

Lehrstuhl für Bauinformatik  
Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen  
Technische Universität München

**Die adaptive  $rp$ -Methode  
für elastoplastische Probleme**

Vera Nübel

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. M. Manhart

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.rer.nat. E. Rank
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. A. Wall

Die Dissertation wurde am 07.04.2005 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen am 27.06.2005 angenommen.



# Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit präsentiert eine effiziente Diskretisierungsstrategie für physikalisch nichtlineare Probleme, die auf finiten Elementen hoher Ordnung basiert. Bei elastoplastischen Problemen entsteht eine Singularität entlang des Randes der plastischen Zone. Ihre Randgeometrie entspricht im zweidimensionalen Fall einer Kurve, im dreidimensionalen Fall einer Oberfläche. Dieser Verlust an Regularität lässt nur eine algebraische Konvergenz zu, sofern das elastisch-plastische Interface das Innere von Elementen schneidet. Um auch für diese Klasse von Problemen exponentielle Konvergenz zu erreichen, zerlegt der hier vorgestellte Ansatz das gesamte Berechnungsgebiet in Teilgebiete, deren Berandung mit dem Verlauf des elastisch-plastischen Interface zusammenfällt. Die exakte Lösung auf diesen Teilgebieten, die entweder zum elastischen oder plastischen Bereich der Struktur gehören, ist unter der Voraussetzung, dass keine weiteren Singularitäten vorhanden sind, glatt. Jedes dieser Teilgebiete wird dann durch eine  $p$ -Version auf grobem Netz diskretisiert, ohne in Richtung der plastischen Front zu verfeinern. Das Berechnungsgebiet mit einer nicht-glaten Lösung wird in Teilgebiete mit glatten Lösungen zerlegt. Weil Ort und Verlauf des elastisch-plastischen Interface nicht *a priori* bekannt sind, findet der  $rp$ -adaptive Algorithmus iterativ die Grenze der plastischen Zone. Zwei- und dreidimensionale Untersuchungen der  $rp$ -adaptiven Methode zeigen, dass die vorgestellte Diskretisierungsstrategie effizient zu sehr genauen Ergebnissen führt. Sie ermöglicht exponentielle Konvergenz.

## Abstract

This thesis presents an efficient discretization strategy for physically non-linear problems based on high order finite elements. For elastoplastic problems a singularity arises along the boundary of the plastic zone. Its contour corresponds in two dimensions to a curve, in three dimensions to a surface. Due to this loss of regularity, only an algebraic rate of convergence can be achieved if the interface intersects the interior of elements. To obtain an exponential rate of convergence even for this class of problems, the approach presented here decomposes the whole computational domain into subdomains, so that their boundaries coincide with the shape of the elastic-plastic interface. The exact solution over these subdomains — belonging either to an elastic or a plastic area of the structure — is smooth, assuming that no additional singularities occur, such as those due to reentrant corners. Each subdomain is then discretized by the  $p$ -version applied on a coarse mesh, where *no* refinement towards the elastic-plastic interface is necessary. The computational domain with a non-smooth solution is split into areas for which regular solutions do exist. As the boundary of the elastic-plastic interface describes an arbitrarily curved contour, element edges are accordingly shaped. As position and shape of the elastic-plastic interface are not known *a priori*, an  $rp$ -adaptive algorithm iteratively detects the boundary of the plastic zone.

Numerical studies on the  $rp$ -adaptive approach for two- and three-dimensional problems show that the proposed discretization strategy enables an improvement of efficiency and leads to accurate results. It enables an exponential rate of convergence.



## Vorwort

Im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Lehrstuhl für Bauinformatik der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen der Technischen Universität München wuchs diese Arbeit zwischen Januar 2000 und April 2005. Sie wurde als Projekt „Die  $p$ -Version der Methode der Finiten Elemente für physikalisch nichtlineare Problemstellungen“ durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft gefördert.

Aufrichtiger Dank gilt meinem verehrten Doktorvater, Herrn Professor Dr.rer.nat. Ernst Rank. Er war mir stets Vorbild und Ansporn, er hat mich gefordert und gefördert. Durch sein großes Interesse hat er in zahlreichen Diskussionen mein Ringen um Fortschritt beratend begleitet, somit ganz wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Für die Übernahme des Koreferates und sein Interesse an meiner Arbeit danke ich Herrn Professor Dr.-Ing. Wolfgang Wall.

Herrn Dr.-Ing. Alexander Düster, der schon meine Diplomarbeit betreute, danke ich für die vielen wichtigen Diskussionen und Anregungen, durch die er mir auch in diesem Projekt zur Seite stand.

Für die fast familiäre Atmosphäre und das freundschaftliche Miteinander am Lehrstuhl bedanke ich mich bei allen Kollegen, bei Frau Hanne Cornils und insbesondere bei meinem langjährigen Zimmernachbarn Herrn Dipl.-Ing. Andreas Niggel.

Ein ganz herzliches Dankeschön gilt meiner Mutter Gisela. Sie war immer für mich da.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Kontinuumsmechanische Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1	Kinematik . . . . .	5
2.1.1	Bewegung . . . . .	5
2.1.2	Verschiebung und Verschiebungsgradient . . . . .	6
2.1.3	Deformation und Verzerrung . . . . .	7
2.2	Spannung und Gleichgewicht . . . . .	8
2.2.1	Spannungszustand . . . . .	9
2.2.2	Gleichgewicht . . . . .	10
2.3	Materialmodelle . . . . .	10
2.3.1	Elastisches Materialverhalten . . . . .	11
2.3.2	Plastisches Materialverhalten . . . . .	12
2.4	Die variationelle Formulierung . . . . .	18
2.4.1	Randbedingungen . . . . .	18
2.4.2	Schwache Form des Gleichgewichts . . . . .	19
2.4.3	Linearisierung der schwachen Form . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Grundlagen geometrischer Modellierung</b>	<b>23</b>
3.1	Topologie bei der Modellbildung durch Randdarstellung . . . . .	24
3.1.1	Datenstrukturen . . . . .	25
3.1.2	Gültigkeit des Modells . . . . .	26
3.2	Geometrie . . . . .	27
3.2.1	Punkte . . . . .	27
3.2.2	Kurven . . . . .	27
3.2.3	Oberflächen . . . . .	34
3.2.4	Interpolation von Kurven und Flächen . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Die Methode der finiten Elemente</b>	<b>43</b>
4.1	Diskretisierung . . . . .	43
4.1.1	Übergang auf matrizielle Schreibweise . . . . .	43
4.1.2	Approximation durch finite Elemente . . . . .	45
4.2	Fehlerkontrolle . . . . .	48
4.2.1	<i>A priori</i> Fehlerschätzung — Konvergenzraten . . . . .	50
4.2.2	<i>A posteriori</i> Fehlerschätzung — Extrapolation . . . . .	53
4.2.3	Konvergenzraten am Beispiel . . . . .	54

4.3	Hierarchische Ansatzfunktionen für Elemente hoher Ordnung . . . . .	57
4.3.1	Die eindimensionale hierarchische Basis . . . . .	57
4.3.2	Hierarchische Ansatzfunktionen für vierknotige Elemente . . . . .	59
4.3.3	Hierarchische Ansatzfunktionen für Hexaederelemente . . . . .	61
4.3.4	Die Ansatzräume der Diskretisierung . . . . .	62
4.4	Konzept zur Abbildung von Elementen hoher Ordnung . . . . .	64
4.4.1	Zweidimensionale Abbildungsfunktion . . . . .	65
4.4.2	Dreidimensionale Abbildungsfunktion . . . . .	66
4.4.3	Abbildungsstrategien — eine Diskussion . . . . .	69
4.5	Nichtlineare Algorithmen . . . . .	72
4.5.1	Das NEWTON-RAPHSON-Verfahren . . . . .	73
4.5.2	Der Projektionsalgorithmus . . . . .	75
4.6	Numerische Integration . . . . .	80
4.6.1	GAUSS-Quadratur . . . . .	80
4.6.2	Vektorintegration . . . . .	81
4.6.3	Numerische Beispiele . . . . .	86
<b>5</b>	<b><i>rp</i>-adaptive Diskretisierung</b>	<b>91</b>
5.1	Die Idee . . . . .	91
5.2	<i>rp</i> -adaptiver Algorithmus . . . . .	92
5.3	Geometrischer Algorithmus . . . . .	95
5.4	Datentransfer der Geschichtsvariablen — Widerspruch zum <i>rp</i> -adaptiven Gedanken? . . . . .	98
5.5	Basisalgorithmen . . . . .	100
5.5.1	Konvertierungsalgorithmen . . . . .	100
5.5.2	Zweidimensionale Zerlegung . . . . .	100
5.5.3	Vereinigung von Geometrie und Topologie . . . . .	106
<b>6</b>	<b><i>rp</i>-adaptive Berechnungen in zwei Dimensionen</b>	<b>109</b>
6.1	Ein quasi eindimensionales Beispiel . . . . .	109
6.1.1	Diskretisierung mit nicht-Interface Netzen . . . . .	111
6.1.2	Diskretisierung mit Interface Netzen . . . . .	114
6.1.3	<i>rp</i> -adaptive Diskretisierung . . . . .	117
6.2	Dickwandiges Rohr unter Innendruck . . . . .	120
6.2.1	Analytische Lösung . . . . .	120
6.2.2	Finite-Element-Analyse bei linearer Elastizität . . . . .	125
6.2.3	Finite-Element-Analyse für die Deformationstheorie . . . . .	132
6.3	Rechteckgebiet mit Kreisloch . . . . .	137
<b>7</b>	<b>Dreidimensionale Berechnungen mit der <i>rp</i>-Version</b>	<b>149</b>
7.1	Hohlkugel unter Innendruck — die analytische Lösung . . . . .	149
7.1.1	Lineare Elastizität . . . . .	150
7.1.2	Deformationstheorie . . . . .	154
7.2	Finite-Element-Analyse bei linear elastischem Materialverhalten . . . . .	160
7.3	Finite-Element-Analyse für Berechnungen nach der Deformationstheorie . . . . .	166
7.4	<i>rp</i> -adaptive Berechnungen nach der Deformationstheorie . . . . .	169



---

<b>8 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>173</b>
<b>A Definitionen der Tensoralgebra</b>	<b>177</b>
A.1 Kugeltensor und Deviator . . . . .	177
A.2 Invarianten . . . . .	178
<b>B Abbildungsfunktion</b>	<b>179</b>
B.1 Zweidimensionale Abbildung . . . . .	179
B.2 Dreidimensionale Abbildung . . . . .	179
B.2.1 Kantenterme nach [49] . . . . .	179
B.2.2 Flächenterme nach [49] . . . . .	180
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>183</b>



---

# Kapitel 1

## Einleitung

Parallel zur Leistungsfähigkeit von Rechnern entwickelte sich die Methode der finiten Elemente, deren Wurzeln bis in die 20er Jahre des 20ten Jahrhunderts reichen, zu einem universellen Werkzeug, das eine Fülle ingenieurrelevanter Problemstellungen numerisch behandelbar macht. Es unterstützt nicht nur die Beantwortung strukturmechanischer Fragestellungen, die den Impuls zur Entwicklung des Näherungsverfahrens gaben, sondern ist ebenso zur Diskretisierung von Fluidströmungen und anderen Feldproblemen geeignet.

Auf dem Weg zur numerischen Abbildung eines physikalischen Phänomens wird die Güte der endgültigen Lösung durch verschiedene Abstraktionsstufen beeinflusst. Der erste vereinfachende Schritt ist die Idealisierung des physikalischen Problems zu einem mathematischen Modell, das sich als Satz an Differentialgleichungen darstellt. Sie werden in einem zweiten Schritt durch den Finite-Element-Ansatz näherungsweise gelöst. Die numerische Approximation kann maximal so genau sein wie das Modell, das sie diskretisiert. So ist einerseits die Modellbildung, andererseits die Diskretisierungsstrategie entscheidend [11]. Um den Fehler des numerischen Verfahrens zu kontrollieren, wurden verschiedene Methoden entwickelt.

Während die klassische  $h$ -Version der Finite-Element-Methode die Genauigkeit durch globale oder lokale Netzverfeinerung erhöht, reduzieren  $r$ -Methoden den Fehler durch die geeignete Repositionierung der topologischen Objekte des Finite-Element-Netzes. Ansätze hoher Ordnung verbessern die Lösung durch globale oder lokale Erhöhung des Polynomgrades auf fixem Netz. Dass die  $p$ -Version eine effiziente Methode zur Diskretisierung linear-elliptischer Probleme ist und für glatte Lösungsstrukturen exponentielle Konvergenz erzielt, haben zahlreiche Arbeiten gezeigt. In Kombination mit geeigneter Netzverfeinerung konvergiert sie als sogenannte  $hp$ -Version sogar für nicht-glatte Lösungen exponentiell.

Die dreidimensionale  $p$ -Version diskretisiert balken-, platten- und schalenartige Strukturen — also allgemein dünnwandige Kontinua — effizient mithilfe anisotroper Ansätze, die sich ab einem Polynomgrad größer vier robust gegenüber Elementverzerrungen und Locking-Phänomenen verhalten [72, 31, 76]. Der Zugang überführt den Modellfehler klassischer, dimensionsreduzierter Ansätze in einen kontrollierbaren Diskretisierungsfehler. Wie Schalen durch entsprechende Elementformulierungen effizient diskretisiert werden, wird in [100, 15, 14, 65] untersucht.

Im Falle von elastoplastischen Materialmodellen wie der Deformationstheorie von HENCKY oder der  $J_2$ -Plastizität, konnte die hohe Effizienz der  $p$ -Version auch im direkten Vergleich mit einer adaptiven  $h$ -Version nachgewiesen werden [34, 35, 33].

Im Rahmen vorliegender Arbeit wird für diese Problemklasse eine Diskretisierungsstrategie vorgestellt, die eine weitere Effizienzsteigerung möglich macht. Bei physikalischer Nichtlinearität verliert die exakte Lösung im Bereich der plastischen Front an Regularität, so dass auch mit Ansätzen hoher Ordnung nur ein algebraisches Konvergenzverhalten erreicht werden kann, sofern das elastisch-plastische Interface das Innere von Elementen schneidet. Um auch für elastoplastische Probleme exponentielle Konvergenz zu erzielen, besteht die Idee der  $rp$ -Version darin, das Berechnungsgebiet, auf dem eine nicht glatte Lösung existiert, so in Teilgebiete zu zerlegen, dass die Elementränder mit dem Verlauf des elastisch-plastischen Interface zusammenfallen. Die Lösungen dieser Substrukturen, die entweder zu einem elastischen- oder zu einem plastifizierten Bereich des Berechnungsgebietes gehören, sind glatt, vorausgesetzt, dass keine weiteren Singularitäten — z.B. aufgrund einspringender Ecken — vorhanden sind. Jedes Teilgebiet wird dann durch eine  $p$ -Version auf grobem Netz diskretisiert. So konvergieren die Ergebnisse sogar für diese Klasse von Problemen exponentiell. Mitentscheidend für den Erfolg der  $rp$ -Methode ist dabei die Tatsache, dass der Rand von Elementen hoher Ordnung durch allgemeine Kurven beschreibbar und nicht wie bei Elementen niedriger Ordnung auf geradlinige oder parabolische Formen beschränkt ist.

Im Anschluss an diese Einleitung bilden die Kapitel 2-7 den Kern der Arbeit. Ihre Struktur folgt einer impliziten Dreiteilung in:

## Grundlagen

- Kapitel 2 stellt die hier betrachteten Gleichungen der Mechanik in ihren kontinuumsmechanischen Kontext. Unter der Voraussetzung kleiner Deformationen fasst es Kinematik, Spannungen und Gleichgewicht zusammen und stellt über die konstitutiven Beziehungen sowohl den elastischen als auch den plastischen Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen her. Letzterer ist richtungsweisend für die hier entwickelte Diskretisierung. Die variationelle Formulierung bereitet das mechanische Problem für das numerische Verfahren auf.
- Kapitel 3 widmet sich der Geometrie, die allgemein bei der Elementformulierung hoher Ordnung — speziell im Rahmen der hier entwickelten Algorithmen — eine außergewöhnlich wichtige Rolle spielt. Grobe Finite-Element-Netze, typisches Werkzeug der  $p$ -Version, fordern die exakte Beschreibung beliebig berandeter Elemente. Mit Elementrändern die Form der plastischen Zone zu modellieren, ist hier die geometrisch dominierte Aufgabe. Entsprechende Grundlagen, auf denen die Abbildungskonzepte und Algorithmen basieren, stehen im Zentrum dieses Kapitels, das die topologische und geometrische Struktur physikalischer Modelle beleuchtet.

## Diskretisierung

- Kapitel 4 stellt eingangs die Methode der finiten Elemente als allgemeines Diskretisierungsverfahren vor und klassifiziert die Fehler, die solche Approximation mit sich bringt, hinsichtlich der Konvergenzraten verschiedener Verfeinerungsstrategien. Weil diese Arbeit auf der Elementformulierung hoher Ordnung aufsetzt, prägen die entsprechenden Aspekte dieses Kapitel. Demgemäß stellen sowohl die hierarchischen Ansatzfunktionen

---

als auch das Abbildungskonzept und die numerische Integration „p“-spezifische Ansätze und Verfahren dar. Welche Algorithmen die nichtlinearen konstitutiven Beziehungen auflösen, beantwortet ebenfalls dieses Diskretisierungskapitel.

- Kapitel 5 diskutiert die Lösungsstruktur physikalisch nichtlinearer Fragestellungen im Hinblick auf die Diskretisierung mit Ansätzen hoher Ordnung und entwickelt daraus die  $rp$ -adaptive Idee zur effizienten Approximation dieser Problemklasse mit dem Ziel exponentieller Konvergenz. Es erläutert die entsprechenden Algorithmen zur Umsetzung des  $rp$ -adaptiven Gedankens und erörtert übliche Strategien zur numerischen Behandlung nichtlinearer Fragen.

#### Numerische Beispiele

- Kapitel 6 beantwortet die Frage nach der Effizienz der  $rp$ -Adaptivität in zwei Raumdimensionen anhand dreier Beispiele zur Deformationstheorie von HENCKY. Detaillierten Studien zur prinzipiellen Approximationseigenschaft der  $rp$ -Version bei materieller Nichtlinearität folgen Konvergenzbetrachtungen der jeweils  $rp$ -adaptiven Diskretisierung.
- Kapitel 7 widmet sich schließlich einem einfachen dreidimensionalen Problem und prüft, ob die  $rp$ -Version hinsichtlich des Konvergenzverhaltens wie es sich in zwei Dimensionen zeigt, entsprechenden Anforderungen auch im dreidimensionalen Raum standhält.

Von Anfang an war bewusst, dass die *in der Praxis* erforderliche Genauigkeit von Ergebnissen elastoplastischer Untersuchungen zum einen durch die Modellbildung, zum anderen durch die Materialparameter zahlreichen Beschränkungen unterliegt. Die eingehenden Untersuchungen des möglichen Konvergenzverhaltens unterschiedlicher Diskretisierungsstrategien in dieser Arbeit sind dadurch gerechtfertigt, dass die hier entwickelte Methode auf eine viel größere Klasse von Problemen der Kontinuumsmechanik übertragbar ist. Zu diesem „Modellcharakter“ nimmt Kapitel acht Stellung, indem es resumiert und einen Blick auf mögliche zukünftige Arbeiten wagt.



---

# Kapitel 2

## Kontinuumsmechanische Grundlagen

Als Basis für die anschließenden Finite-Element-Konzepte fasst dieses Kapitel die kontinuumsmechanischen Grundlagen zusammen. Ein Kontinuum wird dabei als Punktmenge verstanden, die zu jedem Zeitpunkt  $t$  den Raum oder Teile des Raumes stetig ausfüllt. Jeder Punkt ist durch Materialeigenschaften charakterisiert. Alle weiteren Betrachtungen basieren im Wesentlichen auf den Ausführungen von ALTENBACH und ALTENBACH [5], WRIGGERS [104] und BONET und WOOD [17].

### 2.1 Kinematik

Der dreidimensionale EUKLIDISCHE Raum  $\mathbb{R}^3$  bildet den Rahmen aller folgenden Betrachtungen. Er wird durch eine im Bezugspunkt  $O$  des Systems definierte Orthonormalbasis aufgespannt. Ändern sich die Eigenschaften eines materiellen Punktes mit seiner Bewegung im Raum, sind verschiedene Perspektiven auf diese Veränderung möglich.

- Bei der EULERSchen Betrachtungsweise ist der Beobachter mit einem raumfesten Punkt verbunden. Er nimmt die Veränderung an diesem Ort wahr, die durch den Aufenthalt immer anderer materieller Punkte hervorgerufen wird. Wie sich die physikalischen Eigenschaften eines bestimmten Teilchens ändern, 'sieht' er nicht.
- Bei der LAGRANGESchen Betrachtungsweise ist der Beobachter mit einem materiellen Teilchen verbunden und nimmt die Änderung physikalischer Eigenschaften dieses Partikels wahr.

Während in der Fluidmechanik meist die EULERSche Betrachtungsweise Anwendung findet, erweist sich im Rahmen der Festkörpermechanik die auch hier verwendete LAGRANGESche Perspektive als sinnvoll. Schließlich ist die Zustandsänderung eines materiellen Punktes bei Bewegung und Deformation innerhalb einer gewissen Zeit  $t \in [0, T] \subset \mathbb{R}_+$  von Interesse.

#### 2.1.1 Bewegung

Ein oben beschriebener materieller Punkt sei durch  $\mathbf{X} \in \Omega_0$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  in der Referenzkonfiguration  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$  lokalisiert. Die Oberfläche des offenen Gebietes  $\Omega_0$  sei durch den

Rand  $\partial\Omega_0$  definiert, so dass  $\bar{\Omega}_0 = \Omega_0 \cup \partial\Omega_0$ . Die aktuelle Lage  $\mathbf{x} \in \Omega$  beschreibt den Punkt

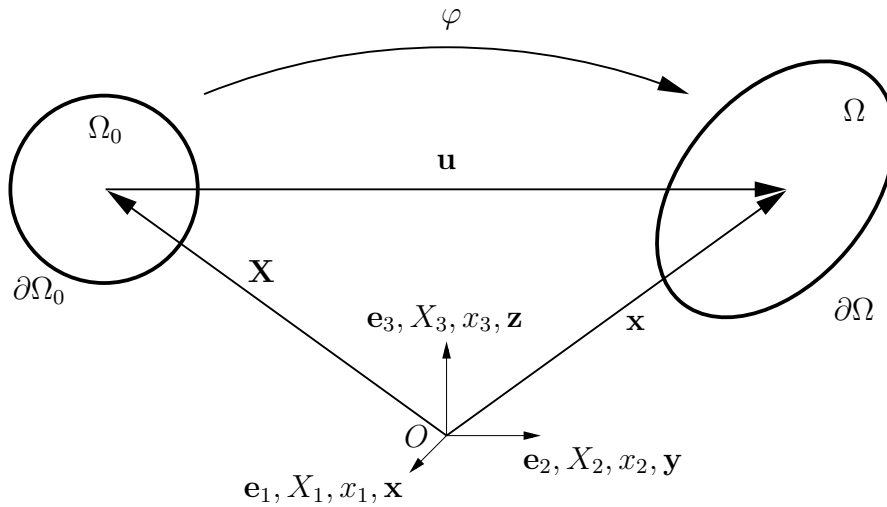


Abbildung 2.1: Bewegung eines materiellen Punktes

in der Momentankonfiguration  $\Omega$ , wobei mit dem Rand  $\partial\Omega$  — analog zur Referenzkonfiguration —  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  gilt. Die Abbildung  $\varphi$  überführt die Referenzkonfiguration  $\bar{\Omega}_0$  auf die Momentankonfiguration  $\bar{\Omega}$  zur Zeit  $t \in [0, T]$ . Entsprechend ordnet  $\varphi$  einem Punkt  $\mathbf{x}(t)$  in der Momentankonfiguration  $\Omega$  seinen Ort  $\mathbf{X}(t = t_0)$  in der Referenzkonfiguration  $\bar{\Omega}_0$  zu.

$$\varphi : \bar{\Omega}_0 \times [0, T] \longrightarrow \bar{\Omega} \quad \text{mit} \quad \bar{\Omega}_0, \bar{\Omega} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.1)$$

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(\mathbf{X}, t)$$

### 2.1.2 Verschiebung und Verschiebungsgradient

Der Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}$  definiert schließlich die additive Beziehung von  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{X}$ .

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.2)$$

Da die Deformationen später nicht durch die Bewegung  $\varphi$ , sondern über das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  ausgedrückt werden sollen, wird an dieser Stelle der Verschiebungsgradient  $\mathbf{H}$  eingeführt, der durch die Ableitung der Verschiebung  $\mathbf{u}$  nach dem Ortsvektor  $\mathbf{X}$  der Referenzkonfiguration

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.3)$$

definiert ist. Im Allgemeinen versteht man unter Ableitungen nach dem Ortsvektor  $\mathbf{X}$  der Referenzkonfiguration materielle Gradienten, unter Ableitungen nach dem Ortsvektor  $\mathbf{x}$  der Momentankonfiguration räumliche Gradienten einer Größe  $(\bullet)$ .



$$\frac{\partial(\bullet)}{\partial \mathbf{X}} := \text{Grad}(\bullet), \quad \frac{\partial(\bullet)}{\partial \mathbf{x}} := \text{grad}(\bullet) \quad (2.4)$$

Da der Unterschied der Gradienten erst bei geometrischer Nichtlinearität zutage tritt, dieser Arbeit jedoch geometrische Linearität zugrunde liegt (vgl. auch Abschnitt 2.1.3), wird aufgrund der Näherung

$$\text{Grad} \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \approx \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \text{grad} \mathbf{u} \quad (2.5)$$

vereinfachend vereinbart:

$$\mathbf{H} = \text{grad} \mathbf{u} \quad (2.6)$$

### 2.1.3 Deformation und Verzerrung

Die in Abschnitt 2.1.1 beschriebene Bewegung in der Umgebung eines materiellen Punktes kann mithilfe des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  linear approximiert werden.

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (2.7)$$

$\mathbf{F}$  transformiert ein materielles Linienelement  $d\mathbf{X}$  der Referenzkonfiguration  $\Omega_0$  in ein Linienelement  $d\mathbf{x}$  der Momentankonfiguration  $\Omega$ . Über den Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  sind zusätzlich Transformationen zwischen räumlichen und referentiellen Flächen- und Volumenelementen definiert.

$$d\mathbf{a} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A} \quad (2.8)$$

$$dv = \det \mathbf{F} dV \quad (2.9)$$

$\mathbf{F}^{-T}$  bezeichnet die Inverse des transponierten Deformationstensors  $(F^{-1})^T$ , nicht den Kehrwert von  $F^T$ . Die Forderung nach der Eindeutigkeit der Abbildung  $\varphi$  zu jedem Zeitpunkt  $t$  manifestiert sich in Ungleichung (2.10) für die JACOBI-Determinante  $J$ . Die Forderung schließt Selbstdurchdringungen eines Volumenelementes aus.

$$J = \det \mathbf{F} > 0 \quad (2.10)$$

Im Folgenden wird der GREEN-LAGRANGESche Verzerrungstensor eingeführt. Er leitet sich aus der Differenz der Quadrate materieller Linienelemente vor- bzw. nach der Deformation ab.

$$\begin{aligned}
d\mathbf{x} d\mathbf{x} - d\mathbf{X} d\mathbf{X} &= \mathbf{F} d\mathbf{X} \mathbf{F} d\mathbf{X} - d\mathbf{X} d\mathbf{X} \\
&= d\mathbf{X} (\mathbf{F}^T \mathbf{F}) d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \mathbf{1} d\mathbf{X} \\
&= d\mathbf{X} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) d\mathbf{X} \quad =: d\mathbf{X} (2\mathbf{E}) d\mathbf{X}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Der Verzerrungstensor wird zu

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}), \tag{2.12}$$

wobei  $\mathbf{1}$  den Einheitstensor zweiter Stufe bezeichnet. Als Funktion des Verschiebungsgradienten  $\mathbf{H} = \text{grad } \mathbf{u}$  lässt sich die symmetrische Größe  $\mathbf{E}$  durch

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\text{grad } \mathbf{u} + \text{grad}^T \mathbf{u} + \text{grad}^T \mathbf{u} \text{ grad } \mathbf{u}) \tag{2.13}$$

ausdrücken.

Da dieser Arbeit die geometrisch lineare Theorie zugrunde liegt, werden sowohl die Verschiebungen als auch die Deformationen als klein erachtet. Sind die Verschiebungen klein, wird angenommen, dass die Momentankonfiguration der Referenzkonfiguration entspricht, so dass bei der Bildung von Gradienten  $\text{Grad}(\bullet)$  bzw.  $\text{grad}(\bullet)$  auf eine Unterscheidung zwischen den Konfigurationen verzichtet werden kann. Bei kleinen Deformationen darf insbesondere der Verschiebungsgradient  $\text{grad}(\mathbf{u})$  als klein erachtet werden, so dass das quadratische Glied  $[(\text{grad}^T \mathbf{u} \text{ grad } \mathbf{u}) \ll 1]$  in Gleichung (2.13) vernachlässigt wird und nur noch der lineare kinematische Zusammenhang das Verzerrungsmaß

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\text{grad } \mathbf{u} + \text{grad}^T \mathbf{u}) \tag{2.14}$$

bestimmt. Die Symmetrieeigenschaft der Verzerrung führt bei der Betrachtung dreidimensionaler Kontinua auf sechs unabhängige Größen.

## 2.2 Spannung und Gleichgewicht

Die fundamentalen kontinuumsmechanischen Beziehungen werden durch die Bilanzgleichungen ausgedrückt, die unabhängig von speziellen Eigenschaften des Kontinuums gültig sind. Ganz allgemein sagt die Bilanzierung aus, wie sich physikalische Größen eines Körpers aufgrund äußerer Einwirkungen ändern. Bleibt die Bilanzgröße innerhalb eines zu bilanzierenden Vorgangs konstant, haben die entsprechenden Gleichungen Erhaltungscharakter. Zu den mechanischen Erhaltungsgleichungen gehören Massenerhaltung, Impulserhaltung und Drehimpulserhaltung.

Im Rahmen dieser Arbeit wird ausschließlich die Forderung nach Gleichgewicht auf der Basis der lokalen Impulsbilanz besprochen. Bevor die entsprechenden Gleichungen angegeben werden, führt Abschnitt 2.2.1 die dazu erforderlichen Spannungsmaße ein.

### 2.2.1 Spannungszustand

Der Spannungszustand bezeichnet die Menge aller Spannungstensoren, die in einem materiellen Punkt denkbar sind. Die Kontinuumsmechanik definiert unterschiedliche Spannungstensoren. Sie entstehen aufgrund der Vielfalt an Kräften und Schnittflächen, die unabhängig voneinander sowohl in der Referenz- als auch in der Momentankonfiguration betrachtet werden können. Der CAUCHYSche Spannungsvektor  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$  wird als wahrer Spannungsvektor an einem Punkt verstanden. Die aktuelle Kraft  $d\mathbf{f}$  wird auf eine Schnittfläche  $d\mathbf{a}$  in der aktuellen Konfiguration bezogen.

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{a}} \quad (2.15)$$

Das CAUCHYSche Fundamentaltheorem (2.16) stellt einen linearen Zusammenhang zwischen dem Spannungsvektor  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$  und dem Normaleneinheitsvektor  $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$  einer betrachteten Oberfläche her.

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (2.16)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t} \mathbf{n} \quad (2.17)$$

Entsprechend definiert Gleichung (2.17) den CAUCHY-Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$ . Abbildung 2.2 stellt die übliche Vorzeichenkonvention zur Definition von Spannungstensoren dar.

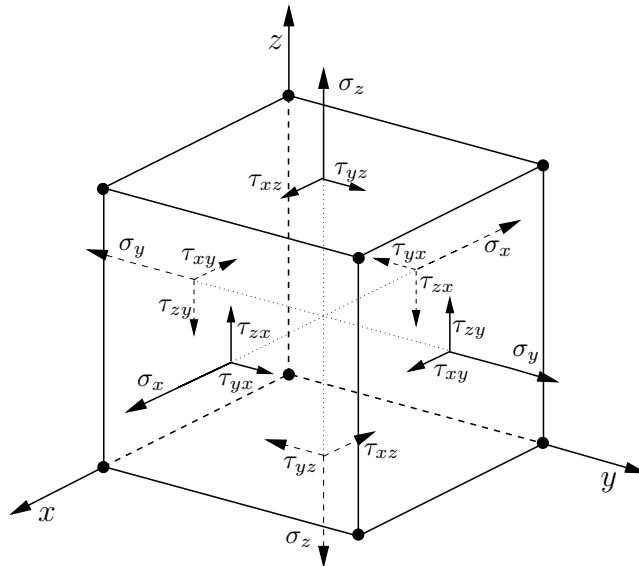


Abbildung 2.2: Vorzeichenkonvention der Spannungen

Als weitere Spannungsmaße werden im Folgenden der auch als gewichteter CAUCHY-Spannungstensor bekannte KIRCHHOFFSche Spannungstensor  $\boldsymbol{\tau}$  sowie die Spannungstensoren  $\mathbf{P}^1$  und  $\mathbf{P}^2$  nach PIOLA-KIRCHHOFF eingeführt. Letztere sind insbesondere bei der numerischen Umsetzung von zentraler Bedeutung.

$$\boldsymbol{\tau} = \det \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} = J \boldsymbol{\sigma} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{P}^1 = \det \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} = \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{-T} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{P}^2 = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}^1 \quad (2.20)$$

Wie  $\boldsymbol{\sigma}$  ist auch  $\boldsymbol{\tau}$  eine auf das Referenzvolumen bezogene räumliche, symmetrische Größe. Der KIRCHHOFF-Spannungstensor  $\boldsymbol{\tau}$  und der zweite PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor  $\mathbf{P}^2$  sind hier Rechengrößen. Ihre physikalische Bedeutung erhalten sie erst im Rahmen der geometrisch nichtlinearen Elastizitätstheorie.

Der erste PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor  $\mathbf{P}^1$  lässt sich interpretieren, indem man die aktuelle, infinitesimale Kraft  $d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{a}$  auf die Ausgangsfläche  $d\mathbf{A}$  bezieht. Mit Gleichung (2.8) erhält man:

$$d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{a} = \boldsymbol{\sigma} \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A} = \mathbf{P}^1 d\mathbf{A} \quad (2.21)$$

### 2.2.2 Gleichgewicht

Auf der Basis der lokalen Massen- und Impulsbilanz für ein Kontinuum im EUKLIDischen Raum wird hier die Gleichgewichtsbedingung angegeben, die für jeden beliebigen materiellen Körper und jeden Teilkörper erfüllt sein muss. Die Kräfte, die von außen auf den Körper einwirken, werden gemäß Abschnitt 2.2.1 als bekannt vorausgesetzt. So entsteht die Differentialgleichung des dreidimensionalen Modellproblems aus der Forderung nach Gleichgewicht am differentiellen Elementarteilchen. Sie ist mit dem Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  und dem Vektor  $\mathbf{f}$  zur Beschreibung der Volumenlasten im quasistatischen Fall bei Vernachlässigung von Trägheitskräften durch

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 \quad (2.22)$$

gegeben. Im dreidimensionalen Fall führt dies auf ein System aus drei partiellen Differentialgleichungen.

## 2.3 Materialmodelle

In den vorangegangenen Abschnitten wurden kinematische Beziehungen, Spannungs- und Gleichgewichtsbetrachtungen zur Beschreibung des kontinuumsmechanischen Modells in Gleichungen 'gegossen', die im Wesentlichen unabhängig von den kontinuumsmechanischen Eigenschaften gültig sind. Die Anzahl dieser Gleichungen liegt deutlich unter der Anzahl unbekannter Größen zur Beschreibung des Kontinuums. Dies rein formale mathematische Problem ist Ausdruck der Tatsache, dass das Randwertproblem noch nicht vollständig beschrieben ist. Die noch fehlenden konstitutiven Beziehungen, die einen funktionalen Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen definieren, werden aus den jeweiligen Materialeigenschaften des betrachteten Körpers gewonnen. Im Sinne idealisierter Ingenieurwissenschaften gehorcht ein Kontinuum — grob klassifiziert — zwei Materialgesetzen:

Elastisches Materialverhalten zeichnet sich durch vollständige Reversibilität der auftretenden

Deformationen aus.

Plastisches Materialverhalten behält nach der Entlastung des Körpers irreversible Deformationen, d.h. bleibende Gestaltänderung des Systems.

### 2.3.1 Elastisches Materialverhalten

Material, das sich elastisch verhält, ist durch drei Charakteristika gekennzeichnet:

Alle Verzerrungen aus äußerer Beanspruchung bilden sich vollständig zurück, sobald der spannungslose Ausgangszustand wiederhergestellt ist. Verformungen werden ausschließlich durch die Größe, nicht jedoch durch die Geschwindigkeit der Belastung geprägt. Die im Rahmen der Verformung geleistete Arbeit geht gänzlich in reversible Verzerrungsenergie über, die im Körper gespeichert wird.

So existiert ein eindeutig invertierbarer Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen. Er kann im Falle großer Deformationen nichtlinear sein. Unter der Voraussetzung kleiner Verzerrungen vereinfachen sich die Gleichungen auf die Beschreibung linear elastischen Materialverhaltens, das durch das HOOKEsche Gesetz

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.23)$$

definiert ist. Als Tensor vierter Stufe stellt sich  $\mathbf{C}$  für den isotropen Werkstoff unter Verwendung von Symmetrieeigenschaften wie folgt dar:

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I}, \quad (2.24)$$

wobei  $\mathbf{1}$  den Einheitstensor zweiter Stufe,  $\mathbf{I}$  den Einheitstensor vierter Stufe bezeichnet.

Der Materialtensor  $\mathbf{C}$  hängt ausschließlich von den LAMÉ-Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  ab. Sie stehen mit dem Elastizitätsmodul  $E$ , der Querkontraktionszahl  $\nu$  und dem Schubmodul  $G$  in Zusammenhang:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+2\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.25)$$

Als alternative Darstellung des Elastizitätstensors ist in Abhängigkeit vom Kompressionsmodul  $\kappa$  auch diese Schreibweise üblich:

$$\mathbf{C} = \kappa \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \left[ \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right] \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (2.26)$$

Die Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  sind damit auch in Form von (2.40) darstellbar.

### 2.3.2 Plastisches Materialverhalten

Auch die Klasse plastischer Materialien zeichnet sich allgemein durch drei Charakteristika aus:

Das Material ist durch irreversible Deformationen geprägt. Ist der Grenzspannungszustand überschritten, dissipiert ein Teil der umwandelbaren Dehnungsenergie in irreversible Verformungsenergie. Die Beanspruchung wird sowohl durch den Werkstoff als auch durch den Belastungsweg beeinflusst. Das Antwortverhalten plastischen Materials hängt von der Belastungsgeschichte ab.

Die im Rahmen dieser Arbeit betrachteten elastoplastischen Materialgesetze beschreiben ein Verhalten, dem sich eine Vielzahl nichtlinearer Materialien unterordnen. Dazu gehören neben metallischen Werkstoffen wie z.B. Stahl oder Aluminium auch Materialien wie Beton, Sand, Ton oder Fels.

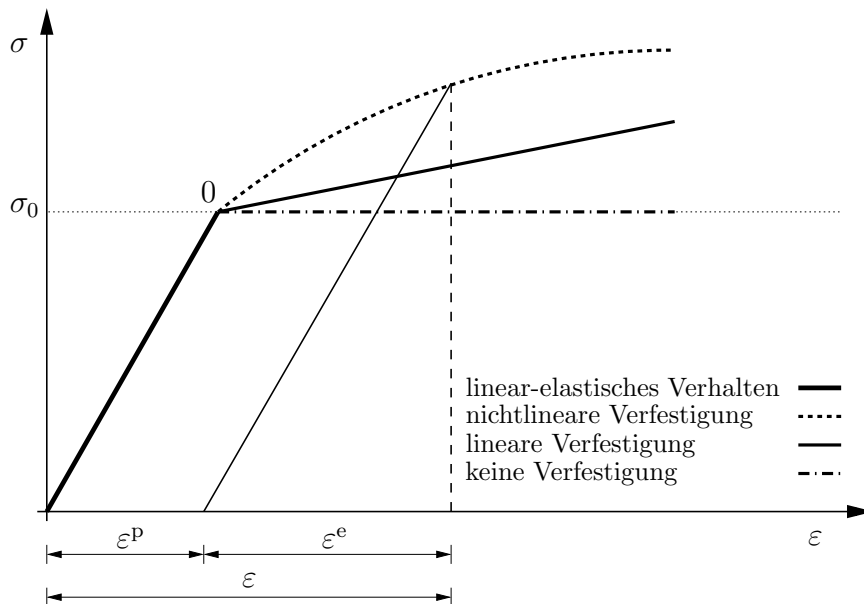


Abbildung 2.3: Spannungs-Dehnungs-Beziehung elastoplastischen Materials mit isotroper Verfestigung

Auf der Basis von WRIGGERS [104] HILL [45] und LUBLINER [56] stehen im Folgenden die Gleichungen zur Definition ratenunabhängiger elastoplastischer Materialien unter Berücksichtigung isotroper Verfestigung im Zentrum. Weiterhin wird die Annahme kleiner Deformationen getroffen, unter der noch immer viele Materialien nichtlinear antworten. Wie sich ein solches Material verhält, stellt Abbildung 2.3 anhand einer typischen Spannungs-Dehnungs-Kurve dar. Das phänomenologische Modell trennt den elastischen vom plastischen Bereich durch eine Fließgrenze, deren Wert durch die Anfangsfließspannung  $\sigma_0$  definiert ist. Vor Erreichen der in Abbildung 2.3 durch Punkt 0 gekennzeichneten Grenze verhält sich der Werkstoff elastisch, danach kommt es zu irreversiblen Deformationen. Bei Entlastung des Systems verschwinden die elastischen Deformationen, während die plastischen Verzerrungen weiter bestehen. Neben dem Eintreten des Plastifizierens definiert das Materialmodell auch den Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung nach Überschreiten der Fließgrenze. Idealplastisches Material

liegt vor, wenn die Spannung  $\sigma$  die Fließgrenze auch bei Steigerung der Last nicht überschreitet. Wächst  $\sigma$  über die Grenze  $\sigma_0$  hinaus, spricht man von Material mit Verfestigung. Sie kann sowohl linear als auch nichtlinear definiert sein.

### 1. Postulate

Unter der Annahme geometrischer Linearität darf die durch den linearen Verzerrungstensor (2.14) beschriebene Gesamtdehnung additiv in einen elastischen und einen plastischen Anteil zerlegt werden.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p. \quad (2.27)$$

Nachdem  $\boldsymbol{\varepsilon}$  als unabhängige Variable verstanden werden kann und die Evolution von  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  über die weiter unten beschriebene Fließregel definiert ist, bezeichnet  $\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p$  den elastischen Dehnungstensor. Er steht im Falle kleiner Verzerrungen mit dem Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  über die unter Abschnitt 2.3.1 beschriebene isotrope linear-elastische Spannungs-Dehnungs-Beziehung in Form des HOOKEschen Gesetzes in Verbindung.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p). \quad (2.28)$$

### 2. Fließflächenbehaftetes Materialgesetz

Das wichtigste Merkmal plastischen Fließens ist durch das Phänomen der Irreversibilität charakterisiert.

- **Elastisches Gebiet und Spannungsraum**

Gemäß der oben verwendeten Nomenklatur sei im Raum der Spannungen ein Gebiet  $\overline{\mathbb{E}}_\sigma$  gegeben, das durch sein Inneres  $\mathbb{E}_\sigma$ , dem sogenannten elastischen Bereich, und seinen Rand  $\partial\mathbb{E}_\sigma$ , der sogenannten Fließfläche, definiert ist. Dieses Gebiet zu begrenzen ist Aufgabe der Fließbedingung, die durch das Fließkriterium  $f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha)$  für einen Spannungszustand  $(\boldsymbol{\sigma}, \alpha)$  repräsentiert wird.  $f$  ist eine Funktion des Span-

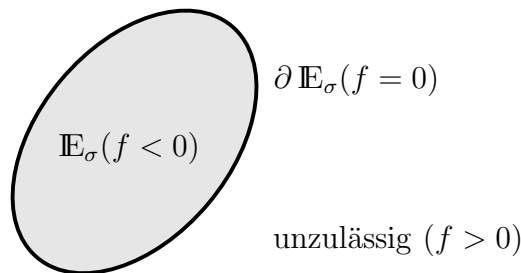


Abbildung 2.4: Elastisches Gebiet  $\overline{\mathbb{E}}_\sigma$  und Spannungsraum

nungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$  und der Verfestigungsvariablen, die sich hier aufgrund der Betrachtung isotroper Verfestigung auf die Größe  $\alpha$  reduzieren. Für das Innere von  $\overline{\mathbb{E}}_\sigma$ , den Rand von  $\overline{\mathbb{E}}_\sigma$  und zusammengefasst für  $\overline{\mathbb{E}}_\sigma$  selbst gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\sigma &:= \{(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) \mid f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) < 0\}, \\ \partial\mathbb{E}_\sigma &:= \{(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) \mid f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = 0\}, \\ \overline{\mathbb{E}}_\sigma &:= \{(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) \mid f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) \leq 0\} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Spannungszustände  $(\boldsymbol{\sigma}, \alpha)$ , deren Fließkriterium die Fließbedingung erfüllen, sind erlaubt (vgl. Abbildung 2.4).

- **Fließregel und Evolutionsgleichung für die Verfestigung**

Die Idee der Irreversibilität plastischen Fließens basiert auf der Fließregel und der Evolutionsgleichung für die Verfestigung:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.30)$$

$$\dot{\alpha} = \gamma \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha)}{\partial \alpha} \quad (2.31)$$

Die Fließregel gibt die Richtung plastischen Fließens vor. Die im Rahmen dieser Arbeit betrachtete assoziierte Fließregel (2.30) darf als Grundlage vieler Metalle vorausgesetzt werden und beschränkt die Evolutionsgleichungen auf die deviatorischen Anteile der plastischen Verzerrung  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ . Man spricht auch von der Normalenregel. Die innere Variable  $\alpha$ , die auch als äquivalente plastische Verzerrung bekannt ist, beschreibt die nichtlineare isotrope Verfestigung. Der aufgrund der Irreversibilität der plastischen Verzerrungen nicht-negative Konsistenzparameter  $\gamma$  beschreibt die Größe des plastischen Fließens und genügt den Be- und Entlastungsbedingungen.

$$\gamma \geq 0, \quad f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) \leq 0, \quad \gamma f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = 0 \quad (2.32)$$

Zusätzlich zu den sogenannten KUHN-TUCKER Bedingungen (2.32) erfüllt  $\gamma$  die Konsistenzbedingung

$$\gamma \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = 0, \quad (2.33)$$

worin

$$\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} + \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha)}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt} \quad (2.34)$$

die „zeitliche“ Ableitung von  $f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha)$  bezeichnet.

Die gemeinsame Interpretation von Konsistenzbedingung und KUHN-TUCKER Bedingungen führt auf das intuitive Verständnis plastischer Be- und elastischer Entlastung. Ihre detaillierte Interpretation wird in SIMO und HUGHES [90] diskutiert.

Die maßgeblichen Gleichungen zur Beschreibung der klassischen ratenunabhängigen Plastizität unter der Voraussetzung einer assoziierten Fließregel und isotroper Verfestigung sind abschließend in Tabelle 2.1 zusammengefasst. Sie werden im Rahmen der folgenden beiden Abschnitte 2.3.2.1 und 2.3.2.2 hinsichtlich der Plastizitätstheorie nach VON MISES und der Deformationstheorie nach HENCKY spezifiziert. Bei der numerischen Umsetzung werden die nichtlinearen Gleichungen mithilfe einer NEWTON-RAPHSON-Methode und einem RADIAL-RETURN-Algorithmus gelöst. Beide sind weiter unten in Kapitel 4.5.1 und 4.5.2 genauer beschrieben.



1. Linear-elastische isotrope Spannungs-Dehnungs-Beziehung:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)$$

2. Elastisches Gebiet im Spannungsraum:

$$\overline{\mathbb{E}}_\sigma = \{(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) \mid f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) \leq 0\}$$

3. assoziierte Fließregel mit isotropem Verfestigungsgesetz:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \text{und} \quad \dot{\alpha} = \gamma \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha)}{\partial \alpha}$$

4. KUHN-TUCKER Be-/Entlastungsbedingung:

$$\gamma \geq 0, f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) \leq 0, \gamma f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = 0$$

5. Konsistenzbedingung:

$$\gamma \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = 0$$

*Tabelle 2.1:* klassische ratenunabhängige Plastizität mit assoziierter Fließregel und isotroper Verfestigung

### 2.3.2.1 $J_2$ -Fließtheorie

Im Falle der Plastizität nach VON MISES spricht man auch von Metallplastizität, da sich das Verhalten metallischer Werkstoffe, die auch hier Gegenstand sind, diesem Modell unterordnet (vgl. Anhang A.1). Das Eintreten plastischen Fließens bleibt vom hydrostatischen Spannungszustand unbeeinflusst. Das Fließkriterium hängt nur von der zweiten Invarianten  $J_2$  (vgl. Anhang A.2) des Spannungsdeviators ab und lässt sich daher — speziell für isotrope Verfestigung — explizit ausdrücken durch

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = \|\text{dev}[\boldsymbol{\sigma}]\| - \sqrt{\frac{2}{3}} K(\alpha), \quad (2.35)$$

wobei  $\text{dev}[\boldsymbol{\sigma}]$  den deviatorischen Anteil des Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$  definiert.  $K(\alpha)$  beschreibt die nichtlineare isotrope Verfestigung, die im Folgenden durch eine lineare und eine exponentielle Funktion beschrieben wird.

$$K(\alpha) = \sigma_0 + h\alpha + (\sigma_\infty - \sigma_0)(1 - \exp(-\omega\alpha)) \quad (2.36)$$

$\sigma_0$  bezeichnet darin die Anfangsfließspannung,  $h$  den linearen Verfestigungsparameter,  $\sigma_\infty$  die Sättigungsspannung und  $\omega$  den Verfestigungsexponenten. Die Parameter zur Beschreibung

des Materialmodells sind in Tabelle 2.2 zusammengefasst. In Abbildung 2.5 ist isotrope Verfestigung  $K(\alpha)$  für verschiedene Konfigurationen von Materialparametern gemäß SIMO und HUGHES [90] aufgetragen. Aus (2.30) folgt für Fließregel und Verfestigungsgesetz

$$\dot{\epsilon}^p = \gamma \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \gamma \frac{\text{dev}[\boldsymbol{\sigma}]}{\|\text{dev}[\boldsymbol{\sigma}]\|} \quad (2.37)$$

$$\dot{\alpha} = \gamma \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (2.38)$$

Nummer	Materialparameter	Symbol	Einheit
1	Kompressionsmodul	$\kappa$	[MPa]
2	Schubmodul	$\mu$	[MPa]
3	Anfangsfließspannung	$\sigma_0$	[MPa]
4	Sättigungsspannung	$\sigma_\infty$	[MPa]
5	lineare Verfestigung	$h$	[MPa]
6	Verfestigungsexponent	$\omega$	[-]

Tabelle 2.2: Materialparameter des nichtlinearen Modellproblems

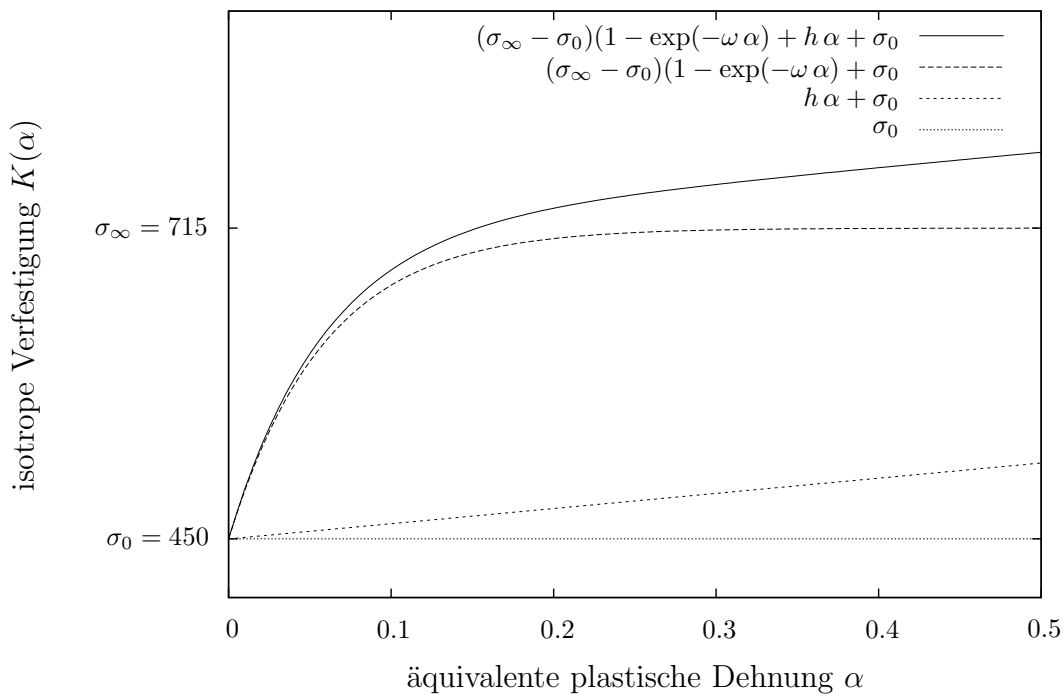


Abbildung 2.5: Lineare und nichtlineare isotrope Verfestigung  $K(\alpha)$  mit  $\omega = 16.93$  und  $h = 129.4$

### 2.3.2.2 Deformationstheorie

1924 stellte HENCKY [44] erstmals die Deformationstheorie für isotropes Material unter radialer<sup>1</sup> Belastung (vgl. z.B. [54, 56, 99]) bei geometrischer Linearität vor. Er verknüpfte Spannungen und Dehnungen im Sinne einer algebraischen Formulierung. Im Rahmen dieser Arbeit wird das HENCKY Problem für ideal plastisches Material auf der Basis des VON MISES Fließkriteriums (2.35) betrachtet, das sich im Falle perfekter Plastizität zu

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \|\text{dev}[\boldsymbol{\sigma}]\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 \quad \text{mit} \quad \text{dev}[\boldsymbol{\sigma}] = 2\mu \text{dev}[\boldsymbol{\varepsilon}] \quad (2.39)$$

vereinfacht. Die Fließbedingung (2.29) definiert auch bei der Deformationstheorie die erlaubten Spannungszustände durch  $f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0$ . Der Spannungstensor ist über die konstitutiven Beziehungen definiert. Ist die Fließbedingung erfüllt ( $f(\boldsymbol{\sigma}) < 0$ ) berechnet er sich zu

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \text{dev}[\boldsymbol{\varepsilon}] + \kappa \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}] \mathbf{1} \quad (2.40)$$

andernfalls durch

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0}{\|\text{dev}[\boldsymbol{\varepsilon}]\|} \text{dev}[\boldsymbol{\varepsilon}] + \kappa \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}] \mathbf{1}. \quad (2.41)$$

Bei der in Abschnitt 2.3.2.1 beschriebenen PRANDTL-REUSS Plastizität werden die plastischen Verzerrungen mithilfe der Ratengleichung berechnet. Darauf verzichtet die Theorie nach HENCKY. Die proportionale Belastung, die bei der Deformationstheorie vorausgesetzt wird, definiert einen algebraischen Zusammenhang zwischen den plastischen Dehnungen und den Deviatorspannungen, unabhängig von der Belastungsgeschichte. Das ermöglicht eine formale Integration der Fließregel und führt auf die algebraische Gleichung zur Berechnung der plastischen Verzerrungen.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \left( \frac{1}{2\mu_s} - \frac{1}{2\mu} \right) \text{dev}[\boldsymbol{\sigma}] \quad (2.42)$$

$\mu_s$  bezeichnet den Sekantenschubmodul. In [54] ist ein Theorem zur Existenz proportionaler Belastung angegeben.

---

<sup>1</sup>Eine Belastung gilt als radial oder proportional, wenn das Verhältnis der Spannungskomponenten während der Belastung konstant bleibt.

## 2.4 Die variationelle Formulierung

Bis jetzt wurde das Modellproblem durch die mechanischen Grundgleichungen beschrieben. Die Bilanzgleichungen der Mechanik führen auf entsprechende Variationsprinzipie, nämlich das *Prinzip der virtuellen Verschiebung* und das *Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten*. Sie machen das mechanische Problem für ein numerisches Lösungsverfahren anwendbar. Nachdem in Kapitel 2.2.2 nur die Gleichgewichtsbeziehung auf Basis der lokalen Impuls- und Massenbilanz aufgestellt wurde, beschränkt sich dieser Abschnitt auf die entsprechende Variationsformulierung gemäß dem *Prinzip der virtuellen Verschiebung*. Es ist später Basis der Finite-Element-Methode. Bevor in Abschnitt 2.4.2 die *schwache Form* des Gleichgewichts angegeben wird, beschreibt Kapitel 2.4.1 die Verschiebungs- und Kraftrandbedingungen, die bei der Herleitung des *Prinzips der virtuellen Verschiebung* berücksichtigt werden müssen. Ihre Definition ist zur Lösung des mechanischen Problems notwendig.

### 2.4.1 Randbedingungen

Aus der Vielfalt möglicher Belastungen, die auf einen Körper wirken können, konzentriert sich diese Arbeit ausschließlich auf Volumenlasten  $\mathbf{f}_\Omega$  und Oberflächenlasten  $\mathbf{f}_{\partial_N\Omega}$ , die in einem Gesamtlastvektor  $\mathbf{f}$  zusammengefasst werden.

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_\Omega + \mathbf{f}_{\partial_N\Omega} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{k} d\Omega + \int_{\partial_N\Omega} \mathbf{t} d\partial_N\Omega \quad (2.43)$$

Darin bezeichnet  $\rho$  die Dichte der Masse,  $\mathbf{k}$  das Gravitationsfeld und  $\mathbf{t}$  den Spannungsvektor bzgl. des materiellen Flächenelementes gemäß Gleichung (2.15).

Die Randbedingungen werden entlang des gesamten Randes  $\partial\Omega$  des Berechnungsgebietes  $\Omega$  definiert. Hier werden DIRICHLET-Ränder  $\partial_D\Omega$  von NEUMANN-Rändern  $\partial_N\Omega$  unterschieden. Alle Randbedingungen müssen auf dem gesamten Rand folgende Relation erfüllen:

$$\begin{aligned} \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N &= \partial\Omega \\ \partial\Omega_D \cap \partial\Omega_N &= \emptyset \end{aligned} \quad (2.44)$$

Darin bezeichnet  $\partial_D\Omega$  den Teil des Randes, auf dem Verschiebungen  $\bar{\mathbf{u}}$  gegeben sind,  $\partial_N\Omega$  den Teil von  $\partial\Omega$ , auf dem Kraftrandbedingungen definiert sind.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}|_{\partial_D\Omega} &= \bar{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\sigma}|_{\partial_N\Omega} \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Die vorgegebenen äußeren Kräfte müssen mit den inneren Kräften im Gleichgewicht stehen. Innere Kräfte berechnen sich dabei als Produkt aus CAUCHY-Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  und Normalenvektor  $\mathbf{n}$  des Randes.

## 2.4.2 Schwache Form des Gleichgewichts

Unter Berücksichtigung der zuvor definierten Randbedingungen ist das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  gesucht, das Gleichgewichtsbeziehung (2.22)

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 \quad (2.46)$$

erfüllt. Zur Lösung wird zunächst ein Testfunktionenvektor  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  definiert, der als Ausdruck für die virtuelle Verschiebung verstanden werden kann.  $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in [H^1(\Omega)]^{n_{\text{dim}}} : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ auf } \partial_D \Omega\}$  definiert dabei einen SOBOLEV-Raum [7], der auf Funktionen mit quadratintegrierbaren, verallgemeinerten Ableitungen basiert. Multipliziert man — gemäß der Methode des gewichteten Residuums — die Differentialgleichung (2.46) mit dem Testfunktionenvektor  $\mathbf{v}$  und integriert den daraus entstandenen Ausdruck über das Berechnungsgebiet  $\Omega$ , ergibt sich

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}) \mathbf{v} \, d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (2.47)$$

Gleichgewicht ist nur noch im integralen Sinn erfüllt. Partielle Integration und die Anwendung des Divergenztheorems auf Gleichung (2.47) liefert unter Berücksichtigung der konstitutiven Beziehung und der Randbedingungen die sogenannte *schwache Form* des Gleichgewichts

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathcal{F}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (2.48)$$

Darin ist das Energieskalarprodukt  $\mathcal{B}(\mathbf{u})$  eine Bilinearform, die durch

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \, d\Omega \quad (2.49)$$

gegeben ist. Die lineare Form des Lastfunktionals  $\mathcal{F}(\mathbf{v})$  ist wie folgt definiert:

$$\mathcal{F}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{v} \mathbf{f}_{\Omega} \, d\Omega + \int_{\partial_N \Omega} \mathbf{v} \bar{\mathbf{t}} \, d\partial_N \Omega \quad (2.50)$$

Das Adjektiv *schwach* charakterisiert den Ausdruck (2.48), weil die Anforderung an die Regularität der Verschiebungsfunktion gesunken ist.

Aus Sicht der Mechanik bezeichnet man Gleichung (2.48) auch als *Prinzip der virtuellen Arbeit*, wobei (2.49) die Arbeit  $\mathcal{W}_{\text{int}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  der inneren, (2.50) die der äußeren Kräfte  $\mathcal{W}_{\text{ext}}(\mathbf{v})$  definiert, also  $\mathcal{W}_{\text{int}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  und  $\mathcal{W}_{\text{ext}}(\mathbf{v}) := \mathcal{F}(\mathbf{v})$  gilt. Die daraus resultierende Dehnungsenergie ist durch

$$\mathcal{U}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2} \mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad (2.51)$$

die entsprechende Energienorm durch

$$\|\mathbf{u}\|_{E(\Omega)} := \sqrt{\mathcal{U}(\mathbf{u})} = \sqrt{\frac{1}{2}\mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \quad (2.52)$$

gegeben. Für Gleichung (2.48) ist die exakte Lösung  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{ex}}$  mit endlicher Dehnungsenergie gesucht, die die geometrischen Randbedingungen erfüllt. Bezüglich aller Funktionen  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ , die den geometrischen Randbedingungen genügen, minimiert die *schwache Lösung*  $\mathbf{u}_{\text{ex}}$  das Gesamtpotential  $\Pi(\mathbf{u})$ .

$$\Pi(\mathbf{u}) = \mathcal{U}(\mathbf{u}) - \mathcal{F}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \mathcal{F}(\mathbf{u}) \quad (2.53)$$

Die oben beschriebene Herleitung des *Prinzips der virtuellen Arbeit*, ausgehend von der partiellen Differentialgleichung, ist für verschiedenste Problemklassen gültig, auch für elastoplastische Fragestellungen. Ein alternativer Weg liegt im Variationsprinzip. Seine Anwendung ist aber im Allgemeinen nicht für die hier betrachtete Klasse elastoplastischer Probleme gültig, weil die Existenz des Potentials nicht vorausgesetzt werden darf. Da das Variationsprinzip aber — sofern anwendbar — häufig verwendet wird, um das *Prinzip der virtuellen Arbeit* abzuleiten, wird es im Folgenden dargestellt.

Nimmt man also an, dass das Potential  $\Pi(\mathbf{u})$  existiert, gelten die folgenden Betrachtungen. Um dem *Prinzip vom Minimum des elastischen Gesamtpotentials* gerecht zu werden, entwickelt man das Gesamtpotential  $\Pi(\mathbf{u})$  zunächst in eine TAYLOR-Reihe, deren Terme höherer Ordnung vernachlässigt werden.

$$\Pi(\mathbf{u}) = \Pi(\mathbf{u}_{\text{ex}} + \lambda \delta\mathbf{u}) \approx \Pi(\mathbf{u}_{\text{ex}}) + D\Pi(\mathbf{u}_{\text{ex}} + \lambda \delta\mathbf{u})[\delta\mathbf{u}] \quad (2.54)$$

Die gesuchte Lösung  $\mathbf{u}$  sei die Summe der unbekanntenen exakten Lösung  $\mathbf{u}_{\text{ex}}$  und einem Zuwachs  $(\lambda \delta\mathbf{u})$  in Richtung von  $\delta\mathbf{u}$ . Von allen möglichen Lösungen  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{ex}} + \lambda \delta\mathbf{u}$ , die den geometrischen Randbedingungen genügen, ist diejenige gesucht, die das Gesamtpotential  $\Pi(\mathbf{u}_{\text{ex}} + \lambda \delta\mathbf{u})$  minimiert. Die Forderung nach Stationarität der Gleichung (2.54) drückt sich durch

$$D\Pi(\mathbf{u}_{\text{ex}} + \lambda \delta\mathbf{u})[\delta\mathbf{u}] \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.55)$$

aus. Für vektor- oder tensorwertige Funktionen wird die linke Seite dieses Ausdrucks durch die GATEAUX- oder auch Richtungsableitung repräsentiert, die hier den Zuwachs des Funktionals  $\Pi$  an der Stelle  $\mathbf{u}_{\text{ex}}$  in Richtung von  $\delta\mathbf{u}$  beschreibt. Der lineare Operator  $D\Pi$  wirkt an der Stelle  $\mathbf{u}_{\text{ex}}$  in Richtung von  $\delta\mathbf{u}$ , so dass sich das lineare GATEAUX-Differential bezüglich der Verschiebung  $\delta\mathbf{u}$  zu

$$D\Pi(\mathbf{u}_{\text{ex}} + \lambda \delta\mathbf{u})[\delta\mathbf{u}] = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \Pi(\mathbf{u}_{\text{ex}} + \lambda \delta\mathbf{u}) \right] \Big|_{\lambda=0} = 0 \quad (2.56)$$

ergibt.

Das *Prinzip vom Minimum des elastischen Gesamtpotentials* basiert hier auf einer reinen Verschiebungsformulierung, die im Rahmen der Finite-Element-Methode am häufigsten Anwendung findet. Es gibt allerdings Fälle, in denen sie nicht sehr effizient ist, z.B. bei der Berechnung Locking-anfälliger Strukturen oder bei der Untersuchung inkompressibler oder nahezu inkompressibler Materialien [65]. Für solche Problemklassen werden effektivere Zugänge erreicht, indem man neben den Verschiebungen auch Verzerrungen und Spannungen als primäre Variablen in die Formulierung aufnimmt. Man spricht daher von gemischten Variationsprinzipien (vgl. [12, 18, 109]).

### 2.4.3 Linearisierung der schwachen Form

Die *schwache Form* des Gleichgewichts (2.48) verhält sich im Allgemeinen sowohl bzgl. der Geometrie als auch bzgl. der Physik nichtlinear. Da diese Arbeit auf geometrischer Linearität basiert, wurde die Geometrie bereits in Kapitel 2.1 linearisiert, so dass die *schwache Form* hier nur noch aufgrund der Materialgleichungen nichtlinear von den Verschiebungen abhängt. Zur Lösung dieses Problems kommt im Rahmen der später beschriebenen Finite-Element-Methode das NEWTON-RAPHSON-Verfahren, das in der Nähe der Lösung quadratisch konvergiert, zur Anwendung. Um die *schwache Form* für diese Nullstellensuche aufzubereiten, bedarf es einer Linearisierung der entsprechenden Gleichung (2.48), die sich als Ausdruck der inneren und äußeren Arbeit wie folgt darstellt:

$$\mathcal{W}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \underbrace{\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) d\Omega}_{\mathcal{W}_{\text{int}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})} - \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{v} \mathbf{f}_{\Omega} d\Omega + \int_{\partial_N \Omega} \mathbf{v} \bar{\mathbf{t}} d\partial_N \Omega}_{\mathcal{W}_{\text{ext}}(\mathbf{v})} \quad (2.57)$$

Zur Linearisierung entwickelt man Gleichung (2.57) über die GATEAUX-Ableitung in eine TAYLOR-Reihe. An einer aktuellen, bekannten Gleichgewichtsstelle ( $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \Delta \mathbf{u}$ ) folgt:

$$\mathcal{W}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathcal{W}(\bar{\mathbf{u}} + \Delta \mathbf{u}, \mathbf{v}) \approx \mathcal{W}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + D\mathcal{W}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \Delta \mathbf{u} = 0 \quad (2.58)$$

Darin spaltet sich  $\mathcal{W}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v})$  in einen verschiebungsabhängigen Anteil  $\mathcal{W}_{\text{int}}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v})$  und einen verschiebungsunabhängigen Anteil  $\mathcal{W}_{\text{ext}}(\mathbf{v})$ .

$$\mathcal{W}_{\text{int}}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{u}}) d\Omega \quad (2.59)$$

$$\mathcal{W}_{\text{ext}}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{v} \mathbf{f}_{\Omega} d\Omega + \int_{\partial_N \Omega} \mathbf{v} \bar{\mathbf{t}} d\partial_N \Omega \quad (2.60)$$

Für den linearisierten Term in Gleichung (2.58) erhält man

$$D\mathcal{W}_{\text{int}}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \Delta \mathbf{u} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) D\boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{u}}) \Delta \mathbf{u} d\Omega \quad (2.61)$$

Die verschiebungsunabhängige Größe  $\mathcal{W}_{\text{ext}}(\mathbf{v})$  geht nicht mit ein.





## Kapitel 3

# Grundlagen geometrischer Modellierung

Die exponierte Rolle der Geometrie im Ingenieurwesen erhob geometrische Modellierung zum eigenständigen Gebiet in der Forschungslandschaft. Mit der Intention, verschiedene Vorgänge — vom Entwurf über die Analyse bis hin zur industriellen Herstellung — zu verbinden und im Rechner umzusetzen, studiert geometrische Modellierung computergestützte Geometriedarstellung. Geometrie, die mit der Physik von Modellen, mit Prozessen oder mit numerischen Informationen korrespondiert, muss erzeugt, dargestellt, kommuniziert und manipuliert werden. Dazu bedarf es geeigneter Datenstrukturen und Algorithmen. Sie zu entwickeln und für eine große Zahl der oben genannten Aspekte anwendbar zu machen, ist Anliegen der geometrischen Modellierung. Gemäß entsprechender Fragestellungen gibt es verschiedenste Geometriemodellierer. SHAH und MÄNTYLÄ [89] klassifizieren Modelle nach den Anforderungen, denen sie genügen sollen, wie folgt:

- **Grafische Modelle** dienen vorwiegend der Erzeugung von Ingenieurzeichnungen und -illustrationen.
- **Oberflächenmodelle** sollen in erster Linie den Design- und Herstellungsprozess komplex geformter Oberflächen unterstützen.
- **Volumenmodelle** haben die Aufgabe, dreidimensionale Geometrie eines physikalischen Objektes vollständig zu erfassen, um auf dieser Ebene Funktionalität bereitzustellen, die von den anderen Modellen nicht angeboten werden kann.

Die Klasse der Volumenmodelle ist vorrangig bestrebt, geometrische Fragestellungen zu dreidimensionalen Objekten algorithmisch beantwortbar zu machen. In der Vergangenheit entwickelte sich eine Fülle von Strategien zur Modellierung von Körpern. Um sie einzuordnen, abstrahiert MÄNTYLÄ [57] einen realen Körper mathematisch als Punktmenge des dreidimensionalen EUKLIDischen Raums  $\mathbb{R}^3$ . Jedes der später betrachteten Modelle weist solch einer Punktmenge eine endliche Summe von Darstellungen zu, die ihrerseits die Anwendung von Algorithmen erlauben. Aus dieser Perspektive gliedert sich die Modellbildung in drei Klassen:

- **Modellbildung durch Zerlegung**

Das Modell repräsentiert eine Punktmenge als „verklebte“ Sammlung sich nicht überlappender Objekte einfachen Typs, sogenannter Basisblöcke. Die verschiedenen Strategien der Zerlegung zeichnen sich einerseits durch die Art der Basisobjekte, andererseits durch das Speicherschema aus, das sie verwaltet. Man unterscheidet aufzählende, zellzerlegende und raumteilende Schemata.

*Aufzählungsschemata* stellen einen Körper durch dreidimensionale, geradlinige, regelmäßige Blöcke — sogenannte Voxel — dar, ordnen diesen Material oder „Luft“ zu und „verkleben“ sie.

Als Verallgemeinerung dieses Ansatzes kombinieren *Zellzerlegungsschemata* einen Körper aus der Summe unregelmäßiger Zellen.

*Raumteilende Ansätze* basieren im Allgemeinen auf einer würfelfartigen Strukturierung des den Körper umschließenden Raumes. Sie stellen das Objekt durch rekursive Unterteilung der jeweils relevanten Unterräume dar, die mit Material assoziiert sind.

- **Modellbildung durch Konstruktion**

Diese Modelle setzen eine Punktmenge aus einfacheren Punktmenge zusammen. Jedes dieser Primitive wird als Instanz eines einfachen Volumenobjektes dargestellt. Das gesamte Modell entsteht dann durch Anwendung boolescher Operatoren (Vereinigung, Differenz, Schnitt) auf die Primitive.

- **Modellbildung durch Randdarstellung**

Dieses Modell stellt die besagte Punktmenge durch ihre Berandung dar. Der Rand einer dreidimensionalen Punktwolke entspricht dabei einer quasi zweidimensionalen Hülle, die sich aus der Summe mehrerer Oberflächen zusammensetzt. Jede dieser Oberflächen ist wiederum durch ihren Rand, eine Kette eindimensionaler Kurven repräsentiert, die ihrerseits durch Anfangs- und Endpunkte berandet werden.

Weil diese Arbeit auf dem Geometriemodell durch Randdarstellung fußt, widmet sich der folgende Abschnitt der entsprechenden Topologie.

### 3.1 Topologie bei der Modellbildung durch Randdarstellung

Die topologische Struktur von Modellen durch ihre Randbeschreibung, allgemein unter dem Namen *Boundary-Representation* Modell bekannt, wird durch folgenden Satz charakterisiert:

Die Modellbildung auf Basis der Randbeschreibung entspricht einer Modellhierarchie, bei der Objekte höherer Dimension durch die Menge niedrigerdimensionaler Objekte und deren Beziehungen zueinander dargestellt werden.

Demgemäß entsteht ein Körper durch Zerlegung seiner Hülle in geeignete Flächen, deren Form sich mathematisch kompakt beschreiben lässt, wenn die Flächen Teil einfacher Ebenen, Zylinderoberflächen oder parametrisierter Oberflächen sind. Analog zu den Flächen werden deren berandende Kurven durch die Zerlegung in Knoten beschrieben. Die Wahl der Kantenzerlegung korrespondiert üblicherweise mit einer sinnvollen Darstellung durch z.B. parametrisierte

Kurven. Das Kurvensegment, das die jeweilige Kante formt, ist durch seinen Anfangs- und Endknoten mit den entsprechenden Punktkoordinaten berandet. Abbildung 3.1 dokumentiert das Konzept.

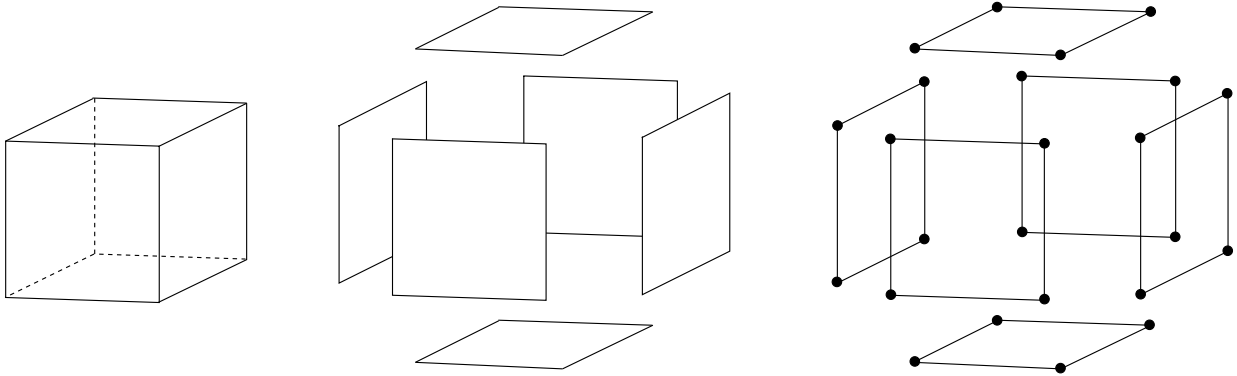


Abbildung 3.1: Struktur des *Boundary-Representation* Modells am Beispiel eines Quaders

### 3.1.1 Datenstrukturen

Die Datenstruktur zu einem *Boundary-Representation* Modell muss die Flächen, die einen Körper umhüllen, erfassen. Allgemein wird das durch ein hierarchisches Speicherschema realisiert, das die Flächen über ihre Kanten und diese durch ihre Knoten beschreibt. Zusätzlich zu diesen Basisobjekten mit ihren gegenseitigen Abhängigkeiten müssen entsprechende geometrische Informationen in Form von Oberflächen- und Kurvenbeschreibungen sowie Punktkoordinaten gespeichert werden. Diese formgebenden Attribute fallen unter den Begriff der Geometrie und sind Gegenstand von Kapitel 3.2. Zur Verarbeitung topologischer und geometrischer Informationen wurden zahlreiche Datenstrukturen entwickelt. Bevor einige grundlegende Konzepte charakterisiert werden, wird deren gemeinsame Basis, der *vef*-Graph, erläutert.

Der *vef*-Graph  $G_{vef}$  definiert die Topologie geometrischer Modelle über Adjazenzrelationen  $R$ , die Beziehungen zwischen den Objektmengen Knoten  $V$  (*vertices*), Kanten  $E$  (*edges*) und Flächenstücken  $F$  (*faces*) herstellen. Unter Knoten im Graphen

$$G_{vef} = (V, E, F; G) \quad (3.1)$$

versteht man Elemente der Mengen

$$\begin{aligned} V &:= \{v_1, \dots, v_{n_V}\} \\ E &:= \{e_1, \dots, e_{n_E}\} \\ F &:= \{f_1, \dots, f_{n_F}\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Zwischen den Mengen  $\{V, E, F\}$  können viele verschiedene Relationen gebildet werden. BUNGARTZ et al. beschreiben sie in [20] ausführlich. Auf der Seite der Topologie stellen solche Beziehungen die Basis geometrischer Algorithmen dar.

Wie eingangs erwähnt, will Volumenmodellierung geometrische Algorithmen auf Körper anwenden. Sie sollen sowohl schnell als auch speichereffizient sein und auf möglichst redundanzfreien Datenstrukturen aufbauen. Ob nun eine der oben angesprochenen Relationen zur Beschleunigung eines Algorithmus in der Datenstruktur verankert wird oder aufgrund hoher Speicherkomplexität besser unberücksichtigt bleibt, ist je nach Aufgabenstellung abzuwägen, eine „Gratwanderung“. Grundlegende Varianten sind unten genannt.

- **Polygonbasierte Randbeschreibung**

Ist ein Körper durch ebene Oberflächen definiert, handelt es sich um einen Polyeder. Weil all seine Kanten Geraden sind, ist er in kompakter Form darstellbar. Jede Fläche wird als Folge von Koordinatentripeln beschrieben. Diese Daten genügen als Basis zur Berechnung der entsprechenden Oberflächenbeschreibung, so dass die Speicherung zusätzlicher Oberflächengeometrie überflüssig wird. Nachbarschaftsbeziehungen der Flächen untereinander sind nicht bekannt. Die Knotenkoordinaten werden sooft wiederholt, wie sie in Flächenbeschreibungen auftauchen.

- **Knotenbasierte Randbeschreibung**

Die redundante Datenhaltung von Knotenkoordinaten bei der polygonbasierten Randbeschreibung wird vermieden, wenn die Koordinaten zu unabhängigen Einträgen in der Datenstruktur werden und damit Grundlage verschiedener knotenbasierter Modelle sein können. Ist die Knoteninformation explizit bekannt, ist eine effiziente Generierung topologischer Abhängigkeiten möglich. Die eine Fläche umgebenden Knoten sind so angeordnet, dass die im Gegenuhrzeigersinn orientierten Knoten das Äußere des Körpers kennzeichnen.

- **Kantenbasierte Randbeschreibung**

Sind die Flächen eines Volumenmodells gekrümmt, ist es sinnvoll, Kanten explizit zu speichern, um deren entsprechende Kurvengeometrie zu verwalten. Kantenbasierte Modelle stellen Objekte durch einen geschlossenen Kantenzug — *loop* — dar. Knoten einer Fläche werden nur indirekt durch die Anfangs- bzw. Endpunkte der Kanten repräsentiert. Die Datenstruktur weist jeder Kante eine Orientierung zu. Die Orientierung der Flächen entsteht über eine im mathematisch positiven Sinn geordnete Liste von Kanten. Jede Kante ist Teil zweier Flächen, einmal positiv — einmal negativ orientiert.

### 3.1.2 Gültigkeit des Modells

Ein *Boundary-Representation* Modell ist gültig, wenn es ein physikalisch sinnvolles Volumen definiert. Darunter versteht man für Objekte, die durch geschlossene, orientierbare Oberflächen berandet sind, das Einhalten folgender Bedingungen:

1. Die Menge der Flächen des *Boundary-Representation* Modells erzeugt eine geschlossene „Haut“ für das jeweils zu beschreibende Volumen.  
Modelle, die sicherstellen, dass eine Kante zu exakt zwei Flächen gehört, werden dieser Forderung gerecht. Keine Kante kann Teil eines fehlenden „Stückes“ Oberfläche sein.

2. Das Modell ist frei von Selbstdurchdringungen. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn Flächen des Modells einander ausschließlich an gemeinsamen Knoten und Kanten schneiden und Randkanten einander ausschließlich in ihren gemeinsamen Knoten schneiden.
3. Eine — wie unter Bedingung eins — geforderte, geschlossene „Haut“ stellt nicht sicher, dass die Oberfläche ein physikalisch sinnvolles Objekt definiert. Die Oberfläche der KLEINSchen Flasche beschreibt beispielsweise eine nicht erzeugbare Struktur; Ursache: Die Oberfläche ist nicht orientierbar.  
Die Richtung einer Fläche entspricht der des mathematisch positiv orientierten Kantenzuges, der sie umschließt. Unter dieser Voraussetzung ist die Orientierbarkeit folgendermaßen definiert.  
Eine geschlossene Oberfläche ist orientierbar, wenn die Richtungen der geschlossenen, orientierten Kantenzüge, aus denen sie besteht, so gewählt werden können, dass jede Kante paarweise auftritt — einmal positiv, einmal negativ bzgl. der angrenzenden Fläche ausgerichtet.

## 3.2 Geometrie

Der vorangegangene Abschnitt hat die Topologie geometrischer Objekte charakterisiert. Dass zwei topologisch identische Körper verschieden sein können, zeigt der Vergleich eines Würfels mit einem Quader. Erst die geometrischen Attribute aller seiner topologischen Elemente definieren ein Objekt eindeutig.

Knoten, Kanten und Flächen sind die Vertreter der Topologie mit einer Entsprechung in der Geometriewelt. Dort heißen sie Punkte, Kurven und Oberflächen. Ihre wesentlichen Eigenschaften aus der Perspektive der Differentialgeometrie [28] sind Gegenstand der folgenden Abschnitte.

### 3.2.1 Punkte

Die Lage eines Punktes ist im dreidimensionalen EUKLIDischen Raum  $\mathbb{R}^3$  durch seine Koordinaten

$$\mathbf{x} = [x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3 \quad (3.3)$$

eindeutig definiert.

### 3.2.2 Kurven

Mit Methoden der Differentialrechnung untersucht die Differentialgeometrie globale und lokale Eigenschaften ebener und räumlicher Kurven. Sie werden dabei als Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  bzw.  $\mathbb{R}^3$  verstanden. Zu ihrer Definition verwendet man neben expliziten und impliziten Gleichungen die Parameterform, die auch im Rahmen dieser Arbeit im Vordergrund steht. Die Parametrisierung einer Kurve nimmt Einfluss auf die Lösung von Finite-Element-Berechnungen.

Wichtiges Merkmal von Kurven — insbesondere im Zusammenhang mit der Methode der finiten Elemente — ist die Differenzierbarkeitseigenschaft.

- **Parameterdarstellung einer Kurve**

Eine parametrisierte Kurve ist eine Abbildung  $\mathbf{x}_C : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eines Intervalls  $I = [t_0, t_1]$  der reellen Geraden  $\mathbb{R}$  in den  $\mathbb{R}^3$ . Für jedes  $t \in I$  gilt:

$$\mathbf{x}_C = [x_C(t), y_C(t), z_C(t)]^T \in \mathbb{R}^3 \quad (3.4)$$

$t$  heißt Parameter der Kurve.

- **Differenzierbarkeit einer Kurve**

Ist  $\mathbf{x}_C : I \rightarrow \mathbb{R}^3$   $m$ -mal stetig differenzierbar, so existieren die  $n = 1, \dots, m$  Ableitungen

$$\frac{\partial^n \mathbf{x}_C(t)}{\partial t^n} = \left[ \frac{\partial^n x(t)}{\partial t^n}, \frac{\partial^n y(t)}{\partial t^n}, \frac{\partial^n z(t)}{\partial t^n} \right]^T \in \mathbb{R}^3, \quad t \in I = [t_0, t_1]. \quad (3.5)$$

Die erste Ableitung wird auch als Tangentenvektor oder Geschwindigkeitsvektor der Kurve  $\mathbf{x}_C$  bei  $t$  bezeichnet.

- **Reguläre Kurven**

Eine parametrisierte, differenzierbare Kurve  $\mathbf{x}_C : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt regulär, falls für alle  $t \in I$  gilt:

$$\frac{\partial \mathbf{x}_C(t)}{\partial t} \neq 0 \quad (3.6)$$

Punkte  $t$ , die Ungleichung (3.6) verletzen, heißen singuläre Punkte. Im Folgenden werden nur reguläre, parametrisierte, differenzierbare Kurven betrachtet.

- **Orientierung einer Kurve**

Die Richtung, in der sich ein Punkt  $\mathbf{x} = [x_C(t), y_C(t), z_C(t)]^T$  für wachsende Werte des Parameters  $t$  bewegt, definiert die positive Orientierung einer Kurve der Form (3.4).

- **Natürliche bzw. uniforme Parametrisierung**

Eine parametrisierte Kurve, deren Parameter längentreu ist, d.h. mit der Länge der Kurve korrespondiert, heißt natürlich oder uniform parametrisiert. Die natürliche Parametrisierung ist auch als „Parametrisierung nach der Bogenlänge“ bekannt. Die Kurve wird mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen.

- **Bogenlänge einer parametrisierten Kurve**

Ist  $t \in I$  der Kurvenparameter einer Kurve  $\mathbf{x}_C : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , so ist die Bogenlänge dieser Kurve — ausgehend von  $t_0$  — gegeben durch:

$$L = \int_{t_0}^t \left\| \frac{\partial \mathbf{x}_C(t)}{\partial t} \right\| dt \quad (3.7)$$

Darin bezeichnet

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{x}_C(t)}{\partial t} \right\| = \sqrt{\frac{\partial x(t)^2}{\partial t} + \frac{\partial y(t)^2}{\partial t} + \frac{\partial z(t)^2}{\partial t}} \quad (3.8)$$

die Länge des Tangenten- bzw. Geschwindigkeitsvektors.

Im Folgenden werden einige Kurventypen besprochen, die im Rahmen dieser Arbeit von Bedeutung sind.

### 3.2.2.1 Kreiskurve

Der in Abbildung 3.2 dargestellte Ausschnitt eines Kreisbogens mit Mittelpunkt  $M = [M_x, M_y]^T$  und Radius  $r$  ist in seiner parametrisierten Darstellung  $\mathbf{x}_C = [x_C(t), y_C(t)]^T \in \mathbb{R}^2$  durch die

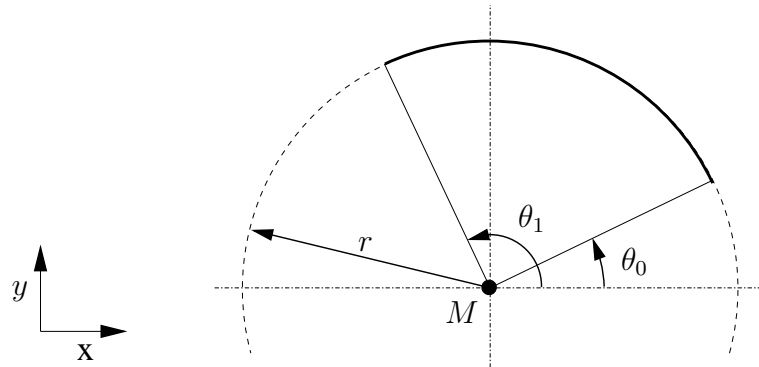


Abbildung 3.2: Kreiskurvendarstellung

Abbildung des Parameters  $t \in I = [-1, 1]$  auf den zweidimensionalen EUKLIDischen Raum  $\mathbb{R}^2$  wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} x_C &= M_x + r \cos \left[ \frac{1-t}{2} \theta_0 + \frac{1-t}{2} \theta_1 \right] \\ y_C &= M_y + r \sin \left[ \frac{1-t}{2} \theta_0 + \frac{1-t}{2} \theta_1 \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

### 3.2.2.2 Freiformkurve

Mit der Entwicklung von Rechnern und immer komplexeren Systemen zur Geometriemodellierung wuchs die Bedeutung von Freiformkurven und -flächen zur Darstellung beliebiger Geometrie. Fragestellungen aus der Automobilindustrie haben die Forschung auf diesem Gebiet ganz entscheidend motiviert. Zahlreiche Veröffentlichungen zur Theorie der freien Formen dokumentieren den Einfluss dieses Werkzeugs [37, 64, 3].

Freiformgeometrie vereint verschiedenste Typen zur Repräsentation von Kurven und Flächen, z.B. BÉZIER Kurven, BÉZIER Flächen [3], COONS Patches [23], Blending-Funktionen [41, 42] (vgl. auch Abschnitt 4.4), B-Spline Kurven [37, 64] und nicht-uniforme, rationale B-Spline Kurven — kurz NURBS Kurven [64]. Aus dieser Liste sind hier die B-Spline Kurven und NURBS Kurven relevant und stehen daher im Zentrum folgender Betrachtungen.

Beide Kurventypen gehören zur Familie der Spline Kurven und sind als Konstrukt der unten beschriebenen, lokal definierten B-Spline Basisfunktionen stückweise zusammengesetzt. Diese Eigenschaft macht die B-Spline Kurven flexibel und effizient, wenn eine Form — beispielsweise im Entwurfsprozess — lokal zu modifizieren ist. Ebenso geeignet sind die B-Spline- und NURBS Darstellungen zur sowohl interpolativen als auch approximativen Rekonstruktion von

Kurven und Flächen. Die folgenden Zeilen erläutern den Aufbau dieser Geometrieklasse.

### B-Spline Basisfunktionen

Die B-Spline Basisfunktionen vom Grad  $p$  sind über einer monoton wachsenden Folge von  $(m + 1)$  Knoten  $t_i \leq t_{i+1} \in T = \{t_0, \dots, t_m\} \in \mathbb{R}$  durch

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.10)$$

$$N_{i,p}(t) = \frac{(t - t_i)}{(t_{i+p} - t_i)} N_{i,p-1}(t) + \frac{(t_{i+p+1} - t)}{(t_{i+p+1} - t_{i+1})} N_{i+1,p-1}(t)$$

gegeben. Quotienten  $(0/0)$ , die in Gleichung (3.10) entstehen, werden als 0 definiert.  $N_{i,0}(t)$  ist eine Funktion mit Sprung, die ausschließlich im offenen Intervall  $t \in [t_i, t_{i+1})$  von Null verschiedene Werte annimmt. Funktionen für  $p > 0$  entstehen als Linearkombination zweier Basisfunktionen vom Grad  $(p - 1)$ . Ein Satz an Basisfunktionen ist abhängig von dem speziellen Knotenvektor  $T$  und dem Polynomgrad  $p$ . Die Basisfunktionen sind stückweise Polynome, die in ganz  $\mathbb{R}$  definiert sind, obwohl im Allgemeinen nur das Intervall  $[t_0, t_m]$  betrachtet wird. Sie nehmen auf  $(p + 1)$  benachbarten Teilintervallen des Knotenvektors von Null verschiedene Werte an. Die B-Spline Basisfunktionen erfüllen die Partition der Eins. Für ein beliebiges Intervall  $[t_i, t_{i+1})$  des Knotenvektors  $T = \{t_0, \dots, t_m\}$  gilt für alle  $t \in [t_i, t_{i+1})$ :

$$\sum_{j=i-p}^i N_{j,p}(t) = 1 \quad (3.11)$$

### B-Spline Kurve

Eine B-Spline Kurve vom Polynomgrad  $p$  ist durch

$$\mathbf{x}_C(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(t) \mathbf{P}_i \quad t_0 \leq t \leq t_m \quad (3.12)$$

definiert. Darin bezeichnen  $N_{i,p}(t)$  die B-Spline Basisfunktionen gemäß Gleichung (3.10) und  $\mathbf{P}_i$  die  $(n+1)$  Kontrollpunkte, die ein sogenanntes Kontrollpolygon aufspannen. Der Parameterbereich  $[t_0, t_m]$  korrespondiert mit einem Knotenvektor  $T = \{t_0, \dots, t_m\}$ , der aus  $(m + 1)$  Knoten  $t_i$  besteht:

$$T = \left\{ \underbrace{t_0, \dots, t_0}_{p+1}, t_{p+1}, \dots, t_{m-p-1}, \underbrace{t_m, \dots, t_m}_{p+1} \right\} \quad (3.13)$$

Eine B-Spline Kurve ist gemäß der Definition der Basisfunktionen eine stückweise polynomielle Kurve. Ihr Polynomgrad  $p$ , die Anzahl der  $(n + 1)$  Kontrollpunkte und der  $(m + 1)$



Knoten hängen über die Beziehung  $m = n + p + 1$  zusammen. Als Konstrukt der B-Spline Basisfunktionen erbt der B-Spline die Eigenschaft der Partition der Eins.

Ist eine Kurve vom Grad  $p$  auf dem Intervall  $[t_0, t_m]$  mit einem Knotenvektor der Form (3.13) definiert, interpoliert sie die Endpunkte  $\mathbf{P}_0$  und  $\mathbf{P}_n$  ihres Kontrollpolygons:

$$\mathbf{x}_C(t_0) = \mathbf{P}_0 \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_C(t_m) = \mathbf{P}_n \quad (3.14)$$

Um dies sicherzustellen, müssen — wie in Ausdruck (3.13) dargestellt — die entsprechenden Knoten des Knotenvektors  $(p + 1)$ -fach genannt werden. Solche Vielfachheit eines Knotens ist am Rand meist erwünscht, um Start- und Endpunkt der Kurve zu fixieren. Fallen im Knotenvektor  $k$  Parameterwerte zusammen, wird die Differentiationsordnung an diesem Knoten auf  $C^{p-k}$  erniedrigt. Solche Effekte sind im Kurveninnern unerwünscht, weil sie lokal die Regularität der Kurve einschränken. Im Rahmen geometrischer Modellierung können diese Eigenschaften aber nur ausgeschlossen werden, wenn man auf die Konstruktion der Kurve im Detail Einfluss nehmen kann. Bei üblichen Geometriemodellierern ist das im Allgemeinen problematisch.

Ein besonderer Vorteil der B-Spline Kurven — verwurzelt in der Eigenschaft der Partition der Eins — liegt in der Invarianz bzgl. affiner Transformationen. Zu ihnen gehören Translationen, Rotationen, Skalierungen und Scherungen.

### Nicht-uniforme, rationale B-Spline Kurve — NURBS Kurve

Eine NURBS Kurve vom Polynomgrad  $p$  kann als Erweiterung der B-Spline Kurve vom Polynomgrad  $p$  verstanden werden. Sie ist durch

$$\mathbf{x}_C(t) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(t) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(t) w_i} \quad t_0 \leq t \leq t_m \quad (3.15)$$

definiert.  $\mathbf{P}_i$  bezeichnen die Kontrollpunkte und  $N_{i,p}(t)$  die B-Spline Basisfunktionen (3.10), die auf einem nicht-uniformen Knotenvektor  $T = \{t_0, \dots, t_m\}$  aus  $(m + 1)$  Knoten  $t_i$  definiert sind. Mit  $t_0 = a$  und  $t_m = b$  ist er wie folgt gegeben:

$$T = \left\{ \underbrace{t_0, \dots, t_0}_{p+1}, t_{p+1}, \dots, t_{m-p-1}, \underbrace{t_m, \dots, t_m}_{p+1} \right\} \quad (3.16)$$

Darüber hinaus ordnet ein NURBS jedem Kontrollpunkt  $\mathbf{P}_i$  ein Gewicht  $w_i$  zu. Es wirkt auf die Kurve „anziehend“ oder „abstoßend“. Entarten alle Gewichte  $w_i$  zu 1, entsteht automatisch die korrespondierende B-Spline Kurve, weil die Gewichte einerseits die Kontrollpunkte im Zähler unbeeinflusst lassen, andererseits den Nenner von Gleichung (3.15) zu 1 machen. Grund hierfür ist die Eigenschaft der Partition der Eins (3.11).

Eine NURBS Kurve ist noch flexibler als ein B-Spline. Die Gewichte  $w_i$  der Kontrollpunkte ermöglichen Variationen.

Rational zu sein, ist ein weiterer Vorteil gegenüber der B-Spline Kurve, der sich insbesondere in der Invarianz bzgl. affiner Abbildungen äußert. Während ein B-Spline invariant gegenüber

affinen Transformationen ist, zeigt ein NURBS zusätzlich Invarianz bzgl. perspektivischer Projektionen. Solche Abbildungen eines Raumes in einen niedrigerdimensionalen Raum bewirken nämlich rationale Ausdrücke.

Die Struktur eines NURBS erlaubt weiterhin die Modellierung sogenannter NURBS Kreise. Der folgende Abschnitt umreißt die Idee.

### Darstellung einer Kreiskurve durch einen NURBS

Die Repräsentation einer Kreiskurve durch einen NURBS macht diesen Typ der Freiformkurve universell. Die Konstruktion allgemeiner NURBS Kreise ist komplex und Thema zahlreicher Veröffentlichungen [64, 63]. Ein übliches Verfahren nach [64] wird im Folgenden skizziert.

Ausgangspunkt eines NURBS Kreisbogens  $\leq 360^\circ$  ist dabei stets ein Bogensegment, das im ersten Quadranten darstellbar ist und entsprechend maximal einen Winkel von  $90^\circ$  umschließt. Ein solcher Abschnitt wird als Kurve vom Grad 2 durch Gleichung (3.15) definiert. Dabei wer-

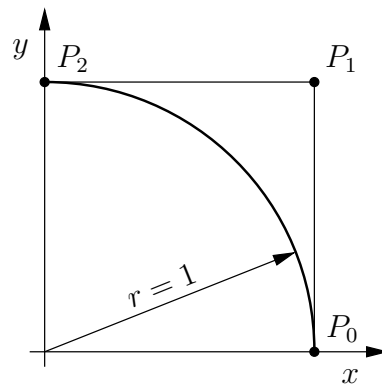


Abbildung 3.3: Darstellung eines Viertelkreises durch einen NURBS vom Polynomgrad  $p = 2$  als Ausgangspunkt zur Generierung allgemeinerer NURBS Kreise

den im Falle des Einheitskreises die Kontrollpunkte  $\mathbf{P}_i$  mit ihren Gewichten  $w_i = \{1, 1/\sqrt{2}, 1\}$  zu  $\mathbf{P}_i = \{(1,0), (1,1), (0,1)\}$  gewählt. Der Knotenvektor, auf dem die Basisfunktionen leben, ergibt sich zu  $T = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$ . Das stückweise Zusammensetzen solcher Viertelkreise ermöglicht die Definition eines Vollkreises. NURBS Kreisbögen  $< 360^\circ$  erhält man analog. Der entsprechende Algorithmus ist in [64] im Detail erklärt.

Eine Kurve vom Polynomgrad  $p = 2$  ist oft unerwünscht. Die Darstellung eines Kreisbogens  $> 180^\circ$  ohne Zuhilfenahme innerer Knoten  $t_i$  im Knotenvektor  $T$  wäre dann beispielsweise unmöglich. Der Übergang einer quadratischen Kurve auf Ausdrücke höherer Ordnung wird durch Algorithmen der Graderhöhung für NURBS erreicht [64]. Um die Parametrisierung einer Kurve zu beeinflussen, stellen PIEGL und TILLER in [64] Methoden zur Modifikation des Knotenvektors vor.

Repräsentiert ein NURBS eine Kreiskurve, darf man ihn dennoch nicht dem Kreis „gleichsetzen“. Die beiden Darstellungen wären nur dann identisch, wenn auch ihre Ableitungen kongruierten. Dies ist nicht der Fall.

### 3.2.2.3 Transformation von Parameterbereichen und Reparametrisierung

Im Rahmen der Finite-Element-Diskretisierung werden Kurven von oben beschriebenem Typ durchlaufen. Um dabei die Konsistenz zwischen einer Kante des finiten Elementes und der allgemeinen Kurve zu gewährleisten, sind zwei Aspekte zu berücksichtigen.

Zum einen ist die Orientierung der Kurve  $\mathbf{x}_C$ , d.h. die Richtung, in der der Kurvenparameter  $t$  die Kurve durchläuft, der Orientierung der Finite-Element-Kante anzugleichen.

Zum anderen muss man das Intervall  $I = [t_0, t_1]$ , auf das sich die Parametrisierung einer Kurve  $\mathbf{x}_C$  bezieht, dem Parameterintervall  $I^* = [-1, 1]$ , in dem der lokale Parameter  $\xi$  einer Finite-Element-Kante läuft, anpassen. Diese Parametertransformation unterscheidet sich bei uniform bzw. nicht-uniform parametrisierten Kurven.

Handelt es sich bei der betrachteten Kurve um eine — gemäß obiger Definition — natürlich parametrisierte Geometrie (vgl. Abbildung 3.4), ermöglicht die einfache lineare Interpolation

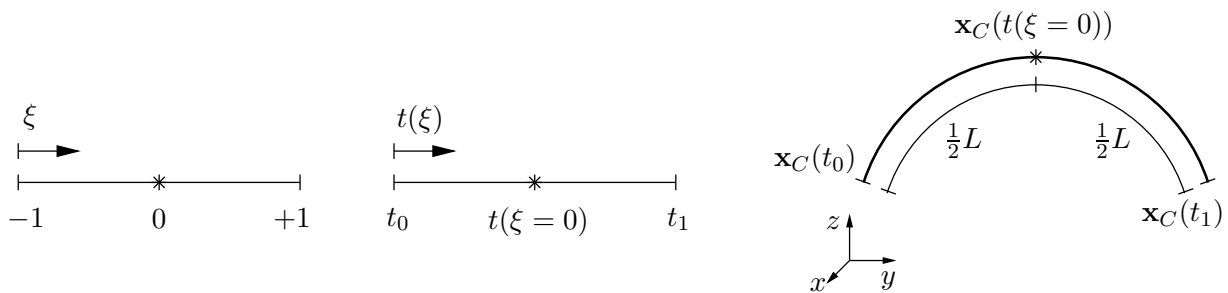


Abbildung 3.4: Parameterwechsel einer natürlich parametrisierten Kurve  $\mathbf{x}_C \in \mathbb{R}^3$

zwischen den Intervallgrenzen  $t_0$  und  $t_1$  des Parameters  $t \in I = [t_0, t_1]$  die gewünschte Reparametrisierung bzgl.  $\xi \in I^* = [-1, 1]$ :

$$t(\xi) = \frac{1}{2}(t_1 - t_0)(\xi + 1) + t_0 \quad (3.17)$$

Wird die betrachtete Kurve mit unterschiedlicher Geschwindigkeit durchfahren, ist die Abbildung  $\mathbf{x}_C : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  verzerrt (vgl. Abbildung 3.5). Die Variation der Geschwindigkeit manifestiert sich in einer starken Schwankung der JACOBI-Determinante. In Bereichen hoher Geschwindigkeit ist sie besonders klein. Solche Effekte können einer Finite-Element-Approximation unerwünschte, künstliche Spannungskonzentrationen zuführen und zu einem Genauigkeitsverlust in der Lösung führen. Dieses Phänomen wird in Abschnitt 4.4.3 diskutiert. Um dem Problem entgegenzuwirken, bedarf es einer Reparametrisierung von  $t$  nach der Bogenlänge  $L$  (3.7) mithilfe des Parameters  $\bar{t}$ :

$$\bar{t}(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi)L \quad (3.18)$$

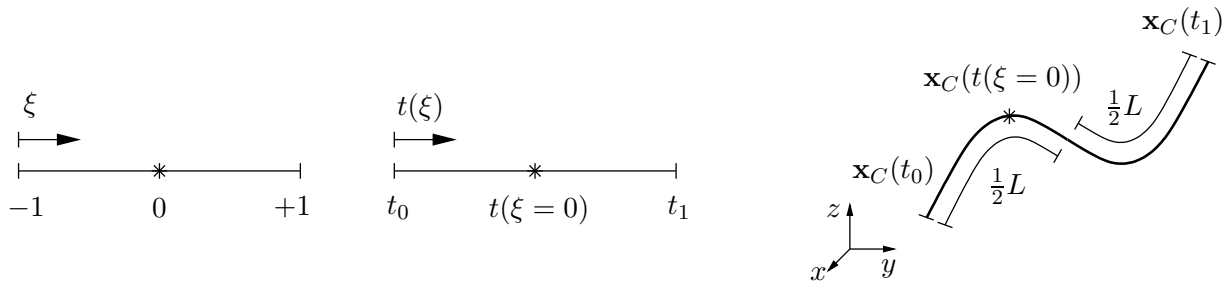


Abbildung 3.5: Parameterwechsel einer nicht-uniform parametrisierten Kurve  $\mathbf{x}_C \in \mathbb{R}^3$

### 3.2.3 Oberflächen

Als Verallgemeinerung von Raumkurven, die in Abschnitt 3.2.2 als Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$  mit eindimensionalem Charakter verstanden wurden, stellen Oberflächen Teilmengen des  $\mathbb{R}^3$  mit zweidimensionalem Charakter dar. Ganz entsprechend gelten folgende Definitionen:

- **Parameterdarstellung einer Fläche**

Eine parametrisierte Fläche ist eine Abbildung  $\mathbf{x}_F : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eines Intervalls  $I = [u_0, u_1] \times [v_0, v_1]$  der reellen Ebene  $\mathbb{R}^2$  in den  $\mathbb{R}^3$ . Für jedes  $(u, v) \in I$  gilt:

$$\mathbf{x}_F = [x_F(u, v), y_F(u, v), z_F(u, v)]^T \in \mathbb{R}^3 \quad (3.19)$$

$(u, v)$  heißen Parameter der Fläche.

- **Reguläre Flächen**

Eine parametrisierte, differenzierbare Fläche  $\mathbf{x}_F : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt regulär, falls für alle  $(u, v) \in I = [u_0, u_1] \times [v_0, v_1]$  folgende Ungleichungen erfüllt sind:

$$\frac{\partial \mathbf{x}_F(u, v)}{\partial u} \neq 0 \quad \frac{\partial \mathbf{x}_F(u, v)}{\partial v} \neq 0 \quad (3.20)$$

Punkte  $(u, v)$ , die Ungleichung (3.20) verletzen, heißen singuläre Punkte.

Einer Kreiskurve mit eindimensionalem Charakter entspräche in diesem Kontext eine Kugel-, Kegel- oder Zylinderoberfläche. Kugel- und Kegeloberflächen besitzen jedoch singuläre Punkte und erfüllen nicht die geforderte Regularitätsbedingung.

Bei den in dieser Arbeit betrachteten Oberflächen handelt es sich um Freiformflächen, B-Spline- und NURBS Oberflächen.

### 3.2.3.1 Freiformoberfläche

Da die entsprechenden Kurventypen bereits weiter oben erläutert sind, beschränkt sich dieser Abschnitt auf die Definitionen der korrespondierenden Oberflächenbeschreibungen. Sie entstehen jeweils z.B. als Tensorprodukt der entsprechenden Kurventypen.

#### B-Spline Oberfläche

Eine B-Spline Oberfläche vom Polynomgrad  $p$  ist durch

$$\mathbf{x}_F(u, v) = \sum_{i=0}^{n_u} \sum_{j=0}^{n_v} N_{i,p_u}(u) N_{j,p_v}(v) \mathbf{P}_{i,j} \quad (3.21)$$

definiert. Darin bezeichnen  $\mathbf{P}_{i,j}$  die auf einem bidirektionalen Kontrollnetz angeordneten  $[n_u + 1] \times [n_v + 1]$  Kontrollpunkte.  $N_{i,p_u}(u)$  und  $N_{j,p_v}(v)$  entsprechen den B-Spline Basisfunktionen (3.10). Ihre Polynomgrade  $p_u$  und  $p_v$  korrespondieren mit den Parameterrichtungen  $u$  und  $v$ . Die Basisfunktionen sind bzgl. der Knotenvektoren  $U = \{u_0, \dots, u_{m_u}\}$  und  $V = \{v_0, \dots, v_{m_v}\}$  definiert:

$$U = \left\{ \underbrace{u_0, \dots, u_0}_{p_u+1}, u_{p_u+1}, \dots, u_{m_u-p_u-1}, \underbrace{u_{m_u}, \dots, u_{m_u}}_{p_u+1} \right\} \quad (3.22)$$

$$V = \left\{ \underbrace{v_0, \dots, v_0}_{p_v+1}, v_{p_v+1}, \dots, v_{m_v-p_v-1}, \underbrace{v_{m_v}, \dots, v_{m_v}}_{p_v+1} \right\} \quad (3.23)$$

Die Polynomgrade  $p_u$  und  $p_v$  hängen mit der Anzahl der Knoten  $(m_u + 1)$  bzw.  $(m_v + 1)$  und der Anzahl  $n_u$  bzw.  $n_v$  an Kontrollpunkten wie folgt zusammen:

$$m_u = n_u + p_u + 1 \quad \text{und} \quad m_v = n_v + p_v + 1 \quad (3.24)$$

#### Nicht-uniforme, rationale B-Spline Oberfläche — NURBS Oberfläche

Analog zur Definition der B-Spline Oberfläche ist eine NURBS Oberfläche vom Polynomgrad  $p$  durch

$$\mathbf{x}_F(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^{n_u} \sum_{j=0}^{n_v} N_{i,p_u}(u) N_{j,p_v}(v) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n_u} \sum_{j=0}^{n_v} N_{i,p_u}(u) N_{j,p_v}(v) w_{i,j}} \quad (3.25)$$

gegeben. Zusätzlich zu den in Gleichung (3.21) definierten Größen gehört zu jedem Kontrollpunkt  $\mathbf{P}_{i,j}$  des bidirektionalen Kontrollnetzes ein Gewicht  $w_{i,j}$ , das den lokalen Oberflächenverlauf in der Umgebung des Kontrollpunktes beeinflusst. Für Gewichte  $w_{i,j} = 1$  geht gemäß der Eigenschaft der Partition der Eins auch die NURBS Oberfläche in die entsprechende B-Spline Oberfläche über.

### 3.2.3.2 Transformation von Parameterbereichen und Reparametrisierung

Analog zu den Kurven, werden im Rahmen einer Finite-Element-Diskretisierung die Oberflächen durchlaufen. Auch hier muss Konsistenz zwischen einer Fläche des finiten Elementes und der allgemeinen Oberfläche gewährleistet sein. Folgende Aspekte finden Beachtung:

Zum einen ist die Orientierung der Oberfläche  $\mathbf{x}_F$ , d.h. die Richtungen, in der die Flächenparameter sie durchlaufen, an der Orientierung der Finite-Element-Fläche auszurichten.

Zum anderen muss man den Parameterbereich  $(u_F, v_F)$ , der eine Oberfläche  $\mathbf{x}_F$  parametrisiert, an das Intervall  $I^* = [-1, 1] \times [-1, 1]$  der Finite-Element-Fläche anpassen. Der verwendete Ansatz basiert auf folgender Überlegung:

Die allgemeine Oberflächenbeschreibung  $\mathbf{x}_F$  bezieht sich auf die Parameter  $(u_F, v_F)$ . Sie müssen — wie Abbildung 3.6 zeigt — nicht notwendigerweise kantentreu sein. So bedarf es eines von

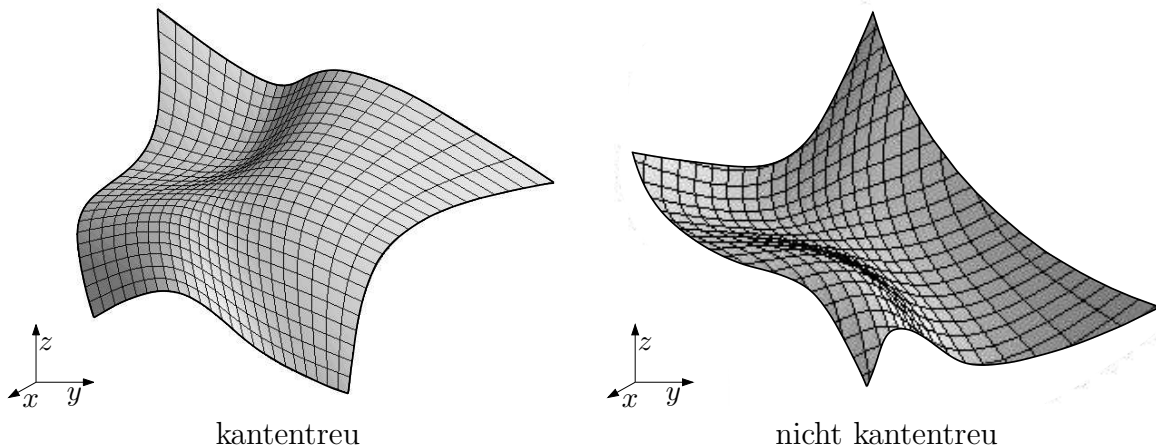


Abbildung 3.6: Parametrisierung  $(u_F, v_F)$  von Oberflächen  $\mathbf{x}_F$

$(u_F, v_F)$  unabhängigen Parametergitters  $(u, v)$ , das in Abbildung 3.7 (mittig) dargestellt ist. Erzeugt wird es mithilfe der zweidimensionalen Blending-Funktionen Methode nach GORDON und HALL [41, 42], die in Abschnitt 4.4.1 im Detail erklärt ist.

Der in Abbildung 3.7 dargestellte Parameterwechsel erfolgt dann durch folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} &= \mathbf{Q}^e(\xi, \eta) \\
 &= \frac{1}{2} \left[ (1 - \eta)\mathbf{E}_1^u(\xi) + (1 + \xi)\mathbf{E}_2^u(\eta) + (1 + \eta)\mathbf{E}_3^u(\xi) + (1 - \xi)\mathbf{E}_4^u(\eta) \right] \\
 &\quad - [ N_{1,1}^{N_1}(\xi, \eta) \mathbf{U}_1 + N_{1,1}^{N_2}(\xi, \eta) \mathbf{U}_2 + N_{1,1}^{N_3}(\xi, \eta) \mathbf{U}_3 + N_{1,1}^{N_4}(\xi, \eta) \mathbf{U}_4 ]
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

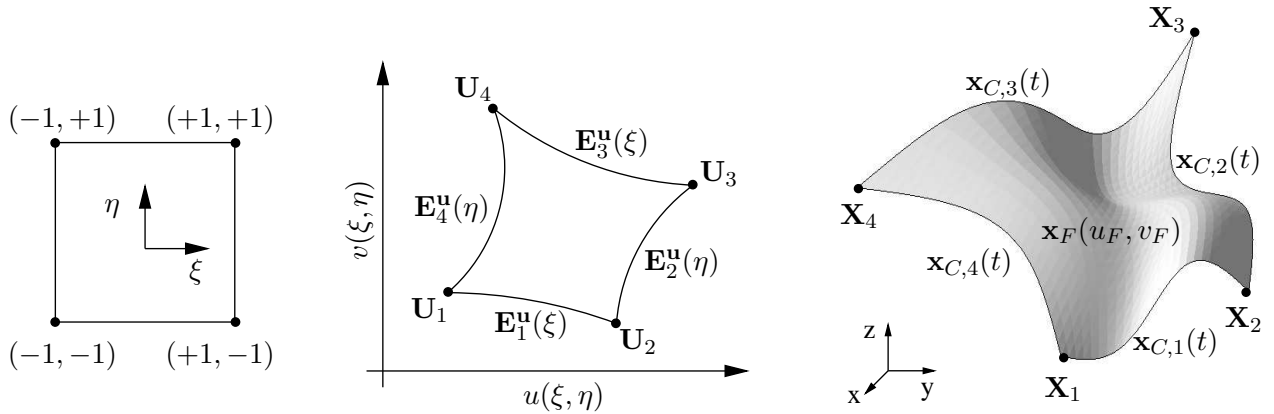


Abbildung 3.7: Parameterwechsel bei Oberflächen

Ein Knoten  $\mathbf{U}_i$  der Darstellung in der Parameterebene  $(u, v)$  ist dabei das Bild des entsprechenden globalen Flächenpunktes  $\mathbf{X}_i$  bzgl. der Umkehrabbildung der globalen Flächenbeschreibung  $\mathbf{x}_F^{-1}$ .

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{x}_F^{-1}(\mathbf{X}_i) \quad (3.27)$$

Die Kanten  $\mathbf{E}_i^u$  in der Parameterebene  $(u, v)$  entstehen aus der Umkehrabbildung der globalen Flächenbeschreibung  $\mathbf{x}_F^{-1}$  bzgl. der globalen Kantenbeschreibungen  $\mathbf{x}_{C,i}$ , die den betrachteten Oberflächenausschnitt beranden:

$$\mathbf{E}_1^u(\xi) = \mathbf{x}_F^{-1}(\mathbf{x}_{C,1}(t(\xi))) \quad (3.28)$$

$$\mathbf{E}_2^u(\eta) = \mathbf{x}_F^{-1}(\mathbf{x}_{C,2}(t(\eta))) \quad (3.29)$$

$$\mathbf{E}_3^u(\xi) = \mathbf{x}_F^{-1}(\mathbf{x}_{C,3}(t(\xi))) \quad (3.30)$$

$$\mathbf{E}_4^u(\eta) = \mathbf{x}_F^{-1}(\mathbf{x}_{C,4}(t(\eta))) \quad (3.31)$$

Betont sei, dass die Abbildungen  $\mathbf{x}_{C,1}(t(\xi))$ ,  $\mathbf{x}_{C,2}(t(\eta))$ ,  $\mathbf{x}_{C,3}(t(\xi))$  und  $\mathbf{x}_{C,4}(t(\eta))$  in den Gleichungen (3.28)-(3.31) der Reparametrisierung von Kurven gemäß Abschnitt 3.2.2.3 entsprechen.

### 3.2.4 Interpolation von Kurven und Flächen

Die Probleme zu bewältigen, die bei der Interpolation von Funktionen durch Polynome entstehen, ist Gegenstand der Approximationstheorie. In Abhängigkeit von der zu interpolierenden Funktion oszilliert der polynomielle Interpolant unter Umständen stark. Solche Effekte gilt es zu minimieren [21, 83, 88, 95]. Eine Polynominterpolation hoher Qualität ist bei Anwendung der Finite-Element-Methode — insbesondere mit Ansätzen hoher Ordnung — besonders wichtig. Interpoliert man eine Funktion polynomiell, werden die entsprechenden Konvergenzeigenschaften und die Genauigkeit der Approximation entscheidend durch die Regularität der

zu interpolierenden Funktion und die Lage der Interpolationsstützstellen beeinflusst.

Dieser Abschnitt beschreibt ein spezielles Interpolationsschema. Es wurde 1995 erstmals von CHEN und BABUŠKA [21] vorgestellt und 1997 von KIRÁLYFALVI und SZABÓ [49] als Grundlage einer quasi-regionalen Abbildung im Rahmen finiter Elemente hoher Ordnung aufgegriffen (vgl. auch Abschnitt 4.4.3). Der Schlüssel zu den nahezu optimalen Approximationseigenschaften dieser Strategie liegt in der Wahl der Stützstellen.

Anschaulich dargestellt wird eine minimale Oszillation des Interpolationspolynoms um eine zu interpolierende Funktion dadurch erreicht, dass die Betragssumme der Basisfunktionen möglichst wenig „um die Null“ oszilliert. Bei Festlegung auf den Typ der Basisfunktionen stehen als Variablen für dieses Optimierungsproblem die Stützstellen der Basisfunktionen zur Verfügung.

CHEN und BABUŠKA verwenden zur Interpolation die bekannten LAGRANGE-Polynome.

$$N_i^p(\xi) = \prod_{j=1, j \neq i}^{p+1} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j}. \quad (3.32)$$

Die Punkte  $\xi_j$ , an denen die Polynome folgende Eigenschaft zeigen

$$N_i^p(\xi_j) = \delta_{ij}, \quad (3.33)$$

werden auch als Knoten oder Stützstellen bezeichnet. Dass die Wahl dieser Stützstellen die Güte der Approximation maßgeblich beeinflusst, zeigt folgende Betrachtung:

- Äquidistante Stützstellen werden im Intervall  $[-1,1]$  durch die Verteilung

$$\xi_j = -1 + 2 \frac{j-1}{p}, \quad j = 1, \dots, p+1 \quad (3.34)$$

definiert.

- Beweise und detaillierte Erläuterungen zum Stützstellenschema nach CHEN und BABUŠKA findet man in [21]. Dort sind die Kollokationspunkte auch tabelliert. Hier wird ausschließlich die Idee skizziert.

Die optimalen oder kanonischen Stützstellen sind das Ergebnis eines Minimierungsproblems mit den Nebenbedingungen  $\xi_1 = -1$  und  $\xi_{p+1} = 1$ . Für jeden Polynomgrad  $p$  existiert ein Satz  $\Xi^p$  an  $(p+1)$  Kollokationspunkten und eine korrespondierende Schar an  $(p+1)$  LAGRANGE-Polynomen  $N_i^p(\xi)$  mit  $i = 1, \dots, p+1$ . Zur Spezifikation der verwendeten Stützstellen werden die Funktionen in diesem Abschnitt mit  $N_i^{p, \Xi^p}(\xi)$  bezeichnet. Für jedes  $p$  definieren CHEN und BABUŠKA eine Funktion  $\lambda(\xi, \Xi^p)$ , die die Beträge all dieser LAGRANGE-Polynome  $N_i^p(\xi)$  summiert, die LEBESGUE-Funktion:

$$\lambda(\xi, \Xi^p) = \sum_{i=1}^{p+1} |N_i^{p, \Xi^p}(\xi)| \quad (3.35)$$



Sie weist über dem Intervall  $[\xi_1, \xi_{p+1}]$  in den entsprechenden Interpolationsstützstellen lokale Minima auf. Zwischen diesen, d.h. auf jedem Teilintervall  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$  mit  $i = 1, \dots, p$ , liegt ein lokales Maximum, dargestellt durch:

$$\lambda_i(\Xi^p) = \max_{\xi \in [\xi_i, \dots, \xi_{i+1}]} \sum_{i=1}^{p+1} |N_i^{p, \Xi^p}(\xi)| \quad \text{mit } i = 1, \dots, p \quad (3.36)$$

Das globale Maximum aller lokalen Maxima  $\lambda_i(\Xi^p)$  definiert die LEBESGUE-Konstante

$$\lambda(\Xi^p) = \max_{i=1, \dots, p} \lambda_i(\Xi^p). \quad (3.37)$$

Ein Stützstellenschema  $\Xi^p$  minimiert lt. CHEN und BABUŠKA die LEBESGUE-Konstante, wenn — und nur wenn — für die lokalen Maxima  $\lambda_i(\Xi^p)$  gilt:

$$\lambda_1(\Xi^p) = \lambda_2(\Xi^p) = \dots = \lambda_p(\Xi^p) \quad (3.38)$$

Dass dies der Fall ist, zeigt Abbildung 3.8 anhand der LEBESGUE-Funktionen für die Polynomgrade  $p = 1, \dots, 9$ . Aufgrund der Symmetrie sind sie jeweils nur im Intervall  $[0, 1]$  dargestellt. Links im Bild basieren sie auf der Interpolation äquidistanter Stütz-

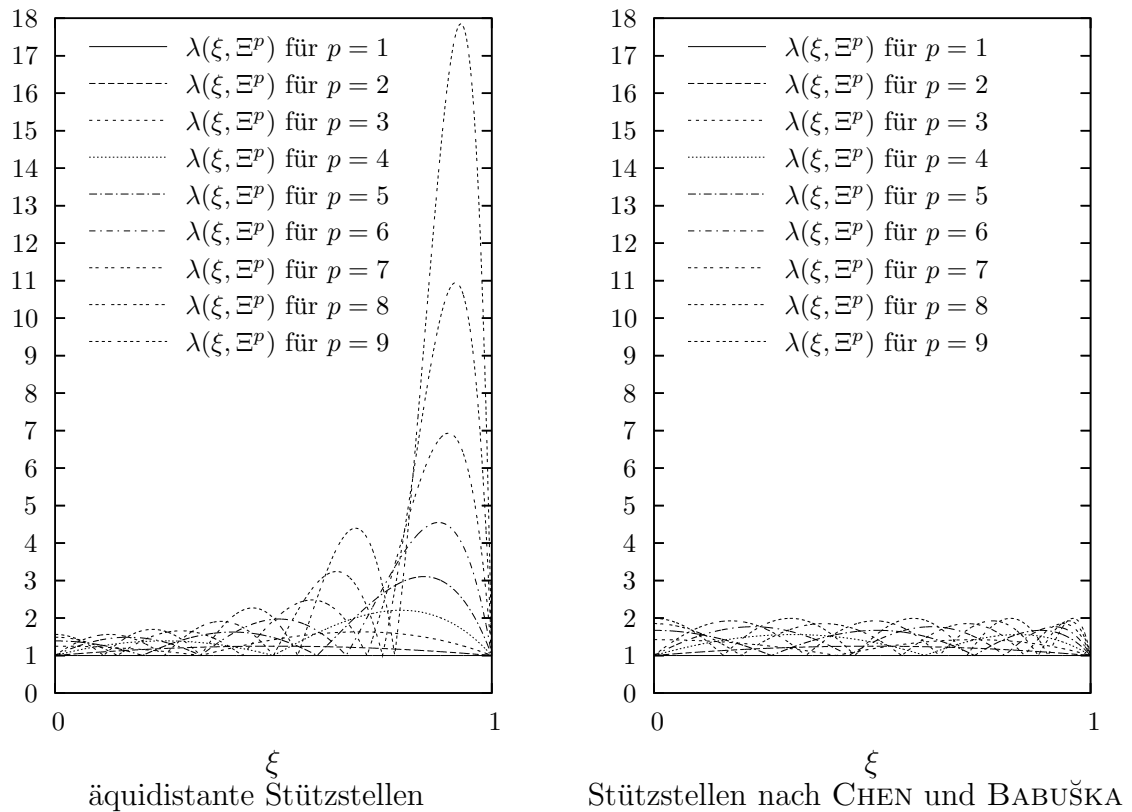


Abbildung 3.8: LEBESGUE-Funktionen  $\lambda(\xi, \Xi^p)$  für die Polynomgrade  $p = 1, \dots, 9$

stellen, rechts auf der Interpolation der Kollokationspunkte von CHEN und BABUŠKA. Man erkennt die oben genannten lokalen Minima in den Interpolationsstützstellen und die lokalen Maxima  $\lambda_i(\Xi^p)$ . Während die lokalen Maxima  $\lambda_i(\Xi^p)$  bei äquidistanten Stützstellen variieren und zum Intervallrand hin wachsen, erfüllen sie bei der Wahl „optimaler“ Stützstellen gerade die geforderte Minimierungsbedingung. Weiterhin ist ablesbar, dass das globale Maximum, d.h. die LEBESGUE-Konstante, bei äquidistanten Stützstellen deutlich schneller wächst als bei den „optimalen“ Punkten. Nach CHEN und BABUŠKA entwickelt sie sich im ersten Fall exponentiell. [21] beweist, dass  $\lambda(\Xi^p)$  bei der Wahl bestmöglicher Punkte asymptotisch logarithmisch zunimmt und bei  $p \leq 50$  unter einem Wert von 3 bleibt. Entsprechendes Verhalten ist anhand von Abbildung 3.9, die für wachsenden Polynomgrad  $p$  die LEBESGUE-Konstante unterschiedlicher Stützstellenschemata  $\Xi^p$  gegenüberstellt, ablesbar.

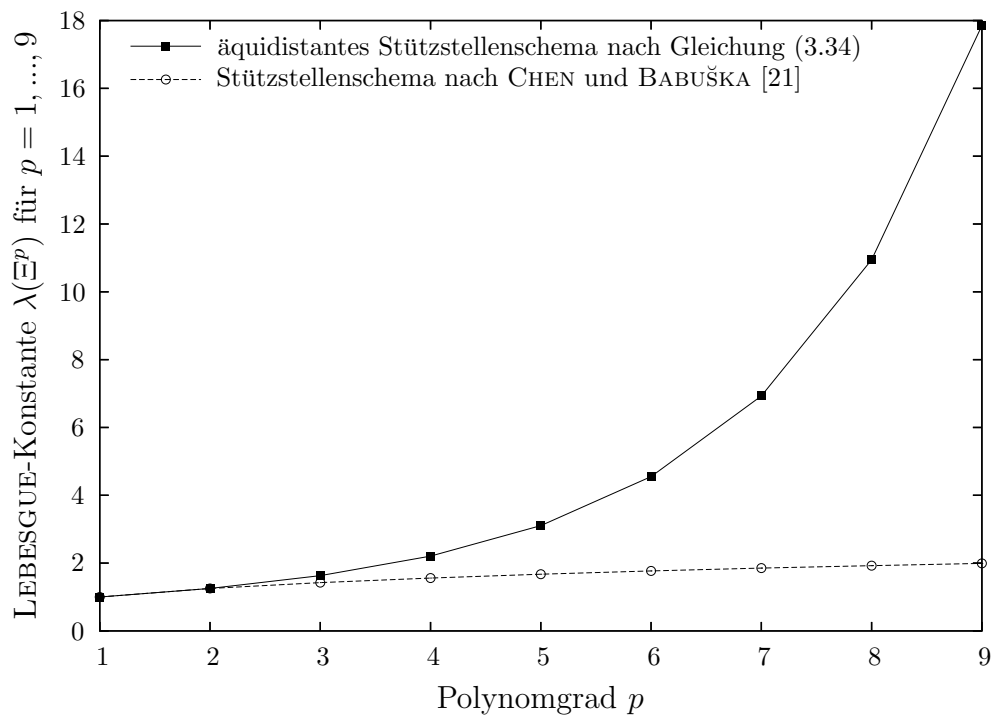


Abbildung 3.9: Entwicklung der LEBESGUE-Konstante  $\lambda(\Xi^p)$  in Abhängigkeit von der LEBESGUE-Funktion  $\lambda(\xi, \Xi^p)$  für verschiedene Polynomgrade  $p$

Die günstigen Eigenschaften dieser Interpolationsmethode haben ihre Anwendung auch im Rahmen dieser Arbeit motiviert. Auf der Basis der entsprechenden Kollokationspunkte erhält man für die näherungsweise Darstellung der oben beschriebenen Kurven  $\mathbf{x}_C$  und Flächen  $\mathbf{x}_F$  folgende Ausdrücke:

- Die Interpolation einer Kurve  $\mathbf{x}_C \in \mathbb{R}^3$  durch einen Satz  $N_i^p$  an LAGRANGE-Polynomen und den korrespondierenden  $p + 1$  Stützstellen  $\mathbf{x}_C(r_i)$  mit  $i = 1, \dots, p + 1$  lässt sich darstellen durch:

$$\mathbf{x}_C(r) \approx \mathbf{x}_C^{\text{interp}}(r) = \sum_{i=1}^{p+1} \mathbf{x}_C(r_i) N_i^p(r) \quad (3.39)$$

Der Kurvenparameter  $r$  steht hier repräsentativ für einen der lokalen Parameter  $\{\xi, \eta, \zeta\} \in [-1, 1]$ .

- Die entsprechende Interpolation einer Fläche  $\mathbf{x}_F : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  hat als natürliche Verallgemeinerung der Kurvendarstellung die Form:

$$\mathbf{x}_F(r, s) \approx \mathbf{x}_F^{\text{interp}}(r, s) = \left( \sum_{i=1}^{p_r+1} \mathbf{x}_F(r_i, s) N_i^{p_r}(r) \right) \left( \sum_{j=1}^{p_s+1} \mathbf{x}_F(r, s_j) N_j^{p_s}(s) \right) \quad (3.40)$$

$$= \sum_{i=1}^{p_r+1} \sum_{j=1}^{p_s+1} \mathbf{x}_F(r_i, s_j) N_i^{p_r}(r) N_j^{p_s}(s) \quad (3.41)$$

Der Flächenparameter  $(r, s)$  steht hier repräsentativ für jeweils ein Paar lokaler Parameter  $\{(\xi, \eta), (\eta, \zeta), (\xi, \zeta)\} \in ([-1, 1] \times [-1, 1])$ .



# Kapitel 4

## Die Methode der finiten Elemente

Als Diskretisierungsverfahren stellt die Finite-Element-Methode ein numerisches Verfahren dar, das für die mathematische Formulierung eines speziellen Modellproblems eine Näherungslösung liefert [109, 110, 47, 26]. Mit ihrer Anwendung wird das ursprüngliche Problem, das sich in Form einer partiellen Differentialgleichung bzw. der *schwachen Formulierung* präsentiert, nicht analytisch gelöst, sondern durch eine aus endlich vielen Operationen hervorgegangene Lösung approximiert. Die Güte dieser Approximation wird dabei durch die Anzahl der Freiheitsgrade beeinflusst.

Das prinzipielle Vorgehen des Finite-Element-Ansatzes — von der Unterteilung des Berechnungsgebietes in endlich viele Elemente bis hin zur Lösung des Gleichungssystems — ist von dem jeweiligen Problem unabhängig.

### 4.1 Diskretisierung

Gemäß der kontinuumsmechanischen Grundgleichungen steht hier die Diskretisierung dreidimensionaler Kontinua im Zentrum. Bevor in Kapitel 4.1.2 die Approximation durch finite Elemente besprochen wird, überführt Abschnitt 4.1.1 die oben definierten, relevanten kontinuumsmechanischen Grundgleichungen in matrizielle Schreibweise, um so einen homogenen Übergang zur Notation der diskretisierten Form herzustellen. In den Abschnitten 4.1 und 4.2 wird dabei zunächst von einem linear-elastischen Materialgesetz ausgegangen.

#### 4.1.1 Übergang auf matrizielle Schreibweise

Die *schwache Form* des Gleichgewichts (2.48) kann zusammengefasst werden zu:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{v}) \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v} \mathbf{f}_{\Omega} \, d\Omega + \int_{\partial_N \Omega} \mathbf{v} \bar{\mathbf{t}} \, d\partial_N \Omega. \quad (4.1)$$

In diesem Ausdruck bezeichnet  $\mathbf{u}$  den Verschiebungsvektor (2.2),  $\mathbf{v}$  den Vektor der virtuellen Verschiebungen,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  den linearen Verzerrungstensor (2.14) und  $\mathbf{C}$  die Elastizitätsmatrix (2.24) bzw. (2.26). Zur Approximation durch finite Elemente werden diese Größen in matrizielle Schreibweise überführt.

$$\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z]^T \quad \text{und} \quad \mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^T \quad (4.2)$$

Die Symmetrieeigenschaft der Verzerrung  $\boldsymbol{\varepsilon}$  führt bei der Betrachtung dreidimensionaler Kontinua auf sechs unabhängige Größen, die in folgendem Vektor zusammengefasst sind:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}]^T \quad (4.3)$$

Er hängt über die Differentialoperatormatrix  $\mathbf{L}$  von den Verschiebungen ab.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad \text{mit} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Die Dehnungen (4.3) hängen von (2.14) über folgende Gleichungen ab:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \gamma_{xy} = \varepsilon_{12} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \gamma_{yz} = \varepsilon_{23} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \gamma_{xz} = \varepsilon_{13} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Im linearen Fall steht die Spannung  $\boldsymbol{\sigma}$  mit dem Verzerrungsvektor (4.3) über die konstitutiven

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}]^T = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.6)$$

Gleichungen gemäß Ausdruck (4.6) in Beziehung.  $\mathbf{C}$ , der Elastizitätstensor (2.26), hat in Matrixschreibweise die Form

$$\mathbf{C} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3\kappa + 4\mu & 3\kappa - 2\mu & 3\kappa - 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 3\kappa - 2\mu & 3\kappa + 4\mu & 3\kappa - 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 3\kappa - 2\mu & 3\kappa - 2\mu & 3\kappa + 4\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6\mu \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

### 4.1.2 Approximation durch finite Elemente

Es gibt unendlich viele Funktionen  $\mathbf{v}$ , die der Gleichung (4.1) genügen und die geometrischen Randbedingungen erfüllen. Da es jedoch im Allgemeinen nicht möglich ist, den „Test“ gegen unendlich viele Funktionen durchzuführen, „testet“ man nur gegen endlich viele Basisfunktionen  $N_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Diese Ansatzfunktionen sind auf jedem der Elemente, in die das Berechnungsgebiet  $\Omega$  zuvor unterteilt wurde, definiert. Der Ansatz für die Näherungslösung  $\mathbf{u}_{\text{FE}}$  an die exakte Lösung  $\mathbf{u}_{\text{ex}}$  wird entsprechend formuliert:

$$\mathbf{u}_{\text{FE}} = \sum_{i=1}^n U_i \mathbf{N}_i(x, y, z). \quad (4.8)$$

Mit der Näherungslösung  $\mathbf{u}_{\text{FE}}$  und den endlich vielen Testfunktionen  $N_i$  kann das *Prinzip der virtuellen Arbeit* folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\mathcal{B} \left( \sum_{i=1}^n U_i \mathbf{N}_i, \mathbf{N}_j \right) = \mathcal{F}(\mathbf{N}_j) \quad (4.9)$$

Die Linearität der Bilinearform erlaubt den Schritt

$$\sum_{i=1}^n U_i \mathcal{B}(\mathbf{N}_i, \mathbf{N}_j) = \mathcal{F}(\mathbf{N}_j), \quad (4.10)$$

so dass schließlich das zu lösende Gleichungssystem entsteht:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (4.11)$$

Wo vor der Diskretisierung die Lösung  $\mathbf{u}_{\text{ex}}$  gesucht wurde, sind jetzt die Koeffizienten  $U_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  die Unbekannten, die obiger Gleichung genügen und die geometrischen Randbedingungen erfüllen müssen.  $\mathbf{K}$  bezeichnet die Gesamtsteifigkeitsmatrix,  $\mathbf{F}$  den Gesamtlastvektor.

- **Berechnung der Elementmatrizen**

Zerlegt man das Integral zur Berechnung der Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  aus Gleichung (4.11) in Integrale über die einzelnen Elemente, führt dies auf den Ausdruck zur Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen, die durch

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{L} \mathbf{N}_i)^T \mathbf{C} (\mathbf{L} \mathbf{N}_j) dx dy dz \quad (4.12)$$

gegeben sind. Durch Anwendung der in Gleichung (4.4) definierten Differentialoperatormatrix  $\mathbf{L}$  auf die Ansatzfunktionenmatrix  $\mathbf{N}$  der Elementansatzfunktionen im Element  $e$ ,

entsteht die Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix, die allgemein auch als  $\mathbf{B}$ -Matrix bekannt ist:

$$\mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{N} \quad (4.13)$$

Darin ist die Matrix  $\mathbf{N}$  der Ansatzfunktionen durch Ausdruck (4.14) definiert:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}^N \quad \mathbf{N}^E \quad \mathbf{N}^F \quad \mathbf{N}^{\text{int}}] \quad (4.14)$$

Die Knotenmoden  $\mathbf{N}^N$  gemäß Gleichung (4.15) entsprechen den trilinearen

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^N &= [\mathbf{N}^{N_1} \quad \mathbf{N}^{N_2} \quad \mathbf{N}^{N_3} \quad \dots \quad \mathbf{N}^{N_8}] \\ &= \begin{bmatrix} N_{1,1,1}^{N_1} & & & & & & & N_{1,1,1}^{N_8} \\ & N_{1,1,1}^{N_1} & & & & & & N_{1,1,1}^{N_8} \\ & & N_{1,1,1}^{N_1} & & & & & N_{1,1,1}^{N_8} \\ & & & \dots & & & & N_{1,1,1}^{N_8} \\ & & & & N_{1,1,1}^{N_1} & & & N_{1,1,1}^{N_8} \\ & & & & & & & N_{1,1,1}^{N_8} \\ & & & & & & & N_{1,1,1}^{N_8} \\ & & & & & & & N_{1,1,1}^{N_8} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ansatzfunktionen des isoparametrischen achtknotigen Standardelementes. Der Aufbau der Kanten-, Flächen- und inneren Moden zur Bildung der Matrizen

$$\mathbf{N}^E = [\mathbf{N}^{E_1} \quad \mathbf{N}^{E_2} \quad \mathbf{N}^{E_3} \quad \dots \quad \mathbf{N}^{E_{12}}] \quad (4.16)$$

$$\mathbf{N}^F = [\mathbf{N}^{F_1} \quad \mathbf{N}^{F_2} \quad \mathbf{N}^{F_3} \quad \dots \quad \mathbf{N}^{F_6}] \quad (4.17)$$

und  $\mathbf{N}^{\text{int}}$  ist Thema des Abschnitts 4.3. Für den Ausdruck (4.12) erhält man

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, dx \, dy \, dz. \quad (4.18)$$

#### • Berechnung der Elementlastvektoren

Die Zerlegung des Lastvektors  $\mathbf{F}$  in Elementlastvektoren  $\mathbf{F}^e$  erfolgt ganz analog zu der der Elementmatrizen:

$$\mathbf{F}^e(\mathbf{N}_j) = \mathbf{F}_{\Omega}^e(\mathbf{N}_j) + \mathbf{F}_{\partial_N \Omega}^e(\mathbf{N}_j) \quad (4.19)$$

mit

$$\mathbf{F}_{\Omega}^e(\mathbf{N}_j) = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_j^T \mathbf{f}_{\Omega} \, dx \, dy \, dz \quad (4.20)$$

$$\mathbf{F}_{\partial_N \Omega}^e(\mathbf{N}_j) = \int_{\partial_N \Omega^e} \mathbf{N}_j^T \bar{\mathbf{t}} \, d \partial_N \Omega \quad (4.21)$$



- **Koordinatentransformation zur Integration über das Element**

Elementsteifigkeitsmatrix und Elementlastvektor sind zunächst Funktionen von  $\mathbf{x}$ . Die Ansatzfunktionen, die im folgenden Kapitel eingehend beschrieben werden, sind jedoch auf dem Standardelement in den lokalen Koordinaten  $\boldsymbol{\xi}$  auf dem Berechnungsgebiet  $\Omega_{\text{st}}^h = [(-1, 1) \times (-1, 1) \times (-1, 1)]$  definiert. So ist die Integration in den Grenzen von  $[-1, 1]$  möglich. Um diese günstigen Eigenschaften nutzen zu können, bedarf es einer eindeutig umkehrbaren Abbildungsfunktion zwischen den globalen und den lokalen Koordinaten  $\mathbf{x}$  und  $\boldsymbol{\xi}$ . Sie ist durch die Funktion  $\mathbf{Q}^e$  definiert, zu der die eindeutige Umkehrabbildung  $(\mathbf{Q}^e)^{-1}$  existiert.

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}^e(\boldsymbol{\xi}) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\xi} = (\mathbf{Q}^e)^{-1}(\mathbf{x}) \quad (4.22)$$

Durch Anwendung der Transformationsvorschrift sind die Ansatzfunktionen von  $\boldsymbol{\xi}$  abhängig.

$$N_i(\mathbf{x}) = N_i((\mathbf{Q}^e)^{-1}(\mathbf{x})) = N_i(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) \quad (4.23)$$

Die Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix  $\mathbf{B}$  besteht aus den Ableitungen der Ansatzfunktionen. Beim Differenzieren ist daher nach der Koordinatentransformation die Kettenregel zu berücksichtigen. Die so entstandenen Operationen auf der Seite der Geometrie zu kapseln und vom anderen Teil der Berechnung abzuspalten, ist Aufgabe der JACOBI-Matrix:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Mit

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad \text{gilt:} \quad dx dy dz = \det \mathbf{J} \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (4.25)$$

Das Integrationsproblem wurde somit auf das Standardelement  $\Omega_{\text{st}}^h$  transformiert. Für Elementsteifigkeitsmatrix und Elementlastvektor ergeben sich daraus die folgenden Beziehungen:

## 1. Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \det \mathbf{J} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (4.26)$$

## 2. Elementlastvektor

$$\mathbf{F}_\Omega^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}_j^T \mathbf{f}_\Omega \det \mathbf{J} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (4.27)$$

$$\mathbf{F}_{\partial_N \Omega}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}_j^T \bar{\mathbf{t}} \det \mathbf{J} \, dr \, ds, \quad (4.28)$$

wobei gemäß Abschnitt 4.4.2 gilt:

$$\begin{aligned} r = \xi, \quad s = \eta & \quad \text{für } i = 1, 6 \\ r = \xi, \quad s = \zeta & \quad \text{für } i = 2, 4 \\ r = \eta, \quad s = \zeta & \quad \text{für } i = 3, 5 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Im Rahmen finiter Elemente hoher Ordnung unterscheiden sich sowohl die Ansatzfunktionen als auch die Abbildungsfunktion von denen der üblichen  $h$ -Version. Wo die Unterschiede auftreten wird jeweils in den Abschnitten 4.3 und 4.4 im Detail erläutert.

## 4.2 Fehlerkontrolle

Als Approximationsverfahren zur Beschreibung physikalischer Vorgänge liefert die Finite-Element-Methode nur in ganz seltenen Fällen die exakte Lösung  $\mathbf{u}_{\text{ex}}$ . Üblicherweise „schleichen“ sich im Laufe der numerischen Analyse des mathematischen Modells eine Vielzahl von Fehlern ein. Ihre wichtigen Ursachen seien grob klassifiziert:

- **Modellfehler** entstehen aufgrund einer Diskrepanz zwischen der Realität und dem zur numerischen Simulation gebildeten Modell. Solche Abweichungen resultieren z.B. aus der Reduktion räumlicher Probleme auf dimensionsreduzierte zwei- oder sogar eindimensionale Modelle. Auch Fehler aufgrund idealisierter konstitutiver Gesetze oder kinematischer Beziehungen sind der Klasse der Modellfehler zuzuordnen.
- **Diskretisierungsfehler** entstehen im Anschluss an die oben beschriebene Modellbildung aufgrund einer Diskrepanz zwischen kontinuierlicher und diskreter Beschreibung des entsprechenden Modells. Der Schritt der Diskretisierung birgt verschiedene Fehlerquellen. Sie liegen in der Approximation der Geometrie, der Elementgröße, dem Polynomgrad der Ansatzfunktionen, der Genauigkeit der zeitlichen Diskretisierung oder auch in der Regularität der Lösung.
- **Rundungsfehler** sind bei Anwendung stabiler Algorithmen dank heutiger Rechnerpräzision im Allgemeinen vernachlässigbar.

All diese Fehler tragen zur Abweichung  $\mathbf{e}$  der Finite-Element-Lösung  $\mathbf{u}_{\text{FE}}$  von der exakten Lösung  $\mathbf{u}_{\text{ex}}$  bei.

$$\mathbf{e} = \mathbf{u}_{\text{ex}} - \mathbf{u}_{\text{FE}} \quad (4.30)$$

Den darin enthaltenen Anteil des Diskretisierungsfehlers zu kontrollieren, ist Bestreben vieler Approximationsstrategien. So gibt es zahlreiche Ansätze, Probleme zu diskretisieren, den Fehler der Berechnung zu kontrollieren bzw. sogar zu schätzen, um schließlich die Lösung sukzessive zu verbessern.

- ***h*-Version**

Die klassische *h*-Version der Finite-Element-Methode — benannt nach dem Halbmesser *h* eines Elementes — reduziert den Fehler einer Approximation durch uniforme oder adaptive, d.h. problemangepasste Netzverfeinerung. Weil der Polynomgrad *p* der Ansatzfunktionen währenddessen konstant bleibt, kann die Anzahl *N* der Freiheitsgrade im zweidimensionalen Fall näherungsweise zu  $N \approx h^2$  geschätzt werden.

- ***p*-Version**

Bei der *p*-Version der Finite-Element-Methode — benannt nach dem Polynomgrad *p* der Ansatzfunktionen — steigt die Genauigkeit der Näherung durch globale oder lokale Erhöhung des Polynomgrades *p*. Aufgrund grober Netze bedarf es einer Abbildungsfunktion, die die geometrische Beschreibung beliebig berandeter Elementränder erlaubt.

- ***hp*-Version**

Die *hp*-Version der Finite-Element-Methode kombiniert die Verfeinerung des Berechnungsnetzes, die einer *h*-Version entspricht, mit der Erhöhung des Polynomgrades *p*, die aus der *p*-Version der Finite-Element-Methode stammt.

- ***r*-Methode**

Die *r*-Methode erhöht die Genauigkeit einer Finite-Element-Berechnung bei konstanter Netztopologie durch lokale Verdichtung des Finite-Element-Gitters. Die dazu erforderliche Repositionierung von Knoten hat der Methode ihren Namen gegeben. Bei gegebener Elementanzahl bleibt im Falle eines konstanten Polynomgrades die Anzahl an Freiheitsgraden unverändert.

- ***rp*-Methode**

Die *rp*-Methode ist eine Kombination aus *r*- und *p*-Version. Im Kontext von Elementen hoher Ordnung wird der Begriff der Repositionierung allgemeiner verstanden. Neben einem Verschieben von Knoten werden im zweidimensionalen Fall auch Kantenverläufe, im dreidimensionalen Fall Oberflächenbeschreibungen angepasst. Parallel zur Modifizierung der Geometrie von Knoten, Kanten und Flächen erhöht die *rp*-Version den Polynomgrad *p* der Ansatzfunktionen. Im Unterschied zur reinen *r*-Methode variiert daher die Anzahl an Freiheitsgraden. Im Rahmen einer Neuvernetzung ist die Verfeinerung des Gitters erlaubt.

Unterstützt eines der oben beschriebenen Diskretisierungsverfahren den Entwurfsprozess innerhalb einer Ingenieurdisziplin, ist es von besonderer Bedeutung, die Qualität der Ergebnisse einordnen zu können. Da die exakte Lösung im Allgemeinen unbekannt ist, ist es umso wichtiger, eventuelle Fehler zu quantifizieren und einzuschätzen. So wurden innerhalb der vergangenen dreißig Jahre verschiedenste Methoden zur Fehlerschätzung von Finite-Element-Approximationen entwickelt. Detaillierte Ausführungen zu diesem komplexen Thema gibt es in AINSWORTH und ODEN [4], BABUŠKA und STROUBOULIS [7] sowie WRIGGERS [104], um nur einige zu nennen. Hier werden nur Grundsätzlichkeiten zu dieser Frage angesprochen. Man unterscheidet prinzipiell *a priori*- von *a posteriori* Fehlerschätzung.

#### 4.2.1 *A priori* Fehlerschätzung — Konvergenzraten

Die Frage nach der Genauigkeit einer Lösung, nach Größe und Verteilung des Fehlers eines Diskretisierungsverfahrens kann erst nach der Berechnung beantwortet werden. Prinzipielle Aussagen über die Eigenschaften eines Fehlers sind jedoch schon vor der Finite-Element-Analyse möglich, wenn nämlich die u.a. durch Randbedingungen und Geometrie beeinflusste Struktur des Problems bekannt ist. Detaillierte Beschreibungen zu *a priori* Fehlerschätzung sind in [7, 85, 96] gegeben. Weiß man, wie „glatt“ eine Lösung ist, unterstützt solche *a priori* Kenntnis über die zu lösende Aufgabe die Wahl eines geeigneten Diskretisierungsverfahrens und einer sinnvollen Netzgenerierung. Die Rate, mit der das gewählte Verfahren asymptotisch konvergiert, ist im Vorfeld bekannt. Um zu vergleichen, wie für einige der oben aufgeführten Approximationsansätze der Fehler für gewisse Problemklassen sinkt, stehen im Folgenden die entsprechenden Gleichungen zur Beschreibung von Konvergenzraten zweidimensionaler Probleme im Zentrum. Die Betrachtungen folgen den Ausführungen von SZABÓ und BABUŠKA [96].

Auf der Basis des *Prinzips vom Minimum des elastischen Gesamtpotentials* (2.53) wird üblicherweise die in Gleichung (2.52) definierte Energienorm  $\|\bullet\|_{E(\Omega)}$  des Fehlers  $\mathbf{e}$  (vgl. Gleichung (4.30)) als Maß für die Güte der Approximation gewählt:

$$\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega)} = \sqrt{\mathcal{U}(\mathbf{e})} = \sqrt{\frac{1}{2}\mathcal{B}(\mathbf{e}, \mathbf{e})} \quad (4.31)$$

Zum Vergleich der Konvergenzraten unterschiedlicher Approximationsverfahren anhand dieser Größe wird  $\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega)}$  mit den Freiheitsgraden  $N$  in einen funktionalen Zusammenhang gebracht. Zur Klassifizierung des Konvergenzverhaltens ist es sinnvoll, eine doppeltlogarithmische Darstellung zu wählen, bei der  $\log\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega)}$  als Funktion von  $(\log N)$  betrachtet wird. Entsprechende Kurven zeigt Abbildung 4.1 und schematisiert damit das Konvergenzverhalten durch die Unterteilung in algebraische Konvergenz, exponentielle Konvergenz und einige „Graustufen“ dazwischen, deren Fehler zunächst exponentiell, später algebraisch sinkt. Nach SZABÓ und BABUŠKA [96] grenzen sich algebraische und exponentielle Konvergenz durch folgende Ungleichungen voneinander ab.

- **Algebraische Konvergenz** liegt vor, wenn die Abschätzung folgende Form hat:

$$\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega)} \leq \frac{k}{N^\beta} \quad (4.32)$$

$k$  und  $\beta$  bezeichnen darin Konstanten. Ein Logarithmieren von Ungleichung (4.32) liefert den Ausdruck:

$$\log\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega)} \approx \log k - \beta \log N \quad (4.33)$$

Interpretiert man ihn als Geradengleichung  $y(x) = y_0 - \beta x$ , kennzeichnet darin  $\beta$  die negative Steigung. Sie entspricht gerade der Konvergenzrate, die sich aus der oben empfohlenen doppeltlogarithmischen Betrachtung von  $\log\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega)}(\log N)$  ergibt.  $\beta$  wird durch den Polynomgrad  $p$  der Ansatzfunktionen und die Regularität der Lösung beeinflusst. Letztere wird durch den Faktor  $\lambda$  bemessen — je glatter die Lösung desto größer ist  $\lambda$ . In zweidimensionalen Gebieten wird beispielsweise die Singularität einer Rissspitze durch  $\lambda = 0.5$  quantifiziert. Nach SZABÓ und BABUŠKA [96] lässt sich  $\lambda$  aus der Lösung eines Eigenwertproblems bestimmen. In Abhängigkeit von  $p$  und  $\lambda$  hat  $\beta$  im zweidimensionalen Fall schließlich die Form:

$$\beta = \frac{1}{2} \min(p, \lambda) \quad (4.34)$$

Der Absolutwert von  $\beta$  heißt auch asymptotische Konvergenzrate.

- **Exponentielle Konvergenz** liegt vor, wenn die Abschätzung folgender Ungleichung gehorcht:

$$\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega)} \leq \frac{k}{\exp(\beta N^\theta)} \quad (4.35)$$

Zusätzlich zu  $k$  und  $\beta$  bezeichnet  $\theta$  eine weitere Konstante, für die  $\theta \geq 0.5$  gilt. Ein Logarithmieren der Ungleichung liefert den Ausdruck:

$$\log\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega)} \approx \log k - \beta N^\theta \quad (4.36)$$

Welchem Konvergenzverhalten sich ein gewisser Berechnungszyklus beiorndnet, hängt sowohl von der Wahl des Diskretisierungsverfahrens als auch von der Beschaffenheit der Lösung ab. Eine entsprechende Klassifizierung mit Anlehnung an Abbildung 4.1 wird im Folgenden besprochen:

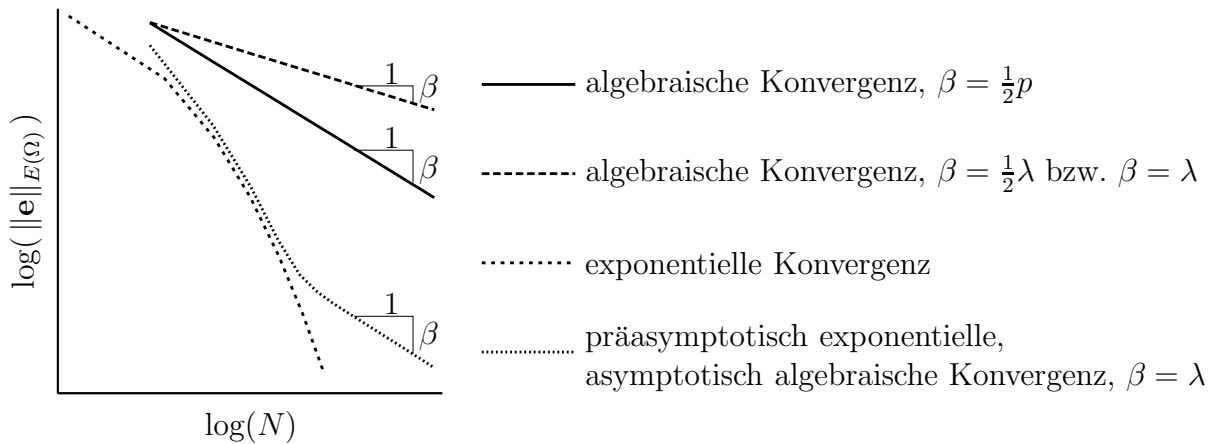


Abbildung 4.1: Konvergenzraten von  $h$ -,  $p$ -,  $hp$ - und  $rp$ -Version der Finite-Element-Methode bei zwei-dimensionalen Problemen mit verschiedenen Steigungen  $\beta$

- algebraische Konvergenz

- Unabhängig von der Regularität der Lösung zeichnet sich eine uniforme oder quasi uniforme  $h$ -Version durch algebraische Konvergenz aus. Die Steigung  $\beta$  ist gemäß Gleichung (4.34) durch den Polynomgrad  $p = 1$  auf  $\beta = 0.5$  beschränkt. Im Falle von  $p = 2$  kann sie maximal den Wert 1 annehmen.
- Die Approximation eines Problems mit Singularität — beispielsweise aufgrund einspringender Ecken — ist durch algebraische Konvergenz begrenzt, wenn die reine  $p$ -Version auf Netzen angewendet wird, die nicht in Richtung der Singularität abgestuft sind. Die Steigung  $\beta$  ist durch die Stärke der Singularität  $\lambda$  nach unten beschränkt, da ja  $p$  beliebig darüber hinauswachsen kann.  $\beta$  ist gemäß Gleichung (4.34) durch  $\beta = 0.5 \lambda$  charakterisiert, falls die Punktsingularität nicht mit einem Knoten zusammenfällt. Sonst definiert  $\beta = \lambda$  die Steigung.

- exponentielle Konvergenz

- Untersucht man ein „glattes“ Problem mit der uniformen  $p$ -Version, konvergiert die Lösung gemäß Gleichung (4.36) sehr schnell.
- Bei Problemen mit Singularität ermöglicht die  $hp$ -Version exponentielle Konvergenz.
- Für elastoplastische Probleme konvergiert die  $rp$ -Version der Methode der finiten Elemente exponentiell.

- präasymptotisch exponentielle, asymptotisch algebraische Konvergenz

- Analysiert man ein Problem mit Punktsingularität unter Verwendung der  $p$ -Version auf Netzen, die in Richtung der Singularität verfeinert wurden, sinkt der Fehler in folgender Art: Nach anfänglicher exponentieller Konvergenz ist die Rate asymptotisch durch algebraische Konvergenz mit einer Steigung  $\beta$  gemäß der Größe der Singularität  $\lambda$  beschränkt. Dieser Zugang setzt voraus, dass die Singularität mit einem Knoten zusammenfällt. So ist die Steigung durch  $\beta = \lambda$  definiert.

- Nach anfänglicher exponentieller Konvergenz ist die uniforme  $p$ -Version bei Problemen der Elastoplastizität asymptotisch durch algebraische Konvergenz beschränkt.

Die Einordnung der  $rp$ -Version in dieses Schema ist das Ergebnis dieser Arbeit. Die Klassifizierung erhebt insbesondere hinsichtlich der Abstraktion der Problemklassen keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit. Es wurden nur solche Probleme charakterisiert, zu denen im Rahmen dieses Kontextes Erfahrungen vorliegen.

### 4.2.2 *A posteriori* Fehlerschätzung — Extrapolation

Der Fehler einer Finite-Element-Analyse kann auch nach einer Berechnung auf Basis der entsprechenden Ergebnisse bewertet werden. Sie sind die Grundlage solcher *a posteriori* Fehlerschätzer, die im Berechnungsgebiet eine Fehlerverteilung prognostizieren, die ihrerseits die anschließende adaptive Maßnahme — Netzverfeinerung, Netzanpassung oder Polynomgraderhöhung — lokal oder global steuert. Die Bandbreite der *a posteriori* Fehlerschätzer ist groß. Es gibt explizite, implizite, duale, residualbasierte, hierarchische, glättende Fehlerschätzer, um nur einige zu nennen. Eine eingehende Diskussion zu diesem Thema führen AINSWORTH und ODEN [4]. Weiter unten wird ein Fehlerschätzer auf der Basis von Extrapolationsmethoden vorgestellt, der Wissen aus der oben beschriebenen *a priori* Abschätzung nutzt. Die Ausführungen folgen SZABÓ und BABUŠKA [96].

Um den Fehler  $\mathbf{e}$  (4.30) einer linearen Finite-Element-Analyse zu schätzen, wird auch im Rahmen der Extrapolation die Energienorm  $\|\bullet\|_{E(\Omega)}$  des Fehlers  $\mathbf{e}$  betrachtet. Die Idee besteht darin, von den Ergebnissen, die aus drei aufeinanderfolgenden Berechnungsschritten  $\{p-2, p-1, p\}$  mit mäßig hoher oder hoher Anzahl an Freiheitsgraden stammen, auf das „exakte“ Ergebnis jenseits dieser Werte zu schließen. Zunächst gilt:

$$\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega)}^2 = \|\mathbf{u}_{\text{ex}} - \mathbf{u}_{\text{FE}}\|_{E(\Omega)}^2 = \mathcal{U}(\mathbf{u}_{\text{ex}} - \mathbf{u}_{\text{FE}}) = |\mathcal{U}(\mathbf{u}_{\text{ex}}) - \mathcal{U}(\mathbf{u}_{\text{FE}})| \quad (4.37)$$

Unter der Voraussetzung, dass die Dehnungsenergie  $\mathcal{U}(\mathbf{u}_{\text{FE}})$  monoton wächst und somit  $\mathcal{U}(\mathbf{u}_{\text{ex}}) > \mathcal{U}(\mathbf{u}_{\text{FE}})$  gilt, lässt sich Gleichung (4.37) in

$$\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega)}^2 = \mathcal{U}(\mathbf{u}_{\text{ex}}) - \mathcal{U}(\mathbf{u}_{\text{FE}}) \quad (4.38)$$

überführen. Dazu muss gewährleistet sein, dass die Ansatzräume  $\mathcal{S}^{p-2}$ ,  $\mathcal{S}^{p-1}$  und  $\mathcal{S}^p$  der aufeinanderfolgenden Berechnungen  $\{p-2, p-1, p\}$  hierarchisch aufgebaut sind, dass also  $\mathcal{S}^{p-2} \subset \mathcal{S}^{p-1} \subset \mathcal{S}^p$  gilt. Im Rahmen der  $p$ -Version ist dies erfüllt, sofern die Struktur der Ansatzräume berücksichtigt wird. Bei der  $h$ -Version bedarf es einer hierarchischen Netzverfeinerung.

Die Schätzung (4.32) für  $h$ - und  $p$ -Version ist insbesondere für eine hohe Anzahl an Freiheitsgraden  $N$  erfahrungsgemäß genau. Mit dieser Kenntnis lässt sich Gleichung (4.32) in folgender Art und Weise zu einem Ausdruck von  $\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega)}^2$  umformen.

$$\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega)} \leq \frac{k}{N^\beta} \quad \Longrightarrow \quad \|\mathbf{e}\|_{E(\Omega)}^2 \approx \frac{k^2}{N^{2\beta}} \quad (4.39)$$

Gleichsetzen von (4.38) und (4.39) liefert

$$\mathcal{U}(\mathbf{u}_{\text{ex}}) - \mathcal{U}(\mathbf{u}_{\text{FE}}) \approx \frac{k^2}{N^{2\beta}}. \quad (4.40)$$

Dieser Ausdruck enthält drei Unbekannte,  $\|\mathbf{u}_{\text{ex}}\|_{E(\Omega)}^2$ ,  $k$  und  $\beta$ . Um sie zu bestimmen, werden die Ergebnisse aus den oben genannten aufeinanderfolgenden Berechnungen  $\{p-2, p-1, p\}$  genutzt, die Dehnungsenergien  $\mathcal{U}_{p-2}(\mathbf{u}_{\text{FE}})$ ,  $\mathcal{U}_{p-1}(\mathbf{u}_{\text{FE}})$  und  $\mathcal{U}_p(\mathbf{u}_{\text{FE}})$  sowie die Anzahl an Freiheitsgraden  $N_{p-2}$ ,  $N_{p-1}$  und  $N_p$ . Stellt man für jeden der drei Rechenläufe eine Gleichung der Art (4.40) auf und setzt die logarithmierten Quotienten jeweils zweier aufeinanderfolgender Energiefehler in Beziehung, erhält man schließlich

$$\frac{\mathcal{U}(\mathbf{u}_{\text{ex}}) - \mathcal{U}_p(\mathbf{u}_{\text{FE}})}{\mathcal{U}(\mathbf{u}_{\text{ex}}) - \mathcal{U}_{p-1}(\mathbf{u}_{\text{FE}})} \approx \left( \frac{\mathcal{U}(\mathbf{u}_{\text{ex}}) - \mathcal{U}_{p-1}(\mathbf{u}_{\text{FE}})}{\mathcal{U}(\mathbf{u}_{\text{ex}}) - \mathcal{U}_{p-2}(\mathbf{u}_{\text{FE}})} \right)^{\left( \frac{\log \frac{N_{p-1}}{N_p}}{\log \frac{N_{p-2}}{N_{p-1}}} \right)}. \quad (4.41)$$

Dieses Problem ist beispielsweise mithilfe eines NEWTON-RAPHSON-Verfahrens (vgl. Abschnitt 4.5.1) zu lösen. Man gewinnt die geschätzte „exakte“ Dehnungsenergie  $\mathcal{U}(\mathbf{u}_{\text{ex}})$  und daraus den geschätzten Fehler in der Energienorm.

### 4.2.3 Konvergenzraten am Beispiel

Dieser Abschnitt lehnt sich an die z.B. in SZABÓ und BABUŠKA [96] gemachten Untersuchungen, ergänzt diese aber um die numerische Studie einer adaptiven  $h$ -Version mit  $p = 2$ .

Um die in Abschnitt 4.2.1 besprochenen Konvergenzraten zu reflektieren, wird in diesem Kapitel das Beispiel einer L-förmigen Scheibe der Dicke  $t = 1.0[\text{mm}]$  im ebenen Verzerrungszustand durch verschiedene Strategien diskretisiert. Geometrie und Randbedingungen des Systems, das aufgrund der einspringenden Ecke eine Punktsingularität enthält, sind in Abbildung 4.2 dargestellt.

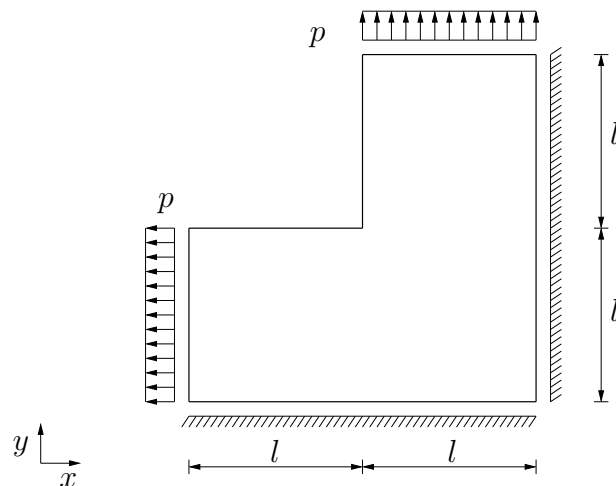


Abbildung 4.2: Geometrie und Randbedingungen des Systems



Die Struktur ist an ihren langen Rändern in Normalenrichtung gehalten und wird jeweils in Richtung der L-Linien durch eine Streckenlast  $p = 100.00[\text{N}/\text{mm}]$  gezogen. Die Länge  $l$  misst  $10.0[\text{mm}]$ . Mit einem Elastizitätsmodul von  $E = 210\,000.00[\text{N}/\text{mm}^2]$  und einer Querdehnzahl von  $\nu = 0.3$  antwortet das Material linear-elastisch. Allen Berechnungen liegt der im folgenden Abschnitt beschriebene Ansatzraum  $\mathcal{S}_{\text{ps}}^{p_\xi, p_\eta}(\Omega_{\text{st}}^q)$  zugrunde. Drei unterschiedliche Diskretisierungen werden auf das Problem angewandt:

Im ersten Schritt kommt die adaptive  $h$ -Version für  $p = 1$  und  $p = 2$  zum Einsatz. Die Ergebnisse stammen aus einer Berechnungsreihe auf Finite-Element-Netzen mit 12, 24, 260, 1131 und 2338 Elementen. Einige sind exemplarisch in Abbildung 4.3 dargestellt. Auf Basis einer expliziten Fehlerschätzung [50] sind sie mithilfe des am Lehrstuhl für Bauinformatik der Technischen Universität München entwickelten Freivernetzers DO\_MESH [87] generiert worden.

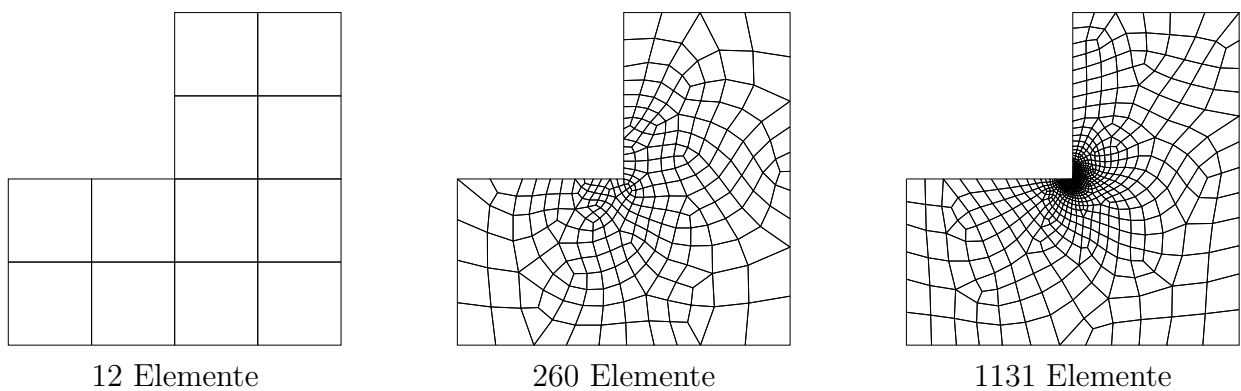


Abbildung 4.3: Adaptive Netze zur Berechnung mit der  $h$ -Version

Der nächste Schritt wendet die uniforme  $p$ -Version auf geometrisch verfeinerten Netze mit 9, 15, 21 und 27 Elementen an. Abbildung 4.4 dokumentiert die hierarchische Abstufung des Berechnungsgitters in Richtung der Singularität, deren Progressionsfaktor in Anlehnung an

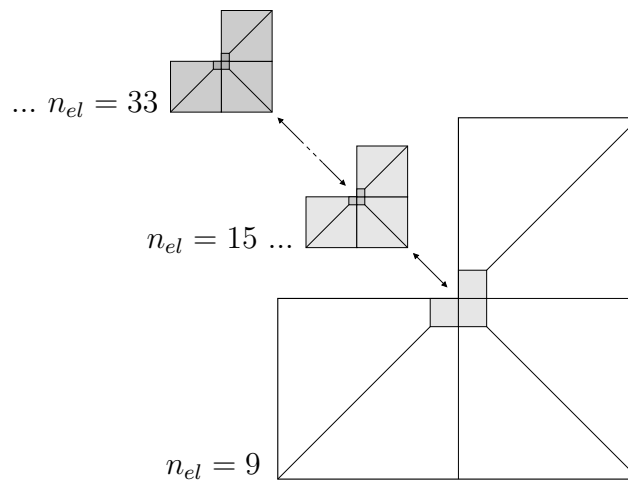


Abbildung 4.4: Geometrisch verfeinertes Netz zur Analyse mit der  $p$ - und  $hp$ -Version

[96] zu 0.15 gewählt wurde. Der Polynomgrad der Ansatzfunktionen variiert von  $p = 1, \dots, 20$ .

Im letzten Schritt diskretisiert die  $hp$ -Version das L-förmige Gebiet. Die dazu verwendeten Netze entsprechen denen der uniformen  $p$ -Version,  $n_{el} = 9, 15, 21, 27, 33$ . (vgl. Abbildung 4.4) Der Polynomgrad der  $hp$ -Version ist wie folgt verteilt: Elemente, die mit einem Knoten die Singularität treffen, sind durch den kleinsten Ansatz  $p_{\min} = 1$  diskretisiert. Mit dem Abstand zum singulären Punkt wächst  $p$  jeweils um eins. Die Referenzlösung stammt aus einer Berechnung mit  $p = 14$  auf einem Netz aus 1149 Elementen und einer korrespondierenden Anzahl an 451 696 Freiheitsgraden. Zu seiner Generierung wurde das  $h$ -adaptive Netz mit 1131 Elementen in drei Schritten weiter zur Singularität hin verfeinert.

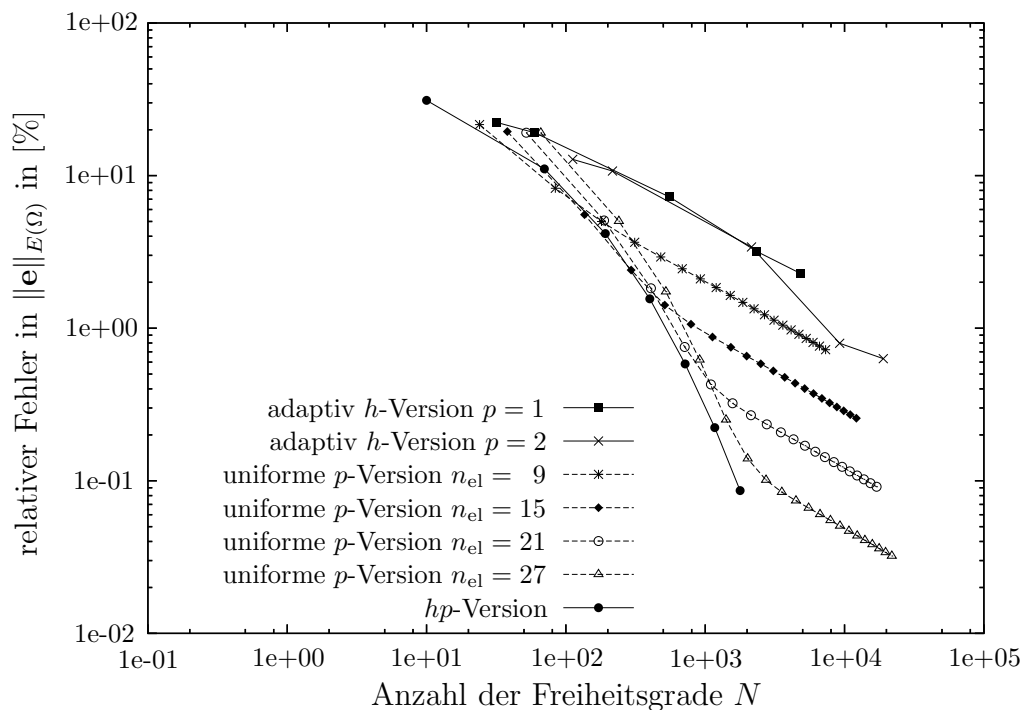


Abbildung 4.5: Relativer Fehler in der Energienorm  $\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega)}$  in [%] in Abhängigkeit der Anzahl der Freiheitsgrade für  $h$ -,  $p$ - und  $hp$ -Version

Abbildung 4.5 zeigt die Ergebnisse. Der relative Fehler in der Energienorm  $\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega)}$  in [%] ist gegenüber der Anzahl an Freiheitsgraden in doppeltlogarithmischem Maßstab aufgetragen. Die zuvor beschriebenen diskretisierungs- und problemabhängigen Konvergenzraten werden anhand des Beispiels bestätigt. Sowohl algebraische und exponentielle Konvergenz als auch die Rate, die zunächst exponentiell — asymptotisch aber algebraisch konvergiert, sind ablesbar.

## 4.3 Hierarchische Ansatzfunktionen für Elemente hoher Ordnung

Um eine höhere Genauigkeit bei der Finite-Element-Berechnung zu erzielen, arbeitet die  $p$ -Version bei kleiner Elementanzahl mit hohem Polynomgrad der Ansatzfunktionen. Hierbei bietet ein hierarchischer Aufbau der Ansatzfunktionen besondere Vorteile.

Die Idee:

*Eine Familie von Ansatzfunktionen sei so konstruiert, dass alle Ansatzfunktionen niedrigerer Ordnung in der Menge der Ansatzfunktionen höherer Ordnung enthalten sind.*

Der fundamentale Unterschied zur Standardbasis wird zunächst in Abschnitt 4.3.1 anhand der eindimensionalen hierarchischen Ansatzfunktionen erläutert. Ihnen liegt die von SZABÓ und BABUŠKA [96] eingeführte Basis zugrunde.

### 4.3.1 Die eindimensionale hierarchische Basis

Im zweiknotigen eindimensionalen Standardelement  $\Omega_{\text{st}} = [-1, 1]$  entsprechen die in den Gleichungen (4.42) und (4.43) definierten ersten beiden Ansatzfunktionen  $N_1(\xi)$  und  $N_2(\xi)$  den üblichen linearen Ansatzfunktionen, wie man sie von der  $h$ -Version der Finite-Element-Methode kennt. Sie sind sowohl Teil der Standardbasis als auch Teil der hierarchischen Basis. (vgl. Abbildung 4.6, links bzw. rechts) Es handelt sich dabei um Knotenansatzfunktionen, *nodal modes*, die jeweils an einem Knoten den Wert 1 annehmen und am anderen Knoten verschwinden.

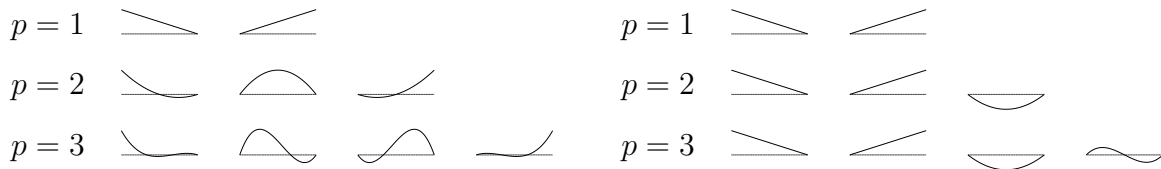


Abbildung 4.6: Eindimensionale Standard- und hierarchische Ansatzfunktionen für  $p = 1, 2, 3$

Die höheren Ansatzfunktionen der Standardbasis (Abbildung 4.6, links) sind durch LAGRANGE-Polynome definiert. Sie zeichnen sich durch die Eigenschaft aus, an einem der im Intervall  $[-1, 1]$  äquidistant verteilten Knoten den Wert 1, an allen übrigen den Wert 0 anzunehmen. Von dieser „Knotensichtweise“ löst sich das hierarchische Konzept völlig. Bei Wahl eines Ansatzes  $p > 1$  wird der bestehende Ansatzraum der linearen Funktionen  $N_1(\xi)$  und  $N_2(\xi)$

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (4.42)$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (4.43)$$

$$N_i(\xi) = \phi_{i-1}(\xi), \quad i = 3, 4, \dots, p + 1 \quad (4.44)$$

um jeweils eine Ansatzfunktion  $N_i(\xi)$ ,  $i = 3, 4, \dots$ , deren Polynomgrad mit dem gewählten Ansatz korrespondiert, erweitert (siehe Gleichung (4.44)).

$$N_i(-1) = N_i(1) = 0, \quad i = 3, 4, \dots \quad (4.45)$$

Weil solch höhere Moden nur im Elementinnern von Null verschiedene Werte liefern (vgl. Gleichung (4.45)) und an den Elementrändern verschwinden, nennt man sie auch *internal modes* oder *bubble modes*. Die Polynome  $\phi_j(\xi)$  entstehen durch Integration der bekannten LEGENDRE-Polynome.

$$\phi_j(\xi) = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^{\xi} L_{j-1}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{4j-2}} (L_j(\xi) - L_{j-2}(\xi)), \quad j = 2, 3, \dots \quad (4.46)$$

LEGENDRE-Polynome  $\{L_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  sind Lösung der LEGENDRE-Differentialgleichung

$$((1-x^2)y')' + n(n+1)y = 0, \quad x \in (-1, 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.47)$$

und entwickeln sich entweder durch Anwendung der RODRIGUEZ-Formel [107]

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad x \in (-1, 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.48)$$

oder aus der Rekursionsformel von BONNET [96].

$$L_n(x) = \frac{1}{n} [(2n-1)xL_{n-1}(x) - (n-1)L_{n-2}(x)], \quad x \in (-1, 1), \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (4.49)$$

So ergeben sich die ersten neun LEGENDRE-Polynome wie folgt:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, \\ L_1(x) &= x, \\ L_2(x) &= 3/2 x^2 - 1/2, \\ L_3(x) &= 5/2 x^3 - 3/2 x, \\ L_4(x) &= 35/8 x^4 - 15/4 x^2 + 3/8, \\ L_5(x) &= 63/8 x^5 - 35/4 x^3 + 15/8 x, \\ L_6(x) &= 231/16 x^6 - 315/16 x^4 + 105/16 x^2 - 5/16, \\ L_7(x) &= 429/16 x^7 - 693/16 x^5 + 315/16 x^3 - 35/16 x, \\ L_8(x) &= 6435/128 x^8 - 3003/32 x^6 + 3465/64 x^4 - 315/32 x^2 + 35/128 \end{aligned} \quad (4.50)$$

Im Integrationsbereich  $(-1, 1)$  sind sie orthogonal:

$$\int_{-1}^1 L_n(x) L_m(x) dx = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & \text{falls } n = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.51)$$

Jede Funktion, die mithilfe der Standardbasis darstellbar ist, kann auch durch die hierarchische Basis beschrieben werden. Letztere ist der üblichen Standardbasis in vielerlei Hinsicht überlegen. Die Hierarchie überträgt sich bei entsprechender Nummerierung der Freiheitsgrade auf die Elementmatrizen und ermöglicht in der Lösungsphase die Kondensation der inneren Moden: ein Effizienzgewinn. Darüber hinaus verbessert die hierarchische Basis die Kondition der Steifigkeitsmatrix, so dass iterative Löser schneller konvergieren.

### 4.3.2 Hierarchische Ansatzfunktionen für vierknotige Elemente

Die Konstruktion der zweidimensionalen Ansatzfunktionen folgt der von SZABÓ und BABUŠKA [96] eingeführten Basis und setzt auf einer vierknotigen Elementformulierung auf. Das entsprechende zweidimensionale Standardelement  $\Omega_{\text{st}}^q = [(-1, 1) \times (-1, 1)]$  ist in Abbildung 4.7 dargestellt.

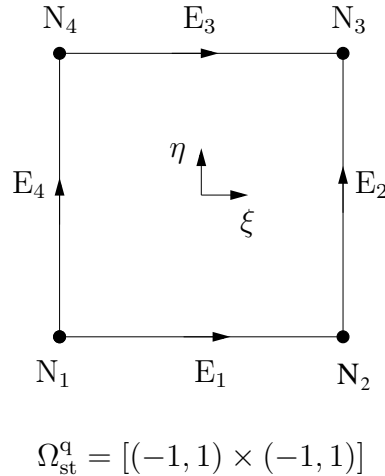


Abbildung 4.7: Definition von Knoten und Kanten im vierknotigen Standardelement

Bildet man das Tensor Produkt der eindimensionalen hierarchischen Basis, entstehen automatisch die zweidimensionalen Ansatzfunktionen. Es gibt drei Typen von Funktionen.

1. **Knotenmoden** (*nodal modes*):

Wie im eindimensionalen Fall entsprechen die Knotenmoden

$$N_{1,1}^{N_i}(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta), \quad i = 1, \dots, 4 \quad (4.52)$$

den üblichen bilinearen Ansatzfunktionen isoparametrischer, vierknotiger Elemente. Das Koordinatenpaar  $(\xi_i, \eta_i)$  bezeichnet die lokalen Koordinaten des  $i$ -ten Knotens. Exemplarisch zeigt Abbildung 4.8 die Ansatzfunktion für Knoten 1.

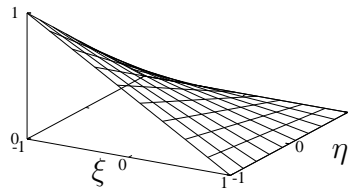


Abbildung 4.8: Knoten 1:  $N_{1,1}^{N_1}(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta)$

## 2. Kantenmoden (*edge modes*):

Die Kantenmoden haben die Eigenschaft, auf jeweils einer Elementkante ungleich Null zu sein und auf allen anderen Kanten zu verschwinden. Sie werden als Produkt einer eindimensionalen hierarchischen Ansatzfunktion längs einer Kante und einer linearen Ansatzfunktion senkrecht zur selben Kante berechnet.

$$N_{i,1}^{E_1}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta)\phi_i(\xi) \quad (4.53)$$

Moden der Kante  $E_1$  sind durch Gleichung (4.53) gegeben. Exemplarisch ist für  $i = 2$  auf der Kante 1 die entsprechende Ansatzfunktion in Abbildung 4.9 dargestellt.

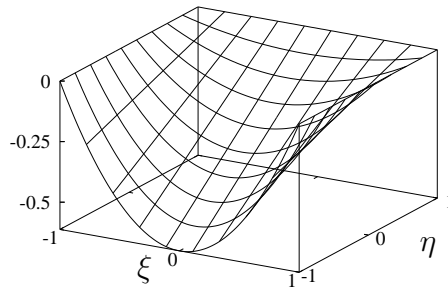


Abbildung 4.9: Kante 1 ( $i = 2$ ):  $N_{2,1}^{E_1}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta)\phi_2(\xi)$

## 3. Innere Moden (*internal modes*):

Innere Moden sind durch Gleichung (4.54) beschriebene Ansatzfunktionen, die nur im Elementinneren von Null verschiedene Werte annehmen, an den Elementkanten verschwinden und daher rein lokal sind.

$$N_{i,j}^{\text{int}}(\xi, \eta) = \phi_i(\xi)\phi_j(\eta) \quad (4.54)$$

Exemplarisch zeigt Abbildung 4.10 den inneren Mode für  $i = j = 2$ .

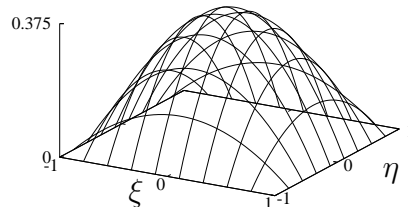
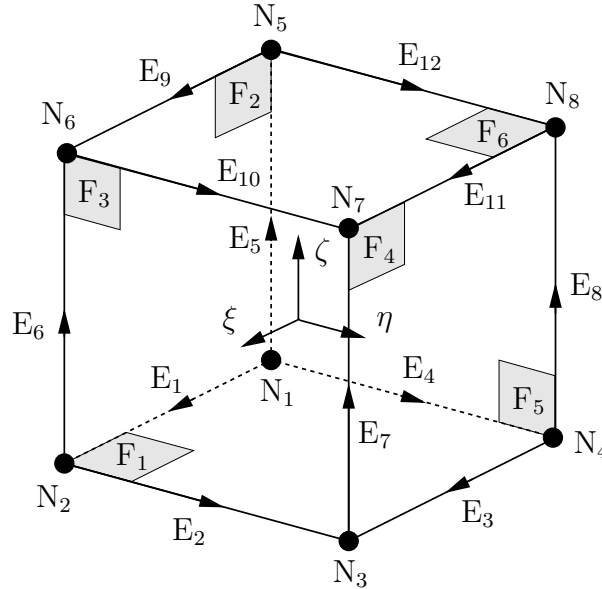


Abbildung 4.10: Innerer Mode ( $i = j = 2$ ):  $N_{2,2}^{\text{int}}(\xi, \eta) = \phi_2(\xi)\phi_2(\eta)$

Die Indizes  $i, j$  der Ansatzfunktionen korrespondieren mit den Polynomgraden  $p_\xi$  und  $p_\eta$  der lokalen Richtungen  $\xi, \eta$  des Standardelementes  $\Omega_{\text{st}}^q$ .

### 4.3.3 Hierarchische Ansatzfunktionen für Hexaederelemente

Auch in drei Raumdimensionen geht die Implementation der hierarchischen Basis auf die von SZABÓ und BABUŠKA [96] eingeführten Ansatzfunktionen zurück und basiert auf einer Hexaederelementformulierung. Das entsprechende Standardelement ist in Abbildung 4.11 dargestellt.



$$\Omega_{st}^h = [(-1, 1) \times (-1, 1) \times (-1, 1)]$$

Abbildung 4.11: Definition von Knoten und Kanten und Flächen im Hexaederelement

Die hierarchische Basis ergibt sich als natürliche Verallgemeinerung des zweidimensionalen Falls, um die lokale Koordinate  $\zeta$  erweitert. Man unterscheidet vier Typen von Ansatzfunktionen.

1. **Knotenmoden** (*nodal modes*):

Die acht Knotenmoden (4.55) entsprechen den trilinearen Ansatzfunktionen des isoparametrischen achtknotigen Standardelementes.  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  sind die lokalen Koordinaten des Knotens  $i$ .

$$N_{1,1,1}^{N_i}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta), \quad i = 1, \dots, 8 \quad (4.55)$$

2. **Kantenmoden** (*edge modes*):

Sie sind jeweils einer der zwölf Elementkanten zugeordnet und verschwinden an allen anderen Kanten. Die Ansatzfunktionen der Kante  $E_1$  (vgl. Abbildung 4.11) sind durch Gleichung (4.56) gegeben.

$$N_{i,1,1}^{E_1}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4} (1 - \eta)(1 - \zeta)\phi_i(\xi) \quad (4.56)$$

### 3. Flächenmoden (*face modes*):

Die Flächenmoden entstehen durch Multiplikation zweier eindimensionaler hierarchischer Ansatzfunktionen — auf der betrachteten Fläche Werte ungleich Null liefernd — mit einer linearen Ansatzfunktion senkrecht zur selben Ebene. Infolgedessen sind die Funktionen auf jeweils einer der sechs Elementflächen von Null verschieden. Die Ansatzfunktionen von Fläche  $F_1$  stellen sich wie folgt dar:

$$N_{i,j,1}^{F_1}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}(1 - \zeta)\phi_i(\xi)\phi_j(\eta) \quad (4.57)$$

### 4. Innere Moden (*internal modes*):

Sie sind analog zum ein- und zweidimensionalen Fall rein lokal und verschwinden an den Flächen des Hexaederelementes.

$$N_{i,j,k}^{\text{int}}(\xi, \eta, \zeta) = \phi_i(\xi)\phi_j(\eta)\phi_k(\zeta) \quad (4.58)$$

Die Indizes  $i, j, k$  der Ansatzfunktionen bezeichnen die Polynomgrade  $p_\xi, p_\eta$  und  $p_\zeta$  bzgl. der lokalen Richtungen  $\xi, \eta, \zeta$  des Standardelementes  $\Omega_{\text{st}}^{\text{h}}$ .

## 4.3.4 Die Ansatzräume der Diskretisierung

Der Ansatzraum  $\mathcal{S}$  einer Finite-Element-Berechnung wird durch einen Satz von Funktionen aufgespannt, für die Bedingung (4.9) gilt.

- Im eindimensionalen Fall korrespondiert der Grad  $p$  des Ansatzraumes  $\mathcal{S}_{\text{ps}}^{p_\xi}(\Omega_{\text{st}})$  direkt mit dem Polynomgrad der Ansatzfunktion in  $\xi$ -Richtung.
- Im zweidimensionalen Fall hängt die Beschreibung der Ansatzräume von  $\xi$  und  $\eta$  ab. SZABÓ und BABUŠKA [96] unterscheiden den sogenannten *trunk space*  $\mathcal{S}_{\text{ts}}^{p_\xi, p_\eta}(\Omega_{\text{st}}^{\text{q}})$  von dem *tensor product space*  $\mathcal{S}_{\text{ps}}^{p_\xi, p_\eta}(\Omega_{\text{st}}^{\text{q}})$ . Wie sich diese unterschiedlichen Erzeugendensysteme zusammensetzen, lässt sich anhand des in Abbildung 4.12 dargestellten PASCALSchen Dreiecks besonders anschaulich erklären.

Der *tensor product space*  $\mathcal{S}_{\text{ps}}^{p_\xi, p_\eta}(\Omega_{\text{st}}^{\text{q}})$ , der auch unter dem Namen *voller Ansatzraum* bekannt ist, wird durch die Polynome gebildet, die auf dem zweidimensionalen Standardelement  $\Omega_{\text{st}}^{\text{q}} = [(-1, 1) \times (-1, 1)]$  leben und durch die Menge der Monome

$$\xi^i \eta^j \quad \text{mit} \quad i = 0, 1, \dots, p_\xi, \quad j = 0, 1, \dots, p_\eta$$

aufgespannt werden. Im Gegensatz dazu wird der Ansatzraum  $\mathcal{S}_{\text{ts}}^{p_\xi, p_\eta}(\Omega_{\text{st}}^{\text{q}})$  durch die Menge der Monome

$$\xi^i \eta^j \quad \text{für} \quad i = 0, \dots, p_\xi, \quad j = 0, \dots, p_\eta, \quad i + j = 0, \dots, \max\{p_\xi, p_\eta\}$$

aufgespannt, wobei gilt:

$$\begin{array}{lll} \xi \eta & \text{für} & p_\xi = p_\eta = 1 \\ \xi^{p_\xi} \eta & \text{für} & p_\xi \geq 2 \\ \xi \eta^{p_\eta} & \text{für} & p_\eta \geq 2 \end{array}$$



Zum Vergleich stehen sich in Abbildung 4.12 die Ansatzräume  $\mathcal{S}_{\text{ts}}^{3,3}(\Omega_{\text{st}}^{\text{q}})$  und  $\mathcal{S}_{\text{ps}}^{3,3}(\Omega_{\text{st}}^{\text{q}})$  gegenüber.

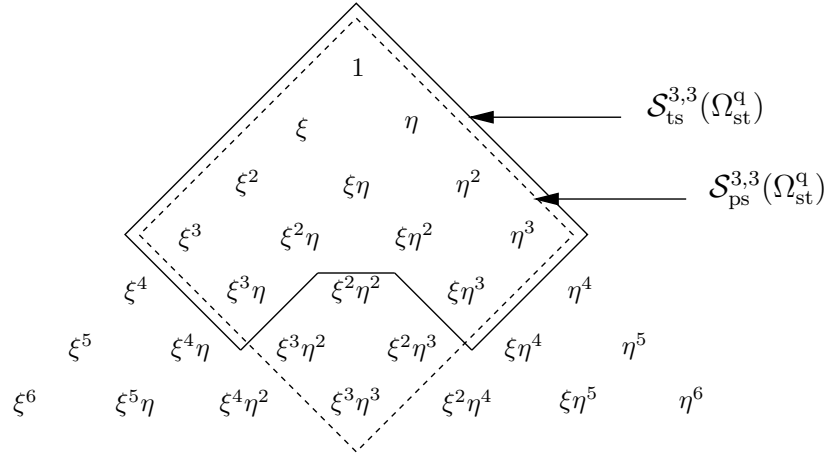


Abbildung 4.12: Ansatzräume *trunk space*  $\mathcal{S}_{\text{ts}}^{3,3}(\Omega_{\text{st}}^{\text{q}})$  und *tensor product space*  $\mathcal{S}_{\text{ps}}^{3,3}(\Omega_{\text{st}}^{\text{q}})$

- Im dreidimensionalen Fall unterscheidet man den *trunk space*  $\mathcal{S}_{\text{ts}}^{p_{\xi}, p_{\eta}, p_{\zeta}}(\Omega_{\text{st}}^{\text{h}})$ , den *tensor product space*  $\mathcal{S}_{\text{ps}}^{p_{\xi}, p_{\eta}, p_{\zeta}}(\Omega_{\text{st}}^{\text{h}})$  und den *anisotropic tensor product space*  $\mathcal{S}^{p, p, q}(\Omega_{\text{st}}^{\text{h}})$ . Ihre Definition geht wiederum auf SZABÓ und BABUŠKA zurück und ist in [96] im Detail beschrieben.

Die Polynomgrade  $p_{\xi}$ ,  $p_{\eta}$  und  $p_{\zeta}$  der Ansatzräume  $\mathcal{S}_{\text{ts}}^{p_{\xi}, p_{\eta}, p_{\zeta}}(\Omega_{\text{st}}^{\text{h}})$  und  $\mathcal{S}_{\text{ps}}^{p_{\xi}, p_{\eta}, p_{\zeta}}(\Omega_{\text{st}}^{\text{h}})$  sind bzgl. ihrer korrespondierenden lokalen Richtungen  $\xi$ ,  $\eta$  und  $\zeta$  variabel und individuell wählbar. Die beiden Ansatzräume unterscheiden sich im Aufbau der Flächenmoden und inneren Moden. Auch in drei Raumdimensionen enthält der *volle* Ansatzraum  $\mathcal{S}_{\text{ps}}^{p_{\xi}, p_{\eta}, p_{\zeta}}(\Omega_{\text{st}}^{\text{h}})$  mehr Funktionen als der *reduzierte* Ansatzraum  $\mathcal{S}_{\text{ts}}^{p_{\xi}, p_{\eta}, p_{\zeta}}(\Omega_{\text{st}}^{\text{h}})$ .

Der sogenannte *anisotropic tensor product space*  $\mathcal{S}^{p, p, q}(\Omega_{\text{st}}^{\text{h}})$  verzichtet auf eine Unterscheidung zwischen den Polynomgraden  $p_{\xi}$  und  $p_{\eta}$ , es gilt  $p_{\xi} = p_{\eta} = p$ . Höhere Ansatzfunktionen, die entsprechend durch  $p$  geprägt sind, korrespondieren mit den Moden der Kanten  $E_i$  für  $i = 1 \dots 4, 9 \dots 12$ , der Flächen  $F_1$  und  $F_6$  sowie allen inneren Moden. So entsprechen die Ansatzfunktionen auf den Flächen  $F_1$  und  $F_6$  denen des *trunk space*  $\mathcal{S}_{\text{ts}}^{p_{\xi}, p_{\eta}, p_{\zeta}}(\Omega_{\text{st}}^{\text{h}})$  für  $p_{\xi} = p_{\eta} = p$ . Der Polynomgrad  $p_{\zeta} = q$  bestimmt die höheren Ansatzfunktionen in die noch verbleibende dritte Richtung  $\zeta$ .  $q$  nimmt Einfluss auf die Ansatzfunktionen der Kanten  $E_i$  für  $i = 5 \dots 8$ , auf die Ansatzfunktionen der Flächen  $F_i$  für  $i = 2 \dots 5$  sowie alle inneren Moden. Die Ansatzfunktionen der Flächen  $F_i$  mit  $i = 2 \dots 5$  gleichen denen des *tensor product space*  $\mathcal{S}_{\text{ps}}^{p_{\xi}, p_{\eta}, p_{\zeta}}(\Omega_{\text{st}}^{\text{h}})$  für  $p_{\xi} = p_{\eta} = p$  und  $p_{\zeta} = q$ .

Für einen konstanten Polynomgrad  $p = q = p_{\xi} = p_{\eta} = p_{\zeta}$  zählt der *trunk space*  $\mathcal{S}_{\text{ts}}^{p_{\xi}, p_{\eta}, p_{\zeta}}(\Omega_{\text{st}}^{\text{h}})$  die kleinste, der *anisotropic tensor product space*  $\mathcal{S}^{p, p, q}(\Omega_{\text{st}}^{\text{h}})$  eine mittlere und der *tensor product space*  $\mathcal{S}_{\text{ps}}^{p_{\xi}, p_{\eta}, p_{\zeta}}(\Omega_{\text{st}}^{\text{h}})$  die höchste Zahl an Ansatzfunktionen.

Die Elemente hoher Ordnung sind nicht nur flexibel bzgl. der lokalen Richtungen  $\xi$ ,  $\eta$  und  $\zeta$ , sondern auch hinsichtlich der Verschiebungsvariablen  $u_x$ ,  $u_y$  und  $u_z$ . Diese im Folgenden angesprochene Flexibilität ist in DÜSTER [29] und DÜSTER et al. [31] detailliert beschrieben. Gleichung (4.59) zeigt das Beispiel zur Definition eines sogenannten

Polynomgradtemplates  $\mathbf{p}$  mit drei unabhängigen Variablen  $\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z]^T$ .

$$\mathbf{p} = \begin{matrix} & u_x & u_y & u_z \\ \xi & 1 & 4 & 7 \\ \eta & 2 & 5 & 8 \\ \zeta & 3 & 6 & 9 \end{matrix} \quad (4.59)$$

Bei Verwendung des *trunk space*  $\mathcal{S}_{\text{ts}}^{p_\xi, p_\eta, p_\zeta}(\Omega_{\text{st}}^h)$  gibt dieses Template das Verschiebungsfeld  $u_x \in \mathcal{S}_{\text{ts}}^{1,2,3}(\Omega_{\text{st}}^h)$ ,  $u_y \in \mathcal{S}_{\text{ts}}^{4,5,6}(\Omega_{\text{st}}^h)$  und  $u_z \in \mathcal{S}_{\text{ts}}^{7,8,9}(\Omega_{\text{st}}^h)$  vor. Für die anderen Ansatzräume wird entsprechend verfahren. Jedes einzelne Element kann ein eigenes *Polynomgradtemplate* erhalten. Die Kontinuität an Elementflächen und -kanten wird dadurch sichergestellt, dass jeweils der höhere Polynomgrad die Definition der Moden an Elementübergängen dominiert.

Auf der Basis dieser Überlegungen ist die Verwendung einer Hexaederelementformulierung im Vergleich zu Tetraeder- oder Pentaederelementformulierungen besonders effizient. Neben einer intuitiven Umsetzung der numerischen Integration führt eine Diskretisierung durch Hexaederelemente zu hoher Genauigkeit. Die Analyse dünnwandiger Strukturen, bei denen eine lokale Variable mit der Dickenrichtung der Struktur korrespondiert, ist ausgesprochen zuverlässig. Hohe Effizienz ist möglich, weil der Polynomgrad in Dickenrichtung unabhängig von denen in Richtung der Mittelfläche wählbar ist. Eingehende Studien zu dieser Fragestellung werden in [29], [31], [76] und [98] diskutiert.

Die numerischen Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit basieren maßgeblich auf Berechnungen mit dem *tensor product space*  $\mathcal{S}_{\text{ps}}^{p_\xi, p_\eta}(\Omega_{\text{st}}^q)$  bzw.  $\mathcal{S}_{\text{ps}}^{p_\xi, p_\eta, p_\zeta}(\Omega_{\text{st}}^h)$ . Der *volle* Ansatzraum, den Experten auch liebevoll *killer space* nennen, beansprucht selbstverständlich höhere Rechenzeiten, insbesondere bei der numerischen Integration. Eine Methode, sie zu beschleunigen, wird in Abschnitt 4.6 vorgestellt.

## 4.4 Konzept zur Abbildung von Elementen hoher Ordnung

Die *h*-Version der Methode der finiten Elemente senkt den Diskretisierungsfehler durch globale oder lokale Netzverfeinerung. Parallel dazu wird die Randgeometrie einer Struktur automatisch immer genauer erfasst. Strebt der Elementhalbmesser  $h$  gegen Null, nähert sich die approximierte der exakten Geometrie.

Im Unterschied dazu erreicht die *p*-Version der Finite-Element-Methode durch globale oder lokale Erhöhung des Polynomgrades  $p$  der Ansatzfunktionen Konvergenz gegen die exakte Lösung. Die Elementgröße bleibt fix. Demgemäß bedarf es einer von der Anzahl der Elemente unabhängigen Geometriebeschreibung. Ein Werkzeug, das dieser Forderung gerecht wird, ist die Blending-Funktionen-Methode, die erstmals 1973 von GORDON und HALL [41, 42] vorgestellt wurde. Sie macht die Beschreibung beliebig berandeter finiter Elemente unter Berücksichtigung der exakten Geometrie möglich. Die Idee der Abbildung ist für den zwei- und dreidimensionalen Fall Gegenstand der Abschnitte 4.4.1 und 4.4.2.

Abschnitt 4.4.3 nimmt eine grobe Klassifizierung verschiedener Abbildungskonzepte vor und diskutiert deren Stärken und Schwächen.

### 4.4.1 Zweidimensionale Abbildungsfunktion

Als Basis der folgenden Erläuterungen zeigt Abbildung 4.13 die Transformation  $\mathbf{Q}^e(\boldsymbol{\xi}) = [Q_x^e(\boldsymbol{\xi}), Q_y^e(\boldsymbol{\xi})]^T$  eines vierknotigen Standardelementes  $\Omega_{\text{st}}^q = [(-1, 1) \times (-1, 1)]$  in lokalen Koordinaten  $\boldsymbol{\xi} = [\xi, \eta]^T$  auf ein allgemeines vierknotiges Element in globalen Koordinaten  $\mathbf{x} = [x, y]^T$ . Seine vier Knoten  $\mathbf{X}_i = [X_i, Y_i]^T$  mit  $i = 1, \dots, 4$  und seine vier Kanten  $\mathbf{E}_i = [E_{ix}, E_{iy}]^T$  mit  $i = 1, \dots, 4$  definieren die Elementgeometrie im  $\mathbb{R}^2$ .

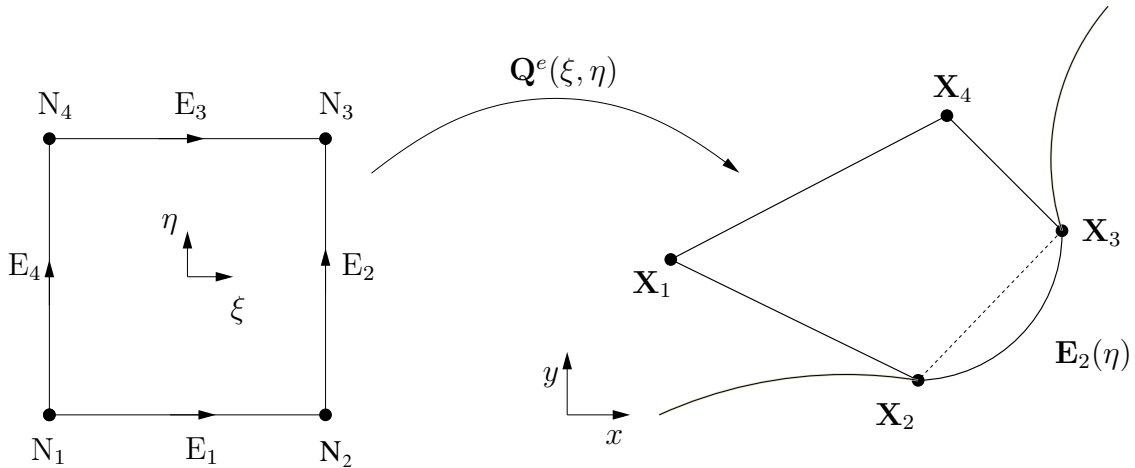


Abbildung 4.13: Abbildungsfunktion vierknotiger Elemente

Geht man davon aus, dass die in Abschnitt 3.2.2.3 besprochenen Transformationen zwischen verschiedenen Parameterbereichen der Kurvengeometrie möglich sind, gilt folgende Aussage:

- Die Kanten  $\mathbf{E}_i(r)$  mit  $i = 1 \dots 4$  lassen sich als parametrisierte Kurven der Parameter  $\xi$  und  $\eta$ , für die  $\{\xi, \eta\} \in [-1, 1]$  gilt, durch  $\mathbf{E}_i(r) = [E_{ix}(r), E_{iy}(r)]^T$  darstellen, wobei

$$\begin{aligned} r &= \xi & \text{für } i &= 1, 3 \\ r &= \eta & \text{für } i &= 2, 4. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Vor diesem Hintergrund beschreibt Gleichung (4.61) die allgemeine Abbildung des Standardelementes auf das geometrische Element. Darin entspricht der erste Term der bilinearen Standardabbildung eines isoparametrischen Vierknotenelementes, bei der die Ansatzfunktionen  $N_{1,1}^{N_i}(\xi, \eta)$  durch (4.52) gegeben sind.

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}^e(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \sum_{i=1}^4 N_{1,1}^{N_i}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{X}_i + \sum_{i=1}^4 \mathbf{e}_i(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \quad (4.61)$$

Der zweite Term in Gleichung (4.61), der auch als Kantenblendingterm bezeichnet wird, berücksichtigt — falls erforderlich — gekrümmte Kantenverläufe des Elementes. Wie diese Terme konstruiert sind, wird im Folgenden am Beispiel der lokalen Kante  $E_2(\eta)$  erklärt, deren Bild Teil einer beliebig gekrümmten Kurve durch die Punkte  $\mathbf{X}_2$  und  $\mathbf{X}_3$  — geometrisch definiert über  $\mathbf{E}_2(\eta) = [E_{2x}(\eta), E_{2y}(\eta)]^T$  — ist (vgl. Abbildung 4.13).

$$\mathbf{e}_2(\xi, \eta) = \left[ \mathbf{E}_2(\eta) - \left( \frac{1-\eta}{2} \mathbf{X}_2 + \frac{1+\eta}{2} \mathbf{X}_3 \right) \right] \frac{1+\xi}{2} \quad (4.62)$$

Der in eckigen Klammern berechnete Teil von  $\mathbf{e}_2(\xi, \eta)$  entspricht der Differenz der gekrümmten Kante  $\mathbf{E}_2(\eta) = [E_{2x}(\eta), E_{2y}(\eta)]^T$  und der „gedachten“ geradlinigen Kante zwischen den Knoten  $\mathbf{X}_2$  und  $\mathbf{X}_3$  (vgl. Gleichung 4.62). Multiplikation mit  $[(1+\xi)/2]$  stellt sicher, dass diese Differenz entlang der Kante zwei mit  $(\xi = 1)$  — an der  $[(1+\xi)/2] = 1$  gilt — vollständig berücksichtigt wird, zur gegenüberliegenden Kante vier mit  $(\xi = -1)$  — an der  $[(1+\xi)/2]$  verschwindet — linear ausgeblendet wird.

Substituiert man die in Gleichung (4.61) gegebenen Kantenterme  $\mathbf{e}_i(\xi, \eta)$  durch die in Anhang B.1 definierten Ausdrücke, erhält man zusammenfassend Gleichung (4.63). Im Rahmen der Substitution entsteht das Minuszeichen als Faktor vor den linearen Anteilen der Abbildungsfunktion.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{Q}^e(\xi, \eta) & (4.63) \\ &= \frac{1}{2} \left[ (1-\eta)\mathbf{E}_1(\xi) + (1+\xi)\mathbf{E}_2(\eta) + (1+\eta)\mathbf{E}_3(\xi) + (1-\xi)\mathbf{E}_4(\eta) \right] \\ &\quad - [ N_{1,1}^{N_1}(\xi, \eta) \mathbf{X}_1 + N_{1,1}^{N_2}(\xi, \eta) \mathbf{X}_2 + N_{1,1}^{N_3}(\xi, \eta) \mathbf{X}_3 + N_{1,1}^{N_4}(\xi, \eta) \mathbf{X}_4 ] \end{aligned}$$

#### 4.4.2 Dreidimensionale Abbildungsfunktion

Ganz entsprechend verfährt man im dreidimensionalen Fall. Die Formulierung wird lediglich um die Flächenterme erweitert. Die dreidimensionale Blending-Funktionen-Methode für Hexaederelemente wird ausführlich in [49], [19] und [16] diskutiert. Abbildung 4.14 motiviert die Erläuterungen zur Transformation  $\mathbf{Q}^e(\boldsymbol{\xi}) = [Q_x^e(\boldsymbol{\xi}), Q_y^e(\boldsymbol{\xi}), Q_z^e(\boldsymbol{\xi})]^T$  des Standardelementes  $\Omega_{\text{st}}^h = [(-1, 1) \times (-1, 1) \times (-1, 1)]$  in lokalen Koordinaten  $\boldsymbol{\xi} = [\xi, \eta, \zeta]^T$  auf ein allgemeines achtknotiges Element in globalen Koordinaten  $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$ . Die Elementgeometrie im  $\mathbb{R}^3$  ist durch die acht Knotenkoordinaten  $\mathbf{X}_i = [X_i, Y_i, Z_i]^T$  mit  $i = 1, \dots, 8$ , die zwölf Kanten  $\mathbf{E}_i = [E_{ix}, E_{iy}, E_{iz}]^T$ ,  $i = 1, \dots, 12$  und die sechs Flächen  $\mathbf{F}_i = [F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}]^T$ ,  $i = 1, \dots, 6$  definiert. Geht man davon aus, dass die in den Abschnitten 3.2.2.3 und 3.2.3.2 besprochenen Transformationen zwischen Parameterbereichen der Geometrie von Kurven und Flächen möglich sind, gelten folgende Aussagen:

- Die Kanten  $\mathbf{E}_i$  mit  $i = 1, \dots, 12$  lassen sich als parametrisierte Kurven der Parameter  $\xi, \eta$  und  $\zeta$ , für die  $\{\xi, \eta, \zeta\} \in [-1, 1]$  durch  $\mathbf{E}_i(r) = [E_{ix}(r), E_{iy}(r), E_{iz}(r)]^T$  darstellen, wobei

$$\begin{aligned} r &= \xi & \text{für } i = 1, 3, 9, 11 \\ r &= \eta & \text{für } i = 2, 4, 10, 12 \\ r &= \zeta & \text{für } i = 5, 6, 7, 8. \end{aligned} \quad (4.64)$$

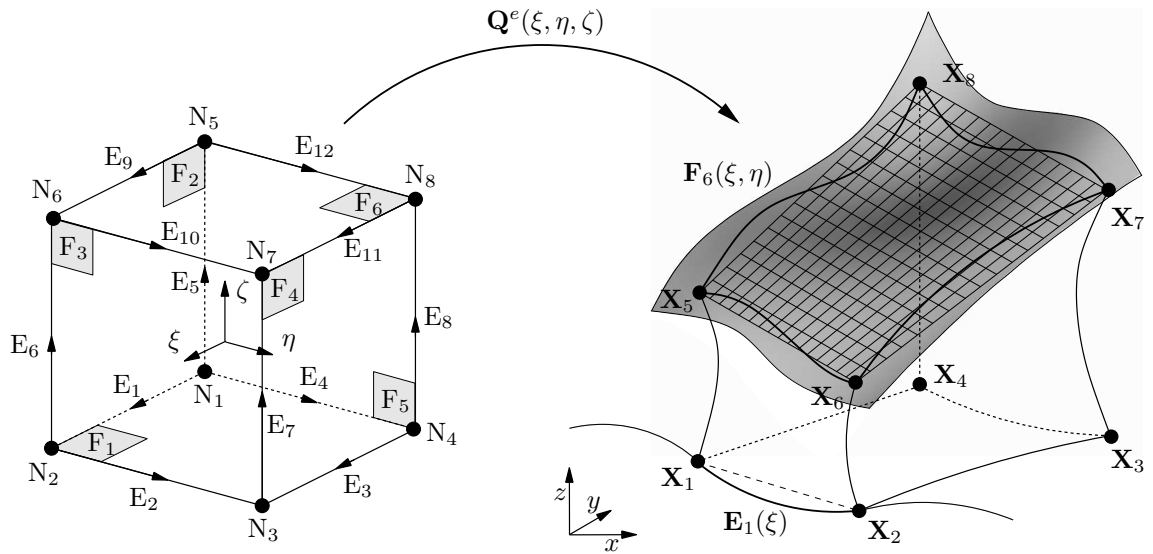


Abbildung 4.14: Abbildungsfunktion für Hexaederelemente

- Die Flächen  $\mathbf{F}_i$  mit  $i = 1, \dots, 6$  lassen sich als parametrisierte Flächen je zweier Parameter  $(\xi, \eta)$ ,  $(\xi, \zeta)$  bzw.  $(\eta, \zeta)$ , für die  $\{\xi, \eta, \zeta\} \in [-1, 1]$  gilt, darstellen durch  $\mathbf{F}_i(r, s) = [F_{ix}(r, s), F_{iy}(r, s), F_{iz}(r, s)]^T$ , wobei

$$\begin{aligned}
 (r, s) &= (\xi, \eta) && \text{für } i = 1, 6 \\
 (r, s) &= (\xi, \zeta) && \text{für } i = 2, 4 \\
 (r, s) &= (\eta, \zeta) && \text{für } i = 3, 5.
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

Vor diesem Hintergrund definiert Gleichung (4.66) die allgemeine Abbildung des Standardelementes auf das geometrische Element. Darin beschreibt der erste Term die trilineare Standardabbildung des isoparametrischen achtknotigen Hexaederelementes. Die Funktionen  $N_{1,1,1}^{N_i}(\xi, \eta, \zeta)$  entsprechen den zuvor eingeführten Ansatzfunktionen (4.55).

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}^e(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 N_{1,1,1}^{N_i}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{X}_i + \sum_{i=1}^6 \mathbf{f}_i(\xi, \eta, \zeta) - \sum_{i=1}^{12} \mathbf{e}_i(\xi, \eta, \zeta) \tag{4.66}$$

Der zweite Term in Gleichung (4.66) — auch als Flächenblendingterm bekannt — berücksichtigt gekrümmte Elementflächen. Sein Aufbau ist in Anhang B.2.2 ausführlich angegeben und wird hier exemplarisch anhand der Fläche 6 erläutert. Der in eckigen Klammern berechnete Ausdruck von  $\mathbf{f}_6(\xi, \eta, \zeta)$  (vgl. Gleichung (4.67)) entspricht der Differenz der gekrümmten Fläche  $\mathbf{F}_6(\xi, \eta) = [F_{6x}(\xi, \eta), F_{6y}(\xi, \eta), F_{6z}(\xi, \eta)]^T$  und der „gedachten“ bilinearen Fläche, die durch die Knoten  $\mathbf{X}_5, \mathbf{X}_6, \mathbf{X}_7$  und  $\mathbf{X}_8$  aufgespannt wird. (vgl. Abbildung 4.14) Dass diese Differenz von der Fläche 6 zur gegenüberliegenden Fläche 1 linear ausgeblendet wird, gewährleistet die Multiplikation mit dem Ausdruck  $[(1 + \zeta)/2]$ .

$$\mathbf{f}_6(\xi, \eta, \zeta) = \left[ \mathbf{F}_6(\xi, \eta) - \left( \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \mathbf{X}_5 + \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \mathbf{X}_6 + \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \mathbf{X}_7 + \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \mathbf{X}_8 \right) \right] \left( \frac{1+\zeta}{2} \right) \quad (4.67)$$

Der letzte Term in Gleichung (4.66) entspricht dem Kantenblending, das hier exemplarisch anhand der Kante 1 vorgeführt wird. Analog zum zweidimensionalen Fall bezeichnet auch in Gleichung (4.68) der Ausdruck in eckigen Klammern die Differenz zwischen der gekrümmten Kante  $\mathbf{E}_1(\xi) = [E_{1x}(\xi), E_{1y}(\xi), E_{1z}(\xi)]^T$  und der „gedachten“ geradlinigen Verbindung zwischen den Knoten  $\mathbf{X}_1$  und  $\mathbf{X}_2$ . Dass diese Differenz an allen der Kante  $\mathbf{E}_1(\xi)$  gegenüberliegenden Kanten mit gleichem lokalen Kantenparameter — also  $\mathbf{E}_3(\xi)$ ,  $\mathbf{E}_9(\xi)$  und  $\mathbf{E}_{11}(\xi)$  — verschwindet, stellen die Faktoren  $[(1-\eta)/2]$  und  $[(1-\zeta)/2]$  sicher.

$$\mathbf{e}_1(\xi, \eta, \zeta) = \left[ \mathbf{E}_1(\xi) - \left( \frac{1-\xi}{2} \mathbf{X}_1 + \frac{1+\xi}{2} \mathbf{X}_2 \right) \right] \left( \frac{1-\eta}{2} \right) \left( \frac{1-\zeta}{2} \right). \quad (4.68)$$

Jede Kante ist Teil zweier Flächen. Die korrespondierenden Anteile der Kantendifferenz tauchen entsprechend jeweils doppelt im Flächenblending auf. Die Kantenblendingterme werden daher subtrahiert.

Substituiert man die in Gleichung (4.66) gegebenen Kanten- und Flächenterme  $\mathbf{e}_i(\xi, \eta, \zeta)$  und  $\mathbf{f}_i(\xi, \eta, \zeta)$  durch die in Anhang B.2 definierten Ausdrücke, erhält man zusammenfassend Gleichung (4.69).

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{Q}^e(\xi, \eta, \zeta) \quad (4.69) \\ &= \frac{1}{2} \left[ (1-\zeta) \mathbf{F}_1(\xi, \eta) + (1-\eta) \mathbf{F}_2(\xi, \zeta) + (1+\xi) \mathbf{F}_3(\eta, \zeta) + \right. \\ &\quad \left. + (1+\eta) \mathbf{F}_4(\xi, \zeta) + (1-\xi) \mathbf{F}_5(\eta, \zeta) + (1+\zeta) \mathbf{F}_6(\xi, \eta) \right] \\ &\quad - \frac{1}{4} \left[ (1-\zeta)(1-\eta) \mathbf{E}_1(\xi) + (1-\zeta)(1+\xi) \mathbf{E}_2(\eta) + (1-\zeta)(1+\eta) \mathbf{E}_3(\xi) + \right. \\ &\quad + (1-\zeta)(1-\xi) \mathbf{E}_4(\eta) + (1-\xi)(1-\eta) \mathbf{E}_5(\zeta) + (1+\xi)(1-\eta) \mathbf{E}_6(\zeta) + \\ &\quad + (1+\xi)(1+\eta) \mathbf{E}_7(\zeta) + (1-\xi)(1+\eta) \mathbf{E}_8(\zeta) + (1+\zeta)(1-\eta) \mathbf{E}_9(\xi) + \\ &\quad \left. + (1+\zeta)(1+\xi) \mathbf{E}_{10}(\eta) + (1+\zeta)(1+\eta) \mathbf{E}_{11}(\xi) + (1+\zeta)(1-\xi) \mathbf{E}_{12}(\eta) \right] \\ &\quad + N_{1,1,1}^{N_1}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{X}_1 + N_{1,1,1}^{N_2}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{X}_2 + N_{1,1,1}^{N_3}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{X}_3 + \\ &\quad + N_{1,1,1}^{N_4}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{X}_4 + N_{1,1,1}^{N_5}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{X}_5 + N_{1,1,1}^{N_6}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{X}_6 + \\ &\quad + N_{1,1,1}^{N_7}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{X}_7 + N_{1,1,1}^{N_8}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{X}_8 \end{aligned}$$

### 4.4.3 Abbildungsstrategien — eine Diskussion

Ein Überblick über grundlegende Eigenschaften verschiedener Abbildungsmethoden ordnet die Finite-Element-Ansätze bezüglich der Geometrie drei Gruppen zu:

- *isoparametrischer Ansatz*  
Die Funktionen, die den Ansatz  $\mathbf{u}_{\text{FE}}$  zur Approximation der unbekanntten Lösung  $\mathbf{u}_{\text{ex}}$  des Problems definieren, werden auch zur Abbildung der Geometrie verwandt. Dieses Konzept wird am häufigsten im Rahmen der  $h$ -Version für lineare- oder quadratische Elemente genutzt.
- *subparametrischer Ansatz*  
Die Funktionen, die die unbekanntte Lösung  $\mathbf{u}_{\text{ex}}$  approximieren, sind allgemeiner als die zur Abbildung der Geometrie.
- *superparametrischer Ansatz*  
Die Funktionen zur Definition der Geometrie sind komplexer als die zur Approximation der Lösung  $\mathbf{u}_{\text{ex}}$ . Dies ist beispielsweise der Fall, wenn der Geometrie eine allgemeinere Beschreibung als den Unbekannten zugrunde liegt, oder wenn die Geometrie durch höhergradige Polynome als die Unbekannten ausgedrückt wird.

Die Unterscheidung dieser Zugänge ist insbesondere im Hinblick auf die Darstellung von Starrkörpermoden  $\mathbf{u}_{\text{skm}}$  relevant. In Anlehnung an [96, 19] und [29] sei diese Problematik im Folgenden skizziert.

Unterwirft man einen elastischen Körper einer Starrkörperverschiebung oder -rotation, bleibt er verzerrungsfrei. Die Starrkörperverschiebungen in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung und die Starrkörperrotationen um den Ursprung des Körpers sind durch das Verschiebungsfeld (4.70) mit den Konstanten  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$  repräsentiert.

$$\mathbf{u}_{\text{skm}} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + C_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{bmatrix} + C_5 \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{bmatrix} + C_6 \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

Die Darstellbarkeit dieser Moden ist nur dann gewährleistet, wenn der Funktionenraum, aus dem die Geometriebeschreibung stammt, ein Unterraum der Finite-Element-Approximation ist oder aber diesem entspricht. Der Finite-Element-Ansatz muss also die Geometriebeschreibung darstellen können.

$$\mathbf{u}_{\text{FE}} \stackrel{!}{=} \mathbf{u}_{\text{skm}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{u}_{\text{FE}} = \sum_{i=1}^{n_{\text{Moden}}} N_i(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{a}_i \quad (4.71)$$

Bei *isoparametrischen* und *subparametrischen* Ansätzen ist Bedingung (4.71) stets eingehalten; nicht so, wenn die polynomielle Ordnung oder die Komplexität der Funktionen zur Geometriebeschreibung die des Verschiebungsansatzes übersteigt. In diesem Fall bilden zwar Knotenmoden die Starrkörperverschiebungen ab, zur Darstellung der Starrkörperrotationen fehlt jedoch eine Entsprechung auf der Finite-Element-Seite. Das unausgewogene Verhältnis führt

zu „künstlichen“ Spannungen in der Lösung. Lt. SZABÓ und BABUŠKA [96] ist der Fehler aufgrund dieses Phänomens bei Anwendung der  $p$ -Version vernachlässigbar klein, sofern die Geometriebeschreibung ausreichend glatt ist. Dass es unter Umständen schwerwiegende Folgen hat, wenn dies nicht gewährleistet ist, hat BRÖKER in [19] anhand detaillierter Studien gezeigt. Bereiche eines Berechnungsgebietes, deren VON MISES Vergleichsspannung lt. analytischer Lösung hätten Null sein müssen, zeigten in der Finite-Element-Analyse deutliche Spannungskonzentrationen.

Die im Rahmen dieser Arbeit relevanten Abbildungskonzepte werden im Folgenden skizziert:

- Die in den Abschnitten 4.4.1 und 4.4.2 vorgestellten Ansätze ermöglichen unter Verwendung der Gleichungen (4.61) und (4.66) eine große Variation der Elementgeometrie. Der besondere Vorteil liegt in der Berechnung der JACOBI-Matrizen auf Basis der exakten Geometrie. Voraussetzung ist, dass sie als parametrisierte Kurven und Flächen  $\mathbf{E}_i(r)$  bzw.  $\mathbf{F}_i(r, s)$  in Abhängigkeit der lokalen Parameter  $\boldsymbol{\xi}$  darstellbar sind. Dieser Vorteil birgt aber auch die Gefahr, in die Klasse der *superparametrischen* Ansätze zu „rutschen“, die im Falle nicht-glatter Geometrie zu unbrauchbaren Ergebnissen führen kann.
- Im Gegensatz dazu schließt das *isoparametrische* Standardkonzept solche Probleme aus. Gemäß der Finite-Element-Diskretisierung macht es auch für die Geometrie den Ansatz

$$\mathbf{x} \approx \sum_{i=1}^{(p+1)^d} N_i^p(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{a}_i, \quad (4.72)$$

wobei je nach Dimension  $d$  des Problems gilt:  $\mathbf{x} = [x, y]^T$ ,  $\boldsymbol{\xi} = [\xi_x, \xi_y]^T$  und  $\mathbf{a}_i = [a_{ix}, a_{iy}]^T$  bzw.  $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$ ,  $\boldsymbol{\xi} = [\xi_x, \xi_y, \xi_z]^T$  und  $\mathbf{a}_i = [a_{ix}, a_{iy}, a_{iz}]^T$ .  $N_i^p(\boldsymbol{\xi})$  bezeichnen die in Abschnitt 3 bereits eingeführten LAGRANGE-Polynome,  $\mathbf{a}_i$  die üblicherweise auf einem äquidistanten Schema basierenden Stützstellen. Weil der Polynomgrad der Finite-Element-Analyse dem entspricht, der die Geometrie interpoliert, können keine unerwünschten Effekte aufgrund einer Diskrepanz zwischen der Komplexität dieser beiden Ansätze entstehen. Der Nachteil des Konzepts liegt — wie in Abschnitt 3 gezeigt — in der Interpolationseigenschaft von Gleichung (4.72). Die eventuell ungenaue Geometriebeschreibung führt zu fehlerbehafteten Ergebnissen.

- Eine andere Strategie, die im Rahmen dieser Arbeit weitestgehend zur Anwendung kommt, wurde 1997 von KIRÁLYFALVI und SZABÓ [49] vorgestellt, das quasi-regionale Mapping. Die Idee besteht darin, die Blending-Funktionen-Methode ((4.61) und (4.66)) mit der in Abschnitt 3 vorgestellten Interpolation nach CHEN und BABUŠKA [21] zu verknüpfen. Die daraus resultierenden Interpolationen  $\mathbf{E}_i(r)^{\text{interp}}$  und  $\mathbf{F}_i^{\text{interp}}(r, s)$  der exakten Kanten und Flächen  $\mathbf{E}_i(r)$  und  $\mathbf{F}_i(r, s)$  sind in Gleichung (4.73) angegeben.  $\mathbf{E}_i(r)$  und  $\mathbf{F}_i(r, s)$  entsprechen dabei den in den Gleichungen (4.60) bzw. (4.64) und (4.65) definierten Größen. LAGRANGE-Polynome interpolieren die Geometrie an den Stützstellen  $\mathbf{E}_i(r_k)$  bzw.  $\mathbf{F}_i(r_k, s_l)$  der sogenannten BABUŠKA-CHEN Punkte  $r_k$  bzw.  $s_l$ . Das Stützstellenschema findet man in [21]. Eigenschaften dieses Verfahrens sind in Abschnitt 3.2.4 diskutiert.



$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_i(r) &\approx \mathbf{E}_i^{\text{interp}}(r) = \sum_{k=1}^{p+1} N_k^p(r) \mathbf{E}_i(r_k) \\
\mathbf{F}_i(r, s) &\approx \mathbf{F}_i^{\text{interp}}(r, s) = \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{q+1} N_k^p(r) N_l^q(s) \mathbf{F}_i(r_k, s_l)
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Im Hinblick auf vier- und achtknotige finite Elemente charakterisieren KIRÁLYFALVI und SZABÓ ihre Methode der Randrepräsentation selbst durch zwei wesentliche Merkmale:

1. „The only information required are coordinates of the curves and surfaces in the collocation points.“
2. „If the curves or surfaces are analytic then their piecewise polynomial approximation converges to the analytic expressions as the number of collocation points is increased.“

Aufgrund der Tatsache, dass die LAGRANGE-Polynome jeweils an einem Knoten den Wert 1 annehmen und an allen übrigen Knoten verschwinden, kann bei der Berechnung der Kollokationspunkte  $\mathbf{E}_i(r_k)$  bzw.  $\mathbf{F}_i(r_k, s_l)$  auf das Lösen eines Gleichungssystems verzichtet werden. Bei diesem Konzept ist ein „Abrutschen“ in einen superparametrischen Ansatz nicht ausgeschlossen.

- Eine dritte Alternative könnte daher sein, die Geometrie anstelle der Interpolation durch den gleichen Ansatz wie die Finite-Element-Lösung anzunähern. Die Terme zur Approximation hätten dann folgende Form:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_i(r) &\approx \mathbf{E}_i^{\text{approx}}(r) = \sum_{i=1}^{n_{\text{Moden}}} N_i(r) \mathbf{a}_i \\
\mathbf{F}_i(r, s) &\approx \mathbf{F}_i^{\text{approx}}(r, s) = \sum_{i=1}^{m_{\text{Moden}}} N_i(r, s) \mathbf{b}_i
\end{aligned} \tag{4.74}$$

Darin bezeichnen die Funktionen  $N_i(r)$  und  $N_i(r, s)$  die hierarchischen Ansatzfunktionen gemäß Abschnitt 4.3,  $\mathbf{a}_i$  und  $\mathbf{b}_i$  die entsprechenden Koeffizienten. Sie zu berechnen bedarf es dann allerdings der Lösung eines Gleichungssystems. Dieses Vorgehen entspräche dem eines *isoparametrischen* Konzepts. Vor- und Nachteile sind abzuwägen (vgl. auch [27]).

Abschließend schematisiert Abbildung 4.15 die oben beschriebenen und im Rahmen dieser Arbeit relevanten Strategien zur Berücksichtigung der Randgeometrie finiter Elemente. Ganz links ist der direkte Weg von der exakten Geometrie zur Abbildung *via* Blending-Funktionen-Methode dargestellt. Darin fließt die exakte Beschreibung von Flächen und Kanten  $\mathbf{F}_i(r, s)$

und  $\mathbf{E}_i(r)$  unmittelbar in die Gleichungen der Blending-Funktionen-Methode ein. Die quasi-regionale Abbildung wird durch ein „Zwischenschalten“ der Geometrieinterpolation (4.73) erreicht (Abbildung 4.15 mittig). Die Blending-Funktionen-Methode arbeitet auf den Interpolationen  $\mathbf{F}_i^{\text{interp}}(r, s)$  und  $\mathbf{E}_i^{\text{interp}}(r)$ . Der Vorschlag der Geometrieapproximation ist rechts im Bild skizziert.

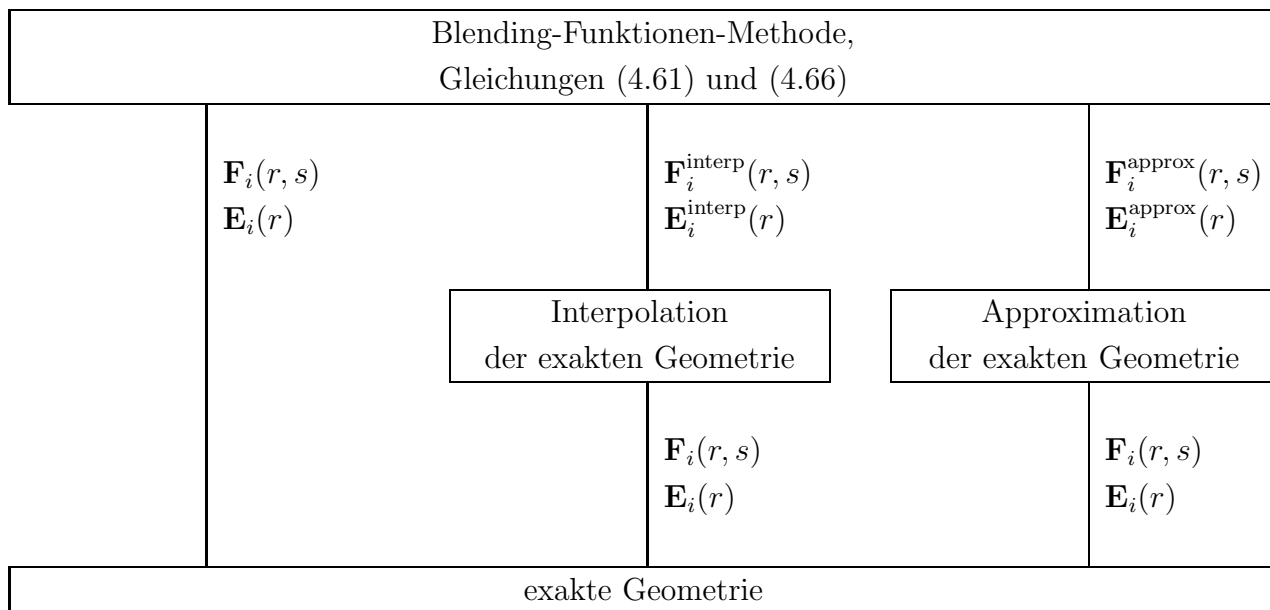


Abbildung 4.15: Abbildungskonzepte: von der exakten Geometrie zu den Gleichungen der Blending-Funktionen-Methode;  $\mathbf{E}_i(r)$  und  $\mathbf{F}_i(r, s)$  sind durch die Gleichungen (4.60) bzw. (4.64) und (4.65) gegeben.

## 4.5 Nichtlineare Algorithmen

Das im Rahmen der kontinuumsmechanischen Grundlagen beschriebene Modellproblem verhält sich aufgrund der linearisierten Kinematik nur noch bzgl. der konstitutiven Gleichungen nicht-linear. Die nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Materialmodells führt zu einer nichtlinearen *schwachen Form* des Gleichgewichts

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{v}) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_{\Omega} \, d\Omega + \int_{\partial_N \Omega} \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\partial_N \Omega, \quad (4.75)$$

für die das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u} \in \mathcal{V} = \{\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in [H^1(\Omega)]^3 : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ auf } \partial_D \Omega\}$  gesucht ist, das den homogenen DIRICHLET-Randbedingungen genügt. Das Hauptproblem solch nichtlinearer Fragestellungen liegt in der Bestimmung des Gleichgewichtszustandes. Ihm nähert man sich schrittweise durch eine „zeitliche“ Diskretisierung, die die Belastung als lineare Funktion

der sogenannten Pseudozeit vorgibt. Dazu wird die innerhalb eines gewissen Zeitintervalls zu berücksichtigende Last inkrementell in einer Folge von Zeitschritten  $[t_n, t_{n+1}]$ , in die das Intervall zuvor unterteilt wurde, aufgebracht. Zu jedem Zeitpunkt muss Gleichgewicht herrschen. Dieser Forderung ordnen sich die inneren Variablen, die das nichtlineare Verhalten prägen und durch ihre Zeitabhängigkeit unmittelbar von der Belastung beeinflusst sind, durch Integration der Materialgleichungen unter. Zur Zeitdiskretisierung auf globaler Ebene kommt das im folgenden Abschnitt beschriebene NEWTON-RAPHSON-Verfahren zur Anwendung. Innerhalb eines NEWTON-RAPHSON-Schrittes gewährleistet der in Abschnitt 4.5.2 beschriebene Projektionsalgorithmus, dass die Spannungen „im Lot“ sind.

### 4.5.1 Das NEWTON-RAPHSON-Verfahren

Im Rahmen der Finite-Element-Methode ist das NEWTON-RAPHSON-Verfahren eine weit verbreitete effiziente Methode zur numerischen Lösung nichtlinearer Probleme. Gemäß der oben beschriebenen zeitlichen Diskretisierung, die im Falle der Elastoplastizität einer schrittweisen Laststeuerung entspricht, löst das Verfahren in jedem Zeitschritt  $[t_n, t_{n+1}]$  ein nichtlineares Problem, um das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}_{n+1}$  zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  zu bestimmen. Dazu setzt es voraus, dass zum Zeitpunkt  $t = t_n$  die in Abschnitt 2.4 linearisierte *schwache Form* des Gleichgewichts (2.58) erfüllt ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \mathcal{W}(\bar{\mathbf{u}} + \Delta\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ &\approx \mathcal{W}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + D\mathcal{W}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \Delta\mathbf{u} = 0 \end{aligned} \quad (4.76)$$

Gesucht ist die unbekannte Lösung  $\mathbf{u}_{(n+1)}$  zum Zeitpunkt  $t = t_{(n+1)}$ , die die homogenen DIRICHLET-Randbedingungen auf dem Rand  $\partial_D\Omega$  erfüllt, und der Gleichung (4.76) genügt. Im NEWTON-RAPHSON-Verfahren korrespondiert  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \Delta\mathbf{u}$  mit  $\mathbf{u}_{(n+1)}^{(i+1)} = \mathbf{u}_{(n+1)}^{(i)} + \Delta\mathbf{u}_{(n+1)}^{(i+1)}$ . Um  $\mathbf{u}_{(n+1)}$  zu finden, wird in jeder NEWTON-RAPHSON-Iteration das Verschiebungsinkrement  $\Delta\mathbf{u}_{(n+1)}^{(i+1)}$  gesucht, so dass

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\mathbf{u}_{(n+1)}^{(i+1)}, \mathbf{v}) &= \mathcal{W}(\mathbf{u}_{(n+1)}^{(i)}, \mathbf{v}) + D\mathcal{W}(\mathbf{u}_{(n+1)}^{(i)}, \mathbf{v}) \Delta\mathbf{u}_{(n+1)}^{(i+1)} = 0 \\ \mathcal{W}(\mathbf{u}_{(n+1)}^{(i+1)}, \mathbf{v}) &= \overbrace{\mathcal{W}_{\text{ext}}(\mathbf{v})_{(n+1)} - \mathcal{W}_{\text{int}}(\mathbf{u}_{(n+1)}^{(i)}, \mathbf{v})} + D\mathcal{W}(\mathbf{u}_{(n+1)}^{(i)}, \mathbf{v}) \Delta\mathbf{u}_{(n+1)}^{(i+1)} = 0 \end{aligned} \quad (4.77)$$

gilt. Nachdem nun in jedem NEWTON-RAPHSON-Schritt  $\boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{u}})$  mit  $\mathbf{C}_{(n+1)}^{(i)} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{(n+1)}^{(i)})$  korrespondiert, sind die entsprechenden Terme wie folgt definiert:

$$\mathcal{W}_{\text{int}}(\mathbf{u}_{(n+1)}^{(i)}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \mathbf{C}_{(n+1)}^{(i)} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{(n+1)}^{(i)}) d\Omega \quad (4.78)$$

$$\mathcal{W}_{\text{ext}}(\mathbf{v})_{(n+1)} = \int_{\Omega} \mathbf{v} \mathbf{f}_{\Omega, (n+1)} d\Omega + \int_{\partial_N \Omega} \mathbf{v} \bar{\mathbf{t}}_{(n+1)} d\partial_N \Omega \quad (4.79)$$

$$D\mathcal{W}(\mathbf{u}_{(n+1)}^{(i)}, \mathbf{v}) \Delta \mathbf{u}_{(n+1)}^{(i+1)} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \mathbf{C}_{(n+1)}^{(i)} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{(n+1)}^{(i)}) \Delta \mathbf{u}_{(n+1)}^{(i+1)} d\Omega \quad (4.80)$$

Stehen innere- und äußere Kräfte im Gleichgewicht, liegt also das in Gleichung 4.77 definierte Residuum  $\mathcal{W}(\mathbf{u}_{(n+1)}^{(i)}, \mathbf{v})$  der *schwachen Form* des Gleichgewichts jenseits einer gewissen Toleranz  $TOL$ , ist Konvergenz erreicht. Algorithmus **A-1** stellt die Umsetzung dar. Darin bezeichnen Größen  $(\bullet)_{(n+1)}^{(i)}$  Variablen zur Zeit des Lastschrittes  $t \in [t_n, t_{n+1}]$  in der  $i$ -ten NEWTON-RAPHSON-Iteration.

---

#### Algorithmus A-1 NEWTON-RAPHSON-Algorithmus

---

**Berechne:** Arbeit der äußeren Lasten im Zeitschritt  $[t_n, t_{n+1}]$  durch  $\mathcal{W}_{\text{ext}}(\mathbf{v})_{(n+1)}$

**loop** (NEWTON-RAPHSON-Iterationen  $i = 1, 2, 3, \dots$ )

**Berechne:** Arbeit der inneren Kräfte  $\mathcal{W}_{\text{int}}(\mathbf{u}_{(n+1)}^{(i)}, \mathbf{v})$

**Berechne:** Residuum  $\mathcal{W}(\mathbf{u}_{(n+1)}^{(i)}, \mathbf{v}) = \mathcal{W}_{\text{ext}}(\mathbf{v})_{(n+1)} - \mathcal{W}_{\text{int}}(\mathbf{u}_{(n+1)}^{(i)}, \mathbf{v})$

**if**  $(\mathcal{W}(\mathbf{u}_{(n+1)}^{(i)}, \mathbf{v}) \leq TOL)$  **then**

**Abbruch** (Konvergenz)

**else**

**Berechne:**  $\Delta \mathbf{u}_{(n+1)}^{(i+1)}$  durch Lösen von

$$D\mathcal{W}_{\text{int}}(\mathbf{u}_{(n+1)}^{(i)}, \mathbf{v}) \Delta \mathbf{u}_{(n+1)}^{(i+1)} = \mathcal{W}(\mathbf{u}_{(n+1)}^{(i)}, \mathbf{v})$$

**Berechne:** neues Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}_{(n+1)}^{(i+1)} = \mathbf{u}_{(n+1)}^{(i)} + \Delta \mathbf{u}_{(n+1)}^{(i+1)}$

**Berechne:** Spannungszustand  $\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}^{(i+1)}$  gemäß Algorithmus **A-2**

**Berechne:** konsistente Tangente  $\mathbf{C}_{(n+1)}^{(i+1)}$  gemäß Algorithmus **A-2**

**Setze:**  $i = i + 1$

**end if**

**end loop**

---

Abbildung 4.16 stellt das NEWTON-RAPHSON-Verfahren in einer Dimension grafisch dar. Die zu minimierende *virtuelle Arbeit*, die dem Residuum entspricht, ist gegenüber der Verschiebung  $\mathbf{u}$  aufgetragen. Unten im Bild ist die Lastschrittweite  $[t_{(n)}, t_{(n+1)}]$  exemplarisch herausgegriffen, um die entsprechenden Iterationen innerhalb dieses Zeitschritts darzustellen. Ausgehend vom Punkt  $\mathbf{u}_{(n)} = \mathbf{u}_{(n+1)}^{(0)}$  nähert sich das Verfahren solange der Nullstelle, bis die Differenz von  $\mathcal{W}_{\text{int}}(\mathbf{u}_{(n+1)}^{(i)}, \mathbf{v})$  und  $\mathcal{W}_{\text{ext}}(\mathbf{v})_{(n+1)}$  eine gewisse Toleranz unterschreitet.

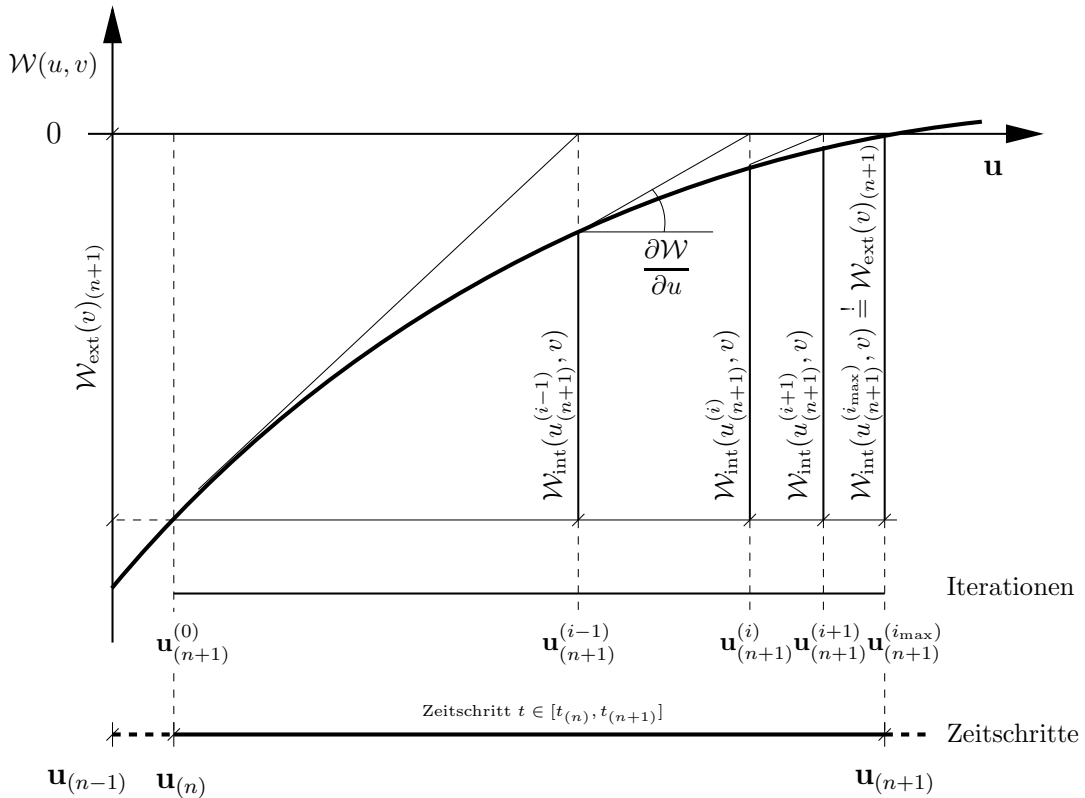


Abbildung 4.16: Grafische Darstellung des NEWTON-RAPHSON-Algorithmus im eindimensionalen Fall

### 4.5.2 Der Projektionsalgorithmus

Im iterativen Lösungsprozess des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens, der in jedem Zeitschritt Gleichgewicht herstellt, muss sichergestellt sein, dass der Spannungszustand des elastoplastischen Problems den in Abschnitt 2.3.2 definierten Materialgleichungen genügt. Dies zu gewährleisten, werden in jedem NEWTON-RAPHSON-Schritt ( $i$ ) eines Lastschrittes  $t \in [t_{(n)}, t_{(n+1)}]$  sowohl die Tangentensteifigkeit  $\mathbf{C}_{(n+1)}^{(i)}$  als auch die Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}^{(i)}$  an jedem Integrationspunkt mithilfe eines Projektionsalgorithmus angepasst. Das im Rahmen dieser Arbeit verwendete Verfahren zur „Rückprojektion“ der Spannungen wurde unter dem Namen *Radial-Return-Algorithmus* [90, 104] erstmals 1964 von WILKINS [103] vorgestellt. Es gliedert sich in einen elastischen Prädiktor- und einen plastischen Korrektor-Schritt. Zu Beginn eines oben beschriebenen NEWTON-RAPHSON-Iterationsschrittes im Lastintervall  $t \in [t_{(n)}, t_{(n+1)}]$  werden die inneren Variablen  $\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{\text{p}(i)}$  und  $\alpha_{(n+1)}^{(i)}$  zunächst „eingefroren“.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{\text{p}(i)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^{\text{p}} \quad (4.81)$$

$$\alpha_{(n+1)}^{(i)} = \alpha_{(n)}$$

Mit diesen Größen berechnet der elastische Prädiktor-Schritt aus dem Stoffgesetz  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}})$  auf der Basis des aktuellen Verzerrungszustandes  $\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{(i)}$  den sogenannten *Trial*-Spannungszustand (4.82). Alle Größen  $(\bullet)^{\text{trial}}$  bezeichnen Variablen in solch einem „Versuchs“-Zustand.

$$\text{dev}[\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}^{\text{trial}}] = 2\mu \text{dev}[\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{(i)} - \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^{\text{p}}] \quad (4.82)$$

Für diesen Spannungszustand  $\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}^{\text{trial}}$  und die entsprechende Variable  $\alpha_{(n+1)}$  wird das Fließkriterium  $f$  berechnet:

$$f(\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}^{\text{trial}}, \alpha_{(n)}) = \|\text{dev}[\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}^{\text{trial}}]\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \sigma_0 + h\alpha_{(n)} + (\sigma_\infty - \sigma_0)(1 - \exp[-\omega\alpha_{(n)}]) \right) \quad (4.83)$$

- Ist der berechnete Spannungszustand (4.82)

$$f(\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}^{\text{trial}}, \alpha_{(n)}) \leq 0$$

zulässig, handelt es sich um einen elastischen Schritt, in dem sich sämtliche Spannungen als Funktion des linear-elastischen Materialgesetzes zu

$$\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}^{(i)} = \kappa \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{(i)}] \mathbf{1} + \text{dev}[\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}^{\text{trial}}] \quad (4.84)$$

berechnen lassen. In Abbildung 4.17 ist die Situation schematisch dargestellt. Die pla-

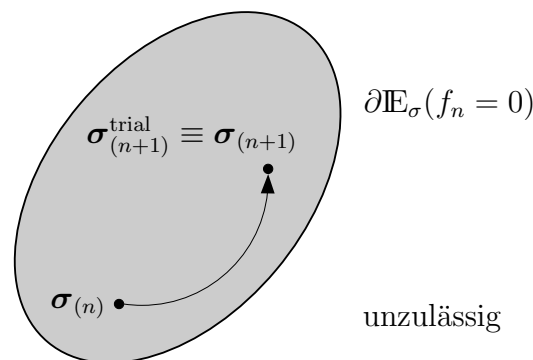


Abbildung 4.17: Elastischer Schritt im Prädiktor-Korrektor-Verfahren

stischen Variablen  $\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{\text{p}(i)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^{\text{p}}$  und  $\alpha_{(n+1)}^{(i)} = \alpha_{(n)}$  bleiben konstant.

$$\mathbf{C}_{(n+1)}^{(i)} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}^{(i)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{(i)}} \quad (4.85)$$

Die konsistente Tangente, die Voraussetzung für den nächsten NEWTON-RAPHSON-Schritt ist, ergibt sich aus dem differentiellen Zusammenhang (4.85) zwischen Gesamtverzerrungen und Spannungen zu:

$$\mathbf{C}_{(n+1)}^{(i)} = \kappa \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \left[ \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right] \quad (4.86)$$

- Verletzt das Fließkriterium  $f$  der im elastischen Prädiktor-Schritt berechneten Spannung die Fließbedingung:

$$f(\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}^{\text{trial}}, \alpha_{(n)}) > 0,$$

wird der Spannungszustand in einem plastischen Korrektor-Schritt auf einen erlaubten Zustand zurückgeführt, auf die Fließfläche  $\partial \mathbb{E}_\sigma$  projiziert. Der Vorgang ist anhand von Abbildung 4.18 skizziert. Für diese Projektion werden die in Tabelle 2.1 definierten

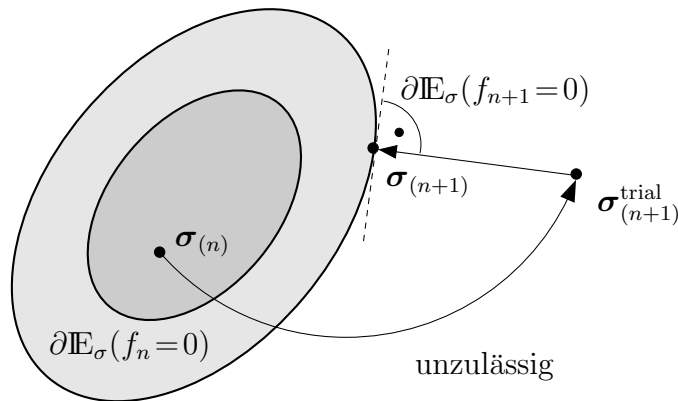


Abbildung 4.18: Plastischer Schritt im Prädiktor-Korrektor-Verfahren

konstitutiven Gleichungen integriert, so dass schließlich unter der Nebenbedingung

$$f(\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}^{(i)}, \alpha_{(n+1)}^{(i)}) \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.87)$$

die Lösung für die noch unbekanntenen Größen aus dem folgenden nichtlinearen System an Gleichungen ermittelt wird.

$$\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}^{(i)} = \mathbf{C} [\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{(i)} - \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{\text{p}(i)}] \quad (4.88)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{\text{p}(i)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^{\text{p}} + \Delta \gamma^{(i)} \mathbf{n}_{(n+1)}^{\text{trial}} \quad (4.89)$$

$$\alpha_{(n+1)}^{(i)} = \alpha_{(n)} + \Delta \gamma^{(i)} \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (4.90)$$

Diese Methode kommt dem impliziten EULER-Verfahren gleich und liefert für die gesuchten Größen im neuen Zustand folgendes Ergebnis:

$$\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}^{(i)} = \kappa \operatorname{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{(i)}] \mathbf{1} + 2\mu \operatorname{dev}[\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{(i)} - \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^p] \quad (4.91)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^p + \Delta\gamma^{(i)} \frac{\operatorname{dev}[\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}^{(i)}]}{\|\operatorname{dev}[\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}^{(i)}]\|} \quad (4.92)$$

$$\alpha_{(n+1)}^{(i)} = \alpha_{(n)} + \Delta\gamma^{(i)} \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (4.93)$$

Ein effizienter Weg zur Berechnung des Konsistenzparameters  $\Delta\gamma^{(i)}$  liegt in der Reduktion obiger Ausdrücke auf eine einzige nichtlineare Gleichung:

$$\begin{aligned} f(\Delta\gamma^{(i)}) &\stackrel{!}{=} 0 \\ &= \|\operatorname{dev}[\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}^{\text{trial}}]\| - 2\mu\Delta\gamma^{(i)} - \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \sigma_0 + h \left( \alpha_{(n)} + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma^{(i)} \right) \right. \\ &\quad \left. + (\sigma_\infty - \sigma_0) \left( 1 - \exp \left[ -\omega \left( \alpha_{(n)} + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma^{(i)} \right) \right] \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.94)$$

Solche nichtlinearen, algebraischen Ausdrücke — entstanden aus der numerischen Integration konstitutiver Gleichungen — können durch Anwendung einer lokalen NEWTON-RAPHSON-Iteration gelöst werden. Liegt dem Materialmodell ein lineares, isotropes Verfestigungsgesetz zugrunde, existiert für  $f(\Delta\gamma^{(i)}) = 0$  die analytische Lösung

$$\Delta\gamma^{(i)} = \frac{f(\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}^{\text{trial}}, \alpha_{(n)})}{2\mu + \frac{2}{3}h}. \quad (4.95)$$

Auf Basis des neuen Spannungszustandes liefert die Beziehung

$$\mathbf{C}_{(n+1)}^{(i)} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}^{(i)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{(i)}} \quad (4.96)$$

die neue Tangentensteifigkeit, die Voraussetzung für den nächsten NEWTON-RAPHSON-Schritt ist. Der elastoplastische Tangentenmodul berechnet sich gemäß folgender Vorschrift:

$$\mathbf{C}_{(n+1)}^{(i)} = \kappa \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \theta_{(n+1)} \left[ \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right] - 2\mu \bar{\theta}_{(n+1)} \mathbf{n}_{(n+1)}^{(i)} \otimes \mathbf{n}_{(n+1)}^{(i)} \quad (4.97)$$

$$\text{mit: } \theta_{(n+1)} = 1 - \frac{2\mu \Delta\gamma^{(i)}}{\|\operatorname{dev}[\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}^{\text{trial}}]\|}$$

$$\bar{\theta}_{(n+1)} = \left( 1 + \frac{h + \omega (\sigma_\infty - \sigma_0) \exp(-\omega \alpha_{(n+1)}^{(i)})}{3\mu} \right)^{-1} - (1 - \theta_{(n+1)})$$

Abschließend fasst Algorithmus **A-2** die Umsetzung der „Rückprojektion“ des Spannungszustandes zusammen.



---

**Algorithmus A-2** *Radial-Return-Algorithmus* für die  $J_2$ -Fließtheorie mit isotroper Verfestigung

---

**elastischer Prädiktor-Schritt**

**Berechne:** *Trial*-Spannungszustand  $\text{dev}[\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}^{\text{trial}}] = 2\mu \text{dev}[\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{(i)} - \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^p]$

**Berechne:** Fließkriterium  $f(\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}^{\text{trial}}, \alpha_{(n)})$  gemäß Gleichung (4.83)

**if**  $(f(\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}^{\text{trial}}, \alpha_{(n)}) \leq 0)$  **then**

**Berechne:**  $\alpha_{(n+1)}^{(i)} = \alpha_{(n)}$

**Berechne:**  $\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{p(i)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^p$

**Berechne:**  $\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}^{(i)} = \kappa \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{(i)}] \mathbf{1} + \text{dev}[\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}^{\text{trial}}]$

**Berechne:**  $\mathbf{C}_{(n+1)}^{(i)} = \kappa \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu [\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}]$

**Abbruch:** (elastischer Schritt)

**else**

**Berechne:** Konsistenzparameter  $\Delta\gamma^{(i)}$  durch Lösen von Gleichung (4.94)

**Projektion**

**Berechne:**  $\mathbf{n}_{(n+1)}^{(i)} = \frac{\text{dev}[\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}^{\text{trial}}]}{\|\text{dev}[\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}^{\text{trial}}]\|}$

**Berechne:**  $\alpha_{(n+1)}^{(i)} = \alpha_{(n)} + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma^{(i)}$

**Berechne:**  $\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{p(i)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^p + \Delta\gamma^{(i)} \mathbf{n}_{(n+1)}^{(i)}$

**Berechne:**  $\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}^{(i)} = \kappa \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{(i)}] \mathbf{1} + \text{dev}[\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}^{\text{trial}}] - 2\mu \Delta\gamma^{(i)} \mathbf{n}_{(n+1)}^{(i)}$

**elastoplastischer Tangentenmodul**

**Berechne:**  $\theta_{(n+1)} = 1 - \frac{2\mu \Delta\gamma^{(i)}}{\|\text{dev}[\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}^{\text{trial}}]\|}$

**Berechne:**  $\bar{\theta}_{(n+1)} = \left(1 + \frac{h + \omega(\sigma_\infty - \sigma_0) \exp(-\omega \alpha_{(n+1)}^{(i)})}{3\mu}\right)^{-1} - (1 - \theta_{(n+1)})$

**Berechne:**  $\mathbf{C}_{(n+1)}^{(i)} = \kappa \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \theta_{(n+1)} [\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}] - 2\mu \bar{\theta}_{(n+1)} \mathbf{n}_{(n+1)}^{(i)} \otimes \mathbf{n}_{(n+1)}^{(i)}$

**end if**

---

## 4.6 Numerische Integration

Das zu lösende Integrationsproblem bei der Finite-Element-Methode steckt in der Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}^e$  (4.26) und des Lastvektors  $\mathbf{F}^e$  (4.27) bzw. (4.29). Wie häufig bei Problemen der angewandten Mathematik ist analytische Integration hier nur in Spezialfällen denkbar, so dass man sich numerischer Integrationsverfahren bedient. Die Wahl der Quadraturmethode hängt von der Art der Fragestellung ab: Wie glatt ist der Integrand, gibt es Singularitäten? Wie liegt der Integrand vor, kontinuierlich oder diskret? Wie hoch wird der Grad der Genauigkeit eingestuft?

Neben Trapez- und Transformationsmethoden gibt es die Klasse der interpolatorischen Quadraturformeln, zu denen z.B. die NEWTON-COTES-, aber auch die GAUSS-Integration zählen. Sie approximieren den Integranden durch ein Interpolationspolynom. Der grundlegende Unterschied zwischen NEWTON-COTES- und GAUSS-Quadratur liegt in der Wahl der Stützstellen, die einerseits äquidistant, andererseits mit dem Ziel hoher Genauigkeit geeignet gewählt werden.

Zur effizienten Integration von Steifigkeitsmatrizen hoher Ordnung wurden von MELENK et al. [58] und HINNANT [46] verschiedene Ansätze entwickelt.

### 4.6.1 GAUSS-Quadratur

Im Rahmen von Finite-Element-Berechnungen stellt die GAUSS-Quadratur das am häufigsten verwendete Integrationswerkzeug dar. Bei dem zu integrierenden Term handelt es sich im Allgemeinen um einen gebrochenrationalen Ausdruck, da die JACOBI-Matrix eine Funktion von  $\xi, \eta, \zeta$  ist. Das Integrationsproblem präsentiert sich somit als

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (4.98)$$

und wird mit der GAUSSschen Quadraturformel approximiert durch:

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n w_i w_j w_k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \quad (4.99)$$

Das Volumenintegral lässt sich also auf eine eindimensionale Integration in drei Richtungen mit entsprechender Näherung zurückführen:

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad \text{wobei } x_i \in [-1, 1] \quad (4.100)$$

Hierin sind  $w_i$  die GAUSS-Gewichte,  $x_i$  die Stützstellen oder GAUSS-Punkte. Für die GAUSSschen Quadraturformeln gilt:

Es existiert genau eine Quadraturformel (4.100) mit  $n$  Integrationsstützstellen,  $x_i \in [-1, 1]$ ,

und maximaler Genauigkeit  $(2n-1)$ . Die Stützstellen  $x_i$  sind die Nullstellen des  $n$ -ten LEGENDRE-Polynoms (4.48) bzw. (4.49), die Integrationsgewichte sind definiert als

$$w_i = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left( \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)^2 dx > 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.101)$$

Die Integrationsstützstellen  $x_i \neq 0$  liegen paarweise symmetrisch zum Nullpunkt. Anhand von (4.101) wird leicht klar, dass zu diesen Paaren jeweils gleiche Gewichte gehören. Die Anwendung der GAUSSschen Quadraturformel setzt selbstverständlich Kenntnis über Stützstellen und Gewichte voraus. Eine numerisch stabile Methode zur Berechnung dieser Größen wird in [86] vorgestellt. Die zwei- und dreidimensionalen Integrationsschemata ergeben sich als Tensorprodukt der ein- bzw. zweidimensionalen Formeln.

## 4.6.2 Vektorintegration

1994 stellte HINNANT [46] erstmals die Methode Vektorintegration vor. Die Idee einer adaptiven Vektorquadratur steht im Zentrum von [61, 62]. Dort wurde das Integrationsschema in das bestehende  $p$ -Versions Programm *AdhoC* [30] implementiert und anhand numerischer Beispiele getestet. Neben dem in Abschnitt 4.6.3.1 beschriebenen Beispiel, das auch in [62] dargestellt ist, präsentiert Abschnitt 4.6.3.2 eine weitere Anwendung. Effizient zu integrieren, ist nicht nur bei linearer Elastizität, sondern auch bei physikalisch nichtlinearen Problemen von großem Interesse.

Die Grundidee besteht darin, den Integranden in ein Produkt zu überführen, dessen Faktoren dann jeweils einzeln integriert werden, um später wieder geeignet zusammengefügt zu werden. Sie lässt sich vorteilhaft anhand des Integrationsproblems in einer Raumdimension darstellen, in der ein Eintrag  $(i, j)$  der Steifigkeitsmatrix durch

$$k_{ij} := \int_{-1}^1 B_{ki}(x) C_{kl} B_{lj}(x) \det \mathbf{J} dx \quad (4.102)$$

berechnet wird. Hierzu wird das Produkt zweier Funktionen gebildet, wobei Materialmatrix  $C_{kl}$  und JACOBI-Determinante  $\det \mathbf{J}$  einer der beiden Funktionen zugeordnet werden können. So wird der Ausdruck auf das Produkt zweier Funktionen  $g_i(x)$  und  $h_j(x)$  zurückgeführt, von denen die eine nur vom Zeilenindex  $i$ , die andere nur vom Spaltenindex  $j$  abhängt.

$$k_{ij} := \int_{-1}^1 g_i(x) h_j(x) dx \quad (4.103)$$

Als Ausgangsgleichung für die Anwendung der Vektorintegration verdeutlicht Gleichung (4.103) den Grundgedanken dieser Methode. Während die GAUSS-Quadraturformeln eine Approximation an das Integral über den Integranden  $f(x) = g_i(x) h_j(x)$  vornehmen, arbeitet die Vektorintegration auf  $g_i(x)$  und  $h_j(x)$  getrennt, um dann mit den Ergebnissen in all ihren Kombinationen von  $i$  und  $j$  das Punktprodukt zu bilden.

Die Ordnung von  $g_i(x)$  und  $h_j(x)$  variiert für verschiedene  $i$  und  $j$ . Diese Eigenschaft lässt sich in zweierlei Hinsicht nutzen. Zum einen kann der Aufwand, der zur „Vektorintegration“

der jeweiligen  $g_i(x)$  bzw.  $h_j(x)$  erforderlich ist, der Ordnung der Funktion angepasst werden. Zum anderen verhält sich der Aufwand bei der Bildung des Punktproduktes proportional zur Dimension des Vektorintegrals, das aus der Funktion kleinerer Ordnung stammt.

#### 4.6.2.1 Mathematische Umsetzung der Idee

Die mathematische Umsetzung der Idee ist gleichzusetzen mit der Antwort auf die Frage nach der Trennung des Integranden in zwei Faktoren und deren anschließende separate Behandlung. Bei der Integration von

$$\int_{-1}^1 g(x) h(x) dx \quad (4.104)$$

bleiben die Indizes  $i$  und  $j$  unberücksichtigt, da sie in diesem Zusammenhang keine Rolle spielen.  $g(x)$  und  $h(x)$  sind zunächst nur skalare Funktionen. Durch Potenzreihenentwicklung lassen sie sich jeweils als unendliche Reihe von LEGENDRE-Polynomen exakt darstellen.

$$g(x) = \sum_{I=0}^{\infty} c_I P_I(x) \quad \text{und} \quad h(x) = \sum_{J=0}^{\infty} d_J P_J(x) \quad (4.105)$$

Zusätzlich zur Orthogonalität (4.51) der bereits erwähnten LEGENDRE-Polynome (4.48) bzw. (4.49) sind diese LEGENDRE-Polynome (4.105) auf dem Intervall  $[-1,1]$  orthonormal:

$$\int_{-1}^1 P_i(x) P_j(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.106)$$

So unterscheiden sie sich von den zuvor verwendeten Polynomen durch einen Faktor und sind wie folgt definiert:

$$P_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} x & \text{für } i = 1 \\ \frac{1}{i} \sqrt{(2i-1)(2i+1)} x P_{i-1}(x) - \frac{i-1}{i} \sqrt{\frac{2i+1}{2i-3}} P_{i-2}(x) & \text{für } i \geq 2 \end{cases} \quad (4.107)$$

Die Funktionen  $g(x)$  und  $h(x)$  werden approximiert, indem man nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate fordert:

$$\int_{-1}^1 \left[ \sum_{I=0}^{\infty} c_I P_I(x) - g(x) \right]^2 dx \stackrel{!}{=} \text{Min} \quad \text{und} \quad \int_{-1}^1 \left[ \sum_{J=0}^{\infty} d_J P_J(x) - h(x) \right]^2 dx \stackrel{!}{=} \text{Min} \quad (4.108)$$

Unter Ausnutzung der Orthonormalitätseigenschaft der LEGENDRE-Polynome im Bereich  $[-1,1]$  lassen sich die Terme für  $g(x)$  und  $h(x)$  soweit umformen, dass sich die Faktoren  $c_I$  und  $d_J$  wie folgt darstellen lassen:

$$c_I = \int_{-1}^1 g(x) P_I(x) dx \quad \text{und} \quad d_J = \int_{-1}^1 h(x) P_J(x) dx \quad (4.109)$$

Setzt man in die Ausgangsgleichung (4.104) die Terme (4.105) für  $g(x)$  und  $h(x)$  ein, so ist für  $I = 0, \dots, \infty$

$$\int_{-1}^1 g(x) h(x) dx = \int_{-1}^1 [c_I P_I(x)] [d_J P_J(x)] dx = \sum_{I=0}^{\infty} c_I d_I = \mathbf{c} \mathbf{d}. \quad (4.110)$$

Das Integral des Produktes aus  $g(x)$  und  $h(x)$  kann somit als Punktprodukt der Vektoren  $\mathbf{c}$  und  $\mathbf{d}$  mit  $I = 0, \dots, \infty$  exakt berechnet werden. Einsetzen von (4.109) liefert

$$\mathbf{c} \mathbf{d} = \int_{-1}^1 g(x) P_I(x) dx \int_{-1}^1 h(x) P_I(x) dx \quad (4.111)$$

$$= \underbrace{\int_{-1}^1 g(x) dx}_{\text{Vektorintegral zu } g(x)} \underbrace{\int_{-1}^1 h(x) dx}_{\text{Vektorintegral zu } h(x)} \quad (4.112)$$

Obwohl das Integral über das Produkt zweier Funktionen in zwei Integrale über Produkte zweier Funktionen übergeht, wird eine Ersparnis hinsichtlich des Integrationsaufwandes erreicht. Der Vorteil der Vektorintegrale liegt darin, dass man den einen Faktor des Integranden — nämlich  $P_I(x)$  — genau kennt. Dies lässt sich hinsichtlich der numerischen Umsetzung nutzen.

#### 4.6.2.2 Numerische Berechnung des Vektorintegrals

Im Folgenden wird die numerische Berechnung eines Vektorintegrals unter der Voraussetzung eines polynomiellen Integranden besprochen. Das Vektorintegral  $\mathbf{c}$  der Funktion  $g(x)$  ist Vektor von Integralen, deren Integrand sich jeweils als Produkt aus  $g(x)$  und LEGENDRE-Polynom mit aufsteigender Ordnung ergibt.

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = \mathbf{c} = \int_{-1}^1 g(x) P_I(x) dx = \begin{bmatrix} \int_{-1}^1 g(x) P_0(x) dx \\ \int_{-1}^1 g(x) P_1(x) dx \\ \vdots \\ \int_{-1}^1 g(x) P_I(x) dx \end{bmatrix}, \quad I = 0, \dots, \infty \quad (4.113)$$

Um diese Integrale zu approximieren, bedarf es einer geeigneten Quadraturformel, die auf jede Komponente des Vektors anzuwenden ist. Vom Grundsatz her entspricht das Schema dem anderer Integrationsmethoden. Das Integral wird durch eine Summe gewichteter Funktionsauswertungen angenähert. Die Dimension ( $I + 1$ ) des Vektorintegrals hängt von einer ungeraden

Ordnung  $I \geq p$ , dem Grad des LEGENDRE-Polynoms, durch das die zu integrierende Funktion  $g(x)$  approximiert wird, ab. Für die Anzahl  $n$  der Stützstellen, die gleiches Vorzeichen aufweisen, gilt demzufolge mit  $n = (I + 1)/2$  stets  $n \in \mathbb{N}$ . Das Vektorintegral (4.114) wird entsprechend approximiert. Zu allen  $x_j \neq 0$ , die paarweise symmetrisch zum Nullpunkt liegen, gehören die gleichen Gewichte.

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \int_{-1}^1 g(x) P_0(x) dx \\ \int_{-1}^1 g(x) P_1(x) dx \\ \vdots \\ \int_{-1}^1 g(x) P_I(x) dx \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n W_j(0, n) (g(x_j) + g(-x_j)) \\ \sum_{j=1}^n W_j(1, n) (g(x_j) - g(-x_j)) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n W_j(I, n) (g(x_j) \pm g(-x_j)) \end{bmatrix} \quad (4.114)$$

Die Gewichte  $W_j$  hängen von der Ordnung  $I \geq p$  des Polynomgrades  $p$  und der Anzahl betragsmäßig gleicher Stützstellen ab. Jede Integrationsordnung erfordert eine eigene Gewichtsmatrix  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{(I+1) \times n}$ . Sie wird sowohl auf eine gerade als auch auf die darauffolgende ungerade Ordnung angewandt. Ein Satz an Stützstellen  $g(x_j)$ ,  $g(-x_j)$  genügt zur Berechnung des gesamten Vektorintegrals. Jedes Vektorintegral entsteht aus  $(I + 1)/2 \in \mathbb{N}$  Auswertepunkten und  $(I + 1) \times n$  Gewichtsfaktoren. Das alternierende Vorzeichen der Funktionsauswertungen  $g(-x_j)$  korrespondiert mit der Ordnung von  $P_I(x)$  und entsteht aus der Ableitung der Gewichtsfaktoren. Ihre Berechnung ist in [46, 61, 62] im Detail erläutert.

#### 4.6.2.3 Adaptive Vektorintegration

Bisher wurde die Methode Vektorintegration selbst erklärt. Genauere Untersuchungen und Ergebnisse zur Effizienz der Quadraturtechnik, die anhand einer „methodengerechten“ Implementierung zur Integration ganzzahliger Funktionen erreicht wurden, sind in [46, 61] und [62] dargelegt.

Dieser Abschnitt widmet sich der Modifikation der Methode, wie sie im Zuge der Implementierung in das bestehende  $p$ -Versions Finite-Element-Programm *AdhoC* [30] — gekoppelt mit den Anforderungen an die Integration von Steifigkeiten verzerrter Elemente — vorgenommen wurde, um eine Steigerung der Effizienz zu erreichen.

##### 1. Anknüpfung an das bestehende Finite-Element-Programm

In der ursprünglichen Version des Finite-Element-Programms wurde die GAUSS-Quadratur zur Integration verwendet. Dazu wird die gesamte  $\mathbf{B}$ -Matrix an jedem GAUSS-Punkt ausgewertet. Der Aufbau der Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix erfolgt für jeden der Ansatzräume sukzessive.

Grundverschieden zu diesem Vorgehen arbeitet Vektorintegration komponentenweise auf den Einträgen der  $\mathbf{B}$ -Matrix und passt die Anzahl erforderlicher Integrationsstützstellen

dem Grad der zu integrierenden Funktion an.

Um fundamentale Änderungen in der Gesamtstruktur des Programms zu vermeiden, wird auch im Rahmen der Vektorintegration die gesamte  $\mathbf{B}$ -Matrix an jedem GAUSS-Punkt ausgewertet. Ganz entsprechend hat es sich als effizient erwiesen, auf den Aufwand zur Berechnung der richtigen Integrationsordnung jeder Komponente der  $\mathbf{B}$ -Matrix für alle Richtungen zu verzichten. Stattdessen werden die Vektorintegrale vollständig berechnet — die  $\mathbf{B}$ -Matrix wurde ja bereits an sämtlichen GAUSS-Punkten ausgewertet — um dann nachträglich die Nullkomponenten der Vektorintegrale zu ermitteln. Da die Quelle der Effizienz ohnehin auf der Seite der multiplikativen Operationen liegt, sind die Einbußen durch diesen Kompromiss verschwindend klein.

## 2. Integration verzerrter Elemente

Bei unverzerrten Elementen ist der Integrand ein Polynom und die Dimension des Vektorintegrals ist von vornherein bekannt.

Bei der Quadratur von Elementmatrizen verzerrter Elemente werden gebrochenrationale Funktionen integriert. Grund hierfür sind die Einträge der JACOBI-Matrix, die als Funktionen von  $\boldsymbol{\xi}$  in  $\mathbf{J}^{-1}$  — und somit für die zu integrierenden Funktionen — gebrochenrationale Ausdrücke erzeugen. Man weiß somit nicht *a priori*, welche Einträge der Vektorintegrale  $\mathbf{c}$  und  $\mathbf{d}$  nahezu verschwinden.

Wie oben beschrieben wird die gesamte  $\mathbf{B}$ -Matrix an jedem Integrationspunkt ausgewertet. So wird im ersten Schritt jeder Eintrag beider Vektorintegrale berechnet. Ihre Dimension ist durch den Grad der Finite-Element-Approximation definiert. Im zweiten Schritt werden alle Komponenten innerhalb eines gewissen Toleranzintervalls berechnet. Mit dem *a posteriori* Wissen über die vernachlässigbaren Komponenten der Vektorintegrale können bei der Berechnung des Punktproduktes — in dem Rahmen, in dem die Vektoren vernachlässigbare Einträge liefern — in gleicher Weise Operationen gespart werden wie zuvor.

Zur Berechnung des Punktproduktes hat es sich als effizient erwiesen, die Suche nach der minimalen Anzahl relevanter Einträge der beiden Integranden zu sparen. Woran das liegt, sei anhand der Betrachtung der Integranden im eindimensionalen Fall erläutert.

$$\int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \det \mathbf{J} \, d\xi = \int_{-1}^1 \left( \mathbf{L} \frac{\mathbf{J}_{\text{adj}}}{\det \mathbf{J}} (\mathbf{N}_i)^T \right) \mathbf{C} \left( \mathbf{L} \frac{\mathbf{J}_{\text{adj}}}{\det \mathbf{J}} (\mathbf{N}_j) \det \mathbf{J} \right) d\xi \quad (4.115)$$

$$= \int_{-1}^1 \underbrace{\left( \mathbf{L} \frac{\mathbf{J}_{\text{adj}}}{\det \mathbf{J}} (\mathbf{N}_i)^T \right)}_{\text{Integrand 1}} \underbrace{\mathbf{C} \left( \mathbf{L} \mathbf{J}_{\text{adj}} (\mathbf{N}_j) \right)}_{\text{Integrand 2}} d\xi \quad (4.116)$$

Die JACOBI-Matrix als Funktion von  $\xi$  produziert in  $\mathbf{J}^{-1}$  und somit auch für die zu integrierenden Funktionen gebrochenrationale Ausdrücke. Im zweiten Integranden kürzt sich die Determinante  $\det \mathbf{J}$  im Nenner von  $\mathbf{J}^{-1}$  heraus.  $\mathbf{J}_{\text{adj}}$  ist eine Matrix ganzrationaler Funktionen, deren Ordnung sich nach der Unterdeterminante der jeweiligen Komponente von  $\mathbf{J}$  richtet. Integrand zwei ist „einfacher“ zu integrieren und enthält dementsprechend mehr Zahlen  $\approx 0$ .

Ginge man zur Berechnung des Punktproduktes nach dem Prinzip der Minimumsuche vor, so würde Integrand zwei das Minimum dominieren. Die Multiplikation anhand der von Null verschiedenen Einträge von Integrand zwei lässt sich außerdem programmiertechnisch effizient umsetzen, so dass auch für die Integration unverzerrter Elemente keinerlei Einbußen zu verzeichnen sind. Das prinzipielle Vorgehen kann somit wie folgt zusammengefasst werden:

1. Die Vektorintegrale beider Integranden werden vollständig berechnet. Hierzu wird die **B**-Matrix an sämtlichen GAUSS-Punkten ausgewertet.
2. Bei der Bildung des Punktproduktes werden die Multiplikationen, die aufgrund der von Null verschiedenen Komponenten von Integrand zwei erforderlich sind, durchgeführt.

### 4.6.3 Numerische Beispiele

Die folgenden beiden Beispiele zeigen die Reduzierung des numerischen Aufwandes durch die Methode Vektorintegration anhand von Rechenzeiten. Jedem der gewählten Ansatzräume liegt ein uniformer Polynomgrad zugrunde. Sämtliche Berechnungen wurden auf einer digital  $2x500au^2$  (alpha) Maschine (processor ev5 21164 mit 500 MHz) durchgeführt.

#### 4.6.3.1 Deckenplatte auf Stützen

Als erstes wird eine auf neun Stützen gelagerte Deckenplatte unter Gleichflächenlast betrachtet. Bei einer Plattendicke von  $t = 0.2$  [m] ist das Längen-Dickenverhältnis der Struktur durch einen Wert von 60 gekennzeichnet. Die Querschnittsflächen der 3.0[m] langen Stützen messen  $0.3$ [m]  $\times$   $0.3$ [m]. Die Struktur wurde durch 194 Hexaederelemente diskretisiert, wobei das in Abbildung 4.19 dargestellte Netz zum Rand und zu den Stützen hin verfeinert ist. Die Elemente sind zum Teil stark verzerrt.

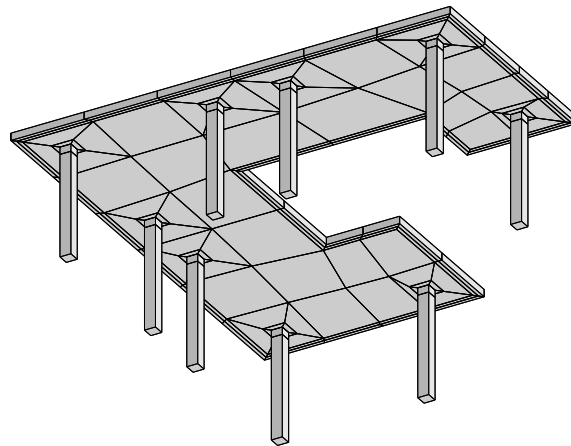


Abbildung 4.19: Deckenplatte auf neun Stützen, mit 194 Hexaederelementen diskretisiert

Um den Effizienzgewinn der Methode Vektorintegration im Vergleich zur üblichen GAUSS-Quadratur zu quantifizieren, trägt Abbildung 4.20 das Verhältnis der Rechenzeiten dieser beiden Integrationsschemata gegenüber dem gewählten Polynomgrad der jeweiligen Finite-Element-Diskretisierung auf. Er ist durch den erforderlichen Speicherbedarf zur Gleichungslösung limitiert.



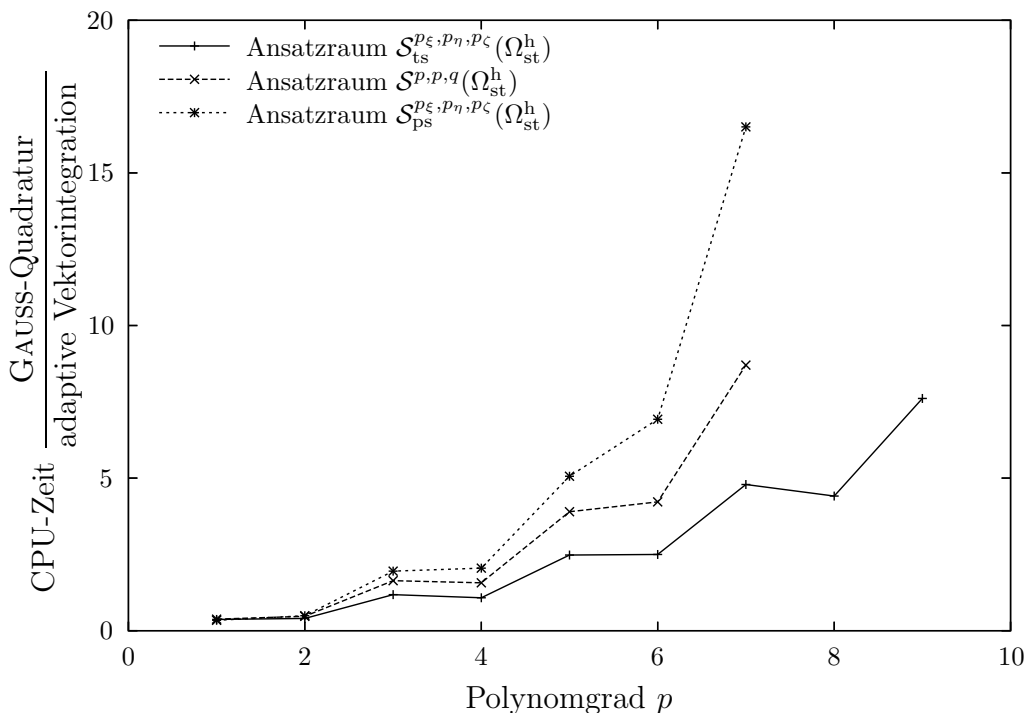


Abbildung 4.20: Verhältnis der CPU-Zeiten von GAUSS-Quadratur und Vektorintegration

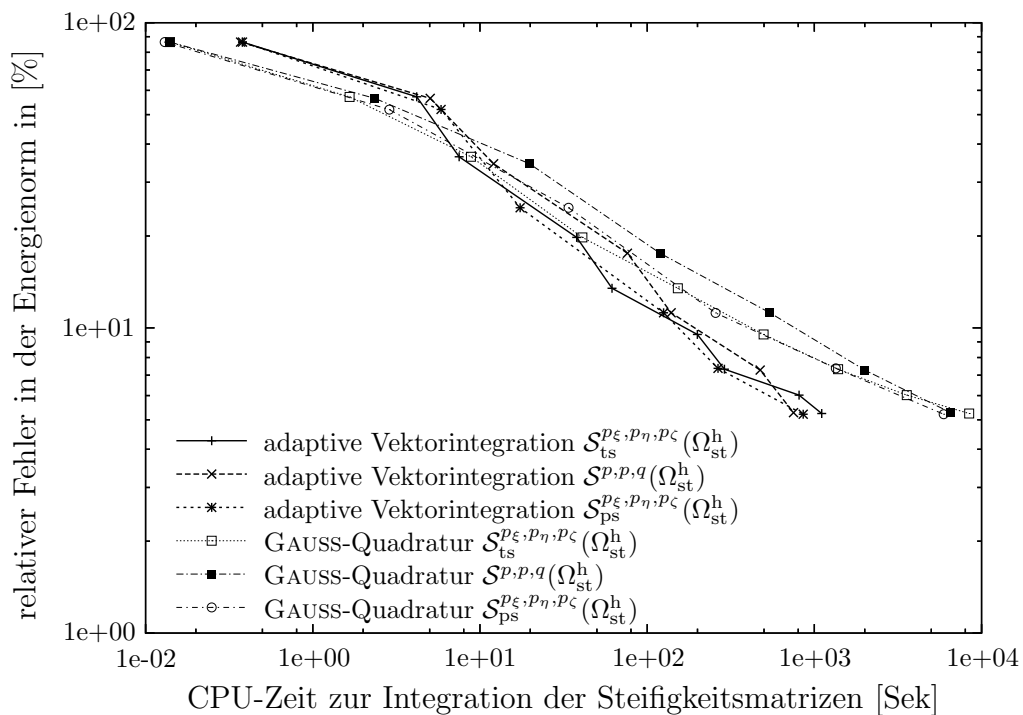


Abbildung 4.21: Relativer Fehler in der Energienorm in [%] gegenüber der CPU-Zeit zur Berechnung der Steifigkeit

Je nach Ansatzraum wird eine Beschleunigung um einen Faktor über 16 erreicht. Der Effizienzgewinn ist bei Berechnungen mit dem reichen *tensor product space*  $\mathcal{S}_{\text{ps}}^{p_\xi, p_\eta, p_\zeta}(\Omega_{\text{st}}^h)$  am deutlichsten zu spüren, weil die Anisotropie der Ansatzräume, die sich die Methode Vektorintegration zunutze macht, bei dem *vollen* Ansatzraum  $\mathcal{S}_{\text{ps}}^{p_\xi, p_\eta, p_\zeta}(\Omega_{\text{st}}^h)$  am stärksten ausgeprägt ist.

Abbildung 4.21 trägt den relativen Fehler in der Energienorm in Abhängigkeit der CPU-Zeit zur Berechnung der Steifigkeit auf. Für alle Ansatzräume liegt die erforderliche Zeit zur Integration — mit dem Ziel eines relativen Fehlers von weniger als 6% — bei adaptiver Vektorintegration um etwa eine Größenordnung unter der der herkömmlichen GAUSS-Quadratur. Die exakte Dehnungsenergie wurde durch Extrapolation der Ergebnisse (vgl. Abschnitt 4.2.2), die aus Berechnungen mit dem *tensor product space* für  $p_\xi = p_\eta = p_\zeta = 1, \dots, 7$  stammen, geschätzt.

#### 4.6.3.2 Knotenkonstruktion einer Stabwerkskuppel

Als weiteres Beispiel stellt dieser Abschnitt die Ergebnisse zu Berechnungen einer gekrümmten Struktur aus dem Stahlbau vor. Es handelt sich um die in Abbildung 4.22 dargestellte Detailkonstruktion einer Stabwerkskuppel, die jeweils vier Stäbe kraftschlüssig verbindet. Sie schließen an den vier Stegen an, die radial an einem zylindrischen Kern angreifen, dessen schubbeanspruchter Bereich durch eine innenliegende Kreisringplatte verstärkt ist. Die Symmetrie des Systems erlaubt die Reduktion des Berechnungsmodells auf ein Achtel der Struktur.

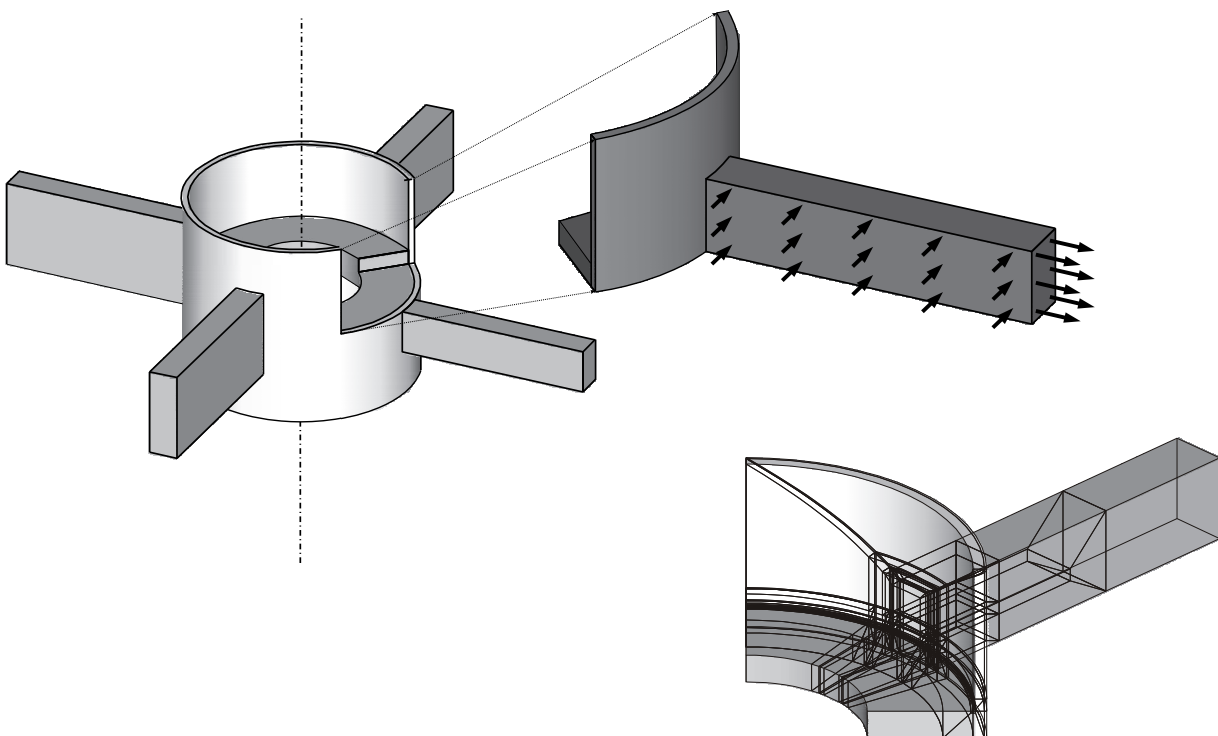


Abbildung 4.22: Geometrie der Knotenkonstruktion einer Stabwerkskuppel und Finite-Element-Netz

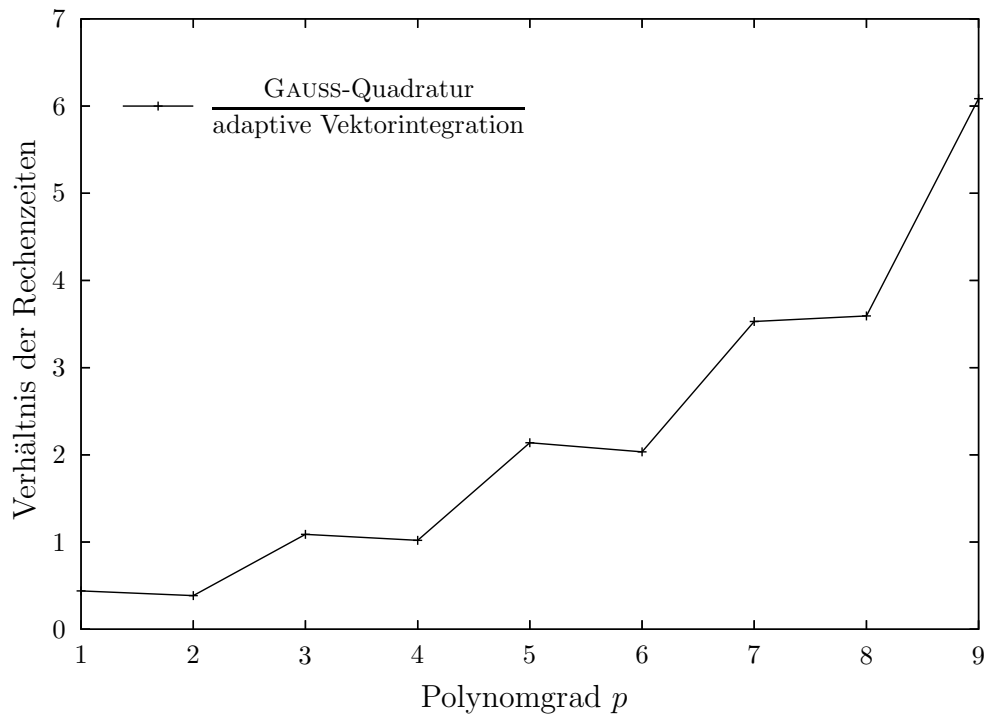


Abbildung 4.23: Verhältnis der Rechenzeiten von GAUSS-Quadratur zu Vektorintegration gegenüber dem Polynomgrad  $p$  bei Berechnungen mit dem *reduzierten* Ansatzraum

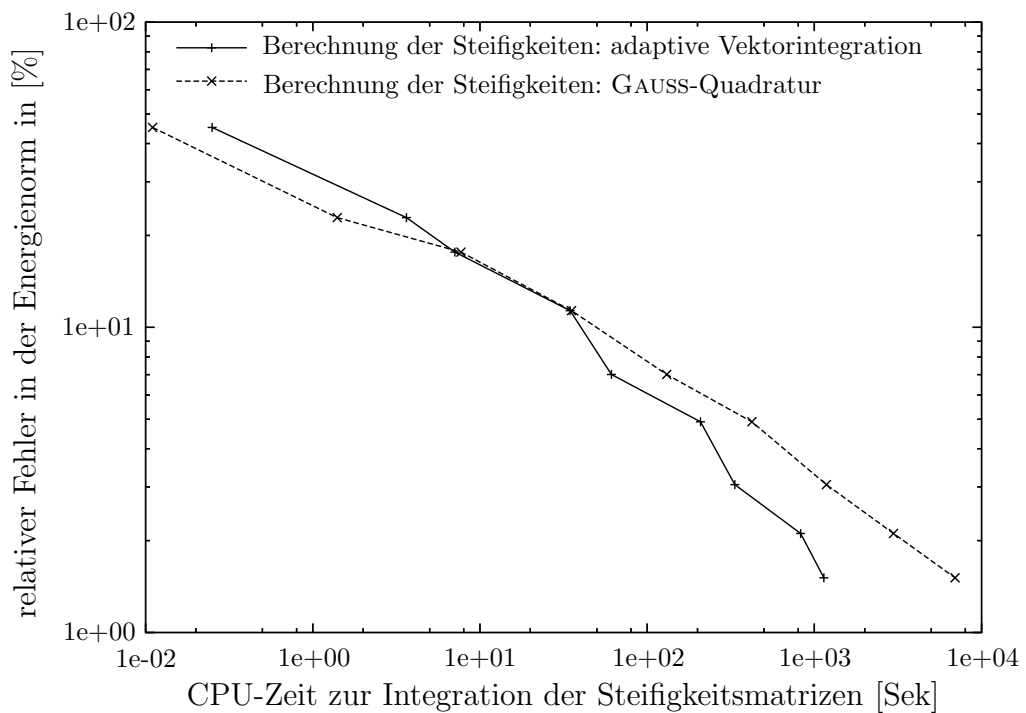


Abbildung 4.24: Relativer Fehler in der Energienorm in [%] gegenüber der Zeit zur Berechnung der Steifigkeiten

Neben den entsprechenden symmetrischen DIRICHLET-Randbedingungen wirkt auf die Stege seitlicher Druck sowie eine Zugkraft in Richtung der Stegachse. Das durch 162 Elemente diskretisierte Achtsystem ist in Abbildung 4.22 rechts unten dargestellt.

Analog zu dem vorangegangenen Beispiel ist der Effizienzvergleich der Integrationsmethoden bei Berechnungen mit dem *trunk space* durch die Diagramme der Abbildungen 4.23 und 4.24 dargestellt. Bei  $p_\xi = p_\eta = p_\zeta = 9$  ist Vektorintegration um eine Faktor von fast 6 schneller. Um einen relativen Fehler in der Energienorm von unter 2% zu erreichen, benötigt die adaptive Vektorintegration etwa eine Größenordnung weniger Rechenzeit.

# Kapitel 5

## $rp$ -adaptive Diskretisierung

Der Darstellung der Finite-Element-Methode und der speziellen Eigenschaften von Ansätzen hoher Ordnung folgt nun die Beschreibung des  $rp$ -adaptiven Verfahrens, motiviert durch das Modellproblem physikalischer Nichtlinearität.

Gemäß Abschnitt 4.2 konvergiert die uniforme  $p$ -Version für diese Problemklasse algebraisch. Hinsichtlich der Konvergenzrate physikalisch nichtlinearer Probleme haben LI und BABUŠKA [55] theoretische Untersuchungen zur Wahl von Polynomgrad und Elementgröße des Finite-Element-Modells veröffentlicht. Die Strategie der hier entwickelten effizienten Diskretisierung ist Gegenstand der folgenden Abschnitte.

### 5.1 Die Idee

Bei physikalisch nichtlinearen Problemen entsteht eine Singularität entlang der plastischen Front, die im eindimensionalen Fall einem Punkt, im zweidimensionalen Fall einer Kurve und

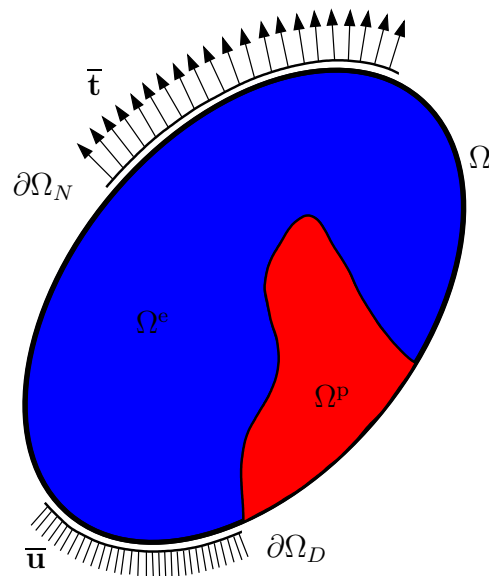


Abbildung 5.1: Gebiet  $\Omega$ , zerlegt in einen elastischen  $\Omega^e$  und einen plastischen  $\Omega^p$  Bereich

im dreidimensionalen Fall einer Oberfläche entspricht.

Dieser Regularitätsverlust erlaubt nur algebraische Konvergenz, sofern die Kurve des elastisch-plastischen Interface das Innere von Elementen durchquert. Um auch für diese Klasse von Problemen exponentielle Konvergenz zu erreichen, besteht die Idee darin, das gesamte Berechnungsgebiet  $\Omega$  so in Teilgebiete  $\Omega^e$  und  $\Omega^p$  zu zerlegen, dass deren Ränder dem Verlauf des elastisch-plastischen Interface folgen. Abbildung 5.1 illustriert die Idee anhand des zweidimensionalen Problems. Die exakte Lösung auf den Substrukturen  $\Omega^e$  und  $\Omega^p$ , die entweder zu einem elastischen oder einem plastischen Bereich des Gebietes  $\Omega$  gehören, ist glatt, vorausgesetzt man schließt sonstige Singularitäten — beispielsweise aufgrund einspringender Ecken — aus. Jedes dieser Teilgebiete wird dann durch eine  $p$ -Version auf grobem Netz diskretisiert; eine Verfeinerung in Richtung des elastisch-plastischen Interface ist überflüssig. Das Berechnungsgebiet mit einer nicht-glatten Lösung wird in Teilgebiete zerlegt, auf denen jeweils eine reguläre Lösung existiert. „So hoffnungslos einfach ist die Lösung.“ [101].

Nachdem der Rand des elastisch-plastischen Interface eine beliebige Kurve beschreibt, sind die Elementkanten entsprechend geformt. Die Berechnung solcher Elementgeometrie ermöglicht die in Abschnitt 4.4 beschriebene Abbildungsfunktion.

Ort und Geometrie des elastisch-plastischen Interface sind nicht *a priori* bekannt. Daher bedarf es eines *rp*-adaptiven Algorithmus, der den Rand der plastischen Front iterativ sucht. Das Konzept ist Thema des folgenden Abschnitts.

## 5.2 *rp*-adaptiver Algorithmus

Wie die schrittweise Suche nach der plastischen Front algorithmisch umgesetzt ist, dokumentieren Abbildung 5.2 und Algorithmus **A-3**.

Für ein gegebenes Berechnungsgebiet wird zunächst eine Anfangsdiskretisierung in Form eines groben Netzes mit Polynomgrad  $p = 1$  generiert (vgl. Iteration 1a in Abbildung 5.2). Zusätzlich wird ein sogenanntes Hintergrundnetz oder Auswerternetz erzeugt. Es entsteht entweder völlig unabhängig vom Berechnungsnetz oder durch Zerlegung der  $p$ -Elemente in jeweils  $k \times k$  Subelemente. Seine Netzdichte korrespondiert mit der Anzahl an Integrationspunkten zur Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen und Elementlastvektoren. Das Hintergrundnetz ermöglicht eine Approximation der plastischen Zone mit hoher Auflösung, unabhängig von der Dichte des (grogen)  $p$ -Netzes. Die nichtlineare Finite-Element-Berechnung liefert nun elastische und plastifizierte Punkte auf einem derartigen Hintergrundnetz.

Schneidet das elastisch-plastische Interface keines der Elemente, enthält also ein Element ausschließlich elastische oder plastische Punkte, bleibt die räumliche Diskretisierung unverändert (vgl. Iteration 2a in Abbildung 5.2). Der Polynomgrad wird erhöht, die Integrationsordnung angepasst, ein neues Auswerternetz generiert.

Schneidet — wie in Iteration 2b von Abbildung 5.2 dargestellt — das elastisch-plastische Interface das Innere von Elementen, enthält also ein Element sowohl elastische als auch plastifizierte Punkte, wird ein neues Berechnungsnetz unter Berücksichtigung dieser Punkte generiert (vgl. Iteration 3a in Abbildung 5.2). Das Prozedere wird wiederholt.

Durchquert die plastische Front das Elementinnere so, dass die ursprüngliche Netztopologie der Form des Interface nicht länger „standhält“, wird das Berechnungsgebiet unter Berücksichtigung der Zerlegung in elastische und plastifizierte Regionen neu vernetzt (vgl. Iteration 4a in Abbildung 5.2).

Dieser Algorithmus kann bis zu einem gewünschten Polynomgrad wiederholt werden. Die endgültige Diskretisierung ist dadurch gekennzeichnet, dass nach der nichtlinearen Berechnung kein Element vom elastisch-plastischen Interface geschnitten wird (vgl. Iteration 4b in Abbildung 5.2).

Um ein brauchbares Ergebnis zu gewährleisten, muss der Polynomgrad  $p$  der Finite-Element-Analyse einen minimalen Wert  $p_{\min}$  erreicht haben. Weiterhin sollte die relative inkrementelle Änderung in  $\mathcal{U}$  (Gleichung (2.51)) unter einer definierten Toleranz  $TOL$  liegen. Algorithmus **A-3** fasst die *rp*-adaptive Diskretisierung zusammen.

Um Position und Verlauf der plastischen Front zu berechnen, verwendet der *rp*-adaptive Algorithmus den im folgenden Abschnitt beschriebenen geometrischen Algorithmus.

---

**Algorithmus A-3** *rp*-adaptiver Algorithmus
 

---

**Generiere:** Finite-Element-Netz = generiere (grobes) Ausgangsnetz

**Setze:** Polynomgrad  $p_{\text{FE}} = 1$

**Setze:** Integrationsordnung  $go = 2p_{\text{FE}}$

**Generiere:** Auswertenetz, dessen Dichte mit der Anzahl an Integrationspunkten korrespondiert

**repeat**

**Berechne:** nichtlineares Finite-Element-Problem

**Berechne:** Ergebnisse auf einem Hintergrundnetz

**Generiere:** aus den Ergebnissen des Hintergrundnetzes ein neues Finite-Element-Netz gemäß Algorithmus **A-4**

**Setze:** Polynomgrad  $p_{\text{FE}} = p_{\text{FE}} + 1$

**Setze:** Integrationsordnung  $go = 2p_{\text{FE}}$

**Generiere:** Auswertenetz, dessen Dichte mit der Anzahl an Integrationspunkten korrespondiert

**until**

kein Element wird von der plastischen Front geschnitten

**und**  $p_{\text{FE}} \geq p_{\min}$

**und**  $\frac{|\mathcal{U}_{p_{\text{FE}}} - \mathcal{U}_{p_{\text{FE}}-1}|}{|\mathcal{U}_{p_{\text{FE}}}|} \leq TOL$

---

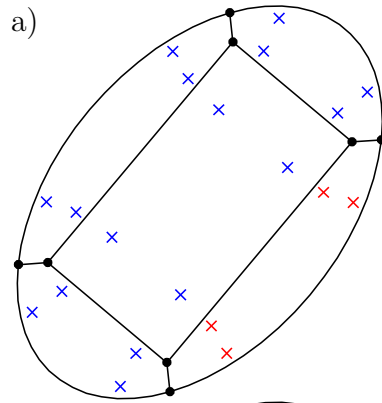
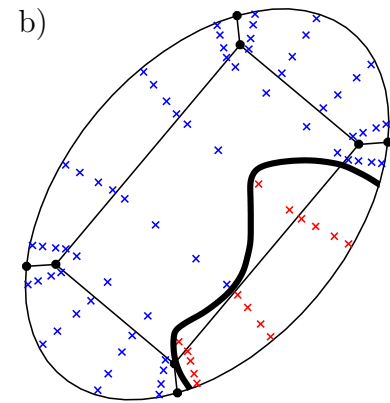
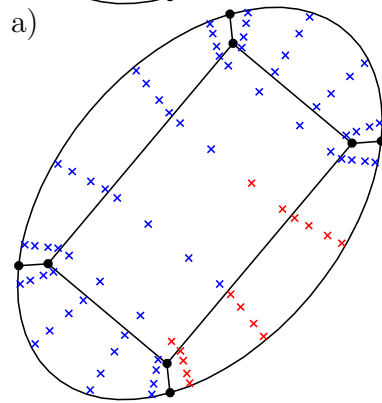
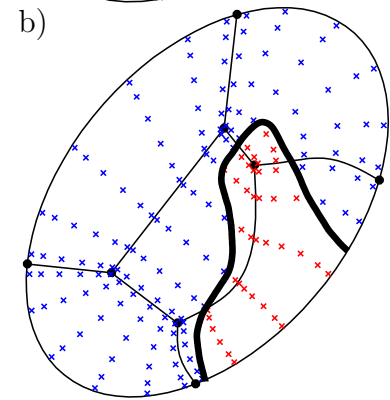
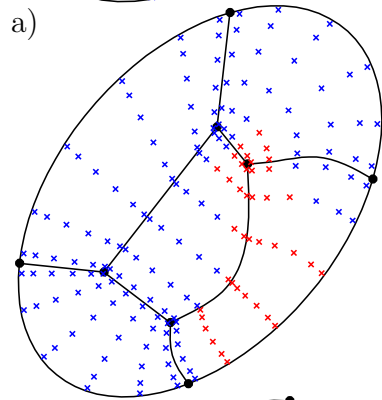
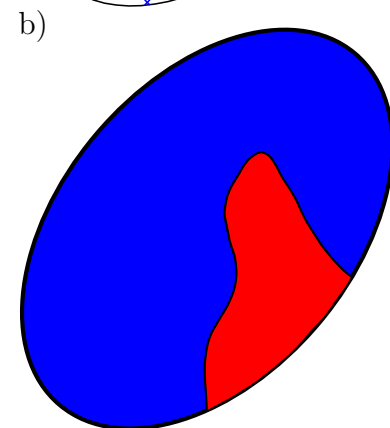
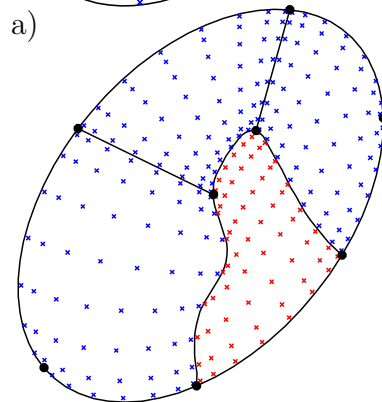
Iteration 1Polynomgrad  $p = 1$ Iteration 2Polynomgrad  $p = 2$ Iteration 3Polynomgrad  $p = 3$ Iteration 4Polynomgrad  $p = 4$ 

Abbildung 5.2: Grafische Darstellung des *rp*-adaptiven Algorithmus mit Integrationsordnung  $2p$  (blau: elastische Punkte/Bereiche, rot: plastifizierte Punkte/Bereiche)



## 5.3 Geometrischer Algorithmus

Um im  $rp$ -adaptiven Zyklus die Geometrie des Interface zu bestimmen und ein entsprechendes neues Finite-Element-Netz zu generieren, wird der folgende Algorithmus eingesetzt:

Ausgehend von einem Hintergrundnetz mit elastischen und plastifizierten Punkten, wie es in Abbildung 5.3 a dargestellt ist, sucht der Algorithmus alle Elemente und Kanten, die vom plastischen Rand geschnitten werden. Jede der identifizierten Kanten ist durch einen elastischen und einen plastifizierten Knoten berandet (vgl. Abbildung 5.3 b). Die Kurve, die den Verlauf der plastischen Zone beschreibt, teilt jede Kante. Die Positionen dieser Schnittpunkte  $P_k^I$  werden für alle Kanten  $k$  berechnet (vgl. Abbildung 5.3 c). Sie definieren die geometrischen Orte, um einen interpolierenden B-Spline zur Approximation der plastischen Zone zu erzeugen.

Zur Berechnung der Schnittpunkte  $P_k^I$  werden die physikalischen Eigenschaften der Endpunkte einer entsprechenden Kante  $k$  interpoliert, die von MISES Vergleichsspannung  $\sigma_{\text{vgl},i}$  der elastischen Punkte  $P_i^e$  und ein Dehnungsmaß  $\bar{\varepsilon}_j^p$  gemäß Gleichung (5.4) der plastifizierten Punkte  $P_j^p$ . Das entsprechende Interpolationsschema ist durch

$$\mathbf{P}_k^I = (1 - f_k)\mathbf{x}_i + f_k\mathbf{x}_j \quad \text{wobei} \quad f_k = \frac{w_i^e}{w_i^e + w_j^p} \quad (5.1)$$

gegeben. Zur Berechnung der sogenannten elastischen und plastifizierten Gewichte  $w_i^e$  und  $w_j^p$  unterscheidet man zwei Zugänge:

1. Ein ganz einfacher Weg liegt in der Annahme

$$w_i^e = w_j^p, \quad (5.2)$$

die zu  $f_k = 0.5$  führt und daher im Folgenden als *Mittelpunktregel* bezeichnet wird.

2. Einen anderen Zugang liefert die Berechnung der elastischen und plastifizierten Punkte durch:

$$w_i^e = \frac{\sigma_0 - \sigma_{\text{vgl},i}}{\sigma_0 - \sigma_{\text{vgl},\min}} \quad \text{mit} \quad \sigma_{\text{vgl},\min} = \min_l(\sigma_{\text{vgl},l}), \quad l = 0, \dots, n_l - 1 \quad (5.3)$$

und

$$w_j^p = \frac{\bar{\varepsilon}_j^p}{\bar{\varepsilon}_{\max}^p} \quad \text{mit} \quad \bar{\varepsilon}_{\max}^p = \max_q(\bar{\varepsilon}_q^p), \quad q = 0, \dots, n_q - 1 \quad (5.4)$$

$$\bar{\varepsilon}_j^p = \frac{\sqrt{\varepsilon_{j,x}^p{}^2 + \varepsilon_{j,y}^p{}^2 + \gamma_{j,xy}^p{}^2}}{\sqrt{\varepsilon_{j,x}^e{}^2 + \varepsilon_{j,y}^e{}^2 + \gamma_{j,xy}^e{}^2}}$$

Der Wert  $n_l$  bezeichnet die Anzahl elastischer Punkte,  $n_q$  die Anzahl plastifizierter Punkte. Im Folgenden wird dieser Ansatz als *gewichtete Regel* bezeichnet.

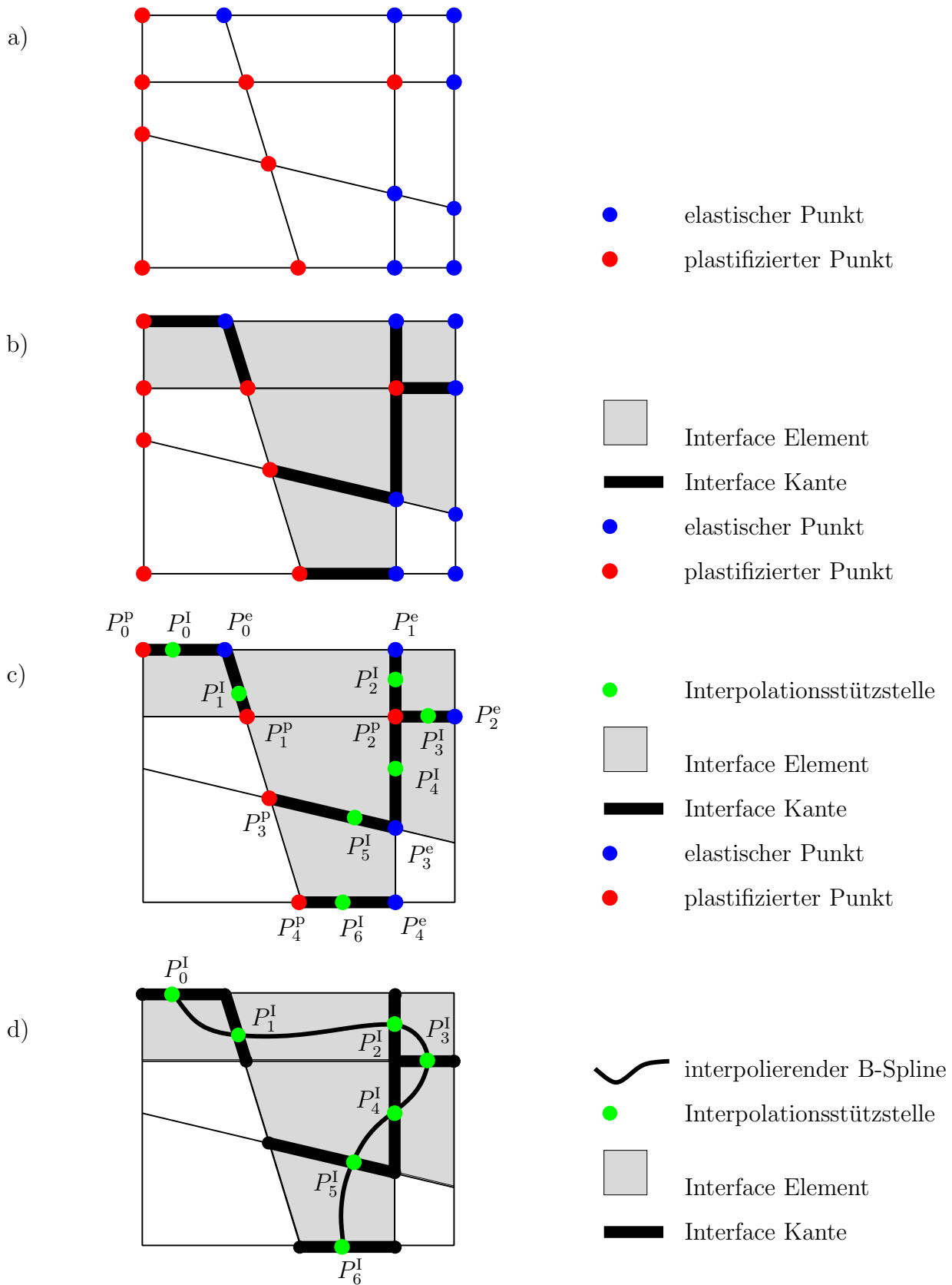


Abbildung 5.3: Algorithmus zur Approximation der Interface Geometrie als Basis der anschließenden Neuvernetzung

Ist der Verlauf der plastischen Front approximiert, wird ein neues Netz unter Berücksichtigung dieser Geometrie generiert. Man unterscheidet zwei Zugänge:

Falls ein moderat feines oder feines Netz gewünscht ist, wird das gesamte Berechnungsgebiet entlang des Interface in Teilgebiete zerlegt, die dann durch den Netzgenerator DO\_MESH [87] diskretisiert werden.

Ist ein grobes Berechnungsnetz gefordert, entstehen neue  $p$ -Elemente durch lokale Neuvernetzung der vom Interface geschnittenen Elemente der Ausgangsdiskretisierung. Abschnitt 6 zeigt beide Typen von Netzen.

---

**Algorithmus A-4** Approximation der Interface Geometrie zur anschließenden Zerlegung und Neuvernetzung des Berechnungsgebietes

---

**Lies:** Auswerternetz

**Finde Schnittpunkte der plastischen Front mit dem Hintergrundnetz:**

**Setze:**  $k = 0$

**Suche:** Kante $_k$  = Anfangs-Interface Kante, begrenzt durch  $P_i^e$  und  $P_j^p$

**repeat**

**Berechne:**  $P_k^I$  durch Interpolation auf Basis der Mittelpunktregel (5.2)  
oder der gewichteten Regel (5.3) und (5.4)

**Setze:** Element $_k$  = Nachbarelement von Kante $_k$ , das noch nicht  
besucht wurde

**Setze:**  $k = k + 1$

**Setze:** Kante $_k$  = suche nächste Interface Kante von Element $_{k-1}$

**until**

alle Interface Kanten sind gefunden

**Berechne:** Geometrie des Interface (interpolierender B-Spline aller Stützstellen  $P_k^I$ )

**Generiere:** neues Finite-Element-Netz (grob, moderat fein oder fein)

---

## 5.4 Datentransfer der Geschichtsvariablen — Widerspruch zum *rp*-adaptiven Gedanken?

Exponentielle Konvergenz auch für die Klasse nichtlinearer Probleme zu erreichen, ist erklärtes Ziel der *rp*-adaptiven Idee.

Diskretisiert man physikalisch nichtlineare Modellprobleme, bedarf es im Allgemeinen eines Datentransfers der Geschichtsvariablen, der üblicherweise in Form glättender Methoden, wie beispielsweise der *superconvergent patch recovery*-Technik [111, 112] erfolgt. Solches Vorgehen im Hinblick auf das oben formulierte Ziel in Frage zu stellen und einen alternativen Zugang vorzuschlagen, ist Anliegen dieses Abschnitts. Dies zu motivieren, wird der Unterschied geschichtsunabhängiger zu geschichtsabhängigen Materialmodellen charakterisiert.

Wie sich die *rp*-adaptive Diskretisierung iterativ dem Verlauf des elastisch-plastischen Interface nähert, wurde anhand von Abbildung 5.1, die die Zerlegung in elastische und plastifizierte Bereiche illustriert, gezeigt. Die dort dargestellte Situation entspricht einem endgültigen Zustand, der Resultat einer Folge von  $(n + 1)$  Lastschritten ist, wie sie in Abbildung 5.4 zu sehen sind.

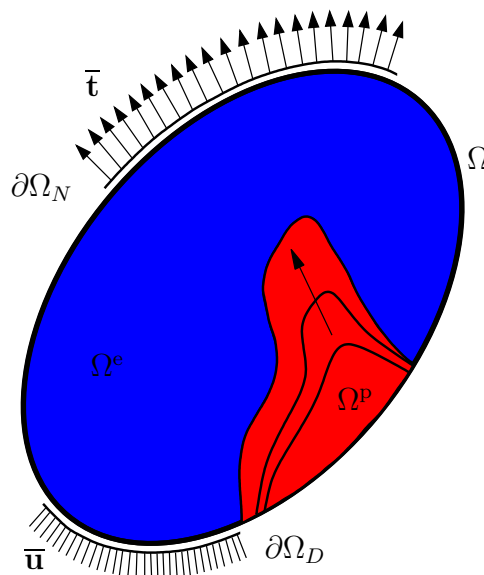


Abbildung 5.4: Gebiet  $\Omega$  mit Entwicklung der plastischen Front, zerlegt in einen elastischen  $\Omega^e$  und einen plastischen  $\Omega^p$  Bereich

Je nach Materialmodell nehmen die  $n$  Zustände aufgrund der Lastschritte  $t_{i-1}, \dots, t_i$  mit  $i = 1, \dots, n$  unterschiedlich Einfluss auf das Ergebnis des  $(n + 1)$ -ten Belastungszustandes und somit auf die endgültige Lösung:

Weil die Deformationstheorie nach HENCKY die formale Integration der Fließregel ermöglicht, ist die Lösung des Problems vom Lastpfad unabhängig — ein Lastschritt liefert dasselbe Ergebnis wie mehrere Lastschritte. Die Diskretisierung der Pseudozeit ist nur nötig, falls das NEWTON-RAPHSON-Verfahren nicht konvergiert.

Anders verhält es sich bei realistischeren Materialmodellen, wie beispielsweise der  $J_2$ -Fließtheorie. Die Fließregel kann nicht formal integriert werden, so dass die endgültige Lösung je nach Lastschrittsteuerung variiert. Die Diskretisierung der Zeit dient nicht nur der Konvergenz des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens, sondern nimmt zusätzlich Einfluss auf die Genauigkeit der Ergebnisse.

Im Hinblick auf die  $rp$ -adaptive Idee führt das zu folgender Konsequenz:

Hängt die Lösung des physikalisch nichtlinearen Problems von der Lastgeschichte und den entsprechenden Zwischenkonfigurationen ab, genügt es nicht, nur den letzten Zustand im  $rp$ -adaptiven Sinn aufzulösen. Die Fehler, die sich im Laufe der vorhergehenden Schritte „eingeschlichen“ hätten, verböten bereits die exponentielle Konvergenz. So bedarf es in jedem Lastschritt eines  $rp$ -adaptiven Zyklus, der das korrespondierende Interface approximiert. Das endgültige Finite-Element-Netz einer solchen elastoplastischen Analyse enthält infolgedessen alle Berandungen plastischer Fronten, die sich während der Entwicklung des elastisch-plastischen Interface einstellen. Die im  $rp$ -adaptiven Algorithmus verankerte Neuvernetzung erfolgt nicht nur bzgl. der endgültigen-, sondern bzgl. aller Interface Kurven.

**Behauptung:**

Diskretisiert man in jedem der  $(n + 1)$  Zeitschritte  $t \in [t_{i-1}, \dots, t_i]$  mit  $i = 1, \dots, n$  einer elastoplastischen Finite-Element-Analyse die plastische Front  $rp$ -adaptiv, erreicht man exponentielle Konvergenz.

**Voraussetzung:**

Wurde die Lösung, die aus dem vorletzten Zeitschritt  $t \in [t_{n-2}, \dots, t_{n-1}]$  stammt, im Sinne der exponentiellen Konvergenz genau genug approximiert, ermöglicht die  $rp$ -adaptive Diskretisierung auch für die Lösung des letzten Zeitschritts  $t \in [t_{n-1}, \dots, t_n]$  exponentielle Konvergenz. Dies zeigen die Untersuchungen der Abschnitte 6 und 7.

**Schluss:**

Nachdem aufgrund der Behauptung jede Lösung eines Zeitschrittes  $[t_{i-1}, \dots, t_i]$  mit der geforderten Genauigkeit  $rp$ -adaptiv ermittelt wurde, gilt aufgrund der Voraussetzung obiger Schluss rekursiv für alle Zeitintervalle bis einschließlich  $t \in [t_0, \dots, t_1]$ .  $\square$

**Bemerkung:**

Um für ein lastpfadabhängiges Problem exponentielle Konvergenz zu erreichen, muss sowohl die „zeitliche“ als auch die räumliche Diskretisierung exponentiell konvergieren. Eine Effizienzsteigerung in der Zeitdiskretisierung ist nicht Gegenstand dieser Arbeit. Sie beschränkt sich auf die Entwicklung eines Algorithmus zur exponentiellen Konvergenz elastoplastischer Probleme im Raum. Demgemäß formuliert obige **Behauptung** ihr Konvergenzziel bzgl. der räumlichen Approximation. Die im **Schluss** prognostizierte exponentielle Konvergenz basiert auf einer Referenzlösung mit fixer Lastschrittweite und hat rein räumlichen Charakter.

Um zusätzlich in der Zeit — und somit für das gesamte Problem — exponentielle Konvergenz zu ermöglichen, bedarf es einer entsprechend effizienten zeitlichen Diskretisierungsstrategie.

Weil die Finite-Element-Netze von einem zum folgenden Lastschritt variieren, müssen auch die Geschichtsvariablen von einem auf das folgende Netz transferiert werden.

Üblicherweise werden dazu glättende Methoden verwendet, die beispielsweise in ZIENKIEWICZ und ZHU [111, 112] sowie WIBERG und ZIUKAS [102] beschrieben sind. Solche Zugänge approximieren die geschichtsabhängigen Daten ohne Rücksicht auf die Singularität, an der die Lösung Regularität verliert. Die angestrebte exponentielle Konvergenz würde durch diese Strategie zerstört. Untersuchungen von NIGGL [60] untermauern das. Diesen Nachteil umgeht die *rp*-adaptive Diskretisierung, angewandt auf den Transfer der Geschichtsvariablen. Als Basis des entsprechenden Integrationsverfahrens im Lastschritt ( $i$ ) dient dann das bereits im  $(i - 1)$ -ten Schritt *rp*-adaptiv erzeugte Berechnungsnetz, das die korrespondierende Singularität auflöst. Voraussetzung dazu ist das monotone Wachstum der plastischen Front.

Im Rahmen der *rp*-adaptiven Diskretisierung ist ein Datentransfer der Geschichtsvariablen im herkömmlichen Sinn also kontraproduktiv!

## 5.5 Basisalgorithmen

Bei der Entwicklung der oben beschriebenen Algorithmen **A-3** und **A-4** zur *rp*-adaptiven Diskretisierung sind verschiedene Basisalgorithmen entstanden. Sie werden in Folge oder auch geschachtelt aus **A-3** und **A-4** aufgerufen und sind Gegenstand der folgenden Abschnitte.

Der objektorientierte Modellierkern ACIS [24, 25] dient als geometrische Grundlage. Seine Datenstrukturen basieren auf der in Abschnitt 3.1 beschriebenen Modellbildung durch Randdarstellung und sind auch für andere Geometriemodellierer nach dem *Boundary-Representation* Modell repräsentativ. Dennoch verzichtet diese Arbeit auf eine technisch detaillierte Beschreibung der an ACIS gekoppelten Algorithmen und beschränkt sich darauf, deren prinzipielles Vorgehen zu erläutern.

### 5.5.1 Konvertierungsalgorithmen

Im *rp*-adaptiven Prozess werden unterschiedliche Werkzeuge miteinander verknüpft. Die Daten des zwei- oder dreidimensionalen geometrischen Modells sind zum einen auf der Seite des Geometriemodellierkerns, zum anderen auf der Seite des am Lehrstuhl für Bauinformatik der Technischen Universität München entwickelten  $p$ -Versions Finite-Element-Programms *AdhoC* [30] präsent. Bei zweidimensionalen Problemen ist ggf. zusätzlich eine Darstellung im Format des in Abschnitt 5.5.2.2 beschriebenen Netzgenerators DO\_MESH [87] gefordert. Weil all diese Bausteine Daten austauschen, bedarf es geeigneter Konvertierungsalgorithmen, die Topologie und Geometrie eines Formates in die jeweils gewünschte Sprache überführen.

### 5.5.2 Zweidimensionale Zerlegung

Algorithmus **A-4** initiiert eine Neuvernetzung der betrachteten Struktur unter Berücksichtigung einer Zerlegung in elastische und plastifizierte Bereiche. Die dabei entstehenden Netze können je nach Wunsch grob, moderat fein oder fein sein. Die entsprechenden Vernetzungsstrategien werden im Folgenden erläutert. Finite-Element-Netze beider Algorithmen sind im Rahmen der numerischen Beispiele zu sehen.

### 5.5.2.1 Generierung grober Netze

Ist ein grobes Netz gewünscht, entstehen neue Elemente durch lokale Neuvernetzung ursprünglicher Elemente. Die Umsetzung basiert auf der Anwendung verschiedener Verfeinerungsmakros für vierknotige Elemente. Welches der drei Makros verwendet wird, hängt davon ab, welche Kanten des Ursprungselementes wie oft von der plastischen Front geschnitten werden. Abbildungen 5.5-5.7 zeigen die relevanten Fälle zur Zerlegung in Subelemente.

- Das Interface schneidet gegenüberliegende Kanten.

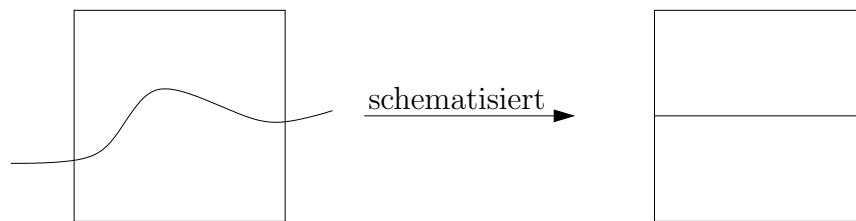


Abbildung 5.5: Zerlegung des Ursprungselementes in zwei Subelemente

- Das Interface schneidet benachbarte Kanten.

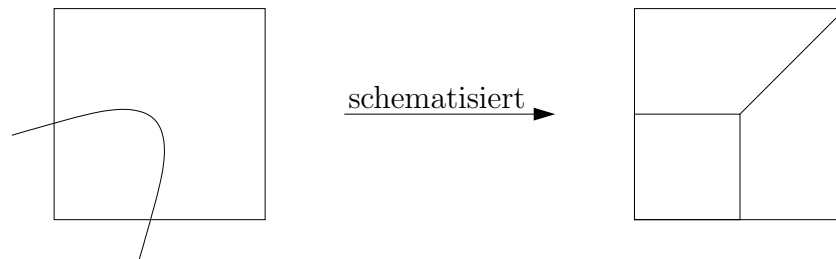


Abbildung 5.6: Zerlegung des Ursprungselementes in drei Subelemente

- Das Interface schneidet eine Kante zweimal.

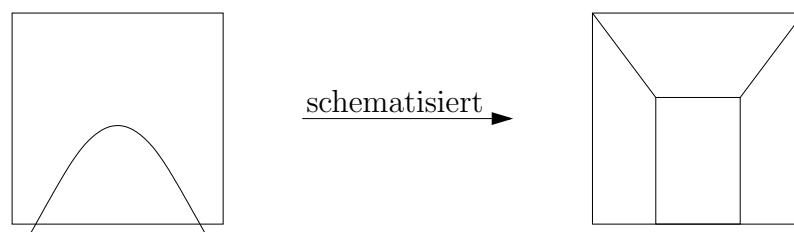


Abbildung 5.7: Zerlegung des Ursprungselementes in vier Subelemente

Diese Verfeinerungsmakros sind selbstverständlich nicht auf alle denkbaren Fälle von Verschneidungsmustern anwendbar und decken also nur eine ausgesuchte Teilmenge ab. Den Situationen, die im Rahmen der numerischen Beispiele dieser Arbeit auftreten (vgl. Abschnitt 6), halten sie aber stand. Tritt ein Fall ein, in dem die oben vorgestellten Verfeinerungsschemata nicht greifen muss entweder ein passendes Makro hinzugefügt werden, oder eine moderat feine bzw. feine Vernetzung gemäß Abschnitt 5.5.2.2 gewählt werden.

Aus der Verfeinerung können Elemente hervorgehen, deren Geometrie so verzerrt ist, dass die  $p$ -Version trotz ihrer Robustheit gegenüber allgemeinen Elementformen [31, 33, 32, 29, 76, 97] keine Lösung findet. Darauf reagiert der Algorithmus durch weitere Verfeinerung der Subelemente, die aus den in Abbildung 5.6 und 5.7 dargestellten Makros entstanden sind. Die entsprechenden Zerlegungen sind in Abbildung 5.8 bzw. 5.9 dargestellt und werden je nach Bedarf auf kein, ein, mehrere oder alle Subelement/e des Ursprunghlements angewandt.

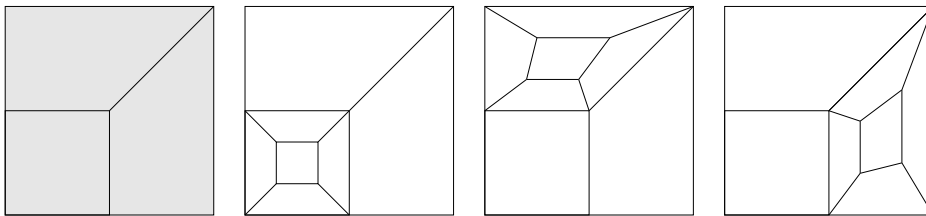


Abbildung 5.8: Verfeinerung von Subelementen, entstanden aus dem Makro gemäß Abbildung 5.6

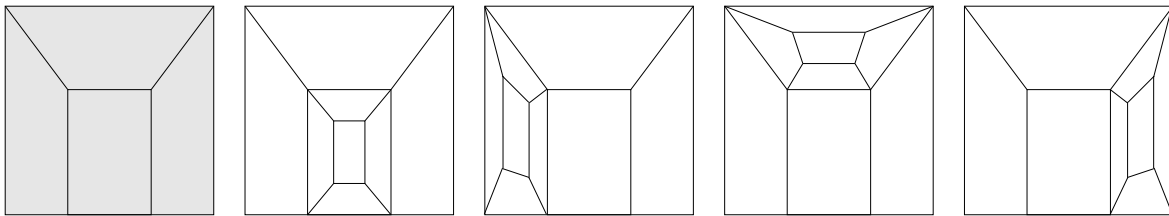


Abbildung 5.9: Verfeinerung von Subelementen, entstanden aus dem Makro gemäß Abbildung 5.7

Erweiterte man diese Makros um Zerlegungsstrategien für dreiknotige Elemente, könnte man gröbere Netze erzeugen und die Effizienz weiter steigern. Dazu wäre jedoch die Implementierung von Dreieckselementen hoher Ordnung auf der Finite-Element-Seite erforderlich.

### 5.5.2.2 Generierung moderat feiner und feiner Netze

Dieser Zugang teilt in jedem  $rp$ -adaptiven Iterationsschritt zunächst das gesamte Berechnungsgebiet in rein elastische und rein plastische Regionen (vgl. Abbildung 5.10 links). Diese werden anschließend durch den Netzgenerator DO\_MESH [87] mit gewünschter Dichte vernetzt (vgl. Abbildung 5.10 rechts). Gerade Kanten des entstandenen Finite-Element-Netzes erhalten ihre Geometriebeschreibung rückwirkend durch die in Abschnitt 5.5.3 skizzierte Vereinigung von Ausgangsgeometrie und Finite-Element-Netz.



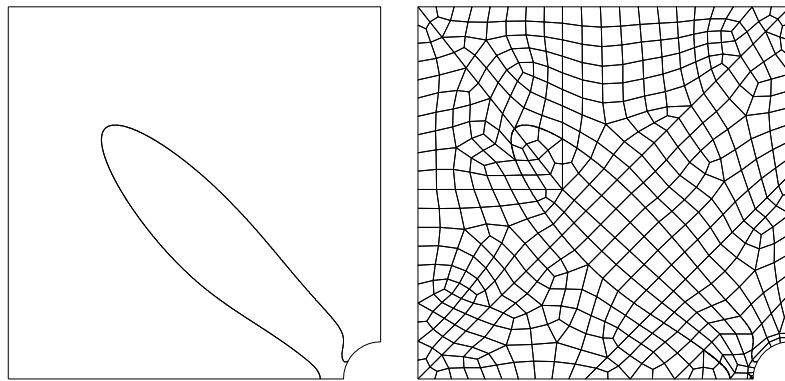


Abbildung 5.10: Vernetzungsstrategie zur Erzeugung moderat feiner und feiner Interface Netze

### Netzgenerierung nach der Gebietszerlegungstechnik

Zur Generierung von Finite-Element-Netzen gibt es unterschiedlichste Ansätze [39]. Der Netzgenerator DO\_MESH, entwickelt am Lehrstuhl für Bauinformatik der Technischen Universität München, generiert durch rekursive Gebietsteilung Oberflächennetze.

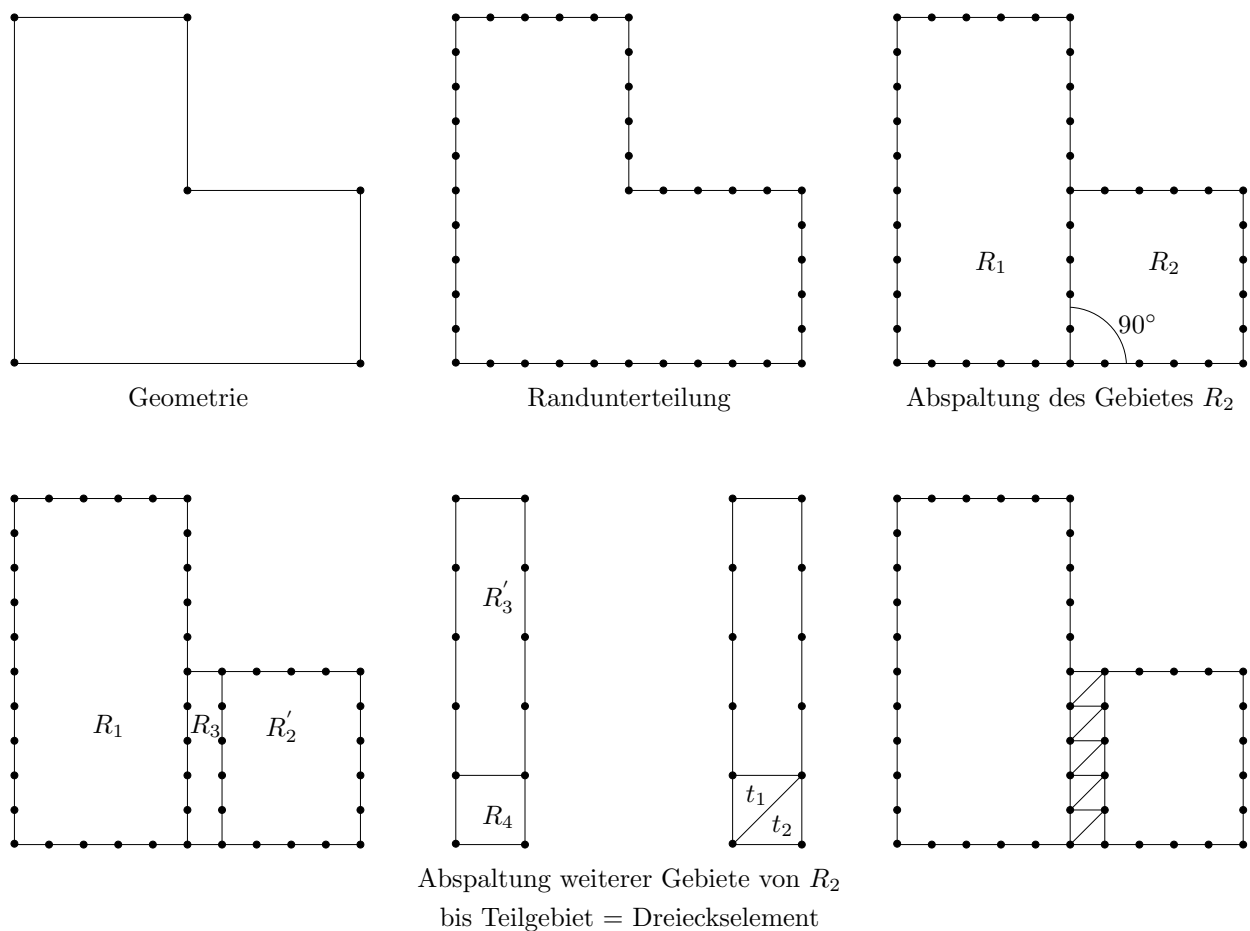


Abbildung 5.11: Methode der rekursiven Gebietsteilung, aus [43]

SCHWEINGRUBER-STRATEN stellt das Verfahren detailliert in [87] vor, HALFMANN erklärt in [43] weiterführende Entwicklungen, die insbesondere auf Probleme der Fluid-Struktur-Interaktion zugeschnitten sind. Hier steht nur das grundlegende Prinzip zur Diskussion.

BANK beschreibt in [8] wie man Strukturen rekursiv teilt, um Finite-Element-Netze zu erzeugen. Den entsprechenden Algorithmus zur Generierung dreiknotiger Elemente veranschaulicht Abbildung 5.11.

Ausgehend von einem ebenen, zweidimensionalen, geometrischen Modell durch Randdarstellung (vgl. Abschnitt 3.1), unterteilt der Algorithmus zunächst die geschlossenen, orientierten Kantenzüge, die die Struktur bilden, in Kantenabschnitte vorgegebener Länge, die mit dem sogenannten Knotenabstandswert korrespondiert. Die Kantenabschnitte entsprechen den späteren Elementkanten, ihre Endpunkte den späteren Elementknoten. Die geradlinige Verbindung zweier solcher Randknoten bewirkt eine Zweiteilung des Gebietes (vgl. Abbildung 5.11). Weil die Lage dieser „Schnittlinie“ die Qualität des Finite-Element-Netzes beeinflusst, stellen RANK et al. in [81] Kriterien vor, die zur Definition einer möglichst optimalen Teilungskante führen. Sie wird dann analog zu den geschlossenen, orientierten Kantenzügen in Abschnitte — spätere Elementkanten — zerlegt. Neu entstandene Teilgebiete werden nun gemäß dieser Strategie solange rekursiv zerlegt, bis sie als dreiknotige Substrukturen finites Element sein können. Ein Dreiecksnetz entsteht.

Da diese Arbeit auf einer vierknotigen Elementformulierung basiert, ist es erforderlich, das oben generierte Netz in ein reines Vierecksnetz zu überführen. Diese Konvertierung erfolgt in DO\_MESH schrittweise:

- Zunächst werden jeweils vier Dreieckselemente, die um einen zentralen Knoten ein Viereck aufspannen, miteinander verschmolzen und analog zu Abbildung 5.12 in vier Viereckselemente zerlegt.

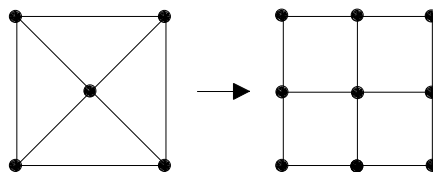


Abbildung 5.12: Konvertierung von vier Dreiecken in vier Vierecke

- Im nächsten Schritt entstehen gemäß Abbildung 5.13 aus jeweils zwei benachbarten

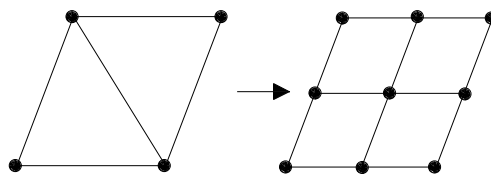


Abbildung 5.13: Konvertierung zweier benachbarter Dreiecke in vier Vierecke

Dreiecken Vierecke, die sich ihrerseits in vier Viereckselemente teilen. Dabei nimmt die Reihenfolge, in der sich jeweils zwei benachbarte Dreiecke in Vierecke wandeln, entscheidend Einfluss auf die Güte des Finite-Element-Netzes. Um entsprechend hochwertige Finite-Element-Netze zu generieren, stellen RANK et al. [81] Gütekriterien für die Konvertierungsfolge dar.

- Elemente, die im Rahmen der oben beschriebenen Konvertierung nicht berücksichtigt werden und als sogenannte isolierte Dreiecke im Netz verbleiben, werden analog zu Abbildung 5.14 in drei Vierecke überführt.

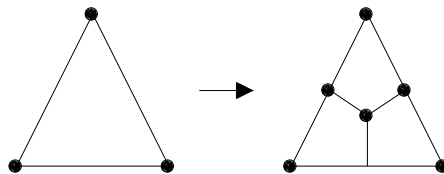
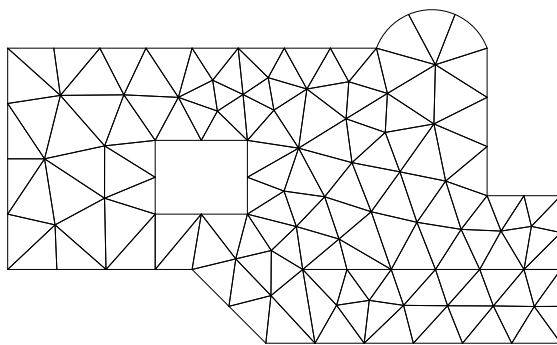
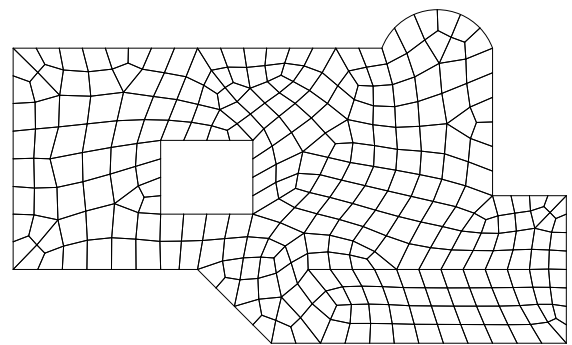


Abbildung 5.14: Konvertierung verbleibender, isolierter Dreiecke in Viereckselemente

Wie sich ein Dreiecksnetz durch solch eine Konvertierung in ein Vierecksnetz verändert, zeigt Abbildung 5.15.



Dreiecksnetz (91 Knoten, 138 Elemente)



Vierecksnetz (339 Knoten, 295 Elemente)

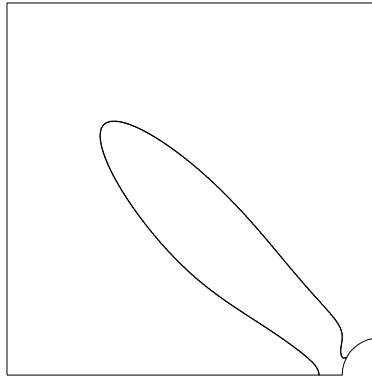
Abbildung 5.15: Konvertierung eines Dreiecksnetzes in ein Vierecksnetz (aus [43])

Neben gleichmäßig dichten Netzen sind zur Fehlerkontrolle (vgl. Abschnitt 4.2) oft lokal verfeinerte, problemangepasste Netze erwünscht, vgl. RANK [67, 66, 68, 70, 69]. Entsprechende Funktionalität wurde zur Generierung der in Abbildung 4.3 dargestellten adaptiven Netze verwendet. Die flexible Variante zur lokalen Erhöhung der Netzdichte, die DO\_MESH verwendet, basiert auf einer Knotendichtefunktion, die für das gesamte Berechnungsgebiet auf einem Hintergrundnetz (vgl. Abschnitt 5.2) definiert ist. Diese knotenbezogenen Abstandswerte können sowohl händisch als auch automatisch — aufgrund der Ergebnisse einer Fehlerschätzung — vorgegeben werden. Entsprechend erzeugte Netze sind mittig und rechts in Abbildung 4.3 dargestellt. Auch der adaptiven Netzgenerierung liegt die oben skizzierte Methode der Gebietsteilung zugrunde. Sie wird jedoch zur Berücksichtigung der geforderten variierenden Netzdichte um effiziente Suchalgorithmen, die in KRAUSE und RANK [51] beschrieben sind, erweitert.

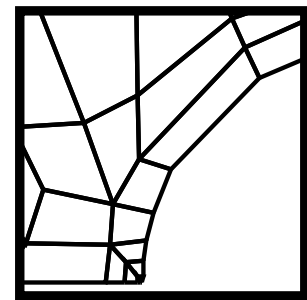
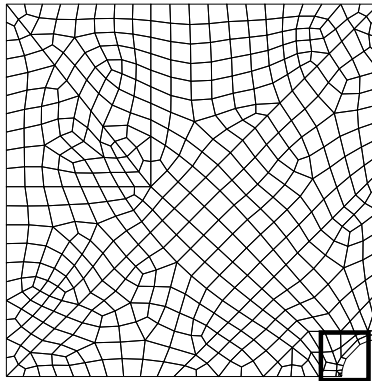
### 5.5.3 Vereinigung von Geometrie und Topologie

Dieser Abschnitt stellt den Algorithmus sowohl im zwei- als auch im dreidimensionalen Fall grafisch anhand der Abbildungen 5.16 und 5.17 dar. In beiden Fällen ist jeweils der Zustand

a) Geometrie



b) Finite-Element-Netz mit geraden Kanten



c) Finite-Element-Netz mit allgemeiner Geometrie

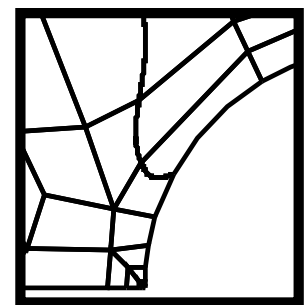
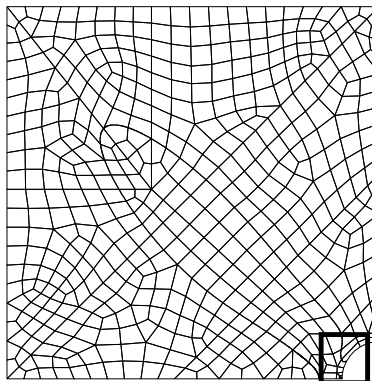


Abbildung 5.16: Zweidimensionale Vereinigung von Geometrie und Topologie (rechts: Zoom)

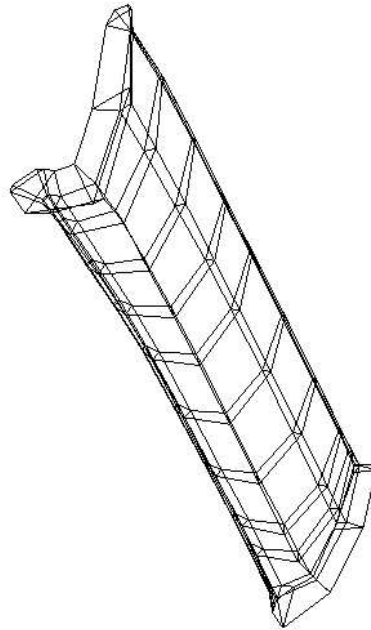
vor bzw. nach der Vereinigung von Geometrie und Topologie abgebildet. Das rückwirkende Verschmelzen der topologischen Objekte mit ihrer Geometrie erfolgt — falls erforderlich — durch eine Projektion gerader Kanten und bilinearer Oberflächen auf die gekrümmten Gebietsränder. Geometrische Grenzfälle in Form von stark verzerrten Elementen müssen im Rahmen der Netzgenerierung abgefangen werden. Ein Tetraedernetzgenerator, der dies leistet,

ist beispielsweise *Netgen* [1].

a) Geometrie



b) Finite-Element-Netz mit geraden Kanten und bilinearen Flächen



c) Finite-Element-Netz mit allgemeiner Geometrie

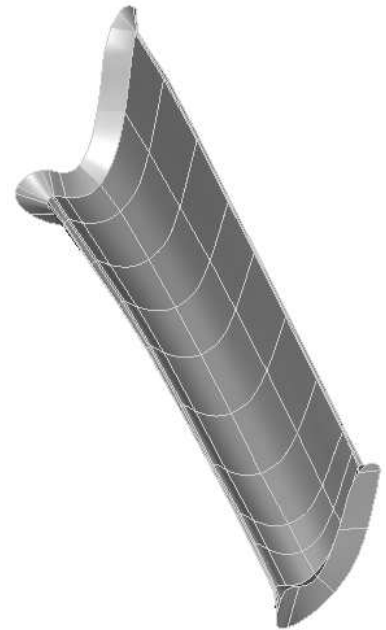


Abbildung 5.17: Dreidimensionale Vereinigung von Geometrie und Topologie (Geometrie aus [6])



## Kapitel 6

# $rp$ -adaptive Berechnungen in zwei Dimensionen

Dieses Kapitel ist eine Zusammenschau von Beispielen zur  $rp$ -Adaptivität in zwei Raumdimensionen. Die Beispiele basieren auf Berechnungen nach der Deformationstheorie von HENCKY. Allen nichtlinearen Berechnungen liegt für den iterativen Lösungsprozess des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens der in Abschnitt 4.5.2 beschriebene RADIAL-RETURN-Algorithmus zu Grunde.

### 6.1 Ein quasi eindimensionales Beispiel

Trotz der eigentlich zweidimensionalen Struktur der in Abbildung 6.1 dargestellten Scheibe ist die Problematik dieses Beispiels quasi eindimensionaler Natur. Die rechteckige Scheibe mit Breite  $b = 100$  [mm], Länge  $l = 200$  [mm] und einer Dicke  $t$  von 1 [mm] ist sowohl am oberen Rand als auch an den Seitenrändern in Normalenrichtung gehalten.

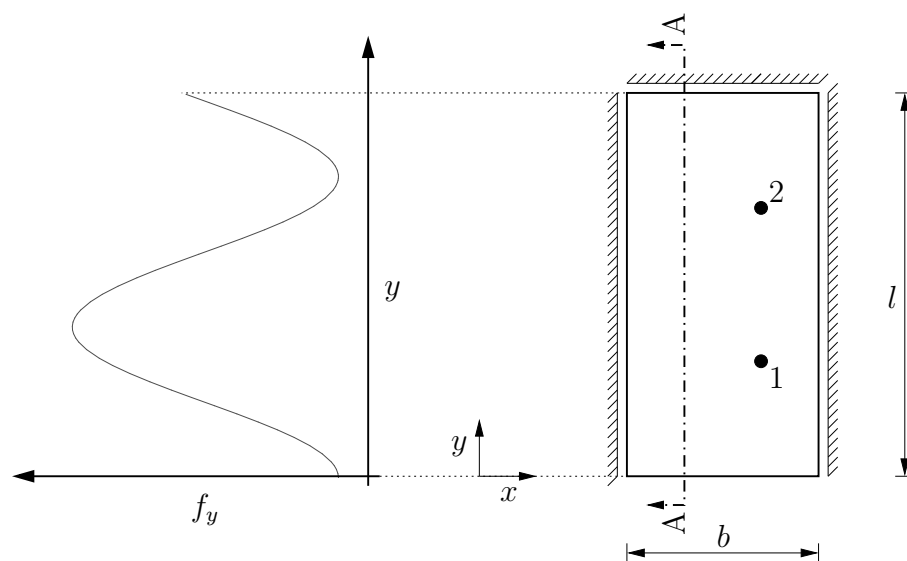


Abbildung 6.1: Geometrie und Randbedingungen des quasi eindimensionalen Scheibenproblems

Die Struktur wird durch eine in  $y$ -Richtung wirkende, sinusförmige Volumenlast  $\mathbf{f} = [f_x, f_y]^T$  beansprucht, wobei  $f_x = 0.0$  und  $f_y = -2.25 - a \sin(y/50)^2$  mit  $a = 3.7840545235491813^1$  gilt. Bei einem Elastizitätsmodul von  $E = 1.0$  [N/mm<sup>2</sup>], einer Querdehnzahl von  $\nu = 0.0$  und der Fließspannung  $\sigma_0 = 450.0$  [N/mm<sup>2</sup>] liegt den Berechnungen der ebene Verzerrungszustand zu Grunde. Die Konvergenz von Verschiebungen und Spannungen wird an den Punkten 1, 2 und entlang der Schnittlinie A-A untersucht.

Aufgrund der oben beschriebenen Parameterwahl wird die exakte Grenze zwischen elastischem und plastifiziertem Bereich durch eine horizontale Gerade in der Mitte der Struktur beschrieben. Reduzierte man das Problem auf eine echte eindimensionale Fragestellung, wäre die Geometrie der plastischen Front ein Punkt. Die durch Erweiterung auf die zweite Dimension entstandene Gerade repräsentiert die einfachste Geometrie, die zur Beschreibung der Interface-Kurve denkbar ist. Sie ist daher als Test für den *rp*-adaptiven Algorithmus prädestiniert.

Die Referenzlösung stammt aus einer Berechnung mit dem *tensor product space*  $\mathcal{S}_{\text{ps}}^{p_\xi, p_\eta}(\Omega_{\text{st}}^q)$  für  $p_\xi = p_\eta = 8$  auf einem strukturierten, unverzerrten Netz aus 4800 Elementen und der daraus resultierenden Anzahl an  $N = 614\,719$  Freiheitsgraden. Die Elementkanten des Referenznetzes decken sich mit der Geraden, die das Interface zwischen elastischem und plastifiziertem Bereich markiert. Weiter unten werden Ergebnisse der Verschiebung  $u_{yy}$  am Punkt 1, der Spannung  $\sigma_{yy}$  am Punkt 2, der VON MISES Vergleichsspannung  $\sigma_{\text{vgl}}$  entlang der Schnittlinie A-A sowie der Dehnungsenergie

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= [\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}]^T \\ \boldsymbol{\sigma} &= [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}]^T \end{aligned} \quad (6.1)$$

betrachtet. Tabelle 6.1 listet einige der oben genannten Größen für die Polynomgraderhöhung von  $p_\xi = p_\eta = 1, \dots, 8$  der Referenzlösung. Ab einem Polynomgrad von  $p_\xi = p_\eta = 6$  sind für alle Ergebnisse mindestens 13 Stellen stabil. Im Folgenden werden drei unterschiedliche räumliche Diskretisierungsstrategien verglichen.

$p$	$N$	Dehnungsenergie $\mathcal{U}$	$u_{yy}$ am Punkt 2	$\sigma_{yy}$ am Punkt 3
1	9639	3.4584552237789E+09	-1.13182790375597E+05	6.32572485402930E+02
2	38479	3.4585218730660E+09	-1.13183196131301E+05	6.30863182449240E+02
3	86519	3.4585218737342E+09	-1.13183197470864E+05	6.30859646867154E+02
4	153759	3.4585218737343E+09	-1.13183197467266E+05	6.30859606657389E+02
5	240199	3.4585218737343E+09	-1.13183197467241E+05	6.30859606669240E+02
6	345839	3.4585218737343E+09	-1.13183197467241E+05	6.30859606668881E+02
7	470679	3.4585218737343E+09	-1.13183197467241E+05	6.30859606668885E+02
8	614719	3.4585218737342E+09	-1.13183197467240E+05	6.30859606668878E+02

Tabelle 6.1: Ergebnisse der uniformen  $p$ -Version auf dem Referenznetz mit 4800 Elementen mit  $p = 1, \dots, 8$

<sup>1</sup>Diese Genauigkeit ist für praxisrelevante Fragestellungen bedeutungslos, bei den Betrachtungen in dieser Arbeit jedoch unbedingt erforderlich, um das Konvergenzverhalten zu studieren.



Netze, deren Elementkanten *n i c h t* mit dem elastisch-plastischen Interface zusammenfallen — solche Netze werden im Folgenden als „nicht-Interface Netze“ bezeichnet —, stehen Netzen gegenüber, deren Elementkanten dem Verlauf der plastischen Front folgen. Letztere werden in der weiteren Arbeit Interface Netze genannt. Für beide wird auf dem jeweiligen Finite-Element-Netz der Polynomgrad der Ansatzfunktionen erhöht, um so eine Näherungslösung für die *schwache Form* des gegebenen Problems zu finden. Am Ende dieses Kapitels stehen schließlich Berechnungen mithilfe des dritten Ansatzes, der adaptiven  $rp$ -Methode.

### 6.1.1 Diskretisierung mit nicht-Interface Netzen

Die hier untersuchten räumlichen Diskretisierungen haben gemeinsam, dass ihre Elementkanten nicht mit der elastisch-plastischen Grenzlinie zusammenfallen. Einige dieser Finite-Element-Netze, die ab einer Elementanzahl  $n_{el} > 2$  mithilfe des Freivernetzlers DOMESH [87] erzeugt wurden, sind exemplarisch in Abbildung 6.2 dargestellt. Um Konvergenz gegen die Referenzlösung zu erzielen, wird auf dem jeweiligen Netz bei vollem Ansatzraum  $\mathcal{S}_{ps}^{p_\varepsilon, p_\eta}(\Omega_{st}^q)$  der Polynomgrad der Ansatzfunktionen erhöht. Die Integrationsordnung der verwendeten GAUSS-Quadratur beträgt  $(p+1) \times (p+1)$ . Die Abbildungen 6.3-6.5 zeigen entsprechende Ergebnisse.

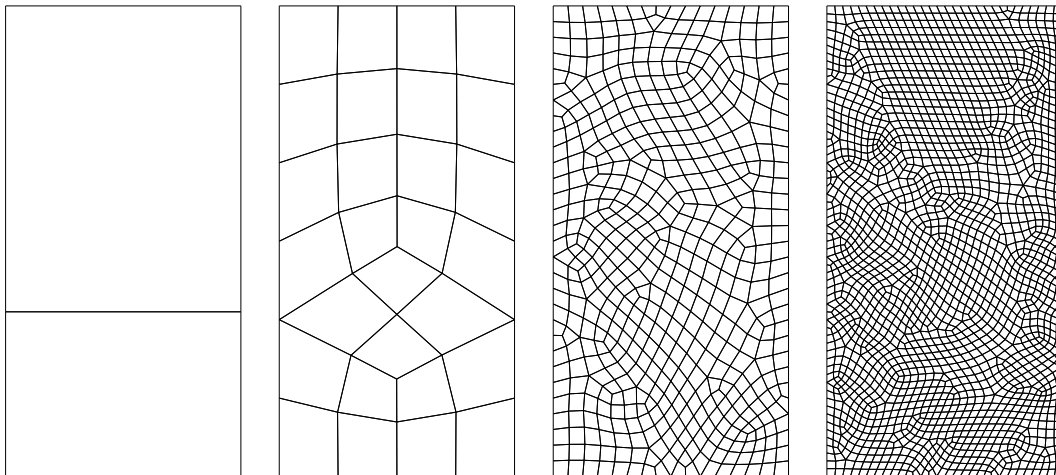


Abbildung 6.2: Finite-Element-Netze mit 2, 28, 513 und 2025 Elementen, deren Elementkanten nicht mit dem späteren elastisch-plastischen Interface zusammenfallen

Für die oben angesprochenen Größen sind jeweils die relativen Fehler in [%] gegenüber der Anzahl der Freiheitsgrade auf doppeltlogarithmischem Maßstab dargestellt. Der relative Fehler in der Energienorm (vgl. Abbildung 6.3) sinkt für moderat feine Netze ab einer Anzahl von etwa  $N = 10\,000$  Freiheitsgraden unter eine Schranke von 0.1[%].

Der relative Fehler in der Verschiebung  $u_{yy}$  am Punkt 1 (siehe Abbildung 6.4) zeigt ein ähnliches Verhalten wie der in der Energienorm. Im asymptotischen Bereich zeigen ab einem Polynomgrad von  $p \geq 4$  sowohl Netzverfeinerung als auch Polynomgraderhöhung eine ähnliche Konvergenzrate. Im Vergleich dazu fällt auf, dass der relative Fehler in der Spannung  $\sigma_{yy}$  am Punkt 2 (vgl. Abbildung 6.5) höhere Oszillationen aufweist als die zuvor betrachteten Größen. Abbildung 6.6 zeigt die VON MISES Vergleichsspannung  $\sigma_{vgl}$  entlang der Schnitt-

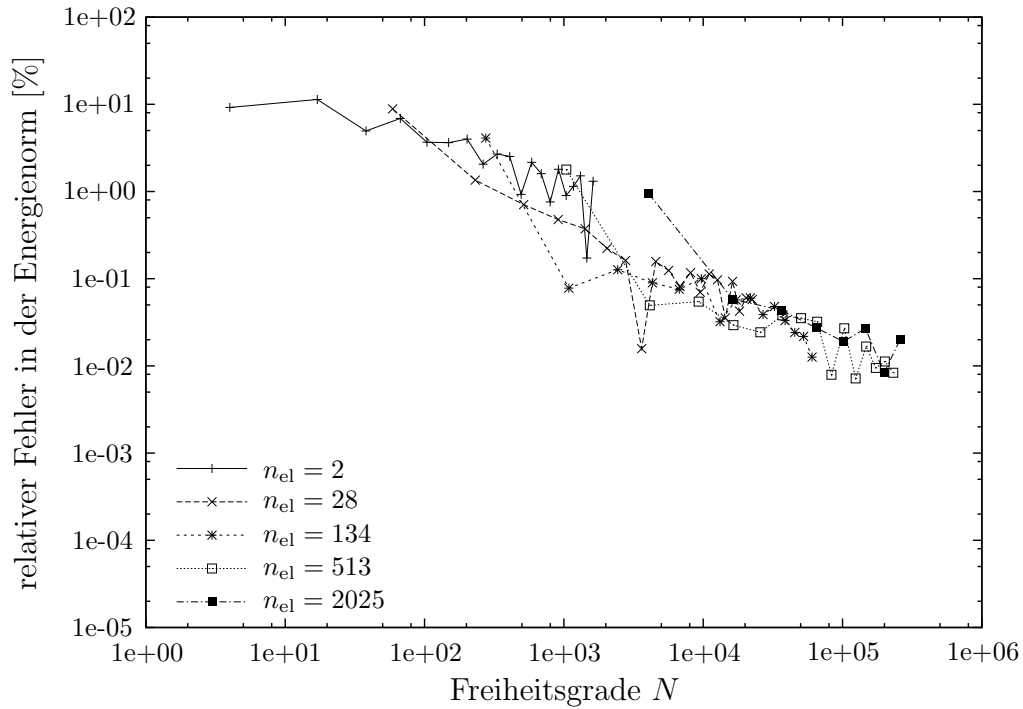


Abbildung 6.3: Relativer Fehler  $\eta = \sqrt{\frac{|\mathcal{U}_{\text{ref}} - \mathcal{U}_{\text{FE}}|}{\mathcal{U}_{\text{ref}}}} 100$  [%] gegenüber der Anzahl der Freiheitsgrade  $N$

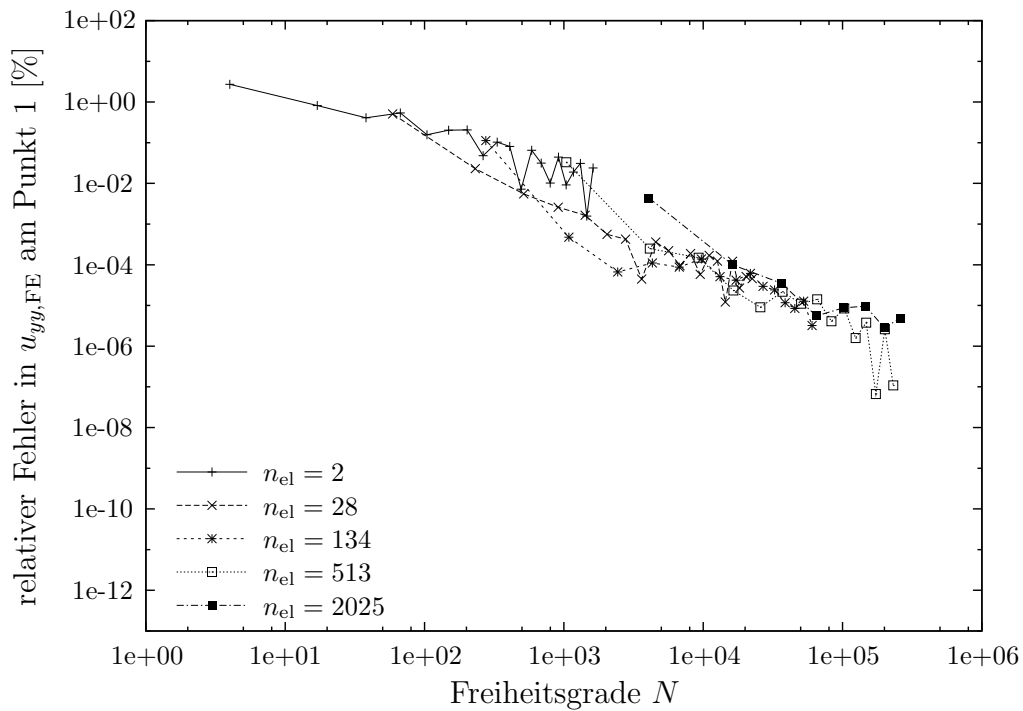


Abbildung 6.4: Relativer Fehler  $\frac{|u_{yy,\text{ref}} - u_{yy,\text{FE}}|}{u_{yy,\text{ref}}} 100$  [%] am Punkt 1

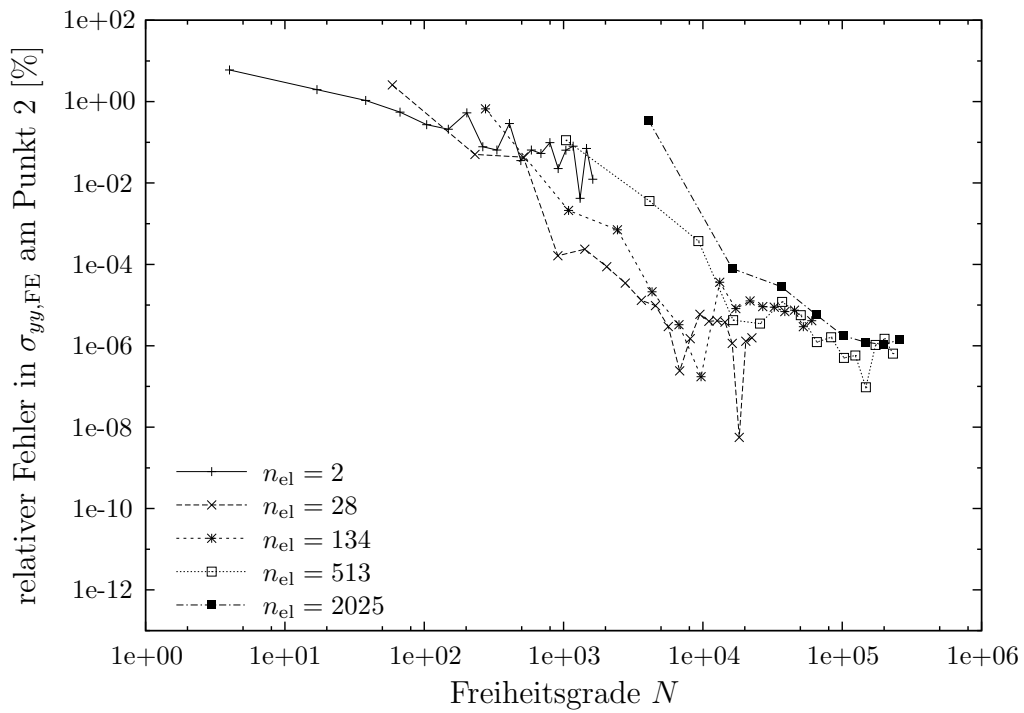


Abbildung 6.5: Relativer Fehler  $\frac{|\sigma_{yy,ref} - \sigma_{yy,FE}|}{\sigma_{yy,ref}} 100 [\%]$  am Punkt 2

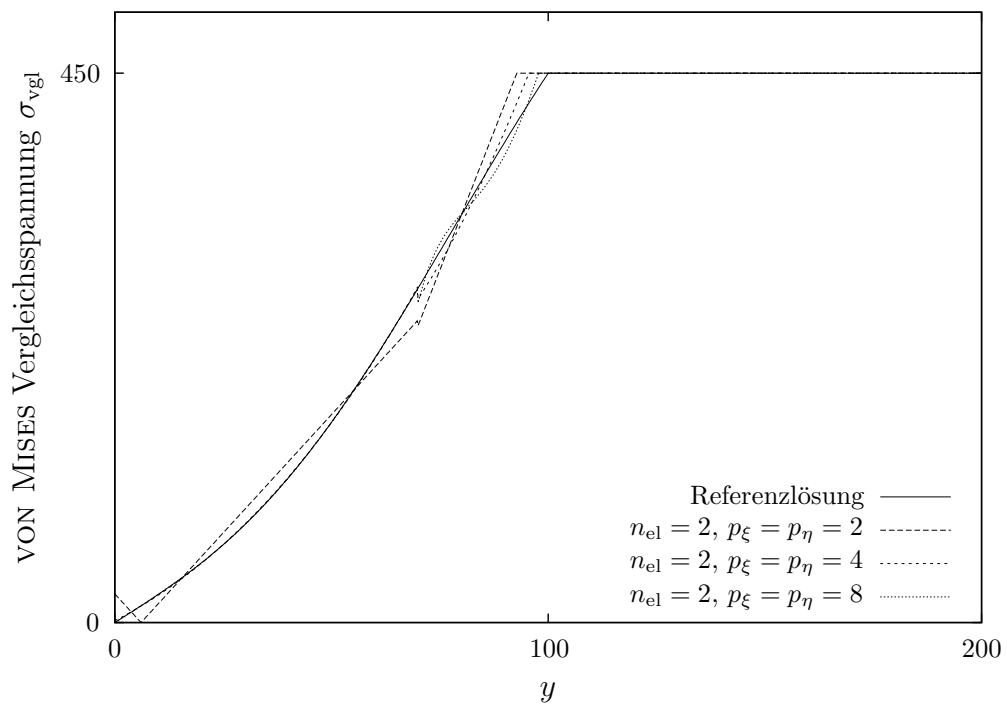


Abbildung 6.6: VON MISES Vergleichsspannung  $\sigma_{vgl}$  entlang der Schnittlinie A-A für das Netz mit zwei Elementen und  $p_\xi = p_\eta = 2, 4, 8$

linie A-A. Zusätzlich zur Referenzlösung sind für das Netz aus zwei Elementen exemplarisch Lösungen für die Polynomgrade  $p_\xi = p_\eta = 2, 4$ , und 8 dargestellt. Auch die Kurve für  $p = 8$  weicht insbesondere im Bereich der Elementkante bei  $y = 70$  und in der Nähe des plastischen Interface noch deutlich von der Referenzlösung ab.

### 6.1.2 Diskretisierung mit Interface Netzen

Nun werden Finite-Element-Netze betrachtet, deren Elementkanten die Geometrie der elastisch-plastischen Grenzlinie treffen. Einige sind in Abbildung 6.7 zu sehen. Zur Fehlerkontrolle wurde hier wie oben beschrieben verfahren.

Abbildungen 6.8-6.11 zeigen die Ergebnisse. Für sämtliche Größen ist der relative Fehler in [%] gegenüber der Anzahl der Freiheitsgrade in doppeltlogarithmischem Maßstab aufgetragen. Er sinkt für jede Diskretisierung — unabhängig von der Anzahl der Freiheitsgrade — weit unter einen Wert von  $1.0 \cdot 10^{-4}$  [%] (vgl. Abbildung 6.8). „Wahnsinn Wahnsinn Wahnsinn Wahnsinn“ [22].

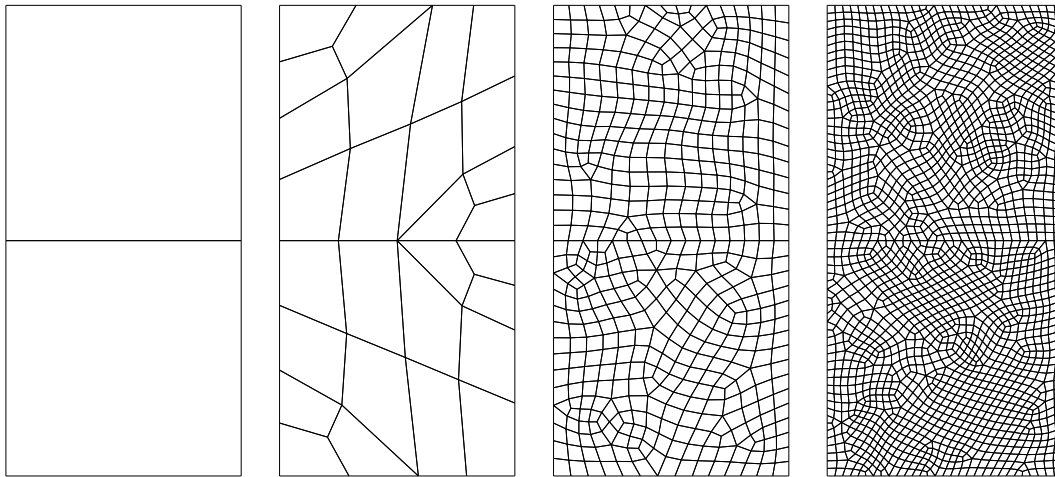


Abbildung 6.7: Finite-Element-Netze mit 2, 28, 518 und 2014 Elementen, deren Elementkanten mit dem späteren elastisch-plastischen Interface zusammenfallen

Stört — wie hier — ausschließlich die Singularität aufgrund der Elastoplastizität die glatte Lösung, gilt: Folgen die Elementkanten dem Verlauf der plastischen Front, sind Lösungen auf groben Netzen und feinen Netzen gleich gut. Dieses Phänomen wird durch das Konvergenzverhalten der Verschiebung  $u_{yy}$  am Punkt 1 sowie der Spannungen  $\sigma_{yy}$  am Punkt 2 bestätigt. Die relativen Fehler aller Diskretisierungen fallen auf einen nahezu gleichen Wert, unabhängig von der Anzahl der Elemente (vgl. Abbildungen 6.9 und 6.10).

Im Unterschied zu Ergebnissen aus Berechnungen mit nicht-Interface Netzen sei hier auf die Charakteristik der Konvergenzrate hingewiesen. Nicht-Interface Netze liefern zwar aus Ingenieurperspektive ausreichend hohe Genauigkeit, sind jedoch auf algebraisches Konvergenzverhalten beschränkt. Alle Interface Netze fallen exponentiell auf nahezu gleiche Fehler. Abbildung 6.11 zeigt die VON MISES Vergleichsspannung  $\sigma_{\text{vgl}}$  entlang des Schnittes A-A. Neben der Referenzlösung sind die Ergebnisse von Berechnungen des Netzes aus zwei Elementen für die Polynomgrade  $p_\xi = p_\eta = 2, 4$  und 8 zu sehen. Für  $p_\xi = p_\eta = 8$  ist die Lösung mit

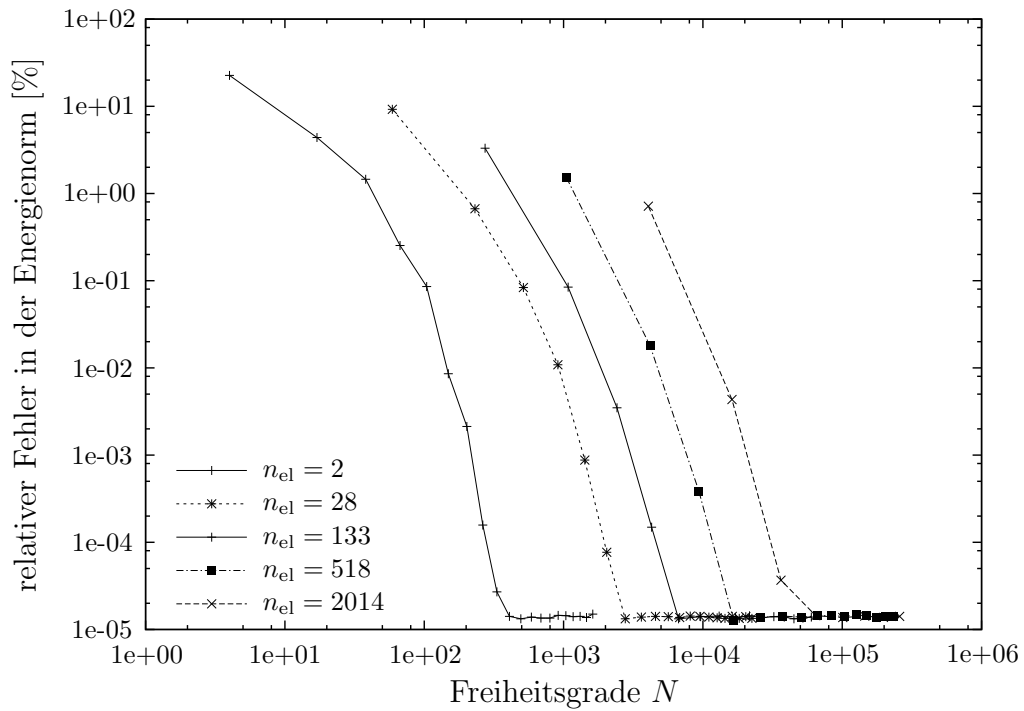


Abbildung 6.8: Relativer Fehler  $\eta = \sqrt{\frac{|\mathcal{U}_{\text{ref}} - \mathcal{U}_{\text{FE}}|}{\mathcal{U}_{\text{ref}}}}$  100 [%] gegenüber der Anzahl der Freiheitsgrade

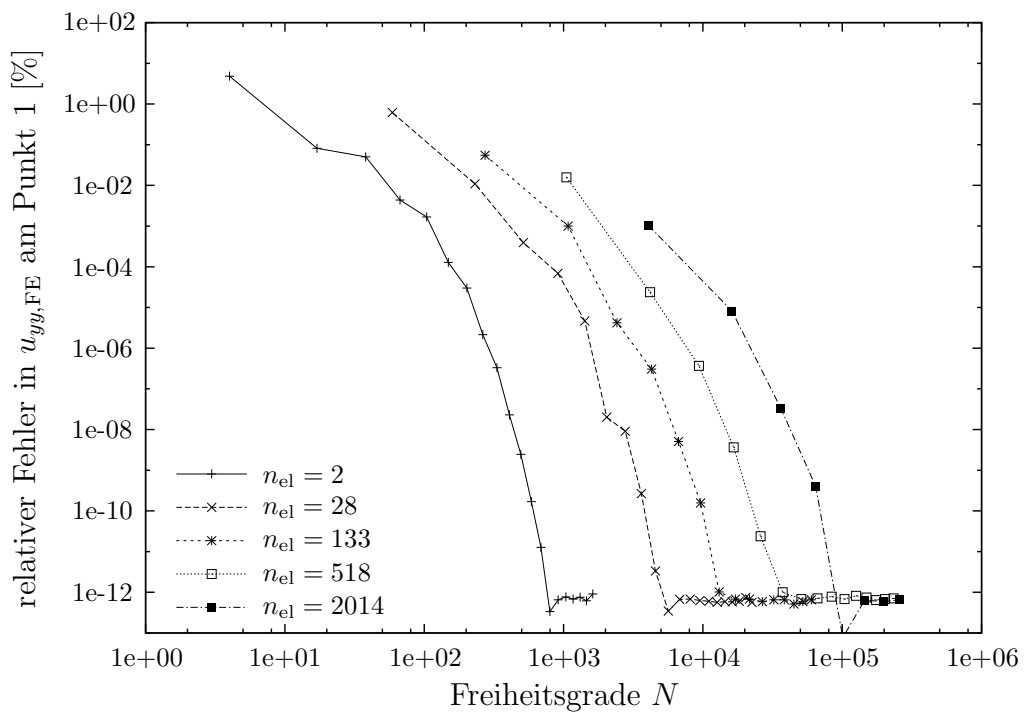


Abbildung 6.9: Relativer Fehler  $\frac{|u_{yy,\text{ref}} - u_{yy,\text{FE}}|}{u_{yy,\text{ref}}}$  100 [%] am Punkt 1

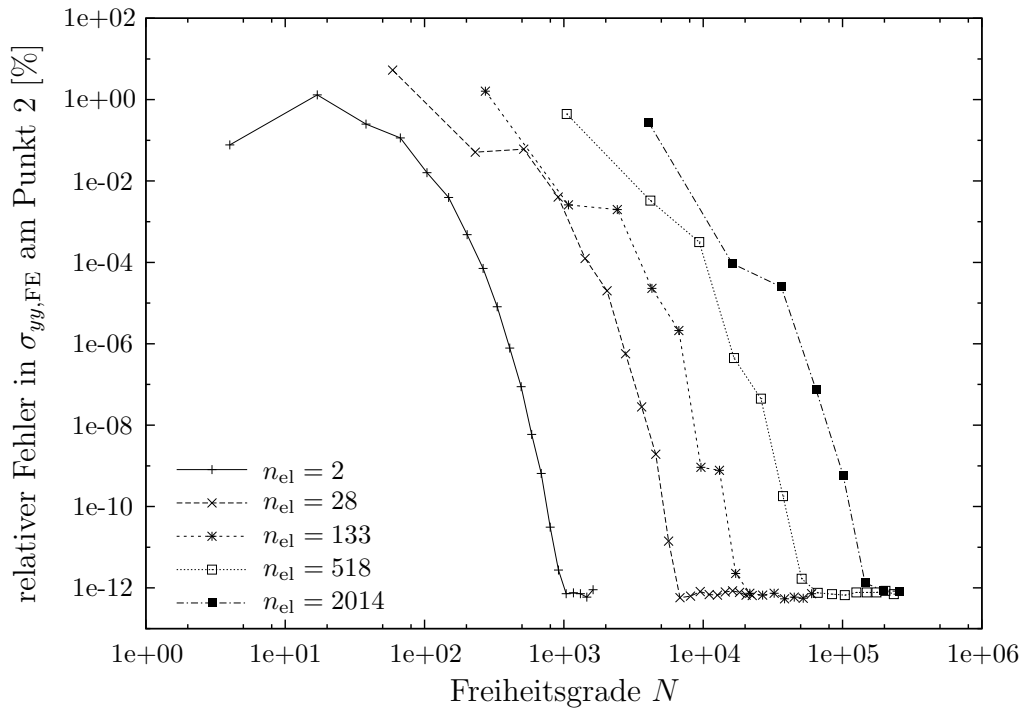


Abbildung 6.10: Relativer Fehler  $\frac{|\sigma_{yy,ref} - \sigma_{yy,FE}|}{\sigma_{yy,ref}} 100 [\%]$  am Punkt 2

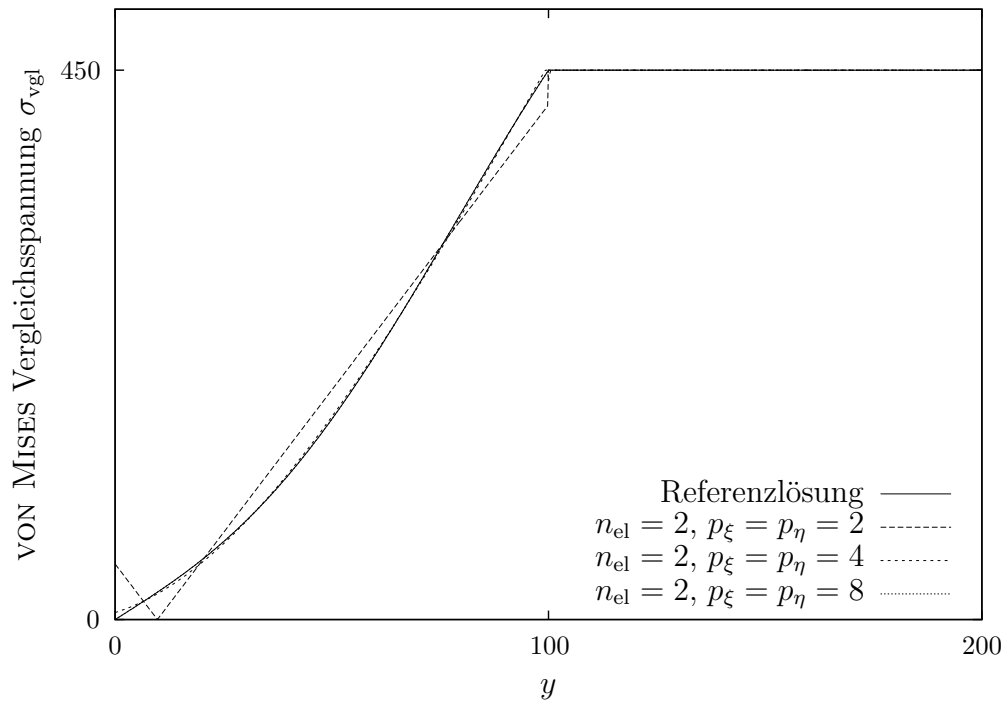


Abbildung 6.11: VON MISES Vergleichsspannung  $\sigma_{vgl}$  entlang des Schnittes A-A für das Interface Netz mit zwei Elementen und  $p_{\xi} = p_{\eta} = 2, 4, 8$

$N = 263$  Freiheitsgraden von der Referenzlösung mit  $N = 614\,719$  Freiheitsgraden nicht mehr zu unterscheiden.

### 6.1.3 $rp$ -adaptive Diskretisierung

Die exponentielle Konvergenz, die sich bei exaktem „Treffen“ des Interface seitens des Berechnungsnetzes einstellt, zeigt, dass diese Diskretisierungsstrategie das Systemverhalten bei physikalischer Nichtlinearität sehr effizient abbildet. Da jedoch Lage und Geometriebeschreibung der plastischen Grenzkurve im Allgemeinen nicht *a priori* bekannt sind, ist die Generierung eines Interface Netzes vor der eigentlichen Finite-Element-Berechnung unmöglich.

Der Idee des Interface Netzes „nachzueifern“ ist Strategie der  $rp$ -Adaptivität, die die Kurve der plastischen Grenze iterativ sucht,

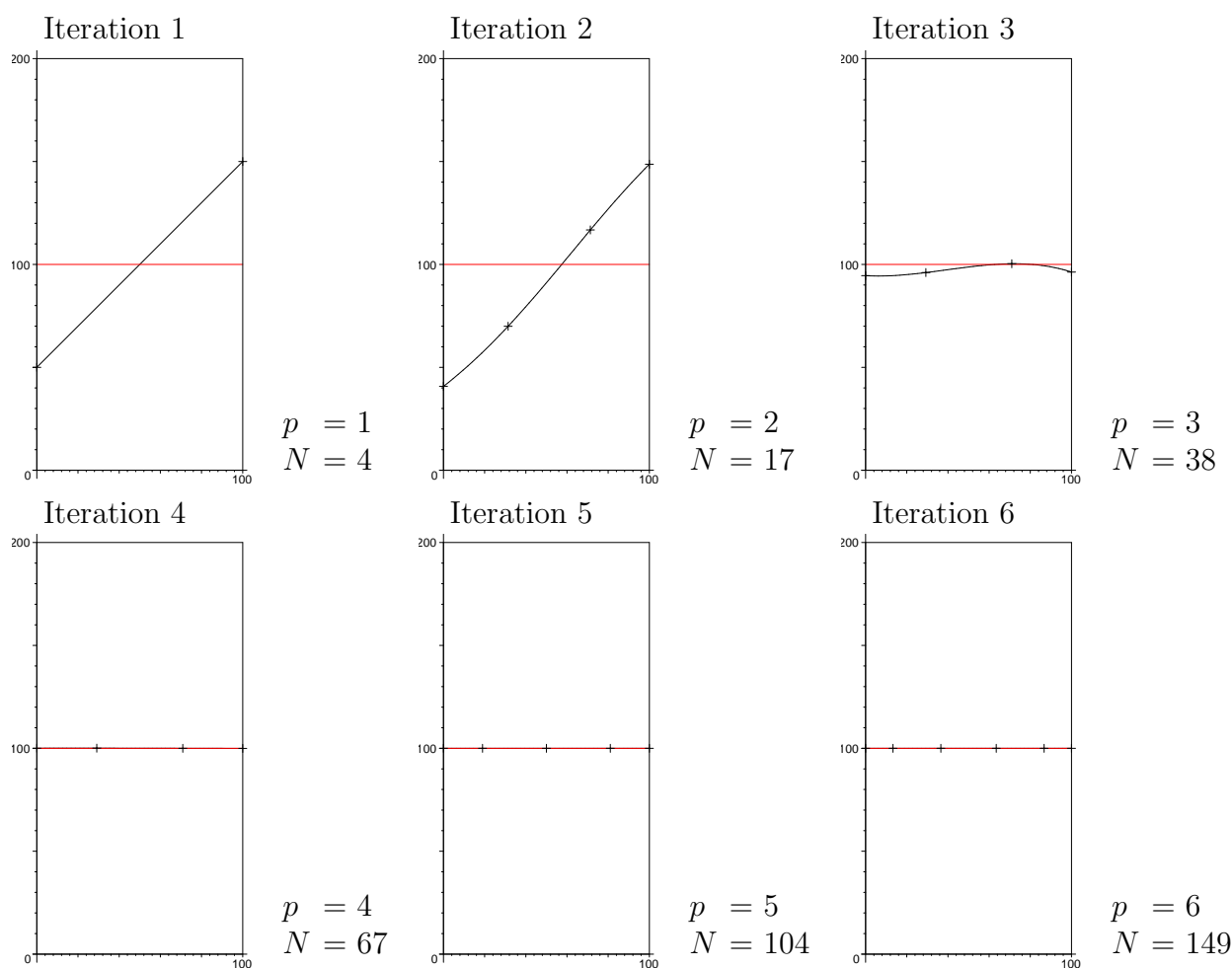


Abbildung 6.12:  $rp$ -adaptive Finite-Element-Netze aus jeweils zwei Elementen  $n_{el} = 2$

um so schrittweise Netze zu erzeugen, die dem optimalen, größten Interface Netz aus zwei Elementen immer näher kommen. Der  $rp$ -adaptive Zyklus, der in jedem Iterationsschritt den Polynomgrad der Ansatzfunktionen erhöht und bei einer GAUSS-Integrationsordnung von  $2p$  sukzessive den Rand der plastischen Zone sucht, führt in diesem Beispiel zu Finite-Element-Netzen aus zwei Elementen. Sie sind bis zum sechsten Iterationsschritt in Abbildung 6.12

dargestellt. Man erkennt sowohl die Lage der BABUŠKA-CHEN Punkte [21], als auch die Geometrie der Elementkante, die aus der in Kapitel 3 beschriebenen Interpolation entstanden ist. Zur *rp*-adaptiven Interfacesuche ist hier die gewichtete Regel verwendet worden. Ausgehend von einem Startnetz aus zwei Elementen, deren gemeinsame Elementkante die elastisch-plastische Grenze unter einem Winkel von  $45^\circ$  schneidet (vgl. Abbildung 6.12, Netz 1) nähert sich diese Kante der tatsächlichen plastischen Front, bis die *rp*-adaptiv gefundene Kurve im sechsten Iterationsschritt mit der rot markierten Geraden in Systemmitte optisch übereinstimmt.

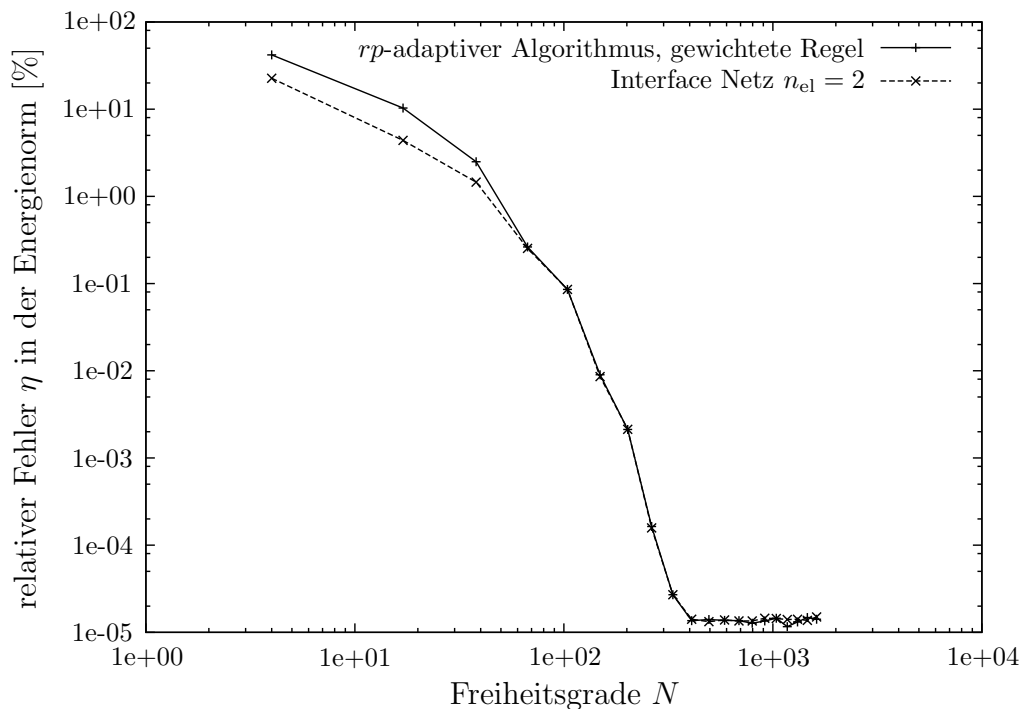


Abbildung 6.13: Relativer Fehler  $\eta = \sqrt{\frac{|\mathcal{U}_{\text{ref}} - \mathcal{U}_{\text{FE}}|}{\mathcal{U}_{\text{ref}}}}$  100 [%] gegenüber der Anzahl der Freiheitsgrade

In Abbildung 6.13 ist der relative Fehler in der Energienorm in [%] gegenüber der Anzahl der Freiheitsgrade dargestellt. Die Ergebnisse des optimalen Interface Netzes aus zwei Elementen sind zum Vergleich zusätzlich im Diagramm dargestellt. Ab Iteration fünf liegen beide Kurven annähernd aufeinander.

Abbildung 6.14 vergleicht den relativen Fehler in der VON MISES Vergleichsspannung. Aufgeschlüsselt wurde die Verteilung des Fehlers in [%] über dem gesamten Berechnungsgebiet für die ersten sechs *rp*-adaptiven Schritte. Unter jeder Fehlerverteilung ist der Maximalfehler der Vergleichsspannung im Gebiet notiert. Er liegt in Schritt sechs bei 0.054 %. Die minimalen Fehler der Iterationsschritte fünf und sechs beschränken sich auf schmale Bereiche in Interface-Nähe. Um den Maximalfehler auch in späteren Iterationsschritten zu quantifizieren, fasst Tabelle 6.2 entsprechende Werte zusammen.



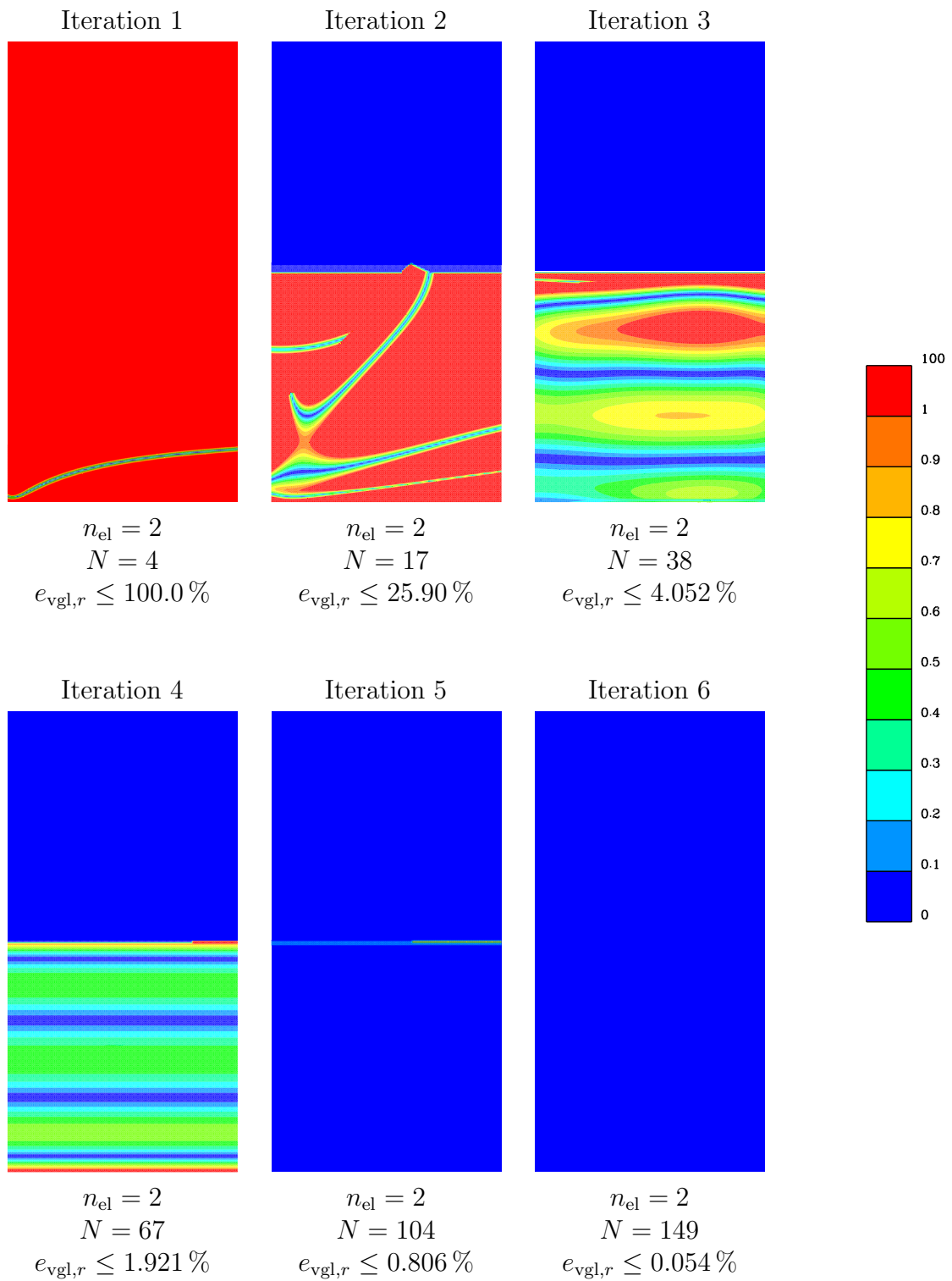


Abbildung 6.14: Verteilung des relativen Fehlers  $e_{\text{vgl},r} = \frac{|\sigma_{\text{vgl,FE}} - \sigma_{\text{vgl,ex}}|}{\sigma_0} 100[\%]$  in der VON MISES Vergleichsspannung während der  $rp$ -Adaption (Darstellung durch Xmesh 2.90)

Iteration	Polynomgrad $p = p_\xi = p_\eta$	Polynomgrad $p_{\text{geo}}$	Freiheitsgrade $N$	$\max(e_{\text{vgl},r})$ in [%]
1	1	3	4	$1.000000e + 02$
2	2	3	17	$2.590018e + 01$
3	3	3	38	$3.543600e - 01$
4	4	4	67	$1.286406e + 01$
5	5	5	104	$7.281600e - 02$
6	6	6	149	$5.399500e - 02$
7	7	7	202	$2.550000e - 03$
8	8	8	263	$1.131000e - 03$
9	9	9	332	$4.488256e - 05$
10	10	10	409	$1.418227e - 05$
11	11	10	494	$4.828524e - 07$
12	12	10	587	$1.184500e - 07$
13	13	10	688	$3.518860e - 09$
14	14	10	797	$7.016794e - 10$
15	15	10	914	$1.161371e - 10$
16	16	10	1039	$6.427460e - 11$

Tabelle 6.2: maximaler relativer Fehler  $e_{\text{vgl},r} = \frac{|\sigma_{\text{vgl,FE}} - \sigma_{\text{vgl,ex}}|}{\sigma_0} 100[\%]$  in der VON MISES Vergleichsspannung im Berechnungsgebiet

## 6.2 Dickwandiges Rohr unter Innendruck

Analog zum vorangegangenen Beispiel ist auch für das dickwandige Rohr unter Innendruck mit einem Innenradius  $r_i$  und einem Außenradius  $r_a$  die exakte Geometrie des elastisch-plastischen Interface aus analytischen Betrachtungen bekannt. Es handelt sich um einen Kreis mit Radius  $r_I$ , I wie Interface, für den  $r_i < r_I < r_a$  gilt. Die Materialparameter zur weiter unten beschriebenen elastoplastischen Berechnung sind so gewählt, dass sich der Interfaceradius  $r_I$  bei  $0.5(r_i + r_a)$  einstellt. Analytisch darstellbar und komplexer als die einfache Gerade ermöglicht diese Interfacegeometrie eine Bewertung der geometrischen Approximationseigenschaften des *rp*-adaptiven Algorithmus.

### 6.2.1 Analytische Lösung

Die analytische Lösung des Problems ist sowohl für den linear elastischen Fall [40] als auch für das elastoplastische Problem [99, 56, 45] bekannt. Letztere setzt jedoch inkompressibles Material mit einer Querdehnzahl von  $\nu = 0.5$  voraus. Ob die Konvergenzbetrachtungen der Finite-Element-Analyse trotz dieser Restriktion sinnvoll sind, entscheidet Abschnitt 6.2.2.

#### 6.2.1.1 Lineare Elastizität

Nachdem die oben genannte Literatur detaillierte Herleitungen zur analytischen Lösung bereitstellt, nennt dieser Abschnitt nur die entsprechenden Gleichungen. So sind die Verschiebungen  $u_r$ , die Verzerrungen  $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$  sowie die Spannungen  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$  bzgl. der radialen und tangential-

len Richtungen  $r$  und  $\theta$  im ebenen Verzerrungszustand ( $\varepsilon_z = 0$ ) des linear elastischen Problems durch die Gleichungen 6.2-6.7 gegeben.

$$u_r = \frac{1 - \nu}{E} \frac{p_i}{\left(\frac{r_a}{r_i}\right)^2 - 1} \left[ (1 - 2\nu) r + \frac{r_a^2}{r} \right] \quad (6.2)$$

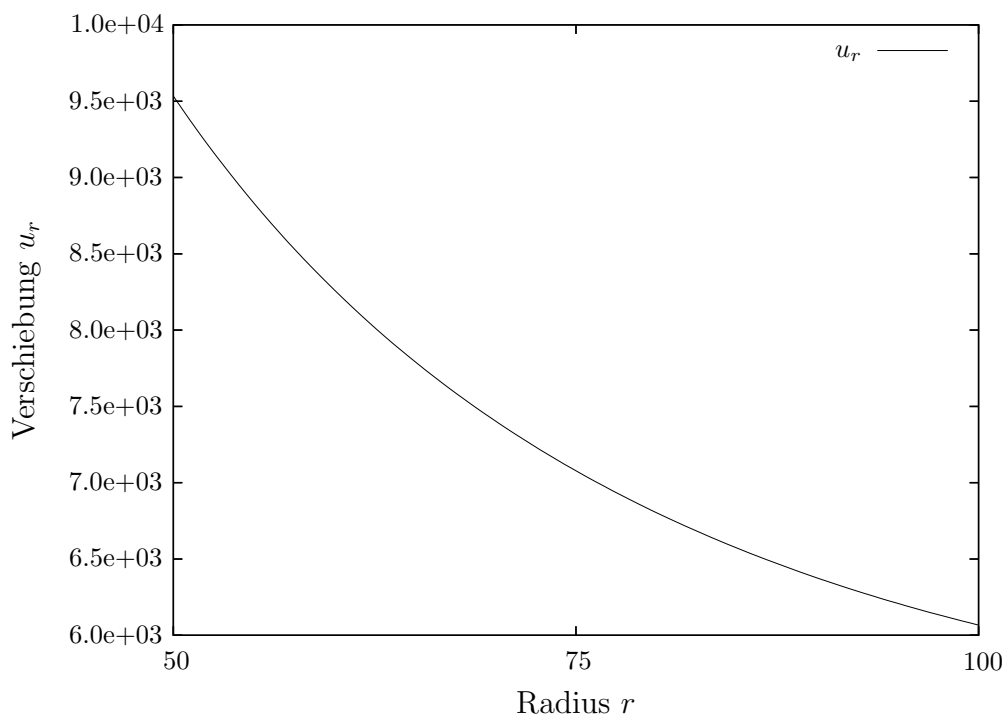


Abbildung 6.15: Verschiebung  $u_r$  in radialer Richtung entlang des Radius  $r$

Wählt man einen Innenradius von  $r_i = 50$ [mm], einen Außenradius von  $r_a = 100$ [mm] und eine Scheibendicke von  $t = 1$ [mm], so erhält man bei einem Elastizitätsmodul von  $E = 1.0$ [N/mm<sup>2</sup>], einer Querdehnzahl von  $\nu = 0.3$  und einem Innendruck von  $p_i = 100$ [N/mm<sup>2</sup>] entlang eines Radialschnittes die entsprechenden Verläufe gemäß Abbildung 6.15-6.17.

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \left[ \sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z) \right] \quad (6.3)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} \left[ \sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z) \right] \quad (6.4)$$

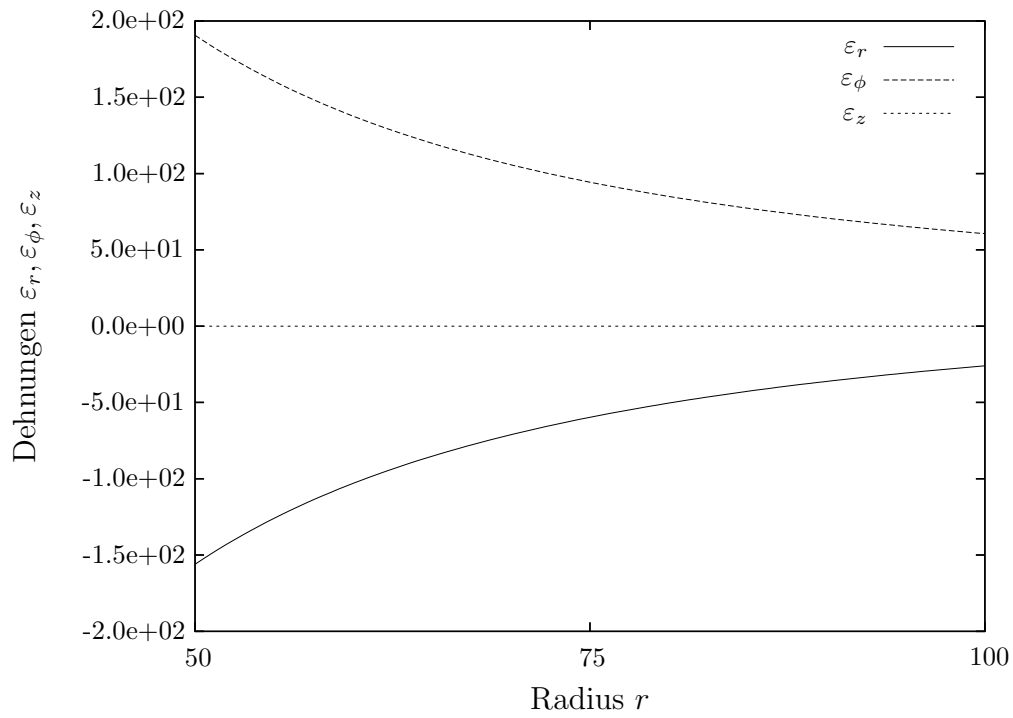


Abbildung 6.16: Dehnungen  $\varepsilon_r, \varepsilon_\phi, \varepsilon_z$  entlang des Radius  $r$

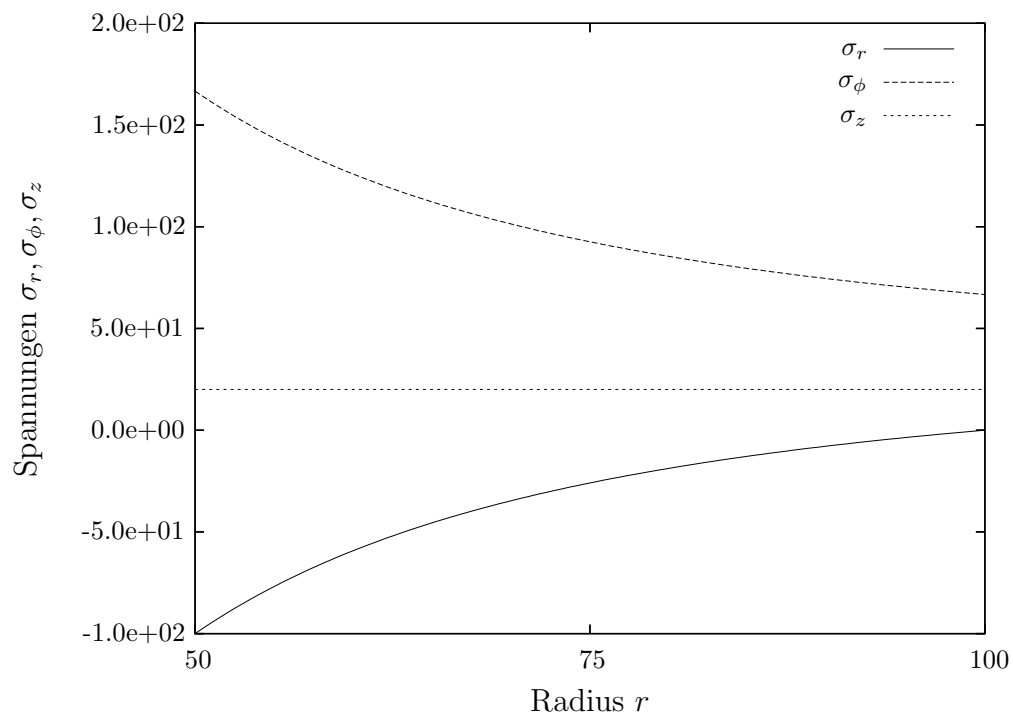


Abbildung 6.17: Spannungen  $\sigma_r, \sigma_\phi, \sigma_z$  entlang des Radius  $r$

$$\sigma_r = -\frac{p_i}{\left(\frac{r_a}{r_i}\right)^2 - 1} \left[ \left(\frac{r_a}{r}\right)^2 - 1 \right] \quad (6.5)$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_i}{\left(\frac{r_a}{r_i}\right)^2 - 1} \left[ \left(\frac{r_a}{r}\right)^2 + 1 \right] \quad (6.6)$$

$$\sigma_z = 2\nu \frac{p_i}{\left(\frac{r_a}{r_i}\right)^2 - 1} \quad (6.7)$$

### 6.2.1.2 Deformationstheorie für inkompressibles Material

Verhält sich das Material elastoplastisch, liegt der entsprechenden analytischen Lösung eine Querdehnzahl von  $\nu = 0.5$  zugrunde. Die Lösung wird jetzt für die elastischen und plastifizierten Bereiche der Struktur getrennt betrachtet. Im elastischen Teil des Systems, also bei  $r_I \leq r \leq r_a$ , verhalten sich die Dehnungen gemäß Gleichungen 6.3 und 6.4, die Spannungen gemäß Gleichungen 6.8-6.10.

$$\sigma_r = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[ \left(\frac{r_I}{r_a}\right)^2 - \left(\frac{r_I}{r}\right)^2 \right] \quad (6.8)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[ \left(\frac{r_I}{r_a}\right)^2 + \left(\frac{r_I}{r}\right)^2 \right] \quad (6.9)$$

$$\sigma_z = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left(\frac{r_I}{r_a}\right)^2 \quad (6.10)$$

Im plastifizierten Teil der Struktur ( $r_i \leq r \leq r_I$ ) stellt sich die Lösung folgendermaßen dar:

$$\varepsilon_r = \frac{3}{4E} (\sigma_r - \sigma_\theta) \quad (6.11)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{3}{4E} (\sigma_\theta - \sigma_r) \quad (6.12)$$

$$\sigma_r = -\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[ 1 - \left(\frac{r_I}{r_a}\right)^2 + 2 \ln \frac{r_I}{r} \right] \quad (6.13)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[ 1 + \left(\frac{r_I}{r_a}\right)^2 - 2 \ln \frac{r_I}{r} \right] \quad (6.14)$$

$$\sigma_z = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[ \left(\frac{r_I}{r_a}\right)^2 - 2 \ln \frac{r_I}{r} \right] \quad (6.15)$$

Mit der Wahl der Fließspannung  $\sigma_0$  zu  $138.7382959071816^2$  stellt sich das elastisch-plastische Interface bei  $r_I = 75[\text{mm}]$  ein. Die korrespondierenden Verläufe der Dehnungen und Spannungen sind in Abbildung 6.18 und 6.19 dargestellt.

<sup>2</sup>Die Angabe der Fließspannung auf Maschinengenauigkeit ist hier wiederum nötig, um das Konvergenzverhalten bis in den asymptotischen Bereich detailliert studieren zu können.

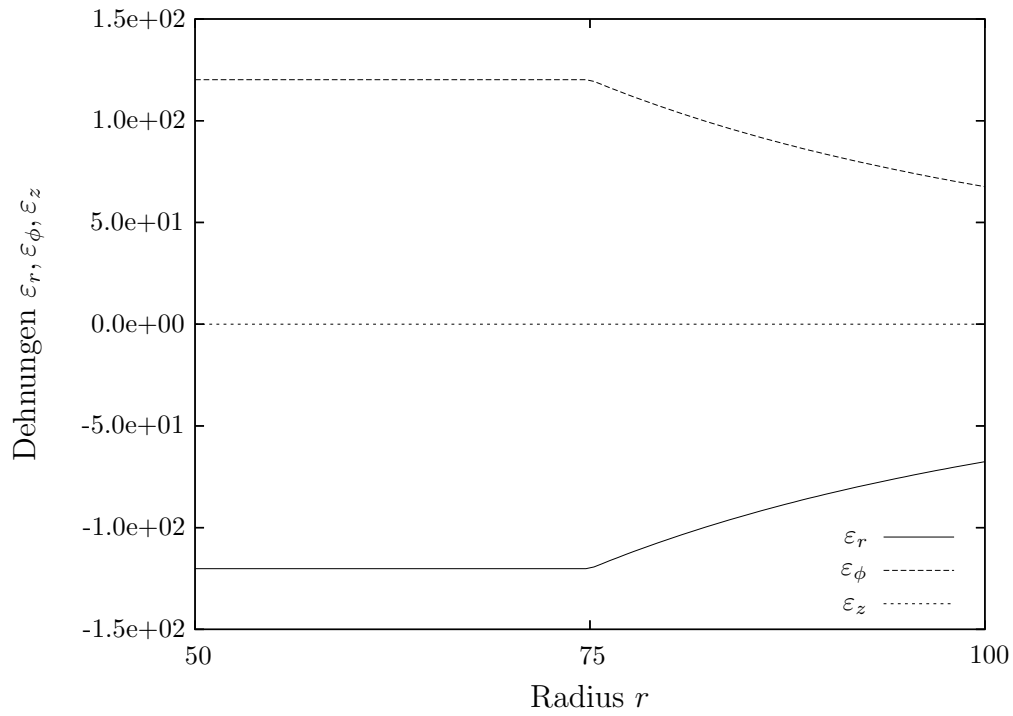


Abbildung 6.18: Dehnungen  $\varepsilon_r, \varepsilon_\phi, \varepsilon_z$  entlang des Radius  $r$  für  $\nu = 0.5$

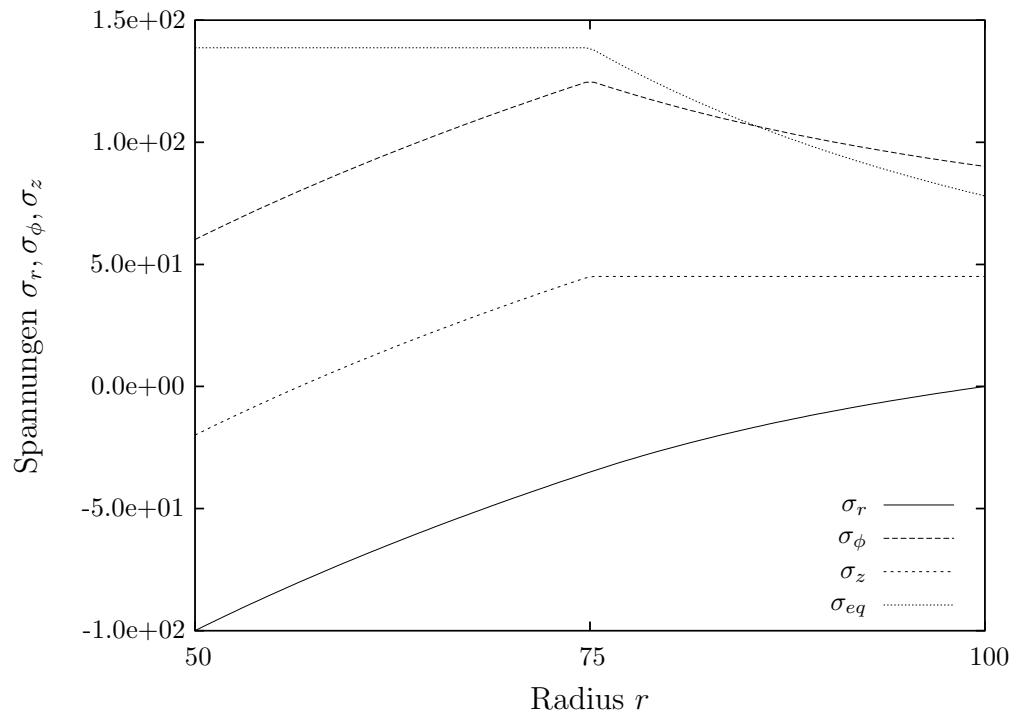


Abbildung 6.19: Spannungen  $\sigma_r, \sigma_\phi, \sigma_z, \sigma_{eq}$  entlang des Radius  $r$  für  $\nu = 0.5$

## 6.2.2 Finite-Element-Analyse bei linearer Elastizität

Die prinzipiellen Approximationseigenschaften dieses Problems im linear-elastischen Fall zu bewerten, ist Aufgabe dieses Kapitels. Die Untersuchungen von Abschnitt 6.2.2.1 korrespondieren mit der unter 6.2.1.1 dargestellten analytischen Lösung. Abschnitt 6.2.2.2 beantwortet die Frage, ob sich die unter 6.2.1.2 beschriebene analytische Lösung des nichtlinearen Problems als Referenzlösung eignet, ob also der Fehler aufgrund der Inkompressibilität gegenüber dem Fehler aus der  $rp$ -Diskretisierung vernachlässigbar ist.

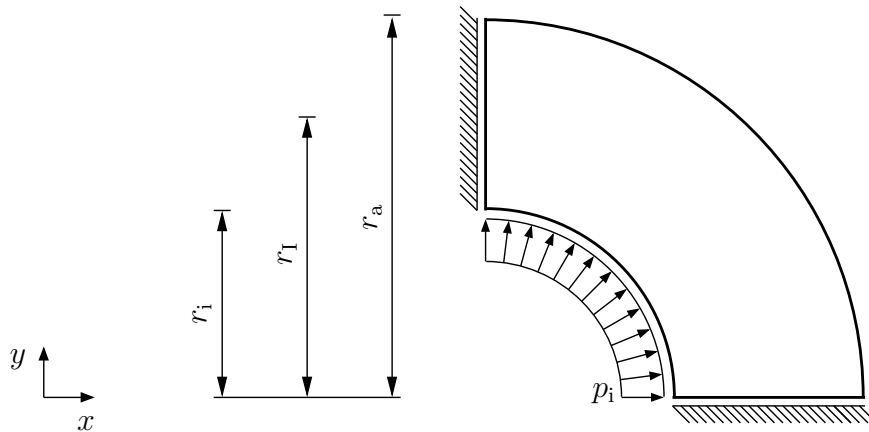


Abbildung 6.20: Geometrie und Randbedingungen des Systems

Aus Symmetriegründen entspricht das untersuchte System der in Abbildung 6.20 dargestellten Struktur. Der in der späteren nichtlinearen Analyse wichtige Interfaceradius  $r_I$  ist der Skizze hier bereits einbeschrieben.

### 6.2.2.1 Berechnung für kompressibles Material

Mit der oben genannten Parameterwahl dokumentiert dieser Abschnitt die Konvergenz des Problems bei Materialverhalten nach dem HOOKESchen Gesetz. Einige der entsprechenden Diskretisierungen sind exemplarisch in 6.21 und 6.22 abgebildet. Die Unterscheidung in nicht-Interface bzw. Interface Netze ist im linear-elastischen Fall selbstverständlich irrelevant. Da diese Finite-Element-Netze aber auch Grundlage der nichtlinearen Untersuchung sind, erhalten sie bereits hier ihre Namen. Alle Kreiskanten sind durch eine exakte Kreiskurvenbeschreibung definiert. Auf sämtlichen Netzen wird der Polynomgrad der Ansatzfunktionen im *tensor product space*  $\mathcal{S}_{ps}^{p\xi, p\eta}(\Omega_{st}^a)$  bei einer Integrationsordnung von  $(p+1) \times (p+1)$  uniform erhöht. Der relative Fehler  $\eta[\%]$ , der in Abbildung 6.23 gegenüber der Anzahl an Freiheitsgraden doppeltlogarithmisch dargestellt ist, fällt für jede der gewählten räumlichen Diskretisierungen auf unter  $10^{-4}[\%]$ .

Die Konvergenz der Spannung  $\sigma_r$  auf dem nicht-Interface Netz aus 11 Elementen entlang eines Radialschnittes dokumentiert Diagramm 6.24 anhand der Polymgrade 3, 5 und 8. Bei

$p_\xi = p_\eta = p_\zeta = 8$  ist „per Augenmaß“ kein Unterschied mehr zwischen analytischer und approximierter Lösung erkennbar.

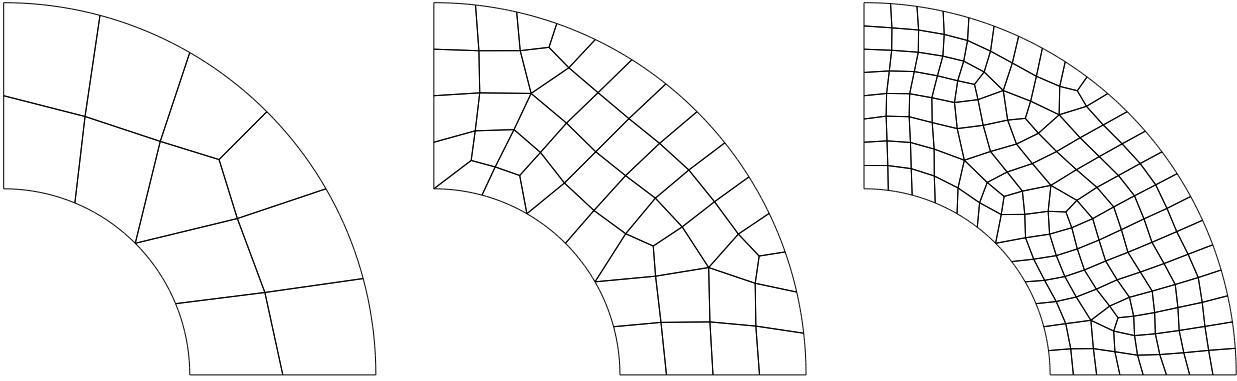


Abbildung 6.21: Finite-Element-Netze mit 11, 47 und 143 Elementen, deren Elementkanten nicht mit dem späteren elastisch-plastischen Interface zusammenfallen

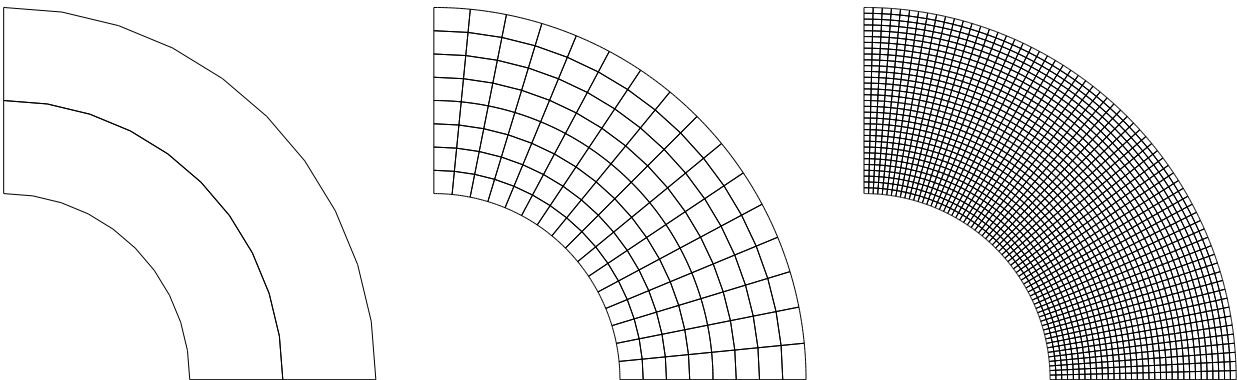


Abbildung 6.22: Finite-Element-Netze mit 2, 128 und 2048 Elementen, deren Elementkanten mit dem späteren elastisch-plastischen Interface zusammenfallen

Die linear-elastische Analyse bei kompressiblem Material zeigt, dass die Finite-Element-Approximation zufriedenstellende Ergebnisse liefert. Ob dies ebenfalls für nahezu inkompressibles Material zutrifft, beantwortet der folgende Abschnitt.



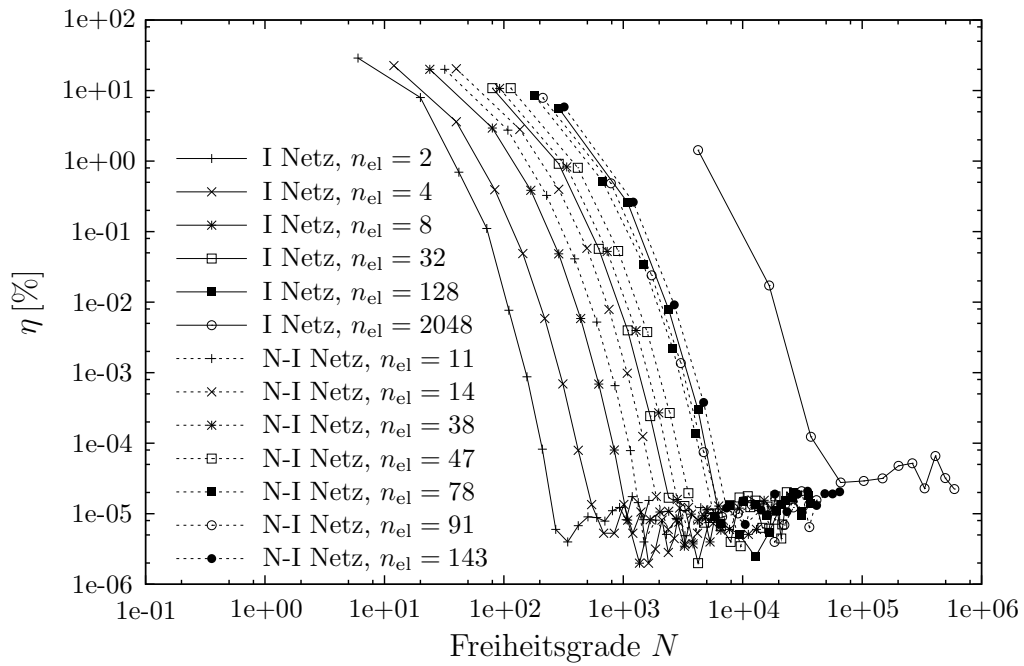


Abbildung 6.23: Relativer Fehler  $\eta = \sqrt{\frac{|u_{\text{ref}} - u_{\text{FE}}|}{u_{\text{ref}}}} 100$  [%]

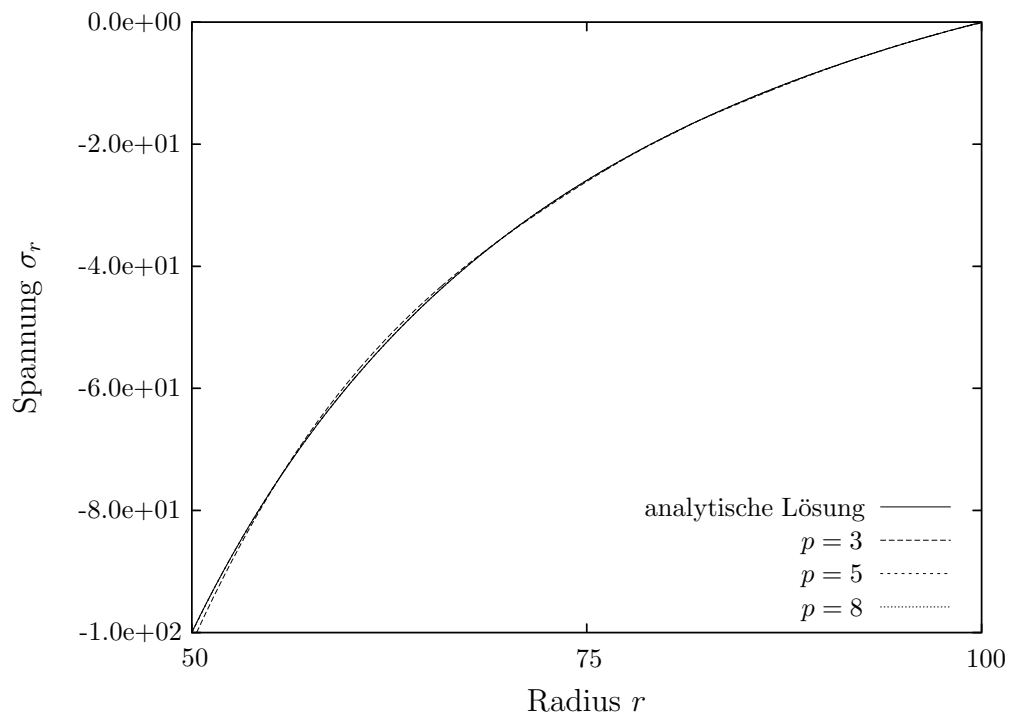


Abbildung 6.24: Spannung  $\sigma_r$  entlang eines Radialschnittes für die Polynomgrade 3,5 und 8 mit dem Netz aus 11 Elementen

### 6.2.2.2 Berechnung bei nahezu inkompressiblem Material

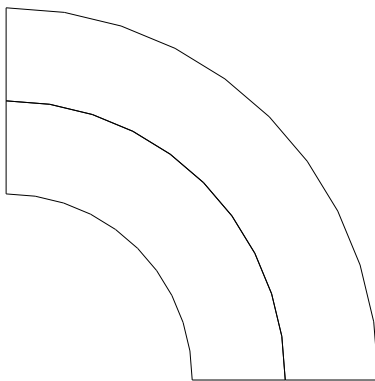
Warum die analytische Lösung im Rahmen der Deformationstheorie als Referenzlösung ungeeignet ist, klärt eine Untersuchung zur Robustheit von Elementen hoher Ordnung hinsichtlich der Diskretisierung nahezu inkompressibler Materialien.

#### Locking — ein Exkurs

Approximiert eine Finite-Element-Diskretisierung ein mathematisches Modell, können sogenannte Locking-Effekte auftreten. Ihre Ursachen sind vielfältig, sie allgemein zu definieren nahezu unmöglich. Grundsätzlich versteht man Locking als numerischen Defekt der Elementformulierung, deren Verschiebungsansatz nicht in der Lage ist, die exakte Verschiebung eines Problems genau genug zu approximieren. Grund hierfür sind i.d.R. problemabhängige Zwangsbedingungen, die in Konflikt zum Verschiebungsansatz stehen. Ein Anliegen der Entwicklung von Elementformulierungen ist die Vermeidung von Locking-Phänomenen. Zu ihnen gehören u.a. Schub-Locking [12, 13, 93, 94, 29, 65], Membran-Locking [12, 13, 53, 29, 65] und Volumen-Locking [12, 93, 96, 29, 65]. Letzteres tritt bei inkompressiblen oder beinahe inkompressiblen Verzerrungszuständen auf, die sich einstellen, wenn die Querdehnzahl  $\nu$  gegen 0.5 strebt. Daraus resultiert für den hier betrachteten elastischen Fall die Forderung nach Volumenerhaltung, ( $\det J = 1$ ). Steifigkeiten streben gegen unendlich, volumetrische Dehnungen gegen null. Dieser Forderung genügen die Schubverzerrungen bei Finite-Element-Berechnungen nach der reinen Verschiebungsformulierung im Allgemeinen nicht, sie sind zu klein. Es gibt zahlreiche Lösungsstrategien zur Handhabung solcher Locking-Phänomene. In [104] werden verschiedene Ansätze diskutiert. Wie robust sich Elemente hoher Ordnung gegenüber dem Volumen-Locking verhalten, ist Gegenstand der folgenden Untersuchung.

Das in Abbildung 6.20 dargestellte System wurde in Anlehnung an SURI [93] sowohl durch zwei als auch durch acht Elemente diskretisiert (vgl. Abbildung 6.25). Um das Verhalten bei

2 Elemente:



8 Elemente:

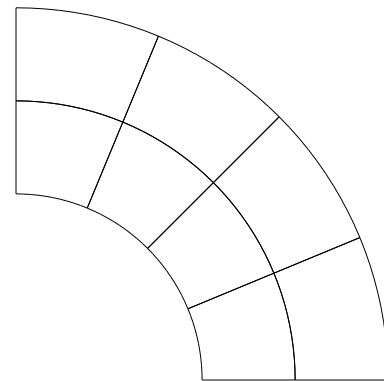


Abbildung 6.25: Finite-Element-Netze mit 2 und 8 Elementen

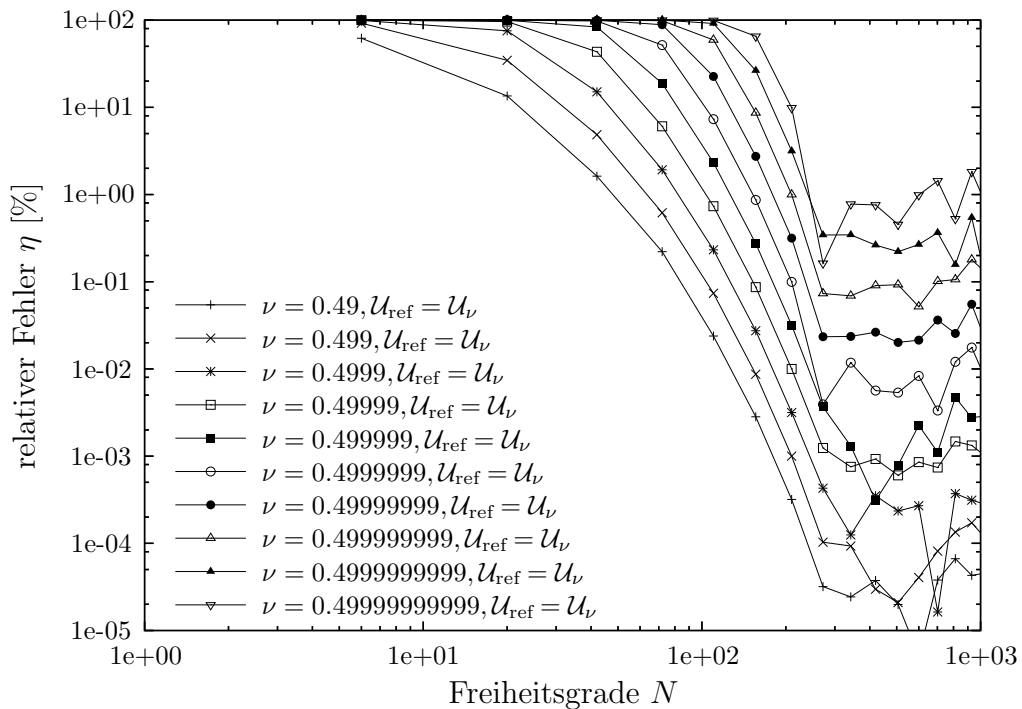
nahezu inkompressiblem Material schrittweise zu untersuchen, variiert die Querdehnzahl  $\nu$  der Berechnungen auf diesen Finite-Element-Netzen. Tabelle 6.3 listet die betrachteten Werte. Für jede Konfiguration wurde der Polynomgrad der Finite-Element-Analyse uniform von  $p_\xi = p_\eta = p_\zeta = 1, \dots, 20$  erhöht. Die entsprechenden relativen Fehler  $\eta[\%]$  für Berechnungen auf Netzen aus zwei bzw. acht Elementen sind in den Diagrammen 6.26 bzw. 6.27 dargestellt. Die verwendete Referenzenergie eines jeden Berechnungszyklus  $\nu = 0.49, \dots, 0.49999999999$

Diskretisierung	$\nu$	analytische berechnete Dehnungsenergie $\mathcal{U}$
1	0.49	0.392031493259836323 E+08
2	0.499	0.392633500952080467 E+08
3	0.4999	0.392692535405032237 E+08
4	0.49999	0.392698427187164687 E+08
5	0.499999	0.392699016248746305 E+08
6	0.4999999	0.392699075153738150 E+08
7	0.49999999	0.392699081044225672 E+08
8	0.499999999	0.392699081633274307 E+08
9	0.4999999999	0.392699081692179170 E+08
10	0.49999999999	0.392699081698069656 E+08
11	0.5	0.392699081698724154 E+08

Tabelle 6.3: Analytisch berechnete Dehnungsenergien für  $\nu \rightarrow 0.5$ 

korrespondiert mit der analytischen Referenzenergie  $\mathcal{U}(\nu = 0.49), \dots, \mathcal{U}(\nu = 0.49999999999)$  gemäß Tabelle 6.3.

Unabhängig von der Anzahl der Elemente können die Ergebnisse wie folgt zusammengefasst werden: Die  $p$ -Version verhält sich robust gegenüber Volumen-Locking und zeigt im präasymptotischen Bereich exponentielle Konvergenz. Diese ist jedoch zunehmend schwieriger zu erreichen, je „kompressibler“ das Material wird. Ab einer gewissen Anzahl an Freiheitsgraden ( $p > 8$ ) verbessert sich die Lösung nicht weiter, die Fehlerkurve oszilliert um einen gewissen Wert. Grund ist die hohe Konditionszahl.

Abbildung 6.26: Relativer Fehler  $\eta$  [%] gegenüber der Anzahl an Freiheitsgraden auf einem Netz aus 2 Elementen unter Verwendung eines CG-Lösers

Konditionsprobleme entstehen bei unterschiedlichen Arten schwieriger, strukturmechanischer Probleme, so z.B. bei der hier betrachteten Berechnung nahezu inkompressibler Materialien oder auch bei der Analyse dünner Schalen (vgl. WALL et al. [100]).

Um die Stabilität der Ergebnisse zu überprüfen, wurden die Berechnungen zu den Diagrammen 6.26 und 6.27 zusätzlich mit dem direkten Löser SPOOLES [2] durchgeführt. Bis zu einem Polynomgrad von  $p = 8$  sind die Ergebnisse deckungsgleich, anschließend oszillieren beide Lösungen. So werden für weitere Betrachtungen nur die Ergebnisse bis zu einem Polynomgrad von  $p = 8$  als brauchbar erachtet. Die Konvergenzrate der  $p$ -Version bleibt von der Wahl der Querdehnzahl unbeeinflusst.

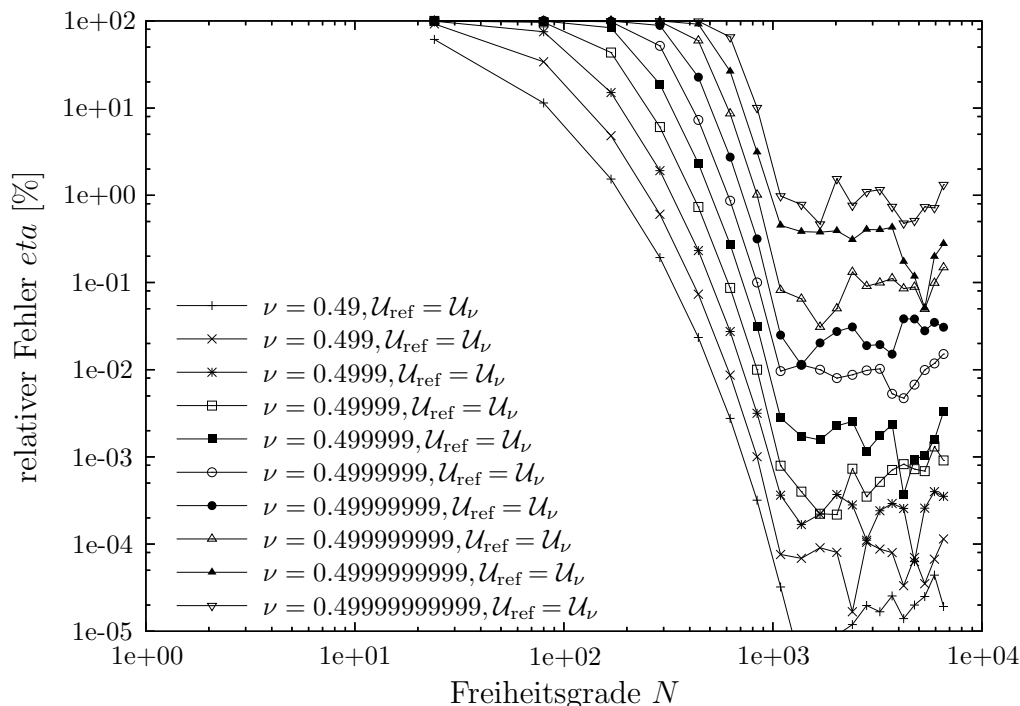


Abbildung 6.27: Relativer Fehler  $\eta$  [%] gegenüber der Anzahl an Freiheitsgraden auf einem Netz aus 8 Elementen unter Verwendung eines CG-Lösers

Der Gesamtfehler einer Berechnung mit inkompressiblem Material wird sich aus verschiedenen Fehlern zusammensetzen. Zum einen entsteht ein Modellfehler, weil die Querdehnzahl  $\nu$  nur gegen den Wert 0.5 konvergiert, ihn aber nicht exakt trifft. Zum anderen wird ein Fehler aufgrund von Volumen-Locking in der Lösung sichtbar.

Um diese Fehleranteile zu quantifizieren, wurden Berechnungen mit den Querdehnzahlen  $\nu = 0.49, \dots, 0.49999999999$  einerseits bzgl. der jeweiligen analytischen Referenzenergie  $\mathcal{U}(\nu = 0.49) \dots \mathcal{U}(\nu = 0.49999999999)$ , andererseits bzgl. der analytischen Referenzenergie  $\mathcal{U}(\nu = 0.5)$  ausgewertet. Abbildung 6.28 zeigt die entsprechenden Ergebnisse.

Strichlierte Kurven repräsentieren die Klasse an Ergebnissen ohne Modellfehler. Als Referenzenergie wurde stets die analytische Energie verwendet, die der Querdehnzahl der Finite-Element-Analyse entspricht. Nähert sich die Querdehnzahl dem Wert 0.5, wächst der Fehler aufgrund des Volumen-Locking. Durchgezogene Kurven resultieren aus einer Konvergenzbetrachtung, bei der die Referenzenergie stets der analytisch berechneten Energie für  $\nu = 0.5$

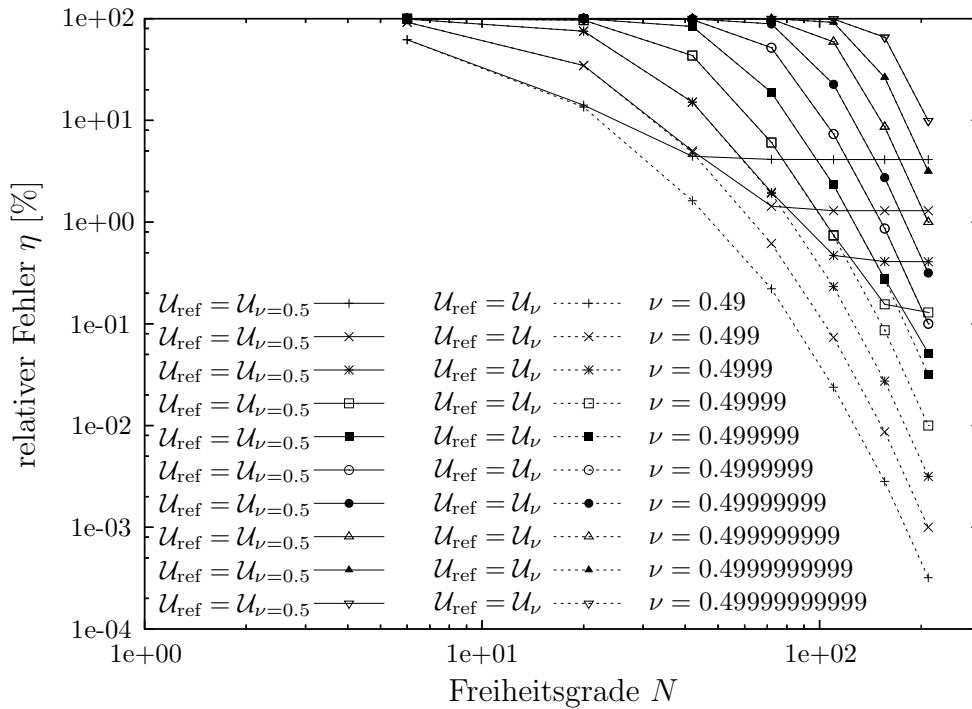


Abbildung 6.28: Relativer Fehler  $\eta$  [%] gegenüber der Anzahl an Freiheitsgraden

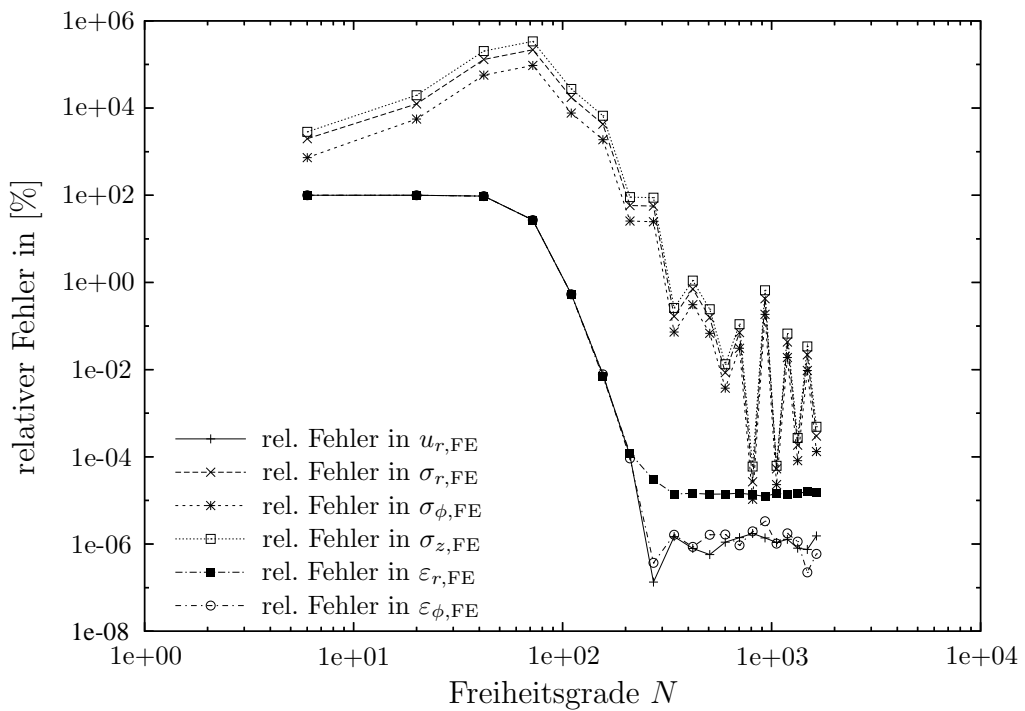


Abbildung 6.29: Relativer Fehler in Verschiebungen, Dehnungen und Spannungen bei  $r=62.5$ [mm] für das Finite-Element-Netz aus 2 Elementen bei  $\nu = 0.4999999$

entspricht. Der Fehler setzt sich jetzt aus zwei Komponenten zusammen, einem Modellfehler und einem Locking-Fehler. Der Modellfehler basiert auf der Diskrepanz zwischen der Querdehnzahl der Finite-Element-Berechnung und  $\nu = 0.5$ . Der Fehler aus dem Volumen-Locking entsteht durch nahezu inkompressibles Material, das mit der Finite-Element-Methode nur annähernd abzubilden ist. Für  $\nu = 0.49, \dots, 0.4999999999$  erkennt man zunächst den Modellfehler. Er ist durch horizontale Tangenten im asymptotischen Bereich charakterisiert. Nähert sich  $\nu$  dem Wert 0.5, schrumpft der Modellfehler bis zu einer Querdehnzahl von  $\nu = 0.4999999$ . Bei weiterer Konvergenz von  $\nu$  gegen 0.5 wächst der Gesamtfehler wieder. Durchgezogene Kurven liegen auf strichlierten Kurven, in denen ausschließlich der Fehler aufgrund von Locking zu sehen ist. Ab  $\nu = 0.4999999$  dominiert der Locking-Fehler den Gesamtfehler.

Die Querdehnzahl seitens der Finite-Element-Analyse, die sich nach dieser Betrachtung als geeignet für eine Untersuchung im nichtlinearen Fall herauskristallisiert, läge bei  $\nu = 0.4999999$ . Die entsprechende Genauigkeit liegt weit unter der, die im Rahmen der linearen Elastizität bei kompressiblem Material erreicht wurde. Die relativen Fehler in Verschiebungen, Dehnungen und Spannungen bei  $r = 62.5[\text{mm}]$  bestätigen die Aussage (vgl. Abbildung 6.29).

Die Betrachtung inkompressiblen Materials verbietet eine Konvergenzbetrachtung, die im Rahmen dieser Arbeit von Interesse ist. Der Fehler aufgrund des Locking würde stets den Fehler überlagern, der hier zur Diskussion steht.

### 6.2.3 Finite-Element-Analyse für die Deformationstheorie

Nachdem Abschnitt 6.2.2.2 gezeigt hat, dass die Finite-Element-Analyse bei nahezu inkompressiblem Material für die hier zu untersuchenden Einflüsse unbrauchbar ist, basiert die Diskretisierung in diesem Abschnitt auf kompressiblem Material. Systemabmessungen und Belastung der betrachteten Struktur werden analog zu Abschnitt 6.2.1.1 bzw. 6.2.2.1 und gemäß Abbildung 6.20 gewählt. Mit einer Querdehnzahl von  $\nu = 0.3$ , einem Elastizitätsmodul von  $E = 1.0[\text{N}/\text{mm}^2]$  und einer Last von  $p_i = 100[\text{N}/\text{mm}^2]$  wird unter der Voraussetzung des ebenen Verzerrungszustandes eine Fließspannung von  $\sigma_0 = 139.28[\text{N}/\text{mm}^2]$  zugrunde gelegt. Mit dieser Parameterkonfiguration stellt sich das elastisch-plastische Interface  $r_I$  mittig zwischen Innenradius  $r_i = 50[\text{mm}]$  und Außenradius  $r_a = 100[\text{mm}]$  bei  $r_I = 75[\text{mm}]$  ein.

Die Referenzlösung stammt aus Berechnungen mit der uniformen  $p$ -Version auf einem feinen Interface Netz und einer korrespondierenden Anzahl an 748 224 Freiheitsgraden. Die entsprechende Dehnungsenergie berechnet sich zu  $\mathcal{U}_{\text{ref}} = 5.3866388035196 \cdot 10^7$ . Auch hier wurden zunächst die Ergebnisse von nicht-Interface Netzen mit denen auf Interface Netzen verglichen. Als Diskretisierungen stehen die bereits in Abschnitt 6.2.2.1 vorgestellten Finite-Element-Netze zur Verfügung. Sie erfüllen die Eigenschaften von nicht-Interface Netzen und Interface Netzen, die plastische Front zu ignorieren bzw. ihr mit den entsprechenden Elementkanten zu folgen. Von Interesse sind die Dehnungsenergie  $\mathcal{U}$  sowie die VON MISES Vergleichspannung  $\sigma_{\text{vgl}}$ .

Abbildung 6.30 zeigt entsprechende Ergebnisse. Der relative Fehler  $\eta$  [%] ist gegenüber der Anzahl an Freiheitsgraden auf doppeltlogarithmischem Maßstab aufgetragen. Während bei linearer Elastizität in Abschnitt 6.2.2.1 alle Diskretisierungen einen relativen Fehler  $\eta$  von unter  $10^{-5}$  [%] erreichen (vgl. Abbildung 6.23), sind hier die nicht-Interface Netze algebraisch auf einen Fehler von über  $10^{-2}$  [%] beschränkt. Netze, die den Verlauf des elastisch-plastischen Interface aufnehmen, konvergieren ebensogut wie im linear elastischen Fall und erreichen — unabhängig von der Anzahl der Elemente — gleichen Fehler. Das optimale Interface Netz

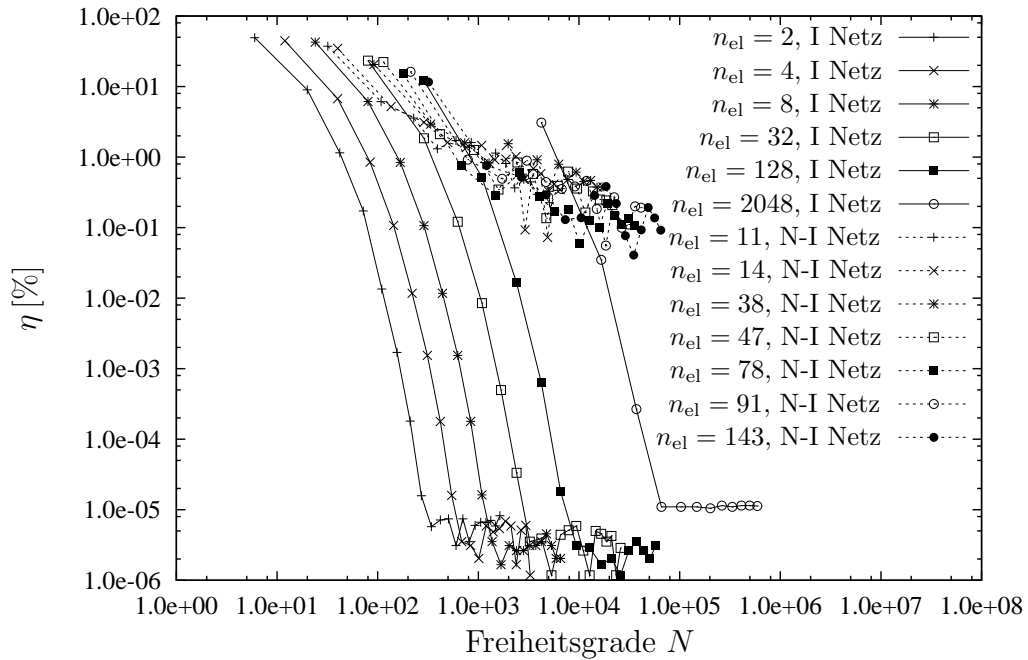


Abbildung 6.30: Relativer Fehler  $\eta = \sqrt{\frac{|\mathcal{U}_{ref} - \mathcal{U}_{FE}|}{\mathcal{U}_{ref}}} 100$  [%]

besteht aus zwei Elementen (vgl. Abbildung 6.22 links) und sinkt bei  $p_\xi = p_\eta = p = 8$  und einer Anzahl von 272 Freiheitsgraden auf einen Fehler von  $10^{-5}$  [%].

Da die Generierung optimaler Interface Netze *a priori* unmöglich ist, stehen die Ergebnisse der nicht-Interface Netze im Folgenden der *rp*-adaptiven Diskretisierung gegenüber. Die entsprechenden Finite-Element-Netze der ersten sechs Iterationsschritte sind in Abbildung 6.33 dargestellt. Das bloße Auge nimmt in Schritt sechs keinen Unterschied mehr zwischen exaktem und geschätztem Interface wahr. Entsprechende Ergebnisse zeigt Abbildung 6.31. Die *rp*-adaptive Suche wurde sowohl nach der Mittelpunkregel als auch nach der gewichteten Methode durchgeführt. Beide Ansätze sind den Ergebnissen der nicht-Interface Diskretisierung überlegen.

Wie sich der relative Fehler in der VON MISES Vergleichsspannung im gesamten Berechnungsgebiet während der *rp*-Adaption verteilt, ist anhand von Abbildung 6.32 ablesbar. Exemplarisch wurden dort die Iterationen 2, 5 und 8 herausgegriffen. In Schritt acht liegt der Fehler jenseits von  $6.6 \cdot 10^{-4}$  [%]. Eine detaillierte Entwicklung des maximalen Fehlers von  $e_{vgl,r}$  listet Tabelle 6.4.

Die *rp*-adaptiven Kurven in Abbildung 6.31 zeigen nach etwa elf Iterationen keine signifikante Verbesserung des Fehlers — jedenfalls nicht mit exponentieller Rate. Die Güte der Approximation wächst mit der Näherung des adaptiv geschätzten Interface an die Kreiskurve der exakten Front. Um einen Zusammenhang zwischen den entsprechenden Abweichungen herzustellen, wird im Folgenden der relative Fehler  $e_{C,r}(s)$  eingeführt:

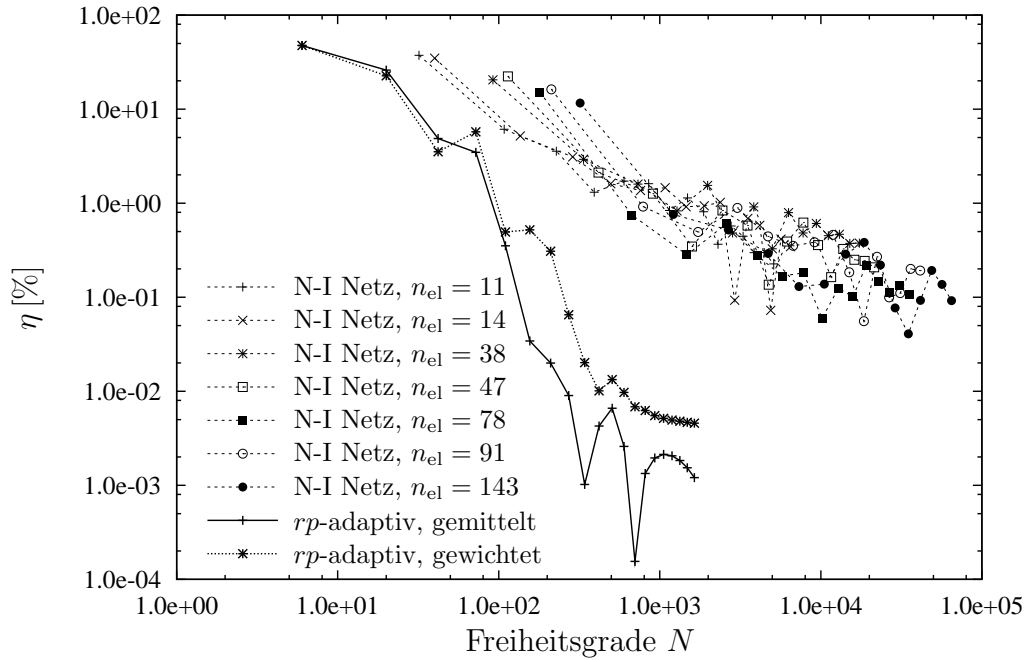
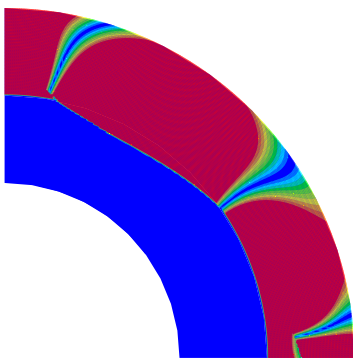


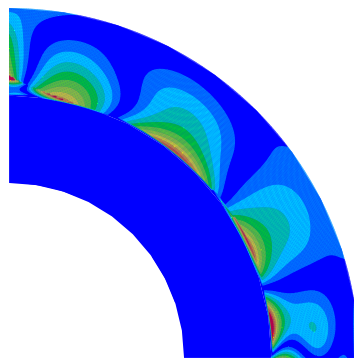
Abbildung 6.31: Relativer Fehler  $\eta = \sqrt{\frac{|\mathcal{U}_{ref} - \mathcal{U}_{FE}|}{\mathcal{U}_{ref}}} 100$  [%]

Iteration 3:  
 $p = 3, go = 6$



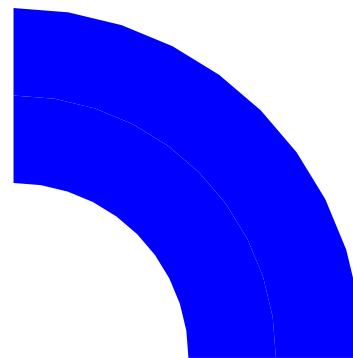
$$e_{vgl,r} \leq 21.726479\%$$

Iteration 5:  
 $p = 5, go = 10$



$$e_{vgl,r} \leq 1.672765\%$$

Iteration 8:  
 $p = 8, go = 16$



$$e_{vgl,r} \leq 0.000659\%$$

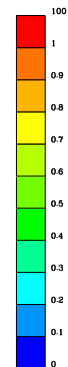


Abbildung 6.32: Verteilung des relativen Fehlers in der von MISES Spannung [%] (Darstellung durch Xmesh 2.90)



$$e_{C,r}(s) = \frac{d(s)}{r_I} 100[\%] \quad (6.16)$$

Darin bezeichnet  $d(s)$  den Abstand zweier Kurven durch

$$d(s) = |C_{rp}(s) - C_{\text{ref}}(s)|, \quad (6.17)$$

wobei  $s$  ein gemeinsamer Parameter der Kurven  $C_{rp}(s)$  und  $C_{\text{ref}}(s)$  ist.  $r_I = 75[\text{mm}]$  bezeichnet den Radius des Kreises, der mit  $C_{\text{ref}}$  korrespondiert.

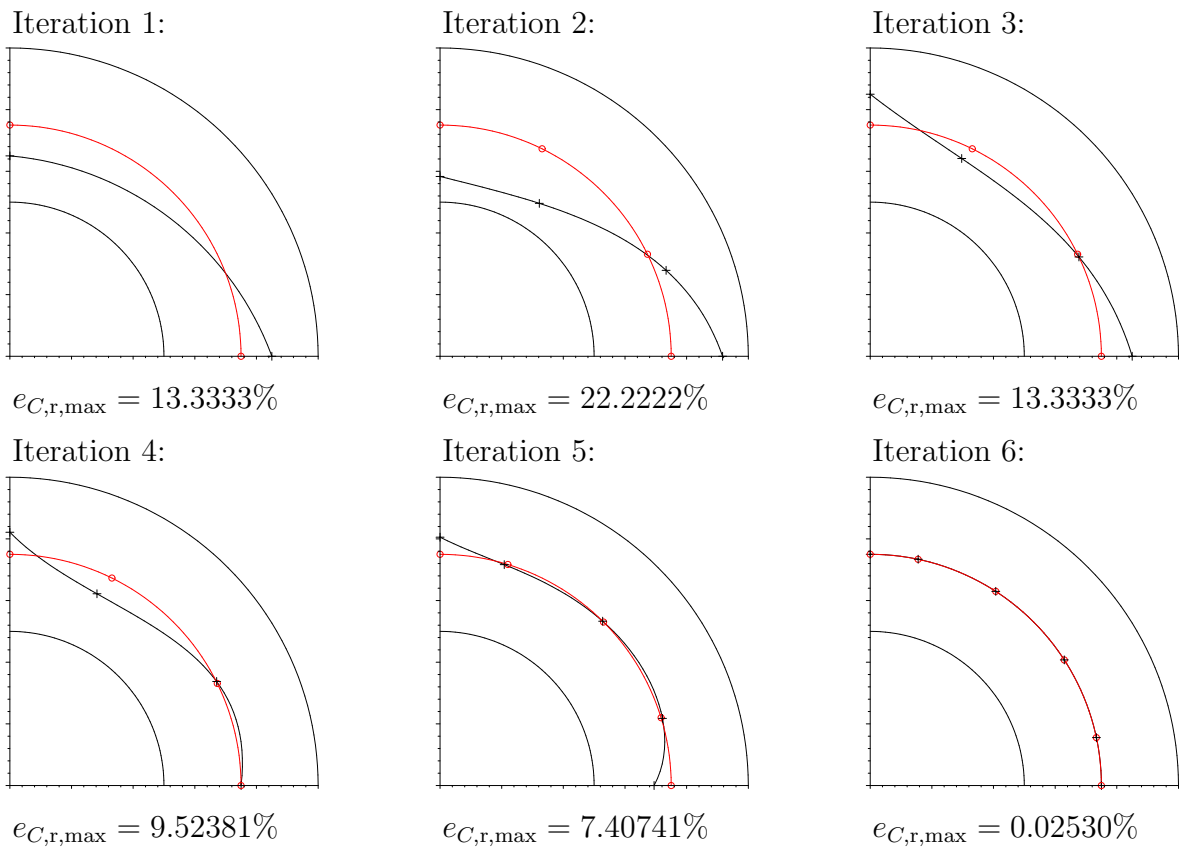


Abbildung 6.33: Finite-Element-Netze im  $rp$ -adaptiven Algorithmus und korrespondierender maximaler Fehler  $e_{C,r,\max}$  gemäß Gleichung (6.18)

Unter den Diskretisierungen in Abbildung 6.33 ist jeweils der maximale Fehler

$$e_{C,r,\max} = \max_i(e_{C,r}(s_i)) \quad (6.18)$$

eines speziellen Satzes an BABUŠKA-CHEN Punkten  $s_i$  [21] angeben.

Iteration	$p$	$N$	$p_{\text{geo}}$	max Fehler $e_{\text{vgl},r} [\%]$	max Fehler $e_{C,r,\text{max}} [\%]$	Fehler $\eta [\%]$
1	1	6	1	31.211985	13.333333	47.582178
2	2	20	3	19.342243	22.222222	26.031322
3	3	42	3	21.726479	13.333333	4.872195
4	4	72	3	16.213371	9.523809	3.469684
5	5	110	4	1.672765	7.407407	0.352711
6	6	156	5	0.006683	0.025297	0.034262
7	7	210	6	0.023299	0.017828	0.019930
8	8	272	7	0.000659	0.008806	0.009008
9	9	342	8	0.001824	0.001162	0.001022
10	10	420	9	0.001644	0.004487	0.004272
11	11	506	10	0.002943	0.008046	0.006595
12	12	600	10	0.000427	0.002979	0.002596
13	13	702	10	0.000024	0.000187	0.000154
14	14	812	10	0.000021	0.001938	0.001335
15	15	930	10	0.000004	0.002767	0.001956
16	16	1056	10	0.000002	0.003023	0.002133
17	17	1190	10	0.000002	0.002929	0.002055
18	18	1332	10	0.000002	0.002632	0.001833
19	19	1482	10	0.000001	0.002231	0.001535
20	20	1640	10	0.000001	0.001789	0.001207

Tabelle 6.4: Maximaler Fehler  $e_{\text{vgl},r}$ , maximale Abweichung  $e_{C,r,\text{max}}$  und Fehler  $\eta [\%]$  in Abhängigkeit des Polynomgrades der Finite-Element-Diskretisierung  $p = p_\xi = p_\eta$ , der Anzahl der Freiheitsgrade  $N$  und der Geometrieapproximation  $p_{\text{geo}}$

Tabelle 6.4 stellt dem maximalen Fehler  $e_{C,r,\text{max}} [\%]$  einer jeweiligen Iteration den entsprechenden Fehler  $\eta [\%]$  gegenüber. Die Größenordnungen beider Abweichungen korrespondieren. Dass der Fehler der nichtlinearen Finite-Element-Analyse mit der Genauigkeit der *rp*-adaptiven Suche korreliert, zeigt Abbildung 6.34. Sie vergleicht Ergebnisse von Berechnungen, bei denen die Geometrieapproximation des exakten Interface — der Kreiskurve mit Radius  $r_1=75[\text{mm}]$  — variiert. Bei exakter Kreiskurvendarstellung konvergiert die Lösung exponentiell bis auf einen Fehler im Bereich der Rechnergenauigkeit. Interpoliert man die Kreisgeometrie durch das in Kapitel 3.2.4 angegebene Schema, wächst die Genauigkeit mit der Interpolationsordnung. Weil die Stützstellen aus der echten Kreiskurvenbeschreibung stammen, entspricht der Fehler bei hohem Polynomgrad  $p_{\text{geo}}$  dem der Kreiskurvenbeschreibung. Passt man die Ordnung zur Interpolation der Geometrie dem Polynomgrad der Finite-Element-Analyse an, fällt die entsprechende Kurve nahezu mit der des exakten Kreises zusammen. Die horizontal verlaufenden Kurven in Abbildung 6.34 zeigen den „Modellfehler“ hinsichtlich der Approximation des Interface. Die Ergebnisse bestätigen, dass der Fehler der *rp*-Adaption aus Diagramm 6.31 auf der Approximation des Interface basiert.

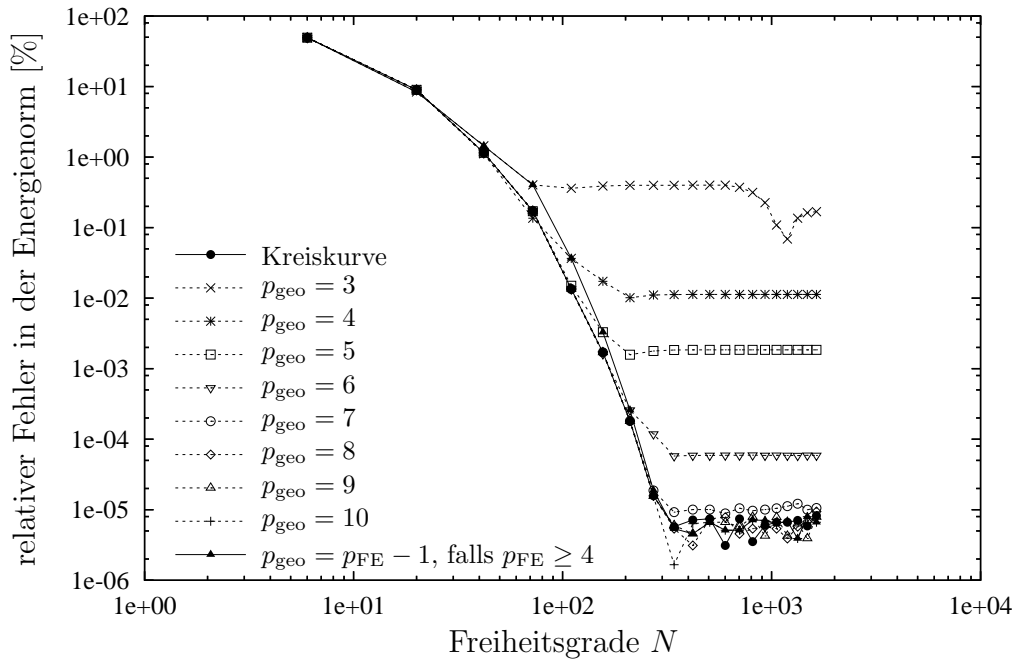


Abbildung 6.34: Relativer Fehler  $\eta = \sqrt{\frac{|\mathcal{U}_{\text{ref}} - \mathcal{U}_{\text{FE}}|}{\mathcal{U}_{\text{ref}}}} 100$  [%] gegenüber der Anzahl der Freiheitsgrade für verschiedene Ordnungen der Geometrieinterpolation

### 6.3 Rechteckgebiet mit Kreisloch

Im Rahmen des DFG-Paketprojektes „Adaptive Finite-Element-Methods in Computational Mechanics“ definierten STEIN et al. [91] ein Benchmarkbeispiel, das in diesem Abschnitt Grundlage der Untersuchungen zur  $rp$ -adaptiven Diskretisierung ist. Geometrie und Randbedingungen des Systems sind in Abbildung 6.35 dargestellt.

Ein Viertel einer quadratischen Scheibe mit zentrischem Loch und konstanter Dicke wird durch eine gleichförmige Kraft von  $\bar{t}_n = 450.0$  [MPa] gezogen. Die Symmetrie der Struktur legt die DIRICHLET-Randbedingungen fest: sowohl der rechte als auch der untere Rand der Struktur sind in Normalenrichtung unverschieblich gelagert. Allen Berechnungen liegt der Schubmodul  $\mu = 80193.8$  [MPa], der Kompressionsmodul  $\kappa = 164206.35$  [MPa] und die Fließspannung  $\sigma_0 = 450.0$  [MPa] zu Grunde.

Die Referenzlösung stammt aus Berechnungen mit bis zu 927 675 Freiheitsgraden auf einem feinen Netz mit 5717 Elementen und einem uniformen Polynomgrad von bis zu  $p = p_\xi = p_\eta = 9$  mit dem vollen Ansatzraum  $\mathcal{S}_{\text{ps}}^{p_\xi, p_\eta}(\Omega_{\text{st}}^q)$ . Das entsprechende Finite-Element-Netz ist in Abbildung 6.36 links dargestellt. Es sei darauf hingewiesen, dass alle Elementkanten in Interface-Nähe die elastisch-plastische Grenze genau treffen. Die Referenzgeometrie der plastischen Front ist rechts in der entsprechenden Abbildung dargestellt. Sie ist Resultat eines  $rp$ -adaptiven Zyklus auf feinen Netzen.

Zum Effizienzvergleich verschiedener Diskretisierungen stehen im Folgenden die Verschiebung  $u_x$  am Punkt 5,  $u_y$  am Punkt 4, die Spannung  $\sigma_{yy}$  am Punkt 2 sowie die Dehnungsenergie  $\mathcal{U}$  zur Diskussion. Die entsprechenden Ergebnisse einer uniformen  $p$ -Version auf dem Referenznetz

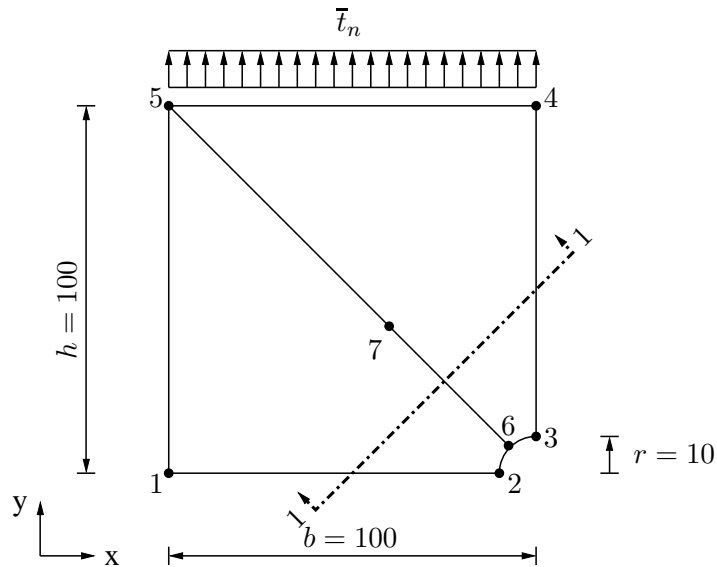


Abbildung 6.35: Rechteckgebiet mit Kreisloch unter gleichmäßiger Zugbeanspruchung

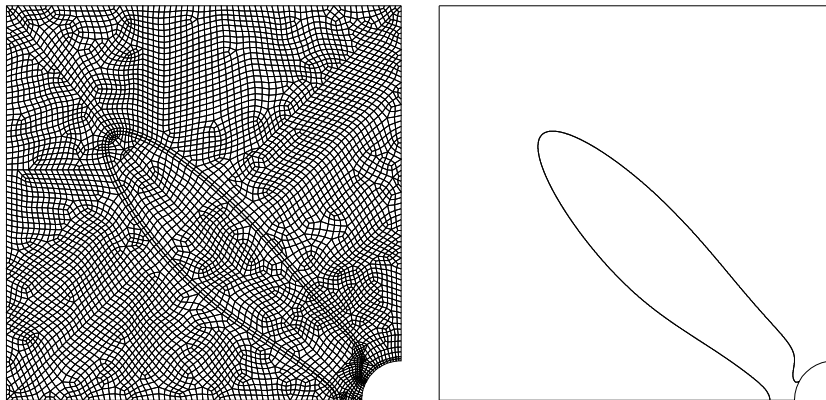


Abbildung 6.36: Referenznetz mit 5717 Elementen und Referenz-Interface

$p$	$N$	Dehnungsenergie $\mathcal{U}$	$\sigma_{yy}$ am Punkt 2	$u_y$ am Punkt 4	$u_x$ am Punkt 5
1	11603	5.031878161E+03	7.111549585E+02	2.458480576E-01	6.185653057E-02
2	46074	5.053212080E+03	5.131223551E+02	2.473042571E-01	6.120824879E-02
3	103413	5.053493895E+03	5.189611480E+02	2.473231374E-01	6.120047246E-02
4	183620	5.053503931E+03	5.195543402E+02	2.473237977E-01	6.120019071E-02
5	286695	5.053504324E+03	5.195450701E+02	2.473238739E-01	6.120017286E-02
6	412638	5.053504437E+03	5.195445331E+02	2.473238826E-01	6.120016960E-02
7	561449	5.053504453E+03	5.195445033E+02	2.473238838E-01	6.120016914E-02
8	733128	5.053504455E+03	5.195445062E+02	2.473238840E-01	6.120016907E-02
9	927675	5.053504456E+03	5.195445056E+02	2.473238840E-01	6.120016905E-02

Tabelle 6.5: Referenzlösung auf einem Netz mit 5717 Elementen

sind in Tabelle 6.5 gelistet. Acht Stellen der Lösung sind stabil. Neben diesen Größen wurden die Spannungen  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  und  $\sigma_{zz}$  entlang der Schnittlinie 1 – 1 betrachtet.

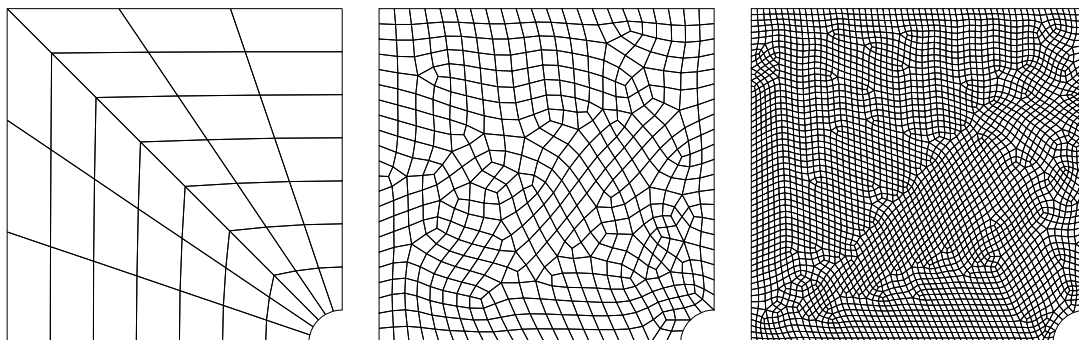


Abbildung 6.37: Nicht-Interface Netze mit 42, 536 und 3249 Elementen

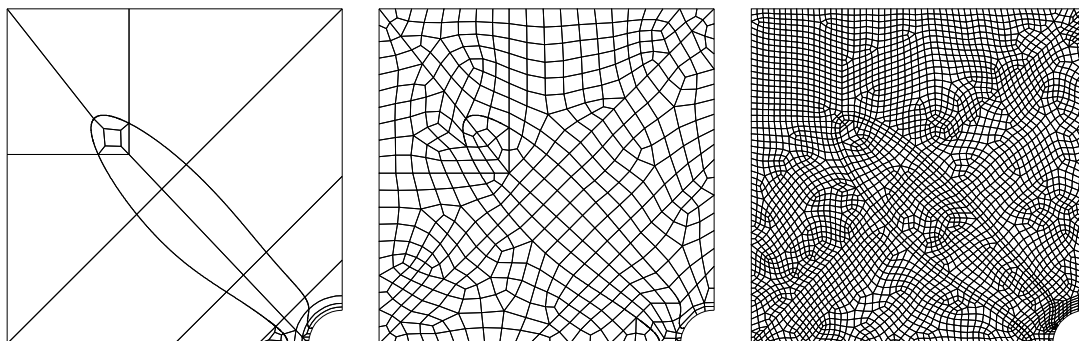


Abbildung 6.38: Interface Netze mit 41, 514 und 3329 Elementen

Zunächst wird die Konvergenz von Interface Netzen und nicht-Interface Netzen verglichen. Abbildungen 6.37 und 6.38 zeigen einige der untersuchten Diskretisierungen. Zum Effizienzvergleich beider Netztypen wurde der Polynomgrad bei einer Integrationsordnung von  $(p + 1) \times (p + 1)$  GAUSS-Punkten jeweils uniform erhöht. Die Abbildungen 6.39 - 6.42 zeigen die Ergebnisse. Während strichlierte Linien die Konvergenz der nicht-Interface Netze dokumentieren, stellen durchgezogene Kurven die Effizienz von Interface Netzen dar.

Abbildung 6.39 trägt den relativen Fehler  $\eta$  [%] gegenüber der Anzahl  $N$  an Freiheitsgraden doppeltlogarithmisch auf. Im präasymptotischen Bereich zeigen beide Strategien exponentielle Konvergenz. Darüber hinaus machen die Interface Netze eine weitere Reduktion des relativen Fehlers um bis zu einer Größenordnung möglich.

Die Abbildungen 6.40-6.42 stellen die Konvergenz von Verschiebungen und Spannungen an den Punkten 2, 4 und 5 dar. Beide Diagrammachsen sind jeweils logarithmisch skaliert. Passt man das Finite-Element-Netz an den Verlauf des elastisch-plastischen Interface an, sinkt der relative Fehler in Verschiebungen und Spannungen drastisch, besonders deutlich anhand der Spannungskomponente  $\sigma_{yy}$  am Punkt 2 ablesbar.

Der relative Fehler aufgrund von Berechnungen auf Interface Netzen fällt auf einen Wert von  $10^{-5}$  [%]. Der Effizienzgewinn liegt bei bis zu drei Größenordnungen. Die Konvergenzkurven

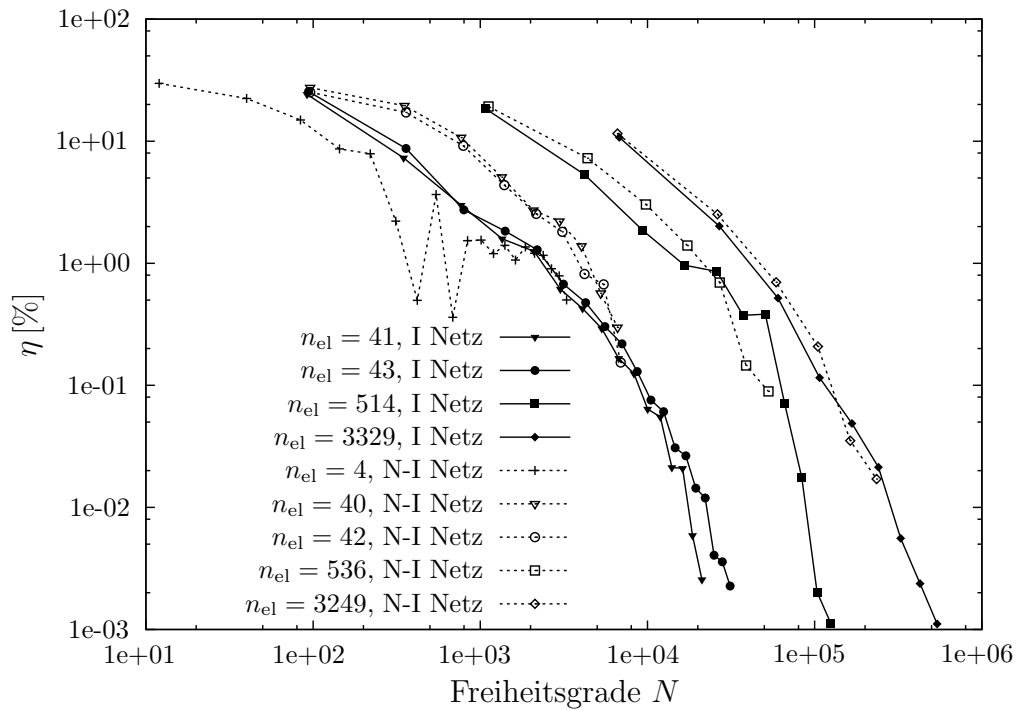


Abbildung 6.39: Relativer Fehler  $\eta = \sqrt{\frac{u_{\text{ref}} - u_{\text{FE}}}{u_{\text{ref}}}} 100$  [%]

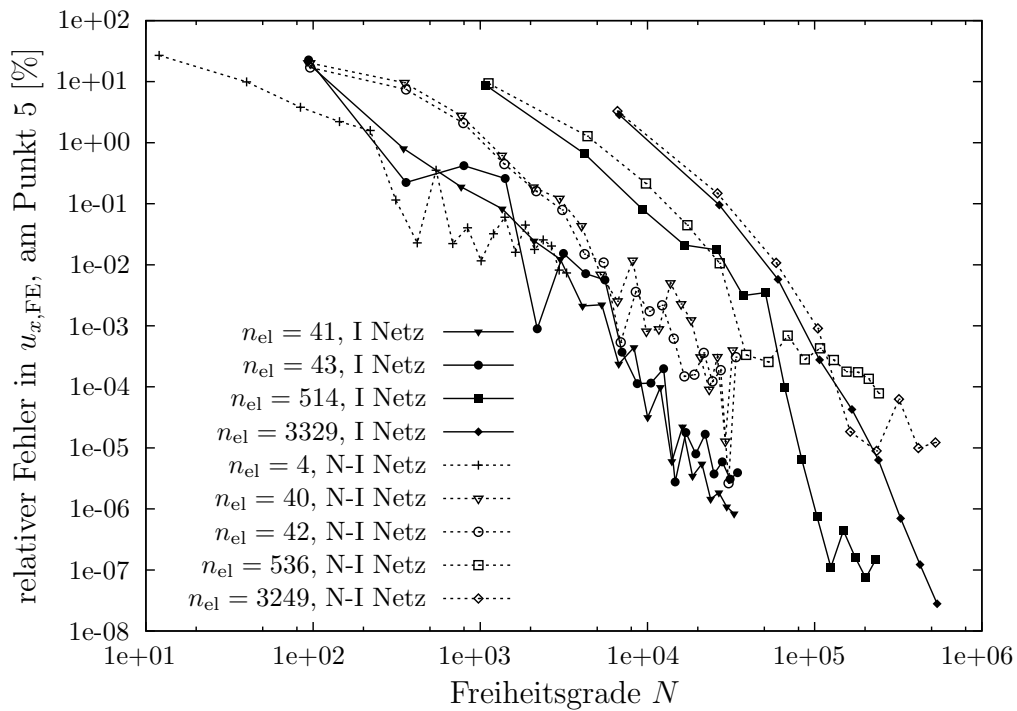


Abbildung 6.40: Relativer Fehler  $\frac{|u_{x,\text{ref}} - u_{x,\text{FE}}|}{u_{x,\text{ref}}} 100$  [%] am Punkt 5

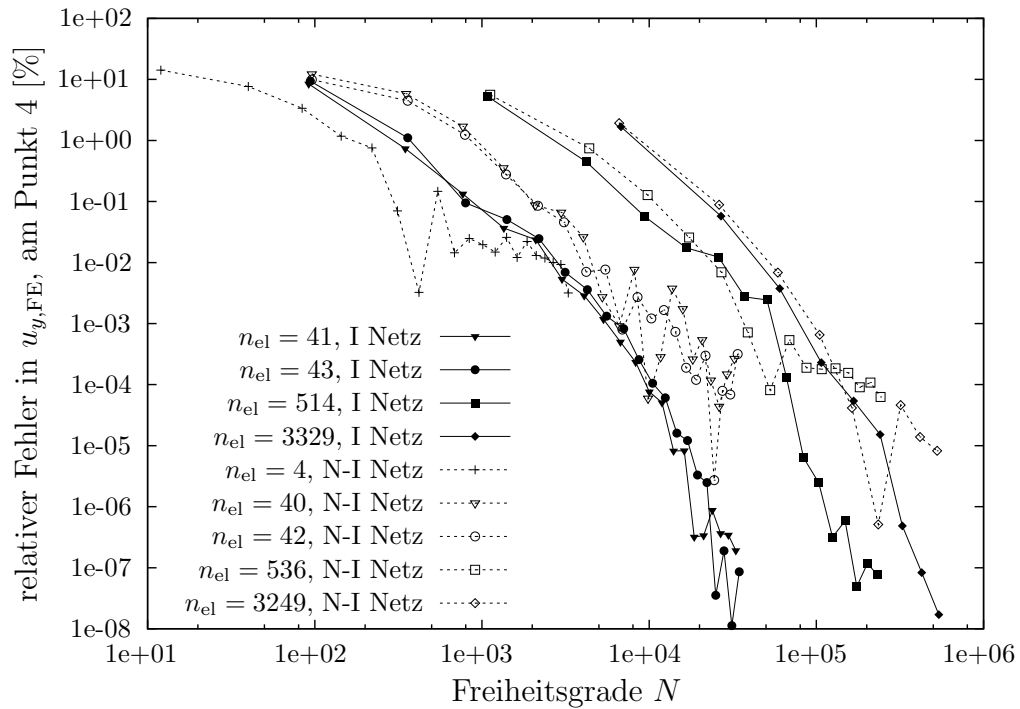


Abbildung 6.41: Relativer Fehler  $\frac{|u_{y,ref} - u_{y,FE}|}{u_{y,ref}} 100$  [%] am Punkt 4

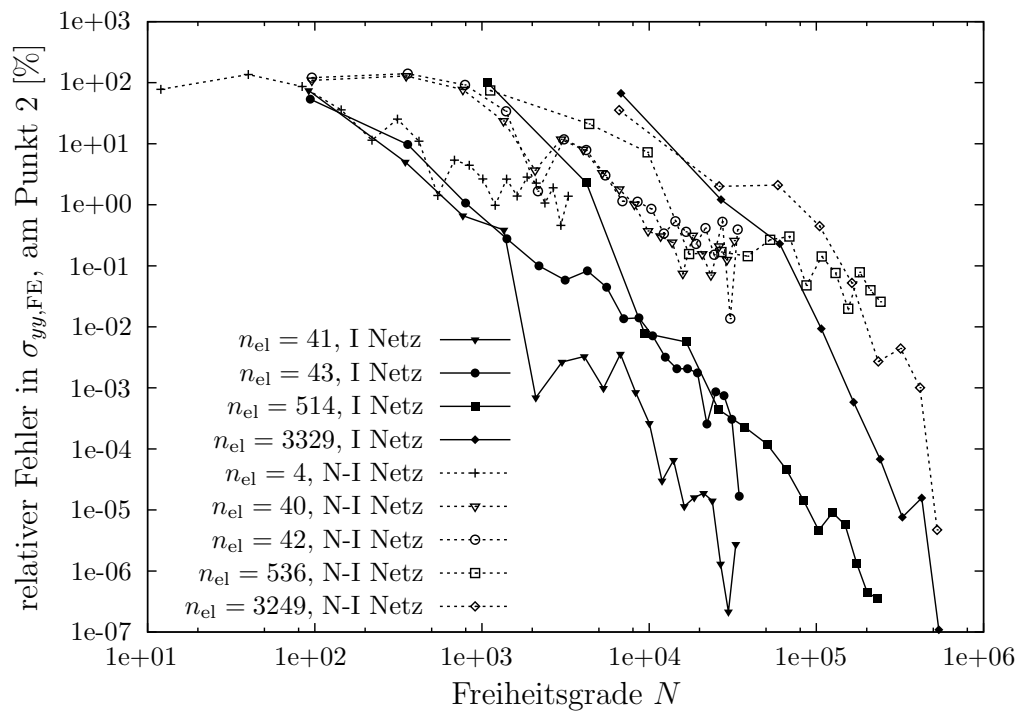


Abbildung 6.42: Relativer Fehler  $\frac{|\sigma_{yy,ref} - \sigma_{yy,FE}|}{\sigma_{yy,ref}} 100$  [%] am Punkt 2

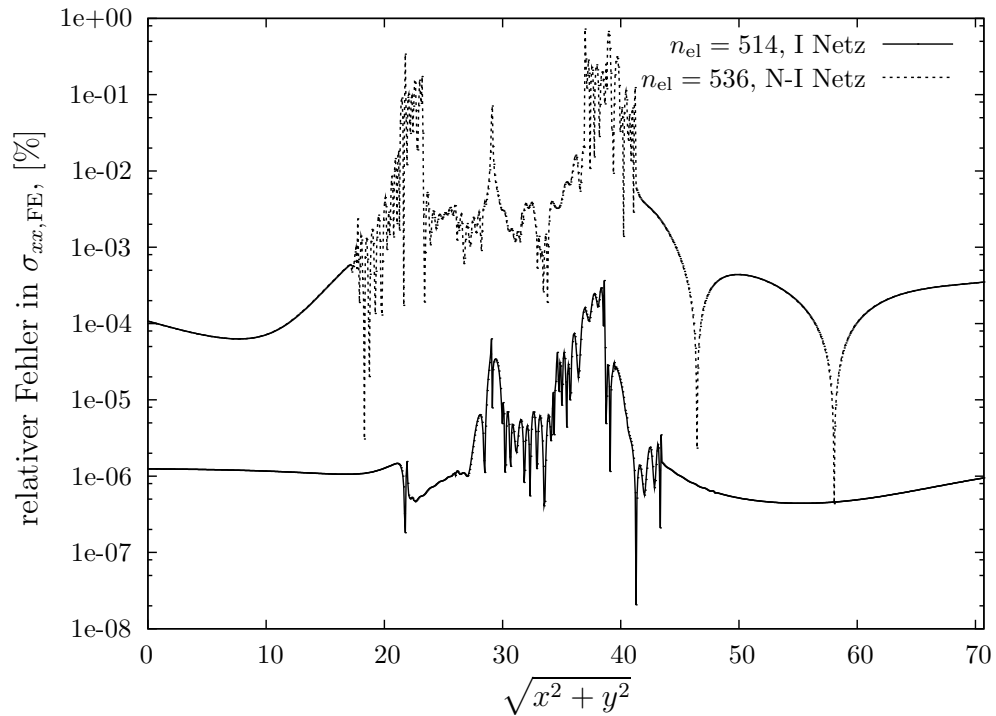


Abbildung 6.43: Relativer Fehler  $\frac{|\sigma_{xx,ref} - \sigma_{xx,FE}|}{\sigma_{xx,ref}} 100$  [%] entlang der Schnittlinie 1-1 mit  $p = 14$

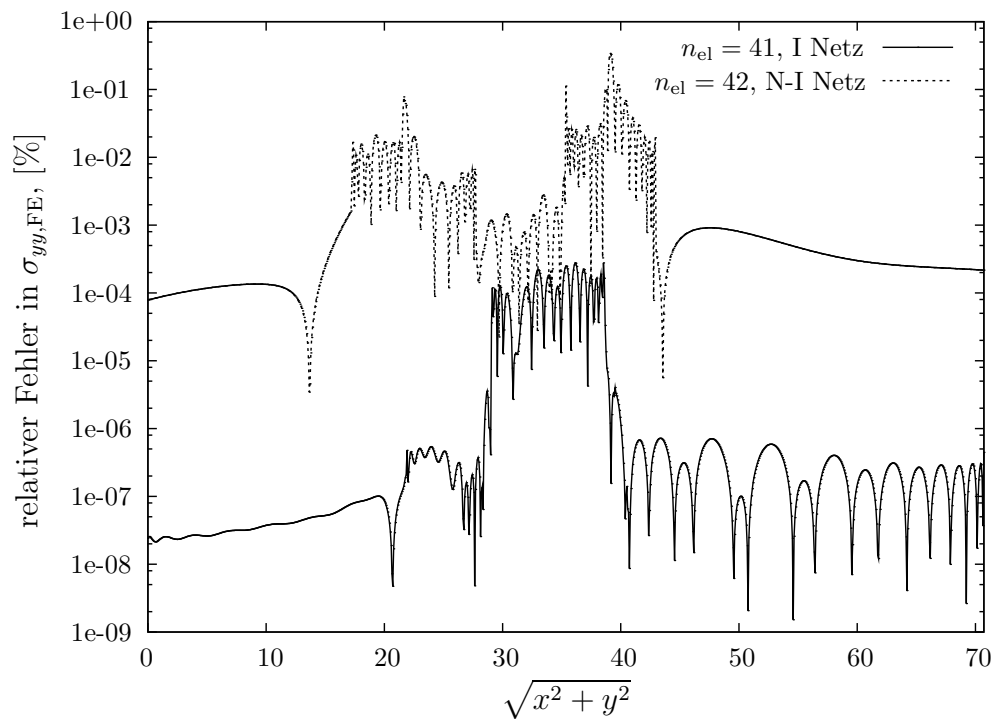


Abbildung 6.44: Relativer Fehler  $\frac{|\sigma_{yy,ref} - \sigma_{yy,FE}|}{\sigma_{yy,ref}} 100$  [%] entlang der Schnittlinie 1-1 mit  $p = 18$



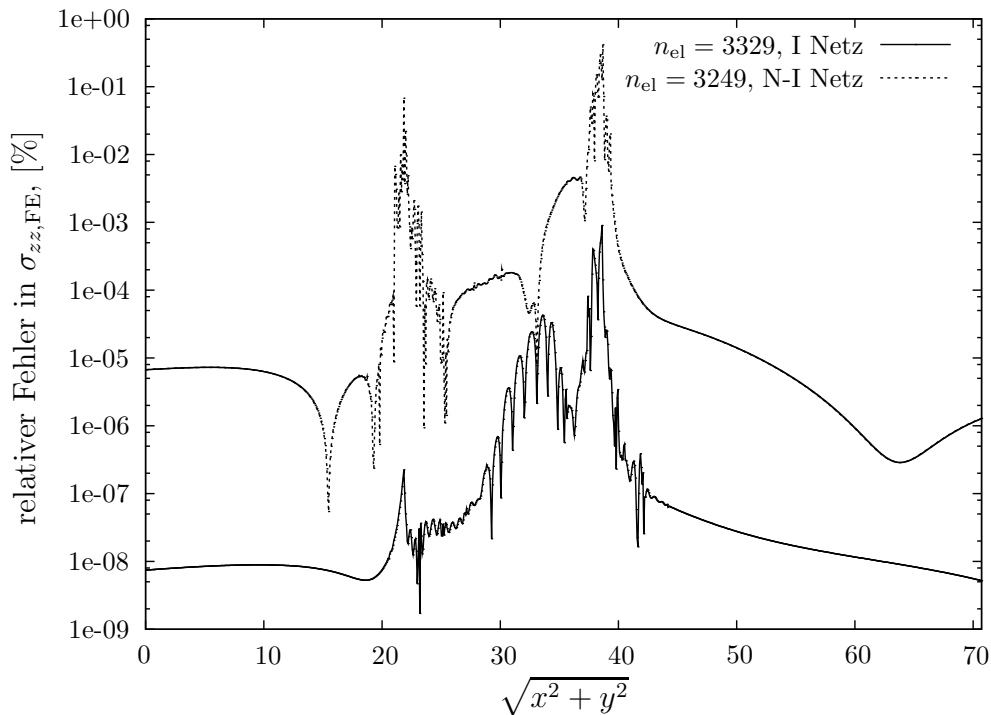


Abbildung 6.45: Relativer Fehler  $\frac{|\sigma_{zz,\text{ref}} - \sigma_{zz,\text{FE}}|}{\sigma_{zz,\text{ref}}} 100 [\%]$  entlang der Schnittlinie 1-1 mit  $p = 9$

6.39-6.42 weisen starke Oszillationen auf. In Anlehnung an die Untersuchung in Abschnitt 6.2.3 zur exakten Geometriebeschreibung des Interface, deren Ergebnisse Tabelle 6.4 zusammenfasst, liegt die Vermutung nahe, dass auch die Oszillationen auf den Grad der Genauigkeit zurückzuführen sind, mit dem die Interfacegeometrie erfasst wird. Die Ergebnisse reagieren sehr sensibel auf eine entsprechende Ungenauigkeit, wie detaillierte Untersuchungen in Abschnitt 6.2.3 zeigen.

Dass das Verhalten, das aus den Diagrammen 6.39-6.42 ablesbar ist, nicht nur ein Konvergenzphänomen an speziellen Punkten ist, zeigen Betrachtungen verschiedener Größen entlang der Schnittlinie 1-1.

Die Abbildungen 6.43-6.45 stellen die relativen Fehler dieser Größen auf logarithmischer Skala dar. Für einen speziellen Polynomgrad vergleicht jedes Diagramm die Ergebnisse eines nicht-Interface Netzes mit denen eines Interface Netzes annähernd gleicher Elementanzahl. Festzuhalten ist: Folgen Finite-Element-Netze der Geometrie der plastischen Front, sinkt der relative Fehler um mehr als eine Größenordnung. Verschiebungen und Spannungen, Größen, die aus der Sicht des Ingenieurs besonders aussagekräftig sind, verbessern sich signifikant. Die Kurven der Diagramme 6.43-6.45 spiegeln weiterhin die Oszillation der polynomiellen Ansatzfunktionen um die exakte Lösung wider. Aufgrund der Tatsache, dass jeweils der Absolutbetrag des Fehlers aufgetragen ist, präsentieren sich die Schwingungen in „Arkadenform“ und zeigen beispielsweise in Abbildung 6.44 für das Interface Netz aus 41 Elementen im Bereich  $\sqrt{x^2 + y^2} > 40$  Oszillationen mit einer Amplitude von  $10^{-6} [\%]$ . Dass sich diese Oszillationen um die exakte Lösung in Abbildung 6.44 stärker ausdrücken als in den Diagrammen 6.43 und 6.45 liegt an der räumlichen Diskretisierung und demonstriert folgendes typisches Verhalten der  $p$ -Version: Die Lösung schwingt nur in dem Element, das direkt neben der Störung, hier

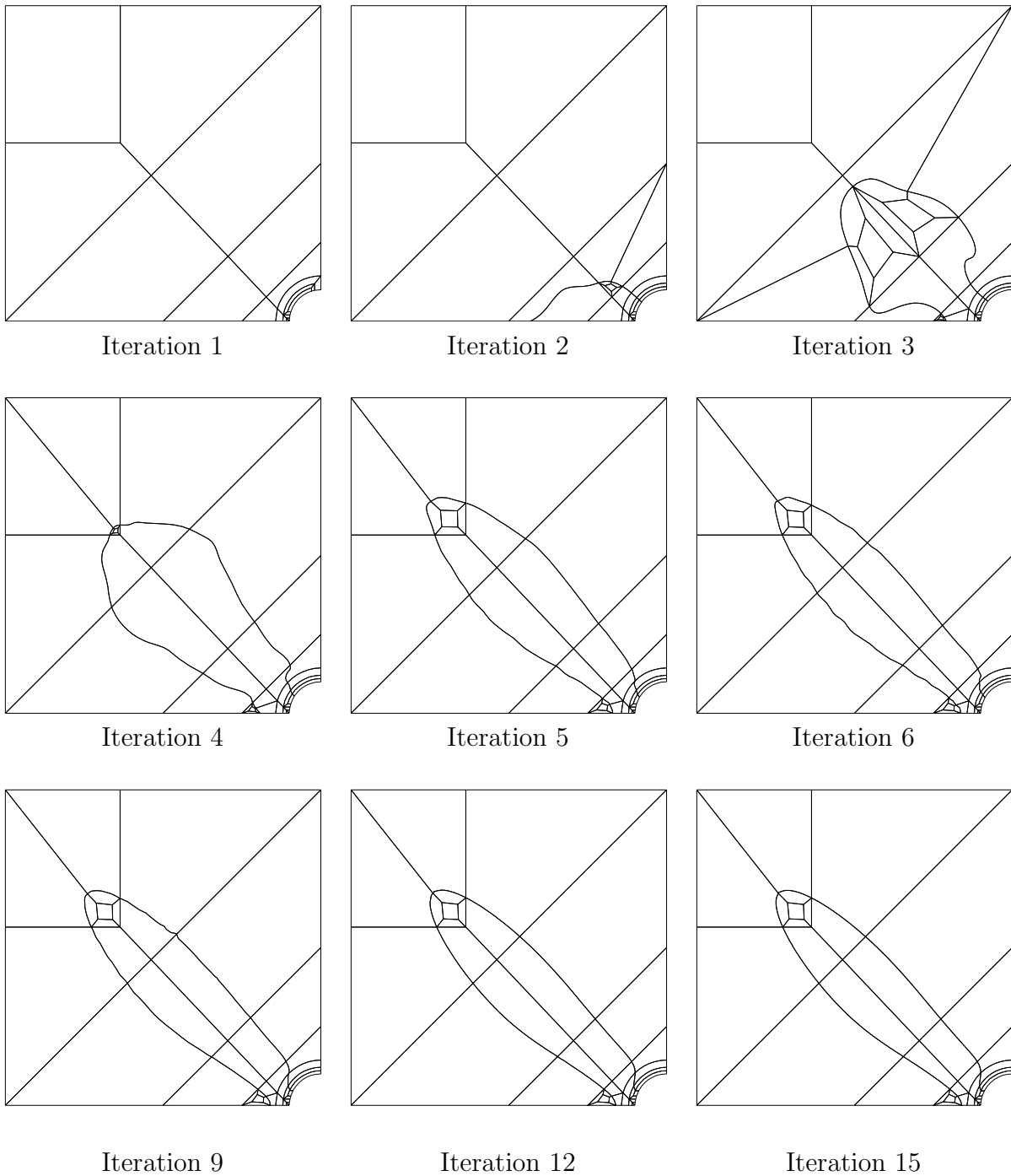


Abbildung 6.46: Finite-Element-Netze während des  $rp$ -adaptiven Algorithmus

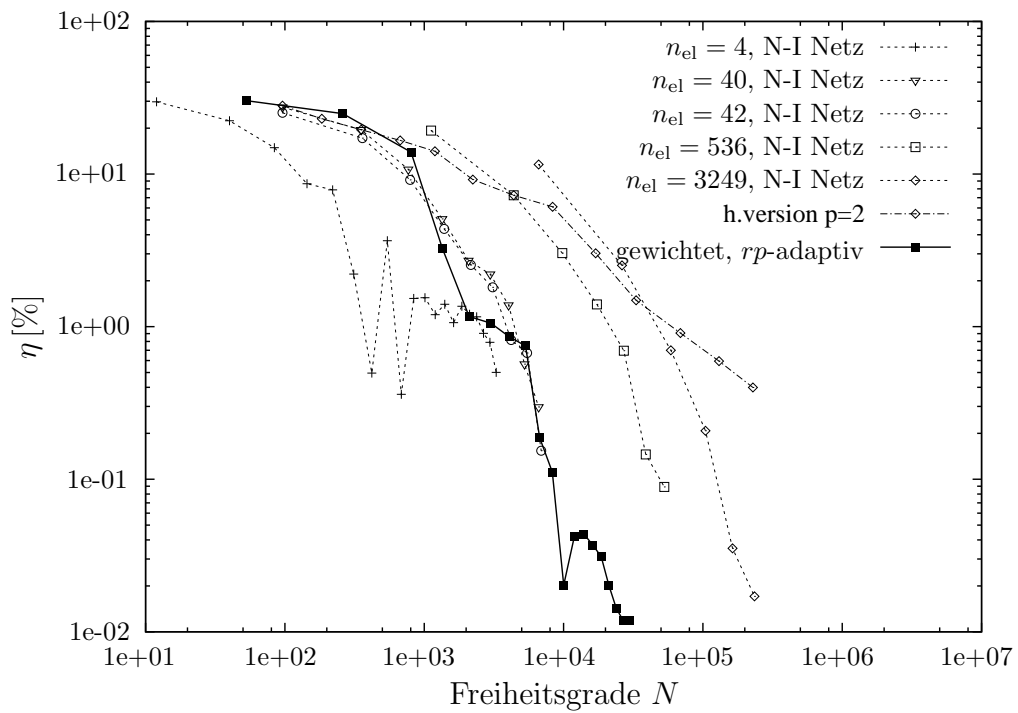
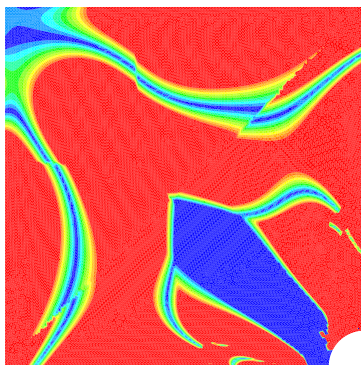


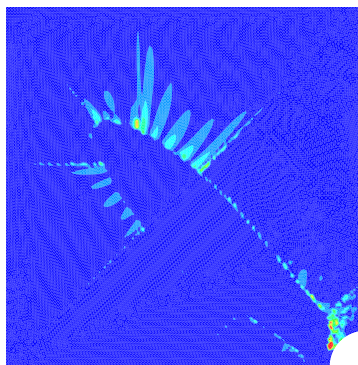
Abbildung 6.47: Relativer Fehler  $\eta = \sqrt{\frac{|\mathcal{U}_{ref} - \mathcal{U}_{FE}|}{\mathcal{U}_{ref}}} 100$  [%]

Iteration 2:  
 $p = 2, go = 4$



$e_{vgl,r} \leq 31.131218\%$

Iteration 6:  
 $p = 6, go = 12$



$e_{vgl,r} \leq 3.717042\%$

Iteration 11:  
 $p = 11, go = 22$



$e_{vgl,r} \leq 0.198635\%$

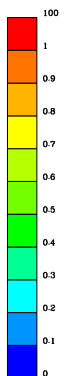


Abbildung 6.48: Verteilung des relativen Fehlers  $e_{vgl,r} = \frac{|\sigma_{vgl,FE} - \sigma_{vgl,ex}|}{\sigma_0} 100$  [%] in der VON MISES Vergleichsspannung während der  $rp$ -Adaption (Darstellung durch Xmesh 2.90)

dem Interface, liegt. Weil die „betroffenen“ Elemente aufgrund der Dichte der Finite-Element-Netze zu den Diagrammen 6.43 und 6.45 klein sind, sieht man den Einfluss der Störung nur in der Nähe der plastischen Front. Die zuvor angesprochene Oszillation des Interface Netzes mit 41 Elementen aus Abbildung 6.44 im Bereich  $\sqrt{x^2 + y^2} > 40$  zeigt die Wirkung der Störung innerhalb eines großen  $p$ -Elementes. Die 17 Schwingungsbäuche korrespondieren mit dem Polynomgrad  $p = 18$  der Ansatzfunktionen und liegen im Bereich der Maschinengenauigkeit. Weil — im Gegensatz zu Beispiel eins und zwei — die Energie des Systems von elastischem Verhalten dominiert ist, der plastische Anteil eine eher untergeordnete Rolle spielt, zeigt hier im präasymptotischen Bereich auch die reine  $p$ -Version exponentielle Konvergenz des Fehlers  $\eta$ [%].

Abschließend wird das System mithilfe der gewichteten Regel  $rp$ -adaptiv diskretisiert. Einige der entsprechenden Finite-Element-Netze stellt Abbildung 6.46 vor. Wie effizient die  $rp$ -Adaption den Fehler  $\eta$  auf etwa 0.01[%] reduziert, beweist Diagramm 6.47. Die Verteilung des relativen Fehlers in der VON MISES Vergleichspannung  $e_{\text{vgl,r}}$  erscheint in Abbildung 6.48. Exemplarisch sind die Iterationsschritte zwei, sechs und elf herausgegriffen. Nach elf Iterationen liegt der relative Fehler im gesamten Berechnungsgebiet unter 0.2[%].

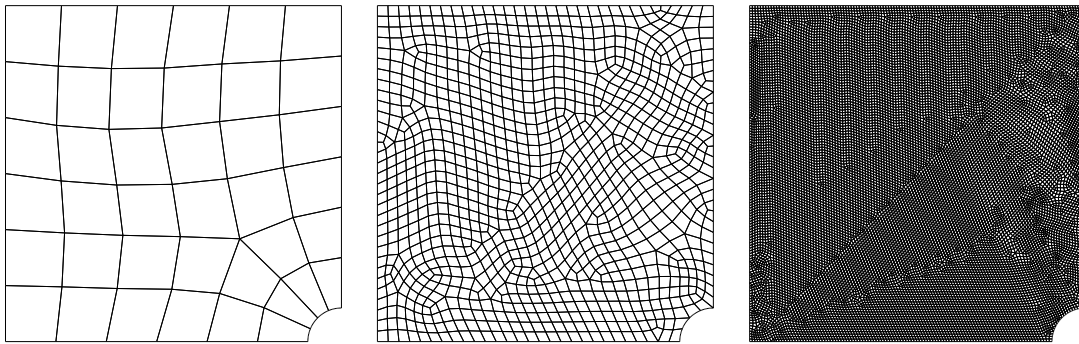


Abbildung 6.49: Netze der uniformen  $h$ -Version mit 40, 1026 und 16244 Elementen

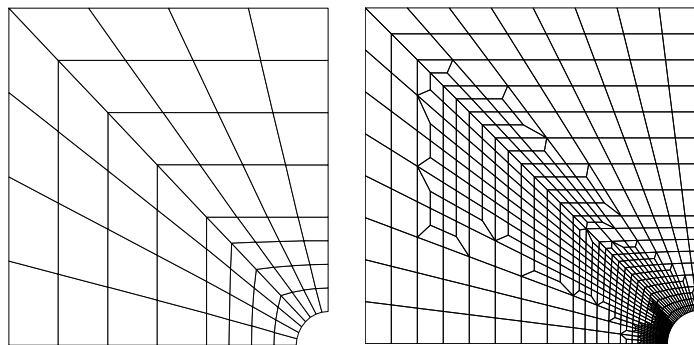


Abbildung 6.50: Startnetz mit 64 Q1-P0 Elementen und adaptives Netz mit 875 Q1-P0 Elementen (aus [9])

Zum Vergleich der  $rp$ -Version mit Berechnungen nach der klassischen  $h$ -Version zeigen die Abbildungen 6.51, 6.52 und 6.53 die Konvergenz der Verschiebung  $u_x$  am Punkt 5,  $u_y$  am

Punkt 4 und die der Spannung  $\sigma_{yy}$  am Punkt 2.

Die  $rp$ -adaptiven Berechnungsergebnisse basieren auf der oben beschriebenen Diskretisierung. Sie stehen zunächst einer uniformen  $h$ -Version mit  $p = 2$  gegenüber. Ein Startnetz wurde 12 mal verfeinert, 10 Elemente in 28 491 Elemente überführt. Schritte auf diesem Weg sind in Abbildung 6.49 dargestellt. Ein Vergleich beider Diskretisierungsmethoden zeigt die Überlegenheit der  $rp$ -Version.

Weiterhin wurde die  $rp$ -Version mit einer adaptiven  $h$ -Version verglichen. Es handelt sich dabei um Ergebnisse von BARTHOLD, SCHMIDT und STEIN [9, 10, 92], die Berechnungen mit Q1-P0 Elementen durchgeführt haben. Von den bekannten bilinearen Vierknotenelementen unterscheidet sich die Formulierung durch einen zusätzlichen elementweise konstanten Druckfreiheitsgrad [59]. Ein aus 64 Q1-P0 Elementen bestehendes Netz wurde mithilfe des Gleichgewichtskriteriums nach BABUŠKA und MILLER in 10 Schritten verfeinert, um so ein Netz aus 875 Elementen mit 1 816 Freiheitsgraden zu schaffen. In [9, 10, 92] werden die Ergebnisse einer Reihe abgestufter Netze präsentiert. Die dort angegebene Referenzlösung basiert auf 24 200 Q1-P0 Elementen und einer daraus resultierenden Anzahl an 49 062 Freiheitsgraden.

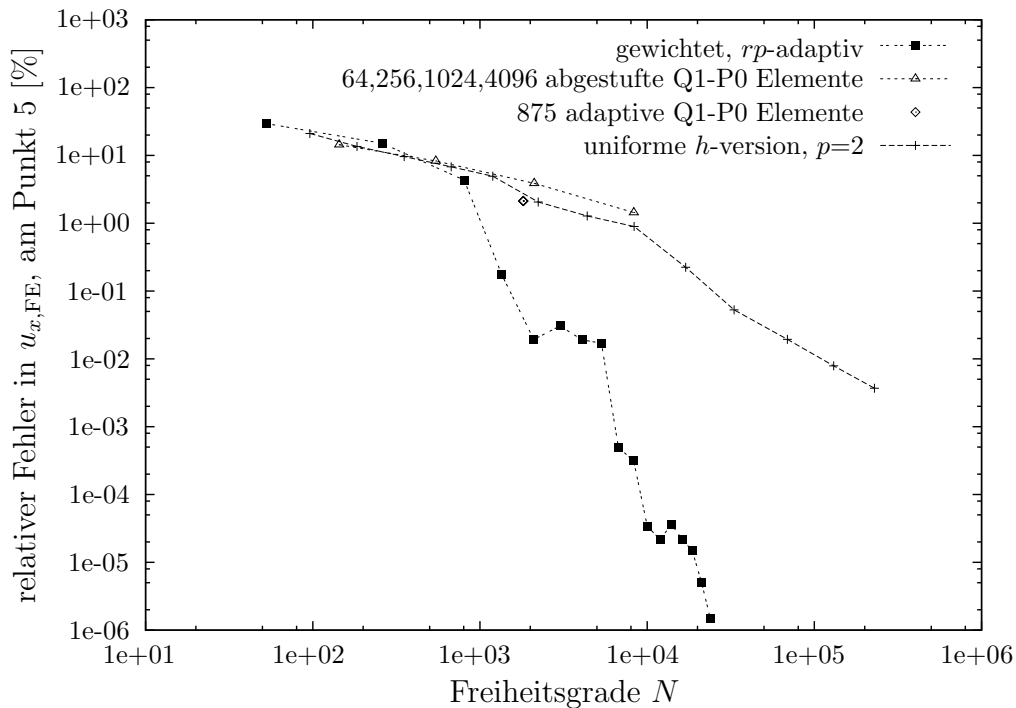


Abbildung 6.51: Relativer Fehler  $\frac{|u_{x,ref}-u_{x,FE}|}{u_{x,ref}} 100$  [%] am Punkt 5

Auch der  $h$ -Version auf geometrischen Netzen ist die  $rp$ -Version um etliche Größenordnungen überlegen (Abbildungen 6.51, 6.52). Weder die uniforme  $h$ -Version mit  $p = 2$  noch die adaptive  $h$ -Version mit Q1-P0 Elementen reicht an die Genauigkeit der  $rp$ -Version. Sie allein konvergiert exponentiell.

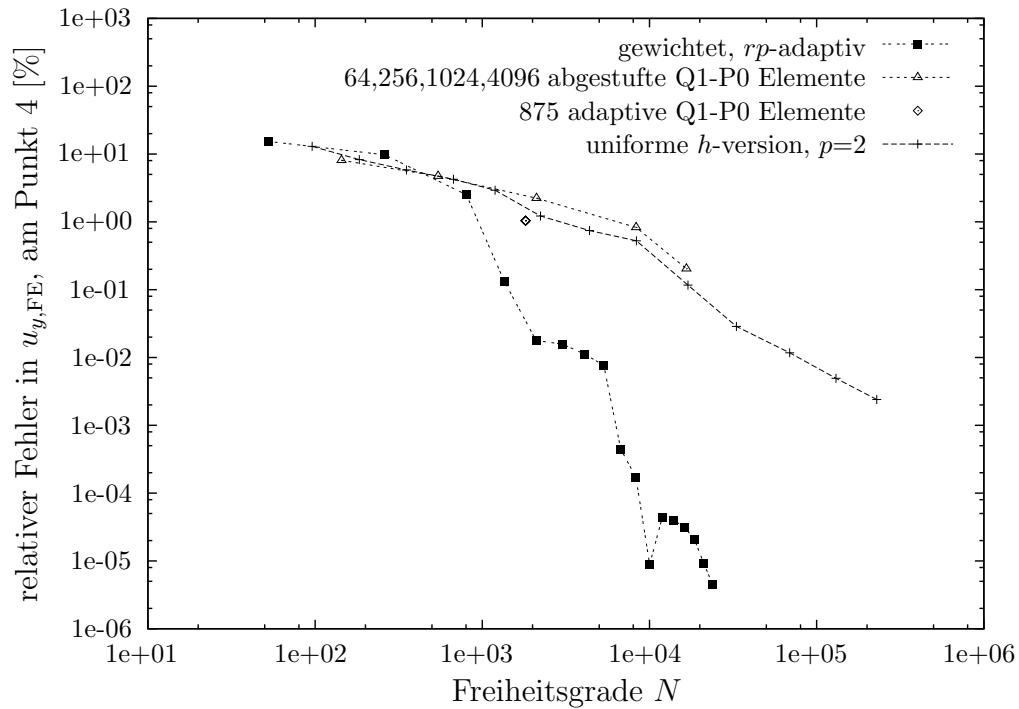


Abbildung 6.52: Relativer Fehler  $\frac{|u_{y,ref}-u_{y,FE}|}{u_{y,ref}} 100$  [%] am Punkt 4

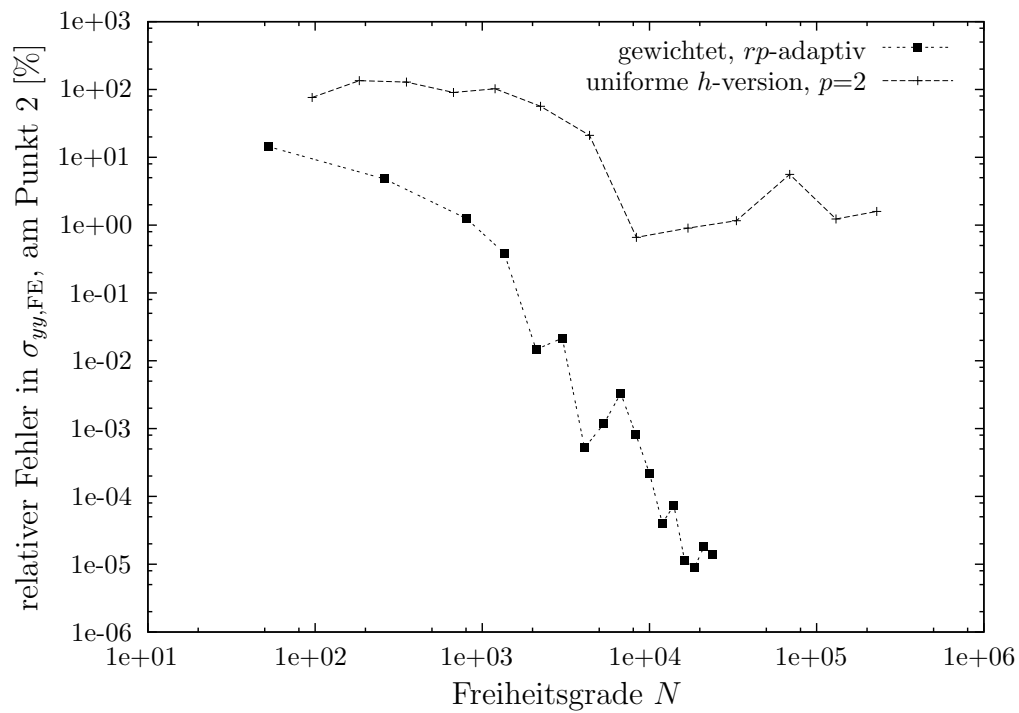


Abbildung 6.53: Relativer Fehler  $\frac{|\sigma_{yy,ref}-\sigma_{yy,FE}|}{\sigma_{yy,ref}} 100$  [%] am Punkt 2

## Kapitel 7

# Dreidimensionale Berechnungen mit der $rp$ -Version

Um die Effizienz der  $rp$ -Diskretisierung auch für den dreidimensionalen Fall zu untersuchen, steht in diesem Kapitel beispielhaft die Hohlkugel unter Innendruck für das Modellproblem der Deformationstheorie im Zentrum. Für diese Fragestellung existiert eine analytische Lösung. Sie wird zunächst sowohl für den linear-elastischen Fall als auch für elastoplastisches Verhalten nach der Deformationstheorie angegeben und anschließend mit den numerischen Ergebnissen verglichen.

Die Kugelsymmetrie des Systems legt nahe, alle relevanten kontinuumsmechanischen Größen in Polarkoordinaten zu betrachten. So bezeichnen die Indizes  $i, j, k$  aus Kapitel 2 hier die Koordinaten  $r, \phi, \theta$ . Die Herleitung folgt den Ausführungen von LUBLINER [56] und HILL [45].

### 7.1 Hohlkugel unter Innendruck — die analytische Lösung

Löst man das Problem der Hohlkugel unter Innendruck für isotropes Material analytisch, leitet sich sowohl die linear-elastische als auch die elastoplastische Lösung wie folgt ab. Eine Innenkugel mit Radius  $r_i$  und eine Außenkugel mit Radius  $r_a$  begrenzen die Struktur, auf die der Innendruck  $p_i$  und der Außendruck  $p_a$  wirken. Die resultierenden Verschiebungen und Spannungen zeigen Kugelsymmetrie. Die Verschiebung  $\mathbf{u}$  enthält nur die radiale Komponente  $u_{11} = u_r$ , die ausschließlich vom Radius  $r$  abhängt. Die Dehnung  $\boldsymbol{\varepsilon}$  setzt sich aus einer radialen Komponente  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_r$  und einer Komponente  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_\theta$ , für die  $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\phi$  gilt, zusammen. Die Dehnungskomponenten sind durch

$$\varepsilon_r = \frac{d}{dr} u_r \quad \text{und} \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \quad (7.1)$$

gegeben. Sie erfüllen die Kompatibilitätsbedingungen

$$\varepsilon_r = \frac{d}{dr} [r \varepsilon_\theta]. \quad (7.2)$$

Die Spannung  $\boldsymbol{\sigma}$  hat einen Beitrag aus der radialen Komponente  $\sigma_r$  und der Komponente in Umfangsrichtung  $\sigma_\theta$  mit  $\sigma_\theta = \sigma_\phi$ . Diese Größen genügen der Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{d}{dr}\sigma_r + 2\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (7.3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} = \frac{1}{2} \frac{d}{dr}\sigma_r. \quad (7.4)$$

### 7.1.1 Lineare Elastizität

Die Spannungs-Dehnungs-Beziehung für ein linear-elastisches, isotropes Kontinuumsselement reduziert sich von

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}] \quad (7.5)$$

auf die folgenden beiden Ausdrücke für  $\varepsilon_r$  und  $\varepsilon_\theta$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - 2\nu\sigma_\theta] \quad (7.6)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} [(1 - \nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r].$$

Einsetzen dieser Ausdrücke in die Kompatibilitätsbedingung (7.2) führt nach einiger Umformung zu Gleichung (7.7).

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{d}{dr} [r \varepsilon_\theta] \\ \frac{1}{E}(\sigma_r - 2\nu\sigma_\theta) &= \frac{d}{dr} \left[ r \frac{1}{E} [(1 - \nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r] \right] \\ \frac{d}{dr} [(1 - \nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r] &= -\frac{1}{r} (1 + \nu)(\sigma_\theta - \sigma_r) \end{aligned} \quad (7.7)$$

Ersetzt man in diesem Term den Ausdruck  $(\sigma_\theta - \sigma_r)/r$  durch die rechte Seite von Gleichung (7.4), reduziert sich das Problem weiter zu

$$\frac{d}{dr} [\sigma_r + 2\sigma_\theta] = 0 \quad (7.8)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{d}{dr} \sigma_\theta &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dr} \sigma_r \\ &= -\frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Aus Gleichung (7.8) folgt mit der Integrationskonstante  $C_{\text{int},1}$

$$\sigma_r + 2\sigma_\theta = C_{\text{int},1}. \quad (7.10)$$



Weiterhin kann man den Ausdruck (7.8) mithilfe von (7.9) wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dr} [\sigma_r + 2\sigma_\theta] = 0 \\
\iff & \frac{d}{dr} [\sigma_r + 2\sigma_\theta] - 3 \frac{d}{dr} \sigma_\theta = -3 \frac{d}{dr} \sigma_\theta \\
\iff & \frac{d}{dr} [\sigma_r - \sigma_\theta] = 3 \left[ \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} \right] \\
\iff & \frac{d}{dr} [\sigma_\theta - \sigma_r] + \frac{3}{r} [\sigma_\theta - \sigma_r] = 0
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \frac{1}{r^3} C_{\text{int},2}, \tag{7.12}$$

wobei  $C_{\text{int},2}$  eine zweite Integrationskonstante bezeichnet. Durch Gleichsetzen von (7.10) und (7.12) ergeben sich für die Komponenten des Spannungstensors

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{1}{3} \left[ C_{\text{int},1} - \frac{2}{r^3} C_{\text{int},2} \right] \\
\sigma_\theta &= \frac{1}{3} \left[ C_{\text{int},1} + \frac{1}{r^3} C_{\text{int},2} \right].
\end{aligned} \tag{7.13}$$

Mit den beiden Randbedingungen

$$\begin{aligned}
\sigma_r(r = r_i) = -p_i &\iff \frac{1}{3} \left[ C_{\text{int},1} - \frac{2}{r_i^3} C_{\text{int},2} \right] = -p_i \\
\sigma_r(r = r_a) = -p_a &\iff \frac{1}{3} \left[ C_{\text{int},1} - \frac{2}{r_a^3} C_{\text{int},2} \right] = -p_a
\end{aligned} \tag{7.14}$$

berechnen sich die Konstanten  $C_{\text{int},1}$  und  $C_{\text{int},2}$  dann zu

$$C_{\text{int},2} = 3 \frac{p_i - p_a}{2 \left( \frac{1}{r_i^3} - \frac{1}{r_a^3} \right)} = 3 \frac{p_i - p_a}{2 \left( 1 - \frac{r_i^3}{r_a^3} \right)} r_i^3 \tag{7.15}$$

und

$$\begin{aligned}
C_{\text{int},1} &= 3 \left[ -p_i + 2 \frac{p_i - p_a}{2 \left( 1 - \frac{r_i^3}{r_a^3} \right)} \right] \\
&= 3 \left[ -\frac{1}{2}(p_i + p_a) + \frac{p_i - p_a}{2 \left( 1 - \frac{r_i^3}{r_a^3} \right)} \left[ 1 + \frac{r_i^3}{r_a^3} \right] \right].
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Aus Gleichung (7.13) erhält man damit schließlich für die Spannungskomponenten

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \underbrace{-\frac{1}{2}(p_i + p_a)}_{\text{Anteil 1}} + \underbrace{\frac{p_i - p_a}{2 \left[1 - \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^3\right]} \left[1 + \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^3 - 2\left(\frac{r_i}{r}\right)^3\right]}_{\text{Anteil 2}} \\ \sigma_\theta &= \underbrace{-\frac{1}{2}(p_i + p_a)}_{\text{Anteil 1}} + \underbrace{\frac{p_i - p_a}{2 \left[1 - \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^3\right]} \left[1 + \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^3 + \left(\frac{r_i}{r}\right)^3\right]}_{\text{Anteil 2}}.\end{aligned}\tag{7.17}$$

Das Spannungsfeld ist die Superposition zweier Anteile. Der erste entspricht dem negativen Mittelwert aus innerem und äußerem Druck. Anteil 2 beschreibt ein variables Spannungsfeld, das sich proportional zur Druckdifferenz verhält.

Im Rahmen dieses Beispiels wird das System unter Innendruck analysiert. Um die Herleitung der elastisch-plastischen Lösung entsprechend zu vereinfachen, erfolgen alle weiteren Schritte unter der Bedingung  $p_a = 0$ . So vereinfachen sich die Ausdrücke der Spannungen  $\sigma_r$  und  $\sigma_\theta$  zu

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\frac{p_i}{\left(\frac{r_a}{r_i}\right)^3 - 1} \left[ \left(\frac{r_a}{r}\right)^3 - 1 \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{p_i}{\left(\frac{r_a}{r_i}\right)^3 - 1} \left[ \frac{1}{2} \left(\frac{r_a}{r}\right)^3 + 1 \right].\end{aligned}\tag{7.18}$$

Mit Bedingung (7.1) ist die radiale Verschiebung durch

$$u_r = r \varepsilon_\theta = \frac{r}{E} [(1 - \nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r]\tag{7.19}$$

gegeben. Die Diagramme 7.1, 7.2 und 7.3 fassen die Verschiebungs-, Dehnungs- und Spannungsverläufe der analytischen Lösung entlang eines Radialschnittes zusammen. Die Kugel, für die die Gleichungen ausgewertet wurden, misst einen Innenradius von  $r_i = 50$  [mm], einen Außenradius von  $r_a = 100$  [mm] und wird durch einen Innendruck von  $p_i = 50$  [N/mm<sup>2</sup>] beansprucht. Die Materialparameter wurden zu  $E = 10000$  [N/mm<sup>2</sup>] und  $\nu = 0.3$  gewählt. Die Dehnungsenergie  $\mathcal{U}_{\text{ref}}$  aufgrund der analytischen Lösung ergibt sich zu

$$\mathcal{U}_{\text{ref}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega = 157\,079.6326794896.\tag{7.20}$$

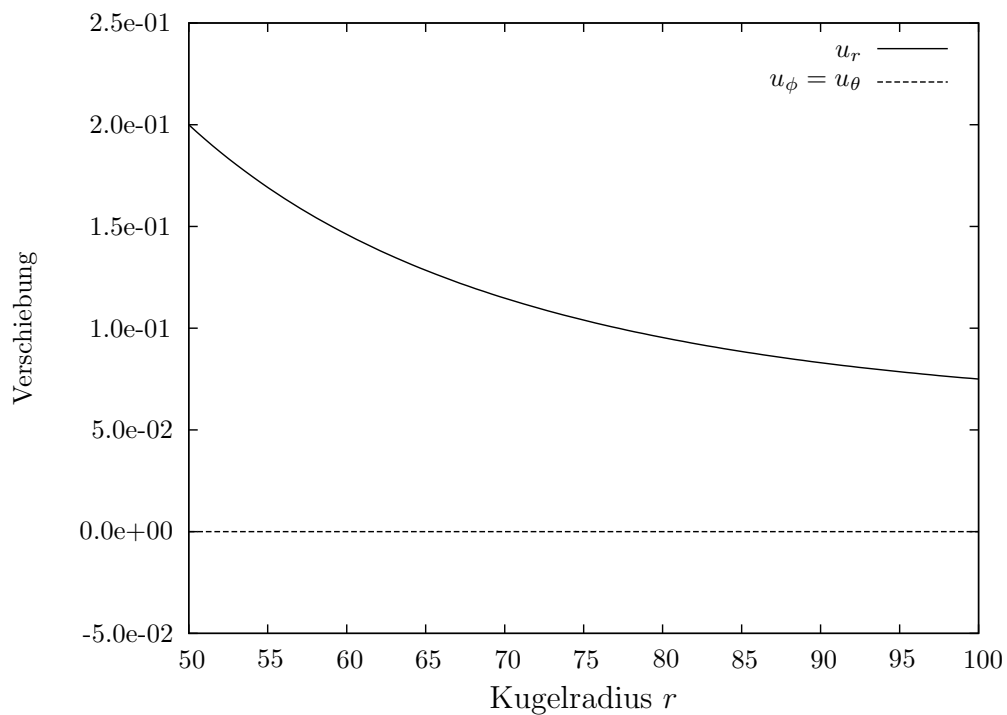


Abbildung 7.1: Verschiebungsverläufe entlang eines Radialschnittes nach Gleichung (7.19)

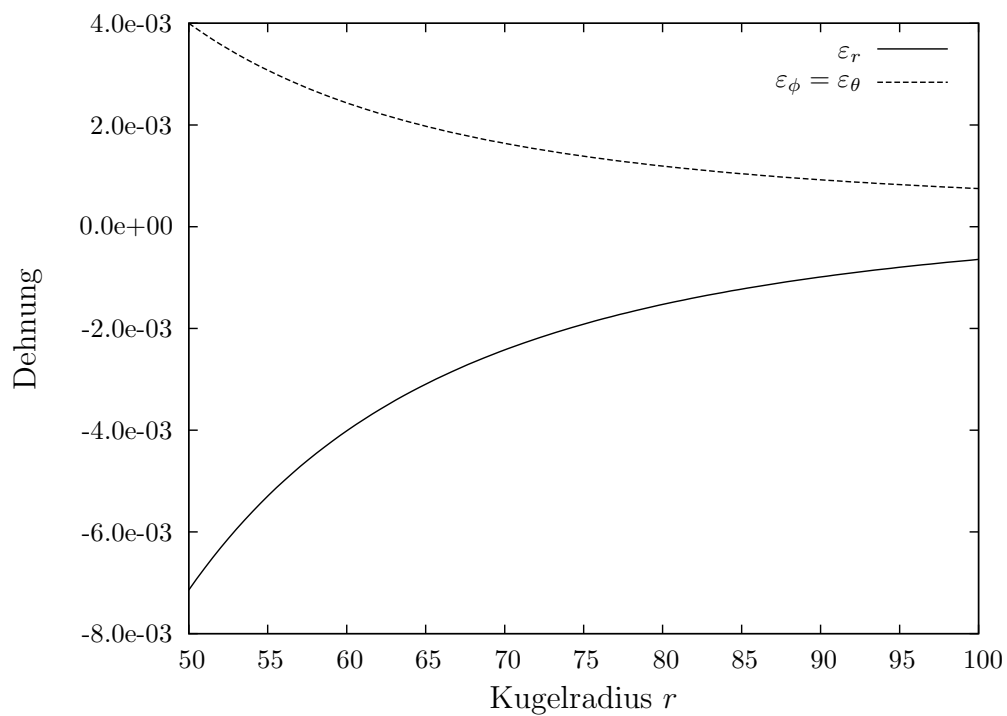


Abbildung 7.2: Dehnungsverläufe entlang eines Radialschnittes nach Gleichung (7.6)

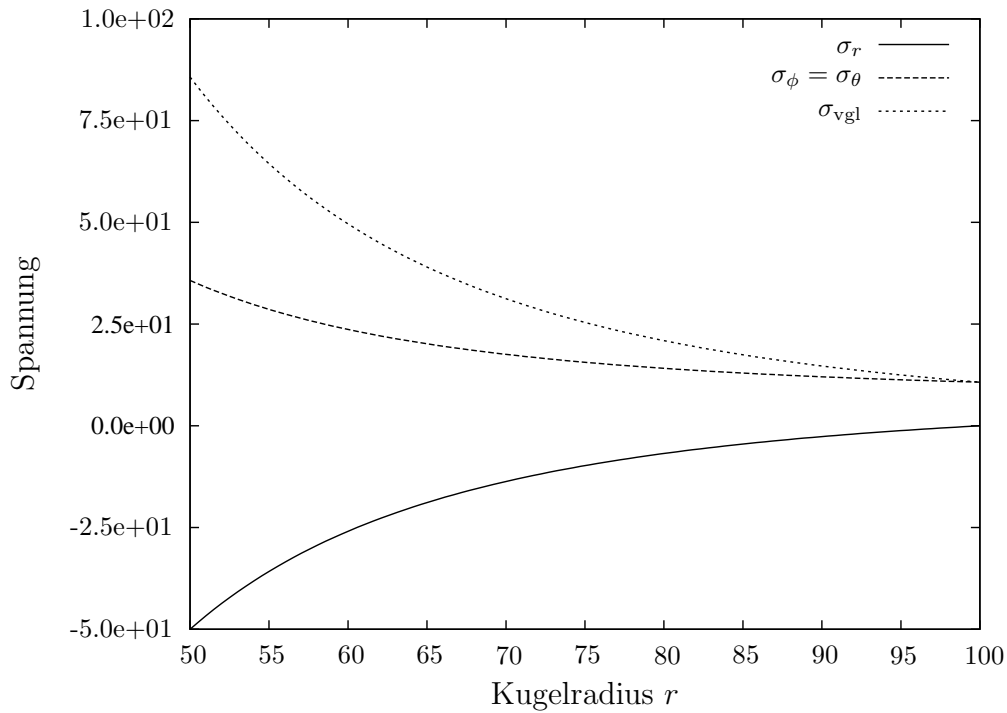


Abbildung 7.3: Spannungsverläufe entlang eines Radialschnittes nach Gleichung (7.18)

### 7.1.2 Deformationstheorie

Betrachtungen der linear-elastischen Lösung schließt sich nun die Bestimmung der analytischen Lösung für den physikalisch nichtlinearen Fall an, bei dem sich das Kugelmaterial nach der Deformationstheorie verhält. Der größtmögliche Druck, bei dem das System noch linear-elastisch antwortet, ist erreicht, wenn die Spannungen für einen gewissen Radius  $r$  zum ersten Mal das in Abschnitt 2.3.2 beschriebene Fließkriterium erfüllen. Dieser Grenzdruck wird im Folgenden mit  $p_{\text{el, max}}$  bezeichnet. Nachdem zwei Komponenten —  $\sigma_\phi$  und  $\sigma_\theta$  bzw.  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  — der Hauptspannung identisch sind, ist der vorliegende Spannungszustand äquibiaxial:

$$\begin{aligned} \sqrt{J_2} &= \sqrt{\frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\frac{1}{3}} |\sigma_1 - \sigma_3| \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}} |\sigma_r - \sigma_\theta| \end{aligned} \quad (7.21)$$

Mit der Bedingung ( $\sigma_\theta > \sigma_r$ ) reduziert sich das VON MISES Fließkriterium auf

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_0. \quad (7.22)$$

Unter Verwendung der Gleichungen (7.18) lässt sich Gleichung (7.22) zu folgendem Ausdruck

$$\frac{3}{2} \frac{p_i}{\left(\frac{r_a}{r_i}\right)^3 - 1} \left(\frac{r_a}{r}\right)^3 = \sigma_0 \quad (7.23)$$

umformen. Da die Differenz  $(\sigma_\theta - \sigma_r)$  an der inneren Kugeloberfläche  $r = r_i$  maximal wird, liegt der Grenzdruck  $p_{el, \max}$  bei

$$\frac{3}{2} \frac{p_{el, \max}}{\left(\frac{r_a}{r_i}\right)^3 - 1} \left(\frac{r_a}{r_i}\right)^3 = \sigma_0 \quad \Longleftrightarrow \quad p_{el, \max} = \frac{2}{3} \sigma_0 \left[1 - \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^3\right]. \quad (7.24)$$

Steigt der Druck im Innern der Hohlkugel über den Wert  $p_{el, \max}$ , beginnt ein hohlkugelförmiges Teilgebiet der Struktur zu plastifizieren. Der Innenradius der plastifizierten Substruktur entspricht  $r_i$ , der äußere, zunächst unbekannte Radius  $r_I$  sei durch den Index I — wie Interface — bezeichnet. Im Bereich  $r_i \leq r \leq r_I$  ist das Gebiet plastifiziert.

### 7.1.2.1 Lösung im elastischen Bereich der plastifizierten Struktur

Im Bereich  $r_I \leq r \leq r_a$  verhält sich die Struktur wie eine elastische Hohlkugel unter Innendruck, die an ihrem inneren Radius  $r_I$  gerade zu plastifizieren beginnt. Somit sind  $\sigma_r$  und  $\sigma_\theta$  durch

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{p_I}{\left(\frac{r_a}{r_I}\right)^3 - 1} \left[ \left(\frac{r_a}{r}\right)^3 - 1 \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{p_I}{\left(\frac{r_a}{r_I}\right)^3 - 1} \left[ \frac{1}{2} \left(\frac{r_a}{r}\right)^3 + 1 \right] \end{aligned} \quad (7.25)$$

gegeben. Der Innendruck  $p_I$  wird gerade so gewählt, dass das elastische Teilgebiet an der inneren Oberfläche  $r = r_I$  das Fließkriterium erfüllt. Er berechnet sich entsprechend zu

$$p_I = \frac{2}{3} \sigma_0 \left[1 - \left(\frac{r_I}{r_a}\right)^3\right]. \quad (7.26)$$

Damit kann man die Spannungsverläufe von  $\sigma_r$  und  $\sigma_\theta$  im elastischen Bereich der plastifizierten Struktur auch durch

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2}{3} \sigma_0 \left[ \left(\frac{r_I}{r}\right)^3 - \left(\frac{r_I}{r_a}\right)^3 \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{2}{3} \sigma_0 \left[ \frac{1}{2} \left(\frac{r_I}{r}\right)^3 + \left(\frac{r_I}{r_a}\right)^3 \right] \end{aligned} \quad r_I \leq r \leq r_a \quad (7.27)$$

darstellen. Dehnungen und Verschiebungen im elastischen Bereich der plastifizierten Struktur resultieren aus den Gleichungen der rein linear-elastischen Lösung. (siehe Gleichungen (7.6) und (7.19))

### 7.1.2.2 Lösung im plastifizierten Bereich der Struktur

Im plastischen Bereich der Struktur ist das Fließkriterium ( $\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_0$ ) an jeder Stelle erfüllt. Verknüpft man es mit der Gleichgewichtsbeziehung (7.3), erhält man

$$\frac{d}{dr}\sigma_r + 2\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dr}\sigma_r = 2\sigma_0\frac{1}{r}, \quad (7.28)$$

einen Ausdruck, der sich durch Integration in

$$\sigma_r = 2\sigma_0 \ln(r) + C_{\text{int},3} \quad (7.29)$$

überführen lässt. Darin ergibt sich die Integrationskonstante  $C_{\text{int},3}$  mithilfe der Übergangsbedingung am Interface  $r_{\text{I}}$

$$2\sigma_0 \ln(r) + C_{\text{int},3} = -\frac{2}{3}\sigma_0 \left[ \left(\frac{r_{\text{I}}}{r}\right)^3 - \left(\frac{r_{\text{I}}}{r_{\text{a}}}\right)^3 \right] \quad \text{für } r = r_{\text{I}}, \quad (7.30)$$

die die Kontinuität der Radialspannung  $\sigma_r$  fordert, zu

$$C_{\text{int},3} = -\frac{2}{3}\sigma_0 \left[ 1 - \left(\frac{r_{\text{I}}}{r_{\text{a}}}\right)^3 + 3 \ln(r_{\text{I}}) \right]. \quad (7.31)$$

Für die Spannungsverläufe im plastifizierten Bereich erhält man damit schließlich

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2}{3}\sigma_0 \left[ 1 - \left(\frac{r_{\text{I}}}{r_{\text{a}}}\right)^3 + \ln\left(\frac{r_{\text{I}}}{r}\right)^3 \right] \\ & \qquad \qquad \qquad r_{\text{i}} \leq r \leq r_{\text{I}} \quad (7.32) \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{3}\sigma_0 \left[ 1 + 2\left(\frac{r_{\text{I}}}{r_{\text{a}}}\right)^3 - 2 \ln\left(\frac{r_{\text{I}}}{r}\right)^3 \right]. \end{aligned}$$

Der Verschiebungsverlauf im plastifizierten Bereich basiert auf folgenden Überlegungen: Geometrisch interpretiert steht die Spur des Dehnungstensors  $\text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}] = \varepsilon_{ii} = \nabla \cdot \mathbf{u}$  für die volumetrischen Dehnungen  $\Delta V/V_0$ , wobei  $\Delta V$  die Volumenänderung,  $V_0$  das entsprechende, infinitesimal kleine Anfangsvolumen bezeichnet. In der plastifizierten Region der Struktur besteht die Volumendehnung ausschließlich aus elastischen Anteilen. So erhält man mit den Gleichungen (7.1) und (7.6) für die Spur des Dehnungstensors

$$\begin{aligned} \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}] = \varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}(\sigma_r - 2\nu\sigma_\theta) + \frac{2}{E}[(1-\nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r] \\ &= \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_r + 2\sigma_\theta) \\ &= \frac{2(1-2\nu)\sigma_0}{E} \left[ \left(\frac{r_{\text{I}}}{r_{\text{a}}}\right)^3 - \ln\left(\frac{r_{\text{I}}}{r}\right)^3 \right]. \quad (7.33) \end{aligned}$$

Für die linke Seite von Gleichung (7.33) kann man auch

$$\text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}] = \varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta = \frac{d}{dr}u_r + 2\frac{u_r}{r} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 u_r) \quad (7.34)$$

schreiben. Es folgt

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u(r)) = \frac{2(1-2\nu)\sigma_0}{E} \left[ \left( \frac{r_I}{r_a} \right)^3 - \ln \left( \frac{r_I}{r} \right) \right]. \quad (7.35)$$

Berücksichtigt man die Kontinuitätsbedingung der Verschiebung am elastisch-plastischen Interface  $r_I$  und fordert mit dem Wissen aus dem Verschiebungsverlauf (7.19) im linear-elastischen Bereich sowie den Spannungsverläufen (7.27), dass

$$u_r(r = r_I) = \frac{r}{E} [(1-\nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r] = \frac{\sigma_0 r_I}{3E} \left[ 1 + \nu + 2(1-2\nu) \left( \frac{r_I}{r_a} \right)^3 \right], \quad (7.36)$$

so erhält man schließlich durch Integration von Gleichung (7.35)

$$u_r = \frac{\sigma_0 r}{E} \left[ (1-\nu) \left( \frac{r_I}{r} \right)^3 - \frac{2}{3}(1-2\nu) \left[ 1 - \left( \frac{r_I}{r_a} \right)^3 + \ln \left( \frac{r_I}{r} \right) \right] \right]. \quad (7.37)$$

Der Dehnungsverlauf in der plastifizierten Region der Struktur wird wie folgt ermittelt: Ist das Verhältnis  $(r_a/r_i)$  von Kugelaußen- zu Kugelinnenradius — wie hier — ausreichend groß, liegen die Dehnungen in einer Größenordnung von  $((r_a/r_i)^3 \sigma_0/E)$ , nicht mehr infinitesimal klein. Die Lösung für endliche Dehnungen ergibt sich, wenn man selbige als logarithmisch auffasst. Im vorliegenden Fall ist dies aufgrund der Richtungstreue der Hauptspannungen erlaubt. Das Volumen einer Kugelschale mit dem Anfangsradius  $r_0$  und einer Dicke von  $dr_0$  ist durch  $(4\pi r_0^2 dr_0)$  gegeben. Das aktuelle Volumen der entsprechenden Kugelschale, deren Geometrie die Kugeloberflächen  $r$  und  $(r + dr)$  begrenzen, ist durch den Wert  $(4\pi r^2 dr)$  gegeben. Die daraus resultierende volumetrische Dehnung in logarithmischer Form lautet

$$\ln \left( \frac{r^2 dr}{r_0^2 dr_0} \right) = \ln \left( \frac{dr}{dr_0} \right) + 2 \ln \left( \frac{r}{r_0} \right). \quad (7.38)$$

Assoziiert man diesen Term mit der Spur des Dehnungstensors, lässt sich die Beziehung

$$\varepsilon_\theta = \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) \quad (7.39)$$

herausfiltern. Unter der Voraussetzung plastischer Inkompressibilität gilt wie bei der Betrachtung der Verschiebungen für die volumetrischen Dehnungen, ausgedrückt als Spur des Dehnungstensors,

$$\text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}] = \varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_r + 2\sigma_\theta). \quad (7.40)$$

Mit Gleichung (7.39) erhält man für die radiale Komponente  $\varepsilon_r$

$$\varepsilon_r = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_r + 2\sigma_\theta) - 2 \ln \left( \frac{r}{r_0} \right). \quad (7.41)$$

$\varepsilon_r$  lässt sich weiterhin in einen elastischen und einen plastischen Anteil zerlegen

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^p \\ &= \frac{1}{E}(\sigma_r - 2\nu\sigma_\theta) + \varepsilon_r^p\end{aligned}\quad (7.42)$$

Durch Gleichsetzen von  $\varepsilon_r$  erhält man dann für den plastischen Anteil der radialen Dehnungen

$$\varepsilon_r^p = \frac{2}{E} [(1 - \nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r] - 2 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right). \quad (7.43)$$

Die Diagramme 7.4, 7.5 und 7.6 zeigen die Verschiebungs-, Dehnungs- und Spannungsverläufe der analytischen Lösung entlang eines Radialschnittes. Die Gleichungen wurden für das System ausgewertet, das auch der linear-elastischen Lösung zugrunde lag. Die Fließspannung für dieses Beispiel wurde zu  $41.79389833783693 \text{ [N/mm}^2\text{]}$  gesetzt, womit sich das elastisch-plastische Interface bei einem Kugelradius von  $r_I = 75 \text{ [mm]}$  einstellt.

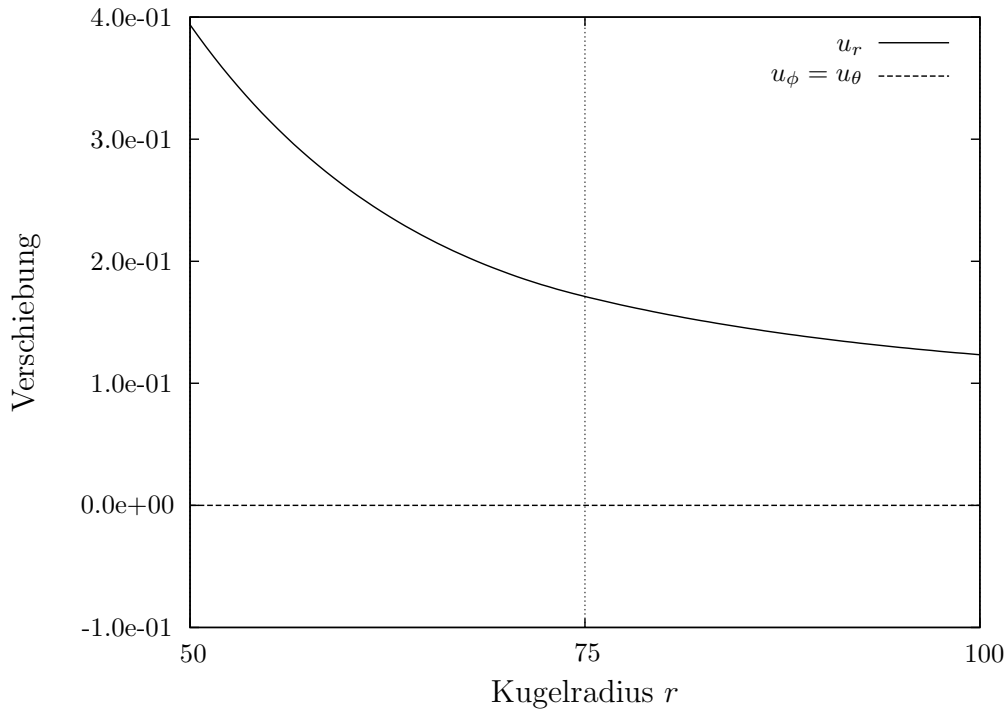


Abbildung 7.4: Verschiebungsverläufe entlang eines Radialschnittes

Die Dehnungsenergie des elastoplastischen Problems wird anhand der äußeren Arbeit zu

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{\text{ref}} &= \frac{1}{2} \int_{\partial_N \Omega} \mathbf{u}(r_i) : \mathbf{f}_n \, d\partial_N \Omega \\ &= \frac{1}{2} u_r(r_i) p_i 4 \pi r_i^2 = 309\,203.73604763224\end{aligned}\quad (7.44)$$

bestimmt.



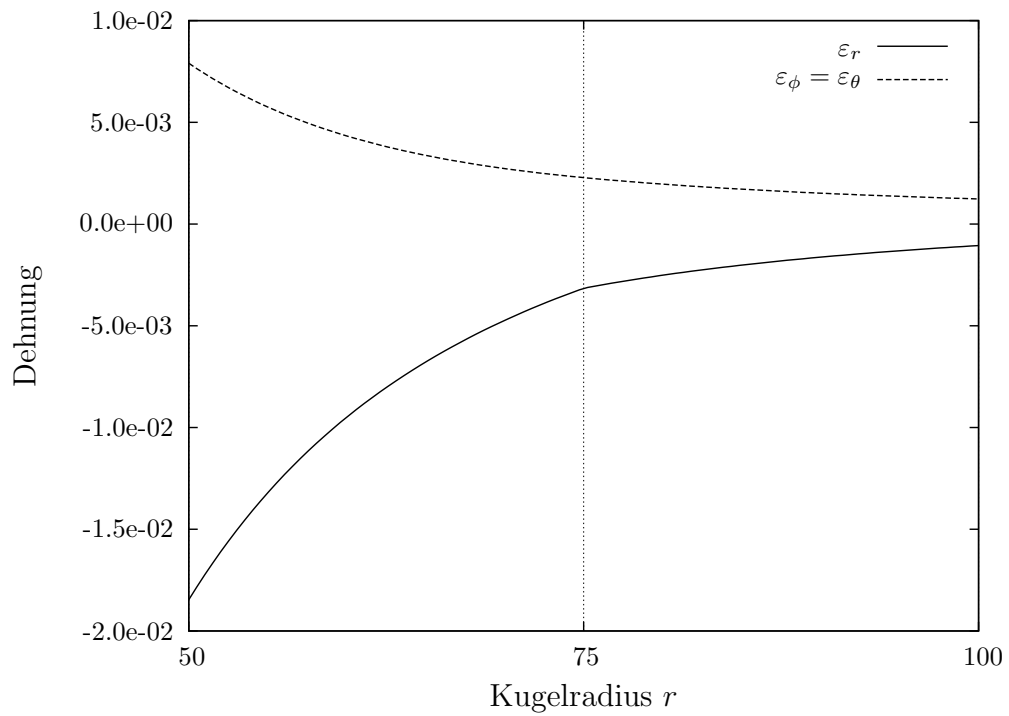


Abbildung 7.5: Dehnungsverläufe entlang eines Radialschnittes

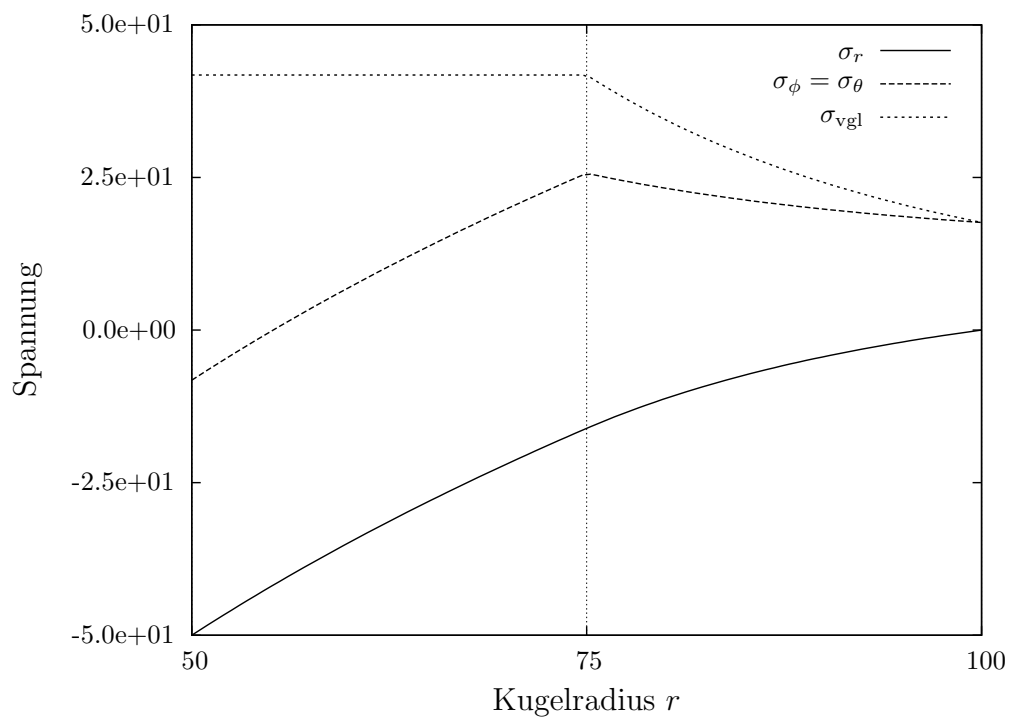


Abbildung 7.6: Spannungsverläufe entlang eines Radialschnittes

## 7.2 Finite-Element-Analyse bei linear elastischem Materialverhalten

Ziel dieses Kapitels ist, am vorliegenden Beispiel eine Aussage zur Effizienz der  $rp$ -Diskretisierung in drei Raumdimensionen für das Modellproblem der Deformationstheorie zu ermöglichen. Um die Qualität der entsprechenden Ergebnisse einordnen zu können, wird das Problem zunächst unter linear-elastischem Materialverhalten studiert. So behandelt dieser Abschnitt dieselben Diskretisierungen, auf denen auch die nichtlineare Analyse basiert.

Aufgrund der angesprochenen Kugelsymmetrie des Systems genügt es, ein Achtel der Hohlkugel unter Innendruck zu untersuchen, so dass sich die Struktur auf das in Abbildung 7.7 dargestellte grau schattierte System reduziert. Gemäß dieser Vereinfachung sind Symmetriestandbedingungen durch eine unverschiebliche Lagerung der Strukturoberflächen parallel zur  $xy$ -  $xz$ - bzw.  $yz$ -Ebene — jeweils in Normalenrichtung — realisiert. Alle anderen Parameter entsprechen den in Abschnitt 7.1 vorgegebenen Größen für den linear-elastischen Fall. Die Referenzenergie  $\mathcal{U}_{\text{ref}} = 19\,634.95408493620$  des Systems entspricht einem Achtel des in Gleichung (7.20) ermittelten Wertes.

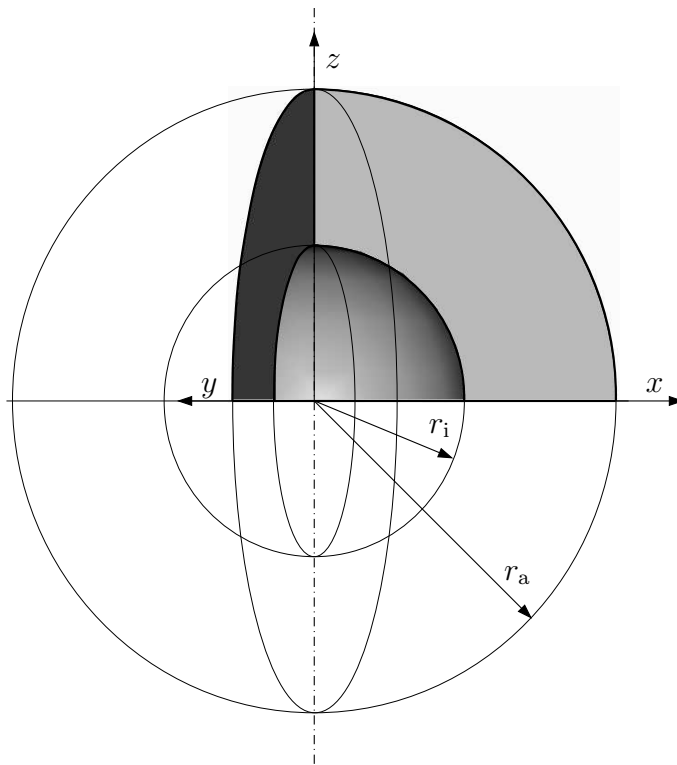


Abbildung 7.7: Achtelsystem der Hohlkugel unter Innendruck

Wie eingangs erwähnt, soll die linear-elastische Untersuchung ein Maß für die Güte der Ergebnisse im nichtlinearen Fall definieren. Darüber hinaus sollen aus einer Menge möglicher räumlicher Diskretisierungen diejenigen gefiltert werden, die sich für die anschließende Untersuchung bei nichtlinearem Materialverhalten eignen. Das Vorgehen basiert auf folgender Überlegung:

Im physikalisch nichtlinearen Fall stellt sich das elastisch-plastische Interface mit den oben definierten Parametern bei einem Radius von  $r = r_I = 75$  ein (vgl. Kapitel 7.1.2). Dazu werden Interface Netze und nicht-Interface Netze generiert, die sich paarweise mit etwa gleicher Elementanzahl gegenüberstehen. Interface Netze aus 6, 24, 48, 108 und 162 Elementen korrespondieren mit nicht-Interface Netzen aus 9, 36, 60, 135 und 189 Elementen. Einige sind exemplarisch in den Abbildungen 7.8 und 7.9 dargestellt.

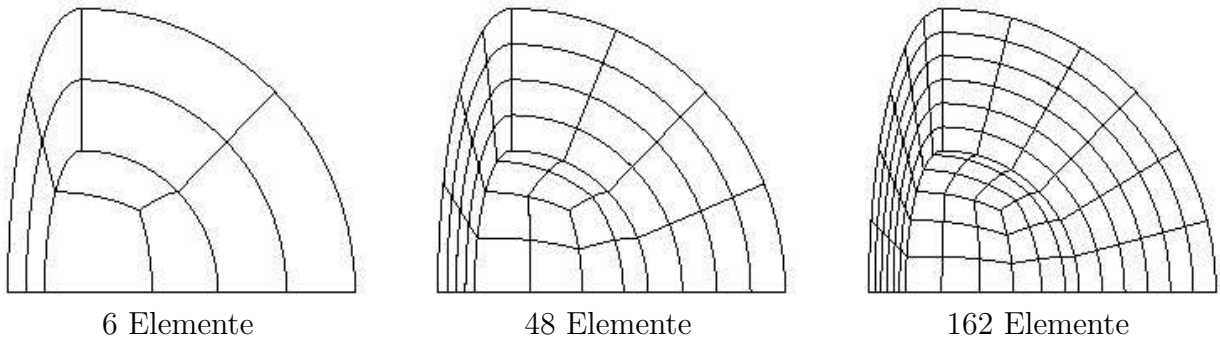


Abbildung 7.8: Finite-Element-Netze, die das elastisch-plastische Interface treffen

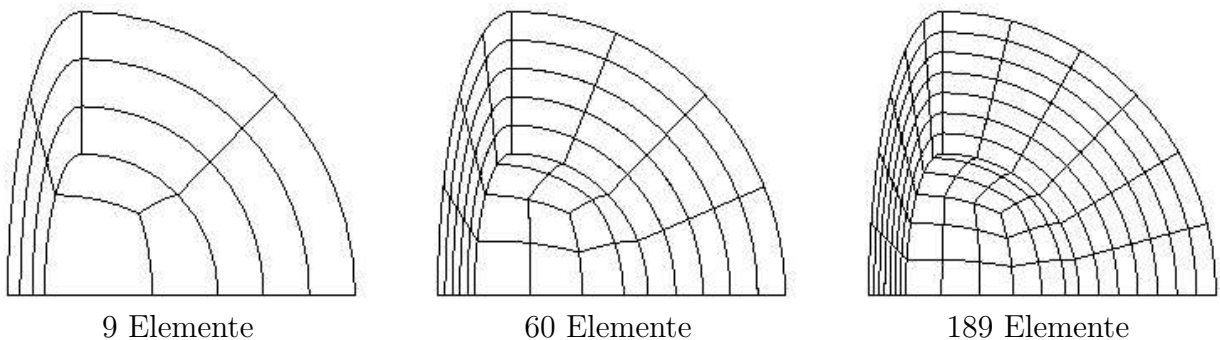


Abbildung 7.9: Finite-Element-Netze, die das elastisch-plastische Interface nicht treffen

In der Implementierung des verwendeten Finite-Element-Programms wird die Geometrie allgemeiner Oberflächen stets durch Interpolation mit LAGRANGE-Polynomen angenähert. Es gilt herauszufinden, wie gut diese Näherung für ein FE-Netz mit gewisser Elementanzahl sein muss, um eine gewünschte Genauigkeit der Finite-Element-Ergebnisse zu erreichen. So wird für alle Netze die Ordnung zur Approximation der Geometrie von 3 bis 10 variiert. Für jede dieser Diskretisierungen wird zusätzlich der Ansatz der FE-Berechnung von 1 bis  $p_{\max}$  uniform erhöht. Der Polynomgrad  $p_{\max}$  bezeichnet die Ordnung, die für das jeweilig betrachtete System noch mit vertretbarem Aufwand berechenbar ist. Ziel dieser Studie ist, für jedes Interface- wie für jedes nicht-Interface Netz den geeigneten Polynomgrad  $p_{\text{geo}}$  zur Interpolation der Geometrie zu extrahieren, um so eine Diskretisierung als Grundlage zur anschließenden nichtlinearen Untersuchung zu definieren.

Die Auswahl der entsprechenden räumlichen Diskretisierungen basiert auf der Betrachtung der Größe  $\eta$ , also der Wurzel des relativen Energiefehlers und wird anhand der Diagramme

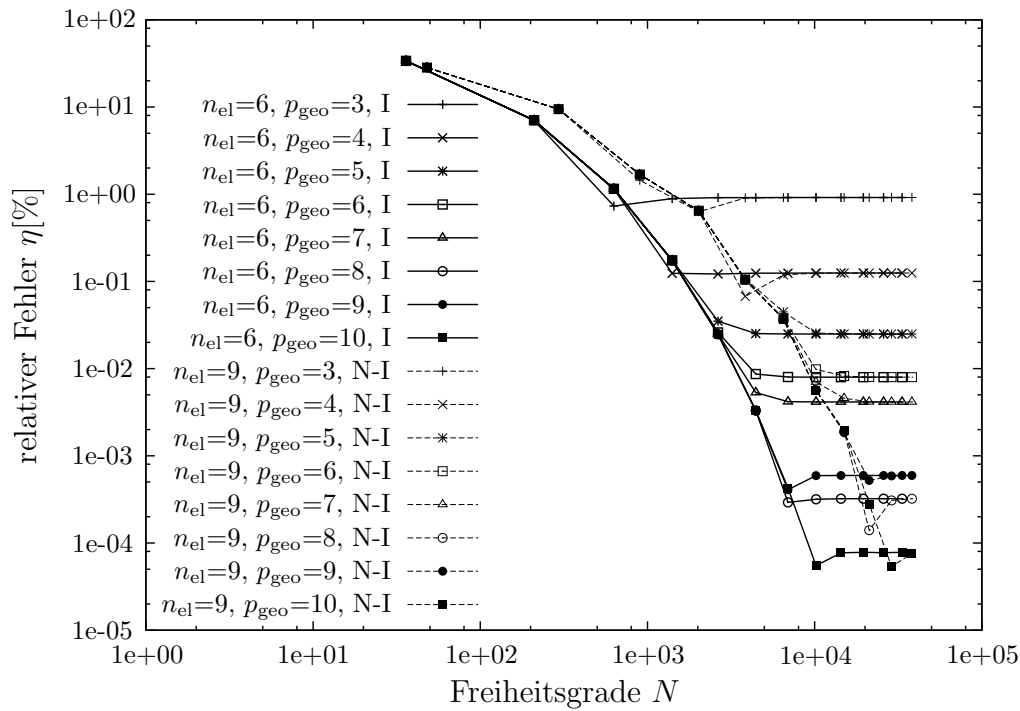


Abbildung 7.10: Relativer Fehler  $\eta = \sqrt{\frac{u_{ref} - u_{FE}}{u_{ref}}} 100$  [%] gegenüber der Anzahl der Freiheitsgrade

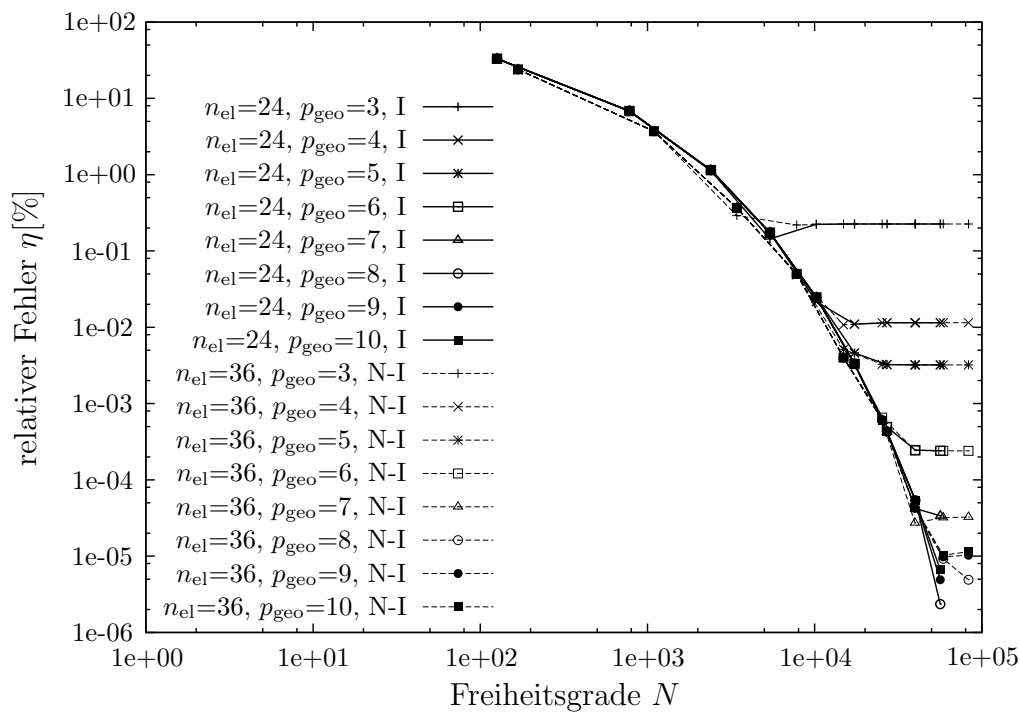


Abbildung 7.11: Relativer Fehler  $\eta = \sqrt{\frac{u_{ref} - u_{FE}}{u_{ref}}} 100$  [%] gegenüber der Anzahl der Freiheitsgrade

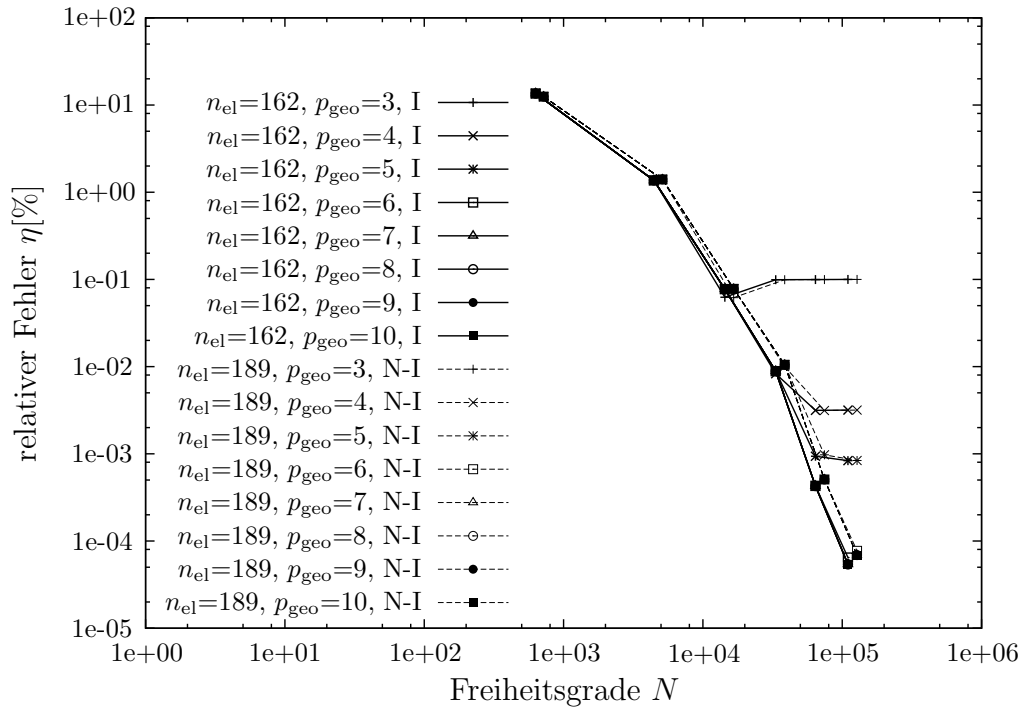


Abbildung 7.12: Relativer Fehler  $\eta = \sqrt{\frac{|\mathcal{U}_{ref} - \mathcal{U}_{FE}|}{\mathcal{U}_{ref}}} 100$  [%] gegenüber der Anzahl der Freiheitsgrade

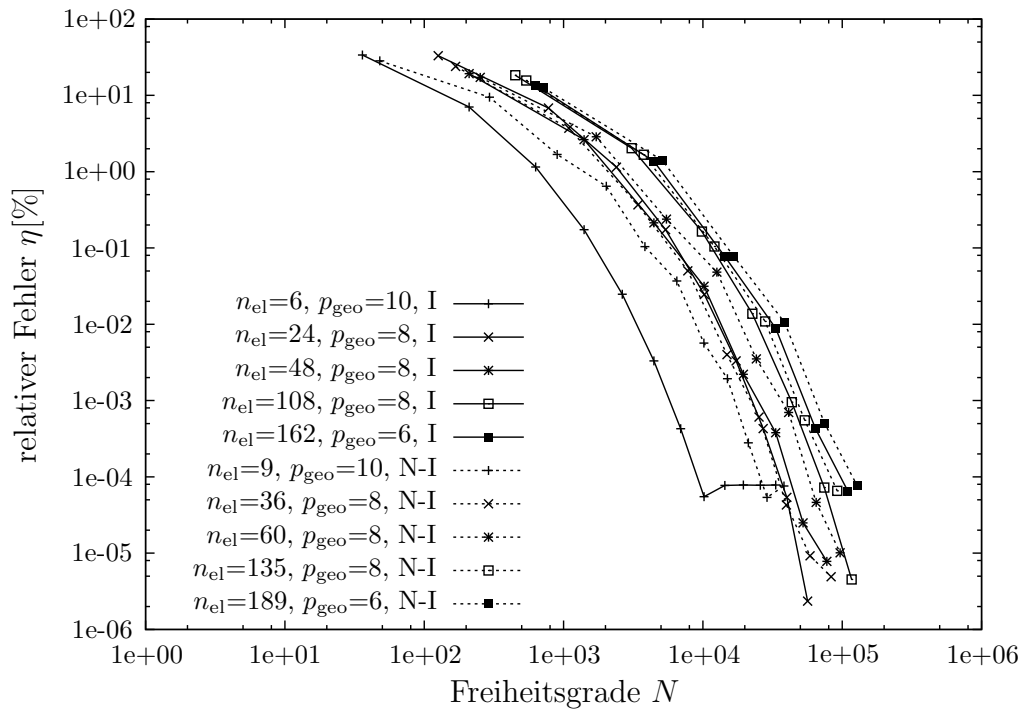


Abbildung 7.13: Relativer Fehler  $\eta = \sqrt{\frac{|\mathcal{U}_{ref} - \mathcal{U}_{FE}|}{\mathcal{U}_{ref}}} 100$  [%] gegenüber der Anzahl der Freiheitsgrade

7.10, 7.11 und 7.12 exemplarisch dokumentiert. Jedes der Diagramme enthält Konvergenzkurven eines Interface Netzes und eines nicht-Interface Netzes ähnlicher Elementanzahl. Die Kurven des Interface Netzes sind mit durchgezogenem Linientyp, die des nicht-Interface Netzes mit gestricheltem Linientyp gekennzeichnet. Für beide Netztypen wurde die Approximation der Geometrie,  $p_{\text{geo}}$ , durch unterschiedlich genaue polynomielle Beschreibungen variiert. Das entsprechende Konvergenzverhalten basiert auf uniformer Polynomgraderhöhung. Ungenaue Geometriedarstellung bewirkt einen Fehler, der auch durch Erhöhung des Polynomgrades nicht sinkt, ablesbar an asymptotisch horizontal verlaufenden Kurven. Nur Diskretisierungen mit einem relativen Fehler unter  $1.0 \cdot 10^{-4}[\%]$  sind für Betrachtungen im Rahmen der Deformationstheorie geeignet. Sie werden für weitere Untersuchungen in Abschnitt 7.3 ausgewählt. Ihr Konvergenzverhalten ist zusammenfassend in Abbildung 7.13 dargestellt. Der relative Fehler  $\eta$  aller gewählten Diskretisierungen — sowohl von späteren Interface Netzen als auch von nicht-Interface Netzen — fällt im linear elastischen Fall unter einen Wert von  $1.0 \cdot 10^{-4}[\%]$ .

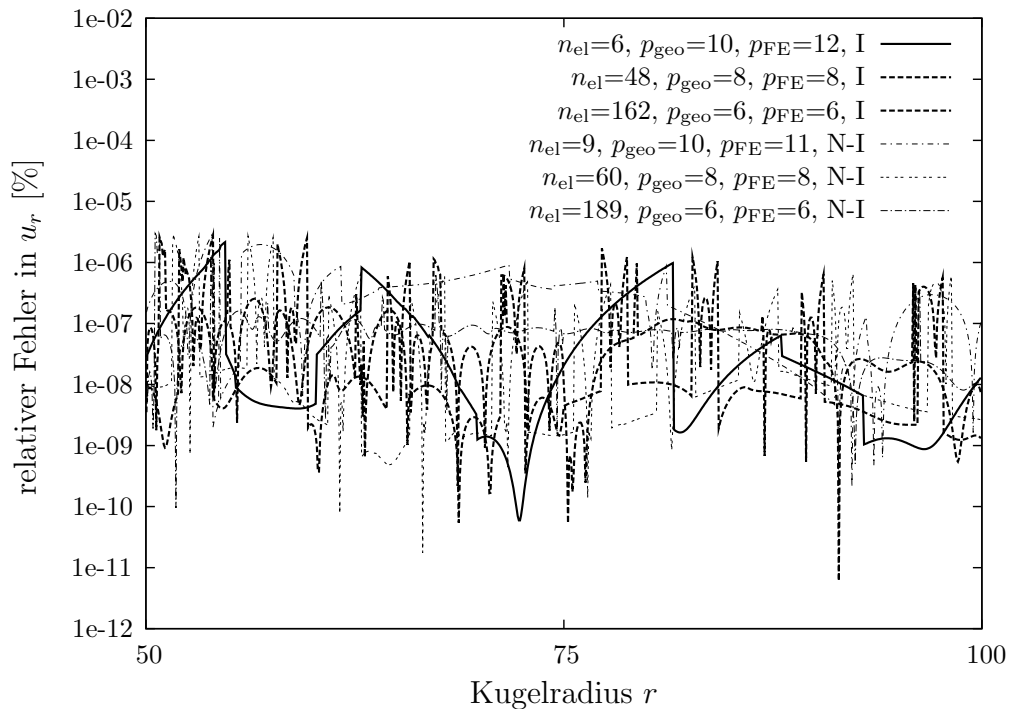
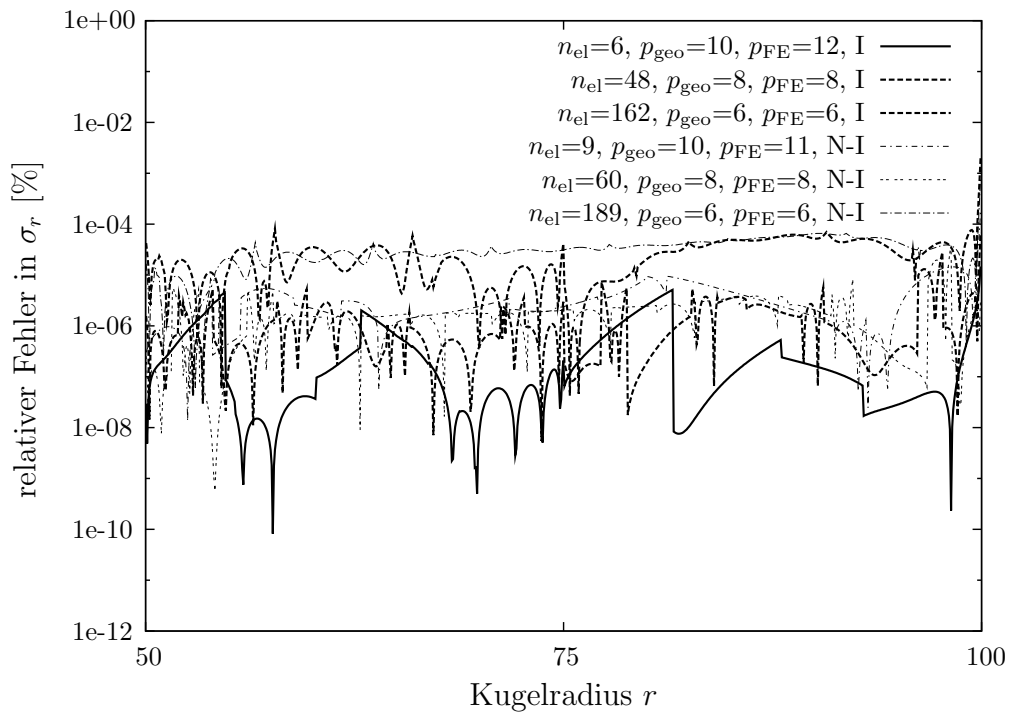
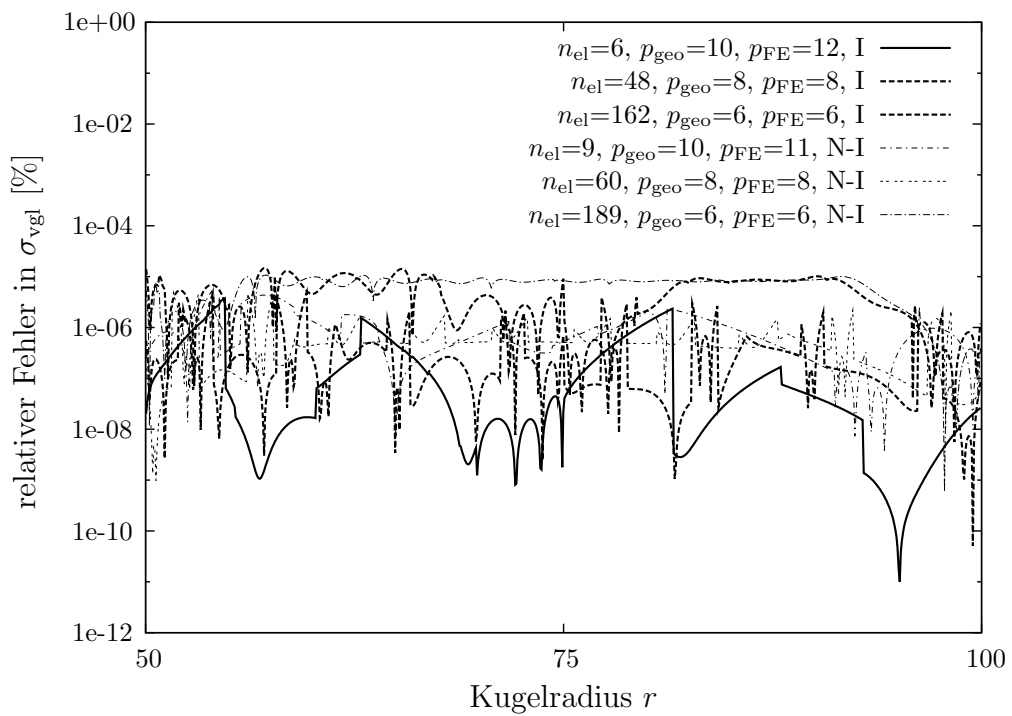


Abbildung 7.14: relativer Fehler in der Verschiebung  $u_r$  [%]

Die Größe  $\eta$  ist ein ingenieurmäßig kaum relevantes Maß. Daher stellen die Diagramme 7.14, 7.15 und 7.16 relative Fehler von Spannungen und Verschiebungen in Kugelkoordinaten entlang eines radialen Schnittes dar. Die Ergebnisse wurden auf Berechnungsnetzen ausgewertet, die auch später im Rahmen der Deformationstheorie untersucht werden sollen. Die dargestellten Ergebnisse einer jeden Diskretisierung stammen aus der Finite-Element-Analyse mit dem jeweils höchsten Polynomgrad. Die Fülle der in den Abbildungen 7.14, 7.15 und 7.16 dargestellten Kurven erlaubt kaum mehr eine eindeutige Zuordnung zur Legende. Sie erübrigt sich auch, denn einzig wichtige Aussage dieser Kurven ist: im linear elastischen Fall unterschreitet der relative Fehler lokaler Größen entlang des Radialschnittes für alle betrachteten

Abbildung 7.15: relativer Fehler in der Spannung  $\sigma_r$  [%]Abbildung 7.16: relativer Fehler in der VON MISES Vergleichsspannung  $\sigma_{vgl}$  [%]

Finite-Element-Netze bei einem Polynomgrad  $p_{\max}$  einen Wert von  $1.0 \cdot 10^{-4}[\%]$ .

### 7.3 Finite-Element-Analyse für Berechnungen nach der Deformationstheorie

Tabelle 7.1 fasst die Auswahl an Diskretisierungen zusammen, die im vorangegangenen Abschnitt zufriedenstellende Ergebnisse lieferten.

Interface Netze		nicht-Interface Netze	
Elementanzahl $n_{\text{el}}$	Approximation der Geometrie $p_{\text{geo}}$	Elementanzahl $n_{\text{el}}$	Approximation der Geometrie $p_{\text{geo}}$
6	10	9	10
24	8	36	8
48	8	60	8
108	8	135	8
162	6	189	6

Tabelle 7.1: Finite-Element-Netze

Thema dieses Abschnitts ist die Frage nach der Konvergenz der entsprechenden Kurven bei Berechnungen nach der Deformationstheorie. Zu den linear-elastischen Berechnungen ändert sich ausschließlich das Materialgesetz. Unter der Voraussetzung der HENCKY-Plastizität nimmt die Fließspannung  $\sigma_0$  nun den Wert  $41.79389833783693[\text{N}/\text{mm}^2]$  an. Mit dieser Konfiguration stellt sich das elastisch-plastische Interface bei einem Radius  $r_{\text{I}} = 0.5(r_{\text{i}} + r_{\text{a}}) = 75$  ein. Die Referenzenergie entspricht auch hier einem Achtel des zuvor in Gleichung (7.44) errechneten Wertes,  $\mathcal{U}_{\text{ref}} = 38\,650.467005954030$ .

Die Effizienz der  $rp$ -Version wird in Abbildung 7.17 zunächst anhand der Konvergenz bzgl. des relativen Fehlers  $\eta[\%]$  beurteilt. Deutlich erkennt man den Unterschied im Verhalten von Interface Netzen und nicht-Interface Netzen. Während der relative Fehler aller Diskretisierungen, deren Kanten und Oberflächen den Verlauf der elastisch-plastischen Grenzschicht berücksichtigen, auf unter  $1.0 \cdot 10^{-4}[\%]$  sinkt, erreicht keine Diskretisierung durch nicht-Interface Netze einen relativen Fehler von  $0.1[\%]$ . Wie im zweidimensionalen Fall unterscheidet sich auch in drei Raumdimensionen die Charakteristik der Konvergenz. Gegenüber nicht-Interface Netzen, die auf algebraische Konvergenz beschränkt sind, grenzen sich Interface Netze mit exponentiellem Konvergenzverhalten deutlich ab.

Wie im vorhergehenden Abschnitt wird der relative Fehler von Verschiebungen und Spannungen nun für die Berechnungen nach der Deformationstheorie dargestellt (vgl. Abb. 7.18 - 7.20). Die Größenordnung des relativen Fehlers der Ergebnisse aus Berechnungen auf Interface Netzen spiegelt im nichtlinearen Fall den gleichen Wert wider wie im linear-elastischen Fall. Die nicht-Interface Netze zeigen höhere Fehler.

Der relative Fehler der Verschiebung  $u_r$  entlang des gesamten Schnittes liegt um zwei Größenordnungen über dem der Interface Netze. Auch in Bezug auf den relativen Fehler in den



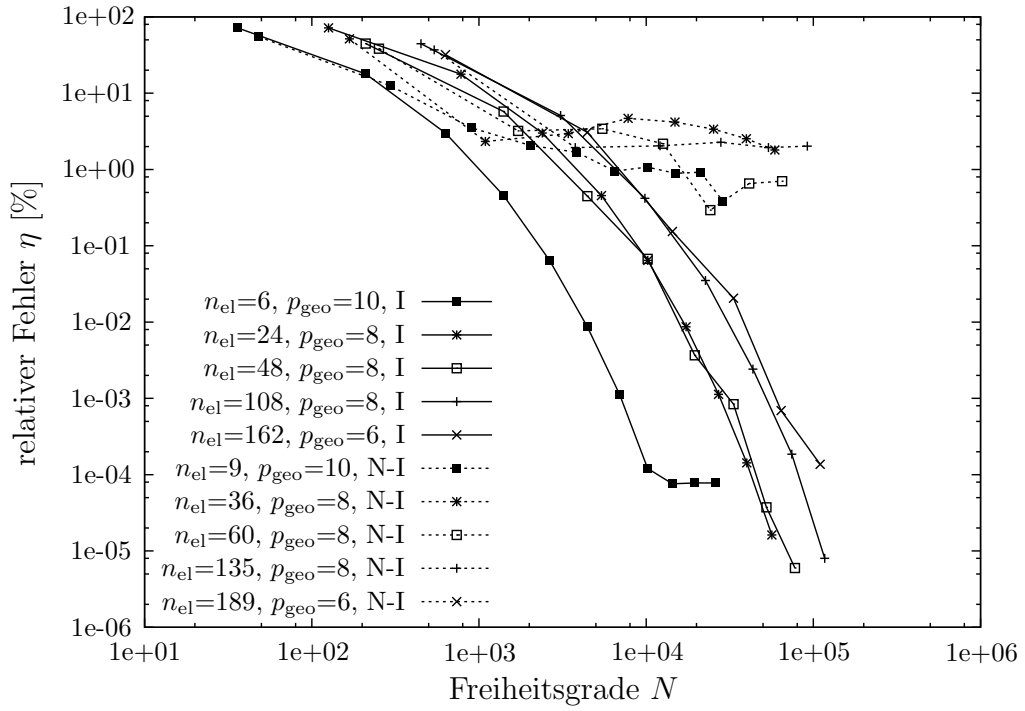


Abbildung 7.17: Relativer Fehler  $\eta = \sqrt{\frac{|\mathcal{U}_{ref} - \mathcal{U}_{FE}|}{\mathcal{U}_{ref}}} 100$  [%] gegenüber der Anzahl der Freiheitsgrade

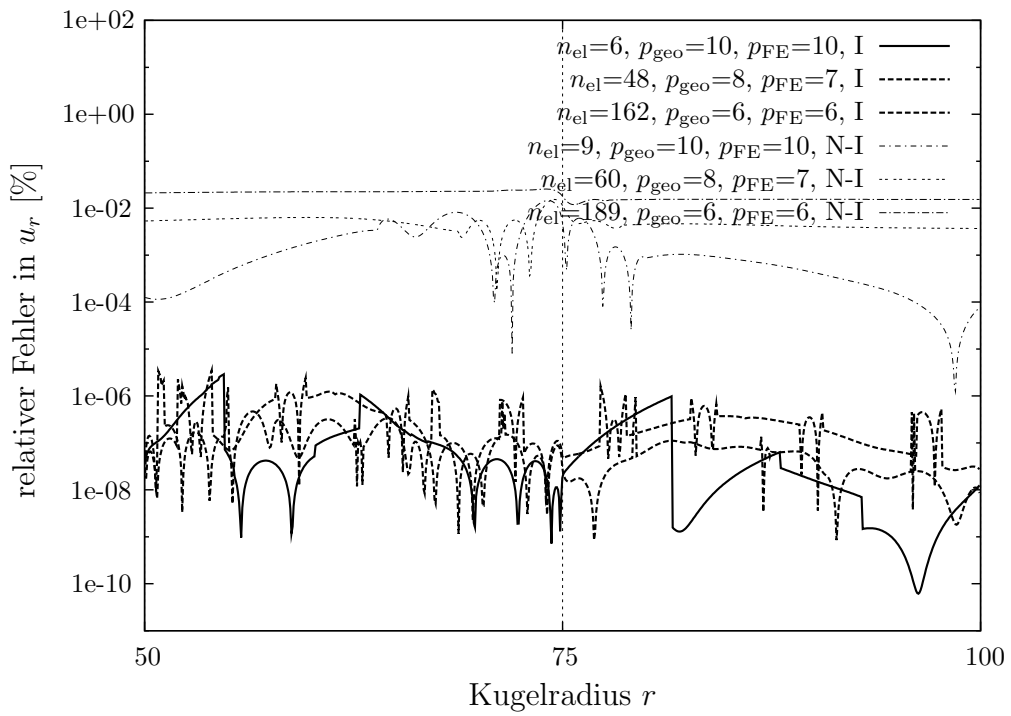
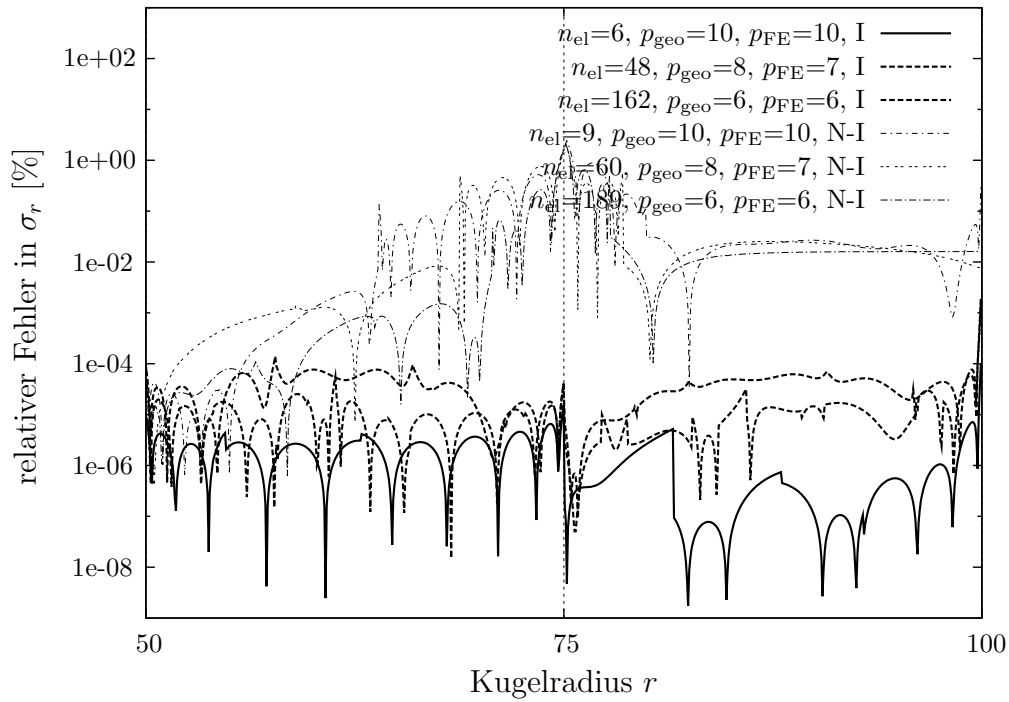
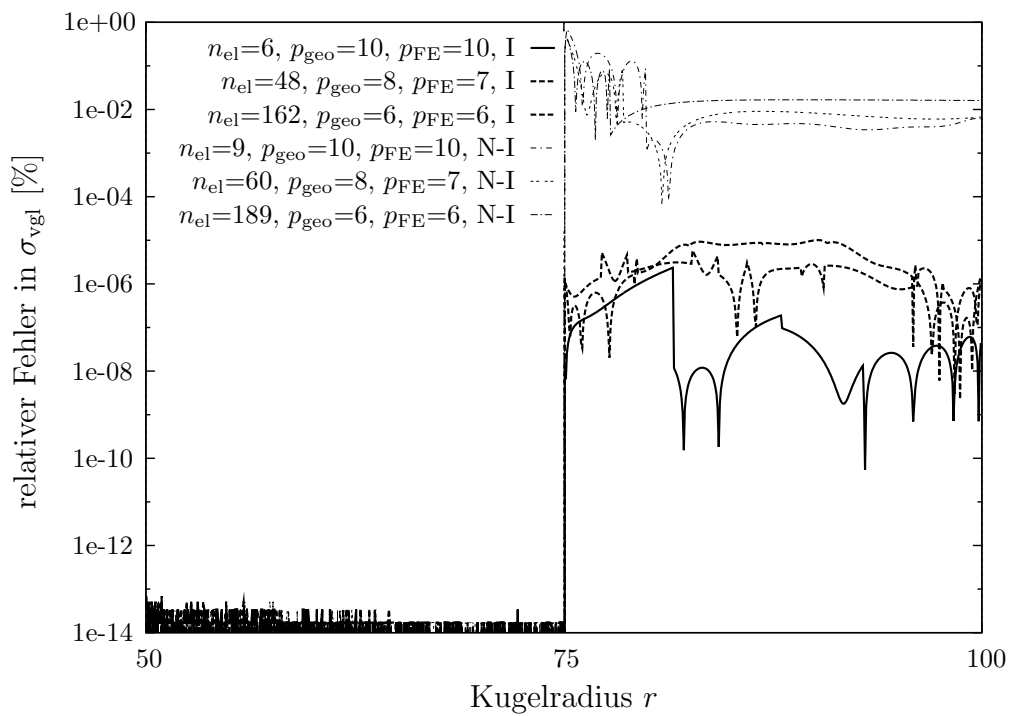


Abbildung 7.18: relativer Fehler in der Verschiebung  $u_r$  [%]

Abbildung 7.19: relativer Fehler in der Spannung  $\sigma_r$  [%]Abbildung 7.20: relativer Fehler in der VON MISES Vergleichsspannung  $\sigma_{vgl}$  [%]

Spannungen  $\sigma_r$  und  $\sigma_{vgl}$  erreichen die Ergebnisse der nicht-Interface Netze kaum die Güte der Ergebnisse von Interface Netzen. Lediglich an der Innenfläche der Hohlkugel entspricht der relative Fehler in  $\sigma_r$  der nicht-Interface Netze dem der Interface Netze. Er wächst mit dem Abstand vom Zentrum. Innenliegende Elemente der Struktur, die nicht vom elastisch-plastischen Interface durchquert werden, sind weniger fehlerbehaftet.

## 7.4 *rp*-adaptive Berechnungen nach der Deformationstheorie

Für die *rp*-adaptive Diskretisierung wird die vorliegende Kugelsymmetrie dahingehend genutzt, die *rp*-Adaption zu einem eindimensionalen Problem zu kollabieren. So verwendet der Ansatz *a priori* Wissen über die Geometrie des elastisch-plastischen Interface, die stets eine Kugeloberfläche beschreibt. Abbildung 7.21 stellt das Vorgehen schematisch dar. Sie zeigt das Finite-Element-Netz, dessen Topologie während der gesamten *rp*-Adaption konstant bleibt und der des Interface Netzes aus sechs Elementen (vgl. Abb. 7.8 links) entspricht. Der Radius,

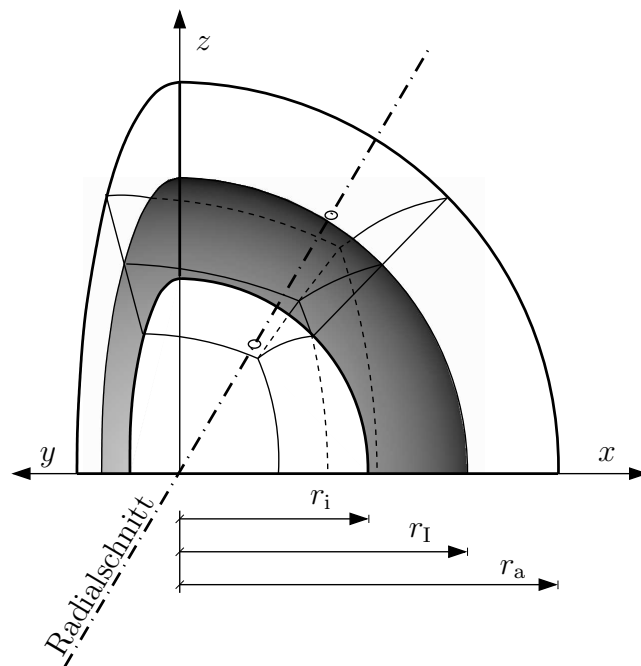


Abbildung 7.21: Netztopologie des *rp*-adaptiven Netzes

der die Geometrie der im Systeminnern liegenden gekrümmten Elementflächen definiert, wird iterativ angepasst. Diese eindimensionale Suche führt zu einer Variation der innenliegenden — in Abbildung 7.21 grau schattiert dargestellten — Kugeloberfläche. Die schrittweise Adaption erfolgt anhand der Ergebnisse auf einem feinen Hintergrundnetz, das aufgrund der Kugelsymmetrie zu Auswertepunkten entlang eines Radialschnittes entartet (vgl. Abb. 7.21).

Die *rp*-adaptive Diskretisierung vergleicht zwei verschiedene Regeln, die Mittelpunkt- und die gewichtete Regel. Beide entsprechen den in Kapitel 5 vorgestellten Ansätzen, ganz natürlich auf den dreidimensionalen Fall verallgemeinert. Die Integrationsordnung wurde zu  $p + 1$  gewählt.

Während die Netzdichte des Hintergrundnetzes bei Anwendung der Mittelpunkregel mit der Gaußordnung korrespondiert, wird das Auswerternetz im Rahmen der gewichteten  $rp$ -Adaption feiner gewählt, nämlich — mit der Dimension  $d = 3$  — zu  $d(p + 1) + 1$  bzw.  $d(p + 1) + 2$ , so dass es sich stets um eine ungerade Anzahl handelt. Ausgehend von einem Anfangsradius von  $r = 90.0$  [mm] ist die schrittweise Anpassung des Radius  $r$  in Tabelle 7.2 dokumentiert.

Iteration	Mittelpunktregel	gewichtete Regel
1	90.00000000000000	90.00000000000000
2	58.33448704903470	57.72121398300915
3	75.00000000000002	76.24304479208335
4	75.00000000000002	75.59934149692535
5	75.00000000000002	74.76041215456774
6	75.00000000000001	74.99277267178529
7	75.00000000000001	74.99958905072077
8	75.00000000000001	74.99996362790856
9	75.00000000000001	74.99999433125553
10	75.00000000000001	74.99999960934408

Tabelle 7.2: Adaptive Anpassung des Radius  $r$  [mm] für die Mittelpunkregel und die gewichtete Vorschrift

Die Mittelpunkregel führt hier aufgrund der Systemgeometrie auf das Interface und weist nach schon drei Iterationsschritten den exakten Wert  $r_1 = 75$  [mm] auf. Die gewichtete Regel nähert sich dem Interfacerradius  $r_1$  langsamer und erreicht den entsprechenden Wert nach zehn Iterationen bis auf eine Genauigkeit von  $1.0 \cdot 10^{-6}$  %.

Zum Vergleich wird eine uniforme  $h$ -Version mit quadratischem Ansatz herangezogen. Die  $h$ -Verfeinerung basiert auf einer Reihe von Netzen mit 3, 27, 81, 1029, 2187 und 3993 Elementen. Abbildung 7.22 zeigt den relativen Fehler  $\eta$  gegenüber der Anzahl an Freiheitsgraden auf doppelt logarithmischer Skala. Zusätzlich ist das optimale Ergebnis dargestellt, das mithilfe des Interface Netzes aus sechs Elementen im vorangegangenen Abschnitt 7.3 erreicht wurde. Während die Konvergenzrate der uniformen  $h$ -Version mit  $p = 2$  durch algebraisches Verhalten beschränkt ist, zeigen die  $rp$ -adaptiven Ansätze exponentielle Konvergenz. Die Kurve zur  $rp$ -Adaption nach der Mittelpunkregel fällt ab  $p = 4$  mit der Kurve des Interface Netzes aus sechs Elementen zusammen. Dieser Effekt wurde aufgrund der Konstruktion des Hintergrundnetzes auch so erwartet. Die  $rp$ -adaptive Diskretisierung nach der gewichteten Methode konvergiert ähnlich gut. Auch im dreidimensionalen Fall stellt die schrittweise Anpassung an das Interface eine effiziente Methode dar, den Fehler elastoplastischer Probleme asymptotisch zu kontrollieren. Diese Aussage wird durch die Konvergenz punktweiser Größen bestätigt. Abbildungen 7.23-7.25 stellen den relativen Fehler in der Verschiebung  $u_r$ , der Dehnung  $\varepsilon_r$  sowie der VON MISES Vergleichsspannung  $\sigma_{\text{vgl}}$  an den Punkten 1 ( $r = 74.5$ ) und 2 ( $r = 75.5$ ) in Interfacenähe dar. Sie zeigen, dass die  $rp$ -adaptive Strategie der uniformen  $h$ -Version mit  $p = 2$  deutlich überlegen ist. In Abbildung 7.25 verläuft die Konvergenzkurve der  $h$ -Version ab der zweiten Verfeinerung horizontal. Grund hierfür ist, dass der entsprechende Auswertepunkt aus diesen Rechnungen als plastifiziert hervorging. Die Fließspannung ist schon erreicht.

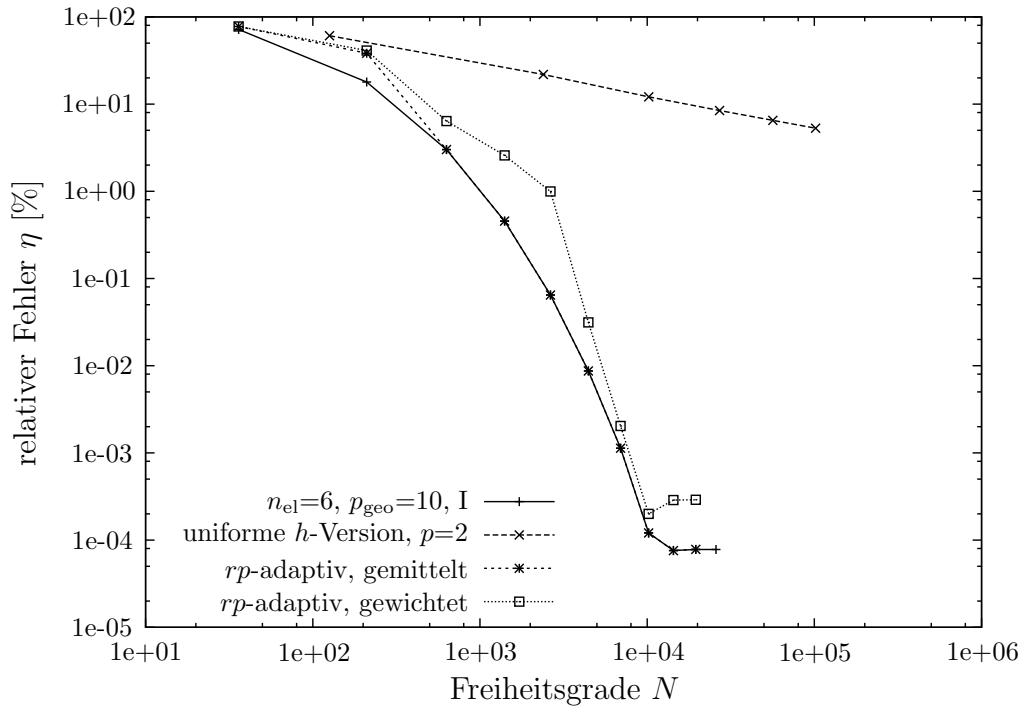


Abbildung 7.22: Relativer Fehler  $\eta = \sqrt{\frac{|\mathcal{U}_{ref} - \mathcal{U}_{FE}|}{\mathcal{U}_{ref}}} 100$  [%] gegenüber der Anzahl der Freiheitsgrade

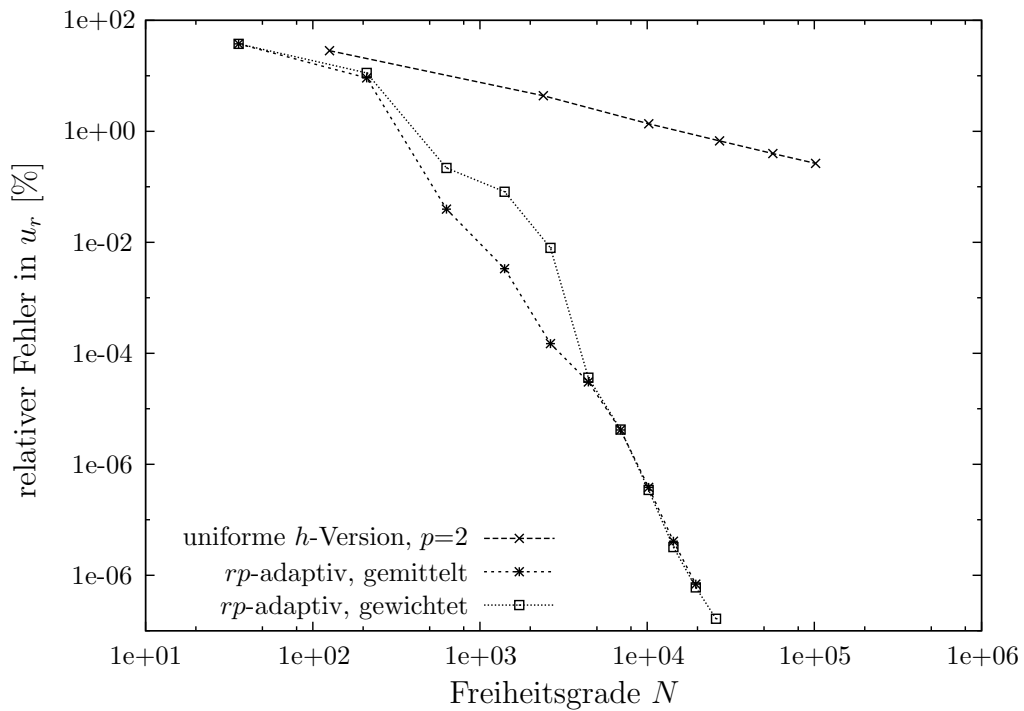


Abbildung 7.23: relativer Fehler in der Verschiebung  $u_r$  [%] am Punkt 1 bei  $r = 74.5$

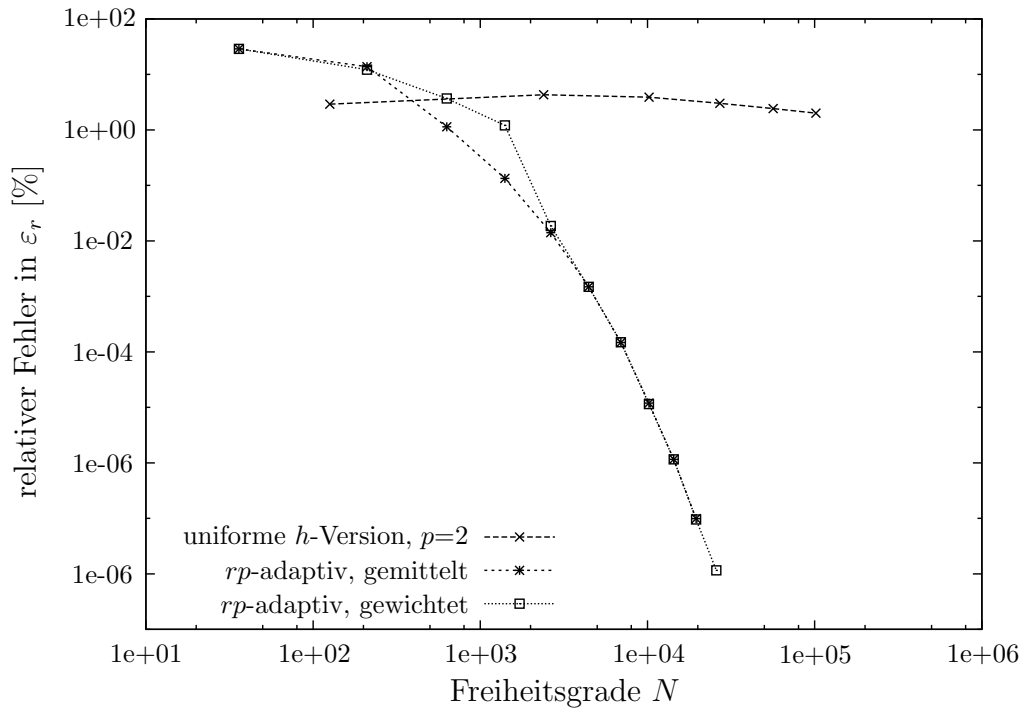


Abbildung 7.24: relativer Fehler in der Dehnung  $\varepsilon_r$  [%] am Punkt 2 bei  $r = 75.5$

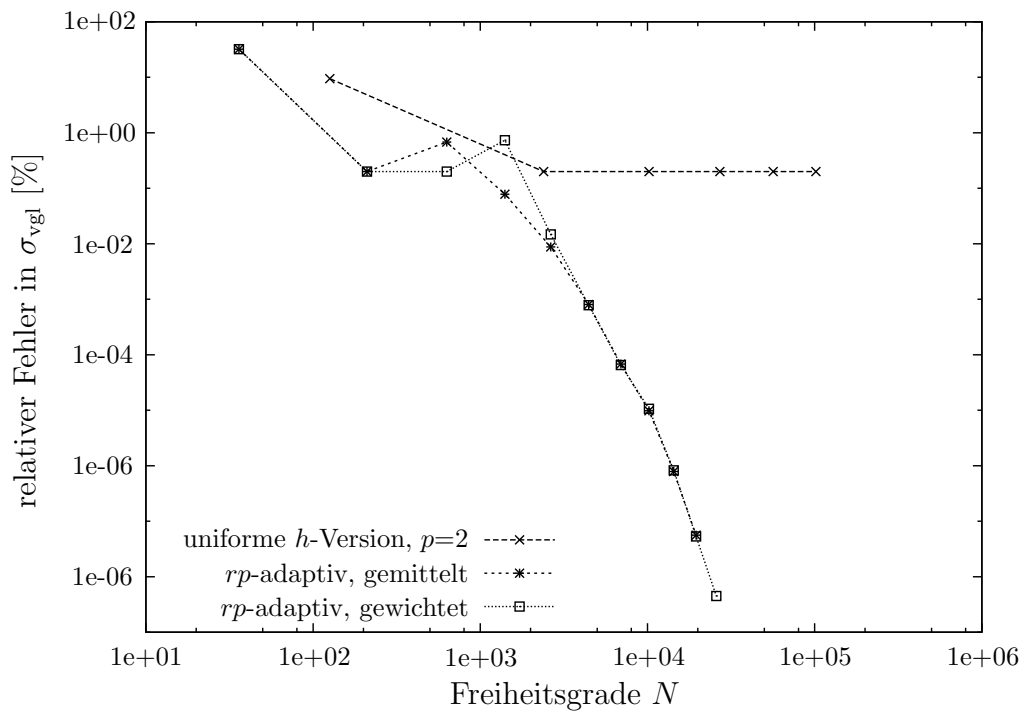


Abbildung 7.25: relativer Fehler in der VON MISES Vergleichsspannung  $\sigma_{vgl}$  [%] am Punkt 2 bei  $r = 75.5$

# Kapitel 8

## Zusammenfassung und Ausblick

Die Methode der finiten Elemente in all ihren Facetten ist seit Jahren unverzichtbares Werkzeug der Strukturanalyse und wird auf unterschiedlichste Problemklassen der Ingenieurdisziplinen angewandt, u.a. auf physikalisch nichtlineare Fragestellungen, die hier fokussiert wurden. Untersuchungen auf diesem Gebiet haben gezeigt, dass selbst im Vergleich zu adaptiven  $h$ -Versionen Elementformulierungen hoher Ordnung bereits in ihrer „Reinform“ — ohne zusätzliche Intelligenz durch Adaptivität — deutlich überlegen sein können [34, 35, 33, 74]. Darüber hinaus Effizienz weiter zu steigern, war erklärtes Ziel dieser Arbeit und mündete in die Entwicklung eines  $rp$ -adaptiven Algorithmus für elastoplastische Probleme.

- Stark geometrisch orientiert, ist der  $rp$ -adaptive Algorithmus auf das physikalisch nichtlineare Verhalten „zugeschnitten“. So ließen diese beiden Merkmale die Kapitel 2 und 3 zu Fundamenten werden, auf denen die Arbeit gründet. Sie schaffen zum einen den kontinuumsmechanischen Rahmen, diskutieren zum anderen prinzipielle geometrische Aspekte.
- Die  $rp$ -adaptive Idee erwuchs dem Studium des „p“. So erklären Kapitel 4 und 5, die sich der Darstellung der Diskretisierung widmen, einerseits die Methode der finiten Elemente und deren spezielle Eigenschaften bei der Wahl hoher Ansätze, entwickeln andererseits den  $rp$ -adaptiven Gedanken mit den daraus resultierenden Algorithmen.
- Die Frage nach der Effizienz des  $rp$ -adaptiven Algorithmus entscheidet über seine Akzeptanz in Wissenschaft und Praxis und war schließlich zu beantworten. So dokumentieren die Abschnitte 6 und 7 Genauigkeit und Konvergenzverhalten der hier entwickelten Diskretisierungsstrategie, sowohl im zweidimensionalen als auch im dreidimensionalen Fall.

Die numerischen Beispiele zeigen, dass die  $rp$ -Version der Finite-Element-Methode selbst im Falle einer wichtigen Klasse physikalisch nichtlinearer Probleme exponentielle Konvergenz bewirkt und damit die ohnehin schon überlegene, reine  $p$ -Version in der Charakteristik ihrer Konvergenz und ihrer Genauigkeit übertrifft. Das Konvergenzverhalten verbessert sich, weil Finite-Element-Kanten und -Flächen mit der plastischen Front, entlang derer die Lösung Regularität verliert, kongruieren.

Der Blick nach vorn gruppiert die zahlreichen weiterführenden Fragen, die sich im Verlauf dieser Arbeit stellten, in zwei Kategorien. Zum einen gibt es verschiedene Angriffspunkte, die bestehende Lösung zu erweitern und im Rahmen des betrachteten Kontext noch effizienter zu machen. Zum anderen drängt sich die Frage nach der Effizienz des vorgestellten Verfahrens beim Transfer auf verwandte Problemklassen auf. Diese Klassifizierung strukturiert die folgenden, abschließenden Zeilen.

### Weiterentwicklung der bestehenden Diskretisierungsstrategie

Die numerischen Beispiele haben gezeigt, dass der  $rp$ -adaptive Algorithmus — unabhängig von der Anzahl der Elemente — exponentielle Konvergenz erreicht, sofern die Elementränder mit dem Rand der plastischen Zone genau genug zusammenfallen. Die Finite-Element-Analyse ist umso effizienter, je gröber das Finite-Element-Netz ist. Größere Netze in zwei Raumdimensionen sind möglich, wenn neben vierknotigen auch dreiknotige Elemente nutzbar sind. Eine entsprechende Erweiterung der in Kapitel 5.5.2.1 beschriebenen Zerlegungsmakros würde diese unmittelbar universell machen und die Generierung äußerst grober Netze ermöglichen. Dieser Schritt bedürfte einer Erweiterung der zweidimensionalen Elementfamilie um Dreieckselemente. Das erfordert einerseits die Lösung der numerischen Integration, andererseits die Entwicklung eines Abbildungskonzeptes [84] für dreiknotige Elemente hoher Ordnung.

Zur Erweiterung des  $rp$ -adaptiven Algorithmus auf die dritte Dimension müsste eine entsprechende dreidimensionale Elementfamilie mit Pentaedern und Tetraedern gegründet werden [48], weil die räumliche Netzgenerierung sonst nicht realisierbar ist. Das Interface entspricht einer beliebigen Oberfläche, deren Verlauf bei der Netzgenerierung berücksichtigt werden muss.

### Transfer der $rp$ -adaptiven Idee auf verwandte Problemklassen

Neben der Weiterentwicklung des  $rp$ -adaptiven Algorithmus bietet sich der Transfer gewonnener Erkenntnisse auf Probleme mit Lösungen ähnlichen Typs, beispielsweise Kontaktprobleme, an. Kontaktprobleme gehören sowohl aus Sicht der ingenieurwissenschaftlichen Anwendung als auch der mathematisch-mechanischen Grundlagen zu einer der interessantesten Problemklassen computergestützter Mechanik [105, 52, 108]. Die numerische Analyse basiert heute üblicherweise auf finiten Elementen niedriger Ordnung, deren Genauigkeit durch globale oder lokale Netzverfeinerung erhöht wird. Ergebnisse von WRIGGERS und ZAVARISE [106], FISCHER und WRIGGERS [38] haben gezeigt, dass bereits quadratische Ansätze zu deutlichem Effizienzgewinn gegenüber linearen Ansätzen führen.

Auch bei Kontaktproblemen ist die mathematische Struktur der Lösung dadurch gekennzeichnet, dass das Berechnungsgebiet in zwei disjunkte Bereiche aufgeteilt werden kann, in denen die Lösung — abgesehen von Singularitäten, die sich mit den bekannten Methoden für lineare Elastizität problemlos bewältigen lassen — jeweils glatt ist. Bei elastoplastischen Problemen ist das die elastische bzw. plastische Zone, bei Kontaktproblemen eine Fortsetzung vom freien bzw. Kontaktrand ins Gebietsinnere. In beiden Fällen ist der geometrische Ort, der die Teilgebiete trennt, nicht *a priori* bekannt, kann aber *a posteriori* durch Punkte (Endpunkte des Kontaktgebietes in 2D), glatte Kurven (Rand des 3D-Kontakts bzw. der plastischen Front bei 2D-Plastizität) oder glatte Flächen (Rand der plastischen Zone bei 3D-Plastizität) bestimmt werden. Die Lösung am Übergang beider Teilgebiete ist glatt genug, um durch Positionierung von Elementrändern auf diesem Rand insgesamt exponentielle Konvergenz zu prognostizieren. Ergebnisse von ECK et al. [36] zur Regularität von Kontaktproblemen mit Reibung unterstützen diese Prognose durch die Aussage, der Spannungsintensitätsfaktor an



den Endpunkten des aktiven Teils der Kontaktzone verschwinde.

Grund für die Vermutung, dass die  $p$ -Version und insbesondere die  $rp$ -Version effizient für Kontaktprobleme eingesetzt werden können, ist also die enge Verwandtschaft der Problemklassen Plastizität und Kontakt. Ihre strukturelle Ähnlichkeit erklärt WRIGGERS in Kapitel 4 seines Buches [105] im Detail. Auf Basis dieser Überlegungen sei die Formulierung folgender Hypothese erlaubt:

Die reine  $p$ -Version der Finite-Element-Methode ist auch für Probleme des reibungsbehafteten, statischen Kontakts hinsichtlich Genauigkeit und Effizienz der klassischen  $h$ -Version überlegen. Kombiniert man den Ansatz hoher Ordnung mit adaptiven Verfahren zur Netz-anpassung, werden die Ergebnisse weiter verbessert und führen im Falle einer  $rp$ -adaptiven Diskretisierung sogar auf exponentielle Konvergenz.



# Anhang A

## Definitionen der Tensoralgebra

Dieser Abschnitt fasst für Kapitel 2 wichtige Definitionen der Tensoralgebra zusammen, die insbesondere hinsichtlich der physikalischen Nichtlinearität von Interesse sind. Alle Betrachtungen beziehen sich auf Tensoren  $\mathbf{\Lambda}$  zweiter Stufe. Eine ausführliche Diskussion der Tensorrechnung ist z.B. in ALTENBACH und ALTENBACH [5] oder BONET und WOOD [17] gegeben.

### A.1 Kugeltensor und Deviator

Jeder Tensor  $\mathbf{\Lambda}$  zweiter Stufe lässt sich eindeutig in einen Kugelanteil  $\mathbf{\Lambda}_{\text{Kugel}}$  und einen deviatorischen Anteil  $\mathbf{\Lambda}_{\text{dev}}$  zerlegen.

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}_{\text{Kugel}} + \mathbf{\Lambda}_{\text{dev}} \quad (\text{A.1})$$

Für Kugelanteil und Deviator gilt:

$$\mathbf{\Lambda}_{\text{Kugel}} = \frac{1}{3} \text{tr}[\mathbf{\Lambda}] \mathbf{1} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{\Lambda}_{\text{dev}} = \text{dev}[\mathbf{\Lambda}] = \mathbf{\Lambda} - \mathbf{\Lambda}_{\text{Kugel}} \quad (\text{A.3})$$

$\mathbf{1}$  bezeichnet den Einheitstensor zweiter Stufe,  $\text{tr}[\bullet]$  den Spuroperator. Speziell für den Deviator gilt die Eigenschaft

$$\text{tr}[\mathbf{\Lambda}_{\text{dev}}] = \text{tr}[\text{dev}[\mathbf{\Lambda}]] = 0. \quad (\text{A.4})$$

$\text{tr}[\mathbf{\Lambda}_{\text{dev}}]$  entspricht der ersten Invarianten des Spannungsdeviators. (siehe Gleichung A.11)  
Wird isotropes Material betrachtet, ist die Aufspaltung des Tensors  $\mathbf{\Lambda}$  in zwei Anteile von besonderer physikalischer Bedeutung:

Gegeben sei ein hydrostatischer Spannungszustand

$$\mathbf{\Lambda} = -p \mathbf{1}, \quad (\text{A.5})$$

wobei der hydrostatische Druck  $p$  in jedem Volumenelement gleich ist. Für diesen Spannungszustand  $\mathbf{\Lambda}$  haben Kugeltensor und Deviator folgende Form:

$$\mathbf{\Lambda}_{\text{Kugel}} = \frac{1}{3} \text{tr}[\mathbf{\Lambda}] \mathbf{1} = -p \mathbf{1} = \mathbf{\Lambda} \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{\Lambda}_{\text{dev}} = \text{dev}[\mathbf{\Lambda}] = \mathbf{\Lambda} - \mathbf{\Lambda}_{\text{Kugel}} = \mathbf{0} \quad (\text{A.7})$$

Bei isotropem Material ruft der Kugeltensor ausschließlich Volumenänderungen, der Deviator nur Gestaltänderung hervor.

Im Falle der Elastoplastizität haben Experimente an metallischen Werkstoffen belegt, dass plastische Zustände nicht vom hydrostatischen Spannungszustand abhängen.

## A.2 Invarianten

Die Eigenschaft, bei einer Koordinatentransformation invariant — d.h. unverändert — zu bleiben, hat den Invarianten eines Tensors  $\mathbf{\Lambda}$  ihren Namen gegeben. Man unterscheidet die lineare, die quadratische und die kubische Invariante  $I_1$ ,  $I_2$  und  $I_3$ , die folgendermaßen definiert sind:

$$I_1(\mathbf{\Lambda}) = \text{tr}[\mathbf{\Lambda}] \quad (\text{A.8})$$

$$I_2(\mathbf{\Lambda}) = \frac{1}{2} (I_1^2(\mathbf{\Lambda}) - I_1(\mathbf{\Lambda}^2)) \quad (\text{A.9})$$

$$I_3(\mathbf{\Lambda}) = \det[\mathbf{\Lambda}] \quad (\text{A.10})$$

Die Invarianten  $J_1$ ,  $J_2$  und  $J_3$  des Spannungsdeviators  $\mathbf{\Lambda}_{\text{dev}} = \text{dev}[\mathbf{\Lambda}]$  sind bei der Betrachtung elastoplastischer Fragestellungen von zentraler Bedeutung.

$$J_1(\mathbf{\Lambda}) = \text{tr}[\text{dev}[\mathbf{\Lambda}]] = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$J_2(\mathbf{\Lambda}) = \frac{1}{2} (J_1^2(\mathbf{\Lambda}) - J_1(\mathbf{\Lambda}^2)) = -\frac{1}{2} J_1(\mathbf{\Lambda}^2) \quad (\text{A.12})$$

$$J_3(\mathbf{\Lambda}) = \det[\text{dev}[\mathbf{\Lambda}]] \quad (\text{A.13})$$

## Anhang B

### Abbildungsfunktion

#### B.1 Zweidimensionale Abbildung

Kantenterme für das in Abbildung 4.13 dargestellte vierknotige Element:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_1(\xi, \eta) &= \left[ \mathbf{E}_1(\xi) - \frac{(1-\xi)\mathbf{X}_1 + (1+\xi)\mathbf{X}_2}{2} \right] \left( \frac{1-\eta}{2} \right) \\
 \mathbf{e}_2(\xi, \eta) &= \left[ \mathbf{E}_2(\eta) - \frac{(1-\eta)\mathbf{X}_2 + (1+\eta)\mathbf{X}_3}{2} \right] \left( \frac{1+\xi}{2} \right) \\
 \mathbf{e}_3(\xi, \eta) &= \left[ \mathbf{E}_3(\xi) - \frac{(1-\xi)\mathbf{X}_4 + (1+\xi)\mathbf{X}_3}{2} \right] \left( \frac{1+\eta}{2} \right) \\
 \mathbf{e}_4(\xi, \eta) &= \left[ \mathbf{E}_4(\eta) - \frac{(1-\eta)\mathbf{X}_1 + (1+\eta)\mathbf{X}_4}{2} \right] \left( \frac{1-\xi}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

#### B.2 Dreidimensionale Abbildung

Kanten- und Flächenterme für das in Abbildung 4.14 dargestellte Hexaederelement:

##### B.2.1 Kantenterme nach [49]

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_1(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{E}_1(\xi) - \frac{(1-\xi)\mathbf{X}_1 + (1+\xi)\mathbf{X}_2}{2} \right] \left( \frac{1-\eta}{2} \right) \left( \frac{1-\zeta}{2} \right) \\
 \mathbf{e}_2(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{E}_2(\eta) - \frac{(1-\eta)\mathbf{X}_2 + (1+\eta)\mathbf{X}_3}{2} \right] \left( \frac{1+\xi}{2} \right) \left( \frac{1-\zeta}{2} \right) \\
 \mathbf{e}_3(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{E}_3(\xi) - \frac{(1-\xi)\mathbf{X}_4 + (1+\xi)\mathbf{X}_3}{2} \right] \left( \frac{1+\eta}{2} \right) \left( \frac{1-\zeta}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_4(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{E}_4(\eta) - \frac{(1-\eta)\mathbf{X}_1 + (1+\eta)\mathbf{X}_4}{2} \right] \left( \frac{1-\xi}{2} \right) \left( \frac{1-\zeta}{2} \right) \\
\mathbf{e}_5(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{E}_5(\zeta) - \frac{(1-\zeta)\mathbf{X}_1 + (1+\zeta)\mathbf{X}_5}{2} \right] \left( \frac{1-\xi}{2} \right) \left( \frac{1-\eta}{2} \right) \\
\mathbf{e}_6(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{E}_6(\zeta) - \frac{(1-\zeta)\mathbf{X}_2 + (1+\zeta)\mathbf{X}_6}{2} \right] \left( \frac{1+\xi}{2} \right) \left( \frac{1-\eta}{2} \right) \\
\mathbf{e}_7(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{E}_7(\zeta) - \frac{(1-\zeta)\mathbf{X}_3 + (1+\zeta)\mathbf{X}_7}{2} \right] \left( \frac{1+\xi}{2} \right) \left( \frac{1+\eta}{2} \right) \\
\mathbf{e}_8(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{E}_8(\zeta) - \frac{(1-\zeta)\mathbf{X}_4 + (1+\zeta)\mathbf{X}_8}{2} \right] \left( \frac{1-\xi}{2} \right) \left( \frac{1+\eta}{2} \right) \\
\mathbf{e}_9(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{E}_9(\xi) - \frac{(1-\xi)\mathbf{X}_5 + (1+\xi)\mathbf{X}_6}{2} \right] \left( \frac{1-\eta}{2} \right) \left( \frac{1+\zeta}{2} \right) \\
\mathbf{e}_{10}(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{E}_{10}(\eta) - \frac{(1-\eta)\mathbf{X}_6 + (1+\eta)\mathbf{X}_7}{2} \right] \left( \frac{1+\xi}{2} \right) \left( \frac{1+\zeta}{2} \right) \\
\mathbf{e}_{11}(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{E}_{11}(\xi) - \frac{(1-\xi)\mathbf{X}_8 + (1+\xi)\mathbf{X}_7}{2} \right] \left( \frac{1+\eta}{2} \right) \left( \frac{1+\zeta}{2} \right) \\
\mathbf{e}_{12}(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{E}_{12}(\eta) - \frac{(1-\eta)\mathbf{X}_5 + (1+\eta)\mathbf{X}_8}{2} \right] \left( \frac{1-\xi}{2} \right) \left( \frac{1+\zeta}{2} \right)
\end{aligned} \tag{B.2}$$

### B.2.2 Flächenterme nach [49]

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_1(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{F}_1(\xi, \eta) - \frac{1}{4} \left[ (1-\xi)(1-\eta)\mathbf{X}_1 + (1+\xi)(1-\eta)\mathbf{X}_2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (1+\xi)(1+\eta)\mathbf{X}_3 + (1-\xi)(1+\eta)\mathbf{X}_4 \right] \right] \left( \frac{1-\zeta}{2} \right) \\
\mathbf{f}_2(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{F}_2(\xi, \zeta) - \frac{1}{4} \left[ (1-\xi)(1-\zeta)\mathbf{X}_1 + (1+\xi)(1-\zeta)\mathbf{X}_2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (1+\xi)(1+\zeta)\mathbf{X}_6 + (1-\xi)(1+\zeta)\mathbf{X}_5 \right] \right] \left( \frac{1-\eta}{2} \right) \\
\mathbf{f}_3(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{F}_3(\eta, \zeta) - \frac{1}{4} \left[ (1-\eta)(1-\zeta)\mathbf{X}_2 + (1+\eta)(1-\zeta)\mathbf{X}_3 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (1+\eta)(1+\zeta)\mathbf{X}_7 + (1-\eta)(1+\zeta)\mathbf{X}_6 \right] \right] \left( \frac{1+\xi}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_4(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{F}_4(\xi, \zeta) - \frac{1}{4} \left[ (1 - \xi)(1 - \zeta)\mathbf{X}_4 + (1 + \xi)(1 - \zeta)\mathbf{X}_3 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (1 + \xi)(1 + \zeta)\mathbf{X}_7 + (1 - \xi)(1 + \zeta)\mathbf{X}_8 \right] \right] \left( \frac{1 + \eta}{2} \right) \\
\mathbf{f}_5(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{F}_5(\eta, \zeta) - \frac{1}{4} \left[ (1 - \eta)(1 - \zeta)\mathbf{X}_1 + (1 + \eta)(1 - \zeta)\mathbf{X}_4 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (1 + \eta)(1 + \zeta)\mathbf{X}_8 + (1 - \eta)(1 + \zeta)\mathbf{X}_5 \right] \right] \left( \frac{1 - \xi}{2} \right) \\
\mathbf{f}_6(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{F}_6(\xi, \eta) - \frac{1}{4} \left[ (1 - \xi)(1 - \eta)\mathbf{X}_5 + (1 + \xi)(1 - \eta)\mathbf{X}_6 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (1 + \xi)(1 + \eta)\mathbf{X}_7 + (1 - \xi)(1 + \eta)\mathbf{X}_8 \right] \right] \left( \frac{1 + \zeta}{2} \right)
\end{aligned} \tag{B.3}$$





---

# Literaturverzeichnis

- [1] <http://www.hpfem.jku.at/netgen/>.
- [2] <http://netlib.bell-labs.com/netlib/linalg/spooles/spooles.2.2.html>.
- [3] S. Abramowski und H. Müller. *Geometrisches Modellieren*. BI Wissenschaftsverlag, 1991.
- [4] M. Ainsworth und J.T. Oden. *A posteriori error estimation in finite element analysis*. John Wiley & Sons, 2000.
- [5] J. Altenbach und H. Altenbach. *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Teubner-Verlag, 1994.
- [6] B. Arbter. *Investigation of a geometrically complex example with the 3D p-version of the FEM*. Masterarbeit, Lehrstuhl für Bauinformatik, TU München, 2003.
- [7] I. Babuška und T. Strouboulis. *The finite element method and its reliability*. Oxford University Press, 2001.
- [8] R. E. Bank. *PLTMG: A software package for solving elliptic partial differential equations, User's Guide 6.0*. Society for Industrial and Applied Mathematics SIAM, 1990.
- [9] F.-J. Barthold, M. Schmidt und E. Stein. Error estimation and mesh adaptivity for elastoplastic deformations. In *Proceedings of the 5. International Conference on Computational Plasticity, Complas V*, pages 597–603, Barcelona, 1997.
- [10] F.-J. Barthold, M. Schmidt und E. Stein. Error indicators and mesh refinements for finite-element-computations of elastoplastic deformations. *Computational Mechanics*, 22:225–238, 1998.
- [11] K.J. Bathe. *Finite-Elemente-Methoden*. Springer-Verlag, 1990.
- [12] K.J. Bathe. *Finite element procedures*. Prentice Hall, 1996.
- [13] T. Belytschko, W.K. Liu und B. Moran. *Nonlinear finite elements for continua and structures*. John Wiley & Sons, 2000.
- [14] M. Bischoff. *Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung*. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1999.

- [15] M. Bischoff und E. Ramm. Solid-like shell or shell-like solid formulation? A personal view. In *Proceedings of ECCM '99, European Conference on Computational Mechanics*, München, Germany, 1999.
- [16] K.-U. Bletzinger. *Formoptimierung von Flächentragwerken*. Dissertation, Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, 1990.
- [17] J. Bonet und R.D. Wood. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University Press, 1997.
- [18] D. Braess. *Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. Springer-Verlag, 1997.
- [19] H. Bröker. *Integration von geometrischer Modellierung und Berechnung nach der p-Version der FEM*. Dissertation, Lehrstuhl für Bauinformatik, Technische Universität München, 2001.
- [20] H.-J. Bungartz, M. Griebel und Ch. Zenger. *Einführung in die Computergraphik*. Vieweg Verlag, 1996.
- [21] Q. Chen und I. Babuška. Approximate optimal points for polynomial interpolation of real functions in an interval and in a triangle. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 128:405–417, 1995.
- [22] Chimo. *sagt Lila*. 1998.
- [23] S. Coons. Surfaces for computer aided design of space forms. *Technical Report, MIT, Project MAC-TR 41*, 1967.
- [24] J. Corney. *3D modeling with the ACIS kernel and toolkit*. John Wiley & Sons, 1997.
- [25] J. Corney und Lim T. *3D modeling with the ACIS*. John Wiley & Sons, 1997.
- [26] M.A. Crisfield. *Non-linear finite element analysis of solids and structures, Volume 1*. John Wiley & Sons, 1991.
- [27] L. Demkovicz. Finite element methods for maxwell equations. In E. Stein, R. de Borst und T.J.R. Hughes, editors, *Encyclopedia of Computational Mechanics*, pages 723–737. John Wiley & Sons, 2004.
- [28] M.P. do Carmo. *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*. Vieweg-Verlag, 3. Auflage, 1998.
- [29] A. Düster. *High order finite elements for three-dimensional, thin-walled nonlinear continua*. Dissertation, Lehrstuhl für Bauinformatik, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen, Technische Universität München, <http://www.inf.bv.tum.de/~duester>, 2001.
- [30] A. Düster, H. Bröker, H. Heidkamp, U. Heißerer, S. Kollmannsberger, R. Krause, A. Muthler, A. Niggel, V. Nübel, M. Rücker und D. Scholz. *AdhoC<sup>4</sup> – User's Guide*. Lehrstuhl für Bauinformatik, Technische Universität München, 2004.

- 
- [31] A. Düster, H. Bröker und E. Rank. The p-version of the finite element method for three-dimensional curved thin walled structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52:673–703, 2001.
- [32] A. Düster, A. Niggel und E. Rank. Thermo-elastic computations of geometrically non-linear three-dimensional thin-walled continua based on high order finite elements. In H.A. Mang, F.G. Rammerstorfer und J. Eberhardsteiner, editors, *Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics*, Vienna, Austria, 2002.
- [33] A. Düster, A. Niggel, Nübel V. und E. Rank. A numerical investigation of high-order finite elements for problems of elasto-plasticity. *Journal of Scientific Computing*, 17:429–437, 2002.
- [34] A. Düster und E. Rank. The p-version of the finite element method compared to an adaptive h-version for the deformation theory of plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:1925–1935, 2001.
- [35] A. Düster und E. Rank. A p-version finite element approach for two- and three-dimensional problems of the  $J_2$  flow theory with non-linear isotropic hardening. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53:49–63, 2002.
- [36] C. Eck, H. Schulz, O. Steinbach und W. L. Wendland. An adaptive boundary element method for contact problems. In E. Stein, editor, *Error-controlled Adaptive Finite Elements in Solid Mechanics*, pages 263–307. John Wiley & Sons, 2002.
- [37] G. Farin. *Curves and surfaces for computer aided geometric design*. Academic Press, 4. Auflage, 1997.
- [38] K.A. Fischer und P. Wriggers. Frictionless 2d contact formulations for finite deformations based on the mortar method. *submitted for Publication in Computational Mechanics*, 2004.
- [39] P.L. George. *Automatic Mesh Generation – Application to Finite Element Methods*. John Wiley & Sons, Chichester, 1991.
- [40] K. Girkmann. *Flächentragwerke*. Springer, 6. Auflage, 1974.
- [41] W.J. Gordon und Ch.A. Hall. Construction of curvilinear co-ordinate systems and applications to mesh generation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 7:461–477, 1973.
- [42] W.J. Gordon und Ch.A. Hall. Transfinite element methods: Blending function interpolation over arbitrary curved element domains. *Numerische Mathematik*, 21:109–129, 1973.
- [43] A. Halfmann. *Ein geometrisches Modell zur numerischen Simulation der Fluid-Struktur-Interaktion windbelasteter, leichter Flächentragwerke*. Dissertation, Lehrstuhl für Bauinformatik, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen, Technische Universität München, 2003.

- [44] H. Hencky. Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nebenspannungen. In *Proceedings of the 1st International Congress on Applied Mechanics*, Delft, 1924.
- [45] R. Hill. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press, New York, 1950.
- [46] H.E. Hinnant. A fast method of numerical quadrature for p-version finite element matrices. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:3723–3750, 1994.
- [47] T.J.R. Hughes. *The finite element method*. Dover Publications, 2000.
- [48] G. Karniadakis und J.S. Spencer. *Spectral/HP Element Methods for CFD (Numerical Mathematics and Scientific Computation)*. Oxford University Press, 1999.
- [49] G. Királyfalvi und B.A. Szabó. Quasi-regional mapping for the p-version of the finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 27:85–97, 1997.
- [50] R. Krause. *Multiscale computations with a combined h- and p-version of the finite element method*. Dissertation, Fach Numerische Methoden und Informationsverarbeitung, Universität Dortmund, 1996.
- [51] R. Krause und E. Rank. A fast algorithm for point-location in a finite element mesh. *Computing*, 57/1:49–63, 1996.
- [52] TA. Laursen. *Computational contact and impact mechanics*. Springer: Berlin, New York, Heidelberg, 2002.
- [53] Y. Leino und J. Pitkäranta. On the membrane locking of h-p finite elements in a cylindrical shell problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:1053–1070, 1994.
- [54] J. Lemaitre und J.-L. Chaboche. *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press, Chichester, 1990.
- [55] Y. Li und I. Babuška. A convergence analysis of a p-version finite element method for one-dimensional elastoplasticity problem with constitutive laws based on the gauge function method. *SIAM J. Num. Anal.*, 33 No. 2:809–842, 1996.
- [56] J. Lubliner. *Plasticity Theory*. Macmillan Publishing Company, 1990.
- [57] M. Mäntylä. *An Introduction to Solid modeling*. Computer Science Press, 1988.
- [58] J.M. Melenk, K. Gerdes und Ch. Schwab. Fully discrete hp finite elements: fast quadrature. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:4339–4364, 2001.
- [59] J. Nagtegaal, D. Parks und J. Rice. On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 4:153–177, 1974.

- [60] A. Niggel. *Ein Fehlerindikator für elastoplastische Materialprobleme bei Verwendung der p-Version der FEM*. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Bauinformatik, TU München, 2001.
- [61] V. Nübel, A. Düster und E. Rank. Die Methode Vektorintegration bei der p-Version der Finite-Elemente-Methode. Technical Report, Lehrstuhl für Bauinformatik, TU München, 2000.
- [62] V. Nübel, A. Düster und E. Rank. Adaptive vector integration as an efficient quadrature scheme for p-version finite element matrices. In *Proceedings of the European Conference on Computational Mechanics 2001*, Cracow, Poland, 2001.
- [63] L. Piegl und W. Tiller. A menagerie of rational B-spline circles. *IEEE Comput. Graph. and Appl.*, 9(5):48–56, 1989.
- [64] L. Piegl und W. Tiller. *The Nurbs Book*. Springer-Verlag, 2. Auflage, 1997.
- [65] K. Preusch. *Hierarchische Schalenelemente für nichtlineare Kontinua mit der p-Version der Finite-Element Methode*. Dissertation, Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, 2003.
- [66] E. Rank. A-posteriori Fehlerabschätzung und automatische Netzverfeinerung für Potential- und Bipotentialprobleme. *ZAMM-Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 65, 1985.
- [67] E. Rank. *A-posteriori-Fehlerabschätzungen und adaptive Netzverfeinerung für Finite-Element- und Randintegralelement-Methoden*. Dissertation, Elektronisches Rechnen im Konstruktiven Ingenieurbau, Bauingenieur- und Vermessungswesen, Technische Universität München, 1985.
- [68] E. Rank. Adaptivity and accuracy estimation for finite element and boundary integral methods. In I. Babuška, O.C. Zienkiewicz, J. Gago und E.R. de A. Olivera, editors, *Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computations*, pages 79–111. John Wiley & Sons, 1986.
- [69] E. Rank. Adaptive remeshing and h-p domain decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 101:299–313, 1992.
- [70] E. Rank. Adaptivity and accuracy estimation for FEM and BIEM. In Brebbia und Aliabadi, editors, *Adaptive Meshing and Error Estimates*, chapter 1. Elsevier, 1992.
- [71] E. Rank und I. Babuška. An expert system for the optimal mesh design in the hp-version of the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:2087–2106, 1987.
- [72] E. Rank, H. Bröker, A. Düster, R. Krause und M. Rucker. The p-version of the finite element method for structural problems. In E. Stein, editor, *Error-controlled Adaptive Finite Elements in Solid Mechanics*, pages 263–307. John Wiley & Sons, 2002.

- [73] E. Rank, H. Bröker, A. Düster und M. Rucker. Neue Modellierungskonzepte für FE-Berechnungen mit Ansätzen höherer Ordnung. In P. Wriggers, U. Meißner, E. Stein und W. Wunderlich, editors, *Finite Elemente in der Baupraxis - Modellierung, Berechnung und Konstruktion*, pages 421–430. Ernst & Sohn, 1998.
- [74] E. Rank und A. Düster. h- versus p-version finite element analysis for  $J_2$  flow theory. In *Proceedings of the First M.I.T Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, Cambridge, USA, 2001.
- [75] E. Rank, A. Düster, M. Krafczyk und M. Rucker. Some aspects of coupling structural models and p-version finite element models. In *Proceedings of the 4th World Congress on Computational Mechanics*, Buenos Aires, Argentina, 1998.
- [76] E. Rank, A. Düster, V. Nübel, K. Preusch und O.T. Bruhns. High order finite elements for shells. *submitted to Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2003.
- [77] E. Rank und R. Krause. A multiscale finite-element-method. *Computers & Structures*, 64:139–144, 1997.
- [78] E. Rank, R. Krause und K. Preusch. On the accuracy of p-version elements for the Reissner-Mindlin plate problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43:51–67, 1998.
- [79] E. Rank, R. Krause und M. Schweingruber. Netzadaption durch intelligentes Pre- und Postprocessing. In *Finite Elemente-Anwendungen in der Baupraxis*, Karlsruhe, 1991. Ernst & Sohn.
- [80] E. Rank, M. Rucker, A. Düster und H. Bröker. The efficiency of the p-version finite element method in a distributed computing environment. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52:589–604, 2001.
- [81] E. Rank, M. Rucker und M. Schweingruber. Automatische Generierung von Finite-Element-Netzen. *Bauingenieur*, 69(10):373–379, 1994.
- [82] E. Rank und O.C. Zienkiewicz. A simple error estimator in the finite element method. *Communications in Applied Numerical Methods*, 3:243–249, 1987.
- [83] T.J. Rivlin. *An Introduction to the Approximation of Functions*. Dover, 1969.
- [84] M. Rucker. *A parallel p-version finite element approach for civil engineering and structural mechanics problems*. Dissertation, Lehrstuhl für Bauinformatik, Bauingenieur- und Vermessungswesen, Technische Universität München, 2000.
- [85] Ch. Schwab. *p- and hp-finite element methods, theory and applications in solid and fluid mechanics*. Oxford University Press, 1998.
- [86] H.R. Schwarz. *Numerische Mathematik*. B.G. Teubner, 4. Auflage, 1997.
- [87] M. Schweingruber-Straten. *Generierung von Oberflächennetzen nach der Gebietsteilungstechnik*. Dissertation, Fach Numerische Methoden und Informationsverarbeitung, Universität Dortmund, 1999.

- [88] B. Sendov und A. Andreev. Approximation and interpolation theory. In P.G. Ciarlet und J.L. Lions, editors, *Handbook of numerical analysis, Volume III*, pages 223–462. North-Holland, Amsterdam, 1994.
- [89] J. J. Shah und M. Mäntylä. *Parametric and feature-based CAD/CAM: concepts, techniques, and applications*. John Wiley & Sons, 1995.
- [90] J.C. Simo und T.J.R. Hughes. *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [91] E. Stein, editor. *Error-Controlled Adaptive Finite Elements in Solid Mechanics*. John Wiley & Sons, 2002.
- [92] E. Stein, F.-J. Barthold, S. Ohnibus und M. Schmidt. Adaptive finite elements in elastoplasticity with mechanical error indicators and Neumann-type estimators. In *Proceedings of the Workshop on New Advances in Adaptive Computational Mechanics*, Cachan, September 1997.
- [93] M. Suri. Analytical and computational assessment of locking in the hp finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 133:347–371, 1996.
- [94] M. Suri, I. Babuška und C. Schwab. Locking effects in the finite element approximation of plate models. *Mathematics of Computation*, 64:461–482, 1995.
- [95] J. Szabados und P. Vertesi. Interpolation of functions. *World Scientific, Singapore*, 1990.
- [96] B.A. Szabó und I. Babuška. *Finite element analysis*. John Wiley & Sons, 1991.
- [97] B.A. Szabó, A. Düster und E. Rank. The p-version of the finite element method. In E. Stein, R. de Borst und T.J.R. Hughes, editors, *Encyclopedia of Computational Mechanics*. John Wiley & Sons, 2003.
- [98] B.A. Szabó, A. Düster und E. Rank. The p-version of the finite element method. In E. Stein, R. de Borst und T.J.R. Hughes, editors, *Encyclopedia of Computational Mechanics*. John Wiley & Sons, 2004.
- [99] I. Szabó. *Höhere Technische Mechanik*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1985.
- [100] W.A. Wall, M. Gee und E. Ramm. The challenge of a three-dimensional shell formulation, the conditioning problem. In *Proceedings of ECCM '99, European Conference on Computational Mechanics*, München, Germany, 1999.
- [101] P. Watzlawick. *Anleitung zum Unglücklichsein*. Piper, 1988.
- [102] N.E. Wiberg und S. Ziukas. Superconvergent patch recovery technique. Inside report d31, Department of Structural Mechanics, 1993.
- [103] M.L. Wilkins. Calculation of elastic-plastic flow. In B. Alder et al., editor, *Methods of Computational Physics 3*. Academic Press New York, 1964.
- [104] P. Wriggers. *Nichtlineare Finite-Element Methoden*. Springer-Verlag, 2001.

- 
- [105] P. Wriggers. *Computational contact mechanics*. Wiley-Verlag, 2002.
- [106] P. Wriggers und G. Zavarise. Computational contact mechanics. In E. Stein, R. de Borst und T.J.R. Hughes, editors, *Encyclopedia of Computational Mechanics*, pages 195–225. John Wiley & Sons, 2003.
- [107] C.R. Wylie und L.C. Barret. *Advanced engineering mathematics*. McGraw-Hill Inc., 1995.
- [108] Z.H. Zhong und J. Mackerle. Static contact problems — a review. *Eng. Comput.*, 9:3–37, 1992.
- [109] O.C. Zienkiewicz und R.L. Taylor. *The Finite Element Method – Basic Formulations and Linear Problems*, volume 1. McGraw-Hill Book Company, 5th Auflage, 2000.
- [110] O.C. Zienkiewicz und R.L. Taylor. *The Finite Element Method – Solid Mechanics*, volume 2. McGraw-Hill Book Company, 5th Auflage, 2000.
- [111] O.C. Zienkiewicz und J.Z. Zhu. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:1331–1364, 1992.
- [112] O.C. Zienkiewicz und J.Z. Zhu. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:1365–1382, 1992.