

**Fachgebiet Baustatik
der Technischen Universität München**

Physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlfaserbetonkonstruktionen

Bernhard Thomée

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen
der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Heinrich Kreuzinger

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Karl Schikora
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. habil. Gerhard H. Müller
3. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Kai-Uwe Bletzinger

Die Dissertation wurde am 19.04.2005 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen am 20.06.2005 angenommen.

Physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlfaserbetonkonstruktionen

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt die wirklichkeitsnahe, physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlfaserbetonkonstruktionen. Auf Basis der Fließtheorie wird ein effizientes, dreidimensionales Materialgesetz entwickelt, das sich auch in kommerzielle Finite-Elemente-Programme implementieren lässt. Durch die Verwendung von Materialparametern die sich ausschließlich aus Versuchen ermitteln lassen, ist das Materialgesetz auch in der Praxis anwendbar. Anhand von numerischen Untersuchungen und dem Vergleich mit Versuchsergebnissen wird die Leistungsfähigkeit des Materialgesetzes aufgezeigt. Im Rahmen der Materialparameterbestimmung wird die Idee eines neuartigen, indirekten Zugversuchs, dem „Modified Tension Test“, aufgegriffen und für besonders einfache Zugversuche für Stahlfaserbetonproben weiterentwickelt.

Physically non-linear analysis of steel fiber reinforced concrete structures

Summary

This thesis deals with realistic, physically non-linear analysis of steel fiber reinforced concrete structures. Based on the flow theory of plasticity an efficient, three-dimensional constitutive model, which is also easy to implement in commercial finite element programs, is presented. The model requires only standard material parameters which can be obtained from conventional experiments and thereby enables practical applications. The efficiency of the proposed constitutive model is demonstrated on the basis of numerical examples and their comparison to experimental results. In the framework of material parameter identification the idea of a new, indirect tension testing procedure, the „Modified Tension Test“, is adopted and extended to an easy-to-carry-out tension test for steel fiber reinforced concrete specimens.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 2000 bis 2005 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Statik der Technischen Universität München.

Mein ganz besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Karl Schikora für die außergewöhnliche Förderung und sein großes Interesse an dieser Arbeit. Durch die sehr angenehme und vertrauensvolle Zusammenarbeit, seine Anregungen und seine ständige Diskussionsbereitschaft wurde diese Arbeit erst möglich.

Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Gerhard H. Müller danke ich für sein lebhaftes Interesse und die Übernahme des Koreferates. Ebenso danke ich Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Heinrich Kreuzinger für die bereitwillige Übernahme der Leitung der Prüfungskommission.

Für die angenehme Zusammenarbeit, die großzügige Unterstützung und die Übernahme des Koreferates bedanke ich mich sehr herzlich bei Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Kai-Uwe Bletzinger. Das von ihm am Lehrstuhl für Statik geschaffene Umfeld lieferte eine wichtige Grundlage für eine erfolgreiche Forschungstätigkeit.

An dieser Stelle möchte ich auch meinen Kollegen am Lehrstuhl für Statik für die freundschaftliche und herzliche Zusammenarbeit danken. Nicht nur fachliche Diskussionen, sondern auch zahlreiche gemeinsame Aktivitäten sorgten für eine angenehme Zeit, an die ich immer gerne zurückdenken werde. Meine beiden Zimmerkollegen Dipl.-Ing. F. Jurecka und Dipl.-Ing. M. Firl waren glücklicherweise neben Lehre und Forschung auch für erheiternde Dinge zu gewinnen.

Meiner Mutter Karin Thomée danke ich herzlich für die Unterstützung meiner Ausbildung, sowie für die mühevollen Stunden, die sie mit dem Korrekturlesen dieser Arbeit verbracht hat.

Der größte Dank gebührt meiner lieben Frau Stephanie, die durch die eine oder andere Entbehrung, aber auch mit Ihrer unermüdlichen Unterstützung und großen Geduld, wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat.

München im Juli 2005

Bernhard Thomée

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Problemstellung und Ziele der Arbeit	1
1.2	Vorgehen	3
2	Stahlfaserbeton	5
2.1	Einführung und Terminologie	5
2.2	Faserarten	6
2.3	Fasergehalt	8
2.4	Faser-Matrix Interaktion	8
2.5	Faserorientierung	10
2.6	Eigenschaften	11
2.6.1	Frischbetoneigenschaften	11
2.6.2	Festbetoneigenschaften	11
2.7	Anwendungsbereiche	12
2.7.1	Tunnelbau	12
2.7.2	Allgemeiner Ingenieurbau	13
3	Mechanische Eigenschaften von erhärtetem Stahlfaserbeton	15
3.1	Verhalten bei einaxialer Zugbeanspruchung	15
3.2	Verhalten bei einaxialer Druckbeanspruchung	18
3.3	Mehraxiales Verhalten	20
4	Versuche für Stahlfaserbeton	23
4.1	Direkter Zugversuch	24
4.2	Biegezugversuche	26
4.3	Spaltzugversuche	27
4.4	Moment-Normalkraft Prüfkonzept	28

5	Werkstoffmodelle für Stahlfaserbeton - Überblick	31
5.1	Skalen des mechanischen Verhaltens	31
5.2	Überblick und Einordnung der Materialmodelle	33
5.2.1	Kontinuumsmodelle	33
5.2.2	Diskrete Modelle	39
5.3	Beispiele für Materialmodelle für Stahlfaserbeton	39
6	Elasto-Plastisches Materialgesetz für Stahlfaserbeton	43
6.1	Allgemeines	43
6.2	Fließtheorie für Mehrflächenplastizität	44
6.3	Fließ- und Bruchkriterien	51
6.3.1	Allgemeine Bruchkriterien	53
6.3.2	Bruchmodelle für Beton	55
6.3.3	Fließfläche für Stahlfaserbeton	56
6.4	Evolution der Ver- und Entfestigungsparameter	64
6.5	Entfestigung im Zugbereich	66
6.5.1	Lokalisierung	67
6.5.2	Spannungs-Rissöffnungsbeziehung für Stahlfaserbeton	71
6.6	Ver- und Entfestigung im Druckbereich	74
6.6.1	Spannungs-Dehnungsbeziehung nach Barros & Figueiras	75
6.6.2	Spannungs-Dehnungsbeziehung nach Tanigawa et al.	76
6.6.3	Einaxiale Ver- und Entfestigungsbeziehung im Druckbereich	78
6.7	Algorithmische Umsetzung der Spannungsintegration	81
6.7.1	Spannungsintegration mit dem impliziten Euler-Rückwärtsverfahren	81
6.7.2	Konsistente elasto-plastische Werkstoffmatrix	88
7	Bestimmung der Materialparameter	91
7.1	Parameter des Zugbereichs	92
7.1.1	Analytische Verfahren	92
7.1.2	Experimentelle Verfahren	95
7.2	Elastische Parameter und Parameter des Druckbereichs	108

8	Numerische Untersuchungen	111
8.1	Zug- und Druckstab mit Imperfektion	111
8.2	Biaxiales Materialverhalten	113
8.3	Biegezugversuche	119
8.4	Spaltzugversuche	125
8.5	Tunneltübbinge aus Stahlfaserbeton	130
9	Berechnung von Tunnelschalen aus Stahlfaserbeton	137
9.1	Grundlagen der nichtlinearen Schnittgrößenermittlung	137
9.2	Nichtlineare Berechnung einer Tunnelschale	143
9.2.1	Berechnungsmodell für das Tragsystem Boden - Tunnel	143
9.2.2	Berechnung der Tunnelschale	147
9.3	Tübbing im Bauzustand	151
10	Der Modified Tension Test (MTT)	157
10.1	Geometrieentwicklung	158
10.2	Versuchsreihe	163
10.2.1	Probekörper, Material und Lagerung	163
10.2.2	Prüfkörperformatierung	163
10.2.3	Versuchsdurchführung	164
10.3	Versuchsauswertung und Versuchsergebnisse	165
10.4	Vergleich des MTT mit Ergebnissen von Biegezugversuchen	168
10.5	Schlussfolgerung	170
11	Zusammenfassung und Ausblick	173
	Notation	176
	Literaturverzeichnis	181

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Problemstellung und Ziele der Arbeit

Beton ist ein seit langer Zeit bewährter und wirtschaftlicher Baustoff mit vielen vorteilhaften Eigenschaften. Die Nachteile einer geringen Zugfestigkeit und einem spröden Versagen mit Rissbildung unter Zugbelastung kann durch eine Bewehrung aus Stabstahl kompensiert werden. Treten nur geringe Zugspannungen auf oder ist bei begrenzten Bewehrungsgraden ein Bewehrungseinbau schwierig oder unmöglich, können hier Stahlfasern sowohl unter wirtschaftlichen als auch unter technischen Gesichtspunkten eine Alternative oder Ergänzung zur herkömmlichen Bewehrung sein. Durch die Faserzugabe wird einer Rissbildung entgegengewirkt und einer zunehmenden Rissaufweitung Widerstand entgegengesetzt. Der spröde Werkstoff Beton kann durch die Stahlfasern auch im gerissenen Zustand eine gewisse Resttragfähigkeit erhalten. Somit hat der Baustoff Stahlfaserbeton in den vergangenen Jahrzehnten seinen Platz in bestimmten Bereichen des Betonbaus gefunden.

Normen, Merkblätter und viele Forschungsarbeiten zum Thema Stahlfaserbeton behandeln die Bemessung und Ausführung solcher Bauteile, nicht aber ihre physikalisch nichtlineare Berechnung. Dabei gewinnen physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen zunehmend an Bedeutung. Während früher die Berechnung der Schnittgrößen ausschließlich auf Verfahren der linearen Elastizitätstheorie basierte, ist jetzt beispielsweise nach dem DBV-Merkblatt „*Stahlfaserbeton*“ [DBV01] auch eine nichtlineare Ermittlung der Schnittgrößen zulässig. Durch dieses Vorgehen können steifigkeitsabhängige Umlagerungseffekte erfasst werden, was zu einer wirtschaftlicheren Bemessung führt. Im Tunnelbau ist beispielsweise eine starke Abminderung der Momente in der Tunnelschale durch Rissbildung und Plastifizieren zu beobachten. Werden diese Umlagerungen bei der Schnittgrößenermittlung nicht berücksichtigt führt dies zu unwirtschaftlichen Dicken der Tunnelschale [SO88].

Zur physikalisch nichtlinearen Berechnung von Stahlbetonstrukturen unter Verwendung der *Finite-Elemente-Methode* (FEM) sind seit Mitte der sechziger Jahre zahlreiche Forschungsarbeiten veröffentlicht worden. Ein guter Überblick und eine Beschreibung der wichtigsten dieser Materialmodelle ist z.B. in [HM95] zu finden. Einige dieser Materialmodelle sind bereits seit längerem in kommerziellen *Finite-Elemente-Programmen* implementiert. Trotzdem gestaltet sich ihre Anwendung in der Praxis als schwierig. Die Berechnungen sind sehr rechenintensiv und aufgrund des hochgradig nichtlinearen Materialverhaltens numerisch äußerst sensibel. Letzteres äußert sich oftmals durch Konvergenzprobleme bei der Berechnung. Diese Umstände haben dazu geführt, dass nichtlineare Werkstoffmodelle zumeist nur für Spezialuntersuchungen verwendet werden. Bezüglich der Anwendung nichtlinearer Strukturberechnungen in der

Praxis besteht somit weiterer Forschungsbedarf. Vor allem muss das Konvergenzverhalten durch die Entwicklung stabiler Lösungsalgorithmen verbessert werden.

Obwohl manche Eigenschaften von Stahlfaserbeton denen des Betons ähnlich sind oder sich aus den Eigenschaften der Betonmatrix ableiten lassen, sind Materialgesetze für Beton nicht in der Lage das Strukturverhalten des Stahlfaserbetons ausreichend zu beschreiben. Wohl auch aufgrund der gegenüber Beton in der Häufigkeit der Anwendung untergeordneten Rolle des Stahlfaserbetons findet man nur wenige Forschungsarbeiten, die sich speziell mit der physikalisch nichtlinearen numerischen Analyse von Stahlfaserbetonstrukturen beschäftigen. Materialmodelle für Stahlfaserbeton, die in kommerziellen Finite-Elemente-Programmen implementiert sind, sind kaum zu finden.

Ziel dieser Arbeit ist es daher ein effektives und robustes Materialgesetz zur Berechnung von Stahlfaserbetonstrukturen mittels der Methode der Finiten-Elemente zu entwickeln, das die wesentlichen phänomenologischen Versagensmechanismen des Werkstoffs auf der Makroebene wiedergibt. Durch Verwendung von Materialparametern, die ausschließlich aus Versuchsergebnissen bestimmt werden können oder für die Angaben in Normen und Merkblättern vorhanden sind, soll das entwickelte Materialgesetz auch in der Praxis anwendbar sein. Das Materialgesetz basiert auf der *inkrementellen Fließtheorie* im Rahmen der Plastizitätstheorie. Da das Materialgesetz für allgemeine Spannungszustände anwendbar sein soll, sind die Fließflächen im dreidimensionalen Spannungsraum formuliert. Ein wichtiger Punkt bei der Entwicklung des Materialgesetzes ist die Beschreibung des Lokalisierungsphänomens der Rissbildung im Rahmen der Finite-Elemente-Methode. Objektive Ergebnisse der numerischen Berechnung bezüglich der gewählten Diskretisierung werden durch geeignete Formulierungen der Entfestigungsbeziehungen unter Berücksichtigung der spezifischen Bruchenergie erreicht.

Das Materialgesetz ist so aufgebaut, dass es über eine Programmierschnittstelle, wie sie bei den meisten kommerziellen Finite-Elemente-Programmen vorhanden ist, in diese implementiert werden kann. Für die algorithmische Umsetzung wird ein effektiver und stabiler Lösungsalgorithmus für die Spannungsintegration verwendet und die konsistente Materialtangente zur Verfügung gestellt. Durch Letztere kann eine quadratische Konvergenzrate bei der globalen Gleichgewichtssiteration gewährleistet werden. Für das Materialgesetz gilt die Annahme kleiner Verformungen und kleiner Verzerrungen. Zeitabhängige Effekte wie beispielsweise Kriechen und Schwinden bleiben unberücksichtigt.

Durch zahlreiche Strukturberechnungen, für die größtenteils Versuchsergebnisse vorliegen, wird das entwickelte Materialgesetz verifiziert und die Leistungsfähigkeit aufgezeigt.

Ein weiterer wichtiger Punkt dieser Arbeit ist die Ermittlung der benötigten Materialparameter aus Versuchsergebnissen. Hier zeigt sich, dass die in den Normen und Merkblättern mittels Näherungslösungen aus den Ergebnissen von indirekten Versuchen wie beispielsweise dem Biegezugversuch bestimmten Materialparameter nicht für eine genaue strukturmechanische Berechnung geeignet sind. Die Materialparameter sollen daher durch *Finite-Elemente-Berechnungen* aus den Versuchen bestimmt werden (*Inverse Analyse*).

Zur Bestimmung der Materialparameter wird zusätzlich ein neuartiger indirekter Zugversuch, der *Modified Tension Test* (MTT) vorgestellt. Hiermit lässt sich das einaxiale Zugtragverhalten wie sonst nur bei direkten Zugversuchen direkt aus den Versuchsergebnissen ablesen.

1.2 Vorgehen

Nachdem in *Kapitel 2* ein allgemeiner Überblick über den Werkstoff Stahlfaserbeton gegeben wird, werden in *Kapitel 3* die mechanischen Eigenschaften von erhärtetem Stahlfaserbeton vorgestellt. Sie dienen als Grundlage zur phänomenologischen Beschreibung des Materialverhaltens. Das Verhalten von Stahlfaserbeton ist dabei stark vom Fasergehalt, der Faserart, der Faserorientierung und den Eigenschaften der Betonmatrix abhängig.

In *Kapitel 4* werden die zur Untersuchung des Materialverhaltens von Stahlfaserbeton üblichen Versuche beschrieben. Eine besondere Bedeutung wird dabei den Versuchen zur Untersuchung des Zugtragverhaltens von Stahlfaserbeton beigemessen.

Ein Überblick über mögliche Werkstoffmodelle zur Beschreibung des Tragverhaltens von Stahlfaserbeton wird in *Kapitel 5* gegeben. Anfangs werden die Skalen des mechanischen Verhaltens erläutert. Nach einer Vorstellung und Klassifizierung allgemein möglicher Materialmodelle für Reibungsmaterialien wie Stahlfaserbeton, wird auf Grundlage einer Literaturrecherche speziell auf Methoden zur Modellierung des Materialverhaltens von Stahlfaserbeton eingegangen.

Nachdem die grundlegenden Gleichungen der Fließtheorie im Rahmen der Plastizitätstheorie für Mehrflächenplastizität, die die Grundlage des vorgestellten Werkstoffmodells bilden, erläutert worden sind, wird in *Kapitel 6* das entwickelte elasto-plastische Materialgesetz für Stahlfaserbeton vorgestellt. Durch die Verwendung von zwei Teilfließflächen kann das unterschiedliche Materialverhalten des Stahlfaserbetons im Zug- und Druckbereich abgebildet werden. Zur Beschreibung des Zugversagens wird das *Rankine*-Fließkriterium ausgerundet und mit einem isotropen Entfestigungsgesetz kombiniert. Durch die Verwendung eines Bruchenergiekonzepts kann das Lokalisierungsphänomen der Rissbildung objektiv beschrieben werden. Für den Druckbereich wird ein *Drucker-Prager* Fließkriterium mit isotroper Ver- und Entfestigung angenommen. Für die Entfestigungsbeziehung wird, wie auch im Zugbereich, ein Bruchenergiekonzept verwendet. Durch die Ver- und Entfestigungsbeziehung wird das Materialgesetz an das einaxiale Materialverhalten des Stahlfaserbetons angepasst. Für den Zugbereich wird eine zweiteilige Spannungs-Rissöffnungsbeziehung vorgestellt. Des Weiteren wird in diesem Kapitel das implizite Euler-Rückwärtsverfahren für Mehrflächenplastizität nach einem Algorithmus von Simo und Hughes [SH98] zur Spannungsintegration und die Ableitung des konsistenten elasto-plastischen Werkstoffensors erläutert. Das Materialgesetz wird im Rahmen dieser Arbeit in das Finite-Elemente Programmsystem ANSYS implementiert.

Die Bestimmung der für das Materialgesetz benötigten Materialparameter wird in *Kapitel 7* behandelt. Schwerpunktmäßig wird dabei auf den Zugbereich eingegangen. Grundsätzlich wird zwischen analytischen- und experimentellen Verfahren unterschieden. Im Zusammenhang mit den experimentellen Verfahren werden die in nationalen und internationalen Normen angegebenen Vorgehensweisen angesprochen.

Anhand der numerischen Untersuchungen und dem Vergleich mit Versuchsergebnissen wird in *Kapitel 8* die Leistungsfähigkeit des entwickelten Materialgesetzes aufgezeigt. Untersucht werden sowohl zweidimensionale als auch dreidimensionale Strukturen.

Während das vorhergehende Kapitel das im Versuch beobachtete Materialverhalten besonders gut und genau zu erfassen zum Gegenstand hat, wird in *Kapitel 9* das entwickelte Materialgesetz zur physikalisch nichtlinearen Schnittgrößenermittlung im Rahmen von Bemessungsaufgaben verwendet. Hierbei erfolgen die Berechnungen unter Berücksichtigung des im DBV-Merkblatt „*Stahlfaserbeton*“ [DBV01] und in der neuen DIN 1045-1 [DIN01] angegebenen Sicherheitskonzeptes. Im Anschluss an grundlegende Erläuterungen zur nichtlinearen Schnittgrößenermittlung und dem damit verbundenem Sicherheitskonzept wird anhand eines Beispiels aus

dem Bereich des Tunnelbaus dieses Verfahren umgesetzt und das Potenzial dieser Methode aufgezeigt.

In *Kapitel 10* wird der *Modified-Tension-Test* (MTT) vorgestellt. Es handelt sich dabei um einen neuartigen indirekten Zugversuch der auf einer Idee von Blümel [Blü00] basiert und zur Bestimmung der einachsigen Zugfestigkeit von Fels entwickelt wurde. Diese Idee wird in dieser Arbeit aufgegriffen und für besonders einfache Zugversuche bei Stahlfaserbetonproben weiterentwickelt. Auf der Grundlage von numerischen Berechnungen kann die Probengeometrie erheblich verbessert werden. Anhand von Versuchsergebnissen für Proben mit einem Stahlfasergehalt von 35 kg/m^3 werden die Vor- und Nachteile dieses neuen Versuchs herausgearbeitet.

In *Kapitel 11* werden die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zusammengefasst und ein Ausblick für folgende Arbeiten gegeben.

Kapitel 2

Stahlfaserbeton

Im folgenden Kapitel wird ein Überblick über die wesentlichen Aspekte des Baustoffs Stahlfaserbeton gegeben. Weiterführende Darstellungen zu den Grundlagen und der Technik des Stahlfaserbetons können unter anderem den Büchern von Balaguru & Shah [BS92], Bentur & Mindes [BM90] und Maidl [Mai91] entnommen werden.

2.1 Einführung und Terminologie

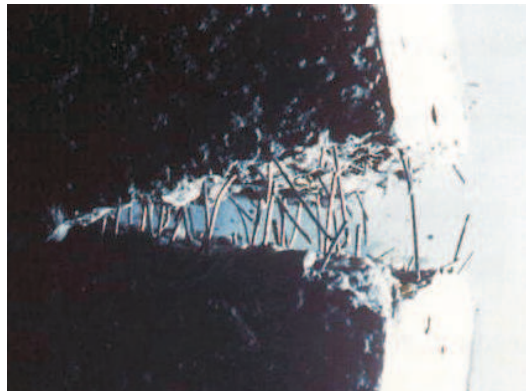


Abbildung 2.1: Stahlfasern vernadeln den Riss

Der Werkstoff Beton kann Druckbeanspruchungen hervorragend aufnehmen. Unter Zugbeanspruchung hingegen ist die Festigkeit wesentlich geringer und das Verhalten ausgesprochen spröde. Dieser Nachteil wird beim Stahlbeton durch die eingelegte Bewehrung ausgeglichen. Bei einer Bemessung, beispielsweise nach DIN 1045-1 [DIN01] darf die Zugfestigkeit des Betons nicht mit berücksichtigt werden und alle zum inneren Gleichgewicht erforderlichen Zugkräfte müssen durch die Bewehrung aufgenommen werden. Kann hingegen eine gewisse, wenn auch geringe Zugfestigkeit des Betons garantiert werden, ist bei vielen Beanspruchungszuständen eine Bewehrung vermeidbar. Dieser Effekt kann durch die Zugabe von Stahlfasern zur Betonmatrix erreicht werden. Hierdurch lässt sich das spröde Verformungsverhalten des unbewehrten Betons in ein duktileres überführen. Die Stahlfasern wirken der Rissbildung entgegen und setzen einer zunehmenden Rissaufweitung Widerstand entgegen. Die Risser sind durch die Fasern miteinander vernadelt, wodurch auch im gerissenen Zustand eine Resttragfähigkeit erhalten bleibt (Abbildung 2.1). Diese Tatsache rechtfertigt den Ansatz einer Zugfestigkeit bei der Bemessung von Stahlfaserbetonbauteilen. Weiterhin wirken sich die

Stahlfasern positiv bei dynamisch beanspruchten Bauteilen aus. Zusammenfassend lassen sich im Wesentlichen folgende durch die Faserzugabe positiv beeinflusste Eigenschaften nennen:

- Erhöhung der Duktilität und Hemmung des Rissfortschritts
- Erhöhung der Schlagfestigkeit und des Verschleißwiderstands
- Verbesserung des Schwindverhaltens

Stahlfasern können daher in manchen Anwendungsbereichen sowohl unter wirtschaftlichen als auch unter technischen Gesichtspunkten eine Alternative zur herkömmlichen Bewehrung darstellen. Gerade wenn der Bewehrungseinbau sehr schwierig oder gar unmöglich ist kann die Anwendung von Stahlfaserbeton sinnvoll sein. Nachteilig wirkt sich allerdings die Faserzugabe auf Verarbeitbarkeit des Betons aus. Durch betontechnologische Maßnahmen, wie beispielsweise die Zugabe von Betonverflüssigern und spezielle Verfahrenstechniken können diese Probleme weitestgehend in den Griff bekommen werden.

Der Begriff Stahlfaserbeton umfasst zementgebundene Normal- und Leichtbetone mit dichtem Gefüge, denen beim Mischen Fasern aus Stahl zugegeben werden [Sch81]. Das Merkblatt „Stahlfaserbeton“ [DBV01] des Deutschen Beton Verein definiert Stahlfaserbeton wie folgt: „Stahlfaserbeton ist Beton nach DIN 1045, dem zum Erreichen bestimmter Eigenschaften Stahlfasern zugegeben werden“ [DBV01]. Es sei darauf hingewiesen, dass es sich im Sinne der Bauordnung bei Stahlfaserbeton aber nicht um einen Beton gemäß DIN 1045, sondern um einen anderen Baustoff handelt [Sch81], der eine Zustimmung im Einzelfall oder eine allgemeine bauaufsichtliche Zulassung erfordert. Zudem unterscheidet man, ob es sich bei dem Beton, dem die Fasern zugegeben werden, um einen reinen Beton oder einen mit Stab- oder Mattenstahl bewehrten Stahlbeton handelt. Zur Trennung werden die Begriffe „stahlfaserverstärkter Beton“ und „stahlfaserverstärkter Stahlbeton“ verwendet.

2.2 Faserarten

Prinzipiell können die dem Beton zugegebenen Fasern aus unterschiedlichsten Materialien bestehen. Neben Stahlfasern können beispielsweise Fasern aus Glas, Kohlenstoff, Kunststoffen, Asbest, keramischen Materialien oder pflanzlicher Zellulose verwendet werden. Für den Baustoff Beton haben derzeit Stahlfasern die größte Bedeutung, aber auch der Einsatz von Glas-, Kunststoff- und textilen Fasern nimmt zu. Im Weiteren wird ausschließlich auf Stahlfasern eingegangen. Die Stahlfaserarten unterscheiden sich hinsichtlich Ausgangsmaterial, Herstellungsverfahren und Geometrie und haben einen wesentlichen Einfluss auf die Materialeigenschaften des Stahlfaserbetons:

- Drahtfasern:
Die am häufigsten verwendeten Stahlfasern werden aus kaltgezogenem Walzdraht gewonnen. Sie haben eine Festigkeit von bis zu 2000 MN/m^2 . Drahtfasern können auch mit verzinkter Oberfläche oder in Edelstahl gefertigt werden. Bei Drahtfasern besteht die Möglichkeit, die Form der im jeweiligen Anwendungsfall geforderten Leistungsfähigkeit anzupassen. Durch Endaufbiegungen oder über die gesamte Faserlänge gewellte Fasern kann das Faserauszugsverhalten erheblich verbessert werden. Die Länge der Drahtfasern beträgt in der Regel $25 - 60 \text{ mm}$ und der Durchmesser $0,4 - 1,2 \text{ mm}$.



Abbildung 2.2: Zu Streifen verklebte Drahtfasern mit Endaufbiegung

- Gefräste Stahlfasern:
Diese Fasern werden durch das Zerspanen von stählernen Walzblöcken gewonnen. Sie weisen eine Festigkeit von etwa 700 MN/m^2 auf. Im Vergleich zu Drahtfasern sind sie spröde und unregelmäßig in den Abmessungen. Diese Faserart findet deutlich geringere Anwendung als Drahtfasern.
- Blechfasern:
Die am wenigsten verwendete Gruppe von Fasern sind die aus dünnem Blech gewonnenen Blechfasern mit Oberflächenstrukturierung. Sie besitzen eine Zugfestigkeit zwischen 400 MN/m^2 und 800 MN/m^2

Stahlfasern sollen die Rissbildung des Stahlfaserbetons behindern und Zugkräfte über den Riss übertragen. Hierfür ist das Verbundverhalten zwischen der Faser und der Betonmatrix maßgebend (siehe Abschnitt 2.4). Eine optimale Ausnutzung der Fasern ist gewährleistet, wenn die Verankerungslänge der Faser genau so groß ist, dass durch die über diese Länge eingeleiteten Verbundspannungen die Zugfestigkeit der Faser erreicht wird. Diese Länge wird als kritische Faserlänge l_{krit} bezeichnet. Fasern mit überkritischer Länge $l_f > l_{krit}$ reißen während Fasern mit unterkritischer Länge $l_f < l_{krit}$ aus der Betonmatrix ausgezogen werden. Eine wichtige Kenngröße zur Einordnung des Wirkungsgrades ist in diesem Zusammenhang das Verhältnis der Faserlänge l_f zum Faserdurchmesser d_f , das sogenannte l/d -Verhältnis. Allgemein gilt, dass mit steigendem l/d -Verhältnis die Effektivität der Faser steigt, jedoch die Verarbeitbarkeit des Frischbetons erschwert wird.

Durch Endaufbiegungen können die Ausziehkräfte beim Ausziehen der Faser aus der Betonmatrix erheblich gesteigert werden, was zu einer erhöhten Tragfähigkeit und einem größeren Arbeitsvermögen des Stahlfaserbetons im gerissenen Zustand führt. Es hat sich gezeigt, dass Drahtfasern mit Endaufbiegungen für die meisten Anwendungen, sowohl die Eigenschaften als auch die Verarbeitbarkeit betreffend, am besten geeignet sind und sich somit auch in der Praxis durchgesetzt haben. Auch bei den in dieser Arbeit untersuchten Stahlfaserbetonen sind Drahtfasern mit Endaufbiegung verwendet worden. In Abbildung 2.2 sind zu Streifen verklebte Drahtfasern mit Endaufbiegungen zu sehen. Die Faserstreifen werden in der Mischanlage oder im Fahrwischer eingemischt. Ein wasserlöslicher Kleber stellt sicher, dass eine Vereinzelung der Fasern während des Mischens eintritt.

2.3 Fasergehalt

Der Stahlfasergehalt beeinflusst sowohl die Frischbeton- als auch die Festbetoneigenschaften ganz wesentlich. Mit abnehmendem Fasergehalt ist ein fließender Übergang zu den Eigenschaften des unbewehrten Betons, dem sogenannten Nullbeton zu beobachten. Der Fasergehalt wird meist in der Einheit kg Stahlfasern pro m^3 Beton angegeben. Des Weiteren gebräuchlich ist die Angabe des Fasergehalts V_f in Volumenprozent oder des Fasergehalts W_f in Gewichtsprozent. Die Umrechnung erfolgt mit folgenden Formeln:

$$V_f [\text{Vol.}\%] = \frac{\text{Fasergehalt } [kg/m^3]}{78,5} \quad (2.1)$$

$$W_f [\text{Gew.}\%] = \frac{\text{Fasergehalt } [kg/m^3]}{24} \quad (2.2)$$

In Gleichung 2.2 wird dabei eine Dichte des Betons von 2400 kg/m^3 zugrunde gelegt. Eine Verbesserung der Festbetoneigenschaften kann ab einem Stahlfasergehalt von etwa 25 kg/m^3 beobachtet werden. Die Effektivität der Fasern steigt dann mit zunehmendem Fasergehalt an. Bei Industriefußböden liegen die Fasergehalte zwischen 25 kg/m^3 und 40 kg/m^3 . Im Tunnelbau und im allgemeinen Ingenieurbau liegen sie bei 40 kg/m^3 bis 100 kg/m^3 , in besonderen Fällen auch bis 120 kg/m^3 [BDH⁺96]. Dieser Fasergehalt ist auch als obere Grenze für allgemeine Anwendungen bezüglich Verarbeitbarkeit und Wirtschaftlichkeit zu sehen.

Durch ein besonderes Verfahren, bei dem Fasern direkt in eine Schalung geriestelt werden und diese anschließend mit Zementleim gefüllt wird, lassen sich Fasergehalte von bis zu $20 \text{ Vol.}\%$ realisieren [BS92]. Dieser Baustoff wird als *SIFCON* (**S**lurry **I**nfiltrated **F**iber **C**oncrete) bezeichnet. Aufgrund der hohen Herstellungskosten wird dieser Baustoff nur bei speziellen Anwendungsgebieten, wie z.B. im militärischen Bereich eingesetzt. Die mechanischen Eigenschaften von *SIFCON* unterscheiden sich deutlich von denen herkömmlicher Stahlfaserbetone mit normalen Fasergehalten wie sie in dieser Arbeit betrachtet werden.

2.4 Faser-Matrix Interaktion

Die Interaktion zwischen Faser und Matrix ist wesentlich für die Wirksamkeit dieses Verbundwerkstoffs. Bei Stahlfaserbetonen mit unterkritischen Fasergehalten (d.h. die Stahlfasern sind nicht in der Lage die beim Reißen der Betonmatrix frei werdenden Zugkräfte aufzunehmen) wird dadurch hauptsächlich das Nachrissverhalten geprägt (siehe Abschnitt 3.1). Nach Stang et al. [SLS90] hat aber die Qualität des Verbundes zwischen Matrix und Faser auch einen wesentlichen Einfluss auf die Fähigkeit der Fasern, Mikrorisse in frühen Belastungsstadien, also vor Erreichen der Risslast, zu stabilisieren.

Die Verbundeigenschaften können experimentell mittels Faserauszugversuchen, bei denen eine einzelne Stahlfaser aus einem Matrixkörper ausgezogen wird, untersucht werden. Das Ergebnis eines solchen Versuchs ist in Form eines Auszugkraft-Auszugwegdiagramms in Abbildung 2.3 dargestellt. Hier ist deutlich das unterschiedliche Verhalten von Fasern mit und ohne Endverformung zu erkennen. Durch die zusätzliche mechanische Verankerungswirkung der Endverformung wird eine deutlich höhere Auszugkraft erreicht und wesentlich mehr Energie für den Faserauszug benötigt.

Des Weiteren wird das Auszugverhalten durch die Zusammensetzung und den Zustand (gerissen oder ungerissen) der Betonmatrix, das l/d -Verhältnis der Fasern, das Fasermaterial, die

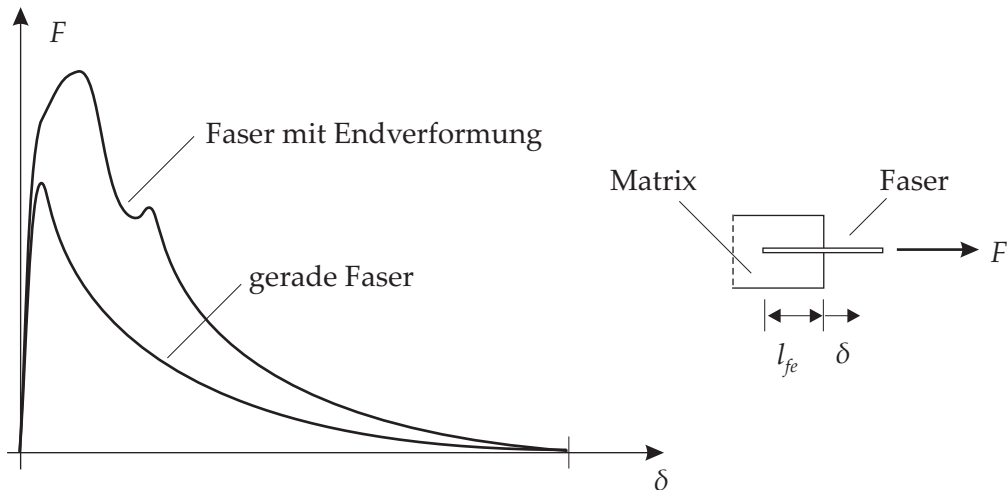


Abbildung 2.3: Typisches Faserauszugverhalten für Fasern mit und ohne Endverformung nach [ANG99]

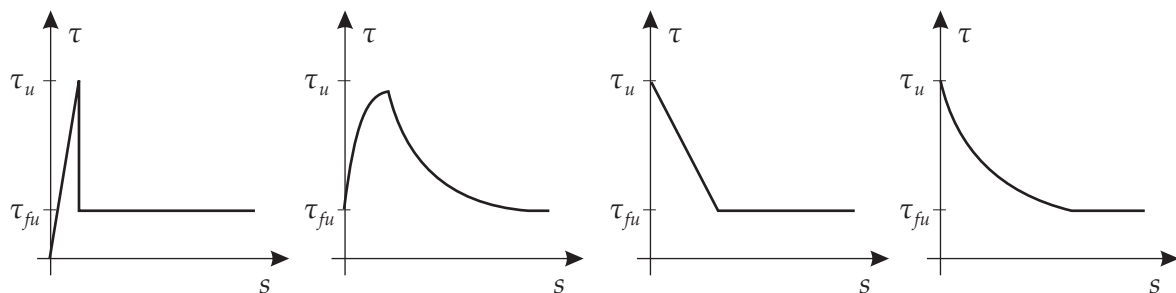


Abbildung 2.4: Unterschiedliche Ansätze für die Verbundspannungs-Schlupfbeziehung [Lin96]

Oberflächenbeschaffenheit der Faser und das Verhältnis Steifigkeit von Faser und Matrix beeinflusst [BS92]. Bažant et al. beschreiben in [BS88], dass die maximale Auszugskraft sowie die Beziehung zwischen Auszugskraft und Auszugsweg bei konstantem l/d -Verhältnis vom Faserdurchmesser d_f abhängt.

Aus den Ergebnissen der Auszugversuche kann auf Grundlage bestimmter Annahmen bezüglich des Verlaufs auf eine Verbundspannungs-Schlupfbeziehung zwischen Faser und Matrix geschlossen werden. Unterschiedliche Ansätze für den Verlauf sind in Abbildung 2.4 gegeben. Bei τ_u handelt es sich um die maximal aufnehmbare Verbundspannung, die sogenannte Verbundfestigkeit. τ_{fu} ist die Reibspannung beim Ausziehen der Fasern. Eine Möglichkeit der Parameterbestimmung von τ_u und τ_{fu} aus Auszugversuchen für den links in Abbildung 2.4 dargestellten Verbundspannungs-Schlupfverlauf ist in [NNC87] angegeben. Eine Zusammenstellung von aus Auszugversuchen unterschiedlicher Forscher ermittelten Reibspannungen ist in [Küt00] zu finden. Die das Verbundverhalten verbessernden Einflüsse von Endverformungen an den Fasern werden hier teilweise pauschal durch ein Erhöhen der Verbundwerte berücksichtigt.

Es existiert auch eine Vielzahl von Ansätzen, das Auszugverhalten analytisch, auf Grundlage solcher Verbundspannungs-Schlupfbeziehungen zu beschreiben. Einen Überblick hierzu ist in [Lin96] zu finden. Verbundspannungs-Schlupfbeziehungen bilden auch die Basis für die analytische Bestimmung von Spannungs-Rissöffnungsbeziehungen, um das Zugtragverhalten von Stahlfaserbeton zu charakterisieren. Auf diese Thematik wird in Kapitel 7 genauer eingegangen.

2.5 Faserorientierung

Die Wirkung einer Stahlfaser ist genau wie bei einer herkömmlichen Bewehrung dann optimal, wenn sie parallel zur Zugspannung liegt und den Riss senkrecht kreuzt. Herstellungsbedingt sind die Fasern aber zufällig angeordnet und nicht orientiert in der Betonmatrix verteilt. Ihre Ausrichtung wird dabei durch geometrische und herstellungstechnische Randbedingungen beeinflusst. So richten sich die Fasern beispielsweise an Ecken und Rändern von geschalteten Bauteilen anders als in ungestörten Bereichen aus [Böl82]. Auch die Betonierichtung sowie die Art und Dauer der Verdichtung wirken sich auf die Faserorientierung aus [EH72], [HBK85], [Sch88]. Eine statistisch gleichmäßige Faserverteilung ist daher in vielen Fällen nicht gegeben.

Durch die Abweichung der Faserrichtung von der Richtung der Zugspannung verringert sich die Wirksamkeit der Faser. Dieser Einfluss wird durch den sogenannten **Faserorientierungsbeiwert** oder Orientierungsfaktor η_θ beschrieben. Er definiert sich als Mittelwert des Verhältnisses aller in Richtung der Zugspannungen projizierten Faserlängen zu der tatsächlichen Faserlänge. Für die Ermittlung von Faserorientierungsbeiwerten gibt es sowohl analytische als auch experimentelle Verfahren wie beispielsweise Röntgenverfahren und photographische Verfahren. Eine Zusammenstellung der von unterschiedlichen Autoren unter Berücksichtigung verschiedener Annahmen ermittelten Faserorientierungsbeiwerte ist in Tabelle 2.1 angegeben. Genauere Ausführungen zur Ermittlung von Faserorientierungsbeiwerten finden sich ebenfalls in [Lin96].

Orientierungsbeiwert 2D = zweidimensional 3D = dreidimensional	Bemerkung, Literaturstelle
$\eta_{\theta,3D} = 0,405$	Romualdi & Mandel [RM64]
$\eta_{\theta,3D} = 0,637$ $\eta_{\theta,3D} = 0,5$ $\eta_{\theta,3D} = 0,333$	bei unterschiedlicher Herleitung Abolitz & Agbim [AA64]
$\eta_{\theta,3D} = 0,333$ $\eta_{\theta,2D} = 0,444$ $\eta_{\theta,1D} = 0,825$	Fasermittelpunkt in Entfernung $l_f/2$ von einem Rand Fasermittelpunkt in Entfernung $l_f/2$ von zwei Rändern (Ecknähe), Kar & Pal [KP72]
$\eta_{\theta,3D} = 0,2$ $\eta_{\theta,2D} = 0,375$	Krenchel [Kre64]
$\eta_{\theta,3D} = 0,5$ $\eta_{\theta,2D} = 0,637$	Ähnliche Vorgehensweise bei der Ableitung in [PR71], [AK73], [Str78]
$\eta_{\theta,3D} = 1 - \frac{2}{15} (1 - v_f) \left(\frac{6(n-1)}{n} + v_c \right)$ $\eta_{\theta,2D} = 1 - \frac{1}{8} (1 - v_f) \left(\frac{5(n-1)}{n} + v_c \right)$	v_f = Faservolumenanteil v_c = Querdehnzahl des Betons $n = E_{Faser} / E_{Beton}$ Schnütgen [Sch75]
$\eta_{\theta,3D} = 0,55$	für $E_{Faser} / E_{Beton} = 7$, Fasergehalt < 10 % [Sch83]

Tabelle 2.1: Faserorientierungsbeiwerte verschiedener Autoren nach [Sch88]

2.6 Eigenschaften

Im Folgenden Abschnitt sollen die wichtigsten Eigenschaften des Werkstoffs Stahlfaserbeton erläutert werden. Auf die für die strukturmechanische Modellierung wichtigen und relevanten mechanischen Eigenschaften des erhärteten Stahlfaserbetons wird ausführlich in Kapitel 3 eingegangen.

2.6.1 Frischbetoneigenschaften

Die Frischbetoneigenschaften haben im Wesentlichen einen Einfluss auf die Verarbeitbarkeit und den Bauablauf. Hauptverantwortlich für die Frischbetoneigenschaften sind die Faserart, der Fasergehalt, das Größtkorn der Matrix und die Art der Faserzugabe. Die Konsistenz nimmt mit steigendem Fasergehalt ab, bis schließlich eine gleichmäßige Faserverteilung im Mischgut nicht mehr möglich ist. Beim Mischvorgang kann es zur Zusammenballung der Fasern, der sogenannten Igel- oder Nesterbildung, kommen.

Die erforderliche Verdichtungsenergie ist bei Stahlfaserbeton größer als bei Beton ohne Stahlfasern. Es ist zu beachten, dass der Verdichtungsprozess einen Einfluss auf die Faserverteilung und die Faserorientierung hat und somit die Festbetoneigenschaften stark beeinflussen kann.

2.6.2 Festbetoneigenschaften

Neben der Erhöhung der Duktilität und der Hemmung des Rissfortschritts als wichtigste Faktoren, wirkt sich die Faserzugabe auf weitere Eigenschaften des erhärteten Stahlfaserbetons aus.

Der Widerstand unter dynamischer Stoßbelastung wird durch die Fasern deutlich erhöht [BD81]. Grund hierfür ist die Energie, die für den Faserauszug benötigt wird. Einer Fragmentierung der Betonmatrix wird durch die Fasern entgegengewirkt.

Ein erhöhter Verschleißwiderstand lässt sich auf eine durch die Fasern verstärkte Zementmatrix im Oberflächenbereich zurückführen [Mai91]. Positiv wirkt sich dies bei der Abnutzung von Industriefußböden und Fahrbahnplatten oder der Erosion durch Wasser aus.

Unter Brandbeanspruchung tragen die Stahlfasern bei feuchtem, normalfestem Beton durch die Reduzierung der Abplatzungstiefe zu einer Erhöhung des Brandwiderstands bei [Kor96]. Bei hochfesten Betonen kann dieses Verhalten allerdings nicht beobachtet werden [KG96]. Die Empfindlichkeit des Materials bei Brand wurde sogar durch die Fasern gesteigert. Gute Ergebnisse konnten hier aber mit einem Fasercocktail aus Stahlfasern und Polypropylenfasern erreicht werden [Küt00]. Durch die Polypropylenfasern werden Porenräume geschaffen, in denen sich der entstehende und für die Abplatzungen verantwortliche Dampfdruck entspannen kann. Die Stahlfasern vernähen die schützende Betonoberfläche mit dem Kernbereich.

Das Schwinden des Betons wird durch Änderungen des Feuchtigkeitsgehalts des Zementsteins verursacht. Die Stahlfasern wirken durch die im Vergleich zur Betonmatrix höhere Steifigkeit dieser Dehnung entgegen. Da der Anteil der Stahlfasern in der Regel sehr gering ist, macht sich diese Wirkung auf das Schwindmaß nicht allzu stark bemerkbar. Der Kriechvorgang des Zementsteins wird durch die Verdrängung des Wassers zwischen den Gelteilchen des Zementsteins verursacht. Dieser Vorgang wird hauptsächlich durch Druckspannungen ausgelöst und die Wirkung der Fasern ist dem entsprechend noch geringer als beim Schwinden. Zusätzlich ist bei Stahlfaserbeton infolge der schwierigeren Verarbeitbarkeit das Porenvolumen größer als

bei herkömmlichem Beton. Dies kann dazu führen, dass die Kriechzahl durch die Faserzugabe sogar geringfügig zunimmt [Sch78].

Das Korrosionsverhalten von Stahlfaserbeton wird oft kontrovers diskutiert. Im ungerissenen Beton kann davon ausgegangen werden, dass die Stahlfasern durch das alkalische Milieu des Betons ausreichend geschützt sind [SW98]. Korrosion ist hier nur in randnahen Bereichen zu beobachten. Abplatzungen konnten nicht beobachtet werden. Im gerissenen Zustand der Betonmatrix sind die Fasern nicht mehr vor Korrosion geschützt. Es scheint aber, dass weniger die Karbonatisierung, sondern mehr das Feuchteangebot im Riss für die Korrosion ausschlaggebend ist. Umfangreiche Untersuchungen hierzu sind in [SW98] gegeben. Maidl berichtet in [Mai91], dass bei bereits ausgeführten, mehrere Jahre alten Bauwerken aus Stahlfaserbeton, wie beispielsweise Tunnelschalen, außer oberflächlicher Abrostungen keine Korrosionsschäden bekannt sind.

2.7 Anwendungsbereiche

Generell ist der Einsatz von Stahlfaserbeton immer dann sinnvoll, wenn aus statischer Sicht nur ein geringer Bewehrungsgrad nötig ist oder nur eine konstruktive Bewehrung erforderlich ist. Stahlfaserbeton kann sowohl als reiner Stahlfaserbeton oder als Mischkonzept mit zusätzlicher Betonstahl- oder Spannstahlbewehrung ausgeführt werden. In der Regel ergeben sich dadurch wirtschaftlichere Konstruktionen mit verbessertem Gebrauchsverhalten und höherer Dauerhaftigkeit [Fal01]. Aus dem im Zugbereich spröde versagenden Beton wird durch die Faserzugabe ein duktiler Werkstoff, der auch im gerissenen Zustand noch in der Lage ist Kräfte zu übertragen. Im Druckbereich wird durch die Fasern ein duktileres Nachbruchverhalten erreicht und damit beispielsweise bei hochfestem Beton ein sprödes Druckversagen verhindert.

2.7.1 Tunnelbau

Seit längerer Zeit wird Stahlfaserbeton im Tunnelbau erfolgreich eingesetzt. Grundsätzlich unterscheidet man beim Tunnelbau zwischen zweischalig und einschalig hergestellten Tunneln. Die Verwendung von Stahlfaserbeton kann bei beiden Bauweisen zu qualitativen und wirtschaftlichen Vorteilen führen. Der Belastungszustand in einer Tunnelschale ist überwiegend durch Drucknormalkräfte und geringere Biegemomente gekennzeichnet. Die Biegemomente, die durch Rissbildung teilweise vermindert und umgelagert werden (s. Kapitel 9) und meist nur zu geringen Zugspannungen führen, lassen sich gut mit Stahlfaserbeton abtragen.

Die zweischalige Bauweise ist gekennzeichnet durch die getrennte Herstellung einer temporären Sicherung und einer Innenschale zur endgültigen Sicherung des Querschnitts. Der Stahlfaserbeton wird hier in erster Linie als Spritzbeton für die Außenschale und als Pumpbeton für die Innenschale verwendet. Die Innenschale hat als langfristig tragendes Element die Anforderungen an Dauerstandsicherheit und Gebrauchsfähigkeit zu erfüllen. Die Rezeptur des Betons, die Faserart und der Fasergehalt sind hierfür so zu wählen, dass einerseits die Pumpfähigkeit gewährleistet ist und andererseits eine ausreichende Frühfestigkeit des jungen Betons vorhanden ist. Bei Spritzbetonaußenschalen hat sich allerdings der Einsatz von reinem Spritzbeton in Kombination mit einer Bewehrungsmatte auf der Tunnelinnenseite sehr gut bewährt, so dass hier die Notwendigkeit für den Einsatz von Stahlfaserspritzbeton mit den dadurch verbundenen Problemen bezüglich der Verarbeitbarkeit dem Autor als fraglich erscheint.



Abbildung 2.5: Tübbinglager und Tunnel mit Stahlfaserbetontübbingauskleidung

Tunnel der einschaligen Bauweise werden hauptsächlich maschinell mittels Vortriebsmaschinen aufgeföhren. Die Auskleidung des kreisrunden Tunnelquerschnitts erfolgt innerhalb des Schildmantels mit einzelnen Ringsegmenten, sogenannten Tübbings. Diese Bauweise gewährleistet aufgrund des hohen Automatisierungsgrades gute Sicherheit und erfüllt die hohen Anforderungen an eine dichte und tragfähige Tunnelschale. Die Tübbings werden im Regelfall großserienmäßig in einem Fertigteilwerk hergestellt. Alternativ zum konventionellen Stahlbeton wird zunehmend Stahlfaserbeton für den Tübbingbau verwendet. Durch die gleichmäßige Verteilung der Stahlfasern können Biegezug- und Spaltzugspannungen in beliebigen Richtungen aufgenommen werden. Unterschiedliche Belastungszustände, die beispielsweise aus den Pressenkräften der Vortriebsmaschine oder Erd- und Wasserdruck, aber auch aus unplanmäßigen Belastungen resultieren, können somit sehr gut abgetragen werden. Auch Abplatzungen in oberflächennahen Randbereichen, zum Beispiel bei Längs- und Quertübbings, in denen eine konventionelle Bewehrung nicht ausreichend wirksam ist, können durch Stahlfasern reduziert werden.

Beispiele für Tunnelprojekte mit Stahlfaserbetontübbings sind der Hachinger Stollen und der Hofoldinginger Stollen der Trinkwasserversorgung der Landeshauptstadt München, die auch in dieser Arbeit in Kapitel 9 untersucht werden. Die im Rahmen dieser Projekte durchgeführten Versuche werden in dieser Arbeit verwendet und numerisch simuliert (Kapitel 8). Die beiden Stollen haben eine Gesamtlänge von etwa 17 km. Der Rohrdurchmesser beträgt 3,4 m. Durch die Verwendung von Stahlfaserbeton mit einem Fasergehalt zwischen 35 und 40 kg/m³ konnte auf eine herkömmliche Bewehrung komplett verzichtet werden. Die Stahlfasern sind allein in der Lage sowohl die durch die Momente in Ringrichtung auftretenden Zugspannungen als auch die, durch die hohen Pressenkräfte der Vortriebsmaschine erzeugten Spaltzugspannungen aufzunehmen.

2.7.2 Allgemeiner Ingenieurbau

Der Hauptanwendungsbereich von Stahlfaserbeton liegt hier bei Industriefußböden. Dadurch, dass die Fasern in der Lage sind während der Hydratationsphase auftretende Zugspannungen aufzunehmen, kann die konstruktive Bewehrung reduziert oder komplett weggelassen werden. Zudem verbessern sich durch die Fasern die Risseverteilung, der Verschleißwiderstand und die Schlagfestigkeit.

Falkner berichtet in [Fal01] über die erfolgreiche Verwendung von Stahlfaserbeton für die Unterwasserbetonsohlen der tiefen Baugruben des Potsdamer Platzes in Berlin. Die mit Zugpfählen rückverankerten Unterwasserbetonsohlen hatten Drücke von bis zu 200 kN/m^2 zu tragen.

Die Deutsche Bahn AG erprobt eine „Feste Fahrbahn“ auf Grundlage eines Mischbewehrungskonzeptes aus Stahlfasern und normaler Stabstahlbewehrung. Bezüglich Dauerhaftigkeit und Rissbreitenentwicklung zeigt sich ein besseres Verhalten im Vergleich zu reinen Stahlbetonstrecken.

Auch im Zusammenhang mit der Entwicklung von hochfestem Beton kommen Stahlfasern zum Einsatz. Der Nachteil von hochfestem Beton, ein sehr sprödes zum Teil sogar explosionsartiges Druckversagen, kann durch eine Faserzugabe vermindert werden [Fal01]. Hier hat sich besonders der Einsatz sogenannter „Fasercocktails“, einer Mischung beispielsweise von Stahl- und Polypropylenfasern, bewährt [Küt00].

Ein letzter zu erwähnender Anwendungsbereich seien Maschinenfundamente. Hier werden die hohe Schlagfestigkeit und das günstige Dämpfungs- und Verformungsverhalten von Stahlfaserbeton unter dynamischer Belastung ausgenutzt.

Kapitel 3

Mechanische Eigenschaften von erhärtetem Stahlfaserbeton

In diesem Kapitel wird auf die Materialeigenschaften des Stahlfaserbetons eingegangen, die bei der phänomenologischen Beschreibung des Materialverhaltens im Rahmen des entwickelten Materialgesetzes von Bedeutung sind und berücksichtigt werden. Da es sich bei dem vorgestellten Materialgesetz um ein auf Makroebene formuliertes Gesetz handelt, in dem Stahlfaserbeton als homogener und isotroper Werkstoff behandelt wird, sind die in Versuchen beobachteten Eigenschaften dieser Ebene von Bedeutung. Dabei handelt es sich speziell um das einaxiale Zug- und Druckverhalten und das Verhalten unter mehraxialen Spannungszuständen. Auf Streuungen, die sich aus unterschiedlichen Mischungsrezepturen, Faserarten und Herstellungsweisen sowie aus Einflüssen des Prüfverfahrens ergeben, wird an dieser Stelle nicht genauer eingegangen. Die Einflüsse solcher Faktoren finden bei der Bestimmung der Materialparameter des Materialgesetzes nach den Verfahren wie sie in Kapitel 7 vorgestellt werden Berücksichtigung. Grundsätzlich hängen die Eigenschaften von erhärtetem Stahlfaserbeton hauptsächlich von der Fasermenge, der Faserart, der Faserorientierung (Betonierrichtung) und den Matrixeigenschaften (Festbetoneigenschaften) ab. Mit abnehmendem Stahlfasergehalt besteht ein fließender Übergang zu den mechanischen Eigenschaften des faserfreien Betons, dem *Nullbeton*.

3.1 Verhalten bei einaxialer Zugbeanspruchung

Während reiner Beton unter Zugbeanspruchung spröde versagt, gekennzeichnet durch einen steilen Abfall der Spannungs-Verformungsbeziehung im Nachrissbereich, zeigt Stahlfaserbeton durch die rissüberbrückende Wirkung der Stahlfasern ein duktileres Verhalten. Das Zugtragverhalten von Stahlfaserbeton ist jedoch speziell im Nachbruchbereich stark vom Fasergehalt und der Faserart abhängig. Gossla [Gos00] berichtet von einem unterproportionalen Ansteigen der Nachrissfestigkeit mit steigendem Fasergehalt. Die Steigung der Spannungs-Verformungsbeziehung in diesem Bereich ist vom Faserauszugsverhalten (s. Abschnitt 2.4), das im Wesentlichen von der Faserart und der Fasergeometrie abhängt, geprägt.

Abhängig vom Verhältnis der Nachrissfestigkeit zur Zugfestigkeit der Betonmatrix spricht man von unterkritischem, kritischem und überkritischem Fasergehalt. Der kritische Fasergehalt entspricht, vergleichbar mit der Mindestbewehrung bei Stahlbeton, dem Fasergehalt, der nötig ist, um die beim Reißen der Betonmatrix frei werdenden Zugkräfte aufnehmen zu können. Bei überkritischen Fasergehalten kann somit die Zugfestigkeit des Stahlfaserbetons über die

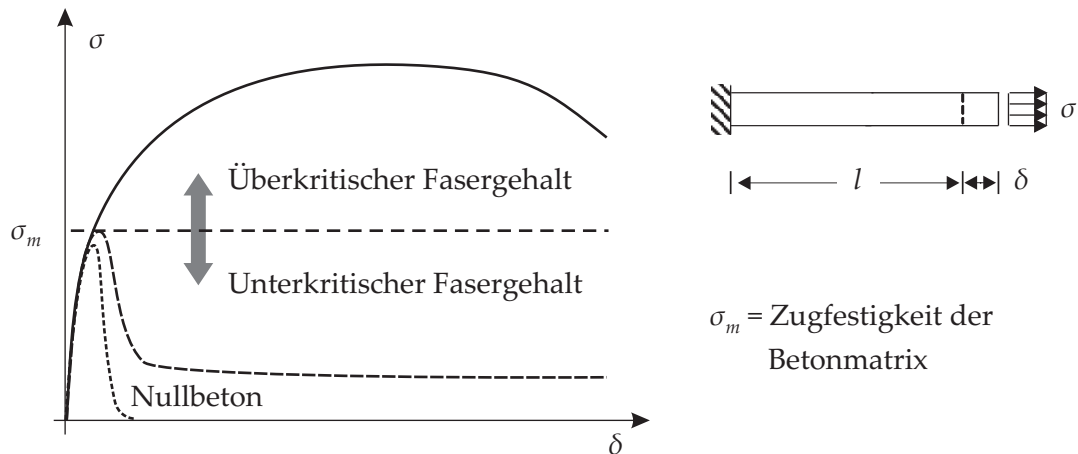


Abbildung 3.1: Spannungs-Verformungsverhalten von Stahlfaserbetonen mit unter- und überkritischem Fasergehalt

Zugfestigkeit der Betonmatrix hinaus gesteigert werden. Bei unterkritischen Fasergehalten fällt die Zugfestigkeit im Nachbruchbereich steil ab und der Bruchprozess ist vor allem durch das Wachstum eines einzigen Risses charakterisiert. Die vorhandenen, den Riss überbrückenden Fasern sind nicht in der Lage, die von der Betonmatrix getragene Zugkraft zu übernehmen (Abbildung 3.1).

Mit der von Kelly [Kel66] angegebenen Formel lässt sich der kritische Faservolumenanteil v_{cr} für einen Verbundwerkstoff mit langen, parallel zur Zugkraft ausgerichteten Fasern folgendermaßen bestimmen:

$$v_{cr} = \frac{\sigma_m - \sigma'_m}{\sigma_f - \sigma'_m} \quad (3.1)$$

mit: σ_m = Zugfestigkeit der Matrix
 σ'_m = Restzugspannung der Matrix bei Erreichen der Zugfestigkeit des Verbundwerkstoffes
 σ_f = Zugfestigkeit der Stahlfasern

Bei beliebiger Orientierung der Stahlfasern in alle Richtungen erhöht sich der kritische Fasergehalt um das drei bis sechsfache [Lin96].

Bei praktischen Anwendungen schwankt der kritische Fasergehalt somit je nach Fasertyp zwischen 100 und 200 kg/m^3 . Fasergehalte dieser Größenordnung kommen in der Regel aus wirtschaftlichen und aus herstellungstechnischen Gründen sehr selten zur Anwendung. Es gibt jedoch sogenannte „High Performance Fibre Reinforced Cementitious Composites“ (HPFRCC), die durch eine dichte Matrix und einen hohen Volumenanteil an kurzen Stahlfasern ($l_f < 13 \text{ mm}$) überkritisches Verhalten zeigen. Berichtet wird hierüber unter anderem in [SPAA99], [LW92], [ODA01] und [TH93]. Auch der in Kapitel 2.3 angesprochene SIFCON (Slurry Infiltrated Fiber Concrete) hat Fasergehalte im überkritischen Bereich.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden ausschließlich Stahlfaserbetone mit **unterkritischem Fasergehalt** betrachtet.

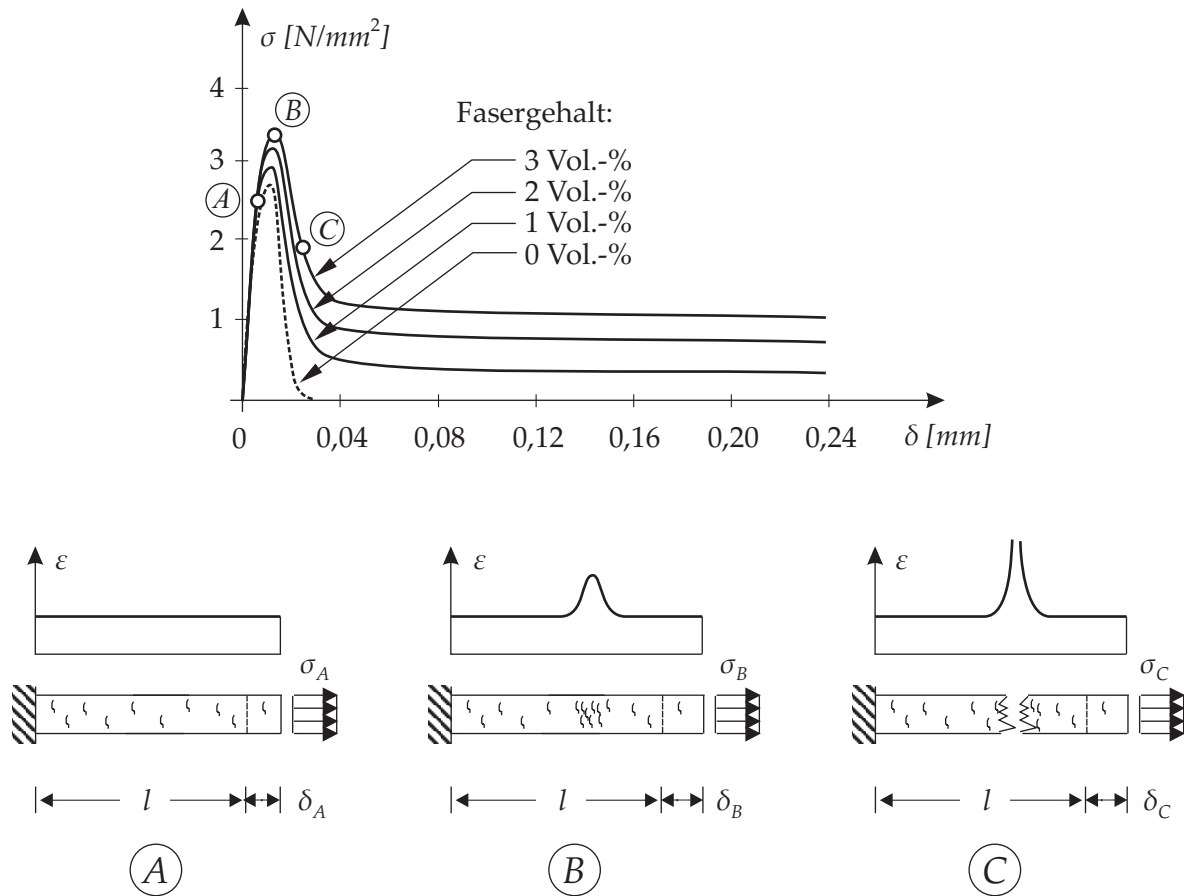


Abbildung 3.2: Spannungs-Verformungsverhalten von Stahlfaserbeton in Abhängigkeit vom Fasergehalt

In Abbildung 3.2 ist die qualitative Spannungs-Verformungsbeziehung für zentrisches Zugverhalten von Stahlfaserbeton mit unterschiedlichen, unterkritischen Fasergehalten dargestellt. Das Verhalten lässt sich dabei in drei Beanspruchungsphasen unterteilen:

Linear-elastische-Phase:

Diese Belastungsphase ist überwiegend von den Eigenschaften der Betonmatrix geprägt. Der Zusammenhang zwischen der Spannung σ und der Verformung δ bzw. der Dehnung ϵ ist bis zu etwa 60 % - 90 % der Betonzugfestigkeit (Punkt A, Abbildung 3.2) annähernd linear. Der E-Modul des Stahlfaserbetons kann beispielsweise über einen Verbundwerkstoffansatz unter Annahme linear-elastischen Verhaltens und vollständigen Verbundes zwischen Matrix und Fasern bestimmt werden (siehe Kapitel 7). Generell ist der Einfluss der Fasern auf den E-Modul des Stahlfaserbetons sehr gering und kann daher in den meisten Fällen vernachlässigt werden.

Mikroriss-Phase:

Im Anschluss an die linear-elastische-Phase beginnen mit einer weiteren Laststeigerung die Bildung und das Anwachsen von Mikrorissen, gekennzeichnet durch die zunehmende Nichtlinearität des Spannungs-Verformungsverlaufs. Kurz vor dem Erreichen der Maximalspannung (Punkt B, Abbildung 3.2) kommt es zur Konzentration von Mikrorissen an einer geschwächten Querschnittsstelle und zur Ausbildung eines Rissbandes (*microcrack band*), das sich durch eine starke Dehnungskonzentration in diesem Bereich auszeichnet. Die Stahlfasern hemmen das Mikrorisswachstum und führen mit steigendem Fasergehalt zu einer geringfügigen Steigerung der Maximalspannung und der zugehörigen Zugdehnung [Sch75].

Makroriss-Phase und Lokalisierung:

Mit dem Überschreiten der Maximalspannung nimmt die Breite des Rissbandes ab und es bildet sich ein einzelner Trennriss, ein sogenannter Makroriss aus. Durch den unterkritischen Fasergehalt sind die Stahlfasern nicht in der Lage, die von der Betonmatrix getragene, frei werdende Zugkraft zu übernehmen und es kommt zu einem steilen Abfall der Zugspannung (Punkt C, Abbildung 3.2), vergleichbar mit dem spröden Entfestigen des reinen Betons. Anschließend kann, im Gegensatz zu reinem Beton, durch die rissüberbrückende Wirkung der Stahlfasern eine Restzugspannung aufgenommen werden. Hierdurch stabilisiert sich die Spannung nach dem Abfall auf einem annähernd konstanten Niveau. Dieser Bereich der Spannungs-Verformungskurve wird fast ausschließlich durch die Tragwirkung der Stahlfasern bestimmt. In [BS92] und [Sch81] wird ein linearer Zusammenhang zwischen dem Fasergehalt und der Höhe des Restzugspannungsniveaus, auch als Nachrissfestigkeit bezeichnet, angegeben. Die Steigung des Verlaufs ist vom Auszugverhalten der Stahlfasern aus der Betonmatrix geprägt, das durch Faserart und Fasergeometrie festgelegt wird und in Abschnitt 2.4 genauer beschrieben ist.

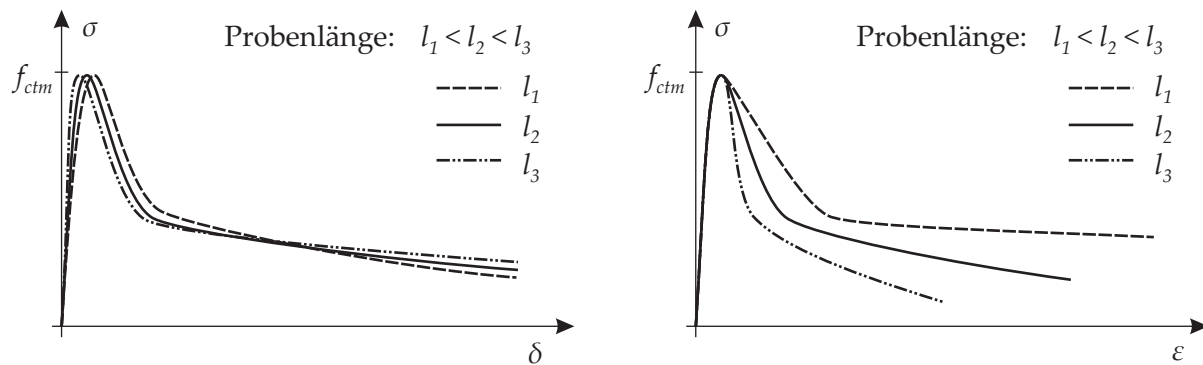


Abbildung 3.3: Qualitativer Einfluss der Probenlänge l auf die Spannungs-Verschiebungsbeziehung und auf die Spannungs-Dehnungsbeziehung

Wie auch bei reinem Beton [Mie84] ist in der Makrorissphase das Phänomen der Lokalisierung zu beobachten [Hil80], [Hil85a] und [SL94]. Das Aufreißen der Zugprobe in einem weggesteuerten Versuch, wie in Abbildung 3.2 dargestellt, findet nur lokal in einem schmalen Bereich, dem Makroriss, statt, während der restliche Bereich der Probe entlastet wird. Dadurch ergeben sich bei Zugversuchen an Probekörpern mit unterschiedlichen Längen l sehr ähnliche Spannungs-Verformungskurven, während die Spannungs-Dehnungsbeziehung stark von der Probenlänge (Abbildung 3.3) abhängt.

Wie das Phänomen der Lokalisierung im Rahmen einer Finite-Elemente-Formulierung behandelt werden kann, wird in Abschnitt 6.5 beschrieben.

3.2 Verhalten bei einaxialer Druckbeanspruchung

Abbildung 3.4 zeigt die Versuchsergebnisse von Schnütgen [Sch81] für Stahlfaserbeton unter einaxialer Druckbeanspruchung. Bis zu etwa einem Drittel der Druckfestigkeit ist die Spannungs-Dehnungsbeziehung annähernd linear. In dieser Phase gibt es kaum Änderungen

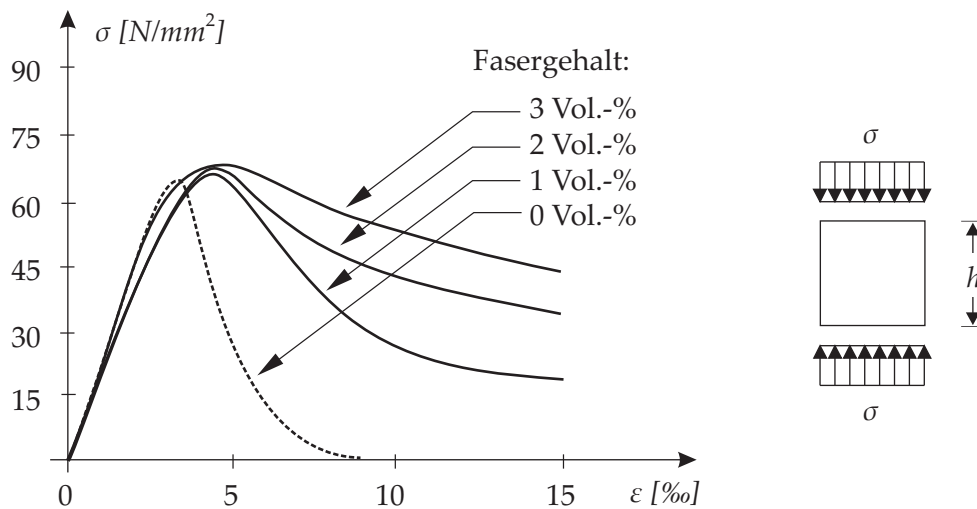


Abbildung 3.4: Spannungs-Dehnungsbeziehung für unterschiedliche Fasergehalte

des schon im unbelasteten Zustand vorhandenen Mikrorissbildes der Betonmatrix. Bei weiterer Spannungssteigerung kommt es zu einem Anwachsen der Mikrorisse, was zu einem nicht-linearen Verlauf der Arbeitslinie führt. Das Mikrorisswachstum wird allerdings im Vergleich zu Nullbeton durch die Stahlfasern gehemmt. Liegt die Spannung im Bereich der Druckfestigkeit, vereinigen sich die Mikrorisse, was zu einer fortschreitenden Zerstörung des Gefüges und nach Überschreiten der Druckfestigkeit zur Entfestigung führt.

Es sind im Wesentlichen drei Einflüsse der Fasern auf das Verhalten des Stahlfaserbetons zu erkennen. Zum einen kommt es mit steigendem Fasergehalt zu einer leichten Zunahme der Druckfestigkeit. Des Weiteren wird die Druckfestigkeit mit steigendem Fasergehalt auf einem größeren Dehnungsniveau erreicht. Zuletzt ist die Erhöhung des Arbeitsvermögens durch die Faserzugabe zu nennen. Das Nachbruchverhalten wird dadurch wesentlich duktiler, die Spannungs-Dehnungsbeziehung im abfallenden Bereich völliger. Dies ist eine Eigenschaft, die zunehmend bei Hochleistungsbetonen ausgenutzt wird. Das äußerst spröde, teilweise explosionsartige Versagen ohne bruchankündigende Rissbildung kann durch die Zugabe von Fasern verhindert werden. Sehr gute Ergebnisse wurden hier mit sogenannten Fasercocktails, bestehend aus unterschiedlichen Faserarten wie z.B. einer Mischung aus Stahl- und Polypropylenfasern, erzielt [Küt00].

Prinzipiell kann die Zunahme von Druckfestigkeit, Druckstauchung und Arbeitsvermögen bei normalfestem Stahlfaserbeton auf eine, durch die Stahlfasern behinderte Querverformung und einen dadurch kontrollierteren Rissfortschritt zurückgeführt werden. Neben dem Fasergehalt ist auch die Faserorientierung von entscheidender Bedeutung [BS85]. So ist bei in Betonierichtung belasteten Stahlfaserbetonen eine stärkere Zunahme von Druckfestigkeit, Druckstauchung und Arbeitsvermögen zu beobachten. In diesem Fall sind die Stahlfasern vermehrt senkrecht zur Lastrichtung ausgerichtet und können die Querverformungen wirksamer behindern. Versuche von Lin [Lin96] bestätigen diese Beobachtung.

Wie zuvor für den Zugbereich beschrieben, kann auch im Druckbereich aufgrund lokaler Verformungen in den Bruchflächen bei der Entfestigung das Phänomen der Lokalisierung beobachtet werden. Van Mier [Mie84] konnte dies mit einaxialen Druckversuchen an unterschiedlich hohen Probekörpern für reinen Beton nachweisen. Tanigawa et al. [TYH80] beobachteten dieses Verhalten an Stahlfaserbetonproben. Während im Nachbruchbereich das Verhältnis

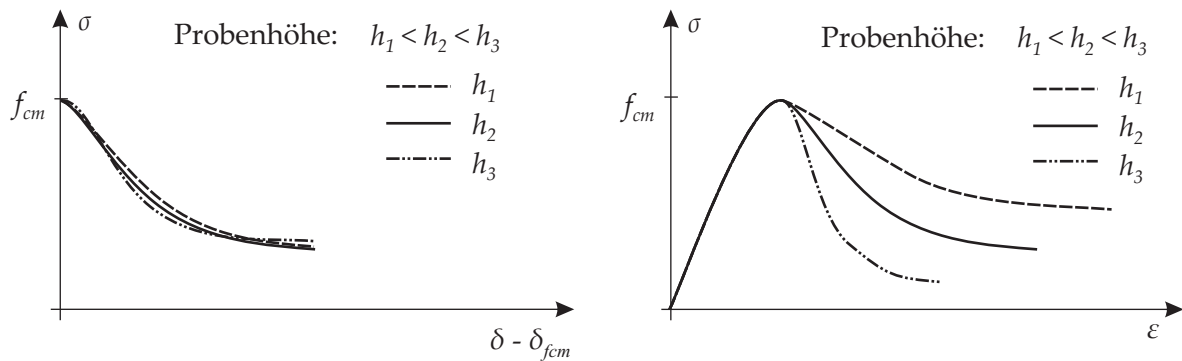


Abbildung 3.5: Qualitativer Einfluss der Probenhöhe h auf die Spannungs-Verschiebungsbeziehung und auf die Spannungs-Dehnungsbeziehung

Spannung-Probenverkürzung kaum von der Probenhöhe h beeinflusst wird, ist die Spannungs-Dehnungsbeziehung (Abbildung 3.5) stark davon abhängig. Wie dieses Phänomen im Rahmen des in dieser Arbeit vorgestellten Materialgesetzes behandelt wird, ist in Abschnitt 6.6 angegeben.

3.3 Mehraxiales Verhalten

Obwohl zahlreiche Forschungsarbeiten und Untersuchungen über das Materialverhalten von Stahlfaserbeton unter einachsigen Beanspruchungszuständen existieren, gibt es nur wenige Arbeiten zum mehraxialen Verhalten. Von Yin et al. [YSMH89], Mansour [Man89] und Traina & Mansour [TM91] wurden biaxiale Druckversuche durchgeführt und von Chern et al. [CYC92], Ko et al. [K⁺83] und Brandt et al. [B⁺81] Stahlfaserbetone unter triaxialen Spannungszuständen untersucht. Veröffentlichungen zu Biaxialversuchen für Zug-Zug oder Zug-Druck Beanspruchungszustände sind dem Autor nicht bekannt.

Vergleichbar mit den Versuchen von Kupfer [Kup72] an Scheiben aus reinem Beton untersuchten Yin et al. [YSMH89] den Einfluss von Stahlfasern auf das biaxiale Druckverhalten von Stahlfaserbetonscheiben ($b = 15,2 \text{ cm}$, $h = 15,2 \text{ cm}$, $t = 3,8 \text{ cm}$). Zur Minimierung der Reibung tangential zur belasteten Oberfläche werden die Kräfte über sogenannte Stahlbürsten eingeleitet. Es werden 19 mm bzw. 25 mm lange, gerade Stahlfasern und Volumenanteile von $1,0\%$ und $2,0\%$ verwendet. In Abbildung 3.6 sind die Versuchsergebnisse für reinen Beton und Stahlfaserbeton dargestellt. Die Versuche zeigen einen signifikanten Anstieg der biaxialen Druckfestigkeit bei Stahlfaserbeton im Vergleich zu reinem Beton. Bei 25 mm Fasern liegt die biaxiale Festigkeit für das Spannungsverhältnis $\sigma_1/\sigma_2 = 0,5$ etwa 70% über der einaxialen Festigkeit und damit etwa 35% über der biaxialen Festigkeit von reinem Beton. Die einaxiale Festigkeit von Stahlfaserbeton ist hingegen nur 4% höher als die von reinem Beton.

Durch die Stahlfasern ist außerdem eine Änderung des Versagensmod zu beobachten. Versagt reiner Beton durch Rissbildung parallel zur betragsmäßig größeren Last auf Querszug, kommt es bei Stahlfaserbeton zu Schubversagen. Die Stahlfasern sind hier in der Lage dem Querszugversagen entgegen zu wirken.

Vergleicht man die Ergebnisse von Yin et al. an reinem Beton mit denen anderer Forscher wie Kupfer [Kup72], Tasuji et al. [TSN78], Nelissen [Nel72] und Su & Hsu [SH88] wie in Abbildung 3.6 unten angegeben, zeigt sich eine völligeren Versagenskurve. Für ein Spannungsverhältnis $\sigma_1/\sigma_2 = 1,0$ liegt der Unterschied bei etwa 15% . Dieser Unterschied ist nicht etwa auf die

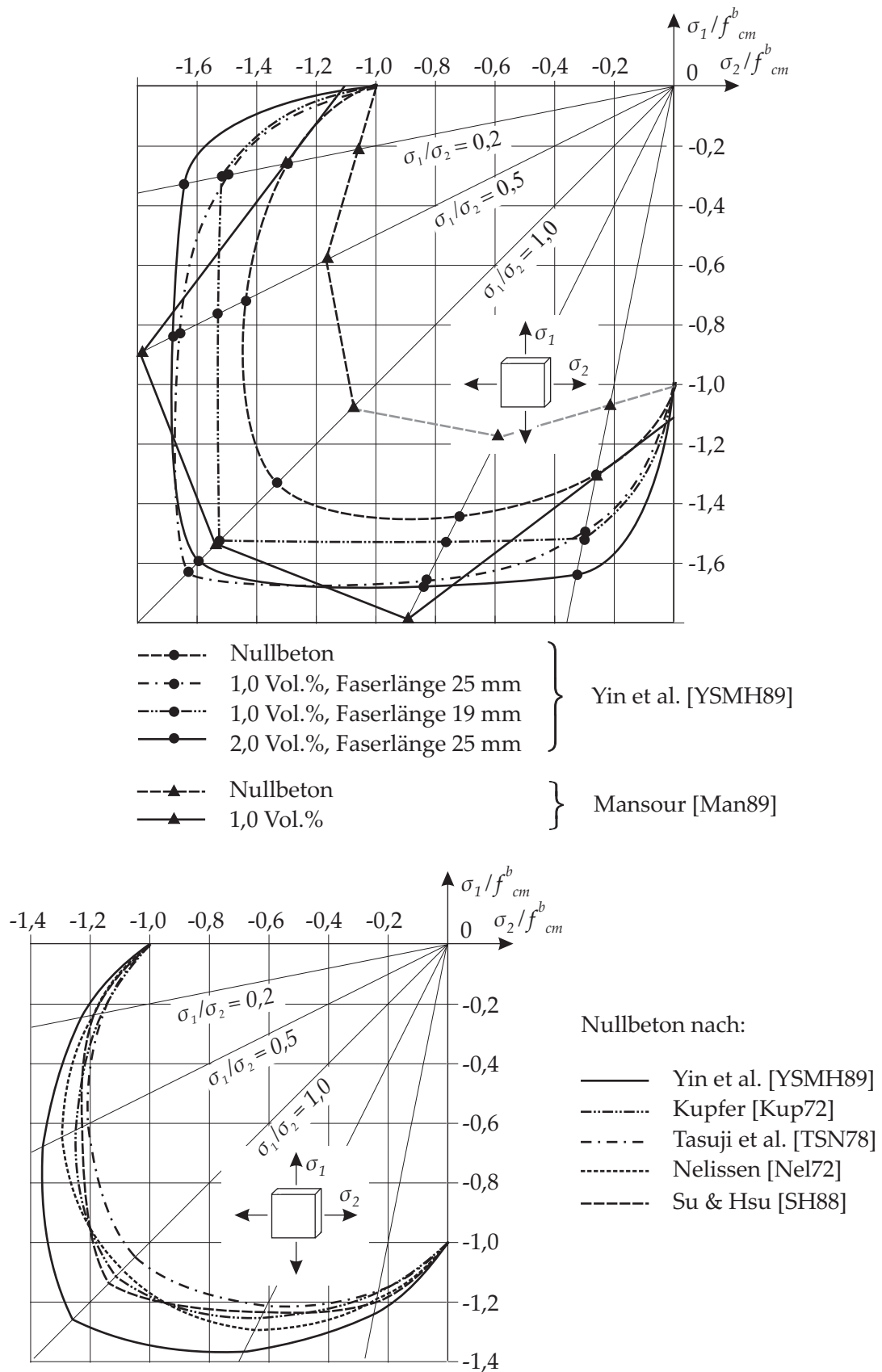


Abbildung 3.6: Biaxiale Versagenskurven für Normalbeton und Stahlfaserbeton

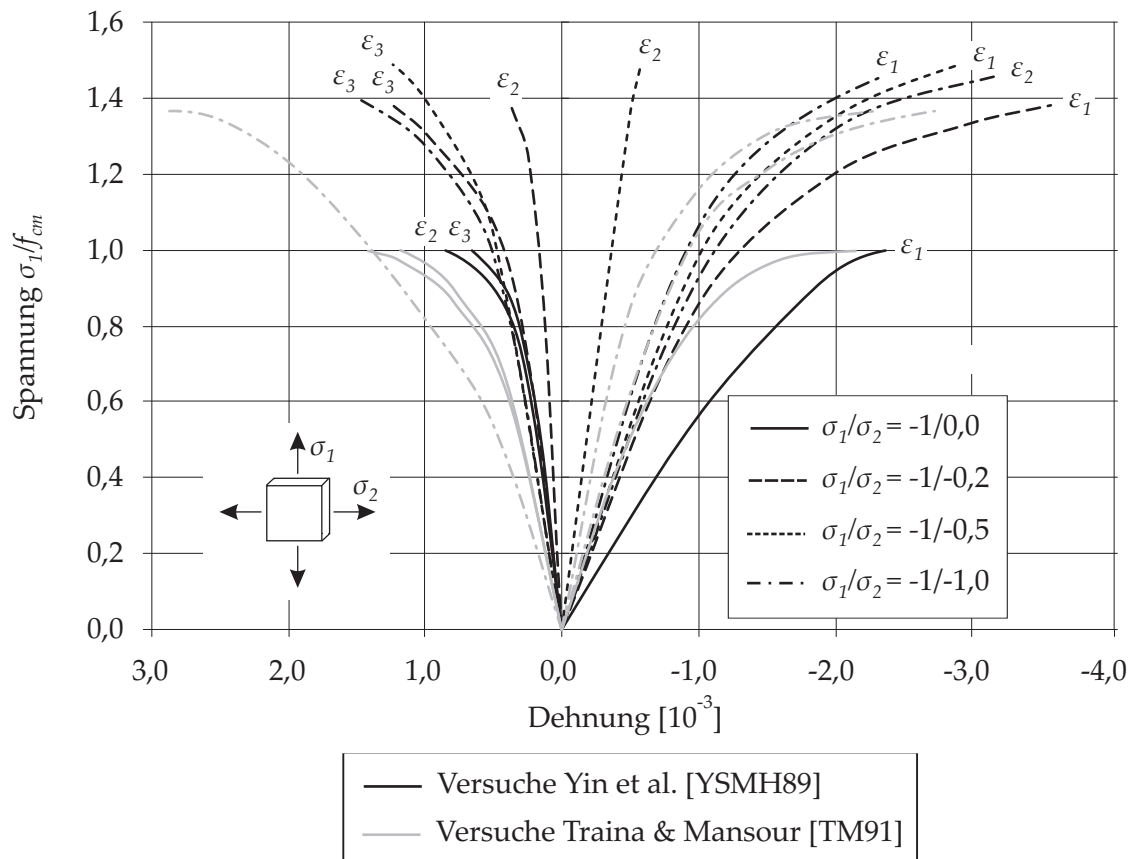


Abbildung 3.7: Spannungs-Dehnungsverhalten unter biaxialer Druck-Druck Belastung nach Yin et al. [YSMH89] und Traina & Mansour [TM91]

Versuchseinrichtung zurückzuführen, sondern kann auf den hier verwendeten, sehr harten, gebrochenen Quarz- und Flintzuschlag zurückgeführt werden.

Mansour [Man89] führte Biaxialversuche lastgesteuert an Würfeln mit einer Kantenlänge von 7,62 cm durch. Es wurde sowohl normalfester als auch hochfester Beton verwendet und mit zwei unterschiedlichen Fasertypen verstärkt. Mansour beobachtete, dass die Festigkeit stark von der Faserart abhängt. Bei einem Fasergehalt von 1,5 Vol.% an Fasern mit Endaufbiegung war eine Erhöhung der biaxialen Festigkeit um 75 % zu beobachten. Die Versuchsergebnisse für Normalbeton und Stahlfaserbeton mit einem Fasergehalt von 1,0 Vol.% an Fasern mit Endaufbiegung und einem l/d -Verhältnis von 60 sind ebenfalls in Abbildung 3.6 zu sehen.

In Abbildung 3.7 ist das von Yin et al. [YSMH89] und Traina & Mansour [TM91] in Versuchen ermittelte Spannungs-Dehnungsverhalten unter biaxialer Druck-Druck Belastung dargestellt. Exemplarisch werden hier die Ergebnisse für einen Stahlfaserbeton mit 1,0 Vol.% an 25 mm langen Fasern ohne Endaufbiegung (Yin et al.) und einen Stahlfaserbeton mit 0,5 Vol.% an 30 mm langen Fasern mit Endaufbiegung (Traina & Mansour) ausgewählt. Diese Versuchsergebnisse dienen unter anderem zur Verifikation des vorgestellten Materialgesetzes und werden in Abschnitt 8.2 ausführlich diskutiert.

Es bleibt jedoch noch anzumerken, dass aufgrund der Abhängigkeiten von Stahlfasergehalt und Stahlfaserart sich diese Versuchsergebnisse nur bedingt auf andere Stahlfaserbetone übertragen lassen.

Kapitel 4

Versuche für Stahlfaserbeton

Wie in Kapitel 2 angesprochen, hängen die mechanischen Eigenschaften des Stahlfaserbetons wesentlich von Faktoren wie Fasergehalt, Faserorientierung, Faserart, Fasergeometrie und der Betonmatrix ab. Veränderungen dieser Faktoren, die sich beispielsweise aus einer veränderten Mischungsrezeptur oder anderen Verarbeitungsbedingungen ergeben können, beeinflussen das Materialverhalten maßgeblich. Eine Verifizierung des Materialverhaltens durch geeignete Versuche als Grundlage für Bemessung und Berechnung ist somit unerlässlich.

Bei den Versuchen für Stahlfaserbeton gibt es zum einen die Standardversuche wie den Druckversuch oder indirekte Zugversuche. Diese Versuche werden in Normen gefordert und sind in der Praxis einfach durchzuführen. Zum anderen gibt es Versuche wie Faserauszugversuche, Biaxialversuche und direkte Zugversuche, die fast ausschließlich für Forschungszwecke verwendet werden. Die Durchführung ist aufwendig, kompliziert und teilweise nur mit speziellen Apparaturen durchzuführen. Die Reproduzierbarkeit bzw. die Vergleichbarkeit von Ergebnissen gleichartiger Versuche von unterschiedlichen Forschern muss hier teilweise in Frage gestellt werden.

Faserauszugversuche dienen der Untersuchung der Interaktion zwischen Faser und Betonmatrix und wurden in diesem Zusammenhang in Kapitel 2.4 angesprochen. Aus den Versuchsergebnissen lässt sich eine Verbundspannungs-Schlupfbeziehung zwischen Faser und Betonmatrix ermitteln. Diese Beziehung wird oft als Grundlage analytischer Untersuchungen des Tragverhaltens verwendet [Lin96], [Küt00] und zum Beispiel daraus eine Spannungs-Rissöffnungsbeziehung abgeleitet (siehe Abschnitt 7.1.1).

Druckversuche für Stahlfaserbeton entsprechen in der Durchführung und Auswertung denen für reinen Beton und sind in den entsprechenden Normen geregelt. So verweist das DBV-Merkblatt „Stahlfaserbeton“ [DBV01] auf die DIN 1045-1 [DIN01] bezüglich der Bestimmung von Druckfestigkeit und E-Modul. Im Weiteren soll auf Faserauszugversuche und Druckversuche nicht genauer eingegangen werden.

Eine besondere Bedeutung kommt Versuchen zur Untersuchung des Zugtragverhaltens von Stahlfaserbeton zu. Durch das verbesserte, duktilere Zugtragverhalten kann die Zugtragfähigkeit bei einer Bemessung in Ansatz gebracht werden und muss mit Hilfe von Versuchen quantifiziert werden. Es wird daher ein Überblick über solche Versuche gegeben und deren Vor- und Nachteile diskutiert. Methoden der Versuchsauswertung indirekter Versuche, die zur Bestimmung von Materialparametern zur Beschreibung des Zugtragverhaltens, sei es in Form einer Spannungs-Dehnungsbeziehung oder einer Spannungs-Rissöffnungsbeziehung dienen werden in Kapitel 7 behandelt. Ein neuartiger indirekter Zugversuch, der *Modified Tension Test* (MTT), der im Rahmen dieser Arbeit erstmalig für Stahlfaserbeton angewendet wurde wird in Kapitel 10 vorgestellt.

4.1 Direkter Zugversuch

Theoretisch gesehen ist der direkte Zugversuch die beste Methode, um das einaxiale Zugtragverhalten zu untersuchen, da die gesuchten Materialparameter wie die Zugfestigkeit, die Nachrissfestigkeit und auch die Spannungs-Rissöffnungsbeziehung direkt ohne Umrechnung aus den Versuchsergebnissen abzulesen sind. Auf der anderen Seite zeigen sich in versuchstechnischer Hinsicht zahlreiche Probleme, die dafür gesorgt haben, dass direkte Zugversuche sowohl für Beton als auch für Stahlfaserbeton national und international keine große Verbreitung gefunden haben.

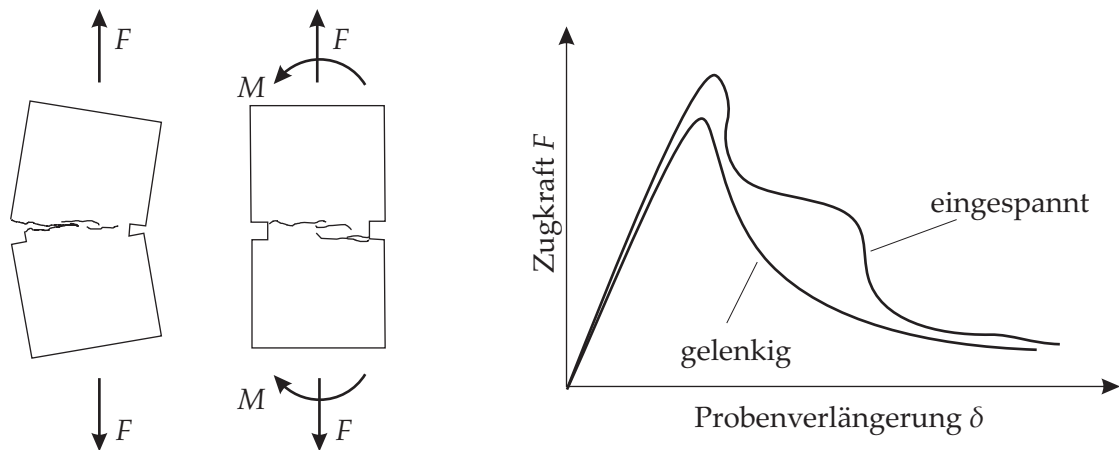


Abbildung 4.1: Einfluss der Lagerungsbedingung der Lasteinleitungsplatten beim direkten Zugversuch nach [Mie97]

Die Versuchsergebnisse sind, wie in Abbildung 4.1 zu sehen, von der Art der Lagerung der Lasteinleitungsplatten abhängig. Die Rissbildung der Probe entwickelt sich einseitig von einer lokalen Fehlstelle aus und es kommt zu undefinierten Spannungszuständen im Bruchquerschnitt. Sind die Lastplatten eingespannt gelagert, führt das einseitige Reißen durch die Verformungsbehinderung zu ungewollten Biegezuständen in der Probe. Durch einen komplizierteren Versuchsaufbau mit gelenkig gelagerten Lasteinleitungsplatten kann das vermieden werden. Allerdings kommt es dadurch zu einer Schrägstellung der Probe, was Probleme bei der Messung der Rissöffnung mit sich bringt.

Des Weiteren gestaltet sich die Realisierung der Lasteinleitung als problematisch. In der Versuchspraxis ist entweder eine mechanische Klemmung oder eine Klebung zur Befestigung der Probekörper üblich. Beide Varianten sind aber mit Nachteilen behaftet. Eine mechanische Klemmung führt zu einer punktuellen Lasteinleitung und zu Spannungsspitzen. Klebungen stellen große Anforderungen an den Klebstoff und an dessen Verarbeitung. Oft wird von einem Versagen der Klebestelle anstelle der eigentlichen Probe berichtet. Neueste Entwicklungen auf dem Sektor der Klebstofftechnologie scheinen jedoch dafür zu sorgen, dass dieses Problem zukünftig in den Griff zu bekommen ist.

Ein weiterer Nachteil des direkten Zugversuchs ist, dass zur Durchführung eine Zugprüfmaschine benötigt wird, die meist nicht zur Standardausstattung von Baustoffprüflaboratorien gehört. Soll auch das Nachbruchverhalten erfasst werden, sind von der Maschine noch weitere Kriterien bezüglich Steuerung und Steifigkeit zu erfüllen. Hauptproblem dabei ist, den Versuch stabil durchzuführen. Stabil bedeutet in diesem Sinn, dass sich die Verschiebung speziell im entfestigenden Bereich langsam und kontinuierlich, ohne Sprünge, steigern lässt [Hil85b].

Eine Aufgabe, die aufgrund der bei der Entfestigung von der Probe freigesetzten Energie große Anforderungen an die Regeltechnik der Prüfmaschine stellt.

Die Durchführung von direkten Zugversuchen ist sehr anspruchsvoll und erfordert Erfahrung. Stroband [Str98] berichtet zudem von starken Streuungen der Versuchsergebnisse bei Stahl-faserbeton mit in der Praxis üblichen Fasergehalten ($V_f < 1 \text{ Vol.}\%$).

Der einzige genormte direkte Zugversuch für Stahlfaserbeton wurde im Jahr 2001 von der RILEM (International Union of Laboratories and Experts in Construction Materials, Systems and Structures) im Rahmen der Empfehlung „TC 162 - TDF: Test and Design Methods for Steel Fibre Reinforced Concrete“ veröffentlicht [RIL01]. Der Versuch dient der Bestimmung der Spannungs-Rissöffnungsbeziehung, also des Nachbruchverhaltens von Stahlfaserbeton. In der Empfehlung wird darauf hingewiesen, dass der Versuch nicht für die Ermittlung der Zugfestigkeit geeignet ist. Der Versuch wird weggesteuert an gekerbten Stahlfaserbetonzylindern mit einem Durchmesser und einer Höhe von je 150 mm durchgeführt. Der Probekörper wird an beiden Seiten in die Prüfmaschine eingespannt. Eine Verdrehung der Probe wird dadurch ausgeschlossen. Gemessen werden die Prüflast und die Verschiebung im Bereich der Kerbe mit drei Wegaufnehmern.

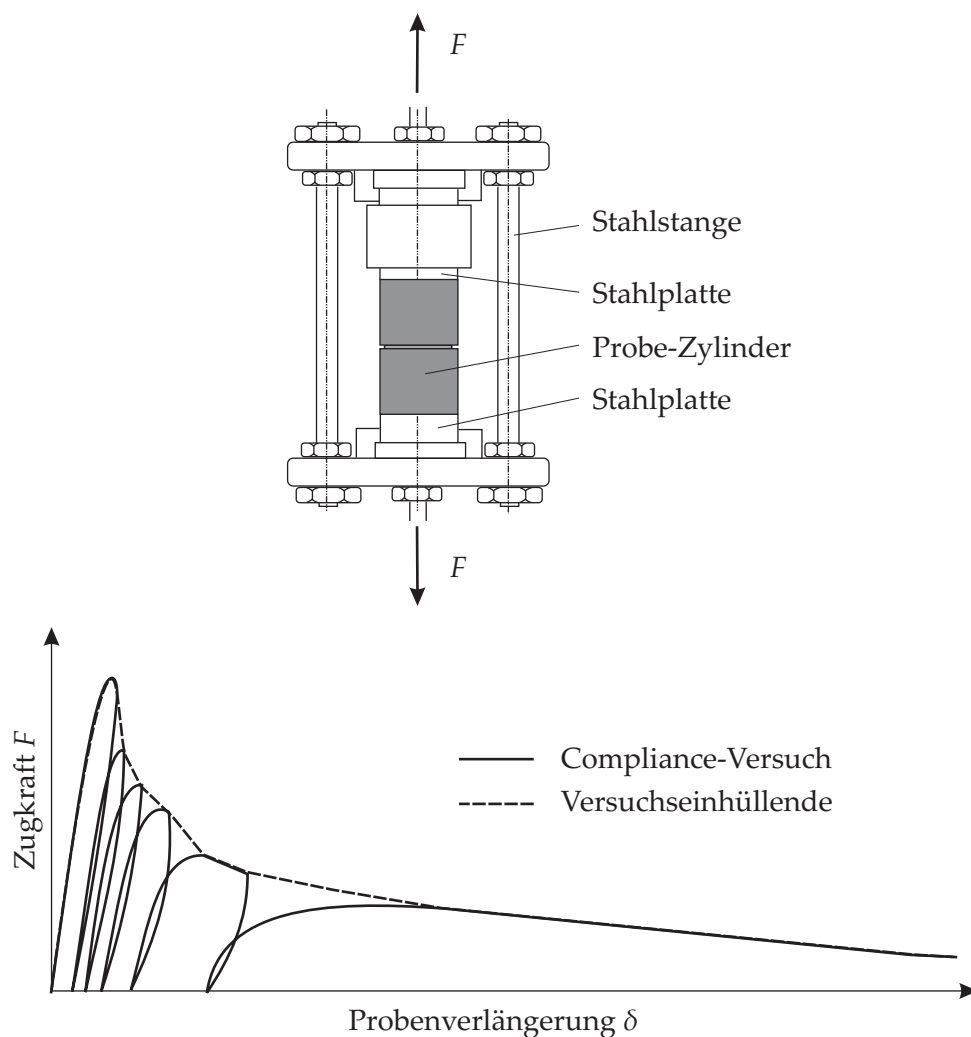


Abbildung 4.2: Versuchsaufbau und Compliance-Versuchsdurchführung bei den direkten Zugversuchen von Lin [Lin96]

Ergebnisse von direkten Zugversuchen sind beispielsweise von Lin [Lin96] und Kützing [Küt00] veröffentlicht worden. Lin verwendet für die Durchführung der Versuche eine spezielle Vorrichtung, die von Hilsdorf et al. [HBK85] vorgestellt wurde und aus drei steifen Stahlstangen besteht, die zum Probekörper parallel geschaltet sind (Abbildung 4.2). Dadurch, dass sich die Prüflast sowohl auf die Stahlstangen als auch auf die Betonprobe verteilt, wird der Abfall der Gesamtlast nach dem Reißen der Probe stabilisiert und es ist möglich den Nachbruchbereich zu erfassen. Trotzdem konnte nach Lin [Lin96] ein instabiler Bruch nur durch den sogenannten „Compliance-Versuch“ vermieden werden. Hierbei wird, sobald die Spannungs-Verformungslinie einen horizontalen Verlauf annimmt, die Probe entlastet und anschließend wieder belastet. Die Spannungs-Verformungsbeziehung ergibt sich als Einhüllende entsprechend Abbildung 4.2.

4.2 Biegezugversuche

Der Biegezugversuch ist der Standardversuch für Stahlfaserbeton, der auch in Normen und Merkblättern im Rahmen von Eignungsprüfungen gefordert wird. Dabei muss generell zwischen zwei Formen, dem 3-Punkt Biegezugversuch und dem 4-Punkt Biegezugversuch, unterschieden werden. Die beiden Versuchsarten sind in Abbildung 4.3 zu sehen. Beide Versuche können sowohl an gekerbten als auch an ungekerbten Proben durchgeführt werden.

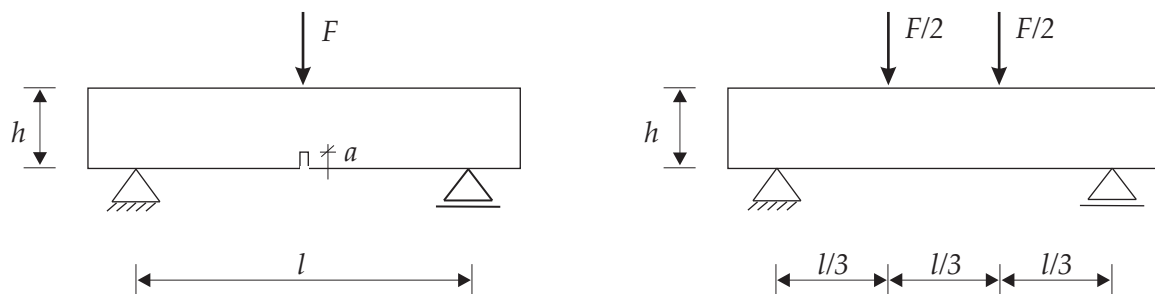


Abbildung 4.3: 3-Punkt und 4-Punkt Biegezugversuche an gekerbten bzw. ungekerbten Stahlfaserbetonprismen

Der 3-Punkt Biegezugversuch an gekerbten Proben wird beispielsweise in der RILEM-Empfehlung TC 162-TDF [RIL00b] vorgegeben. Vorteil der gekerbten Probe ist das Auftreten des Risses an dieser definierten Stelle. Die Rissöffnung (*Crack Opening Displacement* - COD) kann mit Hilfe geeigneter Wegaufnehmer gemessen werden und ein direkter Zusammenhang zwischen Moment und Rissöffnungsweite im Versuch beobachtet werden. Nachteilig ist, dass der Riss nicht an der Stelle der niedrigsten Materialfestigkeit auftritt. Einflüsse durch Maßstabeffekte (*size effect*), von unterschiedlichen Stahlfasern und durch die Probenproduktion auf die Ergebnisse dieses Versuchs werden z.B. von Kooimann [Koo00] genauer angesprochen.

Der 4-Punkt Biegezugversuch an ungekerbten Proben wird sowohl im DBV-Merkblatt „Stahlfaserbeton“ [DBV01] für Stahlfaserbeton als auch in DIN 1048-Teil 5 [DIN91] für normalen Beton vorgeschrieben. Auch in der schweizerische SIA-Richtlinie „162/6 Stahlfaserbeton“ [SIA99] wird dieser Versuch vorgegeben. Im Gegensatz zum 3-Punkt Versuch liegt hier ein konstantes Moment zwischen den beiden Lasteinleitungspunkten vor und die Probe versagt an der schwächsten Stelle. Die Rissöffnung kann aufgrund der nicht vorhersehbaren Stelle des Risses nicht gemessen werden.

Es sind folgende Vorteile der Biegezugversuche, die schließlich auch zu dessen weiten Verbreitung geführt haben, zu nennen:

- Einfacher Versuchsaufbau und Durchführung in Druckprüfmaschinen.
- Probekörper sind einfach herzustellen.
- Geringe Kosten.

Als großer Nachteil der Biegezugversuche, wie auch bei allen anderen indirekten Zugversuchen, ist die Auswertung der Versuchsergebnisse zu nennen. Aus den aufgezeichneten Werten, der Prüflast und der vertikalen Durchbiegung bzw. der Rissöffnung muss auf das einaxiale Materialverhalten in Form einer Spannungs-Dehnungsbeziehung bzw. einer Spannungs-Rissöffnungsbeziehung geschlossen werden. Ein Vorgehen, das nicht direkt möglich ist und dem empirische Annahmen zugrunde gelegt werden müssen. Auf diese Problematik, speziell im Zusammenhang mit der Bestimmung der Materialparameter als Grundlage für eine strukturelle Berechnung, wird in Kapitel 7 genauer eingegangen.

4.3 Spaltzugversuche

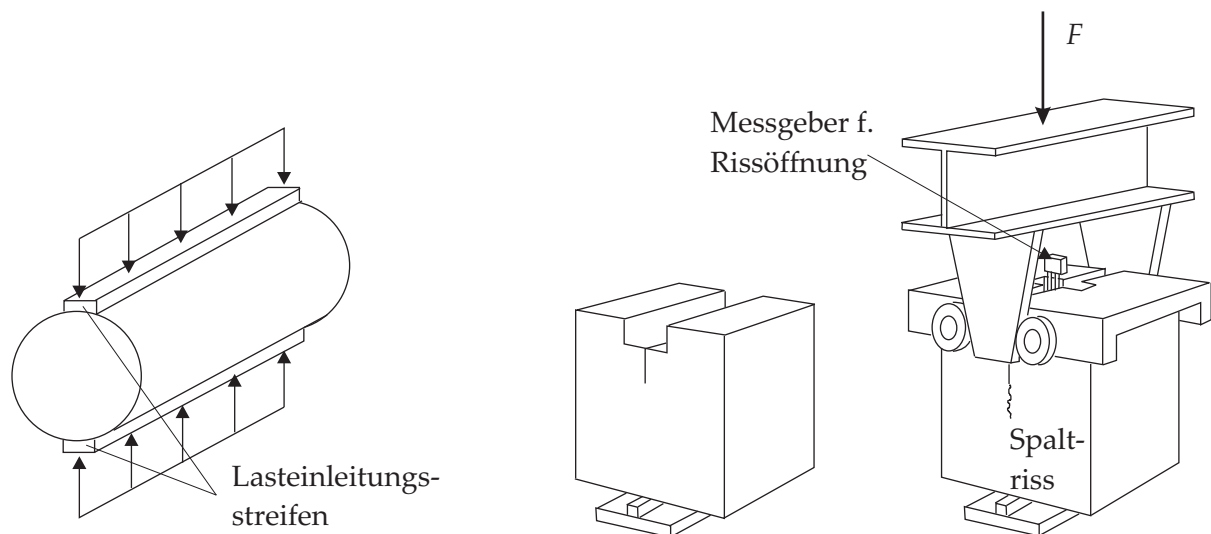


Abbildung 4.4: Klassischer Spaltzugversuch und Keilspaltzugversuch

Spaltzugversuche dienen der Bestimmung der Spaltzugfestigkeit, einem indirekten Maß für die Zugfestigkeit des Materials. Die Anwendung des Spaltzugversuchs ist im Vergleich zum Biegezugversuch bei Stahlfaserbeton eher von untergeordneter Bedeutung. In Abbildung 4.4 ist der klassische Spaltzugversuch, auch als „Brazilian Test“ bezeichnet, und der Keilspaltzugversuch nach [TL86] dargestellt.

Der erstgenannte Versuch wird in DIN 1048-Teil 5 [DIN91] geregelt. Grundlage sind zylindrische Probekörper mit einem Durchmesser von 100 mm oder 150 mm und einer Länge von 100 mm, 200 mm oder 300 mm. Alternativ kann die Spaltzugprüfung auch an Prismen und Würfeln erfolgen. Zur Lastverteilung werden 10 mm breite und 5 mm dicke Lastverteilungstreifen, vorzugsweise aus Holzfaserplatten oder aus Hartfilz, verwendet. Bei im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Spaltzugversuchen [MPA98a] zeigte sich, dass die in der Norm für

Beton angegebene Breite von 10 mm für Stahlfaserbeton zu gering ist. Bei Verwendung von Lastverteilungstreifen mit dieser Breite wurden diese in den Prüfkörper eingedrückt, ohne dass dieser auf Spaltzug versagte. Die Breite wurde daraufhin auf 17 mm erhöht. Trotz der breiteren Lastverteilungstreifen war kein klassisches Spaltzugversagen, wie bei reinem Beton, wo der Prüfkörper schlagartig in der Mitte durch Bruch versagt, zu beobachten. Aufgrund des duktileren Materialverhaltens war vielmehr eine Versagenskombination aus Eindrücken des Lastverteilungstreifens und Spaltzugbruch gegeben. Auf die numerische Simulation und Auswertung der Versuchsergebnisse wird weiter in Abschnitt 8.4 eingegangen.

Das Prinzip des Keilspaltversuchs besteht darin, dass zwischen zwei Rollenlager in vertikaler Richtung ein Keil gedrückt wird. Die daraus resultierende Horizontalkraft spaltet den gekerbten Prüfkörper. Als Steuergröße für den weggesteuerten Versuch dient die Verschiebung in der Wirkungslinie der eingetragenen Horizontalkraft, also der Spaltkraft. Damit entspricht die Fläche unter der Spaltkraft-Verschiebungskurve der zur vollständigen Spaltung der Probe aufzuwendenden Arbeit, aus der sich durch Division mit der Rissfläche die Bruchenergie G_f bestimmen lässt. Slowik [Slo02] beschreibt den Keilspaltversuch als ein in besonderer Weise geeignetes Verfahren zur Bestimmung der bruchmechanischen Materialparameter. Neben der Bruchenergie lässt sich auch das einaxiale Entfestigungsverhalten aus den Versuchsergebnissen ableiten. Dies erfolgt jedoch nicht auf direktem Weg, sondern indirekt, durch die numerische Simulation des Versuchs.

4.4 Moment-Normalkraft Prüfkonzep

Die gängigen und genormten Versuche dienen der Untersuchung des Materials unter reiner Zug-, Druck- und Biegebeanspruchung. Speziell für die Verwendung des Stahlfaserbetons im Tunnelbau ist jedoch das Verhalten unter kombinierter Belastung durch Drucklängskraft und Biegung von Interesse. Für die Simulation solcher Beanspruchungen wurde an der Ruhr-Universität Bochum das Moment-Normalkraft Prüfkonzep (M-N-Konzep) entwickelt, welches sich für Anwendungsfälle im Tunnelbau nach [Die92] und [Fey95] bereits bestens bewährt hat.

Das M-N-Konzep baut auf einer Modifikation des 4-Punkt Biegezugversuchs auf. Durch den geänderten Versuchsaufbau (Abbildung 4.5) ist es möglich, zusätzlich zu einer Biegebeanspruchung auch eine Normalkraftbeanspruchung in den Probekörpern zu erzeugen. Die Lasteinleitung erfolgt wie beim 4-Punkt Biegezugversuch in den Balkendrittelpunkten. Durch die schräge Lagerung der Prüfkörper kommt es zu einem konstanten Normalkraftverlauf. Mit der konstanten Biegebeanspruchung zwischen den Lasteinleitungspunkten ergibt sich in diesem Bereich ein konstantes Verhältnis der Lastausmitte e zur Balkenhöhe d (e/d -Verhältnis). Das e/d -Verhältnis ist unabhängig vom Lastniveau. Die Festlegung des e/d -Verhältnisses erfolgt ausschließlich durch den Winkel der abgeschragten Enden des Probekörpers, die durch in der Schalung montierte Stahlwinkel hergestellt werden. Das Spektrum der e/d -Verhältnisse, das durch das M-N-Konzep abgedeckt werden kann, erstreckt sich zwischen $e/d = 2,0$ und $e/d = 0,33$. Somit können alle im Tunnelbau relevanten e/d -Verhältnisse durch dieses Prüfverfahren abgedeckt werden [Nit98]. Die Versuchsdurchführung erfolgt analog den klassischen Biegezugversuche. Vorteil dieses Verfahrens ist die Simulation der im Tunnelbau in Wirklichkeit auftretenden Belastungszustände. Rückschlüsse aus den Versuchsergebnissen auf das einaxiale Materialverhalten sind wie auch bei den Biegezugversuchen schwer, und nur unter Annahmen bezüglich des Tragverhaltens, zu ziehen. Weiterführende Betrachtungen und Auswertungen des M-N Konzeps sind von Nitschke [Nit98] und Ortu [Ort00] gemacht worden.

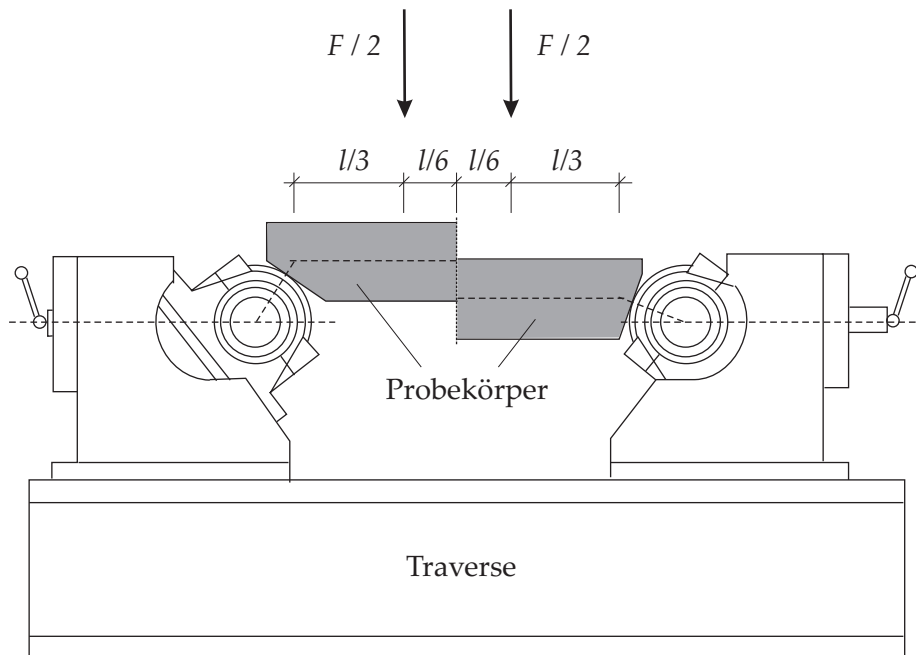


Abbildung 4.5: Schematische Darstellung des Moment-Normalkraft Prüfstandes

Hemmy [Hem03], der in seiner Arbeit ein umfangreiches Versuchsprogramm zur wirklichkeitsnahen Simulation von Beanspruchungszuständen in Tunnelschalen durchführte, merkte folgende zwei Aspekte beim M-N-Konzept an. Aufgrund der geringen Breite des Probekörpers von nur 150 mm ergibt sich eine starke Streuung der Versuchsergebnisse, die nicht der Streuung in der Tunnelschale selbst entspricht. Andererseits stellt sich durch die horizontal unverschieblichen Lager in Verbindung mit dem sehr geringen Abstand der Drittelpunktlasten zum Auflager ein Tragverhalten ein, das eher mit dem eines Sprengwerkes als dem eines Biegeträgers vergleichbar ist. Dies führt dazu, dass das Tragverhalten von Tunnelschalen nur unzureichend durch den Versuch wiedergegeben wird und keine wirklichkeitsnahen Aussagen über das Tragverhalten von Stahlfaserbeton unter kombinierter Momenten-Normalkraft-Beanspruchung möglich sind.

Kapitel 5

Werkstoffmodelle für Stahlfaserbeton - Überblick

In diesem Kapitel soll ein Überblick über die verschiedenen Möglichkeiten und Ansätze, das Materialverhalten von Stahlfaserbeton zu modellieren, gegeben werden. Kein Modell ist allein in der Lage alle in Wirklichkeit auftretenden Effekte und Phänomene auch nur annähernd vollständig zu beschreiben. Zu komplex ist das hochgradig nichtlineare Materialverhalten dieses Verbundwerkstoffes. Es ist daher von der Aufgabenstellung abhängig, welche Eigenschaften durch das gewählte Modell beschrieben werden sollen und wie genau ihre Beschreibung erfolgen soll.

Die Modellierung von Stahlfaserbeton kann dabei auf unterschiedlichen Maßstabsebenen erfolgen, auf die in Abschnitt 5.1 genauer eingegangen wird. Anschließend werden neben der in dieser Arbeit verwendeten Plastizitätstheorie andere Ansätze für Materialmodelle vorgestellt, eingeordnet und gegenübergestellt. Materialmodelle für reinen Beton werden in dieser Aufstellung ebenfalls berücksichtigt. Zum einen dienen sie bei der Modellierung des Stahlfaserbetons als Mehrphasensystem der Beschreibung der Betonmatrix und zum anderen muss sich bei phänomenologischen Modellen das Materialverhalten des Stahlfaserbetons mit abnehmendem Fasergehalt dem des Nullbetons annähern.

Am Ende dieses Kapitels werden einige aus der Literatur ausgewählte Materialmodelle für Stahlfaserbeton genauer dargestellt und diskutiert.

5.1 Skalen des mechanischen Verhaltens

Stahlfaserbeton besteht hauptsächlich aus einem Gemisch von Zement, Zuschlag, Wasser und Stahlfasern, das zu einem festen Körper erhärtet. Dabei kann das mechanische Verhalten auf unterschiedlichen Maßstabsebenen betrachtet werden. Unterschieden wird hierbei zwischen Mikro-, Meso- und Makroebene wie in Abbildung 5.1 dargestellt [Mie97].

Die unterste Ebene ist die **Mikroebene**. Modelle dieser Ebene beschreiben die physikalischen und auch chemischen Vorgänge im Bereich der Kristallstruktur oder der Molekularstruktur. Durch Modelle auf Atomgitterebene lassen sich theoretische Materialfestigkeiten aus den Bindungskräften eines regelmäßigen Gitters bestimmen. Die auf diese Weise ermittelten Festigkeiten sind sehr hoch und werden in der Praxis bei weitem nicht erreicht. Grund hierfür sind Unregelmäßigkeiten und Fehlstellen im realen Material, durch die Spannungsspitzen entstehen.

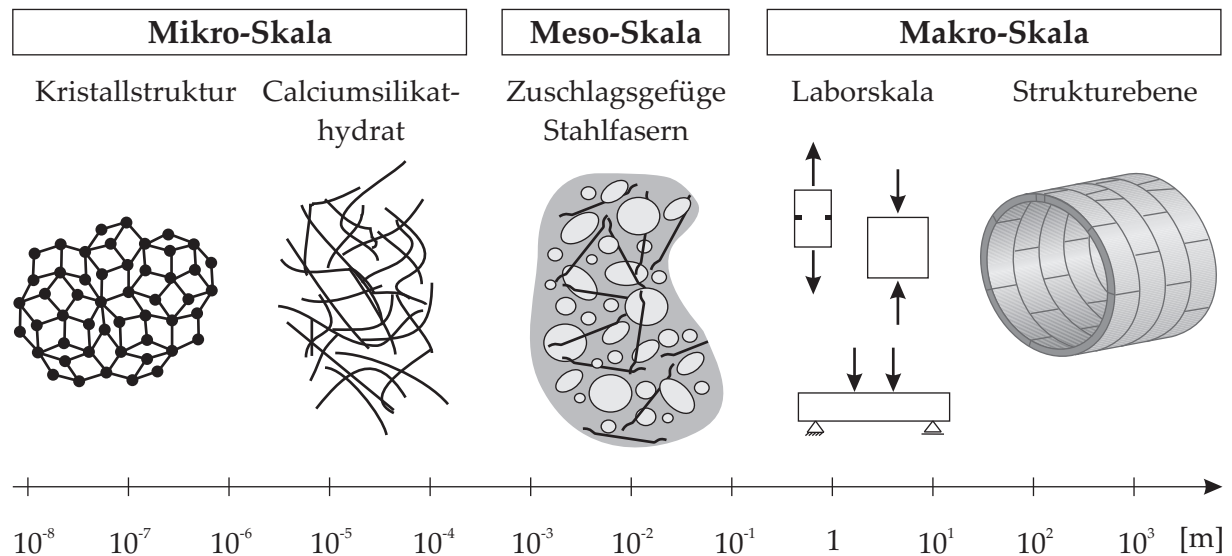


Abbildung 5.1: Maßstabsebenen des mechanischen Verhaltens

In Mikromodellen werden nur Vorgänge innerhalb der einzelnen Bestandteile des Stahlfaserbetons wie dem Zementstein, dem Zuschlag oder der Stahlfasern beobachtet. Die Interaktion der einzelnen Komponenten wird in dieser Ebene nicht beschrieben.

Bei Modellen der **Mesoebene** werden der Zementstein, die Zuschlagskörner und die Stahlfasern jeweils als homogen angesehen und die Interaktion dieser Komponenten beobachtet und modelliert. Bei Stahlfaserbeton werden auch oftmals Zuschlag und Zementstein zusammengefasst und ein System bestehend aus Betonmatrix und Stahlfasern betrachtet.

Im Bereich der **Makroebene** befinden sich Strukturen wie Versuchskörper und Bauwerke. Hier ist sinnvoll die einzelnen Bestandteile des Stahlfaserbetons zu einem homogenen Material zusammenzufassen. Das nichtlineare Materialverhalten wird phänomenologisch abgebildet und die mechanischen Prozesse auf Mikro- und Mesoebene werden homogenisiert (verschmiert) in einer höheren Skala durch andere Materialkenngrößen erfasst.

Die Simulation von Tragverhalten und Versagensmoden von Strukturen der Makroebene erfolgt derzeit noch nicht mit Modellen, deren mechanische Basis auf Mikro- oder Mesoebene liegt. Ein Hauptgrund dafür sind die unterschiedlichen Eigenschaften und Informationen die als Eingangsparameter für die Modellierung auf der jeweiligen Ebene zur Verfügung gestellt werden müssen. So sind für Modelle der Mesoebene, bei denen die Struktur des Materials selbst abgebildet wird, folgende Eingangsgrößen nötig:

- Zusammensetzung und Struktur der Betonmatrix (Kornverteilung, Zementgehalt usw.)
- Stahlfasergehalt, Stahlfasergeometrie und Stahlfaserorientierung
- Materialeigenschaften der einzelnen Materialkomponenten
- Verbundeigenschaften zwischen den Materialkomponenten

Diese Größen lassen sich meist nur mit speziellen Untersuchungsmethoden und Versuchen bestimmen, die in der Praxis nicht durchführbar und üblich sind. Anders verhält es sich hingegen bei Modellen der Makroebene. Zur Beschreibung des Materials, das als homogen angesehen wird, dienen phänomenologische Beobachtungen des Tragverhaltens wie:

- Zug- und Druckfestigkeit
- Ver- und Entfestigungsverhalten im Zug- und Druckbereich
- E-Modul und Querdehnzahl des Materials
- Bi- und Triaxiales Verhalten

Diese Eigenschaften können leicht mit Hilfe von Standardversuchen bestimmt werden oder sind in Normen gegeben. Eine weitere Möglichkeit ist die analytische Bestimmung der Materialparameter aus Strukturantworten der Meso- oder Mikroebene mittels unterschiedlicher Homogenisierungstechniken, wie beispielsweise der Mischungsregel oder der Berechnung von repräsentativen Volumenelementen. Auf die Bestimmung der Materialparameter von Stahl-faserbeton wird in Kapitel 7 ausführlich eingegangen.

Durch die genaue Abbildung des Materialaufbaus und die damit verbundene große Anzahl an Freiheitsgraden sind Mesomodelle sehr rechenintensiv und für die Berechnungen von größeren Strukturen wie Bauteile von Bauwerken derzeit noch nicht geeignet. Der Einsatz von Mesomodellen und natürlich auch von Mikromodellen beschränkt sich daher auf Anwendungen für Forschungszwecke, bei denen beispielsweise Bruchvorgänge und Rissbildung im Material genauer untersucht und mit experimentellen Beobachtungen verglichen werden sollen.

Das in dieser Arbeit entwickelte Materialmodell beschreibt Stahlfaserbeton als **homogenes Material** in der **Makroebene**.

5.2 Überblick und Einordnung der Materialmodelle

In Abbildung 5.2 ist ein Überblick über mögliche Materialmodelle für Stahlfaserbeton und Beton aber auch für sonstige Reibungsmaterialien gegeben. Die Modelle lassen sich abhängig von der Art der Diskretisierung der Struktur in **Kontinuumsmodelle** und **Diskrete Modelle** aufteilen. Während bei Kontinuumsmodellen die Struktur als homogenes, zusammenhängendes Gebiet betrachtet wird, wird bei diskreten Modellen die Struktur selbst aus einzelnen Teilen aufgebaut. Kontinuumsmodelle können bezüglich der Rissmodellierung in Modelle, bei denen die Risse kontinuierlich modelliert werden und in Modelle, bei denen die Risse diskret, als Diskontinuität in den Verschiebungen modelliert werden, aufgegliedert werden.

5.2.1 Kontinuumsmodelle

Bei **Kontinuumsmodellen** wird die Struktur (Bauteil) als homogenes, zusammenhängendes Gebiet betrachtet. Die konstitutiven Beziehungen, also der Zusammenhang zwischen Kraft- und Verformungsgrößen der Struktur muss alleine durch das Materialgesetz beschrieben werden. Eigentlich handelt es sich bei Stahlfaserbeton um einen Verbundwerkstoff, der sich aus mehreren Komponenten z.B. der Betonmatrix und den Stahlfasern zusammensetzt. Durch die zufällige, unregelmäßige Verteilung kurzer Stahlfasern ist es jedoch möglich Stahlfaserbeton als homogenes Material zu betrachten. Außerdem ist es nicht sinnvoll für die Berechnung größerer Bauteile, wie sie im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt werden, Vorgänge auf der Mikro- und Mesoebene wie die Interaktion zwischen Faser und Matrix genau abzubilden. Kontinuumsmodelle sind daher sehr gut geeignet, das Materialverhalten von Stahlfaserbeton zu

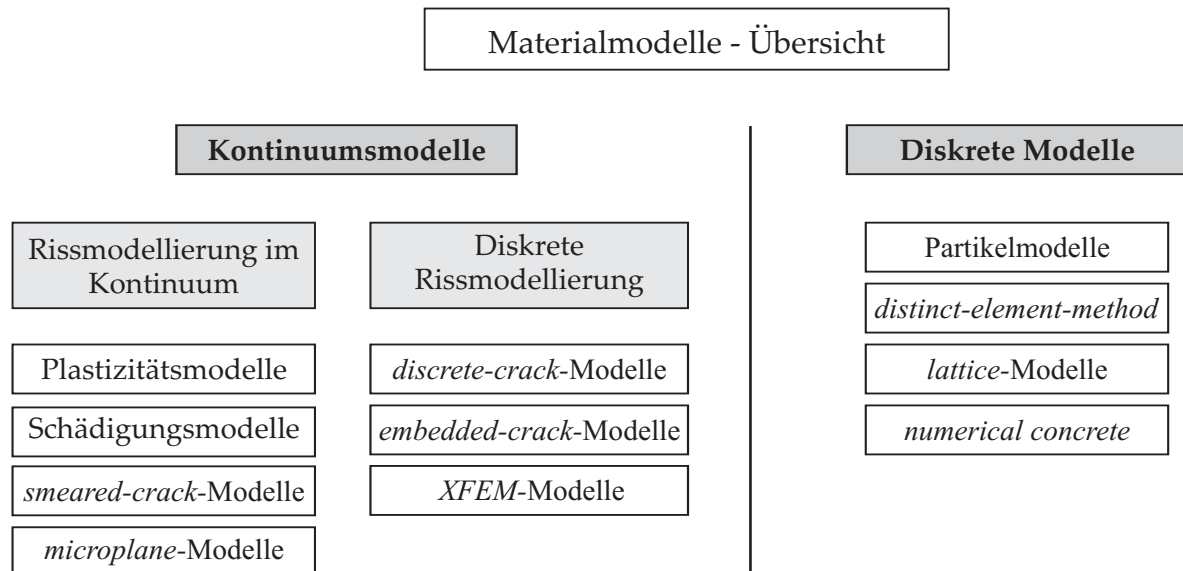


Abbildung 5.2: Einordnung der Materialmodelle

beschreiben. Die Faserwirkung wird bei diesen Modellen durch Anpassung der Materialparameter der konstitutiven Beziehung und des Bruchgesetzes erreicht. Die Materialbeschreibung ist phänomenologisch.

Das allgemeine *Hooke'sche* Gesetz für isotrope linear elastische Materialien stellt das einfachste Werkstoffgesetz dar. Im Weiteren kann die Linearität und die Isotropie aufgegeben werden, um nichtlinear elastische, anisotrope Materialien zu beschreiben. Die Haupteigenschaft elastischen Materials ist dabei, wie in Abbildung 5.3 (a) für den einaxialen Fall dargestellt, dass der Spannungszustand nur vom aktuellen Dehnungszustand abhängt. Be- und Entlastung verlaufen auf dem selben Spannungs-Dehnungspfad und die Dehnungen sind folglich vollständig reversibel. Man unterscheidet bei nichtlinear-elastischen Modellen zwischen hyperelastischen, *Cauchy*-elastischen und hypoelastischen Werkstoffmodellen [CH88]. Während bei den beiden erstgenannten Varianten die konstitutiven Beziehungen total formuliert sind, handelt es sich bei hypoelastischen Modellen um inkrementelle Formulierungen.

Bei den **hyperelastischen Modellen**, auch als *green*-elastisch bezeichnet, leitet sich der Zusammenhang zwischen Spannungs- und Dehnungszustand aus einem elastischen Potenzial $W(\varepsilon_{ij})$ (Formänderungsenergiedichte) ab:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (5.1)$$

Für den einaxialen Fall lässt sich die Formänderungsenergiedichte als Fläche unter der Spannungs-Dehnungskurve deuten. Durch diesen Ansatz ist die Einhaltung der thermodynamischen Grundgesetze gewährleistet. Die Materialantwort ist reversibel und unabhängig vom Belastungspfad.

Bei den ***Cauchy*-elastischen Modellen** besteht ein direkter, funktionaler Zusammenhang zwischen dem aktuellen Spannungs- und Dehnungszustand.

$$\sigma_{ij} = F(\varepsilon_{kl}) \quad (5.2)$$

Es existiert jedoch kein elastisches Potenzial. Damit kann es bei bestimmten Lastzyklen zu Energiedissipation oder Energieerzeugung kommen wodurch die Grundsätze der Thermodynamik verletzt werden. Während die Spannungs-Dehnungsbeziehung pfadunabhängig ist, kann die Energie vom Belastungspfad abhängen [BLM00]. Die Anwendungsbereiche der *Cauchy*-elastischen Modelle und auch der hyperelastischen Modelle sind aufgrund der zuvor genannten Eigenschaften auf die Analyse von proportionalen Lastpfaden beschränkt [Ebe91].

Hypoelastische Modelle hingegen sind inkrementell formuliert. Das reversible, elastische Verhalten ist nur noch auf Ratenebene gegeben.

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\sigma_{mn}) d\varepsilon_{kl} \quad (5.3)$$

Es besteht die Möglichkeit, die Spannungs-Dehnungsbeziehung in Abhängigkeit von der Belastungsgeschichte zu erfassen. Auch bei diesem Modell leitet sich der Spannungszustand nicht von einem Potenzial ab und es können die Gesetze der Thermodynamik verletzt werden.

Da rein elastische Modelle keine bleibenden Verzerrungen abbilden können, sind sie zur Beschreibung der Rissbildung spröder Materialien allein nicht geeignet. Bei erweiterten Kontinuumsmodellen, die in der Lage sind, Rissbildung zu erfassen, kann die Rissmodellierung auf zwei unterschiedliche Arten, zum einen im Kontinuum zum anderen diskret erfolgen. Bei der ersten Variante, der **Rissmodellierung im Kontinuum**, wird das gerissene Material nach wie vor als Kontinuum betrachtet. Bei der zweiten Variante, der **diskreten Rissmodellierung** hingegen, wird ein Riss diskret als Diskontinuität des Verschiebungsfeldes betrachtet.

5.2.1.1 Kontinuumsmodelle mit Rissmodellierung im Kontinuum

Mit Hilfe der **Plastizitätstheorie** können inelastische, bleibende Verformungen berücksichtigt werden (Abbildung 5.3 (b)) und Unterscheidungen zwischen Be- und Entlastungszuständen gemacht werden. Man unterscheidet dabei zwischen der Deformationstheorie und der Fließtheorie.

Die **Deformationstheorie**, auch als *Hencky*-Plastizität bezeichnet [Hen24], basiert auf einer totalen Beziehung zwischen Spannungen und Verzerrungen und der additiven Zerlegung der Verzerrungen in einen elastischen und einen plastischen Anteil. In der ursprünglichen Formulierung ist die Deformationstheorie pfadunabhängig und daher auf proportionale Lastpfade beschränkt.

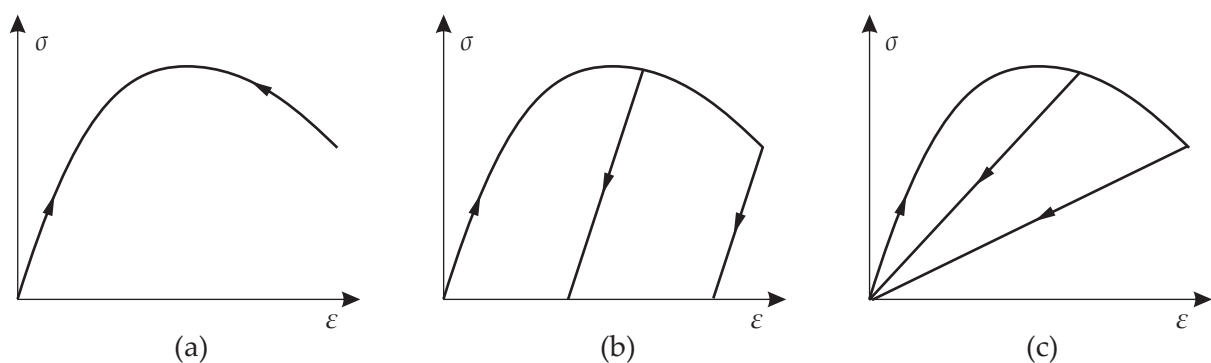


Abbildung 5.3: Elastisches Materialverhalten (a), elasto-plastisches Materialverhalten (b) und elastisch-degradierendes Materialverhalten (c)

Die **Fließtheorie** hingegen ist eine inkrementelle Theorie. Unter der Annahme einer additiven Zerlegung der Dehnungsinkremente in einen elastischen und einen plastischen Anteil, einer Fließfläche, eines plastischen Potentials und einer Fließregel kann das plastische Dehnungsincrement bestimmt werden.

Obwohl weder Stahlfaserbeton noch Beton ein ausgesprochenes Fließen wie beispielsweise Stahl oder Aluminium aufzeigen, kann das phänomenologische Verhalten sehr gut mit Modellen der Plastizitätstheorie erfasst werden. Die Modellierung der Rissbildung erfolgt durch Entfestigung in Verbindung mit einem geeigneten Bruchkriterium wie beispielsweise dem *Rankine*-Kriterium. Eine genaue Darstellung der Fließtheorie, die für das in dieser Arbeit entwickelte Materialgesetz verwendet wird, ist in Kapitel 6.2 gegeben.

Eine weitere Modellklasse, die **Kontinuumsschädigungsmechanik** geht auf die Arbeiten von Kachanov (1958) und Rabotnov (1959) zurück. Während bei der Plastizitätstheorie der elastische Materialtensor unverändert bleibt, werden bei der Kontinuumsschädigungsmechanik als Folge des Schädigungsprozesses, auch als Degradation bezeichnet, die elastischen Parameter abgemindert (Abbildung 5.3 (c)). Die einfachsten Modelle dieser Gruppe sind isotrope Schädigungsmodelle. Hier wird der Elastizitätstensor durch einen skalaren Schädigungsparameter d abgemindert.

$$\sigma_{ij} = (1 - d) C_{ijkl}(\sigma_{mn}) \varepsilon_{kl} \quad (5.4)$$

Anschaulich stellt der Schädigungsparameter ein Verhältnis zwischen der geschädigten bzw. zerstörten Querschnittsfläche und der Gesamtquerschnittsfläche dar. Eine Erweiterung auf anisotrope Schädigung erfolgt unter der Verwendung von vektor- und tensorwertigen Schädigungsparametern. Theoretisch besteht die Möglichkeit die Schädigung im allgemeinsten Fall durch einen achtstufigen Schädigungstensor zu beschreiben. Eine solche Beschreibung mit den nötigen Evolutionsgesetzen gilt jedoch als sehr aufwendig und ist sogar teilweise unmöglich, so dass in den meisten Theorien versucht wird einen achtstufigen Schädigungstensor zu umgehen. Der Ansatz von Cordebois & Sidoroff [CS82], aufbauend auf dem Prinzip der Energieäquivalenz, führt zu einem symmetrischen vierstufigen Schädigungstensor. Des Weiteren sind Formulierungen möglich, die auf dem Prinzip der Verzerrungsäquivalenz und auf dem Prinzip der Spannungsäquivalenz aufbauen. Speziell in Kombination mit der Plastizitätstheorie kann das phänomenologische Verhalten von Stahlfaserbeton und Beton sehr gut erfasst werden. Bei Stahlfaserbeton unter Zugbeanspruchung überwiegt der Schädigungsmechanismus den Plastizitätsmechanismus. Besonders relevant wird dieses Phänomen jedoch nur bei der Berechnung von Lastzyklen.

Bei den **smearred-crack-Modellen** wird wie bei plastizitätsbasierten Modellen der Verzerrungstensor in einen elastischen und einen inelastischen Anteil aufgespalten.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{el} + \varepsilon_{ij}^{frac} \quad (5.5)$$

Der inelastische Anteil wird jedoch als Maß für die Rissöffnung verstanden. Anschaulich wird die diskrete Rissöffnung über einen bestimmten Bereich (Integrationspunkt) verschmiert. Die Kontinuität in den Verschiebungen bleibt gewahrt, was allerdings zu *stress-locking* und einer zu steifen Abbildung der Struktur führen kann [HM95]. Die Risse können sich in beliebiger Richtung ausbreiten. In Abhängigkeit von der Rissentwicklung unterscheidet man zwischen:

- *Fixed orthogonal crack*-Modelle
- *Fixed non-orthogonal crack*-Modelle
- *Rotating crack*-Modelle

Eine Rissbildung erfolgt senkrecht zur größten Hauptzugspannung und induziert orthotropes Verhalten. Im gerissenen Zustand kann die nach wie vor, zum Beispiel durch Rissverzahnung oder Dübelwirkung, übertragbare Schubspannung zu einer Änderung der Hauptspannungsrichtung führen. Das bedeutet, dass so am selben Ort ein weiterer Riss in einer anderen Richtung entstehen kann.

Beim *fixed orthogonal crack*-Modell ist die Bildung erst nach einer Drehung der Hauptspannungsrichtung um 90° möglich. Es können sich daher bei ebenen Zuständen maximal zwei und bei räumlichen Zuständen maximal drei Risse bilden. Aufgrund dieser Einschränkung werden bei diesen Modellen sowohl die Steifigkeit als auch die Traglast überschätzt. Der Übertragung von Schubspannungen im Riss wird durch Einführen eines sogenannten *shear retention*-Faktors Rechnung getragen.

Beim *fixed non-orthogonal crack*-Modell werden mehrere Risse in einem Punkt zugelassen, die nicht orthogonal zu den bereits existierenden Rissen stehen, sondern deren Richtung lediglich um einen vorgegebenen Grenzwinkel ($15^\circ - 120^\circ$) abweicht. Dieses Modell spiegelt das in Versuchen beobachtete Materialverhalten (z.B. [VC82], [BC87]) besser wieder, als das zuvor beschriebene *fixed orthogonal crack*-Modell. Allerdings ist hier der numerische Aufwand größer, da alle Informationen über jeden Riss verarbeitet werden müssen.

In neueren Arbeiten wird daher immer häufiger das *rotating crack*-Modell verwendet. Hier kann nur ein Riss an einem Punkt entstehen, der immer senkrecht zur aktuellen Hauptspannung steht. Im Riss können somit keine Schubspannungen auftreten. Dieses Modell wird von Versuchsergebnissen gestützt, die zeigen, dass beim Entstehen eines neuen Risses vorhandene Risse an der selben Stelle sich zu schließen beginnen [HM95]. Die Implementierung solcher Modelle in FE-Programme ist wesentlich einfacher als die beiden zuvor beschriebenen Modelle.

Aber auch generell sind *smearred-crack*-Modelle relativ einfach zu implementieren. Sie können für dreidimensionale Strukturen angewendet werden und sind gut für die Analyse von Strukturen der Makroebene geeignet. Teilweise wird der Begriff *smearred-crack*-Modell in der Literatur nicht korrekt verwendet und auch andere Kontinuumsmodelle wie beispielsweise ein Plastizitäts- oder Schädigungsmodell als *smearred-crack*-Modell bezeichnet, da auch in diesen Modellen eine diskrete Berücksichtigung der Risse nicht erfolgt. Trotzdem ist der Begriff *smearred-crack*-Modell nur auf Modelle wie oben beschrieben anzuwenden, die auch ausgeprägte Rissrichtungen berücksichtigen.

Modelle der Plastizitätstheorie, der Schädigungsmechanik und *smearred-crack*-Modelle ergeben die konstitutiven Beziehungen, die das Werkstoffverhalten phänomenologisch auf makroskopischer Ebene beschreiben. Die Parameter zur Steuerung dieser konstitutiven Beziehungen weisen daher keine direkte physikalische Bedeutung auf und stehen nicht im Bezug mit dem Materialverhalten auf mesoskopischer und mikroskopischer Ebene.

Im Gegensatz dazu beschreiben *microplane-Modelle* [BO85] das Material auf der Mikroebene der Struktur. Motiviert aus der Metallplastizität werden die konstitutiven Beziehungen auf mikroskopischer Ebene ermittelt und durch geeignete Transformationen auf die makroskopische Ebene abgebildet. Die mikroskopische Ebene entspricht einer Schar von Ebenen mit unterschiedlicher Orientierung. Je nachdem, ob die Spannungen oder die Verzerrungen als

Eingangsgrößen auf der Mikroebene verwendet werden, unterscheidet man zwischen der Vorgehensweise *static-constraint* und *kinematic-constraint*.

5.2.1.2 Kontinuumsmodelle mit diskreter Rissmodellierung

Die häufigsten Modelle dieser Gruppe sind die *discrete-crack-Modelle*. Die Ansätze zur numerischen Rissmodellierung mit diesem Konzept bauen auf der Arbeit von Ngo & Scordelis [NS67] auf. Die Risse werden als Diskontinuitäten der Verschiebung geometrisch modelliert. Im Rahmen einer Finite-Elemente-Analyse wird nach dem Überschreiten eines Rissfortschrittskriteriums das Finite-Elemente-Netz an dieser Stelle getrennt. Als Rissfortschrittskriterium kann im einfachsten Fall die Zugfestigkeit, aber auch kompliziertere Ansätze wie beispielsweise Ansätze auf Basis der linear-elastischen Bruchmechanik, die den gesamten Rissöffnungsprozess steuern, verwendet werden. Das Auftrennen des Netzes kann entweder durch das Einführen neuer Knoten und anschließender Neuvernetzung oder mittels Interfaceelemente erfolgen. Bei einfachen Modellen verläuft der Riss entlang fester Elementgrenzen, die nicht der genauen Rissrichtung entsprechen. Solche Modelle verhalten sich oft, wie in [HM95] berichtet, zu steif. In erweiterten Modellen hingegen werden durch adaptive Netzanpassungsverfahren die Elementgrenzen der zuvor berechneten Rissrichtung angepasst. Ansätze hierfür wurden u.a. von Ingraffea & Saouma [IS85] und Carpinteri & Valente [CV88], [Val91] entwickelt. Ein Problem des diskreten Risskonzepts ist, dass die Spannungen in der Rissspitze netzabhängig sind und die numerischen Ergebnisse somit nicht objektiv sind [Baž76]. Objektive Lösungen können u.a. mit Methoden, die auf der Bruchmechanik aufbauen und die Bruchenergie als Materialparameter verwenden, erzielt werden [BC79]. Als Nachteil der *discrete-crack-Modelle* ist der große rechnerische Aufwand, der sich aus den Netzmodifikationen ergibt, anzusehen. Außerdem ist die Anwendung dieser Modelle bei Platten- und Schalenelementen nicht möglich, da sich Risse in solchen Strukturen über die Dickenrichtung entwickeln und nicht in der Ebene, in der die Elemente aneinander grenzen. Auch für die Anwendung im Dreidimensionalen besteht noch weiterer Forschungsbedarf. Diskrete Rissmodelle sind daher in erster Linie für Probleme mit wenigen, großen Rissen geeignet, die das Strukturverhalten stark beeinflussen. Außerdem zeigt es sich als hilfreich, wenn die Stellen, an denen Risse zu erwarten sind, schon a priori bekannt sind. Auch zur Lösung von Mehrphasenproblemen, bei denen beispielsweise der Flüssigkeits- und Ionentransport in der gerissenen Struktur untersucht werden soll, ist eine diskrete Rissmodellierung erforderlich.

In neueren Forschungsarbeiten werden die Diskontinuitäten im Verschiebungsfeld nicht an den Elementgrenzen, sondern direkt in der Elementformulierung berücksichtigt. Ein wesentlicher Vorteil dieses Konzeptes ist, dass die Berücksichtigung von Diskontinuitäten im Verschiebungsverlauf ohne aufwändige adaptive Methoden möglich ist. Bei dieser auch als Methode der starken Diskontinuitäten (*strong discontinuity approach*) bezeichneten Rissmodellierung wird zwischen Elementen mit eingebetteten Diskontinuitäten (*embedded discontinuities*) und der *extended finite element method* (XFEM) unterschieden. Beide Methoden sind durch die Berücksichtigung von Diskontinuitäten im Verschiebungsverlauf mit Hilfe zusätzlicher Freiheitsgrade gekennzeichnet. Bei ersterer werden diese zusätzlichen Freiheitsgrade jedoch auf Elementebene hinzugefügt (*elemental enrichment*) und zumeist auf dieser Ebene durch statische Kondensation wieder eliminiert, während sie bei letzterer an den zu einem Riss benachbarten Knotenpunkten hinzugefügt werden und zusätzliche globale Freiheitsgrade darstellen. Siehe hierzu u.a. Dvorkin et al. [DCG90], Klisinski et al. [KRS91], Mosler & Meschke [MM00] und Feist [Fei04]. Ein systematischer Vergleich der beiden Methoden ist in [Jir00] enthalten.

5.2.2 Diskrete Modelle

Bei **diskreten Modellen** wird die Struktur nicht als homogen angesehen, sondern wird aus einzelnen Teilen wie zum Beispiel Stäben, Balken oder Partikeln aufgebaut. Das globale Verhalten der Struktur ist durch die Modellierung der Struktur selbst gegeben. Konstitutive Beziehungen werden nur auf der Ebene der einzelnen Teile, aus denen sich die Struktur zusammensetzt, aufgestellt.

Bei **lattice-Modellen**, die auf Hrennikoff [Hre41] zurückgehen, wird das Material durch ein Gitter aus Fachwerkstäben oder Balken abgebildet. Die Struktur des Materials wird nicht als homogenes Kontinuum verschmiert, sondern direkt diskretisiert. Dabei können unterschiedliche Gitterformen verwendet werden, die an die Materialstruktur angepasst werden. Bei zweidimensionalen Gittermodellen stellt sich das Problem, dass die Struktur des Materials in der dritten Raumrichtung nicht berücksichtigt werden kann, obwohl sie einen Einfluss auf das ebene Materialverhalten hat. Durch die Verwendung eines dreidimensionalen Gitters, das aus zwei parallel zueinander liegenden Gittern gebildet wird oder ein Gitter, das aus Tetraedern gebildet wird, kann die dritte Raumrichtung mit berücksichtigt werden. Durch die Diskretisierung der Struktur reichen bei *lattice-Modellen* und auch bei anderen diskreten Modellen, im Vergleich zu Kontinuumsmodellen einfachere Bruchkriterien aus, um das Bruch- und Rissverhalten zu simulieren. Für weitere Ausführungen bezüglich der Gitterform, der Anpassung des Gitters an die Betonstruktur (*mapping*) oder der Bestimmung der Materialparameter der Stäbe sei auf [Mie97] verwiesen.

Weitere diskrete Modelle sind **Partikelmodelle**, Modelle der *distinct-element-method* und *numerical concrete*-Modelle. **Partikelmodelle** dienen der Untersuchung des mikromechanischen Verhaltens von Reibungsmaterialien. Dabei werden die einzelnen Bestandteile durch geeignete Geometrien wie Kugeln oder Polyeder abgebildet und die Interaktion zwischen diesen Partikeln durch Kontakt und verbindende Stab- und Balkenelemente modelliert (siehe z.B. [JB95]). Bei der *distinct-element-method* nach Cundall & Strack [CS79] wird von steifen Partikeln ausgegangen, die mittels Reibungsgesetze interagieren. *Numerical concrete* Formulierungen simulieren mit geeigneten numerischen Verfahren (FEM, FDM) die Gefügebestandteile des Betons, Zementstein und Zuschlag und deren mechanisches Verhalten an der Kontaktfläche.

Diskrete Modelle werden hauptsächlich zur Untersuchung von Bruchvorgängen auf der Ebene von Laborversuchen verwendet und sind für größere Strukturberechnungen aufgrund der feinen Diskretisierung der Struktur nicht geeignet.

5.3 Beispiele für Materialmodelle für Stahlfaserbeton

Es gibt nur wenige, speziell für den Werkstoff Stahlfaserbeton entwickelte Materialgesetze als Grundlage für nichtlineare strukturmechanische Berechnungen. Ein Grund hierfür ist sicherlich die gegenüber dem Beton und Stahlbeton untergeordnete Bedeutung des Stahlfaserbetons in der Häufigkeit der Anwendung. Zum anderen waren physikalisch nichtlineare Methoden zur Schnittgrößenermittlung in der Vergangenheit noch nicht zulässig. Erst das im Jahre 2001 eingeführte DBV-Merkblatt „*Stahlfaserbeton*“ [DBV01] erlaubt in Kombination mit der neuen DIN 1045-1 [DIN01] dieses Verfahren. Die Notwendigkeit leistungsfähiger Materialgesetze für numerische Berechnungsmethoden wie der Finite-Elemente-Methode ist somit erst in neuester Zeit gegeben.

In kommerziellen Finite-Elemente-Programmen sind derzeit fast keine Materialgesetze für Stahlfaserbeton implementiert. Ein einfacher, meist jedoch unzureichender Weg dennoch mit

solchen Programmen Stahlfaserbetonstrukturen berechnen zu können, ist die Modifikation der häufig implementierten Stoffgesetze für reinen Beton. Das wichtigste dabei ist, das Zugtragverhalten dem des Stahlfaserbetons anzupassen. Das kann beispielsweise, falls im Programm vorgesehen, durch Modifikation der einaxialen Arbeitslinie geschehen. Eine andere Möglichkeit ist die Modellierung der Fasertragwirkung durch Stahlbewehrung. Gossla [Gos00] und Hemmy [Hem03] verwendet diese Variante zur Nachrechnung von Versuchen und zur rechnerischen Überprüfung eines Bemessungsmodells mit dem Programmsystem ANSYS. Als großer Nachteil dieser Variante ist sicherlich zu sehen, dass nur eine begrenzte Zahl an Bewehrungsrichtungen eingegeben werden kann und somit die Wirkung der regellos in der Betonmatrix verteilten Stahlfasern nur unzureichend wiedergegeben werden kann. Im Allgemeinen lassen solche Methoden keine ausreichende Beschreibung des Tragverhaltens von Stahlfaserbeton zu. Für eine bessere Materialmodellierung, bei der zum Beispiel auch das Verhalten unter mehraxialen Spannungszuständen oder das Lokalisierungsphänomen richtig erfasst werden soll, ist daher die Entwicklung eigener Materialgesetze unerlässlich. Im Folgenden werden daher, ohne Anspruch auf Vollständigkeit, einige Materialmodelle vorgestellt:

Plastizitätsmodell von Haselwander, Jonas und Riech [HJR95]

Das Materialmodell basiert auf der dreidimensionalen Plastizitätstheorie. Die Beschreibung erfolgt sowohl inkrementell als auch total mit einem erweiterten Hencky-Modell, der sogenannten Deformationstheorie. Grundlage für das Ver- und Entfestigungsverhalten ist eine einaxiale Spannungs-Dehnungsbeziehung. Da die von den Autoren untersuchten Fasergehalte unter 1,2 Vol.% liegen, wird für den Verlauf im Druckbereich die Spannungs-Dehnungsbeziehung für reinen Beton nach den Normen DIN 1045 bzw. EC2 verwendet. Im Zugbereich wird ein linear-elastisches Verhalten bis zum Erreichen der Zugfestigkeit, die ebenfalls nach dem EC2 bestimmt wird, zugrunde gelegt. Der anschließende abfallende Entfestigungsast wird durch eine abschnittsweise lineare Funktion definiert. Durch die Verwendung einer Spannungs-Dehnungsbeziehung im Zugbereich kann die lokale Rissbildung des Stahlfaserbetons nur unzureichend beschrieben werden (siehe Kapitel 6.5). Die Ergebnisse einer FE-Berechnung mit diesem Materialgesetz führen dadurch zu Netzabhängigkeiten, einem Aspekt auf den im Aufsatz von Haselwander, Jonas und Riech [HJR95] nicht genauer eingegangen wird. Für die Umsetzung des Materialgesetzes auf allgemeine Spannungszustände, beispielhaft für den ebenen Spannungszustand, wird eine biaxiale Versagenskurve für reinen Beton verwendet. Das Fließkriterium lässt sich ebenfalls aus dieser Versagenskurve ableiten.

Plastizitätsmodell Barros und Figueiras [BF01]

Die Autoren entwickeln zur Berechnung von bewehrten, elastisch gebetteten Stahlfaserbetonbodenplatten ein elasto-plastisches Materialgesetz. Das Reißen des Stahlfaserbetons auf Zug wird durch ein verschmiertes Risskonzept beschrieben. Dabei kann zwischen einem *fixed, multifixed* und einem *rotating* Risskonzept gewählt werden. Das Gesamtdehnungsinkrement des Stahlfaserbetons setzt sich aus drei Komponenten, einem elastischen und einem plastischen Anteil des Stahlfaserbetons zwischen den Rissen und einer Rissdehnung in der Rissprozonszone, zusammen. Die Rissdehnung wird dabei im Rahmen eines *crack band*-Modells [BO83] über die Länge des Rissbandes l_r , die von der Art und Größe des finiten Elements abhängt, verteilt. Lokalisierungsphänomene können mit diesem Materialgesetz richtig beschrieben werden. Für die Spannungs-Dehnungsbeziehung des einaxialen Vergleichszustands unter Druckbeanspruchung wird eine Funktion, basierend auf Versuchsergebnissen, abgeleitet [BF99]. Im Zugbereich wird für das verschmierte Risskonzept eine trilineare Entfestigungsbeziehung verwendet. Als Bruch- bzw. Fließfläche wird eine für reinen Beton gebräuchliche von Figueiras in

[Fig83] vorgeschlagene Fläche angenommen.

Schädigungsmodell von Stamm [Sta01]

In der Arbeit von Stamm wird sowohl ein mesoskopisches als auch ein makroskopisches zeitabhängiges Simulationsmodell für Stahlfaserbeton vorgestellt. Die Modellierung der Komponente Beton erfolgt dabei aufbauend auf der Arbeit von Mark [Mar97] auf Basis der Kontinuumschädigungsmechanik, in der lokal verteilte Risse in Form von regionaler Schädigung des Werkstoffes abgebildet werden. Als schädigungsinduzierendes Moment wird das Überschreiten einer positiven Grenzdehnung verwendet, so dass sich die weitere Schädigungsevolution in Abhängigkeit von der Entwicklung der positiven Dehnungen in den Hauptrichtungen ergibt. Die Schädigung bewirkt eine Abnahme der Materialsteifigkeit, die auch als Degradation des Elastizitätsmoduls bezeichnet wird. Das mesoskopische Modell dient der Berechnung eines Einfaserversuchskörpers um den Einfluss des Winkels zwischen Belastungsrichtung und Faserorientierung zu untersuchen. Eine Übertragung der Strukturantworten von der Mesoebene auf die Makroebene im Rahmen einer Homogenisierung erfolgt nicht.

Grundlage des makroskopischen Modells ist das phänomenologische Spannungs-Dehnungsverhalten des Stahlfaserbetons. Das Kontinuumschädigungsmodell für Beton wird zur Beschreibung der Fasertragwirkung durch die Einführung einer zusätzlichen Variablen, der Faserkontinuität erweitert. Diese zur Schädigung komplementäre Größe ergibt in Addition mit der Kontinuität der Betonmatrix die Kontinuität des Gesamtwerkstoffes, mit deren Hilfe sich schließlich die Degradation der Gesamtsteifigkeit berechnen lässt.

Materialmodelle von Kullaa

Im Zusammenhang mit der Materialmodellierung von Stahlfaserbeton soll auch auf die Arbeiten von Kullaa eingegangen werden. Kullaa beschreibt in seinem Aufsatz [Kul97] unterschiedlichste Modellierungsmöglichkeiten für Stahlfaserbeton mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode. Es werden hierfür ein Materialmodell mit einem verschmierten Risskonzept, ein Materialmodell mit einem diskreten Risskonzept und ein kombiniertes Plastizitätsmodell miteinander verglichen. Für die Untersuchungen wird die FE-Software *DIANA* verwendet. Das einaxiale Zugverhalten, gekennzeichnet durch die Spannungs-Rissöffnungsbeziehung der Fasermaterialien, leitet sich Kullaa aus mikromechanischen Eigenschaften ab. Das Vorgehen hierbei ist genauer in [Kul94a], [Kul94b], [Kul96], [Kul98a] und [Kul98b] beschrieben. Die Bestimmung der makroskopischen Materialparameter aus mikromechanischen Parametern ist nach Ansicht des Autors dieser Arbeit für praktische Untersuchungen von Stahlfaserbetonstrukturen nicht geeignet. Grund hierfür ist unter anderem die aufwendige und schwierige Bestimmung der Parameter wie beispielsweise der Verbundspannungs-Schlupfbeziehung und die unsicheren Annahmen, die für die Übertragung der Mikroebene in die Makroebenen notwendig sind.

Materialmodell von Stevens & Liu [SL94]

Grundlage des von Stevens & Liu in [SL94] vorgestellten Materialmodells ist die Verbundwerkstofftheorie. Betonmatrix und Stahlfasern werden separat modelliert und durch ein Verbundwerkstoffgesetz kombiniert. Für die Betonmatrix wird ein dehnungsbasierter, anisotroper Ansatz auf Basis einer Kombination von Plastizitätstheorie und Schädigungsmechanik gewählt. Im Druckbereich wird eine isotrope Verfestigung und im Zugbereich eine kinematische Verfestigung angenommen. Auf Seite der Stahlfasern wird sowohl die Zugtragfähigkeit der Fasern als auch die Erhöhung der Zugfestigkeit der Betonmatrix durch die Fasern berücksichtigt. Bei dem sogenannten „effektiven Fasermodell“ tritt die Faserwirkung nur bei Zugdehnung auf und wird bei negativer Dehnung zu Null gesetzt.

Materialmodell dieser Arbeit

Bei dem in dieser Arbeit vorgestellten und in Kapitel 6 ausführlich beschriebenen Materialgesetz für Stahlfaserbeton handelt es sich um ein Modell auf Basis der inkrementellen Fließtheorie, das das Materialverhalten des Stahlfaserbetons phänomenologisch auf der Makroebene beschreibt. Dabei sind folgende Randbedingungen und Forderungen zu berücksichtigen. Das Materialgesetz dient der Berechnung tatsächlicher Bauteile und Strukturen der Makroebene. Hierfür ist es erforderlich, dass alle für eine quasi statische Strukturberechnung relevanten Phänomene wie das durch Rissbildung gekennzeichnete einaxiale Verhalten im Zugbereich, das ver- und entfestigende einaxiale Verhalten im Druckbereich und das Verhalten unter mehraxialen Spannungszuständen ausreichend genau erfasst werden. Besondere Bedeutung hat dabei die objektive Beschreibung der lokalen Rissbildung und des Druckversagens, um im Rahmen einer FE-Berechnung netzunabhängige Ergebnisse zu garantieren. Des Weiteren soll das Materialgesetz allgemeine dreidimensionale Spannungszustände erfassen können und sich in ein kommerzielles FE-Programm implementieren lassen. Um eine größtmögliche Praxistauglichkeit zu erreichen werden nur Materialparameter verwendet, die mit Hilfe von Standardversuchen bestimmt werden können oder in entsprechenden Normen gegeben sind.

Zur Umsetzung dieser Randbedingungen wird eine Mehrflächenplastizität verwendet. Hiermit kann das unterschiedliche Materialverhalten im Zug- und Druckbereich sehr flexibel abgebildet werden. Die Rissbildung wird durch ein ausgerundetes *Rankine*-Kriterium mit einer auf einem Bruchenergiekonzept basierenden Entfestigungsbeziehung beschrieben. Dadurch werden objektive, netzunabhängige Ergebnisse gewährleistet. Die weitere Beschreibung des Materialmodells erfolgt im nächsten Kapitel.

Kapitel 6

Elasto-Plastisches Materialgesetz für Stahlfaserbeton

6.1 Allgemeines

In diesem Kapitel wird ein ratenunabhängiges, elasto-plastisches Materialgesetz für Stahlfaserbeton im Rahmen der Finite-Elemente-Methode entwickelt. Der Stahlfaserbeton wird dabei als auf Makroebene homogener Werkstoff betrachtet. Bei der Entwicklung sind folgende Bedingungen zu berücksichtigen:

- Das Materialgesetz muss in der Lage sein, die für eine quasi statische, physikalisch-nichtlineare Strukturberechnung relevanten Phänomene zu beschreiben. Hierzu gehören das durch Rissbildung gekennzeichnete einaxiale Verhalten im Zugbereich, das ver- und entfestigende einaxiale Verhalten im Druckbereich und das Verhalten unter mehraxialen Spannungszuständen. Weitere Phänomene werden im Laufe dieses Kapitels angesprochen.
- Um allgemeine, uneingeschränkte Belastungszustände untersuchen zu können, soll das Materialgesetz im dreidimensionalen Spannungsraum formuliert werden.
- Die für das Materialgesetz verwendeten Materialparameter müssen sich ausschließlich aus Standardversuchen und Normen bestimmen lassen. Hierdurch ist eine größtmögliche Praxistauglichkeit gewährleistet.
- Das Materialgesetz muss mittels in kommerziellen Finite-Elemente-Programmen vorhandener Programmierschnittstellen in diese implementierbar sein. In Rahmen dieser Arbeit wurde das Materialgesetz in das Programmsystem *ANSYS* implementiert.

Das Materialgesetz basiert auf der **inkrementellen Fließtheorie** im Rahmen der Plastizitätstheorie. Um das unterschiedliche Materialverhalten des Stahlfaserbetons im Zug- und Druckbereich abbilden zu können, wird die Fließfläche aus zwei Teilfließflächen zusammengesetzt. Die Beschreibung des Zugversagens erfolgt mit einem ausgerundeten *Rankine*-Fließkriterium in Kombination mit einem isotropen Entfestigungsgesetz. Durch die Verwendung eines Bruchenergiekonzepts kann das Lokalisierungsphänomen objektiv beschrieben werden. Für den Druckbereich wird ein *Drucker-Prager*-Fließkriterium mit isotroper Ver- und Entfestigung angenommen. Für die Entfestigungsbeziehung wird, wie auch im Zugbereich ein Bruchenergiekonzept verwendet. Die Spannungsintegration des elasto-plastischen Stoffgesetzes erfolgt mit

einem impliziten Euler-Rückwärtsverfahren für **Mehrflächenplastizität**. Hierzu wird ein von Simo und Hughes [SH98] vorgeschlagener Algorithmus verwendet. Durch die Verwendung des konsistenten elasto-plastischen Werkstoffensors ist eine quadratische Konvergenzrate des Newton-Verfahrens auf Systemebene gewährleistet. Bei der Entwicklung des Materialgesetzes wird von kleinen Verschiebungen und kleinen Verzerrungen ausgegangen, womit eine geometrisch lineare Betrachtung ausreichend ist. Außerdem werden zeitabhängige Effekte wie Kriechen und Schwinden oder die Belastungsgeschwindigkeit nicht berücksichtigt.

Auf der Fließtheorie basierende Materialgesetze wurden bereits erfolgreich bei der Modellierung von unbewehrtem und bewehrtem Beton unter anderen von Feenstra [Fee93], Pravida [Pra99], Menrath [Men99], Haufe [Hau01] und Winkler [Win01] angewendet.

6.2 Fließtheorie für Mehrflächenplastizität

Im folgenden Abschnitt werden die Grundgleichungen für die ratenunabhängige Fließtheorie aufgestellt, welche die Grundlage für das Materialmodell, das in dieser Arbeit zur Beschreibung des nichtlinearen Werkstoffverhaltens von Stahlfaserbeton verwendet wird, bildet. Die Besonderheit liegt dabei in der Verwendung einer aus mehreren Teilfließflächen zusammengesetzten Gesamtfließfläche. Die Kanten der Teilfließflächen gehen nicht stetig ineinander über. Man spricht hier von einer sogenannten **Mehrflächenplastizität** (*nonsmooth multisurface plasticity*) [SH98]. Bei der Fließtheorie handelt es sich im Gegensatz zur Deformationstheorie um eine differentielle Formulierung, d.h. eine differentielle Änderung des Dehnungszustandes führt zu einer differentiellen Änderung des Spannungszustandes. Da bei einer Berechnung immer endliche Dehnungsinkrementen verwendet werden, spricht man bei der Fließtheorie auch von einer inkrementellen Theorie [HM95]. Der Einfluss der Geschwindigkeit des Belastungsprozesses spielt für die Untersuchungen in dieser Arbeit keine Rolle und wird somit vernachlässigt. Es wird daher zeit- bzw. ratenunabhängiges Materialverhalten als Sonderfall des viskoplastischen Materialverhaltens angenommen. Deshalb können alle inelastischen Größen als plastische Größen bezeichnet werden.

Unter der Voraussetzung kleiner Verzerrungen kann die Dehnungsrate additiv in einen reversiblen elastischen und einen irreversiblen plastischen Anteil zerlegt werden:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^{el} + \dot{\epsilon}^{pl} \quad (6.1)$$

Dabei beschreibt der Punkt über den Größen eine Ableitung nach der Zeit, wobei die Variable Zeit hier nur ein Maß darstellt, um die inkrementelle Lastaufbringung zu steuern, und nicht mit der eigentlichen Zeit verwechselt werden darf. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einer „Pseudo-Zeit“.

Die Spannungsänderung ist nur vom elastischen Anteil der Dehnungsrate abhängig. Das verallgemeinerte *Hooke'sche* Gesetz beschreibt diesen Zusammenhang:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C} : \dot{\epsilon}^{el} = \mathbf{C} : (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^{pl}) \quad (6.2)$$

Fließbedingung

In der Plastizitätstheorie sind die zulässigen Spannungszustände nicht mehr unbegrenzt, wie das bei elastischen Stoffgesetzen der Fall ist, sondern werden auf einen gewissen Bereich begrenzt. Der Übergang von rein elastischem Materialverhalten zu elasto-plastischem Materialverhalten wird in der Plastizitätstheorie mit Hilfe der Fließbedingung beschrieben. Die

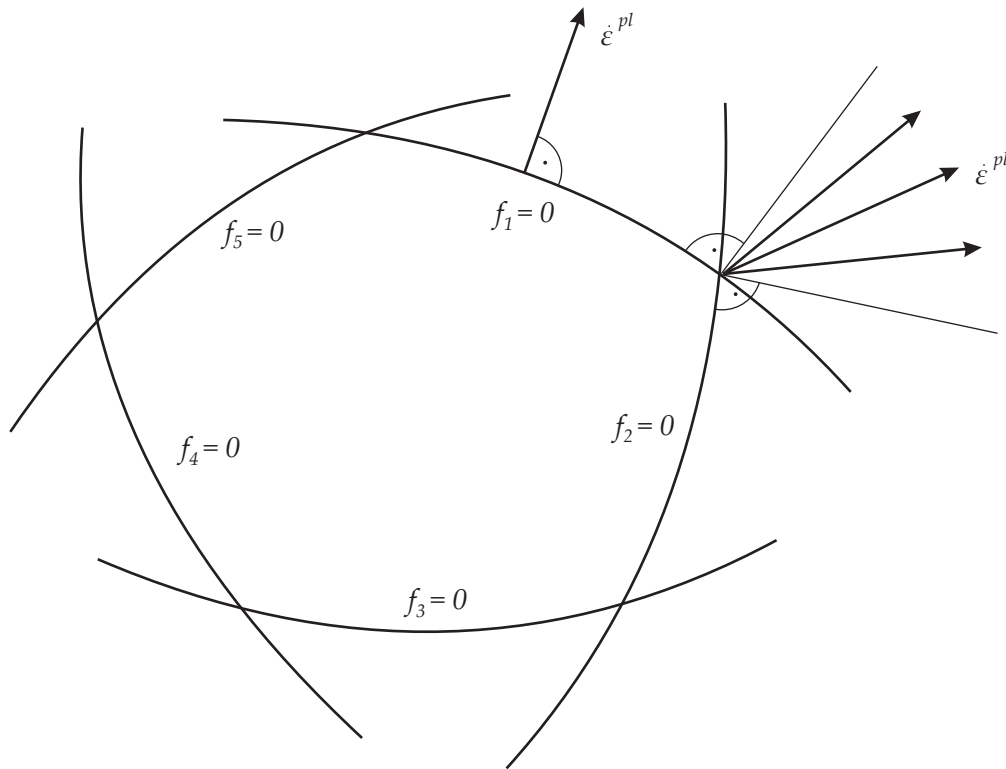


Abbildung 6.1: Aus Teilfließflächen zusammengesetzte Fließfläche

Fließbedingung kann dabei sowohl im Spannungsraum als auch im Dehnungsraum formuliert werden. Hier wird die gebräuchlichere Variante, die Formulierung im Spannungsraum verwendet. Die skalarwertige Fließbedingung kann dann im Spannungsraum als Fließfläche definiert werden. Bei Materialien, wie dem Stahlfaserbeton, die unterschiedliches Verhalten im Zugbereich und im Druckbereich zeigen, ist es schwierig, dieses Verhalten mit nur einer einzigen, geschlossenen Fließbedingung zu beschreiben und daher sinnvoll eine aus mehreren Teilfließflächen zusammengesetzte Fließfläche zu verwenden (Abbildung 6.1). Dabei ist der elastische Bereich durch die folgende Bedingungen definiert:

$$f_i(\sigma, \mathbf{q}) \leq 0 \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, m \quad (6.3)$$

m gibt dabei die Anzahl der verwendeten Teilfließflächen an. Ist eine Fließbedingung erfüllt, d.h. $f_i(\sigma, \mathbf{q}) = 0$ und der Spannungszustand liegt auf der Fließfläche, kommt es sowohl zu elastischen als auch plastischen Verformungen. \mathbf{q} ist der Vektor aller im Spannungsraum definierten inneren Variablen, die das Ver- und Entfestigungsverhalten beschreiben. Spannungszustände außerhalb der Fließfläche $f_i(\sigma, \mathbf{q}) > 0$ sind nicht zulässig.

Fließregel

Die plastische Dehnungsrate ergibt sich aus der Fließregel. Durch Verwendung mehrerer Fließfunktionen, die an den Übergängen nicht stetig differenzierbar sind, ist die Richtung der plastischen Dehnungen an diesen Stellen nicht mehr eindeutig definiert. Zu deren Bestimmung wird deshalb die *Koiter'sche* Fließregel [Koi53] verwendet:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = \sum_{i=1}^m \dot{\lambda}_i \frac{\partial g_{ei}(\sigma, \mathbf{q})}{\partial \sigma} \quad (6.4)$$

Der Parameter $\dot{\lambda}_i$ ist ein Proportionalitätsfaktor, der als plastischer Multiplikator (*plastic flow rate*) oder Konsistenzparameter bezeichnet wird. $\dot{\lambda}_i$ ist größer Null, wenn die zugehörige Fließbedingung $f_i(\sigma, q) = 0$ erfüllt ist und somit plastische Verformungen auftreten und ist gleich Null bei rein elastischem Verhalten. Die Richtung der plastischen Dehnung wird durch den Gradienten der plastischen Potentialfunktion g_{ei} vorgegeben. An den Kanten der Teilfließflächen setzt sich die Richtung der plastischen Dehnung aus den einzelnen Teilrichtungen zusammen. Wird für die Potentialfunktion die Fließfunktion angesetzt, liegt der Sonderfall der **assozierten Fließregel** oder auch Normalenregel vor. Die Richtung des plastischen Flusses ist dann normal zur Fließfläche f . Die Verwendung der Normalenregel führt für das inkrementelle Randwertproblem zu einer eindeutigen Lösung [CH88] und erfüllt das Prinzip der größten spezifischen Dissipation [Bet93]. Bei Verwendung der assoziierten Fließregel ergibt sich ein symmetrischer Materialtensor, was zu einem erheblich reduzierten Rechenaufwand führt. Als Nachteil ist anzumerken, dass bei Materialien wie Boden und Fels aber auch Beton hiermit die plastische Volumenänderung unterschätzt wird. Dieser Fehler tritt aber hauptsächlich unter dreiaxialen Druckspannungszuständen auf [Pra99], die für praktischen Strukturberechnungen von untergeordneter Bedeutung sind.

Ver- und Entfestigungsgesetz

Verhält sich ein Material nicht ideal plastisch, sondern ist nach dem Erreichen der Fließgrenze ein weiterer Spannungszuwachs möglich, so spricht man von verfestigendem Materialverhalten (*hardening*). Dementsprechend wird eine Verringerung der Fließgrenze als Entfestigung (*softening*) bezeichnet. In der Plastizitätstheorie wird das Ver- und Entfestigungsverhalten durch innere Parameter q , welche die Form und die Lage der Fließfläche verändern und von der Belastungsgeschichte abhängig sind, beschrieben. Dabei können die inneren Parameter sowohl im Spannungsraum als auch im Verzerrungsraum angegeben werden. Der Zusammenhang dieser beiden Formulierungen in Ratenform lautet nach [SH98]

$$\dot{q} = -D\dot{\alpha} \quad (6.5)$$

wobei der Vektor α die zum Vektor q energetisch konjugierten, im Verzerrungsraum definierten inneren Parameter enthält. D ist die Matrix der plastischen Moduli. Die Evolution der inneren Verzerrungsvariablen α kann analog zur Fließregel durch die Ableitung einer skalaren Funktion $g_{\alpha i}(\sigma, q)$ beschrieben werden:

$$\dot{\alpha} = \sum_{i=1}^m \dot{\lambda}_i \frac{\partial g_{\alpha i}(\sigma, q)}{\partial q} \quad (6.6)$$

Um das Prinzip vom Maximum der plastischen Dissipation zu erfüllen, wird für $g_{\alpha i}(\sigma, q)$ die Fließfunktion selbst verwendet:

$$\dot{\alpha} = \sum_{i=1}^m \dot{\lambda}_i \frac{\partial f_i(\sigma, q)}{\partial q} \quad (6.7)$$

Man spricht hier, analog zur Fließregel, vom Sonderfall eines **assozierten Verfestigungsgesetzes**. Setzt man Gleichung (6.6) beziehungsweise Gleichung (6.7) in Gleichung (6.5) ein, erhält man das Verfestigungsgesetz in allgemeiner bzw. assoziierter Form in Ratenformulierung:

$$\dot{q} = -D \sum_{i=1}^m \dot{\lambda}_i \frac{\partial g_{\alpha_i}(\sigma, q)}{\partial q} \quad \dots \quad \text{nicht assoziiert} \quad (6.8)$$

$$\dot{q} = -D \sum_{i=1}^m \dot{\lambda}_i \frac{\partial f_i(\sigma, q)}{\partial q} \quad \dots \quad \text{assoziiert} \quad (6.9)$$

Bei der Ver- und Entfestigung kann grundsätzlich zwischen **isotropem** und **kinematischem** Verhalten unterschieden werden. Dementsprechend werden auch die Vektoren der inneren Parameter in diejenigen, die die isotrope Verfestigung und solche, die die kinematische Verfestigung beschreiben, aufgeteilt.

$$q = \left\{ \begin{array}{c} q_{iso} \\ q_{kin} \end{array} \right\} \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_{iso} \\ \alpha_{kin} \end{array} \right\} \quad (6.10)$$

Die folgenden Gleichungen zur Verfestigung werden aus Gründen der Übersichtlichkeit in allgemeiner Form nur für eine Fließfläche angegeben.

Bei der **isotropen Verfestigung** kommt es zu einer gleichmäßigen Aufweitung (Verfestigung) bzw. Kontraktion (Entfestigung) der Fließfläche (Abbildung 6.2 a)). Der Mittelpunkt der Fließfläche behält dabei seine Lage. Mathematisch wird hierfür die Fließfunktion $f(\sigma, \alpha_{iso})$ in zwei Teile aufgeteilt:

$$f(\sigma, \alpha_{iso}) = F(\sigma) - k(\alpha_{iso}) \quad (6.11)$$

$F(\sigma)$ beschreibt eine Funktion, die den allgemeinen, dreidimensionalen Spannungszustand auf eine einaxiale Vergleichsspannung $\bar{\sigma}_e$ abbildet. Diese kann mit der, von den inneren Parametern α_{iso} abhängigen Fließspannung $k(\alpha_{iso})$ verglichen werden. Als innerer Parameter wird oft die effektive plastische Vergleichsdehnung $\bar{\epsilon}_p$ ($\alpha_{iso} = \bar{\epsilon}_p$) verwendet. Die Änderungen der effektiven plastischen Vergleichsdehnung kann aus dem allgemeinen plastischen Dehnungszuwachs $\dot{\epsilon}^{pl}$ auf folgende zwei Arten bestimmt werden:

a) **Dehnungsverfestigung** (*strain hardening*)

Die Rate der effektiven plastischen Dehnung $\dot{\bar{\epsilon}}_p$ wird direkt aus der plastischen Dehnungsrate bestimmt:

$$\dot{\bar{\epsilon}}_p = \dot{\alpha}_{iso} = c \sqrt{\dot{\epsilon}^{pl} \cdot \dot{\epsilon}^{pl}} \quad (6.12)$$

Durch den Skalierungsfaktor c kann die effektive plastische Dehnung an die plastischen Dehnungen bei einaxialer Belastung angepasst werden [CH88].

b) **Arbeitsverfestigungshypothese** (*work hardening*)

Die Arbeitsverfestigungshypothese basiert auf der Grundlage, dass die plastischen Arbeiten des mehraxialen Zustandes und des einaxialen Vergleichszustandes gleich sind:

$$\dot{W}^{pl} = \bar{\sigma}_e \dot{\bar{\epsilon}}_p = \sigma : \dot{\epsilon}^{pl} \quad (6.13)$$

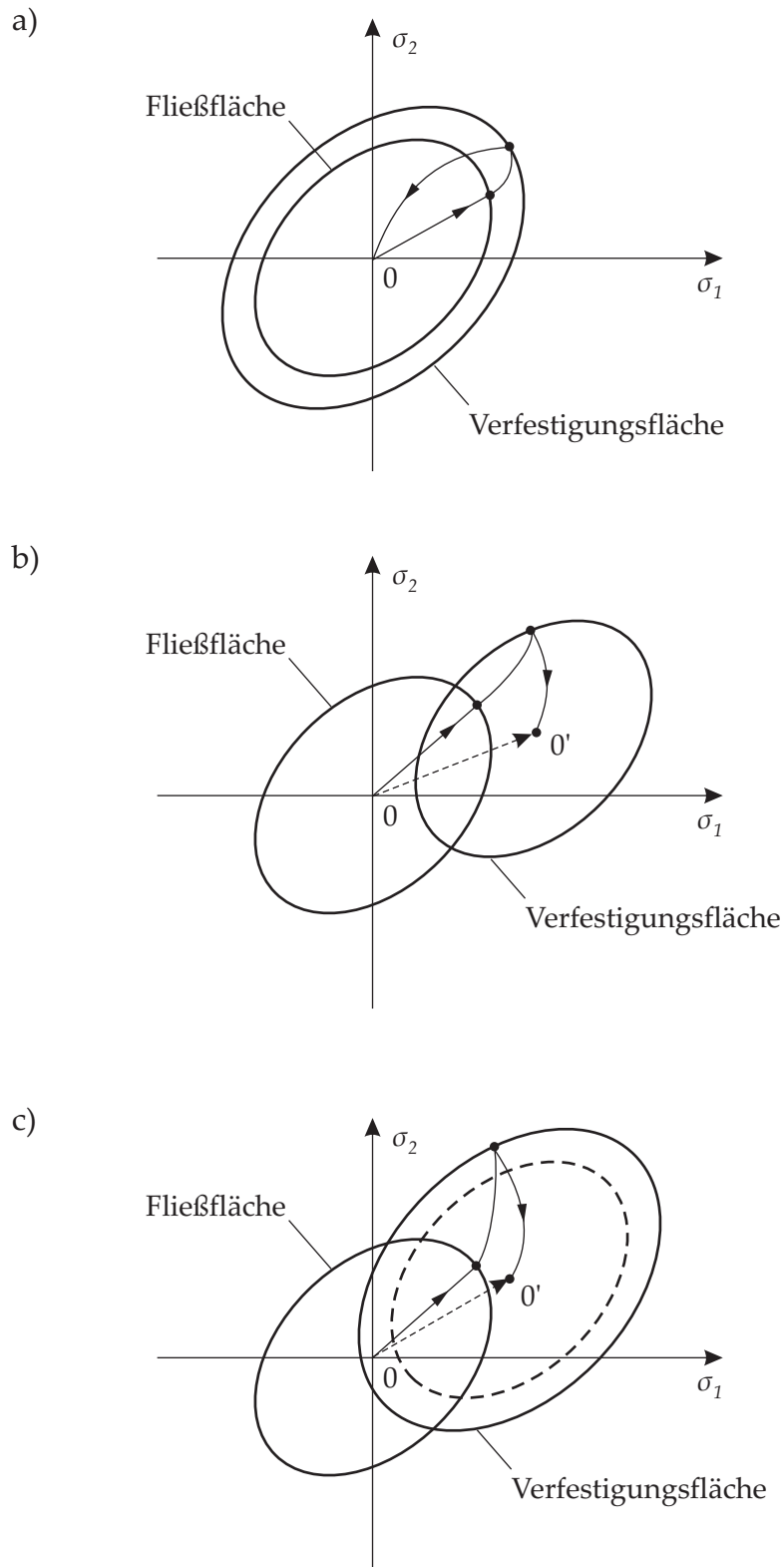


Abbildung 6.2: a) Isotrope, b) kinematische und c) gemischte Verfestigung

Die für isotrope Ver- und Entfestigung übliche Ratengleichung ergibt sich zu

$$\dot{k}(\bar{\epsilon}_p) = H_{iso}(\bar{\epsilon}_p) \dot{\bar{\epsilon}}_p \quad (6.14)$$

wobei $H_{iso}(\bar{\epsilon}_p)$ der isotrope Ver- und Entfestigungsmodul ist.

Bei der **kinematischen Verfestigung** kommt es zu einer Translation der Fließfläche im Spannungsraum, ohne dass sich ihre Form bzw. Größe verändert (Abbildung 6.2 b)). Diese Translation lässt sich durch den sogenannten *back-stress*-Vektor ρ als inneren Parameter q_{kin} beschreiben. Man spricht dann von einer induzierten Anisotropie wie sie zum Beispiel beim *Bauschinger-Effekt* bei Stahl zu beobachten ist. Die Fließfunktion stellt sich folgendermaßen dar:

$$f(\sigma, \rho) = F(\sigma - \rho) - k \quad (6.15)$$

Die Evolution des *back-stress*-Vektors kann durch die folgenden Regeln beschrieben werden:

a) **Prager'sche Regel:**

$$\dot{\rho} = c \dot{\epsilon}^{pl} \quad (6.16)$$

b) **Ziegler'sche Regel:**

$$\dot{\rho} = c \bar{\epsilon}_p \cdot (\sigma - \rho) \quad (6.17)$$

c stellt dabei eine Materialkonstante dar [CH88]. Die für kinematische Ver- und Entfestigung übliche Ratengleichung ergibt sich zu:

$$\dot{\rho} = H_{kin}(\bar{\epsilon}_p) \cdot \dot{\epsilon}^{pl} \quad (6.18)$$

Die Kombination der Gleichungen (6.11) und (6.15) führt zur Formulierung der Fließfunktion für **gemischte Verfestigung** (Abbildung 6.2 c)):

$$f(\sigma, \rho, \bar{\epsilon}_p) = F(\sigma - \rho) - k(\bar{\epsilon}_p) \quad (6.19)$$

Nach Simo & Hughes [SH98], Hofstetter & Mang [HM95] u.a. wird die kombinierte Verfestigung in Abhängigkeit vom Materialverhalten durch den Parameter β gesteuert. Der Ver- und Entfestigungsmodul $H(\bar{\epsilon}_p)$ kann dadurch in einen isotropen und einen kinematischen Anteil aufgeteilt werden:

$$H_{iso}(\bar{\epsilon}_p) = \beta H(\bar{\epsilon}_p) \quad (6.20)$$

$$H_{kin}(\bar{\epsilon}_p) = (1 - \beta) H(\bar{\epsilon}_p) \quad (6.21)$$

$$\text{mit } 0 \leq \beta \leq 1$$

Konsistenzbedingung, Be- und Entlastungsbedingungen

Zulässige Spannungszustände sind durch die jeweiligen Fließbedingungen (Gleichung 6.3) vorgegeben. Kommt es zu plastischen Verformungen, müssen die Bedingungen $f_i = 0$ erfüllt sein, d.h. der Spannungszustand muss immer genau auf dieser Fließfläche liegen. Das bedeutet aber auch, dass während dieses plastischen Belastungsvorgangs die Änderungen der Fließfunktionen \dot{f}_i gleich Null sein müssen. Bei der Verwendung von zusammengesetzten Fließfunktionen muss im Zuge einer plastischen Belastung nicht für alle Fließbedingungen $f_i = 0$ gelten. In der weiteren Betrachtung wird daher davon ausgegangen, dass bei n von den insgesamt m Fließbedingungen ein plastischer Belastungsvorgang vorliegt. Unter Berücksichtigung

der plastischen Multiplikatoren $\dot{\lambda}_i$, die nur wenn plastische Deformationen auftreten größer als Null sind, lässt sich die **Konsistenzbedingung** angeben:

$$\dot{\lambda}_i \dot{f}_i(\sigma, q) = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n \quad (6.22)$$

Mit Hilfe der Konsistenzbedingung können die plastischen Multiplikatoren bestimmt werden. Für plastische Belastungszustände gilt $\dot{\lambda}_i > 0$ und Gleichung (6.22) ergibt sich zu:

$$\dot{f}_i(\sigma, q) = \frac{\partial f_i(\sigma, q)}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial f_i(\sigma, q)}{\partial q} \dot{q} = 0 \quad (6.23)$$

Durch Einsetzen des verallgemeinerten *Hooke'schen* Gesetzes (6.2), der Fließregel (6.4) und des Verfestigungsgesetzes (6.8) in allgemeiner Form folgt:

$$\left(\frac{\partial f_i(\sigma, q)}{\partial \sigma} : \mathbf{C} : \dot{\varepsilon} \right) = \sum_{j=1}^n (g_{ij} \dot{\lambda}_j) \quad (6.24)$$

$$\text{mit } g_{ij}(\sigma, q) = \frac{\partial f_i(\sigma, q)}{\partial \sigma} : \mathbf{C} : \frac{\partial g_{\varepsilon j}(\sigma, q)}{\partial \sigma} + \frac{\partial f_i(\sigma, q)}{\partial q} \mathbf{D} \frac{\partial g_{\alpha j}(\sigma, q)}{\partial q}$$

Es handelt sich hierbei um ein System mit n Gleichungen, aus dem die n Unbekannten $\dot{\lambda}_i$ bestimmt werden können:

$$\dot{\lambda}_i = \sum_{j=1}^n \left(g^{ij}(\sigma, q) \left(\frac{\partial f_i(\sigma, q)}{\partial \sigma} : \mathbf{C} : \dot{\varepsilon} \right) \right) \quad (6.25)$$

$$\text{mit } g^{ij}(\sigma, q) = [g_{ij}(\sigma, q)]^{-1}$$

Die für jeden beliebigen Belastungszustand erfüllten Be- und Entlastungsbedingungen lauten:

$$f_i(\sigma, q) \leq 0; \quad \dot{\lambda}_i \geq 0; \quad \dot{\lambda}_i f_i(\sigma, q) = 0 \quad (6.26)$$

In der Optimierungstheorie werden diese Bedingungen als **Kuhn-Tucker-Bedingungen** bezeichnet [SH98].

Elasto-plastischer Materialtensor

Durch Einsetzen von Gleichung (6.25) in Verbindung mit der Fließregel (6.4) in die Gleichung (6.2) ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen Spannungs- und Dehnungsrate:

$$\dot{\sigma} = \underbrace{\left(\mathbf{C} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g^{ij}(\sigma, q) \left(\mathbf{C} : \frac{\partial g_{\varepsilon i}(\sigma, q)}{\partial \sigma} \right) \otimes \left(\mathbf{C} : \frac{\partial f_j(\sigma, q)}{\partial \sigma} \right) \right)}_{\mathbf{C}^{pl}} : \dot{\varepsilon} \quad (6.27)$$

\mathbf{C}^{pl} ist der elasto-plastische Werkstofftensor.

6.3 Fließ- und Bruchkriterien

Die Unterscheidung zwischen rein elastischem und elastisch-plastischem Materialverhalten erfolgt im Rahmen der Fließtheorie mit Hilfe einer Fließbedingung f . Bei der Verwendung einer assoziierten Fließregel, wie in dieser Arbeit, wird die Richtung der plastischen Dehnungen aus der Fließbedingung anstelle der plastischen Potentialfunktion bestimmt. Durch **isotrope** Ver- und Entfestigung wird die Größe der Fließfläche im Lauf der Belastungsgeschichte aufgeweitet bzw. zusammengezogen. Die Fließfläche, die sich aus der maximalen Aufweitung ergibt, entspricht der **Bruchfläche**. Die Bruchfläche beschreibt somit die unter mehraxialer Beanspruchung maximal von einem Material aufnehmbaren Spannungszustände. Da Stahlfaserbeton wie Beton im Gegensatz zu Stahl keine eindeutige Fließgrenze aufweist, werden die benötigten Fließflächen aus Bruchflächen abgeleitet, die aus Versuchen bestimmt werden können. Aus dem *Drucker'schen* Stabilitätspostulat

$$d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{pl} \geq 0 \quad (6.28)$$

das besagt, dass bei einem stabilen, verfestigenden Material die geleistete plastische, innere Arbeit nicht negativ ist, leiten sich die Bedingungen einer assoziierten Fließregel und einer konvexen Fließfläche ab. Diese beiden Bedingungen sind für das *Drucker'sche* Stabilitätspostulat zwar notwendig aber allein nicht hinreichend. Es ist aber, um durch die Fließfläche verursachte Materialinstabilitäten zu vermeiden, notwendig, dass diese konvex ist.

Mathematisch handelt es sich bei der Fließfläche um eine skalare Funktion im n -dimensionalen Spannungsraum. Die Fließfläche für den allgemeinen dreidimensionalen Spannungszustand reduziert sich beim zweidimensionalen Spannungszustand auf eine Fließkurve und beim eindimensionalen Spannungszustand auf einen Fließpunkt. Aufgrund der Annahme isotropen Materialverhaltens, ist die Darstellung der Fließfläche unabhängig vom Koordinatensystem. Zur geometrischen Beschreibung der Fließfläche ist es daher sinnvoll, Spannungsinvarianten zu verwenden. Eine Formulierung als Funktion der Hauptspannungen, ist auch möglich aber aufwendiger.

Die drei Invarianten des allgemeinen Spannungstensors 2. Ordnung σ_{ij}

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

lauten:

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \quad (6.30)$$

$$I_2 = (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx}) - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{yz}^2 - \sigma_{zx}^2 \quad (6.31)$$

$$I_3 = \det(\sigma_{ij}) = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad (6.32)$$

Wird das Koordinatensystem des Spannungstensors so transformiert, dass es mit den Hauptspannungsrichtungen übereinstimmt, vereinfacht sich der Spannungstensor σ_{ij} zu:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

und die Invarianten zu:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (6.34)$$

$$I_2 = (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \quad (6.35)$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \quad (6.36)$$

Des Weiteren sind zur Beschreibung der Fließflächen die Invarianten des deviatorischen Spannungstensors nötig. Der Spannungstensor σ_{ij} lässt sich dazu in zwei Anteile aufspalten:

$$\sigma_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} + s_{ij} = \quad (6.37)$$

$$= \sigma_m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_m & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_m & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_m \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

$$\text{mit: } \sigma_m = I_1/3.$$

Der Kugeltensor $\sigma_m \delta_{ij}$ beschreibt den hydrostatischen Druck und der deviatorische Spannungstensor s_{ij} die Schubbeanspruchung. Die hydrostatische Spannung σ_m wird auch als Oktaedernormalspannung σ_{okt} bezeichnet. Die Invarianten des deviatorischen Spannungstensors s_{ij} lauten:

$$J_1 = s_{xx} + s_{yy} + s_{zz} = 0 \quad (6.39)$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2} (s_{xx}^2 + s_{yy}^2 + s_{zz}^2) + s_{xy}^2 + s_{yz}^2 + s_{zx}^2 = \\ &= \frac{1}{6} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2] + \sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 \end{aligned} \quad (6.40)$$

$$J_3 = \det(s_{ij}) = \begin{vmatrix} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_{yy} & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_{zz} \end{vmatrix} \quad (6.41)$$

Aus den Spannungsinvarianten lassen sich die **Haigh-Westergaard-Koordinaten** ζ , ρ und θ ableiten:

$$\zeta = \sqrt{3} \sigma_m = \frac{1}{\sqrt{3}} I_1 \quad (6.42)$$

$$\rho = \sqrt{2 J_2} \quad (6.43)$$

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{(\sqrt{J_2})^3} \right) \quad (6.44)$$

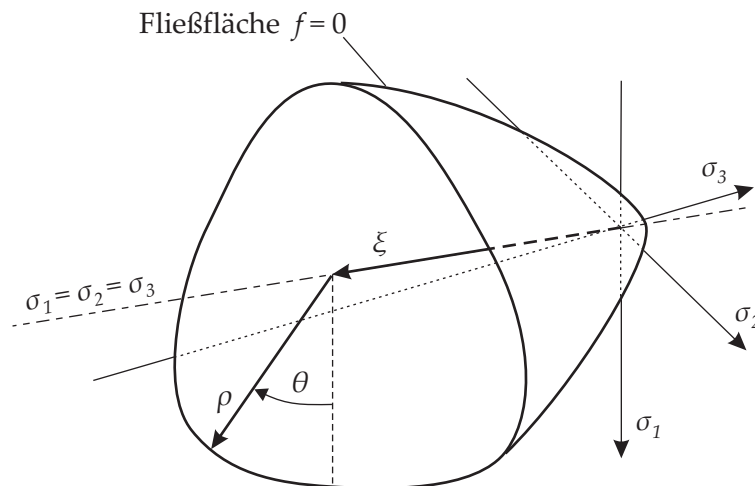


Abbildung 6.3: Schematische Darstellung einer Bruchumhüllenden im dreidimensionalen Hauptspannungsraum in *Haigh-Westergaard*-Koordinaten

Sie entsprechen Zylinderkoordinaten im Hauptspannungsraum (Abbildung 6.3). Der Vorteil dieses Koordinatensystems liegt in der geometrischen Anschaulichkeit. Die Koordinate ζ gibt den Abstand des Spannungspunktes zum Ursprung auf der hydrostatischen Achse an. ρ beschreibt den Abstand eines Punktes von der hydrostatischen Achse in einer normal zur hydrostatischen Achse angeordneten Ebene, der sogenannten Deviatorebene. Der Lode-Winkel θ ist der Winkel in der Deviatorebene mit dem die aktuelle Lage des Spannungspunktes in dieser Ebene definiert wird. Aus Gleichung 6.44 lässt sich die dreifache Symmetrie der deviatorischen Querschnitte ablesen.

Im Laufe der Zeit wurde eine Vielzahl von Fließ- und Bruchflächen entwickelt, um das vom jeweiligen Material abhängige Verhalten zu beschreiben. Im Folgenden wird daher ein kurzer Überblick über vorhandene Bruchflächen gegeben. Nach der Einführung allgemeiner Bruchkriterien wird im Anschluss auf die für Beton entwickelten Bruchflächen eingegangen. Für Stahlfaserbeton sind dem Autor keine speziellen Bruchflächen bekannt. Es werden zumeist die Bruchflächen von Beton übernommen, obwohl sich das mehraxiale Bruchverhalten durch die Faserzugabe ändert. Im Rahmen dieser Arbeit wird deshalb eine Bruchfläche eigens für Stahlfaserbeton entwickelt, die das anhand von Versuchsergebnissen gewonnene mehraxiale Bruchverhalten (siehe Abschnitt 3.3) beschreiben kann.

Die in der Literatur gegebenen Bruchflächen für Beton lassen sich genauer in **Einflächenmodelle** und **Mehrflächenmodelle** gliedern. Während bei den Erst genannten versucht wird, das Bruchverhalten mit nur einer einzigen, geschlossenen Bruchfläche zu beschreiben, wird bei letzteren die Bruchfläche aus mehreren Teilflächen zusammengesetzt. Eine andere Einteilung der Bruchflächen kann in sogenannte „**n-Parameter Modelle**“ erfolgen. Dabei bezieht sich die Zahl n nicht auf die Anzahl an freien Parametern sondern auf die Anzahl an unabhängigen Versuchen, die zur Parameterbestimmung der jeweiligen Bruchfläche erforderlich sind.

6.3.1 Allgemeine Bruchkriterien

Das Bruchmodell nach *Rankine* auch als Hauptspannungskriterium oder „*tension cut off*“ bezeichnet, gehört zu den einfachsten Bruchkriterien. Es besagt, dass das Tragverhalten eines Werkstoffes erschöpft ist, wenn die größte Hauptzugspannung die Zugfestigkeit f_{ctm} erreicht:

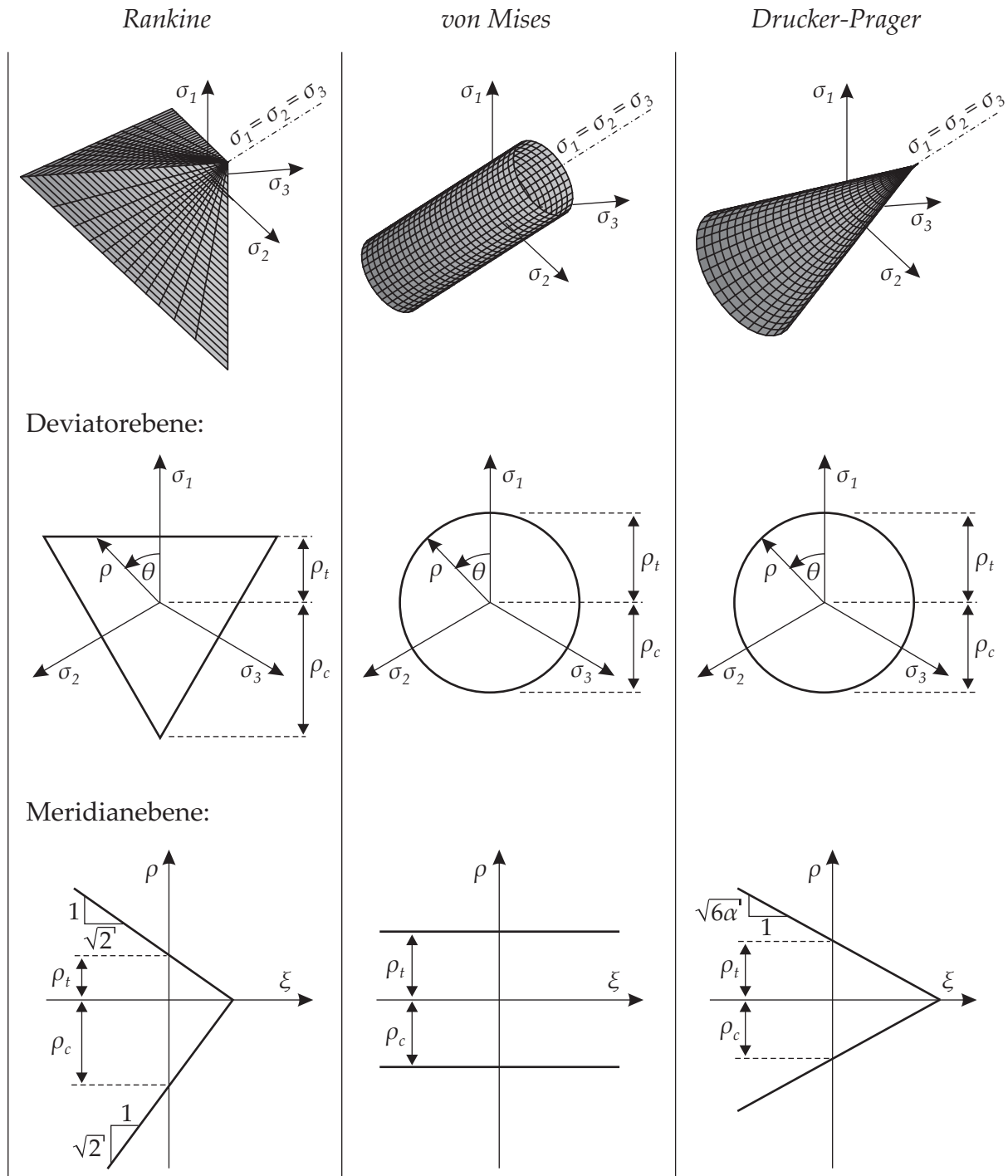


Abbildung 6.4: Bruchkriterien nach Rankine, von Mises und Drucker-Prager

$$\sigma_1 = f_{ctm}, \quad \sigma_2 = f_{ctm}, \quad \sigma_3 = f_{ctm} \quad (6.45)$$

oder in den Spannungsinvarianten ausgedrückt:

$$f_R(I_1, J_2, \theta) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \cos\theta + \frac{1}{3} I_1 - f_{ctm} = 0 \quad (6.46)$$

Die beiden kleineren Hauptspannungen haben dabei keinen Einfluss. Mit dem *Rankine*-Kriterium lässt sich das Verhalten von Beton unter vorwiegender Zugbeanspruchung sehr gut beschreiben. Ein modifiziertes *Rankine*-Kriterium wird daher auch für die Bruchfläche des Stahlfaserbetons verwendet.

Die Versagenstheorie nach *von Mises* dient der Beschreibung des Verhaltens von Materialien mit ausgeprägten Fließbereichen wie z.B. Stahl und anderen Metallen. Hier ist allein die deviatorische Schubspannungskomponente entscheidend für das Erreichen des Bruchspannungszustandes. In Abhängigkeit der Invariante J_2 und der einaxialen Festigkeit f_{cm} ergibt sich das Kriterium zu:

$$f_{vM}(J_2) = \sqrt{3J_2} - f_{cm} = 0 \quad (6.47)$$

Die Gleichung ist unabhängig vom hydrostatischen Druck. Im dreidimensionalen Hauptspannungsraum beschreibt die Bruchfläche einen Zylinder um die hydrostatische Achse. Das *von Mises*-Kriterium ist in der Lage das Verhalten von Beton unter biaxialer Druckbeanspruchung näherungsweise zu beschreiben.

Bei den beiden aufgeführten Modellen handelt es sich jeweils um 1-Parameter Modelle.

Das Bruchkriterium nach *Drucker-Prager* ist ein 2-Parameter Modell und stellt eine Erweiterung des *von Mises*-Kriteriums durch die Berücksichtigung des hydrostatischen Drucks in Form der Spannungsinvariante I_1 dar:

$$f_{DP}(I_1, J_2) = \alpha I_1 + \beta \sqrt{J_2} - f_{cm} = 0 \quad (6.48)$$

Im dreidimensionalen Hauptspannungsraum ist die Bruchfläche, durch die lineare Abhängigkeit vom hydrostatischen Druck, ein Kegel um die hydrostatische Achse. Das *Drucker-Prager*-Kriterium kann über die beiden Parameter α und β , die die Neigung und den Schnitt des Kegels mit der hydrostatischen Achse steuern, an die einaxiale und biaxiale Druckfestigkeit angepasst werden. Die auf diese Weise festgelegte Bruchfläche stimmt mit dem in Versuchen, zum Beispiel von Kupfer [Kup72], beobachteten biaxialen Bruchverhalten von Beton im Druckbereich sehr gut überein.

Keines der drei zuvor beschriebenen Bruchkriterien ist jedoch in der Lage das Materialverhalten des Betons vollständig sowohl unter Druckbeanspruchung als auch unter Zugbeanspruchung zu beschreiben. Speziell für Probleme mit dreiaxialen Druckspannungszuständen ist die Beschreibung mit dem *Drucker-Prager* Kegel nur eine Näherung. Es hängt vom untersuchten Problem ab, ob höherwertige, speziell zur Beschreibung des Bruchverhaltens von Beton entwickelte Bruchmodelle, einzusetzen sind.

6.3.2 Bruchmodelle für Beton

Höherwertige Bruchmodelle für Beton wurden zum Beispiel von *Bresler & Pister* [BP58], *Chen & Chen* [CC75], *Hsieh & Ting & Chen* [HTC82], *Willam & Warnke* [WW75], sowie *Ottosen* [Ott77] entwickelt. Diese Modelle werden mit mehreren Parametern an das Materialverhalten des Betons angepasst und berücksichtigen sowohl eine Krümmung in der Meridianebene als auch die Änderung der Deviatorquerschnitte in Abhängigkeit der hydrostatischen Spannung. Auf eine ausführliche und grafische Darstellung dieser Modelle wird im Rahmen dieser Arbeit verzichtet und auf Literatur wie [Che82], [CH88] und [EMM87] verwiesen. Ein neues Bruchkriterium wurde von *Rogge* [Rog02] entwickelt. Durch die abschnittsweise Definition der

Bruchfläche und eine vorübergehende Vergrößerung der Anzahl an Parametern wurde die Anpassungsfähigkeit dieses Modells wesentlich erhöht. Eine große Bandbreite an ausgewerteten Versuchen erlaubte es aber anschließend, die für die Anwendung des Kriteriums erforderlichen Parameter auf die einaxiale Druck- und Zugfestigkeit zu reduzieren.

Handelt es sich bei der Bruchfläche um eine zusammenhängende Fläche, die im gesamten Bereich stetig differenzierbar ist, so spricht man von sogenannten **Einflächenmodellen**. Sie besitzen maximal zwei Unstetigkeitsstellen der Gradienten an den Schnittpunkten mit der hydrostatischen Achse. Bei den zuvor aufgeführten Modellen handelt es sich bis auf das von *Hsieh & Ting & Chen* um Einflächenmodelle. Ihr großer Vorteil liegt darin, dass im Rahmen der numerischen Umsetzung in einem Plastizitätsmodell keine Mehrflächenplastizität erforderlich ist. Nachteilig ist, dass die Ver- und Entfestigung der Fließfläche nicht mit unterschiedlichen, vollkommen unabhängigen Gesetzen jeweils für zug- und druckdominante Spannungszustände erfolgen kann. Als Besonderheit ist in diesem Zusammenhang die von Pravida [Pra99] entwickelte Fließfläche zur Untersuchung von Betonscheiben unter ebenen Spannungszuständen zu nennen. Mit Hilfe von superquadratischen Funktionen lässt sich eine aus *Drucker-Prager*- und *Rankine*-Kriterium zusammengesetzte Fließfläche in eine einzige, geschlossen darstellbare Gleichung, die zudem im gesamten Wertebereich mehrfach stetig differenzierbar ist umformen. Das Ver- und Entfestigungsverhalten der beiden Teilkriterien kann aber nach wie vor unabhängig voneinander gesteuert werden.

Eine andere Möglichkeit das Bruchverhalten von Beton zu beschreiben besteht mittels **Mehrflächenmodellen**. Hier wird die gesamte Bruchfläche aus einzelnen Teilflächen zusammengesetzt. Anzumerken ist, dass es sich eigentlich bei allen nicht stetig differenzierbaren Bruchflächen um Mehrflächenmodelle handelt. Im Weiteren sollen aber nur solche Modelle betrachtet werden, die bewusst aus einzelnen Teilkriterien zusammengesetzt sind, um das unterschiedliche Verhalten in bestimmten Belastungsbereichen des Betons zu erfassen. Feenstra [Fee93] verwendet für sein zweidimensionales Betonmodell eine aus einem *Rankine*-Kriterium für den Zugbereich und einem *Drucker-Prager*-Kriterium für den Druckbereich zusammengesetzte Fließfläche. Winkler [Win01] greift diese Fließfläche auf, verwendet jedoch ein ausgerundetes *Rankine*-Kriterium.

Für die Untersuchung dreidimensionaler Druckspannungszustände sollten auch hydrostatische Druckspannungszustände begrenzt werden. Der sich mit zunehmendem hydrostatischem Druck öffnende *Drucker-Prager*-Kegel ist dazu nicht in der Lage. Daher werden in vielen dreidimensionalen Modellen Kappen zur Bildung sogenannter „*Cap*-Modelle“ eingeführt. Simo et al. [SJPT88] und Hofstetter et al. [HST93] verwenden ein *Cap*-Modell aus drei gekoppelten Teilflächen: *Rankine*-Kriterium, elliptischer Zwischenbereich und elliptische Kappe. Menrath [Men99] schlägt ein Mehrflächenmodell vor, bei dem sich die Fließ- bzw. Bruchfläche aus zwei *Drucker-Prager*-Kriterien für den Zug- und den Druckbereich und einer Kugelkappe zusammensetzt.

Vorteil der Mehrflächenmodelle im Rahmen der Plastizitätstheorie ist eine wesentlich höhere Flexibilität. Zum einen lassen sich die Teilkriterien einzeln modifizieren oder tauschen. Zum anderen kann das Ver- und Entfestigungsverhalten der Teilkriterien separat und unabhängig gesteuert und an das Materialverhalten angepasst werden. Die algorithmische Umsetzung der Mehrflächenplastizität ist allerdings um einiges aufwendiger als die der Einflächenplastizität.

6.3.3 Fließfläche für Stahlfaserbeton

Die hier entwickelte Fließfläche für Stahlfaserbeton setzt sich aus einem ausgerundeten *Rankine*-Kriterium und einem *Drucker-Prager*-Kegel zusammen. Optional kann die Fließfläche

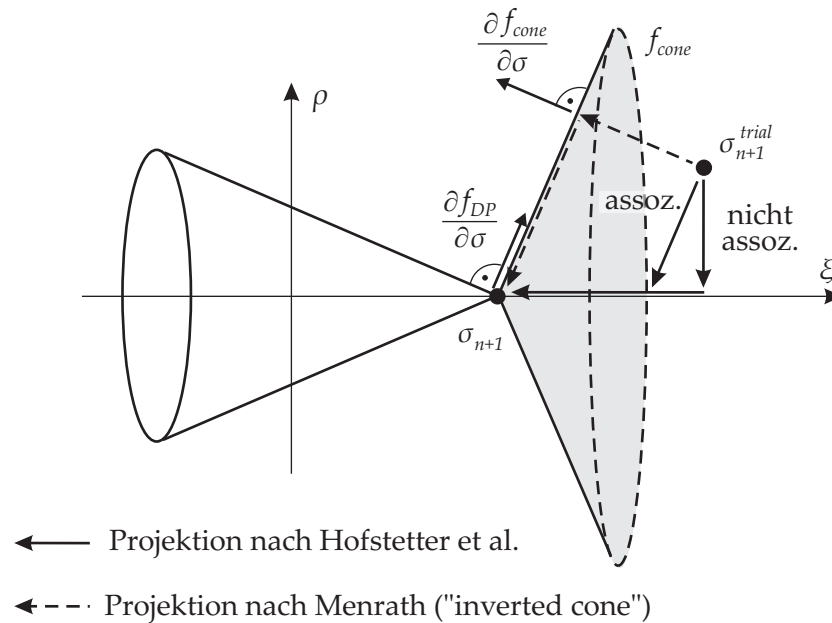


Abbildung 6.5: Projektionsmöglichkeiten des Trialspannungszustandes im Bereich der Kegelspitze des Drucker-Prager-Kriteriums

mit einer Kugelkappe versehen werden [Men99]. Die Verwendung der Kappe ist jedoch nur im Bereich großer dreiaxialer Druckspannungen von Bedeutung. Durch die Formulierung der Fließfläche im dreidimensionalen Spannungsraum kann die Fließfläche für alle Strukturberechnungen verwendet werden. Der Einsatz bleibt nicht auf ebene Spannungszustände beschränkt. Außerdem wird bei Verwendung einer zweidimensionalen Fließlinie das plastische Verhalten falsch beschrieben, da die im ebenen Spannungszustand in der dritten Spannungsrichtung auftretenden plastischen Verformungen nicht erfasst werden können.

6.3.3.1 Drucker-Prager-Kriterium

Durch die Drucker-Prager-Fließfläche wird das Ver- und Entfestigungsverhalten im Druckbereich abgebildet. Diese Fläche weist jedoch eine Singularität an der Kegelspitze auf, die bei der Spannungsintegration (siehe Abschnitt 6.7.1) beachtet werden muss. Liegt ein Trialspannungszustand vor der Kegelspitze, also im grau hinterlegten Bereich in Abbildung 6.5, so ist die Ableitung der Fließfläche, die zur Rückprojektion auf die Kegelspitze benötigt wird, nicht definiert. In der Literatur sind zwei grundsätzliche Möglichkeiten zu finden, die Rückprojektion im Bereich der Singularität durchzuführen, die in Abbildung 6.5 verdeutlicht werden. Die erste Möglichkeit wurde von Hofstetter et al. [HT91] vorgeschlagen. Für assoziierte und nicht assoziierte Plastizität wird unter Verwendung der Koiter'schen Regel erst auf die hydrostatische Achse und dann entlang der hydrostatischen Achse hin zur Kegelspitze projiziert. Die andere Möglichkeit, die Idee des „inverted cone“ wurde für idealplastisches Materialverhalten von Pontes et al. [PBZL97] vorgestellt und von Menrath [Men99] auf ver- und entfestigendes Materialverhalten erweitert. Hier wird eine weitere Drucker-Prager-Hilfsfläche, der invertierte Kegel eingeführt, der die Kegelspitze an derselben Stelle wie die Fließfläche hat und orthogonal zu ihr steht. Im Rahmen einer Mehrflächenplastizität kann nun die Spannungsrückprojektion im Bereich der Singularität durch diese beiden Flächen erfolgen. Zu beachten ist dabei, dass sich für diese Hilfsfläche die Kuhn-Tucker-Bedingungen (Gleichung (6.26)) umkehren. Der Hauptvorteil des *inverted cone* gegenüber der erstgenannten Variante ist, dass für plastisches

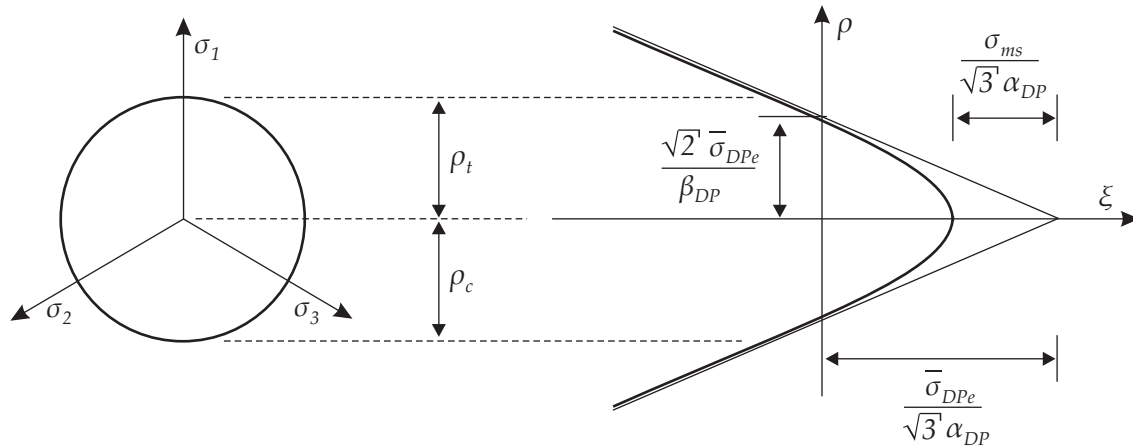


Abbildung 6.6: Hyperbolische Ausrundung der Kegelspitze des *Drucker-Prager-Kriteriums*

Werkstoffverhalten eine stabile Iteration garantiert werden kann. Die Verwendung des *inverted cone* führt allerdings zu einer unsymmetrischen Materialtangente und somit auf Strukturebene zu einer unsymmetrischen Steifigkeitsmatrix.

In dieser Arbeit wird ein eleganterer und zugleich einfacherer Weg gewählt. Die Kegelspitze wird durch eine hyperbolischen Verlauf in der Meridianebene ausgerundet (Abbildung 6.6). Dadurch entfällt die Singularität der Kegelspitze und die Fließfläche ist auch in diesem Bereich stetig differenzierbar. Die zusammengesetzte Fließfläche wird durch diese Ausrundung nicht beeinflusst, da im Bereich der Kegelspitze das *Rankine-Kriterium* maßgebend ist. Dennoch kann nicht ausgeschlossen werden, dass Triaxialspannungszustände auch das *Drucker-Prager-Kriterium* verletzen und die Rückprojektion bei den anfänglichen Iterationen der Spannungsintegration mit aktivem *Drucker-Prager-Kriterium* erfolgt. Das ausgerundete Kriterium lautet:

$$f_{DP}(I_1, J_2, \bar{\epsilon}_{DPp}) = \alpha_{DP} I_1 + \beta_{DP} (J_2^n + \sigma_{ms}^{2n})^{\frac{1}{2n}} - \bar{\sigma}_{DPe}(\bar{\epsilon}_{DPp}) \quad (6.49)$$

Dabei ist σ_{ms} die Spannungsabminderung im Bereich der Kegelspitze. Der Ausrundungsparameter n steuert die Stärke der Ausrundung. Umso größer n desto schneller schmiegt sich der Kurvenverlauf asymptotisch dem Kegel an. Bei der Wahl der Ausrundungsparameter muss grundsätzlich zwischen der ungewollten Beeinflussung des Fließkriteriums und der numerischen Stabilität abgewogen werden. Bei den in dieser Arbeit durchgeführten numerischen Berechnungen wurden gute Ergebnisse mit $\sigma_{ms} = 0,01 f_{cm}$ und $n = 2$ erzielt.

Über die beiden Parameter α_{DP} und β_{DP} wird die Bruchfläche dem in Biaxialversuchen beobachteten Materialverhalten angepasst. Hierfür werden die einaxiale Druckfestigkeit f_{cm} und die biaxiale Druckfestigkeit $f_{cm}^{bi} = a f_{cm}$ verwendet:

- Einaxiale Festigkeit:

$$\sigma_1 = -f_{cm}; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0; \quad \bar{\sigma}_{DPe} = f_{cm}$$

- Biaxiale Festigkeit:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -f_{cm}^{bi} = -a f_{cm}; \quad \sigma_3 = 0; \quad \bar{\sigma}_{DPe} = f_{cm}$$

Eingesetzt in das *Drucker-Prager-Kriterium* mit $n = 1$ und $\sigma_{ms} = 0$ ergibt sich:

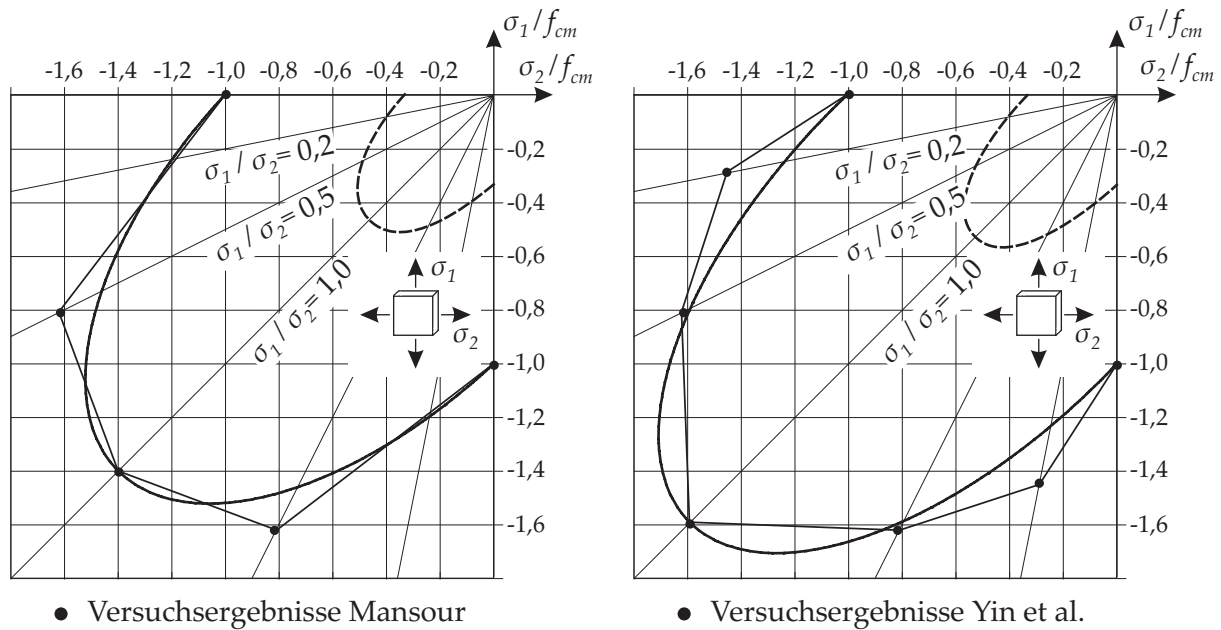


Abbildung 6.7: An die Biaxialversuche von Mansour [Man89] und Yin et al. [YSMH89] angepasstes Drucker-Prager-Kriterium

$$\alpha_{DP} = -\frac{1-a}{a}, \quad \beta_{DP} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}(1-a)}{a}$$

Aus den Versuchsergebnissen von Mansour [Man89] ergibt sich ein Verhältnis von einaxialer zu biaxialer Festigkeit $a = f_{cm}^{bi}/f_{cm} = 1,4$ für Stahlfaserbeton mit einem Fasergehalt von 1,0 Vol.% und Fasern mit Endaufbiegungen (siehe Abschnitt 3.3). Wie in Abbildung 6.7 zu erkennen, kann durch das Drucker-Prager-Kriterium mit den angepassten α_{DP} und β_{DP} Werten die biaxiale Bruchkurve gut abgebildet werden. Yin et al. [YSMH89] ermitteln mit ihren Versuchen eine höhere biaxiale Festigkeit von $f_{cm}^{bi} = 1,6f_{cm}$ für einen Fasergehalt von 1,0 Vol.% und Fasern ohne Endaufbiegungen. Auch diese Bruchkurve kann gut angenähert werden (Abbildung 6.7). Bei den Versuchen von Yin et al. zeigte sich, dass aufgrund des verwendeten Zuschlags die biaxiale Festigkeit bei reinem Beton etwa 15 % über der von anderen Forschern, wie zum Beispiel von Kupfer [Kup72], ermittelten liegt (Abbildung 3.6). Reduziert man die biaxiale Festigkeit von Stahlfaserbeton um 15 % so ergibt sich ebenfalls ein $a = f_{cm}^{bi}/f_{cm}$ von etwa 1,4. Es sei darauf hingewiesen, dass die Versuchsergebnisse stark von der Faserart beeinflusst werden. Um ein wirklich exakte Anpassung zu erhalten, müssten Biaxialversuche mit den jeweilig verwendeten Stahlfasern durchgeführt werden. Dies ist in der Praxis jedoch nicht möglich, da sich die Durchführung solcher Versuche als sehr aufwendig darstellt. Es scheint daher gerechtfertigt und ausreichend genau, für die weiteren Untersuchungen $a = f_{cm}^{bi}/f_{cm} = 1,4$ anzunehmen.

Die Fließfläche wird durch die isotrope Verkleinerung dieser Bruchfläche gewonnen. Die elastische Grenze liegt dabei entsprechend der einaxialen Ver- und Entfestigungsbeziehung bei 33 % der Druckfestigkeit. Anschließend wird die Fließfläche bis zum Erreichen der Bruchfläche isotrop aufgeweitet und nach Überschreiten der Druckfestigkeit kontrahiert.

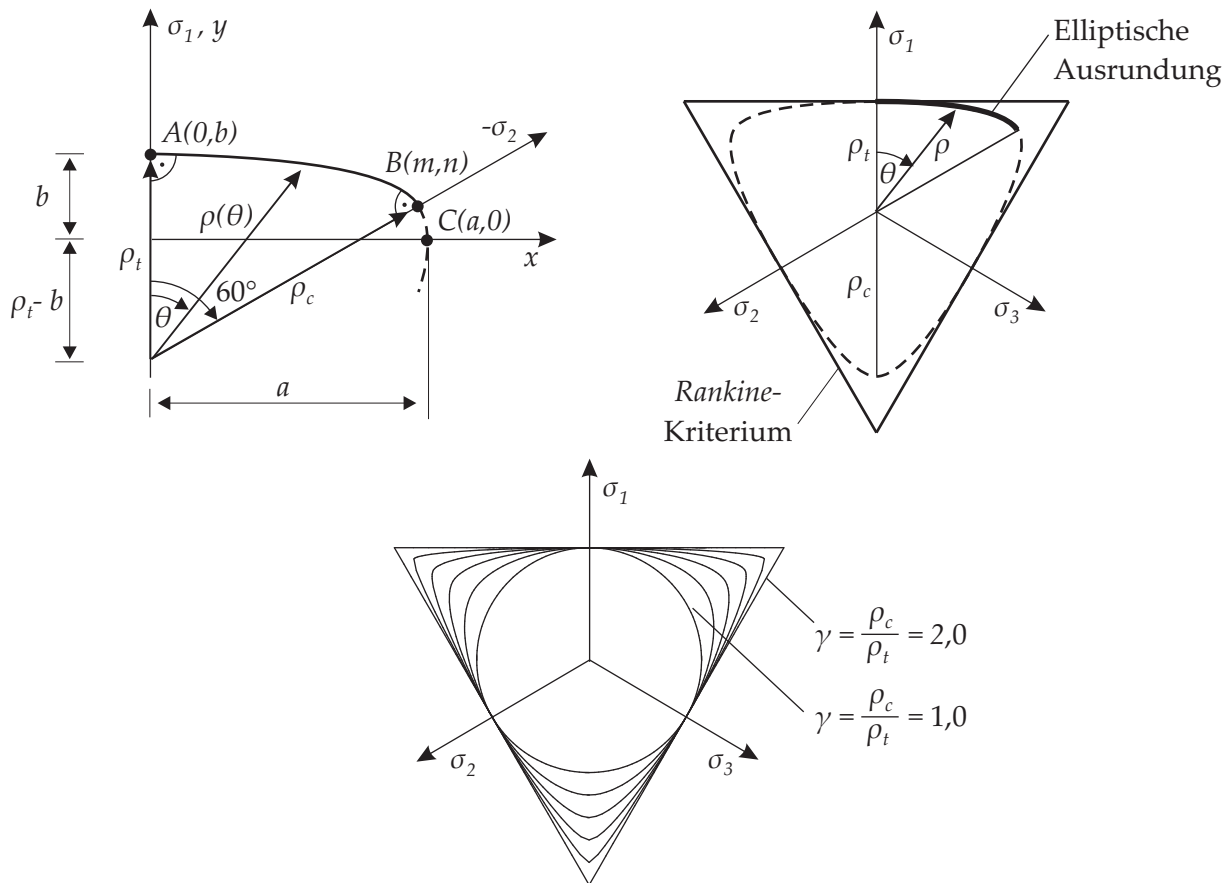


Abbildung 6.8: Elliptische Ausrundung des *Rankine*-Kriteriums in der Deviatorebene

6.3.3.2 Ausgerundetes *Rankine*-Kriterium

Durch das *Rankine*-Kriterium in Verbindung mit einem isotropen Entfestigungsgesetz wird das Zugverhalten, also das Reißen des Stahlfaserbetons beschrieben. Problematisch bei diesem Kriterium ist, dass es sich im Hauptspannungsraum aus drei Teilflächen zusammensetzt, die an den Verschneidungskanten nicht stetig differenzierbar sind. Prinzipiell könnte diese Problematik auch mit dem verwendeten Mehrflächenalgorithmus gelöst werden. Es ist jedoch eleganter, die Fließfläche an den Kanten auszurunden und auf diese Weise eine einzige, stetig differenzierbare Fließfläche für den Zugbereich zu erhalten. Außerdem besteht die Möglichkeit, das Fließkriterium mit Hilfe der Ausrundungsparameter besser an Versuchsergebnisse anzupassen. Die Ausrundung setzt sich aus einer **elliptischen** Ausrundung der **Deviatorebene** und einer **hyperbolischen** Ausrundung in der **Meridianebene** zusammen.

Ausrundung der Deviatorebene

Das *Rankine*-Kriterium stellt sich in einem Schnitt durch die Deviatorebene als gleichseitiges Dreieck dar (Abbildung 6.8). Die Ausrundung erfolgt durch die Verwendung eines Teils einer Ellipse wie auch beim 5-Parameter-Modell von *Willam-Warnke* [WW75]. Durch die dreifache Symmetrie der Deviatorebene ist es ausreichend, nur den Bereich des Lodewinkels θ zwischen 0° bis 60° zu betrachten. Für die Herleitung der elliptischen Gleichung wird eine viertel Ellipse mit den Hauptachsen x und y (Halbachsen a und b) in den Polarkoordinaten ρ und θ ausgedrückt. Damit die Kurve an den Übergangsstellen $A(0,b)$ bei $\theta = 0^\circ$ und $B(n,m)$ bei $\theta = 60^\circ$ keine Knicke bekommt und somit stetig differenzierbar ist, muss sie an diesen Stellen senkrecht zu den Vektoren ρ_t und ρ_c stehen. Bei $\theta = 0^\circ$ ist diese Bedingung durch die Lage

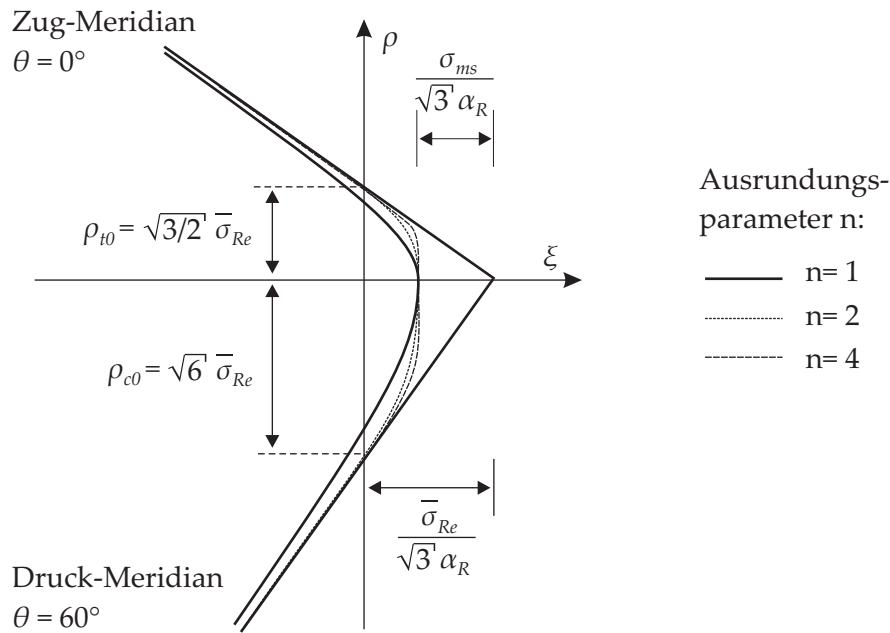


Abbildung 6.9: Hyperbolische Ausrundung des Rankine-Kriteriums in der Meridianebene

auf der y -Achse ohnehin erfüllt. Der im Punkt B senkrecht zur Ellipse stehende Vektor ρ_c muss außerdem mit der x -Achse einen Winkel von 30° einschließen. Aus diesen Bedingungen lassen sich die Halbachsen der Ellipse a und b in Abhängigkeit von ρ_t und ρ_c berechnen. Nach einigen algebraischen Umformungen und mit $\rho_t = 1,0$ und $\rho_c = \gamma = \rho_c / \rho_t$ als Verhältnis von triaxialer Kompression zu triaxialer Extension ergibt sich die Gleichung für $\rho(\theta)$ wie folgt:

$$\rho(\theta) = \frac{2\gamma(\gamma^2 - 1)\cos\theta + \gamma(2 - \gamma)\sqrt{4(\gamma^2 - 1)\cos^2\theta + 5 - 4\gamma}}{4(\gamma^2 - 1)\cos^2\theta + (\gamma - 2)^2} \quad (6.50)$$

$$\gamma = \frac{\rho_c}{\rho_t} \quad \text{mit} \quad 1,0 \leq \gamma \leq 2,0$$

Es lassen sich zwei Grenzfälle betrachten: Für $\gamma = 1,0$ wird die Ellipse zu einem Kreis mit dem Radius ρ_t und für den Grenzwert $\gamma = 2,0$ ergibt sich das Rankine-Dreieck. Die Halbachse b geht hierbei gegen Null. In Abbildung 6.8 ist der Deviatorschnitt in Abhängigkeit von γ dargestellt.

Ausrundung der Meridianebene:

Wie bereits beim Drucker-Prager-Kriterium, erfolgt auch hier eine **hyperbolische** Ausrundung der Meridianebene. Das Rankine-Kriterium ergibt sich ohne Berücksichtigung der Deviatorausrundung zu:

$$f(I_1, J_2, \theta, \bar{\varepsilon}_{Rp}) = \left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \cos\theta \right)^{2n} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{ms} \right)^{2n} \right)^{\frac{1}{2n}} + \alpha_R I_1 - \bar{\sigma}_{Re}(\varepsilon_{Rp}) \quad (6.51)$$

Im Meridianschnitt in Abbildung 6.9 ist sowohl der Zug-Meridian ($\theta = 0^\circ$) als auch der Druck-Meridian ($\theta = 60^\circ$ bzw. 180°) zu sehen. Durch σ_{ms} wird die Spannungsabminderung im Bereich der Spitze erreicht. Mit dem Parameter α_R kann der Öffnungswinkel gesteuert werden. Mit $\alpha_R = 1/3$ ergibt sich der Öffnungswinkel des klassischen, nicht ausgerundeten Rankine-Kriteriums. Der Ausrundungsparameter n ist für die Form der Ausrundung verantwortlich.

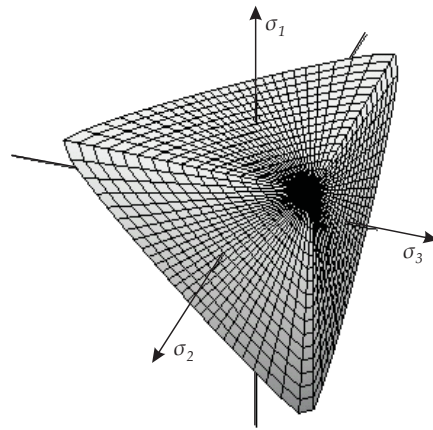


Abbildung 6.10: Ausgerundetes Rankine-Kriterium im Hauptspannungsraum

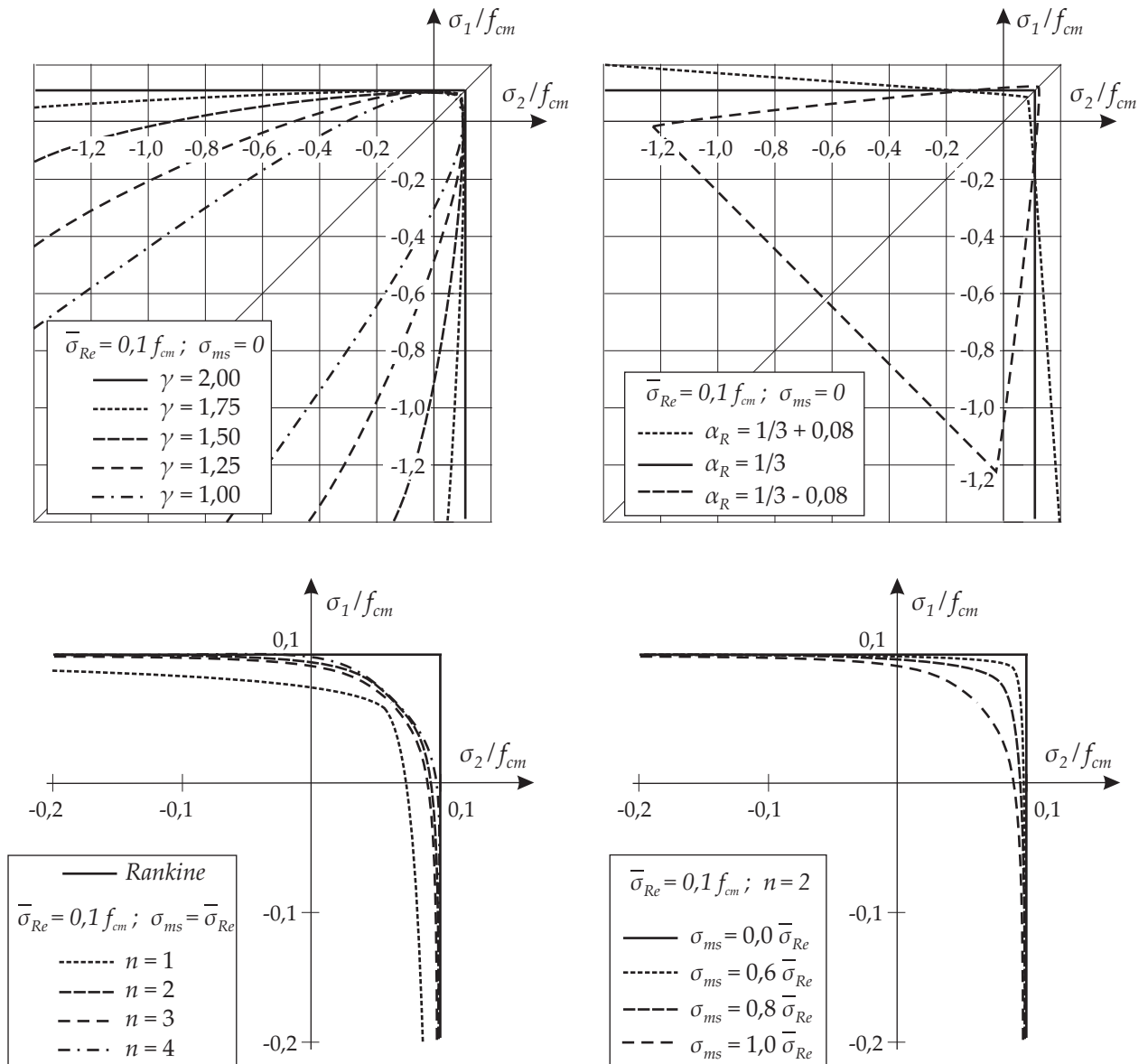


Abbildung 6.11: Einfluss der Ausrundungsparameter im ebenen Spannungszustand

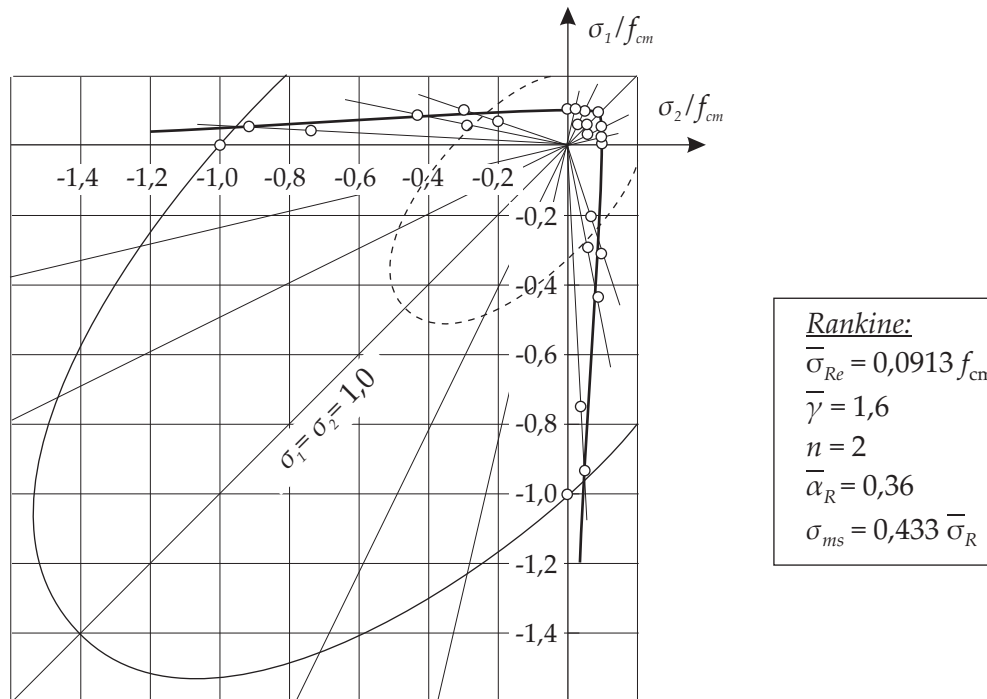


Abbildung 6.12: Ausgerundetes Rankine-Kriterium im Vergleich mit den Ergebnissen der Biaxialversuche von Kupfer et al. [KHR69]

Je größer n desto schneller nähert sich die ausgerundete Fläche asymptotisch der nicht ausgerundeten Fläche an. Durch die hyperbolische Formulierung ist die Funktion zweimal stetig differenzierbar und kann somit bei der Spannungsintegration mit dem impliziten Euler Rückwärtsverfahren verwendet werden.

Ausgerundetes Rankinekriterium

Durch Kombination der beiden vorgestellten Ausrundungen ergibt sich die Fließfläche:

$$f^R(I_1, J_2, \theta, \bar{\epsilon}_{Rp}) = \left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{J_2}}{r(\theta)} \cos \theta \right)^{2n} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{ms} \right)^{2n} \right)^{\frac{1}{2n}} + \alpha_R I_1 - \bar{\sigma}_{Re}(\bar{\epsilon}_{Rp}) \quad (6.52)$$

Der Einfluss der Parameter α_R , γ , n und σ_{ms} auf die Fließkurve für den ebenen Spannungszustand ($\sigma_3 = 0$) ist in Abbildung 6.11 zu sehen. Durch diese Parameter ist es möglich, die Fließfläche im Zug-Zug und Zug-Druck Bereich an Versuchsergebnisse anzupassen. Da dem Autor keine Biaxialversuche von Stahlfaserbetonen für diese Beanspruchungsbereiche (Zug-Zug, Zug-Druck) vorliegen, werden die Versuchsergebnisse von Kupfer et al. [KHR69] für reinen Beton verwendet (Abbildung 6.12). Im Zug-Zug Bereich entspricht die maximal aufnehmbare Zugspannung für alle in diesem Bereich liegenden Hauptspannungskombinationen annähernd der einaxialen Zugfestigkeit. Im Zug-Druck Bereich hingegen nimmt die aufnehmbare Zugspannung mit zunehmender Druckspannung ab. Mit dem klassischen Rankine-Kriterium kann dieses Verhalten nur unzureichend beschrieben werden. Die Zugfestigkeit bleibt mit zunehmender Druckspannung konstant. Mit dem hier entwickelten Kriterium kann durch die Wahl der Ausrundungsparameter, speziell dem den Öffnungswinkel steuernden Parameter α_R , auch dieser Bereich optimal den Versuchsergebnissen angepasst werden. Für zweidimensionale Berechnungen im ebenen Spannungszustand wird daher die Wahl von $\alpha_R = 0,36$ empfohlen (Abbildung 6.12). Beim Übergang auf dreidimensionale Berechnungen

zeigt sich allerdings ein zu steifes Strukturverhalten so, dass eine Reduktion auf $\alpha_R = 0,33$ nötig ist (siehe Abschnitt 8.3).

Die Ausrundung des Kriteriums führt dazu, dass im Falle vollständiger Entfestigung ($\bar{\sigma}_{Re} = 0$) der zugehörige Spannungspunkt, um das Fließkriterium zu erfüllen im Druckspannungsbereich liegen muss, einem Spannungszustand der aus physikalischer Sicht in einem geöffneten Riss nicht auftreten kann. Um dies zu vermeiden, muss der Entfestigungsparameter $\bar{\sigma}_{Re}$ auf den Wert beschränkt werden, bei dem unter hydrostatischer Zugbeanspruchung die aufnehmbare Spannung genau Null ist.

Prinzipiell muss bei der Ausrundung von Fließflächen darauf geachtet werden, so die Erfahrung des Autors, dass die Ausrundungsradien nicht zu klein gewählt werden. Obwohl die Fließfläche über das ganze Gebiet stetig differenzierbar ist, kann es ansonsten aufgrund der starken Änderung der Gradienten zu Problemen bei der Spannungsrückprojektion kommen.

6.4 Evolution der Ver- und Entfestigungsparameter

Zur Beschreibung des Ver- und Entfestigungsverhaltens wird ein **isotropes** Ver- bzw. Entfestigungsgesetz in Verbindung mit einer **Arbeitsverfestigungshypothese** verwendet. Obwohl die Rissbildung des Betons ein anisotroper Schädigungsvorgang ist, kann dieser Vorgang gut mit einer isotropen Entfestigung im Rahmen der Plastizitätstheorie beschrieben werden [MM97]. Eine Kombination aus isotroper und kinematischer Entfestigung beschreibt das wirkliche Materialverhalten zwar am besten, impliziert allerdings auch einen großen Aufwand bei der Bestimmung der zusätzlichen Materialparameter. Da außerdem keine Belastungszyklen gerechnet werden sollen, zeigt sich die isotrope Entfestigung als ausreichend. Als Vorteil der isotropen Verfestigung ist außerdem zu nennen, dass auch nach dem Plastifizieren ein isotropes Materialgesetz vorliegt.

Für die isotrope Verfestigung lassen sich die beiden Fließfunktionen, das ausgerundete *Rankine*-Kriterium (6.52) für den Zugbereich und das *Drucker-Prager*-Kriterium (6.49) für den Druckbereich, nach Gleichung (6.11) in einen vom Spannungszustand abhängigen Teil und einen von den inneren Parametern abhängigen Teil aufgespaltet:

$$\begin{aligned} f_{DP}(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\epsilon}_{DPp}) &= F_{DP}(\boldsymbol{\sigma}) - \bar{\sigma}_{DPe}(\bar{\epsilon}_{DPp}) \\ f_R(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\epsilon}_{Rp}) &= F_R(\boldsymbol{\sigma}) - \bar{\sigma}_{Re}(\bar{\epsilon}_{Rp}) \end{aligned} \quad (6.53)$$

Die Funktion $F_\alpha(\boldsymbol{\sigma})$ ($\alpha \in \{DP, R\}$) bildet den allgemeinen Spannungszustand auf eine eindimensionale Vergleichsspannung ab, die mit der Fließspannung des einaxialen Druckversuchs $\bar{\sigma}_{DPe}$ bzw. einaxialen Zugversuchs $\bar{\sigma}_{Re}$ verglichen wird. Die Fließspannungen sind dabei Funktionen der Ver- bzw. Entfestigungsparameter, für die in diesem Fall die effektiven plastischen Vergleichsdehnungen $\bar{\epsilon}_{DPp}$ und $\bar{\epsilon}_{Rp}$ verwendet werden. Durch diese Beziehungen kann das Materialgesetz an das einaxiale Materialverhalten, wie es in Versuchen beobachtet wird, angepasst werden. Da es sich um die Beziehung zwischen plastischer Vergleichsdehnung und Spannung handelt, ist der in den Versuchsergebnissen enthaltene elastische Dehnungsanteil von der Gesamtdehnung abzuziehen. $\bar{\epsilon}_{DPp}$ steuert die Ver- und Entfestigung des *Drucker-Prager*-Kriteriums und $\bar{\epsilon}_{Rp}$ die Entfestigung des *Rankine*-Kriteriums.

Bei plastischen Belastungszuständen muss die jeweilige Fließfunktion erfüllt, also gleich Null sein, d.h. die Vergleichsspannung entspricht der Fließspannung:

$$\begin{aligned} F_{DP}(\boldsymbol{\sigma}) &= \bar{\sigma}_{DPe}(\bar{\varepsilon}_{DPp}) \\ F_R(\boldsymbol{\sigma}) &= \bar{\sigma}_{Re}(\bar{\varepsilon}_{Rp}) \end{aligned} \quad (6.54)$$

Zur Bestimmung der plastischen Vergleichsdehnungen $\bar{\varepsilon}_{DPp}$ und $\bar{\varepsilon}_{Rp}$ wird die Arbeitsverfestigungshypothese verwendet. Hierbei wird angenommen, dass die Rate der plastischen Arbeit des mehraxialen Spannungszustandes der des eindimensionalen Vergleichszustandes entspricht:

$$\dot{W}_\alpha^{pl} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = \bar{\sigma}_{\alpha e} \dot{\bar{\varepsilon}}_{\alpha p} \quad \text{für } \forall \alpha \in \{DP, R\} \quad (6.55)$$

Nach Feenstra et al. [FdB96] kann die Rate der plastischen Arbeit für eine zusammengesetzte Fließfunktion unter Verwendung der assoziierten *Koiter'schen* Fließregel mit

$$\begin{aligned} \dot{W}_{DP}^{pl} &= \dot{\lambda}_{DP} \left(\boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial f_{DP}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) + \zeta_{DP,R} \frac{\bar{\sigma}_{DPe}}{\bar{\sigma}_{Re}} \dot{\lambda}_R \left(\boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial f_R}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) = \bar{\sigma}_{DPe} \dot{\bar{\varepsilon}}_{DPp} \\ \dot{W}_R^{pl} &= \dot{\lambda}_R \left(\boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial f_R}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) + \zeta_{R,DP} \frac{\bar{\sigma}_{Re}}{\bar{\sigma}_{DPe}} \dot{\lambda}_{DP} \left(\boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial f_{DP}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) = \bar{\sigma}_{Re} \dot{\bar{\varepsilon}}_{Rp} \end{aligned} \quad (6.56)$$

angegeben werden. Mit Hilfe der Skalare $\zeta_{DP,R}$ und $\zeta_{R,DP}$ kann eine Kopplung der Zug- und Druckentfestigung berücksichtigt werden.

Da der Gradient der Fließfunktion nach den Spannungen $\partial f_\alpha / \partial \boldsymbol{\sigma}$ dem Gradienten der Funktion F_α mit $\partial F_\alpha / \partial \boldsymbol{\sigma}$ entspricht, lässt sich generell für homogene Funktionen vom Grad n nach dem Satz von *Euler* folgender Zusammenhang angeben [Fee93]:

$$\boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial F_\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = n F_\alpha \quad (6.57)$$

Bei den beiden verwendeten Fließfunktionen handelt es sich um homogene Funktionen der Spannung vom Grad $n = 1$ und durch Umformen von Gleichung (6.56) unter Berücksichtigung von Gleichung (6.57) ergibt sich die **Evolutionsgleichung** für die inneren Parameter $\bar{\varepsilon}_{DPp}$ und $\bar{\varepsilon}_{Rp}$:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\varepsilon}}_{DPp} &= \dot{\lambda}_{DP} + \zeta_{DP,R} \dot{\lambda}_R \\ \dot{\bar{\varepsilon}}_{Rp} &= \dot{\lambda}_R + \zeta_{R,DP} \dot{\lambda}_{DP} \end{aligned} \quad (6.58)$$

Um eine Entkopplung der beiden Parameter zu bewirken, werden die Kopplungsfaktoren $\zeta_{DP,R}$ und $\zeta_{R,DP}$ zu Null gesetzt, wodurch sich die Evolutionsgleichung (6.58) zu

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_{DPp} = \dot{\lambda}_{DP} \quad \text{und} \quad \dot{\bar{\varepsilon}}_{Rp} = \dot{\lambda}_R \quad (6.59)$$

vereinfacht. Anschaulich bedeutet das, dass ein Probekörper, der vorher vollständig auf Zug entfestigt wurde, nach einer Lastumkehr immer noch in der Lage ist, Druckspannungen aufzunehmen und umgekehrt. Obwohl beim tatsächlichen Materialverhalten eine gewisse Kopplung des Ver- und Entfestigungsverhaltens im Zug- und Druckbereich beobachtet werden kann, ist diese vereinfachende Annahme gerechtfertigt. So zeigt sich beispielsweise, dass im Bereich geschlossener Risse nach wie vor große Druckspannungen übertragen werden können.

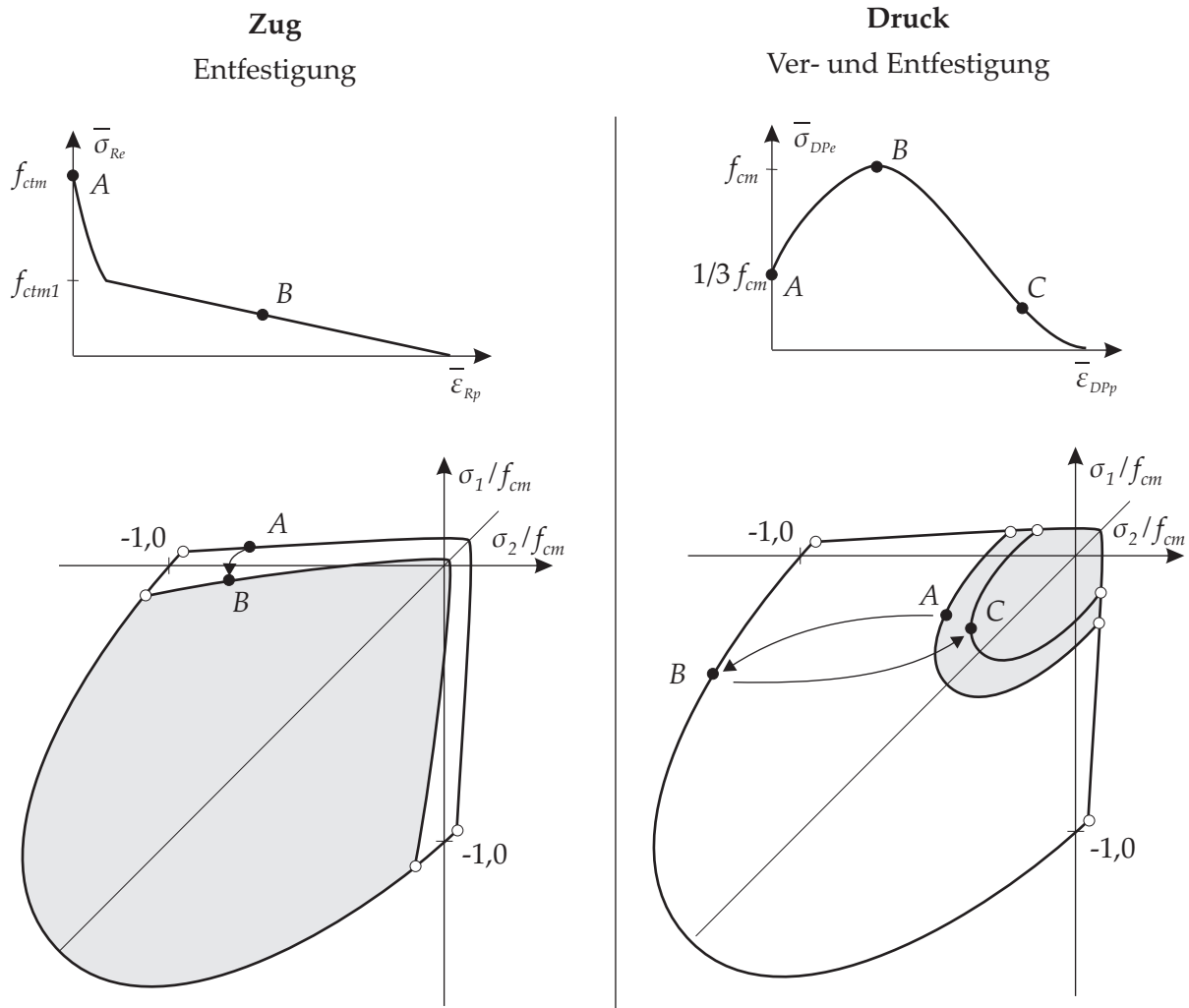


Abbildung 6.13: Einfluss der Ver- und Entfestigung auf die Fließflächen

Der Einfluss der Ver- und Entfestigung auf die Fließflächen ist in Abbildung 6.13 im zweidimensionalen Hauptspannungsraum ($\sigma_3 = 0$) dargestellt. Bei dem für das Zugversagen verantwortlichen *Rankine*-Kriterium kommt es durch die Entfestigung nach Überschreiten der Zugfestigkeit (Punkt A) zu einem Zusammenziehen der Fließfläche (Punkt B). Dabei ist zu erkennen, dass die aufnehmbare Zugspannung in beiden Richtungen gleichermaßen abnimmt. Im Druckbereich wird davon ausgegangen, dass sich das Material anfangs elastisch verhält. Nach Überschreiten der Fließgrenze (Punkt A) wird die Fließfläche isotrop, bis zur maximal aufnehmbaren Druckspannung (Punkt B) aufgeweitet. Anschließend führt die Entfestigung zu einem Zusammenziehen der Fließfläche (Punkt C).

6.5 Entfestigung im Zugbereich

Mit Hilfe der einaxialen Entfestigungsbeziehung, also der Beziehung zwischen der Fließspannung $\bar{\sigma}_{Re}$ und dem inneren Parameter, der effektiven plastischen Vergleichsdehnungen $\bar{\epsilon}_{Rp}$, wird das Materialgesetz an das einaxiale Materialverhalten des Stahlfaserbetons angepasst.

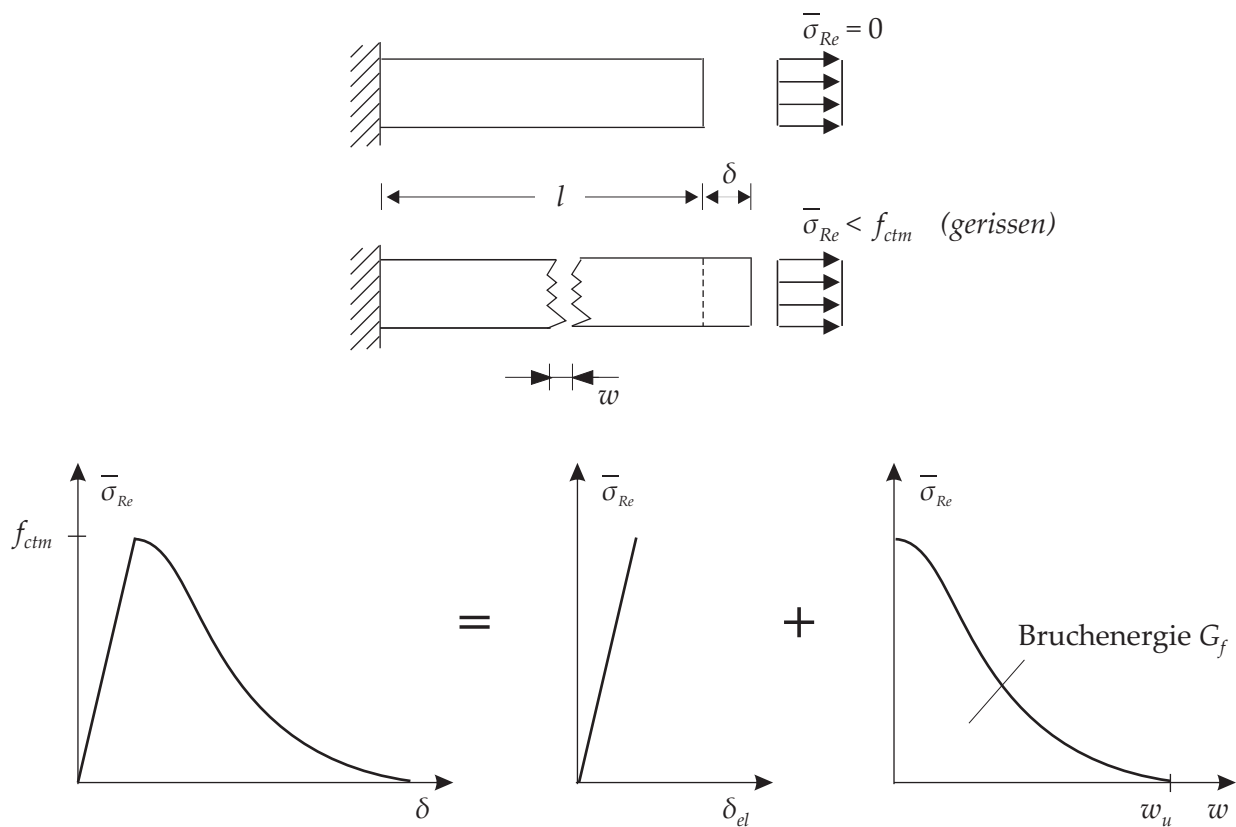


Abbildung 6.14: Längenänderung einer Zugprobe im Nachbruchbereich

Die Charakteristiken des einaxiale Materialverhaltens wurden in Abschnitt 3.1 bereits ausführlich beschrieben.

6.5.1 Lokalisierung

Durch die Lokalisierung bei der Rissbildung ist bei direkten Zugversuchen eine deutliche Abhängigkeit der Spannungs-Dehnungsbeziehung von der Probenlänge zu erkennen (Abbildung 3.3), eine Tatsache, die bei der Formulierung eines Materialgesetzes im Rahmen einer Implementierung in ein FE-Programm unbedingt berücksichtigt werden muss. Auf diese Weise ist es möglich objektive, nicht von der Netzgröße abhängige Berechnungsergebnisse zu erhalten.

Die Rissbildung, die zur Entfestigung führt, findet nur in einem sehr schmalen, lokalen Probenbereich, der sogenannten Rissprozesszone statt. Während die Verformungen in diesem Bereich zunehmen, kommt es durch das sinkende Spannungsniveau zu einer Entlastung der restlichen Probe. Die Spannungs-Verformungskurve des einaxialen Zugversuchs kann daher, wie in Abbildung 6.14 dargestellt, in zwei Anteile aufgespalten werden. Der erste Teil, die Spannungs-Dehnungsbeziehung beschreibt das Verhalten des ungerissenen Probenbereichs, der zweite Teil gibt die Spannungs-Rissöffnungsbeziehung in der Rissprozesszone an. Unter der vereinfachenden Annahme, dass sich das Material vor dem Bruch linear-elastisch verhält, ergibt sich die gesamte Längenänderung ρ der Probe zu

$$\rho = \frac{\bar{\sigma}_{Re}}{E} l + w \quad (6.60)$$

und die mittlere Dehnung zu:

$$\varepsilon = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{riss} = \frac{\bar{\sigma}_{Re}}{E} + \frac{w}{l} \quad (6.61)$$

ε^{el} steht dabei für den elastischen Dehnungsanteil des ungerissenen Probenbereichs und die Rissdehnung ε^{riss} für die über die gesamte Probenlänge verschmierte Rissöffnung. Aus Gleichung 6.61 ist deutlich die Abhängigkeit der Spannungs-Dehnungsbeziehung von der Probenlänge l zu erkennen.

In dieser Arbeit wird zur objektiven, netzunabhängigen Beschreibung des Entfestigungsverhaltens im Rahmen der Finite-Elemente-Formulierung das von Hillerborg et al. [HMP76] vorgeschlagene **fictitious-crack-Modell** verwendet. Das ursprünglich für Beton vorgeschlagene Modell wurde anschließend für Stahlfaserbeton erweitert [Hil80], [Hil85a]. Grundlage des Modells ist die Annahme einer infinitesimal schmalen Rissprozesszone (*fracture zone*), in der die Umsetzung der gesamten zur Rissbildung notwendigen Energie erfolgt. Die durch Mikrorisse in der Rissprozesszone verursachten Einzelrissöffnungen werden gedanklich einem einzelnen Riss zugeordnet und dessen Verhalten durch eine Spannungs-Rissöffnungsbeziehung festgelegt. Diese Beziehung enthält sowohl Spannungsanteile der Betonmatrix als auch Spannungsanteile aus der rissüberbrückenden Wirkung der Stahlfasern, als Funktion der Rissöffnung.

Eine alternative Möglichkeit ist das von Bažant et al. [BO83] vorgeschlagene **crack-band-Modell**. Hier liegt die Annahme zugrunde, dass die Entfestigung nicht wie bei Hillerborg in einem infinitesimal schmalen Einzelriss stattfindet, sondern über ein sogenanntes Rissband (*crack-band*) verteilt auftritt. Die Breite dieses Rissbandes ist ein vom Material abhängiger Längenparameter. Die Entfestigung wird dann durch eine Spannungs-Dehnungsbeziehung charakterisiert, die von der Rissbandbreite abhängig ist. Über die Rissbandbreite kann die Spannungs-Dehnungsbeziehung in eine Spannungs-Rissöffnungsbeziehung überführt werden. Dadurch ergibt sich eine weitgehende Kompatibilität zwischen dem *fictitious-crack-Modell* und dem *crack-band-Modell*.

Als Maß für die Festlegung der Spannungs-Rissöffnungsbeziehung wird die **spezifische Bruchenergie** G_f verwendet. Die spezifische Bruchenergie ist die Energie, die zur Erzeugung einer Einheitsrissfläche bis zur vollständigen Entfestigung des Materials nötig ist und entspricht somit der Fläche unter der Spannungs-Rissöffnungskurve (Abbildung 6.14).

$$G_f = \int_{w=0}^{w_u} \bar{\sigma}_{Re} dw \quad (6.62)$$

Die Bruchenergie ist weitgehend unabhängig von der Probengeometrie und Prüfmethode und kann daher als Materialparameter verwendet werden. Die Bestimmung der Bruchenergie aus Versuchen wird in Abschnitt 7.1 angesprochen. Im Rahmen der Finite-Elemente-Methode mit einer Rissmodellierung im Kontinuum muss die diskrete Rissöffnung w in eine Rissdehnung $\bar{\varepsilon}_{Rp}$ umgerechnet werden:

$$\bar{\varepsilon}_{Rp} = \frac{w}{L_{eq}} \quad (6.63)$$

L_{eq} ist die **äquivalente Länge** des finiten Elements und beschreibt die Länge über die die Rissöffnung auf Integrationspunktebene verschmiert wird.

Die äquivalente Länge hängt nicht nur von der Größe des jeweiligen Elements ab, sondern auch vom Typ, der Form und der Integrationsordnung des jeweiligen Elements. Bei mehraxialen

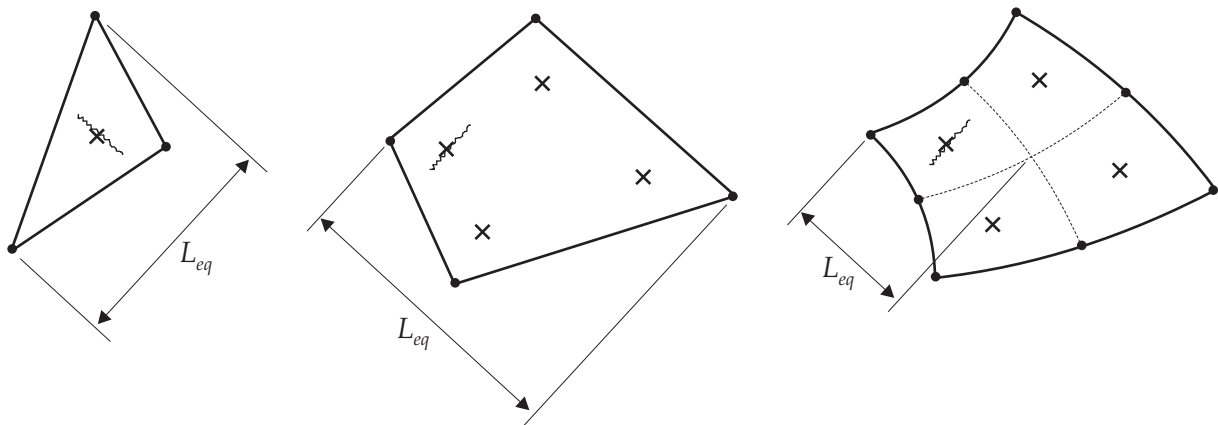


Abbildung 6.15: Definition der äquivalenten Länge für zweidimensionale Finite-Elemente

Spannungszuständen wird die äquivalente Länge außerdem von der Orientierung des Risses zum Element beeinflusst. Für die Ermittlung der äquivalenten Länge gibt es unterschiedliche Ansätze, die sich in folgende zwei Gruppen einteilen lassen:

- Bei der Berechnung der äquivalenten Länge wird die Rissorientierung berücksichtigt. Hier sind u.a. die Ansätze von Dahlblom und Ottosen [DO90] und Cervenka et al. [CPOE95] zu nennen.
- Die Rissorientierung wird bei der Berechnung der äquivalenten Länge nicht berücksichtigt. Wenn die Risse annähernd parallel zu den Elementkanten orientiert sind, kann eine mittlere Elementlänge aus der Elementfläche bestimmt werden. Für ebene Elemente wird hier der Ansatz nach Rots [Rot88] verwendet:

$$L_{eq} = \alpha \cdot \sqrt{A_e} \quad (6.64)$$

A_e ist dabei die Fläche des Elements und α ein skalarer Faktor, der den Elementansatz berücksichtigt. Für quadratische Elemente gilt $\alpha = 1$ und für lineare Elemente $\alpha = \sqrt{2}$.

Durch die Berücksichtigung der äquivalenten Länge als internen Längenparameter in der Entfestigungsbeziehung ist sichergestellt, dass bei der Rissöffnung im Integrationspunkt, unabhängig von der Netzweite, immer die gleiche Bruchenergie freigesetzt wird. Unter Annahme

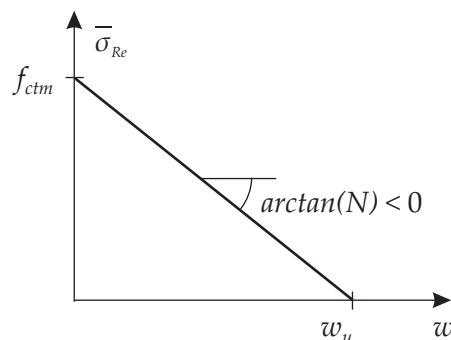


Abbildung 6.16: Lineare Spannungs-Rissöffnungsbeziehung

eines linearen Entfestigungsverhaltens gibt N die negative Steigung der Spannungs-Rissöffnungsbeziehung an (Abbildung 6.16):

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{Re}}{\partial w} = N < 0 \quad (6.65)$$

Die verschmierte Gesamtdehnung am Integrationspunkt lässt sich dann mit

$$\varepsilon = \frac{\bar{\sigma}_{Re}}{E} + \frac{\bar{\sigma}_{Re} - f_{ctm}}{N L_{eq}} \quad (6.66)$$

angeben. Daraus ergibt sich der Zusammenhang zwischen Spannungs- und Dehnungsrate:

$$\dot{\sigma}_{Re} = \underbrace{\frac{E}{1 - \frac{\lambda}{L_{eq}}}}_{E_t} \dot{\varepsilon} \quad \text{mit} \quad \lambda = -\frac{E}{N} \quad (6.67)$$

E_t ist der Tangentenmodul des Nachbruchverhaltens. λ berechnet sich aus den Materialparametern N und E und hat die Einheit einer Länge. Daher hat λ selbst auch den Charakter eines Materialparameters und wird als **charakteristische Länge** des Materials auf Zugversagen bezeichnet. Bei Betrachtung von Gleichung (6.67) zeigt sich, dass für entfestigendes Material

$$\lambda > L_{eq} \quad (6.68)$$

gelten muss. Der Grenzfall $\lambda = L_{eq}$ führt zu einem schlagartigen Entfestigen nach Überschreiten der Bruchspannung, gekennzeichnet durch einen senkrechten Abfall der Spannungs-Dehnungsbeziehung. Anschaulich bedeutet das, dass die elastische Energie in der Probe größer ist als die zur kompletten Rissöffnung benötigte Bruchenergie G_f . Bei Finite-Elemente-Berechnungen ist somit aus Gründen der numerischen Stabilität bei der Wahl der Elementgröße darauf zu achten, dass die äquivalente Länge kleiner ist als der Parameter λ .

Erweiterte Theorien zur Behandlung des Lokalisierungsphänomens:

Neben der hier verwendeten Möglichkeit, mit Hilfe einer Spannungs-Rissöffnungsbeziehung und der Bruchenergie dem Lokalisierungsphänomen zu begegnen gibt es eine Vielzahl weiterer Ansätze für sogenannte **Lokalisierungsbegrenzer**.

Allgemein gesprochen handelt es sich bei der Lokalisierung um die Konzentration von Verzerrungen auf ein schmales, vom Werkstoff abhängiges Band, das sich bei der Entfestigung bildet. Dieses Verhalten kann nicht nur bei Beton, sondern auch bei anderen entfestigenden Materialien wie Kunststoffen, Böden, Aluminium und Stahl beobachtet werden. Die Breite des Versagensbandes charakterisiert einen materialabhängigen inneren Längenparameter. Die numerische Umsetzung entfestigender Materialgesetze, ohne die Berücksichtigung dieses Parameters, führt somit zu stark netzabhängigen Ergebnissen. Das Versagen findet dann innerhalb eines Elementbandes statt, das für den Grenzfall einer unendlich feinen Diskretisierung schließlich zu einem infinitesimal schmalen Band lokalisiert. Folglich kann in diesem Band auch keine Energiedissipation stattfinden, was im Widerspruch zu den physikalischen Beobachtungen steht. Der Grund für die Netzabhängigkeit kann somit auf die „Schlechtgestelltheit“ des Problems zurückgeführt werden [Slu92]. Die ursprüngliche Elliptizität der Differentialgleichung des inkrementellen Randwertproblems geht verloren. Für eine genauere

Zusammenfassung des Zusammenhangs zwischen den Lokalisierungsbedingungen und den klassischen Stabilitätskriterien, wie der Eindeutigkeit, der Stabilität und der Elliptizität sei auf die Arbeit von Haufe [Hau01] verwiesen. Durch Formulierungen, die einen inneren Längenparameter als Maß für die Breite der Diskontinuität verwenden, können netzunabhängige Lösungen erhalten werden. Bei dem in dieser Arbeit angewendeten *fictitious-crack*-Modell entspricht die äquivalente Elementlänge diesem inneren Längenparameter.

Eine andere Möglichkeit ist die Verwendung einer **ratenabhängigen Plastizität**. Im Gegensatz zu der in dieser Arbeit angenommenen ratenunabhängigen Plastizität ergibt sich hier durch die zeitabhängigen viskosen Parameter eine regularisierende Wirkung. Neben den klassischen Überspannungsmodellen vom *Duvaut-Lions*-Typ [DL72] und vom *Perzyna*-Typ [Per96] existieren auch sogenannte konsistente Formulierungen, bei denen die Raten der inneren Parameter direkt in die Fließfunktion eingehen [WSdB97], [Slu92].

Eine andere Möglichkeit besteht durch die **Erweiterung der klassischen Kontinuumstheorie**. Bei Gradientenmodellen liefern Gradienten höherer Ordnung den inneren Längenparameter. Zu dieser Gruppe zählen nichtlokale Modelle [PCB87], [BPC88] und Modelle, bei denen die Fließfunktion in Abhängigkeit der Gradienten der äquivalenten Verzerrungen formuliert wird [MA91], [dBm92]. Die von den Gebrüdern Cosserat [CC09] vorgeschlagene Kontinuumsformulierung baut auf Makro-Elementen auf, die in endliche Mikro-Elemente aufgeteilt werden. Durch die endliche Größe der Elemente wird der innere Längenparameter eingebracht. Zur Beschreibung der Deformationen werden neben den Translationen zusätzlich Rotationen, sogenannte mikro-polare Freiheitsgrade eingeführt [Sch62], [MV87]. Ein Problem der erweiterten Kontinuumsformulierung ist, dass die zusätzlich erforderlichen Modell- und Materialparameter, insbesondere der innere Längenparameter, nicht direkt aus Versuchen bestimmt werden kann [dBSMP93].

6.5.2 Spannungs-Rissöffnungsbeziehung für Stahlfaserbeton

Aufgrund der zuvor gemachten Aussagen wird eine Spannungs-Rissöffnungsbeziehung verwendet, um das Entfestigungsverhalten des Stahlfaserbetons im Zugbereich objektiv beschreiben zu können. Zunächst wird dafür ein Überblick über in der Literatur beschriebene, für Stahlfaserbeton gebräuchliche, qualitative Spannungs-Rissöffnungsbeziehungen gegeben. Das einaxiale Entfestigungsverhalten (siehe Abschnitt 3.1) von Stahlfaserbetonen mit unterkritischem Fasergehalt, wie es beispielsweise im direkten Zugversuch beobachtet werden kann, lässt sich grob in zwei Bereiche aufteilen. Im ersten Bereich, direkt nach dem Überschreiten der Zugfestigkeit, kann ein steiler Abfall der Spannungen beobachtet werden. Die Faserwirkung ist hier noch sehr gering. Im zweiten Bereich hingegen hat sich der Spannungsabfall stabilisiert und es stellt sich aufgrund der durch die Relativverschiebung zwischen Faser und Matrix aktivierten Fasertragwirkung ein annähernd konstantes, mit zunehmender Verformung leicht sinkendes Spannungsniveau ein. Die Spannungs-Rissöffnungsbeziehung ist dabei stark von Fasergehalt und Fasertyp abhängig.

Eine konstante Spannungs-Rissöffnungsbeziehung nach Überschreiten der Zugfestigkeit wie in Abbildung 6.17 a) dargestellt ist die einfachste Variante das Zugtragverhalten abzubilden. Hillerborg [Hil85a] schlägt eine zweiteilige Spannungs-Rissöffnungsbeziehung vor (Abbildung 6.17 b). Der erste Teil der Beziehung ist linear, auf den ein konstanter Teil folgt. Ein Spannungsabfall im zweiten Bereich wird nicht berücksichtigt. Aufgrund dessen ist es nicht möglich bzw. nötig die Bruchenergie des gesamten Entfestigungsvorgangs anzugeben. Es wird nur eine Teilbruchenergie G'_f , die die Neigung des ersten Bereichs festlegt, verwendet. Der

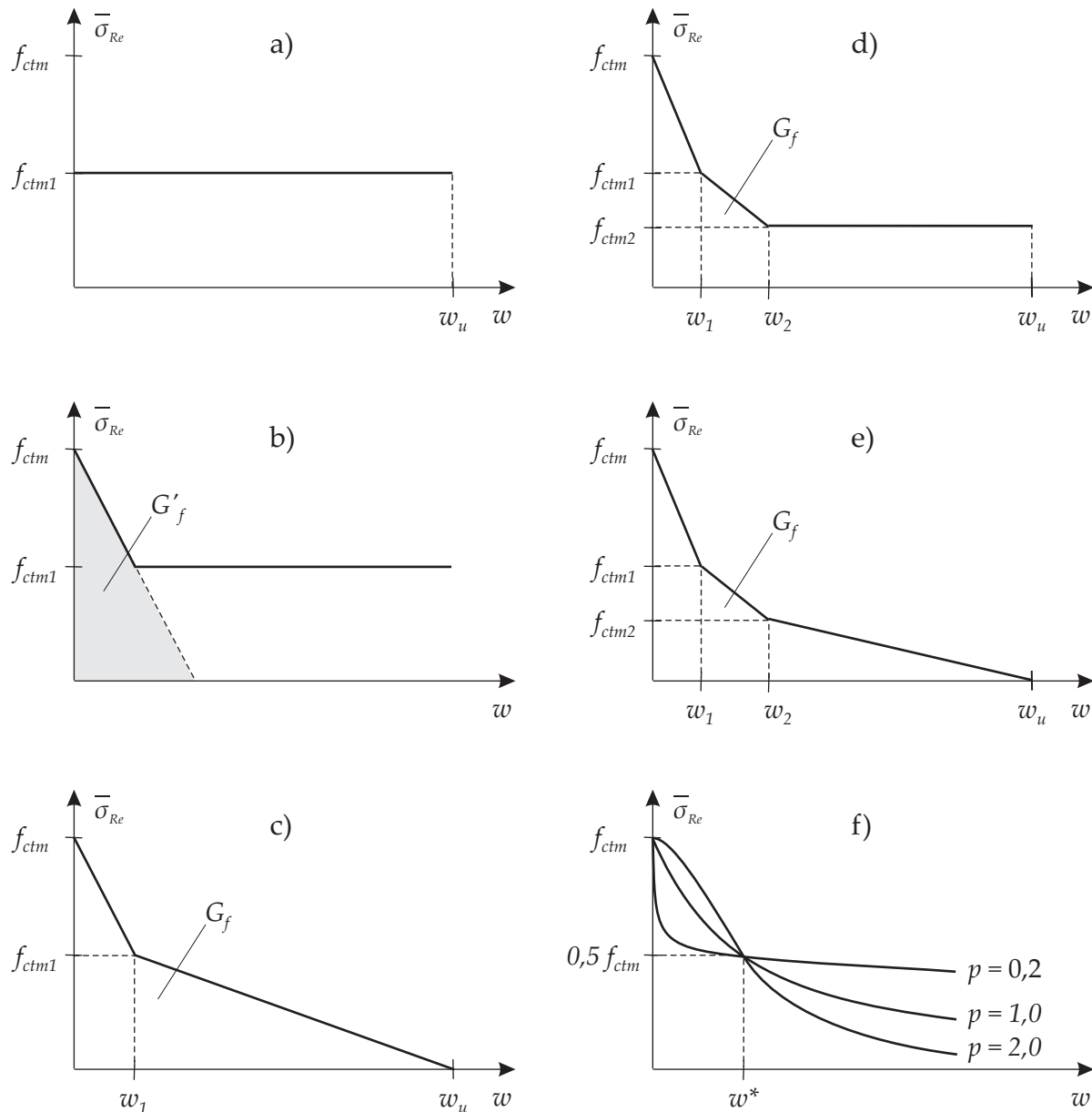


Abbildung 6.17: Spannungs-Rissöffnungsbeziehungen für Stahlfaserbeton

konstante zweite Bereich kann das Materialverhalten speziell bei größeren Rissweiten nur unzureichend wiedergeben. Bei bilinearen Entfestigungsbeziehungen kann dieser Bereich besser an das Materialverhalten angepasst werden (Abbildung 6.17 c)). Bilineare Spannungs-Rissöffnungscurven werden sehr häufig verwendet u.a. in [MMMY95], [Koo00] und [BF99]. Auch bei den in Normen und Merkblättern zur Bemessung von Stahlfaserbeton zugrunde gelegten Spannungs-Dehnungsbeziehungen handelt es sich um bilineare Ansätze [DBV01], [RIL00a], [SIA99]. Spannungs-Dehnungsbeziehungen sind allerdings aufgrund des fehlenden Längenparameters grundsätzlich für objektive FE-Berechnungen nicht geeignet. Ein weitere Möglichkeit sind trilineare Spannungs-Rissöffnungscurven. Die von Gettu et al. [GPFI01], [FG01] verwendete Beziehung beginnt nach Überschreiten der Zugfestigkeit mit einer linearen Entfestigung für reinen Beton (Abbildung 6.17 d)). Im dritten Teil der Kurve ist die Spannung konstant. Bei der von Kützing [Küt00] vorgeschlagenen Kurve ist hingegen auch der dritte Teil

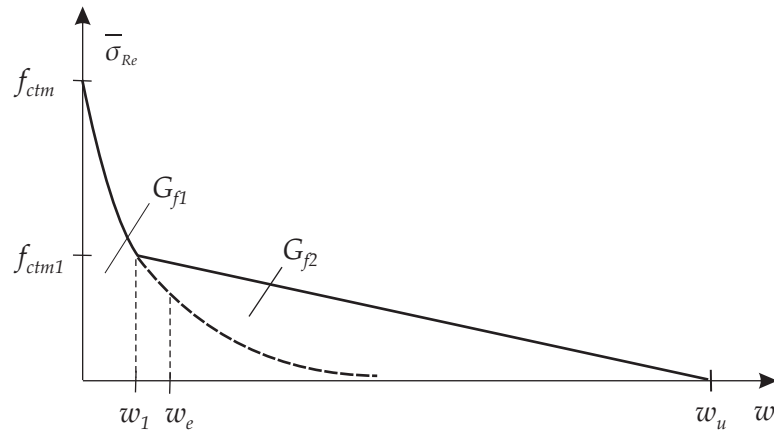


Abbildung 6.18: Einaxiale Entfestigungsbeziehung für Stahlfaserbeton

linear (Abbildung 6.17 e)). Stang & Aarre [SA92] schlagen die in Abbildung 6.17 f) zu sehende Entfestigungskurve vor:

$$\bar{\sigma}_{Re}(w) = \frac{f_{ctm}}{1 + \left(\frac{w}{w^*}\right)^p} \quad (6.69)$$

Durch Variation der empirischen Parameter w^* (Referenz Rissöffnung) und p (Formparameter) kann die Kurve an das Verhalten einer Vielzahl von Stahlfaserbetonen angepasst werden.

In dieser Arbeit wird eine neue **zweiteilige Spannungs-Rissöffnungsbeziehung** für Stahlfaserbeton verwendet (Abbildung 6.18). Der erste Teil ist von den Stahlfasern kaum beeinflusst und wird deshalb durch einen **exponentiellen** Verlauf wie er für reinen Beton von Feenstra [Fee93] vorgeschlagen wird beschrieben. Durch diesen Verlauf kann das Entfestigungsverhalten in diesem Bereich wesentlich besser als mit einem linearen Ansatz beschrieben werden. Dieses zeigt sich vor allem bei niedrigen Fasergehalten bzw. dem fließenden Übergang zum Nullbeton. Der zweite Teil der Spannungs-Rissöffnungsbeziehung ist ausschließlich von den Stahlfasern geprägt. Hier wird eine **lineare** Entfestigung zugrunde gelegt. Die Umrechnung der Rissöffnung in die für das Finite-Elemente-Programm benötigte effektive plastische Dehnung erfolgt mit Hilfe der oben beschriebenen äquivalenten Elementlänge L_{eq} :

$$\bar{\epsilon}_{Rp} = \frac{w}{L_{eq}} \quad (6.70)$$

Somit lässt sich der erste Teil der Entfestigungskurve wie folgt angeben:

$$\bar{\sigma}_{Re}(\bar{\epsilon}_{Rp}) = f_{ctm} \exp\left(\frac{-\bar{\epsilon}_{Rp}}{\bar{\epsilon}_e}\right) \quad \text{für } \bar{\epsilon}_{Rp} < \bar{\epsilon}_1 \quad (6.71)$$

$$\text{mit } \bar{\epsilon}_e = \frac{G_{f1}}{f_{ctm} L_{eq}} \quad \text{und} \quad \bar{\epsilon}_1 = -\ln\left(\frac{f_{ctm1}}{f_{ctm}}\right) \bar{\epsilon}_e$$

Materialparameter sind die Zugfestigkeit f_{ctm} und die Bruchenergie des reinen Betons G_{f1} . Der zweite Teil der Entfestigung, charakterisiert durch die Nachrissfestigkeit f_{ctm1} und dem Bruchenergieanteil der Stahlfasern G_{f2} , lautet:

$$\bar{\sigma}_{Re}(\bar{\epsilon}_{Rp}) = f_{ctm1} - \left(f_{ctm1} \frac{\bar{\epsilon}_{Rp} - \bar{\epsilon}_1}{\bar{\epsilon}_u - \bar{\epsilon}_1} \right) \quad \text{für } \bar{\epsilon}_1 < \bar{\epsilon}_{Rp} < \bar{\epsilon}_u \quad (6.72)$$

$$\text{mit } \bar{\epsilon}_u = \bar{\epsilon}_1 + \frac{2(G_{f2} + G'_{f1})}{f_{ctm1} L_{eq}} \quad \text{und} \quad G'_{f1} = G_{f1} \exp\left(\frac{-\bar{\epsilon}_1 f_{ctm} L_{eq}}{G_{f1}}\right)$$

Für die algorithmische Umsetzung wird die Ableitung der Entfestigungsbeziehung nach dem inneren Parameter $\bar{\epsilon}_{Rp}$ benötigt. Für den ersten Teil der Entfestigungskurve ergibt sich

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{Re}}{\partial \bar{\epsilon}_{Rp}} = -\frac{f_{ctm}}{\bar{\epsilon}_1} \exp\left(\frac{-\bar{\epsilon}_{Rp}}{\bar{\epsilon}_1}\right) \quad (6.73)$$

und für den zweiten Teil

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{Re}}{\partial \bar{\epsilon}_{Rp}} = -f_{ctm1} \frac{\bar{\epsilon}_{Rp} - \bar{\epsilon}_1}{\bar{\epsilon}_u - \bar{\epsilon}_1}. \quad (6.74)$$

Vor dem Erreichen der Zugfestigkeit wird von einem linear elastischen Verhalten ausgegangen. In Versuchen kann dieses Verhalten bis zu einer Spannung von etwa 60% – 90% der Zugfestigkeit bestätigt werden (Abschnitt 3.1). Die danach folgenden Abweichungen vom linear-elastischen Verhalten sind allerdings sehr gering, wodurch sich die Annahme rechtfertigt und ausreichend genau ist. Für die Berechnung reiner Betonstrukturen ohne Zusatz von Stahlfasern kann der zweite Teil der Entfestigungsbeziehung, also die Faserwirkung weggelassen werden. Methoden zur Festlegung der benötigten Materialparameter f_{ctm} , f_{ctm1} , G_{f1} und G_{f2} werden in Kapitel 7 vorgestellt.

6.6 Ver- und Entfestigung im Druckbereich

Das einaxiale Druckverhalten wird im Gegensatz zum Zugverhalten in vielen Arbeiten nur mit untergeordnetem Interesse betrachtet. Vielfach wird die Faserwirkung komplett vernachlässigt und die Spannungs-Dehnungsbeziehung von reinem Beton verwendet. Im DBV-Merkblatt „Stahlfaserbeton“ [DBV01] wird auf das Druckverhalten des reinen Betons nach DIN 1045-1 [DIN01] verwiesen. In Wirklichkeit wird allerdings auch das Verhalten des Stahlfaserbetons unter Druckbelastung, wie bereits genauer in Abschnitt 3.2 ausgeführt, durch die Faserzugabe beeinflusst. Die Druckfestigkeit und die zugehörige Bruchdehnung werden nur schwach, die Duktilität im Nachbruchbereich hingegen stark erhöht. Für eine genauere Modellierungen des Materialverhaltens und die Untersuchung von Stahlfaserbetonstrukturen unter Druckbeanspruchung ist es daher unerlässlich, die Faserwirkung zu berücksichtigen.

Mathematische Ansätze für die Spannungs-Dehnungsbeziehung von Stahlfaserbeton im Druckbereich wurden zum Beispiel von Tanigawa et al. [TYH80], Fanella & Naaman [FN85] und Barros & Figueiras [BF99] formuliert. Hierbei handelt es sich um Funktionsverläufe, die mit Hilfe von Konstanten an die Ergebnisse von Versuchsreihen angepasst werden. Da die entsprechenden Versuchsreihen jeweils mit speziellen Fasertypen und Betonmischungen durchgeführt wurden und dadurch das Druckverhalten erheblich beeinflusst wird, sind diese Spannungs-Dehnungsbeziehung nur bedingt auf andere Stahlfaserbetone übertragbar. Im Folgenden werden die Ansätze von Tanigawa et al. [TYH80] und Barros & Figueiras [BF99] genauer erläutert und mit der in dieser Arbeit entwickelten Ver- und Entfestigungsbeziehung verglichen.

6.6.1 Spannungs-Dehnungsbeziehung nach Barros & Figueiras

Das Druckverhalten in [BF99] wird aus einaxialen Druckversuchen an Stahlfaserbetonzylindern mit einem Durchmesser von 150 mm und einer Höhe von 300 mm abgeleitet. Der Stahlfasergehalt variiert zwischen 0 und 60 kg/m³. Es werden zwei unterschiedliche Stahlfaserarten mit Endaufbiegungen der Firma *Dramix* verwendet. Die ZP 30/.5 Fasern mit einer Länge von 30 mm und einem Durchmesser von 0,5 mm und die ZX 60/.8 Fasern mit einer Länge von 60 mm und einem Durchmesser von 0,8 mm. Die weiteren Ausführungen beziehen sich auf den zuletzt genannten Fasertyp, da es sich hier um einen sehr gebräuchlichen Typ handelt und bei denen in dieser Arbeit betrachteten Strukturen ähnliche Fasern verwendet wurden. Die hierfür vorgeschlagene Spannungs-Dehnungsbeziehung lautet:

$$\bar{\sigma}_{DPe} = f_{cm} \frac{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}}{(1-p-q) + q \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}\right) + p \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}\right)^{(1-q)/p}} \quad (6.75)$$

$$\text{mit } q = 1 - p - \frac{E_{c1}}{E_{ci}}; \quad p + q \in]0,1[; \quad \frac{1-q}{p} > 0$$

Der Sekantenmodul $E_{c1} = f_{cm}/\varepsilon_{c1}$ wird aus der einaxialen Druckfestigkeit f_{cm} und der zugehörigen Bruchdehnung ε_{c1} berechnet. Der Anfangsmodul E_{ci} kann nach CEB-FIP *Model Code 1990* [CF90] in Abhängigkeit der Druckfestigkeit f_{cm} bestimmt werden:

$$E_{ci} = 21500 \left(\frac{f_{cm}}{10}\right)^{1/3} \quad (6.76)$$

Der empirische Parameter p wurde durch Minimierung der Fehlerquadrate der Abweichung von Versuchs- und analytischer Kurve gewonnen und ergibt sich zu:

$$p = 1,0 - 0,722 \exp(-0,144 W_f) \quad (6.77)$$

W_f ist der Stahlfasergehalt in Gewichtsprozent. Der Einfluss des Fasergehalts auf die Bruchdehnung des Stahlfaserbetons ε_{c1} wird durch

$$\varepsilon_{c1} = \varepsilon_{c10} + 0,00026 W_f \quad (6.78)$$

berücksichtigt. Die Bruchdehnung des reinen Betons ε_{c10} wird im CEB-FIP *Model Code 90* [CF90] mit $2,2 \cdot 10^{-3}$ angegeben. Die einaxiale Druckfestigkeit f_{cm} ist somit der einzige Materialparameter, der aus Versuchen bestimmt werden muss. Nachteil dieses ansonsten sehr kompakten Ansatzes ist, dass der nicht unerhebliche Einfluss der Probengeometrie auf das einaxiale Druckverhalten unberücksichtigt bleibt.

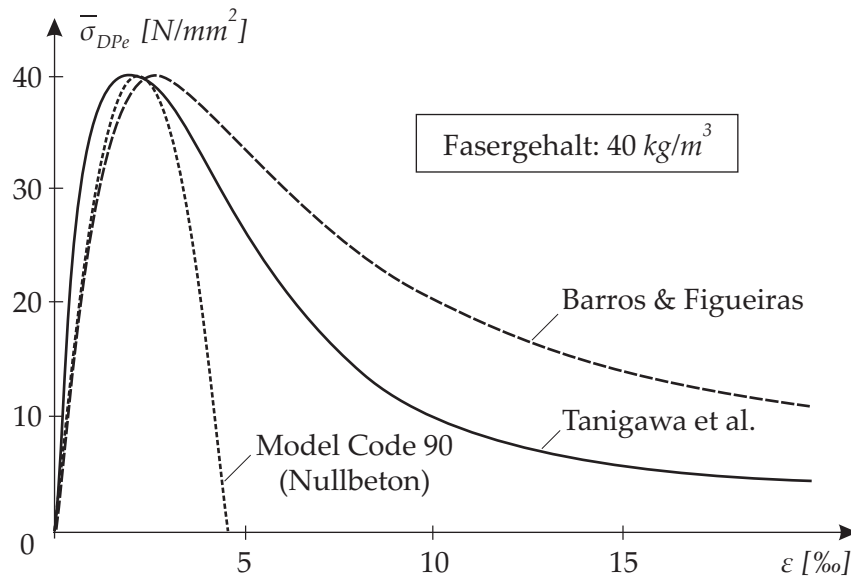


Abbildung 6.19: Einaxiale Spannungs-Dehnungsbeziehung für Stahlfaserbeton nach Barros & Figueiras [BF99] und Tanigawa et al. [TYH80] im Vergleich mit reinem Beton nach Model Code 90 [CF90]

6.6.2 Spannungs-Dehnungsbeziehung nach Tanigawa et al.

Auch in dieser Arbeit [TYH80] wird eine analytische Spannungs-Dehnungsbeziehung für Stahlfaserbeton aus einaxialen Druckversuchen abgeleitet. Bei umfangreichen Versuchsreihen werden sowohl prismatische als auch zylindrische Probekörper mit unterschiedlichem Durchmesser zu Höhe bzw. Breite zu Höhe Verhältnissen verwendet. Neben dem Einfluss der Probekörpergeometrie werden als weitere Einflussparameter der Wasser-Zement-Wert (W/C) und der Fasergehalt (V_f) berücksichtigt. Bei den verwendeten Stahlfasern handelt es sich um 30 mm lange Fasern mit einem Querschnitt von $0,35 \times 0,60$ mm. Die Fasergehalte V_f betragen 0, 0,75 Vol.% ($58,8 \text{ kg/m}^3$) und 1,50 Vol.% ($117,6 \text{ kg/m}^3$). Die mathematische Formulierung der Beziehung erfolgt getrennt für den Verfestigungs- und den Entfestigungsast. Der Verfestigungsbereich ist mit

$$\bar{\sigma}_{DPe} = f_{cm} \left(\frac{n_a \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_m} \right)}{n_a - 1 + \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_m} \right)^{n_a}} \right) \quad (6.79)$$

angegeben und der Entfestigungsbereich mit

$$\bar{\sigma}_{DPe} = f_{cm} \left(\frac{1}{n_d} + \frac{(n_d - 1) \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_m} \right)^m}{n_d - 1 + \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_m} \right)^{mn_d}} \right). \quad (6.80)$$

n_a , n_d und m sind empirische Konstanten mit deren Hilfe der Verlauf angepasst wird und ϵ_m die der Druckfestigkeit f_{cm} zugehörige Dehnung. Während die beiden oberen Gleichungen sowohl

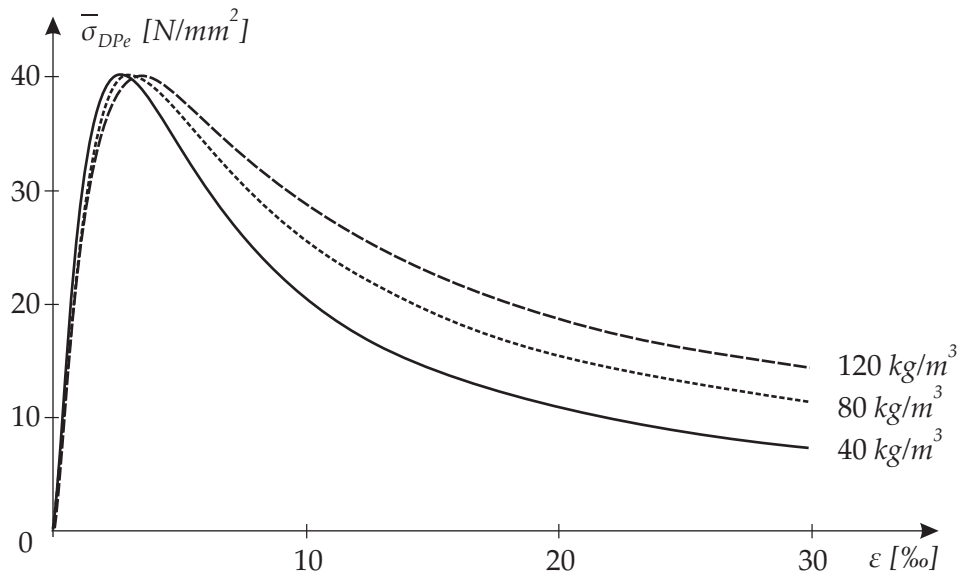


Abbildung 6.20: Einfluss des Fasergehalts auf die einaxiale Spannungs-Dehnungsbeziehung nach Barros & Figueiras [BF99]

für prismatische als auch zylindrische Probekörper gelten, werden nachfolgend lediglich die Bestimmungsgleichungen von n_a , n_d und ε_m für Zylinder aufgeführt:

$$n_a = 1 + (0,3 - 0,1 V_f) \left(\frac{H}{D} \right) \quad (6.81)$$

$$n_d = 1 + \left(\left(7,0 \left(\frac{C}{W} \right) - 4,0 \right) - \left(3,5 \left(\frac{C}{W} \right) - 3,0 \right) V_f \right) \left(\frac{H}{D} \right) \quad (6.82)$$

$$\varepsilon_m = \varepsilon_{m2} \left((1,3 - 0,45 V_f) \left(\frac{D}{H} \right)^2 + \left(1 - \frac{1,3 - 0,45 V_f}{4} \right) \right) \quad (6.83)$$

$$\text{mit} \quad \varepsilon_{m2} = k \sqrt[4]{f_{cm}} 10^{-4} \left(1 + \left(1,4 - 0,5 \left(\frac{C}{W} \right) \right) V_f \right)$$

Dabei ist H die Höhe und D der Durchmesser des Probekörpers in Zentimetern. C/W ist die Inverse des auf das Gewicht bezogenen Wasser-Zement-Wertes. Der Wert k wird ebenfalls aus den Versuchsergebnissen ermittelt und mit 6,0 angegeben. m wird bei zylindrischen Probekörpern konstant mit 0,2 angenommen. Tanigawa et al. [TYH80] geben des Weiteren eine Formel zur Bestimmung der Druckfestigkeit f_{cm} an. Eine solche analytische Bestimmung der Druckfestigkeit erscheint dem Autor dieser Arbeit aufgrund der vielen Einflussparameter wie beispielsweise dem verwendeten Zuschlag, der Zementart usw. als nicht sinnvoll. Selbst bei normalen Bemessungen wird eine aus Versuchen bestimmte Druckfestigkeit zugrunde gelegt.

In Abbildung 6.19 sind die Spannungs-Dehnungsbeziehungen nach Barros & Figueiras [BF99] und Tanigawa et al. [TYH80] exemplarisch für Betonzyylinder mit $H = 30 \text{ cm}$ und $D = 15 \text{ cm}$, einem Fasergehalt von 40 kg/m^3 und einer Druckfestigkeit von 40 MN/mm^2 ausgewertet und mit der Kurve von reinem Beton nach Model Code 90 [CF90] verglichen. Die erhöhte Duktilität des Stahlfaserbetons ist deutlich zu erkennen. Eine Abweichung zwischen den beiden

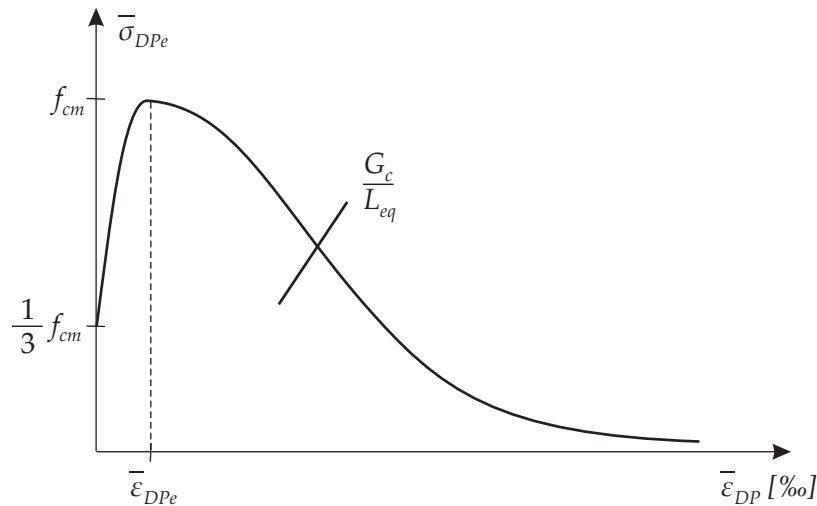


Abbildung 6.21: Quadratische Ver- und exponentielle Entfestigungsbeziehung für Stahlfaserbeton

Ansätzen ist in der Steifigkeit vor Erreichen der Druckfestigkeit und der zugehörigen Bruchdehnung zu sehen. Da in diesem Bereich der Einfluss der Stahlfasern sehr gering ausfällt, sind die Unterschiede aller Wahrscheinlichkeit nach auf die verwendeten Betone zurückzuführen. Die Unterschiede in den Verläufen nach dem Erreichen der Druckfestigkeit lassen sich hingegen auch auf die unterschiedlichen Faserarten zurückführen. Trotzdem sind die Verläufe von der Tendenz her sehr ähnlich. Der Einfluss des Fasergehaltes ist anhand der Beziehung von Barros & Figueiras in Abbildung 6.20 zu sehen. Der Einfluss der Fasern auf die Druckfestigkeit ist in dieser Darstellung nicht berücksichtigt.

6.6.3 Einaxiale Ver- und Entfestigungsbeziehung im Druckbereich

Aus den Ergebnissen von Tanigawa et al. [TYH80] zeigt sich eine deutliche Abhängigkeit der Spannungs-Dehnungsbeziehung von der Probengeometrie, speziell von der Probenhöhe (siehe auch Abschnitt 3.2). Diese Beobachtungen lassen sich auch hier im Druckbereich mit dem Phänomen der Lokalisierung beschreiben. Das Druckversagen zeigt ebenfalls lokale Verformungskonzentrationen in den Bruchflächen. Dieser Sachverhalt wurde bereits in [Mie84] für reinen Beton nachgewiesen. Vonk [Von92] zeigt ebenfalls für reinen Beton, dass die Lokalisierung bei einaxialen Druckversuchen geringer ausgeprägt ist als bei Zugversuchen. Das Materialverhalten außerhalb der Lokalisierungszone beeinflusst ebenfalls das Nachbruchverhalten. Das bedeutet, dass sich die spezifische Bruchenergie aus einem lokalen Anteil, der in der Lokalisierungszone und einem Anteil, der im restlichen Kontinuum freigesetzt wird, zusammensetzt. Der lokale Anteil ist im Gegensatz zum Kontinuumsanteil von der Probenhöhe unabhängig.

Um dem Lokalisierungsphänomen im Rahmen der Finite-Elemente-Umsetzung zu begegnen, bietet es sich an, für den Druckbereich wie auch schon für den Zugbereich ein **Bruchenergiekonzept** zu verwenden. Die einaxiale Spannung $\bar{\sigma}_{DPe}$ wird hierfür als Funktion des inneren Parameters $\bar{\epsilon}_{DP}$ angegeben. Die spezifische Bruchenergie des Stahlfaserbetons G_c dient als Eingangsparameter für die Ver- und Entfestigungsbeziehung. Der Vorteil hier, liegt in einem einheitlichen Konzept für den Zug- und Druckbereich. Für reinen Beton wurde dieses Vorgehen bereits erfolgreich angewendet. Feenstra [Fee93] verwendet zwei getrennte parabolische Funktionen für das Ver- und Endfestigungsverhalten. Pravida [Pra99] übernimmt den

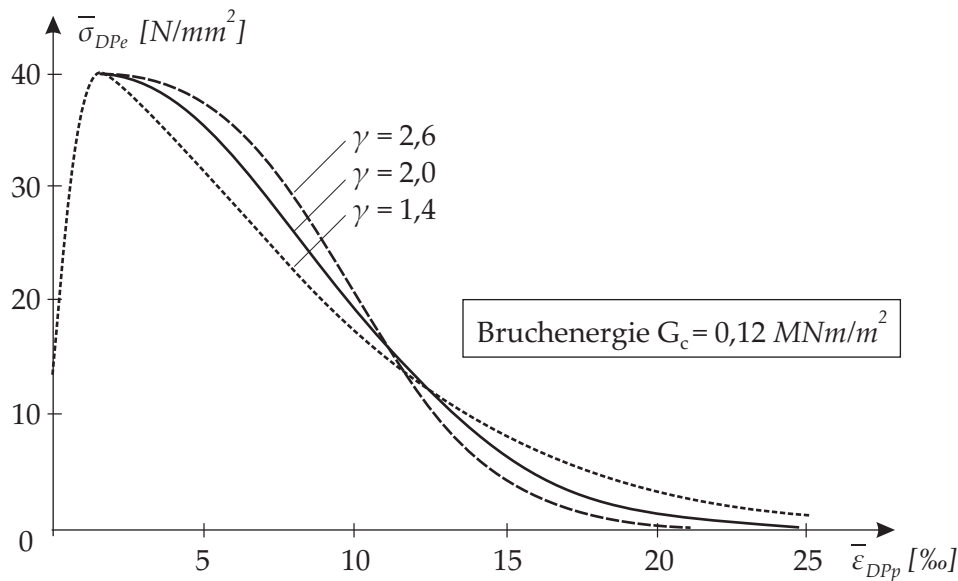


Abbildung 6.22: Einfluss des Formparameters γ auf den Verlauf der Entfestigung

Verfestigungsverlauf, beschreibt jedoch die Entfestigung mit einem kubischen Ansatz. Dieser gewährt aufgrund einer horizontalen Tangente bei der Druckfestigkeit als auch bei kompletter Entfestigung größere numerische Stabilität. Auch in dieser Arbeit wird der **quadratische Verfestigungsverlauf** übernommen:

$$\bar{\sigma}_{DPe} = \frac{f_{cm}}{3} \left(1 + \frac{4 \bar{\epsilon}_{DPP}}{\bar{\epsilon}_{DPe}} - \left(\frac{\bar{\epsilon}_{DPP}}{\bar{\epsilon}_{DPe}} \right)^2 \right) \quad \text{für} \quad 0 \leq \bar{\epsilon}_{DPP} \leq \bar{\epsilon}_{DPe} \quad (6.84)$$

Der Einfluss der Stahlfasern in diesem Bereich kann vernachlässigt werden. $\bar{\epsilon}_{DPe}$ ist dabei die zur Druckfestigkeit gehörende plastische Vergleichsdehnung. Bei reinem Beton kann sie mit

$$\bar{\epsilon}_{DPe} = \frac{4 f_{cm}}{3 E} \quad (6.85)$$

angegeben werden. Soll zusätzlich der Einfluss der Fasern auf die Bruchdehnung berücksichtigt werden, kann $\bar{\epsilon}_{DPe}$ entweder aus Versuchsergebnissen oder mit den oben angegebenen Formeln von Barros & Figueiras (6.75) [BF99] bzw. Tanigawa et al. (6.79), (6.80) [TYH80] bestimmt werden. Es sei darauf hingewiesen, dass die Gesamtdehnung ϵ um den elastischen Anteil verringert werden muss, um die plastische Vergleichsdehnung $\bar{\epsilon}_{DPP}$ zu erhalten.

Für die Entfestigung wird ein **exponentieller Verlauf** gewählt. Eine quadratisch exponentielle Funktion wurde von Lackner [Lac99] für reinen Beton vorgeschlagen. Um den Verlauf des Entfestigungsverhaltens von Stahlfaserbeton besser Rechnung tragen zu können, wird der Ansatz um den Formparameter γ erweitert:

$$\bar{\sigma}_{DPe} = f_{cm} \exp \left(- \frac{(\bar{\epsilon}_{DPP} - \bar{\epsilon}_{DPe})^\gamma}{\bar{\epsilon}_{DPP}^\gamma} \right) \quad \text{für} \quad \bar{\epsilon}_{DPP} > \bar{\epsilon}_{DPe} \quad (6.86)$$

Der Parameter $\bar{\epsilon}_{DPP}$ wird aus der Bedingung bestimmt, dass die Fläche unter der gesamten Ver- und Entfestigungsbeziehung multipliziert mit der äquivalenten Elementlänge L_{eq} der Bruchenergie G_c entspricht:

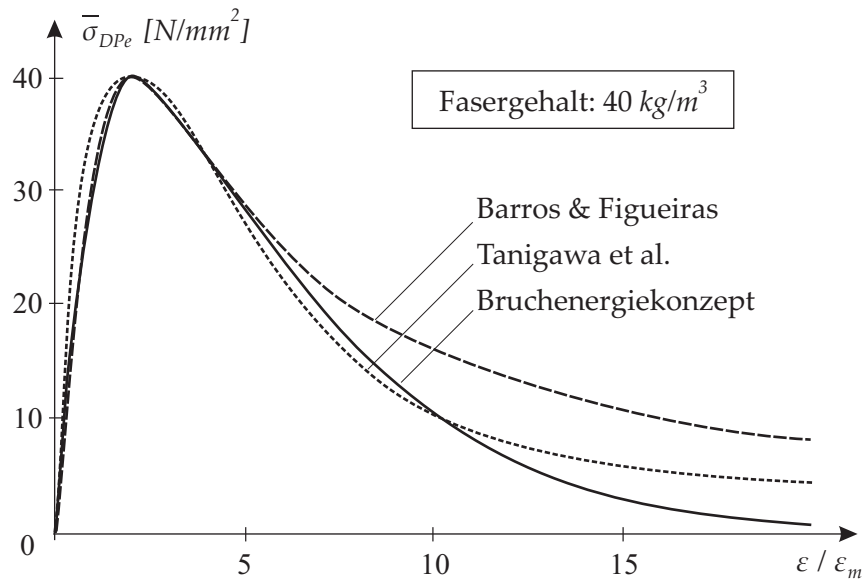


Abbildung 6.23: Vergleich der Ver- und Entfestigungsbeziehung mit den Spannungs-Dehnungsbeziehungen nach Barros & Figueiras [BF99] und Tanigawa et al. [TYH80]

$$\frac{G_c}{L_{eq}} = \int_0^{\infty} \bar{\sigma}_{DPe}(\bar{\epsilon}_{DPP}) d\bar{\epsilon}_{DPP} \quad (6.87)$$

Hieraus ergibt sich:

$$\bar{\epsilon}_{DPu} = \frac{\frac{G_c}{L_{eq}} - \frac{28 f_{cm}^2}{27 E}}{\frac{1}{\gamma} \Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right) f_{cm}} \quad (6.88)$$

Die *Gammafunktion* $\Gamma(1/\gamma)$ ergibt sich beim Lösen des Integrals in (6.87) und kann als Verallgemeinerung der nur für natürliche Zahlen definierten Fakultät angesehen werden. Ergebnisse dieser Funktion für relevante Werte des Parameters γ sind in Tabelle 6.1 gegeben. Weitere Lösungen sind in [BS91] zu finden.

γ	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
$\Gamma(\frac{1}{\gamma})$	1,000	1,129	1,276	1,435	1,601	1,772	1,948	2,128	2,309	2,493	2,679

Tabelle 6.1: Funktionswerte der Gammafunktion

Die aus den beiden Kurven zusammengesetzte Ver- und Entfestigungsbeziehung für Stahlfaserbeton ist in Abbildung 6.21 zu sehen. Die Form der Entfestigung kann bei gleichbleibender Bruchenergie mit dem Formparameter γ angepasst werden (Abbildung 6.22). Für $\gamma = 2,0$ erhält man die Beziehung von Lackner [Lac99].

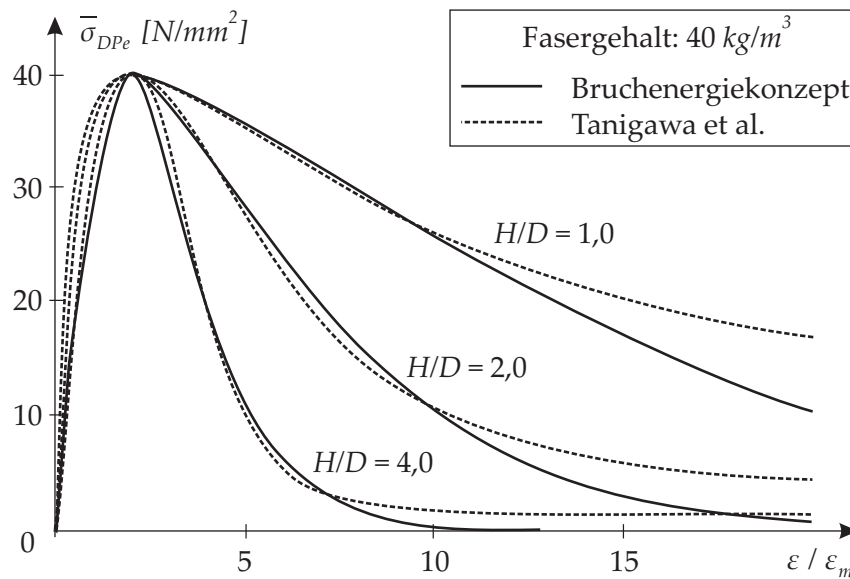


Abbildung 6.24: Einfluss der Probenhöhe auf das Entfestigungsverhalten

Die vorgestellte Ver- und Entfestigungsbeziehung muss, um mit Spannungs-Dehnungsbeziehungen verglichen werden zu können um den elastischen Dehnungsanteil erweitert werden. Hierfür wird die Ver- und Entfestigungsbeziehung nach der plastischen Vergleichsdehnung aufgelöst, die elastische Dehnung addiert

$$\epsilon(\bar{\sigma}_{DPe}) = \bar{\epsilon}_{DPe}(\bar{\sigma}_{DPe}) + \frac{\bar{\sigma}_{DPe}}{E} \quad (6.89)$$

und die Gleichung anschließend wieder nach der Spannung umgeformt. Für einen Fasergehalt von 40 kg/m^3 und einer Druckfestigkeit von $f_{cm} = 40 \text{ MN/m}^2$ bei einem zylindrischen Probekörper mit einer Höhe von $H = L_{eq} = 30 \text{ cm}$ mit $H/D = 2,0$ sind die Spannungs-Dehnungsbeziehungen in Abbildung 6.23 gegenübergestellt. Mit dem Formparameter $\gamma = 1,4$ kann eine sehr gute Übereinstimmung erzielt werden. Die erhöhte Duktilität wird durch eine im Vergleich zu Beton höhere Bruchenergie von $G_c = 0,12 \text{ MNm/m}^2$ berücksichtigt. Diese kann aus einaxialen Druckversuchen bestimmt werden (siehe Abschnitt 7.2), die weggesteuert durchzuführen sind, um den Entfestigungsbereich zu erfassen.

Das gewählte Bruchenergiekonzept ist in der Lage die Lokalisierung richtig zu erfassen. Das bestätigt ein Vergleich mit den Kurven von Tanigawa et al. [TYH80] (Abbildung 6.24) für einen Zylinder mit einem Durchmesser von 15 cm . Die in den Versuchen von Tanigawa et al. beobachtete Abhängigkeit der Spannungs-Dehnungsbeziehung von der Probenhöhe kann sehr gut beschrieben werden.

6.7 Algorithmische Umsetzung der Spannungsintegration

6.7.1 Spannungsintegration mit dem impliziten Euler-Rückwärtsverfahren

Bei der Spannungsintegration handelt es sich um einen numerischen Algorithmus zur Integration des elasto-plastischen Stoffgesetzes in Ratenform (*stress update algorithm*):

$$\dot{\sigma} = C^{pl} : \dot{\varepsilon} \quad (6.90)$$

Im Rahmen der Finite-Elemente-Methode erfolgt ein Übergang der differentiellen Betrachtung des Kontinuumsmodells zu endlichen Last- und Zeitinkrementen. Ausgangspunkt ist der Zeitpunkt t_n , der letzte auskonvergierte Zustand der globalen Gleichgewichtsiteration. Alle Größen sind zu diesem Zeitpunkt bekannt. Ziel ist die Berechnung des aktuellen Spannungszustandes σ_{n+1} zum Zeitpunkt t_{n+1} :

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \Delta\sigma_{n+1} \quad (6.91)$$

Das Spannungsinkrement $\Delta\sigma_{n+1}$ berechnet sich aus dem durch die globale Gleichgewichtsiteration vorgegebenen Dehnungsinkrement $\Delta\varepsilon_{n+1}$. Da der elasto-plastische Werkstofftensor C^{pl} vom Spannungs- und Dehnungszustand abhängig ist, ergibt sich $\Delta\sigma_{n+1}$ aus der Integration des differentiellen Stoffgesetzes (6.90):

$$\Delta\sigma_{n+1} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} C^{pl} : \dot{\varepsilon} dt \quad (6.92)$$

Die Pseudo-Zeit t dient als Maß für die Lastschritte. Gleichung (6.92) ist hochgradig nichtlinear und kann in der Regel nur numerisch zum Beispiel unter Verwendung der verallgemeinerten Trapezregel integriert werden [HM95]:

$$\Delta\sigma_{n+1} = C : \left(\Delta\varepsilon_{n+1} - \Delta\varepsilon_{n+1}^{pl} \right) \quad (6.93)$$

$$\text{mit} \quad \Delta\varepsilon_{n+1}^{pl} = \Delta\varepsilon_n^{pl} + \left((1 - \zeta) \Delta\lambda_n \frac{\partial f_n}{\partial \sigma_n} + \zeta \Delta\lambda_{n+1} \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \right)$$

Für $\zeta = 0$ ergibt sich das **explizite Euler-Vorwärtsverfahren**. Da es sich hier um ein explizites Verfahren handelt, werden nur bekannte Werte zum Zeitpunkt t_n für die Spannungsintegration benötigt. Es ist kein iteratives Vorgehen erforderlich. Nachteil dieses Verfahrens ist, dass die Fließbedingung am Ende des Lastschrittes zum Zeitpunkt t_{n+1} nicht erfüllt ist und es somit zu einem Abdriften des Spannungszustandes von der Fließfläche kommt (Abbildung 6.25, links). Das Verfahren wird somit beim Überschreiten einer kritischen Lastschrittweite instabil. Durch Verwendung einer Subinkrementierung wie in [HM95] kann das Ergebnis verbessert, jedoch das Abdriften nicht verhindert werden.

Für $\zeta = 1$ ergibt sich das **implizite Euler-Rückwärtsverfahren**. Hier ist die Fließbedingung am Inkrementende erfüllt. Das Verfahren ist numerisch stabil [OP85]. Aus diesen Gründen wird das Euler-Rückwärtsverfahren gerne bei Plastizitätsproblemen verwendet, obwohl das iterative Vorgehen einen erhöhten numerischen Aufwand bedeutet.

Mit $\zeta = 1/2$ erhält man die **implizite Trapezregel**. Im Vergleich zu dem beiden vorgenannten Verfahren, die nur eine Genauigkeit erster Ordnung bezüglich der Lastschrittweite Δt_{n+1} aufweisen, hat die implizite Trapezregel eine Genauigkeit zweiter Ordnung. Dennoch besteht auch hier der Nachteil des Abdriftens der Lösung von der Fließfläche. Der Vollständigkeit halber sei noch als weiteres explizites Verfahren die **Runge-Kutta Methode** erwähnt, die ausführlich in [ZT89], [ZT91] beschrieben ist.

Für die Spannungsintegration in dieser Arbeit wird das implizite Euler-Rückwärtsverfahren für Mehrflächenplastizität nach Simo et al. [SKG88] verwendet. Das Projektionsverfahren lässt

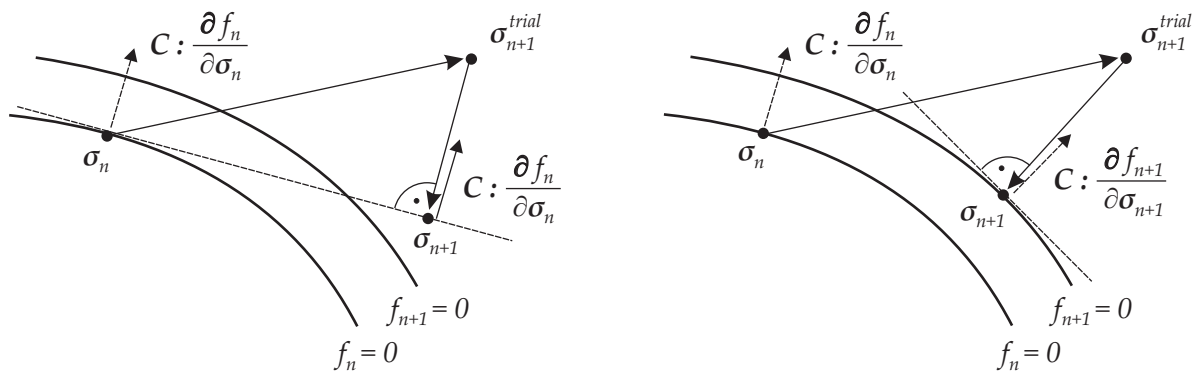


Abbildung 6.25: Explizites Euler-Vorwärtsverfahren und implizites Euler-Rückwärtsverfahren

sich dabei in zwei Teilschritte aufteilen. Im ersten Schritt, dem sogenannten **Prädiktorschritt** wird die elastische Prädiktorspannung σ_{n+1}^{trial} mit

$$\sigma_{n+1}^{trial} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{pl}) \quad (6.94)$$

unter Verwendung der konvergierten Werte zum Zeitpunkt t_n berechnet. Lassen sich mit dieser Prädiktorspannung alle Fließbedingungen $f_\alpha^{trial} \leq 0$ erfüllen, so liegt ein elastischer Belastungsschritt vor. Die Prädiktorspannung σ_{n+1}^{trial} entspricht der gesuchten Spannung σ_{n+1} zum Zeitpunkt t_{n+1} .

Gilt hingegen für eine oder mehrere Fließbedingungen $f_\alpha^{trial} > 0$, d.h. diese Fließbedingungen sind verletzt, so muss die Prädiktorspannung in einem **plastischen Korrektorschritt** auf die Fließfläche zurückgezogen werden. Anschaulich ist das implizite Euler-Rückwärtsverfahren in Abbildung 6.25 rechts dargestellt. Die elastische Prädiktorspannung wird in Richtung des Gradienten der Fließfunktion am Ende des Zeitschritts auf die Fließfläche projiziert. Da der Gradient der Fließfunktion am Ende des Zeitschritts zum Zeitpunkt t_{n+1} noch unbekannt ist, es sich also um eine implizite Beziehung handelt, muss das Problem iterativ mit einem Newton-Verfahren gelöst werden.

Zum Vergleich ist ebenfalls in Abbildung 6.25 links das explizite Euler-Vorwärtsverfahren dargestellt, bei dem der Gradient der Fließfunktion am Anfang des Lastschrittes t_n für die Projektion verwendet wird.

Bei der Beurteilung des Prädiktorspannungszustandes können unter der Voraussetzung, dass es sich bei der zusammengesetzten Fließfläche um eine konvexe Fläche handelt, folgende Zustände unterschieden werden:

- Alle Fließbedingungen $f_\alpha^{trial} \leq 0$ sind erfüllt. Es handelt sich um einen elastischen Belastungsschritt. Aus den *Kuhn-Tucker*-Bedingungen (6.26) folgt, dass für alle plastischen Multiplikatoren $\Delta\lambda_{\alpha,n+1} = 0$ gilt.
- Es ist nur eine Fließbedingung mit $f_\alpha^{trial} > 0$ nicht erfüllt. Es liegt ein plastischer Belastungszustand vor. Der Korrektorschritt erfolgt für diese eine Fließbedingung und führt zu $f_\alpha = 0$. Folglich wird der zu dieser Fließfunktion gehörende plastische Multiplikator $\Delta\lambda_{\alpha,n+1} > 0$.
- Mehrere Fließfunktionen $f_\alpha^{trial} > 0$ werden durch den Prädiktorspannungszustand verletzt. Diese Tatsache bedeutet aber nicht unbedingt, dass für alle zugehörigen plastischen

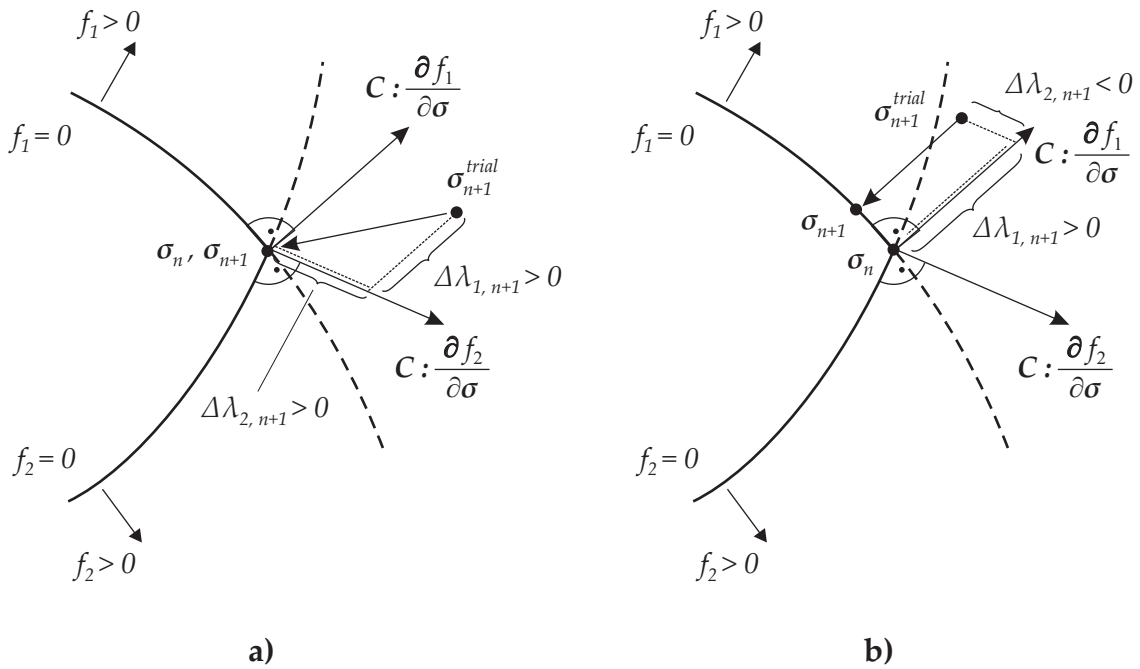


Abbildung 6.26: Geometrische Interpretation des Projektionsverfahrens im Bereich des Schnittpunkts zweier Fließflächen

Multiplikatoren $\Delta\lambda_{\alpha,n+1} > 0$ gelten muss. Eine zunächst im Prädiktorzustand verletzte Fließbedingung $f_{\alpha}^{trial} > 0$ kann nach dem Korrektorschritt auch kleiner Null werden und somit muss unter Berücksichtigung der *Kuhn-Tucker*-Bedingungen für den zugehörigen plastischen Multiplikator $\Delta\lambda_{\alpha,n+1} = 0$ gelten. Anschaulich ist dieser Sachverhalt in Abbildung 6.26, die den Schnittpunkt zweier Fließflächen darstellt, zu sehen. In beiden Fällen a) und b) sind beide Fließbedingungen f_1 und f_2 durch den Prädiktorspannungszustand verletzt.

Im Fall a) liegt die Prädiktorspannung im Bereich zwischen den beiden Normalen $\partial f_1/\partial\sigma$ und $\partial f_2/\partial\sigma$. Bei der Projektion auf den Schnittpunkt der Fließflächen ergibt sich $\Delta\lambda_{1,n+1} > 0$ und $\Delta\lambda_{2,n+1} > 0$ und zeigt das die gesuchte Spannung in diesem Schnittpunkt liegen muss.

Anders ist das im Fall b). Hier liegt die Trialspannung nicht im Bereich zwischen den Normalen $\partial f_1/\partial\sigma$ und $\partial f_2/\partial\sigma$. Bei der Projektion der Spannung in den Schnittpunkt wird $\Delta\lambda_2 < 0$ und gibt an, dass das Zurückziehen der Prädiktorspannung nicht in diesen Punkt sondern auf die Fließfläche f_1 erfolgen muss.

Im folgenden Algorithmus startet der Korrektorschritt mit allen durch den Trialspannungszustand verletzten bzw. aktiven Fließbedingungen. Die Anzahl der aktiven Fließbedingungen sei m_{act} . Wird einer der plastischen Multiplikatoren $\Delta\lambda_{\alpha}$ im Laufe der *Newton*-Iteration kleiner Null, wird dieser zu Null gesetzt und damit die zugehörige Fließfunktion deaktiviert.

Das Iterationsschema für das *Newton*-Verfahren des Korrektorschrittes erhält man durch die Linearisierung der Fließbedingung, der Fließregel und der Ver- und Entfestigungsbeziehung. Zu Beginn der Iteration zum Zeitpunkt t_n sind die Zustandsgrößen

$$\varepsilon_n; \quad \varepsilon_n^{pl}; \quad \alpha_n = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\varepsilon}_{DPP,n} \\ \bar{\varepsilon}_{Rp,n} \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad q_n = \left\{ \begin{array}{l} -\bar{\sigma}_{DPe,n} \\ -\bar{\sigma}_{Re,n} \end{array} \right\} \quad (6.95)$$

bekannt und das Dehnungsinkrement $\Delta\varepsilon_{n+1}$ ist aus der globalen Gleichgewichtsiteration vorgegeben. Die gesuchte plastische Dehnung lässt sich für assoziiertes Fließen durch Einsetzen der *Koiter'schen* Fließregel (6.4) mit

$$\varepsilon_{n+1}^{pl} = \varepsilon_n^{pl} + \sum_{\alpha=1}^{m_{act}} \left(\Delta\lambda_{\alpha,n+1} \frac{\partial f_{\alpha,n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \right) \quad (6.96)$$

angeben. Das Ver- und Entfestigungsgesetz (6.7) mit (6.5) ergibt für die äquivalenten plastischen Dehnungen:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \sum_{\alpha=1}^{m_{act}} \left(\Delta\lambda_{\alpha,n+1} \frac{\partial f_{\alpha,n+1}}{\partial q_{n+1}} \right) \quad (6.97)$$

$$q_{n+1} = -D \alpha_{n+1} \quad (6.98)$$

Für einen plastischen Belastungsschritt muss gelten, dass alle m_{act} **aktiven** Fließbedingungen zum Zeitpunkt t_{n+1} erfüllt sind, d.h.:

$$f_{\alpha,n+1}(\sigma_{n+1}, q_{n+1}) = 0 \quad (6.99)$$

Die Gleichungen (6.96) und (6.97) werden für das *Newton*-Verfahren in folgende Form gebracht:

$$-\varepsilon_{n+1}^{pl} + \varepsilon_n^{pl} + \sum_{\alpha=1}^{m_{act}} \left(\Delta\lambda_{\alpha,n+1} \frac{\partial f_{\alpha,n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \right) = 0 \quad (6.100)$$

$$-\alpha_{n+1} + \alpha_n + \sum_{\alpha=1}^{m_{act}} \left(\Delta\lambda_{\alpha,n+1} \frac{\partial f_{\alpha,n+1}}{\partial q_{n+1}} \right) = 0 \quad (6.101)$$

Als Startwerte für die *Newton*-Iteration werden

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1}^{(k=0)} &= \mathbf{C} : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^{pl}) = \sigma_{n+1}^{trial} \\ \varepsilon_{n+1}^{pl,(k=0)} &= \varepsilon_n^{pl} \\ \alpha_{n+1}^{(k=0)} &= \alpha_n \\ q_{n+1}^{(k=0)} &= -D \alpha_{n+1}^{(k=0)} \\ \Delta\lambda_{\alpha,n+1}^{(k=0)} &= 0 \\ f_{\alpha,n+1}^{(k=0)} &= f_{\alpha}(\sigma_{n+1}^{(k=0)}, q_{n+1}^{(k=0)}) \end{aligned} \quad (6.102)$$

verwendet. Für das noch nicht konvergierte *Newton*-Verfahren sind die Gleichungen (6.99), (6.100) und (6.101) nicht erfüllt und es bleiben beim k -ten Iterationsschritt Residuen:

$$\mathbf{r}_{\alpha,n+1}^{f,(k)} = f_{\alpha,n+1}^{(k)} \left(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}, \mathbf{q}_{n+1}^{(k)} \right) \quad (6.103)$$

$$\mathbf{r}_{n+1}^{\varepsilon,(k)} = -\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pl,(k)} + \boldsymbol{\varepsilon}_n^{pl} + \sum_{\alpha=1}^{m_{act}} \left(\Delta\lambda_{\alpha,n+1}^{(k)} \frac{\partial f_{\alpha,n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}} \right) \quad (6.104)$$

$$\mathbf{r}_{n+1}^{\alpha,(k)} = -\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)} + \boldsymbol{\alpha}_n + \sum_{\alpha=1}^{m_{act}} \left(\Delta\lambda_{\alpha,n+1}^{(k)} \frac{\partial f_{\alpha,n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{q}_{n+1}^{(k)}} \right) \quad (6.105)$$

Im Weiteren werden die Gleichungen (6.99), (6.100) und (6.101) durch ihre lineare Approximation ersetzt:

$$\mathbf{r}_{\alpha,n+1}^{f,(k)} + \frac{\partial f_{\alpha,n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}} : \Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} + \frac{\partial f_{\alpha,n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{q}_{n+1}^{(k)}} \Delta\mathbf{q}_{n+1}^{(k)} = 0 \quad (6.106)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{r}_{n+1}^{\varepsilon,(k)} + \mathbf{C}^{-1} : \Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} + \sum_{\alpha=1}^{m_{act}} \left(\frac{\partial f_{\alpha,n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}} \Delta\lambda_{\alpha,n+1}^{(k)} \right) + \\ & \sum_{\alpha=1}^{m_{act}} \left(\Delta\lambda_{\alpha,n+1}^{(k)} \frac{\partial^2 f_{\alpha,n+1}^{(k)}}{\partial (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)})^2} : \Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} + \Delta\lambda_{\alpha,n+1}^{(k)} \frac{\partial^2 f_{\alpha,n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} \partial \mathbf{q}_{n+1}^{(k)}} \Delta\mathbf{q}_{n+1}^{(k)} \right) = 0 \end{aligned} \quad (6.107)$$

$$\text{mit} \quad \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pl,(k)} = -\mathbf{C}^{-1} : \Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{r}_{n+1}^{\alpha,(k)} + \mathbf{D}^{-1} \Delta\mathbf{q}_{n+1}^{(k)} + \sum_{\alpha=1}^{m_{act}} \left(\frac{\partial f_{\alpha,n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{q}_{n+1}^{(k)}} \Delta\lambda_{\alpha,n+1}^{(k)} \right) + \\ & \sum_{\alpha=1}^{m_{act}} \left(\Delta\lambda_{\alpha,n+1}^{(k)} \frac{\partial^2 f_{\alpha,n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{q}_{n+1}^{(k)} \partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}} : \Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} + \Delta\lambda_{\alpha,n+1}^{(k)} \frac{\partial^2 f_{\alpha,n+1}^{(k)}}{\partial (\mathbf{q}_{n+1}^{(k)})^2} \Delta\mathbf{q}_{n+1}^{(k)} \right) = 0 \end{aligned} \quad (6.108)$$

$$\text{mit} \quad \Delta\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)} = -\mathbf{D}^{-1} \Delta\mathbf{q}_{n+1}^{(k)}$$

Die Gleichungen (6.107) und (6.108) werden nach $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ und $\Delta\mathbf{q}$ aufgelöst:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} \\ \Delta\mathbf{q}_{n+1}^{(k)} \end{Bmatrix} = (\mathbf{A}_{n+1}^k)^{-1} \left(\begin{Bmatrix} \mathbf{r}_{n+1}^{\varepsilon,(k)} \\ \mathbf{r}_{n+1}^{\alpha,(k)} \end{Bmatrix} - \sum_{\alpha=1}^{m_{act}} \Delta\lambda_{\alpha,n+1}^{(k)} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_{\alpha,n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}} \\ \frac{\partial f_{\alpha,n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{q}_{n+1}^{(k)}} \end{Bmatrix} \right) \quad (6.109)$$

$$\text{mit } \mathbf{A}_{n+1}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix} + \sum_{\alpha=1}^{m_{act}} \Delta\lambda_{\alpha,n+1}^{(k)} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_{\alpha,n+1}^{(k)}}{\partial(\sigma_{n+1}^{(k)})^2} & \frac{\partial^2 f_{\alpha,n+1}^{(k)}}{\partial\sigma_{n+1}^{(k)} \partial \mathbf{q}_{n+1}^{(k)}} \\ \frac{\partial^2 f_{\alpha,n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{q}_{n+1}^{(k)} \partial \sigma_{n+1}^{(k)}} & \frac{\partial^2 f_{\alpha,n+1}^{(k)}}{\partial(\mathbf{q}_{n+1}^{(k)})^2} \end{bmatrix}$$

Die Matrix \mathbf{D} enthält die plastischen Moduli und lautet hier für $m_{act} = 2$:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\sigma}_{DPe,n+1}^{(k)}}{\partial \bar{\varepsilon}_{DPe,n+1}^{(k)}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \bar{\sigma}_{Re,n+1}^{(k)}}{\partial \bar{\varepsilon}_{Rp,n+1}^{(k)}} \end{bmatrix} \quad (6.110)$$

Gleichung (6.109) wird in das Gleichungssystem (6.106) der linearisierten Fließbedingungen eingesetzt. Das Gleichungssystem besteht aus m_{act} Zeilen, d.h. so vielen Zeilen wie es aktive Fließbedingungen gibt. Durch Auflösen des modifizierten Gleichungssystem lassen sich die Bestimmungsgleichungen für die inkrementelle Änderung der m_{act} plastischen Multiplikatoren anschreiben:

$$\Delta\Delta\lambda_{\alpha,n+1}^{(k)} = \sum_{\beta=1}^{m_{act}} [\mathbf{G}_{n+1}^{\alpha\beta(k)}] \left(\mathbf{r}_{\beta,n+1}^{f,(k)} - \left[\frac{\partial f_{\beta,n+1}^{(k)}}{\partial \sigma_{n+1}^{(k)}} \frac{\partial f_{\beta,n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{q}_{n+1}^{(k)}} \right] : (\mathbf{A}_{n+1}^k)^{-1} : \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}_{n+1}^{\varepsilon,(k)} \\ \mathbf{r}_{n+1}^{\alpha,(k)} \end{array} \right\} \right) \quad (6.111)$$

$$\text{mit } [\mathbf{G}_{n+1}^{\alpha\beta(k)}]^{-1} = [\mathbf{G}_{\alpha\beta,n+1}^{(k)}] = \left[\frac{\partial f_{\alpha,n+1}^{(k)}}{\partial \sigma_{n+1}^{(k)}} \frac{\partial f_{\alpha,n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{q}_{n+1}^{(k)}} \right] : (\mathbf{A}_{n+1}^k)^{-1} : \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_{\beta,n+1}^{(k)}}{\partial \sigma_{n+1}^{(k)}} \\ \frac{\partial f_{\beta,n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{q}_{n+1}^{(k)}} \end{array} \right\}$$

Hiermit können die plastischen Multiplikatoren aktualisiert werden:

$$\Delta\lambda_{\alpha,n+1}^{(k+1)} = \Delta\lambda_{\alpha,n+1}^{(k)} + \Delta\Delta\lambda_{\alpha,n+1}^{(k)} \quad (6.112)$$

Wird während der Iteration einer oder mehrere dieser plastischen Multiplikatoren kleiner Null, so bedeutet das, dass die entsprechende Fließfläche nicht mehr aktiv ist. Der Iterationsschritt ist dann ohne diese Fließfläche zu wiederholen.

Durch Einsetzen von $\Delta\Delta\lambda_{\alpha,n+1}^{(k)}$ in (6.109) können die inkrementellen Änderungen der Spannung $\Delta\sigma_{n+1}^{(k+1)}$ und der inneren Parameter $\Delta\mathbf{q}_{n+1}^{(k+1)}$ berechnet werden. Anschließend folgt die Aktualisierung der Spannung und der inneren Parameter:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1}^{(k+1)} &= \sigma_{n+1}^{(k)} + \Delta\sigma_{n+1}^{(k)} \\ \mathbf{q}_{n+1}^{(k+1)} &= \mathbf{q}_{n+1}^{(k)} + \Delta\mathbf{q}_{n+1}^{(k)} \\ \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k+1)} &= \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)} + \Delta\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)} \end{aligned} \quad (6.113)$$

$$\text{mit } \Delta\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)} = -\mathbf{D}^{-1} \Delta\mathbf{q}_{n+1}^{(k)}$$

Das Ende der Iteration ist erreicht, wenn die Fließfunktionen und die Residuen der inneren Parameter und der Spannungen eine vorgegebene Toleranzschranke unterschreiten.

6.7.2 Konsistente elasto-plastische Werkstoffmatrix

Nach Abschluss der Spannungsintegration ist der zum aktuellen Dehnungszustand gehörige Spannungszustand bekannt. Solange in der globalen Gleichgewichtsiteration keine Konvergenz vorliegt, stehen aber die zuvor berechneten Spannungen noch nicht im Gleichgewicht mit den äußeren Lasten. Für den nächsten globalen Gleichgewichtsiterationsschritt wird daher die algorithmische Materialtangente C_T^{pl} benötigt. Diese entspricht nicht der kontinuierlichen Materialtangente C^{pl} der konstitutiven Beziehung in Gleichung (6.27). Wird die Kontinuums-tangente C^{pl} in einer Finite-Elemente-Berechnung verwendet, verliert das globale *Newton*-Verfahren seine quadratische Konvergenzrate. Grund hierfür ist, dass C^{pl} für infinitesimal kleine Lastschritte aufgestellt wird, während bei C_T^{pl} die für den Algorithmus charakteristischen endlichen Lastschritte berücksichtigt werden. C_T^{pl} muss daher aus den für die Spannungsintegration linearisierten Gleichungen bestimmt werden. Dadurch ist die Herleitung der Materialtangente konsistent mit dem verwendeten Verfahren für die Spannungsintegration. C_T^{pl} wird deshalb auch als **konsistenter, elasto-plastischer Werkstofftensor** bezeichnet.

Die Herleitung der konsistenten Materialtangente für das implizite Euler Rückwärtsverfahren geht vom totalen Differential der Größen $d\sigma_{n+1}$, $d\varepsilon_{n+1}^{pl}$, $d\alpha_{n+1}$ und $df_{\alpha,n+1}$ aus:

$$d\sigma_{n+1} = C_{n+1} : (d\varepsilon_{n+1} - d\varepsilon_{n+1}^{pl}) \quad (6.114)$$

$$d\varepsilon_{n+1}^{pl} = \sum_{\alpha=1}^{m_{act}} \left(\frac{\partial f_{\alpha,n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} d\Delta\lambda_{\alpha,n+1} + \frac{\partial^2 f_{\alpha,n+1}}{\partial (\sigma_{n+1})^2} : d\sigma_{n+1} \Delta\lambda_{\alpha,n+1} + \frac{\partial^2 f_{\alpha,n+1}}{\partial \sigma_{n+1} \partial q_{n+1}} dq_{n+1} \Delta\lambda_{\alpha,n+1} \right) \quad (6.115)$$

$$d\alpha_{n+1} = \sum_{\alpha=1}^{m_{act}} \left(\frac{\partial f_{\alpha,n+1}}{\partial q_{n+1}} d\Delta\lambda_{\alpha,n+1} + \frac{\partial^2 f_{\alpha,n+1}}{\partial q_{n+1} \partial \sigma_{n+1}} : d\sigma_{n+1} \Delta\lambda_{\alpha,n+1} + \frac{\partial^2 f_{\alpha,n+1}}{\partial (q_{n+1})^2} dq_{n+1} \Delta\lambda_{\alpha,n+1} \right) \quad (6.116)$$

$$df_{\alpha,n+1} = \frac{\partial f_{\alpha,n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} : d\sigma_{n+1} + \frac{\partial f_{\alpha,n+1}}{\partial q_{n+1}} dq_{n+1} = 0 \quad (6.117)$$

Gleichung (6.115) wird in Gleichung (6.114) eingesetzt. Die sich ergebende Gleichung wird zusammen mit Gleichung (6.116) unter Berücksichtigung der Beziehung (6.5) nach $d\sigma$ und dq aufgelöst:

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_{n+1} \\ dq_{n+1} \end{Bmatrix} = (A_{n+1})^{-1} \left(\begin{Bmatrix} d\varepsilon_{n+1} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} - \sum_{\alpha=1}^{m_{act}} d\Delta\lambda_{\alpha,n+1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_{\alpha,n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \\ \frac{\partial f_{\alpha,n+1}}{\partial q_{n+1}} \end{Bmatrix} \right) \quad (6.118)$$

Mit \mathbf{A}_{n+1} entsprechend Gleichung (6.109). Gleichung (6.118) wird in die m_{act} diskreten Konsistenzbedingungen (6.117) eingesetzt und nach $d\Delta\lambda_\alpha$ aufgelöst:

$$d\Delta\lambda_\alpha = \sum_{\beta=1}^{m_{act}} \left[G_{n+1}^{\alpha\beta} \right] \left[\frac{\partial f_{\beta,n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \frac{\partial f_{\beta,n+1}}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} \right] : (\mathbf{A}_{n+1})^{-1} : \left\{ \begin{array}{c} d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (6.119)$$

mit $G_{n+1}^{\alpha\beta}$ entsprechend Gleichung (6.111). Schließlich erhält man durch Einsetzen von (6.119) in die Gleichung für $d\sigma$ (6.118) den folgenden Ausdruck für den konsistenten elasto-plastischen Werkstofftensor \mathbf{C}_T^{pl} :

$$\mathbf{C}_T^{pl} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \boldsymbol{\Theta}_{n+1} - \sum_{\alpha=1}^{m_{act}} \sum_{\beta=1}^{m_{act}} \left[G_{n+1}^{\alpha\beta} \right] \left(\boldsymbol{\Theta} : \frac{\partial f_{\alpha,n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \right) \otimes \left(\boldsymbol{\Theta} : \frac{\partial f_{\beta,n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \right) \quad (6.120)$$

$$\text{mit} \quad \boldsymbol{\Theta}_{n+1} = \left[\mathbf{C}_{n+1}^{-1} + \sum_{\alpha=1}^{m_{act}} \Delta\lambda_{\alpha,n+1} \frac{\partial^2 f_{\alpha,n+1}}{\partial (\sigma_{n+1})^2} \right]^{-1}$$

Für infinitesimal kleine Lastschritte geht der konsistente Materialtensor in den konstitutiven Tensor des Kontinuums über (siehe Gleichung (6.27)).

Kapitel 7

Bestimmung der Materialparameter

Dieses Kapitel behandelt Möglichkeiten zur Bestimmung der Materialparameter von Stahlfaserbeton, die zur phänomenologischen Beschreibung des Verhaltens dieses Verbundstoffes auf Makroebene benötigt werden. Sie dienen als Grundlage für strukturmechanische Berechnungen und Bemessungsaufgaben. Besonders wird dabei auf die, für das in dieser Arbeit vorgestellte Materialmodell benötigten Parameter, eingegangen. Aus Gründen der Praxistauglichkeit wurde bei der Entwicklung dieses Materialmodells auf eine minimale Anzahl an Parametern geachtet, die sich außerdem leicht mit Hilfe von Standardversuchen oder aus Normen ermitteln lassen. Nach der Festlegung des qualitativen Verlaufs der einaxialen Ver- und Entfestigungsbeziehungen für den Druck- und Zugbereich (siehe Abschnitt 6.5 und 6.6) verbleiben zur Festlegung die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Parameter:

E-Modul Stahlfaserbeton	E
Querdehnzahl Stahlfaserbeton	ν
Druckfestigkeit	f_{cm}
Druckbruchenergie	G_c
Zugfestigkeit	f_{ctm}
Nachrissfestigkeit	f_{ctm1}
Zugbruchenergieanteil Beton	G_{f1}
Zugbruchenergieanteil Stahlfasern	G_{f2}

Grundsätzlich kann dabei zwischen zwei Möglichkeiten der Parameterbestimmung unterschieden werden:

- Analytische Verfahren
- Experimentelle Verfahren

Bei den analytischen Verfahren werden die Parameter mit Hilfe von unterschiedlichsten Modellen der Mikro- und Mesoebene hergeleitet. In diesen Ebenen kann das mechanische Verhalten der einzelnen Komponenten des Stahlfaserbetons und ihre Interaktion abgebildet werden. Für praktische Anwendungen haben solche Verfahren allerdings nur eine geringe Bedeutung. Die Eingangsparameter dieser Modelle, wie zum Beispiel die Verbundspannung-Schlupfbeziehung zwischen Faser und Matrix oder der Faserverteilung lassen sich nur schwer, teilweise nur mit speziellen Versuchen bestimmen. Auch die Übertragbarkeit dieser Parameter auf andere Stahlfaserbetone muss in Frage gestellt werden.

Werden die Materialparameter der Makroebene für praktische Berechnungs- und Bemessungsaufgaben benötigt, sind im Vorfeld Versuche mit der für das Bauwerk verwendeten Stahlfaserbetonmischung unerlässlich und auch in den Normen gefordert. Bei der Versuchsauswertung experimenteller Verfahren ist zu unterscheiden, ob die Parameter direkt bestimmt werden können oder über eine „Inverse-Analyse“ mit Hilfe numerischer Simulation des Versuchs bestimmt werden müssen.

Während die Bestimmung der elastischen Parameter und der des Druckbereichs eine eher untergeordnete Rolle spielen, wird schwerpunktmäßig dem Zugbereich Aufmerksamkeit geschenkt.

7.1 Parameter des Zugbereichs

Das einaxiale Zugtragverhalten des Stahlfaserbetons kann durch zwei grundsätzlich unterschiedliche Modelle beschrieben werden. Das erste Modell wird als **Spannungs-Rissöffnungs-konzept** oder auch als „*spacing-concept*“ bezeichnet und basiert auf dem in Abschnitt 6.5 vorgestellten *fictitious-crack*-Modell von Hillerborg [Hil85a], in dem das Last-Verformungsverhalten des Stahlfaserbetons durch eine Spannungs-Dehnungsbeziehung für den ungerissenen Bereich und eine Spannungs-Rissöffnungsbeziehung für den gerissenen Bereich abgebildet wird. Die Spannungs-Rissöffnungsbeziehung ist somit das grundlegende Element in diesem Modell.

Dem sogenannten **Spannungs-Dehnungskonzept** oder auch „*composite-concept*“ hingegen liegt die Vorstellung eines homogenen Verbundwerkstoffes auch im gerissenen Zustand zugrunde. Die lokale Rissbildung findet bei diesem Konzept keine Berücksichtigung. Die Berechnungsgrundlage stellt eine Spannungs-Dehnungsbeziehung dar.

Das erste Modell zeichnet sich durch die Nähe zum wirklichen Verhalten des Stahlfaserbetons aus. Es dient daher auch als Grundlage für das in dieser Arbeit vorgestellte Materialgesetz. Da beim zweiten Modell keine Berücksichtigung der Einzelrisse erfolgt, ist es nicht in der Lage als Grundlage einer FE-Berechnung objektive, netzunabhängige Ergebnisse zu liefern. Dennoch soll auch die Ermittlung einer Spannungs-Dehnungsbeziehung im Rahmen der experimentellen Verfahren hier angesprochen werden, da sie in den einschlägigen internationalen Normen und Merkblättern ausschließlich zur Beschreibung des Zugverhaltens verwendet wird und als Grundlage für Bemessungsaufgaben dient.

7.1.1 Analytische Verfahren

Die erste Möglichkeit zur Ermittlung des Zugtragverhaltens stellen analytische Verfahren dar. Hier finden sich unterschiedlichste Ansätze das gesuchte Tragverhalten durch Modellierung des Verhaltens der Einzelkomponenten des Stahlfaserbetons auf Mikro- und Mesoebene zu bestimmen.

Exemplarisch wird folgend eine von Kützing [Küt00] vorgeschlagene Methode zur Ermittlung der Entfestigungskurve und der Bruchenergie genauer vorgestellt, die im Rahmen von Tragfähigkeitsuntersuchungen an stahlfaserverstärkten, hochfesten Betonen entwickelt wurde. Die Spannungs-Rissöffnungsbeziehung setzt sich additiv aus den Tragfähigkeitsanteilen des faserfreien Betons und der risskreuzenden Stahlfasern zusammen. Zur Beschreibung des Betonanteils wird ein Ansatz von Remmel [Rem94] gewählt. Dieser wird in Abhängigkeit der Betondruckfestigkeit und der Zuschlagsart und -größe definiert. Die Zugspannung der risskreuzenden Stahlfasern ist abhängig von der übertragbaren Verbundspannung, die durch Profilierung der Faseroberfläche bzw. der Endverankerung erheblich beeinflusst wird. Während

der Verlauf der Verbundspannung entlang der Faserachse anfangs nichtlinear ist, bildet sich mit zunehmender Relativverschiebung zwischen Faser und Matrix ein annähernd konstanter Verlauf aus, der als Reibspannung interpretiert werden kann. Es sei darauf hingewiesen, dass weitere Erläuterungen zur Matrix-Faser Interaktion in Abschnitt 2.4 zu finden sind. Vereinfachend wird von Kützing eine konstante Reibspannung τ_m angesetzt, eine Annahme, die nach Lin [Lin96] gerechtfertigt ist. In der angenommenen Reibspannung findet auch die Wirkung von eventuell vorhandenen Endverankerungen Berücksichtigung. Eine realistische Abschätzung der Verbund- bzw. Reibspannung ist schwierig, aber für die Qualität der Spannungs-Rissöffnungsbeziehung oder allgemeiner des analytisch bestimmten Entfestigungsverhaltens von ganz entscheidender Bedeutung. Außerdem ist das Verbundverhalten stark von Fasergeometrie, Fasermaterial und der betontechnischen Zusammensetzung der Matrix abhängig. Kützing empfiehlt daher die Durchführung von Faserauszugversuchen, um realistische Werte zu erhalten. Diese Versuche gehören allerdings nicht zu den üblichen Standardversuchen. Auch die in der Literatur gegebenen Werte schwanken stark. Die Umrechnung von senkrecht zum Rissverlauf ausgerichteten Fasern auf eine regellose Verteilung erfolgt durch den Faserorientierungsfaktor η_θ . Auch dieser Parameter ist starken Schwankungen unterworfen (siehe Abschnitt 2.5) und stellt einen weiteren Unsicherheitsfaktor dar.

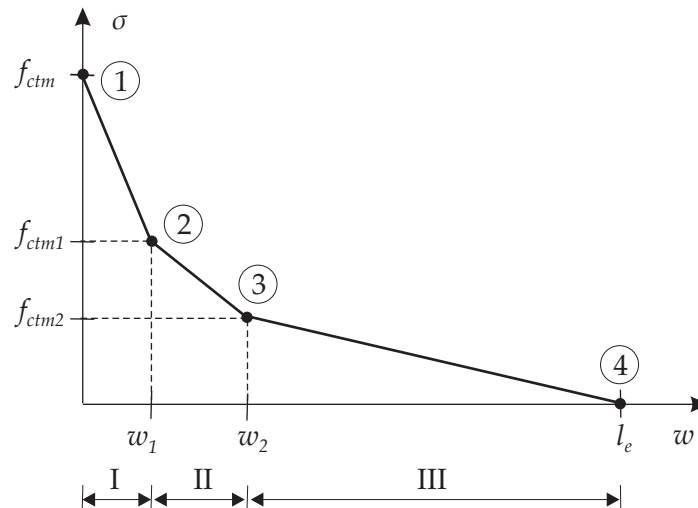


Abbildung 7.1: Vereinfachte trilineare Spannungs-Rissöffnungsbeziehung nach Kützing [Küt00]

Für praktische Anwendungen stellt Kützing [Küt00] ein vereinfachtes Verfahren vor, das auf eine trilineare Spannungs-Rissöffnungsbeziehung führt. Diese Entfestigungskurve (Abbildung 7.1) lässt sich in drei charakteristische Bereiche unterteilen. In Bereich I wird die Spannung ausschließlich durch die Betonmatrix übertragen, während in Bereich II beide Komponenten, Beton und Stahlfasern wirksam sind. Im Bereich III erfolgt die Kraftübertragung nur noch durch die Stahlfasern. Die Festlegung der Beziehung erfolgt durch vier charakteristische Punkte, die sich wie folgt bestimmen lassen. Punkt 1 wird durch die zentrische Zugfestigkeit des faserfreien Betons, die sich aus der Formel von Rammel [Rem94] ergibt, festgelegt:

$$f_{ctm} = 2,12 \ln \left(1 + \frac{f_{cm}}{10} \right) \quad (7.1)$$

Die Rissbreite bei Punkt 2 wird mit $50 \mu m$ angenommen. Die zugehörige Spannung f_{ctm1} errechnet sich aus einem Anteil der Stahlfasern und einem linearen Anteil der Entfestigungskurve für reinen Beton nach Rammel [Rem94] zu:

$$f_{ctm1} = f_{t2} \left(1 - \frac{0,05}{w_2}\right) + \eta_{vol} \eta_{\theta} \sigma_{\tau} \left(1 - \frac{0,05}{l_e}\right) \quad (7.2)$$

- f_{t2} = Zugspannungsanteil gemäß Rimmel in Abhängigkeit von Zuschlag und Zugfestigkeit
 w_2 = Rissbreite, ab der reiner Beton keine Spannung mehr überträgt
 η_{vol} = Fasergehalt
 η_{θ} = Faserorientierungsbeiwert
 σ_{τ} = Faserspannung bei Verbundversagen $\sigma_{\tau} = 4 \frac{l_e}{d_f} \tau_m$
 τ_m = Reibspannung
 l_e = Rechnerische Einbindelänge der Fasern

Eine Zusammenstellung von in der Literatur angegebenen, auf Versuchsergebnissen basierender Verbundspannungen bzw. Reibspannungen τ_m ist ebenfalls in [Küt00] zu finden. Die darin angegebenen Werte für τ_m streuen sehr stark und liegen zwischen 1,5 und 7,5 MN/m².

Der Bereich III beginnt bei einer Rissbreite w_2 , bei der vom Beton keine Zugspannung mehr übertragen werden kann. Die zugehörige Spannung f_{ctm2} errechnet sich aus dem reinen Auszugverhalten der Stahlfasern:

$$f_{ctm2} = \eta_{vol} \eta_{\theta} \sigma_{\tau} \left(1 - \frac{w_2}{l_e}\right) \quad (7.3)$$

Der letzte charakteristische Punkt ist durch die rechnerische Einbindelänge $l_e = 1/4 l_f$ gegeben. Ab dieser Rissöffnung gilt die Faser als ausgezogen und es ist keine weitere Spannungsübertragung möglich. Bei der rechnerischen Einbindelänge wird davon ausgegangen, dass immer die kürzere Seite der Faser aus der Matrix ausgezogen wird. Die kürzere Einbindelänge entspricht somit unter Annahme einer Gleichverteilung einem Viertel der Faserlänge.

Lin [Lin96] leitet ebenfalls eine auf einer Verbundspannungs-Schlupfbeziehung für den Stahlfaser-Matrix Verbund und einer Spannungs-Rissöffnungsbeziehung für reinen Beton basierende Spannungs-Rissöffnungsbeziehung her. Die Verbundspannungs-Schlupfbeziehung wird nach einem Verfahren von Nammur et al. [NNC87] unter Berücksichtigung des Faserdurchmessers aus Faserauszugsversuchen [Bui91] bestimmt. Auch hier ist eine Übertragbarkeit der Versuchsergebnisse auf andere Stahlfaserbetone nicht gewährleistet. Bei der Bestimmung des Zugspannungsanteils der Fasern unterscheidet Lin [Lin96] fünf unterschiedliche Faserauszugszustände. Aufgrund dieser genauen Abbildung des Faserauszugs gestaltet sich die Berechnung der analytischen Spannungs-Rissöffnungsbeziehung als so aufwendig, dass sie für praktische Belange kaum in Frage kommt. Für die Ermittlung des Faserorientierungsbeiwerts werden photographische Verfahren oder die Ermittlung anhand der Faseranzahl in der Bruchfläche empfohlen. Aufbauend auf diese Spannungs-Rissöffnungsbeziehung wird ein Bemessungsverfahren für Stahlfaserbeton unter Biege- und Normalkraftbeanspruchung vorgestellt. Hierbei wird auch der Größeneinfluss des Bauteils auf den Faserorientierungsbeiwert berücksichtigt. Die Arbeit von Lin [Lin96] wurde auch im Rahmen des Heftes 494 vom Deutschen Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb) veröffentlicht [Lin99].

In der Literatur sind des Weiteren zahlreiche Ansätze zur analytischen Ermittlung der Spannungs-Rissöffnungsbeziehung zu finden. Bei manchen Ansätzen wie beispielsweise von

Lim et al. [LPL87], Li et al. [LWB91] und Kullaa [Kul94a], [Kul94b] wird dabei ein Mitwirken der Betonmatrix komplett vernachlässigt. Li et al. [LSK93] berücksichtigen in ihrem Ansatz zusätzlich die Tatsache, dass die Stahlfasern bereits vor dem Auftreten eines Risses unter Spannung stehen, sozusagen vorgespannt sind.

Eine weitere Möglichkeit das Zugtragverhalten oder allgemeiner das Tragverhalten von Stahlfaserbeton zu bestimmen ist die Verwendung von Modellen, die das Mesogefüge abbilden. Hiermit kann durch die numerische Berechnung von sogenannten repräsentativen Volumenelementen (RVE) in Verbindung mit geeigneten Homogenisierungstechniken auf das makroskopische Tragverhalten geschlossen werden. Slowik stellt in [Slo02] beispielsweise Stabwerksmodelle zur Nachbildung des Mesogefüges des Stahlfaserbetons vor.

7.1.2 Experimentelle Verfahren

Theoretisch gesehen ist ein direkter Zugversuch am besten zur Bestimmung des Zugtragverhaltens geeignet, sei es in Form einer diskreten Spannungs-Rissöffnungsbeziehung oder in Form einer verschmierten Spannungs-Dehnungsbeziehung. Die gesuchten Materialparameter und sogar der Verlauf der Entfestigungsbeziehung lassen sich unter der Voraussetzung, dass es sich um einen stabilen Versuch handelt, direkt aus den Versuchsergebnissen ableiten. Stabil bedeutet in diesem Sinn, dass sich die Verschiebung beim weggesteuerten Versuch, speziell auch im entfestigenden Bereich, langsam und kontinuierlich, ohne Sprünge steigern lässt [Hil85b]. Leider ist die Durchführung des direkten Zugversuchs, der sich nach obiger Definition stabil verhält, in der Praxis noch relativ problematisch und wird daher selten durchgeführt. Außerdem beeinflussen die Randbedingungen des Versuchs und Größeneffekte (*size effects*) die Versuchsergebnisse in starkem Maße [Mie97].

In Normen und Merkblättern ist er ebenfalls nicht vorgesehen. Einzige Ausnahme stellt die RILEM-Empfehlung TC 162-TDF [RIL01] dar. Hier wird ein direkter Zugversuch für die Ermittlung der Spannungs-Rissöffnungsbeziehung vorgeschlagen. Es wird jedoch davon abgeraten, wahrscheinlich aufgrund starker Streuungen der Ergebnisse, die Zugfestigkeit mit diesem Versuch zu bestimmen. Empfohlen wird hingegen die Zugfestigkeit unabhängig z.B. mit empirischen Formeln aus der Druckfestigkeit abzuleiten. Im Rahmen eines Forschungsprogramms

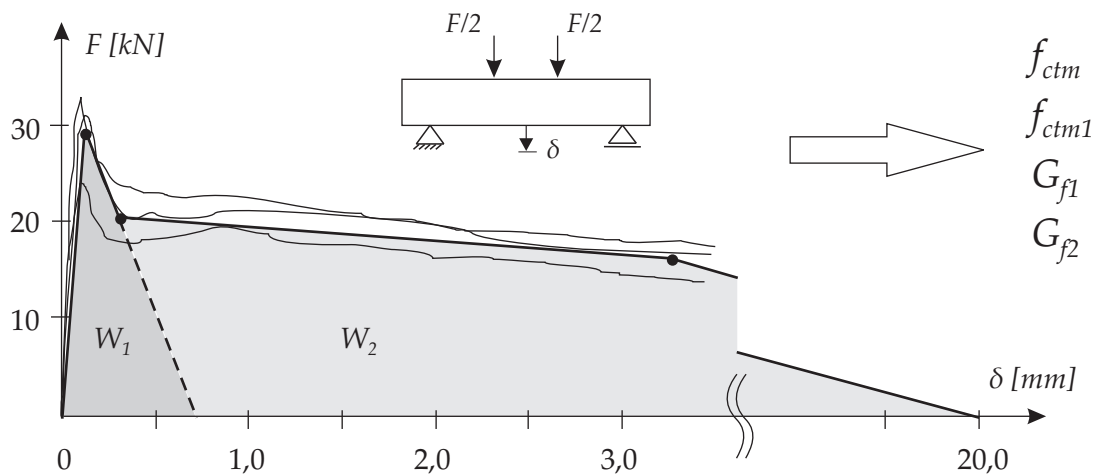


Abbildung 7.2: Last-Verformungskurve eines Biegezugversuchs zur Bestimmung der einaxialen Materialparameter

wurde dieser Test von unterschiedlichen Laboratorien durchgeführt [RIL03a], [RIL03b]. Ziel war es, Streuungen in den Versuchsergebnissen sowohl laborintern als auch zwischen den Laboren zu beobachten. Obwohl von Schwierigkeiten bei der Versuchsdurchführung berichtet wurde, scheint dieser Versuch robust und für die Praxis geeignet zu sein. Bleibt abzuwarten, ob und wann dieser Versuch auch als genormter Standardversuch eingeführt wird.

Sowohl national als auch international dienen derzeit Biegezugversuche als Standardversuche zur Bestimmung des Zugtragverhaltens von Stahlfaserbeton. Wie bereits in Kapitel 4 beschrieben, lassen sich diese Versuche einfach und wirtschaftlich in der Praxis durchführen. Problematisch ist jedoch, dass Biegezugversuche als Ergebnis eine Kraft-Verformungsbeziehung bzw. eine Kraft-Rissöffnungsbeziehung liefern, aus der das gesuchte einaxiale Zugtragverhalten nicht direkt abgelesen werden kann (Abbildung 7.2). In den Normen behilft man sich durch empirische Verfahren. Diese beruhen auf der Bestimmung einer elastischen Randspannung, die anschließend mittels Faktoren, die den nichtlinearen Spannungsverlauf über den Querschnitt berücksichtigen, in einaxiale Spannungswerte umgerechnet werden. Dieses Vorgehen auf das nachfolgend noch genauer eingegangen wird, ist aufgrund des hochgradig nichtlinearen Verhaltens des Stahlfaserbetons nur als Näherung geeignet. Für Bemessungsaufgaben ist es ausreichend, diese Faktoren auf der sicheren Seite liegend anzugeben.

Für strukturmechanische Berechnungen ist es jedoch erforderlich, das Zugtragverhalten genauer zu bestimmen. Dies kann mit Hilfe numerischer Simulationen des Versuchs selbst, auch als *Inverse-Analyse* bezeichnet, erreicht werden. Dieses Vorgehen stellt ein in den letzten Jahren gebräuchlich gewordenes Verfahren im Bereich numerischer Simulationen dar. Es wird auch häufig zur Berechnung der Entfestigungsparameter von reinem Beton verwendet [Mie97] und kann prinzipiell bei allen indirekten Versuchen wie beispielsweise Spaltzugversuchen verwendet werden. Das genaue Vorgehen bei einer *Inversen-Analyse*, die auch im Rahmen dieser Arbeit zum Einsatz kommt, wird nachfolgend genauer erläutert.

7.1.2.1 Bestimmung der Spannungs-Dehnungsbeziehung aus Biegezugversuchen

Die meisten Normen sehen als Berechnungsgrundlage eine Spannungs-Dehnungsbeziehung vor. Im Folgenden wird ein kurzer Überblick über diese Bemessungsrichtlinien gegeben. In Deutschland wurden Anfang der neunziger Jahre vom DBV (Deutscher Beton- und Bautechnik Verein e.v.) Merkblätter für bestimmte Einsatzgebiete (z.B. Industriefußböden, Tunnelbau) erstellt. Dabei ist im DBV-Merkblatt „*Bemessungsgrundlagen für Stahlfaserbeton im Tunnelbau*“ [DBV96] u.a. die Ermittlung der Spannungs-Dehnungsbeziehung aus 4-Punkt Biegezugversuchen geregelt. Im neuen DBV-Merkblatt „*Stahlfaserbeton*“ [DBV01] wurde das zuvor genannte Merkblatt für allgemeine Anwendungen erweitert und an das neue Sicherheitskonzept der DIN 1045-1 [DIN01] angepasst.

Auch in der vom schweizerischen Ingenieur- und Architektenverein aufgestellten Richtlinie 162/6 „*Stahlfaserbeton*“ [SIA99] dient der 4-Punkt Biegezugversuch als Grundlage für die Parameterermittlung. Des Weiteren werden hier Quadratplattenversuche und Kreisplattenversuche, die auch zur Bestimmung der Zugbruchenergie herangezogen werden können, verwendet.

Von der Arbeitsgemeinschaft RILEM (International Union of Laboratories and Experts in Construction Materials, Systems and Structures) wurde zum Thema Stahlfaserbeton die Empfehlung TC 162-TDF „*Test and design methods for steel fibre reinforced concrete*“ erarbeitet. Diese setzt sich aus vier Teilen zusammen. Im Teil „*bending test*“ [RIL00b] wird der Biegezugversuch zur Ermittlung des Zugverhaltens vorgestellt. Im Gegensatz zum DBV-Merkblatt handelt es sich hier um einen 3-Punkt Biegezugversuch, der an gekerbten Proben durchgeführt wird. Dies hat

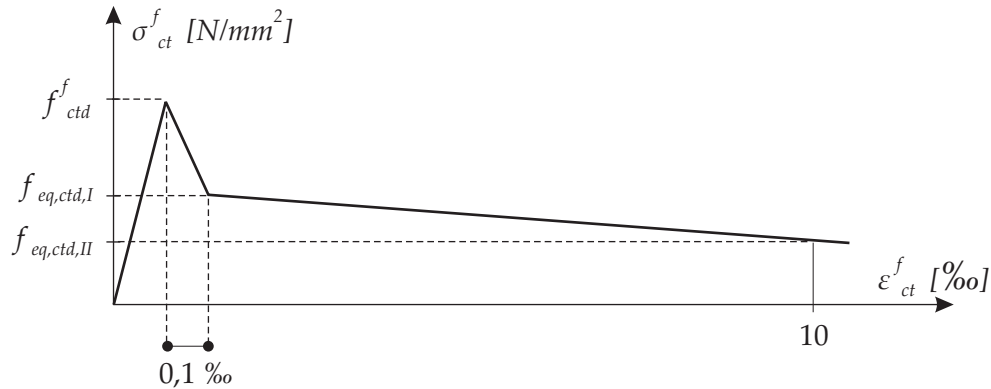


Abbildung 7.3: Spannungs-Dehnungslinie nach dem DBV-Merkblatt „Stahlfaserbeton“ [DBV01]

den Vorteil, dass auch die Rissöffnung gemessen werden kann. Der Teil „ σ - ε -design method“ [RIL00a] behandelt die Bemessung von Stahlfaserbetonstrukturen auf Basis einer Spannungs-Dehnungsbeziehung. Das Vorgehen bei der Bestimmung dieser Beziehung ist dem der DBV-Merkblätter sehr ähnlich. In den beiden anderen Teilen wird ein einaxialer Zugversuch [RIL01] und eine neuartige Bemessungsmethode auf Basis einer Spannungs-Rissöffnungsbeziehung, die „ σ - w -method“ [RIL02], vorgestellt.

Folgend wird ausschließlich auf die Ausführungen des DBV-Merkblatts „Stahlfaserbeton“ [DBV01] eingegangen. Abbildung 7.3 zeigt die vorgeschlagene Spannungs-Dehnungsbeziehung im gezogenen Bereich. Sie dient sowohl als Grundlage für die nichtlineare Schnittgrößenermittlung als auch für die Querschnittsbemessung. Für Letzteres ist aber auch der näherungsweise Ansatz eines bilinearen Verlaufs zulässig, auf den nicht weiter eingegangen wird. Als Materialwerte dieser Beziehung werden die Biegezugfestigkeit f_{ctd}^f und die äquivalenten Zugfestigkeiten $f_{eq,ctd,I}$ und $f_{eq,ctd,II}$ eingeführt. Diese Bemessungswerte ergeben sich aus den charakteristischen Werten ($f_{ctk,fl}^f, f_{eq,ctk,I}^f, f_{eq,ctk,II}^f$) wie folgt:

$$f_{ctd}^f = f_{ctk,fl}^f \alpha_c^f / \gamma_{ct}^f \quad (7.4)$$

$$f_{eq,ctd,I} = f_{eq,ctk,I}^f \alpha_c^f \alpha_{sys} / \gamma_{ct}^f \quad (7.5)$$

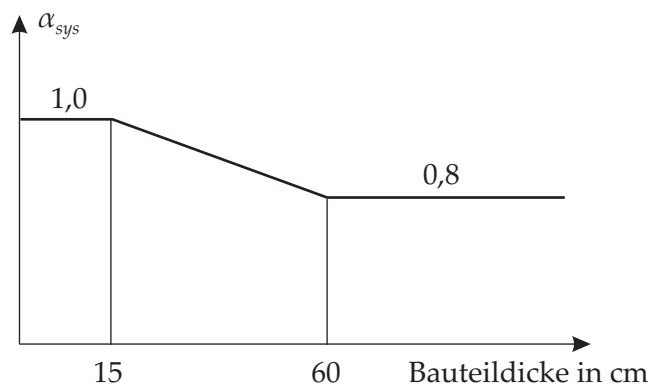
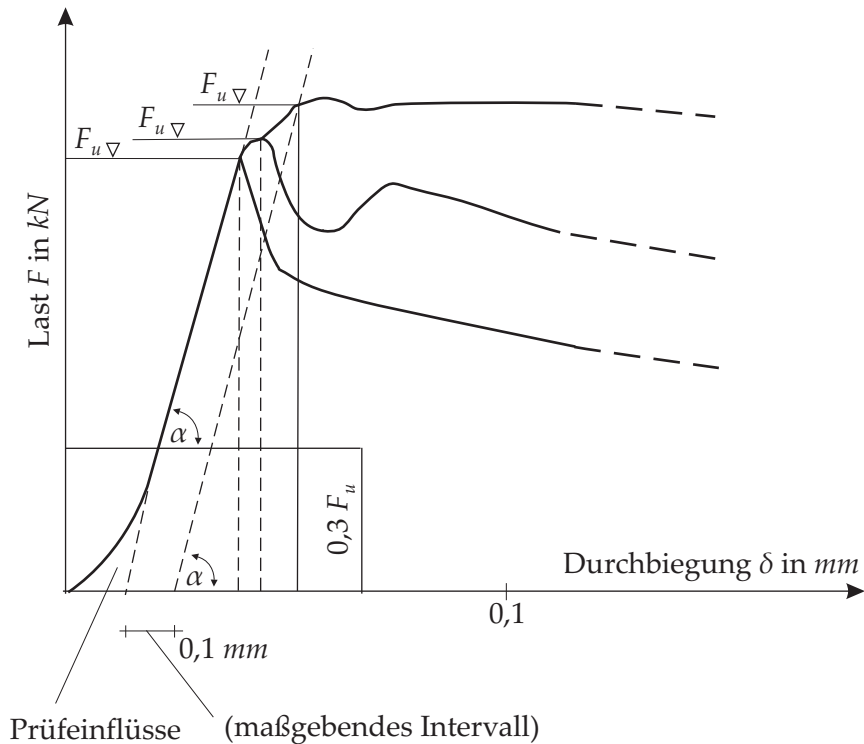


Abbildung 7.4: Beiwert zum Gestalteinfluss nach dem DBV-Merkblatt „Stahlfaserbeton“ [DBV01]



$\alpha = \max. \alpha$ der Last-Durchbiegungskurve

$F_u =$ Maximalwert der Last im maßgebenden Intervall von $0,1 \text{ mm}$

Abbildung 7.5: Ermittlung der für die Biegezugfestigkeit maßgebenden Last F_u nach dem DBV-Merkblatt „Stahlfaserbeton“ [DBV01]

$$f_{eq,ctd,II} = f_{eq,ctk,II}^f \alpha_c^f \alpha_{sys}^f / \gamma_{ct}^f \quad (7.6)$$

α_c^f ist der Beiwert zur Berücksichtigung des Dauerstandverhaltens mit $\alpha_c^f = 0,85$ für Normalbeton und $\alpha_c^f = 0,75$ für Leichtbeton. Mit α_{sys} wird eine geometrische Abweichung zwischen Bauwerk und Probekörper berücksichtigt. Der Wert von α_{sys} ist Abbildung 7.4 zu entnehmen. γ_{ct}^f stellt den jeweils maßgebenden Sicherheitsbeiwert dar. Die zugrunde gelegten charakteristischen Werte werden mit 4-Punkt Biegezugversuchen bestimmt.

Die Biegezugfestigkeit $f_{ct,fl}^f$ ergibt sich unter der Annahme eines linearen Spannungsverlaufes aus der maßgebenden Prüflast F_u sowie der Stützweite des Prüfkörpers $l = 600 \text{ mm}$ und den Querschnittsabmessungen $b = d = 150 \text{ mm}$ zu:

$$f_{ct,fl}^f = \frac{F_u l}{b d^2} \quad (7.7)$$

Eine eindeutige Bestimmung der maßgebenden Last F_u ist bei Stahlfaserbeton nicht immer möglich. Daher wird im DBV-Merkblatt die maßgebende Last F_u als Maximalwert der Last in einem Intervall von $0,1 \text{ mm}$ definiert (siehe Abbildung 7.5). Vereinfachend darf nach dem DBV-Merkblatt anstelle der Biegezugfestigkeit des Stahlfaserbetons auch die Biegezugfestigkeit des

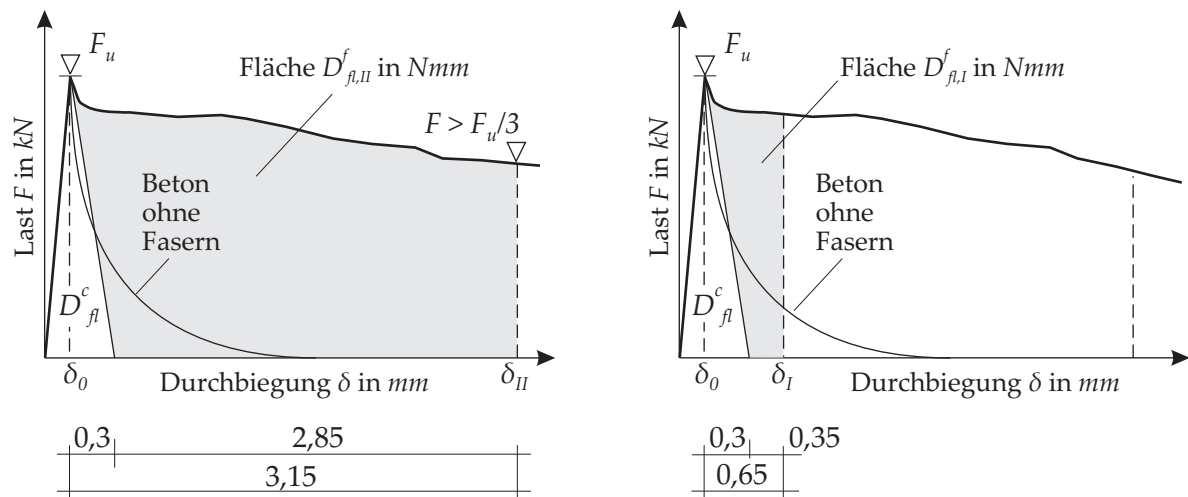


Abbildung 7.6: Ermittlung der äquivalenten Biegezugfestigkeit nach dem DBV-Merkblatt „Stahlfaserbeton“ [DBV01]

unbewehrten Betons verwendet werden. Diese kann, wenn kein genauer Nachweis durch Versuche erfolgt, aus dem charakteristischen Wert der Druckfestigkeit f_{ck} berechnet werden:

$$f_{ctk,fl}^f = 0,21 k_d f_{ck}^{2/3} \quad (7.8)$$

$$\text{mit } k_d = 1,6 - d \geq 1,0 \quad (7.9)$$

Der Höhenbeiwert k_d berücksichtigt die Höhe des Bauteils.

Die äquivalenten Zugfestigkeiten beschreiben das Nachrissverhalten. Aus der Last-Durchbiegungskurve wird das maßgebende Arbeitsvermögen der Fasern D_{fl}^f des Stahlfaserbetons (Abbildung 7.6) für zwei unterschiedliche Verformungsniveaus (I und II) ermittelt. Über äquivalente Kräfte F_{eq} lassen sich daraus die äquivalenten Biegezugfestigkeiten f_{eq} bestimmen:

$$F_{eq,I} = \frac{D_{fl,I}^f}{0,5mm} \quad (7.10)$$

$$f_{eq,I} = \frac{F_{eq,I} l}{b h^2} \quad (7.11)$$

$$F_{eq,II} = \frac{D_{fl,II}^f}{3,0mm} \quad (7.12)$$

$$f_{eq,II} = \frac{F_{eq,II} l}{b h^2} \quad (7.13)$$

Aus den äquivalenten Biegezugfestigkeiten ermitteln sich die entsprechenden äquivalenten Zugfestigkeiten zu:

$$f_{eq,ct,I} = 0,45 f_{eq,I} \quad (7.14)$$

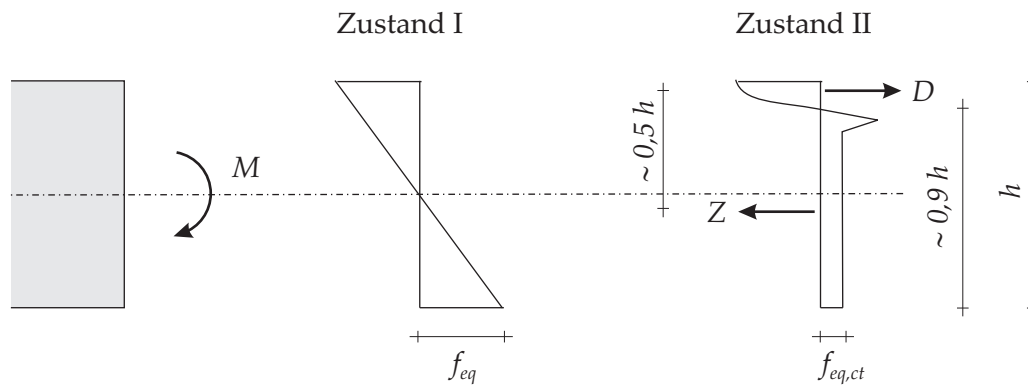


Abbildung 7.7: Spannungsverteilung zur Umrechnung der äquivalenten Biegezugfestigkeit in eine äquivalente Zugfestigkeit

$$f_{eq,ct,II} = 0,37 f_{eq,II} \quad (7.15)$$

Die Faktoren 0,45 bzw. 0,37 berücksichtigen die Spannungsverteilung im gerissenen Zustand und lassen sich folgendermaßen herleiten. Unter der Annahme einer geschätzten Spannungsverteilung (Abbildung 7.7), gilt:

$$M_{II} = M_I = M$$

$$f_{eq,ct} \cdot 0,9h \cdot b \cdot 0,5h = f_{eq} \frac{h^2 b}{6}$$

$$\Rightarrow f_{eq,ct} \approx 0,37 f_{eq} \quad (7.16)$$

Es ist offensichtlich, dass die bezüglich des nichtlinearen Spannungsverlaufs getroffenen Annahmen wie Druckzonenhöhe und innerer Hebelarm nur grobe Näherungen darstellen, die für weite Dehnungsbereiche stark von dem realen Spannungszustand abweichen.

Auf notwendigen statistischen Betrachtungen die von den Versuchswerten auf die charakteristischen Werte führen wird hier nicht eingegangen und auf das DBV-Merkblatt [DBV01] verwiesen.

7.1.2.2 Bestimmung der Spannungs-Rissöffnungsbeziehung mittels „Inverser-Analyse“

Besteht bei einem Versuch, wie dem Biegezugversuch oder einem anderen indirekten Zugversuch nicht die Möglichkeit das gesuchte Entfestigungsverhalten direkt aus den Versuchsergebnissen abzulesen, kann diese mit Hilfe numerischer Simulationen des Versuchs, auch als „Inverse-Analyse“ bezeichnet, ermittelt werden. Der prinzipielle Ablauf dieser Prozedur ist in Abbildung 7.8 dargestellt.

Als Erstes wird ein idealisierter, schematisierter Verlauf der Entfestigungsbeziehung zugrunde gelegt. Unterschiedliche Spannungs-Rissöffnungsbeziehungen, die zur Beschreibung des Zugtragverhaltens von Stahlfaserbeton verwendet werden, wurden bereits in Abschnitt 6.5 vorgestellt. Im einfachsten Fall handelt es sich um einen konstanten Spannungsverlauf. Abhängig

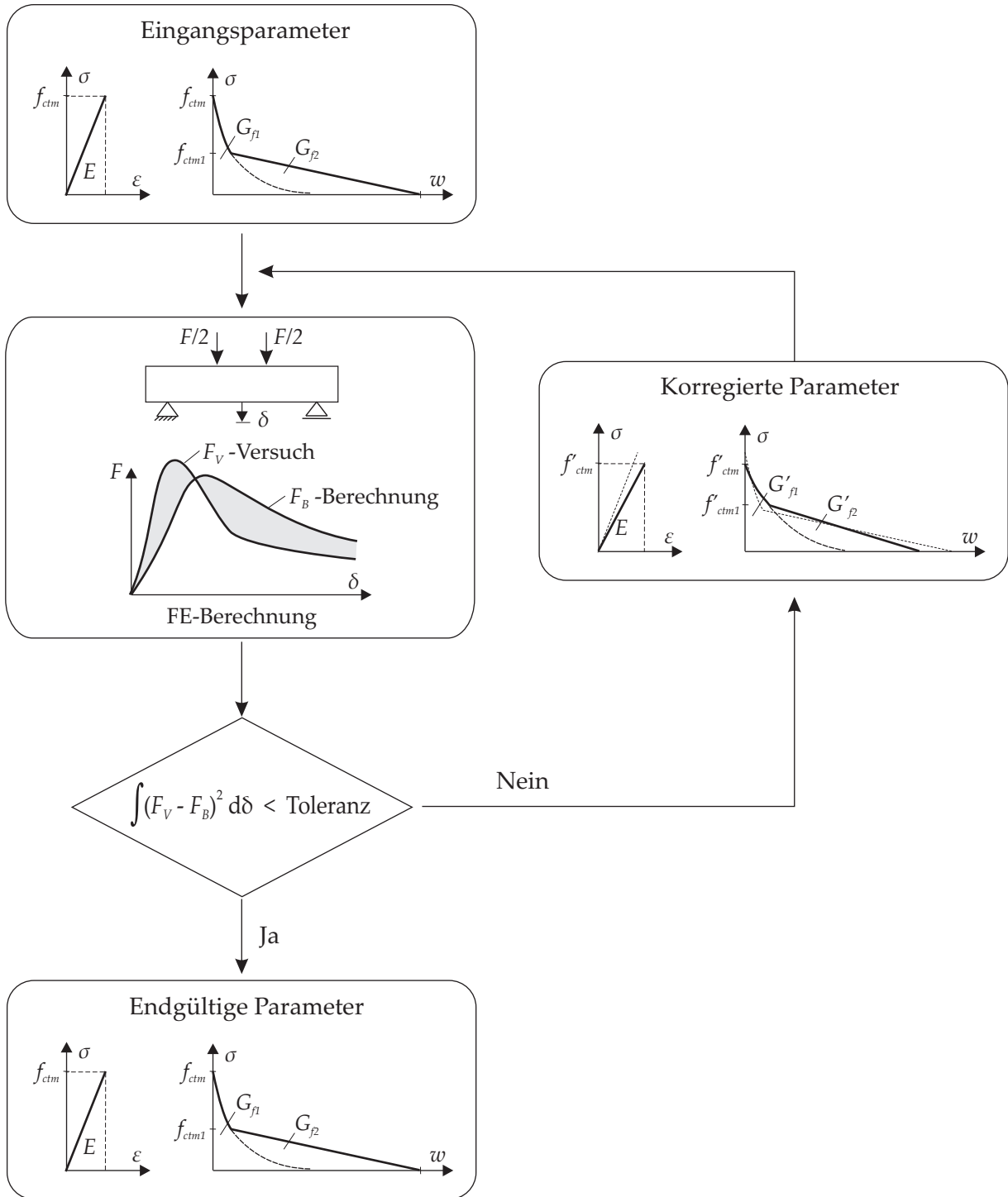


Abbildung 7.8: Ablauf einer Inversen Analyse

vom gewählten Verlauf ergibt sich die Anzahl der unbekannt Parameter. Die in dieser Arbeit gewählte zweiteilige Spannungs-Rissöffnungsbeziehung wird durch vier Parameter, die Zugfestigkeit f_{ctm} , die Nachrissfestigkeit f_{ctm1} und die beiden Bruchenergieanteile G_{f1} und G_{f2} festgelegt.

In einem zweiten Schritt wird nun eine numerische Analyse der Versuchsgeometrie durch-

geführt. Hierfür eignet sich zum Beispiel eine FE-Berechnung sehr gut. Aber auch einfachere numerische Verfahren können verwendet werden. Kooiman [Koo00] beispielsweise bedient sich eines Mehrschichtmodells, das von Hordijk [Hor91] entwickelt wurde, zur Berechnung eines 3-Punkt Biegezugversuch an einem gekerbten Probekörper. Der Bruchquerschnitt wird durch Federn modelliert, wobei jede Feder das Verhalten einer Schicht repräsentiert. Unter der Annahme eines linearen Verschiebungsverlaufes über die Querschnittshöhe kann die Spannung in jeder Schicht ermittelt werden. In einem iterativen Prozess wird unter der Bedingung, dass die Normalkraft im Querschnitt verschwinden muss, für eine vorgegebene Verschiebung am unteren Querschnittsrand die Verschiebung am oberen Querschnittsrand gesucht und das zugehörige Moment bestimmt. Der restliche Bereich des Probekörpers wird als starr angenommen. Weitere Modelle, sogenannte „*nonlinear hinge-Modelle*“ werden in [RIL02] aufgeführt. Sie beruhen auf der Idee, den Rissquerschnitt der Struktur separat als nichtlineares Gelenk zu betrachten, während für den restlichen Teil der Struktur linear-elastisches Verhalten zugrunde gelegt wird.

Im Anschluss an die Berechnung werden Berechnungsergebnis und Versuchsergebnis miteinander verglichen. Abhängig von der Abweichung zwischen Versuch und Experiment werden die Parameter der Entfestigungsbeziehung variiert und eine erneute Berechnung durchgeführt. Diese Prozedur wird solange wiederholt bis die Abweichung klein ist bzw. vorgegebene Schranken nicht mehr überschreitet.

Als nachteilig bei der *Inversen Analyse* ist anzusehen, dass das Nachbruchverhalten nicht systematisch, sondern mehr oder weniger durch „trial and error“ bestimmt wird. Außerdem beruht dieses Verfahren auf der Annahme eines Entfestungsverlaufes, der das wirkliche Verhalten nur näherungsweise wiedergeben kann. Bei Modellen mit mehreren Freiheitsgraden ist die sich ergebende Lösung nicht unbedingt eindeutig. Werden hingegen zu wenig Freiheitsgrade verwendet, kann das Versuchsverhalten nur unzureichend beschrieben werden. Auf jeden Fall sollte versucht werden, wie in dieser Arbeit „gute“ Näherungen für die Anfangsparameter zu verwenden. Hierdurch kann die Anzahl der notwendigen Iterationsschleifen stark reduziert werden. Zusätzlich ist es sinnvoll, vorab den qualitativen Einfluss jedes einzelnen Parameters auf das Entfestigungsverhalten zu untersuchen (siehe Abschnitt 7.1.2.4). Unter diesen Randbedingungen wurden mit der *Inversen Analyse* in dieser Arbeit sehr gute Ergebnisse erzielt.

7.1.2.3 Bestimmung der Bruchenergie

Ein wesentlicher Materialparameter zur Charakterisierung der Spannungs-Rissöffnungsbeziehung ist die Bruchenergie. Definiert als Energie, die zur Bildung einer Einheitsrissfläche bei vollständiger Entfestigung des Materials nötig ist, beschreibt sie die Fläche unter der Spannungs-Rissöffnungsbeziehung (siehe auch Abschnitt 6.5). Theoretisch ist auch hier für die Bestimmung der direkte Zugversuch am besten geeignet. Aus den bereits zuvor erwähnten Gründen ist das nicht immer und mit jeder Versuchseinrichtung möglich. Auch als Ergebnis der zuvor beschriebenen *Inversen Analyse* ergibt sich die Bruchenergie. Im Folgenden werden weitere Möglichkeiten und Aspekte zur Ermittlung der Bruchenergie diskutiert.

Die RILEM sieht in einer Empfehlung [RIL85] zur Bestimmung der Bruchenergie von reinem Beton und Mörtel den 3-Punkt Biegezugversuch an gekerbten Prismen vor. Ohne Begründung wird hier darauf hingewiesen, dass die vorgeschlagene Methode nicht für Stahlfaserbetone geeignet ist. Hillerborg liefert in [Hil85b] Erläuterungen zu dieser Empfehlung. Diesen ist zu entnehmen, dass dieses Verfahren auf Materialien limitiert ist, bei denen das Verhältnis von Druck- zu Zugfestigkeit groß ist. Bei reinem Beton liegt dieses Verhältnis in etwa zwischen fünf und zehn. Dadurch wird vermieden, dass Plastifizierungen im Druckbereich ebenfalls zu Energieabsorption führen und damit den ermittelten Wert für die Zugbruchenergie

verfälschen. Stahlfaserbeton hat zwar ein ähnliches Verhältnis von Druck- zu Zugfestigkeit wie reiner Beton, dennoch kann bei großen Verformungen im Versuch, die sich aus dem duktilen Nachbruchverhalten ergeben, eine Energieabsorption im restlichen Probenbereich und speziell in der Druckzone nicht ausgeschlossen werden. Ein weiteres Problem bei Stahlfaserbeton ist, dass der Versuch nicht bis zur kompletten Entfestigung durchgeführt werden kann. Die Verformungen sind dann zu groß, um von den Messeinrichtungen erfasst zu werden.

Trotz des Hinweises in der RILEM Empfehlung leiten Barros & Figueiras [BF99] aus diesem Versuch empirische Formeln für die Bruchenergie von Stahlfaserbeton ab. Da die Versuche aufgrund messtechnischer Gründe bei einer Durchbiegung von 20 mm in Feldmitte abgebrochen werden mussten und zu diesem Zeitpunkt die gesamte Bruchenergie noch nicht freigesetzt ist, war es erforderlich die Versuchskurve durch eine Gerade zu erweitern. Diese verbindet den letzten Versuchspunkt mit dem bei einer Durchbiegung von 25 mm angenommenen Lastnullpunkt. Das Verhältnis der Bruchenergie des Stahlfaserbetons G_f^{Fe} zur Bruchenergie des entsprechenden Betons ohne Fasern G_{f0}^{Fe} ergibt sich in Abhängigkeit des Fasergehalts W_f in Gewichtsprozent zu

$$\frac{G_f^{Fe}}{G_{f0}^{Fe}} = 19,953 + 3,213 W_f \quad (7.17)$$

für Dramix ZP 30/.50 Fasern und zu

$$\frac{G_f^{Fe}}{G_{f0}^{Fe}} = 1,0 + 13,159 W_f^{1,827} \quad (7.18)$$

für Dramix ZP 60/.80 Fasern. Fraglich ist bei diesen Formeln, die aus Versuchen mit einer speziellen Betonmischung und den beiden Faserarten ermittelt wurden, die Übertragbarkeit auf andere Faserbetone. Speziell das Verbundverhalten zwischen Faser und Matrix, das das Nachbruchverhalten und damit die Bruchenergie stark beeinflusst, hängt sehr von der Betonmischung und der Faserart ab.

Slowik [Slo02] schlägt zur Bestimmung sowohl der Bruchenergie als auch der Entfestigungskurve den sogenannten Keilspaltversuch vor. Während die Bruchenergie aus der Fläche unter der Spaltkraft-Rissöffnungskurve bestimmt werden kann, lässt sich die Entfestigungskurve nur mit Hilfe numerischer Simulationen (*Inverse Analyse*, siehe oben) bestimmen.

7.1.2.4 Eigenes Vorgehen zur Bestimmung der Spannungs-Rissöffnungsbeziehung

Im Folgenden wird das Vorgehen zur Ermittlung der Materialparameter für die in dieser Arbeit verwendete zweiteilige Spannungs-Rissöffnungsbeziehung vorgestellt. Der Verlauf setzt sich aus einem exponentiellen Teil für den reinen Beton und einem linearen Teil für den Stahlfaseranteil zusammen. Die zu bestimmenden Materialparameter sind die Zugfestigkeit f_{ctm} , die Nachrissfestigkeit f_{ctm1} und die beiden Bruchenergieanteile G_{f1} und G_{f2} . Als Grundlage dienen die Ergebnisse von 4-Punkt Biegezugversuchen nach dem DBV-Merkblatt „Stahlfaserbeton“ [DBV01]. Nach einer groben Abschätzung der Parameter werden sie genau durch FE-Berechnungen des Biegezugversuchs also einer *Inversen Analyse* ermittelt.

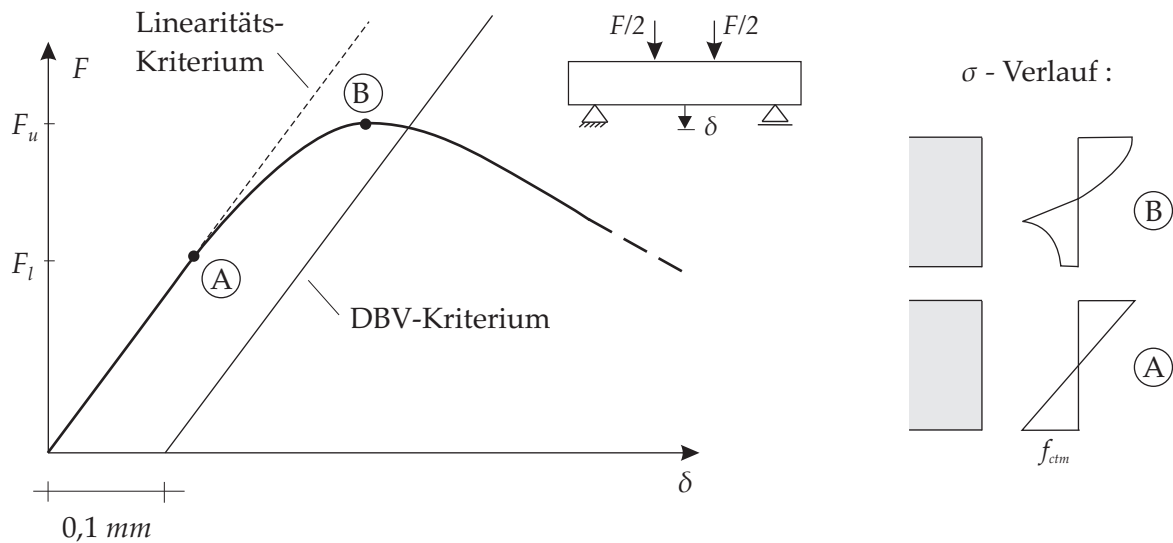


Abbildung 7.9: Linearitätskriterium zur Bestimmung der einaxialen Zugfestigkeit

- a) Abschätzen der Parameter f_{ctm} , f_{ctm1} , G_{f1} und G_{f2} :

Zugfestigkeit f_{ctm} :

Nach dem DBV-Merkblatt „Stahlfaserbeton“ [DBV01] lässt sich die Biegezugfestigkeit $f_{ct,fl}$ nach Gleichung 7.7 aus der Maximallast F_u bestimmen und kann anschließend mit

$$f_{ct,ax} = f_{ct,fl}^f / k_d \quad (7.19)$$

in eine einaxiale Zugfestigkeit $f_{ct,ax}$ umgerechnet werden. k_d ist dabei der in Gleichung 7.9 festgelegte Höhenbeiwert. Der Einfluss des Nachbruchverhaltens wird bei dieser Umrechnung nicht berücksichtigt. Wie in Abbildung 7.12 jedoch zu erkennen, ist der Einfluss des Nachbruchverhaltens speziell der Bruchenergie G_{f1} auf die Maximallast F_u nicht unerheblich.

Für die Abschätzung der Zugfestigkeit wird daher das von Nitschke [Nit98] vorgeschlagene **Linearitätskriterium** verwendet. Es resultiert aus der Tatsache, dass bei Erreichen der Maximallast F_u kein ungerissener Querschnitt mit einem linearem Spannungsverlauf mehr vorliegt. Durch den nichtlinearen Spannungsverlauf ist auch der Einfluss des Nachbruchverhaltens auf die Last F_u zu erklären. Beim Linearitätskriterium wird daher nicht die Maximallast F_u sondern die Last F_l zur Berechnung der Zugfestigkeit verwendet, bei der noch ein annähernd linearer Spannungsverlauf vorliegt und am unteren Querschnittsrand die Zugfestigkeit erreicht wird (Abbildung 7.9). Dieser Zustand ist in der Versuchskurve an der Stelle erreicht, an der die Kurve sichtbar vom Linearen abzuweichen beginnt. Die einaxiale Zugfestigkeit f_{ctm} ergibt sich dann zu:

$$f_{ctm} = \frac{F_l l}{b d^2} \quad (7.20)$$

Nachrissfestigkeit f_{ctm1} :

Die Abschätzung der Nachrissfestigkeit f_{ctm1} erfolgt mit dem im DBV-Merkblatt „Stahlfaserbeton“ [DBV01] vorgeschlagenen Vorgehen zur Bestimmung der äquivalenten Zugfestigkeit $f_{eq,ct,I}$ nach Gleichung (7.10), (7.11) und (7.14). Allerdings scheint der Faktor

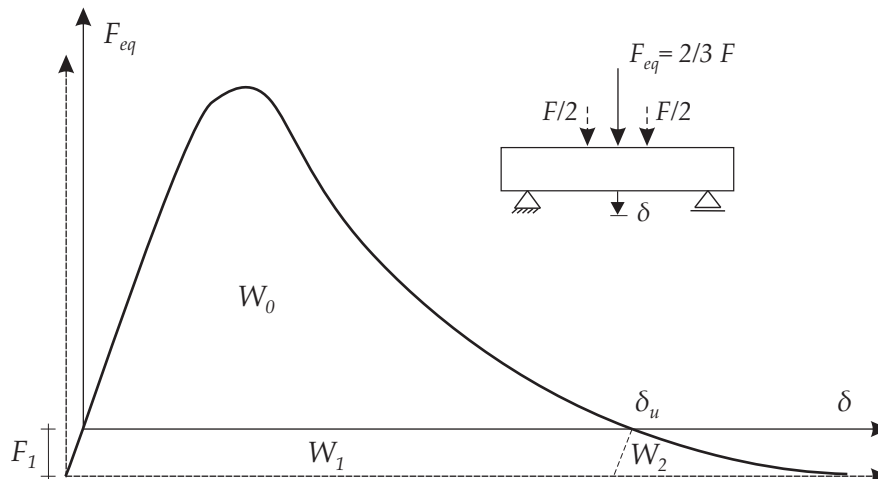


Abbildung 7.10: Bestimmung der Bruchenergie aus 4-Punkt Biegezugversuchen

0,45 in Gleichung 7.14 etwas zu groß und wird wie im alten DBV-Merkblatt [DBV96] mit 0,37 angenommen.

Bruchenergie:

Die Bestimmung der Bruchenergie erfolgt ebenfalls aus den Ergebnissen der 4-Punkt Biegezugversuche. Obwohl die Energiedissipation etwas größer ist als bei gekerbten Proben, können die daraus ermittelten Bruchenergien als eine erste Näherung verwendet werden. In einem ersten Schritt wird die gesamte Zugbruchenergie des Stahlfaserbetons bestimmt. Hierfür muss die Fläche unter der Last-Verformungskurve des Biegezugversuches bestimmt werden (Abbildung 7.2). Da die Versuche aufgrund der beim duktilen Stahlfaserbeton auftretenden großen vertikalen Verformungen aus messtechnischen Gründen nicht bis zur kompletten Entfestigung durchgeführt werden können, müssen Annahmen bezüglich des weiteren Kurvenverlaufs getroffen werden. Die in dieser Arbeit gewählte Möglichkeit ist, die Versuchskurve tangential bis zum Schnitt mit der x-Achse zu verlängern. Eine andere, von Barros & Figueiras [BF01] vorgeschlagene Möglichkeit ist, einen festen Wert für die Durchbiegung hier zum Beispiel 25 mm bei Erreichen des Lastnullpunktes anzunehmen. Die Belastung wird beim 4-Punkt Biegezugversuch in den Drittelpunkten aufgebracht, während die Durchbiegung in Feldmitte gemessen wird. Für die Berechnung der Bruchenergie wird daher die Last F in eine äquivalente Last F_{eq} , die in Feldmitte angreift, umgerechnet. Unter der Bedingung, dass F und F_{eq} in Feldmitte das gleiche Moment erzeugen ergibt sich:

$$F_{eq} = \frac{2}{3} F \quad (7.21)$$

In Abbildung 7.10 sind die Arbeitsanteile, die sich aus der äquivalenten Last und der Durchbiegung in Feldmitte ergeben, dargestellt. Die Last F_1 berücksichtigt dabei das Eigengewicht des Balkens und das Gewicht der durch den Balken getragenen Belastungseinrichtung. Nach [Pet81] entspricht bei reinem Beton W_1 in etwa W_2 und wird so für Stahlfaserbeton übernommen. Prinzipiell ist der Einfluss von W_1 und W_2 auf die gesamte Bruchenergie sehr gering. Die gesamte Bruchenergie ergibt mit der Rissfläche A_{lig} schließlich zu:

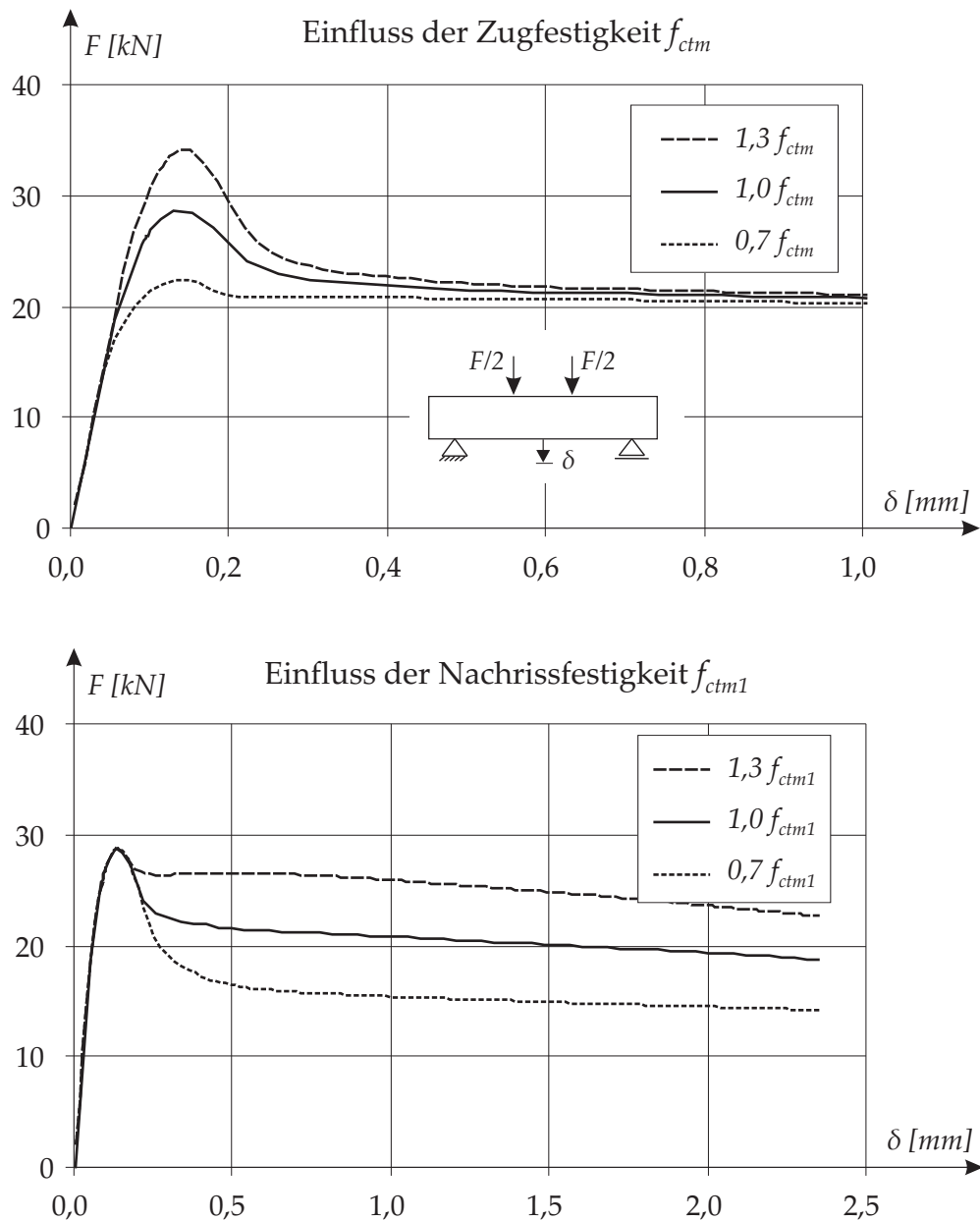


Abbildung 7.11: Einfluss der Zugfestigkeit und der Nachrissfestigkeit auf das Last-Verformungsverhalten beim Biegezugversuch

$$G_f = \frac{W_0 + 2F_1\delta_u}{A_{lig}} \quad (7.22)$$

Um aus der gesamten Bruchenergie die beiden benötigten Bruchenergieanteile G_{f1} und G_{f2} zu berechnen, muss die Bruchenergie des reinen Betons bestimmt werden. Das kann auf folgende zwei Arten erfolgen. Die erste Möglichkeit ist die Berechnung nach Model Code 90 [CF90] in Abhängigkeit der Betondruckfestigkeit und dem Größtkorn des Zuschlags (siehe hierzu Abschnitt 9.1). Die andere Möglichkeit ist der zuvor beschriebene Weg aus den 4-Punkt Biegezugversuchen. Dabei darf aber nur die in Abbildung 7.2 dargestellte Fläche W_1 berücksichtigt werden, da diese in etwa dem Anteil des reinen Betons entspricht.

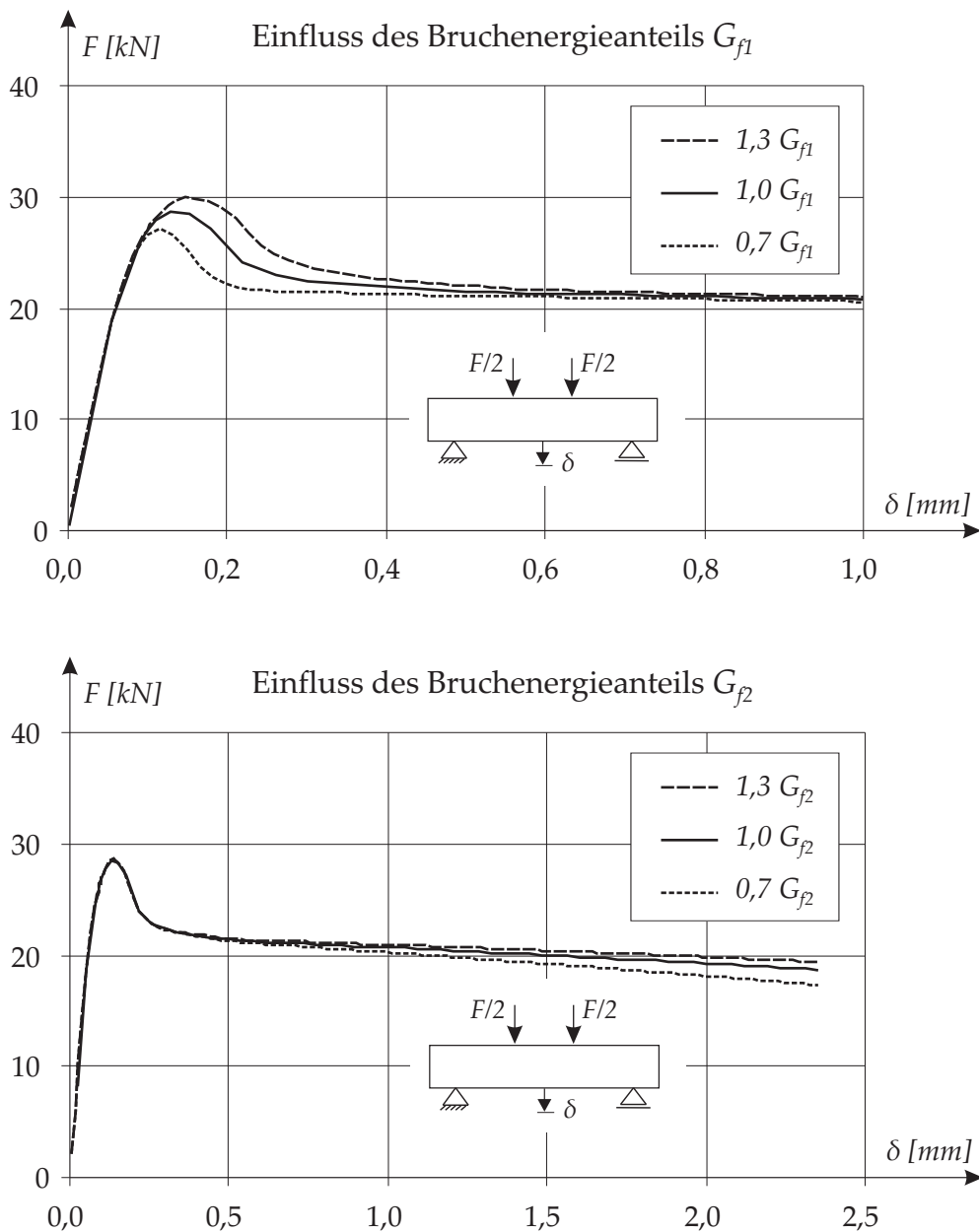


Abbildung 7.12: Einfluss der Bruchenergieanteile G_{f1} und G_{f2} auf das Last-Verformungsverhalten beim Biegezugversuch

b) Inverse Analyse:

Mit den genäherten Materialparametern kann die FE-Simulation des Biegezugversuchs erfolgen und die Materialparameter schrittweise angepasst werden, um eine bestmögliche Übereinstimmung zwischen der berechneten und der gemittelten und linearisierten Last-Verformungskurve zu erhalten. Der qualitative Einfluss der einzelnen Materialparameter auf die Last-Verformungskurve bei Faserbetonen mit unterkritischem Fasergehalt wie folgt beschreiben. Nach anfänglichem, annähernd linearem Ansteigen der Kurve weicht diese zunehmend vom linearen Verlauf ab bis schließlich die Maximallast erreicht wird. Anschließend folgt ein steiler Lastabfall, der sich auf einem leicht abfallenden Nachbruchniveau stabilisiert. Die Zugfestigkeit f_{ctm} und der Bruchener-

gieanteil des Betons G_{f1} beeinflussen dabei im Wesentlichen den vorderen Bereich der Kurve, während die Nachrissfestigkeit f_{ctm1} und der Bruchenergieanteil der Stahlfasern G_{f2} hauptsächlich den später folgenden Nachbruchverlauf bestimmen. Die Zugfestigkeit ist in erster Linie für die Größe der Maximallast, aber auch die Völligkeit des unmittelbar darauf folgenden Entfestigungsbereichs verantwortlich. Der Bruchenergieanteil des Betons beeinflusst hauptsächlich den Verlauf des ersten Entfestigungsbereichs, aber auch ein Einfluss auf die Maximallast ist deutlich zu erkennen. Das Nachbruchlastniveau wird fast ausschließlich durch die Nachrissfestigkeit vorgegeben, während der Bruchenergieanteil der Stahlfasern die Neigung bestimmt. Anhand dieser Einflüsse lassen sich die Materialparameter relativ schnell durch die *Inverse Analyse* bestimmen.

Es darf nicht unerwähnt bleiben, dass bei vielen praktischen Anwendungen eine zufällige, regellose Verteilung der Stahlfasern im Bauteil nicht gewährleistet ist. Die Fasern können sich beispielsweise aufgrund der Betonierichtung, des Verdichtungsvorgangs oder der Schalungsgeometrie verstärkt in spezielle Richtungen ausrichten. Als Konsequenz kann streng genommen das Material und damit auch das Zugtragverhalten nicht mehr als isotrop angesehen werden. Die Spannungs-Rissöffnungsbeziehung wird von der Rissrichtung und Faserorientierung abhängig. Diese Tatsache könnte durch die Verwendung eines anisotropen Materialgesetzes berücksichtigt werden, was sich allerdings als äußerst aufwendig darstellt. Zudem müsste für die Verwendung eines solchen Materialgesetzes die Faserverteilung im Bauteil bekannt sein. Es scheint daher sinnvoll und ausreichend, ein isotropes Materialgesetz zu verwenden, aber im Rahmen der Versuchsdurchführung, falls notwendig, die Faserorientierung zu berücksichtigen. Hierbei muss darauf geachtet werden, dass die Faserorientierung in den Probekörpern repräsentativ für die Faserverteilung in der tatsächlichen Struktur ist.

7.2 Elastische Parameter und Parameter des Druckbereichs

Im Folgenden werden nur die wichtigsten Aspekte zur Bestimmung des E-Moduls und der Parameter des Druckbereichs angesprochen.

E-Modul:

Eine analytische Methode zur Bestimmung des E-Moduls ist die Verbundwerkstofftheorie. In dieser Theorie wird Stahlfaserbeton als Zweiphasenmaterial behandelt. Unter Annahme linear-elastischen Materialverhaltens von Stahlfaser und Betonmatrix und eines vollständigen Verbundes zwischen den beiden Komponenten setzt sich die Spannung des Verbundwerkstoffes aus den entsprechend den Volumenanteilen gewichteten Spannungen von Matrix und Faser zusammen und der E-Modul kann mit folgender Gleichung bestimmt werden:

$$E = E_m (1 - v_f) + \eta_L \eta_\theta E_f v_f \quad (7.23)$$

Dabei ist E_m der E-Modul der Matrix, E_f der E-Modul der Stahlfasern und v_f der Volumenanteil der Stahlfasern. Durch den Faserlängenbeiwert η_L und den Faserorientierungsbeiwert η_θ wird eine beliebige Orientierung, kurzer Fasern anstelle langer, parallel zur Krafrichtung ausgerichteter Fasern berücksichtigt. Die in der Literatur beschriebenen Ansätze unterscheiden sich hauptsächlich bei der Ableitung der Faserbeiwerte [Kle84]. Des Weiteren lassen sich mit dieser Theorie die Rissspannung und die Bruchspannung des Verbundwerkstoffes bestimmen. Die Beschreibung des Tragverhaltens von Stahlfaserbeton nach der Rissbildung, also im

Zustand II ist mit dieser Theorie nicht möglich. Da jedoch speziell das Verhalten im gerissenen Zustand von großem Interesse und im ungerissenen Zustand der Einfluss der Fasern meist gering ist, haben Verbundwerkstoffansätze für strukturmechanische Untersuchungen eine untergeordnete Bedeutung. Als Erweiterung der Verbundwerkstofftheorie zur Beschreibung des Tragverhaltens nach der Erstrissbildung sind Mehrfachrissansätze zu sehen, auf die hier jedoch nicht eingegangen wird.

Experimentell kann der E-Modul wie bei reinem Beton nach DIN 1048-Teil 5 ermittelt werden. Auch bei den Berechnungen in dieser Arbeit wird der im Versuch ermittelte E-Modul verwendet. Eine Unterscheidung des E-Moduls im Zug- und Druckbereich erfolgt nicht.

Druckbereich:

Auf das einaxiale Druckverhalten wurde bereits ausführlich in Abschnitt 6.6 im Rahmen der einaxialen Ver- und Entfestigungsbeziehung eingegangen. Bei vielen Untersuchungen und Berechnungen von Stahlfaserbetonbauteilen wird grundsätzlich die Faserwirkung im Druckbereich vernachlässigt und das Verhalten von reinem Beton zugrunde gelegt. So wird beispielsweise im DBV-Merkblatt „*Stahlfaserbeton*“ [DBV01] auf das in der DIN 1045-1 [DIN01] angegebene Druckverhalten verwiesen.

Soll hingegen wie in dieser Arbeit die Faserwirkung mit berücksichtigt werden, kann das Verhalten durch einaxiale Druckversuche nach DIN 1048-Teil 5 bestimmt werden. Um die erhöhte Duktilität nach dem Überschreiten der Höchstlast beobachten zu können, muss der Versuch allerdings weggesteuert auch den Entfestigungsbereich erfassen, was bei der standardmäßigen Druckfestigkeitsbestimmung nicht der Fall ist.

Kapitel 8

Numerische Untersuchungen

8.1 Zug- und Druckstab mit Imperfektion

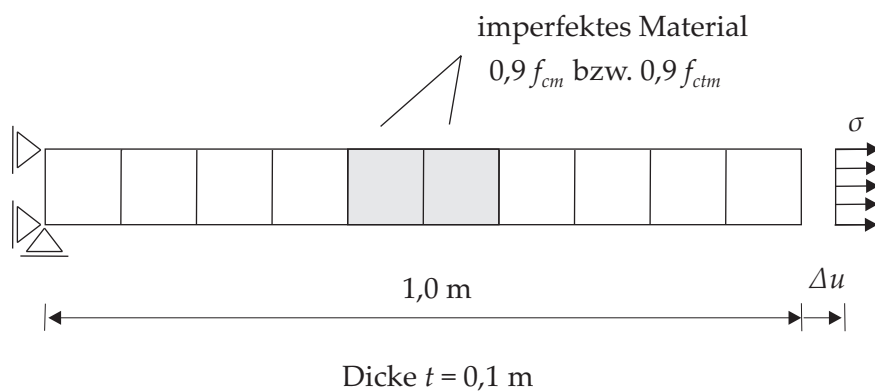


Abbildung 8.1: Stab unter einaxialer Belastung

Materialparameter							
E	=	30000	$[MN/m^2]$	ν	=	0,2	$[-]$
f_{cm}	=	30,0	$[MN/m^2]$	G_c	=	0,05	$[MNm/m^2]$
f_{ctm}	=	3,0	$[MN/m^2]$	G_{f1}	=	$4,0 \cdot 10^{-4}$	$[MNm/m^2]$
f_{ctm1}	=	1,5	$[MN/m^2]$	G_{f2}	=	$4,0 \cdot 10^{-3}$	$[MNm/m^2]$

Tabelle 8.1: Materialparameter Zug- und Druckstab

Anhand eines einaxial beanspruchten Stabes wird gezeigt, dass das entwickelte Materialgesetz in der Lage ist, eine objektive Strukturantwort hinsichtlich der Netzdiskretisierung wiederzugeben. Hierfür wird der Stab sowohl auf Zug als auch auf Druck beansprucht. Das System wie in Abbildung 8.1 dargestellt, wird mit vierknotigen, vollintegrierten Verschiebungselementen im ebenen Spannungszustand modelliert. Die Längsrichtung des Stabes wird dabei unterschiedlich fein, mit $n = 10, 20$ und 40 Elementen diskretisiert. Um das reale Strukturverhalten, bei dem der Stab an der schwächsten Querschnittsstelle versagt, abzubilden und eine Lokalisierung auszulösen, werden zwei Elemente durch eine um 10% abgeminderte Zug-

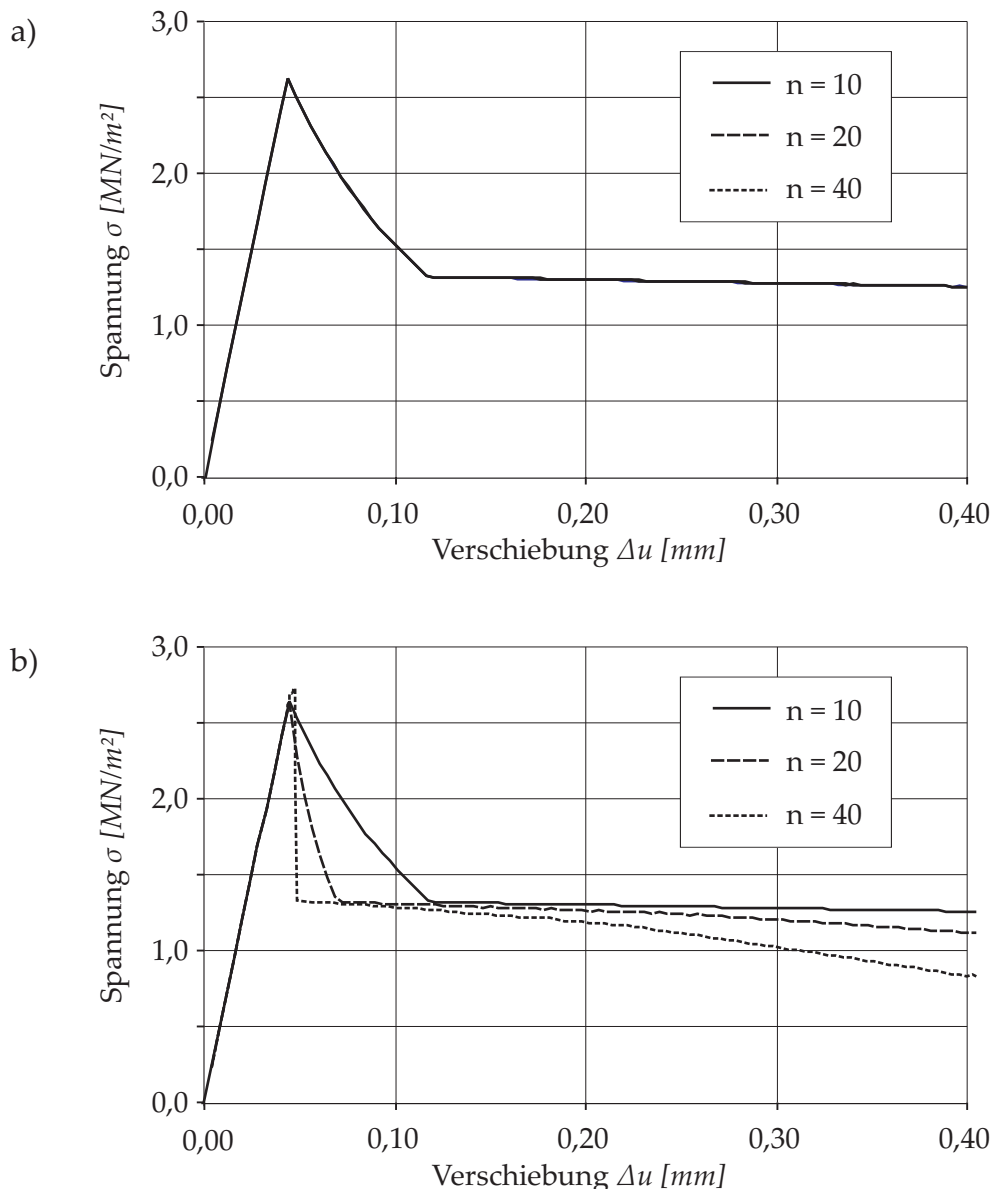


Abbildung 8.2: Spannungs-Verformungsverhalten unter einaxialer Zugbeanspruchung mit (a)) und ohne (b)) Bruchenergiekonzept

und Druckfestigkeit geschwächt. Die angenommenen Materialparameter sind in Tabelle 8.1 zusammengestellt.

Aus den Berechnungsergebnissen (Abbildung 8.2 a) und 8.3 a)) in Form von Spannungs-Verformungskurven ist ersichtlich, dass das verwendete Bruchenergiekonzept in Kombination mit dem internen Längenparameter L_{eq} sowohl im Zug- als auch im Druckbereich zu netzunabhängigen Lösungen führt. Wird im Gegensatz hierzu ein Konzept verwendet, bei dem die Bruchenergie bzw. der interne Längenparameter nicht in einer entsprechenden Formulierung berücksichtigt wird, wie das zum Beispiel bei einer zugrundegelegten Spannungs-Dehnungsbeziehung der Fall ist, kommt es zu netzabhängigen Strukturantworten, wie in Abbildung 8.2 b) und 8.3 b) zu sehen. Mit zunehmender Netzfeinheit nimmt die Duktilität ab und die Neigung des Entfestigungsastes wird steiler. Die Entfestigung konzentriert sich auf die zwei geschwächten Elemente. Somit ist auch zu erklären, dass bei gleichem Spannungs- und Dehnungsniveau die zugehörige Gesamtverformung mit kleinerer Elementgröße gerin-

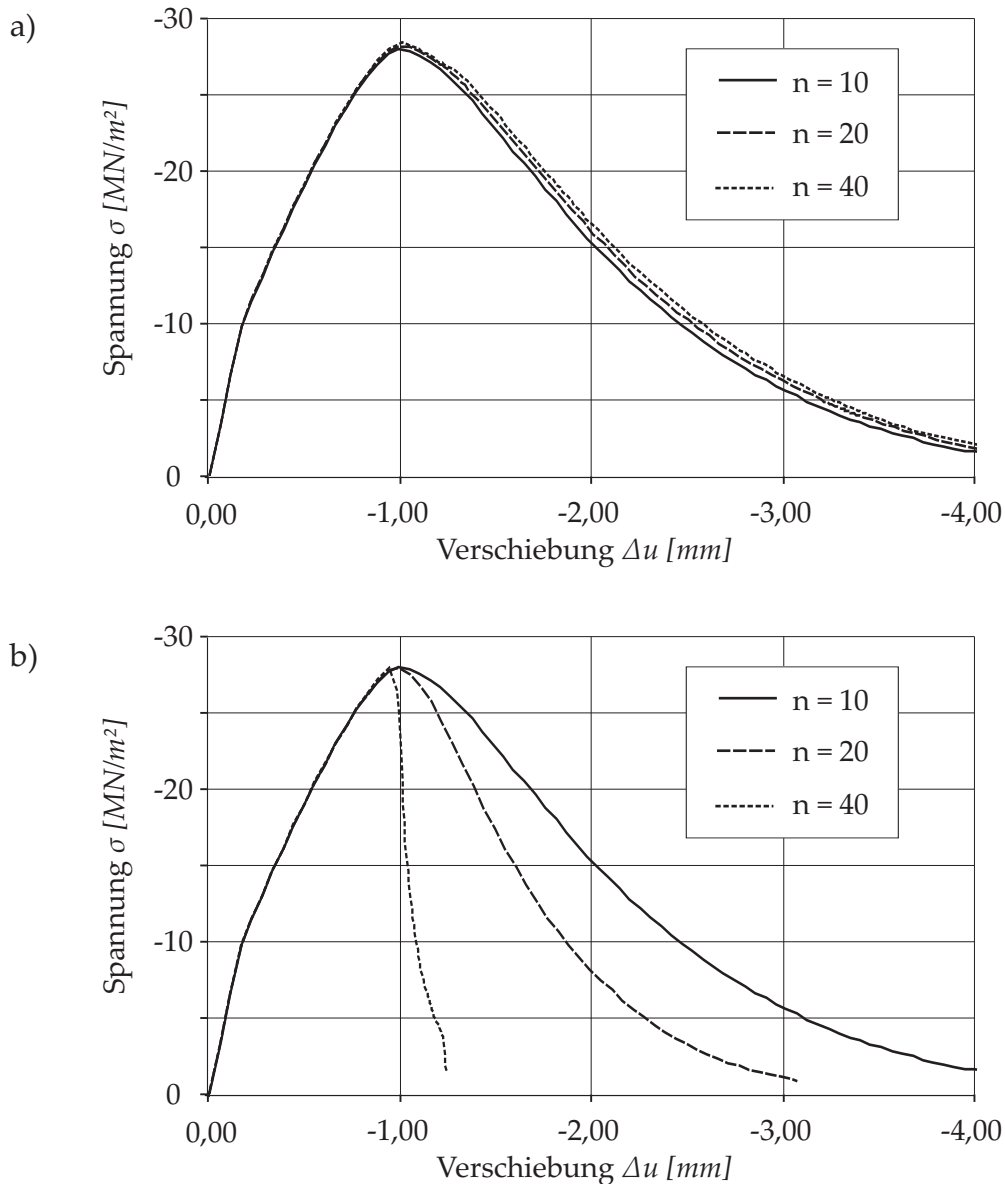


Abbildung 8.3: Spannungs-Verformungsverhalten unter einaxialer Druckbeanspruchung mit (a) und ohne (b) Bruchenergiekonzept

ger wird.

8.2 Biaxiales Materialverhalten

Anhand der Berechnung von Biaxialversuchen wird das Verhalten des Materialgesetzes unter biaxialen Druck-Druck-, Druck-Zug- und Zug-Zug-Bearbeitungen aufgezeigt. Es erfolgt ein Vergleich mit Versuchsergebnissen von Traina & Mansour [TM91] und Yin et al. [YSMH89], die beide jedoch nur den Druck-Druck Bereich untersuchen. Für die anderen Bereiche liegen keinerlei Versuchsergebnisse und somit keine Vergleichsmöglichkeiten vor. Obwohl das Materialverhalten unter biaxialen Beanspruchungszuständen zur Beschreibung von Stahlfaserbeton von großer Bedeutung ist, existieren nur sehr wenige Arbeiten auf diesem Gebiet. Der Grund hierfür liegt darin, dass die Bemessungsmethoden für Stahlfaserbeton generell auf dem ein-

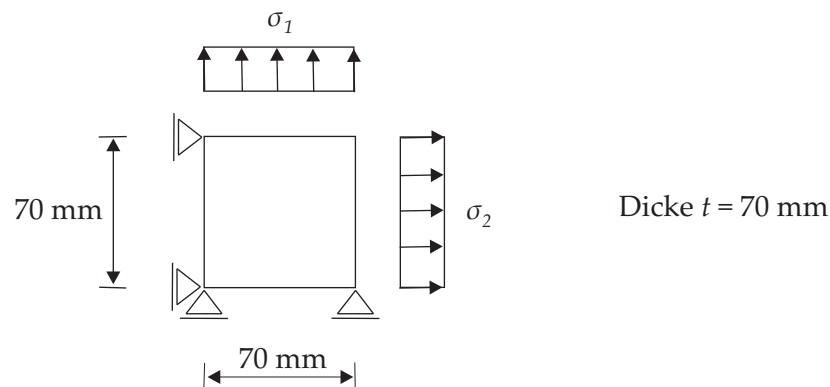


Abbildung 8.4: System zur Berechnung der Biaxialversuche

axialen Materialverhalten basieren. Trotz fehlender Versuchsergebnisse erscheint es sinnvoll, das Verhalten des hier vorgestellten Materialgesetzes unter Druck-Zug und Zug-Zug Beanspruchungen zu untersuchen und darzustellen.

Ein weiterer wichtiger Punkt, der im Zusammenhang mit dem Vergleich der Berechnungs- und Versuchsergebnisse angesprochen werden muss, ist die starke Abhängigkeit des Verhaltens von erhärtetem Stahlfaserbeton von Fasertyp, der Faserorientierung, dem Fasergehalt und den Eigenschaften der Betonmatrix. Dies führt dazu, dass eine Übertragbarkeit der Versuchsergebnisse auf andere Faserbetone nur bedingt möglich ist. Theoretisch wäre es also erforderlich für den jeweils zu untersuchenden Faserbeton eigene Biaxialversuche durchzuführen, was in der Praxis allerdings unmöglich ist. Auch die vorliegenden Versuchsergebnisse sind mit anderen als mit den in dieser Arbeit betrachteten Faserbetonen durchgeführt worden. Ziel ist daher nicht eine exakte Übereinstimmung zwischen Versuch- und Berechnungsergebnissen, sondern ein qualitativ ähnliches Verhalten.

Traina & Mansour [TM91] führten die Versuche mit einer dreiaxialen Prüfmaschine an Würfeln mit einer Kantenlänge von 7 cm durch. Um die Reibung zwischen Lasteinleitungsplatten und Probekörper zu minimieren wurden zweilagige Polyethylen Folien verwendet. Es wurden zwei unterschiedliche Fasertypen und Fasergehalte von 0,5, 1,0 und 1,5 Vol.% getestet. Die hier dargestellten Ergebnisse wurden mit Fasertyp I, einer 30 mm langen Drahtfaser mit Endaufbiegung ($l/d = 60$) und einem Fasergehalt von 0,5 Vol.% erzielt. Dieser Fasergehalt entspricht in etwa den in dieser Arbeit untersuchten Fasergehalten. Die einaxiale Druckfestigkeit liegt für diesen Faserbeton bei 43 MN/m^2 .

Die Versuche von Yin et al. [YSMH89] wurden an Scheiben mit den Abmessungen $15,2 \text{ cm} \times 15,2 \text{ cm} \times 3,8 \text{ cm}$, zwei verschieden langen Fasern und Fasergehalten von 1,0 und 2,0 Vol.%

Materialparameter						
E	=	42800	$[\text{MN}/\text{m}^2]$	ν	= 0,2	$[-]$
f_{cm}	=	43,0	$[\text{MN}/\text{m}^2]$	G_c	= 0,02	$[\text{MNm}/\text{m}^2]$
f_{ctm}	=	3,0	$[\text{MN}/\text{m}^2]$	G_{f1}	= $2,0 \cdot 10^{-4}$	$[\text{MNm}/\text{m}^2]$
f_{ctm1}	=	1,5	$[\text{MN}/\text{m}^2]$	G_{f2}	= $2,0 \cdot 10^{-3}$	$[\text{MNm}/\text{m}^2]$

Tabelle 8.2: Materialparameter für die Berechnung der Biaxialversuche

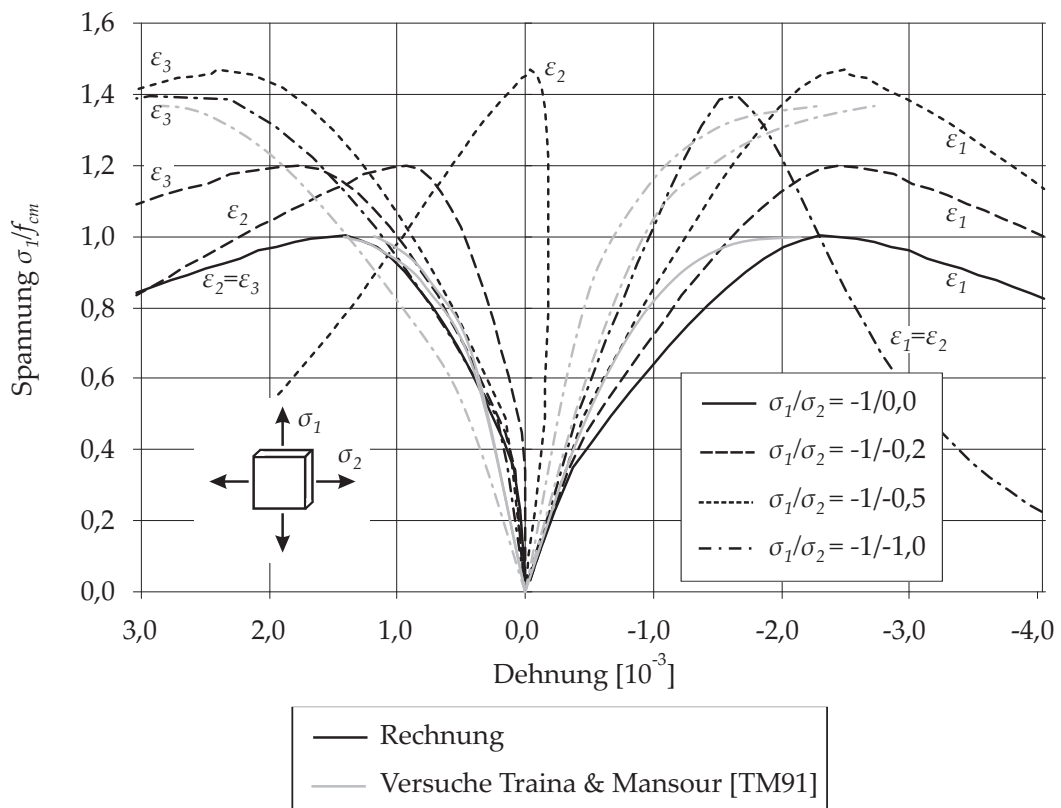
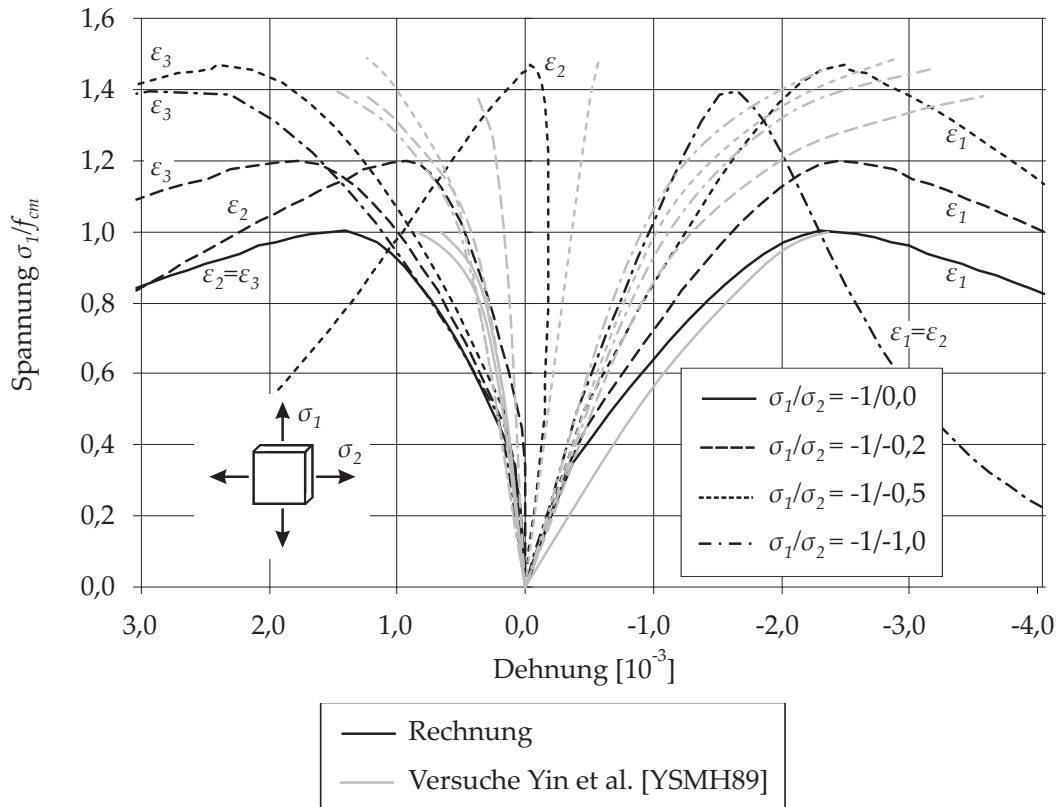


Abbildung 8.5: Spannungs-Dehnungsbeziehungen unter biaxialer Druck-Druck Belastung, Versuche und Berechnung

durchgeführt. Hier werden die Ergebnisse mit 25 mm langen Faser ohne Endaufbiegung und einem Fasergehalt von 1,0 Vol.% betrachtet. Die einaxiale Druckfestigkeit liegt bei 42,6 MN/m². Zur Vermeidung von Reibungseffekten erfolgte die Lasteinleitung mittels Stahlbürsten.

Für das Berechnungsmodell, das in Abbildung 8.4 dargestellt ist, werden die Abmessungen von Traina & Mansour [TM91] übernommen. Da während des Versuchs die Richtung der Hauptspannungen und das Verhältnis ihrer Beträge zueinander konstant bleiben, liegt in der Probe ein homogener Spannungszustand vor. Es ist daher ausreichend, den Probekörper mit nur einem finiten Element zu diskretisieren. Hierfür wird ein vierknotiges, vollintegriertes Verschiebungselement verwendet. Um konstantes Hauptspannungsverhältnis während der Berechnung zu gewährleisten, wird diese mit Hilfe einer Bogenlängensteuerung durchgeführt. Die verwendeten Materialparameter sind in Tabelle 8.2 angegeben.

Die Ergebnisse für den **Druck-Druck Bereich** in Form von Spannungs-Dehnungsbeziehungen sind in Abbildung 8.5 dargestellt. Es zeigt sich im Allgemeinen eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Berechnungs- und Versuchsergebnissen. Die berechneten Spannungs-Dehnungsbeziehungen liegen zwischen denen von Yin et al. [YSMH89] und Traina & Mansour [TM91]. Dabei zeigt sich bei den erst genannten Ergebnissen ein tendenziell steiferes Verhalten als bei Traina & Mansour. Für ein Hauptspannungsverhältnis von $\sigma_1/\sigma_2 = -1,0 / -1,0$ liegt bei Traina & Mansour die biaxiale Festigkeit um 40% über der einaxialen Festigkeit. Die Berechnung liefert dasselbe Ergebnis, da für die Parameterbestimmung des *Drucker-Prager*-Kriteriums ein Verhältnis von einaxialer zu biaxialer Festigkeit $a = f_{cm}^{bi} / f_{cm} = 1,4$ zugrunde gelegt wurde. Bei Yin et al. liegt die biaxiale Festigkeit 46% über der Einaxialen. Es sei darauf hingewiesen, dass es sich bei diesem Wert und allgemein bei den hier von Yin et al. dargestellten Kurven um die Ergebnisse einzelner Proben und nicht um Mittelwerte handelt, die bei der Erstellung der Bruchumhüllenden (siehe Abbildung 3.6 und 6.7) zugrunde gelegt wurden. Hierdurch erklärt sich auch der Unterschied zwischen 60% bei der Bruchumhüllenden und 46% bei den hier betrachteten Spannungs-Dehnungsbeziehungen. Für $\sigma_1/\sigma_2 = -1,0 / -0,5$ stimmt die berechnete Festigkeit mit $\sigma_1/f_{cm} = 1,47$ sehr gut mit dem Ergebnis von Yin et al. ($\sigma_1/f_{cm} = 1,49$) überein, während bei $\sigma_1/\sigma_2 = -1,0 / -0,2$ eine Abweichung von 15% auftritt. Aus Abbildung 6.7 wird dieses Verhalten ersichtlich. Während das verwendete *Drucker-Prager*-Kriterium mit der Bruchumhüllende von Yin et al. bei $\sigma_1/\sigma_2 = -1,0 / -0,5$ noch übereinstimmt, kommt es bei $\sigma_1/\sigma_2 = -1,0 / -0,2$ zu Abweichungen.

Im Zusammenhang mit der für das vorgestellte Materialgesetz verwendeten assoziierten Fließregel wird im Folgenden das **Volumendehnungsverhalten** für biaxiale Druckzustände untersucht. Eine assoziierte Fließregel hat den Vorteil, dass sie zu symmetrischen Steifigkeitsmatrizen und zu eindeutigen Lösungen bei verfestigendem Materialverhalten führt. Nachteilig ist allerdings, dass abhängig vom Spannungszustand die plastischen Dehnungsanteile unter- und überschätzt werden können. In Abbildung 8.6 a) zeigt sich eine gute Übereinstimmung der Berechnungsergebnisse mit der Versuchskurve von Traina & Mansour [TM91]. Lediglich bei höherem Spannungsniveau scheint das Rechenmodell die Volumendehnung zu unterschätzen. Vergleicht man das von Traina & Mansour auch an Proben mit reinem Beton beobachtete Verhalten mit den Versuchsergebnissen von Kupfer [Kup72] (Abbildung 8.6 b)), so zeigen sich deutliche Unterschiede. Während bei Kupfer mit zunehmender Belastung die Volumenabnahme größer als der elastische Anteil (gestrichelte Linie) und das Volumenminimum erst kurz vor dem Erreichen der Maximalspannung auftritt, zeigt sich bei Traina & Mansour eine geringere Volumenzunahme als die rein elastische. Das Volumenminimum tritt bei einem wesentlich geringeren Lastniveau auf. Diese Unterschiede können auf unterschiedlichen Ursachen beruhen. Denkbar wären die unterschiedlichen Probengeometrien, unterschiedliche Prüfbedingungen und Unterschiede in den verwendeten Betonen. Auf die Wirkung von Stahlfasern kann es nicht zurückgeführt werden, da sich reiner Beton und Faserbeton bei Traina & Mansour

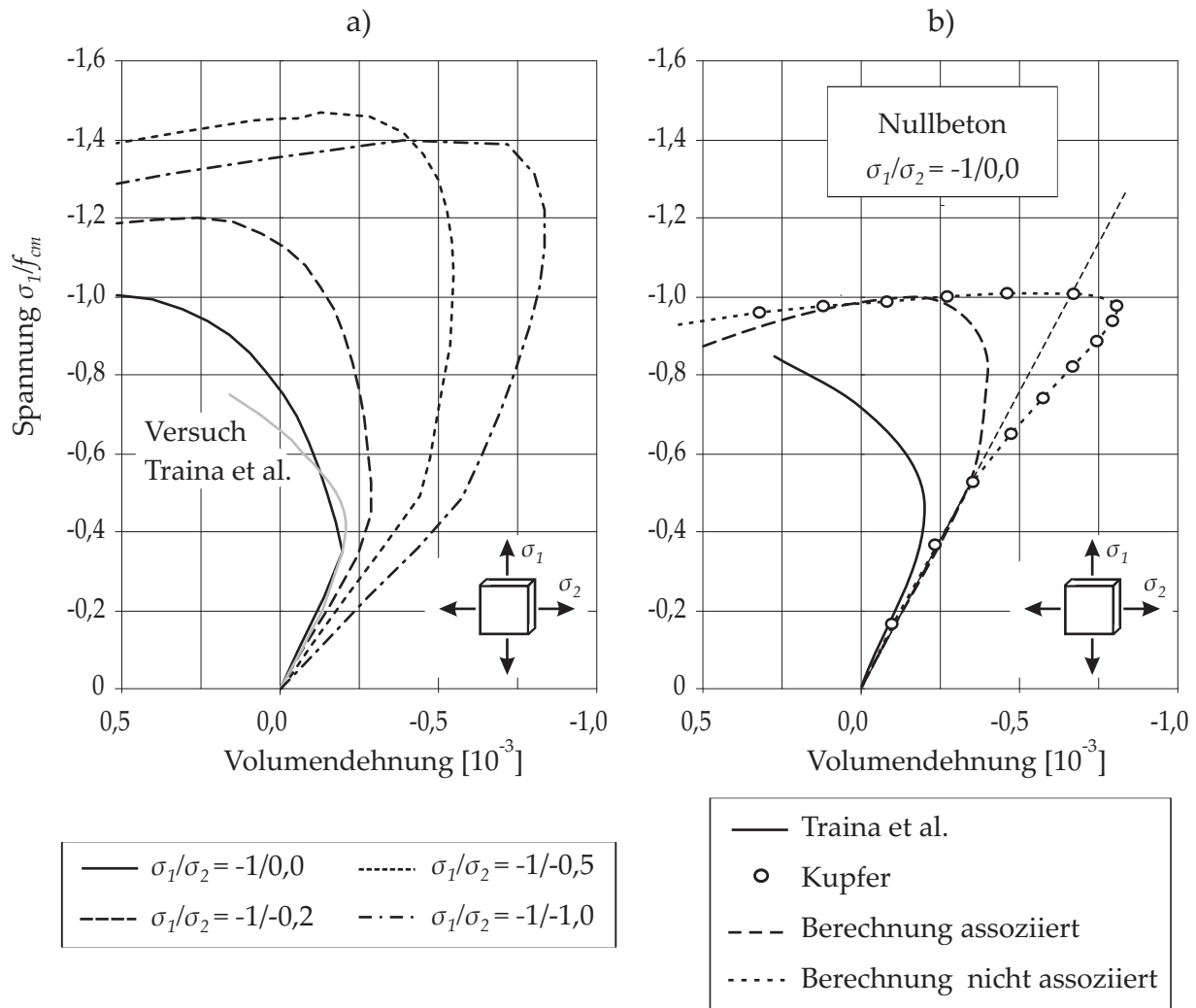


Abbildung 8.6: Spannungs-Volumendehnungsbeziehungen unter biaxialer Druck-Druck Belastung, Berechnung und Versuch für Stahlfaserbeton (a)) und Nullbeton (b))

qualitativ gleich verhalten. Während hier das von Traina & Mansour beschriebene Materialverhalten gut mit einer assoziierten Fließregel beschrieben werden kann, zeigte Winkler [Win01], dass für das von Kupfer beschriebene Verhalten speziell die Volumenabnahme bis zum Erreichen des minimalen Volumens besser mit Hilfe einer nicht assoziierten Fließregel wiedergegeben werden kann. Dennoch verwendet Winkler für weitere numerische Untersuchungen ebenfalls eine assoziierte Fließregel. Auch nach Pravida [Pra99] ist eine assoziierte Fließregel zur Beschreibung des Verhaltens von reinem Beton unter biaxialen Belastungszuständen ausreichend.

Die Biaxialversuche von Kupfer [Kup72] an reinem Beton zeigen für den **Druck-Zug Bereich** eine kontinuierliche Abnahme der maximal aufnehmbaren Druckspannung mit zunehmender Zugspannung. Ausgehend von der einaxialen Druckfestigkeit wird eine Abnahme der maximalen Druckspannung auf $0,85 f_{cm}$ für $\sigma_1/\sigma_2 = -1,0/0,052$, auf $0,61 f_{cm}$ für $\sigma_1/\sigma_2 = -1,0/0,103$ und auf $0,37 f_{cm}$ für $\sigma_1/\sigma_2 = -1,0/0,204$ beobachtet. Bei Verwendung eines *Rankine*-Kriteriums für das Zugversagen kann dieser Sachverhalt nicht richtig erfasst werden, da bei dieser Hypothese die maximal aufnehmbare Zugspannung eine konstante, nicht von der Druckspannung abhängige Größe ist. Das hier entwickelte, ausgerundete *Rankine*-Kriterium kann hingegen durch die Ausrundungsparameter, speziell dem Öffnungswinkel α_R , an das

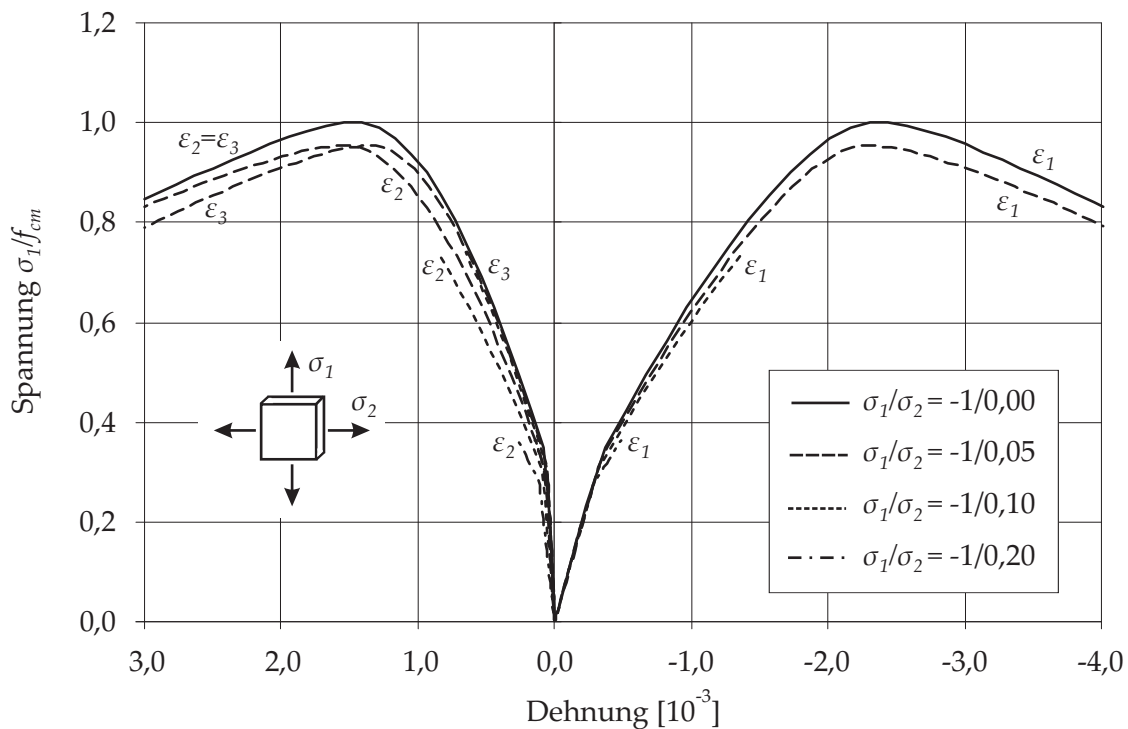


Abbildung 8.7: Spannungs-Dehnungsbeziehungen unter biaxialer Zug-Druck Belastung (eigene Berechnung)

Versuchsverhalten angepasst werden (siehe Abschnitt 6.3.3.2). So zeigt sich bei den Ergebnissen der numerischen Berechnungen in Abbildung 8.7 ein ähnliches Verhalten, das die in den Versuchen von Kupfer gegebenen Druckspannungen jedoch leicht überschreitet. Alternativ zur Anpassung des *Rankine*-Kriteriums könnte dieses Verhalten auch durch eine Kopplung der Ver- und Entfestigungsparameter für Zug- und Druckbereich beschrieben werden [Win01]. Nachteil dieses Vorgehens ist allerdings, dass die Kopplung zu einer unsymmetrischen elastoplastischen Steifigkeitsmatrix führt.

Die Spannungs-Dehnungsbeziehungen für den **Zug-Zug Bereich** werden in Abbildung 8.8 angegeben. Durch das verwendete *Rankine*-Kriterium entsprechen die maximal aufnehmbaren Zugspannungen für alle untersuchten Hauptspannungskombinationen annähernd der einaxialen Zugfestigkeit wie es auch bei den Biaxialversuchen mit reinem Beton von Kupfer [Kup72] beobachtet wurde. Die Ausrundung des Kriteriums führt bei $\sigma_1/\sigma_2 = 1,0/1,0$ zu einer auf der sicheren Seite liegenden, leichten Abminderung der Zugfestigkeit um 7% gegenüber der einaxialen Festigkeit. Bei Erreichen der Zugfestigkeit kommt es nach dem *Rankine*-Kriterium zur Bildung eines Risses senkrecht zur größten Hauptspannungsrichtung und anschließender Entfestigung in dieser Richtung. In den anderen Richtungen, die nicht von der Rissbildung betroffen sind, tritt Entlastung auf. Die Ausrundung des Kriteriums führt dazu, dass auch geringe Rissöffnungen in Form von plastischen Dehnungen senkrecht zur größten Hauptspannungsrichtung auftreten (Abbildung 8.9). Hierdurch erklärt sich u.a. der Verlauf von ε_2 und ε_3 bei $\sigma_1/\sigma_2 = 1,0/1,0$.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass das vorliegende Materialgesetz das in den Versuchen beobachtete Materialverhalten im Druck-Druck Bereich gut abbilden kann. Eine noch besser Anpassung wäre zum Beispiel durch Modifikationen an der Fließfläche und den einaxialen Vergleichsbeziehungen möglich, erscheint aber aufgrund der guten Ergebnisse und fehlender Versuchsergebnisse mit den hier verwendeten Faserbetonen als nicht sinnvoll und nicht notwendig. Aufgrund gänzlich fehlender Versuchsergebnisse kann auch das biaxiale Verhalten im

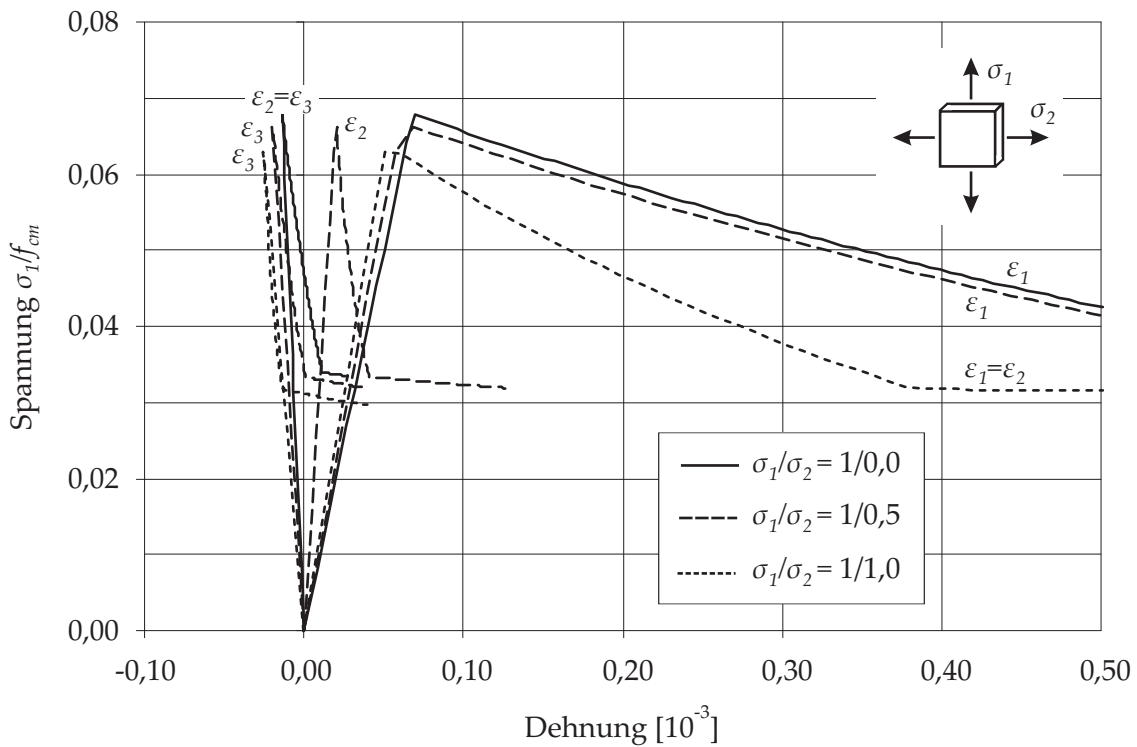


Abbildung 8.8: Spannungs-Dehnungsbeziehungen unter biaxialer Zug-Zug Belastung (eigene Berechnung)

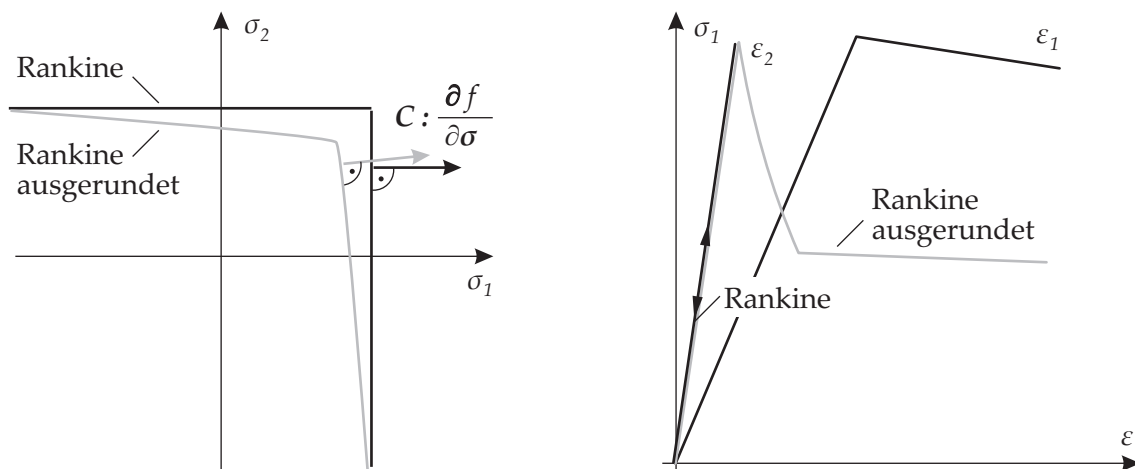


Abbildung 8.9: Unterschiedliche Fließrichtungen bei dem ausgerundeten und dem nicht ausgerundeten Rankine-Kriterium

Zug-Druck und Zug-Zug Bereich nicht angepasst werden und muss analog dem Verhalten von reinem Beton übernommen werden. Später folgende Berechnungsergebnisse bestätigen jedoch die Gültigkeit dieser Annahme.

8.3 Biegezugversuche

Bei dem bereits in den Abschnitten 4.2 und 7.1.2 vorgestellten 4-Punkt Biegezugversuch handelt es sich um den in den DBV-Merkblättern für Stahlfaserbeton [DBV96] und [DBV01] geforderten Standardversuch. Dieser Versuch dient in dieser Arbeit als Grundlage zur Identifi-

kation der Zugparameter mittels der in Abschnitt 7.1.2.2 beschriebenen *Inversen Analyse*. Im Folgenden werden daher die Ergebnisse von Biegezugversuchen der Eignungsprüfung für die Tunneltübbingung der Baumaßnahme Hachinger Stollen in München zur Materialparameterbestimmung und zur Verifikation des Materialgesetzes verwendet.

Die Versuche wurden vom Materialprüfungsamt für das Bauwesen der Technischen Universität München durchgeführt [MPA98a]. Die Durchführung der Biegezugprüfung richtete sich nach Anhang A1 des DBV Merkblatt „*Bemessungsgrundlagen für Stahlfaserbeton im Tunnelbau*“ [DBV96]. Die Probekörper sind Betonprismen mit den Abmessungen $150\text{ mm} \times 150\text{ mm} \times 700\text{ mm}$. Es wurden drei Versuchsserien mit Stahlfasergehalten von 30 kg/m^3 , 35 kg/m^3 und 40 kg/m^3 untersucht. Pro Versuchsserie wurden jeweils vier Probekörper verwendet. Bei den Stahlfasern handelt es sich um *Dramix Fasern RC 65/60 BN* des Herstellers *Bekaert*. Diese Drahtfasern mit aufgebogenen Enden haben eine Länge von 60 mm und einen Durchmesser von $0,9\text{ mm}$. Die Zugfestigkeit der Fasern liegt bei über 1000 MN/m^2 . Weitere Angaben zu Herstellung und Lagerung der Prüfkörper, der Vorbereitung und Durchführung der Prüfung

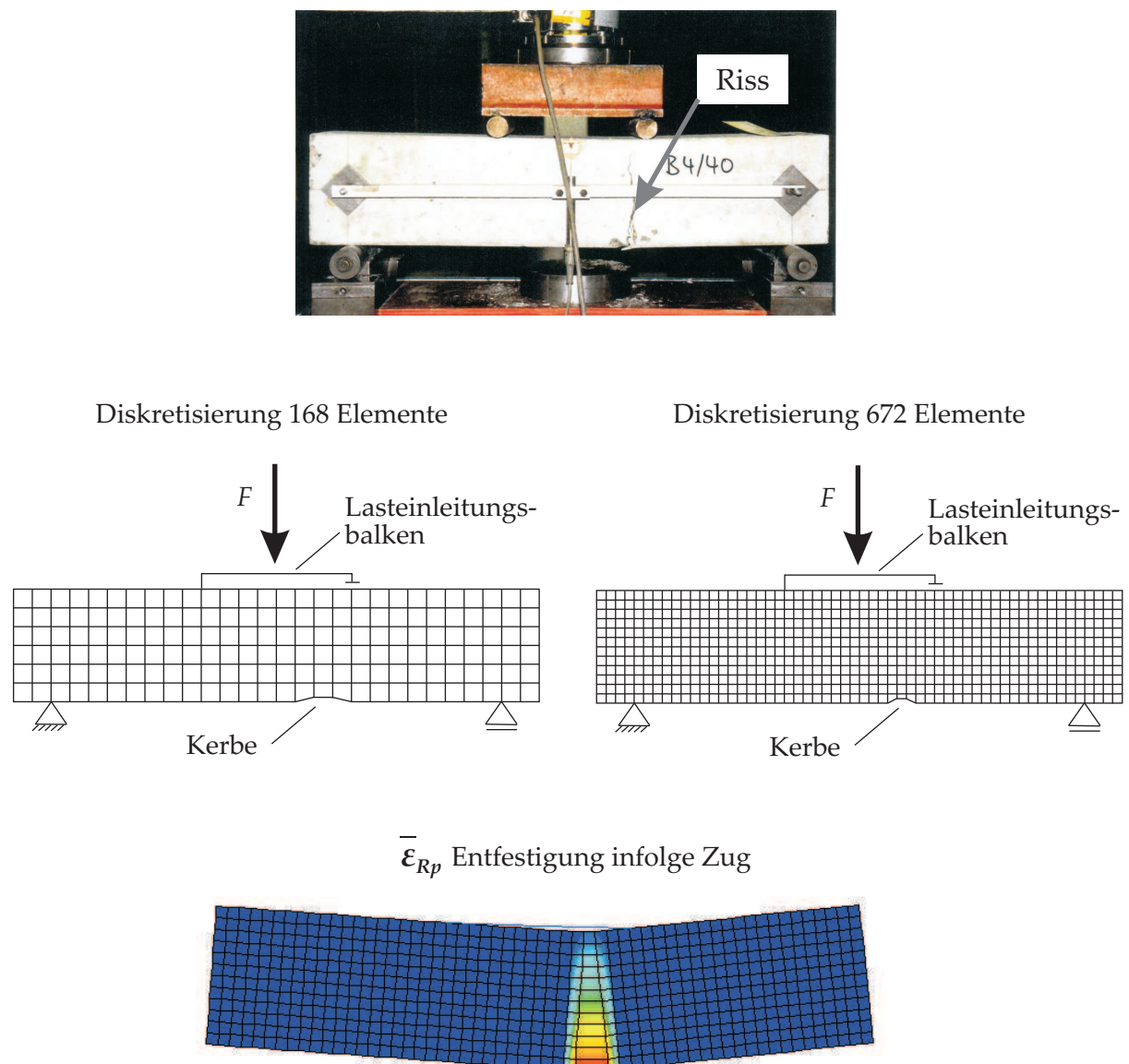


Abbildung 8.10: Versuchsaufbau, FE-Modelle und Verteilung des inneren Parameters $\bar{\epsilon}_{Rp}$

Materialparameter 35 kg/m ³					
E	=	36350	[MN/m ²]	ν	= 0,195 [-]
f_{cm}	=	55,6	[MN/m ²]	G_c	= 0,17 [MNm/m ²]
f_{ctm}	=	2,95	[MN/m ²]	G_{f1}	= 4,25 · 10 ⁻⁴ [MNm/m ²]
f_{ctm1}	=	1,27	[MN/m ²]	G_{f2}	= 6,9 · 10 ⁻³ [MNm/m ²]

Tabelle 8.3: Materialparameter Stahlfaserbeton Hachinger Stollen 35 kg/m³

und zur Prüfvorrichtung sind dem Versuchsbericht zu entnehmen [MPA98a]. Die weiteren Ausführungen und Ergebnisse in diesem Abschnitt beziehen sich dabei ausschließlich auf die Versuchsserie mit einem Fasergehalt von 35 kg/m³. Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 8.10 dargestellt.

In einer ersten Betrachtung wird der Versuch für die Berechnung als ebenes Scheibenmodell idealisiert. Hierbei ist darauf zu achten, dass die Randbedingungen des Versuchs wirklichkeitstreu modelliert werden. Durch das konstante Moment zwischen den Lasteinleitungspunkten ist nur ein Einzelriss an der schwächsten Querschnittsstelle in diesem Bereich zu beobachten. Im FE-Modell liegen hier aber konstante Bedingungen im Bezug auf den Querschnitt und Materialfestigkeit vor. Dieser Zustand entspricht nicht der Wirklichkeit, in der Festigkeitsschwankungen durch Hydratationsrisse oder Poren zufällig verteilt sind. Es ist also keine eindeutige Stelle für die Rissbildung wie im Versuch vorgegeben. Diese Tatsache führt zu numerischen Problemen, die hier durch eine künstliche Querschnittschwächung mit Hilfe einer Kerbe behoben werden. Der Einfluss der genauen Lage der Kerbe auf die Berechnungsergebnisse ist relativ gering, wie später in diesem Kapitel gezeigt wird. Es sei darauf hingewiesen, dass eine Berechnung am halben System unter Ausnutzung der anfänglichen Symmetrie den Versuch nicht richtig wiedergeben kann, da der Einzelriss, außer er tritt als Sonderfall exakt in Feldmitte auf, zu einem unsymmetrischen System führt. Die natürlichen und zufälligen Festigkeitsschwankungen durch beispielsweise Schwindrisse oder Poren führen dazu, dass es sich zwar um ein symmetrisches System bezüglich der Geometrie, nicht aber bezüglich der Festigkeiten handelt. Die Berechnung am halben System würde also ein symmetrisches System mit zwei Rissen, wie es nicht der Realität entspricht, ergeben. Außerdem führt der unsymmetrische Verformungszustand zu unterschiedlichen Vertikalverschiebungen der Lasteinleitungspunkten und auch zu einer unterschiedlichen Aufteilung der Prüflast F . Durch die Verwendung eines starren Lasteinleitungsbalken kann im FE-Modell diese Schrägstellung unter Verformungssteuerung gewährleistet werden (Abbildung 8.10).

Begleitend zu den Biegezugversuchen wurden Druckversuche zur Bestimmung des E-Moduls E und der Druckfestigkeit f_{cm} durchgeführt. Da die Druckversuche bei Erreichen der Maximallast abgebrochen wurden, können hieraus keine Informationen über das Nachbruchverhalten gewonnen werden. Die Druckbruchenergie G_c wird daher aus den in Abschnitt 6.6 vorgestellten, empirischen Formeln für das einaxiale Druckverhalten von Barros & Figueiras [BF99] bestimmt. Die Materialparameter zur Beschreibung des Zugverhaltens, f_{ctm} , f_{ctm1} , G_{f1} und G_{f2} werden mittels der *Inversen Analyse* bestimmt. In Tabelle 8.3 sind die Materialparameter, die sich für den beim Bauvorhaben Hachinger-Stollen verwendeten Stahlfaserbeton mit einem Fasergehalt von 35 kg/m³ ergeben, zusammengestellt. Auf Grundlage dieser Materialparameter können anschließend die eigentlichen Strukturberechnungen durchgeführt werden.

Im Kraft-Verformungsdiagramm (Abbildung 8.11) sind die Versuchsergebnisse in Form einer

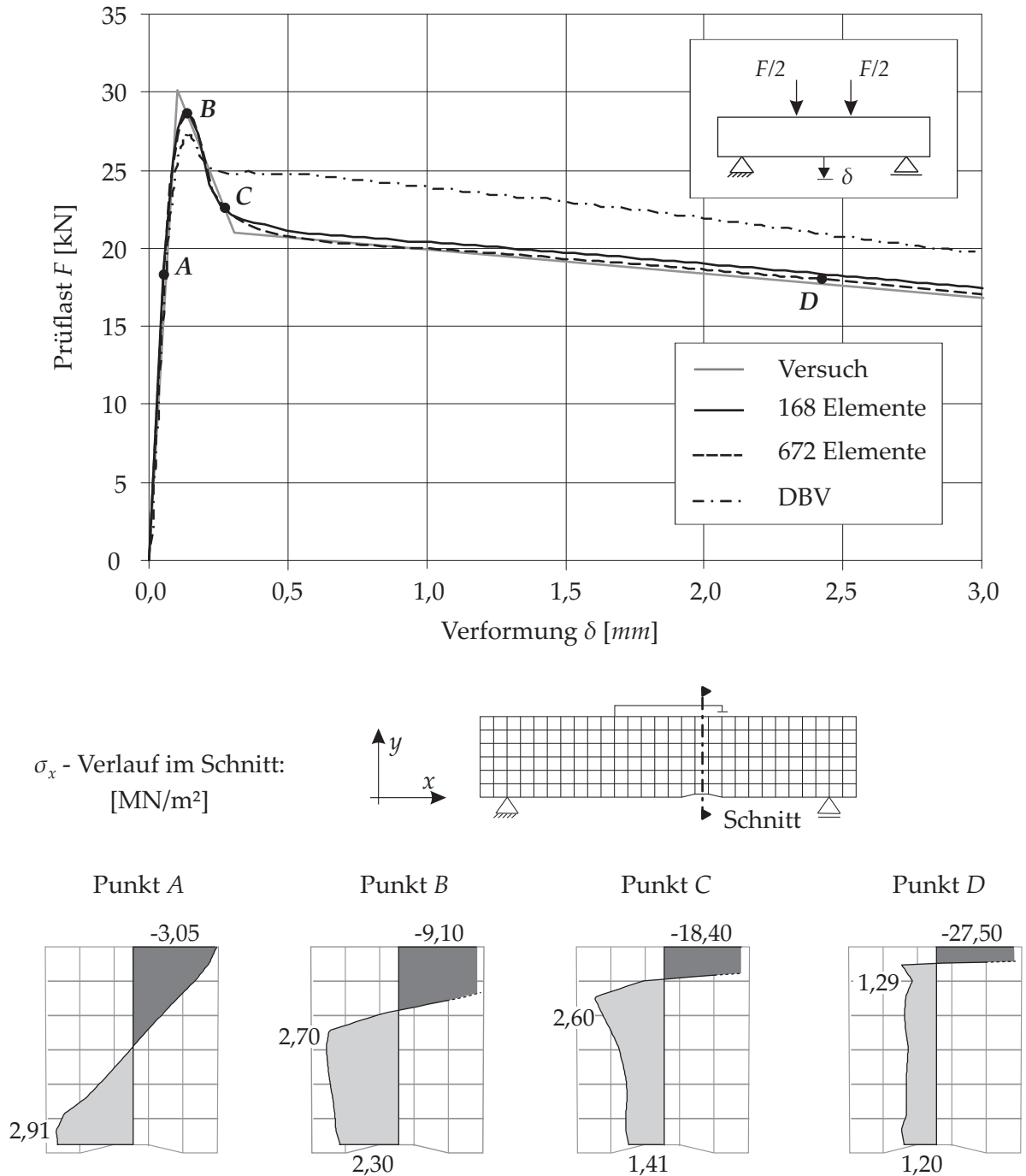


Abbildung 8.11: Versuchs- und Berechnungsergebnisse für einen Stahlfasergehalt von 35 kg/m^3

gemittelten und linearisierten Kurve dargestellt. Für die Modellierung des Systems werden vierknotige, vollintegrierte Verschiebungselemente im ebenen Spannungszustand verwendet. Die Diskretisierung erfolgt mit 168 und 672 Elementen (Abbildung 8.10). Durch die Bestimmung der Materialparameter im Rahmen der *Inversen Analyse* stimmen die berechneten Kurven mit der Versuchskurve überein. Die Tatsache, dass die beiden berechneten Kurven trotz stark unterschiedlicher Netzfeinheit nicht von einander abweichen zeigt, dass das vorgestellte Materialgesetz gut in der Lage ist das Lokalisierungsphänomen objektiv zu beschreiben.

Unten in Abbildung 8.11 sind die Verläufe der Biegespannung σ_x im Rissquerschnitt bei unterschiedlichen Belastungsstadien dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass bereits weit vor

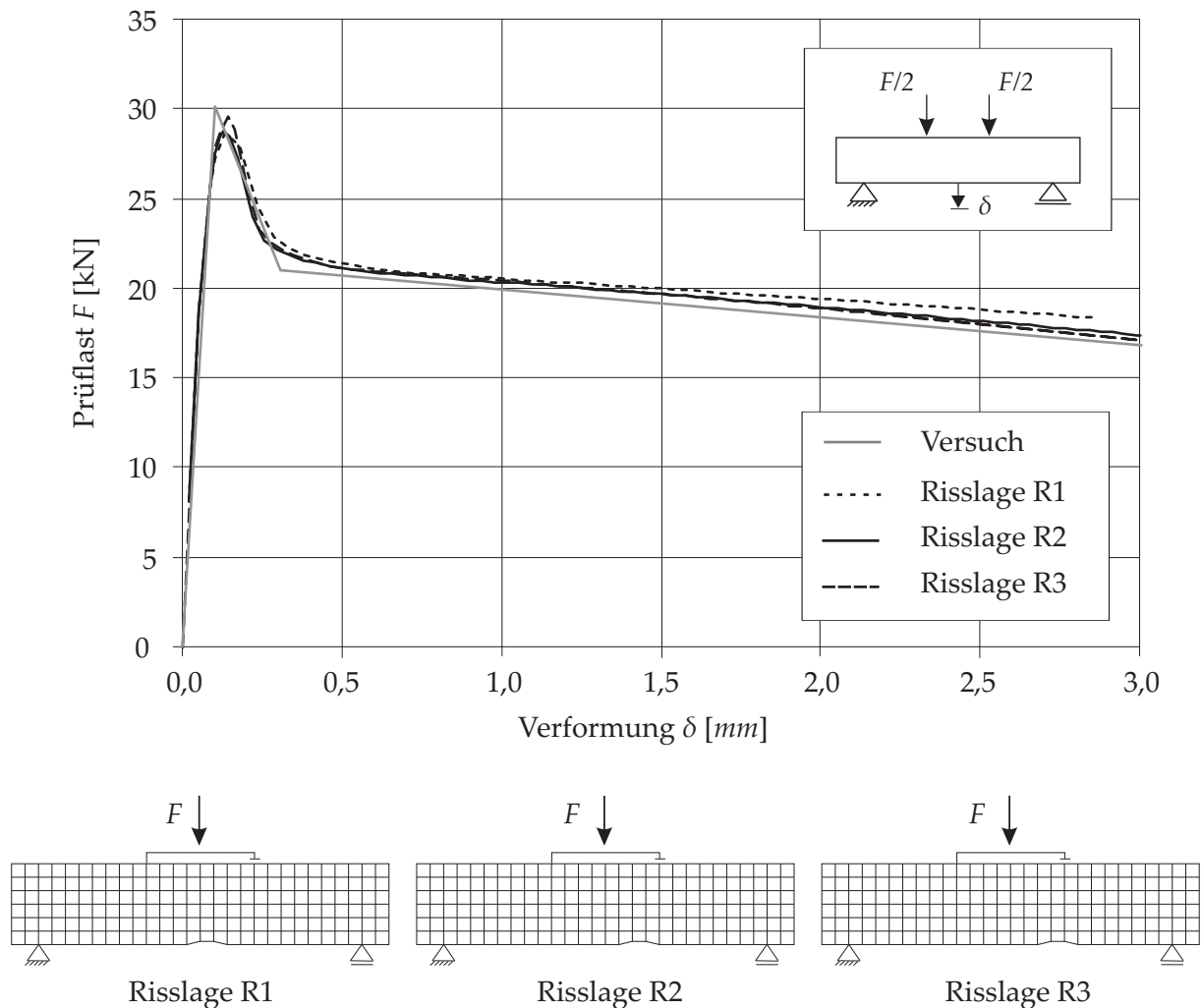


Abbildung 8.12: Einfluss der Risslage auf das Last-Verformungsverhalten

dem Erreichen der Bruchlast (Punkt A) eine Entfestigung am unteren Querschnittsrand eintritt. Diese Beobachtung bestätigt die Annahme des Linearitätskriterium nach Nitschke [Nit98], das zur Abschätzung der einaxialen Zugfestigkeit herangezogen wird (siehe Abschnitt 7.1.2.4). Mit zunehmender Durchbiegung und fortschreitender Entfestigung reduziert sich der vom Beton aufnehmbare Spannungsanteil und es stellt sich ein annähernd konstanter Zugspannungsverlauf auf Nachrissniveau ein (Punkt D). Die für das Zugtragverhalten charakteristische kleine Zugspannungsspitze nahe der Dehnungsnulllinie kann in Punkt D mit dem relativ groben FE-Netz nicht mehr erfasst werden. Der Verlauf des Zugentfestigungsparameters $\bar{\epsilon}_{Rp}$, der das Maß für die Rissbildung darstellt, ist in Abbildung 8.10 gegeben. Es ist zu erkennen, dass sich der Riss ausgehend von der Kerbe senkrecht nach oben, wie es sich auch in den Versuchen zeigte, ausbreitet.

Wie in Abbildung 8.12 zu erkennen, kann der Einfluss der Risslage auf das Kraft-Verformungsverhalten als gering eingestuft werden. Wird beim Versuch die Risslage beobachtet und dokumentiert, kann sie bei der FE-Berechnung berücksichtigt werden. Liegen hingegen keine Informationen diesbezüglich vor bzw. wird eine Versuchsserie mit stark streuenden Risslagen betrachtet, so ist die Annahme einer gemittelten Risslage im Rechenmodell aufgrund des geringen Einflusses gerechtfertigt.

Werden der Berechnung genäherte Werte für die Zugfestigkeit $f_{ctm} = f_{ct,ax} = 3,70 \text{ MN/m}^2$

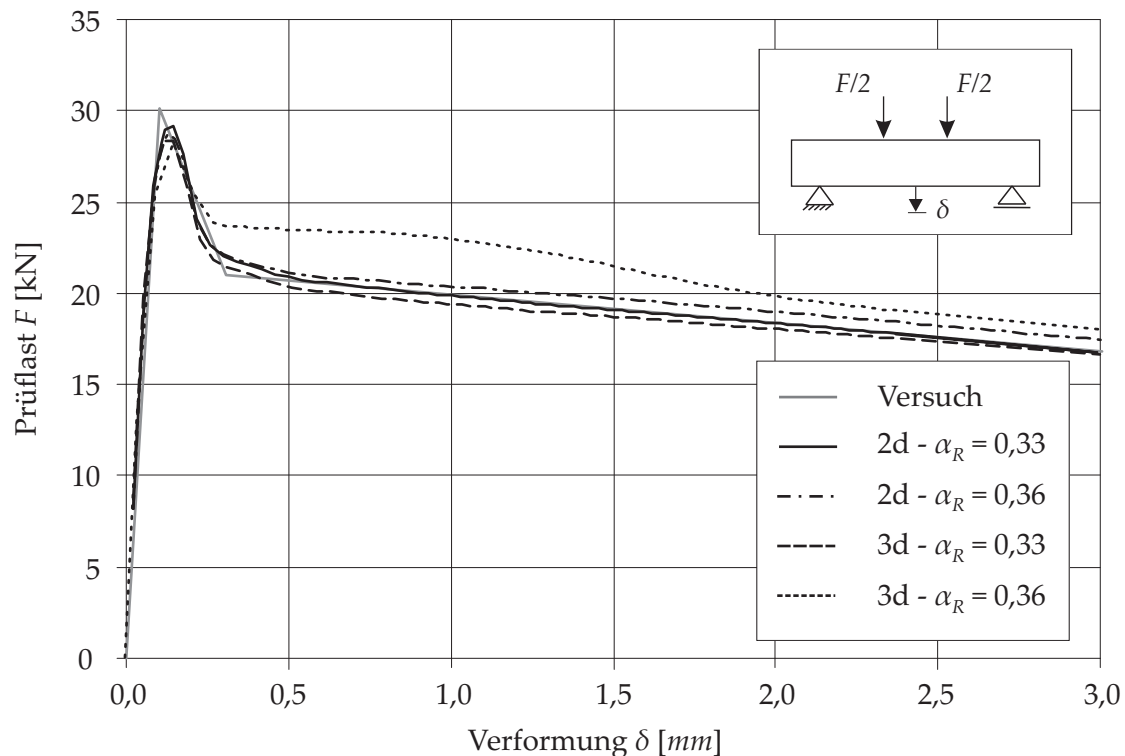


Abbildung 8.13: Last-Verformungsverhalten des Scheibenmodells im ebenen Spannungszustand und des Volumenmodells in Abhängigkeit des Parameters α_R

und die Nachrissfestigkeit $f_{ctm1} = f_{eq,ct,1} = 1,58 \text{ MN/m}^2$, die sich bei einer Auswertung der Versuchsergebnisse nach dem DBV-Merkblatt [DBV01] ergeben, verwendet, kann das Strukturverhalten nicht ausreichend wiedergegeben werden. Es zeigt sich, wie in Abbildung 8.11 zu erkennen, dass die Traglast unterschätzt wird und das Nachbruchverhalten zu steif abgebildet wird.

Als Grundlage für nachfolgende dreidimensionale Strukturberechnungen erfolgt die Simulation des Biegezugversuchs als Volumenmodell. Hierfür werden achtknotige, vollintegrierte verschiebungsformulierte Volumenelemente verwendet. Die Netzeinteilung in der x - y -Ebene entspricht der des Scheibenmodells mit 168 Elementen. Die Dickenrichtung (z -Richtung) wird sowohl mit einem Element als auch mit sechs Elementen diskretisiert. Bei Berechnungen mit dem beim Scheibenmodell verwendeten und in Abschnitt 6.3.3.2 vorgeschlagenen Öffnungswinkel für das ausgerundete *Rankine*-Kriterium, der sich durch den Parameter $\alpha_R = 0,36$ ergibt (s.a. Abbildung 6.11), zeigt sich beim Volumenmodell für beide Diskretisierungen in Dickenrichtung ein gleiches, zu steifes Nachbruchverhalten (Abbildung 8.13). Dieses Verhalten wird wie in Abbildung 8.14 zu erkennen durch die in z -Richtung auftretenden Normalspannungen verursacht, welche beim Scheibenmodell im ebenen Spannungszustand per Definition gleich Null sind. Diese Spannungen hängen unmittelbar mit dem Öffnungswinkel, der die Lage der *Rankine*-Fläche zu den Hauptspannungsachsen steuert, zusammen. Wie bereits in Abschnitt 8.2 (Abbildung 8.9) angesprochen, kommt es durch die Geometrie der *Rankine*-Fläche für einen Öffnungswinkel mit $\alpha_R = 0,36$ bei Rissbildung in den betroffenen Elementen auch zu plastischen Dehnungen senkrecht zur Hauptzugspannungsrichtung also in z -Richtung. Diese Dehnungen werden durch die umgebenden, nicht gerissenen Elemente behindert und führen somit zu Druckspannungen in den gerissenen Elementen und einem daraus resultierendem zu steifen Nachbruchverhalten der Struktur. Wird α_R auf 0,33 reduziert, was dem Öffnungswinkel des klassischen *Rankine*-Kriteriums entspricht, steht die Fließfläche annähernd senkrecht

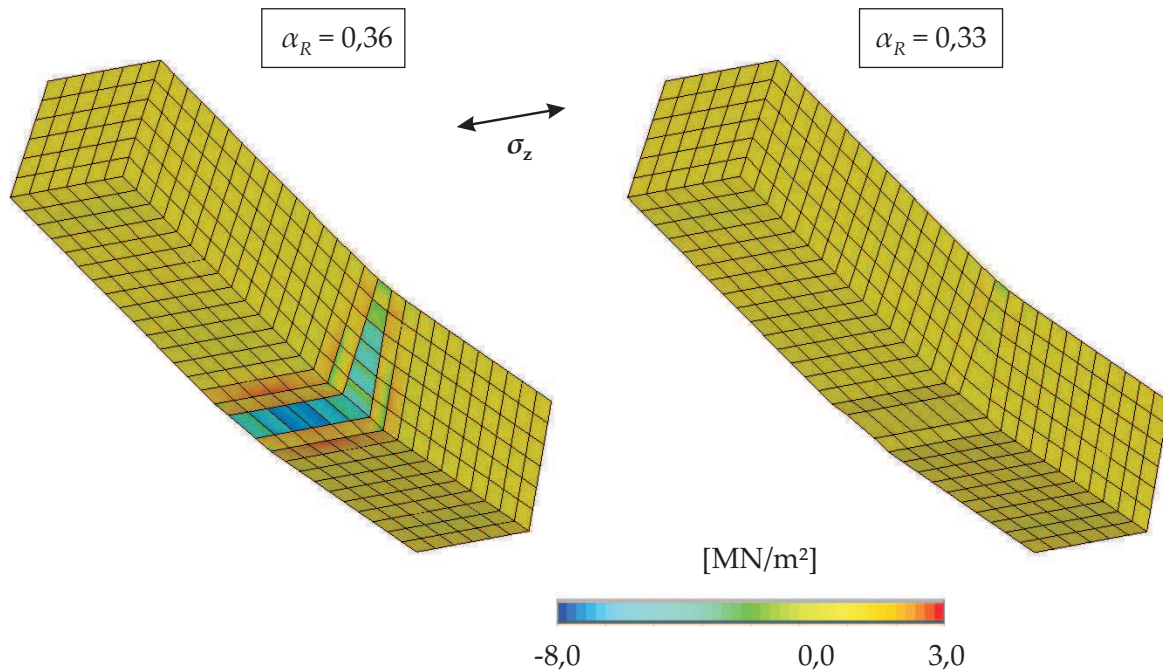


Abbildung 8.14: Volumenmodell - Spannungen in z -Richtung für unterschiedliche Parameter α_R

zur Hauptspannungsrichtung und die plastischen Dehnungskomponenten in z -Richtung und entsprechend die Normalspannungen in diese Richtung werden stark vermindert (Abbildung 8.14). Die Lösung des Volumenmodells stimmt nun sehr gut mit der Lösung des Scheibenmodells überein. Der Einfluss von α_R auf das Ergebnis der Scheibenberechnung ist sehr gering. Es wird daher empfohlen für die Strukturberechnungen mit Volumenelementen generell $\alpha_R = 0,33$ zu verwenden. Der beschriebene Effekt ist bei Materialmodellen, die zur Beschreibung des Zugverhaltens andere Fließflächen wie zum Beispiel einen *Drucker-Prager-Kegel* verwenden, teilweise noch ausgeprägter.

8.4 Spaltzugversuche

Mit den im vorherigen Abschnitt aus den 4-Punkt Biegezugversuchen bestimmten Materialparametern für einen Stahlfaserbeton mit einem Fasergehalt von 35 kg/m^3 (Tabelle 8.3) können jetzt allgemeine Strukturberechnungen, hier die Berechnung von Spaltzugversuchen an Würfeln mit einer Kantenlänge von 15 cm , durchgeführt werden. Die Versuchsdurchführung erfolgte ebenfalls im Rahmen des Bauvorhabens Hachinger-Stollen am Materialprüfungsamt für das Bauwesen der Technischen Universität München [MPA98a].

Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 8.15 dargestellt. Die Einleitung der Prüflast F auf der Ober- und Unterseite der Würfel erfolgte mittels sogenannter Lastverteilungstreifen. Abweichend von DIN 1048 Teil 5 [DIN91], in der eine Breite der Lastverteilungstreifen von 10 mm gefordert wird, wurde die Breite zwischen 13 mm , 17 mm und 25 mm variiert. Dies war erforderlich, da sich die 10 mm breiten Streifen bei höheren Lasten in die Prüfkörper drückten, ohne dass diese auf Spaltzug versagten. Zur Aufzeichnung der Verformungen wurden an allen vier Seiten der Prüfkörper, senkrecht zur Lastrichtung 50 mm lange Dehnmessstreifen angebracht. Für allgemeine Erläuterungen zu Spaltzugversuchen sei auf Abschnitt 4.3 verwiesen.

Die Modellierung des Versuchs erfolgt mit vierknotigen, vollintegrierten Scheibenelementen im ebenen Spannungszustand. Dabei werden zwei unterschiedlich feine Diskretisierung mit

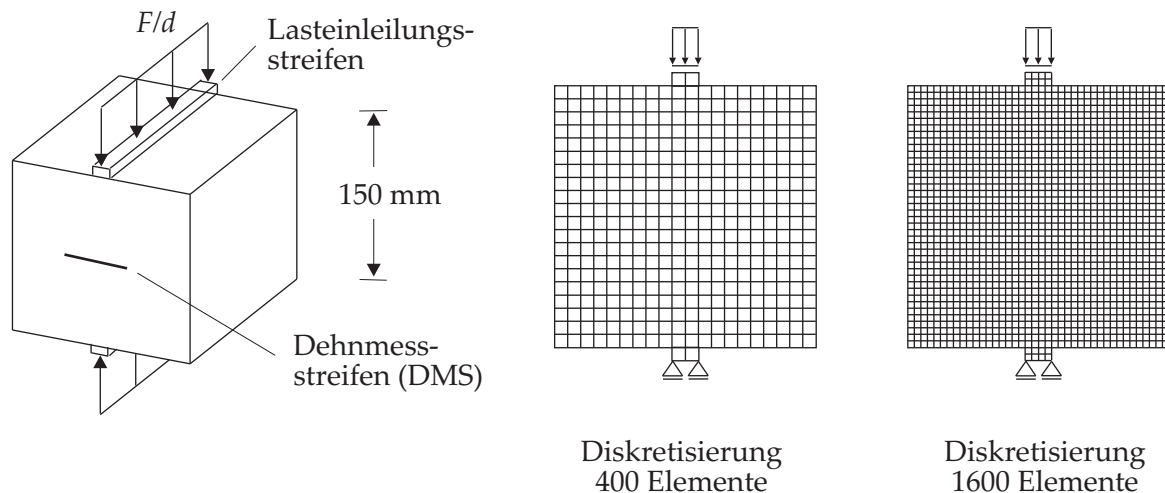


Abbildung 8.15: Versuchsanordnung und Diskretisierung der Probekörper als ebene Scheibenmodelle

400 und 1600 Elementen untersucht (Abbildung 8.15). Eine Untersuchung zeigte einen sehr geringen Einfluss der Modellierung des Kontaktbereiches zwischen Lasteinleitungsstreifen und Probekörper auf die Berechnungsergebnisse. Im verwendeten Rechenmodell ist es daher gerechtfertigt eine starre Kopplung sowohl in horizontaler als auch in vertikaler Richtung zwischen diesen beiden Komponenten anzunehmen.

In Abbildung 8.16 sind die Versuchs- und Berechnungsergebnisse in Form von Last-Dehnungskurven angegeben. Der grau hinterlegte Bereich gibt den Streubereich aller Versuchsergebnisse mit einer Breite der Lastverteilungsstreifen von 13 mm und 17 mm an. Dem FE-Modell wurde eine Breite der Lasteinleitung von 15 mm zugrunde gelegt. Es ist zu erkennen, dass das Materialverhalten mit dem entwickelten Materialgesetz sehr gut erfasst werden kann. Die etwas zu steife Abbildung der Struktur durch die grobe Diskretisierung (400 Elemente) ist auf einen räumlichen Diskretisierungsfehler zurückzuführen. Das grobe Netz ist nicht in der Lage den Versagensmechanismus genau genug abzubilden.

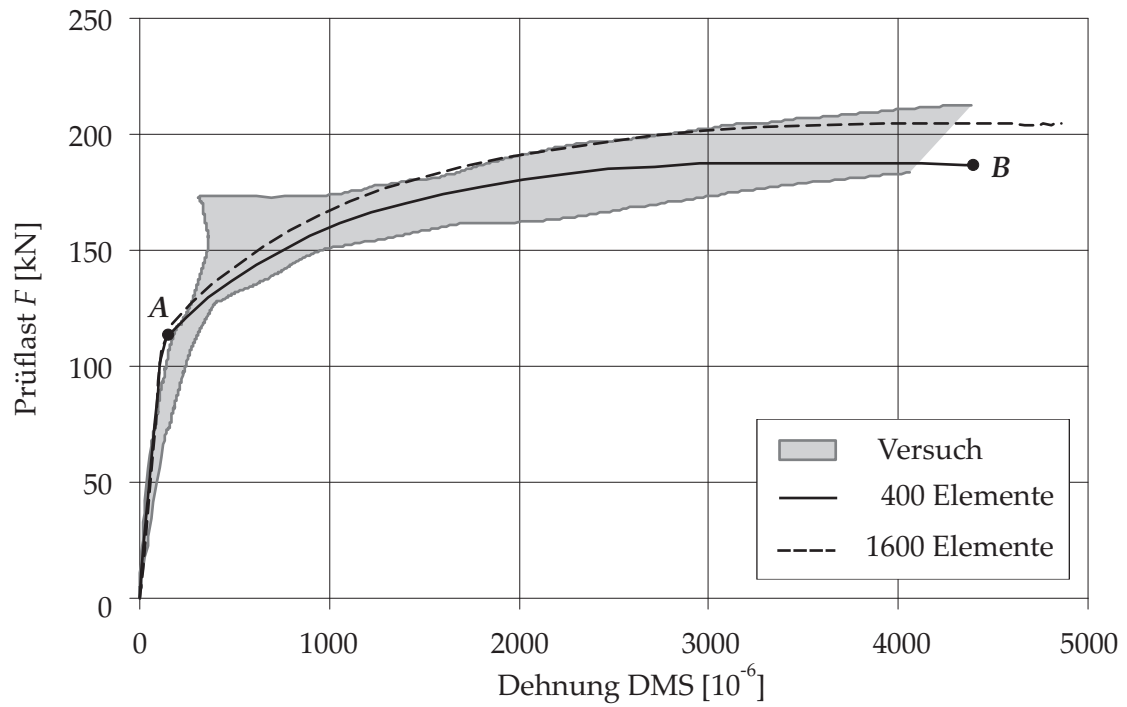
Die Ergebnisse von Spaltzugversuchen dienen bei reinem Beton der Ermittlung der Zugfestigkeit. Unter der Annahme linear-elastischen Materialverhaltens bis zum Erreichen der Zugfestigkeit, kann mit Hilfe der Elastizitätstheorie die Spaltzugfestigkeit σ_{SZ} aus der maximalen Prüflast F_u [HR98] berechnet werden:

$$\sigma_{SZ} = \frac{2 F_u}{\pi d l} \quad (8.1)$$

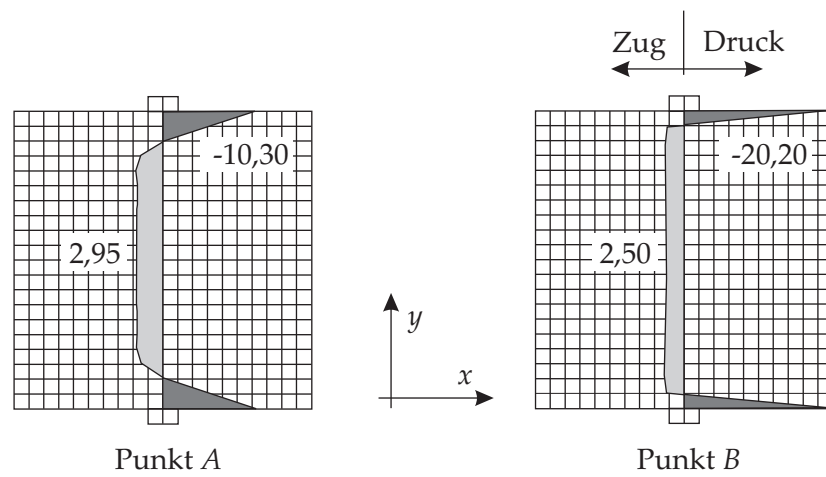
Dabei entspricht d dem Durchmesser des Zylinders, bzw. hier der Höhe des Würfels und l der Zylinderlänge, bzw. hier der Tiefe des Würfels. Die Umrechnung der Spaltzugfestigkeit σ_{SZ} in die zentrische Zugfestigkeit f_{ctm} erfolgt mit der in Model Code 90 [CF90] angegebenen Beziehung:

$$f_{ctm} = 0,9 \cdot \sigma_{SZ} \quad (8.2)$$

Diese Methode zur Berechnung der zentrischen Zugfestigkeit wird in der Praxis häufig auf Stahlfaserbeton übertragen. Die numerischen Untersuchungen zeigen aber, dass der Ansatz der Maximallast in Gleichung (8.1) als Grundlage zur Berechnung der zentrischen Zugfestigkeit nicht korrekt ist. Betrachtet man den Verlauf der Last-Dehnungsbeziehung, so erkennt



Spannung σ_x



Spannung σ_y

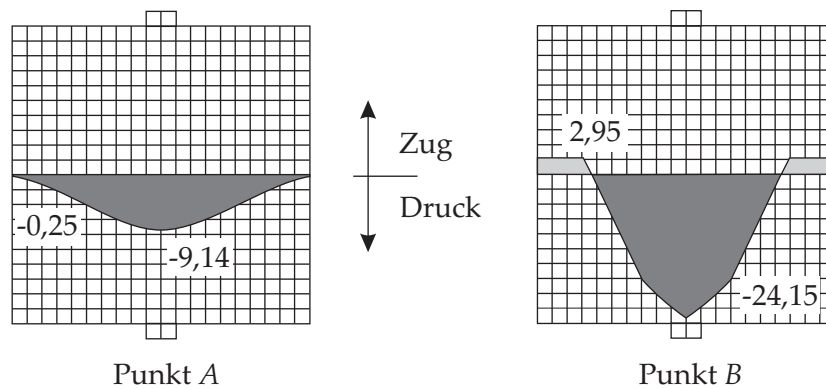


Abbildung 8.16: Versuchs- und Berechnungsergebnisse der Spaltzugversuche

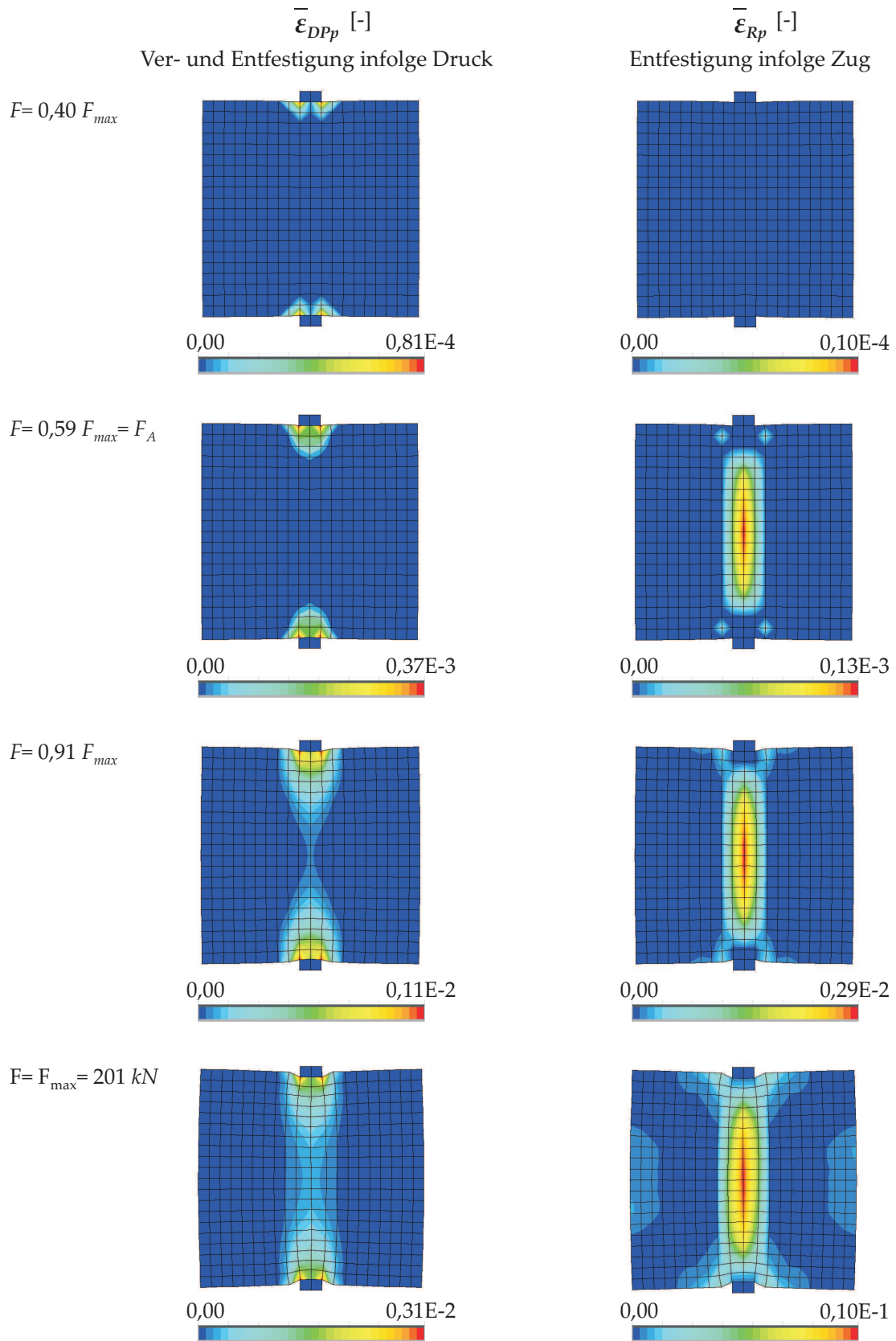


Abbildung 8.17: Verteilung der inneren Parameter $\bar{\epsilon}_{Rp}$ und $\bar{\epsilon}_{DPp}$ für eine Diskretisierung mit 400 Elementen

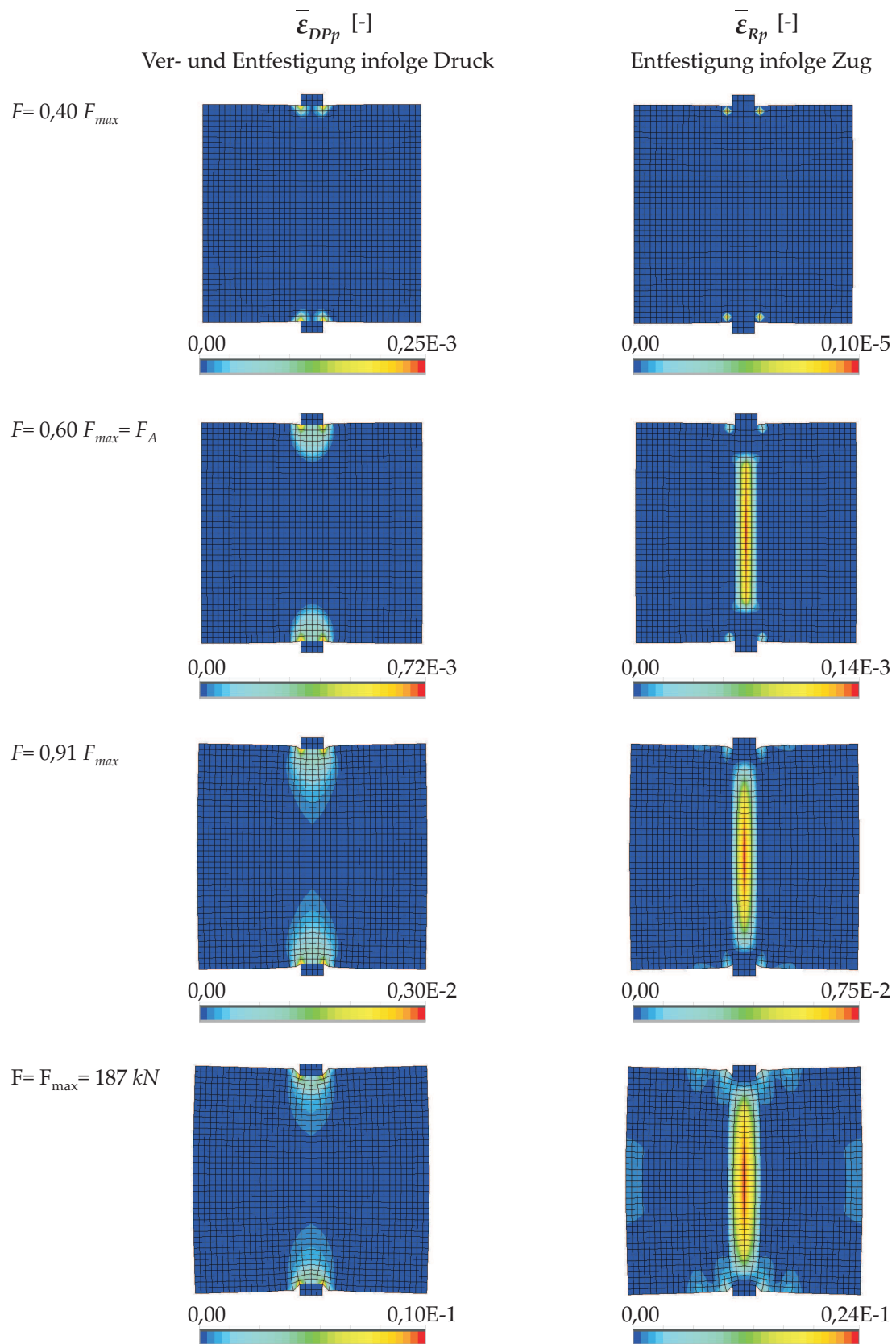


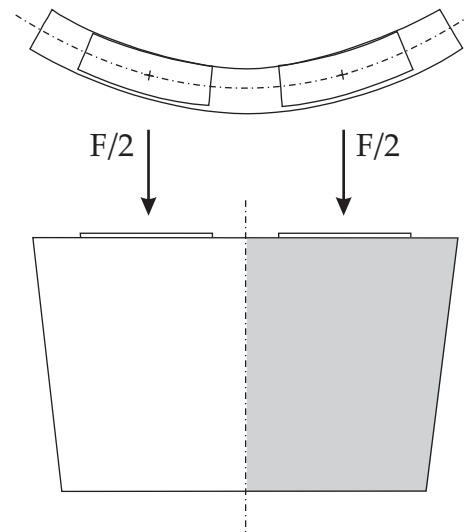
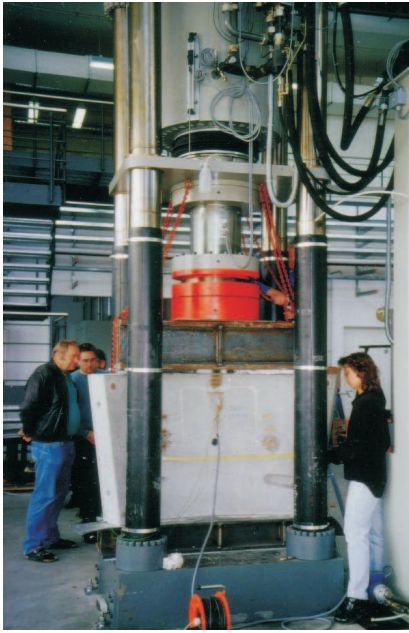
Abbildung 8.18: Verteilung der inneren Parameter $\bar{\varepsilon}_{Rp}$ und $\bar{\varepsilon}_{DPp}$ für eine Diskretisierung mit 1600 Elementen

man zuerst ein steiles Ansteigen der Last, das nach einem Knick (Punkt A) in einen deutlich flacheren Anstieg übergeht. Bereits bei Erreichen des Knicks ist, wie in Abbildung 8.16 zu erkennen, die zentrische Zugfestigkeit des Stahlfaserbetons in der Symmetrieachse erreicht und es kommt zur Ausbildung eines vertikalen Risses. An diesem Punkt ist somit bei Proben aus reinem Beton die Maximallast erreicht und der Probekörper versagt durch Aufspalten. Bei Stahlfaserbeton hingegen ist aufgrund des duktilen Materialverhaltens eine weitere, nicht unerhebliche Laststeigerung möglich. Soll also die zentrische Zugfestigkeit von Stahlfaserbeton ermittelt werden, darf lediglich die Last bei Erreichen des Knicks in Punkt A anstelle der Maximallast (Punkt B) in Ansatz gebracht werden. Aus der dem Rechenmodell zugrunde gelegten einaxialen Zugfestigkeit von $2,95 \text{ MN/m}^2$ ergibt sich nach den Gleichungen 8.1 und 8.2 eine Last von $115,85 \text{ kN}$. Diese stimmt sehr gut mit den sich rechnerisch ergebenden, zu Punkt A gehörenden Lasten von $117,9 \text{ kN}$ (400 Elemente) und $113,5 \text{ kN}$ (1600 Elemente) überein.

Der Versagensvorgang der Stahlfaserbetonprobe mit zunehmender Laststeigerung kann anhand der Berechnungsergebnisse sehr gut verfolgt werden. Hierfür sind in Abbildung 8.17 und 8.18 die Verläufe der inneren Parameter $\bar{\epsilon}_{Rp}$ und $\bar{\epsilon}_{Dpp}$ für die beiden unterschiedlich feinen Diskretisierungen dargestellt. Vor dem Erreichen der Spaltzugfestigkeit in Punkt A ist das Verhalten durch plastische Deformationen infolge der hohen Druckbeanspruchungen im Bereich der Lasteinleitung bestimmt. Ein Maß hierfür ist der innere Parameter $\bar{\epsilon}_{Dpp}$, der das Ver- und Entfestigungsverhalten im Druckbereich steuert. Bevor es jedoch im Lasteinleitungsbereich zum Druckversagen kommt, wird quer zur Lastrichtung, entlang der vertikalen Symmetrieachse, die Zugfestigkeit erreicht. Dies führt zu einer Zugentfestigung des Materials, gekennzeichnet durch die Entwicklung der inneren Variable $\bar{\epsilon}_{Rp}$. Die Möglichkeit einer weiteren Laststeigerung nach Überschreiten der Zugfestigkeit beruht u.a. auf einem weiteren Lastabtragungsmechanismus. Die beiden durch den Riss geteilten Würfelhälften werden durch die Wirkung der Fasern zusammengehalten und es können weiterhin, wie an der Verteilung der σ_x -Spannungen in Abbildung 8.16 zu erkennen, Spannungen übertragen werden. Zusätzlich können aber Lastanteile durch eine Biegetragwirkung der beiden exzentrisch belasteten Würfelhälften abgetragen werden. Dies ist aus dem Verlauf der σ_y -Spannungen in Abbildung 8.16 ersichtlich. Mit zunehmender Last entwickeln sich an den Würfelaußenseiten Zugspannungen, die dort schließlich zu horizontalen Rissen führen (Abbildung 8.17 und 8.18). Diese Rissbildung wurde auch von [LvM99] bei der Durchführung von Spaltzugversuchen an Zylindern beobachtet.

8.5 Tunneltübbinge aus Stahlfaserbeton

Für den Bau des Hachinger Stollens, einem Leitungsstollen für die Trinkwasserversorgung der Landeshauptstadt München mit einem Innendurchmesser von $2,9 \text{ m}$ und einer Länge von $2,4 \text{ km}$ wurde ein Schildvortrieb mit Tübbingauskleidung gewählt. Durch die Verwendung von Stahlfaserbeton für die Tübbinge, konnte auf eine herkömmliche Bewehrung verzichtet werden. Im Vorfeld des Bauvorhabens wurden einzelne Tübbinge in einem Großversuch auf Spaltzug geprüft. Die von der Firma *Bilfinger & Berger* in Auftrag gegebenen Versuche wurden am Materialprüfungsamt für das Bauwesen an der Technischen Universität München durchgeführt und in einem Untersuchungsbericht [MPA98b] dokumentiert. Hierbei sollte die Lasteinleitung der Pressenkräfte der Vortriebsmaschine simuliert werden, die sich während des Vortriebs auf die bereits erstellten Tunnelringe abstützt. Dies führt zu einer Spaltzugsbelastung der Tübbinge. Die daraus resultierenden Zugspannungen müssen von den Stahlfasern aufgenommen werden. Begleitend erfolgten eine Prüfung der Betondruckfestigkeit und die Ermittlung des statischen Druckelastizitätsmoduls an aus den Tübbingen entnommenen Bohrkernen. Des Weiteren wurden 4-Punkt Biegezugversuche an prismatischen Probekörpern durchgeführt.



Scheibenmodell - 1435 Elemente

Volumenmodell - 15456 Elemente

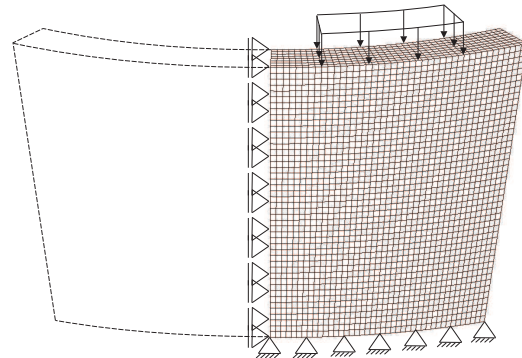
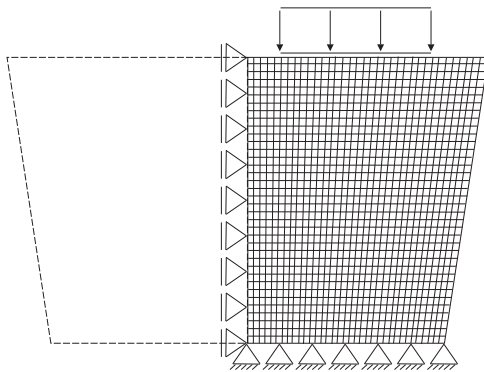


Abbildung 8.19: Versuchsaufbau und Berechnungsmodelle

Die vier untersuchten Tübinge waren mit 40 kg/m^3 Stahlfasern des Typs *Dramix RC 65/60 BN* der Firma *Baekert* bewehrt. Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 8.19 zu sehen. Die Einleitung der Prüfkraft erfolgte durch zwei Lastplatten mit den Abmessungen $530 \text{ mm} \times 142 \text{ mm}$. Aufgrund einer an der Tübingenaußenseite verlaufenden Nut mit einer Breite von 38 mm erfolgte die Lasteinleitung leicht exzentrisch. Die Versuche wurden in einer 10000 kN Viersäulen Druckprüfmaschine durchgeführt, wobei die Prüfkraft über ein Querhaupt auf die beiden Lasteinleitungsplatten verteilt wurde. Die Belastung wurde kontinuierlich mit einer Prüfgeschwindigkeit von $0,02 \text{ mm/s}$ aufgebracht. Zur Erfassung des Verformungsverhaltens wurden Dehnmessstreifen entsprechend Abbildung 8.20 an den Innen- und Außenseiten angebracht. Die hier dargestellte Anordnung gilt für den Probekörper 1. Bei den anderen drei Probekörpern wurde die Anordnung variiert und die Dehnmessstreifen überwiegend auf den Tübinginnenseiten angebracht. Aufgrund der Fülle an Versuchskurven werden im Weiteren überwiegend die Versuchsergebnisse des ersten Probekörpers zur Auswertung herangezogen.

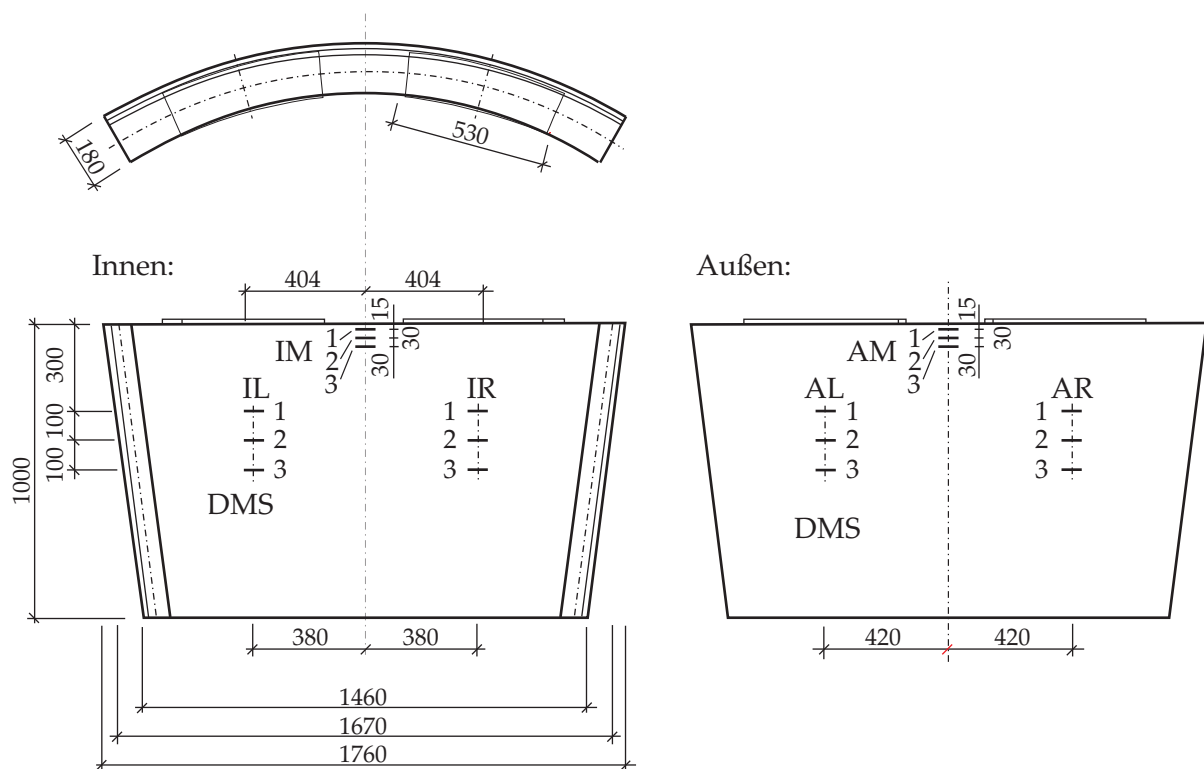


Abbildung 8.20: Anordnung der Dehnmessstreifen am Probekörper

Für die numerische Simulation wird sowohl ein ebenes Scheibenmodell als auch ein dreidimensionales Volumenmodell verwendet. Unter Ausnutzung der Symmetriebedingung muss nur der halbe Tübbing modelliert werden (Abbildung 8.19). Das Scheibenmodell wird mit 1435 vierknotigen Verschiebungselementen diskretisiert. Die exzentrische Lasteinleitung in Dickenrichtung kann modellbedingt nicht berücksichtigt werden. Für die Diskretisierung des Volumenmodells werden 15456 achtknotige Verschiebungselemente verwendet. Die Dickenrichtung wird dabei mit acht Elementschichten abgebildet.

Die Materialparameter für das Rechenmodell sind in Tabelle 8.4 zusammengestellt. Der E-Modul und die Druckparameter wurden den Versuchsunterlagen entnommen. Die Zugparameter wurden hingegen mittels *Inverser Analyse* aus den Ergebnissen der Biegezugversuche bestimmt.

In Abbildung 8.21 und 8.22 sind die Versuchs- und Berechnungsergebnisse in Form von Last-Dehnungskurven dargestellt. Prinzipiell zeigt sich, dass das in den Versuchen beobachtete

Materialparameter							
E	=	36300	$[MN/m^2]$	ν	=	0,195	$[-]$
f_{cm}	=	55,6	$[MN/m^2]$	G_c	=	0,17	$[MNm/m^2]$
f_{ctm}	=	3,25	$[MN/m^2]$	G_{f1}	=	$4,25 \cdot 10^{-4}$	$[MNm/m^2]$
f_{ctm1}	=	1,14	$[MN/m^2]$	G_{f2}	=	$6,9 \cdot 10^{-3}$	$[MNm/m^2]$

Tabelle 8.4: Materialparameter Stahlfaserbetontübbing, Fasergehalt 40 kg/m^3

Verformungsverhalten mit beiden Berechnungsmodellen gut erfasst werden kann. Die Versuchsergebnisse der Dehnmessstreifen in Tübbingmitte (Abbildung 8.21) können trotz unberücksichtigter gekrümmter Geometrie und exzentrischer Lasteinleitung im Wesentlichen auch mit dem ebenen Modell beschrieben werden. Zunächst ist ein steiles Ansteigen der Last-Dehnungskurve zu beobachten. In dieser Phase liegen die in horizontaler Richtung auftretenden Spaltzugspannungen noch unter der vom Material aufnehmbaren Zugfestigkeit. Im Bereich des Knicks wird diese dann erreicht und es kommt zur Bildung eines Risses einhergehend mit der Zugentfestigung des Materials. Durch das duktile Materialverhalten und die rissüberbrückende Wirkung der Stahlfasern ist anschließend eine weitere, mit stark zunehmender Rissdehnung verbundene Laststeigerung möglich. Für noch genauere Betrachtungen des Strukturverhaltens, um zum Beispiel auch das im Versuch beobachtete und in der exzentrische Lasteinleitung begründete Einreißen des Tübbings auf der Innenseite zu erfassen, ist das dreidimensionale Modell notwendig.

Die Ergebnisse der Dehnmessstreifen in den Tübbingflächen sind in Abbildung 8.22 zu sehen. Auch in diesen Bereichen wurde in den Versuchen die Bildung vertikaler Risse beobachtet. Da sich der Ort der Rissbildung jedoch nicht so genau vorhersehen ließ, konnten die Risse teilweise nicht mit den Dehnmessstreifen erfasst werden. Teilweise verliefen die Risse neben den Dehnmessstreifen, was zu einer Reduzierung der Dehnungen führte. In anderen Fällen wurden Dehnmessstreifen, die direkt über einem Riss lagen, bei größeren Dehnungen zerstört, was zu einem Ausfall dieser Messwerte führte. Die Messergebnisse in diesem Bereich sind also stark von der Risslage abhängig und streuen erheblich. Im Bereich vor der Rissbildung zeigt sich an der Innenseite ein zu steifes Verhalten der Berechnung, während das Verhalten an der Außenseite besser erfasst werden kann. Das Lastniveau bei Beginn der Rissbildung bei etwa 4000 kN und das anschließende Verformungsverhalten stimmen vor allem mit dem dreidimensionalen Modell sehr gut überein. Das Scheibenmodell hingegen zeigt auch im gerissenen Bereich ein zu steifes Verhalten.

Ergänzend zum Messprogramm wurden die Rissbilder der geprüften Tübbinge aufgenommen und auf Foto festgehalten. Exemplarisch und repräsentativ hierfür enthält Abbildung 8.23 zwei Fotos. Das linke Foto zeigt die Tübbinginnenseite mit einem vertikalen Spaltzugriss oben in Tübbingmitte und einen Riss im Bereich der Dehnmessstreifen IR. An der unteren Ecke des Tübbings ist deutlich das schließlich zum Versagen führende und auf ein Überschreiten der Druckfestigkeit zurückzuführende Abplatzen zu erkennen. Die Querschnittsschwächung durch das Schraubenauge in diesem Bereich wurde in den Rechenmodellen nicht berücksichtigt. Auf dem rechten Foto ist das Rissbild der Außenseite zu sehen, das sich weitgehend mit dem der Innenseite deckt. In der numerischen Berechnung stellt die ebenfalls in Abbildung 8.23 dargestellte Verteilung des Zugentfestigungsparameters $\bar{\epsilon}_{Rp}$ das Maß für die Rissbildung dar. Der berechnete Verlauf stimmt sehr gut mit den Rissbildern überein. Ebenfalls zu erkennen ist die im Versuch beobachtete verstärkte Rissbildung an der Innenseite. Die Verteilung des Ver- und Entfestigungsparameters für den Druckbereich $\bar{\epsilon}_{Dp}$ zeigt ein Maximum im unteren Eckbereich, der Stelle, an der im Versuch die Abplatzungen auftraten.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass das vorgestellte Materialgesetz zusammen mit den durch die *Inverse Analyse* ermittelten Materialparametern sehr gut in der Lage ist, sowohl das Verformungsverhalten als auch die Rissbildung zu erfassen. Das deutlich rechenintensivere dreidimensionale Volumenmodell ist dabei genauer als das ebene Scheibenmodell, das aber ebenfalls in der Lage ist die wesentlichen Phänomene zu beschreiben.

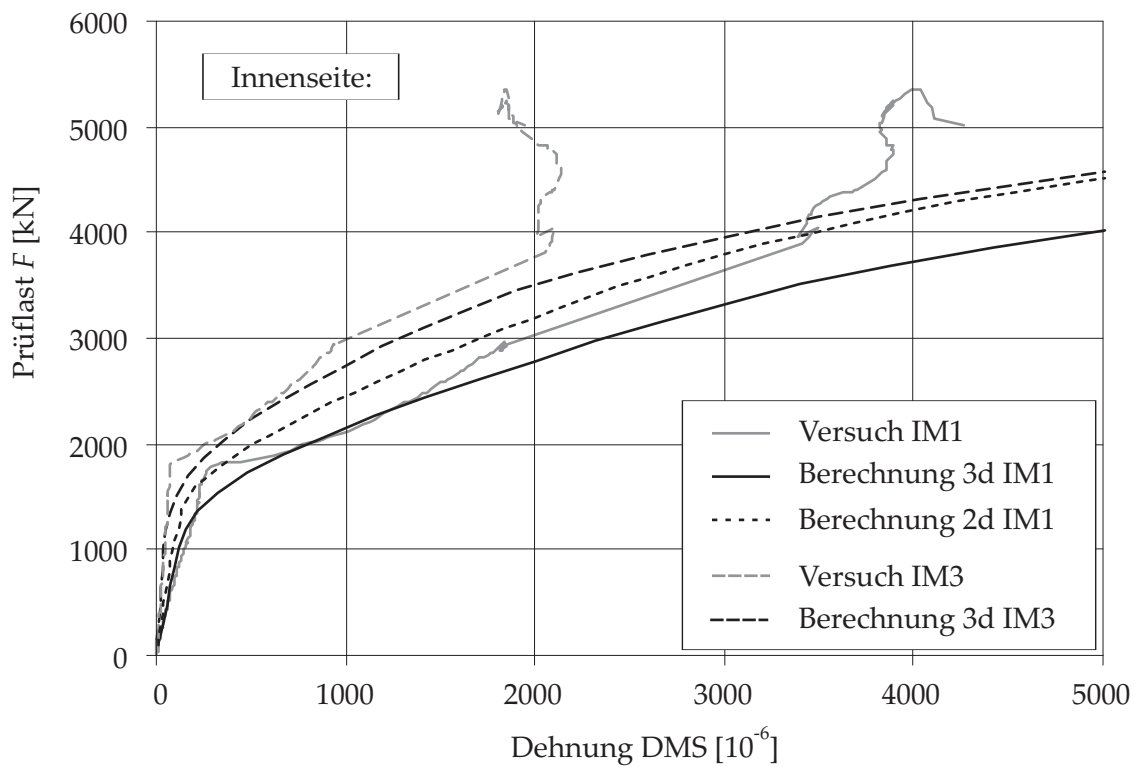
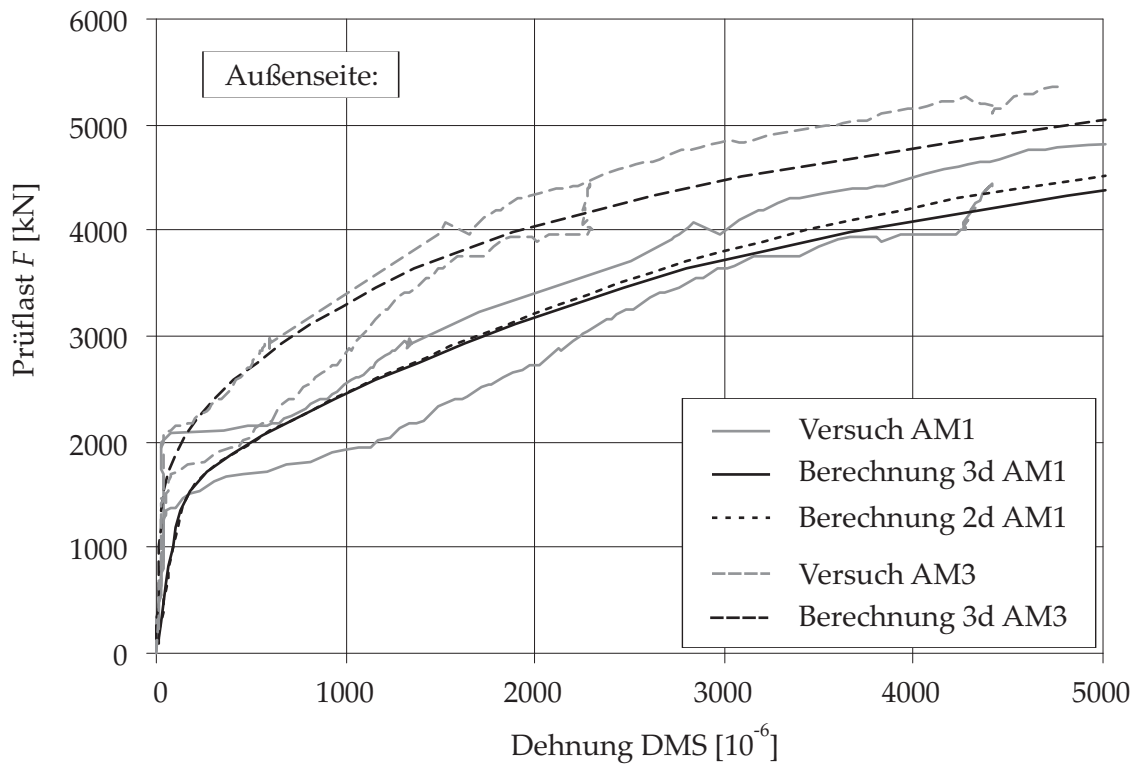


Abbildung 8.21: Last-Dehnungsverhalten in Tübbingmitte

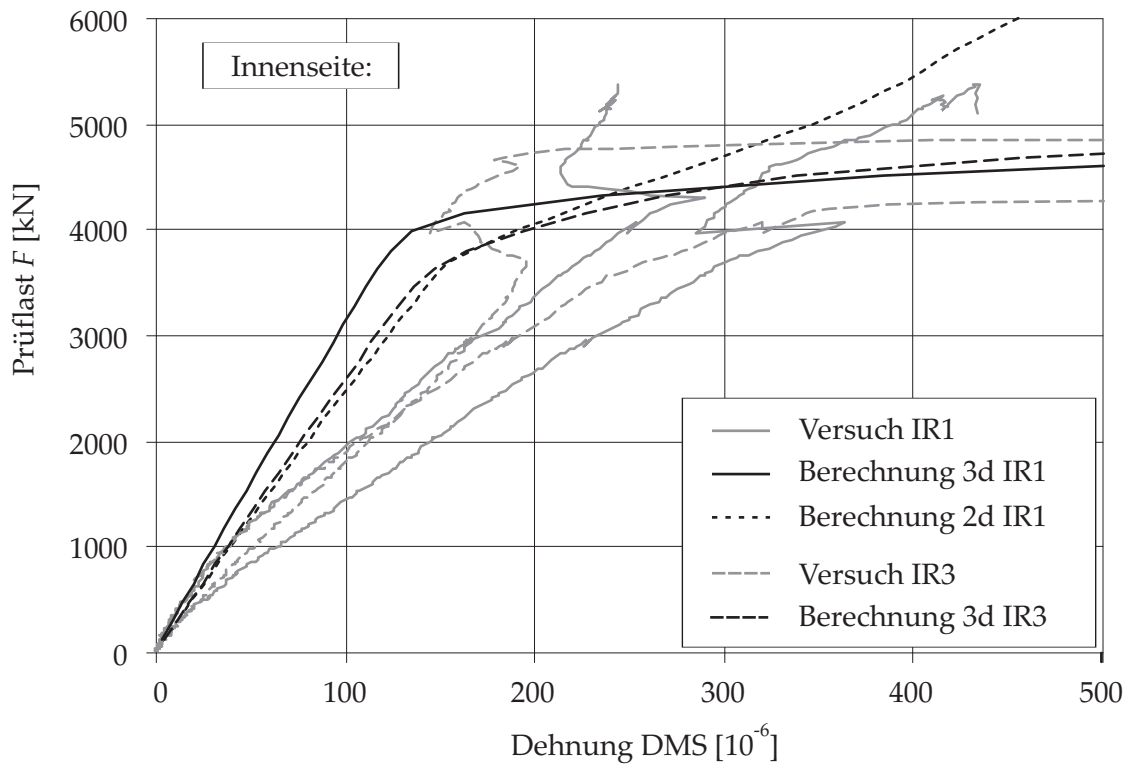
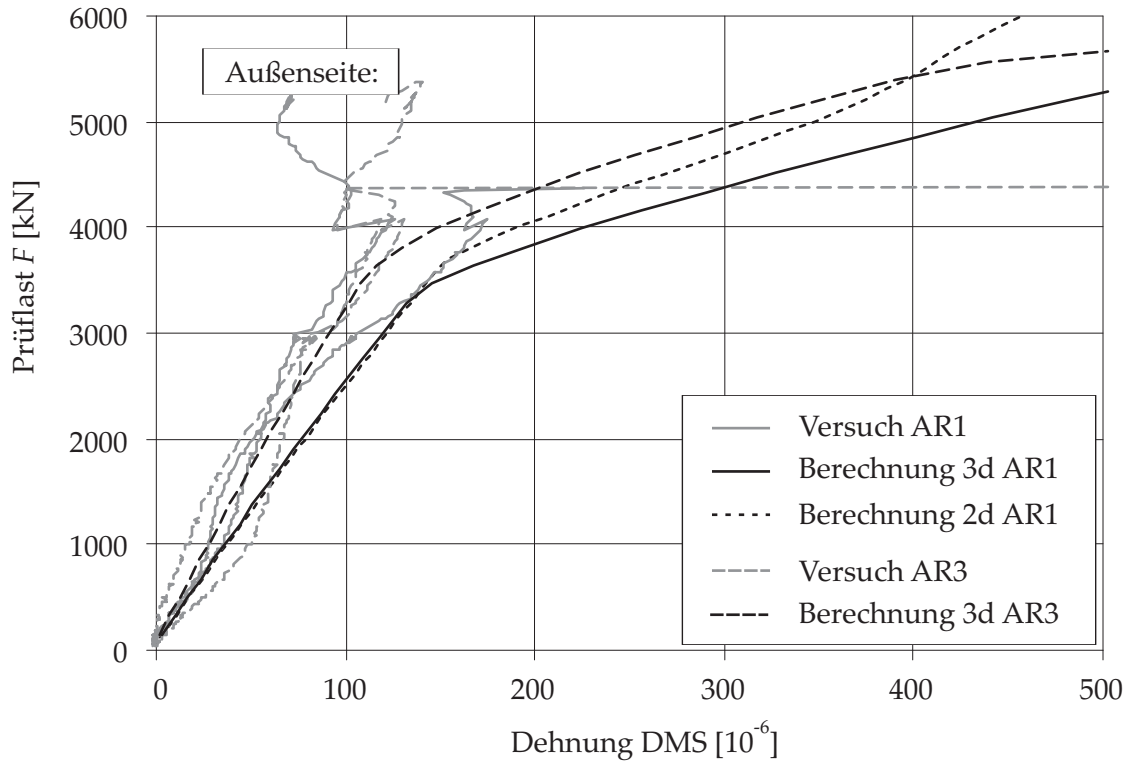
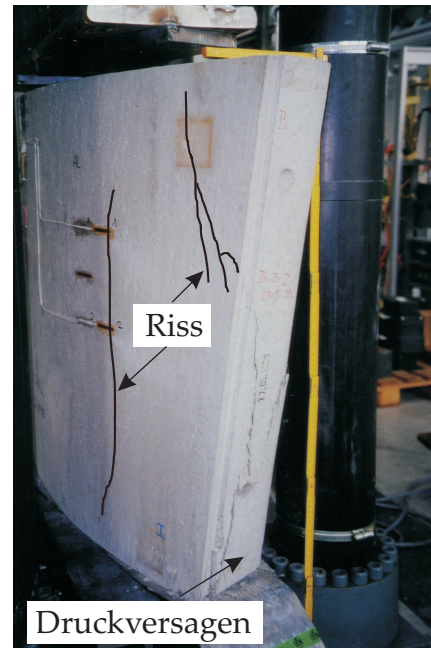
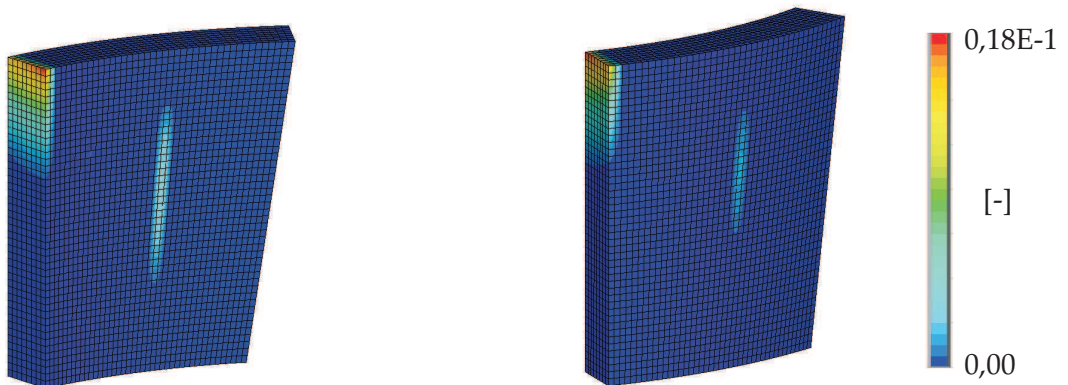


Abbildung 8.22: Last-Dehnungsverhalten in den Tübbingflächen



Entfestigung infolge Zug $\bar{\epsilon}_{Rp}$:



Ver- und Entfestigung infolge Druck $\bar{\epsilon}_{Dpp}$:

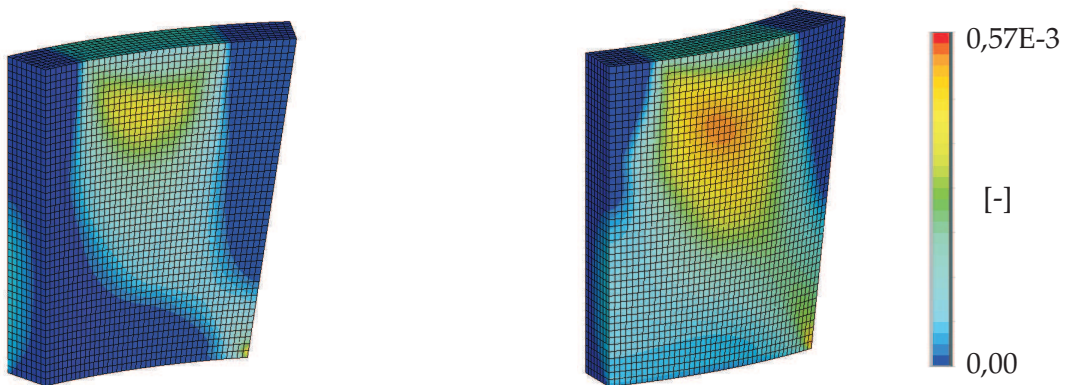


Abbildung 8.23: Rissbilder und Verteilung der inneren Parameter $\bar{\epsilon}_{Rp}$ und $\bar{\epsilon}_{Dpp}$

Kapitel 9

Berechnung von Tunnelschalen aus Stahlfaserbeton

Während es im vorhergehenden Kapitel darum ging, das im Versuch beobachtete Materialverhalten besonders gut und genau zu erfassen, wird in diesem Kapitel das entwickelte Materialgesetz zur physikalisch nichtlinearen Schnittgrößenermittlung im Rahmen von Bemessungsaufgaben verwendet. Hierbei erfolgen die Berechnungen unter Berücksichtigung des im DBV-Merkblatt „*Stahlfaserbeton*“ [DBV01] und in der neuen DIN 1045-1 [DIN01] angegebenen Sicherheitskonzeptes. Anhand eines Beispiels aus dem Bereich des Tunnelbaus wird das Verfahren der nichtlinearen Schnittgrößenermittlung umgesetzt und das Potenzial dieser Methode aufgezeigt.

Im Anschluss an grundlegende Erläuterungen zur nichtlinearen Schnittgrößenermittlung und dem damit verbundenen Sicherheitskonzept werden am Beispiel eines mit Hilfe einer Tunnelbohrmaschine aufgefahrenen und mit Stahlfaserbetontübbingungen ausgekleideten Tunnels zwei Teilaspekte herausgegriffen und genauer betrachtet. Zum einen erfolgt eine nichtlineare Berechnung der Tunnelschale unter Berücksichtigung einer Rollkieslage im Firstbereich. In diesem Fall zeigt sich, dass nur mit Hilfe der nichtlinearen Berechnung, die das Umlagerungspotenzial des Tragsystems Tunnelschale - Boden berücksichtigt, ein Nachweis für den Grenzzustand der Tragfähigkeit möglich ist. Als zweiter Punkt wird ein im Bauzustand durch die Pressenkräfte der Vortriebsmaschine exzentrisch belasteter Stahlfaserbetontübbing analysiert. Auch hier ist eine nichtlineare Berechnung erforderlich, um die Beanspruchung des Tübbings wirklichkeitsnah erfassen zu können.

9.1 Grundlagen der nichtlinearen Schnittgrößenermittlung

Die neue Norm für Stahl- und Spannbetonbau in Deutschland, DIN 1045-1 [DIN01] erlaubt erstmalig eine auf physikalisch nichtlineare Verfahren basierende Schnittgrößenermittlung. Im DBV-Merkblatt „*Stahlfaserbeton*“ [DBV01] wird dieses Verfahren unter Verweis auf die DIN 1045-1 [DIN01] aufgegriffen und auf die Anwendung für Stahlfaserbeton erweitert. Im Folgenden bezieht sich der Begriff „nichtlinear“ ausschließlich auf physikalisch nichtlineare Berechnungsverfahren.

Ziel dieser Verfahren ist es, die tatsächlich in einem Tragwerk vorliegenden Steifigkeitsverhältnisse realistisch abzubilden, um gegenüber linearen Verfahren bessere und genauere Ergebnisse bezüglich Beanspruchung und Verformung eines Bauwerks zu erhalten. Dabei findet stets eine Umlagerung der Schnittgrößen innerhalb eines statisch unbestimmten Tragwerks

statt. Dies führt zu einer Veränderung der Tragwerksbeanspruchung und des Verformungszustandes. Kommt es dabei wie zum Beispiel bei Stahlbetonstützen nach Theorie II. Ordnung zu einer generellen Erhöhung der Beanspruchung, ist es ein Gebot der Sicherheit materielle Nichtlinearitäten zu berücksichtigen. Andererseits kann die Verwendung nichtlinearer Verfahren zu wirtschaftlicheren Bemessungsergebnissen führen. Gerade bei einem duktilen Werkstoff wie Stahlfaserbeton ist es sinnvoll, das große Umlagerungspotenzial dadurch zu nutzen. Darüber hinaus ist bei der Berechnung von bestehenden Gebäuden oftmals unter Berücksichtigung linearer Materialkennwerte keine Standsicherheit mehr zu gewährleisten, so dass auch hier die Berücksichtigung von nichtlinearen Materialeigenschaften große Vorteile bietet, wenn eine möglichst genaue Abbildung der Realität verlangt wird. Es sei allerdings auch erwähnt, dass eine nichtlineare Berechnung zu einem stark erhöhten Berechnungsaufwand führt. Auch die Superposition einzelner Lastfälle ist nicht mehr möglich, so dass sich die Berechnung auf einzelne, ausgewählte und maßgebende Lastfallkombinationen beschränken sollte. Außerdem werden die aus Umlagerungsmöglichkeiten resultierenden Tragreserven aufgebraucht und man erhält somit ein weniger robustes Tragwerk.

Nach dem Sicherheitskonzept der DIN 1045-1 [DIN01] muss für den Nachweis im Grenzzustand der Tragfähigkeit der Bemessungswert des Tragwiderstandes R_d größer sein als der Bemessungswert der Beanspruchung E_d :

$$R_d = \frac{1}{\gamma_R} \cdot R \geq E_d \quad (9.1)$$

Für reinen Stahlfaserbeton ist nach dem DBV-Merkblatt [DBV01] ein Teilsicherheitsbeiwert $\gamma_R = 1,4$ zu berücksichtigen. Da sich der Teilsicherheitsbeiwert γ_R einheitlich auf den gesamten Systemwiderstand bezieht, kann Gleichung 9.1 mit diesem Wert multipliziert werden:

$$R \geq \gamma_R \cdot E_d \quad (9.2)$$

Das bedeutet, der Tragwiderstand R des Systems muss um den Faktor 1,4 höher liegen als der Bemessungswert der maßgebenden Einwirkungskombination E_d .

Der Grenzzustand der Tragfähigkeit gilt als erreicht, wenn in einem beliebigen Querschnitt des Tragwerks folgende Werte erreicht werden:

- die kritische Betondehnungen ε_{cu} oder ε_{ctu}^f
- die maximale Rissbreite $w_u = l_f/20 \leq 3 \text{ mm}$
- bei zusätzlicher Verwendung konventioneller Bewehrung die kritische Stahldehnung ε_{su} .

Er gilt außerdem als erreicht, wenn am Gesamtsystem oder an Teilen davon der kritische Zustand der Stabilität auftritt.

Zur Ermittlung des Tragwiderstandes R ist gemäß DBV-Merkblatt [DBV01] im Druckbereich die in Abbildung 9.1 dargestellte Spannungs-Dehnungsbeziehung nach DIN 1045-1 [DIN01] zu verwenden. Eingang findet hier der jeweilige rechnerische Mittelwert der Festigkeit des Betons:

$$f_{cR} = 0,85 \cdot \alpha \cdot f_{ck} \quad \text{bis C50/60} \quad (9.3)$$

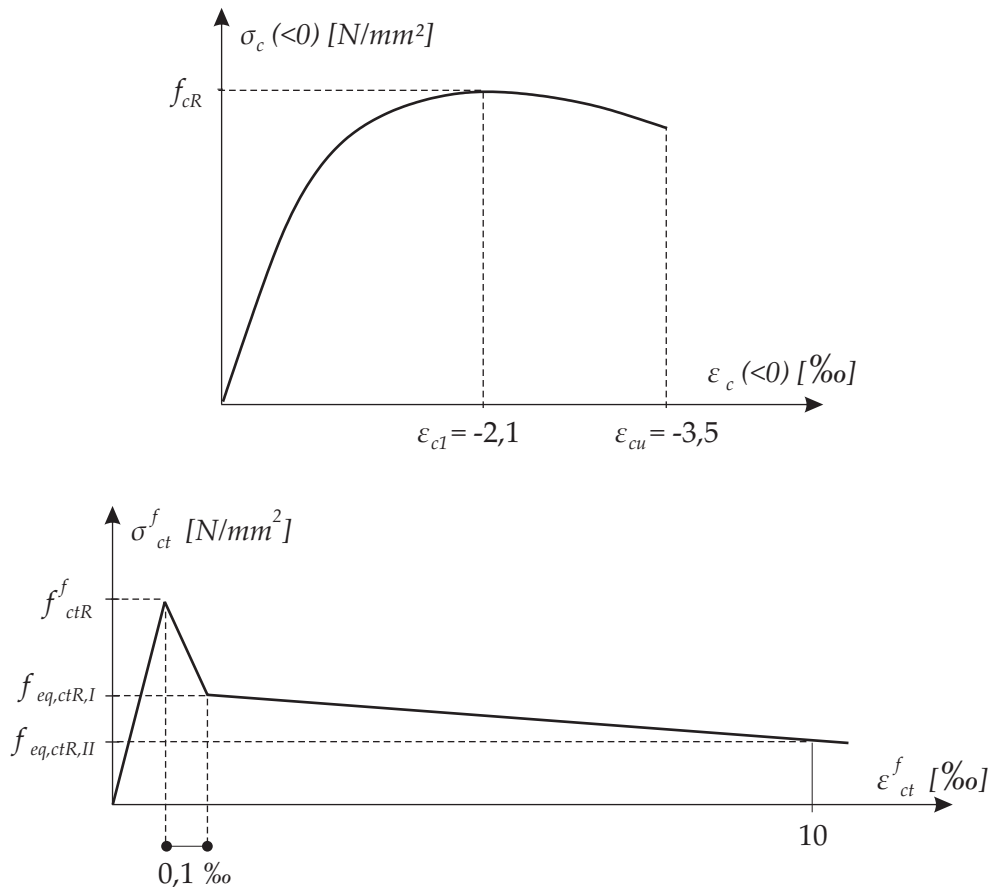


Abbildung 9.1: Einaxiale Spannungs-Dehnungsbeziehung gemäß DIN 1045-1 [DIN01] und DBV-Merkblatt „Stahlfaserbeton“ [DBV01] zur nichtlinearen Schnittgrößenermittlung

α dient als Abminderungsbeiwert zur Berücksichtigung von Langzeitwirkungen sowie zur Umrechnung zwischen Zylinderdruckfestigkeit und einaxialer Druckfestigkeit. Für den Zugbereich wird im DBV-Merkblatt [DBV01] die ebenfalls in Abbildung 9.1 dargestellte und bereits in Abschnitt 7.1.2.1 vorgestellte Spannungs-Dehnungsbeziehung vorgegeben. Aus den in Abschnitt 3.1 und 6.5 genauer erläuterten Gründen eignen sich diese auf dem *composite-concept* basierenden Spannungs-Dehnungsbeziehungen nicht, um im Rahmen einer FE-Berechnung objektive, netzunabhängige Ergebnisse zu liefern. Ziel ist es daher, die in dieser Arbeit vorgeschlagenen einaxialen Ver- und Entfestigungsbeziehungen konform mit dem Sicherheitskonzept der Normen zu verwenden. Die Identifikation der Materialparameter soll in diesem Zusammenhang nicht wie im vorigen Kapitel aus Versuchsergebnissen mittels *Inverser Analyse* erfolgen. Vielmehr sollen die Materialparameter aus Normenkennwerten abgeleitet werden. Hierzu wird den weiteren Betrachtungen und Berechnungen ein Stahlfaserbeton C 35/45 F 1,2/1,0 XC 0 zugrunde gelegt. C 35/45 gibt die Druckfestigkeitsklasse des Betons nach DIN 1045-1 [DIN01] an. Aus der Bezeichnung F 1,2/1,0 zeigt sich, dass es sich um einen Stahlfaserbeton der Faserklasse F 1,2 für den Verformungsbereich I und der Faserklasse F 1,0 für den Verformungsbereich II handelt. Die Zuordnung dieser Faserklassen erfolgt in Abhängigkeit der äquivalenten Zugfestigkeiten $f_{eq,ctk,i}$. XC 0 zeigt die maßgebende Expositions klasse gemäß DIN 1045-1 [DIN01]. Die folgend untersuchten Tübbinge haben eine Dicke $d = 0,125 \text{ m}$.

Für den Druckbereich ergeben sich somit für einen Beton der Festigkeitsklasse C35/45 nach DIN 1045-1 [DIN01] folgende Materialparameter:

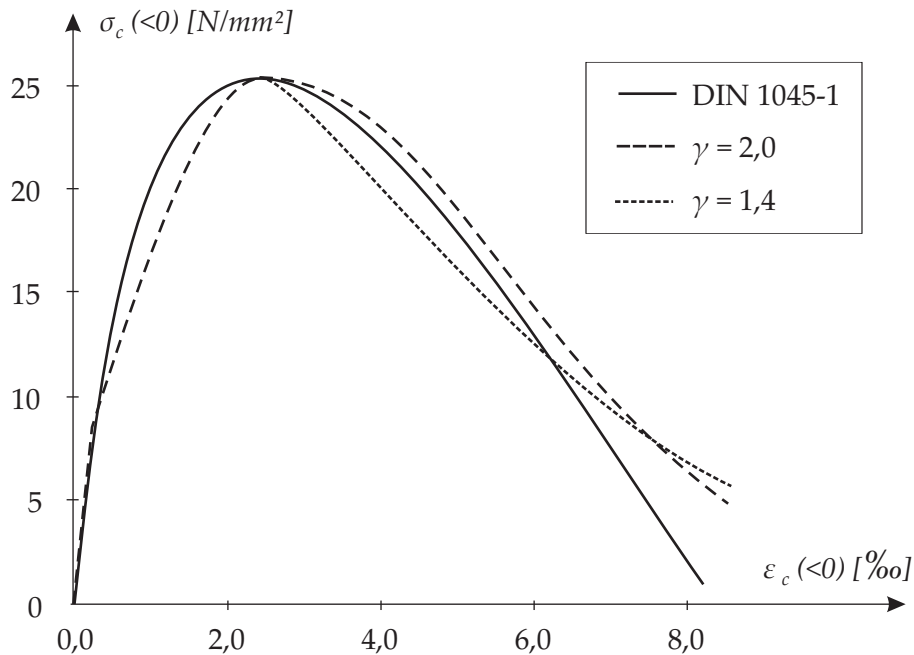


Abbildung 9.2: Vergleich der Ver- und Entfestigungsbeziehung mit der Spannungs-Dehnungsbeziehung nach DIN 1045-1 [DIN01] für einen Beton C 35/45

$$f_{cR} = 0,85 \cdot \alpha \cdot f_{ck} = 25,29 \text{ MN/m}^2$$

$$\varepsilon_{c1} = -2,4\%$$

$$\varepsilon_{cu} = -3,5\%$$

$$E_{cm} = 33300 \text{ MN/m}^2$$

Die diesem Beton entsprechende Spannungs-Dehnungsbeziehung ist in Abbildung 9.2 zu sehen. Wird die Wirkung der Stahlfasern im Druckbereich vernachlässigt, kann die quadratische Verfestigungs- und die exponentielle Entfestigungsbeziehung nach Gleichung (6.84) und (6.86) an diesen Verlauf angepasst werden. Für den Vergleich der Kurven ist es nötig, die zuletzt genannte Beziehung um den elastischen Anteil zu erweitern. Für folgende Parameter zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung mit der Spannungs-Dehnungsbeziehung nach DIN 1045-1 [DIN01] (Abbildung 9.2):

$$\bar{\varepsilon}_{DPe} = -2,4\%$$

$$G_c = 0,03 \text{ MNm/m}^2$$

$$\gamma = 2,0$$

Die äquivalente Elementlänge wurde für den Vergleich mit $0,2 \text{ m}$ gewählt. Es ist abzuwägen, ob eine Vernachlässigung der Faserwirkung gerechtfertigt ist, da dadurch der Berechnung ein zu weiches Verhalten zugrunde gelegt wird. Soll die Faserwirkung berücksichtigt werden, so ist das Nachbruchverhalten in Druckversuchen zu beobachten und durch die Bruchenergie G_c im Berechnungsmodell zu berücksichtigen.

Im Zugbereich muss aus der im DBV-Merkblatt [DBV01] vorgegebenen Spannungs-Dehnungsbeziehung die vorgestellte zweiteilige Spannungs-Rissöffnungsbeziehung abgeleitet werden.

Die Zugfestigkeit f_{ctm} der Spannungs-Rissöffnungsbeziehung kann entsprechend dem DBV-Merkblatt [DBV01] aus dem charakteristischen Wert der Druckfestigkeit bestimmt werden:

$$f_{ctm} = f_{ctR}^f = 0,21 \cdot k_d \cdot f_{ck}^2 / 3 \cdot \alpha_c^f = 0,21 \cdot 1,475 \cdot 35^{2/3} \cdot 0,85 = 2,81 \text{ MN/m}^2 \quad (9.4)$$

$$\text{mit } k_d = 1,6 - d \geq 1,0$$

α_c^f berücksichtigt das Dauerstandverhalten und kann bei Normalbeton mit 0,85 angenommen werden. Die Nachrissfestigkeit f_{ctm1} wird aus der äquivalenten Zugfestigkeit $f_{eq,ctk,I} = 1,2$ für den Verformungsbereich I, die sich aus der Faserbetonklasse bzw. aus Biegezugversuchen ergibt, berechnet:

$$f_{ctm1} = f_{eq,ctR,I} = \alpha_{sys} \cdot \alpha_c^f \cdot f_{eq,ctk,I} = 1,0 \cdot 0,85 \cdot 1,2 = 1,02 \text{ MN/m}^2 \quad (9.5)$$

Der Beiwert α_{sys} dient der Berücksichtigung der geometrischen Abweichung zwischen Bauwerk und Probekörper (siehe Abbildung 7.4). Des Weiteren werden zur Festlegung der Spannungs-Rissöffnungsbeziehung die beiden Bruchenergieanteile G_{f1} und G_{f2} benötigt. Der erste Anteil, der die Bruchenergie des reinen Betons, ohne Faserwirkung repräsentiert, kann nach Model Code 90 [CF90] in Abhängigkeit des Größtkorns d_{max} aus der Betondruckfestigkeit bestimmt werden:

$$G_{f1} = G_{f0} \cdot \left(\frac{f_{cm}}{f_{cm0}} \right)^{0,7} \quad \text{mit } f_{cm0} = 10 \text{ MN/m}^2 \quad (9.6)$$

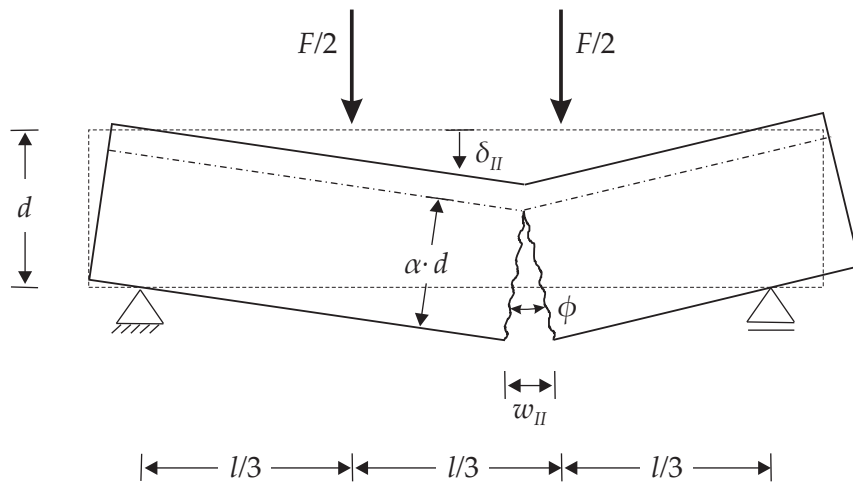
$d_{max} [mm]$	8	16	32
$G_{f0} [MNm/m^2]$	$2,5 \cdot 10^{-5}$	$3,0 \cdot 10^{-5}$	$5,8 \cdot 10^{-5}$

Der zweite, ausschließlich durch die Faserwirkung beeinflusste Bruchenergieanteil G_{f2} wird auf Grundlage der geometrischen Beziehungen am Probekörper des 4-Punkt Biegezugversuchs bestimmt. In einem ersten Schritt wird die zur äquivalenten Zugfestigkeit $f_{eq,ctR,II}$ des Verformungsbereichs II gehörende Rissöffnung bestimmt. Gemäß DBV-Merkblatt [DBV01] wird für den Verformungsbereich II von einer vertikalen Durchbiegung des Biegebalkens in Feldmitte von

$$\rho_{II} = \rho_0 + 3,15 \text{ mm} \quad (9.7)$$

ausgegangen. ρ_0 ist die zur Maximallast F_u gehörende Durchbiegung und liegt bei den hier untersuchten Faserbetonen in der Größenordnung von 0,1 mm. Unter der für unterkritische Fasergehalte gerechtfertigten Annahme, dass sich beim Biegezugversuch nur ein einzelner Riss bildet und die Krümmung außerhalb des Risses vernachlässigbar klein ist, lässt sich aus der in Abbildung 9.3 dargestellten Kinematik in Abhängigkeit der Risslage folgender Zusammenhang zwischen Durchbiegung ρ_{II} und Rissöffnung w_{II} am unteren Querschnittsrand aufstellen. Für den Fall der Rissbildung in Feldmitte und der Annahme einer Zugzonenhöhe von $0,9 d$ ergibt sich so:

$$w_{II} = \phi \cdot \alpha \cdot d = \frac{4\delta_{II}}{l} \cdot 0,9 d \quad (9.8)$$



Grenzfall a) Riss in Feldmitte



Grenzfall b) Riss unter Last

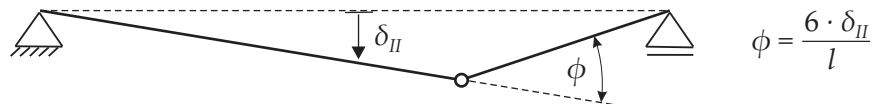


Abbildung 9.3: Geometrischer Zusammenhang zwischen Durchbiegung und Rissöffnung am Biegebal-ken

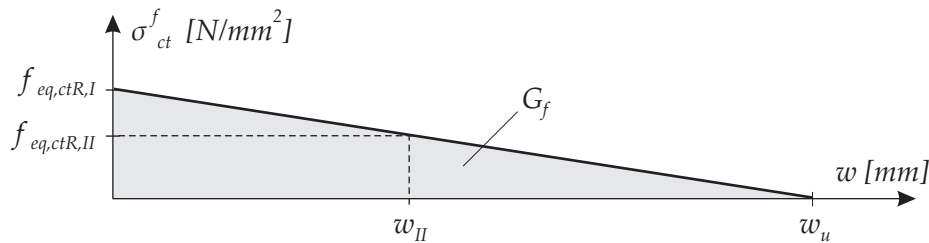
Hiermit ist die Neigung des linearen Entfestigungsastes festgelegt und die Rissöffnung w_u , bei der die Fasern keine Spannung mehr übertragen kann berechnet werden:

$$w_u = w_{II} \cdot \left(1 + \frac{f_{eq,ctR,II}}{f_{eq,ctR,I} - f_{eq,ctR,II}} \right) \quad (9.9)$$

Die Fläche unter dieser Entfestigungsbeziehung (Abbildung 9.4) ergibt den gesuchten Bruchenergieanteil

$$G_{f2} = \frac{1}{2} \cdot f_{eq,ctR,I} \cdot w_u \quad (9.10)$$

Auf Grundlage dieser Materialparameter können die Beispielergebnisse durchgeführt werden.

Abbildung 9.4: Berechnung des Bruchenergieanteils G_{f2}

9.2 Nichtlineare Berechnung einer Tunnelschale

9.2.1 Berechnungsmodell für das Tragsystem Boden - Tunnel

Die Berechnung von Tunnelbauwerken unterscheidet sich von statischen Berechnungen im übrigen Bauwesen dadurch, dass der umgebende Boden sowohl die Belastung darstellt, als auch als tragendes Element der Lastabtragung dient. Des Weiteren sind zahlreiche Einflussfaktoren, die sich aus der Topologie, der Geologie, der Hydrologie und dem Vortrieb ergeben zu berücksichtigen. Viele dieser Einflussfaktoren können rechnerisch nicht vollständig erfasst werden oder unterliegen starken Streuungen wie beispielsweise die Materialparameter des „Baustoffs“ Boden. Somit ist es in der Regel bei einer statischen Berechnung wichtig, die Beanspruchung der Tunnelschale im Rahmen von Grenzbetrachtungen zu untersuchen.

Obwohl Tunnelvortriebe auf unterschiedlichste Weise erfolgen können, haben sie folgende Gemeinsamkeit. Der vor dem Beginn der Tunnelbaumaßnahme vorliegende als Primärspannungszustand bezeichnete Spannungs- und Verformungszustand wird durch den Vortrieb mehr oder weniger stark gestört. Mit zunehmender Entfernung vom Vortriebsgeschehen stellt sich dann ein ebener Verformungszustand ein, da jeder Querschnitt bzw. Abschlag des Tunnelvortriebes die gleiche Entstehungs- und Belastungsgeschichte aufweist. Die Grundidee für die Entwicklung von Berechnungsmodellen im Tunnelbau basiert daher auf der Reduktion der großen Anzahl an komplexen Vorgängen beim Vortrieb, die zu einem komplexen räumlichen Tragsystem aus Boden und Tunnelschale führen, auf wesentliche Einzelschritte. Theoretisch ist dieses Tragsystem mit einem dreidimensionalen Rechenmodell, das mit dem Vortrieb auch zeitlich veränderlich ist, am besten zu erfassen. Praktisch rechtfertigt der sehr große rechnerische und zeitliche Aufwand diese Modelle nur für prinzipielle Untersuchungen der Tragwirkung, um andere Modellvorstellungen besser abzusichern. Vor allem die Berücksichtigung zeitlich abhängiger Einflüsse des Vortriebsgeschehens vergrößern den Berechnungsaufwand dieser Modelle erheblich [Ost91]. Üblich ist daher die Abschätzung der Tragwirkung mit ebenen Modellen. Dies sind entweder Scheibenmodelle im ebenen Dehnungszustand oder elastisch gebettete Stabzüge.

Zur Erläuterung wie das Vortriebsgeschehen im Lockergestein in einer ebenen Scheibenberechnung erfasst werden kann, sollen zunächst zwei Grenzfälle betrachtet werden (Abbildung 9.5).

Beim ersten Grenzfall „sofortiger Einbau der Sicherung“ (z.B. Rohrschirm) kann sich der Boden kaum entspannen. Die Ausbruchlasten, die sich aus dem Wegfallen der stützenden Wirkung des ausgebrochenen Bodens ergeben müssen fast ausschließlich von der Sicherung aufgenommen werden, die somit entsprechend stark beansprucht wird. Das Modell für diesen Grenzfall ist eine Scheibe mit Loch und Randverstärkung.

Beim zweiten Grenzfall erfolgt keine Sicherung und die Ausbruchlasten wirken dem entsprechend auf den unverstärkten Halbraum mit Loch. Dies führt zu wesentlich größeren Ver-

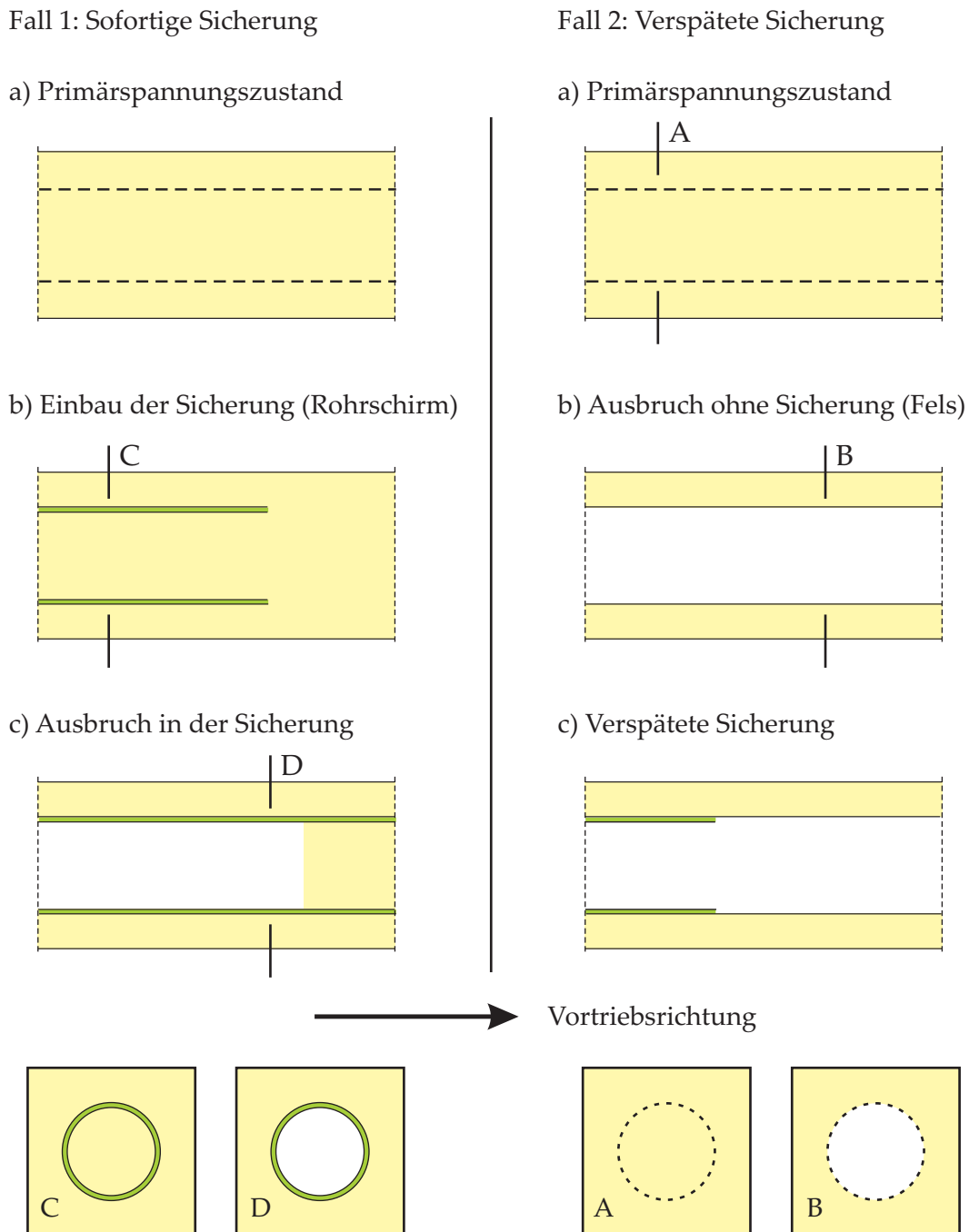


Abbildung 9.5: Grenzfälle des Tragverhaltens

formungen als beim ersten Grenzfall. Eine gegebenenfalls nachträglich eingebaute Sicherung bleibt so gut wie unbeanspruch.

Im unmittelbaren Bereich des Ausbruchgeschehens stellt sich ein räumlicher Spannungszustand ein, der dann in zunehmender Entfernung vom Ausbruchsbereich in einen ebenen Verformungszustand übergeht, da jeder Querschnitt bzw. Abschlag des Tunnelvortriebs die gleiche Entstehungs- und Belastungsgeschichte aufweist und sich somit die Querschnitte gegenseitig nicht mehr stützen können wie es im Ausbruchsbereich der Fall ist. Um diese Tragwirkung in einem Rechenmodell zu erfassen, ist es sinnvoll das Gebirge in Schnittebenen senkrecht zur Vortriebsrichtung zu zerlegen. Zur Beschreibung der oben dargestellten Grenzfälle ist daher

jeweils ein System, das aus zwei Scheiben, einer ungeschwächten Scheibe und einer Scheibe mit Loch besteht, erforderlich. Die ungeschwächte Scheibe simuliert den Primärspannungszustand, also den Spannungszustand der vor dem Ausbruch vorliegt. Die Scheibe mit Loch dient zur Beschreibung des Endzustandes in entsprechender Entfernung nach dem Vortrieb. Beim erstgenannten Grenzfall handelt es sich dabei um eine Scheibe mit Loch und Randverstärkung, während es sich beim zweiten um eine Scheibe mit Loch ohne Randverstärkung handelt.

Die beiden angesprochenen Grenzfälle sind allerdings eher theoretischer Natur. In Wirklichkeit ist man bei Vortrieben im Lockergestein bestrebt, die Verformungen vor allem unter bebautem Gelände durch raschen Einbau der Sicherungsmittel möglichst gering zu halten. Bei der Spritzbetonbauweise erreicht man den angestrebten verformungsarmen Vortrieb durch entsprechende Wahl der Querschnittsteilung und Abschlagslänge. Bei Schildvortrieben, der auch hier betrachteten Vortriebsmethode, soll die Möglichkeit der Verformung des Bodens vor allem durch eine möglichst geringe Entspannung an der Ortsbrust, einen möglichst geringen Überschneidung und ein zügiges Verpressen des Ringspaltes zwischen Tübbing und Boden bzw. ein zügiges Expandieren des Tübbingrings minimiert werden.

Die aus dem Vortriebsgeschehen resultierenden Bodenverformungen führen zu einer Aktivierung der Bodentragwirkung. Das wirkliche Tragverhalten liegt somit zwischen beiden zuvor beschriebenen Grenzfällen. Im Rahmen einer Scheibenberechnung kann dieses Verhalten durch eine Vorentspannung des auszubrechenden Bodens vor dem Einbau der Sicherung berücksichtigt werden. Im Weiteren wird dazu das von Schikora [Sch82], [Sch93] zur Berechnung von Vortrieben von Tunneln in Lockergesteinen vorgestellte Steifigkeitsverfahren verwendet. Zusätzlich wird das, bei dem hier betrachteten Schildvortrieb anstelle eine Schildschwanzverpressung eingesetzte, „*expanded lining*“ Verfahren berücksichtigt. Bei diesem Verfahren wird ein im Schutz des Schildmantels montierter Tübbingring nach dem vollständigen Verlassen des Schildmantels mittels Pressen bis zum Ausbruchsrand des Gebirges aufgeweitet (Abbildung 9.6 C und D). Die Expandiervorrichtung ist so konstruiert, dass nicht nur eine radiale Aufweitung stattfindet, sondern auch im seitlichen Sohlbereich eine Fuge zwischen den Tübbingern erzeugt wird. Das Verfahren benötigt normalerweise Böden, die aufgrund ihrer Eigenfestigkeit keine Stützung des Ausbruchsquerschnitts benötigen.

Grundlage des Steifigkeitsverfahrens ist es, die räumlich und zeitlich veränderliche Tragwirkung des Bodens näherungsweise durch eine Reduzierung des Elastizitätsmoduls des Bodens um einen Faktor α im Ausbruchsquerschnitt zu berücksichtigen. Die Berechnung erfolgt generell für einen Vollausbuch in drei Schritten und im speziellen Fall des „*expanded lining*“-Verfahrens wie in Abbildung 9.6 dargestellt in vier Schritten.

Mit der **ersten Scheibe** wird der Primärspannungszustand, welcher im ungestörten Boden vor der Ortsbrust vorliegt, erfasst. Die vorhandene Bodenschichtung mit den entsprechenden Bodenparametern ist zu berücksichtigen.

Bei der **zweiten Scheibe** wird das Vortriebsgeschehen durch das Aufweichen des Kerns erfasst. Dies geschieht mit dem Parameter α , wobei $\alpha = 1$ dem ersten Grenzfall und $\alpha = 0$ dem zweiten Grenzfall entspricht. Dieser Berechnungsschritt berücksichtigt somit alle Vorgänge, die sich aus dem Tunnelvortrieb ergeben. Die Steifigkeit des weichen Kerns ist in diesem Fall vom Überschneidung des Schneidrades, der Vortriebsgeschwindigkeit und natürlich von der Bodenbeschaffenheit abhängig. Die in der Rechnung gewählte Steifigkeit des weichen Kerns erfordert viel Erfahrung und muss durch Messwerte überprüft werden. Bei einiger Erfahrung ist es jedoch möglich, mit oberen und unteren Grenzwerten zu arbeiten. Im vorliegenden Fall sind Abminderungen des Bodens im Bereich des Tunnelquerschnitts auf 10% bis 20% realistisch. Für die folgende Berechnung wird daher eine Abminderung auf 20% angenommen.

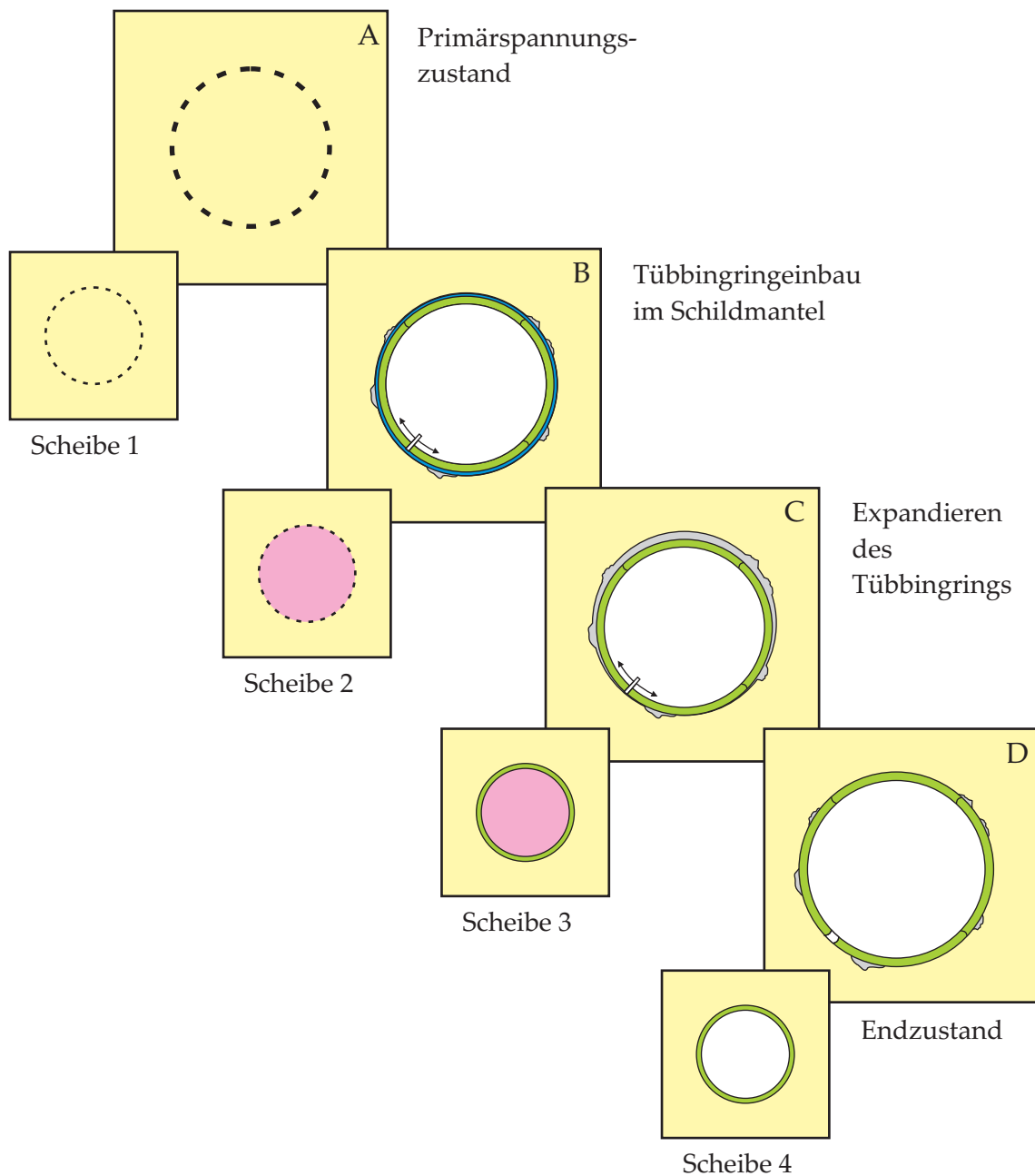
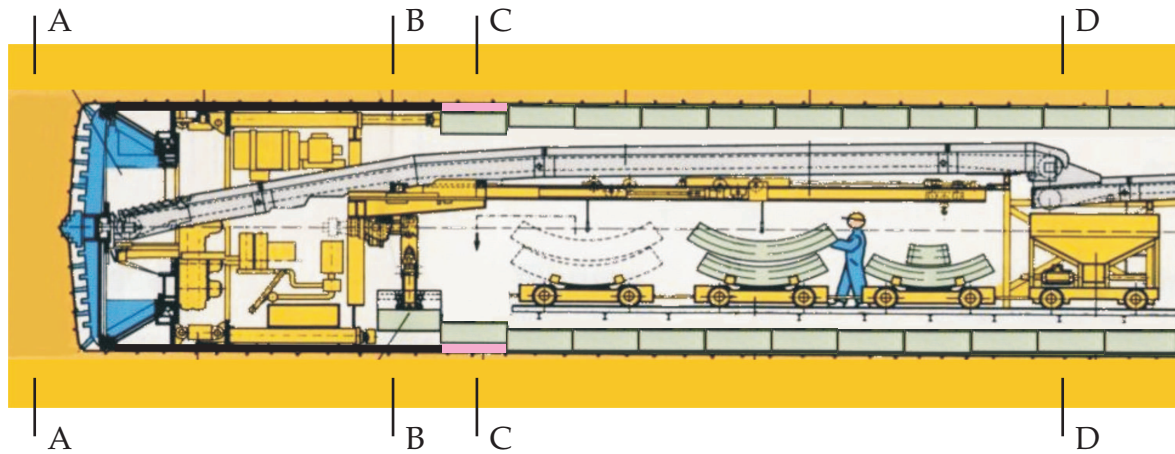


Abbildung 9.6: Rechenmodell - Schildvortrieb mit „expanded lining“ Verfahren

Die **dritte Scheibe** dient der Simulation des Expandiervorgangs und ist nur in diesem speziellen Fall erforderlich. Das Expandieren des Tübbingrings erfolgt nach dem völligen Herauspresen des Tübbingrings aus dem Schildmantel. Zwischen dem Schildmantel und den schon expandierten Tübbingringen bildet sich im Boden ein räumliches Traggewölbe, so dass ein Expandieren des den Schildmantel verlassenden Tübbingrings möglich ist. Rechentechnisch wird dieser Zustand durch eine Scheibe mit weichem Kern und Randverstärkung (Tunnelschale) simuliert. Dieses Modell entspricht der beschriebenen räumlichen Tragwirkung.

Die **vierte Scheibe** beschreibt den Endzustand des fertigen Tunnels. Bei gleichmäßigem Vortrieb und konstanten Bodeneigenschaften haben alle Querschnitte die gleiche Entstehungs- und Belastungsgeschichte durchlaufen. Dieser Zustand entspricht exakt einem ebenen Verformungszustand und kann durch eine Scheibe mit Loch und Randverstärkung erfasst werden. Die Randverstärkung entspricht dem Tübbingring. Die in der Randverstärkung errechneten Normalkräfte und Momente entsprechen der maximalen Beanspruchung des Tübbingrings. Beim Schildvortrieb stellt sich dieser Zustand in einer Entfernung von etwa ein bis zwei Tunneldurchmessern nach dem Schildschwanz ein.

Mit den beschriebenen vier Scheibenberechnungen können die wesentlichen Merkmale des Vortriebs erfasst werden.

9.2.2 Berechnung der Tunnelschale

Der zu berechnende Tunnel wird mit einer Tunnelbohrmaschine aufgeföhren und mit Stahlfaserbetontübbingungen gesichert. Ein Tübbingring besteht aus vier untereinander nicht verschraubten Segmenten mit einer Dicke von $12,5\text{ cm}$. Anstelle einer Ringschwanzverpressung erfolgt ein Expandieren der Tübbingringe gegen den anstehenden Boden. Im Bereich der Firste muss eine Rollkieslage berücksichtigt werden. Während des Vortriebs, kann es beim Lösen des Gebirges durch das Schneidrad dazu kommen, dass die Rollkieslage angeschnitten wird und der Rollkies im Bereich des Schneidrades, einschließlich der angrenzenden Böschungen, ausläuft (Abbildung 9.7). Die stützende Wirkung des Bodens wird somit im Bereich der Firste stark vermindert bzw. geht ganz verloren. Durch diesen ungünstigen Fall steigt das sich aus einer linear elastischen Berechnung ergebende Moment in der Tunnelschale im Bereich der Firste so stark an, dass die Tragfähigkeit des Querschnitts überschritten wird. Der Begriff „linear“ bezieht sich dabei ausschließlich auf die Tunnelschale. Ein Nachweis für den Grenzzustand der Tragfähigkeit ist folglich nur durch eine nichtlineare Berechnung unter Ausnutzung der Umlagerungsmöglichkeiten möglich.

Die Berechnung erfolgt nach dem vorgestellten Steifigkeitsverfahren mit einem Scheibenmodell im ebenen Dehnungszustand. Für die Modellierung des Bodens werden vierknotige bilineare Verschiebungselemente verwendet. Die Beschreibung des nichtlinearen Materialverhaltens des Bodens erfolgt mit einem elasto-plastischen Materialgesetz nach *Drucker-Prager*. Die Tunnelschale wird mit zweiknotigen geschichteten Balkenelementen diskretisiert. Durch den Aufbau aus mehreren Schichten ist es möglich diese Elemente in Kombination mit dem nichtlinearen Materialgesetz für Stahlfaserbeton zu verwenden. Die Materialparameter des Stahlfaserbetons **C 35/45 F 1,2/1,0 XC 0** sind in Tabelle 9.1 zusammengefasst.

Die Rollkieslage und die daraus resultierende verminderte Stützwirkung ist ebenfalls in das Berechnungsmodell zu integrieren. Bei der Berechnung des Primärzustandes (Scheibe 1) muss die Rollkieslage in die Bodenschichtung eingearbeitet werden. Im zweiten Lastfall (Scheibe 2), der den Ausbruch erfasst, muss der beschriebene Störbereich in der Firste (Abbildung 9.7) entfernt werden und durch einen sehr weichen Boden, der verbleibendes äußerst aufgelockertes

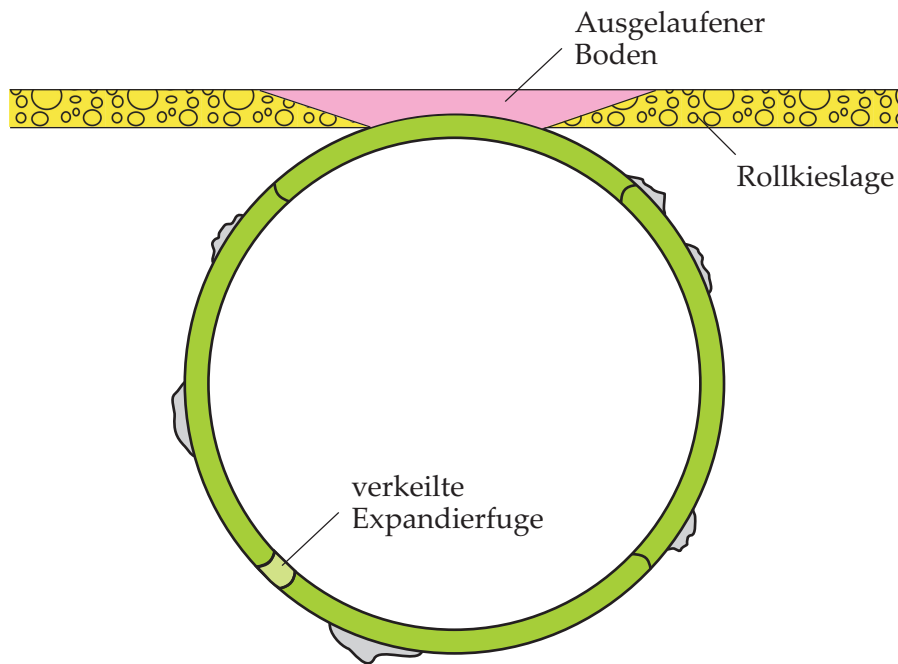


Abbildung 9.7: Rollkieslage im Bereich der Firste

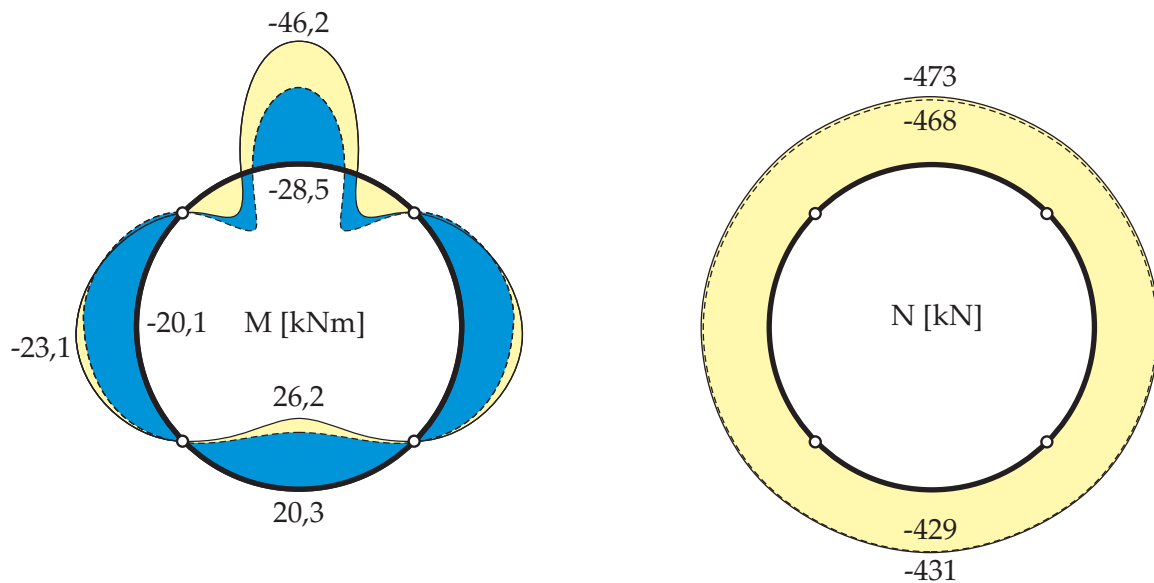
Material simuliert, ersetzt werden. Der dritte Lastfall (Scheibe 3) entspricht dem Expandiervorgang. Der 1,2 m breite Tübbingring wird mit 200 kN gegen den Boden expandiert, so dass im Tübbingring durch den Widerstand des Bodens eine Normalkraft von etwa 200 kN entsprechend der Expandierkraft entsteht.

Entsprechend Gleichung 9.2 muss der Tragwiderstand des Systems R um den Faktor $\gamma = \gamma_R \cdot \gamma_G = 1,4 \cdot 1,35 = 1,89$ über dem charakteristischen Wert der maßgebenden Einwirkungskombination E_k bzw. den Einwirkungen des Gebrauchszustandes liegen. Bei einer nichtlinearen Berechnung ist es daher nicht erforderlich, einzelne Teilsicherheitsbeiwerte zu berücksichtigen, sondern es können die γ -fachen Lasten auf das System aufgebracht werden. Im Rahmen der Tunnelberechnung kann die Laststeigerung durch den Ansatz der γ -fachen Wichte des Bodens erreicht werden.

In Abbildung 9.8 sind die sich aus der linearen und nichtlinearen Berechnung für den Endzustand (Scheibe 4) ergebenden Momenten- und Normalkraftverläufe gegenübergestellt. Die zur Lastabtragung erforderlichen Normalkräfte unterscheiden sich nur unwesentlich. Die hohe Momentenbelastung speziell im Bereich der Firste hingegen wird bei der nichtlinearen Berechnung aufgrund der reduzierten Steifigkeit stark abgebaut bzw. umgelagert. Aber auch im

Materialparameter						
E	=	33300 [MN/m ²]	ν	=	0,2	[–]
f_{cm}	=	25,29 [MN/m ²]	G_c	=	0,03	[MNm/m ²]
f_{ctm}	=	2,82 [MN/m ²]	G_{f1}	=	$8,30 \cdot 10^{-5}$	[MNm/m ²]
f_{ctm1}	=	1,02 [MN/m ²]	G_{f2}	=	$9,0 \cdot 10^{-3}$	[MNm/m ²]

Tabelle 9.1: Materialparameter des Stahlfaserbetons der Tunnelschale



Spannungsverlauf:

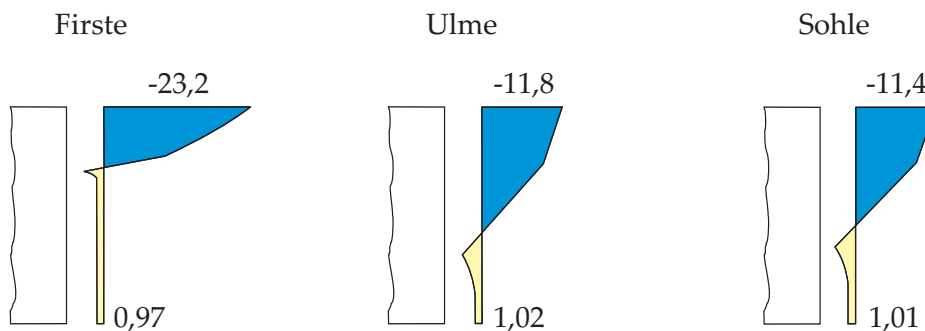


Abbildung 9.8: Momenten- und Normalkraftverläufe in der Tübbingschale bei linearer und nichtlinearer Berechnung für γ -fache Lasten

Ulmen- und Sohlbereich sind wie aus den Spannungsverläufen in Abbildung 9.8 hervorgeht die Querschnitte gerissen und somit die Biegesteifigkeit herabgesetzt.

Hieraus ist das für Tunnel im Lockergestein typische Tragverhalten zu erkennen [ST05]. Wird die Biege- und Dehnsteifigkeit der Tunnelschale erheblich vermindert, so ändert sich die Normalkraftverteilung nur unwesentlich, während die Momente erheblich reduziert werden. Selbst wenn an Stellen großer Biegemomente Gelenke eingeführt werden, ist weiterhin ein Gleichgewichtszustand möglich ohne dass sich die Normalkräfte nennenswert ändern. Dieses Tragverhalten wird durch die stützende Wirkung des Bodens und die geringen Abweichungen von der Stützlinie ermöglicht. Im Rahmen von Tragfähigkeitsuntersuchungen zeigt sich, dass die Normalkräfte annähernd proportional zur Last anwachsen. Die Momente hingegen werden bei der Laststeigerung über den Gebrauchszustand hinaus durch die abnehmende Biegesteifigkeit stark umgelagert.

Alternativ zu dem beschriebenen Vorgehen, für das ein FE-Programm mit entsprechendem Materialgesetz für Stahlfaserbeton und den geeigneten Elementen zur Verfügung stehen muss, sei im Folgenden eine auf einer linearen Tunnelschalenberechnung basierende Möglichkeit erwähnt. Der Begriff linear bezieht sich dabei nur auf das Materialverhalten der Tunnelschale und nicht auf das des Bodens. Im Rahmen eines iterativen Vorgehens werden zu den Schnittgrößen der Tunnelschale, die sich aus der linearen Berechnung ergeben, in einem ex-

ternen Schritt die zugehörigen Querschnittssteifigkeiten ermittelt und für eine erneute lineare Berechnung verwendet. Dieser Vorgang ist so lange zu wiederholen, bis sich die Steifigkeiten und Schnittgrößen nicht mehr nennenswert ändern.

Für die Berechnung der tatsächlichen Querschnittssteifigkeit muss der mit den vorgegebenen äußeren Schnittgrößen im Gleichgewicht stehende innere Spannungs- und Dehnungszustand gefunden werden. Hierfür stehen unterschiedlichste Methoden zur Verfügung. In [SM03] wird im Rahmen der Biegebemessung von Stahlfaserbeton und stahlfaserverstärktem Stahlbeton ein auf Optimierungsmethoden basierendes Verfahren vorgeschlagen. Die Optimierungsaufgabe kann dabei mit einem praxisüblichen Tabellenkalkulationsprogramm (EXCEL) gelöst werden. Der Berechnung der inneren Kräfte sind die in der DIN 1045-1 [DIN01] und dem DBV-Merkblatt [DBV01] angegebenen Spannungs-Dehnungslinien zugrunde zu legen.

Der Autor dieser Arbeit hat mit einem Verfahren, das auf einem geschichteten Querschnitt beruht, gute Erfahrungen gemacht. Hierbei wird zur Bestimmung der inneren Kräfte ein aus vielen Schichten bestehender Querschnitt angenommen. Für jede Schicht lässt sich für den vorgegebenen Dehnungszustand die zugehörige Spannung aus der Spannungs-Dehnungsbeziehung ermitteln. Aus den Spannungen wiederum ergeben sich die inneren Kräfte. Der Dehnungszustand ist dabei zu variieren bis die inneren Kräfte und die äußeren Schnittgrößen im Gleichgewicht stehen. Für diesen Iterationsprozess wird das von Nitschke [Nit98] vorgeschlagene Vorgehen verwendet. Als Berechnungshilfsmittel kann durch dieses Vorgehen ein Momenten-Normalkraft-StEIFIGKEITSDIAGRAMM ermittelt werden. In Abbildung 9.9 ist beispielhaft ein solches Diagramm für einen Stahlfaserbeton C 35/45 F 1,2/1,0 XC 0 dargestellt. Mit der bezogenen Normalkraft n und dem e/h -Verhältnis als Eingangsparameter kann der Reduktionsfaktor f , der das Verhältnis von elastischer zu tatsächlicher Querschnittssteifigkeit angibt, abgelesen werden.

Basierend auf diesen modifizierten Steifigkeiten kann eine neue Tunnelberechnung durchgeführt werden. Dieses Vorgehen ist so lange zu wiederholen, bis die Schnittgrößen und Steifigkeitsänderungen von einem Schritt zum nächsten unter der geforderten Toleranzgrenze liegen.

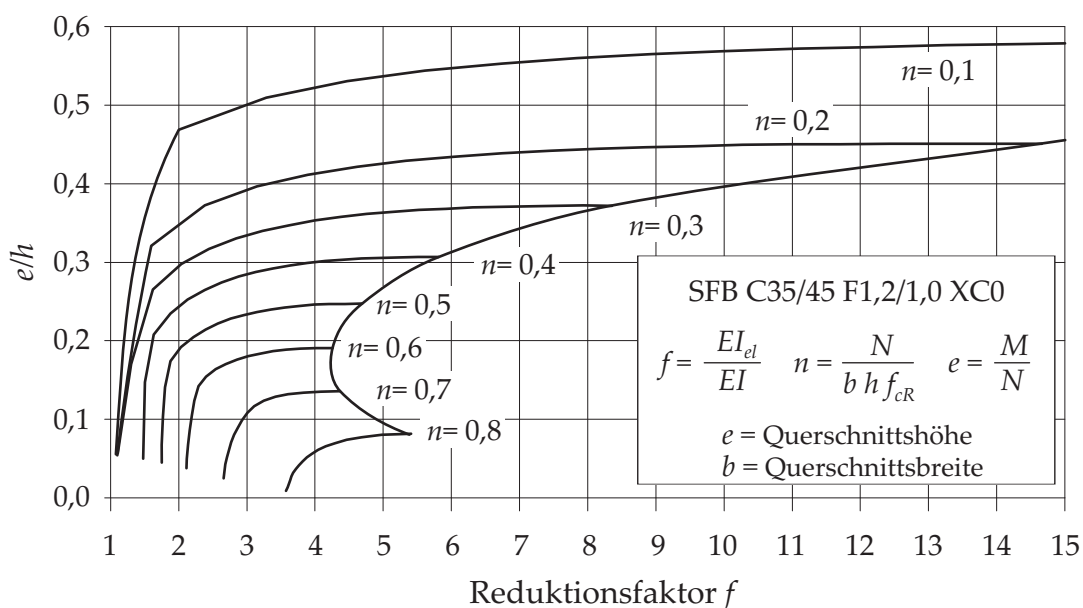


Abbildung 9.9: Reduktionsfaktor f der elastischen Biegesteifigkeit

Es muss erwähnt werden, dass sich die hier dargestellten Untersuchungen ausschließlich auf den Grenzzustand der Tragfähigkeit beziehen. Dient die Tunnelchale nicht nur als temporäre Sicherung, wie in diesem Fall, sind zusätzlich alle sich aus der Gebrauchstauglichkeit ergebenden Anforderungen zu erfüllen. Häufig zeigt sich in der Praxis, dass gerade die Gebrauchstauglichkeitsnachweise für die Tunnelchale bemessungsrelevant werden.

9.3 Tübbing im Bauzustand

Im Anschluss an die im letzten Abschnitt durchgeführten Untersuchungen der Tübbinge unter einer Belastung entsprechend der im Tunnel vorgesehenen Stützfunktion wird im Folgenden die Belastung bei der Montage betrachtet. Hier stützt sich die Tunnelbohrmaschine für den Vortrieb mit hydraulischen Pressen, wie in Abbildung 9.10 dargestellt, auf die bereits erstellten Tunnelringe ab. Die Pressenkräfte werden über einen Pressendruckring in die Tübbinge eingeleitet. Längs dieses Druckrings kann von einer konstanten Lasteinleitung ausgegangen werden. Bedingt durch das „*expanded lining*“-Verfahren kommt es dazu, dass sich der noch nicht expandierte Tübbingring auf den bereits expandierten Ring abstützt. Die sich daraus ergebenden exzentrischen Lagerungsbedingungen müssen bei der folgenden Untersuchung berücksichtigt werden.

Für die Berechnung wird ein einzelner Tübbing aus dem nicht expandierten Ring mit 2352 achtknotigen Volumenelementen modelliert. Um den Spannungszustand in Dickenrichtung mit ausreichender Genauigkeit erfassen zu können, werden sechs Elemente in dieser Richtung verwendet. Die Lagerungsbedingungen zu den angrenzenden Tübbingungen werden mittels elastischer Bettung idealisiert. Abbildung 9.11 zeigt die Randbedingungen in den Längsfugen

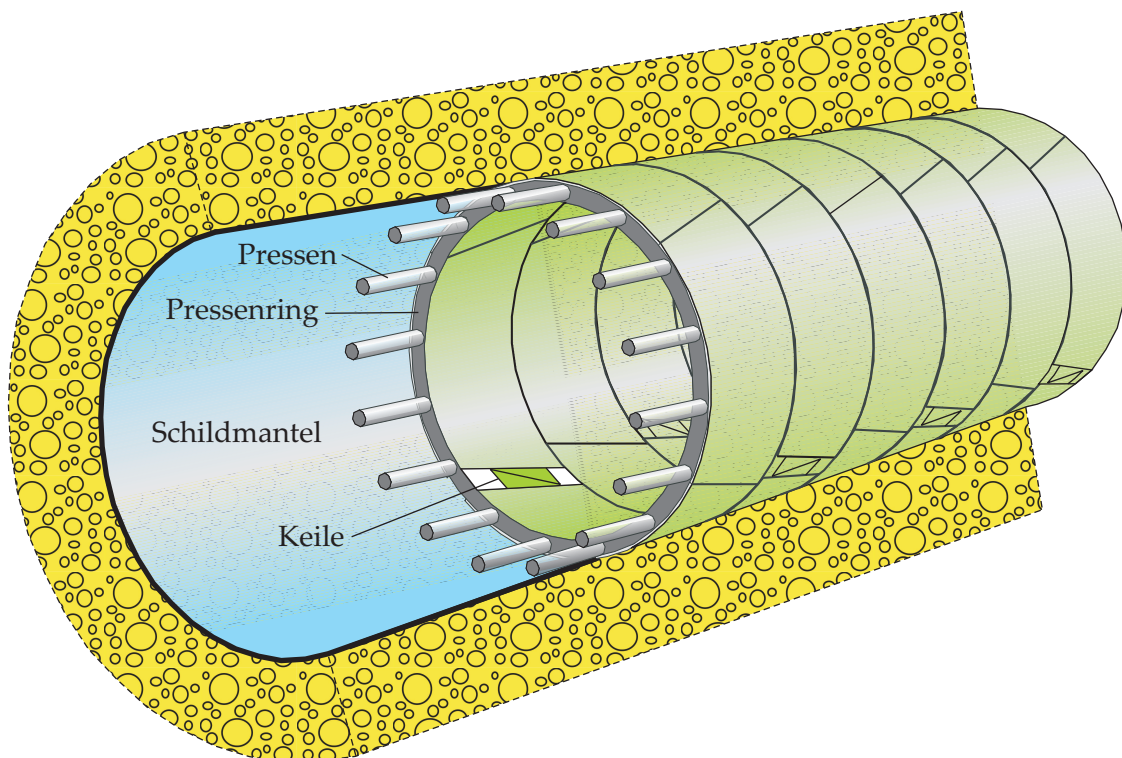
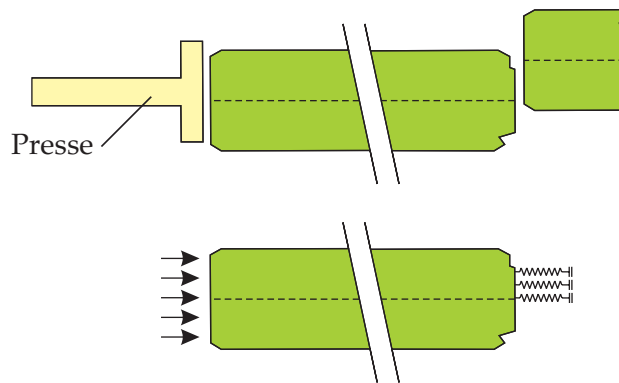


Abbildung 9.10: Schematische Darstellung von Schildmantel, Pressen, Druckring und Tübbingringen

Querfuge mit exzentrischer Lagerung und Bettung:



Längsfuge mit Bettung:



Rechenmodell:

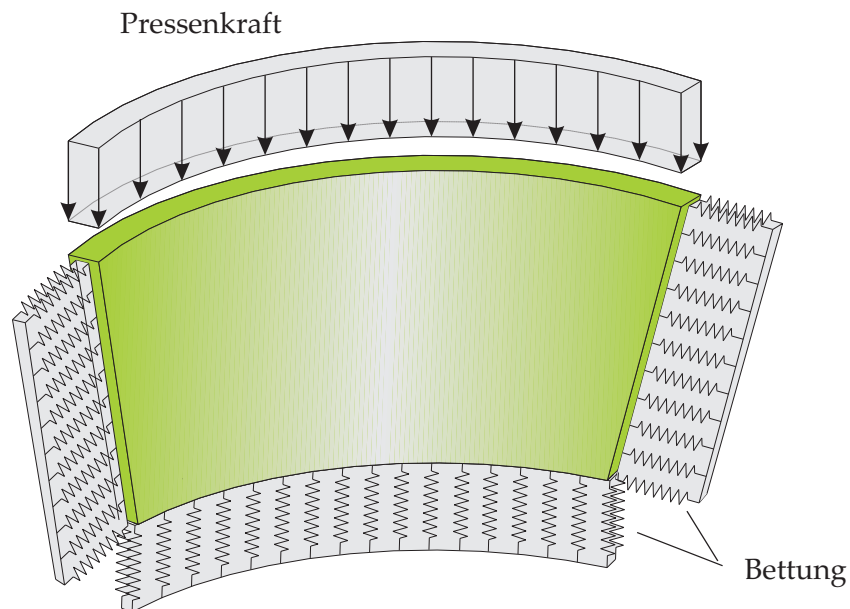
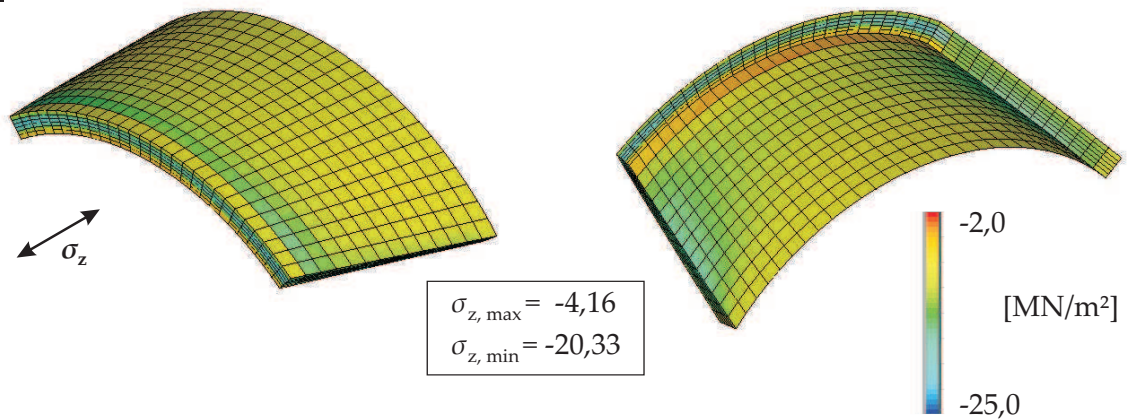


Abbildung 9.11: Randbedingungen der Längs- und Querfugen und Rechenmodell zur Beanspruchung des Tübbings durch die Pressenkraft während des Vortriebs

und in der Querfuge. Um den Einfluss der Lagerungsannahmen, einzugrenzen wurden unterschiedlichste Bettungsmoduli und Reibungsansätze untersucht. Hier zeigte sich kein wesentlicher Einfluss der Bettungsmoduli. Reibungskräfte hingegen wirkten zum Beispiel im Bereich des Pressendruckrings äußerst stabilisierend. Das Rechenmodell mit der Beanspruchung der

linear:



nicht-linear:

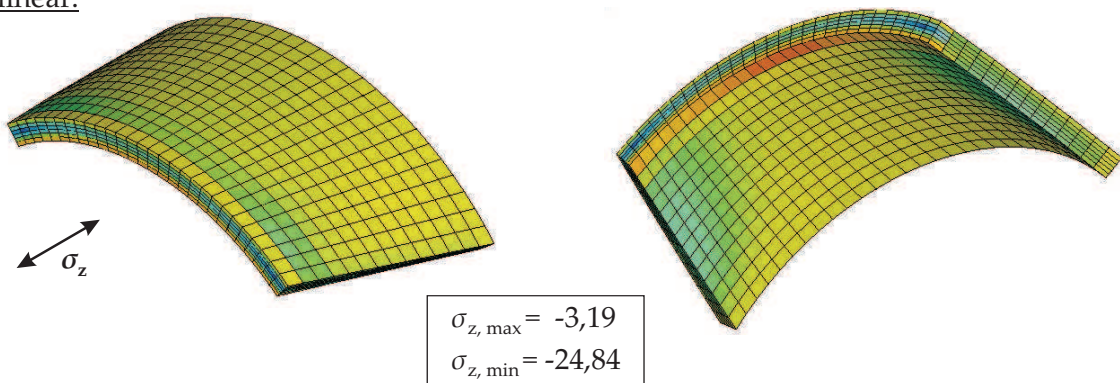


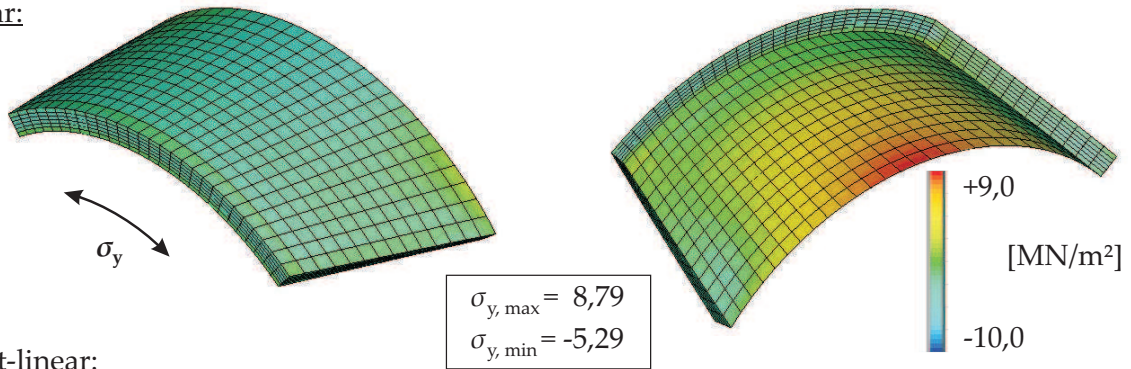
Abbildung 9.12: Verlauf der Spannungen σ_z in Tunnellängsrichtung bei linearer und nichtlinearer Berechnung für $\gamma_R = 1,4$

durch den Druckring aufgebrachten Pressenkräfte ist ebenfalls in Abbildung 9.11 dargestellt. Die folgenden Berechnungen erfolgen unter der Annahme einer Bettung mit einer Exzentrizität von 4 cm und 20 % Reibung auf der dem Vortrieb abgewandten Tübbingseite.

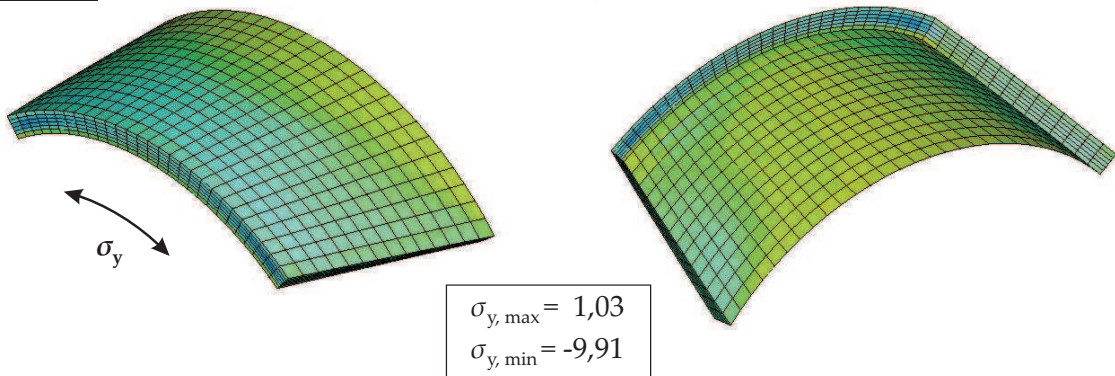
Die linear-elastische Berechnung mit einer zentrischen Pressenkraft, die zu einer Belastung von 840 kN/m längs des Tübbingrandes führt, ergibt eine maximale Zugspannung von 8,79 MN/m². Diese Spannung liegt weit über der Zugfestigkeit bzw. der Nachrissfestigkeit des Stahlfaserbetons und ein Nachweis für den Grenzzustand der Tragfähigkeit ist auf dieser Basis nicht möglich. In Wirklichkeit zeigt sich, dass die Spannungsspitzen durch lokale Rissbildung in dem hochgradig statisch unbestimmten System abgebaut und umgelagert werden können. Nur eine nichtlineare Berechnung ist in der Lage dieses Verhalten richtig zu erfassen. Bezug nehmend auf das DBV-Merkblatt [DBV01] wird hierfür die Belastung um den Faktor $\gamma_R = 1,4$ gesteigert. Die Berücksichtigung eines Sicherheitsfaktors auf der Lastseite ist in diesem Fall nicht erforderlich, da die Pressenkraft auf den angegebenen Wert beschränkt ist.

Die Ergebnisse der linear-elastischen und der nichtlinearen Berechnung sind in Abbildung 9.12, 9.13 und 9.14 zusammengestellt. In Tunnellängsrichtung unterscheiden sich die Spannungen, bei denen es sich um Druckspannungen handelt nur unwesentlich. In Tangentialrichtung hingegen ist der Unterschied zwischen linearer und nichtlinearer Berechnung sehr deutlich. Die Rissbildung und die damit verbundene erhöhte Gesamtdehnung, wie in Abbildung 9.14 dargestellt, führen zum Abbau der Zugspannungen. Die Zugdehnungen überschreiten dabei nicht die für den Grenzzustand der Tragfähigkeit als Grenzwert im DBV-Merkblatt [DBV01] angegeben 10 ‰. Ein Nachweis des Grenzzustandes der Tragfähigkeit ist folglich nur durch die Verwendung eines nichtlinearen Materialgesetzes möglich.

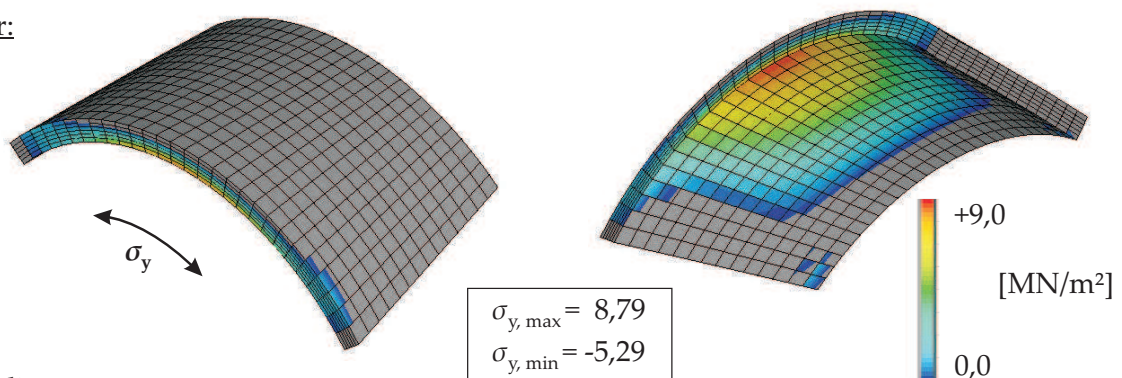
linear:



nicht-linear:



linear:



nicht-linear:

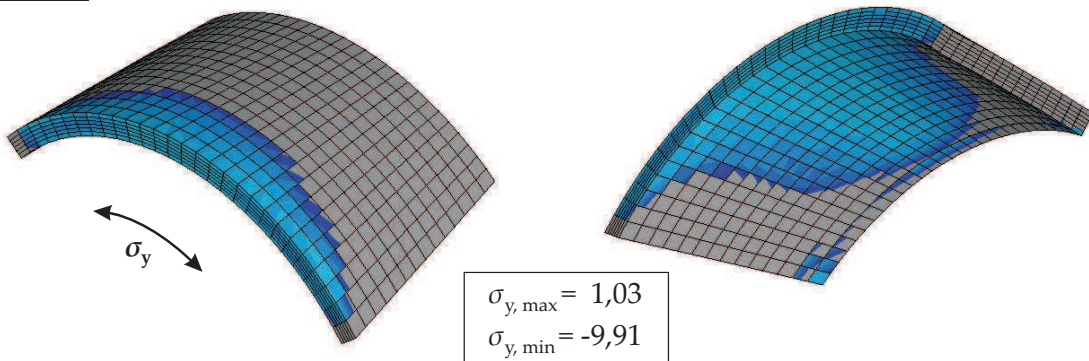
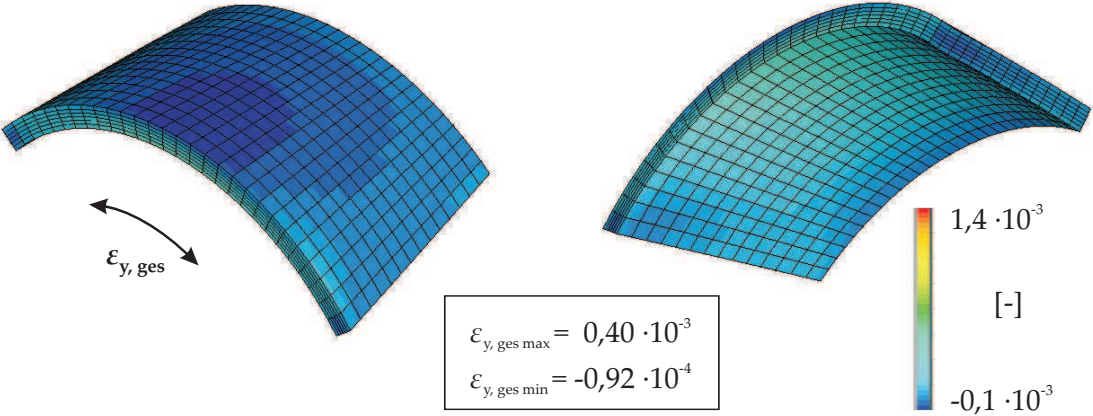
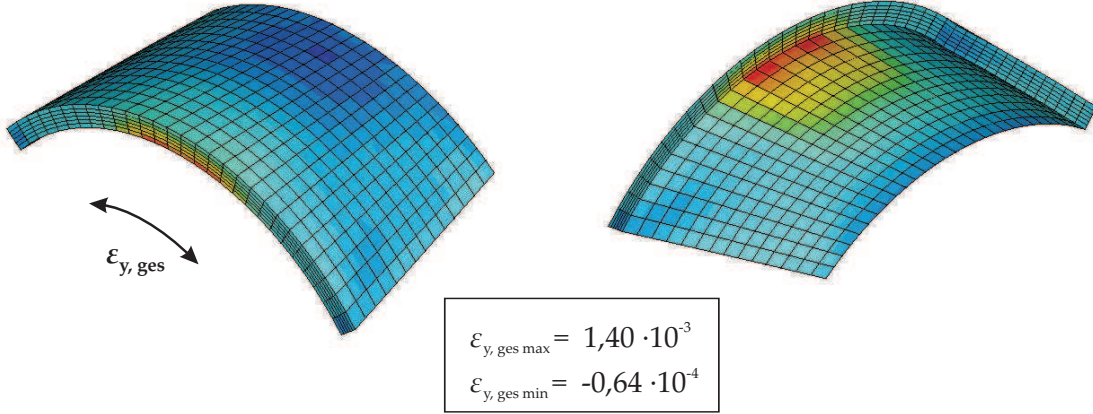


Abbildung 9.13: Verlauf der Spannungen σ_y in Tangentialrichtung bei linearer und nichtlinearer Berechnung für $\gamma_R = 1,4$ (Gesamtspannungen und Zugspannungen)

linear:



nicht-linear:



Entfestigung infolge Zug $\bar{\epsilon}_{Rp}$:

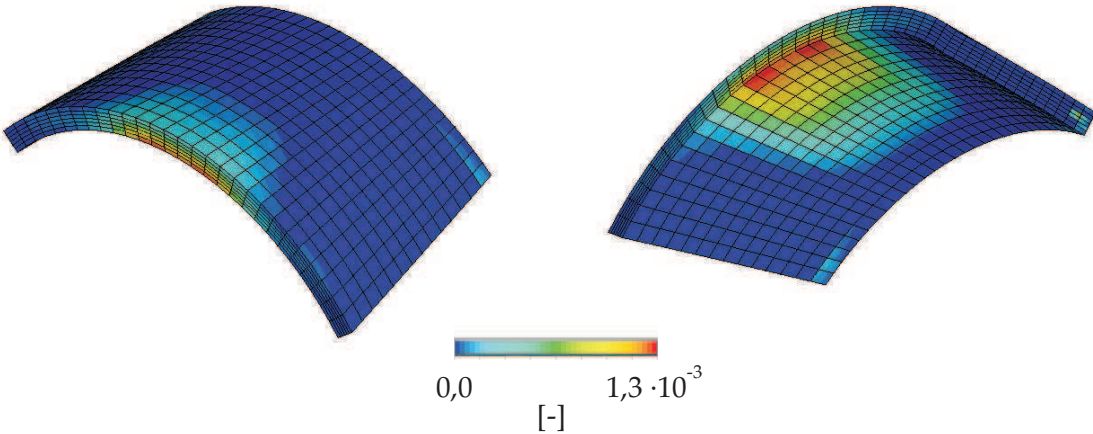


Abbildung 9.14: Verlauf der Gesamtdehnung ϵ_y in Tangentialrichtung und Verlauf des Zugentfestigungsparameters $\bar{\epsilon}_{Rp}$ bei linearer und nichtlinearer Berechnung für $\gamma_R = 1,4$

Kapitel 10

Der Modified Tension Test (MTT)

Der MTT basiert auf einer Entwicklung von Blümel [Blü00] am Institut für Felsmechanik und Tunnelbau der Technischen Universität Graz. Der Versuch dient hier der Bestimmung der Zugfestigkeit von Festgesteinen. Als Versuchskörper wird eine zylindrische Probe verwendet, die von oben und unten mit zwei zentralen Bohrungen unterschiedlichen Durchmessers überbohrt wird (Abbildung 10.1). Nach der Positionierung eines Belastungsringes unten und einer Belastungsscheibe oben wird über eine herkömmliche Druckprüfanlage die Last F auf die Probe aufgebracht und dadurch ein Zugspannungszustand im Ringraum erzeugt. Als Abmessungen für die Probekörper wird von Blümel ein Durchmesser von mehr als 100 mm und ein Höhe/Durchmesser-Verhältnis von ca. 1,5/1,0 vorgeschlagen.

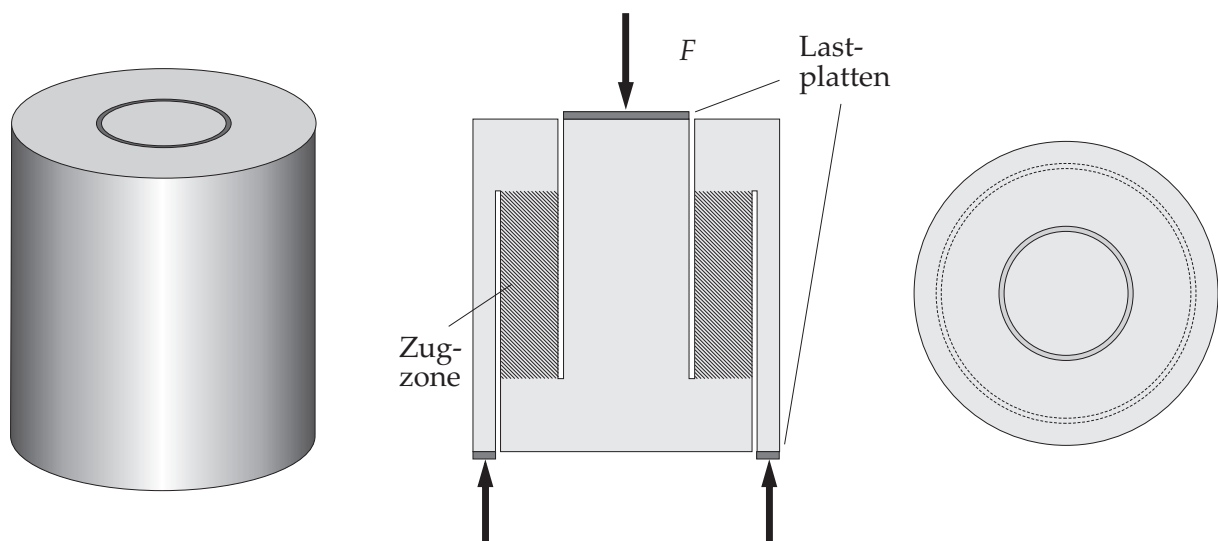


Abbildung 10.1: Probekörper und Belastung beim Modified Tension Test nach [Blü00]

Am Lehrstuhl für Ingenieurgeologie der Technischen Universität München wurden im Rahmen einer Diplomarbeit [Wol02] weitere Untersuchungen mit dem MTT durchgeführt. Im Vordergrund stand hier der Vergleich von Versuchsergebnissen des MTT mit anderen in der Geologie üblichen indirekten Zugversuchen, wie dem Biegezugversuch, dem Brazilian-Test und dem Pointload-Versuch. Die Versuche wurden an Proben aus Quarzporphyr, Granitmylonit und Quarzkonglomerat durchgeführt.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde die Idee des MTT übernommen und auf die Untersuchung des Zugverhaltens von Stahlfaserbeton übertragen. Auf Grundlage numerischer Untersuchungen des komplexen Spannungszustandes des rotationssymmetrischen Probekörpers unter Ver-

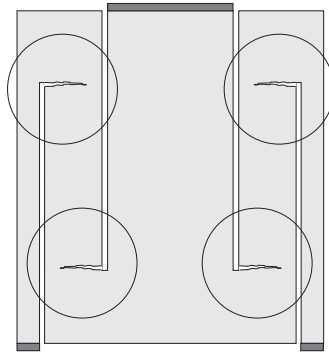


Abbildung 10.2: Versagen der Probe im Umlenkbereich

wendung des in dieser Arbeit entwickelten Materialgesetzes wurde die Geometrie des MTT modifiziert und den Anforderungen an Versuche mit Stahlfaserbeton angepasst. In einer Versuchsserie mit einem Stahlfasergehalt von 40 kg/m^3 wurden die theoretischen Überlegungen geprüft und verifiziert. Es zeigt sich, dass der neuartige MTT sehr gut geeignet ist, das einaxiale Zugverhalten von Stahlfaserbeton direkt zu bestimmen. Weitere Anwendungen, auch mit reinem Beton, erscheinen dem Autor als sinnvoll.

10.1 Geometrieentwicklung

Zur Zeit stellen direkte Zugversuche die einzige Möglichkeit dar, um direkt aus den Versuchsergebnissen auf das einaxiale Materialverhalten, ohne Umrechnungen und Annahmen schließen zu können. Die Durchführung direkter Zugversuche zeigt sich allerdings in der Praxis als nicht unproblematisch (Abschnitt 3.1). So ergibt sich beispielsweise ein erheblicher Einfluss der Lagerungsbedingungen auf die Versuchsergebnisse. Des Weiteren gestaltet sich die Realisierung der Lasteinleitung mittels Klemmung und Klebung als problematisch. Außerdem wird zur Durchführung direkter Zugversuche eine spezielle Zugprüfmaschine benötigt, an die zusätzlich hohe Ansprüche bezüglich Regeltechnik und Steifigkeit gestellt werden, um eine stabile Durchführung des Versuchs zu gewährleisten. Bei herkömmlichen indirekten Zugversuchen wie dem Biegezug- oder dem Spaltzugversuch, deren Durchführung sich in der Praxis einfach realisieren lässt, kann das einaxiale Zugverhalten dagegen nur indirekt und näherungsweise mittels Umrechnungen bestimmt werden.

Ziel des MTT ist es, die Vorteile direkter und indirekter Zugversuche zu vereinen. Zum einen ergibt sich beim MTT die Möglichkeit, das einaxiale Materialverhalten auf direktem Weg aus den Versuchsergebnissen zu bestimmen. Zum anderen kann der Versuch auf einfache Weise in einer herkömmlichen Druckprüfmaschine durchgeführt werden. Die Lasteinleitung der Druckkraft erfolgt mittels Druckringe. Aufwendige Klebungen und Klemmungen sind nicht notwendig.

Um beim MTT das einaxiale Materialverhalten direkt bestimmen zu können, muss allerdings in der Zugzone ein möglichst konstanter, homogener und ungestörter Zugspannungszustand vorliegen. Bei den Versuchen von Wolski [Wol02] zeigte sich jedoch ein vermehrtes Versagen der Probekörper an der oberen oder unteren Umlenkstelle zum Zugbereich (Abbildung 10.2) und somit Anzeichen für Spannungsspitzen in diesem Bereich. Um genauen Aufschluss über den Spannungszustand im Probekörper zu erhalten, wird der MTT mit einer FE-Berechnung simuliert. Für die Diskretisierung werden vierknotige Scheibenelemente mit einem rotations-symmetrischen Spannungszustand verwendet. Vereinfachend wird in einem ersten Schritt für

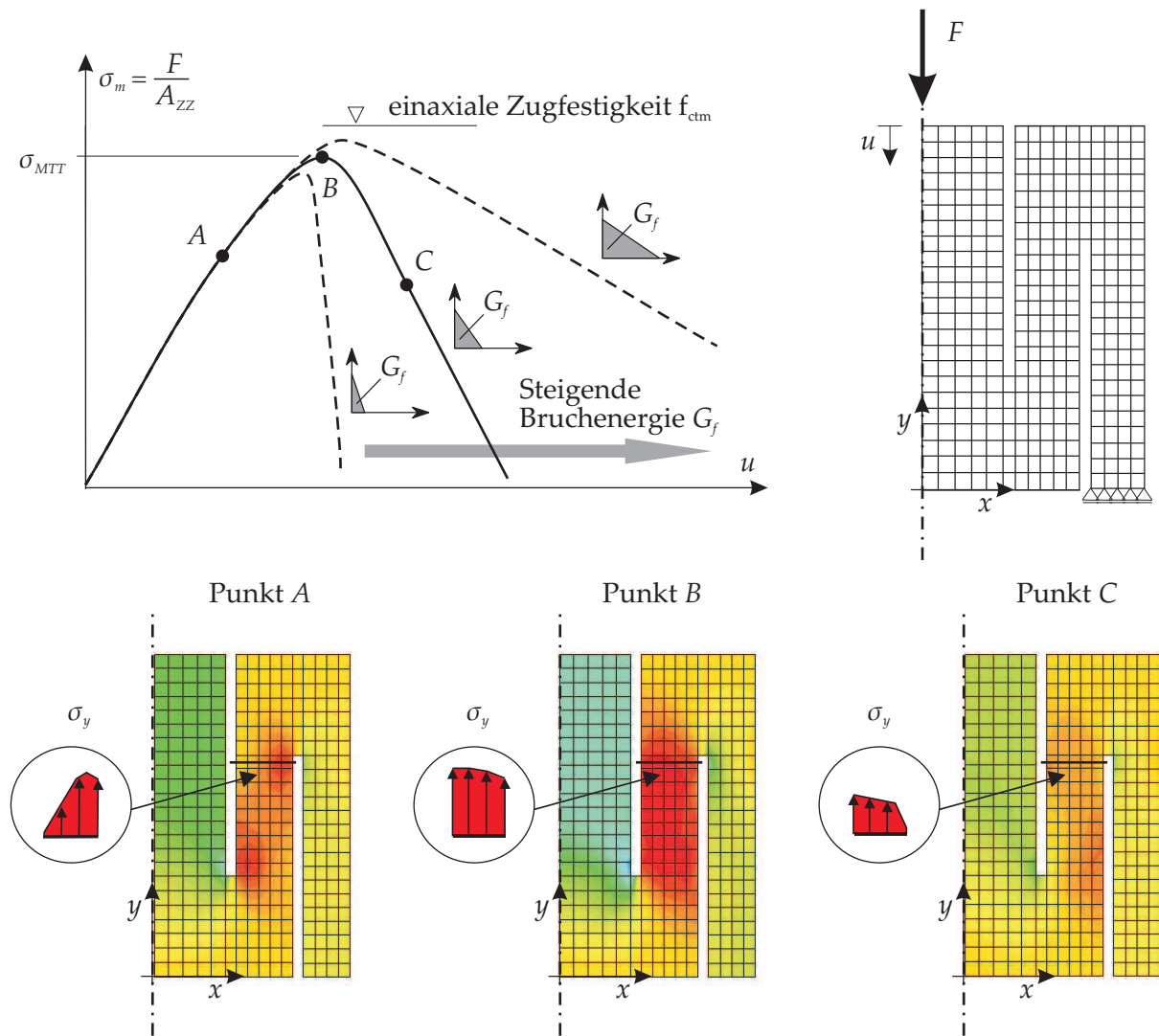


Abbildung 10.3: Statisches System und Ergebnisse der Finite-Elemente Berechnung

diese qualitativen Untersuchungen ein lineares Entfestigungsverhalten im Zugbereich angenommen. Die qualitativen Ergebnisse der Berechnung sind in Abbildung 10.3 zu sehen. Das Diagramm zeigt den Zusammenhang zwischen der mittleren Zugspannung σ_m und der vertikalen Verschiebung u . Die mittlere Spannung σ_m in der Zugzone berechnet sich aus der Prüflast F und Rissfläche A_{ZZ} der Zugzone zu

$$\sigma_m = \frac{F}{A_{ZZ}} = \frac{F}{\pi(r_a^2 - r_i^2)} \tag{10.1}$$

mit dem Außenradius r_i der inneren Bohrung und dem Innenradius r_a der äußeren Bohrung. Im unteren Teil der Abbildung 10.3 ist die Verteilung der σ_y -Spannungen im Probekörper vor dem Bruch (A), bei Erreichen der Maximallast (B) und im Nachbruchbereich (C) abgebildet. Vor dem Bruch (A) ist deutlich im Stegschnitt der lineare Spannungsverlauf mit einer Spannungsspitze auf der rechten Seite zu erkennen. Das entspricht genau der Stelle, an der auch in den Versuchen von Wolski [Wol02] das Versagen der meisten Proben zu beobachten war. Mit weiterer Laststeigerung wird die Spannungsspitze durch Umlagerungen ausgeglichen und es stellt sich ein annähernd konstanter Spannungsverlauf bei Erreichen der Maximallast ein. Die

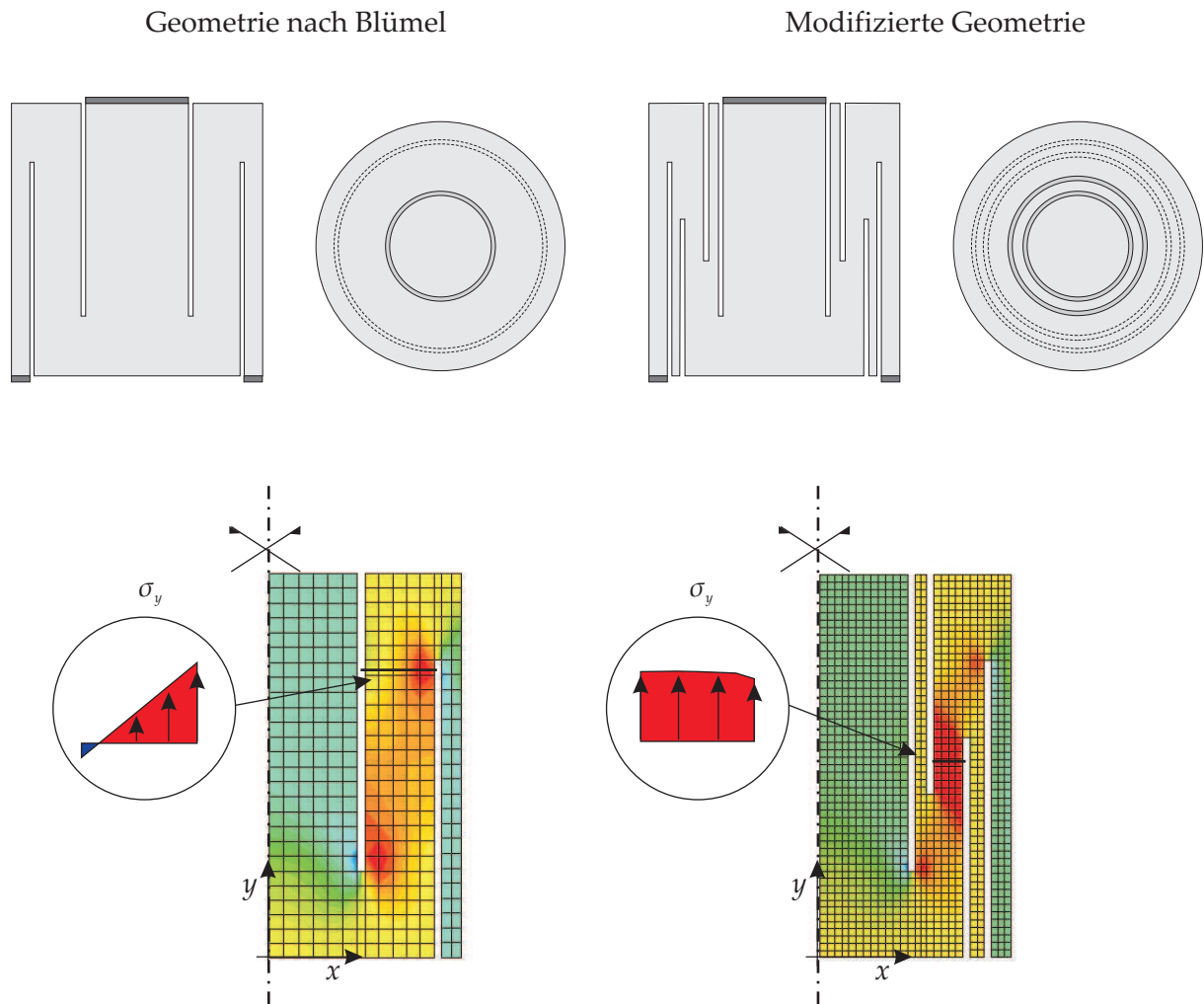


Abbildung 10.4: Spannungsverlauf mit der Geometrie nach Blümel [Blü00] und mit der modifizierten Geometrie

Umlagerungsmöglichkeiten sind hierbei stark von der Duktilität des Materials abhängig. Die maximale mittlere Zugspannung σ_{MTT} ist etwas kleiner als die der Berechnung zugrunde gelegte einaxiale Zugfestigkeit f_{ctm} des Materials und von der Duktilität, gekennzeichnet durch die Zugbruchenergie G_f , abhängig. Mit zunehmender Duktilität nähert sich aufgrund der zuvor bereits erwähnten Umlagerungsmöglichkeit der Spannungsspitzen im Umlenkbereich die maximale mittlere Spannung der einaxialen Zugfestigkeit an. Aufgrund des inhomogenen Spannungszustandes vor dem Bruch tritt das Versagen jedoch nicht wie gewollt an der Stelle des Steges mit der geringsten Festigkeit auf, sondern an den Umlenkstellen. Soll mit dem MTT lediglich die Zugfestigkeit abgeschätzt werden, ist die Geometrie des Probekörpers nach Blümel ausreichend. Wird der MTT hingegen dazu verwendet das gesamte einaxiale Zugverhalten, beispielsweise von Stahlfaserbeton genauer zu untersuchen, ist ein homogener, konstanter Spannungszustand im Steg auch in der Vor- und Nachbruchphase bzw. unabhängig von der Duktilität erforderlich und ein Versagen der Probe im Umlenkbereich muss vermieden werden.

Als Idee bietet es sich an, den mittleren Stegbereich, in dem ein weitgehend homogener, nicht durch die Umlenkbereiche gestörter Spannungszustand vorliegt, zu schwächen um ein Versagen der Probe in diesem Bereich herbeizuführen. Die Schwächung wird dabei wie in Abbildung 10.4 zu sehen durch zwei weitere Kernbohrungen, die die Fläche des mittleren Steg-

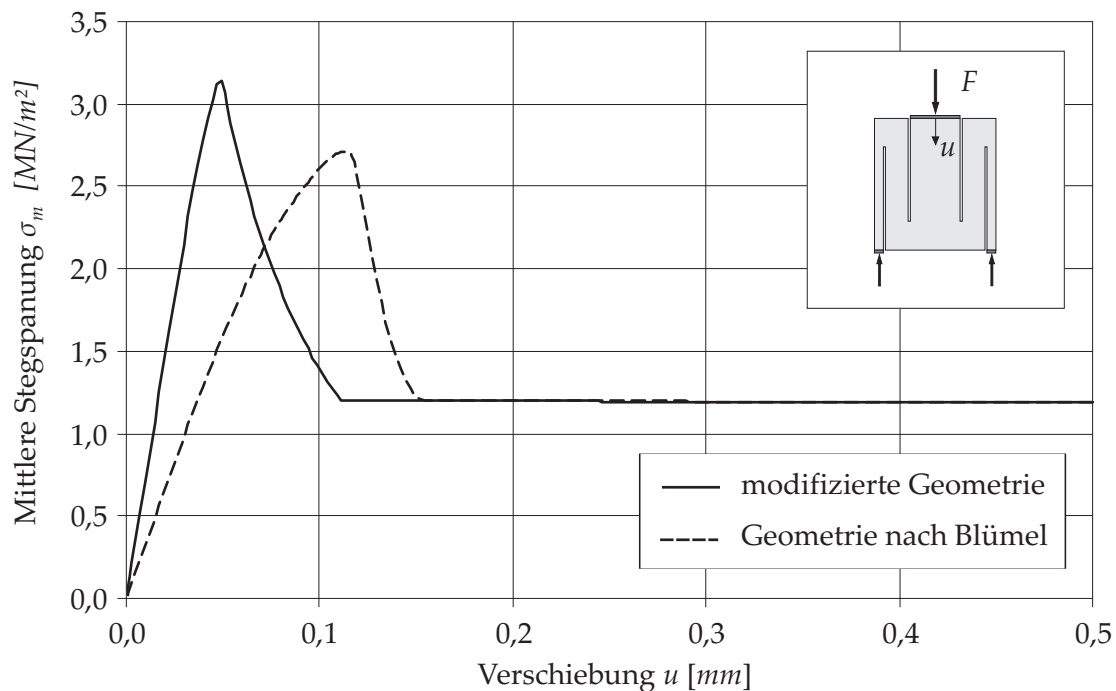


Abbildung 10.5: Berechnete Spannungs-Verformungsbeziehung des MTT

Materialparameter Zug			
f_{ctm}	=	3,0	$[MN/m^2]$
f_{ctm1}	=	1,5	$[MN/m^2]$
G_{f1}	=	$4,0 \cdot 10^{-4}$	$[MNm/m^2]$
G_{f2}	=	$4,0 \cdot 10^{-3}$	$[MNm/m^2]$

Tabelle 10.1: Materialparameter für das einaxiale Zugverhalten

bereichs verringern, realisiert. Diese Modifikation führt wie deutlich aus dem Verlauf der σ_y -Spannung in Abbildung 10.4 zu erkennen zu einem annähernd konstanten Zugspannungsverlauf im geschwächten Stegbereich.

Zum Vergleich werden beide Geometrien des MTT durch nichtlineare FE-Berechnungen simuliert. Dem Materialgesetz wird im Zugbereich die zweiteilige, exponentielle - lineare Spannungs-Rissöffnungsbeziehung für Stahlfaserbeton zugrunde gelegt. Die Materialparameter, die für einen Stahlfaserbeton mit etwa 40 kg/m^3 gelten, sind in Tabelle 10.1 angegeben. In Abbildung 10.5 sind die Berechnungsergebnisse in Form von Spannungs-Verformungskurve zu sehen, wie man sie bei der realen Versuchsauswertung erhält. Bei der angetragenen Spannung handelt es sich um die mittlere Spannung im Steg, die nach Gleichung 10.1 bestimmt wird. Für die modifizierte Geometrie ergibt sich ein annähernd linearer Verlauf der Spannungs-Verformungskurve bis zum Erreichen der Maximalspannung $\sigma_{MTT} = 3,15 \text{ MN/m}^2$. Diese entspricht fast genau der einaxialen Zugfestigkeit $f_{ctm} = 3,25 \text{ MN/m}^2$. Bei der nicht modifizierten Geometrie hingegen kommt es hier zu größeren Abweichungen vom linearen Kurvenverlauf. Dieses Verhalten lässt sich auf den nicht konstanten Spannungsverlauf im Steg zurückführen. Im Bereich der Spannungsspitzen kommt es bereits weit vor Erreichen der Maximalspannung zu Rissbildung und Umlagerungsvorgängen. Auch die berechnete Maximalspannung $\sigma_{MTT} = 2,71 \text{ MN/m}^2$ weicht mit 17% weit stärker von der einaxialen Zugfestigkeit ab. Das durch die Stahlfasern geprägte Nachrissverhalten kann mit beiden Geometrien genau bestimmt werden.

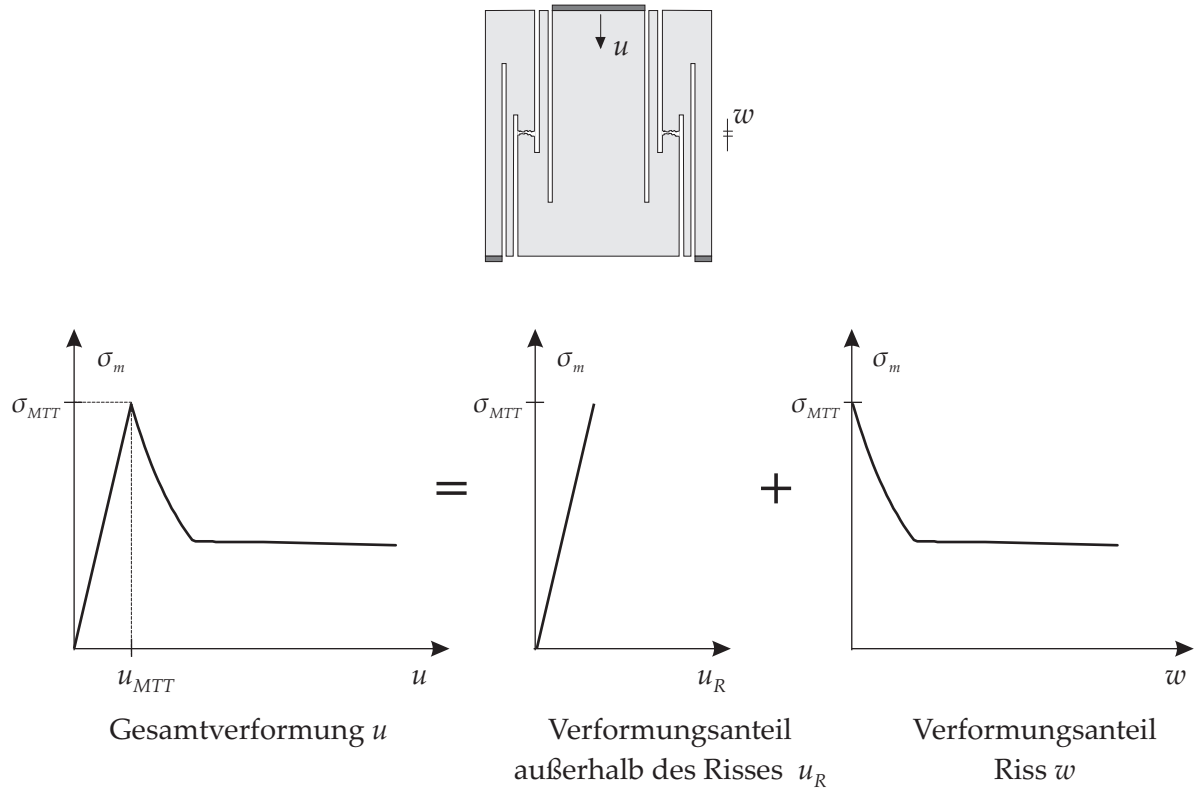


Abbildung 10.6: Ermittlung der Spannungs-Rissöffnungsbeziehung aus den MTT Versuchsergebnissen

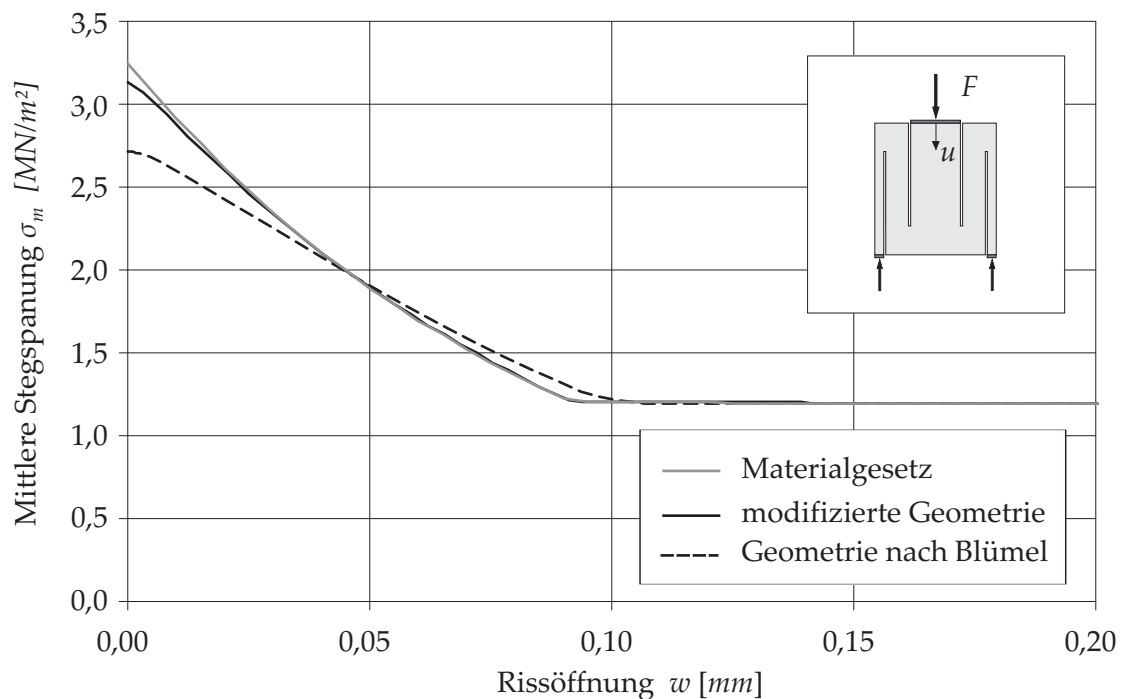


Abbildung 10.7: Aus der Spannungs-Verformungsbeziehung abgeleitete Spannungs-Rissöffnungsbeziehung

Zur Ermittlung der Spannungs-Rissöffnungsbeziehung aus den Versuchsergebnissen, die man in Form von einer σ_m - u -Beziehung erhält, muss von der Gesamtverformung u der zumeist elastische Verformungsanteil der Probe außerhalb des Risses abgezogen werden. Näherungs-

weise, unter der Annahme, dass vor dem Erreichen von σ_{MTT} noch keine Rissbildung auftritt, ergibt sich die Spannungs-Rissöffnungsbeziehung (Abbildung 10.6) zu:

$$w(\sigma_m) = u(\sigma_m) - \frac{u_{MTT}}{\sigma_{MTT}} \cdot \sigma_m \quad (10.2)$$

Die auf diese Weise aus den Berechnungsergebnissen bestimmten Spannungs-Rissöffnungsbeziehungen sind in Abbildung 10.7 dargestellt. Die mit der modifizierten Geometrie ermittelte Linie deckt sich exakt mit der dem Materialgesetz zugrunde gelegten Spannungs-Rissöffnungsbeziehung. Mit dem MTT mit der modifizierten Geometrie ist es also möglich, das einaxiale Materialverhalten einschließlich Zug- und Nachrissfestigkeit direkt aus den Versuchsergebnissen zu bestimmen wie es bisher nur mit direkten Zugversuchen möglich war. Bei der nicht modifizierten, von Blümel [Blü00] vorgeschlagenen Geometrie zeigen sich aufgrund des nicht konstanten Spannungsverlaufs im Steg Abweichungen zwischen der zugrunde gelegten und der mittels MTT bestimmten Spannungs-Rissöffnungsbeziehung. Diese Abweichungen liegen dabei hauptsächlich im Vorbruchbereich und dem ersten Entfestigungsbereich.

Im Gegensatz zu den von Wolski [Wol02] für Gesteine verwendeten Probendurchmessern von 120 mm wird empfohlen bei Beton und Stahlfaserbeton einen Durchmesser von 200 mm nicht zu unterschreiten. Durchmesser dieser Größenordnung sind für eine ausreichende und dem Größtkorn angepasste Dimension der Bruchfläche unerlässlich. Das Längen/Durchmesserverhältnis sollte mindesten 1,0 besser noch 1,5 betragen.

10.2 Versuchsreihe

Aufbauend auf den theoretischen Überlegungen des vorigen Abschnitts erfolgte die praktische Durchführung des MTT an Stahlfaserbetonwürfeln.

10.2.1 Probekörper, Material und Lagerung

Der für die experimentellen Untersuchungen verwendete Beton entspricht der Festigkeitsklasse B45. Bei den Stahlfasern handelt es sich um *Dramix*-Fasern RC 65/60 BN. Das sind Drahtfasern mit Endaufbiegungen, einer Länge von 60 mm und einem Durchmesser von 0,9 mm. Die Zugfestigkeit der Fasern liegt über 1000 MN/m². Der Stahlfasergehalt beträgt 40 kg/m³. Stahlfaserbeton mit dieser Rezeptur wurde von der Firma *Bilfinger & Berger* für die Produktion der Tübbinge des Hofoldingener Stollens eingesetzt. Als Probekörper wurden Würfel mit einer Kantenlänge von 20 cm, wie sie auch für Druckversuche verwendet werden, gewählt. Die Herstellung und Lagerung der Probekörper erfolgte nach DIN 1048 [DIN91].

10.2.2 Prüfkörperformatierung

Nach dem planparallelen Abziehen der beiden Lasteinleitungsflächen in einem Endflächenschleifgerät wurden die Kernbohrungen mittels wassergekühlter Standbohrmaschine mit Diamantbohrkronen gebohrt. Die Außendurchmesser der verwendeten Bohrkronen betragen 100 mm, 120 mm, 158 mm, und 180 mm, die Bohrtiefen 150 mm bzw. 110 mm. Auf ein weiteres Überbohren, um einen zylinderförmigen Probekörper zu erhalten, wurde verzichtet (Abbildung 10.8). Durch den kreisförmigen Belastungsring auf der Unterseite bleiben die Eckbereiche spannungslos und es bildet sich der gleiche rotationssymmetrische Spannungszustand wie

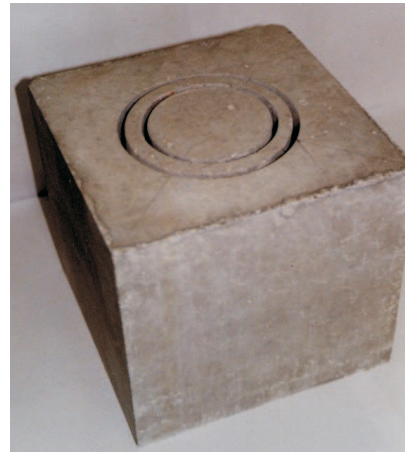


Abbildung 10.8: Versuchsaufbau, intakter Probekörper und abgedrückter Probekörper

bei einer Zylinderprobe aus. Als problematisch erwies sich zunächst die Einhaltung der Zentrität und Winkelmaßhaltigkeit beim Überbohrvorgang. Mit einer passgenau angefertigten Bohrschablone konnten diese Probleme beseitigt und gute Erfolge erzielt werden. Eine exakte und maßgenaue Bearbeitung der Proben ist unerlässlich. Die Formatierung eines Probekörpers erforderte etwa 45 Minuten.

Beim Betonieren der Würfel in einer Schalung und dem anschließenden Verdichten stellt sich eine bevorzugte Orientierung der Fasern senkrecht zur Betonierrichtung ein. Um den Einfluss der Betonierrichtung analysieren zu können, wurden die Würfel sowohl senkrecht als auch parallel zur Betonierrichtung überbohrt.

10.2.3 Versuchsdurchführung

Zur Durchführung der Versuche wurde eine servohydraulische Universalprüfmaschine der Firma Instron Typ 8500 mit einer eingebauten 100 kN Kraftmessdose verwendet (Abbildung 10.8). Die Lasteinleitung erfolgte mittels eigens angefertigter V2A-Stahlplatten mit einer Materialstärke von 10 mm. Um den Nachbruchbereich erfassen zu können, wurden die Versuche weggesteuert durchgeführt. Die vertikale Gesamtverformung wurde über zwei induktive Wegaufnehmer WT 5 der Firma HBM zwischen den Lastplatten gemessen. Die Datenerfassung und Auswertung erfolgte über einen Messdatenlogger HBM Spider 8 sowie einen PC mit der Software HBM CatMan 2.0.

Es hatte sich als vorteilhaft herausgestellt, bei der Prüfung keine Kugelkalotte in der Belastungseinrichtung einzusetzen, da anderenfalls ein einseitig initiiertes Zugriss weiter propagiert wird und es im ungünstigsten Fall zu einem Schrägstellen des inneren Zylinders kommen kann.

In der RILEM-Empfehlung für den einaxialen Zugversuch für Stahlfaserbeton [RIL01] wird eine Belastungsgeschwindigkeit von $0,005 \text{ mm/min}$ bis zu einer Verformung von $0,1 \text{ mm}$ angegeben. Anschließend wird die Belastungsgeschwindigkeit auf $0,1 \text{ mm/min}$ gesteigert und der Versuch bis zu einer Endverformung von $2,0 \text{ mm}$ fortgeführt. Dabei wird eine Aufzeichnungsfrequenz größer $0,5 \text{ Hz}$ empfohlen. Lin [Lin96] wählte für seine Zugversuche Belastungsgeschwindigkeiten zwischen $0,009 \text{ mm/min}$ und $0,9 \text{ mm/min}$. In Anlehnung an diese Vorgaben wurde für die hier durchgeführten Versuche eine Belastungsgeschwindigkeit von $0,05 \text{ mm/min}$ bis zu einer Verformung von $0,5 \text{ mm}$ und anschließend $0,2 \text{ mm/min}$ bis zum Versuchsende bei etwa 4 mm gewählt. Die Aufzeichnungsfrequenz wurde auf 10 Hz erhöht.

10.3 Versuchsauswertung und Versuchsergebnisse

Probe Nr.	Bemerkung	Faseranzahl	Geometrie	Bruchfläche	σ_{MTT}	Nachbruchfestigkeit maximal	Nachbruchfestigkeit bei $3,0 \text{ mm}$
				$[\text{cm}^2]$	$[\text{MN/m}^2]$	$[\text{MN/m}^2]$	$[\text{MN/m}^2]$
1S	senkr. überb.	12	mod.	63,14	2,22	0,43	0,29
2S	senkr. überb.	19	mod.	59,60	2,99	0,32	0,06
3S	senkr. überb.	13	mod.	62,67	2,45	0,57	0,26
4S	senkr. überb.	28	mod.	61,35	1,08	0,59	0,45
	Mittel senkr.				2,19	0,48	0,277
1SB	senkr. überb.	43	Blü.	161,22	1,67	0,51	0,49
1P	parallel überb.	6	mod.	63,24	1,25	0,27	0,27
2P	parallel überb.	6	mod.	62,10	2,34	0,10	0,08
3P	parallel überb.	7	mod.	61,72	1,28	0,24	0,14
	Mittel parallel				1,62	0,20	0,16
	Mittel gesamt				1,91	0,38	0,26

mod.: Modifizierte Geometrie, vierfach überbohrt
Blü.: Geometrie nach Blümel [Blü00], zweifach überbohrt

Tabelle 10.2: Versuchsergebnisse MTT

Die durchgeführten Versuche wurden über die beschriebene Messeinrichtung als Kraft-Vertikalverformungsdiagramme aufgezeichnet. Die Ermittlung der Zugspannung σ_m im Ringraum erfolgte aus der Prüflast und der Probengeometrie analog Gleichung (10.1). Die von den beiden Wegaufnehmern aufgezeichneten Verformungen wurden für die Auswertung gemittelt.

Um, wie vorher erwähnt, den Einfluss der Betonierichtung zu erfassen, wurden zwei unterschiedliche Probeserien geprüft. Bei der ersten Serie wurden die Probekörper (1S, 2S, 3S

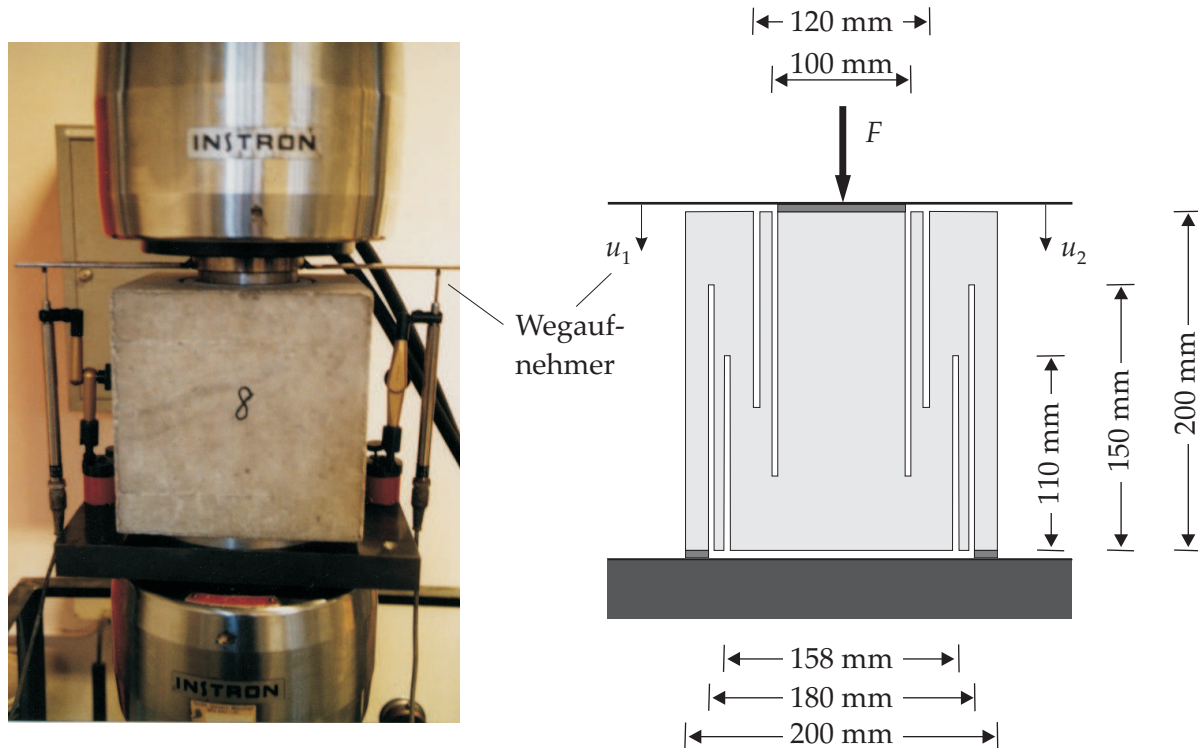


Abbildung 10.9: Versuchsaufbau und Abmessungen der Probekörper

und 4S) senkrecht zur Betonierrichtung überbohrt. Bei der zweiten Serie erfolgte das Überbohren parallel zur Betonierrichtung (1P, 2P und 3P). Während bei den zuvor genannten Probekörpern eine vierfache Überbohrung nach der modifizierten Geometrie (Abbildung 10.9) erfolgte, wurde Probekörper 1SB nach der Geometrie von Blümel [Blü00] lediglich zweifach, senkrecht zur Betonierrichtung überbohrt. Hierbei wurde auf die beiden mittleren Bohrungen verzichtet.

In Tabelle 10.2 sind die wichtigsten Versuchsergebnisse und die Mittelwerte der Probeserien zusammengestellt. Abbildung 10.10 zeigt die Versuchsaufzeichnungen für die beiden Versuchsserien in Form von Spannungs-Verformungskurven. Es ist ein annähernd lineares Ansteigen der Kurve bis zum Erreichen der Bruchlast, was auf weitgehend linear-elastisches Materialverhalten schließen lässt, zu beobachten. Lediglich im Stegbereich kommt es zu Mikrorissbildung. Mit dem Erreichen der Bruchlast tritt ein plötzliches, nahezu schlagartiges Versagen mit einem steilen Abfallen der Last auf. Die Betonmatrix versagt im Stegbereich auf Zug und es kommt zur Bildung eines Makrorisses im geschwächten Stegbereich. Aufgrund des unterkritischen Stahlfasergehaltes kann das Spannungsniveau nicht gehalten werden und es kommt zu einem Spannungsabfall auf ein annähernd konstantes Nachbruchniveau. Durch eine Relativverschiebung zwischen Betonmatrix und Stahlfaser wird die Fasertragwirkung aktiviert. Das leicht abfallende Nachbruchniveau ist durch das Auszugverhalten der Stahlfasern charakterisiert. Die Versuche wurden bei einer Verformung von $3,0\text{ mm}$ abgebrochen. Bei dieser Verformung ist ein kompletter Faserauszug noch lange nicht erreicht und eine Lastübertragung nach wie vor möglich. Dies zeigte sich auch dadurch, dass das Trennen der abgedrückten Proben zur Aufnahme der Bruchfläche nur unter erheblichem Widerstand möglich war. An den getrennten Proben (Abbildung 10.8) ist das Versagen durch einen Trennriss im geschwächten Stegbereich zu erkennen. Ein Versagen im Umlenkbereich konnte durch die verbesserte Geometrie verhindert werden.

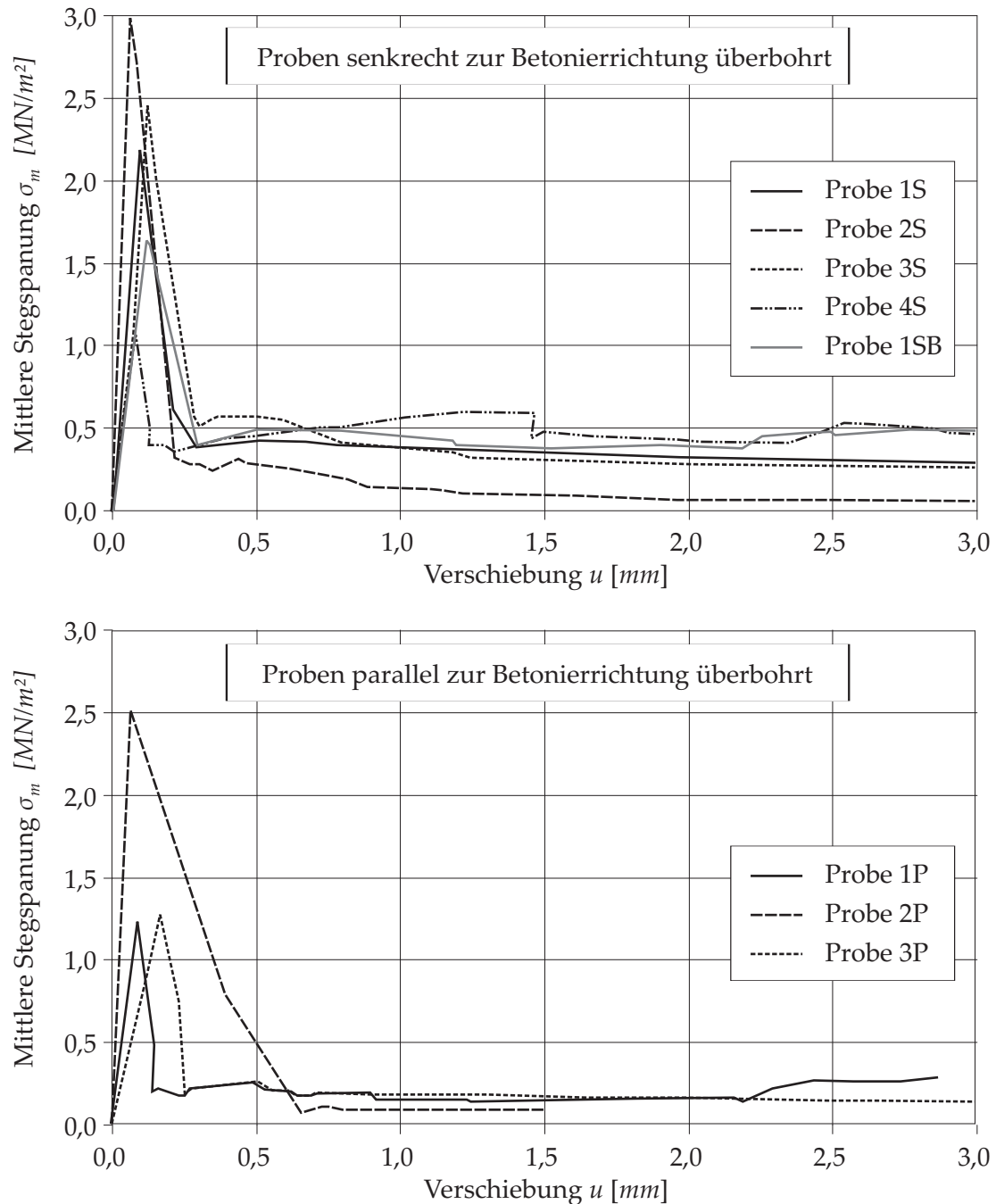


Abbildung 10.10: Versuchsergebnisse MTT

Der plötzliche Lastabfall nach dem Überschreiten der Bruchlast ist versuchstechnisch schwer zu erfassen. Aufgrund des schlagartigen Eintretens des Bruchs konnten trotz Wegsteuerung nur zwei bis drei Messwerte in diesem Bereich aufgenommen werden. Lin [Lin96] spricht bei ähnlichen Beobachtungen bei direkten Zugversuchen von einem instabilen Bruch. Grund hierfür ist zum einen die im Probekörper gespeicherte Energie. Die Entfestigung im Rissbereich führt zu einer elastischen Entlastung des restlichen Probenbereichs. Aufgrund der Probengeometrie ist diese Energie größer als bei direkten Zugversuchen. Weiterer Gründe sind die im Lastrahmen gespeicherte Energie und die Trägheit der Steuerung der servohydraulischen Prüfmaschine. Die Prüfmaschine müsste außerdem in der Lage sein, den Bruchvorgang zu bremsen, was jedoch durch die nur auf Druck wirkenden Lasteinleitungsplatten nicht zu

erreichen ist. Beim Bruchvorgang konnte teilweise ein kurzzeitiger Kontaktverlust zwischen Probekörper und Lastplatte beobachtet werden.

Lin [Lin96] versucht daher bei direkten Zugversuchen den Nachbruchbereich mit Hilfe eines *Compliance Versuchs* und unter Verwendung von zum Probekörper parallel geschalteter Stahlstangen zu erfassen (siehe Abschnitt 4.1). Kützing [Küt00] führt direkte Zugversuche mit reiner Wegsteuerung durch und beobachtet eine ähnlich schnelle Entfestigung wie beim MTT. Ein instabiler Bruch, wie hier beim MTT beobachtet, entspricht aber auch dem Versagen eines entfestigenden Materials in Realität. Dennoch ist zu beachten, dass der Verlauf der Versuchskurve in diesem Bereich stark von der verwendeten Versuchsanordnung und Steuerung abhängt. Von einer Berechnung der Bruchenergie aus dem ersten Entfestigungsbereich der Versuchskurve sollte daher abgesehen werden.

Die ermittelten Werte für die **Zugfestigkeit** σ_{MTT} unterliegen einer für Beton üblichen starken Streuung. Die mittlere Zugfestigkeit der ersten Serie liegt etwa 35 % über der der zweiten Serie. Es stellt sich die Frage, ob dieser Unterschied aufgrund der geringen Probenanzahl zufällig ist oder ob es durch die in Serie 2 vermehrt senkrecht zur Belastungsrichtung ausgerichteten Fasern zu einer Gefügeschwächung kommt. Im Allgemeinen ist der Einfluss der Stahlfasern und der Stahlfaserorientierung auf die Zugfestigkeit als gering einzustufen.

Im Bereich der **Nachbruchfestigkeit** ist kein Mitwirken der Betonmatrix am Lastabtrag mehr zu beobachten. Die Spannung wird ausschließlich durch die Stahlfasern übertragen. Dementsprechend deutlich zeigt sich der Einfluss der Faserorientierung. So ist die maximale Nachbruchfestigkeit von Serie 1 mit $0,48 \text{ MN/m}^2$ fast 2,5 mal so groß wie die von Serie 2 mit $0,20 \text{ MN/m}^2$. Es zeigte sich auch, dass in den Bruchflächen von Proben der Serie 1 wesentlich mehr und die Bruchfläche steiler kreuzende Fasern zu finden waren. Ansonsten kann kein eindeutiger Zusammenhang zwischen der reinen Anzahl der risskreuzenden Fasern und der Nachbruchfestigkeit festgestellt werden. Für eine genauere Beurteilung sollte die Faserorientierung bezüglich der Bruchfläche mit Berücksichtigung finden.

Die Rissfläche der Probe 1SB lag, wie zu erwarten, im Umlenkbereich, an dem kein homogener Spannungszustand vorliegt. Trotzdem liegen die Ergebnisse der zweifach überbohrten Probe sehr nah an den der Serie 1. Sollen nur Zug- und Nachbruchfestigkeit des Stahlfaserbetons bestimmt werden, so kann nach Ansicht des Autors auch auf diese einfachere Geometrie zurückgegriffen werden. Als Vorteile sind auf jeden Fall die einfachere Probenvorbereitung und die wesentlich größere Bruchfläche zu sehen, die durch einen inhomogeneren Spannungszustand erkauft werden müssen.

10.4 Vergleich des MTT mit Ergebnissen von Biegezugversuchen

Die Ergebnisse von Biegezugversuchen aus der gleichen Stahlfaserbetonmischung wurden von der Firma *Bilfinger & Berger* zur Verfügung gestellt. Die Versuchsdurchführung erfolgte in Anlehnung an das DBV-Merkblatt „*Stahlfaserbeton*“ [DBV01]. Es wurden insgesamt vier Proben mit einem Stahlfasergehalt von 40 kg/m^3 geprüft. Da es sich um eine ähnliche Anzahl an Proben handelt, kann auf eine stochastische Betrachtung verzichtet werden. Die aus den gemittelten Versuchskurven mittels *Inverser Analyse* bestimmten Materialparameter wurden bereits für die theoretischen Untersuchungen in Abschnitt 10.1 verwendet und sind in Tabelle 10.1 angegeben. Im Vorfeld sei bereits erwähnt, dass die Probekörper für den Biegezugversuch zwar mit demselben Betonrezept wie die des MTT hergestellt wurden, allerdings nicht aus derselben Charge. Außerdem wurden die Biegezugversuche in einem anderen Labor durchgeführt und auf die Lagerungsbedingungen hatte der Autor keinen Einfluss. Eine absolute

Vergleichbarkeit der Ergebnisse von MTT und Biegezugversuch ist also hier unter diesen Bedingungen nicht gegeben. Die durch die *Inverse Analyse* ermittelte **einaxiale Zugfestigkeit** beträgt $3,0 \text{ MN}/\text{m}^2$. Näherungsweise kann die einaxiale Zugfestigkeit $f_{ct,ax}^f$ auch nach dem DBV-Merkblatt [DBV01] aus der Biegezugfestigkeit $f_{ct,fl}^f$ ermittelt werden:

$$f_{ct,ax}^f = 0,5 \cdot f_{ct,fl}^f \quad (10.3)$$

Daraus ergibt sich eine Zugfestigkeit von $2,66 \text{ MN}/\text{m}^2$. Beide Werte liegen über den aus dem MTT ermittelten Spannungen mit $\sigma_{MTT} = 2,19 \text{ MN}/\text{m}^2$ für Serie 1 und $\sigma_{MTT} = 1,62 \text{ MN}/\text{m}^2$ für Serie 2. Gründe für die Abweichung können unter Umständen unterschiedliche Feuchtegehalte der Proben oder abweichende Belastungsgeschwindigkeiten sein. Außerdem unterliegt die Zugfestigkeit starken Streuungen.

Beim Vergleich der **Nachbruchfestigkeiten** klaffen die Werte des MTT und des Biegezugversuchs auf den ersten Blick noch weiter auseinander. Aus der *Inversen Analyse* ergibt sich eine Nachbruchfestigkeit f_{ctm1} von $1,5 \text{ MN}/\text{m}^2$. Nach dem DBV-Merkblatt [DBV01] kann aus der äquivalenten Biegezugfestigkeit $f_{eqm,II}$ die zentrische Nachbruchzugfestigkeit $f_{ctm,II}^f$ berechnet werden:

$$f_{ctm,II}^f = 0,37 \cdot f_{eqm,II} \quad (10.4)$$

Der Faktor 0,37 basiert dabei auf Annahmen über Spannungsverlauf und inneren Hebelarm. Die zentrische Nachbruchzugfestigkeit $f_{ctm,II}^f$ ergibt sich hieraus zu $1,38 \text{ MN}/\text{m}^2$. Die Nachbruchfestigkeit des MTT liegt lediglich bei $0,48 \text{ MN}/\text{m}^2$ für Serie 1 und bei $0,20 \text{ MN}/\text{m}^2$ für Serie 2. Die geringe Nachbruchfestigkeit des MTT hängt allerdings direkt mit den geringen Faserzahlen in den Bruchflächen, im Durchschnitt 18 bei Serie 1 und 6,3 bei Serie 2, zusammen. Vergleicht man die hier vorliegenden Faserzahlen mit denen von Lin [Lin96] in Zylindern für direkte Zugversuche, so müssten in etwa 35 Fasern in der Bruchfläche des modifizierten MTT-Probekörpers vorhanden sein. Ursachen für die geringen Faserzahlen können beispielsweise große Streuungen im Fasergehalt beim Betonieren der im Vergleich zu Bauteilen relativ kleinen Probewürfel sein. Außerdem kann das Verdichten der Probewürfel zu einem ungewollten Entmischen des Faserbetons und einem Absinken der Faser in der Schalung geführt haben. Um solche Faktoren ausschließen zu können, sollten die Probekörper mittels Kernbohrung oder Sägen aus größeren Probekörpern oder dem Bauteil selbst entnommen werden. Durch dieses Vorgehen erhält man auch im Probekörper die im Bauwerk vorliegende Faserorientierung.

Die Vergleichbarkeit der Nachbruchfestigkeiten von MTT und Biegezugversuch ist also hier durch die unterschiedlichen Faserzahlen und der Faserorientierungen, die sich bei der Herstellung der Probekörper ergeben, nicht auf direktem Weg möglich. Näherungsweise kann jedoch eine Umrechnung auf Basis von Faserorientierungsbeiwerten erfolgen. Grundsätzlich ist der Faserorientierungsbeiwert als Mittelwert des Verhältnisses aller in Richtung der Zugspannung projizierten Faserlängen zu der tatsächlichen Faserlänge definiert (siehe Abschnitt 2.5). Hilsdorf et al. [HBK85] schlagen eine einfache Methode zur Bestimmung des Faserorientierungsbeiwertes anhand der Faseranzahl in der Bruchfläche vor. Nach folgender Formel lässt sich die theoretische Faserzahl M_{th} in einer beobachteten Fläche A_p bestimmen:

$$M_{th} = \frac{v_f \cdot A_p \cdot \eta_{3\theta}}{25 \cdot \pi \cdot d_f^2} \quad (10.5)$$

Dabei ist v_f der Fasergehalt in Vol.%, d_f der Faserdurchmesser in Millimetern und $\eta_{3\theta}$ der Faserorientierungsbeiwert. Wird Gleichung 10.5 umgeformt und die aus den Versuchen ermittelte Faseranzahl M anstelle der theoretischen Faseranzahl M_{th} verwendet, so kann die tatsächliche Faserorientierung berechnet werden:

$$\eta_{\theta} = \frac{M \cdot 25 \cdot \pi \cdot d_f^2}{v_f \cdot A_p} \quad (10.6)$$

Für Serie 1 ergibt sich hieraus $\eta_{\theta} = 0,37$ und für Serie 2 ist $\eta_{\theta} = 0,13$. Bei den Biegezugversuchen wurden die Faseranzahlen in der Bruchfläche nicht bestimmt. Allerdings kann aus einem Diagramm von Soroushian & Lee [SL90], die in ihrer Arbeit die Beeinflussung der Faserorientierung durch die Schalungsfläche untersuchten, für einen Probekörper mit vier Beschränkungsflächen und einem Verhältnis von Probenhöhe zu Probenbreite von eins, ein Faserorientierungsbeiwert von $\eta_{\theta} = 0,58$ abgelesen werden. Bezieht man die Nachbruchfestigkeiten des MTT auf die Faserorientierung des Biegezugversuchs ergibt sich ein Wert von $0,75 \text{ MN/m}^2$ für Serie 1 und $0,89 \text{ MN/m}^2$ für Serie 2. Diese Festigkeiten liegen zwar näher an den aus den Biegezugversuchen, die Abweichungen sind aber trotzdem noch erheblich.

Wie bereits vorher erwähnt ist eine Vergleichbarkeit der Ergebnisse von MTT und Biegezugversuch hier in diesem speziellen Fall nur bedingt möglich. An diesem Punkt wären weitere Untersuchungen unter wirklichen Vergleichbedingungen nötig indem die Probekörper für beide Versuche aus dem gleichen Bauteil entnommen werden.

Ursachen für eine prinzipielle Abweichung der Versuchsergebnisse von MTT und Biegezugversuch können folgende sein:

- Die Probekörper des MTT werden durch das Überbohren geschwächt. Dieser Einfluss kann allerdings als gering eingestuft werden, da hiervon in erster Linie die Zugfestigkeiten betroffen wären und diese aber relativ gut übereinstimmen.
- Wie beobachtet werden durch das Überbohren beim MTT einige aufgebogene Fasern abgetrennt oder generell Fasern gekappt und dadurch die Nachrissfestigkeit herabgesetzt. Ein Problem, das auch bei den zylindrischen Probekörpern für direkte Zugversuche auftritt, wenn sie wie üblich mittels Kernbohrung gewonnen werden.

10.5 Schlussfolgerung

Der Modified Tension Test stellt nach Ansicht des Autors eine gute Alternative und Ergänzung zum direkten Zugversuch, aber auch für den, bei Stahlfaserbeton üblichen Biegezugversuch dar. Der MTT ist dabei speziell für die Bestimmung der Zugfestigkeit und der Nachbruchfestigkeit, die bei Stahlfaserbeton von besonderem Interesse ist, geeignet. Von einer Berechnung der Bruchenergie, speziell dem Anteil der Betonmatrix, wird aus oben genannten Gründen jedoch abgeraten. Des Weiteren ist der MTT nicht zur Bestimmung von Verformungsmoduli geeignet, da sich die gemessene Gesamtverformung im Vorbruchbereich aus unterschiedlichen Dehnungsanteilen, die sowohl auf Zug- als auch auf Druckspannungen zurückzuführen sind, zusammensetzt. Hinzu kommen Lastumleitungsphänomene, die ebenfalls Verformungsanteile verursachen.

Vorteile des MTT gegenüber bestehenden direkten und indirekten Zugversuchen sind folgende:

- Einfache Versuchsdurchführung in einer Standarddruckprüfmaschine
- Einfache Lasteinleitung mittels Lasteinleitungsplatten anstelle schwieriger Klebe- oder Einspannverbindungen beim direkten Zugversuch
- Keine Probleme mit einseitiger Rissinitiierung, die beim direkten Zugversuch zu Biegezuständen führt (siehe Abschnitt 4.1)
- Die einaxialen Festigkeiten können direkt aus der Versuchslast und der Bruchfläche bestimmt werden. Eine Umrechnung wie beim Biegezugversuch mit näherungsweise Faktoren, die auf Annahmen über den Spannungsverlauf beruhen, ist nicht notwendig

Als Nachteil wäre zu nennen, dass der Riss im Steg nicht direkt beobachtet werden kann und die Rissöffnung im Nachbruchbereich indirekt aus der Gesamtverformung bestimmt werden muss. Es besteht allerdings die Möglichkeit, in die äußere Mantelfläche des Probekörpers zwei bis drei vertikale Schlitze zu sägen und dadurch die Rissbildung zu beobachten bzw. mit geeigneten Messaufnehmern zu erfassen. Die Schlitze werden jedoch den Spannungszustand mehr oder weniger stark beeinflussen. Im Rahmen dieser Versuchsserie ist deshalb auf Schlitze verzichtet worden.

Kapitel 11

Zusammenfassung und Ausblick

Für Strukturberechnungen des Verbundwerkstoffs Stahlfaserbeton gewinnen physikalisch nichtlineare Verfahren auch in der Praxis zunehmend an Bedeutung. Ziel dieser Arbeit soll es daher sein, ein effektives, 3-dimensionales Materialgesetz für Stahlfaserbeton zu entwickeln, das sich in kommerzielle FE-Programme implementieren lässt und die Berechnung von praxisrelevanten Makrostrukturen ermöglicht. Hierbei wird darauf geachtet für das Materialgesetz nur eine minimale Anzahl an Materialparametern zu verwenden, die sich zudem ausschließlich aus Versuchsergebnissen ermitteln lassen oder in entsprechenden Normen und Merkblättern gegeben sind. Im Rahmen der Bestimmung dieser Materialparameter werden sowohl analytische als auch experimentelle Verfahren diskutiert. Zur experimentellen Untersuchung des einaxialen Zugtragverhaltens wird des Weiteren ein neuartiger Zugversuch, der *Modified Tension Test* (MTT) vorgestellt und erstmalig für Stahlfaserbeton verwendet.

Im Rahmen der Materialmodellierung wird der Stahlfaserbeton als homogener Werkstoff betrachtet und das Materialverhalten phänomenologisch auf der Makroebene beschrieben. Das vorgestellte Materialgesetz basiert auf der inkrementellen Fließtheorie im Rahmen der Plastizitätstheorie. Materialgesetze auf dieser Basis wurden bereits erfolgreich für Beton u.a. von Feenstra [Fee93], Pravida [Pra99] und Menrath [Men99] angewendet.

Um das unterschiedliche Materialverhalten des Stahlfaserbetons im Zug- und Druckbereich abbilden zu können, wird die Fließfläche aus zwei Teilfließflächen zusammengesetzt. Die Beschreibung des Zugversagens erfolgt mit einem ausgerundeten *Rankine*-Fließkriterium in Kombination mit einem isotropen Entfestigungsgesetz. Die Ausrundung des *Rankine*-Kriteriums setzt sich aus einer elliptischen Ausrundung der Deviatorebene und einer hyperbolischen Ausrundung der Meridianebene zusammen. Durch die Verwendung eines Bruchenergiekonzepts kann das bei unterkritischen Fasergehalten auftretende Lokalisierungsphänomen objektiv beschrieben werden. Für den Druckbereich wird ein *Drucker-Prager*-Fließkriterium mit isotroper Ver- und Entfestigung angenommen. Für die Entfestigungsbeziehung wird, wie auch im Zugbereich ein Bruchenergiekonzept verwendet.

Mit Hilfe der Ver- und Entfestigungsbeziehung wird das Materialgesetz an das einaxiale Materialverhalten des Stahlfaserbetons angepasst. Im Zugbereich wird linear-elastisches Materialverhalten bis zum Erreichen der Zugfestigkeit angenommen. Nach Erreichen der Zugfestigkeit kommt es bei Stahlfaserbetonen mit unterkritischen Fasergehalten, die hier betrachtet werden, zur Bildung lokaler Makrorisse und einem steilen Spannungsabfall, der sich durch die aktivierte Faserwirkung auf annähernd konstantem Niveau stabilisiert. Dieses Verhalten wird mittels einer zweiteiligen Spannungs-Rissöffnungsbeziehung beschrieben. Der erste Teil der Spannungs-Rissöffnungsbeziehung ist von den Fasern kaum beeinflusst und wird deshalb durch einen exponentiellen Verlauf für reinen Beton beschrieben. Materialparameter hierfür

sind die Zugfestigkeit und die Bruchenergie des reinen Betons. Der zweite Teil der Spannungs-Rissöffnungsbeziehung ist ausschließlich von den Stahlfasern beeinflusst. Hier wird eine lineare Entfestigung, charakterisiert durch die Nachrissfestigkeit und dem Bruchenergieanteil der Stahlfasern, zugrunde gelegt. Die Umrechnung der Rissöffnung in die effektive plastische Dehnung erfolgt mit Hilfe der äquivalenten Elementlänge. Im Druckbereich zeigt Stahlfaserbeton im Vergleich zu reinem Beton ein wesentlich duktileres Nachbruchverhalten, bei annähernd gleicher Druckfestigkeit und Bruchdehnung. Die Beschreibung erfolgt mit einer quadratischen Ver- und einer exponentieller Entfestigungsbeziehung. Das duktile Nachbruchverhalten kann über die Bruchenergie gesteuert werden.

Die Spannungsintegration des elasto-plastischen Stoffgesetzes erfolgt mit einem impliziten Euler-Rückwärtsverfahren für Mehrflächenplastizität. Hierzu wird ein von Simo und Hughes [SH98] vorgeschlagener Algorithmus verwendet. Um eine quadratische Konvergenzrate des Newton-Verfahrens auf Systemebene zu gewährleisten, wird der konsistente elasto-plastische Werkstofftensor verwendet. Das beschriebene Materialgesetz wurde in das kommerzielle Finite-Elemente Programm ANSYS implementiert.

Die zur phänomenologischen Beschreibung des Materialverhaltens benötigten Materialparameter lassen sich sowohl mittels analytischer als auch experimenteller Verfahren bestimmen. Im Rahmen dieser Arbeit hat es sich als sinnvoll herausgestellt, die Materialparameter der Spannungs-Rissöffnungsbeziehung mit Hilfe von 4-Punkt-Biegezugversuchen zu bestimmen. Dieser ist der Standardversuch für Stahlfaserbeton und zum Beispiel im DBV-Merkblatt „*Stahlfaserbeton*“ [DBV01] vorgeschrieben. Die einaxiale Spannungs-Rissöffnungsbeziehung kann aber nicht direkt aus den Versuchsergebnissen, bei denen es sich um Kraft-Verformungs-Beziehungen handelt, ermittelt werden. Aufgrund des hochgradig nichtlinearen Materialverhaltens ist es daher nur möglich die Materialparameter durch Finite-Elemente-Berechnungen des Biegezugversuchs zu bestimmen. Dieses Vorgehen wird auch als *Inverse Analyse* bezeichnet. Mit den auf diese Weise ermittelten Materialparametern können nun die eigentlichen Strukturberechnungen durchgeführt werden.

Zur Verifizierung des vorgestellten Materialmodells werden numerische Untersuchungen durchgeführt und mit vorhandenen Versuchsergebnissen verglichen. Bei der Berechnung von Spaltzugversuchen an Stahlfaserbetonwürfeln zeigt sich, dass das Strukturverhalten sehr gut beschrieben werden kann. Bei Spaltzugversuchen an Stahlfaserbetontübbingungen, die zur Simulation der Einleitung von Pressenkräften der Vortriebsmaschine dienen, kann auch das in den Versuchen beobachtete Rissbild gut mit der Berechnung erfasst werden. Am Beispiel von Berechnungen von Tunnelschalen wird das entwickelte Materialgesetz zur physikalisch nichtlinearen Schnittgrößenermittlung im Rahmen von Bemessungsaufgaben verwendet. Hierbei findet das im DBV-Merkblatt „*Stahlfaserbeton*“ [DBV01] und in der neuen DIN 1045-1 [DIN01] angegebene Sicherheitskonzept Berücksichtigung. Durch das Verfahren der nichtlinearen Schnittgrößenermittlung ist es möglich, die tatsächlich in einem Tragwerk vorliegenden Steifigkeitsverhältnisse realistisch abzubilden, um gegenüber linearen Verfahren bessere und genauere Ergebnisse bezüglich Beanspruchung und Verformung zu erhalten. Gerade bei Tunnelschalen können somit große Umlagerungspotenziale des Tragsystems Tunnelschale-Boden im Rahmen einer Bemessung im Grenzzustand der Tragfähigkeit ausgenutzt werden.

Der an der Technischen Universität Graz [Blü00] zur Bestimmung der Zugfestigkeit von Festgestein entwickelte *Modified-Tension-Test* (MTT) wird in dieser Arbeit für besonders einfache Zugversuche für Stahlfaserbetonproben weiterentwickelt. Auf Basis von numerischen Untersuchungen wird die Probengeometrie erheblich verbessert. Der MTT stellt so eine gute Alternative und Ergänzung zum direkten Zugversuch, aber auch zu dem üblichen Biegezugversuch dar und ist speziell für die Bestimmung des einaxialen Zugtragverhalten, welches sich

direkt aus den Versuchsergebnissen ergibt, geeignet. Wesentliche Vorteile gegenüber dem direkten Zugversuch sind die einfache Versuchsdurchführung in einer Standarddruckprüfmaschine und die einfache Lasteinleitung.

Für weitere Forschungsarbeiten zur physikalisch nichtlinearen Berechnung von Stahlfaserbetonstrukturen werden folgende Ansatzpunkte genannt:

- Zur Berechnung von Be- und Entlastungszyklen muss das vorgestellte Materialgesetz um das Werkstoffverhalten bei Entlastung und Wiederbelastung erweitert werden. Hierzu ist die infolge von Schädigungsprozessen auftretende Degradation der elastischen Materialeigenschaften zu berücksichtigen. Ein weiterer, zu beachtender Aspekt ist das Verhalten der Risszone infolge Entlastung. Die rissüberbrückenden Fasern wirken einer Riss-schließung entgegen und führen dazu, dass sich der Riss nicht mehr vollständig schließen kann und es zu einem früheren Übergang in den Druckbereich kommt.
- Das vorgestellte Materialmodell sollte zur Berechnung von stahlfaserverstärktem Stahlbeton erweitert werden. Dabei ist in erster Linie ein Modell für das Mitwirken des Stahlfaserbetons zwischen den Rissen also den *Tension Stiffening Effekt* zu entwickeln. Versuche [Bis03] zeigen, dass die Stahlfasern den *Tension Stiffening Effekt* verstärken und zu einem geringeren Rissabstand mit geringeren Rissweiten als bei reinem Beton führen. Der Grund für dieses Verhalten sind die im Riss durch die Stahlfasern getragenen Zugspannungen. Während das Zugtragverhalten von reinem Stahlfaserbeton mit unterkritischem Stahlfasergehalt durch lokale Rissbildung geprägt ist, zeigt stahlfaserverstärkter Stahlbeton mehrfach Rissbildung. Zur objektiven Beschreibung des Zugverhaltens im Rahmen eines FE-Programms ist hier der Übergang von einer Spannungs-Rissöffnungsbeziehung zu einer Spannungs-Dehnungsbeziehung notwendig.
- Zur Berücksichtigung der Faserorientierung im zu berechnenden Bauteil sind zwei wesentliche Aspekte zu betrachten. Zum einen ist es erforderlich ein ortho- bzw. anisotropes Materialmodell zu formulieren. Es sei darauf hingewiesen, dass diese Formulierung erheblich mehr Materialparameter erfordert, die die Anwendung erschweren. Der zweite wesentlich aufwendigere Aspekt ist die Bestimmung der Faserorientierung im Bauteil selbst und die Übertragung auf das Rechenmodell. Hierfür müssten leistungsfähige experimentelle Verfahren wie z.B. Röntgenverfahren entwickelt werden. Ein anderer Weg wäre die Faserorientierung mittels auf numerischer Simulation basierender Verfahren zu bestimmen. In der Simulation müssten geometrische Randbedingungen sowie der Betonier- und Verdichtungsvorgang berücksichtigt werden.
- Aufgrund der großen Anzahl an Versuchen mit unterschiedlichsten Faserbetonen erscheint es sinnvoll, Versuchsergebnisse im Rahmen einer Versuchsdatenbank auf Internetbasis zu sammeln und zu sortieren. Diese können dann auch als Grundlage zum Testen und Kalibrieren unterschiedlichster Materialgesetze für Stahlfaserbeton dienen. Für reinen Beton wurde bereits ein solches Vorhaben im Rahmen des thematischen EU-Netzwerks *Integrity Assessment of Large Concrete Dams (IALAD)* realisiert und ist unter der Internetadresse <http://nw-ialad.uibk.ac.at/Wp2/Tg1/> abzurufen.

Notation

Auf folgende Abkürzungen und Bezeichnungen wird in der vorliegenden Arbeit mehrfach zurückgegriffen:

Abkürzungen

<i>FE</i>	Finite Elemente
<i>MTT</i>	Modified Tension Test
<i>SFB</i>	Stahlfaserbeton

Geometrie

Allgemein

<i>A</i>	Fläche
<i>a</i>	Kerbtiefe
<i>b</i>	Breite
<i>e</i>	Lastausmitte
<i>h</i>	Querschnittshöhe
<i>l</i>	Länge
<i>L_{eq}</i>	Äquivalente Länge
<i>t</i>	Dicke
<i>w</i>	Rissbreite
<i>w_u</i>	Rissbreite bei der keine Spannungen mehr übertragen werden
<i>δ</i>	Verschiebung

Stahlfaserbeton

<i>d_f</i>	Stahlfaserdurchmesser
<i>l_e</i>	Rechnerische Einbindelänge der Stahlfaser
<i>l_f</i>	Stahlfaserlänge
<i>l_{fc}</i>	Einbindelänge der Stahlfaser
<i>l_{krit}</i>	Kritische Länge der Stahlfaser
<i>M</i>	Faserzahl
<i>M_{th}</i>	Theoretische Faserzahl
<i>v_f</i>	Stahlfaservolumenanteil

v_{cr}	Kritischer Stahlfaservolumenanteil
V_f	Stahlfasergehalt in Volumenprozent
W_f	Stahlfasergehalt in Gewichtsprozent
η_l	Faserlängenbeiwert
η_θ	Faserorientierungsbeiwert

Kinematik

u	Verschiebung
ε	Dehnung
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Dehnungstensor
ε_c	Betondehnung
ε_{c1}	Betondehnung bei Erreichen der Druckfestigkeit
ε_{cu}	Bruchdehnung des Betons (Druck)
ε_{ct}^f	Zugdehnung Stahlfaserbeton
δ	Durchbiegung, Verschiebung

Kräfte, Lasten, Spannungen

Allgemein

F	Einzellast
M	Moment
N	Normalkraft
σ	Spannung
$\boldsymbol{\sigma}$	Spannungstensor

Elasto-plastische Materialmodelle

I_1, I_2, I_3	Invarianten des Spannungstensors
J_1, J_2, J_3	Invarianten des deviatorischen Spannungstensors
ξ, ρ, θ	Haigh-Westergaard-Koordinaten

Werkstoff, Material

Allgemein

d	Schädigungsparameter
\mathbf{C}	Elastischer Materialtensor
\mathbf{C}^{pl}	Elasto-plastischer Materialtensor
\mathbf{C}_T^{pl}	Konsistenter elasto-plastischer Materialtensor
E	Elastizitätsmodul
E_c	Elastizitätsmodul Beton
G_c	Bruchenergie (einaxialer Druck)
G_f	Bruchenergie (einaxialer Zug)
ν	Querdehnzahl

σ_m	Mittlere Zugspannung MTT
σ_{MTT}	Maximale mittlere Zugspannung MTT
σ_{SZ}	Spaltzugfestigkeit

Stahlfaserbeton

$D_{fl,i}^f$	Arbeitsvermögen der Stahlfasern für den Verformungsbereich i
E_m	Elastizitätsmodul der Betonmatrix
E_f	Elastizitätsmodul der Stahlfasern
f_{cm}	Mittlere Druckfestigkeit
f_{ctm}	Mittlere Zugfestigkeit
f_{ctm1}	Mittlere Nachrissfestigkeit
$f_{ct,fl}^f$	Biegezugfestigkeit
f_{eq}	Äquivalente Biegezugfestigkeit
$f_{eq,ct,i}$	Äquivalente Zugfestigkeit für den Verformungsbereich i
G_{f1}	Bruchenergieanteil Betonmatrix (einaxialer Zug)
G_{f2}	Bruchenergieanteil Stahlfasern (einaxialer Zug)
γ	Formparameter für exponentielle Entfestigungsfunktion
σ_f	Zugfestigkeit der Stahlfaser
σ_m	Zugfestigkeit der Betonmatrix
σ_τ	Faserspannung bei Verbundversagen
τ_u	Maximale Verbundspannung
τ_{fu}	Reibspannung beim Faserauszug

Sonstige

Allgemein

E	Einwirkung
R	Widerstand
W	Arbeit, Potenzial
α	Aufweichungsfaktor beim Steifigkeitsverfahren

Beiwerte

k_d	Höhenbeiwert
α_c^f	Beiwert zur Berücksichtigung des Dauerstandverhaltens
α_{sys}	Beiwert zur Berücksichtigung geometrischer Abweichungen zwischen Bauwerk und Probekörper
γ_{ct}^f	Sicherheitsbeiwert gemäß DBV-Merkblatt <i>Stahlfaserbeton</i>
γ_G	Teilsicherheitsbeiwert für Eigengewicht
γ_R	Teilsicherheitsbeiwert für den Tragwiderstand (Material)

Elasto-plastische Materialmodelle

D	Matrix der plastischen Moduli
f	Fließbedingung
F	Spannungsabhängiger Teil der Fließbedingung
g_ε	Plastische Potentialfunktion
g_α	Ver- und Entfestigungspotential
H	Plastischer Modul
k	Von der Fließspannung abhängiger Teil der Fließbedingung
\mathbf{q}	Vektor der inneren Variablen im Spannungsraum
α	Vektor der inneren Variablen im Dehnungsraum
$\bar{\varepsilon}_p$	Effektive plastische Vergleichsdehnung
λ	Plastischer Multiplikator
$\bar{\sigma}_e$	Einaxiale Fließspannung
ζ	Kopplungsparameter für Zug- und Druckentfestigung

Fließ- und Bruchflächen

a	Verhältnis einaxiale/biaxiale Festigkeit
n	Ausrundungsparameter
α	Formparameter der Fließfläche
β	Formparameter der Fließfläche
γ	Verhältnis von triaxialer Kompression zu triaxialer Extension
σ_{ms}	Spannungsabminderung bei hyperbolischer Ausrundung

Symbole und Indizes

bi	biaxial
c	Druck
	Beton
d	Bemessungswert
DP	<i>Drucker-Prager</i> Fließkriterium
el	Elastisch
k	Charakteristischer Wert
m	Mittelwert
pl	Plastisch
R	<i>Rankine</i> Fließkriterium
$riss$	Riss
t	Zug
$trial$	Prädiktorzustand
vM	<i>von Mises</i> Fließkriterium
α	Fließfunktion α
I, II	Ungerissener Zustand, gerissener Zustand
	Verformungszustand I, II
\cdot	Zeitableitung

Literaturverzeichnis

- [AA64] A. ABOLITZ und C. AGBIM: *Discussion of the paper by Romualdi, J.; Mandel, J. "Tensile Strength of concrete affected by uniformly distributed and closely spaced short lengths of wire reinforcement"*. ACI Journal, 61:1651 ff., 1964.
- [AK73] J. AVESTON und A. KELLY: *Theory of multiple fracture of fibrous composites*. Journal of Materials Science, 8:352–362, 1973.
- [ANG99] J.M. ALWAN, A.E. NAAMAN und P. GUERRERO: *Effect of mechanical damping on the pullout response of hooked steel fibres embedded in cementitious matrices*. Concrete Science & Engineering, 1:15–25, 1999.
- [B⁺81] A. M. BRANDT et al.: *Preliminary tests of SFRC under triaxial loadings*. International Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete, 3:261–266, 1981.
- [Baž76] Z.P. BAŽANT: *Instability, ductility and size effect in strain-softening concrete*. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 102:331–344, 1976.
- [BC79] Z.P. BAŽANT und L. CEDOLIN: *Blunt crack band propagation in finite element analysis*. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 105:297–315, 1979.
- [BC87] S.B. BHIDE und M.P. COLLINS: *Reinforced concrete elements in shear and tension*. Technischer Bericht Publication No. 87-02, University of Toronto, Department of Civil Engineering, 1987.
- [BD81] J. BONZEL und J. DAHMS: *Schlagfestigkeit von faserbewehrtem Beton*. Beton, 31:97–101, 136–142, 1981.
- [BDH⁺96] G. BROCKMANN, J. DAHL, D. HANSEL, W. JONAS und H. RIECH: *Stahlfaserbeton - Ein neuer Baustoff und seine Perspektiven*. Die Bibliothek der Technik Band 136. Verlag Moderne Industrie, 1996.
- [Bet93] J. BETTEN: *Kontinuumsmechanik*. Springer-Verlag, 1993.
- [BF99] J.A.O. BARROS und J.A. FIGUEIRAS: *Flexurale behavior of SFRC: testing and modeling*. Journal of Materials in Civil Engineering, 11:331–339, 1999.
- [BF01] J.A.O. BARROS und J.A. FIGUEIRAS: *Model for the analysis of steel fibre reinforced concrete slabs on grade*. Computers and Structures, 79:97–106, 2001.
- [Bis03] P.H. BISCHOFF: *Tension stiffening and cracking of steel fiber-reinforced concrete*. Journal of Materials in Civil Engineering, 15:174–182, 2003.
- [BLM00] T. BELYTSCHKO, W.K. LIU und B. MORAN: *Nonlinear finite elements for continua and structures*. Wiley, 2000.
- [Blü00] M. BLÜMEL: *Neue Laborversuchstechniken für felsmechanische Versuche*. In: *Proceedings EUROCK 2000 Symposium Aachen*, Seiten 573–578, Glückauf, Essen, 2000.
- [BM90] A. BENTUR und S. MINDESS: *Fibre reinforced cementitious composites*. Elsevier Applied Science, London, 1990.
- [BO83] Z.P. BAŽANT und B.H. OH: *Crack band theory for fracture of concrete*. Materials and Structures, 16:155–177, 1983.

- [BO85] Z.P. BAŽANT und B.H. OH: *Microplane model for progressive fracture in concrete and rock*. Journal of Engineering Mechanics, 111:559–582, 1985.
- [Böl82] E. BÖLCSKEY: *Beitrag zur Bestimmung der Momententragfähigkeit von Stahlfaserbeton-Rechteckbalken mit Berücksichtigung der verschiedenen Faserorientierungsfaktoren in Randbereichen*. Österreichische Ingenieur- und Architekten-Zeitschrift, 127:396–400, 1982.
- [BP58] B. BRESLER und K.S. PISTER: *Strength of concrete under combined stresses*. ACI Journal, 55:321–345, 1958.
- [BPC88] Z.P. BAŽANT und G. PIJAUDIER-CABOT: *Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence*. Journal of Applied Mechanics, 55:287–293, 1988.
- [BS88] Z.P. BAŽANT und S. SENNER: *Size effect in pull-out tests*. ACI Materials Journal, 85:347–357, 1988.
- [BS91] I.N. BRONSTEIN und K.A. SEMENDJAJEW: *Taschenbuch der Mathematik*. Teubner Verlag, 25. Auflage, 1991.
- [BS92] P.N. BALAGURU und S.P. SHAH: *Fiber reinforced cement composites*. McGraw Hill, New York, 1992.
- [BS85] J. BONZEL und M. SCHMIDT: *Verteilung und Orientierung von Stahlfasern im Beton und ihr Einfluss auf die Eigenschaften von Stahlfaserbeton*. Betontechnische Berichte, 3, 1984/85.
- [Bui91] H.D. BUI: *Failure mechanics of fibre reinforced concrete and pre-damaged structures*. Technischer Bericht Brite-Euram Projekt P-89-3275 - Task Report 3, Paris, 1991.
- [CC09] E. COSSERAT und F. COSSERAT: *Théorie des corps déformables*. A. Hermann et Fils, Paris, 1909.
- [CC75] A.C.T. CHEN und W.F. CHEN: *Constitutive relations for concrete*. Journal of Engineering Mechanics, 101:465–481, 1975.
- [CF90] CEB-FIB: *Model Code 1990, Bulletin d'information*. Lausanne, 1990.
- [CH88] W.F. CHEN und D.J. HAN: *Plasticity for Structural Engineers*. Springer-Verlag, 1988.
- [Che82] W.F. CHEN: *Plasticity in Reinforced Concrete*. McGraw-Hill, 1982.
- [CPOE95] V. CERVENKA, R. PUKL, J. OZBOLT und R. ELIGEHAUSEN: *Mesh sensitivity effects in smeared finite element analysis of concrete fracture*. In: F. H. WITTMANN (Herausgeber): *Proceedings of the Second International Conference on Fracture Mechanics of Concrete Structures (FRAMCOS II)*. Aedificatio, Zürich, 1995.
- [CS79] P.A. CUNDALL und O.D.L. STRACK: *A discrete numerical model for granular assemblies*. Géotechnique, 29:47–65, 1979.
- [CS82] J.P. CORDEBOIS und F. SIDOROFF: *Anisotropic damage in elasticity and plasticity*. Journal de Mécanique théorique et appliquée, 2:45–60, 1982.
- [CV88] A. CARPINTERI und S. VALENTE: *Size-scale transition from ductile to brittle failure: A dimensional analysis approach*. In: J. MAZARS und Z.P. BAZANT (Herausgeber): *CNRS-NSF Workshop on strain localization and size effects due to cracking and damage*, Seiten 477+. Elsevier Applied Science, London, 1988.
- [CYC92] J.-C. CHERN, H.-J. YANG und H.-W. CHEN: *Behavior of steel fiber reinforced concrete in multiaxial loading*. ACI Materials Journal, 89(1):32–40, 1992.
- [dBM92] R. DE BORST und H.-B. MÜHLHAUS: *Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 35:521–539, 1992.
- [dBSMP93] R. DE BORST, L.J. SLUYS, H.-B. MÜHLHAUS und J. PAMIN: *Fundamental issues in finite element analysis of localization of deformation*. Engineering Computations, 10:99–121, 1993.
- [DBV96] DEUTSCHER BETON- UND BAUTECHNIK-VEREIN E.V. (DBV): *Merkblatt „Bemessungsgrundlagen für Stahlfaserbeton im Tunnelbau“*, 1992 (überarb. 1996).

- [DBV01] DEUTSCHER BETON- UND BAUTECHNIK-VEREIN E.V. (DBV): Merkblatt „Stahlfaserbeton“, Oktober 2001.
- [DCG90] E.N. DVORKIN, A.M. CUITINO und G. GIOIA: *Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 90:892–944, 1990.
- [Die92] J. DIETRICH: *Zur Qualitätsprüfung von Stahlfaserbeton für Tunnelschalen mit Biegezugbeanspruchung*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Institut für konstruktiven Ingenieurbau, 1992.
- [DIN91] DIN 1048: *Prüfverfahren für Beton*, Berlin, Ausgabe Juni 1991.
- [DIN01] DIN 1045-1: *Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton*, Berlin, Ausgabe Juni 2001.
- [DL72] G. DUVAUT und J.L. LION: *Les inequations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris, 1972.
- [DO90] O. DAHLBLOM und N.S. OTTOSEN: *Smear crack analysis using generalized fictitious crack model*. Journal of Engineering Mechanics, 116(1):55–76, 1990.
- [Ebe91] J. EBERHARDSTEINER: *Synthese aus konstitutiven Modellieren von Beton mittels dreiaxialer, nichtlinear-elastischer Werkstoffgesetze und Finite-Elemente-Analysen dickwandiger Stahlbetonkonstruktionen*. Dissertation, Technische Universität Wien, 1991.
- [EH72] J. EDGINGTON und D.J. HANNANT: *Steel fibre reinforced concrete - The effect on fibre orientation of compaction by vibration*. Matériaux et Constructions, 5:41–44, 1972.
- [EMM87] J. EBERHARDSTEINER, G. MESCHKE und H. MANG: *Triaxiales konstitutives Modellieren von Beton*. Technische Universität Wien, Institut für Festigkeitslehre, 1987.
- [Fal01] H. FALKNER: *Stahlfaserbeton - Forschung und Anwendung*. In: K. ZILCH (Herausgeber): *Masivbau 2001 - Forschung, Entwicklungen und Anwendungen*, Seiten 99–129. München, 2001.
- [FdB96] P.H. FEENSTRA und R. DE BORST: *A composite plasticity model for concrete*. International Journal of Solids and Structures, 33:707–730, 1996.
- [Fee93] P.H. FEENSTRA: *Computational aspects of biaxial stress in plain and reinforced concrete*. Dissertation, Delft University of Technology, 1993.
- [Fei04] C. FEIST: *A numerical model for cracking of plain concrete based on the strong discontinuity approach*. Dissertation, Universität Innsbruck, 2004.
- [Fey95] B. FEYERABEND: *Zum Einfluß verschiedener Stahlfasern auf das Verformungs- und Rißverhalten von Stahlfaserbeton unter den Belastungsbedingungen einer Tunnelschale*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Institut für konstruktiven Ingenieurbau, 1995.
- [FG01] L. FERRARA und R. GETTU: *Size effect in splitting tests on plain and steel fiber-reinforced concrete: A non-local damage analysis*. In: R. DE BORST et al. (Herausgeber): *Proceedings of the Fourth International Conference on Fracture Mechanics of Concrete Structures (FRAMCOS IV)*, Seiten 677–684. Cachan, France, 2001.
- [Fig83] J.A. FIGUEIRAS: *Ultimate load analysis of anisotropic and reinforced concrete plates and shells*. Dissertation, University College of Swansea, 1983.
- [FN85] D.A. FANELLA und A.E. NAAMAN: *Stress-strain properties of fiber reinforced mortar in compression*. ACI Journal, Seiten 475–483, 1985.
- [Gos00] U. GOSSLA: *Tragverhalten und Sicherheit betonstahlbewehrter Stahlfaserbetonbauteile*. In: *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton Heft 501*. Beuth-Verlag, Berlin, 2000.
- [GPFI01] R. GETTU, M. PRISCO, R. FELICETTI und F. IORIO: *On the identification of SFRC tensile constitutive behaviour*. In: R. DE BORST et al. (Herausgeber): *Proceedings of the Fourth International Conference on Fracture Mechanics of Concrete Structures (FRAMCOS IV)*, Seiten 541–548, Cachan, France, 2001.
- [Hau01] A. HAUFE: *Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke aus Beton mit der Plastizitätstheorie*. Dissertation, Universität Stuttgart, 2001.

- [HBK85] H.K. HILSDORF, W. BRAMESHUBER und R. KOTTAS: *Abschlussbericht des Forschungsvorhabens „Weiterentwicklung und Optimierung der Materialeigenschaften faserbewehrten Betons und Spritzfaserbetons als Stabilisierungselemente der Felssicherung“*. Technischer Bericht IfMB, Universität Karlsruhe, 1985.
- [Hem03] O. HEMMY: *Zum Gebrauchs- und Tragverhalten von Tunnelschalen aus Stahlfaserbeton und stahlfaserverstärktem Stahlbeton*. Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 2003.
- [Hen24] H. HENCKY: *Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen*. ZAMM, 4:323+, 1924.
- [Hil80] A. HILLERBORG: *Analysis of fracture by means of the fictitious crack model, particularly for fibre reinforced concrete*. The International Journal of Cement Composites, 2:177–1984, 1980.
- [Hil85a] A. HILLERBORG: *Determination and significance of the fracture toughness of steel fibre concrete*. In: S.P. SHAH und A. SKARENDAHL (Herausgeber): *Steel Fiber Concrete, US-Sweden joint seminar*. 1985.
- [Hil85b] A. HILLERBORG: *The theoretical basis of a method to determine the fracture energy G_f of concrete*. Materials and Structures, 18(106):291–296, 1985.
- [HJR95] B. HASELWANDER, W. JONAS und H. RIECH: *Material equations for the calculation of steel fibre reinforced concrete members*. Nuclear Engineering and Design, 156:235–248, 1995.
- [HM95] G. HOFSTETTER und H.A. MANG: *Computational mechanics of reinforced concrete structures*. Vieweg & Sohn, 1995.
- [HMP76] A. HILLERBORG, M. MODEER und P.E. PETERSON: *Analysis of crack formation and crack growth by means of fracture mechanics and finite elements*. Cement and Concrete Research, 6(6):773–781, 1976.
- [Hor91] D. HORDIJK: *Local approach to fatigue of concrete*. Dissertation, Delft University of Technology, 1991.
- [HR98] H.K. HILSDORF und H.W. REINHARDT: *Beton*. In: J. EIBL (Herausgeber): *Betonkalender 1998*, Band 1, Seiten 1–154. Ernst & Sohn, Berlin, 1998.
- [Hre41] A. HRENNIKOFF: *Solution of problems of elasticity by the framework method*. Journal of Applied Mechanics, Seiten 169+, 1941.
- [HST93] G. HOFSTETTER, J.C. SIMO und R.L. TAYLOR: *A modified cap model : Closest point solution algorithms*. Computers & Structures, 46:203–214, 1993.
- [HT91] G. HOFSTETTER und R.L. TAYLOR: *Treatment of the corner region for Drucker-Prager type plasticity*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 71:589–591, 1991.
- [HTC82] S.S. HSIEH, E.C. TING und W.F. CHEN: *A plasticity-fracture model for concrete*. International Journal of Solids and Structures, 18:181–197, 1982.
- [IS85] A.R. INGRAFFEA und V. SAOUMA: *Numerical modelling of discrete crack propagation in reinforced and plain concrete*. In: MARTINUS NIJHOFF (Herausgeber): *Fracture mechanics of concrete*, Seiten 171–225. Dordrecht, 1985.
- [JB95] M. JIRÁSEK und Z.P. BAZANT: *Particle model for quasibrittle fracture and application to sea ice*. International Journal of Fracture, 69, 1995.
- [Jir00] M. JIRÁSEK: *Comperative study on finite elements with embedded discontinuities*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 188:307–330, 2000.
- [K⁺83] H. Y. KO et al.: *Constitutive properties of steel fiber reinforced concrete in multiaxial loading*. In: *Interaction of Non-Nuclear Munitions with Structures*, Seiten 71–76. U.S. Air Force Academy, Colorado, 1983.
- [Kel66] A. KELLY: *Strong Solids*. Clarendon Press, Oxford, 1966.
- [KG96] G. KÖNIG und R. GRIMM: *Hochleistungsbeton*. In: J. EIBL (Herausgeber): *Betonkalender 1996*, Band 1. Ernst & Sohn, Berlin, 1996.

- [KHR69] H. KUPFER, H.K. HILSDORF und H. RÜSCH: *Behavior of concrete under biaxial stresses*. ACI Journal, 66:656–666, 1969.
- [Kle84] K. KLEISER: *Zum Tragmechanismus von Stahlfaserbeton*. In: *Bereichte Konstruktiver Ingenieurbau Heft 42*, Seiten 6–15. Vulkan Verlag, Essen, 1984.
- [Koi53] W.T. KOITER: *Stress strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface*. Quarterly Journal of Applied Mathematics, 11:350–354, 1953.
- [Koo00] A.G. KOOIMAN: *Modelling steel fibre reinforced concrete for structural design*. Dissertation, Delft University of Technology, 2000.
- [Kor96] K. KORDINA: *Brandschutzforschung im Betonbau - Ergebnisse aus den letzten Jahren*. In: DEUTSCHER BETON VEREIN (DBV) (Herausgeber): *Vorträge der DBV-Arbeitstagung Forschung*. Wiesbaden, 1996.
- [KP72] J. KAR und A. PAL: *Strength of fibre reinforced concrete*. In: *Proceedings ASCE*, Seiten 1053+. 1972.
- [Kre64] H. KRENCHER: *Fibre reinforcement*. Akademisk Forlag, Kopenhagen, 1964.
- [KRS91] M. KLISINSKI, K. RUNESSON und S. STURE: *Finite element with inner softening band*. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 117:575–587, 1991.
- [Kul94a] J. KULLAA: *Constitutive modelling of fibre reinforced concrete under uniaxial tensile loading*. Composites, 25(10):935–944, 1994.
- [Kul94b] J. KULLAA: *Fibre reinforced concrete under uniaxial tensile loading*. Nordic Concrete Research, 14:77–90, 1994.
- [Kul96] J. KULLAA: *Dimensional analysis of bond modulus in fiber pullout*. Journal of Structural Engineering, Seiten 783–787, 1996.
- [Kul97] J. KULLAA: *Finite element modelling of fibre-reinforced brittle materials*. HERON, 42:75–95, 1997.
- [Kul98a] J. KULLAA: *Micromechanics of multiple cracking, Part I Fibre analysis*. Journal of Materials Science, 33:4213–4224, 1998.
- [Kul98b] J. KULLAA: *Micromechanics of multiple cracking, Part II Statistical tensile behaviour*. Journal of Materials Science, 33:4225–4234, 1998.
- [Kup72] H.B. KUPFER: *Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung*. Dissertation, Technische Universität München, 1972.
- [Küt00] L. KÜTZING: *Tragfähigkeitsermittlung stahlfaserverstärkter Betone*. B.G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden, 2000.
- [Lac99] R. LACKNER: *Adaptive finite element analysis of reinforced concrete plates and shells*. Dissertation, Technische Universität Wien, 1999.
- [Lin96] Y. LIN: *Tragverhalten von Stahlfaserbeton*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1996.
- [Lin99] Y. LIN: *Tragverhalten von Stahlfaserbeton*. In: *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton - Heft 494*. Beuth-Verlag, Berlin, 1999.
- [LPL87] T.Y. LIM, P. PARAMASIVAM und S.L. LEE: *Analytical model for tensile behavior of steel fibre concrete*. ACI Materials Journal, 84, 1987.
- [LSK93] V.C. LI, H. STANG und H. KRENCHER: *Micro mechanics of crack bridging in fibre reinforced concrete*. Materials and Structures, 26:486–494, 1993.
- [LvM99] G. LILLIU und J.G.M. VAN MIER: *Analysis of crack growth in the brazilian test*. Construction Materials - Theory and application, Seiten 123–137, 1999.
- [LW92] V.C. LI und H.C. WU: *Conditions for pseudo strain hardening in fibre reinforced brittle matrix composites*. Journal of Applied Mechanics Reviews, 45(8):390–398, 1992.

- [LWB91] V.C. LI, Y.J. WANG und S. BACKER: *A micromechanical model of tension - softening and bridging toughening of short random fiber reinforced brittle matrix composites*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 39(5):607–625, 1991.
- [MA91] H.-B. MÜHLHAUS und E.C. AIFANTIS: *A variational principle for gradient plasticity*. International Journal of Solids and Structures, 28:845–858, 1991.
- [Mai91] B. MAIDL: *Stahlfaserbeton*. Ernst & Sohn, 1991.
- [Man89] S.A. MANSOUR: *Static and fatigue behavior of low and high-strength plain and steel fiber reinforced concrete*. Dissertation, New Mexico State University, Civil Engineering Department, 1989.
- [Mar97] P. MARK: *Ein Beitrag zur Modellierung und numerischen Simulation von Strukturveränderungen in stoßartig beanspruchtem Beton*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Institut für konstruktiven Ingenieurbau, 1997.
- [Men99] H. MENRATH: *Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1999.
- [Mie84] J.G.M. VAN MIER: *Strain-softening of concrete under multiaxial loading conditions*. Dissertation, Eindhoven University of Technology, 1984.
- [Mie97] J.G.M. VAN MIER: *Fracture processes of concrete*. CRC Press, Boca Raton, Florida, 1997.
- [MM97] G. MESCHKE und H.A. MANG: *Werkstoffmodelle für gerissenen Stahlbeton: Konzepte, Algorithmen und numerische Analyse*. In: F. BLASCHKE, G. GÜNTHER und J. KOLLEGER (Herausgeber): *Materialmodelle und Methoden zur wirklichkeitsnahen Berechnung von Beton-, Stahlbeton- und Spannbetonbauteilen*, Seiten 182–194. 1997.
- [MM00] J. MOSLER und G. MESCHKE: *3D FE analysis of cracks by means of the strong discontinuity approach*. In: D.R.J. OWEN, E. ONATE und E. HINTON (Herausgeber): *COMPLAS*. Barcelona, 2000.
- [MMMY95] S. MATSUO, S. MATSUOKA, A. MASUDA und H. YANAGI: *A Study on Approximation Method of Tension Softening Curve of Steel Fiber Reinforced Concrete*. In: F. H. WITTMANN (Herausgeber): *Proceedings of the Second International Conference on Fracture Mechanics of Concrete Structures (FRAMCOS II)*, Seiten 745–754. Aedificatio, Zürich, 1995.
- [MPA98a] MATERIALPRÜFUNGSAMT FÜR DAS BAUWESEN, TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN: *Untersuchungsbericht Nr. 1448 / Eb - Hachinger Stollen, Materialuntersuchungen an Betonwürfeln und Betonprismen aus Stahlfaserbeton*, 1998.
- [MPA98b] MATERIALPRÜFUNGSAMT FÜR DAS BAUWESEN, TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN: *Untersuchungsbericht Nr. 1454 / Eb - BV Hachinger Stollen, Spaltzugversuche an vier Tübbings aus Stahlfaserbeton*, 1998.
- [MV87] H.-B. MÜHLHAUS und I. VARDOULAKIS: *The thickness of shear bands in granular materials*. Geotechnique, 37:271–283, 1987.
- [Nel72] L. J. M. NELISSEN: *Biaxial testing of normal concrete*. HERON, 18:90 pp., 1972.
- [Nit98] A. NITSCHKE: *Tragverhalten von Stahlfaserbeton für den Tunnelbau*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 1998.
- [NNC87] JR.G. NAMMUR, A.E. NAAMAN und S.K. CLARK: *Analytical prediction of the pull-out behavior of steel fibers in cementitious matrices*. In: S. MINDESS und S.P. SHAH (Herausgeber): *Bonding in Cementitious Composites - Symposium Proceedings*. Boston, 1987.
- [NS67] D. NGO und A.C. SCORDELIS: *Finite element analysis of reinforced concrete beams*. ACI Journal, 64:152–163, 1967.
- [ODA01] G. ORANGE, J. DUGAT und P. ACKER: *High performances cementitious based composites: A new multiscale reinforced concrete (DUCTAL)*. In: J. FIGUEIRAS, L. JUVANDES und R. FARIA (Herausgeber): *Composites in Constructions*, Seiten 15–20. A.A. Balkema, 2001.

- [OP85] M. ORTIZ und E.P. POPOV: *Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 21:1561–1576, 1985.
- [Ort00] M. ORTU: *Rissverhalten und Rotationsvermögen von Stahlfaserbeton für Standsicherheitsuntersuchungen im Tunnelbau*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 2000.
- [Ost91] B. OSTERMEIER: *Ein Beitrag zur Erfassung des Vortriebsgeschehens beim Bau von Tunneln im Lockergestein mit Spritzbetonsicherung - Ebene und räumliche Berechnungen -*. Dissertation, Technische Universität München, 1991.
- [Ott77] N. OTTOSEN: *A failure criterion for concrete*. Journal of the Engineering Mechanics Division, Seiten 525–535, 1977.
- [PBZL97] I.D.S. PONTES, L.A. BORGES, N. ZOUAIN und F.R. LOPES: *An approach to limit analysis with cone-shaped yield surfaces*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40:4011–4032, 1997.
- [PCB87] G. PIJAUDIER-CABOT und Z.P. BAŽANT: *Nonlocal damage theory*. Journal of Engineering Mechanics, 113:1512–1533, 1987.
- [Per96] P. PERZYNA: *Fundamental problems in viscoplasticity*. In: *Recent Advances in Applied Mechanics*, Band 9, Seiten 243–377. 1996.
- [Pet81] P.E. PETERSSON: *Crack growth and formation of fracture zones in plain concrete and similar materials*. Bericht TVBM-1006, Lund Institut of Technology, 1981.
- [PR71] S. PARIMI und S. RAO: *Effectiveness of random fibres in fibre reinforced concrete*. In: *Proceedings at the International Conference of Mechanical Behaviour of Materials, Vol. 5*, Seiten 176+. Kyoto, 1971.
- [Pra99] J. PRAVIDA: *Zur nichtlinearen adaptiven Finite-Element-Analyse von Stahlbetonscheiben*. Dissertation, Technische Universität München, 1999.
- [Rem94] G. REMMEL: *Zum Zug- und Schubtragverhalten von Bauteilen aus hochfestem Beton*. In: *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton - Heft 444*. Beuth-Verlag, Berlin, 1994.
- [RIL85] RILEM DRAFT RECOMMENDATION, 50-FMC COMMITTEE FRACTURE MECHANICS OF CONCRETE: *Determination of the fracture energy of mortar and concrete by means of the three-point bend tests on notched beams*. Materials and Structures, 18:285–290, 1985.
- [RIL00a] RILEM TC162-TDF: *Test and design methods for steel fibre reinforced concrete - σ - ϵ - design method*. Materials and Structures, 33:75–81, 2000.
- [RIL00b] RILEM TC162-TDF: *Test and design methods for steel fibre reinforced concrete - Bending test*. Materials and Structures, 33:3–5, 2000.
- [RIL01] RILEM TC162-TDF: *Test and design methods for steel fibre reinforced concrete - Uni-axial tension test for steel fibre reinforced concrete*. Materials and Structures, 34:3–6, 2001.
- [RIL02] RILEM TC162-TDF: *Design of steel fibre reinforced concrete using the σ - w method: principles and applications*. Materials and Structures, 35:262–278, 2002.
- [RIL03a] RILEM TC162-TDF: *Round-robin analysis of the RILEM TC 162-TDF uni-axial tensile test: Part 1 - Test method evaluation*. Materials and Structures, 36:265–274, 2003.
- [RIL03b] RILEM TC162-TDF: *Round-robin analysis of the RILEM TC 162-TDF uni-axial tensile test: Part 2 - Fibre distribution*. Materials and Structures, 36:275–280, 2003.
- [RM64] J. P. ROMUALDI und J. A. MANDEL: *Tensile Strength of Concrete Affected by Uniformly Distributed and Closely Spaced Short Length of Wire Reinforcement*. ACI Journal, Seiten 657–675, 1964.
- [Rog02] A. ROGGE: *Materialverhalten von Beton unter mehrachsiger Beanspruchung*. Dissertation, Technische Universität München, 2002.
- [Rot88] J.G. ROTS: *Computational Modelling of Concrete Fracture*. Dissertation, Delft University of Technology, 1988.

- [SA92] H. STANG und T. AARRE: *Evaluation of crack width in FRC with conventional reinforcement*. Cement & Concrete Comp., 14:143–154, 1992.
- [Sch62] H. SCHÄFER: *Versuch einer Elastizitätstheorie des zweidimensionalen Cosserat-Kontinuums*. In: M. SCHÄFER (Herausgeber): *Miszellaneen der Angewandten Mechanik*, Seiten 277–292. Akademie-Verlag, 1962.
- [Sch75] B. SCHNÜTGEN: *Das Festigkeitsverhalten von mit Stahlfasern bewehrtem Beton unter Zugbeanspruchung*. Schriftenreihe des Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau Heft Nr. 75-8, Ruhr-Universität Bochum, 1975.
- [Sch78] B. SCHNÜTGEN: *Materialeigenschaften von Stahlfaserbeton*. In: *Berichte des Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, Heft Nr. 31*, Seiten 5–42. Vulkan-Verlag, Essen, 1978.
- [Sch81] B. SCHNÜTGEN: *Bemessung von Stahlfaserbeton und ihre Problematik*. In: *Berichte des Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, Heft Nr. 37*, Seiten 9–13. Vulkan-Verlag, Essen, 1981.
- [Sch82] K. SCHIKORA: *Berechnungsmodell und Meßergebnisse eines seicht liegenden Doppeltunnels im quartären Kies*. Tunnel, Heft 3/82:153–161, 1982.
- [Sch83] K. SCHÖNLIN: *Ein Verfahren zur Ermittlung der Orientierung und Menge der Fasern im faserbewehrten Beton*. Dissertation, Universität Karlsruhe, Institut für Massivbau und Baustofftechnologie, 1983.
- [Sch88] K. SCHÖNLIN: *Ermittlung der Orientierung, Menge und Verteilung der Fasern in faserbewehrtem Beton*. Beton- und Stahlbetonbau, 83:168–171, 1988.
- [Sch93] K. SCHIKORA: *Bergmännische Tunnelbauweisen*. In: LANDESVERBAND BAYERN VERBAND BERATENDER INGENIEURE VBI (Herausgeber): *Fortbildungsseminar - Neuerungen und Tendenzen im konstruktiven Ingenieurbau*, 1993.
- [SH88] E. C. M. SU und T. T. C. HSU: *Biaxial compression fatigue and discontinuity of concrete*. ACI Materials Journal, 85:178–188, 1988.
- [SH98] J.C. SIMO und T.J.R. HUGHES: *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag, 1998.
- [SIA99] SCHWEIZERISCHER INGENIEUR- UND ARCHITEKTEN-VEREIN: *SIA Richtlinie 162/6 - Stahlfaserbeton*, 1999.
- [SJPT88] J.C. SIMO, J.W. JU, K.S. PISTER und R.L. TAYLOR: *Assessment of cap model: Consistent return algorithms and rate-dependent extension*. Journal of the Engineering Mechanics, 114:191–218, 1988.
- [SKG88] J.C. SIMO, J.G. KENNEDY und S. GOVINDJEE: *Non-smooth multisurface plasticity and viscoplasticity. Loading/unloading conditions and numerical algorithms*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 26:2161–2185, 1988.
- [SL90] P. SOROUSHIAN und C.D. LEE: *Distribution and orientation of fibers in steel fiber reinforced concrete*. ACI Materials Journal, 87, 1990.
- [SL94] D.J. STEVENS und D. LIU: *Constitutive modeling of fiber reinforced concrete*. Fiber Reinforced Concrete - Developments and Innovations, Seiten 249–269, 1994.
- [Slo02] V. SLOWIK: *Bruchmechanische Charakterisierung von Stahlfaserbeton*. In: G. KÖNIG, K. HOLSCHMACHER und F. DEHN (Herausgeber): *Faserbeton - Innovationen im Bauwesen*, Seiten 107–120. Bauwerk Verlag GmbH, Berlin, 2002.
- [SLS90] H. STANG, Z. LI und S.P. SHAH: *Pullout problem: stress versus fracture mechanical approach*. Journal of Engineering Mechanics, 116:2136–2150, 1990.
- [Slu92] L.J. SLUYS: *Wave propagation, localization and dispersion in softening solids*. Dissertation, Delft University of Technology, 1992.
- [SM03] M. STRACK und P. MARK: *Zur Biegebemessung von Stahlfaserbeton und stahlfaserverstärktem Stahlbeton. Vorgehensweisen und Hilfsmittel*. Beton und Stahlbetonbau, 12:755–763, 2003.

- [SO88] K. SCHIKORA und B. OSTERMEIER: *Temporäre Sicherung von Tunneln mit Spritzbeton*. Bauingenieur, 63:399–403, 1988.
- [SPAA99] S.P. SHAH, A. PELED, C.M. ALDEA und Y. AKKAYA: *Scope of high performance fibre reinforced cementitious composites*. In: *Proceedings of the III International RILEM Workshop: High Performance Fibre Reinforced Cementitious Composites (HPFRCC3)*, Seiten 113–130. Mainz, 1999.
- [ST05] K. SCHIKORA und B. THOMEE: *Bemessungskonzepte im Tunnelbau - Spritzbeton - Stahlfaserbeton*. In: *Baustatik Baupraxis 9*, Seiten 129–140. Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke, TU Dresden, 2005.
- [Sta01] M. STAMM: *Einfluß von Stahlfasern auf die Schädigungsevolution von Beton in Abhängigkeit von der Dehnrate*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 2001.
- [Str78] P. STROEVEN: *Morphometry of fibre reinforced cementitious materials, Part 1: Efficiency and spacing in idealized structures, Part 2: Inhomogeneity*. Materials and Structures, 11:31–38, 1978.
- [Str98] J. STROBAND: *Standardisation of test methods for steel fibre reinforced concrete*. Laboratory Report Nr. 25.5.98-14 (in niederländisch), Delft University of Technology, 1998.
- [SW98] P. SCHIESSL und R. WEYDERT: *Korrosion von Stahlfasern in gerissenem und ungerissenem Stahlfaserbeton*. Forschungsbericht Nr. 516, T 2802, Fraunhofer IRB, 1998.
- [TH93] P. TJIPTOBROTO und W. HANSEN: *Tensile strain hardening and multiple cracking in high-performance cement-based composites containing discontinuous fibers*. ACI Materials Journal, 90:16–25, 1993.
- [TL86] E. K. TSCHEGG und H. N. LINSBAUER: *Testing procedure for determination of fracture mechanics parameters*. Patentschrift Nr. A-233/86, Österreichisches Patentamt, 1986.
- [TM91] L.A. TRAINA und S.A. MANSOUR: *Biaxial strength and deformational behavior of plain and steel fiber concrete*. ACI Materials Journal, 88(4):354–362, 1991.
- [TSN78] M. E. TASUJI, F. O. SLATE und A. H. NILSON: *Stress-strain response and fracture of concrete in biaxial loading*. ACI Journal, 75:306–312, 1978.
- [TYH80] Y. TANIGAWA, K. YAMADA und S. HATANAKA: *Inelastic behavior of steel fiber reinforced concrete under compression*. In: *Int. Symp. Mat. Research Society: Advances in Cement-Matrix Composites*, Seiten 107–118. Boston, 1980.
- [Val91] S. VALENTE: *Influence of friction on cohesive crack propagation*. In: J.G.M. VAN MIER, J.G. ROTS und A. BAKKER (Herausgeber): *Fracture Processes in Concrete, Rock and Ceramics*, Seiten 695+. Chapman & Hall / E&FN Spon, London / New York, 1991.
- [VC82] F.J. VECCHIO und M.P. COLLINS: *The response of reinforced concrete to in-plane shear and normal stress*. Publication 82-03, Department of Civil Engineering, University of Toronto, 1982.
- [Von92] R. VONK: *Softening of concrete loaded in compression*. Dissertation, Eindhoven University of Technology, 1992.
- [Win01] B. WINKLER: *Traglastuntersuchungen von unbewehrten und bewehrten Betonstrukturen auf der Grundlage eines objektiven Werkstoffgesetzes für Beton*. Dissertation, Universität Innsbruck, 2001.
- [Wol02] K. WOLSKI: *Der Modified Tension Test - Aussagekraft und Durchführbarkeit eines neuen Zugversuches*. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Allgemeine, Angewandte und Ingenieurgeologie, Technische Universität München, 2002.
- [WSdB97] M.W. WANG, L.J. SLUYS und R. DE BORST: *Viscoplasticity for instabilities due to strain softening and strain rate softening*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40:3839–3864, 1997.
- [WW75] K.J. WILLAM und E.P. WARNKE: *Constitutive model for the triaxial behavior of concrete*. In: *Seminar on Concrete Structure Subjected to Triaxial Stresses*, Nummer 19–III-1. IABSE, Bergamo, 1975.

- [YSMH89] W.S. YIN, E.C.M. SU, M.A. MANSUR und T.T.C. HSU: *Biaxial tests of plain and fiber Concrete*. *ACI Materials Journal*, 86(3):236–243, 1989.
- [ZT89] O.C. ZIENKIEWICZ und R.L. TAYLOR: *The Finite Element Method*, Band 1. McGraw Hill, London, 1989.
- [ZT91] O.C. ZIENKIEWICZ und R.L. TAYLOR: *The Finite Element Method*, Band 2. McGraw Hill, London, 1991.