

**Lehrstuhl für Statik  
der Technischen Universität München**

# **Mechanik und Numerik der Formfindung und Fluid-Struktur-Interaktion von Membrantragwerken**

**Roland Wüchner**

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Ernst Rank

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Kai-Uwe Bletzinger
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Wolfgang A. Wall

Die Dissertation wurde am 12.06.2006 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen am 10.07.2006 angenommen.



---

# Mechanik und Numerik der Formfindung und Fluid-Struktur-Interaktion von Membrantragwerken

## Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wird die numerische Simulation von Formfindung und Fluid-Struktur-Interaktionsphänomenen bei Membrantragwerken systematisch aufgearbeitet und umgesetzt. Eine typische Anwendung sind windumströmte Zelte. Bedingt durch das spezielle Tragverhalten der Membrane sind diese Strukturen extrem leicht und empfindlich hinsichtlich strömungsinduzierter Effekte. Des Weiteren liegt eine untrennbare Kopplung von Tragwerksform und mechanischem Verhalten vor. Auf Grund dieser speziellen Art der Lastabtragung ergeben sich zusätzliche Fragestellungen im Vergleich zu konventionellen Strukturen mit Biegesteifigkeit.

Als Voraussetzung für die geometrisch nichtlinearen Strukturanalysen bei Belastung infolge Umströmung, ist zunächst die mechanisch definierte Gleichgewichtsform der vorgespannten, leichten Flächentragwerke zu ermitteln. Hierzu muss das inverse Problem der *Formfindung* mittels geeigneter Algorithmen gelöst werden. In dieser Arbeit wird dazu die Updated Reference Strategy eingesetzt, die hinsichtlich der Geometrieermittlung von, in der Praxis wichtigen, anisotrop vorgespannten Membranstrukturen noch erweitert wird. Auf der Basis einer Analyse der Effekte von physikalisch unmöglichen Spannungsvorgaben wird eine Methode zur Stabilisierung des Formfindungsprozesses mittels adaptiv angepasster Vorspannungszustände entwickelt.

Zur numerischen Simulation der *Fluid-Struktur-Wechselwirkung* wird eine partitionierte Lösungsstrategie vorgeschlagen, die wegen der bei Membranen vorliegenden starken physikalischen Kopplung zusätzliche Zwischenfelditerationen mit Unterrelaxation erfordert. Bei der impliziten Kopplung wird die numerisch effiziente Aitken-Methode zur Konvergenzbeschleunigung eingesetzt. Das Strömungsproblem wird durch die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen und das Strukturverhalten durch die Grundgleichungen der geometrisch nichtlinearen Elastodynamik modelliert.

Zur Synthese der miteinander in Wechselwirkung stehenden algorithmischen und physikalischen Felder wird ein *partitioniertes Gesamtkonzept*, bestehend aus Formfindung, Strukturanalyse und Strömungssimulation, erarbeitet, mit dem die numerische Simulation der Interaktion zwischen Strömungen und Strukturen für komplexe Freiformmembrane möglich ist. Die in einer Analyse des Gesamtproblems identifizierten Anforderungen an die Teilfeldlöser zur Formfindung von vorgespannten Strukturen und zur Simulation strukturdynamischer und strömungsmechanischer Probleme können auf diese Weise mit auf den jeweiligen Teilaspekt adäquat angepassten Lösungsverfahren berücksichtigt werden.

---

# Computational Mechanics of formfinding and fluid-structure interaction of membrane structures

## Abstract

This thesis presents a systematic analysis and realization of numerical simulations of formfinding and fluid-structure interaction phenomena in the case of membrane structures. Typical applications are tents subject to wind. Due to their special load carrying behavior, membrane structures are extremely light and susceptible to flow induced effects. Furthermore, geometric shape and mechanical behavior of such structures are coupled. As a consequence of these particular properties, additional questions arise compared to conventional structures with bending stiffness.

As a prerequisite for geometrically nonlinear analyses under external loads caused by surrounding fluid flows, the mechanically defined equilibrium shape must be determined. For this the inverse problem of *formfinding* has to be solved by appropriate algorithms. Within this thesis the Updated Reference Strategy is used for this purpose. Furthermore it is extended to situations with anisotropic prestress distributions which are of great interest in engineering practice. On the basis of an in-depth analysis of the effects of physically infeasible stress definitions, a methodology to compute selective modifications of prestress distributions is developed. This stress adaptation stabilizes the formfinding procedure.

To simulate the *fluid-structure interactions* a partitioned approach is proposed. Due to the strong physical coupling in the case of membranes, additional interfield iterations with underrelaxation are necessary. Aitken's method is applied to accelerate convergence during the implicit coupling procedure. The flow problem is represented by the incompressible Navier-Stokes equations and the structure is modeled by the governing equations of geometrically nonlinear elastodynamics.

Eventually, a *partitioned over-all concept* containing formfinding, structural analysis and fluid simulation is realized to represent the interactions between the different algorithmic and physical fields. This synthesis enables the numerical simulation of fluid-structure interaction phenomena in the case of complex free form membrane structures. Moreover, this approach allows for the use of adequate solution strategies in each single field to meet the requirements which are identified in a detailed analysis of the whole problem.

---

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 2000 bis 2006 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Statik der Technischen Universität München.

Meinen außerordentlichen Dank möchte ich dem Leiter des Lehrstuhls und Hauptberichter dieser Arbeit, Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Kai-Uwe Bletzinger, aussprechen. Seine wissenschaftliche Kompetenz, seine stets vertrauensvolle Förderung und Unterstützung und sein großes Interesse an dieser Arbeit machten die Durchführung dieser Promotion erst möglich. Des Weiteren stellte das von ihm geschaffene, angenehme und fachlich vielseitige Umfeld am Lehrstuhl für Statik eine wichtige Basis für erfolgreiche Forschungstätigkeiten dar.

Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Wolfgang A. Wall vom Lehrstuhl für Numerische Mechanik der Technischen Universität München danke ich sehr herzlich für die Übernahme des Mitberichts. Sein aufrichtiges Interesse an meiner wissenschaftlichen Arbeit und die mit ihm geführten Gespräche freuten mich sehr und waren stets eine große Motivation für mich. Ebenso danke ich Herrn Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Ernst Rank vom Lehrstuhl für Bauinformatik der Technischen Universität München für die bereitwillige Übernahme der Leitung der Prüfungskommission. Insbesondere hat Herr Univ.-Prof. Dr.-Ing. Manfred Bischoff vom Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart durch intensive Diskussionen und wertvolle Anregungen zum Erfolg dieser Arbeit beigetragen, wofür ich ihm sehr dankbar bin.

Bei meinen Kollegen am Lehrstuhl für Statik möchte ich mich für die stets freundliche und offene Arbeitsatmosphäre bedanken. Sie war von fachlichen Diskussionen ebenso geprägt, wie von den zahlreichen gemeinsamen Aktivitäten. Den vorhandenen Teamgeist und den freundschaftlichen Umgang miteinander habe ich stets als Bereicherung empfunden. Ausdrücklich will ich mich bei Fernað Daoud, Frank Koschnick, Alexander Kupzok und Johannes Linhard für die sehr angenehme Zusammenarbeit bedanken.

Ebenfalls will ich meiner Familie für den gewährten Rückhalt und das entgegengebrachte Verständnis danken, wobei ich den größten Dank meiner lieben Frau Sandra ausspreche. Sie hat diese Arbeit bedingungslos mitgetragen und durch ihre stete und unermüdliche Unterstützung wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

München, im Juli 2006

Roland Wüchner



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation . . . . .	1
1.2	Zielsetzung und Übersicht . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Strukturmechanik</b>	<b>7</b>
2.1	Differentialgeometrie . . . . .	7
2.2	Kontinuumsmechanische Grundlagen . . . . .	14
2.2.1	Kinematik . . . . .	14
2.2.2	Spannungsmaße und Materialgesetz . . . . .	17
2.2.3	Gleichgewicht . . . . .	21
2.3	Mechanische Modellierung von Membranstrukturen . . . . .	25
2.3.1	Membrantheorie . . . . .	25
2.3.2	Konstitutive Beziehungen . . . . .	32
2.3.3	Faltenbildung . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Numerische Elastodynamik</b>	<b>39</b>
3.1	Räumliche Diskretisierung . . . . .	39
3.1.1	Membranelement . . . . .	39
3.1.2	Seilelement . . . . .	46
3.2	Zeitdiskretisierung . . . . .	47
3.3	Linearisierung . . . . .	55
3.4	Lösungsverfahren für die geometrisch nichtlineare Elastodynamik . . . . .	57

<b>4</b>	<b>Formfindung</b>	<b>69</b>
4.1	Problemstellung und Lösungsmethoden . . . . .	69
4.2	Diskretisierung der Grundgleichungen . . . . .	75
4.3	Linearisierung . . . . .	78
4.3.1	Membran . . . . .	79
4.3.2	Seil . . . . .	79
4.4	Regularisierung des inversen Problems . . . . .	81
4.5	Vorspannung . . . . .	89
4.5.1	Isotrope Vorspannung . . . . .	90
4.5.2	Anisotrope Vorspannung . . . . .	95
4.5.3	Adaptive Vorspannung . . . . .	101
4.6	Zusammenhang zwischen Formfindung und Strukturanalyse . . . . .	120
<b>5</b>	<b>Strömungsmechanik</b>	<b>125</b>
5.1	Charakterisierung von Strömungsvorgängen . . . . .	125
5.2	Strömungsmodelle . . . . .	131
5.3	Besonderheiten in der Gebäudeaerodynamik . . . . .	133
5.4	Grundgleichungen und Randbedingungen . . . . .	137
5.5	Numerische Strömungsmechanik . . . . .	140
5.5.1	Diskretisierung . . . . .	140
5.5.2	Numerische Simulation turbulenter Strömungen . . . . .	143
5.5.3	Strömungen auf zeitveränderlichen Gebieten . . . . .	148
<b>6</b>	<b>Fluid-Struktur-Interaktion</b>	<b>155</b>
6.1	Klassifikation und Lösungsverfahren für Mehrfeldprobleme . . . . .	155
6.2	Kopplungsbedingungen . . . . .	160
6.3	Wechselwirkung von Formfindung und gekoppeltem Problem . . . . .	162
6.3.1	Einfluss der Umströmung auf die „ideale“ Form . . . . .	162
6.3.2	Interfacedefinition . . . . .	164
6.3.3	Formfindung und Strukturanalyse als „volumengekoppeltes Problem“ . . . . .	166
6.4	Berechnungskonzept . . . . .	167
6.5	Interfacediskretisierung und Informationstransfer . . . . .	169



---

6.6	Kopplungsstrategien . . . . .	171
6.6.1	Einfach gestaffelte Verfahren . . . . .	172
6.6.2	Iterativ gestaffelte Verfahren . . . . .	176
6.6.3	Programmtechnische Umsetzung . . . . .	180
6.6.4	Simulation eines überströmten Membranhängedachs . . . . .	181
<b>7</b>	<b>Formfindung und Strukturanalyse eines umströmten Vierpunktsegels</b>	<b>191</b>
7.1	Problemdefinition . . . . .	191
7.2	Numerische Simulation . . . . .	195
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>201</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>205</b>



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Ortsunabhängiges, kartesisches und krummliniges Koordinatensystem. . . . .	9
2.2	Krummlinige Koordinaten zur Beschreibung einer Fläche. . . . .	10
2.3	Ko-, kontravariante Basisvektoren und Flächennormalenvektor. . . . .	11
2.4	Bewegung eines materiellen Punkts. . . . .	15
2.5	Deformation einer Fläche – Referenz- und Momentankonfiguration. . . . .	26
2.6	Tangentiale Membranspannungen. . . . .	27
2.7	Membranschnittgrößen. . . . .	28
2.8	Flexible Membranränder. . . . .	30
2.9	Anisotropes Verhalten einer Gewebemembran. . . . .	32
2.10	Zustände einer belasteten Membran. . . . .	36
2.11	Faltenmuster einer Membran unter Schubbelastung. . . . .	37
3.1	Konfigurationen des vierknotigen Membranelements. . . . .	41
3.2	Konfigurationen des zweiknotigen Seilelements. . . . .	47
3.3	Berechnete Seileigenfrequenzen in Abhängigkeit von der Netzdichte. . . . .	59
3.4	Seileigenschwingungsformen. . . . .	60
3.5	Berechnete Membraneigenfrequenzen in Abhängigkeit von der Netzdichte. . . . .	62
3.6	Membraneigenschwingungsformen. . . . .	63
3.7	Seilnetz: System mit Anfangsbelastung und Knotennummerierung. . . . .	64
3.8	Statische Durchsenkung und nichtlineares Last-Verformungsdiagramm. . . . .	65
3.9	Bewegung des Seilnetzmittelknotens aus [AM88c]. . . . .	66
3.10	Simulation mit CARAT: Bewegung des Seilnetzmittelknotens. . . . .	67
4.1	Membrangrundformen: antiklastische und synklastische Fläche. . . . .	71
4.2	Seifenhaut- und Stoffmodelle zur Formfindung. . . . .	72

4.3	Konfigurationen für Formfindung und Strukturanalyse. . . . .	73
4.4	Formoptimierung: CAGD-Modell und feines FE-Netz. . . . .	76
4.5	Formparametrisierung mit drei Freiheitsgraden je Knoten. . . . .	77
4.6	Geometrisch gleichwertige Diskretisierungen des geraden Seils. . . . .	82
4.7	Unterschiedliche Diskretisierungen derselben Membrangeometrie. . . . .	83
4.8	Notwendigkeit von tangentialen Randanpassungen. . . . .	83
4.9	Konvergenzverhalten der <i>Updated Reference Strategy</i> . . . . .	90
4.10	Verfahrensablauf der <i>Updated Reference Strategy</i> . . . . .	91
4.11	Katenoid: Seifenhautversuch und numerische Formfindung. . . . .	94
4.12	Minimalfläche: Ausgangskonfiguration und Gleichgewichtskonfiguration. . .	95
4.13	Räumlich gekrümmte Membranfläche und abwickelbare Referenzfläche. . . .	97
4.14	Projektion der Vorspannungsinformation auf die Membranfläche. . . . .	98
4.15	Wirkung anisotroper Vorspannung am Beispiel des Katenoids. . . . .	100
4.16	„Chinese hat“-Form. . . . .	102
4.17	Ausgangskonfiguration für Formfindung von „Chinese hat“-Form. . . . .	103
4.18	Kollabierendes Katenoid mit vorgeschriebener isotroper Vorspannung. . . . .	103
4.19	Katenoid mit konstantem anisotropen Vorspannungszustand. . . . .	103
4.20	Kraftdichtemethode am Katenoid-Ersatzmodell. . . . .	105
4.21	Effekt inkompatibler Spannungen bei unterschiedlich vorgespannten Bahnen. .	106
4.22	Konfigurationen während Formfindung mit Spannungsadaption. . . . .	109
4.23	Form und Netz bei unterschiedlicher Stabilisierungsparameterwahl. . . . .	112
4.24	Adaption der Vorspannung zur Gewährleistung von Gleichgewicht. . . . .	113
4.25	Inkompatibler Spannungszustand: ebenes Tuch mit zwei Vorspannbereichen. .	114
4.26	Progressive Netzdeformation durch wiederholt unphysikalische Vorspannung. .	115
4.27	Versagen der auf Länge der Basisvektoren basierenden Spannungsadaption. . .	115
4.28	Flächenparametrisierungen in Abhängigkeit von Hauptdehnungsrichtungen. .	117
4.29	Verhalten des auf Hauptdehnungen basierenden Adaptionalgorithmus. . . . .	119
4.30	Formfindung eines komplexen Membrandachs. . . . .	121
4.31	Hauptentwurfsphasen einer Membranstruktur. . . . .	122
5.1	Wirbelablösung am Zylinder. . . . .	127
5.2	Strömungsablösung: Geschwindigkeitsprofil und Stromlinien. . . . .	128

---

5.3	Geschwindigkeitsprofile der atmosphärischen Grenzschicht. . . . .	134
5.4	Kontrollvolumendefinition und duales Netz in CFX. . . . .	142
5.5	Konzept der LES. . . . .	145
5.6	Simulationsansätze für turbulente Strömungen. . . . .	148
6.1	Fluid- und Strukturgebiet und gemeinsames Kopplungsinterface. . . . .	160
6.2	Tragverhalten der Membran unter externer Last. . . . .	162
6.3	Flutterphänomen am flexiblen Membranrand. . . . .	163
6.4	Kopplung von Formfindung und FSI über Gleichgewichtskonfiguration. . . . .	165
6.5	Softwareumgebung und Ablaufschema. . . . .	168
6.6	Non-matching grids zwischen CFD- und CSD-Partition am Interface. . . . .	170
6.7	Einfach gestaffeltes, konventionelles Lösungsverfahren. . . . .	173
6.8	Iterativ gestaffeltes Lösungsverfahren. . . . .	176
6.9	Ablaufdiagramm der Kopplung inklusive Software. . . . .	181
6.10	Berechnung der Lage des Kopplungsinterface. . . . .	182
6.11	Strömungsgebiet und Kopplungsinterface. . . . .	182
6.12	Instabilität der expliziten Kopplung. . . . .	183
6.13	Berechnungen mit impliziter Kopplungsstrategie. . . . .	184
6.14	Instabilität bei zu großem Relaxationsfaktor. . . . .	185
6.15	Simulationsverlauf mit Iterationen über die Teilfelder. . . . .	186
6.16	Deformation des Hängedachs und Geschwindigkeitsvektoren. . . . .	188
7.1	Musikpavillon auf der Bundesgartenschau in Kassel (1955). . . . .	192
7.2	Modell eines Vierpunktsegels mit flexiblen Rändern. . . . .	192
7.3	Geometrie und Abmessungen des Membrandachs. . . . .	193
7.4	Anströmsituation des Vierpunktsegels. . . . .	194
7.5	Zeitliche Variation der Einströmgeschwindigkeit. . . . .	194
7.6	Numerische Formfindung der Minimalfläche mit Randseilen. . . . .	196
7.7	Umströmung des Vierpunktsegels. . . . .	197
7.8	Druckverteilung um die Membran. . . . .	198
7.9	Deformation des Segels zu gewissen Zeitpunkten. . . . .	199



# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation

Das Tragverhalten von Membranen ist dadurch charakterisiert, dass äußere Lasten ausschließlich über Spannungen tangential zur Mittelfläche abgetragen werden. Es kann keinerlei Widerstand durch Biegung oder Querschub aktiviert werden. Der über die Dicke konstante Spannungszustand hat zur Folge, dass das Material optimal ausgenutzt wird und die Tragwerke extrem leicht und schlank sind. Des Weiteren hängt die Strukturgeometrie direkt von der Spannungsverteilung ab, was zu einer untrennbaren Kopplung von Tragwerksform und -mechanik führt. Demnach sind die resultierenden Flächen auf der Basis von mechanischen Gesetzmäßigkeiten definiert. Dies begründet die große Formenvielfalt der leichten Flächentragwerke, die meist komplexe Freiformflächen und durch geometrische Grundformen nicht zu erfassen sind.

Als eine weitere Auswirkung der Lastabtragung ausschließlich über tangentielle Membranspannungen, treten bei diesen Strukturen üblicherweise große Deformationen auf. Die Tragwerksgeometrie passt sich der (in der Regel) senkrecht zur Oberfläche wirkenden Belastung an, bis ein Gleichgewichtszustand erreicht ist.

Beim Entwurf von leichten Flächentragwerken ist zur Stabilisierung der Membran gegenüber den auftretenden Einwirkungen die Vorgabe eines Vorspannungszustands erforderlich. Er legt zusammen mit der Wahl der Randbedingungen (Lage der Hoch- und Tiefpunkte, Randseilradien) die realisierte Form fest und bestimmt auch maßgeblich die grundlegenden mechanischen Eigenschaften unter zusätzlichen Lastfällen wie Wind oder Schnee. Generell haben die adäquate Vorspannungsverteilung und ausreichende Krümmung eine fundamentale Bedeutung für die Qualität der Lastabtragung.

Die starke Wechselwirkung zwischen der Strukturgeometrie und dem mechanischen Verhalten führt auf ein, im Vergleich zu „konventionellen“ Tragwerken, anderes Vorgehen bei der Berechnung. Die Formfindung ist der erste und grundlegende Schritt beim Entwurfsprozess von Membranstrukturen. Erst danach kann eine funktionale Bewertung der Konstruktion durch Spannungs- und Verformungsberechnungen erfolgen. Eventuell erforderliche Geometriemodifikationen machen ein iteratives Vorgehen mit abwechselnder Formfindung und Strukturanalyse notwendig.

Die im Rahmen der Strukturanalyse zu berücksichtigenden Belastungen sind üblicherweise entsprechenden Normen zu entnehmen. Begründet durch die große Leichtigkeit der Membrantragwerke, kommt der Untersuchung von Belastungen infolge Windumströmung eine hohe Bedeutung zu. Jedoch ist es wegen der unbegrenzten Formenvielfalt unmöglich, Windlastannahmen für die Auslegung jeder Membranstruktur mit komplexer Geometrie bereitzustellen. Infolgedessen werden Windkanalversuche oder numerische Strömungsrechnungen erforderlich, um realistischere Druckverteilungen zu erhalten.

Erschwerend kommt hinzu, dass wegen der großen Deformationen unter Last eine Wechselwirkung mit dem Strömungsfeld auftritt. Dieses als Aeroelastizität bezeichnete Phänomen tritt außer bei leichten Flächentragwerken auch beispielsweise bei Schornsteinen, Hochhäusern, Türmen, Freileitungen und Hängebrücken auf. Das wohl bekannteste Beispiel ist die im Jahre 1940 infolge windinduzierter Schwingungen eingestürzte Tacoma-Narrows-Bridge. Durch die Instationarität der Umströmungssituation kann demnach eine Struktur zum Schwingen angeregt werden [Bis85]. In diesen Fällen ist die isolierte Betrachtung von Strömung und Struktur mittels vereinfachender Annahmen über das jeweils andere Feld nicht zulässig. Dies ist ein grundlegender Unterschied zu konventionellen, formstabilen Tragwerken, bei denen man in guter Näherung von einer unidirektionalen Kopplung ausgehen kann. In solchen Fällen ist die Durchführung der Strukturanalyse mit in der Regel stark simplifizierten Belastungsverteilungen infolge Umströmung, die unabhängig vom Strukturverhalten formuliert werden können, möglich.

Bei Membranstrukturen beeinflussen die strömungsinduzierten Deformationen wiederum das Strömungsfeld, was eine veränderte Oberflächenbelastung zur Folge hat und zu einer modifizierten Strukturantwort führt. Es liegt somit eine starke Kopplung der beiden physikalischen Felder Struktur- und Strömungsmechanik vor, die nicht mehr vernachlässigt werden darf. Damit die Strömungs-Struktur-Wechselwirkung auch adäquat erfasst wird, sind solche Fragestellungen als physikalisches Mehrfeldproblem („multiphysics-problem“) zu modellieren und zu lösen. Es ist offensichtlich, dass diese Fragestellungen der Fluid-Struktur-Interaktion (FSI) in ihrer Komplexität über die Einzeldisziplinen hinausgehen, weil sämtliche Effekte infolge der gegenseitigen Beeinflussung mitenthalten sind:

$$\mathbf{FSI} > \mathbf{Fluid} + \mathbf{Struktur}.$$

Ein sehr anschauliches Beispiel für die Wechselwirkung zwischen einem strömenden Fluid und einer sehr leichten, flexiblen Struktur ist die Fahne im Wind. Durch ihre von der Strömung verursachte Bewegung verändert sie ständig ihre Form, was zu einem modifizierten Strömungszustand führt, der wiederum eine erneute Formänderung mit sich bringt. Es ist offensichtlich, dass in diesem Fall Struktur und Strömung nicht voneinander isoliert betrachtet werden dürfen, weil sonst physikalisch nicht zutreffende Phänomene beschrieben würden. Im technischen Bereich haben Membrane auf Grund ihrer effizienten Art der Lastabtragung eine große Bedeutung und werden im Zusammenhang mit Strömungen beispielsweise als Segel bei Booten oder als Fall- oder Gleitschirme eingesetzt. Auch in diesen Fällen findet eine Rückkopplung der Strukturantwort auf die Umströmung statt, die berücksichtigt werden muss [PQ05], [CHH96], [SB01], [SBTP01], [SBK<sup>+</sup>00]. Während in diesen Fällen die Umströmung für die Funktion des jeweils betrachteten Membranbauteils



notwendig ist, so ist die Windbelastung bei leichten Flächentragwerken im Bauwesen eher eine Art Störgröße und kann aus beliebigen Richtungen auf die Membran einwirken. Folglich kann man das Strukturverhalten auch nicht allein hinsichtlich optimaler Umströmung festlegen. Hinzu kommt, dass Bauwerke in der Regel passiv auf Belastungen reagieren und nicht adaptiv zur Vermeidung problematischer, strömungsinduzierter Effekte (wie zum Beispiel Flattern) angepasst werden können. Somit kommt der durchdachten Konstruktion mit ausreichend Steifigkeit durch Vorspannung und mechanisch sinnvolle Formgebung (Krümmungen) eine Schlüsselrolle zu. Dieser wesentliche Unterschied in den Einsatzbedingungen der Strukturen unterstreicht also die Relevanz der aus Vorspannung und Randbedingungen resultierenden Ausgangsgeometrie für die Abtragung der weiteren Lastfälle. Gleichzeitig wird die Problematik von Montagezuständen oder Betriebszuständen bei beweglichen Konstruktionen, bei denen das Tragwerk nicht planmäßig vorgespannt ist, deutlich.

Zur Untersuchung und Bewertung von Wechselwirkungseffekten zwischen Membranbauwerk und Umströmung sind verschiedene Herangehensweisen denkbar. In den Fällen, in denen die üblicherweise durchgeführte, normgemäße Bemessung nicht möglich ist, kann durch experimentelle Arbeiten im Wind- oder Wasserkanal oder mittels numerischer Simulation das gekoppelte System analysiert werden.

Weil bei Bauwerken nie Versuche im Originalmaßstab durchgeführt werden können, müssen die Untersuchungen in der experimentellen Bauwerksaerodynamik an kleinskaligen Modellen durchgeführt werden, wobei bestimmte Ähnlichkeitsanforderungen zu erfüllen sind [Kai04], [Kin82], [SL85], [eV96]. Bei der Verwendung aeroelastischer Modellkörper muss neben den Ähnlichkeitsparametern der Strömung zusätzlich noch auf die Übereinstimmung der Strukturkennzahlen geachtet werden. Somit sind die zur Ermittlung von instationären Effekten unter Berücksichtigung der Fluid-Struktur-Wechselwirkung erforderlichen Versuche extrem anspruchsvoll und im Falle leichter Membrantragwerke eventuell nicht realisierbar. Ferner verursachen diese aufwändigen Modelle sehr hohe Kosten. Aus diesen Gründen werden Windkanalversuche mit aeroelastischen Modellen, falls überhaupt möglich, nur selten durchgeführt.

Bei der Verwendung numerischer Verfahren zur Berechnung des Systemverhaltens, kann die Modellierung mit den Originalabmessungen durchgeführt werden, was das bei den Experimenten vorhandene Maßstabsproblem löst. Hinzu kommt, dass als Ergebnis der numerischen Simulation sehr leicht eine Fülle an Daten erhalten werden kann, die messtechnisch nur unter großen Schwierigkeiten und Aufwand bestimmt werden könnten. Die größere Flexibilität der numerischen Verfahren hinsichtlich der umströmten Geometrie ist von Vorteil, wenn es um die Optimierung von Strukturen geht. Die hierbei notwendigen Geometriemodifikationen sind im numerischen Modell leicht zu realisieren, wohingegen beim experimentellen Vorgehen neue, kostenintensive Modelle zu bauen sind. Dies ist gerade im Zusammenhang mit Membranstrukturen von hohem Wert, weil in diesen Fällen der Entwurfsprozess sowieso häufig durch ein iteratives Vorgehen aus Formdefinition und Analyse bestimmt ist.

Gleichwohl gibt es auch bei der numerischen Berechnung von Wind-Bauwerk-Wechselwirkungen noch offene Fragen und Probleme und die alleinige Lösung dieser Problemklassen mittels Computerberechnungen ist aktuell nur schwer vorstellbar. Auf Grund

der Tatsache, dass Gebäude in einem, von der Geländebeschaffenheit und der Umgebungsbebauung abhängigen, turbulenten Strömungsfeld stehen, ist die numerische Nachbildung der virtuellen Windströmung um ein Gebäude eine äußerst komplexe und herausfordernde Aufgabe. Überdies ist ganz allgemein die korrekte numerische Simulation von turbulenten Strömungen kompliziert und in den hier betrachteten Fällen von dreidimensionalen Strukturen mit großen Abmessungen auch mit sehr hohem Berechnungsaufwand verbunden [Glü02], [Hal02]. Aus den genannten Gründen erscheint ein hybrides Vorgehen für die Umsetzung im Rahmen eines konkreten Projekts als erfolgversprechend. So können Windkanal- beziehungsweise Feldmessungen zur Strömungsdefinition bei der numerischen Modellierung des gekoppelten Problems verwendet und die numerische Simulation entsprechend ihrer Vorteile bezüglich geometrischer Flexibilität und Unabhängigkeit von Maßstabeffekten bei der Berechnung von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen eingesetzt werden. Die vorliegende Arbeit stellt einen Beitrag zur Realisierung des zweitgenannten Problemkomplexes dar.

Zusammenfassend kann man feststellen, dass Membrane durch ihre grundsätzlich optimale Art Belastungen abzutragen, detailliertere Untersuchungen bei der Umströmung durch ein Fluid erfordern als konventionelle, massivere Strukturen. Die übliche Vereinfachung, die physikalischen Felder Struktur und Strömung isoliert zu betrachten, ist auf Grund der vorhandenen Wechselwirkung nicht mehr zulässig. Bei starker physikalischer Kopplung haben die Interaktionseffekte einen wesentlichen Einfluss auf das Verhalten des Gesamtsystems und müssen deshalb bei Experimenten oder numerischen Simulationen adäquat berücksichtigt werden. Allgemein lässt sich konstatieren, dass die Sensitivität von Strukturen gegenüber strömungsinduzierten Effekten umso höher ist, je leichter und optimierter diese Konstruktionen sind. Deshalb kommt zusätzlichen Maßnahmen, die das Verhalten des Tragwerks unter einer Belastung infolge Um- oder Durchströmung verbessern und kontrollieren, eine zentrale Bedeutung bei der Realisierung von immer leistungsfähigeren Strukturen zu. Bei Membranen ist dies auf Grund der Wechselwirkung zwischen Form und mechanischem Verhalten beispielsweise durch eine Stabilisierung mittels Vorspannung und geeigneter Formgebung zu erreichen.

Ohnehin ist die Analyse von Membrantragwerken erst nach einer durchgeführten Formfindung möglich, die das, mathematisch gesehen, inverse Problem der Geometriebestimmung in Abhängigkeit von den gegebenen Randbedingungen und der Vorspannungsverteilung löst und somit die mechanisch definierten Freiformflächen erst ermittelt. Deshalb ist diese Aufgabenstellung ein wesentlicher Punkt im Rahmen der vorliegenden Arbeit. Ferner kann es erforderlich werden, die miteinander in Wechselwirkung stehenden Schritte der Formfindung und der Untersuchung des gekoppelten Problems der Fluid-Struktur-Interaktion iterativ zu durchlaufen.

## 1.2 Zielsetzung und Übersicht

Ziel dieser Arbeit ist die methodische Aufarbeitung und Umsetzung der numerischen Simulation von Fluid-Struktur-Interaktionsphänomenen bei beliebig vorgespannten Mem-

brantragwerken und der dazu erforderlichen, numerischen Formfindung. Bedingt durch das besondere Tragverhalten der leichten Flächentragwerke ergeben sich, im Vergleich zum Vorgehen bei „konventionellen“, biegesteifen Strukturen, zusätzliche Fragestellungen, die erörtert und durch ein entsprechendes Berechnungskonzept berücksichtigt werden sollen.

Die vorliegende Dissertation stellt die erste Arbeit am Lehrstuhl für Statik dar, die sich mit der Fluid-Struktur-Interaktion im Kontext von windumströmten Flächentragwerken beliebiger Geometrie beschäftigt. Deswegen ist eine prinzipielle Analyse der auftretenden Phänomene und die darauf aufbauende Modellwahl sowie die Erarbeitung und Umsetzung eines numerischen Lösungskonzepts durchzuführen. Neben der Bereitstellung und teilweisen Neuentwicklung von adäquaten Einzelfeldlösern ist das Zusammenwirken der beteiligten algorithmischen und physikalischen Felder darzustellen und zu realisieren. Außerdem soll das entwickelte, gesamte Simulationswerkzeug möglichst leistungsfähig und, auch im Hinblick auf zukünftige Erweiterungen, flexibel sein.

Zur Konkretisierung dieser Zielsetzung sind im Einzelnen Themengebiete zu erarbeiten, die in verschiedenen Disziplinen angesiedelt sind. Dementsprechend sind auch die Ansprüche an die jeweils verwendeten numerischen Verfahren von sehr unterschiedlicher Natur. Insbesondere ergibt sich aus der komplexen Kopplung von Spannungszustand und Membranform die Notwendigkeit, Methoden der Formfindung direkt in den Berechnungsablauf zu integrieren. Sie dienen der Ermittlung der mechanisch definierten Gleichgewichtsformen von vorgespannten leichten Flächentragwerken, was eine Voraussetzung für die Analyse dieser Strukturen unter zusätzlichen Lastfällen (also außer Vorspannung und den in der Formfindung berücksichtigten, formgebenden Lasten) ist. Des Weiteren eröffnet dies die Möglichkeit, bei Unzulänglichkeiten im mechanischen Verhalten, diese durch gezielte Geometriemodifikationen zu beseitigen. Hierzu wird auch die Relevanz der Formdefinition in Bezug auf ein geeignetes Strukturverhalten unter Belastung im Allgemeinen und im Speziellen durch Einwirkungen infolge Umströmung erörtert.

Die Gliederung der Arbeit orientiert sich an den aus einer Analyse des Gesamtproblems abgeleiteten Teilaspekten sowie den aus den vielfältigen Interaktionseffekten resultierenden Kopplungen. Die Aufteilung auf einzelne Kapitel ist wie folgt umgesetzt worden:

In *Kapitel 2* wird, wegen der für spätere Herleitungen herausragenden Bedeutung der Geometrie von Flächen und Kurven im Raum, zunächst ein kurzer Überblick über die benötigte Differentialgeometrie gegeben. Aufbauend auf einer Darstellung der wesentlichen Grundlagen der Kontinuumsmechanik werden die Besonderheiten des mechanischen Verhaltens von leichten Flächentragwerken erläutert.

*Kapitel 3* behandelt die zur numerischen Lösung von Problemen der geometrisch nichtlinearen Elastodynamik eingesetzte Methode der finiten Elemente in Verbindung mit impliziten Zeitintegrationsverfahren. Die hierzu notwendige räumliche und zeitliche Diskretisierung sowie die für das Newton-Raphson-Verfahren benötigte Linearisierung der algebraischen Gleichungen wird durchgeführt.

In *Kapitel 4* werden die, im Vergleich zur Analyse konventioneller Strukturen, zusätzlich erforderliche Formfindung und entsprechende numerische Lösungsmethoden diskutiert. Die

Berechnung der im Gleichgewicht stehenden Referenzgeometrie für die äußeren Belastungen wird mit der Updated Reference Strategy vorgenommen. Dieses zur Regularisierung des inversen Problems verwendete Verfahren wird um die Möglichkeit zur Vorgabe von anisotroper Vorspannung erweitert. Aufbauend auf einer grundlegenden Analyse der auftretenden Vorspannungszustände werden Aspekte der Existenz von Gleichgewichtsformen diskutiert und dabei identifizierte, physikalisch begründete Probleme durch ein neu vorgeschlagenes, adaptives Spannungskorrekturschema gelöst.

*Kapitel 5* stellt die wesentlichen Grundlagen für die im Rahmen dieser Arbeit besprochenen Strömungsprobleme bereit. Hierzu werden entsprechende Grundbegriffe und Definitionen der Strömungsmechanik sowie Aspekte hinsichtlich der numerischen Lösung skizziert. Des Weiteren werden die Besonderheiten der Strömungen im Bereich der Gebäudeaerodynamik erörtert.

In *Kapitel 6* wird zunächst eine kurze Klassifikation von Mehrfeldproblemen gegeben, um dann die zu lösende Problemstellung einzuordnen. Auf der Basis dieser Analyse wird ein vollständig partitioniertes Gesamtkonzept entwickelt, bei dem die einzelnen Verfahren für die Formfindung, die Strukturanalyse und die Strömungssimulation Eingang finden. Dabei wird besonderes Augenmerk auf die Wechselwirkung zwischen der Formfindung und dem physikalischen Mehrfeldproblem der Fluid-Struktur-Wechselwirkung gelegt. Ebenso wird die Bedeutung einer auf die starke physikalische Kopplung bei umströmten, hochflexiblen und fast masselosen Membranen abgestimmten Kopplungsstrategie zwischen Fluid und Struktur diskutiert. Als Konsequenz wird eine starke algorithmische Kopplung durch Zwischenfelditerationen mit adaptiver Unterrelaxation im Zeitschritt vorgeschlagen und realisiert.

*Kapitel 7* zeigt die Synthese aller beteiligten Disziplinen anhand der Berechnung eines umströmten Membrandachs. Beispielhaft wird die erforderliche Interaktion der Formfindung, der transienten, nichtlinearen Strukturanalyse und der numerischen Strömungssimulation demonstriert und ihre Umsetzung durch das vorgeschlagene Berechnungskonzept mit den jeweiligen Teilfeldlösern aufgezeigt.

*Kapitel 8* fasst die Arbeit zusammen und es werden Schlussfolgerungen gezogen. Darauf aufbauend wird ein Ausblick auf weiteren Forschungsbedarf gegeben.

Auf Grund des unterschiedlichen Charakters der einzelnen Fragestellungen werden numerische Beispiele direkt im Anschluss an die Analyse und Realisierung der einzelnen Teilfelder eingefügt, um die jeweilige Umsetzung und problemspezifische Aspekte zu demonstrieren. Die Synthese der einzelnen Erkenntnisse und die Einordnung der Teilprobleme in den Gesamtzusammenhang wird mittels Vorbemerkungen und resümierender Fazits in den betreffenden Kapiteln und in den Abschnitten 6.3, 6.4 vorgenommen. Die vorgeschlagene Herangehensweise wird anhand eines komplexen Beispiels am Ende der Arbeit aufgezeigt.

# Kapitel 2

## Strukturmechanik

In diesem Kapitel werden die Grundlagen zur Beschreibung des Verhaltens von Strukturen bei großen Deformationen dargestellt. Darauf aufbauend wird die allgemeine kontinuumsmechanische Beschreibung auf das spezielle Tragverhalten der Membrane angepasst. Die Besonderheiten der Membrane werden erläutert und die daraus folgenden mechanischen Modellierungsentscheidungen werden verwendet, um die geometrisch nichtlineare Membrantheorie der vorgespannten, leichten Flächentragwerke zu entwickeln. Diese stellt die Basis für die später angewendeten numerischen Lösungstechniken dar.

### 2.1 Differentialgeometrie

#### Krummlinige Koordinaten im dreidimensionalen Raum

Die mechanische Beschreibung des Verhaltens von kontinuierlichen Festkörpern soll im Rahmen dieser Arbeit mit den Methoden der klassischen Tensoranalysis erfolgen. Die dazu verwendeten differentialgeometrischen Beziehungen werden im Folgenden erörtert. Zur Beschreibung einer Struktur im dreidimensionalen Raum wird von einem raumfesten, kartesischen Koordinatensystem ausgegangen, das durch die orthogonalen Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_j$  definiert wird. Somit kann jeder Punkt im Raum durch die Koordinaten  $x^j$  seines Ortsvektors  $\mathbf{r}$  eindeutig festgelegt werden.

$$\mathbf{r} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 = x^j \mathbf{e}_j. \quad (2.1)$$

Die Koordinaten  $x^j$  sind also die raumfesten, geradlinigen Koordinaten des betrachteten Punkts im euklidischen Raum. Im letzten Teil von Gleichung (2.1) wurde von der Summationskonvention nach Einstein Gebrauch gemacht, die besagt: Tritt in einem indizierten Ausdruck derselbe Index einmal oben und einmal unten auf („stummer Index“), so wird über diesen Index summiert. Des Weiteren soll gelten, dass bei lateinischen Indizes die Zahlen 1 bis 3 durchlaufen werden und im Falle griechischer Buchstaben als Index, dieser Index nur die Zahlen 1 und 2 annimmt. Das vollständige Differential dieses Ortsvektors ist:

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^3} dx^3 = \mathbf{r}_{,j} dx^j. \quad (2.2)$$

Auch die in Gleichung (2.2) eingeführte Notation der partiellen Ableitung mittels Komma soll im Folgenden die Darstellung der maßgeblichen Gleichungen vereinfachen. Nachdem die orthonormierte Basis im raumfesten, kartesischen System ortsunabhängig ist, gilt ferner

$$d\mathbf{r} = dx^j \mathbf{e}_j \quad \text{und somit für die Basis} \quad \mathbf{e}_j = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j}. \quad (2.3)$$

Zur Beschreibung der Geometrien von Strukturen (insbesondere bei Flächentragwerken) erweist es sich als nützlich, auf krummlinige Koordinaten  $\theta^i$  überzugehen [Kli89]. Dazu überzieht man die zu betrachtende dreidimensionale Geometrie mit einem krummlinigen Koordinatennetz und der Ortsvektor eines jeden Punkts wird nun durch die krummlinigen Koordinaten  $\theta^1, \theta^2, \theta^3$  festgelegt:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ . Es soll ein eindeutiger, stetiger, mindestens einmal stetig differenzierbarer und umkehrbarer funktionaler Zusammenhang zwischen den kartesischen Koordinaten  $x^j$  und den krummlinigen Koordinaten  $\theta^i$  bestehen:  $x^i = x^i(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ . Über eine Betrachtung des totalen Differentials des Ortsvektors  $\mathbf{r}$  sollen der Zusammenhang der beiden Koordinatensysteme und die Definition der krummlinigen Basisvektoren vorgenommen werden [Ibe99].

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_{,i} d\theta^i = (x^j(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \mathbf{e}_j)_{,i} d\theta^i = \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i} \mathbf{e}_j d\theta^i. \quad (2.4)$$

Analog zum kartesischen Koordinatensystem sollen auch hier die partiellen Ableitungen  $\mathbf{r}_{,i}$  als Basisvektoren verwendet werden (vgl. Gleichung (2.3)):

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{r}_{,i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i} \mathbf{e}_j. \quad (2.5)$$

Im Gegensatz zur ortsunabhängigen Basis  $\mathbf{e}_j$  ändern sich im Allgemeinen die Basisvektoren  $\mathbf{g}_i$  bei krummlinigen Koordinaten von Punkt zu Punkt, sind (in der Regel) nicht orthogonal zueinander und haben nicht die Länge eins. Sie stellen die Tangentenvektoren an die Parameterlinien  $\theta^1, \theta^2$  und  $\theta^3$  dar und somit gehört zu jedem Punkt des Raums ein Vektordreibein, das den tangentialen Vektorraum an dieser Stelle aufspannt, siehe Abbildung 2.1. Diese drei Vektoren bilden ein Rechtssystem. Die bisher definierten, unten indizierten, krummlinigen Basisvektoren  $\mathbf{g}_i$  sind die kovarianten Basisvektoren. Zusätzlich zu dieser Basis wird eine reziproke oder duale Basis definiert. Diese oben indizierten Vektoren  $\mathbf{g}^i$  werden kontravariante Basisvektoren genannt und sind über die Bedingung

$$\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \delta_j^i \quad (2.6)$$

definiert, wobei  $\delta_j^i$  das (gemischt-)variante Kronecker-Symbol ist. Das Kroneckerdelta  $\delta_j^i$  ist definitionsgemäß  $\delta_j^i = 1$  für  $i = j$  und  $\delta_j^i = 0$  für  $i \neq j$ . An der Definition (2.6) kann man also erkennen, dass die kontravarianten Basisvektoren  $\mathbf{g}^i$  orthogonal zu den beiden anderen kovarianten Basisvektoren  $\mathbf{g}_j$  mit  $i \neq j$  sind.

Das Skalarprodukt aus zwei ko- beziehungsweise kontravarianten Basisvektoren definiert die ko- beziehungsweise kontravarianten Metrikkoeffizienten:

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = g_{ij} \quad ; \quad \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j = g^{ij} \quad (2.7)$$

Durch die Kommutativität des Skalarprodukts gilt  $g_{ij} = g_{ji}$  und  $g^{ij} = g^{ji}$ . Unter Verwendung der Metrikkoeffizienten ergibt sich eine Möglichkeit der Umrechnung der Basen:

$$\mathbf{g}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}_i = g_{ij} \mathbf{g}^j, \quad \text{mit dem matriziellen Zusammenhang: } \{g^{ij}\} = \{g_{ij}\}^{-1} \quad (2.8)$$

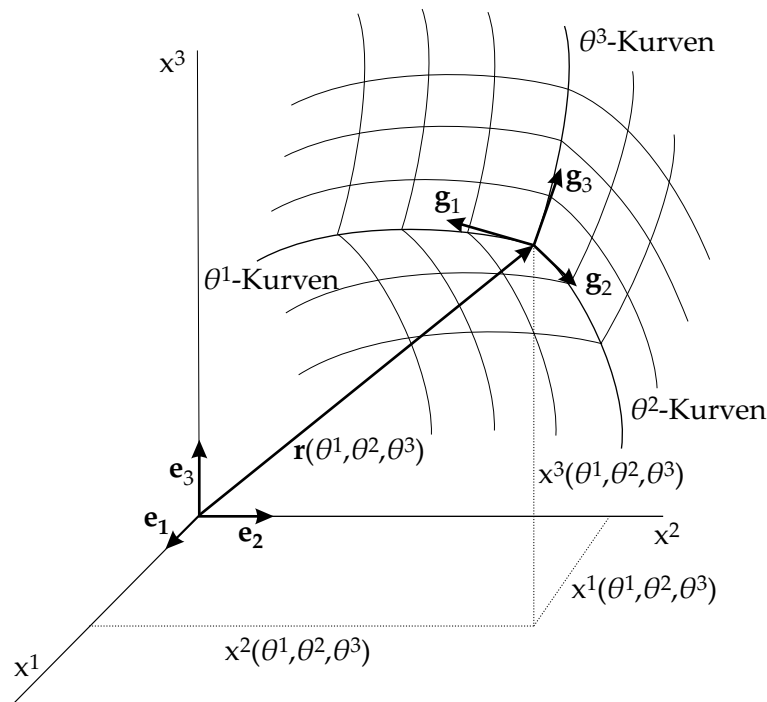


Abbildung 2.1: Ortsunabhängiges, kartesisches und krummliniges Koordinatensystem.

Mit Hilfe der Metrikoeffizienten lässt sich der Abstand zweier Punkte im metrischen Raum bestimmen. Die Metrikoeffizienten mit gleichen Indizes  $g_{ii}$  beziehungsweise  $g^{ii}$  repräsentieren das Quadrat der Länge der zugehörigen Basisvektoren  $\mathbf{g}_i$  beziehungsweise  $\mathbf{g}^i$  und die Metrikoeffizienten mit gemischten Indizes ermöglichen die Bestimmung des Winkels zwischen zwei Basisvektoren [Hol00],[Kli89], was anschaulich den Begriff „Metrikoeffizient“ rechtfertigt.

Fasst man nun die Metrikoeffizienten als die Komponenten eines Tensors zweiter Stufe auf, so ergibt dies das Eins-Element der verjüngenden Multiplikation, den Einheitstensor zweiter Stufe  $\mathbf{I}$ . Er hat also die Eigenschaft, dass sein verjüngendes Produkt mit einem Vektor  $\mathbf{u}$  sowohl von rechts als auch von links wieder den Vektor  $\mathbf{u}$  ergibt:  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$ . Mit den kovarianten, kontravarianten und gemischten Metrikoeffizienten lässt sich der Einheitstensor bezüglich verschiedener Koordinatensysteme darstellen und wird deshalb auch Metriktensor genannt. Er stellt also den Einheitstensor für eine bestimmte Basis und der dazugehörigen Metrik dar ( $\otimes$  entspricht dem dyadischen beziehungsweise tensoriellen Produkt):

$$\mathbf{I} = g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = g^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}^j = \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_i. \quad (2.9)$$

### Differentialgeometrie von Flächen im $\mathbb{R}^3$

Um später die Geometrien von Flächentragwerken zu beschreiben, wird nun eine Spezialisierung der oben eingeführten, krummlinigen Koordinaten vorgenommen [BK85]. Durch das Festsetzen der dritten krummlinigen Koordinate auf einen konstanten Wert, z. B.  $\theta^3 = 0$ ,

wird durch die beiden verbleibenden, krummlinigen Koordinaten  $\theta^1$  und  $\theta^2$  eine Fläche im dreidimensionalen Raum beschrieben. Im Folgenden soll die zu untersuchende Fläche also die im dreidimensionalen Raum eingebettete Fläche mit  $\theta^3 = 0$  sein, die durch die beiden Flächenkoordinaten  $\theta^1$  und  $\theta^2$  eindeutig beschreibbar ist [BWBR04]. Letztere werden auch als „gaußsche Flächenparameter“ bezeichnet. Des Weiteren wird festgelegt, dass die  $\theta^3$ -Koordinatenlinien Geraden und senkrecht zu der betrachteten Fläche sind.

Jeder Punkt einer Fläche im dreidimensionalen Raum wird nun durch ein Zahlenpaar  $\theta^\alpha$  eindeutig identifiziert (siehe Abbildung 2.2) und der Ortsvektor an die Fläche lautet in Abhängigkeit der Flächenparameter  $\theta^\alpha$ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta^1, \theta^2) = x^1(\theta^1, \theta^2)\mathbf{e}_1 + x^2(\theta^1, \theta^2)\mathbf{e}_2 + x^3(\theta^1, \theta^2)\mathbf{e}_3 = x^j(\theta^1, \theta^2)\mathbf{e}_j. \quad (2.10)$$

Die drei Koordinaten  $x^j$  bezüglich der ortsunabhängigen, kartesischen Basis werden also allein durch die beiden Flächenparameter festgelegt:  $x^j = x^j(\theta^1, \theta^2)$ .

Die in (2.5) definierten Basisvektoren  $\mathbf{g}_1$  und  $\mathbf{g}_2$  stellen, wie oben erwähnt, Tangentenvektoren an die Parameterlinien  $\theta^1$  und  $\theta^2$  dar und spannen in jedem Punkt der Fläche eine (von der Wahl der Flächenparametrisierung unabhängige) Tangentialebene auf. Der dritte

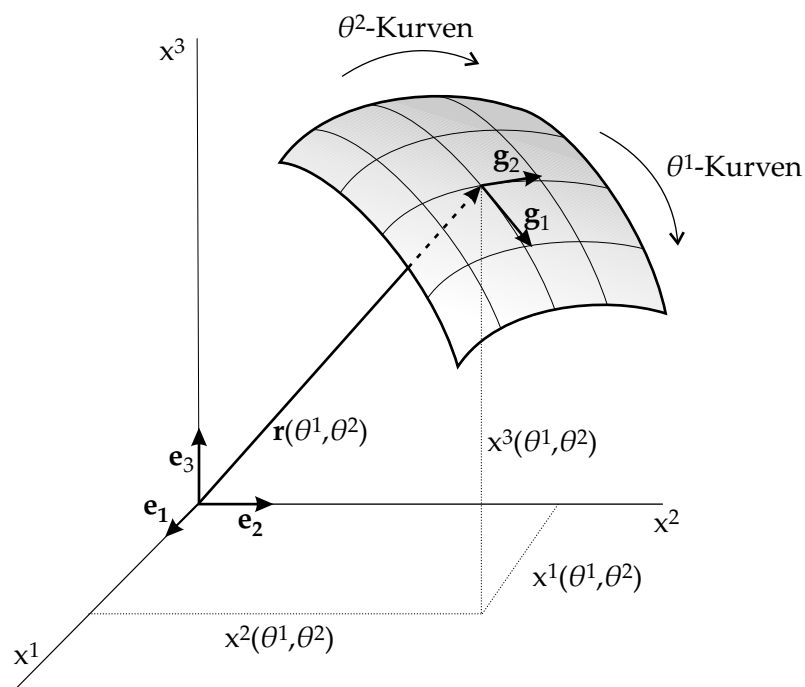


Abbildung 2.2: Krummlinige Koordinaten zur Beschreibung einer Fläche.

Basisvektor  $\mathbf{g}_3$  ist gemäß der oben getroffenen Festlegungen senkrecht zur Fläche und kann deshalb aus den Basisvektoren  $\mathbf{g}_1$  und  $\mathbf{g}_2$  nach Gleichung (2.11) errechnet werden. Der Flächennormalenvektor soll außerdem normiert (d.h.  $\mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_3 = 1$ ) sein und stellt mit den beiden Tangentenvektoren das begleitende Dreibein der Fläche dar.

$$\mathbf{g}_3 = \frac{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2}{|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2|}. \quad (2.11)$$

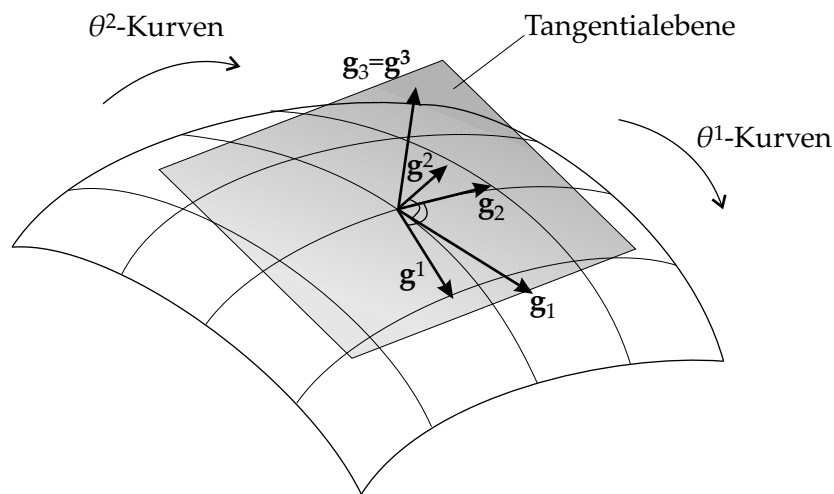


Somit kann nach Gleichung (2.12) der Ortsvektor  $\mathbf{p}$  jedes Punkts  $P$  des flächenhaften Körpers, der außerhalb der Mittelfläche ist, durch den durch die gaußschen Flächenparameter definierten Ortsvektor  $\mathbf{r}$  auf der Fläche und das Lot zur Fläche ausgedrückt werden.

$$\mathbf{p}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \mathbf{r}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \mathbf{g}_3(\theta^1, \theta^2). \quad (2.12)$$

Wegen der speziellen Eigenschaften des Flächennormalenvektors führt die Definition der kontravarianten Basis nach Gleichung (2.6) auf kontravariante Basisvektoren  $\mathbf{g}^\alpha$  der Fläche, die in der durch die kovarianten Basisvektoren  $\mathbf{g}_\alpha$  aufgespannten Tangentialebene liegen und die ko- und kontravarianten Normalenvektoren sind identisch (Abbildung 2.3). Formal gilt also:

$$\mathbf{g}^\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta = \delta_\beta^\alpha \quad ; \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{g}^3. \quad (2.13)$$



**Abbildung 2.3:** Ko-, kontravariante Basisvektoren und Flächennormalenvektor.

Um auf der gekrümmten Fläche Längen, Flächeninhalte und Winkel zu messen, werden, analog zu den Metrikoeffizienten des einbettenden Raums nach Gleichung (2.7), die metrischen Fundamentalgrößen der Fläche ( $g_{\alpha\beta}$  und  $g^{\alpha\beta}$ ) verwendet. Sie ergeben sich wegen der speziellen Wahl des dritten Basisvektors allein aus den Tangentenvektoren der Fläche:

$$\mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta = g_{\alpha\beta} \quad ; \quad \mathbf{g}^\alpha \cdot \mathbf{g}^\beta = g^{\alpha\beta}. \quad (2.14)$$

Das Bogenelement  $ds$  entlang einer auf der Fläche vorgegebenen Kurve (mit  $d\mathbf{r}$  als Differential des Ortsvektors) lässt sich folgendermaßen ermitteln:

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{r}_{,\alpha} d\theta^\alpha \cdot \mathbf{r}_{,\beta} d\theta^\beta = \mathbf{g}_\alpha d\theta^\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta d\theta^\beta = g_{\alpha\beta} d\theta^\alpha d\theta^\beta. \quad (2.15)$$

Die quadratische Differentialform in Gleichung (2.15) wird auch als erste Grundform oder auch erste Fundamentalform der Fläche bezeichnet.

Das infinitesimale Flächenstück, das von den Parameterlinien  $d\theta^1$  und  $d\theta^2$  aufgespannt wird ergibt sich unter Ausnutzung der lagrangeschen Identität  $|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2| = \sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} = \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})} = \sqrt{g}$  [Kli89] zu:

$$da = |\mathbf{r}_{,1} d\theta^1 \times \mathbf{r}_{,2} d\theta^2| = |\mathbf{r}_{,1} \times \mathbf{r}_{,2}| d\theta^1 d\theta^2 = |\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2| d\theta^1 d\theta^2 = \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2. \quad (2.16)$$

Eine große Bedeutung in der Mechanik der Flächentragwerke hat die Krümmung der Fläche. Um sie zu erhalten, wird die zweite Grundform der Fläche benötigt, die formal durch das Skalarprodukt des Differential eines Ortsvektors  $\mathbf{r}$  mit dem Differential des Einheitsnormalenvektors definiert wird:

$$d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{g}_3 = \mathbf{g}_\alpha d\theta^\alpha \cdot \mathbf{g}_{3,\beta} d\theta^\beta = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_{3,\beta} d\theta^\alpha d\theta^\beta =: -b_{\alpha\beta} d\theta^\alpha d\theta^\beta. \quad (2.17)$$

Die in dieser Formel eingeführten Abkürzungen  $b_{\alpha\beta}$  sind die kovarianten Komponenten des Krümmungstensors, die auch als Fundamentalgrößen 2. Ordnung bezeichnet werden. Die Krümmungsmessung erfolgt also über die Änderungsrate des Flächennormalenvektors in der Umgebung eines Flächenpunkts oder der Abweichung zwischen der betrachteten Fläche und der Tangentialebene. Der Zusammenhang dieser Koeffizienten mit der Flächenkrümmung ergibt sich bei Betrachtung eines Normalschnitts an dieser Stelle der Fläche. Bezeichnet man den Krümmungsradius in diesem Punkt mit  $R$ , so ist  $\frac{1}{R}$  der Betrag der Krümmung  $\kappa$ , die sich nach Gleichung (2.18) als Quotient aus der zweiten und ersten Grundform bestimmen lässt [BL73], [Bär01].

$$\kappa = \frac{b_{\alpha\beta} d\theta^\alpha d\theta^\beta}{g_{\gamma\delta} d\theta^\gamma d\theta^\delta}. \quad (2.18)$$

Die Normalschnitte, bei denen die Schnittkurven die minimale beziehungsweise maximale Krümmung haben, ergeben die Krümmungslinien. Die Werte dieser Hauptkrümmungen  $\kappa_\alpha$  (wobei  $|\kappa_\alpha| = \frac{1}{R_\alpha}$ ) ergeben sich aus einer Extremwertbetrachtung als Ergebnis der quadratischen Gleichung (2.19). Im Falle  $\kappa_1 \neq \kappa_2$  sind die Hauptkrümmungsrichtungen eindeutig bestimmt und senkrecht zueinander. Ist aber  $\kappa_1 = \kappa_2$ , so kann jede Richtung als Hauptkrümmungsrichtung angesehen werden.

$$\kappa_\alpha^2 - 2H\kappa_\alpha + K = 0 \quad \text{mit:} \quad (2.19)$$

$$2H = \frac{b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} + b_{22}g_{11}}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}, \quad (2.20)$$

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - (b_{12})^2}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}. \quad (2.21)$$

Die gewählten Abkürzungen  $H$  und  $K$  sind wichtige Invarianten in der Differentialgeometrie der Flächen, nämlich die mittlere Krümmung und die gaußsche Krümmung. Die Abhängigkeit dieser Größen von den Hauptkrümmungen  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  ist in Gleichung (2.22) angegeben:

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) \quad \text{und} \quad K = \kappa_1\kappa_2. \quad (2.22)$$

Mit Hilfe der gaußschen Krümmung  $K$  lassen sich die Flächen (lokal) klassifizieren: Ein Flächenpunkt heißt

- elliptisch, für  $K > 0$  ( $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  haben gleiches Vorzeichen)
- hyperbolisch, für  $K < 0$  ( $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  haben entgegengesetztes Vorzeichen)
- parabolisch, für  $K = 0$  (aber nicht beide  $\kappa_\alpha$  verschwinden)
- Flachpunkt, für  $K = 0$  und  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$

Global können nun Flächen mit ausschließlich elliptischen Punkten als Flächen positiver gaußscher Krümmung oder synklastische Flächen, Flächen mit ausschließlich hyperbolischen Punkten als Flächen negativer gaußscher Krümmung oder antiklastische Flächen bezeichnet werden. Flächen verschwindender gaußscher Krümmung können Flächen mit parabolischen Punkten (Zylinder, Kegel) oder Ebenen sein. Diese globale Klassifikation ist nicht immer möglich.

### Differentialgeometrie von Kurven im $\mathbb{R}^3$

Analog zu den Ausführungen bei der Differentialgeometrie von in den dreidimensionalen, euklidischen Raum eingebetteten Flächen, werden nun auch Kurven im  $\mathbb{R}^3$  durch krummlinige Koordinaten  $\theta^i$  mit den Basen nach Gleichung (2.5) ausgedrückt. Nachdem aber zur Parametrisierung einer Raumkurve ein Kurvenparameter  $\theta^1$  genügt, sollen die beiden anderen Parameterlinien  $\theta^2$  und  $\theta^3$  in jedem Kurvenpunkt orthogonal zur Kurve sein. Der Verlauf der Kurve bezüglich des raumfesten, kartesischen Koordinatensystems des euklidischen Raums nach Gleichung (2.1) wird durch den Ortsvektor  $\mathbf{r}(\theta^1)$  festgelegt:

$$\mathbf{r}(\theta^1) = x^1(\theta^1)\mathbf{e}_1 + x^2(\theta^1)\mathbf{e}_2 + x^3(\theta^1)\mathbf{e}_3 = x^j(\theta^1)\mathbf{e}_j. \quad (2.23)$$

Die Definition des an die Parameterlinie  $\theta^1$  tangentialen, krummlinigen Basisvektors  $\mathbf{g}_1$  ergibt sich mit den oben getroffenen Annahmen nun zu

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{r}_{,1} = \frac{\partial \mathbf{r}(\theta^1)}{\partial \theta^1} = \frac{\partial x^j(\theta^1)}{\partial \theta^1} \mathbf{e}_j \quad (2.24)$$

mit dem skalaren Bogenelement  $ds$ :

$$ds = \sqrt{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}} = \sqrt{\mathbf{r}_{,1} d\theta^1 \cdot \mathbf{r}_{,1} d\theta^1} = \sqrt{\mathbf{g}_1 d\theta^1 \cdot \mathbf{g}_1 d\theta^1} = \sqrt{g_{11}} d\theta^1. \quad (2.25)$$

Das begleitende Frenetsche Dreibein der Raumkurve ergibt sich nun nach Gleichungen (2.26) bis (2.28), das in der genannten Reihenfolge ein orthonormiertes Rechtssystem darstellt. Der Tangenten- und der Hauptnormalenvektor spannen die Schmiegeebene beziehungsweise der Hauptnormalen- und der Binormalenvektor die Normalebene der Kurve an jeder Stelle  $\theta^1$  auf [Wün97].

$$\mathbf{t}(\theta^1) = \frac{\mathbf{r}(\theta^1)_{,1}}{|\mathbf{r}(\theta^1)_{,1}|} = \frac{\mathbf{g}_1}{|\mathbf{g}_1|} \quad \text{Tangenten(einheits)vektor,} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{n}(\theta^1) = \frac{\mathbf{t}(\theta^1)_{,1}}{|\mathbf{t}(\theta^1)_{,1}|} \quad \text{Hauptnormalen(einheits)vektor,} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{b}(\theta^1) = \mathbf{t}(\theta^1) \times \mathbf{n}(\theta^1) \quad \text{Binormalen(einheits)vektor.} \quad (2.28)$$

Für weitergehende Ableitungen und Interpretationen, wie z.B. des Krümmungsvektors oder der Frenetschen Formeln, sei an dieser Stelle auf die Literatur verwiesen (beispielsweise [Klo97] oder [BL73]).

## 2.2 Kontinuumsmechanische Grundlagen

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Beziehungen und Definitionen der Kontinuumsmechanik für die weiteren Untersuchungen in dieser Arbeit im Rahmen der Strukturmechanik angegeben. Ausführliche und weitergehende Darstellungen zur Kontinuumsmechanik finden sich beispielsweise in [BW00], [Hau00], [Hol00], [Mal69], [SB96], [Par03] und [TN92].

### 2.2.1 Kinematik

#### Konfigurationen und Deformation

Zur Beschreibung der Deformation eines Kontinuums wird der kontinuierliche Festkörper zunächst als eine zusammenhängende Menge  $\mathbf{B}$  von materiellen Punkten  $\mathbf{M}$  angesehen. Der Rand des Körpers wird mit  $\partial\mathbf{B}$  bezeichnet. Die Platzierung der einzelnen Materiepunkte an bestimmten Orten im euklidischen, dreidimensionalen Raum  $\mathbb{R}^3$  erfolgt zur Zeit  $t \in [t_0, \infty[$  durch die Abbildung  $\chi$  nach Gleichung (2.29).

$$\chi : \begin{cases} \mathbf{B} \times \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\mathbf{M}, t) & \mapsto \mathbf{x} = \chi(\mathbf{M}, t) \end{cases} . \quad (2.29)$$

Die bijektive und stetige Abbildung  $\chi$  des materiellen Körpers  $\mathbf{B}$  wird als Konfiguration bezeichnet und ordnet jedem Materiepunkt für jeden Zeitpunkt  $t$  eindeutig einen Ortsvektor  $\mathbf{x}$  zu, was bedeutet, dass durch die Menge an Ortsvektoren für alle materiellen Punkte eines Körpers dessen Lage zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$  eindeutig festgelegt ist. Durch die Wahl eines festen Zeitpunkts  $t = t_0$  wird die sogenannte *Referenzkonfiguration* (und mit ihr auch die Ortsvektoren zu allen materiellen Punkten  $\mathbf{X} = X^i \mathbf{e}_i$ ) festgelegt, die üblicherweise die undeformierte Lage des untersuchten Festkörpers im dreidimensionalen Raum ist. Für alle Zeitpunkte  $t > t_0$  nimmt der Körper eine *Momentankonfiguration* ein, welche den aktuellen Zustand des Körpers repräsentiert. Die Abbildung  $\Phi$  zwischen der Referenz- und der Momentankonfiguration kann nun als Deformationsprozess aufgefasst werden und wird formal als Abbildung des Orts der Materiepunkte der Referenzkonfiguration  $\mathbf{X}$  auf die zugehörigen Orte der Materiepunkte zur Zeit  $t$  geschrieben:

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t) . \quad (2.30)$$

In der Regel wird in der Festkörpermechanik die Betrachtung von Vorgängen in der sogenannten lagrangeschen oder materiellen Beschreibung vorgenommen, in der sich ein Beobachter mit jedem Materiepunkt auf der von diesem zurückgelegten Bahn mitbewegt und die Eigenschaften und aktuelle Lage des betrachteten Materiepunkts misst. Formal ergibt sich diese Betrachtungsweise aus der Wahl der materiellen oder Lagrangekoordinaten  $X^i$  und der Zeit  $t$  als unabhängige Größen der Beschreibung. Im Rahmen dieser Arbeit werden alle Größen, die sich auf die Referenzkonfiguration beziehen, mit Großbuchstaben und alle Größen, die sich auf die Momentankonfiguration beziehen, mit Kleinbuchstaben bezeichnet.

Somit ergibt sich das Verschiebungsfeld  $\mathbf{d}$  der materiellen Partikel als das Differenzvektorfeld zwischen der Momentan- und der Referenzkonfiguration:

$$\mathbf{d}(\mathbf{X}, t) = \Phi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}. \quad (2.31)$$

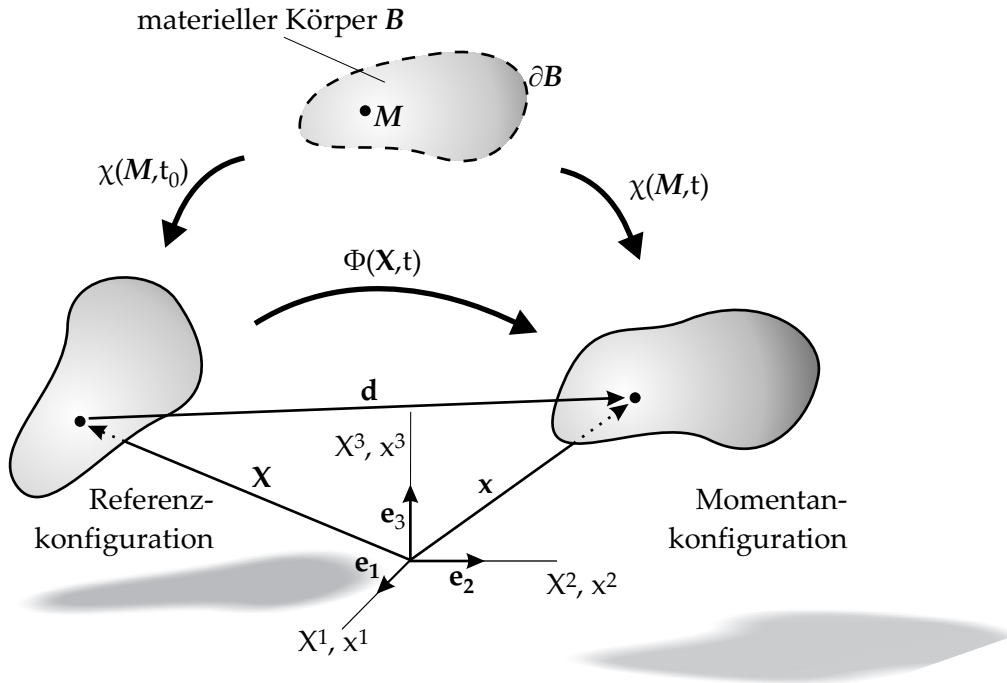


Abbildung 2.4: Bewegung eines materiellen Punktes als einparametrische Folge von Platzierungen.

Die bisher eingeführten Größen sind in Abbildung 2.4 dargestellt. Des Weiteren ergeben sich das materielle Geschwindigkeits- ( $\mathbf{v}$ ) und Beschleunigungsfeld ( $\mathbf{a}$ ) als materielle Zeitableitungen des Verformungsfelds nach Gleichung (2.31).

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{D\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{Dt} = \left. \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{d}}(\mathbf{X}, t), \quad (2.32)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}, t) = \frac{D\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)}{Dt} = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} \right|_{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) = \ddot{\mathbf{d}}(\mathbf{X}, t). \quad (2.33)$$

In den allgemeinen Ausführungen zur Platzierung der materiellen Punkte im Raum wurden die Ortsvektoren in Abhängigkeit der raumfesten, ortsunabhängigen und kartesischen Basis  $\mathbf{e}_i$  geschrieben, die den dreidimensionalen Anschauungsraum aufspannt. Üblicherweise wird der materielle Körper in der Referenz- und der Momentankonfiguration in krummlinigen, konvektiven (d.h. körperfesten) Koordinaten beschrieben (siehe Abschnitt 2.1), was zur Folge hat, dass mit der Angabe der entsprechenden Komponenten  $\theta^i$  bezüglich der krummlinigen Basis  $\mathbf{g}_i$  zu jedem Zeitpunkt  $t$  dasselbe materielle Teilchen identifiziert werden kann. Nach der oben eingeführten Konvention sind nun nach Gleichung (2.5) die Vektoren

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{x}_{,i} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} \quad \text{sowie} \quad \mathbf{G}_i = \mathbf{X}_{,i} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta^i} \quad (2.34)$$

die Basisvektoren in der verformten beziehungsweise der unverformten Konfiguration. Die lineare Transformation eines Linienelements der Referenzkonfiguration  $d\mathbf{X} = \mathbf{G}_i d\theta^i$  in ein Linienelement der Momentankonfiguration  $d\mathbf{x} = \mathbf{g}_i d\theta^i$  liefert die Definition des materiellen Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$ , welcher ein im Allgemeinen unsymmetrischer Tensor zweiter Stufe ist.

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}. \quad (2.35)$$

Der materielle Deformationsgradient transformiert also einen materiellen Tangentenvektor in einen räumlichen Tangentenvektor. Der Zusammenhang zwischen den durch die krummlinigen Basisvektoren repräsentierten Tangentialräumen ergibt sich durch Anwendung der Kettenregel zu:

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta^i} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}_i. \quad (2.36)$$

Der Deformationsgradient (und dessen Transponierte beziehungsweise Inverse) kann also verwendet werden, um Beziehungen zwischen den ko- und kontravarianten Basisvektoren der Referenz- und Momentankonfiguration herzustellen:

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}_i, \quad \mathbf{g}^i = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{G}^i, \quad \mathbf{G}_i = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{g}_i, \quad \mathbf{G}^i = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{g}^i. \quad (2.37)$$

Ganz allgemein wird eine Operation, die vektor- oder tensorwertige Größen von der Referenz- in die Momentankonfiguration transformiert als push-forward und die dazu inverse Operation, also die Transformation von der Momentan- in die Referenzkonfiguration, als pull-back bezeichnet, was beispielhaft durch den Deformationsgradienten in den ersten beiden Gleichungen von (2.37) für ein push-forward und in den letzten beiden als pull-back ausgeführt wird.

Aus den Gleichungen (2.37) lassen sich verschiedene nützliche Darstellungen des Deformationsgradienten ableiten:

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i, \quad \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{G}_i, \quad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i, \quad \mathbf{F}^T = \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i. \quad (2.38)$$

Um die Vor- und Rücktransformationen durchführen zu können, muss  $\mathbf{F}$  eindeutig umkehrbar sein, was bedeutet, dass seine Determinante  $J = \det \mathbf{F} = \frac{dv}{dV}$  (Jacobideterminante) ungleich null sein muss. Diese Determinante ist außerdem noch ein Maß für das Volumenverhältnis infinitesimaler Volumenelemente nach und vor der Deformation, was zum Ausschließen von Selbstdurchdringungen des Materials auf die Forderung nach positiver Definitheit für  $\mathbf{F}$  für alle Punkte des Materials und alle Zeiten  $t$  führt:  $J = \det(\mathbf{F}) > 0$ . Durch Auswertung der Massenbilanz in lagrangescher Betrachtung ergibt sich ferner ein Zusammenhang zwischen der Dichte des Körpers in der Referenz- und der Momentankonfiguration:

$$\rho_{S0} = \rho_S \det \mathbf{F}. \quad (2.39)$$

## Verzerrungen

Als Verzerrungsmaß ist der Deformationsgradient auf Grund der mangelnden Objektivität wenig geeignet und es wird im Folgenden ein Dehnungsmaß verwendet, das für beliebig große Deformationen einsetzbar ist, nachdem die anvisierten Problemklassen durchweg

große Verschiebungen aufweisen. Aus den zahlreichen Definitionen für Dehnungsmaße soll nun ein materieller Verzerrungstensor verwendet werden, der aus dem Deformationsgradienten abgeleitet wird: Der Green-Lagrangesche Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  kann als Differenz der Quadrate von Linienelementen in der Momentan- und der Referenzkonfiguration interpretiert werden, bezogen auf die Basen der Referenzkonfiguration und ist wie folgt definiert:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}). \quad (2.40)$$

In dieser Definition wurde ebenso der rechte Cauchy-Green-Tensor  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$  eingeführt, der die Streckung einer Materialfaser beschreibt. Ebenso wurde der in Gleichung (2.9) definierte Einheitstensor  $\mathbf{I}$  verwendet. In kovarianter Komponentenschreibweise ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i)(\mathbf{g}_j \otimes \mathbf{G}^j) - G_{ij}(\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j) \right] \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j - \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = \frac{1}{2}(g_{ij} - G_{ij}) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{d}_{,j} + \mathbf{G}_j \cdot \mathbf{d}_{,i} + \mathbf{d}_{,i} \cdot \mathbf{d}_{,j}) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Aus der letzten Gleichung wird ersichtlich, dass die Nichtlinearität im Falle großer Strukturverformungen bei einer lagrangeschen Beschreibung von den kinematischen Beziehungen herrühren. Demgegenüber ist die eulersche Betrachtung durch das Vorhandensein von konvektiven Nichtlinearitäten gekennzeichnet.

## 2.2.2 Spannungsmaße und Materialgesetz

### Spannungsmaße

Für die Beurteilung des Spannungszustands in einem Körper spielt der Spannungsvektor  $\mathbf{t}$ , der auf einer gedachten Schnittfläche des Körpers in der Momentankonfiguration wirkt, eine wichtige Rolle. Er repräsentiert die auf das gedachte Flächenelement  $\Delta a$  wirkende Kraft  $\Delta \mathbf{f}$ .

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta a} \right). \quad (2.42)$$

Nach dem Cauchy-Theorem lässt sich der Spannungsvektor aus einer Transformation des Normalenvektors des Flächenelements  $\mathbf{n}$  mittels eines Tensorfelds zweiter Stufe  $\sigma$  berechnen:

$$\mathbf{t} = \sigma \mathbf{n}. \quad (2.43)$$

Der hiermit eingeführte, symmetrische Cauchy-Spannungstensor ist vollständig bezüglich der Momentankonfiguration definiert und stellt somit ein Maß für die wahren, physikalischen Spannungen dar.

$$\sigma = \sigma^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = \sigma^{ji} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = \sigma^T. \quad (2.44)$$

Es gibt analog zu den Verzerrungsmaßen eine Vielzahl an Spannungsmaßen, die sich durch die Forderung, dass die auf ein Flächenelement wirkende, resultierende Kraft  $d\mathbf{f}$  unabhängig von der Bezugskonfiguration sein soll, ineinander umrechnen lassen. Der Zusammenhang zwischen den Vektorelementen der infinitesimalen Flächenelemente der Momentan-

und Referenzkonfiguration ergibt sich aus der Nanson-Formel:

$$\mathbf{n} \, da = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} \, dA. \quad (2.45)$$

Werden nun die wahren Spannungen auf ein Flächenelement  $dA$  der Referenzkonfiguration bezogen, so ergibt dies die Definition des unsymmetrischen 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors  $\mathbf{P}$ .

$$\mathbf{P} = \det \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} = \det \mathbf{F} \sigma^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}_j = P^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}_j. \quad (2.46)$$

Dieser Tensor ist bezüglich beider Konfigurationen definiert. Meist wird jedoch ein Tensor bevorzugt, der ausschließlich in der Referenzkonfiguration definiert ist und die vorteilhafte Eigenschaft der Symmetrie besitzt. Dieser vollständig auf die Referenzkonfiguration bezogene Tensor (Kraft und Fläche) ist der 2. Piola-Kirchhoff (PK2)-Spannungstensor  $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$ , der keine physikalische Bedeutung hat und deswegen auch Pseudospannungstensor genannt wird. Zwischen dem PK2- und dem Cauchy-Spannungstensor besteht folgender Zusammenhang:

$$\mathbf{S} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\sigma} = (\det \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T. \quad (2.47)$$

In Komponentenschreibweise ergibt sich:

$$\mathbf{S} = S^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} (\sigma^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) \mathbf{F}^{-T} = \det \mathbf{F} \sigma^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j. \quad (2.48)$$

Hieraus erhält man die wichtige Beziehung zwischen den Cauchy- und PK2-Spannungskomponenten (mit  $\det \mathbf{F} = J$ ):

$$S^{ij} = \det \mathbf{F} \sigma^{ij}. \quad (2.49)$$

Des Weiteren ist der PK2-Spannungstensor das zum Green-Lagrangeschen-Verzerrungstensor (nach Gleichung (2.40)) energetisch konjugierte Spannungsmaß und spielt deshalb auch bei der Ermittlung der inneren Energien von verformbaren Körpern eine wichtige Rolle. Damit die Auswertung der inneren Energie unabhängig vom Basissystem ist, wird üblicherweise der Verzerrungstensor mit kovarianten und der Spannungstensor mit kontravarianten Komponenten angegeben (siehe Gleichungen (2.41) und (2.48))[BWBR04]:

$$\mathbf{E} : \mathbf{S} = E_{ij} S^{kl} (\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j) : (\mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l) = E_{ij} S^{kl} \delta_k^i \delta_l^j = E_{ij} S^{ij}. \quad (2.50)$$

### Konstitutive Beziehung

Im Rahmen dieser Arbeit sollen Problemstellungen mit großen Verformungen, aber nur kleinen Verzerrungen des Materials bearbeitet werden. Die mathematische Formulierung des realen Materialverhaltens wird in diesem Fall beispielsweise durch das *St. Venant-Kirchhoff-Materialgesetz* vorgenommen, das die Verallgemeinerung des linear elastischen Hookeschen Gesetz auf große Rotationen darstellt [BLM00]. Es kann aus einer Verzerrungsenergiefunktion  $W_S(\mathbf{E})$  hergeleitet werden, deren Existenz im Falle der Greenschen Elastizität beziehungsweise Hyperelastizität Voraussetzung ist und die bezüglich der PK2-Spannungen Potentialcharakter hat. Eine Konsequenz daraus ist die Wegunabhängigkeit der von den Spannungen geleisteten Arbeit. Durch den Vergleich der Zeitableitung der Verzerrungsenergiefunktion und der inneren Spannungsleistung ( $\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}$ ) kann nun die konstitutive Beziehung



für den PK2-Spannungstensor hergeleitet werden:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W_S(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}. \quad (2.51)$$

Aus der Linearisierung dieser Größe bezüglich des im Materialgesetz verwendeten Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$  ergibt sich der *vierstufige Material- beziehungsweise Elastizitätstensor*  $\mathbf{C}$  [Hol00], [BW00]:

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial^2 W_S(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}}. \quad (2.52)$$

Somit ergibt sich mit dem Wegfall der Terme höherer Ordnung die konstitutive Gleichung des St. Venant-Kirchhoff-Materials als lineare Beziehung zwischen dem Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  und dem PK2-Spannungstensor  $\mathbf{S}$ .

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} : \mathbf{E}, \quad S^{ij} = C^{ijkl} E_{kl}. \quad (2.53)$$

Durch den als linear angenommenen Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen erklärt sich die Restriktion dieses Materialmodells auf kleine Verzerrungen. Die vollständig nichtlineare Beziehung zwischen dem Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  und den Verschiebungen  $\mathbf{d}$  nach Gleichung (2.41) erlaubt aber die Anwendung dieses Materialgesetzes für große Verformungen, was sich auch in der nichtlinearen Abhängigkeit der PK2-Spannungen von den Verschiebungen niederschlägt.

Ein allgemeiner Tensor vierter Stufe hat  $3^4 = 81$  unabhängige Konstanten als Koeffizienten  $C^{ijkl}$ , wobei sich durch die Symmetrie der Spannungs- und Verzerrungstensen die Symmetrien  $C^{ijkl} = C^{jikl} = C^{ijlk} = C^{jilk}$  ergeben und nur noch 36 Konstanten übrig bleiben. Des Weiteren kann nach dem Satz von Schwarz für das hinreichend stetige Potential  $W_S$  eine weitere Symmetrie  $C^{ijkl} = C^{klij}$  bewiesen werden, was eine Reduktion der Anzahl der Materialkonstanten auf 21 zur Folge hat [Bra95].

$$C^{ijkl} = \frac{\partial^2 W_S}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \frac{\partial^2 W_S}{\partial E_{kl} \partial E_{ij}} = C^{klij}. \quad (2.54)$$

Beim Übergang auf Voigt-Notation (Details hierzu können in [BLM00] nachgelesen werden) können die Tensoren vierter Stufe als Matrizen und die Tensoren zweiter Stufe als Vektoren geschrieben werden, was die effiziente Implementierung der konstitutiven Gleichungen vereinfacht. Die Matrizendarstellung des Elastizitätstensors (mit den im allgemeinen Fall 21 unabhängigen Materialkonstanten) ergibt sich damit wie folgt:

$$\{C^{ijkl}\} = \begin{bmatrix} C^{1111} & C^{1122} & C^{1133} & C^{1123} & C^{1113} & C^{1112} \\ & C^{2222} & C^{2233} & C^{2223} & C^{2213} & C^{2212} \\ & & C^{3333} & C^{3323} & C^{3313} & C^{3312} \\ & & & C^{2323} & C^{2313} & C^{2312} \\ & \text{symm.} & & & C^{1313} & C^{1312} \\ & & & & & C^{1212} \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

Durch Ausnutzung weiterer Materialsymmetrien kann die Anzahl der unabhängigen Materialparameter noch reduziert werden. Bei orthotropen Materialien in 3D existieren drei zueinander orthogonale Ebenen, bezüglich derer die Werkstoffeigenschaften symmetrisch sind. In diesem Fall verbleiben noch neun unabhängige Materialkonstanten und die Schubterme entkoppeln sich von den Termen in den Normalenrichtungen. Zu beachten ist, dass die Indizierung des Elastizitätstensors mit der Orientierung der Materialanisotropierichtungen (d.h. der charakteristischen Materialrichtungen) übereinstimmen muss. Eine allgemeine Darstellung mittels Strukturtenoren ist beispielsweise in [Sch96] zu finden. Für die spezielle Wahl der Anisotropierichtungen als Basis des Materialtensors ergeben sich folgende Zusammenhänge für die dreidimensionale Orthotropie (die übrigen Beiträge zu  $\mathbf{C}$  sind identisch null) [Sch96], [Rai03]:

$$\begin{aligned}
 C^{1111} &= \frac{1 - \nu_{32}\nu_{23}}{D E_2 E_3}, & C^{1122} &= \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{D E_2 E_3}, & C^{1133} &= \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{D E_2 E_3}, \\
 C^{2211} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{D E_1 E_3}, & C^{2222} &= \frac{1 - \nu_{31}\nu_{13}}{D E_1 E_3}, & C^{2233} &= \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{D E_1 E_3}, \\
 C^{3311} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{D E_1 E_2}, & C^{3322} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{31}\nu_{12}}{D E_1 E_2}, & C^{3333} &= \frac{1 - \nu_{21}\nu_{12}}{D E_1 E_2}, \\
 C^{1212} &= G_{12}, & C^{1313} &= G_{13}, & C^{2323} &= G_{23},
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

mit der Abkürzung:

$$D = \frac{1}{E_1 E_2 E_3} (1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} - \nu_{31}\nu_{12}\nu_{23}). \tag{2.57}$$

Die 12 verwendeten Materialparameter  $E_i$  (Elastizitätsmoduli),  $G_{ij}$  (Schubmoduli) und  $\nu_{ij}$  (Querkontraktionszahlen) werden durch die Symmetriebedingungen

$$\frac{\nu_{12}}{E_2} = \frac{\nu_{21}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_3} = \frac{\nu_{31}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_3} = \frac{\nu_{32}}{E_2}, \tag{2.58}$$

zu neun unabhängigen Werten. Die Werkstoffkonstanten werden in der Regel durch einachsige Zug-, Druck- und Schubversuche bestimmt.

Falls ein Material keine ausgezeichneten Richtungen hat und somit in alle Richtungen gleiches mechanisches Verhalten aufweist, so liegen unendlich viele Symmetrieebenen vor und der Werkstoff ist isotrop. Die Anzahl der unabhängigen elastischen Konstanten, um ein Material komplett zu beschreiben, reduziert sich bei isotropem Materialverhalten auf zwei. In der Ingenieurliteratur werden überwiegend der E-Modul  $E$  und die Querdehnzahl  $\nu$ , in mathematisch orientierten Texten die Lamé Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  verwendet. Zwischen ihnen besteht der folgende Zusammenhang:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \tag{2.59}$$

Die Tatsache, dass das Materialverhalten komplett richtungsunabhängig ist, erleichtert die Materialbeschreibung in beliebigen Koordinatensystemen. Die Komponenten des Elastizitätstensors bezüglich der krummlinigen Basis ergeben sich zu

$$C^{ijkl} = \lambda G^{ij} G^{kl} + \mu (G^{ik} G^{jl} + G^{il} G^{jk}), \quad \mathbf{C} = C^{ijkl} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l, \tag{2.60}$$

und in symbolischer Schreibweise, wobei  $\mathbb{I}$  der vierstufige Einheitstensor ist:

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathbb{I}. \quad (2.61)$$

Durch Einsetzen des Elastizitätstensors in die lineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung nach Gleichung (2.53) erhält man die Verknüpfung des PK2-Spannungstensors mit dem Green-Lagrange-Verzerrungstensor mittels des St. Venant-Kirchhoff-Materialgesetzes für isotrope Materialien:

$$\mathbf{S} = \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E}. \quad (2.62)$$

### 2.2.3 Gleichgewicht

#### Anfangs-Randwertproblem der Elastodynamik

Die inneren Kräfte, Einwirkungen und Trägheitskräfte eines sich bewegenden Systems werden durch die lokale Impulsbilanz miteinander ins Gleichgewicht gebracht, die zusammen mit den kinematischen (siehe Gleichung 2.40) und konstitutiven Beziehungen (siehe Gleichung 2.53) die maßgebenden Feldgleichungen der nichtlinearen Elastodynamik bildet.

Zur Herleitung der lokalen Impulsbilanz wird das verallgemeinerte zweite newtonsche Grundgesetz für Kontinua verwendet, das die Gleichheit der zeitlichen Änderung des Gesamtimpulses eines deformierten Körpers mit der Summe aller auf den Körper und dessen Oberfläche einwirkenden Kräfte fordert. In der hier verwendeten *Total-Lagrange-Formulierung* wird hierzu der kontinuierliche Körper in der Referenzkonfiguration (bezeichnet mit Index 0) betrachtet, wo er das Volumen  $\Omega_{S0}$  und die undeformierte Oberfläche  $\Gamma_{S0} = \partial\Omega_{S0}$  haben soll. Hierbei wird der Index  $S$  zur Kennzeichnung von Strukturgrößen verwendet.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{S0}} \rho_{S0} \dot{\mathbf{d}} \, d\Omega_{S0} = \int_{\Gamma_{S0}} \mathbf{T} \, d\Gamma_{S0} + \int_{\Omega_{S0}} \rho_{S0} \mathbf{B} \, d\Omega_{S0}. \quad (2.63)$$

In dieser Gleichung wurde schon die in der lagrangeschen Betrachtungsweise gültige Übereinstimmung der materiellen Zeitableitung  $\frac{D}{Dt}(\dots)$  mit der partiellen Zeitableitung  $\frac{\partial}{\partial t}(\dots)$  verwendet. Des Weiteren entspricht  $\rho_{S0}$  der Dichte im unverformten Zustand,  $\mathbf{T}(\mathbf{X}, t, \mathbf{N})$  ist der auf das undeformierte Oberflächenelement  $\Gamma_{S0} = \partial\Omega_{S0}$  bezogene Spannungsvektor und  $\mathbf{B}(\mathbf{X}, t)$  entspricht dem in der Referenzkonfiguration wirkenden Volumenkraftvektor je Masseneinheit.

Durch die Anwendung des Cauchy-Theorems nach (2.43) in der Referenzkonfiguration ( $\mathbf{T} = \mathbf{P} \mathbf{N}$ ) kann der Spannungsvektor durch den PK1-Spannungstensor gemäß (2.46) ausgedrückt werden. Mit dem gaußschen Integralsatz wird nun das Oberflächenintegral in ein Volumenintegral über die Divergenz des Spannungstensors umgeformt und man erhält die erste cauchysche Bewegungsgleichung in globaler Form:

$$\int_{\Omega_{S0}} \rho_{S0} \ddot{\mathbf{d}} \, d\Omega_{S0} = \int_{\Gamma_{S0}} \mathbf{P} \mathbf{N} \, d\Gamma_{S0} + \int_{\Omega_{S0}} \rho_{S0} \mathbf{B} \, d\Omega_{S0} = \int_{\Omega_{S0}} (\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho_{S0} \mathbf{B}) \, d\Omega_{S0}. \quad (2.64)$$

Wegen der bereits bei der Einführung der Spannungsmaße erläuterten Nachteile des PK1-Spannungstensors wird dieser mittels  $\mathbf{P} = \mathbf{F} \mathbf{S}$  durch den PK2-Spannungstensor ersetzt und

es ergibt sich die globale Bewegungsgleichung, formuliert in den zum Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  energetisch konjugierten PK2-Spannungen  $\mathbf{S}$ , zu:

$$\int_{\Omega_{S_0}} \rho_{S_0} \ddot{\mathbf{d}} \, d\Omega_{S_0} = \int_{\Omega_{S_0}} (\nabla \cdot (\mathbf{F} \mathbf{S}) + \rho_{S_0} \mathbf{B}) \, d\Omega_{S_0}. \quad (2.65)$$

Diese Gleichung muss in jedem Gebiet  $\Omega_{S_0}$  gelten und so ergibt sich die erste Bewegungsgleichung von Cauchy in lokaler Form für jeden Punkt  $\mathbf{X}$  in  $\Omega_{S_0}$  und alle Zeiten  $t$  zu:

$$\rho_{S_0} \ddot{\mathbf{d}} = \nabla \cdot (\mathbf{F} \mathbf{S}) + \rho_{S_0} \mathbf{B}. \quad (2.66)$$

Im Fall statischer oder quasi-statischer Strukturanalysen geht die Bewegungsgleichung durch die Vernachlässigung der transienten Effekte in die lokale Form der Gleichgewichtsbedingung der Elastostatik über:

$$0 = \nabla \cdot (\mathbf{F} \mathbf{S}) + \rho_{S_0} \mathbf{B}. \quad (2.67)$$

Zusammenfassend ergibt sich nun das Anfangs-Randwertproblem der nichtlinearen Elastodynamik in der lokalen, d.h. starken Form durch die Kinematik nach (2.40), das Materialgesetz nach (2.53) sowie die Bewegungsgleichung (2.66), ergänzt um die Anfangs- und Randbedingungen.

Als Anfangsbedingung sind die Position und der Deformations- und Bewegungszustand zur Zeit  $t = t_0$ , also das Verschiebungsfeld  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0$  und das Geschwindigkeitsfeld  $\dot{\mathbf{d}} = \dot{\mathbf{d}}_0$  auf dem gesamten Strukturgebiet  $\Omega_{S_0}$  vorzugeben.

Am Rand des materiellen Körpers  $\Gamma_{S_0} = \partial\Omega_{S_0}$  können nun Verschiebungen oder Kräfte vorgeschrieben sein, weshalb sich die Berandung aus einem Dirichlet-Randbereich  $\Gamma_d$  mit vorgeschriebenen Verschiebungen  $\hat{\mathbf{d}}$  (auch geometrische, wesentliche oder Dirichlet-Randbedingungen genannt) und einen Neumann-Randbereich  $\Gamma_\sigma$  mit vorgeschriebenen Spannungen  $\hat{\mathbf{T}}$  (auch statische, natürliche oder Neumann-Randbedingungen genannt) zusammensetzt. Für die Randbedingungen gilt also:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \hat{\mathbf{d}} && \text{auf } \Gamma_d && \text{für alle } t \in [t_0, T], \\ (\mathbf{F} \mathbf{S}) \mathbf{N} &= \mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}} && \text{auf } \Gamma_\sigma && \text{für alle } t \in [t_0, T]. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Wobei für die Zerlegung des Rands gilt, dass auf einem Teilrand für jede Richtung jeweils nur eine der Randbedingungen vorgegeben sein darf:

$$\Gamma_{S_0} = \Gamma_d \cup \Gamma_\sigma, \quad 0 = \Gamma_d \cap \Gamma_\sigma. \quad (2.69)$$

### Schwache Form – Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Das im vorherigen Abschnitt dargestellte Anfangs-Randwertproblem der nichtlinearen Elastodynamik stellt ein nichtlineares System partieller, hyperbolischer Differentialgleichungen dar, das in der Regel nicht analytisch gelöst werden kann. Deshalb kommen im Allgemeinen Diskretisierungsverfahren zum Einsatz, welche die approximative Lösung des genannten Problems erlauben. Die im Bereich der Strukturmechanik sehr erfolgreich angewendete Methode der finiten Elemente wird auch in dieser Arbeit verwendet, um die Aufgabenstellungen der Elastodynamik zu lösen.

Die Formulierung der Finite-Elemente-Methode basiert aber nicht auf der starken Form der Differentialgleichung, sondern hat die sogenannte schwache Form als Grundlage. Hierbei werden die maßgeblichen Gleichungen in integraler Form (d.h. nicht mehr punktweise) gelöst, was dazu führt, dass die Gleichungen bei der Wahl von Ansatzfunktionen im Bereich der numerischen Näherungsverfahren nicht mehr in allen Punkten exakt erfüllt sind. Die Lösung der schwachen Form stimmt nur mit der Lösung der starken Form überein, wenn der Raum der Ansatzfunktionen die exakte Lösung des in Differentialgleichungsform gestellten Problems enthält. Werden andere, beliebige Funktionen in die als Energie- oder Arbeitsprinzip formulierte schwache Form eingesetzt, so verbleibt ein Residuum – die zu Grunde gelegte Differentialgleichung wird nur in einem schwachen Sinn gelöst. Ein weiterer Grund für die Bezeichnung als schwache Form liegt in den geringeren Differenzierbarkeitsanforderungen an die verwendeten Lösungsfunktionen.

Zur Formulierung der in dieser Arbeit verwendeten Verschiebungselemente wird als variationelle Basis das Prinzip der virtuellen Verschiebungen verwendet. Zur mathematisch orientierten Herleitung des Prinzips der virtuellen Arbeit werden die erste cauchysche Bewegungsgleichung und die Neumann-Randbedingungen mit vektorwertigen Testfunktionen skalar multipliziert und über das Volumen des Körpers integriert. Für detailliertere Ausführungen sei beispielsweise auf [Bat02], [BLM00], [Hug00] und [Wri01] verwiesen. Die spezielle Wahl der Testfunktion als die Variation des Verschiebungsvektors  $\delta \mathbf{d}$  resultiert nach einigen Umformungen in dem mechanisch motivierten Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Die zu wählenden virtuellen Verschiebungen sind prinzipiell beliebig, infinitesimal klein und müssen kinematisch zulässig sein. Letzteres bedeutet, dass  $\delta \mathbf{d}$  den geometrischen Feldgleichungen und den geometrischen Randbedingungen, das heißt  $\mathbf{d} = \hat{\mathbf{d}}$  auf  $\Gamma_d$ , genügen muss. Außerdem ist die virtuelle Verschiebung nicht von der Zeit abhängig, weil dieser Verschiebungszustand einem sozusagen eingefrorenen Gleichgewichtszustand zu einem bestimmten, fixen Zeitpunkt überlagert wird.

Die schwache Form des Anfangs-Randwertproblems der nichtlinearen Elastodynamik in Form des Prinzips der virtuellen Verschiebungen formuliert bezüglich der Referenzkonfiguration ergibt sich zu:

$$\delta W = \int_{\Omega_{S0}} \rho_{S0} \ddot{\mathbf{d}} \cdot \delta \mathbf{d} \, d\Omega_{S0} + \int_{\Omega_{S0}} \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} \, d\Omega_{S0} - \int_{\Gamma_{S0}} \hat{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{d} \, d\Gamma_{S0} - \int_{\Omega_{S0}} \rho_{S0} \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{d} \, d\Omega_{S0} = 0. \quad (2.70)$$

Hierbei lassen sich folgende Anteile des Arbeitsprinzips identifizieren:

$$\delta W_{dyn} = \int_{\Omega_{S0}} \rho_{S0} \ddot{\mathbf{d}} \cdot \delta \mathbf{d} \, d\Omega_{S0}, \quad (2.71)$$

$$\delta W_{int} = \int_{\Omega_{S0}} \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} \, d\Omega_{S0}, \quad (2.72)$$

$$\delta W_{ext} = \int_{\Gamma_{S0}} \hat{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{d} \, d\Gamma_{S0} + \int_{\Omega_{S0}} \rho_{S0} \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{d} \, d\Omega_{S0}. \quad (2.73)$$

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen besagt also, dass die Summe der virtuellen Arbeiten der d'Alembertschen Trägheitskräfte  $\delta W_{dyn}$ , der inneren Kräfte  $\delta W_{int}$  und der äußeren Kräfte  $\delta W_{ext}$  eines Systems, das zulässigen virtuellen Verschiebungen unterworfen wird,

verschwinden muss:

$$\delta W = \delta W_{dyn} + \delta W_{int} - \delta W_{ext} = 0. \quad (2.74)$$

Im Falle von statischen Fragestellungen ergibt sich die schwache Form des Gleichgewichts als integrale Darstellung von Gleichung (2.67):

$$\delta W_{int} = \delta W_{ext}. \quad (2.75)$$

Nachdem die Verschiebungen  $\mathbf{d}$  das unbekannte Feld im Funktional  $\delta W = 0$  sind, müssen auch die virtuellen Verzerrungen  $\delta \mathbf{E}$  aus der internen virtuellen Arbeit  $\delta W_{int}$  auf virtuelle Verschiebungen  $\delta \mathbf{d}$  zurückgeführt werden, damit die Arbeitsausdrücke alle mit der speziellen Wahl der Variation der Verschiebung als Testfunktion in Verbindung gebracht werden können. Hierzu soll nun der materielle Deformationsgradient, der den Bewegungszustand des Körpers ebenso eindeutig beschreibt wie das Verschiebungsfeld, betrachtet werden und seine Variation in Abhängigkeit der Verschiebungen dargestellt werden.

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial (\mathbf{X} + \mathbf{d})}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \mathbf{d}_{,X}, \quad (2.76)$$

$$\delta \mathbf{F} = \delta \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} (\delta \mathbf{X} + \delta \mathbf{d}) = \frac{\partial (\delta \mathbf{d})}{\partial \mathbf{X}} = \delta \mathbf{d}_{,X}. \quad (2.77)$$

Die in Gleichung (2.70) benötigte Variation des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors kann wie folgt auf Verschiebungen zurückgeführt werden:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{E} &= \frac{1}{2} \delta (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{F}) \\ &= \frac{1}{2} (\delta \mathbf{d}_{,X}^T \cdot \mathbf{I} + \delta \mathbf{d}_{,X}^T \cdot \mathbf{d}_{,X} + \mathbf{I}^T \cdot \delta \mathbf{d}_{,X} + \mathbf{d}_{,X}^T \cdot \delta \mathbf{d}_{,X}). \end{aligned} \quad (2.78)$$

Unter Ausnutzung der Symmetrie des Spannungstensors  $\mathbf{S}$  ergibt sich noch eine weitere Möglichkeit, den Integranden der virtuellen, internen Arbeit zu vereinfachen:

$$\delta \mathbf{E} : \mathbf{S} = \frac{1}{2} \delta (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) : \mathbf{S} = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{F}) : \mathbf{S} = \mathbf{F}^T \delta \mathbf{F} : \mathbf{S} = \delta \mathbf{F} : \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{S}. \quad (2.79)$$

Erwähnenswert ist, dass das Prinzip der virtuellen Verschiebungen keine Annahmen über die Erhaltung der Energie enthält und deswegen auch nicht die Existenz eines Potentials voraussetzt, was bei den damit formulierten Finite-Elemente-Methoden eine große Anwendungsbreite zulässt, beispielsweise bei inelastischem Materialverhalten, Reibung oder nichtkonservativen Lasten.

Des Weiteren ist beim Prinzip der virtuellen Verschiebungen nur das Verschiebungsfeld als Unbekannte angesetzt worden und das (dynamische) Gleichgewicht und die statischen Randbedingungen werden schwach, die Kinematik (2.40) und die konstitutiven Gleichungen (2.53) werden aber stark (d.h. im lokalen Sinne) erfüllt. Prinzipiell ist es möglich, auch Mehrfeldfunktionale (zum Beispiel nach Hellinger-Reissner oder Hu-Washizu) zu formulieren, bei denen mehrere Felder als Unbekannte verwendet werden (zum Beispiel Spannungen und/oder Verzerrungen) und dann auch für diese Felder Variationen zu bilden sind. In diesen Fällen werden dann auch andere Kombinationen aus physikalischen Feldgleichungen nur im integralen Sinne gelöst, beziehungsweise müssen voraussetzungsgemäß punktweise erfüllt sein.

## 2.3 Mechanische Modellierung von Membranstrukturen

In diesem Abschnitt werden die wesentlichen Charakteristika des mechanischen Verhaltens von Membranstrukturen und die daraus resultierende Anpassung der kontinuumsmechanischen Grundlagen aus dem Abschnitt 2.2 beschrieben.

### 2.3.1 Membrantheorie

Membrane sind Kontinua, deren Geometrie durch eine Fläche (üblicherweise die Mittelfläche) im Raum beschreibbar ist und deren Abmessungen  $h$  normal zu dieser klein im Verhältnis zu den anderen charakteristischen Größen  $L$  der Membranfläche sind, d.h.  $\frac{h}{L} \ll 1$ . Bei Erfüllung dieser Eigenschaft wird die betrachtete Struktur als Flächentragwerk bezeichnet. Ziel der Flächentragwerkstheorien für Membrane und dünne Schalen ist, das mechanische Verhalten dieser Tragwerke ausschließlich in Abhängigkeit von Größen, die Funktionen von den gaußschen Flächenparametern  $\theta^1$  und  $\theta^2$  der Mittelfläche sind, zu formulieren. Das bedeutet, dass die Geometrie des betrachteten Kontinuums durch die differentialgeometrischen Eigenschaften der in den dreidimensionalen Anschauungsraum eingebetteten Mittelfläche festgelegt ist. Die gaußschen Parameter bilden üblicherweise ein körperfestes (d.h. konvektives) Koordinatensystem. Somit ist ein einmal gewählter, materieller Punkt der Membranfläche während des Deformationsvorgangs eindeutig durch das zugehörige gaußsche Parameterpaar  $\theta^\alpha$  identifizierbar. Das heißt, die räumliche Lage jedes Punkts der Tragwerksmittelfläche ist beispielsweise mit Gleichung (2.10) ermittelbar.

Wegen der bei Membranen auftretenden großen Deformationen ist eine vollständig geometrisch nichtlineare Formulierung zu verwenden, im Rahmen derer zwischen einer Referenz- und einer Momentankonfiguration unterschieden wird (siehe Abschnitt 2.2.1 für die allgemeine Definition). Dies hat zur Folge, dass jeweils eine geometrische Beschreibung der unverformten und der verformten Mittelfläche mittels der krummlinigen gaußschen Parameter  $\theta^\alpha$  notwendig wird, wobei auch hier wieder die Größen der Referenzkonfiguration mit Großbuchstaben und solche bezüglich der Momentankonfiguration mit Kleinbuchstaben bezeichnet werden, siehe Abbildung 2.5.

Das bedeutet, dass alle zur mechanischen Beschreibung notwendigen Größen nun als Funktionen der gaußschen Parameter dargestellt werden müssen. Wie in Abbildung 2.5 ersichtlich, ist der Verschiebungsvektor eines Punktes der Mittelfläche als Differenz der Ortsvektoren desselben materiellen Punktes, d.h mit gleichen Flächenkoordinaten  $\theta^\alpha$ , definiert:

$$\mathbf{d}(\theta^1, \theta^2, t) = \mathbf{x}(\theta^1, \theta^2, t) - \mathbf{X}(\theta^1, \theta^2). \quad (2.80)$$

Der entscheidende Schritt für den vollzogenen Übergang vom dreidimensionalen Kontinuum zur zweidimensionalen Beschreibung des mechanischen Verhaltens der dünnwandigen Membranstruktur ist die Semidiskretisierung des Kontinuums in Dickenrichtung, die völlig unabhängig von der Diskretisierung in der Strukturmittelfläche ist [Bis99]. Der im Rahmen dieser Arbeit ebenso auftauchende Begriff der Semidiskretisierung der Bewegungsgleichungen in der Dynamik ist formal ein identischer Vorgang: Es wird eine Dimension des Problems diskretisiert, während die anderen zunächst kontinuierlich bleiben. Die

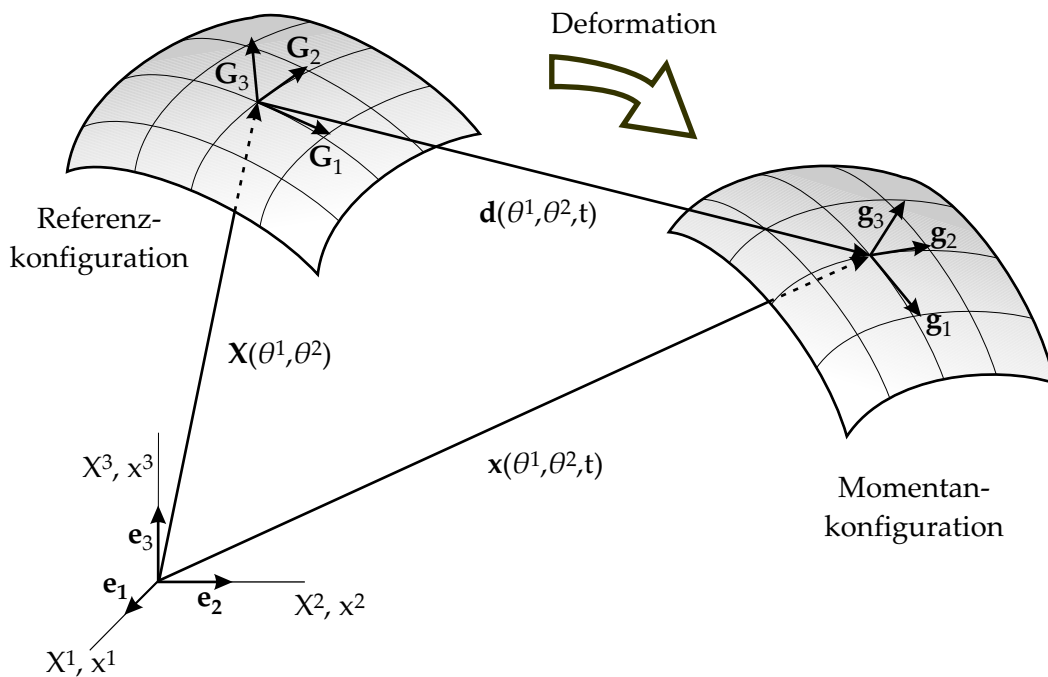


Abbildung 2.5: Deformation einer Fläche – Referenz- und Momentankonfiguration.

erwähnte Semidiskretisierung in  $\theta^3$ -Richtung basiert auf Modellannahmen, die dem charakteristischen Tragverhalten der zu beschreibenden Struktur gerecht werden müssen und dann aber eine durch eine geringere Anzahl an Unbekannten deutlich effizientere Berechnung des mechanischen Verhaltens erlauben. Ebenso werden die mechanische Einsicht in das vorliegende Problem und die Vorgabe von Randbedingungen durch den Vorgang der Vorabdickenintegration und somit der Definition von Schnittgrößen erheblich erleichtert. Diese Integration kann bei Membranen analytisch erfolgen.

Membrane sind dadurch charakterisiert, dass sie äußere Lasten ausschließlich über Spannungen tangential zur Mittelfläche abtragen können und Biegeeffekte und folglich auch Querschub keine inneren Widerstände aktivieren (beispielhaft ist ein isotroper Spannungszustand in Abbildung 2.6 dargestellt). Die Modellannahme der Membrantheorie besteht also darin, dass alle Spannungs- und Verzerrungskomponenten bezüglich der Dickenkoordinate konstant sind und nur Normal- und Schubkräfte in der Mittelfläche wirken. Des Weiteren sind Membrane dünne Tragwerke, die aus flächenhaft wirkenden Konstruktionsmaterialien bestehen, weshalb die Dicke während des Deformationsprozesses als konstant angesehen wird (Inextensibilität des Direktors). Das Vernachlässigen des Poissoneffekts in Dickenrichtung ist in sehr guter Übereinstimmung mit erhältlichen Membranmaterialien. Die Membrantheorie kann somit als der einfachste Vertreter einer Schalentheorie bezeichnet werden und die daraus zu formulierenden finiten Elemente sind in diesem Sinne räumlich gekrümmte Elemente zur Modellierung des ebenen Spannungszustands [BWBR04]. Das physikalisch beobachtbare mechanische Verhalten impliziert das Verschwinden gewisser



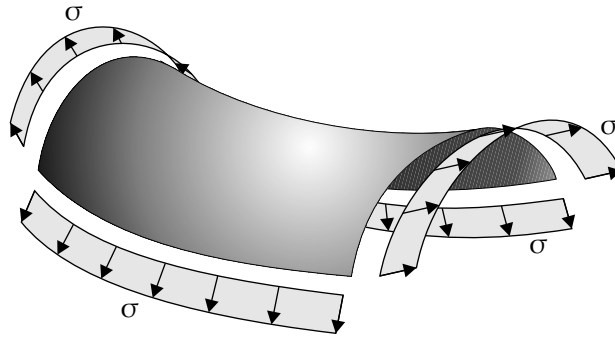


Abbildung 2.6: Tangentiale Membranspannungen.

Spannungskomponenten:

$$S^{13} = S^{23} = S^{33} = 0, \quad \sigma^{13} = \sigma^{23} = \sigma^{33} = 0. \quad (2.81)$$

Des Weiteren sind bei dem beschriebenen ebenen Spannungszustand keine transversalen Schubverzerrungen vorhanden ( $E_{13} = E_{23} = 0$ ) und der Verzerrungszustand der Membran wird allein durch den Verzerrungstensor der Fläche beschrieben:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta})\mathbf{G}^\alpha \otimes \mathbf{G}^\beta. \quad (2.82)$$

Durch die Annahme einer konstanten Spannungsverteilung über die Dicke  $h$  ergeben sich die auf die unverformte Geometrie bezogenen Komponenten des Schnittkraftensors durch eine Dickenintegration der PK2-Spannungskomponenten zu:

$$n_S^{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} S^{\alpha\beta} d\theta^3 = h \cdot S^{\alpha\beta}. \quad (2.83)$$

Die zugehörigen Schnittgrößenkomponenten in der Momentankonfiguration ergeben sich entweder analog zu Gleichung (2.83) als dickenintegrierte Cauchy-Spannungskomponenten oder aus der Umrechnung:

$$n_\sigma^{\alpha\beta} = (\det \mathbf{F})^{-1} n_S^{\alpha\beta}. \quad (2.84)$$

Zu beachten ist, dass dies Tensorkomponenten der Spannungen beziehungsweise Schnittgrößen sind und bezüglich der krummlinigen Koordinaten definiert sind. Um physikalische Aussagen zu treffen, empfiehlt es sich also, diese Spannungen in ein (lokales) kartesisches Koordinatensystem zu transformieren, damit die Komponenten in wahren, physikalischen Flächen- beziehungsweise Längeneinheiten gemessen werden und die Zahlenwerte Kraft pro Flächen- beziehungsweise Längeneinheit repräsentieren. In der Ingenieurpraxis werden üblicherweise die inneren Kräfte auch als Membranschnittgrößen in Kraft pro Längeneinheit und nicht als Spannung angegeben (siehe Abbildung 2.7), was ein weiteres Indiz für das ausgeprägt flächenhafte Verhalten der Membranstrukturen ist.

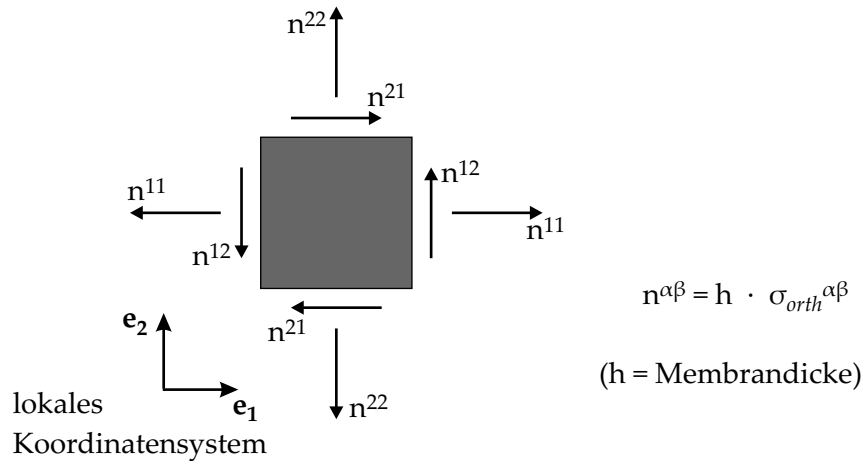


Abbildung 2.7: Membranschnittgrößen.

Zur Identifikation von bevorzugten Lastabtragsrichtungen sind die Hauptspannungen  $\sigma_*^{11}$  und  $\sigma_*^{22}$  besonders geeignet. Im Allgemeinen ergeben sich diese aus einer Hauptachsentransformation des Cauchy-Spannungstensors des ebenen Spannungszustands:

$$\det(\sigma_{esz} - \sigma_*^{11/22} \mathbf{I}) = 0 \quad \text{mit} \quad \sigma_{esz} = \sigma^{\alpha\beta} \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta. \quad (2.85)$$

Ist der ebene Spannungszustand an einem Punkt bereits bezüglich eines orthonormierten Koordinatensystems durch die Komponenten  $\sigma_{orth}^{11}$ ,  $\sigma_{orth}^{22}$  und  $\sigma_{orth}^{12}$  beschrieben, so ergeben sich durch Auswertung des charakteristischen Polynoms des Eigenwertproblems folgende, in der Tangentialebene der Membran wirkende, Hauptspannungen:

$$\sigma_*^{11/22} = \frac{1}{2}(\sigma_{orth}^{11} + \sigma_{orth}^{22}) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{orth}^{11} - \sigma_{orth}^{22})^2 + (\sigma_{orth}^{12})^2}. \quad (2.86)$$

Die Hauptspannungsrichtungen entsprechen den Richtungen, die durch die Eigenvektoren definiert oder durch eine Drehung des in der Tangentialebene der Fläche liegenden orthonormierten Koordinatensystems um den Winkel  $\phi$  erhalten werden. Der Winkel zwischen der Hauptspannungsrichtung und dem ursprünglichen, kartesischen Koordinatensystem berechnet sich aus:

$$\tan(2\phi) = \frac{2\sigma_{orth}^{12}}{\sigma_{orth}^{11} - \sigma_{orth}^{22}}. \quad (2.87)$$

Durch die über den Querschnitt konstante Spannungsverteilung nutzen Membrane das Material optimal aus, sind also leichte und effiziente Tragwerke. Sie sind hervorragend geeignet, um große Spannweiten zu überbrücken und um mobile und temporäre Bauten zu realisieren. Die extreme Schlankheit der Strukturen und die damit einhergehende Vernachlässigbarkeit der Biegesteifigkeit hat allerdings zur Folge, dass im Wesentlichen nur Zugkräfte aufgenommen werden können und die Membran bei auftretenden Druckkräften durch Beulen oder Faltenbildung ausweicht. Diesen lokalen Instabilitäten muss in der Simulation Rechnung getragen werden (siehe Abschnitt 2.3.3) oder es wird von vornherein versucht, das Schlaffwerden von Tragwerksteilen auszuschließen, indem die Struktur durch

das Aufbringen einer Vorspannung adäquat stabilisiert wird (siehe Abschnitt 4.5). Dies bedeutet nicht, dass gar keine Falten mehr auftreten können, aber die Steifigkeit und Stabilität des Tragwerks wird in jedem Fall durch eine sorgfältig ausgewählte Vorspannung signifikant erhöht. Die Erhöhung der geometrischen Steifigkeit durch gezielte Modifikation der Vorspannung verändert darüber hinaus auch die Eigenfrequenzen des Systems.

Die maßgeblichen Gleichungen müssen nun noch um die entsprechenden Initialspannungen erweitert werden. Der Vorspannungszustand ist ein im Gleichgewicht stehender Eigenspannungszustand in der Referenzkonfiguration, dem nun die aus den aufgebrachten Lasten resultierenden elastischen Spannungen überlagert werden. Das heißt, dass entgegen der üblicherweise getroffenen Annahmen bezüglich des Referenzzustands (siehe Abschnitt 2.2.1) bei Membranberechnungen die Referenzkonfiguration zwar verzerrungs-, jedoch in der Regel nicht mehr spannungsfrei ist. Eine äußere Belastung bewirkt eine Deformation gegenüber der Referenzkonfiguration, die über die Kinematik und das Stoffgesetz innere Spannungen hervorruft. Die resultierende Beanspruchung  $\mathbf{S}$  ergibt sich aus den Eigenspannungen der Referenzkonfiguration (hier als *Vorspannung* oder „prestress“ bezeichnet)  $\mathbf{S}_{pre}$  und den elastischen Spannungen  $\mathbf{S}_{el}$ :

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{pre} + \mathbf{S}_{el} = \mathbf{S}_{pre} + \mathbf{C} : \mathbf{E}, \quad (2.88)$$

$$S^{\alpha\beta} = S_{pre}^{\alpha\beta} + S_{el}^{\alpha\beta} = S_{pre}^{\alpha\beta} + C^{\alpha\beta\delta\gamma} E_{\delta\gamma}. \quad (2.89)$$

Durch die untrennbare Kopplung von Tragwerksform und -mechanik bestimmt die Vorspannung neben der Fähigkeit, äußere Lasten abzutragen, das charakteristische Erscheinungsbild der Struktur.

Eine weitere Auswirkung der ausschließlichen Lastabtragung über tangentielle Membranspannungen führt auf die üblicherweise großen Deformationen dieser Strukturen, weil sich die Tragwerksgeometrie der (in der Regel) senkrecht zur Oberfläche wirkenden Belastung anpasst, was die bereits weiter oben postulierte Notwendigkeit einer geometrisch nichtlinearen Analyse untermauert. Bei den Flächenlasten ist zwischen verschiebungsunabhängigen (beispielsweise Eigengewicht) und verschiebungsabhängigen Lasten zu unterscheiden, wobei nach [Bee84] die Verschiebungsabhängigkeit entweder nur die Lastrichtung (Folgelasten) oder Richtung und Lastintensität (Drucklasten) betreffen kann. Bei der Definition der Drucklasten nach [Bee84] ergibt sich eine Anpassung der Lastmagnitude aus der Forderung, dass die resultierende Lastwirkung bezüglich der unverformten Fläche gleich der Belastung auf der verformten Konfiguration sein muss. Außerdem wurden in Schweizerhof und Ramm [SR84] auch die Begriffe körperfeste Lasten („body attached loads“) für Lasten, die nur die Richtung in Abhängigkeit der Verschiebung ändern und raumfeste Lasten („space attached loads“) für allgemeine Belastungen, deren Lastintensität und Richtung sich in Abhängigkeit der Deformation ändern, geprägt. Ein Beispiel für körperfeste Lasten sind (unter gewissen Voraussetzungen) Gasdrücke und für raumfeste Lasten hydrostatische Drücke.

Die formale Verknüpfung der Flächenelemente in der Momentan- und der Referenzkonfiguration ergibt sich aus der nansonschen Formel (2.45). Dieser allgemeingültige Zusammenhang lässt sich aber unter Einbeziehen der Annahmen der Membrantheorie vereinfachen. Unter Ausnutzung der Tatsache, dass der Direktor inextensibel (d.h.  $|\mathbf{g}_3| = |\mathbf{G}_3| = 1$ ) und

immer senkrecht zur Fläche ist, ergibt sich nach einiger Umformung für die Transformation der durch die Parameterlinien  $d\theta^1$  und  $d\theta^2$  eingeschlossenen infinitesimalen Flächenelemente vor und nach der Deformation:

$$da = dA J = dA \det \mathbf{F}, \quad (2.90)$$

oder unter Verwendung von (2.16):

$$\det \mathbf{F} = \frac{|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2| d\theta^1 d\theta^2}{|\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2| d\theta^1 d\theta^2} = \frac{|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2|}{|\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2|} = \frac{\sqrt{\det(g_{\alpha\beta})}}{\sqrt{\det(G_{\alpha\beta})}} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{G}}. \quad (2.91)$$

Um die Flächenspannungen aufzunehmen, benötigen alle Membranstrukturen eine kontinuierliche Lagerung. Diese Lagerung kann steif ausgeführt werden, was bedeutet, dass entlang der Membranfläche die Verschiebungen komplett verhindert werden. Eine häufig zur Anwendung kommende Lagerungsart ist allerdings die flexible Lagerung, die sich entsprechend der in der Fläche wirkenden Spannungen verformt und beispielsweise durch Seile realisiert werden kann. Diese Randseile sammeln die kontinuierlichen Zugspannungen der Membran entlang des Rands und erlauben deshalb die konzentrierte Verankerung der Membranstruktur an einzelnen Lagerpunkten. Weiche Ränder sind aus Gleichgewichtsgründen immer gekrümmt (siehe Abbildung 2.8). Durch Flächenspannungen, die tangential zum Seilverlauf sind, kann die Membran unter Umständen am Kabel entlangrutschen, was in der Berechnung besonders berücksichtigt werden muss [ZAL04]. Nachdem der Spannungsverlauf an weichen Rändern von sehr vielen schwierig quantifizierbaren Parametern abhängt, wird im Rahmen dieser Arbeit das Gleiten der Randseile vernachlässigt, was eine durchaus übliche Annahme bei Membranberechnungen darstellt.



Abbildung 2.8: Flexible Membranränder (aus [Sch97a]).

Die Modellierung von Seilen ist die konsequente eindimensionale Fortsetzung der Membrantheorie: Es wird angenommen, dass alle Spannungen senkrecht zur Seilachse verschwinden und dass der Querschnitt durch eine konstante Spannungsverteilung vollständig ausgenutzt ist. Wird entsprechend der Ausführungen in Abschnitt 2.1 die Seilkurve als die krummlinige Koordinatenachse  $\theta^1$  und den in jedem Kurvenpunkt dazu senkrechten Parameterlinien  $\theta^2$  und  $\theta^3$  gewählt, so werden die mechanischen Grundgleichungen der Seile im Koordinatensystem des begleitenden (frenetschen) Dreibeins formuliert. Die Einbettung

der eindimensionalen Struktur in den dreidimensionalen, euklidischen Raum erfolgt mittels Gleichung (2.23). Der Spannungszustand im Seil wird durch den PK2-Spannungstensor beziehungsweise Cauchy-Spannungstensor wie folgt beschrieben:

$$\mathbf{S} = S^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \quad \text{mit: } S^{ij} = 0 \quad \text{für } (i, j) \neq (1, 1), \quad (2.92)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad \text{mit: } \sigma^{ij} = 0 \quad \text{für } (i, j) \neq (1, 1). \quad (2.93)$$

Die Transformation zwischen den Spannungsmaßen erfolgt gemäß (2.49) mittels  $\det \mathbf{F}$ , wobei mit der speziellen Wahl des Koordinatensystems und der Annahme einer konstanten Querschnittsfläche die Bestimmung von  $\det \mathbf{F}$  unter Berücksichtigung von Gleichung (2.25) sich deutlich vereinfacht:

$$\det \mathbf{F} = \frac{|\mathbf{g}_1| d\theta^1}{|\mathbf{G}_1| d\theta^1} = \frac{|\mathbf{g}_1|}{|\mathbf{G}_1|} = \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{G_{11}}}. \quad (2.94)$$

Analog zur Membran sind Seile in der Regel sehr schlanke Bauteile, die keine Biegung und Querkraft aufnehmen können und bei auftretenden Druckspannungen seitlich ausweichen und schlaff werden. Um dies zu verhindern wird auch hier in der Regel eine Stabilisierung durch Vorspannung erreicht und die Spannungen im Seil setzen sich aus dem Vorspannungszustand  $\mathbf{S}_{pre}$  und den durch Verzerrungen des Materials hervorgerufenen elastischen Spannungen  $\mathbf{S}_{el}$  zusammen. Im Rahmen einer totalen lagrangeschen Beschreibung soll auch hier mit Green-Lagrange-Verzerrungen und PK2-Spannungen gearbeitet werden. Das Materialverhalten wird als elastisch vorausgesetzt und durch einen Parameter, den E-Modul, der die axialen Spannungen  $S^{11}$  mit den axialen Verzerrungen  $E_{11}$  verknüpft, vollständig beschrieben. Es können also beliebig große Rotationen, aber nur kleine Verzerrungen beschrieben werden, was jedoch für die betrachteten Fälle eine gerechtfertigte Annahme darstellt.

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{pre} + \mathbf{S}_{el} = \mathbf{S}_{pre} + \mathbf{C} : \mathbf{E}, \quad (2.95)$$

$$S^{11} = S_{pre}^{11} + S_{el}^{11} = S_{pre}^{11} + C^{1111} E_{11} = S_{pre}^{11} + E E_{11}. \quad (2.96)$$

Die Berechnung der auf den tangentialen, konvektiven Basisvektor  $\mathbf{G}_1$  bezogenen Verzerrung erfolgt mit:

$$\mathbf{E} = E_{11} \mathbf{G}^1 \otimes \mathbf{G}^1 = \frac{1}{2} (g_{11} - G_{11}) \mathbf{G}^1 \otimes \mathbf{G}^1. \quad (2.97)$$

Außer  $E_{11}$  sind alle Verzerrungen identisch null und es wird angenommen, dass die Veränderung der Querschnittsfläche  $A$  vernachlässigbar ist. Damit gilt für die PK2- beziehungsweise Cauchy-Seilkräfte:

$$\mathbf{N} = N^{11} \mathbf{G}_1 \otimes \mathbf{G}_1 = A \cdot S^{11} \mathbf{G}_1 \otimes \mathbf{G}_1, \quad (2.98)$$

$$\mathbf{n} = n^{11} \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 = A \cdot \sigma^{11} \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1. \quad (2.99)$$

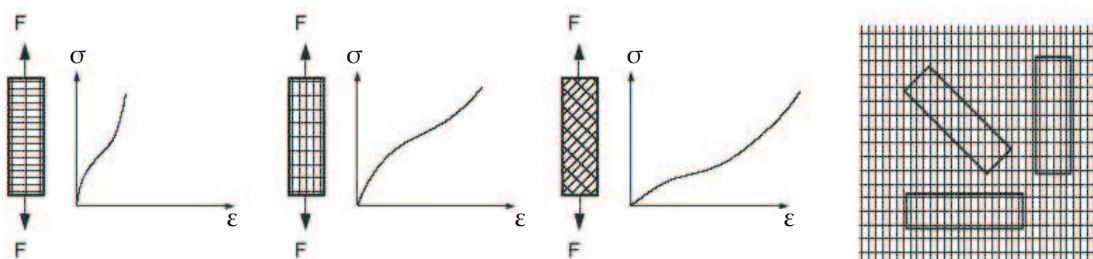
Der skalare Wert der physikalischen (d.h. um die Metrik bereinigten), wahren Normalkraft  $n_{phys}^{11}$  lässt sich wie folgt ermitteln und stellt die Stablängskraft bezüglich der verformten Geometrie dar:

$$\mathbf{n} = n^{11} \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 = n^{11} \sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{11}} \frac{\mathbf{g}_1}{\sqrt{g_{11}}} \otimes \frac{\mathbf{g}_1}{\sqrt{g_{11}}} = n_{phys}^{11} \frac{\mathbf{g}_1}{\sqrt{g_{11}}} \otimes \frac{\mathbf{g}_1}{\sqrt{g_{11}}}. \quad (2.100)$$

### 2.3.2 Konstitutive Beziehungen

Zur Realisierung von Membranstrukturen werden in der Regel Folien und beschichtete Gewebe verwendet. Während erstere isotrope Werkstoffe sind, stellen Gewebemembranen komplexe Verbundwerkstoffe dar und haben ein ausgeprägt anisotropes mechanisches Verhalten. Folien erreichen nicht die Tragfähigkeit textiler Membranwerkstoffe und werden überwiegend bei pneumatischen Konstruktionen und kleineren Spannweiten eingesetzt. Gebräuchliche Folien sind extrem dünn (ca. 0,05 mm bis 0,2 mm) und leicht [MB02], [Mor00]. Die höhere mechanische Leistungsfähigkeit erhalten die textilen Membranen durch ein Gewebe als lastabtragendes Trägermaterial, das zum Schutz gegen Umwelteinflüsse beschichtet wird.

Wegen dieses besonderen Aufbaus sind Gewebemembranen durch nichtlineares, anisotropes, nichtelastisches und zeitabhängiges mechanisches Verhalten gekennzeichnet [Blu90], [HO00]. Diese Nichtlinearität und Anisotropie ist in den Spannungs-Dehnungsdiagrammen eines Membranstreifens im einachsigen Zugversuch gemäß Abbildung 2.9 deutlich erkennbar. Die ausgeprägte Abhängigkeit des Materialverhaltens von der Orientierung der Belastungsrichtung gegenüber der Geweberichtung wird durch die (zumindest im ungespannten Zustand) näherungsweise orthogonal zueinander stehenden verwebten Fäden verursacht. Ausgehend vom Herstellungsprozess werden die beiden ausgezeichneten Materialrichtungen als Kette und Schuss bezeichnet, wobei der Kettfaden in Bahnenlängsrichtung verläuft und der Schussfaden senkrecht dazu verwebt wird. Aus diesem Herstellungsverfahren resultiert eine unterschiedliche Welligkeit der Fäden in der jeweiligen Richtung, die (neben der Bindungsart) einen großen Einfluss auf das gerichtete Materialverhalten hat und auch die Nichtlinearität auf Grund des Reckens der Einzelfäden verursacht. Das nichtelastische Verhalten der Membran ist eine Folge dieses Geradeziehens der Fäden, das in Abhängigkeit des vorher aufgetragenen Lastniveaus in permanenten Verformungen des Materials resultiert.



**Abbildung 2.9:** Anisotropes Verhalten einer Gewebemembran (aus [Gen05]).

Die für die numerische Simulation notwendigen Materialgleichungen können im Wesentlichen auf zwei verschiedene Arten ermittelt werden: Analyse detaillierter Strukturmodelle und phänomenologische Werkstoffmodelle. Bei der ersten Methode wird versucht, durch numerische Versuche anhand von detaillierten Modellierungen der Einzelbestandteile des

Materials auf die homogenisierten Werkstoffparameter Rückschlüsse zu ziehen. Dabei werden die Fäden mit Stabelementen und die Beschichtungen mit Volumenelementen modelliert [Rai03], [Dur03b]. Hierzu ist sehr präzises Wissen um die Geometrie des Gewebes, der Einzelfäden und der Materialeigenschaften der Einzelkomponenten erforderlich. Die zweite Möglichkeit entwickelt aus dem in Versuchen ermittelten Spannungs-Dehnungsverhalten des kompletten Verbundwerkstoffs ein homogenisiertes Werkstoffgesetz. Hierbei werden aus den experimentellen Daten direkt die Materialparameter für das im Rahmen der Kontinuumsmechanik gewählte Materialgesetz für den kompletten Werkstoff bestimmt. Die extrem aufwändige Bestimmung der strukturellen Details führt dazu, dass in der praktischen Berechnung der zweite Ansatz zur Anwendung kommt und des Weiteren im konstruktiven Textilbau sich sogar die Einheit  $\frac{N}{5cm}$  als Beschreibung der Materialfestigkeit (nach DIN 53354) an Stelle der Spannung in  $\frac{N}{mm^2}$  durchgesetzt hat.

Das oben beschriebene herstellungsbedingte, hochkomplexe Materialverhalten erschwert die Simulation der Strukturantworten unter Belastung und erfordert eventuell Parameterstudien zum Abschätzen der Bandbreite der prognostizierten Schnittgrößen und Verformungen in Abhängigkeit der Ergebnisse von Materialtests [Bau02]. Deswegen und auf Grund weiterer Einflussfaktoren, wie beispielsweise Alterung, Kriechen und viskoser Effekte, ist die vollständige physikalische Modellierung des Materialverhaltens kaum möglich. Deshalb werden im Rahmen dieser Arbeit klassische Werkstoffmodelle für den ebenen Spannungszustand verwendet.

Im Falle isotropen Materialverhaltens kann, ausgehend von den dreidimensionalen Materialgleichungen, die Kondensation mittels der Annahmen der Membrantheorie (Gleichung 2.81) vorgenommen werden. Die Annahmen für die dritte Basisrichtung (senkrecht zur Tangentialebene, normiert) resultieren in den folgenden Eigenschaften:

$$G^{3\alpha} = G^{\alpha 3} = G_{3\alpha} = G_{\alpha 3} = 0 \quad \text{und} \quad G^{33} = G_{33} = 1. \quad (2.101)$$

Mit der Bedingung, dass die Spannungen senkrecht zur Fläche verschwinden müssen, ergibt sich aus den Materialbeziehungen (2.60) in krummlinigen Koordinaten der folgende Zusammenhang:

$$0 = S^{33} = \left( \lambda G^{33} G^{kl} + \mu \left( G^{3k} G^{3l} + G^{3l} G^{3k} \right) \right) E_{kl}. \quad (2.102)$$

Wird aus dieser Gleichung, unter Ausnutzung der speziellen Metrikeigenschaften der Flächennormalen nach Gleichung (2.101), nun  $E_{33}$  isoliert und die resultierende Abhängigkeit zu den restlichen Verzerrungen in das dreidimensionale Materialgesetz eingesetzt, so ergeben sich die Bestimmungsgleichungen für die PK2-Spannungen im ebenen Spannungszustand (zusätzlich wird das Verschwinden der transversalen Schubverzerrungen ( $E_{13} = E_{23} = 0$ ) verwendet):

$$S^{ij} = C^{ijkl} E_{kl} + C^{ij33} E_{33} = C^{ijkl} E_{kl} - C^{ij33} \frac{\lambda G^{kl} E_{kl}}{\lambda + 2\mu} \quad \text{für: } (k, l) \neq (3, 3), \quad (2.103)$$

$$S^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\gamma\delta} - C^{\alpha\beta 33} \frac{\lambda G^{\gamma\delta} E_{\gamma\delta}}{\lambda + 2\mu}. \quad (2.104)$$

Durch mathematische Umformungen erhält man das kondensierte Materialgesetz des ebenen Spannungszustands bezüglich der krummlinigen Basisvektoren der Referenzkonfiguration:

$$S^{\alpha\beta} = \bar{C}^{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\gamma\delta}, \quad (2.105)$$

$$\bar{C}^{\alpha\beta\gamma\delta} = \bar{\lambda} G^{\alpha\beta} G^{\gamma\delta} + \mu \left( G^{\alpha\gamma} G^{\beta\delta} + G^{\alpha\delta} G^{\beta\gamma} \right) \quad \text{mit} \quad \bar{\lambda} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{Ev}{(1 - \nu^2)}. \quad (2.106)$$

Wird das Materialgesetz bezüglich eines lokal kartesischen Koordinatensystems ausgewertet, so vereinfachen sich obige Beziehungen deutlich und lassen sich in Voigt-Notation folgendermaßen angeben ( $\bar{S}$  und  $\bar{E}$  sind Spannungs- beziehungsweise Verzerrungskomponenten bezüglich der lokal kartesischen Basis):

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_{11} \\ \bar{S}_{22} \\ \bar{S}_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{E}_{11} \\ \bar{E}_{22} \\ 2\bar{E}_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.107)$$

Die lokal definierte, kartesische Basis  $\mathbf{i}_j$  soll wie folgt definiert werden: Die ersten beiden Basisvektoren  $\mathbf{i}_1$  und  $\mathbf{i}_2$  sollen in der Tangentialebene an die Fläche in dem Punkt liegen, also komplanar zu  $\mathbf{G}_1$  und  $\mathbf{G}_2$  sein. Die Ausrichtung des kartesischen Koordinatensystems bezüglich einer Rotation um die Flächennormale (sie ist die Richtung des dritten Basisvektors, sowohl des lokalen kartesischen, als auch des konvektiven Koordinatensystems) kann im Falle isotroper Materialien beliebig gewählt werden und wird in diesem Fall durch die Parallelitätsforderung des ersten kartesischen und konvektiven Basisvektors festgelegt. Die lokale Basis lässt sich wie folgt ermitteln:

$$\mathbf{i}_1 = \frac{\mathbf{G}_1}{|\mathbf{G}_1|}, \quad \mathbf{i}_3 = \mathbf{G}_3 = \frac{\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2}{|\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2|}, \quad \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_1. \quad (2.108)$$

Im Falle anisotropen Materialverhaltens ist prinzipiell die gleiche Vorgehensweise zur Kondensation des Materialtensors für den ebenen Spannungszustand möglich, die oben durchgeführt wurde. Im Rahmen dieser Arbeit soll für gewebte Membranwerkstoffe auf das von Münsch und Reinhardt vorgeschlagene Modell auf der Basis von genäherten elastischen Materialparametern zurückgegriffen werden, das in der Praxis weit verbreitet ist [MR95]. Dieses homogenisierte Werkstoffmodell geht von einem linear elastischen, orthotropen Ansatz mit vier Materialparametern aus. Bei der Auswertung ist darauf zu achten, dass Kett- und Schussrichtung als Anisotropiehauptachsen die Basisrichtungen der Spannungs-Dehnungsbeziehung in der folgenden Darstellung sind (andernfalls müssten die Komponenten des Materialtensors transformiert werden). Deshalb wird in diesem Fall das lokale kartesische Koordinatensystem an den Materialhauptachsen ausgerichtet.

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_K \\ \bar{S}_S \\ \bar{S}_{KS} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_{KS}\nu_{SK}} \begin{bmatrix} E_K & \nu_{KS}E_K & 0 \\ \nu_{SK}E_S & E_S & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{KS}\nu_{SK})G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{E}_K \\ \bar{E}_S \\ 2\bar{E}_{KS} \end{bmatrix}. \quad (2.109)$$



In dieser Gleichung sind  $E_K$  und  $E_S$  die E-Moduln in Kett- und Schussrichtung und  $G$  ist der Schubmodul.  $\nu_{KS}$  und  $\nu_{SK}$  entsprechen den Querdehnzahlen für Dehnung in Kett- beziehungsweise Schussrichtung infolge Zug in Schuss- respektive Kettrichtung. Die Indizierung mit  $K$  und  $S$  wird zur Kennzeichnung von Größen der Kett- und Schussrichtung verwendet. Die vier Materialparameter für die Dehnsteifigkeit sind miteinander über die Symmetriebedingung der anisotropen Elastizität analog zu Gleichung (2.58) verknüpft:

$$\frac{\nu_{KS}}{E_S} = \frac{\nu_{SK}}{E_K}. \quad (2.110)$$

Der vierte freie Parameter ist der Schubmodul. Diese vier unbekanntenen Materialkennwerte werden aus fadenparallelen und, im Falle der Schubsteifigkeit, aus nichtfadenparallelen, zweiachsigen Zugversuchen bestimmt. Es bleibt zu ergänzen, dass dieses Modell zur Berechnung von Membrankonstruktionen ausreichend ist, aber auf Grund der nicht nur makroskopisch begründbaren Effekte des Membrangewebes auch Verletzungen beispielsweise der bei orthotropen Gesetzen geltenden Beziehung (2.110) möglich sind. Geometrisch nicht-lineare Effekte der Mikrostruktur und auch viskose Deformationen bei Langzeitbelastungen können mit dem beschriebenen Materialgesetz nicht berücksichtigt werden, weshalb es beispielsweise nicht für Berechnungen zur Zuschnittskompensation verwendet werden sollte.

### 2.3.3 Faltenbildung

Membrane sind hochoptimierte und extrem schlanke Strukturen, die aufgebrachte Belastungen fast ausschließlich über Zugspannungen abtragen. Druckspannungen werden in der Regel durch seitliches Ausweichen senkrecht zur Membranzmittelfläche vermieden, wodurch sich der druckbeanspruchte Tragwerksteil der Lastabtragung entzieht und (im Vergleich zu den Systemabmessungen) kurzweilige Faltenmuster auftreten. Leichte Flächentragwerke erhalten also ihr, im Vergleich zum Materialeinsatz, enormes Lastabtragungspotential durch eine geschickte Formgebung mit entsprechend großen Krümmungen und insbesondere durch das Aufbringen einer Zugvorspannung. In diesem Falle muss erst die Vorspannung unter Belastung abgebaut werden, bevor eine Membran Falten bildet oder gar ganz schlaff wird. Die große Bedeutung der stabilisierenden Zugvorspannung und der (damit verbundenen) Definition der Tragwerksgeometrie und ihre Rückkopplung auf das Tragverhalten wird in Kapitel 4 detailliert dargestellt.

Ganz allgemein gibt es die folgenden drei Zustände einer Membran unter Belastung, die auch nur in gewissen Teilbereichen der Struktur vorliegen können: *straff gespannt*, *gefaltet* und *schlaff* (siehe Abbildung 2.10). Mit dieser Unterscheidung wird auch eine Präzisierung und Abgrenzung der Begriffe der Faltenbildung und des Faltengebiets vorgenommen. Herrscht in einer Region der Struktur ein reiner Zugspannungszustand vor, so ist die Membrangeometrie glatt und das straff gespannte Material trägt die Belastung durch einen zweidimensionalen Spannungszustand ab. Demgegenüber charakterisiert der schlaffe, spannungsfreie Zustand genau das gegenteilige Strukturverhalten. Diese Gebiete bilden sich bei allseitigen Stauchungen der Membran aus und ergeben praktisch regellose und unbestimmte Verformungen. In diesem Zustand lassen Membrane keinen Lastabtrag zu und es gibt beliebig viele Gleichgewichtslagen, die, ohne innere Kräfte zu aktivieren, ineinander

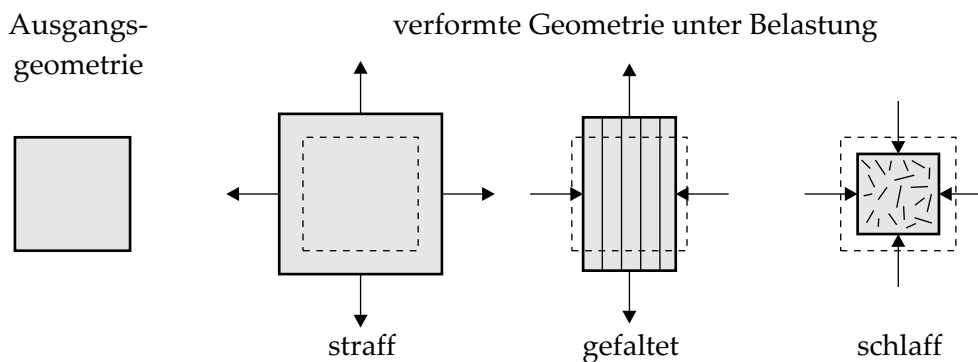
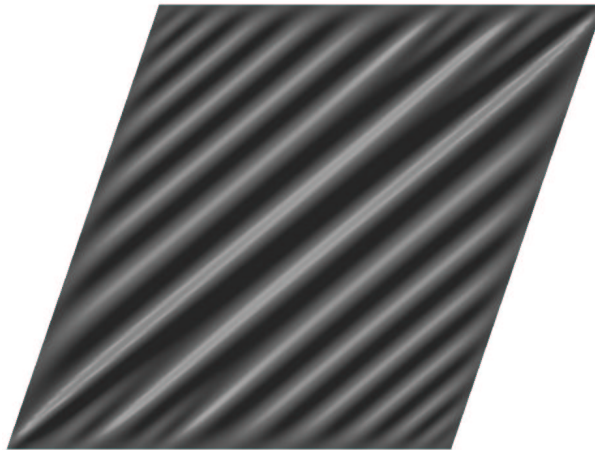


Abbildung 2.10: Zustände einer belasteten Membran.

überführt werden können. Faltengebiete entstehen bei Stauchung in einer und Zug in der dazu senkrechten Richtung. Die verbleibenden Zugspannungen garantieren die Tragfähigkeit der Gesamtstruktur und das Abtragen der Lasten im Faltenbereich. Geometrisch sind Faltengebiete typischerweise durch eine relativ gering gekrümmte, durch Zug stabilisierte Faltenlängsrichtung und in Faltenquerrichtung durch hohe Krümmungen, häufige Krümmungswechsel und verhältnismäßig kleine Detailabmessungen charakterisiert. Letzteres unterscheidet die durch Druck induzierte lokale Ausweichbewegung der Struktur von den großen „strukturellen Falten“ oder Wellen, die unter gewissen Belastungszuständen als die dazugehörige Gleichgewichtskonfiguration entstehen. Diese Abgrenzung basiert darauf, dass die kurzwelligen Faltenmuster bereits zu einer Längenskala gehören, in der die zugehörigen Schlankheiten so gering sind, dass Biegeeffekte nicht mehr vernachlässigt werden dürfen, wohingegen die langwelligen Deformationen im Rahmen des normalen Membrantragverhaltens berücksichtigt werden können.

Faltenbildung kann strukturmechanisch als ein lokales Stabilitätsproblem aufgefasst werden. Betrachtet man den Faltenwurf als ein Schalenbeulproblem unter der Prämisse der Annahmen der Membrantheorie, nämlich des vollständigen Vernachlässigens der Biegesteifigkeit, so ergibt sich als Grenzwert der kritischen Last die Forderung nach Druckspannungsfreiheit. Die Abmessungen von Schalenbeulen sind wesentlich vom Verhältnis von Biege- zu Dehnsteifigkeit abhängig und resultieren im Falle der idealen Membran in unendlich kleinen Faltenwellenlängen. Somit ist im Falle der reinen Membrantheorie auch eine rein lokale Betrachtung dieses Stabilitätsproblems gerechtfertigt, was erst die Formulierung lokaler Faltenkriterien ermöglicht [Wie02]. Im Gegenzug ist die zutreffende Geometriepäsentation von Faltenzonen mit der Membrantheorie unmöglich. Unter anderem aus diesen Gründen gibt es prinzipiell zwei grundlegend verschiedene Herangehensweisen bei der Analyse von gefalteten Membranen mit der FEM:

- Detaillierte Simulation des Faltungsvorgangs mit Darstellung der tatsächlich auftretenden Faltenmorphologie und die genaue Ermittlung der geometrischen Abmessungen der Falten und des Faltengebiets. Hierzu kann unter Umständen eine sehr feine Diskretisierung mit Schalenelementen zur möglichen Quantifizierung der Biegeeffekte infolge der lokal sehr hohen Krümmungen notwendig sein. Diese Vorgehensweise



**Abbildung 2.11:** Faltenmuster einer Membran unter Schubbelastung.

ist sehr aufwändig und kann hinsichtlich der numerischen Stabilität der Simulation problematisch sein. Die üblichen Anforderungen der Schalenstabilitätsanalyse hinsichtlich der Netzabhängigkeit, der Imperfektionswahl und der Wahl des Lösungsverfahrens mit all ihren Konsequenzen sind hierbei zu beachten. Beispielfhaft ist in Abbildung 2.11 das Ergebnis einer Simulationsrechnung einer Membran in einem Scherrahmen dargestellt. Zur Anwendung kamen Schalenelemente basierend auf der Kirchhoff-Theorie und es wurde eine sehr feine Netzauflösung zur korrekten Abbildung der Faltdetails benötigt.

- Modellierung der Struktur mit den im Vergleich zu Schalenelementen deutlich weniger aufwändigen Membranelementen und Beschreibung der mechanischen Wirkung von gefalteten Regionen auf das Tragverhalten der Gesamtstruktur, ohne die Faltdetails aufzulösen. Diese Vorgehensweise muss nicht (wie zuvor beschrieben) den beträchtlichen Anforderungen an die Netzfeinheit genügen und das Konvergenzverhalten der numerischen Verfahren ist oft besser als bei der direkten Simulation der Faltdetails. Damit die Auswirkung der, im Verhältnis zu den Strukturabmessungen kleinskaligen, Falteneffekte auf das Gesamttragverhalten trotzdem korrekt abgebildet wird, muss die Beschreibung der Faltengebiete innerhalb der Membranebene durch Faltenmodelle vorgenommen werden.

Um Falten zu modellieren, sind geeignete mechanische Formulierungen notwendig, die eine eindeutige Abgrenzung von straffen, gefalteten und schlaffen Membranbereichen erlauben. Diese Faltenkriterien lassen sich gemäß der betrachteten Faltenursache in drei Kategorien einordnen [Zie01]:

- Hauptspannungsbasierte Kriterien, die allgemein anwendbar sind, aber bei gewissen Spannungszuständen zu einer fehlerhaften Beurteilung des betrachteten Strukturgebiets führen können.
- Hauptverzerrungsbasierte Kriterien, welche die Unzulänglichkeit der Hauptspan-

nungskriterien vermeiden, jedoch nur für isotropes Materialverhalten Gültigkeit besitzen.

- Kombination der beiden oben aufgeführten Beurteilungsmöglichkeiten zu einem kombinierten hauptspannungs- und hauptverzerrungsbasierten Kriterium, das sowohl für isotrope als auch anisotrope Materialien gültig ist. Ein kombiniertes Faltenkriterium wurde von Roddeman entwickelt [Rod91].

Weil in der Membrantheorie wegen der vernachlässigten Biegesteifigkeit keine detaillierten Aussagen über die Verformungen in gefalteten Regionen der Struktur getroffen werden können, werden diese Bereiche modelliert, wobei folgendermaßen vorgegangen wird: Sind bei einer statischen oder dynamischen Berechnung die Strukturantwort und der zugehörige Spannungs- und Verzerrungszustand bekannt, so kann mittels der Faltenkriterien eine Kategorisierung des Faltungszustands einer Membran erfolgen und im Falle nicht straffer Gebiete werden, entsprechend des gewählten Modellierungsansatzes, spezielle Modifikationen vorgenommen. Dies stellt auch die membrantypische Druckspannungsfreiheit sicher. Die numerische Behandlung von Faltengebieten kann prinzipiell auf zwei unterschiedliche Arten erfolgen.

Bei der ersten Herangehensweise wird die Faltenmodellierung auf der Grundlage konstitutiver Ansätze vorgenommen. Hierbei wird das Werkstoffverhalten derart modifiziert, dass keine Druckspannungen auftreten. Dazu wird ein fiktives Werkstoffmodell formuliert, das eine lastabhängige Orthotropie aufweist und somit die Materialsteifigkeiten in Faltenquerichtung stark reduziert beziehungsweise zu null gesetzt werden. Der verhältnismäßig einfachen Implementierung dieses Konzepts steht häufig ein schlechteres Konvergenzverhalten gegenüber. Trotzdem werden diese Modelle häufig eingesetzt, da sie keine zusätzlichen Freiheitsgrade benötigen. Beispiele für Modellierungen mit konstitutiven Ansätzen sind in [Bee84], [CS88], [GR04], [Hän95], [Ros05], [RLVOn05] und [RLVOn03] zu finden.

Die zweite Modellierungsstrategie basiert auf der Modifikation der kinematischen Beschreibung der Membrane im Faltengebiet. Hierzu wird das Deformationsverhalten einer fiktiven Membrankonfiguration beschrieben, die der mittleren Lage der gefalteten Membran entspricht. Bei dieser Art von Modellen werden zusätzliche Variablen benötigt, die ein Maß für die durch die Faltenbildung bedingten, äquivalenten Dehnungen darstellen. Die algorithmische Behandlung dieser zusätzlichen kinematischen Größe erfolgt in der Regel auf Elementebene, da im Rahmen der Membrantheorie diese Faltenverzerrungen als lokale Eigenschaft angesehen werden können. Faltenmodellierungen, die auf veränderter kinematischer Beschreibung der gefalteten Membran basieren, sind beispielsweise in [RDOJ87a], [RDOJ87b], [Tae97], [Wie02] und [ZWB03] beschrieben.

Abschließend kann man sagen, dass die Simulation von gefalteten Membranen, analog zur Turbulenzsimulation bei Fluiden, entweder durch eine „direkte numerische Simulation“ mit exakter Ermittlung der Faltengeometrien oder durch die Modellierung der mechanischen Wirkung der kleinskaligen Falten auf das Gesamtstrukturverhalten vorgenommen werden kann. Die zu wählende Simulationsstrategie dieses Mehrskalenproblems der Membrane hängt von der Art der Fragestellung ab und mit dem im Kontext der zu lösenden Fragestellung noch vertretbaren Rechenaufwand zusammen.

# Kapitel 3

## Numerische Elastodynamik

Die bisher aufbereiteten Grundgleichungen der Strukturmechanik sind bei den betrachteten Fragestellungen mit großen Verformungen, also nichtlinearer Beschreibung der kinematischen Zusammenhänge, in der Regel nicht analytisch lösbar. Hinzu kommt die große Formenvielfalt der leichten Flächentragwerke, die meist komplexe Freiformflächen sind und auch deshalb eine numerische Analyse erfordern. Das Anfangs-Randwertproblem der nichtlinearen Elastodynamik nach Abschnitt 2.2.3 soll mit der Methode der finiten Elemente gelöst werden. Hierzu ist, ausgehend von der schwachen Form nach Gleichung (2.74), eine Diskretisierung in Raum- und Zeitrichtung erforderlich. Dies wird im Rahmen dieser Arbeit mittels der sequentiellen Raum-Zeit-Diskretisierung durchgeführt, was auf ein nichtlineares algebraisches Gleichungssystem führt. Nach einer Linearisierung wird es mittels einer iterativen Strategie numerisch gelöst. Im Folgenden werden die wesentlichen Grundlagen der Implementierungen ins Finite-Elemente-Programm CARAT (Computer Aided Research Analysis Tool) erläutert und an ausgewählten Beispielen verifiziert.

### 3.1 Räumliche Diskretisierung

Im Kontext der Methode der finiten Elemente werden die Funktionsräume der Feldgrößen des Problems, wie z.B. Verschiebungen und Spannungen, und die Geometrie durch elementweise, also lokale Approximationen beschrieben [AM88a]. Dies wird durch elementweise definierte Ansatzfunktionen realisiert, wodurch die Feldgrößen und die Geometrie auf eine endliche Anzahl an Unbekannten zurückgeführt werden können. Hierzu wird der kontinuierliche, materielle Körper  $B$  in  $n_{ele}$  nichtüberlappende Teilgebiete (die finiten Elemente)  $\Omega_e$  zerlegt, wobei der Kopfzeiger  $h$  zur Kennzeichnung der approximierten Größen verwendet wird:

$$B \approx B^h = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \Omega_e. \quad (3.1)$$

#### 3.1.1 Membranelement

Die Formulierung von Membranelementen gleicht dem Vorgehen bei Kontinuums-elementen. Da der variationelle Index des Problems gleich eins ist, müssen die für die Approximation der Feldgrößen verwendeten Ansatzfunktionen  $C^0$ -stetig sein und können auf verschiedene Arten, in Abhängigkeit von Elementgestalt und Anzahl der Knoten, konstruiert

werden. Für ausführliche Darstellungen der möglichen Funktionen und der Anforderungen an die Ansatzfunktionen sei beispielsweise auf [Bat02], [Hug00], [Wri01] und [ZTZ05] verwiesen.

Im Falle der hier behandelten Flächenelemente müssen die Ansatzfunktionen als Funktionen in zwei Veränderlichen definiert werden und es wird vorteilhafterweise ein lokales, natürliches Elementkoordinatensystem in  $\zeta^1$  und  $\zeta^2$  verwendet. Die Näherungslösungen werden aus Formfunktion  $N_i(\zeta^1, \zeta^2)$  aufgebaut. Die zum Elementknoten  $i$  assoziierte Funktion  $N_i$  ist so definiert, dass sie an diesem Knoten den Wert eins und an den restlichen Knoten den Wert null annimmt. Üblicherweise werden die lokalen Elementkoordinaten  $\zeta^1$  und  $\zeta^2$  mit den krummlinigen Koordinaten  $\theta^1$  und  $\theta^2$ , die in der differentialgeometrischen Beschreibung der kontinuierlichen Struktur verwendet werden, identifiziert. Durch dieses Vorgehen können in Abhängigkeit von der Netztopologie auch Diskontinuitäten in den Koordinatenlinien an den Elementrändern auftreten, was beachtet werden muss.

Das Forschungsgebiet der Elementtechnologie beschäftigt sich im Detail mit der Entwicklung finiter Elemente, welche die mechanischen Zusammenhänge korrekt wiedergeben. Bei der speziellen Wahl einer Elementformulierung muss darauf geachtet werden, dass keine künstlichen Versteifungseffekte (sogenanntes „Locking“) auftreten. Als Gegenmaßnahmen wurde eine Vielzahl an Konzepten, wie zum Beispiel (selektiv) reduzierte Integration, Methode der erweiterten Verzerrungen („Enhanced Assumed Strain“ – EAS), Methode der angenommenen Verzerrungen („Assumed Natural Strain“ – ANS) oder die Methode der diskreten Verzerrungsklaffungen („Discrete Strain Gap“ – DSG), entwickelt. Eine Übersicht über die möglichen Defekte in der Elementformulierung und entsprechende Lösungsstrategien können beispielsweise in [Kos04], [KBCB05], [Bis99] und [ZT05] gefunden werden.

Für die in dieser Arbeit behandelten Probleme können potentiell in-plane shear locking und volumetrisches locking auftreten. Bei diesen Lockingphänomenen ist der kritische Parameter das Seitenverhältnis der Elemente beziehungsweise die Querdehnzahl. Des Weiteren ist das in-plane shear locking dann relevant, wenn in-plane Biegezustände abgebildet werden sollen. Zum einen ist somit bei den üblicherweise auftretenden Deformationszuständen bei Membrantragwerken (kaum in-plane bending) und bei einigermaßen ausgeglichenen Elementabmessungen der Einfluss des Schub-Lockings vernachlässigbar. Zum anderen ist der Effekt des volumetrischen Lockings unproblematisch, weil bei der Membranformulierung das kondensierte Materialgesetz für den ebenen Spannungszustand nach Abschnitt 2.3.2 verwendet wird und die Materialien auch in der Regel nicht als inkompressibel angesehen werden müssen (d.h. der im Kontinuum problematische Grenzfall  $\nu \rightarrow 0.5$  tritt nicht auf). Aus diesen Gründen wird im Rahmen dieser Arbeit die rein verschiebungsbasierte Formulierung der Elemente gewählt, da zusätzliche, elementverbessernde Maßnahmen (z.B. EAS) nur den numerischen Aufwand erhöhen würden – bei gleichzeitig nicht messbarer Verbesserung der Ergebnisqualität.

Da die zu formulierenden Membranelemente reine Verschiebungselemente sind, ist als einziges physikalisches Feld das Verschiebungsfeld  $\mathbf{d}(\theta^1, \theta^2)$  zu diskretisieren und wird so auf drei Unbekannte Verschiebungen  $\bar{d}_i^k$  am Knoten  $i$  zurückgeführt ( $n_{nod}$  entspricht der Anzahl der Knoten im Element). Der Knotenverschiebungsvektor  $\bar{\mathbf{d}}_i$  bezieht sich auf ein globales,

kartesisches Koordinatensystem.

$$\mathbf{d}(\theta^1, \theta^2) \approx \mathbf{d}^h(\theta^1, \theta^2) = \sum_{i=1}^{n_{\text{nod}}} N_i(\theta^1, \theta^2) \cdot \bar{\mathbf{d}}_i. \quad (3.2)$$

Beim isoparametrischen Konzept werden die gleichen Ansatzfunktionen zur Approximation der Elementgeometrie und zur Diskretisierung der Feldgrößen verwendet. Die approximierten Ortsvektoren der Referenz- ( $\mathbf{X}_i^h$ ) und der Momentankonfiguration ( $\mathbf{x}_i^h$ ) ergeben sich aus den folgenden Beziehungen:

$$\mathbf{X}(\theta^1, \theta^2) \approx \mathbf{X}^h(\theta^1, \theta^2) = \sum_{i=1}^{n_{\text{nod}}} N_i(\theta^1, \theta^2) \cdot \bar{\mathbf{X}}_i, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{x}(\theta^1, \theta^2) \approx \mathbf{x}^h(\theta^1, \theta^2) = \sum_{i=1}^{n_{\text{nod}}} N_i(\theta^1, \theta^2) \cdot \bar{\mathbf{x}}_i. \quad (3.4)$$

Die Ortsvektoren der Knoten ( $\bar{\mathbf{X}}_i$  beziehungsweise  $\bar{\mathbf{x}}_i$ ) enthalten die Koordinaten ( $\bar{X}_i^k$  beziehungsweise  $\bar{x}_i^k$ ) des Knotens  $i$  bezüglich der globalen, kartesischen Basis. In Abbildung 3.1 werden die Bedeutung und Bezeichnung der Knotenvektoren beispielhaft für das vierknotige, bilineare Membranelement aufgezeigt. Die abgebildete Knotennumerierung orientiert sich an der in CARAT üblichen Implementierung, wohingegen in der Literatur häufig eine davon abweichende Definition gebräuchlich ist. Dies muss bei der korrekten Zuordnung der Formfunktionen beachtet werden.

Somit ergibt sich das diskretisierte Verschiebungsfeld auch aus Gleichung (2.80) in Übereinstimmung mit Gleichung (3.2), was besonders vorteilhaft bei der korrekten Repräsentation

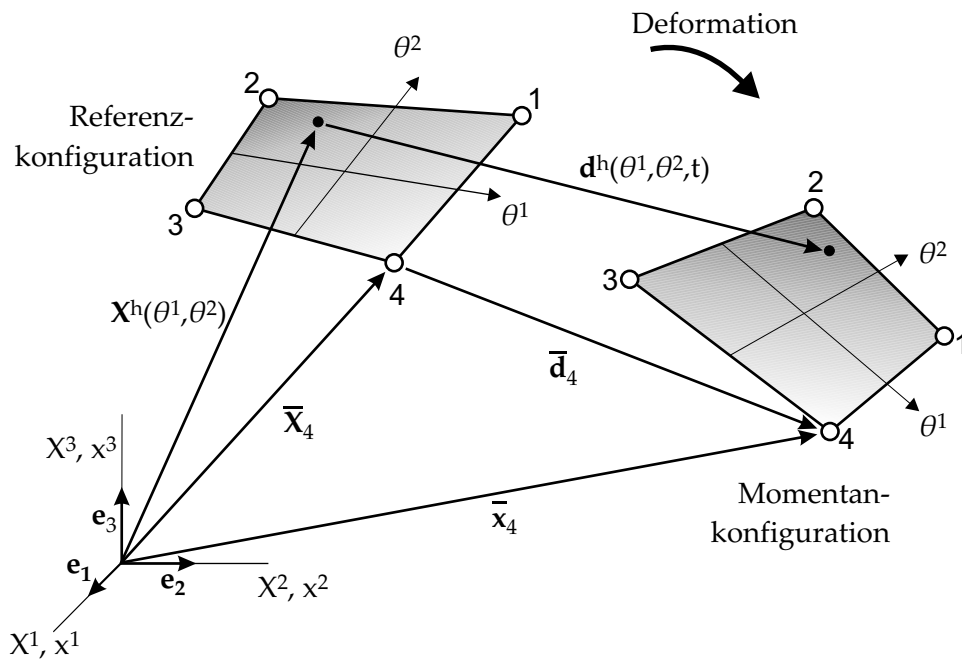


Abbildung 3.1: Konfigurationen des vierknotigen Membranelements.

von (großen) Starrkörperbewegungen ist:

$$\mathbf{d}(\theta^1, \theta^2) = \mathbf{x}(\theta^1, \theta^2) - \mathbf{X}(\theta^1, \theta^2) \approx \sum_{i=1}^{n_{nod}} N_i(\theta^1, \theta^2) \cdot (\bar{\mathbf{x}}_i - \bar{\mathbf{X}}_i) = \sum_{i=1}^{n_{nod}} N_i(\theta^1, \theta^2) \cdot \bar{\mathbf{d}}_i. \quad (3.5)$$

Die kovarianten Basisvektoren der diskretisierten Geometrie der Referenz- und der Momentankonfiguration ergeben sich mit Gleichung (2.34) zu

$$\mathbf{G}_\alpha^h = \mathbf{X}_{,\alpha}^h = \frac{\partial \mathbf{X}^h}{\partial \theta^\alpha} = \sum_{i=1}^{n_{nod}} N_{i,\alpha}(\theta^1, \theta^2) \cdot \bar{\mathbf{X}}_i, \quad \mathbf{g}_\alpha^h = \mathbf{x}_{,\alpha}^h = \frac{\partial \mathbf{x}^h}{\partial \theta^\alpha} = \sum_{i=1}^{n_{nod}} N_{i,\alpha}(\theta^1, \theta^2) \cdot \bar{\mathbf{x}}_i \quad (3.6)$$

und daraus folgt für die diskretisierten Metrikkoeffizienten:

$$G_{\alpha\beta}^h = \sum_{i=1}^{n_{nod}} \sum_{j=1}^{n_{nod}} N_{i,\alpha} N_{j,\beta} \bar{\mathbf{X}}_i \cdot \bar{\mathbf{X}}_j, \quad g_{\alpha\beta}^h = \sum_{i=1}^{n_{nod}} \sum_{j=1}^{n_{nod}} N_{i,\alpha} N_{j,\beta} \bar{\mathbf{x}}_i \cdot \bar{\mathbf{x}}_j. \quad (3.7)$$

Werden diese Beziehungen in Gleichung 2.82 eingesetzt, so lassen sich damit die Koeffizienten des diskretisierten Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors ermitteln.

Das im Rahmen der hier angewandten Formulierung verwendete Bubnov-Galerkin-Verfahren ist (im Gegensatz zur Petrov-Galerkin-Methode) dadurch charakterisiert, dass die gleichen Interpolationen für die realen Feldgrößen und die Test- oder virtuellen Funktionen verwendet werden. Die Variation der Verschiebungen ergibt sich mit dieser Annahme als:

$$\delta \mathbf{d}^h(\theta^1, \theta^2) = \sum_{i=1}^{n_{nod}} N_i(\theta^1, \theta^2) \cdot \delta \bar{\mathbf{d}}_i. \quad (3.8)$$

Die in der Strukturmechanik wichtigen Feldgrößen Geschwindigkeit (nach Gleichung (2.32)) und Beschleunigung (nach Gleichung (2.33)) ergeben sich in der diskreten Form durch die Zeitableitung der diskretisierten Verschiebungen, womit die Zeitabhängigkeit allein durch die Knotengrößen wiedergegeben wird, da die Formfunktionen zeitinvariant sind:

$$\dot{\mathbf{d}}^h(\theta^1, \theta^2) = \sum_{i=1}^{n_{nod}} N_i(\theta^1, \theta^2) \cdot \dot{\bar{\mathbf{d}}}_i, \quad (3.9)$$

$$\ddot{\mathbf{d}}^h(\theta^1, \theta^2) = \sum_{i=1}^{n_{nod}} N_i(\theta^1, \theta^2) \cdot \ddot{\bar{\mathbf{d}}}_i. \quad (3.10)$$

Zur numerischen Lösung des gewählten Variationsprinzips (hier: Prinzip der virtuellen Verschiebungen nach Gleichung (2.70)) wird, nach Aufteilung der Struktur in finite Elemente (siehe Gleichung (3.1)) und der damit verbundenen lokalen Approximation der Geometrie und der Feldgrößen, nun die Integration elementweise durchgeführt. Die virtuellen Arbeiten aller Elemente addieren sich zur virtuellen Arbeit der Gesamtstruktur:

$$\delta W_{dyn}^h = \sum_{e=1}^{n_{ele}} \delta W_{dyn}^e, \quad \delta W_{int}^h = \sum_{e=1}^{n_{ele}} \delta W_{int}^e, \quad \delta W_{ext}^h = \sum_{e=1}^{n_{ele}} \delta W_{ext}^e. \quad (3.11)$$

Die Lösung der schwachen Form mit finiten Elementen erfordert die Diskretisierung der virtuellen Arbeiten der d'Alembertschen Trägheitskräfte  $\delta W_{dyn}^e$ , der inneren Kräfte  $\delta W_{int}^e$



und der äußeren Kräfte  $\delta W_{ext}^e$ . Infolge der Nichtlinearität der virtuellen inneren Arbeiten müssen diese noch linearisiert werden (siehe Abschnitt 3.3).

Die Diskretisierung der virtuellen Arbeit der Trägheitskräfte ergibt sich mit der Approximation von  $\delta \mathbf{d}$  (nach Gleichung (3.8)) und  $\ddot{\mathbf{d}}$  (nach Gleichung (3.10)) und der Integration über das Elementvolumen. Die zur Auswertung der Elementbeziehungen erforderlichen Integrationen werden üblicherweise mittels gaußscher Quadratur in den lokalen, elementbezogenen Koordinaten  $\theta^\alpha$  vorgenommen, worauf im Rahmen dieser Arbeit nicht näher eingegangen werden soll (weitere Informationen dazu finden sich beispielsweise in [Bat02], [Aka94], [Sch97b]). Die Integranden in den maßgeblichen Beziehungen müssen dafür noch um die Funktionaldeterminante erweitert werden, die den Zusammenhang der differentiellen Elemente in natürlichen und physikalischen Koordinaten repräsentiert.

$$\delta W_{dyn}^e = \int_{\Omega_{S0}^e} \rho_{S0} \delta \mathbf{d}^h \cdot \ddot{\mathbf{d}}^h \, d\Omega_{S0}^e \quad (3.12)$$

$$= h \int_{A^e} \rho_{S0} \left( \sum_{i=1}^{n_{nod}} N_i(\theta^1, \theta^2) \cdot \delta \bar{\mathbf{d}}_i \right) \left( \sum_{j=1}^{n_{nod}} N_j(\theta^1, \theta^2) \cdot \ddot{\mathbf{d}}_j \right) \, dA^e \quad (3.13)$$

$$= \sum_{i=1}^{n_{nod}} \sum_{j=1}^{n_{nod}} \delta \bar{\mathbf{d}}_i \cdot \left[ h \int_{A^e} \rho_{S0} N_i(\theta^1, \theta^2) N_j(\theta^1, \theta^2) \mathbf{I} \, dA^e \right] \cdot \ddot{\mathbf{d}}_j \quad (3.14)$$

$$= \sum_{i=1}^{n_{nod}} \sum_{j=1}^{n_{nod}} \delta \bar{\mathbf{d}}_i \cdot \mathbf{m}^{e \, ij} \cdot \ddot{\mathbf{d}}_j. \quad (3.15)$$

Die Elementmassenanteile  $\mathbf{m}^{e \, ij}$  die dem Knotenpaar  $ij$  zugeordnet sind, ergeben, nach dem Zusammenfassen der Knotenunbekannten in einen Vektor, der alle Elementfreiheitsgrade enthält ( $\bar{\mathbf{d}}^e$ ), die konsistente Elementmassenmatrix  $\mathbf{m}^e$ . Aus Effizienzgründen wird in einigen Anwendungen eine diagonale Massenmatrix („lumped mass matrix“) bevorzugt. Bei expliziten Zeitintegrationsverfahren hat dies den Vorteil, dass keine Gleichungslösung notwendig ist. Zur Ermittlung von konzentrierten Massenmatrizen sind verschiedene Herangehensweisen gebräuchlich, wie beispielsweise das gleichmäßige Aufteilen der Elementmasse auf die einzelnen Knoten oder die Ermittlung der Diagonalelemente der Massenmatrix durch Aufsummieren der Zeilen der konsistenten Massenmatrix („row-sum technique“)[Bel83]. Bei den Simulationsrechnungen im Rahmen dieser Arbeit, die mit impliziten Verfahren durchgeführt wurden, wird immer die konsistente Elementmassenmatrix verwendet. Die klassische Darstellung der virtuellen Arbeit der d'Alembertschen Trägheitskräfte auf Elementebene mit der Elementmassenmatrix führt zu folgendem Ausdruck:

$$\delta W_{dyn}^e = \delta \bar{\mathbf{d}}^e \mathbf{m}^e \ddot{\bar{\mathbf{d}}}^e. \quad (3.16)$$

Die Finite-Elemente-Approximation der virtuellen Arbeit der externen Lasten erhält man durch Einsetzen von Gleichung (3.8) in die Gleichung (2.73). Hier wird nun bei der Formulierung der diskreten Elementbeziehungen davon ausgegangen, dass die externen Lasten verformungsunabhängig sind und deshalb auch keine Terme zur Steifigkeitsmatrix im

Zuge der späteren Linearisierung hinzukommen [MWBR99], es also  $\hat{\mathbf{T}}_{,d} = 0$  und  $\mathbf{B}_{,d} = 0$  angenommen wird. Ansonsten wäre an dieser Stelle eine Approximation der Verschiebungsabhängigkeit der Belastungsfunktion durch die Formfunktionen vorzunehmen. Zur Approximation des über die Elementgeometrie ortsveränderlichen Verlaufs werden die Formfunktionen zur Interpolation zwischen den Knoten verwendet. Die im Rahmen der Fluid-Struktur-Interaktion wichtigen Anteile der externen Belastung infolge Druck sind in Gleichung (3.17) im Term der aufgebrachten Randlasten enthalten (zur Behandlung der Deformationsabhängigkeit der Kopplungslasten siehe Seite 56). Um die einheitliche Schreibweise der über das gesamte Element wirkenden Lastfälle gemäß Gleichung (3.18) zu ermöglichen, ist bei der Definition der Lastvektoren  $\hat{\mathbf{T}}$  die mechanische Modellierung des jeweils betrachteten Lastfalls zu berücksichtigen, wie die unterschiedlichen Wirkungsrichtungen oder Bezugsflächen von beispielsweise Schnee oder Windlasten. In diesen Fällen wird die Integration über die Elementfläche vorgenommen, bei Linienlasten entspricht das Integrationsgebiet  $\Gamma_{S_0}^e$  den betroffenen Elementkanten.

$$\delta W_{ext}^e = \int_{\Gamma_{S_0}^e} \hat{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{d}^h \, d\Gamma_{S_0}^e + \int_{\Omega_{S_0}^e} \rho_{S_0} \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{d}^h \, d\Omega_{S_0}^e \quad (3.17)$$

$$= \int_{\Gamma_{S_0}^e} \hat{\mathbf{T}} \cdot \left( \sum_{i=1}^{n_{nod}} N_i(\theta^1, \theta^2) \cdot \delta \bar{\mathbf{d}}_i \right) \, d\Gamma_{S_0}^e + \int_{A^e} h \rho_{S_0} \mathbf{B} \cdot \left( \sum_{i=1}^{n_{nod}} N_i(\theta^1, \theta^2) \cdot \delta \bar{\mathbf{d}}_i \right) \, dA^e \quad (3.18)$$

$$= \sum_{i=1}^{n_{nod}} \delta \bar{\mathbf{d}}_i \left[ \int_{\Gamma_{S_0}^e} \hat{\mathbf{T}} \cdot N_i(\theta^1, \theta^2) \, d\Gamma_{S_0}^e + h \int_{A^e} \rho_{S_0} \mathbf{B} \cdot N_i(\theta^1, \theta^2) \, dA^e \right] \quad (3.19)$$

$$= \sum_{i=1}^{n_{nod}} \delta \bar{\mathbf{d}}_i \cdot \mathbf{r}_{ext}^{e,i} \quad (3.20)$$

Der Term  $\mathbf{r}_{ext}^{e,i}$  repräsentiert die konsistente Knotenlast im Knoten  $i$  und nachdem die Belastungen  $\hat{\mathbf{T}}$  und  $\mathbf{B}$  in der Regel zeitabhängig sind, folgt auch für  $\mathbf{r}_{ext}^{e,i} = \mathbf{r}_{ext}^{e,i}(t)$ . Auch hier lässt sich die klassische Matrixdarstellung der konsistenten Knotenlasten für ein Element durch das Zusammenfassen der Knotenunbekannten in einen Vektor ( $\bar{\mathbf{d}}^e$ ) erhalten:

$$\delta W_{ext}^e = \delta \bar{\mathbf{d}}^e \mathbf{r}_{ext}^e(t) \quad (3.21)$$

Die Diskretisierung der virtuellen Arbeit der inneren Kräfte ist wegen der vorhandenen Nichtlinearität komplexer als die vorherigen Diskretisierungsschritte. Deshalb soll an dieser Stelle lediglich die virtuelle Verschiebung diskretisiert werden, um dann erst bei der Wahl der Lösungsstrategie für das nichtlineare Gleichungssystem die expliziten Ausdrücke für die Abhängigkeiten von den Knotenverschiebungen einzuführen. Hierzu wird von der Kettenregel Gebrauch gemacht, um die Abhängigkeit der Variation des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors von der Variation der Knotenverschiebungen aufzulösen. Hierzu werden wiederum alle Verschiebungsfreiheitsgrade eines Elements in einem einzigen Vektor  $\delta \bar{\mathbf{d}}^e$  zusammengefasst, der demnach die Anzahl der Knoten des jeweiligen Elements mal drei Verschiebungsfreiheitsgrade pro Knoten an Einträgen hat. Die Variation der diskretisierten Verzerrungen kann nun unter Verwendung von  $\delta \mathbf{E}^h = \frac{\partial \mathbf{E}^h(\bar{\mathbf{d}}^e)}{\partial \bar{\mathbf{d}}^e} \delta \bar{\mathbf{d}}^e = \mathbf{E}^h_{, \bar{\mathbf{d}}^e} \delta \bar{\mathbf{d}}^e$  durch

eine Variation der Elementknotenfreiheitsgrade ersetzt werden.

$$\delta W_{int}^e = \int_{\Omega_{S_0}^e} \delta \mathbf{E}^h : \mathbf{S}^h \, d\Omega_{S_0}^e = h \int_{A^e} \delta \mathbf{E}^h : \mathbf{S}^h \, dA^e = h \int_{A^e} \mathbf{E}^h_{,\bar{\mathbf{d}}^e} \delta \bar{\mathbf{d}}^e : \mathbf{S}^h \, dA^e \quad (3.22)$$

$$= \delta \bar{\mathbf{d}}^e \left[ h \int_{A^e} \mathbf{E}^h_{,\bar{\mathbf{d}}^e} : \mathbf{S}^h \, dA^e \right] = \delta \bar{\mathbf{d}}^e \cdot \mathbf{r}_{int}^e. \quad (3.23)$$

Die Membranspannungen sind hierbei die totalen Spannungen, die sich aus der Vorspannung und den elastischen Spannungen zusammensetzen. Letztere werden entsprechend den in Abschnitt 2.3.2 angegebenen konstitutiven Beziehungen aus den Verzerrungen und somit auch letztendlich aus den Knotenverschiebungen errechnet. Die Auswertung der Spannungs-Verzerrungsbeziehung erfolgt dabei bezüglich eines lokalen kartesischen Koordinatensystems, das bei isotropem Materialverhalten entsprechend Gleichung (2.108) definiert ist. Bei orthotropem Material werden die lokalen Koordinatensysteme jeweils an den Materialhaupttrichtungen orientiert, was die numerische Ermittlung der Ausrichtung der Faserrichtungen auf der Membranfläche erforderlich macht. Dies wird durch einen Projektionsalgorithmus realisiert, der analog zur Definition von ausgezeichneten Vorspannungsrichtungen innerhalb der Formfindung von Membranen mit anisotroper Vorspannung verwendet wird (siehe Abschnitt 4.5.2). Hiermit kann die in Materialhauptachsenrichtung formulierte Materialbeziehung nach Gleichung (2.109) direkt verwendet werden.

Durch Zusammenfassung der Arbeitsanteile auf Elementebene ergibt sich die räumlich diskretisierte Bewegungsgleichung auf Elementebene:

$$\delta W^e = \delta W_{dyn}^e + \delta W_{int}^e - \delta W_{ext}^e = \delta \bar{\mathbf{d}}^e \cdot \left[ \mathbf{m}^e \ddot{\bar{\mathbf{d}}}^e + \mathbf{r}_{int}^e(\bar{\mathbf{d}}) - \mathbf{r}_{ext}^e(t) \right] = 0. \quad (3.24)$$

Werden nun die Elementbeziehungen entsprechend der Übergangsbedingungen und der wesentlichen Randbedingungen in den Verschiebungen im Assemblierungsprozess zusammengebaut, so ergibt sich daraus das räumlich diskretisierte d'Alembertsche Prinzip auf Strukturebene.

$$\mathbf{M} = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{m}^e, \quad \mathbf{r}_{int}(\bar{\mathbf{d}}) = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{r}_{int}^e(\bar{\mathbf{d}}), \quad \mathbf{r}_{ext}(t) = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{r}_{ext}^e(t). \quad (3.25)$$

Vorteilhafterweise ist bei Lagrangenetzen die Strukturmassenmatrix  $\mathbf{M}$  deformations- und somit zeitinvariant und muss nur einmal zu Beginn der Simulation errechnet und assembliert werden. Der Vektor  $\delta \bar{\mathbf{d}}$  ist die Variation eines Vektors, der alle räumlichen Diskretisierungsparameter der gesamten Struktur unter Berücksichtigung der Verschiebungsrandbedingungen enthält. Seine Dimension entspricht demnach der Gesamtzahl der Systemfreiheitsgrade – analog zur Größe des Vektors der Unbekannten.

$$\delta W = \delta W_{dyn} + \delta W_{int} - \delta W_{ext} \approx \delta \bar{\mathbf{d}} \cdot \left[ \mathbf{M} \ddot{\bar{\mathbf{d}}} + \mathbf{r}_{int}(\bar{\mathbf{d}}) - \mathbf{r}_{ext}(t) \right] = 0. \quad (3.26)$$

Bei Anwendung des Fundamentallemmas der Variationsrechnung erhält man ein nichtlineares, bezüglich der Raumkoordinaten diskretes, gewöhnliches Differentialgleichungssystem und die Anfangsbedingungen des transienten Problems:

$$\mathbf{M} \ddot{\bar{\mathbf{d}}} + \mathbf{r}_{int}(\bar{\mathbf{d}}) = \mathbf{r}_{ext}(t), \quad \ddot{\bar{\mathbf{d}}}(t = t_0) = \ddot{\bar{\mathbf{d}}}_0, \quad \bar{\mathbf{d}}(t = t_0) = \bar{\mathbf{d}}_0. \quad (3.27)$$

### 3.1.2 Seilelement

Zur räumlichen Diskretisierung der Seile ist prinzipiell das gleiche Vorgehen wie bei den Membranelementen möglich. Strukturelemente zur Abbildung des Tragverhaltens von Seilen haben ebenso drei unbekannte Verschiebungen  $\bar{d}_i^k$  je Knoten  $i$  und es ist ebenso das Verschiebungsfeld das einzige zu diskretisierende physikalische Feld. Bei den im Rahmen dieser Arbeit behandelten Fragestellungen ist der Einfluss des Seildurchhangs infolge Eigengewicht vernachlässigbar und wird somit in der Elementformulierung nicht berücksichtigt [Pet88]. Auf Grund der linienartigen Geometrie der Seilelemente werden die Formfunktionen  $N_i(\theta^1)$  in Abhängigkeit einer einzigen lokalen Elementkoordinate definiert, die mit der krummlinigen Koordinate  $\theta^1$  einer Kurve im Raum nach Abschnitt 2.1 identifiziert wird. Die auf das Seiltragverhalten angepassten kontinuumsmechanischen Grundgleichungen sind bereits in Abschnitt 2.3.1 entsprechend dargestellt worden und die räumliche Diskretisierung wurde in Abschnitt 3.1.1 ausführlich aufbereitet. Deshalb werden im Folgenden die wesentlichen Gleichungen nur kurz angeschrieben.

Die entsprechend dem isoparametrischen Konzept mit gleichen Ansatzfunktionen approximierten Verschiebungen und Ortsvektoren der Referenz- beziehungsweise Momentankonfiguration lassen sich im Falle der eindimensionalen Strukturelemente analog zu den Gleichungen (3.2), (3.3), (3.4) wie folgt schreiben:

$$\mathbf{d}^h(\theta^1) = \sum_{i=1}^{n_{nod}} N_i(\theta^1) \cdot \bar{\mathbf{d}}_i, \quad \mathbf{X}^h(\theta^1) = \sum_{i=1}^{n_{nod}} N_i(\theta^1) \cdot \bar{\mathbf{X}}_i, \quad \mathbf{x}^h(\theta^1) = \sum_{i=1}^{n_{nod}} N_i(\theta^1) \cdot \bar{\mathbf{x}}_i. \quad (3.28)$$

Der Knotenverschiebungsvektor  $\bar{\mathbf{d}}_i$  und die Ortsvektoren der Knoten  $\bar{\mathbf{X}}_i$  beziehungsweise  $\bar{\mathbf{x}}_i$  beziehen sich auf ein globales, kartesisches Koordinatensystem. Die eingeführten Bezeichnungen werden in Abbildung 3.2 für ein zweiknotiges, lineares Seilelement dargestellt. Für den konvektiven, kovarianten Basisvektor, der tangential zur Seilachse orientiert ist, ergibt sich nach Gleichung (2.24) für die diskretisierte Referenz- und Momentankonfiguration die folgende Berechnungsvorschrift:

$$\mathbf{G}_1^h = \mathbf{X}_{,1}^h = \frac{\partial \mathbf{X}^h}{\partial \theta^1} = \sum_{i=1}^{n_{nod}} N_{i,1}(\theta^1) \cdot \bar{\mathbf{X}}_i, \quad \mathbf{g}_1^h = \mathbf{x}_{,1}^h = \frac{\partial \mathbf{x}^h}{\partial \theta^1} = \sum_{i=1}^{n_{nod}} N_{i,1}(\theta^1) \cdot \bar{\mathbf{x}}_i. \quad (3.29)$$

Im Falle des linearen, zweiknotigen Seilelements vereinfachen sich diese Formeln für die Basisvektoren und  $\mathbf{G}_1^h$  beziehungsweise  $\mathbf{g}_1^h$  entsprechen den Differenzen der Ortsvektoren des End- und Anfangsknotens.

Wenn keine Längskräfte entlang der Seile eingetragen werden, gibt ein Seil schon mit linearen Formfunktionen die Theorie exakt wieder. Deshalb wird dieses Element bei den Berechnungen für Seile und Seilnetze im Rahmen dieser Arbeit verwendet. Aus Gründen der kinematischen Kompatibilität werden hier somit bei kombinierten Seil- und Membrantragwerken vier- beziehungsweise dreiknotige Membranelemente verwendet. Die Randseile werden dann durch eine Definition von Seilelementen entlang von Elementkanten der Membranelemente modelliert. Dies wird im Assemblierungsprozess durch die Überlagerung der Elementanteile aus Seil und Membran berücksichtigt.

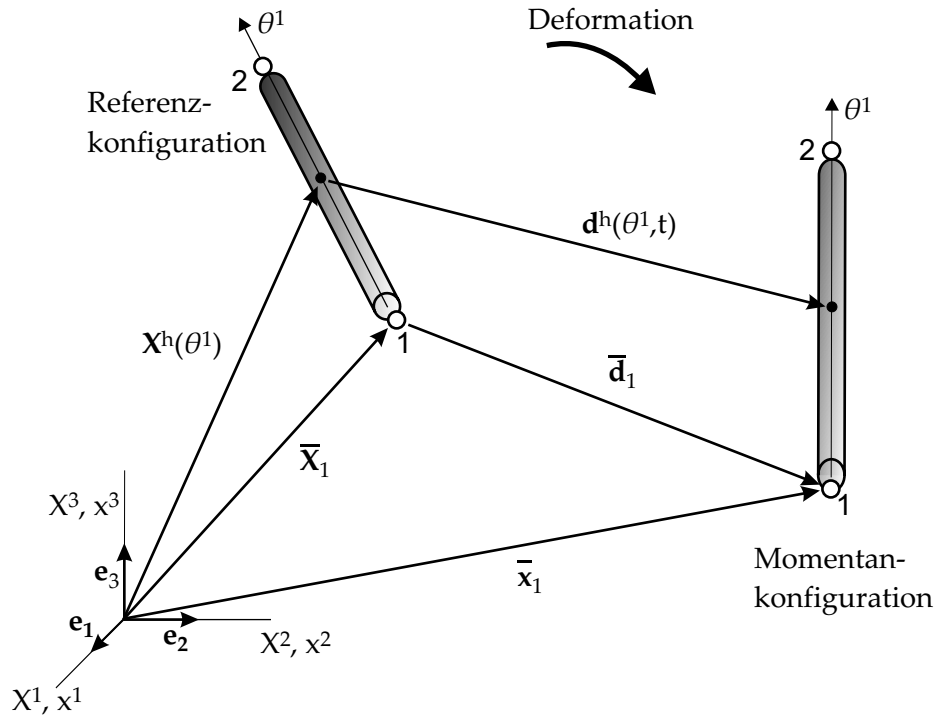


Abbildung 3.2: Konfigurationen des zweiknotigen Seilelements.

Die Formeln für die virtuellen Arbeiten der Trägheitskräfte, der äußeren Lasten und der inneren Kräfte sind analog zu den Gleichungen (3.12), (3.17), (3.22) definiert und werden durch die Integration entlang der Elementlänge ermittelt. Auch hier ist zu beachten, dass die Spannungen im Element sich aus den elastischen Spannungen und der Vorspannung zusammensetzen. Nach dem Assemblieren der kompletten Struktur aus den vorhandenen elementbezogenen Werten für die Membrane und Seile erhält man die semidiskrete Bewegungsgleichung der kompletten Struktur entsprechend Gleichung (3.27).

## 3.2 Zeitdiskretisierung

Nachdem im Abschnitt 3.1 die Diskretisierung bezüglich der Raumkoordinaten durchgeführt wurde, ist nun die noch verbleibende Abhängigkeit von der Zeit zu diskretisieren. Die im Rahmen dieser Arbeit gewählte sequentielle Raum-Zeit-Diskretisierung ermöglicht die effiziente Nutzung von Programmcodes für statische, strukturmechanische Aufgabenstellungen, ergänzt um die Inertialterme auf Elementebene. Die alternative Möglichkeit der sequentiellen Zeit-Raum-Diskretisierung führt, auf Grund der Kommutativität der sequentiellen Diskretisierungsreihenfolge, auf das identische algebraische Gleichungssystem [Hug83]. Details bezüglich der simultanen Diskretisierungsstrategie können beispielsweise in [Hul04] oder [Kuh96] und in den dort angegebenen Literaturstellen nachgelesen werden.

Das zu behandelnde, aus der räumlichen Diskretisierung resultierende, semidiskrete Anfangswertproblem wird auf Strukturebene durch das folgende gekoppelte Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung und den zugehörigen Anfangsbedingungen beschrieben

(nach Gleichung (3.27)):

$$\mathbf{M} \ddot{\bar{\mathbf{d}}} + \mathbf{r}_{int}(\bar{\mathbf{d}}) = \mathbf{r}_{ext}(t), \quad \ddot{\bar{\mathbf{d}}}(t = t_0) = \ddot{\bar{\mathbf{d}}}_0, \quad \dot{\bar{\mathbf{d}}}(t = t_0) = \dot{\bar{\mathbf{d}}}_0. \quad (3.30)$$

Zur Berücksichtigung einer eventuell vorhandenen Systemdämpfung kann die Strukturgleichung (3.30) um einen geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungsterm erweitert werden. Dies impliziert die Annahme einer linearen und viskosen Dämpfung.

$$\mathbf{M} \ddot{\bar{\mathbf{d}}} + \mathbf{D} \dot{\bar{\mathbf{d}}} + \mathbf{r}_{int}(\bar{\mathbf{d}}) = \mathbf{r}_{ext}(t). \quad (3.31)$$

Die Dämpfungsursachen können sehr unterschiedlich sein, wie zum Beispiel Energieumwandlung durch innere Reibung oder durch Wechselwirkung mit einem umgebenden Medium [Pet96], und sind in der Regel sehr schwierig zu quantifizieren. Proportionale, viskose Dämpfung wird häufig durch die Annahme einer Rayleigh-Dämpfung modelliert. Hierbei wird die Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}$  als Linearkombination aus der Massenmatrix  $\mathbf{M}$  und der Tangentensteifigkeitsmatrix der Referenzkonfiguration  $\mathbf{K}(\mathbf{d}_0)$  mit den beiden freien Dämpfungsparametern  $a_1 [1/s]$  und  $a_2 [s]$  gebildet. Dies beinhaltet auch die Sonderfälle der massen- beziehungsweise steifigkeitsproportionalen Dämpfung [CP93].

$$\mathbf{D} = a_1 \mathbf{M} + a_2 \mathbf{K}(\bar{\mathbf{d}}_0). \quad (3.32)$$

Alternativ dazu kann, analog zur Herleitung der Massenmatrix, auch eine Elementdämpfungsmatrix durch die Annahme einer Dämpfungskraft je Element und der Diskretisierung der Geschwindigkeit und des dazugehörigen virtuellen Arbeitsausdrucks hergeleitet werden [AM88c]. Auf dieselbe Art und Weise wird die Modellierung der Dämpfung des umgebenden Mediums bei schwingenden leichten Flächentragwerken in [Bee84] und [EM73] vorgeschlagen. Diese Formulierungen beinhalten aber lediglich die aus den Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zur Membranfläche resultierende viskose Dämpfungswirkung und können beispielsweise keine Aussage über den dämpfenden Einfluss von Wirbeln an Systemrändern machen. Des Weiteren ist zur Evaluierung der entsprechenden Terme die Kenntnis einer physikalischen Dämpfungskonstanten in Abhängigkeit von der Oberflächenbeschaffenheit der Membran und des umgebenden Mediums notwendig, die aus entsprechenden experimentellen Untersuchungen zu ermitteln ist.

Aus den oben genannten Schwierigkeiten und der Tatsache, dass im Rahmen der Fluid-Struktur-Interaktion eigentlich eine nichtproportionale und über die Strukturoberfläche stark unterschiedlich verteilte Dämpfungswirkung vorliegt, wird im Folgenden keine Dämpfungsmatrix verwendet. Die dämpfende Wirkung des umgebenden Mediums wird vielmehr durch die gekoppelte Mehrfeldsimulation (siehe Kapitel 6) der umströmten Membran abgebildet. Damit werden auch die transienten Vorgänge und die unterschiedlich verteilten Dämpfungskräfte berücksichtigt.

Es sei bereits an dieser Stelle auf den fundamentalen Unterschied der soeben dargestellten, physikalischen Dämpfung und der numerischen Dissipation hingewiesen, wobei Letztere ausschließlich algorithmisch bedingt ist. Die physikalische Dämpfung betrifft niedere und hohe Modi, wohingegen die später noch genauer dargestellte algorithmische Dämpfung nur die höheren Modi betrifft. Es ist deshalb nicht möglich, die numerische Dissipation als Ersatz für eine eventuell unbekannte physikalische Dämpfung zu verwenden. Sie kann aber

als ein algorithmisches Hilfsmittel bei der Lösung von strukturdynamischen Problemen eingesetzt werden [Kuh04].

Soll die semidiskrete Bewegungsgleichung (3.30) mittels numerischer Integration in der Zeit gelöst werden, so ist zunächst eine Diskretisierung der Zeit erforderlich. Im Falle konstanter Zeitschrittlänge wird das Simulationsintervall  $[t_0; T]$  in  $n_T$  äquidistante Abschnitte  $[t_n; t_{n+1}]$  beziehungsweise Zeitschritte  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  zerlegt. Eine adaptive Anpassung der Zeitschrittweite auf Basis einer Schätzung von lokalen Zeitschrittfehlern soll hier nicht weiter verfolgt werden (weitere Informationen hierzu beispielsweise in [Kuh96], [KR99] und der dort genannten Literatur). Für die diskreten Zeitpunkte gilt  $t_n = t_0 + n \Delta t$  mit  $n \in [0; n_T]$ . Die Systemvariablen der Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sind somit nicht mehr kontinuierlich, sondern nur noch an diesen bestimmten Zeitpunkten diskret definiert.

Die Approximation der Zustandsvariablen im Zeitschritt erlaubt die Verknüpfung der Verschiebungen  $\mathbf{d}$ , Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{d}}$  und Beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{d}}$ , so dass diese drei physikalischen Felder auf eines zurückgeführt werden können. Die wahrscheinlich verbreitetsten Zeitintegrationsansätze wurden von Newmark vorgeschlagen [New59] und es werden hierbei die Geschwindigkeit und die Verformung am Ende des Zeitschritts durch die folgenden Formeln angesetzt:

$$\dot{\mathbf{d}}_{n+1} = \dot{\mathbf{d}}_n + \Delta t \left( (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{d}}_n + \gamma \ddot{\mathbf{d}}_{n+1} \right), \quad (3.33)$$

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_n + \Delta t^2 \left( \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{d}}_n + \beta \ddot{\mathbf{d}}_{n+1} \right). \quad (3.34)$$

Werden diese Ansätze in die Bewegungsgleichung eingesetzt, so ist nach der Lösung nach den Beschleunigungen am Ende des Zeitschritts ( $\ddot{\mathbf{d}}_{n+1}$ ) eine Aktualisierung der Geschwindigkeiten und Verformungen mittels der angesetzten Formeln ((3.33) und (3.34)) möglich. Nachdem hier aber die Verschiebungen  $\mathbf{d}_{n+1}$  die primären Unbekannten sein sollen, ergeben sich die Zeitintegrationsansätze nach einer Umformung zu:

$$\dot{\mathbf{d}}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) - \frac{\gamma - \beta}{\beta} \dot{\mathbf{d}}_n - \frac{\gamma - 2\beta}{2\beta} \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_n, \quad (3.35)$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_{n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{d}}_n - \frac{1 - 2\beta}{2\beta} \ddot{\mathbf{d}}_n. \quad (3.36)$$

Hiermit können alle unbekanntenen Bewegungsgrößen durch die Verschiebung am Ende des Zeitschritts ausgedrückt werden. Je nach Wahl der als Newmark-Parameter bezeichneten Konstanten  $\beta$  und  $\gamma$  können verschiedene bekannte Zeitintegrationsverfahren als Spezialfälle der Newmark-Familie erhalten werden [GR97].

Das Vorgehen zur Lösung der semidiskreten Bewegungsgleichungen und die damit verbundene Wahl des geeigneten Zeitintegrationsverfahrens hängt von der Art des transienten Problems ab. Mit expliziten Verfahren werden sinnvollerweise Probleme gelöst, bei denen hochfrequente Anteile wesentlicher Bestandteil der Strukturantwort und deshalb durch die Wahl sehr kleiner Zeitschritte aufzulösen sind. Zu dieser Problemklasse zählen beispielsweise Wellenausbreitungsphänomene und die Beurteilung von Stoß- oder Explosionswirkungen. Bei expliziten Verfahren wird der Bewegungszustand von den bekannten Größen

zu Beginn des Zeitschritts an das Zeitschrittende extrapoliert. Für diagonale Massenmatrizen („lumped mass matrix“, siehe Abschnitt 3.1.1) entfällt die Notwendigkeit zur Gleichungslösung und im Nichtlinearen auch die Newton-Raphson-Iterationen mit den Systemlinearisierungen. Dies ist, neben der einfachen Implementierbarkeit, der Hauptvorteil von expliziten Verfahren, dem jedoch der gravierende Nachteil der bedingten Stabilität entgegensteht und somit der Zwang zur Wahl von (unter Umständen) sehr kleinen Zeitschritten.

Falls transiente Fragestellungen zu lösen sind, bei denen die maßgeblichen Systemantworten im Bereich der niedrigen Frequenzen liegen, ist es wünschenswert, den Zeitschritt entsprechend groß wählen zu können. Dies bedeutet, dass die Zeitschrittwahl durch Genauigkeits-, anstelle von Stabilitätsabwägungen bestimmt ist. Die hierfür notwendige unbedingte Stabilität des Verfahrens ist nur mit impliziten Integrationsschemen zu erreichen [GHI83]. Diese führen, durch Verwendung entsprechend gewählter Zeitintegrationsansätze mit der Bewegungsgleichung, auf einen Bewegungszustand am Ende des Zeitschritts, der implizit von sich selbst abhängt. Deshalb muss in jedem Zeitschritt ein algebraisches Gleichungssystem gelöst werden, das sich aus den diskretisierten Bewegungsgleichungen ergibt und im Falle vorhandener Nichtlinearitäten sogar Gleichgewichtsiterationen zum Beispiel auf der Basis des Newton-Raphson-Verfahrens erfordert.

Die soeben erwähnte Stabilität eines Zeitintegrationsschemas wird über das Verhalten des Verfahrens bei der Lösung eines dynamischen, frei schwingenden Systems beurteilt. Eine numerische Prozedur wird als stabil bezeichnet, wenn kleine Störungen in den Ausgangsdaten auch nur in endlich kleinen, also beschränkten, Änderungen in der numerischen Lösung resultieren. Diese numerische Stabilität eines Algorithmus ist von dem Begriff der physikalischen Stabilität klar zu trennen, da die möglicherweise auftretenden Instabilitäten aus der Diskretisierung herrühren, wohingegen die Letzteren auch bei kontinuierlichen Modellen auftreten. Verfahren, die eine Stabilitätsgrenze in Abhängigkeit von der Zeitschrittgröße aufweisen, werden als bedingt stabil bezeichnet und falls keine Zeitschrittrestriktion aus der Stabilitätsuntersuchung resultiert, ist das betrachtete Verfahren unbedingt stabil.

Die Bestimmung des Stabilitätsverhaltens eines Verfahrens wird im Falle der linearen Strukturmechanik meist über die spektrale Stabilität vorgenommen. Dieses mathematische Kriterium basiert auf der Untersuchung der Vergrößerungsmatrix  $\mathbf{A}$ , die vom betrachteten Zeitintegrationsverfahren und dem Verhältnis der Zeitschrittweite zur Schwingungsperiode abhängt. Sie gibt die diskrete Evolution der Lösung des nächsten Zeitschritts in Abhängigkeit von den Zustandsvariablen der vorherigen Zeitpunkte an:  $\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{A} \mathbf{d}_n$ . Unbedingte (spektrale) Stabilität liegt vor, wenn der als größter Eigenwert  $\lambda_i(\mathbf{A})$  der Vergrößerungsmatrix  $\mathbf{A}$  definierte Spektralradius  $\rho_t(\mathbf{A})$

$$\rho_t(\mathbf{A}) = \max_i |\lambda_i(\mathbf{A})| \quad (3.37)$$

kleiner oder gleich eins ist:

$$\rho_t(\mathbf{A}) \leq 1 \quad \forall \quad \Delta t \in \mathbb{R}^+. \quad (3.38)$$

Im Falle von Mehrfacheigenwerten muss der zugehörige Eigenwert kleiner als eins sein, wobei eine Verletzung dieser Bedingung nur eine schwache Instabilität („weak instabilities“) mit sich bringt. Diese Bezeichnung soll die Abgrenzung zur strikten Instabilität im Falle



von Eigenwerten größer als eins verdeutlichen, denn in diesem Fall wird ein exponentielles Anwachsen der Lösung auftreten („explosive instabilities“) [Hug00]. Ist der Spektralradius nur kleiner eins für einen Zeitschritt, der kleiner als ein kritischer Zeitschritt  $\Delta t_{cr}$  ist, so ist das Zeitintegrationsverfahren lediglich bedingt (spektral) stabil:

$$\rho_t(\mathbf{A}) \leq 1 \quad \forall \quad \Delta t < \Delta t_{cr} \in \mathbb{R}^+. \quad (3.39)$$

Die Auswirkung dieser unterschiedlichen Instabilitätseffekte bei der Simulation eines Modellproblems werden in [Mok01] vergleichend dargestellt. Der kritische Zeitschritt ermittelt sich immer aus der höchsten in der diskreten Struktur vorhandenen Frequenz, was für komplizierte Strukturmodelle unter Umständen eine sehr starke Restriktion ist. Dies verdeutlicht, dass in Fällen, wo sich die Strukturantwort im Wesentlichen aus niederfrequenten Anteilen zusammensetzt, implizite und unbedingt stabile Verfahren bevorzugt werden, da sie eine Zeitschrittwahl unabhängig von den mit der jeweiligen Diskretisierung darstellbaren (höheren) Frequenzen zulassen [Bel83], [Doy01].

Die Beurteilung eines Verfahrens anhand der Eigenschaften bei linearen oder linearisierten Problemen ist wichtig, weil die linearen Problemstellungen als eine Untergruppe der nichtlinearen Fragestellungen angesehen werden können. Deshalb wird ein Verfahren, das schon im Linearen instabil ist, diese Eigenschaft auch im nichtlinearen Kontext aufweisen [BLM00]. Ein direktes Übertragen der Ergebnisse aus der spektralen Stabilitätsanalyse auf nichtlineare Systeme ist aber auf Grund der nicht mehr gültigen modalen Analyse und dem Superpositionsprinzip, auf denen die spektrale Stabilitätsanalyse beruht, nicht möglich. Des Weiteren wird in zahlreichen Veröffentlichungen gezeigt, dass auf nichtlineare Systeme angewandte, unbedingt (spektral) stabile Zeitintegrationsalgorithmen nur noch bedingt stabil sein können [WO88], [LC94].

Ein im Rahmen der nichtlinearen Strukturdynamik verwendbares Kriterium zur Beurteilung der numerischen Stabilität basiert auf einer Energiebilanz. Im Gegensatz zur spektralen Stabilitätsanalyse wird hier keine Störung aufgebracht, sondern es wird nachgewiesen, dass die Energie des Systems beschränkt bleibt. Die in [BS75] formulierte Energiemethode besagt nun, dass ein Verfahren dann energetisch stabil ist, wenn die totale Energie am Ende eines Zeitschritts nicht größer ist als die gesamte Energie zu Beginn des Zeitschritts, unter Berücksichtigung der von externen Lasten und eventuell vorhandenen Dämpfungskräften verrichteten Arbeit:

$$(E_{n+1}^{kin} + E_{n+1}^{int}) = E_{n+1}^{tot} \leq \Delta W^{ext} + E_n^{tot} = \Delta W^{ext} + (E_n^{kin} + E_n^{int}) \quad \forall \quad \Delta t \in \mathbb{R}^+, \quad (3.40)$$

$$\text{mit: } \Delta W^{ext} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\mathbf{d}}(\tau) \cdot (\mathbf{r}_{ext}(\tau) - \mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{d}}(\tau)) \, d\tau. \quad (3.41)$$

Um nun die energetische Stabilität im Nichtlinearen zu gewährleisten, kommen drei grundsätzlich verschiedene Ansätze in Frage [Kuh96], [KC99]: Algorithmen mit numerischer Dissipation, Methoden mit algorithmischer Energieerhaltung und Algorithmen mit erzwungener Erfüllung der Stabilitätsbedingung nach Gleichung (3.40). Wird die numerische Dissipation verwendet, um die Energiebilanz im Zeitschritt zu erfüllen, so werden unphysikalische

hochfrequente Schwingungsmoden herausgedämpft, was aber bei langzeitdynamischen Simulationen das Ergebnis verfälschen kann. Dies ist unter anderem der Grund für die Entwicklung energierhaltender Verfahren [HCL78], [KR96], [CS96], [STD95], [ST94]. Für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Simulationen wird aber erwartet, dass die numerische Dissipation ausreichend ist und es wird auf den numerischen Mehraufwand von energierhaltenden Verfahren [KR96] verzichtet.

Unter numerischer Dissipation versteht man den durch den Zeitintegrationsalgorithmus verursachten Amplitudenfehler. Im niederfrequenten Bereich dient die Dämpfungsrate zur Quantifizierung der numerischen Dissipation. Für den hochfrequenten Lösungsbereich (also kleine Periodenlängen  $T_p$ ) wird sie anhand des Spektralradius der Vergrößerungsmatrix nach Gleichung (3.37) im Grenzübergang  $\frac{\Delta t}{T_p} \rightarrow \infty$  beurteilt, wobei für  $\rho_\infty = 1$  keine numerische Dämpfung vorliegt und mit kleiner werdendem Spektralradius  $\rho_\infty$  die numerische Dissipation zunimmt.

$$\rho_\infty(\mathbf{A}) = \lim_{\frac{\Delta t}{T_p} \rightarrow \infty} \rho_t(\mathbf{A}), \quad 0 \leq \rho_\infty(\mathbf{A}) \leq 1. \quad (3.42)$$

Sollen nun die zwar in der Finite-Elemente-Diskretisierung vorhandenen, aber in der Regel schlecht approximierten, physikalisch nicht repräsentativen, hohen Eigenmoden numerisch herausgedämpft werden, so ist es wünschenswert, dass gleichzeitig die Genauigkeit in den (bei strukturdynamischen Fragestellungen wichtigen) niedrigen Moden erhalten bleibt. Wählt man aber die Parameter der Newmark-Methode ( $\beta$  und  $\gamma$ ) so, dass Hochfrequenzdissipation vorliegt, so führt dies zu einem Verlust der Genauigkeitsordnung zwei (diese ist über den lokalen Abbruchfehler des Verfahrens gegeben), weshalb alternative Verfahren entwickelt wurden.

Die Hilber- $\alpha$ - [HHT77] und Bossak- $\alpha$ - [WBZ81] Verfahren erlauben kontrollierbare numerische Dämpfung von höheren Moden bei gleichzeitiger Erhaltung der Genauigkeit zweiter Ordnung. Diese und viele andere wichtige Einschrittverfahren sind in der Generalized- $\alpha$ -Methode ([CH93], [Hul04]) enthalten. Auf Grund der Flexibilität durch die vielen enthaltenen Unterverfahren und der kontrollierten Hochfrequenzdissipation bei gleichzeitig minimierter Verschlechterung der unteren (hier interessanten) Moden, wird im Rahmen dieser Arbeit mit dieser Verfahrensfamilie gearbeitet.

Die Herleitung der Generalized- $\alpha$ -Methode basiert auf den Newmark-Approximationen der Zustandsgrößen in der Zeit nach den Gleichungen (3.35) und (3.36) und einer Modifikation der semidiskreten Bewegungsgleichung (3.31) mit Hilfe zweier Shift-Parameter  $\alpha_m$  und  $\alpha_f$ :

$$\mathbf{M} \ddot{\bar{\mathbf{d}}}_\alpha \left[ +\mathbf{D} \dot{\bar{\mathbf{d}}}_\alpha \right] + \mathbf{r}_{int}(\bar{\mathbf{d}}_\alpha) = \mathbf{r}_{ext\alpha}(t). \quad (3.43)$$

In dieser modifizierten Bewegungsgleichung werden die Systemvektoren der Verschiebungen, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und äußeren Lasten am Ende des Zeitschritts durch jeweils eine Linearkombination dieser Größen an den Zeitintervallgrenzen ersetzt. Des Weiteren ist die Linearkombination der Beschleunigungen von den übrigen Linearkombinationen unabhängig, weshalb ein separater Shift-Parameter eingeführt wird:

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{\mathbf{d}}}_\alpha &= (1 - \alpha_m) \ddot{\bar{\mathbf{d}}}_{n+1} + \alpha_m \ddot{\bar{\mathbf{d}}}_n, & \dot{\bar{\mathbf{d}}}_\alpha &= (1 - \alpha_f) \dot{\bar{\mathbf{d}}}_{n+1} + \alpha_f \dot{\bar{\mathbf{d}}}_n, \\ \bar{\mathbf{d}}_\alpha &= (1 - \alpha_f) \bar{\mathbf{d}}_{n+1} + \alpha_f \bar{\mathbf{d}}_n, & \mathbf{r}_{ext\alpha}(t) &= (1 - \alpha_f) \mathbf{r}_{ext(n+1)} + \alpha_f \mathbf{r}_{ext(n)}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

In der nichtlinearen Dynamik hängen die internen Kräfte  $\mathbf{r}_{int}(\bar{\mathbf{d}}_\alpha)$  nichtlinear von den Verschiebungen ab. Zu ihrer Ermittlung sind zwei Interpretationen der internen Kräfte am generalisierten Mittelpunkt  $(n + 1 - \alpha_f)$  möglich [KC99]. Einerseits können die Verschiebungen am generalisierten Mittelpunkt verwendet werden, um die inneren Kräfte daraus zu errechnen:

$$\mathbf{r}_{int}(\bar{\mathbf{d}}_\alpha) = \mathbf{r}_{int}(\bar{\mathbf{d}}_{n+1-\alpha_f}) = \mathbf{r}_{int}((1 - \alpha_f)\bar{\mathbf{d}}_{n+1} + \alpha_f\bar{\mathbf{d}}_n). \quad (3.45)$$

Alternativ dazu können die inneren Kräfte, analog zu den externen Lasten, den Trägheitskräften und (falls vorhanden) den Dämpfungskräften, als eine Kombination der inneren Kräfte zu Beginn und Ende des Zeitschritts approximiert werden:

$$\mathbf{r}_{int}(\bar{\mathbf{d}}_\alpha) \approx (1 - \alpha_f)\mathbf{r}_{int(n+1)} + \alpha_f\mathbf{r}_{int(n)}. \quad (3.46)$$

In der linearen Strukturmechanik führen beide Vorgehensweisen auf dasselbe Resultat. Die Approximation ermöglicht die Ermittlung der inneren Kräfte durch den aktuellen Verschiebungszustand und die dafür zu speichernden inneren Kräfte zu Beginn des Zeitschritts, was bei kompliziertem Materialverhalten von Vorteil ist, da in diesem Falle die Auswertung der inneren Knotenkräfte am generalisierten Mittelpunkt nicht trivial ist. Die verschiedenen Herangehensweisen resultieren auch in unterschiedlichen Linearisierungen, wobei aber die vom Linearen bekannten Eigenschaften des Verfahrens, mit Ausnahme der spektralen Stabilität, sich für beide Varianten auf nichtlineare Aufgabenstellungen übertragen lassen.

Werden nun die newmarkschen Zeitintegrationsansätze und die auf den generalisierten Mittelpunkt  $t_{(n+1-\alpha_m)}$  beziehungsweise  $t_{(n+1-\alpha_f)}$  bezogenen Systemvektoren in die semidiskrete Bewegungsgleichung nach Gleichung (3.43) eingesetzt, so ergibt sich die diskrete Bewegungsgleichung (ohne den viskosen Dämpfungsterm):

$$\frac{1 - \alpha_m}{\beta\Delta t^2} \mathbf{M}\bar{\mathbf{d}}_{n+1} + (1 - \alpha_f)\mathbf{r}_{int(n+1)} = (1 - \alpha_f)\mathbf{r}_{ext(n+1)} + \alpha_f\mathbf{r}_{ext(n)} - \alpha_f\mathbf{r}_{int(n)} + \mathbf{M} \left[ \frac{1 - \alpha_m}{\beta\Delta t^2} \bar{\mathbf{d}}_n + \frac{1 - \alpha_m}{\beta\Delta t} \dot{\bar{\mathbf{d}}}_n + \left( \frac{1 - \alpha_m}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\bar{\mathbf{d}}}_n \right]. \quad (3.47)$$

Diese stellt ein nichtlineares, algebraisches Gleichungssystem dar, das in jedem Zeitschritt zur Bestimmung des Bewegungszustands zur Zeit  $t_{n+1}$  gelöst werden muss. Durch die gezielte Wahl der vier Verfahrensparameter  $\alpha_m$ ,  $\alpha_f$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  werden die Eigenschaften des Zeitintegrationsalgorithmus festgelegt.

Für das Generalized- $\alpha$ -Verfahren führen die Forderungen nach Genauigkeit zweiter Ordnung, unbedingte (spektrale) Stabilität für lineare Anfangswertprobleme und optimaler numerischer Dämpfungscharakteristik, das heißt die maximale Dissipation der höheren Modi bei gleichzeitig minimaler Dissipation der niedrigeren Modi, auf die Bedingungen:

$$\alpha_m \leq \alpha_f \leq \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{4} (1 - \alpha_m + \alpha_f)^2, \quad \gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f. \quad (3.48)$$

In Verbindung mit den Beziehungen

$$\alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}, \quad \alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1} \quad (3.49)$$

können die vier Verfahrensparameter auf nur einen einzigen, vom Benutzer zu spezifizierenden Wert, den Spektralradius  $\rho_\infty$  nach Gleichung (3.42), zurückgeführt werden. Die optimale Wahl (im Hinblick auf die oben genannten Anforderungen) der Zeitintegrationsparameter für die Algorithmen der Generalized- $\alpha$ -Verfahrensfamilie kann nach [KC99] folgendermaßen zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned}
 \text{Newmark: } & \alpha_m = 0; & \alpha_f = 0; & \beta = \frac{1}{(\rho_\infty+1)^2}; & \gamma = \frac{3-\rho_\infty}{2\rho_\infty+2} \\
 \text{Bossak-}\alpha: & \alpha_m = \frac{\rho_\infty-1}{\rho_\infty+1}; & \alpha_f = 0; & \beta = \frac{1}{4}(1-\alpha_m)^2; & \gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m \\
 \text{Hilber-}\alpha: & \alpha_m = 0; & \alpha_f = \frac{1-\rho_\infty}{\rho_\infty+1}; & \beta = \frac{1}{4}(1+\alpha_f)^2; & \gamma = \frac{1}{2} + \alpha_f \\
 \text{Gen.-}\alpha: & \alpha_m = \frac{2\rho_\infty-1}{\rho_\infty+1}; & \alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty+1}; & \beta = \frac{1}{4}(1-\alpha_m+\alpha_f)^2; & \gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

Durch Auswertung dieser Beziehungen ist also die optimale Parameterwahl bei der Aktivierung und Kontrolle der numerischen Dämpfung über den Spektralradius  $\rho_\infty$  gewährleistet. Hierbei ist jedoch der bereits oben erwähnte Genauigkeitsabfall der Newmark-Methode von zweiter auf erste Ordnung im Falle vorhandener numerischer Dämpfung (das heißt  $\rho_\infty \neq 1$ ) zu beachten. Aus diesem Grund empfiehlt es sich, beim Einsatz von numerischer Dissipation das Newmark-Verfahren zu vermeiden und stattdessen eines der  $\alpha$ -Verfahren zu verwenden.

Bei der praktischen Anwendung der numerischen Dämpfung ist die Abhängigkeit der bevorzugt gedämpften Moden vom Verhältnis der Zeitschrittweite zur Schwingungsperiode zu beachten. Das bedeutet, dass bei einer Vergrößerung des Zeitschritts die auftretenden Bewegungen relativ dazu in den hochfrequenten Bereich verschoben werden. Dies hat zur Folge, dass die auf Hochfrequenzdissipation hin optimierten Verfahren nun eventuell schon Anteile durch die Aktivierung der numerischen Dissipation herausdämpfen, die für die Schwingungsantwort essentiell sind. Bei kleineren Zeitschrittweiten würden die gleichen Modi noch als niedrigfrequent eingestuft, was durch die minimierte numerische Dämpfung im Bereich der niedrigen Modi zu nahezu keiner numerischen Dissipation führt.

Für  $\alpha_m = \alpha_f = 0$  ergeben sich aus der Generalized- $\alpha$  Methode ganz automatisch die Algorithmen der Newmark-Familie, die sehr viele klassische Zeitintegrationsverfahren umfasst. Stellvertretend hierfür seien die implizite, bei linearer Strukturmechanik unbedingt stabile Trapezregel und das (für diagonale („lumped“) Massenmatrizen) explizite zentrale Differenzenverfahren, das nur bedingt (spektral) stabil ist, genannt.

$$\text{Trapezregel:} \quad \beta = \frac{1}{4}; \quad \gamma = \frac{1}{2} \tag{3.51}$$

$$\text{Zentrale Differenzenmethode:} \quad \beta = 0; \quad \gamma = \frac{1}{2} \tag{3.52}$$

Für das letztgenannte Verfahren beträgt der kritische Zeitschritt [Cri97]

$$\Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{max}} = \frac{T_{min}}{\pi} \tag{3.53}$$

bei linearen Systemen ohne physikalische Dämpfung, wobei  $\omega_{max}$  die höchste im (diskretisierten) System vorkommende Eigenfrequenz ist. Dies verdeutlicht die Problematik bei

(räumlich) fein diskretisierten Strukturen, bei denen die von der Diskretisierung darstellbaren Eigenfrequenzen sehr hoch sind und deshalb die kritische Zeitschrittweite (unter Umständen) extrem klein sein kann. Um die numerisch aufwändige Eigenwertlösung auf Systemebene zu vermeiden, kann die höchste Systemeigenfrequenz mit der größten Eigenfrequenz der einzelnen finiten Elemente über  $\omega_{max} \leq \omega_{max}^{(e)}$  abgeschätzt werden, wobei vorteilhafterweise auch Näherungsformeln für die Elementeneigenwerte verwendet werden [Bel83], [FB81].

Klassischerweise basiert das Eigenwertproblem der (linearen) Strukturmechanik auf der Lösung der homogenen (also ohne externen Lasteinfluss) und linearen Bewegungsgleichung, die hier ohne Dämpfung betrachtet wird. Die im System enthaltenen Eigenkreisfrequenzen  $\omega_i$  und die zugehörigen Schwingungseigenformen  $\Phi_i$  ergeben sich aus dem allgemeinen Eigenwertproblem:

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \Phi_i = 0. \quad (3.54)$$

Wird nun ein geometrisch nichtlineares System untersucht, so sind die Eigenfrequenzen durch die verformungsabhängige, nichtlineare Steifigkeit nicht mehr konstant und es können nur Aussagen für den Tangentialraum (linearisierte Bewegungsgleichung, siehe Abschnitt 3.3) gemacht werden. Die in der semidiskreten Bewegungsgleichung durch die verformungsabhängigen inneren Kräfte enthaltene Nichtlinearität verkompliziert also die Bewertung des Strukturverhaltens und ist der Grund für eine Vielzahl weiterer Effekte, die in der linearen Dynamik nicht vorhanden sind, wie zum Beispiel das Umkippen der Vergrößerungsfunktion. Im Falle zugbeanspruchter Konstruktionen resultiert hieraus bei Spannungserhöhung durch zusätzliche äußere Lasten eine Vergrößerung der Eigenfrequenzen. Für weitergehende Diskussionen nichtlinearer Effekte in dynamischen Systemen sei an dieser Stelle auf [Sto50] und [TS86] verwiesen.

### 3.3 Linearisierung

In jedem Zeitschritt muss zur Bestimmung des Bewegungszustands zur Zeit  $t_{n+1}$  ein nichtlineares, algebraisches Gleichungssystem gelöst werden. Hierzu wird das Newton-Raphson-Verfahren eingesetzt [Cri91]. Die in Raum und Zeit diskrete Bewegungsgleichung am generalisierten Mittelpunkt nach Gleichung (3.47) wird hierfür zu einer Gleichung für das Residuum  $\mathbf{G}(\bar{\mathbf{d}}_{n+1})$  umgestellt, die auch als effektive Strukturgleichung bezeichnet wird:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\bar{\mathbf{d}}_{n+1}) &= \frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} \bar{\mathbf{d}}_{n+1} + (1 - \alpha_f) \mathbf{r}_{int}(\bar{\mathbf{d}}_{n+1}) \\ &\quad - (1 - \alpha_f) \mathbf{r}_{ext(n+1)} - \alpha_f \mathbf{r}_{ext(n)} + \alpha_f \mathbf{r}_{int}(\bar{\mathbf{d}}_n) \\ &\quad - \mathbf{M} \left[ \frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t^2} \bar{\mathbf{d}}_n + \frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t} \dot{\bar{\mathbf{d}}}_n + \left( \frac{1 - \alpha_m}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\bar{\mathbf{d}}}_n \right] = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Zur Herleitung der Iterationsvorschrift wird das Residuum in einer Taylorreihe am Punkt

einer bereits bekannten Näherungslösung  $\bar{\mathbf{d}}_{n+1}^k$  entwickelt.

$$\mathbf{G}(\bar{\mathbf{d}}_{n+1}^{k+1}) = \mathbf{G}(\bar{\mathbf{d}}_{n+1}^k) + \frac{\partial \mathbf{G}(\bar{\mathbf{d}}_{n+1}^k)}{\partial \bar{\mathbf{d}}_{n+1}} \Delta \bar{\mathbf{d}}^{k+1} + \mathcal{O}((\Delta \bar{\mathbf{d}})^2) = \mathbf{0}, \quad (3.56)$$

mit  $\Delta \bar{\mathbf{d}}^{k+1} = \bar{\mathbf{d}}_{n+1}^{k+1} - \bar{\mathbf{d}}_{n+1}^k$ .

Durch den Abbruch der Reihenentwicklung nach dem linearen Glied erhält man ein lineares Gleichungssystem, was der inkrementellen Form des zu lösenden nichtlinearen Systems entspricht:

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\bar{\mathbf{d}}_{n+1}^k)}{\partial \bar{\mathbf{d}}_{n+1}} \Delta \bar{\mathbf{d}}^{k+1} = -\mathbf{G}(\bar{\mathbf{d}}_{n+1}^k). \quad (3.57)$$

Wird diese Gleichung ausgeschrieben, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Interpretation der inneren Kräfte am generalisierten Mittelpunkt nach Gleichung (3.46) als Linearkombination aus den Werten an den Zeitschrittgrenzen:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + (1 - \alpha_f) \mathbf{K}_T(\bar{\mathbf{d}}_{n+1}^k) \right] \Delta \bar{\mathbf{d}}^{k+1} = \\ & = (1 - \alpha_f) \mathbf{r}_{ext(n+1)} - \alpha_f \mathbf{r}_{ext(n)} - \frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} \bar{\mathbf{d}}_{n+1}^k - (1 - \alpha_f) \mathbf{r}_{int}(\bar{\mathbf{d}}_{n+1}^k) \\ & + \mathbf{M} \left( \frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t^2} \bar{\mathbf{d}}_n + \frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t} \dot{\bar{\mathbf{d}}}_n + \left( \frac{1 - \alpha_m}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\bar{\mathbf{d}}}_n \right) - \alpha_f \mathbf{r}_{int}(\bar{\mathbf{d}}_n). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Die Ableitung der inneren Kräfte wird, analog zur nichtlinearen Statik, als tangentielle Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T(\bar{\mathbf{d}})$  bezeichnet und setzt sich aus den elastischen und geometrischen Steifigkeiten zusammen ([ZT05], [Ram76]). In Letzteren wird auch der Einfluss der Vorspannung berücksichtigt [AM88b]. Der Effekt der externen Lasten wird durch den  $\alpha$ -modifizierte Lastvektor nach Gleichung (3.44) auf der rechten Seite repräsentiert. Die offensichtliche Deformationsabhängigkeit der in der Fluid-Struktur-Interaktion auftretenden Belastungen wird, wie bereits in Abschnitt 3.1.1 erwähnt, nicht berücksichtigt, weil keine vorgegebene Gesetzmäßigkeit der Belastung in Abhängigkeit der Strukturdeformation aufgestellt werden kann. Die „klassische“ Folgelastformulierung ist als Modellvorstellung für die Lasten infolge Interaktion also zu stark vereinfacht, um die durch die Strukturbewegung im gesamten Fluidfeld hervorgerufenen Veränderungen adäquat zu repräsentieren. Um diese Effekte aus der Wechselwirkung korrekt zu erfassen, werden an Stelle deformationsabhängiger Belastungen in der Strukturlösung entsprechend formulierte und ausgearbeitete Kopplungsstrategien (siehe Kapitel 6) angewendet.

Für die Lösung der inkrementellen linearen Gleichung werden nun die Anteile aus Gleichung (3.58) zusammengefasst. Hierbei wird der Ausdruck in eckigen Klammern auf der linken Seite der Gleichung als effektive tangentielle Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T^{eff}$  und die komplette rechte Gleichungsseite als effektiver Lastvektor  $\mathbf{r}^{eff}$  bezeichnet. Das hieraus resultierende Gleichungssystem ist (bei den hier in Betracht kommenden Fällen) symmetrisch und die Koeffizientenmatrix hat in der Regel Bandstruktur, ist also schwach besetzt. Durch sukzessives Lösen dieser inkrementellen Steifigkeitsbeziehung im Sinne der Newton-Raphson-Iteration wird der Verformungszustand der Struktur am Ende des Zeitschritts ermittelt. Aus der konsistenten Linearisierung ergibt sich, bei nicht zu großem Abstand zur Lösung, die für das

Newton-Verfahren optimale, nämlich quadratische Konvergenz. Bei zu großen Laständerungen zwischen den Zeitschritten befindet man sich außerhalb des Konvergenzradius, was zu deutlich schlechterem Konvergenzverhalten in der Newton-Iteration führt und sich beispielsweise durch Unterinkrementierung des entsprechenden Zeitschritts vermeiden lässt. Nach erfolgter Konvergenz können Geschwindigkeit und Beschleunigung zur Zeit  $t_{n+1}$  mit den Gleichungen (3.35) und (3.36) aus dem aktuellen Verformungsvektor  $\bar{\mathbf{d}}_{n+1}$  und den Daten am Zeitschrittbeginn ermittelt werden. Danach folgt die Berechnung für den nächsten Zeitschritt.

### 3.4 Lösungsverfahren für die geometrisch nichtlineare Elastodynamik

#### Algorithmische Umsetzung

Nachdem in den vorangegangenen Abschnitten 3.1, 3.2 und 3.3 die Überführung des kontinuierlichen in ein räumlich und zeitlich diskretisiertes Problem mit anschließender Linearisierung der nichtlinearen Bewegungsgleichung durchgeführt wurde, soll nun der daraus resultierende Lösungsalgorithmus für die geometrisch nichtlineare Elastodynamik skizziert werden. Dieser setzt sich aus dem impliziten Einschritt-Zeitintegrationsverfahren der Generalized- $\alpha$ -Verfahrensfamilie und einem darin gekapselten Newton-Raphson-Verfahren im Sinne einer Prädiktor-Multikorrekter-Strategie zusammen, was in der folgenden Box dargestellt wird:

- (0) Initialisierung: Setze  $n = 0$  und bestimme Anfangsbedingungen  $\bar{\mathbf{d}}_0, \dot{\bar{\mathbf{d}}}_0, \ddot{\bar{\mathbf{d}}}_0$
- (1) Generiere deformationsunabhängige Massen- (und evtl. Dämpfungsmatrizen)  $\mathbf{M}, \mathbf{D}$
- (2) Schleife über alle Zeitschritte  $n$ , mit  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ 
  - (3) Ermittle Lastwerte für  $t = t_{n+1}$  und setze  $k = 0$
  - (4) Setze Prädiktorgrößen  $\bar{\mathbf{d}}_{n+1}^0 = \bar{\mathbf{d}}_n, \dot{\bar{\mathbf{d}}}_{n+1}^0 = \dot{\bar{\mathbf{d}}}_n, \ddot{\bar{\mathbf{d}}}_{n+1}^0 = \ddot{\bar{\mathbf{d}}}_n$
  - (5) Ermittle iterationsunabhängige Anteile des effektiven Lastvektors
  - (6) Newton-Raphson-Iterationsschleife
    - (6.1) Berechne effektive Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T^{eff}$
    - (6.2) Berechne effektiven Lastvektor  $\mathbf{r}^{eff}$
    - (6.3) Löse die inkrementelle Strukturgleichung  $\Delta \bar{\mathbf{d}}^{k+1} = \left(\mathbf{K}_T^{eff}\right)^{-1} \mathbf{r}^{eff}$
    - (6.4) Aktualisiere Verschiebungen  $\bar{\mathbf{d}}_{n+1}^{k+1} = \Delta \bar{\mathbf{d}}^{k+1} + \bar{\mathbf{d}}_{n+1}^k$
  - (7) Konvergenzcheck: falls (Residuum > TOL), dann setze  $k = k + 1$  und zu (6)
  - (8) Aktualisiere Geschwindigkeiten/Beschleunigungen mit Newmark-Ansätzen
- (9) Zeitcheck: falls ( $n < n_{max}$ ), d.h. ( $t < t_{max}$ ), dann setze  $n = n + 1$  und zu (2)

### Beispiele zur Verifikation der Implementierung

Die im Rahmen dieser Arbeit notwendigen Erweiterungen des Finite-Elemente-Programmsystems CARAT zur Simulation der nichtlinearen Dynamik von vorgespannten Seil- und Membranstrukturen werden anhand der folgenden Beispiele überprüft. Die Auswahl entsprechender Referenzlösungen ist schwierig, da für Problemstellungen der nichtlinearen Strukturmechanik in der Regel keine analytischen Lösungen vorliegen.

Deshalb, und weil in CARAT ein bereits ausgetesteter Löser für Eigenwertprobleme vorliegt, werden zunächst die verformungsunabhängigen Implementierungen durch den Vergleich mit analytischen Lösungen der linearen Dynamik, nämlich den Eigenfrequenzen und -formen von vorgespannten Seilen und Membranen verglichen. Hiermit werden die Implementierungen auf Elementebene bezüglich Massen- und linearen Steifigkeitsmatrizen, die Berücksichtigung der Vorspannung und der Assemblierungsprozess überprüft. Die numerische Lösung des Eigenwertproblems der Dynamik ergibt sich aus Gleichung (3.54).

Zur Verifikation des Programmablaufs im Rahmen der nichtlinearen Dynamik wird ein Vergleich mit der numerischen Lösung einer Seilnetzschwingung aus der Literatur vorgenommen.

**Seileigenschwingungen** In diesem Beispiel wird ein vorgespanntes, gerades Seil numerisch auf die Eigenschwingungen in einer Ebene untersucht. Für den Fall, dass die Seillängsachse mit der Koordinate  $x$  bezeichnet wird, werden also beispielsweise nur Schwingungen in Richtung der  $z$ -Achse betrachtet. Durchhang aus Eigengewicht (bei horizontaler Lage) wird vernachlässigt und es wird angenommen, dass die transversalen Schwingungsamplituden (also quer zum Seil) so klein sind, dass eine geometrisch lineare Theorie angewendet werden kann. Die durch die Schwingungen verursachte Änderung der Seilkraft darf deshalb unberücksichtigt bleiben. Die analytischen Lösungen sind beispielsweise in [MW79], [Pet96] zu finden. Auf der Basis der genannten Annahmen ergibt sich die  $n$ -te Eigenform der Seilquerschwingungen als Sinushalbwellen mit der unbestimmten Amplitude  $C$  nach der Formel:

$$w_n(x) = C \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \quad (3.59)$$

Aus dem Lösungsansatz der Verschiebungen in  $z$ -Richtung nach Gleichung (3.59) lässt sich die  $n$ -te Eigenfrequenz des Seils berechnen:

$$f_{n,Quer} = \frac{n}{2} \cdot \sqrt{\frac{S}{\mu l^2}}. \quad (3.60)$$

Hierin ist  $S$  die Normalkraft im Seil (in der betrachteten Problemstellung also die Vorspannkraft, in [N]),  $\mu$  die Massebelegung (in [kg/m]) und  $l$  die Seillänge (in [m]).

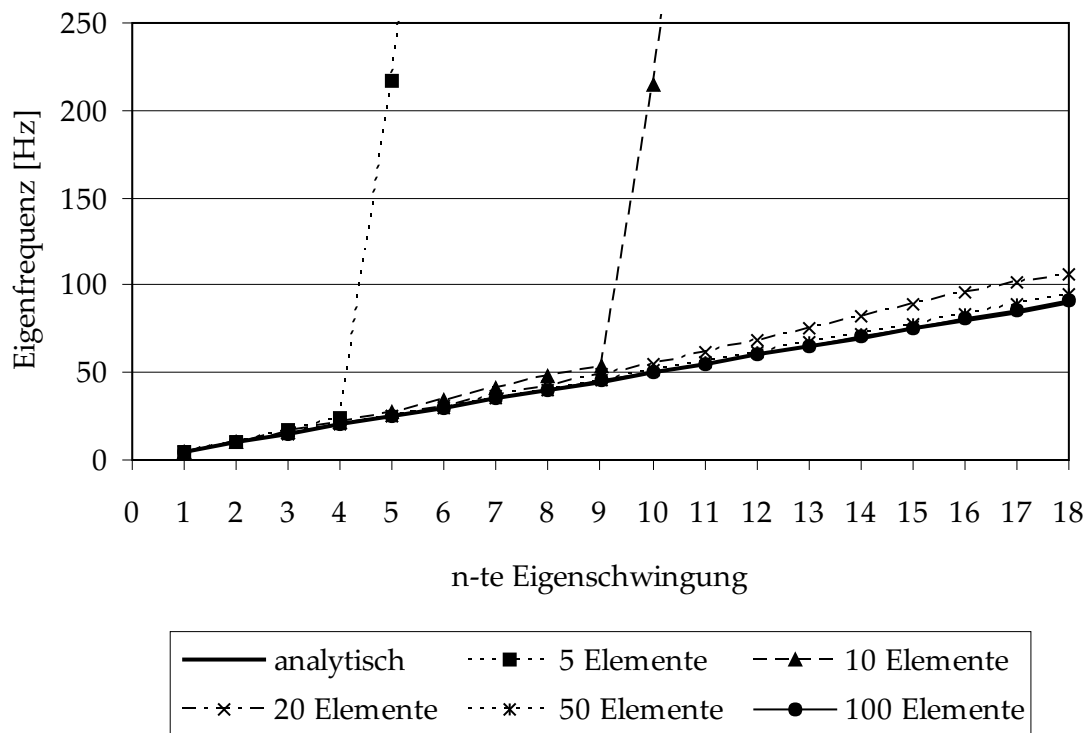
Die Longitudinalverformungen des beidseitig festgehaltenen Seils im Falle von Längseigenschwingungen lassen sich ebenfalls als eine Überlagerung von Sinuswellen darstellen. Die zugehörige  $n$ -te Eigenfrequenz in Längsrichtung ist

$$f_{n,Laengs} = \frac{n}{2} \cdot \sqrt{\frac{EA}{\mu l^2}} \quad (3.61)$$



mit dem Elastizitätsmodul  $E$  (in  $[\text{N}/\text{m}^2]$ ) und der Querschnittsfläche  $A$  (in  $[\text{m}^2]$ ). Die Eigenfrequenzen für Schwingungen in Längsrichtung sind deutlich höher als bei Querschwingungen.

Um neben der Validierung der Seilelemente auch den im Abschnitt 3.2 angedeuteten Zusammenhang zwischen Diskretisierung und Eigenfrequenzen zu zeigen, werden in Abbildung 3.3 die Eigenfrequenzen für ein beidseitig gelagertes Seil mit verschiedenen Vernetzungen aufgetragen. Die zugehörigen Eigenformen sind für zwei ausgewählte Diskretisierungen in Abbildung 3.4 der analytischen Lösung gemäß Gleichung (3.59) gegenübergestellt. Zur Berechnung wurden die Systemwerte so gewählt, dass sich die erste (Quer-) Eigenfrequenz zu 5 Hz ergibt: Spannweite  $l = 10$  m, Querschnittsfläche  $A = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ , E-Modul  $E = 150 \cdot 10^9 \text{ N}/\text{m}^2$ , Vorspannkraft  $S = 19680 \text{ N}$  und Massebelegung  $\mu = 1,968 \text{ kg}/\text{m}$ .



**Abbildung 3.3:** Berechnete Seileigenfrequenzen in Abhängigkeit von der Netzdicke.

Man kann erkennen, dass das Eigenwertproblem des Seils korrekt gelöst wird und die Steifigkeit FE-typisch (im Falle konsistenter Massenmatrizen und verschiebungsbasierter Elemente) überschätzt wird. Der auffallend hohe Wert der fünften Eigenfrequenz beim System mit fünf Elementen erklärt sich aus der Tatsache, dass durch die geringe Anzahl an Systemfreiheitsgraden diese Eigenform bereits eine Längsschwingung darstellt. Verwendet man Gleichung (3.61) zur Bestimmung der ersten Longitudinaleigenfrequenz, so ergibt sich  $f_{1,Laengs} = 213.85 \text{ Hz}$ , was der numerisch ermittelten Lösung entspricht. Derselbe Effekt tritt bei zehn Elementen mit der zehnten Eigenfrequenz auf.

Dieses Beispiel demonstriert sehr deutlich, wie stark der Frequenzgehalt einer diskretisierten Struktur von der Vernetzung abhängt. Beispielsweise ist die „echte“ fünfte Eigenfrequenz bei der Diskretisierung mit fünf Seilelementen nicht mehr im diskreten System enthalten, weil nur vier Knotenfreiheitsgrade in transversaler Richtung vorhanden sind. Somit stellt die numerisch ermittelte fünfte Eigenform gezwungenermaßen eine Longitudinalschwingung dar, weil die verbliebenen Knotenfreiheitsgrade die Verschiebungen in Stablängsrichtung sind. Zur Veranschaulichung sind in Abbildung 3.4 beim Finite-Elemente-Modell mit fünf Elementen die Knoten hervorgehoben.

	FE-Modell 5 Elemente	FE-Modell 20 Elemente	Analytische Lösung
1. Eigenform			
2. Eigenform			
3. Eigenform			
4. Eigenform			
5. Eigenform	Längsschwingung 		

Abbildung 3.4: Seileigenschwingungsformen.

**Membraneigenschwingungen** Zum Vergleich mit analytischen Lösungen für Membraneigenschwingungen wird eine ringsum gelagerte, vorgespannte, ebene Rechteckmembran ohne Berücksichtigung des Eigengewichts verwendet. Die Membran liegt in der  $x$ - $y$ -Ebene (mit an den Koordinatenachsen ausgerichteten Kanten der Länge  $L_x$  und  $L_y$ ) und die Verformungen gehen in die  $z$ -Richtung. Werden kleine Verformungen unterstellt, so ergeben sich die Eigenschwingungsformen mit  $C$  als unbestimmter Verschiebungsamplitude aus folgender Beziehung [KFCS00]:

$$w_z(x, y) = C \cdot \sin(k_x x) \sin(k_y y),$$

$$\text{mit: } k_x = \frac{i\pi}{L_x} \quad i = 1, 2, 3, \dots \tag{3.62}$$

$$k_y = \frac{j\pi}{L_y} \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Die zugehörigen Eigenfrequenzen lassen sich mit folgender Formel ermitteln:

$$f_{ij} = \frac{c}{2} \left[ \left( \frac{i}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{j}{L_y} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.63)$$

Der Faktor  $i$  gibt dabei die Anzahl der Sinushalbwellen in  $x$ -Richtung, der Faktor  $j$  die Anzahl der Sinushalbwellen in  $y$ -Richtung an. Die niedrigste Eigenfrequenz des Systems erhält man also für  $i = j = 1$ . Die Abkürzung  $c$  ergibt sich aus  $c^2 = \frac{\sigma}{\rho}$  mit  $\sigma$  als Vorspannung in  $[\text{N}/\text{m}^2]$  und  $\rho$  als Dichte in  $[\text{kg}/\text{m}^3]$ .

Für die Vergleichsrechnungen wurde eine Membran mit den Abmessungen  $L_x = 2 \text{ m}$  und  $L_y = 1 \text{ m}$  sowie den Parametern Dicke  $t = 0,001 \text{ m}$ , Dichte  $\rho = 200 \text{ kg}/\text{m}^3$  und isotroper Vorspannung  $\sigma = 160 \text{ N}/\text{m}^2$  gewählt, was in einer ersten Eigenfrequenz von  $0,5 \text{ Hz}$  resultiert.

Die „lineare“ Anordnung (mit steigendem Zähler  $n$ ) der von den beiden Parametern  $i$  (Anzahl der Halbwellen in  $x$ ) und  $j$  (Anzahl der Halbwellen in  $y$ ) abhängigen Eigenfrequenzen ergibt sich aus der Tabelle 3.1.

EF-nr. $n$	$i$	$j$	EF-nr. $n$	$i$	$j$
1	1	1	11	6	1
2	2	1	12	2	3
3	3	1	13	5	2
4	1	2	14	3	3
5	4	1	15	6	2
6	2	2	16	4	3
7	3	2	17	7	1
8	5	1	18	5	1
9	4	2	19	1	4
10	1	3	20	7	2

**Tabelle 3.1:** „Anordnung“ der Eigenfrequenzen.

Die berechneten Werte sind in Abbildung 3.5 dargestellt. Hier wird, ebenso wie zuvor bei den Seilschwingungen, die Elementanzahl erhöht, um die Konvergenz zur analytischen Referenzlösung zu erhalten. Es wird darauf geachtet, dass jeweils die Elementanzahl in  $x$ - beziehungsweise  $y$ -Richtung, entsprechend den Abmessungen des Systems in diesen beiden Richtungen, im Verhältnis zwei zu eins ist. Es ergeben sich bei Netzverfeinerung wieder die Werte der analytischen Referenzlösung und es werden erwartungsgemäß vom Finite-Elemente-Modell die Steifigkeiten überschätzt (konsistente Massenmatrizen und verschiebungsbasierte Elementformulierung).

In Abbildung 3.6 sind beispielhaft für die Diskretisierung mit  $20 \times 10$  Elementen die ermittelten Eigenformen der Referenzlösung gegenübergestellt, womit auch die Zählweise der Eigenfrequenzen  $f_{ij}$  in Abhängigkeit von  $n$  verdeutlicht wird. Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass diese Reihenfolge sich auf Grund der im numerischen Beispiel gewählten

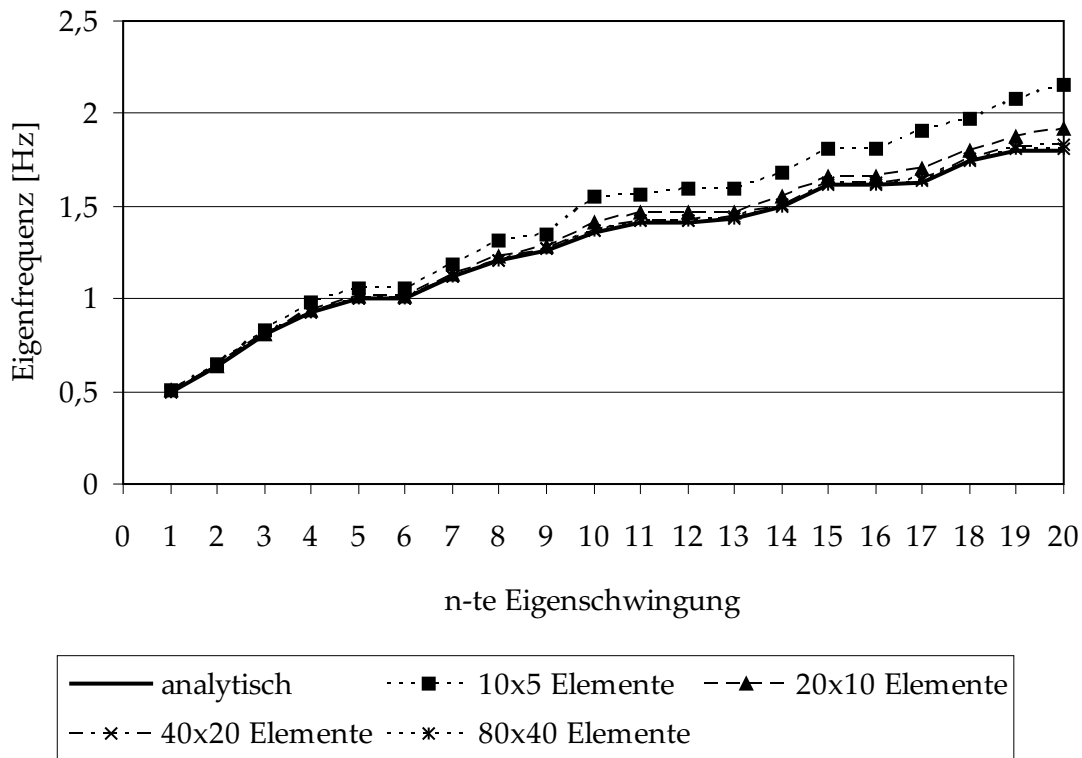


Abbildung 3.5: Berechnete Membraneigenfrequenzen in Abhängigkeit von der Netzdicke.

Systemwerte ergibt und keine allgemeingültige Regel darstellt. Die Höhe der Eigenfrequenzen in Abhängigkeit der Sinushalbwellen in den beiden Membranrichtungen ergibt sich entsprechend dem Verhältnis der Kantenlängen zueinander. Erwähnenswert ist auch der Einfluss der Vorspannungsverteilung, was bei gleicher Systemgeometrie und anisotroper Vorspannung (siehe Abschnitt 4.5.2) zu deutlichen Abweichungen von der obigen analytischen Seifenhautlösung führt.

**Nichtlineare Schwingungen eines Seilnetzes** Zur Verifikation der Algorithmen zur Lösung von Problemen der nichtlinearen Strukturmechanik für vorgespannte Tragwerke gemäß der Zusammenfassung am Beginn dieses Kapitels, wird ein Vergleich von Simulationsergebnissen mit einem in der Literatur vorgestellten Problem vorgenommen. Es handelt sich dabei um ein ebenes, vorgespanntes Seilnetz nach [ADA73], [AM88c], was auch in [Goe91] als Referenzlösung verwendet wurde. Dieses Seilnetz ist zwischen vier unverschieblichen Lagerpunkten eingehängt, die im Grundriss ein Quadrat mit 12 m Kantenlänge beschreiben. Die Geometrie und die Knotennummerierung ist der Abbildung 3.7 zu entnehmen, wobei aus Symmetriegründen die Nummerierung nur am Viertelsystem skizziert wird. Die zugehörigen Knotenkoordinaten in der Ebene  $z = 0$  sind in der Tabelle 3.2 zusammengefasst.

Die in [AM88c] angegebene Vorspannungsverteilung sieht für jedes Seil eine teilweise nur

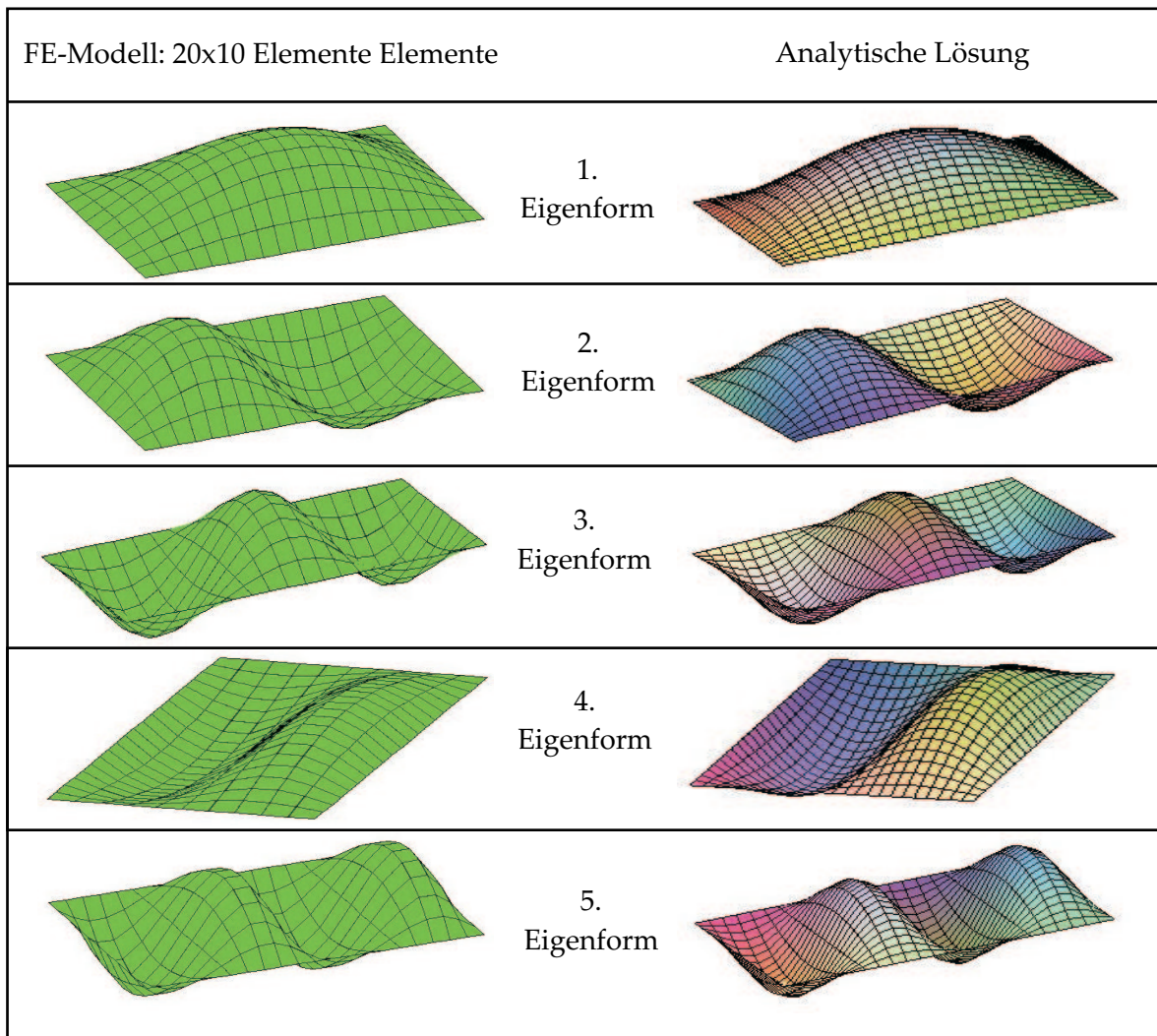


Abbildung 3.6: Membraneigenschwingungsformen.

Knotennr.	x	y	Knotennr.	x	y
1	0.000000	0.000000	9	4.011147	0.000000
2	0.000000	2.005565	10	4.002995	2.005226
3	0.000000	4.011148	11	4.010497	4.010497
4	0.000000	4.612840	12	3.995768	5.213654
5	2.005565	0.000000	13	4.612840	0.000000
6	2.001505	2.001505	14	4.803548	1.999321
7	2.005226	4.002995	15	5.213654	3.995768
8	1.999321	4.803548	46	6.000000	6.000000

Tabelle 3.2: Knotenkoordinaten des Seilnetzes (Viertelsystem).

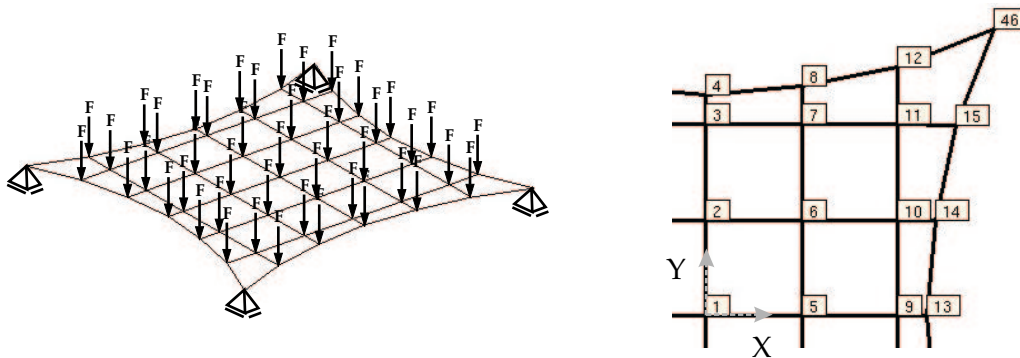


Abbildung 3.7: Seilnetz: System mit Anfangsbelastung und Knotennummerierung.

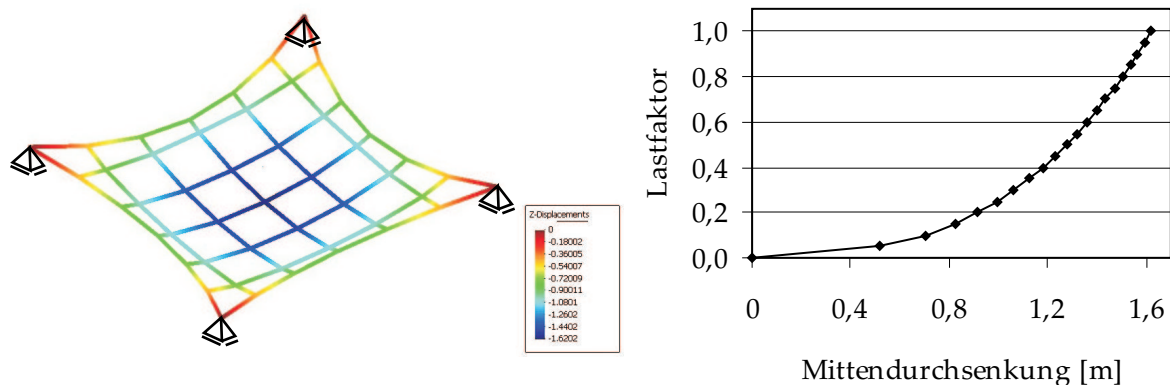
leicht unterschiedliche Vorspannkraft vor. Diese Kräfte wurden auf die vier wesentlichen Vorspannwerte (jeweils zwei für die Rand- und Innenseile) zurückgeführt und somit die Systemeingabe vereinfacht. Als Kontrolle wurde das Seilnetz in einer nichtlinearen statischen Analyse nur dem hierdurch definierten „Lastfall Vorspannung“ unterworfen. Aus der Tatsache, dass keinerlei Verformungen auftraten, kann geschlossen werden, dass dieser Vorspannungszustand auf der definierten Geometrie im Gleichgewicht steht (die Auswirkungen der Vorspannungsvereinfachung können somit als vernachlässigbar angesehen werden). Die Zuordnung der Vorspannkräfte auf die einzelnen Seilabschnitte kann der Tabelle 3.3 entnommen werden.

Stab	Vorspannkraft [N]	Stab	Vorspannkraft [N]
1 - 2	18998.0	4 - 8	172099.4
2 - 3	18998.0	8 - 12	172099.4
3 - 4	18998.0	12 - 46	182099.4
5 - 6	31999.8	3 - 7	18998.0
6 - 7	31999.8	7 - 11	18998.0
7 - 8	31999.8	11 - 15	18998.0
9 - 10	18998.0	2 - 6	31999.8
10 - 11	18998.0	6 - 10	31999.8
11 - 12	18998.0	10 - 14	31999.8
13 - 14	172099.4	1 - 5	18998.0
14 - 15	172099.4	5 - 9	18998.0
15 - 46	182099.4	9 - 13	18998.0

Tabelle 3.3: Vorspannkräfte der einzelnen Seilabschnitte.

Die Querschnittsflächen sind  $A = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$  für die Innenseile und  $A = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$  für die Randseile. Der E-Modul ist für alle Seile mit  $E = 150 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$  gegeben. Die Referenzlösung in [AM88c] wurde mit diskreten Knotenmassen und vermutlich mit einem Element

je Seilabschnitt berechnet. Wie man aus den deformierten Geometrien in [Goe91] schließen kann, wurde diese Elementierung mit linearen Seilelementen auch dort eingesetzt. Alternativ zu den Knotenmassen wurde im Rahmen dieser Arbeit eine Massenbelegung für die Seilabschnitte vorgeschrieben, die aber durch die „lumped mass“ Formulierung bei derselben Diskretisierung wie oben, in (bis auf vernachlässigbar kleine Abweichungen) äquivalenten Knotenmassen resultierte. Mit den angegebenen Querschnittswerten und den Seillängen der Referenzgeometrie entsprechen die Massenbelegungen  $\mu = 120 \text{ kg/m}$  für die Randseile und  $\mu = 12 \text{ kg/m}$  im Falle der Innenseile den in der Originalveröffentlichung tabellierten Knotenmassen. Dieses Vorgehen bestätigt die Implementierung des „mass lumping“.



**Abbildung 3.8:** Statische Durchsenkung und nichtlineares Last-Verformungsdiagramm.

Um eine nichtlineare Schwingung anzuregen, wird das ebene Seilnetz mit einer gleichmäßigen Querbelastung von  $F = 100 \text{ kN}$  in jedem Netzknoten ausgelenkt. Die durch eine geometrisch nichtlineare Analyse ermittelte verformte Geometrie entspricht der Ausgangskonfiguration für die dynamische Analyse und ist in Abbildung 3.8 dargestellt. In der gleichen Abbildung rechts ist die Last-Verschiebungslinie bei kontinuierlicher Steigerung der Belastung  $P = \lambda F$  mittels des Lastfaktors  $\lambda$  aufgetragen.

Die für zugbeanspruchte Konstruktionen typische Versteifung des Systems unter Belastung ist ebenso klar ersichtlich wie die geringe Steifigkeit gegen Querbelastung bei fehlender Krümmung. Einzig die Vorspannung ermöglicht den ersten Schritt dieser statischen Berechnung. Mit der enormen Systemversteifung ist eine starke Veränderung der dynamischen Eigenschaften, erkennbar beispielsweise in Gleichung (3.54), verbunden. Die Eigenfrequenzen der Struktur werden deshalb während des Schwingungsvorgangs stark schwanken. Die in [AM88c] angegebene Mittenauslenkung von  $w = 1,62 \text{ m}$  beim statischen Lastfall wird auch mit den in CARAT implementierten Elementen und der Newton-Raphson-Strategie erhalten, was die stationäre, geometrisch nichtlineare Seilberechnung mit CARAT bestätigt.

Wird die ausgelenkte Struktur losgelassen, setzt eine Schwingungsbewegung ein, die angesichts der großen Deformation nicht mehr mit linearer Kinematik beschrieben werden kann. Ebenso können Seile während der Bewegung entspannt werden, was einem Ausfall

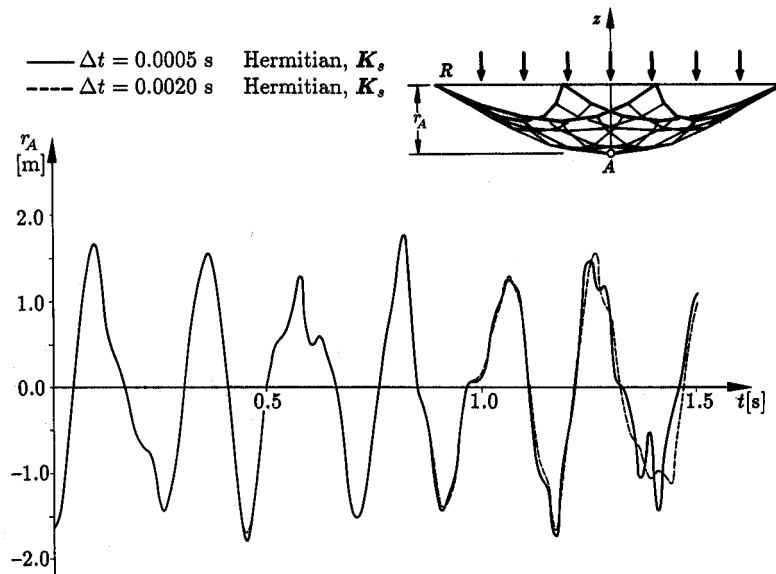


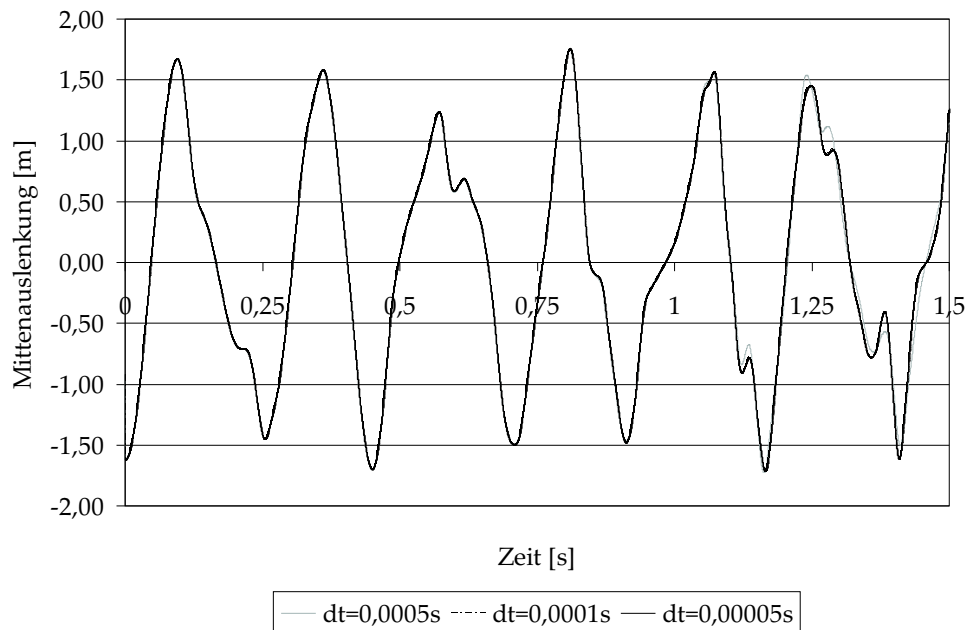
Abbildung 3.9: Bewegung des Seilnetzmittelknotens aus [AM88c].

dieses Tragelements entspricht. Dies wird aber im Rahmen der hier gezeigten Simulationsergebnisse vernachlässigt und es erfolgt der Vergleich mit der Zeit-Verschiebungskurve des Mittelknotens nach [AM88c] gemäß Abbildung 3.9, wo auf Druck beanspruchte Elemente ebenso nicht eliminiert werden (die Stabelimination würde den modifizierten konstitutiven Ansätzen bei der Membranfaltenmodellierung nach Abschnitt 2.3.3 entsprechen).

Die Durchführung der numerischen Simulation mit CARAT erfolgte mit dem Generalized- $\alpha$ -Verfahren. Im Rahmen der Testrechnungen wurden verschiedene Zeitschrittweiten und unterschiedliche Spektralradien untersucht. Es hat sich herausgestellt, dass die berechneten Zeit-Verschiebungsverläufe für die Spektralradien  $\rho_\infty = 0,6$ ,  $\rho_\infty = 0,8$  und  $\rho_\infty = 1$  im Falle der Zeitschritte  $\Delta t = 0,0001$  s und  $\Delta t = 0,00005$  s absolut identisch sind. Für  $\Delta t = 0,0005$  s treten für die drei verschiedenen Werte des Spektralradius nur marginale Unterschiede in den höherfrequenten Anteilen bei ca.  $t = 1,37$  s auf, was die in Abschnitt 3.2 diskutierte, zeitschrittabhängige Wirkung der numerischen Dissipation bestätigt. Um den Vergleich mit der Referenzlösung durchzuführen, werden im Folgenden nur noch Simulationsrechnungen mit  $\rho_\infty = 1$  verwendet.

Die Gegenüberstellung der mit CARAT ermittelten Ergebnisse für unterschiedliche  $\Delta t$  ist in Abbildung 3.10 zu sehen. Die gewählten Zeitschrittweiten orientieren sich an der in [AM88c] verwendeten Zeitdiskretisierung ( $\Delta t = 0,0005$  s). Es ist jedoch zu beachten, dass dort kubische Beschleunigungsansätze im Gegensatz zu den hier verwendeten linearen Ansätzen auf der Basis der Newmark-Formeln (siehe Gleichung 3.36) verwendet werden, was bei gleicher Schrittweite die Auflösung höherer Frequenzen ermöglicht. Um eine zeitschrittunabhängige Lösung zu erhalten, wird deshalb ein Fünftel dieses Zeitschritts verwendet und danach mit der nochmals halbierten Schrittweite verifiziert, dass keine Unterschiede in den mit CARAT ermittelten Ergebnissen mehr sind. Es stellt sich heraus, dass für  $\Delta t = 0,0005$  s noch gewisse Abweichungen in den höherfrequenten Anteilen, zum Beispiel um die Zeitpunkte  $t = 1,26$  s und  $t = 1,37$  s, gegenüber den zeitlich höher aufgelösten





**Abbildung 3.10:** Simulation mit CARAT: Bewegung des Seilnetzmittelknotens.

Verläufen auftreten. Die Zeit-Verschiebungsverläufe für Berechnungen mit  $\Delta t = 0,0001\text{ s}$  und  $\Delta t = 0,00005\text{ s}$  sind jedoch miteinander identisch und lösen demnach sämtliche in der Bewegung vorhandenen Moden auf.

Im Vergleich zur Lösung aus der Literatur lassen sich sehr gute Übereinstimmungen der Bewegungsverläufe feststellen. Die beispielsweise in den Bereichen um  $t = 1,13\text{ s}$  und  $t = 1,37\text{ s}$  auftretenden kleinen Differenzen können (unter anderem) aus den oben genannten Annahmen beziehungsweise Vereinfachungen bei der Modelldefinition im Vergleich zur Literatur resultieren. Durch die überwiegende Übereinstimmung der eigenen Berechnungsergebnisse mit den in der Literatur angegebenen Werten können die Implementierungen zur nichtlinearen dynamischen Analyse von vorgespannten Strukturen mittels des Generalized- $\alpha$ -Verfahrens (und somit auch aller in dieser Verfahrensfamilie als Unterverfahren enthaltenen Methoden nach Abschnitt 3.2) also als korrekt angesehen werden.

**FAZIT:**

In Abschnitt 2.3 wurden, aufbauend auf den kontinuumsmechanischen Grundlagen, die Besonderheiten in der Lastabtragung bei leichten Flächentragwerken erläutert. Dabei wurde festgestellt, dass sich Membrane durch die Kopplung von Tragwerksform und vorliegendem Spannungszustand fundamental von konventionellen Strukturen unterscheiden.

Durch die in Kapitel 3 durchgeführte Diskretisierung der grundlegenden Gleichungen und die vorgestellten Lösungsverfahren ist die nichtlineare stationäre oder transiente Analyse von Tragwerken unter gegebenen Belastungen möglich. Hierbei wurde jedoch im Falle von Membranstrukturen die Tatsache ignoriert, dass die Referenzgeometrie für diese Strukturanalyse, abgesehen von der trivialen Vorgabe einer Ebene, unbekannt ist.

Streng genommen umfasst die Simulation von Membrantragwerken immer auch die Ermittlung der unbelasteten (aber in der Regel vorgespannten) Strukturgeometrie, die dem Gleichgewichtszustand für eine gewählte Vorspannungsverteilung entspricht. Folglich ist, im Gegensatz zu konventionellen Strukturen, eine willkürliche Formvorgabe nicht möglich. Auf Grund der Tatsache, dass die Membranform durch den Spannungszustand definiert ist, stellt schon der Entwurf der Struktur eine mechanische Fragestellung dar.

Deshalb wird im Kapitel 4 der Frage nach der Existenz und der Berechnung von Gleichgewichtsgeometrien im Rahmen der sogenannten *Formfindung* nachgegangen.

# Kapitel 4

## Formfindung

Auf Grund ihres speziellen Tragverhaltens unterscheidet sich das Vorgehen zur Strukturanalyse bei vorgespannten Membranstrukturen grundlegend vom Simulationsprozess bei konventionellen Tragwerken. Die optimale Lastabtragung ausschließlich über tangentielle Flächenspannungen bewirkt eine starke Wechselwirkung zwischen der Strukturgeometrie und dem mechanischen Verhalten. Deshalb ist, im Gegensatz zu „Standardkonstruktionen“ mit Biegesteifigkeit, die Ausgangsgeometrie für die Berechnung unter äußeren Belastungen selbst das Resultat einer (häufig numerisch durchgeführten) strukturmechanischen Analyse – der *Formfindung*. Dies ist der Grund dafür, dass im Analyseprozess von Membrantragwerken die mechanisch verschiedenartigen Fragestellungen der Formfindung und der Strukturanalyse unter Einwirkungen zu bearbeiten sind.

In diesem Kapitel wird die eigentliche Fragestellung der Formfindung dargestellt und die Problematik der Singularität des inversen Problems erörtert. Dabei wird die von Bletzinger in [Ble98], [BR99] vorgeschlagene „Updated Reference Strategy“ (URS) zur numerischen Lösung der Formfindungsaufgabe eingesetzt. Durch eigene methodische Weiterentwicklungen zur Ermittlung von anisotrop vorgespannten Membranformen wird das Anwendungsfeld dieses Verfahrens deutlich erweitert. In diesem Zusammenhang werden auch Aspekte der Existenz von Gleichgewichtsformen diskutiert. Die dabei identifizierten physikalisch begründeten Probleme werden durch ein neu vorgeschlagenes, adaptives Spannungskorrekturschema gelöst. Die zugrunde liegenden Ideen und neu erarbeiteten Methoden werden im Folgenden durch illustrative Beispiele erläutert und damit die Anwendbarkeit und erfolgreiche Umsetzung der Lösungsstrategie demonstriert.

### 4.1 Problemstellung und Lösungsmethoden

#### Membranformfindung im Kontext des Entwurfs von Leichtbaustrukturen

Leichtbaustrukturen zeichnen sich dadurch aus, dass sie das vorhandene Material optimal ausnutzen, um externe Lasten abzutragen. Dies impliziert, dass in der Struktur die Querschnitte gleichmäßige Spannungsverteilungen aufweisen, was bedeutet, dass ausschließlich Membranspannungen an Stelle von Biegung aktiviert werden. Aus mechanischer Sicht sind also optimierte Schalenstrukturen und textile, leichte Flächentragwerke in der Art und

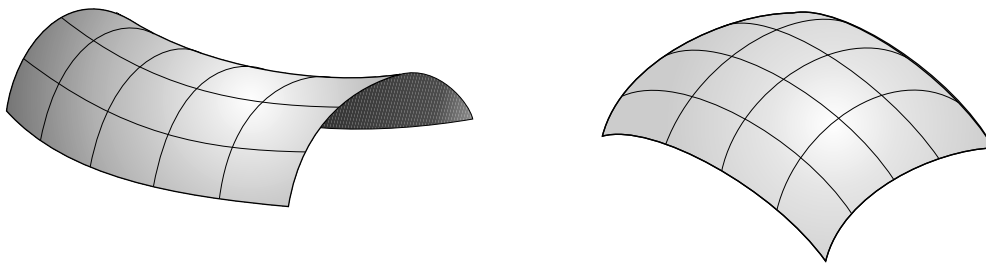
Weise der Lastabtragung verwandt [BWDC05]. Das Ziel des Formwurfes ist unter anderem, die optimale Ausgangsgeometrie für weitere Belastungen zu finden.

Der Unterschied in der bevorzugten Lastabtragung über Druckspannungen im Falle von Bögen und Schalen und über Zugspannungen bei Seil- und Membrantragwerken schlägt sich in den verschiedenartigen Strategien zur Bestimmung der Strukturgeometrie der gesuchten Leichtbaustruktur nieder [BR01]:

- Im Falle der *Formoptimierung* von Schalen kann dies einmal durch die Simulation von Hängeformen oder durch den Einsatz von Verfahren der Strukturoptimierung geschehen, wobei Letztere die universellsten Herangehensweisen zur Ermittlung von optimalen Geometrien sind. Diese Allgemeinheit in den Optimalitätseigenschaften der resultierenden Formen ist durch die Vielzahl an möglichen Optimierungsvariablen, Zielfunktionen und Nebenbedingungen begründet. Wird in diesem Zusammenhang die Minimierung der Verzerrungsenergie als Optimierungsziel verwendet, so werden im Laufe des Optimierungsprozesses die energetisch ineffizienten Biegezustände zu Gunsten der Lastabtragung über Membranspannungszustände abgebaut.
- Demgegenüber wird bei Membranen die Biegefreiheit a priori eingebracht (siehe Abschnitt 2.3.1), womit die optimale Materialausnutzung implizit gewährleistet ist. Die damit einhergehende Annahme, dass lediglich tangential zur Oberfläche gerichtete Spannungen überhaupt möglich sind (siehe Abbildung 2.6), bewirkt aber die unabdingbare Kopplung von Kraftfluss und Form („Form follows Force“ [Ram96]). Des Weiteren ist durch die Beschränkung der Tragfähigkeit auf Zugspannungen die Vorgabe einer Vorspannung bei Membranstrukturen zwingend erforderlich. Der von den anderen Strategien zur Ermittlung optimierter Geometrien grundverschiedene Zugang bei der *Membranformfindung* besteht darin, dass der ideale Spannungszustand vorgeschrieben wird und den Vorgang der Formbestimmung vorantreibt.

Unter *Formfindung* versteht man die Suche nach einer Membrangeometrie, die das mit Magnitude und (ungefährer) Orientierung vorgegebene Spannungsfeld unter Berücksichtigung der geometrischen Randbedingungen, Seilkräfte (falls vorhanden) und gegebenenfalls äußeren Lasten, ins Gleichgewicht bringt. Im Vergleich zur Standardstrukturanalyse ist dies eine inverse Fragestellung, weil das Spannungsfeld (auf einer noch unbekanntem Geometrie) vorgeschrieben ist und nicht von der Deformation abhängt, was zur Folge hat, dass keinerlei Materialeigenschaften benötigt werden. Mathematisch betrachtet ist die Fragestellung eng mit der Minimalflächenproblematik verbunden.

Die Vorspannung wird üblicherweise auf zwei verschiedene Arten in die Struktur eingebracht: Die sogenannte *mechanische Vorspannung* wird über die Ränder in die Membran durch das Spannen der Verankerungen eingebracht, wohingegen bei der *pneumatischen Vorspannung* die Gleichgewichtsform durch die Vorspannung und eine Druckdifferenz beiderseits der Membran (als formgebender Lastfall) definiert wird. Die Art und Weise, wie die in Gleichung (2.89) eingeführte Vorspannung realisiert wird, bestimmt maßgeblich das Ergebnis der Formfindung [BW04]:



**Abbildung 4.1:** Membrangrundformen: antiklastische ( $K < 0$ ) und synklastische ( $K > 0$ ) Fläche.

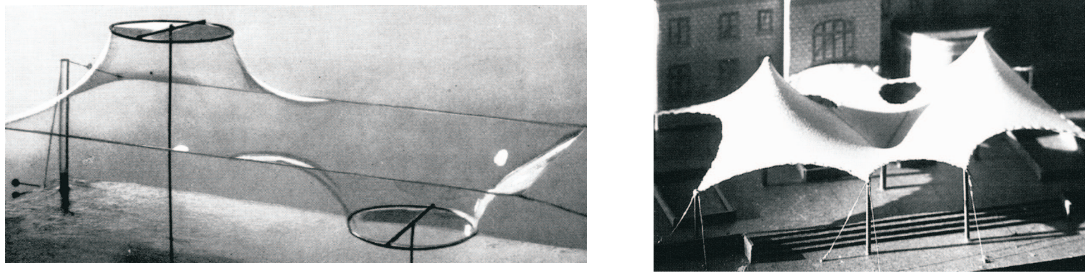
Bei mechanischer Vorspannung müssen sich die inneren Zugspannungen gegenseitig ausgleichen, was nur bei gegensinniger Krümmung der Flächen möglich ist und diese deshalb eine negative gaußsche Krümmung  $K$  nach Gleichung (2.22) haben müssen (z.B. abgespannte Zeltkonstruktionen). Wird durch die zusätzliche Vorgabe einer Druckbelastung pneumatisch vorgespannt, so ist das Gleichgewicht zwischen Flächenspannungen und Druck nur bei gleichsinniger Krümmung möglich und die resultierende Form hat eine positive gaußsche Krümmung  $K$  und ist kugelig (z.B. Ballone, Traglufthallen). Die beiden grundlegenden Formen sind in Abbildung 4.1 dargestellt; für detailliertere Informationen zur Klassifikation von Flächen vergleiche Abschnitt 2.1. Im Folgenden werden im Rahmen dieser Arbeit nur noch mechanisch vorgespannte Membranstrukturen betrachtet, was der Übersichtlichkeit dient und keine Einschränkung der präsentierten Verfahren auf mechanisch vorgespannte Strukturen ist.

### Prinzipielle Herangehensweisen bei der Formfindung

Zur Bestimmung der zu einem vorgegebenen Spannungszustand und definierten Rändern zugehörigen Gleichgewichtsform wurde im Laufe der Zeit eine große Zahl an Formfindungsverfahren entwickelt, die man grob in *experimentelle* Methoden anhand von physikalischen Modellen und die rechnergestützte, *numerische* Simulation einteilen kann.

Die experimentelle Herangehensweise war lange Zeit die einzige Möglichkeit, diese komplexe räumliche Fragestellung zu lösen. Als Materialien werden beim Modellbau unter anderem Gummihäute, Stoffe und Seifenhäute verwendet (siehe Abbildung 4.2), wobei die Seifenhautmodelle auf Grund der besonderen Materialeigenschaften eine Sonderstellung einnehmen: Seifenhäute befinden sich in einem homogenen und isotropen Spannungszustand, was zur Folge hat, dass die damit gefundenen Formen ausschließlich Minimalflächen sind (diese Aussage wird in Abschnitt 4.5.1 erläutert).

Entsprechend der Anwendung im Entwurfsprozess einer Membranstruktur lassen sich die Modelle nach [Gen05] in drei Gruppen einteilen: Entwurfsmodelle, Messmodelle und Sondermodelle. Entwurfsmodelle dienen zur schnellen Umsetzung von Ideen und zum Erfassen der räumlichen Wirkung einer Form. Unter Messmodellen versteht man sehr präzise hergestellte Modelle zur genauen Ermittlung der Strukturgeometrie. Bei Sondermodellen



**Abbildung 4.2:** Seifenhaut- und Stoffmodelle zur Formfindung (aus [OS66] bzw. [Ber96]).

stehen einzelne Aspekte des Tragverhaltens oder Detailanalysen im Mittelpunkt, zum Beispiel Windkanalmodelle oder Bewegungsmodelle zur Erfassung und Kontrolle der Kinetik von mobilen Tragwerken.

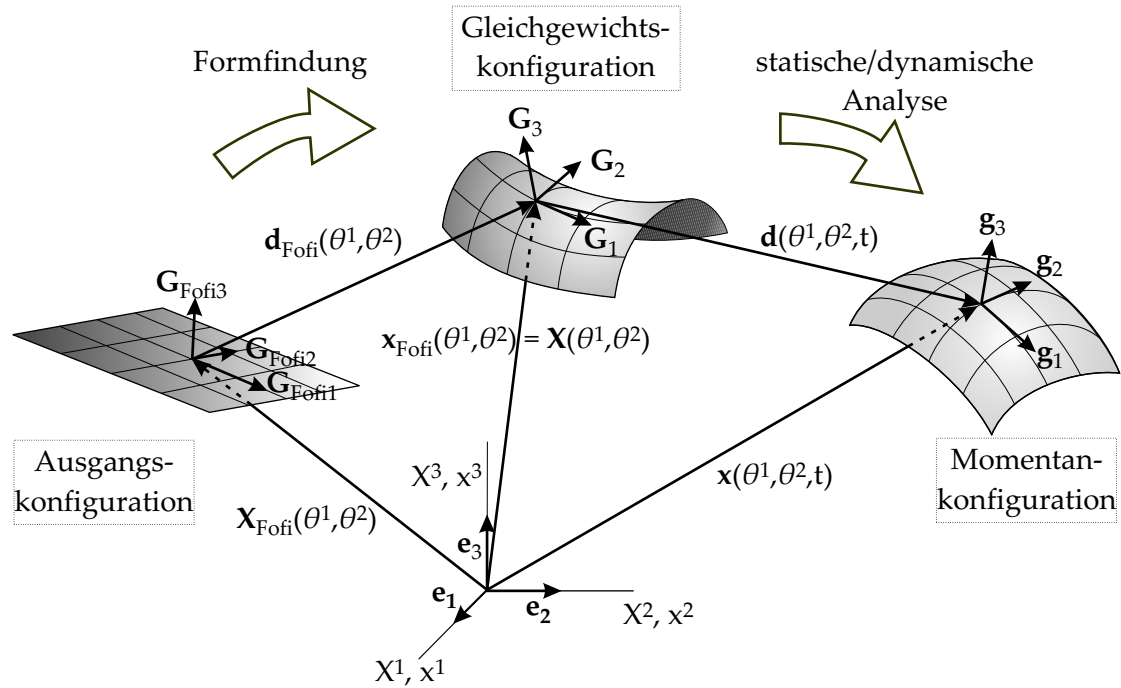
Die größere Flexibilität und Schnelligkeit bei der computergestützten Formgenerierung und somit die leichte Durchführung von Parameterstudien sowie die durchgängige Verwendbarkeit der Daten von der Planung über die Analyse bis zur Fertigung führten dazu, dass die experimentellen Methoden heutzutage nur noch in der Entwurfsphase und für Sonderfragestellungen verwendet werden. Des Weiteren ist die mittels numerischer Verfahren erreichbare Genauigkeit bei der Bestimmung von Geometrien und Spannungen mit Experimenten nicht erreichbar. Die numerische Formfindung hat sich also durch die Entwicklung verschiedener Methoden (siehe Abschnitt 4.4) zur Überwindung der in Verbindung mit inversen Problemen auftretenden numerischen Schwierigkeiten etabliert. Im Rahmen dieser Arbeit werden die Gleichgewichtsformen ausschließlich numerisch ermittelt.

### Grundlagen der numerischen Formfindung

Um eine komplette Analyse einer Membranstruktur, bestehend aus numerischer Formfindung und Simulation unter einwirkenden Belastungen, durchführen zu können, ist die Einführung (mindestens) einer zusätzlichen Konfiguration im Vergleich zur statischen beziehungsweise dynamischen Strukturanalyse notwendig.

Die entsprechenden Konfigurationen und die zugehörigen differentialgeometrischen Größen sind in Abbildung 4.3 dargestellt (die Ausgangskonfiguration wurde ohne Beschränkung der Allgemeinheit als Ebene skizziert, da dies – beispielsweise auch bei Aneinanderreihung zum Polyeder – auf Grund der einfachen Systemdefinition eine häufige Wahl ist). Im Einzelnen wird zwischen der (in der Regel) spannungsfreien Ausgangskonfiguration, der Gleichgewichtskonfiguration und der Momentankonfiguration unterschieden.

Dabei stellen die Gleichgewichtskonfiguration und die Momentankonfiguration die von der geometrisch nichtlinearen Analyse bekannten Systemzustände dar, die unter dem Einfluss äußerer Einwirkungen die entsprechenden Deformationen und die über die konstitutiven Beziehungen daraus resultierenden Spannungen definieren. Die dazu benötigten geome-



**Abbildung 4.3:** Deformation einer Fläche – Konfigurationen für Formfindung und Strukturanalyse.

trischen Größen (beispielsweise  $\mathbf{G}_i$  und  $\mathbf{g}_i$ ) und Zusammenhänge wurden bereits in Abschnitt 2.2.1 diskutiert.

Die Kopplung der Formfindung und der Strukturanalyse erfolgt über die Gleichgewichtskonfiguration und den dort herrschenden Spannungszustand. Für die in Abschnitt 3 vorgestellte nichtlineare Simulation unter externen Lasten ist also der Formfindungsprozess unerheblich, wenn die aus der formgebenden Spannungsverteilung und (eventuell vorhandenen) Belastung (z.B. Pneu) resultierende Gleichgewichtsform bekannt ist. Folglich kann die für die Formfindungsberechnung zusätzlich zu definierende Konfiguration weitestgehend frei gewählt werden, weshalb sie im Hinblick auf die Eigenschaften und die Methodik des eingesetzten Formfindungsverfahrens und der erleichterten Systemeingabe festgelegt wird. Außerdem ist die zur Formfindung erforderliche Ausgangskonfiguration auch irrelevant in Bezug auf die in der Strukturanalyse auftretenden Verzerrungen und Spannungen.

Im Sinne der bereits bei der geometrisch nichtlinearen Berechnung verwendeten Bezeichnungen kann nun die Ausgangskonfiguration als Referenz- und die Gleichgewichtskonfiguration als Momentankonfiguration der Formfindung identifiziert werden. Die entsprechenden Basisvektoren lassen sich analog ermitteln:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{Fofi\alpha} &= \mathbf{x}_{Fofi,\alpha} = \frac{\partial \mathbf{x}_{Fofi}}{\partial \theta^\alpha} & \text{sowie} & \quad \mathbf{G}_{Fofi\alpha} = \mathbf{X}_{Fofi,\alpha} = \frac{\partial \mathbf{X}_{Fofi}}{\partial \theta^\alpha}, \\ \mathbf{g}_{Fofi3} &= \frac{\mathbf{g}_{Fofi1} \times \mathbf{g}_{Fofi2}}{|\mathbf{g}_{Fofi1} \times \mathbf{g}_{Fofi2}|} & \text{sowie} & \quad \mathbf{G}_{Fofi3} = \frac{\mathbf{G}_{Fofi1} \times \mathbf{G}_{Fofi2}}{|\mathbf{G}_{Fofi1} \times \mathbf{G}_{Fofi2}|}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

wobei  $\mathbf{x}_{Fofi}$  gleichzeitig die Referenzkonfiguration der nichtlinearen Strukturanalyse  $\mathbf{X}$  beschreibt, woraus die Verknüpfung der beiden Fragestellungen und die Identitäten der Basen

$\mathbf{g}_{Fofi,j}$  und  $\mathbf{G}_j$  ablesbar ist. Analog zum Deformationsgradient in der geometrisch nichtlinearen Strukturanalyse nach Gleichung (2.35) soll der Übergang von der Ausgangskonfiguration zur Gleichgewichtsform durch den *Formgradienten*  $\mathbf{F}_{Fofi}$  beschrieben werden,

$$d\mathbf{x}_{Fofi} = \mathbf{F}_{Fofi} \cdot d\mathbf{X}_{Fofi}, \quad (4.2)$$

was die Transformation der Basisvektoren der Formfindung unter Ausnutzung der Zusammenhänge der Tangentialräume, analog zu Gleichung (2.37), erlaubt. Ebenso wird durch die Determinante des Formgradienten, analog zur Bedeutung der Determinante des Deformationsgradienten in Gleichung (2.90), die Veränderung des Flächeninhalts während der Formfindungssimulation beschrieben:

$$da_{Fofi} = dA_{Fofi} \det \mathbf{F}_{Fofi}. \quad (4.3)$$

Die mechanische Basis für die numerischen Verfahren zur Formfindung sind die Gleichgewichtsbeziehungen. Die im Rahmen dieser Arbeit verwendete Vorgehensweise basiert auf der Methode der finiten Elemente und es wird deshalb das Gleichgewicht der tangentialen Oberflächenkräfte in der schwachen Form (siehe Abschnitt 2.2.3) angeschrieben. Im Falle von Pneukonstruktionen müsste nur ein Beitrag aus den virtuellen Arbeiten der Drücke ergänzt werden, was hier aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht berücksichtigt werden soll, aber prinzipiell mit den dargestellten Verfahren problemlos umsetzbar ist. Wird die vorgeschriebene Vorspannung in Form des physikalischen Cauchy-Spannungstensors  $\sigma$  angegeben und wird, wie in Abschnitt 2.3.1 ausgeführt, wiederum die Dicke als konstant angesehen, so reduziert sich das Prinzip der virtuellen Verschiebungen auf folgenden Ausdruck:

$$\delta W = \int_{\Omega_S} \sigma : \delta \mathbf{d}_{Fofi, \mathbf{x}_{Fofi}} d\Omega_S = h \int_a \sigma : \delta \mathbf{d}_{Fofi, \mathbf{x}_{Fofi}} da = 0. \quad (4.4)$$

Es wird also gefordert, dass die virtuelle Arbeit der wahren, auf der Momentankonfiguration der Formfindung wirkenden Spannungen  $\sigma$  verschwinden muss, wobei  $\delta \mathbf{d}_{Fofi, \mathbf{x}_{Fofi}}$  die Ableitung der virtuellen Verschiebungen bezüglich der Momentangeometrie  $\mathbf{x}_{Fofi}$  ist. Durch die Anwendung dieses allgemein bekannten Prinzips für die Beschreibung des Formfindungsvorgangs lässt sich der bereits in Gleichung (2.80) definierte Verschiebungsvektor  $\mathbf{d}_{Fofi}$  als eine Veränderung der Geometrie in Bezug auf einen festgelegten Referenzzustand interpretieren. Die Geometrie der Momentankonfiguration ist schließlich die Lösung der Formfindungsaufgabe, also die gesuchte Gleichgewichtsgeometrie.

Der virtuelle Arbeitsausdruck aus Gleichung (4.4) kann auch bezüglich der Referenzkonfiguration der Formfindung geschrieben werden. Hierzu wird die Ableitung der virtuellen Verschiebungen bezüglich der Gleichgewichtskonfiguration entsprechend in Abhängigkeit vom Formgradienten ausgedrückt:

$$\delta \mathbf{d}_{Fofi, \mathbf{x}_{Fofi}} = \frac{\partial(\delta \mathbf{d}_{Fofi})}{\partial \mathbf{x}_{Fofi}} = \frac{\partial(\delta \mathbf{x}_{Fofi})}{\partial \mathbf{X}_{Fofi}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_{Fofi}}{\partial \mathbf{x}_{Fofi}} = \delta \left( \frac{\partial \mathbf{x}_{Fofi}}{\partial \mathbf{X}_{Fofi}} \right) \cdot \mathbf{F}_{Fofi}^{-1} = \delta \mathbf{F}_{Fofi} \cdot \mathbf{F}_{Fofi}^{-1}. \quad (4.5)$$



Die entsprechend umgeformte virtuelle Arbeit ergibt sich bei Integration über die Referenzfläche  $dA_{Fofi}$  nach Gleichung (4.3):

$$\begin{aligned}\delta W &= h \int_A \sigma : \left( \delta \mathbf{F}_{Fofi} \cdot \mathbf{F}_{Fofi}^{-1} \right) \det \mathbf{F}_{Fofi} dA_{Fofi} \\ &= h \int_A \det \mathbf{F}_{Fofi} \left( \sigma \cdot \mathbf{F}_{Fofi}^{-T} \right) : \delta \mathbf{F}_{Fofi} dA_{Fofi} = 0.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Wird nun noch die Beziehung zwischen den PK2-Spannungen  $\mathbf{S}$  und den bekannten Cauchy-Spannungen  $\sigma$  (vergleiche Abschnitt 2.2.2)

$$\mathbf{S} = \det \mathbf{F}_{Fofi} \mathbf{F}_{Fofi}^{-1} \cdot \sigma \cdot \mathbf{F}_{Fofi}^{-T} = \det \mathbf{F}_{Fofi} \sigma^{\alpha\beta} \mathbf{G}_{Fofi\alpha} \otimes \mathbf{G}_{Fofi\beta} = S^{\alpha\beta} \mathbf{G}_{Fofi\alpha} \otimes \mathbf{G}_{Fofi\beta} \quad (4.7)$$

berücksichtigt, so erhält man:

$$\delta W = h \int_A (\mathbf{F}_{Fofi} \cdot \mathbf{S}) : \delta \mathbf{F}_{Fofi} dA_{Fofi} = 0. \quad (4.8)$$

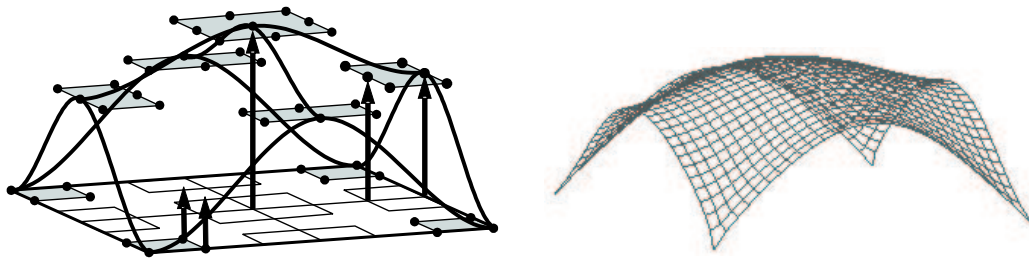
Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die mechanisch grundlegend verschiedenen Fragestellungen der Formfindung (gegebener Sollspannungszustand, kein Materialgesetz nötig) und der Strukturanalyse (Spannungen sind über die konstitutiven Beziehungen das Resultat der Deformation) unabhängig voneinander in getrennten Lösungsprozessen behandelt werden. In den folgenden Abschnitten wird nur noch die numerische Behandlung der Formfindungsaufgabe erläutert und weil damit auch keine Verwechslungsgefahr besteht, wird zu Gunsten einer Vereinfachung der Nomenklatur auf den Index  $(\bullet)_{Fofi}$  verzichtet.

## 4.2 Diskretisierung der Grundgleichungen

Die im vorherigen Abschnitt definierte Problemstellung ist eine Aufgabe der Variationsrechnung, bei der die Geometrie der Gleichgewichtsform gesucht ist. Diese Aufgabe ist im Allgemeinen nicht analytisch lösbar, weshalb die gesuchte Geometrie parametrisiert werden muss. Dazu wird eine Approximation der Geometrie durch bereichsweise geltende Ansatzfunktionen vorgenommen. Die Parametrisierung des Formfindungsproblems muss den Übergang zwischen der Ausgangs- und der zu ermittelnden Gleichgewichtskonfiguration adäquat repräsentieren können, woraus sich die zentrale Frage nach den geeigneten diskreten Unabhängigen (also Wahl der Knotengrößen und formbeschreibenden Ansatzfunktionen) ableitet.

Zur Klärung dieser Frage wird zuerst die allgemeinere Herangehensweise im Kontext der Formoptimierung von Schalenstrukturen hinsichtlich minimaler Verzerrungsenergie betrachtet, um dann die entsprechenden Rückschlüsse auf die damit verwandte, speziellere Problemstellung der Membranformfindung ziehen zu können. Grundsätzlich lassen sich grob die folgenden Strategien zur Formbeschreibung und Formkontrolle unterscheiden:

- Verwendung einer relativ feinen (wie später auch zur Strukturanalyse benötigten) Finite-Elemente-Diskretisierung mit drei Verschiebungsfreiheitsgraden je Knoten ; die Knotenkoordinaten sind die Formfindungsunbekannten.
- Einführung einer CAD-Parametrisierung, wo die Form durch vordefinierte, geometrische Objekte, sogenannte Patches oder Designelemente, unabhängig von der zur Strukturanalyse erforderlichen Finite-Elemente-Diskretisierung, diskretisiert wird, siehe beispielsweise [Ble90], [BR93]. Die Anzahl der Patches ist dabei deutlich geringer, als bei einer vergleichbaren Finite-Elemente-Diskretisierung benötigt würden, wobei die gestaltbeschreibenden Interpolationsfunktionen unter Umständen deutlich komplexer sein können. Abhängig von der Komplexität der zu findenden Struktur kann die Form durch die geeignete Wahl von wenigen, charakteristischen Kontrollpunkten und Schlüsselinformationen (z.B. Übergangsbedingungen) beschrieben und definiert werden. Dies ist in Abbildung 4.4 beispielhaft an einer Schale dargestellt, wo die Geometrie durch vier Bézierspline-Patches und nur fünf unabhängige Formvariablen (durch die eingezeichneten Pfeile kenntlich gemacht) festgelegt wird (aus [BWDC05]).



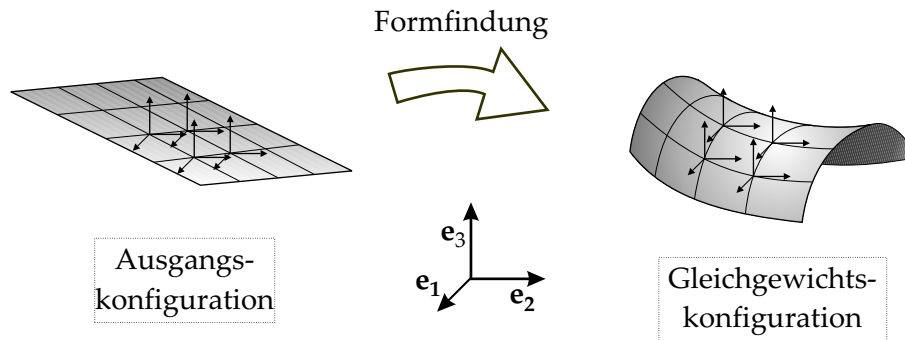
**Abbildung 4.4:** Formoptimierung: CAGD-Modell mit wenigen Formparametern und feines FE-Netz für die Strukturanalyse.

Eine ausführliche Diskussion der beiden Parametrisierungsphilosophien im Kontext der Formoptimierung von Freiformschalen kann in [Dao05] nachgelesen werden. Allgemein kann man erkennen, dass mit Hilfe der CAD-basierten Geometriediskretisierung, in Verbindung mit der selektiven Parameterwahl von wenigen, charakteristischen Formfreiheitsgraden, die größten Probleme der FE-basierten Formoptimierung (Oszillationen in der Lösung, Konvergenzschwierigkeiten, Netzinstabilitäten) wirksam unterbunden werden können. Wird hingegen direkt am Finite-Elemente-Netz optimiert, so sind weitere, regularisierende Maßnahmen erforderlich, siehe beispielsweise [DCB04]. Die Motivation zur Anwendung der CAD-freien Optimierung ist die damit realisierbare größere Lösungsvielfalt, weil die bei der CAD Parametrisierung eingeführte starke Restriktion der Form entfällt.

Der stabilisierende Einfluss der Beschränkung auf wenige Formfreiheitsgrade beeinflusst beziehungsweise verändert also signifikant das Formoptimierungsergebnis. Diese Abweichung von der eigentlichen Lösung ist in der Regel noch stärker ausgeprägt, wenn die Startgeometrie nicht entsprechend „nahe genug“ am Optimum liegt. Im Bereich der Membranformfindung erweisen sich die Restriktionen der Formenvielfalt als unbrauchbar, weil das

durch die Gleichgewichtsforderung repräsentierte, mechanisch motivierte Optimum in der Regel eine *Freiformfläche* ist, die sich einer analytischen Beschreibung in Abhängigkeit weniger Formfreiwerte innerhalb relativ großer Patches entzieht. Unabhängig davon erweist sich die, momentan als Stand der Technik in der Formoptimierung von Schalen anerkannte, CAD-basierte Parametrisierung bei der Formfindung von Membranen als problematisch, weil man zur korrekten Auswahl von charakteristischen Formfreiheitsgraden die Lösung bereits antizipieren muss. Dies ist aber für allgemeine Vorspannungszustände, komplexe Geometrien oder im Falle der gekoppelten Tragwirkung von Membranen und Seilen unmöglich.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass der große Vorteil der Designelement-Philosophie (Reduktion der eventuell sehr großen Zahl an Formfreiwerten durch Auswahl charakteristischer Parameter bei teilweise sehr komplexen Geometrieansatzfunktionen) hier nicht sinnvoll eingesetzt werden kann, weil die a priori Information über die unbekannte Gleichgewichtsform nicht vorhanden ist und die Geometrie in mathematischen Formeln beschrieben würde, die das mechanische Verhalten nicht widerspiegeln können [BWDC05]. Deshalb ist es sinnvoll, die benötigte Darstellbarkeit einer großen Formenvielfalt nicht über ein verdichtetes Designelementnetz mit komplizierten Ansatzfunktionen, sondern im Hinblick auf spätere Strukturanalysen mittels kleiner, einfacherer Elemente zu gewährleisten.



**Abbildung 4.5:** Formparametrisierung mit drei Freiheitsgraden je Knoten.

Deshalb wird im Folgenden eine feine Diskretisierung der maßgebenden Gleichungen der Formfindung mit finiten Elementen (analog zu den Ausführungen in Abschnitt 3.1) durchgeführt, wobei jedem Knoten drei Verschiebungsfreiheitsgrade zugeordnet (für ein Element beispielhaft skizziert in Abbildung 4.5) und, im Sinne des isoparametrischen Elementkonzepts, die Konfigurationen mit denselben Ansatzfunktionen approximiert werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^h(\theta^1, \theta^2) &= \sum_{k=1}^{n_{nod}} N_k(\theta^1, \theta^2) \cdot \bar{\mathbf{d}}_k = \sum_{k=1}^{n_{nod}} N_k(\theta^1, \theta^2) \cdot (\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{X}}_k), \\ \mathbf{x}^h(\theta^1, \theta^2) &= \sum_{k=1}^{n_{nod}} N_k(\theta^1, \theta^2) \cdot \bar{\mathbf{X}}_k \quad \text{und} \quad \mathbf{x}^h(\theta^1, \theta^2) = \sum_{k=1}^{n_{nod}} N_k(\theta^1, \theta^2) \cdot \bar{\mathbf{x}}_k. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Die überstrichenen Größen stellen wiederum die diskreten Knotenwerte dar und werden auf ein globales, kartesisches Koordinatensystem bezogen. Der Knotenverschiebungsvektor  $\bar{\mathbf{d}}_k$  repräsentiert also den Übergang zwischen den beiden skizzierten Konfigurationen, beziehungsweise seine einzelnen Koeffizienten entsprechen somit dem Koordinatenunterschied

zwischen der Ausgangsgeometrie und der gesuchten Gleichgewichtsgeometrie des Knotens  $k$ . Diese Feststellung erlaubt nun ebenso die Knotenverschiebungen als die freien Parameter der Formfindung zu interpretieren, obwohl die eigentliche Fragestellung die nach der Lage der Gleichgewichtskonfiguration im Raum ist, also die Koeffizienten von  $\bar{\mathbf{x}}_k$  zu bestimmen wären.

Die beiden gleichwertigen Parametrisierungen der Formfindung lauten also je Knoten  $k$

$$\bar{\mathbf{x}}_k = x_k^1 \mathbf{e}_1 + x_k^2 \mathbf{e}_2 + x_k^3 \mathbf{e}_3 = x_k^j \mathbf{e}_j \quad \text{bzw.} \quad \bar{\mathbf{d}}_k = d_k^1 \mathbf{e}_1 + d_k^2 \mathbf{e}_2 + d_k^3 \mathbf{e}_3 = d_k^j \mathbf{e}_j, \quad (4.10)$$

wobei im Folgenden die Koeffizienten aller Knotenverschiebungsvektoren  $d_k^j$  als unbekannte Parameter verwendet werden. Für die weitere Herleitung werden alle freien Formfindungsparameter in einem Spaltenvektor  $\mathbf{b}$  angeordnet, der die Dimension  $ndof$  (=Anzahl der Freiheitsgrade) hat. Somit entspricht die  $r$ -te Komponente  $b_r$  von  $\mathbf{b}$  dem  $r$ -ten Freiheitsgrad des diskretisierten Problems. Zur Diskretisierung der schwachen Form des Gleichgewichts nach Gleichung (4.6) wird die Variation des Formgradienten  $\delta\mathbf{F}$  auf die Variation der Formparameter  $\delta b_r$  überführt

$$\delta\mathbf{F} = \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial b_r} \delta b_r = \delta\mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{G}^\alpha = \frac{\partial\mathbf{g}_\alpha}{\partial b_r} \delta b_r \otimes \mathbf{G}^\alpha \quad \text{für:} \quad r = 1, \dots, ndof \quad (4.11)$$

mit

$$\delta\mathbf{g}_\alpha = \delta\mathbf{x}_{r,\alpha} = \frac{\partial\mathbf{g}_\alpha}{\partial b_r} \delta b_r = \sum_{k=1}^{n_{nod}} N_k(\theta^1, \theta^2)_{,\alpha} \frac{\partial\bar{\mathbf{d}}_k}{\partial b_r} \delta b_r \quad \text{für:} \quad r = 1, \dots, ndof, \quad (4.12)$$

was auf den folgenden Zusammenhang führt:

$$\delta W = \delta b_r h \int_A \det\mathbf{F} \left( \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \right) : \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial b_r} dA = 0. \quad (4.13)$$

Mit Verwendung des Fundamentallemmas der Variationsrechnung erhält man das in den Formparametern nichtlineare Gleichungssystem mit  $ndof$ -Gleichungen:

$$\frac{\partial W}{\partial b_r} = h \int_A \det\mathbf{F} \left( \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \right) : \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial b_r} dA = 0 \quad \text{für:} \quad r = 1, \dots, ndof. \quad (4.14)$$

### 4.3 Linearisierung

Zur Bestimmung der Diskretisierungsparameter aus dem nichtlinearen Gleichungssystem (4.14) wird die Newton-Raphson-Methode verwendet, was dessen Linearisierung erfordert. Die Linearisierung basiert auf einer Taylor-Reihenentwicklung mit Abbruch nach dem linearen Glied nach Gleichung (3.57). Das nichtlineare Problem kann damit iterativ durch die sukzessive Lösung von linearen Gleichungssystemen berechnet werden. In der üblichen Notation im Rahmen der nichtlinearen Finite-Elemente-Methode ergeben sich die inkrementellen, linearen Gleichungssysteme zu

$$LIN \left( \frac{\partial W}{\partial b_r} \right) = R_r + \Delta b_s K_{rs} = 0 \quad \text{für:} \quad r, s = 1, \dots, ndof, \quad (4.15)$$

worin  $R_r$  der Vektor der Ungleichgewichtskräfte und  $K_{rs}$  die tangentielle Steifigkeitsmatrix sind.

### 4.3.1 Membran

Die Anwendung der Linearisierungsvorschrift auf Gleichung (4.14) führt auf

$$\begin{aligned} LIN\left(\frac{\partial W}{\partial b_r}\right) &= h \int_A \det \mathbf{F} \left( \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \right) : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial b_r} \, dA \\ &+ \Delta b_s h \int_A \frac{\partial}{\partial b_s} \left[ \det \mathbf{F} \left( \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \right) : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial b_r} \right] \, dA = 0, \end{aligned} \quad (4.16)$$

wobei hier die Indizes  $r$  und  $s$  alle  $ndof$  Freiheitsgrade der Formfindungsfragestellung repräsentieren. Die Komponenten des Vektors der Ungleichgewichtskräfte ergeben sich also aus

$$R_r = h \int_A \det \mathbf{F} \left( \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \right) : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial b_r} \, dA \quad (4.17)$$

und die Komponenten der Steifigkeitsmatrix können als

$$K_{rs} = h \int_A \frac{\partial}{\partial b_s} \left[ \det \mathbf{F} \left( \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \right) : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial b_r} \right] \, dA \quad (4.18)$$

identifiziert werden. Nutzt man ferner aus, dass die kovarianten Basisvektoren  $\mathbf{g}_\alpha$  nur linear von den Formparametern abhängen und deshalb die zweiten Ableitungen des Formgradienten nach den Diskretisierungsparametern verschwinden,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial b_r \partial b_s} = \frac{\partial^2 \mathbf{g}_\alpha}{\partial b_r \partial b_s} \otimes \mathbf{G}^\alpha = 0 \quad (4.19)$$

können die Komponenten von  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{K}$  folgendermaßen berechnet werden:

$$\begin{aligned} R_r &= h \int_A \det \mathbf{F} \, \sigma^{\alpha\beta} \left( \mathbf{g}_{\alpha,r} \cdot \mathbf{g}_\beta \right) \, dA \\ K_{rs} &= h \int_A \left[ \det \mathbf{F} \, \sigma^{\alpha\beta} \left( \mathbf{g}_{\alpha,r} \cdot \mathbf{g}_{\beta,s} \right) + \left( \det \mathbf{F} \, \sigma^{\alpha\beta} \right)_{,rs} \left( \mathbf{g}_{\alpha,r} \cdot \mathbf{g}_\beta \right) \right] \, dA. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Es ist zu beachten, dass selbst im Falle eines konstanten Cauchy-Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$  die Ableitungen der Tensorcoeffizienten nach den Formfindungsparametern  $\sigma^{\alpha\beta}_{,rs}$  nicht verschwinden, weil die Basisvektoren  $\mathbf{g}_\alpha$  auch Funktionen der Parametrisierung sind. Die Auswertung der Integrale erfolgt mittels numerischer Integration.

### 4.3.2 Seil

Bei Membranstrukturen mit seilverstärkten Rändern oder Abspannungen beziehungsweise bei Seilnetzkonstruktionen ergibt sich die resultierende Gleichgewichtsform aus dem Kräftespiel der Seile mit der Membran und der Seile untereinander. Bei flexiblen Seilrändern an einer Membran ist die charakteristische Randgeometrie ein Ergebnis der Interaktion der Seilvorspannung und der senkrecht zur Seilachse wirkenden Flächenspannungen der Membran (siehe beispielsweise Abbildung 2.8).

Um für diese Tragwerke eine Gleichgewichtsform zu finden, müssen dieselben Beziehungen erfüllt sein wie für die Membran, wobei eine Vereinfachung der Gleichungen durch die Spezialisierung auf eine Dimension möglich ist. Wird ein Koordinatensystem eingeführt, bei dem der kovariante Basisvektor  $\mathbf{g}_1$  an jedem Seilpunkt tangential zum Seil orientiert ist und die beiden anderen Vektoren senkrecht darauf stehen und die Länge eins haben (siehe Abschnitt 2.1), so reduziert sich die Determinante des Formgradienten gemäß Gleichung (2.94) und alle Spannungskoeffizienten, außer derjenigen in Seillängsrichtung  $\sigma_l$ , verschwinden (siehe Gleichung (2.93)). Wird zusätzlich noch, wie in Abschnitt 2.3.1 erläutert, die Querschnittsänderung des Seils vernachlässigt, so ergibt sich mit  $A_c$  als Seilquerschnitt das Prinzip der virtuellen Verschiebungen zu:

$$\begin{aligned} \delta W &= A_c \int_S \det \mathbf{F} \left( \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \right) : \delta \mathbf{F} \, dS \\ &= A_c \int_S \frac{|\mathbf{g}_1|}{|\mathbf{G}_1|} \left( \sigma_l g^{11} \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}^1 \otimes \mathbf{G}_1 \right) : \delta \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{G}^1 \, dS \\ &= \sigma_l A_c \int_S \frac{|\mathbf{g}_1|}{|\mathbf{G}_1|} g^{11} (\delta \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}^1) \, dS = 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Die Integration wird entlang der Seillänge in der Referenzkonfiguration  $S$  durchgeführt. Des Weiteren wurde für die Cauchy-Spannung  $\sigma_l$  der physikalische, um die Metrik bereinigte Wert, analog zu Gleichung (2.100) eingesetzt, wozu der Zusammenhang  $\sigma^{11} \cdot \mathbf{g}_{11} = \sigma_l$  mit der Tensorkomponente  $\sigma^{11}$  des Cauchy-Spannungstensors verwendet wird.

Wird die räumliche Diskretisierung (nach Abschnitt 3.1.2) mit linearen, zweiknotigen Elementen (siehe Abbildung 3.2) vorgenommen, können die Integrale explizit berechnet werden. In diesem Fall haben die Basisvektoren der Referenz- und Momentankonfiguration  $\mathbf{G}_1$  und  $\mathbf{g}_1$  die Länge  $L$  und  $l$ , das heißt  $|\mathbf{G}_1| = L$  und  $|\mathbf{g}_1| = l$ , beziehungsweise übertragen auf die Metrikoeffizienten  $\mathbf{G}_{11} = L^2$ ,  $\mathbf{g}_{11} = l^2$ ,  $\mathbf{G}^{11} = \frac{1}{L^2}$  und  $\mathbf{g}^{11} = \frac{1}{l^2}$ . Damit ergibt sich aus Gleichung (4.21) unter Berücksichtigung der Abhängigkeit von den *ndof* Formfindungsparametern  $b_r$ :

$$\begin{aligned} \delta W &= \sigma_l A_c \frac{l}{L} \frac{1}{l^2} (\mathbf{g}_{1,r} \cdot \mathbf{g}_1) L \delta b_r = \frac{\sigma_l A_c}{l} (\mathbf{g}_{1,r} \cdot \mathbf{g}_1) \delta b_r \\ &= \frac{S_l A_c}{L} (\mathbf{g}_{1,r} \cdot \mathbf{g}_1) \delta b_r = 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

In der letzten Umformung wurde das Prinzip der virtuellen Arbeiten in der alternativen Form in Abhängigkeit vom PK2-Spannungstensor geschrieben, wobei wiederum  $S_l$  die physikalische, um die Metrik bereinigte, Spannungskomponente darstellt. Der Zusammenhang zur vorgeschriebenen Cauchy-Spannung ist wie folgt:

$$\mathbf{S} = S_l \mathbf{I} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \cdot \sigma_l \mathbf{I} \cdot \mathbf{F}^{-T} = \sigma_l \frac{L}{l} \mathbf{I}. \quad (4.23)$$

Wird die, nach Anwendung des Fundamentallemmas der Variationsrechnung auf Gleichung (4.22) erhaltene, nichtlineare Gleichung analog zum Vorgehen beim Membranelement bezüglich der Geometrieparametrisierung linearisiert

$$LIN \left( \frac{\partial W}{\partial b_r} \right) = \frac{\sigma_l A_c}{l} (\mathbf{g}_{1,r} \cdot \mathbf{g}_1) + \Delta b_s \frac{\partial}{\partial b_s} \left[ \frac{\sigma_l A_c}{l} (\mathbf{g}_{1,r} \cdot \mathbf{g}_1) \right] = 0, \quad (4.24)$$

so erhält man als Vektor der Ungleichgewichtskräfte

$$R_r = \frac{\sigma_l A_c}{l} (\mathbf{g}_{1,r} \cdot \mathbf{g}_1) \quad (4.25)$$

und als Steifigkeitsmatrix

$$K_{rs} = \frac{\sigma_l A_c}{l} \left[ (\mathbf{g}_{1,r} \cdot \mathbf{g}_{1,s}) - \frac{1}{l^2} (\mathbf{g}_{1,r} \cdot \mathbf{g}_1) (\mathbf{g}_{1,s} \cdot \mathbf{g}_1) \right], \quad (4.26)$$

wobei wiederum die Indizes  $r$  und  $s$  alle *ndof* Freiheitsgrade der Formfindung widerspiegeln. Der zweite Ausdruck in der Formel zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix ergibt sich aus der Änderung der Metrik, was sich in der Ableitung der Seillänge der Momentankonfiguration bemerkbar macht:  $l_{,s} = \frac{(\mathbf{g}_{1,s} \cdot \mathbf{g}_1)}{l}$ .

## 4.4 Regularisierung des inversen Problems

### Problematik der numerischen Formfindung und Lösungsansätze

Die bisherigen Herleitungen zur Lösung der numerischen Formfindungsaufgabe bedienen sich der im Rahmen der Finite-Elemente-Methode für geometrisch nichtlineare Probleme üblichen Herangehensweise. Es stellt sich aber heraus, dass die in Gleichung (4.4) formulierte Gleichgewichtsforderung, die in Abschnitt 4.2 durch eine geeignete Formparametrisierung diskretisiert und in Abschnitt 4.3 zur Lösung mit der Newton-Raphson-Strategie linearisiert wurde, numerisch nicht lösbar ist.

Die mathematischen Probleme bei der Ermittlung von Gleichgewichtsformen für vorgegebene, räumlich gekrümmte Oberflächenspannungen resultieren daraus, dass es sich um ein sogenanntes *inverses Problem* handelt. Inverse Probleme sind Fragestellungen, bei denen man nach den Ursachen für beobachtete, gemessene oder beabsichtigte Wirkungen beziehungsweise Lösungen sucht. Dies steht im genauen Gegensatz zum direkten Problem, wo man mit einer kompletten Beschreibung eines Systems durch Grundgleichungen und gegebene Parameter aus diesen Ursachen die daraus folgende Wirkung ermitteln will. Typischerweise sind die inversen Fragestellungen deutlich diffiziler zu lösen, als die zugeordneten, „konventionellen“, direkten Aufgabenstellungen. Dies kann zum einen durch die Tatsache erklärt werden, dass oft Mehrdeutigkeiten in der Festlegung der mit der vorgegebenen Lösung konsistenten Modellparameter auftreten und zum anderen der zu untersuchende Parameterraum eventuell sehr groß ist. Im Rahmen der Strukturmechanik ist die (in Kapitel 3 beschriebene) Berechnung von Verformungen und Spannungen aus den gegebenen Systemparametern und Einwirkungen das direkte und somit in der Regel gut lösbare Problem. Bei der Formfindung wird nun die Spannung vorausgesetzt und es wird nach dem Systemzustand (d.h. der Geometrie) gesucht, auf der diese tangentialen Spannungsverteilung im Gleichgewicht steht. Aus dieser inversen Eigenschaft der Fragestellung folgen die dafür charakteristischen Schwierigkeiten bei der Lösung.

Die direkte Folge davon ist, dass die oben hergeleiteten Systemmatrizen singulär sind. Die Begründung ist die Mehrdeutigkeit der Positionen der Elementknoten, um ein und dieselbe

Form darzustellen. Es ist also möglich, den gleichen Effekt (also die identische Geometrie) durch mehr als einen Satz an Formfindungsparametern (also Knotenkoordinaten beziehungsweise -verschiebungen, siehe Abschnitt 4.2) zu erlangen. Mechanisch betrachtet ist das System also kinematisch für tangentiale Knotenverschiebungen. Dies ergibt sich aus der Vorgabe der Spannungen und somit der Annahme, dass Deformationen der Geometrie keine Spannungsänderung hervorrufen, was bei der Lösung des direkten an Stelle des inversen Problems der Fall wäre. Die Konsequenz daraus ist, dass die Form eines Seils beziehungsweise einer Membran (abgesehen von unvermeidlichen Diskretisierungsfehlern) unabhängig von Anzahl und Größe der sie beschreibenden Elemente sind. Die Steifigkeitsmatrix der Formfindung muss für Knotenverschiebungen längs eines Seils beziehungsweise tangential zur Membranfläche also singular sein.

Diesen Effekt kann man schon am Beispiel der elementarsten aller zugbeanspruchten Strukturen beobachten: Ein unbelastetes, vorgespanntes Seil ist mit nur einem Mittelknoten diskretisiert und es ist für die Verbindung zwischen den beiden Lagerpunkten als (triviale) Lösung dieser Formfindungsfragestellung vollkommen unerheblich, wo die Position des Knotens entlang des Seiles ist (siehe Abbildung 4.6). Denselben Effekt haben auch die für eine Membranform in Abbildung 4.7 dargestellten unterschiedlichen Vernetzungen. Es wird von allen verwendeten Diskretisierungen ein und dieselbe Geometrie repräsentiert, was wiederum die Mehrdeutigkeit bei der Suche nach dem Parametersatz (also die Werte der Formfindungsparameter) für dieselbe Gleichgewichtsform für eine vorgegebene Vorspannung verdeutlicht.



**Abbildung 4.6:** Geometrisch gleichwertige Diskretisierungen des geraden Seils.

Zusammenfassend kann also aus diesen Beobachtungen abgeleitet werden, dass nur diejenigen Verschiebungen relevante Formmodifikationen hervorrufen, die normal zur Fläche gerichtete Komponenten haben. Denn nur dadurch kann, ausgehend von der Ausgangskonfiguration nach Abbildung 4.3, eine Anpassung der Knotenkoordinaten während des Formfindungsprozesses stattfinden, bis die gesuchte Gleichgewichtskonfiguration erreicht ist.

Eine Regularisierung des Problems könnte man durch die Restriktion der drei Knotenfreiheitsgrade vornehmen, so dass nur noch Bewegungen senkrecht zur Fläche möglich sind. Hiermit wären sämtliche die Singularität verursachenden tangentialen Verschiebungen unterdrückt und jede Änderung in den Formparametern würde in einer echten Geometriemodifikation resultieren. Dieses Vorgehen ist jedoch bei der Formfindung von Membranstrukturen ungeeignet: Erstens sind bei Membranen mit flexiblen Rändern, also beispielsweise Randseilen, die tangentialen Randverschiebungen notwendig, um überhaupt Gleichgewicht herstellen zu können, wobei damit auch im Gebiet tangentiale Netzanpassungen erforderlich werden. Die Notwendigkeit von tangentialen Knotenbewegungen im Rahmen des Formfindungsprozesses wird bei der Betrachtung einer ebenen, vorgespannten



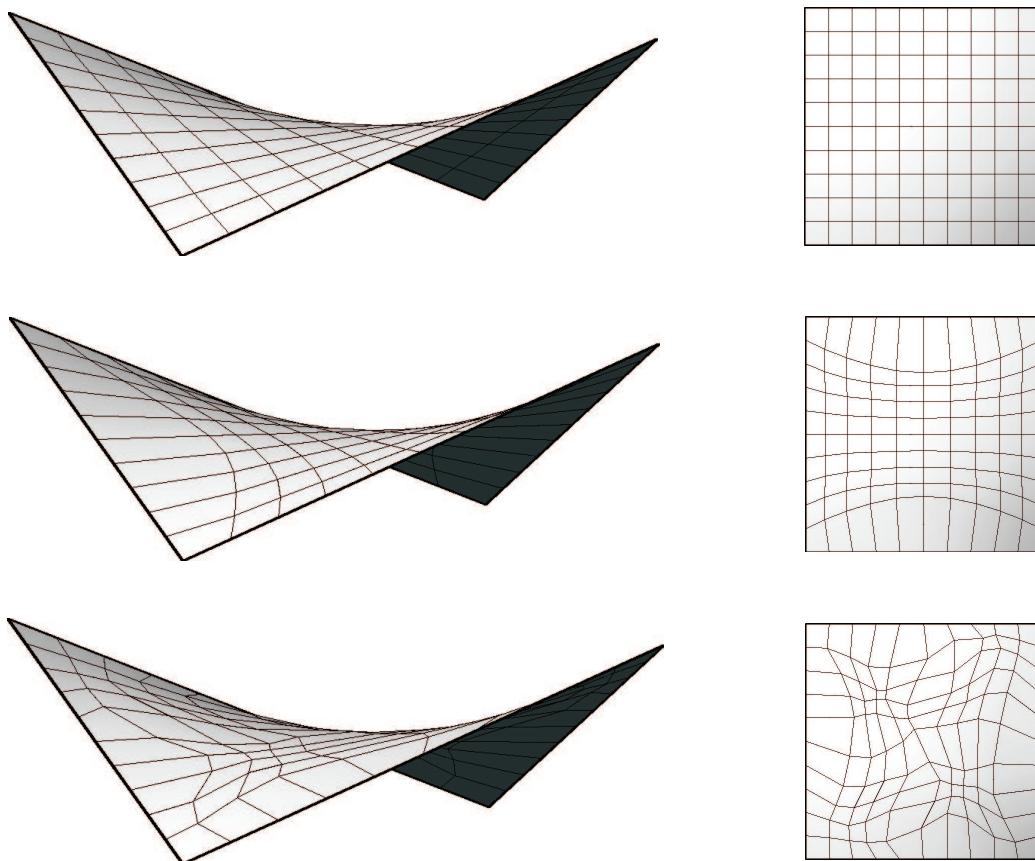


Abbildung 4.7: Unterschiedliche Diskretisierungen derselben Membrangeometrie.

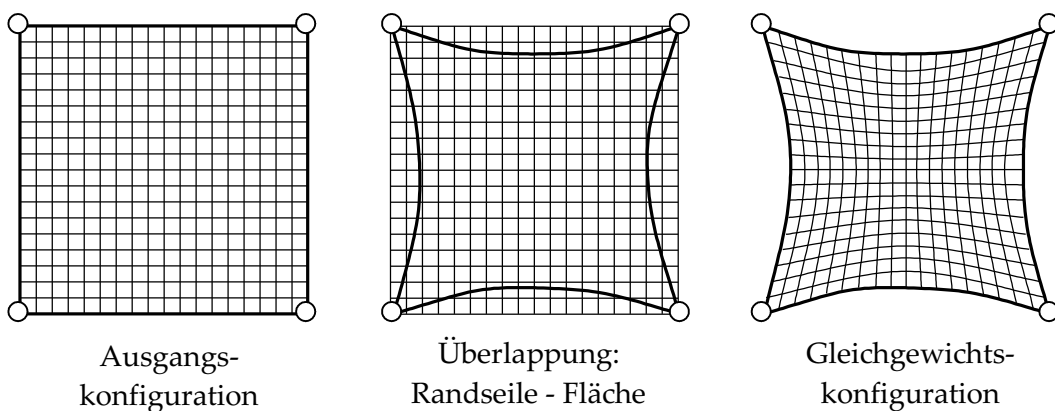


Abbildung 4.8: Notwendigkeit von tangentialen Randanpassungen.

Membran mit seilverstärkten Rändern deutlich, siehe Abbildung 4.8. Die Formfindungsberechnung wird in diesem Fall von der quadratischen, ebenen Ausgangsgeometrie gestartet. Würden die Verschiebungen auf der Fläche unterbunden, so wäre sogar keinerlei Geometriemodifikation der Membran möglich. Weil die Ränder sich einschnüren, würde eine

Überlappung der Seile und der FE-parametrisierten Fläche auftreten. Zweitens ist es im Allgemeinen nicht möglich, bereits zu Beginn der numerischen Simulation der Gleichgewichtssuche für alle Punkte der Struktur Raumkurven festzulegen, die während der gesamten Berechnung zumindest eine senkrechte Komponente zur Fläche aufweisen. In Fällen, wo die Struktur sehr große Veränderungen während des Formfindungsprozesses erfährt, wird Letzteres noch deutlich erschwert, was eventuell wieder zu Restriktionen für die Festlegung der Ausgangskonfiguration in der Nähe der potentiellen Lösungsgeometrie mit sich ziehen würde. Nachdem dies in den üblicherweise komplexen geometrischen Fragestellungen und bei Interaktionen zwischen Seil- und Membranvorspannung in der Regel nicht möglich ist und die Notwendigkeit der tangentialen Netzanpassung augenscheinlich vorhanden ist, müssen andere stabilisierende Maßnahmen ergriffen werden.

Auf Grund der erläuterten Schwierigkeiten bei der numerischen Berechnung von Gleichgewichtskonfigurationen wurden eine Vielzahl an Verfahren für die numerische Formfindung entwickelt, von denen einige mit ihren wesentlichen Merkmalen und Grundideen beispielhaft in folgendem Verfahrenüberblick genannt werden:

- *Modifizierte, unvollständige Linearisierung*  
Es wird bei der Anwendung der Finite-Elemente-Methode mit dem Newton-Raphson-Verfahren zur Lösung der nichtlinearen Gleichungen anstelle der konsistent linearisierten, aber singulären Steifigkeitsmatrix eine entsprechend modifizierte Variante verwendet [HP72], [HA82].
- *Dynamische Relaxation*  
Diese Methode wird üblicherweise dann angewandt, wenn mit Programmen, die zur expliziten Zeitintegration von nichtlinearen Bewegungsgleichungen entwickelt wurden, auch statische Berechnungen durchgeführt werden sollen. Grundsätzlich ist dies bei dieser Art von Code nicht direkt möglich und so wird ein dynamisches Problem mit geeignet gewählter Dämpfung gelöst. Durch die Vorgabe einer Dämpfung, die möglichst nahe am aperiodischen Grenzfall ist (durch die variablen Eigenfrequenzen im Nichtlinearen und die Überlagerung mehrerer Eigenmoden beim Schwingungsvorgang kann man ihn nicht exakt angeben), wird die gesuchte statische Lösung schließlich als Ergebnis des Ausschwingvorgangs erreicht [Und83].

Die Grundidee dieser Methode besteht also darin, dass die eigentlich statische Aufgabenstellung durch das Hinzufügen von Massen und Dämpfungseffekten in ein fiktives dynamisches Problem überführt wird, das (unter Umständen) deutlich gutmütigere Lösungseigenschaften hat.

Übertragen auf die Formfindungsproblematik bedeutet dies, dass die Gleichgewichtsform als Ergebnis einer Zeitintegrationsberechnung eines (künstlichen) Ausschwingvorgangs erhalten wird. Die Ruhelage des durch die Systemdynamik regularisierten Problems ist somit die Lösung des ursprünglich singulären Problems [Bar88], [Bar94], [Bar99], [LL96].

- *Kraftdichtemethode (force density method)*  
Diese Methode stellt den Sonderfall einer Homotopiemethode (Definition siehe

Seite 86) dar und ersetzt das nicht eindeutig lösbare Originalproblem durch ein ähnliches, aber gut gestelltes Problem. Ursprünglich wurde die Kraftdichtemethode zur Formfindung von Seilnetzen entwickelt [LS71], [Sch74], [Lin99a], [Lin99b] und ist mittlerweile aber auch auf dreieckige Membranelemente verallgemeinert worden [Sin95],[MM98]. Des Weiteren wurde sie auch schon für die Formfindung von Tensegritystrukturen eingesetzt [VM99].

Der Grundgedanke des Verfahrens beruht auf einer Modifikation der Gleichgewichtsgleichungen, indem man die sogenannte Kraftdichte  $q$  vorgibt und diese während der Formfindung konstant hält, was in einer konstanten und nichtsingulären Systemmatrix resultiert. Beim  $i$ -ten Seil wird die Kraftdichte als Quotient aus der Seilkraft  $S_i$  und der dazugehörigen Seillänge  $L_i$  definiert:  $q_i = \frac{S_i}{L_i}$ . Durch diese Regularisierung sind die Bestimmungsgleichungen nur noch linear von den Kraftdichten abhängig, was eine direkte Lösung in einem Schritt erlaubt.

Eine Schwierigkeit dieser Herangehensweise ist, dass man eine Annahme über die (noch unbekannt) Formänderung treffen muss. Nachdem die Kraftdichte anstelle der Kraft als konstant angenommen wurde, weicht die wahre Seilkraft  $S_{c i}$  in der Gleichgewichtslage um so deutlicher von der im Ausgangszustand vorgegebenen Sollgröße  $S_i$  ab, je größer die Verformungen während des Formfindungsvorgangs sind. Mit den korrespondierenden Seillängen in der verformten beziehungsweise unverformten Konfiguration ( $l_i$  und  $L_i$ ) ergibt sich aus der Annahme einer während der Berechnung konstanten Kraftdichte  $q_i$ :

$$q_i = \frac{S_i}{L_i} = \frac{S_{c i}}{l_i} \quad \Rightarrow \quad S_{c i} = q_i l_i = \frac{S_i}{L_i} l_i. \quad (4.27)$$

Unterscheiden sich also die Seillängen des Seils  $i$  vor und nach der Formfindungsberechnung, so ergeben sich unterschiedliche Soll- und Istwerte der Seilkraft. Im Bereich sehr kleiner Verformungen ist  $\frac{l_i}{L_i}$  in guter Näherung gleich eins und die Seilkräfte in der verformten und unverformten Konfiguration sind identisch. Bei großen Formänderungen hingegen kann eine iterative Anpassung der Kraftdichten erforderlich werden.

Aus den bisherigen Ausführungen kann eine auf der Kontinuumsmechanik basierende Erklärung der Kraftdichte erhalten werden, indem man sie als den Quotient aus zwei Größen interpretiert, die auf die Referenzkonfiguration einer geometrisch nichtlinearen Berechnung bezogen sind. Daraus kann gefolgert werden, dass mit der Vorgabe einer konstanten Kraftdichte die PK2-Spannungen beziehungsweise die entsprechenden PK2-Seilkräfte während des Formfindungsprozesses kontrolliert werden. Der formale Zusammenhang von Kraftdichte  $q_i$  und der PK2-Spannung in Seillängsrichtung  $S_{l i}$  in Seil  $i$  mit Querschnitt  $A_i$  ist:

$$q_i = \frac{A_i S_{l i}}{L_i}. \quad (4.28)$$

Mit dieser auf [BR99] zurückgehenden Erkenntnis kann die Kraftdichtemethode konsistent auf Membrane übertragen werden, wobei in diesem Fall die PK2-Spannungskomponenten für den ebenen Spannungszustand bezüglich einer zu wählenden Ausgangskonfiguration vorgegeben werden müssen.

Die kontinuumsmechanische Deutung, der in der Kraftdichte in Gleichung (4.27) enthaltenen Seilkräfte als Cauchy-Normalkräfte  $S_{c_i}$  in der verformten Konfiguration und als PK2-Normalkräfte  $S_i$  in der unverformten Konfiguration, wird durch die Äquivalenz der Gleichung (4.27) und der Umrechnung zwischen Cauchy- und PK2-Spannungen bei Seilen (nach Gleichung (4.23)) untermauert.

- *Updated Reference Strategy (URS)*

Das auf Bletzinger zurückgehende Verfahren [Ble98], [BR99] gehört zur Klasse der Homotopiemethoden (Definition siehe Seite 86). Es wird eine Lösung des singulären Problems durch eine Überblendung der beiden alternativen Darstellungen des Prinzips der virtuellen Arbeiten als Funktion der Cauchy- und der PK2-Spannungen ermöglicht. Hierbei wird dieselbe Verteilung für die beiden Spannungen angesetzt. Die stabilisierende Wirkung des Arbeitsterms in Abhängigkeit der PK2-Spannungen ergibt sich durch den Bezug auf die Ausgangskonfiguration, die während des Formfindungsvorgangs konstant bleibt. Wird diese Methode unter alleiniger Verwendung der Stabilisierung angewendet, so entspricht dies der Verallgemeinerung der Kraftdichtemethode, nachdem bereits oben die mechanische Äquivalenz der Kraftdichten und der PK2-Spannungen identifiziert wurde (siehe detaillierte Erläuterungen auf Seite 88).

Ein wesentlicher Verfahrensschritt der URS besteht darin, dass bei Erreichen einer Gleichgewichtslage mit Hilfe des Stabilisierungsverfahrens diese Form als neue Ausgangskonfiguration verwendet wird und das stabilisierte Formfindungsproblem erneut gelöst wird. Eine Konsequenz der schrittweisen Anpassung der Geometrie durch ein Nachziehen der Membranform über ausgeglichene Zwischenkonfigurationen ist, dass der Unterschied zwischen eigentlichem und stabilisiertem Problem verschwindet. Hiermit wird gewährleistet, dass trotz Anwendung einer Stabilisierungsstrategie das Verfahren zuverlässig zur Solllösung konvergiert und keine Beeinflussung des Ergebnisses der ursprünglichen, singulären Fragestellung auftritt. Diese vorteilhafte Eigenschaft ist der Grund für die Verfahrensbezeichnung „Updated Reference Strategy“ beziehungsweise „Methode der verbesserten Referenzgeometrie“.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird ausschließlich die URS verwendet und weiterentwickelt. Nachdem sie bereits oben im Methodenüberblick kurz beschrieben wurde, werden im Folgenden die grundlegenden Formeln und die Verfahrensdetails aufbereitet.

### Updated Reference Strategy (URS)

Die bereits erwähnten *Homotopiemethoden* sind mathematische Verfahren, mit denen man singuläre Probleme lösen kann. Hierzu bedient man sich eines Homotopieansatzes, wobei eine Homotopie  $h(x)$  eine beliebige Verbindung zwischen zwei Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  sein kann. Beispielsweise kann zur Lösung des Problems  $f(x) = 0$  eine einfache Homotopie durch eine lineare Überblendung mit dem Homotopiefaktor  $\lambda$  konstruiert werden:

$$h(x) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)g(x) = 0. \quad (4.29)$$

Die Lösung des singulären Originalproblems ist damit in Gleichung (4.29) für den Homotopieparameter  $\lambda = 1$  enthalten und für  $\lambda = 0$  wird ausschließlich das Hilfsproblem gelöst. Dieses sollte sinnvollerweise ein stabiles und gut zu lösendes Ersatzproblem sein, wobei die Qualität der Methode um so besser ist, je näher der stabilisierende Term an der eigentlichen Problemformulierung ist. Die neue Problemstellung  $h(x)$  ist auf jeden Fall immer lösbar, wenn der Homotopiefaktor nur klein genug gewählt wird. Die übliche Herangehensweise bei dieser sogenannten „continuation“-Methode ist eine wiederholte Lösung von Gleichung (4.29) für variierende Parameterwerte  $\lambda$  von null bis exklusive eins.

Überträgt man diese Lösungsstrategie auf die Formfindung von Membranstrukturen, so muss eine Homotopie zu der singulären Fragestellung der Lösung der schwachen Form  $\delta W = 0$  der vorgeschriebenen tangentialen Flächenspannungen  $\sigma$  in Gleichung (4.6) konstruiert werden. Im Rahmen der URS wird als stabilisierendes, dem Originalproblem verwandtes, einfach zu lösendes Hilfsproblem die Gleichgewichtsforderung in Abhängigkeit vom nun als vorgeschrieben betrachteten PK2-Spannungstensor  $\mathbf{S}$  nach Gleichung (4.8) verwendet. Das modifizierte virtuelle Arbeitsfunktional mit dem um  $\lambda \in [0;1[$  erweiterten Parameterraum ist wie folgt aufgebaut:

$$\begin{aligned} \delta W_\lambda &= \lambda \delta W_\sigma + (1 - \lambda) \delta W_S \\ &= \lambda \left[ h \int_A \det \mathbf{F} (\sigma \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \delta \mathbf{F} \, dA \right] + (1 - \lambda) \left[ h \int_A (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) : \delta \mathbf{F} \, dA \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Dies stellt die Grundgleichung für die URS dar, wobei für beide Spannungsmaße die gleiche Verteilung angenommen wird. Der stabilisierende Effekt von  $\delta W_S$  beruht auf der Tatsache, dass die vorgeschriebenen PK2-Spannungen sich auf die während der Berechnung konstante Referenzkonfiguration beziehen. Daraus folgt, dass auch  $\mathbf{S}$  konstant bleibt und die Ableitungen von  $\mathbf{S}$  nach den freien Parametern der Formfindung verschwinden:  $\mathbf{S}_{,r} = 0$ . Durch Linearisierung der bezüglich der Gleichgewichtskonfiguration nichtlinearen Fragestellung erhält man die modifizierte tangentiale Steifigkeitsmatrix

$$K_{\lambda rs} = \lambda h \int_A (\det \mathbf{F} \sigma \cdot \mathbf{F}^{-T})_{,rs} : \mathbf{F}_{,r} \, dA + (1 - \lambda) h \int_A (\mathbf{F}_{,rs} \cdot \mathbf{S}) : \mathbf{F}_{,r} \, dA \quad (4.31)$$

und den modifizierten Vektor der Ungleichgewichtskräfte

$$R_{\lambda r} = \lambda h \int_A \det \mathbf{F} (\sigma \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \mathbf{F}_{,r} \, dA + (1 - \lambda) h \int_A (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) : \mathbf{F}_{,r} \, dA. \quad (4.32)$$

Durch Überführen der Regularisierungsterme von  $\mathbf{K}$  und  $\mathbf{R}$  in die Indexschreibweise ergibt sich:

$$\begin{aligned} (1 - \lambda) h \int_A (\mathbf{F}_{,rs} \cdot \mathbf{S}) : \mathbf{F}_{,r} \, dA &= (1 - \lambda) h \int_A S^{\alpha\beta} (\mathbf{g}_{\alpha,r} : \mathbf{g}_{\beta,s}) \, dA, \\ (1 - \lambda) h \int_A (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) : \mathbf{F}_{,r} \, dA &= (1 - \lambda) h \int_A S^{\alpha\beta} (\mathbf{g}_\alpha : \mathbf{g}_{\beta,r}) \, dA. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Es fällt auf, dass die Steifigkeiten infolge  $\delta W_S$  bei vorgegebenem  $\mathbf{S}$  konstant sind, weil die kovarianten Basisvektoren nur linear von den Diskretisierungsparametern  $b_r$  abhängen.

Das modifizierte Formfindungsproblem ist für die Wahl  $\lambda = 0$  also linear und kann in einem Schritt direkt gelöst werden. Für diesen speziellen Fall, dass ausschließlich mit dem Stabilisierungsterm gerechnet wird, geht also die URS in eine Verallgemeinerung der Kraftdichtemethode über, wobei die PK2-Spannungen den Kraftdichten entsprechen (siehe oben). Die aus dem Regularisierungsterm ermittelten Steifigkeiten sind positiv definit, solange  $\lambda$  klein genug und  $\mathbf{S}$  positiv definit ist, was bei Zugspannungen der Fall ist.

Wird das stabilisierte und linearisierte Problem aus den Gleichungen (4.31), (4.32) mit dem Newton-Raphson-Verfahren für eine bestimmte Ausgangskonfiguration gelöst, so wird die berechnete Geometrie von der wahren Lösung des singulären Originalproblems in Abhängigkeit vom Homotopiefaktor  $\lambda$  abweichen.

Folglich ist die korrekte Wahl des Stabilisierungsparameters immer ein Kompromiss zwischen „genügend klein“ zur Wahrung der numerischen Stabilität und „so groß wie möglich“, um das Originalproblem bestmöglich anzunähern. Es kann deshalb die Prozedur mit einer sukzessiven Erhöhung von  $\lambda$  in Richtung des Werts eins wiederholt werden, bis man „nahe genug“ an die eigentlich gesuchte Lösung herangekommen ist. Dies erreicht man, indem man die Sequenz an Berechnungen mit kontinuierlich gesteigertem  $\lambda$  durchführt, bis die Berechnung nicht mehr möglich ist und dann die zuletzt erhaltene Lösung als Gleichgewichtskonfiguration ansieht. Dieses Vorgehen ist sehr einfach, aber nur bedingt zufriedenstellend, weil die so ermittelte Lösung von der Stabilisierung beeinflusst wird.

Um diese verfahrensbedingte Verfälschung des Formfindungsergebnisses zu vermeiden und sogar die unmodifizierte Gleichgewichtsform des singulären Originalproblems zu erhalten, wird bei der URS die spezielle Eigenschaft des in Gleichung (4.30) formulierten Stabilisierungsterms  $\delta W_S$  ausgenutzt: Er approximiert den Originalwert immer besser, je näher die Referenzkonfiguration an der Momentankonfiguration ist.

An dieser Stelle kommt die Grundidee der Methode der verbesserten Referenzgeometrie voll zum Tragen: Zunächst wird das modifizierte Problem aus den Gleichungen (4.31), (4.32) mit einem beliebigen, jedoch hinsichtlich der Stabilität genügend klein gewählten Homotopiefaktor  $\lambda$  gelöst. Das Ergebnis wird nun als neue, verbesserte Referenzgeometrie für einen erneuten Formfindungsschritt übernommen. Dieses Nachziehen der Ausgangskonfiguration wird so lange durchgeführt, bis die Änderung der Form in aufeinanderfolgenden Formfindungsschritten genügend klein geworden ist. Das bedeutet, dass die Referenzkonfiguration der einzelnen Formfindungslösungen iterativ an die Lösung der eigentlichen, unstabilisierten Problemstellung angepasst werden und durch die sukzessive verringerten Formänderungen in jeder Einzelsimulation die unerwünschte Ergebnisbeeinflussung durch den PK2-Stabilisierungsterm ausgeblendet wird.

Diese Strategie konvergiert also unabhängig vom Wert  $\lambda$  zur Originallösung. Die einzige Restriktion in der Wahl des Homotopieparameters ergibt sich daraus, dass er klein genug sein muss, um eine stabile Simulation zu gewährleisten. Selbst mit  $\lambda = 0$  wird die korrekte Gleichgewichtsform erreicht. In diesem Fall bestehen die Einzelberechnungen jeweils nur aus der Lösung eines linearen Problems, was aber durch eine höhere Anzahl an benötigten Referenzadaptionen erkauft wird.

Eine Konsequenz aus diesem Zusammenhang zwischen Aufwand in der Einzellösung und benötigter Gesamtschrittzahl ist, dass zu Beginn des kompletten Formfindungsprozesses

eher kleine Homotopiefaktoren verwendet werden und dann in den Folgeschritten der Wert von  $\lambda$  zur Beschleunigung der Konvergenz erhöht wird. Der Grund für dieses Vorgehen ist, dass die Ausgangskonfiguration der kompletten Formfindung beliebig wählbar und damit auch unter Umständen weit von der eigentlichen Lösung entfernt ist, was sich typischerweise in großen Formänderungen in den ersten Schritten äußert und in späteren Konfigurationsanpassungen nur noch sehr kleine Unterschiede von Einzellösung zu Einzellösung auftreten.

Eine ausführliche Darstellung des Konvergenzverhaltens der URS, Vergleiche numerischer Formfindungsergebnisse mit analytischen Lösungen und verschiedene Möglichkeiten zur Wahl des Homotopiefaktors sind in [BR99] zu finden. Zur Illustration wird hier beispielhaft in Abbildung 4.9 die schnelle und robuste Konvergenz der URS bei der Simulation einer Minimalfläche mit Randseilen demonstriert (aus [BZ00]). Es ist die Verschiebung eines repräsentativen Punktes in Abhängigkeit vom Homotopiefaktor für fünf sukzessive ausgeführte Formfindungsschritte aufgetragen, wobei im letzten Schritt die auskonvergierte Lösung für die Gleichgewichtsform erhalten wird. Die schnelle Konvergenz ist offensichtlich und selbst bei alleiniger Anwendung der Stabilisierungsterme (das heißt  $\lambda = 0$ ) im ersten Schritt, was einer Berechnung mit der generalisierten Kraftdichtemethode für Membranelemente entspricht, sind deutliche Formänderungen erkennbar.

Die Berechnungsstrategie der URS besteht also im Wesentlichen aus der schrittweisen Anpassung der Form durch ein Nachziehen der Ausgangsgeometrie über im Gleichgewicht stehende Zwischenkonfigurationen und einer möglichen Verfahrensbeschleunigung durch die geschickte Erhöhung des Homotopieparameters bei der Annäherung an die Lösung des Originalproblems. Die gesuchte Gleichgewichtskonfiguration wird in physikalisch sinnvollen Fällen (siehe Ausführungen in Abschnitt 4.5.3) zuverlässig und robust ermittelt. Eine Abfolge der einzelnen Schritte ist in Abbildung 4.10 dargestellt.

## 4.5 Vorspannung

Bei der Formfindung von Membranstrukturen ist, gemäß den Ausführungen in Abschnitt 4.1, neben den festzulegenden Randbedingungen (Lage der Hoch- und Tiefpunkte im Raum, feste/flexible Ränder), die Vorgabe der Spannungsverteilung der maßgebende Freiheitsgrad. Durch die Manipulation der Spannungen kann eine Vielzahl an vorgespannten Flächen innerhalb der gleichen Randbedingungen erzeugt werden, wobei damit nicht nur das Erscheinungsbild entsprechend der ästhetischen Vorgaben festgelegt, sondern auch das mechanische Verhalten des Tragwerks wesentlich bestimmt wird (siehe Abschnitt 2.3.1 zur Interaktion Kraftfluss und Form auf Grund der ausschließlich tangentialen Flächenspannungen). Im folgenden Abschnitt wird näher auf die in der für das Formfindungsproblem zu lösenden Gleichung (4.30) vorzuschreibenden Spannungen  $\sigma$  beziehungsweise  $\mathbf{S}$  eingegangen.

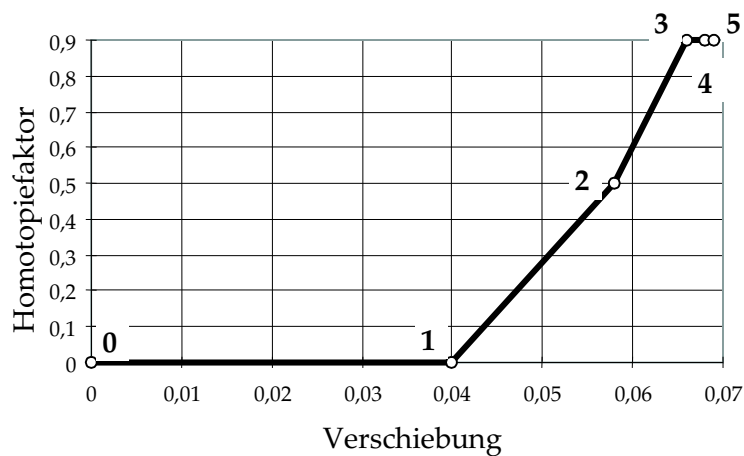
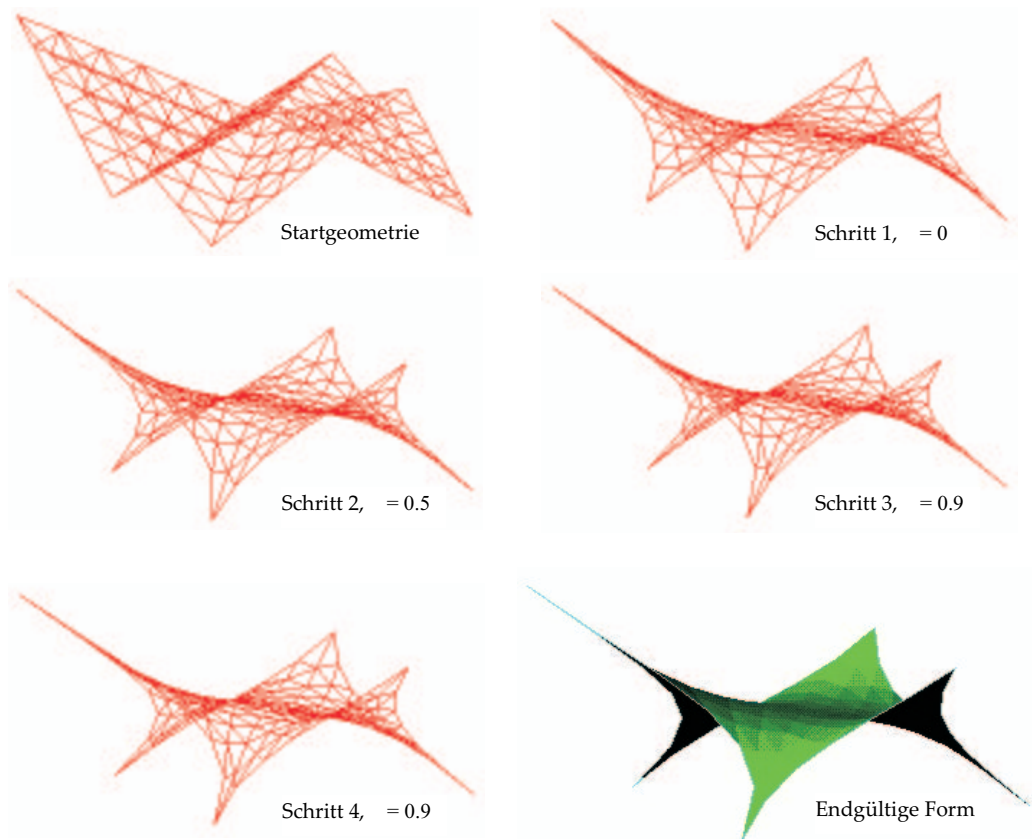
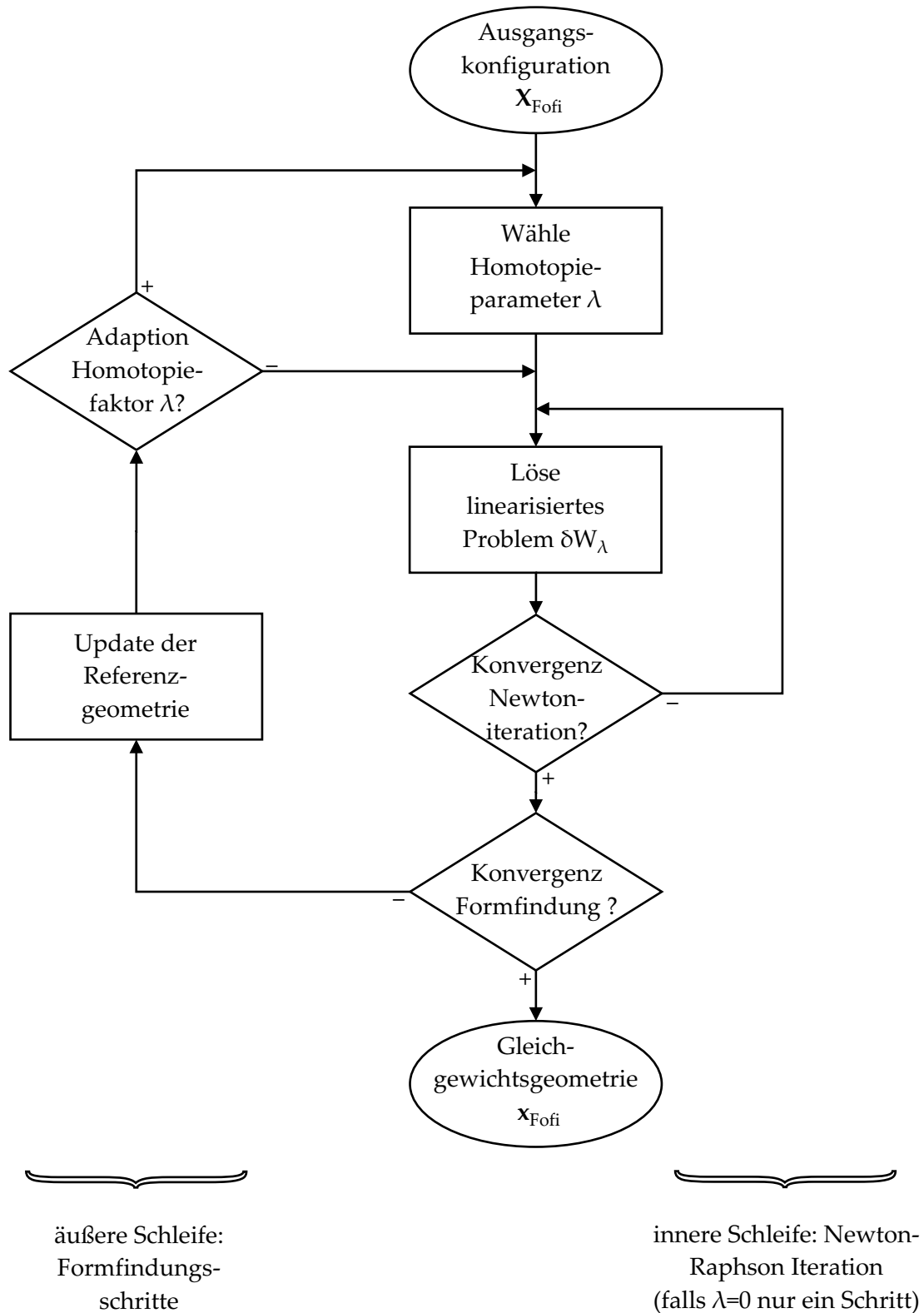


Abbildung 4.9: Konvergenzverhalten der *Updated Reference Strategy* (aus [BZ00]).

### 4.5.1 Isotrope Vorspannung

Eine besondere Art, eine Membran vorzuspannen, stellt die Vorgabe einer homogenen und isotropen Spannungsverteilung dar. Dies ist ein Spannungszustand, bei dem an jedem Punkt der Fläche beide Hauptspannungen (vgl. Gleichung (2.86)) gleich groß sind. In diesem Fall kann der Cauchy-Spannungstensor als ein skalares Vielfaches des Einheitstensors (nach Gleichung (2.9)) geschrieben werden und der allgemeine ebene Spannungszustand



Abbildung 4.10: Verfahrensablauf der *Updated Reference Strategy*.

gemäß Gleichung (2.85) reduziert sich auf folgenden Ausdruck:

$$\sigma_{esz} = \sigma^{\alpha\beta} \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta = \hat{\sigma} \mathbf{I} = \hat{\sigma} g^{\alpha\beta} \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta. \quad (4.34)$$

Hiermit wird der flächige Spannungszustand, der im Allgemeinen durch Magnitude und Richtung der Hauptspannungen vorgegeben ist, durch die Vorgabe eines einzigen skalaren Werts  $\hat{\sigma}$  bereits vollständig bestimmt.

Die für die numerische Lösung bereits parametrisierten und linearisierten Gleichungen können mit dieser speziellen Spannungsvorgabe noch weiter vereinfacht werden. Für die Gleichungen (4.20) in Abhängigkeit der Cauchy-Spannungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} R_r &= \hat{\sigma} h \int_A \det \mathbf{F} (\mathbf{g}_{\alpha,r} \cdot \mathbf{g}^\alpha) \, dA, \\ K_{rs} &= \hat{\sigma} h \int_A \det \mathbf{F} \left[ (\mathbf{g}_{\alpha,r} \cdot \mathbf{g}^\alpha) (\mathbf{g}_{\beta,s} \cdot \mathbf{g}^\beta) - (\mathbf{g}_{\alpha,r} \cdot \mathbf{g}^\beta) (\mathbf{g}_{\beta,s} \cdot \mathbf{g}^\alpha) \right] \, dA. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Für die Stabilisierungsterme in Abhängigkeit von den PK2-Spannungskomponenten (nach Gleichung (4.33)) resultieren aus der Reduktion des Spannungszustands auf nur noch einen Spannungsfreiwert mit  $\mathbf{S} = \hat{S} \mathbf{I}$  die Ungleichgewichtskräfte und die tangentialen Steifigkeitskomponenten des isotropen Spannungszustands:

$$\begin{aligned} R_r &= \hat{S} h \int_A G^{\alpha\beta} (\mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_{\beta,r}) \, dA, \\ K_{rs} &= \hat{S} h \int_A G^{\alpha\beta} (\mathbf{g}_{\alpha,r} \cdot \mathbf{g}_{\beta,s}) \, dA. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Durch die in Abschnitt 4.4 vorgestellte Überlagerung der Terme aus den Gleichungen (4.35), (4.36) im Sinne eines Homotopieverfahrens und anschließende Durchführung der Updated Reference Strategy gemäß dem Ablaufdiagramm in Abbildung 4.10, sind durch Vorgabe eines einzigen Zahlenwerts für die Größe der Vorspannung, Flächen mit isotroper und homogener Vorspannung numerisch ermittelbar.

Diese Flächen stellen *Minimalflächen* dar. Dies sind jene Flächen, die in einem vorgegebenen, geschlossenen Rand den minimalen Flächeninhalt aufweisen. Die Aufgabe, die zu einer gegebenen Randkurve gehörige Minimalfläche zu ermitteln, wird auch als plateausches Problem bezeichnet. Eine Eigenschaft der Flächen mit minimalem Inhalt ist, dass in allen Punkten die mittlere Krümmung (definiert in Gleichung (2.22)) verschwindet:  $H \equiv 0$ .

Experimentell lassen sich Flächen kleinsten Inhalts realisieren, indem man einen Draht in eine Seifenlösung eintaucht. Es entsteht in der damit vorgegebenen Randkurve (bei Vernachlässigung der Schwerkraft) unter der Wirkung der konstanten Oberflächenspannung die Minimalfläche. Hiermit lässt sich sehr anschaulich auch die trivialste Minimalfläche erzeugen: die Ebene als Seifenhaut in einer ebenen Randkurve. Das Seifenhautexperiment ist die Grundlage für die von Frei Otto und seinem Team für die Formfindung von zugbeanspruchten Konstruktionen bis zur Perfektion entwickelten Seifenhautversuche [OR01],[OT62],[OS66].

Dieser physikalische Zugang zum geometrisch geprägten Vorgehen bei der rechnerischen Minimalflächenbestimmung im Rahmen der Mathematik ist unter dem Begriff Seifenhaut-analogie bekannt. Die Äquivalenz dieser beiden Herangehensweisen soll nun kurz dargestellt werden: Soll eine Form mit geringstem Flächeninhalt ermittelt werden, so ist damit die Forderung nach dem Verschwinden der Variation  $\delta a$  des Flächeninhalts am Minimum verbunden:

$$\delta a = \delta \left( \int_a da \right) = \int_A \delta(\det \mathbf{F}) dA = 0. \quad (4.37)$$

Hierbei wurde das Integrationsgebiet auf eine fixe Referenzfläche mit Hilfe der Determinante des Formgradienten nach Gleichung (4.3) transformiert und ausgenutzt, dass die Referenzfläche invariant gegenüber Variationen der Form ist. Die Stationaritätsbedingung für den Flächeninhalt kann durch weitere Umformungen folgendermaßen geschrieben werden:

$$\delta a = \int_A \delta(\det \mathbf{F}) dA = \int_A \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-T} : \delta \mathbf{F} dA = 0. \quad (4.38)$$

Die mechanische Forderung, dass eine isotrop vorgespannte Fläche (nach Gleichung (4.34)) im Gleichgewicht steht, führt unter Verwendung des Prinzips der virtuellen Arbeiten nach Gleichung (4.6) auf folgenden Arbeitsausdruck:

$$\delta W = h \int_A \det \mathbf{F} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \delta \mathbf{F} dA = \hat{\sigma} h \int_A \det \mathbf{F} (\mathbf{I} \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \delta \mathbf{F} dA = 0. \quad (4.39)$$

Beim Vergleich von Gleichung (4.38) und Gleichung (4.39) fällt auf, dass die Formbestimmung von Minimalflächen mit der geometrischen und der mechanischen Vorgehensweise auf identischen Formeln beruht und somit diese beiden Betrachtungsweisen äquivalent sind – dies ist die Aussage der *Seifenhautanalogie*.

Des Weiteren kann daraus gefolgert werden, dass eine konstante Dicke  $h$  und der Absolutwert der Flächenspannung  $\hat{\sigma}$  keinen Einfluss auf die gesuchte Form haben. Es kommt bei Minimalflächen mit flexiblen Rändern also nur auf die relativen Größenunterschiede zwischen den vorgegebenen Flächenspannungen und den Randseilkräften an.

Minimalflächen sind also bei gegebenen Randbedingungen in ihrer Form klar festgelegt. Auf Grund der mathematischen und physikalischen Grundlagen gibt es eine klare Formdefinition für die als Minimalflächen geplanten Tragwerke – ganz im Gegensatz zur unzählbar großen Vielfalt bei allgemein vorgeschriebenen Spannungszuständen, die unter Umständen zu gestalterischer Beliebigkeit führen kann. Unter anderem durch die Ausgewogenheit und Stimmigkeit der Form sind Minimalflächen ästhetisch hochwertige und äußerst ansprechende Geometrien. Streng genommen stellen sie aber nur für den Lastfall Vorspannung die Idealkonfiguration dar, denn bei den immer vorhandenen zusätzlichen Lastfällen können sich durchaus Probleme bei der Lastabtragung ergeben (siehe Abschnitt 4.6). Des Weiteren sind für gewisse Randgeometrien keine Minimalflächen mehr findbar [Bel98] (siehe folgende Abschnitte).

Ein klassisches Beispiel für eine Minimalfläche ist das Katenoid, das gleichzeitig die einzige rotationssymmetrische Minimalfläche ist. In Abbildung 4.11 ist ein Vergleich zwischen

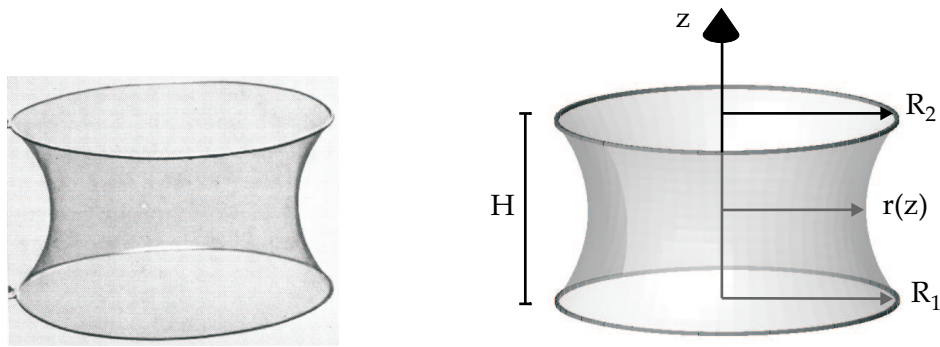


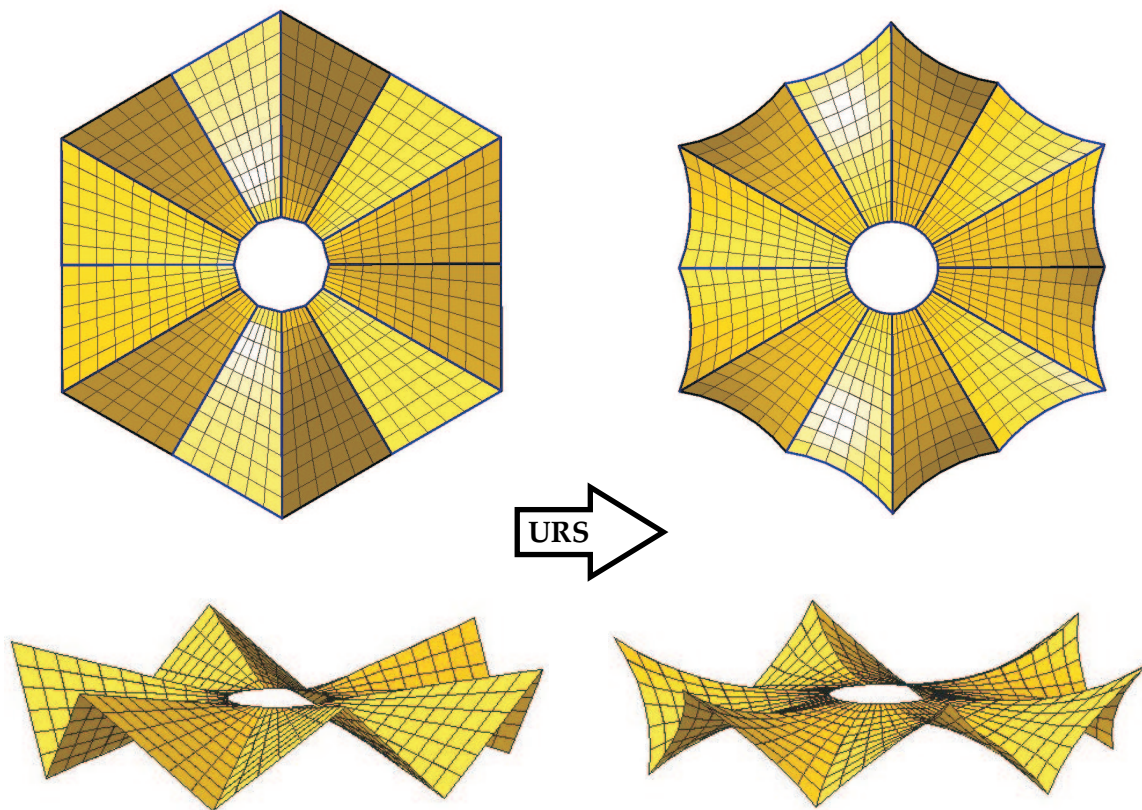
Abbildung 4.11: Katenoid: Seifenhautversuch und numerische Formfindung.

einer mittels einer Seifenhaut zwischen zwei Metallringen experimentell bestimmten Minimalfläche (aus [OS66]) und einem numerischen Formfindungsergebnis dargestellt. Die Berechnung wurde mit vierknotigen Viereckselementen und der URS unter der Berücksichtigung isotroper Vorspannung durchgeführt. Das heißt, es ist nur die Vorgabe eines skalaren Werts notwendig (siehe Gleichungen (4.35), (4.36)), der, im Falle fester Ränder, beliebig gewählt werden kann. Als Ausgangsgeometrie für die Formfindung wurde ein Zylinder gewählt. Die berechnete Form weist einen Spannungszustand mit der überall und in alle Richtungen wirkenden Hauptspannung entsprechend dem Wert des vorgegebenen Skalars auf. Des Weiteren verschwindet die mittlere Krümmung  $H$ . Beim Katenoid handelt es sich also um die Fläche geringsten Inhalts zwischen zwei kreisförmig definierten Randkurven. Als analytische Lösung erhält man (siehe z.B. [BZ00]) mit  $z$  als Richtung der Rotationsachse und  $r(z)$  als dem Abstand davon:

$$r(z) = c_1 \cosh\left(\frac{z + c_2}{c_1}\right). \quad (4.40)$$

Dies entspricht der Form einer Kettenlinie, die durch Rotation um die  $z$ -Achse die Katenoidform erzeugt. Die Integrationskonstanten  $c_1$  und  $c_2$  werden aus den Randbedingungen  $r(z = 0) = R_1$  und  $r(z = H) = R_2$  bestimmt. Mit zunehmendem Ringabstand schnürt sich die Fläche stark ein, wobei eine Grenzhöhe nicht überschritten werden kann. Im Falle gleich großer Radien ( $R = R_1 = R_2$ ) ist dies  $H_{max} \approx 1.32548R$ . Wird diese Höhe im Seifenhautexperiment dennoch überschritten, so zerplatzt die zwischen den Drahtschlaufen gespannte Seifenhaut. Die Tatsache, dass mit isotroper Vorspannung nur diese vom Radius abhängige Grenzhöhe erreicht werden kann, ist für viele praktisch relevanten Formen eine zu starke gestalterische Einschränkung. Mit anisotroper Vorspannung kann beliebig davon abgewichen werden. Der Einfluss der anisotropen Vorspannung wird anhand dieses Beispiels in den folgenden Abschnitten diskutiert.

In Abbildung 4.12 ist eine Minimalfläche dargestellt, die dem von Frei Otto entworfenen Segel auf der Bundesgartenschau in Köln (1957) nachempfunden ist – der sogenannten Tanzbrunnenüberdachung. Es ist jeweils die Draufsicht und eine Schrägansicht der Ausgangs- und Gleichgewichtsgeometrie abgebildet, wobei in der Draufsicht die Rand-, Kehl- und Gratseile mit dargestellt sind. Diese sind als Seilelemente mit Kopplung der Seilknoten an



**Abbildung 4.12:** Minimalfläche: Ausgangskonfiguration und Gleichgewichtskonfiguration.

die Membranknoten modelliert, womit das Rutschen der Seile auf der Membran unmöglich ist (siehe auch Abschnitt 2.3.1). Die prinzipiell beliebig definierbare Ausgangskonfiguration des numerischen Formfindungsprozesses ist als Vielflächner gewählt worden. Es ist deutlich zu erkennen, wie die geraden Kanten der einzelnen Segelsegmente im Laufe der Formfindung gekrümmt werden. Diese Krümmung ist notwendig, um das Gleichgewicht an den flexiblen (also seilverstärkten) Rändern herzustellen. Des Weiteren ist ersichtlich, dass an den Stellen der Kehl- und Gratseile sich auf Grund der Umlenkkräfte die an diesen Stellen typischen Knicke in der Membranfläche einstellen. Die komplette Tragwerksgeometrie ergibt sich in diesem Fall also aus der Interaktion der vorgeschriebenen Flächenspannung der Membran und den Seilvorspannkräften. Die tangentialen Membranspannungen sind wieder homogen und isotrop. Die Fläche ist durch vierknotige finite Elemente parametrisiert, wobei jeder Knoten drei global orientierte Verschiebungsfreiheitsgrade aufweist (siehe Abschnitt 4.2).

#### 4.5.2 Anisotrope Vorspannung

Die Wahl eines isotropen Vorspannungszustands ist für viele technisch relevante Fragestellungen nicht sinnvoll beziehungsweise unmöglich. Aus diesem Grund wurde das hier verwendete Verfahren (URS) für abschnittsweise orthotrope Vorspannung erweitert. Hiermit

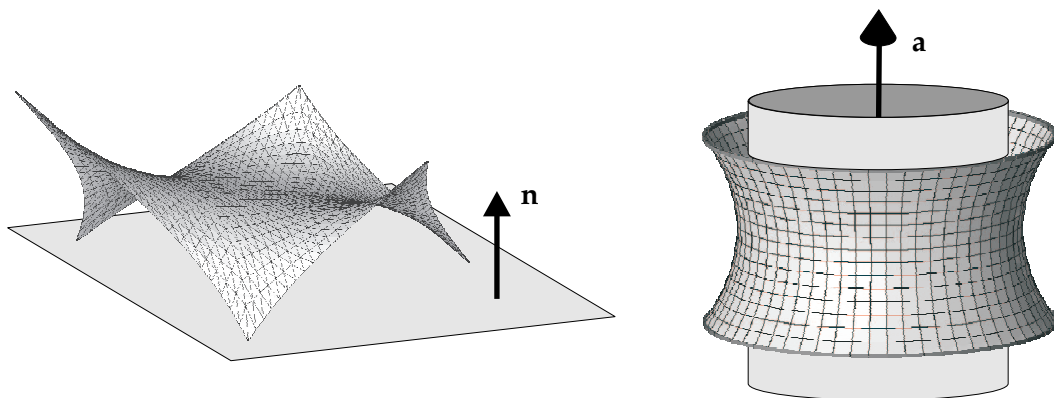
ist in den gleichen Membranrändern eine große Formenvielfalt erreichbar beziehungsweise können Gleichgewichtsformen bestimmt werden, die als Minimalfläche nicht realisierbar sind. Dies resultiert aus der Tatsache, dass nicht bei allen erdenklichen Randausbildungen eine Fläche mit isotropem Spannungszustand definiert ist (für eine ausführliche Diskussion von physikalisch möglichen Spannungszuständen siehe Abschnitt 4.5.3).

Als eine direkte Konsequenz aus der starken Formabhängigkeit des Tragverhaltens beziehungsweise der großen Bedeutung der Vorspannung, ist mit anisotropen Vorspannungszuständen auch eine Anpassung des Strukturverhaltens an die Erfordernisse unter zusätzlich zu den formgebenden Lasten aufgebracht Einwirkungen möglich (siehe Abschnitt 4.6). Außerdem liegt bei Tragwerken aus Gewebemembranen ein ausgeprägt anisotropes Materialverhalten vor (siehe Abschnitt 2.3.2). Die aus Kett- und Schussfäden aufgebauten Verbundwerkstoffe weisen unterschiedliche Festigkeiten in diesen beiden ausgewiesenen Materialrichtungen auf, was eine daran orientierte, anisotrope Vorspannungsverteilung sinnvoll erscheinen lässt.

Die numerische Umsetzung der anisotropen Vorspannung ist mittels der linearisierten und stabilisierten Grundgleichungen (4.31), (4.32) prinzipiell möglich, weil bei deren Herleitung keine Einschränkungen bezüglich des Vorspannungszustands gemacht wurden. Es muss nur gewährleistet werden, dass die vorgegebenen Problemparameter in jedem Punkt der Struktur definiert sind. Das bedeutet, dass in jedem Auswertungspunkt die volle Information über die Vorspannungsverteilung vorliegt. Hierzu sind die Vorspannungsrichtungen und die zugehörigen Spannungswerte für  $\sigma$  und  $\mathbf{S}$  anzugeben. Das Problem bei der Formfindung ist jedoch, dass die Vorspannungswerte und -richtungen auf einer Fläche definiert werden müssen, die bei Simulationsbeginn noch unbekannt ist.

In der Literatur wird zum Beispiel vorgeschlagen, die Orthotropierichtungen aus geodätischen Linien und dazu senkrechten Richtungen auf der Membranfläche zu ermitteln [Bar99] oder das Hauptspannungsverhältnis („stress ratio method“) entsprechend der Ausrichtung der Materialfasern auf ebenen Bereichen der Ausgangskonfiguration zu definieren [NB02]. Die naheliegende Beschreibung der richtungsabhängigen Vorspannung in Abhängigkeit vom natürlichen Elementkoordinatensystem ist wegen der damit verbundenen Netzabhängigkeit ungeeignet. Diese verhindert bei beliebigen Netzen die Vorgabe einer einheitlichen Vorspannungsrichtung über einen Strukturbereich mit einer bestimmten Ausdehnung. Außerdem sind die Richtungsvektoren der Tangenten an die Koordinatenlinien ( $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ) in der Regel nicht orthogonal zueinander, was aber zum Beispiel zur Anpassung der Vorspannungsrichtungen an (eventuell vorhandenes) orthotropes Materialverhalten wünschenswert ist.

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Problematik der Richtungsdefinition auf einer (noch) unbekannt Fläche durch ein Projektionsschema gelöst, mit dem die benötigten Parameter des tangentialen Spannungszustands in jedem Gaußpunkt bereitgestellt werden [BW01]. Hierbei wird keine Restriktion oder Approximation des Flächenspannungszustands in der Membran impliziert, sondern die vorgeschriebenen Spannungen wirken nach der Formfindung in der Tangentialebene an die Gleichgewichtsform. Die Grundidee dieser Herangehensweise basiert auf der Tatsache, dass Membranstrukturen aus ursprünglich ebenen Flächen (dem Zuschnitt) zusammengesetzt werden. Vorspannungswerte und -richtungen



**Abbildung 4.13:** Räumlich gekrümmte Membranfläche und abwickelbare Referenzfläche.

werden bezüglich einer zusätzlichen und abwickelbaren Referenzfläche (das ist zum Beispiel eine Ebene, ein Zylinder oder ein Kegel, siehe Beispiele in Abbildung 4.13) definiert und während der Iterationen im Formfindungsprozess auf die aktuelle Geometrie übertragen. Die Besonderheit an diesem Vorgehen ist, dass bereits während der Formfindung die Beziehung zwischen endgültiger Gleichgewichtsform und abwickelbarer Zuschnittsfläche berücksichtigt wird (siehe Abschnitt 4.6).

Zur Erläuterung der geometrischen Zusammenhänge wird vereinfachend nur eine ebene Referenzfläche  $F$  betrachtet. In Abbildung 4.14 ist die Tangentialebene an einen Punkt der Membranfläche in einer der durch den Algorithmus der URS kontinuierlich adaptierten (siehe Abbildung 4.10) Referenzkonfigurationen der Formfindung skizziert. Darunter ist die zusätzliche Referenzfläche  $F$  mit den darauf angegebenen, ausgezeichneten Orthotropierichtungen  $f_1$  und  $f_2$  dargestellt. Damit die hierdurch festgelegten Spannungen auch tangential zur Fläche orientiert sind, müssen die benutzerdefinierten Richtungen  $f_1$  und  $f_2$  in die Tangentialebene projiziert werden. Die Forderung der Komplanarität der Spannungsorthotropierichtungen und der konvektiven Basisvektoren der gerade betrachteten Konfiguration ist durch die Identität der Vektoren  $T_3 = G_3$  gewährleistet, weshalb das lokale, orthonormierte Bezugssystem  $T_i$  bis auf eine Rotation um die Flächennormale bereits festgelegt ist.

Die endgültige Festlegung der Vorspannungsrichtungen kann auf verschiedene Arten erfolgen, wobei zuerst der auf der Referenzebene  $F$  als erste Vorspannrichtung definierte Vektor anschaulich durch die Berechnung der Schnittgeraden von Projektionsebene und Tangentialebene in die Membranfläche übertragen wird. Zur Ermittlung der orthonormierten Tensorbasis  $T_i$  sind nun zwei Varianten möglich. Zum einen wird der aus der Projektion erhaltene Vektor als Richtung  $T_1$  interpretiert, also konstant gehalten, und die zweite Richtung  $T_2$  ergibt sich aus einer Drehung um die Flächennormale, bis  $T_2$  senkrecht zum fixierten, ersten Vektor steht. Dieser Fall wird in Abbildung 4.14 skizziert. Zum anderen kann, ausgehend von dem in die Fläche projizierten Vektor, eine Rotation der beiden Vektoren mit gleichen Winkeln in entgegengesetzte Richtungen um die durch den Direktorvektor definierte Achse durchgeführt werden, bis Orthogonalität von  $T_1$  und  $T_2$  hergestellt ist.

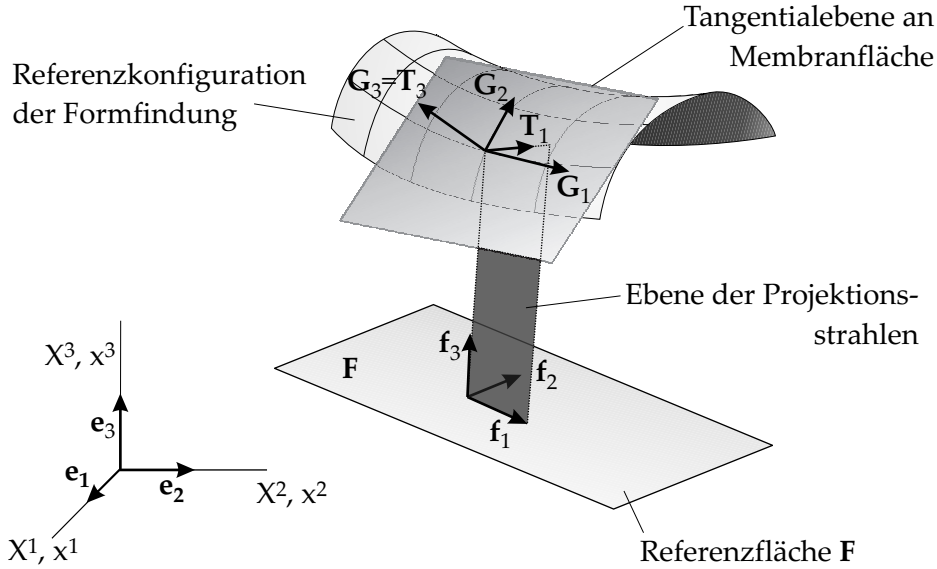


Abbildung 4.14: Projektion der Vorspannungsinformation auf die Membranfläche.

Mit der Kenntnis der Vorspannungsrichtungen  $\mathbf{T}_1$  und  $\mathbf{T}_2$  auf der Fläche, kann nun eine Abfolge von Spannungsübertragungen und Spannungstransformationen durchgeführt werden. Zur Festlegung des Spannungszustands müssen die Koeffizienten  $\bar{\sigma}^{\alpha\beta}$  des Spannungstensors vorgegeben werden. Diese Eingabe erfolgt mit Bezug zur Referenzfläche  $F$  und die Komponenten orientieren sich am orthonormierten Koordinatensystem  $\mathbf{f}_i$ , wobei die ersten beiden Vektoren in der Ebene  $F$  liegen:  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^{\alpha\beta} \mathbf{f}_\alpha \otimes \mathbf{f}_\beta$ .

Damit ein membrangerechter, ebener Spannungszustand vorliegt, werden die vorgegebenen Koeffizienten auf die Membranfläche übertragen, was in Abbildung 4.14 die Referenzkonfiguration der Formfindung ist. Der dadurch definierte PK2-Spannungstensor ergibt sich in Abhängigkeit von den ursprünglich bezüglich der Referenzfläche  $F$  vorgeschriebenen Spannungskoeffizienten  $\bar{\sigma}^{\alpha\beta}$ , die auf Grund der Orthonormiertheit der lokalen Basen  $\mathbf{T}_i$  physikalische Spannungskomponenten darstellen, wie folgt:

$$\mathbf{S} = \bar{\sigma}^{\gamma\delta} \mathbf{T}_\gamma \otimes \mathbf{T}_\delta = S^{\alpha\beta} \mathbf{G}_\alpha \otimes \mathbf{G}_\beta. \quad (4.41)$$

Die Vorspannungskoeffizienten des vorgeschriebenen Cauchy-Spannungstensors  $\sigma$  ergeben sich aus einem analogen Vorgehen mit Projektionen in die Momentankonfiguration (mit den konvektiven Basisvektoren  $\mathbf{g}_i$ ) des Formfindungsvorgangs. Aus der Verschneidung der Projektionsebene mit der Tangentialebene der Momentankonfiguration ergeben sich die Vektoren  $\mathbf{t}_i$ , die ebenso ein orthonormiertes Koordinatensystem bilden, womit die vorgeschriebenen Spannungen  $\bar{\sigma}^{\alpha\beta}$  wiederum physikalische Spannungskoeffizienten sind. Die Spannungskomponenten bezüglich der konvektiven Basis  $\mathbf{g}_1$  und  $\mathbf{g}_2$  werden durch die folgende Transformationsvorschrift definiert:

$$\sigma^{\alpha\beta} = \bar{\sigma}^{\gamma\delta} (\mathbf{g}^\alpha \cdot \mathbf{t}_\gamma) (\mathbf{t}_\delta \cdot \mathbf{g}^\beta). \quad (4.42)$$

Im Zuge der Linearisierung werden, entsprechend den grundlegenden Beziehungen der Formfindung mit der URS nach Gleichungen (4.31), (4.32), neben den Spannungskoeffizien-



ten  $\sigma^{\alpha\beta}$  und  $S^{\alpha\beta}$  noch die Ableitungen der Cauchy-Spannungskomponenten bezüglich der Diskretisierungsparameter  $b_s$  (siehe Abschnitt 4.2) benötigt:

$$\frac{\partial (\sigma^{\alpha\beta})}{\partial b_r} = (\sigma^{\alpha\beta})_{,r} = \bar{\sigma}^{\gamma\delta} \left[ (\mathbf{g}^\alpha \cdot \mathbf{t}_\gamma) (\mathbf{t}_\delta \cdot \mathbf{g}^\beta) \right]_{,r}. \quad (4.43)$$

Wie bereits in Abschnitt 4.4 erläutert, ist die Kraftdichtemethode in der Methode der verbesserten Referenzgeometrie als Sonderfall für die spezielle Wahl des Homotopiefaktors  $\lambda = 0$  enthalten. Nachdem die grundlegenden Gleichungen der URS direkt aus den kontinuumsmechanischen Grundlagen hergeleitet sind, ist a priori keine Einschränkung bezüglich der Elementwahl und des Membranspannungszustands (es sind neben der Anisotropie auch beispielsweise in der Fläche wirkende Schubspannungen möglich) notwendig. Aus diesem Grund ist die verallgemeinerte Kraftdichtemethode für beliebige, vorgeschriebene Vorspannungszustände durch Anwendung des oben vorgestellten Projektionsverfahrens in Verbindung mit den Gleichungen (4.31), (4.32) umsetzbar. In diesem Fall ergeben sich die Anteile der Steifigkeitsmatrix und des Vektors der Ungleichgewichtskräfte aus der Reduktion auf die Stabilisierungsterme zu:

$$\begin{aligned} K_{rs} &= h \int_A \bar{\sigma}^{\gamma\delta} (\mathbf{G}^\alpha \cdot \mathbf{T}_\gamma) (\mathbf{T}_\delta \cdot \mathbf{G}^\beta) (\mathbf{g}_{\alpha,r} \cdot \mathbf{g}_{\beta,s}) \, dA, \\ R_r &= h \int_A \bar{\sigma}^{\gamma\delta} (\mathbf{G}^\alpha \cdot \mathbf{T}_\gamma) (\mathbf{T}_\delta \cdot \mathbf{G}^\beta) (\mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_{\beta,r}) \, dA. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die algorithmische Umsetzung der anisotropen Vorspannung darin besteht, aus einer Vorspannungsverteilung, die bezüglich eines sinnvoll zu wählenden Referenzkoordinatensystems (die Projektionen müssen wohl definiert sein!) in einer Ebene  $\mathbf{F}$  definiert ist, die entsprechenden Tensorkomponenten auf der noch unbekannt Fläche zu berechnen. Dies wird durch die iterationsbegleitend durchgeführten Projektionen und Spannungstransformationen realisiert.

Eine ähnliche Aufgabe stellt sich bei der Definition von Faserorientierungen bei Geweben. Nachdem das beispielhaft genannte Stoffgesetz in Gleichung (2.109) bezüglich der Materialhauptachsen definiert ist, muss ein entsprechend ausgerichtetes, lokal kartesisches Koordinatensystem zur Auswertung der Materialbeziehung zur Verfügung stehen. Im Gegensatz zur Formfindung wird in diesem Fall die Ausrichtung der Fasern auf der Membranfläche nur einmalig zu Beginn der Berechnung mit dem vorgestellten Projektionsalgorithmus festgelegt.

Auf Grund der entfallenden Vereinfachung der Gleichgewichtsforderung durch die Restriktion auf isotrope Spannungszustände bei Minimalflächen (siehe Gleichung (4.34)) lassen sich bei gleichen Randbedingungen sehr viele Geometrien erzeugen. In diesem Fall sind nun drei unabhängige Spannungskoeffizienten und die zugehörigen, bevorzugten Vorspannungsrichtungen umsetzbar, was zu einer gewissen Beliebigkeit in der Gestaltung führen kann. Dass anisotrope Vorspannung zur Realisierung von bestimmten Formen beziehungsweise zur adäquaten Lastabtragung unter Belastungen wie Wind oder Schnee notwendig ist, steht außer Frage. Dennoch ist es nicht ratsam, zu stark anisotrope Vorspannungszustände

zu verwenden, weil beispielsweise auf Grund von Kriecheffekten der Membranwerkstoffe die Fläche der Gleichgewichtsform eines isotrop vorgespannten Zustands zustrebt und dieser Effekt durch stark differierende Vorspannungswerte verstärkt wird [Ish99]. Daraus folgt, dass die Vorspannungswahl sich weitgehend an der (falls in den gegebenen Rändern überhaupt physikalisch möglichen) Minimalfläche mit ihrem isotropen Spannungszustand orientieren sollte, was auch der oben genannten Gefahr der eventuell auftretenden, gestalterischen Beliebigkeit entgegenwirkt.

Betrachtet man reale Strukturen, so wird in der Regel ein inhomogener anisotroper Vorspannungszustand vorliegen, bei dem das Vorspannungsverhältnis nicht über die gesamte Membranfläche hinweg konstant ist. Dies erfordert weitergehende Überlegungen bezüglich der Vorspannungsdefinition bei der numerischen Formfindung, damit der vorgeschriebene Vorspannungszustand möglichst gut kontrolliert werden kann. Das bedeutet, dass in gewissen Situationen die gewollte Spannungsverteilung aus Gleichgewichtsgründen nicht möglich ist, man aber trotzdem so nahe wie möglich an einen Sollspannungszustand herankommen will. Dieser Frage wird im nächsten Abschnitt nachgegangen. Zunächst wird anhand des in Abschnitt 4.5.1 vorgestellten, mathematisch klar definierten Katenoids die

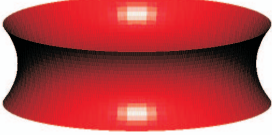

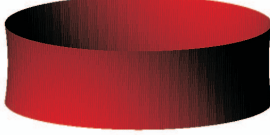
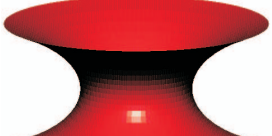
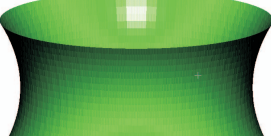

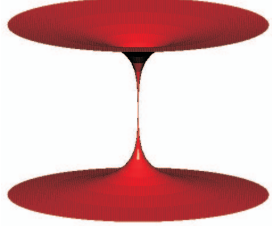
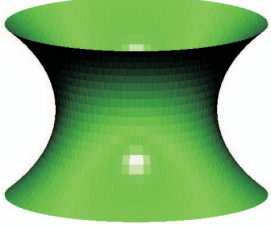
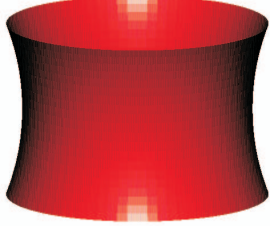
$\frac{\sigma_R : \sigma_M}{H : R}$	2 : 1	1 : 1	1 : 2
0.6	 $a=3.7988$	 $a=3.7105$	 $a=3.7258$
1.0	 $a=6.6910$	 $a=5.9905$	 $a=6.0750$
1.32548	 nicht definiert	 $a=7.5360$	 $a=7.8196$

Abbildung 4.15: Wirkung anisotroper Vorspannung am Beispiel des Katenoids.

Wirkung anisotroper Vorspannung veranschaulicht. Hierzu werden bereits an dieser Stelle numerisch ermittelte Gleichgewichtsformen gezeigt, die erst mit den in Abschnitt 4.5.3 neu entwickelten Methoden berechnet werden können.

In Abbildung 4.15 sind Ergebnisse von Formfindungsberechnungen für unterschiedliche Höhe zu Radius-Verhältnisse ( $H : R$ ) und ebenso variierende Verhältnisse zwischen den Ring- und den Meridianspannungen ( $\sigma_R : \sigma_M$ ) dargestellt. Die Erwartung, dass sich eine Membran bei relativ zur Meridianspannung steigender Ringspannung mehr und mehr einschnüren muss, wird ebenso bestätigt wie die Minimalflächeneigenschaft der Katenoide mit isotroper Vorspannung (Seifenhautanalogie). Die Flächeninhalte  $a$  sind unter der jeweiligen Geometrie angeschrieben und es erweisen sich die Formen mit  $\sigma_R : \sigma_M = 1 : 1$  als die Flächen mit geringster Oberfläche innerhalb derselben vorgegebenen Ränder, das heißt mit gleichem  $H : R$ -Verhältnis. Des Weiteren wird bei der Berechnung der Katenoide mit der Grenzhöhe  $H_{max} = 1.32548R$  bestätigt, dass keine weitere Einschnürung der als Minimalfläche gefundenen Form mehr möglich ist: Das Katenoid „zerplatzt“ also bei der Forderung von größeren Ring- als Meridianspannungen in der Struktur und es ist während der Berechnung keine stabile Lösung zu finden. Beim entgegengesetzten Fall von gegenüber den Ringspannungen dominierenden Meridianspannungen tendiert die Geometrie im Grenzwert (unabhängig vom Radius  $R$ ) zum Zylinder, was auch problemlos simuliert werden kann. Die Steigerung der Katenoidhöhe über  $H_{max}$  oder das deutliche Verkleinern eines der beiden Radien kann nur vorgenommen werden, wenn in Meridianrichtung stärker als in Ringrichtung vorgespannt wird, weil in diesem Fall für die isotrope Vorspannung keine Gleichgewichtsform existiert.

### 4.5.3 Adaptive Vorspannung

#### Auswirkung inkompatibler Vorspannungszustände im Rahmen der URS

Wie bereits mehrfach angedeutet, ist es nicht möglich, für jede erdenkliche Kombination aus Randgeometrie und Flächenspannungsverteilung – isotrop oder anisotrop – eine zugehörige Gleichgewichtsform zu finden.

Hieraus ergeben sich immer dann Probleme, wenn physikalisch unsinnige und damit auch durch eine Gleichgewichtssuche unlösbare Fragestellungen behandelt werden sollen. Beispiele für solche Situationen sind:

1. Es wird mit der Forderung eines homogenen, isotropen Spannungszustands (nach Gleichung (4.34)) innerhalb gegebener Ränder eine Minimalfläche gesucht, die nicht existiert.
2. Ein homogener, anisotroper Spannungszustand wird angesetzt, obwohl in der potentiellen Gleichgewichtskonfiguration das Verhältnis der Vorspannungen über die Struktur hinweg nicht konstant sein kann.
3. Bei zusammengesetzten Membranen werden abschnittsweise orthotrope Spannungsfelder mit unterschiedlicher Orientierung angesetzt, die an den gemeinsamen Nahtlinien zwischen den Bahnen das Gleichgewicht verletzen.

All diesen Beispielen gemein ist die immanente Verletzung des Gleichgewichts bereits bei der Definition der Vorspannungsfelder. Hierbei kann das Ungleichgewicht sozusagen unabsichtlich eingeführt worden sein, weil beispielsweise eine Minimalfläche in den gegebenen starren oder flexiblen Rändern nicht existiert, oder es wird eine offensichtliche Gleichgewichtsverletzung mangels genauer Kenntnis des endgültigen Spannungszustand eingebracht, was sich durch widersprüchliche Vorspannungswerte für einzelne Punkte der Struktur äußert [BWD05].

Bei der numerischen Berechnung mit inkompatiblen Spannungszuständen sind während des Formfindungsprozesses Netzinstabilitäten beobachtbar. Das Ungleichgewicht macht sich während der Simulation durch eine von Iterationsschritt zu Iterationsschritt zunehmende Verzerrung des Finite-Elemente-Netzes bemerkbar. Erklärbar ist dies anhand der Tatsache, dass die Formfindungsparameter bei der URS (also die Knotenverschiebungen, siehe Abschnitt 4.2) genau so angepasst werden sollen, dass Gleichgewicht entsteht, dieser gesuchte Gleichgewichtszustand jedoch nicht existiert. Anders ausgedrückt, wird bei bestehendem Ungleichgewicht der Formfindungsvorgang immer weiter vorangetrieben und es kann keine Konvergenz auftreten.

Bevor, aufbauend auf dieser Indikatoreigenschaft der URS, ein adaptiver Algorithmus zur Sicherung des Gleichgewichts entwickelt wird, wird anhand ausgewählter Beispiele entsprechend obiger Aufzählung der Effekt von beständigen Gleichgewichtsverletzungen im Rahmen der URS aufgezeigt. Die jeweiligen Systemgeometrien werden dabei aus einem Abbruch der Folge von Referenzupdates (äußere Schleife in Abbildung 4.10) gewonnen, weil das Verfahren in diesen physikalisch unmöglichen Problemstellungen nicht konvergieren kann. Dennoch sind auf Grund der Stabilisierung die einzelnen Zwischenschritte robust lösbar, wobei allerdings der resultierende Spannungszustand nach Konvergenz der inneren Newton-Iteration von den vorgeschriebenen Sollwerten abweicht.

Ein Beispiel für den ersten Fall stellt das Katenoid mit überkritisch weit voneinander entfernten Randkreisen oder mit einem sehr kleinen Radius auf einer Seite dar. In diesen Fällen gibt es keine Gleichgewichtsform mit isotroper Flächenspannung mehr. Diese Fragestellung illustriert deutlich die Notwendigkeit von anisotroper Vorspannung, weil sonst praktisch relevante Formen nicht umsetzbar wären, wie beispielsweise das Katenoid mit sehr hochgezogenem, kleinem oberem Randkreis, die sogenannte „chinese hat“-Form (siehe Abbildung 4.16).

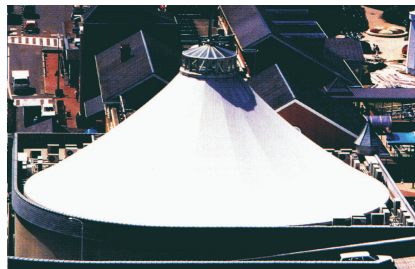
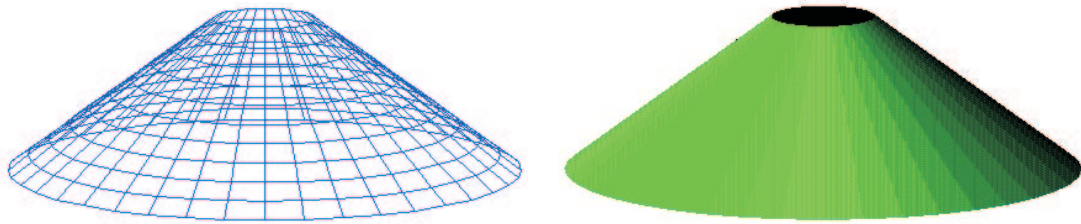
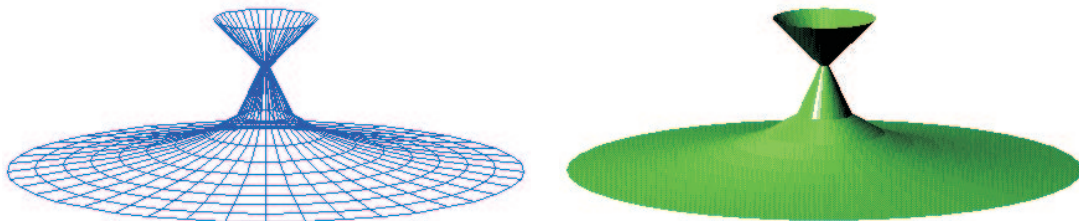


Abbildung 4.16: „Chinese hat“-Form (aus [Ish95]).



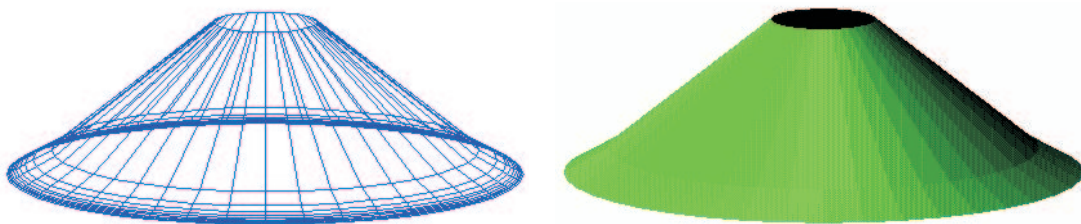
**Abbildung 4.17:** Ausgangskonfiguration für Formfindung von „Chinese hat“-Form.

Wird nun trotzdem eine Formfindungsberechnung (ausgehend von der gewählten Startgeometrie in Abbildung 4.17) mit vorgeschriebener isotroper Vorspannung durchgeführt, so muss der Formfindungsalgorithmus daran scheitern, dass in diesen Rändern keine Gleichgewichtsform mit der gewünschten Spannung existiert. Es treten starke Netzverzerrungen auf und das Katenoid kollabiert, wie in Abbildung 4.18 gezeigt.



**Abbildung 4.18:** Kollabierendes Katenoid mit vorgeschriebener isotroper Vorspannung.

Um den im vorangegangenen Beispiel auftretenden Kollaps des Netzes zu verhindern, könnte die Meridianspannung im Vergleich zur Ringspannung erhöht werden. Wird nun eine anisotrope Vorspannung mit konstantem Meridian- zu Ringspannungsverhältnis für die gesamte Struktur vorgeschrieben, so führt dies auf Punkt zwei der Aufzählung von möglichen Ursachen für das Versagen des Formfindungsprozesses. Das Finite-Elemente-Netz kollabiert zwar im Laufe der Formfindung nicht mehr, es tritt aber ein anderer unerwünschter Effekt auf. Die Elemente werden stark verzerrt und rutschen von Formfindungsschritt zu Formfindungsschritt (also bei den Referenzupdates, äußere Schleife von Abbildung 4.10) mehr und mehr an der Struktur herab. Dieses während der Formfindungssimulation auftretende Phänomen ist in Abbildung 4.19 dargestellt.



**Abbildung 4.19:** Katenoid mit konstantem anisotropen Vorspannungszustand.

Auch hier deutet das Verhalten der URS wieder darauf hin, dass bei der Vorgabe von anisotropen Vorspannungen mit konstantem Spannungsverhältnis ein physikalisch unmögliches System ermittelt werden soll – also wiederum eine Verletzung des Gleichgewichts auftritt. Weil der Zusammenhang zwischen der Netzin stabilität und der Inkompatibilität des Spannungszustands später bei der Herleitung des Spannungsadaptionalgorithmus von fundamentaler Bedeutung ist, soll anhand dieses einfachen Beispiels eine anschauliche Erklärung dieses Scheiterns der Formfindungsprozedur gegeben werden.

Hierzu wird das anisotrop vorgespannte Katenoid stark vereinfacht durch zwei Seile in Meridianrichtung gemäß Abbildung 4.20 modelliert. Dies bedeutet, dass die weiteren Betrachtungen an einem Meridianstreifen durchgeführt werden. Die Ringspannungen werden näherungsweise durch eine horizontale Ringkraft  $H$  dargestellt. Die Kräfte im oberen und unteren Seil ( $S_o$  beziehungsweise  $S_u$ ) repräsentieren die entsprechenden Integrale der Flächenmeridianspannungen am oberen beziehungsweise unteren Rand der Membran. Ausgewertet ergibt dies:  $S_o = r\sigma$  beziehungsweise  $S_u = (r + a)\sigma$ . Im Rahmen der vereinfachten Modellvorstellung wird die Ringkraft mit Hilfe des Spannungsverhältnisses  $\gamma$  zwischen Ring- und Meridianspannungen auf die Meridianspannung zurückgeführt:  $H = \gamma h\sigma$ . Aus Gleichgewichtsbedingungen am Knoten ergeben sich folgende Beziehungen:

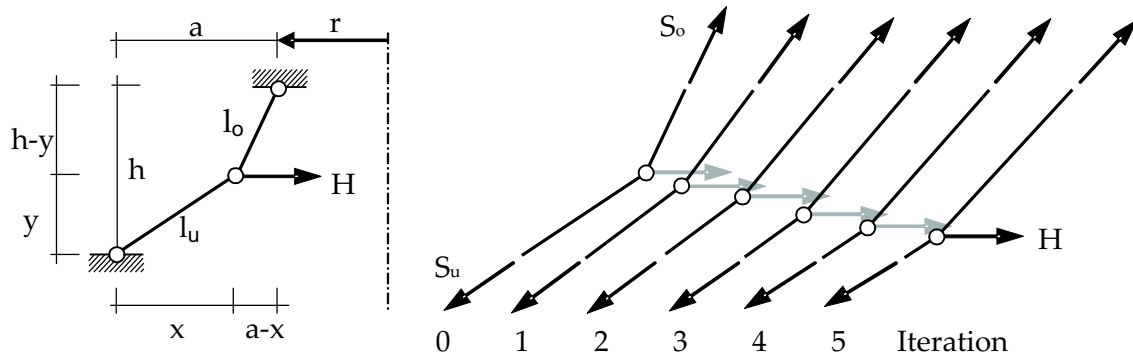
$$\begin{aligned} \sum H = 0 : & \quad -\frac{x}{l_u}(r + a)\sigma + \frac{(a - x)}{l_o}r\sigma + \gamma h\sigma = 0, \\ \sum V = 0 : & \quad -\frac{y}{l_u}(r + a)\sigma + \frac{(h - y)}{l_o}r\sigma = 0. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Durch Anwendung der Kraftdichtemethode unter der Annahme der Anfangsseillängen  $l_o$  und  $l_u$  kann die neue Gleichgewichtskonfiguration ermittelt werden. Die expliziten Formeln für die neuen Knotenkoordinaten sind:

$$x = a \frac{1 + \gamma \frac{l_o h}{a r}}{1 + \frac{l_o}{l_u} \left(1 + \frac{a}{r}\right)}, \quad y = h \frac{1}{1 + \frac{l_o}{l_u} \left(1 + \frac{a}{r}\right)}. \quad (4.46)$$

Wird, gemäß dem Vorgehen bei der URS, die so ermittelte Gleichgewichtsfigur als neue Ausgangskonfiguration gesetzt, können aus den obigen Gleichungen (4.46) die entsprechenden Verbesserungen der Koordinaten  $(x, y)$  berechnet werden. Es zeigt sich, dass im Laufe der Iteration mit der angenommenen konstanten Vorspannungsverteilung der Seilknoten immer mehr nach unten rutscht. Dies entspricht den übermäßigen Netzverzerrungen bei der Membranberechnung gemäß Abbildung 4.19. Die Ergebnisse belegen die Aussage, dass bei der betrachteten Form eine Vorgabe von in Meridianrichtung konstanten Spannungen physikalisch unsinnig ist und für diesen Fall kein Gleichgewicht gefunden werden kann.

In Abbildung 4.20 sind die Ergebnisse für eine gewählte Geometrie inklusive Ausgangskonfiguration für zwei verschiedene anisotrope Vorspannungen dargestellt. Die gewählten Abmessungen des Ersatzmodells sollen ein überkritisch hohes Katenoid repräsentieren, für das keine Minimalfläche existiert. Die Wahl der Startgeometrie ist im Rahmen der geometrisch zulässigen Werte beliebig und die Lösung strebt jeweils auf eine bestimmte Lage des Seilknotens im Raum hin (Formfindungsparameter sind in diesem Fall die Koordinaten  $x$  und  $y$ ). Bei  $\gamma = 0,5$  sind höhere Meridianspannungen als Ringspannungen vorgegeben,



Beispiel: 25 Formfindungsschritte für  $h=7$ ,  $r=2$ ,  $a=8$  (Startwerte:  $x=5$ ,  $y=3$ )

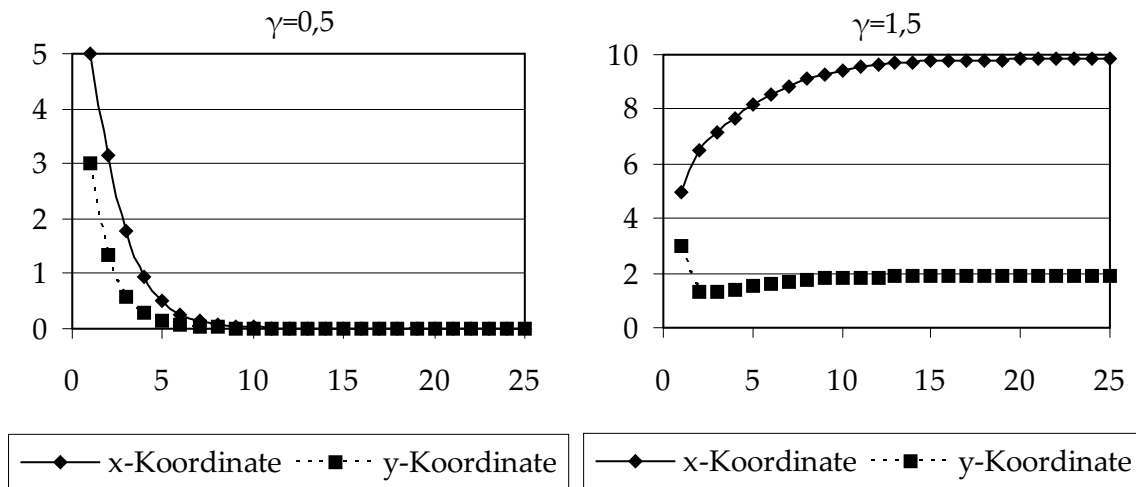


Abbildung 4.20: Kraftdichtemethode am Katenoid-Ersatzmodell.

was ein „Herunterrutschen“ des Seilknotens zur Folge hat und beide Koordinaten konvergieren sehr schnell gegen null. Im Falle von  $\gamma = 1,5$  sind die Ringspannungen entsprechend größer als die Meridianspannungen und der Seilknoten tendiert in Radialrichtung gegen die Rotationsachse. Die am stark vereinfachten Ersatzmodell erhaltenen Ergebnisse bestätigen eindeutig das Verhalten des Finite-Elemente-Netzes während der numerischen Formfindung an der Katenoidgeometrie. So war im einen Fall (bei hoher Meridianvorspannung) ein „Abstreifen“ der Membranelemente aufgetreten (Abbildung 4.19) und im anderen Fall (bei dominierender Ringvorspannung) ist das Katenoid kollabiert (Abbildung 4.18).

Das geschilderte Problem würde auch bei einem mit konstantem Spannungsverhältnis anisotrop vorgespannten Katenoid mit oben und unten gleich großen Radien wie in Abbildung 4.15 auftreten, weshalb die später geschilderten, methodischen Neuentwicklungen für die Ermittlung der Gleichgewichtskonfigurationen notwendig sind.

Die Dritte der genannten Gleichgewichtsverletzungen ist ein Resultat der Herstellungsmethoden im Membranbau: Üblicherweise werden die Strukturen aus Materialbahnen zusammengesetzt. Wird eine anisotrope Vorspannung Patch-weise vorgegeben, so tritt im Allgemeinen an den gemeinsamen Rändern der einzelnen Bereiche ein probleminhärentes

Ungleichgewicht der Oberflächenspannungen auf, das in der Formfindungsprozedur entsprechend behandelt werden muss. Neben der durch bereichsweise unterschiedliche Vorspannung möglichen Formenvielfalt ist die Orientierung der Vorspannungsrichtungen an den Faserrichtungen der einzelnen Bahnen sinnvoll (siehe beispielsweise orthotropes Membranmaterialgesetz nach Gleichung (2.109)). Wird beispielsweise das Gewebe entsprechend der Haupttragrichtungen ausgerichtet, so unterstützt die durch gezielte Vorspannungswahl erreichbare Steifigkeitserhöhung gezieltere Anpassungen des Strukturverhaltens unter den nichtformgebenden, zusätzlichen Lastfällen.

In Abbildung 4.21 wird eine Zeltstruktur gezeigt, die aus fünf großen Membranbereichen zusammengesetzt wird. Die Kettrichtungen der Gewebekonstruktionen sollen radial zur Zeltspitze ausgerichtet sein. Analog zu dieser Orientierung wird auch die anisotrope Vorspannung definiert. Ausgehend vom dargestellten regelmäßigen Finite-Elemente-Netz der Ausgangskonfiguration wird eine Formfindungsberechnung durchgeführt. Der Effekt der inkompatiblen Vorspannungszustände an den gemeinsamen Rändern der unterschiedlich vorgespannten Membranbahnen ist offensichtlich: Die Formfindungsberechnung versucht, die Geometrie dem unphysikalischen Sollspannungszustand anzupassen und es tritt anstelle der Konvergenz der URS innerhalb der äußeren Formfindungsschleife von Abbildung 4.10 eine fortschreitende Netzdeformation von Formfindungsschritt zu Formfindungsschritt auf. Die exzessiven, von den Fügekanten der Patches ausgehenden Elementdeformationen machen das Finite-Elemente-Netz unbrauchbar und es führt schließlich sogar zu einem fiktiven Faltenwurf in der Membrangeometrie.

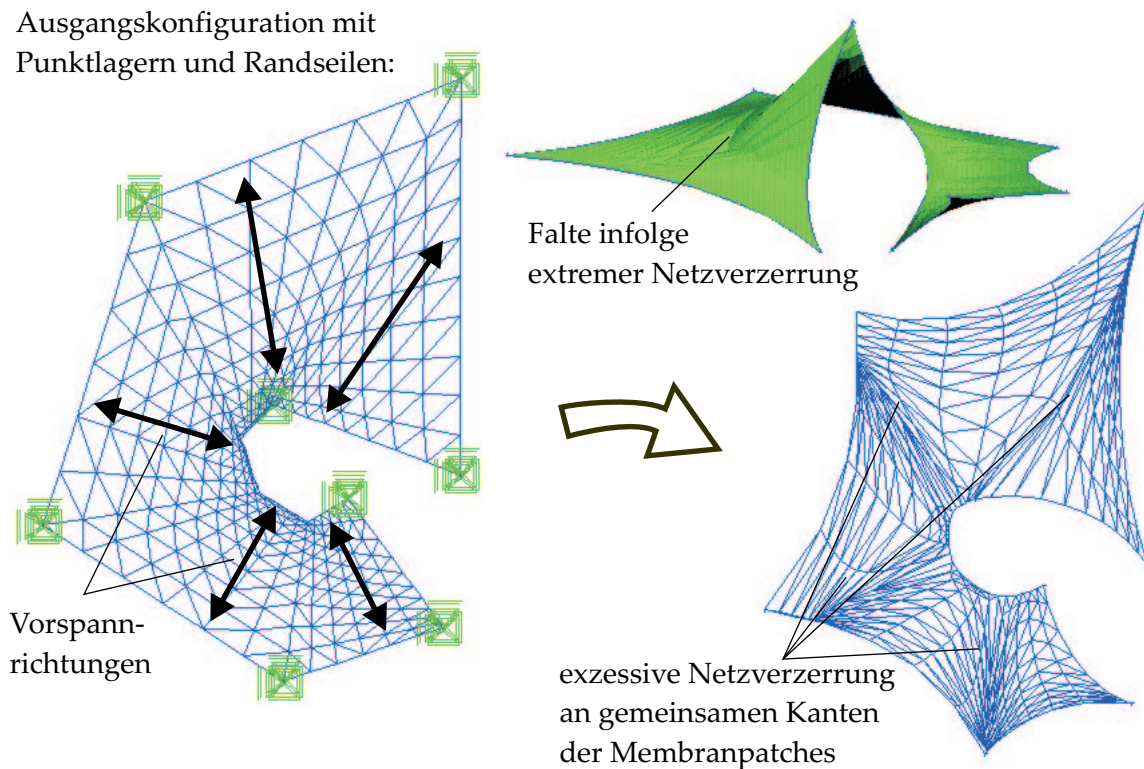


Abbildung 4.21: Effekt inkompatibler Spannungen bei unterschiedlich vorgespannten Bahnen.



### Stabilisierte URS durch Vorspannungsadaption

Aufbauend auf der vorangegangenen Analyse der auftretenden Spannungsinkompatibilitäten und der daraus resultierenden Probleme wird nun ein adaptives Lösungsverfahren entwickelt, das die robuste Lösung von Formfindungsaufgaben erlaubt. Es lässt sich zusammenfassend feststellen, dass durch unphysikalische und unausgeglichene Vorspannungen eine progressive Verzerrung der Finite-Elemente-Netze von Schritt zu Schritt bei der URS auftritt. Diese Eigenschaft des Verfahrens, dass kritische Bereiche angezeigt werden, kann man sich zu Nutze machen, um das Problem entsprechend besser gestellt zu formulieren – sei es durch Anpassung der Randgeometrien oder veränderte Vorspannungsverteilung. Zur Abgrenzung des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Verfahrens werden zunächst zwei Lösungsansätze aus der Literatur, die zur Kontrolle übermäßiger Netzverzerrungen während der Formfindung dienen, kurz beschrieben.

In [BM01] wird vorgeschlagen, auftretende große Netzdeformationen durch die Einführung einer fiktiven hyperelastischen Verzerrungsenergiefunktion zu vermeiden. Zum einen lässt dies die Indikatoreigenschaft der URS bei Ungleichgewicht ungenutzt und zum anderen beeinflusst diese Art der Stabilisierung das Ergebnis der Formfindung und hat außerdem zur Folge, dass die Ausgangskonfiguration nicht mehr beliebig wählbar ist. Das bedeutet, dass diese Modifikation der Updated Reference Strategy eigentlich ein anderes Problem löst und zur Reduktion der Abhängigkeit der fiktiven, elastischen Verzerrungen von der Ausgangsgeometrie muss das Materialgesetz zumindest so modifiziert werden, dass es nur bezüglich der inkrementellen Schritte Deformationsenergie hervorruft. Letzteres führt zu einer gewissen Unkontrollierbarkeit der Auswirkungen des Stabilisierungsansatzes.

Zur Kontrolle von Elementverzerrungen im Rahmen der dynamischen Relaxation wird in [Woo02] ein Ansatz vorgeschlagen. Hier werden übermäßige Netzverzerrungen während der Formfindung durch die Einführung von fiktiven Dämpferelementen, die an den Elementkanten ausgerichtet werden, vermieden. Das vorgestellte Verfahren ist auf dreiknotige Membranelemente beschränkt. Die Konvergenz zum Originalproblem ist in diesem Fall gegeben, da die stabilisierenden Dämpfungskräfte beim Erreichen der Gleichgewichtskonfiguration als die statische Ruhelage des künstlich dynamisch gerechneten Systems herausfallen. Im Unterschied zum vorher vorgestellten Lösungsansatz ist es jedoch kein Verfahren, um eigentlich unzulässige Fragestellungen mit unphysikalischer Spannungsdefinition zu lösen. Es muss also generell darauf geachtet werden, ob die Methoden zur Kontrolle übermäßiger Netzdeformationen auch bei inkompatibel vorgeschriebenen Spannungsverteilungen diese eigentlich mechanisch unzulässige Fragestellung lösen können oder ob sie nur eine gute Netzqualität, insbesondere auch im Hinblick auf spätere Strukturanalysen unter zusätzlichen Lastfällen, gewährleisten sollen.

Nachdem die vorgeschlagenen Stabilisierungsansätze nicht die Ursache des Problems beseitigen, soll hier ein anderer Weg beschritten werden. Es wird die Indikatoreigenschaft der Netzverzerrungen im Rahmen der URS ausgenutzt, um die physikalisch unzulässige Fragestellung durch eine adaptiv angepasste Vorspannungsverteilung zu korrigieren [WB05]. Des Weiteren ist es essentiell, dass einerseits zwar die Netzverzerrungen nicht zu groß werden, andererseits aber die Spannungsabweichungen vom vorgeschriebenen Sollwert möglichst gering sind.

Zur Herleitung der Spannungsmodifikationen wird ein – zur Vermeidung von hohem Rechenaufwand – lokales Kriterium an jedem Gaußpunkt eingeführt, das auf eine Verzerrungsnebenbedingung führt, die auch als eine Art „inverse Fließbedingung“ bei einer Analogiebetrachtung zu elastisch-plastischen Analysen interpretiert werden kann. Im Gegensatz zum Vorgehen bei materiell nichtlinearen Berechnungen bleiben die Sollspannungen so lange konstant, bis die Netzverzerrungen einen kritischen Wert überschreiten und werden dann auf der Grundlage des geometriebasierten Kriteriums adaptiert. Dies garantiert, dass sie so nah wie möglich am erwünschten Sollspannungszustand sind und gleichzeitig eine physikalisch zulässige Spannungsverteilung repräsentieren.

Bevor die erforderliche Anpassung des Vorspannungszustands quantifiziert werden kann, muss jedoch eine Präzisierung der während des adaptiven Formfindungsprozesses benötigten geometrischen Zusammenhänge vorgenommen werden. Zusätzlich zu der Ausgangskonfiguration, von der die komplette Formfindungssimulation gestartet wird (Basisvektoren der Ausgangsfläche:  $\mathbf{G}_{0\alpha}$ ), den Zwischenkonfigurationen (mit der Basis  $\mathbf{G}_\alpha$ ), die durch die sukzessiven Referenzupdates im Rahmen der URS definiert werden und der Momentankonfiguration (mit den tangentialen Basisvektoren  $\mathbf{g}_\alpha$ ), die den aktuellen Gleichgewichtszustand darstellt, wird eine weitere Konfiguration eingeführt. Diese gibt den Zustand der maximal erlaubten Elementdeformation an und ihre konvektiven Basisvektoren werden mit  $\mathbf{g}_{max\alpha}$  bezeichnet (siehe Abbildung 4.22). Die konkrete Definition der maximal zulässigen Konfiguration wird auf zwei Arten vorgenommen, was auf Seite 110 beziehungsweise auf Seite 117 ausgeführt wird. Zunächst werden jedoch erst die zusätzlich benötigten differentialgeometrischen Bezeichnungen eingeführt und dann die grundlegende Idee zur Spannungsadaptation bei der URS in allgemeiner Form dargestellt.

Zur Verknüpfung der verschiedenen Tangentialräume der einzelnen Konfigurationen gibt es entsprechend definierte Formgradienten (zur Definition des Formgradienten siehe Abschnitt 4.1). Der totale Formgradient  $\mathbf{F}_t^{(k)}$  im Formfindungsschritt  $k$  beschreibt die komplette Geometrieänderung, die sich bezüglich der Ausgangskonfiguration ( $\mathbf{G}_{0\alpha}$ ) ergibt. Nachdem bei der URS sukzessive Referenzupdates durchgeführt werden, ist somit gewährleistet, dass die in den einzelnen Schritten ermittelten Formmodifikationen miteinander vergleichbar und im Bezug auf diese totale Referenzgeometrie objektiv bewertbar sind. Zur Berechnung von  $\mathbf{F}_t^{(k)}$  wird ausgenutzt, dass er sich über die individuellen Referenz- ( $\mathbf{G}_\alpha$ ) und Momentangeometrien ( $\mathbf{g}_\alpha$ ) der Formfindungsschritte multiplikativ zusammensetzt:

$$\mathbf{F}_t^{(k)} = \mathbf{F}^{(k)} \cdot \mathbf{F}_t^{(k-1)} = \mathbf{F}^{(k)} \cdot \mathbf{F}^{(k-1)} \cdot \dots \cdot \mathbf{F}^{(2)} \cdot \mathbf{F}^{(1)}. \quad (4.47)$$

Unter Berücksichtigung der Definition des Formgradienten nach Gleichung (4.2) und der Darstellung in Abhängigkeit der konvektiven Basisvektoren  $\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i$  lässt sich die multiplikative Zerlegung auch als

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_t^{(k)} &= \mathbf{g}_i^{(k)} \otimes \mathbf{G}^{i(k)} \cdot \mathbf{g}_j^{(k-1)} \otimes \mathbf{G}^{j(k-1)} \cdot \dots \cdot \mathbf{g}_m^{(2)} \otimes \mathbf{G}^{m(2)} \cdot \mathbf{g}_n^{(1)} \otimes \mathbf{G}^{n(1)} \\ &= \mathbf{g}_i^{(k)} \delta_j^i \delta_{\dots}^j \dots \delta_m^{\dots} \delta_n^m \otimes \mathbf{G}^{n(1)} = \mathbf{g}_i^{(k)} \otimes \mathbf{G}^i \end{aligned} \quad (4.48)$$

schreiben. Aus der letzten Umformung ergibt sich direkt die Verknüpfung vom Tangentialraum der Ausgangskonfiguration mit dem der Momentankonfiguration im aktuellen

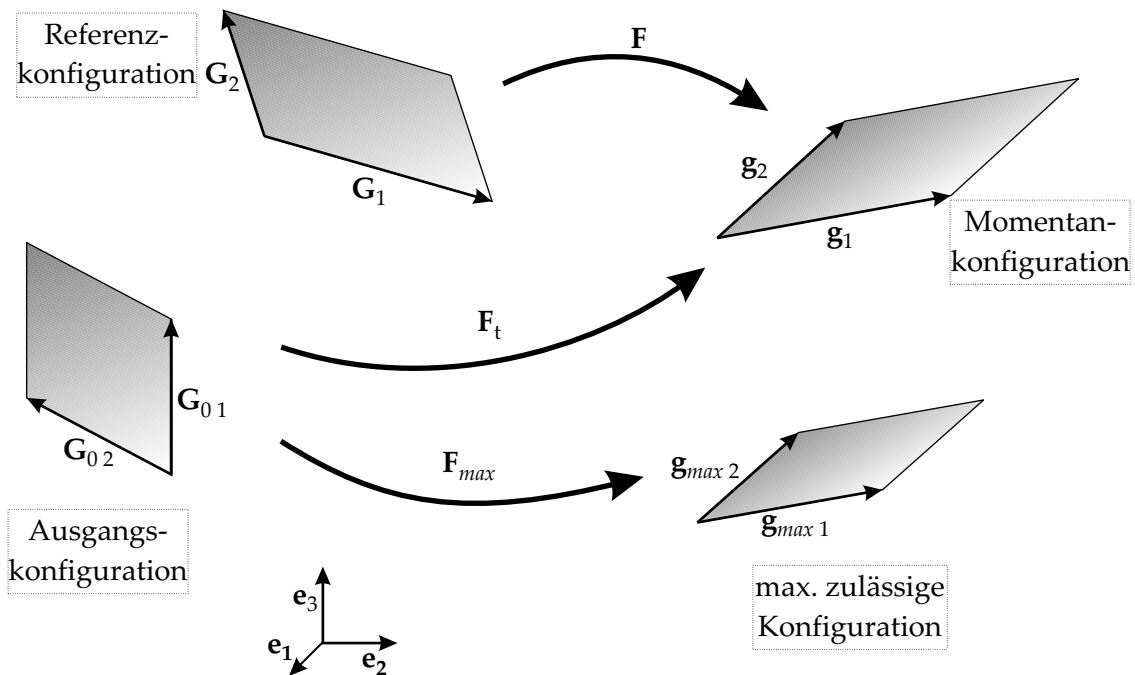


Abbildung 4.22: Konfigurationen während Formfindung mit Spannungsadaption.

Formfindungsschritt  $k$ . Die deutlichen Vereinfachungen sind durch die Identität der zwischendurch im Rahmen der URS verwendeten Referenzkonfigurationen mit der im jeweils vorhergehenden Schritt erreichten Momentankonfiguration möglich.

Falls im Laufe des Formfindungsprozesses die gerade erreichte Formmodifikation das durch die maximal zulässige Konfiguration ( $g_{max \alpha}$ ) definierte Limit überschreitet, muss der vorgeschriebene Flächenspannungstensor gezielt angepasst werden. Die prinzipielle Idee besteht nun darin, dass die im Rahmen der inneren Iterationen zuletzt erreichten Cauchy-Spannungen  $\sigma$  als bezüglich der Maximalkonfiguration definierte Spannungen betrachtet werden. Dies stellt bei der URS ein algorithmisch konsistentes Vorgehen dar, weil in den folgenden Formfindungsschritten in den identifizierten Bereichen mit Gleichgewichtsverletzung ein zuletzt erreichter, im Vergleich zur ursprünglichen Vorspannung möglicher, Spannungszustand angesetzt wird und die veränderten Geometrien der weiterhin sukzessive angepassten Konfigurationen innerhalb der Grenzkonfiguration bleiben. Hier wird die antreibende Wirkung der in jedem Schritt erneut vorgeschriebenen Spannungen deutlich. Würde nach dem nächsten Referenzupdate wiederum der unphysikalische (ursprünglich angesetzte) Spannungszustand vorgegeben und die Berechnung der Gleichgewichtsform fortgesetzt, so würden die oben bereits gezeigten Probleme der fortschreitenden und nicht konvergenten Netzdeformationen verursacht werden.

Durch den gedanklichen Übertrag des ausiterierten Cauchy-Spannungszustands von der aktuellen auf die maximal zulässige Geometrie wird also eine Modifikation der Spannungen vorgenommen. Den zugehörigen, adaptierten Spannungstensor  $\sigma_{mod}$  erhält man durch eine Folge von ineinander geschachtelten pull-back und push-forward Operationen:

1. Setze die Cauchy-Spannungen  $\sigma$  auf der maximal zulässigen Konfiguration an.

2. Bestimme mittels einer pull-back Operation die zugehörigen PK2-Spannungen  $\mathbf{S}_0$  bezüglich der Ausgangskonfiguration des kompletten Formfindungsvorgangs unter Verwendung des maximalen Formgradienten  $\mathbf{F}_{max}$ .
3. Führe mit den erhaltenen PK2-Spannungen  $\mathbf{S}_0$  eine push-forward Operation auf die Momentankonfiguration durch. Hierzu wird der totale Formgradient  $\mathbf{F}_t$  verwendet.

Die Berechnung der modifizierten Spannungsverteilung ergibt sich damit aus folgender Beziehung:

$$\boldsymbol{\sigma}_{mod} = \frac{\det \mathbf{F}_{max}}{\det \mathbf{F}_t} \mathbf{F}_t \cdot \mathbf{F}_{max}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}_{max}^{-T} \cdot \mathbf{F}_t^T. \quad (4.49)$$

Wird vom Stabilisierungsterm des Verfahrens ausgegangen, so kann dieser Zusammenhang auch durch den PK2-Spannungstensor dargestellt werden:

$$\boldsymbol{\sigma}_{mod} = \frac{\det \mathbf{F}_{max}}{\det \mathbf{F} \det \mathbf{F}_t} \mathbf{F}_t \cdot \mathbf{F}_{max}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}_{max}^{-T} \cdot \mathbf{F}_t^T. \quad (4.50)$$

Anhand dieser Gleichung kann der modifizierte Formgradient  $\mathbf{F}_{mod}$  identifiziert werden:

$$\mathbf{F}_{mod} = \mathbf{F}_t \cdot \mathbf{F}_{max}^{-1} \cdot \mathbf{F}. \quad (4.51)$$

Die maximal zulässige Konfiguration soll nun in Abhängigkeit eines Vielfachen der Basisvektoren in der während der Formfindung erreichten Momentankonfiguration angesetzt werden:

$$\mathbf{g}_{max\ i} = \beta_{(i)} \mathbf{g}_i. \quad (4.52)$$

Somit sind die maximal zugelassene und die während der Formfindung real auftretende Geometrie miteinander in Verbindung gebracht. Durch die verwendete Definition der Maximalkonfiguration wird die Winkeländerung der Elemente nicht berücksichtigt. Mit Gleichung (4.52) ergeben sich die benötigten Formgradienten explizit zu:

$$\mathbf{F}_{max} = \beta_{(i)} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}_0^i \quad \text{und mit Gleichung (4.51)} \quad \mathbf{F}_{mod} = \frac{1}{\beta_{(i)}} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i. \quad (4.53)$$

Um die Elementverzerrung bewerten zu können, ist es notwendig, ein über die Formfindungsschritte hinweg objektives Maß zu verwenden. Im Rahmen der hier angewendeten Vorgehensweise sind verschiedene Formulierungen denkbar. Es muss jedoch ein Indikator gewählt werden, der es erlaubt, eine eindeutige und nicht zu aufwändige Spannungsadaptionsvorschrift davon abzuleiten, was in der Entwicklung dieses Algorithmus' viele alternative Formulierungen mit „Netzdeformationstensoren“ als ungeeignet erscheinen ließ.

Deshalb wird hier die Veränderung der Elemente über die Längenänderung der Flächenbasisvektoren quantifiziert. In jedem Formfindungsschritt  $k$  wird dazu das Verhältnis der Basisvektorenlängen  $\alpha_i^{(k)} = \frac{|\mathbf{g}_i^{(k)}|}{|\mathbf{G}_i^{(k)}|}$  gebildet, woraus sich eine Maßgröße für die totale Geometrieänderung  $\alpha_{t\ i}^{(k)}$ , die im Schritt  $k$  in Bezug auf die Ausgangskonfiguration auftritt, durch

ein multiplikatives Update aus der vorher erreichten Kenngröße errechnen lässt. Der verwendete Indikator wird also in jedem Formfindungsschritt wie folgt aktualisiert („Updated-Reference-Betrachtung“):

$$\alpha_{t i}^{(k)} = \alpha_i^{(k)} \alpha_{t i}^{(k-1)}. \quad (4.54)$$

Durch Erweitern dieser Berechnungsvorschrift und Ausnutzung der Tatsache, dass bei der URS die Referenzbasen mit den Basisvektoren der Momentankonfiguration des letzten Formfindungsschritts übereinstimmen, ist eine alternative Schreibweise möglich. Hierin wird die im Schritt  $k$  erreichte Form direkt mit der Ausgangsgeometrie in Verbindung gebracht („Total-Reference-Betrachtung“):

$$\alpha_{t i}^{(k)} = \alpha_i^{(k)} \alpha_i^{(k-1)} \dots \alpha_i^{(2)} \alpha_i^{(1)} = \frac{|\mathbf{g}_i^{(k)}|}{|\mathbf{G}_0 i|}. \quad (4.55)$$

Damit eine Entscheidung über die Zulässigkeit einer gefundenen Konfiguration getroffen werden kann, muss eine Schranke für den Indikator definiert werden. Übersteigt die Deformation einen maximal zulässigen Wert  $\alpha_{max i}$ , so wird die damit gesetzte Nebenbedingung für die Elementverzerrung verletzt und es muss eine Spannungsanpassung vorgenommen werden. Analog dazu wird beim Unterschreiten eines aus dem Kehrwert der maximal zulässigen Gesamtdeformation gebildeten Grenzwerts  $\alpha_{min i}$  ebenso eine Spannungsmodifikation vorgenommen. Am betrachteten Gaußpunkt wird also in folgenden Fällen eine Adaption durchgeführt:

$$\alpha_{t i} > \alpha_{max i} \quad \text{oder} \quad \alpha_{t i} < \alpha_{min i} = \frac{1}{\alpha_{max i}}. \quad (4.56)$$

Mit dem Ansatz der Geometrie in Abhängigkeit eines Korrekturfaktors nach Gleichung (4.52) ergibt sich ein expliziter Zusammenhang zwischen der Längenüberschreitung der Basen und dem Verzerrungsindikator für den Fall, dass die Spannungsadaption aktiviert wird (siehe Gleichung (4.56)). Durch eine Evaluierung des Indikators bei Erreichen der gerade noch zulässigen Maximalkonfiguration erhält man den Zusammenhang zwischen dem festgelegten Grenzzustand und der real auftretenden Situation, ausgedrückt durch den gewählten Indikator. Die entsprechenden Formeln in der „Updated-Reference-“ beziehungsweise „Total-Reference-Betrachtung“ sind wie folgt:

$$\begin{aligned} \alpha_{max i} &= \frac{|\mathbf{g}_{max i}^{(k)}|}{|\mathbf{G}_i^{(k)}|} \alpha_{t i}^{(k-1)} = \frac{|\mathbf{g}_i^{(k)}|}{|\mathbf{G}_i^{(k)}|} \alpha_{t i}^{(k-1)} \beta_{(i)}, \\ \alpha_{max i} &= \frac{|\mathbf{g}_{max i}^{(k)}|}{|\mathbf{G}_0 i|} = \frac{|\mathbf{g}_i^{(k)}|}{|\mathbf{G}_0 i|} \beta_{(i)}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Beide Betrachtungsweisen führen also bei Überschreitung der als maximal zulässig definierten Deformation auf folgende Beziehungen, um die Korrekturwerte in den beiden Flächenparameterrichtungen  $i$  zu errechnen:

$$\beta_{(i)} = \frac{\alpha_{max i}}{\alpha_{t i}^{(k)}}. \quad (4.58)$$

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass im Allgemeinen eine Gewichtung der beiden Adaptionsrichtungen über die Wahl unterschiedlicher Werte für die beiden Parameter  $\alpha_{max\ i}$  möglich ist, aber im Rahmen dieser Arbeit stets von in beiden Richtungen gleichwertigen Grenzwerten ausgegangen wird.

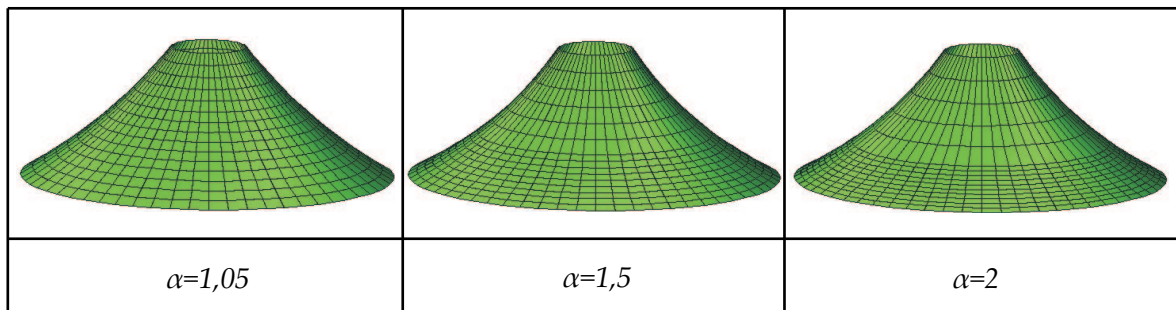
Mit dem Ansatz für die Geometrien nach Gleichung (4.52) lässt sich die in Gleichung (4.50) definierte Spannungsmodifikation folgendermaßen konkretisieren:

$$\sigma_{mod}^{(k+1)} = \frac{1}{\det \mathbf{F}_{mod}} \mathbf{F}_{mod} \cdot \mathbf{S}^{(k)} \cdot \mathbf{F}_{mod}^T = \frac{\beta_1 \beta_2}{\det \mathbf{F}} \frac{S^{\gamma\delta (k)}}{\beta_{(\gamma)} \beta_{(\delta)}} \mathbf{g}_\gamma \otimes \mathbf{g}_\delta. \quad (4.59)$$

Für den in Gleichung (4.56) festgelegten Fall, dass unzulässige Netzdeformationen auftreten, können in Gleichung (4.59) die Komponenten der modifizierten Spannungen für den nächsten Formfindungsschritt ( $k + 1$ ) identifiziert werden:

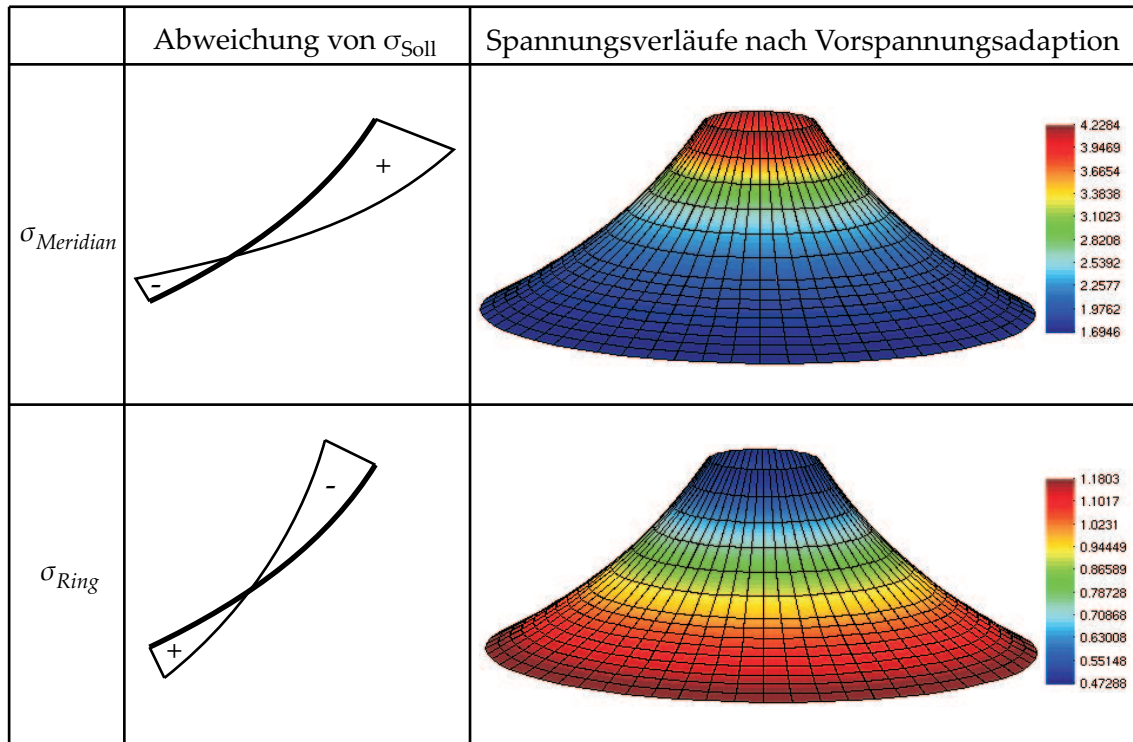
$$\begin{aligned} \sigma_{mod}^{11 (k+1)} &= \frac{\beta_2}{\beta_1 \det \mathbf{F}} S^{11 (k)}, \\ \sigma_{mod}^{22 (k+1)} &= \frac{\beta_1}{\beta_2 \det \mathbf{F}} S^{22 (k)}, \\ \sigma_{mod}^{12 (k+1)} &= \frac{1}{\det \mathbf{F}} S^{12 (k)}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Die anschauliche Interpretation der hergeleiteten Spannungsadaptionsvorschriften ist, dass die vorgeschriebene Flächenspannung in Richtungen mit unzulässiger Streckung erhöht und bei übermäßiger Stauchung verringert werden muss.



**Abbildung 4.23:** Form und Netz bei unterschiedlicher Stabilisierungsparameterwahl.

Zur Demonstration der automatischen Spannungsanpassung während des Formfindungsprozesses soll die bereits in Abbildung 4.19 gezeigte Problematik des „Abstreifens der Elemente“ bei der „chinese hat“-Form mit konstantem anisotropen Vorspannungszustand betrachtet werden. In Abbildung 4.23 sind die berechneten Konfigurationen für unterschiedliche Werte der Stabilisierungsfaktoren  $\alpha_{max\ i} = \alpha$  dargestellt. Es wird deutlich, dass das Verfahren das Problem der unphysikalischen Spannungsvorgabe löst und somit eine Konvergenz zu einem möglichst nahe an der ursprünglichen Fragestellung liegenden Gleichgewichtszustand erlaubt. Je näher der Stabilisierungsfaktor an eins ist, desto restriktiver wirkt die Stabilisierung und desto größere Spannungsabweichungen vom ursprünglichen Sollspannungszustand treten auf. Die Zielgeometrie wird damit stärker manipuliert. Dies



**Abbildung 4.24:** Adaption der Vorspannung zur Gewährleistung von Gleichgewicht.

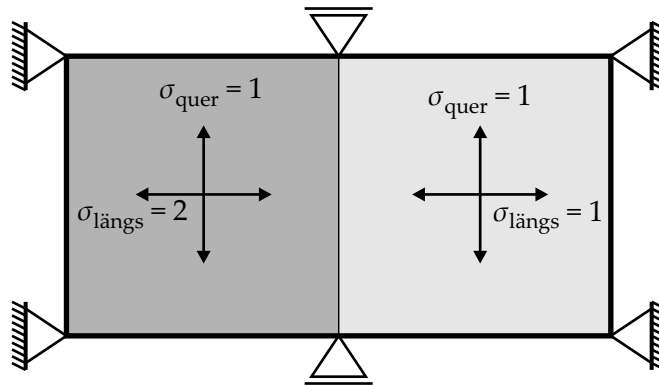
erlaubt – neben der mechanischen Relevanz – eine Interpretation des Stabilisierungsparameters als weiteren Formfreiheitsgrad.

Beim vorgestellten Beispiel wurde mit einem als konstant vorgeschriebenen Spannungsverhältnis von  $\sigma_{Meridian} : \sigma_{Ring} = 2 : 1$  eine Formfindungssimulation durchgeführt. Die bereits weiter oben ausführlich diskutierte Notwendigkeit der über die Höhe veränderlichen Meridianvorspannung wird in Abbildung 4.24 bestätigt. Beispielhaft sind die in der Gleichgewichtskonfiguration durch den beschriebenen Algorithmus angepassten Meridian- und Ringspannungen für den Stabilisierungsparameter  $\alpha = 1,5$  dargestellt. Es zeigt sich, dass in beiden Richtungen der Flächenparametrisierung eine Modifikation auftritt, was dazu beiträgt, dass der in der Gleichgewichtsform real vorliegende und der erwünschte Spannungszustand  $\sigma_{Soll}$  voneinander möglichst wenig abweichen.

Bei einer fälschlicherweise als Minimalfläche gesuchten Form weicht das vorgestellte adaptive Verfahren vom isotropen Vorspannungszustand gezielt ab, um die in der definierten Berandung physikalisch mögliche Geometrie mit den dazugehörigen Spannungen zu bestimmen. Das bedeutet, dass beispielsweise bei einem überkritisch hohen Katenoid oder einer als Minimalfläche nicht mehr definierten „chinese hat“-Form (wie in Abbildung 4.18) das Verhältnis der Meridian- zu den Ringspannungen auf das erforderliche Maß eingestellt wird. Durch die Beobachtung der Netzdeformationen als Indikator wird im Verlauf des Formfindungsprozesses der potentielle Kollaps der Geometrie erkannt und benutzerunabhängig, nur gesteuert durch die Wahl des Stabilisierungsparameters  $\alpha_{max i}$ , ein in den vorgeschriebenen Kreisrändern und der vorgegebenen Höhe existenter Gleichgewichtszustand

ermittelt. Dieser hat, bedingt durch die in den oben hergeleiteten Spannungsmodifikationsvorschriften inhärenten Adaptionstrategie, die Eigenschaft, möglichst nahe an der ursprünglichen Spannungsvorgabe zu bleiben.

Das damit bestätigte Verfahren soll nun hinsichtlich seiner Eignung für allgemeine Geometrien und unregelmäßige Netze untersucht werden. Die getroffene Annahme, dass Winkeländerungen für die Spannungsadaption vernachlässigbar seien, wird somit auf ihre Gültigkeit überprüft. Zur detaillierten Untersuchung wird ein physikalisch offensichtlich unmögliches Beispiel verwendet: Es soll die Gleichgewichtslage einer ebenen Membran ermittelt werden, die aus zwei Vorspannbereichen besteht (siehe Abbildung 4.25). Um den Einfluss der Winkeländerung der Basisvektoren auf die zu behebenden Ungleichgewichte sichtbar zu machen, werden Simulationsergebnisse, die aus Berechnungen mit einem regelmäßigen Rechtecksnetz und einer freivernetzten Geometrie resultieren, miteinander verglichen.



**Abbildung 4.25:** Inkompatibler Spannungszustand: ebenes Tuch mit zwei Vorspannbereichen.

Der augenscheinlich unsinnig vorgeschriebene Spannungszustand an der Verbindungsstelle der beiden Bereiche führt zum scheinbaren Versagen des unmodifizierten Formfindungsalgorithmus der URS: Wie in Abbildung 4.26 dargestellt, wird durch die in jedem Formfindungsschritt (äußere Schleife in Abbildung 4.10) erneut vorgeschriebene Vorspannung eine weitere Lageänderung der Elementknoten, was einer Änderung der Formparameter entspricht (siehe Abschnitt 4.2), erzwungen. Es wird also deutlich, dass nicht die URS versagt, sondern es wird durch die progressive Netzdeformation angezeigt, dass das Problem unphysikalisch gestellt ist, was die Basis des entworfenen, adaptiven Verfahrens ist.

Wird nun die oben beschriebene Methode zur Vorspannungsadaption angewandt, so konvergieren die Formfindungsberechnungen im Falle regelmäßiger Netze zu einem einheitlichen Längsspannungszustand in der gesamten Membran. Bei der Berechnung desselben Problems mit dem unregelmäßigen Netz stellt sich hingegen keine stabile Lösung ein. Wie in Abbildung 4.27 gezeigt, führt die Vernachlässigung der Schubverzerrungen der Elemente auf unplausible und in manchen Fällen sogar oszillierende Ergebnisse. Aus diesem Grund sind beispielhaft nur Flächendiskretisierungen von einer Zwischenkonfiguration im Rahmen der URS dargestellt, da keine endgültige Gleichgewichtskonfiguration erreicht wird.



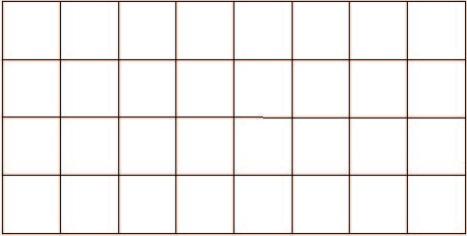
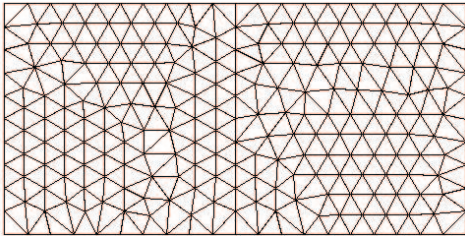
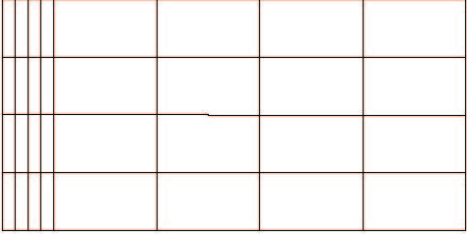
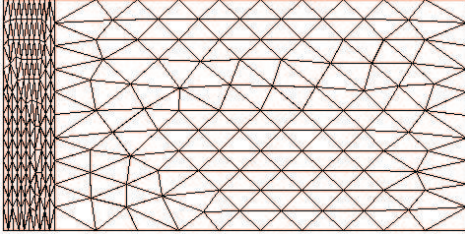
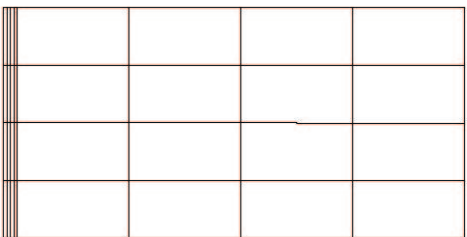
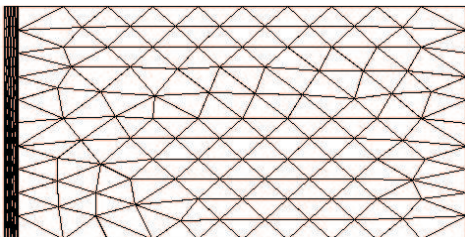
	regelmäßiges Netz	freivernetzte Geometrie
Ausgangs- geometrie		
Form- findungs- schritt 3		
Form- findungs- schritt 5		

Abbildung 4.26: Progressive Netzdeformation durch wiederholt unphysikalische Vorspannung.

Die Tendenz, dass ein Stabilisierungsparameter, der näher an eins ist, eher konservativ bezüglich der erlaubten Formmodifikationen ist, ist trotzdem erkennbar.

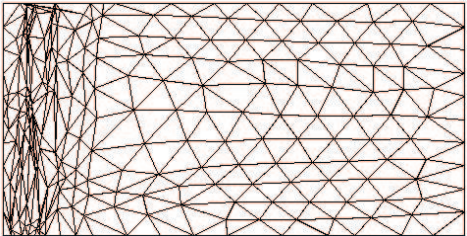
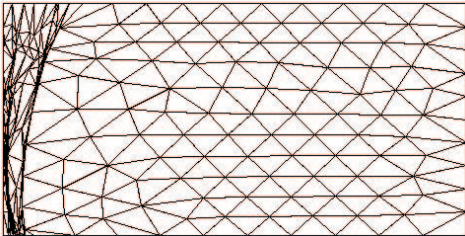
	$\alpha=1,5$	$\alpha=2,0$
Form- findungs- zwischen- ergebnisse		

Abbildung 4.27: Versagen der auf Länge der Basisvektoren basierenden Spannungsadaption.

Nachdem in gewissen Geometrien oder bei allgemeinen Netzen die bisher getroffene Annahme der Vernachlässigung der Winkeländerung nicht haltbar ist, wird im Folgenden der bestehende Algorithmus entsprechend erweitert. Eine Möglichkeit ist, die Schubverformung explizit mitzukontrollieren oder alternativ dazu, sie aus der Bewertung des Verformungszustands komplett zu eliminieren. Im Rahmen dieser Arbeit soll die zweite Strategie verfolgt werden, die der Idee nachgeht, dass die Vernachlässigung der Winkeländerung unerheblich ist, so lange keine Winkeländerung zwischen den Basisvektoren auftritt. Das folgende Herangehen basiert auf der Tatsache, dass bei der speziellen Wahl der Beobachtungsrichtung in Richtung der Hauptdehnungen dies erfüllt ist.

Ganz allgemein sind die Hauptachsen der Deformation in materieller Beschreibung aus dem Eigenwertproblem

$$(\mathbf{C} - \lambda_i^2 \mathbf{I}) \hat{\mathbf{N}}_i = 0 \quad (4.61)$$

zu berechnen, wobei  $\mathbf{C}$  der rechte Cauchy-Green-Tensor nach Gleichung (2.40) ist. Die Wurzeln aus den zugehörigen Eigenwerten sind ein Maß für die extremalen lokalen Streckungen oder Stauchungen entlang der Hauptachsen. Die spektrale Zerlegung von  $\mathbf{C}$  ist somit:

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \hat{\mathbf{N}}_i \otimes \hat{\mathbf{N}}_i. \quad (4.62)$$

Im Vergleich zu [BW00] müssen hier aber nur zwei Eigenwerte betrachtet werden, weil auf Grund der Inextensibilität des Direktors der dritte Eigenwert gleich eins ist und auch die zugehörige Eigenvektorrichtung orthogonal zur Fläche ist.

Wird also im undeformierten Zustand ein Flächenstück so definiert, dass seine Kanten mit den normierten Eigenvektoren  $\hat{\mathbf{N}}_\alpha$  zusammenfallen, so wird dieses Flächenelement auf ein ebenso rechtwinkliges Element in der Momentankonfiguration abgebildet, dessen Kanten aber auf die Länge  $\lambda_\alpha$  gedehnt beziehungsweise gestaucht und entlang der räumlichen Hauptrichtungen  $\hat{\mathbf{n}}_\alpha$  orientiert sind. Das analoge Verhalten kann beobachtet werden, wenn in der räumlichen Betrachtungsweise die Eigenwerte und Hauptrichtungen  $\hat{\mathbf{n}}_\alpha$  vom linken Cauchy-Green-Tensor  $\mathbf{b}$  verwendet werden. In diesem Fall würde ein in der Momentankonfiguration an den räumlichen Dehnungshauptachsen ausgerichtetes Einheitsflächenelement aus einem Flächenelement der Ausgangskonfiguration entstehen, dessen Kanten kollinear zu den Hauptachsen der Referenzkonfiguration  $\hat{\mathbf{N}}_\alpha$  sind. Die Kantenlängen sind dann gleich dem Kehrwert aus den Hauptdehnungen, also  $\frac{1}{\lambda_\alpha}$ . Auf Grund der Tatsache, dass sowohl in der materiellen als auch in der räumlichen Beschreibung die in den Konfigurationen zueinander korrespondierenden Eigenvektoren mit den gleichen Eigenwerten errechnet werden, kann für die Abwandlung des Spannungsadaptionverfahrens das Eigenwertproblem des Deformationszustands in der materiellen und der räumlichen Beschreibung gleichwertig verwendet werden, wobei im Folgenden nur die materielle Beschreibung skizziert wird.

Um nun ein Vorspannungsadaptionverfahren auf der Basis der Hauptdehnungen zu entwickeln, ist eine lokale Reparametrisierung der Fläche entsprechend Abbildung 4.28 notwendig. Als Voraussetzung hierfür ist an jedem Gaußpunkt in jedem Formfindungsschritt eine Eigenwertanalyse zur Berechnung der entsprechenden Hauptdehnungsrichtungen und der

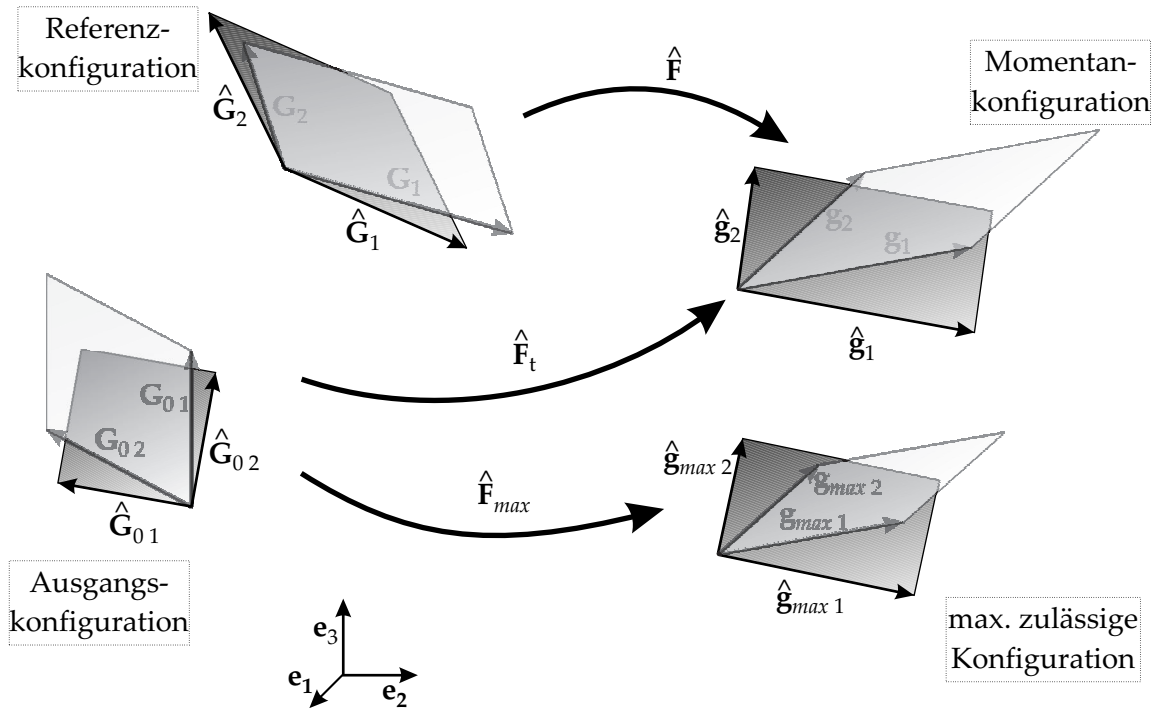


Abbildung 4.28: Flächenparametrisierungen in Abhängigkeit von Hauptdehnungsrichtungen.

zugehörigen Hauptdehnungen erforderlich. Sind diese Richtungen bekannt, werden die Basisvektoren in der Ausgangskonfiguration so gewählt, dass sie mit den materiellen Hauptachsen übereinstimmen, also dass  $\hat{G}_{0\alpha} = \hat{N}_\alpha$  gilt.

Bedingt durch die spezielle Wahl der Beobachtungsrichtungen in der Ausgangskonfiguration werden die betrachteten zueinander senkrechten Vektoren auch wieder auf orthogonale Vektoren, die den Hauptrichtungen in der räumlichen Beschreibung  $\hat{g}_\alpha^{(k)}$  entsprechen, abgebildet. Die entsprechende Abbildungsvorschrift ist durch die totale Formänderung, ausgehend von der Ausgangskonfiguration zur Momentankonfiguration im Formfindungsschritt  $k$ , gegeben. Die Streckung beziehungsweise Stauchung der Flächenelemente ist durch die Hauptdehnungen gegeben, was auf einen explizit auswertbaren Ausdruck für den Indikator der im Formfindungsschritt  $k$  erreichten totalen Netzdeformation führt (entsprechend der oben eingeführten „Total-Reference-Betrachtung“, mit  $i = 1; 2$ ):

$$\alpha_{ii}^{(k)} = \frac{|\hat{g}_i^{(k)}|}{|\hat{G}_{0i}|} = \lambda_i^{(k)}. \quad (4.63)$$

Wird nun wiederum ein Ansatz gemäß Gleichung (4.52) für die maximal zulässige Konfiguration in Abhängigkeit eines Vielfachen der an den Formänderungshaupttrichtungen orientierten Basisvektoren in der erreichten Momentankonfiguration gemacht,

$$\hat{g}_{max i} = \beta_{(i)} \hat{g}_i^{(k)} \quad (4.64)$$

so ist das weitere formale Vorgehen analog zu den obigen Herleitungen. Die Berechnung der Spannungskorrekturfaktoren  $\beta_{(i)}$  ist mit Gleichung (4.58), unter Berücksichtigung von Glei-

chung (4.63) und der Vorgabe einer als maximal zulässig definierten Konfiguration möglich. Der fundamentale Unterschied besteht darin, dass die Modifikationsvorschriften nun in den Hauptrichtungen der totalen Formänderung gegeben sind. Dies erfordert die Transformation des erreichten Spannungszustands in diese durch Umparametrisierung gegebenen Richtungen und die Anpassung der Vorspannungen bezogen auf diese Basis.

Die Adaption des Vorspannungszustands im Formfindungsschritt  $k$  erfolgt analog der Gleichung (4.59), wobei die Spannungskomponenten bezüglich der Basen der Hauptrichtungen gegeben sind:

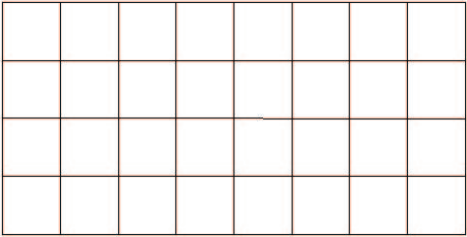
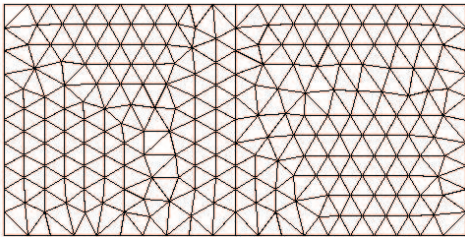
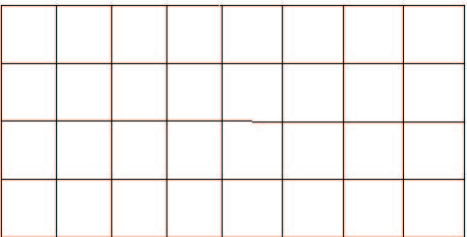
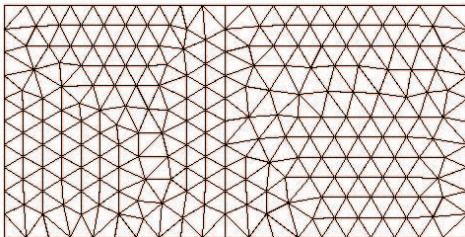
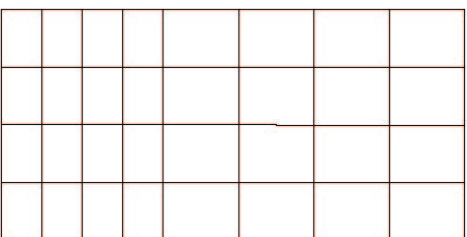
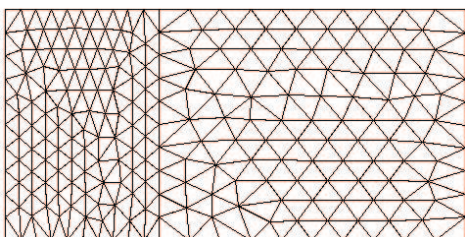
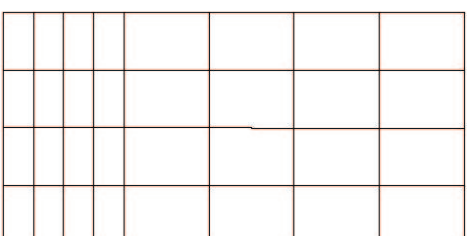
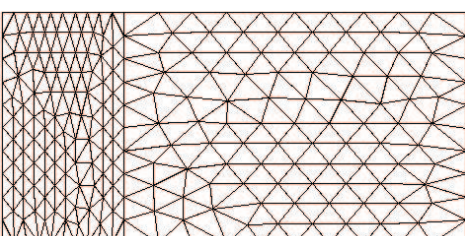
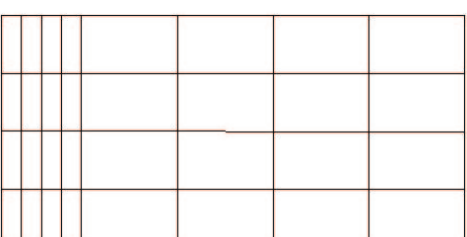
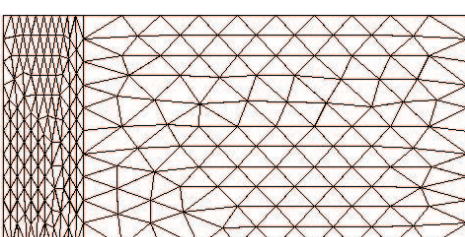
$$\hat{\sigma}_{mod}^{\gamma\delta(k+1)} = \frac{\beta_1\beta_2}{\det\mathbf{F}} \frac{\hat{S}^{\gamma\delta(k)}}{\beta_{(\gamma)}\beta_{(\delta)}}. \quad (4.65)$$

Treten nun nach Gleichung (4.56) unzulässige Netzdeformationen auf, die Ungleichgewicht in den zugehörigen Richtungen anzeigen, so werden mittels der durch Gleichung (4.65) definierten Spannungsmodifikation die Komponenten der Spannungstensoren für den nächsten Formfindungsschritt  $(k+1)$  berechnet. Diese werden anschließend wieder in die ursprüngliche, in der nichtlinearen Finite-Elemente-Formulierung der Formfindungsaufgabe verwendete Flächenparametrisierung transformiert.

Die erfolgreiche Umsetzung und Wirkungsweise der Spannungsadaption, basierend auf den Hauptdehnungsrichtungen, ist in Abbildung 4.29 dargestellt: Die Formfindungsergebnisse der Berechnung auf einem regelmäßigen Netz mit der ursprünglichen, auf der Längenänderung der Basisvektoren basierenden Spannungsmodifikation, sind identisch mit denen, die mit den adaptiv durch das hauptdehnungsbasierte Verfahren veränderten Vorspannungen auf einem freivernetzten Gebiet erhalten werden.

Die Herangehensweise, basierend auf den Hauptdehnungsrichtungen, erlaubt also die zuverlässige Bestimmung von Gleichgewichtskonfigurationen in Formfindungssimulationen. Es darf aber nicht vergessen werden, dass diese Robustheit durch zusätzlichen numerischen Aufwand in Form der lokalen Eigenwertbestimmung an jedem Gaußpunkt zu jedem Formfindungsschritt erkauft wird. Zusammenfassend lässt sich daraus schließen, dass im Fall von strukturierten Finite-Elemente-Netzen und klar definierten, einfachen Geometrien, wie beispielsweise im Fall von Rotationssymmetrie, der numerisch sehr effiziente Modifikationsansatz, basierend auf der Annahme vernachlässigbarer Winkeländerungen, angewendet werden sollte. Demgegenüber ist bei sehr komplexen Geometrien und auch bei schwer zu beurteilenden Situationen mit der Interaktion von Flächenspannungen und Randseilkräften der Algorithmus, basierend auf den Hauptformänderungsrichtungen, überlegen.

In Abbildung 4.30 ist eine anspruchsvolle Formfindungsaufgabe für ein Zeltdach dargestellt, das nur an einzelnen Punkten gelagert wird. Die Ränder sind durch Seile flexibel gelagert. Beginnend mit der dargestellten Ausgangskonfiguration mit der in der Draufsicht gezeigten Vernetzung, wird die zugehörige Minimalfläche und eine anisotrop vorgespannte Konfiguration ermittelt. Bei der anisotropen Vorspannung wurde, wie in Abbildung 4.21 dargestellt, in Richtung des Hochpunkts im Verhältnis drei zu eins stärker vorgespannt. Das Problem der an den Bahngrenzen inkompatiblen Spannungszustände mit der daraus resultierenden, progressiven Netzdeformation wird durch den adaptiven Algorithmus, basierend auf den Hauptdehnungen, gelöst. Die Netzqualität bleibt bei der mit der Wahl des Stabilisierungsfaktors  $\alpha_{max\ i} = \alpha = 1,2$  definierten maximal zulässigen Deformation

	regelmäßiges Netz	freivernetzte Geometrie
Ausgangs- geometrie		
$\alpha=1,05$		
$\alpha=1,5$		
$\alpha=2,0$		
$\alpha=3,0$		

**Abbildung 4.29:** Verhalten des auf Hauptdehnungen basierenden Adaptionalgorithmus.

erhalten, was auch darauffolgende statische oder dynamische Analysen auf diesem Netz problemlos ermöglicht. Als Folge aus der Interaktion der Randseilkräfte mit den Flächen-

vorspannungen muss bei einer anisotropen Membranvorspannungsvorgabe beachtet werden, dass auch die Randseilkräfte angepasst werden müssen. Im hier dargestellten Beispiel wurden die Randseilkräfte verdreifacht, was im Vergleich zur Minimalfläche an größeren Seilradien in der Gleichgewichtsform erkennbar ist.

## 4.6 Zusammenhang zwischen Formfindung und Strukturanalyse

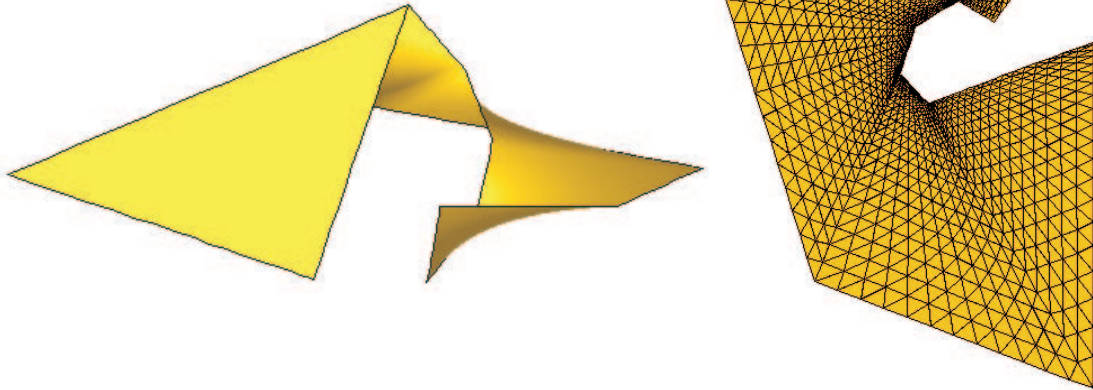
Auf Grund des speziellen Tragverhaltens der Membranstrukturen, dass externe Belastungen ausschließlich über tangentielle Flächenspannungen (siehe Abbildung 2.6) abgetragen werden können, ergibt sich die Kopplung zwischen Geometrie und Spannungszustand. Die zur Stabilisierung der Konstruktion notwendige Vorspannung definiert somit die realisierte Form und bestimmt auch maßgeblich die grundlegenden mechanischen Eigenschaften einer Struktur unter zusätzlichen Lastfällen wie Wind oder Schnee. Nachdem in diesem Kapitel für fast beliebige Vorgaben an Randgeometrien und Vorspannungsverteilungen mittels robuster und effizienter numerischer Verfahren die Gleichgewichtsform bestimmt wurde und in Kapitel 3 bereits die Algorithmen zur nichtlinearen Strukturanalyse aufbereitet wurden, stellt sich die Frage, wie diese verschiedenen Fragestellungen miteinander in Verbindung stehen.

Durch die beliebige Vorgabe von Vorspannungsverteilungen ist theoretisch eine Vielzahl von Formen möglich. Neben der Festlegung der Randbedingungen (Lage der Hoch- und Tiefpunkte, Randseilradien) ist dies der maßgebende Freiheitsgrad beim Entwurfsprozess. Die Beurteilung der Qualität einer Gleichgewichtsform bezüglich ihrer Art der Lastabtragung wird daraufhin durch statische oder eventuell auch dynamische Analysen vorgenommen. Dazu ist die Festlegung von Materialeigenschaften notwendig.

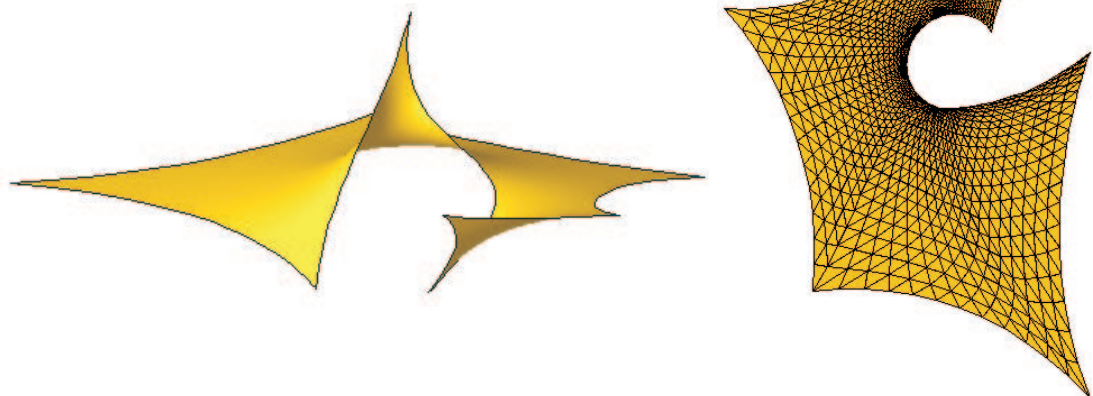
Als Materialien kommen isotrope Folien oder anisotrope Gewebe in Frage (siehe Abschnitt 2.3.2), wobei die Orientierung der Gewebefasern wiederum die bevorzugte Ausrichtung der Vorspannungslinien und somit den Formfindungsprozess beeinflusst. Die Definition der Materialorthotropierichtungen in der Struktur wird im Programm CARAT, analog zur Festlegung der Vorspannrichtungen nach Abschnitt 4.5.2, durch das dort entwickelte Projektionsschema umgesetzt.

Zur Beurteilung einer gegebenen Form unter den bei der Formfindung nicht berücksichtigten Lastfällen ist zu beachten, dass die resultierenden Membranspannungen sich aus der Belastung und der lokalen Flächenkrümmung ergeben. Besondere Beachtung erfordern deshalb die flachen Bereiche einer Konstruktion mit potentiell sehr hohen Spannungen und großen Verformungen. Insbesondere muss die Ausbildung von Wassersäcken infolge von Regen und Schnee („ponding“) vermieden werden, um eine lokale Überbelastung zu vermeiden. Die besondere Gefahr besteht darin, dass durch sich sammelndes Wasser ein progressiver Versagensprozess stattfindet, indem sich in der durch die Deformation entstehenden Mulde immer mehr Wasser oder Schnee bis zum Kollaps der Struktur sammeln kann. Dies kann durch die Änderung der Membrankrümmungen, beispielsweise durch eine modifizierte Vorspannung, vermieden werden [BW04].

Ausgangskonfiguration



Minimalfläche



Anisotrop vorgespannte Membranstruktur

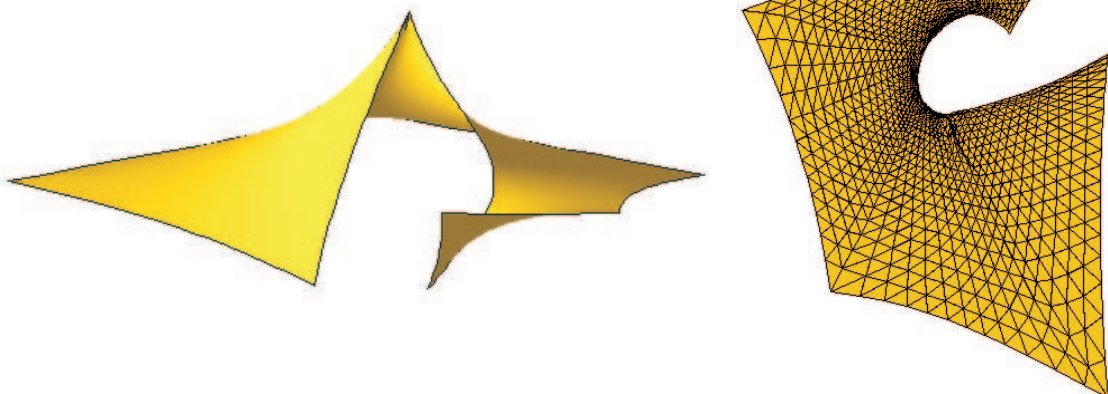
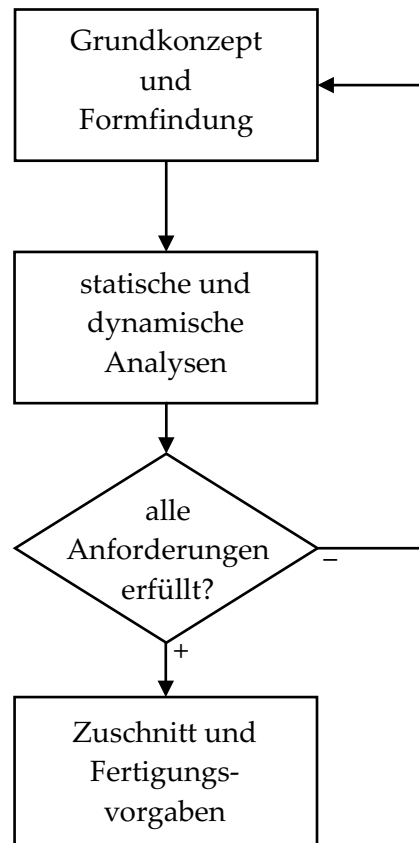


Abbildung 4.30: Formfindung eines komplexen Membrandachs.

Generell gilt, dass für eine gegebene Belastung bei großer Flächenkrümmung geringere Spannungen auftreten als bei flachen Bereichen. Der Stabilisierung der Struktur durch entsprechend gewählte Vorspannung und möglichst große Krümmungen kommt somit eine fundamentale Bedeutung zu. Aus diesen Gründen wird die neben ästhetischen Erwägungen auch durch ihr mechanisches Verhalten geeignete Membrangeometrie im Rahmen eines iterativen Prozess aus Formentwicklung und Analysen unter den nicht formgebenden, externen Lasten entwickelt. Das Wechselspiel aus Formgebung durch anisotrope Vorspannung und der unter Belastung aktivierten, maximalen Membranspannungen ist in [Wak04] anhand eines Vierpunktsegels dargestellt. Erwähnenswert ist auch die Tatsache, dass Minimalflächen (siehe Abschnitt 4.5.1) im Membranbau nur eingeschränkt einsetzbar sind, weil sie zwar hinsichtlich dem formgebenden Lastfall (meist nur Vorspannung) optimal sind, aber die Tendenz haben, ebene Bereiche auszubilden. Dies wird in Abbildung 4.30 deutlich: Während die Minimalfläche in geringer Distanz zum Hochpunkt schon sehr flach ist, ist bei der zum Hochpunkt hin anisotrop vorgespannten Membranfläche eine beachtliche Restkrümmung vorhanden, was sich in einer deutlich höheren Struktursteifigkeit beispielsweise unter Schneebelastung auswirkt.



**Abbildung 4.31:** Hauptentwurfsphasen einer Membranstruktur.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass die Formfindung der erste und fundamentale Schritt beim Entwurfsprozess von Membranstrukturen ist. Erst nach der Formfindung kann durch Strukturanalysen eine funktionale Bewertung der Konstruktion und des Weiteren auch hinsichtlich ästhetischer Gesichtspunkte erfolgen. Die eventuell erforder-



lichen Geometrieadjustungen münden in einen iterativen Ablauf von Formfindung und Analyse. Wenn alle Anforderungen an das Tragwerk erfüllt sind, dann kann die Abwicklung und Zuschnittsermittlung vorgenommen werden. Die auch in [NB04] als Hauptentwurfsphasen identifizierten Einzelschritte der Formfindung, Analyse, Zuschnitt und Optimierung der Membranstruktur sind in Abbildung 4.31 dargestellt. Ebenso wird in [Tae97] die Notwendigkeit der Integration von Formgenerierung und Analyse im Entwurf hervorgehoben.

Durch die üblicherweise nicht in die Ebene abwickelbaren (das heißt die gaußsche Krümmung  $K$  nach Gleichung (2.22) ist ungleich null), doppelt gekrümmten Membranformen ergeben sich aus dem Herstellungsprozess zusätzliche Fragestellungen, die weitere Analysen erfordern. Diesbezügliche Ausführungen zu Zuschnitt und der Minimierung der aus der Nichtabwickelbarkeit resultierenden Zusatzspannungen können in [Ish99], [LWB05] nachgelesen werden und werden im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter betrachtet.

**FAZIT:**

Durch die in diesem Kapitel vorgestellten methodischen Neuentwicklungen und deren algorithmischer Aufbereitung und Implementierung in CARAT steht nun ein allgemein einsetzbares, numerisches Formfindungswerkzeug zur ganzheitlichen Analyse von zugbeanspruchten, beliebig vorgespannten Strukturen zur Verfügung. Das heißt, es können die zu nichtlinearen statischen oder dynamischen Analysen (siehe Kapitel 3) notwendigen, im Gleichgewicht stehenden Ausgangskonfigurationen mittels numerischer Formfindung berechnet werden. Darüber hinaus sind bei eventuellen Unzulänglichkeiten bei der Lastabtragung auch Verbesserungen in Form von Anpassungen der Vorspannungsverteilung beziehungsweise Strukturgestalt durchführbar. Die Bedeutung der Formfindung und der Strukturanalyse und ihr Zusammenhang im Entwurfsprozess der zugbeanspruchten Konstruktionen wurde in Abschnitt 4.6 hervorgehoben.

Die in der nichtlinearen Strukturanalyse zu berücksichtigenden, nicht formgebenden Lasten sind üblicherweise den einschlägigen Normen zu entnehmen. Falls jedoch große Konstruktionen und komplexe Formen umgesetzt werden sollen, sind die zur Auslegung der Struktur zu beachtenden Belastungen in der Regel schwer ermittelbar. Insbesondere bei Windlasten ist erstens durch die enorme Formenvielfalt und zweitens durch das Strukturverhalten mit großen Deformationen nicht mehr gewährleistet, dass die Auslegung der Membrantragwerke durch reine Normenanwendung möglich ist. Falls dieses Vorgehen dennoch gewählt wird, so ist, infolge der dann sehr konservativ anzusetzenden Lasten, die Bemessung zumindest unwirtschaftlich. Aus diesem Grund sind häufig Windkanalversuche erforderlich, um an realistischere Druckverteilungen in Folge Windumströmung zu kommen oder es werden aufwändigere numerische Untersuchungen der Umströmungssituation notwendig. Im Rahmen dieser Arbeit wird ausschließlich die numerische Simulation eingesetzt, um die aus einer Umströmung resultierende Belastung zu ermitteln. Hierfür werden im nächsten Kapitel die entsprechenden Grundlagen dargestellt.

# Kapitel 5

## Strömungsmechanik

In diesem Kapitel werden die wesentlichen Grundlagen der im Rahmen dieser Arbeit besprochenen Strömungsprobleme dargestellt. Basierend auf den Grundbegriffen und Definitionen der Fluidodynamik werden verschiedene Approximationsstufen zur Modellierung von Strömungen diskutiert. Motiviert durch die hohen Anforderungen, die aus der Bauwerksaeroelastik kommen, wird ein möglichst allgemeiner Ansatz zur Strömungsbeschreibung gewählt, der darüber hinaus das Potential für ein breites Anwendungsspektrum mit sich bringt. Die geforderte Allgemeinheit macht die numerische Lösung der Strömungsgrundgleichungen erforderlich. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Finite-Volumen-Methode zur Strömungsberechnung eingesetzt und die Simulation von turbulenten Strömungen wird auf der Basis der RANS-Gleichungen durchgeführt.

Für weitergehende und detailliertere Darstellungen zur Strömungsmechanik und der entsprechenden numerischen Lösungsverfahren kann beispielsweise in [SG97], [War99], [Tru68] beziehungsweise [FP99], [GS98b], [GS98a], [Löh01], [Pey00], [Suc01], [VM95], [ZTN05] nachgelesen werden.

### 5.1 Charakterisierung von Strömungsvorgängen

#### Kinematik und konstitutive Beziehungen

Grundsätzlich werden unter dem Begriff *Fluide* solche Kontinua verstanden, die in Ruhelage Schubspannungen nicht widerstehen können und bei denen deshalb beliebig große Verformungen für diese Art der Belastung auftreten. Damit das strömende Medium (Flüssigkeiten oder Gase) als Kontinuum aufgefasst werden kann, muss die *Knudsenzahl*  $Kn = \frac{l_{mfv}}{L}$  sehr klein sein, wobei  $l_{mfv}$  die mittlere freie Weglänge der Moleküle und  $L$  eine charakteristische Länge des Strömungsfelds ist. Diese Voraussetzung ist bei den hier betrachteten Anwendungen erfüllt. Folglich können die Erhaltungssätze der Kontinuumsmechanik zur Herleitung der maßgeblichen Gleichungen verwendet werden. Im Gegensatz zur im Falle der Festkörpermechanik bevorzugten lagrangeschen Beschreibung (siehe Abschnitt 2.2.1), also das Verfolgen der Eigenschaften eines bestimmten, materiellen Punktes, sind bei strömungsmechanischen Fragen die Auswirkungen von Strömungsvorgängen innerhalb gewisser Kontrollvolumina von Interesse. Deshalb werden Strömungen klassischerweise in der sogenannten räumlichen oder eulerschen Formulierung betrachtet, bei der ein Beobachter

fest an einem Raumpunkt sitzt und die Eigenschaften der vorbeiströmenden Materiepunkte misst. Mit dieser Betrachtungsweise können beliebig große Deformationen einfacher beschrieben werden, allerdings zu dem Preis, dass zusätzliche konvektive Effekte durch die Relativbewegung von Beobachter und Materiepunkten in den Erhaltungsgleichungen auftauchen.

Die konstitutiven Beziehungen werden aus Versuchen ermittelt. Sie stellen die Verbindung zwischen den Spannungen und dem Bewegungszustand des Fluids (beschrieben durch das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}$ ) her. Auf Grund der Tatsache, dass Fluide in Ruhe keine Schubspannungen aufnehmen können, liegt in diesen Fällen ein hydrostatischer Spannungszustand vor. In bewegten viskosen Fluiden entstehen weitere Spannungen, wobei (nach Stokes) angenommen wird, dass diese vom Tensor der Deformationsgeschwindigkeiten  $\mathbf{D}$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \quad (5.1)$$

abhängen ( $\nabla$  ist hierbei der räumliche Gradientenoperator). Ist diese tensorwertige Funktion linear, so wird das Fluid als *newtonsches Fluid* bezeichnet. Unter Verwendung der Hypothese von Stokes ergibt sich die konstitutive Beziehung für newtonsche Fluide in Abhängigkeit von nur einer Materialkonstante zu:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} - \frac{2}{3} \mu (\text{tr } \mathbf{D}) \mathbf{I} + 2 \mu \mathbf{D}. \quad (5.2)$$

Bei inkompressiblen Strömungen verschwindet der mittlere Anteil in Gleichung (5.2) auf Grund der Kontinuitätsgleichung. Hierbei ist  $p$  der *thermodynamische Druck* und  $\mu$  die *dy-namische Viskosität*. Nachdem alle Gase und viele technisch wichtige Flüssigkeiten, wie zum Beispiel Wasser, als newtonsche Medien betrachtet werden können, werden nicht-newtonsche Fluide in dieser Arbeit nicht berücksichtigt.

Die Viskosität  $\mu$  kann beispielsweise anhand der einfachen Scherströmung (auch als Couette-Strömung bezeichnet) als Proportionalitätsfaktor zwischen Geschwindigkeitsgradienten und den viskosen Spannungen veranschaulicht werden und hat die Einheit  $[\mu] = \frac{\text{kg}}{\text{m s}} = \frac{\text{N s}}{\text{m}^2}$ . Sie stellt einen Stoffwert dar. Des Weiteren wird häufig die auf die Fluid-dichte  $\rho$  bezogene *kinematische Viskosität*  $\nu$  verwendet:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad [\nu] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}. \quad (5.3)$$

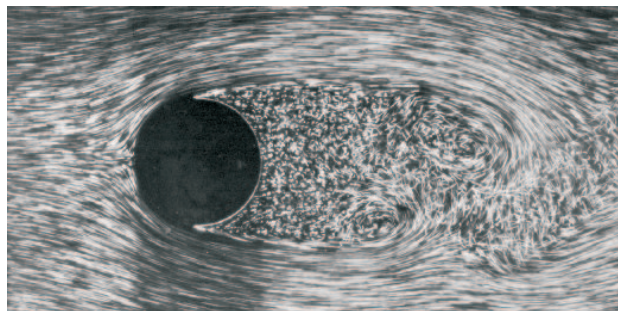
Die Viskosität (also die Zähigkeit) eines Fluids ist im Allgemeinen von der Temperatur und vom Druck abhängig, wobei die Temperaturabhängigkeit dominierend ist. Bei Gasen nimmt die Viskosität in der Regel mit steigender Temperatur zu, wohingegen sie bei Flüssigkeiten sinkt.

## Grenzschicht und Strömungsablösung

Die Betrachtung der *Strömungsgrenzschicht* hat bei der Behandlung von Fluid-Struktur-Wechselwirkungsphänomenen eine besondere Bedeutung, weil die Vorgänge in den Fluidbereichen in der Nähe des Strukturrands für die Kopplung der beiden betrachteten physikalischen Felder maßgeblich sind. Außerdem befinden sich bei Fragestellungen der Gebäudeaerodynamik die umströmten Strukturen komplett in der atmosphärischen Grenzschicht.

Die viskosen Kräfte verursachen die Ausbildung der Grenzschicht und die Ablösung von Strömungen. Der wandnahe Bereich, in dem der Übergang von der Strömungsgeschwindigkeit der ungestörten Außenströmung  $u_\infty$  bis auf den Wert der Geschwindigkeit der Randbewegung stattfindet, wird als Grenzschicht bezeichnet. Bei ruhenden umströmten Körpern findet auf Grund der *stokesschen Haftbedingung* eine Reduktion der Strömungsgeschwindigkeit bis auf null direkt an der Wand statt. Die Dicke der Grenzschicht  $\delta$  wächst mit der Lauflänge an der Wand an und ist um so geringer, je höher die Reynoldszahl ist. Da das Geschwindigkeitsprofil der Grenzschicht eigentlich asymptotisch in die Außenströmung übergeht, wird ihre Dicke häufig durch eine willkürliche Definition der Grenze des Übergangsbereichs in Abhängigkeit von einem gewissen Prozentsatz der ungestörten Außengeschwindigkeit festgelegt [SG97]. Beispielsweise wäre  $\delta_{99}$  der Abstand von der Wand, an dem  $\frac{u}{u_\infty} = 0,99$  gilt. Durch die großen Geschwindigkeitsgradienten treten entsprechend Gleichung (5.2) Wandschubspannungen auf. Diese wirken zusätzlich zum Druck als Belastung auf die Strömungsberandung, sind aber im Vergleich zur Druckbelastung häufig vernachlässigbar. Innerhalb der Grenzschicht können zwei verschiedene Strömungsformen auftreten: Es gibt laminare und turbulente Grenzschichten, wobei bei Letzteren wiederum eine laminare Strömung in unmittelbarer Nähe der Wand – die viskose Unterschicht – auftritt.

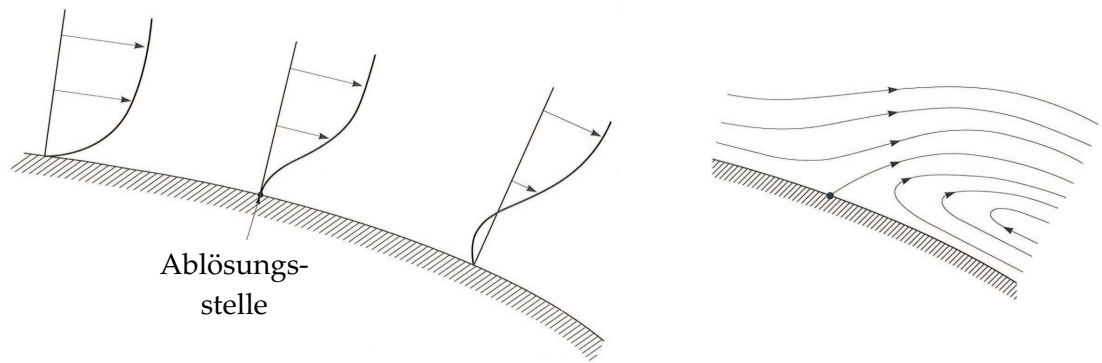
Die Grenzschicht hat auch einen wesentlichen Einfluss auf die Ablösung der Strömung von der Berandung und somit beispielsweise auf die Ausbildung von Wirbeln hinter umströmten Körpern, wie beim Kreiszyylinder in Abbildung 5.1. Diese Strömungsablösung kann



**Abbildung 5.1:** Wirbelablösung am Zylinder (aus [MS00]).

auftreten, wenn ein Fluid in Richtung ansteigenden Drucks fließt und ist um so wahrscheinlicher, je steiler der Druckanstieg ist. Strömungen lösen insbesondere bei stumpfen Körpern ab, weshalb in diesen Fällen der Druckwiderstand deutlich höher ist als bei schlanken Profilen (zum Beispiel Tragflügel).

Die anschauliche Erklärung ist in Abbildung 5.2 für den zweidimensionalen Fall skizziert. Das ursprünglich völlige Geschwindigkeitsprofil der Grenzschicht verändert sich derart, dass die wandnahen Fluidteilchen immer langsamer werden. Ihre kinetische Energie reicht nun an einer gewissen Stelle nicht mehr aus, um gegen den von der Außenströmung aufgeprägten Druckanstieg anströmen zu können. Sobald also die verbliebene kinetische Energie vollständig in Druck umgesetzt ist, tritt eine Umkehr der Strömungsrichtung auf; es kommt zur Rückströmung und die Grenzschicht löst sich von der Körperoberfläche ab. Der Ablöse-



**Abbildung 5.2:** Strömungsablösung: Geschwindigkeitsprofil und Stromlinien (aus [MS00]).

punkt ist dadurch gekennzeichnet, dass der Geschwindigkeitsgradient senkrecht zur Wand verschwindet und somit auch die Wandschubspannung an diesem Punkt zu null wird.

Erwähnenswert ist, dass durch den stärkeren Impulsaustausch quer zur Strömungsrichtung turbulente Grenzschichten stärkere Druckgradienten ohne Ablösung überwinden können als laminare Grenzschichten. Die Auswirkung dieser lokal konzentrierten Vorgänge auf (unter Umständen) sehr weite Bereiche des Strömungsfelds unterstreicht die Bedeutung und die Schwierigkeit bei der numerischen Simulation von ablösenden und sich eventuell wieder anlegenden Strömungen.

Im Unterschied zu umströmten Körpern mit kontinuierlichen und glatten Konturen sind bei Geometrien mit scharfen Kanten die Ablösepunkte bereits vorgegeben und hängen nicht von den Strömungsverhältnissen in der Grenzschicht ab. Die Strömung wird weitestgehend unabhängig von der Reynoldszahl an eben diesen Kanten ablösen.

### Strömungskennzahlen

Dimensionslose Kennwerte werden zur Charakterisierung von Strömungsvorgängen definiert, indem die wesentlichen Einflussgrößen des betrachteten Problems zu einer dimensionsfreien Kennzahl kombiniert werden. Sie dienen dazu, die dynamische Ähnlichkeit von Strömungen zu beurteilen, was den Vergleich von Strömungen auf unterschiedlichen Skalenbereichen ermöglicht. Eine typische Frage in diesem Kontext ist die Übertragbarkeit von im Windkanal erhaltenen Messergebnissen auf die bei der Großausführung auftretenden Vorgänge.

Eine der wichtigsten Kennzahlen in diesem Zusammenhang ist die *Reynoldszahl*  $Re$ :

$$Re = \frac{\rho u L}{\mu} = \frac{u L}{\nu}. \quad (5.4)$$

Sie ist ein Maß für das Verhältnis der Trägheitskräfte zu den viskosen Reibungskräften und wird (neben den Materialkennwerten) aus für die jeweils betrachtete Strömungssituation charakteristischen Werten für die Geschwindigkeit  $u$  und das Längenmaß  $L$  gebildet. Strömungen, zum Beispiel auf verschiedenen Längenskalen, sind dynamisch ähnlich, wenn die

Reynoldszahlen gleich sind. Der Reynoldszahl kommt außerdem eine große Bedeutung zu, weil sie Rückschlüsse auf die vorliegende Strömungsform zulässt. So deuten niedrige Werte der Reynoldszahl auf laminare und hohe Werte auf turbulente Strömungen hin.

Eine Maßzahl für die Kompressibilität beziehungsweise die auftretende Dichteänderung stellt die *Machzahl*  $Ma$

$$Ma = \frac{u}{c} \quad (5.5)$$

dar, die das Verhältnis der Strömungsgeschwindigkeit  $u$  zur Schallgeschwindigkeit  $c$  angibt. Sie ist bei Strömungen mit hohen Geschwindigkeiten von Bedeutung, weil dann zusätzliche elastische Kräfte auf Grund der Kompressibilität des Fluids auftreten. Flüssigkeiten können in den meisten Fällen als dichtebeständig oder *inkompressibel* angesehen werden. Bei Gasen kann die Dichte als konstant angenommen werden, wenn die Machzahl kleiner als 0,3 ist. In den hier betrachteten Gebäudeumströmungen sind die Geschwindigkeiten weit entfernt von der Schallgeschwindigkeit, weswegen die Strömungen als inkompressibel angesehen werden können.

Die Frage nach der Inkompressibilität hängt also nicht nur von den Fluideigenschaften, sondern auch von den Zeitskalen des betrachteten Strömungsphänomens ab. Nachdem neben den Druck- auch Temperaturänderungen auf die Dichte des Fluids einen Einfluss haben, sollen an dieser Stelle nur isotherme Strömungen behandelt werden, was die Gültigkeit der Inkompressibilitätsbedingung bestätigt.

Zur Typisierung von instationärem Verhalten dient die *Strouhalzahl*  $St$

$$St = \frac{L}{u t_c}, \quad (5.6)$$

bei der die transienten mit den stationären Trägheitskräften ins Verhältnis gesetzt werden. Neben dem Längenmaß und der Geschwindigkeit wird eine charakteristische Zeit  $t_c$  des instationären Phänomens verwendet. Die Strouhalzahl lässt sich somit als dimensionslose Frequenz deuten, die beispielsweise bei periodisch stationären Vorgängen, wie der Wirbelablösung am Zylinder bei der Kármán'schen Wirbelstraße, die Wirbelablösefrequenz  $f = 1/t_c$  kennzeichnet (in diesen Fällen wird das charakteristische Zeitmaß der Periodendauer gleich gesetzt).

Strömungen, bei denen der Einfluss der Gravitation von Bedeutung ist, werden mit der *Froudezahl*  $Fr$

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{g L}} \quad (5.7)$$

beurteilt, die das Verhältnis der Trägheitskräfte zur Schwerkraft angibt. In der Definition ist  $g$  die Fallbeschleunigung infolge eines Gravitationsfeldes. Die Froudezahl ist vor allem bei Flüssigkeitsströmungen mit freien Oberflächen wichtig, wohingegen bei strömenden Gasen der Schwerkrafteinfluss von untergeordneter Bedeutung ist.

### Laminare und turbulente Strömungen

Eine Strömung kann zwei komplett unterschiedliche Fließformen aufweisen. So tritt neben der geordneten Schichtenströmung im laminaren Fall bei der turbulenten Strömung eine

unregelmäßige Schwankungsbewegung auf, die der geordneten Grundströmung überlagert ist.

Dies hat bereits O. Reynolds in seinem berühmten Farbfadenversuch aufgezeigt, bei dem eine farbige Flüssigkeit in eine Rohrströmung mit unterschiedlichen Fließgeschwindigkeiten injiziert wurde. Bei kleinen Geschwindigkeiten ist der Farbfaden gerade entlang der Rohrachse ausgerichtet. In diesem Fall liegt eine *laminare* Strömung vor, bei der Schichten unterschiedlicher Geschwindigkeit nebeneinander strömen und kaum Austausch von Fluidteilchen quer zur Hauptströmungsrichtung auftritt. Wird die Strömungsgeschwindigkeit erhöht, so kräuselt sich der Farbfaden und es tritt ein Übergang von der laminaren in die *turbulente* Strömungsform auf, was bei weiterer Geschwindigkeitserhöhung den totalen Zerfall des Farbfadens durch starke Querschwankungen zur Folge hat.

Zusammenfassend lässt sich also feststellen, dass turbulente Strömungen nur bei hinreichend hohen Reynoldszahlen (nach Gleichung (5.4)) auftreten. Befindet sich also die Reynoldszahl unter einer problemabhängigen kritischen Grenze ( $Re < Re_{krit}$ ), so liegt eine laminare Strömung vor. Bei  $Re \approx Re_{krit}$  findet der als Transition bezeichnete Übergang von laminar zu turbulent statt und im Falle großer Reynoldszahlen ( $Re > Re_{krit}$ ) ist die Strömung turbulent. Nachdem die Reynoldszahl ein Maß für das Verhältnis der transienten zu den viskosen Kräften im Fluid darstellt, sind also bei laminarer Fließform die viskosen Kräfte hoch genug, um auftretende Störungen und die chaotischen Schwankungsbewegungen herauszudämpfen. Steigt die Reynoldszahl an, so verringert sich der Einfluss der stabilisierenden Kräfte infolge der Viskosität und ab einer gewissen Grenze können auftretende Störungen nicht mehr unterdrückt werden, so dass unregelmäßige, instationäre Schwankungsbewegungen auftreten. Bemerkenswert ist, dass die turbulente Strömungsform in technischen Fragestellungen dominiert und somit die Regel ist.

Eine allgemeine und kurze Definition der Turbulenz ist jedoch nicht möglich [Bre01], [MS00]. Man kann aber durch das Feststellen von typischen Symptomen darauf zurückschließen, dass eine turbulente Strömung vorliegt:

- Turbulente Strömungen sind zeitlich und räumlich unregelmäßig und chaotisch, wobei auf Grund der geltenden Erhaltungssätze die Fluktuationen nicht vollständig zufällig sein können.
- Turbulenz ist immer dreidimensional, instationär und wirbelbehaftet.
- Turbulenz ist mischungsintensiv und dissipativ.
- Turbulente Strömungen treten nur ab einer gewissen Reynoldszahl auf.
- Turbulente Strömungen enthalten einen großen Bereich unterschiedlicher Skalen. Mit zunehmender Reynoldszahl wird diese Bandbreite größer.
- Turbulenz ist eine Kontinuumserscheinung, weil die kleinsten enthaltenen Skalen durch die Viskosität bestimmt werden. Somit ist die kleinste Wirbelgröße und die dazugehörige kleinste Zeitskala, die in turbulenten Strömungen auftreten kann, in der Regel um Größenordnungen über denen der Molekülbewegungen. Deshalb ist grundsätzlich die Kontinuumsannahme auch bei turbulenten Strömungen erfüllt. Folglich



beschreiben die aus den Gesetzen der Kontinuumsmechanik hergeleiteten Navier-Stokes-Gleichungen sowohl laminare als auch turbulente Strömungen vollständig.

- Turbulenz ist keine Eigenschaft eines Fluids, sondern ein Merkmal einer Strömung.

Eine idealisierte, aber sehr anschauliche Modellvorstellung von turbulenten Strömungen wurde von Kolmogorov entwickelt. Diese beschreibt die turbulente Strömung als aus Bewegungsvorgängen unterschiedlicher Längenskalen zusammengesetzt, die miteinander wechselwirken. Die damit eingeführten Wirbelelemente (*Eddies*) haben unterschiedliche Abmessungen, die zwischen klar definierten Ober- und Untergrenzen liegen. Während die größten Wirbel von den charakteristischen Abmessungen des um- beziehungsweise durchströmten Körpers abhängen, wird die Untergrenze der Wirbelgröße durch die Zähigkeit des Fluids bestimmt. Die Energie wird dabei über die großen Wirbel dem mittleren Geschwindigkeitsfeld entzogen und in Form eines Kaskadenprozesses auf die jeweils nächstkleineren Elemente übertragen. Durch die Viskosität werden Geschwindigkeitsfluktuationen auf den sehr kleinen Längenskalen gedämpft, was die Ausbildung von unendlich kleinen Wirbeln verhindert und somit die durch die Energiekaskade den kleinsten Eddies zugeführte mechanische Energie in Wärme dissipiert.

Diese Kaskadentheorie vernachlässigt unter anderem die Möglichkeit, dass Energie auch von den kleinen zu den großen Wirbeln übertragen werden kann und dass auch bei den großen Wirbelstrukturen bereits durch Reibung Wärme abgeführt wird. Trotzdem können auf der Basis des Konzepts von Kolmogorov die Skalenbereiche der turbulenten Strömung abgeschätzt werden. In Abhängigkeit der charakteristischen Längenskala der größten Wirbel  $L$  und dem kleinsten Skalenbereich der Turbulenzelemente, Kolmogorov-Länge  $l_k$  genannt, ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\frac{L}{l_k} \sim Re^{\frac{3}{4}}. \quad (5.8)$$

Aus diesem Zusammenhang wird deutlich, dass das Verhältnis der größten zu den kleinsten Längenskalen in Abhängigkeit der Reynoldszahl stark anwächst und somit der in der turbulenten Strömung enthaltene Skalenbereich sich entsprechend stark aufweitet. Des Weiteren ergibt sich bei kleineren Wirbelabmessungen ein kleineres charakteristisches Zeitmaß, das bewirkt, dass das Frequenzspektrum der Schwankungsbewegungen ebenso ausgedehnt wird.

## 5.2 Strömungsmodelle

Die physikalische Beschreibung eines Strömungsvorgangs kann auf verschiedenen Abstraktionsniveaus beziehungsweise Approximationsstufen erfolgen. Um die in der Regel sehr aufwändige Lösung von Strömungsproblemen zu vereinfachen, können in Abhängigkeit von der zu untersuchenden Fragestellung Näherungslösungen auf der Basis von Idealisierungen entwickelt werden. Durch eine Analyse der beim jeweils betrachteten Phänomen dominierenden Effekte lassen sich die für diesen Fall zulässigen Vereinfachungen festlegen. Im Folgenden werden die wesentlichen Strömungsmodelle kurz aufgezeigt:

- Die vollständigen Erhaltungsgleichungen von Masse, Impuls und Energie für ein Kontinuum zusammen mit den konstitutiven Beziehungen für ein newtonsches Fluid nach Gleichung (5.2) ergeben die *Navier-Stokes-Gleichungen*. Mit diesen Gleichungen können alle im Abschnitt 5.1 erwähnten Effekte, wie beispielsweise Strömungsablösung und Turbulenz beschrieben werden. Sie beinhalten den Einfluss der viskosen Kräfte innerhalb eines Fluids und der Kompressibilität.

Kann inkompressibles Verhalten des Fluids in der gegebenen Strömungssituation vorausgesetzt werden, so reduziert sich dieser Satz an Erhaltungsgleichungen auf die *inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen*, bestehend aus Massen- und Impulsbilanz. Die Vereinfachung ist immer dann möglich, wenn nur kleine Temperaturdifferenzen vorliegen und die Strömungsgeschwindigkeiten im Vergleich zur Schallgeschwindigkeit klein sind (siehe dazu auch die Ausführungen nach Gleichung (5.5)).

- Werden die Reibungskräfte und die Wärmeleitung vernachlässigt, so reduzieren sich die Navier-Stokes-Gleichungen auf die *Euler-Gleichungen*. Mit diesen Gleichungen können Ablösungen als eine Folge der Zähigkeit eines Fluids und auch der Strömungswiderstand nicht berechnet werden. Die charakteristischen Fragestellungen für diese Gleichungen sind dadurch gekennzeichnet, dass die viskosen Kräfte gegenüber den Druck- und Trägheitskräften vernachlässigbar sind. Dies trifft, mit Ausnahme des wandnahen Bereichs, bei Strömungen mit sehr hohen Reynoldszahlen (also hohen Strömungsgeschwindigkeiten und niedriger Viskosität) zu, wie beispielsweise bei Umströmungen von Tragflügelprofilen.
- Wird neben der Reibungsfreiheit auch die Drehungsfreiheit (also  $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ ) und Stationarität der Strömung angenommen, so resultiert aus den Euler-Gleichungen die *Potentialgleichung*. Mit Hilfe der Potentialströmung lassen sich beispielsweise die Geschwindigkeitsfelder bei umströmten stromlinienförmigen Körpern näherungsweise ermitteln.
- Sind sehr langsame Strömungsvorgänge, solche mit hoher Viskosität oder innerhalb sehr kleiner geometrischer Abmessungen von Interesse, dann sind die Reibungskräfte im Vergleich zu den Trägheitskräften dominierend. In diesem Fall von sehr kleinen Reynoldszahlen können die konvektiven Effekte also gegenüber den viskosen Anteilen vernachlässigt werden und die Navier-Stokes-Gleichungen vereinfachen sich zu den *Stokes-Gleichungen*. Dieser Grenzfall für  $Re \rightarrow 0$  charakterisiert die sogenannten „schleichenden Strömungen“, die beispielsweise bei Strömungen durch poröse Medien oder bei Filmströmungen in Gleitlagern vorliegen.
- Werden die Navier-Stokes-Gleichungen auf die Strömungsverhältnisse in der dünnen wandnahen Schicht, in der die Viskosität eine wichtige Rolle spielt, spezialisiert, so führen diese Vereinfachungen auf die *Grenzschichtgleichungen*. Diese haben vor allem große Bedeutung, wenn das Strömungsgebiet in die damit beschriebene, reibungsbehaftete Grenzschichtströmung und einen näherungsweise reibungsfreien Außenströmungsbereich unterteilt werden kann. Im Falle von Strömungen mit hohen Reynoldszahlen lassen sich auf diese Weise Berechnungen mit den Euler-Gleichungen oder sogar mit der Potentialgleichung in der nun als reibungsfrei betrachteten Außenströmung durchführen, während die viskosen Effekte in unmittelbarer Wandnähe und die

Haftbedingung an festen Rändern durch die Grenzschichtgleichungen erfasst werden. Diese auf Prandtl zurückzuführenden Entdeckungen erlauben also die Unterteilung des Strömungsfelds mit den abschnittsweise jeweils möglichen Idealisierungen, was die Entwicklung sogenannter *Hybridmethoden* zur Reduktion der Komplexität der Lösung entsprechender Strömungsprobleme motivierte.

### 5.3 Besonderheiten in der Gebäudeaerodynamik

In diesem Abschnitt werden die Besonderheiten bei der Umströmung von Bauwerken aufgezeigt und einige Grundlagen des Windingenieurwesens dargestellt. Weitere Details zu diesem weitreichenden Arbeitsgebiet können in der umfangreichen Fachliteratur, wie beispielsweise [Huc02], [Law01], [PN03], [Ros76], [SS96], [Zur69], nachgelesen werden.

Durch barometrische Druckunterschiede werden atmosphärische Luftströmungen hervorgerufen, die als Wind bezeichnet werden. Unter der Wirkung dieses Druckunterschieds, der Corioliskraft infolge Erdrotation und der Zentrifugalkraft bei gekrümmten Bahnen der Luftbewegung entsteht der sogenannte Gradientenwind, der in einer Höhe von ca. 300 bis 600 m über der Erdoberfläche auftritt. Unterhalb dieser Höhe bewirkt die Rauigkeit des Bodens eine Abminderung der Strömungsgeschwindigkeit, ähnlich wie in der Grenzschicht an einem umströmten Körper (siehe Abschnitt 5.1), und eine Drehung der Windrichtung (Ekman-Spirale). Neben der Reduktion der Geschwindigkeit formieren sich durch die viskosen Effekte innerhalb dieser atmosphärischen Grenzschicht auch Wirbelstrukturen, die zu den, der mittleren, quasistationären Luftbewegung überlagerten, Geschwindigkeitsschwankungen führen. Diese kurzzeitigen Fluktuationen werden auch als Böen bezeichnet.

Das entsprechend dem Grenzschichtcharakter in Bodennähe vorliegende Geschwindigkeitsprofil (das schon in Messungen von Hellmann [Hel15] festgestellt wurde) kann durch einen Potenzansatz beschrieben werden, womit sich die Geschwindigkeit  $v(H)$  in der Höhe  $H$  durch einen von der Rauigkeit des Geländes abhängigen Parameter  $\alpha$  und der Windgeschwindigkeit in einer Referenzhöhe  $v(H_{ref})$  errechnen lässt:

$$v(H) = v(H_{ref}) \left( \frac{H}{H_{ref}} \right)^\alpha . \quad (5.9)$$

Die Referenzhöhe  $H_{ref}$  wird meist zu 10 m (dies entspricht der in der Meteorologie üblichen Messhöhe) angenommen, kann aber auch gleich der Gradientenhöhe  $H_G$  angesetzt werden. In Abbildung 5.3 ist das vertikale Windprofil der mittleren Geschwindigkeit nach Davenport für unterschiedliche Bodenrauigkeiten skizziert. Wird die Gradientenwindgeschwindigkeit  $v_G$  als Bezugswert genommen, so ergibt sich die Problematik, dass die Grenzschichtdicke entsprechend genau bekannt sein muss. Hierzu sind in der Literatur voneinander leicht abweichende Werte aufgeführt. Nach [Zur69] gelten beispielsweise die in Tabelle 5.1 angegebenen Werte.

Die diesen mittleren Geschwindigkeiten überlagerten Turbulenzen werden durch dimensionslose Turbulenzintensitäten, die das Verhältnis der Schwankungsgeschwindigkeiten zu der mittleren Windgeschwindigkeit widerspiegeln, erfasst. Die Einhüllende der in Böen

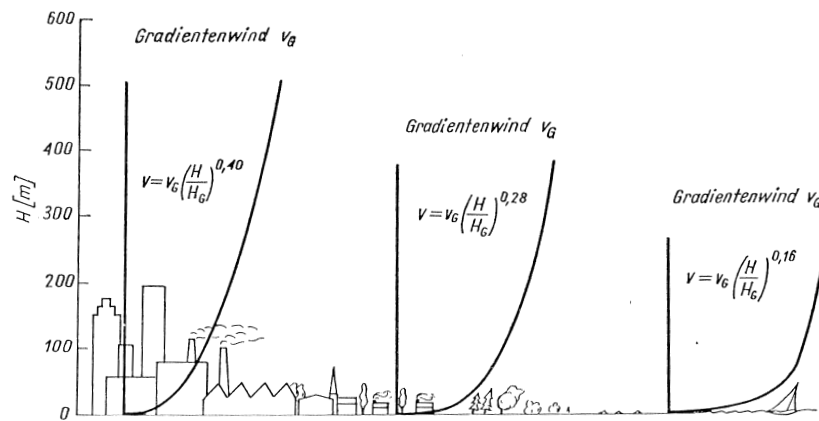


Abbildung 5.3: Geschwindigkeitsprofile der atmosphärischen Grenzschicht (aus [Zur69]).

Geländeart	$\alpha$	$H_G [m]$
ebenes Ackergelände	0,16	270
unebenes Gelände, bewaldet	0,28	390
dicht bebautes Stadtgelände	0,40	510

Tabelle 5.1: Parameter des Windgeschwindigkeitsprofils in Abhängigkeit von der Bodenrauigkeit.

erreichten Spitzenwindgeschwindigkeiten wird in Böengeschwindigkeitsprofilen aufgetragen, was im Rahmen des Potenzgesetzes auf andere Exponenten führt und die vor allem in Bodennähe höheren Geschwindigkeiten abbildet.

Durch diesen Grenzschichtcharakter des natürlichen Winds ist die Beurteilung der Gebäudeumströmung äußerst komplex und hängt neben der Gebäudegeometrie beispielsweise auch von der Geländebeschaffenheit und von eventuell vorhandener Umgebungsbebauung ab. Des Weiteren sind die umströmten Gebäudegeometrien eher stumpfe Körper und unterscheiden sich durch das von Ablösungen geprägte Strömungsfeld fundamental von schlanken, also stromlinienförmigen Konturen. Es bilden sich großräumige, stark verwirbelte Bereiche aus, in denen die Zähigkeit eine große Rolle spielt. Eine Konsequenz daraus ist, dass der auf den Körper als Belastung einwirkende Strömungswiderstand vorwiegend auf Grund des Drucks an Stelle des bei schlanken Profilen überwiegenden Reibungswiderstands verursacht wird [Huc02].

Im Gegensatz zu den auf optimale Umströmung ausgelegten Tragflügelprofilen ist jedoch auch die Strömungsgeschwindigkeit von einer anderen Größenordnung. Um unabhängig von den Rechenwerten aus den Normen eine Orientierung zu geben, ist in Tabelle 5.2 die Windstärkenskala nach *Beaufort* von 1805 angegeben, in der Windgeschwindigkeiten mit bestimmten, wahrnehmbaren Erscheinungsformen in Verbindung gebracht werden.

Durch einen Vergleich dieser Geschwindigkeiten mit der Schallgeschwindigkeit unter Standardbedingungen von  $v = 340 \text{ m/s}$  in Luft kann mit Hilfe der Machzahl nach Gleichung (5.5) der Einfluss der Kompressibilität der Luft bewertet werden. Selbst für extremste

Skala	Geschwindigkeit	Windart	Wirkung an Land
0	0 - 0,2	Windstille	Rauch steigt senkrecht empor
1	0,3 - 1,5	leiser Zug	Wind nur durch Rauch erkennbar
2	1,6 - 3,3	leichter Wind	Wind ist im Gesicht fühlbar
3	3,4 - 5,4	schwacher Wind	Blätter, dünne Zweige bewegen sich
4	5,5 - 7,9	mäßiger Wind	Staub erhebt sich
5	8,0 - 10,7	frischer Wind	Kleine Bäume schwanken
6	10,8 - 13,8	starker Wind	Pfeifton an Drahtleitungen
7	13,9 - 17,1	steifer Wind	spürbarer Widerstand beim Gehen
8	17,2 - 20,7	stürmischer Wind	Zweige brechen
9	20,8 - 24,4	Sturm	kleinere Schäden an Häusern
10	24,5 - 28,4	schwerer Sturm	Bäume werden entwurzelt
11	28,5 - 32,6	orkanartiger Sturm	heftige Böen, schwere Sturmschäden
12	>32,7	Orkan	katastrophale Schäden, Verwüstungen

**Tabelle 5.2:** Windgeschwindigkeiten [m/s] und zugeordnete Windstärke nach Beaufort.

Böenwindgeschwindigkeiten in exponierten Berglagen von 60 m/s [Huc02] ist die Machzahl  $Ma = 60/340 = 0,176 < 0,3$  und somit die Luft bei den aerodynamischen Betrachtungen zur Windlastermittlung als inkompressibles Medium annehmbar [Rac96].

Die Stoffwerte Dichte und dynamische Viskosität für Luft sind bei einer Temperatur von 293 K und einem Luftdruck von  $10^5$  Pa nach [SG97] :

$$\rho_{Luft} = 1,188 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad \mu_{Luft} = 1,8185 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m s}}. \quad (5.10)$$

Damit sind die typischen Reynoldszahlen der Bauwerksaerodynamik zwischen  $Re \approx 10^4$  für umströmte Seile und  $Re \approx 10^8$  für große Gebäude. Die vorliegenden Strömungen liegen somit in jedem Fall über einer kritischen Schranke und sind somit turbulent.

Die Aufgabenstellung der Bauwerksaerodynamik im Rahmen der Dimensionierung von Tragwerken ist die Bereitstellung der erforderlichen Lastannahmen und im Falle von schwingungsanfälligen Bauwerken muss die dynamische Stabilität nachgewiesen werden. Diese Fragestellungen sind für alle möglichen Anströmungen, das heißt Windstärken und Windrichtungen sowie unter Berücksichtigung des baulichen Umfelds und der Geländebeschaffenheit zu klären. Die Beurteilung der Gebäudeumströmung ist somit streng genommen immer ein räumliches Problem und für jedes Bauwerk eine Untersuchung im Einzelfall.

Zur Vereinfachung der Dimensionierung sind die Erkenntnisse der Bauwerksaerodynamik in Normen zusammengefasst, die aber nur ein stark simplifiziertes Abbild der Realität sein können. Innerhalb der jeweiligen Anwendungsgrenzen sind die Ermittlung der Windlasten und auch Schwingungsnachweise möglich. Reichen jedoch die in den Normen enthaltenen Erfahrungswerte nicht aus, so sind weitergehende Untersuchungen unbedingt erforderlich. Dies ist durch die Tendenz zu leichteren und höheren beziehungsweise weiter gespannten Bauwerken immer häufiger der Fall.

Die klassische Vorgehensweise in diesen Sonderfällen ist die eingehendere Untersuchung der Strömungssituation im Rahmen von Versuchen im Windkanal. Bedingt durch die spezielle Situation, dass Gebäude in der atmosphärischen Grenzschicht stehen und keine durch ihre Funktion hervorgehende, bevorzugte Anströmungsrichtung aufweisen, ist dies besonders komplex und erfordert spezielle Grenzschichtwindkanäle [eV96] mit sehr großen Abmessungen. Auf Grund der speziell auf das jeweilige Projekt abzustimmenden Versuchsaufbauten sind die Tests sehr aufwändig und kostenintensiv. Des Weiteren ist auf Grund der großen Abmessungen der Originalausführung auch die Einhaltung der Ähnlichkeitsanforderungen kaum möglich. So ist die zur Erfüllung der dynamischen Ähnlichkeit bei unterschiedlichen Längenskalen notwendige Übereinstimmung der Reynoldszahlen (nach Gleichung (5.4)) bei der Umströmung im Modell- wie Originalmaßstab nicht realisierbar. Dies wird jedoch durch die Tatsache, dass die untersuchten Konstruktionen in der Regel scharfkantig sind, etwas relativiert, weil in diesen Fällen die Ablösestellen vorgegeben sind und somit die Strömungsfelder praktisch unabhängig von der im Modellmaßstab vorliegenden Reynoldszahl übereinstimmen.

Unter anderem wegen den aufgeführten Problemen kommen zur Strömungsberechnung vermehrt numerische Verfahren zum Einsatz. Die gerade bei Sonderkonstruktionen vorhandene, große Formenvielfalt kann im Rahmen von numerischen Simulationen leichter berücksichtigt werden. Diese, im Vergleich zum Experiment, größere Flexibilität ist insbesondere dann sehr vorteilhaft, wenn es um die Optimierung einer Struktur geht, weil dann die notwendigen Formmodifikationen schneller und günstiger umsetzbar sind. Eine kombinierte Vorgehensweise mit experimentellen Daten aus Windkanal- beziehungsweise Feldmessungen und dadurch validierten numerischen Modellen wird in [Bie96] als „hybrid analysis“ beispielsweise für Parameterstudien vorgeschlagen.

Die hohen Anforderungen an die Experimente infolge der komplexen Strömungssituation stellen auch bei der numerischen Simulation eine Herausforderung dar. Der numerische Windkanal muss, wie das Experiment, alle wesentlichen Einflüsse korrekt repräsentieren. Insbesondere die adäquate Modellierung des natürlichen Winds im gegebenen Bauwerks-umfeld ist nicht unproblematisch. Prinzipiell sind hierfür zwei verschiedene Lösungswege möglich: Es kann die Vorlaufstrecke des zu betrachtenden Objekts, entsprechend der Herangehensweise im Grenzschichtwindkanal, mit Bodenrauigkeiten belegt werden, so dass sich am numerischen Bauwerksmodell eine möglichst realistische bodennahe Grenzschicht entwickelt hat. Oder es kann ein kürzerer Strömungskanal modelliert werden, wobei in diesem Fall die Einströmrandbedingungen bereits die Eigenschaften des natürlichen Winds in der Umgebung des Bauwerks möglichst gut abbilden müssen. Bei der ersten Lösung sind Strömungsvorgänge auf entsprechend großen Fluidgebieten numerisch zu lösen und im zweiten Fall ist die Ermittlung von Windzeitreihen, die neben dem Grenzschichtprofil auch die Böigkeit korrekt modellieren, zu ermitteln. Weitergehende Ausführungen zur Generierung von Zeitreihen der Windgeschwindigkeiten können beispielsweise in [Cam02], [RLV04], [Zah99], [Zah98] und der dort genannten Literatur nachgelesen werden.

Der Bereich des Windingenieurwesens, der sich mit all diesen Fragen in der Verwendung der „Computational Fluid Dynamics“ (CFD) im Bezug auf die Besonderheiten des Windingenieurwesens und der Gebäudeaerodynamik beschäftigt, wird als „Computational Wind Engineering“ (CWE) bezeichnet. Die zu dieser Disziplin verfassten Übersichtsartikel [Sta97]

und [Mur97] identifizieren den Forschungsbedarf in den Bereichen der korrekten Beschreibung der Strömungsrandbedingungen und der Turbulenzmodellierung in Bezug auf die Simulation von natürlichen Windfeldern.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass auf Grund der Komplexität des natürlichen Winds und der Umströmungssituation von in der atmosphärischen Grenzschicht stehenden Bauwerken nur wenige Vereinfachungen in den Grundgleichungen (nach Abschnitt 5.2) möglich sind. Das zur Untersuchung von Windeffekten an Gebäuden zu wählende Strömungsmodell muss instationäre, turbulente Strömungen unter Berücksichtigung der viskosen Effekte beschreiben können, wobei die Kompressibilität und der Einfluss der Schwerkraft vernachlässigbar sind. Die diesen Anforderungen entsprechende mathematische Formulierung stellen die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen dar.

## 5.4 Grundgleichungen und Randbedingungen

Nachdem die Modellwahl in Abschnitt 5.3 das sehr allgemeine und komplexe Modell zur Beschreibung von Strömungen in der Form der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen erforderlich macht, werden im Folgenden die entsprechenden Grundgleichungen kurz dargestellt. Wie bereits in Abschnitt 5.1 erwähnt, werden Strömungen bevorzugt in der eulerschen (räumlichen) Betrachtungsweise beschrieben, bei der der Beobachter fest an einem Raumpunkt sitzt und die Eigenschaften der materiellen Punkte misst, die im Laufe der Zeit diesen Ort passieren. Durch die Fixierung auf einen festen Punkt im Raum ergeben sich zusätzliche konvektive Anteile, die in der Strukturmechanik üblichen lagrangeschen Beschreibung (nach Abschnitt 2.2.1) nicht vorhanden sind und deshalb die daraus folgende starke Form des Anfangs-Randwertproblems für inkompressible, viskose Strömungen eine komplett andere Gestalt hat.

Aufbauend auf der Kontinuumsannahme lassen sich die Navier-Stokes-Gleichungen aus den Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie und der zusätzlichen Annahme einer Beziehung für die Spannung  $\sigma$  eines sich deformierenden Fluids herleiten. Letztere ist für newtonsche Fluide bereits in Abschnitt 5.1 diskutiert worden. Es ergeben sich also fünf Gleichungen für die fünf Unbekannten Druck  $p$ , Temperatur  $T$  und die drei Geschwindigkeitskomponenten  $u_i$ . Infolge der hier zulässigen Beschränkung auf inkompressible (und isotherme) Strömungen findet eine Entkopplung der Energieerhaltungsgleichung statt und die Bilanzgleichung für die Masse und die drei Bilanzgleichungen für den Impuls in alle drei Raumrichtungen sind für die vollständige Beschreibung der Strömung ausreichend. Des Weiteren sollen die Volumenkräfte auf Grund ihres geringen Einflusses vernachlässigt werden. Das gekoppelte System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen (2. Ordnung im Raum und 1. Ordnung in der Zeit) mit den nunmehr vier unbekanntenen Größen (Druck  $p$  und den drei Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit  $u_i$ ) ergibt sich in symbolischer Schreibweise zu:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) &= \nabla \cdot \sigma. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Im Folgenden werden diese Bewegungsgleichungen unter Einbeziehung der konstitutiven Gleichung für newtonsche Fluide nach Gleichung (5.2) bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems in Indexnotation angeschrieben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= 0, \\ \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Hierbei ist zu beachten, dass von der einsteinschen Summationskonvention (siehe Abschnitt 2.1) Gebrauch gemacht wurde und über den Index  $j$  summiert werden muss. Der Index  $i = 1, 2, 3$  gibt die Richtung der zu bilanzierenden Impulse an. Es liegen also für newtonsche Fluide offensichtlich genügend Gleichungen vor, um inkompressible Strömungen mit den vier genannten Unbekannten zu lösen.

Für den Sonderfall einer inkompressiblen Strömung entspricht die erste Gleichung von (5.11) beziehungsweise (5.12) also der Massenbilanz und die zweite Gleichung bilanziert für einen Fluidpartikel über die Trägheitskräfte, den Kräften infolge Druckgradient und den viskosen Kräften. Die Herleitung dieser Gleichungen kann beispielsweise in [SG97] oder [Gra03] nachgelesen werden.

Zur Lösung dieses auf dem Strömungsgebiet  $\Omega_F$  definierten partiellen Differentialgleichungssystems sind entsprechende Rand- und Anfangsbedingungen vorzugeben. Der Rand des Fluidgebiets  $\Gamma_F = \partial\Omega_F$  kann (analog zum Vorgehen in der Festkörpermechanik nach Gleichung (2.69)) in die zwei Bereiche für Dirichlet- ( $\Gamma_u$ ) und Neumann-Randbedingungen ( $\Gamma_\sigma$ ) aufgeteilt werden:

$$\Gamma_F = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma, \quad 0 = \Gamma_u \cap \Gamma_\sigma. \quad (5.13)$$

Auf dem Dirichlet-Rand werden Geschwindigkeiten  $\hat{\mathbf{u}}$  und auf dem Neumann-Rand entsprechend Spannungen  $\hat{\mathbf{t}}$  vorgeschrieben:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \hat{\mathbf{u}} & \text{auf } \Gamma_u & \text{ für alle } t \in [t_0, T], \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \hat{\mathbf{t}} & \text{auf } \Gamma_\sigma & \text{ für alle } t \in [t_0, T]. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Als Anfangsbedingung ist das Geschwindigkeitsfeld zur Zeit  $t = t_0$ , also  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$  auf dem gesamten Strömungsgebiet  $\Omega_F$  vorzugeben. Auf Grund der Inkompressibilität muss das Anfangsgeschwindigkeitsfeld divergenzfrei sein, um die Massenbilanz zu erfüllen, das heißt es muss  $\text{div}(\mathbf{u}_0) = 0$  auf  $\Omega_F$  gelten.

Im Zusammenhang von numerischen Berechnungen sind folgende Randbedingungen von praktischem Interesse:

- *Einflussrandbedingung:*

In diesem Fall wird über den Einströmrand im Sinne der Dirichlet-Randbedingungen meist eine (im Allgemeinen instationäre) Geschwindigkeitsverteilung mit einer nicht verschwindenden Komponente parallel zur Flächennormalen vorgeschrieben. Im Falle der hier betrachteten bodennahen Windströmungen ist dies beispielsweise ein



Geschwindigkeitsprofil, das die atmosphärische Grenzschicht approximiert (siehe Abschnitt 5.3). Je nach Turbulenzmodellierung sind entsprechende Werte für die Turbulenzgrößen zu spezifizieren.

- *Ausflussrandbedingung:*

Die Ausströmrandbedingung stellt eine besondere Schwierigkeit dar, da sie die Bilanz über einen künstlichen Schnitt durch das Strömungsfeld repräsentiert. Es muss also sicher gestellt werden, dass die Strömungsgrößen physikalisch möglichst sinnvoll approximiert werden und die Strömungssituation im Gebiet nicht durch stromaufwärts laufende Störungen beeinflusst werden. Als Randbedingungen kommen sowohl Geschwindigkeits- als auch Druckvorgaben (als Absolutwerte oder gemittelt über die Auslassfläche) in Frage.

- *Wandrandbedingungen:*

- Haft- oder „no-slip“ Randbedingung:

Auf Grund der stokeschen Haftbedingung an festen Wänden (das heißt die Fluidpartikel haften an der Wand) muss die tangentielle Komponente der Geschwindigkeit an ruhenden Wänden verschwinden. Ist die betrachtete Wand undurchlässig, so ist auch die Normalkomponente der Geschwindigkeit identisch null. Im Falle einer festen Wand entspricht dies einer Dirichlet-Randbedingung der Form:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (5.15)$$

Im Falle bewegter Ränder erzwingt die Haftbedingung, dass die Geschwindigkeit der wandnächsten Fluidpartikel mit der Randgeschwindigkeit übereinstimmt.

- Gleit- oder „slip“ Randbedingung:

Im Vergleich zur vorangegangenen Dirichlet-Bedingung ist in diesem Fall nur die Komponente der Geschwindigkeit normal zur Wand null und die Fluidpartikel dürfen entlang der Wand gleiten. Die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit ist also frei und es gilt:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (5.16)$$

Diese Randbedingung wird beispielsweise dann eingesetzt, wenn bei der Modellierung von umströmten Körpern die gezwungenermaßen festzulegenden, fiktiven Ränder (zum Beispiel die obere Begrenzung des Strömungskanals) des eigentlich unendlich ausgedehnten Strömungsgebiets möglichst wenig Einfluss auf das umströmte Objekt haben sollen.

Bei bewegten Rändern mit Gleitrandbedingung wird nur die Normalkomponente der Wandgeschwindigkeit auf die randnächsten Fluidteilchen übertragen.

- *Symmetrierandbedingungen:*

Diese Randbedingungen können dazu verwendet werden, um das Berechnungsgebiet möglichst klein zu halten, indem vorhandene Symmetrien der Strömungskonfiguration als Randbedingung angesetzt werden. An der Symmetrieebene dürfen keine Normalenströmungen sowie keine Schubspannungen auftreten (mit  $u_t$  als resultierende

Geschwindigkeitskomponente tangential und  $y_n$  als Koordinate normal zur Symmetrieebene):

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u_t}{\partial y_n} = 0. \quad (5.17)$$

Es ist zu beachten, dass diese Art der Randbedingung, die auch bei geometrisch symmetrischer Strömungskonfiguration möglichen, unsymmetrischen Strömungseffekte, wie zum Beispiel die kármánsche Wirbelstraße im Nachlauf des Kreiszylinders, unterdrückt und somit die numerische Simulation die physikalische Realität nicht abbilden kann.

## 5.5 Numerische Strömungsmechanik

Analytische Lösungen der im Abschnitt 5.4 genannten Navier-Stokes-Gleichungen existieren nur für einige Grenzfälle unter stark vereinfachenden Annahmen. Um Lösungen für technisch relevante Fragestellungen zu erhalten, müssen deshalb meist Methoden der numerischen Strömungsmechanik („computational fluid dynamics“ – CFD) angewendet werden.

### 5.5.1 Diskretisierung

Zur numerischen Lösung eines Strömungsproblems sind verschiedene Ansätze gebräuchlich: die Finite-Differenzen-Methode (FDM), die Finite-Volumen-Methode (FVM), die Finite-Elemente-Methode (FEM), die Spektralmethode (SM), die Randelementmethode (BEM) und die Lattice-Boltzmann-Methode (LBM), um nur einige zu nennen. Alle, mit Ausnahme des letztgenannten Verfahrens, beruhen dabei auf den kontinuumsmechanischen Grundgleichungen. Bei der LBM wird, ausgehend von der Boltzmann-Gleichung, eine statistische Beschreibung der Strömung durch Bewegung und Wechselwirkung einzelner ensemble-gemittelter Geschwindigkeitsverteilungsdichten vorgenommen. Die grundsätzliche Lösungsidee der oben genannten Verfahren ist die Diskretisierung des Problems mit einem Rechengitter.

Wie bereits zu Beginn dieses Kapitels angemerkt, wird im Folgenden die Finite-Volumen-Methode zur Strömungsberechnung eingesetzt. Nachdem sich die methodischen Eigenentwicklungen in dieser Arbeit auf die nichtlineare Strukturmechanik, die numerische Formfindung, die partitionierte Simulation von Problemen mit Fluid-Struktur-Wechselwirkung und die Erarbeitung eines Berechnungskonzepts für die ganzheitliche Analyse von Freiformmembranen konzentrieren, wird mit CFX5 auf einen kommerziellen Strömungslöser zurückgegriffen. Aus diesen Gründen stellen die folgenden Ausführungen nur den Grundgedanken der Finite-Volumen-Methode vor. Für weitergehende und auch andere Verfahren betreffende Betrachtungen wird an dieser Stelle auf die Literaturangaben am Anfang von Kapitel 5 verwiesen. Ein prägnanter Vergleich der im Bereich der CFD weit verbreiteten FVM und der in der Strukturmechanik mehrheitlich eingesetzten FEM (siehe auch Abschnitt 3.1 dieser Arbeit) kann im Anhang von [Wal99] und der dort erwähnten Literatur nachgelesen werden.

Die Finite-Volumen-Methode basiert auf der Integralform der Erhaltungsgleichungen. Diese kann unmittelbar aus der Differentialform (siehe Gleichung (5.12)) erhalten werden, indem man sie über ein definiertes Bilanzvolumen integriert und durch Anwendung des gaußschen Integralsatzes alle Volumenintegrale über konvektive und diffusive Anteile in Oberflächenintegrale umformt. Um eine einheitliche Darstellung der Herleitung für die verschiedenen Anteile der Navier-Stokes-Gleichungen zu erhalten, wird die sogenannte allgemeine Transportgleichung verwendet. Die dabei verwendete Transportgröße  $\Phi$  kann beispielsweise die Werte  $1, u_i, T, k, \varepsilon$  repräsentieren (eine ausführliche Übersicht über die verschiedenen Bedeutungen der einzelnen Terme zur Beschreibung spezieller Transportgleichungen wird zum Beispiel in [Glü02] gegeben):

$$\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho u_j \Phi - \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) = q_\Phi. \quad (5.18)$$

Die Integration von Gleichung (5.18) über ein Kontrollvolumen (KV) mit der Oberfläche  $S$  und dem Volumen  $V$  ergibt:

$$\int_V \frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho u_j \Phi - \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) dV = \int_V q_\Phi dV. \quad (5.19)$$

Durch Anwendung des gaußschen Integralsatzes

$$\int_V \frac{\partial(\dots)}{\partial x_j} dV = \int_S (\dots)_j \cdot n_j dS \quad (5.20)$$

auf das mittlere Integral lassen sich nun die konvektiven und diffusiven Flüsse über die Kontrollvolumenflächen ermitteln und es ergibt sich die allgemeine Transportgleichung in Integralform:

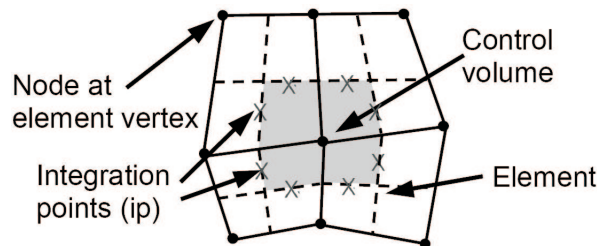
$$\underbrace{\int_V \frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} dV}_{\text{Änderungsrate im KV}} + \underbrace{\int_S (\rho u_j \Phi) \cdot n_j dS}_{\text{konvektive Flüsse}} - \underbrace{\int_S \left( \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) \cdot n_j dS}_{\text{diffusive Flüsse}} = \underbrace{\int_V q_\Phi dV}_{\text{Quellen/Senken im KV}}. \quad (5.21)$$

Die anschauliche Bedeutung der Volumenintegrale ist eine lokale Änderung innerhalb des KV und die Oberflächenintegrale stellen die Flüsse in das KV hinein oder aus dem KV heraus dar. Wird das gesamte Strömungsgebiet nun in viele kleine Kontrollvolumina zerlegt und die Gleichung (5.21) auf jedes einzelne dieser kleinen KV angewendet, so heben sich die Flüsse über die Kontrollvolumenoberflächen innerhalb des Gebiets gegenseitig auf und in der Gesamtbilanz über das komplette Gebiet bleiben nur die Flüsse infolge der definierten Ein- und Ausströmrandbedingungen an den zugehörigen Randflächen des Strömungsgebiets übrig.

Bei genauerer Betrachtung der Herleitung von Gleichung (5.21) für ein bestimmtes Kontrollvolumen fällt die Ähnlichkeit zum Vorgehen zur FEM auf: Wird bei der Integration der Differentialgleichung (Übergang von Gleichung (5.18) auf Gleichung (5.19)) diese zuvor noch mit einer Testfunktion multipliziert, dann erhält man automatisch die Bilanzgleichung für das einzelne KV in der Diskretisierung des Strömungsgebiets, wenn die Testfunktion

spezielle Eigenschaften hat. Es wird also die Testfunktion für jedes der durch die Diskretisierung des Gesamtgebiets definierten KV so gewählt, dass sie innerhalb des betrachteten „KV-Elements“ konstant gleich eins und in allen anderen KV identisch null ist.

Um nun ein algebraisches Gleichungssystem aus den Erhaltungsgleichungen zu erhalten, müssen die Integralausdrücke in Gleichung (5.21) noch numerisch approximiert werden. Die hierzu verwendeten Quadraturformeln und die Rückführung auf entsprechende Diskretisierungsparameter hängen vom Gittertyp und der gewählten Variablenanordnung ab. Im Falle von CFX5 sind verschiedene Gittertypen möglich und die Variablen sind nicht-versetzt angeordnet. Es wird also ein sogenanntes „colocated“ beziehungsweise „unstaggered grid“ verwendet. Das entsprechende Kontrollvolumen wird um den Knoten erzeugt, an dem alle Strömungsgrößen gespeichert werden. Die Anordnung der Knoten mit dem jeweils umliegenden Kontrollvolumen, für das die Erhaltungsgleichungen gelöst werden, ist in Abbildung 5.4 exemplarisch für einen zweidimensionalen Gitterausschnitt skizziert (entnommen aus [MGE<sup>+</sup>04]). Zur Diskretisierung der Erhaltungsgleichungen wird also das (sogenannte) duale Netz mit zellenzentrierten KV verwendet.



**Abbildung 5.4:** Kontrollvolumendefinition und duales Netz in CFX (aus [MGE<sup>+</sup>04]).

Zur Näherung der Integralwerte werden gewisse Annahmen über den Verlauf des Integranden über das Integrationsgebiet getroffen. Des Weiteren ist zur Approximation der Oberflächenintegrale die Kenntnis des Integranden am Rand des KV notwendig, was beim colocated grid (alle Strömungsvariablen sind im KV-Zentrum gespeichert) offensichtlich noch zusätzliche Interpolationen erforderlich macht. Bei der Berechnung der Werte oder der Gradienten an den Integrationspunkten aus den Knotenwerten sind verschiedene Schemata möglich, welche die Genauigkeitsordnung und numerischen Eigenschaften des Verfahrens bestimmen. Insbesondere ist auf Grund der unterschiedlichen physikalischen Aussage und der damit verknüpften mathematischen Eigenschaften eine getrennte Behandlung der konvektiven und der diffusiven Flüsse sinnvoll. Bietet sich bei den diffusiven Termen infolge ihres elliptischen Charakters ein symmetrisches Schema an, so ergibt sich aus dem durch die Konvektion verursachten, physikalischen Informationstransport, für die konvektiven Terme eine Vielzahl an Verfahren, die dieser Eigenschaft Rechnung tragen (zum Beispiel „upwinding“).

Durch die vorangegangenen Schritte ist die räumliche Diskretisierung vollzogen und es verbleibt eine gewöhnliche Differentialgleichung in der Zeit, wobei die Zeitabhängigkeit auf den Term der Änderungsrate im KV in Gleichung (5.21) zurückgeht. Auch hier kommen verschiedene Verfahren unterschiedlicher Ordnung und Eigenschaften (beispielsweise be-

züglich Stabilität und numerischem Aufwand) zum Einsatz, um den transienten Term, ausgehend von den Anfangsbedingungen des Problems, in diskreten Zeitschritten zu approximieren. Die verwendeten Schemata lassen sich (analog zum Vorgehen bei der Elastodynamik nach Abschnitt 3.2) beispielsweise als Ein- und Mehrschrittverfahren oder explizite und implizite Verfahren klassifizieren.

Werden die diskreten Erhaltungsgleichungen für jedes KV ausgewertet, so ergibt sich mit der Forderung, dass Flüsse durch die gleiche Gitterwandfläche von benachbarten KV identisch sein müssen, die Assemblierungsvorschrift und das Gleichungssystem für das gesamte Strömungsgebiet. Wegen der Nichtlinearität der Navier-Stokes-Gleichungen müssen diese algebraischen Gleichungen linearisiert und iterativ gelöst werden. Grundsätzlich werden bei der Lösung gekoppelte und sequentielle Verfahren unterschieden. Bei Letzteren werden die Erhaltungsgleichungen für die unterschiedlichen Transportgrößen separat und nacheinander gelöst. Im Unterschied dazu wird beim hier verwendeten, voll gekoppelten Lösungsverfahren ein Gesamtgleichungssystem in allen unbekannt Variablen aufgebaut, das nach einer Linearisierung mit einem algebraischen Mehrgitterverfahren gelöst wird. Weitere Details über die bei CFX eingesetzte Lösungsstrategie können in [MGE<sup>+</sup>04] nachgelesen werden.

Abschließend bleibt zu bemerken, dass vor allem im Bereich des Strömungslösers große Anstrengungen zur Effizienzsteigerung erforderlich sind (zum Beispiel Mehrgitterverfahren, Parallelisierung), weil die Hauptrechenlast (insbesondere bei der Simulation von turbulenten Strömungen) bei gekoppelten Fluid-Struktur-Wechselwirkungsproblemen in diesem Bereich liegt.

### 5.5.2 Numerische Simulation turbulenter Strömungen

Wie bereits in Abschnitt 5.1 festgestellt wurde, können zwei grundsätzlich verschiedene Strömungsformen unterschieden werden: laminar und turbulent. Eine turbulente Strömung ist immer instationär und dreidimensional und besitzt einen weiten Bereich von Längen- und Zeitskalen. Die größten Wirbelelemente sind durch charakteristische Abmessungen des jeweiligen Strömungsproblems in ihren Abmessungen festgelegt und die kleinsten Skalen sind durch die Zähigkeit des Fluids bestimmt. Die Vorgänge auf dieser Feinstruktur sind maßgeblich für die Dissipation verantwortlich. Des Weiteren lässt sich feststellen, dass die großen und energiereichen Wirbelelemente von der Reynoldszahl oft so gut wie unabhängig sind, weshalb sich bei einer Erhöhung der Reynoldszahl in den vorhandenen Grobstrukturen noch zusätzliche, weitere Feinstrukturen bilden [Wen01]. Außerdem können in den hochgradig unregelmäßigen Strömungsfeldern auch geordnete und deterministische Vorgänge auftreten, die als kohärente Strukturen bezeichnet werden [FP99].

Die Lösungsansätze zur numerischen Simulation turbulenter Strömungen können grob in drei grundverschiedene Herangehensweisen unterteilt werden, wobei es auch Mischformen dieser Ansätze gibt. Ganz grundsätzlich ist immer zwischen den sich zuwiderlaufenden Aspekten der Realitätsnähe und des Berechnungsaufwands abzuwägen. Im Folgenden werden die wesentlichen Eigenschaften der verschiedenen Simulationsstrategien kurz dar-

gestellt. Für weitergehende Fragestellungen sei beispielsweise auf [Bre01], [Dur04], [FP99], [FR02], [MS00], [Sag04], [Wen01] und die darin enthaltene Literatur verwiesen.

- Es besteht allgemeine Übereinstimmung darüber, dass die instationären, dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen die grundlegende Physik der Turbulenz adäquat repräsentieren. Deshalb kann eine numerische Lösung von turbulenten Strömungen (theoretisch) komplett ohne vereinfachende Modellierungen durchgeführt werden. Dieses Vorgehen wird als *direkte numerische Simulation (DNS)* bezeichnet und stellt die genaueste Methode der Turbulenzsimulation dar, weil – abgesehen von verfahrensinhärenten Approximationsfehlern – keine verfälschenden Annahmen eingebracht werden. Damit allerdings sämtliche physikalischen Effekte korrekt erfasst werden können, müssen alle in der turbulenten Strömung enthaltenen Skalen aufgelöst werden. Hierin liegt das Hauptproblem der DNS, weil sich das Skalenspektrum zwischen den großen, problemabhängigen Abmessungen  $L$  und den kleinsten Skalen (Kolmogorovlänge  $l_k$ ) mit steigender Reynoldszahl stark aufweitet. Diese Anforderung schränkt den Anwendungsbereich der DNS (selbst bei der Verwendung von Höchstleistungsrechnern) auf kleine Reynoldszahlen ein und deshalb dienen DNS-Rechnungen vor allem zu Zwecken der Grundlagenforschung und sind auf Grund des exzessiven Speicher- und Rechenzeitbedarfs für praxisrelevante Strömungsuntersuchungen weniger geeignet.

Um den erforderlichen Berechnungsaufwand quantitativ erfassen zu können, werden nun die turbulenten Längen- und Zeitskalen genauer untersucht (nach [Wen01]). Mit der Abschätzung des Bereichs der auftretenden Längenskalen nach Gleichung (5.8) kann die erforderliche räumliche Auflösung abgeschätzt werden. Nachdem die Turbulenz immer dreidimensional ist, muss ein numerisches Gitter, das alle Skalen ( $L \geq l \geq l_k$ ) räumlich abbilden soll, eine Gitterpunktzahl  $N_{GP}$  gemäß

$$N_{GP} \sim \left(\frac{L}{l_k}\right)^3 \sim \left(Re^{\frac{3}{4}}\right)^3 = Re^{\frac{9}{4}} \quad (5.22)$$

aufweisen, wobei  $Re$  die auf  $L$  bezogene Reynoldszahl nach Gleichung (5.4) ist ( $\frac{L}{l_k}$  entspricht der erforderlichen Auflösung je Koordinatenrichtung).

Wird zusätzlich noch in Erwägung gezogen, dass die Frequenzen der Fluktuationen bei steigender Reynoldszahl immer höher werden, so ergibt sich außerdem eine Abschätzung des Verhältnisses der charakteristischen Zeitskala der Strömung  $T$  zur Kolmogorov-Zeitskala  $t_k$ :

$$\left(\frac{T}{t_k}\right) \sim Re^{\frac{1}{2}}. \quad (5.23)$$

Werden diese beiden Abschätzungen kombiniert, so ergibt sich mit der Anzahl der erforderlichen Rechenoperationen  $N_{Op}$  als ein Maß für den gesamten numerischen Aufwand [Bre01], [FP99], [Wen01]:

$$N_{Op} \sim Re^{\frac{9}{4}} \cdot Re^{\frac{1}{2}} = Re^{\frac{11}{4}} \approx Re^3. \quad (5.24)$$

Angesichts der Tatsache, dass technisch relevante Strömungsvorgänge, beispielsweise im Bereich der Aerodynamik, durchaus in Bereichen von  $Re \approx 10^8$  sind, ist die Beschränkung des Anwendungsbereichs der DNS offensichtlich. Im Rahmen der hier

anvisierten Simulation von Fluid-Struktur-Wechselwirkungsproblemen bei umströmten Membranbauwerken muss somit in jedem Fall modelliert werden.

- Das Problem der DNS, dass alle in der Strömung vorhandenen Skalen aufgelöst werden müssen, wird bei der Grobstruktursimulation („Large Eddy Simulation“ (LES)) umgangen. Die Tatsache, dass die energiereichen, großen Skalen (Grobstruktur), die von der mittleren Strömung erzeugt werden und somit von der jeweiligen Geometrie und den Randbedingungen abhängen, stark inhomogen und anisotrop sind, verhindert eine universelle Formulierung von Modellen. Demgegenüber sind die kleinskaligen Strukturen des Strömungsfelds, die aus den großen Bewegungsformen hervorgehen, weitgehend homogen, isotrop und regellos und können somit deutlich einfacher durch entsprechende Modellannahmen beschrieben werden [Bre03].

Basierend auf diesen Eigenschaften der unterschiedlichen Skalen der turbulenten Strömung wird im Rahmen der LES eine Zerlegung des Strömungsfelds in einen Bereich großer Wirbelstrukturen, die direkt mit dem numerischen Verfahren berechnet werden und die sogenannte Feinstruktur, die bei vorgegebener Auflösung des Simulationsverfahrens nicht abgebildet werden kann („subgrid scale“), vorgenommen. Hieraus resultiert der Vorteil, dass gerade die rechenintensiven Anforderungen durch die aufzulösenden kleinsten Skalen (insbesondere bei hohen Reynoldszahlen, siehe Gleichung (5.22)) durch eine geeignete Modellierung umgangen werden.

Bei der Modellierung der nicht aufgelösten, kleinskaligen Effekte muss beachtet werden, dass die Feinstruktur maßgeblich an der Energiedissipation beteiligt ist und die Wechselwirkung zwischen den aufgelösten, großen Wirbelstrukturen und der modellierten Skalen adäquat repräsentiert wird. Für diese Feinstrukturmodelle („subgrid scale models“) gibt es eine Vielzahl an Formulierungen, die aber im Vergleich zur später erläuterten RANS-Simulation vergleichsweise einfach sein können, da nur ein Teil der Skalen durch die entsprechenden Modellannahmen geeignet beschrieben werden muss.

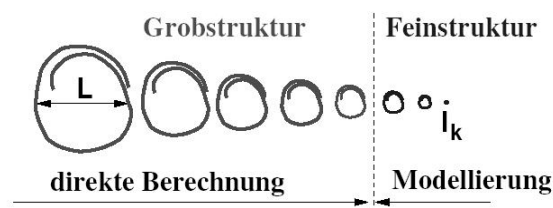


Abbildung 5.5: Konzept der LES (aus [Bre03]).

Die grundsätzliche Idee der LES ist in Abbildung 5.5 dargestellt, wo die Skalentrennung zwischen aufgelöster, energiereicher und problemabhängiger Grobstruktur und der zu modellierenden, energieärmeren, (überwiegend) homogenen und isotropen Feinstruktur verdeutlicht wird. Die Aufspaltung dieser Bereiche kann entweder durch „Volumenmittelung“ oder Filterung der Navier-Stokes-Gleichungen erfolgen. Hieraus kann auch direkt die Konvergenz der LES zur DNS für im Grenzwert verschwindende Filterweiten erklärt werden. Trotz Beschränkung auf den „oberen Be-

reich der Skala“ ist die Durchführung einer LES immer noch sehr aufwändig, weil die mit der Wahl der Gittergröße verbundene Unterscheidung zwischen Grob- und Feinstruktur derart sein muss, dass die unaufgelösten sub-grid scales vergleichsweise isotropes und homogenes Verhalten zeigen.

- Bei vielen technischen Anwendungen ist die detaillierte Kenntnis der in einer turbulenten Strömung enthaltenen Fluktuationen oft nicht von Interesse. Vielmehr ist bereits eine Aussage über die mittlere Strömung ausreichend. Dabei ist aber der Einfluss der Turbulenz auf eben diese „globalere“ Sicht des Strömungsfelds nicht vernachlässigbar und muss demnach in den Berechnungsansätzen entsprechend berücksichtigt werden. Die Grundidee dieser Berechnungsstrategie geht auf Reynolds zurück und beruht auf einer statistischen Betrachtungsweise der Strömung. Hierzu werden die Momentanwerte  $\Phi$  der Strömungsgrößen in einen Mittelwert  $\overline{\Phi}$  und einen Schwankungsanteil  $\Phi'$  zerlegt, was für die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors  $u_i$  und den Druck  $p$  folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$u_i = \overline{u}_i + u'_i \quad \text{und} \quad p = \overline{p} + p'. \quad (5.25)$$

Zur Berechnung des Mittelwerts bei einer statistisch stationären Strömung ist (im Idealfall) ein unendlich langer Mittelungszeitraum notwendig. Dagegen wird bei einer statistisch instationären Strömung eine Ensemble-Mittelung durchgeführt, wobei die Mittelungszeit lange genug sein muss, um die hochfrequenten, turbulenten Fluktuationen herauszumitteln und die vergleichsweise langsamen und großräumigen Veränderungen im Strömungsfeld zu erhalten.

Wird dieses – auch als Reynolds-Mittelung bezeichnete – Vorgehen auf die Navier-Stokes-Gleichungen (siehe Gleichung (5.12)) angewandt, so erhält man die sogenannten *Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen* („Reynolds averaged Navier-Stokes“ equations, RANS):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_j} &= 0, \\ \rho \left( \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \right) &= -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho \overline{u'_i u'_j} \right). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Bei der Mittelung der nichtlinearen, konvektiven Terme kommt ein zusätzlicher Beitrag zur Impulsgleichung der RANS zustande:  $\overline{u'_i u'_j}$ . Die restlichen Terme entsprechen vom Aufbau denen in den ursprünglichen Gleichungen, wobei nun die Mittelwerte an die Stelle der Originalvariablen treten. Diese neuen Terme, die den turbulenzbedingten Impulstransport repräsentieren, sind weitere Unbekannte und werden als reynoldsscher Spannungstensor bezeichnet. Auf Grund der Symmetrie ergeben sich daraus sechs neue Unbekannte, die bei unveränderter Anzahl an Bestimmungsgleichungen in einem unterbestimmten Gleichungssystem resultieren. Dies wird als das Schließungsproblem der Turbulenz bezeichnet.

Um diese zehn Unbekannten mit den vier Erhaltungsgleichungen berechnen zu können, müssen weitere Informationen mit empirischer oder halb-empirischer Natur eingebracht werden, damit das Gleichungssystem wieder geschlossen ist. Dies ist Ge-



genstand der statistischen Turbulenzmodellierung, bei der durch geeignete physikalisch begründete Annahmen die zusätzlichen Unbekannten wieder durch bekannte Größen, wie beispielsweise der mittleren Strömung, ausgedrückt werden. Zur Klassifikation von Turbulenzmodellen wird die Anzahl an (neben der Massenerhaltung und den drei Impulsgleichungen) zusätzlich zu lösenden partiellen Differentialgleichungen herangezogen und man unterscheidet somit zwischen Null-, Ein- und Zweigleichungsmodellen [Dur03a], [Men03]. Diese erwähnten Modelle beruhen im Allgemeinen auf dem sogenannten Wirbelviskositätsprinzip, das in Analogie zum molekülbedingten Impulstransport auf Grund der Viskosität (als Fluideigenschaft) eine turbulente Viskosität oder Wirbelviskosität  $\mu_t$  (die aber eine Strömungseigenschaft darstellt) einführt und die unbekannteren Reynoldsspannungen darauf zurückführt. Demgegenüber werden bei den sogenannten Reynoldsspannungsmodellen die exakten Transportgleichungen für die Komponenten des Reynoldsschen Spannungstensors verwendet und somit werden nur die Korrelationen dritter Ordnung modelliert. Bei diesen Modellen ist ein erheblicher numerischer Mehraufwand notwendig, weil sieben zusätzliche Transportgleichungen (sechs für die Reynoldsspannungen und eine für die Dissipationsrate  $\epsilon$ ) gelöst werden müssen.

Zusammenfassend kann man feststellen, dass es eine Vielzahl an Turbulenzmodellen mit jeweiligen Stärken und Schwächen gibt. Das in der industriellen Praxis sehr populäre  $k$ - $\epsilon$ -Modell gehört zur Kategorie der Zweigleichungsmodelle. Im Rahmen dieser Arbeit wird das SST-Modell („Shear Stress Transport“) nach Menter [Men94] verwendet, das ebenso ein Vertreter dieser Gruppe ist. Es stellt ein zonales Modell dar, das die Vorteile aus  $k$ - $\omega$ -Modell in Wandnähe und  $k$ - $\epsilon$ -Modell in der Außenströmung verbindet [Men03].

Simulationen von turbulenten Strömungen auf der Basis der RANS-Gleichungen stellen die schnellste und rechentechnisch billigste Variante dar. Insbesondere die Turbulenzmodellierung mit Zweigleichungsmodellen hat sich als Quasi-Standard in der industriellen Anwendung etabliert und wird dort erfolgreich eingesetzt.

Nach diesem kurzen Überblick kann abschließend festgestellt werden, dass im Vergleich zur laminaren Strömungsberechnung die Simulation turbulenter Strömungsvorgänge deutlich schwieriger und aufwändiger ist. Die dargestellten Lösungsansätze unterscheiden sich bezüglich des Modellierungsgrads und des Berechnungsaufwands. Grundsätzlich verhalten sich diese beiden Aspekte gegenläufig: Je genauer beziehungsweise realistischer die turbulente Strömung simuliert werden soll, desto höher ist der numerische Aufwand, da weniger Modellierungsannahmen eingebracht werden. Angefangen bei der DNS, die keinerlei zusätzliche Annahmen benötigt, über die LES, bei der nur die vom numerischen Verfahren nicht aufgelösten Skalen (Feinstruktur) einer Modellierung bedürfen, bis hin zur RANS, bei der das komplette Turbulenzspektrum statistisch modelliert werden muss, weil im Gegensatz zur LES, eine zeitliche Zerlegung in Mittelwert und turbulente Schwankungen vorgenommen wird. Die Wahl des entsprechenden Simulationsansatzes für eine bestimmte Problemstellung muss auf der Grundlage der vorhandenen Machbarkeit, also Rechnerkapazitäten und der physikalischen Eigenschaften der jeweils betrachteten Strömungssituation, getroffen werden.

Die in diesem Abschnitt vorgenommene, grobe Übersicht über numerische Simulationsansätze bei turbulenten Strömungen ist in Abbildung 5.6 zusammengefasst, womit auch der hier verwendete Ansatz in diesen Gesamtkontext eingeordnet werden kann.

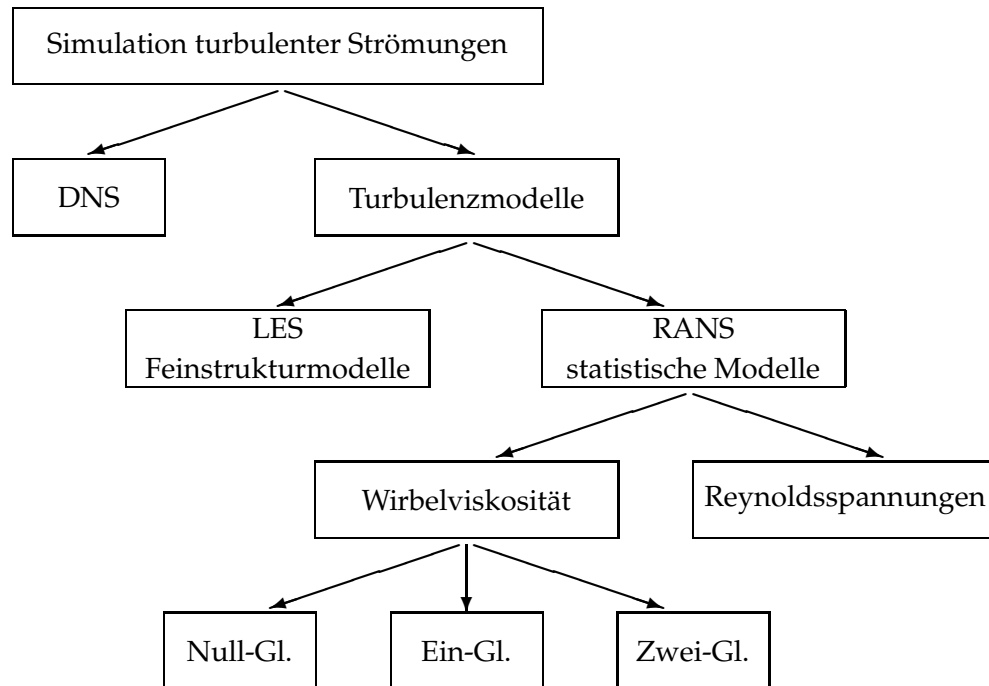


Abbildung 5.6: Simulationsansätze für turbulente Strömungen.

### 5.5.3 Strömungen auf zeitveränderlichen Gebieten

Bei der Simulation von Fluid-Struktur-Wechselwirkungsproblemen ergeben sich auf Grund der durch die Strukturbewegung vorgegebenen, zeitlich veränderlichen Ränder des Fluidgebiets neue Fragestellungen. Strömungen auf zeitveränderlichen Gebieten werden auf der Grundlage einer allgemeineren kontinuumsmechanischen Basis beschrieben, der *Arbitrary Lagrangean Eulerian-Betrachtungsweise (ALE)*.

Wegen den bei Strömungsvorgängen auftretenden großen Bewegungen von Fluidpartikeln stellt die eulersche Betrachtungsweise die klassische Beschreibung von Strömungsproblemen auf zeitinvarianten Gebieten dar. Hierbei sitzt der Beobachter fest an einem Punkt im Raum und misst die Eigenschaften der passierenden Fluidteilchen (siehe Abschnitt 5.4). Bei der genauen Definition von Oberflächen und darauf vorgeschriebener Randbedingungen sind eventuell zusätzliche Maßnahmen erforderlich, wenn sie nicht mit dem Netz übereinstimmen. Demgegenüber ist bei der lagrangeschen Beschreibung, die in der Strukturmechanik den Standard darstellt, die Definition und Beschreibung von Rändern vergleichsweise einfach, weil hier der Beobachter an einem Materiepunkt sitzt und im Verlauf der Deformation dessen Eigenschaften beschreibt (siehe Abschnitt 2.2.1). Jedoch resultieren aus diesem „Haften an einem Fluidpartikel“ speziell im Strömungsgebiet, wo beispielsweise Wirbelstrukturen auftreten, exzessive Netzdeformationen. Als Folge davon wären ständige Neu-

vernetzungen erforderlich, die neben dem hohen Berechnungsaufwand zusätzliche Fehler in Folge des notwendigen Variablentransfers zwischen den verschiedenen Netzen mit sich bringen würden.

Die ALE-Betrachtungsweise versucht nun, die jeweiligen Vorteile der eulerschen und der lagrangeschen Beschreibung zu kombinieren, um die großen Bewegungen der Fluidpartikel im Gebiet ebenso darstellen zu können, wie die korrekte Beschreibung des Strömungsgebietsrands und der darauf zu definierenden Randbedingungen zu gewährleisten. Beispielsweise kommt bei turbulenten Strömungen dem letzten Punkt eine große Bedeutung zu, da in diesem Fall die feine Auflösung an der Wand zur adäquaten Beschreibung der Grenzschichten eine wichtige Rolle spielt. Um dies zu realisieren, wird der Beobachter bei der ALE-Betrachtung weder fix an einem Raumpunkt, noch an einem Materiepunkt sitzen, sondern kann sich willkürlich („arbitrary“) bewegen. Wegen dieser Grundidee der ALE-Betrachtungsweise, bewegen sich die Netze (die sozusagen die Rolle des Beobachters übernehmen) bei numerischen Simulationen beliebig und können so an Rändern die lagrangesche Beschreibung nachbilden und im Gebiet sich eher wie eine eulersche Beschreibung verhalten. Die klassischen Kontinuumsbeschreibungen sind somit als Sonderfälle in der ALE-Betrachtungsweise enthalten. Für weitere Grundlagen und entsprechende Herleitungen der ALE-basierten Kontinuumsmechanik sei an dieser Stelle auf [Don83], [DHPRF04], [Wal99] und die dort empfohlene Literatur verwiesen.

Bei der Herleitung der Grundgleichungen in der ALE-Betrachtung kommen bei der FVM auf Grund der veränderlichen Kontrollvolumina weitere Aspekte ins Spiel, weil die Integrationen nun über zeitveränderliche Gebiete (Volumina  $V(t)$  und Oberflächen  $S(t)$ ) ausgeführt werden müssen. Bei genauerer Betrachtung der integralen Form der allgemeinen Transportgleichung (5.21) kann der Term der Änderungsrate im Kontrollvolumen als einziges zeitabhängiges Integral identifiziert werden, denn die restlichen Anteile werden zu einem bestimmten Zeitpunkt ausgewertet, an dem man wieder von einem konstantem  $V$  und  $S$  ausgehen kann. Entsprechend der Ausführungen in [FP99] und [Glü02] kann durch Anwendung der Leibnizregel die allgemeine Transportgleichung für instationäre Berechnungen auf bewegten Gittern hergeleitet werden:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \Phi \, dV + \int_S (\rho (u_j - u_{Gj}) \Phi) \cdot n_j \, dS - \int_S \left( \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) \cdot n_j \, dS = \int_V q_\Phi \, dV. \quad (5.27)$$

Hierin stellt  $u_{Gj}$  die sogenannte Gittergeschwindigkeit dar, also die Geschwindigkeit der jeweiligen Begrenzungsfläche des zeitveränderlichen Kontrollvolumens, die zu einer Modifikation der konvektiven Flüsse führt. Diese Korrekturen werden als Gitterflüsse bezeichnet, da sie den konvektiven Zu- oder Abstrom bedingt durch die Bewegung der Kontrollvolumen-Flächen repräsentieren. Im Falle verschwindender Gittergeschwindigkeiten geht die Transportgleichung in die ursprüngliche Form für raumfeste Gitter über und falls die Gittergeschwindigkeit genau mit der Strömungsgeschwindigkeit übereinstimmt, das heißt  $u_j = u_{Gj}$  gilt, so entfallen alle konvektiven Anteile.

Im Zusammenhang mit bewegten Kontrollvolumina bei der FVM tritt eine weitere Erhaltungsgleichung auf, die sogenannte *Raumerhaltungsgleichung* oder das „space conservation

law (SCL)“:

$$\frac{d}{dt} \int_V dV - \int_S u_{Gj} \cdot n_j dS = 0. \quad (5.28)$$

Wird sie nicht erfüllt, so kann es bei der Berechnung von inkompressiblen Strömungen zu einer künstlichen Massenproduktion kommen, die sich zu einem deutlichen Fehler akkumulieren kann [DP88] und nur im Falle sehr kleiner Verschiebungen beziehungsweise kleiner Zeitschritte eventuell vernachlässigbar sein könnte. Aus Konservativitätsgründen muss also das Raumerhaltungsgesetz für jedes Kontrollvolumen erfüllt sein. Diese Raumerhaltungsgleichung besagt, dass die Änderungsrate des Volumens im Kontrollvolumen mit der Volumenänderung infolge der bewegten Seitenflächen eines Kontrollvolumens übereinstimmen muss. Anschaulich bedeutet dies, dass die Volumenänderung im Kontrollvolumen je Zeitschritt identisch mit den überstrichenen Teilvolumina der bewegten Seitenflächen („Schleppvolumina“ oder „swept volumes“) sein muss [Tes02].

Diese geometrischen Bilanzgleichungen, auch mit „geometric conservation laws (GCL)“ bezeichnet, stellen Bedingungen zur Berechnung der geometrischen Parameter dar, damit wenigstens die Mindestanforderung an ein Lösungsverfahren für Strömungen auf zeitveränderlichen Gebieten, nämlich die korrekte Wiedergabe eines gleichförmigen Strömungsfelds, erfüllt wird. Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die Integration des Strömungsfelds, die Ermittlung der Netzposition und der Netzgeschwindigkeiten nicht unabhängig voneinander betrachtet werden können, sondern immer im Einklang mit der GCL beziehungsweise SCL sein müssen [Wal99]. Als Auswirkung einer Verletzung der GCL wird anhand einer aeroelastischen Berechnung in [LF96] das Auftreten unphysikalischer Oszillationen in der Lösung aufgezeigt, die potenziell auch zum Versagen des Gesamtverfahrens führen können.

Nachdem die Netzgeschwindigkeiten aus der Forderung nach der Gültigkeit des geometric/space conservation law, schon festgelegt sind, bleibt noch die Ermittlung der Positionen der Netzknoten im Raum. Prinzipiell sind verschiedene Verfahren dazu geeignet, die Netzposition zum neuen Zeitpunkt  $t_{n+1}$  zu berechnen. Die Aufgabe besteht also darin, eine „möglichst geschickte“ und numerisch billige Aktualisierung des Netzes im gesamten ALE-Strömungsgebiet infolge der bei FSI durch die Strukturbewegung vorgegebenen Randverschiebung zu erreichen. Hierbei ist besonders darauf zu achten, dass die Qualität des Strömungsgitters erhalten bleibt, also starke Elementverzerrungen vermieden werden und erwünschte Netzcharakteristika, wie zum Beispiel Grenzschichtnetze, erhalten bleiben. Die Neuvernetzung des Strömungsgebiets sollte auf Grund des hohen Rechenaufwands und der damit ebenso verbundenen Transferfehler beim Übertrag der Variablen zwischen zwei Netzen möglichst (lange) vermieden werden.

Zur Berechnung der Netzbewegung sind viele verschiedene Verfahren entwickelt worden. Prinzipiell sind alle netzglättenden Algorithmen einsetzbar, die dazu dienen, zu einer fixen Topologie ein qualitativ möglichst hochwertiges Netz zu bestimmen. Man kann feststellen, dass sich diese Verfahren in der Allgemeinheit der damit jeweils lösbaren Fragestellungen und – in direkter Folge davon – im Rechenaufwand unterscheiden.

So sind einerseits Interpolationsverfahren mit sehr niedrigem Berechnungsaufwand zu nennen, die aber in der Regel nur für bestimmte geometrische Konstellationen und/oder Netz-

topologien einsetzbar sind. Beispielsweise wurden in [Glü02] ausschließlich blockstrukturierte Gitter verwendet, für die eine transfinite Interpolation sehr erfolgreich umgesetzt wurde und bei der die vorgeschriebenen Gitterverschiebungen am Rand durch entsprechende Interpolationsvorschriften auf die Gitterpunkte im Innenbereich des Strömungsgebiets verteilt werden. Bei den durchgeführten Simulationen war der numerische Aufwand dieser Art der „algebraischen“ Gitteranpassung sehr gering und machte unter 0,5% der Gesamtrechenzeit aus.

Demgegenüber stehen die allgemein und mit beliebigen Netztypen einsetzbaren Methoden, die aber normalerweise Gleichungslösungen erfordern und deshalb auch einen deutlichen numerischen Mehraufwand mit sich bringen. Die Neupositionierung der Gitterknoten kann beispielsweise aus der Lösung eines fiktiven Strukturproblems gewonnen werden, bei dem das bewegliche Netz als eine äquivalente Ersatzstruktur interpretiert wird. In diesem Fall werden die gesuchten Netzbewegungen mit den Strukturverschiebungen identifiziert. Diese Pseudostruktur kann aus diskreten Strukturelementen wie Federn, Dämpfern und Einzelmassen aufgebaut sein oder als ein kontinuierliches Strukturmodell (Scheibe in 2D und Kontinuum in 3D) definiert werden. Wichtig ist bei beiden Varianten, dass während des Deformationsprozesses die Elementqualität gesichert bleibt und sich überlappende Elemente unbedingt vermieden werden, was einerseits beispielsweise durch Torsionsfedern [FDKL98], [DF02] gelöst werden kann und andererseits durch die kontinuierlich verteilte Steifigkeit gesichert ist. Durch die Lösung eines elastostatischen Problems in jedem Zeitschritt mit ausschließlich aufgebrauchten Dirichlet-Randbedingungen werden so irreguläre Elemente im Strömungsgebiet wirksam vermieden [Wal99].

Das in diesem Kontext wesentliche Charakteristikum der Pseudostrukturansätze, nämlich glatte Lösungsverläufe zu besitzen, resultiert aus den elliptischen Operatoren dieser Problemstellungen. Auf eben dieser Eigenschaft beruhen die Netzglättungsalgorithmen, die den Laplace-Operator auf dem ALE-Gebiet lösen. In diesen Fällen wird für jede Netzverschiebungskomponente eine Laplacegleichung gelöst und man erreicht damit eine möglichst gleichmäßige Verteilung der Netzknoten im Gebiet. Diese Strategie wird auch bei CFX5 verfolgt, wo aufbauend auf den vorgeschriebenen Randverformungen die folgende Gleichung gelöst wird [KM04]:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \gamma \frac{\partial}{\partial x_i} d_i \right) = 0. \quad (5.29)$$

Die Variable  $d_i$  stellt hierbei die jeweilige Netzverschiebungskomponente dar und  $\gamma$  ist eine variabel wählbare Diffusivität, die zur Kontrolle der Netzdeformationen verwendet wird. Um in gewissen Bereichen (beispielsweise in der Wandgrenzschicht) die Netztopologie möglichst zu erhalten, wird dann ein hoher Diffusionskoeffizient gewählt, der nur zu kleinen Netzveränderungen in dem entsprechenden Bereich führt.

Die beschriebenen ALE-basierten Verfahren zur Simulation von Strömungen auf zeitveränderlichen Gebieten sind sehr leistungsfähig, so lange die Randverschiebungen nicht zu groß werden. Letztendlich ist die Anpassung des Rechengitters an die modifizierte Randgeometrie immer mit einer mehr oder minder geschickt durchgeführten (beziehungsweise vom Rand aus verteilten) Deformation der Elemente im Gebiet verbunden. Daraus folgt unmittelbar, dass Fälle mit großen Deformationen oder gar Topologieänderungen im Strömungsgebiet immer eine Neuvernetzung („remeshing“) erforderlich machen. Für diese Art

von Anwendungen bieten sich alternative Herangehensweisen auf festen Gittern an („fixed (background) grid approaches“) [WGG<sup>+</sup>06].

**FAZIT:**

In diesem Kapitel wurden die wesentlichen Grundlagen zum Verständnis der Gebäudeumströmungen knapp dargestellt und darauf aufbauend mit den inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen eine Modellwahl für die adäquate Beschreibung von Strömungsproblemen in der Bauwerksaerodynamik getroffen. Die gewählte Herangehensweise ist davon geprägt, dass sie möglichst allgemein gehalten ist und sich somit ein großes Aufgabenspektrum behandeln lässt. Des Weiteren wurden die im Kontext von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen wichtigen Fragestellungen bezüglich Strömungen auf zeitveränderlichen Gebieten diskutiert.

Wegen der Komplexität der angesprochenen Probleme und der notwendigen geometrischen Flexibilität ist eine Lösung nur mit numerischen Verfahren möglich, wobei im Folgenden die Finite-Volumen-Methode eingesetzt wird. Die Simulation von turbulenten Strömungen wird in dieser Arbeit auf der Basis der RANS-Gleichungen unter Verwendung des SST-Turbulenzmodells durchgeführt. Zur Berücksichtigung der bei der Fluid-Struktur-Interaktion auftretenden Randbewegungen werden die Grundgleichungen der Strömungsmechanik auf bewegten Rechengittern gelöst. Die dabei zu ermittelnde Netzbewegung wird als Ergebnis eines Laplaceproblems erhalten. Zur numerischen Strömungsberechnung wird das Programm CFX5 eingesetzt, das über eine Kopplungsschnittstelle mit dem Finite-Elemente-Programm CARAT verbunden ist (siehe Kapitel 6). Hieraus resultiert eine modulare und flexible Softwareumgebung für die Lösung von Problemen mit Fluid-Struktur-Wechselwirkungen.





# Kapitel 6

## Fluid-Struktur-Interaktion

Die bisher vorgestellten Grundgleichungen und numerischen Lösungsverfahren beschränken sich auf Betrachtungen jeweils eines physikalischen Feldes. Auf der einen Seite wurden Membranstrukturen mit ihrem geometrisch nichtlinearen Verhalten unter externen, vordefinierten Belastungen betrachtet. Hierbei machte die Kopplung der Membrangeometrie mit dem jeweils vorhandenen Spannungszustand weitere Berechnungen und Verfahrensentwicklungen notwendig. Auf der anderen Seite wurden, basierend auf der Analyse der Eigenschaften des natürlichen Windes, die Modellwahl zur Beschreibung von Gebäudeumströmungen getroffen und wesentliche Aspekte zu deren numerischer Berechnung erläutert.

Im Gegensatz zu konventionellen Tragwerken, bei denen in guter Näherung eine unidirektionale Kopplung vorliegt, wird eine durch Umströmungen verursachte Einwirkung auf Membranstrukturen in der Regel große Deformationen hervorrufen, die wiederum das Strömungsfeld beeinflussen. Hieraus resultiert eine modifizierte Oberflächenbelastung, die zu einer geänderten Strukturantwort führt. In diesen Fällen liegt also eine starke Kopplung der beiden physikalischen Felder der Struktur- und Strömungsmechanik vor, die nicht mehr vernachlässigt werden darf.

In diesem Kapitel wird zuerst eine Klassifikation von Mehrfeldproblemen gegeben, um dann die Problemstellung der umströmten Membrantragwerke einzuordnen. Durch die ohnehin schon in den jeweiligen Teilgebieten herausfordernden Fragestellungen (Dynamik mit geometrischer Nichtlinearität, turbulente Umströmung) verschließt sich das betrachtete, gekoppelte Problem jeglicher analytischen Lösung. Auf Grund der hohen Komplexität wird für die Aeroelastik von Freiformmembranen ein numerisches Vorgehen mit einer partitionierten Herangehensweise vorgeschlagen. Damit die starke Wechselwirkung zwischen Strömungen und den leichten Strukturen auch algorithmisch gewährleistet ist, wird eine darauf abgestimmte Kopplungsstrategie umgesetzt. Darüber hinaus wird ein ganzheitliches Berechnungskonzept erarbeitet, das der Kopplung von Form und strukturmechanischem Verhalten Rechnung trägt.

### 6.1 Klassifikation und Lösungsverfahren für Mehrfeldprobleme

Streng genommen sind die meisten Ingenieuraufgaben Mehrfeldprobleme. Üblicherweise wird, basierend auf theoretischen Überlegungen oder Erfahrungswerten, durch geeignete

Annahmen über die sich eigentlich beeinflussenden Felder eine separate Lösung der einzelnen Fragestellungen ermöglicht. Dies ist aber nur dann möglich, wenn die gegenseitige Beeinflussung schwach ausgeprägt ist. Liegt eine starke Kopplung (also ein hohes Maß an Interaktion) vor, so würde eine isolierte Lösung der einzelnen Fragestellungen zu wenig sinnvollen Ergebnissen führen und ist demnach unzulässig.

Nach der allgemeinen Definition von *gekoppelten Problemen* in [ZTZ05] werden diejenigen Fragestellungen als gekoppelt bezeichnet, bei denen auf potentiell unterschiedlichen Gebieten und mittels verschiedener, voneinander abhängiger Variablen, üblicherweise (aber eben nicht immer) verschiedene physikalische Phänomene beschrieben werden, die folgende Charakteristika aufweisen:

- Kein Teilproblem kann isoliert von dem jeweils anderen gelöst werden.
- Keiner der voneinander abhängigen Variablensätze kann bereits auf Ebene der Differentialgleichungen explizit eliminiert werden.

Die absichtlich allgemein gefasste, nicht ausschließlich auf physikalisch unterschiedliche Fragen spezialisierte, Definition erlaubt nun eine weitere Unterteilung der gekoppelten Fragestellungen in:

- *Physikalische Einfeldprobleme*, bei denen Fragestellungen nur einer „Disziplin“, aber mit sehr unterschiedlichen Eigenschaften interagieren und so durch die Definition von algorithmischen Feldern die zur jeweiligen Lösung optimal angepassten Modellierungen und Diskretisierungsmethoden eingesetzt werden können. Im Bereich der Strukturdynamik ist beispielsweise bei der Fahrzeug-Fahrweg-Kopplung die Modellierung des Fahrzeugs als Mehrkörpersystem und der Brückenstruktur als Finite-Elemente-Modell auf Grund der sehr unterschiedlichen dynamischen Charakteristika vorteilhaft [Lut02]. Des Weiteren ist auch bei sehr unterschiedlich verteilten Steifigkeiten innerhalb einer Struktur die Aufteilung in jeweils einen zeitlich implizit beziehungsweise explizit integrierten Teil zur Vermeidung von zu starken (stabilitätsbedingten) Zeitschrittrestriktionen denkbar [Mok01].
- *Physikalische Mehrfeldprobleme* („multiphysics-problems“) sind dadurch gekennzeichnet, dass unterschiedliche physikalische Felder miteinander in Wechselwirkung stehen. In diesem Fall sind auf Grund der physikalisch unterschiedlichen Fragestellungen in der Regel auch verschiedenartige Aspekte bei der Modellierung und eine differenzierte Herangehensweise zu deren Lösung zu beachten. Die unterschiedlichen physikalischen Fragestellungen kommen beispielsweise aus den Bereichen Thermodynamik, Elektromagnetismus, Strömungsmechanik, Akustik oder Festkörpermechanik.

Des Weiteren werden

- *volumengekoppelte* und
- *oberflächengekoppelte*

Mehrfeldprobleme unterschieden [ZTZ05]. Bei volumengekoppelten Fragestellungen überlappen sich die Gebiete der unterschiedlichen Felder mit den jeweiligen, problemspezifischen Variablen teilweise oder vollständig. Die Kopplung der unterschiedlichen physikalischen Phänomene geschieht hierbei über die Differentialgleichungen im Gebiet. Beispiele hierfür sind die Metallumformung mit einer Kopplung von Strukturmechanik und Thermodynamik und auch Strömungsprozesse durch deformierbare, poröse Medien, wie zum Beispiel Böden [Sch04]. Hingegen sind die einzelnen Felder bei oberflächengekoppelten Fragestellungen nur an den Gebietsrändern miteinander über Kopplungsbedingungen verknüpft. Die Interaktion der Felder geschieht hierbei über die entsprechenden Randbedingungen. Die bereits genannten physikalischen Einfeldprobleme lassen sich meist dieser Gruppe zuordnen. Eine typische Fragestellung mit Kopplung an den Gebietsrändern ist die Interaktion von Fluiden und flexiblen Strukturen. Beispiele hierfür sind Blutströmungen in Adern [CGN05], [GVF05], flüssigkeitsgefüllte Behälter unter seismischer Anregung, die durch schwappende Flüssigkeiten belastet werden [SR01], [Rap00], explosionsbelastete Strukturen im Kraftwerksbau [CHSC01] und der Bereich der Aeroelastizität [För74]. Unter Letzterem versteht man die Wechselwirkung von Luftströmungen mit Strukturen, wie sie bei Flugzeugen, Luftschiffen, Fallschirmen und auch filigranen Bauwerken auftreten können.

In manchen Fällen ist keine eindeutige Zuordnung zu den oben genannten Kategorien möglich und es ist nicht jede erdenkliche gekoppelte Fragestellung damit erfasst. Je nach Anwendungsfall können eventuell die Anforderungen eines Felds deutlich anspruchsvoller sein, als die der restlichen Felder. Es ist offensichtlich, dass im Rahmen gekoppelter Fragestellungen unterschiedliche Komplexitätsstufen innerhalb der einzelnen Problemklassen, wie zum Beispiel der Fluid-Struktur-Interaktion, möglich sind. Eine entsprechende Klassifizierung wird beispielsweise in [Ceb96] vorgenommen, bei der je nach Komplexität im Fluidfeld, im Strukturfeld und im Bereich der Kopplung jeweils unterschiedliche Modellierungsstufen (siehe z.B. Abschnitt 5.2 für Fluide) angewendet werden.

Die sich aus dem Schwierigkeitsgrad der Teilprobleme und den Effekten aus der Interaktion ergebende Komplexität des Gesamtproblems bestimmt natürlich unmittelbar die möglichen beziehungsweise erforderlichen Herangehensweisen. Sind die betrachteten Fragestellungen mit entsprechenden Annahmen für ganz bestimmte Anwendungen vereinfachbar, so können die klassischen, analytischen Lösungsansätze darauf angewandt werden (für den Bereich der Aeroelastik von Flugzeugen siehe zum Beispiel [BAH96]). Bleiben beispielsweise im Bereich der Fluid-Struktur-Interaktion die auftretenden Verformungen klein und beschränkt man sich auf interne Strömungsvorgänge, so sind unter bestimmten Umständen Berechnungen im Modalraum durchführbar [MO95], [Oha04]. Kommen jedoch nichtlineare Effekte aus dem Strukturverhalten hinzu, so ist eine Untersuchung im Zeitbereich mit entsprechend hohem Aufwand nötig, was aber wiederum die Behandlung von sehr allgemeinen Aufgabenstellungen erlaubt [FGB03], [Far04].

Das in dieser Arbeit zu lösende Problem der windumströmten Membranstrukturen ist dadurch gekennzeichnet, dass die Umströmung eines Bauwerks in der atmosphärischen Grenzschicht turbulent und sehr komplex ist (siehe Abschnitt 5.3) und dass außerdem die Strukturen auf Grund ihres Tragverhaltens (siehe Abschnitt 2.3.1) große Verschiebungen unter externen Lasten aufweisen. Es sind also im Fluidbereich die inkompressiblen

Navier-Stokes-Gleichungen (siehe Abschnitt 5.4) zu lösen und die Grundgleichungen der Strukturmechanik müssen auf der Basis einer geometrisch nichtlinearen Beschreibung hergeleitet werden. Hinzu kommt, dass die Membrangeometrien Freiformflächen sind und eine Vielzahl an Membranformen möglich ist. Für das zu lösende oberflächengekoppelte Problem bedeutet dies, dass schon die Berechnung der einzelnen physikalischen Felder sehr komplex ist und keine Vereinfachung mehr zulässt. Deshalb ist eine numerische Analyse des Mehrfeldproblems erforderlich.

Wie bereits festgestellt, besteht ein starker Zusammenhang zwischen der Komplexität des Gesamtproblems und geeigneter Lösungsmethoden. Prinzipiell gibt es nach [FPF01], [PF83] drei verschiedene Herangehensweisen zur Simulation von gekoppelten Fragestellungen:

- Bei der *Feldelimination* werden Feldgrößen eines Felds bereits auf Differentialgleichungsebene in die Gleichungen der anderen Felder eingesetzt und diese werden dann gelöst. Dieses Vorgehen ist auf spezielle, lineare Problemstellungen beschränkt und es führt häufig auf sehr schwierig zu lösende Differentialgleichungssysteme. Wegen der Restriktion der Feldelimination auf bestimmte, einfache Fragestellungen, die interessanterweise auch nicht in der Definition gekoppelter Probleme nach [ZTZ05] (siehe Seite 156) berücksichtigt sind, wird diese Art der Lösung im Folgenden nicht weiter verfolgt.
- Bei der *monolithischen* oder *simultanen* Behandlung des gekoppelten Problems werden alle physikalischen und algorithmischen Felder in einem Ansatz formuliert und gleichzeitig gelöst. Hierbei werden stets alle Wechselwirkungen zwischen den betroffenen Feldern direkt berücksichtigt.
- Bei der *partitionierten* Herangehensweise werden die einzelnen Teilfelder unabhängig voneinander modelliert und numerisch gelöst. Die im Gesamtsystem vorhandene Interaktion zwischen den Teilfeldern wird über Kopplungsterme sichergestellt, die während der voranschreitenden, isolierten Simulation der einzelnen Felder zwischen diesen ausgetauscht werden. Bei der Kommunikation zwischen den Teilfeldern werden die Methoden der Vorhersage (Prädiktor), Substitution und Synchronisation angewendet. Eine Übersicht über weitere Hilfsmittel, die im Rahmen einer partitionierten Berechnung eingesetzt werden, kann in [FPF01] nachgelesen werden.

Im Gegensatz zur Feldelimination sind die monolithische und die partitionierte Herangehensweise prinzipiell in ihrer Anwendbarkeit nicht eingeschränkt, weswegen sie im Folgenden verglichen werden.

Die Vorteile der monolithischen Herangehensweise ergeben sich durch ihre verfahrensinhärente starke Kopplung. Die Konvergenzgeschwindigkeit und numerische Stabilität bei der Lösung des gekoppelten Gesamtsystems sind deshalb im Vergleich zu partitionierten Verfahren höher. Des Weiteren erschließen sich aus der gesamtheitlichen Formulierung der gekoppelten Fragestellung Möglichkeiten, die mathematischen und numerischen Eigenschaften ganzheitlich zu betrachten [Hüb03], [Wal02]. Die Nachteile der monolithischen

Verfahren, wie beispielsweise große und unter Umständen schlecht konditionierte Koeffizientenmatrizen, problemabhängige Löser und mangelnde Modularität der Softwareumgebung sind genau die Punkte, durch die sich wiederum die partitionierte Herangehensweise auszeichnet.

Diese Vorteile der partitionierten Verfahren sind umso ausgeprägter, je komplexer die gekoppelte Fragestellung ist [FPF01], [Mok01]:

- Voneinander entkoppelte Lösungsprozesse: Es können die auf das Einzelfeld abgestimmten und bewährten Lösungsverfahren verwendet werden. Aus der Aufspaltung des Gesamtproblems ergibt sich auch eine reduzierte Problemgröße, was die Berechnung größerer gekoppelter Probleme erleichtert, weil der Speicher- und Lösungsaufwand von den Einzelfeldlösern bestimmt wird. Des Weiteren ist durch die partitionierte Systemlösung auch eine Parallelisierung direkt möglich, weil jede Partition auf unterschiedlichen Prozessoren gelöst werden kann.
- Bessere Konditionierung der Koeffizientenmatrizen: Stark differierende Eigenschaften der einzelnen Felder führen bei einer monolithischen Lösungsstrategie zu um Größenordnungen unterschiedlichen Koeffizienten in den Gesamtsystemgleichungen, was extrem schlecht konditionierte Gesamtgleichungssysteme zur Folge hat. Bei einer isolierten Betrachtung der Systemgleichungen der einzelnen Teilfelder tritt dieser Effekt nicht auf.
- Unabhängige, problemangepasste Modellierung und Diskretisierung jedes Teilfelds: Bei partitionierten Verfahren können unterschiedliche Modellierungsansätze verwendet werden, was die Verwendung des für jedes Feld optimalen Verfahrens ermöglicht. Ebenso sind die Diskretisierungen sowohl im Raum als auch in der Zeit auf die Erfordernisse des jeweiligen Einzelfelds abstimmbare. Dies ist umso wichtiger, je unterschiedlicher die dynamischen Charakteristika und die relevanten und aufzulösenden Längenskalen sind. Hinzu kommt, dass eventuell sogar unterschiedliche Arbeitsgruppen die ihrer Expertise entsprechenden Fragestellungen unabhängig voneinander modellieren können.
- Softwaremodularität: Einhergehend mit der Grundidee der partitionierten Verfahren, komplexe Gesamtprobleme in Einzelfeldsimulationen aufzuspalten, ist auch die zur Lösung dieser Probleme erforderliche Softwareumgebung verfahrensimmanent modular. Dies ermöglicht die Verwendung von bestehenden, bewährten und ausgetesteten Softwarebausteinen, die für die jeweilige Teilfeldlösung optimiert sind und eventuell sogar von getrennten Expertenteams entwickelt werden. Somit können auch bestimmte Programmkomponenten zur Einzelfeldlösung entsprechend leicht erweitert oder ausgetauscht werden, was eine flexible Anpassung des Softwarekonzepts an die zu lösenden Mehrfeldprobleme erlaubt.

Diesen Vorteilen stehen als Nachteile im Vergleich zu monolithischen Verfahren auftretende Stabilitäts- und Genauigkeitsprobleme gegenüber, die durch eine adäquate Verfahrensformulierung vermieden werden müssen. Die eventuell gutmütigen numerischen Eigenschaften der Einzelfeldlöser übertragen sich in der Regel nicht automatisch auf das gesamte

Mehrfeldproblem. Werden allerdings entsprechend problemangepasste Lösungsstrategien (siehe Abschnitt 6.6) beim partitionierten Verfahren eingesetzt, so sind die oben genannten Vorteile voll nutzbar und es steht ein leistungsfähiges Simulationswerkzeug zur Berechnung von Mehrfeldproblemen zur Verfügung, das auch zur leichten Anpassung an zukünftige, weiterreichende Fragestellungen flexibel genug ist [CL05].

Aus diesen Gründen wird auch im Rahmen dieser Arbeit dem partitionierten Lösungsansatz der Vorzug gegeben. Hierzu wird das oberflächengekoppelte Problem in zwei nicht-überlappende Partitionen mit unterschiedlichen physikalischen Eigenschaften, das Fluidgebiet und das Strukturgebiet, unterteilt. Die entsprechenden Kopplungsinformationen werden über die Randbedingungen der voneinander separat laufenden Einzelfeldlöser ausgetauscht. Eine Übersicht über verschiedene Partitionierungskonzepte und auch die Einordnung von unterschiedlichen iterativen Kopplungsstrategien in den Bereich der Gebietszerlegungsmethoden („domain decomposition methods“) kann in [Mok01], [LT94] und der dort angegebenen Literatur nachgelesen werden.

## 6.2 Kopplungsbedingungen

Durch die im Abschnitt 6.1 vorgenommene fiktive Trennung des gekoppelten Problems der Fluid-Struktur-Interaktion, sind die einzelnen Partitionen nur noch separat zu lösen. Damit die starke Wechselwirkung zwischen der Strömung auf dem Fluidgebiet  $\Omega_F$  und dem deformierbaren Festkörper auf dem Strukturgebiet  $\Omega_S$  berücksichtigt wird, müssen am gemeinsamen Kopplungsrand  $\Gamma_{FSI}$  die entsprechenden Kopplungsbedingungen erfüllt sein. Durch die nichtüberlappende Partitionierung sind die beiden Gebiete mit unterschiedlichen physikalischen Eigenschaften disjunkt und die Interaktion der Felder tritt an den gemeinsamen Gebietsrändern auf, die auch als *Kopplungsinterface* bezeichnet werden:

$$\Gamma_{FSI} = \Gamma_F \cap \Gamma_S = \partial\Omega_F \cap \partial\Omega_S. \quad (6.1)$$

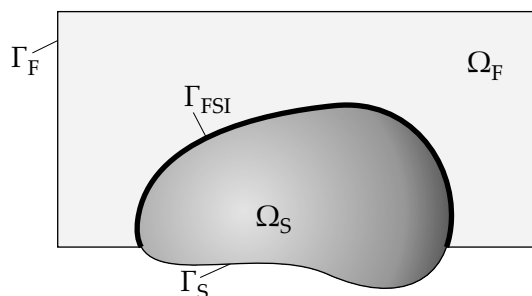


Abbildung 6.1: Fluid- und Strukturgebiet und gemeinsames Kopplungsinterface.

Damit das partitionierte Lösungsverfahren zur gleichen Lösung wie eine simultane Berechnung des Gesamtsystems führt, müssen die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und

Energie am Kopplungsinterface erfüllt sein. Aus dieser Forderung ergeben sich die sogenannten *kinematischen* und *dynamischen* Kontinuitätsbedingungen [DHPRF04].

Die kinematischen Kopplungsbedingungen sollen gewährleisten, dass alle kinematischen Größen am Interface zu allen Zeiten übereinstimmen. Die anschauliche Deutung ist, dass die Fluidpartikel den Strukturrand nicht durchdringen beziehungsweise es kein Auseinanderklaffen zwischen Fluidgebiet und Struktur geben darf. Die weitere Konkretisierung der Aussage bezüglich der Bewegungskompatibilität hängt vom verwendeten Fluidmodell ab. Wird die Strömung mit den Navier-Stokes-Gleichungen beschrieben (das heißt viskose Strömungen), so gilt an festen Rändern die stokesche Haftbedingung (siehe Abschnitt 5.4), wonach die wandnächsten Fluidpartikel einen zur festen Berandung identischen Bewegungszustand haben müssen:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_S &= \mathbf{d}_F && \text{Kontinuität der Verschiebungen,} \\ \mathbf{v}_S &= \mathbf{u}_F && \text{Kontinuität der Geschwindigkeiten.} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Im Gegensatz zur „no-slip“ Bedingung in Gleichung (6.2) ist bei reibungsfreien Fluiden nur die Normalkomponente der Fluid- und Strukturbewegung gleich („slip“ Randbedingung). Somit ergeben sich folgende Kompatibilitätsforderungen in Abhängigkeit des Normalenvektors  $\mathbf{n}$  auf dem Kopplungsrand:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{d}_S &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{d}_F && \text{Kontinuität der Normalkomponenten der Verschiebungen,} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_S &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_F && \text{Kontinuität der Normalkomponenten der Geschwindigkeiten.} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Die dynamischen Kopplungsbedingungen ergänzen die Kompatibilität in den Bewegungsvariablen um die Kontinuitätsforderungen der Spannungen am Interface und gewährleisten somit das dynamische Gleichgewicht auf  $\Gamma_{FSI}$ .

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_S = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_F. \quad (6.4)$$

Im Falle einer inkompressiblen Strömung eines newtonschen Fluids (also mit konstitutiver Beziehung nach Gleichung (5.2)) konkretisiert sich diese Bedingung zu:

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_S = -p \mathbf{n} + 2 \mu \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}. \quad (6.5)$$

Die Strukturbelastung ergibt sich also im allgemeinen Fall aus dem kompletten cauchyschen Spannungstensor im Fluid am Interface  $\Gamma_{FSI}$ , der sich aus dem Druck  $p$  und einem viskosen Anteil zusammensetzt. Bei vielen Anwendungen (insbesondere bei niedrigen Viskositäten  $\mu$  wie beispielsweise bei Luft) ist die Druckbelastung dominierend und so können die viskosen Spannungen bei der Berechnung der Interfacelasten vernachlässigt werden (der Einfluss der Viskosität bei der Berechnung von Windströmungen ist aber in jedem Fall zu berücksichtigen, siehe Modellwahl und Bemerkungen in Abschnitt 5.3):

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_S = -p \mathbf{n}. \quad (6.6)$$

Diese Randbedingung stellt auch die dynamische Kontinuitätsbedingung im Falle reibungsfreier Fluide („slip“ Randbedingung) dar.

Des Weiteren folgt aus der Einhaltung der kinematischen und der dynamischen Kontinuität auch die Erhaltung der mechanischen Energie am Interface. Die Forderung, dass der

künstliche Energiezuwachs am Interface verschwinden muss, bedeutet schließlich, dass die Arbeit der Interfacekräfte während des Deformationsprozesses auf beiden Seiten des Kopplungsrandes  $\Gamma_{FSI}$  identisch sein muss.

Die hier aus mechanischen Überlegungen abgeleiteten Übergangsbedingungen zwischen den beiden physikalischen Feldern Fluid und Struktur können im Kontext von Gebietszerlegungsverfahren als eine sogenannte *Dirichlet-Neumann-Methode* interpretiert werden. Die Geometrieänderung der benetzten Strukturoberfläche ist eine Dirichlet-Randbedingung für das Fluid und wird im Rahmen der ALE-Formulierung als vorgeschriebene Randverformung am Fluidgebiet aufgebracht. Die sich aus der Strömungsberechnung ergebenden Drücke und viskosen Spannungen am Kopplungsinterface werden als Neumann-Randbedingung auf die Struktur aufgebracht. Diese „natürliche“ Aufspaltung des Gesamtgebiets der gekoppelten Fragestellung stellt sich auch aus der Sicht von nichtüberlappenden Gebietszerlegungsverfahren als sehr gut geeignet für die Fluid-Struktur-Interaktion dar [Mok01] und wird deshalb im Rahmen dieser Arbeit verwendet.

### 6.3 Wechselwirkung von Formfindung und gekoppeltem Problem

#### 6.3.1 Einfluss der Umströmung auf die „ideale“ Form

Nachdem das Wesen der Windbelastung in Abschnitt 5.3 diskutiert wurde, werden nun die daraus resultierenden Anforderungen an die Formgebung dargestellt. Wie bereits in Abschnitt 4.6 festgestellt wurde, ist durch die Abtragung von externen Lasten ausschließlich über tangentielle Spannungen (siehe Abschnitt 2.3.1) die Steifigkeit einer Membranstruktur vor allem durch zwei Dinge gegeben: *Vorspannung und Flächenkrümmung*. Bei Gewebemembranen (siehe Abschnitt 2.3.2) kommt noch der Einfluss der Faserorientierung hinzu. Dies wird anhand der in Abbildung 6.2 stark vereinfacht dargestellten Windsogbelastung deutlich. Die Abtragung der instationären Flächenbelastung  $p(\mathbf{x}, t)$  erfolgt durch eine Erhöhung des Spannungsniveaus in  $\sigma_1$ -Richtung und durch Abbau der in  $\sigma_2$ -Richtung aufgebrachten Vorspannung.

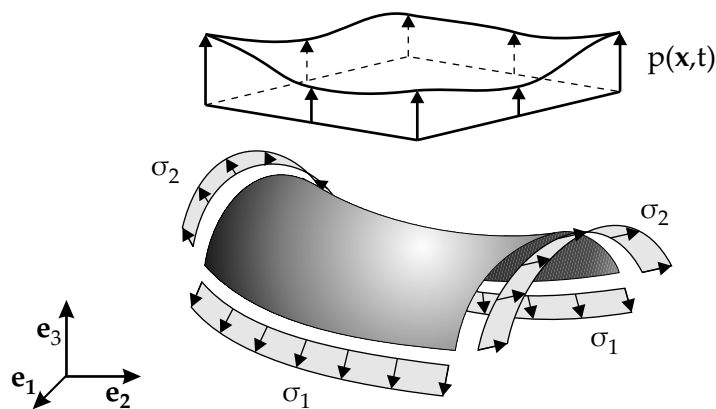


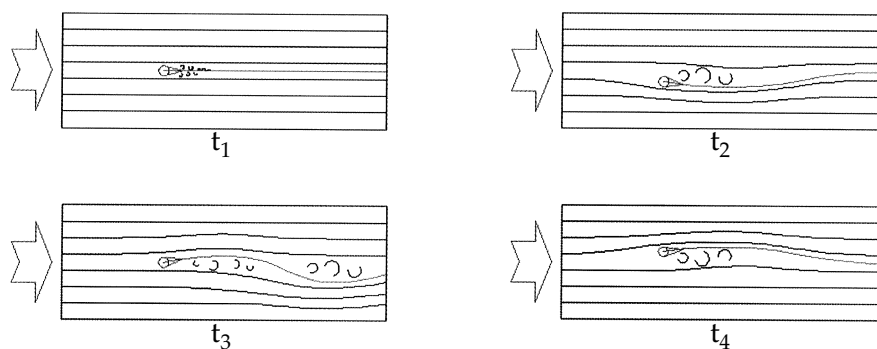
Abbildung 6.2: Tragverhalten der Membran unter externer Last.



Hieraus geht klar hervor, dass im Falle einer nicht vorgespannten Membran eine nur ein-dimensionale Lastabtragung vorliegen kann und sich die Membran in Richtung der Druckspannungen faltet (zum Phänomen der Faltenbildung siehe Abschnitt 2.3.3). Selbst wenn nur lokales Erschlaffen der Membran auftritt, würde der jeweilige Bereich auf Grund des instationären Charakters des Winds unkontrollierte Bewegungen ausführen.

Auch im Falle vorgespannter Membrane ist ersichtlich, dass bei flachen Bereichen verhältnismäßig große Deformationen erforderlich sind, um das Gleichgewicht zwischen inneren Kräften und der Oberflächenbelastung herzustellen. Gerade in diesen Zonen ist deshalb mit Schwingungen und eventuell sogar mit plötzlichem Durchschlagen der Membran infolge der dynamischen Belastung zu rechnen. Somit ist bereits bei der Formfestlegung darauf zu achten, dass flache Bereiche vermieden werden. Hinzu kommt, dass sich an solchen Stellen der Struktur deutlich höhere elastische Spannungen unter Belastung entwickeln, als bei einer hinreichend gekrümmten Fläche.

Nach [FM04] sind besonders die flexibel gelagerten, seilverstärkten Membranränder empfindlich in Bezug auf lokal auftretende dynamische Effekte. Dieses als *Flattern* bezeichnete Phänomen tritt häufig in flachen oder in nur schwach vorgespannten Randbereichen der Membran auf und ist in Abbildung 6.3 für vier Zeitpunkte  $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$  dargestellt (aus [FM04]). Der Grund hierfür sind die sich stark ändernden aerodynamischen Eigenschaften ( $c_p$ -Werte) des Membranrands bei nur kleinen Variationen des Anströmwinkels.



**Abbildung 6.3:** Flatterphänomen am flexiblen Membranrand.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die im Formfindungsprozess festzulegende Membrangeometrie in jedem Bereich eine ausreichende Krümmung aufweisen muss, um die Gefahr von winderregten Flattererscheinungen zu minimieren. Diese Anforderung lässt sich im Allgemeinen mit einer Minimalfläche (siehe Abschnitt 4.5.1) als Membranform nicht realisieren [Göp04], weshalb allgemeinere Spannungszustände vorgeschrieben werden müssen. Der Ausgleich von ungenügender Steifigkeit aus der Formgebung lässt sich nur eingeschränkt durch entsprechend hohe Vorspannwerte in den flachen Zonen erreichen, wobei dies bei nicht in der Fläche wirkenden Belastungen mit einem sehr hohen Spannungsniveau verbunden ist.

Hinsichtlich der Bemessung ergeben sich einerseits Konsequenzen aus dem schlimmsten zu erwartenden Sturmereignis, um die maximal auftretenden Spannungen zu begrenzen und

andererseits sind auch die entstehenden, immerwährenden Oszillationen möglichst einzuschränken, um die Materialermüdung gering zu halten. Neben den konstruktiven Fragen, wie zum Beispiel die Abstimmung von Anschlussdetails auf die zu erwartenden Bewegungen, sind im Falle heftiger Oszillationen auch die Auswirkung auf das Sicherheitsempfinden der Nutzer zu berücksichtigen (zum Beispiel verursacht plötzliches Durchschlagen häufig starke Geräusche).

Ein entsprechender Anhaltspunkt für eine sinnvolle Kombination aus genügend Krümmung und ausreichender Vorspannung einer Membran ist durch folgende Abschätzung gegeben (nach [FM04]):

$$D \approx \frac{N_{Kette}}{R_{Kette}} + \frac{N_{Schuss}}{R_{Schuss}}. \quad (6.7)$$

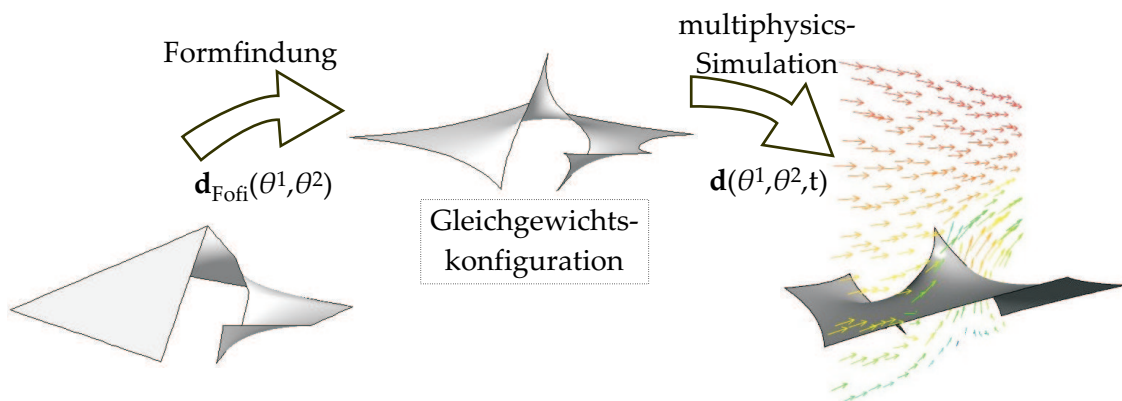
Wird für  $N_{Kette}$  und  $N_{Schuss}$  die Vorspannung in Kett- und Schussrichtung (in [kN/m]) angegeben und stellen  $R_{Kette}$  und  $R_{Schuss}$  die zugehörigen Beträge der Krümmungsradien (in [m]) dar, so ergibt sich ein Maß für die Steifigkeit der Fläche gegenüber einer aufgebracht Druckbelastung  $D$  (in [kN/m<sup>2</sup>]). Nach Balz und Dencher (in [FM04]) ist für  $D > 0,3$  kN/m<sup>2</sup> ein einwandfreies Strukturverhalten zu erwarten, wohingegen bei  $D < 0,15$  kN/m<sup>2</sup> über die Oberfläche laufende Wellenbewegungen durch Wind verursacht werden können. Ist über größere Bereiche einer Membranstruktur  $D < 0,2$  kN/m<sup>2</sup>, so können auf Grund der erhöhten Verformbarkeit detaillierte Untersuchungen erforderlich werden.

Neben all diesen für das reale Tragwerksverhalten relevanten Gesichtspunkten sind auch aus algorithmischer Sicht gewisse Implikationen mit den unter Strömungseinfluss auftretenden Phänomenen verbunden. Nachdem unkontrollierte Oszillationen infolge eines kompletten Vorspannungsverlusts und der damit verbundenen Faltenbildung unter allen Umständen vermieden werden sollen, ist dafür eine entsprechende Vorspannung vorzusehen. Die algorithmische Bedeutung dieser Beschränkung auf „straff gespannte“ Membrane ist, dass die damit verbundenen numerischen Probleme nicht auftreten. So ist beispielsweise die gekoppelte Berechnung von Membranstrukturen mit Faltenbildung eine Herausforderung für den Netzbewegungsalgorithmus bei einer ALE-Betrachtung des Fluids, was unter Umständen die Konvergenz problematisch macht [Tez04]. Für den Fall, dass nicht vorgespannte Strukturen beziehungsweise Membrane mit sehr großen Deformationen simuliert werden sollen, also potentiell sogar auch Selbstkontakt auftreten kann, ist zu prüfen, ob nicht Strömungsberechnungen basierend auf „fixed grid“-Ansätzen (siehe Abschnitt 5.5.3) die bessere Alternative darstellen.

### 6.3.2 Interfacedefinition

Wie bereits in Abschnitt 2.3 diskutiert wurde, ist bei Membranstrukturen die Form untrennbar mit dem Spannungszustand in der Membran verknüpft. Durch die große Bedeutung der Vorspannung und der Krümmung zur Stabilisierung des Membrantragwerks ist die Ebene als Formvorgabe für realistische Strukturen eigentlich nicht geeignet. Es wäre aber nur in diesem Fall, dass eine flache Struktur definiert würde, die numerische Formfindungssimulation nach Kapitel 4 nicht erforderlich.

Aus diesem Grund ist die Gleichgewichtsform der Membran unter Berücksichtigung der vorgegebenen Vorspannungsverteilung und der Randbedingungen vor der Lösung des eigentlichen gekoppelten Problems zu ermitteln. Hierzu stehen prinzipiell alle in Abschnitt 4.1 beschriebenen Möglichkeiten zur Verfügung. Im Hinblick auf die numerische Simulation des Mehrfeldproblems bietet sich allerdings die numerische Formfindung mittels der Updated Reference Strategy (URS, siehe Abschnitt 4.4) an, weil damit die gesuchte Gleichgewichtsgeometrie zuverlässig und genau berechnet werden kann und in digitaler Form vorliegt. Die Verknüpfung der Formfindung mit der Fluid-Struktur-Interaktionsberechnung ergibt sich nach Abbildung 4.3 über die Gleichgewichtsform und dem darauf vorliegenden Spannungszustand. Entsprechend *definiert* der Formfindungsprozess, mit der durch den Formgradienten festgelegten Modifikation  $\mathbf{d}_{Fofi}$  der (weitgehend) beliebig wählbaren Ausgangskonfiguration, erst die gekoppelte Fragestellung, indem die dadurch erhaltene Lösung das Fluid-Struktur-Interface und somit letztendlich die geometrischen Randbedingungen der Strömungssimulation bestimmt. Diese Kopplung der verschiedenen Simulationstypen über die nach den Gesetzen der Mechanik definierte Gleichgewichtsform, wird in Abbildung 6.4 am Beispiel einer komplexen Zeltstruktur verdeutlicht. Die Membrangeometrien sind demnach in der Regel auch nicht mehr analytisch beschreibbar und stellen somit *Freiformflächen* dar. Hieraus erwächst die Notwendigkeit, dass die Geometriebehandlung im Ablauf der numerischen Simulationen sehr flexibel sein muss.



**Abbildung 6.4:** Kopplung von Formfindung und FSI über Gleichgewichtskonfiguration.

Entsprechend der Beeinflussung der Formgestaltung durch die Effekte aus der Umströmung in Abschnitt 6.3.1, ist in diesem Fall also eine gegenläufige Einflussnahme der Formfindung auf die numerische Strömungssimulation gegeben.

Aus algorithmischer Sicht gibt es auch gewisse Anforderungen an die Zuverlässigkeit der Formfindung. Wird die gekoppelte Strömungs- und Strukturberechnung an Stelle von einer mechanisch korrekten Gleichgewichtsgeometrie von einer „gerateten“ oder nur unvollständig auskonvergierten Formfindungsberechnung gestartet, so können zu Beginn der Mehrfeldsimulation numerische Instabilitäten auftreten. Dies liegt darin begründet, dass die Struktur bei der Vorgabe einer nicht-geometriekonformen Vorspannung zunächst versucht, die zugehörige Gleichgewichtskonfiguration einzunehmen. Das bedeutet, dass im

ersten Berechnungsschritt eine sprunghafte Veränderung der Strukturlage im Raum stattfindet und die Strömungslösung mit hohen Druckspitzen darauf reagiert. Die Problematik dieses Effekts verschärft sich noch bei der Behandlung von Fragestellungen mit inkompressiblen Strömungen.

### 6.3.3 Formfindung und Strukturanalyse als „volumengekoppeltes Problem“

Unter Berücksichtigung der Ausführungen in Abschnitt 6.1 wird nun die Lösung der Formfindungsaufgabe und der Strukturanalyse von Membranen aus der Sichtweise der gekoppelten Fragestellungen diskutiert. In den Kapiteln 3 und 4 wurden die numerischen Verfahren zur Formfindung und zur Berechnung von Membranen unter externen Belastungen unabhängig voneinander eingeführt. Bereits in den Abschnitten 4.6, 6.3.1 und 6.3.2 wurden die gegenseitigen Abhängigkeiten verdeutlicht und darauf aufbauend wird nun eine Klassifikation vorgenommen. Nachdem beide Aufgabenstellungen im Bereich der Strukturmechanik angesiedelt sind, ist dies ein physikalisches Einfeldproblem und weil die beiden unterschiedlichen Fragestellungen auf dem gleichen Gebiet definiert sind, liegt eine Volumenkopplung vor. Auf Grund der unterschiedlichen numerischen Probleme in jedem Bereich werden darauf abgestimmte und für die jeweilige Lösung optimierte Herangehensweisen verwendet, die als zwei verschiedene algorithmische Felder interpretiert werden können.

Entsprechend der in Abschnitt 6.1 vorgestellten Lösungsverfahren für gekoppelte Probleme entspricht die bisher beschriebene Vorgehensweise also einem partitionierten Lösungsansatz. Während die jeweils verwendeten Algorithmen unterschiedlich sind (Zeitintegration in der nichtlinearen Dynamik einerseits und Updated Reference Strategy in der Formfindung andererseits), besteht in der Frage der räumlichen Diskretisierung kein Bedarf hinsichtlich unterschiedlicher Auflösungen. Nachdem die Formfindung genauso wie der isoparametrische Finite-Elemente-Ansatz in der Strukturanalyse mit derselben Parametrisierung in Abhängigkeit der jeweils gewählten Formfunktionen arbeitet, ist es sogar sinnvoll, die gleichen Netze in beiden Berechnungen zu verwenden, damit in beiden Fragestellungen gleichwertige Geometrierepräsentationen vorliegen. Andernfalls wäre beim Übergang von Formfindung zur statischen oder dynamischen Analyse noch zusätzlich ein Transfer der Strukturparameter zwischen den Netzen erforderlich, was zu numerischem Mehraufwand führt und immer mit entsprechenden Projektionsfehlern verbunden ist. Die zugehörigen Kopplungsinformationen sind beim Übergang von Formfindung zur Strukturanalyse die Koordinaten aller Knoten in der Gleichgewichtskonfiguration und die (eventuell adaptiv angepasste, siehe Abschnitt 4.5.3) Vorspannungsverteilung, inklusive der Vorspannkraften in den Rand-, Kehl- oder Gratseilen.

Bei der Kopplungsrichtung von der Analyse zur Formfindung ergeben sich die erforderlichen Formmodifikationen in Abhängigkeit der im Strukturverhalten identifizierten Unzulänglichkeiten, wie beispielsweise Flattern im Wind oder „ponding“-Probleme unter Schneebelastung. Diese notwendige Geometrieverbesserung wird durch gezielte Vorspannungsänderungen und/oder Modifikationen der Randgeometrien und Lagerpunkte vorgenommen. Wie bereits in Abschnitt 4.6 erwähnt, ist die Optimierung der Membranform

unter Berücksichtigung von externen Lastfällen ein iterativer Prozess, weil die aus den Anforderungen an das Strukturverhalten resultierenden Nebenbedingungen in der Formfindung so nicht explizit berücksichtigt werden. Dementsprechend ist bei einer monolithischen beziehungsweise simultanen Lösung schon während der Formfindung der Einfluss der Zusatzbedingungen enthalten, was exemplarisch in [LWB05] für Formfindung unter Berücksichtigung der Zusatzspannungen aus Nichtabwickelbarkeit der doppelt gekrümmten Membranflächen durchgeführt wird.

## 6.4 Berechnungskonzept

Bereits in Abschnitt 6.1 wurde zur Lösung des gekoppelten Problems der Interaktion von Strömung und Struktur ein partitionierter Lösungsansatz gewählt. Die Vorteile im Zusammenhang mit den Zielen dieser Arbeit überwiegen deutlich. Bei der Simulation von windumströmten Membranstrukturen sind auf der Fluidseite turbulente Strömungen mit hohen Reynoldszahlen (siehe Abschnitt 5.3) und auf der Strukturseite geometrisch nicht-lineare, stationäre und instationäre Deformationszustände von dünnen Flächentragwerken (siehe Abschnitt 2.3) mit komplexen Freiformgeometrien zu berechnen. Für diese anspruchsvollen Fragestellungen müssen jeweils geeignete Lösungsverfahren und Diskretisierungen (siehe Abschnitt 5.5 und Kapitel 3) verwendet werden. Auf Grund der unterschiedlichen physikalischen Eigenschaften der beiden Felder, sind voneinander stark abweichende Auflösungsanforderungen zu erfüllen. Hierzu ist es von Vorteil, wenn die räumlichen Diskretisierungen von Fluid und Struktur am Interface nicht übereinstimmen müssen und der korrekte Informationstransfer zwischen den Feldern auch bei „non-matching grids“ (siehe Abschnitt 6.5) möglich ist.

Des Weiteren sind durch das spezielle Tragverhalten von Membranen (siehe Abschnitt 2.3.1), im Vergleich zur Berechnung von konventionellen Strukturen, weitere Besonderheiten zu beachten. So muss einerseits die numerische Formfindung (gemäß Kapitel 4) in den Berechnungsprozess integriert werden, um die in Abschnitt 6.3 beschriebenen Wechselwirkungen adäquat berücksichtigen zu können und andererseits muss der starken Interaktion zwischen Strömung und Membran durch geeignete Kopplungsschemata Rechnung getragen werden, was in Abschnitt 6.6 ausführlich diskutiert wird.

In Abbildung 6.5 ist die im Rahmen dieser Arbeit konzipierte Softwareumgebung dargestellt. Durch den modularen Aufbau ist ein Höchstmaß an Flexibilität möglich und somit konnten in jedem Bereich die dafür am besten geeigneten numerischen Werkzeuge verwendet werden. Ferner besteht die Möglichkeit, die Programmstruktur an zukünftige Erfordernisse und neue Fragestellungen anzupassen.

- Im Bereich der Strömungssimulation kommt hier das auf der Finite-Volumen-Methode basierende CFD-Programm CFX-5.7 der ANSYS Inc. zum Einsatz [Inc04], das entsprechende Möglichkeiten zur Turbulenzmodellierung bietet (siehe Abschnitt 5.5.2) und außerdem auch auf bewegten Netzen (ALE-Beschreibung) rechnen kann (siehe Abschnitt 5.5.3).

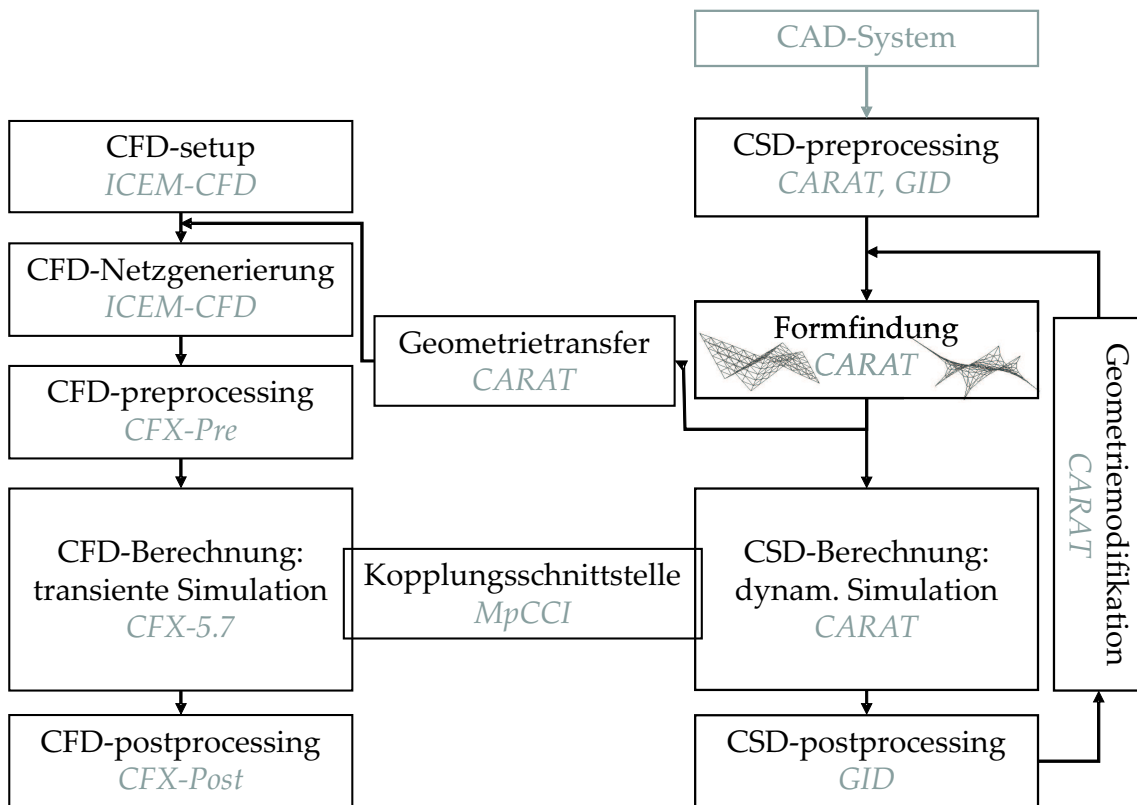


Abbildung 6.5: Softwareumgebung und Ablaufschema.

- Die nichtlineare Strukturdynamik („Computational Structural Dynamics“, CSD) wird, ebenso wie die Formfindung, mit dem (auf K.-U. Bletzinger, S. Kimmich und H. Stegmüller zurückgehenden) Finite-Elemente-Programmsystem CARAT simuliert. Die hierzu notwendigen Entwicklungen und Implementierungen wurden detailliert in den Kapiteln 3 und 4 beschrieben.
- Zur Kopplung der CFD- und CSD-Codes für Fluid-Struktur-Interaktionsberechnungen wird die vom Fraunhofer-Institut für Algorithmen und Wissenschaftliches Rechnen (SCAI) entwickelte Kopplungsbibliothek MpCCI („Mesh-based parallel Code Coupling Interface“) verwendet [fAC03], welche die Kopplung mehrerer Codes mit netzbasierten Daten erlaubt. Die zu transferierenden Daten können hierbei auch auf unterschiedlichen räumlichen Diskretisierungen vorliegen.

Die Übertragung der räumlichen Lage der Gleichgewichtskonfigurationen wird von CARAT aus mittels eines Facettenmodells im standardisierten STL-Format („stereolithography“) vorgenommen, wofür die, auf der Basis von mechanischen Gesetzmäßigkeiten errechneten, Freiformflächen trianguliert werden. Diese Beschreibung der Oberfläche eines Körpers mittels Dreiecksfacetten, die jeweils durch drei Punkte und der zugehörigen Flächennormalen definiert sind, stellt eine in vielen CAD-Systemen verfügbare Standard-schnittstelle dar [Hal02] und wird auch häufig im Bereich der Visualisierung und zur Bereit-

stellung von Geometrieinformationen im Bereich des Rapid Prototyping verwendet. Auch hier wurde mit der Verwendung einer standardisierten Schnittstelle mit den dafür einzuhaltenden Konventionen auf die Flexibilität des Gesamtkonzepts geachtet. Im Falle notwendiger Formmodifikationen wird entweder das Strömungsgebiet neu vernetzt oder das Strömungsgitter an die geänderte Fluidrandgeometrie mittels des Netzbewegungsalgorithmus angepasst, womit ein remeshing vermieden würde.

## 6.5 Interfacediskretisierung und Informationstransfer

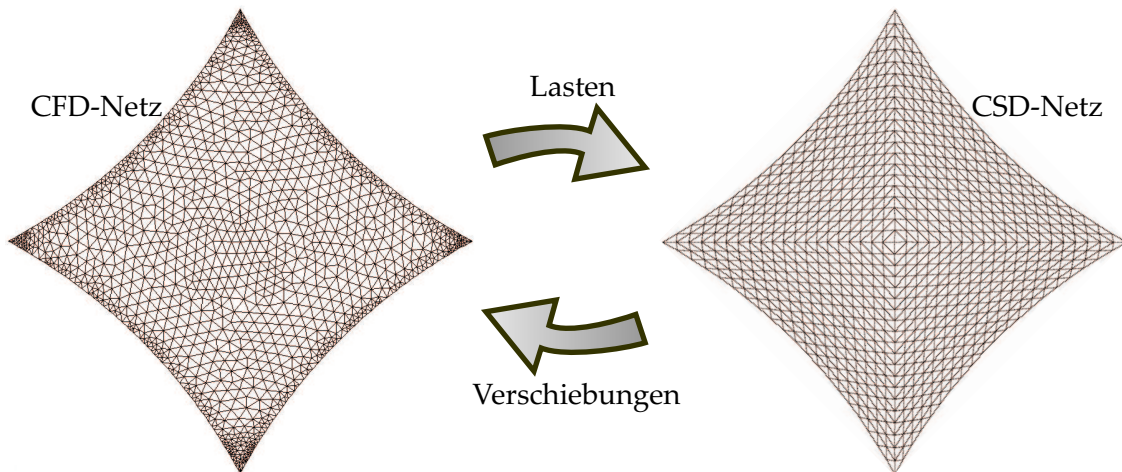
Bei partitionierten Lösungsverfahren wird das physikalische Mehrfeldproblem auf zwei disjunkte Partitionen aufgeteilt, auf denen jedes Einzelproblem isoliert vom anderen gelöst wird. Die Erfassung von Kopplungseffekten (siehe Abschnitt 6.2) wird ausschließlich über den Austausch von Randbedingungen garantiert. Dem korrekten Informationstransfer zwischen Fluid und Struktur kommt demnach in der numerischen Berechnung eine große Bedeutung zu. Beim diskretisierten FSI-Problem kommen grundsätzlich zwei verschiedene Interfacevernetzungen vor:

- Bei „*Matching grids*“ stimmen die Diskretisierungen von Fluid und Struktur am Kopplungsinterface überein. Das bedeutet, dass die Knoten auf beiden Seiten aufeinanderliegen und jeweils dieselben Interpolationsansätze verwendet werden. Bei diesem Vorgehen ist die Zuordnung und der Transfer der Kopplungsdaten verhältnismäßig einfach zu realisieren.
- „*Non-matching grids*“ zeichnen sich dadurch aus, dass sowohl die Lage der Knoten als auch die Ansatzfunktionen auf beiden Seiten der Kopplungsoberfläche unterschiedlich sein können. Zur Erfüllung der dynamischen und kinematischen Kopplungsbedingungen sind allerdings zusätzliche Überlegungen erforderlich, die beispielsweise in [CP04], [Ceb96], [FLL98], [GM98], [Gur02], [MF95] aufgeführt sind.

Im Rahmen dieser Arbeit werden für beide physikalische Fragestellungen unterschiedliche Lösungsverfahren und auch verschiedene räumliche Diskretisierungen verwendet (also Non-matching grids), wohingegen die Netze am Interface fest verbunden bleiben („sticking grids“) und somit die, bei gleitenden Netzen („sliding grids“) durch die zueinander relative Bewegung der Oberflächennetze erforderlich werdende, ständige Punktsuche entfällt. Die aus der unterschiedlichen Physik herrührenden, voneinander abweichenden räumlichen Diskretisierungsanforderungen können somit berücksichtigt werden. Des Weiteren sind beispielsweise bei der Struktur regelmäßige Netze möglich, während bei der Erstellung des Strömungsgitters Freivernetzer verwendet werden können, was insbesondere bei der Vernetzung des Raums um die hier betrachteten Freiformflächen von Vorteil ist.

Eine weitere Besonderheit bei der Definition des Strömungsgebiets und bei der Erstellung des entsprechenden CFD-Netzes ist die Tatsache, dass Membrane extrem dünne Flächen-tragwerke sind. Die entsprechende Geometriebeschreibung der Struktur wird somit in guter Näherung durch die Mittelfläche repräsentiert. Bezüglich der Fluid-Struktur-Kopplung hat dies zur Folge, dass bei beidseitig umströmten Membranen das Kopplungsinterface nun

auf beiden Seiten der für das Fluid undurchlässigen Membran getrennt behandelt werden muss, die Position im Raum aber identisch ist [BWK06]. Um die verschiedenen Seiten der Membran unterscheiden zu können, wird jedes Kopplungsteilgebiet entsprechend seiner Zugehörigkeit zur Ober- oder Unterseite durch einen entsprechenden Kenner markiert.



**Abbildung 6.6:** Non-matching grids zwischen CFD- und CSD-Partition am Interface.

In Abbildung 6.6 ist beispielhaft das Oberflächengitter der CFD-Simulation auf einer Seite eines Vierpunktsegels (für eine ausführliche Beschreibung dieser Struktur siehe Kapitel 7) und das Finite-Elemente-Netz der dynamischen Membranberechnung dargestellt. Der Transfer der Daten zwischen diesen beiden Berechnungsnetzen während der gekoppelten Simulation wird von MpCCI und den darin implementierten Algorithmen durchgeführt [fAC03].

Bei der Kopplung von Simulationen mit zwei unterschiedlichen Netzen muss hierfür zuerst eine Punktsuche zur Festlegung der Nachbarschaftsbeziehungen durchgeführt werden. In diesem Zusammenhang kommen verschiedene Algorithmen zum Einsatz, die sich in ihrer Komplexität und Effizienz deutlich unterscheiden, wie beispielsweise die einfache und numerisch sehr aufwändige lineare Suche, Advancing-Front-Suche oder Octree-basierte Suche. Im Fall von gleitenden Netzen oder bei Neuvernetzungen ist eine Aktualisierung der Nachbarschaftsbeziehungen eventuell mehrfach während der Simulationszeit notwendig, was den nicht zu vernachlässigenden Effizienzaspekt der Suchalgorithmen unterstreicht.

Sobald die geometrische Lage der Netze zueinander bekannt ist, kann die eigentliche Aufgabe, der Informationstransfer der bei oberflächengekoppelten Fragen jeweils problemspezifischen Randbedingungen, erfolgen. Im Fall der Fluid-Struktur-Wechselwirkung sind dies nach Abschnitt 6.2 die Oberflächenlasten infolge der Fluidspannungen am Interface und die Strukturverschiebungen am Kopplungsrand. Die Übertragung der physikalischen Informationen von einem Netz zum anderen kann zum Beispiel mittels Interpolationsverfahren oder mit Mortar-Element-Techniken verwirklicht werden. Die Mortar-Methode ist zwar im mathematischen Sinne optimal, sie ist aber auch aufwändiger als entsprechende Interpolationen. Nach [Far04] können im Bereich der Aeroelastizität ohne Probleme mit den



einfacheren interpolationsbasierten Strategien gute Ergebnisse für, hinsichtlich der jeweils verwendeten Gitterfeinheit, realistische Fragestellungen erhalten werden. Gleichzeitig wird aber auch betont, dass darauf geachtet werden soll, die am Interface transferierte Energie so weit wie möglich zu erhalten.

Im Rahmen der hier durchgeführten Berechnungen wird zum Lasttransfer („*load projection*“) ein konservatives Verfahren verwendet, was bedeutet, dass die Summe der Lasten auf dem Zielgitter gleich der Summe der Lasten auf dem Ausgangsgitter ist [Ceb96]. Hierbei wird die in einem Fluiddatenpunkt  $j$  errechnete Last  $\mathbf{P}_{Fj}$  entsprechend der Werte der Formfunktionen  $N_i$  des zugehörigen finiten Strukturelements (nach Abschnitt 3.1.1) auf die Zielknoten aufgeteilt. Der Auswertungspunkt der Formfunktionen entspricht dabei den im Verlauf der Nachbarschaftssuche ermittelten, lokalen Koordinaten des Ausgangsdatenpunkts  $j$  bezüglich des zugeordneten Strukturelements, also der lokalen Koordinaten  $\theta_j^1$  und  $\theta_j^2$  im Zielgitter. Somit lässt sich die resultierende Knotenlast  $\mathbf{P}_{Si}$  im Strukturknoten  $i$  durch eine Summe über alle  $n_F$  Ausgangsdatenpunkte  $j$  des CFD-Netzes am Kopplungsinterface folgendermaßen errechnen:

$$\mathbf{P}_{Si} = \sum_{j=1}^{n_F} N_i(\theta_j^1, \theta_j^2) \mathbf{P}_{Fj}. \quad (6.8)$$

Es sei an dieser Stelle noch einmal darauf hingewiesen, dass eine unphysikalische Lastverteilung auf dem Zielgitter auftreten kann, wenn die Feinheit des Zielgitters deutlich höher ist als die Auflösung des Ausgangsgitters, da nur diejenigen Strukturknoten eine Last zugeordnet bekommen, in deren finitem Strukturelement ein CFD-Datenpunkt liegt. Diese problematischen Auflösungsverhältnisse der beiden physikalischen Felder sind aber in der Regel unrealistisch, weil das Strömungsfeld in Wandnähe ohnehin fein aufgelöst werden muss.

Zur Übertragung der durch die Strukturverschiebungen verursachten Geometrieänderungen („*surface tracking*“) wird in dieser Arbeit ein konsistentes Interpolationsverfahren angewendet, das sehr robust ist und die Interpolationsfunktionen der finiten Strukturelemente verwendet. Die Bezeichnung konsistent ist in der Verwendung des FE-Verschiebungsansatzes des Ausgangselements für die Geometrieinterpolation am Interface begründet [Ste02]. Hierzu ist die Kenntnis der durch das „Pairing“ berechneten, konvektiven Koordinaten  $\theta_j^1$  und  $\theta_j^2$  (bezüglich des Strukturelements) des Fluidpunkts  $j$ , für den die Verschiebung ermittelt werden soll, notwendig. Die zu dem jeweils betrachteten Ausgangsstrukturelement gehörigen Knotenverschiebungen  $\bar{\mathbf{d}}_{Si}$  werden also durch die Auswertung der Formfunktionen  $N_i$  an den Ort der Projektion des CFD-Punkts auf das Strukturelement, analog zu Gleichung (3.2), interpoliert und dem Rand des Fluidgitters zugewiesen:

$$\mathbf{d}_{Fj} = \sum_{i=1}^{n_{nod}} N_i(\theta_j^1, \theta_j^2) \bar{\mathbf{d}}_{Si}. \quad (6.9)$$

## 6.6 Kopplungsstrategien

Aus den alternativ möglichen Lösungsverfahren (simultan oder partitioniert) für gekoppelte Probleme wurde in Abschnitt 6.1 auf Grund der besseren Eignung für die hier be-

trachtete Problemklasse die partitionierte Herangehensweise gewählt. Bei dieser sind verschiedene Strategien zur Lösung des oberflächengekoppelten Problems der Fluid-Struktur-Wechselwirkung möglich. Durch die Separation in zwei isoliert betrachtete Einfeldprobleme sind die Kopplungsbedingungen nach Abschnitt 6.2 mittels geeigneter Algorithmen möglichst gut zu erfüllen, wohingegen bei der monolithischen Herangehensweise das gekoppelte Gesamtsystem, einschließlich der Koppelterme, vollständig gelöst werden würde. In [ZH04] wird beispielsweise gezeigt, wie mittels Abschätzung und Vernachlässigung einzelner Terme der vollständigen Gleichungen des simultan gelösten FSI-Problems verschiedene Kopplungsmethoden abgeleitet werden können. Zur algorithmischen Entwicklung und Analyse von Kopplungsstrategien gibt es, wegen der mit der partitionierten Lösung verknüpften Problematik hinsichtlich Stabilität, Genauigkeit, Robustheit und Effizienz, starke Forschungsbemühungen, was beispielsweise in [FL00], [GV03], [LTM01], [Mic05], [Mok01], [MW01], [MS03], [Ste02] vertieft werden kann.

Die Kopplungsstrategien lassen sich – je nach Behandlung der Kopplungsbedingungen im Zeitschritt – in zwei grundsätzlich verschiedene Verfahrensklassen einteilen:

- Einfach gestaffelte/ explizite/ schwach koppelnde Verfahren („staggered/ explicit coupling/ loose coupling schemes“)
- Iterativ gestaffelte/ implizite/ stark koppelnde Verfahren („iterative staggered/ implicit coupling/ strong coupling schemes“)

Im Folgenden werden in den Abschnitten 6.6.1 und 6.6.2 diese beiden unterschiedlichen Ansätze und ihre wesentlichen Eigenschaften kurz erläutert. Anschließend werden die vorgestellten Lösungsstrategien am Beispiel eines überströmten Hängedachs angewendet, um ihre prinzipielle Eignung für die Lösung von Fluid-Struktur-Wechselwirkungsproblemen mit dünnen, fast masselosen Strukturen und inkompressiblen Strömungen zu bewerten. Zugunsten einer klareren Darstellung werden bei den Algorithmusskizzen nur die beiden physikalischen Felder Fluid und Struktur unterschieden, obwohl es sich im hier verwendeten Ansatz eigentlich um ein Dreifeldproblem handelt [Wal99]: Strömungsfeld (CFD), Strukturfeld (CSD) und Netzfeld (ALE-Beschreibung).

### 6.6.1 Einfach gestaffelte Verfahren

Bei diesen Kopplungsverfahren wird keine Iteration über die Teilgebiete ausgeführt und die Grundgleichungen der einzelnen Teilgebiete müssen nur einmal je Zeitschritt gelöst werden. Das bedeutet ferner, dass der Informationstransfer, der über den Austausch der Kopplungsvariablen stattfindet, pro Zeitschritt in jede Richtung nur einmal durchgeführt wird.

Als Zeitpunkt des gegenseitigen Datenaustauschs kann dabei der Beginn des Zeitschritts gewählt werden, womit die *parallele* Berechnung der Teilprobleme möglich wird. Alternativ dazu kann zuerst ein Teilproblem mit den Kopplungsgrößen aus dem vorherigen Zeitschritt gelöst und erst anschließend die aus der Teilberechnung erhaltenen Informationen auf das

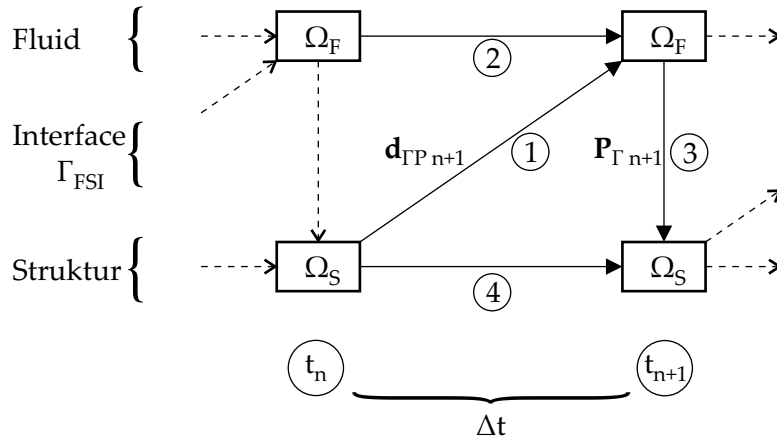


Abbildung 6.7: Einfach gestaffeltes, konventionelles Lösungsverfahren.

andere Feld übertragen werden, was einem *sequentiellen* Vorgehen entspricht. Weil zumindest für ein physikalisches Teilproblem bereits aktuelle Werte für die Kopplungsvariablen verwendet werden, liefert der sequentielle Algorithmus in der Regel genauere Ergebnisse.

Ein weiteres Unterscheidungsmerkmal ist durch die Anordnung der Zeitintervalle relativ zueinander für die beiden unterschiedlichen Zeitintegrationen gegeben. Beginnen die beiden gleichgroßen Zeitintervalle am identischen Zeitpunkt  $t_n$ , so wird das Verfahren als *synchron* bezeichnet, wohingegen bei der Einführung eines Zeitversatzes zwischen den Zeitinkrementierungen auf Fluid- und Strukturseite von einem *asynchronen* Verfahren gesprochen wird. Der Einsatz von asynchronen Verfahren ist aber stark mit der Frage der jeweils verwendeten Zeitintegrationsverfahren verknüpft, wie beispielsweise die Mittelpunktsregel für die Struktur in [LF96], die nicht die vorteilhaften Eigenschaften der Generalized- $\alpha$ -Methode (siehe Abschnitt 3.2) in nichtlinearen Struktursimulationen aufweist. Außerdem hat nach einer Untersuchung in [Mok01] die zeitversetzte Strategie in Verbindung mit inkompressiblen Strömungen ein sehr schlechtes Stabilitätsverhalten.

Die Grundform eines sequentiell arbeitenden, synchronen Verfahrens zur Fluid-Struktur-Kopplung ist in Abbildung 6.7 dargestellt, bei dem die jeweils aktuellen Kopplungsdaten ausgetauscht werden. Es wird vorausgesetzt, dass die Geschwindigkeiten und Druckwerte des Fluids und der Bewegungszustand der Struktur zum Zeitpunkt  $t_n$  bekannt sind. Hierbei werden die Verschiebungen  $\mathbf{d}_{\Gamma n+1}$  des Kopplungsinterfaces (bei der Indizierung vereinfacht mit  $\Gamma$  an Stelle von  $\Gamma_{FSI}$  bezeichnet) von der Strukturpartition  $\Omega_S$  an die Fluidpartition  $\Omega_F$  als Dirichlet-Randbedingungen übertragen. Der Frage nach einer geschickten Wahl dieses Strukturprädiktors wird später nachgegangen und an dieser Stelle genügt die Annahme, dass einfach die zum Zeitpunkt  $t_n$  erreichte Strukturverschiebung übertragen wird, was dem sogenannten Grundverfahren entspricht. Nach erfolgter Netzanpassung berechnet der Strömungslöser damit die Variablen des Strömungsfelds (Geschwindigkeiten und Druck) zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$ . Anschließend wird daraus die auf den Strukturrand einwirkende Belastung  $\mathbf{P}_{\Gamma n+1}$  ermittelt. Diese Kopplungskräfte werden dann als Neumann-Randbedingungen auf die Strukturpartition  $\Omega_S$  übertragen, womit das Strukturzeitintegrationsverfahren den Bewegungszustand der Struktur zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  berechnen kann.

Danach wird in der Zeit vorangeschritten und der Informationstransfer startet im nächsten Zeitschritt von neuem mit der zuletzt erreichten Strukturverschiebung, die an die Fluidpartition (mit dem Netzlöser) übertragen wird.

Aus der Konstruktion des Verfahrens ergibt sich offensichtlich eine Verletzung der Kopplungsbedingungen, weil (unabhängig davon, mit welcher Partition begonnen wird) ein Teilgebiet nur die Kopplungsinformationen zu Beginn des Zeitschritts für die Zeitintegration von  $t_n$  nach  $t_{n+1}$  zur Verfügung hat. Dies ergibt die explizite Charakteristik dieser Kopplungsstrategien. Die korrekte Erfüllung aller Kopplungsbedingungen nach Abschnitt 6.2 ist mit dieser Herangehensweise also im Allgemeinen nicht möglich, was nur eine schwache algorithmische Kopplung realisieren lässt.

Anhand Abbildung 6.7 kann man leicht erkennen, dass die kinematische Kontinuitätsforderung verletzt werden muss, weil die Interfaceposition, die dem Fluidlöser durch  $\mathbf{d}_{\Gamma P n+1}$  vorgegeben wird, nicht mit dem Verschiebungsfeld  $\mathbf{d}_{\Gamma n+1}$  nach der Strukturlösung übereinstimmt. Durch die Formulierung des Kopplungsalgorithmus ist gewährleistet, dass die dynamische Kontinuität erfüllt ist, weil die auf die Struktur übertragene Belastung zur Zeit  $t_{n+1}$  genau der Belastung entspricht, zu der (durch den Strukturlöser) ein Gleichgewichtszustand der Struktur zu genau diesem Zeitpunkt ermittelt wird. Allerdings werden diese Kopplungslasten auf der Basis einer inkonsistenten Interfaceposition berechnet, denn der Fluidlöser ermittelt das die Einwirkung verursachende Strömungsfeld mit einer vorgegebenen Dirichlet-Randbedingung, die nicht mit der letztendlich errechneten Strukturdeformation übereinstimmt.

Um die Auswirkungen der nicht erfüllten kinematischen Kopplungsbedingung so gering wie möglich zu halten, bietet es sich an, die an das Zeitschrittende extrapolierten Dirichlet-Randbedingungen entsprechend zu verbessern. Hierzu wurde in [Pip97], [PF01] ein Prädiktor zur Extrapolation der Verschiebungen vorgeschlagen, der die Diskontinuität bezüglich der Lage im Raum verringert und somit die Verfahrensgenauigkeit und -stabilität positiv beeinflussen soll. Die vorgegebene Strukturverschiebung  $\mathbf{d}_{\Gamma P n+1}$  gemäß Schritt eins in Verfahrensablaufbild 6.7 lässt sich anhand folgender Formel ermitteln:

$$\mathbf{d}_{\Gamma P n+1} = \mathbf{d}_n + \alpha_0 \Delta t \dot{\mathbf{d}}_n + \alpha_1 \Delta t (\dot{\mathbf{d}}_n - \dot{\mathbf{d}}_{n-1}) . \quad (6.10)$$

Hierin sind  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  Konstanten, die über die Ordnung der Extrapolation entscheiden. So ergibt sich für  $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$  das klassische Grundverfahren, für  $\alpha_0 = 1$  und  $\alpha_1 = 0$  ein Prädiktor erster Ordnung und im Falle  $\alpha_0 = 1$  und  $\alpha_1 = 0,5$  ist das Verfahren zweiter Ordnung genau in der Zeit. Dennoch bleibt der explizite Charakter des Verfahrens erhalten, weil der Prädiktor eben nicht genau die Strukturlösung am Ende des Zeitschritts vorgeben kann und somit zwar die Genauigkeit steigt, aber die Massen- und Energieerhaltung am Interface nicht exakt erfüllbar sind.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass zwar die dynamische Kontinuitätsforderung erfüllt wird, das sequentiell gestaffelte Verfahren also impulserhaltend ist, aber durch die Raumdiskontinuität weder die Masse noch (als Folge daraus) die Energie am Interface erhalten werden können. Aus dieser Verletzung der kinematischen Kopplungsbedingung resultiert eine Verschlechterung der Stabilitätseigenschaften des Gesamtverfahrens, was sich

als schwache Instabilität der partitionierten Berechnungsstrategie äußert und somit die Verhinderung einer instabilen Berechnung durch das Einhalten kritischer Grenzen, wie bei der bedingten Stabilität, nicht möglich ist. Das Auftreten einer numerischen Instabilität kann hier also nur nach hinten verschoben, aber nicht komplett verhindert werden. Eine ausführliche Diskussion hierzu ist in [Mok01] zu finden.

Selbst bei der Anwendung des ursprünglich für kompressible Strömungen vorgeschlagenen Strukturprädiktors nach Gleichung (6.10), ist der einfach gestaffelte Algorithmus schwach instabil und numerische Studien (mit inkompressiblen Strömungen) in [MW01] zeigen sogar, dass mit zunehmendem Grad der Genauigkeit des Prädiktors die Berechnung schneller instabil wird.

In solchen Fällen gelingt es auch nicht, das Auftreten der Instabilitäten durch verkleinerte Zeitschritte „weit genug“ nach hinten zu verschieben, weil bei einer Verkürzung der Zeitintervalle die instabilen Oszillationen sogar früher auftreten. Das liegt daran, dass bei Fluid-Struktur-Wechselwirkungsproblemen von inkompressiblen Strömungen und flexiblen und leichten Strukturen der „*artificial added mass effect*“ die Verfahrensqualität maßgeblich beeinträchtigt [CGN05], [LTM01], [Wal99] und seine destabilisierende Wirkung umso stärker wird, je kleiner die Zeitschritte sind.

Dieser künstliche Anteil an der „*added mass*“ (das ist die aus der Trägheit des Fluids resultierende Kopplungslast, die wie eine zusätzliche Fluidmasse auf das Beschleunigungsfeld der Struktur wirkt) ergibt sich aus der verfahrensbedingt verletzten kinematischen Kontinuität und es erfolgt bei inkompressiblen Strömungen eine fehlerhafte Belastung, die ohne Abschwächung und Zeitverzögerung wieder auf die Struktur trifft. Die Auswirkung dieses Effekts ist besonders dramatisch, wenn die Strukturmasse sehr klein ist, was die große Bedeutung der Kontrolle dieser Problematik für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Simulationen beweist.

Dieses Problem bei FSI-Simulationen mit sehr leichten Strukturen wird beispielsweise in [Tez04], [STS<sup>+</sup>05] bei der Berechnung umströmter Fallschirme diskutiert und als Abhilfe wird die „*augmented mass stabilization*“ vorgeschlagen, was einer künstlichen Erhöhung der Strukturmasse entspricht. Des Weiteren werden in [MW01], [Mok01] noch die Möglichkeiten erwähnt, dass künstlich viskose Dämpfung eingebracht, die Geschwindigkeiten der Koppelknoten zu null gesetzt, Filtertechniken angewandt oder eine fiktive Fluidkompressibilität verwendet wird. All diese Ansätze haben den entscheidenden Nachteil, dass sie die Physik des Problems verändern und in ihrer möglichen Anwendbarkeit stark vom betrachteten Problem abhängen.

Deshalb führt in den Fällen, wo eine anwendungsneutrale und die Physik des gekoppelten Gesamtsystems nicht unzulässig verändernde Stabilisierung erwünscht ist, offenbar kein Weg an der, durch die starke algorithmische Kopplung erreichbare, Erfüllung der kinematischen Kontinuität am Interface vorbei. Somit wird im Rahmen dieser Arbeit, durch eine Iteration über die physikalischen Teilfelder, eine zwar numerisch aufwändigere, aber gegen die simultane Lösung konvergierende Strategie gewählt (siehe Abschnitt 6.6.2).

## 6.6.2 Iterativ gestaffelte Verfahren

### 6.6.2.1 Grundverfahren

Auf Grund der Probleme der einfach gestaffelten Kopplungsstrategien bei inkompressiblen Strömungen und leichten Strukturen werden in solchen Fällen iterativ gestaffelte Kopplungsstrategien angewendet. Durch diese impliziten Lösungsverfahren ist es möglich, den für die Instabilitäten verantwortlichen „*artificial added mass effect*“ zu kontrollieren. Dies ist ein Weg aus dem Dilemma, dass in explizit koppelnden Verfahren die Instabilitäten durch Reduktion der Zeitschrittgröße oder die Verwendung von Schemata höherer Ordnung sogar noch früher auftreten.

Die Grundidee der stark koppelnden Verfahren ist die implizite Behandlung der Kopplungsvariablen in jedem Zeitschritt. Somit werden im selben Zeitschritt mittels einer Iteration über die Teilfelder die Kopplungsinformationen solange iterativ verbessert, bis das Residuum der Kopplungsbedingungen unterhalb einer bestimmten Toleranzgrenze ist. Dann erfolgt ein Weiterschreiten in der Zeit und die Iteration wird für den nächsten Zeitschritt begonnen. Das Prinzip dieses Vorgehens ist in Abbildung 6.8 skizziert.

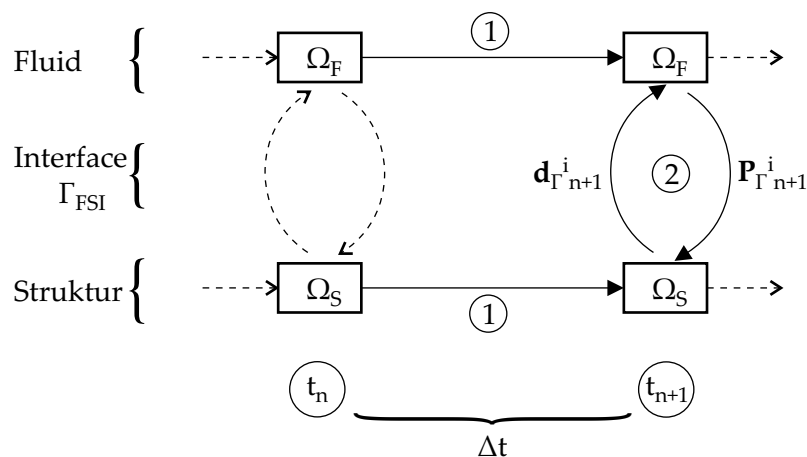


Abbildung 6.8: Iterativ gestaffeltes Lösungsverfahren.

Die Konsequenz aus diesem iterativen Vorgehen ist, dass die dynamischen und kinematischen Kopplungsbedingungen (im Rahmen der iterativ erreichbaren Genauigkeit) erfüllt sind und somit eine starke algorithmische Kopplung (im Gegensatz zu den einfach gestaffelten Verfahren in Abschnitt 6.6.1) erreicht werden kann. Die Massen- und Impulserhaltung am Interface gewährleisten, entsprechend der Ausführungen in Abschnitt 6.2, auch die Energieerhaltung am Kopplungsrand. Bei dieser Vorgehensweise konvergiert das partitionierte Verfahren also gegen die mit einem monolithischen Ansatz erhaltenen Lösungen des gekoppelten Gesamtproblems.

Diesem prinzipiell vorteilhafteren Stabilitätsverhalten steht der unter Umständen deutlich höhere numerische Aufwand gegenüber. Außerdem ist nicht sichergestellt, dass die iterative Lösung des gekoppelten Problems ohne entsprechende Zusatzmaßnahmen auch tatsächlich konvergiert. Aus diesen Gründen werden unterschiedliche Iterationsverfahren zur

Lösung nichtlinearer Probleme mit entsprechenden Annahmen und Verbesserungen bei der Formulierung der Iterationsvorschrift im Rahmen der Iteration über die physikalischen Teilfelder („interfield iteration“) eingesetzt. Ganz grundsätzlich ist die Einteilung in

- Verfahren basierend auf Fixpunktiterationen und
- das Newtonverfahren und dessen Varianten

möglich. Im Rahmen dieser Arbeit wird, in leicht abgewandelter Form, das auf [LTM01], [Mok01] zurückgehende Fixpunktiterationsverfahren eingesetzt.

Diese Kopplungsstrategie ergänzt das in Abbildung 6.7 vorgestellte synchrone, einfach gestaffelte Verfahren um die Iteration über die Teilfelder bis eine Konvergenz in den Kopplungsgrößen festgestellt werden kann. Um sicher zu stellen, dass die Fixpunktiteration konvergiert, werden die Belastungen der Struktur am Interface entsprechend Gleichung (6.11) relaxiert. Somit wird in jedem Zeitschritt mit einem Verschiebungsprädiktor gestartet und mit dieser Interfaceposition eine Netzanpassung und eine Strömungslösung durchgeführt. Die aus der Umströmung resultierende Einwirkung wird gemäß der Vorschrift (6.11) relaxiert und am Interface auf die Struktur aufgebracht, woraufhin der Strukturlöser einen (dynamischen) Gleichgewichtszustand ermittelt. Die hiermit berechnete neue Interfaceposition wird im Allgemeinen noch kein konvergiertes Ergebnis des gekoppelten Problems in diesem Zeitschritt darstellen, weshalb die Iteration durch wechselweises Durchführen von Fluid- und Strukturlösung erforderlich ist. Als Abbruchkriterium der Iteration über die Teilfelder wird gefordert, dass die geeignet normierte, iterative Verbesserung der Kopplungsvariablen unter einer Toleranzgrenze bleibt. Die konkrete Umsetzung dieses Kopplungsalgorithmus ist in Abbildung 6.9 dargestellt.

Das beschriebene Vorgehen ohne Unterrelaxation entspricht einem Block-Gauß-Seidel-Verfahren, das aus dem Bereich der numerischen Mathematik bekannt ist. Somit stellt das in Abschnitt 6.6.1 vorgestellte, explizite Kopplungsverfahren einen Schritt in einer Block-Gauß-Seidel-Iteration dar. Ein Fixpunktiterationsverfahren mit Verwendung von Relaxationsparametern wird auch als Richardson-Iteration bezeichnet, wobei noch zwischen stationären und instationären Verfahrensvarianten unterschieden wird. Die letztgenannte Differenzierung hängt davon ab, ob der Relaxationsparameter im Iterationsverlauf konstant gehalten wird oder veränderlich ist.

Die zur Konvergenzsicherung durchgeführte Abminderung der Belastung erwies sich gegenüber einer (alternativ möglichen) Relaxation der auf die Fluidpartition zurückzuziehenden Verschiebungen insofern als vorteilhaft, weil sie die, gerade bei den sehr leichten und hochflexiblen Membranen, infolge einer noch zu hohen Kopplungslast im Verlauf der FSI-Iteration auftretenden „overshoots“ in den Verschiebungen wirksam dämpft. Bedingt durch die geringe Steifigkeit der leichten Flächentragwerke bei einer Belastung senkrecht zur Oberfläche, ist durch die bei der expliziten Kopplung auftretenden, fehlerhaft überhöhten Lastwerte in manchen Fällen sogar keine Konvergenz im Strukturlöser mehr möglich. Diese Formulierung eines Prädiktor-Korrektor-Schemas in der impliziten Kopplung wird in [CL05] sogar mit einer kombinierten Unterrelaxation sowohl in den Verschiebungen als

auch in den Fluidlasten vorgestellt, wobei die Frage nach einer sinnvollen Verknüpfung dieser beiden Stabilisierungsmaßnahmen auch im Hinblick auf die erreichbare Effizienz noch nicht abschließend geklärt ist [Kup05].

Die allgemeine Berechnungsvorschrift für die Unterrelaxation einer Kopplungsvariablen  $\mathbf{V}_\Gamma$  im  $i$ -ten Schritt der impliziten Iteration über die Teilfelder Fluid und Struktur im gleichen Zeitschritt lautet:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{\Gamma i+1} &= \mathbf{V}_{\Gamma i} + r_i (\tilde{\mathbf{V}}_{\Gamma i+1} - \mathbf{V}_{\Gamma i}) \\ &= r_i \tilde{\mathbf{V}}_{\Gamma i+1} + (1 - r_i) \mathbf{V}_{\Gamma i}.\end{aligned}\tag{6.11}$$

Hierin ist  $\mathbf{V}_\Gamma$  der in den Teilfeldlösern zur Berechnung verwendete Wert der Kopplungsgröße und  $\tilde{\mathbf{V}}_\Gamma$  ist die noch unrelaxierte Variable. Mit  $r$  wird der entsprechend zu wählende Relaxationsfaktor bezeichnet. Er kann sowohl für alle Schritte konstant sein oder im flexibelsten Fall von Iterationsschritt zu Iterationsschritt angepasst werden. Die erste Fassung von Formel (6.11) reflektiert den Umstand, dass die in der Iteration eigentlich auftretende Veränderung des zu betrachtenden Parameters durch den Unterrelaxationsfaktor (für  $r < 1,0$ ) abgeschwächt wird, wohingegen die zweite Fassung eine Überblendung der unrelaxierten Prädiktorgröße mit der zuletzt erreichten Iterierten bedeutet (analog zur Stabilisierung im Rahmen der URS bei der Formfindung nach Gleichung (4.30)).

Eine offene Frage stellt nun die möglichst geschickte Wahl des Relaxationsparameters dar [ZH04]. Das zugrunde liegende Basisiterationsverfahren ist für den Sonderfall  $r = 1,0$  in dem beschriebenen Vorgehen enthalten, wobei jedoch seine Konvergenz an bestimmte Bedingungen geknüpft ist, die in [LTM01] analysiert werden. Problematisch ist, dass diese Voraussetzungen bei inkompressiblen Strömungen verletzt werden, wenn die Struktursteifigkeit sehr gering ist, der Zeitschritt sehr klein gewählt wird oder die vom Fluid auf die Struktur zusätzlich wirkende Masse groß im Vergleich zur Strukturmasse ist. Nachdem dies bei umströmten Membranen der Fall ist, kann das unrelaxierte Grundverfahren zur Simulation dieser Fragestellungen als ungeeignet eingestuft werden und die Bedeutung der Wahl des Relaxationsparameters wird dadurch noch unterstrichen.

Tendenziell sind bei kleinen Relaxationsparametern gute Stabilitätseigenschaften der gekoppelten Berechnung zu erwarten, was aber durch stark ansteigenden numerischen Aufwand bezahlt werden muss. Der einfachste Fall ist dadurch gekennzeichnet, dass ein fester Wert für die Unterrelaxation festgelegt und während der gesamten Berechnung (eventuell auch nur in der Iteration) konstant gehalten wird. Trotzdem ist damit die Frage nach dem Wert des Verfahrensparameters noch nicht geklärt, es wurde lediglich festgestellt, dass es einen problemabhängigen, optimalen Wert geben muss, der den besten Kompromiss zwischen numerischer Stabilität und numerischem Aufwand darstellt. Des Weiteren ist auch offensichtlich, dass bei nichtlinearen Fragestellungen der einmal definierte Wert nicht über die gesamte Simulationsdauer die beste Wahl sein kann. Dies wird im nächsten Abschnitt diskutiert und mittels der Konvergenzbeschleunigung durch die Aitken-Methode gelöst.

### 6.6.2.2 Adaptive Unterrelaxation mit der Aitken-Methode

Es steht außer Frage, dass bei dem hier verwendeten Kopplungsverfahren eine Relaxation der Kopplungsgrößen (das heißt also  $r < 1,0$ ) vorgenommen werden muss. Wie bereits



in Abschnitt 6.6.2.1 abschließend festgestellt wurde, muss bei der Festlegung des Verfahrensparameters  $r$  zwischen niedrigen Werten zur Sicherstellung der numerischen Stabilität und hohen Werten zur Reduktion der Anzahl an Iterationen über die Teilfelder (und damit einer Effizienzsteigerung) abgewogen werden.

Die einfachste Variante, nämlich einen Wert vom Programmanwender vorgeben zu lassen, kann diese sich widersprechenden Anforderungen nicht gleichzeitig erfüllen. Hierzu wäre durch aufwändiges Ausprobieren der größtmögliche Zahlenwert herauszufinden, für den die Simulation gerade noch konvergiert. Angesichts der Problemabhängigkeit dieses Vorgehens und der durch die Systemnichtlinearität bedingten Veränderung des als optimal zu bewertenden Parameters während der Berechnung, ist diese Art der Relaxationsparameterbestimmung nicht praktikabel. Durch die fast beliebig variierbaren Vorspannungszustände, in Verbindung mit der daraus resultierenden Vielfalt an Membraneometrien und den damit zusammenhängenden, verschiedenen Umströmungen, sind die hierbei zu lösenden gekoppelten Fragestellungen auf keinen Fall kategorisierbar und die Wahl des Relaxationsparameters auf der Basis von Erfahrungswerten scheint unmöglich.

Dies ist auch die Motivation dafür, dass in [MW01] entsprechende Strategien zur Konvergenzbeschleunigung entwickelt und analysiert wurden. Im Einzelnen sind dies die Gradientenmethode („steepest descent method“) und die Aitken-Methode. Bei beiden Verfahren werden während der Simulation ständig neue, verbesserte Relaxationsparameter berechnet, weshalb das resultierende Gesamtverfahren zur Realisierung der impliziten Kopplung eine instationäre Richardson-Iteration darstellt. Damit stehen zur Bestimmung der Relaxationsparameter also stabile und robuste Algorithmen zur Verfügung, die ohne jeglichen Benutzereingriff stets für den „optimalen“ Wert von  $r$  sorgen. Sie sind somit auch jeder „trial and error“-Herangehensweise überlegen, weil in diesen Fällen, selbst bei „bester manueller“ Parameterwahl, doch letztendlich mit einem konstanten  $r$  gerechnet würde. Durch numerische Studien und Gegenüberstellung des Verhaltens von beiden Verfahren bei der Anwendung auf Fluid-Struktur-Wechselwirkungsprobleme wird festgestellt, dass die Aitken-Beschleunigung eine zumindest mit der Gradientenmethode vergleichbare Verfahrensverbesserung bringt. Dies und die Tatsache, dass die Aitken-Methode hinsichtlich CPU-Zeit und Speicherbedarf extrem günstig ist, begründen ihre Anwendung im Rahmen dieser Arbeit.

Das bereits in Abschnitt 6.6.2.1 als Basisalgorithmus beschriebene Block-Gauß-Seidel-Verfahren wird also durch die *Aitken-Methode für vektorielle Gleichungen* erweitert, womit in jeder Iteration zwischen den beiden physikalischen Feldern Fluid und Struktur erneut ein Relaxationsparameter  $r$  (zur Anwendung in Gleichung (6.11)) bestimmt wird, um die Fixpunktiteration zu beschleunigen. Diesem Verfahren liegt Aitkens  $\Delta^2$ -Methode zu Grunde, die ursprünglich zur iterativen Eigenwertbestimmung vorgeschlagen wurde und eine beliebige, konvergente, skalare Folge in eine schneller konvergierende Folge konvertieren soll. Die in [MW01] für FSI-Probleme vorgeschlagene Fassung dieses Verfahrens geht direkt auf die in [IT69] dargestellte Variante für vektorielle Gleichungen zurück. Wird die wechselweise Iteration zwischen den Partitionen im gleichen Zeitschritt mit  $i = 0$  gestartet, so kann für  $i \geq 1$ , ausgehend von den bereits bekannten Iterierten der Kopplungsgrößen  $\mathbf{V}_{\Gamma i-1}$  und  $\mathbf{V}_{\Gamma i}$  und den noch unrelaxierten Werten der Kopplungsvariablen  $\tilde{\mathbf{V}}_{\Gamma i}$  und  $\tilde{\mathbf{V}}_{\Gamma i+1}$  ein

Aitken-Faktor  $\mu_i$  bestimmt werden:

$$\mu_i = \mu_{i-1} + (\mu_{i-1} - 1) \frac{(\Delta \mathbf{V}_{\Gamma i} - \Delta \mathbf{V}_{\Gamma i+1})^T \cdot \Delta \mathbf{V}_{\Gamma i+1}}{|\Delta \mathbf{V}_{\Gamma i} - \Delta \mathbf{V}_{\Gamma i+1}|^2}, \quad (6.12)$$

$$\text{mit: } \Delta \mathbf{V}_{\Gamma i} = \mathbf{V}_{\Gamma i-1} - \tilde{\mathbf{V}}_{\Gamma i}.$$

Daraus kann letztendlich mit Gleichung (6.13) der aktuelle Relaxationsparameter  $r_i$  zur Modifikation der am Interface zu transferierenden Kopplungsinformationen gemäß Gleichung (6.11) ermittelt werden:

$$r_i = 1 - \mu_i. \quad (6.13)$$

Als Startwert für den Aitken-Faktor  $\mu_0$  zu Beginn der Iteration über die Teilfelder in jedem Zeitschritt kann entweder mit  $\mu_0 = 0$  auf eine Aitken-Beschleunigung verzichtet werden (es ergibt sich  $r_0 = 1$ ) oder es wird der im vorherigen Zeitschritt zuletzt erreichte Aitken-Faktor verwendet. An der Berechnungsvorschrift in Gleichung (6.12) ist klar erkennbar, dass der numerische Aufwand (es sind nur Differenzen und Skalarprodukte zu bilden) und der zusätzliche Speicherbedarf (für Differenzvektor  $\Delta \mathbf{V}_{\Gamma i}$ ) vernachlässigbar gering sind.

### 6.6.3 Programmtechnische Umsetzung

Die in den Abschnitten 6.6.1 und 6.6.2 beschriebenen Kopplungsstrategien werden mit der im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Software gemäß Abbildung 6.9 umgesetzt. Dieses Schaubild stellt den Kopplungsblock zwischen CFD- und CSD-Berechnung aus Abbildung 6.5 detailliert dar. Durch dieses Ablaufdiagramm wird also der „Multiphysics-Kern“ der gesamten Softwareumgebung nach Abschnitt 6.4 konkretisiert. Die transiente, geometrisch nichtlineare Membranberechnung wird mit den in Kapitel 3 beschriebenen und in CARAT implementierten Algorithmen und die Simulation der turbulenten Strömungen auf bewegten Gittern unter Verwendung des in Abschnitt 5.5 beschriebenen CFD-Codes CFX5 durchgeführt. Die Kopplung zwischen den beiden in der Regel nicht übereinstimmenden Berechnungsgittern wird mit der Kopplungsbibliothek MpCCI realisiert.

Durch die Verschachtelung der FSI-Iterationsschleife und der Zeitschrittschleife sind verschiedene Berechnungsabläufe möglich. So wird bei nur einem Durchlauf durch die implizite äußere Iteration eine explizite Kopplung nach Abschnitt 6.6.1 erreicht, wohingegen durch mehrmaliges iterieren über die Felder bis zur Konvergenz ein stark gekoppeltes Verfahren nach Abschnitt 6.6.2 realisiert wird. Des Weiteren ist es möglich, bei abschließlicher Iteration über die physikalischen Felder, ein gekoppeltes, aber stationäres Problem der Fluid-Struktur-Wechselwirkung zu berechnen. Die Bezeichnung der impliziten Kopplungsschleife als äußere Iteration soll der Abgrenzung zu den in den Einzelfeldlösern durchzuführenden Iterationen zur Lösung der jeweils nichtlinearen Probleme dienen. Die Möglichkeit, die auf dem Interface zu transferierenden Variablen zu modifizieren, ist für beide Kopplungsbedingungen (Verschiebungen, Belastungen) prinzipiell möglich, wobei im Rahmen dieser Arbeit die Aitken-Methode nur auf die Belastung angewendet wurde (siehe Abschnitt 6.6.2.2). In diesem Bereich besteht Forschungsbedarf hinsichtlich weiterer, potentieller Effizienzsteigerungen der Kopplungsverfahren, was Gegenstand aktueller Untersuchungen ist [Kup05].

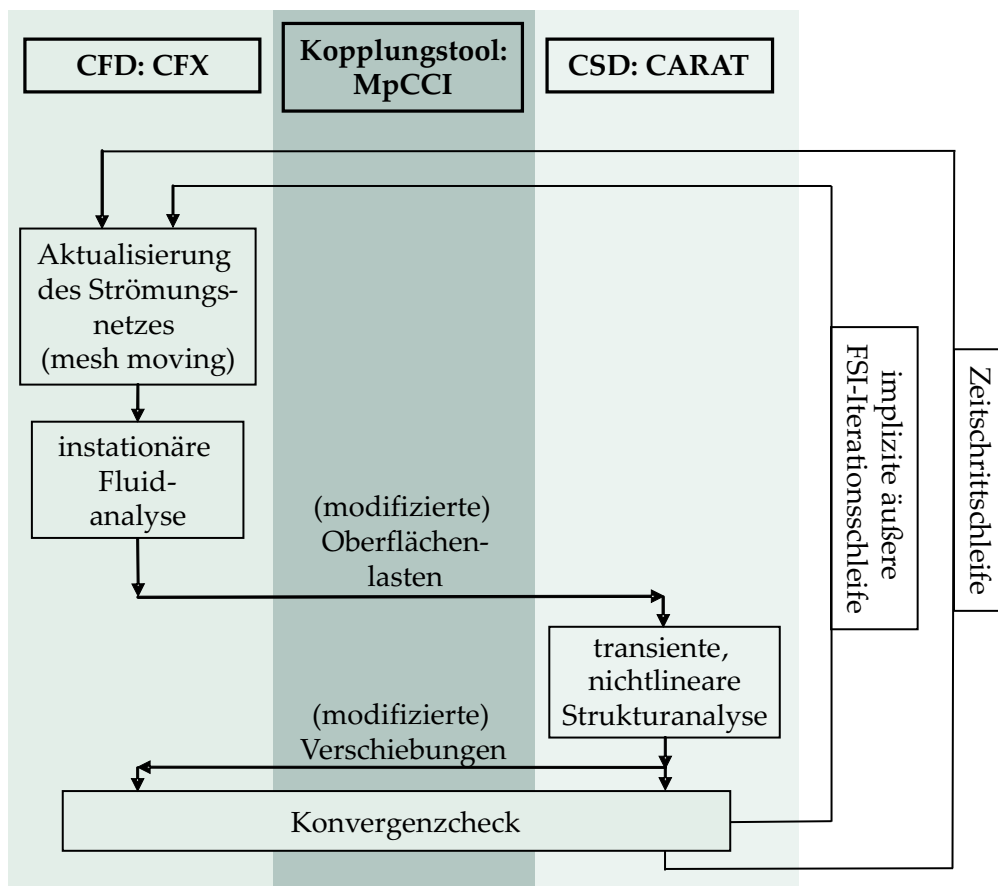


Abbildung 6.9: Ablaufdiagramm der Kopplung inklusive Software.

#### 6.6.4 Simulation eines überströmten Membranhängedachs

Zur Veranschaulichung der großen Bedeutung von robusten und numerisch stabilen Kopplungsstrategien im Kontext von sehr leichten und flexiblen Membrantragwerken, die mit inkompressiblen Strömungen interagieren, wird in diesem Abschnitt ein überströmtes Hängedach simuliert. Der in Abschnitt 6.6.1 beschriebene „artificial added mass effect“ ist bei sehr geringen Strukturmassen der Grund für die Instabilitäten von partitionierten, einfach gestaffelten Kopplungsverfahren, was anhand dieses Beispiels sehr deutlich wird.

Das Hängedach ist eine Konstruktionsform, die quasi-zweidimensional ist und somit auch nicht durch die in Abschnitt 4.1 besprochene räumliche mechanische Vorspannung stabilisiert werden kann. Es besteht also nur die Möglichkeit einer Vorspannung des Membrangewebes durch zusätzlichen Ballast oder durch das Aufbringen eines Druckunterschieds bei pneumatisch vorgespannten Konstruktionen, was beispielsweise bei Traglufthallen umgesetzt wird. In dem hier betrachteten Fall soll als einzige Einwirkung neben der Belastung infolge Überströmung das geringe Eigengewicht der Struktur von  $g = 0,8 \text{ kg/m}^2$  wirken. Diese Struktur ist deswegen hervorragend geeignet, die Probleme der schwach koppelnden partitionierten Verfahren aufzuzeigen. Die Geometrie des Problems ist in Abbildung 6.10 dargestellt. Es handelt sich um ein 10 m weit gespanntes Membrandach mit der Dicke 1 mm.

Die Materialparameter sind mit  $E = 300 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$  und  $\nu = 0,2$  in Anlehnung an ein PVC-beschichtetes Polyestergewebe des Typs I gewählt, wobei die Materialbeschreibung näherungsweise mittels des homogenen Werkstoffgesetzes für den ebenen Spannungszustand nach Gleichung (2.107) vorgenommen wird. Die Begrenzungen des Dachs sind durch senkrechte starre Wände vorgegeben, an denen das Membrandach befestigt ist.

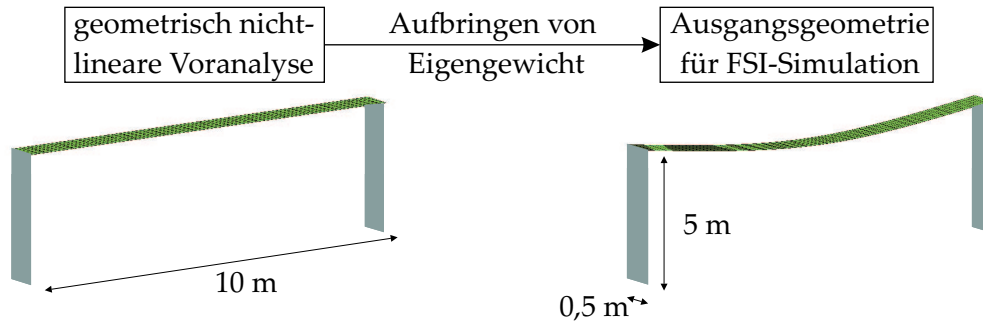


Abbildung 6.10: Berechnung der Lage des Kopplungsinterface.

Obwohl in diesem Fall keine Formfindung im üblichen Sinne mit vorgeschriebener Vorspannungsverteilung durchzuführen ist, muss dennoch eine Voranalyse zur Berechnung der Lage des Kopplungsinterfaces durchgeführt werden. Dies verdeutlicht wiederum das auf das spezielle Tragverhalten (siehe Abschnitt 2.3.1) zurückgehende, grundverschiedene Vorgehen bei Membrankonstruktionen im Vergleich zu konventionellen, biegesteifen Tragwerken. Diese Vorberechnung zur eigentlichen physikalischen Mehrfeldsimulation wird mittels einer geometrisch nichtlinearen, statischen Analyse der ursprünglich ebenen Membran durch Belastung mit ihrem Eigengewicht durchgeführt, was an sich schon auf Grund der gleich zu Beginn der Simulation singulären Steifigkeitsmatrix nicht trivial ist. Die Durchführung einer Membranformfindung (im Sinne des Vorgehens aus Kapitel 4) zur Definition des FSI-Problems wird in Kapitel 7 anhand einer räumlichen Membranstruktur durchgeführt.

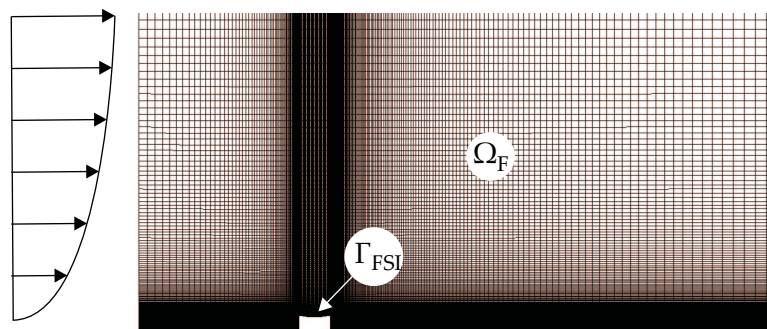


Abbildung 6.11: Strömungsgebiet und Kopplungsinterface.

Zur Rechenzeiterparnis wird das eigentlich dreidimensionale Problem nur als ein repräsentativer Streifen des Dachs mit einem halben Meter Breite mit entsprechenden Symmetriebedingungen an den Schnittkanten modelliert. Ebenso wird bei der Fluidsimulation eine Reduktion des Strömungsgebietes in der Tiefe durch symmetrische Randbedingungen

an der Vorder- und Rückseite des Strömungskanals erreicht. Nachdem mit diesem Beispiel vor allem eine Parameterstudie zur Bewertung der Kopplungsstrategien durchgeführt werden soll, sind diese Annahmen zulässig, um den ohnehin hohen numerischen Aufwand adäquat einzuschränken. Bei einer Bemessung dieser Art von Konstruktionen sind selbstverständlich Anströmungen aus verschiedenen Richtungen, auch unter Berücksichtigung der speziellen Ausführung der seitlichen Gebäudeflächen, zu beachten.

Die CFD-Simulation in dem schmalen Strömungskanal soll eine stark idealisierte Windströmung darstellen. Hierzu wird als Einströmrandbedingung ein Windprofil (siehe Abschnitt 5.3) mit einer maximalen Einströmgeschwindigkeit von 26 m/s festgelegt und stromabwärts ist der Ausströmquerschnitt angeordnet. Der Boden ist als no-slip und die obere Begrenzungsfläche als slip-Randbedingung definiert. Das verwendete Strömungsgitter ist inklusive Kopplungsrand in Abbildung 6.11 dargestellt. Das Fluid hat die Stoffwerte von Luft bei 25°C und zur Berücksichtigung der Turbulenz wurde das SST-Modell nach Menter verwendet.

Bei der numerischen Simulation wird zuerst das Strömungsfeld um die unverformte Struktur ermittelt und erst dann wird das Membrandach losgelassen. Ab diesem Zeitpunkt wird eine gekoppelte Berechnung zur Berücksichtigung der Fluid-Struktur-Wechselwirkung durchgeführt. In den folgenden Vergleichen wird immer die vertikale Verschiebung in Dachmitte aufgetragen. Beide numerischen Einzelfeldlöser arbeiten mit impliziten Zeitintegrationsverfahren, um potentiell auftretende Instabilitäten der Kopplung zuordnen zu können.

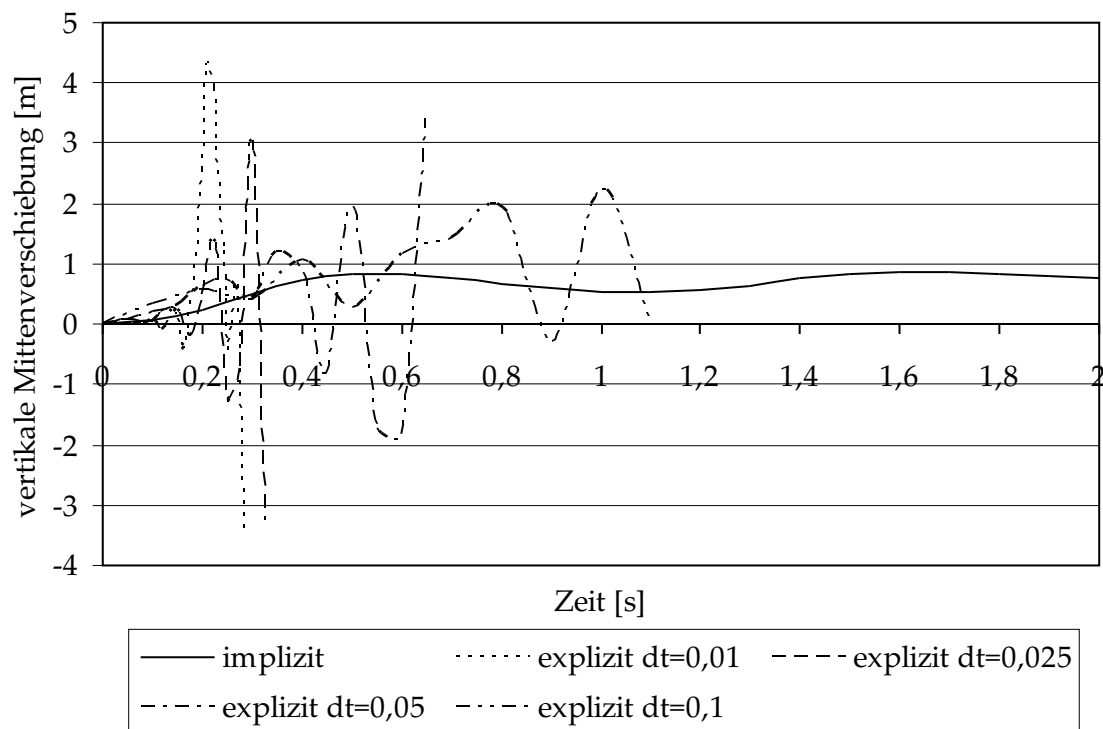
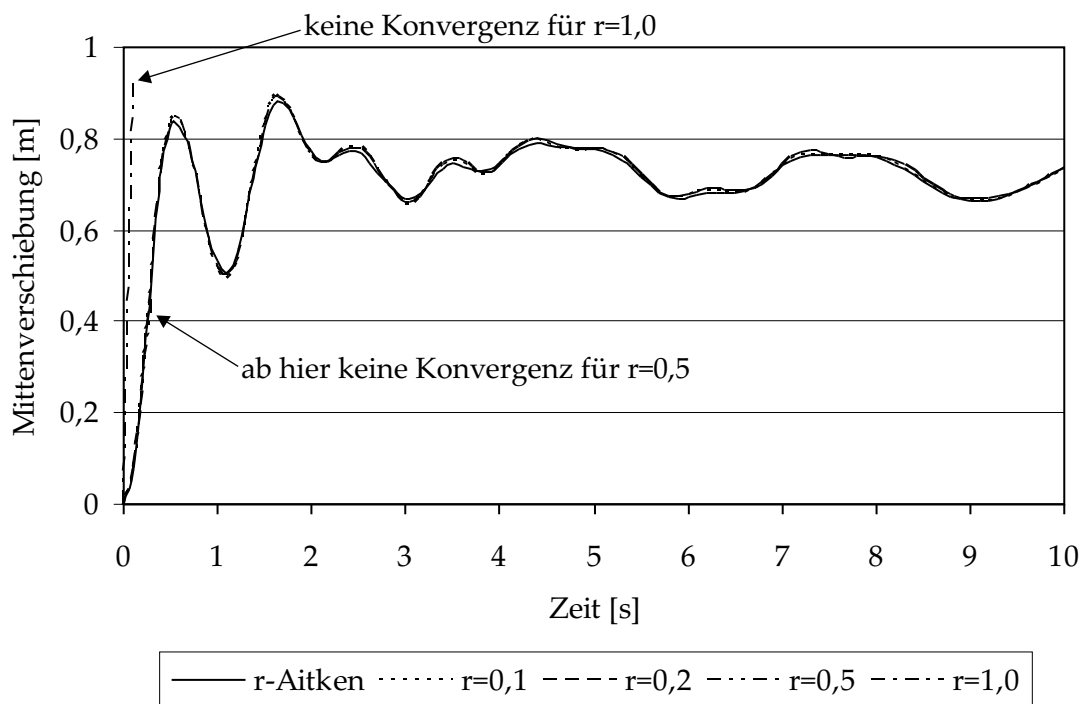


Abbildung 6.12: Instabilität der expliziten Kopplung.

Als erstes wird das Verhalten dieses gekoppelten Systems mit einer expliziten Kopplungsstrategie nach Abschnitt 6.6.1 berechnet. Hierbei wird die verwendete Zeitschrittlänge sukzessive herabgesetzt. Erwartungsgemäß versagen alle einfach gestaffelten Verfahren bei dieser sehr leichten und hochflexiblen Struktur in Kombination mit einer inkompressiblen Strömung. Die Ergebnisse sind in Abbildung 6.12 über die Zeit aufgetragen und es bestätigt sich auch, dass bei einer Verkleinerung des Zeitschritts der Beginn der Instabilität in der Kopplung immer früher einsetzt. Als Referenz ist der Zeit-Verschiebungsverlauf einer implizit gekoppelten Berechnung zusätzlich mit eingetragen.

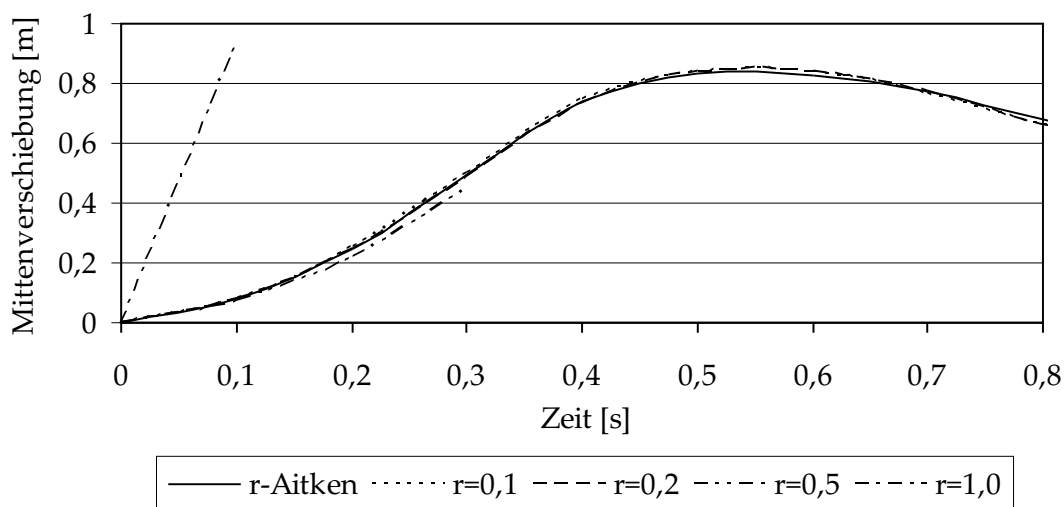
Um diese numerischen Instabilitäten in den Griff zu bekommen, wurden in Abschnitt 6.6.1 verschiedene Abhilfen diskutiert, wobei im Rahmen dieser Arbeit die Iteration über die beiden Teilfelder nach Abschnitt 6.6.2 als einzig sinnvolle Möglichkeit angesehen wird. Um die damit verbundene Wahl des hinsichtlich Stabilität und Berechnungsaufwand „optimalen“ Relaxationsparameters zu diskutieren, wurden Simulationen mit konstant gewählten Werten durchgeführt. Das bedeutet, dass der einmal gewählte Wert für die gesamte Berechnungsdauer entsprechend ausreichende Stabilisierung bieten muss. In Abbildung 6.13 sind die Verschiebungsverläufe für einen Knoten in der Dachmitte über die Zeit für die Parameterwahl  $r = 0,1$ ,  $r = 0,2$ ,  $r = 0,5$  und  $r = 1,0$  aufgetragen. Zusätzlich ist in derselben Darstellung der mit Aitken-Methode adaptiv angepassten Relaxationsparametern (siehe Abschnitt 6.6.2.2) berechnete Verformungsverlauf eingetragen.



**Abbildung 6.13:** Berechnungen mit impliziter Kopplungsstrategie.

Für die komplette Simulationsdauer ist aus dieser Testreihe nur die konstante Wahl von  $r \leq 0,2$  stabil. Die gekoppelten Berechnungen mit der Parameterwahl  $r = 0,5$  und  $r = 1,0$

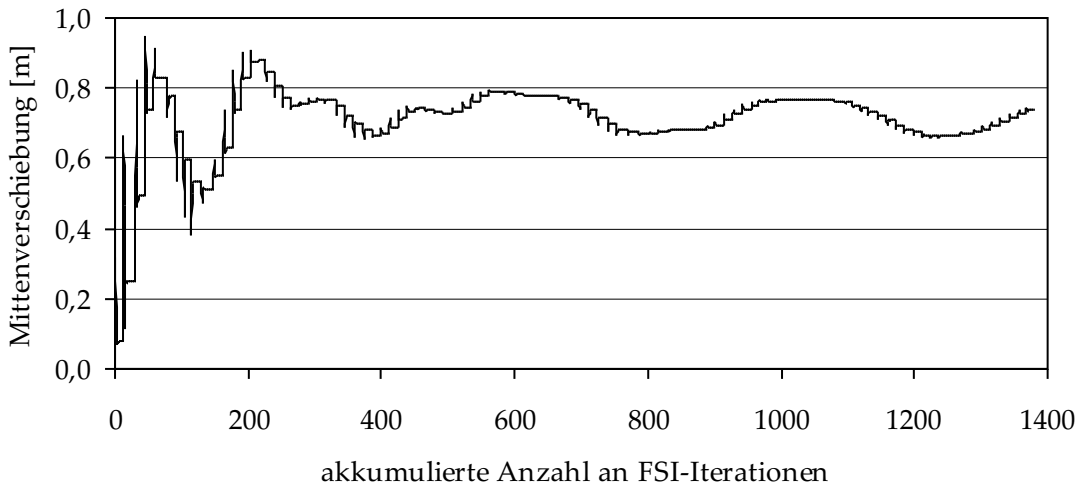
divergieren. Daraus kann man schließen, dass einerseits das im Falle  $r = 1,0$  angewendete Basisverfahren grundsätzlich keinerlei Chance auf Konvergenz hat und somit bei der Verwendung des Block-Gauß-Seidel-Grundverfahrens bei diesem Beispiel immer relaxiert werden muss. Andererseits ist der im Rahmen einer relaxierten Kopplungsstrategie verwendete Wert  $r = 0,5$  für die komplette Simulationsdauer nicht konservativ genug und so bricht die Berechnung an der Stelle ab, wo ein kleinerer Relaxationsparameter für die Stabilität der Berechnung erforderlich gewesen wäre. Um dies zu veranschaulichen, wurde in Abbildung 6.14 noch einmal der Beginn der stark gekoppelten Berechnung vergrößert dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Berechnung ohne Unterrelaxation sofort divergiert und die Berechnung mit dem konstanten Verfahrensparameter  $r = 0,5$  nach wenigen Schritten keine Konvergenz in den Iterationen zwischen Fluid und Struktur mehr ermöglicht. Der genaue Wert, ab dem die Simulation für diese spezielle Problemstellung die komplette Berechnungszeit über stabil bleiben würde, ist bei manueller Parameterwahl nur sehr mühsam durch Ausprobieren herauszufinden. Somit spricht neben der gestiegenen Effizienz des Gesamtverfahrens mit Aitken-Beschleunigung (es muss nicht auf der „sicheren Seite liegend“ ein konstanter Relaxationsfaktor festgelegt werden) auch die notwendige Stabilität der Berechnung für eine automatisierte, adaptive Festlegung der Unterrelaxation während der Berechnung. Denn bevor Effizienzüberlegungen eine Rolle spielen, muss die Berechnung in erster Linie stabil durchlaufen.



**Abbildung 6.14:** Instabilität bei zu großem Relaxationsfaktor.

Um den stabilisierenden Effekt der Iteration über die Felder zu demonstrieren, wurde in Abbildung 6.15 die Entwicklung der Mittenverschiebung über die akkumulierten Iterationsschritte zwischen den Feldern aufgetragen. Es ist gut zu erkennen, dass die Iterationen in jedem Zeitschritt auf den Gleichgewichtszustand hin konvergieren. Des Weiteren ist auch die Abhängigkeit der Stärke des „Überschießens“ vom Gradienten in der gekoppelten Lösung sichtbar. Dies deutet darauf hin, dass in Situationen mit starker Änderung im Verhalten des gekoppelten Systems auch ein höheres Maß an Stabilisierung zur Kontrolle dieses

Effekts und somit zur Sicherung der Kontinuität am Interface notwendig ist.



**Abbildung 6.15:** Simulationsverlauf mit Iterationen über die Teilfelder.

Die bisher als Vorteil identifizierte, adaptive und benutzerunabhängige Anpassung des Relaxationsfaktors steigert auch deutlich die Effizienz der gesamten gekoppelten Berechnung. Wird die für die 10 s Simulationszeit benötigte, akkumulierte Gesamtzahl an Zwischenfelditerationen als Maß für den numerischen Aufwand betrachtet, so ergibt sich die in Tabelle 6.1 aufgelistete Relation für die verschiedenen Unterrelaxationsstrategien mit festen Relaxationsfaktoren  $r = 0,1$  und  $r = 0,2$  sowie einer Berechnung mit adaptiver Parameterwahl nach Aitken. Als Bezugsgröße wurde hierbei die Gesamtiterationszahl für den vollen Simulationszeitraum mit Unterrelaxationsfaktor  $r = 0,1$  gewählt. Es wird bestätigt, dass die niedrigere Wahl von  $r$  zwar stabile Berechnungen garantiert, aber eben auch mehr Berechnungsaufwand mit sich bringt. Des Weiteren ist die klare Überlegenheit der Aitken-Konvergenzbeschleunigung offensichtlich.

Relaxationsparameterwahl	relativer numerischer Aufwand
$r = 0,1$	100%
$r = 0,2$	62%
$r - \text{Aitken}$	28%

**Tabelle 6.1:** Numerischer Aufwand für verschiedene Unterrelaxationsstrategien.

Nach den algorithmischen Betrachtungen soll noch kurz auf das aufgetretene Durchschlagsphänomen der Membrankonstruktion eingegangen werden. Die Ergebnisse der numerischen Mehrfeldsimulation sind in Abbildung 6.16 dargestellt: Im obersten Bild ist die umströmte Hängeform unter Eigengewicht als Ausgangskonfiguration, im mittleren Bild ein Zwischenzustand während des Durchschlagens und ganz unten ist das vollkommen nach oben gesogene Membrandach abgebildet. Im Einzelnen kann dieser Vorgang wie folgt erklärt werden: Durch die scharfe Kante an der Dachvorderseite reißt die Strömung an dieser



Linie ab und der sich dahinter bildende Unterdruck hebt die Membran entgegen der Wirkung des Eigengewichts an. Dieser Prozess setzt sich fort, bis das Dach vollkommen nach oben durchgeschlagen ist. Bei nachlassendem Wind würde die Membran wieder nach unten fallen und die ursprüngliche Ausgangslage einnehmen. Dieses Verhalten ist auch unter dem Begriff „Abreißflattern“ bekannt [Huc02] und ist bei einem Bauwerk unter allen Umständen zu vermeiden.

Eine Gegenmaßnahme gegen dieses Flattern der Membran ist das zusätzliche Aufbringen von Ballast, was aber dem Leichtbaugedanken zuwiderläuft und die filigrane Erscheinung der Konstruktion stört. Aus diesem Grund ist die Stabilisierung von Membrantragwerken durch eine geeignet zu wählende Vorspannung die bessere Lösung, wofür aber eine doppelt gekrümmte Fläche entworfen werden muss. Dieses Beispiel bestätigt somit, neben der korrekten Wahl des Kopplungsalgorithmus hinsichtlich numerischer Stabilität, ebenso die bereits in den Abschnitten 4.6 und 6.3.1 festgestellte Notwendigkeit von Flächenkrümmung und Vorspannung.

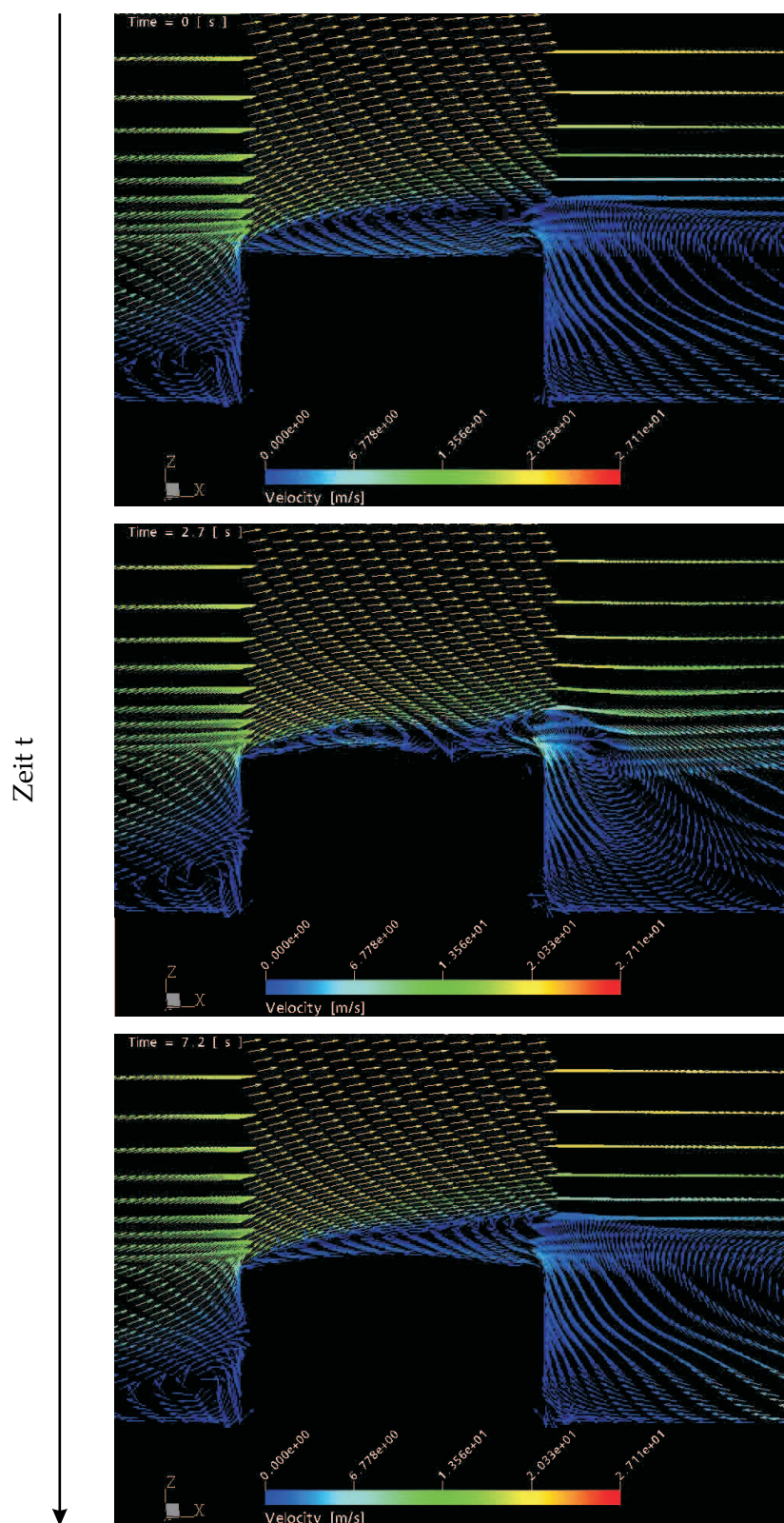


Abbildung 6.16: Deformation des Hängedachs und Geschwindigkeitsvektoren.

**FAZIT:**

In diesem Kapitel wurde das oberflächengekoppelte Problem der Fluid-Struktur-Interaktion dargestellt und in den gesamten Berechnungsablauf, der bei Membranstrukturen notwendig ist, eingeordnet. Durch die Kopplung von Form und Spannungszustand ist als Besonderheit beim Entwurf des Berechnungskonzepts die Formfindung direkt zu integrieren. Die Wechselwirkung von Formfindung und dem Mehrfeldproblem der Fluid-Struktur-Wechselwirkung besteht im Einzelnen darin, dass der vorhandene Spannungszustand die Membrangeometrie bestimmt und diese wiederum das Kopplungsinterface definiert. Außerdem sind, wegen des Zusammenhangs zwischen Membranform und den mechanischen Eigenschaften der Struktur, an die durch Vorspannung und Randbedingungen festgelegte Ausgangsform für die Strömungsbelastung gewisse Anforderungen zu stellen. Für die hier betrachteten Fragestellungen erweist sich ein vollständig partitioniertes Gesamtkonzept, bestehend aus Formfindung, Strukturanalyse und Strömungssimulation, als sinnvoll, weshalb dieser Lösungsansatz umgesetzt wurde.

Bei der Berechnung der Fluid-Struktur-Wechselwirkung mit partitionierten Lösungsverfahren entsteht durch die fiktive Separation der beiden physikalischen Felder der Bedarf, die bei umströmten Membranen vorliegende, starke physikalische Kopplung durch entsprechend darauf abgestimmte Kopplungsstrategien auch algorithmisch zu gewährleisten: Eine explizite Kopplung (also ein einfach gestaffeltes Verfahren) erweist sich auf Grund der fast masselosen Strukturen und der damit verbundenen Problematik bei der Wechselwirkung mit inkompressiblen Strömungen als ungeeignet. Deswegen wurde im Rahmen dieser Arbeit eine starke algorithmische Kopplung mittels Zwischenfelditerationen mit Unterrelaxation im Zeitschritt realisiert. Im Hinblick auf die Stabilität und Effizienz der Gesamtsimulation stellte sich bei Untersuchungen an einem Membranhängedach die Konvergenzbeschleunigung mit der Aitken-Methode als besonders vorteilhaft heraus.

Somit sind mit den Erkenntnissen und Implementierungen dieses Kapitels, in der Kombination mit den vorherigen Ausführungen zur Lösung der physikalischen Einfeldprobleme und insbesondere der Formfindung, alle Bestandteile vorhanden, um beliebig geformte Membranstrukturen in der Wechselwirkung mit umgebenden Strömungen zu simulieren.



## Kapitel 7

# Formfindung und Strukturanalyse eines umströmten Vierpunktsegels

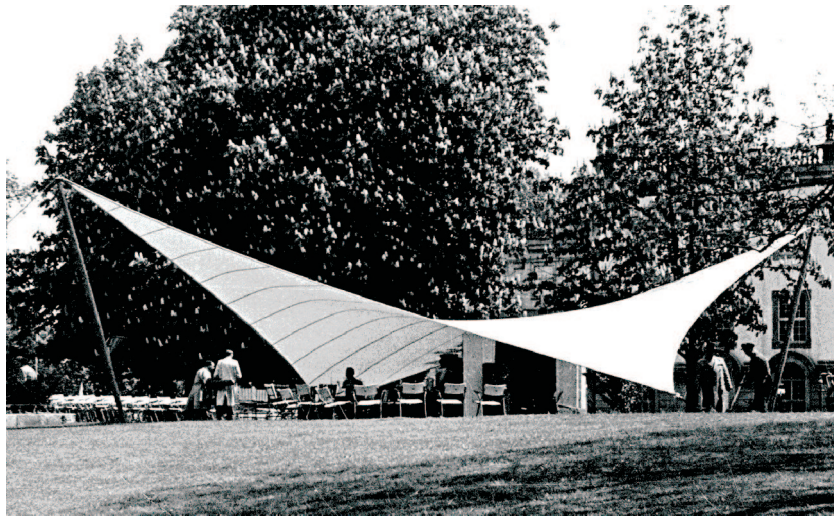
Der umfassende Problemkomplex einer mit Strömungen interagierenden Membranstruktur wurde in den letzten Kapiteln aus der Sicht der darin involvierten algorithmischen und physikalischen Einzelfelder und des physikalischen Mehrfeldproblems der Fluid-Struktur-Interaktion diskutiert. Die wesentlichen Punkte in jedem Bereich wurden dabei separat betrachtet und gelöst. In diesem Kapitel wird nun die Synthese aller beteiligten Disziplinen am Beispiel eines umströmten Vierpunktsegels durchgeführt. Die hierzu notwendige Interaktion der Formfindung, der transienten, nichtlinearen Strukturanalyse und der numerischen Strömungssimulation wird durch das in Abschnitt 6.4 vorgestellte Berechnungskonzept realisiert.

Die zuverlässige und robuste Wirkungsweise der Teilkomponenten wurde bereits anhand von darauf abgestimmten numerischen Experimenten in den entsprechenden Kapiteln gezeigt. Durch den modularen und flexiblen Lösungsansatz ist die Integration von jeweils optimal geeigneten Komponenten in den Berechnungsprozess möglich, was in der Auswahl des folgenden dreidimensionalen Beispiels grundsätzlich keine Einschränkungen erfordert.

### 7.1 Problemdefinition

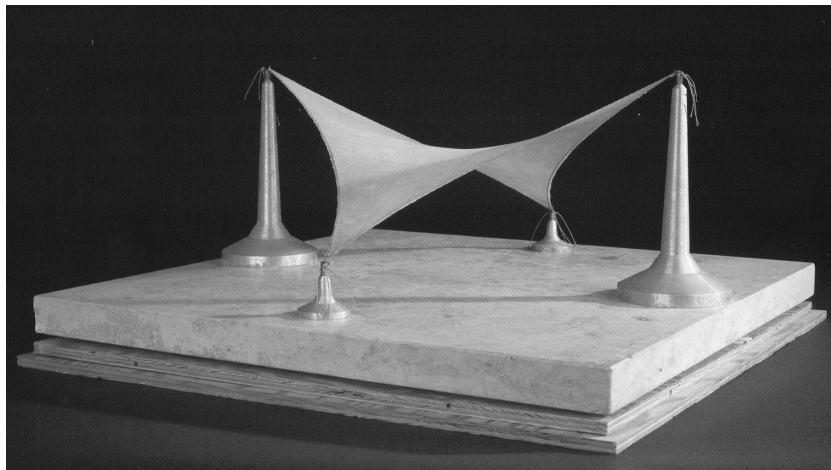
Als Modellproblem wurde eine Membrangeometrie gewählt, die sich an einem Werk von Frei Otto orientiert: ein Vierpunktsegel. Frei Otto entwarf 1955 für die Bundesgartenschau in Kassel den in Abbildung 7.1 dargestellten Musikpavillon. Es ist ein Zelt mit zwei Hoch- und zwei Tiefpunkten. Die resultierende Membranform ist gegensinnig gekrümmt, also antiklastisch, und stellt eine typische Grundform für mechanisch vorgespannte Membrane dar. An Stelle einer kontinuierlichen, starren Fixierung der Membrankanten sind an den Rändern Seile befestigt. Diese flexible Lagerung der Ränder ist aus Gleichgewichtsgründen immer gekrümmt, sammelt die im Segel vorhandene Flächenspannung auf und erlaubt damit die punktuelle Verankerung der Membran an den Stützenköpfen und den Lagerpunkten am Boden.

Die elegante und ausgeglichene Form hat in beide Richtungen gleich große Krümmungen und folglich auch identische Spannungen. Das bedeutet, dass in der Membran ein isotroper



**Abbildung 7.1:** Musikpavillon auf der Bundesgartenschau in Kassel (1955) (aus [Ner05]).

Vorspannungszustand herrscht und die Fläche eine Minimalfläche in den durch die Seile definierten, nachgiebigen Rändern repräsentiert. Die Wechselwirkung zwischen Membranflächenspannung und Randseilvorspannung verkompliziert die Bestimmung der Gleichgewichtsform deutlich und es ist nicht gesichert, dass diese Minimalfläche überhaupt analytisch ermittelt werden kann.

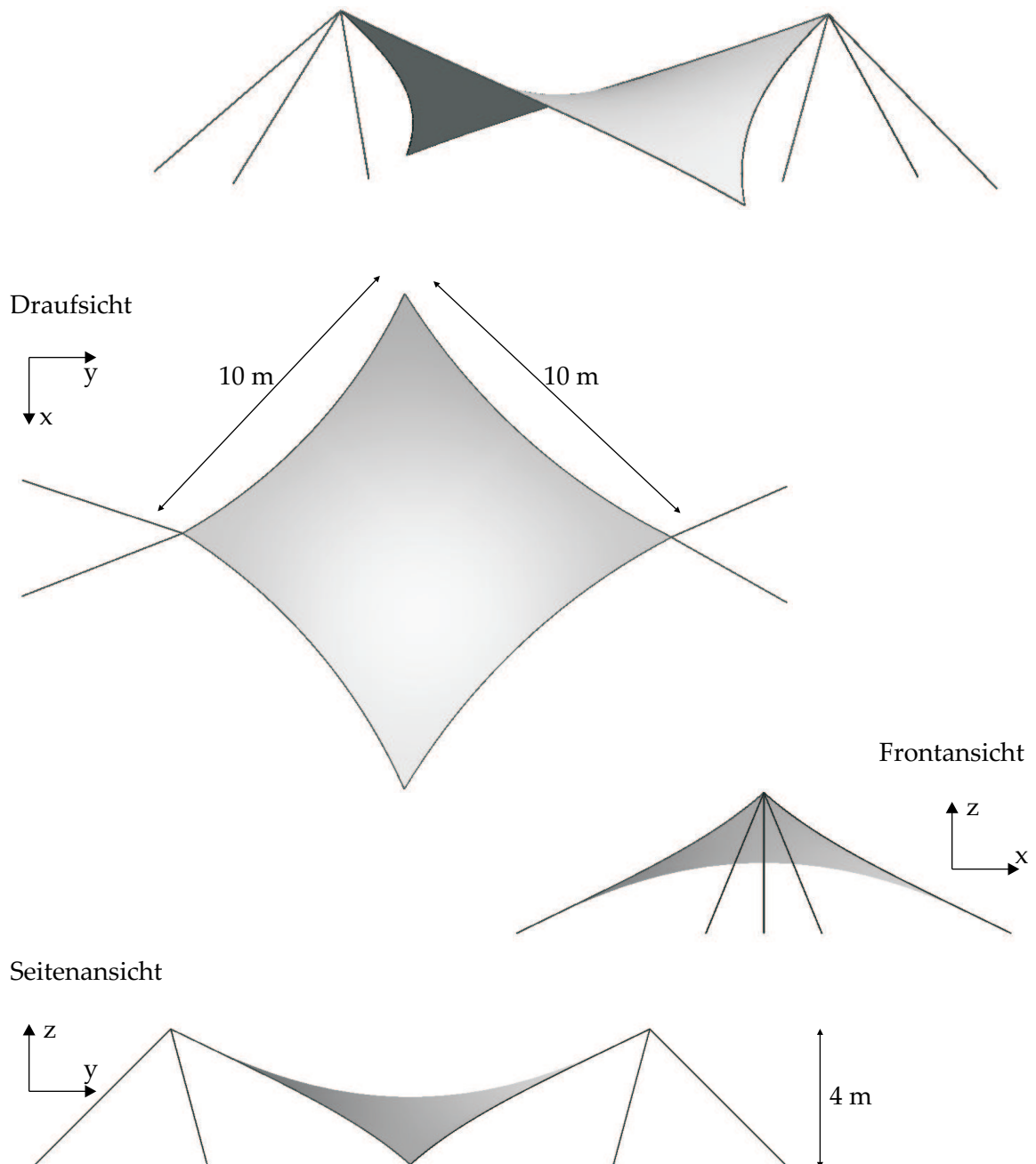


**Abbildung 7.2:** Modell eines Vierpunktsegels mit flexiblen Rändern (aus [Ner05]).

Es lässt sich also feststellen, dass die klare und scheinbar so einfache Form eine besondere Herangehensweise zur Formentwicklung erfordert. So wie dieses Zelt sind viele der von Frei Otto entwickelten Konstruktionen, wenn überhaupt, nur näherungsweise und mit hohem Aufwand mathematisch zu erfassen. Aus diesem Grund wurde die bereits in Abschnitt 4.1 vorgestellte experimentelle Formfindung entwickelt. Ein Modell zur Untersuchung der sich einstellenden Geometrie eines Vierpunktsegels mit Randseilen ist in Abbil-

dung 7.2 dargestellt.

Das im Folgenden zu untersuchende Vierpunktsegel ist mit allen Abmessungen in Abbildung 7.3 dargestellt. Die Systembilder sind bereits mittels numerischer Formfindung berechnete Geometrien, worauf später noch detaillierter eingegangen wird.



**Abbildung 7.3:** Geometrie und Abmessungen des Membrandachs.

Die gezeigte Sattelfläche mit den Abständen der Eckpunkte von 10 m im Grundriss wird mit den folgenden Vorspannungen stabilisiert: In der Membran soll eine isotrope Vorspannung

von  $2,5 \text{ kN/m}$  vorgeschrieben werden; die Randseile sind mit  $50 \text{ kN}$  vorgespannt. Es wird also, analog zum oben genannten Entwurf von Frei Otto, eine Minimalfläche berechnet. Die zwei Abspannseile, die von jedem Hochpunkt ausgehen, haben jeweils eine Vorspannkraft von  $41 \text{ kN}$ . Für die Membran wird ein  $1 \text{ mm}$  dickes Polyestergewebe mit PVC-Beschichtung des Typs I verwendet, das ein Eigengewicht von  $g = 0,8 \text{ kg/m}^2$  hat. Für die Randseile und Abspannseile werden Spiralseile mit einem metallischen Querschnitt von  $A = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$  verwendet und die Maste werden mit Stahlrohren mit knapp  $9 \text{ cm}$  Durchmesser realisiert.

Diese Struktur soll auf ihr Verhalten unter einer stark vereinfachten Böenbelastung in Richtung der globalen  $y$ -Achse untersucht werden. Dazu wird ein Geschwindigkeitsprofil entsprechend Abbildung 7.4 mit einem zeitlich veränderlichen Geschwindigkeitsverlauf über die Gesamtsimulationsdauer von  $6 \text{ s}$  gemäß Abbildung 7.5 angenommen. Die angegebene Windgeschwindigkeit liegt in  $10 \text{ m}$  Höhe vor und die Verteilung über die Höhe ist durch einen Potenzansatz entsprechend Formel (5.9) mit dem Geländerauigkeitsbeiwert  $\alpha = 0,16$  gegeben. Als Randbedingungen sind an den strömungsparallelen Wänden und am Deckel des abgebildeten Strömungskanals slip-Bedingungen und gegenüber vom Einströmrand (also in positiver  $y$ -Richtung stromabwärts) ist der Ausströmquerschnitt vorgegeben. Die Membran selbst und der Boden sind als no-slip-Randbedingung definiert. In den System-

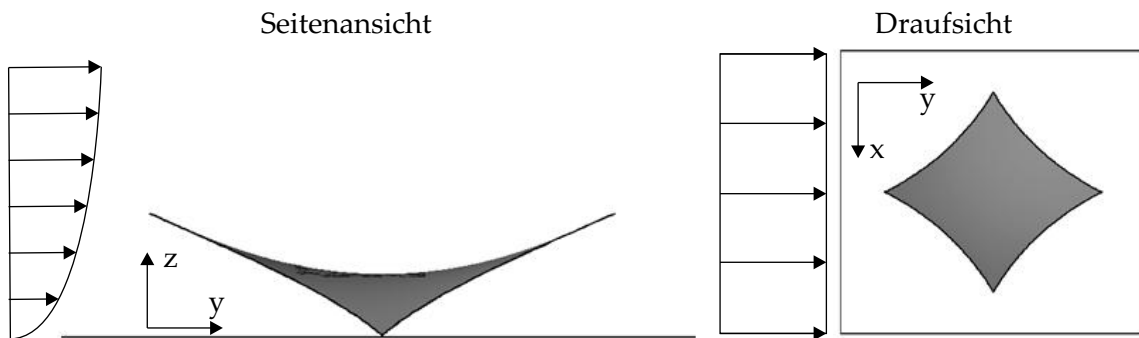


Abbildung 7.4: Anströmsituation des Vierpunktsegels.

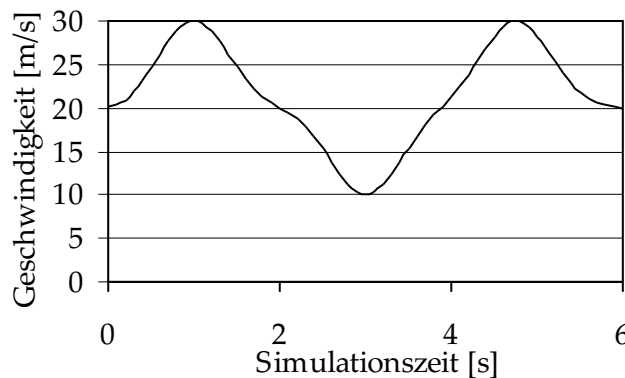


Abbildung 7.5: Zeitliche Variation der Einströmgeschwindigkeit.



skizzen sind zur einfacheren Darstellung die Abspannungen weggelassen worden. Das Fluid ist Luft bei  $25^{\circ}\text{C}$  und hat die Dichte  $\rho = 1.185 \text{ kg/m}^3$  und die dynamische Viskosität  $\mu = 1.831 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$ .

## 7.2 Numerische Simulation

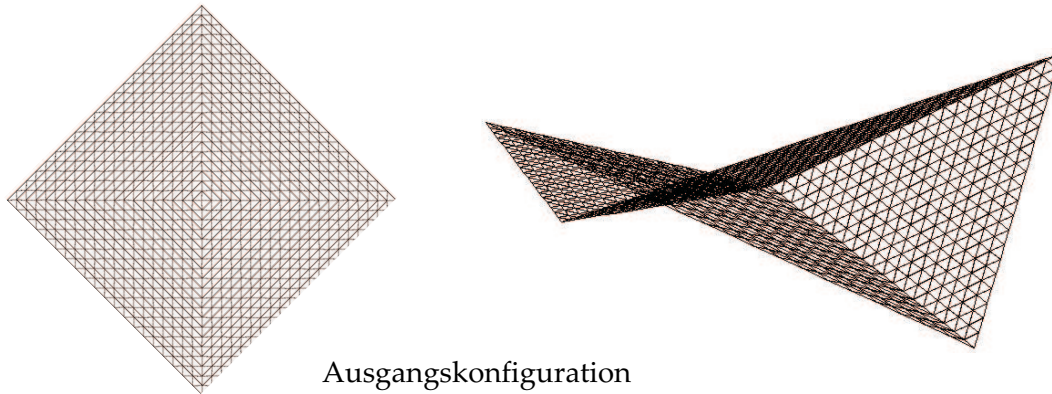
Damit die bei Umströmung der Membran auftretenden Effekte untersucht werden können, ist ein Zusammenspiel der beteiligten algorithmischen und physikalischen Felder gemäß den Erläuterungen in Kapitel 6 erforderlich, was mittels des in Abschnitt 6.4 beschriebenen Berechnungskonzepts umgesetzt wird.

In einem ersten Schritt ist die zur Vorspannung gehörige Gleichgewichtsform zu ermitteln. Diese Geometrie wird, im Unterschied zur experimentellen Formfindung in Abbildung 7.2, numerisch bestimmt. Dies hat den Vorteil, dass, neben der höheren Genauigkeit der ermittelten Form, die Lage im Raum schon digital erfasst ist. Auf Grund der inversen Fragestellung ist, entsprechend den Erklärungen in Abschnitt 4.4, die Formfindung von Membranen eine numerisch schwierig zu lösende Problemstellung. Eine besondere Herausforderung für Formfindungsalgorithmen stellen vor allem die tangentialen Randanpassungen dar, was bereits anhand Abbildung 4.8 diskutiert wurde. Zur Formfindung wird die Fläche, gemäß den Ausführungen in Abschnitt 4.2, mit finiten Elementen parametrisiert. Die in der Formfindung verwendeten Finite-Elemente-Netze werden dann für die spätere Strukturanalyse übernommen. Des Weiteren haben die Kräfte in den Abspannungen einen Einfluss auf die letztendlich gefundene Geometrie. In der hier betrachteten Struktur werden die Abspannseile so vorgespannt, dass die endgültige Position der Stützenköpfe identisch mit der Ausgangslage ist. Die verschiedenen Konfigurationen inklusive der Formparametrisierung sind in Abbildung 7.6 dargestellt, in der auch ein Vergleich zwischen Ausgangs- und Gleichgewichtsgeometrie vorgenommen wird. Es ist deutlich zu erkennen, dass an den Randseilknoten während des Formfindungsprozesses große Verschiebungen tangential zur Fläche auftreten.

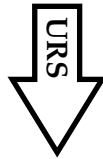
Die aus der Formfindungssimulation erhaltene Membrangeometrie wird mit einem Facettenmodell zum Fluidfeld übertragen, wo die entsprechende Vernetzung des Gebiets um die Membran durchgeführt wird, die wiederum als unendlich dünner Körper mit zwei Seiten behandelt wird. Hierbei wird ein unstrukturiertes Tetraedergitter mit Prismen an der Membranfläche und am Boden verwendet. In der Strömungssimulation wird nur die Membranfläche modelliert und der Einfluss der Strömung auf Stützen und Abspannseile wird vernachlässigt. Im Rahmen der transienten Strukturanalyse wird jedoch die komplette Membranstruktur mit den beiden Abspannungen berechnet.

Im Gegensatz zur Formfindung sind zur transienten Simulation der Struktur unter externen Belastungen die Werkstoffkennwerte erforderlich. Die Rand- und Abspannseile haben einen E-Modul von  $E = 130 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$  und eine Dichte von  $\rho = 8300 \text{ kg/m}^3$ . Bei den Stützen ist  $E = 210 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$  und  $\rho = 8300 \text{ kg/m}^3$ . Die Membran wird näherungsweise mit einem isotropen Werkstoffgesetz für den ebenen Spannungszustand mit den Materialparametern  $E = 300 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$  und  $\nu = 0,2$  beschrieben. Das Fluid ist Luft mit der

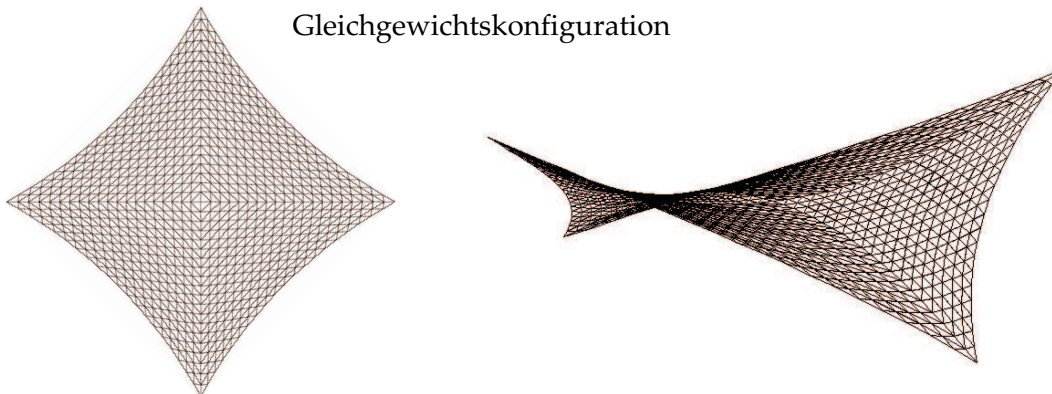
Draufsicht



Ausgangskonfiguration



Gleichgewichtskonfiguration



Vergleich: Ausgangskonfiguration der Formfindung und Gleichgewichtskonfiguration

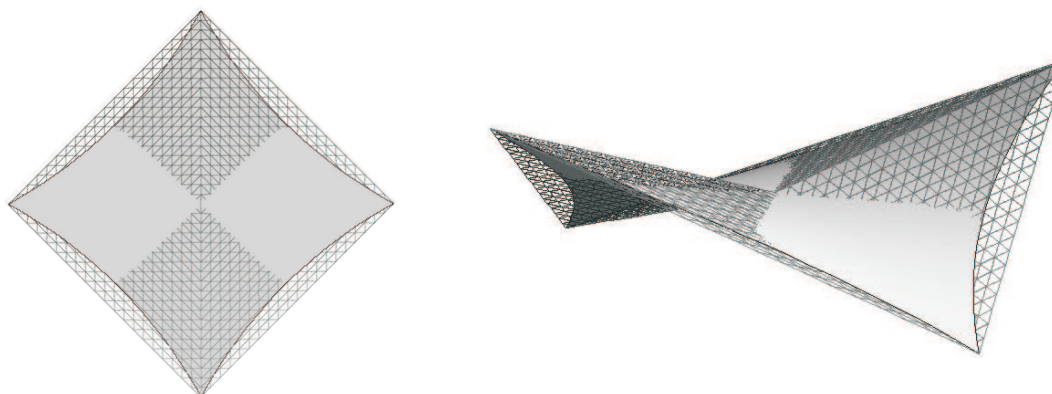


Abbildung 7.6: Numerische Formfindung der Minimalfläche mit Randseilen.

entsprechend niedrigen Viskosität, weshalb die Reynoldszahl mit  $Re \approx 1,5 \cdot 10^7$  so hoch ist, dass eine turbulente Strömung vorliegt. Als Turbulenzmodell wird das SST-Modell nach Menter verwendet (siehe Abschnitt 5.5.2).

Um die starke Wechselwirkung zwischen Fluid und Struktur zu berücksichtigen, wird die implizit gekoppelte, partitionierte Herangehensweise aus Abschnitt 6.6 angewendet. Weil die beiden physikalischen Felder unabhängig voneinander vernetzt werden, ist der Informationstransfer zwischen den „non-matching grids“ gemäß den Ausführungen in Abschnitt 6.5 vorzunehmen. Auf Grund der freien Vernetzung des Strömungsgebiets ist die Oberflächenvernetzung vom Fluid an der Ober- und Unterseite der Membran unterschiedlich. Beispielhaft sind in Abbildung 6.6 die unterschiedlichen Netze des Fluids auf einer Seite der Strukturfläche und der Membran dargestellt. Zwischen den beiden Feldern werden die Strukturverformungen zum Fluid und die Druckbelastung zur Membran übertragen. Zur Ermittlung der Einwirkungen auf das Tragwerk werden nur die Drücke berücksichtigt, weil die Wandschubspannungen um Größenordnungen kleiner und somit vernachlässigbar sind.

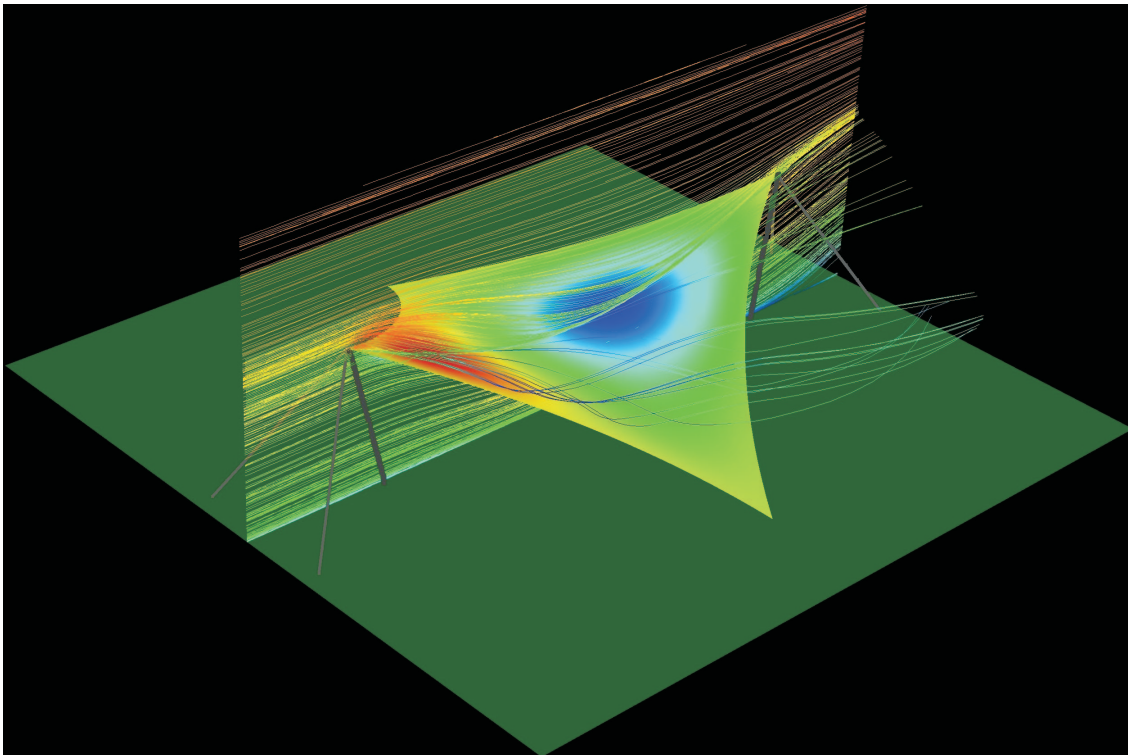


Abbildung 7.7: Umströmung des Vierpunktsegels.

Zur Veranschaulichung der Umströmungssituation sind in Abbildung 7.7 einige Stromlinien um das Vierpunktsegel dargestellt. Anhand des Druckverlaufs um die Membran, der in Abbildung 7.8 für eine Anströmgeschwindigkeit von 30 m/s auf einem Schnitt durch die Mitte des Strömungsgebiets aufgetragen ist, kann man sich die auftretenden Verformungen qualitativ erschließen. So wirkt auf der Unterseite der Membran im Luv der Staudruck und auf der anderen Seite der Fläche ist ein Unterdruck. Genau umgekehrt verhält es sich

am windabgewandten Teil des Dachs: An der Unterseite gibt es eine Sogwirkung und auf der Oberseite einen Überdruck. Hieraus folgt, dass sich der windabgewandte Bereich leicht absenkt und die Membran sich auf der windzugewandten Seite nach oben verformt.

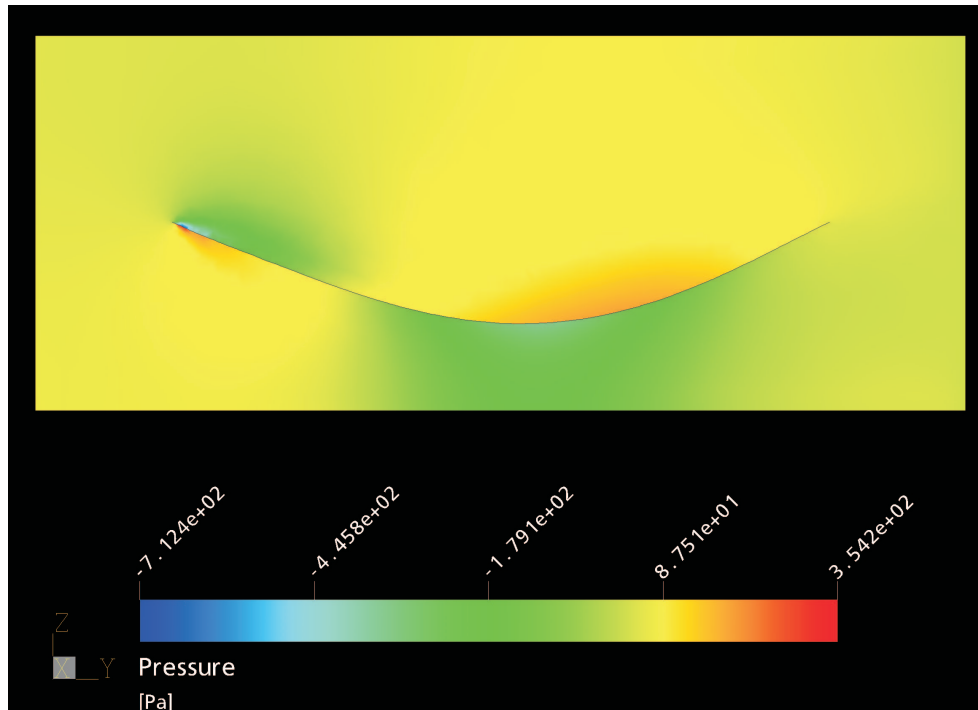


Abbildung 7.8: Druckverteilung um die Membran.

Um die transienten Effekte infolge der in Abschnitt 7.1 definierten, idealisierten Böenbelastung zu berechnen, wird eine Mehrfeldsimulation mit algorithmisch starker, also impliziter Kopplung mit Aitken-Beschleunigung durchgeführt, weil sich dieses Vorgehen in den Untersuchungen in Abschnitt 6.6 als vorteilhaft erwiesen hat. Hierzu wird zuerst eine stationäre Berechnung durchgeführt, um die verformte Struktur in einem Strömungsfeld zu ermitteln, das sich bei einer konstanten Einströmgeschwindigkeit von 20 m/s ergibt. Ausgehend von dieser deformierten Membranstruktur, wird die Strukturbewegung infolge der zeitlich veränderlichen Strömungsgeschwindigkeit gemäß Abbildung 7.5 berechnet.

Die daraus resultierenden Deformationen der Membran sind in Abbildung 7.9 für verschiedene Zeitpunkte mit fünffacher Überhöhung dargestellt. Zum Vergleich ist auch die undeformierte Gleichgewichtskonfiguration bei Windstille abgebildet. Die Verformung des Zeltdachs bei  $t = 0$  s ist durch die stationäre Anströmung begründet. Die auf der Struktur angezeigten Farben geben die vertikalen Verschiebungen der Membran an. Es zeigt sich, dass die Struktur der Belastung ohne Verzögerung folgt, was sich durch den geringen Einfluss der Strukturmasse auf die Systemantwort erklären lässt. Die aus der hohen Schlankheit von  $l/t = 1/10000$  resultierende, extrem geringe Massenbelegung ergibt für die vorgespannte Membran relativ hohe Eigenfrequenzen, weshalb für die, im Vergleich dazu, langsame Böenbelastung die quasi-statische Reaktion des Tragwerks maßgeblich ist. Diese

Struktur verfügt durch die vorhandene Krümmung und die aufgebraachte Vorspannung also über eine ausreichende Steifigkeit.

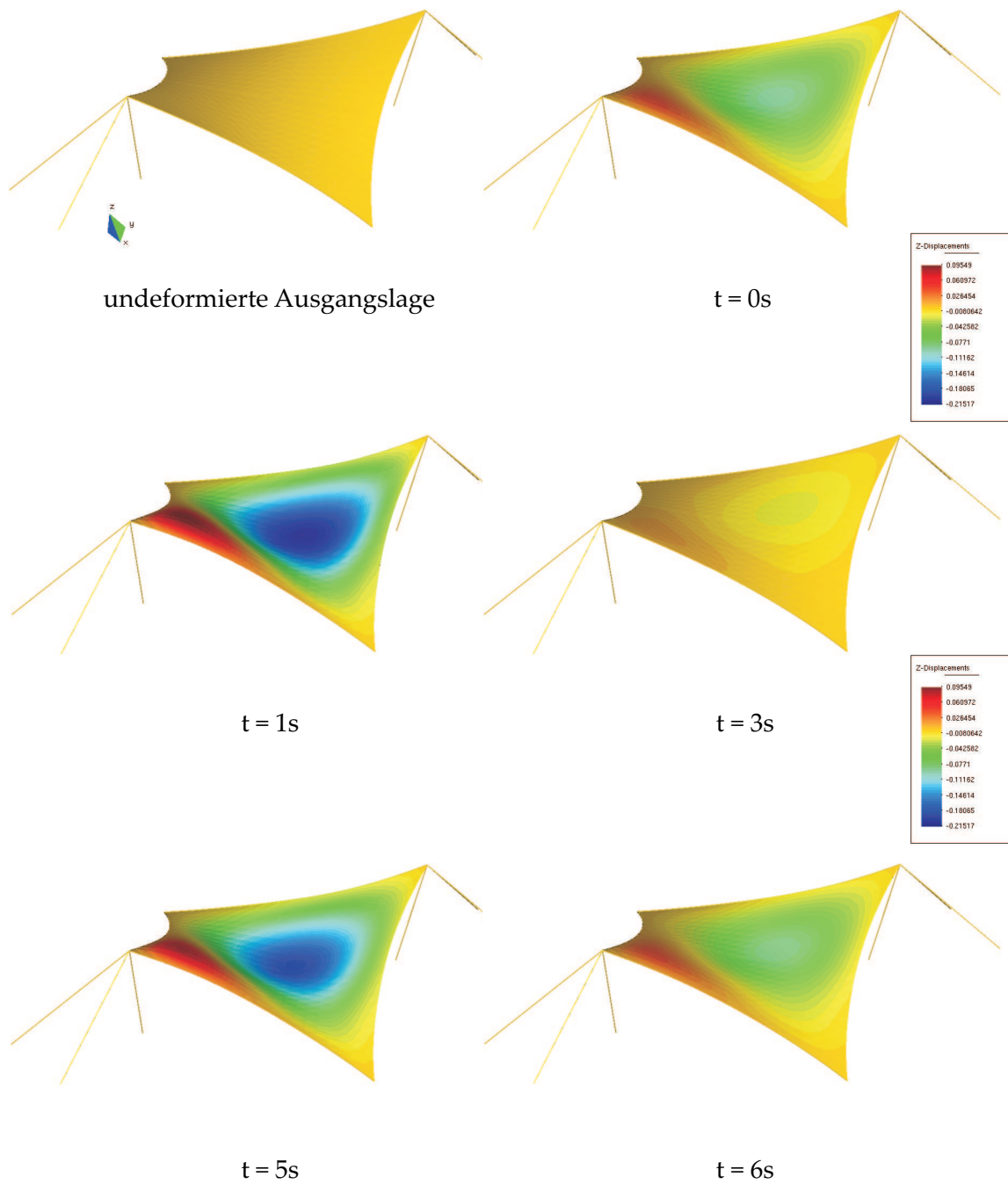


Abbildung 7.9: Deformation des Segels zu gewissen Zeitpunkten.



## Kapitel 8

# Zusammenfassung und Ausblick

Die numerische Untersuchung von Freiformmembranen, die mit Strömungen wie beispielsweise Wind interagieren, ist auf Grund des speziellen Tragverhaltens dieser Strukturen eine komplexe Fragestellung. Im Rahmen dieser Arbeit wurde dieses Problem systematisch analysiert. Dabei wurden die beteiligten physikalischen und algorithmischen Felder mit ihren jeweiligen Anforderungen und wechselseitigen Abhängigkeiten identifiziert. Aufbauend auf diesen Erkenntnissen wurden die Einzelfeldlöser ausgewählt und teilweise selbst entwickelt.

Um Fragestellungen der geometrisch nichtlinearen Strukturodynamik von leichten Flächentragwerken behandeln zu können, wurde das Finite-Elemente-Programm CARAT entsprechend erweitert. Durch eine sequentielle Raum-Zeit-Diskretisierung mit anschließender Linearisierung wurde das Anfangs-Randwertproblem der nichtlinearen Elastodynamik numerisch gelöst. Der verwendete Lösungsalgorithmus setzt sich aus dem impliziten Einschritt-Zeitintegrationsverfahren der Generalized- $\alpha$ -Verfahrensfamilie und einem darin gekapselten Newton-Raphson-Verfahren im Sinne einer Prädiktor-Multikorrekter-Strategie zusammen. Dieses Vorgehen wurde auf Grund der kontrollierbaren Hochfrequenzdissipation, die zur Gewährleistung der numerischen Stabilität bei nichtlinearen Fragestellungen eingesetzt wird, bei gleichzeitig minimierter Verschlechterung der unteren (hier interessanten) Moden gewählt. Somit steht ein allgemein einsetzbarer Strukturdynamiklöser für die Berechnung der nichtlinearen Schwingungen von Membranstrukturen zur Verfügung.

Diese Tragwerke sind durch die inhärente Kopplung von Form und Spannungszustand charakterisiert. Deshalb ist, als Voraussetzung für die geometrisch nichtlineare Strukturanalyse unter Belastung, zunächst die Gleichgewichtskonfiguration zu ermitteln. Dazu muss das inverse Problem der Formfindung gelöst werden, was in der vorliegenden Arbeit mit der Updated Reference Strategy realisiert wurde. Diese Methode wurde hinsichtlich der Geometrieermittlung von anisotrop vorgespannten Membranstrukturen erweitert. Der Effekt von physikalisch unmöglichen Spannungsvorgaben wurde analysiert und dabei die Indikatoreigenschaft der Netzverzerrungen im Rahmen der URS identifiziert. Auf der Basis dieser Untersuchungen wurde eine Methode zur Stabilisierung des Formfindungsprozesses mittels adaptiv angepasster Vorspannungszustände entwickelt. Somit ist der Anwendungsbereich der URS auf die in der Praxis wichtigen, von Minimalflächen abweichenden Geometrien erweitert worden. Durch die algorithmische Aufbereitung und die Implementierung in CARAT ist die robuste, numerische Formermittlung von beliebig vorgespannten Strukturen möglich.

Um im Bereich der numerischen Strömungsmechanik eine adäquate Modellwahl zu treffen, wurden die Besonderheiten der Strömungszustände in der Gebäudeaerodynamik analysiert und aufbereitet. Als Konsequenz daraus, wurden die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen zur Beschreibung der Strömungen verwendet. Darüber hinaus wurden die Implikationen der geplanten Simulation von Phänomenen der Fluid-Struktur-Interaktion auf den Strömungslöser beleuchtet und die grundsätzlichen Ideen des verwendeten, ALE-basierten Verfahrens geschildert. Die Berechnungen des Strömungsfelds wurden auf der Grundlage der Finite-Volumen-Methode mit dem Programm CFX5 durchgeführt.

Zur numerischen Simulation der Fluid-Struktur-Wechselwirkung wurde eine partitionierte Herangehensweise vorgeschlagen und mit den bereit gestellten, physikalischen Einzelfeldlösern umgesetzt. Eine explizite Kopplung erwies sich auf Grund der fast masselosen Strukturen und der damit verbundenen Problematik bei der Wechselwirkung mit inkompressiblen Strömungen als ungeeignet. Die bei umströmten Membranen vorliegende, starke physikalische Kopplung musste durch entsprechend darauf abgestimmte Kopplungsstrategien auch algorithmisch gewährleistet werden. Dies wurde durch eine Fixpunktiteration zwischen den Feldern Struktur und Fluid in jedem Zeitschritt realisiert und zur Stabilisierung der Zwischenfelditerationen wurde eine Unterrelaxation angewendet. Zur Konvergenzbeschleunigung des iterativ gestaffelten Verfahrens wurde die Aitken-Methode für vektorielle Gleichungen eingesetzt. Damit wurde eine adaptive, benutzerunabhängige Anpassung des Relaxationsfaktors im Iterationsverlauf erreicht, die sich sowohl hinsichtlich der numerischen Stabilität, als auch des erforderlichen Rechenaufwands als vorteilhaft herausstellte. Somit ist mit dem vorgeschlagenen Vorgehen die implizit gekoppelte, numerische Simulation von Wechselwirkungen zwischen Strömungen und Membrantragwerken durchführbar. Gleichzeitig ist das realisierte, modulare Simulationswerkzeug flexibel genug, um an zukünftige, weiterreichende Fragestellungen einfach angepasst zu werden.

Schließlich wurde, basierend auf der Klassifikation von gekoppelten Problemen, die Wechselwirkung von Formfindung und Strukturanalyse analysiert und bewertet. Als wesentliches Ergebnis lässt sich konstatieren, dass die bestehenden Abhängigkeiten zwischen Formdefinition und erwünschtem Strukturverhalten unter einer Belastung infolge Umströmung, eine ganzheitliche Betrachtung erforderlich machen. Um dies im Rahmen der Berechnung berücksichtigen zu können, wurde ein allgemeines, partitioniertes Gesamtkonzept erarbeitet, das die einzelnen Komponenten adäquat miteinander kombiniert. Durch diese Synthese steht folglich eine leistungsfähige und flexible Softwareumgebung zur numerischen Simulation von umströmten, vorgespannten Membranstrukturen mit beliebiger Form und unter Berücksichtigung ihres speziellen Verhaltens unter Last zur Verfügung.

Für künftige Forschungsanstrengungen steht durch die beschriebene Modellwahl und die durchgeführten Neuentwicklungen eine solide Basis zur Verfügung, auf der weitere Arbeiten aufsetzen können. Hierbei ist prinzipiell zwischen eher grundlagenorientiertem, methodisch allgemeinerem und an der Anwendung des numerischen Windkanals orientiertem Forschungsbedarf zu unterscheiden. Im Folgenden werden, in Anlehnung an den Aufbau der vorliegenden Arbeit, die nächsten, weiterführenden Arbeitsschritte bezüglich der Teil-



---

disziplinen Struktur- und Fluidsimulation und der Vorgehensweisen zur Lösung des gekoppelten Problems differenziert.

Im Bereich der Strukturberechnung sind weitere algorithmische Entwicklungen im Hinblick auf die robuste Berechnung von Membranen mit Faltenbildung notwendig. Einerseits sollten für globale Strukturbetrachtungen mit Membranelementen allgemein gültige und zuverlässige Faltenmodellierungen ausgearbeitet werden. Andererseits ist zur Darstellung von lokalen Effekten die Verwendung von speziell im Bereich der hohen Schlankheiten effizienten und genauen Schalenelementen für die strukturdynamische Berechnung erforderlich, was weiterer Untersuchungen und Implementierungen bedarf. Durchaus denkbar und erstrebenswert ist auch die Kombination der beiden Herangehensweisen im Rahmen eines Mehrskalenansatzes.

Aus der Sicht des Windingenieurwesens sind bei der numerischen Strömungssimulation noch Untersuchungen im Hinblick auf die korrekte Wiedergabe des turbulenten Strömungsfelds notwendig. Zum einen erfordert dies detaillierte Studien zur Definition des numerischen Windkanals, wobei die noch offenen Fragen bezüglich der Abmessungen im Verhältnis zur Strukturgeometrie und der Randbedingungsvorgabe zu klären sind. Letztendlich muss gewährleistet werden, dass mit einem möglichst niedrigen numerischen Aufwand die atmosphärische Grenzschicht adäquat repräsentiert wird. Zum anderen ist bei der Berechnung von turbulenten Strömungen die Frage nach den einzusetzenden Modellierungsstrategien noch zu diskutieren, wobei Large-Eddy-Simulationen bei der Berechnung von instationären Wechselwirkungsproblemen vielversprechend erscheinen.

Im Zusammenhang mit der Kopplung der beiden Felder Struktur und Fluid sind Weiterentwicklungen bei den Kopplungsstrategien unter Abwägung der numerischen Stabilität, Effizienz und Genauigkeit der partitionierten Berechnung des Mehrfeldproblems erforderlich. Dabei sollten auch Kopplungsschemata formuliert und analysiert werden, die nicht auf einer Fixpunktiteration basieren.

Um ein besseres mechanisches Verhalten unter Belastung zu erzielen, wurde bereits in Abschnitt 4.6 angedeutet, dass in der Regel gezielte Modifikationen an der Strukturform vorzunehmen sind. Damit die notwendigen Geometrieänderungen bei allgemeinen Strömungszuständen und komplexen Wechselwirkungseffekten quantifiziert werden können, ist die Ausarbeitung von numerischen Optimierungsstrategien erforderlich, die in Verbindung mit partitionierten Herangehensweisen bei Mehrfeldproblemen eingesetzt werden können [Jak02], [MLF00], [Mø02], [SS90]. Der hieraus entstehende Forschungsbedarf eröffnet ein weites Feld für Neuentwicklungen, die auch deutlich über die hier beschriebene Zielsetzung der Reduktion von Windanfälligkeit hinausgehen.

Eine für den praktischen Einsatz der vorgeschlagenen Berechnungsstrategien unabdingbare Voraussetzung ist die Qualitätssicherung der durchgeführten Simulationen. Die Notwendigkeit einer Validierung durch experimentelle sowie numerische Vergleichsstudien ist evident. Dies ist einerseits für die Anwendungen im Windingenieurwesen durch Gegenüberstellung der Simulationsergebnisse mit Messungen von Windfeldern und Belastungen bei der Großausführung und andererseits zur Absicherung der numerischen Verfahren durch die Vergleiche mit Prinzipexperimenten und numerischen Benchmarks (wie beispielsweise in [TH06] vorgeschlagen) erforderlich.

Schließlich kann festgestellt werden, dass bei der Simulation von technisch anspruchsvollen, dreidimensionalen Problemstellungen alle Ansätze, die der Effizienzverbesserung dienen, von zentraler Bedeutung sind. Das sind beispielsweise der Einsatz von effizienten Lösern in den Einzelfeldern, parallele Rechenansätze und Beschleunigungsverfahren in der gekoppelten Simulation, weshalb den Forschungsbemühungen in diesen Bereichen eine große Bedeutung zukommt.

# Literaturverzeichnis

- [ADA73] J.H. ARGYRIS, P.C. DUNNE und T. ANGELOPOULOS: *Non-linear oscillations using the finite element technique - Mitteilungen 14/1973 - SFB 64*. Technischer Bericht Stuttgart, 1973.
- [Aka94] T.J. AKAI: *Applied numerical methods for engineers*. John Wiley & Sons, New York, 1994.
- [AM88a] J. ARGYRIS und H.-P. MLEJNEK: *Die Methode der Finiten Elemente - Band I: Verschiebungsmethode in der Statik*. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1988.
- [AM88b] J. ARGYRIS und H.-P. MLEJNEK: *Die Methode der Finiten Elemente - Band II: Kraft- und gemischte Methoden, Nichtlinearitäten*. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1988.
- [AM88c] J. ARGYRIS und H.-P. MLEJNEK: *Die Methode der Finiten Elemente - Band III: Einführung in die Dynamik*. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1988.
- [BAH96] R.L. BISPLINGHOFF, H. ASHLEY und R.L. HALFMAN: *Aeroelasticity*. Dover Publications, Mineola, 1996.
- [Bar88] M.R. BARNES: *Form-finding and analysis of prestressed nets and membranes*. Computers & Structures, 30(3):685–695, 1988.
- [Bar94] M. BARNES: *Form and stress engineering of tension structures*. Journal of Structural Engineering, 6:175–202, 1994.
- [Bar99] M.R. BARNES: *Form Finding and Analysis of Tension Structures by Dynamic Relaxation*. International Journal of Space Structures, 14(2):89–104, 1999.
- [Bär01] C. BÄR: *Elementare Differentialgeometrie*. de Gruyter, Berlin, 2001.
- [Bat02] K.-J. BATHE: *Finite-Elemente-Methoden*. Springer-Verlag, Berlin, 2. Auflage, 2002.
- [Bau02] T. BAUMANN: *Statisch-konstruktive Eigenschaften von PTFE-beschichtetem Glasgewebe*. Bauingenieur, 77:158–166, 2002.
- [Bee84] H. BEEM: *Statische und dynamische Analyse vorgespannter Membranen*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Bochum, 1984.

- [Bel83] T. BELYTSCHKO: *An overview of semidiscretization and time integration procedures*. In: T. BELYTSCHKO und T.J.R. HUGHES (Herausgeber): *Computational Methods for Transient Analysis*, Seiten 1–64. North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [Bel98] J. BELLMANN: *Membrantragwerk und Seifenhaut - Unterschiede in der Formfindung*. Bauingenieur, 73:118–123, 1998.
- [Ber96] H. BERGER: *Light structures - structures of light - The art and engineering of tensile architecture*. Birkhäuser, Basel, 1996.
- [Bie96] B. BIENKIEWICZ: *New tools in wind engineering*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 65:279–300, 1996.
- [Bis85] R.E.D. BISHOP: *Schwingungen in Natur und Technik*. Teubner, Stuttgart, 1985.
- [Bis99] M. BISCHOFF: *Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung*. Dissertation, Universität Stuttgart, Stuttgart, 1999.
- [BK85] Y. BAŞAR und W.B. KRÄTZIG: *Mechanik der Flächentragwerke*. Vieweg, Braunschweig, 1985.
- [BL73] W. BLASCHKE und K. LEICHTWEISS: *Elementare Differentialgeometrie*. Springer-Verlag, Berlin, 5. Auflage, 1973.
- [Ble90] K.-U. BLETZINGER: *Formoptimierung von Flächentragwerken*. Dissertation, Universität Stuttgart, Stuttgart, 1990.
- [Ble98] K.-U. BLETZINGER: *Form finding and optimization of membranes and minimal surfaces*. Ph.D. course on Advanced Topics in Structural Optimization. Denmark, 1998.
- [BLM00] T. BELYTSCHKO, W.K. LIU und B. MORAN: *Nonlinear finite elements for continua and structures*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 2000.
- [Blu90] R. BLUM: *Zeltbaumaterialien*. In: G. BRINKMANN (Herausgeber): *Leicht und Weit*, Seiten 200–224. VCH-Verlagsgesellschaft, Weinheim, 1990.
- [BM01] J. BONET und J. MAHANEY: *Form finding of membrane structures by the updated reference method with minimum mesh distortion*. International Journal of Solids and Structures, 38:5469–5480, 2001.
- [BR93] K.-U. BLETZINGER und E. RAMM: *Form finding of shells by structural optimization*. Engineering with Computers, 9:27–35, 1993.
- [BR99] K.-U. BLETZINGER und E. RAMM: *A general finite element approach to the form finding of tensile structures by the updated reference strategy*. International Journal of Space Structures, 14(2):131–145, 1999.
- [BR01] K.-U. BLETZINGER und E. RAMM: *Structural optimization and form finding of light weight structures*. Computers & Structures, 79:2053–2062, 2001.

- 
- [Bra95] M. BRAUN: *Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken*. Dissertation, Universität Stuttgart, Stuttgart, 1995.
- [Bre01] M. BREUER: *Direkte numerische Simulation und Large-Eddy Simulation turbulenter Strömungen auf Hochleistungsrechnern*. Habilitation, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Erlangen, 2001.
- [Bre03] M. BREUER: *Grundlagen der Large-Eddy Simulation (LES)*. In: KONWIHR-Workshop: *Numerische Methoden zur Lösung von Ingenieurproblemen in der Strömungs- und Strukturmechanik*, München, 2003.
- [BS75] T. BELYTSCHKO und D.F. SCHOEBERLE: *On the unconditional stability of an implicit algorithm for nonlinear structural dynamics*. *Journal of Applied Mechanics*, 42:865–869, 1975.
- [BW00] Y. BAŞAR und D. WEICHERT: *Nonlinear continuum mechanics of solids - Fundamental mathematical and physical concepts*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [BW01] K.-U. BLETZINGER und R. WÜCHNER: *Form finding of anisotropic pre-stressed membrane structures*. In: W.A. WALL, K.-U. BLETZINGER und K. SCHWEIZERHOF (Herausgeber): *Trends in Computational Structural Mechanics*, Seiten 595–603, 2001.
- [BW04] K.-U. BLETZINGER und R. WÜCHNER: *Form trägt - Formfindung vorgespannter Membrantragwerke*. In: *8. Dresdner Baustatik Seminar - Kreative Ideen im Ingenieurbau*, Dresden, 2004.
- [BWBR04] M. BISCHOFF, W.A. WALL, K.-U. BLETZINGER und E. RAMM: *Models and finite elements for thin-walled structures*. In: E. STEIN, R. DE BORST und T.J.R. HUGHES (Herausgeber): *Encyclopedia of Computational Mechanics*, Seiten 59–138. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2004.
- [BWD05] K.-U. BLETZINGER, R. WÜCHNER und F. DAOUD: *Equilibrium consistent anisotropic stress fields in membrane design*. In: E. OÑATE und B. KRÖPLIN (Herausgeber): *Textile Composites and Inflatable Structures*, Band 3 der Reihe *Computational Methods in Applied Sciences*, Seiten 143–152. Springer, Dordrecht, 2005.
- [BWDC05] K.-U. BLETZINGER, R. WÜCHNER, F. DAOUD und N. CAMPRUBÍ: *Computational methods for form finding and optimization of shells and membranes*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:3438–3452, 2005.
- [BWK06] K.-U. BLETZINGER, R. WÜCHNER und A. KUPZOK: *Algorithmic treatment of shells and free form-membranes in FSI*. In: H.-J. BUNGARTZ und M. SCHÄFER (Herausgeber): *Fluid-Structure Interaction - Modelling, Simulation, Optimisation*, Band 53 der Reihe *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Springer, Berlin, 2006.
- [BZ00] K.-U. BLETZINGER und R. ZIEGLER: *Theoretische Grundlagen der numerischen Formfindung von Membrantragwerken und Minimalflächen*. In: *Betonkalender 2000, Band 2*, Seiten 441–456. Ernst & Sohn, Berlin, 2000.

- [Cam02] F.E.A. CAMELLI: *Study of atmospheric dispersion at building and street scales*. Dissertation, George Mason University, Fairfax, Virginia, 2002.
- [Ceb96] J.R. CEBRAL: *Loose coupling algorithms for fluid-structure interaction*. Dissertation, George Mason University, Fairfax, Virginia, 1996.
- [CGN05] P. CAUSIN, J.F. GERBEAU und F. NOBILE: *Added-mass effect in the design of partitioned algorithms for fluid-structure problems*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:4506–4527, 2005.
- [CH93] J. CHUNG und G.M. HULBERT: *A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- $\alpha$  method*. *Journal of Applied Mechanics*, 60:371–375, 1993.
- [CHH96] T. CHARVET, F. HAUVILLE und S. HUBERSON: *Numerical simulation of the flow over sails in real sailing conditions*. *Journal of Wind Engineering*, 63:111–129, 1996.
- [CHSC01] F. CASADEI, J.P. HALLEUX, A. SALA und F. CHILLÈ: *Transient fluid-structure interaction algorithms for large industrial applications*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:3081–3110, 2001.
- [CL05] J.R. CEBRAL und R. LÖHNER: *On the loose coupling of implicit time-marching codes*. Technischer Bericht 2005.
- [CP93] R.W. CLOUGH und J. PENZIEN: *Dynamics of structures*. McGraw-Hill, New York, 2. Auflage, 1993.
- [CP04] F. CASADEI und S. POTAPOV: *Permanent fluid-structure interaction with non-conforming interfaces in fast transient dynamics*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:4157–4194, 2004.
- [Cri91] M.A. CRISFIELD: *Non-linear finite element analysis of solids and structures - Vol. 1, Essentials*. Wiley, Chichester, 1991.
- [Cri97] M.A. CRISFIELD: *Non-linear finite element analysis of solids and structures - Vol. 2, Advanced Topics*. Wiley, Chichester, 1997.
- [CS88] P. CONTRI und B.A. SCHREFLER: *A geometrically nonlinear finite element analysis of wrinkled membrane surfaces by a no-compression material model*. *Communications in Applied Numerical Methods*, 4:5–15, 1988.
- [CS96] M.A. CRISFIELD und J. SHI: *An energy conserving co-rotational procedure for non-linear dynamics with finite elements*. *Nonlinear Dynamics*, 9:37–52, 1996.
- [Dao05] F. DAOUD: *Formoptimierung von Freiformschalen*. Dissertation, Technische Universität München, München, 2005.
- [DCB04] F. DAOUD, N. CAMPRUBÍ und K.-U. BLETZINGER: *Filtering and regularization techniques in shape optimization with CAD-free parametrization*. In: *NATO Advanced Research Workshop on Multiphysics and Multiscale Computer Models in Nonlinear Analysis and Optimal Design of Engineering Structures under Extreme Conditions*, Bled, Slovenia, 2004.

- 
- [DF02] C. DEGAND und C. FARHAT: *A three-dimensional torsional spring analogy method for unstructured dynamic meshes*. *Computers & Structures*, 80:305–316, 2002.
- [DHPRF04] J. DONEA, A. HUERTA, J.-PH. PONTHOT und A. RODRÍGUEZ-FERRAN: *Arbitrary Lagrangian-Eulerian Methods*. In: E. STEIN, R. DE BORST und T.J.R. HUGHES (Herausgeber): *Encyclopedia of Computational Methods*, Seiten 413–438. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2004.
- [Don83] J. DONEA: *Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element methods*. In: T. BELYTSCHKO und T.J.R. HUGHES (Herausgeber): *Computational Methods for Transient Analysis*, Seiten 473–516. North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [Doy01] J.F. DOYLE: *Nonlinear analysis of thin-walled structures - Statics, dynamics, and stability*. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [DP88] I. DEMIRDŽIĆ und M. PERIĆ: *Space conservation law in finite volume calculations of fluid flow*. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 8:1037–1050, 1988.
- [Dur03a] F. DURST: *Nullgleichungs- und Eingleichungs-Turbulenzmodelle*. In: *KONWIHR-Workshop: Numerische Methoden zur Lösung von Ingenieurproblemen in der Strömungs- und Strukturmechanik*, München, 2003.
- [Dur03b] D. DURVILLE: *Numerical simulation of the mechanical behaviour of textile structures at a mesoscopic level*. In: E. OÑATE und B. KRÖPLIN (Herausgeber): *Textile Composites and Inflatable Structures*, Seiten 310–315, Barcelona, 2003. CIMNE.
- [Dur04] P.A. DURBIN: *Turbulence closure models for computational fluid dynamics*. In: E. STEIN, R. DE BORST und T.J.R. HUGHES (Herausgeber): *Encyclopedia of Computational Mechanics*, Seiten 301–324. John Wiley & Son, Ltd., Chichester, 2004.
- [EM73] M. EL-MASRI: *Theorie und Berechnung nichtlinearer Schwingungen vorgespannter Membrane nach der Methode der finiten Elemente*. Dissertation, Universität Stuttgart, Stuttgart, 1973.
- [eV96] WINDTECHNOLOGISCHE GESELLSCHAFT E. V.: *WtG-Merkblatt über Windkanalversuche in der Gebäudeaerodynamik*. Technischer Bericht Aachen, 1996.
- [fAC03] FRAUNHOFER INSTITUTE FOR ALGORITHMS und SCIENTIFIC COMPUTING: *MpCCI specification, version 2.0*. 2003.
- [Far04] C. FARHAT: *CFD-based nonlinear computational aeroelasticity*. In: E. STEIN, R. DE BORST und T.J.R. HUGHES (Herausgeber): *Encyclopedia of Computational Mechanics*, Seiten 459–480. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2004.
- [FB81] D.P. FLANAGAN und T. BELYTSCHKO: *Simulations relaxation in structural dynamics*. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 107:1039–1055, 1981.

- [FDKL98] C. FARHAT, C. DEGAND, B. KOOBUS und M. LESOINNE: *Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 163:231–245, 1998.
- [FGB03] C. FARHAT, P. GEUZAIN und G. BROWN: *Application of a three-field nonlinear fluid-structure formulation to the prediction of the aeroelastic parameters of an F-16 fighter*. Computers & Fluids, 32:3–29, 2003.
- [FL00] C. FARHAT und M. LESOINNE: *Two efficient staggered algorithms for the serial and parallel solution of three-dimensional nonlinear transient aeroelastic problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 182:499–515, 2000.
- [FLL98] C. FARHAT, M. LESOINNE und P. LETALLEC: *Load and motion transfer algorithms for fluid/structure interaction problems with non-matching discrete interfaces: Momentum and energy conservation, optimal discretization and application to aeroelasticity*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 157:95–114, 1998.
- [FM04] B. FORSTER und M. MOLLAERT: *European design guide for tensile surface structures*. TensiNet, 2004.
- [För74] H.W. FÖRSCHING: *Grundlagen der Aeroelastik*. Springer-Verlag, Berlin, 1974.
- [FP99] J.H. FERZIGER und M. PERIĆ: *Computational methods for fluid dynamics*. Springer-Verlag, Berlin, 2. Auflage, 1999.
- [FPF01] C.A. FELIPPA, K.C. PARK und C. FARHAT: *Partitioned analysis of coupled mechanical systems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190:3247–3270, 2001.
- [FR02] J. FRÖHLICH und W. RODI: *Introduction to large eddy simulation of turbulent flows*. In: B.E. LAUNDER und N.D. SANDHAM (Herausgeber): *Closure Strategies for Turbulent and Transitional Flows*. Cambridge University Press, 2002.
- [Gen05] C. GENGNAGEL: *Mobile Membrankonstruktionen*. Dissertation, Technische Universität München, München, 2005.
- [GHI83] M. GÉRADIN, M. HOGGE und S. IDELSOHN: *Implicit finite element methods*. In: T. BELYTSCHKO und T.J.R. HUGHES (Herausgeber): *Computational Methods for Transient Analysis*, Seiten 417–472. North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [Glü02] M. GLÜCK: *Ein Beitrag zur numerischen Simulation von Fluid-Struktur-Interaktionen - Grundlagenuntersuchungen und Anwendung auf Membrantragwerke*. Dissertation, Universität Erlangen, Erlangen, 2002.
- [GM98] C. GRANDMONT und Y. MADAY: *Nonconforming grids for the simulation of fluid-structure interaction*. Contemporary Mathematics, 218, 1998.
- [Goe91] W. GOEBEL: *Reduktion numerischer Modelle in der nichtlinearen Strukturmechanik mit globalen Ansätzen*. Dissertation, Technische Universität München, München, 1991.



- 
- [Göp04] K. GÖPPERT: *Membrankonstruktionen - Form und Detail*. Stahlbau, 73(12):990–1000, 2004.
- [GR97] M. GÉRADIN und D. RIXEN: *Mechanical vibrations - Theory and application to structural dynamics*. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2. Auflage, 1997.
- [GR04] A.J. GIL RUIZ: *Structural analysis of prestressed saint venant-kirchhoff hyperelastic membranes*. Dissertation, University of Wales, Swansea, 2004.
- [Gra03] V. GRAVEMEIER: *The variational multiscale method for laminar and turbulent incompressible flow*. Dissertation, Universität Stuttgart, Stuttgart, 2003.
- [GS98a] P.M. GRESHO und R.L. SANI: *Incompressible flow and the finite element method - Volume 1: Advection-Diffusion*. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1998.
- [GS98b] P.M. GRESHO und R.L. SANI: *Incompressible flow and the finite element method - Volume 2: Isothermal laminar flow*. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1998.
- [Gur02] G.P. GURUSWAMY: *A review of numerical fluids/structures interface methods for computations using high-fidelity equations*. Computers & Structures, 80:31–41, 2002.
- [GV03] J.F. GERBEAU und M. VIDRASCU: *A quasi-newton algorithm based on a reduced model for fluid-structure interaction problems in blood flows*. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 37(4):631–647, 2003.
- [GVF05] J.F. GERBEAU, M. VIDRASCU und P. FREY: *Fluid-structure interaction in blood flows on geometries based on medical imaging*. Computers & Structures, 83:155–165, 2005.
- [HA82] R.B. HABER und J.F. ABEL: *Initial equilibrium solution methods for cable reinforced membranes*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 30(3):263–306, 1982.
- [Hal02] A. HALFMANN: *Ein geometrisches Modell zur numerischen Simulation der Fluid-Struktur-Interaktion windbelasteter, leichter Flächentragwerke*. Dissertation, Technische Universität München, München, 2002.
- [Hän95] M. HÄNSEL: *Berechnung von Yachtsegeln mit Berücksichtigung der Grenzschicht*. Dissertation, Technische Universität Berlin, Berlin, 1995.
- [Hau00] P. HAUPT: *Continuum mechanics and theory of materials*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [HCL78] T.J.R. HUGHES, T.K. CAUGHEY und W.K. LIU: *Finite-element methods for nonlinear elastodynamics which conserve energy*. Journal of Applied Mechanics, 45:366–370, 1978.
- [Hel15] G. HELLMANN: *Über die Bewegung der Luft in den untersten Schichten der Atmosphäre*. Meteorologische Zeitschrift, 32(1):1–16, 1915.

- [HHT77] H.M. HILBER, T.J.R. HUGHES und R.L. TAYLOR: *Improved numerical dissipation for the time integration algorithms in structural dynamics*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 5:283–292, 1977.
- [HO00] R. HOUTMAN und M. ORPANA: *Materials for membrane structures*. Bauen mit Textilien, 4:1–7, 2000.
- [Hol00] G.A. HOLZAPFEL: *Nonlinear solid mechanics*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 2000.
- [HP72] E. HAUG und G.H. POWELL: *Finite element analysis of nonlinear membrane structures*. Technischer Bericht Berkeley, 1972.
- [Hüb03] B. HÜBNER: *Simultane Analyse von Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen*. Dissertation, Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig, Braunschweig, 2003.
- [Huc02] W.-H. HUCHO: *Aerodynamik der stumpfen Körper - Physikalische Grundlagen und Anwendungen in der Praxis*. Vieweg, Braunschweig, 2002.
- [Hug83] T.J.R. HUGHES: *Analysis of transient algorithms with particular reference to stability behavior*. In: T. BELYTSCHKO und T.J.R. HUGHES (Herausgeber): *Computational Methods for Transient Analysis*, Seiten 67–156. North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [Hug00] T.J.R. HUGHES: *The finite element method - Linear static and dynamic finite element analysis*. Dover Publications, Inc., Mineola, 2000.
- [Hul04] G.M. HULBERT: *Computational structural dynamics*. In: E. STEIN, R. DE BORST und T.J.R. HUGHES (Herausgeber): *Encyclopedia of Computational Mechanics*, Seiten 169–194. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2004.
- [Ibe99] H.K. IBEN: *Tensorrechnung*. B.G. Teubner, Stuttgart, 2. Auflage, 1999.
- [Inc04] CFX ANSYS INC.: *CFX-5.7 Documentation*. 2004.
- [Ish95] K. ISHII: *Membrane structures in Japan*. SPS Publishing Company, Tokyo, 1995.
- [Ish99] K. ISHII: *Form finding analysis in consideration of cutting patterns of membrane structures*. International Journal of Space Structures, 14(2):105–119, 1999.
- [IT69] B.M. IRONS und R.C. TUCK: *A version of the aitken accelerator for computer iteration*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1:275–277, 1969.
- [Jak02] L.A. JAKOBSEN: *A finite element approach to analysis and sensitivity analysis of time dependent fluid-structure interaction systems*. Dissertation, Aalborg University, Aalborg, Denmark, 2002.
- [Kai04] U. KAISER: *Windwirkung auf schwach vorgespannte Membranstrukturen am Beispiel eines 30m-Membranschirmes*. Dissertation, Universität Stuttgart, Stuttgart, 2004.

- 
- [KBCB05] F. KOSCHNICK, M. BISCHOFF, N. CAMPRUBÍ und K.-U. BLETZINGER: *The discrete strain gap method and membrane locking*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194:2444–2463, 2005.
- [KC99] D. KUHL und M.A. CRISFIELD: *Energy-conserving and decaying algorithms in non-linear structural dynamics*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 45(569-599), 1999.
- [KFCS00] L.E. KINSLER, A.R. FREY, A.B. COPPENS und J.V. SANDERS: *Fundamentals of acoustics*. John Wiley & Sons, Chichester, 4. Auflage, 2000.
- [Kin82] R.J. KIND: *Aeroelastic modeling of membrane structures*. In: T.A. REINHOLD (Herausgeber): *Wind tunnel modelling for civil engineering applications*. Cambridge University Press, 1982.
- [Kli89] E. KLINGBEIL: *Tensorrechnung für Ingenieure*. Bibliographisches Institut & F.A Brockhaus AG, Zürich, 2. Auflage, 1989.
- [Klo97] B. KLOTZEK: *Einführung in die Differentialgeometrie*. Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt a.M., 3. Auflage, 1997.
- [KM04] M. KUNTZ und F.R. MENTER: *Numerical flow simulation with moving grids*. In: *STAB Conference*, Bremen, 2004.
- [Kos04] F. KOSCHNICK: *Geometrische Locking-Effekte bei Finiten Elementen und ein allgemeines Konzept zu ihrer Vermeidung*. Dissertation, Technische Universität München, München, 2004.
- [KR96] D. KUHL und E. RAMM: *Constraint energy momentum algorithm and its application to non-linear dynamics of shells*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 136:293–315, 1996.
- [KR99] D. KUHL und E. RAMM: *Generalized energy-momentum method for non-linear adaptive shell dynamics*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 178:343–366, 1999.
- [Kuh96] D. KUHL: *Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke*. Dissertation, Universität Stuttgart, Stuttgart, 1996.
- [Kuh04] D. KUHL: *Nichtlineare Strukturdynamik - (private communications)*. 2004.
- [Kup05] A. KUPZOK: *(private communications)*. 2005.
- [Law01] T. LAWSON: *Building aerodynamics*. Imperial College Press, London, 2001.
- [LC94] K.L. LIM und M.A. CRISFIELD: *Dynamic finite element analysis applied to a simple model exhibiting dynamic instability*. Engineering Computations, 11:483–494, 1994.

- [LF96] M. LESOINNE und C. FARHAT: *Geometric conservation laws for flow problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 134:71–90, 1996.
- [Lin99a] K. LINKWITZ: *About formfinding of double-curved structures*. *Engineering Structures*, 21(8):709–718, 1999.
- [Lin99b] K. LINKWITZ: *Formfinding by the 'direct approach' and pertinent strategies for the conceptual design of prestressed and hanging structures*. *International Journal of Space Structures*, 14(2):73–87, 1999.
- [LL96] W.J. LEWIS und T.S. LEWIS: *Application of formian and dynamic relaxation to the formfinding of minimal surfaces*. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, 37(3):165–186, 1996.
- [Löh01] R. LÖHNER: *Applied CFD techniques - An introduction based on finite element methods*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 2001.
- [LS71] K. LINKWITZ und H.-J. SCHEK: *Einige Bemerkungen zur Berechnung von vorge-spannten Seilnetzkonstruktionen*. *Archive of Applied Mechanics*, 40(3):145–158, 1971.
- [LT94] P. LE TALLEC: *Domain decomposition methods in computational mechanics*. *Computational Mechanics Advances*, 1(2):123–220, 1994.
- [LTM01] P. LE TALLEC und J. MOURO: *Fluid structure interaction with large structural displacements*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:3039–3067, 2001.
- [Lut02] S. LUTZENBERGER: *Ein differentiell-algebraisches Simulationsmodell zur Fahrzeug-Fahrweg Interaktion*. Dissertation, Technische Universität München, München, 2002.
- [LWB05] J. LINHARD, R. WÜCHNER und K.-U. BLETZINGER: *Automatical adjustment of prestress during form finding with respect to compatibility and developability*. In: E. OÑATE und B. KRÖPLIN (Herausgeber): *Textile Composites and Inflatable Structures*, Seiten 405–413, Barcelona, 2005. CIMNE.
- [Mal69] L.E. MALVERN: *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1969.
- [MB02] K. MORITZ und R. BARTHEL: *Transparente Architektur - Bauen mit ETFE-Folien*. *Detail*, (12):1616–1620, 2002.
- [Men94] F.R. MENTER: *Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications*. *AIAA Journal*, 32(8):1598–1605, 1994.
- [Men03] F.R. MENTER: *Zweigleichungs-Turbulenzmodelle*. In: *KONWIHR-Workshop: Numerische Methoden zur Lösung von Ingenieurproblemen in der Strömungs- und Strukturmechanik*, München, 2003.

- 
- [MF95] N. MAMAN und C. FARHAT: *Matching fluid and structure meshes for aeroelastic computations: a parallel approach*. Computers & Structures, 54(4):779–785, 1995.
- [MGE<sup>+</sup>04] F.R. MENTER, P.F. GALPIN, T. ESCH, M. KUNTZ und C. BERNER: *CFD simulations of aerodynamic flows with a pressure-based method*. In: *24th International Congress of the Aeronautical Sciences, Yokohama, Japan, 2004*.
- [Mic05] C. MICHLER: *Efficient numerical methods for fluid-structure interaction*. Dissertation, Technische Universiteit Delft, Delft, 2005.
- [MLF00] K. MAUTE, M. LESOINNE und C. FARHAT: *Optimization of aeroelastic systems using coupled analytical sensitivities*. Technischer Bericht 2000.
- [MM98] B. MAURIN und R. MOTRO: *The surface stress density method as a form-finding tool for tensile membranes*. Engineering Structures, 20(8):712–719, 1998.
- [MO95] H.J.-P. MORAND und R. OHAYON: *Fluid structure interaction*. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1995.
- [Mø02] H. MØLLER: *Analysis and optimization for fluid-structure interaction problems*. Dissertation, Aalborg University, Aalborg, Denmark, 2002.
- [Mok01] D.P. MOK: *Partitionierte Lösungsansätze in der Strukturodynamik und der Fluid-Struktur-Interaktion*. Dissertation, Universität Stuttgart, Stuttgart, 2001.
- [Mor00] K. MORITZ: *Membranwerkstoffe im Hochbau*. Detail, (6):1050–1058, 2000.
- [MR95] R. MÜNSCH und H.-W. REINHARDT: *Zur Berechnung von Membrantragwerken aus beschichteten Geweben mit Hilfe genäherter elastischer Materialparameter*. Bauingenieur, 70:271–275, 1995.
- [MS00] J. MATHIEU und J. SCOTT: *An introduction to turbulent flow*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000.
- [MS03] H.G. MATTHIES und J. STEINDORF: *Partitioned strong coupling algorithms for fluid-structure interaction*. Computers & Structures, 81(805-812), 2003.
- [Mur97] S. MURAKAMI: *Current status and future trends in computational wind engineering*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 67,68:3–34, 1997.
- [MW79] K. MARGUERRE und H. WÖLFEL: *Technische Schwingungslehre - Lineare Schwingungen vielgliedriger Strukturen*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1979.
- [MW01] D.P. MOK und W.A. WALL: *Partitioned analysis schemes for the transient interaction of incompressible flows and nonlinear flexible structures*. In: W.A. WALL, K.-U. BLETZINGER und K. SCHWEIZERHOF (Herausgeber): *Trends in Computational Structural Mechanics*, Seiten 689–698, Barcelona, 2001. CIMNE.
- [MWBR99] D.P. MOK, W.A. WALL, M. BISCHOFF und E. RAMM: *Algorithmic aspects of deformation dependent loads in non-linear static finite element analysis*. Engineering Computations, 16(5):601–618, 1999.

- [NB02] T. NOURI-BARANGER: *Form finding method of tensile fabric structures: revised geometric stiffness method*. Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures, 43(138):13–21, 2002.
- [NB04] T. NOURI-BARANGER: *Computational methods for tension-loaded structures*. Archives of Computational Methods in Engineering, 11(2):143–186, 2004.
- [Ner05] W. NERDINGER: *Frei Otto, Das Gesamtwerk - Leicht bauen, natürlich gestalten*. Birkhäuser-Verlag für Architektur, Basel, 2005.
- [New59] N.M. NEWMARK: *A method of computation for structural dynamics*. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 85:67–94, 1959.
- [Oha04] R. OHAYON: *Fluid-structure interaction problems*. In: E. STEIN, R. DE BORST und T.J.R. HUGHES (Herausgeber): *Encyclopedia of Computational Mechanics*, Seiten 683–694. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2004.
- [OR01] F. OTTO und B. RASCH: *Finding form*. Edition Axel Menges, 2001.
- [OS66] F. OTTO und F.-K. SCHLEYER: *Zugbeanspruchte Konstruktionen (Band 2)*. Ullstein Verlag, Frankfurt, Berlin, 1966.
- [OT62] F. OTTO und R. TROSTEL: *Zugbeanspruchte Konstruktionen (Band 1)*. Ullstein Verlag, Frankfurt, Berlin, 1962.
- [Par03] H. PARISCH: *Festkörper-Kontinuumsmechanik - Von den Grundgleichungen zur Lösung mit Finiten Elementen*. Teubner Verlag, Stuttgart, 2003.
- [Pet88] C. PETERSEN: *Stahlbau*. Vieweg, Braunschweig, 1988.
- [Pet96] C. PETERSEN: *Dynamik der Baukonstruktionen*. Vieweg, Braunschweig, 1996.
- [Pey00] R. PEYRET: *Handbook of computational fluid mechanics*. Academic Press, San Diego, 2000.
- [PF83] K.C. PARK und C.A. FELIPPA: *Partitioned analysis of coupled systems*. In: T. BELYTSCHKO und T.J.R. HUGHES (Herausgeber): *Computational Methods for Transient Analysis*, Seiten 157–220. North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [PF01] S. PIPERNO und C. FARHAT: *Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems. Part II: energy transfer analysis and three-dimensional applications*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190:3147–4170, 2001.
- [Pip97] S. PIPERNO: *Explicit/implicit fluid/structure staggered procedures with a structural predictor and fluid subcycling for 2D inviscid aeroelastic simulations*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 25:1207–1226, 1997.
- [PN03] U. PEIL und H.-J. NIEMANN: *Windlasten auf Bauwerke*. In: U. KUHLMANN (Herausgeber): *Stahlbau Kalender*, Seiten 673–748. Ernst & Sohn, Berlin, 2003.

- 
- [PQ05] N. PAROLINI und A. QUARTERONI: *Mathematical models and numerical simulations for the America's Cup*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194:1001–1026, 2005.
- [Rac96] R. RACKWITZ: *Einwirkungen auf Bauwerke*. In: G. MEHLHORN (Herausgeber): *Der Ingenieurbau - Tragwerkszuverlässigkeit/Einwirkungen*, Seiten 73–416. Ernst & Sohn, Berlin, 1996.
- [Rai03] T. RAIBLE: *Concepts for nonlinear orthotropic material modeling with applications to membrane structures*. Dissertation, Universität Hannover, Hannover, 2003.
- [Ram76] E. RAMM: *Geometrisch nichtlineare Elastostatik und Finite Elemente*. Habilitation, Universität Stuttgart, Stuttgart, 1976.
- [Ram96] E. RAMM: „Force follows form“ oder „Form follows force“? In: K. TEICHMANN und J. WILKE (Herausgeber): *Prozeß und Form „Natürlicher Konstruktionen“ - Der Sonderforschungsbereich 230*, Seiten 68–73. Ernst & Sohn, Berlin, 1996.
- [Rap00] M. RAPOLDER: *Parallele Finite-Element-Simulation der Bauwerk-Boden-Interaktion mit adaptiven Zeitintegrationsverfahren*. Dissertation, Technische Universität München, München, 2000.
- [RDOJ87a] D.G. RODDEMAN, J. DRUKKER, C.W.J. OOMENS und J.D. JANSSEN: *The wrinkling of thin membranes: part I - theory*. Journal of Applied Mechanics, 54:884–887, 1987.
- [RDOJ87b] D.G. RODDEMAN, J. DRUKKER, C.W.J. OOMENS und J.D. JANSSEN: *The wrinkling of thin membranes: part II - numerical analysis*. Journal of Applied Mechanics, 54:888–892, 1987.
- [RLV04] R. ROSSI, M. LAZZARI und R. VITALIANI: *Wind field simulation for structural engineering purposes*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 61:738–763, 2004.
- [RLVOn03] R. ROSSI, M. LAZZARI, R. VITALIANI und E. OÑATE: *Convergence of the modified material model for wrinkling simulation of light-weight membrane structures*. In: E. OÑATE und B. KRÖPLIN (Herausgeber): *Textile Composites and Inflatable Structures*, Seiten 148–153, Barcelona, 2003. CIMNE.
- [RLVOn05] R. ROSSI, M. LAZZARI, R. VITALIANI und E. OÑATE: *Simulation of light-weight membrane structures by wrinkling model*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 62:2127–2153, 2005.
- [Rod91] D.G. RODDEMAN: *Finite-element analysis of wrinkling membranes*. Communications in Applied Numerical Methods, 7:299–307, 1991.
- [Ros76] G.-E. ROSEMEIER: *Winddruckprobleme bei Bauwerken*. Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [Ros05] R. ROSSI: *Light weight structures: structural analysis and coupling issues*. Dissertation, Università di Bologna, Bologna, 2005.

- [Sag04] P. SAGAUT: *Turbulence direct numerical simulation and large-eddy simulation*. In: E. STEIN, R. DE BORST und T.J.R. HUGHES (Herausgeber): *Encyclopedia of Computational Mechanics*, Seiten 269–300. John Wiley & Son, Ltd., Chichester, 2004.
- [SB96] E. STEIN und F.-J. BARTHOLD: *Elastizitätstheorie*. In: G. MEHLHORN (Herausgeber): *Der Ingenieurbau - Werkstoffe/Elastizitätstheorie*, Seiten 165–428. Ernst & Sohn, Berlin, 1996.
- [SB01] H. SCHOOP und N. BESSERT: *Instationary aeroelastic computation of yacht sails*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52:787–803, 2001.
- [SBK<sup>+</sup>00] K. STEIN, R. BENNEY, V. KALRO, T.E. TEZDUYAR, J. LEONARD und M. ACCORSI: *Parachute fluid-structure interactions: 3D-computation*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:373–386, 2000.
- [SBTP01] K. STEIN, R. BENNEY, T. TEZDUYAR und J. POTVIN: *Fluid-structure interactions of a cross parachute: numerical simulation*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:673–687, 2001.
- [Sch74] H.-J. SCHEK: *The force density method for form finding and computation of general networks*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3(1):115–134, 1974.
- [Sch96] J. SCHRÖDER: *Theoretische und algorithmische Konzepte zur phänomenologischen Beschreibung anisotropen Materialverhaltens*. Dissertation, Universität Hannover, Hannover, 1996.
- [Sch97a] H.-J. SCHOCK: *Segel, Folien und Membranen - Innovative Konstruktionen in der textilen Architektur*. Birkhäuser, Basel, 1997.
- [Sch97b] H.R. SCHWARZ: *Numerische Mathematik*. Teubner, Stuttgart, 4. Auflage, 1997.
- [Sch04] B.A. SCHREFLER: *Multifield problems*. In: E. STEIN, R. DE BORST und T.J.R. HUGHES (Herausgeber): *Encyclopedia of Computational Mechanics*, Seiten 575–604. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2004.
- [SG97] H. SCHLICHTING und K. GERSTEN: *Grenzschicht-Theorie*. Springer-Verlag, Berlin, 9. Auflage, 1997.
- [Sin95] P. SINGER: *Die Berechnung von Minimalflächen, Seifenblasen, Membrane und Pneus aus geodätischer Sicht*. Dissertation, Universität Stuttgart, Stuttgart, 1995.
- [SL85] G. SCHWARZ und H. LIENHART: *Umströmung von Membranen und ihre Simulation im Windkanal*. In: J. KOTTKAMP, S.-H. RODEIT und P. SCHILLING (Herausgeber): *Weitgespannte Flächentragwerke - 3. Internationales Symposium*, Stuttgart, 1985.
- [SR84] K. SCHWEIZERHOF und E. RAMM: *Displacement dependent pressure loads in non-linear finite element analyses*. *Computers & Structures*, 18(6):1099–1114, 1984.



- 
- [SR01] J. STABEL und M. REN: *Fluid-structure-interaction for the analysis of the dynamics of fuel storage racks in the case of seismic loads*. Nuclear Engineering and Design, 206:167–176, 2001.
- [SS90] J. SOBIESZCANSKI-SOBIESKI: *Sensitivity of complex, internally coupled systems*. AIAA Journal, 28(1):153–160, 1990.
- [SS96] E. SIMIU und R.H. SCANLAN: *Wind effects on structures - Fundamentals and applications to design*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 3. Auflage, 1996.
- [ST94] J.C. SIMO und N. TARNOW: *A new energy and momentum conserving algorithm for the nonlinear dynamics of shells*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37(15):2527–2549, 1994.
- [Sta97] T. STATHOPOULOS: *Computational wind engineering: past achievements and future challenges*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 67,68:509–532, 1997.
- [STD95] J.C. SIMO, N. TARNOW und M. DOBLARÉ: *Non-linear dynamics of three-dimensional rods: exact energy and momentum conserving algorithms*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 38:1431–1473, 1995.
- [Ste02] J. STEINDORF: *Partitionierte Verfahren für Probleme der Fluid-Struktur Wechselwirkung*. Dissertation, Technische Universität Braunschweig, Braunschweig, 2002.
- [Sto50] J.J. STOKER: *Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems*. John Wiley & Sons, New York, 1950.
- [STS+05] K. STEIN, T.E. TEZDUYAR, S. SATHE, R. BENNEY und R. CHARLES: *Fluid-structure interaction modelling of parachute soft-landing dynamics*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 47:619–631, 2005.
- [Suc01] S. SUCCI: *The Lattice Boltzmann equation - for fluid dynamics and beyond*. Oxford University Press, Oxford, 2001.
- [Tae97] L. TAENZER: *Strukturdynamische Modellierung und statische Berechnung von Segelkonstruktionen*. Dissertation, Technische Universität Berlin, Berlin, 1997.
- [Tes02] I. TESCHAUER: *Numerische Simulation gekoppelter Fluid-Struktur Probleme mittels der Finite-Volumen-Methode*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, 2002.
- [Tez04] T.E. TEZDUYAR: *Finite element methods for fluid dynamics with moving boundaries and interfaces*. In: E. STEIN, R. DE BORST und T.J.R. HUGHES (Herausgeber): *Encyclopedia of Computational Mechanics*, Seiten 545–578. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2004.
- [TH06] S. TUREK und J. HRON: *Proposal for numerical benchmarking fluid-structure interaction between an elastic object and laminar incompressible flow*. In: H.-J. BUNGARTZ

- und M. SCHÄFER (Herausgeber): *Fluid-Structure Interaction - Modelling, Simulation, Optimisation*, Band 53 der Reihe *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Springer, Berlin, 2006.
- [TN92] C. TRUESDELL und W. NOLL: *The non-linear field theories of mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 2. Auflage, 1992.
- [Tru68] E. TRUCKENBRODT: *Strömungsmechanik - Grundlagen und technische Anwendung*. Springer-Verlag, Berlin, 1968.
- [TS86] J.M.T. THOMPSON und H.B. STEWART: *Nonlinear dynamics and chaos*. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1986.
- [Und83] P. UNDERWOOD: *Dynamic Relaxation*. In: T. BELYTSCHKO und T.J.R. HUGHES (Herausgeber): *Computational Methods for Transient Analysis*, Seiten 245–266. North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [VM95] H.K. VERSTEEG und W. MALALASEKERA: *An introduction to computational fluid dynamics*. Pearson Education Limited, Harlow, 1995.
- [VM99] N. VASSART und R. MOTRO: *Multiparametered formfinding method: application to tensegrity systems*. *International Journal of Space Structures*, 14(2):147–154, 1999.
- [Wak04] D. WAKEFIELD: *Grundlagen und Berechnung von Membrankonstruktionen*. In: K.-M. KOCH (Herausgeber): *Bauen mit Membranen*, Seiten 96–123. Prestel Verlag, München, 2004.
- [Wal99] W.A. WALL: *Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen*. Dissertation, Universität Stuttgart, Stuttgart, 1999.
- [Wal02] E. WALHORN: *Ein simultanes Berechnungsverfahren für Fluid-Struktur-Wechselwirkungen mit finiten Raum-Zeit-Elementen*. Dissertation, Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig, Braunschweig, 2002.
- [War99] Z.U.A. WARSI: *Fluid dynamics - Theoretical and computational approaches*. CRC Press, Boca Raton, 2. Auflage, 1999.
- [WB05] R. WÜCHNER und K.-U. BLETZINGER: *Stress-adapted numerical form finding of pre-stressed surfaces by the updated reference strategy*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64:143–166, 2005.
- [WBZ81] W.L. WOOD, M. BOSSAK und O.C. ZIENKIEWICZ: *An alpha modification of Newmark's method*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15:1562–1566, 1981.
- [Wen01] H. WENGLER: *Numerische Berechnung turbulenter Strömungen - Vorlesungsmanuskript*. München, 2001.

- 
- [WGG<sup>+</sup>06] W.A. WALL, A. GERSTENBERGER, P. GAMNITZER, C. FÖRSTER und E. RAMM: *Large deformation fluid-structure interaction - advances in ALE methods and new fixed grid approaches*. In: H.-J. BUNGARTZ und M. SCHÄFER (Herausgeber): *Fluid-Structure Interaction - Modelling, Simulation, Optimisation*, Band 53 der Reihe *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Springer, Berlin, 2006.
- [Wie02] B. WIEDEMANN: *Modelle für vorgespannte Membranen mit Faltenbildung*. Dissertation, Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig, Braunschweig, 2002.
- [WO88] W.L. WOOD und M.E. ODOUR: *Stability properties of some algorithms for the solution of nonlinear dynamic vibration equations*. *Communications in Applied Numerical Methods*, 4:205–212, 1988.
- [Woo02] R.D. WOOD: *A simple technique for controlling element distortion in dynamic relaxation form-finding of tension membranes*. *Computers & Structures*, 80:2115–2120, 2002.
- [Wri01] P. WRIGGERS: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [Wün97] V. WÜNSCH: *Differentialgeometrie*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1997.
- [Zah98] W. ZAHLTEN: *Zur numerischen Simulation winderregter Strukturen*. Habilitation, RWTH Aachen, Aachen, 1998.
- [Zah99] W. ZAHLTEN: *Realistic numerical models for stochastic wind effects on slender structures*. In: *European Conference on Computational Mechanics*, München, 1999.
- [ZAL04] B. ZHOU, M.L. ACCORSI und J.W. LEONARD: *Finite element formulation for modeling sliding cable elements*. *Computers & Structures*, 82:271–280, 2004.
- [ZH04] Q. ZHANG und T. HISADA: *Studies of the strong coupling and weak coupling methods in FSI analysis*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60:2013–2029, 2004.
- [Zie01] R. ZIEGLER: *Theorie und Numerik für den Entwurf von vorgespannten Membrantragwerken*. Dissertation, Universität Karlsruhe (TH), Karlsruhe, 2001.
- [ZT05] O.C. ZIENKIEWICZ und R.L. TAYLOR: *The finite element method for solid and structural mechanics*. Elsevier Butterworth-Heinemann, Burlington, 6. Auflage, 2005.
- [ZTN05] O.C. ZIENKIEWICZ, R.L. TAYLOR und P. NITHIARASU: *The finite element method for fluid dynamics*. Elsevier Butterworth-Heinemann, Burlington, 6. Auflage, 2005.
- [ZTZ05] O.C. ZIENKIEWICZ, R.L. TAYLOR und J.Z. ZHU: *The finite element method: its basis and fundamentals*. Elsevier Butterworth-Heinemann, Burlington, 6. Auflage, 2005.

- [Zur69] J.A. ZURANSKI: *Windbelastung von Bauwerken und Konstruktionen*. Verlagsgesellschaft Rudolf Müller, Köln-Braunsfeld, 1969.
- [ZWB03] R. ZIEGLER, W. WAGNER und K.-U. BLETZINGER: *A finite element model for the analysis of wrinkled membrane structures*. *International Journal of Space Structures*, 18(1):1–14, 2003.