bis zum Zeitpunkt k gegeben sind, beschrieben. Im Falle einer *mengenbasierten Unsicherheitsmodellierung* wird die Schätzung durch die Menge \mathcal{X}_k aller Zustände \underline{x}_k beschrieben, die mit der Fortschreibung durch das gegebene Systemmodell und der Menge aller Messungen \mathbf{Z}^k kompatibel sind.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, aufbauend auf bekannten Ansätzen neuartige Filteralgorithmen zur Zustandsschätzung im oben definierten Sinne herzuleiten, die eine geschlossene, systematische Behandlung nichtlinearer System- und Messgleichungen ermöglichen und numerische Approximationen, soweit das möglich ist, vermeiden. Diese Verfahren zeichnen sich gegenüber Verfahren, die Stand der Technik sind, unter anderem durch folgende Punkte aus:

- Im Gegensatz zu linearisierenden Filterverfahren wie dem bekannten Extended-Kalman-Filter (*EKF*) ist eine getrennte Berücksichtigung von Linearisierungsfehlern nicht erforderlich, und eine Filterdivergenz durch deren Vernachlässigung daher ebenfalls ausgeschlossen.
- Komplexe, gegebenenfalls auch multimodale Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen können explizit, und für eines der vorgestellten Verfahren auch durchgängig analytisch behandelt werden.

Ein wichtiges Anwendungsfeld für Zustandsschätzverfahren ist das Problem der *Lokalisierung* [20, 39, 106, 120], bei welchem die Lage eines üblicherweise beweglichen Beobachters bezüglich eines gegebenen, festen Weltkoordinatensystems S_0 geschätzt werden soll. In dieser Arbeit wird die Anwendbarkeit der hergeleiteten, nichtlinearen Filterverfahren für zwei prototypische Lokalisierungsprobleme aus dem Bereich der Mobilfunktechnik und der mobilen Robotik untersucht. Die Verfügbarkeit *nichtlinearer* Filterverfahren ist dabei insbesondere für die initiale Phase eines Lokalisierungsproblems von großer Bedeutung, in der nur wenig oder kein Vorwissen über die Lage des Beobachters vorhanden ist. In der Robotikliteratur ist dies für das Problem der Roboterlokalisierung auch als so genanntes „kidnapped robot problem“ bekannt [95], welches erheblich schwieriger zu lösen ist, als eine rekursive, fortlaufende Positionsschätzung. Da im Falle der rekursiven Positionsschätzung in jedem Schritt eine priore Schätzung mit relativ geringer Unsicherheit vorliegt, wird zum einen die Lösung des Zuordnungsproblems vereinfacht, und zum anderen können nichtlineare Messgleichungen genauer durch ihre Linearisierung approximiert werden, was die Anwendung linearisierender Filterverfahren möglich macht.

1.3 Stand des Wissens

1.3.1 Optimale Filterverfahren

Im folgenden Kapitel wird, ausgehend von der Problembeschreibung in Kapitel 1.2.1, für den Fall einer stochastischen Unsicherheitsbeschreibung zunächst die optimale Lösung des Filterproblems gemäß des Satzes von Bayes vorgestellt. Für den Fall linearer, zeitvarianter Systeme mit additivem, gauß'schen Rauschen ergibt sich das bekannte *Kalman-Filter* als Spezialfall dieses optimalen Filters, welches in Anhang A.1 kurz dargestellt wird. Die optimale Lösung des Filterproblems ist die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $f(\underline{x}_k | \mathbf{Z}^k)$ des geschätzten Zustandes mit gegebenen Messungen bis zum Zeitpunkt k , welche durch einen Satz von Parametern $\underline{\eta}_k$ charakterisiert wird. Beschreibt der Parametersatz $\underline{\eta}_k$ die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte eindeutig, wird er auch als so genannte hinreichende Statistik der Dichte bezeichnet. Abgesehen von sehr wenigen Ausnahmen, zu denen das *Kalman-Filter* [58] und das *Wonham-Filter* [116] gehören, kann die gesuchte Wahrscheinlichkeitsdichte nicht durch einen endlich dimensionalen Parametersatz $\underline{\eta}_k$ beschrieben werden, weshalb für praktisch relevante Lösungen auf Approximationen zurückgegriffen werden muss. Nichtlineare Filterverfahren mit unterschiedlichen Approximationen, die heute Stand der Technik sind, werden in Kapitel 1.3.2 vorgestellt und eingeordnet, und die Vor- und Nachteile der einzelnen Verfahren kurz erörtert.

Für den Fall einer *mengenbasierten Unsicherheitsmodellierung* ist die optimale Lösung des Filterproblems durch die kleinste Menge \mathcal{X}_k aller möglichen Zustände \underline{x}_k gegeben, die mit allen Messungen \mathbf{Z}^k bis zum Zeitpunkt k und dem Systemmodell \mathcal{S} kompatibel ist. Eine rekursive Formulierung wird zum Beispiel in [99] gegeben und ist in Anhang B zusammenfassend dargestellt.

1.3.1.1 Optimales, Bayes'sches Filterverfahren

Das Problem der Zustandsschätzung für ein dynamisches System \mathcal{S} gemäß (1.1) besteht darin, für jeden Zeitpunkt k unter Berücksichtigung aller Messungen \mathbf{Z}^k bis zu diesem Zeitpunkt eine Schätzung $\hat{\underline{x}}_k$ des nicht beobachtbaren Zustandsvektors \underline{x}_k zu berechnen. Dieser Schätzung ist darüber hinaus gewöhnlich ein Maß für die Unsicherheit zugeordnet, mit der die Schätzung behaftet ist.

Für den Bayes'schen Ansatz der Zustandsschätzung für Systeme gemäß (1.1), der die Grundlage für die meisten wahrscheinlichkeitstheoretischen Filterverfahren bildet [2, 15, 50], muss die Systemgleichung und die Messgleichung in wahrscheinlichkeitstheoretischer Form, das heißt in Form einer bedingten Wahrscheinlichkeitsdichte gegeben sein. Zum Zeitpunkt $k = 0$ wird dem Zustandsvektor \underline{x}_0 eine Wahrscheinlichkeitsdichte $f(\underline{x}_0)$ zugeordnet. Das Problem der Zustandsschätzung für \mathcal{S} geht dann in das Problem über, diese Wahrscheinlichkeitsdichte über der Zeit unter Berücksichtigung der diskreten Messungen \mathbf{Z}^k fortzuschreiben. Diese Fortschreibung geschieht rekursiv in je zwei aufeinander folgenden Schritten: Dem *Prädiktionsschritt* und dem *Filterschritt*. Im Prädiktionsschritt wird aus der bekannten Wahrscheinlichkeitsdichte $f(\underline{x}_k|\mathbf{Z}^k)$ zum Zeitpunkt k , der so genannten prioren Dichte, eine prädizierte Wahrscheinlichkeitsdichte $f(\underline{x}_{k+1}|\mathbf{Z}^k)$ über die Chapman-Kolmogorov-Gleichung [2] berechnet

$$f(\underline{x}_{k+1}|\mathbf{Z}^k) = \int_{\mathbb{R}^N} f(\underline{x}_{k+1}|\underline{x}_k) f(\underline{x}_k|\mathbf{Z}^k) d\underline{x}_k . \quad (1.8)$$

Für die Herleitung von (1.8) wurde ausgenutzt, dass die Systemgleichung ein Markov-Prozess erster Ordnung ist, so dass \underline{x}_{k+1} nur von \underline{x}_k und \underline{u}_k abhängt, nicht aber von zeitlich weiter zurückliegenden Zuständen oder Steuergrößen.

Im Filterschritt wird eine neue Messung \underline{z}_k zum Zeitpunkt k in die Schätzung durch Anwendung des Satzes von Bayes einbezogen, um die posteriore Wahrscheinlichkeitsdichte $f(\underline{x}_k|\mathbf{Z}^k)$ gemäß

$$f(\underline{x}_k|\mathbf{Z}^k) = \frac{f(\underline{z}_k|\underline{x}_k) f(\underline{x}_k|\mathbf{Z}^{k-1})}{f(\underline{z}_k|\mathbf{Z}^{k-1})} \quad (1.9)$$

zu berechnen. Dabei ist $f(\underline{z}_k|\mathbf{Z}^{k-1})$ eine normalisierende Konstante und $f(\underline{z}_k|\underline{x}_k)$ die so genannte *Likelihoodfunktion* [46], die die bedingte Wahrscheinlichkeit beschreibt, \underline{z}_k unter der Bedingung \underline{x}_k zu beobachten. Durch rekursive Anwendung der Gleichungen (1.8) und (1.9) kann die optimale Bayes'sche Lösung des Zustandsschätzproblems berechnet werden. Dieses Ergebnis ist jedoch zunächst nur von theoretischem Wert, da sich die auftretenden Integrale in der Regel nicht analytisch lösen lassen. Des Weiteren müssen für die Anwendung des wahrscheinlichkeitstheoretischen Filterverfahrens nach Bayes die bedingten

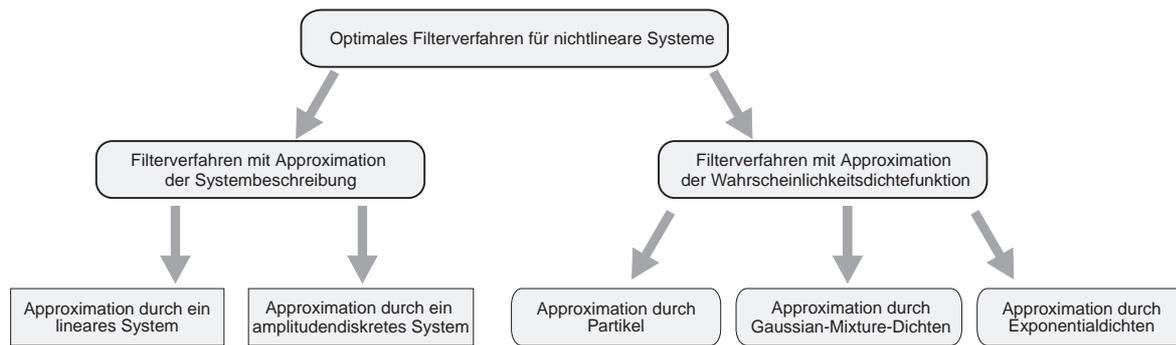


Bild 1.1: Gliederung von Filterverfahren

Wahrscheinlichkeitsdichten für den Zustandsübergang $f(\underline{x}_{k+1}|\underline{x}_k)$ und die Likelihoodfunktion $f(\underline{z}_k|\underline{x}_k)$ aus den Systemgleichungen (1.1), (1.2) und den bekannten Statistiken der Rauschprozesse \underline{w}_k und \underline{v}_k bestimmt werden. Für das vereinfachte Systemmodell mit additivem, weißen Rauschen gemäß (1.3), (1.4) erhält man die gesuchten, bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten direkt durch Umformung der Mess- bzw. Systemgleichung und Einsetzen in die Wahrscheinlichkeitsdichten des Mess- bzw. Systemrauschens zu

$$f(\underline{x}_{k+1}|\underline{x}_k) = f_w(\underline{x}_{k+1} - \underline{f}_k(\underline{x}_k)) \quad , \quad (1.10)$$

$$f(\underline{z}_k|\underline{x}_k) = f_v(\underline{z}_k - \underline{h}_k(\underline{x}_k)) \quad , \quad (1.11)$$

wobei $f_v(\cdot)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte des Messrauschens \underline{v}_k und $f_w(\cdot)$ dementsprechend die Wahrscheinlichkeitsdichte des Systemrauschens \underline{w}_k ist.

1.3.2 Einordnung nichtlinearer Filterverfahren

Bild 1.1 zeigt eine Einordnung nichtlinearer Filterverfahren bezüglich der ihnen zu Grunde liegenden Approximationen.

Die optimale Lösung des gestellten Filterproblems im Falle einer *wahrscheinlichkeitstheoretischen Systemmodellierung* ist ein Algorithmus, der die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $f(\underline{x}_k|\mathbf{Z}^k)$, aus der sich andere statistische Kenngrößen wie Mittelwert oder Varianz von \underline{x}_k ableiten lassen, für jeden Zeitschritt k zur Verfügung stellt. Unter der einschränkenden Annahme, dass das betrachtete System (1.1), (1.2) eine Markoveigenschaft erster Ordnung aufweist, ist das in Kapitel 1.3.1.1 dargestellte, Bayes'sche Filterverfahren das optimale rekursive Filterverfahren. Aus diesem lässt sich direkt das *Kalman*-Filter herleiten, welches das optimale rekursive Filterverfahren für den Fall linearer dynamischer Systeme \mathcal{S}_L mit additivem, weißem, gauß'schen Rauschen ist und in Anhang A.1 der Vollständigkeit halber zusammengefasst wird.

Im allgemeinen Fall kann die gesuchte, optimale Lösung für $f(\underline{x}_k|\mathbf{Z}^k)$ wie in Kapitel 1.3.1 erläutert, nur approximativ berechnet werden. Dabei lassen sich zwei Vorgehensweisen unterscheiden:

1. Die Approximation der gegebenen, nichtlinearen Systembeschreibung oder
2. die Approximation der gesuchten Wahrscheinlichkeitsdichte,

siehe Bild 1.1. Für die *Approximation der gegebenen Systembeschreibung* werden im Rahmen nichtlinearer, rekursiver Filterverfahren überwiegend zwei Verfahren angewendet: a) Die Diskretisierung des gegebenen Systems, so dass nur eine endliche Anzahl amplitudendiskreter Systemzustände betrachtet werden muss und b) die Linearisierung der Systembeschreibung.

Das am häufigsten verwendete Verfahren zur Behandlung nichtlinearer Filterprobleme ist die lokale *Approximation der verwendeten Systembeschreibung* durch ein lineares Modell. Für dieses lineare Modell kann unter der zusätzlichen Annahme gaußverteilter Rauschens dann das bekannte *Kalman-Filter* für die Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeitsdichte verwendet werden, was auf das so genannte „*Extended-Kalman-Filter*“ (*EKF*) führt, welches für zahlreiche technische Problemstellungen angewendet wurde, siehe zum Beispiel [55, 85, 95, 115]. Vor- und Nachteile dieses Verfahrens werden in [2] und an Hand des einleitenden Beispiels zu Kapitel 3 diskutiert, ein ausführlicher Vergleich des *EKF* mit anderen Filterverfahren am Beispiel der Verfolgung ballistischer Ziele findet sich in [31].

Eine Klasse von Verfahren, die auf einer Diskretisierung der Systembeschreibung beruhen, sind die *gitterbasierten Filterverfahren*. Diese Methoden beruhen darauf, den kontinuierlichen Zustandsraum in N_C diskrete Teilräume zu zerlegen, wodurch das gegebene Filterproblem in ein diskretes Filterproblem übergeht, das sich mit *Hidden-Markov-Modell-Filtern* [88] behandeln lässt, welches zuerst von Wonham [116] hergeleitet wurde. Für diese Verfahren ist die Dimension N des zu diskretisierenden Zustandsraums eine kritische Größe [35], da die Anzahl der diskreten Zustände exponentiell mit N zunimmt und schon für kleine Dimensionen N nicht mehr rechnerisch handhabbar wird. Darüberhinaus ist der Prädiktionsschritt durch die benötigte Auswertung einer diskreten Faltungsoperation schon für eine geringe Anzahl diskreter Zustände extrem rechenaufwendig [2]. Anwendungen auf Lokalisierungsprobleme sind unter anderem in [8, 35, 104] beschrieben.

Unter den Verfahren, die eine *Approximation der gesuchten Wahrscheinlichkeitsdichte* durchführen, um das gegebene, nichtlineare Filterproblem algorithmisch handhabbar zu machen, lassen sich die so genannten *Partikelfilter* und die *Filterverfahren mit angenommener Dichtebeschreibung* einordnen.

- *Partikelfilter* beschreiben eine Approximation der gesuchten bedingten Wahrscheinlichkeitsdichte über die Dichte einer Menge zufällig ausgewählter Samples [2]. Die Filterung erfolgt durch rekursive Fortschreibung der Samples mit Hilfe des Systemmodells (1.1) im Prädiktionsschritt und einer Gewichtung mit anschließendem Resampling-Schritt für den Filterschritt. Der Nachteil dieser Verfahren ist, dass die Anzahl der benötigten Samples exponentiell mit der Dimension des Zustandsraums ansteigt. Desweiteren müssen besondere Vorkehrungen getroffen werden, um ein Aussterben oder Kollabieren der Partikel in einem Punkt des Zustandsraums zu verhindern. Ihr Vorteil ist, dass sie beweisbar gegen das optimale Filterergebnis konvergieren, wenn die Anzahl der verwendeten Samples gegen unendlich geht. Eine Übersicht über verschiedene Partikelfilterverfahren und ein Vergleich mit gitterbasierten Verfahren und dem *EKF* wird in [2] gegeben. Anwendungen auf Lokalisierungsprobleme finden sich zum Beispiel in [26, 73, 78, 105, 106, 113].

- *Filterverfahren mit angenommener Dichtebeschreibung* parametrisieren die gesuchte Wahrscheinlichkeitsdichte $f(\underline{x}_k | \mathbf{Z}^k)$ durch die Wahl einer angenommenen Dichtebeschreibung. Für diese angenommene Dichtebeschreibung werden am häufigsten Gaussian–Mixture–Dichten oder Exponentialdichten fester Ordnung verwendet (Bild 1.1), da sie besonders gut analytisch handhabbar sind [16]. Die zugehörigen, optimalen Parameter der Dichtebeschreibung werden rekursiv über den Filter– und den Prädiktionsschritt hinweg [16, 50, 63] berechnet. Der Vorteil dieser Verfahren ist, dass sie eine analytische Beschreibung der gesuchten Dichte liefern, deren Komplexität durch die in jedem Filterschritt vorgenommene Approximation der wahren Wahrscheinlichkeitsdichte durch die angenommene Dichtebeschreibung über die Filterschritte hinweg konstant bleibt [16]. Die berechnete, approximierten Wahrscheinlichkeitsdichte bleibt analytisch handhabbar, da sie für alle Filterschritte die Eigenschaften der angenommenen Dichtebeschreibung bewahrt. Der Nachteil dieser Verfahren liegt darin, dass die gesuchten, optimalen Parameter in der Regel nur durch rechenaufwendige, numerische Verfahren oder Monte–Carlo–Verfahren bestimmt werden können. Zudem kann der Fall auftreten, dass die wahre Wahrscheinlichkeitsdichte nicht in der Familie der angenommenen Dichtebeschreibung liegt, wenn das verwendete Modell fehlerbehaftet ist.

Zur Behandlung von Filterproblemen für Systeme, für welche die in Kapitel 1.2.1.1 getroffene Annahme weißer Rauschprozesse nicht zutreffend ist, müssen Filterverfahren eingesetzt werden, die auch für *farbige* Rauschprozesse korrekte Schätzergebnisse berechnen. Das Spektrum der auftretenden Rauschprozesse ist dabei in praktischen Anwendungen oft nicht oder nur näherungsweise bekannt. Dann ist der Einsatz *robuster Filterverfahren* erforderlich, die für alle möglichen auftretenden Rauschprozesse ein garantiert konservatives Filterergebnis liefern. Für den Fall linearer Systeme mit additivem, farbigem Rauschen wird in Anhang C das Covariance–Intersection–Filter (*CI*) [56] auf der Basis einer generischen Matrixapproximation hergeleitet [127]. Des Weiteren werden neuartige Formeln zur Berechnung optimaler Parameter für den Filter– und den Prädiktionsschritt vorgestellt. Das *CI*–Filter liefert für beliebig korrelierte Rauschprozesse garantiert konservative Filterergebnisse. Es eignet sich daher zum Beispiel zur Behandlung von Problemstellungen der dezentralen Sensordatenfusion oder von Lokalisierungs– und Kartierungsproblemen. Mit Hilfe der vorgestellten generischen Matrixapproximation können darüber hinaus mächtigere Filterverfahren hergeleitet werden [42], die eine Behandlung gemischter Unsicherheitsmodelle ermöglichen. In diesem Fall setzen sich die auftretenden Unsicherheiten aus weißen *und* farbigen Anteilen zusammen.

Für den Fall einer *mengenbasierten Unsicherheitsmodellierung* ist die optimale Lösung des Filterproblems durch die kleinste Menge $\tilde{\mathcal{X}}_k$ aller möglichen Zustände \underline{x}_k gegeben, siehe Anhang B. Für praktisch handhabbare, rekursive Filterverfahren ist immer eine Approximation der wahren, minimalen Menge $\tilde{\mathcal{X}}_k$ durch eine konservative, approximative Beschreibung, wie zum Beispiel Ellipsoide [40, 99] oder Rechtecke [52] erforderlich, da die Anzahl der erforderlichen Parameter zur Beschreibung von $\tilde{\mathcal{X}}_k$ auch für lineare Systeme \mathcal{S}_L mit jedem Filterschritt zunimmt. Wird eine Approximation durch Ellipsoide gewählt und das gegebene, nichtlineare System zusätzlich durch eine Linearisierung approximiert, ergibt sich das mengenbasierte, ellipsoidale Filter [21, 40, 99], welches in Anhang A.2 zusammengefasst dargestellt wird. In [74] wird die praktische Bedeutung mengenbasierter

Filterverfahren für Lokalisierungsprobleme dargelegt. Anwendungen auf Lokalisierungsprobleme aus dem Bereich der Robotik finden sich unter anderem in [37,40,52,122]. In [124] wird das neuartige, in Kapitel 2 vorgestellte Filterverfahren auf das Problem der Lokalisierung im Falle relativer Winkelmessungen mit mengenbegrenzten Messunsicherheiten angewendet.

1.3.3 Fazit

Für eine Vielzahl praktisch relevanter Probleme werden Verfahren zur Zustandsschätzung benötigt, die eine explizite Behandlung nichtlinearer System- und Messmodelle ermöglichen, und komplexe, unter Umständen multimodale Wahrscheinlichkeitsverteilungsdichten handhaben können. Bisher verfügbare Verfahren mit gitterbasierten Approximationen der Wahrscheinlichkeitsdichten erfordern erheblichen Rechenaufwand für den Prädiktionsschritt [2]. Partikelbasierte Verfahren benötigen eine mit der Dimension des Zustandsraums exponentiell ansteigende Anzahl an Partikeln, da sie Wahrscheinlichkeitsdichten über die Dichte von Partikeln repräsentieren. Darüber hinaus erfordern sie besondere Vorkehrungen, um das Aussterben der Partikel, insbesondere im Falle kleines Systemrauschens [2], zu vermeiden.

In Kapitel 2 und Kapitel 3 dieser Arbeit werden neuartige Filteralgorithmen zur Zustandsschätzung vorgeschlagen, die eine systematische Behandlung nichtlinearer Filterprobleme ermöglichen, numerische Approximationen soweit es möglich ist vermeiden und nicht die geschilderten Nachteile der Verfahren besitzen, die heute Stand der Technik sind.

1.4 Inhaltsübersicht

Die nachfolgenden Ausführungen sind in drei Kapitel gegliedert, denen sich zur Vollständigkeit der Darstellung ein Anhang mit einer tutoriell zusammengefassten Wiederholung bekannter linearer Filterverfahren anschließt. Die folgenden beiden theoretischen Kapitel befassen sich mit der Herleitung zweier neuartiger Verfahren, die zur Klasse der Filterverfahren mit angenommener Dichtebeschreibung (englisch: „assumed density“) gehören. Darauf folgt ein Kapitel, in dem die praktische Relevanz der hergeleiteten Verfahren an Hand zweier prototypischer Lokalisierungsaufgaben demonstriert wird. In jedem Kapitel werden die erzielten theoretischen Resultate durch einfache, anschauliche Beispiele unterlegt.

Das in Kapitel 2 vorgestellte Filterverfahren verwendet eine neuartige Form für die angenommene Dichtebeschreibung, die eine einfache Darstellung und analytische Handhabbarkeit der auftretenden Wahrscheinlichkeitsdichten für die Berechnung des Filterschrittes ermöglicht. Für die Klasse polynomialer, nichtlinearer Messfunktionen $\underline{h}(\underline{x}_k)$ ermöglicht diese angenommene Dichtebeschreibung sogar die geschlossene Berechnung des exakten optimalen Filterergebnisses nach Bayes im Filterschritt. Das vorgestellte Verfahren kann sowohl für den Fall einer stochastischen als auch für den Fall einer mengenbasierten Unsicherheitsmodellierung angewendet werden. In beiden Fällen können verbleibende Approximationsfehler der angenommenen Unsicherheitsbeschreibung gegenüber dem theoretisch

exakten Filterergebnis durch geeignete Wahl einer frei vorgebbaren maximalen Ordnung der angenommenen Unsicherheitsbeschreibung beliebig klein gemacht werden. Der Prädiktionsschritt des vorgestellten Filterverfahrens muss, im Gegensatz zum Filterschritt, mit iterativen Verfahren behandelt werden.

Das zweite, in Kapitel 3 vorgestellte Filterverfahren verwendet für die angenommene Dichtebeschreibung Gaussian–Mixture–Dichten, die auf Grund ihrer universalen Approximationsfähigkeit [72] ein häufig verwendetes Modell für Wahrscheinlichkeitsdichten sind. Das vorgestellte Verfahren basiert auf einer neuartigen Methode zur progressiven Berechnung eines optimalen Parametersatzes $\underline{\eta}$ für die angenommene Dichtebeschreibung im Sinne eines quadratischen Gütekriteriums für die Ähnlichkeit von Wahrscheinlichkeitsdichten. Durch diese Progression, die speziell für nichtlineare Filterprobleme entworfen wurde, wird die Konvergenz des Verfahrens in Nebenminima vermieden, welche typischerweise bei allgemeinen Approximationsproblemen auftritt. Für den verbleibenden Approximationsfehler der angenommenen Unsicherheitsbeschreibung gegenüber dem theoretisch exakten Filterergebnis wird eine obere Schranke vorgegeben, von der die Anzahl der vom Verfahren verwendeten Approximationsdichten abhängt. Im Gegensatz zu dem in Kapitel 2 vorgestellten Filterverfahren und Verfahren, die auf einer gitterbasierten Quantisierung des Zustandsraums beruhen, ist der Prädiktionsschritt des vorgestellten Filterverfahrens im Falle eines linearen Systemmodells mit additivem, weißen Systemrauschen gemäß (3.48) geschlossen analytisch berechenbar. Im Falle eines nichtlinearen Systemmodells gemäß (1.3) wird er mit dem gleichen Formalismus behandelt, der für den Filterschritt hergeleitet wird.

Kapitel 4 ist in zwei Unterkapitel gegliedert, in denen experimentelle Resultate, die mit den vorgestellten Verfahren erzielt wurden, dargestellt werden. In Kapitel 4.1 wird der in Kapitel 2 vorgestellte Filteralgorithmus im Hyperraum zur Lokalisierung eines Serviceroboters mit Hilfe relativer Winkelmessungen angewendet, wobei eine mengenbasierte Modellierung der auftretenden Unsicherheiten mit a priori gegebenen Amplitudengrenzen für die Primärunsicherheiten verwendet wird. In Kapitel 4.2 wird die Anwendung des in Kapitel 3 hergeleiteten Filterverfahrens auf das Problem der dynamischen Lokalisierung von DECT–Mobiltelefonen in einem typischen Innenraumszenario dargestellt. Eine Zusammenfassung mit Ausblick in Kapitel 5 beschließt die Arbeit.

Kapitel 2

Nichtlineare Filterverfahren im Hyperraum

2.1 Einleitung

Die Behandlung von Filterproblemen für nichtlineare Systeme führt im Allgemeinen schon für einfache Nichtlinearitäten in der System- oder Messgleichung auf komplexe Unsicherheitsbeschreibungen für die geschätzten Größen. Im stochastischen Fall können sich komplizierte, unter Umständen multimodale Wahrscheinlichkeitsdichten [45] ergeben, im Falle mengenbasierter Unsicherheitsmodellierung komplex geformte, nicht konvexe oder nicht zusammenhängende Mengen. Dies wird in Kapitel 2.3.2 für ein Lokalisierungsproblem mit Abstandsmessungen gezeigt. Für beide Arten der Unsicherheitsmodellierung ist zur Herleitung praktisch anwendbarer, rekursiver Filterverfahren eine möglichst einfache Beschreibung der gesuchten Lösung durch eine analytische, parametrisierte Darstellung mit einer festen Anzahl von Parametern erforderlich, wie dies in Kapitel 1 bereits dargelegt wurde.

Das im Folgenden vorgestellte Verfahren zur nichtlinearen Filterung im Hyperraum beruht auf der folgenden *Kernidee* [44, 45, 48, 49, 124]: Das ursprüngliche, nichtlineare Filterproblem wird aus dem Originalraum $S = \mathbb{R}^N$ in einen höherdimensionalen Hyperraum S^* transformiert, in dem das Problem *linear* in den transformierten Zustandsgrößen beschrieben werden kann. Zur Lösung dieses transformierten Problems wird dann ein klassisches, lineares Filterverfahren angewendet. Dadurch können komplexe Wahrscheinlichkeitsdichten oder kompliziert geformte, nicht konvexe oder nicht zusammenhängende Mengen durch eine einheitliche, einfache, parametrisierte Darstellung beschrieben werden. Dies wird in Beispiel 2.2.2 für einen dreidimensionalen Hyperraum S^* exemplarisch gezeigt. Eine analoge Vorgehensweise wurde unter dem Begriff der „Überparametrisierung“ in [74] vorgestellt, im folgenden wird diese Idee im Rahmen einer systemtheoretischen Beschreibung verallgemeinert. Dies führt zu einem Formalismus zur durchgängigen Darstellung und Behandlung nichtlinearer Filterprobleme, sowohl für den Fall mengenbasierter Unsicherheitsbeschreibungen als auch für den stochastischen Fall. In [12] wurde die Idee, Wahrscheinlichkeitsdichten in einem transformierten, höherdimensionalen Raum darzustellen, unter dem Begriff „Generative Topographic Mapping“ (GTM) vorgestellt, und die Verbindung dieser Darstellung von Wahrscheinlichkeitsdichten zu Kohonens selbstorganisierenden Karten [60] erläutert. Als Anwendung für GTM wird die Visualisierung hochdimensionaler Daten vorgeschlagen.

Im Falle einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Modellierung werden durch die Beschreibung von Wahrscheinlichkeitsdichten im transformierten Hyperraum S^* spezielle Exponentialdichten im Originalraum S definiert. Diese haben gegenüber anderen angenommenen Dichtebeschreibungen den Vorteil, eine besonders einfache Berechnung des Filterschrittes zu gestatten [62]. Mit dieser Art der Darstellung lässt sich eine komplexe Exponentialdichte im Originalraum S effizient durch eine einfache, höherdimensionale Dichte im Hyperraum S^* , wie z.B. die Gaußdichte, und die zugehörige Transformation $T(\cdot)$ von S nach S^* beschreiben. Die Definition der resultierenden Dichten, die als Pseudo-Gaußdichten bezeichnet werden, wird in Kapitel 2.2.2 gegeben. Das zugehörige Filterverfahren, welches zur Klasse der Filterverfahren mit angenommener Dichtebeschreibung gehört, wird in Kapitel 2.3.2 vorgestellt. Dabei wird insbesondere der Filterschritt betrachtet, da dieser in geschlossener Form darstellbar ist. Für den Prädiktionsschritt existiert eine Lösung, die auf einer iterativen Nachführung der Momente der Exponentialdichten beruht [89], und kurz in Kapitel 2.6 vorgestellt wird. Eine allgemeine, einfache, geschlossene Lösung mit Berücksichtigung der Systemunsicherheiten ist jedoch bisher nicht vorhanden.

Für den Fall einer mengenbasierten Unsicherheitsmodellierung treten an die Stelle der Pseudo-Gaußdichten pseudo-ellipsoidale Mengen in S^* , die kompliziert geformte Mengen im Originalraum S definieren, was in Kapitel 2.2.3 dargelegt wird. Die vorgestellten Konzepte zur nichtlinearen Filterung in einem höherdimensionalen Hyperraum S^* lassen sich direkt auf diesen wichtigen Fall übertragen. Die Grundlagen des unterlagerten, linearen mengenbasierten Filters [21] werden kurz in Kapitel A.2 zusammengefasst. Das resultierende nichtlineare Filterverfahren auf der Basis pseudo-ellipsoidaler Mengen wird schließlich in Kapitel 2.3.3 hergeleitet. Für Lokalisierungsprobleme in der Robotik spielen mengenbasierte Filterverfahren eine wichtige Rolle, wenn die dominanten Fehler systematischer Natur oder stark korreliert sind [40, 43, 52, 74, 80]. In Kapitel 4.1 wird für den Fall relativer Winkelmessungen die Anwendung der in diesem Kapitel beschriebenen Filterverfahren auf das Problem der Lokalisierung eines mobilen Roboters dargelegt. Beispiele für die Anwendung des Filterverfahrens auf die Lokalisierung im Falle von Abstandsmessungen werden in Kapitel 2.3.2 und Kapitel 2.4.1 vorgestellt.

2.2 Dichterepräsentationen im Hyperraum

Zur Herleitung des nichtlinearen Filterkonzepts in einem höherdimensionalen Hyperraum S^* , das im Folgenden kurz mit Hyperraumfilter bezeichnet wird, wird der Fall einer mengenbasierten Unsicherheitsbeschreibung und der Fall einer stochastischen Unsicherheitsbeschreibung in den folgenden Kapiteln getrennt behandelt. Für die nichtlineare Filterung mit stochastischer Unsicherheitsbeschreibung wird das bekannte *Kalman*-Filter [58, 59] im Hyperraum S^* angewendet; es wird der Vollständigkeit halber knapp in Anhang A.1 wiederholt. Grundlage für die mengenbasierte, nichtlineare Filterung ist das unterlagert angewendete, lineare, mengenbasierte ellipsoidale Filter, mit Hilfe dessen eine konservative obere Schranke für die wahre, kompliziert geformte Menge aller möglichen Zustände nach dem Filterschritt \mathcal{X}_k^e im Originalraum S berechnet wird. Die zugehörigen Filtergleichungen, welche den bekannten *Kalman*-Filter-Gleichungen [58] ähnlich sind, wurden zunächst

in [99] hergeleitet, und durch [21] um Berechnungsvorschriften für die Berechnung minimalvolumiger Hüllellipsoide erweitert. Sie sind zur Vollständigkeit der Darstellung in knapper, tutorieller Form in Anhang A.2 wiedergegeben.

2.2.1 Transformation des Filterproblems

Wie in Kapitel 1.2.1 dargestellt, besteht das gegebene, nichtlineare Filterproblem darin, den Zustand \underline{x}_k eines nichtlinearen, dynamischen, zeitdiskreten Systems \mathcal{S} , welcher selbst nicht direkt beobachtbar ist, mit Hilfe unsicherheitsbehafteter Messungen \underline{z}_k zu schätzen. Dabei sei $S = \mathbb{R}^N$ der betrachtete Zustandsraum und $T = \mathbb{R}^M$ der zugehörige Raum der Messungen mit $\underline{x}_k \in S$ und $\underline{z}_k \in T$. Durch eine nichtlineare, vektorwertige Abbildung $\underline{\mathbf{T}}(\cdot) : S \rightarrow S^*$ werde der N -dimensionale Raum S auf einen L_x -dimensionalen Hyperraum S^* abgebildet, wobei $L_x > N$ sei, das heißt der Zustandsvektor \underline{x}_k wird durch

$$\underline{x}_k^* = \underline{\mathbf{T}}(\underline{x}_k) = [T_1(\underline{x}_k) \quad T_2(\underline{x}_k) \quad \cdots \quad T_{L_x}(\underline{x}_k)]^T \quad (2.1)$$

auf einen transformierten Zustandsvektor $\underline{x}_k^* \in S^*$ abgebildet. Daher definiert die Transformation $\underline{\mathbf{T}}(\cdot)$ eine N -dimensionale Mannigfaltigkeit U^* in dem L_x -dimensionalen Hyperraum S^* , welche als so genannte *universale Mannigfaltigkeit* bezeichnet sei.

Die Beschreibung einer unsicherheitsbehafteten Schätzung im Originalraum S erfolgt durch die Auswertung einer unsicherheitsbehafteten Schätzung im Hyperraum S^* auf der universalen Mannigfaltigkeit U^* . Für die Beschreibung der unsicherheitsbehafteten Schätzung im Hyperraum durch Wahrscheinlichkeitsdichten oder Mengen definieren wir *pseudo-quadratische Formen* Q^* gemäß

$$Q^*(\underline{x}_k^*) = (\underline{x}_k^* - \hat{\underline{x}}_k^*)^T (\mathbf{C}_k^*)^{-1} (\underline{x}_k^* - \hat{\underline{x}}_k^*) \quad (2.2)$$

Dabei ist \mathbf{C}_k^* eine symmetrische, positiv definite $L_x \times L_x$ Matrix und $\hat{\underline{x}}_k^*$ der Vektor, für den $Q^*(\underline{x}_k^*)$ den Wert 0 annimmt. Die Parameter \mathbf{C}_k^* und $\hat{\underline{x}}_k^*$ von Q^* werden im Rahmen des Filterverfahrens ermittelt, wie in Kapitel 2.3 beschrieben wird. Q^* wird als pseudo-quadratische Form bezeichnet, da sie eine quadratische Form in den transformierten Zustandsvariablen $x_{i,k}^*$, $i = 1 \dots L_x$ mit $\underline{x}_k^* = [x_{1,k}^*, x_{2,k}^*, \dots, x_{L_x,k}^*]^T$ ist, *nicht* jedoch in in ursprünglichen Zustandsvariablen $x_{i,k}$, $i = 1 \dots N$. Mittels der pseudo-quadratischen Form Q^* können in S^* direkt so genannte Pseudo-Gaußdichten $f^*(\cdot)$ oder so genannte pseudo-ellipsoidale Mengen \mathcal{X}_k^* definiert werden. Diese definieren durch die implizite, wechselseitige Abhängigkeit der transformierten Zustandsvariablen $x_{i,k}^*$ gemäß (2.1) komplexe Wahrscheinlichkeitsdichten bzw. Mengen im Originalraum S .

ANMERKUNG 2.2.1 Anschaulich gesprochen werden die komplexen Wahrscheinlichkeitsdichten bzw. Mengen im Originalraum durch die N -dimensionale Submannigfaltigkeit der universalen Mannigfaltigkeit U^* repräsentiert, welche sich durch den „Schnitt“ von U^* mit der durch Q^* definierten, L_x -dimensionalen, einfachen Wahrscheinlichkeitsdichte oder Menge ergibt.

2.2.2 Pseudo–Gaußdichten

Eine stochastische Unsicherheitsbeschreibung im L_x -dimensionalen Hyperraum S^* sei durch so genannte Pseudo–Gaußdichten gemäß

$$f^*(\underline{x}_k^*) = c \exp \left\{ -\frac{1}{2} Q_k^*(\underline{x}_k^*) \right\} \quad (2.3)$$

gegeben, wobei c eine normalisierende Konstante gemäß

$$c = \left(\int_{\mathbf{R}^N} \exp \left\{ -\frac{1}{2} Q_k^*(\underline{x}_k^*) \right\} d\underline{x}_k \right)^{-1} \quad (2.4)$$

ist. Analog zur pseudo–quadratischen Form Q_k^* ist $f^*(\underline{x}_k^*)$ in den transformierten Zustandsvariablen \underline{x}_k^* eine Gaußdichte, repräsentiert über die universale Mannigfaltigkeit U^* im Originalraum S jedoch eine komplexe, nicht gauß'sche Wahrscheinlichkeitsdichte. Daher wird $f^*(\underline{x}_k^*)$ als Pseudo–Gaußdichte bezeichnet. Die Familie der Pseudo–Gaußdichten gemäß der Definition (2.3) ist eine Untermenge von Wahrscheinlichkeitsdichten aus der Familie der Exponentialdichten, wenn die Normierungsbedingung $c^{-1} < \infty$ gilt [5, 15]. Anders als bei allgemeinen Exponentialdichten erlaubt die spezielle Definition des Exponenten der Dichte mittels pseudo–quadratischer Formen gemäß (2.2) eine besonders einfache Art der Fortschreibung der Parameter $\hat{\underline{x}}_k^*$ und \mathbf{C}_k^* der Dichte über den Filterschritt hinweg, die für spezielle Nichtlinearitäten der Messgleichung sogar dem *exakten, optimalen* Ergebnis entsprechen, wie in Kapitel 2.3.1 gezeigt wird. Die durch (2.3) definierten Wahrscheinlichkeitsdichten können im Originalraum S komplexe, multimodale Dichten repräsentieren [45], sind jedoch im Gegensatz zu anderen analytischen Dichtebeschreibungen auch im Falle numerischer Ungenauigkeiten immer gültige Wahrscheinlichkeitsdichten gemäß (3.5).

ANMERKUNG 2.2.2 Aus praktischen Erwägungen heraus ist anzumerken, dass (2.3) eine *lokale* Beschreibung komplexer Unsicherheiten ermöglicht, für eine globale Unsicherheitsbeschreibung mit weit auseinander liegenden, lokalen Maxima in der Regel jedoch Mixture–Dichten, wie die in Kapitel 3 verwendeten Gaussian–Mixture–Dichten geeigneter sind. Dies ist für Lokalisierungsprobleme insbesondere dann der Fall, wenn in der initialen Phase der Lokalisierung, in der kein Vorwissen über die Lage eines zu lokalisierenden Beobachters vorhanden ist, Mehrdeutigkeiten in der Zuordnung von Beobachtungen zu verzeichneten Merkmalen in einem Weltmodell auftreten. Solche Mehrdeutigkeiten, die häufig in gleichartig strukturierten Innenraumumgebungen auftreten, führen in der Regel zu räumlich weit getrennten Positionshypothesen. Im Kontext stochastischer Positionsschätzung korrespondieren diese Positionshypothesen mit räumlich weit getrennten, lokalen Maxima in der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, die zur geschätzten Lage des Beobachters gehört.

2.2.3 Pseudo–Ellipsoidale Mengen

Analog zur Definition der Pseudo–Gaußdichten sei für den Fall einer mengenbasierten Unsicherheitsbeschreibung eine pseudo–ellipsoidale Menge \mathcal{X}_k^* gemäß

$$\mathcal{X}_k^* = \{ \underline{x}_k^* : Q_k^*(\underline{x}_k^*) \leq 1 \} = \{ \underline{x}_k^* : (\underline{x}_k^* - \hat{\underline{x}}_k^*)^T (\mathbf{C}_k^*)^{-1} (\underline{x}_k^* - \hat{\underline{x}}_k^*) \leq 1 \} \quad (2.5)$$

definiert. \mathcal{X}_k^* ist eine pseudo-ellipsoidale Menge mit Mittelpunktvektor $\hat{\underline{x}}_k^*$ und positiv definiten, symmetrischer Matrix \mathbf{C}_k^* in S^* und definiert zusammen mit der universalen Mannigfaltigkeit U^* eine komplex geformte Menge \mathcal{X}_k aller möglichen Zustände \underline{x}_k im ursprünglichen Zustandsraum S . Die Definitionsgleichung für die Menge \mathcal{X}_k in S ergibt sich durch Substitution der Transformation $\underline{\mathbf{T}}(\cdot)$ in (2.5), woraus sich

$$\mathcal{X}_k = \{ \underline{x}_k : (\underline{\mathbf{T}}(\underline{x}_k) - \hat{\underline{x}}_k^*)^T (\mathbf{C}_k^*)^{-1} (\underline{\mathbf{T}}(\underline{x}_k) - \hat{\underline{x}}_k^*) \leq 1 \} \quad (2.6)$$

ergibt. Die Bestimmung von \mathcal{X}_k gemäß (2.6) aus \mathcal{X}_k^* kann als Anwendung einer zu $\underline{\mathbf{T}}(\cdot)$ inversen Transformation interpretiert werden, die den Zuständen $\underline{x}_k^* \in \mathcal{X}_k^*$ auf der universalen Mannigfaltigkeit U^* die korrespondierenden Zustände $\underline{x}_k \in \mathcal{X}_k \subset S$ zuweist.

BEISPIEL 2.2.1 *Darstellung einer komplex geformten Menge durch eine pseudo-ellipsoidale Menge.*

Betrachtet werde die nichtlineare Abstandsmessgleichung

$$z_k = x_k^2 + y_k^2 + v_k \quad (2.7)$$

mit zweidimensionalem Zustandsvektor $\underline{x}_k = [x_k, y_k]^T$, wobei die auftretenden Unsicherheiten amplitudenbegrenzt seien und daher durch Mengen beschrieben werden. Eine Transformation $\underline{\mathbf{T}}(\cdot)$ in einen $L_x = 3$ -dimensionalen Hyperraum S^* sei durch $\underline{\mathbf{T}}(\underline{x}_k) = [x_k, y_k, x_k^2 + y_k^2]^T$ gegeben, so dass (2.7) in S^* in einer so genannten pseudo-linearen Form dargestellt werden kann. Diese ist linear in den transformierten Zuständen \underline{x}_k^* , nicht aber in den Zuständen \underline{x}_k im Originalraum S . Eine pseudo-ellipsoidale Menge $\mathcal{X}_k^{p,*}$ für die priore Unsicherheit sei mit (2.5) durch

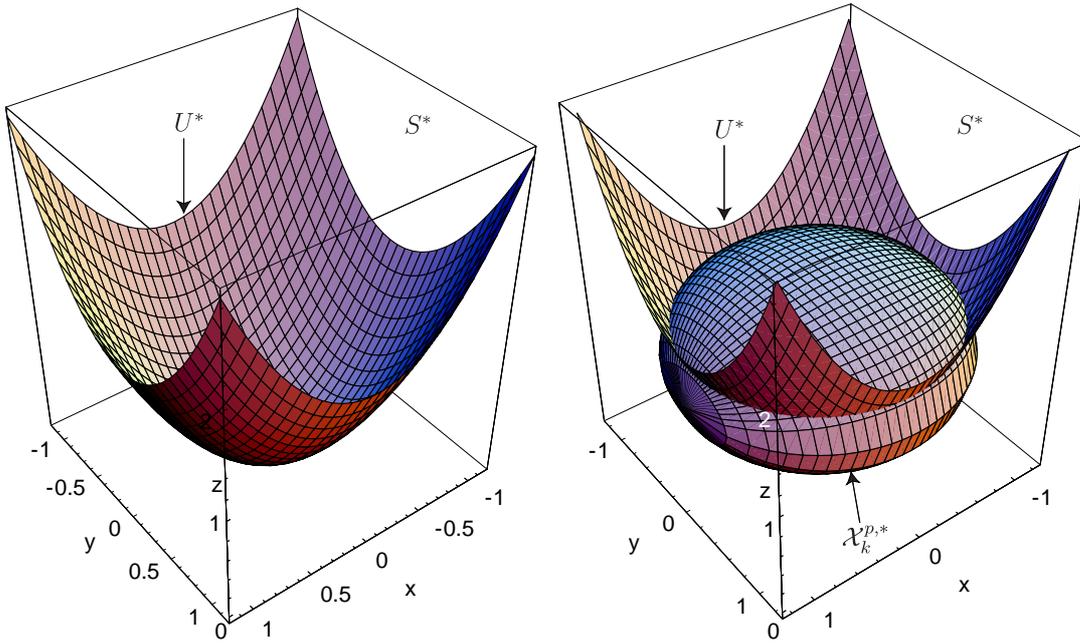
$$\hat{\underline{x}}_k^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_k^* = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

und die universale Mannigfaltigkeit U^* gegeben, welche durch $\underline{\mathbf{T}}(\cdot)$ definiert ist, und eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit in $S^* = \mathbb{R}^3$ ist. Bild 2.1(a) zeigt die Mannigfaltigkeit U^* im Hyperraum S^* . Bild 2.1(b) stellt die gemäß (2.8) definierte pseudo-ellipsoidale Menge $\mathcal{X}_k^{p,*}$ zusammen mit U^* dar. Während $\mathcal{X}_k^{p,*}$ in den transformierten Zustandsvariablen \underline{x}_k^* eine einfache, ellipsoidale Menge ist, beschreibt sie im ursprünglichen zweidimensionalen Zustandsraum S die in Bild 2.2(b) dargestellte, kompliziert geformte Menge \mathcal{X}_k^p . Man erkennt, dass \mathcal{X}_k^p nicht einfach zusammenhängend ist, und daher in S *nicht* durch eine ellipsoidale Menge beschrieben werden kann. Zur Berechnung der Grenzen von \mathcal{X}_k^p ist die Anwendung einer inversen Transformation von S^* nach S erforderlich, welche im Allgemeinen nur numerisch ausgewertet werden kann. Einsetzen der Beispielwerte (2.8) und der Transformation $\underline{\mathbf{T}}(\cdot)$ in die Definitionsgleichung des Pseudo-Ellipsoids (2.5) ergibt gemäß (2.6) die Ungleichung

$$\mathcal{X}_k^p = \left\{ \underline{x}_k : \frac{2}{3}x_k^2 + \frac{2}{3}y_k^2 + 2(x_k^2 + y_k^2 - 1)^2 \leq 1 \right\}. \quad (2.9)$$

Für diese Ungleichung kann numerisch ausgewertet werden, welche Punkte des Zustandsraums S Teil der Menge \mathcal{X}_k^p sind. Anschaulich gesehen entsteht \mathcal{X}_k^p durch Projektion der Schnittmenge von U^* und $\mathcal{X}_k^{p,*}$, die in Bild 2.2(a) dargestellt ist, auf den Originalraum S , siehe Bild 2.2(b).

ANMERKUNG 2.2.3 Eine *einfach* zusammenhängende Menge \mathcal{X} ist eine Menge, in der jede in \mathcal{X} verlaufende Kurve zu einem Punkt zusammengezogen werden kann, ohne \mathcal{X} zu verlassen.



(a) Universelle Mannigfaltigkeit U^* für $\underline{\mathbf{T}}(\underline{x}_k) = [x_k, y_k, x_k^2 + y_k^2]^T$.

(b) Pseudo-ellipsoidale Menge $\mathcal{X}_k^{p,*}$ in $S^* = \mathbb{R}^3$ und universelle Mannigfaltigkeit U^* .

Bild 2.1: Darstellung einer komplex geformten Menge \mathcal{X}_k^p durch eine pseudo-ellipsoidalen Menge.

Wie aus Beispiel 2.2.1 ersichtlich, können mit Hilfe von pseudo-ellipsoidalen Mengen schon für einfache Transformationen $\underline{\mathbf{T}}(\cdot)$ komplex geformte Mengen im Originalraum S definiert werden. Das folgende Beispiel veranschaulicht für den zweidimensionalen Fall, wie sich diese komplex geformten Mengen in ihrer Topologie durch Variation des Mittelpunktes $\hat{\underline{x}}_k^*$ und der positiv definiten Matrix \mathbf{C}_k^* verändern können.

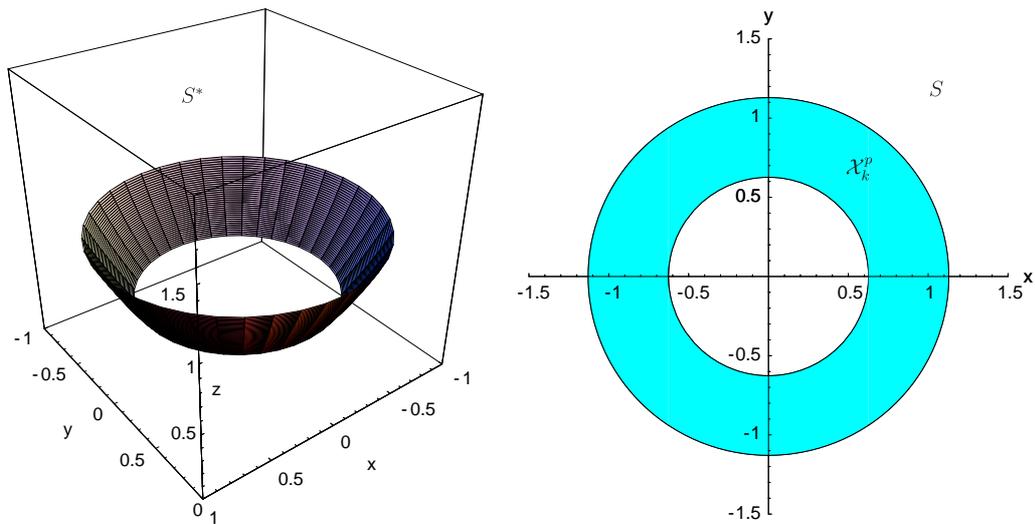
BEISPIEL 2.2.2 *Klassifizierung komplexer Mengen, die durch pseudo-ellipsoidale Mengen definiert sind.*

Betrachtet werde die nichtlineare Abstandsmessgleichung aus Beispiel 2.2.1, wobei die auftretenden Unsicherheiten wieder amplitudenbegrenzt seien und daher durch Mengen beschrieben werden. Durch die vier Mittelpunktvektoren $\hat{\underline{x}}_{l,k}^*$ mit zugehörigen, positiv definiten, symmetrischen Matrizen $\mathbf{C}_{l,k}^*$, $l = 1 \dots 4$ gemäß

$$\hat{\underline{x}}_{1,k}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\underline{x}}_{2,k}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\underline{x}}_{3,k}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\underline{x}}_{4,k}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{l,k}^* = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad l = 1 \dots 3, \quad \mathbf{C}_{4,k}^* = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix},$$

sind vier pseudo-ellipsoidale Mengen für die priore Unsicherheit $\mathcal{X}_{l,k}^{p,*}$ mit (2.5) gegeben. Die universale Mannigfaltigkeit U^* ist durch $\underline{\mathbf{T}}(\cdot)$ gemäß Beispiel 2.2.1 gegeben. Bild 2.3 zeigt die



(a) Der Schnitt der universellen Mannigfaltigkeit U^* mit der pseudo-ellipsoidalen Menge $\mathcal{X}_k^{p,*}$ definiert die dargestellte, zweidimensionale Submannigfaltigkeit im Hyperraum S^* .

(b) Die komplex geformte Menge \mathcal{X}_k^p im Originalraum S . Sie entspricht der Projektion der zweidimensionalen Submannigfaltigkeit, die aus dem Schnitt von U^* mit der pseudo-ellipsoidalen Menge $\mathcal{X}_k^{p,*}$ resultiert, auf den Originalraum S .

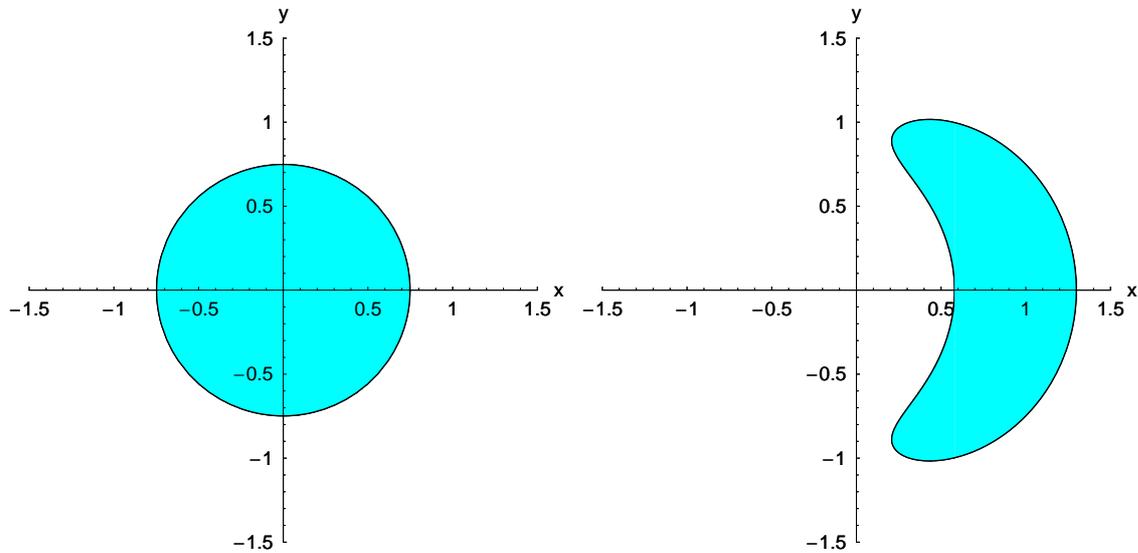
Bild 2.2: Darstellung einer komplex geformten Menge \mathcal{X}_k^p durch eine pseudo-ellipsoidalen Menge.

vier resultierenden, kompliziert geformten Mengen $\mathcal{X}_{l,k}^p$ im zweidimensionalen Originalraum S als schraffierte Flächen. Man erkennt, dass sowohl einfache Mengen, wie die einfach zusammenhängende, konvexe Menge in Bild 2.3(a) als auch komplexe, nicht zusammenhängende Mengen (Bild 2.3(d)) als Submannigfaltigkeit der gleichen, universellen Mannigfaltigkeit U^* dargestellt werden können. Die bedeutet, dass durch die Beschreibung der Mengen $\mathcal{X}_{l,k}^p$ durch pseudo-ellipsoidale Mengen $\mathcal{X}_{l,k}^{p,*}$ im Hyperraum eine einheitliche analytische Darstellung mit $3 + 6 = 9$ Parametern für den Mittelpunktvektor $\hat{\underline{x}}_{l,k}^*$ und die symmetrische Matrix $\mathbf{C}_{l,k}^*$ gegeben ist, die eine einfache Beschreibung der auftretenden Unsicherheiten bei nichtlinearen Filterproblemen ermöglicht. In Kapitel 2.3.2 wird dies am Beispiel einer nichtlinearen Abstandsmessung im Falle mengenbegrenzter Unsicherheiten demonstriert und gezeigt, wie durch die Filterung im Hyperraum nicht zusammenhängende Positionsschätzungen mit einem einheitlichen Parametersatz *ohne* die normalerweise notwendigen Fallunterscheidungen behandelt werden können.

2.3 Filterung im Hyperraum

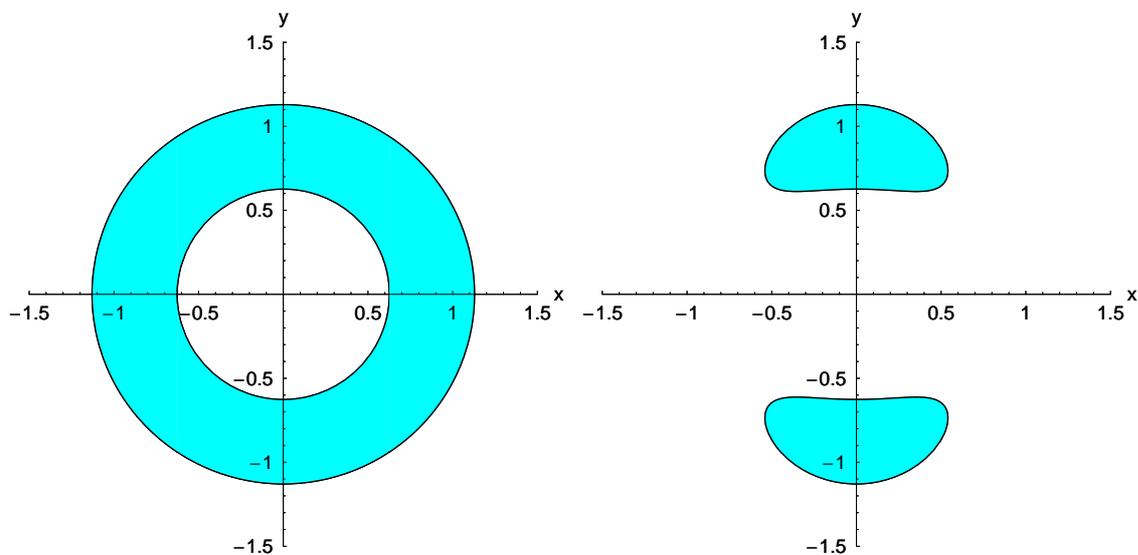
2.3.1 Grundprinzip

Im Folgenden wird der Filterschritt des Hyperraumfilterverfahrens für nichtlineare Systeme mit additivem Rauschen hergeleitet. Für den Fall einer stochastischen Modellierung gemäß (1.4) wird additives, weißes Messrauschen \underline{v}_k angenommen, das *nicht* gaußverteilt



(a) Die *einfach* zusammenhängende, konvexe Menge $\mathcal{X}_{1,k}^p$.

(b) Die *einfach* zusammenhängende, *nicht* konvexe Menge $\mathcal{X}_{2,k}^p$.



(c) Die zusammenhängende, *nicht* konvexe Menge $\mathcal{X}_{3,k}^p$.

(d) Die *nicht* zusammenhängende, *nicht* konvexe Menge $\mathcal{X}_{4,k}^p$.

Bild 2.3: Beispiel für die Klassifizierung zweidimensionaler Mengen, die durch pseudo-ellipsoidale Mengen definiert sind.

sein muss. Im Fall der mengenbasierten Modellierung gemäß (1.7) sei das Rauschen für skalare Messungen durch Intervalle zulässiger Werte für v_k und für vektorielle Messungen durch ellipsoidale Mengen beschrieben.

Für die Berechnung des Filterschrittes muss eine Transformation $\mathbf{T}(\cdot)$ des Zustandsraums S in den Hyperraum S^* derart gefunden werden, dass die Messgleichung (1.4) in S in eine

so genannte *pseudo-lineare* Messgleichung in S^* übergeht. Diese stellt eine *lineare* Beziehung zwischen den transformierten Zuständen \underline{x}_k^* und den transformierten Messungen \underline{z}_k^* dar, nicht jedoch zwischen den Zuständen \underline{x}_k und den Messungen \underline{z}_k im Originalraum S . Aus der Bedingung, dass die Messgleichung in S^* in pseudo-linearer Form vorliegen soll, ergibt sich die Dimension von S^* und die Art der verwendeten Funktionen $T_i(\underline{x}_k)$ der Transformation $\underline{\mathbf{T}}(\underline{x}_k)$. Kann keine exakte Transformation auf eine lineare Messgleichung gefunden werden, so ist eine Näherung mit konservativer Approximation der zusätzlich durch die Transformation $\underline{\mathbf{T}}(\cdot)$ eingebrachten Approximationsfehler $\underline{e}_T(\underline{x}_k) \in \mathbb{R}^M$ erforderlich. Zur Herleitung der Transformation $\underline{\mathbf{T}}(\cdot)$, die im L_x -dimensionalen Raum S^* die N -dimensionale, universelle Submannigfaltigkeit U^* definiert, wird eine weitere, im Allgemeinen nichtlineare Transformation $\underline{\eta}_k(\cdot) : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^{L_z}$ auf beide Seiten der gegebenen, nichtlinearen Messgleichung (1.4) angewendet, was auf

$$\underline{\eta}_k(\underline{z}_k - \underline{v}_k) = \underline{\eta}_k(\underline{h}_k(\underline{x}_k)) \quad (2.10)$$

führt. Die Transformation $\underline{\eta}_k(\cdot)$ definiert dabei eine M -dimensionale Submannigfaltigkeit W^* in einem L_z -dimensionalen Hyperraum $T^* = \mathbb{R}^{L_z}$. Aus dieser Transformation ergeben sich *nichtlineare Nebenbedingungen* für das Ergebnis des Filterschrittes. Ist keine exakte Berechnung des Filterergebnisses im transformierten Raum S^* möglich, werden diese nichtlinearen Nebenbedingungen verwendet, um eine genauere Approximation des wahren Ergebnisses zu erzeugen, als dies durch eine direkte Konvertierung der Messgleichungen in eine pseudo-lineare Form möglich ist. Im Falle mengenbegrenzter Unsicherheiten ist die exakte Berechnung des Filterergebnisses ist schon für lineare Messgleichungen nicht mehr möglich. Durch eine Transformation $\underline{\eta}_k(\cdot)$ wird in diesem Fall die Berechnung weniger konservativer Approximationen ermöglicht, als dies mit dem in Kapitel A.2 beschriebenen Ellipsoidfilteralgorithmus möglich ist. Im Falle stochastischer Unsicherheitsmodellierung ist eine Approximation des exakten Ergebnisses nur erforderlich, wenn die ursprüngliche, nichtlineare Messgleichung nicht exakt in lineare Form gebracht werden kann.

Um die erzeugten, nichtlinearen Nebenbedingungen in den Filterschritt im Hyperraum S^* einzubringen, wird die linke Seite der Gleichung (2.10) exakt in eine affine Funktion von \underline{v}_k^* gemäß

$$\underline{\eta}_k(\underline{z}_k - \underline{v}_k) = \underline{z}_k^* - \underbrace{\mathbf{G}_k^* \underline{v}_k^*}_{\underline{v}_k^*} \quad (2.11)$$

überführt, wobei $\underline{z}_k^* \in \mathbb{R}^{L_z}$ die transformierte Messung im Hyperraum S^* ist, die nicht von \underline{v}_k^* abhängt. \underline{v}_k^* ist die zugehörige, transformierte Messunsicherheit und $\mathbf{G}_k^* = \mathbf{G}_k^*(\underline{z}_k)$ eine Matrix, die von der Messung \underline{z}_k abhängt. Die mit \mathbf{G}_k^* transformierte Messunsicherheit lässt sich zu einer Messunsicherheit $\underline{v}_k^* = \mathbf{G}_k^* \underline{v}_k^*$ zusammenfassen, die wie \mathbf{G}_k^* eine Funktion der durchgeführten Messung \underline{z}_k ist. Für die Filterung im Falle stochastischer Unsicherheiten ist eine Beschreibung der Messunsicherheiten \underline{v}_k^* in Form einer Pseudo-Gaußdichte im Hyperraum T^* gemäß

$$f_{\underline{v}}^*(\underline{v}_k^*) = c_k^v \exp \left\{ -0.5(\underline{v}_k^* - \hat{\underline{v}}_k^*)^T (\bar{\mathbf{C}}_k^{v,*})^{-1} (\underline{v}_k^* - \hat{\underline{v}}_k^*) \right\} \quad (2.12)$$

vorteilhaft. Der aus (2.11) resultierende Filteralgorithmus wird in Kapitel 2.3.2 beschrieben. Für den Fall mengenbasierter Unsicherheiten ist eine lineare Transformation von \underline{v}_k^* durch \mathbf{G}_k^* nicht möglich und \underline{v}_k^* muss für jede Messung \underline{z}_k mit den in Kapitel 2.4 beschriebenen Verfahren berechnet werden. Die rechte Seite von (2.10) wird analog zu (2.11) in

eine pseudo-lineare Form gemäß

$$\underline{\eta}_k(\underline{h}_k(\underline{x}_k)) = \mathbf{H}_k^* \underline{x}_k^* \quad (2.13)$$

mit transformiertem Zustandsvektor $\underline{x}_k^* \in S^*$ und $L_z \times L_x$ Messmatrix \mathbf{H}_k^* erweitert. Für *polynomiale* Nichtlinearitäten der Messfunktion $\underline{h}_k(\cdot)$ kann die Erweiterung gemäß (2.13) immer exakt durchgeführt werden, die Definition von \underline{x}_k^* durch (2.13) ist im Allgemeinen jedoch nicht eindeutig. Die Komponenten des transformierten Zustandsvektors \underline{x}_k^* sind in diesem Fall polynomiale Ausdrücke in den Komponenten $x_{i,k}$ von \underline{x}_k . Im allgemeinen Fall ist die Erweiterung (2.13) nur näherungsweise möglich, das heißt

$$\underline{\eta}_k(\underline{h}_k(\underline{x}_k)) \approx \mathbf{H}_k^* \underline{x}_k^* , \quad (2.14)$$

und die entstehenden Approximationsfehler $\underline{e}_{T,k}(\underline{x}_k) = \underline{\eta}_k(\underline{h}_k(\underline{x}_k)) - \mathbf{H}_k^* \underline{x}_k^*$ müssen konservativ abgeschätzt werden. Eine Approximation gemäß (2.14) kann dabei als Reihenentwicklung einer nichtlinearen Funktion $\underline{\eta}_k(\underline{h}_k(\underline{x}_k))$ in eine lineare Kombination von Basisfunktionen betrachtet werden, wobei die Basisfunktionen hier durch die Transformation $\underline{\mathbf{T}}(\underline{x}_k)$ gegeben sind. Durch geeignete Wahl der Basisfunktionen über die nichtlineare Transformation $\underline{\eta}_k(\cdot)$ kann also auch in diesem Fall sichergestellt werden, dass der verbleibende Approximationsfehler $\underline{e}_{T,k}(\underline{x}_k)$ für alle \underline{x}_k gegen null geht, wenn die Anzahl L_x der Basisfunktionen, die der Dimension des Hyperraums S^* entspricht, gegen unendlich geht. Aus (2.11) und (2.13) ergibt sich die pseudo-lineare Form der nichtlinearen Messgleichung (1.4) im transformierten Hyperraum S^* zu

$$\underline{z}_k^* = \mathbf{H}_k^* \underline{x}_k^* + \underbrace{\underline{v}_k^*}_{\mathbf{G}_k^* \underline{v}_k^*} , \quad (2.15)$$

wobei die Messmatrix \mathbf{H}_k^* in S^* eine *lineare* Beziehung zwischen dem transformierten Zustandsvektor \underline{x}_k^* und den transformierten Messungen \underline{z}_k^* beschreibt.

BEISPIEL 2.3.1 *Expansion einer nichtlinearen Messgleichung in pseudo-lineare Form.*

Betrachtet werde die nichtlineare Abstandsmessgleichung

$$z_k = x_k^2 + y_k^2 + v_k$$

aus Beispiel 2.2.1. Durch Anwendung der nichtlinearen Transformation $\underline{\eta}_k(z) = [z, z^2]^T$ erhält man zwei nichtlineare Messgleichungen

$$\begin{aligned} z_k - v_k &= x_k^2 + y_k^2 \\ (z_k - v_k)^2 &= x_k^4 + 2x_k^2 y_k^2 + y_k^4 . \end{aligned}$$

Diese werden gemäß (2.15) in einen $L_x = 5$ -dimensionalen Hyperraum S^* mit transformiertem Zustandsvektor $\underline{x}_k^* = [x_k^2, y_k^2, x_k^2 y_k^2, x_k^4, y_k^4]^T$, zweidimensionalem Messvektor $\underline{z}_k^* = [z_k, z_k^2]^T$ und zugehörigem, additiven Messrauschen $\underline{v}_k^* = [v_k, 2z_k v_k - v_k^2]^T$ gemäß

$$\begin{bmatrix} z_k \\ z_k^2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_k^*} \begin{bmatrix} x_k^2 \\ y_k^2 \\ x_k^2 y_k^2 \\ x_k^4 \\ y_k^4 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} v_k \\ 2z_k v_k - v_k^2 \end{bmatrix}}_{\underline{v}_k^*} \quad (2.16)$$

erweitert. Dabei kann das Messrauschen \underline{v}_k^* auch als eine affine Funktion von $\underline{\bar{v}}_k^*$ gemäß

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_k \\ 2z_k v_k - v_k^2 \end{bmatrix}}_{\underline{v}_k^*} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2z_k & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}_k^*} \underbrace{\begin{bmatrix} v_k \\ v_k^2 \end{bmatrix}}_{\underline{\bar{v}}_k^*}$$

umgeschrieben werden, was für eine Filterung im Falle stochastischer Unsicherheiten mit gegebener Wahrscheinlichkeitsdichte von $\underline{\bar{v}}_k^*$ vorteilhaft ist. Die lineare Messgleichung in S^* (2.16) kann jetzt direkt zur nichtlinearen Filterung mit dem beschriebenen Hyperraumfilterverfahren verwendet werden.

2.3.2 Filteralgorithmus für Pseudo–Gaußdichten

Im Falle einer stochastischen Unsicherheitsmodellierung mit additivem Messrauschen \underline{v}_k erfolgt die Berechnung der posterioren Wahrscheinlichkeitsdichte $f_e^*(\underline{x}_k^*)$ im Hyperraum S^* zum Zeitpunkt k gemäß des Satzes von Bayes. Hierzu wird davon ausgegangen, dass eine priore Schätzung $f_p^*(\underline{x}_k^*)$ aus dem vorangegangenen Prädiktionsschritt vorliegt. Des Weiteren sei die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_v^*(\cdot)$ des additiven Messrauschens \underline{v}_k^* im Hyperraum T^* gemäß (2.15) bekannt. Die gesuchte, posteriore Wahrscheinlichkeitsdichte nach der Durchführung des Filterschrittes im Hyperraum ergibt sich nach dem Satz von Bayes dann direkt zu

$$f_e^*(\underline{x}_k^*) = c_k^e f_v^*(z_k^* - \mathbf{H}_k^* \underline{x}_k^*) f_p^*(\underline{x}_k^*) \quad , \quad (2.17)$$

wobei

$$c_k^e = \left(\int_{\mathbf{R}^N} f_v^*(z_k^* - \mathbf{H}_k^* \underline{x}_k^*) f_p^*(\underline{x}_k^*) d\underline{x}_k \right)^{-1}$$

eine normalisierende Konstante ist. Um eine geschlossene analytische Darstellung des Filterschrittes im Hyperraum herzuleiten, wird zusätzlich angenommen, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte der prioren Schätzung $f_p^*(\underline{x}_k^*)$ sowie die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_v^*(\cdot)$ des Messrauschens $\underline{\bar{v}}_k^*$ im Hyperraum Pseudo–Gaußdichten gemäß der Definition (2.3) und (2.12) sind, das heißt

$$f_p^*(\underline{x}_k^*) = c_k^p \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^p)^T (\mathbf{C}_k^{p,*})^{-1} (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^p) \right\} \quad .$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte des Messrauschens \underline{v}_k im Originalraum T , welche durch die Pseudo–Gaußdichte (2.12) definiert wird, ist dabei im Allgemeinen eine komplizierte, nicht–gauß’sche Dichte. Mit dieser Annahme vereinfacht sich der Filterschritt (2.17) zu den bekannten *Kalman*–Filter–Gleichungen [45]. Diese werden zur rekursiven Filterung im Hyperraum S^* angewendet, was auf die bekannten Beziehungen

$$\begin{aligned} \hat{\underline{x}}_k^{e,*} &= \hat{\underline{x}}_k^{p,*} + \mathbf{C}_k^{p,*} (\mathbf{H}_k^*)^T \left(\mathbf{G}_k^* \bar{\mathbf{C}}_k^{v,*} (\mathbf{G}_k^*)^T + \mathbf{H}_k^* \mathbf{C}_k^{p,*} (\mathbf{H}_k^*)^T \right)^{-1} (z_k^* - \mathbf{G}_k^* \hat{\underline{v}}_k^* - \mathbf{H}_k^* \hat{\underline{x}}_k^{p,*}) \quad , \\ \mathbf{C}_k^{e,*} &= \mathbf{C}_k^{p,*} - \mathbf{C}_k^{p,*} (\mathbf{H}_k^*)^T \left(\mathbf{G}_k^* \bar{\mathbf{C}}_k^{v,*} (\mathbf{G}_k^*)^T + \mathbf{H}_k^* \mathbf{C}_k^{p,*} (\mathbf{H}_k^*)^T \right)^{-1} \mathbf{H}_k^* \mathbf{C}_k^{p,*} \quad , \end{aligned} \quad (2.19)$$

für den geschätzten Erwartungswert $\hat{\underline{x}}_k^{e,*}$ und die Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_k^{e,*}$ der posterioren Pseudo–Gaußdichte $f_e^*(\underline{x}_k^*)$ führt. Dabei ist $\hat{\underline{x}}_k^{p,*}$ der Erwartungswertvektor der prioren

Pseudo-Gaußdichte und $\mathbf{C}_k^{p,*}$ die zugehörige, positiv definite Kovarianzmatrix. Zu beachten ist, dass $\hat{\underline{x}}_k^{e,*}$ und $\mathbf{C}_k^{e,*}$ in keinem direkten Zusammenhang zum Erwartungswert oder der Varianz der posterioren Dichte $f_e(\underline{x}_k)$ im Originalraum S stehen. $f_e(\underline{x}_k)$ ist eine im allgemeinen nicht-gauß'sche Exponentialdichte, die sowohl über die Parameter der Pseudo-Gaußdichte gemäß (2.19) als auch über die universelle Mannigfaltigkeit U^* bzw. die zugehörige Transformation $\underline{\mathbf{T}}(\cdot)$ definiert ist. Zur Ermittlung charakteristischer Größen dieser Dichte, wie zum Beispiel des Erwartungswerts, ist daher die Berechnung von Momenten von Exponentialdichten erforderlich. Eine direkte numerische Berechnung ist aufwendig und nur für kleine Dimensionen N des Zustandsraums möglich, siehe zum Beispiel [91]. In [89] wird eine Lösung hergeleitet, die das Problem auf die Lösung eines Differentialgleichungssystems mit algebraischen Nebenbedingungen zurückführt und den benötigten Rechenaufwand damit um eine Größenordnung reduziert.

Anstelle einer direkten Auswertung der *Kalman*-Filter-Formeln im Hyperraum S^* gemäß (2.19) kann die rekursive Berechnung der gewünschten Kenngrößen der posterioren Pseudo-Gaußdichte auch mit den numerisch stabileren Formeln in square-root Darstellung des *Kalman*-Filters erfolgen.

2.3.3 Filteralgorithmus für pseudo-ellipsoidale Mengen

Im Falle einer mengenbasierten Unsicherheitsmodellierung wird das lineare, mengenbasierte ellipsoidale Filter, das in Kapitel A.2 zusammengefasst dargestellt wird, mit der transformierten, pseudo-linearen Messgleichung (2.15) im Hyperraum S^* angewendet. Dadurch wird im Originalraum eine konservative Approximation \mathcal{X}_k^e für die kompliziert geformte, wahre Menge aller möglichen Zustände $\tilde{\mathcal{X}}_k^e$ berechnet, die kompatibel mit der Messung und der prioren Schätzung \mathcal{X}_k^p sind. Die additiven Unsicherheiten \underline{v}_k^* im Hyperraum S^* gemäß (2.15) seien mengenbegrenzt, das heißt $\underline{v}_k^* \in \tilde{\mathcal{V}}_k^*$. Die wahre Menge der transformierten Messunsicherheiten $\tilde{\mathcal{V}}_k^*$ muss zur Anwendung des Hyperraumfilters durch eine ellipsoidale, konservative Approximation abgeschätzt werden, wie in Kapitel 2.4.2 detailliert beschrieben wird. Diese ellipsoidale, approximierende Menge \mathcal{V}_k^* wird durch

$$\mathcal{V}_k^* = \{ \underline{v}_k^* : (\underline{v}_k^* - \hat{\underline{v}}_k^*)^T (\mathbf{V}_k^*)^{-1} (\underline{v}_k^* - \hat{\underline{v}}_k^*) \leq 1 \} \quad (2.20)$$

beschrieben, wobei $\hat{\underline{v}}_k^*$ der Mittelpunktvektor von \mathcal{V}_k^* ist und \mathbf{V}_k^* eine positiv definite, symmetrische Matrix. Die Anwendung der Filtergleichungen (A.8), (A.10) im Hyperraum S^* führt auf eine pseudo-ellipsoidale Menge $\mathcal{X}_k^{e,*}$ in S^* mit Mittelpunktvektor

$$\hat{\underline{x}}_k^{e,*} = \hat{\underline{x}}_k^{p,*} + \lambda_k^* \mathbf{C}_k^{p,*} (\mathbf{H}_k^*)^T \{ \mathbf{V}_k^* + \lambda_k^* \mathbf{H}_k^* \mathbf{C}_k^{p,*} (\mathbf{H}_k^*)^T \}^{-1} (\underline{z}_k^* - \hat{\underline{v}}_k^* - \mathbf{H}_k^* \hat{\underline{x}}_k^{p,*}) \quad (2.21)$$

und positiv definiten, symmetrischer Matrix $\mathbf{C}_k^{e,*}$ gemäß

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_k^{e,*} &= d_k^* \mathbf{P}_k^* , \\ \mathbf{P}_k^* &= \mathbf{C}_k^{p,*} - \lambda_k^* \mathbf{C}_k^{p,*} (\mathbf{H}_k^*)^T \{ \mathbf{V}_k^* + \lambda_k^* \mathbf{H}_k^* \mathbf{C}_k^{p,*} (\mathbf{H}_k^*)^T \}^{-1} \mathbf{H}_k^* \mathbf{C}_k^{p,*} , \end{aligned} \quad (2.22)$$

wobei d_k^* durch

$$d_k^* = 1 + \lambda_k^* - \lambda_k^* (\underline{z}_k^* - \hat{\underline{v}}_k^* - \mathbf{H}_k^* \hat{\underline{x}}_k^{p,*})^T \{ \mathbf{V}_k^* + \lambda_k^* \mathbf{H}_k^* \mathbf{C}_k^{p,*} (\mathbf{H}_k^*)^T \}^{-1} (\underline{z}_k^* - \hat{\underline{v}}_k^* - \mathbf{H}_k^* \hat{\underline{x}}_k^{p,*}) \quad (2.23)$$

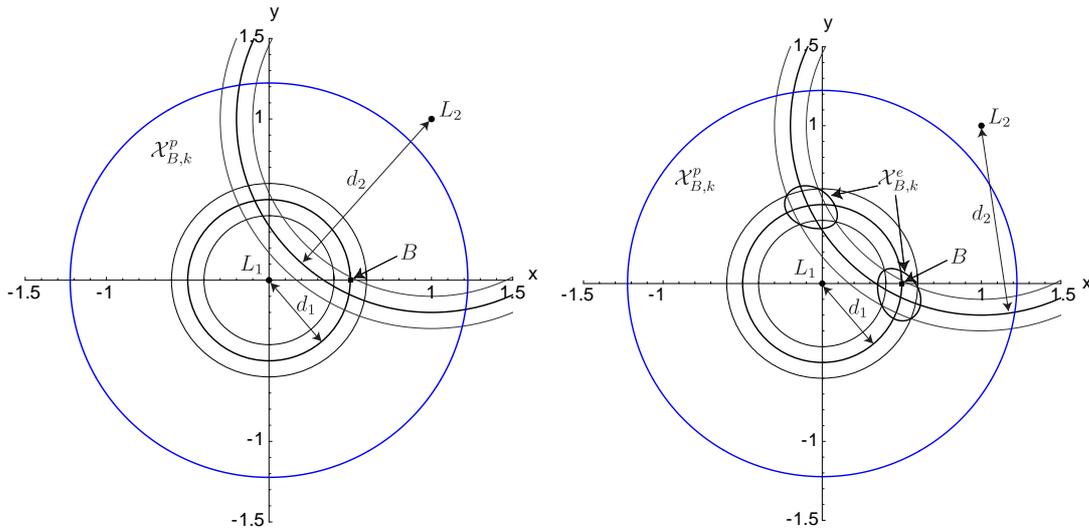
gegeben ist. Der Fusionsparameter $\lambda_k^* \in [0, \infty)$ muss dabei so gewählt werden, dass ein Maß für das Volumen der approximierenden Menge \mathcal{X}_k^e im *Originalraum* S minimiert wird. Dies ist nicht äquivalent mit der Minimierung eines Maßes für das Volumen der pseudo-ellipsoidalen Menge $\mathcal{X}_k^{e,*}$, also zum Beispiel der Determinante von $\mathbf{C}_k^{e,*}$, da die Approximation \mathcal{X}_k^e sowohl durch die Parameter von $\mathcal{X}_k^{e,*}$ als auch die universelle Mannigfaltigkeit U^* bestimmt wird. Im Gegensatz zum linearen, mengenbasierten ellipsoidalen Filter [40] wurde für das Hyperraumfilter gemäß (2.21), (2.22) bisher keine allgemeine, geschlossene Form für den optimalen Fusionsparameter $\lambda_{k,opt}^*$ gefunden. Für eine Berechnung muss daher auf numerische Verfahren zur Auswertung eines Maßes für das Volumen von \mathcal{X}_k^e zurückgegriffen werden. Ebenso sind zur Berechnung charakteristischer Werte, wie zum Beispiel des Schwerpunktes der Menge der geschätzten Zustände \mathcal{X}_k^e im Allgemeinen numerische Verfahren mit Auswertung von (2.6) erforderlich. Für niederdimensionale Filterprobleme mit $N \leq 3$ kann diese Auswertung mit gitterbasierten Verfahren durchgeführt werden, für höherdimensionale Filterprobleme ist dies jedoch mit großem Rechenaufwand verbunden.

BEISPIEL 2.3.2 Nichtlineare Filterung mit Abstandsmessungen im Falle mengenbegrenzter Unsicherheiten.

Betrachtet werde die Lokalisierung eines statischen Beobachters B über 2 unsichere Abstandsmessungen d_1 und d_2 im Falle mengenbegrenzter Unsicherheiten. Bild 2.4(a) zeigt den Beobachter B an der Stelle $\underline{x}_{B,k} = [0.5, 0]^T$ der zwei unsichere Abstandsmessungen zu den bekannten Landmarken L_1 und L_2 an den Positionen $\underline{x}_{L_l} = [x_{L_l}, y_{L_l}]^T$, $l = 1, 2$ durchführt. Diese werden durch die Messgleichungen

$$\begin{aligned} z_{1,k} &= (x_{B,k} - x_{L_1})^2 + (y_{B,k} - y_{L_1})^2 + v_{1,k} \ , \\ z_{2,k} &= (x_{B,k} - x_{L_2})^2 + (y_{B,k} - y_{L_2})^2 + v_{2,k} \ , \end{aligned} \quad (2.24)$$

mit $z_{l,k} = d_l^2$, $l = 1, 2$ beschrieben, wobei $v_{l,k}$ additives, mengenbegrenzte Messrauschen ist. Eine priore Schätzung für die Lage von B sei durch die Menge $\mathcal{X}_{B,k}^p$ gegeben, siehe Bild 2.4(a). Die wahre Position des Beobachters $\underline{x}_{B,k}$ ist wie für die mengenbasierte Filterung erforderlich in $\mathcal{X}_{B,k}^p$ enthalten. Der Schwerpunkt von $\mathcal{X}_{B,k}^p$ wird dabei ohne Beschränkung der Allgemeinheit des Beispiels zu $[0, 0]^T$ gewählt. Für die Anwendung des Hyperraumfilters werden die Abstandsmessgleichungen (2.24) separat gemäß dem in Kapitel 2.3.1 beschriebenen Verfahren in einen $L_x = 4$ -dimensionalen Hyperraum S^* erweitert, wobei die nichtlineare Transformation $\underline{\eta}_k(\cdot)$ als die Einheitsabbildung $\underline{\eta}_k(z) = z$ gewählt wird. Die Wahl eines höherdimensionalen Hyperraums S^* resultiert mit den in Kapitel 2.4.2 vorgestellten Verfahren zur Berechnung der Messunsicherheit \mathcal{V}_k^* in noch weniger konservativen Approximationen, wie in Beispiel 2.5.1 gezeigt wird. Mit $\underline{\eta}_k(z) = z$ ergibt sich der transformierte Zustandsvektor zu $\underline{x}_{B,k}^* = [x_{B,k}, y_{B,k}, x_{B,k}^2, y_{B,k}^2]^T$ und die zugehörigen Messmatrizen zu $\mathbf{H}_{l,k}^* = [-2x_{L_l}, -2y_{L_l}, 1, 1]^T$ $l = 1, 2$. Nach Durchführung der beiden Filterschritte mit $d_1 = 0.5$, $d_2 = 1.2$ und zugehörigen Unsicherheiten $v_k^{*,1} \in [-0.09, 0.11]$, $v_k^{*,2} \in [-0.23, 0.25]$ mit dem in Kapitel 2.3.3 beschriebenen Filterverfahren und Rücktransformation der resultierenden, pseudo-ellipsoidalen Menge $\mathcal{X}_{B,k}^{e,*}$ in den Originalraum S ergibt sich die in Bild 2.4(b) dargestellte Schätzung $\mathcal{X}_{B,k}^e$ für die Lage des Beobachters. Die wahre Lage von B entspricht *nicht* dem Schnittpunkt der eingezeichneten Messungen d_1 , d_2 da diese mit Fehlern behaftet sind. Die Unsicherheiten $v_k^{*,1}$, $v_k^{*,2}$ korrespondieren dabei mit einer Unsicherheit von 0.1 in der gemessenen Entfernung, wie in Bild 2.4(a) ersichtlich ist. Man erkennt an Hand der



(a) Ausgangssituation: Ein Beobachter B mit geschätzter, priorer Menge aller möglichen Lagen $\mathcal{X}_{B,k}^p$ führt 2 Abstandsmessungen d_1 und d_2 zu den Landmarken L_1 und L_2 durch.

(b) Geschätzte Menge $\mathcal{X}_{B,k}^e$ aller möglichen Lagen von B nach Durchführung des nichtlinearen Filterschrittes mit dem Hyperraumfilterverfahren. Bitte beachten Sie: Die Menge $\mathcal{X}_{B,k}^e$ besteht, wie erwartet, aus *zwei* disjunkten Teilmengen. Eine Modellierung durch einfache, ellipsoidale Mengen wäre daher nicht angemessen.

Bild 2.4: Lokalisierung eines statischen Beobachters B über 2 Abstandsmessungen im Falle mengenbegrenzter Unsicherheiten.

eingezeichneten Abstandsmessungen d_1 , d_2 , dass $\mathcal{X}_{B,k}^e$ eine gute Approximation für die wahre Menge $\tilde{\mathcal{X}}_{B,k}^e$ darstellt. Die Fläche der geschätzten Menge $\mathcal{X}_{B,k}^e$ beträgt $A^e \approx 0.137$, die Fläche der exakten Menge aller möglichen Beobachterpositionen $\tilde{\mathcal{X}}_{B,k}^e$ ist $\tilde{A} \approx 0.085$.

2.4 Berechnung der Messunsicherheit \mathcal{V}_k^*

Zur Durchführung des beschriebenen Verfahrens der nichtlinearen Filterung mit dem Hyperraumfilter muss für jeden Filterschritt eine Transformation des Messwertes \underline{z}_k sowie der Messunsicherheit \underline{v}_k vom Originalraum T in den Hyperraum T^* durchgeführt werden. Mit den transformierten Größen wird in S^* durch Anwendung eines linearen Filteralgorithmus ein nichtlinearer Filterschritt in S gemäß (2.15) berechnet, siehe Kapitel 2.3.2 und Kapitel 2.3.3. Während die Transformation der Messung in den Hyperraum T^* für den Fall stochastischer Unsicherheiten wie auch für den Fall mengenbegrenzter Unsicherheiten durch eine einfache, nichtlineare Abbildung gemäß $\underline{z}_k^* = \underline{\eta}_k(\underline{z}_k)$ gegeben ist, muss die Transformation der Messunsicherheit getrennt behandelt werden. Dabei ergeben sich für den Fall mengenbegrenzter Unsicherheiten Lösungsvielfalten für die Wahl möglicher Messunsicherheiten \mathcal{V}_k^* , die genutzt werden, um das Filterergebnis zu optimieren.

2.4.1 Berechnung der Messunsicherheit \mathcal{V}_k^* im Falle stochastischer Fehler

Für den Fall einer stochastischen Unsicherheitsmodellierung sei davon ausgegangen, dass eine Beschreibung der additiven Messunsicherheit \underline{v}_k^* in (2.11) in Form einer Pseudo-Gaußdichte (2.12) vorliegt. Diese Beschreibungsform beinhaltet die häufig verwendete Approximation einer Gaußdichte für die Wahrscheinlichkeitsdichte des Messrauschens \underline{v}_k als Spezialfall, erlaubt aber auch die Modellierung komplexerer Rauschdichten \underline{v}_k , wie zum Beispiel multimodaler Dichten [45]. Für jeden Filterschritt wird dann eine lineare Transformation der so ermittelten Rauschdichte durch die Transformationsmatrix $\mathbf{G}_k^*(z_k)$ durchgeführt, welche eine Funktion des aktuellen Messwertes z_k ist.

Ist die Wahrscheinlichkeitsdichte des im Allgemeinen nicht-gauß'schen Messrauschens \underline{v}_k lediglich empirisch für das vorliegende Problem ermittelt worden, können die Parameter der zugehörigen Pseudo-Gaußdichte des transformierten Messrauschens \underline{v}_k^* durch Optimierungsverfahren bestimmt werden. Dadurch kann die durch die Pseudo-Gaußdichte $f(\underline{v}_k^*)$ modellierte Rauschdichte an die ermittelte Dichte angepasst werden, siehe zum Beispiel [91].

ANMERKUNG 2.4.1 Lässt sich die Wahrscheinlichkeitsdichte des Messrauschens \underline{v}_k *exakt* durch eine Pseudo-Gaußdichte beschreiben, und ist die priore Schätzung durch eine Pseudo-Gaußdichte gegeben, so kann für polynomiale Nichtlinearitäten der Messfunktion $\underline{h}_k(\cdot)$ das *optimale* Filterergebnis nach Bayes berechnet werden [45].

2.4.2 Berechnung der Messunsicherheit \mathcal{V}_k^* im Falle mengenbegrenzter Fehler

Für den Fall einer mengenbasierten Unsicherheitsmodellierung ist eine lineare Transformation der Messunsicherheit \mathcal{V}_k^* mit der Transformationsmatrix $\mathbf{G}_k^*(z_k)$ nicht möglich. Anstelle dessen muss eine konservative, ellipsoidale Approximation $\mathcal{V}_k^* \subset \tilde{\mathcal{V}}_k^*$ für die *wahre Menge* $\tilde{\mathcal{V}}_k^*$ aller möglichen, in den Hyperraum T^* transformierten Messungen gefunden werden [48]. Zwei mögliche Verfahren unterschiedlicher Komplexität werden in den folgenden zwei Unterkapiteln beschrieben. Einschränkende Voraussetzung für die Anwendung der Verfahren ist, dass die Komponenten $\underline{\eta}_{l,k}(\cdot)$, $l = 1 \dots M$ der nichtlinearen Transformation $\underline{\eta}_k(\cdot) = \left[\underline{\eta}_{1,k}^T(\cdot), \underline{\eta}_{2,k}^T(\cdot), \dots, \underline{\eta}_{M,k}^T(\cdot) \right]^T$ nur stetige Funktionen beinhalten, die abgeschlossene Intervalle $\mathcal{I}_{l,k}^v = [v_{l,k}^L, v_{l,k}^U]$ mit $l = 1 \dots M$, $v_{l,k}^L \in \mathbb{R}$, $v_{l,k}^U \in \mathbb{R}$ wieder auf abgeschlossene Intervalle $\mathcal{I}_{l,k}^{v,*}$ abbilden. Beide Verfahren betrachten zur Herleitung der Approximation \mathcal{V}_k^* zunächst die Unsicherheit $\tilde{\mathcal{Z}}_k$ eines transformierten Vektors von Zufallsvariablen \tilde{z}_k und leiten daraus die gesuchte Menge der Messunsicherheit \mathcal{V}_k^* her.

2.4.2.1 Intervallbasierte Approximation von $\tilde{\mathcal{V}}_k^*$ durch Hyperquader

Für die Berechnung einer konservativen Approximation von \mathcal{V}_k^* mit $(z_k^* - \mathbf{H}_k^* \underline{v}_k^*) \in \mathcal{V}_k^*$ werde der transformierte Vektor von Zufallsvariablen \tilde{z}_k mit

$$\tilde{z}_k = z_k - \underline{v}_k \quad (2.25)$$

betrachtet, und der gegebene Messvektor \underline{z}_k als konstant angesehen. Als Modell der Messunsicherheiten im Originalraum seien zulässige Intervalle $\mathcal{I}_{l,k}^v$, $l = 1 \dots M$ für jede Komponente $v_{l,k}$ von \underline{v}_k gegeben, die sich direkt aus einer ellipsoidalen, mengenbasierten Unsicherheitsbeschreibung für \underline{v}_k gemäß (A.11) mit gegebenen Systemgleichungen gemäß (1.7) herleiten lassen. Daraus ergeben sich mit (2.25) die abgeschlossenen Intervalle aller transformierten Messungen $\bar{z}_{l,k} \in \mathcal{I}_{l,k}^z = [z_{l,k}^L, z_{l,k}^U]$, $l = 1 \dots M$. Durch die Transformation $\eta_k(\bar{z}_k)$ wird der M -dimensionale Vektor \bar{z}_k auf den L_z -dimensionalen Vektor von Zufallsvariablen \bar{z}_k^* abgebildet. Wegen der eingangs formulierten Forderung für die Transformation $\eta_k(\cdot)$ werden die Intervalle $\mathcal{I}_{l,k}^z$, $l = 1 \dots M$, die die Unsicherheit von \bar{z}_k beschreiben, dabei wieder auf L_z abgeschlossene Intervalle $\mathcal{I}_{l,k}^{*,z} = [z_{l,k}^{*,L}, z_{l,k}^{*,U}]$, $l = 1 \dots L_z$ abgebildet. Eine konservative, ellipsoidale Approximation $\bar{\mathcal{Z}}_k^*$ der wahren Menge $\tilde{\mathcal{Z}}_k^*$ aller möglichen, in den Hyperraum T^* transformierten Zufallsvektoren \bar{z}_k^* ist dann durch das Ellipsoid gegeben, das den L_z -dimensionalen Hyperquader \mathcal{R}_k^* einhüllt, welcher durch die Intervalle $\mathcal{I}_{l,k}^{*,z}$ definiert ist. Mit der Definition der halben Intervalllänge $\Delta_{l,k}^* = \frac{1}{2} (z_{l,k}^{*,U} - z_{l,k}^{*,L})$, $l = 1 \dots L_z$, ist die positiv definite, symmetrische Matrix $\bar{\mathbf{Z}}_k^*$ der ellipsoidalen, approximierenden Menge $\bar{\mathcal{Z}}_k^*$ gemäß

$$\bar{\mathcal{Z}}_k^* = \left\{ \bar{z}_k^* : (\bar{z}_k^* - \hat{\bar{z}}_k^*)^T (\bar{\mathbf{Z}}_k^*)^{-1} (\bar{z}_k^* - \hat{\bar{z}}_k^*) \leq 1 \right\} \quad (2.26)$$

durch die Diagonalmatrix

$$\bar{\mathbf{Z}}_k^* = L_z \begin{bmatrix} (\Delta_{1,k}^*)^2 & & & \mathbf{0} \\ & (\Delta_{2,k}^*)^2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & (\Delta_{L_z,k}^*)^2 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

gegeben. $\hat{\bar{z}}_k^*$ ist der Mittelpunktvektor von $\bar{\mathcal{Z}}_k^*$, der dem Mittelpunkt des Hyperquaders \mathcal{R}_k^* entspricht und $z_{l,k}^{*,U}$ bzw. $z_{l,k}^{*,L}$ sind die oberen bzw. unteren Grenzen der betrachteten, transformierten Intervalle $\mathcal{I}_{l,k}^{*,z}$. Der Vorfaktor L_z in (2.27) garantiert, dass die ellipsoidale Approximation $\bar{\mathcal{Z}}_k^*$ konservativ ist. Wegen der Transformationsbeziehung (2.25) ist die gesuchte Matrix \mathbf{V}_k^* der ellipsoidalen Menge \mathcal{V}_k^* für die Messunsicherheit identisch mit der Matrix $\bar{\mathbf{Z}}_k^*$ der Unsicherheiten der transformierten Messungen \bar{z}_k im Hyperraum T^* . Der mit dem beschriebenen Verfahren ermittelte Mittelpunkt $\hat{\bar{z}}_k^*$ des einhüllenden Ellipsoids der Messunsicherheit wird direkt in die Messung \underline{z}_k^* eingerechnet, so dass das mengenbegrenzte Messrauschen \underline{v}_k^* mittelwertfrei ist. Die gesuchten Größen für die Messunsicherheit \mathcal{V}_k^* und die Messung im Hyperraum sind also

$$\begin{aligned} \underline{z}_k^* &= \hat{\bar{z}}_k^* + \underline{c}_{Rhs} \\ \mathbf{V}_k^* &= \bar{\mathbf{Z}}_k^* \\ \hat{\underline{v}}_k^* &= \underline{0} \end{aligned} \quad (2.28)$$

wobei der Vektor \underline{c}_{Rhs} sich aus dem Absolutglied der transformierten, rechten Seite der ursprünglichen Messgleichung gemäß (2.13) ergibt.

2.4.2.2 Optimierte, ellipsoide Approximation von $\tilde{\mathcal{V}}_k^*$

Durch das in Kapitel 2.4.2.1 beschriebene Verfahren wird eine konservative, ellipsoide Approximation \mathcal{V}_k^* von $\tilde{\mathcal{V}}_k^*$ durch Intervallabschätzungen berechnet, die die wahre Menge $\tilde{\mathcal{V}}_k^*$ garantiert enthält, aber offensichtlich nicht optimal ist. Das bedeutet, es gibt konservative Approximationen \mathcal{V}_k^* , die $\tilde{\mathcal{V}}_k^*$ enger einschließen, was direkte Auswirkungen auf das Schätzergebnis \mathcal{X}_k^e hat, wie im Folgenden in Beispiel 2.5.1 gezeigt wird. Zwei Anforderungen werden daher an die konservative, ellipsoide Approximation \mathcal{V}_k^* gestellt:

- F1 \mathcal{V}_k^* darf nur Teile der durch $\underline{\eta}_k(\cdot)$ definierten Mannigfaltigkeit W^* im Raum T^* einschließen, die zur wahren, transformierten Messunsicherheit $\tilde{\mathcal{V}}_k^*$ gehören.
- F2 \mathcal{V}_k^* soll die transformierte, wahre Messunsicherheit $\tilde{\mathcal{V}}_k^*$ möglichst eng einschließen. Diese Forderung korrespondiert mit der Forderung, \mathcal{V}_k^* so zu wählen, dass das Schätzergebnis \mathcal{X}_k^e möglichst wenig konservativ ist, lässt sich aber erheblich einfacher algorithmisch formulieren. Ein Beweis für die exakte Übereinstimmung der beiden Forderungen steht allerdings noch aus.

Für das im Folgenden beschriebene Verfahren werde zusätzlich zu den Stetigkeitsbedingungen aus Kapitel 2.4.2.1 vorausgesetzt, dass $\underline{\eta}_k(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{L_z}$ als eine *polynomiale* Abbildung einer *skalaren* Messung gegeben sei, das heißt

$$\underline{\eta}_k(z) = [z, z^2, \dots, z^{L_z}]^T \quad (2.29)$$

Verallgemeinerungen auf den vektoriellen Fall sind prinzipiell möglich, jedoch rechnerisch aufwendig. Weiterhin sei die mengenbegrenzte Unsicherheit der Messung $z_k \in \mathbb{R}$ durch das abgeschlossene Intervall $\mathcal{I}_k^v = [v_k^L, v_k^U]$ gegeben. Analog zur Vorgehensweise in Kapitel 2.4.2.1 werde wieder die transformierte Messung $\bar{z}_k = z_k - v_k$ mit konstantem gegebenen skalaren Messwert z_k betrachtet. Daraus ergibt sich das abgeschlossene Intervall aller transformierten Messungen $\bar{z}_k \in \mathcal{I}_k^z = [z_k^L, z_k^U]$. Gesucht ist eine konservative, ellipsoide Approximation $\bar{\mathcal{Z}}_k^*$ für die wahre Menge $\tilde{\bar{\mathcal{Z}}}_k^*$ aller in den Hyperraum T^* transformierten Zufallsvektoren $\tilde{\bar{z}}_k^*$ gemäß (2.26) für die definitionsgemäß

$$-1 \leq \underbrace{\left(\left(\underline{\eta}_k(\bar{z}_k) - \hat{\bar{z}}_k^* \right)^T \left(\bar{\mathbf{Z}}_k^* \right)^{-1} \left(\underline{\eta}_k(\bar{z}_k) - \hat{\bar{z}}_k^* \right) - 1 \right)}_{Q_{\bar{\mathbf{Z}}}} \leq 0 \quad \forall \bar{z}_k \in \mathcal{I}_k^z \quad (2.30)$$

gelten muss. Die ellipsoide Approximation $\bar{\mathcal{Z}}_k^*$ von $\tilde{\bar{\mathcal{Z}}}_k^*$ ist durch L_z Parameter für den Mittelpunktvektor $\hat{\bar{z}}_k^*$ und weitere $(L_z + 1) \frac{L_z}{2}$ Parameter für die symmetrische Matrix $\bar{\mathbf{Z}}_k^*$ bestimmt. Um diese Parameter für eine optimierte Approximation im Sinne von (F2) zu bestimmen, wird die pseudo-quadratische Form $Q_{\bar{\mathbf{Z}}}$, die die Unsicherheit in der transformierten Messung \bar{z}_k im Originalraum T definiert, einem Referenzpolynom $p_R(\bar{z}_k)$ vom Grad $2L_z$ gleichgesetzt. Damit ergibt sich

$$Q_{\bar{\mathbf{Z}}}(\bar{z}_k) = p_R(\bar{z}_k) \quad \forall \bar{z}_k, \quad (2.31)$$

wobei für $p_R(\bar{z}_k)$ die gewünschten Eigenschaften gefordert werden, das heißt

$$-1 \leq p_R(\bar{z}_k) \leq 0 \quad \forall \bar{z}_k \in \mathcal{I}_k^z. \quad (2.32)$$

Weiterhin folgt für $p_R(\bar{z}_k)$ aus Forderung (F1) direkt, dass $p_R(\bar{z}_k)$ an den Intervallgrenzen z_k^L und z_k^U Nullstellen aufweisen muss, also

$$\begin{aligned} p_R(z_k^L) &= 0, \\ p_R(z_k^U) &= 0, \end{aligned}$$

und außerhalb des Intervalls \mathcal{I}_k^z größer Null sein muss, da vorausgesetzt wurde, dass die Messunsicherheit durch ein abgeschlossenes Intervall definiert ist.

Zur Lösung von (2.31) wird ein Koeffizientenvergleich des Referenzpolynoms $p_R(\bar{z}_k)$ mit der pseudo-quadratischen Form $Q_{\bar{\mathbf{z}}}(\bar{z}_k)$ durchgeführt und ein im Allgemeinen nichtlineares Gleichungssystem für die gesuchten Parameter $\hat{\bar{\mathbf{z}}}_k^*$ und $\bar{\mathbf{Z}}_k^*$ aufgestellt. Die Freiheitsgrade, welche für die Wahl von $p_R(\bar{z}_k)$ nach Erfüllung von (F1) und (2.32) verbleiben, werden gemäß Forderung (F2) zur Minimierung des Volumens der Lösung genutzt, was einer Minimierung der Determinante von $\bar{\mathbf{Z}}_k^*$ entspricht. Für die Aufstellung des Gleichungssystems nach (2.31) ist die Darstellung der symmetrischen Matrix $\bar{\mathbf{Z}}_k^*$ in faktorisierter Form gemäß

$$\bar{\mathbf{Z}}_k^* = (\bar{\mathbf{D}}_k^*)^T \bar{\mathbf{D}}_k^* \quad (2.33)$$

mit einer oberen Dreiecksmatrix $\bar{\mathbf{D}}_k^*$ vorteilhaft, da die resultierende Matrix $\bar{\mathbf{Z}}_k^*$ dann immer symmetrisch und positiv definit ist.

BEISPIEL 2.4.1 *Berechnung der mengenbegrenzten Messunsicherheit \mathcal{V}_k^* mit konservativer, ellipsoidaler Approximation.*

Gegeben sei eine skalare Messgleichung

$$z_k = h_k(\underline{\mathbf{x}}_k) + v_k,$$

mit N -dimensionalem Zustandsvektor $\underline{\mathbf{x}}_k$ und die polynomiale Transformation $\eta_k(z) = [z, z^2]^T$, woraus für die Dimension des Hyperraums $T^* L_z = 2$ folgt. Die mengenbegrenzte Messunsicherheit sei durch das Intervall $\mathcal{V}_k = [-1, 1]$ gegeben und der unsicherheitsbehaftete Messwert zum Zeitpunkt k sei $z_k = 1$.

Aus (2.25) ist direkt ersichtlich, dass die transformierte Messung \bar{z}_k unter den gegebenen Annahmen für die Messunsicherheit im Intervall $\mathcal{I}_k^z = [0, 2]$ liegen muss. Durch $\eta_k(z)$ ist die in Bild 2.5 dargestellte, parabelförmige, eindimensionale Mannigfaltigkeit W^* im zweidimensionalen Hyperraum T^* definiert, auf der die unsichere, nach T^* transformierte Messung $\bar{\mathbf{z}}_k^* = \eta_k(\bar{z}_k) = [\bar{z}_{1,k}^*, \bar{z}_{2,k}^*]^T$ liegen muss. Die wahre Menge aller in den Hyperraum transformierten Messungen $\tilde{\bar{\mathbf{z}}}_k^* \subset W^*$, die eine Submannigfaltigkeit von W^* ist, ist dick eingezeichnet. Die gesuchte, ellipsoidale Unsicherheitsbeschreibung $\bar{\mathbf{Z}}_k^*$ für $\bar{\mathbf{z}}_k^*$ wird gemäß (2.26) durch

$$(\bar{\mathbf{Z}}_k^*)^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \quad \hat{\bar{\mathbf{z}}}_k^* = \begin{bmatrix} \mu_{z_1} \\ \mu_{z_2} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

parametrisiert. Das gewählte Referenzpolynom $p_R(\bar{z}_k)$ muss, wie die pseudo-quadratische Form $Q_{\bar{\mathbf{Y}}}(\bar{z}_k)$, ein Polynom vierten Grades in \bar{z}_k sein, dessen einzige Nullstellen gemäß Forderung (F1) bei $z_k^L = 0$ und $z_k^U = 2$ liegen müssen. Um eine analytische Lösung zu erhalten, wird der Ansatz

$$p_R(\bar{z}_k) = (\bar{z}_k - z_k^L)(\bar{z}_k - z_k^U)(\bar{z}_k - z_{3,k})^2 k_p = k_i (\bar{z}_k)^i, \quad i = 0 \dots 4, \quad (2.35)$$

gewählt, so dass $p_R(\bar{z}_k)$ einen Berührungspunkt bei $\bar{z}_k = z_{3,k}$ mit $p_R(z_{3,k}) = 0$ hat. Der Koeffizientenvergleich von $p_R(\bar{z}_k)$ und $Q_{\bar{Z}}(\bar{z}_k)$ führt auf ein Gleichungssystem mit fünf Gleichungen gemäß

$$\begin{aligned} -1 + a \mu_{z_1}^2 + 2b \mu_{z_1} \mu_{z_2} + c \mu_{z_2}^2 &= k_0 \\ -2a \mu_{z_1} - 2b \mu_{z_2} &= k_1 \\ a - 2b \mu_{z_1} - 2c \mu_{z_2} &= k_2 \\ 2b &= k_3 \\ c &= k_4, \end{aligned} \quad (2.36)$$

für die fünf unbekanntenen Größen μ_{z_1} , μ_{z_2} , a , b und c . k_i , $i = 0 \dots 4$ sind die Koeffizienten von $p_R(\bar{z}_k)$ gemäß (2.35). Die allgemeine Lösung von (2.36) führt auf ein Gleichungssystem dritter Ordnung, ist also analytisch berechenbar. Allerdings ist die Ermittlung einer optimalen Lösung im Sinne des kleinsten Volumens von \bar{Z}_k^* nicht mehr analytisch möglich. Eine numerische Berechnung dieser optimalen Lösung durch numerische Optimierungsverfahren ist dagegen stets möglich, allerdings rechnerisch aufwendig. Eine analytische Lösung, die nahezu optimal im Sinne des kleinsten Volumens von \bar{Z}_k^* ist, ergibt sich für (2.36), wenn die erste Komponente μ_{z_1} des Mittelpunktvektors gleich der Mitte des Unsicherheitsintervalls gesetzt wird, das heißt $\mu_{z_1} = \frac{1}{2}(z_k^L + z_k^U)$. Daraus folgt durch Lösung von (2.36) unter der Nebenbedingung $\det((\bar{Z}_k^*)^{-1}) \equiv \max$

$$\begin{aligned} k_p &= \frac{36}{(z_k^U - z_k^L)^4}, \quad \mu_{z_2} = z_{3,k}^2 + \frac{1}{\sqrt{k_p}}, \\ a &= 2\sqrt{k_p} + \left(z_3(2z_k^U + 3z_{3,k}) - (z_k^U)^2 \right) k_p, \\ b &= -2z_{3,k}k_p, \quad c = k_p, \end{aligned} \quad (2.37)$$

mit $z_{3,k} = \mu_{z_1}$. Die gesuchte Messunsicherheit \mathcal{V}_k^* ist wegen (2.25) gemäß (2.28) bis auf den Mittelpunktvektor \hat{z}_k^* identisch mit \bar{Z}_k^* .

Bild 2.5 zeigt für die gegebenen Werte die exakte, transformierte Messunsicherheit \tilde{Z}_k^* und zwei konservative, ellipsoidale Approximationen \bar{Z}_k^* und $\bar{Z}_k^{*,Box}$. $\bar{Z}_k^{*,Box}$ wird durch das in Kapitel 2.4.2.1 beschriebene Approximationsverfahren auf der Basis von Intervallabschätzungen aus der Primärunsicherheit \mathcal{V}_k berechnet. Dabei ergeben sich für das transformierte Unsicherheitsintervall $\mathcal{I}_k^z = [0, 2]$ zwei Intervalle $\mathcal{I}_{1,k}^{*,z} = [0, 2]$ und $\mathcal{I}_{2,k}^{*,z} = [0, 4]$. Die resultierende, rechteckige Menge \mathcal{R}_k^* in T^* ist schwarz eingezeichnet. Die aus der Approximation resultierende Matrix $\mathbf{V}_k^{*,Box}$ der Messunsicherheit $\mathcal{V}_k^{*,Box}$ ergibt sich damit gemäß (2.27) und (2.28) zu

$$\mathbf{V}_k^{*,Box} = 2 \begin{bmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix}.$$

Für das beschriebene, optimierte Verfahren zur Berechnung der Messunsicherheit \mathcal{V}_k^* ergibt sich durch Einsetzen der Lösung (2.37) in (2.34) und Verwendung des Zusammenhangs (2.28) die resultierende Matrix \mathbf{V}_k^* der Messunsicherheit \mathcal{V}_k^* zu

$$\mathbf{V}_k^* = \begin{bmatrix} 1.333 & 2.667 \\ 2.667 & 5.778 \end{bmatrix},$$

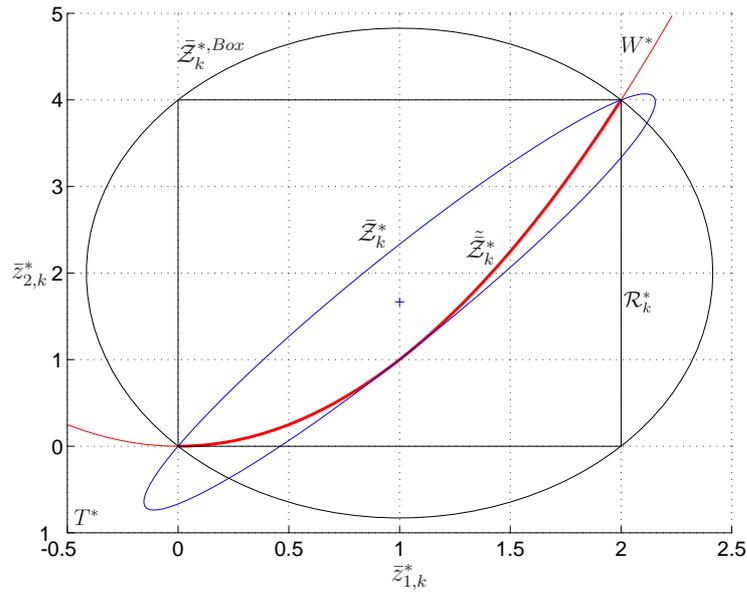


Bild 2.5: Transformation einer skalaren Messgleichung in den Hyperraum T^* mit ein-dimensionaler Mannigfaltigkeit W^* . Die exakte, transformierte Messunsicherheit \tilde{Z}_k^* ist Teil der parabolischen Mannigfaltigkeit W^* und wird durch die ellipsoidalen Approximationen \tilde{Z}_k^* und $\tilde{Z}_k^{*,Box}$ konservativ approximiert.

wobei die Zahlenwerte auf drei Nachkommastellen gerundet sind. Die Mittelpunktvektoren der approximierenden Mengen \tilde{Z}_k^* und $\tilde{Z}_k^{*,Box}$ ergeben sich zu

$$\hat{\tilde{z}}_k^{*,Box} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \hat{\tilde{z}}_k^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.667 \end{bmatrix}.$$

Man erkennt in Bild 2.5, dass die so berechnete Messunsicherheit \tilde{Z}_k^* eine deutlich weniger konservative Approximation von \tilde{Z}_k^* ist als $\tilde{Z}_k^{*,Box}$, was äquivalent wiederum für \mathcal{V}_k^* und $\mathcal{V}_k^{*,Box}$ gilt. Wie sich diese Verringerung in der Messunsicherheit auf die Unsicherheit des Schätzergebnisses $\mathcal{X}_{B,k}^e$ nach dem Filterschritt auswirkt, wird in Beispiel 2.5.1 gezeigt.

2.5 Beispiel: Nichtlineare Abstandsmessung mit mengenbegrenzter Messunsicherheit

Im Folgenden wird für ein einfaches, statisches Szenario gezeigt, wie sich ein Beobachter B durch Abstandsmessungen zu $L = 2$ Punkten mit bekannter Position in seiner Umgebung mit Hilfe des vorgestellten Verfahrens zur nichtlinearen Filterung lokalisieren kann. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Unsicherheiten in den Messungen unbekannt, aber in ihrer Amplitude begrenzt sind, so dass eine Modellierung durch ein mengenbasiertes Unsicherheitsmodell angemessen ist.

BEISPIEL 2.5.1 *Nichtlineare Filterung mit Abstandsmessungen und optimierter Berechnung der mengenbegrenzten Messunsicherheit \mathcal{V}_k^* im Hyperraum.*

Betrachtet werde das Problem der Lokalisierung eines statischen Beobachters B aus Beispiel 2.3.2. Zur Generierung einer besseren, weniger konservativen Approximation $\mathcal{X}_{B,k}^e$ der

gesuchten, wahren Menge aller möglichen Lagen $\tilde{\mathcal{X}}_{B,k}^e$ des Beobachters B , die kompatibel mit den Abstandsmessungen d_1, d_2 und der prioren Lageschätzung $\mathcal{X}_{B,k}^p$ ist, wird die nichtlineare Transformation $\eta_k(z) = [z, z^2]^T$ gemäß Kapitel 2.3.3 auf die Messgleichungen angewendet. Daraus ergibt sich ein $L_x = 8$ -dimensionaler Hyperraum S^* mit transformiertem Zustandsvektor $\underline{x}_{B,k}^*$ gemäß

$$\underline{x}_B^* = [x_B, y_B, x_B y_B, x_B^2, y_B^2, x_B^3 + x_B y_B^2, x_B^2 y_B + y_B^3, x_B^4 + 2x_B^2 y_B^2 + y_B^4]^T \quad (2.38)$$

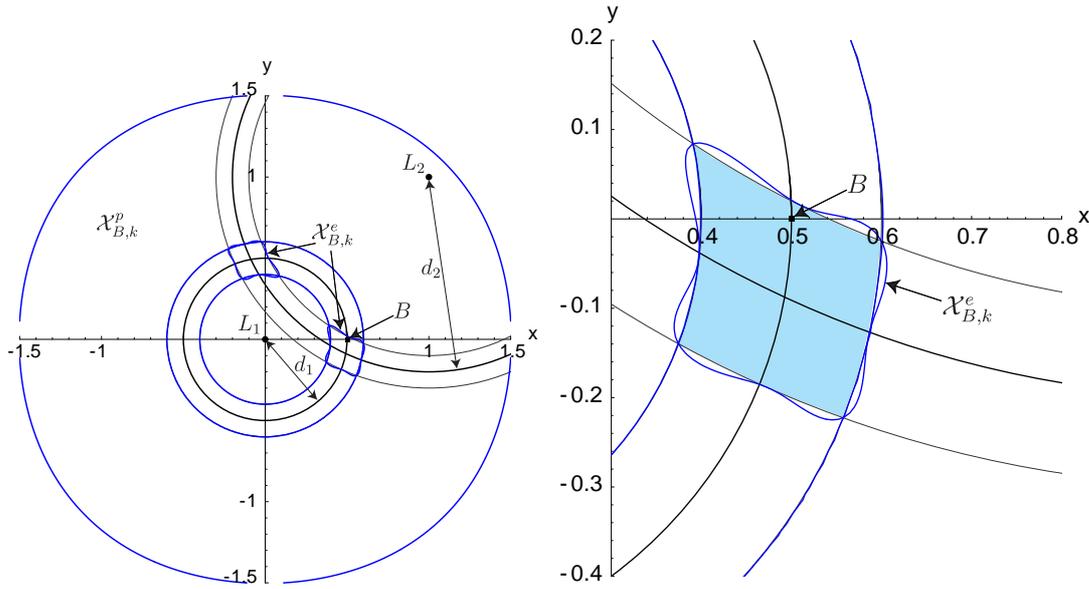
und zugehöriger Messmatrix $\mathbf{H}_{l,k}^*$ mit

$$\mathbf{H}_{l,k}^* = \begin{bmatrix} -2x_{L_l} & -4x_{L_l}^3 - 4x_{L_l}y_{L_l}^2 \\ -2y_{L_l} & -4y_{L_l}^3 - 4x_{L_l}^2 y_{L_l} \\ 0 & 8x_{L_l}y_{L_l} \\ 1 & 6x_{L_l}^2 + 2y_{L_l}^2 \\ 1 & 2x_{L_l}^2 + 6y_{L_l}^2 \\ 0 & -4x_{L_l} \\ 0 & -4y_{L_l} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad (2.39)$$

wobei $l = 1, 2$ der Index der Landmarke L_l ist. Der transformierte Messvektor $\underline{z}_{l,k}^*$ ist durch

$$\underline{z}_{l,k}^* = \begin{bmatrix} z_{l,k} - (x_{L_l}^2 + y_{L_l}^2) \\ (z_{l,k})^2 - (x_{L_l}^4 + 2x_{L_l}^2 y_{L_l}^2 + y_{L_l}^4) \end{bmatrix}^T \quad (2.40)$$

gegeben, wobei $z_{l,k} = d_{l,k}^2$ der quadrierte gemessene Abstand zu Landmarke L_l ist. $v_{l,k}$ ist wie in Beispiel 2.3.2 mengenbegrenztetes Messrauschen. Ein transformierter Zustandsvektor \underline{x}_B^* , der alle Polynome in x_B und y_B bis zur vierten Potenz beinhalten würde, hätte die Dimension $L_x = 5 * 5 = 25$, bei der Expansion der Abstandsmessgleichungen lässt sich jedoch eine Reduktion auf die Dimension $L_x = 8$ durchführen. Dies liegt zum einen daran, dass auf Grund der speziellen Struktur der Messgleichungen nicht alle Polynomordnungen in x_B und y_B auftreten. Zum anderen werden Zustände von \underline{x}_B^* additiv zusammengefasst, für die die Messmatrix $\mathbf{H}_{l,k}^*$ gleiche Einträge hat, da diese Zustände ansonsten linear abhängig wären, was zu einer Entartung der geschätzten Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_{B,k}^{e,*}$ von $\mathcal{X}_{B,k}^{e,*}$ führen würde. Bild 2.6(a) zeigt das Ergebnis der Anwendung des vorgestellten, nichtlinearen Filterkonzepts der Hyperraumfilterung mit optimierter Berechnung der transformierten Messunsicherheit $\mathcal{V}_{l,k}^*$ im Hyperraum gemäß Kapitel 2.4.2.2. Man erkennt, dass die geschätzte Menge $\mathcal{X}_{B,k}^e$ aller möglichen Lagen des Beobachters B durch die Transformation der Messgleichung und Anwendung des optimierten Verfahrens zur Berechnung der Messunsicherheit $\mathcal{V}_{l,k}^*$ erheblich weniger konservativ ist, als bei Verwendung der Einheitsabbildung $\eta_k(z) = z$, wie in Beispiel 2.3.2. Die Fläche der geschätzten Menge $\mathcal{X}_{B,k}^e$ beträgt $A^e \approx 0.095$, die Fläche der exakten Menge $\tilde{\mathcal{X}}_{B,k}^e$ ist wie in Beispiel 2.3.2 $\tilde{A} \approx 0.085$. Der verbleibende Approximationsfehler ergibt sich also zu $\Delta A \approx 0.01$ was 11,8 % entspricht, gegenüber einem Approximationsfehler von $\Delta A \approx 0.052$ in Beispiel 2.3.2, der 61,2 % entspricht.



(a) Geschätzte Menge $\mathcal{X}_{B,k}^e$ aller möglichen Lagen von B nach Durchführung des nichtlinearen Filterschrittes mit dem Hyperraumfilter.

(b) Ausschnitt aus Bild 2.6(a) (vergrößert): Geschätzte Menge $\mathcal{X}_{B,k}^e$ aller möglichen Lagen von B nach Durchführung des nichtlinearen Filterschrittes mit dem Hyperraumfilter.

Bild 2.6: Lokalisierung eines statischen Beobachters B über zwei Abstandsmessungen im Falle mengenbegrenzter Unsicherheiten mit optimierter Berechnung der Messunsicherheit \mathcal{V}_k^*

2.6 Der Prädiktionsschritt der Hyperraumfilterung

Im Gegensatz zum Filterschritt kann für den Prädiktionsschritt für ein allgemeines, dynamisches System gemäß (1.3) für die hier gewählte Unsicherheitsbeschreibung mit Pseudo-Gaußdichten bzw. pseudo-ellipsoidalen Mengen im Allgemeinen *keine* geschlossene Lösung gefunden werden.

Im Falle einer *stochastischen* Unsicherheitsbeschreibung führt die Auswertung der Chapman-Kolmogorov-Gleichung (1.8) auf

$$f(\underline{x}_{k+1}|\mathbf{Z}^k) = c \int_{\mathbb{R}^N} f(\underline{x}_{k+1}|\underline{x}_k) \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\underline{x}_k^* - \hat{\underline{x}}_k^{e,*})^T (\mathbf{C}_k^{e,*})^{-1} (\underline{x}_k^* - \hat{\underline{x}}_k^{e,*}) \right\} d\underline{x}_k \quad (2.41)$$

mit $\underline{x}_k^* = \mathbf{T}(\underline{x}_k)$ und einer Normierungskonstante c . Für dieses Integral existiert wegen der auftretenden Exponentialdichte im Allgemeinen keine geschlossene Lösung, auch nicht für den einfachsten Fall eines linearen Systemmodells mit additivem, weißen Rauschen. In [89] wird jedoch ein Verfahren vorgestellt, mit Hilfe dessen sich die Berechnung der Momente allgemeiner Exponentialdichten exakt auf die Lösung eines Differentialgleichungssystems mit algebraischen Nebenbedingungen zurückführen lässt, was die rechnerische Komplexität des Problems um eine Größenordnung verringert. Aus den so ermittelten Momenten lassen sich mit Hilfe des Systemmodells die Parameter der gesuchten Dichte $f(\underline{x}_{k+1}|\mathbf{Z}^k)$

bestimmen, was jedoch erneut ein iteratives Verfahren erfordert, da eine geschlossene Lösung nicht existiert. Dieses Verfahren zur Berechnung der gesuchten Parameter von $f(\underline{x}_{k+1}|\mathbf{Z}^k)$ aus den gegebenen Momenten beruht auf einer Parametrisierung der auftretenden Zustandsübergangsdichte $f(\underline{x}_{k+1}|\underline{x}_k)$ mit einem Progressionsparameter und der Betrachtung von infinitesimalen Änderungen der Momente und der dazu gehörigen infinitesimalen Änderungen der gesuchten Parameter. Ein vergleichbares Verfahren wird in Kapitel 3 für die Filterung mit Gaussian–Mixture–Dichten beschrieben.

Ein Spezialfall, für den eine geschlossene Lösung für den Prädiktionsschritt gefunden werden kann, ist ein lineares Systemmodell *ohne* Unsicherheit. In diesem Fall kann der gegebene analytische Zusammenhang zwischen dem Zustandsvektor \underline{x}_k zum Zeitpunkt k und dem Zustandsvektor \underline{x}_{k+1} genutzt werden, direkt eine Lösung für (2.41) zu berechnen. Im Allgemeinen stellt dieser Spezialfall jedoch eine zu starke Einschränkung für die Art der modellierbaren dynamischen Systeme dar, so dass für den Prädiktionsschritt das oben skizzierte, iterative Verfahren verwendet werden muss, welches im Vergleich zum Filterschritt mit einem relativ hohen Rechenaufwand verbunden ist.

Für den Fall einer *mengenbasierten* Unsicherheitsbeschreibung wird in [49] ein Verfahren vorgestellt, mit dem für nichtlineare Systeme ohne Systemrauschen eine näherungsweise Berechnung des Prädiktionsschrittes möglich ist. Dabei wird für jeden Prädiktionsschritt eine Transformation \mathbf{T}_k^p definiert, die den transformierten Vektor der Systemzustände \underline{x}_k^* in S^* auf einen höherdimensionalen transformierten Vektor \underline{x}_{k+1}^* abbildet, und eine Schätzung für das Prädiktionsergebnis in diesem höherdimensionalen Raum durch Auswertung eines äquivalenten Filterschrittes berechnet. Der Vorteil dieses Verfahrens ist, dass es eine geschlossene analytische Näherung für das Ergebnis des Prädiktionsschrittes liefert, die einfach auszuwerten ist. Der Nachteil ist, dass es auf Systeme ohne Systemrauschen beschränkt ist, und sich durch die zusätzliche Transformation die Dimension des Hyperraums mit jedem Prädiktionsschritt erhöht. Der letztgenannte Nachteil kann jedoch durch eine Rücktransformation in einen niederdimensionalen Raum mit erneuter Approximation kompensiert werden.

2.7 Diskussion

In diesem Kapitel wurde ein neuartiges Filterverfahren vorgestellt, dessen Unsicherheitsbeschreibung auf speziellen quadratischen Formen basiert, die mit Hilfe einer Transformation des Systemzustandes \underline{x}_k in einen höherdimensionalen Hyperraum S^* definiert werden. Diese so genannten *pseudo–quadratischen* Formen sind quadratische Formen in den transformierten Zustandsvariablen \underline{x}_k^* , nicht aber in den Originalzuständen \underline{x}_k . Auf Basis dieser pseudo–quadratischen Formen wurden zur Beschreibung komplexer stochastischer Unsicherheiten Pseudo–Gaußdichten definiert, welche spezielle Exponentialdichten sind. Diese Definition wurde auf den mengenbasierten Fall mit der Definition pseudo–ellipsoidaler Mengen übertragen. Die *Kernidee* des neuartigen Filterverfahrens ist es, die Messgleichung des Systems in dem höherdimensionalen Raum S^* in eine pseudo–lineare Form, die in der Literatur auch unter dem Begriff „linear–in–parameters (LIP)“ bekannt ist, zu erweitern. In S^* wird dann ein *lineares* Filterverfahren zur Lösung des ursprünglichen, nichtlinearen Filterproblems angewendet.

Der *Vorteil* des vorgestellten Verfahrens gegenüber häufig verwendeten, linearisierenden Filterverfahren wie dem *EKF* oder dem mengenbasierten Ellipsoidfilter ist, dass das resultierende Filterergebnis des neuen Verfahrens eine bessere Approximation der theoretisch optimalen, aber in der Regel nicht geschlossen berechenbaren Lösung ist. Für linearisierende Filterverfahren ergibt sich in jedem Filterschritt ein Approximationsfehler, der aus der notwendigen, konservativen Abschätzung des Linearisierungsfehlers resultiert. Für das Hyperraumverfahren wird der verbleibende Approximationsfehler mit steigender Dimension des verwendeten Hyperraums immer kleiner. Für den Fall einer stochastischen Unsicherheitsmodellierung wurde gezeigt [45], dass für polynomiale Nichtlinearitäten der Messgleichung mit dem vorgestellten Verfahren die exakte, theoretisch optimale Lösung berechnet werden kann. Im Falle einer mengenbasierten Unsicherheitsmodellierung ist mit Filterverfahren, wie dem in Anhang A.2 vorgestellten mengenbasierten Ellipsoidfilter [40], selbst für lineare Systeme nur eine approximative Berechnung des exakten Filterergebnisses möglich. Der zusätzliche Vorteil des Hyperraumverfahrens ist in diesem Fall, dass die theoretisch exakte, komplex geformte Menge der geschätzten Systemzustände durch pseudo-ellipsoidale Mengen besser approximiert werden kann als durch einfache ellipsoide Mengen oder achsenparallele Boxen. Empirisch wurde an Hand von Beispielen gezeigt, dass die durch das Hyperraumverfahren berechnete Approximation mit steigender Ordnung des Hyperraums gegen die theoretisch optimale Lösung konvergiert.

Der Vorteil des vorgestellten Verfahrens gegenüber Filterverfahren, die auf einer Diskretisierung des Zustandsraums basieren, ist die geschlossen analytische Darstellung des Filterergebnisses und die geringe Anzahl benötigter Parameter zur Darstellung der komplexen Unsicherheiten im Originalraum. Bekannte Verfahren dieser Klasse für den stochastischen Fall sind gitterbasierte Verfahren [34], die zum Beispiel auf Probleme der mobilen Robotik [104, 106] oder der Flugzeugführung [7] angewendet wurden. Bei einem hoch auflösenden Gitter entsteht schon für den zweidimensionalen Fall ein erheblicher Rechenaufwand zur Auswertung des Filterschrittes. Verallgemeinerungen auf höherdimensionale Probleme sind in der Regel nicht möglich [7]. Darüber hinaus ist der Prädiktionsschritt auf Grund der auszuwertenden diskreten Faltung auch für niederdimensionale Probleme sehr rechenaufwendig, selbst wenn optimierte Berechnungsverfahren [35] angewandt werden. Für den Fall mengenbasierter Unsicherheitsbeschreibungen wurden in letzter Zeit eine Reihe vergleichbarer Filterverfahren entwickelt [52, 53, 77], die auf einer Darstellung komplexer Mengen durch Einschachtelung in eine potentiell grosse Anzahl einfach parametrisierter Mengen, wie zum Beispiel achsenparalleler Boxen, beruhen. Der erreichte Zuwachs an Genauigkeit wird auch bei diesen Verfahren mit einer stark anwachsenden Komplexität der Beschreibung und damit auch der unterlagerten Filterverfahren erkauft.

Schließlich ergibt sich für das vorgestellte nichtlineare Filterverfahren im Falle einer mengenbasierten Unsicherheitsbeschreibung der Vorteil, dass sich die wünschenswerten Eigenschaften des unterlagerten, linearen mengenbasierten Ellipsoidfilters direkt auf das nichtlineare Verfahren übertragen. Zu diesen gehört, dass durch den Filterschritt keine zusätzliche Unsicherheit eingebracht wird, und dass das Filterergebnis immer eine garantierte, konservative Approximation des wahren Filterergebnisses ist.

Der *Nachteil* des vorgestellten Filterverfahrens ist, dass ein einfacher, geschlossen analytischer Algorithmus bislang nur für den Filterschritt existiert. Die Berechnung des Prädiktionsschrittes im stochastischen Fall erfordert die Auswertung von Integralen über

Exponentialdichten, die im Allgemeinen nicht geschlossen gelöst werden können. Daher muss für diese Berechnung auf iterative Verfahren zurückgegriffen werden, die mit einem erhöhten Rechenaufwand verbunden sind. Im mengenbasierten Fall existiert eine Lösung für den Prädiktionsschritt, die auf einer Approximation der prädizierten Unsicherheit in einem Hyperraum basiert, dessen Dimension mit der Zeit ansteigt. Dies führt zu einem mit der Zahl der durchgeführten Prädiktionsschritte ansteigenden Rechenaufwand. Ein weiterer Nachteil des Hyperraumverfahrens ist, dass die Rücktransformation in den Originalraum mit einem relativ hohen Rechenaufwand verbunden ist. Im mengenbasierten Fall erfordert die Auswertung der Menge der geschätzten Zustände die Lösung eines nicht-linearen Gleichungssystems, im stochastischen Fall müssen zur Berechnung von Momenten der posterioren Dichte Integrale über Exponentialdichten ausgewertet werden. Die Rücktransformation hat jedoch keinen Einfluss auf das rekursiv im Hyperraum berechnete Filterergebnis und muss nicht in jedem Filterschritt durchgeführt werden, sondern nur, wenn ein Schätzwert mit zugehöriger Unsicherheit im Originalraum benötigt wird. Daher ist dieser Nachteil nicht gravierend für das vorgestellte Verfahren. Des Weiteren wurde für die Berechnung von Momenten im stochastischen Fall eine Lösung gefunden [89], die den benötigten Rechenaufwand um eine Größenordnung reduziert, in dem das Problem auf die Lösung eines Differentialgleichungssystems mit algebraischen Nebenbedingungen zurückgeführt wurde.

Das vorgestellte Filterverfahren eignet sich daher sehr gut für statische Systeme mit nicht-linearen Messgleichungen, oder für einfache dynamische Systeme mit linearer Systemgleichung ohne Systemrauschen. Die Behandlung allgemeiner, nichtlinearer dynamischer Systeme ist mit den entwickelten Verfahren ebenfalls möglich, jedoch mit einem erhöhten Rechenaufwand verbunden. In diesem Fall sollte überprüft werden, ob eine Modellierung der Unsicherheiten durch Gaussian–Mixture–Dichten und die Anwendung dafür entwickelter Filterverfahren, wie sie in Kapitel 3 vorgestellt werden, eine vorteilhafte Alternative ist.

Kapitel 3

Nichtlineare Filterverfahren basierend auf Gaussian–Mixture–Dichten

3.1 Einleitung

3.1.1 Motivation für den Einsatz nichtlinearer Filterverfahren auf der Basis von Gaussian–Mixture–Dichten

Ein universales, in vielen Bereichen verwendetes Modell zur Beschreibung von Wahrscheinlichkeitsdichten sind die so genannten Gaussian–Mixture–Dichten, d.h. Summen von Gaußdichten [83]. Beispiele für Anwendungsgebiete sind neuronale Netzwerke [83], Spracherkennung [97], Bildrekonstruktion [109], Analyse von EEG–Daten [93] oder Visualisierung hochdimensionaler Daten [12]. Ein Grund für ihre weite Verbreitung ist ihre Eigenschaft als universaler Approximator, die garantiert, dass sich jede gegebene stetige Wahrscheinlichkeitsdichte beliebig genau durch eine Gaussian–Mixture–Dichte approximieren lässt [72]. Daneben kann eine Reihe wichtiger analytischer Zusammenhänge, die für Gaußdichten gelten, direkt auf Gaussian–Mixture–Dichten verallgemeinert werden, da diese lineare Kombinationen von Gaußdichten sind.

Daher werden Gaussian–Mixture–Dichten neben den in Kapitel 2 beschriebenen Exponentialdichten häufig als angenommene Dichtebeschreibung für die im Rahmen nichtlinearer Filterverfahren auftretenden Wahrscheinlichkeitsdichten [50, 102] verwendet. In diesem Kapitel wird ein *neuartiges Verfahren* zur nichtlinearen Filterung auf der Basis dieser Familie von Wahrscheinlichkeitsdichten vorgestellt, das zum Ziel hat, eine durchgängige, analytische, wahrscheinlichkeitstheoretische Behandlung des Filterproblems ohne einschränkende, in der Praxis nicht zutreffende Zusatzannahmen umzusetzen.

Dieses rekursive Filterverfahren lässt sich gemäß der Einordnung aus Kapitel 1.3.2 als Filterverfahren mit angenommener Dichtebeschreibung klassifizieren. Die gewünschte Approximationsgenauigkeit des Verfahrens kann durch den Benutzer vorgegeben werden, so dass abhängig von der Zielanwendung ein guter Kompromiss zwischen erforderlichem Rechenaufwand und erzielter Genauigkeit gefunden werden kann. Das Verfahren eignet sich daher gut für praktisch relevante Anwendungen. Dies wird in Kapitel 4 am Problem der Lokalisierung von Mobiltelefonen demonstriert, welches auf Grund seiner stark nichtlinearen Messgleichungen nicht zufrieden stellend mit herkömmlichen, linearisierenden Filterverfahren wie dem Extended–Kalman–Filter (*EKF*) gelöst werden kann. Im Gegensatz zu dem in Kapitel 2 behandelten, nichtlinearen Filterverfahren auf der Basis von Exponentialdichten kann der Prädiktionsschritt für das im Folgenden vorgestellte Verfahren auch

im Falle eines allgemeinen nichtlinearen Systemmodells in direkter Analogie zum Filterschritt behandelt werden. Für den Spezialfall eines linearen Systemmodells mit additivem gauß'schen Systemrauschen ist auf Grund der verwendeten Gaussian–Mixture–Dichten sogar eine geschlossen analytische Behandlung des Prädiktionsschrittes möglich. Dies wird in Kapitel 3.6.1 behandelt.

3.1.2 Beispiel: Nichtlineare Abstandsmessung

Das folgende Beispiel veranschaulicht, wie der durch Linearisierung nichtlinearer Messgleichungen entstehende Fehler zur Divergenz der Positionsschätzung eines Lokalisierungsalgorithmus führen kann. Als Filterverfahren für den Lokalisierungsalgorithmus wird das bekannte Extended–Kalman–Filter (*EKF*) eingesetzt, welches eines der am häufigsten verwendeten Standardverfahren bei Lokalisierungsproblemen ist. Im Kontext von Robotikanwendungen wurde es zu Lokalisierung in Innenräumen [3, 19, 20, 55, 95] oder Außenumgebungen [13] eingesetzt; die Lokalisierung von Benutzern in Mobilfunknetzen wurde unter anderem in [47] untersucht und eine GPS–basierte Anwendung in [85] vorgestellt. Gemäß der Gliederung in Bild 1.1 läßt sich das *EKF* als Filterverfahren mit Approximation der Systembeschreibung klassifizieren, siehe auch Kapitel 1.3.2. Aus dieser Approximation resultiert die einfache analytische Berechenbarkeit des *EKF*, sie führt jedoch auch zu den Linearisierungsfehlern, welche die Divergenz des Filters verursachen können.

BEISPIEL 3.1.1 *Linearisierungsfehler bei linearisierten Abstandsmessungen.*

In Bild 3.1 ist ein Beispiel für ein zweidimensionales Lokalisierungsproblem dargestellt, bei dem die Position des Benutzers B durch eine unsicherheitsbehaftete Abstandsmessung d_1 zu einer Basisstation BS_1 geschätzt werden soll. Die Lage der Basisstation BS_1 sei der Ursprung des Referenzkoordinatensystems S_0 und ist somit exakt bekannt. Die nichtlineare Abstandsmessung d_1 ist durch additives, weißes, gauß'sches Rauschen w mit Standardabweichung σ_w gestört. Es sei keine priore Information über die Position des Benutzers B vorhanden. Daher wird die priore Schätzung $f_p(\underline{x}^p)$ als eine Gaußdichte mit Erwartungswert $\hat{\underline{x}}^p$ gewählt, deren Standardabweichung so groß ist, dass sie im interessierenden Bereich näherungsweise einer Gleichverteilung entspricht.

Bild 3.1 zeigt die $3\text{-}\sigma$ –Grenze der prioren Schätzung $f_p(\underline{x}^p)$ als durchgezogenen Kreis. Die gegebene Messung $z_k = d_1 = 10$ m ist durch den gestrichelten Kreis dargestellt, der durch die wahre Lage des Benutzers B geht. Die $3\text{-}\sigma$ –Grenzen dieser Messung sind durch durchgezogene Linien gekennzeichnet. Bild 3.2(a) zeigt, wie durch Linearisierung der nichtlinearen Abstandsmessung um den Erwartungswert $\hat{\underline{x}}^p$ der prioren Schätzung eine posteriore Schätzung $f_e(\underline{x}^e)$ mit Erwartungswert $\hat{\underline{x}}^e$ für die Lage des Benutzers B berechnet wird. Diese Berechnung erfolgt durch Anwendung der bekannten Gleichungen des Extended–Kalman–Filters für den Filterschritt. Durch die hierzu erforderliche Linearisierung ergibt sich ein Linearisierungsfehler, der dazu führt, dass bereits nach einem Filterschritt die wahre Lage des Benutzers nicht mehr innerhalb der $3\text{-}\sigma$ –Grenze der posterioren Schätzung $f_e(\underline{x}^e)$ liegt, das Filter also divergiert ist. Wird im nächsten Messschritt eine weitere unsicherheitsbehaftete Messung zu einer zweiten Basisstation BS_2 durchgeführt (Bild 3.2(b)), so verringert sich die Unsicherheit in der Lageschätzung $f_e(\underline{x}^e)$ wie erwartet weiter, allerdings liegt die wahre Lage des Benutzers weiterhin außerhalb der $3\text{-}\sigma$ –Grenze der Schätzung $f_e(\underline{x}^e)$. Durch den Einsatz nichtlinearer Filterverfahren kann dieses Problem korrekt behandelt und gelöst werden.

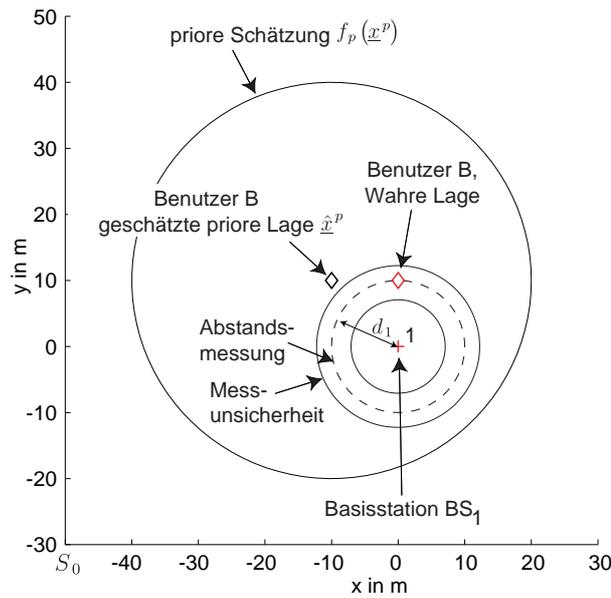
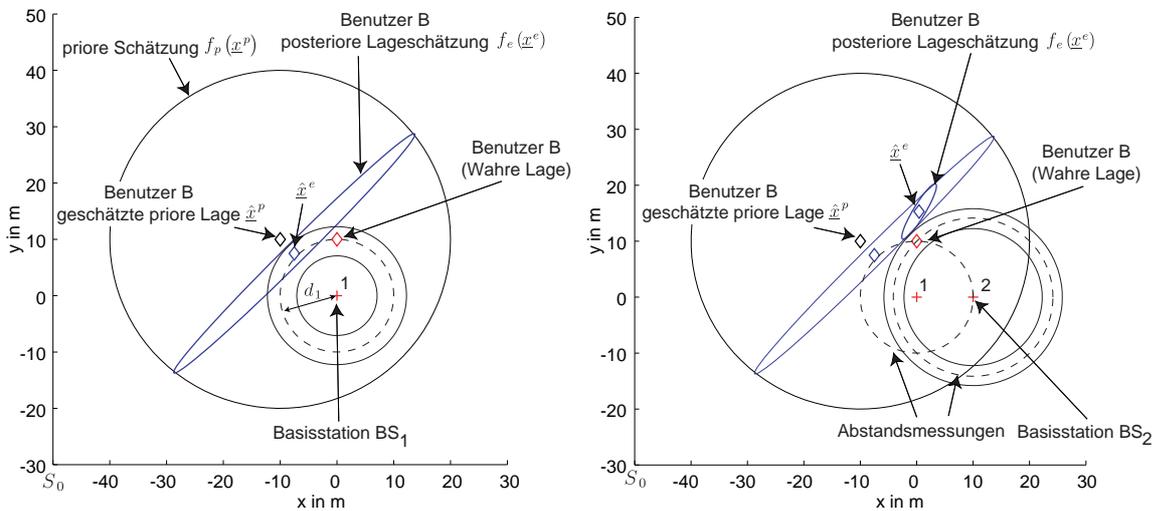


Bild 3.1: Statische Lokalisierung eines Benutzers B über (nichtlineare) Abstandsmessungen. Gegeben ist eine unsichere, priore Schätzung $f_p(\underline{x}^p)$ der Lage von B mit Erwartungswert $\hat{\underline{x}}^p$ und eine unsicherheitsbehaftete Abstandsmessung d_1 zur Basisstation BS_1 , deren Lage exakt bekannt ist.



(a) Priore Schätzung $f_p(\underline{x}^p)$ der Lage des Benutzers B und posteriore Schätzung $f_e(\underline{x}^e)$ mit Erwartungswert $\hat{\underline{x}}^e$ nach einem EKF -Filterschritt mit Linearisierung der Messgleichungen. Man beachte: Die wahre Lage liegt *außerhalb* der $3\text{-}\sigma$ -Grenze der posterioren Schätzung $f_e(\underline{x}^e)$.

(b) Nach Durchführung eines weiteren Filterschrittes zur Basisstation BS_2 divergiert die Schätzung für die Lage des Benutzers auf Grund der Linearisierungsfehler.

Bild 3.2: Statische Lokalisierung eines Benutzers B über (nichtlineare) Abstandsmessungen.

3.2 Dichterepräsentation durch Gaussian–Mixture–Dichten

Wie in Kapitel 1.3.1 ausgeführt, muss zur analytischen Beschreibung der im Rahmen der Filterung auftretenden Wahrscheinlichkeitsdichten $f(\underline{x}_{k+1}|\mathbf{Z}^k)$, $f(\underline{x}_k|\mathbf{Z}^k)$ zu approximativen Beschreibungen mit einer endlichen Anzahl von Parametern übergegangen werden [41, 62]. Für eine solche vorab angenommene Dichtebeschreibung wird dann im Rahmen des Filterverfahrens der Parametersatz ermittelt, für den die approximative Beschreibung der Wahrscheinlichkeitsdichte minimal von der theoretisch exakten Wahrscheinlichkeitsdichte, welche im allgemeinen Fall bei kontinuierlichen Systemen durch einen unendlichen Satz an Parametern $\underline{\eta}$ beschrieben wird, abweicht.

Die am häufigsten verwendete analytische Dichtebeschreibung ist die Normaldichte oder Gaußdichte [46]. Für einen N -dimensionalen, gaußverteilten Vektor \underline{x} von Zufallsvariablen ist eine abkürzende Schreibweise für die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion gemäß

$$f(\underline{x}) = \mathcal{N}(\underline{x} - \underline{\mu}_x, \mathbf{C}_x) \quad (3.1)$$

definiert, wobei $\underline{\mu}_x \in \mathbb{R}^N$ der Erwartungswert und \mathbf{C}_x die Kovarianzmatrix der Gaußdichte sind [46]. Eine häufig verwendete Rechtfertigung für die Annahme einer Gaußdichte als Verbundwahrscheinlichkeitsdichte eines zu schätzenden Vektors $\underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$ von Zufallsvariablen ist der zentrale Grenzwertsatz [46], der besagt, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion einer Summe statistisch unabhängiger Zufallsvariablen mit zunehmender Anzahl der Summanden gegen eine Gauß'sche Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion konvergiert. Diese Annahme ist für die Wahrscheinlichkeitsdichten der Primärunsicherheiten \underline{w} und \underline{v} gemäß (1.1), die in die Systemfortschreibung und die Messungen eingehen, oft näherungsweise gerechtfertigt. Allerdings lässt sich diese Annahme bei nichtlinearen Filterproblemen, das heißt bei Filterung im Falle nichtlinearer System- oder Messgleichungen, *nicht* auf die Wahrscheinlichkeitsdichten der geschätzten Systemzustände übertragen, welche im Allgemeinen stark von einer Gaußdichte abweichen. Wie das Beispiel in Kapitel 3.1 gezeigt hat, kann dies zur Divergenz von linearisierenden Filterverfahren führen, die Gaußdichten als angenommene Wahrscheinlichkeitsdichten verwenden. So genannte multimodale Wahrscheinlichkeitsdichten, das heißt Wahrscheinlichkeitsdichten mit mehreren Maxima, die unter anderem bei Lokalisierungsproblemen häufig auftreten [26, 106], können durch Gaußdichten ebenfalls nur extrem schlecht approximiert werden.

Eine analytische Dichtebeschreibung, die diese Nachteile vermeidet, und darüber hinaus die einfache analytische Handhabbarkeit der Gaußdichte beibehält, ist die so genannte Gaussian–Mixture–Dichte, also eine endliche, gewichtete Summe von Gaußdichten. Sie ist im vektorwertigen Fall durch

$$f(\underline{x}) = \sum_{j=1}^L w_j^2 \mathcal{N}(\underline{x} - \underline{\mu}_{x,j}, \mathbf{C}_{x,j}) \quad (3.2)$$

definiert, wobei $\underline{\mu}_{x,j}$ der Mittelwert der j -ten Dichte der Gaussian–Mixture–Dichte ist und $\mathbf{C}_{x,j}$ die zugehörige Kovarianzmatrix. w_j^2 ist der skalare, nicht negative Gewichtungsfaktor

der j -ten Dichte, wobei die Summe aller Gewichtungsfaktoren w_j^2 gemäß

$$\sum_{j=1}^L w_j^2 = 1 \tag{3.3}$$

1 ergeben muss, damit (3.2) eine normierte Dichte repräsentiert. Jede einzelne Dichte f_j der Gaussian–Mixture–Dichte f wird also durch $N + 1 + (N + 1)\frac{N}{2}$ Parameter $\underline{\eta}_j$ mit

$$\underline{\eta}_j = \left[w_j, \mu_{x,j}^1, \dots, \mu_{x,j}^N, c_{x,j}^{1,1}, \dots, c_{x,j}^{N,N} \right]^T \tag{3.4}$$

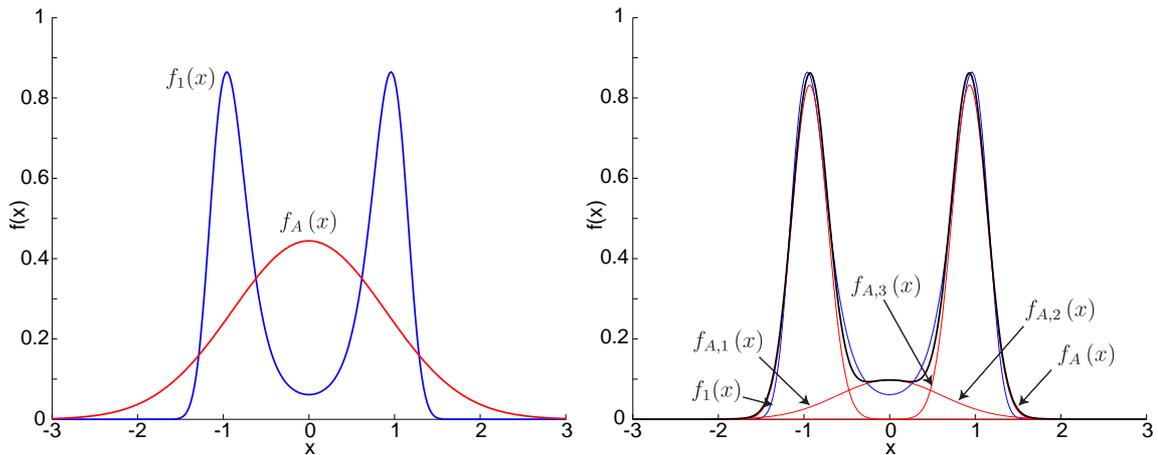
beschrieben. Dabei ist w_j das (nicht quadrierte) Gewicht der Dichte f_j , $\mu_{x,j}^k, k = 1 \dots N$ sind die 1. bis N -te Komponente des Erwartungswerts $\underline{\mu}_{x,j}$ und $c_{x,j}^{k,l}, k, l = 1 \dots N, k \geq l$ sind die Parameter der symmetrischen, positiv definiten Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_{x,j}$ der Dichte f_j . Der gesamte Parametersatz $\underline{\eta}$ von $f(\underline{x}) = f(\underline{x}, \underline{\eta})$ umfasst $K = L \left(N + 1 + (N + 1)\frac{N}{2} \right)$ Parameter in der Form $\underline{\eta} = \left[\underline{\eta}_1^T, \underline{\eta}_2^T, \dots, \underline{\eta}_L^T \right]^T$. Im Folgenden bezeichnen wir Gaussian–Mixture–Dichten, die als vorab angenommene Dichtebeschreibungen zur Approximation einer exakten, nicht mit endlich vielen Parametern darstellbaren Dichte verwendet werden, stets mit $f_A(\underline{x}, \underline{\eta})$. Das folgende Beispiel vergleicht zwei Approximationen einer gegebenen, multimodalen Wahrscheinlichkeitsdichte durch eine Gaußdichte und eine Gaussian–Mixture–Dichte.

BEISPIEL 3.2.1 *Approximationsfähigkeit einer Gaussian-Mixture-Dichte im Vergleich zu einer reinen Gaußdichte.*

Gegeben sei eine eindimensionale, multimodale Wahrscheinlichkeitsdichte $f_1(x)$, die durch eine Gaussian–Mixture–Dichte $f_A(x)$ approximiert werden soll, siehe Bild 3.3(a). Im Fall $L = 1$, das heißt für eine reine Gaußdichte, werden hierzu Erwartungswert und Standardabweichung der approximierenden Dichte $f_A(x)$ gleich den entsprechenden Parametern von $f_1(x)$ gesetzt, das heißt $\mu_A = \mu_1 = 0$ und $\sigma_A = \sigma_1 = 0.898$, wodurch die Kullback–Leibler Distanz zwischen $f_1(x)$ und $f_A(x)$ minimiert wird. Eine sehr viel bessere Approximation kann mit einer Gaussian–Mixture–Dichte mit nur $L = 3$ Summanden erzielt werden, wie Bild 3.3(b) demonstriert. Die Parameter $\underline{\eta}_A$ der approximierenden Dichte wurden für das dargestellte Beispiel mittels des Verfahrens der kleinsten Fehlerquadrate optimiert, wobei ein sinnvoller initialer Parametersatz vorgegeben wurde. Die drei Summenterme der Gaussian–Mixture–Dichte (dünn, gestrichelt) und die resultierende Dichte (dick, durchgezogen) sind eingezeichnet.

Die *Vorteile* der Verwendung einer Gaussian–Mixture–Dichte als angenommene Dichtebeschreibung [41, 62] sind

- **Universelle Approximationsfähigkeit.** Ist keine Beschränkung für die Anzahl der Summanden L der Gaussian–Mixture–Dichte vorgegeben, kann mit ihr unter schwachen Voraussetzungen [72] *jede beliebige* Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(\underline{x})$ mit verschwindend kleinem Fehler ε_f approximiert werden.



(a) Approximation von $f_1(x)$ durch eine Gaußdichte $f_A(x)$ mit gleichem Erwartungswert $\mu_A = \mu_1 = 0$ und gleicher Standardabweichung $\sigma_A = \sigma_1 = 0.898$.

(b) Approximation von $f_1(x)$ durch eine Gaussian–Mixture–Dichte $f_A(x)$ mit $L = 3$ Summanden. Der resultierende Approximationsfehler ist erheblich kleiner als in Bild 3.3(a).

Bild 3.3: Anschaulicher Vergleich der Approximationsfähigkeit von Gaussian–Mixture–Dichten gegenüber Gaußdichten für eine gegebene, multimodale Wahrscheinlichkeitsdichte $f_1(x)$.

- Gültigkeit der Dichtebeschreibung. Für jede vorgegebene Anzahl L der Summanden der Gaussian–Mixture–Dichte ist (3.2) eine gültige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, das heißt

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) &\geq 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^N \\ \int_{\mathbb{R}^N} f(\underline{x}) &= 1 . \end{aligned} \tag{3.5}$$

- Einfache analytische Handhabbarkeit. Die analytischen Zusammenhänge, welche für die Gaußdichte gelten, lassen sich direkt auf Gaussian–Mixture–Dichten verallgemeinern. Dies wird in Kapitel 3.5 und Kapitel 3.6 zur Herleitung des Filterschrittes bzw. des Prädiktionsschrittes ausgenutzt.
- Einfache Berechnung der Prädiktionsschrittes. Eine besonders wichtige Eigenschaft der Gaussian–Mixture–Dichten ist, dass sich der Prädiktionsschritt im Gegensatz zu den in Kapitel 2 behandelten Exponentialdichten verhältnismäßig einfach berechnen lässt, siehe auch Kapitel 3.6.

Ein *Nachteil* einer Gaussian–Mixture–Dichte ist, dass es im Gegensatz zu einer Gaußdichte *nicht* einfach möglich ist, aus einem Satz von K vorgegebenen Momenten alle K Parameter $\underline{\eta}$ der Gaussian–Mixture–Dichte zu bestimmen. Des Weiteren wird kein sinnvolles Abstandsmaß zwischen der Gaussian–Mixture–Dichte $f_A(\underline{x}, \underline{\eta})$ und einer gegebenen Dichte $f(\underline{x})$ minimiert, wenn die ersten K Momente von $f_A(\underline{x}, \underline{\eta})$ und $f(\underline{x})$ gleichgesetzt

werden und daraus die Parameter $\underline{\eta}$ von $f_A(\underline{x}, \underline{\eta})$ bestimmt werden. Daher sind zur Herleitung von Filterverfahren auf der Basis von Gaussian–Mixture–Dichten Verfahren zur Berechnung optimaler Parameter $\underline{\eta}_{opt}$ der approximierenden Dichte notwendig. Kapitel 3.3 gibt einen kurzen Überblick über den Stand der Technik und erläutert die Defizite bisheriger Filterverfahren. In Kapitel 3.4 wird ein neuartiges Filterverfahren vorgeschlagen, das die dargestellten Defizite beseitigt.

Verwendete Abkürzungen für die Bezeichnung von Wahrscheinlichkeitsdichten

In den folgenden Ausführungen werden aus Gründen der Übersichtlichkeit abkürzende Bezeichnungen für die in Kapitel 1.3.1 eingeführten Wahrscheinlichkeitsdichten verwendet. Diese sind in Tabelle 3.1 dargestellt. Wahre, theoretisch exakte Dichten werden durch eine Tilde gemäß $\tilde{f}(\underline{x}_k)$ gekennzeichnet.

Tabelle 3.1: Abkürzende Bezeichnungen für Wahrscheinlichkeitsdichten

Dichtebezeichnung	Abkürzung	Beschreibung
$f(\underline{x}_k \mathbf{Z}^k)$	$\tilde{f}_e(\underline{x}_k)$	wahre posteriore Dichte nach dem Filterschritt, Zeitpunkt k
$f(\underline{x}_k \mathbf{Z}^{k-1})$	$\tilde{f}_p(\underline{x}_k)$	wahre prädizierte Dichte, Zeitpunkt k
$f(z_k \underline{x}_k)$	$f_v(z_k - \underline{h}_k(\underline{x}_k))$	Likelihoodfunktion für additives Messrauschen, Zeitpunkt k

3.3 Stand der Technik

Für den Filterschritt und den Prädiktionsschritt eines Filterverfahrens mit Gaussian–Mixture–Dichten als angenommene Dichtebeschreibung werden die Parameter $\underline{\eta}^e$ der posterioren Dichte

$$f_e(\underline{x}_k) = c_k \sum_{j=1}^L (w_{jk}^e)^2 \mathcal{N}(\underline{x}_k - \underline{\mu}_{j,k}^e, \mathbf{C}_{j,k}^e) \quad , \quad (3.6)$$

und die Parameter $\underline{\eta}^p$ der prädizierten Dichte

$$f_p(\underline{x}_k) = \sum_{j=1}^L (w_{jk+1}^p)^2 \mathcal{N}(\underline{x}_{k+1} - \underline{\mu}_{j,k+1}^p, \mathbf{C}_{j,k+1}^p) \quad (3.7)$$

berechnet, die die Abweichung der approximierenden Dichten $f_e(\underline{x}_k)$, $f_p(\underline{x}_k)$ zu den wahren, nach Bayes resultierenden Dichten $f(\underline{x}_k | \mathbf{Z}^k)$ (1.9), bzw. $f(\underline{x}_{k+1} | \mathbf{Z}^k)$ (1.8) minimieren.

Filterverfahren auf der Basis von Gaussian–Mixture–Dichten, die heute Stand der Technik sind, siehe zum Beispiel [50], lassen sich danach klassifizieren, ob diese Berechnung *simultan* für alle Parameter erfolgt, oder für jede der L Teildichten *individuell* durchgeführt

wird. Eine individuelle Berechnung, wie sie die ersten Verfahren [102] verwendeten, ist algorithmisch einfach handhabbar und führt auf eine Bank von *Kalman*-Filtern, ergibt jedoch nur eine *suboptimale* Approximation der wahren Dichte. In [50] wird eine quadratische Norm zur simultanen Optimierung der Gewichte w_{jk} vorgeschlagen, die auf einer Auswertung der approximierenden Dichte an einer endlichen Zahl diskreter Punkte beruht, welche als Kollokationspunkte bezeichnet werden. Die Berechnung der Gewichte erfolgt aus Komplexitätsgründen jedoch ebenfalls separat für jede Teildichte. Wie in [41] dargelegt wird, führt die Berechnung eines optimalen Satzes von Gewichten w_{jk} auf ein Kleinste-Quadrate-Problem mit der Nebenbedingung, dass alle w_{jk} nicht negativ sind. Ein solches Problem kann nur numerisch gelöst werden.

Ein Verfahren mit *simultaner* iterativer Berechnung aller Parameter $\underline{\eta}$ durch den Expectation-Maximization-Algorithmus (EM) wird in [87] vorgeschlagen. Als Anwendung werden wahrscheinlichkeitstheoretische Entscheidungsprobleme betrachtet. In [11] wird in tutorieller Form dargestellt, wie die Parameter einer Gaussian-Mixture-Dichte durch den EM-Algorithmus optimiert werden können, allerdings keine Anwendung auf Filterverfahren gegeben. [114] beschreibt ein Verfahren mit verbesserter Konvergenz, das auf der Minimierung einer Kullback-Leibler Distanz beruht, und seine Anwendung auf Probleme der Handschrifterkennung.

Eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung der gesuchten Parameter $\underline{\eta}$ der angenommenen Gaussian-Mixture-Dichte ist [41], die Momente niederer Ordnung der wahren, gesuchten Dichtefunktion zu bestimmen, und mit den Momenten der Gaussian-Mixture-Dichte gleichzusetzen. Wie oben erläutert, wird dadurch jedoch kein sinnvolles Abstandsmaß zwischen den zwei Dichten minimiert, und die Momente höherer Ordnung werden mehr oder weniger willkürlich gewählt. Diese Momente sind jedoch entscheidend für die genaue *Form* der approximierenden Wahrscheinlichkeitsdichte und daher von großer Bedeutung für das Resultat der folgenden Filterschritte des rekursiven Filterverfahrens.

3.4 Optimale Filterung mit Formapproximation: Das *PGME*-Verfahren

Im vorangegangenen Kapitel wurde dargelegt, wie mit Filterverfahren, die heute Stand der Technik sind, eine Filterung mit Gaussian-Mixture-Dichten durchgeführt werden kann [41, 102]. Dabei ist offensichtlich, dass eine individuelle Anpassung der einzelnen Parameter der Gaussian-Mixture-Dichte ein suboptimales Verfahren darstellt und die Approximationsfähigkeit der angenommenen Dichtefunktion – in diesem Fall der Gaussian-Mixture-Dichte, nicht vollständig genutzt wird.

Im Folgenden wird ein neuartiges Filterverfahren hergeleitet, das für eine gegebene Anzahl L von Approximationsdichten durch *simultane* Optimierung aller Parameter $\underline{\eta}$ eine optimale Lösung des Filterproblems im Sinne eines geeignet definierten Optimalitätskriteriums erzielt. Das Verfahren berechnet die Approximation durch Gaussian-Mixture-Dichten dabei nicht in einem Schritt, sondern durch eine progressive Überführung der prioren in die posteriore Dichte – daher der Name *PGME*, welcher für *Progressive Gaussian Mixture Estimator* steht.

3.4.1 Grundidee der Filterung mit Formapproximation

Im Rahmen des neuartigen Filterverfahrens wird zur Bestimmung der optimalen Parameter $\underline{\eta}_{opt}$ der approximierenden Gaussian–Mixture–Dichte $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ ausgenutzt, dass das hier vorliegende Approximationsproblem aus einem rekursiven Filterverfahren hervorgeht. Daher kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit des Verfahrens angenommen werden, dass *vor* der Durchführung eines jeden Filterschrittes zum Zeitpunkt k eine bekannte Dichtefunktion $f_p(\underline{x}_k)$ in Form einer Gaussian–Mixture–Dichte vorliegt, die aus dem vorangegangenen Prädiktionsschritt hervorgegangen ist. Analog dazu liege vor jedem Prädiktionsschritt eine bekannte Wahrscheinlichkeitsdichte $f_e(\underline{x}_k)$ aus dem vorangegangenen Filterschritt vor.

Ziel des neuartigen Filterverfahrens, das als *Filterung mit Formapproximation* bezeichnet wird, ist dann, ausgehend von dieser bekannten Dichte $f_p(\underline{x}_k)$ bzw. $f_e(\underline{x}_k)$ eine möglichst präzise Approximation $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ für die wahre Dichte zu finden, die durch die nichtlineare Abbildung dieser bekannten Dichtefunktion über den betrachteten Prädiktions- oder Filterschritt hinweg entsteht. Die Approximation soll dabei wieder aus der gleichen Klasse angenommener Dichtefunktionen stammen, also eine Gaussian–Mixture–Dichte sein, wobei die Anzahl der Parameter konstant bleiben soll. Eine abgeschwächte Forderung ist, dass die Anzahl der Parameter mit der Komplexität der resultierenden, wahren Dichtefunktion variiert. Nicht akzeptabel für ein praktisch durchführbares, rekursives Verfahren ist jedoch, wenn sich die Zahl der Parameter in jedem Filterschritt vervielfacht und somit exponentiell anwächst [69].

Die *Kernidee* des neuartigen Filterverfahrens ist, die approximierende Dichte $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ nicht direkt durch Lösung eines Optimierungsproblems zu bestimmen, sondern eine parametrisierte Dichte $\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau)$ mit einem skalaren Progressionsparameter $\tau \in [0, 1]$ zu definieren, die *stetig* von der bekannten Dichtefunktion $f_p(\underline{x}_k)$ bzw. $f_e(\underline{x}_k)$ in die gesuchte, wahre Dichtefunktion $\tilde{f}_e(\underline{x}_k)$ bzw. $\tilde{f}_p(\underline{x}_{k+1})$ nach Durchführung des Filter- bzw. Prädiktionsschrittes übergeht. Tabelle 3.2 gibt die Wahrscheinlichkeitsdichten an, die die parametrisierte Dichte für $\tau = 0$ und $\tau = 1$ im Filter- und Prädiktionsschritt annimmt. Für eine infinitesimale Änderung des Parameters τ kann dann die zugehörige infinitesimale Änderung der Parameter $\underline{\eta}$ der approximierenden Dichte $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ bestimmt werden. Dies erfolgt durch eine *parametrische Adaption* von $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ durch Minimierung eines geeignet definierten Gütemaßes und eine *strukturelle Adaption* durch Anpassung der Anzahl der Teildichten von $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$. Das Gütemaß quantifiziert die Ähnlichkeit der approximierenden Dichte $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ mit der parametrisierten, wahren Dichte $\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau)$. Ein kanonisches, in der Literatur oft verwendetes Maß ist die Kullback–Leibler Distanz. Für das hier vorgestellte Verfahren wird jedoch, wie in Kapitel 3.4.2 näher beschrieben, statt dessen ein quadratisches Gütemaß verwendet, dessen Ableitungen nach den Parametern $\underline{\eta}$ sich besonders einfach berechnen lassen. Durch diese Vorgehensweise wird das bei Optimierungsproblemen typischerweise auftretende Problem behoben, dass anstelle einer global optimalen Lösung nur ein lokales Minimum der zugehörigen Gütefunktion gefunden wird. Bei dem vorgestellten Filterverfahren handelt es sich daher *nicht* um ein Gradientenverfahren. Für den EM–Algorithmus wurde eine vergleichbare Vorgehensweise unter dem Begriff „Deterministic Annealing EM“ zur Parameteroptimierung in neuronalen Netzwerken vorgeschlagen [108]. Für die Durchführung des Prädiktions- und Filterschrittes ist es erforderlich, Integrale auszuwerten, mit denen implizit eine Näherung für die

Tabelle 3.2: Wahrscheinlichkeitsdichten, welche die parametrisierte Dichte $\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau)$ zu Beginn und Ende der Progression annimmt.

	Startdichte, Zeitschritt k	Enddichte
Filterschritt	$\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau = 0) = f_p(\underline{x}_k)$	$\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau = 1) = \tilde{f}_e(\underline{x}_k)$
Prädiktionsschritt	$\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau = 0) = f_e(\underline{x}_k)$	$\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau = 1) = \tilde{f}_p(\underline{x}_{k+1})$

<p>(1) Initialisierung der approximierenden Dichten: $f_A(\underline{x}_k, \eta)$ mit</p> $f_A(\underline{x}_k, \eta) = \begin{cases} f_e(\underline{x}_k) & \text{für den Prädiktionsschritt} \\ f_p(\underline{x}_k) & \text{für den Filterschritt} \end{cases}$ <p>Initialisierung des Progressionsparameters $\tau = 0$.</p>					
<p>Solange Progressionsparameter $\tau < 1$:</p> <table border="1" style="width: 100%;"> <tr> <td>Inkrementelle Vergrößerung des Progressionsparameters τ: $\tau = \tau + \Delta\tau$</td> </tr> <tr> <td>(2) Stetige Überführung der parametrisierten Wahrscheinlichkeitsdichte $\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau)$ von der prioren Wahrscheinlichkeitsdichte in die wahre, posteriore Wahrscheinlichkeitsdichte mit Progressionsparameter τ: $\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, 0) \rightarrow \tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, 1)$ für $\tau \in [0, 1]$</td> </tr> <tr> <td>(3) Berechnung der Abweichung der approximierenden Dichte $f_A(\underline{x}_k, \eta)$ von der wahren parametrisierten Dichte $\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau)$ mit quadratischem Gütekriterium $G(\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau), f_A(\underline{x}_k, \eta))$.</td> </tr> <tr> <td>(4) Parametrische Adaption: Berechnung eines lokal optimalen Parametersatzes η_{min}, der $G(\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau), f_A(\underline{x}_k, \eta))$ minimiert.</td> </tr> <tr> <td>(5) Strukturelle Adaption: Aufteilen oder Zusammenfassen von Teildichten $f_{A,j}(\underline{x}_k, \eta)$.</td> </tr> </table>	Inkrementelle Vergrößerung des Progressionsparameters τ : $\tau = \tau + \Delta\tau$	(2) Stetige Überführung der parametrisierten Wahrscheinlichkeitsdichte $\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau)$ von der prioren Wahrscheinlichkeitsdichte in die wahre, posteriore Wahrscheinlichkeitsdichte mit Progressionsparameter τ : $\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, 0) \rightarrow \tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, 1)$ für $\tau \in [0, 1]$	(3) Berechnung der Abweichung der approximierenden Dichte $f_A(\underline{x}_k, \eta)$ von der wahren parametrisierten Dichte $\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau)$ mit quadratischem Gütekriterium $G(\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau), f_A(\underline{x}_k, \eta))$.	(4) Parametrische Adaption: Berechnung eines lokal optimalen Parametersatzes η_{min} , der $G(\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau), f_A(\underline{x}_k, \eta))$ minimiert.	(5) Strukturelle Adaption: Aufteilen oder Zusammenfassen von Teildichten $f_{A,j}(\underline{x}_k, \eta)$.
Inkrementelle Vergrößerung des Progressionsparameters τ : $\tau = \tau + \Delta\tau$					
(2) Stetige Überführung der parametrisierten Wahrscheinlichkeitsdichte $\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau)$ von der prioren Wahrscheinlichkeitsdichte in die wahre, posteriore Wahrscheinlichkeitsdichte mit Progressionsparameter τ : $\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, 0) \rightarrow \tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, 1)$ für $\tau \in [0, 1]$					
(3) Berechnung der Abweichung der approximierenden Dichte $f_A(\underline{x}_k, \eta)$ von der wahren parametrisierten Dichte $\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau)$ mit quadratischem Gütekriterium $G(\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau), f_A(\underline{x}_k, \eta))$.					
(4) Parametrische Adaption: Berechnung eines lokal optimalen Parametersatzes η_{min} , der $G(\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau), f_A(\underline{x}_k, \eta))$ minimiert.					
(5) Strukturelle Adaption: Aufteilen oder Zusammenfassen von Teildichten $f_{A,j}(\underline{x}_k, \eta)$.					
<p>Ergebnis: Optimale Approximation $f_A(\underline{x}_k, \eta)$ der posterioren Wahrscheinlichkeitsdichte $\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, 1)$ in Sinne von minimalem G.</p>					

Bild 3.4: Nichtlineare Filterung mit Formapproximation, Grundprinzip.

wahre, parametrisierte Dichte $\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau)$ berechnet wird. Eine analytische Berechnung dieser Integrale ist im Allgemeinen auch für das verwendete einfache quadratische Gütemaß *nicht* möglich. Daher müssen effiziente Verfahren zur näherungsweise Auswertung der auftretenden Integrale verwendet werden. Ein neuartiges Verfahren wird in Kapitel 3.5.5 detailliert erläutert.

In Bild 3.4 ist die grundlegende Vorgehensweise des Verfahrens der *Filterung mit Formapproximation* dargestellt. Diese ist für den Filterschritt, der in Kapitel 3.5 dargestellt wird, und den Prädiktionsschritt (siehe Kapitel 3.6) analog. Allerdings unterscheidet sich das Verfahren zur stetigen Überführung der prioren Wahrscheinlichkeitsdichte in die posteriore Wahrscheinlichkeitsdichte gemäß Schritt (2) und die Art der auszuwertenden Integrale für

das quadratische Gütemaß in Schritt (3). Im Ablauf des Filterverfahrens werden die lokal optimalen Parameter $\underline{\eta}$ der approximierenden Dichte für jede infinitesimale Änderung der parametrisierten Dichte $\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau)$ durch Lösung eines Optimierungsproblems bestimmt, siehe Schritt (4) Bild 3.4. Die verwendeten Optimierungsverfahren zur Bestimmung der Parameter $\underline{\eta}$ werden in Kapitel 3.5.4.2 diskutiert. Im Rahmen der strukturellen Adaption der approximierenden Dichte in Schritt (5) wird die Anzahl der Teildichten von $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$, falls erforderlich, angepasst. Das Ergebnis des Filter- bzw. Prädiktionsschrittes mit dem Filterverfahren der Formapproximation ist eine im Sinne des gewählten Gütemaßes G optimale Approximation der gesuchten, wahren, posterioren Wahrscheinlichkeitsdichte durch eine Gaussian–Mixture–Dichte $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$.

3.4.2 Ein quadratisches Gütemaß für die Ähnlichkeit von Wahrscheinlichkeitsdichten

Für das Gütemaß $G(\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau), f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta}))$, durch dessen Minimierung in jedem Teilschritt des beschriebenen Filterverfahrens mit Formapproximation gemäß Schritt (4), Bild 3.4 ein im Sinne von G optimaler Parametersatz $\underline{\eta}_{min}$ für die approximierenden, posterioren Dichten $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ gefunden werden soll, können verschiedene Abstandsmaße gewählt werden. Um zu gewährleisten, dass das resultierende Optimierungsproblem

$$\underline{\eta}_{min} = \arg \min_{\underline{\eta} \in \mathcal{T}} G(\tau, \underline{\eta}) \quad , \quad (3.8)$$

eine eindeutige, einfach zu berechnende Lösung im Parameterraum \mathcal{T} besitzt, werden folgende Anforderungen an G gestellt:

- Das globale Minimum von G in \mathcal{T} soll mit einem Parametersatz $\underline{\eta}_{min}$ korrespondieren, der ein sinnvolles Maß für die Abweichung der approximierenden Dichte $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ von der exakten, parametrisierten posterioren Dichte $\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau)$ minimiert. Ein solches Abstandsmaß ist zum Beispiel die Kullback–Leibler–Distanz.
- G soll in \mathcal{T} stetig differenzierbar sein, damit sein Minimum einfach ermittelt werden kann.

Ein gängiges Abstandsmaß, das bei zahlreichen Optimierungsproblemen aus der Systemidentifikation [119], der Regelungssynthese [36, 98] und vielen anderen Anwendungsfeldern Verwendung findet, ist das quadratische Gütemaß. Als Abstandsmaß für den Vergleich zweier Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau)$ und $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ wird daher das integrale, quadratische Gütemaß G gemäß

$$G(\tau, \underline{\eta}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau) - f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta}) \right]^2 d\underline{x}_k \quad (3.9)$$

definiert. Die Tatsache, dass G ein quadratisches Gütemaß ist, stellt sicher, dass die Ableitung von G nach den Parametern $\underline{\eta}$ von $f_A(\cdot)$ auf ganz \mathcal{T} existiert, und verhältnismäßig einfach zu berechnen ist. Allerdings muss für jede Auswertung von G ein N -faches Integral über den gesamten Zustandsraum \mathbb{R}^N berechnet werden, was für allgemeine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau)$ nicht trivial ist, da $\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau)$ nicht zur Klasse

der Gaussian-Mixture-Dichten gehört. Für den Prädiktionsschritt ergibt sich $\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau)$ zudem aus einem Faltungsintegral, zur Auswertung des Gütemaßes ist in diesem Fall eine Umformung von (3.9) erforderlich [41]. Mögliche Verfahren zur Berechnung des Integrals (3.9) sind

- Numerische Integrationsverfahren mit Rasterung des Zustandsraums.
- Monte-Carlo-Verfahren zur stochastischen Auswertung des Integrals [16].
- Integration mit Gauss'schen Quadratur-Verfahren [50].

Ein *neuartiges* Verfahren zur Auswertung des Integrals (3.9) für die Berechnung von $G(\underline{\eta})$ wird für den Filterschritt in Kapitel 3.5.6 vorgestellt. Es basiert auf der rekursiven Aufteilung der approximierenden Dichten in Zustandsraumbereichen mit großer Nichtlinearität von $\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau)$ und nachfolgende Integration durch Approximation der Teildichten von $\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau)$ durch Gaußdichten [41, 129]. Das vorgestellte Verfahren kann in abgewandelter Form auch für die Berechnung der auftretenden Integrale im Prädiktionsschritt verwendet werden.

Wie der qualitative Verlauf von $G(\underline{\eta})$ über dem Parameterraum \mathcal{T} aussehen kann, illustriert das folgende, einfache Beispiel.

BEISPIEL 3.4.1 *Quadratisches Gütemaß G für die Ähnlichkeit zweier Gaußdichten.*

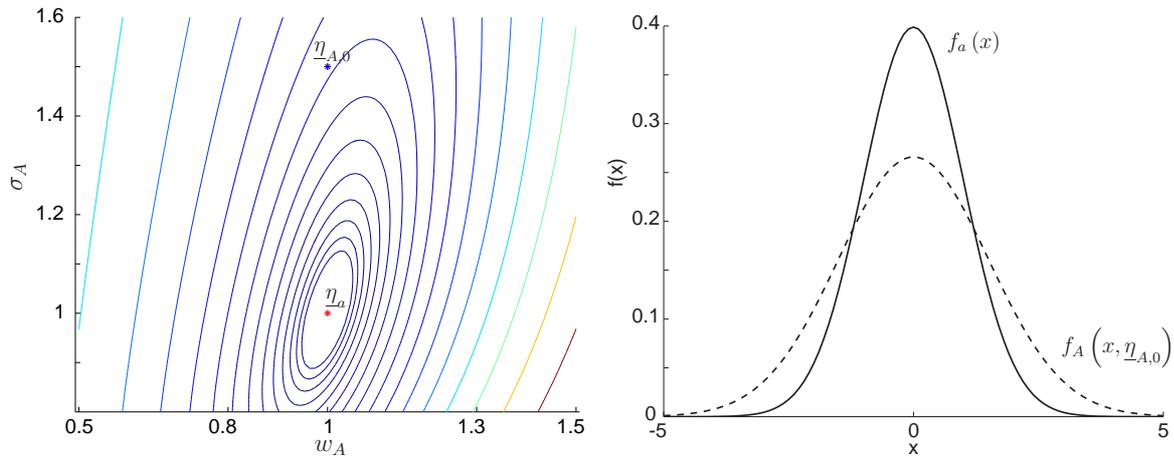
Gegeben seien zwei eindimensionale Gaußdichten $f_a(x)$ und $f_A(x)$ gemäß

$$f_a(x) = \mathcal{N}(x - \mu_a, \sigma_a), \quad f_A(x) = \mathcal{N}(x - \mu_A, \sigma_A), \quad (3.10)$$

wobei $\mathcal{N}(x - \mu, \sigma)$ eine eindimensionale Gaußdichte gemäß

$$\mathcal{N}(x - \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right\} \quad (3.11)$$

ist. Ein unnomiertes Gütemaß G für die Ähnlichkeit der beiden Gaußdichten ergibt sich direkt aus (3.9), wenn $\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau) := f_a(x)$ gesetzt wird. Zur Auswertung von G über dem Parameterraum \mathcal{T} muss für jedes $\underline{\eta}_A \in \mathcal{T}$ mit $\underline{\eta}_A = [w_A, \mu_A, \sigma_A]^T$ ein dimensionales, uneigentliches Integral ausgewertet werden. Bild 3.5(a) zeigt den Verlauf der Konturlinien von $G(\underline{\eta}_A)$ über der (w_A, σ_A) -Ebene für $\underline{\eta}_a = [1, 0, 1]^T$ und $\mu_A = 0$. Dies entspricht also einem zweidimensionalen Schnitt durch die dreidimensionale Funktion $G(\underline{\eta}_A)$. Man erkennt, dass G sein (eindeutiges) globales Minimum $G = 0$ für $f_A(x, \underline{\eta}_A) = f_a(x)$ annimmt. Ziel der Filterung mit Formapproximation ist es, dieses Minimum von G zu bestimmen, was nur in Spezialfällen wie dem dargestellten, einfachen Beispiel analytisch möglich ist. Das Minimum $\underline{\eta}_{min}$ von $G(\underline{\eta}_A)$ und ein beispielhaft ausgewählter Parameterpunkt $\underline{\eta}_{A,0} = [1, 0, 1.5]^T$, zu dem die approximierende Gaußdichte $f_A(x, \underline{\eta}_{A,0})$ in Bild 3.5(b) gehört, sind eingezeichnet. Jedem Punkt im dreidimensionalen Parameterraum \mathcal{T} entspricht genau eine approximierende Gaußdichte $f_A(x, \underline{\eta}_A)$.



(a) Konturlinien des Gütemaßes $G(\underline{\eta}_A)$ über der w_A - σ_A -Ebene des Parameterraumes \mathcal{T} für eine gegebene Dichte $f_a(x)$ und eine approximierende Gaußdichte $f_A(x, \underline{\eta}_A)$.

(b) Gegebene Dichte $f_a(x)$ und approximierende Gaußdichte $f_A(x, \underline{\eta}_{A,0})$ für $\underline{\eta}_a = [1, 0, 1]^T$ und $\underline{\eta}_{A,0} = [1, 0, 1.5]^T$.

Bild 3.5: Verlauf des quadratischen Gütemaßes $G(\underline{\eta}_A)$ über der w_A - σ_A -Ebene des Parameterraumes \mathcal{T} und zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichten.

3.5 Der Filterschritt des PGME–Verfahrens

In den folgenden Kapiteln wird, ausgehend von dem vorgestellten, allgemeinen Formalismus der Filterung mit Formapproximation gemäß Bild 3.4, der Filterschritt des *PGME*-Verfahrens hergeleitet. Betrachtet wird im Folgenden der Spezialfall eines Systems (1.3), (1.4) mit additivem, weißem, *gauß'schen* Messrauschen \underline{v}_k mit bekannter Kovarianzmatrix \mathbf{C}_k^v . Die Verallgemeinerung auf weißes, additives Messrauschen, das durch eine Gaussian–Mixture–Dichte gegeben ist, ist direkt möglich. Damit ergibt sich die wahre posteriore Wahrscheinlichkeitsdichte $\tilde{f}_e(\underline{x}_k)$ zum Zeitschritt k durch Anwendung des Satzes von Bayes (1.9) mit $f(\underline{x}_k|\mathbf{Z}^k)$ gemäß (1.11) zu

$$\tilde{f}_e(\underline{x}_k) = c_k^e f_p(\underline{x}_k) \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\underline{z}_k - \underline{h}_k(\underline{x}_k))^T (\mathbf{C}_k^v)^{-1} (\underline{z}_k - \underline{h}_k(\underline{x}_k)) \right\}, \quad (3.12)$$

wobei $f_p(\underline{x}_k)$ die prädierte Wahrscheinlichkeitsdichte zum Zeitpunkt k und c_k^e eine normalisierende Konstante ist. Auch wenn die prädierte Wahrscheinlichkeitsdichte $f_p(\underline{x}_k)$ zur Klasse der Gaussian–Mixture–Dichten gehört, ist dies *nicht* der Fall für die posteriore Dichte $\tilde{f}_e(\underline{x}_k)$, da Gaußdichten durch (3.12) wegen der nichtlinearen Messfunktion $\underline{h}_k(\underline{x}_k)$ im Allgemeinen nicht wieder auf Gaußdichten abgebildet werden. Daher wird die wahre posteriore Dichte $\tilde{f}_e(\underline{x}_k)$ durch Gaussian–Mixture–Dichten approximiert, wie allgemein in Kapitel 3.4 erläutert wurde. Hierfür wird ein Verfahren zur stetigen Überführung der gegebenen prädierten Wahrscheinlichkeitsdichte $f_p(\underline{x}_k)$ in die gesuchte, wahre posteriore Dichte $\tilde{f}_e(\underline{x}_k)$ benötigt, welches in Kapitel 3.5.1 erläutert wird. Das verwendete Gütemaß $G(\tau, \underline{\eta})$ für den Filterschritt wird in Kapitel 3.5.2 definiert und in Kapitel 3.5.3 der zugehörige Gradient nach den Parametern der approximierenden Dichte berechnet.

Die effiziente Minimierung des Gütemaßes $G(\tau, \underline{\eta})$ zur parametrischen Adaption der approximierenden Gaussian-Mixture-Dichte $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ wird anschließend in Kapitel 3.5.4.2 diskutiert und ein Vergleich verschiedener Methoden vorgestellt. Kapitel 3.5.5 stellt ein neuartiges Verfahren zur strukturellen Adaption der approximierenden Dichte $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ vor, welches auf einer optimalen, vorab berechneten Aufteilung von Gaußdichten basiert. Kapitel 3.5.6 beschreibt schließlich ein neuartiges Verfahren zur effizienten Auswertung der auftretenden Integrale für das Gütemaß $G(\tau, \underline{\eta})$ und für den Gradienten $\frac{\partial G}{\partial \underline{\eta}}$.

Spezialfall: Achsenparallele Gaussian-Mixture-Dichten

Im Folgenden werden für das *PGME*-Filterverfahren mit Formapproximation nur *achsenparallele* Gaussian-Mixture-Dichten $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ betrachtet. Ihre geringere Approximationsfähigkeit kann durch eine größere Anzahl L an Summentermen kompensiert werden, und die Gesamtzahl der Parameter $K_D = L(2N + 1)$ wächst im Falle achsenparalleler Dichten nur linear mit der Anzahl der Summenterme. Da zudem die Berechnung des Gütekriteriums $G(\tau, \underline{\eta})$ und der benötigten Ableitungen $\frac{\partial G}{\partial \underline{\eta}}$ erheblich gegenüber dem nicht-achsenparallelen Fall vereinfacht wird, hat das Gesamtverfahren mit achsenparallelen Dichten bei annähernd gleich bleibender Approximationsfähigkeit der angenommenen Dichtebeschreibung durch Gaussian-Mixture-Dichten eine erheblich geringere rechnerische Komplexität. Damit ergibt sich der modifizierte Parametervektor $\underline{\eta}_j$ des j -ten Summanden der Gaussian-Mixture-Dichte zu

$$\underline{\eta}_j = [w_j, \mu_{x,j}^1, \dots, \mu_{x,j}^N, \sigma_{x,j}^1, \dots, \sigma_{x,j}^N]^T, \quad (3.13)$$

und die Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_{x,j}$ entsprechend als $N \times N$ Diagonalmatrix gemäß

$$\mathbf{C}_{x,j} = \begin{bmatrix} (\sigma_{x,j}^1)^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\sigma_{x,j}^2)^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (\sigma_{x,j}^N)^2 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

3.5.1 Progressionsverfahren mit Parametrisierung der Messunsicherheit

Für den Filterschritt des Filterverfahrens mit Formapproximation muss eine parametrisierte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $\tilde{f}_e(\underline{x}_k, \tau) = \tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau)$ gefunden werden, die mit Variation des Parameters τ stetig von der prädierten Dichte $f_p(\underline{x}_k)$ zur wahren posterioren Dichte $\tilde{f}_e(\underline{x}_k)$ übergeht. τ kann dabei als eine Art künstlicher Zeit angesehen werden. Für diese Parametrisierung bieten sich unter den oben genannten Randbedingungen eine Reihe von Vorgehensweisen an. In [90] wird ein Verfahren vorgeschlagen, bei dem die parametrisierte, skalare Messfunktion $h_k(\underline{x}_k, \tau)$ stetig von einer beliebigen, linearen Funktion in die gewünschte, nichtlineare Messfunktion überführt wird. Dabei können sich jedoch spontan Nebenmaxima in der parametrisierten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $\tilde{f}_e(\underline{x}_k, \tau)$ ergeben, was durch die Wahl einer ausreichend großen Messunsicherheit behoben wird, die in einem anschließenden Iterationsverfahren dann schrittweise verkleinert wird.

Das hier vorgeschlagene Verfahren parametrisiert die Likelihoodfunktion $f(z_k | \underline{x}_k)$ durch Variation der Messunsicherheit, das heißt durch Variation der Kovarianzmatrix \mathbf{C}_k^v . Für die parametrisierte Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_k^v(\tau)$ sollen die Randbedingungen

$$\mathbf{C}_k^v(\tau) = \begin{cases} \text{diag}(\infty, \infty, \dots, \infty) & \text{für } \tau \rightarrow 0 \\ \mathbf{C}_k^v & \text{für } \tau = 1 \end{cases} \quad (3.15)$$

gelten. Man erkennt, dass die parametrisierte Likelihoodfunktion $f_v(z_k - \underline{h}_k(\underline{x}_k), \tau)$ gemäß

$$f_v(z_k - \underline{h}_k(\underline{x}_k), \tau) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{M}{2}} \sqrt{|\mathbf{C}_k^v(\tau)|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (z_k - \underline{h}_k(\underline{x}_k))^T (\mathbf{C}_k^v(\tau))^{-1} (z_k - \underline{h}_k(\underline{x}_k)) \right\} \quad (3.16)$$

für $\tau \rightarrow 0$ gegen eine konstante Funktion geht, die auf ihrem gesamten Definitionsbereich $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^N$ Null ist. Um zu erreichen, dass die parametrisierte Likelihoodfunktion für $\tau \rightarrow 0$ gegen die Einheitsabbildung konvergiert, wird (3.16) noch mit einem (im Prinzip frei wählbaren) Gewichtungsfaktor $w_z(\tau) \equiv (2\pi)^{M/2} \sqrt{|\mathbf{C}_k^v(\tau)|}$ multipliziert, so dass (3.16) in eine unnormierte Likelihoodfunktion übergeht. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, $\mathbf{C}_k^v(\tau)$ unter den Randbedingungen (3.15) zu parametrisieren, ein Beispiel für skalare Messungen findet sich in [126]. Wünschenswert ist eine Parametrisierung, für die die Unsicherheit in der parametrisierten, posterioren nicht-gauß'schen Wahrscheinlichkeitsdichte mit τ ungefähr linear von der prioren in die posteriore Unsicherheit übergeht. Für eindimensionale Systeme kann eine solche Parametrisierung mittels einer Linearisierung der Messgleichung im Erwartungswert der prioren Dichten hergeleitet werden. Diese Parametrisierung muss nicht optimal sein, ergab aber im Kontext durchgeführter Filterversuche stets zufrieden stellende Ergebnisse. Die eingangs gestellten Forderungen an die parametrisierte Dichte, das heißt

$$\begin{aligned} \tilde{f}_e(\underline{x}_k, \tau) &\rightarrow f_p(\underline{x}_k) && \text{für } \tau \rightarrow 0, \\ \tilde{f}_e(\underline{x}_k, \tau) &= f_e(\underline{x}_k) && \text{für } \tau = 1, \end{aligned} \quad (3.17)$$

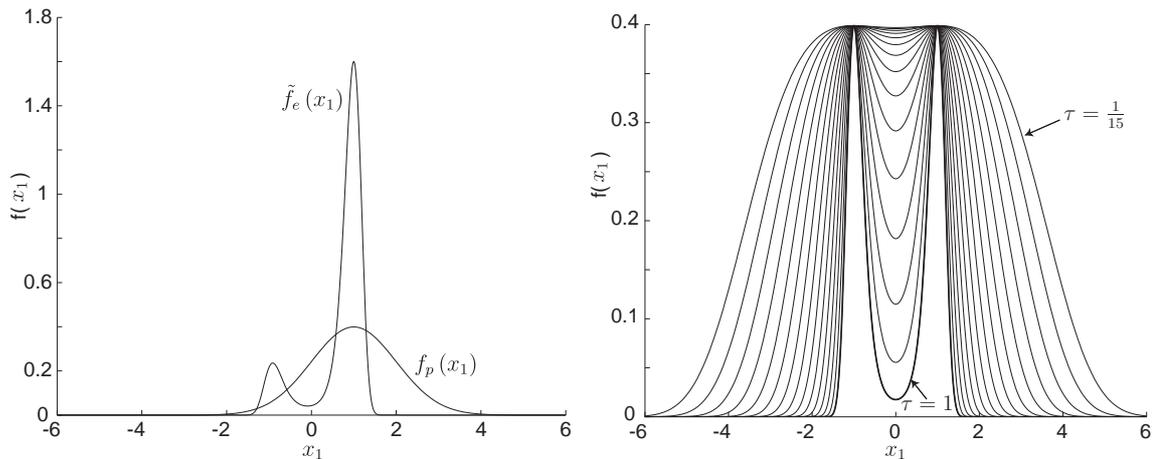
werden dabei erfüllt. Das folgende Beispiel veranschaulicht an einem eindimensionalen System, wie sich die Parametrisierung von $\mathbf{C}_k^v(\tau)$ auf die Likelihoodfunktion und die parametrisierte posteriore Dichte $\tilde{f}_e(\underline{x}_k, \tau)$ auswirkt.

BEISPIEL 3.5.1 *Parametrisierung der Likelihoodfunktion.*

Gegeben sei ein skalares System mit einer quadratischen Messgleichung,

$$z_k = x_k^2 + v_k,$$

die zum Beispiel bei Abstandsmessungen auftritt, wobei v_k additives, weißes, gauß'sches Messrauschen mit $\sigma_v = 0.5$ ist. Der Messwert zum Zeitpunkt $k = 1$ sei $z_1 = 1$. Die priore Wahrscheinlichkeitsdichte von x_1 sei die verschobene Normaldichte $\mathcal{N}(x_1 - 1, 1)$. Bild 3.6(a) zeigt die priore Dichte $f_p(x_1)$ und die wahre posteriore Dichte $\tilde{f}_e(x_1)$ nach dem Filterschritt für $\tau = 1$. Für die Definition einer parametrisierten Dichte $\tilde{f}_e(x_1, \tau)$, die stetig von $f_p(x_1)$ in $\tilde{f}_e(x_1)$ übergeht, wird die Likelihoodfunktion $f_v(\cdot)$ wie beschrieben durch eine variable Messunsicherheit $\sigma_v(\tau)$ parametrisiert. Für dieses Beispiel wurde $\sigma_v(\tau) \rightarrow \infty$ für $\tau \rightarrow 0$, $\sigma_v(\frac{1}{15}) = 10$ und $\sigma_v(1) = 0.5$ gewählt, die in (3.15) geforderten Randbedingungen sind also erfüllt. In Bild 3.6(b) ist die Likelihoodfunktion für 15 verschiedene Werte von τ dargestellt, die zugehörigen parametrisierten, posterioren Dichten $\tilde{f}_e(x_1, \tau)$ sind in Bild 3.7 aufgetragen. Durch den stetigen Übergang kann eine approximierende Dichtefunktion $f_A(x_1, \underline{\eta})$ der wahren, parametrisierten Dichtefunktion mit stetigen Parameteränderungen $\Delta \underline{\eta}$ nachgeführt werden, ohne dass die Optimierung in ein Nebenminimum konvergiert.



(a) Die eindimensionale, priore Dichte $f_p(x_1)$ und die wahre posteriore Dichte $f_e(x_1)$.

(b) Die Likelihoodfunktion $f(z_1|x_1)$ und die parametrisierte Likelihoodfunktion für verschiedene Werte von $\sigma_v(\tau)$.

Bild 3.6: Beispiel für die Parametrisierung der Likelihoodfunktion: Gegeben sind eine eindimensionale, priore Dichte $f_p(x_1)$ und die wahre posteriore Dichte $f_e(x_1)$ für den Filterschritt zum Zeitpunkt $k = 1$ bei einer quadratischen Messgleichung $z_k = x_k^2 + v_k$.

3.5.2 Das quadratische Gütemaß G für den Filterschritt

Durch Einsetzen der parametrisierten, posterioren Dichte $\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau) = \tilde{f}_e(\underline{x}_k, \tau) = f_p(\underline{x}_k) f_v(z_k - \underline{h}_k(\underline{x}_k), \tau)$ in die allgemeine Definition des Gütemaßes G (3.9) erhält man das parametrisierte Gütemaß für den Filterschritt

$$G(\tau, \underline{\eta}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} [f_p(\underline{x}_k) f_v(z_k - \underline{h}_k(\underline{x}_k), \tau) - f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})]^2 d\underline{x}_k. \quad (3.18)$$

Für $\tau = 0$ ist auch das parametrisierte Gütemaß $G(\tau, \underline{\eta}) = 0$, da nach der Forderung (3.17) $f_p(\underline{x}_k) f_v(z_k - \underline{h}_k(\underline{x}_k), \tau) \equiv f_p(\underline{x}_k)$ gelten muss. Durch inkrementelle Änderungen von τ wird $G(\tau, \underline{\eta})$ für konstante Parameter $\underline{\eta}$ der approximierenden Dichten $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ ebenfalls inkrementell verändert. An der Definition (3.18) des Gütekriteriums G ist zu erkennen, dass die wahre Dichte $\tilde{f}_e(\underline{x}_k, \tau)$ *nicht* normiert wird, und somit als Ergebnis eines jeden Filterschrittes auch eine nicht normierte Approximation $f_A(\cdot)$ berechnet wird. Daher muss $f_A(\cdot)$ nach Durchführung des Filterschrittes gemäß

$$f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta}) := \frac{f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})}{\int_{\mathbf{R}^N} f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta}) d\underline{x}_k} \quad (3.19)$$

renormiert werden. Der Vorteil der Verwendung eines unnormierten Gütekriteriums nach (3.9), (3.18) liegt in der besonders einfachen Berechnung der Ableitungen von $G(\tau, \underline{\eta})$ nach den Parametern $\underline{\eta}$. Der Nachteil dieser Definition ist jedoch, dass der Wertebereich von $G(\tau, \underline{\eta})$ nicht nach oben beschränkt ist. Des Weiteren hängt der Wert von $G(\tau, \underline{\eta})$ von

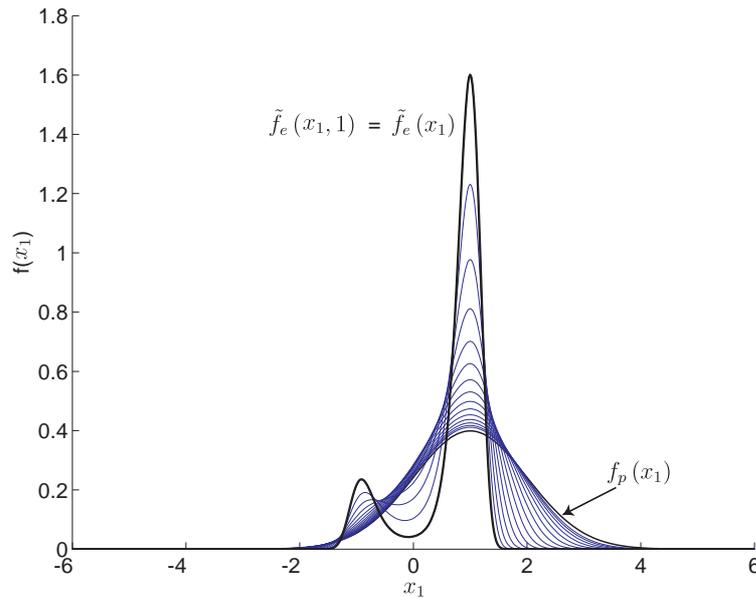


Bild 3.7: Beispiel für die Parametrisierung der Likelihoodfunktion: Die eindimensionale, priore Dichte $f_p(x_1)$, die zugehörige wahre posteriore Dichte $\tilde{f}_e(x_1)$ und die Schar der wahren, parametrisierten posterioren Dichten $\tilde{f}_e(x_1, \tau)$ für einen Filterschritt zum Zeitpunkt $k = 1$.

der gewählten Skalierung der Zustandsvariablen \underline{x}_k ab, da $G(\tau, \underline{\eta})$ ein quadratisches Gütemaß ist, und somit nicht unmittelbar der (verallgemeinerten) Differenzfläche zwischen der wahren Dichte und der approximierenden Dichte entspricht.

Um eine Renormierung nach jedem Filterschritt zu vermeiden, kann ein modifiziertes Gütemaß definiert werden, bei dem die wahre, posteriore Dichte $f_p(\underline{x}_k) f_v(\cdot)$ normiert ist:

$$G(\tau, \underline{\eta}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{f_p(\underline{x}_k) f_v(\underline{z}_k - \underline{h}_k(\underline{x}_k), \tau)}{\int_{\mathbb{R}^N} f_p(\underline{x}_k) f_v(\underline{z}_k - \underline{h}_k(\underline{x}_k), \tau) d\underline{x}_k} - f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta}) \right]^2 d\underline{x}_k. \quad (3.20)$$

Da $f_p(\underline{x}_k) f_v(\cdot)$ nicht von den Parametern $\underline{\eta}$ abhängt, lassen sich auch für (3.20) die Ableitungen von $G(\tau, \underline{\eta})$ nach den Parametern einfach berechnen. Um eine vollständige Skalierungsinvarianz von $G(\tau, \underline{\eta})$ zu erreichen, so dass $G(\tau, \underline{\eta})$ immer im Intervall $[0, 1]$ liegt, ist es erforderlich, mit dem Integral der quadrierten Dichten $f_p(\underline{x}_k) f_v(\cdot)$ und $f_A(\cdot)$ zu normieren, was auf

$$G_{SC}(\tau, \underline{\eta}) = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} [f_p(\underline{x}_k) f_v(\underline{z}_k - \underline{h}_k(\underline{x}_k), \tau) - f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})]^2 d\underline{x}_k}{\int_{\mathbb{R}^N} [f_p(\underline{x}_k) f_v(\underline{z}_k - \underline{h}_k(\underline{x}_k), \tau)]^2 d\underline{x}_k + \int_{\mathbb{R}^N} [f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})]^2 d\underline{x}_k} \quad (3.21)$$

mit $G_{SC}(\tau, \underline{\eta}) \in [0, 1] \forall \underline{\eta}$ führt. Dieses skalierungsinvariante Gütemaß wird im *PGME*-Filterverfahren verwendet, um zu überprüfen, ob das Gütemaß im Rahmen der Optimierung der Parameter $\underline{\eta}$ gemäß Schritt (4) in Bild 3.4 unter eine vorgegebene Schranke G_{max} konvergiert ist, da die Auswertung von $G_{SC}(\tau, \underline{\eta})$ eine einfache Festlegung dieser Schranke gestattet.

3.5.3 Berechnung des Gradienten

Für die Bestimmung des Minimums $\underline{\eta}_{min}$ des Gütemaßes $G(\tau, \underline{\eta})$ werden die partiellen Ableitungen von $G(\tau, \underline{\eta})$ nach allen $K_D = L(2N + 1)$ Parametern $\underline{\eta}$ benötigt, wobei N die Dimension des Zustandsraums ist und L die Anzahl der Summenterme der approximierenden Gaussian-Mixture-Dichte $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$.

Für achsenparallele Wahrscheinlichkeitsdichten $f_{A,j}(\underline{x}_k, \underline{\eta}_j)$, die durch Parametervektoren $\underline{\eta}_j$ gemäß (3.13) charakterisiert werden, lassen sich die partiellen Ableitungen $\frac{\partial G}{\partial \underline{\eta}}$ nach den Parametern $\underline{\eta}$ einfach berechnen, da $G(\tau, \underline{\eta})$ ein *quadratisches* Gütekriterium ist, und die Parameter $\underline{\eta}$ eine regelmäßige Struktur aufweisen, wie aus (3.13) ersichtlich ist. Es ist zur Berechnung von $\frac{\partial G}{\partial \underline{\eta}}$ daher ausreichend, die partiellen Ableitungen von $G(\tau, \underline{\eta})$ nach den Parametern $\underline{\eta}_j$ der j -ten Dichte der Gaussian-Mixture $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ zu betrachten. Für den allgemeinen Fall eines N -dimensionalen Zustandsvektors $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^N$ hat $\frac{\partial G}{\partial \underline{\eta}_j}$ $2N + 1$ Komponenten, die sich gemäß

$$\frac{\partial G}{\partial \underline{\eta}_j}(\tau, \underline{\eta}) = - \int_{\mathbb{R}^N} [f_p(\underline{x}_k) f_v(\underline{z}_k - \underline{h}_k(\underline{x}_k), \tau) - f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})] \frac{\partial f_{A,j}(\underline{x}_k, \underline{\eta}_j)}{\partial \underline{\eta}_j} d\underline{x}_k \quad (3.22)$$

berechnen. Die partiellen Ableitungen der j -ten Gauß'schen Dichte nach den Parametern $\underline{\eta}_j$ in (3.22) lassen sich einfach als Produkt von Polynomen zweiter Ordnung mit der j -ten Gaußdichte $f_{A,j}(\underline{x}_k)$ darstellen, was auf

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \underline{\eta}_j}(\tau, \underline{\eta}) = & \\ & - \int_{\mathbb{R}^N} [f_p(\underline{x}_k) f_v(\underline{z}_k - \underline{h}_k(\underline{x}_k), \tau) - f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})] f_{A,j}(\underline{x}_k, \underline{\eta}_j) \begin{pmatrix} \frac{2}{w_j} \\ \frac{x_1 - \mu_{1,j}}{\sigma_{1,j}^2} \\ \vdots \\ \frac{x_N - \mu_{N,j}}{\sigma_{N,j}^2} \\ \frac{(x_1 - \mu_{1,j})^2 - \sigma_{1,j}^2}{\sigma_{1,j}^3} \\ \vdots \\ \frac{(x_N - \mu_{N,j})^2 - \sigma_{N,j}^2}{\sigma_{N,j}^3} \end{pmatrix} d\underline{x}_k \end{aligned} \quad (3.23)$$

führt. Dabei wurde der Zeitindex k in den Komponenten des Zustandsvektors \underline{x}_k und den Parametern $w_{j,k}$, $\underline{\mu}_{j,k} = [\mu_{1,j}, \dots, \mu_{N,j}]^T$ und $\mathbf{C}_{j,k} = \text{diag}[\sigma_{1,j}^2, \dots, \sigma_{N,j}^2]^T$ der j -ten Gaußdichte $f_{A,j}(\underline{x}_k, \underline{\eta}_j)$ aus Gründen der Übersichtlichkeit ausgelassen. Analog zur Auswertung des Gütemaßes nach (3.18) steht ein breites Spektrum an Verfahren zur Berechnung des Integrals (3.23) zur Verfügung. Der wesentliche Unterschied zu (3.18) ist, dass neben Integralen über N -dimensionale Gaußdichten, was einer Berechnung der Momente nullter Ordnung der jeweiligen Dichten entspricht, auch die Momente bis zur zweiten Ordnung berechnet werden müssen. Wie beim Gütemaß G ist diese Integration wegen der

im Allgemeinen nicht gauß'schen Likelihoodfunktion $f_v(\cdot)$ in der Regel nicht geschlossen berechenbar. Zur Auswertung kann das in Kapitel 3.5.6 vorgestellte, neuartige Verfahren zur effizienten Berechnung von Integralen über nicht–gauß'sche Dichten verwendet werden.

3.5.4 Parametrische Adaption

Im Rahmen der progressiven Überführung der parametrisierten, wahren Dichte $\tilde{f}_e(\underline{x}_k, \tau)$ gemäß Schritt (2), Bild 3.4 werden die Parameter $\underline{\eta}$ der approximierenden Dichte $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ fortlaufend nachgeführt, so dass $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ die wahre Dichte $\tilde{f}_e(\underline{x}_k, \tau)$ im Sinne des Gütemaßes $G(\tau, \underline{\eta})$ optimal approximiert. Diese parametrische Adaption von $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ kann entweder durch direkte Minimierung von $G(\tau, \underline{\eta})$ für jede infinitesimale Änderung des Progressionsparameters τ erfolgen, wie in den folgenden zwei Kapiteln erläutert wird, oder durch Umformung des gegebenen Optimierungsproblems in ein System von gewöhnlichen, linearen Differentialgleichungen erster Ordnung [126]. Dieser Ansatz wird in Kapitel 3.5.4.4 kurz dargestellt.

Durch die direkte Minimierung von G wird für die wahre Dichte $\tilde{f}_e(\underline{x}_k, \tau)$ eine lokal optimale Approximation durch die Gaussian–Mixture–Dichte $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ bestimmt. Da für das Optimierungsproblem infinitesimale Änderungen der wahren parametrisierten Dichte $\tilde{f}_e(\underline{x}_k, \tau)$ betrachtet werden, lässt sich durch das beschriebene Verfahren eine im Sinne von $G(\tau, \underline{\eta})$ global optimale Approximation der wahren posterioren Dichte $\tilde{f}_e(\underline{x}_k)$ finden, wenn eine geeignete Progression für $\tilde{f}_e(\underline{x}_k, \tau)$ gewählt wird. Zusätzlich ist durch eine strukturelle Adaption von $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ sicherzustellen, dass durch die Progression entstehende Nebenmaxima ebenfalls approximiert werden können, siehe Kapitel 3.5.5.

Für die folgenden Betrachtungen zur Minimierung von $G(\tau, \underline{\eta})$ wird der Progressionsparameter $\tau \in [0, 1]$ auf Grund der Tatsache, dass er während der Minimierung konstant bleibt, nicht mehr explizit im Argument aufgeführt. Die notwendige Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Minimums von $G(\underline{\eta})$ ist

$$\left. \frac{\partial G(\underline{\eta})}{\partial \underline{\eta}} \right|_{\underline{\eta}=\underline{\eta}_{min}^i} = \underline{0} . \quad (3.24)$$

Da eine Lösung des Minimierungsproblems (3.8) im Allgemeinen *nicht* geschlossen analytisch berechenbar ist, muss auf iterative Verfahren zur Minimierung zurückgegriffen werden. Aus der Mathematik bekannte Verfahren für Minimierungsprobleme sind [10, 51]:

- Die Minimierung durch iterativen Gradientenabstieg (Methode des steilsten Abstiegs), wie in Kapitel 3.5.4.1 beschrieben [51].
- Monte–Carlo–Verfahren mit stochastischer Auswertung der Gütefunktion, siehe zum Beispiel [61].
- Gradientenabstiegsverfahren 2. Ordnung mit effizienter, näherungsweise Berechnung der Hesse–Matrix \mathbf{H} , wie das Verfahren von Fletcher und Powell [32] oder das Verfahren von Broyden, Fletcher, Goldfarb und Shanno (BFGS) [18, 32, 38, 100].

- Formulierung des Optimierungsproblems als nichtlineares Ausgleichsproblem. Die spezielle Struktur des Gradienten und der Hesse-Matrix \mathbf{H} , die bei der Minimierung eines quadratischen Ausgleichproblems auftreten, erlaubt die Anwendung besonders effizienter, numerischer Algorithmen [22]. Zwei wichtige Verfahren zur Lösung des Ausgleichsproblems sind die Gauss-Newton Methode [51] und die Levenberg-Marquardt-Methode [68, 70].

Im Folgenden wird als einfachstes mögliches Verfahren zunächst die Minimierung durch iterativen Gradientenabstieg dargestellt. Die erzielten Resultate werden anschließend in Kapitel 3.5.4.2 effizienteren Verfahren mit Minimierung nach der Levenberg-Marquardt-Methode gegenübergestellt, und Vor- und Nachteile der Verfahren diskutiert.

3.5.4.1 Minimierung von G durch Gradientenabstieg

Zur direkten Minimierung des integralen, unnormierten Gütemaßes nach (3.18), bzw. des integralen, normierten Gütemaßes (3.20) nach der Methode des steilsten Abstiegs [66] wird die Ableitung von $G(\underline{\eta})$ nach den Parametern $\underline{\eta}$ im betrachteten Arbeitspunkt $\underline{\eta}_t$ berechnet (3.22), (3.23). Damit wird ein Gradientenschritt gemäß

$$\underline{\eta}_{t+1} = \underline{\eta}_t - \alpha_t \left. \frac{\partial G(\underline{\eta})}{\partial \underline{\eta}} \right|_{\underline{\eta}=\underline{\eta}_t} \quad (3.25)$$

durchgeführt und ein Parametervektor $\underline{\eta}_{t+1}$ berechnet, der eine verbesserte Approximation für das gesuchte Minimum $\underline{\eta}_{min}$ ist, wobei $t = 0, 1, \dots$ der Schrittindex des iterativen Abstiegsverfahrens ist. α_t muss in jedem Gradientenschritt so gewählt werden, dass die Abstiegsbedingung

$$G(\underline{\eta}_{t+1}) < G(\underline{\eta}_t) \quad (3.26)$$

erfüllt ist. Da jede stetig differenzierbare Funktion f und insbesondere auch $G(\underline{\eta})$ für infinitesimal kleine Schrittlängen in Richtung des negativen Gradienten $-\frac{\partial G}{\partial \underline{\eta}}$ abfällt, lässt sich immer ein $\alpha_t > 0$ finden, so dass (3.26) für einen Gradientenschritt gemäß (3.25) erfüllt ist. Eine Standardmethode zur Schrittweitenbestimmung ist eine Liniensuche in Richtung des Gradienten mit Lösung des eindimensionalen Optimierungsproblems

$$G(\underline{\eta}(\alpha_{opt})) = \min_{\alpha_t} G \left(\underline{\eta}_t - \alpha_t \left. \frac{\partial G(\underline{\eta})}{\partial \underline{\eta}} \right|_{\underline{\eta}=\underline{\eta}_t} \right) . \quad (3.27)$$

Effiziente Methoden zur näherungsweise Lösung dieses Optimierungsproblems durch quadratische oder kubische Interpolation werden in [22, 66] beschrieben und das verwendete Verfahren in Kapitel 3.5.4.3 knapp dargestellt.

Die Minimierung von $G(\underline{\eta})$ mit der Methode des steilsten Abstiegs resultiert in einer sehr langsamen Konvergenz in der Nähe des gesuchten, lokalen Minimums $\underline{\eta}_{min}$ [10, 84], und die Gradientenrichtung unterscheidet sich im Allgemeinen erheblich von der Richtung zum gesuchten Minimum. Dies wird für zwei eindimensionale Wahrscheinlichkeitsdichten in Beispiel 3.5.2 gezeigt. Da sowohl die Auswertung von $G(\underline{\eta})$ als auch die Berechnung des

zugehörigen Gradienten durch die erforderliche Integration über den gesamten Zustandsraum \mathbb{R}^N relativ rechenaufwendig sind, müssen effizientere Verfahren zur Minimierung von $G(\underline{\eta})$ eingesetzt werden. Diese müssen eine schnelle Konvergenz gegen das Minimum $\underline{\eta}_{min}$ gewährleisten, d.h. möglichst wenige Iterationen und Funktionsauswertungen von $G(\underline{\eta})$ benötigen und gleichzeitig eine präzise Berechnung von $\underline{\eta}_{min}$ ermöglichen.

3.5.4.2 Minimierung von G mit Minimierungsverfahren 2. Ordnung

Ein Verfahren mit quadratischer Konvergenz in der Nähe des Minimums $\underline{\eta}_{min}$ ist das Gauß–Newton–Verfahren [10]. Im folgenden Kapitel wird dieses Verfahren für das verwendete, *integrale* Gütemaß hergeleitet und anschließend eine Erweiterung vorgestellt, die auf ein robusteres, dem Levenberg–Marquardt–Verfahren ähnliches Verfahren zur Minimierung von $G(\tau, \underline{\eta})$ führt.

Minimierung des Gütemaßes G mit dem Gauß–Newton–Verfahren

Für die Minimierung von $G(\tau, \underline{\eta})$ mit der Gauß–Newton–Methode wird die Abstiegsrichtung $\Delta\underline{\eta} = \underline{\eta}_{t+1} - \underline{\eta}_t$ in jedem Iterationsschritt durch Lösung des linearen Ausgleichproblems

$$\min_{\underline{\eta}} \bar{G}(\underline{\eta}) = \min_{\underline{\eta}} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} [f_p(\underline{x}_k) f_v(\underline{z}_k - \underline{h}_k(\underline{x}_k)) - \bar{f}_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})]^2 d\underline{x}_k \quad (3.28)$$

ermittelt, wobei $\bar{f}_A(\cdot)$ die bezüglich $\underline{\eta}$ linearisierten Approximationsdichten $f_A(\cdot)$ sind [76]. Hierfür müssen die partiellen Ableitungen von $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ bezüglich der Parameter $\underline{\eta}$ im betrachteten Arbeitspunkt $\underline{\eta}_t$ ermittelt werden, mit Hilfe derer das totale Differential gebildet wird. Dies erfolgt analog zur Berechnung des Gradienten $\frac{\partial G}{\partial \underline{\eta}}$ und ergibt für das Gütemaß $\bar{G}(\underline{\eta})$ des linearisierten Ausgleichproblems

$$\bar{G}(\underline{\eta}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left[f_p(\underline{x}_k) f_v(\underline{z}_k - \underline{h}_k(\underline{x}_k)) - \left(f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta}) \Big|_{\underline{\eta}_t} + \left(\frac{\partial f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})}{\partial \underline{\eta}} \Big|_{\underline{\eta}_t} \right)^T \Delta\underline{\eta} + R(\underline{x}_k, \underline{\eta}) \right) \right]^2 d\underline{x}_k, \quad (3.29)$$

wobei $\Delta\underline{\eta} = \underline{\eta}_{t+1} - \underline{\eta}_t$ die Abweichung der Parameter vom Arbeitspunkt $\underline{\eta}_t$ und $R(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ das Restglied für Terme höherer Ordnung ist. In der Nähe des Parametervektors $\underline{\eta}_t$ stellt (3.29) eine gute Näherung des nicht normalisierten Gütekriterium G nach (3.18) dar, und die Terme zweiter und höherer Ordnung $R(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ können vernachlässigt werden. Zur Lösung des linearen Ausgleichproblems nach (3.28) muss der zugehörige Gradient des linearisierten Gütekriteriums $\bar{G}(\underline{\eta})$ gemäß der notwendigen Bedingung für lokale Minima zu Null gesetzt werden [76], also

$$\frac{\partial \bar{G}(\underline{\eta})}{\partial \underline{\eta}} \equiv \underline{0}. \quad (3.30)$$

Ableiten von \bar{G} bezüglich der Parameter $\underline{\eta}$ ergibt

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial \underline{\eta}} = - \int_{\mathbf{R}^N} \left[f_p(\underline{x}_k) f_v(\underline{z}_k - \underline{h}_k(\underline{x}_k)) - \left(f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta}) \Big|_{\eta_t} + \left(\frac{\partial f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})}{\partial \underline{\eta}} \Big|_{\eta_t} \right)^T \Delta \underline{\eta} \right) \frac{\partial f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})}{\partial \underline{\eta}} \Big|_{\eta_t} d\underline{x}_k \right]. \quad (3.31)$$

Durch Ausmultiplizieren erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \underline{\eta}} = & - \underbrace{\int_{\mathbf{R}^N} f_p(\underline{x}_k) f_v(\underline{z}_k - \underline{h}_k(\underline{x}_k)) \frac{\partial f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})}{\partial \underline{\eta}} \Big|_{\eta_t} d\underline{x}_k}_{I_1} + \\ & \underbrace{\int_{\mathbf{R}^N} f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta}) \Big|_{\eta_t} \frac{\partial f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})}{\partial \underline{\eta}} \Big|_{\eta_t} d\underline{x}_k}_{I_2} + \underbrace{\int_{\mathbf{R}^N} \left(\frac{\partial f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})}{\partial \underline{\eta}} \Big|_{\eta_t} \right)^T \Delta \underline{\eta} \frac{\partial f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})}{\partial \underline{\eta}} \Big|_{\eta_t} d\underline{x}_k}_{I_3}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Daraus ergibt sich mit (3.30) ein lineares Gleichungssystem für die Parameter $\underline{\eta}$. Dieses Gleichungssystem ist für allgemeine Ausgleichsprobleme gewöhnlich überbestimmt [76], so dass nur eine Lösung im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate gefunden werden kann. Für das vorliegende Ausgleichsproblem zur Minimierung des linearisierten, quadratischen Gütekriteriums $\bar{G}(\underline{\eta})$ ergibt sich jedoch immer ein Gleichungssystem, bei dem die Anzahl der Gleichungen der Anzahl K_D der gesuchten Parameter entspricht. Die quadratische $K_D \times K_D$ Koeffizientenmatrix \mathbf{K} dieses Gleichungssystems ist eine Näherung für die Hessematrix \mathbf{H} und wird durch Auswertung des dritten Teilintegrals I_3 in (3.32) bestimmt. Durch Umstellung von I_3 ergibt sich \mathbf{K} zu

$$\mathbf{K} = \int_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})}{\partial \underline{\eta}} \Big|_{\eta_t} \left(\frac{\partial f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})}{\partial \underline{\eta}} \Big|_{\eta_t} \right)^T d\underline{x}_k. \quad (3.33)$$

Voraussetzung für die Existenz eines Minimums des linearen Ausgleichsproblems (3.28) ist, dass \mathbf{K} nicht singulär ist, also vollen Rang hat. Obwohl der Integrand von I_3 eine dyadische Matrix ist, ist \mathbf{K} durch die Integration bezüglich der Zustandsvariablen \underline{x}_k im Allgemeinen nicht singulär und somit invertierbar. Unter diesen Voraussetzungen ist die eindeutige, globale Lösung des linearen Ausgleichsproblems nach (3.28) mit der notwendigen Bedingung (3.30)

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_{t+1}^{min} = & \eta_t - \mathbf{K}^{-1} \left(- \int_{\mathbf{R}^N} f_p(\underline{x}_k) f_v(\underline{z}_k - \underline{h}_k(\underline{x}_k)) \frac{\partial f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})}{\partial \underline{\eta}} \Big|_{\eta_t} d\underline{x}_k + \right. \\ & \left. \int_{\mathbf{R}^N} f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta}) \Big|_{\eta_t} \frac{\partial f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})}{\partial \underline{\eta}} \Big|_{\eta_t} d\underline{x}_k \right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Dabei sind $\bar{\eta}_{t+1}^{min}$ die gesuchten Parameter des globalen Minimums von $\bar{G}(\underline{\eta})$ und $\underline{\eta}_t$ ist der Ausgangspunkt im Parameterraum, bezüglich dessen das nichtlineare Ausgleichsproblem linearisiert wurde. Zu beachten ist, dass das gefundene Minimum $\bar{\eta}_{t+1}^{min}$ selbst auch nur eine Näherung für das Minimum des nichtlinearen Ausgleichsproblems (3.8) darstellt. Die Qualität dieser Näherung hängt davon ab, wie gut die Approximation des Gütemaßes $G(\underline{\eta})$ durch die lineare Näherung $\bar{G}(\underline{\eta})$ im Punkt $\underline{\eta}_t$ ist. Da die Minimierung von $G(\underline{\eta})$ durch das iterative Abstiegsverfahren gemäß (3.34) ein Verfahren ist, das durch die Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung $R(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ potentiell divergieren kann [51], wird analog zum Verfahren des steilsten Abstiegs ein skalarer Schrittweitenparameter α_t eingeführt. Dieser garantiert, dass eine Schrittlänge gefunden werden kann, für die die Abstiegsbedingung (3.26) erfüllt ist. Da der geklammerte Ausdruck in (3.34) dem Gradienten $\frac{\partial G}{\partial \underline{\eta}}$ im Punkt $\underline{\eta}_t$ entspricht, ergibt sich als Abstiegsverfahren

$$\bar{\eta}_{t+1}^{min} = \min_{\alpha_t} \left(\underline{\eta}_t - \alpha_t \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial G}{\partial \underline{\eta}} \Big|_{\underline{\eta}_t} \right) \quad (3.35)$$

mit $\alpha_t > 0$.

Minimierung des Gütemaßes G mit dem Levenberg–Marquardt–Verfahren

Da für nichtlineare Ausgleichsprobleme durch die Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung im Allgemeinen *nicht* garantiert ist, dass der durch (3.34) gegebene Iterationsschritt besser ist, als direkte Minimierung nach dem Verfahren des steilsten Abstiegs, wurde von Levenberg und Marquardt [68, 70] eine Modifikation vorgeschlagen, die auf einer gewichteten Mittelung der Richtung des steilsten Abstiegs und der Gauss–Newton–Richtung basiert. Durch Einführung eines skalaren Gewichtungsfaktors λ ergibt sich aus (3.35) die modifizierte Levenberg–Marquardt Methode

$$\bar{\eta}_{t+1}^{min} = \min_{\alpha_t} \left(\underline{\eta}_t - \alpha_t (\mathbf{K} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \frac{\partial G}{\partial \underline{\eta}} \Big|_{\underline{\eta}_t} \right) \quad (3.36)$$

zur Minimierung des integralen quadratischen Gütemaßes $G(\tau, \underline{\eta})$, wobei \mathbf{I} die $K_D \times K_D$ Einheitsmatrix ist. Für kleine Gewichtungsfaktoren $\lambda \rightarrow 0$ geht die Levenberg–Marquardt Methode in die Gauss–Newton–Methode über, für große $\lambda \rightarrow \infty$ in die Methode des steilsten Abstiegs. Daher ist für ausreichend große Werte von λ immer garantiert, dass eine (lokale) Abstiegsrichtung gefunden werden kann.

Wahl des Gewichtungsfaktors λ

Eine Schwierigkeit in der Anwendung des Levenberg–Marquardt–Verfahrens liegt in der geeigneten Wahl des Gewichtungsfaktors λ [22, 51]. In [22] wird ein Verfahren vorgeschlagen, das auf einer Schätzung der relativen Nichtlinearität der zu minimierenden Gütefunktion beruht, und den Parameter λ gemäß dieser Schätzung für jede Iteration anpasst.

BEISPIEL 3.5.2 *Vergleich: Minimierung des Gütekriteriums G mit Gradientenabstieg und Gauss-Newton-Verfahren.*

Gegeben seien die zwei eindimensionalen Gaußdichten $f_a(x)$ und $f_A(x, \underline{\eta})$ aus Beispiel 3.4.1. Gesucht ist eine Approximation der Dichte $f_a(x)$ durch $f_A(x, \underline{\eta})$, für die $G(\underline{\eta})$ minimal wird, wobei die (triviale) Lösung offensichtlich $f_A(x, \underline{\eta}_{min}) \equiv f_a(x)$ ist. Ausgehend von den initialen Parametern $\underline{\eta}_{A,0} = [1, 0, 1.5]^T$ der approximierenden Gaußdichte wird das Approximationsproblem durch iterative Minimierung des quadratischen Gütemaßes $G(\underline{\eta})$ gemäß (3.9) gelöst, wobei $\tilde{f}_\tau(\underline{x}_k, \tau) = f_a(x)$ gesetzt wird. Abbildung 3.8 zeigt die diskreten Parameterwerte $\underline{\eta}_{A,i}$, $i = 0, 1, \dots$ in einem zweidimensionalen Schnitt durch den Parameterraum \mathcal{T} bei Minimierung mit der Methode des steilsten Abstiegs (Kreuze) und dem Gauß-Newton-Verfahren (Sterne). Desweiteren aufgetragen ist der Verlauf der Konturlinien von $G(\underline{\eta})$ über der (w_A, σ_A) -Ebene von \mathcal{T} , wie in Beispiel 3.4.1 beschrieben. Die Schrittweite in jedem Minimierungsschritt wird numerisch durch exakte Lösung des eindimensionalen Minimierungsproblems (3.27) bzw. (3.35) gewählt. Man erkennt, dass das Gauß-Newton-Verfahren wie theoretisch erwartet sehr viel schneller gegen das gesuchte Minimum $\underline{\eta}_{min} = \underline{\eta}_a = [1, 0, 1]^T$ konvergiert, als das Verfahren des steilsten Abstiegs, obwohl sich der initiale Parametervektor $\underline{\eta}_{A,0}$ verhältnismäßig weit entfernt vom Minimum befindet, und die Näherung des Gauß-Newton-Verfahrens für die Hesse-Matrix daher nur bedingt gültig ist. Abbildung 3.9 zeigt die gegebene Gaußdichte $f_a(x)$ und die approximierende Gaußdichte $f_A(x, \underline{\eta}_{A,0})$, die zum initialen Parametervektor $\underline{\eta}_{A,0}$ gehört. In Abb. 3.10(a) sind zusätzlich die approximierenden Gaußdichten gezeigt, die zu den Parametern $\underline{\eta}_{A,i}$ der Zwischenschritte des Minimierungsverfahrens nach dem steilsten Abstieg gehören, und in Abb. 3.10(b) die, welche zu den Parametern der Zwischenschritte des Minimierungsverfahrens nach Gauss-Newton gehören. Man erkennt, dass die Konvergenz $\underline{\eta}_{A,i} \rightarrow \underline{\eta}_{min}$ im Parameterraum wie aus der Definition von $G(\underline{\eta})$ ersichtlich mit einer Formapproximation der gesuchten Dichte korrespondiert.

3.5.4.3 Liniensuche durch quadratische Interpolation

Voraussetzung für die Konvergenz und die Effizienz der vorgestellten Minimierungsverfahren ist der Einsatz effizienter, eindimensionaler Minimierungsverfahren, die für die Bestimmung des Schrittweitenparameters α gemäß (3.35) erforderlich sind. In der Literatur sind hierzu, ebenso wie zur vektoriiellen Minimierung, eine Vielzahl von Verfahren bekannt, wie zum Beispiel die Fibonacci-Technik sowie die quadratische oder kubische Interpolation [66]. Sie unterscheiden sich in der rechnerischen Komplexität, der Anzahl der benötigten Funktionsauswertungen und der Anzahl der benötigten Auswertungen der Ableitungen höherer Ordnung der zu minimierenden Funktion G .

Der Grundgedanke der Verfahren mit polynomialer Interpolation ist, die zu minimierende Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall durch ein Polynom zu approximieren, das durch eine vorgegebene Anzahl von Stützstellen gelegt wird. Das Minimum dieser skalaren, polynomialen Funktion kann dann in einem Schritt analytisch bestimmt werden, und stellt für stetige Funktionen G gewöhnlich eine sehr gute Approximation des gesuchten Minimums von G dar. Für die hier verwendete, quadratische Interpolation wird die Funktion $G_L(\alpha) := G(\underline{\eta}(\alpha))$ durch $p(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c$ approximiert. Die Koeffizienten von $p(\alpha)$ können durch die Kombination dreier Funktionsauswertungen von $G_L(\alpha)$ und des

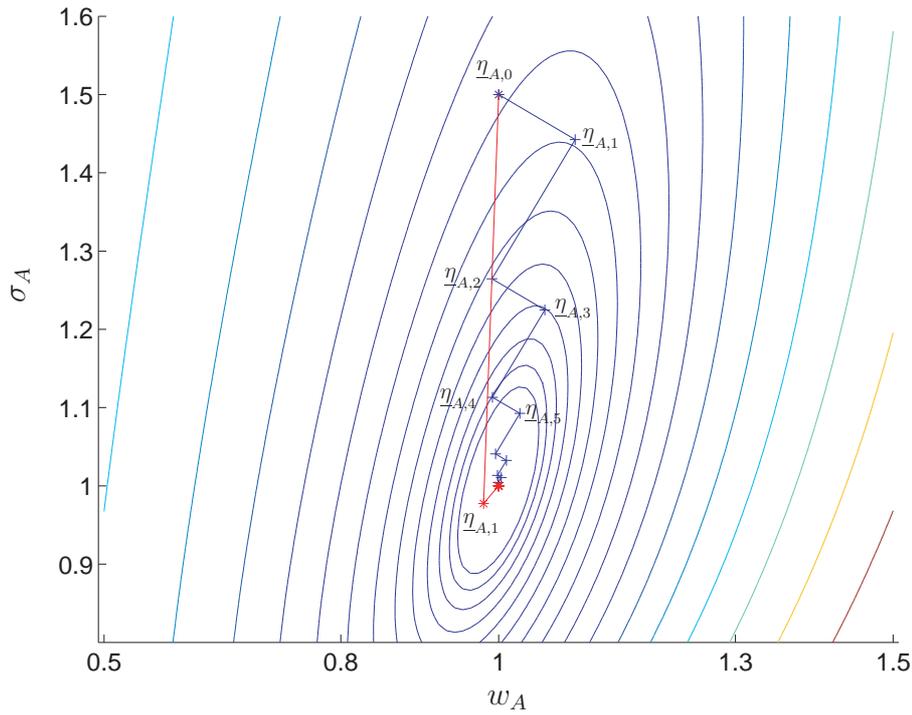


Bild 3.8: Formapproximation einer Gaußdichte durch iterative Minimierung eines quadratischen Gütekriteriums G mit a) dem Verfahren des steilsten Abstiegs (Kreuze) b) der Gauß–Newton–Methode (Sterne). Die Parameter der initialen, approximierenden Dichte sind $\underline{\eta}_{A,0} = [1, 0, 1.5]^T$, die der zu approximierenden Dichte $\underline{\eta}_a = [1, 0, 1]^T$.

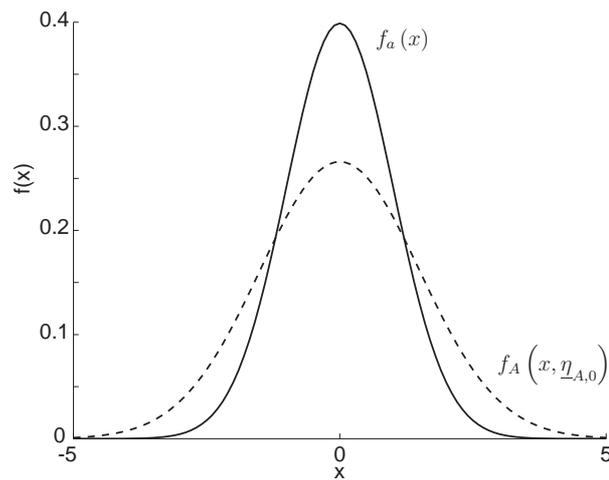
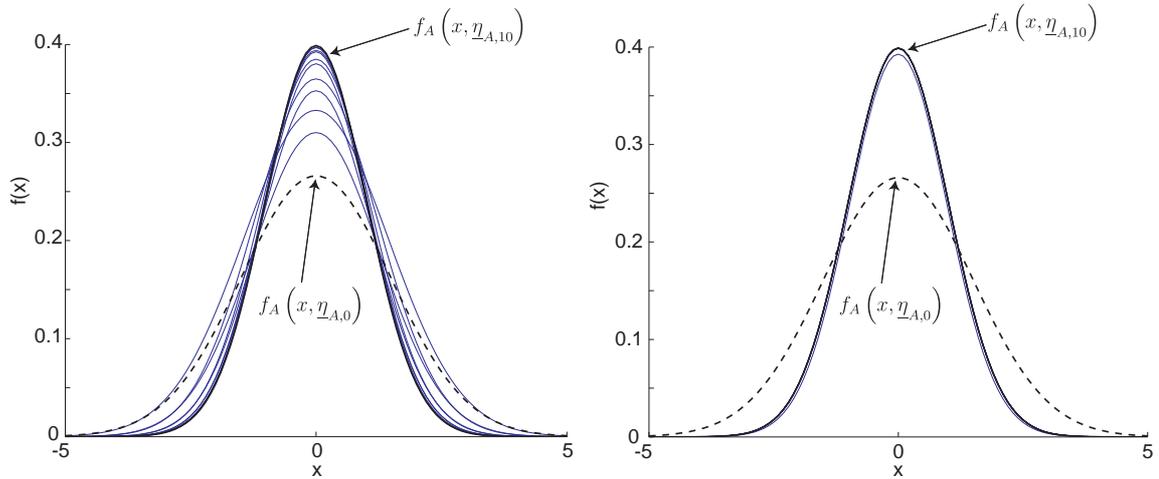


Bild 3.9: Gegebene, zu approximierende Dichte $f_a(x)$ und approximierende Gaußdichte $f_A(x, \underline{\eta}_{A,0})$ für $\underline{\eta}_a = [1, 0, 1]^T$ und $\underline{\eta}_{A,0} = [1, 0, 1.5]^T$.

Gradienten $\frac{\partial G_L(\alpha)}{\partial \alpha}$ bestimmt werden. Vereinfachungen ergeben sich, da als erster Punkt gewöhnlich $\alpha = 0$ gewählt wird. Für drei Auswertungen von $G_L(\alpha)$ an den Stellen α_1, α_2



(a) Minimierung des quadratischen Gütemaßes $G(\underline{\eta})$ nach dem Verfahren des steilsten Abstiegs.

(b) Minimierung des quadratischen Gütemaßes $G(\underline{\eta})$ nach dem Gauß-Newton-Verfahren.

Bild 3.10: Gegebene, zu approximierende Dichte $f_a(x)$ und approximierende Gaußdichten $f_A(x, \underline{\eta}_{A,t})$, $t = 0, 1, \dots$ bei Formapproximation mit Minimierung des quadratischen Gütemaßes $G(\underline{\eta})$. Parameter der gegebenen Dichte: $\underline{\eta}_a = [1, 0, 1]^T$. Initiale Parameter der approximierenden Dichte $\underline{\eta}_{A,0} = [1, 0, 1.5]^T$.

und α_3 ergibt sich die Approximation für das Minimum von $G_L(\alpha)$ direkt zu

$$\alpha_{min} = \frac{1(\alpha_2^2 - \alpha_3^2)G_L(\alpha_1) + (\alpha_3^2 - \alpha_1^2)G_L(\alpha_2) + (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)G_L(\alpha_3)}{2(\alpha_2 - \alpha_3)G_L(\alpha_1) + (\alpha_3 - \alpha_1)G_L(\alpha_2) + (\alpha_1 - \alpha_2)G_L(\alpha_3)}. \quad (3.37)$$

Damit eine Interpolation durchgeführt werden kann, muss das gesuchte Minimum im abgeschlossenen Intervall $[\alpha_1, \alpha_3]$ liegen, das heißt, die Beziehungen $p(\alpha_2) < p(\alpha_1)$ und $p(\alpha_2) < p(\alpha_3)$ müssen gültig sein. Ansonsten liegt das Minimum außerhalb $[\alpha_1, \alpha_3]$ und kann durch Extrapolation mit denselben Verfahren bestimmt werden, was in der Regel jedoch zu unzuverlässigen Ergebnissen führt [22]. Daher wird zunächst ein Intervall gesucht, in dem sich das (lokale) Minimum garantiert befindet, und dann eines der beschriebenen Interpolationsverfahren verwendet.

3.5.4.4 Parametrische Adaption durch Lösung eines DGL-Systems

Eine Alternative zur vorgestellten parametrischen Adaption durch direkte Minimierung des quadratischen Gütekriteriums $G(\tau, \underline{\eta})$ ist die Lösung eines äquivalenten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung [125, 126]. Zur Herleitung dieses Differentialgleichungssystems wird die Ableitung des linearisierten Gütekriteriums nach den Parametern $\underline{\eta}$ (3.31) mit $\Delta \underline{\eta}(\tau) = \underline{\eta}(\tau) - \bar{\underline{\eta}}$ zu null gesetzt. Dabei ist $\bar{\underline{\eta}}$ ein gegebener, nomineller Parametervektor, von welchem $\underline{\eta}$ nur infinitesimal abweicht. Mit der

Definition

$$\underline{F}_A(\underline{x}_k, \underline{\eta}) = \left. \frac{\partial f_A(\underline{x}_k, \eta)}{\partial \underline{\eta}} \right|_{\underline{\eta}} \quad (3.38)$$

ergibt sich aus (3.31) mit $\tilde{f}_e(\underline{x}_k, \tau) = f_p(\underline{x}_k) f_v(\underline{z}_k - \underline{h}_k(\underline{x}_k), \tau)$ und (3.33)

$$\int_{\mathbf{R}^N} \left[\tilde{f}_e(\underline{x}_k, \tau) - f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta}) + \underline{F}_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})^T \underline{\eta} \right] \underline{F}_A(\underline{x}_k, \underline{\eta}) d\underline{x}_k = \mathbf{K}(\underline{x}_k, \underline{\eta}) \underline{\eta}(\tau) \quad , \quad (3.39)$$

wobei \mathbf{K} an der Stelle $\underline{\eta}_t = \underline{\eta}$ ausgewertet wird. Durch partielles Ableiten nach dem Progressionsparameter τ ergibt sich aus (3.39) das gesuchte System von Differentialgleichungen erster Ordnung zu

$$\int_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial \tilde{f}_e(\underline{x}_k, \tau)}{\partial \tau} \underline{F}_A(\underline{x}_k, \underline{\eta}) d\underline{x}_k = \mathbf{K}(\underline{x}_k, \underline{\eta}) \frac{\partial \underline{\eta}}{\partial \tau} \quad , \quad (3.40)$$

welches sich mit $\underline{\eta} = \underline{\eta}$ und der Abkürzung

$$\underline{b}(\tau, \underline{\eta}) = \int_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial \tilde{f}_e(\underline{x}_k, \tau)}{\partial \tau} \underline{F}_A(\underline{x}_k, \underline{\eta}) d\underline{x}_k \quad , \quad (3.41)$$

kurz als

$$\underline{b}(\tau, \underline{\eta}) = \mathbf{K}(\underline{x}_k, \underline{\eta}) \dot{\underline{\eta}} \quad (3.42)$$

schreiben lässt. Aus der Lösung des Differentialgleichungssystems (3.42) über dem Intervall $\tau \in [0, 1]$ ergibt sich der gesuchte Parametervektor $\underline{\eta}$ der angenommenen Dichtebeschreibung für $\tau = 1$. Mit dem größten Rechenaufwand ist dabei die Auswertung der Integrale zur Bestimmung von $\underline{b}(\tau, \underline{\eta})$ verbunden. Erste Untersuchungen zeigen jedoch [126], dass die Lösung von (3.42) auch mit einer relativ groben, approximativen Berechnung von $\underline{b}(\tau, \underline{\eta})$ auf Gaussian–Mixture–Dichten $f_A(\underline{x}_k)$ führt, die eine gute Approximation für die wahre posteriore Dichte sind. Der Vorteil des vorgestellten Verfahrens ist, dass eine Vielzahl weit entwickelter numerischer Standardverfahren für die Lösung des Differentialgleichungssystems (3.42) eingesetzt werden können. Wie bei den in Kapitel 3.5.4.2 vorgestellten Verfahren ist parallel zur parametrischen Adaption eine Kontrolle des Gütemaßes erforderlich, das die Abweichung der wahren Dichte von der approximierenden Gaussian–Mixture–Dichte quantifiziert. Überschreitet diese eine vorgegebene Schranke, muss eine strukturelle Adaption mit Hilfe der im folgenden Kapitel beschriebenen Verfahren durchgeführt werden.

3.5.5 Strukturelle Adaption

Während der Berechnung des Filterschrittes des *PGME*–Verfahrens mittels des in Kap. 3.4 beschriebenen Progressionsverfahrens ist neben der fortlaufend durchgeführten parametrischen Adaption unter Umständen zusätzlich eine strukturelle Adaption der approximierenden Dichte $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ erforderlich. Im Rahmen der progressiven Überführung der parametrisierten Dichte $\tilde{f}_e(\underline{x}_k, \tau)$ von der prioren, prädierten Dichte $f_p(\underline{x}_k)$ in die posteriore Dichte $\tilde{f}_e(\underline{x}_k)$ mittels des Progressionsparameters τ kann der Fall auftreten, dass

in manchen Teilregionen des Zustandsraums mehr approximierende Dichten $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ liegen, als eigentlich benötigt würden, und in anderen Regionen dafür zu wenige. In [109] wird zur Behandlung dieses Problems ein Ansatz zum Aufteilen und Zusammenfassen von Gaußdichten für die Optimierung von Gaussian-Mixture-Modellen mit Hilfe des Expectation-Maximization-Algorithmus (EM) vorgestellt. In [41] wird ein verbesserter Ansatz zum Aufteilen von Gaußdichten in eine beliebige Anzahl von Gaußdichten mit kleinerer Standardabweichung vorgestellt, der auf optimal vorab berechneten Bibliotheken zur Aufteilung beruht. Dieser Ansatz wurde in das vorgestellte Filterverfahren integriert und wird im Folgenden kurz dargestellt.

3.5.5.1 Grundprinzip der Aufteilung von Gaußdichten

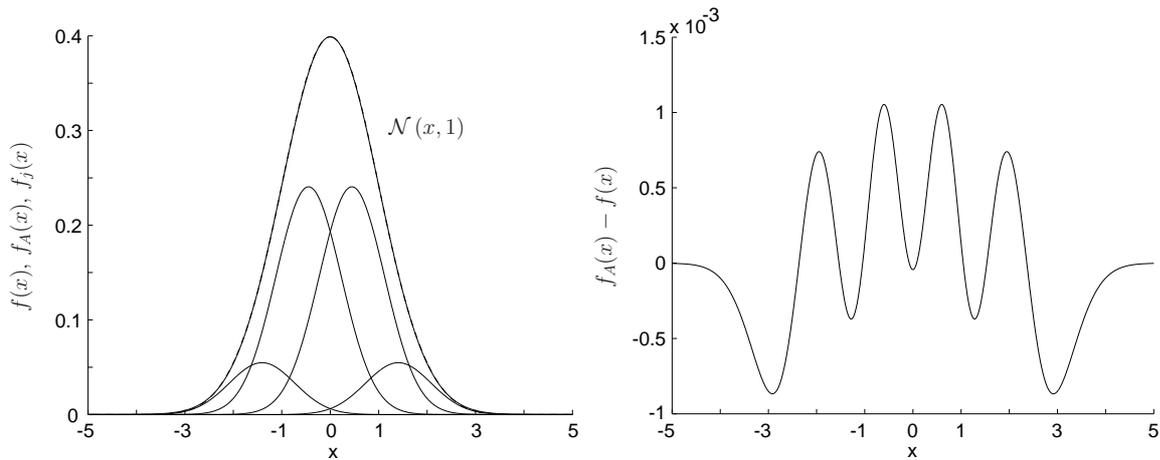
Das Ziel des vorgestellten Verfahrens zur Aufteilung von Gaußdichten ist, die Anzahl der Summanden einer Gaussian-Mixture-Dichte zu vergrößern und dabei die Gaussian-Mixture-Dichte selbst so wenig wie möglich zu verändern. Die einfachste Methode zur Aufteilung einer gegebenen Gaußdichte $f(\underline{x}) = w^2 \mathcal{N}(\underline{x} - \underline{\mu}, \mathbf{C}_x)$ ist es, sie durch zwei Gaußdichten $f_j(\underline{x})$ zu ersetzen, die dieselbe Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_{x,1} = \mathbf{C}_{x,2} = \mathbf{C}_{x,alt}$ besitzen, und gegeneinander um einen kleinen, konstanten Differenzvektor $\underline{\varepsilon}$ verschoben sind, das heißt

$$w^2 \mathcal{N}(\underline{x} - \underline{\mu}, \mathbf{C}_x) \approx w_1^2 \mathcal{N}(\underline{x} - (\underline{\mu} - \underline{\varepsilon}), \mathbf{C}_x) + w_2^2 \mathcal{N}(\underline{x} - (\underline{\mu} + \underline{\varepsilon}), \mathbf{C}_x) \quad . \quad (3.43)$$

Die Summe der Gewichte der Teildichten $f_1(\underline{x})$, $f_2(\underline{x})$ ergibt dabei das Gewicht der ersetzten Dichte, d.h. $w_1^2 + w_2^2 = w^2$. Diese Art der Aufteilung wird in [109] für Verfahren zur Bildrekonstruktion angewandt, die auf Gaussian-Mixture-Modellen basieren, und in [97] im Kontext der Spracherkennung mit Hidden-Markov-Modellen (HMM) verwendet. Die *Nachteile* dieses Verfahrens sind jedoch, dass durch die beschriebene Aufteilung ein zusätzlicher Approximationsfehler eingebracht wird, der mit wachsendem $\underline{\varepsilon}$ größer wird. Für sehr kleine Verschiebungen $\underline{\varepsilon}$ werden die resultierenden Dichten durch das Filterverfahren jedoch wie eine einzelne Dichte behandelt, und es ergibt sich keine erweiterte Approximationsfähigkeit der Gaussian-Mixture-Dichte.

Ein neuartiges Verfahren zur Aufteilung von Gaußdichten in Teildichten, die eine kleinere Standardabweichung als die ursprüngliche Dichte besitzen, beruht darauf, der Aufteilung der Dichten eine Optimierung nachzuschalten. Bei dieser Optimierung werden die Standardabweichungen bzw. die Komponenten der Kovarianzmatrizen der aufgeteilten Dichten progressiv verkleinert, und gleichzeitig die Gewichte und Erwartungswerte der Teildichten $f_j(\underline{x})$ durch Minimierung eines quadratischen Gütemaßes für den Approximationsfehler optimiert [41]. Diese Optimierung kann entweder online erfolgen, das heißt in den Filtervorgang eingebettet sein, oder vorab durchgeführt werden. Die Online-Optimierung liefert die bestmögliche Aufteilung, ist jedoch rechnerisch aufwendig.

Für die vorab durchgeführte Optimierung wird eine Bibliothek mit aufgeteilten eindimensionalen Dichten erstellt, mit deren Hilfe dann zur Laufzeit des Filteralgorithmus beliebige, höherdimensionale Gaußdichten aufgeteilt werden können, wie im folgenden Kapitel erläutert wird. Zur Erstellung der Bibliothek wird eine normierte, skalare Wahrscheinlichkeitsdichte, wie zum Beispiel die Normaldichte $\mathcal{N}(x, 1)$, im Sinne des verwendeten



(a) Normaldichte $f(x) = \mathcal{N}(x, 1)$ und Approximation durch $L = 4$ Gaußdichten.

(b) Fehler bei Approximation der Normaldichte $f(x) = \mathcal{N}(x, 1)$ durch $L = 4$ Gaußdichten.

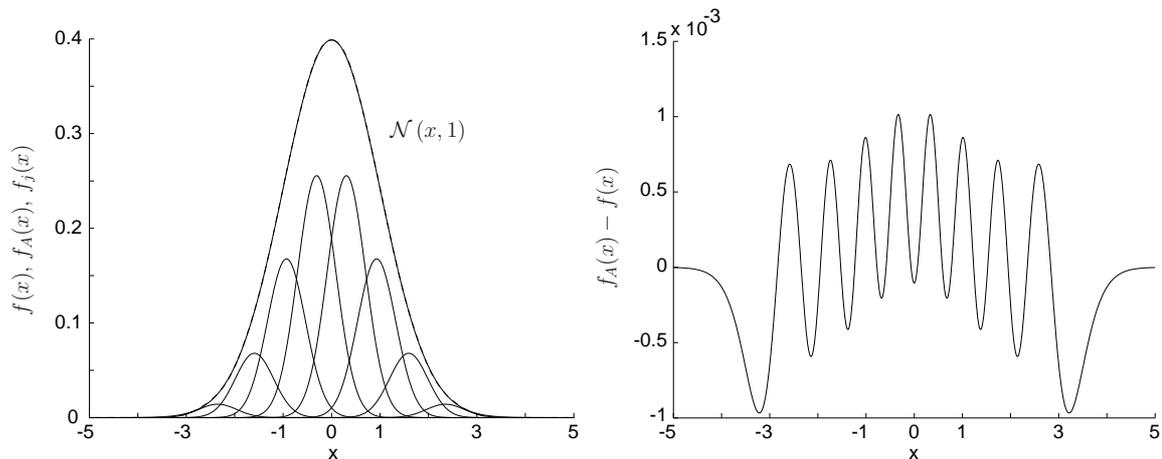
Bild 3.11: Visualisierung einer Bibliothek zur Aufteilung von Gaußdichten: Optimale Aufteilung der Gaußdichte $\mathcal{N}(x, 1)$ in 4 Teildichten.

Gütemaßes optimal in eine vorgegebene Anzahl von L Dichten $f_j(x)$ mit gleicher Standardabweichung $\sigma_j = \sigma, j = 1 \dots L$ aufgeteilt, wobei $L = 2, 4, 8 \dots$ eine Zweierpotenz sein muss.

Bild 3.11(a) und Bild 3.12(a) zeigen beispielhaft eine solche Bibliothek für die Aufteilung von $f(x) = \mathcal{N}(x, 1)$ in $L = 4$ und $L = 8$ eindimensionale Dichten $f_j(x)$, die eine Gaussian–Mixture–Approximation $f_A(x)$ für die Gauß’sche Normaldichte $\mathcal{N}(x, 1)$ darstellen. Die approximierende Dichte $f_A(x)$, welche sich als Summe der vier bzw. acht eingezeichneten Teildichten $f_j(x)$ ergibt, entspricht beinahe exakt der gegebenen Dichte $f(x)$, und lässt sich in Bild 3.11(a) bzw. Bild 3.12(a) daher nicht von $f(x)$ unterscheiden. Der entstehende Approximationsfehler $f_A(x) - f(x)$ ist in Bild 3.11(b) und Bild 3.12(b) dargestellt. Man erkennt, dass der integrale quadratische Fehler wie erwartet mit steigender Anzahl von aufgeteilten Gaußdichten kleiner wird.

3.5.5.2 Aufteilung der approximierenden Gaußdichten $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ mit Hilfe einer vorab berechneten Bibliothek

Nachdem durch das oben beschriebene Verfahren eine Bibliothek für die optimale Approximation einer gegebenen, normierten Gaußdichte, wie zum Beispiel der Normaldichte $\mathcal{N}(x, 1)$, berechnet worden ist, kann diese direkt verwendet werden, um im Rahmen des *PGME*–Verfahrens ausgewählte, höherdimensionale Teildichten $f_{A,j}$ der Gaussian–Mixture–Dichte $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ durch eine Aufteilung zu approximieren. Hierfür ist die Auswertung eines Maßes $G_j(\tau, \underline{\eta})$ notwendig, das charakterisiert, welchen Beitrag jede Einzeldichte $f_{A,j}$ von $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ zum Gütekriterium $G(\tau, \underline{\eta})$ geliefert hat. Die Teildichte, welche gemäß $G_j(\tau, \underline{\eta})$ den maximalen Beitrag zu $G(\tau, \underline{\eta})$ liefert, muss aufgeteilt werden, um



(a) Normaldichte $f(x) = \mathcal{N}(x, 1)$ und Approximation durch $L = 8$ Gaußdichten.

(b) Fehler bei Approximation der Normaldichte $f(x) = \mathcal{N}(x, 1)$ durch $L = 8$ Gaußdichten.

Bild 3.12: Visualisierung einer Bibliothek zur Aufteilung von Gaußdichten: Optimale Aufteilung der Gaußdichte $f(x) = \mathcal{N}(x, 1)$ in 8 Teildichten.

den entstehenden Approximationsfehler möglichst klein zu halten. Eine mögliche Wahl für $G_j(\tau, \underline{\eta})$ ist die Berechnung eines gewichteten Gütemaßes gemäß

$$G_j(\tau, \underline{\eta}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} [f_p(\underline{x}_k) f_v(\underline{z}_k - \underline{h}_k(\underline{x}_k), \tau) - f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})]^2 f_{A,j}(\underline{x}_k, \underline{\eta}) d\underline{x}_k, \quad (3.44)$$

bei dem die quadratische Differenz in (3.18) mit der j -ten Gaußdichte $f_{A,j}$ von $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ gewichtet wird. Im Falle der in dieser Arbeit verwendeten, achsenparallelen Gaußdichten ist die Aufteilung der identifizierten, kritischen Teildichte besonders einfach durchzuführen, da sich die Dichten faktorisieren lassen und somit in jeder Dimension unabhängig aufgeteilt werden können. Für nicht achsenparallele Dichten $f_{A,j}$ muss zur effizienten Aufteilung vorab für jede aufzuteilende Dichte eine Transformation, wie zum Beispiel die Cholesky-Transformation, durchgeführt werden, um das Problem auf die Aufteilung achsenparalleler Gaußdichten zurückzuführen [129]. Ist diese Aufteilung im transformierten Koordinatensystem durchgeführt, werden die berechneten Teildichten zurück in das ursprüngliche Koordinatensystem transformiert, woraus sich die gesuchte Aufteilung der nicht achsenparallelen Dichte $f_{A,j}$ ergibt. Um die Komplexität bei hochdimensionalen Filterproblemen handhabbar zu halten, ist zudem eine separierte Betrachtung in den einzelnen Koordinatenachsen möglich. Die Teildichte $f_{A,j}$ wird dann nicht mehr in jeder Koordinatenrichtung \underline{e}_i , $i = 1 \dots N$ aufgeteilt, was für eine N -dimensionale Dichte und einer Aufteilung in L_j Teildichten zu $(L_j)^N$ neuen Approximationsdichten führen würde, sondern nur noch in spezifischen Richtungen \underline{e}_l , die in Abhängigkeit der auftretenden Approximationsfehler bestimmt werden müssen.

3.5.6 Effiziente Berechnung des Gütemaßes

Für die Berechnung des quadratischen Gütemaßes $G(\tau, \underline{\eta})$ und die Minimierung mit Hilfe der in Kapitel 3.5.4.2 vorgestellten Optimierungsverfahren gemäß Schritt (3) und (4) in Bild 3.4 ist die Auswertung von Integralen erforderlich, die nicht-gauß'sche Wahrscheinlichkeitsdichten enthalten. Diese Integrale besitzen daher im Allgemeinen keine geschlossenen analytische Lösung. In Kapitel 3.4.2 wurden numerische Standardverfahren zur Auswertung von $G(\tau, \underline{\eta})$ vorgestellt, die jedoch auf Grund ihrer rechnerischen Komplexität nur für kleine Dimensionen N des Zustandsraums geeignet sind. Im Folgenden wird ein Verfahren zur *effizienten*, näherungsweise Berechnung des quadratischen Gütekriteriums (3.18) vorgeschlagen, bei welchem die entstehenden, nicht-gauß'schen Teildichten durch Gaußdichten approximiert werden. Dadurch kann eine Approximation $G_{Lin}(\tau, \underline{\eta})$ für das gesuchte Gütemaß $G(\tau, \underline{\eta})$ bestimmt werden. In [129] wird ein auf dieser Vorgehensweise basierendes, suboptimales, aber schnelles Filterverfahren vorgeschlagen und eine Anwendung auf ein Lokalisierungsproblem vorgestellt.

Der erste Schritt zur Auswertung von (3.18) ist die Bestimmung der durch Ausmultiplizieren entstehenden Teildichten

$$G(\tau, \underline{\eta}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} \left[\underbrace{(f_p(\underline{x}_k))^2}_{f_{pp}(\underline{x}_k)} (f_v(\underline{z}_k - \underline{h}_k(\underline{x}_k), \tau))^2 - 2 \underbrace{f_p(\underline{x}_k) f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})}_{f_{pA}(\underline{x}_k)} f_v(\underline{z}_k - \underline{h}_k(\underline{x}_k), \tau) + (f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta}))^2 \right] d\underline{x}_k, \quad (3.45)$$

wobei sich die Produktterme $f_{pp}(\underline{x}_k) = (f_p(\underline{x}_k))^2$ und $f_{pA}(\underline{x}_k) = f_p(\underline{x}_k) f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ der Gaussian–Mixture–Dichten $f_p(\underline{x}_k)$ und $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ einfach mit Hilfe der *Kalman–Filter–Formeln* [71, 115] auswerten lassen. Das Ergebnis des Produkts zweier Gaussian–Mixture–Dichten $f_p(\underline{x}_k)$ und $f_A(\underline{x}_k)$ mit L_p bzw. L_A Summanden ist dabei wieder eine Gaussian–Mixture–Dichte $f_{pA}(\underline{x}_k)$ mit $L_{pA} = L_p L_A$ Summanden. Die Produkte der Teildichten von $f_{pp}(\underline{x}_k)$ und $f_{pA}(\underline{x}_k)$ mit der Likelihoodfunktion $f_v(\underline{z}_k - \underline{h}_k(\underline{x}_k), \tau)$ werden approximiert, indem für jede Teildichte eine approximierte Likelihoodfunktion $\bar{f}_v^j(\cdot)$ durch Linearisierung der nichtlinearen Messfunktion $\underline{h}_k(\underline{x}_k)$ um den Erwartungswert der Teildichte berechnet wird. Damit ergibt sich das approximierte Gütemaß $G_{Lin}(\tau, \underline{\eta})$ zu

$$G_{Lin}(\tau, \underline{\eta}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} \left[\sum_{j=1}^{L_{pp}} f_{pp}^j(\underline{x}_k) \left(\bar{f}_v^j(\underline{z}_k - \bar{\underline{h}}_k^j(\underline{x}_k), \tau) \right)^2 - 2 \sum_{j=1}^{L_{pA}} f_{pA}^j(\underline{x}_k) \bar{f}_v^j(\underline{z}_k - \bar{\underline{h}}_k^j(\underline{x}_k), \tau) + (f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta}))^2 \right] d\underline{x}_k, \quad (3.46)$$

wobei $f_{pp}^j(\underline{x}_k)$ und $f_{pA}^j(\underline{x}_k)$ die j -ten gauß'schen Teildichten der zugehörigen Produkt-dichten sind, und $\bar{\underline{h}}_k^j(\underline{x}_k, \tau)$ die zugehörige, um den Erwartungswert der j -ten Teildichte linearisierte Messfunktion ist. Die Approximation $G_{Lin}(\tau, \underline{\eta})$ für das Gütemaß $G(\tau, \underline{\eta})$ wird gemäß (3.46) durch die Berechnung des nullten Momentes über eine Summe von Gaußdichten berechnet, da die Produkte der approximierten Likelihoodfunktion $\bar{f}_v^j(\cdot)$ mit den gauß'schen Teildichten in (3.46) wiederum Gaußdichten sind. Zu beachten ist

(1) Berechnung der Produktdichten $f_{pp}(\underline{x}_k) = (f_p(\underline{x}_k))^2$ und $f_{pA}(\underline{x}_k) = f_p(\underline{x}_k) f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ mittels <i>Kalman</i> -Filter-Formeln.		
(2) Berechnung des Linearisierungsfehlermaßes F_{Lin} für alle Teildichten der Produktdichten $f_{pp}(\cdot)$ und $f_{pA}(\cdot)$ gemäß (3.47).		
(3) Bestimmung des maximalen Linearisierungsfehlers F_{Lin}^{Max} .		
Überprüfung des maximaler Linearisierungsfehlers:		
Ja	$F_{Lin}^{Max} > \varepsilon_{Lin}^{Max}$	Nein
(4) Aufteilen der Teildichte mit zugehörigem, maximalen Linearisierungsfehler mit Hilfe einer vorab berechneten Bibliothek.	Beende Schleife	
Bis maximaler Linearisierungsfehler $F_{Lin}^{Max} < \varepsilon_{Lin}^{Max}$		
(5) Berechnung der Näherung $G_{Lin}(\tau, \underline{\eta})$ für das quadratische Gütemaß $G(\tau, \underline{\eta})$ gemäß (3.46) mit den ermittelten, aufgeteilten Produktdichten $f_{pp}^{Split}(\cdot)$ und $f_{pA}^{Split}(\cdot)$.		

Bild 3.13: Verfahren zur effizienten, approximativen Berechnung des quadratischen Gütekriteriums $G(\tau, \underline{\eta})$ mit bibliotheksbasierter Aufteilung von Gaußdichten und vorgegebbarer, oberer Schranke ε_{Lin}^{Max} für den maximalen entstehenden Linearisierungsfehler.

dabei, dass die auftretenden Gaußdichten durch die Multiplikation mit $\bar{f}_v(\cdot)$ *nicht* mehr achsenparallel sind, obwohl als angenommene Dichtebeschreibung für die priore Dichte $f_p(\underline{x}_k)$ und die approximierende Dichte $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ Gaussian-Mixture-Dichten mit achsenparallelen Gaußdichten verwendet wurden. Ein effizientes Verfahren zur Berechnung der Momente über nicht achsenparallele Gaußdichten wird in [41] und [82, 90] beschrieben. Es beruht darauf, dieses Problem auf die Berechnung der Momente von N skalaren Gaußdichten zurückzuführen [17, 86].

(3.46) stellt eine gute Näherung für das exakte Gütemaß $G(\tau, \underline{\eta})$ gemäß (3.18) dar, solange die Standardabweichung der einzelnen Teildichten der Produktdichten $f_{pp}(\underline{x}_k)$ und $f_{pA}(\underline{x}_k)$ klein im Vergleich mit der „Breite“ der Likelihoodfunktion an der Stelle der jeweiligen Teildichte $f_{pp}^j(\underline{x}_k)$ bzw. $f_{pA}^j(\underline{x}_k)$ ist. Ist diese Bedingung nicht mehr erfüllt, wird die lineare Näherung $\bar{h}_k(\cdot)$ für die Messfunktion $h_k(\cdot)$ und damit auch die Näherung für die Likelihoodfunktion in (3.46) ungültig. Mit dem in Kap. 3.5.5 vorgestellten Verfahren zum bibliotheksbasierten Aufteilen von Gaußdichten in Summen von Gaußdichten mit kleinerer Standardabweichung ist es jedoch möglich, den entstehenden Linearisierungsfehler F_{Lin} durch iteratives Aufteilen von Gaußdichten solange zu verringern, bis er unter einer vorgegebenen oberen Schranke ε_{Lin}^{Max} liegt. Ein Nachteil des vorgestellten Verfahrens ist, dass durch die Aufteilung selbstverständlich die Anzahl der Produktterme in (3.46) und damit auch die Anzahl der erforderlichen Rechenoperationen zur Auswertung von $G_{Lin}(\tau, \underline{\eta})$ ansteigt. Somit ist es notwendig, mit der Wahl von ε_{Lin}^{Max} einen Kompromiss zwischen benötigtem Rechenaufwand und der resultierenden Genauigkeit von $G_{Lin}(\tau, \underline{\eta})$ zu treffen.

Bild 3.13 zeigt ein Ablaufdiagramm des Verfahrens zur näherungsweise Berechnung von $G(\tau, \eta)$ mit iterativer Aufteilung der Produktdichten $f_{pp}(\underline{x}_k)$ und $f_{pA}(\underline{x}_k)$. Um gemäß Schritt (2) und (3) zu bestimmen, durch welche Produktdichte der größte Beitrag zum gesamten Linearisierungsfehler entsteht, muss ein geeignetes Linearisierungsfehlermaß F_{Lin} definiert werden. Hierzu wird ein integrales, quadratisches Maß verwendet, das die Abweichung jeder in (3.46) auftretenden Teildichte von ihrer zugehörigen, gauß’schen Näherung quantifiziert, und gemäß

$$F_{Lin}^j = \int_{\mathbb{R}^N} \bar{f}_{e,pr}^j(\underline{x}_k) \left(\ln \left(\frac{\bar{f}_{e,pr}^j(\underline{x}_k)}{f_{e,pr}^j(\underline{x}_k)} \right) \right)^2 d\underline{x}_k \quad (3.47)$$

definiert ist, wobei $f_{e,pr}^j(\underline{x}_k)$ die posteriore Dichte ist, die sich aus dem Produkt der j -ten Teildichte mit der Likelihoodfunktion $f_v(\underline{z}_k - \underline{h}_k(\underline{x}_k), \tau)$ ergibt. Entsprechend ist $\bar{f}_{e,pr}^j(\underline{x}_k)$ die posteriore Dichte, die aus dem Produkt der j -ten Teildichte mit der approximierten Likelihoodfunktion $\bar{f}_v^j(\underline{z}_k - \bar{\underline{h}}_k^j(\underline{x}_k), \tau)$ resultiert. Das hier verwendete Linearisierungsfehlermaß ist der Kullback–Leibler Distanz ähnlich und geht gegen Null, wenn der Linearisierungsfehler, der durch Approximation der Likelihoodfunktion entsteht, im Gebiet der betrachteten j -ten Produktdichte $f_{e,pr}^j(\underline{x}_k)$ gegen Null geht. Wenn der maximale Linearisierungsfehler unter der vorgegebenen Schranke ε_{Lin}^{Max} liegt, wird mit den ermittelten, aufgeteilten Produktdichten $f_{pp}^{Split}(\underline{x}_k)$ und $f_{pA}^{Split}(\underline{x}_k)$ gemäß (3.46) die Approximation $G_{Lin}(\tau, \eta)$ für $G(\tau, \eta)$ berechnet.

Die Auswertung des Gradienten $\frac{\partial G}{\partial \eta}$ kann in analoger Weise zur Auswertung von G mit Hilfe des vorgestellten Verfahrens durchgeführt werden. Der Hauptunterschied ist, dass Momente von Gaußdichten bis zur zweiten Ordnung ausgewertet werden müssen [41].

Mit Hilfe des in diesem Kapitel vorgestellten Verfahrens können effizient Näherungen für das Gütemaß $G(\tau, \eta)$ und den Gradienten $\frac{\partial G}{\partial \eta}$ auch für höherdimensionale Filterprobleme berechnet werden. Allerdings steigt auch für dieses Verfahren die Anzahl der benötigten aufgeteilten Produktdichten und damit die Komplexität des Verfahrens stark mit der Dimension N des Zustandsraums an. Der Anstieg lässt sich begrenzen, indem ein geeignet definiertes Maß für den Beitrag ausgewertet wird, den jede einzelne Produktdichte zum Filterergebnis leistet. Produktdichten, für welche dieses Maß eine vorgegebene Grenze unterschreitet, werden für die weiteren Berechnungen nicht berücksichtigt. Des Weiteren kann das in Kapitel 3.5.5.2 beschriebene Verfahren zur richtungsspezifischen Aufteilung von Gaußdichten angewandt werden, um die Zahl der benötigten Produktdichten zu verringern.

3.5.7 Algorithmischer Ablauf des PGME–Filterschrittes

Bild 3.14 zeigt den Algorithmus zur Berechnung des beschriebenen Filterschrittes des PGME–Verfahrens, der in abstrahierter Form in Bild 3.4 vorgestellt wurde. Der Algorithmus gliedert sich in drei ineinander geschachtelte Schleifen. Die äußerste Schleife realisiert die Überführung der parametrisierten Wahrscheinlichkeitsdichte $\tilde{f}_e(\underline{x}_k, \tau)$ durch den Progressionsparameter τ . Die darin eingebettete t -Schleife ist die Implementierung der

Berechnung eines lokal optimalen Parametersatzes $\underline{\eta}_{min}$ gemäß Schritt (4), Bild 3.4, wobei als Abbruchkriterium das Erreichen einer Schranke G_{max} für das normierte Gütemaß oder die Überschreitung einer vordefinierten, maximalen Schrittzahl t_{max} verwendet wird. Als innerste Schleife ist eine Adaption des Gewichtungsfaktors λ implementiert, die das Optimierungsverfahren wie in Kapitel 3.5.4.2 beschrieben robuster macht, als das reine Gauss-Newton-Verfahren. In jedem Minimierungsschritt der t -Schleife werden Dichten, deren Gewicht unter eine vorgegebene Schranke gefallen ist, aus der approximierenden Gaussian-Mixture-Dichte $f_A(\cdot)$ gelöscht. Nach Abschluss der Minimierung in jedem Progressionsschritt der τ -Schleife wird eine strukturelle Adaption der Approximationsdichte $f_A(\cdot)$ durchgeführt, um zu gewährleisten, dass die Anzahl der Teildichten von $f_A(\cdot)$ der Komplexität der parametrisierten, wahren Dichte $\tilde{f}_e(\cdot)$ angepasst ist. Diese Aufteilung könnte auch in jedem t -Schritt des Verfahrens durchgeführt werden, allerdings wäre dies mit einem leicht erhöhten Rechenaufwand verbunden.

3.6 Der Prädiktionsschritt des *PGME*-Verfahrens

3.6.1 Lineare Prädiktion

Für ein lineares System vereinfacht sich die allgemeine Systembeschreibung (1.3) mit additivem, weißen Rauschen zu der zeitvarianten, linearen Systemgleichung

$$\underline{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \underline{x}_k + \mathbf{B}_k \underline{u}_k + \underline{w}_k, \quad (3.48)$$

siehe auch Anhang A.1. Für nichtlineare Filterverfahren, die auf einer Diskretisierung des gegebenen Systemmodells beruhen, ist die Berechnung des Prädiktionsschrittes auch für ein lineares Systemmodell wegen der erforderlichen Auswertung einer diskreten Faltung selbst für niedrige Zustandsraumdimensionen N mit sehr großem numerischem Aufwand verbunden [35, 104], siehe auch Kapitel 1.3.2. Partikelbasierte Verfahren beheben dieses Problem teilweise, doch ist für expansive Systemabbildungen eine ständig wachsende Anzahl an Partikeln erforderlich, die eine steigende Komplexität des Filteralgorithmus nach sich zieht [2, 26, 106]. Dahingegen kann der Prädiktionsschritt für Filterverfahren, die auf einer angenommenen Dichtebeschreibung mit Gaussian-Mixture-Dichten basieren, im linearen Fall sehr effizient durchgeführt werden. Da Gaussian-Mixture-Dichten lineare, konvexe Kombinationen von Gaußdichten sind, überträgt er sich direkt vom Prädiktionsschritt des *Kalman*-Filters, welcher auf jede Teildichte $f_{A,j}$, $j = 1 \dots L$ der approximierenden Gaussian-Mixture-Dichte $f_A(\underline{x}_k, \underline{\eta})$ einzeln angewendet wird. Diese Separierung ist für ein lineares System (3.48) exakt, und liefert das optimale Ergebnis für die prädizierte Dichte $f_p(\underline{x}_{k+1})$ zum Zeitpunkt $k + 1$. Diese prädizierte Dichte ergibt sich gemäß der *Kalman*-Filter-Formeln [115] direkt zu

$$f_p(\underline{x}_{k+1}) = \sum_{j=1}^L (w_{j,k+1}^p)^2 \mathcal{N}\left(\underline{x} - \underline{\mu}_{j,k+1}^p, \mathbf{C}_{j,k+1}^p\right), \quad (3.49)$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{\mu}_{j,k+1}^p &= \mathbf{A}_k \underline{\mu}_{j,k}^e + \mathbf{B}_k \underline{u}_k \\ \mathbf{C}_{j,k+1}^p &= \mathbf{A}_k \mathbf{C}_{j,k}^e \mathbf{A}_k^T + \mathbf{C}_k^w. \end{aligned}$$

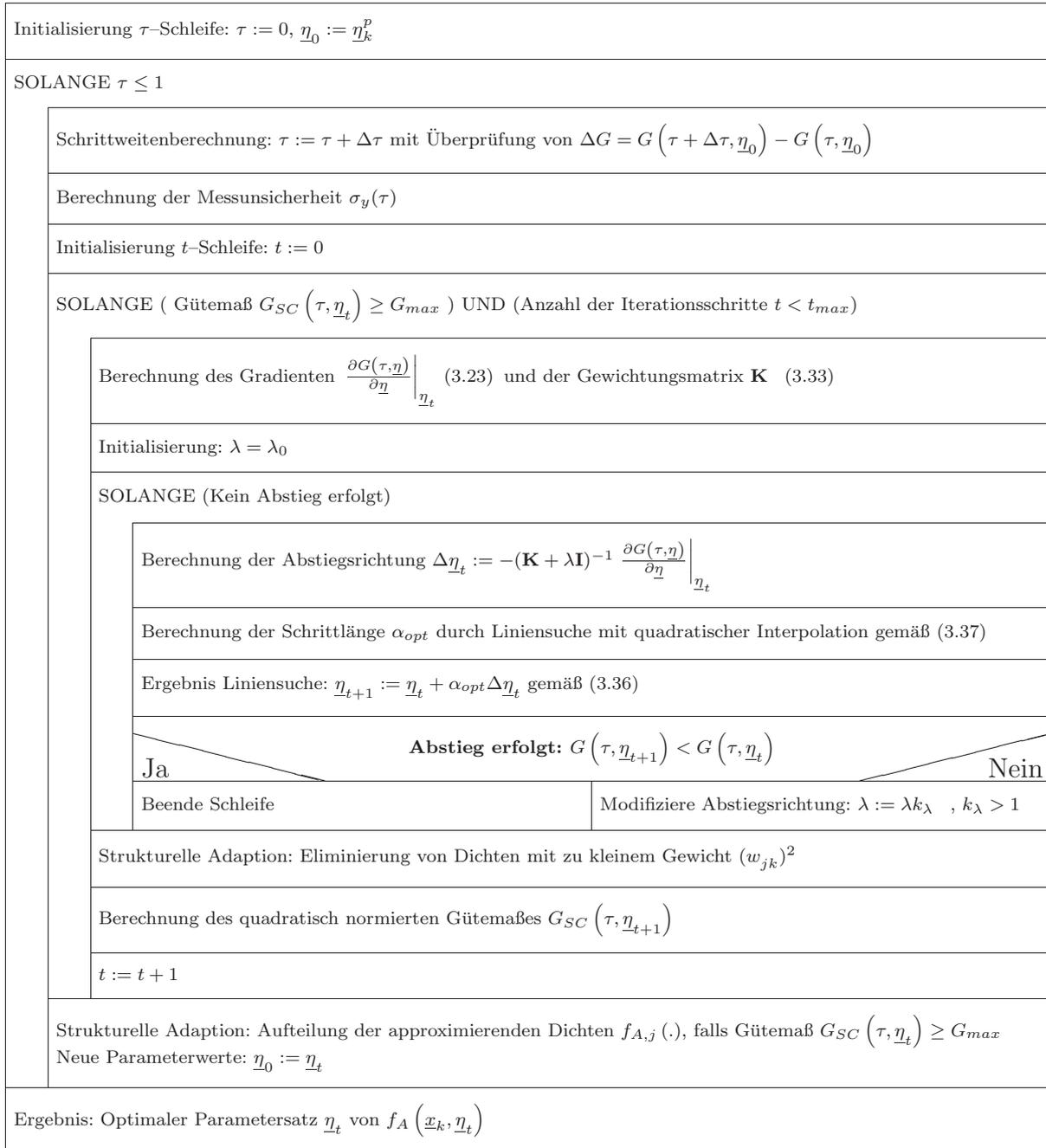


Bild 3.14: Algorithmischer Ablauf des *PGME*-Verfahrens mit parametrischer Adaption durch das Levenberg–Marquardt–Abstiegsverfahren

Die Gewichte $(w_{jk+1}^p)^2 = (w_{jk}^e)^2$ der Teildichten der approximierenden Gaussian–Mixture–Dichte bleiben dabei unverändert.

Für eine allgemeine, nichtlineare Systemgleichung gemäß (1.3) ist die resultierende, exakte, prädizierte Dichte *keine* Gaussian–Mixture–Dichte. Daher ist analog zur Vorgehensweise bei der Berechnung des Filterschrittes die Ermittlung einer Approximation erforderlich, die im Sinne eines geeignet definierten Gütemaßes G optimal ist.

3.6.2 Nichtlineare Prädiktion mit Minimierung eines quadratischen Gütemaßes G

Die Vorgehensweise zur Berechnung einer Approximation $f_A(\underline{x}_{k+1}, \underline{\eta})$ der exakten, prädizierten Dichte $\tilde{f}_p(\underline{x}_{k+1})$ zum Zeitpunkt $k + 1$ auf der Basis von Gaussian–Mixture–Dichten erfolgt analog zum Filterschritt. Durch Minimierung eines integralen, quadratischen Gütemaßes G gemäß

$$G(\tau, \underline{\eta}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\tilde{f}_p(\underline{x}_{k+1}, \tau) - f_A(\underline{x}_{k+1}, \underline{\eta}) \right]^2 d\underline{x}_{k+1} \quad (3.50)$$

wird eine im Sinne von $G(\underline{\eta})$ optimale Approximation berechnet, wobei $\tilde{f}_p(\underline{x}_{k+1}, \tau)$ die wahre, prädizierte Wahrscheinlichkeitsdichte gemäß (1.8) und $f_A(\underline{x}_{k+1}, \underline{\eta})$ die approximierende Gaussian–Mixture–Dichte ist. $\tilde{f}_p(\underline{x}_{k+1}, \tau)$ wird dabei analog zum Filterschritt durch einen Progressionsparameter $\tau \in [0, 1]$ parametrisiert, und stetig von der geschätzten Dichte $f_e(\underline{x}_k)$ zum Zeitpunkt k in die prädizierte Dichte $\tilde{f}_p(\underline{x}_{k+1})$ zum Zeitpunkt $k + 1$ überführt. Durch diese Progression wird vermieden, dass das Optimierungsverfahren zur Minimierung von $G(\tau, \underline{\eta})$ gegen ein lokales Minimum konvergiert.

Im Unterschied zum Filterschritt ist es für den Prädiktionsschritt im Allgemeinen *nicht* möglich, durch einfache numerische Integration wie z.B. mit Hilfe gitterbasierter Verfahren die exakte prädizierte Wahrscheinlichkeitsdichte $\tilde{f}_p(\underline{x}_{k+1})$ zu berechnen, da hierfür die Auswertung eines Faltungsintegrals erforderlich ist. Trotzdem kann der für die Optimierung von $G(\underline{\eta})$ benötigte Gradient $\frac{\partial G}{\partial \underline{\eta}}$ für den Fall additiven Systemrauschens (1.3) explizit hergeleitet werden [41]. Dabei wird ausgenutzt, dass die Integrationsreihenfolge bei der Berechnung des Faltungsintegrals für die Prädiktion und des Integrals zur Auswertung von $\frac{\partial G}{\partial \eta_j}(\tau, \underline{\eta})$ getauscht werden kann. Die gesuchten Gradientenkomponenten ergeben sich dann aus der Berechnung nichtlinearer Erwartungswerte über nicht gauß'sche Exponentialdichten, deren Exponenten von der Systemfunktion $f_k(\underline{x}_k)$ abhängen. Die näherungsweise Berechnung der benötigten Momente über diese Wahrscheinlichkeitsdichten kann dann analog zum Filterschritt mit Hilfe des vorgestellten Verfahrens zum bibliotheksbasierten Aufteilen von Gaußdichten erfolgen.

3.7 Diskussion

Dieses Kapitel stellte ein neuartiges nichtlineares Filterverfahren vor, das Gaussian–Mixture–Dichten als angenommene Dichtebeschreibung für die auftretenden Wahrscheinlichkeitsdichten verwendet. Im Rahmen des Filterverfahrens werden die optimalen Parameter dieser angenommenen Dichtebeschreibung durch Minimierung eines geeignet definierten Gütemaßes bestimmt, welches die Abweichung der angenommenen Wahrscheinlichkeitsdichte von der wahren Wahrscheinlichkeitsdichte quantifiziert. Als Gütemaß, durch dessen Minimierung eine *Formapproximation* der gesuchten Wahrscheinlichkeitsdichte erfolgt, wurde die integrale, quadratische Abweichung der Wahrscheinlichkeitsdichten vorgeschlagen. Die Bestimmung optimaler Parameter für eine Gaussian–Mixture–Dichte bei allgemeinen Approximationsproblemen ist in der Regel ein sehr schwieriges Problem. Für das

behandelte Filterungsproblem ist es jedoch möglich, eine parametrisierte Wahrscheinlichkeitsdichte zu definieren, die durch ein *Progressionsverfahren* stetig von der aus dem vorangegangenen Filterschritt hervorgegangenen approximativen Dichtebeschreibung in die gesuchte wahre Wahrscheinlichkeitsdichte nach Durchführung des Filterschrittes übergeht. Durch eine *progressive, parametrische Adaption* wird die angenommene Dichtebeschreibung der wahren parametrisierten Dichte nachgeführt und vermieden, dass das unterlagerte Optimierungsverfahren gegen ein Nebenminimum konvergiert. Das resultierende Filterverfahren wird daher als *Progressive Gaussian Mixture Estimator (PGME)* bezeichnet. Ausblickend wurde dargestellt, wie die parametrische Adaption auf die Lösung eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgeführt werden kann. Zur *strukturellen Adaption* der angenommenen Dichtebeschreibung wurde ein neuartiges Verfahren zur Anpassung der Anzahl der Teildichten vorgestellt, das auf einer *bibliotheksbasierten Aufteilung* von Gaußdichten beruht. Durch dieses Verfahren wird die Komplexität der angenommenen Gaussian–Mixture–Dichte automatisch an die Komplexität der wahren parametrisierten Wahrscheinlichkeitsdichte angepasst. Dadurch ist es möglich, eine obere Schranke für den zulässigen, resultierenden Approximationsfehler vorzugeben. Das Verfahren passt die Anzahl der benötigten Teildichten der approximierenden Gaussian–Mixture–Dichte dann automatisch so an, dass die vorgegebene Schranke unterschritten wird. Schließlich wurden Methoden diskutiert, die eine effiziente Auswertung des vorgestellten Gütemaßes ermöglichen. Für die Auswertung der auftretenden Integrale über nicht–gauß’sche Wahrscheinlichkeitsdichten wurden Verfahren vorgestellt, die auf der bibliotheksbasierten Aufteilung von Gaußdichten beruhen, und eine numerische Integration vermeiden.

Die *Vorteile* des vorgestellten, neuartigen Filterverfahrens gegenüber den häufig verwendeten, linearisierenden Verfahren wie dem Extended–Kalman–Filter (*EKF*) und dem Covariance Intersection Filter (*CI–Filter*) sind zum einen, dass für allgemeine, nichtlineare Systeme kein Approximationsfehler durch eine Linearisierung der Systembeschreibung entsteht. Zum anderen können die resultierenden komplizierten, nicht–gauß’schen Wahrscheinlichkeitsdichten präzise durch die angenommene Dichtebeschreibung dargestellt werden. Eine Vernachlässigung der auftretenden Linearisierungsfehler kann bei linearisierenden Filterverfahren unter Umständen zur Divergenz des Verfahrens führen. Eine konservative Abschätzung der Linearisierungsfehler führt im Allgemeinen zu übermäßig konservativen Filterergebnissen.

Ebenfalls häufig verwendete nichtlineare Filterverfahren sind Verfahren mit einer Approximation des gegebenen Systemmodells durch ein amplitudendiskretes System auf einem Gitter. Sie ermöglichen zwar für kleine Dimensionen N des Zustandsraums die näherungsweise Berechnung des Filterschrittes, sind jedoch für den Prädiktionsschritt auf Grund der erforderlichen Auswertung einer diskreten Faltung extrem aufwendig. Das vorgestellte *PGME–Verfahren* vermeidet durch seine analytische Dichtebeschreibung eine Quantisierung des Zustandsraums und die damit verbundenen Komplexitätsprobleme. Des Weiteren erlaubt es eine durchgängige Behandlung des Filter– und des Prädiktionsschrittes auch für allgemeine, nichtlineare Systeme.

Die so genannten Partikelfilter, welche unter einer Reihe verschiedener Bezeichnungen in der Literatur bekannt sind [2], behandeln das nichtlineare Filterproblem durch eine diskretisierte Beschreibung der Wahrscheinlichkeitsdichte. Sie leiden aber, wie die gitterbasierten

Verfahren, unter einer exponentiell mit der Dimension N des Zustandsraums ansteigenden Komplexität durch die immer größere Anzahl an benötigten Partikeln. Während die Anzahl an approximierenden Gaussian–Mixture–Dichten bei dem vorgestellten Filterverfahren von der Komplexität der wahren, zu beschreibenden Wahrscheinlichkeitsdichte abhängt, hängt die Anzahl der benötigten Partikel für die gleiche Approximation zusätzlich exponentiell von der Dimension N ab. Dies verwehrt in der Regel eine Anwendbarkeit für hochdimensionale Filterprobleme.

Im Vergleich zu dem in Kapitel 2 vorgestellten Verfahren zur nichtlinearen Filterung auf der Basis von Exponentialdichten oder pseudo–ellipsoidalen Mengen weist der Prädiktionsschritt des *PGME*–Verfahrens näherungsweise die gleiche Komplexität auf wie der Filterschritt und lässt sich mit denselben Methoden behandeln. Für lineare Systeme mit additivem, weißem, gauß’schen Rauschen vereinfacht er sich darüber hinaus zu einer linearen Kombination des bekannten *Kalman*–Filter–Prädiktionsschrittes für jede einzelne approximierende Dichte. Dagegen konnte für das Hyperraumfilterverfahren bisher keine analoge, geschlossen analytische Lösung gefunden werden, da die auftretenden Integrale über Exponentialdichten keine geschlossene Lösung besitzen.

Die *Nachteile* des *PGME*–Verfahrens sind demgegenüber, dass speziell im Vergleich mit linearisierenden Standardfilterverfahren wie dem *EKF* ein verhältnismäßig hoher Rechenaufwand erforderlich ist, auch wenn die vorgestellten optimierten Verfahren zur Auswertung der auftretenden Integrale eingesetzt werden. Trotzdem ist das Verfahren auf höherdimensionale Filterprobleme anwendbar, wobei allerdings zum einen die Anzahl L der benötigten, approximierenden Gaussian–Mixture–Dichten erheblich gegenüber dem skalaren Fall ansteigt. Zum anderen steigt die Komplexität der Auswertung des benötigten Gütemaßes und des zugehörigen Gradienten. Ein Konvergenzbeweis, der besagt, dass das globale Optimum des unterlagerten Optimierungsproblems zur Filterung mit Formapproximation durch das vorgestellte Progressionsverfahren in jedem Fall gefunden werden kann, existiert bisher nicht. Allerdings wurden für eine Reihe praktischer Probleme gute Lösungen mit einer kleinen Anzahl an Approximationsdichten und vernachlässigbar kleinem verbleibenden Approximationsfehler gefunden. Ein Beispiel ist die in Kapitel 4 vorgestellte Anwendung zur Lokalisierung von Mobiltelefonen. Schließlich ist die Anzahl der Approximationsdichten, die das vorgestellte Verfahren verwenden kann, begrenzt, da sich durch das bibliotheksbasierte Aufteilen von Dichten zur Berechnung der benötigten Momente eine sehr grosse Anzahl an Produktdichten ergeben kann. Dieses Problem kann jedoch behandelt werden, indem vorab ein Maß für den Beitrag ausgewertet wird, den eine Produktdichte zum Filterergebnis leistet. Für die weiteren Berechnungen werden nur Dichten berücksichtigt, für die dieses Maß eine vorgegebene Grenze überschreitet.

Kapitel 4

Experimentelle Validierung

4.1 Fallbeispiel 1: Lokalisierung im Falle relativer Winkelmessungen

4.1.1 Einleitung

Eine der wichtigsten Fähigkeiten mobiler Roboter ist die Selbstlokalisierung bezüglich eines raumfesten, globalen Koordinatensystems S_0 in seiner Umgebung, die unter anderem als Grundlage für eine erfolgreiche, autonome Navigation benötigt wird [26, 39, 54, 122]. Merkmalsbasierte Ansätze zur Selbstlokalisierung beruhen darauf, mittels der externen Sensorik des Roboters Messungen zu bekannten Merkmalen in der Umgebung, die auch als Landmarken bezeichnet werden, durchzuführen und mit Hilfe dieser Messungen eine Lageschätzung für den Roboter zu berechnen. Diese Schätzung wird üblicherweise durch die Koppelnavigation, welche auf Messungen der internen Sensorik des Roboters basiert, inkrementell über der Zeit fortgeschrieben [14, 81]. Abhängig von der verwendeten externen Sensorik lassen sich verschiedene geometrische und physikalische Größen der vermessenen Landmarken bestimmen. Zwei häufig verwendete Ansätze beruhen darauf, Winkel und/oder Abstände zwischen dem Roboter und der betrachteten Landmarke zu vermessen, was auf ein Triangulationsproblem bzw. ein Trilaterationsproblem für die Lokalisierung führt, siehe zum Beispiel [9, 14, 40, 101]. Zusätzlich aus der Messung extrahierte Information zur Identifikation der Landmarke kann das schwierig zu behandelnde Zuordnungsproblem erheblich vereinfachen.

4.1.2 Beschreibung der Lokalisierungsaufgabe

In den hier vorgestellten experimentellen Untersuchungen wird das Problem der Selbstlokalisierung im Falle reiner Winkelmessungen betrachtet. Bild 4.1 zeigt den mobilen Roboter ROMAN II, der am Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik der Technischen Universität München im Rahmen des durch die Bayerische Forschungsförderung geförderten Projektes DIROKOL¹ entwickelt wurde. Er verfügt als externe Sensorik über einen omnidirektionalen Lokalisierungssensor auf Basis einer Digitalkamera mit IEEE 1394-Interface [67, 120]. In diesem Lokalisierungssensor ist die Kamera vertikal mit Blickrichtung nach oben montiert. Senkrecht zu ihrer optischen Achse ist ein kegelförmiger Spiegel montiert, wodurch mit der Kamera 360° Panoramabilder aufgenommen werden. Durch

¹ DIROKOL steht für Dienstleistungsroboter in kostengünstiger Leichtbauweise für die Pflege.

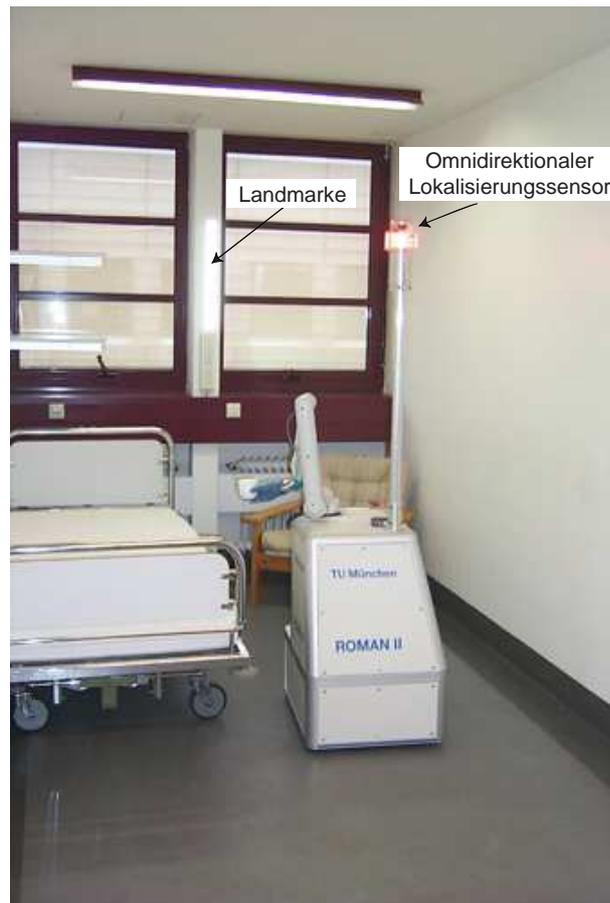
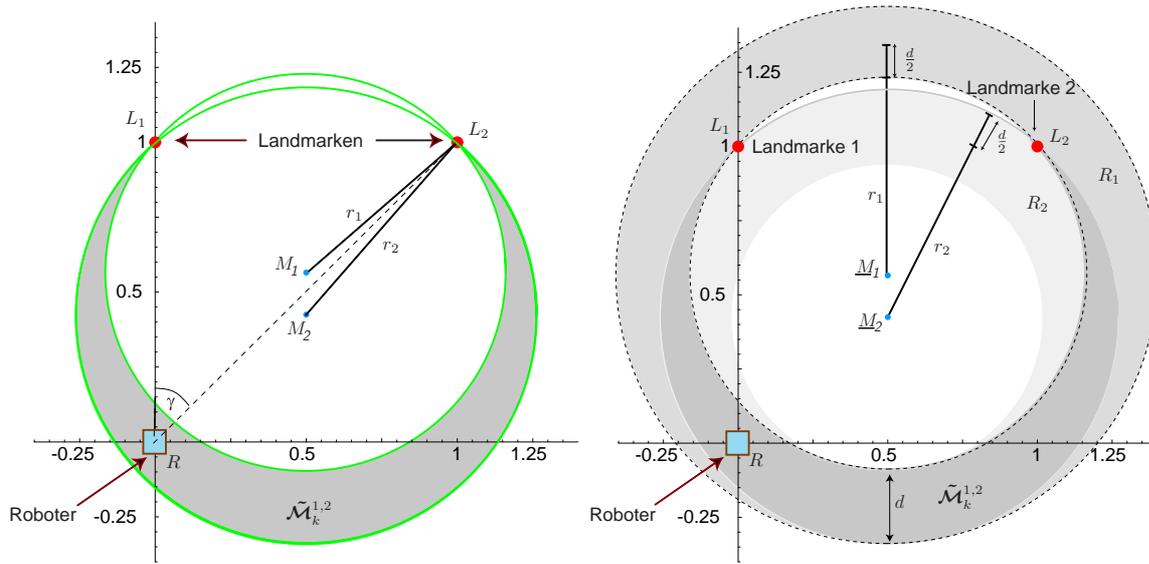


Bild 4.1: Experiment zur Lokalisierung im Falle relativer Winkelmessungen: Der mobile Serviceroboter ROMAN II des Lehrstuhls für Steuerungs- und Regelungstechnik in seiner Einsatzumgebung.

Auswertung dieser Panoramabilder mit Hilfe eines schnellen Kreuzkorrelationsalgorithmus [103, 123] werden absolute Winkelmessungen zu bekannten natürlichen und künstlichen, passiven Landmarken L_i , $i = 1 \dots K$ in der Umgebung gewonnen. Natürliche Landmarken sind in der Umgebung vorhandene, kontrastreiche Strukturen mit bekannter Position. Als künstliche Landmarken werden Retroreflektoren verwendet, die sich auch bei schlechten Lichtverhältnissen robust detektieren lassen, da sie aktiv durch den Lokalisierungssensor beleuchtet werden können [121]. Im Folgenden wird das Lokalisierungsproblem analog zu [37] behandelt, indem es auf die Lokalisierung mittels *relativer* Winkelmessungen zurückgeführt wird. Dieser Ansatz wird implizit auch bei der Aufstellung eines linearen Gleichungssystems für die Roboterposition in [40] und in [9] angewendet. Diese relativen Winkelmessungen sind per Definition invariant gegenüber der Rotation $\psi_{R,k}$ des Roboters. Aus mindestens drei relativen Winkelmessungen $\hat{\gamma}_k^{i,j}$ wird dann die Position des Roboters $\underline{x}_R = [x_R, y_R]^T$ bestimmt. Die Orientierung $\psi_{R,k}$ kann dann in einem Folgeschritt direkt mit der geschätzten Position $\hat{\underline{x}}_k^e$ und den gemessenen Winkeln ermittelt werden [40], was hier jedoch nicht betrachtet wird. Es wird vorausgesetzt, dass die Unsicherheit in der Position der Landmarken und damit im gegebenen Weltmodell vernachlässigbar gegenüber den Unsicherheiten in den Messungen ist. Ferner sei die Zuordnung der Messungen zu den Landmarken in der Umgebung vorab bestimmt worden; ein



(a) Problemstellung: $\tilde{\mathcal{M}}_k^{1,2}$ ist die gesuchte, exakte Menge, welche durch die relative Winkelmessung zu Landmarke L_1 und L_2 definiert ist. Der relative Winkel ist $\gamma = \gamma_k^{1,2} = 45^\circ$ und die Messunsicherheit wurde zu $\epsilon_{1,2,k}^v = 4^\circ$ gewählt.

(b) Graphische Veranschaulichung der *exakten* Transformation der Messgleichung. Jeder der beiden grau schraffierten Ringe R_1 und R_2 korrespondiert mit einer pseudo-linearen Messgleichung. Die Schnittmenge von R_1 und R_2 ist äquivalent zur gesuchten Menge aller möglichen Roboterlagen $\tilde{\mathcal{M}}_k^{1,2}$.

Bild 4.2: Lokalisierung im Falle relativer Winkelmessungen mit mengenbegrenzten Unsicherheiten.

mögliches Verfahren hierfür ist eine vollständige Suche in einem Interpretationsbaum unter Berücksichtigung der auftretenden Beschränkungen für mögliche Zuordnungen [40].

4.1.3 Motivation des gewählten Ansatzes

Die meisten heute bekannten Ansätze zur Lokalisierung mobiler Roboter modellieren die auftretenden Unsicherheiten in den Messungen und der geschätzten Lage des Roboters auf der Basis stochastischer Konzepte [3, 19, 26, 54, 55, 106]. Das Lokalisierungsproblem wird dabei als Filterproblem mit stochastischen Unsicherheiten betrachtet. Für dessen Lösung bieten sich Standardverfahren wie das Verfahren der kleinsten Quadrate [9], das Extended-Kalman-Filter (*EKF*) [3] oder auch fortgeschrittenere, robustere Verfahren an, wie die Filterung mit Covariance Intersection (*CI*) Filter [110, 127], siehe auch Anhang C. In jüngster Zeit verwendete, nichtlineare Verfahren mit stochastischer Unsicherheitsmodellierung sind die gitter- bzw. partikelbasierten Filterverfahren, siehe zum Beispiel [35, 105].

Ein wesentlicher Nachteil dieser üblicherweise verwendeten Unsicherheitsmodellierung ist, dass bei einem praxisnahen Problem oft nur schwer überprüft werden kann, ob die zu Grunde liegenden Annahmen über die Unsicherheiten gerechtfertigt sind [74]. Dies lässt sich für die Primärunsicherheiten, wie zum Beispiel für das Rauschen der verwendeten

Sensoren noch verhältnismäßig leicht überprüfen, und die häufig empirisch begründete Annahme eines weißen, gaußverteilten Rauschens ist meist gerechtfertigt. Für die auftretenden Wahrscheinlichkeitsdichten der zu schätzenden Zustände gilt dies in der Regel jedoch *nicht*. Das häufig zur Lokalisierung verwendete Extended–Kalman–Filter [95] hat den zusätzlichen Nachteil, dass die Linearisierung der nichtlinearen Messgleichungen besonders im Falle grosser Unsicherheiten in der Lageschätzung zu erheblichen Linearisierungsfehlern führt. Diese müssen als zusätzliche Unsicherheiten berücksichtigt werden, um eine Divergenz des Lokalisierungsalgorithmus, wie sie in Beispiel 3.1.2 auftritt, zu vermeiden.

Um eine *garantierte* Schätzung der Lage eines mobilen Roboters zu erhalten, die in Einklang mit vorab vorhandener Information und allen durchgeführten Messungen steht, werden daher die in Kapitel 2 vorgestellten Filterverfahren im Hyperraum mit mengenbasierter Modellierung der Unsicherheiten verwendet. Die einzige hierzu benötigte Annahme für die auftretenden Unsicherheiten ist, dass sie in ihrer Amplitude begrenzt sind. Die tatsächliche Form der Wahrscheinlichkeitsdichten sowie die zeitliche Struktur der auftretenden, unter Umständen korrelierten Rauschprozesse hat dagegen *keinen Einfluss* auf das Schätzergebnis und muss nicht bekannt sein.

Das optimale Schätzergebnis unter den getroffenen Annahmen für die Unsicherheiten ist die wahre Menge $\tilde{\mathcal{X}}_k$ aller möglichen Roboterlagen, die sich aus der vorab vorhandenen Information über die Lage des Roboters und allen durchgeführten Messungen ergibt. Sie enthält *garantiert* die wahre Lage des Roboters \underline{x}_R . Eine rein geometrische Bestimmung der Menge $\tilde{\mathcal{X}}_k$ ist zumindest im zweidimensionalen Fall theoretisch möglich, doch hängt die Komplexität der Beschreibung dann von der Anzahl der durchgeführten und fusionierten Messungen ab, was für einen rekursiven Algorithmus nicht akzeptabel ist.

In der Literatur wurden verschiedene Verfahren zur Lokalisierung im Falle einer mengenbasierten Unsicherheitsmodellierung vorgeschlagen. Sie unterscheiden sich darin, wie die betrachteten Mengen beschrieben werden, und wie die Parameter der verwendeten Beschreibung über den Filterschritt und den Prädiktionsschritt fortgeschrieben werden. In [37] werden zwei Techniken vorgestellt, die auf einer Beschreibung durch achsenparallele Boxen und Parallelotope basieren. Diese vergleichsweise einfachen Approximationen lassen sich durch wenige Parameter beschreiben und erfordern daher nur geringen rechnerischen Aufwand. Der Nachteil dieses Ansatzes ist jedoch, dass sich komplexere Mengen, wie sie sich im Rahmen einer Lokalisierung im Falle relativer Winkelmessungen als exakte Mengen ergeben, nur sehr grob annähern lassen. Dies gilt in abgeschwächter Form auch für Verfahren, die Ellipsoide als begrenzende Mengen verwenden, und diese im Filter- und Prädiktionsschritt als konservative äußere Grenze für die wahren komplex geformten Mengen verwenden [43], wie das in Anhang A.2 dargestellte Ellipsoidfilter [99]. In neueren Ansätzen, die auf der Intervallanalyse basieren, wird daher dazu übergegangen, die exakte Menge $\tilde{\mathcal{X}}_k$ der zu schätzenden Zustände durch Mengen von Boxen zu approximieren [52, 53, 75, 77]. Dabei wird das eigentliche Schätzproblem als ein Problem der Inversion von Mengen formuliert, und das theoretisch exakte Schätzergebnis $\tilde{\mathcal{X}}_k$ durch Einschachtelung in äußere und innere approximierende Mengen angenähert. Der Vorteil dieser Verfahren ist, dass beliebig geformte, komplexe Mengen beschrieben werden können, der Nachteil jedoch, dass diese Beschreibungen eine große Anzahl an Parametern benötigen.

4.1.4 Lokalisierung im Falle relativer Winkelmessungen mit nichtlinearen Filterverfahren

4.1.4.1 Exakte Konvertierung des Lokalisierungsproblems in eine systemtheoretische Beschreibung

Um das gegebene Lokalisierungsproblem im Kontext der in Kapitel 2 vorgestellten, nichtlinearen Filterverfahren zu behandeln, wird der Positionsvektor des Roboters im Weltkoordinatensystem S_0 als Zustandsvektor \underline{x}_k gemäß

$$\underline{x}_k = [x_k, y_k]^T \quad (4.1)$$

definiert. Die Orientierung $\psi_{R,k}$ des Roboters ist unbekannt, ihre Bestimmung wird hier, wie oben erläutert, nicht betrachtet. Des Weiteren wird das Lokalisierungsproblem als ebenes, zweidimensionales Problem betrachtet, was für radbasierte Roboter eine sinnvolle Annahme ist. Eine relative Winkelmessung zu zwei Landmarken L_i, L_j ergibt sich aus der Differenz zweier absoluter Winkelmessungen α_i, α_j und wird durch

$$\hat{\gamma}_k^{i,j} = \text{atan2}(y_k - y_{L_i}, x_k - x_{L_i}) - \text{atan2}(y_k - y_{L_j}, x_k - x_{L_j}) + v_k^{i,j} \quad (4.2)$$

beschrieben, wobei $\hat{\gamma}_k^{i,j}$ die gegebene Messung zum Zeitpunkt k ist. $v_k^{i,j}$ ist das additive, mengenbegrenzte Messrauschen. Die Positionen $\underline{x}_{L_i} = [x_{L_i}, y_{L_i}]^T$ der Landmarken L_i, L_j seien bekannt. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungsdichte des Messrauschens $v_k^{i,j}$ ist unbekannt, jedoch sei vorausgesetzt, dass $v_k^{i,j}$ gemäß

$$|v_k^{i,j}| \leq \epsilon_k^{v,i,j}, \quad i = 1 \dots N, \quad j = 1 \dots N, \quad (4.3)$$

amplitudenbegrenzt ist, wobei die Amplitudengrenzen durch $\epsilon_k^{v,i,j}$ gegeben sind. Durch jede Messung gemäß der Messgleichung (4.2) mit mengenbegrenzter Unsicherheit (4.3) wird eine Menge möglicher Roboterlagen $\tilde{\mathcal{M}}_k^{i,j}$ definiert, die durch

$$\tilde{\mathcal{M}}_k^{i,j} = \{\underline{x}_k \in \mathbb{R}^2 : \hat{\gamma}_k^{i,j} - \epsilon_k^{v,i,j} \leq \gamma_k^{i,j} \leq \hat{\gamma}_k^{i,j} + \epsilon_k^{v,i,j}\} \quad (4.4)$$

gegeben ist. Dabei muss das Vorzeichen des Differenzwinkels $\gamma_k^{i,j}$ berücksichtigt werden, für $\gamma_k^{i,j} = 0$ und $\hat{\gamma}_k^{i,j} = \pm\pi$ ergeben sich singuläre Konfigurationen. Bild 4.2(a) zeigt die resultierende Menge $\tilde{\mathcal{M}}_k^{1,2}$ für eine relative Winkelmessung zu zwei Landmarken L_1 und L_2 , wobei sich der Roboter im Ursprung von S_0 befindet, das heißt bei $\underline{x}_k = [0, 0]^T$. Der gemessene, relative Winkel in diesem Beispiel ist $\hat{\gamma}_k^{1,2} = 45^\circ$ und die Winkelunsicherheit $\epsilon_k^{v,1,2} = 4^\circ$. Sind mehrere Messungen $\hat{\gamma}_k^{i,j}$, $i = 1 \dots N$, $j = 1 \dots N$ zu Landmarken in der Umgebung gegeben, so ist die exakte Menge aller möglichen Roboterlagen, die durch diese Messungen definiert sind, durch die Schnittmenge $\tilde{\mathcal{X}}_k^M$ mit

$$\tilde{\mathcal{X}}_k^M = \bigcap_{i=1}^N \bigcap_{j=1}^N \tilde{\mathcal{M}}_k^{i,j} \quad (4.5)$$

gegeben. Zur Anwendung der in Kapitel 2 beschriebenen Verfahren zur Berechnung einer konservativen Approximation für die Menge aller möglichen Roboterlagen unter Berücksichtigung der gegebenen, prioren Lageschätzung \mathcal{X}_k^p muss die Messgleichung (4.2) zunächst in eine nichtlineare Messgleichung gemäß

$$(x_k - x_M(\hat{\gamma}_k^{i,j}))^2 + (y_k - y_M(\hat{\gamma}_k^{i,j}))^2 = r^2(\hat{\gamma}_k^{i,j}) \quad (4.6)$$

transformiert werden. Dabei ist $\hat{\gamma}_k^{i,j} = \gamma_k^{i,j} + v^{i,j}$ die unsicherheitsbehaftete Messung. Für die Herleitung von (4.6) aus (4.2) wurde ausgenützt, dass sich alle Roboterpositionen, von denen aus ein konstanter, relativer Winkel zu zwei Landmarken L_i, L_j beobachtet wird, auf einem Kreisbogen $\tilde{\mathcal{C}}_k^{i,j}$ befinden, dessen Mittelpunkt $\underline{M}(\hat{\gamma}_k^{i,j}) = [x_M, y_M]^T$ und Radius $r(\hat{\gamma}_k^{i,j})$ eine Funktion des gemessenen relativen Winkels $\hat{\gamma}_k^{i,j}$ sind [9, 37, 124]. Für eine gegebene Messung $\hat{\gamma}_k^{i,j}$ ergibt sich aus der Vereinigungsmenge aller Kreisbögen $\tilde{\mathcal{C}}_k^{i,j}(\gamma_k^{i,j})$ mit $\gamma_k^{i,j} \in [\hat{\gamma}_k^{i,j}(k) - \epsilon_k^{v,i,j}, \hat{\gamma}_k^{i,j}(k) + \epsilon_k^{v,i,j}]$ die Menge $\tilde{\mathcal{M}}_k^{i,j}$ gemäß (4.4). Die nichtlineare Messgleichung (4.6) kann jetzt *exakt* in zwei *einfachere*, nichtlineare Messgleichungen transformiert werden. Jede dieser Messgleichungen beschreibt dabei eine Abstandsmessung. Diese Transformation ist für das angenommene, mengenbasierte Fehlermodell möglich, da die Schnittmenge der beiden Mengen, welche durch die Abstandsmessungen definiert werden, wieder exakt der ursprünglichen, sichelförmigen Menge $\tilde{\mathcal{M}}_k^{i,j}$ entspricht, die sich aus der unsicherheitsbehafteten relativen Winkelmessung (4.2) ergibt. Die transformierten Messgleichungen in Zustandsraumdarstellung ergeben sich zu

$$\underline{h}_k(\underline{x}_k) = \begin{bmatrix} (x_k - x_{M_{1,k}})^2 + (y_k - y_{M_{1,k}})^2 \\ (x_k - x_{M_{2,k}})^2 + (y_k - y_{M_{2,k}})^2 \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

und

$$\underline{z}_k = \begin{bmatrix} (r_{1,k} + \frac{d_k}{2})^2 \\ (r_{2,k} - \frac{d_k}{2})^2 \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

wobei $\underline{M}_{l,k} = [x_{M_{l,k}}, y_{M_{l,k}}]^T$, $l = 1, 2$ die Mittelpunkte des äußeren Rings R_1 und des inneren Rings R_2 sind, welche die Menge $\tilde{\mathcal{M}}_k^{i,j}$ beinhalten. $r_{l,k}$ sind die zugehörigen Radien zum Zeitpunkt k . Der Parameter d_k beschreibt die Unsicherheit der transformierten Abstandsmessungen und ergibt sich direkt aus $\underline{M}_{l,k}$ und $r_{l,k}$, $l = 1, 2$. Für das Beispiel in Bild 4.2(a) ist die Transformation in zwei Abstandsmessgleichungen graphisch in Bild 4.2(b) illustriert. Jede transformierte Messgleichung korrespondiert mit einem der dargestellten Ringe R_1, R_2 mit Mittelpunkt $\underline{M}_{1,k}$ bzw. $\underline{M}_{2,k}$ und zugehörigem Radius $r_{1,k} + \frac{d_k}{2}$ bzw. $r_{2,k} - \frac{d_k}{2}$. Man erkennt, dass die Schnittmenge der beiden Ringe äquivalent mit der ursprünglich durch die relative Winkelmessung definierten Menge $\tilde{\mathcal{M}}_k^{1,2}$ ist, die in Bild 4.2(a) dargestellt ist.

4.1.4.2 Anwendung des Hyperraumfilters

In der systemtheoretischen Darstellung gemäß (1.3) mit (4.7) und (4.8) kann das gegebene Lokalisierungsproblem direkt mit Anwendung des in Kapitel 2 vorgestellten Hyperraumfilters behandelt werden. Bei der Wahl der nichtlinearen Transformation $\underline{\eta}_k(\cdot)$ als Einheitsabbildung mit $\eta_k(z) = z$ ergibt sich ein $L_x = 4$ -dimensionaler Hyperraum S^* gemäß (2.15). Aus (4.7), (4.8) resultieren zwei skalare Messgleichungen mit transformiertem Zustandsvektor $\underline{x}_k^* = \underline{\mathbf{T}}(\underline{x}_k)$ gemäß

$$\underline{x}_k^* = \underline{\mathbf{T}}(\underline{x}_k) = [x_k, y_k, x_k^2, y_k^2] \quad (4.9)$$

sowie Messmatrizen $\mathbf{H}_{l,k}^*$ und Messvektoren $\underline{z}_{l,k}^*$ gemäß

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{1,k}^* &= \begin{bmatrix} -2x_{M_{1,k}}, & -2y_{M_{1,k}}, & 1, & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{H}_{2,k}^* &= \begin{bmatrix} -2x_{M_{2,k}}, & -2y_{M_{2,k}}, & 1, & 1 \end{bmatrix}, \\ \underline{z}_{1,k}^* &= \left[\left(r_{1,k} + \frac{d_k}{2} \right)^2 - \left(x_{M_{1,k}}^2 + y_{M_{1,k}}^2 \right) \right], \\ \underline{z}_{2,k}^* &= \left[\left(r_{2,k} - \frac{d_k}{2} \right)^2 - \left(x_{M_{2,k}}^2 + y_{M_{2,k}}^2 \right) \right].\end{aligned}\quad (4.10)$$

Das zugehörige, mengenbegrenzte Messrauschen ist durch

$$\begin{aligned}v_k^{*,1} &\in \left[-\left((d_k/2)^2 + d_k r_{1,k} \right), \quad 3/4 d_k^2 + d_k r_{1,k} \right], \\ v_k^{*,2} &\in \left[3/4 d_k^2 - d_k r_{2,k}, \quad -(d_k/2)^2 + d_k r_{2,k} \right],\end{aligned}$$

gegeben, wobei d_k der „Dicke“ der Ringe entspricht, die zu $\tilde{\mathcal{M}}_k^{i,j}$ gehören (siehe Bild 4.2(b)). Die so gewonnene, pseudo-lineare Messgleichung kann direkt zur nichtlinearen Filterung mit dem Hyperraumfilter gemäß Kapitel 2.3.3 verwendet werden, was an einem statischen Lokalisierungsproblem in Kapitel 4.1.5 gezeigt wird.

Wie in Kapitel 2.3.1 beschrieben, werden durch Transformation der ursprünglichen Messgleichung mit der nichtlinearen Abbildung $\underline{\eta}_k(\cdot)$ zusätzliche nichtlineare Nebenbedingungen für das Filterergebnis erzeugt, die eine bessere, also weniger konservative, Approximation des gewünschten, optimalen Filterergebnisses ergeben. Für die vorgestellten experimentellen Untersuchungen wurde die Transformation $\underline{\eta}_k(z) = [z, z^2]^T$ auf die Messgleichung angewendet und das in Kapitel 2.4.2.2 beschriebene Verfahren zur Berechnung einer optimierten Approximation \mathcal{V}_k für die transformierte Messunsicherheit $\tilde{\mathcal{V}}_k$ verwendet. Da das Lokalisierungsproblem auf ein Filterproblem mit Abstandsmessungen zurückgeführt wurde, ergibt sich durch Anwendung der Transformation $\underline{\eta}_k(\cdot)$ der in Beispiel 2.5.1 hergeleitete, transformierte Zustandsvektor \underline{x}_k^* mit zwei zugehörigen Messmatrizen $\mathbf{H}_{l,k}^*$ gemäß

$$\mathbf{H}_{l,k}^* = \begin{bmatrix} -2x_{M_{l,k}} & -4x_{M_{l,k}}^3 - 4x_{M_{l,k}}y_{M_{l,k}}^2 \\ -2y_{M_{l,k}} & -4y_{M_{l,k}}^3 - 4x_{M_{l,k}}^2y_{M_{l,k}} \\ 0 & 8x_{M_{l,k}}y_{M_{l,k}} \\ 1 & 6x_{M_{l,k}}^2 + 2y_{M_{l,k}}^2 \\ 1 & 2x_{M_{l,k}}^2 + 6y_{M_{l,k}}^2 \\ 0 & -4x_{M_{l,k}} \\ 0 & -4y_{M_{l,k}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad l = 1, 2, \quad (4.11)$$

in einem $L_x = 8$ -dimensionalen Hyperraum S^* . Die zugehörigen $L_z = 2$ -dimensionalen Messvektoren $\underline{z}_{l,k}^*$ sind durch

$$\underline{z}_{1,k}^* = \begin{bmatrix} \left(r_{1,k} + \frac{d_k}{2} \right)^2 - \left(x_{M_{1,k}}^2 + y_{M_{1,k}}^2 \right) \\ \left(r_{1,k} + \frac{d_k}{2} \right)^4 - \left(x_{M_{1,k}}^4 + 2x_{M_{1,k}}^2y_{M_{1,k}}^2 + y_{M_{1,k}}^4 \right) \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

und

$$\underline{z}_{2,k}^* = \begin{bmatrix} \left(r_{2,k} - \frac{d_k}{2} \right)^2 - \left(x_{M_{2,k}}^2 + y_{M_{2,k}}^2 \right) \\ \left(r_{2,k} - \frac{d_k}{2} \right)^4 - \left(x_{M_{2,k}}^4 + 2x_{M_{2,k}}^2y_{M_{2,k}}^2 + y_{M_{2,k}}^4 \right) \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

gegeben. Die zugehörigen Approximationen $\mathcal{V}_{l,k}$, $l = 1, 2$ für die Messunsicherheit werden für jede Messung einzeln mit dem in Kapitel 2.4.2.2 beschriebenen Verfahren berechnet.

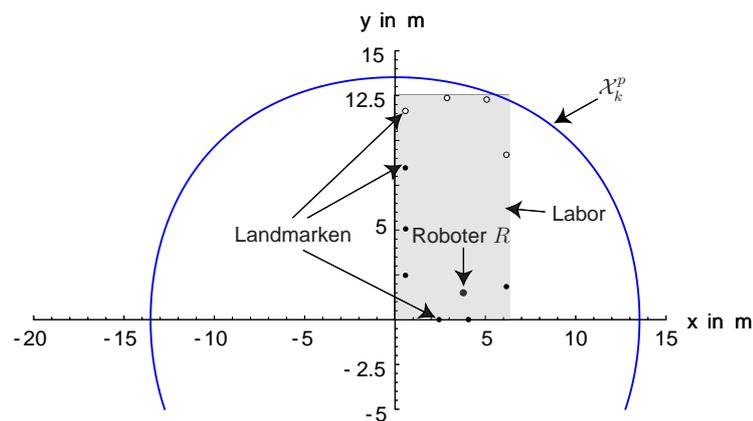


Bild 4.3: Lokalisierung mit relativen Winkelmessungen: Der mobile Roboter R führt Winkelmessungen zu den $K = 6$ dunkel eingezeichneten Landmarken L_i in seiner Umgebung durch. Gegeben ist eine konservative initiale Positionsschätzung durch die Menge \mathcal{X}_k^p .

Tabelle 4.1: Positionen der Landmarken L_i in der Einsatzumgebung des mobilen Roboters ROMAN II.

Nr. i der Landmarke	1*	2*	3*	4	5
Position \underline{x}_{L_i} in S_0 in mm	$\begin{bmatrix} 2436 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4065 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6163 \\ 1889 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6163 \\ 9204 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5177 \\ 12285 \end{bmatrix}$
Nr. i der Landmarke	6	7	8*	9*	10*
Position \underline{x}_{L_i} in S_0 in mm	$\begin{bmatrix} 2880 \\ 12372 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 570 \\ 11650 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 570 \\ 8470 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 570 \\ 5065 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 570 \\ 2474 \end{bmatrix}$

4.1.5 Ergebnisse

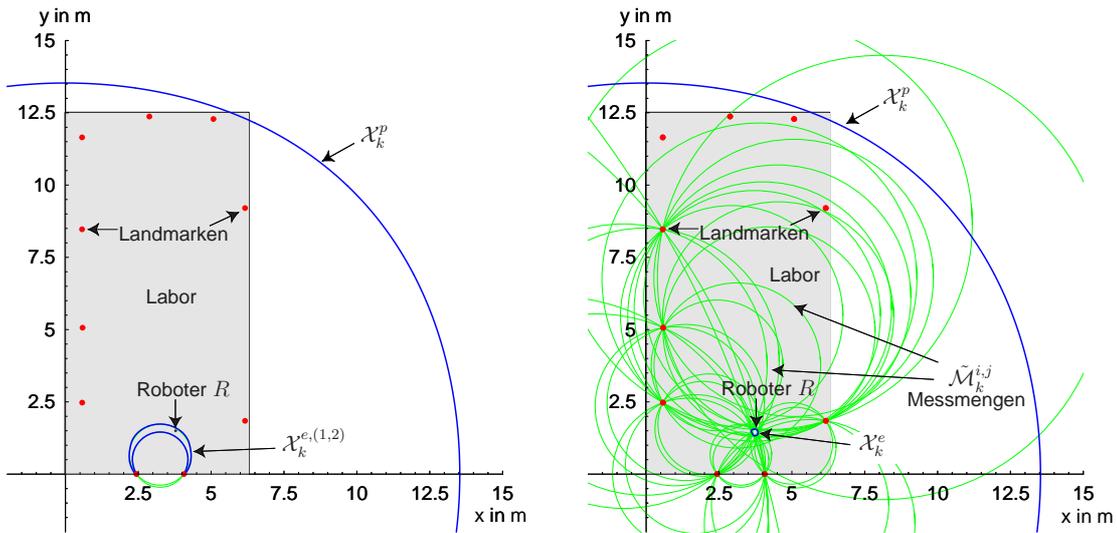
Um die Leistungsfähigkeit des neuartigen, nichtlinearen Filterverfahrens im Hyperraum an Hand des Problems der Lokalisierung eines mobilen Roboters im Falle relativer Winkelmessungen zu demonstrieren, wurde das in Bild 4.3 dargestellte, einfache Lokalisierungsexperiment durchgeführt. Der mobile Roboter ROMAN II, in Bild 4.3 mit R gekennzeichnet, befindet sich an der Position $\underline{x}_k = [3.78 \text{ m}, 1.50 \text{ m}]^T$ in seiner prototypischen Versuchsumgebung im dritten Stockwerk des Lehrstuhls für Steuerungs- und Regelungstechnik der Technischen Universität München. An dieser Stelle misst er mit seinem omnidirektionalen Lokalisierungssensor Winkel α_i , $i = 1 \dots 6$ zu $K = 6$ von insgesamt 10 künstlichen, retroreflektierenden Landmarken in der Umgebung. Diese befinden sich an den in Tabelle 4.1 angegebenen Positionen, die 6 verwendeten Landmarken sind mit Sternen gekennzeichnet. Diese Landmarken sind in dem in Bild 4.3 schraffiert dargestellten Labor in einer Höhe von 1.80 m an den Wänden montiert, so dass sie durch den Lokalisierungssensor von ROMAN II (siehe Bild 4.1) detektiert werden können. Die im Folgenden

beschriebene Lokalisierung des Roboters wurde offline mittels der aufgenommenen Winkelmessungen berechnet. Aus den absoluten Winkelmessungen werden zunächst relative Winkel $\hat{\gamma}_k^{i,j}$ berechnet, die invariant gegenüber der Orientierung $\psi_{R,k}$ des Roboters sind. Gemäß der Notation, die in der Problembeschreibung eingeführt wurde, definieren diese relativen Winkelmessungen $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ Kreisbögen $\tilde{\mathcal{C}}_k^{i,j}$ mit zugehörigen Messmengen $\tilde{\mathcal{M}}_k^{i,j}$, $i, j = 1 \dots 6$, $i \geq j$.

Um das in Bild 4.3 dargestellte Lokalisierungsproblem zu behandeln, wird für die priore Lageschätzung \mathcal{X}_k^p eine Menge angenommen, die kein Vorwissen über die Roboterposition einbringt, was bedeutet $\mathcal{X}_k^p \cap \mathcal{X}_k^M = \mathcal{X}_k^M$. Dabei ist \mathcal{X}_k^M die geschätzte Menge aller durch die Messungen $\hat{\gamma}_k^{i,j}$ definierten Roboterpositionen. Sukzessive Anwendung der Filtergleichungen (2.21), (2.22) für jedes Paar (i, j) von Landmarken L_i, L_j ergibt die gewünschte Schätzung $\hat{x}_k^{e,R}$ der Position des Roboters zusammen mit der Menge aller möglichen Positionen \mathcal{X}_k^e , die kompatibel mit den durchgeführten Messungen sind. Um diese Größen zu berechnen, wird die pseudo-ellipsoidale Menge $\mathcal{X}_k^{e,*}$ gemäß (2.5) auf der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit U^* ausgewertet, wobei U^* in dem $L_x = 8$ -dimensionalen Hyperraum S^* durch die nichtlineare Transformation $\underline{\mathbf{T}}(\cdot)$ gemäß (2.1) mit transformiertem Zustandsvektor $\underline{x}_{B,k}^*$ gemäß (2.38) definiert ist. Daraus ergibt sich eine implizite, polynomiale Beschreibung achter Ordnung für die Menge \mathcal{X}_k^e im Originalraum S . Aus dieser impliziten Beschreibung können charakteristische Werte von \mathcal{X}_k^e , wie die Begrenzung der Menge oder der Flächenschwerpunkt, numerisch mit Hilfe einer Rücktransformation in den Originalraum S berechnet werden.

Um die Wirkung der nichtlinearen Transformation $\underline{\eta}_k(\cdot)$ zu veranschaulichen, werden zunächst direkt die expandierten Messgleichungen mit $\underline{z}_{l,k}^*$ und $\mathbf{H}_{l,k}^*$, $l = 1, 2$ gemäß (4.10) in einem $L_x = 4$ -dimensionalen Hyperraum angewendet, was äquivalent mit $\underline{\eta}_k(z) = z$ ist. Bild 4.5(b) zeigt die wahre, exakte Messmenge $\tilde{\mathcal{M}}_k^{1,2}$ die sich aus der ersten relativen Winkelmessung zu den Landmarken L_1 und L_2 ergibt, als grau schraffiertes, sichelförmiges Gebiet. Die zugehörige konservative Approximation $\mathcal{X}_k^{e,(1,2)}$, die durch das vorgestellte Hyperraumfilter berechnet wurde, ist mit einer dicken schwarzen Linie eingezeichnet. $\mathcal{X}_k^{e,(1,2)}$ ist sowohl eine Approximation für die wahre, posteriore Menge $\tilde{\mathcal{X}}_k^{e,(1,2)}$ als auch für die Messmenge $\tilde{\mathcal{M}}_k^{1,2}$, da durch \mathcal{X}_k^p kein Vorwissen eingebracht wurde, was die Darstellung der Ergebnisse vereinfacht. Man erkennt, dass eine Approximation von $\tilde{\mathcal{M}}_k^{1,2}$ mit Ellipsoiden oder achsenparallelen Rechtecken erheblich konservativer wäre, als die berechnete Menge $\mathcal{X}_k^{e,(1,2)}$.

Eine noch bessere Approximation ergibt sich durch Anwendung einer nichtlinearen Transformation $\underline{\eta}_k(z)$, durch die das Filterproblem in einen höherdimensionalen Hyperraum S^* transformiert wird. Für das vorliegende Lokalisierungsproblem wurde $\underline{\eta}_k(z) = [z, z^2]^T$ gewählt, woraus sich die Gleichungen (4.11), (4.12) und (4.13) für $\mathbf{H}_{l,k}^*$ und $\underline{z}_{l,k}^*$ in einem $L_x = 8$ -dimensionalen Hyperraum ergeben. An dem Ergebnis in Bild 4.4(a), das vergrößert in Bild 4.5(a) dargestellt ist, erkennt man, dass die wahre Menge $\tilde{\mathcal{M}}_k^{1,2}$ sehr genau approximiert wird. Die resultierende Approximation ist, wie erwartet, noch besser, als das Ergebnis bei direkter Anwendung der expandierten Messgleichungen in Bild 4.5(b). Bild 4.4(b) und der vergrößerte Ausschnitt Bild 4.6 zeigen das Endergebnis der Filterung, nachdem alle Messungen $\hat{\gamma}_k^{i,j}$ berücksichtigt wurden. Die wahre Roboterposition \hat{x}_k liegt in der Schnittmenge $\tilde{\mathcal{X}}_k^M$ aller durch die Messungen definierten Mengen $\tilde{\mathcal{M}}_k^{i,j}$. Man erkennt, dass durch den vorgeschlagenen Algorithmus eine enge konservative Approximation \mathcal{X}_k^e



(a) Positionsschätzung $\mathcal{X}_k^{e,(1,2)}$ nach Fusion der ersten Messung.

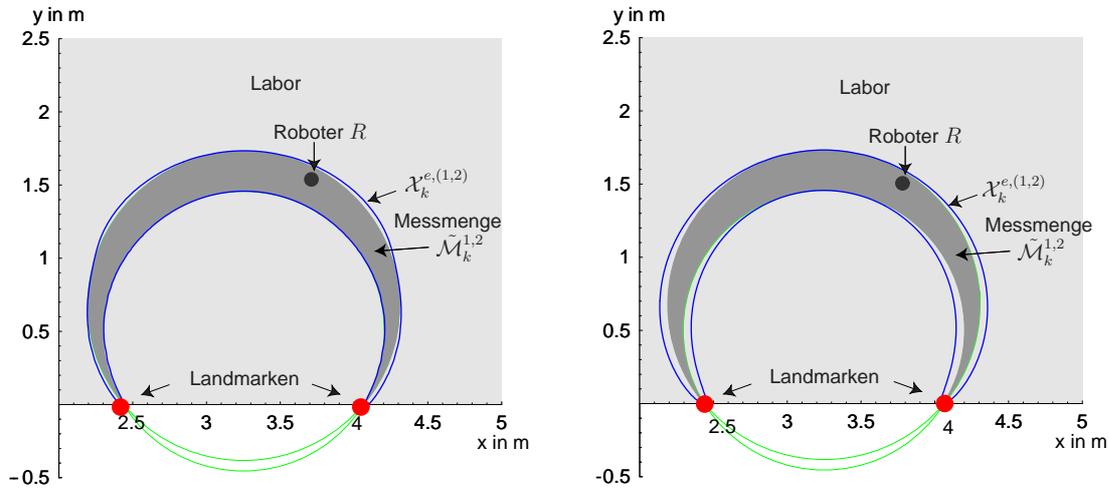
(b) Positionsschätzung \mathcal{X}_k^e nach Fusion aller Messungen.

Bild 4.4: Experiment: Lokalisierung eines mobilen Roboters R mit relativen Winkelmessungen im Falle einer mengenbasierter Unsicherheitsbeschreibung. Ergebnis der Schätzung nach dem ersten Filterschritt und nach Fusion aller Messungen mit nichtlinearer Transformation $\eta_k(z) = [z, z^2]^T$ und optimierter, ellipsoidaler Approximation für die Berechnung der Messunsicherheit.

für diese wahre Menge aller möglichen Roboterpositionen $\tilde{\mathcal{X}}_k^e = \tilde{\mathcal{X}}_k^M$ berechnet wurde. Die wahre Roboterposition \tilde{x}_k ist garantiert in \mathcal{X}_k^e enthalten, wenn die gemessenen Winkel sich innerhalb der angenommenen Unsicherheitsintervalle (4.3) befinden.

4.1.6 Diskussion

In diesem Kapitel wurde die Anwendung des in Kapitel 2 dieser Arbeit hergeleiteten, neuartigen Filterverfahrens im Hyperraum auf ein statisches Lokalisierungsproblem aus dem Bereich der mobilen Robotik vorgestellt. Das gegebene Lokalisierungsproblem auf der Basis relativer Winkelmessungen mit amplitudenbegrenzten Unsicherheiten wurde durch eine Transformation exakt in eine systemtheoretische Form gebracht, die eine geschlossene Behandlung als nichtlineares Filterproblem gestattet. Durch Anwendung des nichtlinearen Hyperraumfilters konnten für die wahren, kompliziert geformten Mengen $\tilde{\mathcal{X}}_k^e$ aller möglichen Positionen des zu lokalisierenden Roboters R garantiert konservative Approximationen \mathcal{X}_k^e in analytischer Darstellung berechnet werden. Diese Approximationen beschreiben die wahren Unsicherheiten erheblich präziser, als einfache, ellipsoidale Mengen oder achsenparallele Rechtecke. Der verbleibende Approximationsfehler wird mit wachsender Ordnung der verwendeten, nichtlinearen Transformation $\eta_k(\cdot)$ bzw. wachsender Ordnung L_x des Hyperraums S^* stetig kleiner. Für das vorgestellte Lokalisierungsproblem ergab sich schon für eine Transformation zweiter Ordnung eine nahezu optimale Approximation der gesuchten, wahren Mengen. Nachteile des vorgestellten Verfahrens sind, dass die



(a) Positionsschätzung $\mathcal{X}_k^{e,(1,2)}$ nach Fusion der ersten Messung.

(b) Positionsschätzung $\mathcal{X}_k^{e,(1,2)}$ nach Fusion der ersten Messung *ohne* zusätzliche nichtlineare Transformation, das heißt $\underline{\eta}_k(z) = z$.

Bild 4.5: Vergrößerter Ausschnitt von Bild 4.4(a): Ergebnis der Schätzung nach dem ersten Filterschritt für unterschiedliche, nichtlineare Transformationen $\underline{\eta}_k(\cdot)$.

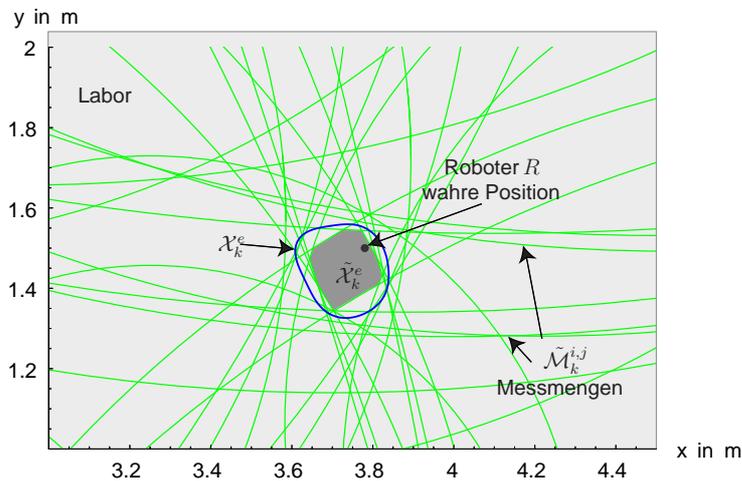


Bild 4.6: Vergrößerter Ausschnitt von Bild 4.4(b): Positionsschätzung \mathcal{X}_k^e und die wahre Menge aller möglichen Roboterpositionen $\tilde{\mathcal{X}}_k^e$ nach Fusion aller Messungen.

erforderliche Rücktransformation in den Originalraum und die Prädiktion der berechneten Schätzung über die Zeit hinweg numerische Berechnungen erfordern, die mit hohem Rechenaufwand verbunden sind. Für die Prädiktion wurden, wie in Kapitel 2 referenziert, für den Fall eines deterministischen Systemmodells ohne Systemrauschen Verfahren entwickelt, die den entstehenden rechnerischen Aufwand handhabbar machen.

4.2 Fallbeispiel 2: Lokalisierung von Mobiltelefonen

4.2.1 Einleitung

Im Bereich der drahtlosen, mobilen Kommunikation gewinnen Anwendungen, die auf der Lokalisierung der verwendeten Endgeräte, und damit ihrer Benutzer, beruhen, immer mehr an Bedeutung. Neben der direkten Verwendung der Positionsinformation durch den Benutzer zur Navigation oder zum Auffinden eines gesuchten Zielorts sind weiter reichende Anwendungen angedacht [94], bei denen Informationen, die dem Benutzer übermittelt werden, auf Basis der geschätzten Position gezielt gefiltert werden. Dadurch können momentan relevante Informationen von unnützlichen getrennt werden. Ein Beispiel hierfür wären Mobiltelefone, die Angebote von Supermärkten oder Restaurantketten zur Verfügung stellen können, welche sich in der Umgebung des Benutzers befinden.

Um solche Anwendungen zu realisieren, werden effiziente Algorithmen benötigt, mit denen die Position eines Endgerätes in einem Funknetzwerk bestimmt werden kann. Eine wichtige Voraussetzung für praktisch relevante Lösungen ist dabei, dass keine Veränderungen an der bestehenden Netzwerkinfrastruktur erforderlich sind, und die Lokalisierung mit Hilfe von Daten erfolgt, die im laufenden Kommunikationsbetrieb entstehen.

In diesem Kapitel wird die Anwendung der in Kapitel 3 hergeleiteten, nichtlinearen Filterverfahren zur Lokalisierung eines DECT-Mobiltelefons² in einem prototypischen Innenraumszenario vorgestellt. Da zur Lokalisierung nur die durch das Mobilgerät gemessene Empfangssignalleistung verwendet wird, kann der vorgestellte Ansatz mit kleinen Modifikationen direkt auf die Lokalisierung anderer drahtloser Kommunikationsgeräte, wie GSM-Mobiltelefone [91], [48] oder Funkethernetkarten [64] übertragen werden. Bei GSM-Mobiltelefonen stehen als zusätzliche Messwerte für die Lokalisierung Signallaufzeiten zur Verfügung.

4.2.2 Beschreibung der Lokalisierungsaufgabe

In Bild 4.7 ist der Grundriss des dritten Stockwerks des Lehrstuhls für Steuerungs- und Regelungstechnik der Technischen Universität München dargestellt, in welchem ein prototypisches Versuchsszenario für die Lokalisierung von DECT-Mobiltelefonen aufgebaut wurde. Ziel der Lokalisierung ist die quantitative Bestimmung der Position $\underline{x}_M = [x_M, y_M]^T$ eines DECT-Mobiltelefons M bezüglich eines gegebenen, ortsfesten Weltkoordinatensystems S_0 zusammen mit einer Quantifizierung der Unsicherheit der Schätzung, siehe Bild 4.7. Dieser in der mobilen Robotik häufig verwendete Ansatz der metrischen Lokalisierung [20, 39, 106] steht im Gegensatz zum Paradigma der topologischen Lokalisierung [6, 111], deren Zielsetzung die Schätzung eines diskreten Aufenthaltsorts des zu lokalisierenden Beobachters ist.

Zur Ermittlung einer metrischen Positionsschätzung für M werden Messungen der Charakteristika der empfangenen elektromagnetischen Wellen von Basisstationen B_l in der Umgebung benötigt, die im Allgemeinen sowohl orts- wie auch zeitabhängig sind [33, 94]. Des Weiteren wird ein *Messmodell* für die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen

² DECT steht für *Digital Enhanced Cordless Telephony*.

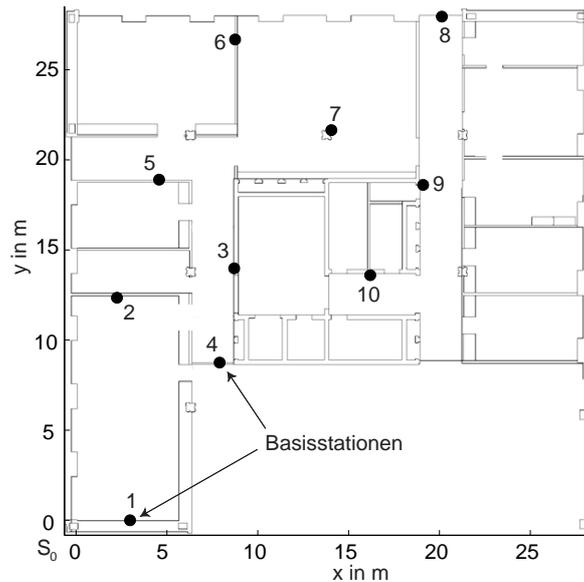


Bild 4.7: Grundriss der Innenraumumgebung für die beschriebenen Lokalisierungsexperimente mit DECT-Mobiltelefonen: Das dritte Stockwerk des Lehrstuhls für Steuerungs- und Regelungstechnik der Technischen Universität München.

in der betrachteten Innenraumumgebung benötigt, mit dessen Hilfe sich die gemessenen Charakteristika präzisieren lassen. Im Falle des vorgestellten DECT-Versuchsszenarios wird davon ausgegangen, dass das verwendete Ausbreitungsmodell für die großräumige Verteilung der empfangenen Signalleistung vor Beginn der Lokalisierung identifiziert wird und nur langsam zeitvariant ist. Dies bedeutet, dass ein reines Lokalisierungsproblem, also die Bestimmung der Position des Mobiltelefons M gelöst wird, und nicht eine gleichzeitige Schätzung der Position von M und der Modellparameter erfolgt, was in der Robotikliteratur unter den Namen *SLAM* (Simultaneous Localization and Map building) oder *SMBL* bekannt ist [39]. Eine solche simultane Schätzung wäre jedoch als direkte Erweiterung der vorgestellten Lokalisierungsverfahren auf der Basis nichtlinearer Filterung durchführbar. Die Forderung nach langsamer Zeitvarianz des Modells bedeutet, dass die verwendeten Modellparameter als konstant angenommen werden, aber adaptiert werden müssen, wenn sich die Umgebung signifikant verändert. Ein praktisches Beispiel für solche Veränderungen ist das Umstellen von Mobiliar oder die Verschiebung der verwendeten DECT-Basisstationen.

Zur Beschreibung der Fortbewegung des Mobiltelefons M wird ein *Systemmodell* benötigt, wobei für die durchgeführten Untersuchungen davon ausgegangen wurde, dass das Mobiltelefon durch einen Benutzer durch die Umgebung bewegt wurde, siehe Kapitel 4.2.3.4.

Der Lokalisierungsalgorithmus soll in der Lage sein, eine Positionsschätzung für M ohne Verwendung von Vorwissen zu berechnen, was auch unter dem Begriff „globale Lokalisierung“ bekannt ist, und von dem einfacheren Problem der Positionsverfolgung auf Basis vorangegangener Lageschätzungen unterschieden wird, bei dem die auftretenden Positionsunsicherheiten in der Regel auf ein kleines, lokales Gebiet beschränkt bleiben. Zur Berechnung der Positionsschätzung werden die Zuordnungen von den unsicheren Messungen zu den Basisstationen B_i benötigt, welche für die vorliegende Lokalisierungsaufgabe exakt bekannt sind, da jede Basisstation eine eindeutige Identifikationsnummer sendet. Im

Allgemeinen stellt die Schätzung der korrekten Zuordnung bei Lokalisierungsproblemen dagegen ein komplexes, eigenständiges Teilproblem dar [80].

4.2.3 Modellierung des Systems

Zur Behandlung des gegebenen Lokalisierungsproblems auf Basis der vorgestellten, nicht-linearen Filteralgorithmen wird ein Systemmodell, das heißt ein Bewegungsmodell des Benutzers mit dem zu lokalisierenden DECT-Mobiltelefon M sowie ein Messmodell benötigt. Das Messmodell (1.3) beschreibt die Ausbreitungseigenschaften der elektromagnetischen Wellen in der Umgebung für den betrachteten DECT-Funkkanal und die Eigenschaften der Messschaltung im Mobiltelefon M . Der Zustandsvektor $\underline{x}_{M,k} = [x_{M,k}, y_{M,k}]^T$ des betrachteten Systems ist durch die Position des Mobiltelefon M im Weltkoordinatensystem S_0 gegeben und die Messungen $\underline{z}_{M,k}$ sind durch das Mobiltelefon gemessene Signalleistungen der empfangbaren DECT-Basisstationen, wie in Kapitel 4.2.3.1 näher beschrieben wird.

Für das Problem der Lokalisierung wurde in der mobilen Robotik in den vergangenen Jahren eine große Bandbreite an Ansätzen untersucht und Modelle für die betrachteten Systeme und deren Sensorik hergeleitet. Vergleichbare modellbasierte Ansätze wurden in jüngerer Zeit für die Lokalisierung eines Benutzers in Mobilfunknetzwerken im Außenraum [47, 48, 91, 94, 118] und in Innenraumumgebungen [64, 129] angewendet. Die verwendeten Verfahren lassen sich bezüglich *Modellierung der auftretenden Unsicherheiten* gliedern. Rein geometriebasierte Ansätze zur Lokalisierung ohne Berücksichtigung von Unsicherheiten, wie das bekannte Verfahren der Triangulation [27], sind gut für Probleme geeignet, bei denen die auftretenden Unsicherheiten vernachlässigbar sind, was für Lokalisierung in Mobilfunknetzwerken jedoch nicht vorausgesetzt werden kann. Das Gegenstück hierzu sind rein stochastisch basierte Ansätze zur Lokalisierung, im Rahmen derer alle auftretenden Größen durch (bedingte) Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen [64] beschrieben werden. Aus der Robotik bekannte Verfahren zur Lokalisierung auf der Basis von rein stochastischen Modellen sind gitterbasierte Verfahren, wie das Verfahren der Belegungsgitter [28], die Markovlokalisierung [35] oder partikelbasierte Verfahren wie die Monte-Carlo-Lokalisierung [26].

Der hier verfolgte Ansatz der Modellierung auf der Basis nichtlinearer, zeitdiskreter Zustandsraummodelle gemäß (1.3) stellt einen Mittelweg zwischen den zwei beschriebenen Extremen dar und lässt sich als gemischt geometrisch-stochastischer Modellierungsansatz klassifizieren [94]. Das verwendete systemtheoretische Modell besteht aus einem deterministischen und einem stochastischen Anteil und vereint die Vorteile der oben genannten Ansätze, da es eine Modellierung aller auftretenden Unsicherheiten ermöglicht und zugleich eine abstrahierte, geometrische Interpretation gestattet. Durch diese Art der Modellierung, die in der Literatur zur mobilen Robotik in den merkmalsbasierten Ansätzen zur Lokalisierung weite Verbreitung gefunden hat [20, 24, 39, 95, 120], wird das vorhandene Wissen über das System in kompakter Form mit einer vergleichsweise geringen Anzahl an Parametern beschrieben.

4.2.3.1 Modellierung der Feldstärkemessungen

Für die Lokalisierung von DECT–Mobiltelefonen bietet sich an, die empfangene Signalleistung P_S als Messgröße zu verwenden, da diese gemäß dem DECT–Standard in jedem Mobilgerät während des laufenden Gesprächsbetriebs im Takt von 160 ms gemessen wird, siehe zum Beispiel [107]. Diese Signalleistungsmessung dient dazu, sicherzustellen, dass bei mehreren empfangbaren Basisstationen stets diejenige mit dem größten Signalpegel durch das Mobiltelefon verwendet wird, und ein Wechsel zwischen verschiedenen Basisstationen während des Gesprächs möglich ist (handover). Das verwendete Experimentalgerät zur Messung der Empfangssignalleistung der Firma SIEMENS [129] scannt alle 120 empfangbaren DECT–Kanäle und liefert die Messungen mit einer Taktrate von derzeit maximal 0.83 Messungen/s.

In der Literatur sind eine grosse Anzahl mathematischer Modelle für die Signalausbreitung in Funkkanälen untersucht worden [33]. Diese unterscheiden sich bezüglich der verwendeten Frequenzbänder, wie zum Beispiel der *VHF*– und *UHF*–Bänder, der Art und Größe der modellierten Umgebung wie Innenraum– oder Außenraumumgebungen mit verschiedenen Zellgrößen sowie der zu Grunde liegenden Modellierungsparadigmen. Die Modelle ermöglichen eine Prädiktion des örtlichen und zeitlichen Ausbreitungsverhaltens der Funkwellen. Eine wichtige Kenngröße, die mit diesen Modellen geschätzt werden kann, ist die mittlere Empfangsleistung P_S in Abhängigkeit des betrachteten Ortes in der modellierten Umgebung. Für Innenraumumgebungen wurden in [65] zwei einfache Modellierungsansätze zur Prädiktion der mittleren Empfangsleistung untersucht: Ein Modell legt einen linearen Abfall der logarithmierten Signalleistung, die auch als Signalpegel bezeichnet wird, über der logarithmierten Entfernung (englisch: log–loss model [94]) zu Grunde. Das zweite Modell basiert auf der empirischen Annahme, dass der Signalpegel relativ zur Empfangsleistung unter Freiraumbedingungen zusätzlich linear mit der Entfernung abnimmt. Die Modelle werden durch Berücksichtigung von Einfügedämpfungen für Wände und stationäre Hindernisse, welche sich im Ausbreitungspfad befinden, ergänzt.

Für das beschriebene Experimentalszenario zur Lokalisierung von DECT–Mobiltelefonen wurde als Messmodell für die durchgeführten Signalleistungsmessungen ein modifiziertes empirisches Ausbreitungsmodell mit entfernungsabhängigem, linearem Abfall der logarithmierten gemessenen Signalleistung $P_{S,l,k}$ zum Zeitpunkt k

$$z_{M,k}^l = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{S,l,k}}{1 \text{ mW}} \right) \quad (4.14)$$

gemäß

$$z_{M,k}^l = h_l(\underline{x}_{M,k}) + v_{l,k} \quad , \quad (4.15)$$

mit

$$h_l(\underline{x}_{M,k}) = -\sqrt{(\underline{x}_{M,k} - \underline{x}_{B,l})^T (\mathbf{D}_l)^{-1} (\underline{x}_{M,k} - \underline{x}_{B,l})} + P_{S,l}^0 \quad , \quad (4.16)$$

gewählt. Dabei ist $l = 1 \dots K$ der Index der betrachteten Basisstation, \mathbf{D}_l eine positiv definite, symmetrische Matrix, die die Ausbreitungsrichtung der modellierten Basisstation charakterisiert, und $\underline{x}_{B,l}$ der Mittelpunktvektor, an welchem für die Station die maximale Signalleistung prädiziert wird. $P_{S,l}^0$ ist ein konstanter Offset, durch den der maximal empfangbare Signalpegel für Station l bestimmt wird, und $z_{M,k}^l$ ist die unsicherheitsbehaftete Messung der durch M empfangenen, logarithmierten Signalleistung. Analog zu den oben

beschriebenen Modellen [65] haben die Parameter in (4.15), (4.16) keine direkte physikalische Bedeutung und werden an Hand durchgeführter Messungen identifiziert, wie in Kapitel 4.2.4 beschrieben. Das auftretende Messrauschen $v_{l,k}$ wird analog zur Vorgehensweise in [94] als additives, weißes Rauschen angenähert, wie im folgenden Kapitel näher dargestellt wird.

4.2.3.2 Modellierung der auftretenden Fehler

Das auftretende Messrauschen der Signalleistungsmessungen (4.15) variiert mit der der Position $\underline{x}_{M,k}$ des Empfängers in der betrachteten Umgebung, so dass sich abhängig vom Ort der Messung unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsdichten $f_{v,l}(v_{l,k})$ für $v_{l,k}$ ergeben [64]. Für das vorgestellte Experimentalszenario konnten die auftretenden Wahrscheinlichkeitsdichten jedoch, wie in [94], näherungsweise durch eine Gaußdichte $\mathcal{N}(v_{l,k} - \mu_v^l, \sigma_v^l)$ beschrieben werden, deren Parameter lediglich von der betrachteten Basisstation B_l abhängen. Dabei setzt sich das Messrauschen aus zwei Komponenten zusammen: Dem ortsunabhängigen Sensorrauschen der Signalleistungsmessschaltung von M und dem ortsabhängigen Modellfehler. Da die beiden Fehler voneinander unabhängig sind, können sie im Messmodell (4.15) in $v_{l,k}$ zusammengefasst werden. Die Ortsabhängigkeit des Modellfehlers wurde dabei durch eine Mittelung vernachlässigt.

4.2.3.3 Erweiterungen des Messmodells

In der Literatur werden eine Reihe von Verfahren vorgeschlagen, mit denen sich die Genauigkeit des gewählten, einfachen Ausbreitungsmodells (4.15) verbessern lässt. Dazu zählt die Berücksichtigung der Geometrie und Dämpfungseigenschaften von Hindernissen im Ausbreitungspfad, Betrachtung von Signalinterferenzen bei Mehrpfadausbreitung sowie Modellierung von auftretenden Reflektionen und Streuungen an Hindernissen [33, 92]. Diese Verfahren ziehen zum einen jedoch einen erhöhten Modellierungsaufwand nach sich und erfordern die Identifikation einer größeren Anzahl von Parametern. Zum anderen ergeben sich damit Modelle, die zwar geeignet sind, die mittlere Empfangsleistung des betrachteten Funkkanals genauer zu präzisieren, jedoch lassen sie sich nur schwierig in ein allgemeines Konzept zur Lokalisierung eines Mobilgerätes einbringen.

Daher wird im Folgenden zur Verfeinerung der Prädiktionsgenauigkeit des Messmodells eine zusätzliche, empirische Modellierung der räumlichen Verteilung der empfangenen Signalleistung auf der Basis von Gaussian–Mixture–Funktionen durchgeführt. Im Bereich der neuronalen Netzwerke wird diese Funktionsklasse auch als universeller Approximator in Radial–Basis–Netzwerken eingesetzt. Das resultierende Modell basiert auf dem Ausbreitungsmodell (4.15) mit linearem Abfall des Signalpegels und hat die Struktur

$$h_{l,GM}(\underline{x}_{M,k}) = h_l(\underline{x}_{M,k}) + \sum_{i=1}^{L_{GM}} c_i \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\underline{x}_{M,k} - \underline{\mu}_{x,i} \right)^T \mathbf{C}_{x,i}^{-1} \left(\underline{x}_{M,k} - \underline{\mu}_{x,i} \right) \right\}, \quad (4.17)$$

$l = 1 \dots K$, wobei L_{GM} die Anzahl der verwendeten Gaussian–Mixture–Funktionen ist, und c_i ein Gewichtungsfaktor. Dieser darf im Gegensatz zu den Gewichtungsfaktoren der Gaussian–Mixture–Dichten in Kapitel 3 beliebige positive oder negative Werte annehmen.

Durch das verfeinerte Ausbreitungsmodell gemäß (4.17) lassen sich lokale Signalleistungsschwankungen, wie sie auf Grund von Einfügedämpfungen durch statische Hindernisse wie Wände oder Türen entstehen, adäquat modellieren. Das globale Ausbreitungsverhalten, welches das Modell (4.17) beschreibt, wird weiterhin durch den entfernungsabhängigen linearen Abfall des Signalpegels gemäß $h_l(\underline{x}_{M,k})$ charakterisiert.

4.2.3.4 Modellierung des Benutzers

Für die Modellierung der Dynamik des zu lokalisierenden DECT-Mobiltelefons M gemäß des Systemmodells in (1.3) wird die Annahme zu Grunde gelegt, dass die maximale Geschwindigkeit, mit der sich M fortbewegt, nach oben durch eine gegebene Geschwindigkeit v_{max} begrenzt ist. Für die vorgestellten Experimente wurden statische Messungen im Abstand von ungefähr 0.5 m durchgeführt. Bei der mit der derzeitigen Hardware verfügbaren Messrate von ca. 0.8 Messungen/s entspräche dies einer Geschwindigkeit von 0.4 m/s, bei der maximal erreichbaren Messrate von 6.25 Messungen/s ergäbe sich eine Geschwindigkeit von 3.1 m/s. Während für Fahrzeuge wie zum Beispiel mobile Roboter eine sehr genaue Fortschreibung der geschätzten Lage mit Hilfe der so genannten Koppelnavigation [14, 40, 81] möglich ist, können für die Lageschätzung bei Personen nur gröbere, stochastisch basierte Modelle eingesetzt werden. In der Literatur zur Verfolgung (englisch: „tracking“) bewegter Ziele wurden eine Reihe von Modellen für das bewegte Ziel von unterschiedlicher Komplexität entwickelt [30]. Ein Ansatz zur Modellierung menschlicher Fortbewegung findet sich in [118]. Die einfachsten Modelle gehen von der Annahme einer konstanten Geschwindigkeit aus, wobei die Beschleunigung als Rauschen mit kleiner Amplitude modelliert wird. Modelle, die die Fortbewegung des Zieles strukturierter darstellen können, ergeben sich durch Verwendung farbiger Rauschprozesse für die Beschleunigungen [118] oder durch Multimodellansätze für verschiedene Fortbewegungsarten, die durch Markov-Schaltprozesse gekoppelt sind [30].

Für die vorgestellten Experimente wurde als allereinfachster Ansatz zur Modellierung der Fortbewegung des Mobiltelefons M unter obiger Annahme ein Modell gemäß

$$\underline{x}_{M,k+1} = \underline{x}_{M,k} + \underline{w}_k \quad , \quad (4.18)$$

gewählt. Dieses Modell besagt, dass sich M in einem Abtastschritt zufällig um einen Schritt $\Delta \underline{x}_{M,k} = \underline{w}_k$ fortbewegt, dessen Richtung und Länge durch einen mittelwertfreien, weißen, gauß'schen Rauschprozess \underline{w}_k mit Wahrscheinlichkeitsdichte $\mathcal{N}(\underline{w}_k, \mathbf{C}_{M,w})$ bestimmt werden. Für die Bewegung wird also keine Richtungspräferenz angenommen, aber größere Schritte werden in Abhängigkeit der Verteilung von \underline{w}_k immer unwahrscheinlicher. Das Modell lässt wegen der Verwendung eines gauß'schen Rauschprozesses \underline{w}_k nur die Definition einer mittleren, nicht aber einer maximalen Geschwindigkeit des Benutzers zu. Daher sollte die Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_{M,w}$ von \underline{w}_k so gewählt werden, dass (4.18) das durch $v_M \leq v_{max}$ spezifizierte Fortbewegungsverhalten möglichst gut angenähert wird.

4.2.4 Parameteridentifikation für das TestszENARIO

Für das in Bild 4.7 dargestellte Experimentalszenario mit $K = 10$ DECT-Basisstationen wurde eine Parameteridentifikation für das zu Grunde gelegte Modell gemäß (4.18), (4.15)

durchgeführt. Für das einfache Messmodell mit linearem Abfall der logarithmierten Signalleistung (4.15) wurden dabei sechs Parameter $\underline{\eta}_{M,l} = [x_{B,l}, y_{B,l}, d_{l,1}, d_{l,2}, d_{l,3}, P_{S,l}^0]^T$ mit

$$\begin{aligned} \underline{x}_{B,l} &= [x_{B,l}, y_{B,l}]^T \\ \mathbf{D}_l^{-1} &= \begin{bmatrix} d_{l,1} & d_{l,2} \\ 0 & d_{l,3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} d_{l,1} & d_{l,2} \\ 0 & d_{l,3} \end{bmatrix}, \quad l = 1 \dots K, \end{aligned}$$

für jede Basisstation B_l separat identifiziert, da eine eindeutige Zuordnung der Messungen zu den zugehörigen Basisstationen gegeben ist. Die Parameterwahl für \mathbf{D}_l garantiert, dass die resultierende Matrix \mathbf{D}_l für alle $d_{l,i}, i = 1 \dots 3$ mit $d_{l,1} \neq 0$ und $d_{l,3} \neq 0$ positiv definit ist. Für das einfache Systemmodell gemäß (4.18) konnte der Parameter $\sigma_{M,w}$ für die Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_{M,w} = \sigma_{M,w}^2 \mathbf{I}$ direkt aus der angenommenen Maximalgeschwindigkeit v_{max} abgeschätzt werden.

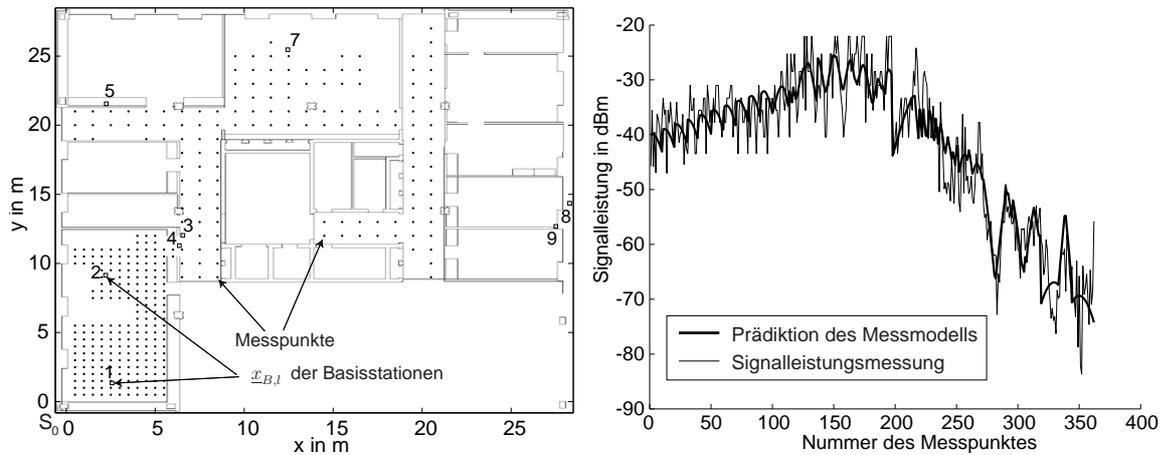
Für die Identifikation der Modellparameter lassen sich zwei verschiedene Vorgehensweisen unterscheiden:

- Eine vorab durchgeführte Identifikation der Parameter $\underline{\eta}_{M,l}$ mit Hilfe eines Referenzdatensatzes oder
- Eine gleichzeitige Schätzung der Parameter $\underline{\eta}_{M,l}$ des Modells und der Lage $\underline{x}_{M,k}$ des Mobiltelefons M , mit dem die Signalleistungsmessungen durchgeführt werden.

Die letztere Vorgehensweise ist, wie in Kapitel 4.2.2 beschrieben, in der Robotikliteratur unter dem Begriff *SMBL* Gegenstand aktueller Forschung, erfordert jedoch für den verwendeten Modellierungsansatz die Schätzung der Verbundverteilungsdichte des Lagevektors $\underline{x}_{M,k}$ und des Vektors $\underline{\eta}_M$ aller Parameter $\underline{\eta}_{M,l}, l = 1 \dots K$ [20]. Für das beschriebene Experimentalszenario ergäbe sich ein 62-dimensionales Schätzproblem, weshalb analog zur Vorgehensweise in [94] eine vorab durchgeführte Schätzung der Modellparameter präferiert wurde. In [94] wird der EM-Algorithmus zur Identifikation der Parameter eines log-loss-Modells für die Lokalisierung von GSM-Telefonen verwendet. Für das vorliegende Modell wurde eine Identifikation durch Minimierung eines quadratischen Gütekriteriums gemäß

$$\underline{\eta}_{M,l}^{opt} = \min_{\underline{\eta}_{M,l}} \sum_{i=1}^N \left(z_M^l(\underline{x}_{M,i}) - h_l(\underline{x}_{M,i}, \underline{\eta}_{M,l}) \right)^2, \quad (4.19)$$

nach dem Verfahren der kleinsten Fehlerquadrate durchgeführt. Dabei sind $\underline{x}_{M,i}, i = 1 \dots N$ die Positionen, an denen die Messungen $z_M^l(\underline{x}_{M,i})$ gemäß (4.14) zu den $K = 10$ DECT-Basisstationen durchgeführt wurden und $h_l(\cdot)$ ist das Messmodell gemäß (4.15). Für die vorgestellten Experimente wurden, wie in Bild 4.8(a) dargestellt, $N = 362$ Punkte $\underline{x}_{M,i}$ auf einem rechteckigen Gitter mit 1 m bzw. 0,5 m Gitterabstand ausgewertet [1]. Für die Optimierung gemäß (4.19) wurden die zugehörigen Messwerte z_M^l zeitlich gemittelt, um den Einfluss des zeitlichen Messrauschens auf das Identifikationsergebnis zu verkleinern. Ferner ist zu beachten, dass die initialen Parameterwerte für $\underline{\eta}_{M,l}$ geeignet gewählt werden müssen, um eine Konvergenz des Optimierungsalgorithmus gegen ein Nebenminimum zu vermeiden. In Bild 4.8(a) sind die identifizierten Mittelpunktvektoren $\underline{x}_{B,l}$ der 10 Basisstationen mit Quadraten eingezeichnet, die Vektoren $\underline{x}_{B,6}$ und $\underline{x}_{B,10}$ der Stationen



(a) Innenraumumgebung des DECT-Experimentalszenarios mit $N = 362$ Messpunkten $\underline{x}_{M,i}$, an welchen zur Identifikation des Messmodells Signalleistungsmessungen $P_{S,l,i}$ der empfangenen Basisstationen B_l durchgeführt wurden.

(b) Vergleich der Signalleistungsmessungen $P_{S,l,i}$ und der Prädiktion des Messmodells $h_l(\underline{x}_{M,i})$ für die zweite Basisstation B_2 über alle vermessenen Gitterpunkte $i = 1 \dots 362$.

Bild 4.8: Parameteridentifikation für ein DECT-Experimentalszenario zur Lokalisierung eines DECT-Mobiltelefons.

Tabelle 4.2: Standardabweichungen der identifizierten Messmodelle mit entfernungsabhängigem, linearem Abfall des Signalpegels für alle 10 Basisstationen B_l .

Nr. l der Station	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
σ_l^x in dBm	5.55	4.86	5.14	5.11	5.13	4.80	6.50	6.96	6.54	6.06

B_6 und B_{10} liegen außerhalb des dargestellten Bereiches. Zu beachten ist jedoch, dass ihre Lage *nicht* mit der wahren Lage der Stationen selbst gemäß Bild 4.7 korrespondiert, sondern nur eine Schätzung für den Ort der maximalen empfangbaren Signalleistung P_S darstellt. Wie in [33] ausgeführt, ist eine direkte, physikalische Interpretation der Parameter in (4.15) nicht möglich, da das wahre, komplexe Ausbreitungsverhalten der Funkwellen nur stark vereinfacht modelliert wird. In Bild 4.8(b) ist für alle $N = 362$ vermessenen Gitterpunkte die über drei Messungen gemittelte Signalleistung und die durch das Modell prädierte Signalleistung für die zweite Basisstation B_2 aufgetragen. Man erkennt sowohl die gute globale Übereinstimmung von Modell und Messungen als auch die starken lokalen Variationen der gemessenen Signalleistung, welche durch das additive Messrauschen $v_{l,k}$ im Modell berücksichtigt werden. In Tabelle 4.2 sind die über alle vermessenen Raumpunkte $\underline{x}_{M,i}$ berechneten Standardabweichungen σ_l^x , $l = 1 \dots K$ der Modellfehler der gemäß (4.19) identifizierten Messmodelle angegeben. Diese gehen als additives Rauschen in das Messmodell ein. Das zeitliche Rauschen des Signalleistungsmessgerätes wurde durch eine stationäre Messung an der Stelle $\underline{x}_M = [2.0 \text{ m}, 10.5 \text{ m}]^T$ mit $L = 300$ Messwerten bestimmt und ist in Tabelle 4.3 angegeben.

Tabelle 4.3: Standardabweichungen des zeitlichen Rauschens der Signalleistungsmessungen an einem festen Punkt.

Nr. l der Station	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
σ_l^t in dBm	1.32	2.09	1.85	1.58	1.44	1.53	2.22	3.85	1.27	2.71

Parameteridentifikation für das erweiterte Messmodell

Für das erweiterte Messmodell gemäß (4.17) wurden zunächst die Parameter des globalen Modellanteils mit linearem Abfall der logarithmierten Signalleistung wie im vorangehenden Abschnitt beschrieben identifiziert. In einem darauf folgenden Schritt wurden iterativ die Parameter der L_{GM} einzelnen, additiven Gaußfunktionen durch Minimierung eines quadratischen Gütekriteriums bestimmt, wobei die initialen Parameter so gewählt wurden, dass der Scheitelpunkt der Gaußfunktion mit der Stelle des maximalen residualen Modellfehlers übereinstimmte. Dieses Verfahren ist suboptimal gegenüber einer gleichzeitigen Optimierung aller KL_{GM} Parameter der additiven Gaußfunktionen, hat aber den Vorteil, dass die Komplexität des zu lösenden Optimierungsproblems erheblich geringer ist.

4.2.5 Nichtlineare Lokalisierung mit Abstandsmessungen

Zur Behandlung des beschriebenen Lokalisierungsproblems im Kontext des in Kapitel 3 vorgestellten, nichtlinearen Filterverfahrens auf der Basis von Gaussian–Mixture–Dichten wird das erstellte Modell (4.18), (4.15) des betrachteten Gesamtsystems mit den identifizierten Modellparametern $\underline{\eta}_{M,l}$, $l = 1 \dots K$ sowie den Parametern für die auftretenden Rauschprozesse verwendet. Es beschreibt die Fortbewegung des zu lokalisierenden Mobiltelefons M und die Signalausbreitung in den $K = 10$ verwendeten DECT–Funkkanälen. Zusätzlich sei eine initiale Lageschätzung $f_p(\underline{x}_{M,0})$ für M in Form einer Gaussian–Mixture–Dichte gegeben. Falls kein Vorwissen über die Position von M vorhanden ist, korrespondiert dies mit der Annahme einer Gleichverteilung für $f_p(\underline{x}_{M,0})$ über der betrachteten Umgebung.

Das *Ziel* der Lokalisierung auf der Basis nichtlinearer Filterverfahren ist, die zu $\underline{x}_{M,k}$ gehörende Wahrscheinlichkeitsdichte $f_A(\underline{x}_{M,k})$ so über die Filterschritte fortzuschreiben, dass die wahre, nach Bayes (1.8), (1.9) resultierende Dichte für das betrachtete Modell möglichst exakt durch die angenommene Dichtebeschreibung approximiert wird. Aus $f_A(\underline{x}_{M,k})$ können dann problemlos weitere, für die betrachtete Lokalisierungsanwendung interessante Kenngrößen wie Erwartungswerte oder Varianzen für $\underline{x}_{M,k}$ berechnet werden.

Zur Berechnung dieser approximierenden, angenommenen Wahrscheinlichkeitsdichte wird das in Kapitel 3 vorgestellte *PGME*–Filterverfahren für den Fall eines linearen Prädiktionschrittes (3.49), (3.50) mit Berechnung des nichtlinearen Filterschrittes gemäß Ablaufdiagramm 3.14 zur rekursiven, nichtlinearen Filterung verwendet. Dazu werden Messungen $z_{M,k}^l$ der Signalleistungen gemäß (4.15) zu den $K = 10$ Basisstationen mit zugehörigen Zuordnungen, die durch einen eindeutigen Identifikationscode des DECT–Funkkanals

gegeben sind, benötigt. Beide werden im laufenden Gesprächsbetrieb durch das zu lokalisierende Mobiltelefon M , wie in Kapitel 4.2.2 beschrieben, gewonnen.

Für das dargelegte, zweidimensionale Lokalisierungsproblem werden achsenparallele Gaussian–Mixture–Dichten mit $5L$ Parametern $\underline{\eta} = [\underline{\eta}_1^T, \underline{\eta}_2^T, \dots, \underline{\eta}_L^T]^T$ verwendet, wobei die Parameter der j -ten Dichte durch

$$\underline{\eta}_j = [w_j, \mu_{1,j}, \mu_{2,j}, \sigma_{1,j}, \sigma_{2,j}]^T \quad (4.20)$$

gegeben sind. L bezeichnet dabei die Anzahl der Dichten der Gaussian–Mixture–Dichte $f_A(\underline{x}_{M,k})$ gemäß (3.2). Zur Durchführung des *PGME*-Verfahrens muss für diese approximierende Dichte $f_A(\underline{x}_{M,k})$ das Gütemaß $G(\tau, \underline{\eta})$ gemäß (3.18) und der Gradient $\frac{\partial G}{\partial \underline{\eta}}$ ausgewertet werden. Dieser ergibt sich für den $N = 2$ -dimensionalen Fall mit (4.20) und

$$\frac{\partial f_{A,j}(\underline{x}_k, \underline{\eta}_j)}{\partial \underline{\eta}_j} = f_{A,j}(\underline{x}_{M,k}, \underline{\eta}_j) \begin{pmatrix} \frac{2}{w_j} \\ \frac{x_M - \mu_{1,j}}{\sigma_{1,j}^2} \\ \frac{y_M - \mu_{2,j}}{\sigma_{2,j}^2} \\ \frac{(x_M - \mu_{1,j})^2 - \sigma_{1,j}^2}{\sigma_{1,j}^3} \\ \frac{(y_M - \mu_{2,j})^2 - \sigma_{2,j}^2}{\sigma_{2,j}^3} \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

aus (3.23). Für die Minimierung von $G(\tau, \underline{\eta})$ nach dem modifizierten Levenberg–Marquardt–Verfahren wird die benötigte Matrix \mathbf{K} gemäß (3.33) direkt mit Hilfe der mittels (4.21) berechneten Ableitung der approximierenden Gaussian–Mixture–Dichte nach den Parametern $\underline{\eta}_j$ der j -ten Approximationsdichte berechnet. Die Likelihoodfunktion $f_v(\cdot)$ in $G(\tau, \underline{\eta})$ gemäß (3.18) und $\frac{\partial G}{\partial \underline{\eta}_j}$ ist durch die nichtlineare Messfunktion $h_l(\underline{x}_{M,k})$ gemäß (4.15) und die Wahrscheinlichkeitsdichte des additiven Messrauschens $v_{l,k}$, die als Gaußdichte approximiert wurde, definiert. Eine Erweiterung des beschriebenen Filterverfahrens auf Gaussian–Mixture–Dichten für das Messrauschen $v_{l,k}$ ist direkt möglich.

Zur Auswertung der auftretenden Integrale über nicht-gauß'sche Dichten im Filterschritt wurden zwei Verfahren angewendet:

1. Direkte numerische Auswertung durch Diskretisierung des Zustandsraums und Integration auf einem adaptiven Gitter.
2. Integration mittels des in Kapitel 3.5.5 beschriebenen Verfahrens mit bibliotheksbasierter Aufteilung von Gaußdichten.

Zur Auswertung des Linearisierungsfehlermaßes (3.47) für das zweite Verfahren wurde die Messgleichung des Modells durch Quadrieren in eine Form gebracht, die eine durchgehende, analytische Behandlung möglich macht. Aus (4.15) ergibt sich die transformierte Messgleichung

$$(z_{M,k}^l - P_{S,l}^0)^2 = (\underline{x}_{M,k} - \underline{x}_{B,l})^T (\mathbf{D}_l)^{-1} (\underline{x}_{M,k} - \underline{x}_{B,l}) + 2 \underbrace{(z_{M,k}^l - P_{S,l}^0) v_{l,k} - v_{l,k}^2}_{\tilde{v}_{l,k}}, \quad (4.22)$$

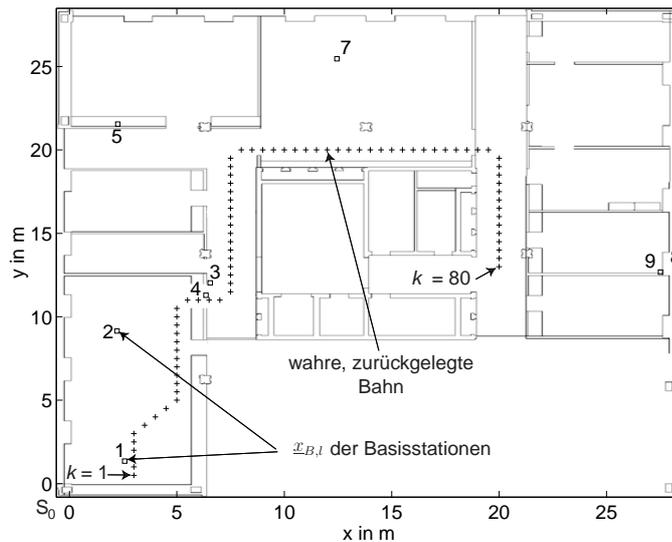


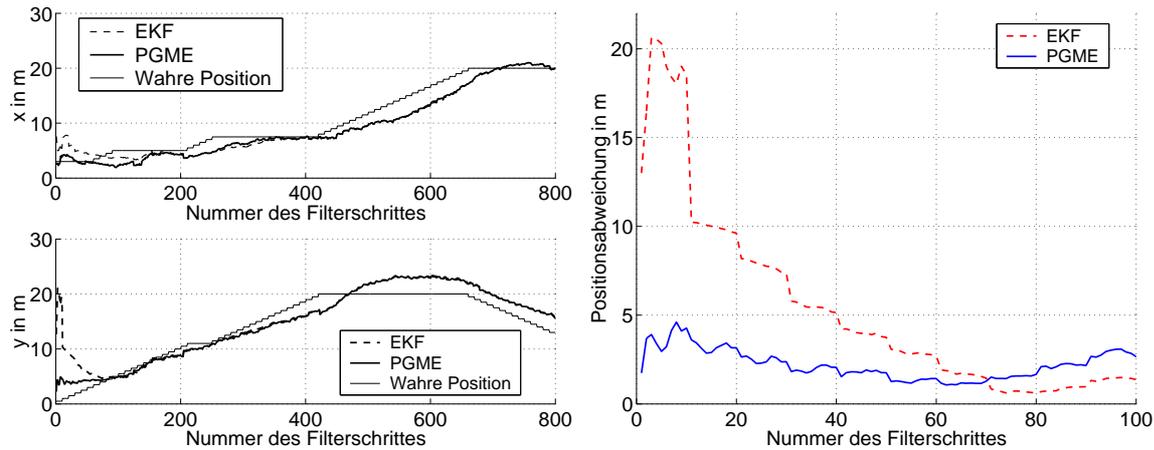
Bild 4.9: Lokalisierungsexperiment mit DECT-Mobiltelefon: Grundriss der Innenraumumgebung und wahre zurückgelegte Bahn des Mobiltelefons M .

für $l = 1 \dots K$, mit transformiertem Messrauschen $\bar{v}_{l,k}$, das nicht mehr gaußverteilt ist. $f_{\bar{v},l}(\bar{v}_{l,k})$ kann durch Berechnung der ersten beiden Momente jedoch durch eine Gaußdichte angenähert werden. Das erste, numerische Verfahren zur Integration für den Filterschritt ist rechnerisch aufwendig, aber liefert eine sehr präzise Approximation für die gesuchten Integrale und damit eine Referenzlösung. Die Integration nach dem zweiten Verfahren benötigt, je nach Anzahl der verwendeten, aufgeteilten Gaußdichten, deutlich weniger Rechenaufwand, resultiert allerdings in einer suboptimalen Lösung auf Grund der auftretenden Approximationsfehler.

4.2.6 Ergebnisse

4.2.6.1 Lokalisierung mit dem PGME-Verfahren

In Bild 4.9 ist eine Bahn von 41.2 m Länge mit 80 Messpunkten $P_{M,k}$ dargestellt, die in dem beschriebenen prototypischen DECT-Versuchsszenario von einem Benutzer mit einem zu lokalisierenden DECT-Mobiltelefon zurückgelegt wurde. An jedem Messpunkt $P_{M,k}$ wurden drei Signalleistungsmessungen zu allen 10 installierten DECT-Basisstationen B_l durchgeführt, die zu einem Messwert gemittelt wurden. Der Abstand zwischen den Messpunkten betrug durchschnittlich 0.52 m und maximal 0.7 m, und die Messungen wurden statisch durchgeführt, das heißt, das Mobiltelefon M wurde während der einzelnen Messungen nicht bewegt. Als initiale Schätzung wurde näherungsweise eine Gleichverteilung für die priore Wahrscheinlichkeitsdichte im Bereich der Experimentalumgebung angenommen, die durch eine Normaldichte mit 15 m Standardabweichung und Erwartungswert $\mu_{1,0}^p = [15, 15]^T$ m grob approximiert wurde. Das bedeutet, es war kein Vorwissen über die initiale Lage von M in der Experimentalumgebung vorhanden, und es musste ein globales Lokalisierungsproblem gelöst werden. Die Parameter des verwendeten Messmodells und der zugehörigen Rauschprozesse wurden zuvor identifiziert, wie in Kapitel 4.2.4



(a) Zeitlicher Verlauf der Positionen des DECT-Mobiltelefons M .

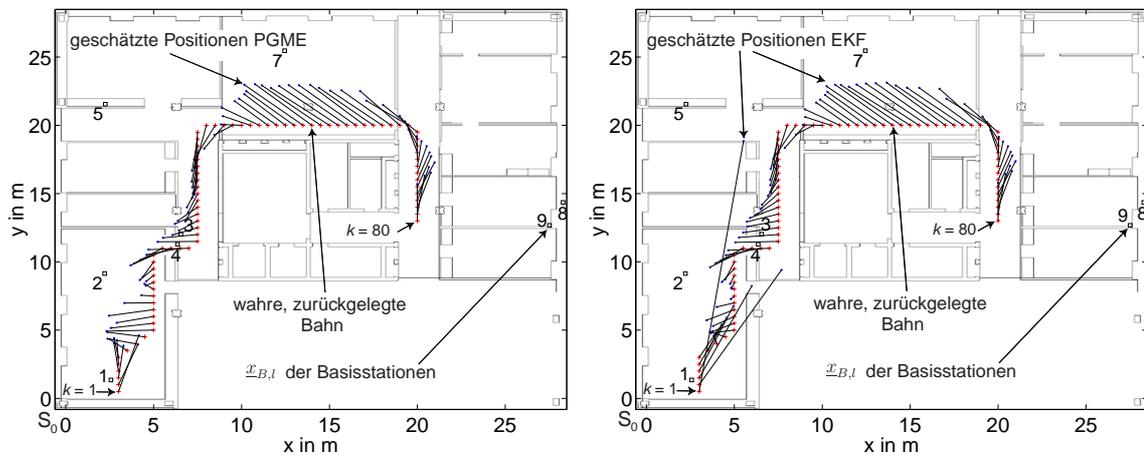
(b) Fehler in der Positionsschätzung des $PGME$ -Filters und des EKF für das DECT-Mobiltelefon M , Filterschritte 1 bis 100.

Bild 4.10: Lokalisierungsexperiment in einer prototypischen Versuchsumgebung: Zeitlicher Verlauf der wahren und der geschätzten Positionen und Fehler in der Positionsschätzung. Durchgezogene Linie: $PGME$ -Filter. Gestrichelte Linie: EKF .

beschrieben. Als Standardabweichung für das Systemrauschen, das die Unsicherheit in der Fortbewegung des Benutzers modelliert, wurde $\sigma_{M,w} = 0.4$ m verwendet. Für die dargestellten Ergebnisse wurden die auftretenden Integrale numerisch ausgewertet, vergleichbare Ergebnisse mit etwas größeren Approximationsfehlern wurden durch das in Kapitel 3.5.5 beschriebene Verfahren erzielt.

Bild 4.10(a) zeigt den zeitlichen Verlauf der wahren und der geschätzten Positionen des Mobiltelefons M über alle 800 Filterschritte für die x -Koordinate und die y -Koordinate, wobei an jeder Position $\underline{x}_{M,k}$, $k = 1 \dots 80$, 10 Filterschritte durchgeführt wurden. Für die Berechnung der geschätzten Positionen wurde das vorgestellte $PGME$ -Verfahren und für Vergleichszwecke ein Extended-Kalman-Filter mit identischen Modellparametern verwendet. Der aufgetragene Positionsschätzwert $\hat{\underline{x}}_{M,k}$ ist der Erwartungswert $E[\underline{x}_{M,k}]$ über die berechnete Wahrscheinlichkeitsdichte $f_e(\underline{x}_{M,k})$ zum Zeitschritt k . Man erkennt, dass das $PGME$ -Filter die wahre Position $\underline{x}_{M,k}$ nach einem Einschwingvorgang mit einem Schleppfehler schätzt, der von dem verwendeten Systemmodell herrührt, welches eine mittelwertfreie Fortbewegung annimmt. Die Standardabweichung des Fehlers zwischen der geschätzten und der wahren Position über die gesamte Bahn beträgt 1.72 m in x -Richtung und 1.92 m in y -Richtung.

In Bild 4.11(a) ist die Schätzung $\hat{\underline{x}}_{M,k}$ des $PGME$ -Filters für das beschriebene Experiment zusammen mit den wahren Positionen von M , gekennzeichnet durch kleine Kreuze, über der Versuchsumgebung aufgetragen. Man erkennt, dass die geschätzte Position von M in der gesamten Versuchsumgebung gut mit der wahren Position korrespondiert, allerdings ergeben sich speziell zu Beginn des Versuchslaufes sowie in Nähe der Basisstation B_7 überdurchschnittliche Abweichungen auf Grunde von nicht modellierten, systematischen Fehlern, siehe auch Bild 4.10(a). Diese sind unter Umständen teilweise auf Modellfehler



(a) Geschätzte Positionen von M für $l = 80$ Messpunkte, $PGME$ -Filter.

(b) Geschätzte Positionen von M für $l = 80$ Messpunkte, EKF .

Bild 4.11: Lokalisierungsexperiment in einer prototypischen Versuchsumgebung: Die wahren und geschätzten Positionen des DECT-Mobiltelefons M .

durch veränderte Umgebungsbedingungen während des Versuchslaufes zurückzuführen. Ein Beispiel hierfür sind geöffnete Türen, die bei der Modellidentifikation geschlossen waren. Zum anderen kann das verwendete einfache Ausbreitungsmodell (4.15) das wahre Ausbreitungsverhalten der Funkwellen nur genähert wiedergeben, so dass systematische Fehler hinter Objekten mit großen Einfügedämpfungen, wie zum Beispiel Betonwänden, und vor reflektierenden Flächen entstehen.

4.2.6.2 Vergleich mit dem Extended-Kalman-Filter

Bild 4.11(b) zeigt für Vergleichszwecke die Schätzung des EKF für das beschriebene Experiment, in Bild 4.10(a) sind gestrichelt die zugehörigen Zeitverläufe der geschätzten Positionen für die x -Koordinate und die y -Koordinate aufgetragen. In Bild 4.10(b) ist der Fehler in der Positionsschätzung für das EKF und das $PGME$ -Filter für die ersten 100 Filterschritte aufgetragen. Dieser Fehler ist hier als der Abstand zwischen der wahren und der geschätzten Position des Mobiltelefons M definiert. Man erkennt, dass das EKF speziell in der initialen Lokalisierungsphase, in der die priore Unsicherheit noch sehr groß ist, auf Grund der auftretenden Linearisierungsfehler eine inkonsistente Schätzung errechnet. Der Erwartungswert der berechneten Dichte liegt bis zu 20 m von der wahren Position des Mobiltelefons M entfernt, siehe Bild 4.10(b). Bei der Anwendung von Verfahren zur Sensordatenvalidierung, wie der Berechnung der Mahalanobisdistanz, würden alle folgenden Messungen als ungültig gekennzeichnet und das Filter wäre dauerhaft divergiert. Diese Verfahren wurden für das vorliegende Beispiel jedoch bewusst nicht integriert, da sie die Vergleichbarkeit von EKF und $PGME$ erschwert hätten. Daher konvergiert das EKF nach circa 50 Schritten auch wieder gegen einen sinnvollen Schätzwert für die Position von M .

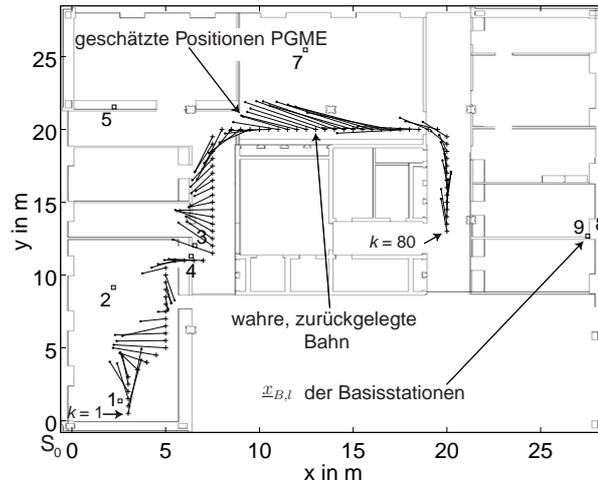
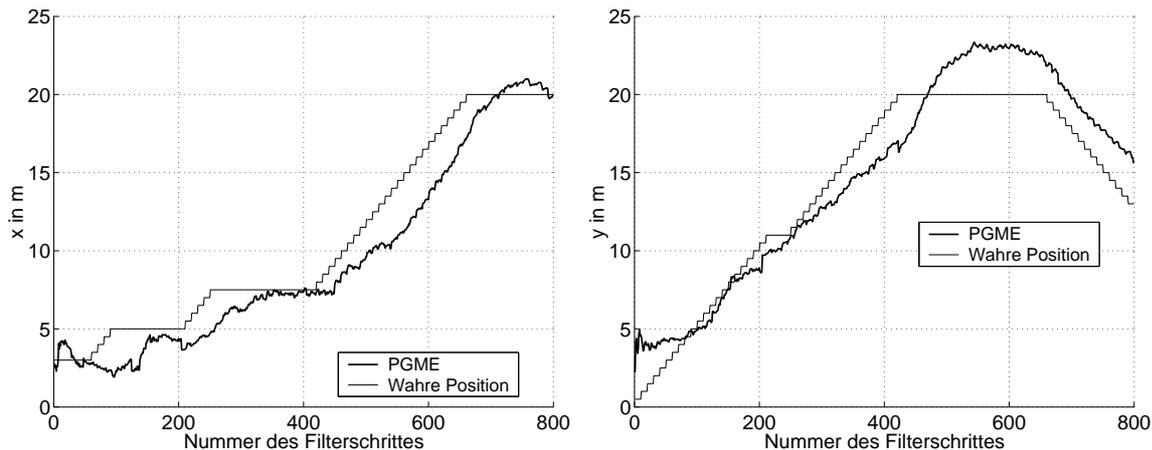


Bild 4.12: Geschätzte Positionen von M für $l = 80$ Messpunkte, $PGME$ -Filter mit erweitertem Messmodell.



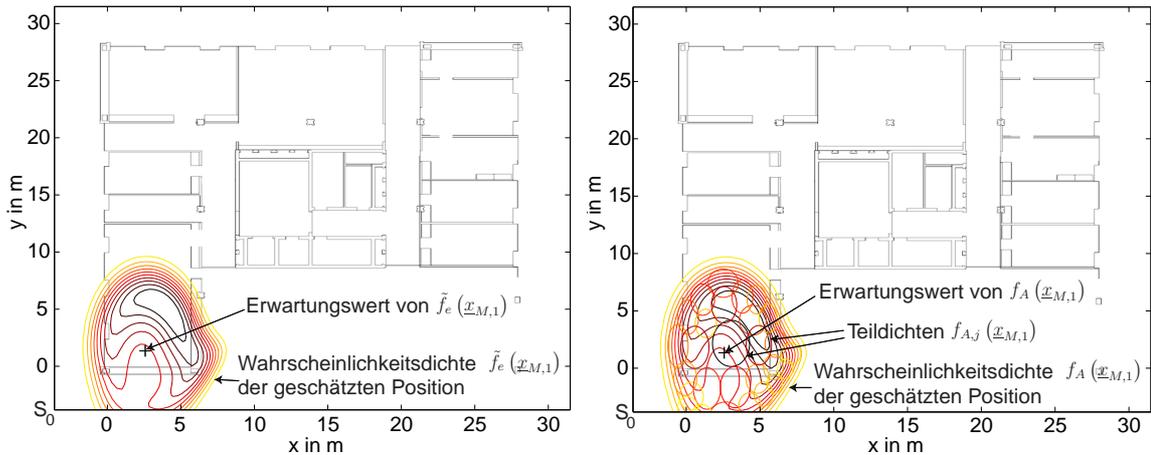
(a) Zeitlicher Verlauf der Positionen des Mobiltelefons M , x -Koordinate, $PGME$ -Filter mit erweitertem Messmodell.

(b) Zeitlicher Verlauf der Positionen des Mobiltelefons M , y -Koordinate, $PGME$ -Filter mit erweitertem Messmodell.

Bild 4.13: Lokalisierungsexperiment in einer prototypischen Versuchsumgebung mit erweitertem Messmodell: Die wahren und die zugehörigen geschätzten Positionen des DECT-Mobiltelefons M .

4.2.6.3 Das $PGME$ -Verfahren mit erweitertem Messmodell

Um die Fehler in den Positionsschätzungen zu verringern, welche sich durch systematische Fehler des verwendeten, einfachen Messmodells mit linearem Abfall der logarithmierten Signalleistung ergeben, wurde das in Kapitel 4.2.3.3 beschriebene, erweiterte Modell mit additiven Gaußfunktionen verwendet. Pro Basisstation wurde das Modell um $L_{GM} = 5$ Gaußfunktionen erweitert. Die Parameter dieser Funktionen wurden mit demselben, in Bild 4.8(a) dargestellten Satz an Referenzmesspunkten identifiziert, wie das ursprüngliche



(a) Wahre Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $\tilde{f}_e(\underline{x}_{M,1})$, die sich durch numerische Berechnung des ersten Filterschrittes nach Bayes ergibt.

(b) Approximierte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_A(\underline{x}_{M,1})$, die das Ergebnis der Berechnung des ersten Filterschrittes mit dem *PGME*-Verfahren ist.

Bild 4.14: Vergleich der wahren und der approximierten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $\tilde{f}_e(\underline{x}_{M,1})$ und $f_A(\underline{x}_{M,1})$ nach dem ersten Filterschritt.

Modell und die Standardabweichungen der Modellfehler σ_l^x , $l = 1 \dots 10$ für das erweiterte Modell berechnet.

Bild 4.12 zeigt das Ergebnis des *PGME*-Filters für die in Bild 4.9 dargestellte Bahn, wobei dieselben Messdaten verwendet wurden, wie für das in Bild 4.11(a) dargestellte Lokalisierungsexperiment. Man erkennt, dass das Schätzergebnis des *PGME*-Filters bei Verwendung des erweiterten Messmodells im Durchschnitt näher an den wahren Positionen von M liegt, als bei Verwendung des einfachen Messmodells gemäß (4.15), obwohl in x -Richtung vereinzelt auch größere Abweichungen auftreten. Bild 4.13(a) und Bild 4.13(b) zeigen den zugehörigen zeitlichen Verlauf der x - und y -Komponente der Schätzgröße $\hat{x}_{M,k}$ für das Lokalisierungsexperiment. Die Standardabweichung der Schätzung von der wahren Position beträgt 2.09 m in x -Richtung und 1.45 m in y -Richtung.

4.2.6.4 Numerische Integration nach Bayes für den Filterschritt

In Bild 4.14(a) ist die wahre Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $\tilde{f}_e(\underline{x}_{M,1}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die sich durch numerische Auswertung des Filterschrittes nach Bayes gemäß (1.9) aus der Messung zur ersten Basisstation für das erweiterte Messmodell ergibt, als Konturgrafik dargestellt. Man erkennt, dass $\tilde{f}_e(\underline{x}_{M,1})$ auf Grund der nichtlinearen Messgleichung stark von einer Gaußdichte abweicht. Im Rahmen der Filterung durch das *PGME*-Verfahren wird diese Dichte durch eine Gaussian-Mixture-Dichte approximiert. Diese Approximation ist in Bild 4.14(b) dargestellt. Dabei sind den Konturlinien überlagert die $1-\sigma$ -Grenzen der $L = 28$ Teildichten $f_{A,j}(\underline{x}_{M,1})$ von $f_A(\underline{x}_{M,1})$ eingezeichnet. Dunkle Grauwerte stehen dabei für Dichten mit hohen Gewichten, und helle Grauwerte für solche mit niedrigen Gewichten. Die Konturlinien der approximierenden Wahrscheinlichkeitsdichte $f_A(\underline{x}_{M,1})$ sind

denen der wahren Wahrscheinlichkeitsdichte $\tilde{f}_e(\underline{x}_{M,1})$ beinahe identisch und die quadratische normierte Abweichung zwischen den Dichten gemäß (3.21) beträgt $G_{SC} = 2.39 \cdot 10^{-4}$. Die wahre Dichte wird also durch das *PGME*-Verfahren mit 28 Approximationsdichten $f_{A,j}(\underline{x}_{M,1})$ nahezu perfekt approximiert.

4.2.7 Diskussion

In diesem Kapitel wurde die Anwendung des in Kapitel 3 dieser Arbeit hergeleiteten, neuartigen Filterverfahrens auf ein prototypisches Lokalisierungsproblem von DECT-Mobiltelefonen in einer Innenraumumgebung vorgestellt. Der gewählte, gemischt geometrisch-stochastische Modellierungsansatz führt auf ein Modell mit nichtlinearer Messgleichung. An Hand einer weiträumigen Testfahrt wurde demonstriert, dass der vorgestellte Ansatz geeignet ist, eine Lokalisierung eines Mobiltelefons auf der Basis von Signalleistungsmessungen im Falle globaler initialer Unsicherheit durchzuführen und die Position des Telefons über der Zeit zu verfolgen. Hierzu wird ein Systemmodell benötigt, welches eine quantitative Beschreibung der Fortbewegung des Telefons ermöglicht. Es wurde gezeigt, dass das Problem der initialen Lokalisierung auf die Auswertung nicht-gauß'scher Wahrscheinlichkeitsdichten führt und daher nicht direkt durch ein linearisierendes Filterverfahren wie das Extended-Kalman-Filter behandelt werden kann. Das vorgestellte *PGME*-Filterverfahren ist dagegen in der Lage, diese Wahrscheinlichkeitsdichten durch eine angenommene Dichtebeschreibung auf der Basis von Gaussian-Mixture-Dichten mit vorgebbarer Genauigkeit zu approximieren, wie ein Vergleich mit einem numerisch nach Bayes berechneten Filterergebnis für den ersten Filterschritt demonstrierte.

Eine wichtige Erweiterung des vorgestellten Lokalisierungsverfahrens ist die simultane Schätzung der Position und der Geschwindigkeit des Mobiltelefons, um leistungsfähigere und akuraterer Systemmodelle zur Verfolgung der Position einsetzen zu können. In einem weiteren Schritt kann das vorgestellte nichtlineare Filterverfahren zur gleichzeitigen Schätzung der Position des Mobiltelefons und der Parameter des Ausbreitungsmodells der Funksignale angewendet werden. Dadurch könnte das benötigte Modell während des laufenden Betriebs des Lokalisierungssystems erstellt und verbessert werden, und müsste nicht vorab durch Messungen identifiziert werden.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

5.1 Zusammenfassende Bewertung

Die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit bestand darin, neuartige rekursive Filterverfahren zur Zustandsschätzung für nichtlineare Systeme herzuleiten, die eine geschlossene, systematische Behandlung des Schätzproblems erlauben, und diese Verfahren in einer prototypischen Implementierung an Hand des Problems der Lokalisierung in zwei Testszenarien zu validieren. Die zwei vorgestellten Verfahren gehören zur Klasse der Filterverfahren mit angenommener Dichtebeschreibung. Diese Verfahren beschreiben die gesuchte, bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte für den Systemzustand approximativ in einer parametrisierten Form, und berechnen die Parameter der Approximation rekursiv über den Filter- und den Prädiktionsschritt hinweg.

Das erste vorgestellte, *neuartige Filterverfahren im Hyperraum* basiert auf einer Transformation des Filterproblems in einen höherdimensionalen Raum. In diesem Raum kann die ursprüngliche, nichtlineare Messgleichung des betrachteten Systems in einer pseudo-linearen Form dargestellt werden, und der Filterschritt durch die Anwendung eines *linearen* Filterverfahrens in diesem höherdimensionalen Raum behandelt werden. Das resultierende Filterverfahren wurde sowohl für den Fall einer stochastischen als auch für den Fall einer mengenbasierten Unsicherheitsmodellierung explizit hergeleitet. Im ersten Fall werden komplexe Wahrscheinlichkeitsdichten im Originalraum durch so genannte Pseudo-Gaußdichten im Hyperraum beschrieben, im zweiten Fall komplex geformte Mengen möglicher Zustände durch so genannte pseudo-ellipsoidale Mengen. Durch diese Art der Darstellung können sogar nicht-konvexe und nicht-zusammenhängende Mengen mit einer einheitlichen Parametrisierung geschlossen analytisch beschrieben werden.

Für beide Unsicherheitsmodelle wird der verbleibende Approximationsfehler mit wachsender Dimension des verwendeten Hyperraums immer kleiner. Im Falle einer stochastischen Modellierung ermöglicht das vorgestellte Verfahren für polynomiale Nichtlinearitäten sogar die analytische Berechnung der theoretisch exakten Lösung im Filterschritt.

Für den Prädiktionsschritt existiert im Gegensatz zum Filterschritt bisher keine allgemeine, analytische Lösung, jedoch stehen für den stochastischen Fall effiziente numerische Verfahren zur Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeitsdichte zur Verfügung. Der mengenbasierte Fall kann für Systeme ohne Systemrauschen analytisch behandelt werden.

Das zweite vorgestellte, *neuartige Filterverfahren* verwendet *Gaussian-Mixture-Dichten* als angenommene Dichtebeschreibung. Die Kernidee des vorgestellten Verfahrens ist, die Parameter dieser Dichtebeschreibung durch Minimierung eines quadratischen Gütemaßes

zu bestimmen. Dieses quantifiziert die *Formabweichung* zwischen der wahren Wahrscheinlichkeitsdichte und ihrer Approximation auf der Basis von Gaussian–Mixture–Dichten. Um eine Konvergenz des unterlagerten Optimierungsverfahrens in ein Nebenminimum zu vermeiden, wurde für das Verfahren ausgenutzt, dass es möglich ist, eine parametrisierte Wahrscheinlichkeitsdichte zu definieren, die durch ein *Progressionsverfahren* stetig von der gegebenen, approximativen Dichtebeschreibung in die gesuchte posteriore Wahrscheinlichkeitsdichte übergeht. Dadurch kann die gesuchte, im Sinne des gewählten Gütemaßes optimale Approximation durch kontinuierliche Nachführung der Parameter der angenommenen Dichtebeschreibung bestimmt werden. Zur *strukturellen Adaption* der angenommenen Dichtebeschreibung wurde ein neuartiges Verfahren zur Anpassung der Anzahl der Teildichten vorgestellt, das auf einer *bibliotheksbasierten Aufteilung* von Gaußdichten beruht. Es erlaubt, die Komplexität der angenommenen Gaussian–Mixture–Dichte automatisch an die Komplexität der wahren parametrisierten Wahrscheinlichkeitsdichte anzupassen. Somit ist es möglich, für die gesuchte Approximation eine obere Schranke für den zulässigen Approximationsfehler vorzugeben. Bisher bekannte Filterverfahren mit Gaussian–Mixture–Dichten als angenommene Dichtebeschreibungen ergeben durch eine getrennte Optimierung der Parameter und fehlende strukturelle Adaption der Dichte demgegenüber nur suboptimale Approximationen. Zur Auswertung der auftretenden Integrale über nicht–gauß’sche Wahrscheinlichkeitsdichten wurden neuartige, effiziente Verfahren vorgeschlagen. Sie beruhen ebenfalls auf der vorgestellten bibliotheksbasierten Aufteilung von Gaußdichten und greifen nicht auf numerische Integrationsverfahren zurück. Der Prädiktionsschritt des vorgestellten Filterverfahrens lässt sich mit denselben Methoden zur progressiven Berechnung eines optimalen Parametersatzes der angenommenen Gaussian–Mixture–Dichte behandeln wie der Filterschritt. Im Gegensatz zum Filterschritt muss die wahre Dichte, die sich aus einem Faltungsintegral ergibt, hierzu nicht explizit berechnet werden. Für den Spezialfall eines Systems mit linearer Systemgleichung und additivem, weißem, gauß’schen Systemrauschen kann der Prädiktionsschritt darüber hinaus auf Grund der Eigenschaften der gewählten Dichtebeschreibung exakt analytisch berechnet werden.

Die zwei vorgestellten Filterverfahren wurden auf *prototypische Lokalisierungsprobleme* aus dem Bereich der *mobilen Robotik* und der *Mobilfunknetzwerke* angewendet. Aus der mobilen Robotik wurde der wichtige Fall der Lokalisierung eines mobilen Roboters mittels Winkelmessungen mit amplitudenbegrenzten Fehlern zu bekannten Landmarken betrachtet. Dabei wird durch das Hyperraumfilterverfahren eine garantiert konservative Approximation der wahren, kompliziert geformten Menge aller möglichen Roboterlagen berechnet. Anders als bei bisher verwendeten Verfahren ist keine Approximation durch eine Linearisierung der nichtlinearen Messgleichungen erforderlich, und die gesuchte Menge wird in einer einfachen, analytischen Form dargestellt. Bislang wurde nur die statische Lokalisierung betrachtet. Eine Erweiterung auf den dynamischen Fall ist für ein lineares Systemmodell ohne Systemrauschen direkt möglich. Zur Behandlung komplexerer Systemmodelle wäre die Verwendung numerischer Verfahren oder zusätzlicher Approximationen für den Prädiktionsschritt möglich und erforderlich.

Die Praxistauglichkeit des vorgestellten Filterverfahrens auf der Basis von Gaussian–Mixture–Dichten wurde in einem prototypischen Experiment zur Lokalisierung eines Mobilgerätes in einem DECT–Mobilfunknetzwerk demonstriert. Die erzielte Genauigkeit der Lageschätzung ist mit ca. 2 m Standardabweichung ausreichend, um als Basis einer Reihe

neuartiger Applikationen für Innenraumumgebungen zu dienen. Denkbar sind hier zum Beispiel die automatisierte Führung von Personen zu einem gewünschten Raum [25], die Lageüberwachung für Geräte, die mit Funkschnittstellen ausgerüstet sind, oder die Lokalisierung und Koordination von Servicepersonal in Werkhallen, wie zum Beispiel von der Daimler–Chrysler–AG geplant. Das vorgeschlagene Verfahren benötigt lediglich die in einem DECT–Mobilfunknetzwerk zur Verfügung stehenden Signalleistungsdaten und erfordert keine Modifikationen an der Netzwerkinfrastruktur oder spezielle Hardware. Die mit dem vorgestellten Verfahren berechneten Lageschätzungen kommen der theoretisch optimalen Lösung sehr nahe, und erlauben im Gegensatz zu linearisierenden Filterverfahren auch den komplizierten Fall globaler, initialer Lageunsicherheit konsistent zu behandeln.

5.2 Ausblick

Die breite Anwendung nichtlinearer Filterverfahren auf verschiedenste technische Problemstellungen steht mit dem Aufkommen kostengünstiger, leistungsfähiger Rechner in den letzten Jahren gerade in ihren Anfängen. Die in dieser Arbeit vorgestellten Filterverfahren weisen Potential zur Weiterentwicklung im Hinblick auf künftige, komplexere Anwendungen auf; stellvertretend sei der Aspekt der rechnerischen Komplexität der Verfahren genannt. Diese ist für die vorgestellten Verfahren erheblich geringer, als für vergleichbare, vollständig numerische Verfahren wie die Partikelfilter, liegt aber dennoch deutlich über der Komplexität einfacher linearisierender Filterverfahren wie des *Kalman*–Filters. Daher wäre die Herleitung einer analytischen Formulierung des Prädiktionsschrittes für das Hyperraumfilterverfahren hilfreich, um den Aufwand für die erforderlichen numerischen Berechnungen für den Prädiktionsschritt in die gleiche Größenordnung zu bringen, wie dies für den Filterschritt der Fall ist. Für das Filterverfahren auf der Basis von Gaussian–Mixture–Dichten sind Verfahren zur Optimierung der Auswertung der auftretenden Integrale mit bibliotheksbasierter Aufteilung von Gaußdichten Gegenstand der aktuellen Forschung. Parallel wäre die Untersuchung weiterer, aus der Literatur bekannter, effizienter Integrationsverfahren von Interesse. Weitere Fortschritte werden die Behandlung neuer, komplexerer Anwendungen aus dem Bereich der Lokalisierung, wie die simultane Schätzung der Beobachterlage und die Kartierung der Umgebung, mit expliziter Berücksichtigung aller auftretenden Nichtlinearitäten möglich machen.

Anhang A

Filterverfahren für lineare Systeme

A.1 Kalman–Filter

Ein wichtiger Spezialfall, für den das optimale Filterergebnis nach Bayes gemäß (1.8), (1.9) geschlossen analytisch berechenbar ist, ist die Klasse der *linearen*, zeitvarianten, dynamischen Systeme \mathcal{S}_L mit additiven, weißen, gauß'schen Rauschen. Die allgemeinen Systemgleichungen (1.1) vereinfachen sich dann zu

$$\begin{aligned}\underline{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_k \underline{x}_k + \mathbf{B}_k \underline{u}_k + \underline{w}_k, \\ \underline{z}_k &= \mathbf{H}_k \underline{x}_k + \underline{v}_k,\end{aligned}\tag{A.1}$$

wobei \mathbf{A}_k die $N \times N$ Systemmatrix, \mathbf{B}_k die $N \times R$ Eingangsmatrix und \mathbf{H}_k die $M \times N$ Messmatrix ist. Für das Systemrauschen \underline{w}_k und das Messrauschen \underline{v}_k wird neben den Forderungen (1.5), (1.6) zusätzlich angenommen, dass die Rauschprozesse gaußverteilt seien. Dabei sei \mathbf{C}_k^v die Kovarianzmatrix des Messrauschens und \mathbf{C}_k^w die Kovarianzmatrix des Systemrauschens. Die optimale Lösung des Filterproblems nach Bayes geht dann direkt in die bekannten *Kalman*–Filter–Formeln über [71, 115] und ist für den Filterschritt durch

$$\begin{aligned}\hat{\underline{x}}_k^e &= \hat{\underline{x}}_k^p + \mathbf{C}_k^p (\mathbf{H}_k)^T \{ \mathbf{C}_k^v + \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^p (\mathbf{H}_k)^T \}^{-1} (\underline{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\underline{x}}_k^p) \\ \mathbf{C}_k^e &= \mathbf{C}_k^p - \mathbf{C}_k^p (\mathbf{H}_k)^T \{ \mathbf{C}_k^v + \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^p (\mathbf{H}_k)^T \}^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^p\end{aligned}\tag{A.2}$$

gegeben, wobei $\hat{\underline{x}}_k^e$ die posteriore Schätzung für den Systemzustand \underline{x}_k zum Zeitpunkt k mit zugehöriger Kovarianzmatrix \mathbf{C}_k^e ist. $\hat{\underline{x}}_k^p$ ist die priore Schätzung für den Systemzustand \underline{x}_k und \mathbf{C}_k^p die zugehörige Kovarianzmatrix der Schätzung. Für den Prädiktionschritt ergibt sich

$$\begin{aligned}\hat{\underline{x}}_{k+1}^p &= \mathbf{A}_k \hat{\underline{x}}_k^e + \mathbf{B}_k \underline{u}_k \\ \mathbf{C}_{k+1}^p &= \mathbf{A}_k \mathbf{C}_k^e \mathbf{A}_k^T + \mathbf{C}_k^w,\end{aligned}\tag{A.3}$$

wobei $\hat{\underline{x}}_{k+1}^p$ die prädizierte Schätzung für den Systemzustand zum Zeitpunkt $k+1$ ist, und \mathbf{C}_{k+1}^p die zugehörige Kovarianzmatrix der Schätzung.

A.2 Mengenbasierte Zustandsschätzung mit ellipsoidaler Approximation für lineare Systeme

Im Folgenden wird das mengenbasierte Ellipsoidfilter [99] zusammengefasst dargestellt. Es berechnet für *lineare* Systeme mit additiven, mengenbegrenzten Unsicherheiten eine

konservative Approximation des Filterergebnisses in Form einer ellipsoidalen Menge. Die Primärunsicherheiten werden dabei ebenfalls durch Ellipsoide beschrieben.

A.2.1 Filterschritt

Zum Zeitpunkt k sei eine priore Schätzung des Systemzustandes $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^N$ durch die ellipsoidale Menge \mathcal{X}_k^p gemäß

$$\mathcal{X}_k^p = \{ \underline{x}_k : (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^p)^T (\mathbf{C}_k^p)^{-1} (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^p) \leq 1 \} , \quad (\text{A.4})$$

gegeben, wobei \mathbf{C}_k^p eine positiv definite, symmetrische Matrix und $\hat{\underline{x}}_k^p$ der Mittelpunktvektor von \mathcal{X}_k^p ist. Des Weiteren liege eine unsicherheitsbehaftete Messung \underline{z}_k vor, die durch die lineare, zeitvariante Messgleichung

$$\underline{z}_k = \mathbf{H}_k \underline{x}_k + \underline{v}_k \quad (\text{A.5})$$

beschrieben wird. Dabei ist \mathbf{H}_k die $M \times N$ Messmatrix und \underline{v}_k additives, amplitudenbegrenztes Messrauschen. $\tilde{\mathcal{X}}_k^M$ sei die Menge aller Zustände \underline{x}_k , die mit der Messung \underline{z}_k unter den gegebenen Grenzen für die Messunsicherheiten kompatibel sind. Die *exakte* Lösung des Filterproblems ist dann durch die Schnittmenge der prioren Schätzung \mathcal{X}_k^p und $\tilde{\mathcal{X}}_k^M$ gemäß

$$\tilde{\mathcal{X}}_k^e = \mathcal{X}_k^p \cap \tilde{\mathcal{X}}_k^M \quad (\text{A.6})$$

gegeben, siehe Anhang B. Diese Lösung ist jedoch nur von theoretischem Wert, da eine geschlossene Darstellung von $\tilde{\mathcal{X}}_k^e$, wie sie für ein rekursives Filterverfahren benötigt wird, schon für lineare Messgleichungen und einfache, ellipsoidale Unsicherheitsbeschreibungen für die Mengen *nicht existiert*. Eine konservative, ellipsoidale Approximation \mathcal{X}_k^e für die wahre Menge $\tilde{\mathcal{X}}_k^e$ aller Zustände \underline{x}_k , die kompatibel mit der prioren Schätzung nach (A.4) und der Messung (A.5) sind, ist durch die ellipsoidale Menge

$$\mathcal{X}_k^e = \{ \underline{x}_k : (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^e)^T (\mathbf{C}_k^e)^{-1} (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^e) \leq 1 \} \quad (\text{A.7})$$

gegeben [40]. Dabei ergibt sich der Mittelpunktvektor $\hat{\underline{x}}_k^e$ der Menge \mathcal{X}_k^e zu

$$\hat{\underline{x}}_k^e = \hat{\underline{x}}_k^p + \lambda_k \mathbf{C}_k^p (\mathbf{H}_k)^T \{ \mathbf{V}_k + \lambda_k \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^p (\mathbf{H}_k)^T \}^{-1} (\underline{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\underline{x}}_k^p) , \quad (\text{A.8})$$

und die positiv definite, symmetrische Matrix \mathbf{C}_k^e zu

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_k^e &= d_k \mathbf{P}_k , \\ \mathbf{P}_k &= \mathbf{C}_k^p - \lambda_k \mathbf{C}_k^p (\mathbf{H}_k)^T \{ \mathbf{V}_k + \lambda_k \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^p (\mathbf{H}_k)^T \}^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^p , \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

wobei

$$d_k = 1 + \lambda_k - \lambda_k (\underline{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\underline{x}}_k^p)^T \{ \mathbf{V}_k + \lambda_k \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^p (\mathbf{H}_k)^T \}^{-1} (\underline{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\underline{x}}_k^p) . \quad (\text{A.10})$$

Die einzige Annahme, die bezüglich der Messunsicherheiten getroffen werden muss, ist, dass sie in ihrer Amplitude begrenzt sind, also $\underline{v}_k \in \mathcal{V}_k$ mit ellipsoidalen Mengen \mathcal{V}_k gemäß

$$\mathcal{V}_k = \{ \underline{v}_k : \underline{v}_k^T (\mathbf{V}_k)^{-1} \underline{v}_k \leq 1 \} . \quad (\text{A.11})$$

$\hat{\underline{x}}_k^p$ ist eine positiv definite, symmetrische Matrix, die die Menge aller möglichen Messungen, wie sie durch (A.5) und (A.11) definiert ist, charakterisiert und λ_k ist ein Fusionsparameter mit $\lambda_k \in [0, \infty)$, welcher so gewählt wird, dass ein Maß für das Volumen der begrenzenden Menge \mathcal{X}_k^e der geschätzten Systemzustände minimiert wird. Die Berechnung der Matrix \mathbf{C}_k^e erfolgt weitgehend analog zu den bekannten *Kalman*-Filter-Gleichungen. Der zusätzliche Parameter d_k gemäß (A.10) skaliert die als Zwischenergebnis bestimmte Matrix \mathbf{P}_k derart, dass die aktuelle Messung \underline{z}_k adäquat berücksichtigt wird. Diese geht beim *Kalman*-Filter auf Grund des stochastischen Fehlermodells *nicht* in die Berechnung von \mathbf{C}_k^p ein.

A.2.2 Prädiktionsschritt

Im Prädiktionsschritt des mengenbasierten Ellipsoidfilters wird aus einer gegebenen Schätzung \mathcal{X}_k^e der Menge aller möglichen Systemzustände $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^N$ zum Zeitpunkt k mit Hilfe des linearen, zeitvarianten Systemmodells gemäß

$$\underline{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \underline{x}_k + \mathbf{B}_k \underline{u}_k \quad \text{mit} \quad \underline{u}_k = \hat{\underline{u}}_k + \underline{w}_k \quad (\text{A.12})$$

eine Schätzung für die Menge aller möglichen Systemzustände \underline{x}_{k+1} zum Zeitpunkt $k+1$ berechnet. Analog zum Filterschritt wird angenommen, dass die auftretenden Unsicherheiten \underline{w}_k im Systemmodell (A.1) amplitudenbegrenzt seien, das heißt

$$\mathcal{U}_k = \{ \underline{u}_k : (\underline{u}_k - \hat{\underline{u}}_k)^T (\mathbf{U}_k)^{-1} (\underline{u}_k - \hat{\underline{u}}_k) \leq 1 \} . \quad (\text{A.13})$$

Da die exakte Menge aller möglichen Systemzustände $\tilde{\mathcal{X}}_{k+1}^p$, die sich durch Fortschreibung mittels des Systemmodells (1.7) ergeben, auch für ein lineares Systemmodell und bei einer Beschreibung der prioren Schätzung \mathcal{X}_k^e und der Menge aller möglichen Eingangsgrößen \mathcal{U}_k durch ellipsoidale Mengen *keine* ellipsoidale Menge ist, wird eine konservative Approximation der exakten Menge $\tilde{\mathcal{X}}_{k+1}^p$ benötigt. Eine einfache Möglichkeit zur Berechnung einer solchen Approximation wurde in [112] vorgestellt. Eine konservative, ellipsoidale Approximation \mathcal{X}_{k+1}^p für die Menge aller prädierten Systemzustände zum Zeitpunkt $k+1$ ist gemäß

$$\mathcal{X}_{k+1}^p = \{ \underline{x}_{k+1} : (\underline{x}_{k+1} - \hat{\underline{x}}_{k+1}^p)^T (\mathbf{C}_{k+1}^p)^{-1} (\underline{x}_{k+1} - \hat{\underline{x}}_{k+1}^p) \leq 1 \} , \quad (\text{A.14})$$

gegeben, wobei der Mittelpunktvektor $\hat{\underline{x}}_{k+1}^p$ sich aus der gewichteten Summe

$$\hat{\underline{x}}_{k+1}^p = \mathbf{A}_k \hat{\underline{x}}_k^e + \mathbf{B}_k \hat{\underline{u}}_k , \quad (\text{A.15})$$

berechnet, und die Definitionsmatrix durch die gewichtete, konvexe Kombination

$$\mathbf{C}_{k+1}^p = \frac{1}{0.5 - \kappa_k} \mathbf{A}_k \mathbf{C}_k^e \mathbf{A}_k^T + \frac{1}{0.5 + \kappa_k} \mathbf{B}_k \mathbf{U}_k \mathbf{B}_k^T , \quad -0.5 < \kappa_k < 0.5 \quad (\text{A.16})$$

berechnet wird. Dabei ist $\kappa_k \in (-0.5, 0.5)$ ein skalarer Prädiktionsparameter, durch den eine Familie konservativer, approximierender Ellipsoide $\hat{\underline{x}}_{k+1}^p$ parametrisiert wird. In [127] wird eine geschlossene Lösung zur Berechnung des optimalen Prädiktionsparameters κ_k^{\min} für minimalvolumige Approximationsellipsoide $\hat{\underline{x}}_{k+1}^p$ hergeleitet.

Anhang B

Optimale mengenbasierte Filterverfahren

B.1 Optimales rekursives Filterverfahren für mengenbasierte Unsicherheitsmodellierung

Für die Modellierung des Systems im Falle mengenbegrenzter Unsicherheiten ist die optimale Lösung, wie in Kapitel 1.3.1.1 erläutert, die minimale Menge \mathcal{X}_k aller möglichen Zustände \underline{x}_k , die mit allen Messungen \mathbf{Z}^k bis zum Zeitpunkt k und dem Systemmodell \mathcal{S} kompatibel ist [99].

Sei $\mathcal{X}(k_1|k_2)$ die minimale Menge \mathcal{X}_{k_1} aller möglichen Zustände \underline{x}_{k_1} , welche sich aus den Messungen \mathbf{Z}^{k_2} bis zum Zeitpunkt k_2 berechnet, dann ist das Ziel der *rekursiven* Zustandsschätzung im Falle mengenbegrenzter Unsicherheiten, die Menge $\mathcal{X}(k+1|k+1)$ aus $\mathcal{X}(k|k)$ und \underline{z}_{k+1} zu berechnen. Für das vereinfachte Systemmodell mit *additiven*, mengenbegrenzten Unsicherheiten gemäß (1.7) wird im Folgenden die optimale Lösung für den Prädiktionsschritt und den Filterschritt eines rekursiven Filterverfahrens angegeben. Für den Prädiktionsschritt sei $\mathcal{X}^{\bar{p}}(k+1|k)$ die Menge aller Zustände \underline{x}_{k+1} , die sich aus dem Systemmodell ohne Berücksichtigung des Systemrauschens \underline{w}_k ergeben, das heißt

$$\mathcal{X}^{\bar{p}}(k+1|k) = \left\{ \underline{\bar{x}}_{k+1} : \underline{\bar{x}}_{k+1} = \underline{f}_k(\underline{x}_k), \underline{x}_k \in \mathcal{X}(k|k) \right\}, \quad (\text{B.1})$$

und \mathcal{W}_k die Menge aller möglichen Zustände des Systemrauschens \underline{w}_k zum Zeitpunkt k . Die prädizierte Menge $\mathcal{X}^p(k+1|k)$ zum Zeitpunkt $k+1$ ist dann durch die Vektoraddition

$$\mathcal{X}^p(k+1|k) = \left\{ \underline{x}_{k+1} : \underline{x}_{k+1} = \underline{\bar{x}}_{k+1} + \underline{w}_k, \underline{\bar{x}}_{k+1} \in \mathcal{X}^{\bar{p}}(k+1|k), \underline{w}_k \in \mathcal{W}_k \right\} \quad (\text{B.2})$$

gegeben. Für den Filterschritt sei $\mathcal{X}^y(k+1)$ die Menge aller Zustände \underline{x}_{k+1} , die durch die Messung \underline{z}_{k+1} definiert ist, das heißt

$$\mathcal{X}^y(k+1) = \left\{ \underline{x}_{k+1} : \underline{z}_{k+1} - \underline{h}_{k+1}(\underline{x}_{k+1}) \in \mathcal{V}_{k+1} \right\}. \quad (\text{B.3})$$

Die geschätzte Menge $\mathcal{X}(k+1|k+1)$ nach dem Filterschritt ergibt sich dann aus der Schnittmenge

$$\mathcal{X}(k+1|k+1) = \left\{ \underline{x}_{k+1} : \underline{x}_{k+1} \in (\mathcal{X}^y(k+1) \cap \mathcal{X}^p(k+1|k)) \right\}. \quad (\text{B.4})$$

Anhang C

Filterverfahren auf der Basis von Matrixabschätzungen

C.1 Einleitung

Für die im Hauptteil dieser Arbeit betrachteten, nichtlinearen Filterverfahren wurde stets von der Voraussetzung ausgegangen, dass die auftretenden Unsicherheiten keine *zeitliche Struktur* aufweisen, und sich daher durch *weiße* Rauschprozesse modellieren lassen. Im Folgenden wird eine Methodik auf der Basis von Matrixapproximationen vorgestellt, mit deren Hilfe robuste Filterverfahren im Falle *farbiger* Rauschprozesse hergeleitet werden können, die zudem untereinander in unbekannter Weise korreliert sein können.

Die Problemstellung für die Filterung im Falle farbiger Rauschprozesse mit unbekannter Korrelation wird in Kapitel C.2 erläutert, und der Begriff einer „konservativen Approximation“ definiert. Anschließend wird in Kapitel C.3 eine systematische Methode zur Berechnung einer Familie konservativer Approximationen für positiv definite, symmetrische Matrizen vorgestellt. Kapitel C.4 leitet durch die Anwendung dieser Matrixabschätzung auf das Problem der Zustandsschätzung im Falle vollständig unbekannter Korrelationen das Covariance–Intersection (CI) Filterverfahren her [23, 56, 110] und stellt neuartige, geschlossene Formeln zur Berechnung optimaler Fusions- und Prädiktionsparameter vor [127]. In Kapitel C.5 wird die vorgestellte Methodik diskutiert und ein Ausblick für robuste nichtlineare Filterverfahren gegeben.

C.2 Problemstellung

Betrachtet werde ein zeitdiskretes, lineares, dynamisches System der Form

$$\underline{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \underline{x}_k + \mathbf{B}_k \underline{u}_k \quad \text{mit} \quad \underline{u}_k = \hat{\underline{u}}_k + \underline{w}_k^f, \quad (\text{C.1})$$

$$\underline{z}_k = \mathbf{H}_k \underline{x}_k + \underline{v}_k^f, \quad (\text{C.2})$$

welches additiven, stochastischen, gaußverteilten Störungen sowohl im Systemeingang als auch in den Messungen unterworfen ist. Im Gegensatz zu den in Kapitel 2 und Kapitel 3 behandelten Systemen wird jetzt angenommen, dass *farbiges* Rauschen \underline{w}_k^f im Systemeingang und *farbiges* Rauschen \underline{v}_k^f in den Messungen vorliegt, wobei $\underline{w}_k^f, \underline{v}_k^f$ zudem noch

miteinander korreliert sein können. Für die zugehörigen Kovarianzmatrizen ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \text{Cov} \{ \underline{w}_n^f, \underline{w}_m^f \} &= \begin{cases} \tilde{\mathbf{C}}_n^u & \text{für } n = m \text{ ,} \\ \text{unbekannt} & \text{anderenfalls ,} \end{cases} \\ \text{Cov} \{ \underline{v}_n^f, \underline{v}_m^f \} &= \begin{cases} \tilde{\mathbf{C}}_n^v & \text{für } n = m \text{ ,} \\ \text{unbekannt} & \text{anderenfalls ,} \end{cases} \\ \text{Cov} \{ \underline{w}_n^f, \underline{v}_m^f \} &= \text{unbekannt für alle } n, m \text{ ,} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

wobei $\text{Cov} \{ \underline{x}, \underline{y} \}$ ein Operator ist, der die Kovarianzmatrix der Zufallsvektoren \underline{x} und \underline{y} liefert. Für die wahren Kovarianzmatrizen $\tilde{\mathbf{C}}_k^u, \tilde{\mathbf{C}}_k^v$ sind nur obere Grenzen $\mathbf{C}_k^u, \mathbf{C}_k^v$ gemäß

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_k^u &\geq \tilde{\mathbf{C}}_k^u \\ \mathbf{C}_k^v &\geq \tilde{\mathbf{C}}_k^v \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

gegeben. Gesucht ist ein Filterverfahren zur Zustandsschätzung für das Systemmodell (C.1), (C.2), das für alle möglichen Rauschprozesse $\underline{w}_k^f, \underline{v}_k^f$, die den Bedingungen (C.3) genügen, eine konservative Schätzung für den Systemzustand \underline{x}_k berechnet. Im Kapitel C.4 wird hierfür auf der Basis von Matrixabschätzungen das Covariance-Intersection (CI) Verfahren hergeleitet, welches die Berechnung einer solchen konservativen Schätzung für den Systemzustand \underline{x}_k ermöglicht und ein neuartiges Verfahren zur effizienten Berechnung optimaler Parameter für das Schätzergebnis vorgestellt.

C.3 Matrixabschätzungen

Ein Verfahren zur systematischen Herleitung robuster Filterverfahren, die die Berechnung einer konservativen Schätzung auch für farbiges System- oder Messrauschen erlauben, ist die Verwendung konservativer Matrixabschätzungen für die auftretenden Kovarianzmatrizen. Für zwei gauß'sche Wahrscheinlichkeitsdichten $f_1(\underline{x}_1) = \mathcal{N}(\underline{x}_1, \mathbf{C}_1)$ und $f_2(\underline{x}_2) = \mathcal{N}(\underline{x}_2, \mathbf{C}_2)$ mit Erwartungswert $\underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2 = \underline{0}$ wird $f_2(\underline{x}_2)$ als *konservative Approximation* von $f_1(\underline{x}_1)$ bezeichnet, wenn $\mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1$ positiv semidefinit ist.

ANMERKUNG C.3.1 Anschaulich gesehen bedeutet die Forderung $\mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1 \geq 0$, dass die ellipsoidale Menge \mathcal{E}_1 , welche durch eine beliebige σ -Grenze der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_1(\underline{x}_1)$ definiert ist, eine Teilmenge der korrespondierenden, zu $f_2(\underline{x}_2)$ gehörenden Menge \mathcal{E}_2 ist.

Zur Herleitung der gesuchten Matrixabschätzung werde eine symmetrische, positiv definite Blockmatrix $\tilde{\mathbf{C}}$ mit

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{aa} & \mathbf{C}_{ab} \\ \mathbf{C}_{ba} & \mathbf{C}_{bb} \end{bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

betrachtet. Dann existiert ist eine Familie „größerer“ Matrizen $\mathbf{C}(\kappa)$ mit $\mathbf{C}(\kappa) \geq \tilde{\mathbf{C}}$ gemäß

$$\mathbf{C}(\kappa) = \begin{bmatrix} \frac{1}{0.5-\kappa} \mathbf{C}_{aa} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{0.5+\kappa} \mathbf{C}_{bb} \end{bmatrix} \text{ ,} \quad (\text{C.6})$$

mit $\kappa \in (-0.5, 0.5)$, wobei unter dem Begriff „größer“ verstanden wird, dass $\mathbf{C}(\kappa) - \tilde{\mathbf{C}}$ für alle $\kappa \in (-0.5, 0.5)$ positiv definit ist. Um zu zeigen, dass $\mathbf{C}(\kappa)$ eine konservative Abschätzung für $\tilde{\mathbf{C}}$ ist, betrachten wir $\mathbf{C} - \tilde{\mathbf{C}}$ und erhalten

$$\mathbf{C}(\kappa) - \tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \left\{ \frac{1}{0.5-\kappa} - 1 \right\} \mathbf{C}_{aa} & -\mathbf{C}_{ab} \\ -\mathbf{C}_{ba} & \left\{ \frac{1}{0.5+\kappa} - 1 \right\} \mathbf{C}_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.5+\kappa}{0.5-\kappa} \mathbf{C}_{aa} & -\mathbf{C}_{ab} \\ -\mathbf{C}_{ba} & \frac{0.5-\kappa}{0.5+\kappa} \mathbf{C}_{bb} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.7})$$

Betrachtet werde mit $\lambda = \frac{0.5+\kappa}{0.5-\kappa} \in (0, \infty)$ die quadratische Form

$$Q = \begin{bmatrix} \underline{a}^T & \underline{b}^T \end{bmatrix} \left\{ \mathbf{C} - \tilde{\mathbf{C}} \right\} \begin{bmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a}^T & \underline{b}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{C}_{aa} & -\mathbf{C}_{ab} \\ -\mathbf{C}_{ba} & \frac{1}{\lambda} \mathbf{C}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

mit beliebigen Vektoren \underline{a} , \underline{b} mit $\underline{a} \neq \underline{0}$, $\underline{b} \neq \underline{0}$, die gemäß

$$Q = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda} \underline{a}^T & -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \underline{b}^T \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{aa} & \mathbf{C}_{ab} \\ \mathbf{C}_{ba} & \mathbf{C}_{bb} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{C}}} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda} \underline{a} \\ -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \underline{b} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.9})$$

umgeschrieben werden kann. Da $\tilde{\mathbf{C}}$ positiv definit ist, gilt $Q \geq 0$ für beliebige Vektoren $\underline{a} \neq \underline{0}$, $\underline{b} \neq \underline{0}$. Damit ist auch $\mathbf{C}(\kappa) - \tilde{\mathbf{C}}$ positiv definit.

ANMERKUNG C.3.2 Wenn die Matrix \mathbf{C} im oben definierten Sinne größer als die (oder gleich der) Matrix $\tilde{\mathbf{C}}$ ist, d.h. wenn $\mathbf{C} \geq \tilde{\mathbf{C}}$ gilt, dann gilt auch $\mathbf{TCT}^T \geq \mathbf{T}\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{T}^T$ für jede beliebige Matrix \mathbf{T} .

C.4 Anwendung der Matrixabschätzungen auf nichtlineare Filterprobleme

Mit Hilfe der hergeleiteten Abschätzung einer Blockmatrix durch ihre Hauptdiagonalmatrizen (C.6) und des Zusammenhangs aus Anmerkung C.3.2 kann nun ein Filterverfahren hergeleitet werden, das für das Ergebnis des Prädiktions- und des Filterschrittes eine konsistente Kovarianzmatrix des geschätzten Zustands für alle zulässigen Korrelationen der farbigen Rauschprozesse \underline{w}_k^f , \underline{v}_k^f liefert.

C.4.1 Prädiktionsschritt des Filterverfahrens im Falle unbekannter Korrelationen

Zur Herleitung einer konsistenten Kovarianzmatrix für das Ergebnis des Prädiktionschrittes für das Systemmodell (C.1) wird zunächst eine Abschätzung für die Kovarianzmatrix der gewichteten Summe zweier Zufallsvektoren \underline{a} , \underline{b} mit unbekannter Korrelation betrachtet.

Für die Zufallsvektoren \underline{a} , \underline{b} mit Erwartungswerten $\hat{\underline{a}}$, $\hat{\underline{b}}$ und der wahren Kovarianzmatrix

$$\text{Cov} \left\{ \begin{bmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_{aa} & \tilde{\mathbf{C}}_{ab} \\ \tilde{\mathbf{C}}_{ba} & \tilde{\mathbf{C}}_{bb} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.10})$$

seien obere Schranken \mathbf{C}_{aa} , \mathbf{C}_{bb} für die wahren Kovarianzmatrizen $\tilde{\mathbf{C}}_{aa}$, $\tilde{\mathbf{C}}_{bb}$ gemäß

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{aa} &\geq \tilde{\mathbf{C}}_{bb} \\ \mathbf{C}_{aa} &\geq \tilde{\mathbf{C}}_{bb}\end{aligned}\quad (\text{C.11})$$

bekannt. Die Kreuzkovarianzmatrizen $\tilde{\mathbf{C}}_{ab} = \tilde{\mathbf{C}}_{ba}^T$ seien völlig unbekannt. Dann ist für den durch

$$\underline{\mathbf{c}} = \mathbf{A}\underline{\mathbf{a}} + \mathbf{B}\underline{\mathbf{b}} \quad (\text{C.12})$$

gegebenen Zufallsvektor eine obere Schranke \mathbf{C}_{cc} für die tatsächliche Kovarianzmatrix $\tilde{\mathbf{C}}_{cc}$ durch

$$\mathbf{C}_{cc} = \frac{1}{0.5 - \kappa} \mathbf{A} \mathbf{C}_{aa} \mathbf{A}^T + \frac{1}{0.5 + \kappa} \mathbf{B} \mathbf{C}_{bb} \mathbf{B}^T \quad (\text{C.13})$$

gegeben. Dieser Zusammenhang lässt sich herleiten, indem (C.12) in die Form

$$\underline{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}} \\ \underline{\mathbf{b}} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.14})$$

gebracht wird. Dann ist die tatsächliche Kovarianzmatrix $\tilde{\mathbf{C}}_{cc}$ von $\underline{\mathbf{c}}$ offensichtlich durch

$$\tilde{\mathbf{C}}_{cc} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_{aa} & \tilde{\mathbf{C}}_{ab} \\ \tilde{\mathbf{C}}_{ba} & \tilde{\mathbf{C}}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{B}^T \end{bmatrix} \quad (\text{C.15})$$

gegeben. Wegen der unbekanntenen Kreuzkovarianzmatrizen wird diese Matrix nun durch eine „größere“ Matrix gemäß (C.6) approximiert, was auf

$$\mathbf{C}_{cc} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{0.5 - \kappa} \mathbf{C}_{aa} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{0.5 + \kappa} \mathbf{C}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{B}^T \end{bmatrix} \quad (\text{C.16})$$

führt. Mit dem Zusammenhang aus Anmerkung C.3.2 gilt nun $\mathbf{C}_{cc} \geq \tilde{\mathbf{C}}_{cc}$. Mit Hilfe dieser Herleitung ergibt sich eine enge obere Schranke für die Kovarianzmatrix \mathbf{C}_{k+1}^p des prädizierten Zustandsvektors $\underline{\mathbf{x}}_{k+1}^p$ zu

$$\mathbf{C}_{k+1}^p = \frac{1}{0.5 - \kappa_{k+1}} \mathbf{A}_k \mathbf{C}_k^s \mathbf{A}_k^T + \frac{1}{0.5 + \kappa_{k+1}} \mathbf{B}_k \mathbf{C}_k^u \mathbf{B}_k^T, \quad (\text{C.17})$$

wobei der skalare Prädiktionsparameter κ_{k+1} im Intervall $(-0.5, 0.5)$ liegt. Die initiale Zustandsschätzung sei durch $\hat{\underline{\mathbf{x}}}_0^s$ mit korrespondierender Kovarianzmatrix \mathbf{C}_0^s gegeben.

C.4.2 Filterschritt des Filterverfahrens im Falle unbekannter Korrelationen

Betrachtet werde nun die Messgleichung gemäß (C.2) mit der unsicheren vektoriellen Messung $\underline{\mathbf{z}}_k$ zum Zeitschritt k , wobei $\underline{\mathbf{v}}_k^f$ das farbige Messrauschen bezeichnet. Zusätzlich zur Messung liegt noch eine Schätzung $\underline{\mathbf{x}}_k^p$ des Zustandsvektors gemäß

$$\underline{\mathbf{x}}_k^p = \hat{\underline{\mathbf{x}}}_k^p + \underline{\mathbf{e}}_k^p.$$

vor, welche mit additiven, stochastischen Unsicherheiten \underline{e}_k^p beaufschlagt ist. Die Unsicherheiten \underline{e}_k^p der Schätzung $\hat{\underline{x}}_k^p$ und des Messrauschens \underline{v}_k^f sind gemäß

$$\text{Cov} \left\{ \begin{bmatrix} \underline{e}_k^p \\ \underline{v}_k^f \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_k^{pp} & \tilde{\mathbf{C}}_k^{pv} \\ \tilde{\mathbf{C}}_k^{vp} & \tilde{\mathbf{C}}_k^{vv} \end{bmatrix} \quad (\text{C.18})$$

korreliert, wobei nur obere Grenzen \mathbf{C}_k^p , \mathbf{C}_k^v für die tatsächlichen Kovarianzen $\tilde{\mathbf{C}}_k^{pp}$, $\tilde{\mathbf{C}}_k^{yy}$ gemäß

$$\mathbf{C}_k^p \geq \tilde{\mathbf{C}}_k^{pp}, \quad \mathbf{C}_k^v \geq \tilde{\mathbf{C}}_k^{vv} \quad (\text{C.19})$$

bekannt sind. Die Kreuzkovarianzen $\tilde{\mathbf{C}}_k^{pv} = (\tilde{\mathbf{C}}_k^{vp})^T$ sind *nicht bekannt*. Eine konservative posteriore Schätzung für den Zustand des gegebenen Systems (C.1), (C.2) nach Durchführung des Filterschrittes bei korrelierter Messung \underline{z}_k und a priori Schätzung $\hat{\underline{x}}_k^p$ ist dann durch

$$\begin{aligned} \hat{\underline{x}}_k^s &= \hat{\underline{x}}_k^p + \lambda_k \mathbf{C}_k^p \mathbf{H}_k^T \{ \mathbf{C}_k^v + \lambda_k \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^p \mathbf{H}_k^T \}^{-1} (\underline{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\underline{x}}_k^p), \\ \mathbf{C}_k^s &= (1 + \lambda_k) \mathbf{C}_k^p - (1 + \lambda_k) \lambda_k \mathbf{C}_k^p \mathbf{H}_k^T \{ \mathbf{C}_k^v + \lambda_k \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^p \mathbf{H}_k^T \}^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^p \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

gegeben, wobei $\lambda_k \in [0, \infty)$ der skalare Fusionsparameter des Filterschrittes ist. Der Filterschritt des Filterverfahrens im Falle unbekannter Korrelationen gemäß (C.20) lässt sich wie der Prädiktionsschritt auf der Basis der Matrixabschätzung (C.6) herleiten, die vollständige Herleitung ist in Anhang D gegeben.

C.4.3 Optimale Parameter für den Prädiktions- und den Filterschritt

Sowohl für den in Kapitel C.4.1 hergeleiteten Prädiktionsschritt als auch für den Filterschritt gemäß Kapitel C.4.2 wird durch den Prädiktionsparameter κ_k bzw. den Fusionsparameter λ_k eine *Familie* konservativer Approximationen parametrisiert. Zur Bestimmung des *optimalen* Filterergebnisses muss ein geeignet gewähltes Gütemaß bezüglich κ_k bzw. λ_k minimiert werden. Ein üblicherweise verwendetes Gütemaß ist die Determinante der Kovarianzmatrix \mathbf{C}_k^p bzw. \mathbf{C}_k^s . Eine naive Lösung dieses Optimierungsproblems ist die numerische Auswertung und Minimierung von $\det(\mathbf{C}_k^p)$ bzw. $\det(\mathbf{C}_k^s)$, welche jedoch rechnerisch aufwendig ist, und für jeden Prädiktions- bzw. Filterschritt berechnet werden muss. Im Folgenden wird eine neuartige Lösung vorgestellt [127], die das Problem auf die Suche der Nullstelle einer skalaren Funktion in einem abgeschlossenen Intervall zurückführt.

Optimaler Fusionsparameter für den Prädiktionsschritt

Der Fusionsparameter κ_k^{\min} für die minimale Kovarianzmatrix des Prädiktionsergebnisses (C.17) ergibt sich als einzige Nullstelle des Ausdrucks

$$\sum_{i=1}^N \frac{\kappa^2 \bar{\mu}_k^i + \kappa + 0.25 \bar{\mu}_k^i}{\kappa + 0.5 \bar{\mu}_k^i} = 0$$

mit $\kappa \in (-0.5, 0.5)$. Dabei sind die Parameter $\bar{\mu}_i^k$ durch

$$\bar{\mu}_k^i = \frac{1 + \mu_k^i}{1 - \mu_k^i},$$

gegeben, wobei μ_k^i , $i = 1, \dots, N$ die verallgemeinerten Eigenwerte des reellen, symmetrischen, positiv definiten Matrizenpaars $\mathbf{A}_{k-1} \mathbf{C}_{k-1}^S \mathbf{A}_{k-1}^T$ und $\mathbf{B}_{k-1} \mathbf{C}_{k-1}^u \mathbf{B}_{k-1}^T$ sind.

Die Herleitung dieses Zusammenhangs ist in Anhang D.2 gegeben.

Optimaler Fusionsparameter für den Filterschritt

Der Fusionsparameter λ_k^{\min} für die minimale Kovarianzmatrix des Fusionsergebnisses gemäß (C.20) nach Durchführung des Filterschrittes ergibt sich aus

$$\lambda_k^{\min} = \frac{0.5 + \kappa_k^{\min}}{0.5 - \kappa_k^{\min}},$$

wobei κ_k^{\min} die einzige Nullstelle des Ausdrucks

$$\sum_{i=1}^M \frac{\kappa_k - 0.5}{\kappa_k + 0.5 \bar{\mu}_k^i} \stackrel{!}{=} M - N$$

in $\kappa_k \in (-0.5, 0.5)$ ist. Dabei ist M die Dimension des Messvektors und N die Dimension des Zustandsvektors. Die Parameter $\bar{\mu}_k^i$ sind durch

$$\bar{\mu}_k^i = \frac{1 + \mu_k^i}{1 - \mu_k^i},$$

gegeben, wobei μ_k^i , $i = 1, \dots, M$ die verallgemeinerten Eigenwerte des reellen, symmetrischen, positiv definiten Matrizenpaars \mathbf{C}_k^v und $\mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^p \mathbf{H}_k^T$ sind. Die Herleitung dieser Formel für den optimalen Fusionsparameter ist in Anhang D.3 gegeben.

C.5 Diskussion

In diesem Kapitel wurde eine neuartige Methodik zur Herleitung robuster Filterverfahren für lineare Systeme mit additivem *farbigem* System- und Messrauschen vorgestellt. Es wurde dargelegt, wie im Rahmen dieser Methodik mittels Matrixapproximationen das bekannte Covariance-Intersection (CI) Filterverfahren hergeleitet werden kann, und eine Formel für den Prädiktionsschritt angegeben [127]. Des Weiteren wurden neuartige geschlossene Formeln zur Berechnung optimaler Parameter für den Filter- und den Prädiktionsschritt hergeleitet.

Die vorgestellte Methodik kann auf Filterprobleme verallgemeinert werden, bei denen die Korrelationen zwischen den auftretenden Rauschprozessen nicht vollständig unbekannt sind, sondern obere Grenzen für diese Korrelationen gegeben sind [128]. Des Weiteren können auf der Basis von Matrixapproximationen Verfahren hergeleitet werden [42],

die auf gemischten Rauschmodellen basieren, welche farbige und weiße Anteile enthalten [41].

Die Behandlung *nichtlinearer Filterprobleme* im Falle farbiger Rauschprozesse ist mit dem in Kapitel 2 vorgestellten Hyperraumverfahren möglich, indem die hergeleiteten, robusten linearen Filterverfahren in einem höherdimensionalen, transformierten Raum eingesetzt werden. Eine direkte analytische Behandlung des Prädiktionsschrittes ist jedoch wie für die vorgestellten, mengenbasierten Filteralgorithmen im Hyperraum nicht möglich. Hier wäre ein Ansatzpunkt für zukünftige Forschungsarbeiten auf dem Gebiet der robusten nichtlinearen Filterverfahren gegeben.

Anhang D

Herleitung des CI-Filterschrittes

D.1 Beweis des CI-Filterschrittes mit Hilfe einer Matrixapproximation

BEWEIS D.1.1 Betrachten wir die Zufallsvariable

$$\bar{z}_k = \begin{bmatrix} \underline{x}_k^p \\ \underline{z}_k \end{bmatrix}.$$

Der Erwartungswert von \bar{z}_k ist

$$E \{ \bar{z}_k \} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{x}}_k^p \\ \mathbf{H}_k \hat{\underline{x}}_k^p \end{bmatrix}.$$

Die Kovarianzmatrix ist durch

$$\begin{aligned} \text{Cov} \{ \bar{z}_k \} &= \text{Cov} \left\{ \begin{bmatrix} \underline{x}_k^p \\ \underline{z}_k \end{bmatrix} \right\} = E \left\{ \begin{bmatrix} \underline{x}_k^p - \hat{\underline{x}}_k^p \\ \underline{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\underline{x}}_k^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_k^p - \hat{\underline{x}}_k^p \\ \underline{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\underline{x}}_k^p \end{bmatrix}^T \right\} \\ &= E \left\{ \begin{bmatrix} \underline{e}_k^p (\underline{e}_k^p)^T & \underline{e}_k^p \{ (\underline{e}_k^p)^T \mathbf{H}_k^T + (\underline{v}_k^f)^T \} \\ \{ \mathbf{H}_k \underline{e}_k^p + \underline{v}_k^f \} \underline{e}_k^p & \{ \mathbf{H}_k \underline{e}_k^p + \underline{v}_k^f \} \{ (\underline{e}_k^p)^T \mathbf{H}_k^T + (\underline{v}_k^f)^T \} \end{bmatrix} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_k^{pp} & \tilde{\mathbf{C}}_k^{pv} \\ \mathbf{H}_k \tilde{\mathbf{C}}_k^{pp} + \tilde{\mathbf{C}}_k^{vp} & \mathbf{H}_k \tilde{\mathbf{C}}_k^{pp} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{H}_k \tilde{\mathbf{C}}_k^{pv} + \tilde{\mathbf{C}}_k^{vp} \mathbf{H}_k^T + \tilde{\mathbf{C}}_k^{vv} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

gegeben, wobei $\underline{e}_k^p = \underline{x}_k^p - \hat{\underline{x}}_k^p$ der Fehler in der Schätzung $\hat{\underline{x}}_k^p$ ist. Eine Abschätzung der tatsächlichen Kovarianzmatrix durch

$$\text{Cov} \left\{ \begin{bmatrix} \underline{e}_k^p \\ \underline{v}_k^f \end{bmatrix} \right\} \leq \begin{bmatrix} \frac{1}{0.5 - \kappa_k} \mathbf{C}_k^p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{0.5 + \kappa_k} \mathbf{C}_k^v \end{bmatrix}$$

ergibt

$$\text{Cov} \{ \bar{z}_k \} \leq \begin{bmatrix} \frac{1}{0.5 - \kappa_k} \mathbf{C}_k^p & \frac{1}{0.5 - \kappa_k} \mathbf{C}_k^p \mathbf{H}_k^T \\ \frac{1}{0.5 - \kappa_k} \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^p & \frac{1}{0.5 + \kappa_k} \mathbf{C}_k^v + \frac{1}{0.5 - \kappa_k} \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^p \mathbf{H}_k^T \end{bmatrix}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{\underline{x}}_k^s &= \hat{\underline{x}}_k^p + \frac{1}{0.5 - \kappa_k} \mathbf{C}_k^p \mathbf{H}_k^T \left\{ \frac{1}{0.5 + \kappa_k} \mathbf{C}_k^v + \frac{1}{0.5 - \kappa_k} \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^p \mathbf{H}_k^T \right\}^{-1} (\underline{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\underline{x}}_k^p) \\ \mathbf{C}_k^s &= \frac{1}{0.5 - \kappa_k} \mathbf{C}_k^p - \frac{1}{(0.5 - \kappa_k)^2} \mathbf{C}_k^p \mathbf{H}_k^T \left\{ \frac{1}{0.5 + \kappa_k} \mathbf{C}_k^v + \frac{1}{0.5 - \kappa_k} \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^p \mathbf{H}_k^T \right\}^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^p \end{aligned}$$

oder

$$\hat{\mathbf{x}}_k^s = \hat{\mathbf{x}}_k^p + \frac{0.5 + \kappa_k}{0.5 - \kappa_k} \mathbf{C}_k^p \mathbf{H}_k^T \left\{ \mathbf{C}_k^v + \frac{0.5 + \kappa_k}{0.5 - \kappa_k} \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^p \mathbf{H}_k^T \right\}^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^p)$$

$$\mathbf{C}_k^s = \frac{1}{0.5 - \kappa_k} \mathbf{C}_k^p - \frac{1}{0.5 - \kappa_k} \frac{0.5 + \kappa_k}{0.5 - \kappa_k} \mathbf{C}_k^p \mathbf{H}_k^T \left\{ \mathbf{C}_k^v + \frac{0.5 + \kappa_k}{0.5 - \kappa_k} \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^p \mathbf{H}_k^T \right\}^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^p .$$

Mit der Bilineartransformation

$$\lambda_k = \frac{0.5 + \kappa_k}{0.5 - \kappa_k} ,$$

erhalten wir

$$\frac{1}{0.5 - \kappa_k} = 1 + \lambda_k ,$$

was den Beweis beendet.

D.2 Herleitung des optimalen Prädiktionsparameters

BEWEIS D.2.1 Durch die Transformation des Matrizenpaars $\mathbf{A}_{k-1} \mathbf{C}_{k-1}^S \mathbf{A}_{k-1}^T$ und $\mathbf{B}_{k-1} \mathbf{C}_{k-1}^u \mathbf{B}_{k-1}^T$ gemäß $\mathbf{T}^T \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{C}_{k-1}^S \mathbf{A}_{k-1}^T \mathbf{T} = \mathbf{I}$ und $\mathbf{T}^T \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{C}_{k-1}^u \mathbf{B}_{k-1}^T \mathbf{T} = \text{diag}[\mu_k^1, \dots, \mu_k^N]$ erhalten wir

$$\det\{\mathbf{C}_k^p\} = \det \left\{ \frac{1}{0.5 - \kappa} \mathbf{I} + \frac{1}{0.5 + \kappa} \text{diag}[\mu_k^1, \dots, \mu_k^N] \right\} ,$$

was äquivalent zu

$$\det\{\mathbf{C}_k^p\} = \left\{ \frac{1}{0.5 - \kappa} \right\}^N \det \left\{ \mathbf{I} + \frac{0.5 - \kappa}{0.5 + \kappa} \text{diag}[\mu_k^1, \dots, \mu_k^N] \right\} ,$$

ist, wobei N die Dimension des Zustandsraums ist. Substituieren mit

$$\lambda = \frac{0.5 - \kappa}{0.5 + \kappa}$$

und differenzieren nach λ ergibt die notwendige Bedingung

$$-N \left\{ \frac{1 + \lambda}{\lambda} \right\}^{N-1} \frac{1}{\lambda^2} \prod_{i=1}^N (1 + \lambda \mu_k^i) + \left\{ \frac{1 + \lambda}{\lambda} \right\}^N \sum_{i=1}^N \left\{ \mu_k^i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (1 + \mu_k^j \lambda) \right\} = 0$$

die zu

$$-N + \lambda(1 + \lambda) \sum_{i=1}^N \frac{\mu_k^i}{1 + \lambda \mu_k^i} = 0$$

vereinfacht werden kann. Mit $N = \sum_{i=1}^N 1$ erhalten wir

$$\sum_{i=1}^N \frac{\mu_k^i \lambda^2 - 1}{1 + \lambda \mu_k^i} = 0 .$$

Durch Rücksubstitution von κ erhält man schließlich

$$\sum_{i=1}^N \frac{\mu_k^i (0.5 - \kappa)^2 + (0.5 + \kappa)^2}{0.5 + \kappa + (0.5 - \kappa) \mu_k^i} = 0 .$$

Eine bilineare Transformation der Eigenwerte mittels

$$\bar{\mu}_k^i = \frac{1 + \mu_k^i}{1 - \mu_k^i}$$

schließt den Beweis ab.

D.3 Herleitung des optimalen Fusionsparameters

BEWEIS D.3.1 Mit

$$\det\{\mathbf{A} + \mathbf{BDC}\} = \det\{\mathbf{A}\} \det\{\mathbf{D}\} \det\{\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B}\}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \det\{\mathbf{C}_k^s\} &= (1 + \lambda_k)^N \det\left\{ \underbrace{\mathbf{C}_k^p}_A - \lambda_k \underbrace{\mathbf{C}_k^p \mathbf{H}_k^T}_B \underbrace{(\mathbf{C}_k^v + \lambda_k \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^p \mathbf{H}_k^T)^{-1}}_D \underbrace{\mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^p}_C \right\} \\ &= (1 + \lambda_k)^N \det\left\{ \underbrace{\mathbf{C}_k^p}_A \right\} \det\left\{ \underbrace{(\mathbf{C}_k^v + \lambda_k \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^p \mathbf{H}_k^T)^{-1}}_D \right\} \\ &\quad \det\left\{ \underbrace{\mathbf{C}_k^v + \lambda_k \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^p \mathbf{H}_k^T}_{D^{-1}} + \underbrace{\mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^p}_C \underbrace{(\mathbf{C}_k^p)^{-1}}_{A^{-1}} \underbrace{(-\lambda_k \mathbf{C}_k^p \mathbf{H}_k^T)}_B \right\} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\det\{\mathbf{C}_k^v\}} \\ &= (1 + \lambda_k)^N \det\{\mathbf{C}_k^p\} \det\{\mathbf{C}_k^v\} \frac{1}{\det\{\mathbf{C}_k^v + \lambda_k \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^p \mathbf{H}_k^T\}} . \end{aligned}$$

Durch Transformation des Matrizenpaares $\mathbf{C}_k^v, \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^p \mathbf{H}_k^T$ gemäß $\mathbf{T}^T \mathbf{C}_k^v \mathbf{T} = \mathbf{I}$, $\mathbf{T}^T \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^p \mathbf{H}_k^T \mathbf{T} = \text{diag}[\mu_k^1, \dots, \mu_k^M]$ erhalten wir

$$\det\{\mathbf{C}_k^s\} = c \frac{(1 + \lambda_k)^N}{\prod_{i=1}^M (1 + \mu_k^i \lambda_k)}$$

woraus sich mit $c = \det\{\mathbf{C}_k^p\} \det\{\mathbf{C}_k^v\}$ und elementaren Umformungen

$$\det\{\mathbf{C}_k^s\} = c \prod_{i=1}^M \frac{1}{1 + \mu_k^i \lambda_k} (1 + \lambda_k)^N$$

ergibt. Eine notwendige Bedingung für λ_k^{\min} erhalten wir nun als

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_k} \det\{\mathbf{C}_k^s\} = c \frac{N(1 + \lambda_k)^{N-1} \prod_{i=1}^M (1 + \mu_k^i \lambda_k) - (1 + \lambda_k)^N \sum_{i=1}^M \left\{ \mu_k^i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M (1 + \mu_k^j \lambda_k) \right\}}{\prod_{i=1}^M (1 + \mu_k^i \lambda_k)^2} \stackrel{!}{=} 0 .$$

Wegen $\mu_k^i > 0$ für $i = 1, \dots, M$ und $\lambda_k \in [0, \infty)$ gilt

$$\begin{aligned} (1 + \lambda_k)^{N-1} &\geq 1 \\ \prod_{i=1}^M (1 + \mu_k^i \lambda_k) &\geq 1 \\ \prod_{i=1}^M (1 + \mu_k^i \lambda_k)^2 &\geq 1 . \end{aligned}$$

Damit vereinfacht sich obige Bedingung zu

$$N - M + M - (1 + \lambda_k) \sum_{i=1}^M \frac{\mu_k^i}{1 + \mu_k^i \lambda_k} \stackrel{!}{=} 0 .$$

Mit $M = \sum_{i=1}^M 1$ ergibt sich

$$\sum_{i=1}^M \frac{1 - \mu_k^i}{1 + \mu_k^i \lambda_k} \stackrel{!}{=} M - N ,$$

woraus mit

$$\lambda_k^{\min} = \frac{0.5 + \kappa_k^{\min}}{0.5 - \kappa_k^{\min}}, \quad \bar{\mu}_k^i = \frac{1 + \mu_k^i}{1 - \mu_k^i},$$

das gewünschte Ergebnis

$$\sum_{i=1}^M \frac{\kappa_k - 0.5}{\kappa_k + 0.5 \bar{\mu}_k^i} \stackrel{!}{=} M - N$$

folgt.

Für den wichtigen Fall *skalarer Messungen*, welcher separat behandelt werden muss, ergeben sich folgende, vereinfachte Ergebnisse: Der skalare Fusionsparameter λ_k ist durch

$$\lambda_k^{\min} = \begin{cases} 0 & C_k^y \geq H^2 C_k^p, \\ \infty & \text{ansonsten} \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

gegeben, was sich zeigen lässt, indem die Varianz des Fusionsergebnisses gemäß

$$C_k^s = \frac{C_k^p \frac{C_k^y}{H_k^2} (1 + \lambda)}{\frac{C_k^y}{H_k^2} + \lambda C_k^p}$$

dargestellt wird, woraus sich unmittelbar (D.1) ergibt.

Literaturverzeichnis

- [1] P. Anders und M. Gnaem: *Lokalisierung in mikrozellularen Funknetzen*, am Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik der Technischen Universität München eingereichter Abschlussbericht zum Projektpraktikum, Juli 2002.
- [2] M. S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, und T. Clapp: *A Tutorial on Particle Filters for Online Nonlinear/Non-Gaussian Bayesian Tracking*, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 50, No. 2, pp. 174–188, February 2002.
- [3] D. J. Austin, P. Jensfelt: *Using Multiple Gaussian Hypotheses to Represent Probability Distributions for Mobile Robot Localization*, Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA'2000), pp. 1036–1041, San Francisco, CA, USA, April 2000.
- [4] B. Azimi-Sadjadi und P. S. Krishnaprasad: *Approximate Nonlinear Filtering and its Application in Navigation*, submitted to Automatica, 2002.
- [5] B. Azimi-Sadjadi und P. Krishnaprasad: *Approximate Nonlinear Filtering and its Applications for GPS*, Proceedings of 39th IEEE Conference on Decision and Control, Sidney, Australia, pp. 1579–1584, 2000.
- [6] T. Bailey, E. Nebot: *Localization in Large-Scale Environments*, Robotics and Autonomous Systems, Vol. 37, No. 4, pp. 261–281, 2001.
- [7] N. Bergman: *Recursive Bayesian Estimation: Navigation and Tracking Applications*, PhD thesis, Department of Electrical Engineering Linköping University, ISBN 91-7219-473-1, 1999.
- [8] N. Bergman, L. Ljung, F. Gustafsson: *Terrain Navigation Using Bayesian Statistics*, IEEE Control Systems Magazine, Vol. 19, No. 3, pp. 33–40, June 1999.
- [9] M. Betke und K. Gurrts: *Mobile Robot Localization Using Landmarks*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 13, No. 2, pp. 251–263, April 1997.
- [10] H. Bialy und M. Olbrich: *Optimierung, eine Einführung mit Anwendungsbeispielen*, VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1. Auflage, Bestellnummer 545 969 1, 1975.
- [11] J. A. Bilmes: *A Gentle Tutorial of the EM Algorithm and its Application to Parameter Estimation for Gaussian Mixture and Hidden Markov Models*, Technical Report, University of Berkeley, ICSI-TR-97-021, 1997.
- [12] C. M. Bishop, M. Svensén, C. K. I. Williams: *GTM: The Generative Topographic Mapping*, Neural Computation Vol. 10, pp. 215–234, 1998.
- [13] P. Bonnifait und G. Garcia: *Design and Experimental Validation of an Odometric and Goniometric Localization System for Outdoor Robot Vehicles*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 14, No. 4, pp. 541–548, August 1998.

- [14] J. Borenstein, H. R. Everett, L. Feng und D. Wehe: *Mobile robot positioning: Sensors and techniques*, Journal of Robotic Systems, Vol. 14, No. 4, pp. 231–249, 1997.
- [15] D. Brigo und F. LeGland: *A Finite Dimensional Filter with Exponential Conditional Density*, Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 1643–1644, December 1997.
- [16] D. Brigo, B. Hanzon und F. LeGland: *Approximate Nonlinear Filtering by Projection on Exponential Manifolds of Densities*, Bernoulli, Vol. 5, No. 3, pp. 495–534, 1999.
- [17] I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew: *Taschenbuch der Mathematik* B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, Leipzig, 25. durchgesehene Auflage, herausgegeben von G. Grosche, V. Ziegler und D. Ziegler, 1991.
- [18] C. G. Broyden: *The Convergence of a Class of Double-Rank Minimization Algorithms*, J. Inst. Maths. Applics., Vol. 6, pp. 76–90, 1970.
- [19] J. A. Castellanos, J. M. Martínez, J. Neira, J. D. Tardós: *Simultaneous Map Building for Mobile Robots: A Multisensor Fusion Approach*, IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA'98), pp. 1244–1249, Leuven, Belgium, May 1998.
- [20] J. A. Castellanos, J. D. Tardós und G. Schmidt: *Building a Global Map of the Environment of a Mobile Robot: The Importance of Correlations*, IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA'97), pp. 1053–1059, Albuquerque, NM, USA, April 1997.
- [21] M. F. Cheung, S. Yurkovich und K. M. Passino: *An Optimal Volume Ellipsoid Algorithm for Parameter Set Identification*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 38, No. 8, pp. 1292–1296, 1993.
- [22] T. Coleman, M. A. Branch, A. Grace: *Optimization Toolbox for Use with MATLAB*, The MathWorks, Inc., User's Guide, Version 2, January 1999.
- [23] Covariance Intersection Working Group (1997): *A Culminating Advance in the Theory and Practice of Data Fusion, Filtering, and Decentralized Estimation*. Verfügbar bei <http://www.ait.nrl.navy.mil/people/uhlmann/CovInt.html>.
- [24] M. Csorba und H. F. Durrant-Whyte: *New approach to map building using relative position estimates*, in Proceedings of SPIE, Vol. 3087, pp. 115–125, Orlando, FL, April 1997.
- [25] S. Czernoch: *Aktuelle und zukünftige Anwendungsgebiete von Positionsermittlungssystemen*, am Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik der Technischen Universität München eingereichter Abschlussbericht zum Projektpraktikum, Januar 2002.
- [26] F. Dellaert, S. Thrun, W. Burgard, D. Fox: *Monte Carlo Localization for Mobile Robots*, Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA'99), Detroit, Michigan, pp. 1322–1328, May 1999.
- [27] G. Dudek und M. Jenkins: *Computational Principles of Mobile Robotics*, Cambridge University Press, 2000.

- [28] A. Elfes: *Occupancy Grids: A Probabilistic Framework for Robot Perception and Navigation*, PhD thesis, Dept. of Electrical Engineering, Carnegie Mellon University, 1989.
- [29] J. S. Evans: *Studies in Nonlinear Filtering Theory: Random Parameter Linear Systems, Target Tracking and Communication Constrained Estimation*, PhD thesis, Department of Electrical and Electronic Engineering, University of Melbourne, 1998.
- [30] J. S. Evans: *Image-enhanced Multiple Model Tracking*, *Automatica*, Vol. 35, No. 11, pp. 1769–1786, November 1999.
- [31] A. Farina, B. Ristic, D. Benvenuti: *Tracking a Ballistic Target: Comparison of Several Nonlinear Filters*, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 38, No. 3, pp. 854–867, July 2002.
- [32] R. Fletcher und M. J. D. Powell: *A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization*, *Brit. Computer Journal*, Vol. 6, pp. 163–168, 1963.
- [33] B. H. Fleury und P. E. Leuthold: *Radiowave Propagation in Mobile Communications: An Overview of European Research*, *IEEE Communication Magazine*, Vol. 34, No. 2, pp. 70–81, 1996.
- [34] D. Fox, W. Burgard und S. Thrun: *Markov Localization for Mobile Robots in Dynamic Environments*, *Journal of Artificial Intelligence Research*, Vol. 11, pp. 391–427, 1999.
- [35] D. Fox: *Markov Localization: A Probabilistic Framework for Robot Localization and Navigation*, Institute of Computer Science III, University of Bonn, Germany, Doctoral Thesis, 1998.
- [36] O. Föllinger: *Regelungstechnik, Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*, Hüthig GmbH Heidelberg, 8., überarbeitete Auflage, ISBN 3-7785-2336-8, 1994.
- [37] A. Garulli und A. Vicino: *Set Membership Localization of Mobile Robots via Angle Measurements*, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 17, No. 4, pp. 450–463, 2001.
- [38] D. Goldfarb: *A Family of Variable Metric Updates Derived by Variational Means*, *Mathematics of Computing*, Vol. 24, pp. 23–26, 1970.
- [39] J. E. Guivant und E. M. Nebot: *Optimization of the Simultaneous Localization and Map-Building Algorithm for Real-Time Implementation*, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 17, No. 3, pp. 242–257, June 2001.
- [40] U. D. Hanebeck: *Lokalisierung eines mobilen Roboters mittels effizienter Auswertung von Sensordaten und mengenbasierter Zustandsschätzung*, Dissertation, TU München, Fortschrittsberichte VDI, Reihe 8: Mess-, Steuerungs- und Regelungstechnik, Nr. 643, VDI Verlag, Düsseldorf, ISBN 3-18-364308-1, 1997.
- [41] U. D. Hanebeck: *Nonlinear Methods for State Estimation in Stochastic Dynamic Systems*, Habilitationsschrift der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Technische Universität München, 2002.

- [42] U. D. Hanebeck und J. Horn: *An Efficient Method for Simultaneous Map Building and Localization*, in Proceedings of SPIE Vol. 4385, AeroSense Symposium, Orlando, Florida, 2001.
- [43] U. D. Hanebeck, G. Schmidt: *Localization of Fast Mobile Robots Based on an Advanced Angle-Measurement Technique*, IFAC Control Engineering Practice, Elsevier Science, Vol. 4, No. 8, pp. 1109–1118, 1996.
- [44] U. D. Hanebeck: *Recursive Nonlinear Set-Theoretic Estimation Based on Pseudo-Ellipsoids*, Conference Documentation of the IEEE International Conference on Multi Sensor Fusion and Integration (MFI'2001), pp. 159–164, Baden–Baden, Germany, 2001.
- [45] U. D. Hanebeck: *Optimal Filtering for Polynomial Measurement Nonlinearities with Additive Non-Gaussian Noise*, Proceedings of the American Control Conference (ACC'2001), Arlington, Virginia, 2001.
- [46] E. Hänsler: *Statistische Signale*, Springer Verlag, ISBN 3–540–61816–3, 1997.
- [47] M. Hellebrandt und R. Mathar: *Location Tracking of Mobiles in Cellular Radio Networks*, IEEE Transactions on Vehicular Technology, Vol. 48, No. 5, pp. 1558–1562, September 1999.
- [48] J. Horn, U. D. Hanebeck, K. Riegel, K. Heesche und W. Hauptmann: *Nonlinear Set-Theoretic Position Estimation of Cellular Phones*, Ortung und Navigation, Journal der Deutschen Gesellschaft für Ortung und Navigation e.V. (DGON), Vol. 1, pp. 93–99, 2002.
- [49] D. A. Huber: *Problems of Nonlinear Filtering Focussing on the Prediction of Dynamical Systems*, am Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik der Technischen Universität München eingereichte Diplomarbeit, Juni 2001.
- [50] K. Ito und K. Xiong: *Gaussian Filters for Nonlinear Filtering Problems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 45, No. 5, pp. 910–927, May 2000.
- [51] S. L. S. Jacoby, J. S. Kowalik, J. T. Pizzo: *Iterative Methods for Nonlinear Optimization Problems*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, ISBN 0–13–508199–X, 1972.
- [52] L. Jaulin, E. Walter, O. Lévêque und D. Meizel: *Set Inversion for χ -Algorithms, with Application to Guaranteed Robot Localization*, Math. Comput. Simulation, Vol. 52, pp. 197–210, 2000.
- [53] L. Jaulin: *Interval Constraint Propagation with Application to Bounded-Error Estimation*, Automatica, Vol. 36, pp. 1547–1552, 2000.
- [54] P. Jensfelt und S. Kristensen: *Active Global Localization for a Mobile Robot Using Multiple Hypothesis Tracking*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 17, No. 5, pp. 748–760, October 2001.
- [55] L. Jetto, S. Longhi und G. Venturini: *Development and Experimental Validation of an Adaptive Extended Kalman Filter for the Localization of Mobile Robots*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 15, No. 2, pp. 219–229, April 1999.

- [56] S. Julier und J. Uhlmann: *A Nondivergent Estimation Algorithm in the Presence of Unknown Correlations*, Proceedings of the American Control Conference, Vol. 4, pp. 2369–2373, Piscataway, NJ, USA, June 1997.
- [57] S. J. Julier, J. K. Uhlmann: *A New Extension of the Kalman Filter to Non-linear Systems*, The 11th International Symposium on Aerospace/Defense Sensing, Simulation and Controls, Vol. 3068, pp. 182–193, Orlando, FL, April 20–25, 1997.
- [58] R. E. Kalman: *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*, ASME Transactions, Journal of Basic Engineering, Vol. 82D, pp. 35–45, 1960.
- [59] R. E. Kalman, und R. S. Bucy: *New Results in Linear Filtering and Prediction Theory*, ASME Transactions, Journal of Basic Engineering, Vol. 83D, pp. 95–108, 1961.
- [60] T. Kohonen: *Self-Organized Formation of Topologically Correct Feature Maps*, Biological Cybernetics, Vol. 43, pp. 59–69, 1982.
- [61] W. Krug und S. Schönfeld: *Rechnergestützte Optimierung für Ingenieure*, VEB Verlag Technik, Berlin, 1. Auflage, Bestellnummer 5528968, 1981.
- [62] R. Kulhavy: *Recursive Nonlinear Estimation: Geometry of a Space of Posterior Densities*, Automatica, Vol. 28, No. 2, pp. 313–323, 1992.
- [63] H. J. Kushner und A. Budhiraja: *A Nonlinear Filtering Algorithm Based on an Approximation of the Conditional Distribution*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 45, No. 3, pp. 580–585, 2000.
- [64] A. M. Ladd, K. E. Bekris, G. Marceau, A. Rudys, D. S. Wallach und L. E. Kavradi: *Using Wireless Ethernet for Localization*, Proceedings of the 2002 IEEE/RSJ Intl. Conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 402–408, EPFL, Lausanne, Switzerland, October 2002.
- [65] J. Lähteenmäki, *Radiowave Propagation in Office Buildings and Underground Halls*, Proc. 22nd European Microwave Conference EurMC'92, pp. 377–382, Espoo, Finland, 1992.
- [66] L. S. Lasdon: *Optimization Theory for Large Systems*, The Macmillan Company, Collier–Macmillan limited, London, 1970, Catalog card number 78–95301.
- [67] C. Leclerc: *Kombinierte odometrische und visuelle Koppelnavigation für den mobilen Service-Roboter DIROKOL*, am Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik der Technischen Universität München eingereichte Studienarbeit, Juni 1999.
- [68] K. Levenberg: *A Method for the Solution of Certain Problems in Least Squares*, Quart. Apl. Math., Vol. 2, pp. 164–168, 1944.
- [69] S. Majumder: *Sensor Fusion and Feature Based Navigation for Subsea Robots*, Australian Centre for Field Robotics School of Aerospace, Mechanical and Mechatronic Engineering, University of Sydney, Doctoral Thesis, August 2001.
- [70] D. Marquardt: *An Algorithm for Least Squares Estimation of Nonlinear Parameters*, SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 11, pp. 431–441, 1963.

- [71] P. S. Maybeck: *Stochastic Models, Estimation, and Control, Volume 1*, ACADEMIC PRESS, New York, San Francisco, London, 1979, A Subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers.
- [72] V. Mazya und G. Schmidt: *On approximate approximations using Gaussian kernels*, IMA Journal of Numerical Analysis, Vol. 16, No. 1, pp. 13–29, 1996.
- [73] S. McGinnity, G. W. Irwin: *Multiple Model Bootstrap Filter for Maneuvering Target Tracking*, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 36, No. 3, July 2000.
- [74] D. Meizel, A. Preciado-Ruiz und E. Halbwachs: *Estimation of the Location of a Mobile Robot: Geometric Approaches*. In *Bounding Approaches to System Identification*, M. Milanese, J. P. Norton, H. Piet-Lahanier, and E. Walter Eds., Plenum Press, pp. 463–489, London, New-York, 1996.
- [75] D. Meizel, O. Lévêque, L. Jaulin und E. Walter, *Initial Localization by Set Inversion*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 18, No. 6, pp. 966–971, December 2002.
- [76] K. Meyberg und P. Vachenaue: *Höhere Mathematik 1*, Springer Verlag Berlin Heidelberg, ISBN 3-540-51798-7, 1990.
- [77] M. Milanese, J. P. Norton, H. Piet-Lahanier und E. Walter: *Bounding Approaches to System Identification*, M. Milanese, J. P. Norton, H. Piet-Lahanier, and E. Walter Eds, New York: Plenum, 1996.
- [78] M. Montemerlo, S. Thrun, W. Whittaker: *Conditional Particle Filters for Simultaneous Mobile Robot Localization and People-Tracking*, Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA'02), pp. 695–701, May 2002.
- [79] M. Montemerlo, J. Pineau, N. Roy, S. Thrun und V. Verma: *Experiences with a Mobile Robotic Guide for the Elderly*, Proceedings of the AAAI National Conference on Artificial Intelligence, AAAI, Edmonton, Canada, 2002.
- [80] E. M. Mouaddib und B. Marhic: *Geometrical Matching for Mobile Robot Localization*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 16, No. 5, pp. 542–552, October 2000.
- [81] E. Nebot und H. Durrant-Whyte: *A High Integrity Navigation Architecture for Outdoor Autonomous Vehicles*, Journal of Robotics and Autonomous Systems Vol. 26 (2–3), pp. 81–97, 1999.
- [82] G. Nikolov: *Statische und dynamische Lokalisierung von GSM-Mobiltelefonen mit nichtlinearen Filterverfahren*, am Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik der Technischen Universität München eingereichte Bachelorarbeit, Mai 2002.
- [83] D. Ormoneit, V. Tresp: *Improved Gaussian Mixture Density Estimates Using Bayesian Penalty Terms and Network Averaging*, Advances in Neural Information Processing Systems, Vol. 8, The MIT Press, D. S. Touretzky and M. C. Mozer and M. E. Hasselmo, pp. 542–548, 1996.

- [84] J. M. Ortega und W. C. Rheinboldt: *Computer Science and Applied Mathematics, Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Editor Werner Rheinboldt, Academic Press, Library of Congress and Catalog Card Number 79-107564, New York and London, 1970.
- [85] S. Panzieri, F. Pascucci und G. Ulivi: *An Outdoor Navigation System Using GPS and Inertial Platform*, IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, Vol. 7, No. 2, pp. 134–142, June 2002.
- [86] A. Papoulis: *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, Tokyo, 1965.
- [87] W. B. Poland und R. D. Shachter: *Mixtures of Gaussians and Minimum Relative Entropy Techniques for Modeling Continuous Uncertainties*, Uncertainty in Artificial Intelligence: Proceedings of the Ninth Conference, pp. 183–190, 1993.
- [88] L. Rabiner: *A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition*, Proceedings of the IEEE, Vol. 77, No. 2, pp. 257–286, 1989.
- [89] A. Rauh, U. D. Hanebeck: *Calculating Moments of Exponential Densities Using Differential Algebraic Equations*, angenommen zur Veröffentlichung in IEEE Signal Processing Letters, Vol. 10, No. 5, Mai 2003.
- [90] A. Rauh: *Nichtlineare Filterung für mehrdimensionale Systeme mit nichtgaußischem multiplikativem Rauschen*, am Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik der Technischen Universität München eingereichte Diplomarbeit, Dezember 2001.
- [91] K. Riegel: *Lokalisierung von GSM-Mobiltelefonen mittels nichtlinearer Filtertechniken*, am Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik der Technischen Universität München eingereichte Diplomarbeit, Dezember 2001.
- [92] K. Rizk: *Propagation in Microcellular and Small Cell Urban Environment*, PhD thesis, Swiss Federal Inst. of Technology of Lausanne, 1997.
- [93] S. J. Roberts und W. D. Penny: *Variational Bayes for Generalized Autoregressive Models*, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 50, No. 9, pp. 2245–2257, September 2002.
- [94] T. Roos, P. Myllymäki, H. Tirri: *A Statistical Modeling Approach to Location Estimation*, IEEE Transactions on Mobile Computing, Vol. 1, No. 1, pp. 59–69, January–March 2002.
- [95] S. I. Roumeliotis und G. A. Bekey: *Bayesian Estimation and Kalman Filtering: A Unified Framework for Mobile Robot Localization*, IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA 2000), pp. 2985–2992, San Francisco, CA, April 2000.
- [96] B. L. Rozovskii, A. Petrov und R. B. Blažek: *Interacting Banks Of Bayesian Matched Filters*, SPIE Proceedings: Signal and Data Processing of Small Targets, Vol. 4048, Orlando, FL, 2000.

- [97] A. Sankar: *Experiments with a Gaussian Merging-Splitting Algorithm for HMM training for Speech Recognition*, Proceedings of the 1997 DARPA Broadcast News Transcription and Understanding Workshop, pp. 99–104, February, 1998
- [98] G. Schmidt: *Skriptum zur Vorlesung Regelungs- und Steuerungstechnik 2*, Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik, Technische Universität München, 2002.
- [99] F. C. Schwappe: *Uncertain Dynamic Systems*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, ISBN 0-13-935593-6, 1973.
- [100] D. F. Shanno: *Conditioning of Quasi-Newton Methods for Minimization*, Mathematics of Computing, Vol. 24, pp. 647–656, 1970.
- [101] I. Shimshoni: *On Mobile Robot Localization From Landmark Bearings*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 18, No. 6, pp. 971–976, 2002.
- [102] H. W. Sorenson und D. L. Alspach: *Recursive Bayesian Estimation Using Gaussian Sums*, Automatica, Vol. 7, pp. 465–479, 1971.
- [103] C. Surauer: *Bildverarbeitungs-Algorithmen zur Kartographierung mit einem mobilen Serviceroboter*, am Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik der Technischen Universität München eingereichter Abschlussbericht zum interdisziplinären Projektpraktikum, Juli 2002.
- [104] S. Thrun, A. Brücken, W. Burgard, D. Fox, T. Frölinghaus, D. Henning, T. Hofmann, M. Krell, T. Schmidt: *Map Learning and High-Speed Navigation in RHINO*, AI-based Mobile Robots: Case Studies of Successful Robots, MIT Press, 1998.
- [105] S. Thrun, D. Fox, W. Burgard und F. Dellaert: *Robust Monte Carlo Localization for Mobile Robots*, Artificial Intelligence, Vol. 128, No. 1–2, pp. 99–141, 2000.
- [106] S. Thrun: *Robotic Mapping: A Survey*, Exploring Artificial Intelligence in the New Millennium, Morgan Kaufmann, 2002, Editors G. Lakemeyer and B. Nebel, to appear.
- [107] W. H. W. Tuttlebee: *Cordless Telecommunications Worldwide : The Evolution of Unlicensed PCS*, Springer Verlag, ISBN 3540199705, February 1997.
- [108] N. Ueda, R. Nakano: *Deterministic Annealing EM Algorithm*, Neural Networks, Vol. 11, pp. 271–282, October 1997.
- [109] N. Ueda, R. Nakano, Z. Ghahramani, G. E. Hinton: *SMEM Algorithm for Mixture Models*, Advances in Neural Information Processing Systems, NIPS11, pp. 599–605, 1999.
- [110] J. Uhlmann, S. Julier und M. Csorba: *Nondivergent Simultaneous Map Building and Localization using Covariance Intersection*, Proceedings of the SPIE AeroSense Conference, Vol. 3087, pp. 2–11, April 1997.
- [111] I. Ulrich und I. Nourbakhsh: *Appearance-based Place Recognition for Topological Localization*, IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA'00), pp. 1023–1029, San Francisco, California, April 2000.

- [112] A. Vicino und G. Zappa: *Sequential Approximation of Feasible Parameter Sets for Identification with Set Membership Uncertainty*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 41, No. 6, pp. 774–785, 1995.
- [113] N. Vlassis, B. Terwijn, B. Kröse: *Auxiliary Particle Filter Robot Localization from High-Dimensional Sensor Observations*, IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA'02), pp. 7–12, Washington, DC, California, Mai 2002.
- [114] M. K. Warmuth und Y. Singer: *Batch and On-line Parameter Estimation of Gaussian Mixtures Based on the Joint Entropy*, in Advances in Neural Information Processing Systems 11 (NIPS'98), MIT Press, Cambridge, MA, pp. 578–584, 1998.
- [115] G. Welch, G. Bishop: *An Introduction to the Kalman Filter*, UNC-Chapel Hill, TR 95–041, November 30th, 1999.
- [116] W. M. Wonham: *Some Applications of Stochastic Differential Equations to Optimal Nonlinear Filtering*, SIAM Journal Control, 2 (1965), pp. 347–369, 1965.
- [117] Y. Yagi, Y. Nishizawa und M. Yachida: *Map-Based Navigation for a Mobile Robot with Omnidirectional Image Sensor COPIS*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 11, pp. 1062–1067, 1995.
- [118] Z. Yang und X. Wang: *Joint Mobility Tracking and Handoff in Cellular Networks via Sequential Monte Carlo Filtering*, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 51, No. 1, pp. 269–281, January 2003.
- [119] P. Young: *Recursive Estimation and Time-Series Analysis*, Springer Verlag, ISBN 3–540–13677–0, 1984.

Eigene Veröffentlichungen, die im Rahmen der Forschungstätigkeiten für diese Dissertation entstanden sind:

- [120] K. Briechle, U. D. Hanebeck: *Self-localization of a Mobile Robot using Fast Normalized Cross Correlation*, 1999 IEEE International Conference of Systems, Man, and Cybernetics, Abstracts pp. 362, Tokyo, Japan, October 12–15, 1999.
- [121] K. Briechle, U. D. Hanebeck: *Simultane Lokalisierung und Kartenaufbau für einen mobilen Roboter*, Autonome Mobile Systeme 1999 (AMS 1999), S. 200–210, Informatik aktuell, Springer Verlag 1999.
- [122] K. Briechle, U. D. Hanebeck: *Ein Zwei-Karten-Verfahren zur gleichzeitigen Kartographierung und Lokalisierung*, Autonome Mobile Systeme 2000 (AMS 2000), S. 165–174, Informatik aktuell, Springer Verlag 2000.
- [123] K. Briechle, U. D. Hanebeck: *Template Matching using Fast Normalized Cross Correlation*, Proceedings of SPIE, Vol. 4387, pp. 95–102, Orlando, Florida, USA, April 2001.
- [124] K. Briechle, U. D. Hanebeck: *Localization of a Mobile Robot using Relative Bearing Measurements*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 20, Issue 1, pp. 36–44, February 2003.
- [125] U. D. Hanebeck, K. Briechle und A. Rauh: *Progressive Bayes: A New Framework for Nonlinear State Estimation*, eingereicht für die International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems (MFI) 2003, Tokyo, Japan, August 2003.
- [126] U. D. Hanebeck, K. Briechle und A. Rauh: *Progressive Bayes: A New Framework for Nonlinear State Estimation*, Proceedings of SPIE Vol. 5099, AeroSense Symposium, Orlando, Florida, April 2003.
- [127] U. D. Hanebeck, K. Briechle: *New Results for Stochastic Prediction and Filtering with Unknown Correlations*, International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems (MFI) 2001, Baden–Baden, pp. 147–152, August 2001.
- [128] U. D. Hanebeck, K. Briechle und J. Horn: *A Tight Bound for the Joint Covariance of Two Random Vectors with Unknown but Constrained Cross-Correlation*, Proceedings of the IEEE Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems (MFI'2001), Baden–Baden, pp. 85–90, 2001.
- [129] A. Rauh, K. Briechle, U. D. Hanebeck, J. Bamberger und C. Hoffmann, M. Grigoras: *Localization of DECT Mobile Phones Based on a New Nonlinear Filtering Technique*, Proceedings of SPIE Vol. 5084, AeroSense Symposium, Orlando, Florida, April 2003.