

**Lehrstuhl für Statik
der Technischen Universität München**

**Formoptimierung von Freiformschalen
Mathematische Algorithmen und Filtertechniken**

Fernaß Daoud

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. rer.nat. Ernst Rank

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Kai-Uwe Bletzinger
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. habil. Gerhard H. Müller

Die Dissertation wurde am 10.05.2005 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen am 01.07.2005 angenommen.

Formoptimierung von Freiformschalen Mathematische Algorithmen und Filtertechniken

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden im Kontext der Strukturoptimierung zwei Teildisziplinen behandelt und weiterentwickelt: mathematische Optimierungsalgorithmen für große Probleme und Verfahren für die Formoptimierung von Freiformschalen mit Parametrisierung direkt am FE-Netz.

Basierend auf der Methode der beweglichen Asymptoten werden Approximationstechniken mit dualen Lösungsverfahren zu einem effizienten Optimierungsalgorithmus, der für Probleme mit vielen Entwurfsvariablen und vielen Restriktionen geeignet ist, kombiniert. Der entwickelte mathematische Optimierungsalgorithmus ist problemunabhängig und universell einsetzbar. Die vielen numerischen Beispiele aus Mathematik und Strukturmechanik belegen die Leistungsfähigkeit des Algorithmus.

In der Formoptimierung wird ein innovatives Verfahren zur Optimierung von Freiformschalen ohne den Einsatz von CAD in der Modellparametrisierung vorgestellt. Die Einschränkung des Lösungsraumes durch die Verwendung von CAD-Elementen wird mit der Parametrisierung direkt am FE-Netz aufgehoben, sodass die entwickelten Verfahren den Einsatz der Formoptimierung in der frühen Entwurfsphase ermöglichen. Zur Kontrolle der für die am FE-Netz parametrisierten Geometrien charakteristischen Welligkeit der Systemantwort und damit auch der Strukturgeometrie werden globale Filtertechniken eingesetzt. Die Untersuchung des Einflusses der Locking-Phänomene auf den Optimierungsprozess zeigt einen Zusammenhang zwischen dem mechanischen Defekt in verschiebungsformulierten finiten Elementen und der Welligkeit auf Elementebene, die die kleinste Skala der auftretenden Oszillationen in der Formoptimierung darstellt.

Die große Entwurfsfreiheit der Parametrisierung direkt am FE-Netz ermöglicht die Erweiterung des Verfahrens auf die Sickenoptimierung. Durch Lokalisierung der Filterwirkung werden die Sickenkörper dort gebildet, wo es für die Verbesserung der mechanischen Eigenschaften der Struktur am meisten zuträglich ist. Nach Konvergenz des Sickenmusters verbindet ein Sickenschließungsalgorithmus die einzelnen Sicken nach einem mechanischen Kriterium.

Mit den vorgestellten Techniken soll der Einsatz der Formoptimierung im Vorentwurf ermöglicht und etabliert werden. Die numerischen Beispiele dokumentieren den Erfolg der Methode.

Shape optimization of freeform shells Mathematical algorithms and filter techniques

Abstract

This thesis discusses two aspects of structural optimization. The first topic concerns the development of mathematical algorithms for large scale optimization. The second one treats of shape optimization of freeform shells with model parametrization directly on the finite element mesh.

On the basis of the method of moving asymptotes (MMA) combined with the dual method an efficient mathematical optimization algorithm for problems with many design variables and many constraints is developed. The presented algorithm is problem-independent. Various numerical examples from mathematics and structural mechanics show the performance of the developed optimization algorithm.

Furthermore, this thesis presents an innovative approach for shape optimization without using CAD to parametrize the models. The Parametrization directly on the finite element mesh cancels the restrictions in design space due to CAD-parametrization, which enables using shape optimization in the preliminary design. To control the wiggly shapes, which are characteristic for shape optimization with model parametrization directly on the finite element mesh, filter techniques are applied. In this context, the investigation of the influence of locking phenomena shows a correlation between the mechanical defect of displacement elements and the waviness of structural response on element level – the smallest scale of the oscillations.

The gained freedom in the optimization process based on model parametrization directly on the finite element mesh allows the application to bead optimization. By means of a local filter it is possible to predict the location of the beads to significantly improve the mechanical properties of the optimized structures. After convergence of the bead pattern the adjacent beads can be joined due to a mechanical criterion.

The proposed approach aims to establish shape optimization in the early phase of design. The numerical examples confirm the efficiency of the presented method.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Der Optimierungsprozess	3
1.2	Ziele dieser Arbeit	5
I	Mathematische Optimierungsalgorithmen	9
2	Einführung in die mathematische Programmierung (MP)	11
2.1	Klassifikation der Optimierungsstrategien	11
2.2	Allgemeine Formulierung einer Optimierungsaufgabe	12
2.2.1	Ein kleines Beispiel	14
2.3	Existenz und Eindeutigkeit der Lösung	16
2.3.1	Existenz der Lösung	16
2.3.1.1	Unbeschränkte Optimierung	16
2.3.1.2	Beschränkte Optimierung	17
2.3.1.3	Die Lagrange-Funktion	19
2.3.1.4	Die Kuhn-Tucker-Bedingungen	20
2.3.1.5	Die duale Funktion	22
2.3.2	Eindeutigkeit der Lösung	25
2.3.2.1	Unbeschränkte Optimierung	25
2.3.2.2	Die Konvexität	26
2.3.2.3	Beschränkte Optimierung	27

3	Mathematische Optimierungsalgorithmen und Approximationstechniken	31
3.1	Einleitung	31
3.2	Klassifikation der Optimierungsalgorithmen	32
3.3	Approximationstechniken	36
3.3.1	Lokale Approximationsverfahren	36
3.3.1.1	Approximationen erster Ordnung	36
3.3.1.2	Approximationen höherer Ordnung	39
3.3.2	Globale Approximationsverfahren	39
3.3.2.1	Die Response-Surface-Methode	40
3.3.2.2	Die Kriging-Methode	41
3.3.3	Gemischte lokale-globale Approximationsverfahren	42
4	Die Methode der beweglichen Asymptoten (MMA)	45
4.1	MMA	45
4.1.1	Mathematische Formulierung	46
4.2	Extended Method of Moving Asymptotes (EMMA)	48
4.2.1	Approximation der Zielfunktion	49
4.2.2	Problem der Nullstellen	54
4.2.3	Approximation der Gleichheitsnebenbedingungen	54
4.3	Dual Extended Method of Moving Asymptotes (DEMMA)	57
4.3.1	Kurze Zusammenfassung	57
4.3.2	Approximation der Side Constraints	58
4.3.3	Duale Lösungsverfahren	60
4.3.4	Lösung des Unterproblems	61
4.3.5	Berücksichtigung der Side Constraints	63
4.3.6	Maximierung der dualen Funktion	64
4.3.7	Ein modifiziertes Verfahren der konjugierten Gradienten	65
4.3.8	Ein quadratischer Line Search	68
4.3.9	Vorkonditionierung und Funktionsskalierung	70
4.4	Numerische Beispiele	73
4.4.1	Mathematische Beispiele	74
4.4.1.1	Beispiel 1: Entkoppelte Entwurfsvariablen	74

4.4.1.2	Beispiel 2: Gekoppelte Entwurfsvariablen	75
4.4.2	Beispiele aus der Strukturoptimierung	76
4.4.3	Topologieoptimierung	76
4.4.4	Formoptimierung	77
II	Formoptimierung	79
5	Formoptimierung von Freiformschalen	81
5.1	Einführung in die Formoptimierung dünnwandiger Strukturen	81
5.2	Die Frage der Parametrisierung	82
5.3	Der Anfang war die FE-Parametrisierung	84
5.4	Die CAD-Parametrisierung	87
6	FE-Parametrisierung im Kontext der Formoptimierung	91
6.1	Einführung	91
6.2	Bedeutung der Welligkeit	93
6.3	Kontrolle der Welligkeit mit Filtertechniken	95
6.3.1	Mathematische Grundlagen	96
6.3.2	Formfunktionen und duale Funktionen	98
6.3.3	Anwendungsbeispiel	99
6.4	Filtertechniken in der Formoptimierung. Die globale Filterung	104
6.4.1	Diskretisierung der Filtergleichung	107
6.4.2	Softwaretechnische Umsetzung der Filtergleichung. Ein Vorwärtsalgorithmus	110
6.5	Anwendung der Filtertechniken in der Formoptimierung. Numerische Beispiele	112
6.6	Abschließende Bemerkungen	114
6.6.1	Die Projektion auf den Direktor	115
6.6.2	Die Randeffekte	117
6.6.3	Einfluss der unregelmäßigen Vernetzung	119
6.6.4	Einfluss der Locking-Phänomene	120

7	Sickenoptimierung als Applikation der Formoptimierung mit FE-Parametrisierung	121
7.1	Einführung	121
7.2	Die Sicke als Konstruktionselement	122
7.3	Verfahren der Sickenoptimierung	122
7.4	Sickenoptimierung mit FE-Parametrisierung. Der lokale Filter	123
7.4.1	Die Suche nach den „Hot Spots“. Der Sickenalgorithmus im Detail	123
7.4.2	Durchdringung von Sicken	126
7.4.3	Der Sickenschließungsalgorithmus	128
7.5	Numerische Beispiele	130
7.5.1	Das Wellblech	130
7.5.2	Der Gasbehälter	131
8	Sensitivitätsanalyse in der Formoptimierung	135
8.1	Einführung	135
8.2	Klassifikation der Verfahren	136
8.3	Die diskrete Sensitivitätsanalyse	137
8.3.1	Das Verfahren der finite Differenzen	138
8.3.1.1	Das Schrittweiten-Dilemma	138
8.3.2	Die diskrete analytische Sensitivitätsanalyse	140
8.3.2.1	Die diskrete direkte Sensitivitätsanalyse	142
8.3.2.2	Die diskrete adjungierte Sensitivitätsanalyse	143
8.3.3	Die diskrete semianalytische Sensitivitätsanalyse	147
8.3.4	Fazit und Zusammenfassung der diskreten Verfahren	150
8.4	Die variationelle Sensitivitätsanalyse	151
8.5	Entwurfssensitivität	152
9	Locking-Phänomene in der Formoptimierung	155
9.1	Einführung	155
9.2	Der Timoschenko-Balken	158
9.3	Klassifikation der Locking-Phänomene. Locking-freie Elementformulierungen	163
9.4	Einfluss der Locking-Effekte auf den Optimierungsprozess	164
9.4.1	Der unregelmäßige Einfluss der Versteifung	165
9.4.2	Der Einfluss auf den zulässigen Bereich	167
9.4.3	Höheres „Rauschen“ infolge Locking	168

10 Schlussfolgerungen und Ausblick

173

Literaturverzeichnis

175

Kapitel 1

Einleitung

Optimierung ist alltäglich. Es liegt in der Natur des Menschen, sich verbessern zu wollen und die bisherigen Errungenschaften zu übertreffen. Auch wenn diese Eigenschaft, der stete Wunsch nach dem Optimum, nicht offensichtlich ist, dennoch begleitet sie uns in fast jeder Situation und in jedem Bereich des Lebens. Wir alle, die Ingenieure, die Kaufleute, die Juristen, die Handwerker und viele andere, streben in unserem Tun nach dem maximal möglichen Ertrag bei geringstem Aufwand unter den gegebenen Umständen. So könnte man allgemein eine Optimierungsaufgabe formulieren. In dieser Definition spiegelt sich, neben der pragmatischen verfahrenstechnischen Sichtweise, ebenso eine soziale philosophische Komponente wider, in der jede Verbesserung, jeder Schritt in Richtung Optimums als Ziel einer Optimierungsaufgabe interpretiert und als ein *akzeptables Optimum* aufgefasst wird. Diese zweite weniger rigorose Sichtweise hat sich, aufgrund der Komplexität der sich stellenden Herausforderungen in der industriellen Praxis in gewisser Hinsicht etabliert, weil ein Optimum im mathematischen Sinne nicht immer möglich ist.

Die in Teil I dieser Arbeit behandelten Optimierungsverfahren sind zwar generische, disziplinübergreifend anwendbare Methoden, sie werden dennoch im Kontext der Strukturoptimierung vorgestellt und erörtert.

Die ersten systematischen Untersuchungen und Entwicklungsarbeiten in der Strukturoptimierung können bis Mitte des 19. Jahrhunderts zurückverfolgt werden. In den Pionierarbeiten von Maxwell [Max90] werden vor allem Gewichtsminimierungsaufgaben von idealisierten Strukturen behandelt. Den wohl bekanntesten Beitrag leistete Michell [Mic04] Anfang des 20. Jahrhunderts, in dem die Gewichtsminimierung auf Fachwerke angewandt wurde. Die aus orthogonalen Trajektorien bestehenden Michell-Strukturen bilden bis heute die Grundkonstruktionsregeln in der Strukturoptimierung. Erwähnenswert sind ebenfalls die Arbeiten von Galilei in der Formfindung [WB63] und [Sza79], die allerdings vielmehr auf experimenteller Basis beruhten und ohne die mathematischen Grundlagen der Variationsrechnung, die im 17. und 18. Jahrhundert von Bernoulli, Euler und Lagrange entwickelt wurden, auskommen mussten. Ebenso stellten die Arbeiten von Newton und Leibnitz in der Differenzial- und Integralrechnung Ende des 17. Jahrhunderts die Grundlage der mathematischen Optimierungsalgorithmen. Eine Zusammenfassung der Geschichte der Optimierungsverfahren mit weiterführender Literatur ist in [Sch01] zu finden.

Die Anwendung der ersten Optimierungsmethoden in analytischer Form beschränkte sich auf kleine Systeme mit entsprechender Abstraktion, die vor allem im zweiten Weltkrieg in

der Gewichtsminimierung von Flugzeugen mit einfachen Beulnebenbedingungen stattgefunden hat. Erst Ende der Vierzigerjahre, Anfang der Fünfzigerjahre konnten die numerischen Verfahren – mit der Entwicklung der ersten Rechner – in der Optimierung eingesetzt werden. Die lineare Programmierung (LP) wurde daraufhin, nach der Übertragung vom Operation Research auf die Strukturmechanik, in der Optimierung von Rahmentragwerken in Kombination mit der Fließgelenktheorie verwendet. Ein weiterer Meilenstein im Laufe der Fünfzigerjahre war die Entwicklung der Methode der finiten Elemente, die die numerische Strukturanalyse bis zur heutigen Zeit dominiert.

Die Ära der modernen mathematischen nichtlinearen Optimierungsverfahren, die mathematische Programmierung (MP), läutete *Schmit* mit seinem fundamentalen Werk [Sch60] Anfang der Sechzigerjahre ein. Der wesentliche Beitrag darin bestand in der Kopplung der Verfahren der mathematischen Programmierung mit der Methode der finiten Elemente als universelles Analysewerkzeug, um automatisierte Optimierungsprozesse durchführen zu können. Die Strukturoptimierung als übergeordneter multidisziplinärer Prozess war damit geboren.

Trotz der frühen Reife der universellen problemunabhängigen mathematischen Verfahren konnten diese, aufgrund der beschränkten Leistungsfähigkeit der damaligen Rechner, nur auf kleine Probleme mit geringer Anzahl an Entwurfsvariablen und Nebenbedingungen angewandt werden. Aufgrund dessen verlagerte sich die Entwicklungsarbeit Anfang der Sechzigerjahre auf Methoden, die zwar problemspezifisch sind, aber diese Probleme sehr effizient lösen können. Es entstanden die Methoden der Optimalitätskriterien (OC) [PT68], [VKR68], die sehr intuitiv aufgebaut sind und keine rigorose mathematische Grundlage besitzen, dennoch meistens nach wenigen Iterationen Ergebnisse in der Nähe des Optimums geliefert haben. Einer der wesentlichen Vorteile der OC-Verfahren ist die Unabhängigkeit der Methodeneffizienz von der Problemdimensionalität, die durch Ausarbeitung von Rekursionsformeln für das Update der Entwurfsvariablen erreicht wird. Die OC-Verfahren sind für eine Vielfalt von praxisrelevanten Problemen aufgestellt worden und dominierten das Geschehen in der Strukturoptimierung bis tief in die Achtzigerjahre.

Erst mit den modernen Rechnerarchitekturen und der Verfügbarkeit der benötigten Rechenleistung hat die mathematische Programmierung wieder an Bedeutung gewonnen. Hinzu kam der Bedarf nach universellen Verfahren zur Bewältigung der großen Vielfalt an neuen Problemstellungen, die in der numerischen Simulation berücksichtigt werden konnten bzw. mussten. Weiteren Schub haben die mathematischen Methoden durch die Entwicklung von Approximationsverfahren erhalten, die die Anzahl der Struktur- und Sensitivitätsanalysen und den damit verbundenen Rechenaufwand erheblich reduzieren. Erwähnenswert ist die Tatsache, dass die parallelverlaufende Entwicklung der konkurrierenden OC- und MP-Verfahren, methodisch gesehen, in der Formulierung von dualen Algorithmen, unter Verwendung geeigneter Approximationstechniken, zu einer gemeinsamen Basis zusammenläuft, wodurch die mathematischen Optimierungsalgorithmen die Effizienz der OC-Algorithmen erhalten und den universellen problemunabhängigen Charakter beibehalten. Diese Klasse von Optimierungsverfahren wird im weiteren Verlauf von Teil I dieser Arbeit detailliert erörtert.

1.1 Der Optimierungsprozess

Nach dem kurzen Rückblick auf die Historie der Optimierungsverfahren soll in diesem Abschnitt der Optimierungsprozess ganzheitlich und in allgemeiner und abstrakter Form näher beleuchtet werden.

Ein steht fest: Die automatisierte Strukturoptimierung hat unsere Philosophie im Entwurfsprozess grundsätzlich verändert. Nicht nur die vielen Entwürfe, die im Laufe der numerischen Simulation durchlaufen werden, sondern die neue Einsicht in das Tragverhalten, die anhand ständiger Designverbesserungen gewonnen wird, sei es die intensivere Materialausnutzung durch Querschnittsoptimierung oder Topologieveränderungen, Steifigkeitserhöhung durch Formänderungen oder bessere Lastabtragung durch bessere Orientierung der Materialfaser, erlaubt uns mutiger und kreativer zu werden. All diese Einblicke in das Innerste der Strukturen verlagern den Schwerpunkt im Entwurfsprozess, denn viele Entscheidungen, die früher nur mit jahrelanger Erfahrung und trainierter Intuition getroffen werden konnten, bekommen ein mächtiges Entwurfswerkzeug zur Seite gestellt, mit dessen Hilfe neue Perspektiven eröffnet werden. Dennoch kann und soll dieser automatisierte Designzyklus – ermöglicht durch das Zusammenwirken von leistungsfähiger Soft- und Hardware und numerischer Optimierungs- und Analyseverfahren – die Erfahrung und Intuition des Ingenieurs nicht gänzlich ersetzen. Die Rolle der menschlichen Kontrolle verlagert sich lediglich in der Entscheidungskette, indem gewisse Sensibilität bzw. Misstrauen gegenüber dem Wust an Zahlen und bunten Bildern der numerischen Simulation angebracht ist.

Das Motto: „Garbage in, Garbage out“ bringt das Problem der unübersichtlichen Menge an Operationen, die im digitalen Zeitalter durchgeführt werden, auf den Punkt. Der Computer macht keine Fehler. Die Fehlerquelle ist immer menschlicher Natur, entweder in der Eingabe, Programmierung oder Interpretation. Eine bittere Wahrheit. Im Endeffekt muss das Resultat vom gesunden Menschenverstand zumindest auf Plausibilität überprüft zu werden.

Der Einfluss der automatisierten Strukturoptimierung auf den Entwurfsprozess wird deutlich durch Betrachtung der, bis zum endgültigen Produkt, zu durchlaufenden Etappen. Im Allgemeinen kann dieser Zyklus in folgende vier Entwicklungsstufen unterteilt werden [MG71], [Kir93]:

- Erstellung des Anforderungskatalogs, in dem die Ziele, die mit der zu entwerfenden Struktur erreicht werden sollen, aufgeführt werden. Zu beachten ist, dass sich diese Ziele aus Sicht der Optimierung häufig widersprechen, wie Gewichts- und Steifigkeitsoptimierung.
- Erstellung des Entwurfskonzepts, das die grundsätzlichen Fragen zur Struktur beantwortet, wie die Entscheidung bei einer Brücke für eine Fachwerk-, eine Bogen- oder doch eine Schrägkabelbrücke. Auch wenn die Entscheidungen in diesen Grundsatzfragen im so genannten Vorentwurf immer noch vorwiegend auf Kreativität und Fachwissen des Ingenieurs aufbauen, mischen die modernen Optimierungsverfahren in den letzten wenigen Jahren auf dieser Ebene kräftig mit. In der Topologieoptimierung

ist es heutzutage üblich, den gesamten zur Verfügung stehenden Designraum der Optimierung freizugeben, um sich dann durch die sich einstellende Materialverteilung beim Basisentwurf inspirieren zu lassen. In der Formoptimierung hingegen ist der Einsatz in der frühen Entwurfsphase immer noch nur bedingt möglich.

Genau diese Lücke versucht diese Arbeit in Teil II zu schließen, indem geeignete Verfahren für den Umgang mit der maximalen Modellformfreiheit, basierend auf der CAD-freien Parametrisierung, entwickelt und präsentiert werden.

- Optimierung des Basisentwurfs. In jedem Design gibt es mehrere Alternativen für die Anordnung der konstruktiven Elemente der Struktur. Wenn wir beim Beispiel der Brücke bleiben, so können, im Fall der Fachwerkbrücke, Position, Neigung und Querschnitte der Fachwerkstäbe in unendlich vielen Varianten vorkommen. In dieser Disziplin spielen automatisierte Optimierungsverfahren ihre Stärke aus und ermöglichen die iterative Annäherung an optimale Lösungen, die die wesentlichen Anforderungen erfüllen. Diese Methoden sind nicht mehr vom Alltag des konstruktiven Ingenieurs wegzudenken und stellen eine exzellente und unverzichtbare Orientierungshilfe in der immer größer werdenden Komplexität der heutigen Modelle.
- Verifizierung und Validierung. Üblicherweise sind die Modelle, die im Optimierungszyklus analysiert und modifiziert werden, einer höheren Abstraktion unterworfen als die Modelle, in denen alle abzubildenden Details aller beteiligten Disziplinen vertreten sind. So sind Optimierungs- und Analysemodelle meistens detailärmer, indem z.B. die einzelnen Komponenten von Anschlüssen und Verbindungen durch Annahmen auf einfache Ersatzsysteme reduziert werden. Nachdem die Gesamtstruktur optimiert wird, muss das Ergebnis validiert und verfeinert werden. So müssen unter Umständen die Krümmungsradien von Übergängen angepasst und die Stöße zwischen den Bauteilen bemessen werden.

Die Strukturoptimierung ist von Natur aus multidisziplinär, daher fließen die unterschiedlichen Einflüsse der involvierten Teilbereiche in eine ganzheitliche Darstellung eines Optimierungsprozesses ein. Dennoch ist es möglich die Abstraktion einer Optimierungsaufgabe auf das anfangs von *Eschenauer* eingeführte Dreisäulenkonzept der Optimierung [EPB88] zurückzuführen. Laut des Dreisäulenkonzepts kann jede Strukturoptimierungsaufgabe durch drei miteinander verknüpfte Modelle, deren erfolgreiches Zusammenspiel Effizienz und Qualität der Optimierung maßgeblich beeinflusst, repräsentiert werden. Diese drei Modelle sind Geometrie-, Analyse- und Optimierungsmodell. Die Verknüpfungsvorschriften zwischen den Modellen sind Diskretisierung und Parametrisierung.

Das Geometriemodell stellt die Basis dar, auf der die restlichen Schritte und Konstrukte beruhen. Mithilfe verschiedener Techniken des CAGD¹ können die Geometrien der zu analysierenden und zu optimierenden Strukturen digital abgebildet und visualisiert werden.

Das Analysemodell, auch Berechnungsmodell genannt, wird vom Geometriemodell durch Diskretisierung abgeleitet. Dadurch, dass die numerischen Berechnungsverfahren, insbe-

¹Computer Aided Geometric Design. Im weiteren Verlauf wird verallgemeinernd nur CAD verwendet.

sondere die Methode der finiten Elemente, die analytischen Methoden praktisch vollständig verdrängt haben², muss die kontinuierliche Welt der Geometrie und der funktionalen Zusammenhänge zwischen Einwirkung und Systemantwort in diskrete Größen überführt werden, die mittels Gleichgewicht in Form von algebraischen Gleichungssystemen vorliegen. Das Geometriemodell wird anhand eines Netzes bestehend aus Knoten und Elementen approximiert, wodurch das Berechnungsmodell, die Grundlage der numerischen Analyse, entsteht. Dieser Vorgang wird als Diskretisierung bezeichnet.

Das Optimierungsmodell entsteht durch Parametrisierung eines der beiden anderen Modelle, Geometrie- oder Berechnungsmodell. Die Parametrisierung bedeutet die Vereinbarung der Entwurfsvariablen – die freien Parameter im System – die variiert werden, um Verbesserungen herbeizuführen. Wird die Parametrisierung basierend auf dem CAD-Modell (Geometriemodell) durchgeführt, spricht man von der CAD-Parametrisierung. Bei Parametrisierung des Berechnungsmodells wird von CAD-freier Parametrisierung oder von FE-Parametrisierung oder von der Parametrisierung direkt am FE-Netz gesprochen. Im Optimierungsmodell werden Zielfunktion und Nebenbedingungen als explizite oder implizite Funktionen der Entwurfsvariablen formuliert. Es entsteht eine Formulierung der Optimierungsaufgabe, die vom Optimierungsalgorithmus verarbeitet werden kann.

Im Zentrum des Dreisäulenkonzepts steht der Optimierungsalgorithmus, der zwar rein formal dem Optimierungsmodell zuzuordnen ist, dennoch als abgekapselte Einheit das Herzstück des Optimierungsprozesses bildet. Es ist ein ganzer Forschungszeitweig um das Thema Optimierungsalgorithmen herum entstanden. In Zusammenhang mit dem Optimierungsalgorithmus ist die Sensitivitätsanalyse zu erwähnen, die im Fall von Gradientenverfahren die benötigten Ableitungen liefert. Die Sensitivitätsanalyse gewinnt insofern an Bedeutung, als sie den Löwenanteil des Rechen- und Zeitaufwandes der Optimierungsaufgabe ausmacht. Aus diesem Grund hat sich die Sensitivitätsanalyse Mitte der Achtzigerjahre zu einem eigenständigen Forschungsgebiet entwickelt.

In Abbildung 1.1 sind die oben angesprochenen Modelle, die möglichen Zusammenhänge und weitere wichtige Komponenten einer Optimierungsaufgabe schematisch dargestellt.

1.2 Ziele dieser Arbeit

Die vorliegende Arbeit behandelt zwei Schwerpunkte des Optimierungsprozesses: in Teil I werden die mathematische Programmierung und die Approximationstechniken besprochen, während Teil II der Formoptimierung von Freiformschalen mit Parametrisierung direkt am FE-Netz gewidmet ist.

Die mathematischen Optimierungsalgorithmen haben methodisch gesehen einen langen Reifeprozess durchgemacht und stellen heutzutage die Basis für robuste, universelle und problemunabhängige Verfahren dar. Insbesondere in Kombination mit geeigneten Approximationsverfahren werden die Nachteile der mathematischen Algorithmen, die vielen Iterationen und der damit verbundene Bedarf an Funktions- und Ableitungsevaluierungen,

²Bis auf wenige Anwendungsgebiete, z.B. in gewissen Bereichen der Dynamik.

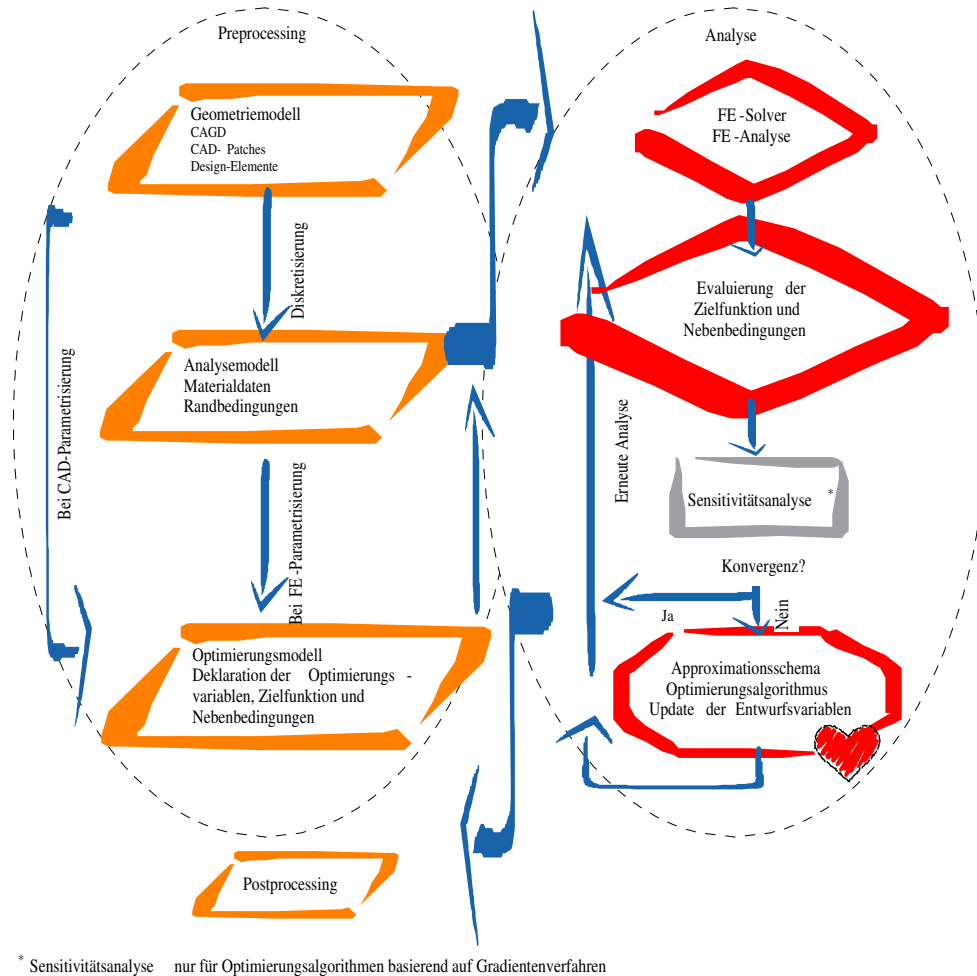


Abbildung 1.1: Die Komponenten eines Optimierungsprozesses.

behalten und ergeben – bei Erhaltung des universellen Charakters – von der Effizienz her Methoden, die mit den Verfahren der Optimalitätskriterien vergleichbar sind. Eine der wichtigsten Approximationstechniken, die Ende der Achtzigerjahre ihre Geburtsstunde erlebte, ist die Methode der beweglichen Asymptoten (Method of Moving Asymptotes, kurz MMA). Basierend auf methodischen Erweiterungen der MMA-Approximation (EMMA³) wird ein dualer Algorithmus entwickelt, der besonders für große Probleme mit vielen Entwurfsvariablen und vielen Nebenbedingungen geeignet ist.

Die Formoptimierung wird im aktuellen Stand der Technik, trotz mächtiger CAD-Software, aufgrund von konzeptionellen Problemen fast ausschließlich in der späten Entwurfsphase verwendet. Ein Einsatz im Vorentwurf als elementares Kreativitäts- und Inspirationswerkzeug, analog zur Topologieoptimierung, kann nur realisiert werden, wenn die durch die CAD-Parametrisierung stark eingeschränkte Formfreiheit des Optimierungsmodells wiederhergestellt wird. In dieser Arbeit wird ein Konzept basierend auf der Optimierung direkt am FE-Knoten präsentiert. Die bekannten Probleme der Parametrisierung am FE-Netz

³Extended Method of Moving Asymptotes.

werden klassifiziert, erläutert und anhand Filtertechniken behoben. Die im Rahmen der Genauigkeit des Berechnungsmodells maximale Formfreiheit, gewährleistet durch die Parametrisierung direkt am FE-Knoten, kann in vielfältige Anwendungen genutzt werden. Die Formoptimierung und -findung von membranartigen Freiformschalen ist eine dieser Anwendungsgebiete. Die Sickenoptimierung mit lokalen Filtertechniken ist eine weitere Applikation.

Die Gliederung der Arbeit stellt sich wie folgt dar:

- Teil I
 - In Kapitel 2 wird zuerst die Klassifizierung der Optimierungsstrategien in der Strukturoptimierung vorgenommen. Des Weiteren werden einige mathematische Grundlagen, Begriffsdefinitionen und die verwendete Nomenklatur im Kontext der mathematischen Programmierung erläutert.
 - In Kapitel 3 wird die Klassifizierung der Optimierungsalgorithmen vorgenommen, vor allem die mathematischen Verfahren, die später in der Entwicklung des Algorithmus DEMMA⁴ zum Einsatz kommen. Des Weiteren beschäftigt sich das Kapitel mit Approximationstechniken, die im Vorlauf der eigentlichen Optimierungsarbeiten im Optimierungsalgorithmus angewandt werden, um ein zum Originalproblem äquivalentes Ersatzproblem mit gezielten Eigenschaften zu erzeugen. Diese Eigenschaften können die Effizienz der mathematischen Algorithmen erheblich steigern. Die Eigenschaften und Einsatzgebiete der unterschiedlichen lokalen und globalen Approximationsschemata werden kurz angeschnitten.
 - In Kapitel 4 wird im Detail auf den Optimierungsalgorithmus DEMMA eingegangen. Ausgehend von den dualen Verfahren wird gezeigt, inwiefern die Separierbarkeit des Approximationsschemas MMA genutzt werden kann, um eine Rekursionsformel zu formulieren, analog zu den OC-Algorithmen, wodurch sich die Effizienz des vorgestellten Verfahrens erklärt. Die hohe Glattheit der MMA-Approximation ermöglicht die Herleitung von leistungsfähigen Suchalgorithmen basierend auf Informationen zweiter Ordnung. Numerische Beispiele runden das Kapitel ab.
- Teil II
 - In Kapitel 5 „Einführung in die Formoptimierung dünnwandiger Strukturen“ werden die unterschiedlichen Parametrisierungstechniken thematisiert. Die Vorteile der CAD-Parametrisierung werden angesprochen, aber auch deren konzeptionelle Defizite, weshalb die Formoptimierung nicht in der frühen Entwurfsphase zum Einsatz kommt. Die Probleme alternativer Modellparametrisierungsmethoden, wie die Parametrisierung direkt am FE-Knoten, werden anschaulich dargestellt.
 - In Kapitel 6 werden die Parametrisierung direkt am FE-Knoten und die damit verbundenen charakteristischen Phänomene genauer unter die Lupe genommen.

⁴Dual Extended Method of Moving Asymptotes.

Es wird aufgezeigt, dass die inhärente Welligkeit der Systemantwort etwas Optimales in sich hat, das lediglich kontrolliert werden muss. Diese Kontrolle kann durch mehrere in anderen Disziplinen bewährte Verfahren, wie Filtertechniken und Stabilisierungsverfahren erlangt werden. In dieser Arbeit werden die von der Signaltechnik bekannten Filtertechniken auf die Formoptimierung von Freiformschalen übertragen. Die Leistungsfähigkeit des entwickelten globalen Filters wird anhand ausgewählter Beispiele untermauert.

- In Kapitel 7 wird der in Kapitel 6 präsentierte globale Filter, basierend auf der hohen Formfreiheit der Parametrisierung direkt am FE-Netz, in einen lokalen Filter überführt, der dann zur Sickenoptimierung verwendet werden kann. Es werden mechanische Kriterien zur Sickenbildung, -durchdringung und -schließung formuliert. Numerische Beispiele schließen das Kapitel ab.
- Kapitel 8 widmet sich der Sensitivitätsanalyse, die die Grundvoraussetzung für Gradientenalgorithmien ist. Insbesondere werden die Ableitungsverfahren von diskreten algebraischen Gleichungssystemen besprochen, wie sie in der Methode der finiten Elemente vorkommen. Die prinzipielle Vorgehensweise in der variationalen Sensitivitätsanalyse wird ebenso kurz angeschnitten.
- In Kapitel 9 wird auf die Locking-Phänomene im Kontext der Formoptimierung eingegangen. Der Einfluss des Locking auf die Strukturanalyse ist ein eigenständiges Forschungsgebiet, weshalb hier nur die Grundlagen der Versteifungseffekte erläutert werden, um dann die Auswirkungen auf die Formoptimierung mit Parametrisierung direkt am FE-Knoten anschaulich darzulegen. Die wesentliche Feststellung der Untersuchungen ist die Tatsache, dass Locking die mechanische Ursache der Verrauschung auf Elementebene (kleinste Skala) darstellt.

Teil I

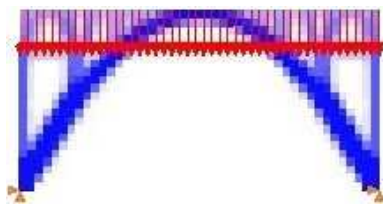
Mathematische Optimierungsalgorithmen

Kapitel 2

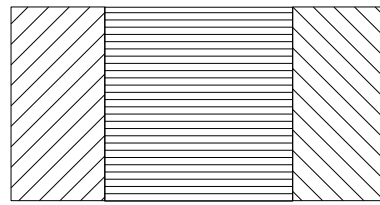
Einführung in die mathematische Programmierung (MP)

2.1 Klassifikation der Optimierungsstrategien

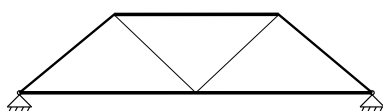
Bevor auf die Grundlagen der mathematischen Programmierung eingegangen wird, sollen die Klassen der Optimierungsaufgaben, die sich im Laufe der Optimierungsgeschichte herauskristallisiert haben, näher betrachtet werden. Eine Optimierungsaufgabe kann allgemein einer der vier folgenden Optimierungsstrategien zugeordnet werden (Abbildung 2.1):



(a) Topologieoptimierung.



(b) Faseroptimierung.



(c) Querschnittsoptimierung.



(d) Formoptimierung.

Abbildung 2.1: Klassen der Optimierungsstrategien.

- In der **Topologieoptimierung** stellt sich die Frage nach der optimalen Materialverteilung im vorgegebenen Entwurfsraum. In Abbildung 2.1(a) wird die Verzerrungsenergie (Compliance) eines Einfeldträgers unter Gleichstreckenlast optimiert. Dabei werden die nicht mehr benötigten Materialpartikeln, hier finite Elemente, mit einer sehr kleinen Materialdichte versehen und grafisch ausgeblendet.
- In der **Faseroptimierung** wird die optimale Neigung der Materialfaser eines nicht isotropen Werkstoffes ermittelt. Diese Winkelinformationen können bereichsweise in Re-

gionen mit ausgezeichneter Faserausrichtung zusammengefasst werden, wie in Abbildung 2.1(b) zu sehen ist.

- In der **Querschnittsoptimierung** geht es darum, in einer Struktur mit vorgegebener Topologie und Topographie, die optimalen Querschnittsdaten zu ermitteln. Insbesondere bei Fachwerken stellt sich die Frage der optimalen Querschnittsflächen (Abbildung 2.1(c)), aber auch bei Systemen mit Biegung, wie Balken, Platten und Schalen, können z.B. Bauteildicken optimiert werden.
- In der **Formoptimierung** werden geometrische Parameter der Struktur, wie Bauteilabmessungen, Loch- und Krümmungsradien, Lage bestimmter Stellen (CAD- oder FE-Knoten) im Raum, etc., variiert, um gewissen Optimalitätsbedingungen zu genügen. In Abbildung 2.1(d) wird die Form einer an den Ecken gelagerten ebenen Platte unter dem Gesichtspunkt der Steifigkeitsmaximierung optimiert. Durch Variation der Knotenraumkoordinaten entsteht die als „Isler-Schale“ bekannte Form.

Zu einer Optimierungsstrategie gehört allerdings mehr als die Festlegung des Aufgabentyps, Topologie-, Faser-, Querschnitts- oder Formoptimierung. Abgesehen davon, dass diese Aufgabentypen in einem Optimierungsprozess kombinierbar sind, muss vor der Durchführung einer Optimierung noch das Optimierungsverfahren gewählt werden. Unter Optimierungsverfahren versteht man den verwendeten Optimierungsalgorithmus, womit jedoch meistens andere Techniken zusammenhängen, wie Approximationstechniken, Sensitivitätsanalyse oder Prozessparallelisierungstechniken. Die auf den Problemtyp angepasste Visualisierung und die grafische Auswertung der Optimierungsergebnisse ist ebenso ein wichtiger Bestandteil der Optimierungsstrategie.

In Kapitel 3 werden die Optimierungsverfahren nach Anforderungen und Einsatzgebiet klassifiziert, wobei der Schwerpunkt auf die mathematischen Algorithmen gelegt wird. Daher werden in den folgenden Abschnitten einige Begriffsdefinitionen aus dem Umfeld der mathematischen Programmierung vereinbart und die entsprechenden Grundlagen erläutert.

2.2 Allgemeine Formulierung einer Optimierungsaufgabe

Eine Optimierungsaufgabe kann allgemein mathematisch wie folgt formuliert werden:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min.} & f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \\
 \text{s.d.} & g_j(\mathbf{x}) \leq 0, & j = 1, \dots, m \\
 & h_j(\mathbf{x}) = 0, & j = m + 1, \dots, m + m_e \\
 & \underline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x} \leq \bar{\mathbf{x}} &
 \end{array} \tag{2.1}$$

Darin können die wichtigsten Komponenten eines Optimierungsproblems identifiziert werden:

Entwurfsvariablen $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$: In jedem zu optimierenden Modell müssen systeminterne Parameter variiert werden können, um Veränderungen (Verbesserungen) herbeizuführen. Mechanische oder geometrische Größen, die im Optimierungsmodell durch Entwurfsvariablen repräsentiert werden, hängen vom Typ der Optimierungsaufgabe und von der verwendeten Parametrisierung ab. In der Strukturmechanik können z.B. die relative Materialdichte (Topologieoptimierung), Neigung der Materialfaser (Faseroptimierung), Querschnittsfläche oder Bauteildicke (Querschnittsoptimierung), Raumkoordinaten von CAD- bzw. FE-Knoten (Formoptimierung) und vieles mehr, als Entwurfsvariablen definiert werden. Die Entwurfsvariablen werden in einem n -dimensionalen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ zusammengefasst und stellen in jeder Iteration den aktuellen Zustand des Optimierungsmodells dar.

Zielfunktion(en) $f(\mathbf{x})$: In jeder (Struktur-) Optimierungsaufgabe geht es um die Verbesserung einer oder mehrerer Eigenschaften f eines Modells, charakterisiert durch den Startentwurf \mathbf{x}_0 , dabei kann die Verbesserung die Minimierung oder Maximierung sein. In dieser Arbeit wird immer von einer Minimierung ausgegangen, was keine Einschränkung der Allgemeingültigkeit darstellt, denn jede Minimierungsaufgabe kann durch Vorzeichenwechsel in eine Maximierung umgewandelt werden. Als Beispiel für gängige Eigenschaften, die in der Praxis optimiert werden, können Profitmaximierung, Kosten- oder Verbrauchsminimierung angeführt werden. In der Strukturmechanik sind Gewicht (Masse), Volumen, Steifigkeit und Eigenfrequenzen Beispiele für häufig optimierte Zielfunktionen.

Nicht selten kommt es in der industriellen Praxis vor, dass zwei sich widersprechende Eigenschaften, wie Gewicht und Steifigkeit, gleichzeitig optimiert werden sollen. In diesem Fall spricht man von einer Mehrkriterienoptimierung, in der zwei oder mehrere Zielfunktionen beteiligt sind. Im Rahmen dieser Arbeit wird immer von einer einzigen Zielfunktion ausgegangen, wobei jede Mehrkriterienoptimierung mittels einer gewichteten Summe der involvierten Funktionen zu einer Standardoptimierung mit einer Zielfunktion überführt werden kann. Diese Wichtungsfaktoren sind meistens benutzerdefinierte Größen, die die Bedeutung der zu optimierenden Eigenschaften repräsentieren.

Nebenbedingungen $g_j(\mathbf{x}), h_j(\mathbf{x})$: In den meisten praxisrelevanten Optimierungsaufgaben muss die gesuchte Lösung eine Reihe von Nebenbedingungen erfüllen, die als Gleichheits- $h_j(\mathbf{x})$ oder Ungleichheitsnebenbedingung $g_j(\mathbf{x})$ formuliert werden. Diese Nebenbedingungen, auch Restriktionen genannt, können beliebige nichtlineare Funktionen der Entwurfsvariablen aber auch der Zustandsvariablen sein. Genau darin besteht die Schwierigkeit der Strukturoptimierung, denn die in einem Optimierungsprozess involvierten Funktionen sind meistens hochgradig implizite Funktionen der Entwurfsvariablen in der Form $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))$. Die Zustandsvariablen \mathbf{u} beschreiben die Systemantwort auf äußere Einwirkungen und sind im Falle der Finite-Elemente-Methode die Knotenverschiebungen, die Hauptunbekannten im algebraischen Gleichungssystem des Gleichgewichts. Dies bedeutet, dass die Funktionsverläufe der Optimierungsaufgabe nicht a priori bekannt sind, und dass jede Auswertung eine komplette Systemanalyse erfordert, was zeit- und ressourcenintensiv sein kann. Das Problem verschärft sich, wenn Ableitungen für Gradientenverfahren benötigt werden. Mit diesem Problem beschäftigt sich die Sensitivitätsanalyse in Kapitel 8.

Beispiele für Nebenbedingungen in der Strukturoptimierung sind Spannungsrestriktionen, bei denen gefordert wird, dass die z.B. von Mises Spannung an jeder Stelle im System ein

gewisses Niveau nicht überschreitet. Bei Verschiebungsnebenbedingungen wird verhindert, dass die Deformation der Struktur an einer oder mehreren Stellen zu groß wird. In den letzten Jahren wurden Fertigungsrestriktionen von der Industrie immer mehr gefordert, bei denen die optimierten Modelle nach einem bestimmten Fertigungsprozess produziert werden sollen und damit gewissen Gestaltungsbedingungen unterworfen sind. Ein Beispiel dafür ist die Vorgabe einer Auszugsrichtung bei Gussteilen, damit das Bauteil nach dem Gussvorgang ohne Hinterschnitte aus der Gussform gezogen werden kann.

Hinzu kommt, dass jede der oben erwähnten Zielfunktionen ebenso als Nebenbedingung verwendet werden kann, wenn die jeweilige Eigenschaft durch einen Grenzwert beschränkt wird. Ein Beispiel dafür ist die Volumennebenbedingung in der Topologieoptimierung, bei der das Volumen (Masse) des Optimierungsergebnisses z.B. auf die Hälfte des Ausgangsmodells reduziert werden soll. Diese Restriktion kann sowohl als Gleichheits- oder Ungleichheitsnebenbedingung vorgeschrieben werden.

Eine besondere Form der Restriktionen stellen die Ober- und Unterschranken der Entwurfsvariablen \underline{x} und \bar{x} dar. Diese können zwar auch als „normale“ Nebenbedingungen betrachtet werden, dennoch ist es üblich, diese einer Sonderbehandlung zu unterziehen, da sie einfache und direkte Funktionen der Entwurfsvariablen in der Form $\underline{x} - x \leq 0$ und $x - \bar{x} \leq 0$ sind.

Es ist darauf hinzuweisen, dass die in dieser Arbeit behandelten Funktionen, Zielfunktion und Nebenbedingungen, skalare Funktionen von vektoriiellen Variablen sind, wie sie in der Strukturoptimierung üblicherweise vorkommen. Des Weiteren gilt, dass die Ungleichheitsnebenbedingungen immer ≤ 0 definiert werden.

2.2.1 Ein kleines Beispiel

In einem eindimensionalen Beispiel werden, mithilfe der grafischen Darstellung einer mathematisch aufgestellten Optimierungsaufgabe, elementare Begriffe der Optimierung erläutert.

$$\begin{aligned}
 \text{Min. } f(x) &= (x - 4)^2 + 3, \\
 \text{s.d. } g_1(x) &= -x + 1 \leq 0, \\
 g_2(x) &= 2x^2 - 11 \leq 0, \\
 -\infty &\leq x \leq \infty
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

In Abbildung 2.2 ist die Optimierungsaufgabe dargestellt, worin zu sehen ist, wie die Nebenbedingungen den ursprünglichen zulässigen Suchraum $x \in [-\infty, \infty]$ einschränken und auf den Bereich $[1, 3]$ reduzieren. Des Weiteren kann beobachtet werden, dass das unbeschränkte Minimum der Zielfunktion an der Stelle $x = 4$ ist, das allerdings die Nebenbedingung $g_2(-4) = 21 > 0$ verletzt. Somit ist das absolut beste Ergebnis unzulässig und muss einem anderen durch die Restriktion g_2 beschränkten Optimum weichen.

Die Nebenbedingung g_1 schränkt den Suchraum von links ein, also den Bereich der größeren Zielfunktionswerte. Somit kann festgestellt werden, dass die Restriktion g_1 das beschränkte Optimum des Problems nicht beeinflusst und von der Aufgabenstellung weggelassen werden kann, ohne dass sich das Endergebnis ändert.

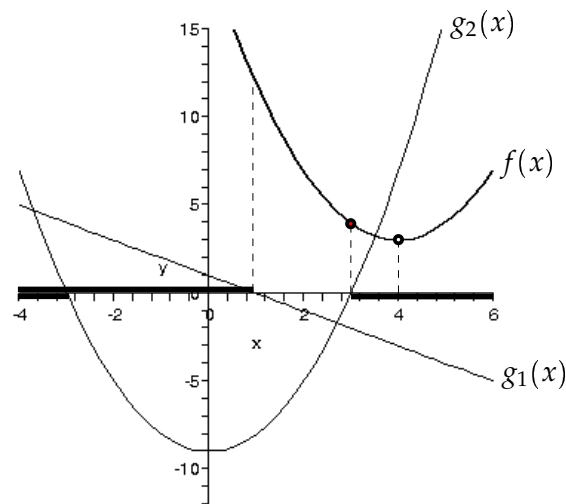


Abbildung 2.2: Ein kleines Beispiel.

Folglich können dem Beispiel 2.2 folgende Definitionen entnommen werden:

Eine **erfüllte Nebenbedingung** ist eine Restriktion, deren Auswertung für den aktuellen Entwurfsvariablenvektor \mathbf{x}^k (in der k -ten Iteration) die Nebenbedingung befriedigt bzw. gültig macht. D.h., die Evaluierung einer erfüllten Ungleichheitsnebenbedingung muss kleiner gleich null sein $g_j(\mathbf{x}^k) \leq 0$. Eine Gleichheitsnebenbedingung ist nur dann erfüllt, wenn deren Evaluierung exakt gleich null ist $h_j(\mathbf{x}^k) = 0$.

Eine **verletzte Nebenbedingung** ist eine Restriktion, deren Auswertung für den aktuellen Entwurfsvariablenvektor \mathbf{x}^k (in der k -ten Iteration) die Nebenbedingung nicht erfüllt, also ungültig macht. D.h., die Evaluierung einer verletzten Ungleichheitsnebenbedingung ist größer als null $g_j(\mathbf{x}^k) > 0$. Eine Gleichheitsnebenbedingung ist verletzt, wenn deren Evaluierung ungleich null ist $h_j(\mathbf{x}^k) \neq 0$.

Eine **aktive Nebenbedingung** ist eine Restriktion, die das Optimum mitbestimmt, was impliziert, dass die Evaluierung der Nebenbedingung am Optimum exakt gleich null ist. Grafisch gesehen liegt der Entwurfsvariablenvektor dann direkt auf der Nebenbedingung. Dadurch, dass der Optimierungsprozess ein iterativer Vorgang ist, bezieht sich die Bezeichnung *aktiv* auf den Zustand der Restriktion am Ende der jeweiligen Iteration. Gleichheitsnebenbedingungen müssen immer aktiv sein. Es werden zwar in manchen Optimierungsverfahren Zwischenzustände, bei denen eine Gleichheitsnebenbedingung verletzt ist, akzeptiert, aber am Ende der Iteration muss die Restriktion aktiv sein.

Eine **redundante Nebenbedingung** ist eine Restriktion, die auf das Optimierungsergebnis keinen Einfluss hat und von der Aufgabenformulierung hätte entfernt werden können. Diese Eigenschaft ist am Anfang der Optimierung meistens leider nicht ersichtlich, sodass manche Nebenbedingungen lange im iterativen Prozess unnötigerweise berücksichtigt werden müssen, wodurch die Problemdimension erhöht und die Effizienz des Algorithmus reduziert wird.

Eine **linear abhängige Nebenbedingung** ist eine Restriktion, die aus der Linearkombination anderer Nebenbedingungen in der Problemformulierung entstehen kann. Diese Nebenbedingungen sind überflüssig, da sie durch andere bereits berücksichtigt werden. Sie erhöhen die Problemdimensionalität und reduzieren den Rang der Krümmungsmatrix, wodurch die meisten Gradientenalgorithmien Konvergenzprobleme bekommen. Leider können diese linearen Abhängigkeiten nur mit großem Aufwand, z.B. nach Untersuchung der Sensitivitätsmatrix, aufgespürt und behoben werden.

Der **zulässige Bereich** ist das Gebiet im Entwurfsvariablenraum, aus dem jeder Entwurfsvariablenvektor alle Nebenbedingungen erfüllt. Somit muss die Lösung einer Optimierungsaufgabe im zulässigen Bereich liegen.

Die **beschränkte Minimierung** ist eine Optimierungsaufgabe, in der die Minimierung einer Funktion, die Zielfunktion, unter Berücksichtigung von Nebenbedingungen stattfindet.

Die **unbeschränkte Minimierung** ist eine Optimierungsaufgabe, in der nur eine Funktion vorkommt, die minimiert werden soll. Wenn die Nebenbedingungen in einer beschränkten Minimierungsaufgabe alle redundant sind, kann – zumindest in der Umgebung des Minimums – von unbeschränkter Minimierung gesprochen werden.

2.3 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

2.3.1 Existenz der Lösung

Wie es bei der Erbringung eines mathematischen Beweises üblich ist, müssen sowohl notwendige als auch hinreichende Bedingungen erfüllt werden. Die erforderlichen Bedingungen werden im Folgenden besprochen, wobei dabei zwischen der beschränkten und der unbeschränkten Optimierung unterschieden wird.

2.3.1.1 Unbeschränkte Optimierung

An einem Extremum, Minimum wie Maximum, im n -dimensionalen Raum gilt die Stationaritätsbedingung der betrachteten Funktion. Somit muss an einem Optimum die erste Ableitung der Zielfunktion f bezüglich der Entwurfsvariablen x verschwinden:

$$\nabla f(x) = 0 \tag{2.3}$$

mit

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

2.3.1.2 Beschränkte Optimierung

Bevor auf die mathematisch rigorose Formulierung der Optimalität eines beschränkten Optimierungsproblems eingegangen wird, soll eine intuitive Herangehensweise vorgeführt werden [Van84], die nicht nur als Beweis der im Anschluss angegebenen mathematischen Bedingung dient, sondern auch als Grundgerüst für direkte Optimierungsverfahren verwendet wird.

In Abbildung 2.3 ist ein zweidimensionales beschränktes Optimierungsproblem mit einer Nebenbedingung dargestellt. Darin sind die Höhenlinien der Zielfunktion und die Nebenbedingung, also die Linie $g(\mathbf{x}) = 0$, abgebildet. Ausgangsposition ist der Punkt A , der zwar auf der Nebenbedingung liegt, allerdings nicht das beschränkte Minimum ist.

Um den aktuellen Entwurf zu verbessern, wird eine Suchrichtung \mathbf{S} benötigt, die einerseits die Zielfunktion reduziert, andererseits die aktive Nebenbedingung nicht verletzt. Die erste Bedingung wird durch Definition des brauchbaren Sektors erfüllt, in dem alle Richtungen, also Suchvektoren, die Zielfunktion reduzieren. Es ist klar, dass die am Punkt A zur Höhenlinie der Zielfunktion tangentielle Linie (im n -dimensionalen Raum eine Hyperebene) genau den gesuchten brauchbaren Sektor abgrenzt. Jede Richtung auf der zum Gradienten $\nabla f(\mathbf{x})$ abgewandten Seite reduziert die Zielfunktion, wodurch sich die Bedingung des brauchbaren Suchvektors wie folgt ableiten lässt:

$$\mathbf{S} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (2.5)$$

Eine einfache Interpretation der Gl. (2.5) lautet: der Winkel zwischen dem Gradienten der Zielfunktion und der brauchbaren Suchrichtung muss zwischen 90° und 270° sein.

Auf ähnliche Weise stellt die zur Nebenbedingung am Punkt A tangentielle Hyperebene die Begrenzung für den zulässigen Sektor, in dem eine endliche Bewegung entlang jeder Suchrichtung die Nebenbedingung nicht verletzt. Somit kann die zulässige Richtung wie folgt definiert werden:

$$\mathbf{S} \cdot \nabla g(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (2.6)$$

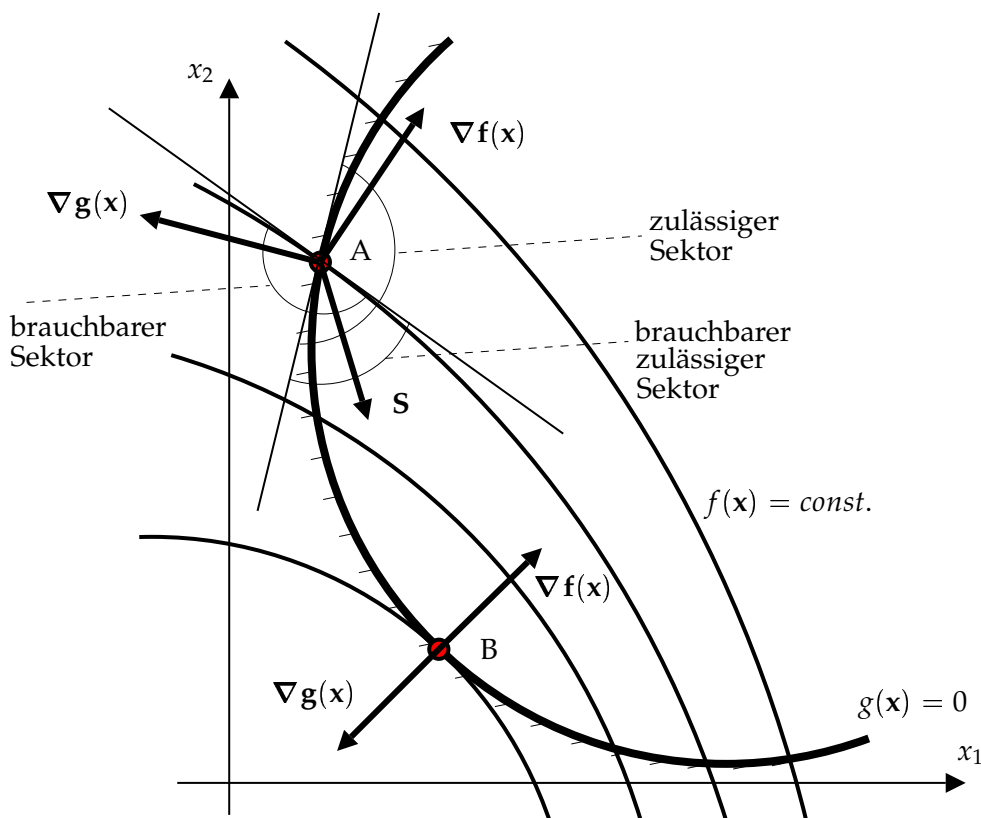


Abbildung 2.3: Beschränkte Optimierung.

Die gesuchte Richtung, die eine Entwurfsverbesserung bewirkt und gleichzeitig die aktiven Nebenbedingungen nicht verletzt, muss daher aus dem brauchbaren und zulässigen Sektor gewählt werden, wie in [Abbildung 2.3](#) zu sehen ist. Wird der Suchvektor in der Nähe der Tangentialebene der Zielfunktion gewählt, dann können, falls die Zielfunktion nicht stark nichtlinear ist, größere Schritte zurückgelegt werden, bevor eine Restriktion verletzt wird, allerdings schreitet die Entwurfsverbesserung nur langsam voran. Ein Suchvektor in der Nähe der Tangentialebene der aktiven Restriktion reduziert zwar die Zielfunktion schnell, führt aber nach kurzer Distanz zur Verletzung der Nebenbedingung. Ein guter Suchvektor stellt ein Kompromiss zwischen den beiden Grenzebenen dar.

An dieser Stelle ergibt sich die Frage: was zeichnet das Optimum aus? Bei der unbeschränkten Minimierung konnte die Stationaritätsbedingung eine Antwort darauf geben, indem eine infinitesimale Bewegung entlang dem Gradienten am Optimum das Ergebnis nicht verändert hat, dadurch dass der Gradient null ist. Aufbauend darauf kann die erweiterte Stationaritätsbedingung formuliert werden, die besagt, dass am beschränkten Minimum nur Suchrichtungen in der Tangentialebene möglich sind, wie am Punkt *B* in [Abbildung 2.3](#) zu sehen ist. Die Tangentialebene beider Bedingungen, Brauchbarkeit und Zulässigkeit, stimmen am beschränkten Minimum überein, so dass der Raum der möglichen Suchrichtungen auf genau diese Tangentialebene schrumpft, in der allerdings keine Verbesserung der Zielfunktion mehr erreichbar ist. Das Zusammenführen der beiden Tangentialebenen ergibt sich aus der Linearkombination der Gleichungen (2.5) und (2.6), sodass die erweiterte Stationaritätsbedingung mathematisch wie folgt formuliert werden kann:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \lambda \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= 0 \\
\mathbf{S} \cdot (\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \lambda \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})) &= 0 \\
\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \lambda \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0},
\end{aligned} \tag{2.7}$$

wobei λ hier ein Skalierungsfaktor ist. Die erweiterte Stationaritätsbedingung Gl. (2.7) kann folgendermaßen gelesen werden: die vektorielle Summe aller Gradienten am Optimum muss null sein.

In Abbildung 2.3 sind diese Zusammenhänge grafisch dargestellt. Die Gradienten von Zielfunktion und Nebenbedingung stehen jeweils senkrecht auf die gemeinsame Tangentialebene und sind entgegengesetzt gerichtet.

Erwähnenswert ist die Tatsache, dass es im n -dimensionalen Raum bis zu n aktive Nebenbedingungen geben kann, die alle Gl. (2.7) erfüllen müssen. Die Erweiterung der Stationaritätsbedingung auf diesen allgemeinen Fall wird mathematisch anhand der Lagrange-Funktion erläutert.

2.3.1.3 Die Lagrange-Funktion

Eine weitere Möglichkeit, die beschränkte Optimierung durchzuführen, ist, im Kontrast zu den direkten Methoden, die im vorigen Abschnitt angesprochen wurden, die Klasse der indirekten Methoden, bei der die beschränkte Optimierung der Zielfunktion unter Berücksichtigung von Restriktionen in die Optimierung eines Ersatzproblems übergeht, dessen Lösung mit der Lösung des Originalproblems übereinstimmt. Die Besonderheit des Ersatzproblems ist, dass es ohne Nebenbedingungen oder nur mit einfachen Schranken auskommt, sodass einfache und robuste Algorithmen zum Einsatz kommen können.

Die Formulierung des Ersatzproblems besteht darin, die Lagrange-Funktion aufzustellen, in der Zielfunktion und gewichtete Summe der Nebenbedingungen in einem funktionalen Zusammenhang zusammengefasst werden:

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot g_j(\mathbf{x}) + \sum_{k=m+1}^{m+m_e} \lambda_k \cdot h_k(\mathbf{x}) \tag{2.8}$$

mit

$$\lambda_j \geq 0, \tag{2.9}$$

Dabei wird gefordert, dass die Lagrange-Multiplikatoren der Ungleichheitsnebenbedingungen positiv sein müssen.

Die Lagrange-Funktion besitzt eine Reihe interessanter Eigenschaften, die von speziellen mathematischen Algorithmen genutzt werden, um zur Lösung des Ersatz- und damit auch des Originalproblems zu gelangen:

- Die Lagrange-Funktion transferiert das Originalproblem vom *primalen* Raum, das ist der n -dimensionale Raum der Entwurfsvariablen \mathbf{x} , in den erweiterten Raum der *dualen* und primalen Variablen. Die dualen Variablen sind die Lagrange-Multiplikatoren λ_j und λ_k . Im erweiterten Raum $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ gibt es keine Nebenbedingungen, lediglich die Ungleichheitsnebenbedingungen unterliegen den Schranken der Gl. (2.9).
- Am Optimum $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$, die gemeinsame Lösung des Original- und Ersatzproblems, gilt die Konsistenzbedingung:

$$\begin{aligned}\lambda_j^* \cdot g_j(\mathbf{x}^*) &= 0 \\ \lambda_k^* \cdot h_k(\mathbf{x}^*) &= 0\end{aligned}\tag{2.10}$$

Darin wird gefordert, dass die Lagrange-Multiplikatoren der erfüllten (nicht aktiven) Nebenbedingungen null sein müssen, um die korrespondierenden Restriktionen aus der Problemformulierung zu eliminieren. Die aktiven Nebenbedingungen besitzen Lagrange-Multiplikatoren ungleich null und erfüllen dennoch die Konsistenzbedingung dadurch, dass $g_j(\mathbf{x}^*) = 0$ bzw. $h_k(\mathbf{x}^*) = 0$ definitionsgemäß ist.

- Die Lagrange-Funktion stellt im erweiterten Primalen-Dualen-Raum eine Sattelfläche dar, deren Sattelpunkt die Lösung des Problems ist. In Abbildung 2.4 ist die grafische Lösung des Beispiels in Abschnitt 2.2.1 sowohl im primalen als auch im Primalen-Dualen-Raum dargestellt.

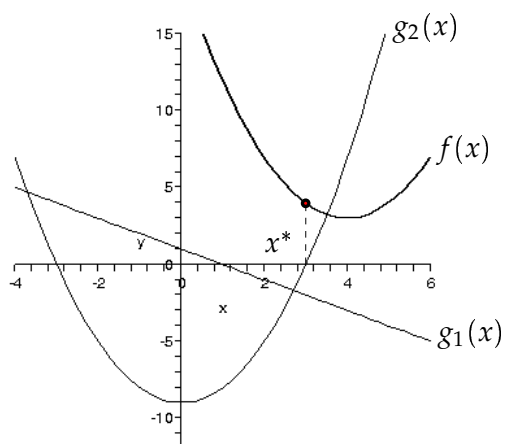
Die Sattelpunkteigenschaft ist die Basis vieler mathematischer Optimierungsalgorithmen, insbesondere diese, die auf der im weiteren Verlauf dieses Kapitels erläuterten dualen Funktion beruhen.

- Die Lösung des Ersatzproblems entspricht am Optimum der Lösung des beschränkten Originalproblems. Dies kann anhand der Konsistenzbedingung auf einfache Weise gezeigt werden. Das Einsetzen der Gl. (2.10) in die Lagrange-Funktion Gl. (2.8) und die Evaluierung am Sattelpunkt $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ ergibt:

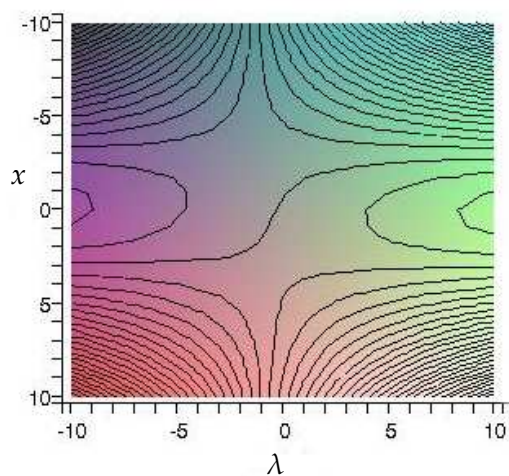
$$\begin{aligned}L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) &= f(\mathbf{x}^*) + \overbrace{\sum_{j=1}^m \lambda_j^* \cdot g_j(\mathbf{x}^*) + \sum_{k=m+1}^{m+m_e} \lambda_k^* \cdot h_k(\mathbf{x}^*)}^0 \\ L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) &= f(\mathbf{x}^*)\end{aligned}\tag{2.11}$$

2.3.1.4 Die Kuhn-Tucker-Bedingungen

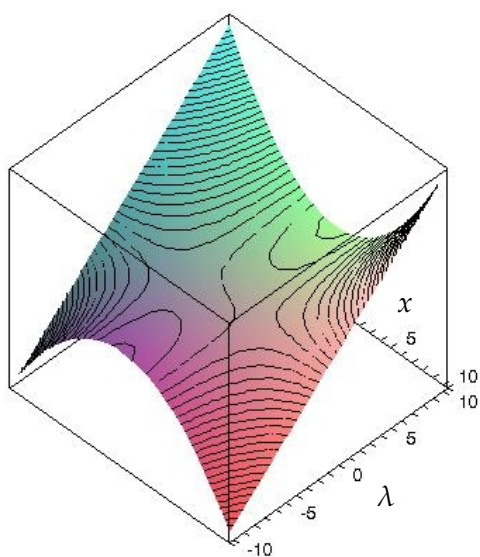
Durch Überführung des beschränkten Optimierungsproblems Gl. (2.1) in eine unbeschränkte Optimierung anhand der Lagrange-Funktion kann die notwendige Optimalitätsbedingung Gl. (2.3) angewandt werden. Die Stationaritätsbedingung im erweiterten Primalen-Dualen-Raum, die so genannte Kuhn-Tucker-Bedingung, kann wie folgt geschrieben werden:



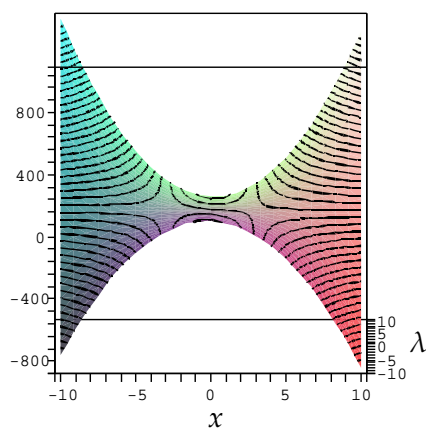
(a) Darstellung im primalen Raum.



(b) Darstellung im Primalen-Dualen-Raum (Draufsicht).



(c) Darstellung im Primalen-Dualen-Raum (Perspektivdarstellung).



(d) Darstellung im Primalen-Dualen-Raum (Ansicht).

Abbildung 2.4: Die Sattelpunkteigenschaft der Lagrange-Funktion.

$$\begin{aligned}\nabla_x L(x^*, \lambda^*) &= 0 \\ \nabla_\lambda L(x^*, \lambda^*) &= 0\end{aligned}\tag{2.12}$$

Ausgeschrieben erhält die Kuhn-Tucker-Bedingung folgende Form:

$$\nabla_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{g}_j(\mathbf{x}^*) + \sum_{k=m+1}^{m+m_e} \lambda_k^* \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}_k(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

$$\nabla_{\lambda_j}L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = g_j(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

$$\nabla_{\lambda_k}L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = h_k(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (2.15)$$

Während Gl. (2.14) und Gl. (2.15) die mathematische Ausdrucksweise der Forderung, dass das Ergebnis der beschränkten Optimierung zulässig sein muss, darstellen, stellt Gl. (2.13) ein vektorielles Gleichgewicht dar, in dem der Gradient der Zielfunktion durch eine Linearkombination der aktiven Nebenbedingungen im Gleichgewicht gehalten wird. Die Lagrange-Multiplikatoren spielen dabei die Rolle der Skalierungsfaktoren, die die Bedeutung bzw. den Beitrag der korrespondierenden Nebenbedingung enthalten und wiedergeben (für mehr Details siehe Abschnitt 8.5).

2.3.1.5 Die duale Funktion

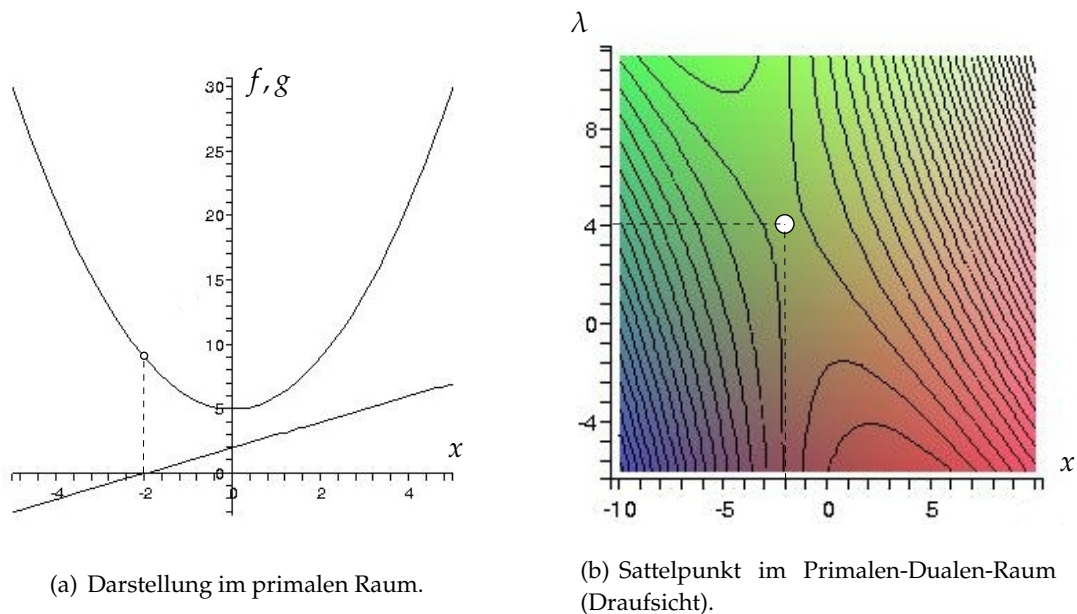
In Abschnitt 2.3.1.3 wurde die Lagrange-Funktion eingeführt, um beschränkte Optimierungsprobleme lösen zu können. Es wurde dabei festgestellt, dass die auf der Lagrange-Funktion aufbauenden Lösungsverfahren im erweiterten $(n + m + m_e)$ -dimensionalen Raum arbeiten müssen. Diese Verfahren, die so genannten Lagrange-Verfahren, nutzen allerdings nicht die besonderen Eigenschaften der Lagrange-Funktion, vor allem die Sattelpunkteigenschaft. Die Klasse der dualen Verfahren macht sich dies zunutze, indem die beschränkte Optimierungsaufgabe im erweiterten Raum der primalen und dualen Variablen in Teiloptimierungen in den jeweiligen Räumen zerlegt wird. Dabei liegt dem Verfahren folgende Idee zugrunde: bei bekannten Lagrange-Multiplikatoren geht die Aufgabe in eine unbeschränkte Optimierung über, die im primalen Raum einfach zu lösen ist. Daher werden die Lagrange-Multiplikatoren als Hauptunbekannten gewählt und werden in diesem Kontext als duale Variablen bezeichnet. Die primalen Variablen sind damit Funktionen der dualen Variablen (implizit oder explizit) in der Form

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}) \quad (2.16)$$

Die Problemdimensionalität reduziert sich auf den dualen Raum. Die Lagrange-Funktion geht in diesem Fall in die duale Funktion $D(\boldsymbol{\lambda})$ über:

$$L(\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}), \boldsymbol{\lambda}) = L(\boldsymbol{\lambda}) = D(\boldsymbol{\lambda}) \quad (2.17)$$

Die Transformation vom Primalen-Dualen-Raum in den Raum der dualen Variablen erfolgt mittels der Kuhn-Tucker-Bedingungen, die den funktionalen Zusammenhang zwischen den primalen und dualen Variablen liefern. Allerdings ergibt die Anwendung der Kuhn-Tucker-Bedingungen im allgemeinen Fall ein nichtlineares Gleichungssystem, sodass eine explizite Formulierung der Gl. (2.16) nicht möglich ist. Der in der Regel implizite Charakter der Beziehung $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda})$ ergibt die Trennung der Arbeitsräume in den dualen Algorithmen:



(a) Darstellung im primalen Raum.

(b) Sattelpunkt im Primalen-Dualen-Raum (Draufsicht).

Abbildung 2.5: Darstellung im primalen und erweiterten Raum.

maximiere im dualen Raum nach λ und minimiere im primalen Raum nach x bis zur Konvergenz.

Diese Minmax-Dualität stellt die Basis für sehr effiziente Optimierungsalgorithmen dar, die sogar in Zusammenhang mit geeigneten Approximationstechniken an die Leistungsfähigkeit der Verfahren der Optimalitätskriterien herankommen, ohne den universellen Charakter mathematischer Optimierungsalgorithmen zu verlieren. In Kapitel 3 wird gezeigt, wie die Separierbarkeit der Entwurfsvariablen im Approximationsschema MMA in Kombination mit dem dualen Lösungsverfahren zu einer Rekursionsformel für die Optimierung im primalen Raum führt, in der die Beziehung $x = x(\lambda)$ explizit angegeben werden kann.

Das folgende Beispiel demonstriert die Herleitung der dualen Funktion und die Funktionsweise des Minmax-Algorithmus:

$$\begin{aligned}
 \text{Min. } f(x) &= x^2 + 5, \\
 \text{s.d. } g(x) &= x + 2 \leq 0, \\
 &-\infty \leq x \leq \infty
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

In [Abbildung 2.5](#) ist die Optimierungsaufgabe sowohl im primalen als auch im erweiterten Primalen-Dualen-Raum dargestellt.

Die Lagrange-Funktion ergibt sich zu:

$$L(x, \lambda) = x^2 + 5 + \lambda \cdot (x + 2) \tag{2.19}$$

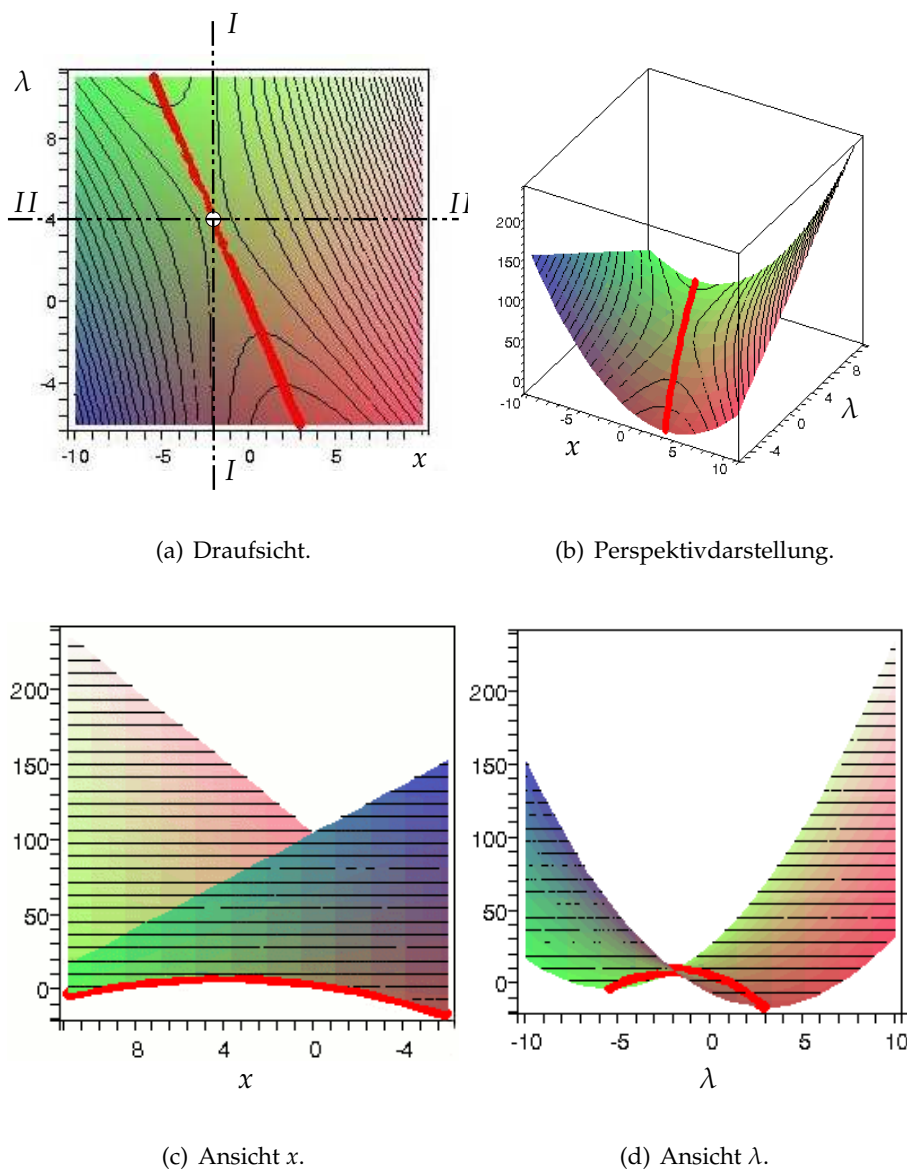


Abbildung 2.6: Darstellung der dualen Funktion im erweiterten Primalen-Dualen-Raum.

Die Kuhn-Tucker-Bedingung im primalen Raum liefert (minimiere nach x):

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x} = 2x + \lambda = 0 \implies x(\lambda) = -\frac{\lambda}{2} \quad (2.20)$$

Somit kann durch Rückeinsetzen in die Lagrange-Funktion Gl. (2.19) die duale Funktion explizit ermittelt werden:

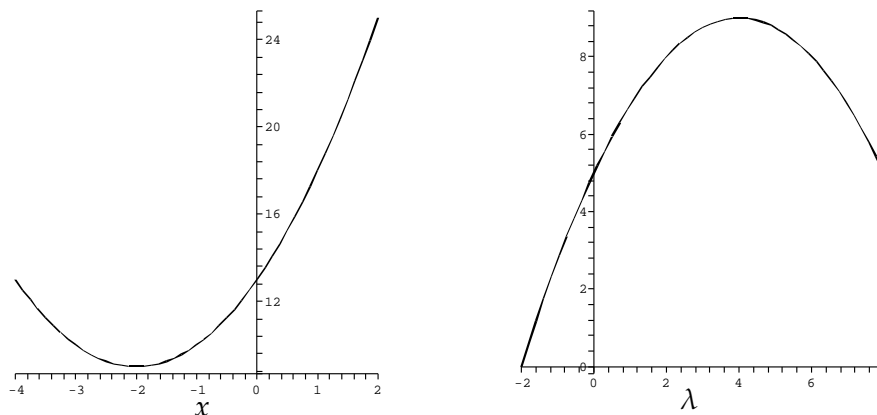
$$D(\lambda) = \left(-\frac{\lambda}{2}\right)^2 + 5 + \lambda \cdot \left(-\frac{\lambda}{2} + 2\right) = -\frac{1}{4}\lambda^2 + 2\lambda + 5 \quad (2.21)$$

Die duale Funktion kann dann nach λ maximiert werden, um die Lösung des Problems analytisch zu erhalten:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial D(\lambda)}{\partial \lambda} &= -\frac{\lambda}{2} + 2 = 0 \implies \\
 \lambda^* &= 4 \stackrel{\text{Gl. (2.20)}}{\implies} \\
 x^* &= -2
 \end{aligned}
 \tag{2.22}$$

Wesentlich interessanter, aus algorithmischer Sicht, ist die grafische Darstellung der dualen Funktion im erweiterten Primalen-Dualen-Raum (Abbildung 2.6).

Darin ist zu erkennen, dass die duale Funktion die Spur der Minimierungsergebnisse im primalen Raum (minimiere nach x) und der Maximierungsergebnisse im dualen Raum (maximiere nach λ) darstellt. Die in Abbildung 2.6(a) geführten Schnitte $I - I$ in x -Richtung und $II - II$ in λ -Richtung zeigen die Minmax-Eigenschaft deutlich auf, wie in Abbildung 2.7 zu sehen ist.



(a) Schnitt $I - I$ in λ -Richtung.

(b) Schnitt $II - II$ in x -Richtung.

Abbildung 2.7: Die Minmax-Vorgehensweise im dualen Algorithmus.

2.3.2 Eindeutigkeit der Lösung

2.3.2.1 Unbeschränkte Optimierung

Die anhand der notwendigen Bedingung erreichte Lösung stellt nicht immer ein Minimum dar und muss daher noch verifiziert werden. Die unbeschränkte Minimierung im eindimensionalen Fall gibt keinen Aufschluss über den Charakter der stationären Lösung der Gl. (2.3). In Abbildung 2.8 ist deutlich zu sehen, dass die drei Stellen A , B , und C die notwendige Bedingung erfüllen, dennoch ist lediglich die Stelle B ein Minimum.

Des Weiteren kann beobachtet werden, dass die Krümmungsinformation an den jeweiligen Kandidaten A , B , und C hilfreich sein kann, um den Charakter einer potentiellen Lösung ($\nabla_{x^F} = 0$) eindeutig zu identifizieren. Bei einem Extremum ist die Krümmung ungleich

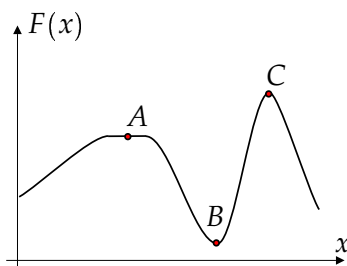


Abbildung 2.8: Die hinreichende Bedingung im eindimensionalen Fall.

null. Sie ist negativ bei einem Maximum, Stelle C, und positiv bei einem Minimum, Stelle B. Die indifferenten Stellen, die meistens Wendepunkte sind, weisen eine Nullkrümmung auf.

Die Übertragung der hinreichenden Bedingung auf den unbeschränkten n -dimensionalen Fall erfordert die Aufstellung und Untersuchung der Matrix der zweiten Ableitungen, die so genannte Hesse-Matrix $H(\mathbf{x})$ an allen potentiellen Lösungen, die die notwendige Bedingung erfüllen:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Eine positivdefinite Hesse-Matrix weist, analog zum eindimensionalen Fall, auf ein Minimum hin, während die Negativdefinitheit der Hesse ein Maximum bedeutet. Bei Stellen mit semidefiniter Hesse-Matrix handelt es sich nicht um ein Extremum.

Anzumerken ist, dass die Positivdefinitheit einer Matrix durch eine Eigenwertanalyse überprüft wird, bei der alle Eigenwerte größer als null sein müssen. Entsprechend sind alle Eigenwerte negativ bei der negativdefiniten Matrix. Bei einer semidefiniten Matrix ist mindestens ein Eigenwert gleich null.

Erwähnenswert ist in diesem Zusammenhang, dass die Aufstellung der Hesse-Matrix in der Strukturoptimierung durch analytische Verfahren sehr kompliziert und vor allem sehr zeit- und rechenintensiv sein kann, sodass die Optimierungsverfahren, die Informationen zweiter Ordnung benötigen, auf Approximationen der Hesse zurückgreifen müssen.

2.3.2.2 Die Konvexität

Eine der ewig jungen Diskussionen in der Optimierung, insbesondere in Zusammenhang mit den Vor- und Nachteilen der verwendeten Optimierungsverfahren, ist die Frage nach dem lokalen bzw. globalen Minimum. Ein Merkmal der mathematischen Gradientenverfahren ist der lokale Charakter der durchgeführten Suche, denn ein Gradientenalgorithmus

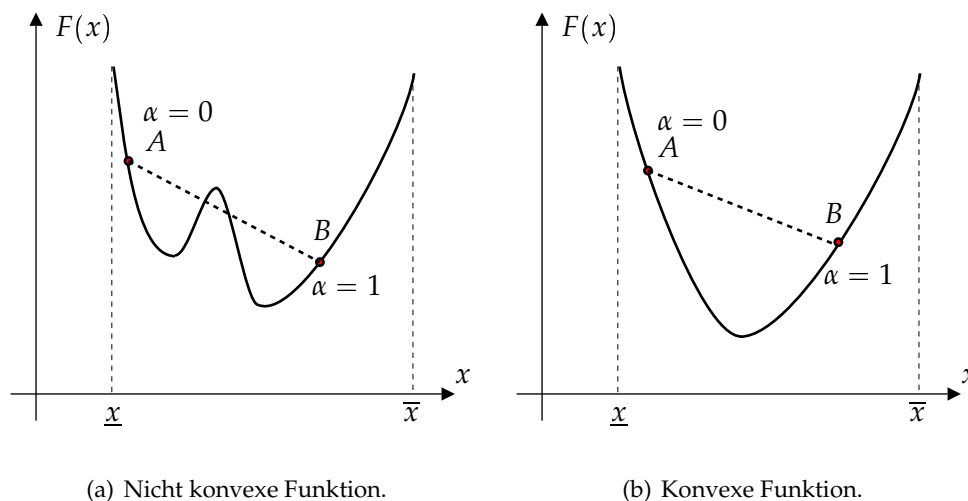


Abbildung 2.9: Konvexität im eindimensionalen Fall.

findet immer nur das nächstgelegene Minimum und kommt nicht aus dem Tal heraus. Somit können unterschiedliche Ausgangspositionen zu unterschiedlichen Ergebnissen führen, bei der Existenz von mehreren lokalen Minima. Auch wenn der Beweis, das globale Minimum erreicht zu haben, nicht möglich ist, haben stochastische Verfahren bessere Chancen, diesem Ziel näher zu kommen. Ohne die Diskussion über die Vor- und Nachteile der jeweiligen Verfahren zu vertiefen, sei darauf hingewiesen, dass viele Anwendungen in der Strukturoptimierung nicht an großen Veränderungen gegenüber dem Ausgangsentwurf interessiert sind, häufig wird das nächste Minimum gesucht.

Die Suche nach der lokalen bzw. globalen Lösung ist eng mit der Konvexität der involvierten Funktionen verknüpft. Mathematisch gesehen ist eine Funktion $f(x)$ im Entwurfsfenster $[\underline{x}, \bar{x}]$ konvex, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

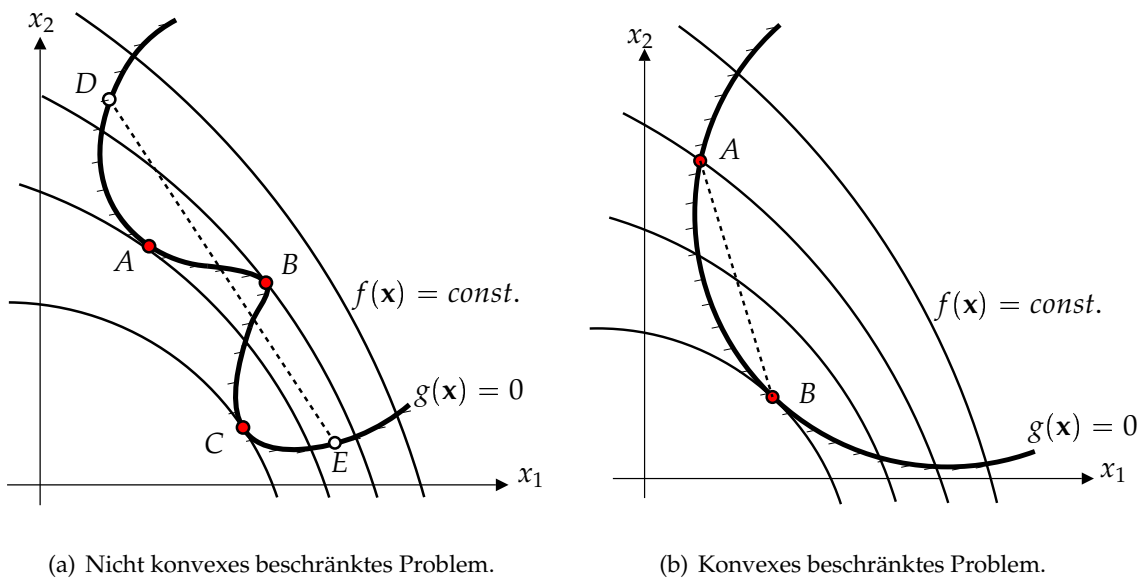
$$f(\alpha x_A + (1 - \alpha)x_B) \leq \alpha f(x_A) + (1 - \alpha)f(x_B), \quad x \in [\underline{x}, \bar{x}] \quad (2.24)$$

Eine einfache Interpretation der Gl. (2.24) lautet: eine Funktion ist konvex, wenn jede gerade Verbindung zweier Punkte auf der Funktion den Graphen der Funktion nicht schneidet, wie in Abbildung 2.9 für den eindimensionalen Fall zu sehen ist.

Ist eine Funktion im betrachteten Entwurfsfenster konvex, dann besitzt sie nur ein Minimum und die Hesse-Matrix ist in diesem Bereich positivdefinit (lokale Konvexität). Die globale Konvexität ist gesichert, wenn das Entwurfsfenster auf den gesamten Entwurfsraum erweitert werden kann oder, in anderen Worten, die Hesse-Matrix global positivdefinit ist.

2.3.2.3 Beschränkte Optimierung

Die Lösungseindeutigkeit und die Antwort auf die Frage des lokalen bzw. globalen Minimums in beschränkten Problemen erfordern die Erweiterung der Konvexität auf die gesamte Problemformulierung. In Abbildung 2.10(a) ist ein beschränktes zweidimensionales Problem mit einer Restriktion $g(x)$ dargestellt. Es ist ersichtlich, dass die Stellen A, B und C die



(a) Nicht konvexes beschränktes Problem.

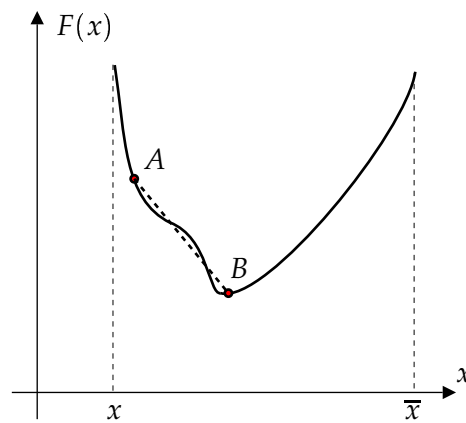
(b) Konvexes beschränktes Problem.

Abbildung 2.10: Konvexität in der beschränkten Optimierung.

Kuhn-Tucker-Bedingungen erfüllen. Das globale Minimum in C kann lediglich durch Vergleich der Zielfunktionsevaluierungen identifiziert werden. Weiterhin ist erkennbar, dass die Restriktion $g(x)$ nicht konvex ist, denn es ist möglich, zwei Punkte D und E mit einer Gerade zu verbinden, die den Graphen der Funktion schneidet und zum Teil im unzulässigen Bereich liegt. Die Restriktion erfüllt nicht die Konvexitätsbedingung der Gl. (2.24). Im Vergleich sind Ziel und Restriktionsfunktion in [Abbildung 2.10\(b\)](#) konvex, daher besitzt das beschränkte Problem ein einziges Minimum.

Ein Optimierungsproblem wird als konvex bezeichnet, wenn alle beteiligten Funktionen konvex sind. In diesem Fall besitzt das Problem nur ein Minimum, das globale Minimum, und die Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion ist an jeder Stelle positivdefinit.

Auch wenn die Konvexität für große Probleme in der Strukturoptimierung nicht global nachgewiesen werden kann, da die Informationen über diese Probleme meistens nur an we-

**Abbildung 2.11:** Nicht konvexe Funktion mit einem globalen Minimum.

nigen diskreten Stellen erhältlich sind, ist diese Eigenschaft dennoch von großer Bedeutung, denn die meisten Approximationstechniken setzen lokale Konvexität voraus und bilden in der Umgebung der Informationsstellen konvexe einfach zu lösende Probleme. Die Lösung dieser lokalen Ersatzprobleme bedarf keiner Untersuchung der hinreichenden Bedingung, aufgrund der garantierten Konvexität.

Erwähnenswert ist die Tatsache, dass die geforderte Problemkonvexität, um ein globales Minimum zu garantieren, mathematisch gesehen zu streng ist, denn Abbildung 2.11 zeigt eine Konstellation, bei der die Zielfunktion nicht konvex ist, das Problem dennoch nur ein einziges Minimum besitzt.

Kapitel 3

Mathematische Optimierungsalgorithmen und Approximationstechniken

3.1 Einleitung

Der Optimierungsalgorithmus ist das Herzstück im Optimierungsprozess und der Kern, in dem die eigentliche Entwurfsverbesserung stattfindet. Aufgrund der vielfältigen Problemklassen in der Strukturoptimierung kann als vorweg genommenes Fazit konstatiert werden, dass es den absolut alleskönnenden Optimierungsalgorithmus nicht gibt und naturgemäß nicht geben kann. Die Wahl des geeigneten Optimierungsverfahrens richtet sich nach vielen Faktoren und Gegebenheiten, wie die zu optimierende Problemklasse und die Informationen, die über die darin vorkommenden Funktionen zur Verfügung stehen, ob mit linearen oder hochgradig nichtlinearen, gutmütigen oder schlecht konditionierten Verläufen zu rechnen ist. Glattheit und Kontinuität der Funktionen und des Entwurfsraumes spielen dabei eine wesentliche Rolle. Z.B. weisen Gradientenverfahren bei glatten und kontinuierlichen Problemen hohe Effizienz auf, sind aber für diskrete Probleme ungeeignet.

Ein weiterer wichtiger Aspekt ist die Problemgröße. Dabei kann zwischen kleinen Problemen mit wenigen Entwurfsvariablen und wenigen Restriktionen, mittelgroßen Problemen mit vielen Entwurfsvariablen und wenigen Restriktionen und großen Problemen mit vielen Entwurfsvariablen und vielen Restriktionen unterschieden werden. Die Unterschiede zwischen den Algorithmen in Bezug auf die Problemgröße können methodischer Natur sein, indem ein Verfahren nur wenige Nebenbedingungen berücksichtigen kann, wie z.B. die Verfahren der Optimalitätskriterien. Es kann sich aber auch um den Einfluss der Problemdimension auf die numerische Stabilität der Methode handeln, wie es z.B. bei dem Verfahren der zulässigen Richtungen der Fall ist, in dem die Konvergenzgeschwindigkeit deutliche Einbußen erfährt bei steigender Anzahl der aktiven Nebenbedingungen. Ein weiterer Aspekt ist die Beziehung zwischen Genauigkeit und Problemdimensionalität. Ein Beispiel dafür sind die dualen Verfahren in Kombination mit separierbaren Approximationstechniken, denen die Entkopplung der Entwurfsvariablen als Annahme zugrunde gelegt wird. Die Annahme der Entkopplung trifft bei steigender Anzahl der Entwurfsvariablen immer besser zu, sodass das Verfahren insgesamt genauer wird.

Häufig muss die Entscheidung für ein Optimierungsverfahren aufgrund der vorliegenden Software getroffen werden und nicht aus rein technischen Gesichtspunkten, wie Effizienz und Eignung für die behandelte Problemklasse. Die Optimierung ist eine relativ junge Wissenschaft, die aufgrund des multidisziplinären Charakters auf verschiedene vorhandene Werkzeuge zurückgreifen und diese miteinander koppeln muss, wie z.B. die Programme für Analyse und Auswertung der Optimierungsfunktionen und deren Gradienten, Pre- und Postprozessoren, Optimierungsalgorithmen u.v.m. Die Komplexität und Heterogenität heutiger Optimierungssoftware macht es schwierig, neue Konzepte einzubauen. Als Beispiel dafür dienen die mathematischen gradientenbasierten Verfahren, die auf das Vorhandensein von Sensitivitäten angewiesen sind. Viele Optimierungsaufgaben, wie die Formoptimierung, benötigen sogar hochwertige analytische Ableitungsinformationen. Dies erfordert den Zugriff auf den Quellcode des Analyseprogramms (FE-Programm) und die Kenntnis über die verwendete Elementtechnologie. Daher verfügen viele der heutigen Optimierungsumgebungen nicht über eine Sensitivitätsanalyse. In diesem Fall können keine Gradientenverfahren verwendet werden und muss auf Methoden nullter Ordnung zurückgegriffen werden. Ein anderes Beispiel ist die Fähigkeit des benutzen Programmcodes, Prozesse zu parallelisieren, denn einige Optimierungsverfahren, wie die Monte-Carlo-Simulation bzw. die stochastischen Verfahren allgemein sind auf die Parallelisierungstechniken angewiesen, um in angemessener Zeit zu einem Ergebnis zu kommen. Ist diese Funktionalität nicht implementiert, können stochastische Verfahren für praxisrelevante Probleme nicht eingesetzt werden.

Die Mannigfaltigkeit der (Struktur-) Optimierungsaufgaben und die zahlreichen einflussnehmenden Faktoren erfordern eine große Vielfalt an Optimierungsverfahren, sodass sich die Entwicklung von Optimierungsalgorithmen zu einem eigenständigen Forschungszweig etabliert hat. Daher ist es nicht möglich, im Rahmen dieser Arbeit auf Einzelheiten aller Optimierungsalgorithmen einzugehen. Im Anschluss werden die bekannten und weitverbreiteten Optimierungsverfahren nach unterschiedlichen Kriterien in Klassen eingeteilt. Für die technischen Details und den Aufbau der jeweiligen Optimierungsalgorithmen sei auf die umfangreiche Literatur verwiesen.

3.2 Klassifikation der Optimierungsalgorithmen

Zur Klassifikation der Optimierungsverfahren können mehrere Kriterien herangezogen werden. Es entsteht eine baumartige Struktur, die am Ende von diesem Abschnitt in Abbildung 3.1 vorliegt. Im Prinzip muss man sich bei der Einordnung eines Algorithmus in ein vorhandenes Schema dieselben Fragen beantworten, die man sich stellt, wenn man ein Optimierungsverfahren für ein bestimmtes Problem sucht.

Die wesentlichen Kriterien sind Glattheit und Nichtlinearität der zu optimierenden Funktionen, Anzahl der Nebenbedingungen und Typ des zu erhaltenden Optimums. Danach ergeben sich drei übergeordnete Klassen: Die Verfahren der mathematischen Programmierung, die stochastischen Verfahren und die Verfahren der Optimalitätskriterien.

Mathematische Algorithmen benötigen zumindest abschnittsweise glatte Entwurfsräume und weisen durch den Einsatz von Informationen höherer Ordnung hohe Effizienz auf, die

sich durch eine geringe Anzahl an Iterationen auszeichnet. Stochastische Verfahren arbeiten üblicherweise mit Funktionsinformationen nullter Ordnung und sind sinnvollerweise bei wenig glatten und diskreten Problemen einzusetzen, vor allem wenn nicht das nächste lokale, sondern das globale Optimum von Interesse ist. Auch wenn es keine Garantie dafür gibt, das globale Optimum zu erhalten, werden die Chancen, dieses zu bekommen, durch die Verwendung von z.B. genetischen und evolutionären Algorithmen verbessert [Hei94]. Die Streuung der Eingangsparameter, mit der eine Unsicherheit betreffend des Optimierungsergebnisses verbunden ist, erfordert ebenso den Einsatz von stochastischen Verfahren, wie die Monte-Carlo-Simulation oder die wesentlich intelligenteren Methoden des Robust-Designs [Pha89]. Die Verfahren der Optimalitätskriterien sind halbempirische Methoden, bei denen Optimalität eintritt, wenn ein beliebiges vordefiniertes Kriterium erfüllt ist. Ein bekanntes Beispiel dafür ist der Fully-Stressed-Algorithmus für die Optimierung von Fachwerken, bei dem die Struktur optimal ist, wenn alle Stäbe die maximal zulässige Spannung aufweisen. Diese Verfahren haben den Vorteil, den Entwurfsupdate mittels einer Rekursionsformel durchführen zu können, wodurch sich die Effizienz dieser Methoden erklärt. Nachteilig ist die Tatsache, dass die Optimierungsergebnisse, bei nicht mathematischen Optimalitätskriterien vom tatsächlichen Optimum abweichen [BK85].

Des Weiteren werden die Algorithmen bezüglich der Restriktionen in Verfahren für unbeschränkte Probleme und Verfahren für beschränkte Probleme eingeteilt. Dabei ergeben sich einige Unterklassen, in denen die Klassifikation verfeinert wird. Die Problemdimensionalität, also Anzahl der Nebenbedingungen und Entwurfsvariablen, spielt dabei eine tragende Rolle. Die Verfahren der unbeschränkten Optimierung werden in Algorithmen für eindimensionale Probleme, besser bekannt als Liniensuche (Line Search), und in Verfahren für n -dimensionale Probleme unterteilt. Die Algorithmen der beschränkten Optimierung gliedern sich nach dem Raum, in dem die primäre Suche stattfindet, und dem Einsatz von Straftermen in folgende Untergruppen: primale Verfahren, duale Verfahren, Lagrange-Verfahren und Penalty-Verfahren. Die primalen Algorithmen arbeiten im Raum der Entwurfsvariablen und benötigen dementsprechend keine Lagrange-Funktion. Die meisten Verfahren in dieser Klasse sind einfache Methoden basierend auf Funktionsauswertungen, wie die Rastersuche oder die genetischen Algorithmen. Dennoch existieren leistungsfähige gradientenbasierte Algorithmen in dieser Klasse, wie die Methode der zulässigen Richtungen (Method of Feasible Directions) und die Methode der verallgemeinerten reduzierten Richtungen (Generalized Reduced Directions) [Van84]. Die dualen Verfahren arbeiten hingegen im Raum der Lagrange-Multiplikatoren und zerlegen das beschränkte Problem in zwei aufeinander folgende Probleme. Das eine ist unbeschränkt und wird im primalen Raum gelöst, das andere ist lediglich im Falle von Ungleichheitsnebenbedingungen durch einfache Schranken restringiert, sodass in beiden Räumen die Verfahren der unbeschränkten Optimierung in angepasster Form angewandt werden können [Roz93a]. Die Lagrange-Methoden nutzen nicht die speziellen Eigenschaften der Lagrange-Funktion und arbeiten daher im vollen Primalen-Dualen-Raum. Ein prominenter Vertreter dieser Klasse ist die Methode der sequenziellen quadratischen Programmierung SQP [Evt, GH99]. Die Penalty-Methoden arbeiten ebenfalls nur im primalen Raum und transferieren das beschränkte Problem in ein unbeschränktes anhand der Addition der Nebenbedingungen zur Zielfunktion in Form von geeigneten Straftermen. Die Penalty-Algorithmen sind methodisch gesehen robuste Verfahren, die al-

lerdings darunter leiden, dass die Konvergenz erst mit sehr großen Straffaktoren eintritt, wodurch das Problem numerisch schlecht konditioniert wird [GH99]. Diese schlechte Konditionierung wird von der Augmented-Lagrange-Methode behoben, indem die Strafterme zur Lagrange-Funktion und nicht zur Zielfunktion addiert werden, wodurch endlich kleine Straffaktoren ausreichen. Die Augmented-Lagrange-Algorithmen stellen die Basis moderner und effizienter Optimierungsverfahren, insbesondere in Kombination mit geeigneten Approximationstechniken.

Nach der Ableitungsordnung der Funktionen werden die Algorithmen in Verfahren nullter Ordnung, bei denen lediglich Funktionsauswertungen zum Einsatz kommen, in Verfahren erster Ordnung, bei denen zusätzlich die Funktionsgradienten verfügbar sind, wie z.B. die Verfahren der konjugierten Gradienten, und in Verfahren zweiter Ordnung, bei denen sogar die Krümmungsinformationen, exakt oder approximiert, eingesetzt werden. Die Newton- und Quasi-Newton-Methoden sind die bekanntesten Vertreter dieser Klasse.

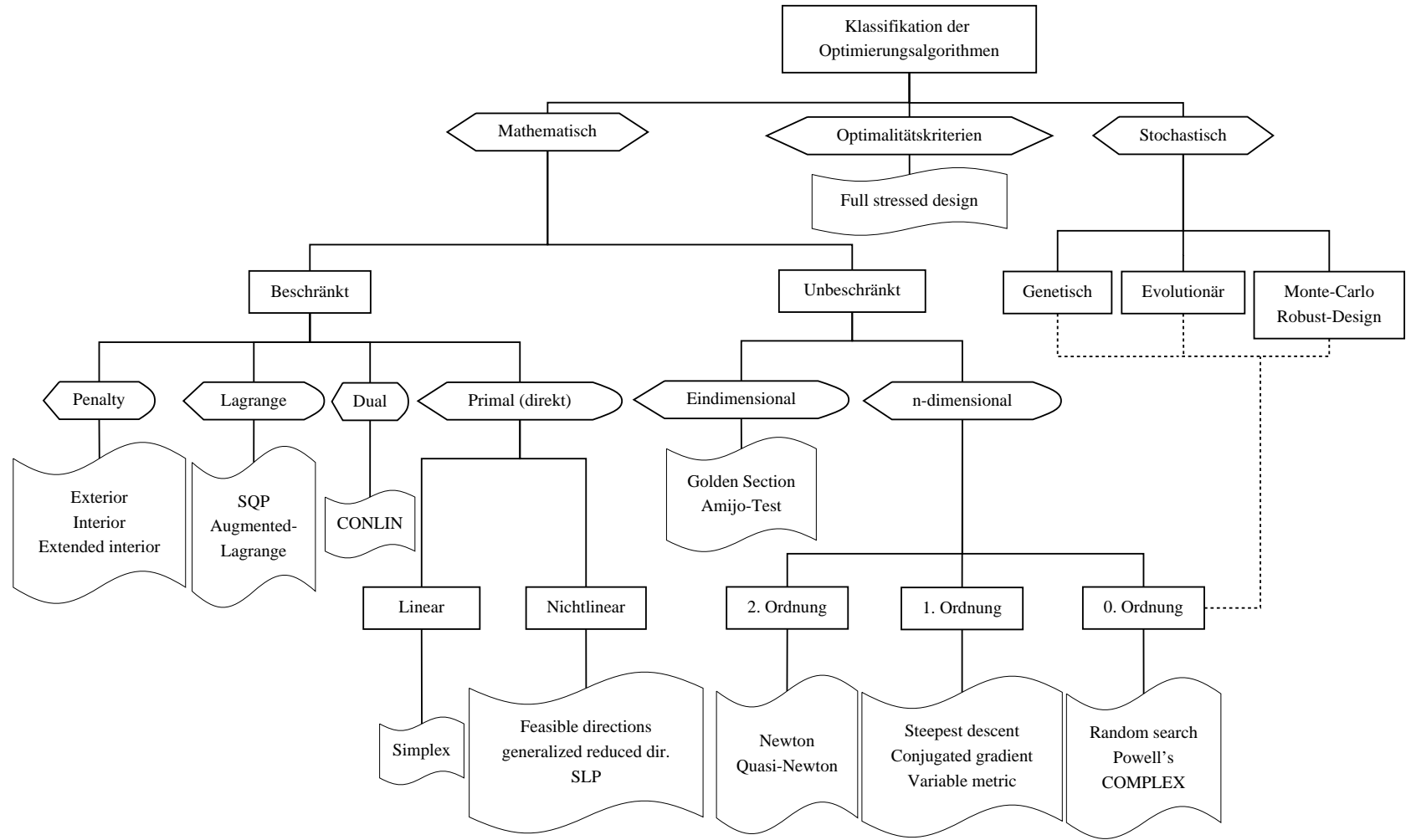


Abbildung 3.1: Klassifikation der Optimierungsalgorithmen.

3.3 Approximationstechniken

Ein Nachteil der mathematischen Optimierungsverfahren, insbesondere derjenigen, die Sensitivitäten benötigen, ist der große Rechenaufwand für Funktionsauswertungen und vor allem deren Gradienten, womit in der Strukturoptimierung üblicherweise eine komplette Struktur- und Sensitivitätsanalyse verbunden ist. Aus diesem Grund hat die Gemeinde der Strukturoptimierer Anfang der Siebzigerjahre damit begonnen, geeignete Approximationsverfahren zu entwickeln [SF74] [SM76] mit dem Ziel, das zu optimierende Problem, das so genannte Originalproblem, adäquat durch vordefinierte analytisch formulierte Funktionen, das so genannte Unterproblem, zu ersetzen. Der Vorteil besteht in der einfachen und billigen Evaluierung der Approximationsfunktionen, die meistens hohe Glattheit besitzen, sodass die Ermittlung der Sensitivitäten oder sogar Krümmungen kein Problem darstellt. Die Optimierung des Unterproblems, das in der Regel konvex konzipiert wird, ist mittels mathematischer Optimierungsalgorithmen sehr effizient möglich. Offen bleibt, ob die Reihe aufeinanderfolgender Unterprobleme im Laufe des iterativen Prozesses eine konvergente Sequenz bildet, womit impliziert wird, dass die Art der verwendeten Approximationstechnik eine gute Annäherung für das Originalproblem darstellt. Dies bedeutet, nicht jede Approximation ist für jede Problemklasse geeignet. Auch wenn die in diesem Kapitel vorgestellten Approximationstechniken einen universellen Charakter haben, ist die Erfahrung im Umgang mit Approximationsverfahren und die Eignung für die unterschiedlichen Problemtypen der Strukturoptimierung unerlässlich.

Im Kontext der Optimierung können die Approximationsverfahren in drei Gruppen unterteilt werden: lokale Approximation, globale Approximation und gemischte lokale-globale Approximation, die, wie die Bezeichnung verrät, einen Versuch darstellt, der lokalen Approximation eine größere Reichweite zu verleihen.

3.3.1 Lokale Approximationsverfahren

Die lokale Funktionsapproximation ist die am meisten verbreitete Technik in der Optimierung. Eine der ersten Verfahren war der Simplex Algorithmus für lineare Probleme [Van84], der aufgrund seiner Robustheit für die Optimierung von nichtlinearen Problemen zum Einsatz kam, indem diese in der Umgebung des aktuellen Entwurfsvariablenvektors linearisiert wurden. Der bekannteste Algorithmus dieser Klasse ist die sequenzielle lineare Programmierung (SLP). Ein wichtiger Grund für den Erfolg der lokalen Approximationsverfahren ist die Tatsache, dass die globale Approximation für große Probleme mit vielen Entwurfsvariablen unpraktikabel rechenintensiv wird.

3.3.1.1 Approximationen erster Ordnung

Die in der Strukturoptimierung mit vertretbarem Aufwand erhältlichen Informationen sind Funktionsauswertung und Gradienten. Aufgrund dessen erhalten die Approximationen erster Ordnung eine besondere Rolle in der Optimierungspraxis.

Die einfachste Methode, eine Funktion zu approximieren ist die Entwicklung einer Taylor-Reihe um die Entwicklungsstelle \mathbf{x}_0 . Angenommen, die Funktion $F(\mathbf{x})$ soll mittels $\bar{F}(\mathbf{x})$ approximiert werden, so ergibt die Taylor-Reihe mit einem Glied:

$$F(\mathbf{x}) \approx \bar{F}_L(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0} \quad (3.1)$$

Die Linearisierung der Funktionen mit einer Taylor-Reihe könnte allerdings für nichtlineare Funktionen, vor allem in schlecht konditionierten Problemen, auch in der unmittelbaren Umgebung der Entwicklungsstelle sehr ungenau sein. Eine mögliche Lösung ist die Verwendung von mehr Gliedern, die jedoch Informationen höherer Ordnung erfordern. Eine weitere Möglichkeit, der Nichtlinearität der Funktionen mit denselben Informationen nullter und erster Ordnung Rechnung zu tragen, ist die Linearisierung mittels reziproker Variablen z_i :

$$z_i = \frac{1}{x_i} \quad (3.2)$$

Durch Linearisierung der Funktion $F(\mathbf{x})$ mittels z_i erhält Gl. (3.1) folgende Form:

$$F(\mathbf{z}) \approx \bar{F}_R(\mathbf{z}) = F(\mathbf{z}_0) + \sum_{i=1}^n (z_i - z_{0i}) \left(\frac{\partial F}{\partial z_i} \right)_{\mathbf{z}_0} \quad (3.3)$$

Anhand einfacher algebraischer Umformungen kann die Approximation durch die ursprünglichen Entwurfsvariablen \mathbf{x} ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{z}) \approx \bar{F}_R(\mathbf{z}) &= F(\mathbf{z}_0) + \sum_{i=1}^n (z_i - z_{0i}) \left(\frac{\partial F}{\partial z_i} \right)_{\mathbf{z}_0} \xrightarrow{z_i = \frac{1}{x_i}} \\ &= F(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{0i}} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial \frac{1}{x_i}} \right)_{\mathbf{x}_0} \\ &= F(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_{0i} - x_i}{x_{0i} \cdot x_i} \right) (-x_{0i}^2) \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0} \\ &= F(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \frac{x_{0i}}{x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Der große Erfolg der Approximationstechnik mit reziproken Variablen ist auf die Fachwerkoptimierung zurückzuführen, das Hauptanwendungsgebiet bis Mitte der Achtzigerjahre, in der die Spannungs- und Verschiebungsnebenbedingungen für statisch bestimmte Fachwerke lineare Funktionen der reziproken Variablen sind, und daher mit der reziproken Approximation exakt erfasst werden. Es hat sich gezeigt, dass die reziproke Approximation auch für statisch unbestimmte Strukturen eine gute Annäherung darstellt, die vor allem die Skalierungseigenschaft der Steifigkeitsmatrix erhält. Dies bedeutet, wenn die Steifigkeitsmatrix eine homogene Funktion der Ordnung h des Entwurfsvariablenvektors \mathbf{x} ist, dann sind die

Verschiebungen eine homogene Funktion der Ordnung $-h$ des Entwurfsvariablenvektors \mathbf{x} . Oder in anderen Worten, wenn die Steifigkeitsmatrix eine lineare Funktion der Strukturdicke t ist, dann ist die Verschiebung eine lineare Funktion der reziproken Variablen $\frac{1}{t}$. Die reziproke Approximation erhält die Skalierungseigenschaft und ist daher exakt bei der Skalierung des Optimierungsproblems.

Die in Gl. (3.4) vorgestellte Form der Approximation ist empfindlich gegenüber betragsmäßig kleinen Entwurfsvariablen. Strebt eine Variable gegen null, tendiert die Funktionsapproximation gegen unendlich, wodurch große Fehler zu erwarten sind. Aus diesem Grund präsentierte *Haftka* [HS79] folgende Modifikation:

$$\bar{F}_{Rm}(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \frac{x_{0i} + x_{mi}}{x_i + x_{mi}} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0}, \quad (3.5)$$

in der x_{mi} eine problemabhängige, im Vergleich zu x_i betragsmäßig üblicherweise kleine Variable darstellt. Mit x_{mi} kann die Nichtlinearität der Approximation gesteuert werden. Wird x_{mi} sehr groß gewählt, tendiert $\bar{F}(\mathbf{x})$ zu einer Geraden.

Eine weitere Technik ist die konservative Approximation, die eine hybride lineare bzw. reziproke Approximation darstellt. Die Bezeichnung konservativ bezieht sich darauf, dass die Nebenbedingungen $F(\mathbf{x}) \leq 0$ so approximiert werden, dass entlang jeder Variablen x_i die positivere Kurve verwendet wird. Basis dieser Überlegung ist die Differenz der beiden beteiligten Approximationen $\bar{F}_L(\mathbf{x})$ und $\bar{F}_R(\mathbf{x})$:

$$\bar{F}_L(\mathbf{x}) - \bar{F}_R(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{0i})^2}{x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0} \quad (3.6)$$

Entlang jeder Achse x_i entscheidet das Vorzeichen des Ausdrucks $\frac{1}{x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0}$, das dasselbe Vorzeichen besitzt wie $x_i \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0}$, über die vorgenommene Approximation. Ist das Vorzeichen positiv, ist die lineare Approximation konservativer (positiver), ansonsten wird die reziproke bevorzugt. Daher kann die Approximationsvorschrift wie folgt angegeben werden:

$$\bar{F}_K(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n G_i (x_i - x_{0i}) \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0} \quad (3.7)$$

mit

$$G_i = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x_i \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0} \geq 0 \\ \frac{x_{0i}}{x_i} & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.8)$$

Die konservative Approximation hat den großen Vorteil konvex zu sein, womit das approximierte Problem ein einziges Optimum besitzt. Allerdings hat sich gezeigt, dass diese Technik relativ ungenau und nur zu empfehlen ist, wenn sowohl die Konvexität als auch die Konservativität wichtig für das untersuchte Problem sind [Roz93a].

Ende der Achtzigerjahre hat *Svanberg* eine weitere Variante der reziproken Approximation vorgeschlagen, die Methode der beweglichen Asymptoten MMA¹, in der sogar die Problemkrümmung durch empirische Parameter beeinflusst werden kann. Diese Approximationstechnik und die darauf aufbauenden Ergänzungen bilden den Kern des in dieser Arbeit entwickelten Optimierungsalgorithmus. Daher werden diese im Verlauf des nächsten Kapitels detailliert erläutert.

3.3.1.2 Approximationen höherer Ordnung

Der Vollständigkeit halber sollen diese Techniken kurz angesprochen werden, die allerdings in der Strukturoptimierung, insbesondere in Zusammenhang mit großen Problemen, keine Rolle spielen. Nicht nur der enorme Rechenaufwand bei der Ermittlung der Ableitungen höherer Ordnung verhindert den Einsatz dieser Methoden, sondern auch der damit verbundene Aufwand bei der Codierung spricht gegen die Verwendung solcher Verfahren. Dennoch findet man in der Literatur einige Einsatzgebiete solcher Approximationen, wie in Optimierungsaufgaben mit Eigenwertanalysen. *Rommel* 1983 verwendete quadratische Approximationen in Flutterberechnungen [Rom83].

Eine quadratische Approximationsvorschrift ergibt sich aus einer Taylor-Reihenentwicklung mit zwei Gliedern. Die mathematische Formulierung sieht wie folgt aus:

$$\bar{F}_Q(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_{0i} - x_i)(x_{0j} - x_j) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{\mathbf{x}_0} \quad (3.9)$$

Analog zur Approximation erster Ordnung existieren Formulierungen für quadratische reziproke Approximationen, die in der Lage sind, höhere Nichtlinearitäten zu berücksichtigen.

3.3.2 Globale Approximationsverfahren

In der globalen Approximation wird versucht, mittels Funktionsinformationen, üblicherweise nullter Ordnung auch wenn Gradienten manchmal zum Einsatz kommen, ein für den gesamten Entwurfsraum und nicht nur für die unmittelbare Umgebung der Entwicklungsstelle, gültiges Ersatzproblem zu konstruieren. Die globalen Verfahren haben ihren Ursprung in der experimentellen Physik, in der das Interesse besteht, auf eine Vielzahl von kostspieligen Experimenten bzw. Versuchen, die der Validierung eines Produktes dienen, zu verzichten und diese durch ein repräsentatives approximiertes Modell zu ersetzen. Anhand des Ersatzmodells können Voraussagen über das Systemverhalten numerisch durchgeführt werden. Diese Idee kann auf die Strukturoptimierung übertragen werden, indem die Versuchsergebnisse durch Ergebnisse der numerischen Systemanalyse getauscht werden.

¹Method of Moving Asymptotes.

Die wichtigsten Techniken auf diesem Gebiet sind die Konstruktion von Antwortflächen, die so genannten Response Surfaces und die Bildung von Kriging-Modellen. In beiden Verfahren werden gute Versuchspläne benötigt, in denen der Entwurfsraum abgetastet wird, um eine aussagekräftige Informationsbasis für die Approximation zu gewährleisten. In [Sch05] wird anhand von einfachen Beispielen demonstriert, inwiefern die Anordnung der Auswertungsstellen im Entwurfsraum die Güte der Approximation beeinflussen kann. Der Versuchsplan wird nach Wahl der Approximationsart aufgestellt, indem die Anzahl der benötigten Funktionsevaluierungen und die Auswertungsstellen festgelegt wird. Im Allgemeinen steigt die Anzahl der erforderlichen Analysen (Experimente) dramatisch mit steigender Anzahl der Entwurfsvariablen, sodass die globale Approximation nur für Probleme mit geringer Dimension geeignet ist.

3.3.2.1 Die Response-Surface-Methode

Die Aufgabe bei der Response-Surface-Approximation besteht darin, einen analytischen globalen funktionalen Zusammenhang zwischen den unabhängigen Entwurfsvariablen und der Systemantwort herzustellen. Dazu werden z.B. lineare oder quadratische Polynome verwendet. Ansätze höherer Ordnung oder trigonometrische Funktionen sind ebenso denkbar, was von der Problemklasse und den zur Verfügung stehenden Informationen abhängt. Die Koeffizienten der Polynome werden durch punktuelle Funktionsauswertungen ermittelt und mittels des Fehlerquadratminimums angepasst.

Eine allgemeine Definition der Polynome kann wie folgt angegeben werden:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{RS}(\mathbf{x}) = & c_0 + c_1 \frac{x_1 - x'_1}{x''_1} + c_2 \frac{x_2 - x'_2}{x''_2} + \dots + c_n \frac{x_n - x'_n}{x''_n} \\ & + c_{n+1} \left(\frac{x_1 - x'_1}{x''_1} \right)^2 + c_{n+2} \left(\frac{x_2 - x'_2}{x''_2} \right)^2 + \dots + c_{2n} \left(\frac{x_n - x'_n}{x''_n} \right)^2 \\ & + \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

mit n Anzahl der Entwurfsvariablen und

$$\begin{aligned} x'_i &= \frac{x_{i,max} + x_{i,min}}{2} \\ x''_i &= \frac{x_{i,max} - x_{i,min}}{2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dabei stellen $x_{i,max}$ und $x_{i,min}$ die Grenzen des abgetasteten Entwurfsraums dar.

Nach Aufstellung der Antwortfläche muss deren Qualität bewertet werden, bevor mit der Optimierung am Ersatzproblem begonnen werden kann. Es stehen mehrere Qualitätskriterien zur Verfügung. Die einfachste Methode besteht in der Entfernung eines Messpunktes und die erneute Bildung der Antwortfläche. Die Differenz zwischen der Approximation und

dem Messergebnis (bzw. Analyseergebnis) geht in die Qualitätsbewertung ein. Dieses Vorgehen, auch als Cross Validation bezeichnet, wird für alle Stützstellen wiederholt, um die maximale und mittlere Abweichung im Modell als Gütemerkmal zu verwenden.

Eine weiteres Gütekriterium besteht in der Auswertung des Regressionsparameters R^2 , mit

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (F(\mathbf{x}_i) - \overline{F}_{RS}(\mathbf{x}_i))^2}{\sum_{i=1}^n (F(\mathbf{x}_i) - \tilde{F}(\mathbf{x}))^2} \quad (3.12)$$

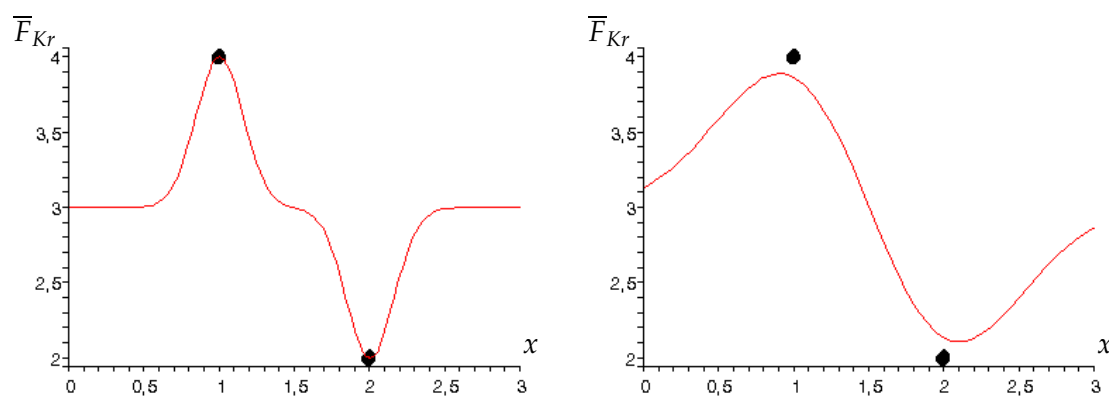
mit $F(\mathbf{x}_i)$ das Messergebnis an der Stützstelle \mathbf{x}_i , $\overline{F}_{RS}(\mathbf{x}_i)$ das Approximationsergebnis der Antwortfläche und $\tilde{F}(\mathbf{x}) = \frac{F_{\max}(\mathbf{x}) + F_{\min}(\mathbf{x})}{2}$. Der Regressionsparameter nimmt im Idealfall den Wert 1 ein.

Sobald die Optimierungsaufgabe analytisch komplett formuliert ist, d.h. die Antwortfläche aufgestellt und deren Qualität gesichert ist, können beliebige Algorithmen verwendet werden, um das analytisch formulierte Problem zu optimieren.

Die Aufgabe der Aufstellung der Antwortfläche hat einen iterativen Charakter, indem die Modellbildung oftmals wiederholt wird, mit dem Zweck, eine bessere Approximation zu erhalten. Häufig wird das Optimierungsergebnis eines Response-Surface-Modells als qualitativ hochwertigen Startpunkt für weitere genauere Optimierungsverfahren verwendet.

3.3.2.2 Die Kriging-Methode

In der Kriging-Approximation werden keine Polynome verwendet, weil Polynome dazu neigen die Randbereiche schlecht zu approximieren. Stattdessen wird die zu ersetzende



(a) $b_0 = 3.0$ und $\theta_1 = \theta_2 = 20$.

(b) $b_0 = 3.0$ und $\theta_1 = \theta_2 = 2$.

Abbildung 3.2: Die Kriging-Approximation.

Funktion aus Überlagerung einer Basisfunktion $b_0(\mathbf{x})$ und einer Verteilungsfunktion an den Stützstellen approximiert [Kri51]:

$$\bar{F}_{Kr}(\mathbf{x}) = b_0 + \sum_{i=1}^n (F_i - b_0) e^{-\theta_i t_i^2} \quad (3.13)$$

mit F_i das Mess- bzw. Analyseergebnis an der Stützstelle \mathbf{x}_i , θ_i ein Steuerungsparameter und $t_i = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|$.

Der Überlagerungseffekt und der Einfluss des Steuerungsparameters θ_i auf die Verteilungsfunktion wird in Abbildung 3.2 ersichtlich.

Die Qualität der Kriging-Funktionen muss ebenfalls mittels der beschriebenen Cross-Validation-Methode oder des Regressionsparameters überprüft und gegebenenfalls angepasst werden.

3.3.3 Gemischte lokale-globale Approximationsverfahren

In der gemischten lokal-globalen Approximation geht es darum, die Reichweite der lokalen Approximation zu erweitern, sodass sich die Modellgültigkeit nicht nur auf die Umgebung einer Entwicklungsstelle erstreckt, sondern einen größeren Bereich abdeckt. Die wichtigste Methode, um dies zu bewerkstelligen, ist die iterative Einbeziehung von Informationen an unterschiedlichen Stützstellen im so genannten Mehrpunktverfahren (Multipoint Approximation).

Die Idee der Mehrpunktapproximation besteht darin, die Informationen der vorigen Iterationen nicht zu verwerfen, sondern diese in die Verbesserung des Approximationsmodells einzubeziehen. Ein Zweipunktverfahren basierend auf einer Linearisierung mittels der Exponentialvariablen $z_i = x_i^{p_i}$ wird in [FRB90] vorgestellt. Die Approximationsvorschrift kann in Abhängigkeit der ursprünglichen Entwurfsvariablen x_i wie folgt angegeben werden:

$$\bar{F}_{LG}(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{x_i}{x_{0i}} \right)^{p_i} - 1 \right] \left(\frac{x_{0i}}{p_i} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0} \quad (3.14)$$

mit \mathbf{x}_0 die erste zur Verfügung stehenden Stützstelle.

Der Exponent p wird im Laufe der Iterationen anhand der neu hinzukommenden Stützstellen (Lösungen) angepasst. Wenn die Gradienten an der neuen Stützstelle \mathbf{x}_1 bekannt sind, liefert die Differenziation der Gl. (3.14) und die Auswertung am Punkt \mathbf{x}_1 :

$$\left(\frac{\partial \bar{F}_{LG}}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_1} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_1} = \left(\frac{x_i}{x_{0i}} \right)^{p_i-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0} \quad (3.15)$$

Aus Gl. (3.15) kann der neue Wert für den Exponenten p_i ermittelt werden:

$$p_i = 1 + \frac{\ln \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_1} / \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0} \right)}{\ln \left(\frac{x_i}{x_{0i}} \right)} \quad (3.16)$$

Die Exponenten werden in diesem Verfahren im Bereich $[-1, +1]$ begrenzt, um die Approximationsfehler nicht zu verstärken und die Konditionierung des Problems beizubehalten bzw. nicht zu verschlechtern.

Erwähnenswert ist, dass die Approximationstechnik EMMA², die die Basis des im nächsten Kapitel vorgestellten Optimierungsverfahrens bildet, ebenso als ein gemischtes lokal-globales Verfahren aufgefasst werden kann. Durch Approximation der Krümmungen der Lagrange-Funktion im primalen Raum mittels Differenzen der Gradienten an unterschiedlichen Stützstellen verbessert sich die Anpassung an das Originalproblem im Laufe der Iterationen.

²Extended Method of Moving Asymptotes.

Kapitel 4

Die Methode der beweglichen Asymptoten (MMA)

In Abschnitt 3.3.1.1 ist angedeutet worden, dass die reziproken Approximationstechniken zu den leistungsfähigsten Verfahren in der Strukturoptimierung gehören. Es hat sich gezeigt, dass dieser Zusammenhang zwischen zu verändernden Parametern, wie Geometrie, Material usw. auf der einen Seite und Systemantwort, wie Verschiebungen, Spannungen, Eigenfrequenzen usw. auf der anderen Seite, oder mit anderen Worten zwischen Entwurfsvariablen und Funktionen, eine gute Approximation für einige Problemklassen in der Strukturoptimierung darstellt. Besonders bewährt hat sich das Verfahren in Querschnitts-, Form- und Topologieoptimierung.

4.1 MMA

Eine der wichtigsten Erweiterungen der konvexen Linearisierung stellte *Svanberg* 1987 in seiner Arbeit [Sva87] vor. Der essenzielle Beitrag bestand in der Einführung von zwei Asymptoten, eine obere und eine untere. Die beiden Asymptoten reduzieren den gültigen Suchraum auf den Asymptotenabstand und steuern die Konvexität bzw. Krümmung der approximierten Funktionen und damit die Gesamtkrümmung der Lagrange-Funktion.

Die Grundidee des Verfahrens der beweglichen Asymptoten (*Method of Moving Asymptotes*) besteht in der Zerlegung des n -dimensionalen Raums in n eindimensionale Räume, in denen die zu optimierenden Funktionen anhand einer Summe über die einzelnen entkoppelten Räume approximiert werden. Die Summanden bestehen jeweils aus nur einer reziproken Entwurfsvariablen, was auch die Entkoppelung bzw. Separierbarkeit und die Konvexität im System wiedergibt. Auf die Eigenschaften der Reziprozität, der Konvexität und der Separierbarkeit wird im Folgenden näher eingegangen.

4.1.1 Mathematische Formulierung

Die Optimierungsaufgabe als beschränkte Minimierung einer nichtlinearen Funktion wird im Kontext der MMA-Approximation wie folgt angegeben:

$$\begin{aligned}
 & \text{minimiere} && \tilde{f}(\mathbf{x}) && , && \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \\
 & \text{s.d.} && \tilde{g}_j(\mathbf{x}) \leq 0 && , && j = 1 \dots m \\
 & && \tilde{h}_j(\mathbf{x}) = 0 && , && j = m + 1 \dots m + m_e \\
 & && \tilde{SCu}(x_i) = x_i - \bar{x}_i \leq 0 && , && i = 1 \dots n \\
 & && \tilde{SCL}(x_i) = \underline{x}_i - x_i \leq 0 && , && i = 1 \dots n
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

mit

n	...	Anzahl der Entwurfsvariablen
m	...	Anzahl der Ungleichheitsnebenbedingungen
m_e	...	Anzahl der Gleichheitsnebenbedingungen
$\tilde{f}(\mathbf{x})$...	Originalzielfunktion
$\tilde{g}_j(\mathbf{x})$...	Vektor der Ungleichheitsnebenbedingungen (Originaldaten)
$\tilde{h}_j(\mathbf{x})$...	Vektor der Gleichheitsnebenbedingungen (Originaldaten)
$\tilde{SCu}(x_i)$...	obere Schranke der Entwurfsvariablen x_i (Originaldaten)
$\tilde{SCL}(x_i)$...	untere Schranke der Entwurfsvariablen x_i (Originaldaten)
\mathbf{x}	...	$(x_1 \dots x_n)$ Vektor der Entwurfsvariablen

Auf Funktionsinformationen nullter und erster Ordnung beruhend wird zuerst eine Koordinatentransformation vorgenommen:

$$z_i = \frac{1}{u_i - x_i} \quad \text{bzw.} \quad z_i = \frac{1}{x_i - l_i} \tag{4.2}$$

Die Originalfunktionen der in Gleichung (4.1) allgemein formulierten Optimierungsaufgabe werden nach den Variablen z_i linearisiert. Folgende Abkürzungen werden vereinbart:

$$g_0(\mathbf{x}) \approx \tilde{f}(\mathbf{x}), \quad g_j(\mathbf{x}) \approx \tilde{g}_j(\mathbf{x}), \quad h_j(\mathbf{x}) \approx \tilde{h}_j(\mathbf{x}), \quad SCu(x_i) \approx \tilde{SCu}(x_i), \quad SCL(x_i) \approx \tilde{SCL}(x_i) \tag{4.3}$$

und die linearisierte Approximation erhält folgende Form:

$$g_j = r_j + \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_{ji}}{u_i - x_i} + \frac{q_{ji}}{x_i - l_i} \right) \tag{4.4}$$

mit $j = 0 \dots m + m_e$ und

$$p_{ji} = \begin{cases} (u_i - x_{0i})^2 \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}_0}, & \text{wenn} \quad \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}_0} > 0 \\ 0, & \text{wenn} \quad \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}_0} \leq 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

$$q_{ji} = \begin{cases} 0 & , \quad \text{wenn} \quad \frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}_0} \geq 0 \\ -(u_i - x_{0i})^2 \frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}_0} & , \quad \text{wenn} \quad \frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}_0} < 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

$$r_j = \tilde{g}_j(\mathbf{x}_0) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_{ji}}{u_i - x_i} + \frac{q_{ji}}{x_i - l_i} \right) \quad (4.7)$$

Funktionsauswertung $\tilde{g}_j(\mathbf{x}_0)$ und Ableitung $\frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}_0}$ werden an der Entwicklungsstelle \mathbf{x}_0 bzw. \mathbf{z}_0 ermittelt.

Die Ober- und Unterschranken, die im weiteren Verlauf als Side Constraints bezeichnet werden, werden nicht approximiert, sondern durch bewegliche Limits α_i und β_i berücksichtigt, so dass

$$\begin{aligned} l_i &< \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i < u_i \\ \alpha_i &\geq \underline{x}_i \\ \beta_i &\leq \bar{x}_i \end{aligned} \quad (4.8)$$

Die Asymptoten l_i und u_i werden anhand der Formel

$$l_i = x_{0i} - \Delta_i \quad \text{und} \quad u_i = x_{0i} + \Delta_i \quad (4.9)$$

ermittelt. Der halbe Asymptotenabstand Δ_i wird für die ersten zwei Iterationen aus

$$\Delta_i = s_0 (\bar{x}_i - \underline{x}_i) \quad \text{mit} \quad 0 < s_0 < 1 \quad (4.10)$$

berechnet und für die weiteren Iterationen gilt

$$\Delta_i^k = s \Delta_i^{k-1} \quad \text{mit} \quad s = 0,7 \quad (4.11)$$

Das Verfahren besitzt die Vorteile der reziproken Approximation, insbesondere spielt die garantierte Konvexität der produzierten Unterprobleme eine große Rolle bei der Wahl der Lösungsverfahren. Durch die garantierte Problemkonvexität ist die Lösung der Kuhn-Tucker-Bedingungen eindeutig. Die Separierbarkeit, also die Entkopplung der Entwurfsvariablen, ist ebenso ein entscheidender Vorteil, der bei der Lösung des Unterproblems im primalen Raum zum Tragen kommt. Aus der Summe dieser Eigenschaften bieten sich duale Algorithmen an, um das approximierte Problem, das Unterproblem, zu lösen, worauf im weiteren Verlauf näher eingegangen wird.

Ein Merkmal dieser Approximation (Abbildung 4.1) ist die Übereinstimmung zwischen approximierter Funktion (gestrichelte Linie) und Originalfunktion (durchgezogene Linie) an der Entwicklungsstelle \mathbf{x}_0 sowohl im Funktionswert als auch in der Ableitung.

Das Verfahren weist in der vorgestellten Form einige Schwächen auf, die im Falle von stark nichtlinearen und/oder nicht konvexen Originalfunktionen, die mittels konvexer Approximation schlecht erfasst werden können, zu Konvergenzschwierigkeiten führen. Im wesentlichen sind es folgende Aspekte:

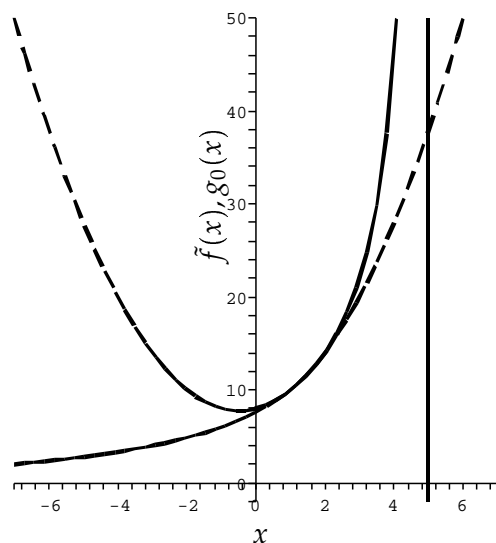


Abbildung 4.1: Approximation der Zielfunktion nach Svanberg (Originalfunktion in gestrichelter Linie).

- Die heuristische Adaption der Asymptotenabstände, die direkt in die Krümmung der Lagrange-Funktion eingehen, führt u.U. zur schlechten Approximation, was die Konvergenzgeschwindigkeit des Originalproblems beeinträchtigt.
- Die Gleichungen (4.4), (4.5) und (4.6) zeigen, dass die Originalfunktionen lediglich durch einen an die obere oder untere Asymptote sich anlehenden Ast, aufsteigend oder absteigend, approximiert werden. Abhängig vom Vorzeichen der Ableitung wird die obere bzw. untere Asymptote verwendet. Dies könnte dazu führen, falls alle Ableitungen bezüglich einer Entwurfsvariablen dasselbe Vorzeichen aufweisen, dass eine unbeschränkte Minimierung entlang der betroffenen Variablen stattfindet. Das Unterproblem besitzt dann keine Lösung. Dieses Problem wird durch die eingeführten beweglichen Limits α_i und β_i entschärft, führt jedoch trotzdem zu Konvergenzschwierigkeiten.
- Gleichung (4.4) behandelt nur die Approximation von Zielfunktion und Ungleichheitsnebenbedingungen. Die Approximation von Gleichheitsnebenbedingungen nimmt einen besonderen Stellenwert ein, da deren Lagrange-Multiplikatoren auch negativ sein können, was im Laufe der Iterationen die Konvexität der Lagrange-Funktion beeinträchtigen könnte. Weiterhin sind Gleichheitsnebenbedingungen immer aktiv und benötigen daher eine garantierte Nullstelle zwischen den Asymptoten. Die Erfassung solcher Nebenbedingungen wird im nächsten Abschnitt behandelt.

4.2 Extended Method of Moving Asymptotes (EMMA)

Einige wichtige Erweiterungen der ursprünglichen MMA-Approximation werden in [Ble93] vorgestellt. Darin wird das Problem der unbeschränkten Minimierung behoben, die Adap-

tion der Asymptoten mit der Krümmung der Lagrange-Funktion verknüpft und die Approximation der Gleichheitsnebenbedingungen eingeführt.

4.2.1 Approximation der Zielfunktion

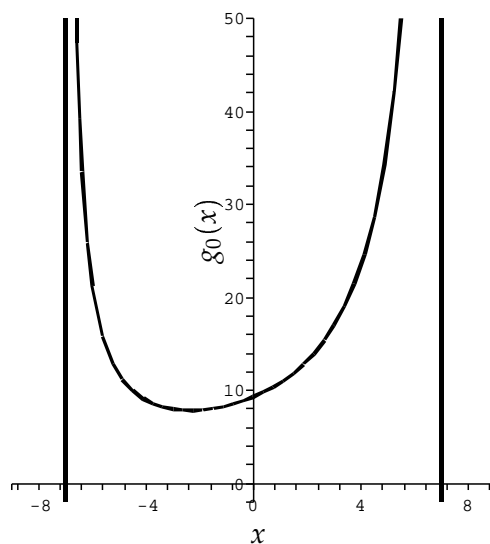


Abbildung 4.2: Approximation der Zielfunktion der EMMA-Approximation.

Bei genauer Betrachtung der Approximationsgleichungen von MMA Gl. (4.4), (4.5) und (4.6) ist ersichtlich, dass die Anzahl der unbekannt Parameter $(n + 1)(1 + m)$ und die Anzahl der Gleichungen identisch sind. D.h. die vorhandenen Informationen nullter und erster Ordnung werden ausgeschöpft. Somit ist es nicht möglich, ohne weitere Bedingungen neue Parameter einzuführen.

Die Verbesserung der Approximation besteht darin, die Zielfunktion anhand der beiden Asymptoten zu konstruieren, um ein eindeutiges unbeschränktes Minimum zwischen den Asymptoten zu erhalten, wie in [Abbildung 4.2](#) zu sehen ist.

Dies hat allerdings zur Folge, dass n zusätzliche Unbekannten hinzukommen, die genau so viele Zusatzinformationen benötigen. An dieser Stelle scheint es geeignet, Informationen zweiter Ordnung ins Approximationskonzept aufzunehmen, denn der Asymptotenabstand ($2\Delta_i$), die Krümmung der Zielfunktion und die Krümmung der Lagrange-Funktion stehen in direktem Zusammenhang. Da allerdings Ableitungen zweiter Ordnung in der Strukturoptimierung nur mit enormem Aufwand erhältlich sind, werden diese in der ersten Iteration geschätzt, üblicherweise wird die Einheitskrümmung angenommen. In den weiteren Iterationen kann die Krümmung mittels finiter Differenzen berechnet werden. Es entstehen die fehlenden n Zusatzgleichungen, mit denen die neue Formulierung vollständig definiert ist.

Die Approximation der Zielfunktion mittels der beiden Asymptoten wird wie folgt angege-

ben:

$$g_0(\mathbf{x}) = r_0 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_{0i}}{u_i - x_i} + \frac{q_{0i}}{x_i - l_i} \right) \quad (4.12)$$

mit $p_{0i} \neq 0$ und $q_{0i} \neq 0$ und r_0 wie in der MMA-Vorschrift.

An der Entwicklungsstelle sollen Funktionsauswertung, erste Ableitung und Krümmung der approximierten Lagrange-Funktion mit den entsprechenden Originalwerten, also mit den Daten aus der numerischen Analyse übereinstimmen. Diese Bedingungen können wie folgt formuliert werden:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})|_{\mathbf{x}_0} = g_0(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\mathbf{x}_0) = \tilde{L}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}) \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{x}}|_{\mathbf{x}_0} = \frac{\partial g_0(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \tilde{L}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{x}^2}|_{\mathbf{x}_0} = \frac{\partial^2 g_0(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}^2} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial^2 g_j(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{\partial^2 \tilde{L}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{x}^2} \quad (4.15)$$

mit

$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ Approximierte Lagrange-Funktion
 $\tilde{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ Original-Lagrange-Funktion.

Das Einsetzen von Gl. (4.4), Gl. (4.9) und Gl. (4.12) in Gl. (4.14) und Gl. (4.15) und die Ausnutzung der Separierbarkeit ergeben:

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i}|_{\mathbf{x}_0} = \frac{1}{\Delta_i^2} \left(p_{0i} - q_{0i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j (p_{ji} - q_{ji}) \right) = \frac{\partial \tilde{L}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i} \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i^2}|_{\mathbf{x}_0} = \frac{2}{\Delta_i^3} \left(p_{0i} + q_{0i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j (p_{ji} + q_{ji}) \right) = \frac{\partial^2 \tilde{L}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i^2} \quad (4.17)$$

Die Separierbarkeit der MMA-Formulierung führt dazu, dass die Ableitung einer approximierten Funktion nach einer Entwurfsvariablen x_i alle Terme eliminiert, bis auf einen, der x_i enthält.

Nach wie vor gilt die Problemkonvexität, somit wird immer von positiven zweiten Ableitungen ausgegangen. Bei nichtlinearen nichtkonvexen Funktionen ist diese Annahme solange verletzt, bis das nächste konvexe Tal erreicht wird (lokale Konvexität). In der Suchphase, in der die Originalkrümmung negativ ist, wird von einer gedämpften positiven approximierten Krümmung ausgegangen.

Um die Schreibweise etwas übersichtlicher zu gestalten, werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{aligned} L' &= \frac{\partial \tilde{L}(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial x_i} \\ L'' &= \frac{\partial^2 \tilde{L}(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial x_i^2} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Aus Gl. (4.16) und Gl. (4.17) ergeben sich folgende Beziehungen:

$$p_{0i} = \frac{1}{4} \Delta_i^3 L'' + \frac{1}{2} \Delta_i^2 L' - \sum_{j=1}^m \lambda_j p_{ji} \quad (4.19)$$

$$q_{0i} = \frac{1}{4} \Delta_i^3 L'' - \frac{1}{2} \Delta_i^2 L' - \sum_{j=1}^m \lambda_j q_{ji} \quad (4.20)$$

Zwei Gleichungen mit drei Unbekannten p_{0i} , q_{0i} und Δ_i . Für die fehlende Gleichung wird in [Ble93] folgende Vorgehensweise vorgeschlagen:

Es wird angenommen, die Problemlösung x_{mi} sei bekannt, sodass der Gradient der Lagrange-Funktion an der Stelle x_{mi} die Kuhn-Tucker-Bedingung erfüllt:

$$L'(\mathbf{x}_m, \lambda) = \frac{p_{0i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j p_{ji}}{(\Delta_i + \delta_i)^2} - \frac{q_{0i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j q_{ji}}{(\Delta_i - \delta_i)^2} = 0 \quad (4.21)$$

mit

$$\delta_i = x_{0i} - x_{mi} \quad (4.22)$$

Das Einsetzen von Gl. (4.19) und Gl. (4.20) in Gl. (4.21) ergibt folgende Beziehung:

$$\Delta_i = \sqrt{\frac{L'}{\delta_i L'' - L'}} \delta_i \quad (4.23)$$

Es kann beobachtet werden, dass der halbe Asymptotenabstand Δ_i gegen unendlich strebt, was einer quadratischen Approximation entspricht, wenn δ_i gegen den Wert $\frac{L'}{L''}$ tendiert. Dies motiviert die Annahme, dass Δ_i als ein Vielfaches von δ_i ausgedrückt werden kann:

$$\Delta_i = \begin{cases} a_i \cdot \delta_i, & \text{wenn } L' > 0 \\ -a_i \cdot \delta_i, & \text{wenn } L' < 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

Das Einsetzen in Gl. (4.23) liefert:

$$\Delta_i = \frac{1 + a_i^2 \frac{|L'|}{L''}}{a_i} \delta_i \quad (4.25)$$

Allerdings muss noch garantiert werden, dass die Koeffizienten p_{0i} und q_{0i} immer positiv bleiben, um die Problemkonvexität zu erhalten. Daher ergeben sich aus Gl. (4.19) und Gl. (4.20) folgende zu erfüllende Bedingungen:

$$p_{0i} \geq 0, \quad q_{0i} \geq 0 \quad \implies \quad (4.26)$$

$$\Delta_i \geq \frac{2}{L''} (L' - 2 \sum^- \lambda_j \tilde{g}'_j), \quad \text{wenn } L' > 0, \quad (4.27)$$

$$\Delta_i \geq \frac{2}{L''} (2 \sum^+ \lambda_j \tilde{g}'_j - L'), \quad \text{wenn } L' < 0, \quad (4.28)$$

wobei \sum^- bzw. \sum^+ die Summe über alle negativen bzw. positiven Summanden $\lambda_j \tilde{g}'_j$ bedeutet und $g'_j = \frac{\partial \tilde{g}_j(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ ist. Somit können für a_i folgende Grenzwerte aufgestellt werden:

$$0 < a_i \leq \bar{a}_i = \frac{1}{L'} \left[\sqrt{A^2 - L'^2} - A \right], \quad \text{wenn } L' < 0 \quad (4.29)$$

$$0 < a_i \leq \bar{a}_i = \frac{1}{L'} \left[B - \sqrt{B^2 - L'^2} \right], \quad \text{wenn } L' > 0 \quad (4.30)$$

mit

$$A = 2 \sum^+ \lambda_j \tilde{g}'_j - L' \quad (4.31)$$

$$B = L' - 2 \sum^- \lambda_j \tilde{g}'_j \quad (4.32)$$

Wird a_i auf die Obergrenze \bar{a}_i gesetzt, erhält man die ursprüngliche MMA-Approximation mit $p_{0i} = 0$ oder $q_{0i} = 0$. Die Untergrenze hingegen bedeutet einen unendlich großen Asymptotenabstand und eine quadratische Approximation. Üblicherweise wird a_i in folgender Form ausgedrückt:

$$a_i = c \cdot \bar{a}_i \quad (4.33)$$

mit $c \in [0, 1]$. Werte im Bereich $c = 0,5 - 0,7$ liefern konvexe Probleme mit gutem Konvergenzverhalten.

Probleme treten auf, wenn die erste Ableitung der Lagrange-Funktion bezüglich einer Entwurfsvariablen gegen null tendiert – bevor die Gesamtkonvergenz eintritt –, dann kann Δ_i nicht berechnet werden, da die Gleichungen (4.29) und (4.30) nicht ausgewertet werden können. Es kann allerdings gezeigt werden, dass Δ_i durch folgende Grenzwertbildung erhältlich ist:

$$\lim_{L' \rightarrow 0} \Delta_i = \frac{2}{c} \frac{A}{L''}, \quad \text{wenn } L' < 0 \quad (4.34)$$

$$\lim_{L' \rightarrow 0} \Delta_i = \frac{2}{c} \frac{B}{L''}, \quad \text{wenn } L' > 0 \quad (4.35)$$

Bei der Optimierung von allgemein nichtlinearen Problemen kommt es allerdings vor, dass die Krümmung der Lagrange-Funktion in gewissen Bereichen negativ sein kann, zumindest bis das nächste konvexe Tal erreicht wird. In diesen Fällen darf L'' nicht negativ in die Berechnung von Δ_i eingehen. Daher wird die Positivdefinitheit der Hesse-Matrix (hier eine Diagonalmatrix) durch Einführung eines Dämpfungsfaktors garantiert und die Formel zur Ermittlung von Δ_i geht in folgende Form über:

$$\Delta_i^k = \frac{1 + a_i^2}{a_i} \frac{s_f L'^k}{\max(s_f L'^k, \Phi L'^{k-1})} \quad (4.36)$$

Mit s_f ein Skalierungsfaktor, Φ ein Dämpfungsfaktor und k der Iterationszähler. Nach Wahl des Parameters c wird die gesamte Approximation und das Anpassungsverhalten der approximierten Funktionen mittels s_f und Φ gesteuert. Kleine Werte für Φ und große für s_f führen zu großen Schrittweiten, die eventuell in der Nähe des Optimums zu Oszillationen führen, sodass ein wiederholter Line Search die Konvergenz garantieren muss. In der Praxis hat sich gezeigt, dass die Wahl dieser Parameter im Allgemeinen keinen starken Einfluss auf das Konvergenzverhalten hat, sodass grobe Abschätzungen (z.B. $s_f = 1.0$ und $\Phi = 0.2$) ausreichen.

Die Gleichungen (4.19), (4.20) und (4.36) zeigen, inwiefern die Funktionen in der EMMA-Approximation mittels Krümmungsinformationen im Laufe der Iterationsgeschichte verbessert werden. Insgesamt passen sich damit die approximierten Funktionen den Originalverläufen schneller an.

In der vorliegenden Arbeit wird ein anderer Ansatz zur Ermittlung von Δ_i gewählt, um die Anzahl der empirischen Steuerungsparameter zu reduzieren. Ausgangspunkt sind die Gleichungen (4.19) und (4.20), die jeweils eine kubische Gleichung in Δ_i sind. Die einzige essentielle Bedingung, die die Parameter p_{0i} und q_{0i} erfüllen müssen, um die Konvexität der Zielfunktion zu gewährleisten, ist, dass beide größer als null sein müssen. Somit reicht es, die größte reelle und positive Lösung beider kubischen Gleichungen zu nehmen und diese mit einem geeigneten Faktor zu skalieren:

$$\Delta_i = s_f \cdot \max(\text{reelle Nullstelle von}) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \Delta_i^3 L'' + \frac{1}{2} \Delta_i^2 L' - \sum_{j=1}^m \lambda_j p_{ji} = 0, \quad \text{oder} \\ \frac{1}{4} \Delta_i^3 L'' - \frac{1}{2} \Delta_i^2 L' - \sum_{j=1}^m \lambda_j q_{ji} = 0 \end{array} \right. \quad (4.37)$$

mit

$$s_f \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{Original MMA mit } p_{0i} = 0 \text{ oder } q_{0i} = 0, \\ \infty & \text{quadratische Approximation} \end{cases} \quad (4.38)$$

Üblicherweise ist $s_f = 2$ eine ausreichende Skalierung.

4.2.2 Problem der Nullstellen

In der Praxis ergibt sich mit steigender Anzahl an Nebenbedingungen das Problem, dass die Nullstellen der Nebenbedingungen außerhalb der Asymptoten sein können, was bei verletzten Restriktionen dazu führen kann, dass der gesamte Entwurfsraum zwischen den Asymptoten unzulässig wird, wodurch das Unterproblem nicht lösbar wird, wie in Abbildung 4.3 zu sehen ist.

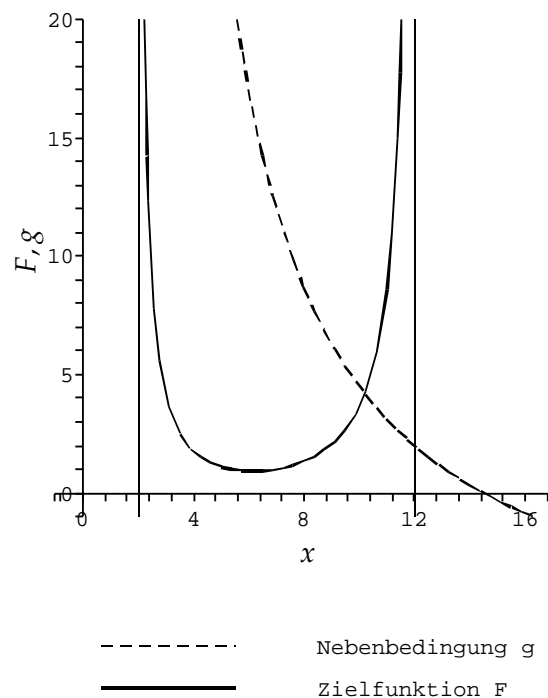


Abbildung 4.3: Probleme mit dem zulässigen Bereich.

Aus diesem Grund muss nach Ermittlung der Δ_i -Werte sichergestellt werden, dass der zulässige Raum nicht eine leere Menge ist. Deshalb müssen die Nullstellen aller Restriktionen mittels der Bedingung $g_j(\mathbf{x}) = 0$ ermittelt und mit den Asymptoten u_i und l_i verglichen werden. Für die Nullstelle x_i^j wird die Entwicklungsstelle \mathbf{x}_0 mit variabler Komponente x_i eingesetzt. Bei Nullstellen außerhalb des zulässigen Bereichs muss der Skalierungsfaktor s_f angepasst (erhöht) werden.

4.2.3 Approximation der Gleichheitsnebenbedingungen

Eines der Probleme der Approximation von Gleichheitsnebenbedingungen mit der Original-MMA-Approximationsvorschrift Gl. (4.4) ist die Tatsache, dass die Nullstellen der Restriktion nicht garantiert im Suchraum zwischen den Asymptoten liegen, wodurch

das Unterproblem nicht lösbar ist. Die EMMA-Approximation liefert daher eine modifizierte Vorschrift, bei der die Separierbarkeit der Entwurfsvariablen erhalten bleibt und die Gleichheitsnebenbedingung eine garantierte Nullstelle zwischen den Asymptoten besitzt:

$$g_j(\mathbf{x}) = r_j + \sum_{i=1}^n \frac{p_{ji}}{u_i - x_i} - \frac{p_{ji}}{x_i - l_i} \quad (4.39)$$

mit

$$p_{ji} = \frac{1}{2}(u_i - x_i)^2 \frac{\partial g_j(x_0)}{\partial x_i} \quad (4.40)$$

$$r_j = \tilde{g}_j(\mathbf{x}_0) \quad (4.41)$$

Ein weiterer Vorteil dieser Approximation ist die Möglichkeit, eine einfache Bedingung zu formulieren, um die Problemkonvexität zu überwachen und zu kontrollieren. Die Gleichheitsnebenbedingungen besitzen eine unangenehme Eigenschaft, dass deren Lagrange-Multiplikatoren auch negative Werte besitzen können, womit die Problemkonvexität nicht garantiert werden kann, wie der Krümmungsgleichung der Lagrange-Funktion entnommen werden kann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i^2} &= \frac{2}{(u_i - x_i)^3} \left(p_{0i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j p_{ji} + \sum_{j=m+1}^{m+m_e} \lambda_j p_{ji} \right) \\ &+ \frac{2}{(x_i - l_i)^3} \left(q_{0i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j q_{ji} - \sum_{j=m+1}^{m+m_e} \lambda_j q_{ji} \right) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Es ist ersichtlich, dass die Konstellation, bei der die zweite Ableitung der Lagrange-Funktion auch negativ werden kann, nur durch die Lagrange-Multiplikatoren der Gleichheitsnebenbedingungen hervorgerufen wird.

Um einen einfachen Kontrollmechanismus für die Positivdefinitheit der Hesse-Matrix zu formulieren, wird die Kuhn-Tucker-Bedingung herangezogen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i} &= \frac{1}{(u_i - x_i)^2} \left(p_{0i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j p_{ji} + \sum_{j=m+1}^{m+m_e} \lambda_j p_{ji} \right) \\ &- \frac{1}{(x_i - l_i)^2} \left(q_{0i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j q_{ji} - \sum_{j=m+1}^{m+m_e} \lambda_j q_{ji} \right) \end{aligned} \quad (4.43)$$

Folgende Abkürzungen werden zur einfachen Darstellung eingeführt:

$$\begin{aligned}
P_i &= p_{0i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j p_{ji} \\
Q_i &= q_{0i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j q_{ji} \\
P_{ei} &= \sum_{j=m+1}^{m+m_e} \lambda_j p_{ji}
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Die Kuhn-Tucker-Bedingung geht für das approximierte Problem in folgende Form über:

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i} = \frac{P_i + P_{ei}}{(u_i - x_i)^2} - \frac{Q_i - P_{ei}}{(x_i - l_i)^2} = 0 \tag{4.45}$$

Eine eindeutige Lösung zwischen den Asymptoten $l_i < x_i^* < u_i$ existiert nur dann, wenn beide Zähler dasselbe Vorzeichen haben, entweder negativ oder positiv. Somit können folgende Regeln aufgestellt werden:

$$\left. \begin{array}{l} P_i + P_{ei} > 0 \\ Q_i - P_{ei} > 0 \end{array} \right\} -P_i < P_{ei} < Q_i \tag{4.46}$$

oder

$$\left. \begin{array}{l} P_i + P_{ei} < 0 \\ Q_i - P_{ei} < 0 \end{array} \right\} Q_i < P_{ei} < -Q_i \tag{4.47}$$

Dadurch, dass P_i und Q_i immer positiv sind, ist ersichtlich, dass der Fall in Gl. (4.47) nicht eintreten kann. Somit bleibt Gl. (4.46) als alleinige Kontrollregel übrig, anhand der die Problemkonvexität im Laufe der Iterationen sichergestellt werden kann.

Die Ergänzung der Problemformulierung um die Gleichheitsnebenbedingungen beeinflusst die Berechnung des halben Asymptotenabstandes Δ_i . Gleichung (4.32) muss um die Terme der Gleichheitsrestriktionen erweitert werden und erhält damit folgende Form:

$$A = \sum_{j=1}^{m_e} \lambda_j g_j' + 2 \sum_{j=m_e+1}^m \lambda_j g_j' - L' \tag{4.48}$$

$$B = L' - \sum_{j=1}^{m_e} \lambda_j g_j' - 2 \sum_{j=m_e+1}^m \lambda_j g_j' \tag{4.49}$$

Die kubischen Gleichungen 4.37 müssen ebenfalls angepasst werden:

$$\Delta_i = s_f \cdot \max(\text{reelle Nullstelle von}) \begin{cases} \frac{1}{4}\Delta_i^3 L'' + \frac{1}{2}\Delta_i^2 L' - \sum_{j=1}^m \lambda_j p_{ji} - \sum_{j=m+1}^{m+m_e} \lambda_j p_{ji} = 0, & \text{oder} \\ \frac{1}{4}\Delta_i^3 L'' - \frac{1}{2}\Delta_i^2 L' - \sum_{j=1}^m \lambda_j q_{ji} + \sum_{j=m+1}^{m+m_e} \lambda_j p_{ji} = 0 \end{cases} \quad (4.50)$$

4.3 Dual Extended Method of Moving Asymptotes (DEMMA)

Nach Aufstellung des Ersatzmodells mittels EMMA, in dem die Formulierung des Optimierungsproblems in Form von analytischen Funktionen vorliegt, anstatt der punktuellen Auswertung der Originalfunktionen, kann das glatte, konvexe und separierbare Problem mit verschiedenen Optimierungsverfahren gelöst werden. In dieser Arbeit wird gezeigt, inwiefern duale Verfahren in Kombination mit der EMMA-Approximation zu effizienten Optimierungsalgorithmen führen, die für große Probleme mit vielen Nebenbedingungen und vielen Entwurfsvariablen geeignet sind.

Im Rahmen dieser Arbeit stehen folgende Aspekte im Mittelpunkt:

- Die Reduktion der freien Parameter. Mathematische Algorithmen sind zwar allgemeine Verfahren, im Gegensatz zu den Methoden der Optimalitätskriterien, leiden aber darunter, dass sie viele problemabhängige Parameter enthalten, die für jedes Problem „justiert“ werden müssen. Dies stellt eine Hürde vor die Etablierung dieser Verfahren als anerkannten Standard.
- Approximation der Side Constraints mit einem EMMA-kompatiblen Schema, sodass diese effizient berücksichtigt werden können. Es wird gezeigt, dass die separierbare Formulierung im primalen Raum zur Entkopplung der mit den Ober- und Unterschranken korrespondierenden Lagrange-Multiplikatoren führt, wodurch die Problemdimensionalität erheblich reduziert werden kann.
- Entwicklung eines effizienten Algorithmus zur Lösung des Ersatzproblems, indem duale Methoden angewandt werden. Die Separierbarkeit und Glattheit des Unterproblems bieten eine Fülle an algorithmischen Möglichkeiten, die im weiteren Verlauf erläutert werden.

4.3.1 Kurze Zusammenfassung

Bevor die Erweiterungen von DEMMA und die verwendeten Lösungsverfahren vorgestellt werden, werden die bisherigen Grundlagen und Erkenntnisse kurz zusammengefasst:

Approximation der Zielfunktion,

$$g_0(\mathbf{x}) = r_0 + \sum_{i=1}^n \frac{p_{0i}}{u_i - x_i} + \frac{q_{0i}}{x_i - l_i} \quad (4.51)$$

mit $p_{0i} \neq 0$ und $q_{0i} \neq 0$.

Approximation von Ungleichheitsnebenbedingungen ($j = 1 \dots m$),

$$g_j(\mathbf{x}) = r_j + \sum_{i=1}^n \frac{p_{ji}}{u_i - x_i} + \frac{q_{ji}}{x_i - l_i} \quad (4.52)$$

mit

$$p_{ji} = \begin{cases} (u_i - x_{0i})^2 \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}_0}, & \text{wenn } \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}_0} > 0 \\ 0, & \text{wenn } \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}_0} \leq 0 \end{cases} \quad (4.53)$$

$$q_{ji} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}_0} \geq 0 \\ -(u_i - x_{0i})^2 \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}_0}, & \text{wenn } \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}_0} < 0 \end{cases} \quad (4.54)$$

$$r_j = \tilde{g}_j(\mathbf{x}_0) - \sum_{i=1}^n \frac{p_{ji}}{\Delta_i} + \frac{q_{ji}}{\Delta_i} \quad (4.55)$$

mit $p_{ji} = 0$ oder $q_{ji} = 0$, $\tilde{g}_j(\mathbf{x}_0)$ die Evaluierung und $\frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}_0}$ die Ableitung der Originalfunktion an der Entwicklungsstelle \mathbf{x}_0 .

Approximation von Gleichheitsnebenbedingungen ($j = m + 1 \dots m + m_e$),

$$g_j(\mathbf{x}) = r_j + \sum_{i=1}^n \frac{p_{ji}}{u_i - x_i} - \frac{p_{ji}}{x_i - l_i} \quad (4.56)$$

mit

$$p_{ji} = \frac{1}{2}(u_i - x_i)^2 \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}_0} \quad (4.57)$$

$$r_j = \tilde{g}_j(\mathbf{x}_0) \quad (4.58)$$

4.3.2 Approximation der Side Constraints

Wird die allgemeine Formulierung einer Optimierungsaufgabe Gl. (4.1), Abschnitt 4.1.1 betrachtet, so fehlt die Approximation der Side Constraints, die Ober- und Unterschranken der Entwurfsvariablen. In der Literatur [GH99] [Roz93a] [Ble90] wird ausdrücklich davor gewarnt, diese Nebenbedingungen als diskrete Sprungfunktionen einzubringen. In diesem Fall erhalten die Schranken keine Lagrange-Multiplikatoren und werden damit nicht direkt in die Optimierung einbezogen. Sie nehmen auf den Optimierungsprozess Einfluss, indem die Entwurfsvariable, die im Verlaufe der Iterationen ihre Schranke über- bzw. unterschreitet $x_i < \underline{x}_i$ bzw. $x_i > \bar{x}_i$, sprunghaft auf den Schrankenwert gesetzt wird $x_i = \underline{x}_i$ bzw. $x_i = \bar{x}_i$. Die Sprünge auf der Lagrange-Funktion führen zu Oszillationen in der Konvergenzgeschichte. Diese Vorgehensweise wird in dieser Arbeit vermieden, indem die Side Constraints in die

Optimierung eingebunden werden und gesonderte Lagrange-Multiplikatoren erhalten. Die Behandlung dieser Ober- und Unterschranken nimmt insofern eine besondere Stellung ein, als die Auswertung dieser Nebenbedingung immer exakt möglich ist, sowohl der Funktionswert als auch die Ableitung.

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}Cl(x_i) &= \underline{x}_i - x_i \leq 0 \\
 \frac{\partial \tilde{S}Cl(x_i)}{\partial x_i} &= -1 \\
 \tilde{S}Cu(x_i) &= x_i - \bar{x}_i \leq 0 \\
 \frac{\partial \tilde{S}Cu(x_i)}{\partial x_i} &= +1
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

Bei Approximation der Side Constraints ist die Separierbarkeit, also die Entkopplung der Entwurfsvariablen, einfach zu erfüllen, indem die Summe über alle Entwurfsvariablen naturgemäß entfällt, da jede Schranke nur eine einzige Variable betrifft. Dennoch ist es wichtig, darauf zu achten, dass das gesamte Approximationsschema erhalten bleibt, um die algorithmischen Vorteile der dualen Lösungsverfahren nutzen zu können. Daher wird die Originalunterschranke $\tilde{S}Cl(x_i)$ mittels einer sich an die untere Asymptote anlehnenen Hyperbel $SCl(x_i)$, und die Originaloberschranke $\tilde{S}Cu(x_i)$ mittels einer sich an die obere Asymptote anlehnenen Hyperbel $SCu(x_i)$ approximiert, wie in Abbildung 4.4 zu sehen ist.

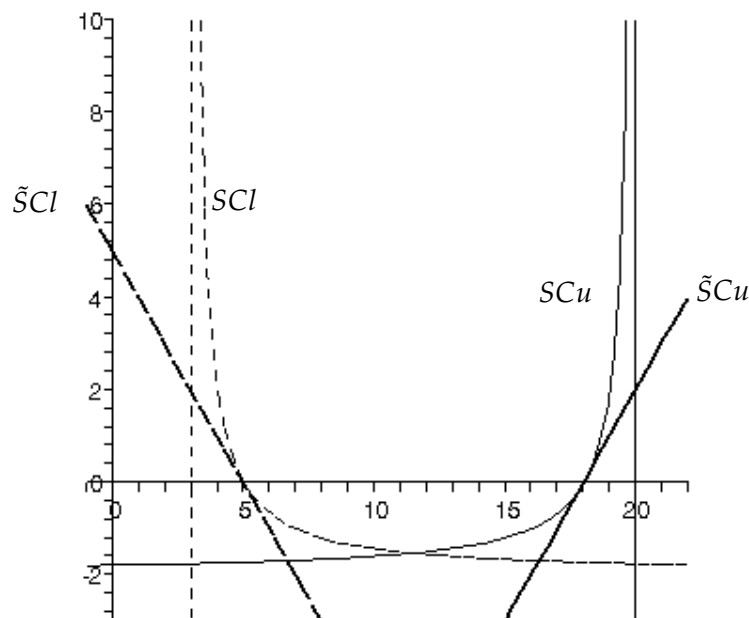


Abbildung 4.4: Approximation der Ober- und Unterschranken.

Die mathematische Formulierung der approximierten Side Constraints kann wie folgt an-

gegeben werden:

$$\tilde{S}Cl(x_i) \approx SCl(x_i) = r_i^l + \frac{p_i^l}{x_i - l_i}, \quad i = 1 \cdots n \quad (4.60)$$

mit

$$\begin{aligned} p_i^l &= (x_i - l_i)^2 \\ r_i^l &= -(x_i - l_i) \end{aligned} \quad (4.61)$$

und

$$\tilde{S}Cu(x_i) \approx SCu(x_i) = r_i^u + \frac{p_i^u}{u_i - x_i}, \quad i = 1 \cdots n \quad (4.62)$$

mit

$$\begin{aligned} p_i^u &= (u_i - \bar{x}_i)^2 \\ r_i^u &= -(u_i - \bar{x}_i) \end{aligned} \quad (4.63)$$

Die Parameter p_i^l , r_i^l , p_i^u und r_i^u werden durch Erfüllung der Bedingungen in Gl. (4.59) bestimmt.

Bei der Approximation der Side Constraints, deren exakte Kurve eine Gerade ist, durch eine Hyperbel wird ein geringfügig verschlechtertes Konvergenzverhalten beobachtet, bei aktiver Ober- bzw. Unterschranke.

4.3.3 Duale Lösungsverfahren

In diesem Abschnitt werden die für DEMMA relevanten Eigenschaften der Lagrange-Funktion mit einer kurzen Erläuterung zur Dualität zusammengefasst.

Zur unbeschränkten Minimierung stehen einige Verfahren zur Auswahl, kommen aber Nebenbedingungen hinzu, stellt sich diese Aufgabe etwas schwieriger dar. Eines der bedeutendsten Verfahren zur Berücksichtigung von Nebenbedingungen nicht nur in der Optimierung, sondern auch in der Strukturmechanik allgemein [BLM00], ist die Aufstellung der Lagrange-Funktion, in der Zielfunktion und gewichtete Summe der Nebenbedingungen in einem funktionalen Ausdruck zusammengefasst werden. Für die mit EMMA approximierten Funktionen erhält die Lagrange-Funktion folgende Form:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = g_0(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\mathbf{x}) + \sum_{j=m+1}^{m+m_e} \mu_j h_j(\mathbf{x}) + \sum_{j=m+m_e+1}^{m+m_e+n} \lambda_j SC(x_i) \quad (4.64)$$

mit $SC(x_i)$ stellvertretend für die Ober- bzw. Unterschranken. Es sei darauf hingewiesen, dass in Bezug auf eine Entwurfsvariable x_i immer nur eine Schranke zu berücksichtigen ist, entweder die obere oder die untere, da nicht beide gleichzeitig aktiv sein können.

Die Lagrange-Funktion stellt im erweiterten Raum \mathbf{R}^{n+m+m_e+n} eine Sattelfläche dar. Der Sattelpunkt $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ entspricht dem Minimum des beschränkten Problems im primalen Raum, der Raum der Entwurfsvariablen \mathbf{x} .

Die Sattelpunkteigenschaft gilt nicht nur für konvexe, stetige und zweifach differenzierbare Funktionen, wie es auf dem ersten Blick erscheint, sondern auch für nicht konvexe, nicht ableitbare oder sogar für diskontinuierliche Funktionen. Somit ist es möglich, duale Verfahren für Optimierungsaufgaben mit diskreten Variablen zu verwenden [Fle80]. Es muss lediglich die lokale Konvexität in der Nähe des Optimums gelten. Die wesentliche Eigenschaft der Dualität, auf der duale Algorithmen basieren, wurde von *Uzawa* angegeben [Min86]. Er zeigt, dass die beschränkte Minimierung mittels der Lagrange-Funktion mit bekannten Lagrange-Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}^*$ und $\boldsymbol{\mu}^*$ zu einer unbeschränkten Minimierung übergeht. Die Aufgabe besteht darin, die richtigen Multiplikatoren zu finden. Diese Erkenntnis resultiert im Grunde genommen aus der Anwendung der Kuhn-Tucker-Bedingungen auf die Lagrange-Funktion Gl. (4.64),

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})}{\partial x_i} &= \frac{\partial g_0(\mathbf{x})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} + \sum_{j=m+1}^{m+m_e} \mu_j \frac{\partial h_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} + \lambda_{m+m_e+i} \frac{\partial SC(x_i)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})}{\partial \lambda_j} &= g_j(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_j} &= h_j(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.65)$$

Aus Gl. (4.65) kann eine explizite oder implizite Beziehung für die primalen Variablen als Funktion der Lagrange-Multiplikatoren $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ ermittelt werden. Das Rückeinsetzen in die Lagrange-Funktion Gl. (4.64) liefert eine Funktion, in der nur duale Variablen vorkommen. Diese Funktion wird als *duale Funktion* bezeichnet. Das Maximieren der dualen Funktion liefert die optimalen Multiplikatoren am Sattelpunkt.

4.3.4 Lösung des Unterproblems

Die direkte Anwendung der Kuhn-Tucker-Bedingungen auf die mit EMMA approximierten Funktionen (Gln. 4.51, 4.52 und 4.56) liefert, dank der separierbaren Formulierung, eine explizite Beziehung der primalen Variablen als Funktion der Lagrange-Multiplikatoren $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$, die stark an die Rekursionsformeln der Verfahren der Optimalitätskriterien erinnert, womit die Verwandtschaft beider Methoden unterstrichen werden soll.

Die Minimierung im primalen Raum liefert

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})}{\partial x_i} &= \frac{p_{0i}}{(u_i - x_i)^2} - \frac{q_{0i}}{(x_i - l_i)^2} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \left(\frac{p_{ji}}{(u_i - x_i)^2} - \frac{q_{ji}}{(x_i - l_i)^2} \right) \\
&+ \sum_{j=m+1}^{m+m_e} \mu_j \left(\frac{p_{ji}}{(u_i - x_i)^2} + \frac{p_{ji}}{(x_i - l_i)^2} \right) \\
&+ \lambda_{m+m_e+i} \left(\frac{-p_i^l}{(x_i - l_i)^2} \cdot \alpha_i^l + \frac{p_i^u}{(u_i - x_i)^2} \cdot \alpha_i^u \right) = 0, \quad (4.66)
\end{aligned}$$

mit $\alpha_i^l = 1$ und $\alpha_i^u = 0$ bei aktiver Unterschranke und $\alpha_i^l = 0$ und $\alpha_i^u = 1$ bei aktiver Oberschranke.

Mit der Annahme von *Uzawa*, nach der die dualen Variablen zu Hauptvariablen des gesamten Problems deklariert werden, kann nach den primalen Variablen aufgelöst werden (siehe auch [Fle80] und [Sva87]),

$$x_i(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{u_i \sqrt{Q_i} + l_i \sqrt{P_i}}{\sqrt{Q_i} + \sqrt{P_i}} \quad (4.67)$$

mit

$$\begin{aligned}
P_i &= p_{0i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j p_{ji} + \sum_{j=m+1}^{m+m_e} \mu_j p_{ji} + \lambda_{m+m_e+i} p_i^u \cdot \alpha_i^u \\
Q_i &= q_{0i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j q_{ji} - \sum_{j=m+1}^{m+m_e} \mu_j p_{ji} + \lambda_{m+m_e+i} p_i^l \cdot \alpha_i^l \quad (4.68)
\end{aligned}$$

Die Kontrolle der Konvexität gestaltet sich hiermit sehr einfach, denn es reicht, das Vorzeichen von P_i und Q_i zu überwachen, um für die Positivdefinitheit der Hesse-Matrix zu garantieren. Mit anderen Worten, die Lagrange-Multiplikatoren der Gleichheitsnebenbedingungen, die auch negativ sein können, müssen während des Iterationsprozesses im Unterproblem unter Beobachtung gestellt werden, so dass die Konvexität erhalten bleibt.

Das Rückeinsetzen von Gl. (4.67) in die Lagrange-Funktion Gl.(4.64) ergibt die duale Funktion, die allerdings in diesem Fall zu einem komplizierten Ausdruck führt. Einfacher zu handhaben ist die implizite Betrachtung der dualen Funktion, die jederzeit ausgewertet und nach den dualen Variablen abgeleitet werden kann.

Die in Gleichung (4.67) ermittelte Rekursionsformel stellt eine „billige“ Lösung des Problems im primalen Raum dar, da keine Iteration notwendig ist. Die iterative Optimierungsaufgabe reduziert sich auf die Maximierung der dualen Funktion, in der nur bei Ungleichheitsnebenbedingungen den dualen Variablen einfache Schranken $\lambda_j \geq 0$ auferlegt werden, ansonsten handelt es sich um eine unbeschränkte Optimierungsaufgabe.

4.3.5 Berücksichtigung der Side Constraints

Die direkte Einbeziehung der Side Constraints in den Optimierungsprozess erhöht augenscheinlich die Problemdimensionalität um die n neu hinzukommenden Lagrange-Multiplikatoren der Ober- bzw. Unterschranken von R^{n+m+m_e} auf R^{n+m+m_e+n} . Dank der Separierbarkeit der EMMA-Approximation ergibt sich eine Entkopplung der mit einer Ober- bzw. Unterschranke korrespondierenden Lagrange-Multiplikatoren von den restlichen dualen Variablen des Problems, sodass diese nicht bis zur Konvergenz mit iteriert werden müssen. Ein Lagrange-Multiplikator einer Ober- bzw. Unterschranke steht in direkter Beziehung zur jeweiligen Entwurfsvariablen und kann bei Verletzung einer Schranke sofort, ohne Interaktion mit den anderen Lagrange-Multiplikatoren, so justiert werden, dass eine aktive Nebenbedingung (Schranke) entsteht, wie der Gl. (4.67) entnommen werden kann.

Algorithmisch ergibt sich folgende Fallunterscheidung:

- Bei Verletzung einer Unterschranke $x_i < \underline{x}_i$ muss der korrespondierende Lagrange-Multiplikator aktiviert bzw. korrigiert werden $\lambda_{m+m_e+i} \geq 0$. Dies bedeutet die Korrektur von Q_i in Gl. (4.68). Mit $x_i = \underline{x}_i$ kann Gl. (4.67) nach dem neuen berichtigten Q_i^{neu} aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} \underline{x}_i &= \frac{u_i \sqrt{Q_i^{neu}} + l_i \sqrt{P_i}}{\sqrt{Q_i^{neu}} + \sqrt{P_i}} \implies \\ Q_i^{neu} &= P_i \left(\frac{\underline{x}_i - l_i}{u_i - \underline{x}_i} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.69)$$

Die Korrektur des Lagrange-Multiplikators ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} Q_i^{neu} &= Q_i^{alt} + (\lambda_{m+m_e+i}^{neu} - \lambda_{m+m_e+i}^{alt}) p_i^l \implies \\ \lambda_{m+m_e+i}^{neu} &= \lambda_{m+m_e+i}^{alt} + \frac{Q_i^{neu} - Q_i^{alt}}{p_i^l} \end{aligned} \quad (4.70)$$

- Bei Verletzung einer Oberschranke $x_i > \bar{x}_i$ muss der korrespondierende Lagrange-Multiplikator aktiviert bzw. korrigiert werden $\lambda_{m+m_e+i} \geq 0$. Dies bedeutet die Korrektur von P_i in Gl. (4.68). Mit $x_i = \bar{x}_i$ kann Gl. (4.67) nach dem neuen berichtigten P_i^{neu} aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= \frac{u_i \sqrt{Q_i} + l_i \sqrt{P_i^{neu}}}{\sqrt{Q_i} + \sqrt{P_i^{neu}}} \implies \\ P_i^{neu} &= Q_i \left(\frac{u_i - \bar{x}_i}{\bar{x}_i - l_i} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.71)$$

Die Korrektur des Lagrange-Multiplikators ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}
P_i^{neu} &= P_i^{alt} + (\lambda_{m+m_e+i}^{neu} - \lambda_{m+m_e+i}^{alt}) p_i^u \implies \\
\lambda_{m+m_e+i}^{neu} &= \lambda_{m+m_e+i}^{alt} + \frac{P_i^{neu} - P_i^{alt}}{p_i^u}
\end{aligned} \tag{4.72}$$

- Bei erfüllten Side Constraints $\underline{x}_i < x_i < \bar{x}_i$ und einem aktiven Lagrange-Multiplikator λ_{m+m_e+i} aus der vorigen Iteration, stellt sich die Frage, ob die in der aktuellen Iteration nicht mehr aktive Schranke tatsächlich nicht mehr aktiv ist, denn die aktuelle Entwurfsvariable x_i ist mit einem falschen Lagrange-Multiplikator λ_{m+m_e+i} berechnet worden (siehe Gl. (4.67)). Die Lösung besteht darin, den Lagrange-Multiplikator auf null zu setzen (Annahme einer inaktiven Restriktion) $\lambda_{m+m_e+i} = 0$ und die erneute Berechnung der Entwurfsvariablen x_i^{neu} durch Auswertung der Gl. (4.67). Falls beide Schranken erfüllt bleiben, dann ist die Lösung x_i^{neu} und $\lambda_{m+m_e+i} = 0$ endgültig. Bei einer verletzten Schranke muss der Lagrange-Multiplikator nach dem oben vorgestellten Schema berechnet werden.

Algorithmisch kann auf den dritten Fall verzichtet werden, indem alle Lagrange-Multiplikatoren der Side Constraints vor Aktualisierung der Entwurfsvariablen auf null gesetzt werden. Auf diese Weise können nur die ersten zwei Möglichkeiten eintreten.

4.3.6 Maximierung der dualen Funktion

Nachdem die Aufgabe der beschränkten Optimierung auf die Maximierung der dualen Funktion reduziert wurde, können die unterschiedlichen Verfahren der unbeschränkten Optimierung angewandt werden, unter Berücksichtigung der Schranken der Lagrange-Multiplikatoren der Ungleichheitsnebenbedingungen $\lambda_j \geq 0$. Für konvexe Probleme mit bekannten Ableitungen eignen sich Gradientenverfahren besonders gut. In Gl. (4.65) sind die Ableitungen erster Ordnung der dualen Funktion nach den dualen Variablen angegeben. Diese Gradienteninformationen sind ohne großen Aufwand erhältlich, da es sich dabei um die sowieso vorhandenen Auswertungen der Restriktionen handelt.

In der Literatur sind viele Lösungsmöglichkeiten zur unbeschränkten Optimierung zu finden, unter anderem wird das Verfahren der konjugierten Gradienten¹ als besonders effektiv eingestuft, gute Problemskalierung bzw. gut konditionierte Gradientenmatrix vorausgesetzt [Van84]. In dieser Arbeit wird basierend auf dem CG-Verfahren von Fletcher und Reeves ein angepasster Suchalgorithmus verwendet. Im Original Fletcher-Reeves werden die konjugierten Suchrichtungen wie folgt berechnet:

$$\mathbf{S}^k = -\nabla \mathbf{F}(\lambda^k) + \beta^k \mathbf{S}^{k-1} \tag{4.73}$$

mit

¹Auch als CG-Verfahren bezeichnet (Conjugated Gradients).

k	Iterationszähler
\mathbf{S}^k	Vektor der Suchrichtung für die aktuelle Iteration
\mathbf{S}^{k-1}	Vektor der Suchrichtung der vorigen Iteration
$\nabla \mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}^k)$	Vektor der Ableitungen ausgewertet für den aktuellen Vektor der dualen Variablen $\boldsymbol{\lambda}^k$
β^k	Konjugationsbeiwert.

Der Konjugationsbeiwert β^k wird wie folgt angegeben:

$$\beta^k = \frac{|\nabla \mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}^k)|^2}{|\nabla \mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}^{k-1})|^2} \quad (4.74)$$

Im nächsten Abschnitt wird eine Modifikation des Verfahrens vorgestellt, in der eine Taylor-Reihenentwicklung zweiter Ordnung als Herleitungsgrundlage verwendet wird.

Mit den konjugierten Gradienten wird die $m + m_e$ -dimensionale Aufgabe auf eine eindimensionale Optimierung reduziert. Die Aufgabe besteht darin, die Funktion $F(\boldsymbol{\lambda})$ entlang des Vektors \mathbf{S}^k zu optimieren. Diese Aufgabe wird mit den Verfahren der eindimensionalen Optimierung, die so genannten Line Searches, bewältigt. In der Literatur sind viele Line Searches zu finden, die auf Informationen nullter und erster Ordnung basieren. Da Line Searches im Laufe einer Iteration häufig durchgeführt werden, ist es wichtig, ein effizientes Verfahren zu verwenden. Aus diesem Grund wird im Kontext der EMMA-Approximation ein auf die Glattheit des Unterproblems abgestimmter Algorithmus zur Liniensuche vorgestellt.

4.3.7 Ein modifiziertes Verfahren der konjugierten Gradienten

Die Funktionen der EMMA-Approximationen sind Hyperbeln mit einer bzw. zwei Asymptoten, die den zulässigen Suchraum eingrenzen. Diese Approximationen sind damit ausreichend glatt, um Ableitungen beliebiger Ordnung ohne großen Rechenaufwand zu liefern. Somit ist es möglich, ein Gradientenverfahren mit Krümmungsinformationen anzuwenden.

Ausgangspunkt ist eine Taylor-Reihenentwicklung mit zwei Gliedern, die zuerst in allgemeiner Form angeschrieben wird:

$$F(x+h)|_{x=x_0} = F(x_0) + h \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=x_0} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{x=x_0} \quad (4.75)$$

In vektorieller Form mit $\mathbf{h} = \alpha \mathbf{S}^k$ und $\mathbf{x} = \mathbf{x}^k$:

$$F(\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{S}^k) \Big|_{\mathbf{x}^k = \mathbf{x}_0^k} = F(\mathbf{x}_0^k) + \alpha \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \Big|_{(\mathbf{x}^k = \mathbf{x}_0^k)} \mathbf{S}^k + \frac{1}{2} \alpha^2 \mathbf{S}^k \nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathbf{F} \Big|_{(\mathbf{x}^k = \mathbf{x}_0^k)} \mathbf{S}^k \quad (4.76)$$

Die direkte Anwendung auf die duale Funktion mit der vertrauten Notation ergibt die Grundgleichung des modifizierten Verfahrens. Die Taylor-Reihe muss in diesem Fall im dualen Raum um den aktuellen Vektor $\boldsymbol{\lambda}^k$ entwickelt werden, da die dualen Variablen als

Hauptvariablen übrig geblieben sind. Die primalen Variablen sind bereits anhand Gl. (4.67) eliminiert.

$$L(\lambda^k + \alpha \mathbf{S}^k) = L(\lambda^k) + \alpha \nabla_{\lambda} \mathbf{L} \mathbf{S}^k + \frac{1}{2} \alpha^2 \mathbf{S}^k \nabla_{\lambda}^2 \mathbf{L} \mathbf{S}^k \quad (4.77)$$

Der skalare Faktor α gibt an, wieviel in Richtung des Vektors \mathbf{S}^k zurückgelegt wird, um das Optimum dieser Liniensuche zu erhalten. Um α_{opt} zu bekommen, wird Gl. (4.77) nach α maximiert.

$$\nabla_{\alpha} L = 0 \Rightarrow \mathbf{S}^k \cdot \nabla_{\lambda} \mathbf{L} + \alpha \mathbf{S}^k \cdot \nabla_{\lambda}^2 \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}^k = 0 \Rightarrow \quad (4.78)$$

$$\alpha_{opt} = \frac{\mathbf{S}^k \cdot \nabla_{\lambda} \mathbf{L}}{\mathbf{S}^k \cdot \nabla_{\lambda}^2 \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}^k} \quad (4.79)$$

Damit zeigt sich der erste Vorteil gegenüber dem Standard-CG-Verfahren, indem kein Line Search mehr erforderlich ist. Mit α_{opt} wird das Linienmaximum direkt anhand einer quadratischen Approximation erreicht. Der zweite Vorteil steckt im Nenner der Gl. (4.79), und zwar wird die Krümmung der dualen Funktion in die Suche nach dem Optimum entlang \mathbf{S}^k einbezogen. Diese Krümmungsinformationen müssen allerdings erst ermittelt werden.

Zur Ermittlung der Krümmung dient die duale Funktion erneut als Basis der Herleitung mit dem Fokus auf die implizite Abhängigkeit aller Funktionen von den dualen Variablen λ .

$$L(\lambda) = g_0(\mathbf{x}(\lambda)) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\mathbf{x}(\lambda)) + \sum_{j=m+1}^{m+m_e} \lambda_j h_j(\mathbf{x}(\lambda)) \quad (4.80)$$

Die Ableitung der dualen Funktion nach den Hauptvariablen λ erfordert die Anwendung der Kettenregel, da die approximierten Funktionen $g_0(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{x})$ und $h(\mathbf{x})$ nur implizit von λ abhängen.

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{\partial g_0}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} + g_j(\mathbf{x}(\lambda)) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} + h_j(\mathbf{x}(\lambda)) + \sum_{j=m+1}^{m+m_e} \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} \quad (4.81)$$

Nach Sortierung der Terme ergibt sich

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \underbrace{\left(\frac{\partial g_0}{\partial \mathbf{x}} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial \mathbf{x}} + \sum_{j=m+1}^{m+m_e} \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial \mathbf{x}} \right)}_{\text{am Optimum} = 0} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} + g_j(\mathbf{x}(\lambda)) + h_j(\mathbf{x}(\lambda)) \quad (4.82)$$

Somit bleiben lediglich die Auswertungen der Restriktionen in der Ableitung der dualen Funktion übrig:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g_j(\mathbf{x}(\lambda)) + h_j(\mathbf{x}(\lambda)) \quad (4.83)$$

Damit ist man noch nicht am Ende der Ableitungsarbeiten, denn in Gl. (4.79) wird die Ableitung zweiter Ordnung nach den dualen Variablen benötigt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} &= \frac{\partial g_j}{\partial \lambda_k} + \frac{\partial h_j}{\partial \lambda_k} \\ &= \frac{\partial g_j}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda_k} + \frac{\partial h_j}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda_k}\end{aligned}\quad (4.84)$$

Die partielle Ableitung von $\mathbf{x}(\lambda)$ nach den dualen Variablen λ wird aus der Differenziation der Gleichung (4.67) hergeleitet:

$$\begin{aligned}x_i &= \frac{u_i \sqrt{Q_i} + l_i \sqrt{P_i}}{\sqrt{Q_i} + \sqrt{P_i}} \\ \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_k} &= \frac{\partial x_i}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda_k} + \frac{\partial x_i}{\partial P_i} \frac{\partial P_i}{\partial \lambda_k}\end{aligned}\quad (4.85)$$

Aus Gl. (4.68) ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_i}{\partial P_i} &= -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{Q_i} (u_i - l_i)}{\sqrt{P_i} (\sqrt{Q_i} + \sqrt{P_i})^2} \\ \frac{\partial x_i}{\partial Q_i} &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{P_i} (u_i - l_i)}{\sqrt{Q_i} (\sqrt{Q_i} + \sqrt{P_i})^2}\end{aligned}\quad (4.86)$$

Für Ungleichheitsnebenbedingungen $g_j(\mathbf{x})$ gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_i}{\partial \lambda_j} &= p_{ji} \\ \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda_j} &= q_{ji} \quad , \quad j = 1 \dots m\end{aligned}\quad (4.87)$$

Für Gleichheitsnebenbedingungen $h_j(\mathbf{x})$ gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_i}{\partial \lambda_j} &= p_{ji} \\ \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda_j} &= -p_{ji} \quad , \quad j = 1 + m \dots m + m_e\end{aligned}\quad (4.88)$$

Nach Ermittlung der optimalen Schrittweite α_{opt} muss die Suchrichtung \mathbf{S} aktualisiert werden. Der Update der konjugierten Gradienten erfolgt mit Gl. (4.73), die hier auf die duale Funktion angepasst wird:

$$\mathbf{S}^{k+1} = \nabla_{\lambda} \mathbf{L} + \beta^k \mathbf{S}^k \quad (4.89)$$

Die Suchrichtungen \mathbf{S}^{k+1} und \mathbf{S}^k müssen $\nabla_{\lambda}^2 \mathbf{L}$ konjugiert sein, also

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^k \cdot \nabla_{\lambda}^2 \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}^{k+1} &= 0 && \Rightarrow \\ \mathbf{S}^k \cdot \nabla_{\lambda}^2 \mathbf{L} \cdot (\nabla_{\lambda} \mathbf{L} + \beta^k \mathbf{S}^k) &= 0 && \Rightarrow \\ \mathbf{S}^k \cdot \nabla_{\lambda}^2 \mathbf{L} \cdot \nabla_{\lambda} \mathbf{L} + \beta^k \mathbf{S}^k \cdot \nabla_{\lambda}^2 \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}^k &= 0 && \Rightarrow \end{aligned} \quad (4.90)$$

Der Konjugationsfaktor β^k ergibt sich aus folgender Gleichung:

$$\beta^k = - \frac{\mathbf{S}^k \cdot \nabla_{\lambda}^2 \mathbf{L} \cdot \nabla_{\lambda} \mathbf{L}}{\mathbf{S}^k \cdot \nabla_{\lambda}^2 \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}^k} \quad (4.91)$$

In der ersten Iteration ist der Vektor der Suchrichtung \mathbf{S}^1 nicht initialisiert. Für gewöhnlich wird mit dem Verfahren des steilsten Abstieges begonnen, in dem

$$\mathbf{S}^1 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = g_j(\mathbf{x}(\lambda)) + h_j(\mathbf{x}(\lambda)) \quad (4.92)$$

und

$$\beta^1 = 0 \quad (4.93)$$

Im Laufe der Iterationen zahlt sich die etwas aufwändigere quadratische Approximation aus und belohnt mit weniger Iterationsschleifen im Unterproblem. Die Berechnung der Krümmungsinformationen, die aufgrund des großen erforderlichen Rechenaufwandes die größte Hürde von Newton-Verfahren ist, stellt im Unterproblem kein Problem dar. Das Approximationsschema von EMMA mit den entkoppelten Entwurfsvariablen liefert eine Struktur zur effizienten Berechnung von Ableitungen zweiter Ordnung.

4.3.8 Ein quadratischer Line Search

In vielen Anwendungen der Optimierung und der Strukturmechanik werden Minimierungsaufgaben entlang eines Vektors mittels Line Searches erledigt. Im Standard Verfahren von *Fletcher-Reeves* sind Erfolg und Effizienz von der Qualität des Line Searches stark abhängig.

In der Literatur ist eine Fülle an Algorithmen zur Liniensuche zu finden, die allerdings meistens nur Informationen nullter und gegebenenfalls erster Ordnung verwenden. Im Hinblick auf die EMMA-Approximation, in der die Ermittlung von Ableitungen erster Ordnung und sogar Krümmungen ohne großen Aufwand möglich ist, ist ein Line Search im dualen Raum mit Krümmungsinformationen eine attraktive und effiziente Alternative.

Gegeben ist der aktuelle Entwurfsvariablenvektor \mathbf{x}^k , der Vektor der Lagrange-Multiplikatoren λ^k und die Auswertung und Sensitivitäten aller Funktionen der Optimierungsaufgabe an der Stelle $(\mathbf{x}^k, \lambda^k)$. Die Suchrichtung \mathbf{S}^k ist vom Optimierungsverfahren abhängig

und wird als bekannt vorausgesetzt. Die Aufgabe besteht darin, das Linienoptimum entlang des Vektors \mathbf{S}^k zu finden. In Formeln ausgedrückt: gesucht ist α , so dass $L(\boldsymbol{\lambda}^k + \alpha \mathbf{S}^k)$ optimal wird.

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\lambda}^k + \alpha \mathbf{S}^k) &= L(\boldsymbol{\lambda}^k) + \alpha \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} L \cdots \mathbf{S}^k + \frac{1}{2} \alpha^2 \mathbf{S}^k \cdots \nabla_{\boldsymbol{\lambda}}^2 L \cdots \mathbf{S}^k \\ \frac{\partial L}{\partial \alpha} &= \mathbf{S}^k \cdots \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} L + \alpha \mathbf{S}^k \cdots \nabla_{\boldsymbol{\lambda}}^2 L \cdots \mathbf{S}^k \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2} &= \mathbf{S}^k \cdots \nabla_{\boldsymbol{\lambda}}^2 L \cdots \mathbf{S}^k \end{aligned} \quad (4.94)$$

Die Berechnung der ersten und zweiten Ableitung der dualen Funktion nach den dualen Variablen ist bereits im vorigen Abschnitt abgehandelt worden.

Die Herleitung in Gl. (4.94) kann wie folgt anschaulich interpretiert werden. Für die Ermittlung des Linienoptimums entlang \mathbf{S}^k kann die Kurve auf der Sattelfläche, entstehend aus dem Schnitt einer vertikalen Ebene, die den Vektor \mathbf{S}^k enthält, und der Sattelfläche selber, durch eine quadratische Parabel approximiert werden.

$$L(\alpha) = A\alpha^2 + B\alpha + C \quad (4.95)$$

mit folgenden Randbedingungen:

$$\alpha = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} L(0) = \quad L(\boldsymbol{\lambda}) = \quad L \\ \frac{\partial L}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \quad \mathbf{S}^k \cdot \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} L = \quad L' \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha=0} = \quad \mathbf{S}^k \cdot \nabla_{\boldsymbol{\lambda}}^2 L \cdot \mathbf{S}^k = \quad L'' \end{array} \right\} \text{bekannt} \quad (4.96)$$

Durch Einsetzen von L , L' und L'' können die Koeffizienten der Parabel berechnet werden.

$$\begin{aligned} C &= L \\ B &= L' \\ A &= \frac{1}{2} L'' \end{aligned} \quad (4.97)$$

Der Scheitel der quadratischen Parabel ist am Nulldurchgang der Ableitung, somit gilt:

$$\begin{aligned} L'(\alpha) &= 2A\alpha + B = 0 \quad \Rightarrow \\ \alpha_{opt} &= -\frac{L'}{L''} \end{aligned} \quad (4.98)$$

Die Genauigkeit des Line Searches ist vom Grad der Nichtlinearität der dualen Funktion abhängig. Ist diese exakt quadratisch, kann nach einem Schritt abgebrochen werden. Bei höheren Nichtlinearitäten muss der Vorgang solange wiederholt werden, bis Konvergenz eintritt.

In der Berechnung der Gradienten der dualen Funktion $\frac{\partial L}{\partial \lambda}$ gehen die Funktionsauswertungen der Nebenbedingungen $g(\mathbf{x}(\lambda))$ und $h(\mathbf{x}(\lambda))$ ein (siehe Gl. (4.94)), da

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g_j(\mathbf{x}(\lambda)) + h_j(\mathbf{x}(\lambda)) \quad (4.99)$$

Daher muss darauf geachtet werden, dass nur aktive und verletzte Nebenbedingungen in die Berechnung von $\frac{\partial L}{\partial \lambda}$ eingehen, ansonsten werden die Ableitungen für die falsche Lagrange-Funktion berechnet.

4.3.9 Vorkonditionierung und Funktionsskalierung

Die Strukturoptimierung mit den Teildisziplinen Topologie-, Querschnitts-, Material- und Formoptimierung befasst sich mit Aufgaben, die numerisch gesehen, häufig als schlecht konditioniert bezeichnet werden. Es werden Funktionen unterschiedlicher Dimensionen miteinander verknüpft, wie z.B. wenn Spannungs- und Verschiebungsnebenbedingungen gleichzeitig erfüllt werden müssen. Auf Entwurfsvariablenebene treten ähnliche Probleme auf, indem unterschiedliche geometrische Größen, wie Breite und Dicke eines Bleches, in derselben Problemformulierung vorkommen. Schlecht konditionierte Aufgaben beeinflussen den Optimierungsalgorithmus in hohem Maß. Oszillationen sind in der Iterationsgeschichte zu beobachten bis hin zur Divergenz. Insbesondere mathematische Algorithmen basierend auf Gradientenverfahren sind davon betroffen.

Dieses Problem kann im Optimierungsalgorithmus anhand der Konditionszahl der Gradientenmatrix erkannt werden. Die Gradientenmatrix ist ein zweidimensionales Feld mit den Ableitungen aller Funktionen bezüglich der Entwurfsvariablen, die zeilenweise abgespeichert werden (Annahme). Die Kondition einer Matrix ist unter anderem ein Maß dafür, um welches Verhältnis im schlimmsten Fall die Genauigkeit des Lösungsvektors Φ der Gleichung $\mathbf{A}\Phi = \mathbf{b}$ unter jener des Rechte-Seite-Vektors \mathbf{b} liegt, falls man mittels Gaußscher Elimination im Rahmen beschränkter Genauigkeit der Zahlendarstellung das Gleichungssystem löst [BS83].

Gut konditionierte Matrizen sind solche mit kleiner Konditionszahl, schlecht konditionierte besitzen eine große Konditionszahl. Je größer die Konditionszahl ist, umso näher liegt die Matrix bei einer Singularität. Singuläre Matrizen haben die Konditionszahl ∞ .

Je nach untersuchtem Problem gibt es verschiedene Definitionen der Konditionszahl einer Matrix \mathbf{A} . Eine einfache und allgemein übliche [BS78] ist das Produkt

$$\kappa_\infty = \|\mathbf{A}\|_\infty \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty \quad (4.100)$$

mit der Norm

$$\|\mathbf{A}\|_{\infty} = \max\left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m a_{ik}\right), \quad (4.101)$$

worin m und n Anzahl der Zeilen und Spalten ist.

Für iterative Gleichungslöser ist jedoch die spektrale Konditionszahl [Gol89] aussagekräftiger,

$$\kappa = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \quad (4.102)$$

also das Verhältnis des größten Eigenwerts der Matrix zum kleinsten.

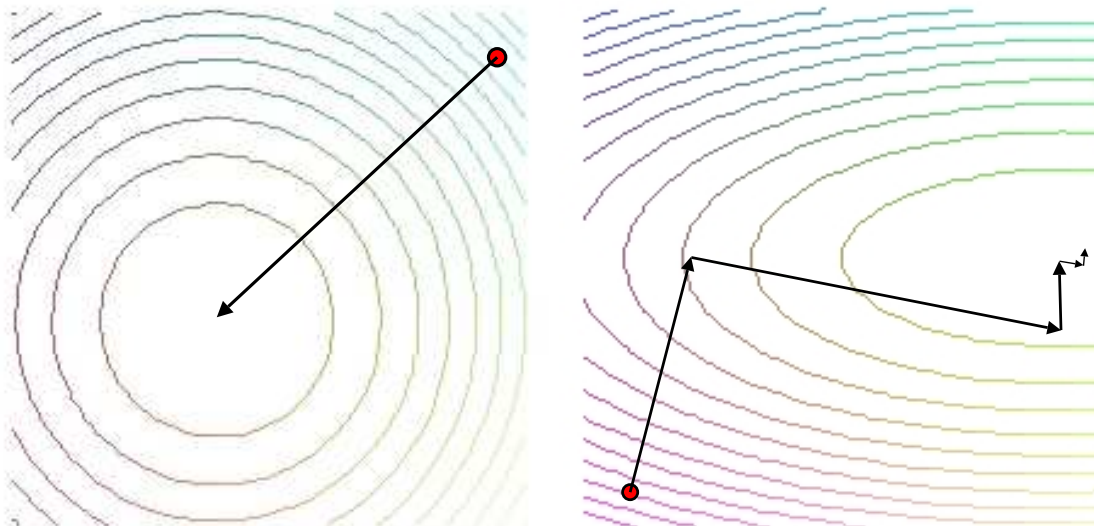
Iterative Gleichungslöser sind besonders empfindlich gegenüber schlecht konditionierten Matrizen. Schlechte Kondition bewirkt, dass der Gleichungslöser entweder sehr viele Iterationen benötigt oder überhaupt nicht konvergiert, oder konvergiert, ohne dass die Lösung sinnvoll ist. Je besser die Kondition der Matrix ist, umso weniger Iterationen wird der Gleichungslöser für das Problem benötigen bzw. umso wahrscheinlicher ist es, dass ein Gleichungssystem mit dieser Matrix überhaupt iterativ gelöst werden kann [Fis94].

Die optimale Lösung des Problems der schlechten Konditionierung besteht darin, diesen Umstand vorab zu vermeiden, indem die Funktionen in der Phase, in der die Optimierungsaufgabe formuliert wird, normiert werden. In der Praxis sieht es aber anders aus. Optimierungsumgebungen bestehen üblicherweise aus heterogenen Komponenten vom Pre-processing über den Solver bis zum Optimierungsalgorithmus. Aus diesem Grund sollte ein guter Algorithmus mit diesem Umstand umgehen können, indem die zu optimierenden Eingangsinformationen, die Entwurfsvariablen, die Funktionsauswertungen und die Sensitivitäten auf ihre Kondition untersucht und gegebenenfalls konditioniert werden.

In der Literatur findet man einige Verfahren zur Verbesserung der Konditionszahl von Matrizen. In [Sim03a] und [Sim03b] wird eine Vorabskalierung der Matrix \mathbf{A} mit Diagonalmatrizen $\mathbf{D1}$ und $\mathbf{D2}$ vorgestellt in der Form $\mathbf{A}^{neu} = \mathbf{D1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{D2}$. Damit kann die Kondition signifikant verbessert werden. Ziel muss es dabei sein, alle Elemente von \mathbf{A} auf ungefähr die gleiche Größenordnung zu bringen. Dieses Verfahren kann allerdings nur bei quadratischen Matrizen angewandt werden.

In DEMMA wird, aufgrund der im Allgemeinen rechteckigen Sensitivitätenmatrizen, eine andere Skalierung vorgenommen, in der sowohl eine Normierung als auch eine Angleichung der Nebenbedingungen erreicht wird. Ziel dieser Skalierung ist die indirekte Konditionierung der Hesse-Matrix, Matrix der zweiten Ableitungen. Die Konditionierung der Hesse-Matrix, indem die gleiche Krümmung in allen Richtungen des n -dimensionalen Raums erreicht wird, wirkt bei Gradientenverfahren stabilisierend und reduziert die Anzahl der Iterationen. Diese Tatsache verdeutlicht Abbildung 4.5, in der das rechte Teilbild 4.5(b) einen verzerrten zweidimensionalen Raum darstellt, in dem die Krümmungen unterschiedlich sind, sodass der Gradientenalgorithmus viele Iterationen benötigt und vor allem in der Nähe des Optimums zu oszillieren beginnt. Im linken Teilbild 4.5(a) ist der Raum

so skaliert, dass dieselbe Krümmung in beide Richtungen herrscht, wodurch der Optimierungsalgorithmus mit einer Iteration am Ziel ist.



(a) Höhenlinien einer Funktion mit Konditionszahl 1 der Hesse-Matrix.

(b) Höhenlinien einer Funktion mit Konditionszahl größer 1 der Hesse-Matrix.

Abbildung 4.5: Höhenlinien und Iterationsgeschichte für unterschiedliche Skalierungen.

Krümmungsinformationen der Originalfunktionen sind in der Strukturoptimierung nur mit großem Aufwand erhältlich, daher müssen sich die Approximationsverfahren mit Informationen erster Ordnung begnügen. Aus diesem Grund wird versucht, durch geeignete Skalierung der Sensitivitätenmatrix eine indirekte Konditionierung der Hesse-Matrix vorzunehmen.

Die Funktionsweise des Vorkonditionierens kann anschaulich erläutert werden. Angenommen, die Sensitivitätenmatrix wäre \mathbf{A} der Dimension $1 + m + m_e$ Zeilen und n Spalten

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1\ 1} & \mathbf{a}_{1\ 2} & \cdots & a_{1\ n} \\ \mathbf{a}_{2\ 1} & a_{2\ 2} & \cdots & a_{2\ n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{1+m+m_e\ 1} & a_{1+m+m_e\ 2} & \cdots & \mathbf{a}_{1+m+m_e\ n} \end{bmatrix} \quad (4.103)$$

Die fettgedruckten Matrixelemente stellen diejenigen dar, die in der jeweiligen Zeile den größten Zahlenwert haben (Absolutwerte). So ergibt sich der Vektor der Skalierungsfaktoren **Scale** der Dimension $1 + m + m_e$ zu

$$\mathbf{Scale} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1\ 2} \\ \mathbf{a}_{2\ 1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{1+m+m_e\ n} \end{bmatrix} \quad (4.104)$$

Durch Normierung der Zeilen der Sensitivitätenmatrix wird erreicht, dass die Krümmung im Laufe der Iteration in allen Richtungen angeglichen wird. Die vielen Beispiele anerkannter Benchmarks für Optimierungsalgorithmen [SH80] bestätigen den Erfolg der Methode.

Vorsicht ist allerdings bei Skalierungs- und Konditionierungsverfahren geboten, denn die Änderung der Zahlenwerte in den zu konditionierenden Matrizen kann zu einer anderen Problemstellung führen. Somit muss sichergestellt werden, dass die Lösung des skalierten Problems auch der des Originalproblems entspricht.

Betrachtet man die Lagrange-Funktion in allgemeiner Form,

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = g_0(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m+m_e} \lambda_j g_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \quad (4.105)$$

ergibt sich, dass die Skalierung der Funktionsauswertung lediglich den Betrag des Lagrange-Multiplikators beeinflusst, ansonsten beliebig sein kann. Ein Blick auf die Sensitivitäten in der Kuhn-Tucker-Bedingung,

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial g_0(\mathbf{x})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m+m_e} \lambda_j \frac{\partial g_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0 \quad (4.106)$$

die ein Gleichungssystem mit n Zeilen darstellt, zeigt den Einfluss der Skalierungsfaktoren. Zur Veranschaulichung dieser Gleichungen werden diese für das Beispiel $n = 3$ (Anzahl der Entwurfsvariablen) und $m + m_e = 2$ (Anzahl der Nebenbedingungen) ausgeschrieben.

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_0}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial g_0}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial g_0}{\partial x_3} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_3} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned} \quad (4.107)$$

Die fettgedruckten Ableitungen stellen eine Spalte im angegebenen Gleichungssystem und eine Zeile in der Sensitivitätenmatrix dar. Diese Zeile wird im Zuge der Skalierung durch denselben Faktor dividiert. Bekanntermaßen ändert sich die Lösung eines Gleichungssystems nicht bei Zeilen- bzw. Spaltenoperationen. Somit ändert sich auch das zu optimierende Problem nicht, wenn solch eine Konditionierung vorgenommen wird.

4.4 Numerische Beispiele

In diesem Abschnitt wird der mathematische Optimierungsalgorithmus DEMMA auf „Herz und Nieren“ getestet. In der Literatur [SH80] ist eine Fülle von Testbeispielen zur nichtlinearen Programmierung zu finden, die aufgrund der großen Vielfalt und der gezielt zusammengestellten Funktionen als Maßstab für Qualität und Effizienz gelten.

Der im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Optimierungsalgorithmus ist in mehreren Optimierungsumgebungen implementiert worden. Im Zuge des vom *BMBF*² unterstützten Verbundprojektes *ELAnO*³ wurde DEMMA in die Optimierungssoftware *TOSCA* der Fa. *FE-Design* integriert und ist bei Testberechnungen in der Topologieoptimierung zum Einsatz gekommen. In einer Diplomarbeit in Kooperation mit der Fa. *MSC* ist der Optimierungsalgorithmus in eine hausinterne Version von *msc.Nastran* implementiert worden. Für die allgemeine Anwendung in der Strukturoptimierung, vor allem in der Formoptimierung, ist DEMMA Teil des Lehrstuhl eigenen Forschungsprogramms *CARAT*⁴, bei dem eine vollständige Integration in die Optimierungsumgebung erfolgt ist. Es folgen Beispiele aus Topologie- und Formoptimierung, die die Leistungsfähigkeit des Optimierungsalgorithmus demonstrieren.

4.4.1 Mathematische Beispiele

4.4.1.1 Beispiel 1: Entkoppelte Entwurfsvariablen

In diesem Testbeispiel⁵ sollen die Vorzüge von DEMMA in der Optimierung von Problemen mit entkoppelten Entwurfsvariablen, bei denen die Approximationsstrategie mittels separierter Variablen exakt zutrifft, aufgezeigt werden. In dieser Aufgabe ist die Kondition des Problems schlecht gewählt worden, um die Effizienz der Skalierungsroutine zu demonstrieren.

$$\text{Minimiere} \quad f(\mathbf{x}) = .01x_1^2 + x_2^2 - 100 \quad (4.108)$$

so, dass

$$g(\mathbf{x}) = -10x_1 + x_2 + 10 \leq 0 \quad (4.109)$$

$$\begin{aligned} 2 &\leq x_1 \leq 50 \\ -50 &\leq x_2 \leq 50 \end{aligned} \quad (4.110)$$

Die Lösung liegt bei $\mathbf{x}^* = (2, 0)$

Die Iterationsgeschichte⁶ in Tabelle 4.1 zeigt die schnelle Konvergenz zur richtigen Lösung.

²*BMBF*: Bundesministerium für Bildung und Forschung

³*ELAnO*: Entwicklung und Konstruktion von innovativen Leichtbauprodukten unter konsequenter Verwendung adaptierter Analyse- und Optimierungsmethoden

⁴*CARAT*: Computer Aided Research Analysis Tool

⁵Problem Nr. 21 in [SH80]

⁶Die Funktionswerte sind skaliert.

	Start	1. Iteration	2. Iteration	3. Iteration
\mathbf{x}	(-1,-1)	(2,-1.25)	(2, 6.716E-002)	(2, -1.212E-005)
$f(\mathbf{x})$	-49.495	-42.228	-50.021	-49.980
$g(\mathbf{x})$	1.900	9.31E-005	-0.989	-0.999
λ_1	0.0	12.664	0.0	0.0
λ_2	0.0	6.000	1.999E-002	1.999E-002
λ_3	0.0	0.0	0.0	0.0
$L(\mathbf{x}, \lambda)$	-49.495	-42.227	-50.021	-49.980

Tabelle 4.1: Iterationsgeschichte (Beispiel 1)

4.4.1.2 Beispiel 2: Gekoppelte Entwurfsvariablen

⁷ In diesem Testbeispiel wird die Fähigkeit der separierbaren Approximation demonstriert, Funktionen trotz gekoppelter Entwurfsvariablen dennoch gut zu approximieren.

$$\text{Minimiere } f(\mathbf{x}) = e^{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} \quad (4.111)$$

so, dass

$$\begin{aligned} h_1(\mathbf{x}) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - 10 = 0 \\ h_2(\mathbf{x}) &= x_2 x_3 + 5x_4 x_5 = 0 \\ h_3(\mathbf{x}) &= x_1^3 + x_2^3 + 1 = 0 \end{aligned} \quad (4.112)$$

$$\begin{aligned} -2.3 &\leq x_1 \leq 2.3 \\ -2.3 &\leq x_2 \leq 2.3 \\ -3.2 &\leq x_3 \leq 3.2 \\ -3.2 &\leq x_4 \leq 3.2 \\ -3.2 &\leq x_5 \leq 3.2 \end{aligned} \quad (4.113)$$

Die Lösung liegt bei $\mathbf{x}^* = (-1.717, 1.595, 1.827, -0.763, -0.763)$

Die Iterationsgeschichte⁸ in Tabelle 4.2 zeigt die schnelle Konvergenz der dualen Variablen trotz vorhandener Koppelung der primalen Variablen.

⁷Problem Nr. 80 in [SH80]

⁸Die Funktionswerte sind skaliert.

	Start	1. Iteration	2. Iteration	3. Iteration	4. Iteration
\mathbf{x}	(-2,2,2,-1,-1)	(-1.728, 1.645, 1.833, -0.795, -0.795)	(-1.716, 1.595, 1.830, -0.765, -0.765)	(-1.716, 1.594, 1.830, -0.764, -0.764)	(-1.716, 1.594, 1.830, -0.764, -0.764)
$f(\mathbf{x})$	3.35E-004	3.71E-002	5.35E-002	5.40E-002	5.40E-002
$h_1(\mathbf{x})$	4.000	0.315	4.55E-3	1.38E-7	-3.36E-5
$h_2(\mathbf{x})$	-1.000	-0.149	-4.60E-3	5.66E-6	2.87E-5
$h_3(\mathbf{x})$	1.000	0.291	1.13E-2	1.54E-5	3.43E-5
λ_1	0.0	6.43E-4	3.25E-2	4.00E-2	4.02E-2
λ_2	0.0	-3.89E-4	-3.13E-2	-3.80E-2	-3.79E-2
λ_3	0.0	4.17E-5	4.3E-3	5.30E-3	5.23E-3

Tabelle 4.2: Iterationsgeschichte (Beispiel 2)

4.4.2 Beispiele aus der Strukturoptimierung

Im Folgenden werden zwei Beispiele aus Topologie- und Formoptimierung präsentiert, in denen die Fähigkeit des Optimierungsalgorithmus, Probleme mit vielen Entwurfsvariablen und vielen Nebenbedingungen zu optimieren, unter Beweis gestellt wird.

4.4.3 Topologieoptimierung

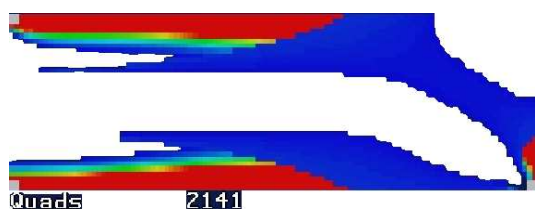


Abbildung 4.6: Kragarm nach 2. Iteration

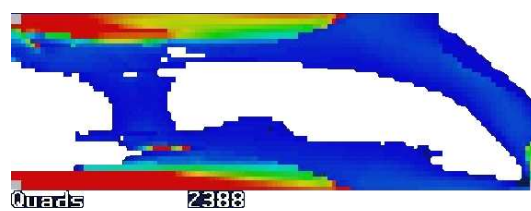


Abbildung 4.7: Kragarm nach 4. Iteration

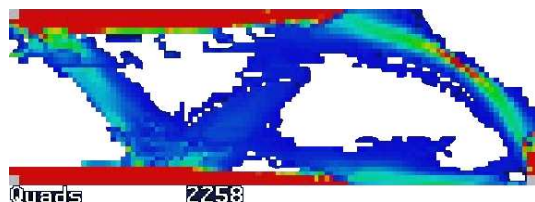


Abbildung 4.8: Kragarm nach 10. Iteration

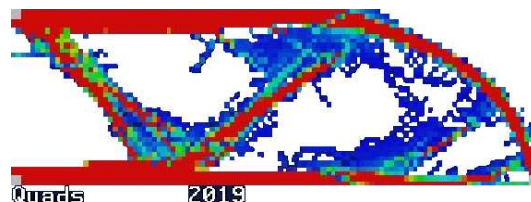


Abbildung 4.9: Kragarm nach 20. Iteration

In diesem Beispiel wird ein Kragarm mit zweidimensionalen Kontinuumselementen modelliert und mit einer Knotenlast am unteren Kragarmende belastet. Die Topologieoptimierung

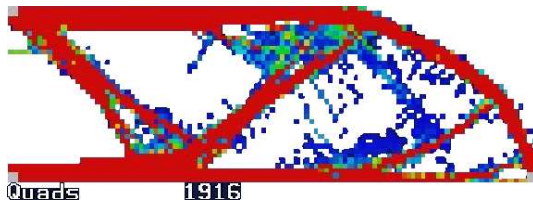


Abbildung 4.10: Kragarm nach 30. Iteration



Abbildung 4.11: Kragarm nach 40. Iteration

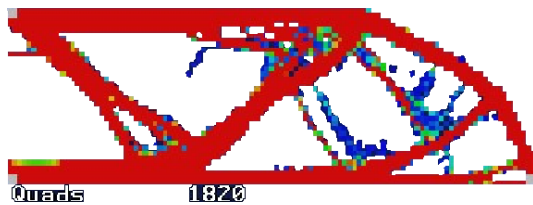


Abbildung 4.12: Kragarm nach 50. Iteration

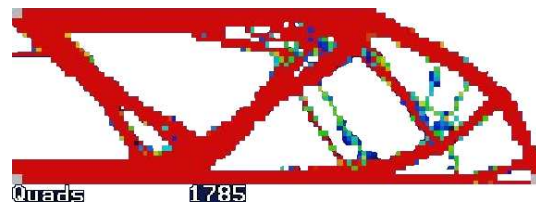


Abbildung 4.13: Kragarm nach 60. Iteration

erfolgt mit der Optimierungssoftware TOSCA der Fa. FE-Design und dem Optimierungsalgorithmus DEMMA. Die linearelastische Strukturanalyse wird mit dem FE-Programm⁹ ANSYS durchgeführt. Ziel der Optimierung ist die Minimierung der Verzerrungsenergie unter Einhaltung einer Volumengleichheitsnebenbedingung:

$$V = \frac{1}{V^0} \sum_{i=1}^n v_i^0 x_i = 0.45 \quad (4.114)$$

mit

- n Anzahl der finiten Elemente mit variabler Dichte (Anzahl der Entwurfsvariablen).
- V^0 Volumen des Kragarms bei voller Materialdichte.
- v_i^0 Volumen des i -ten finiten Elements bei voller Materialdichte.
- x_i i -te Entwurfsvariable. Repräsentiert die relative Materialdichte die zwischen 0 und 1 variiert. Das Optimierungsergebnis soll ein 0-1-Modell sein, d.h., ein Element hat zum Schluss entweder die volle Materialdichte, oder es wird nicht benötigt und ist leer. In der algorithmischen Umsetzung darf die Dichte nicht null sein, denn dadurch verschwindet die Steifigkeit des finiten Elements und die Systemsteifigkeitsmatrix wird singulär. Daher wird eine Untergrenze festgesetzt, die üblicherweise bei ca. 10^{-3} liegt.

Das System wird mit 3994 Elementen diskretisiert, die alle eine variable Dichte besitzen (3994 Entwurfsvariablen). Das Ergebnis und die Iterationsgeschichte sind in den Abbildungen unten dargestellt. Es stellt sich, wie zu erwarten war, eine strebenartige Struktur ein, die an die Michell-Strukturen stark erinnert [Mic04].

4.4.4 Formoptimierung

Nachdem im vorigen Beispiel der Schwerpunkt bei der Verarbeitung von vielen Entwurfsvariablen lag, werden in diesem Beispiel viele Nebenbedingungen behandelt. Die Formoptimierung der Unterkannte eines Durchlaufträgers wird unter Berücksichtigung von Span-

⁹Im Kontext der Optimierung auch als FE-Solver genannt.

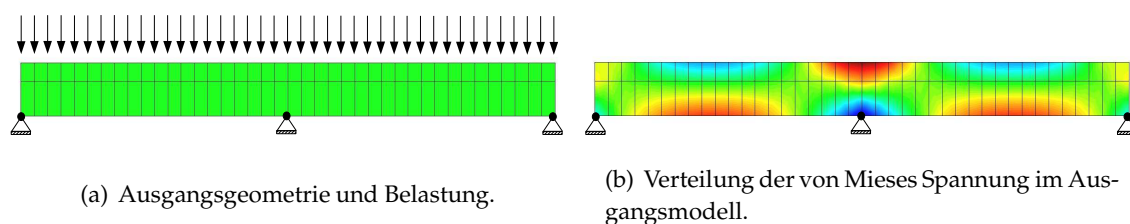


Abbildung 4.14: Ausgangsentwurf: Geometrie, Belastung und von Mises Spannungen.

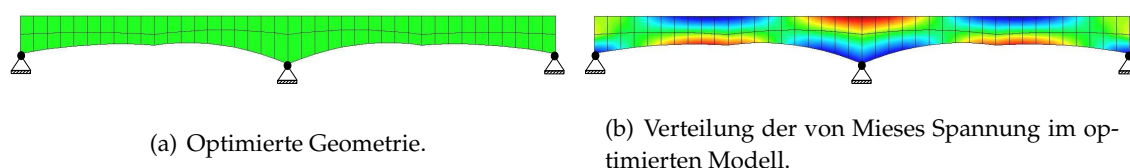


Abbildung 4.15: Optimierungsergebnis: Geometrie und von Mises Spannungen.

nungsrestriktionen durchgeführt. Die Unterkante des Zweifeldträgers wird anhand von Bezier-Elementen parametrisiert, deren Kontrollknoten als Entwurfsvariablen deklariert werden. Genauer gesagt, ist die vertikale Raumkoordinate von insgesamt neun Kontrollknoten variabel, wie in den Abbildungen 4.14(a) und 4.15(a) zu sehen ist.

Ziel der Optimierung ist die Minimierung des Gewichtes der gesamten Struktur unter der Bedingung, dass die von Mises Spannung an keiner Stelle den Grenzwert von $\sigma_{zul} = 300$ überschreitet. Durch die gewählte Diskretisierung von 40 Elementen mit jeweils vier Gaußpunkten, an denen die Spannungsnebenbedingung ausgewertet wird, ergeben sich 320 Restriktionen. Das Ergebnis der Optimierung ist der wohlbekannte Voutenträger, wie in Abbildung 4.15(a) zu sehen ist. Das Spannungsbild (Abbildung 4.15(b)) zeigt die bessere Materialausnutzung durch Anpassung der Bauhöhe.

Teil II

Formoptimierung

Kapitel 5

Formoptimierung von Freiformschalen

5.1 Einführung in die Formoptimierung dünnwandiger Strukturen

Die Formoptimierung von Flächentragwerken wie Platten- und Schalenstrukturen, auch als Gestaltoptimierung bekannt, beschäftigt sich mit den Verfahren und Algorithmen zur Modifikation der formbeschreibenden Parameter der zu optimierenden Schalenstrukturen, mit dem Zweck die Struktureigenschaften gezielt zu verbessern. Dieser Verbesserungsprozess stellt im mathematischen Sinne eine Minimierung bzw. Maximierung einer oder mehrerer Zielfunktion(en), wie Gewicht, Eigenfrequenz oder Verzerrungsenergie dar. Für Details über die mathematische Formulierung der Optimierungsaufgabe siehe Kapitel 2.1. Aufgrund der engen Verbindung zwischen Struktursteifigkeit, minimalem Gewicht und der optimalen Lastabtragung wird im Rahmen dieser Arbeit die Verzerrungsenergie als einzige Zielfunktion optimiert.

Die Implementierung einer Zielfunktion bzw. Nebenbedingung, wie Spannungs-, Verschiebungs- oder Fertigungsrestriktionen, ist mit einem großen Codierungsaufwand verbunden, insbesondere wenn die Gradientenermittlung mittels analytischer Sensitivitätsanalyse erfolgt (mehr Details in Kapitel 8). Die Gradienten der in einer Optimierungsaufgabe involvierten Funktionen werden in den Optimierungsalgorithmen mit Gradientenverfahren benötigt, um die Aktualisierung der Entwurfsvariablen vorzunehmen.

Die Strukturanalyse und die damit verbundene Evaluierung der Funktionen der Optimierungsaufgabe wird im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich mit der Methode der finiten Elemente durchgeführt. Daher spielen die unterschiedlichen Versteifungseffekte, auch als Locking-Effekte bezeichnet, infolge deren die Strukturantwort zu steif abgebildet und die mechanische Tragwirkung verfälscht wird, eine wichtige Rolle. Die Verwendung von locking-freien Elementformulierungen ist aufgrund der geringen Wandstärke der optimierten Strukturen essentiell, nicht nur in Zusammenhang mit der korrekten mechanischen Systemantwort, sondern auch für die Aufstellung der Optimierungsaufgabe, denn die unterschiedlichen Locking-Phänomene können den zulässigen Bereich beeinträchtigen und können damit das Optimierungsergebnis komplett verfälschen (mehr Details in Kapitel 9).

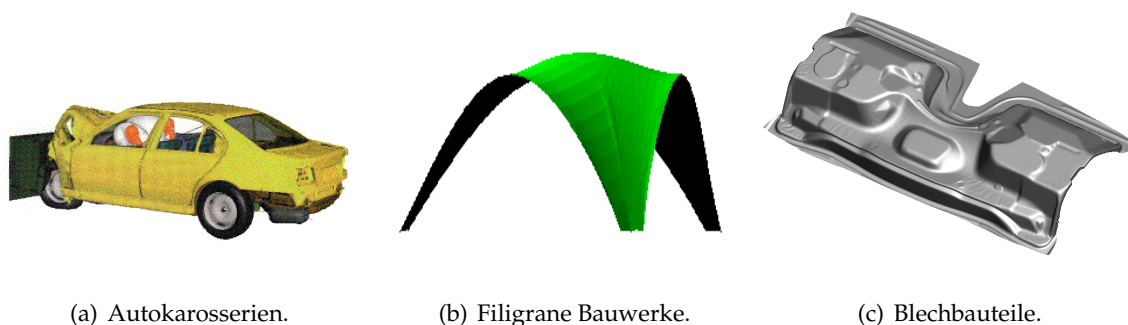


Abbildung 5.1: Beispiele für dünnwandige Schalenstrukturen.

Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Verfahren beziehen sich auf räumliche Flächen-tragwerke beliebiger Gestalt, die im Weiteren als Freiformschalen bezeichnet werden. Es handelt sich dabei um die Formoptimierung dünnwandiger Strukturen, wie Flugzeugaußenhaut, Automobilkarosserien, Flüssigkeitsbehältnisse oder schlanke Schalenstrukturen des Bauwesens, z.B. als filigrane Hallenüberdachungen mit großen Spannweiten u.v.m. In Abb. 5.1 sind einige Beispiele dargestellt.

Bei der Formoptimierung von Schalentragwerken hinsichtlich minimaler Verzerrungsenergie (maximaler Steifigkeit) ohne Restriktionen tendieren die Optimierungsergebnisse dazu, Membranstrukturen zu produzieren, da die Membranverzerrungen ein niedrigeres Energieniveau liefern als die der Biegung. Diese Tendenz ist üblicherweise mit großen strukturellen Veränderungen verbunden. Somit eignen sich diese Methoden für die frühe Entwurfsphase, in der die Kenntnis über die benötigten Formen kein fortgeschrittenes Stadium erreicht hat. Jedoch nicht selten besteht die Optimierungsaufgabe darin, ein vorhandenes Produkt zu verbessern, ohne große geometrische Modifikationen vorzunehmen. In diesen Fällen sind Verfahren vonnöten, die lediglich lokale Aussteifungen bewirken. Daher ist die automatische Erkennung von Ort und Form dieser lokalen Aussteifungen – in der Literatur als Sickenoptimierung bezeichnet – ein wichtiger Schwerpunkt dieser Arbeit. Dabei wird ein Hauptaugenmerk darauf gelegt, dass die Größe der entstehenden Aussteifungsmulden bzw. Sicken und die Art und Weise wie diese miteinander interagieren (Durchdringungsverhalten) mittels geometrischer Steuerungsparameter vom entwerfenden Ingenieur beeinflussbar sind (mehr Details in Kapitel 7).

5.2 Die Frage der Parametrisierung

Eine der grundlegenden Fragen bzw. Entscheidungen in der Formoptimierung ist die Wahl der Methode zur Formbeschreibung der zu optimierenden (Schalen-) Strukturen. In einer (Form-) Optimierungsaufgabe sind im Allgemeinen drei Modellebenen zu beachten: das Geometrie-, das Optimierungs- und das Analysemodell. Diese drei Ebenen stehen in direkter hierarchischer Verbindung, wie in Abbildung 5.2 zu sehen ist.

Der aktuelle Stand der Technik in der Formoptimierung sieht es vor, dass das geometrische Modell in der obersten Ebene steht, wovon Analyse- und Optimierungsmodell abge-

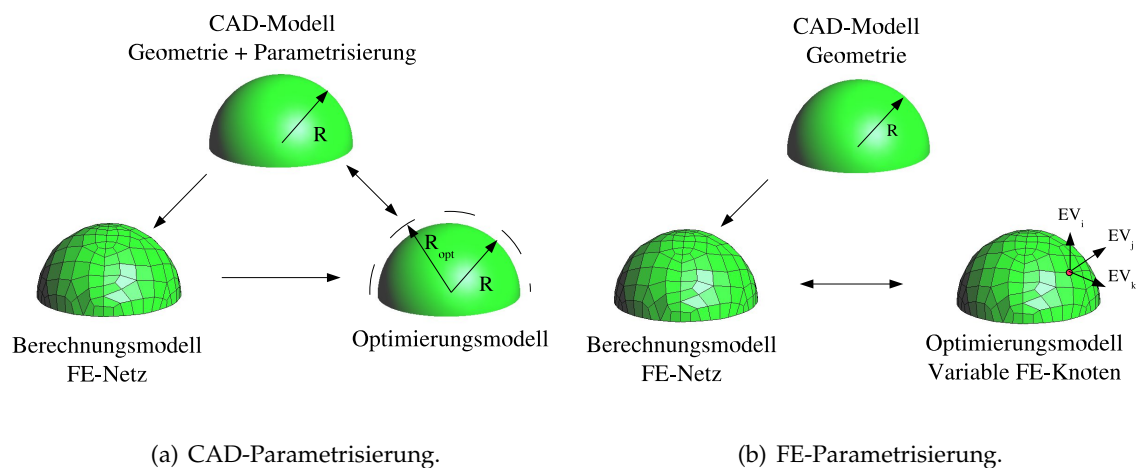


Abbildung 5.2: Die Beziehungen zwischen Geometrie-, Analyse- und Optimierungsmodell.

leitet werden. Die Parametrisierung der Geometrie wirkt sich demnach auf die darunterliegenden Ebenen aus. Diese Vorgehensweise bringt einige Vorteile für den Optimierungsprozess, hat allerdings auch Nachteile, die im Verlaufe des Kapitels erläutert werden. Bei der Formbeschreibung des (Schalen-) Geometriemodells, das in der Regel aus mehreren Grundformen zusammengesetzt ist, übernimmt das CAGD¹ eine essentielle Rolle. Dabei wird die Geometrie bereichsweise mit geometrischen Objekten, auch Patches oder Design-Elemente genannt, diskretisiert [Ble90]. Diese Design-Elemente verfügen über nur wenige Kontrollpunkte und Schlüsselinformationen anhand derer die Form beschrieben und bestimmt wird. Z.B. kann die Form eines Kuppel-Design-Elements (Halbkugel) mittels Radius und Zentrums vollständig beschrieben werden. Im Vergleich dazu werden wesentlich mehr Informationen benötigt, um dieselbe Form mit einem Netz aus Knoten und Elementen zu erfassen. Die Parameter der Design-Elemente werden während der Modellierung der Optimierungsaufgabe als Entwurfsvariablen definiert. Man spricht dabei von der CAD-Parametrisierung. Das Analysemodell, üblicherweise ein FE-Modell, wird durch Vernetzung der Design-Elemente abgeleitet. Im Optimierungsmodell (siehe auch Abschnitt 2.2) wird die Optimierungsaufgabe – Entwurfsvariablen, Zielfunktion und Nebenbedingungen – so formuliert, dass der Optimierungsprozess, die gezielte Verbesserung des Entwurfs, im Optimierungsalgorithmus vollzogen werden kann. Analyse- und Optimierungsmodell sind in dieser Parametrisierung voneinander nur mittelbar abhängig (siehe Abb. 5.2).

Obwohl sich die Parametrisierung der Optimierungsaufgabe basierend auf Design-Elementen² mittlerweile als Standard in der Formoptimierung durchgesetzt hat, ist dieses Modellierungswerkzeug nicht unbedingt intuitiv zu bedienen. Hinzu kommt ein nicht zu vernachlässigender Codierungsaufwand, um die drei o. g. Modelle miteinander zu verknüpfen. Die Komplexität der Umsetzung macht Ergänzungen und Erweiterungen schwer umsetzbar.

¹Computer Aided Geometric Design. Im weiteren Verlauf wird verallgemeinernd nur CAD verwendet.

²Im weiteren Verlauf als CAD-Parametrisierung bezeichnet

Eine alternative Parametrisierungsart ist die Reduktion der Anzahl der benötigten Modelle, indem das Optimierungsmodell direkt mit dem Analysemodell (FE-Modell) verknüpft wird. Darin werden die Raumkoordinaten der Knoten des Finite-Elemente-Netzes³ als Entwurfsvariablen deklariert, womit Analyse- und Optimierungsmodell in einander übergehen. Man spricht dabei von der Parametrisierung direkt am FE-Netz oder kurz FE-Parametrisierung. Das darüber liegende Geometriemodell kann nach wie vor zur Erzeugung des FE-Modells verwendet werden. Allerdings entfällt der Bedarf der Parametrisierung in dieser Ebene, was aus software-technischer Sicht vorteilhaft ist. In Abb. 5.2 werden für beide Parametrisierungen, CAD und FE, die Beziehungen zwischen den unterschiedlichen Modellen schematisch dargestellt.

Die Gründe für die aktuelle Dominanz der CAD-Parametrisierung in der Formoptimierung und die damit verbundenen Vor- und Nachteile für den Optimierungsprozess werden in den kommenden Abschnitten beschrieben. Anschließend wird der Bedarf nach einer anderen Parametrisierungsart – die FE-Parametrisierung – erläutert und begründet.

5.3 Der Anfang war die FE-Parametrisierung

Ein kurzer Rückblick soll an dieser Stelle die Chronik der Entwicklung in der Formoptimierung bis hin zum aktuellen Stand der Technik nachzeichnen. Die Idee, ein vorhandenes FE-Netz, das für die Systemanalyse als diskretisiertes Berechnungsmodell vorliegt, ebenso für die Optimierung zu verwenden, ist nicht neu. Mitte der Siebzigerjahre haben Versuche stattgefunden, diese natürliche Parametrisierung in der Formoptimierung anzuwenden [FRZ75],[UW03],[Spr94]. Die in der Literatur präsentierten Ergebnisse zeigen erhebliche Probleme auf, die damals dazu geführt haben, die FE-Parametrisierung schnell zu verwerfen, um auf die CAD-Parametrisierung als Allheilmittel umzusteigen. Die Ursachen der Probleme in der FE-Parametrisierung wurden daher nicht tiefgründig erforscht. Bevor auf diese noch unverifizierten Probleme eingegangen wird, sollen an dieser Stelle die Schwierigkeiten der Formoptimierung von Freiformschalen mit FE-Parametrisierung anhand von Optimierungsbeispielen einiger Grundformen, wie Kreis- und Rechteckplatten, aufgezeigt werden. Diese Beispiele zeigen symptomatisch die Probleme der FE-Parametrisierung, die zum allgemein herrschenden Urteil bezüglich der Tauglichkeit der FE-Parametrisierung geführt haben [Ble90], [Spr94].

Im ersten Beispiel (Abb. 5.3) wird die Verzerrungsenergie⁴ einer Navier-gelagerten Kreisplatte minimiert (Maximierung der Steifigkeit) für den Lastfall Eigengewicht. Die Ausgangsgeometrie wird mittels geeigneter CAD-Objekte im Preprozessor erstellt und mit dem Feivernetzer vernetzt. Im zweiten Beispiel (Abb. 5.4) wird die Form einer allseitig gelenkig gelagerten quadratischen Platte unter Eigengewicht optimiert. Zur Erstellung des Analysemodells wird diesmal ein strukturiertes Netz verwendet, um zu zeigen, dass die Netzqualität keinen großen Einfluss auf den Charakter des Optimierungsergebnisses hat. In beiden

³Im weiteren Verlauf als FE-Netz bezeichnet.

⁴Sämtliche Formoptimierungsaufgaben in dieser Arbeit und alle vorgestellten Verfahren behandeln ausschließlich die Zielfunktion Verzerrungsenergie. Dies stellt keine Einschränkung der Allgemeingültigkeit der Verfahren dar.

Beispielen basiert die Parametrisierung des Optimierungsmodells auf dem FE-Netz⁵, indem die drei Raumkoordinaten aller FE-Knoten, bis auf die Randknoten, als Entwurfsvariablen deklariert werden. Das Ergebnis der Optimierung beider Strukturen ist in Abb. 5.3 und Abb. 5.4 zu sehen. Das Optimierungsergebnis, qualitativ betrachtet, bestätigt die in der Literatur veröffentlichten Erfahrungen mit der FE-Parametrisierung [UW03],[FRZ75]. Durch die hohe Welligkeit der Lösung und die unregelmäßigen Oszillationen entsteht der Eindruck, lediglich numerischen Schrott zu produzieren, was dazu geführt hat, diese intuitive und einfach umzusetzende Methode aufzugeben.

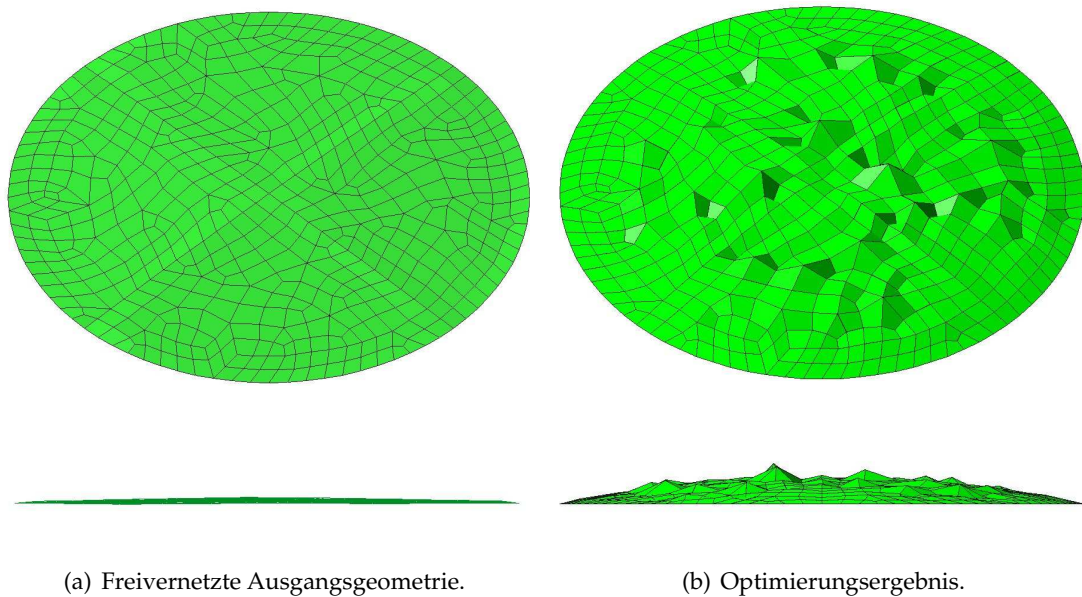
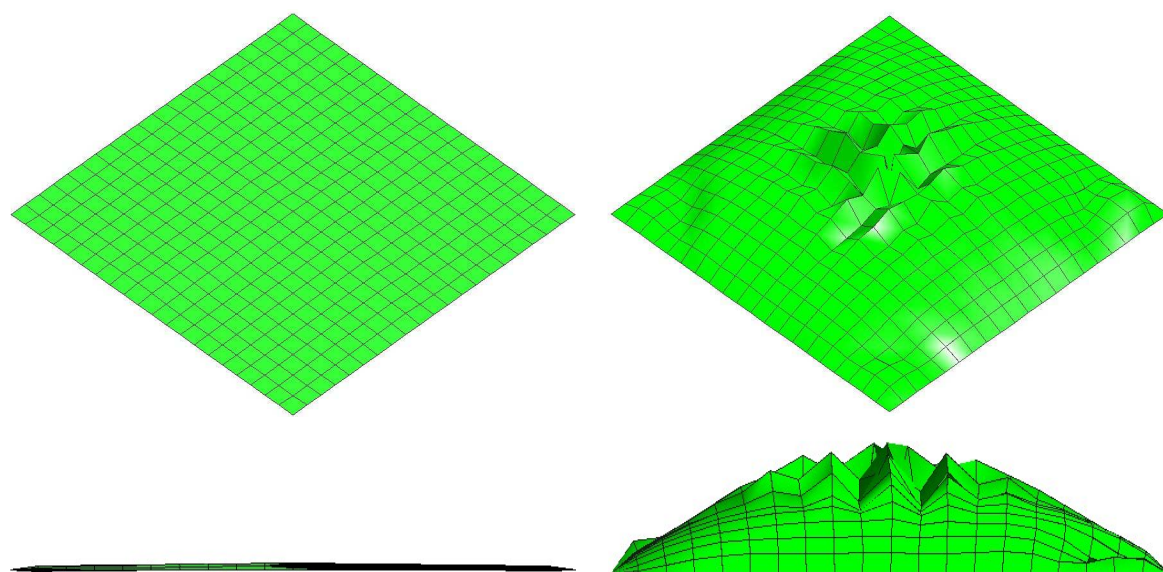


Abbildung 5.3: Erste Versuche der Formoptimierung mit FE-Parametrisierung. Freivernetzte Kreisplatte unter Eigengewicht.

Die charakteristischen Phänomene der FE-Parametrisierung werden im Folgenden zusammengefasst:

- Die Ergebnisse der Optimierung weisen eine hohe Welligkeit auf und die Oszillationen konzentrieren sich auf Regionen mit hohem Zielfunktionsgradienten. Dabei ist eine Vielfalt an Wellenlängen zu beobachten. Das Gesamtbild besteht aus einer Überlagerung von hochfrequenten kurzen Wellen und längeren Wellen bis hin zur großen Welle, die meistens den gesamten Entwurfsraum erfasst.
- Bedingt durch die hohe Welligkeit entsteht ein mathematisch schlecht gestelltes Problem, wodurch die Optimierungsalgorithmen Konvergenzschwierigkeiten erfahren.

⁵Erwähnenswert ist die Tatsache, dass die Startgeometrie nicht exakt eben sein darf, da eine komplett waagerechte Platte (senkrecht zur Belastung) nur auf Biegung abträgt und damit ein Maximum an Verzerrungsenergie liefert. Die Ableitungen der Zielfunktion tendieren am Extremum gegen null⁶ und die Optimierungsaufgabe ist, ausgehend von einem Extremum, mit Gradientenverfahren nicht lösbar. Aufgrund dessen wird die Geometrie aus der Ebene in Plattenmitte etwas ausgelenkt.



(a) Strukturiert vernetzte Ausgangsgeometrie.

(b) Optimierungsergebnis.

Abbildung 5.4: Erste Versuche der Formoptimierung mit FE-Parametrisierung. Quadratische Platte mit strukturiertem Netz unter Eigengewicht.

Die Folge ist die Uneindeutigkeit der Lösungen. Hinzu kommt, dass die resultierenden Formen häufig aus Sicht des Ingenieurs unerwünscht sind, da nicht produzierbar oder unästhetisch. Ähnliche Probleme gab es in den Anfängen der Topologieoptimierung, indem identische FE-Netze unterschiedliche Ergebnisse geliefert haben.

- Ein eingehender Blick auf die Problemzonen zeigt eine fortschreitende Netzinstabilität in Form von Degeneration bzw. Durchdringung der finiten Elemente. Die Qualität der Elemente nimmt im Laufe der Iterationen allmählich ab, was zum Abbruch der Systemanalyse führen kann und sonst mechanisch wenig sinnvolle Systemantworten liefert. Die Qualität eines finiten Elements bezieht sich im Kontext der Elementdegeneration auf dessen Fähigkeit das Strukturverhalten bestmöglich wiederzugeben.
- Ein weiterer an die Lösungswelligkeit gekoppelter Aspekt ist der häufige Krümmungswechsel⁷ in der Strukturgeometrie. Dieses Strukturverhalten wird in der Mathematik als ein schlecht gestelltes bzw. konditioniertes Problem bezeichnet⁸. Die mathematische Sichtweise liefert wichtige Erkenntnisse und Lösungsverfahren, wie Filtertechniken und Stabilisierungsverfahren [TSY90], [Cam04].
- Ein Phänomen, das aus den bisher präsentierten Beispielen (Abb. 5.3 und Abb. 5.4) nicht hervorgeht, ist die Netzabhängigkeit der Lösungen. Dies bedeutet eine direkte

⁷Das Krümmungsmaß ist dabei unerheblich. Es können sowohl die Hauptkrümmungen als auch die mittlere Krümmung verwendet werden.

⁸Ill-posed problems

Verbindung zwischen den „optimalen“ Schalenformen und der verwendeten Diskretisierung. In Bezug auf die beobachtete Welligkeit entstehen dann mit der Netzverfeinerung kürzere Wellen, die vorher beim größeren Netz nicht aufgelöst werden konnten. Eine eindeutige Lösung kann dadurch nicht erreicht werden (siehe Abb. 6.5 in Abschnitt 6.3).

- Mit der Netzabhängigkeit korrespondiert auch die Tatsache, dass das Optimierungsproblem viele lokale Minima besitzt, was die Arbeit von gradientenbasierten Optimierungsalgorithmen zusätzlich erschwert.
- Die hohe Anzahl an Entwurfsvariablen ist ebenso ein Merkmal dieser Parametrisierungsart. Die Optimierungsverfahren werden dadurch zeit- und rechensintensiv. Dieser auf den ersten Blick offensichtliche Nachteil verleiht andererseits der FE-Parametrisierung die erwünschte Form- und Entwurfsfreiheit. Denselben hohen Preis hat man in der Topologieoptimierung erbracht, indem jedes finite Element bzw. dessen relative Dichte zu einer Entwurfsvariablen deklariert wurde.

Die obige Zusammenstellung der Probleme in der FE-Parametrisierung dient der Charakterisierung, um im weiteren Verlauf der Arbeit diese Probleme mathematisch und mechanisch aufzuarbeiten und entsprechende Lösungsansätze zu erarbeiten.

5.4 Die CAD-Parametrisierung

Das Resümee aus den Erfahrungen mit der FE-Parametrisierung war, dass die inhärente „Unglattheit“ der Optimierungsergebnisse das zentrale Problem darstellt. Schafft man es, die FE-Knoten auf einer glatten Oberfläche zu bewegen, verschwinden automatisch die Netz- und Lösungsinstabilitäten. Daraus entstand der Gedanke, übergeordnete CAD-Patches für die Parametrisierung der Optimierungsaufgabe zu verwenden. Es handelt sich dabei um vordefinierte Geometrieobjekte, die jeweils einen größeren Bereich der Strukturgeometrie beschreiben und in Summe das Geometriemodell ergeben. Analyse- und Optimierungsmodell werden danach vom Geometriemodell abgeleitet. Die mathematischen Grundlagen für die Geometriebeschreibungen mittels CAD sowie die softwaretechnische Umsetzung werden in [Ble90], [Far93], [HL92a], [Fal95] und [Kne86] ausführlich beschrieben.

Die Formoptimierung im Allgemeinen, unabhängig von der Parametrisierung, ist eine Aufgabe der Variationsrechnung, bei der die formbeschreibenden Funktionsverläufe gesucht werden, die bestimmte Zielfunktionale optimal erfüllen. Diese Aufgabe, also die Bestimmung der strukturweit geltenden Gestaltfunktionen, kann allerdings nicht für beliebige Körper gelöst werden. Es sind nur wenige analytische Funktionen/Lösungen bekannt, wie Katenoide, die in geschlossener Form aus der Variationsrechnung hergeleitet werden können [Els70]. In diese Sackgasse ist die Strukturmechanik einst geraten, indem die aufgestellten problembeschreibenden Differentialgleichungen nicht geschlossen gelöst werden konnten. Dies hat dazu geführt, dass die Optimierung von beliebigen Formen nur mittels Näherungsverfahren durchgeführt werden kann. Die Geometrie der zu optimierenden Struktur wird durch bereichsweise geltende Ansatzfunktionen angenähert, analog zur Methode

der finiten Elemente. Diese Ansatzfunktionen sind die CAD-Patches bzw. Design-Elemente. Die Diskretisierung der Geometrie transferiert die Optimierungsaufgabe von der Variationsrechnung, in der die unbekanntenen Funktionsverläufe gesucht werden, in eine gewöhnliche Parameteroptimierung, in der die gesuchten Größen die Freiwerte der Ansatzfunktionen sind.

An die Geometrieansatzfunktionen werden in der Regel hohe Glattheitsanforderungen gestellt, sodass die Probleme der Netzin stabilität, des starken Krümmungswechsels und der oszillierenden Lösung behoben werden bzw. erst gar nicht auftreten können.

Die Vorteile der CAD-Parametrisierung können wie folgt zusammengefasst werden:

- Netzstabilität. Das Berechnungsmodell in Form eines FE-Netzes entsteht durch die Vernetzung der Design-Elemente, entweder mittels eines Freivernetzers oder direkt durch den Benutzer, meistens um strukturierte Netze (qualitativ bessere) zu erhalten. In jedem Fall wird das FE-Netz im Laufe des iterativen Optimierungsprozesses nicht direkt vom Optimierungsalgorithmus modifiziert. Die CAD-Parametrisierung sieht es vor, dass lediglich Kontrolldaten der Design-Elemente als Entwurfsvariablen in Frage kommen. Kontrolldaten sind alle Informationen, die zur Beschreibung des Design-Elements benötigt werden, wie Raumkoordinaten der Kontrollknoten, Strukturdicken an den Designknoten, Lochradien oder vorgeschriebene Tangenten [Ble90]. Dadurch dass die Design-Elemente größere Bereiche abdecken, wird die Degeneration der finiten Elemente verzögert und tritt erst ein, wenn ein Patch selber entartet. Dieser Entartungsprozess ist allerdings aufgrund der Größe und der Formbeschreibung wesentlich langsamer als bei feindiskretisierten im dreidimensionalen Raum freibeweglichen finiten Elementen. Insbesondere wenn die Geometrie nach jeder Iteration neu vernetzt wird, was allerdings bei Freivernetzern zeitintensiv sein kann, bleibt die Qualität der finiten Elemente und damit die Qualität der Systemantwort lange erhalten.
- Glattheit der optimalen Strukturen. Die Glattheit der Ergebnisse ist allerdings mehr eine Vorgabe als ein Resultat. Bei der Parametrisierung direkt am FE-Netz waren die welligen und oszillierenden Ergebnisgeometrien der treibende Motor für die Entwicklung der CAD-Parametrisierung. Dabei war es eine Vorgabe, dass die generierten Formen die Glattheit der Anfangsgeometrie nicht verlieren, was durch Glattheits- und Kontinuitätsanforderungen an die verwendeten Polynome und Bézier-Elemente [Far93] erzwungen wird. Unter dem Begriff der Glattheit wird in diesem Kontext verstanden, dass die zweite Ableitung der Geometriefunktion(en) keine Sprünge aufweist.
- Lösungseindeutigkeit. Ein Verdienst der erzwungenen Geometrieglattheit ist unter anderem das Vermeiden der vielen lokalen Minima, die aufgrund der inhärenten Lösungswelligkeit existieren. Das Vorschreiben von Flächenfunktionen mittels der CAD-Patches ist der Versuch, die Wellenlänge im Optimierungsprozess zu kontrollieren, in der Hoffnung diese optimal zu treffen.
- Geringe Anzahl an Entwurfsvariablen. Für die Diskretisierung der Strukturgeometrie werden nur wenige großflächige Design-Elemente benötigt, abhängig von der Komplexität der zu modellierenden Strukturen. Somit wird die Formvielfalt und -freiheit

auf die wenigen Kontrollinformationen der Patches reduziert. Die Dimensionalität des Optimierungsproblems wird entsprechend reduziert, was sich auf die Stabilität und das Konvergenzverhalten des Optimierungsalgorithmus positiv auswirkt.

Die o.g. Vorzüge der CAD-Parametrisierung haben die Akzeptanz der Formoptimierung in der industriellen Praxis erhöht und dazu geführt, dass Anfang der Neunzigerjahre die Entwicklung von leistungsfähigen CAD-Werkzeugen zur gleichzeitigen Modellierung und Parametrisierung der Geometrie einen Schub erfahren hat. In der Anwendung hat der steigende Bedarf an Formfreiheiten im Entwurf und der Wunsch nach Automatisierung des Optimierungsprozesses die Komplexität der CAD-Software erhöht. Trotz dieser rasanten Entwicklung ist die Formoptimierung⁹ über den Einsatz in der späten Entwurfsphase, in der sich die Kenntnis über die gewünschte bzw. benötigte Gestalt in einem fortgeschrittenen Stadium befindet, nicht hinausgekommen. Die Gründe dafür, dass die Formoptimierung nicht den Erfolg der Topologieoptimierung erlangen konnte, liegen im Grundkonzept der CAD-Parametrisierung. Speziell sind folgende Aspekte zu nennen:

- Der ständige Drang nach mehr Funktionalität in der CAD-Software¹⁰ und der Wunsch, diese nahtlos in die Strukturanalyse und -optimierung einzubinden, hat zur Entwicklung mächtiger aber auch komplexer CAD-Tools geführt. Die Modellerstellung und vor allem die Parametrisierung des CAD-Modells wird zu einer zeit- und kostenintensiven Aufgabe.
- Die Gewährleistung der Kontinuität zwischen den benachbarten Patches – vor allem während des Optimierungsprozesses – ist keine triviale Aufgabe.
- Der springende Punkt bei Modellparametrisierung ist die Tatsache, dass die Entscheidung für eine bestimmte Konfiguration von Parametern gewissermaßen die Kenntnis vom gesuchten Optimum impliziert. Dieses Paradoxon resultiert aus der massiven Einschränkung des Suchraumes und der Formfreiheiten im Optimierungsproblem durch Einführung der CAD-Patches. Durch die Wahl von Design-Elementen wird versucht, das Optimum in eine bestimmte Richtung zu steuern, was allerdings nur dann funktioniert, wenn die Parametrisierung geeignet war. Genau darin besteht das Problem der CAD-Parametrisierung, denn bei ungeeigneter Konfiguration der Entwurfsvariablen sind die Ergebnisse unbrauchbar. Die Rückkopplung vom Optimierungsmodell zum CAD-Modell ist kostspielig, da meistens eine komplette Neuparametrisierung notwendig ist. Genau aus diesem Grund sind neue Verfahren für die Anwendung in der Vorentwurfsphase notwendig geworden.

Fazit: die Formoptimierung mit CAD-Parametrisierung ist ein robustes Verfahren für Entwurfsverbesserungen mit geringen Modifikationen – ohne grundsätzliche Änderungen am

⁹Die Formoptimierung mit CAD-Parametrisierung wird in der industriellen Anwendung als Parameteroptimierung bezeichnet. Der Begriff Formoptimierung wird hingegen häufig mit lokalen Oberflächenmodifikationen zwecks der Spannungshomogenisierung (ohne Zielfunktion) in Verbindung gebracht.

¹⁰Preprozessoren

Ausgangsmodell – und ist lediglich für die späte Entwurfsphase geeignet. Der Bedarf an flexiblen Optimierungsverfahren, die hohe Formfreiheiten bieten, bei denen der entwerfende Ingenieur keine a priori Informationen über das Optimum bzw. über das optimale Verhalten seiner Struktur besitzt, erfordert die Rückkehr zur FE-Parametrisierung, bei der die maximale Formfreiheit im Rahmen der Diskretisierung gewährleistet ist. Allerdings müssen die verfahrensspezifischen Probleme verstanden und behandelt werden.

Im Verlauf der nächsten Kapitel wird auf die Phänomene der Optimierung direkt am FE-Modell eingegangen. Dabei werden Methoden vorgestellt, anhand deren die anfänglichen Schwierigkeiten verstanden, kontrolliert und behoben werden.

Kapitel 6

FE-Parametrisierung im Kontext der Formoptimierung

6.1 Einführung

Die in Kapitel 5.3 angesprochenen Phänomene – Welligkeit und Uneindeutigkeit der Lösung, starke Krümmungswechsel in der Strukturgeometrie, die lokalen Minima und die Netzabhängigkeit – haben dazu geführt, dass die Formoptimierung direkt am FE-Modell für untauglich erklärt wurde [Spr94], [UW03],[FRZ75]. Die Forschung in der Formoptimierung setzte seitdem auf das CAD als alleinige Methode zur Modellparametrisierung ungeachtet der Tatsache, dass damit das Ziel, die Formoptimierung als Entwurfs- und Kreativitätswerkzeug im Vorentwurf zu etablieren, nur schwer erreichbar ist. Genau mit dieser Aufgabe – die Anwendung der Formoptimierung im Vorentwurf – beschäftigt sich diese Arbeit.

Auf dem Weg zu einem anwendungsreifen und anwenderfreundlichen Verfahren müssen die Phänomene der Parametrisierung direkt am FE-Modell hinsichtlich Mathematik und Mechanik verstanden und kontrolliert werden.

Ein Sprung zurück zum sprichwörtlich holprigen Anfang soll dabei helfen, die zentralen Phänomene zu identifizieren. In Abb. 6.1 wird das vorige Beispiel der Kreisplatte in einem größeren Maßstab dargestellt.

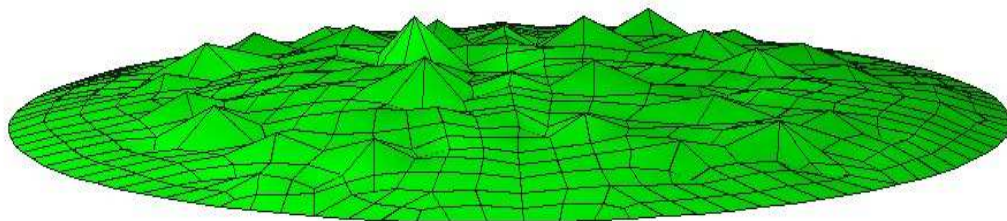


Abbildung 6.1: Phänomene der FE-Parametrisierung.

Der erste Eindruck, das Ergebnis der numerischen Simulation sei beliebig und unkontrollierbar, täuscht. Bei eingehender Beobachtung fällt auf, dass das Wellenmuster gewissen Regeln gehorcht. Es existieren kurze Wellen, mit der kleinsten von der Strukturdiskretisierung

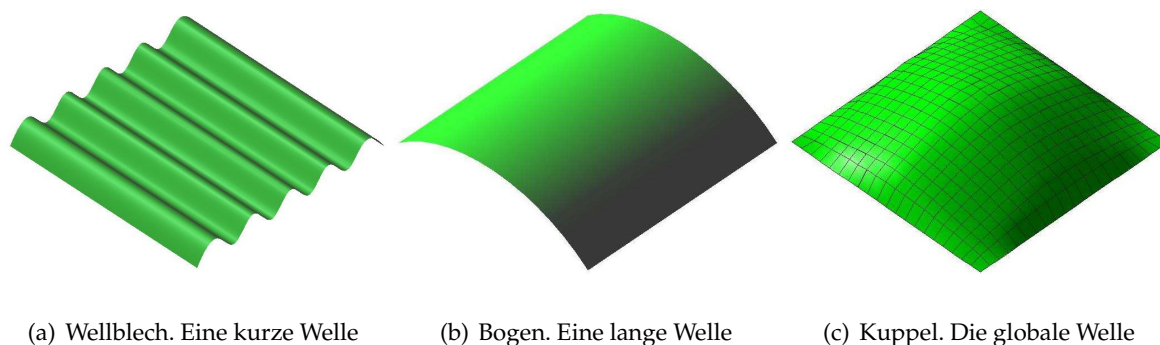


Abbildung 6.2: Lokal kontra global.

darstellbaren Wellenlänge (Netzabhängigkeit), die sich auch mit längeren Wellen überlagern. Diese längeren Wellen bilden eine Hierarchie von Wellenlängen bis hin zur großen strukturweiten Welle.

Die Charakteristik der Welligkeit ist ein Ausdruck für einen Konflikt zwischen lokalen und globalen Phänomenen. Dieses Verhalten, also die Vielfalt an widerstreitenden Lösungen in den unterschiedlichen Skalen, kann am Beispiel der Formoptimierung einer quadratischen Platte, mit dem Ziel die Steifigkeit zu maximieren, erläutert werden (Abbildung 6.2).

Eine Lösung mit lokalen kurzen Wellen kann durch eine Wellblechlösung repräsentiert werden. Es stellt ein lokales Minimum der Verzerrungsenergie dar (Abb. 6.2(a)). Die einfach gekrümmte Zylinderschale, Bogen in eine Richtung, bietet eine lange Welle dar, mit einem niedrigeren Energieniveau (Abb. 6.2(b)), also ein besseres lokales Minimum. Hingegen könnte eine allgemein parabolische Kuppel die globale Welle, globales Minimum der Verzerrungsenergie, sein (Abb. 6.2(c)).

Alle drei Alternativen reduzieren die Verzerrungsenergie des Systems im Vergleich zur ebenen Platte und sind damit zulässige Lösungen. Im Endeffekt obliegt es dem entwerfenden Ingenieur zu entscheiden, welches Design die Anwendungskriterien am besten erfüllt. Es sind selten alleine die mechanischen Kriterien, z.B. kleinste Verzerrungsenergie, die den Entwurf prägen. Vielmehr sind es funktionale und ästhetische Beweggründe, die die Modellierung und letztendlich die Optimierung am meisten beeinflussen. In diesem Sinne wäre ein Verfahren für die frühe Entwurfsphase sehr hilfreich, in dem sich die eine oder andere Skala in der Unmenge an Wellen bzw. Lösungen nach geometrischen übergeordneten Überlegungen herauskristallisieren würde. Die soeben genannten geometrischen übergeordneten Überlegungen können z.B. eine bestimmte Wellenlänge sein, die in der endgültigen Lösung nicht unterschritten werden darf, worauf im weiteren Verlauf näher eingegangen wird.

Als Fazit wird konstatiert: in der Formoptimierung herrscht ein ständiger Konflikt zwischen den verschiedenen möglichen Wellen, der sich, falls keine Lösung dominiert, als eine zufällige Überlagerung vieler Wellen beliebiger Wellenlänge darstellt. Die erfolgreiche Formoptimierung mit der FE-Parametrisierung bedingt die Kontrolle der Welligkeit unter benutzerdefinierten Gesichtspunkten, wie die Vorgabe der kleinsten gewünschten Welle z.B. aus Fertigungs- oder Designgründen. D.h. die Verfahren zur Formoptimierung sollten in der Lage sein, ein geometrisches Maß vom entwerfenden Ingenieur entgegenzunehmen,



(a) Der Aquädukt war Teil der Wasserversorgung für die Stadt Nemausus



(b) Kuppel des Pantheon-Tempels in Rom

Abbildung 6.3: Optimale Lastabtragung in der Geschichte.

um damit die Strukturwelligkeit so zu beeinflussen, dass keine kürzeren Wellenlängen im optimierten Ergebnis auftauchen.

6.2 Bedeutung der Welligkeit

Die Einflussnahme auf die im Optimierungsergebnis vorhandenen und darzustellenden Wellenlängen kann nur dann vollzogen werden, wenn grundlegendes Verständnis für den Hergang der Oszillationen und deren Überlagerungsmechanismus vorhanden ist. Ursachenforschung soll betrieben werden, um den Anteil der strukturellen Phänomene und deren Auswirkung auf die Welligkeit herauszufinden. Die Forschung in der Elementtechnologie hat in den letzten Jahrzehnten den enormen Einfluss der Locking-Effekte auf die Ergebnisse der Systemanalyse aufgezeigt [BS90], [Bis99], [Kos04]. Die Übertragung dieser Untersuchungen auf den Optimierungsprozess hat erst vor wenigen Jahren begonnen. Die ersten Ergebnisse in [BCB04] und [Cam04] zeigen den Einfluss dieser Effekte auf die Systemantwort, insbesondere in der Sensitivitätsanalyse. In Kapitel 9 wird das Locking und dessen Einfluss auf die Formoptimierung mithilfe von ausgewählten Beispielen kurz vorgestellt. Viele der im weiteren Verlauf präsentierten Verfahren sind Kombinationen von Techniken, die sich in anderen Disziplinen, wie Topologieoptimierung, Membranformfindung, Signaltechnik und CAD-Glättung bewährt haben.

Auf der Suche nach optimalen Formen stellt sich die Frage, inwiefern die Welligkeit eine optimale Lastabtragung bewirken kann. Zum Teil kann die Mechanikgeschichte Auskunft darüber geben. Vor langer Zeit haben unsere Vorfahren die Vorzüge der Bogenwirkung entdeckt. Die römischen Arkaden und die vielen Kirchenkuppeln sind nur wenige Beispiele dafür (Abb. 6.3). Andererseits begünstigt ein gewisses Maß an Welligkeit in der Strukturgeometrie die Lastabtragung, indem die Systemsteifigkeit erhöht wird. In Abb. 6.4 sind einige

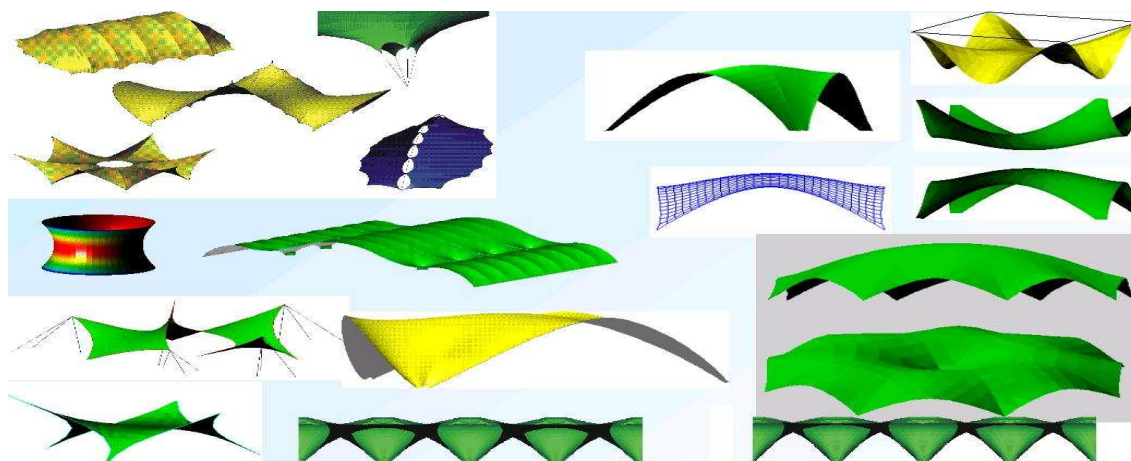


Abbildung 6.4: Optimale Geometrien aus der Membranformfindung.

Geometrien aus der Membranformfindung dargestellt. Der Eindruck, der damit vermittelt werden soll, ist die Tatsache, dass eine Grundwelligkeit in einer Struktur die Verzerrungsenergie gegenüber ebenen oder weniger welligen Geometrien reduzieren kann.

Mit der Erkenntnis, dass die anfänglich als wirre Mondlandschaft bezeichneten Oszillationen in den Lösungen der FE-Parametrisierung eine verschlüsselte Botschaft enthalten, können mathematische Verfahren zur Kontrolle der Wellenlängen angewandt und angepasst werden. Diese Verfahren sind in der Literatur unter dem Begriff Filtertechniken zu finden.

Die mit der hohen Welligkeit einhergehende Netzin stabilität und Elementdegeneration kann mit dem ständigen Vorzeichenwechsel der Hauptkrümmungen kausal verknüpft werden, wodurch Regularisierungs- bzw. Stabilisierungsverfahren [TSY90] mit Stabilisierungstermen basierend auf dem Krümmungsinformationen zur Reduktion der Strukturwelligkeit angewandt werden können. Ein vielversprechendes Regularisierungsverfahren wird in [Cam04] vorgestellt. Darin wird zur Zielfunktion F ein geeigneter Krümmungsterm wie folgt addiert:

$$F_{\beta} = F + \frac{\beta}{2} \int_{\Omega} (\kappa - \bar{\kappa})^2 d\Omega \quad (6.1)$$

mit

F	Originalzielfunktion.
F_{β}	Regularisierte Zielfunktion.
β	Regularisierungsterm.
κ	Ein geeignetes Krümmungsmaß (z.B. mittlere Krümmung).
$\bar{\kappa}$	Vorgeschriebene Krümmungsfunktion desselben Krümmungsmaßes.

In Gl. (6.1) wird jede Abweichung von der vorgeschriebenen Krümmungsfunktion $\bar{\kappa}$ bestraft, wodurch eine Glättung der optimierten Geometrien erreicht wird.

Eine weitere Maßnahme zur Wellenkontrolle bieten die Techniken der Variablentransformation, bei denen die Aufgabenformulierung und die Parametrisierung von Geometrie und

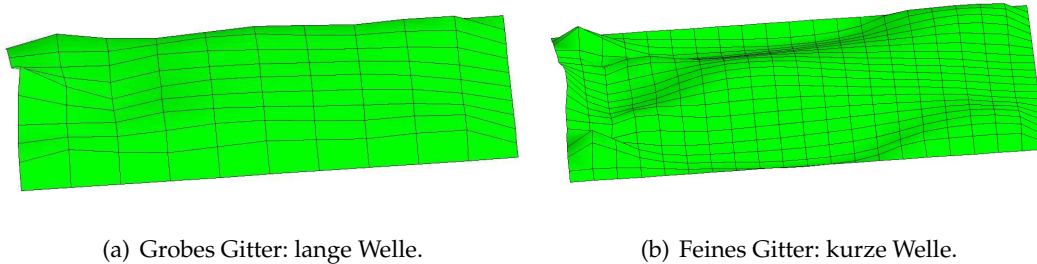


Abbildung 6.5: Netzabhängigkeit der Ergebnisse. Ein unerwünschter Effekt.

Funktionen in den Krümmungsraum transformiert werden. Die Variablentransformation wird erfolgreich im eindimensionalen Fall angewandt [BNB03]. Die Übertragung dieser Verfahren in den dreidimensionalen Raum für Schalentragwerke ist Gegenstand aktueller Forschungsarbeiten.

6.3 Kontrolle der Welligkeit mit Filtertechniken

Die Filtertechniken finden ihren Ursprung in der Signaltechnik, in der die Verarbeitung von analogen und digitalen Signalen die Anwendung von geeigneten Filtern bedarf [RG75, Nat83]. Nicht nur in der numerischen Simulation finden die Filtertechniken Anwendung, denn auch die Sozialwissenschaften, die Statistik, Probabilität, Stochastik u.v.m. sind auf die Bereinigung von Störungen und unerwünschten Effekten angewiesen, um aussagekräftige Ergebnisse zu liefern.

Die Formoptimierung von Freiformschalen ohne weitere Maßnahmen führt, zu Formen, deren Welligkeit von dem zugrunde liegenden Diskretisierungs- und Approximationsgitter abhängt. Je feiner das Netz, desto hochfrequenter und kurzwelliger die Ergebnisse. Diese Netzabhängigkeit ist in Abb. 6.5 am Beispiel einer einseitig freiliegenden Platte dargestellt¹. Auf diese Tatsache hat jedoch die Parametrisierung prinzipiell keinen Einfluss. Es gilt gleichermaßen für CAD- und FE-Netze. Der Grund für die glatteren Ergebnisse der CAD-Parametrisierung ist lediglich in der größeren Diskretisierung der CAD-Patches begründet. Für die Approximation der Strukturgeometrie reichen häufig großflächige Design-Elemente. Eine ähnlich grobe Diskretisierung bei einem FE-Netz würde im Hinblick auf die schlechten mechanischen Eigenschaften ausscheiden.

Die Welligkeitskontrolle in der CAD-Parametrisierung erfolgt durch die Definition der Polynomordnung der formbeschreibenden Design-Elemente und kann aus diesem Grund nachträglich nur durch umständlichen Wechsel des Patchtyps erreicht werden, womit die Definition von zusätzlichen Kontrollknoten einhergeht.

Zur Wellenkontrolle in der FE-Parametrisierung können Filtertechniken mit flexiblen Algorithmen herangezogen werden, bei denen die Polynomordnung der Filterfunktion und

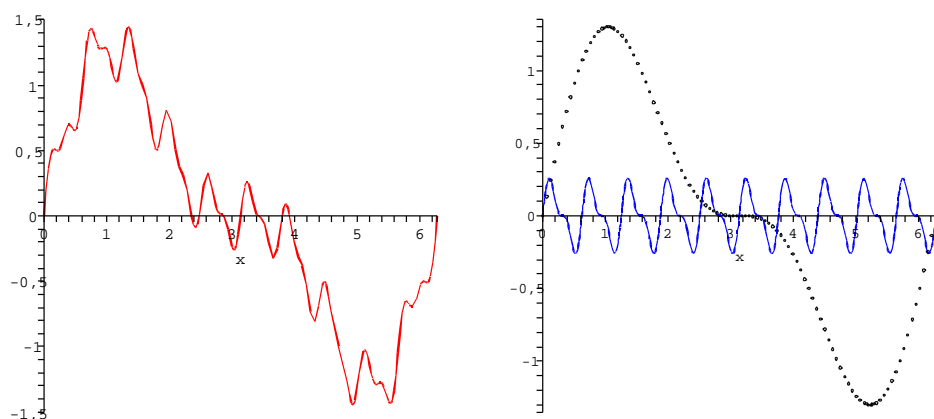
¹Die Platte wird mit einer Gleichflächenlast belastet. Drei Seiten sind Navier-gelagert, der linke Rand ist frei. Alle nicht gelagerten Knoten sind im dreidimensionalen Raum variabel.

die Ausdehnung der Integrationsdomäne die Glattheit der Optimierungsergebnisse auf einfache Weise steuern können. Der wesentliche Unterschied zur CAD-Parametrisierung ist, dass keine Änderungen in Geometrie- oder FE-Modell notwendig sind. Es müssen lediglich Steuerungsparameter angepasst werden.

6.3.1 Mathematische Grundlagen

Die Filtertechniken erfahren in vielen Disziplinen hohe Akzeptanz. Die wesentlichen Grundlagen des in dieser Arbeit entwickelten Filters für die Formoptimierung basieren auf der Analogie zu ähnlichen Phänomenen in der Signaltechnik, in der, insbesondere bei der Digitalisierung von analogen Signalen, dem so genannten Sampling, geeignete Tiefpassfilter verwendet werden, um das Eingangssignal bandzubegrenzen². Ein Tiefpass- oder Antialiasingfilter ist ein mathematisches Instrument, um die hochfrequenten Anteile einer Welle zu entfernen [MM04], wie im folgenden Beispiel erläutert wird.

Gegeben ist die Funktion $F(x) = \sin(x) + \frac{1}{2}\sin(2x)$, die den globalen Trend einer Welle, z.B. ein Signal darstellt. Überlagert wird eine hochfrequente Störung $F_{noise} = \frac{1}{10}\sin(20x) + \frac{1}{5}\sin(10x)$, die eine Verrauschung der interessierenden Informationen repräsentiert. In Abb. 6.6(a) ist die verrauschte Gesamtfunktion $F(x) + F_{noise}$ dargestellt. Die jeweiligen Anteile der verrauschten Welle, die unverrauschte Funktion $F(x)$ gestrichelt und die Verrauschung F_{noise} in durchgezogener Linie, sind in Abb. 6.6(b) zu sehen.



(a) Verrauschte Gesamtwelle.

(b) Bestandteile der verrauschten Funktion. Grundwelle (gestrichelt), Verrauschung (durchgezogen).

Abbildung 6.6: Beispiel einer gestörten bzw. verrauschten Welle.

Geht man davon aus, dass die Grundwelle $F(x)$ die wesentlichen interessierenden Informationen enthält, und dass die kurzweiligen Anteile lediglich störende Nebeneffekte sind,

²Die Bandbegrenzung bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die hochfrequenten Anteile des Eingangssignals entfernt werden, sodass die höchste im Spektrum vertretene Frequenz bekannt bzw. festgelegt wird.

dann besteht die Aufgabe darin, diese Anteile herauszufiltern, bevor die Funktion, in diesem Beispiel ein Signal, weiter verarbeitet wird. Zu diesem Zweck kann auf elementare Techniken der Signalfilterung und Wavelettransformation zurückgegriffen werden [SN96], worin eine zu transformierende Funktion mittels geeigneter Formfunktionen approximiert wird. Die Originalfunktion $F(x)$ wird somit durch die Approximation $\tilde{F}(x)$ repräsentiert.

$$F(x) \simeq \tilde{F}(x) = \sum_{i=1}^n N_i^p(x) \cdot F_i \quad (6.2)$$

Dabei ist n Anzahl der Stützstellen, an denen die Originalfunktion ausgewertet wird, p die Polynomordnung, und F_i ist die Auswertung an der Stützstelle i . Aus Gl. (6.2) wird deutlich, dass die Wahl der Formfunktionen maßgebend ist für Wellenlängen, die mittels der Approximation dargestellt werden können. Somit ist es möglich, durch eine Linearkombination mehrerer Formfunktionen beliebige Wellenlängen der Originalfunktion wiederzugeben. Mit anderen Worten: Die Wahl der Formfunktion $N_i(x)$ legt die kleinste mögliche Wellenlänge fest.

Ein weiterer wichtiger Begriff in diesem Kontext stellt die duale Funktion $D_i(x)$ dar, die definitionsgemäß eine komplementäre Funktion zur Formfunktion ist. Laut Definition gilt:

$$\frac{1}{\|\Omega\|} \int_{\Omega(x)} N_i^p(\xi) \cdot D_j^p(\xi) d\xi = \delta_{ij} \quad (6.3)$$

Mit Ω als Integrationsbereich, der die Rolle des Einzugsbereiches des Filters übernimmt und später als Filterradius bezeichnet wird. Die duale Funktion gewinnt durch das Einsetzen von Gl. (6.3) in Gl. (6.2) an Bedeutung, indem die Amplituden der Originalfunktion an den Stützstellen i aus der Approximation $\tilde{F}(x)$ herausgefiltert werden können:

$$\begin{aligned} \hat{F}_i &= \frac{1}{\|\Omega\|} \int_{\Omega(x)} \tilde{F}(\xi) \cdot D_i^p(\xi) d\xi &= \\ &= \frac{1}{\|\Omega\|} \int_{\Omega(x)} \left(\sum_{i=1}^n N_i^p(x) \cdot F_i \right) \cdot D_i^p(\xi) d\xi &= \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(x)} N_i^p(\xi) \cdot D_j^p(\xi) d\xi \cdot F_i &= \frac{1}{\|\Omega\|} F_i(x) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Es ist ersichtlich, dass die resultierende Amplitude \hat{F}_i eine von kurzen Wellen, die durch D_i^p nicht aufgelöst werden können, bereinigte Evaluierung ist. Bei geeigneter Wahl der dualen Funktion,

$$\int_{\Omega(x)} D_i^p(\xi) d\xi = 1 \quad (6.5)$$

kann die Amplitude der Originalfunktion reproduziert werden.

$\hat{F}_i(x)$ ist der gefilterter Verlauf der Originalfunktion, dabei wird um jeden Punkt x der Integrationsbereich Ω zur Filterung herangezogen. In gewissem Sinne wird innerhalb Ω eine Mittelung vorgenommen, was wiederum der Idee einer Glättung entspricht. Es ist wichtig

zu erkennen, dass die Glättung unter Berücksichtigung benachbarter Funktionswerte keinen Qualitätsverlust darstellt, sondern den gefilterten und niederfrequenten Anteil liefert, der im Verlaufe der Integration lediglich von den hochfrequenten Oszillationen bereinigt wird. Informationsverluste treten erst dann ein, wenn die duale Funktion die globale Welle nicht mehr zu repräsentieren vermag.

Für die Umsetzung dieser Techniken in Form eines Filters für Formoptimierung von Freiformschalen – zweidimensionale Strukturen im dreidimensionalen Raum – müssen noch einige Fragestellungen bezüglich der Diskretisierung der Gl. (6.4) geklärt werden.

Die Strukturanalyse der optimierten Schalentragwerke wird in dieser Arbeit ausschließlich mit der Methode der finiten Elemente durchgeführt. Somit sind alle in der Optimierung involvierten Funktionen nur implizit bekannt und können damit nicht analytisch integriert werden. Daher muss Gl. (6.4), basierend auf Funktionsauswertungen, an speziellen Stellen numerisch integriert werden.

Eine weitere offene Frage ist die Wahl geeigneter dualer Funktionen, die gezielt unerwünschte Oszillationen in der Systemantwort und damit in den optimierten Geometrien entfernen.

Bevor die speziell auf die Optimierung von Schalentragwerken angepasste Form der allgemeinen Filtergleichung 6.4 erläutert wird, sollen zunächst einige Formfunktionen und duale Funktionen eingeführt werden. Darauf hin soll die Anwendung des allgemeinen Filters in analytischer Form auf das einführende Beispiel (Abb. 6.6) die Effektivität der bisher präsentierten Verfahren demonstrieren.

6.3.2 Formfunktionen und duale Funktionen

Das Prinzip der Formfunktionen im Kontext der Filterung unterscheidet sich nicht von dem in der Methode der finiten Elemente. Die Polynomordnung des Ansatzes hängt von der Anzahl der Stützstellen bzw. Anzahl der Informationen im Geltungsbereich ab. Lineare Formfunktionen $ax + b$ benötigen zwei Informationen zur Bestimmung der Koeffizienten a und b , quadratische benötigen drei Stützstellen usw. Die Funktionsverläufe für beliebige Ansatzordnung p kann mit den Lagrange-Polynomen bestimmt werden [ZT00]:

$$N_i^p(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)\dots(\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1})(\xi - \xi_{p+1})}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2)\dots(\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1})(\xi_i - \xi_{p+1})} \quad (6.6)$$

Dabei ist ξ die lokale Variable der Formfunktion und ξ_i die benötigten Stützstellen. Die korrespondierenden dualen Funktionen werden hingegen mit Hilfe von Gl. (6.3), die Komplementaritätsbedingung, ermittelt. Es entsteht ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösung die Koeffizienten der dualen Funktionen ergibt. Der Geltungs- bzw. Integrationsbereich der Variable ξ wird üblicherweise $\Omega = [0, 1]$ gewählt.

Dieser Vorgang, die Bestimmung der Koeffizienten der dualen Funktion, wird im Folgenden exemplarisch für einen quadratischen Ansatz durchgeführt.

Die quadratischen Formfunktionen mit drei Stützstellen können aus Gl. (6.6) ermittelt werden:

$$N_1^2(\xi) = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} \quad (6.7)$$

$$N_2^2(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} \quad (6.8)$$

$$N_3^2(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)} \quad (6.9)$$

Mit $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = \frac{1}{2}$ und $\xi_3 = 1$ ergibt sich:

$$N_1^2(\xi) = 2\xi^2 - 3\xi + 1 \quad (6.10)$$

$$N_2^2(\xi) = 4\xi - 4\xi^2 \quad (6.11)$$

$$N_3^2(\xi) = 2\xi^2 - \xi \quad (6.12)$$

Die korrespondierenden dualen Funktionen werden wie folgt definiert:

$$D_1^2(\xi) = a_1\xi^2 + b_1\xi + c_1 \quad (6.13)$$

$$D_2^2(\xi) = a_2\xi^2 + b_2\xi + c_2 \quad (6.14)$$

$$D_3^2(\xi) = a_3\xi^2 + b_3\xi + c_3 \quad (6.15)$$

Die Anwendung der Gl. (6.3) ergibt ein Gleichungssystem mit neun Unbekannten, dessen Lösung den gesuchten Koeffizienten a_i , b_i und c_i entspricht. Exemplarisch wird Gl. (6.3) für die Kombination N_2^2 und D_3^2 ausgeschrieben (eine der 9 Gleichungen):

$$\int_0^1 N_2^2 \cdot D_3^2 d\xi = \delta_{23} \quad (6.16)$$

$$\int_0^1 (4\xi - 4\xi^2) \cdot (a_3\xi^2 + b_3\xi + c_3) d\xi = 0 \quad (6.17)$$

$$\int_0^1 (4a_2\xi^3 + 4b_2\xi^2 + 4c_2\xi + -4a_2\xi^4 + 4b_2\xi^3 - 4c_2\xi^2) d\xi = 0 \quad (6.18)$$

$$\frac{1}{5}a_2 + \frac{1}{3}b_2 + \frac{2}{3}c_2 = 0 \quad (6.19)$$

In den Tabellen 6.1, 6.2 und 6.3 werden die Formfunktionen und die dazugehörigen dualen Funktionen bis zur Polynomordnung drei angegeben.

6.3.3 Anwendungsbeispiel

Das in Kap. 6.3.1 begonnene Beispiel wird in diesem Abschnitt mit dem vorgestellten Filterverfahren behandelt. Die Aufgabe besteht darin, die Verrauschung aus der Gesamtwelle $F_{ges}(x) = \sin(x) + \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{10}\sin(20x) + \frac{1}{5}\sin(10x)$ (Abb. 6.6) herauszufiltern, um die Grundwelle $F(x) = \sin(x) + \frac{1}{2}\sin(2x)$ zu erhalten, kurzum die kurzwelligen Anteile sind zu eliminieren. Um die unterschiedlichen Filterfunktionen beurteilen zu können, ist es wichtig herauszufinden, was für eine Wellenlänge die Verrauschung besitzt. Aus den zwei Wellen

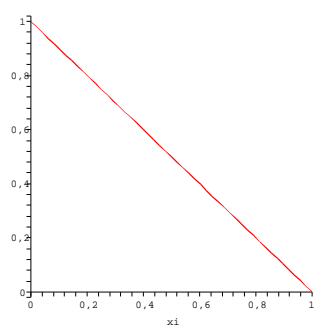
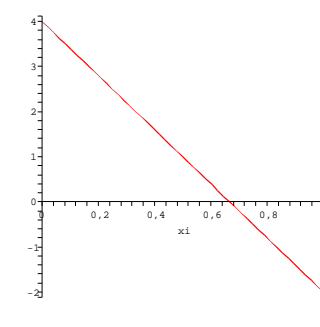
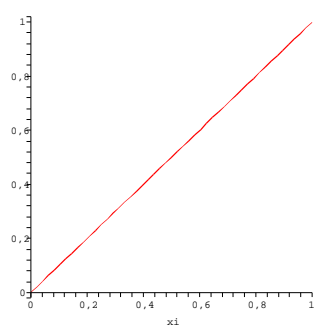
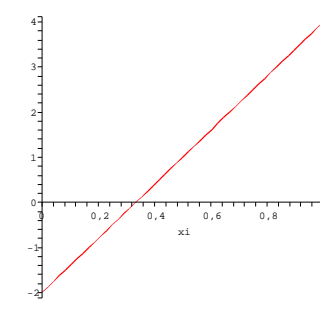
i	Formfunktion	Duale Funktion
1		
	$N_1^1(\xi) = 1 - \xi$	$D_1^1(\xi) = 4 - 6\xi$
2		
	$N_1^1(\xi) = \xi$	$D_1^1(\xi) = -2 + 6\xi$

Tabelle 6.1: Lineare Formfunktionen ($p = 1$) und die korrespondierenden dualen Funktionen.

$\frac{1}{10}\sin(20x)$ und $\frac{1}{5}\sin(10x)$ ist ersichtlich, dass die maßgebende Wellenlänge $W_{crit} = \frac{\pi}{5}$ beträgt.

Die Anwendung eines Filters mit einer dualen Funktion D^p erfolgt nach Gl. (6.4). Eine Lineare duale Funktion,

$$D^1 = 1 - \frac{\tilde{\xi} - \xi_i}{R} \quad (6.20)$$

mit $R = \frac{\|\Omega\|}{2}$ die Hälfte des Integrationsbereiches, was auch als Filterradius bezeichnet wird, liefert folgendes Ergebnis für unterschiedliche Werte für R (Abb. 6.7, Abb. 6.8 und Abb. 6.9):

Die zentrale Aussage der abgebildeten Diagramme ist die Beziehung zwischen Filterradius und den Wellenlängen, die in der gefilterten Funktion immer noch dargestellt werden. Je größer der Filterradius ist, desto weniger Details – kurze Wellen – können aufgelöst werden. Einen Schwellwert bzw. eine spürbare Grenze stellt der Radius $R = W_{crit}$ dar, da exakt bei dieser Einzugsbreite die Verrauschung eliminiert werden kann. Jeder Filterradius kleiner als die kritische Wellenlänge W_{crit} lässt die hochfrequente Verrauschung nicht komplett verschwinden Abb. 6.7. Bei Filterradien größer als W_{crit} , aber kleiner als die Wellenlänge der Grundwelle, wirkt sich der Filterungsprozess nicht mehr auf die charakteristische Wellenlänge der geglätteten Funktion aus, lediglich die Amplituden der Grundwelle sind von der Filterung betroffen. Dies stellt aber in aller Regel kein Problem dar, denn die Funktionswerte, insbesondere die der Sensitivitäten, werden im Optimierungsalgorithmus vor jeder

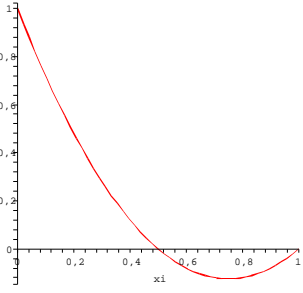
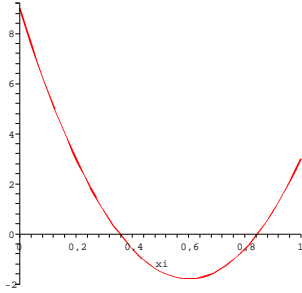
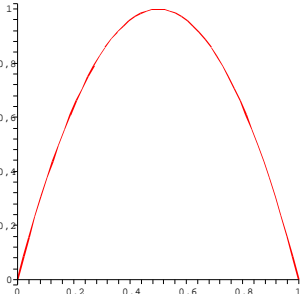
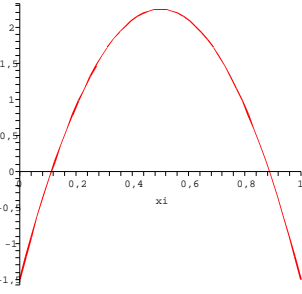
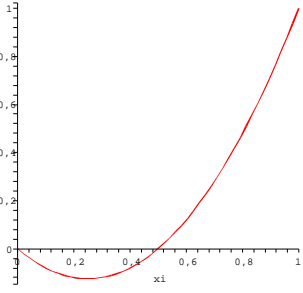
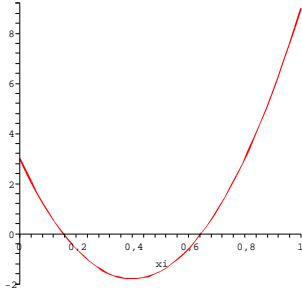
i	Formfunktion	Duale Funktion
1		
	$N_1^2(\xi) = 1 - 3\xi + 2\xi^2$	$D_1^2(\xi) = 9 - 36\xi + 30\xi^2$
2		
	$N_2^2(\xi) = 4\xi - 4\xi^2$	$D_2^2(\xi) = -\frac{3}{2} + 15\xi - 15\xi^2$
3		
	$N_3^2(\xi) = -\xi + 2\xi^2$	$D_3^2(\xi) = 3 - 24\xi + 30\xi^2$

Tabelle 6.2: Quadratische Formfunktionen ($p = 2$) und die korrespondierenden dualen Funktionen.

Iteration normiert. Insofern ist die Wahl des Filterradius eine nicht all zu sehr sensible Entscheidung, da es ausreicht, eine Einzugsbreite zu wählen, bei der die Verrauschung nicht mehr aufgelöst werden kann.

Allerdings ist darauf zu achten, den Radius nicht zu groß zu wählen, sodass die Grundwelle nicht mehr dargestellt werden kann. Z.B bei dem obigen Beispiel führt die Wahl $R = 2\pi$ zum Verschwinden der gesamten Informationen, da die Gesamtwelle im Integral geglättet wird. Die gewichtete Mittelung ergibt exakt die Nullamplitude.

Die Verwendung einer quadratischen dualen Funktion,

$$D^2 = 1 - \left(\frac{\xi - \xi_i}{R}\right)^2 \quad (6.21)$$

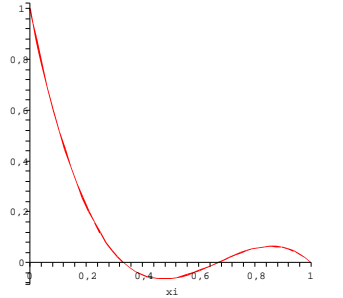
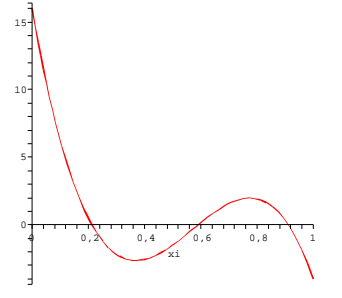
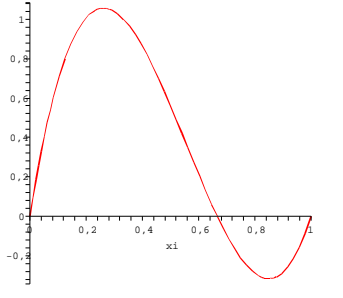
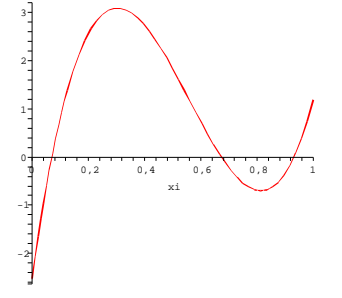
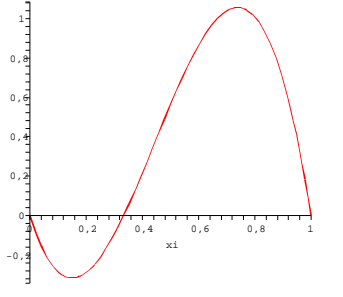
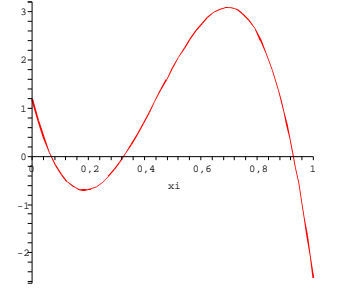
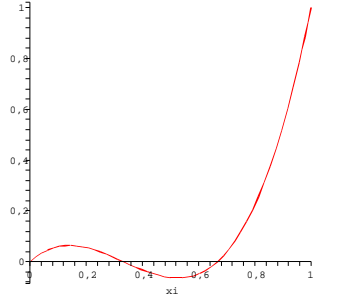
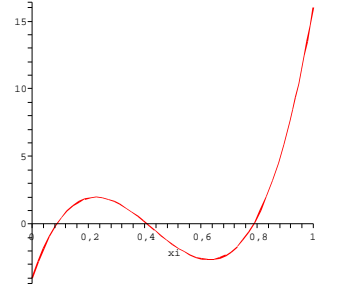
i	Formfunktion	Duale Funktion
1		
	$N_1^3(\xi) = 1 - \frac{11}{2}\xi + 9\xi^2 - \frac{9}{2}\xi^3$	$D_1^3(\xi) = 16 - 120xi + 240xi^2 - 140xi^3$
2		
	$N_2^3(\xi) = 9\xi - \frac{45}{2}\xi^2 + \frac{27}{2}\xi^3$	$D_2^3(\xi) = -\frac{68}{27} + \frac{380}{9}\xi - \frac{860}{9}\xi^2 + \frac{1540}{27}\xi^3$
3		
	$N_3^3(\xi) = -\frac{9}{2}\xi + 18\xi^2 - \frac{27}{2}\xi^3$	$D_3^3(\xi) = \frac{32}{27} - \frac{200}{9}\xi + \frac{680}{9}\xi^2 - \frac{1540}{27}\xi^3$
4		
	$N_4^3(\xi) = \xi - \frac{9}{2}\xi^2 + \frac{9}{2}\xi^3$	$D_4^3(\xi) = -4 + 60\xi - 180\xi^2 + 140\xi^3$

Tabelle 6.3: Kubische Formfunktionen und die korrespondierenden dualen Funktionen $p = 3$.

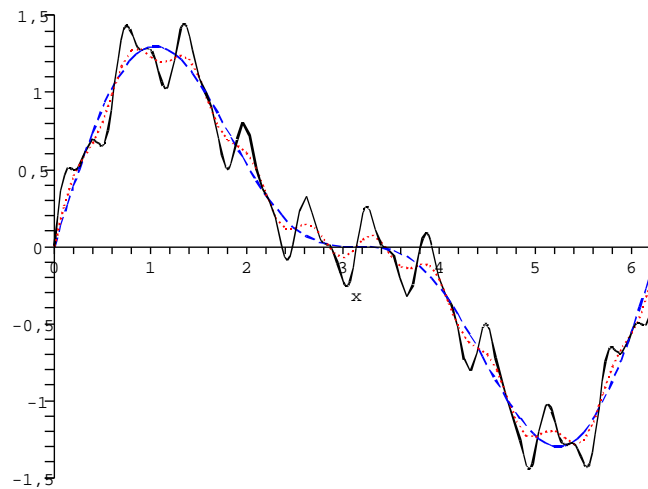


Abbildung 6.7: Filterung mittels linearer dualer Funktion $R = \frac{W_{crit}}{2} = \frac{\pi}{10}$. Verrauschte Gesamtwelle (durchgezogene Linie), Grundwelle (gestrichelte Linie), gefilterte Welle (punktierter Linie).

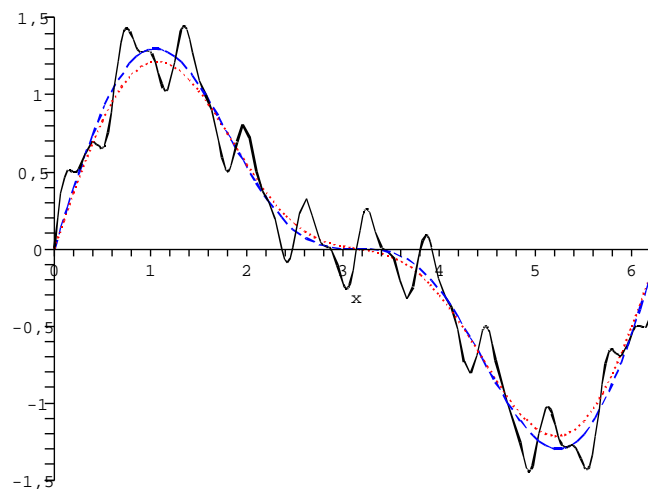


Abbildung 6.8: Filterung mittels linearer dualer Funktion $R = W_{crit} = \frac{\pi}{5}$. Verrauschte Gesamtwelle (durchgezogene Linie), Grundwelle (gestrichelte Linie), gefilterte Welle (punktierter Linie).

liefert ein Ergebnis, das in Abb. 6.10, 6.11 und 6.12 zu sehen ist.

Es ist ersichtlich, dass sich die Wirkung des quadratischen Filters prinzipiell nicht von der des linearen unterscheidet. Das wesentliche Charakteristikum der Filterung, bei der die Glättung der kurzen Wellen erst ab einem Filterradius $R \geq W_{crit}$ stattfindet, bleibt erhalten. Bei genauer Betrachtung stellt man fest, dass die Filterwirkung im Vergleich zum linearen Filter etwas stärker ist. D.h. bei Unterschreitung der kritischen Wellenlänge $R < W_{crit}$ werden die Oszillationen der Verrauschung etwas besser gedämpft. Dieser Trend setzt sich mit

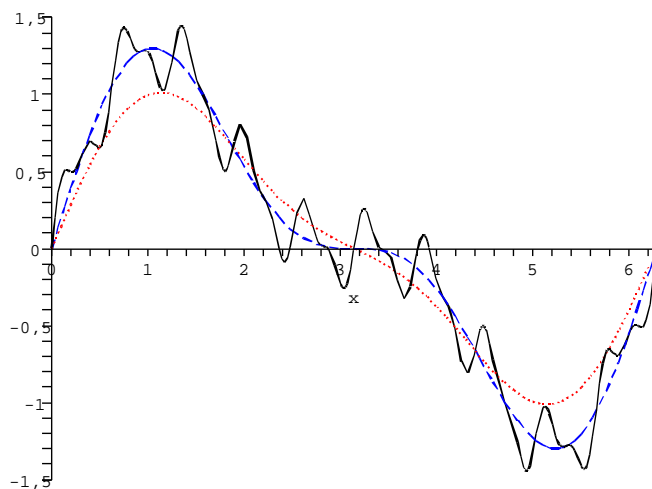


Abbildung 6.9: Filterung mittels linearer dualer Funktion $R = 2W_{crit} = \frac{2\pi}{5}$. Verrauschte Gesamtwelle (durchgezogene Linie), Grundwelle (gestrichelte Linie), gefilterte Welle (punktier-te Linie).

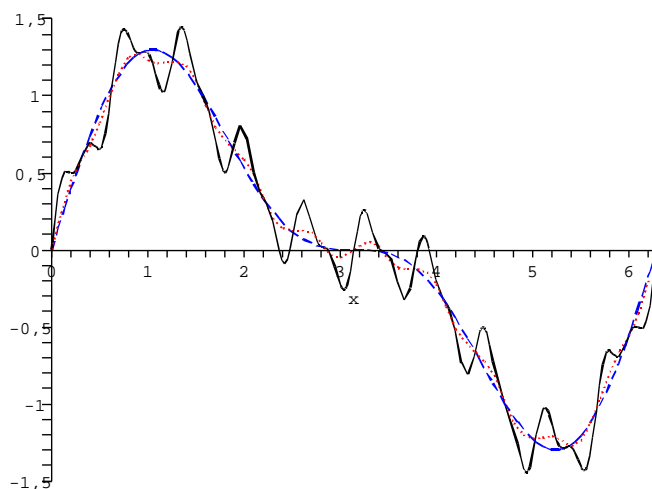


Abbildung 6.10: Filterung mittels quadratischer dualer Funktion $R = \frac{W_{crit}}{2} = \frac{\pi}{10}$. Verrauschte Gesamtwelle (durchgezogene Linie), Grundwelle (gestrichelte Linie), gefilterte Welle (punktier-te Linie).

steigender Polynomordnung fort.

6.4 Filtertechniken in der Formoptimierung. Die globale Filterung

Wie in Kap. 5.3 erläutert, leidet die Formoptimierung direkt am FE-Netz unter der inhärenten Lösungswelligkeit mit den damit verbundenen Nebeneffekten, wie Netzinstabilität,

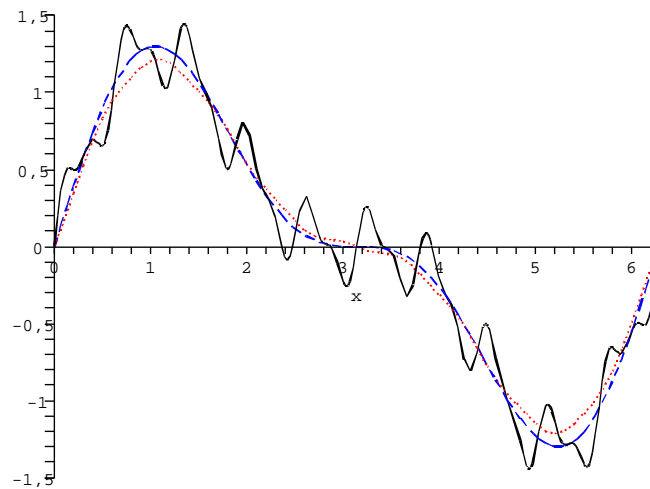


Abbildung 6.11: Filterung mittels quadratischer dualer Funktion $R = W_{crit} = \frac{\pi}{5}$. Verrauschte Gesamtwelle (durchgezogene Linie), Grundwelle (gestrichelte Linie), gefilterte Welle (punktierte Linie).

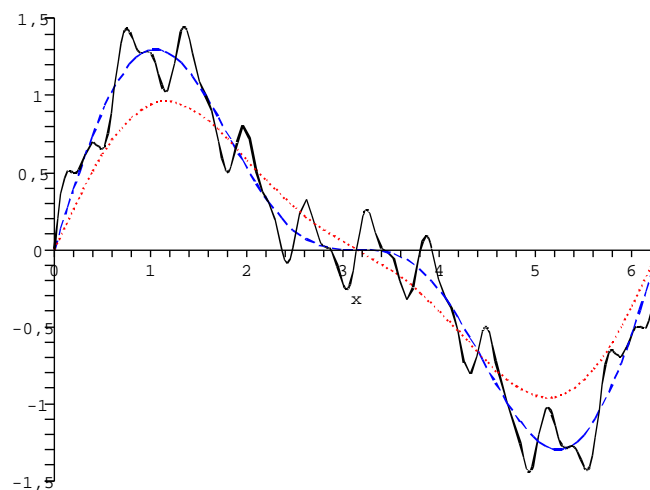


Abbildung 6.12: Filterung mittels quadratischer dualer Funktion $R = 2W_{crit} = \frac{2\pi}{5}$. Verrauschte Gesamtwelle (durchgezogene Linie), Grundwelle (gestrichelte Linie), gefilterte Welle (punktierte Linie).

Elementdegeneration und Netzabhängigkeit. Die Oszillationen in der Schalengeometrie, die im Verlaufe der Iterationsgeschichte entstehen, sind das Resultat der Konkurrenz zwischen langwelligen globalen und kurzwelligen stark netzabhängigen Lösungen. Ein Mehrskalensystem liegt vor. Basierend auf dieser Erkenntnis können Filtertechniken dazu verwendet werden, um zwischen diesen Skalen umzuschalten. In der Terminologie der Filterverfahren spricht man dabei von geeigneter Wahl der dualen Funktion und des Filterradius. Der Filterradius bietet dem entwerfenden Ingenieur die Möglichkeit, anhand geo-

metrischer Überlegungen zu entscheiden, wie groß die kleinsten im System verbleibenden Wellenlängen sein dürfen. Die Aufgabe des Filters besteht dann darin, die Wellen in der Strukturgeometrie mit Wellenlängen unterhalb des Filterradius herauszufiltern, sodass die Optimierungsergebnisse netzunabhängig und vor allem glatt sind.

Welche mechanische Information soll gefiltert werden?

Die Welligkeitsinformationen des für die Formoptimierung zur Verfügung stehenden Lösungsraums sind nicht nur in der FE-Parametrisierung – in den Raumkoordinaten der FE-Knoten – vorhanden, sondern ebenso in den Sensitivitäten. Die Sensitivitäten sind im Kontext der Formoptimierung mit FE-Parametrisierung die Ableitungen der im Optimierungsprozess involvierten Funktionen nach den Raumkoordinaten der FE-Knoten. Die in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren behandeln eine ausgewählte Zielfunktion, die Verzerrungsenergie ohne Nebenbedingungen³. Somit enthält die Sensitivität der Zielfunktion bezüglich einer Raumkoordinate die Information, wie sich die Systemsteifigkeit bei einer Veränderung der Strukturgeometrie in Richtung dieser Raumkoordinate des betreffenden FE-Knotens ändert. Die Grundregel in der Mechanik allgemein und in der Methode der finiten Elemente speziell, dass die Ableitung aufraut und die Integration glättet, gilt ebenso in der Optimierung. Die Welligkeit in der Systemantwort wird folglich durch die Ableitung verstärkt, was nicht vom Ableitungsverfahren abhängig ist. Diese Eigenschaft hat fatale Folgen für die Optimierung mit Gradientenverfahren, wie am Beispiel einer Sinuswelle in Abb. 6.13 zu sehen ist.

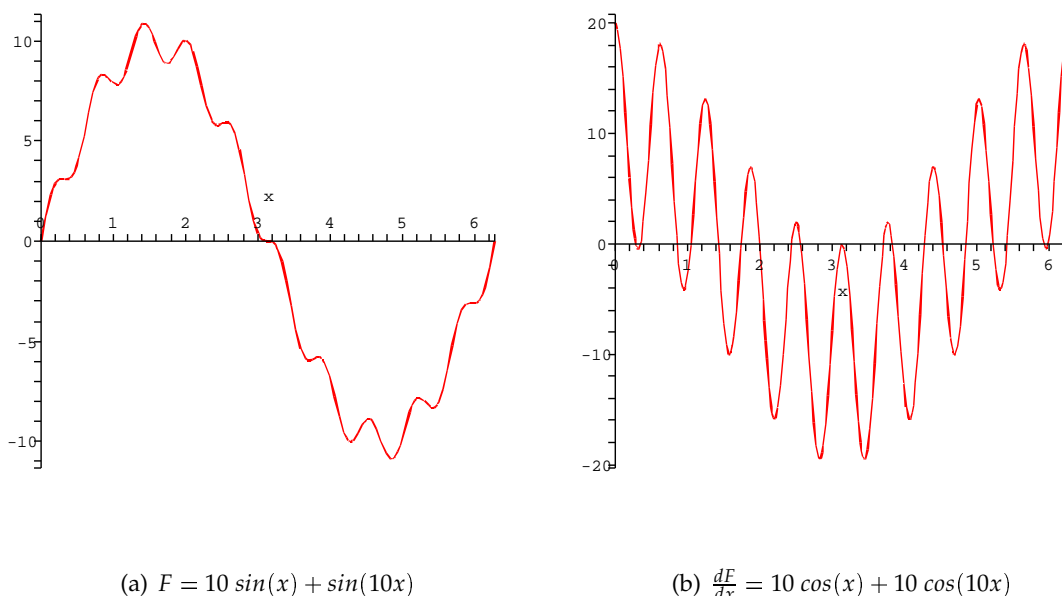


Abbildung 6.13: Verstärkung der Welligkeit durch Ableitung.

Somit ist es notwendig, die Ableitungsdaten von Verrauschungen und hochfrequenten Os-

³Einfache Nebenbedingungen, Ober- und Unterschranken der Entwurfsvariablen, werden dennoch berücksichtigt.

zillationen vor der Übergabe an den Optimierungsalgorithmus zu bereinigen. Die Sensitivitätsanalyse kann analytisch, semianalytisch, mittels Differenzen oder adjungiert durchgeführt werden (siehe Kap. 8).

Dadurch, dass der Optimierungsprozess von Freiformschalen sehr sensibel auf Welligkeiten und Rechenungenauigkeiten numerischer und mechanischer Natur in den Sensitivitäten reagiert, sollten die Ableitungen vorzugsweise mittels analytischer oder adjungierter Sensitivitätsanalyse von locking-freien Schalenelementen ermittelt werden. Der Einfluss der Locking-Phänomene auf die Systemanalyse und den Optimierungsprozess wird in Kap. 9 behandelt.

Fazit: Nach der Sensitivitätsanalyse liegen, im Kontext der Filtertechniken, noch verrauschte Ableitungen vor, die strukturweit (global) gefiltert werden müssen, bevor sie an den Optimierungsalgorithmus weitergereicht werden können. Der Vorgang der Filterung von diskreten Systemantwortdaten wird im folgenden Abschnitt beschrieben.

6.4.1 Diskretisierung der Filtergleichung

Im Optimierungsprozess, der prinzipiell ein iterativer Vorgang ist, müssen Zielfunktion und Nebenbedingungen mehrfach ausgewertet werden. Betrachtet man große, praxisrelevante Problemstellungen, so wird fast ausschließlich die Methode der finiten Elemente für die Strukturanalyse, mithin für die Evaluierung der in der Optimierung involvierten Funktionen, verwendet. Dadurch, dass die Finite-Elemente-Methode ein numerisches Approximationsverfahren ist, in der die problembeschreibenden Differentialgleichungen in ein algebraisches Gleichungssystem überführt werden, sind die funktionalen Zusammenhänge zwischen den Entwurfsvariablen und den zu optimierenden Funktionen nicht mehr explizit vorhanden. D.h. jede Funktionsauswertung benötigt eine komplette Systemanalyse und jede Ableitungsinformation benötigt eine komplette Sensitivitätsanalyse. Die Auswirkungen auf die allgemeine Filtergleichung Gl. (6.4) bestehen darin, dass die Integration nicht mehr analytisch durchführbar ist. Somit muss Gl. (6.4) ebenfalls diskretisiert und numerisch integriert werden.

In der allgemeinen Filtergleichung

$$\hat{F}_i(x) = \frac{1}{\|\Omega\|} \int_{\Omega(x)} F(\xi) \cdot D_i(\xi) d\xi \quad (6.22)$$

muss das Integral in eine Summe über alle im Integrationsbereich vorhandenen Stützstellen umgewandelt werden. Die Stützstellen sind dabei die FE-Knoten (und nicht die Gaußpunkte), da die Sensitivitäten der Zielfunktion bezüglich der Raumkoordinaten der FE-Knoten ermittelt werden.

Mit dem Wissen um die Bedeutung der Sensitivitäten in einem gradientenbasierten Optimierungsalgorithmus (siehe Abschnitt 6.4) müssen die Sensitivitäten (und nicht die Funktionsevaluierungen) gefiltert werden, wodurch die Diskretisierung der Gl. (6.22) in der An-

wendung auf Sensitivitäten folgende Form erhält:

$$\frac{\partial f_m}{\partial x_j^k} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i^p \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j^i}}{\sum_{i=1}^n D_i^p} \quad (6.23)$$

mit

- n Anzahl der Knoten innerhalb des Integrationsbereiches, dessen Zentrum der Knoten k ist. In der Formoptimierung von Schalentragwerken stellt der Integrationsbereich eine zweidimensionale Fläche im dreidimensionalen Raum dar.
- $\frac{\partial f_m}{\partial x_j^k}$ die gefilterte Ableitung der Funktion f nach der Raumkoordinate j am Knoten k , wobei $k \in [1, n]$ der zentrale Knoten ist, an dem gerade gefiltert wird.
- $\frac{\partial f}{\partial x_j^i}$ die nicht gefilterte Ableitung der Funktion f nach der Raumkoordinate j am Knoten i .
- $D_i^p = D((R - R_{ki})^p)$ die duale Funktion, die die Rolle einer exponentiellen Abstandsfunktion spielt, in der sowohl der räumliche als auch der topologische Abstand berücksichtigt werden muss. Diese in der Formoptimierung spezielle Eigenschaft muss algorithmisch umgesetzt werden (siehe unten).
- p Polynomordnung.
- R der Filterradius, der das Integrationsgebiet Ω repräsentiert.
- R_{ki} der Abstand zwischen FE-Knoten k , dem Zentrum des Integrationsgebiets und dem Knoten i .

Durch die Diskretisierung wird das kontinuierliche Integrationsgebiet Ω in diskrete Stützstellen, die FE-Knoten innerhalb des Filterradius, aufgelöst und wird durch den Bereich $[1, n]$ repräsentiert. Der Filterungsprozess in Gl. (6.23) ist in ähnlicher Form in der Topologieoptimierung unter dem Begriff der Glättung [BS03] zu finden. Sowohl in Form- als auch in Topologieoptimierung kann der Filter als eine Art gewichtete Mittlung der Ableitungsdaten über das Integrationsgebiet aufgefasst werden. Eine der wesentlichen Besonderheiten der Filterung in der Formoptimierung von Schalenstrukturen ist die Notwendigkeit, den topologischen Abstand zu berücksichtigen.

In der Formoptimierung von Freiformschalen stellt sich zusätzlich die Frage nach dem gemessenen Abstand, da die direkte räumliche Distanz, wie in der Topologieoptimierung, nicht ausreichend ist, um den Einflussbereich des Glättungsradius bestimmen zu können. Diese Tatsache kann anhand einer Schnittkurve auf einer gekrümmten Fläche erläutert werden (siehe Abb. 6.14).

Betrachtet man die Stützstelle am Knoten k , an dem die Sensitivitäten gefiltert werden sollen, so ist ersichtlich, dass die Stelle 1 topologisch gesehen näher an k ist als die Stelle 2 und damit eine höhere Gewichtung besitzen sollte. Wird allerdings der räumliche Abstand $(R - R_{ki})^p$ angewandt, erhält die Stelle 2 ein höheres Gewicht. Somit muss eine Modifikation vorgenommen werden, indem die Abstände direkt auf der gekrümmten Fläche gemessen werden, was jedoch auf der diskretisierten Fläche ein Problem darstellt. Um die Problematik der Abstandsmessung auf gekrümmten Flächen zu umgehen, ist es notwendig, in die Formel der gewichteten Mittlung Gl. (6.23) ein hierarchisch topologisches Konzept einzuarbeiten.

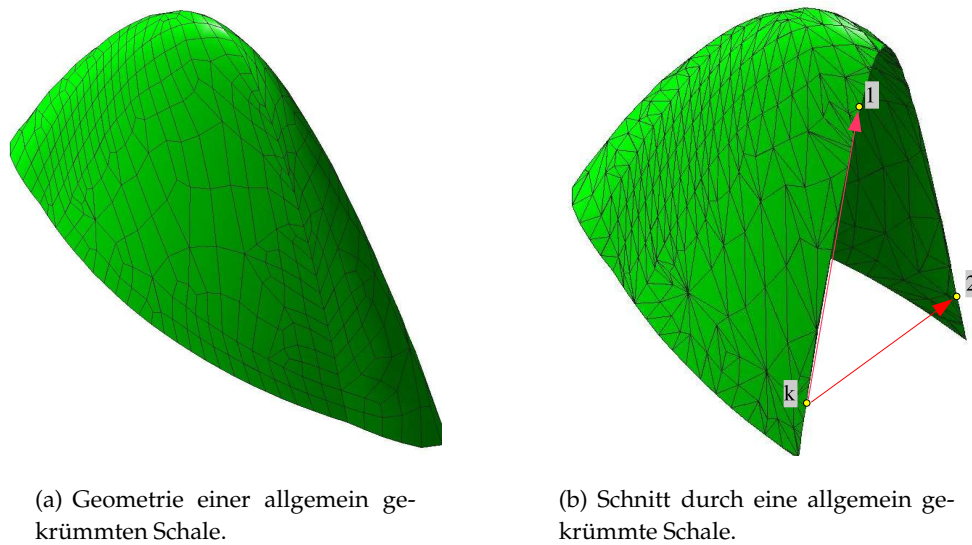


Abbildung 6.14: Räumlicher und topologischer Abstand.

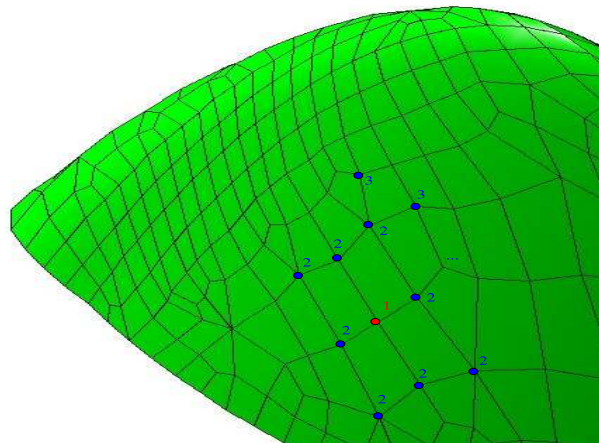


Abbildung 6.15: Topologische Karte.

In diesem hierarchischen Konzept werden alle FE-Knoten mit variablen Raumkoordinaten durchlaufen und einzeln bearbeitet. Die Filterung an einem FE-Knoten (Zentrum) beginnt mit der Klassifizierung der Nachbarknoten. Die benachbarten FE-Knoten werden, ausgehend von der Stützstelle, an der gerade gefiltert wird, das Zentrum, mit einer topologischen Kennung bzw. Gewichtung versehen (Abb. 6.15). Die Knoten, die topologisch (auf der Fläche) näher liegen, erhalten ein höheres Gewicht. Dieses hierarchische Konzept lässt sich algorithmisch effizient umsetzen (siehe Abschnitt 6.4.2), indem die Topologie des FE-Netzes abgetastet wird, bis der gewünschte Glättungsradius erreicht wird. Auf diese Weise wird die kleinste Wellenlänge in der optimierten Lösung von einem diskretisierungsabhängigen Maß – die Elementgröße – auf eine strukturbezogene Größe modifiziert, was einen Skalensprung in der Optimierungsaufgabe bedeutet.

Der vorgestellte Sensitivitätenfilter wird strukturweit auf die Ableitungsdaten aller FE-Knoten im Entwurfsraum angewandt, um die Verrauschung in der Strukturantwort zu eli-

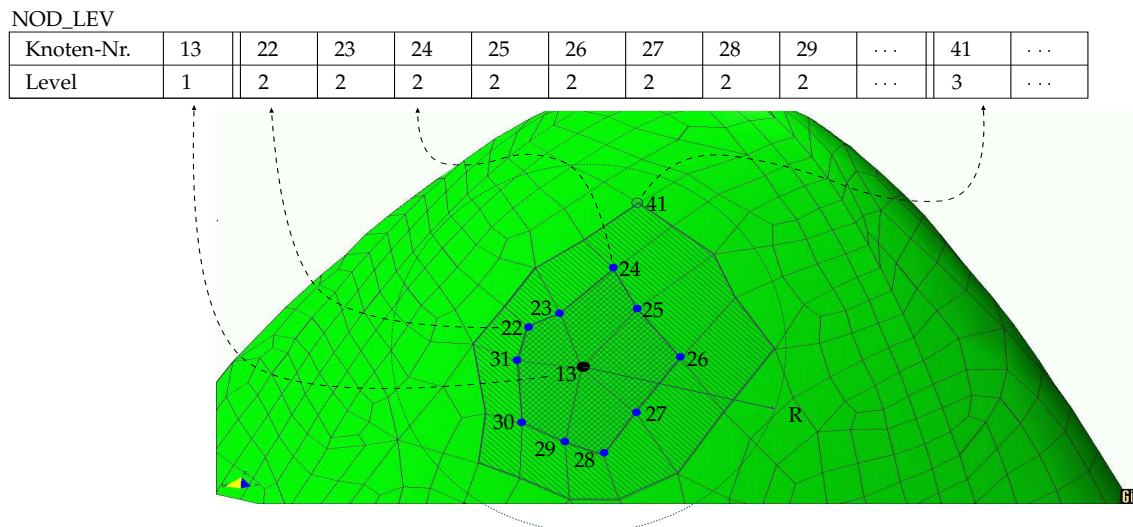


Abbildung 6.16: Topologische Karte.

minieren, daher wird dieser Vorgang als *globale Filterung* bezeichnet.

6.4.2 Softwaretechnische Umsetzung der Filtergleichung. Ein Vorwärtsalgorithmus

Die Implementierung des Filteralgorithmus in eine Softwareumgebung für Optimierung und Systemanalyse wird beispielhaft am Programm CARAT, dem Forschungsprogramm des Lehrstuhls für Statik an der Technischen Universität München, erläutert. Die prinzipielle Funktionsweise des Algorithmus ist im Allgemeinen programmunabhängig, muss aber dennoch an die jeweilige Programmstruktur angepasst werden. Die Datenhaltung und die Struktur dieser Daten im Speicher haben einen wesentlichen Einfluss auf den Aufbau des Filterungsprozesses. Das Programm CARAT ist in der Programmiersprache FORTRAN 77 geschrieben, womit eine prozessuale – und keine objektorientierte – Struktur impliziert wird.

Die Filterung der Sensitivitäten an jedem variablen FE-Knoten ist eine rechen- und ressourcenintensive Aufgabe, die einiges an Vorarbeit erfordert, bevor mit der Anwendung der Filtergleichung begonnen werden kann. Im Vordergrund steht das eingeführte hierarchische Konzept für die Erfassung des topologischen Abstandes der untersuchten FE-Knoten zusätzlich zur Räumlichen Distanz zum Zentrum.

Die Idee des Vorwärtsalgorithmus besteht darin, die FE-Knoten um das Zentrum herum systematisch in Form von nummerierten Schichten, sprich Hierarchien, zusammenzufassen und abzutasten. Die erste Hürde besteht darin, dass ein FE-Knoten in einem FE-Programm seine Nachbarknoten nicht „sieht“. Daher muss einmalig eine Karte der Nachbarknoten erstellt werden. Die kartographische Erfassung der FE-Knoten wird mittels kleiner Felder der Anzahl $NUMNP$ bewerkstelligt, mit $NUMNP$ Anzahl der FE-Knoten in der Struktur. Jedes dieser kleinen Felder enthält lediglich die unmittelbaren Nachbarknoten eines FE-Knotens und wird nach diesem benannt. Diese Felder haben daher unterschiedliche Dimensionen N_i ,

wobei N_i Anzahl der Nachbarknoten ist. Für den Knoten 13, das Zentrum in Abb. 6.16, wird das Feld TOPO13 kreiert und mit den unmittelbaren Nachbarknoten aufgefüllt. Die Reihenfolge der Nachbarknoten ist abhängig von der Knotennummerierung in jedem finiten Element und ist für die Filterung unerheblich. Für den Knoten 13 könnte das Feld TOPO13 z.B. folgenden Inhalt haben: 27, 26, 25, 24, 23, 22, 31, 30, 29, 28.

Der zweite Schritt ist der Vorwärtsalgorithmus, der sukzessiv die Umgebung des Knotens, an dem die Sensitivitäten gefiltert werden (das Zentrum), abtastet und erst dann aufhört, wenn der Filterradius (das Integrationsgebiet) überschritten wird. Schwierigkeiten entstehen dadurch, dass die Anzahl der zu durchlaufenden Hierarchien unbekannt ist und dass das Stoppsignal nicht nach dem ersten Knoten, der außerhalb des Integrationsgebiet liegt, ausgelöst wird, sondern nach Feststellung, dass die komplette nächste Knotenschicht (Hierarchie) außerhalb liegt.

Die Klassifizierung der FE-Knoten, ausgehend vom Zentrum, ist in Abb. 6.16 dargestellt. Während der Abtastung wird ein zweidimensionales Feld $NOD_LEV(NUMNP, 2)$ erzeugt, in dem jedem Knoten im Integrationsgebiet eine Hierarchienummer, auch Level genannt, zugewiesen wird. Diese Hierarchienummer entscheidet später über die Gewichtung der Ableitungsinformation am jeweiligen Knoten. In der ersten Ebene bzw. Hierarchie (Level Nr. 1) steht nur ein Knoten und zwar das Zentrum. Im Allgemeinen sind im Level Nr. i mehrere Knoten.

In einer Schleife werden die Knoten des aktuellen Levels untersucht. Für jeden Knoten wird das Feld der Nachbarknoten aufgerufen und durchlaufen. Liegt ein Nachbarknoten innerhalb des Integrationsgebiets, wird ein neues Level erzeugt, in das der Nachbarknoten einbezogen wird. Nachdem alle Knoten des aktuellen Levels untersucht worden sind, wird die Anzahl der neu hinzugekommenen Knoten des potenziellen nächsten Levels überprüft. Ist diese Anzahl ungleich null, wird diese Ebene als aktuell deklariert und die Suche wird neugestartet. Das Flussdiagramm in Abb. 6.17 gibt diesen Ablauf wieder.

Um die wiederholte Überprüfung bereits untersuchter Knoten zu vermeiden, da sich die Felder der Nachbarknoten überlappen, wird ein logisches Feld $NODSTAT(NUMNP)$ zur Markierung untersuchter FE-Knoten verwendet.

Nach Abschluss der Knotenklassifizierung kann die Anwendung der diskretisierten Filtergleichung Gl. (6.23) mit Hilfe der Hierarchiedaten im Feld NOD_LEV direkt vollzogen werden.

Die in Abb. 6.16 und Abb. 6.17 erläuterte Kartographierung der Nachbarknoten um den Knoten, an dem die Filterung der Sensitivitäten vorgenommen wird, liefert nicht nur das Feld NOD_LEV mit den Hierarchiedaten, sondern auch die Variable $LEVEL$ mit der Anzahl der benötigten Hierarchien, um das Integrationsgebiet abzudecken. Mittels einer Schleife über alle Levels kann das Feld NOD_LEV durchlaufen werden. Für jeden Knoten kann damit entsprechend seiner Hierarchienummer und seiner Entfernung die Gewichtung ermittelt werden. Die Summe der gewichteten Sensitivitäten ergibt den Zähler $\sum_{i=1}^n D_i^p \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}$ und die

Summe der Gewichte ergibt den Nenner $\sum_{i=1}^n D_i^p$ im Ausdruck der der gefilterten Sensitivität

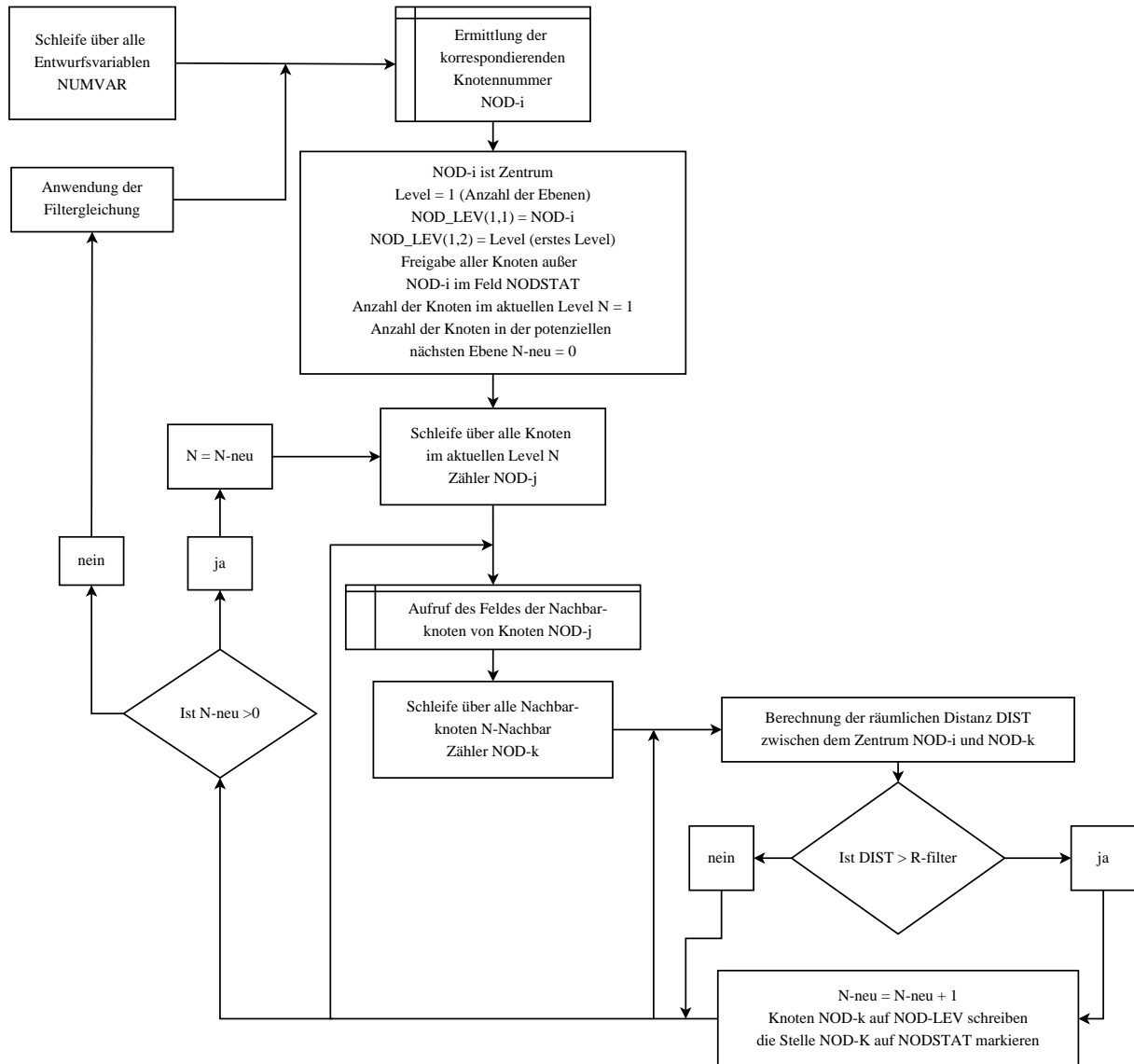


Abbildung 6.17: Vorwärtsalgorithmus zur Anwendung der Filtergleichung in der Formoptimierung.

$$\frac{\partial f_m}{\partial x_j^k} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i^p \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i^k}}{\sum_{i=1}^n D_i^p}$$

6.5 Anwendung der Filtertechniken in der Formoptimierung. Numerische Beispiele

In Abschnitt 6.3.3 wurde die Effizienz der Filtergleichung in analytischer Form gezeigt. In diesem Abschnitt geht es um die Anwendung der Filtertechniken in der Formoptimierung von Freiformschalen mit FE-Parametrisierung an diskretisierten Strukturen. Bei der Diskretisierung handelt es sich um die Vernetzung der zu analysierenden und optimierenden

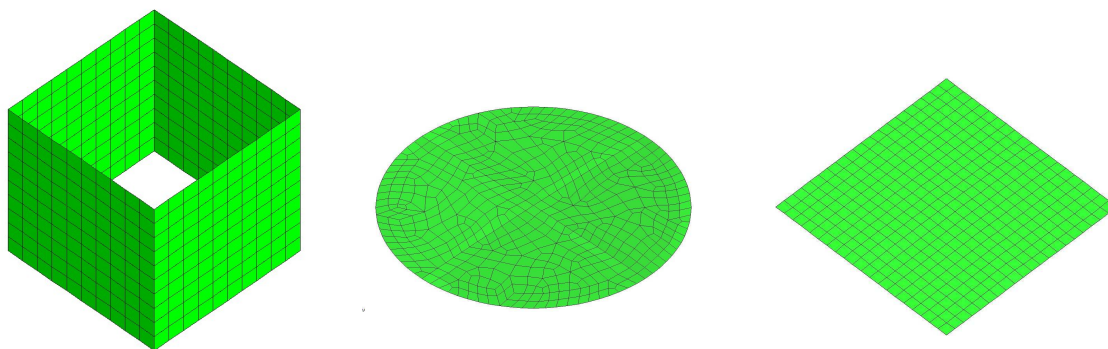


Abbildung 6.18: Vernetzte Ausgangsgeometrie.

Strukturen im Sinne der Methode der finiten Elemente. Es wird gezeigt, inwieweit der Filterungsprozess die Kontrolle über die Vielfalt an Wellen (siehe Abschnitt 5.3, Abb. 5.3 und 5.4) in der Strukturgeometrie ermöglicht. Ein besonderes Augenmerk richtet sich dabei auf die Glattheit der optimierten räumlichen Flächen.

Erwähnenswert ist ein weiteres Charakteristikum der bisher angesprochenen Filtertechniken. Die genaue Betrachtung der Filtergleichung sowohl in allgemeiner Gl. (6.4) als auch in diskretisierter Form Gl. (6.23) zeigt den globalen Charakter dieser Formulierung. Die Integration erfolgt über die gesamte Domäne, also über die gesamte zur Optimierung freigegebene Struktur. Aus diesem Grund wird ein Filter nach dem Algorithmus in Abschnitt 6.4.2 als globaler Filter bezeichnet. Im Kontrast dazu steht der lokale oder selektive Filter, der in Kapitel 7 in Zusammenhang mit Sickenoptimierung, als Applikation der Filtertechniken in der industriellen Anwendung, präsentiert wird.

Die Leistungsfähigkeit des globalen Filters wird am Beispiel der Optimierung der bisher gezeigten Grundformen, wie Kreis- und Rechteckplatte demonstriert. Die Formoptimierung eines Behälters mit quadratischem Ausgangsquerschnitt rundet die Beispiele in diesem Abschnitt ab.

Die Optimierung der Verzerrungsenergie der Kreis- und Rechteckplatte unter Gleichlast ohne Wellenkontrolle (Abschnitt 5.3) offenbarte den Konflikt zwischen den unterschiedlichen Wellenlängen, die durch das gewählte FE-Netz dargestellt werden. Die gleiche Optimierung der Form eines Behälters unter Innendruck, bei dem Boden und Deckel durch Randbedingungen ersetzt und der Einfachheit halber eingespannt angenommen werden, zeigt ebenfalls die starke Tendenz zu Oszillationen im Bereich hoher Zielfunktionsgradienten, was dann in den Ecken zur Elementdurchdringung und -degeneration führt. In Abb. 6.18 ist die Ausgangsgeometrie der drei Strukturen zu sehen. Abb. 6.19 zeigt das Ergebnis der Formoptimierung ohne Filterung der hochfrequenten Wellen.

Die Anwendung eines Sensitivitätenfilters mit quadratischer dualer Funktion und eines Filterradius der halben Spannweite eliminiert die kurzen Wellenlängen, sodass die große globale Welle entstehen und dominieren kann. Das Ergebnis der Formoptimierung ist in Abb. 6.20 dargestellt. Darin ist erkennbar, dass die lokalen kurzwelligen Lösungen der großen globalen Welle gewichen sind.

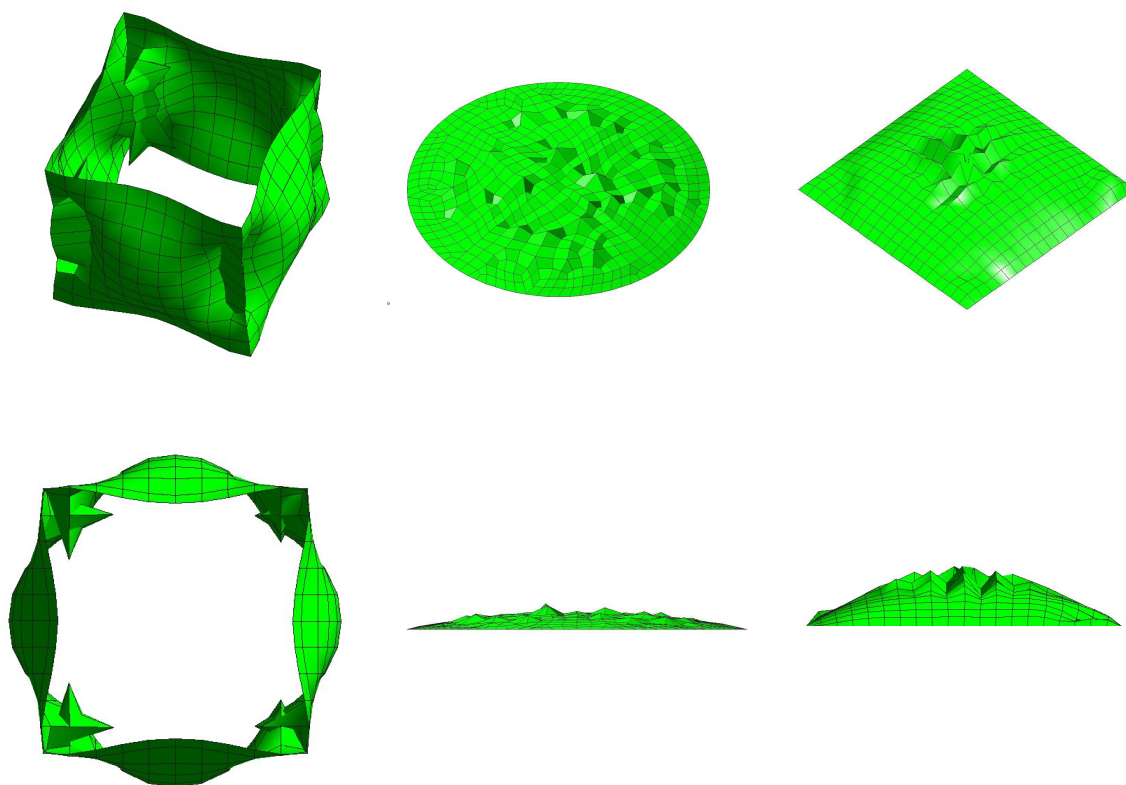


Abbildung 6.19: Optimierungsergebnis ohne Filter.

Des Weiteren ist der glatte Übergang zwischen den Teilstrukturen im optimierten System auf natürliche Weise realisierbar. Dies wird in der CAD-Parametrisierung nur durch zusätzliche aufwändige Maßnahmen, wie Tangenten-Patches, erreicht. Das Gleichgewicht im System, analog zur Membranformfindung, sorgt für die notwendige Geometrieglattheit.

Erwähnenswert ist die Tatsache, dass die große globale Welle in einer Struktur häufig zu Lösungen führt, in denen fast nur Membrankräfte die Lastabtragung übernehmen und damit den wesentlichen Anteil der Verzerrungsenergie ausmachen. Die Membranstrukturen weisen eine hohe Materialausnutzung auf und zeichnen sich daher durch die hohe Steifigkeit (geringe Verformung) und die günstige Lastabtragung aus.

Allerdings ist große Vorsicht beim Umgang mit membranartigen Lösungen geboten, denn diese Strukturen sind hochgradig sensibel. Die Sensibilität der vor allem druckbeanspruchten Membranstrukturen bezieht sich auf die erhöhte Stabilitätsgefährdung und Lastfallabhängigkeit der resultierenden optimalen Geometrien [KR04].

6.6 Abschließende Bemerkungen

Die vorgestellten Filtertechniken stellen robuste und effiziente Verfahren zur Verfügung, die in vielen Disziplinen erfolgreich eingesetzt werden. Die Leistungsfähigkeit dieser Verfahren, verrauschte Funktionsverläufe im kontinuierlichen Fall und Funktionsevaluierungen im diskreten Fall zu glatten von Oszillationen freien Funktionen gezielt zu überführen,

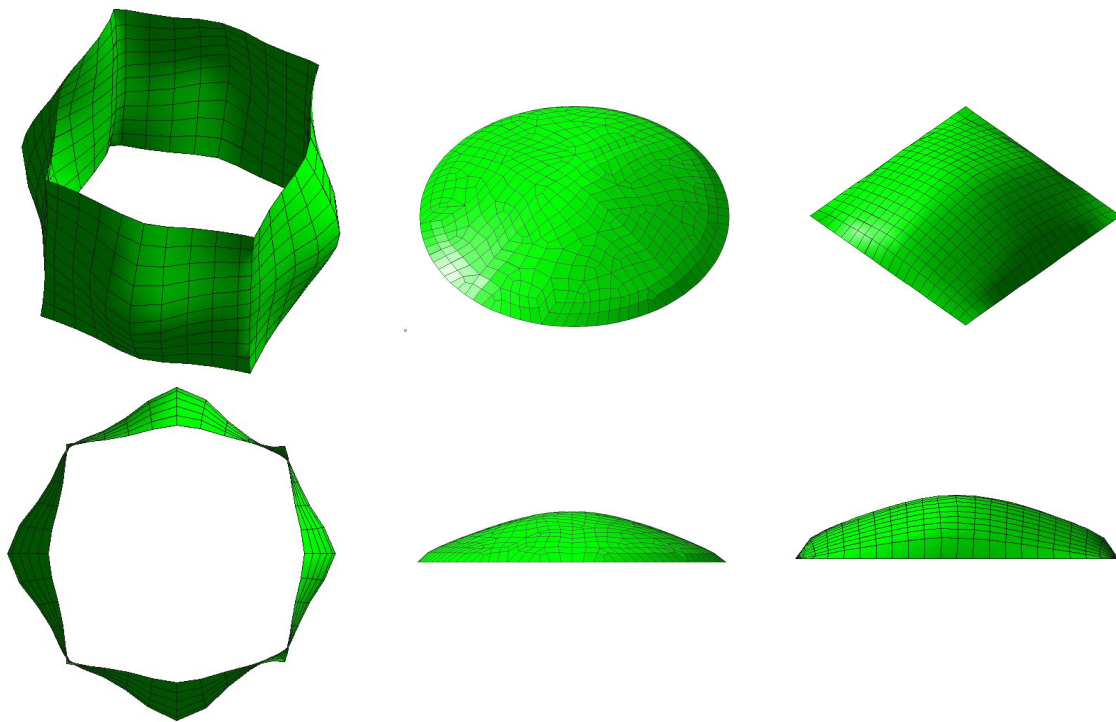


Abbildung 6.20: Optimierungsergebnis mit einem quadratischen Filter. Filterradius ist die halbe Spannweite.

basiert auf Annahmen, die im Folgenden erörtert werden. Im Wesentlichen sind dabei die Projektion auf den Direktor, die Randeffekte, die adaptive unregelmäßige Vernetzung und die Locking-Phänomene zu beachten.

6.6.1 Die Projektion auf den Direktor

Eines der schwerwiegendsten Probleme der Formoptimierung mit FE-Parametrisierung ist die Netzin stabilität, die einerseits durch die Lösungswelligkeit verursacht, andererseits durch Elementdurchdringung und -degeneration hervorgerufen wird.

Die Elimination der Verrauschung in der Systemantwort und die Kontrolle über die konkurrierenden mehrskaligen Wellen kann, wie bereits ausführlich erörtert, mittels der Filtertechniken erlangt werden. Diese Verfahren reduzieren ebenso die Gefahr der Entartung der finiten Elemente. Dennoch kann dieses Problem nicht komplett vermieden werden. Der Grund liegt in der Natur der FE-Parametrisierung, in der ein FE-Knoten – mit variablen Raumkoordinaten in alle drei Raumrichtungen – Bewegungen in der Elementebene erhält, die die physikalisch mechanische Systemsteifigkeit nicht ändern, da dadurch keine Geometrieänderungen entstehen. Trotzdem erfährt die Systemsteifigkeit eine künstliche Änderung infolge der Elemententartung, die zu einer nicht korrekten Berechnung der Determinante der Jacobi-Matrix führt, wie in [Abbildung 6.21](#) zu sehen ist. Dieser Versteifungseffekt, die Netzverzerrungsempfindlichkeit, wird in der Literatur auch als ein Locking-Phänomen aufgeführt (für mehr Details siehe [Kapitel 9](#)).

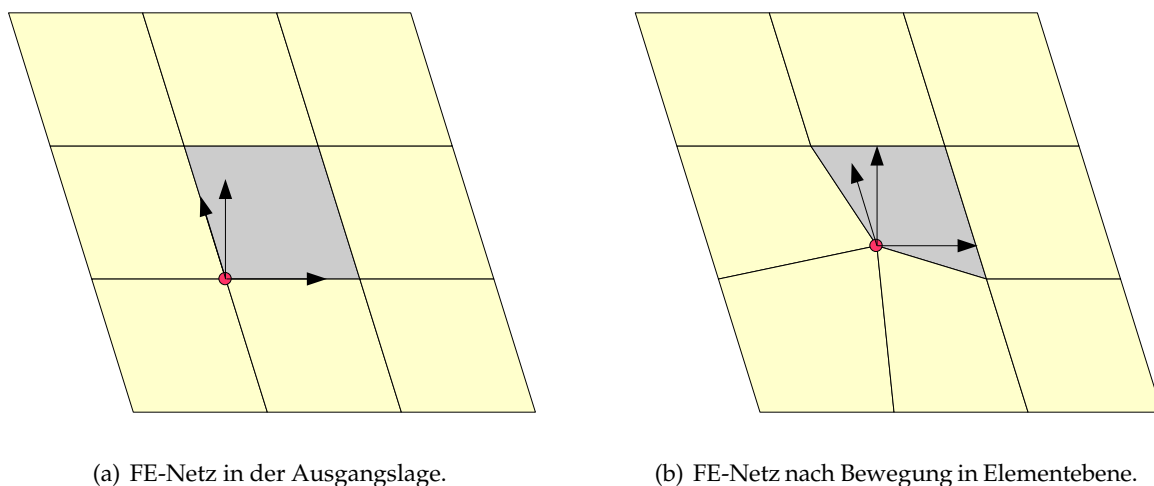


Abbildung 6.21: Degeneration der finiten Elemente.

Dieses Problem ist in der Membranformfindung bereits bekannt und äußert sich dabei in Form von Singularitäten bezüglich Bewegungen in der Ebene des finiten Elements⁴. Die in der Membranformfindung entwickelte Lösung basiert auf Homotopieverfahren, in denen die Bewegungen in der Ebene bestraft werden [BW01]. Diese Methode kann nicht ohne weiteres auf die Formoptimierung von Schalenträgwerken übertragen werden. Somit wird die Idee der Homotopieverfahren, die Knotenbewegungen senkrecht zur Ebene bevorzugt zu erlauben, aufgegriffen, indem die Sensitivitäten der Verzerrungsenergie bezüglich der drei Raumkoordinaten am FE-Knoten auf die Richtung des Direktorvektors projiziert werden, wie in Abbildung 6.22 zu sehen ist.

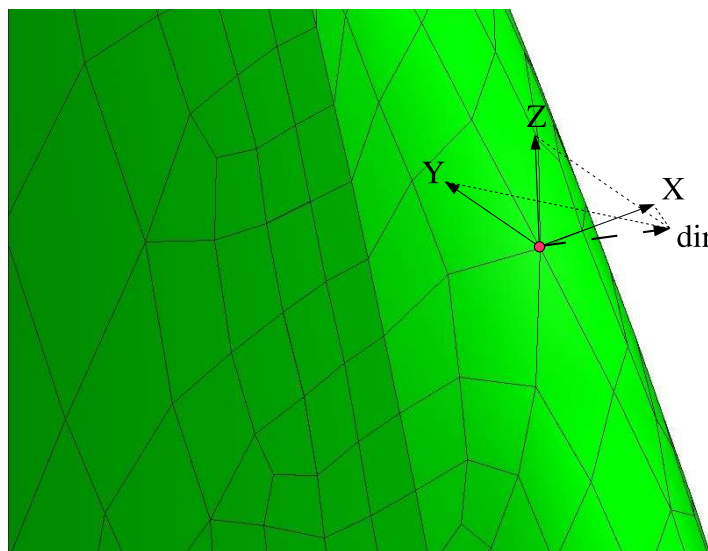


Abbildung 6.22: Projektion der Sensitivitäten auf den Direktor.

Der Direktor ist in der zugrunde liegenden Schalenformulierung [Cam04] der zwischen den

⁴Nichtlineares dreidimensionales Membranelement.

angrenzenden Elementen gemittelte Normalenvektor und approximiert die Normale auf die diskretisierte gekrümmte Fläche. Die Projektion der Sensitivitäten bezüglich der globalen Raumkoordinaten X, Y, Z auf den Direktor ergibt die Sensitivität bezüglich einer entlang dem Direktor verlaufenden Variable s und bewirkt eine Verknüpfung der ursprünglich unabhängigen Entwurfsvariablen x, y, z (in Richtung der globalen Achsen). Die neue Sensitivität, die Richtungsableitung, kann anhand der folgenden Formel berechnet werden:

$$\frac{\partial f}{\partial s_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dir_x(i) + \frac{\partial f}{\partial y_i} \cdot dir_y(i) + \frac{\partial f}{\partial z_i} \cdot dir_z(i) \quad (6.24)$$

mit

$\frac{\partial f}{\partial s_i}$	Richtungsableitung. Sensitivität der Funktion f bezüglich der entlang dem Direktor verlaufenden Variable s am i -ten variablen Knoten.
$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	Sensitivität der Funktion f bezüglich der globalen X-Achse am i -ten variablen Knoten.
$\frac{\partial f}{\partial y_i}$	Sensitivität der Funktion f bezüglich der globalen Y-Achse am i -ten variablen Knoten.
$\frac{\partial f}{\partial z_i}$	Sensitivität der Funktion f bezüglich der globalen Z-Achse am i -ten variablen Knoten.
$dir_x(i)$	X-Komponente des normierten Direktors am i -ten variablen Knoten.
$dir_y(i)$	Y-Komponente des normierten Direktors am i -ten variablen Knoten.
$dir_z(i)$	Z-Komponente des normierten Direktors am i -ten variablen Knoten.

Durch diese Technik gewinnt der Optimierungsprozess deutlich an Stabilität, die sich in Form von Bewegungen senkrecht zur Tangentialebene äußern, wodurch fast ausschließlich mechanisch sinnvolle Aktualisierungen der Entwurfsvariablen erzeugt werden, die wiederum Elemententartung erheblich verringern.

Ein weiterer Vorteil der Projektion auf den Direktor ist die Reduktion der Problemdimensionalität im Optimierungsalgorithmus, denn die Anzahl der Entwurfsvariablen wird auf ein Drittel vermindert. Ein interessanter Nebeneffekt ist die Anschaulichkeit der Sensitivität bezüglich einer Bewegung auf dem Direktor im Vergleich zum Sensitivitätentripel bezüglich der globalen Raumkoordinaten, die bei beliebig gekrümmten Flächen nur schwer zu interpretieren sind.

6.6.2 Die Randeffekte

Die in Abschnitt 6.3.1 angegebenen mathematischen Grundlagen und das im Anschluss angeführte Beispiel in Abschnitt 6.3.3 implizierten eine unendliche Ausdehnung der veräuschten Originalfunktion, also eine Aufgabe ohne Randbedingungen. Es wurde davon ausgegangen, dass die zu glättende bzw. zu filternde Funktion lediglich ein Ausschnitt aus einer unendlichen Ausdehnung ist. Diese Annahme hat zur Konsequenz, dass die Filterung am Rande des Funktionsausschnitts trotzdem einen gültigen Einzugsbereich in der gedachten Ausdehnung besitzt. Diese Annahme verdeutlicht Abb. 6.23. Darin wird am Rande des interessierenden Ausschnittes, der eingekreiste Bereich, im Zuge der Filterung (Integration

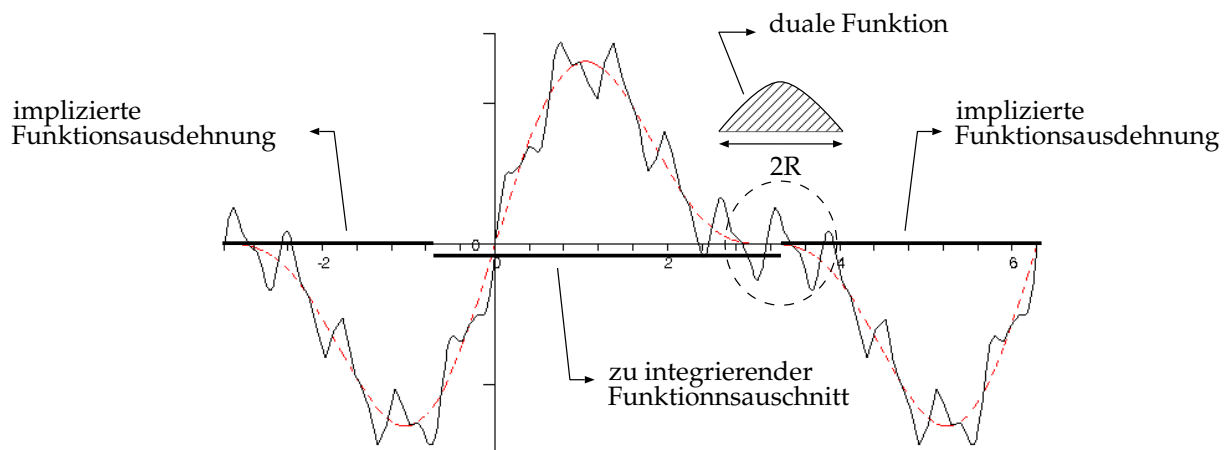


Abbildung 6.23: Funktionsgültigkeitsgebiet und Integrationsgebiet.

über den Integrationsbereich $2R$) der Teilbereich der dualen Funktion außerhalb des interessierenden Funktionsauschnittes⁵ trotzdem mit der Originalfunktion überlagert. Diese Annahme ist korrekt, solange die Informationen im Ausdehnungsbereich vorhanden sind, z.B. weil die Originalfunktion stetig ist und in analytischer Form vorliegt.

Bei der Anwendung der Filtertechniken in der Formoptimierung von Freiformschalen fällt auf, dass die Originalfunktion, z.B. die Ableitung der Verzerrungsenergie, einerseits nicht mehr analytisch und stetig erhältlich ist, sondern eine implizite Funktion der Entwurfsvariablen und der Zustandsgrößen ist und nur an diskreten Stellen, die FE-Knoten, ausgewertet wird, andererseits der Gültigkeitsbereich der Funktion eindeutig begrenzt ist, und zwar durch die Geometrie der optimierten Struktur. D.h. der Verlauf der Funktionen endet am geometrischen Rand der untersuchten Struktur. Eine Funktionsevaluierung außerhalb des Gültigkeitsbereichs ist nicht möglich. Diese Sachlage stellt eine Verletzung der allgemeinen Filtergleichung Gl. (6.4) dar, die zu Ungenauigkeiten bzw. Abweichungen in den gefilterten Funktionsauswertungen am Rande des Funktionsgültigkeitsbereiches führt.

In Abbildung 6.24 ist das Randproblem eingearbeitet, indem das Integrationsgebiet Ω an den Gültigkeitsbereich der verrauschten Funktion angepasst wird (der schraffierte Bereich), wodurch die gefilterten Funktionswerte zum Rand hin immer mehr verfälscht werden.

Es stellt sich die Frage nach dem Einfluss dieses Randproblems auf den Optimierungsprozess und nach möglichen Anpassungen und Korrekturen des Filteralgorithmus.

In der Formoptimierung von Freiformschalen, in der der Gültigkeitsbereich der zu filternden Funktionen eine zweidimensionale Fläche ist, zeigt die Erfahrung, dass dieser Fehler durch die zweite Dimension weitestgehend abgeschwächt wird. Lediglich die Eckknoten weisen diesen Fehler deutlicher auf.

Die Frage der Korrekturmöglichkeiten stellt sich dabei noch schwieriger, denn die fehlenden Informationen der weggeschnittenen Bereiche können nicht ohne weiteres ersetzt werden.

⁵Unter der Voraussetzung, dass Funktionsauswertungen außerhalb des Integrationsgebiets möglich sind.

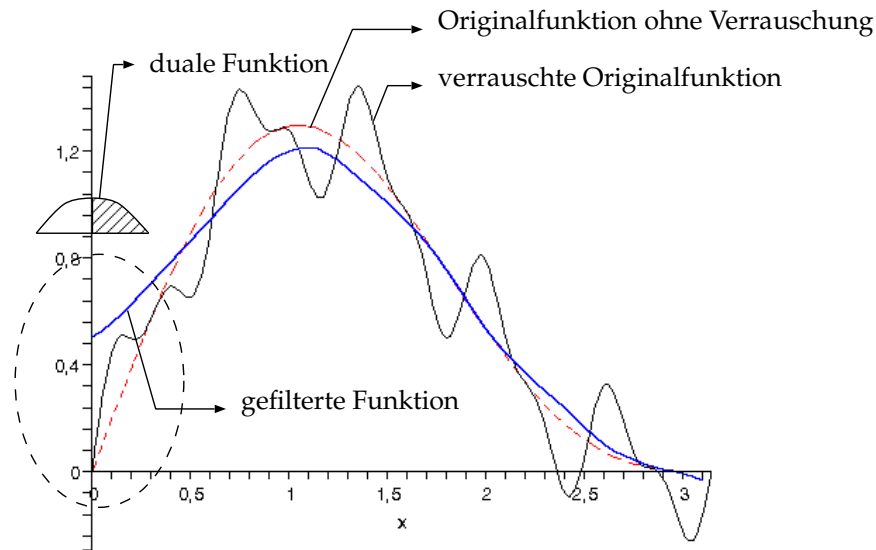


Abbildung 6.24: Einfluss des fehlenden Funktionsgültigkeitsgebiets. Randeffekte.

Eine der wenigen Lösungen besteht darin, den Gültigkeitsbereich der zu filternden Funktionen über die Geometriegrenzen hinweg zu erweitern und die Funktionsverläufe durch Extrapolation zu ermitteln. Jedoch zeigt die Anwendung der Filtertechniken in der Formoptimierung mit FE-Parametrisierung, dass diese störungsbehafteten Bereiche, aufgrund der verfahrensbedingten feinen Diskretisierung, sehr klein und damit unbedeutend sind. Aus diesem Grund werden im Rahmen dieser Arbeit keine Maßnahmen getroffen, um diesem Randeffekt Rechnung zu tragen.

6.6.3 Einfluss der unregelmäßigen Vernetzung

Das Problem der verrauschten Daten auf einem unregelmäßigen Raster beschäftigt die Wissenschaft in vielen Disziplinen seit einigen Jahrzehnten. Dabei spielt es keine Rolle, ob es sich um experimentelle, statistische oder analytische Daten handelt. Die Frage der Aussagekraft der Informationen stellt sich in den Naturwissenschaften gleichermaßen wie in Wirtschafts- und Sozialwissenschaften.

Bei der Entwicklung von Glättungs- und Filterungsverfahren ist vor allem unklar, ob die Verteilung der Störgrößen und Welligkeiten bei der Verwendung von adaptiven und unregelmäßigen Gittern immer noch denselben Gesetzmäßigkeiten der gleichmäßigen Vernetzung gehorcht. Diese Problematik beschäftigte einige Wissenschaftler [WD96], [SMW04] seit geraumer Zeit. Die meisten präsentierten Verfahren bedienen sich Homogenisierungstechniken, bei denen eine Umverteilung der unregelmäßigen Daten auf ein gedachtes regelmäßiges Netz basierend auf Spline-Flächen stattfindet.

In der Strukturmechanik stellt sich dieses Problem – in Zusammenhang mit den numerischen Lösungsverfahren, wie die Methode der finiten Elemente – nicht so gravierend dar.

Die Suche nach optimalen Netzen im Sinne der Fehlerminimierung⁶ ist zwar immer noch Gegenstand der Forschung, betrifft die Filteralgorithmen aber nur am Rande. Die in dieser Arbeit vorgestellte Optimierungsstrategie ist von der Grundidee her für den Einsatz im Vorentwurf konzipiert, wodurch auf die feine bzw. adaptive Diskretisierung für die bestmöglich Erfassung von abgeleiteten Zustandsgrößen, wie Verzerrungen und Spannungen, verzichtet werden kann. Der präsentierte Filteralgorithmus ist dennoch weitestgehend resistent gegenüber größeren Unterschieden in Elementabmessungen, dadurch dass sowohl der räumliche als auch der topologische Abstand bei der Ermittlung der Wichtungsfaktoren berücksichtigt wird (siehe Abschnitt 6.4).

6.6.4 Einfluss der Locking-Phänomene

Die Betrachtung der Optimierungsergebnisse ohne Anwendung eines Filters (Abbildung 6.19) könnte den Eindruck erwecken, dass Entartung der finiten Elemente und die verwendete Elementformulierung eine tragende Rolle spielen. Die Untersuchungen bestätigen diesen Eindruck und zeigen, dass die unterschiedlichen Locking-Phänomene einen großen Einfluss auf den Optimierungsprozess haben, wodurch die Optimierungsergebnisse komplett verfälscht werden können. Dieses wichtige und tiefgreifende Thema wird im Kontext der Formoptimierung gesondert in Kapitel 9 behandelt.

⁶Z.B. Energiefehler.

Kapitel 7

Sickenoptimierung als Applikation der Formoptimierung mit FE-Parametrisierung

7.1 Einführung

Die Sickenoptimierung ist eine interdisziplinäre Aufgabe, die in der industriellen Praxis einen besonders hohen Stellenwert einnimmt. Diese Sonderstellung ist darin begründet, dass die angestrebten Verbesserungen an einem Ausgangsmodell durch nahezu gewichtsneutrale **lokale** geometrische Modifikation der Modelle erreicht wird. Wie es der Begriff „Sickenoptimierung“ verrät, handelt es sich um die Idee, mechanische Struktureigenschaften, wie Steifigkeit, Eigenfrequenz oder Lebensdauer, durch den Einsatz von Sicken zu verbessern. Dabei ergeben sich Fragestellungen auf zwei unterschiedlichen Skalen. Zum einen die globale Skala, in der die Verteilung, Orientierung und Ausdehnung der Sicken in der untersuchten Teilstruktur, der so genannte Entwurfsraum, gesucht werden. Man spricht dabei vom Sickenbild (Abb. 7.1). Zum anderen ist die lokale Skala zu betrachten, in der der Sickenkörper bzw. -querschnitt einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf das gesamte Tragverhalten der versickten Struktur hat.

Die Sicke wird in der einschlägigen Literatur [Sch03], [Mai92], [Emm04] definiert als „eine rinnenartige Vertiefung oder Erhöhung in ebenen oder gewölbten Blechflächen, wobei die Tiefe gegenüber der Länge klein ist“. Zusätzlich zur lokalen Beschaffenheit des Sickenquerschnitts und zum gesamten Sickenbild interessiert ebenso der Versickungsgrad, der das Verhältnis der versickten zur ebenen Fläche darstellt.

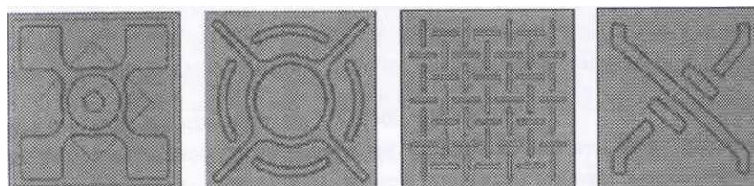


Abbildung 7.1: Sickenbilder von [Sch03].

7.2 Die Sicke als Konstruktionselement

Die Sickenoptimierung kann als Entwurfs- und Konstruktionswerkzeug überall verwendet werden, wo die mechanischen Eigenschaften von Flächentragwerken verbessert werden sollen. Die Automobilindustrie, vor allem im Karosseriebereich, und die Luft- und Raumfahrtindustrie sind prominente Vertreter der Anwender dieser Techniken, aber auch in der Herstellung von Flüssigkeitsbehältern kommt die Sickenoptimierung zum Einsatz.

Die durch den Einsatz von Sicken signifikante Verbesserung des Tragverhaltens von flächenartigen Strukturen war Gegenstand Jahrzehnte langer Untersuchungen und Forschungsvorhaben. Bereits in den Fünfziger- und Sechzigerjahren entstanden die ersten Konstruktionsregeln, Empfehlungen und Musterlösungen für einfache Geometrien [Kie55]. Der wesentliche in der Literatur erwähnte Einfluss der Sicke auf das Tragverhalten eines Flächentragwerks ist die Erhöhung des Flächenträgheitsmoments, indem die Materialmasse auf Regionen oberhalb bzw. unterhalb der Querschnittsschwerachse verlagert wird. Die Steinerschen Anteile des Trägheitsmoments sorgen für den überproportionalen Zuwachs im statischen Moment zweiten Grades Gl. (7.1)

$$I_1 = I + A \cdot d_1^2 \quad (7.1)$$

mit

- I_1 Trägheitsmoment um eine um d_1 verschobene Achse.
- I Trägheitsmoment um die Schwerachse.
- A Querschnittsfläche.
- d_1 Abstand zwischen Schwerachse und verschobener Achse 1 – 1.

Ein weiterer wesentlicher Effekt, der in der Literatur keine besondere Beachtung erhält, ist die Veränderung der Arbeitsanteile in der Verzerrungsenergie, wo die Sicke eine räumliche Tragwirkung in den eher ebenen Ausgangsgeometrien erzwingt und damit die günstigeren Membrankräfte weckt. Diese Veränderung in der Tragwirkung ist bereits in der Formoptimierung von Freiformschalen angesprochen worden.

Basierend auf denselben globalen Mechanismen der Formoptimierung mit FE-Parametrisierung wird im weiteren Verlauf ein Lokalisierungsalgorithmus entwickelt, der in der Sickenoptimierung zum Einsatz kommt.

7.3 Verfahren der Sickenoptimierung

Die Bemühungen, dieses für die Industrie wichtige Konstruktionselement in Form von konkreten Methoden bzw. Vorschriften zu formulieren, haben in den frühen Fünfziger zu Gestaltungsrichtlinien für Sickenbilder geführt [Oeh51], [Oeh66], [OW72]. Die Verfahren waren trotz katalogisierter Musterlösungen empirisch und erforderten große Erfahrung im

Umgang mit Sicken. Die veröffentlichten Richtlinien waren dazu nur für einfache Regelgeometrien und Standardlastfälle geeignet. Im letzten Jahrzehnt mit steigender Kapazität und Leistungsfähigkeit der zur Verfügung stehenden Simulationstechniken, sowohl methodisch als auch software- und hardwaretechnisch, haben die numerischen Optimierungsverfahren in die multidisziplinäre Aufgabe der Sickenoptimierung Einzug gehalten. In [Emm04] und [Sch03] werden einige Ansätze vorgestellt, die sich der CAD-FEM-Kopplung erfolgreich bedienen. Im Folgenden soll ein weiterer Ansatz präsentiert werden, der sich von den o.g. insofern unterscheidet, als eine generische mathematisch fundierte Optimierung der Verzerrungsenergie von Schalenstrukturen direkt am FE-Netz vorgenommen wird.

7.4 Sickenoptimierung mit FE-Parametrisierung. Der lokale Filter

Die in Kapitel 6 vorgestellten Techniken stellen die Grundlage für eine Familie von globalen bzw. strukturweiten Filtern dar. Die Hauptaufgabe dieser Filtertechniken besteht darin, eine Schnittstelle zwischen dem entwerfenden Ingenieur und den Systemantwortgrößen zu schaffen. Der Designer ist mithilfe dieses Werkzeugs in der Lage zu bestimmen, welche Wellenlänge, unabhängig von der Netzfeinheit, er in seiner optimierten Struktur zulassen möchte. In diesem Kontext entstand die Idee, auf diesen *global* agierenden Algorithmus einen *lokalen Filter* aufzusetzen, mit dem Ziel „spezielle“ Stellen oder sogar Bereiche in der Struktur anzusprechen. Diese „speziellen“ Bereiche sollen im Verlauf der Optimierung die einzelnen Sicken und danach das vollständige Sickenbild formen.

Auf der Suche nach lokalen Gestaltsänderungen, die die mechanischen Eigenschaften des gesamten Tragwerks¹ signifikant verbessern, stellt sich die Frage nach den Informationen oder Attributen, die aus mechanischer Sicht diese Stellen gemein haben. In [Emm04] werden die Hautspannungstrajektorien herangezogen, um den Pfad der Sicken nachzuzeichnen, was in biegedominierten ebenen Ausgangsgeometrien ein guter Ansatz ist.

In dieser Arbeit wird ein generischer Ansatz verfolgt, in dem die Verzerrungsenergie und vor allem deren Gradienten, die mittels adjungierter Sensitivitätsanalyse ermittelt werden, zur Beurteilung der FE-Knoten herangezogen werden. Die Intensität der Ableitungen enthält die mechanische Aussage über die Auswirkung einer lokalen Gestaltsänderung. Diese Information macht sich der Sickenalgorithmus zunutze bei der Ermittlung von Ort und Form der benötigten lokalen steifigkeitsteigernden Formänderungen.

7.4.1 Die Suche nach den „Hot Spots“. Der Sickenalgorithmus im Detail

Nach Anwendung des globalen Filters (siehe Abschnitt 6.4) herrschen weitgehend oszillationsfreie Systemsantworten im gesamten Entwurfsraum. Daraufhin können die Gradienten der Verzerrungsenergie absteigend sortiert und klassifiziert werden. Der Gradient drückt den „Wunsch“ des FE-Knotens aus, sich in eine Richtung im dreidimensionalen Raum zu

¹Hier auch beschränken sich die numerischen Beispiele auf die Verzerrungsenergie als Zielfunktion. Dies ist keine Einschränkung der Allgemeingültigkeit der präsentierten Verfahren.

bewegen, um das Energieniveau im System zu reduzieren. Die Gradienten am FE-Knoten enthalten somit die mechanische Aussage, in welche Richtung und mit welchem Betrag die Bewegung erfolgen soll. Auf dieser Basis lassen sich die FE-Knoten herausfiltern, die eine deutliche Verbesserung im Tragverhalten herbeiführen können. Um Sickenverläufe zu ermitteln, müssen allerdings weitere Bedingungen erfüllt werden. Von den FE-Knoten, die mit den sortierten Sensitivitäten korrespondieren, werden nur diese als Kandidaten für Sickenzentren, die so genannten „Hot Spots“, markiert, deren Sensitivität höher als ein bestimmter Schwellwert ist. Dieser Schwellwert kann anwenderdefiniert oder eine Funktion des Mittelwertes aller Sensitivitäten im System sein. Die markierten Kandidaten werden im zweiten Schritt auf Tauglichkeit überprüft. Der FE-Knoten mit der betragsmäßig größten Sensitivität wird als erstes Zentrum deklariert. Die restlichen Kandidaten werden in der sortierten Kandidatenliste sukzessive überprüft, indem der räumliche Abstand zu allen bekannten Zentren (am Anfang ist es nur ein Zentrum) berechnet und mit dem vom Anwender definierten maximalen Sickenradius, entspricht der halben Sickenbreite, verglichen wird. Ist der Abstand zu irgendeinem Zentrum kleiner als die vorgegebene Sickenbreite, ist dieser Knoten im Einzugsbereich vorhandener Sicken und wird von der Kandidatenliste gestrichen. Ist dieser Abstand größer als die maximal gewünschte Sickenbreite, wird der Kandidat in die Zentrenliste eingetragen.

Nach Erhalt der Sickenzentren kann mit der Sickenbildung begonnen werden. Die Liste der feststehenden Zentren wird durchlaufen. Die Umgebung innerhalb des Sickenradius um das Zentrum wird gescannt und als Teil einer Sicke gekennzeichnet. In diesem Zusammenhang stehen einige Optionen bzw. Gestaltungsmöglichkeiten zur Verfügung. Da die Knoten im kreisförmigen Einzugsbereich eines Sickenzentrums im Allgemeinen unterschiedliche Sensitivitäten aufweisen – meistens abklingend zum Sickenrand – können diese erneut einer Klassifizierung unterzogen werden.

Es entsteht eine Vielfalt an anwendergesteuerten Gestaltungsmöglichkeiten für den Sickenkörper (Sickenquerschnitt):

- Die von der algorithmischen Umsetzung einfachste Variante ist die „natürliche“ Sicke, bei der die FE-Knoten im kompletten Einzugsbereich² ohne weitere Manipulationen einen zur eigenen Sensitivität proportionalen Faktor zugewiesen bekommen. Dieser Faktor legt die Schrittweite der Knotenbewegung in der kommenden Iteration fest. Aufgrund der meistens Gauß-ähnlichen Verteilung der Sensitivitäten um das Zentrum herum, entstehen geschlossene kreisförmige nicht ganz gleichmäßig gewölbte Sicken, wie in Abb. 7.2 zu sehen ist³.
- Im Hinblick auf die Herstellbarkeit der gefundenen Sickenbilder kann ein Sickenkörper mit gleichbleibender Bauhöhe unter Umständen erwünscht sein. Dies kann durch die Homogenisierung der Sensitivitäten im gesamten Einzugsbereich erreicht werden.

²Der Einzugsbereich ist die Summe aller FE-Knoten, die zum Sickenzentrum, dem Hot Spot, einen räumlichen Abstand, der kleiner als der Sickenradius ist, besitzen.

³In Abb. 7.2 kann in der zentralen Sicke eine Unebenheit im Eckbereich beobachtet werden. Diese Unregelmäßigkeiten werden durch einen Fehler im verwendeten Freivernetzer verursacht, der unsymmetrische Netze produziert, trotz symmetrischer Geometrie.

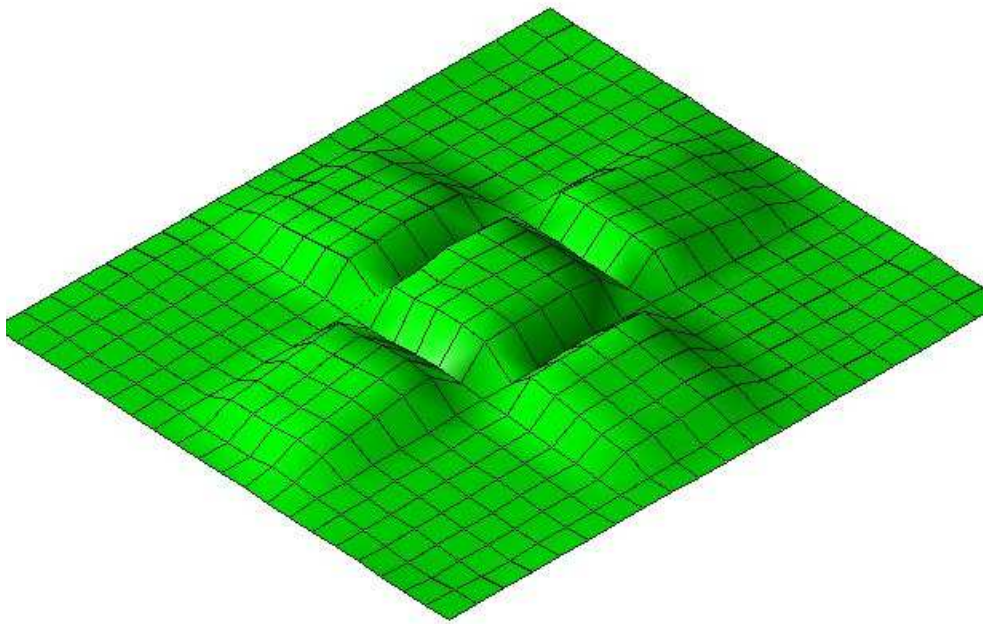


Abbildung 7.2: Sickenoptimierung einer quadratischen Platte unter Gleichlast ohne Homogenisierung.

Unter Homogenisierung wird in diesem Fall das Gleichsetzen der Gradientenintensitäten auf einen errechneten mittleren Wert verstanden. Dadurch entstehen kreisförmige geschlossene Sicken mit einem gleichbleibenden Querschnitt, in dem die FE-Knoten ein Plateau bilden, wie in Abb. 7.3 zu sehen ist.

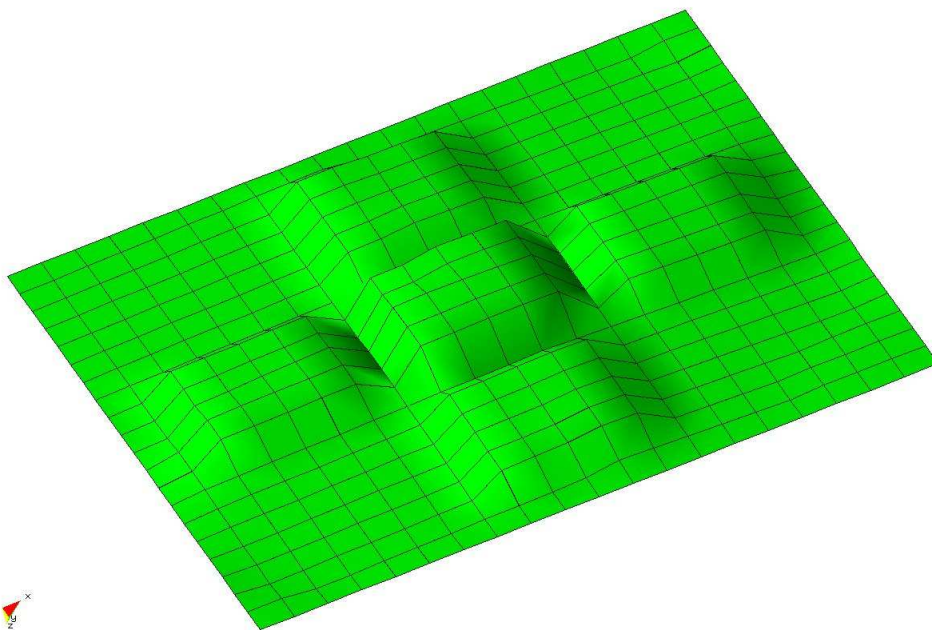


Abbildung 7.3: Sickenoptimierung einer quadratischen Platte unter Gleichlast ohne Sicken durchdringung mit Homogenisierung.

- Mit den bisher gewählten Filtern ist es möglich, lediglich quadratische oder kreisförmige Sicken zu produzieren. In vielen Fällen, in denen ein nahezu eindimensionaler Kraftfluss stattfindet, sind langgezogene Sicken mit Orientierung der Sickenlängsachse in Richtung der Lastabtragung wesentlich effizienter. Die Information über die Sickenorientierung ist ebenfalls in den Sensitivitäten der Verzerrungsenergie gespeichert und zwar in der Verteilung der „Ableitungsintensitäten“ im Sickenkörper. Eine selektive Klassifikation der FE-Knoten im Einzugsbereich eines Zentrums (im Umkreis vom Sickenradius), bei der nur Knoten mit Intensitäten über einem bestimmten Niveau ausgewählt werden, bringt den langgezogenen und gerichteten Sickenkörper hervor. Die restlichen Knoten erhalten den Nullfaktor und bleiben damit unverändert. Ein guter Schwellwert für die Grenzintensität ist Φ_σ , der sich aus dem arithmetischen Mittel zuzüglich der Varianz der Sensitivitäten innerhalb des Einzugsbereichs⁴ ergibt.

$$\Phi_\sigma = \overline{\nabla_x f} + \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_m}{\partial x_i} - \overline{\nabla_x f} \right)^2} \quad (7.2)$$

mit

$$\overline{\nabla_x f} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_i}}{n} \quad (7.3)$$

dabei ist

$\overline{\nabla_x f}$ das arithmetische Mittel der Sensitivitäten im Einzugsbereich.

$\frac{\partial f_m}{\partial x_i}$ die gefilterte Sensitivität am i -ten Knoten.

n Anzahl der FE-Knoten im Einzugsbereich.

Eine darauf folgende Homogenisierung führt zu einer gleichbleibenden Bauhöhe in der langgezogenen Sicke, wie in Abb. 7.6 bei der Sickenoptimierung eines Kragarms zu sehen ist.

- Aufbauend auf dem selektiven Algorithmus ergibt sich eine weitere Gestaltungsmöglichkeit für den Sickenkörper. Wie oben beschrieben, entsteht die längliche Sicke durch Entfernung der nicht relevanten Knoten aus dem Sickenkörper. Eine sinnvolle Ergänzung wäre die Erhaltung der Knoten mit geringer Sensitivität, allerdings mit einer verminderten Schrittweite. Das Ergebnis des mit diesen Optionen fungierenden Sickenalgorithmus ist eine abgetreppte Sicke mit einem langgezogenen Kern und einem kreisförmigen äußeren Umriss, wie in Abb. 7.4 zu sehen ist. Die unregelmäßige Form der mittleren Sicke ist auf Ungenauigkeiten im Ausgangsnetz und auf die grobe Diskretisierung zurückzuführen.

7.4.2 Durchdringung von Sicken

Das bisher vorgestellte Verfahren ist in der Lage, einzelne Sicken ausfindig zu machen und deren Querschnitt, also den Sickenkörper, mittels unterschiedlicher anwendergesteur-

⁴Hier ist zwischen Sickenkörper und Einzugsbereich zu unterscheiden, denn im Falle des selektiven Algorithmus ist der Sickenkörper nur eine Teilmenge des Einzugsbereichs.

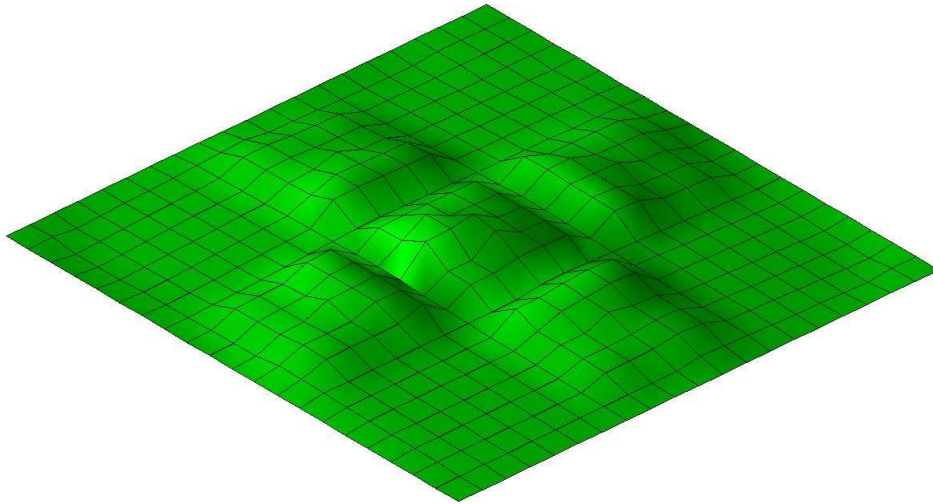


Abbildung 7.4: Sickenoptimierung einer quadratischen Platte unter Gleichlast mit Abstufung der Bauhöhe.

ter Optionen zu gestalten. Häufig sind jedoch geschlossene Sickenverläufe, entweder großflächige oder schmale langgezogene, erwünscht oder aus mechanischen Gründen sogar notwendig. Um dem Genüge zu tun, wird der Sickenalgorithmus um zwei Fähigkeiten ergänzt.

Die großflächige Sicke, bei der mehrere benachbarte Sicken zu einer großen zusammengeführt werden, kann durch Einführung der Durchdringungseigenschaft erreicht werden. Es handelt sich dabei um einen Interaktionsfaktor, der die Abstände zwischen den Sickenzentren neu regelt.

Wie bereits oben beschrieben werden die Kandidaten der Sickenzentren nur dann zu neuen Zentren, wenn deren Abstand zu allen bereits bekannten Zentren größer ist als die vorgegebene Sickenbreite (doppelter Sickenradius). Somit reicht es, einen Interaktionsfaktor

$$INTERAKT = \frac{\text{Abstand zwischen zwei Zentren}}{\text{Sickenradius}} \quad (7.4)$$

einzuführen, der den minimal zulässigen Abstand zwischen den Sickenzentren regelt. Ist $INTERAKT = 2.0$, erhalten wir dasselbe Verhalten, wie oben beschrieben, also die direkt benachbarten aber getrennten Sicken (Abb. 7.5). Wird $INTERAKT > 2.0$ gewählt, können die Sicken auseinander gebracht werden. Bei $INTERAKT < 2.0$ können sich die Sicken durchdringen und bilden damit eine großflächige Sicke, wie in Abb. 7.5 zu sehen ist.

Ein möglicher Nachteil der durch einfache Relaxation des Interaktionsfaktors entstehenden großflächigen Sicken ist aus mechanischer Sicht die Tatsache, dass sich damit auch benachbarte Sicken durchdringen würden, obwohl dies der Verbesserung des Tragverhaltens nicht zuträglich wäre. Dieses Phänomen kann in länglichen Strukturen mit einem nahezu einachsigen Kraftfluss, wie z.B. in auskragenden Strukturen, beobachtet werden. In solchen Strukturen sind meist langgezogene parallel zueinander verlaufende Sicken wesentlich effizienter. Diese Anforderung kann der bisher präsentierte Sickenalgorithmus nicht erfüllen. Eine weitere Ergänzung, um diese Aufgabe zu meistern, ist der Sickenschließungsalgorithmus.

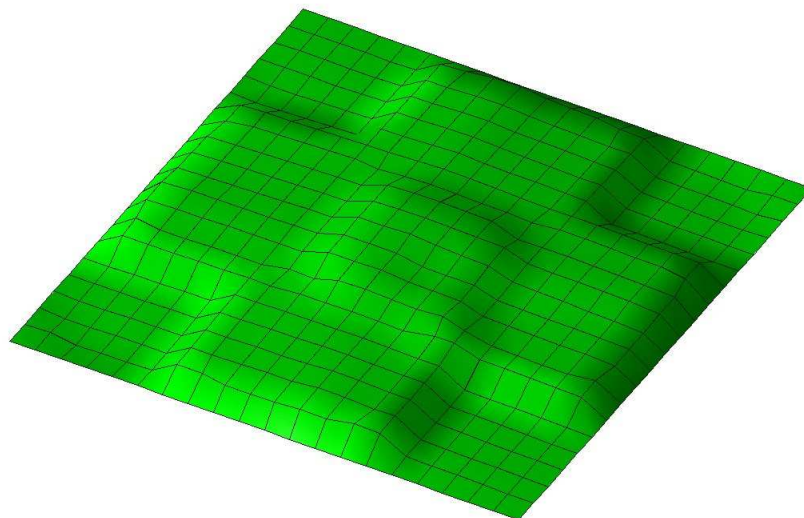


Abbildung 7.5: Sickenoptimierung einer quadratischen Platte unter Gleichlast mit Sicken durchdringung.

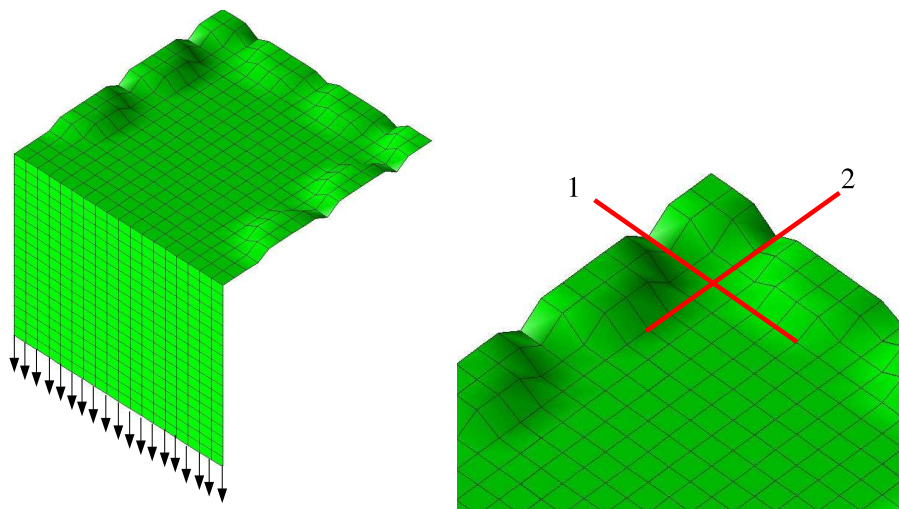
7.4.3 Der Sickenschließungsalgorithmus

Die technischen Merkmale des bisher vorgestellten Sickenalgorithmus enthalten das Auffinden der Stellen, an denen Sicken die größtmögliche Verbesserung der mechanischen Struktureigenschaften, hier die Steifigkeit, bewirken. Weiterhin ist es möglich, die Schar an benachbarten Sicken, mittels eines einfachen nicht mechanisch motivierten Kriteriums, zu einer großflächigen Sicke zusammenzufassen.

In diesem Abschnitt wird ein Algorithmus vorgestellt, bei dem eine gezielte Untersuchung der Randknoten (Fugenknoten) erfolgt, sodass die benachbarten durch Fugen getrennten Sicken nur dann vereint werden, wenn dies der Steigerung der Struktursteifigkeit zuträglich ist.

Diese Problematik, eine Sickenfuge aufzuheben oder nicht, ist in [Abbildung 7.6](#) dargestellt. Es stellt sich die Frage, welcher der beiden Sickenränder 1 oder 2 sinnvollerweise aufgehoben werden soll, um die zwei Sicken zu vereinen, und welcher Sickenrand besser bleiben sollte. Das Sickenbild in [Abb. 7.6\(b\)](#) ist Teil eines Kragarms mit der Belastung am Kragarmende [Abb. 7.6\(a\)](#). Die korrekte Entscheidung würde dem entwerfenden Ingenieur nicht schwer fallen, denn die Aufhebung des Randes 1 produziert eine lange zum Kraftfluss parallele Rippe, während die Aufhebung des Randes 2 die gewonnene Bauhöhe wieder rückgängig machen und damit die Steifigkeit reduzieren würde.

Wie kann allerdings ein Computer diese Entscheidung zuverlässig treffen? Diese Frage kann einzig und alleine der FE-Knoten direkt auf dem Sickenrand beantworten. Dank einer erneuten Sensitivitätsanalyse für die betroffenen Knoten, also die Knoten, die zwei Sicken voneinander trennen, kann eine systematische Beurteilung vorgenommen werden. Die Knoten,



(a) System im Gesamtbild.

(b) Sickenfugen im Detailbild.

Abbildung 7.6: Sickenoptimierung eines Kragarms ohne Sicken-schließung.

die besser die Sicken vereinen, besitzen Sensitivitäten, die den Knoten eine solche Bewegung verleihen. Falls es besser wäre die Sicken eher getrennt zu lassen, zeigt der Gradient in die entgegengesetzte Richtung. Im Beispiel in Abb. 7.6(b) zeigen die Grenzknoten auf der Linie 1 eine Tendenz nach oben, während die Grenzknoten auf der Linie 2 eine Bewegung nach unten bevorzugen. Unter Berücksichtigung dieser im Knoten gespeicherten mechanischen Information liefert der Sicken-schließungsalgorithmus geschlossene Sickenverläufe unter dem Gesichtspunkt der Steifigkeitsmaximierung.

Im Zuge der Sicken-schließung ergibt sich ein wichtiges an den dynamischen Prozess der Sicken-entstehung gekoppeltes Phänomen, das auf den Zeitpunkt der Aufhebung der Sicken-fugen einen entscheidenden Einfluss nimmt. Das Phänomen betrifft die Stabilität der erzeugten Sicken-bilder, die im Laufe der Iterationen einem ständigen Wandel unterworfen sind. Einerseits kommen, aufgrund der Struktur-Veränderungen, neue Sicken-zentren hinzu, andererseits wird ein Seitenwechsel der Sicken bezüglich der Ausgangslage beobachtet. Also kommt es vor, dass eine Sicke, die sich nach oben gebildet hat, die Seite bezüglich der neutralen Faser wechselt und nach unten muss. Dies bedeutet, dass die bereits ausgebildeten Sicken-körper im weiteren Verlauf der Sicken-optimierung das Vorzeichen der Sensitivitäten wechseln und damit sich symmetrisch zur neutralen Faser bewegen – ein so genanntes Umstülpen der Sicke. Dieses Phänomen wird durch Beobachtung der Sensitivitäten der Sicken-zentren kontrolliert, indem die Geschichte der Ableitung in den Sicken-zentren aufgezeichnet wird. Erst wenn keine neuen Sicken hinzukommen und keine Sicken die Lage bezüglich der neutralen Faser ändern, wird die Konvergenz des Sicken-bildes angenommen. Dieses Verhalten der Sicken-entstehung ist in Abbildung 7.7 dargestellt. In Abbildung 7.7(a) ist das Ergebnis der Sicken-optimierung nach der ersten Iteration zu sehen. Die Entstehung von zwei neuen Sicken und vor allem den Seitenwechsel einiger Sicken verzeichnet die zweite Iteration in Abbildung 7.7(b). Dieses Sicken-muster konvergiert dann zu einem stabilen Sicken-bild. Erst dann kann der Sicken-schließungsalgorithmus seine Arbeit aufnehmen.

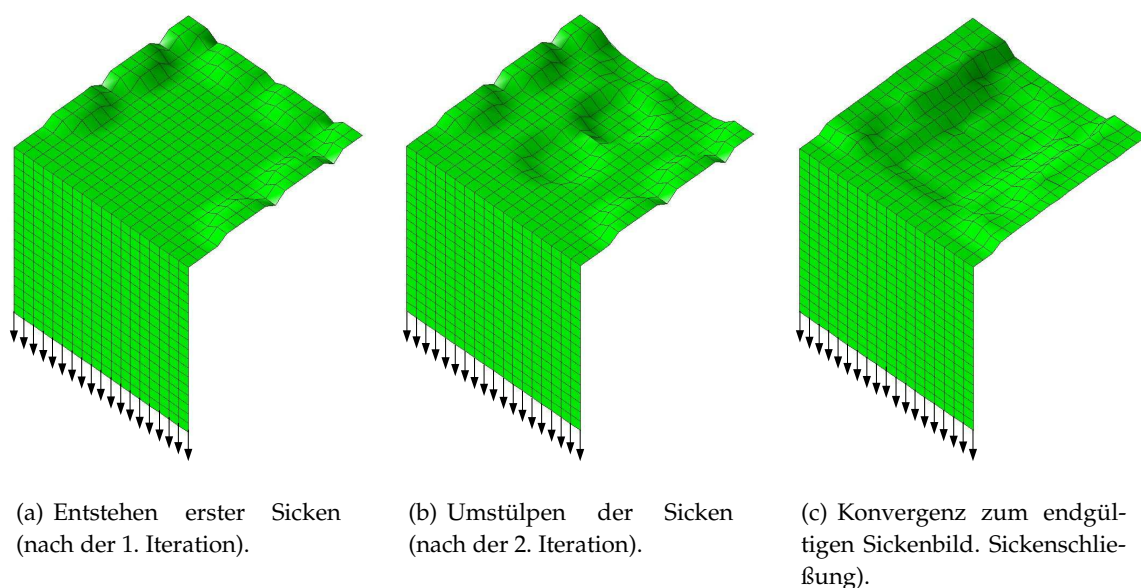


Abbildung 7.7: Sickenoptimierung einer Kragplatte.

Das Ergebnis der Sicken-schließung ist Abbildung 7.7(c) zu entnehmen. Darin wird ersichtlich, dass die Fugen senkrecht zum Kraftfluss aufgehoben wurden und die Grenzen parallel dazu dahingehend modifiziert werden, dass die Lastabtragung durch breitere Sicken begünstigt wird. Erkennbar ist ebenfalls die gleichmäßige Materialverlagerung jenseits der neutralen Faser, sodass Zug- und Druckgurt annähernd die gleiche Fläche aufweisen.

7.5 Numerische Beispiele

7.5.1 Das Wellblech

In diesem Beispiel wird versucht eines der bekanntesten Lösungen im konstruktiven Ingenieurwesen – das Wellblech – zu reproduzieren. Die rippenartigen Strukturen sind insbesondere in Tragwerken mit einachsigem Kraftfluss, wie Kragarme oder Plattenstreifen, sehr effiziente Lösungen. Im vorliegenden Beispiel wird die Sickenoptimierung einer einachsig tragenden Platte vorgenommen. In Abbildung 7.8(a) ist das statische System dargestellt, in dem die langen Ränder Navier-gelagert und die kurzen frei sind, wodurch die einachsige Lastabtragung erzwungen wird. Die Struktur wird durch eine Gleichflächenlast beansprucht.

Im Vorlauf der Sickenoptimierung müssen die Sensitivitäten mit einem globalen Filter des Radius $R_{global} = 2.0$, was der kurzen Plattenspannweite entspricht, geglättet werden. Der Sickenradius, der Radius des lokalen Filters, wird $R_{lokal} = 1.45$ etwas größer als die halbe Spannweite gewählt, damit eine durchgehende Sicke entstehen kann, wie in Abbildung 7.8(b) zu sehen ist.

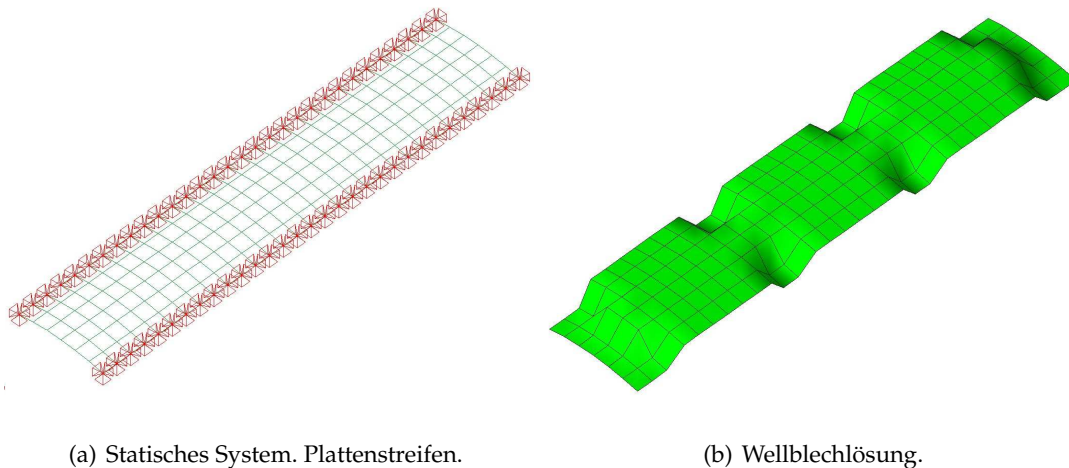


Abbildung 7.8: Sickenoptimierung eines Plattenstreifens.

Einen interessanten Vergleich zur Beurteilung der Effizienz in der Lastabtragung stellt Tabelle 7.1 zur Verfügung. Darin wird die Verzerrungsenergie von drei Strukturen, der Plattenstreifen, die Sickenlösung und die Membranlösung verglichen.

Plattenstreifen	Wellblech	Membran
6,7914E-02	2,4950E-02	0,56254E-02

Tabelle 7.1: Vergleich der Verzerrungsenergie.

Es ist deutlich zu sehen, in welchem Maße die Membranstrukturen überlegen sind, wobei diese stark an den Randbedingungen, Einwirkung und Lagerung, gebunden sind und auf Abweichungen sehr empfindlich reagieren. Die versickte Struktur liefert ebenso eine erhebliche Verbesserung gegenüber dem Plattenstreifen. Die Verteilung der von Mises Spannungen in den drei Lösungen (Abbildung 7.9) bestätigt die Aussage der Ergebnisse der Verzerrungsenergie, indem der Plattenstreifen die wesentlich höheren und die Membranstruktur die geringsten Spannungen aufweist.

7.5.2 Der Gasbehälter

In diesem Beispiel wird die Aussteifung eines Behälters (ohne oberen und unteren Boden) unter Innendruck mittels Sickenoptimierung durchgeführt. Im Behälter mit quadratischem Querschnitt werden alle vier Seitenwände der Optimierung freigegeben, indem die drei Raumkoordinaten jedes FE-Knotens als Entwurfsvariable deklariert werden. Die Sensitivitäten werden strukturweit mittels eines globalen Filters mit Filterradius $R_{global} = 5.0$, was der halben Behälterbreite entspricht, gefiltert. Der Sickenradius beträgt $R_{lokal} = 2.15$ damit die Sicken in jeder Seitenwand genügend Platz haben, um sich bilden zu können.

Anzumerken ist, dass sich das Sickenbild ändern würde bei Wahl eines anderen Sickenradius, was die Freiheit ausmacht, die dem entwerfenden Ingenieur durch das Verfahren zur Verfügung gestellt wird.

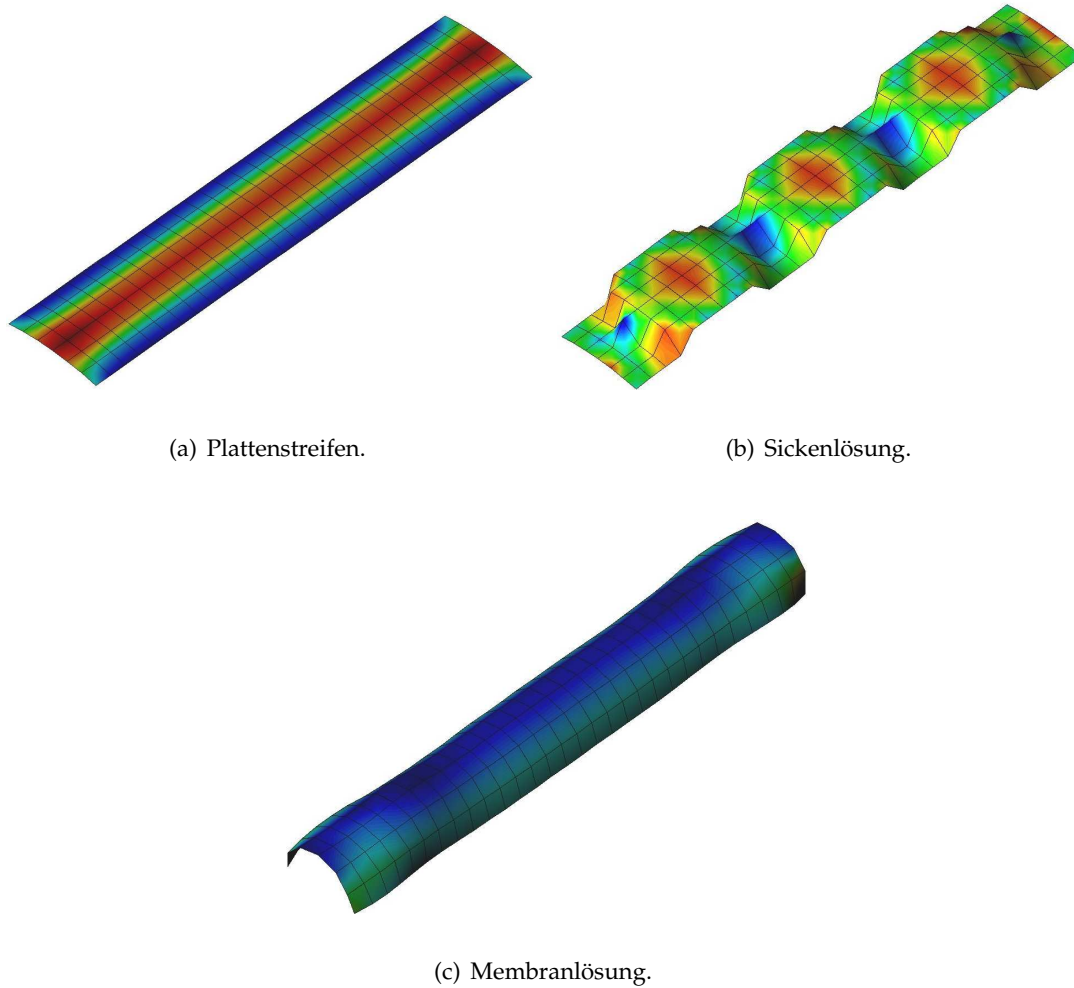
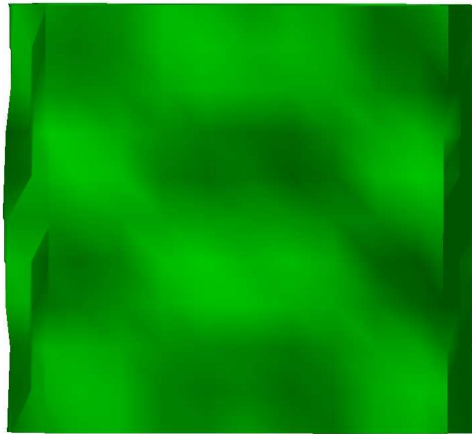
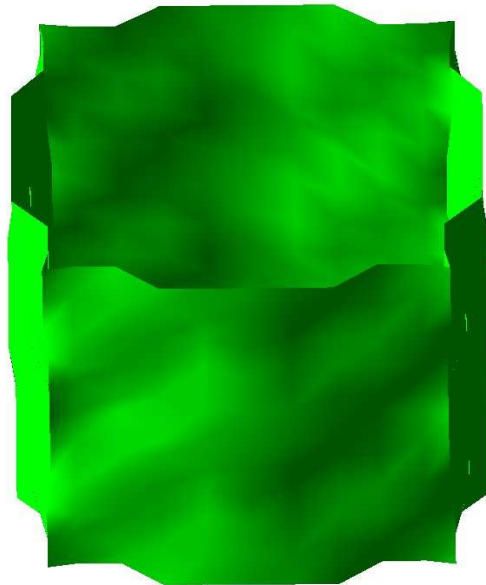


Abbildung 7.9: Von Mises Spannungsverteilung.

Es bilden sich in jeder Seitenwand neun Sicken und zwar in den Ecken, in der Mitte jeder Kante und im Zentrum, wie in [Abbildung 7.10\(a\)](#) zu sehen ist. Das Sickenmuster konvergiert in der zweiten Iteration zu einem stabilen Sickenbild. Darin ist zu beobachten, dass sich die Sicken abwechselnd nach innen und nach außen bilden, um die maximale räumliche Tragwirkung, in der die günstigen Membrankräfte aktiviert werden, auszuschöpfen.

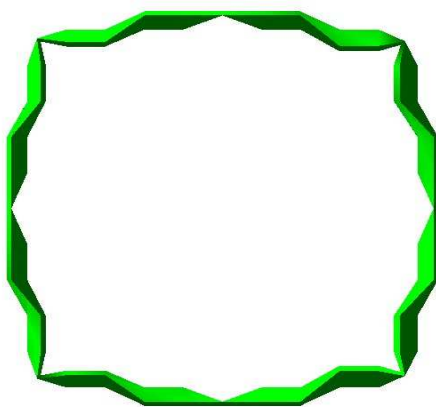


(a) Seitenansicht.

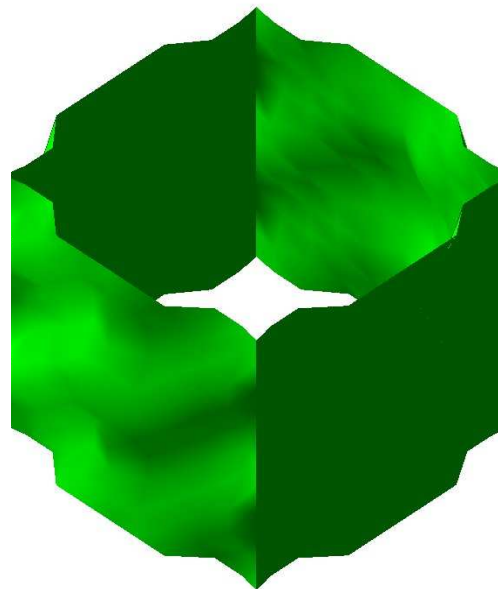


(b) Schrägansicht.

Abbildung 7.10: Sickenoptimierung eines Behälters unter Innendruck.



(a) Draufsicht.



(b) Perspektivdarstellung.

Abbildung 7.11: Sickenoptimierung eines Behälters unter Innendruck.

Kapitel 8

Sensitivitätsanalyse in der Formoptimierung

8.1 Einführung

Die Sensitivitätsanalyse hat sich im Laufe der vergangenen Jahrzehnte zu einer eigenständigen Wissenschaft entwickelt, die in vielen Disziplinen, wie Natur-, Sozial-, Umwelt- und Finanzwissenschaften Anwendung findet. Im Allgemeinen ist eine Sensitivitätsanalyse überall dort sinnvoll oder notwendig, wo ein Modell als Ersatz für ein reales System oder einen Prozess verwendet wird. Einige Wissenschaftler vertreten die Meinung, dass die Sensitivitätsanalyse eine Grundvoraussetzung für eine zuverlässige Modellbildung ist [SCS00]. Aufgrund der vielfältigen Einsatzgebiete der Sensitivitätsanalyse sind ebenso viele spezialisierte Definitionen vorhanden, die die Besonderheiten der jeweiligen Anwendung ausmachen. Dennoch existiert ein disziplinübergreifender Charakter, der eine allgemeine Definition ermöglicht. Demnach untersucht die Sensitivitätsanalyse den Zusammenhang zwischen den Eingangs- und Ausgangsdaten eines Modells.

Im Laufe der Jahre hat sich der Begriff der Sensitivitätsanalyse, in dem lediglich die Empfindlichkeit der Modellantwortgrößen infolge einer Variation des Inputs gesucht wird, um die konzeptionellen und strukturellen Modellunsicherheiten erweitert. Die Sensitivitätsanalyse hat prinzipiell die Aufgabe, die Zuverlässigkeit eines Modells zu erhöhen [Ros91]. Dies impliziert:

- das Auffinden der wesentlichen Eingangsparameter, die eine signifikante Variation der Antwortgrößen hervorrufen.
- die Identifikation der interessanten Regionen im Raum der Eingangsdaten, die zum Kalibrieren des Modells herangezogen werden. Die Materialgesetze sind ein gutes Beispiel aus der Strukturmechanik für diese Art von Anwendung.
- die Identifikation der einflussarmen Eingangsparameter mit dem Ziel, diese aus dem Modell zu entfernen oder zumindest nicht mehr zu variieren bzw. zu streuen.

In den unterschiedlichen Fachgebieten, die auf die Sensitivitätsanalyse zurückgreifen, erhält der allgemeine Begriff eine fachbezogene Spezialisierung. In der Chemie z.B. stellt die Sensitivitätsanalyse das Verhältnis zwischen den thermodynamischen Eingangsgrößen und den

messbaren Ausgangsgrößen einer Reaktion dar. In der Strukturoptimierung bestimmt die Sensitivitätsanalyse das Maß der Veränderung der an einer Optimierungsaufgabe beteiligten Funktionen – Zielfunktion(en) und Nebenbedingungen – aufgrund einer Variation der Entwurfsvariablen. In anderen Worten, mittels der Sensitivitätsanalyse werden die Ableitungen von Zielfunktion und Nebenbedingungen bezüglich der Entwurfsvariablen ermittelt. Üblicherweise ist lediglich die Ableitung erster Ordnung gemeint, denn Ableitungen höherer Ordnung sind nur mit extrem großem Herleitungs-, Codierungs- und Rechenaufwand erhältlich. Bei den weniger genauen Differenzenverfahren ist die zweite Ableitung mit unvermeidbaren Ungenauigkeiten behaftet, sodass die Aussagekraft verloren geht.

Die Ableitungsdaten werden in der Strukturoptimierung von den gradientenbasierten Optimierungsalgorithmen benötigt, um die Aktualisierung der Entwurfsvariablen gezielt vorzunehmen. Die Gradientenverfahren, im Gegensatz zu den Verfahren nullter Ordnung, führen in jeder Iteration dank der Ableitungsinformation zu einer Entwurfsverbesserung.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit neuartigen Verfahren in der Formoptimierung von Freiformschalen, daher ist der Schwerpunkt auf die linearelastische Analyse gelegt, um die Komplexität und die unbekanntenen Seiteneffekte der geometrischen und materiellen Nichtlinearitäten zu vermeiden. Somit gilt ebenso das Interesse in der Sensitivitätsanalyse den diskreten linearen Gleichgewichtsbeziehungen der Strukturmechanik. Die variationellen Verfahren der Sensitivitätsanalyse werden daher nur kurz vorgestellt.

8.2 Klassifikation der Verfahren

In der einschlägigen Literatur sind mehrere Möglichkeiten vorzufinden, die Verfahren der Sensitivitätsanalyse zu klassifizieren. Von der softwaretechnischen Seite wird zwischen Verfahren unterschieden, bei denen keine Kenntnisse über die Elementformulierung erforderlich sind, wie das globale Differenzenverfahren und in gewisser Hinsicht die semianalytische Sensitivitätsanalyse, und Verfahren bei denen die Elementsteifigkeitsmatrix abgeleitet werden muss, sodass der volle Zugriff auf den FE-Code erforderlich ist, wie die diskrete direkte Sensitivitätsanalyse.

Eine weitere mögliche Klassifikation, nach der sich diese Arbeit richtet, ist die Einteilung einerseits in diskrete Verfahren, bei denen erst die Modelldiskretisierung mittels der Methode der finiten Elemente stattfindet und danach die Ableitung der Funktionen und der diskreten Zustandsgrößen nach den Entwurfsvariablen. Andererseits kann die Differenziation zuvor auf der Ebene der problembeschreibenden Gleichungen erledigt werden und danach erfolgt die Diskretisierung. Zu dieser Klasse gehören die variationellen Methoden, die hier nur kurz angeschnitten werden.

In der Tabelle 8.1 werden die unterschiedlichen Verfahren der Sensitivitätsanalyse zusammengefasst.

Nach Genauigkeit (nach unten aufsteigend)	Reihenfolge der Operationen	Zustand der abzuleitenden Gleichungen
Differenzen (numerisch)	Direkt	Diskret
Semianalytisch	Adjungiert	Variationell
Analytisch		

Tabelle 8.1: Klassifikation der Verfahren der Sensitivitätsanalyse.

8.3 Die diskrete Sensitivitätsanalyse

Die Ermittlung der Ableitungen erfolgt in der diskreten Sensitivitätsanalyse durch Differenziation der algebraischen Gleichungen, die mittels Diskretisierung der problembeschreibenden (partiellen) Differenzialgleichungen entstehen, und im Falle der Strukturoptimierung das statische oder dynamische Gleichgewicht repräsentieren. Die Diskretisierung bedeutet in diesem Zusammenhang die Überführung der unbekannt Funktionsverläufe der Systemantwortgrößen in diskrete Unbekannt an speziellen Stellen, wie FE-Knoten oder Gaußpunkte. Der Unterschied zwischen der diskreten und der variationellen Sensitivitätsanalyse wird bei Betrachtung der Gleichgewichtsgleichungen des kontinuierlichen Gl. (8.1) und des diskreten Falls Gl. (8.2) deutlich.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij,j} + f_i &= 0 && \text{in } \Omega \\
 u_i &= g_i && \text{auf } \Gamma_{g_i} \\
 \sigma_{ij} \cdot n_j &= h_i && \text{auf } \Gamma_{h_i}
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

Gleichung 8.1 ist die starke Form in der linearen Elastostatik und stellt den funktionalen Zusammenhang zwischen den unbekannt Verläufen der Systemantwort, die Verschiebungen u_i und die Spannungen σ_{ij} , und den vorgeschriebenen Randbedingungen, Dirichlet g_i auf Γ_{g_i} und Neumann h_i auf Γ_{h_i} dar (für mehr Details siehe [Hug87]). Die Differenziation der starken Form bzw. der äquivalenten schwachen Form bezüglich der Entwurfsvariablen ist Gegenstand der variationellen Sensitivitätsanalyse, die in Abschnitt 8.4 kurz beschrieben wird.

Die Diskretisierung der starken Form (bzw. der äquivalenten schwachen Form) führt zu einem algebraischen Gleichungssystem der unbekannt diskreten Knotenverschiebungen \mathbf{u} ,

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{R} \tag{8.2}$$

mit \mathbf{K} die Systemsteifigkeitsmatrix, \mathbf{u} Vektor der unbekannt Knotenverschiebungen und \mathbf{R} Vektor der konsistenten Knotenkräfte.

Mit der Differenziation des Gleichungssystems (8.2) beschäftigt sich die diskrete Sensitivitätsanalyse, auf die in den folgenden Abschnitten eingegangen wird.

8.3.1 Das Verfahren der finite Differenzen

Bei der Methode der finiten Differenzen handelt es sich um eine Approximation der Ableitungsdaten. Es ist von der Umsetzung und der Codierung her das einfachste, aber bei weitem nicht das effizienteste Verfahren zur Ermittlung von Sensitivitäten. Wie bereits die Bezeichnung des Verfahrens es vermittelt, wird die Steigung der untersuchten Funktion an der aktuellen Stelle des Entwurfsvariablenvektors \mathbf{s}_0 durch Bildung des Differenzenquotienten der Funktionsauswertungen jeweils an der aktuellen Stelle \mathbf{s}_0 und an einer benachbarten Stelle \mathbf{s}_1 , die eine Störung des aktuellen Zustandes mittels der Schrittweite Δs darstellt, ermittelt.

Es ergibt sich eine ganze Familie an Approximationen, wovon hier die zwei wichtigsten kurz vorgestellt werden. Die einfachste Methode der finiten Differenzen ist das Vorwärtsdifferenzenverfahren, indem eine Approximation erster Ordnung der Sensitivitäten vorgenommen wird. Die Ableitung der Funktion u nach der Entwurfsvariablen s_i (in Komponentenschreibweise) ergibt sich zu:

$$\frac{\partial u}{\partial s_i} \simeq \frac{\Delta u}{\Delta s_i} = \frac{u(s_1, s_2, \dots, s_i + \Delta s_i, \dots, s_n) - u(s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_n)}{\Delta s_i} \quad (8.3)$$

Im n -dimensionalen Raum, mit n Anzahl der Entwurfsvariablen, impliziert die Ableitungsvorschrift in Gl. (8.3), dass die abzuleitende Funktion u zusätzlich¹ n mal ausgewertet werden muss. In der Strukturoptimierung bedeutet jede Auswertung eine komplette FE-Analyse, wodurch klar wird, dass das Finitedifferenzenverfahren zeit- und rechenintensiv ist, bei dem der Rechenaufwand linear mit der Anzahl der Entwurfsvariablen steigt.

Eine Approximation zweiter Ordnung stellt das Verfahren der zentralen Differenzen dar, bei dem die Informationen höherer Ordnung durch zusätzliche Auswertungen angenähert werden.

$$\frac{\partial u}{\partial s_i} \simeq \frac{\Delta u}{\Delta s_i} = \frac{u(s_1, s_2, \dots, s_i + \Delta s_i, \dots, s_n) - u(s_1, s_2, \dots, s_i - \Delta s_i, \dots, s_n)}{2\Delta s_i} \quad (8.4)$$

In Gl. (8.4) wird deutlich, dass eine weitere Auswertung an der Stelle $s_i - \Delta s_i$ benötigt wird, wodurch Rechenaufwand und Speicherbedarf merklich steigen.

8.3.1.1 Das Schrittweiten-Dilemma

Bei jeder Approximation stellt sich die Frage der Genauigkeit und der Abhängigkeit von der Schrittweite Δs . Zur Abschätzung der Approximationsfehler wird eine Taylor-Reihenentwicklung, die mathematische Basis der Differenzenverfahren, herangezogen. Im Allgemeinen können zwei Fehlerquellen ausgemacht werden: Der Abbruchfehler e_A und der Konditionsfehler e_K (für mehr Details siehe [HI85]).

¹Zusätzlich zur Strukturanalyse, die an der Stelle \mathbf{s}_0 durchgeführt wird.

Der Abbruchfehler entsteht durch Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung in der Reihenentwicklung. Im Vorwärtsdifferenzenverfahren im eindimensionalen Fall kann der dieser Fehler wie folgt formuliert werden:

$$u(s + \Delta s) = u(s) + \Delta s \frac{du}{ds}(s) + \frac{(\Delta s)^2}{2} \frac{d^2u}{ds^2}(s + \zeta \Delta s), \quad 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (8.5)$$

Der Abbruchfehler aus Gl. (8.5) ergibt sich zu:

$$e_A(\Delta s) = \frac{(\Delta s)^2}{2} \frac{d^2u}{ds^2}(s + \zeta \Delta s), \quad 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (8.6)$$

Die Betrachtung der Gl. (8.6) zeigt, dass der Abbruchfehler eine quadratische Funktion der Schrittweite Δs ist. Je größer die Schrittweite, desto größer der Abbruchfehler.

Der Konditionsfehler entsteht durch Rundungsfehler bei der Berechnung des Quotienten $\frac{\Delta u}{\Delta s}$, die allerdings bei der heutigen Rechengenauigkeit moderner Rechner keine Rolle mehr spielen. Der wesentliche Beitrag kommt hingegen von der numerischen Auswertung der Funktion u , die meistens anhand schlecht konditionierter Problemstellungen stattfindet. Eine weitere Fehlerquelle sind iterative Lösungsverfahren, bei denen unter Umständen zu früh abgebrochen wird.

Bei Begrenzung des maximal möglichen Fehlers bei der Evaluierung der Funktion u auf ϵ_u kann der Konditionsfehler für das Vorwärtsdifferenzenverfahren wie folgt konservativ geschätzt werden:

$$e_K(\Delta s) = \frac{2}{\Delta s} \epsilon_u \quad (8.7)$$

In Gl. (8.7) wird das Konditionsproblem deutlich wiedergegeben, indem die Verfeinerung der Diskretisierung, hier die Schrittweite, den Konditionsfehler in die Höhe treibt.

Der Vergleich beider Fehlergleichungen Gl. (8.6) und Gl. (8.7) offenbart das Schrittweitendilemma, unter dem die Differenzenverfahren generell leiden. Bei Vergrößerung der Schrittweite dominiert der Abbruchfehler und bei der Verkleinerung überwiegt der Konditionsfehler. Somit stellt sich heraus, dass die Bestimmung der optimalen Schrittweite, oder zumindest den Bereich, in dem der Gesamtfehler in akzeptablen Regionen liegt, die zentrale Aufgabe bei der Anwendung eines Differenzenverfahrens ist. Diese Aufgabe ist nicht immer eindeutig lösbar. Hinzu kommt die Tatsache, dass der Bereich des tolerierbaren Fehlers entweder sehr klein oder gar nicht vorhanden ist [GH99].

Trotz der angesprochenen Unzulänglichkeiten der Verfahren der finiten Differenzen, die numerische Ineffizienz und das Schrittweitendilemma, ist eine für den Erfolg dieser Verfahren wesentliche Eigenschaft zu erwähnen. Die Betrachtung der Gleichungen (8.3) und (8.4) zeigt, dass die Differenziation keinerlei Informationen über die Elementformulierung benötigt. Die problemabhängige Diskretisierung und die darunterliegende Elementtechnologie werden lediglich als „Blackbox“ verwendet und spielen bei der Differenziation keine Rolle. Somit ist das Verfahren, einmal codiert, ein universelles Werkzeug zur Ableitung von Funktionen. Diese Eigenschaft, zusätzlich zur einfachen Implementierung, war der Hauptgrund für die weit verbreitete Anwendung in der Industrie.

8.3.2 Die diskrete analytische Sensitivitätsanalyse

In der diskreten analytischen Sensitivitätsanalyse bezieht sich die Bezeichnung *analytisch* auf das Ableitungsverfahren, und nicht auf den Charakter der Größen, nach denen abgeleitet wird. Mit anderen Worten, bei der Differenziation findet keine Approximation der Gradienten, z.B. mittels Differenzen (siehe Abschnitt 8.3.1), statt. Da aber die problembeschreibenden Gleichungen in diskretisierter Form vorliegen Gl. (8.2), handelt es sich bei den Zustandsgrößen, die Knotenverschiebungen \mathbf{u} , um diskrete und damit im Allgemeinen approximierte Größen.

Die Funktionen in der Strukturoptimierung, deren Gradienten mittels der Sensitivitätsanalyse ermittelt werden, sind im Allgemeinen Strukturantwortgrößen, wie Verschiebungen, Spannungen, Gewicht, Masse, Volumen, Verzerrungsenergie, Eigenfrequenz u.v.m. Diese Strukturantworten sind generell direkte Funktionen der Entwurfsvariablen \mathbf{s} , die freien Parameter im System, wie Querschnittswerte (Querschnittsfläche, Schalendicke, Trägheitsmoment), Geometriewerte (Knotenkoordinaten, charakteristische Abmessungen, wie Lochradien, Kugelradius etc.) oder Materialkennwerte (Faserausrichtung, relative Materialdichte). Sie können aber auch indirekte implizite Funktionen der Entwurfsvariablen über die Abhängigkeit von den Knotenverschiebungen \mathbf{u} , die Zustandsvariablen, sein. Somit ergeben sich für eine Funktion f mehrfache Abhängigkeiten von \mathbf{s} :

$$f = f(\mathbf{s}, \mathbf{u}(\mathbf{s})) \quad (8.8)$$

Die analytische Ermittlung der Sensitivität der Funktion f nach dem Vektor der Entwurfsvariablen \mathbf{s} erfordert daher die Anwendung der Kettenregel:

$$\frac{df}{d\mathbf{s}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\right)^T \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{s}} \quad (8.9)$$

Die gesuchte Sensitivität der Funktion f ist die totale Ableitung $\frac{df}{d\mathbf{s}}$, die zum einen die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}$ als Ausdruck für die direkte explizite Abhängigkeit der Funktion f von den Entwurfsvariablen \mathbf{s} enthält, und zum anderen stellt der Term $\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\right)^T \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{s}}$ den indirekten impliziten Zusammenhang über die Zustandsvariablen \mathbf{u} dar.

Die direkte Abhängigkeit $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}$ ist in aller Regel einfach zu bekommen oder oft sogar null. Der wesentliche und rechenintensive Teil ist die Bestimmung der Sensitivitäten der Verschiebungen $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{s}}$.

Die Sensitivitäten der Knotenverschiebungen können durch die direkte Ableitung der Gleichgewichtsgleichungen Gl. (8.2) wie folgt ermittelt werden:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{R} \quad (8.10)$$

$$\frac{d\mathbf{K}}{d\mathbf{s}} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{K} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{s}} = \frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{s}} \quad (8.11)$$

$$\mathbf{K} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{s}} = \frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{s}} - \frac{d\mathbf{K}}{d\mathbf{s}} \cdot \mathbf{u} \quad (8.12)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{s}} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \left(\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{s}} - \frac{d\mathbf{K}}{d\mathbf{s}} \cdot \mathbf{u}\right) \quad (8.13)$$

Dadurch, dass \mathbf{u} nur von \mathbf{s} abhängt, gilt $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{s}} = \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{s}}$.

Die Vereinfachung, die mit der linearen Kinematik einhergeht, ist die Unabhängigkeit der Systemsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} von den Zustandsvariablen \mathbf{u} . Eine weitere Vereinfachung ist die Annahme von konservativen und deformationsunabhängigen Lasten $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{s})$ und nicht $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{u}(\mathbf{s}), \mathbf{s})$.

Der Ausdruck $\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{s}} - \frac{d\mathbf{K}}{d\mathbf{s}} \cdot \mathbf{u}$ auf der rechten Seite in Gl. (8.12) wird, aufgrund der Ähnlichkeit mit dem Systemlastvektor \mathbf{R} , der Pseudolastvektor \mathbf{R}^* genannt:

$$\mathbf{R}^* = \frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{s}} - \frac{d\mathbf{K}}{d\mathbf{s}} \cdot \mathbf{u} \quad (8.14)$$

Die Strukturanalyse mittels der Methode der finiten Elemente erfordert die Lösung des Gleichungssystems Gl. (8.10), wodurch die Systemsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} , üblicherweise, nach dem Cholesky-Verfahren faktorisiert² wird. Dadurch reduziert sich der Aufwand bei der Berechnung der Sensitivitätskoeffizienten erheblich, denn nach der Aufstellung des Pseudolastvektors muss kein komplettes Gleichungssystem gelöst werden. Durch Vorhalten der faktorisierten Systemsteifigkeitsmatrix genügt das Rückwärtseinsetzen, um die Koeffizienten der Matrix $\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{s}}$ zu erhalten.

Anschließend kann in Gl. (8.9) eingesetzt werden, um die vollständige Ableitung der Funktion f zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\mathbf{s}} &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\right)^T \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \left(\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{s}} - \frac{d\mathbf{K}}{d\mathbf{s}} \cdot \mathbf{u}\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\right)^T \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{R}^* \end{aligned} \quad (8.15)$$

Die Berechnung der Sensitivitätskoeffizienten dominiert den Rechenaufwand der gesamten Optimierungsaufgabe und muss in jeder Iteration erneut durchgeführt werden. Daher lohnt es die Bestimmungsgleichung (8.15) genauer zu analysieren und die unterschiedlichen Möglichkeiten, einerseits die Reihenfolge der Matrizenoperationen, andererseits die Verfahren zur Bestimmung der involvierten Felder zu vergleichen und gegenüberzustellen.

Bei der Reihenfolge der Operationen ist zwischen der direkten und der adjungierten Methode zu unterscheiden, deren Vor- und Nachteile in den folgenden Abschnitten erläutert werden.

Bei der Aufstellung der in Gl. (8.15) beteiligten Felder spielt der Pseudolastvektor \mathbf{R}^* eine besondere Rolle, denn darin kommen die Ableitungen der Steifigkeitsmatrix und des Elementlastvektors vor, womit die Differenziation auf Elementebene erforderlich wird. Damit rückt die verwendete Elementtechnologie bzw. Elementformulierung in den Vordergrund, wodurch die Differenziation und die resultierenden Ausdrücke, je nach Typ der Optimierungsaufgabe – Querschnitts-, Topologie-, Material- oder Formoptimierung – unterschiedlich kompliziert werden können. Um den Einfluss der Elementformulierung und des Typs

²Die Faktorisierung einer Matrix bedeutet die Dreieckszerlegung, bei der die ursprüngliche Matrix in das Produkt zweier Dreiecksmatrizen überführt wird (mehr Details in [BSMM01]).

der durchgeführten Optimierung zu verdeutlichen, soll die Ableitung der Elementsteifigkeitsmatrix in allgemeiner Form kurz abgehandelt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^e &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \, d\Omega \\ \frac{d\mathbf{k}^e}{ds} &= \int_{\Omega} \frac{d\mathbf{B}^T}{ds} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{ds} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \frac{d(d\Omega)}{ds} \end{aligned} \quad (8.16)$$

mit

- B** Matrix der abgeleiteten Formfunktionen und der Korrekturterme³. Die Dimension ist abhängig von der Anzahl der Freiheitsgrade im Element.
- C** Materialtensor. Es wird davon ausgegangen, dass der Materialtensor unabhängig von Zustandsgrößen und Entwurfsvariablen ist.
- Ω Integrationsgebiet.

Dabei wird deutlich, dass der Finite-Elemente-Code nicht mehr als Blackbox verwendet werden kann. Die Ableitungen auf Elementebene implizieren den Zugriff auf den Quellcode und die Kenntnis von den elementtechnologischen Details.

Ein weiterer Punkt ist der Einfluss des Optimierungsproblems auf den Umfang der Differenziation. Als Beispiel dafür gilt der Vergleich zwischen Querschnitts- und Formoptimierung. Bei der Formulierung der Optimierungsaufgabe wird klar, dass das Integrationsgebiet Ω in der Querschnittsoptimierung, bei der Querschnittsdaten, wie Querschnittsfläche, -dicke oder -trägheitsmoment als Entwurfsvariablen in Frage kommen, nicht von den freien Parametern abhängig ist, und damit nicht abgeleitet werden muss. Im Gegensatz dazu steht die Formoptimierung, in der z.B. die Raumkoordinaten der Knoten⁴ die Entwurfsvariablen sind, wodurch eine Abhängigkeit des Integrationsgebiets Ω ins Spiel kommt. Dies ist mitunter ein Grund, weswegen die Formoptimierung zu den schwierigsten Optimierungsaufgaben gehört.

Die technischen Schwierigkeiten bei der Aufstellung des Pseudolastvektors, sowohl in Bezug auf die Differenziation als auch auf die Verfügbarkeit des Quellcodes, haben dazu geführt, dass spezielle Approximationsverfahren entwickelt wurden, um den Zugriff auf den Quellcode des Analyseprogramms zu umgehen. Somit wird nach der Methode, mit der der Pseudolastvektor berechnet wird, zwischen der analytischen und der semianalytischen Sensitivitätsanalyse unterschieden.

8.3.2.1 Die diskrete direkte Sensitivitätsanalyse

In dieser Form der Sensitivitätsanalyse werden die Ableitungen – im Rahmen der Diskretisierungsgenauigkeit – exakt nach Gl. (8.9), die hier der Übersichtlichkeit halber wiederholt wird, berechnet.

³Die Korrekturterme betreffen die Verfahren zur Vermeidung von Locking ([BBR00], [Kos04]) und müssen im Allgemeinen, im Zuge der Sensitivitätsanalyse, auch abgeleitet werden (für mehr Details siehe [Cam04]).

⁴Sowohl CAD- als auch FE-Knoten.

$$\begin{aligned}\frac{df}{ds} &= \frac{\partial f}{\partial s} + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\right)^T \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \left(\frac{d\mathbf{R}}{ds} - \frac{d\mathbf{K}}{ds} \cdot \mathbf{u}\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial s} + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\right)^T \cdot \frac{d\mathbf{u}}{ds}\end{aligned}\quad (8.17)$$

Die Bezeichnung „direkt“ bezieht sich auf die Reihenfolge, in der die Matrizenoperationen durchgeführt werden. In diesem Fall wird zuerst die Ableitung der Knotenverschiebungen nach den Entwurfsvariablen,

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \left(\frac{d\mathbf{R}}{ds} - \frac{d\mathbf{K}}{ds} \cdot \mathbf{u}\right) \quad (8.18)$$

durch Lösung des Gleichungssystems

$$\mathbf{K} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{ds} = \frac{d\mathbf{R}}{ds} - \frac{d\mathbf{K}}{ds} \cdot \mathbf{u} \quad (8.19)$$

ermittelt. Dabei müssen für jede Entwurfsvariable und jeden Lastfall sowohl der Pseudolastvektor, analytisch oder semianalytisch, aufgestellt als auch das Gleichungssystem einmal gelöst werden. Wie bereits erwähnt, wird die faktorisierte Systemsteifigkeitsmatrix nach der Systemanalyse (Berechnung von \mathbf{u} aus Gl. (8.2)) vorgehalten, was den Rechenaufwand bei der Ermittlung der Sensitivitäten erheblich reduziert.

Das Einsetzen von $\frac{d\mathbf{u}}{ds}$ aus Gl. (8.18) in Gl. (8.17) ergibt:

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial s} - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\right)^T \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \left(\frac{d\mathbf{K}}{ds} \cdot \mathbf{u} - \frac{d\mathbf{R}}{ds}\right) \quad (8.20)$$

Der Vektor $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}$ muss für jede in der Optimierungsaufgabe involvierten Funktion, Zielfunktion oder Nebenbedingung, berechnet werden. Die Berechnung ist üblicherweise einfach und ohne großen Rechenaufwand möglich, wie am Beispiel der Verzerrungsenergie auf Seite 146 zu sehen ist.

Zum Vergleich mit der im folgenden Abschnitt erläuterten adjungierten Methode sei nochmals erwähnt, dass der rechenintensive Teil der Berechnung die Lösung des Gleichungssystems Gl. (8.19) ist. Dies muss bei der direkten Methode $n_s \cdot n_{LC}$ mal durchgeführt werden. Mit n_s Anzahl der Entwurfsvariablen und n_{LC} Anzahl der Lastfälle.

8.3.2.2 Die diskrete adjungierte Sensitivitätsanalyse

In diesem Abschnitt wird die adjungierte Sensitivitätsanalyse aus zwei unterschiedlichen Perspektiven betrachtet. Zum einen werden die theoretischen Grundlagen dargelegt, zum anderen wird die algorithmische Umsetzung des Sonderfalls der Verzerrungsenergie besprochen. Die Aussage dieser Untersuchungen kann allerdings vorweg genommen werden. Der Unterschied zur direkten Methode liegt lediglich in Reihenfolge und damit auch Anzahl

der durchgeführten Matrixoperationen. Die Entscheidung für die eine oder andere Methode ist von der Konstellation, also Anzahl der Entwurfsvariablen, Anzahl der Lastfälle und Anzahl der abzuleitenden Funktionen abhängig.

Wird die Gleichung (8.17) zugrunde gelegt, dann kann folgende Abkürzung eingeführt werden:

$$\boldsymbol{\lambda} = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\right)^T \cdot \mathbf{K}^{-1} \quad (8.21)$$

auch adjungierte Variable genannt. Durch Ausnutzung der Symmetrie der Systemsteifigkeitsmatrix, kann $\boldsymbol{\lambda}$ als Lösung des folgenden Gleichungssystems ermittelt werden:

$$\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\lambda} = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\right)^T \quad (8.22)$$

Somit geht Gl. (8.17) in folgende Form über:

$$\begin{aligned} \frac{df}{ds} &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} + \boldsymbol{\lambda} \cdot \left(\frac{d\mathbf{R}}{ds} - \frac{d\mathbf{K}}{ds} \cdot \mathbf{u}\right) \\ \frac{df}{ds} &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} + \boldsymbol{\lambda} \cdot R^* \end{aligned} \quad (8.23)$$

Der numerische Aufwand in dieser Form hängt im Wesentlichen davon ab, wie oft das Gleichungssystem (8.22) gelöst werden muss. Darin kommt der Vektor der Funktionsableitung $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}$ n_f Mal vor, mit n_f Anzahl der in der Optimierungsaufgabe involvierten Funktionen.

Somit kann die Entscheidung für die numerisch effizientere Methode, direkt oder adjungiert, durch den Vergleich $n_s \cdot n_{LC} \stackrel{\geq}{\leq} n_f$ getroffen werden. In kleinen Problemen mit wenigen Lastfällen und Entwurfsvariablen aber mit vielen Nebenbedingungen könnte die direkte Methode die richtige Wahl sein. Allerdings mit der Erkenntnis, dass in einem n -dimensionalen Raum maximal n Nebenbedingungen aktiv sein können, ist die adjungierte Sensitivitätsanalyse, bei entsprechender Qualifikation der Nebenbedingungen, immer effizienter und daher das bevorzugte Verfahren.

Anzumerken ist, dass der Unterschied zwischen beiden Verfahren, direkt und adjungiert, bei Optimierungsaufgaben mit vielen Entwurfsvariablen und wenigen bzw. ohne Nebenbedingungen, wie es in der Formoptimierung von Freiformschalen mit FE-Parametrisierung häufig vorkommt (siehe Kapitel 6), gravierend sein kann, weshalb die adjungierte Sensitivitätsanalyse dringend zu empfehlen ist.

Eine weitere Möglichkeit, die Gleichungen der adjungierten Sensitivitätsanalyse herzuleiten, ist die Lagrange-Methode, bei der das Optimierungsproblem dahingehend modifiziert wird, dass die Zustandsvariablen \mathbf{u} unabhängig von den Entwurfsvariablen \mathbf{s} angenommen werden. Dafür muss das Gleichgewicht Gl. (8.2) als Nebenbedingung⁵

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}, \mathbf{s}) = \mathbf{K}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{u} - \mathbf{R}(\mathbf{s}) \quad (8.24)$$

⁵Die Nebenbedingung \mathbf{h} ist ein Vektor von Gleichheitsnebenbedingungen der Dimension n_{eq} , mit n_{eq} Anzahl der Freiheitsgrade im System. Daher ist $\boldsymbol{\lambda}$ ebenso ein Vektor von Lagrange-Multiplikatoren der Dimension n_{eq} .

in die Lagrange-Funktion $L(\mathbf{u}, \mathbf{s}, \lambda)$ eingebaut werden, um den funktionalen Zusammenhang zwischen Zustands- und Entwurfsvariablen wieder herzustellen:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u}, \mathbf{s}, \lambda) &= f(\mathbf{u}, \mathbf{s}) + \lambda^T \cdot \mathbf{h}(\mathbf{u}, \mathbf{s}) \\ &= f(\mathbf{u}, \mathbf{s}) + \lambda^T \cdot (\mathbf{K}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{u} - \mathbf{R}(\mathbf{s})) \end{aligned} \quad (8.25)$$

Die Stationaritätsbedingung der Lagrange-Funktion, die so genannte Karush-Kuhn-Tucker Bedingung (siehe Abschnitt 2.3.1.4), liefert folgende Lösung:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} + \lambda^* \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{s}} = 0 \quad (8.26)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} + \lambda^* \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad (8.27)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mathbf{h} = 0 \quad (8.28)$$

Auf dem Weg zur Berechnung der Sensitivitäten der Zielfunktion $\frac{df}{ds}$ muss der Vektor der Lagrange-Multiplikatoren λ^* , die in diesem Kontext auch adjungierte Variablen genannt werden, am Sattelpunkt der Lagrange-Funktion ermittelt werden.

Die Gl. (8.27) kann nach λ^* aufgelöst werden:

$$\lambda^* = -\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\right)^T \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}}\right)^{-1} \quad (8.29)$$

Die gesuchten Sensitivitäten $\frac{df}{ds}$ können mittels des totalen Differenzials der Lagrange-Funktion ermittelt werden:

$$dL = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} + \lambda \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}}\right) d\mathbf{u} + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} + \lambda \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{s}}\right) d\mathbf{s} + \mathbf{h} d\lambda \quad (8.30)$$

Dadurch, dass die Variablen \mathbf{u} , \mathbf{s} und λ definitionsgemäß unabhängig sind, gilt

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = 0, \quad \frac{d\mathbf{s}}{ds} = 1, \quad \frac{d\lambda}{ds} = 0 \quad (8.31)$$

Hinzu kommt die Tatsache, dass die Lagrange-Funktion und die Zielfunktion und deren Ableitungen am Lösungspunkt $(\mathbf{u}^*, \mathbf{s}^*, \lambda^*)$ identisch sind (vergleiche Gl. (8.25) mit $\mathbf{h} = 0$ aus Gl. (8.28)):

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u}^*, \mathbf{s}^*, \lambda^*) &= f(\mathbf{u}^*, \mathbf{s}^*) \\ \frac{dL(\mathbf{u}^*, \mathbf{s}^*, \lambda^*)}{ds} &= \frac{df(\mathbf{u}^*, \mathbf{s}^*)}{ds} \end{aligned} \quad (8.32)$$

Die Division der Gl. (8.30) durch ds liefert die allgemeine Formel für die Berechnung der Sensitivitäten:

$$\begin{aligned} \frac{df}{ds} &= \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} + \lambda^* \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right) \underbrace{\frac{d\mathbf{u}}{ds}}_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial s} + \lambda^* \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial s} \right) \underbrace{\frac{ds}{ds}}_1 + \mathbf{h} \underbrace{\frac{d\lambda^*}{ds}}_0 \\ &= \frac{\partial f}{\partial s} + \lambda^* \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial s} \end{aligned} \quad (8.33)$$

Mit der Kenntnis, dass \mathbf{h} die Gleichgewichtsbedingung ist (siehe Gl. (8.24)), und dass λ^* die adjungierte Variable aus Gl. (8.29) ermittelt wird, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{df}{ds} &= \frac{\partial f}{\partial s} - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial s} \\ &= \frac{\partial f}{\partial s} - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial s} \cdot \mathbf{u} - \frac{\partial R}{\partial s} \right) \end{aligned} \quad (8.34)$$

Das Ergebnis der Gleichungen (8.20) und (8.34) ist identisch.

Diese Herangehensweise – anhand der Lagrange-Funktion – verleiht dem Lagrange-Multiplikator, hier die adjungierte Variable, eine wichtige mechanische Bedeutung. Im Kontext der Systemantwortsensitivität spiegelt der Lagrange-Multiplikator die Empfindlichkeit des Systems bezüglich der korrespondierenden Nebenbedingung, in diesem Fall das Gleichgewicht. Somit repräsentiert der Betrag der adjungierten Variablen die Systemempfindlichkeit (siehe Abschnitt 8.5).

Ein Sonderfall: Die Verzerrungsenergie⁶

Wie bereits erwähnt, muss bei der adjungierten Sensitivitätsanalyse das Gleichungssystem

$$\mathbf{K} \cdot \lambda = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right)^T$$

im Allgemeinen für jede Funktion in der Optimierungsaufgabe gelöst werden. Für die Funktion der Verzerrungsenergie, die aufgrund der bedeutsamen mechanischen Aussage⁷ häufig als Zielfunktion optimiert wird, reduziert sich der Rechenaufwand erheblich, wie im Folgenden gezeigt wird.

In Gl. (8.34) sind noch die partiellen Ableitungen der Funktion f jeweils nach den Entwurfs- und Zustandsvariablen zu ermitteln. Die Verzerrungsenergie kann im kontinuierlichen Fall wie folgt formuliert werden:

$$f = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma \epsilon \, d\Omega \quad (8.35)$$

⁶Auch Formänderungsenergie genannt.

⁷Minimierung der Verzerrungsenergie \Leftrightarrow Maximierung der Struktursteifigkeit.

Die Diskretisierung der Gl. (8.35) führt zu folgender Form:

$$f = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} \quad (8.36)$$

Somit ergeben sich die gesuchten partiellen Ableitung zu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{s}} \cdot \mathbf{u} \\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} &= \mathbf{K} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (8.37)$$

Das Einsetzen in Gl. (8.34) zeigt, dass sich die Systemsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} und deren Inverse \mathbf{K}^{-1} aufheben, wodurch das Lösen eines Gleichungssystems entfällt:

$$\begin{aligned} \frac{df}{ds} &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{s}} \cdot \mathbf{u} - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{s}} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} - (\mathbf{K} \cdot \mathbf{u})^T \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{s}} \cdot \mathbf{u} - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{s}} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} - \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{s}} \cdot \mathbf{u} - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{s}} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} - \mathbf{u}^T \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{s}} \cdot \mathbf{u} - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{s}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} + \mathbf{u}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{s}} \end{aligned} \quad (8.38)$$

Die Berechnung der abgeleiteten Systemsteifigkeitsmatrix $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{s}}$ und des abgeleiteten Lastvektors $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{s}}$ erfolgt auf Elementebene und ist vom Aufwand her vergleichbar mit der Aufstellung eines Systemlastvektors. Vor allem, wenn es sich bei den Entwurfsvariablen um die Raumkoordinaten der FE-Knoten handelt, wie bei Formoptimierung mit FE-Parametrisierung (siehe Abschnitt 5.3), dann sind alle für die Ableitung benötigten Informationen direkt auf Elementebene verfügbar. Mit steigender Anzahl der Entwurfsvariablen erhöht sich die Effizienz der adjungierten Sensitivitätsanalyse der Verzerrungsenergie im Vergleich zu einer Strukturanalyse, bei der ein Gleichungssystem gelöst werden muss. Dadurch erklärt sich die Leistungsfähigkeit der vorgestellten Algorithmen, trotz hoher Anzahl der freien Parameter.

8.3.3 Die diskrete semianalytische Sensitivitätsanalyse

In den vorigen Abschnitten 8.3.2.2 und 8.3.2.1 wurden die Verfahren zur exakten Berechnung der diskreten Sensitivitäten besprochen. Dabei ging es vordergründig um den Aspekt der numerischen Effizienz, da beide Verfahren, direkt oder adjungiert, denselben Hergang haben und sich lediglich in der Reihenfolge der durchgeführten Operationen unterscheiden.

Was allerdings noch außer Acht geblieben ist, ist die Aufstellung des Pseudolastvektors Gl. (8.14), in dem die eigentliche Differenziation auf Elementebene vollzogen wird, und der für die direkte und die adjungierte Methode gleichermaßen berechnet werden muss.

In Gl. (8.14) kommen die Ableitungen der Systemsteifigkeitsmatrix und des Systemlastvektors bezüglich der Entwurfsvariablen vor. Diese Ableitungen, vor allem die der Steifigkeitsmatrix, erfordern den Abstieg auf Elementebene und die Kenntnisse über die verwendete Elementformulierung und sind daher für jedes Element neu zu ermitteln und zu codieren. Darüber hinaus können sich diese Ableitungen, im Fall der Formoptimierung, auf den Integrationsbereich erstrecken, wenn die Raumkoordinaten als Entwurfsvariablen gewählt werden, wodurch die Implementierung deutlich erschwert wird.

Die Idee der semianalytischen Sensitivitätsanalyse besteht darin, die analytische Ableitungsvorschrift beizubehalten und die Approximation lediglich bei der Ermittlung des Pseudolastvektors vorzunehmen. Dabei wird die Approximation mittels Differenzen durchgeführt, wie in Gl. (8.39) zu sehen ist:

$$\mathbf{R}^* \simeq \frac{\mathbf{R}(s_1, s_2, \dots, s_i + \Delta s_i, \dots, s_n) - \mathbf{R}(s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_n)}{\Delta s_i} - \frac{\mathbf{K}(s_1, s_2, \dots, s_i + \Delta s_i, \dots, s_n) - \mathbf{K}(s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_n)}{\Delta s_i} \cdot \mathbf{u} \quad (8.39)$$

Die Approximation der abgeleiteten Systemsteifigkeitsmatrix $\frac{\Delta \mathbf{K}}{\Delta s_i}$ und des abgeleiteten Systemlastvektors $\frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta s_i}$ erfolgt elementweise und wird nach derselben Vorschrift assembliert, wie die Systemsteifigkeitsmatrix und der Systemlastvektor selber. Erwähnenswert ist die Tatsache, dass einige Belastungsarten von den Entwurfsvariablen unabhängig sind, wie z.B. die Knotenlasten bei variablen Knotenraumkoordinaten. In diesen Fällen verschwindet der Belastungsterm $\frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta s_i}$.

Das semianalytische Verfahren kann, bezüglich Effizienz und Genauigkeit, als Kompromiss zwischen den analytischen Methoden und den Differenzenverfahren gesehen werden. Der große Vorteil ist der universelle Charakter des Verfahrens, da es formulierungsunabhängig und daher für alle in einem Optimierungscode verfügbaren finiten Elemente gilt. Der Codierungsaufwand ist dabei nur geringfügig mehr als beim globalen Differenzenverfahren.

Allerdings werden die Vorteile der semianalytischen Sensitivitätsanalyse von Rechengenauigkeiten getrübt, die unter Umständen gravierend sein können [BCH86]. Die ersten Erfahrungen haben gezeigt, dass es sich dabei nicht nur um Rundungs- und Abbruchfehler handelt, die zum Schrittweitedilemma führen (siehe Abschnitt 8.3.1), sondern auch, um die fehlerhafte Approximation von bestimmten Verformungsmoden, vor allem bei Balken und Schalen, wenn die Entwurfsvariablen geometrische Größen sind. Das schwerwiegende an den auftretenden Abweichungen ist der proportionale Zusammenhang zwischen dem Fehler und der Netzverfeinerung, wodurch die Grundregel der Konvergenz in der Methode der finiten Elemente außer Kraft gesetzt wird.

Einen der frühen Erklärungsversuche findet man in [GH99], worin die Ungenauigkeiten bei der Berechnung der Ableitungskoeffizienten auf die Verletzung der zugrunde liegenden Theorie zurückgeführt wird. Der Pseudolastvektor stellt bei Ermittlung der Sensitivitäten die Belastung dar, um ein Verschiebungsfeld $\frac{d\mathbf{u}}{ds}$ zu erhalten (siehe Gl. (8.12)). Dadurch werden allerdings Verformungszustände produziert, die die Annahmen der zugrunde liegenden Theorie stark verletzen. Zwei wesentliche Faktoren konnten ausgemacht werden,

die die Größenordnung der auftretenden Fehler stark beeinflussen, und zwar die Elementschlankheit und die Netzfeinheit. Je dünner die Elemente und je feiner das Netz, desto größer der Approximationsfehler.

Die späteren Forschungsarbeiten auf diesem Gebiet haben gezeigt, dass die Hauptfehlerquelle in der numerischen Ableitung des Pseudolastvektors von der Differenziation der Steifigkeitsmatrix herrührt [CGZ89]. Jede Elementsteifigkeitsmatrix besitzt so viele Eigenformen wie Elementfreiheitsgrade⁸. Diese Eigenformen können in Starrkörperbewegungen, die zu den Nulleigenwerten gehören und keine interne (Verzerrungs-)Energie produzieren, und in Deformationsmoden, bei denen die Verzerrungsenergie entsteht, eingeteilt werden. Einige Arbeiten [BCH86], [CO91] [BH90] zeigen, dass die numerische Ableitung der Starrkörpermoden, vor allem die Starrkörperrotation, für die Probleme in der semianalytischen Sensitivitätsanalyse verantwortlich sind.

Zur Verbesserung der Leistungsfähigkeit der semianalytischen Sensitivitätsanalyse existiert eine Fülle an Methoden, die in drei Kategorien unterteilt werden können. Die erste Kategorie der Verbesserungsvorschläge befasst sich mit der Approximationsordnung des Differenzenverfahrens und deren Einfluss auf die optimale Schrittweite. Die zweite Kategorie befasst sich mit der Korrektur der numerisch abgeleiteten und daher fehlerhaften Starrkörpermoden. Die prinzipielle Idee der Korrekturterme kann den Grundeigenschaften der Eigenvektoren entnommen werden. Ein Eigenvektor erfüllt definitionsgemäß folgende Gleichung [BSMM01]:

$$\mathbf{k}^e \cdot \Phi_i = \lambda_i \cdot \Phi_i \quad (8.40)$$

mit

\mathbf{k}^e Elementsteifigkeitsmatrix.

Φ_i der i-te Eigenvektor.

λ_i der mit dem i-ten Eigenvektor korrespondierende Eigenwert.

Dadurch, dass der zum Starrkörpermode gehörende Eigenwert null ist, ergibt sich:

$$\mathbf{k}^e \cdot \Phi_i = 0 \quad (8.41)$$

Die Ableitung der Gl. (8.41) nach den Entwurfsvariablen \mathbf{s} liefert:

$$\frac{d\mathbf{k}^e}{d\mathbf{s}} \cdot \Phi_i + \mathbf{k}^e \cdot \frac{d\Phi_i}{d\mathbf{s}} = 0 \quad (8.42)$$

Das Premultiplizieren mit Φ_i^T ergibt:

$$\Phi_i^T \cdot \frac{d\mathbf{k}^e}{d\mathbf{s}} \cdot \Phi_i + \Phi_i^T \cdot \mathbf{k}^e \cdot \frac{d\Phi_i}{d\mathbf{s}} = 0 \quad (8.43)$$

⁸Die Elementfreiheitsgrade = Anzahl der Elementknoten \times Anzahl der Freiheitsgrade am Knoten

Die Anwendung von Gl. (8.41) ergibt die Grundgleichung, an der sich die Korrekturverfahren orientieren:

$$\Phi_i^T \cdot \frac{d\mathbf{k}^e}{ds} \cdot \Phi_i = 0 \quad (8.44)$$

In der semianalytischen Sensitivitätsanalyse äußern sich die defekten Starrkörpermoden dadurch, dass sie Gl. (8.44) nicht erfüllen. Meistens ist es lediglich die Starrkörperrotation, die Gl. (8.44) verletzt [CO93]. Erwähnenswert ist die Tatsache, dass der Korrekturterm meist ein Skalar ist, der allerdings von der Elementsteifigkeitsmatrix und daher von der darunter liegenden Elementformulierung abhängt und für jedes finite Element neu ermittelt werden muss.

In der dritten Kategorie der Verbesserungsvorschläge werden die Starrkörpermoden separat exakt abgeleitet, sodass sich der Approximationsfehler auf Abbruch- und Konditionsfehler, in Zusammenhang mit der Wahl der Schrittweite für die Deformationsmoden, reduziert [vKdB98]. Anzumerken ist der Fakt, dass die Starrkörpermoden in einer Elementsteifigkeitsmatrix nicht von der Elementformulierung abhängen, sondern lediglich von der Anzahl der Freiheitsgrade am FE-Knoten, wodurch diese modifizierte semianalytische Sensitivitätsanalyse die ursprüngliche Attraktivität, ein universelles elementunabhängiges Verfahren zu sein, wieder gewinnt.

8.3.4 Fazit und Zusammenfassung der diskreten Verfahren

Die bisher besprochenen Verfahren der diskreten Sensitivitätsanalyse erledigen die Differenziation am algebraischen Gleichungssystem – das Ergebnis der Diskretisierung der problembeschreibenden (partiellen) Differenzialgleichungen. Dabei sind zwei charakteristische Merkmale festzustellen. Die diskreten Verfahren sind entweder exakt (direkt und adjungiert mit analytischem Pseudolastvektor), dafür aber aufwendig in Herleitung und Codierung, und vor allem benötigen sie den Zugriff auf den Quellcode auf Elementebene, oder sie wenden Approximationen an (globale Differenzen oder semianalytisch), die schwerwiegende Abweichungen aufweisen können, vor allem in der Formoptimierung, in der der Integrationsbereich variabel ist und daher abgeleitet werden muss.

Die Entscheidung für das eine oder andere Verfahren wird meistens nicht aus technischen Gründen getroffen, denn, falls der Quellcode des Programms, mit dem die Strukturanalyse durchgeführt wird, verfügbar ist, dann sind analytische Ableitungen mit der adjungierten Sensitivitätsanalyse und exaktem Pseudolastvektor – vor allem im Hinblick auf die hohen Anforderungen der Formoptimierung von Freiformschalen – dringend zu empfehlen. Ist allerdings der Zugriff auf den Quellcode nicht möglich, dann ist die adjungierte Methode mit semianalytischem Pseudolastvektor, bei dem die Starrkörpermoden exakt abgeleitet werden, eine gute Wahl.

8.4 Die variationelle Sensitivitätsanalyse

In dieser Arbeit werden sowohl bei der Parametrisierung als auch in der Analyse ausschließlich diskretisierte Modelle – mit der Methode der finiten Elemente – erörtert und verwendet. Daher werden die Verfahren der kontinuierlichen Sensitivitätsanalyse lediglich der Vollständigkeit halber erwähnt. Für mehr Details wird auf die einschlägige Literatur verwiesen.

Die variationellen Methoden setzen noch vor der Diskretisierung an und führen die Ableitungen direkt an den problembeschreibenden (partiellen) Differenzialgleichungen bzw. deren schwache Form durch. Die resultierenden Gleichungen können dann mittels eines Analyseprogramms gelöst werden. Der große Vorteil dieser Verfahren besteht darin, dass keine Kenntnisse über das Analyseprogramm erforderlich sind. Die aufgestellten Gleichungen sind aber von der abgeleiteten Differenzialgleichung abhängig und müssen daher für jeden Problemtyp, wie Balken, Platte oder Scheibe neu ermittelt werden. Eine weitere Voraussetzung ist die Fähigkeit des verwendeten Analysecodes, diesen Problemtyp zu analysieren. D.h. um Sensitivitäten der Verschiebungen in einer Platte bezüglich Variationen in der Plattendicke berechnen zu können, muss das Analyseprogramm in der Lage sein, ein Plattenproblem zu lösen.

Das folgende Beispiel der Differenzialgleichung des ebenen Bernoulli-Balkens zeigt das prinzipielle Vorgehen in der variationellen Sensitivitätsanalyse [GH99]. Die bekannte Differenzialgleichung kann wie folgt angegeben werden:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x, s) \cdot \frac{d^2 w(x, s)}{dx^2} \right] = q(x) \quad (8.45)$$

mit

- x Koordiante in Balkenlängsachse.
- E Elastizitätsmodul des Balkenmaterials.
- $I(x, s)$ Trägheitsmoment des Balkenquerschnitts um die Biegeachse. Ist im Allgemeinen eine Funktion von x und s .
- $w(x, s)$ Die Durchbiegung. Also die Verschiebung der Balkenlängsachse senkrecht zu x . w ist hier eine Funktion von x und s .
- $q(x)$ Allgemeine Belastungsfunktion.

Für die Strukturanalyse von Systemen, die mittels des Bernoulli-Balkens modelliert werden können, muss die Differenzialgleichung (8.45) in der schwachen Form diskretisiert⁹ werden und in Form eines Finite-Elemente-Programms verfügbar sein. Der erste Schritt zur Ermittlung der Sensitivitäten bezüglich der Entwurfsvariablen $\frac{dw}{ds}$ besteht in der Differenziation von Gl. (8.45) nach s :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x, s) \cdot \frac{d^2 \frac{dw(x, s)}{ds}}{dx^2} \right] + \frac{d^2}{dx^2} \left[E \frac{dI(x)}{ds} \cdot \frac{d^2 w(x, s)}{dx^2} \right] = 0 \quad (8.46)$$

Durch die Annahme, dass

⁹Für mehr Detail über die Methode der finiten Elemente siehe [FRZ75]

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{dw(x)}{ds}, \\ p(x) &= -\frac{d^2}{dx^2} \left[E \frac{dI(x)}{ds} \cdot \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right] \end{aligned} \quad (8.47)$$

kann Gl. (8.46) in folgende Form gebracht werden:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \cdot \frac{d^2v}{dx^2} \right] = p(x) \quad (8.48)$$

Die Ähnlichkeit zwischen Gl. (8.45) und Gl. (8.48) liefert eine Methode zur Ermittlung der gesuchten Sensitivitäten, die anhand desselben Finite-Elemente-Codes der Strukturanalyse berechnet werden können. Es bedarf lediglich der Berechnung der neuen rechten Seite $p(x)$, auch Pseudolastvektor genannt, um das Feld $v = \frac{dw}{ds}$ berechnen zu können.

8.5 Entwurfssensitivität

Ein weiterer wichtiger Begriff in der Optimierung, der ebenso unter dem allgemeinen Begriff der Sensitivitätsanalyse vorkommt, ist die Entwurfssensitivität. Darunter wird die Sensibilität der Lösung, also des optimierten Entwurfs, bezüglich Veränderungen in den beschränkenden Nebenbedingungen erfasst [GH99]. Die Entwurfssensitivität kommt dort zur Anwendung, wo sich die Frage stellt: Wie empfindlich ist meine Lösung gegenüber Veränderungen in der Problembeschreibung, die gewissen Unsicherheiten oder Streuungen unterworfen sein kann. Die Antwort auf diese Frage geben die Kuhn-Tucker-Bedingungen, in denen die Lagrange-Multiplikatoren das Bindeglied zwischen dem Gradienten der Zielfunktion und dem der Nebenbedingungen übernimmt, um das vektorielle Gleichgewicht am Optimum herzustellen. Der Anschaulichkeit halber wird der eindimensionale Fall mit einer Nebenbedingung erörtert.

Die Optimierung des beschränkten Problems

$$\begin{aligned} \min. \quad & f(x) \quad s.d. \\ & g(x) \leq 0 \end{aligned} \quad (8.49)$$

erfolgt mittels der Lagrange-Funktion

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda \cdot g(x) \quad (8.50)$$

Die Stationaritätsbedingung der Kuhn-Tucker-Bedingung im primalen Raum liefert:

$$\frac{df}{dx} + \lambda \cdot \frac{dg(x)}{dx} = 0 \quad (8.51)$$

Das totale Differenzial der Zielfunktion ergibt sich durch Multiplikation mit dx zu:

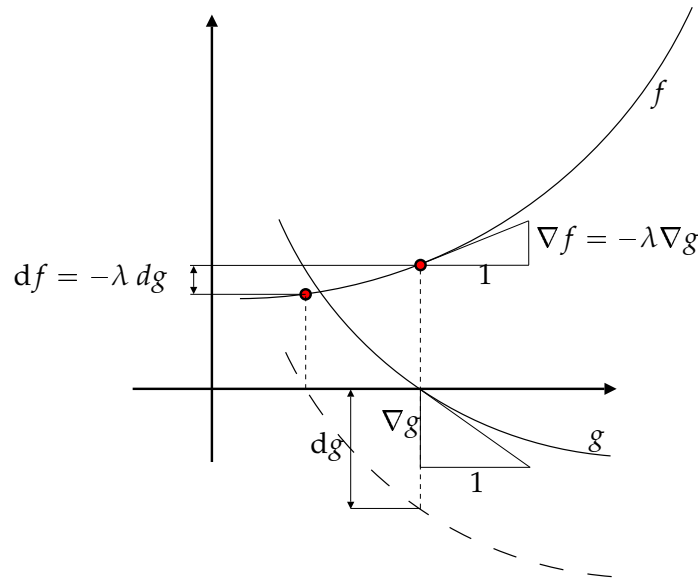


Abbildung 8.1: Entwurfssensitivität bezüglich Veränderungen in den Nebenbedingungen.

$$\begin{aligned}
 \frac{df}{dx} dx &= -\lambda \cdot \frac{dg(x)}{dx} dx \\
 df &= -\lambda \cdot dg \\
 \frac{df}{dg} &= -\lambda
 \end{aligned}
 \tag{8.52}$$

Die Beziehung in Gl. (8.52) liefert die Empfindlichkeit des Optimierungsergebnisses bezüglich Variationen in der Nebenbedingung, die betragsmäßig durch den korrespondierenden Lagrange-Multiplikator ausgedrückt wird. D.h., eine Relaxation in der Nebenbedingung, z.B. die Erhöhung der zulässigen Spannung in einer Spannungsnebenbedingung, würde die Zielfunktion reduzieren, was in einer Minimierungsaufgabe einer Entwurfsverbesserung entspricht. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 8.1 dargestellt.

Bemerkungen:

- In der Optimierung von großen Problemen mit vielen Entwurfsvariablen und vielen Nebenbedingungen ist es gängige Praxis, die Nebenbedingungen zu skalieren bzw. zu normieren. Daher trägt der resultierende Lagrange-Multiplikator diese Skalierung in sich und muss zum Schluss zurückskaliert werden, um die Aussagekraft wieder zu erlangen, wie in Gl. (8.53) zu sehen ist:

$$\frac{df}{dx} = -\frac{\lambda}{SF} \cdot \frac{SF \cdot dg(x)}{dx}
 \tag{8.53}$$

- Es ist darauf zu achten, dass die Voraussage der Variation der Zielfunktion $df = -\lambda \cdot dg$ lediglich eine Linearisierung der Beziehungen und nur in der unmittelbaren Umgebung des Optimums Gültigkeit besitzt. Bei hochgradig nichtlinearen Funktionen stellt der Betrag $-\lambda \cdot dg$ lediglich eine grobe Abschätzung dar.

- In einigen Verfahren der beschränkten Optimierung wird auf die Lagrange-Funktion verzichtet, wie z.B. in der Methode der zulässigen Richtungen (method of feasible directions). Daher müssen die Lagrange-Multiplikatoren nachträglich ermittelt werden, um eine Entwurfssensitivität durchführen zu können [SS02]. Erneut kommt die Kuhn-Tucker-Bedingung zum Einsatz, wodurch ein Gleichungssystem mit n Gleichungen und m Unbekannten entsteht. Wobei n Anzahl der Entwurfsvariablen und $m \leq n$ Anzahl der aktiven Nebenbedingungen ist.

$$\nabla_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x}) + \lambda \cdot \nabla_{\mathbf{x}}g(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (8.54)$$

Eine Möglichkeit ist die Auswahl der ersten m Gleichungen. Eine Alternative ist die Multiplikation der Gleichung (8.54) mit $(\nabla_{\mathbf{x}}g(\mathbf{x}))^T$, sodass ein Gleichungssystem mit m Gleichungen und m Unbekannten entsteht:

$$\nabla_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x}) \cdot (\nabla_{\mathbf{x}}g(\mathbf{x}))^T + \lambda \cdot \nabla_{\mathbf{x}}g(\mathbf{x}) \cdot (\nabla_{\mathbf{x}}g(\mathbf{x}))^T = \mathbf{0} \quad (8.55)$$

Die Lösung liefert den gesuchten Vektor der Lagrange-Multiplikatoren λ , anhand dessen der Einfluss der korrespondierenden Nebenbedingungen auf das Optimierungsergebnis beurteilt werden kann. Große Lagrange-Multiplikatoren deuten auf große Abweichung im Ergebnis bei einer Variation der Nebenbedingung.

An dieser Stelle soll daran erinnert werden, dass die Strukturoptimierung allgemein und die Formoptimierung speziell ein Werkzeug zur Produktion von sensiblen Strukturen ist, worauf bei der Validierung der optimalen Strukturen besonders geachtet werden muss, z.B. durch Betrachtung der Entwurfssensitivität (für mehr Detail siehe [KR04]).

Kapitel 9

Locking-Phänomene in der Formoptimierung

9.1 Einführung

Der interdisziplinäre Charakter der Strukturoptimierung wird bereits bei der Aufstellung der Optimierungsaufgabe deutlich. Schon in der Definitions- und Modellierungsphase durchdringen sich CAGD für Erstellung der Geometrie und die eventuell anschließende Parametrisierung, FE¹ für die Diskretisierung und die anschließende Strukturanalyse inklusive einer eventuellen Sensitivitätsanalyse, MP² für die Erstellung des mathematischen Optimierungsproblems und die algorithmische Umsetzung der Lösungsverfahren mit eventueller Problemapproximation, Software-Engineering, um die immer komplexer werdende Software ressourcenschonend umzusetzen und andere Disziplinen, die problemabhängig involviert sein können.

Die erfolgreiche Durchführung der (Struktur-) Optimierung erfordert, dass jede Teildisziplin für sich selber effizient und zuverlässig abgearbeitet wird. Die Verzahnung und das Zusammenspiel zwischen den Teilbereichen muss aber genauso gut funktionieren. In diesem Kapitel geht es hauptsächlich um den mechanischen und numerischen Hintergrund der Strukturanalyse mit der Methode der finiten Elemente.

Eine der wichtigsten Eigenschaften in der Strukturanalyse mit der Methode der finiten Elemente, wie bei jedem Diskretisierungsverfahren, ist die Konvergenz. Diese Eigenschaft war bereits seit den frühen Anfängen Gegenstand vieler, vor allem mathematischer Arbeiten [Ral65], aus denen folgende Bedingungen hervorgehen, die finite Elemente erfüllen müssen, um Konvergenz zu gewährleisten [Fel04]:

- **Konsistenz:** ein FE-Netz wird als konsistent bezeichnet, wenn die Ansatzfunktionen, also die verwendeten Formfunktionen, **vollständig** sind und die Ansätze zwischen den Elementen **kompatibel** sind. Vollständigkeit bedeutet, dass die Formfunktionen in der Lage sein müssen, alle Polynome bis zur Polynomordnung m zu repräsentieren,

¹Methode der finiten Elemente.

²Mathematische Programmierung.

wobei m der variationelle Index³ des problembeschreibenden Funktionals ist. Kompatibilität bedeutet, dass die Ansatzfunktionen zwischen den Elementen C^{m-1} kontinuierlich und im Element selber C^m kontinuierlich sein müssen.

- **Stabilität:** ein FE-Netz ist stabil, wenn dessen (Gesamt-) Steifigkeitsmatrix den korrekten Rang hat. Dies bedeutet, dass nicht mehr Nulleigenwerte vorhanden sind als Starrkörpermoden und somit keine unphysikalischen „Nullenergiemoden“ (zero energy modes) existieren. Ein weiterer Indikator ist die Determinante der Jacobi-Matrix, die an jeder Stelle im Element positiv sein muss.

In Abb. 9.1 werden diese Zusammenhänge kurz zusammengefasst.

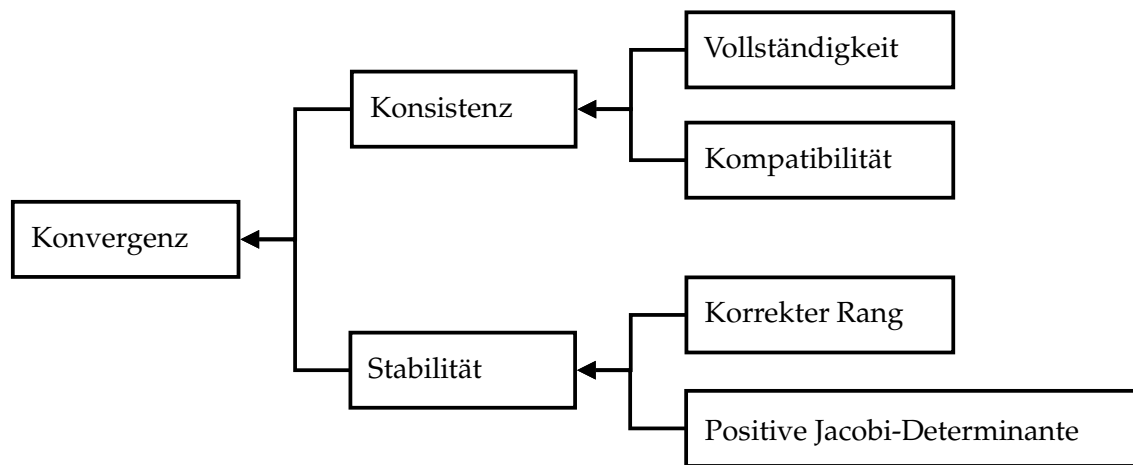


Abbildung 9.1: Konvergenzanforderungen an finite Elemente.

In Zusammenhang mit der Konvergenz stellt sich automatisch die Frage der Konvergenzrate, die nach dem Lemma von Céa mittels einer Fehlerschätzung für abgeleitete Größen, wie Verzerrungen und Spannungen, in Gl. (9.1) definiert wird:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 = Ch^k \|\mathbf{u}\|_{k+1} \quad (9.1)$$

mit

$\|f(x)\|_{n,\Omega}$ H^n -Norm der Funktion $f(x)$ im Bereich Ω .

$\|f(x)\|_{1,\Omega}$ H^1 -Norm = $\sqrt{\int_{\Omega} \left((f(x))^2 + \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right)^2 \right) dx}$, (abgeleitete Verschiebungen).

\mathbf{u} Vektor der Verschiebungen.

h Charakteristische Elementgröße.

C Eine netzunabhängige Konstante, in der die Materialparameter vertreten sind.

k Polynomordnung der Ansatzfunktion.

Die Konvergenzgeschwindigkeit der Spannungen und Verzerrungen (abgeleitete Größen) ist daher von der Ordnung $O(h^k)$ und hängt von der Netzfeinheit und der verwendeten

³Die höchste Ableitungsordnung im Funktional.

Polynomordnung ab. Für die Verschiebung gilt die H^0 -Norm (L^2 -Norm), die damit eine um eine Ordnung höhere Konvergenzrate $O(h^{k+1})$ besitzen.

In der obigen Diskussion um die Konvergenzrate, insbesondere betreffend der beeinflussenden Parameter, ist ein Phänomen nicht berücksichtigt worden, das Mitte der Sechzigerjahre bereits in den ersten Elementformulierungen (Verschiebungselemente) zu beobachten war. Dabei wurde registriert, dass die Konvergenzrate unter bestimmten Umständen deutlich schlechter wurde. Es handelt sich dabei um das Phänomen der Versteifungseffekte, das so genannte Locking.

Die ersten systematischen Untersuchungen, bei denen die Konvergenzrate mit einem kritischen Parameter, wie z.B. der Elementdicke oder -schlankheit, in Verbindung gebracht wurde, haben erst Anfang der Neunzigerjahre [BS90] stattgefunden.

Locking ist praktisch so alt, wie die Methode der finiten Elemente (FEM) selbst. So verwundert es nicht, dass dieselben Wissenschaftler, die an der Entwicklung der FEM beteiligt waren – Ingenieure⁴ und Mathematiker – auch die Versteifungsphänomene erforscht haben. In der Literatur [Bis99],[AB97],[BS90] wird aufgrund der unterschiedlichen Ansichten keine einheitliche Definition für das Phänomen der Versteifung angegeben.

In den Arbeiten mathematischer Herkunft wird nicht explizit von Locking gesprochen, sondern bevorzugt von schlecht konditionierten Problemen, bei denen die Eigenschaften der zugehörigen Differenzialgleichungen analysiert werden. In der Ingenieurliteratur wird in Zusammenhang mit Locking das Auftreten von parasitären Spannungen, die, wenn der kritische Parameter gegen einen Grenzwert strebt, das untersuchte Problem dominieren und das Ergebnis verfälschen.

In [Kos04] wird der Versuch gemacht, eine allgemeine, disziplinübergreifende Formulierung für Locking zu finden. Dabei wird festgestellt, dass durch den Versteifungseffekt die gesuchte Größe in einer diskreten Lösung kleiner ist als die der analytischen. Entsprechend sind die Verschiebungen in einer strukturmechanischen Analyse, infolge der zu steifen Abbildung des Systems, zu klein. Die Konvergenz tritt mit der Netzverfeinerung zwar ein, aber wesentlich langsamer als bei einer locking-freien Elementformulierung. Kennzeichnend für ein Locking-Phänomen ist die Abhängigkeit der Lösung von einem kritischen Parameter, bei dem der Analysefehler zunimmt, wenn der Parameter – für ein gegebenes Netz – gegen seinen Grenzwert tendiert.

Bevor auf die Versteifungseffekte näher eingegangen wird, soll noch ein weiterer auf die Konvergenzrate einflussreicher Effekt erwähnt werden. Das in Gl. (9.1) formulierte Lemma von Céa setzt strukturierte Netze voraus. Nicht berücksichtigt sind damit der Einfluss der Netzverzerrung und -topologie auf die Konvergenzgeschwindigkeit. Die zahllosen Elementformulierungen besitzen eine unterschiedliche Netzverzerrungsempfindlichkeit. Dies ist im Einzelfall zu untersuchen und zu beurteilen. Im Rahmen dieser Arbeit wird dieser Effekt nicht weiter beachtet, da die verwendeten Netze meist strukturiert sind und das benutzte Reissner-Mindlin-Schalenelement keine besonders hohe Netzverzerrungsempfindlichkeit aufweist.

⁴Die Bauingenieure waren mit der Statik die Vorreiter in der Entwicklung der Methode der finiten Elemente. Erste Anwendungen haben Mitte der Fünfzigerjahre im Flugzeugbau stattgefunden [TCMT56].

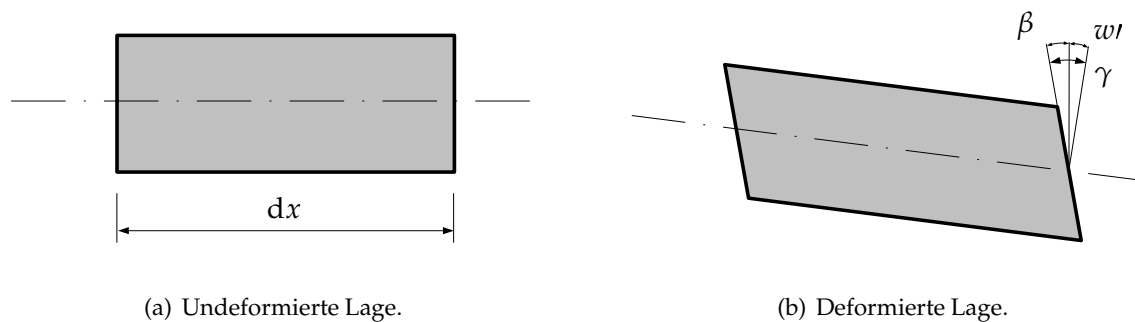


Abbildung 9.2: Differenzielles Element eines Timoschenko-Balkens.

9.2 Der Timoschenko-Balken

Die unterschiedlichen Betrachtungsweisen und Interpretationen des Locking-Effekts können anschaulich am Beispiel des zweidimensionalen schubweichen Timoschenko-Balkens aufgezeigt werden. Beim Timoschenko-Balken bleiben die Annahmen der Euler-Bernoulli-Balkentheorie erhalten, lediglich die Querschnittsnormale, die beim schubstarreren Bernoulli-Balken nach der Verformung als Normale erhalten bleibt, erhält durch die Schubgleitung γ eine Abweichung von der normalen Position, wie in Abb. 9.2 zu sehen ist.

Zur Verdeutlichung der Versteifungseffekte wird die schwache Form des finiten Timoschenko-Balkenelements benötigt. Im Folgenden werden die Gleichgewichtsbeziehungen anhand eines differenziellen Balkenelements, die so genannte starke Form, hergeleitet, die dann mittels der Methode der gewichteten Residuen (Bubnov-Galerkin), in die schwache variationelle Form überführt wird [ZT00].

In Abb. 9.3 ist ein im Gleichgewicht stehendes, allgemein belastetes, differenzielles Element dargestellt ($\bar{q}(x)$ und $\bar{m}(x)$ werden gleichverteilt angenommen).

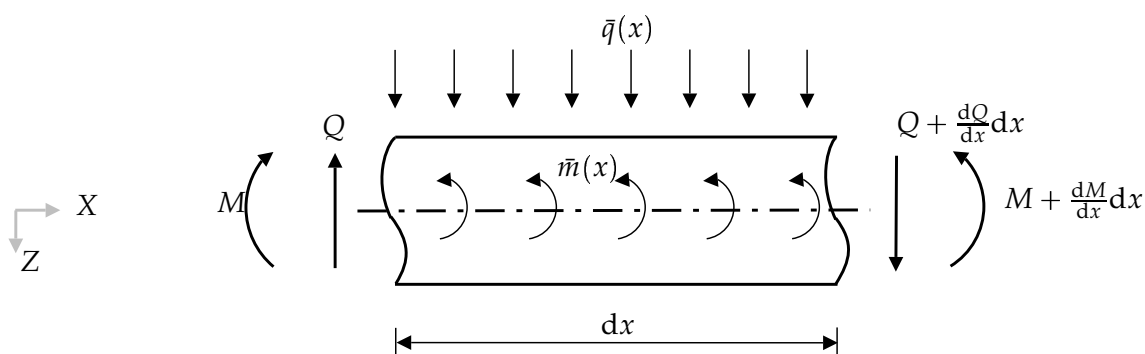


Abbildung 9.3: Gleichgewicht am differenziellen Element eines Timoschenko-Balkens.

Im zweidimensionalen Raum stehen, nach Vernachlässigung der Normalkräfte, zwei Gleichgewichtsbeziehungen zur Verfügung, Summe der vertikalen Kräfte

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow Q - Q - \frac{dQ}{dx} dx - \bar{q}(x) dx = 0 \quad (9.2)$$

und Summe der Momente (um das linke Schnittufer):

$$\sum M = 0 \Rightarrow -M + \bar{m}(x) dx - (Q + \frac{dQ}{dx} dx) dx + M + \frac{dM}{dx} dx - \bar{q}(x) \frac{dx^2}{2} = 0 \quad (9.3)$$

Das Einsetzen von Gl. (9.2) in Gl. (9.3) und Vernachlässigung des sich ergebenden quadratischen Terms $\bar{q}(x) \frac{dx^2}{2}$ liefern die folgenden Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} \bar{q}(x) &= -\frac{dQ}{dx} = -Q' \\ \bar{m}(x) &= -\frac{dM}{dx} + Q = -M' + Q \end{aligned}$$

Die Anwendung der Methode der gewichteten Residuen (Bubnov-Galerkin), bei der Test- und Ansatzfunktionen identisch gewählt werden, um symmetrische und positiv semidefinite Elementsteifigkeitsmatrizen zu bekommen, auf die starke Form in Gl. (9.4) ergibt:

$$\int_0^l (\delta w (\bar{q} + Q') + \delta \beta (\bar{m} + M' - Q)) dx = 0 \quad (9.4)$$

Die Methode der gewichteten Residuen ist der erste Schritt vor der Approximation der unbekannt Hauptvariablenfelder durch Ansatzfunktionen. Dabei kann Gl. (9.4) so interpretiert werden, dass die Gleichgewichtsgleichungen nach der Approximation nicht mehr an jedem Punkt erfüllt werden, aber die Summe aller gewichteten Approximationsfehler⁵ über das gesamte Gebiet, hier die Elementlänge l , Null sein muss.

Die partielle Integration der Gl. (9.4) liefert

$$\int_0^l \bar{q} \delta w dx + Q \delta w \Big|_0^l - \int_0^l Q \delta w' dx + \int_0^l \bar{m} \delta \beta dx + M \delta \beta \Big|_0^l - \int_0^l M \delta \beta' dx - \int_0^l Q \delta \beta dx = 0 \quad (9.5)$$

Durch die Einführung der Neumann-Randbedingungen⁶ am linken und rechten Rand des finiten Elements

$$Q(x=0) = Q_0, \quad M(x=0) = M_0, \quad Q(x=l) = Q_l, \quad M(x=l) = M_l \quad (9.6)$$

und das Zusammenfassen der Terme, kann Gl. (9.5), wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} &\underbrace{\int_0^l (\bar{q} \delta w + \bar{m} \delta \beta) dx + Q_l \delta w_l - Q_0 \delta w_0 + M_l \delta \beta_l - M_0 \delta \beta_0}_{\delta \Pi^{ext}} \\ &\underbrace{- \int_0^l (Q(\delta w' + \delta \beta) + M \delta \beta') dx}_{\delta \Pi^{int}} = 0 \end{aligned} \quad (9.7)$$

⁵In der Strukturmechanik sind es Energiefehler.

⁶Die Krastrandbedingungen oder auch die nicht essentiellen Randbedingungen.

Die Variation der inneren Energie des schubweichen Timoschenko-Balkens $\delta\Pi^{int}$ kann mithilfe der zugrunde liegenden Kinematik und des verwendeten linearelastischen Stoffgesetzes umgeschrieben werden, so dass die Terme in den primären Variablen ausgedrückt werden. Die Kinematik des Timoschenko-Balkens ist in Abb. 9.2 dargestellt und kann wie folgt formuliert werden:

$$\begin{aligned}\gamma &= w' + \beta \\ \kappa &= \beta'\end{aligned}\tag{9.8}$$

mit

- γ Schubgleitung (Winkel der Schubverzerrung).
- β Verdrehung des Stabquerschnitts.
- w Verschiebung senkrecht zur Stablängsachse (in Richtung der lokalen Z-Achse).
- κ Verkrümmung.

Das Hooke'sche Stoffgesetz für den Timoschenko-Balken kann wie folgt angegeben werden:

$$\begin{aligned}Q &= \alpha GA\gamma \\ M &= EI\kappa \\ G &= \frac{E}{2(1+\nu)}\end{aligned}\tag{9.9}$$

mit

- G Schubmodul.
- A Querschnittsfläche des Balkenelements.
- α Schubkorrekturfaktor, der die Verteilung der Schubspannungen über die Querschnittshöhe berücksichtigt.
- E Elastizitätsmodul.
- I Trägheitsmoment des Balkenquerschnitts um die Biegeachse.

Somit kann Gl. (9.7) in folgende Form überführt werden:

$$\delta\Pi^{ext} + \delta\Pi^{int} = 0\tag{9.10}$$

Der hier interessierende Term der Variation der inneren Energie kann wie folgt formuliert werden:

$$-\delta\Pi^{int} = \int_0^l (Q(\delta w' + \delta\beta) + M\delta\beta') dx = \int_0^l (Q\delta\gamma + M\delta\kappa) dx\tag{9.11}$$

Das Einsetzen des Stoffgesetzes liefert:

$$-\delta\Pi^{int} = \int_0^l (\alpha GA\gamma\delta\gamma + EI\kappa\delta\kappa) dx\tag{9.12}$$

Als Hauptunbekannte werden w und β gewählt (und nicht etwa κ und γ), um die Dirichlet-Randbedingungen sinnvoll formulieren zu können. Die wesentlichen Randbedingungen (Dirichlet-Randbedingungen) können für Schubgleitung γ und Krümmung κ kaum ingenieurmäßig vorgegeben werden. Die Variation der inneren Energie (virtuelle Arbeit) kann für die Hauptunbekannten folgendermaßen geschrieben werden:

$$-\delta\Pi^{int} = \int_0^l (\alpha GA(w' + \beta) \delta(w' + \beta) + EI\beta' \delta\beta') dx \quad (9.13)$$

Zu beachten ist der variationelle Index 1 für beide Unbekannten, daher müssen die Ansatzfunktionen mindestens linear sein, damit die ersten Ableitungen (konstante Verzerrungen und Spannungen) im Element repräsentiert werden können, wodurch die Vollständigkeitsbedingung erfüllt wird (siehe Abb. 9.1). Die Konsequenzen der gleichen Ansatzordnung für Biegung und Schub im Funktional werden im weiteren Verlauf erörtert.

Durch Wahl der Querschnittsdaten eines Rechteckquerschnitts

$$\begin{aligned} A &= b t \\ I &= \frac{b t^3}{12} \end{aligned} \quad (9.14)$$

mit

b Querschnittsbreite.

t Querschnittsdicke und im Sinne des Locking das Schlankheitsmaß.

geht Gl. (9.13) in folgende Form über:

$$-\delta\Pi^{int} = E \frac{b t^3}{12} \int_0^l \left(\underbrace{\frac{\alpha}{2(1+\nu)} \cdot \frac{1}{t^2} (w' + \beta) \delta(w' + \beta)}_{W_\gamma} + \underbrace{\beta' \delta\beta'}_{W_\beta} \right) dx \quad (9.15)$$

Das Locking-Phänomen, hier Querschub-Locking, lässt sich anhand Gl. (9.15) sowohl mathematisch als auch ingenieurmäßig identifizieren und charakterisieren.

Aus mathematischer Sicht wird die Elementdicke t als der kritische Parameter identifiziert, durch den die schlechte Konditionierung des Funktionals in Gl. (9.15) hervorgerufen wird. Der kritische Grenzwert ist in diesem Fall Null, denn wenn t gegen Null strebt, gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} (-\delta\Pi^{int}) = 0 \cdot \int_0^l \left(\boxed{\infty \cdot (\neq 0)} + (\neq 0) \right) dx, \quad (9.16)$$

bzw.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{W_\gamma}{W_\beta} = \infty \quad (9.17)$$

wodurch die schlechte Konditionierung des Problems zutage tritt. Eine im Grenzfall sehr große Zahl $\frac{1}{t^2}$ wird mit einem infolge der Diskretisierung nicht verschwindenden Fehler multipliziert, sodass dieser erheblich vergrößert wird.

Die mechanische Deutung dieses Versteifungseffekts bedarf der Erwähnung, dass die virtuellen inneren Arbeitsanteile einer schubweichen Struktur durch Biegung und Schub verrichtet werden, wobei die Biegung meist den wesentlichen Anteil ausmacht. Bei dicken scheibenartigen Systemen steigt der Anteil der Schubgleitung in der Verzerrungsenergie, hingegen dominieren die Krümmungsanteile (Biegung) in immer dünner werdenden Strukturen. Betrachtet man den Ausdruck der inneren Energie

$$-\delta\Pi^{int} = E \frac{b t^3}{12} \int_0^l \left(\frac{1}{t^2} W_\gamma + W_\beta \right) dx, \quad (9.18)$$

so ist ersichtlich, dass der Schub im Grenzfall $t \rightarrow 0$, entgegen dem tatsächlichen mechanischen Tragverhalten, das Problem dominiert. Diese physikalisch unbegründeten Querkräfte werden als parasitäre Kräfte bezeichnet und stellen ein Merkmal für einen Versteifungseffekt dar.

Das Auftreten der parasitären Spannungen, die in der variationellen Formulierung im Grenzfall aufgezeigt wurden, kann anhand eines einfachen Beispiels ebenso in der Strukturanalyse eines Einfeldträgers unter reiner Biegung verdeutlicht werden.

In Abb. 9.4 ist das statische System dargestellt, in dem die Struktur mit einem einzigen Timoschenko-Element diskretisiert wird.

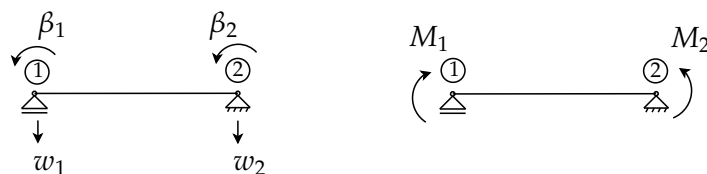


Abbildung 9.4: Beispiel eines Einfeldträgers unter reiner Biegung. Statisches System und Belastung.

Die analytische Lösung des Problems, in der sich ein konstanter Momentenverlauf und keine Querkräfte einstellen (reine Biegung), ist bekannt.

Die numerische Analyse mittels der Methode der finiten Elemente, durch Diskretisierung der Struktur mit einem einzigen linearen Element, liefert das Ergebnis in Abb. 9.5.

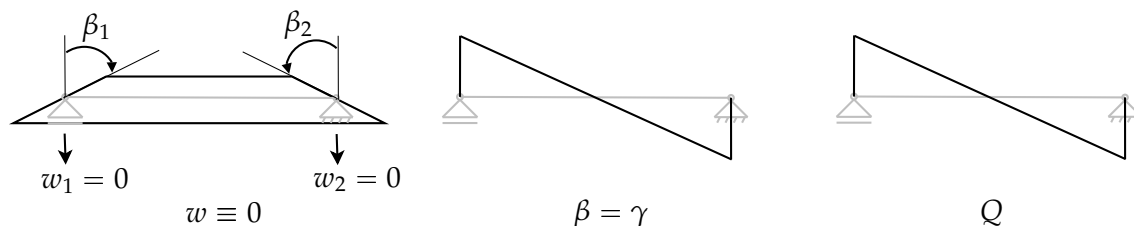


Abbildung 9.5: Ergebnisse der numerischen Analyse mit einem einzigen Timoschenko-Balkenelement.

Dadurch, dass die Formfunktionen für w und β linear sind, ergibt sich für die Verschiebung w (Durchbiegung) unter Berücksichtigung der Dirichlet-Randbedingungen $w_1 = w_2 = 0$, so dass im gesamten Element $w \equiv 0$ ist. Die kinematischen Beziehungen in Gl. (9.8) ergeben indessen eine linear veränderliche Schubgleitung, also einen linearen Querkraftverlauf im Element. Diese Querkraft ist parasitär und leistet einen verfälschenden Beitrag in der Verzerrungsenergie, wodurch das System, aufgrund der Überschätzung der inneren Arbeit, zu steif abgebildet wird. Ein eindeutiges Signal für Locking.

9.3 Klassifikation der Locking-Phänomene. Locking-freie Elementformulierungen

Basierend auf der Natur des kritischen Parameters können die unterschiedlichen Locking-Phänomene in geometrische und materielle Versteifungseffekte eingeteilt werden. Die geometrischen Locking-Effekte werden durch die Einhaltung kinematischer Bedingungen, also Gleichungen mit ausschließlich geometrischen Größen, in Abhängigkeit von einem geometrischen Schlankheitsparameter aktiviert. Die wichtigsten heute bekannten und erforschten geometrischen Locking-Phänomene sind das Querschub-Locking, das Inplane-Schub-Locking, das Membran-Locking und das trapezoidal Locking [Kos04], [Bis99]. Die materiellen Versteifungseffekte sind von einem Materialparameter abhängig, wie das volumetrische Locking, in dem der Kompressionsmodul die Rolle des kritischen Parameters übernimmt.

Es ist wichtig, darauf hinzuweisen, dass die Versteifungseffekte prinzipiell vom Strukturtragverhalten abhängig sind. D.h., ein räumliches Flächentragwerk, das als Schalenmodell modelliert ist und unter Membran-Locking leidet, würde im Falle der Modellierung mit Kontinuumselementen (Solids) ebenso einen, wenn auch anderen formulierungsabhängigen Versteifungseffekt aufweisen, der bei den Kontinuumselementen das Inplane-Schub-Locking sein kann.

Aufgrund des gravierenden Einflusses von Locking auf die Konvergenzrate, vor allem beim Querschub- und Membran-Locking, ist ein ganzer Forschungszweig in der Elementtechnologie zur Entwicklung von locking-freien Elementformulierungen entstanden. Der Umfang dieser Forschungsarbeiten würde den Rahmen dieses Kapitels und dieser Arbeit bei weitem sprengen, so dass auf die technischen Details zu den Methoden zur Vermeidung von Locking verzichtet wird. Eine Zusammenfassung und Orientierungshilfe leistet Tabelle 9.1, in der die wichtigsten Informationen zu den heute bedeutendsten Versteifungseffekten aufgelistet sind.

Es sei noch erwähnt, dass sich die derzeitigen wissenschaftlichen Bemühungen in Bezug auf die Versteifungseffekte und deren Vermeidung bisher fast ausschließlich auf die geometrisch lineare Kinematik konzentrierten. Man ist dabei lange davon ausgegangen, dass die Verfahren zur Vermeidung von Locking durch Linearisierung der Gleichgewichtsbedingungen auf den geometrisch nichtlinearen Fall übertragbar sind. Die jüngsten Erkenntnisse haben allerdings gezeigt, dass diese Übertragbarkeit nicht immer zulässig ist, wie es die Instabilitäten von EAS-Kontinuumselementen bei großen Deformationen beweisen [WS96]. Die Forschung in der Elementtechnologie steht bei locking-freien nichtlinearen Elementformulierungen noch am Anfang.

Locking-Phänomen	kritischer Parameter	Auftreten	Methode zur Vermeidung
Querschub-Locking	Elementschlankheit	Strukturelemente mit einer schubweichen (Reissner-Mindlin-) Kinematik	ANS ^a , DSG ^b , RI ^c , SRI ^d , p-Elemente ^e
Inplane-Schub-Locking	Seitenverhältnis der Elemente	Kontinuumselemente bei der Abbildung von Biegezuständen	EAS ^f , RI, SRI, Hybrid Stress, p-Elemente
Trapezoidal-Locking	Seitenverhältnis der Elemente	Bei Kontinuumselementen in gekrümmten, dünnwandigen Strukturen	DSG, RI, SRI, p-Elemente
Volumetrisches Locking	Kompressionsmodul Querdehnzahl	Kontinuumselemente (bes. plain strain u. 3D)	EAS, Hybrid Stress, RI, SRI, p-Elemente
Membran-Locking	Elementschlankheit	gekrümmte Elemente (bes. quadratische Ansatzfunktionen) in dünnwandigen Strukturen	DSG, EAS, ANS, RI, SRI, p-Elemente

^aANS: Assumed Natural Strain.

^bDSG: Discrete Strain Gap.

^cRI: Reduced Integration.

^dSRI: Selective Reduced Integration.

^eFinite Elemente, deren Ansatzfunktionen Polynome höherer Ordnung sind.

^fEAS: Enhanced Assumed Strain.

Tabelle 9.1: Zusammenfassung der wichtigsten Versteifungseffekte

9.4 Einfluss der Locking-Effekte auf den Optimierungsprozess

Die Optimierung ist eine multidisziplinäre Aufgabe, deren Erfolg vom Teilerfolg in jeder der beteiligten Komponenten abhängt. Im Mittelpunkt des Optimierungsprozesses steht neben einem leistungsfähigen Optimierungsalgorithmus ebenso die korrekte Strukturanalyse. Der Begriff der Strukturanalyse beinhaltet in diesem Kontext nicht nur die Berechnung von Deformationszuständen und die Auswertung von Funktionen der abgeleiteten Größen, wie Verzerrungen und Spannungen, sondern schließt, im Falle der Verwendung von Gradientenalgorithmien, die Sensitivitätsanalyse ein. Eine effiziente und qualitativ hochwertige Sensitivitätsanalyse ist sowohl von der Methode, mit der die Differenziation durchgeführt wird, abhängig (siehe Kapitel 8), als auch von der zugrunde liegenden Elementformulierung, selbst wenn die Ableitung nicht auf Elementebene erfolgt (diskret analytisch, siehe Abschnitt 8.3.2).

Der Einfluss der Versteifungseffekte auf den Optimierungsprozess über den Umweg der Strukturanalyse ist ein weitgehend unerforschtes Thema. Die geringe Erfahrung mit den Konsequenzen der locking-behafteten Elementformulierungen auf die Optimierungsergebnisse ist – obwohl diese schwerwiegend sein können, wie im weiteren Verlauf gezeigt wird – vielleicht mit dem noch jungen Alter der Disziplin der Strukturoptimierung und mit den vielen bisher noch offenen Fragen zu begründen.

Die vielen Arbeiten über Locking-Phänomene zeigen, dass die Versteifungseffekte den untersuchten Strukturen – mittels parasitärer Spannungen – eine künstliche Steifigkeit verleihen. Infolge der Überschätzung des Schubbeitrages erscheint für das Tragwerk die Lastabtragung über Biegung als günstig, was zur Unterschätzung der Verschiebungen führt. Der durch die Versteifung fehlgeleitete (Form-) Optimierungsprozess erzeugt somit Geometrien, deren Lastabtragung nicht optimal ist.

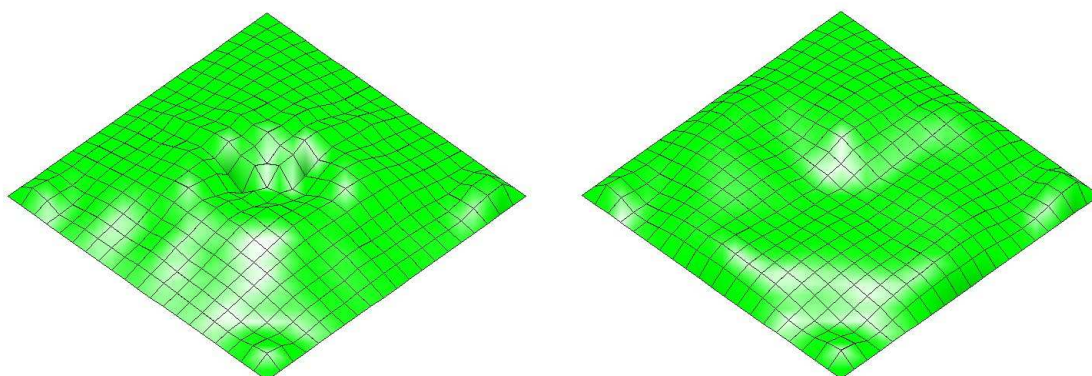
Die fehlerhafte Strukturanalyse der verschiebungsformulierten finiten Elemente hat zur Konsequenz, dass die darauf aufbauenden Prozesse irregeführt werden und falsche Ergebnisse liefern. Die Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit, aufbauend auf den Arbeiten [Kos04] und [Cam04], führen zu Erkenntnissen und Empfehlungen, die im Folgenden präsentiert werden.

9.4.1 Der unregelmäßige Einfluss der Versteifung

Eines der Probleme bei Erkennung, Identifizierung und Umgang mit einem Locking-Effekt ist der unregelmäßige Einfluss auf die Ergebnisse der numerischen Simulation. Bei den Verschiebungen ist zwar stets eine Unterschätzung der Deformationen festzustellen, allerdings handelt es sich dabei nicht um einen strukturweiten homogenen Fehler, sondern um element- und knotenweise unterschiedliche Abweichungen von der richtigen Lösung. Der ungleichmäßig verteilte Locking-Fehler ist dadurch zu begründen, dass sich die Verzerrungsenergie in der diskretisierten Struktur auf Biege- und Membranverzerrungen (Schub- und Normalanteile) nach geometrischen und materiellen Kriterien aufteilt. Je nach Art der parasitären Spannung, fällt der durch die Versteifung verursachte Fehler in jedem Element anders ins Gewicht. Bei den Spannungen ist keine eindeutige Tendenz zu erkennen. Insbesondere die Schubspannungen können über- bzw. unterschätzt werden [Cam04].

Die unmittelbare Auswirkung der fehlerhaften Systemabbildung durch einen Versteifungseffekt auf die Ableitungen der in einer Optimierungsaufgabe involvierten Funktionen nach den Entwurfsvariablen ist nicht absehbar, wie das Beispiel der Formoptimierung einer Navier-gelagerten quadratischen Platte unter Gleichflächenlast in Abbildung 9.6 zeigt. Die Protokollierung der Analyseergebnisse im Laufe der Iterationen (Tabelle 9.2) zeigt, dass die Verzerrungsenergie F durch die verschiebungsformulierten Schalenelemente stets unterschätzt wird, da die verwendeten schubweichen Elemente (Reissner-Mindlin) unter Querschub-Locking leiden⁷, bei dem die parasitären Schubspannungen für künstliche Steifigkeit sorgen. Bei den Sensitivitäten $\frac{\partial F}{\partial s_i}$ ist allerdings eine unregelmäßige Abweichung –

⁷Die Elemente leiden zwar auch unter Membran-Locking, da sie im Laufe der Optimierung nicht mehr eben bleiben, dennoch kann dieser Einfluss im Rahmen der Anwendung vernachlässigt werden [Kos04].



(a) Mit Verschiebungselementen, ohne Filterung.

(b) Mit DSG-Elementen, ohne Filterung.

Abbildung 9.6: Einfluss des Locking in der Formoptimierung.

auch infolge der Welligkeit der Systemantwort (siehe Abschnitt 6.4) – festzustellen, die nicht proportional zum Fehler in der Auswertung ist und sogar das Vorzeichen wechselt, so dass darüber keine Voraussage gemacht werden kann. In Tabelle 9.2 werden Auswertung (F bzw. F_{dsg}) und Sensitivität⁸ ($\frac{\partial F}{\partial s_i}$ bzw. $\frac{\partial F_{dsg}}{\partial s_i}$) der Zielfunktion⁹ der locking-behafteten und locking-freien Elementformulierung am Knoten in Plattenmitte (siehe Abb. 9.6) gegenübergestellt.

Die locking-freien Referenzergebnisse wurden mit DSG-Schalenelementen berechnet [BBR00], [Bis99], [Kos04]. Die verwendeten Elemente sind frei von Querschub-Locking und weisen eine hohe Effizienz sowohl in der Struktur- als auch Sensitivitätsanalyse auf [Cam04].

Itr.	F	F_{dsg}	$\frac{F - F_{dsg}}{F_{dsg}}$ %	$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial s_i}$	$\nabla F_{dsg} = \frac{\partial F_{dsg}}{\partial s_i}$	$\frac{\nabla F - \nabla F_{dsg}}{\nabla F_{dsg}}$ %
1	0,078438	0,090987	-13,79	0,001329	0,001721	-22,78
2	0,029076	0,030466	-4,56	0,000184	3,94E-005	366,56
3	0,010753	0,011626	-7,51	0,000337	0,000320	5,48
4	0,007586	0,008152	-6,94	-0,000128	-6,38E-005	99,84
5	0,005652	0,006564	-13,89	4,49E-005	-2,98E-005	-250,68

Tabelle 9.2: Oszillation der Sensitivitäten in Verschiebungselementen.

Als Zwischenfazit kann konstatiert werden, dass der unregelmäßige Einfluss der Versteifungseffekte auf die Systemantwort in der Formoptimierung von Freiformschalen für die hochfrequenten Anteile der Lösungswelligkeit verantwortlich ist, also für die Wellen in der kleinsten Skala auf Elementebene. Die Auswertung des Querkraftverlaufs (Abbildung 9.7) untermauert die Korrelation zwischen der Welligkeit im Optimierungsergebnis (Abbildung 9.6) auf Elementebene und der Oszillation der Querkräfte infolge Locking. Die Verwendung von locking-freien Elementen behebt das Problem der kurzen Wellen (kleinste Skala), sodass

⁸Ableitung der Zielfunktion nach der variablen Z-Koordinate (senkrecht zur Plattenebene).

⁹Verzerrungsenergie.

die Kontrolle der Welligkeit auf Strukturebene, anhand der in Abschnitt 6.3 präsentierte Filtertechniken, wesentlich effizienter durchgeführt werden kann.

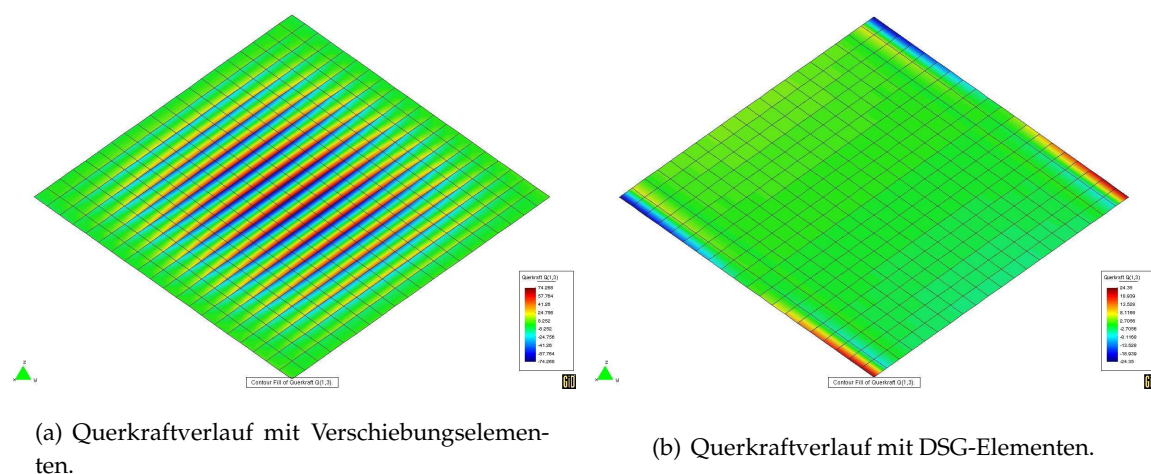


Abbildung 9.7: Influence of locking on shape optimization.

9.4.2 Der Einfluss auf den zulässigen Bereich

Der Erkenntnis über die verfälschende Wirkung der Versteifungseffekte auf die Verschiebungen, das Ergebnis der Strukturanalyse, folgt die Schlussfolgerung, dass alle Funktionen und Funktionale, die von der Systemverzerrungsenergie oder vom Vektor der Knotenverschiebung abhängen, diese Einflüsse ebenso in sich tragen und an die darauf aufbauenden Konstrukte weiterleiten. Untersuchungen auf diesem Gebiet [Cam04] zeigen, inwieweit sich der Einfluss der Locking-Phänomene in der Optimierungsaufgabe fortpflanzt. Darin wird gezeigt, dass Locking die Funktionsverläufe, vor allem die der Nebenbedingungen (z.B. Spannungsnebenbedingungen), dahingehend modifiziert, dass der zulässige Bereich des Optimierungsproblems, der durch die Nebenbedingungen beschränkt wird, falsch abgebildet wird. Dieses Problem kann schwerwiegende Folgen haben, denn die Verlagerung des zulässigen Bereichs führt zu Lösungen, die nicht nur suboptimal, sondern unter Umständen sogar unzulässig sind, wie exemplarisch in Abbildung 9.8 gezeigt wird.

In [CBK03] wird deutlich gemacht, wie das Querschub-Locking die Ergebnisse der Optimierung nicht nur quantitativ, sondern auch qualitativ ändert. Die darin optimierte Schalenstruktur erfüllt, im Falle der Analyse mit verschiebungsformulierten Reissner-Mindlin-Schalenelementen, die vorgegebenen Spannungsnebenbedingungen nicht und liegt damit im unzulässigen Bereich. Die Umsetzung des Modells der locking-behafteten Optimierung würde eine Struktur ergeben, die im Grenzfall unzulässig hohe Spannungen aufweist und damit einsturzgefährdet wäre.

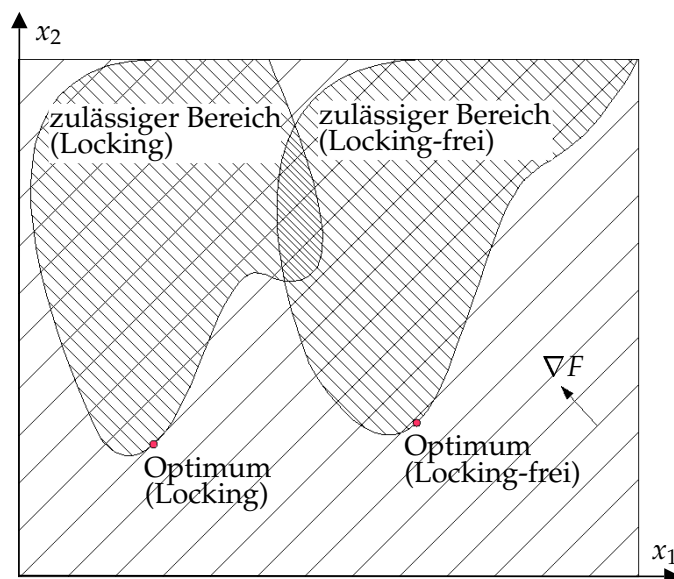


Abbildung 9.8: Einfluss des Locking auf den zulässigen Bereich (exemplarisch).

9.4.3 Höheres „Rauschen“ infolge Locking

In Kapitel 6 (Abschnitt 6.3) wurde festgestellt, dass die welligen Ergebnisse der Formoptimierung mit Modellparametrisierung direkt am FE-Netz die Folge von konkurrierenden und entgegengesetzt wirkenden Wellen in der Systemantwort sind. Diese Wellen, die mithilfe von Filtertechniken kontrolliert werden können, können in unterschiedlichen Skalen auftreten. Die Feinstanteile, die hochfrequenten Oszillationen, wurden auch als Verrauschung bezeichnet.

Im Zuge der Suche nach den Ursachen dieses Rauschens wurde in Zusammenhang mit den unterschiedlichen Locking-Phänomenen festgestellt, dass die verschiebungsformulierten finiten Elemente, hier Reissner-Mindlin-Schalenelemente, das Auftreten von kurzen Wellen begünstigen und damit den Optimierungsprozess zusätzlich erschweren. In Abbildung 9.6 ist zu erkennen, dass die locking-behafteten Elemente ein höheres Rauschen aufweisen. Die locking-freien DSG-Elemente wirken dabei glättend, wenn auch nur auf lokaler Elementebene. Eine strukturweite Glättung kann nur mittels eines globalen Filters erreicht werden.

In der Optimierung allgemein – und in der Formoptimierung in besonderem Maße – führt dieser Umstand zu unüberschaubaren Überlagerungen vieler Effekte, wodurch das Strukturverhalten nicht mehr richtig prognostiziert und damit nicht interpretiert werden kann. Das folgende Beispiel zeigt das in Abschnitt 7.4.3 zur Demonstration des Sickenalgorithmus präsentierte Kragarmmodell. Es zeigt sich, dass eine erfolgreiche Optimierung mit Verschiebungselementen nicht möglich ist. Erst die Verwendung von locking-freien (DSG-) Elementen, bei denen das physikalisch korrekte Systemverhalten und die räumliche Tragwirkung der Sicken richtig abgebildet werden, machte es möglich, eine mechanisch sinnvolle Lösung zu erhalten.

In Abbildung 9.9 ist das Ergebnis der Formoptimierung mit eingeschaltetem Sickenalgorithmus unter Verwendung von Verschiebungselementen dargestellt. Trotz Anwendung eines

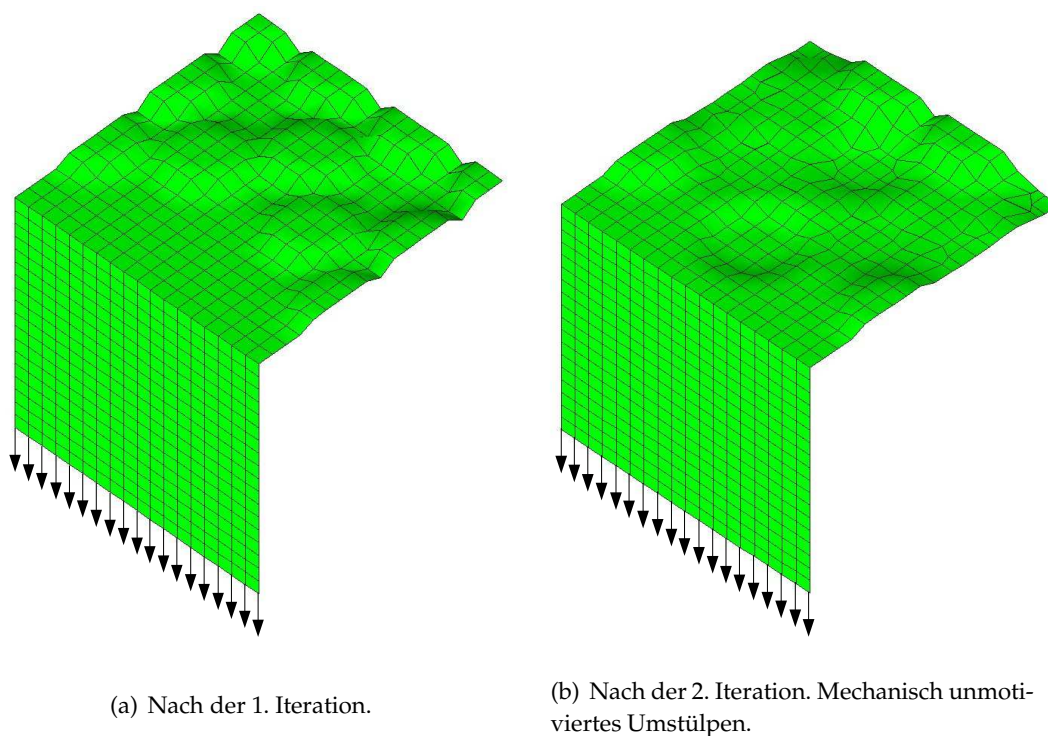
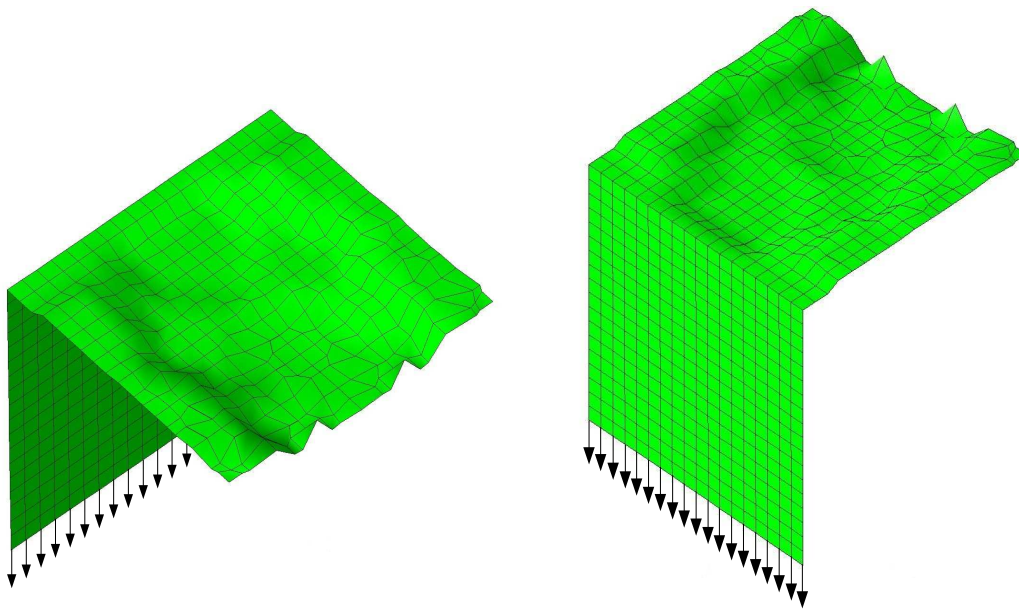


Abbildung 9.9: Sickenoptimierung einer Kragplatte mit Verschiebungselementen.

globalen Filters können die kurzweiligen Oszillationen auf Elementebene nicht eliminiert werden. In [Abbildung 9.9\(a\)](#) ist das Ergebnis der Sickenoptimierung nach der ersten Iteration dargestellt. Darin ist die hohe Welligkeit der Systemantwort in Form von vielen verstreuten Sicken deutlich zu sehen. Im Vergleich dazu weisen die locking-freien DSG-Elemente in [Abbildung 9.11\(a\)](#) geringeres Rauschen auf. Dieser Trend setzt sich in den weiteren Iterationen fort. So führen die – aufgrund von Querschub-Locking – mit Oszillationen behafteten Sensitivitäten der Verschiebungselemente in der zweiten Iteration zu einem Seitenwechsel (Umstülpen) vieler Sickenkörper (siehe [Abschnitt 7.4.3](#)), ohne einen erkennbaren mechanischen Grund ([Abbildung 9.9\(b\)](#)). Die DSG-Elemente hingegen geben das korrekte Tragverhalten der Sicken wieder und modifizieren das System in der zweiten Iteration so, dass sich an der Einspannstelle die doppelte Bauhöhe einstellt. Die neu hinzugekommen Sickenzentren bilden ebenfalls eine neue Rippe auf der unteren Seite des Tragwerks ([Abbildung 9.11\(b\)](#)). Die Konvergenz tritt dabei nach Erhalt eines stabilen sich nicht ändernden Sickenmusters ein. Dies tritt bei den Verschiebungselementen erst nach der fünften Iteration ein. Die locking-freien Elementen benötigen dafür lediglich zwei Iterationen.

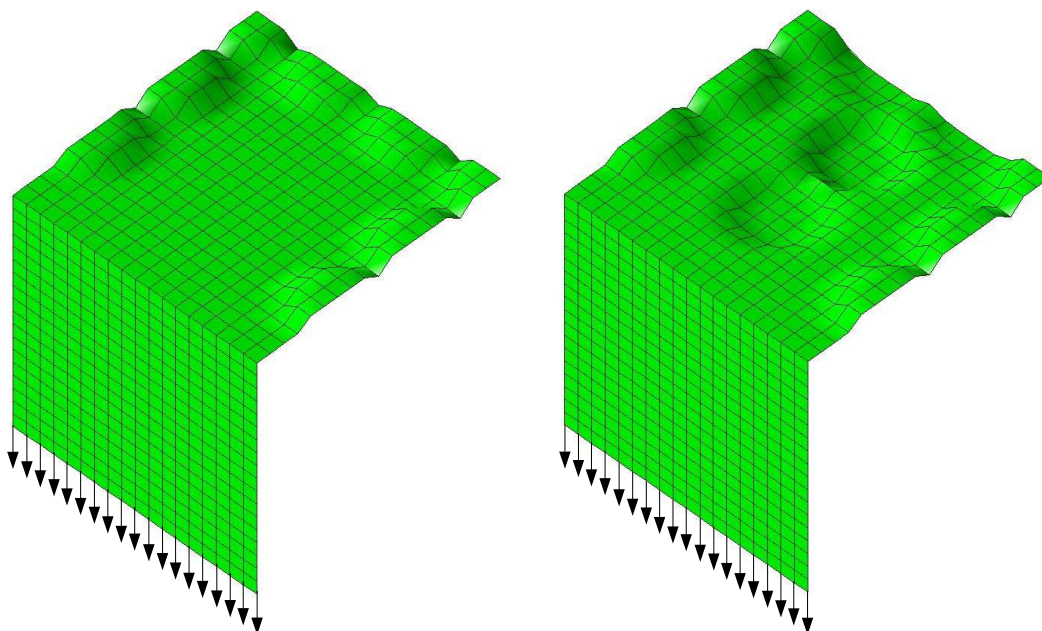
Der anschließende Sickenschließalgorithmus ([Abbildung 9.10](#)) führt bei den Verschiebungselementen entsprechend dem erzeugten Sickenbild und den oszillierenden Sensitivitäten zu einem verrauschten Endergebnis im Gegensatz zum Optimierungsergebnis der DSG-Elemente ([Abbildung 9.12](#)).

Ein Beleg dafür, dass die Herkunft der bei Verschiebungselementen beobachteten Systemantwortswelligkeit in den Locking-Phänomenen zu finden ist, liefert dieselbe Sickenoptimierung mit einer dicken Struktur. Da der kritische Parameter des hier dominierenden



(a) Perspektivdarstellung (hinten).

(b) Perspektivdarstellung (vorne).

Abbildung 9.10: Sickenoptimierung mit Verschiebungselementen nach der Sickenschließung.

(a) Nach der 1. Iteration.

(b) Nach der 2. Iteration. Mechanisch motiviertes Umstülpen.

Abbildung 9.11: Sickenoptimierung einer Kragplatte mit DSG-Elementen.

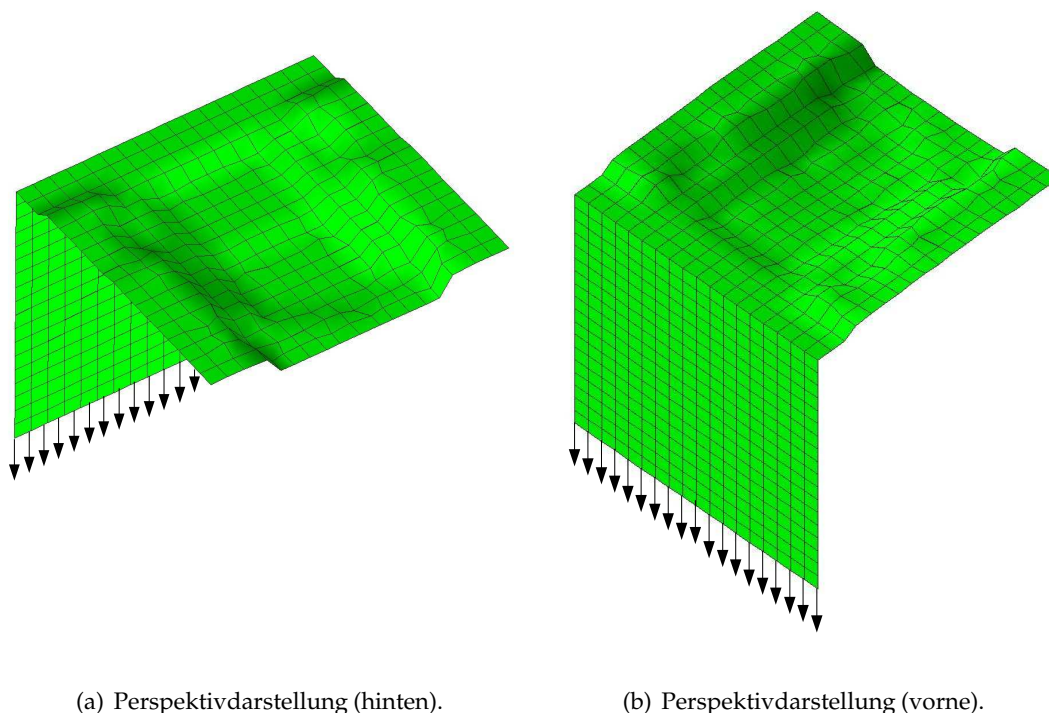
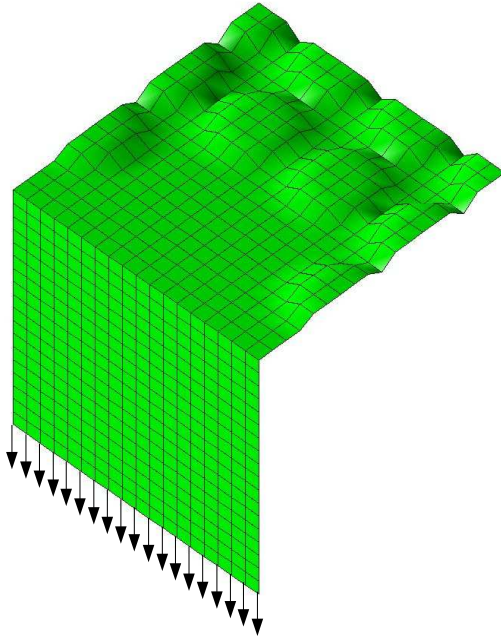


Abbildung 9.12: Sickenoptimierung mit DSG-Elementen nach der Sickenschließung.

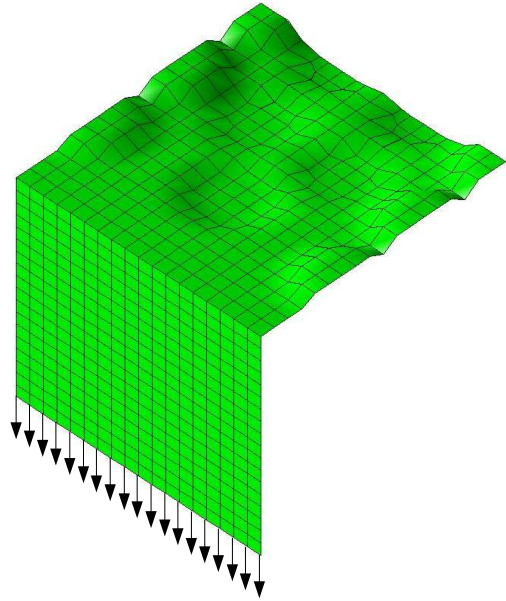
Querschub-Locking die Elementdicke ist, kann der Einfluss des Versteifungseffekts durch Erhöhung der Elementdicke deutlich reduziert werden. In [Abbildung 9.13](#) ist ersichtlich, dass die Welligkeit abnimmt und vor allem das Rauschen in den Sensitivitäten verschwindet, wodurch ein mechanisch sinnvolles und zum Ergebnis der locking-freien Elemente analoges Resultat erzielt werden kann.

Fazit: im Allgemeinen kann konstatiert werden, dass die Verschiebungselemente im Kontext der Formoptimierung mit FE-Parametrisierung stark verrauschte Systemantwortdaten liefern, so dass die Formoptimierung im Allgemeinen und die Sickenoptimierung im Besonderen erheblich erschwert und sogar fehlgeleitet werden kann. Ein direkter Zusammenhang zwischen der Welligkeit der Formoptimierungsergebnisse und der Oszillation der Strukturantwort infolge Locking, insbesondere bei Querkräften, kann festgestellt werden.

Die Verwendung von locking-freien Elementen, in dieser Arbeit DSG-Elemente, führt hingegen zu deutlich geringerem Rauschen und repariert den mechanischen Defekt, der sich in Form von streuenden Sensitivitäten äußert. Die mechanisch korrekte Struktur- und Sensitivitätsanalyse mit locking-freien Elementformulierungen ermöglicht erst eine sinnvolle Formoptimierung von dünnwandigen Flächentragwerken.

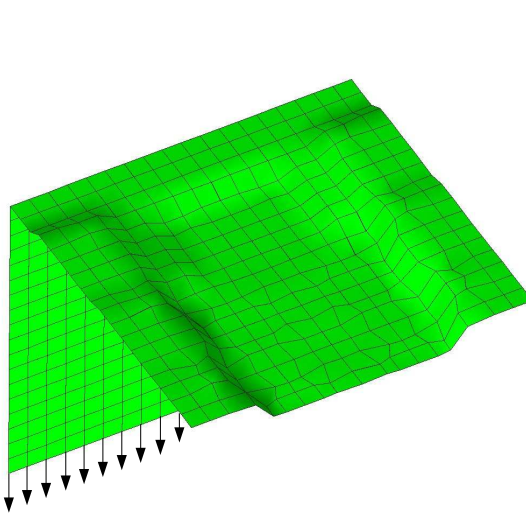


(a) Nach der 1. Iteration.

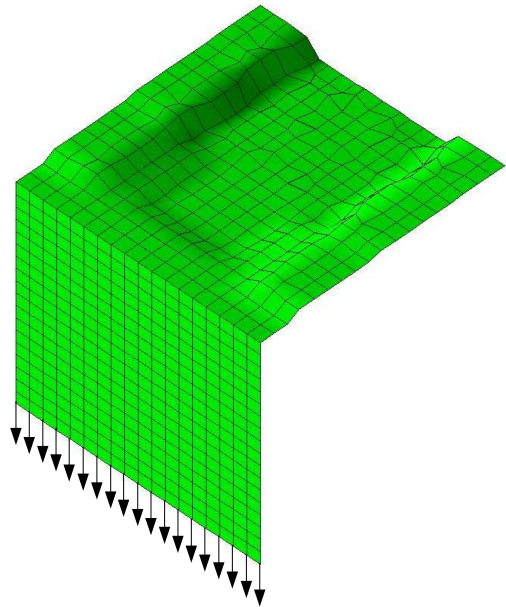


(b) Nach der 2. Iteration. Mechanisch motiviertes Umstülpen.

Abbildung 9.13: Sickenoptimierung einer dicken Kragplatte mit Verschiebungselementen.



(a) Perspektivdarstellung (hinten).



(b) Perspektivdarstellung (vorne).

Abbildung 9.14: Sickenoptimierung nach der Sickenschließung einer dicken Kragplatte mit Verschiebungselementen.

Kapitel 10

Schlussfolgerungen und Ausblick

Der Erfolg eines Optimierungsprozesses hängt, bedingt durch den ausgeprägten multidisziplinären Charakter der (Struktur-) Optimierung, einerseits von der Effektivität, mit der die einzelnen Disziplinen ihren Anteil durchführen, und andererseits von der Verzahnung der Teildisziplinen ab. Dadurch werden neue strukturelle Anforderungen an die Softwarearchitektur gestellt, vor allem in Bezug auf Ressourcenplanung und Kommunikation zwischen den einzelnen Bestandteilen. Von den vielen potenziellen Disziplinen einer Optimierungsaufgabe sollen die Eckpfeiler des Dreisäulenkonzepts der Optimierung hervorgehoben werden: die Geometriebeschreibung mit der ganzen Vielfalt des CAGD, die Analyse, die ebenfalls den Teilbereich der Sensitivitätsanalyse zur Gradientenermittlung einschließt, und die Modellparametrisierung, unter der die Erstellung des mathematischen Optimierungsmodells und die Optimierungsstrategie subsummiert werden.

Die Forschung hat im Bereich der Optimierungsalgorithmen methodisch gesehen zwar ein fortgeschrittenes Stadium erreicht, dennoch bleiben einige Aspekte, wie Effizienz, numerische Stabilität bei großen Problemen mit vielen Entwurfsvariablen und vielen Nebenbedingungen und die Problemadaptivität der verwendeten Approximationstechniken, bei denen ein ständiger Verbesserungsbedarf besteht. Vor allem im Hinblick auf die neuen Anwendungen und wachsenden Bedürfnisse der industriellen Praxis spielen die mathematischen universellen (problemunabhängigen) Optimierungsalgorithmen immer mehr eine tragende Rolle, sodass Robustheit, Zuverlässigkeit und Benutzerfreundlichkeit dieser Verfahren zu den wesentlichen Eigenschaften zählen, um die Akzeptanz der Optimierungsverfahren als unverzichtbares Werkzeug im gesamten Entwurfsprozess zu erhöhen.

In der Formoptimierung sind die Forschungsbemühungen nach der Entwicklung der CAD-Verfahren und -software in den Neunzigerjahren etwas ins Stocken geraten. Durch die Parametrisierung am CAD-Modell konnte sich die Formoptimierung als Quasistandard etablieren. Dennoch sind diese Verfahren, bedingt durch konzeptionelle Defizite, nicht über den Einsatz in der späten Entwurfsphase, in der die Gestalt der zu optimierenden Modelle durch viele Gegebenheiten restringiert ist, hinausgekommen. Grundsätzliche Veränderungen an den Ausgangsgeometrien sind wegen der Einschränkung des Entwurfsraumes durch vorgeschriebene CAD-Elemente nur bedingt möglich. Die Modellparametrisierung direkt am FE-Netz, verknüpft mit Filtertechniken zur Kontrolle der Formwelligkeit, stellt eine vielversprechende Methode zur Erweiterung des Entwurfsraumes dar. Die Verfahren basierend auf der Parametrisierung am FE-Knoten bieten von der Gestaltungsfreiheit her eine hervorragende Plattform für eine Fülle von Applikationen in der Formoptimierung von Freiformschalen. Z.B. stellt die Sickenoptimierung dem entwerfenden Ingenieur eine mechanisch

fundierte Schnittstelle zur Interaktion mit dem Tragwerk zur Verfügung. Es wird sich in der Zukunft zeigen, inwiefern diese Verfahren die Akzeptanz der Optimierungsgemeinde erlangen und Einzug in die industrielle Praxis halten.

Literaturverzeichnis

- [AB97] D.N. ARNOLD und F. BREZZI: *Locking-Free Finite Element Methods for Shells*. Mathematics of Computations, 66(217):1–14, 1997. 157
- [Bar99] M. BARNES: *Form finding and analysis of tension structures by dynamic relaxation*. Int. Journal of space structures, 14:89–104, 1999.
- [BBR00] K.-U. BLETZINGER, M. BISCHOFF und E. RAMM: *A unified approach for shear-locking free triangular and rectangular shell finite elements*. Computers & Structures, 75:321–334, 2000. 142, 166
- [BCB04] MANFRED BISCHOFF, NATALIA CAMPRUBI und KAI-UWE BLETZINGER: *Shape optimization of shells and locking*. Computers & Structures, 82:2551–2561, 2004. 93
- [BCH86] B. BARTHELEMY, C.T. CHON und R.T. HAFTKA: *Sensitivity Approximation of Static Structural Response*. In: *paper presented at the first World Congress of Computational Mechanics, Austin Texas*, 1986. 148, 149
- [BCH88] B. BARTHELEMY, C.T. CHON und R.T. HAFTKA: *Accuracy Problems Associated with Semi-Analytical Derivatives of Static Response*. Finite Elements in Analysis and Design, 4:249–265, 1988.
- [BGLS97] J. FRÉDÉRIC BONNANS, J.CHARLES GILBERT, LEMARÉCHAL und SAGASTIZÁBAL: *Numerical Optimization*. Springer Verlag, 1997.
- [BH90] B. BARTHELEMY und R.T. HAFTKA: *Accuracy Analysis of the Semi-analytical Method for Shape Sensitivity Calculations*. Mechanics of Structures and Machines, 18(3):407–432, 1990. 149
- [Bis99] M. BISCHOFF: *Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung*. Doktorarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1999. 93, 157, 163, 166
- [BK85] KAI-UWE BLETZINGER und STEFAN KIMMICH: *Strukturoptimierung*. Sonderforschungsbereich 230. Natürliche Konstruktionen. Universität Stuttgart und Tübingen, 1985. 33
- [BKB03] M. BISCHOFF, F. KOSCHNICK und K.-U. BLETZINGER: *Stabilized DSG elements - a new paradigm in finite element technology*. The 4th European LS-DYNA Users Conference, Ulm, 2003.

- [Ble90] K.-U. BLETZINGER: *Formoptimierung von Flächentragwerken*. Doktorarbeit, Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, 1990. 58, 83, 84, 87, 88
- [Ble93] K.-U. BLETZINGER: *Extended Method of Moving Asymptotes based on second-order information*. *Structural Optimization*, 5:175–183, 1993. 48, 51
- [BLM00] TED BELYTSCHKO, WING KAM LIU und BRIAN MORAN: *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Wiley. John Wiley and Sons, LTD, 2000. 60
- [BNB03] ERIK BÄNGTSSON, DANIEL NORELAND und MARTIN BERGGREN: *Shape optimization of an acoustic horn*. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 192:1533–1571, 2003. 95
- [BR99] K.-U. BLETZINGER und E. RAMM: *A general finite element approach to the form finding of tensile structures by the updated reference strategy*. *Int. Journal of space structures*, 14:131–146, 1999.
- [BS78] J. BULIRSCH und R. STOER: *Einführung in die numerische Mathematik II*. Springer, 1978. 70
- [BS83] R. BULIRSCH und J. STOER: *Einführung in die numerische Mathematik I*. Springer, 1983. 70
- [BS90] I. BABUŠKA und M. SURI: *On Locking and Robustness in the Finite Element Method*. Technischer Bericht, Inst. for Physical Sci. and Tech., University of Maryland, College Park Campus, May 1990. 93, 157
- [BS03] M. P. BENDSØE und O. SIGMUND: *Topology optimization. Theory, methods and applications*. Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 2003. 108
- [BSMM01] I.N. BRONSTEIN, K.A. SEMENDJAJEV, G. MUSIOL und H. MÜHLIG: *Taschenbuch der Mathematik*. Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 2001. 141, 149
- [BSS93] MOKHTAR S. BAZARAA, HANIF D. SHERALI und C. M. SHETTY: *Nonlinear Programming. Theory and Algorithms*. John Wiley & Sons, Inc., 2. Auflage, 1993.
- [BW01] K.-U. BLETZINGER und R. WÜCHNER: *Formfinding of anisotropic pre-stressed membrane structures*. In: W. WALL, K.-U. BLETZINGER und K. SCHWEIZERHOF (Herausgeber): *Trends in Computational Structural Mechanics*, Seiten 595–603. CIMNE, Barcelona, 2001. 116
- [Cam04] NATALIA CAMPRUBI: *Design and Analysis in Shape Optimization of Shells*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Statik, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen, Technische Universität München, 2004. 86, 93, 94, 116, 142, 165, 166, 167
- [CB04] N. CAMPRUBI und K.-U. BLETZINGER: *On the computation of the curvature of a surface approximated by a C^0 continuous mesh*. Technischer Bericht, Lehrstuhl für Statik, Technische Universität München, 2004.
- [CBB03] N. CAMPRUBI, M. BISCHOFF und K.-U. BLETZINGER: *On the significance of locking on shape optimization of shells*. The 2nd MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, Elsevier Science, 2003.

- [CBK03] N. CAMPRUBI, M. BISCHOFF und F. KOSCHNICK: *High Quality Structural Response and Sensitivity Analysis in Shape Optimal Design of Shells*. In: *WCSMO 5th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, Lido di Jesolo - Venice, 19 May 2003*. 167
- [CC92] K.H. CHANG und K.K. CHOI: *A geometry based parametrisation method for shape design of elastic solids*. *Mech Struct Mach*, 20:215–252, 1992.
- [CGZ89] G. CHENG, Y. GU und Y. ZHOU: *Accuracy of Semi-Analytical Sensitivity Analysis*. *Finite Elements in Analysis and Design*, 6(113–128), 1989. 149
- [CO91] G. CHENG und N. OLHOFF: *New Method of Error Analysis and Detection in Semi-Analytical Sensitivity Analysis*. *Technischer Bericht*, Institute of Mechanical Engineering, Aalborg University, Denmark, 1991. 149
- [CO93] G. CHENG und N. OLHOFF: *Rigid Body Motion Test Against Error in Semi-Analytical Sensitivity Analysis*. *Computers & Structures*, 46(3):515–527, 1993. 150
- [Els70] L.E. ELSGOLC: *Variationsrechnung; Hochschultaschenbücher*. Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich, 1970. 87
- [Emm04] DIETER EMMRICH: *Methodische Sickenentwicklung*. Doktorarbeit, Institut für Fahrzeugtechnik, Technische Hochschule Karlsruhe, 2004. 121, 123
- [EOS97] H. ESCHENAUER, N. OLHOFF und W. SCHNELL: *Applied Structural Mechanics*. Springer-Verlag, 1997. Kap. 15–18, Structural Optimization.
- [EPB88] H. ESCHENAUER, U. POST und M. BREMICKER: *Einsatz der Optimierungsprozedur SAPOP zur Auslegung von Bauteikomponenten*. *Bauingenieur*, 63:515–526, 1988. 4
- [Evt] YURIJ G. EVTUSHENKO: *Numerical Optimization Techniques*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo. 33
- [Fal95] A. FALK: *Adaptive Verfahren für die Formoptimierung von Flächentragwerken unter Berücksichtigung der CAD-FEM-Kopplung*. Doktorarbeit, Fachbereich Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität Hannover, 1995. 87
- [Far93] G. FARIN: *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*. Academic Press, London, 3. Auflage, 1993. 87, 88
- [Fel04] C.A. FELIPPA: *Introduction to Finite Element Methods*. Course material. Department of Aerospace Engineering Sciences, University of Colorado at Boulder, 2004. 155
- [Fis94] CLAUS FISCHER: *Bauelementsimulation in einer computergestützten Entwurfsumgebung*. Doktorarbeit, Technische Universität Wien, Fakultät für Elektrotechnik, Siedlung Viktor Adler 121, A-2183 Neusiedl an der Zaya, Mai 1994. 71
- [Fle80] SCHMITT FLEURY: *Discrete-Continuous Variable Structural Synthesis using Dual Methods*. *AIAA Journal*, 18:1515–1524, 1980. 61, 62

- [Fle87] R. FLETCHER: *Practical Methods of Optimization*. John Wiley & Sons, 2. Auflage, 1987.
- [FRB90] G.M. FADEL, M.F. RILEY und J.-F.M. BARTHELEMY: *Two Point Exponential Approximation Method for Structural Optimization*. *Structural Optimization*, 2:117–124, 1990. 42
- [FRZ75] A. FRANCAVILLA, C.V. RAMAKRISHANAN und O.C.Z. ZIENKIEWICZ: *Optimisation of shape to minimise stress concentration*. *Strain Analysis for Engineering Design*, 10:63–70, 1975. 84, 85, 91, 151
- [Gel88] M. GELLERT: *A new method for derivation of locking-free plate bending finite elements via mixed/hybrid formulation*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26:1185–1200, 1988.
- [GH99] RAPHAEL T. GÜRDAL und ZAFER HAFTKA: *Elements of Structural Optimization. Third revised and expanded edition*. Kluwer Academic Publishers, 1999. 33, 34, 58, 139, 148, 151, 152
- [Gol89] G. GOLUB: *Matrix Computations*. Johns Hopkins, 1989. 71
- [HD94] JOSEF HOSCHEK und WERNER DANKWORT: *Parametric and Variational Design*. B. G. Teubner Stuttgart, 1994.
- [Hei94] JOCHEN HEISTERMANN: *Genetische Algorithmen*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, Leipzig, 1994. 33
- [HI85] R.T. HAFTKA und J. IOTT: *Selecting Step Sizes in Sensitivity Analysis by Finite Differences*. NASA TM 86382, 1985. 138
- [HL] JOSEF HOSCHEK und DIETER LASSER: *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*. A K Peters. Wellesley, Massachusetts.
- [HL92a] J. HOSCHEK und D. LASSER: *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1992. 87
- [HL92b] JOSEF HOSCHEK und DIETER LASSER: *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*. B. G. Teubner Stuttgart, 1992.
- [HS79] R.T. HAFTKA und C.P. SHORE: *Approximation Method for Combined Thermal/Structural Design*. NASA TP1428, 1979. 38
- [Hug87] THOMAS J. R. HUGHES: *The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 1987. 137
- [Ish99] K. ISHII: *Form finding analysis in consideration of cutting patterns of membrane structures*. *Int. Journal of space structures*, 14:105–120, 1999.
- [Kab92] H.R.H. KABIR: *A shear locking free isoparametric threenode triangular finite element for moderately-thick and thin plates*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35:503–519, 1992.

- [KBB02] F. KOSCHNICK, M. BISCHOFF und K.-U. BLETZINGER: *Membrane locking and the DSG method*. The Fifth World Congress on Computational Mechanics, Wien, 2002.
- [KBCB04] F. KOSCHNICK, M. BISCHOFF, N. CAMPRUBI und K.-U. BLETZINGER: *The discrete strain gap method and membrane locking*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004.
- [Kie55] OTTO KIENZLE: *Die Versteifung ebener Böden und Wände aus Blech*. Mitteilungen der Forschungsgesellschaft Blechverarbeitung, 7:77–83, April 1955. 122
- [Kim87] S. KIMMICH: *Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen*. Doktorarbeit, Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, 1987.
- [Kir93] U. KIRSCH: *Structural Optimization. Fundamentals and Applications*. Springer-Verlag, 1993. 3
- [KKF92] S. KODIYALAM, V. KUMAR und P.M. FINIGAN: *Constructive solid geometry approach to three-dimensional shape optimisation*. AIAA, 30:1408–1415, 1992.
- [Kle00] MICHAEL KLEIN: *Formoptimierung kontinuierlicher Strukturen mit finiten Elementen höherer Ordnung*, Band 326 der Reihe *Fortschrift-Berichte VDI*. VDI Verlag GmbH, Düsseldorf, 2000.
- [KM65] OTTO KIENZLE und KLAUS MIETZNER: *Grundlagen einer Typologie umgeformter metallischer Oberflächen mittels Verfahrensanalyse*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1965.
- [Kne86] G. KNEPPE: *Direkte Lösungsstrategien zur Gestaltoptimierung von Flächentragwerken*. Doktorarbeit, Universität Siegen, 1986. 87
- [Kos04] FRANK KOSCHNICK: *Geometrische Locking-Effekte bei Finiten Elementen und ein allgemeines Konzept zu ihrer Vermeidung*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Statik, Fakultät für Bau- und Vermessungswesen der Technischen Universität München, 2004. 93, 142, 157, 163, 165, 166
- [KR04] R. KEMMLER und E. RAMM: *Stability and Large Deformations in Structural Optimization*. In: *Multi-physics and Multi-scale Computer Models in Non-linear Analysis and Optimal Design of Engineering Structures Under Extreme Conditions*. NATO Advanced Research Workshop, 2004. 114, 154
- [Kri51] DG KRIGE: *A statistical approach to some mine valuation and allied problems on the Witwatersrand*. Diplomarbeit, University of the Witwatersrand, South Africa, 1951. 42
- [Lin99] K. LINKWITZ: *Formfinding by the Direct Approach and pertinent strategies for the conceptual design of prepressed and hanging structures*. Int. Journal of space structures, 14:73–88, 1999.
- [LLT03] EMMANUEL LAPORTE und PATRICK LE TALLEC: *Numerical Methods in Sensitivity Analysis and Shape Optimization*. Brikhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2003.

- [LO94] E. LUND und N. OLHOFF: *Shape Design Sensitivity Analysis of Eigenvalues Using Exact Numerical Differentiation of Finite Element Matrices*. Structural Optimization, 8:52–59, 1994.
- [Mai92] JÜRGEN MAIWALD: *Auslegungskriterien für Sicken in dünnen Karosserieblechen*. Doktorarbeit, Fakultät für Maschinenwesen der Rheinischen-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, 1992. 121
- [Max90] C. MAXWELL: *Scientific Papers II*. Technischer Bericht, Cambridge University Press, 1890. 1
- [MG71] J. MOE und K.M. GISVOLD: *Optimization and automated design of structures*. Technischer Bericht, Div. of ship structures, Norwegian Institute of Technology, Trondheim, December 1971. 3
- [Mic04] A. G. M. MICHELL: *The limit of economy of material in frame structures*. Philosophical Magazine, 8(6):589–597, 1904. 1, 77
- [Min86] M. MINOUX: *Mathematical Programming - Theory and Algorithms*. J. Wiley and Sons, Chichester, New York, 1986. 61
- [MM99] B. MAURIN und R. MOTRO: *Cutting pattern of fabric membranes with the stress composition method*. Int. Journal of space structures, 14:121–130, 1999.
- [MM04] GERHARD MÜLLER und MICHAEL MÖSER: *Taschenbuch der Technischen Akustik*. Springer, Berlin, 3. Auflage, 2004. 96
- [MP01] B. MOHAMMADI und O. PIRONNEAU: *Applied Shape Optimization for Fluids*. Oxford university press, 2001.
- [Nat83] H. G. NATKE: *Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse. Identifikation schwingungsfähiger elastomechanischer Systeme*. Friedr. Vieweg & Sohn. Braunschweig/Wiesbaden, 1983. 95
- [Nis97] VOLKER NISSEN: *Einführung in Evolutionäre Algorithmen*. vieweg Verlag, 1997.
- [NW99] JORGE NOCEDAL und STEPHEN J. WRIGHT: *Numerical Optimization*. Springer Verlag, 1999.
- [Oeh51] G.W. OEHLER: *Gestaltung gezogener Blechteile*. Springer Verlag Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1951. 122
- [Oeh66] G.W. OEHLER: *Gestaltung von Karosserieblechen*. Automobiltechnische Zeitschrift, 3:66–71, 1966. 122
- [OS92] W. OBERSCHELP und R. SCHNEIDERS: *Algorithmen zur diskreten Optimierung*. Schriften zur Informatik und angewandten Mathematik 152, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, September 1992.
- [OW72] G.W. OEHLER und A. WEBER: *Steife Bleche und Kunststoffkonstruktionen. Konstruktionsbücher*, Band 30. Springer Verlag, 1972. 122

- [Pha89] M. S. PHADKE: *Quality Engineering Using Robust Design: Robuste Prozesse durch Quality Engineering*. Deutsche Übersetzung: G. LIESEGANG. GFMT – VERLAG, MÜNCHEN, 1989. 33
- [PS01] D. PERIC UND P. H. SAKSONO: *On finite element modeling of surface tension: variational formulation and applications*. IN: W. WALL, K.-U. BLETZINGER UND K. SCHWEIZERHOF (HERAUSGEBER): *Trends in Computational Structural Mechanics*, SEITEN 731–740. CIMNE, BARCELONA, 2001.
- [PT68] W. PRAGER UND J.E. TAYLOR: *Problems of optimal structural design*. JOURNAL OF APPLIED MECHANICS, 35(102–106), 1968. 2
- [RAL65] A. RALSTON: *A First Course in Numerical Analysis*. MCGRAW-HILL, NEW YORK, 1965. 155
- [RG75] LAWRENCE R. RABINER UND BERNARD GOLD: *Theory and Application of Digital Signal Processing*. PRENTICE-HALL, INC. ENGLEWOOD, NEW JERSEY, 1975. 95
- [ROM83] B.A. ROMMEL: *The Development of FAST-FLOW (A Program for Flutter Optimization to Satisfy Multiple Flutter Requirements)*. IN: *Aeroelastic Considerations in the Preliminary Design of Aircraft*, BAND 354, SEITEN 8.1–8.17. AGARD CONFERENCE, 1983. 39
- [ROS91] R. ROSEN: *A Comprehensive Inquiry into the Nature, Origin, and Fabrication of Life*. COLUMBIA UNIVERSITY PRESS, NEW YORK, 1991. 135
- [ROZ93A] G. I. N. ROZVANY: *Optimization of Large Structural Systems*, BAND 1. KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS, 1993. 33, 38, 58
- [ROZ93B] G. I. N. ROZVANY: *Optimization of Large Structural Systems*, BAND 2. KLUWER ACADEMIC PUBLISHER, 1993.
- [SCH60] L.A. SCHMIT: *Structural design by systematic synthesis*. IN: PROCEEDINGS OF THE 2ND CONFERENCE OF ELECTRONIC COMPUTATION, SEITEN 105–122. AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERING, 1960. 2
- [SCH88] H. R. SCHWARZ: *Finite Element Methods*. ACADEMIC PRESS, 1988.
- [SCH01] STEFAN SCHWARZ: *Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturverhalten*. DOKTORARBEIT, INSTITUT FÜR BAUSTATIK DER UNIVERSITÄT STRUTTIGART, 2001. 1
- [SCH03] DOMINIK SCHWARZ: *Gestaltung optimierter Sickenbilder für flächige Strukturen unter Einsatz numerischer Optimierungsverfahren*. DOKTORARBEIT, INSTITUT FÜR KRAFTFAHRWESEN AACHEN, 2003. 121, 123
- [SCH05] AXEL SCHUMACHER: *Optimierung mechanischer Strukturen*. SPRINGER VERLAG, 2005. 40

- [SCS00] A. SALTELLI, K. CHAN UND E. M. SCOTT (HERAUSGEBER): *Sensitivity Analysis*. WILEY, 2000. 135
- [SF74] L.A.JR. SCHMIT UND B. FARSHI: *Some Approximation Concepts for Structural Synthesis*. AIAA, 12(5):692–699, 1974. 36
- [SGC⁺03] H. STEVEN, Y.-J. GUAN, Y.-C. CHEN, Y.-M. LOO UND G. P. XIE: *Bridge Topology Optimisation with Stress, Displacement and Frequency Constraints*. BAND 81, SEITEN 131–146, FEBRUARY 2003.
- [SH80] KLAUS SCHITTKOWSKI UND WILLI HOCK: *Test Examples for Nonlinear Programming Codes*. SPRINGER VERLAG, BERLIN HEIDELBERG NEW YORK, 1980. 73, 74, 75
- [SIM03A] BERND SIMON: *Numerische Mathematik I*, BAND 1. M2 - ZENTRUM MATHEMATIK, 2003. 71
- [SIM03B] BERND SIMON: *Numerische Mathematik I*, BAND 2. M2 - ZENTRUM MATHEMATIK, 2003. 71
- [SM76] L.A.JR. SCHMIT UND H. MIURA: *Approximation Concepts for efficient Structural Synthesis*. NASA CR-2552, 1976. 36
- [SMW04] F. SALES-MAYOR UND R. E. WYATT: *A Two-Stage Filter for Smoothing Multivariate Noisy Data on Unstructured Grids*. COMPUTERS & MATHEMATICS, 47:877–891, 2004. 119
- [SN96] S. STRANG UND T. NGUYEN: *Wavelets and Filter Banks*. WELLESLEY-CAMBRIDGE PRESS, WELLESLEY, 1996. 97
- [SP98] O. SIGMUND UND P. PETERSON: *Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima*. STRUCTURAL OPTIMIZATION, 16:68–75, 1998.
- [SPR94] WALTER SPRANGERS: *Entwicklung und Anwendung von Verfahren zur 3D-Gestaltoptimierung dickwandiger, massiver Bauteile*. DOKTORARBEIT, FAKULTÄT FÜR MASCHINENWESEN DER RHEINISCH-WESTFÄLISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE AACHEN, AUGUST 1994. 84, 91
- [SS02] L.G. STANLEY UND D.L. STEWART: *Design Sensitivity Analysis. Computational issues of Sensitivity Equation Methods*. SIAM, PHILADELPHIA, 2002. 154
- [SVA87] K. SVANBERG: *The Method of Moving Asymptotes - a new Method for Structural Optimization*. INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING, 24(2):359–373, 1987. 45, 62
- [SZA79] I. SZABÓ: *Geschichte der mechanischen Prinzipien*. BIRKHAUSER VERLAG, BASEL, BOSTON, STUTTGART, 1979. 1

- [SZZ93] K. SCHITTKOWSKI, C. ZILLOBER UND R. ZOTEMANTEL: *Numerical Comparison of Nonlinear Programming Algorithms for Structural Optimization*. SCHWERPUNKT-PROGRAMM DER DEUTSCHEN FORSCHUNGSGEMEINSCHAFT. ANWENDUNGS-BEZOGENE OPTIMIERUNG UND STEUERUNG 453, MATHEMATISCHES INSTITUT, UNIVERSITÄT BAYREUTH, 1993.
- [TCMT56] M. J. TURNER, R. W. CLOUGH, H. C. MARTIN UND L. J. TOPP: *Stiffness and deflection analysis of complex structures*. J. AERONAUT. SCI., 23:805–824, 1956. 157
- [TOR93] D.A. TORTORELLI: *A geometric representation scheme suitable for three-dimensional shape optimisation*. MECH STRUCT MACH, 21:95–121, 1993.
- [TSY90] A. N. TIKHONOV, A. V. STEPANOV UND A. G. YAGOLA: *Numerical methods for the solution of ill-posed problems*. KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS, 1990. 86, 94
- [UW03] H. UGAIL UND M.J. WILSON: *Efficient shape parametrisation for automatic design optimisation using a partial differential equation formulation*. COMPUTERS & STRUCTURES, 81:2601–2609, 2003. 84, 85, 91
- [VAN84] GARRET N. VANDERPLAATS: *Numerical Optimization Techniques for Engineering*. MCGRAW-HILL BOOK COMPANY, 1984. 17, 33, 36, 64
- [VKDB98] F. VAN KEULEN UND H. DE BOER: *Rigorous improvement of semi-analytical design sensitivities by exact differentiation of rigid body motions*. INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING, 42(1):71–91, 1998. 150
- [VKR68] V.B. VENKAYYA, N.S. KHOT UND V.S. REDDY: *Optimization of structures based on the study of strain energy distribution*. AFFDL-TR-68-150, 1968. 2
- [WB63] Z. WASIUTYNSKI UND A. BRANDT: *The Present State of Knowledge in the Field of Optimum Design of Structures*. APP. MECH. REVIEWS, 16(5):341–350, 1963. 1
- [WD96] K. WILLEMANS UND P. DIERCKX: *Smoothing scattered data with a monotone Powell-Sabin spline surface*. NUMERICAL ALGORITHMS, 12(1-2):215–232, 1996. 119
- [WS96] P. WRIGGERS UND REESE S.: *A note on enhanced strain methods for large deformations*. COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING, 135:201–209, 1996. 163
- [WÜC00] R. WÜCHNER: *Formfindung von Membrantragwerken unter Berücksichtigung anisotroper Vorspannung*. DIPLOMARBEIT, LEHRSTUHL FÜR STATIK, TU MÜNCHEN, 2000.
- [ZT00] O.C. ZIENKIEWICZ UND R.L. TAYLOR: *The Finite Element Method*. BUTTERWORTH-HEINEMANN, 2000. 98, 158