

Lehrstuhl für Baumechanik
der Technischen Universität München

Nichtlineare Interaktion zwischen Fahrzeug und Untergrund unter Zuhilfenahme von Integraltransformationen

Stefan Lenz

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. K.-U. Bletzinger

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. H. Grundmann
2. Univ.-Prof. Dr. Th. Huckle

Die Dissertation wurde am 28.04.2003 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen am 17.07.2003 angenommen.

Zusammenfassung

Zur Berechnung der dynamischen Interaktion zwischen einem nichtlinear modellierten Fahrzeug und seiner Fahrbahn wird ein Simulationsmodell entwickelt. Die Fahrbahn und der darunter liegende dreidimensionale geschichtete Halbraum weisen lineares Verhalten auf. Mit Hilfe der Fourier- und Wavelettransformation werden eindimensionale Impulsreaktionsfunktionen für das gekoppelte System Fahrbahn/Boden berechnet. Sie ersetzen in der anschließenden nichtlinearen Zeitschrittintegration das Verhalten des Systems Fahrbahn/Boden. Mit den ermittelten Interaktionskräften wird anschließend unter Verwendung der Fourier- und Wavelettransformation die Wellenausbreitung im Boden berechnet.

Abstract

A simulation model is developed in order to calculate the dynamic interaction between a non-linearly modelled vehicle and its track. The slab track rests on a three-dimensional layered halfspace. Both slab track and halfspace are characterised by a linear behaviour. By the aid of the Fourier- and the Wavelet-transform one-dimensional impulse response functions are calculated for the coupled track-subsoil-system. In the subsequent non-linear time-step-integration they replace the behaviour of the track-subsoil-system. As a result, the interaction forces are obtained. Using the Fourier- and the Wavelet-transform, finally the wave-propagation in the soil due to the moving nonlinear vehicle are calculated.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1999 bis 2003 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Baumechanik der Technischen Universität München.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. H. Grundmann für die fachliche Betreuung sowie für die freundliche Offenheit, die das Arbeitsklima am Lehrstuhl für Baumechanik bestimmt.

Herrn Univ.-Prof. Dr. Th. Huckle danke ich für die Übernahme des Koreferates und Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. K.-U. Bletzinger für die Übernahme des Vorsitzes des Verfahrens.

Bei meinen ehemaligen und derzeitigen Kolleginnen und Kollegen am Lehrstuhl möchte ich mich für die kollegiale und angenehme Arbeitsatmosphäre, die fachlichen Diskussionen und die schönen Lehrstuhlausflüge bedanken.

Besonders bedanken möchte ich mich bei meiner Frau Sabine für ihre Geduld und Unterstützung sowie die Übersetzung der Arbeit in die Neue Deutsche Rechtschreibung.

München, im September 2003

Stefan Lenz

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
1.1	Hinführung zum Thema	7
1.2	Einbettung des Themas in die Literatur	10
1.2.1	Halbraumdynamik und Fahrzeug-Fahrweg-Interaktion	10
1.2.2	Fourier-Transformation unter Zuhilfenahme einer Wavelettransformation	12
2	Balken- und Bodenmodell	13
2.1	Balkenmodelle	13
2.1.1	Euler-Bernoulli-Balken	13
2.1.2	Timoshenko-Balken	14
2.2	Bodenmodell	14
2.2.1	Herleitung der Beziehungen	14
2.2.2	Geschichteter Boden	17
2.2.3	Ungeschichteter Halbraum	18
2.2.4	Lösung für $\omega = 0$	20
2.3	Kopplung von Balken und Boden	24
2.3.1	Halbraumsteifigkeit im Wellenzahl-Frequenzbereich	24
2.3.2	Einbindung der Halbraumsteifigkeit in das Balkenmodell	26
3	Wavelettransformation	28
3.1	Grundlagen	28
3.1.1	Kontinuierliche Wavelettransformation	28
3.1.2	Diskrete Wavelettransformation	29
3.1.3	Mehrskalenganalyse	30

3.2	Mehrdimensionale Wavelettransformation	32
3.2.1	Zweidimensionale Wavelettransformation	33
3.2.2	Dreidimensionale Wavelettransformation	34
3.3	Spezielle Eigenschaften der <i>B-spline Wavelets</i>	38
3.3.1	Formeln für <i>B-spline Wavelets</i>	38
3.4	Eindimensionale <i>B-splines</i> 1., 2. und 4. Ordnung	39
3.4.1	<i>B-spline</i> 1. Ordnung	39
3.4.2	<i>B-spline</i> 2. Ordnung	40
3.4.3	<i>B-spline</i> 4. Ordnung	40
3.4.4	Vergleich der <i>B-splines</i> 1., 2. und 4. Ordnung	41
4	Beschreibung der Programmpakete für die mehrdimensionale Wavelet-/Fourier-Transformation	46
4.1	Vorgehensweise	46
4.2	Skalierung der Achsen	46
4.3	Gittergenerator	47
4.3.1	Gittergenerator im zweidimensionalen Fall	48
4.3.2	Gittergenerator im dreidimensionalen Fall	49
4.3.3	Eigenschaften des Rasters	51
4.4	Mehrskalenganalyse	51
4.4.1	Erzeugung der Elemente am Rand einer Skala	52
4.4.2	Ermittlung der Wavelet- und Skalierungskoeffizienten der nächstgrößeren Skala	53
4.4.3	Sortierkriterium	53
4.5	Rekonstruktion der Fourier-rücktransformierten Funktion	55
4.6	Berechnungsaufwand	55
4.6.1	Beurteilung der Rechenzeit	55
4.6.2	Beurteilung des Arbeitsspeicherbedarfs	56
5	Nichtlineare Interaktion Fahrzeug/Fahrweg im Zeitbereich	57
5.1	Bewegtes Koordinatensystem	58
5.2	Impulsreaktionsfunktionen des Balken-Bodenmodells	59
5.3	Zeitintegration der Bewegungsgleichungen	61

5.3.1	Numerische Aufbereitung der Faltung	61
5.3.2	Differentialgleichungen für die Interaktionsberechnung; Fahrzeugmodell Einmassenschwinger	62
5.3.3	Differentialgleichungen für die Interaktionsberechnung; Fahrzeugmodell Drehgestell	66
5.3.4	Newton-Raphson-Verfahren für nichtlineare Federkennlinien	68
5.4	Überprüfung der Ergebnisse bei harmonischer Belastung	69
5.4.1	Einmassenschwinger	70
5.4.2	Drehgestellmodell	70
5.5	Berechnung der Wellenausbreitung im Halbraum	73
5.6	Reaktion aus Eigengewicht des Fahrzeugs	76
6	Anwendungsbeispiele	77
6.1	Antwortfunktionen eines Balkens auf verschiedenen Böden infolge eines Impulses	77
6.1.1	Impulsgeschwindigkeitsreaktionsfunktionen	78
6.1.2	Impulsreaktionsfunktionen	79
6.2	Vorfaktoren der Legendre-Polynome	84
6.3	Anmerkungen zur Anwendung des zweidimensionalen Programmpakets	89
6.3.1	Darstellung des Abtastrasters	89
6.3.2	Waveletkoeffizienten	89
6.4	Nichtlineare Interaktion zwischen Fahrzeug und 3D-Balken/Boden-System	91
6.4.1	Fahrzeugmodell Einmassenschwinger	91
6.4.2	Fahrzeugmodell Drehgestell	93
6.5	Einsenkungsmulde infolge Eigengewicht	97
6.6	Wellenausbreitung an der Halbraumoberfläche	97
6.6.1	Fahrzeugmodell Einmassenschwinger	98
6.6.2	Fahrzeugmodell Drehgestell	100
6.7	Anmerkungen zur Fourier-Rücktransformation mit Hilfe des dreidimensionalen Programmpakets	102
7	Schlussbemerkungen	104
	Literaturverzeichnis	106

A	Fourier-Transformation	110
A.1	Definition	110
A.2	Rechenregeln	110
A.3	Häufig verwendete Funktionen	111
B	Filterkoeffizienten	112
B.1	Filterkoeffizienten für die Waveletzerlegung	112
B.2	Filterkoeffizienten zur Ermittlung der dualen Skalierungsfunktion und des dualen Wavelets für die Rekonstruktion	113
B.3	Fourier-Koeffizienten zur Ermittlung der dualen Fourier-transformierten Skalierungsfunktion	114
C	Matrizen für die Drehgestellberechnung	115
C.1	Matrix Ψ_1 für das Newton-Raphson-Verfahren	115
C.2	Impedanzmatrix	120
D	Legendre - Polynome	123
D.1	Skalierte gefensterter Legendre-Polynome im Originalraum	123
D.2	Fourier-transformierte skalierte gefensterter Legendre-Polynome	124
	Abbildungsverzeichnis	125

Bezeichnungen

Mechanische Größen

c	Dämpfungskonstante
c_p, c_s, c_R	Wellengeschwindigkeiten der Primär-, Sekundär- und Rayleighwelle
f	Frequenz
h	Schichtdicke einer Bodenschicht
k	Federsteifigkeit
k_x, k_y	Wellenzahlen
k_p, k_s, k_R	Wellenzahlen der Primär-, Sekundär- und Rayleighwelle
k_r	radiale Wellenzahl ($k_r = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$)
p	Lastfunktion, Lastamplitude
t	Zeitkoordinate
u_x, u_y, u_z	Verschiebungen
v	Fahrgeschwindigkeit
x, y, z	Ortskoordinaten
A	Fläche, Querschnittsfläche
C	Koeffizienten
E	Elastizitätsmodul
G	Schubmodul
I	Flächenträgheitsmoment
P	Legendre-Polynome; alternativ: Lastfunktion
ϵ, ε	Dehnung
μ	Massebelegung
ν	Querdehnzahl
π	Kreiszahl
ρ	Dichte
σ	Spannung
ω	Kreisfrequenz

Mathematische Symbole

\equiv	Kennzeichnung einer Matrix
\dots	Kennzeichnung eines Vektors
i	imaginäre Einheit
$\circ \rightarrow \bullet$	Fourier-Hintransformation
$\bullet \rightarrow \circ$	Fourier-Rücktransformation
IFT_{\dots}	Fourier-Rücktransformation bzgl. der im Index stehenden Koordinate
$*$	Faltung
$(\hat{\dots})$	transformierte Größe
$(\dots)'$	Ableitung der Größe nach x oder z
δ	Dirac-Distribution
H	Heaviside-Distribution
$\langle \dots, \dots \rangle$	Skalarprodukt
\otimes	Tensorprodukt
\oplus	orthogonale Summe

Symbole bei der Waveletzerlegung

ψ	Wavelet
ϕ	Skalierungsfunktion
W	Funktionsraum der Wavelets
V	Funktionsraum der Skalierungsfunktion
c	Waveletkoeffizient
d	Skalierungskoeffizient
p	Filterkoeffizienten der Skalierungsfunktion
q	Filterkoeffizienten der Wavelets

Indizes

s	Schiene bzw. Balken
B	Boden bzw. Halbraum
D	Drehgestell
Q	Querkraft
R	Rad
W	Wagenkasten

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Hinführung zum Thema

Bei Hochgeschwindigkeitszügen ist der Verschleiß an Fahrzeugen und Fahrbahnen und damit auch der Erhaltungsaufwand deutlich höher als bei langsamer fahrenden Zügen. Dies liegt u.a. daran, dass mit zunehmender Geschwindigkeit des Fahrzeugs die dynamische Antwort des Bodens und der darauf lagernden Fahrbahn größer wird. Wenn die Fahrgeschwindigkeit größer wird als die Geschwindigkeit der amplitudenstärksten Welle im Boden, der sog. Rayleighwelle, kommt es zu einer Wellenkonzentration, die dem “Überschallknall” ähnelt. Dann erreichen die Amplituden der Wellen im Boden extreme Werte und die Beanspruchung des Fahrzeugs steigt enorm. Bei der Hochgeschwindigkeitsstrecke zwischen Göteborg und Malmö bei Ledsgard in Schweden wurde diese Problematik aufgrund der dort vorliegenden extrem weichen Böden, die eine niedrige Rayleighwellengeschwindigkeit bewirken, eindrucksvoll deutlich (s. z.B. Takemiya [Tak03]¹).

Neben den negativen Auswirkungen der hohen Bodenantworten auf das Fahrzeug sind oft auch die Auswirkungen der Wellenausbreitung auf die benachbarte Bebauung von Interesse. Bahntrassen sowie U- und Trambahnen liegen oft sehr dicht neben bestehenden Bauten und regen diese über den Boden zu unerwünschten Schwingungen an. Nicht zu vergessen sind natürlich auch Anregungen, die vom Straßenverkehr ausgehen und Schwingungen im Boden verursachen. Im Rahmen dieser Arbeit werden Methoden entwickelt, die eine effiziente Berechnung der Interaktion Fahrzeug-Fahrweg und der sich daraus ergebenden Wellenausbreitung im Boden ermöglichen.

Zwei Punkte bilden den Kern der Arbeit: Zum einen wird aufgezeigt, wie Impulsreaktionsfunktionen für das gekoppelte lineare System Fahrbahn/geschichteter unendlicher Halbraum ermittelt werden können. Diese Impulsreaktionsfunktionen ermöglichen eine einfache, eindimensionale Berechnung der Interaktion zwischen einem beliebigen, nichtlinear modellierten Fahrzeug und seiner Fahrbahn, die auf einem dreidimensional modellierten Boden lagert. Als Fahrbahn wird ein unendlich langer Timoshenko-Balken endlicher Breite angenommen, der in Querrichtung starr ist. Daher ist die Einsenkung des Balkens in Querrichtung konstant, die entsprechende Spannungsverteilung jedoch nicht.

¹Takemiya schlägt dort zur Reduzierung der Bodenantwort die von ihm entwickelte *Wave Impeding Barrier (WIB)* vor. Das ist eine Bodenverbesserung, bei der durch Injektion Bodenpfähle auf Zementbasis erzeugt werden.

Zum anderen wurden zwei Programmpakete entwickelt, die eine effektive zwei- und dreidimensionale inverse Fourier-Transformation über eine Wavelettransformation ausführen. Diese Transformationen werden benötigt, um die Impulsreaktionsfunktionen und die Wellenausbreitung effizient zu berechnen. Die Differentialgleichungen des Bodens als unendlicher dreidimensionaler Halbraum und des unendlich langen Balkens lassen sich im Fourier-transformierten Wellenzahl-Frequenzbereich weitgehend analytisch lösen. Problematisch ist lediglich die mehrdimensionale Rücktransformation der Lösung in den Orts-Zeitbereich. Dadurch, dass die entwickelten Programmpakete die jeweilige zwei- bzw. dreidimensionale Lösungsfunktion autoadaptiv abtasten und außerdem die Kompressionseigenschaften der Wavelettransformation ausnützen, ermöglichen sie diese Rücktransformationen numerisch sehr effektiv.

Im Einzelnen gliedert sich die vorliegende Arbeit folgendermaßen: Im Anschluss an die Einleitung werden im **zweiten Kapitel** zuerst die Grundgleichungen des unendlich langen Euler-Bernoulli- und Timoshenko-Balkens im Wellenzahl-Frequenzbereich (k_x, ω) aufgestellt.

Anschließend folgen die grundlegenden Beziehungen des horizontal geschichteten Halbraums im dreifach Fourier-transformierten Wellenzahl-Frequenzbereich (k_x, k_y, ω) . Ausgehend von den Lamé'schen Differentialgleichungen des elastischen Kontinuums lässt sich durch die Fourier-Transformation ein lineares System von Differentialgleichungen bilden, das im Falle des ungeschichteten Halbraums analytisch gelöst werden kann. Im Falle des geschichteten Halbraums erfolgt die Lösung weitgehend analytisch. Als Ergebnis erhält man die Verschiebungen der Halbraumoberfläche sowohl für den dynamischen als auch für den statischen Fall im Wellenzahl-Frequenzbereich.

In diesem Kapitel wird außerdem aufgezeigt, wie der Balken im Wellenzahl-Frequenzbereich an den Boden gekoppelt wird. Dazu werden zuerst im Fourier-transformierten Wellenzahl-Frequenzbereich (k_x, ω) Halbraumsteifigkeiten (Kraft-Verschiebungsbeziehungen) ermittelt. Um eine konstante Einsenkung des Balkens in Querrichtung zu gewährleisten, werden Legendre-Polynomansätze zur Annäherung der entsprechenden Koppelspannung Balken/Boden verwendet. In die Fourier-transformierte Differentialgleichung des Balkens geht die so gewonnene wellenzahl-frequenzabhängige Halbraumsteifigkeit wie eine Bettungsziffer ein.

Durch einen weitgehend analytischen Lösungsansatz liegen zwei- bzw. dreidimensionale Funktionen im Fourier-transformierten Wellenzahl-Frequenzbereich vor. Es stellt sich also die Frage nach einem effizienten Algorithmus zur Fourier-Rücktransformation. Aus diesem Grund beschäftigt sich das **dritte Kapitel** der Dissertation mit der mehrdimensionalen Wavelettransformation. Die zu transformierenden Funktionen weisen glatte Bereiche und scharfe "Kanten" auf. Die üblicherweise angewendete Fast-Fourier-Transformation birgt den großen Nachteil, dass die Lösungsfunktion äquidistant gerastert werden muss. Um die scharfen "Kanten" genau genug zu erfassen, wäre über den gesamten Bereich eine sehr feine Diskretisierung nötig, was gerade im Dreidimensionalen eine kaum zu bewältigende Menge an Daten zur Folge hätte. Mit Hilfe der Wavelettransformation ist dagegen eine signifikante Datenreduktion bei der Fourier-Rücktransformation möglich. Zuerst erfolgt eine autoadaptive Rasterung der Funktion. Die während der Rasterung berechneten Funktionswerte können anschließend zur Gewinnung der Waveletkoeffizienten herangezogen werden. Dabei bedient man sich der Mehrskalanalyse. Als Wavelets werden *B-splines* 2. Ordnung, sogenannte Wavelets der ersten Generation verwendet. Sie haben die Eigenschaft, dass ihre Fourier-Transformierte bzw. -Rücktransformierte analytisch bekannt ist. Liegt also eine Beschreibung der Funktion in Form von Waveletkoeffizienten vor, so kann die Rekonstruktion der Funktion anhand der Waveletkoeffizienten und der Rücktransformierten des

verwendeten Wavelets direkt im Fourier-rücktransformierten Raum erfolgen. Auf diese Weise gewinnt man die Fourier-Rücktransformierte der Funktion. Dieses Vorgehen hat mehrere Vorteile: In glatten Bereichen der Funktion wird diese durch das adaptive Raster nur sehr grob abgetastet, in Bereichen mit "Kanten" dagegen erfolgt eine sehr feine Abtastung. Das bewirkt, dass die Funktion nicht unnötig oft berechnet werden muss. Die Mehrskalanalyse liefert dann aufgrund der Komprimierungseigenschaft der Wavelettransformation einen großen Teil sehr kleiner Waveletkoeffizienten, die ohne großen Genauigkeitsverlust gestrichen werden können. Sie werden für die Rekonstruktion der Funktion nicht verwendet. Die Funktion wird aufgrund der Wavelettransformation durch sehr wenige Waveletkoeffizienten vollständig charakterisiert. Bei der Wahl der Auswertepunkte im rücktransformierten Bereich unterliegt man keinen Einschränkungen. So ist es z.B. möglich, die Funktion im Originalraum an einem Ort zu allen Zeitpunkten zu bestimmen.

Im Eindimensionalen wird mittels typischer Funktionen außerdem ein Vergleich zwischen den Komprimierungseigenschaften von *B-splines* 1. Ordnung (Haar-Wavelet), *B-splines* 2. Ordnung und *B-splines* 4. Ordnung angestellt. Dabei zeigt sich, dass die Wahl des *B-splines* 2. Ordnung sinnvoll ist.

Die erarbeiteten Beziehungen zur Fourier-Rücktransformation mit Hilfe der Wavelettransformation sind als zwei- bzw.- dreidimensionale Programmpakete in MATLAB programmiert. Im **vierten Kapitel** findet man die Beschreibung der wichtigsten Aspekte bei der programmtechnischen Umsetzung der Algorithmen.

Nachdem die Grundlagen bzgl. der Halbraumdynamik und der Balken/Boden-Kopplung im Wellenzahl-Frequenzbereich gelegt sind und ein effizienter Algorithmus für die Fourier-Rücktransformationen vorgestellt worden ist, folgen im **fünften Kapitel** die noch nötigen Beziehungen für die Fahrzeug-Fahrweg-Interaktion.

Durch die Einführung eines mit der Fahrgeschwindigkeit bewegten Koordinatensystems können eindimensionale, zeitabhängige Impulsreaktionsfunktionen des Balken/Boden-Systems bestimmt werden. Dabei ist eine zweidimensionale Fourier-Rücktransformation nötig, die im Originalraum nur unter den Radachsen ausgewertet werden muss. Diese inverse Fourier-Transformation geschieht numerisch höchst effektiv über die bereits angesprochene Wavelettransformation.

Im Zeitbereich wird mit dem Newton-Raphson- und dem Newmark-Verfahren die nichtlineare Interaktion zwischen Fahrzeug und dem durch die Impulsreaktionsfunktionen beschriebenen Balken/Boden-System berechnet. Diese Berechnung ist eindimensional und somit numerisch sehr effizient. Für harmonische Anregungen und lineare Fahrzeuge werden Lösungen angegeben, die die Interaktion Fahrzeug-Fahrweg im Frequenzbereich ermittelt. Dadurch ist eine Überprüfung des Verfahrens möglich.

Im Anschluss an die Umrechnung auf das ortsfeste Koordinatensystem werden die Interaktionskräfte zwischen Fahrzeug und Balken/Boden als Belastung auf den Halbraum im dreifach Fourier-transformierten Raum aufgebracht. Zur Gewährleistung der konstanten Einsenkung des Balkens in Querrichtung werden die ebenfalls auf das ortsfeste Koordinatensystem umgerechneten Vorfaktoren der Legendre-Polynome verwendet. Nach einer dreidimensionalen Fourier-Rücktransformation erhält man die Schwingungsausbreitung an der Halbraumoberfläche im Orts-Zeitbereich. Auch diese Fourier-Transformation wird über eine Wavelettransformation ausgeführt, was durch die adaptive Funktionsabtastung und die Datenkompression die Berechnungen erheblich erleichtert bzw. erst ermöglicht.

Neben der dynamischen Interaktion Fahrzeug-Fahrbahn wird auch aufgezeigt, wie die Einsenkungsmulde, die aufgrund des bewegten Fahrzeugeigengewichts entsteht, berechnet werden kann.

Das **sechste Kapitel** befasst sich schließlich mit Berechnungsbeispielen. Nach der Ermittlung der Antwortfunktionen verschiedener Balken/Boden-Kombinationen infolge eines Impulses in Koordinatensystemen unterschiedlicher Geschwindigkeiten folgt die Betrachtung der Vorfaktoren der Legendre-Polynome in diesen Fällen. Anmerkungen zum verwendeten zweidimensionalen Programmpaket schließen die Ermittlung der Balkenantwort ab. Anschließend wird die nicht-lineare Interaktion zwischen verschiedenen Fahrzeugen und unterschiedlichen Balken/Boden-Kombinationen berechnet, wobei jeweils eine Überprüfung im linearen Fall stattfindet. Für die verwendeten Fahrzeugmodelle erfolgt außerdem die Ermittlung der Einsenkungsmulde infolge bewegten Fahrzeug-Eigengewichts. Mit den Ergebnissen der Interaktionsberechnungen wird daraufhin die Wellenausbreitung in den Böden berechnet. Zum dabei verwendeten dreidimensionalen Programmpaket folgen einige Anmerkungen, womit das sechste Kapitel schließt.

Die Arbeit endet mit einer zusammenfassenden Schlussbemerkung.

1.2 Einbettung des Themas in die Literatur

Die vorliegende Arbeit fügt sich in die Entwicklungen zum Thema Halbraumdynamik und Fahrzeug-Fahrweg-Interaktion am Lehrstuhl von Professor Grundmann an der TU-München ein.

Sie stellt eine Weiterentwicklung speziell der Dissertationen von Lieb [Lie97] und Dinkel [Din01] dar. In den dortigen Arbeiten wurde zum Teil sehr ausführlich die vorhandene Literatur zu den entsprechenden Themengebieten diskutiert, weshalb nun überwiegend neuere Beiträge angesprochen werden.

1.2.1 Halbraumdynamik und Fahrzeug-Fahrweg-Interaktion

An der Oberfläche eines dynamisch belasteten homogenen Halbraums tritt neben Primär- und Sekundärwelle als Welle mit der größten Amplitude die nach ihrem Entdecker benannte *Rayleigh-Welle* auf [Ray85]. Lamb [Lam04] gelingt es, die Antwort des homogenen Halbraums auf eine harmonische Einzellast analytisch zu ermitteln.

Seither gelang es z.T. analytisch, in jüngerer Zeit hauptsächlich numerisch, allgemeinere und realitätsnahe Problemstellungen der Halbraumdynamik anzugehen und Lösungswege aufzuzeigen. Zu nennen sind u.a. geschichteter Halbraum bzw. geometrische Unregelmäßigkeiten im Halbraum, beliebige Lastgeometrien und beliebige zeitliche und räumliche Veränderlichkeiten der Last, Interaktionen des Halbraums mit Strukturen im Inneren bzw. auf der Oberfläche, Berücksichtigung von Nichtlinearitäten, verschiedene Materialgesetze sowie stochastische Belastungen des Halbraums bzw. stochastische Bodenparameter. Obwohl für sämtliche genannten Problemstellungen mittlerweile Lösungsansätze existieren, stellen sie weiterhin ein intensiv bearbeitetes Forschungsgebiet dar, da die Lösungen z.T. sehr aufwändig oder ungenau sind.

Als bekannteste Methoden zur Berechnung der verschiedenen Aufgabenstellungen sind u.a. die *Finite Elemente Methode*, die *Randelementmethode*, die *Thin layer method* und die *Integraltrans-*

formationsmethoden zu nennen. Eine Übersicht über deren Anwendungsbereiche gibt Grundmann [Gru99].

Die Vorteile der *Finite Elemente Methode (FEM)* sind, dass beliebige Geometrien ggf. auch nichtlinear berechnet werden können. Problematisch ist die nur begrenzt mögliche Diskretisierung des unendlichen Halbraums, die numerische Probleme wie Wellenreflexionen an den Diskretisierungsgrenzen aufwirft. Spezielle Ansätze an diesen Grenzen sollen diese Problematik unterbinden. Eine neuere Veröffentlichung zu diesem Thema im Zusammenhang mit der Modellierung der Wellenausbreitung im Halbraum infolge von Hochgeschwindigkeitszügen stammt von Ekevid et al. [EW02]. Dabei wird die sogenannte *Scaled Boundary Finite Element Method (SBFEM)* ausgehend von den Arbeiten von Wolf et. al. [WS00a, WS00b] weiterentwickelt.

Einen Überblick über die Anwendungsmöglichkeiten der *Randelementmethode (BEM)* in der Elastodynamik gibt das Buch von Gaul und Fiedler [GF97]. Im Gegensatz zur *FEM* kann die unendliche Ausdehnung des Halbraums analytisch korrekt erfasst werden. Nichtlineare Berechnungen sind dagegen ohne besondere Maßnahmen nicht möglich. Firuziaan und von Estorff [FvE02] gelingt die Kopplung von *FEM* und *BEM* im Dreidimensionalen, womit sie nichtlineare Boden-Bauwerk-Interaktionen im Zeitbereich berechnen können.

Die von Waas [Waa72] und Kausel [Kau81, Kau94] entwickelte *Thin layer method (TLM)* diskretisiert den Halbraum in vertikaler Richtung im Sinne der Finiten Elemente. In horizontaler Richtung wird die unendliche Ausdehnung des Halbraums durch die Lösung im Wellenzahl-Frequenzbereich analytisch exakt erfasst. Problemlos ist auch eine Kopplung der Schichten an einen Halbraum möglich, wodurch auch in vertikaler Richtung die unendliche Ausdehnung exakt erfasst werden kann. Durch eine Modalanalyse kann die Rücktransformation für eine der Koordinatenrichtungen analytisch erfolgen. Degrande [Deg02] zeigt, wie die auf diesem Weg berechnete *Green'sche* Funktion des geschichteten Halbraums in eine *BEM*-Formulierung eingehen kann und damit die Berechnung einer Fahrzeugüberfahrt über das gekoppelte Straßen/Boden-System ermöglicht.

In dieser Arbeit wird intensiv von *Integraltransformationmethoden (ITM)* Gebrauch gemacht. Dabei erfolgt die Lösung der gekoppelten partiellen Differentialgleichungen des Halbraums im Fourier-transformierten Raum, da sie dort als algebraische Gleichungen vorliegen und somit leicht lösbar sind. Konrad [Kon85] wendet dieses Verfahren in Zylinderkoordinaten an, Grundmann und Müller [GM88, Mül89] berechnen damit die Antwort des Halbraums auf (bewegte) Lasten. Durch die Kopplung der *ITM* mit der *FEM* gelingt es Zirwas [Zir96], auch unregelmäßige Oberflächenstrukturen im Verfahren zu integrieren. Dinkel [Din01] berechnet in seiner Arbeit die lineare Interaktion zwischen einem Fahrzeug, einem realitätsnah beschriebenen Oberbau und dem Untergrund. Für die Rücktransformation in den Orts-Zeitbereich verwendet er das von Lieb [Lie97] entwickelte effiziente Verfahren der Fourier-Transformation über eine Wavelettransformation.

Ebenfalls im Wellenzahl-Frequenzbereich lösen Jones et.al. [SJP99] den Fall einer harmonischen bewegten Last auf Halbraum und in [JST02] die lineare Interaktion zwischen Fahrzeug/Fahrweg und Untergrund aufgrund einer stochastisch verteilten Unebenheit der Fahrbahn. Die Rücktransformation in den Orts-Zeit- bzw. Orts-Frequenzbereich erfolgt in diesen Arbeiten mit Hilfe der Fast-Fourier-Transformation.

Savidis et al. [SBHH99] zeigen in ihrem Beitrag, wie die nichtlineare Interaktion zwischen einer teils abhebenden Schwelle und dem linearen Boden modelliert werden kann. Für die Berechnung

der Bodenantwort verwenden sie dabei Integraltransformationen. Die nichtlineare Interaktion wird mit den so gewonnenen Impulsreaktionsfunktionen in einem Zeitschrittverfahren berechnet. In diesem grundsätzlichen Vorgehen gibt es bei der vorliegenden Arbeit Ähnlichkeiten.

Mit Hilfe von Integraltransformationen ist es nicht nur möglich, isotrope Schichten mit deterministischen Parametern zu berechnen. Grundmann et al. [GLW01] verwenden für die vertikale Raumrichtung Ansatzfunktionen, die es erlauben, in vertikaler Richtung stochastische Materialparameter zu verwenden. Dies wird durch eine Karhunen-Loeve-Zerlegung und unter Verwendung von Chaos-Polynomen ermöglicht. Waubke [Wau03] erweitert das Modell durch die Möglichkeit der Einbeziehung orthotropen Materialverhaltens.

1.2.2 Fourier-Transformation unter Zuhilfenahme einer Wavelettransformation

Da die Wavelettransformation bei Mathematikern, Physikern und Ingenieuren intensive Anwendung findet, ist auf diesem Gebiet die Anzahl der Veröffentlichungen enorm. Einen guten Überblick über Veröffentlichungen findet man auf diversen Seiten im Internet, z.B. [wwwa], [wwwb].

Im Folgenden werden nur die unmittelbar verwendeten Literaturquellen angegeben.

In den Standardwerken, die u.a. von Daubechies [Dau92], Chui [Chu92], Louis et al. [LMR94], Sweldens [Swe94], Kaiser [Kai94] und [RO98] stammen, sind die grundlegenden Beziehungen der Wavelettransformation dargestellt. Strang und Nguyen [SN96] zeigen ausführlich den Zusammenhang zwischen Filtern und der Wavelettransformation auf, wobei erstere klassischerweise in der Signalanalyse verwendet werden und letztere von Mathematikern entwickelt wurde. Außerdem widmet sich dieses Buch intensiv der Implementierung der aufgezeigten Zusammenhänge in MATLAB.

Einen kompakten Überblick über Theorie und Anwendungen der Wavelettransformation mit Wavelets der ersten Generation gibt Jawerth et al. [JS]. In [SP] zeigen Sweldens et al. Möglichkeiten zur numerischen Berechnung der Skalierungskoeffizienten auf.

Wavelets der zweiten Generation basieren auf dem *lifting scheme* (s. z.B. Sweldens [Swe97]) und nicht mehr auf einer Konstruktion über die Fourier-Transformation. Aus diesem Grunde sind sie als Basis für die Fourier-Transformation nicht brauchbar.

Beylkin [Bey95] beschreibt ein ähnliches Vorgehen wie das hier vorgestellte zur Berechnung der Fourier-Transformierten einer Funktion. Sein Ziel ist ebenfalls eine non-äquidistante Abtastung der Funktion, er nutzt aber nicht die Kompressionseigenschaften der Wavelettransformation aus.

Kapitel 2

Balken- und Bodenmodell

2.1 Balkenmodelle

Bezüglich der Modellierung des Balkens werden zwei Varianten betrachtet: der Euler-Bernoulli-Balken und der Timoshenko-Balken. Beide Balkenmodelle werden vorerst als kontinuierlich gelagert angenommen mit der Bettungsziffer k und der Dämpfungsziffer c . Außerdem entfällt in x -Richtung die Beachtung von Randbedingungen aufgrund der Annahme einer unendlichen Länge.

2.1.1 Euler-Bernoulli-Balken

Die Differentialgleichung des gebetteten Euler-Bernoulli-Balkens lautet:

$$EI w''''(x, t) + \mu \ddot{w}(x, t) + c \dot{w}(x, t) + k w(x, t) = p(x, t) \quad . \quad (2.1)$$

Im Wellenzahl-Frequenzbereich (k_x, ω) entspricht das:

$$EI k_x^4 \hat{w}(k_x, \omega) - \mu \omega^2 \hat{w}(k_x, \omega) + c i \omega \hat{w}(k_x, \omega) + k \hat{w}(k_x, \omega) = \hat{p}(k_x, \omega) \quad . \quad (2.2)$$

Aufgelöst nach der Verschiebung erhält man:

$$\hat{w}(k_x, \omega) = \frac{\hat{p}(k_x, \omega)}{EI k_x^4 - \mu \omega^2 + (i \omega c + k)} = \frac{\hat{p}(k_x, \omega)}{D_s(k_x, \omega)} \quad . \quad (2.3)$$

In (2.3) wurde die Verschiebung in Analogie zur Feder als Quotient aus Kraft \hat{p} und "Federsteifigkeit" D_s ausgedrückt. Dies ist im Wellenzahl-Frequenzbereich möglich, wobei die "Federsteifigkeit" beim gebetteten Balken ein wellenzahl-frequenzabhängiger Differentialoperator ist.

2.1.2 Timoshenko-Balken

Beim gebetteten Timoshenko-Balken gilt folgende Differentialgleichung (s. Bitzenbauer und Dinkel [BD02]):

$$\begin{aligned}
& EI w''''(x, t) - \rho_s I \ddot{w}''(x, t) + \rho_s A \left(\ddot{w}(x, t) - \frac{EI}{GA_Q} \ddot{w}''(x, t) + \frac{\rho_s I}{GA_Q} \ddot{w}(x, t) \right) \\
& + c \left(\dot{w}(x, t) - \frac{EI}{GA_Q} \dot{w}''(x, t) + \frac{\rho_s I}{GA_Q} \dot{w}(x, t) \right) + k \left(w(x, t) - \frac{EI}{GA_Q} w''(x, t) + \frac{\rho_s I}{GA_Q} \ddot{w}(x, t) \right) \\
& = p(x, t) - \frac{EI}{GA_Q} p''(x, t) + \frac{\rho_s I}{GA_Q} \ddot{p}(x, t). \tag{2.4}
\end{aligned}$$

Die Fourier-Transformation in den Wellenzahl-Bereich (k_x, ω) liefert

$$\begin{aligned}
& (EI k_x^4 - \rho_s I \omega^2 k_x^2) \hat{w}(k_x, \omega) + (-\omega^2 \rho_s A + i\omega c + k) \left(1 + k_x^2 \frac{EI}{GA_Q} - \omega^2 \frac{\rho_s I}{GA_Q} \right) \hat{w}(k_x, \omega) = \\
& = \left(1 + k_x^2 \frac{EI}{GA_Q} - \omega^2 \frac{\rho_s I}{GA_Q} \right) \hat{p}(k_x, \omega). \tag{2.5}
\end{aligned}$$

Diese Gleichung kann nach der Verschiebung aufgelöst werden:

$$\hat{w}(k_x, \omega) = \frac{\hat{p}(k_x, \omega)}{\frac{k_x^4 EI - k_x^2 \omega^2 \rho_s I}{1 + k_x^2 \frac{EI}{GA_Q} - \omega^2 \frac{\rho_s I}{GA_Q}} - \omega^2 \rho_s A + (i\omega c + k)}{D_s(k_x, \omega)}. \tag{2.6}$$

Wie beim Euler-Bernoulli-Balken lässt sich die Verschiebung im Wellenzahl-Frequenzbereich mittels eines als ‘‘Federsteifigkeit’’ wirkenden wellenzahl-frequenzabhängigen Differentialoperators $D_s(k_x, \omega)$ ausdrücken.

2.2 Bodenmodell

Der Boden wird durch ein dreidimensionales, linear elastisches kontinuumsmechanisches Modell mit isotropem Materialverhalten beschrieben. Durch die verwendete Fouriertransformation der beiden horizontalen Richtungen (x, y) lassen sich dort keine Randbedingungen einführen. In der untransformierten vertikalen z -Richtung dagegen ist die Angabe von Randbedingungen möglich. Aus diesem Grund lässt sich die Verschiebung eines homogenen Halbraums bzw. eines horizontal geschichteten Bodens in einer beliebigen Tiefenlage durch eine ebenfalls in beliebiger Tiefenlage angreifende Last berechnen. Durch Aufbringen von Spannungsrand- und ggf. Spannungs- und Verformungsübergangsbedingungen kann das betreffende Gleichungssystem gelöst werden.

2.2.1 Herleitung der Beziehungen

Im elastischen, homogenen, isotropen Boden, der im Folgenden vorausgesetzt wird, beschreiben die Lamé’schen Differentialgleichungen das Gleichgewicht. Durch die Einführung des kartesischen Koordinatensystems nehmen sie in Indexschreibweise folgende Form an (vgl. z.B. Flügge [Flü72]):

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ij} - \rho \ddot{u}_i = p_i \quad . \tag{2.7}$$

Dabei sind λ und μ die Lamé'schen Parameter, die sich auch über den Elastizitätsmodul E und die Querdehnzahl ν ausdrücken lassen:

$$\begin{aligned}\mu &= G = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \lambda &= \frac{2G\nu}{1-2\nu} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} .\end{aligned}$$

Volumenkräfte p_i können z.B. innerhalb der Schicht angreifende Lasten sein. Da die Belastung immer an einer Schichtoberfläche angreifen soll, wird im Folgenden das homogene Gleichungssystem betrachtet.

Durch die Einführung eines komplexen Elastizitätsmoduls kann auf einfache Weise hysteretische Dämpfung im System eingebracht werden. Dieses sogenannte Korrespondenzprinzip wird u.a. in den Büchern von Wolf [Wol85] sowie Clough und Penzien [CP93] beschrieben. Um $\zeta\%$ Dämpfung im Boden zu erreichen, wird der Elastizitätsmodul zu $E^* = E(1 + 2\frac{\zeta}{100}i)$ gesetzt.

Indem eine Fourier-Transformation der Lamé'schen Differentialgleichung in den Wellenzahl-Frequenzbereich $x \circ \bullet k_x, y \circ \bullet k_y, t \circ \bullet \omega$ im Sinne der Integraltransformationmethoden erfolgt, entstehen aus den gekoppelten partiellen Differentialgleichungen gekoppelte gewöhnliche. Das homogene Gleichungssystem sieht unter Verwendung der Differentiationsregel der Fourier-Transformation (s. Anhang A.2) folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}\mu(-k_x^2 \hat{u}_x - k_y^2 \hat{u}_x + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{u}_x) + (\lambda + \mu)(-k_x^2 \hat{u}_x - k_x k_y \hat{u}_y + i k_x \frac{\partial}{\partial z} \hat{u}_z) + \rho \omega^2 \hat{u}_x &= 0 \\ \mu(-k_x^2 \hat{u}_y - k_y^2 \hat{u}_y + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{u}_y) + (\lambda + \mu)(-k_x k_y \hat{u}_x - k_y^2 \hat{u}_y + i k_y \frac{\partial}{\partial z} \hat{u}_z) + \rho \omega^2 \hat{u}_y &= 0 \\ \mu(-k_x^2 \hat{u}_z - k_y^2 \hat{u}_z + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{u}_z) + (\lambda + \mu)(i k_x \frac{\partial}{\partial z} \hat{u}_x + i k_y \frac{\partial}{\partial z} \hat{u}_y + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{u}_z) + \rho \omega^2 \hat{u}_z &= 0 .\end{aligned}\quad (2.8)$$

Eine elegante Möglichkeit zur Lösung dieses Gleichungssystems besteht darin, durch Einführen der Helmholtz-Potentiale die Differentialgleichungen zu entkoppeln und zwei getrennte gewöhnliche Differentialgleichungen zu lösen, vgl. z.B. Müller [Mül89]. Duddeck [Dud97] hat gezeigt, dass die Helmholtz-Potentiale im komplett Fourier-transformierten Raum $x \circ \bullet k_x, y \circ \bullet k_y, z \circ \bullet k_z, t \circ \bullet \omega$ nach einer modalen Transformation den generalisierten Fourier-transformierten Verschiebungen entsprechen und daher die Entkoppelung bewirken.

Neben der Lösung über die Helmholtz-Potentiale ist es auch möglich, die gekoppelten Gleichungen mit einem Exponentialansatz zu lösen. Mit den Ansatzfunktionen

$$\hat{u}_x = A_x e^{\beta z} \quad \hat{u}_y = A_y e^{\beta z} \quad \hat{u}_z = A_z e^{\beta z} \quad (2.9)$$

für die z -Richtung lassen sich die Gleichungen (2.8) nun folgendermaßen beschreiben:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} -k_x^2(\lambda + 2\mu) - \mu k_y^2 + \mu \beta^2 + \rho \omega^2 & -(\lambda + \mu) k_x k_y & \beta(\lambda + \mu) i k_x \\ -(\lambda + \mu) k_x k_y & -k_y^2(\lambda + 2\mu) - \mu k_x^2 + \mu \beta^2 + \rho \omega^2 & \beta(\lambda + \mu) i k_y \\ \beta(\lambda + \mu) i k_x & \beta(\lambda + \mu) i k_y & \beta^2(\lambda + 2\mu) - \mu k_x^2 - \mu k_y^2 + \rho \omega^2 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\mathbf{L}} \begin{bmatrix} A_x e^{\beta z} \\ A_y e^{\beta z} \\ A_z e^{\beta z} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \quad (2.11)$$

Dieses Gleichungssystem hat nichttriviale Lösungen, wenn die Determinante der Matrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\mathbf{L}}$ Null wird. Aus dieser Forderung erhält man für den Vorfaktor β im Exponenten sechs Lösungen, wobei sich jeweils zwei nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden. Außerdem entsprechen je zwei der Lösungen einer doppelten Nullstelle und sind damit identisch.

Mit

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad , \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.12)$$

$$k_p = \frac{\omega}{c_p} \quad , \quad k_s = \frac{\omega}{c_s} \quad (2.13)$$

erhält man für die Nullstellen

$$\beta_1 = \pm \sqrt{k_r^2 - k_p^2} = \pm \lambda_1 \quad (2.14)$$

$$\beta_2 = \pm \sqrt{k_r^2 - k_s^2} = \pm \lambda_2 \quad (\text{doppelte Nullstellen}) \quad \text{mit } k_r^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad . \quad (2.15)$$

Mit den vier unterschiedlichen Lösungen ergeben sich aus (2.11) zwölf Unbekannte $A_{x,i}, B_{x,i}, C_{x,i}$, $i = 1 \dots 4$. Für $\pm \lambda_1$ ergibt sich aufgrund der einfachen Nullstellen in der Determinante jeweils ein Freiwert, bei $\pm \lambda_2$ bewirken die doppelten Nullstellen das Verbleiben von jeweils zwei Freiwerten. Insgesamt bleiben damit $2 + 2 + 2 = 6$ Unbekannte übrig. Die Verschiebungen in Abhängigkeit dieser sechs Unbekannten lauten:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ k_y/k_x & k_y/k_x & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -i\lambda_1/k_x & i\lambda_1/k_x & -ik_x/\lambda_2 & ik_x/\lambda_2 & -ik_y/\lambda_2 & ik_y/\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{x11} e^{\lambda_1 z} \\ A_{x12} e^{-\lambda_1 z} \\ A_{x21} e^{\lambda_2 z} \\ A_{x22} e^{-\lambda_2 z} \\ A_{y21} e^{\lambda_2 z} \\ A_{y22} e^{-\lambda_2 z} \end{bmatrix} \quad . \quad (2.16)$$

Um den Vergleich zur Lösung mit den Helmholtz-Potentialen herzustellen, müssen nur einige Substitutionen vorgenommen werden. Dabei entsprechen doppelt numerisch indizierte Größen den Unbekannten des ursprünglichen Gleichungssystems, einfach numerisch indizierte Größen sind die neuen Unbekannten:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_{x11}/(ik_x) & A_2 &= A_{x12}/(ik_x) \\ B_{x1} &= A_{y21}/\lambda_2 & B_{x2} &= -A_{y22}/\lambda_2 \\ B_{y1} &= -A_{x21}/\lambda_2 & B_{y2} &= A_{x22}/\lambda_2 \quad . \end{aligned} \quad (2.17)$$

Dann stellt sich (2.16) in der "gewohnten" Form dar (vgl. z.B. Dinkel [Din01]):

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ik_x & ik_x & 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 \\ ik_y & ik_y & \lambda_2 & -\lambda_2 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_1 & -ik_y & -ik_y & ik_x & ik_x \end{bmatrix} \underline{\mathbf{C}} \quad (2.18)$$

mit

$$\underline{\mathbf{C}}^T = \begin{bmatrix} A_1 e^{\lambda_1 z} & A_2 e^{-\lambda_1 z} & B_{x1} e^{\lambda_2 z} & B_{x2} e^{-\lambda_2 z} & B_{y1} e^{\lambda_2 z} & B_{y2} e^{-\lambda_2 z} \end{bmatrix} .$$

Neben den Substitutionen erfolgte hierbei eine Umsortierung der Unbekannten.

Der linearisierte Green-Lagrange'sche Verzerrungstensor definiert die Kinematik als

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) . \quad (2.19)$$

Mit Hilfe des Elastizitätstensors lassen sich schließlich die Cauchy'schen Spannungen berechnen:

$$\frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_x \\ \hat{\sigma}_y \\ \hat{\sigma}_z \\ \hat{\sigma}_{xy} \\ \hat{\sigma}_{yz} \\ \hat{\sigma}_{xz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -(2k_x^2 + \frac{\lambda}{\mu} k_p^2) & -(2k_x^2 + \frac{\lambda}{\mu} k_p^2) & 0 & 0 & -2ik_x \lambda_2 & 2ik_x \lambda_2 \\ -(2k_y^2 + \frac{\lambda}{\mu} k_p^2) & -(2k_y^2 + \frac{\lambda}{\mu} k_p^2) & 2ik_y \lambda_2 & -2ik_y \lambda_2 & 0 & 0 \\ 2k_r^2 - k_s^2 & 2k_r^2 - k_s^2 & -2ik_y \lambda_2 & 2ik_y \lambda_2 & 2ik_x \lambda_2 & -2ik_x \lambda_2 \\ -2k_x k_y & -2k_x k_y & ik_x \lambda_2 & -ik_x \lambda_2 & -ik_y \lambda_2 & ik_y \lambda_2 \\ 2ik_y \lambda_1 & -2ik_y \lambda_1 & \lambda_2^2 + k_y^2 & \lambda_2^2 + k_y^2 & -k_x k_y & -k_x k_y \\ 2ik_x \lambda_1 & -2ik_x \lambda_1 & k_x k_y & k_x k_y & -(\lambda_2^2 + k_x^2) & -(\lambda_2^2 + k_x^2) \end{bmatrix} \underline{\mathbf{C}} . \quad (2.20)$$

2.2.2 Geschichteter Boden

Aus numerischen Gründen ist es zweckmäßig, den Vektor der Unbekannten $\underline{\mathbf{C}}$ umzuformen (vgl. [GM88]). Mit der Schichthöhe h bildet man den Vektor $\underline{\mathbf{C}}_1$

$$\begin{aligned} A_1 e^{\lambda_1 z} &= A_1 e^{\lambda_1 h} e^{-\lambda_1 h} e^{\lambda_1 z} = \bar{A}_1 e^{\lambda_1(z-h)} \\ B_{i1} e^{\lambda_2 z} &= B_{i1} e^{\lambda_2 h} e^{-\lambda_2 h} e^{\lambda_2 z} = \bar{B}_{i1} e^{\lambda_2(z-h)} \\ z &\leq h \\ \underline{\mathbf{C}}_1^T &= [\bar{A}_1 \ A_2 \ \bar{B}_{x1} \ B_{x2} \ \bar{B}_{y1} \ B_{y2}] , \end{aligned} \quad (2.21)$$

womit sich transformierte Spannungen und Verschiebungen in der Schicht folgendermaßen beschreiben lassen:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_x(z) \\ \hat{u}_y(z) \\ \hat{u}_z(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ik_x e^{\lambda_1(z-h)} & ik_y e^{\lambda_1(z-h)} & \lambda_1 e^{\lambda_1(z-h)} \\ ik_x e^{-\lambda_1 z} & ik_y e^{-\lambda_1 z} & -\lambda_1 e^{-\lambda_1 z} \\ 0 & \lambda_2 e^{\lambda_2(z-h)} & -ik_y e^{\lambda_2(z-h)} \\ 0 & -\lambda_2 e^{-\lambda_2 z} & -ik_y e^{-\lambda_2 z} \\ -\lambda_2 e^{\lambda_2(z-h)} & 0 & ik_x e^{\lambda_2(z-h)} \\ \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} & 0 & ik_x e^{-\lambda_2 z} \end{bmatrix}^T \underline{\mathbf{C}}_1 \quad (2.22)$$

$$\frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{xz}(z) \\ \hat{\sigma}_{yz}(z) \\ \hat{\sigma}_z(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ik_x \lambda_1 e^{\lambda_1(z-h)} & 2ik_y \lambda_1 e^{\lambda_1(z-h)} & (2k_r^2 - k_s^2) e^{\lambda_1(z-h)} \\ -2ik_x \lambda_1 e^{-\lambda_1 z} & -2ik_y \lambda_1 e^{-\lambda_1 z} & (2k_r^2 - k_s^2) e^{-\lambda_1 z} \\ k_x k_y e^{\lambda_2(z-h)} & (\lambda_2^2 + k_y^2) e^{\lambda_2(z-h)} & -2ik_y \lambda_2 e^{\lambda_2(z-h)} \\ k_x k_y e^{-\lambda_2 z} & (\lambda_2^2 + k_y^2) e^{-\lambda_2 z} & 2ik_y \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} \\ -(\lambda_2^2 + k_x^2) e^{\lambda_2(z-h)} & -k_x k_y e^{\lambda_2(z-h)} & 2ik_x \lambda_2 e^{\lambda_2(z-h)} \\ -(\lambda_2^2 + k_x^2) e^{-\lambda_2 z} & -k_x k_y e^{-\lambda_2 z} & -2ik_x \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} \end{bmatrix}^T \underline{\mathbf{C}}_1 \quad (2.23)$$

Aus diesen analytischen Lösungen für Verschiebungen und Spannungen lässt sich nun ein Gleichungssystem unter Einarbeitung der lokalen Randbedingungen aufstellen. An der Oberfläche sind üblicherweise Spannungsrandbedingungen gegeben¹ und zwar entweder als Fourier-transformierte Last oder aus der Forderung, dass die Spannungen $\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_{xz}, \hat{\sigma}_{yz}$ dort Null sind. Das entspricht drei Gleichungen. An jeder Schichtgrenze gibt es außerdem die Forderung, dass die drei Verformungen $\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z$ der beiden Schichten jeweils gleich sind, ebenso wie die drei Spannungen $\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_{xz}, \hat{\sigma}_{yz}$. Also hat man sechs Übergangsbedingungen je Schichtgrenze. Liegt die unterste Schicht auf starrem Untergrund auf, dann müssen dort alle Verschiebungen Null sein. In diesem Fall ist die Summe der Randbedingungen bei n -Schichten $3 + (n-1) \cdot 6 + 3 = 6n$, die Summe der Unbekannten ist ebenfalls $6n$.

Schließt an die unterste Schicht ein Halbraum an, dann erhält man an dieser Schichtgrenze die üblichen sechs Übergangsbedingungen. Die Anzahl der Gleichungen ist also bei n -Schichten auf Halbraum $3 + 6n$, die Anzahl der Unbekannten, wie im folgenden Abschnitt 2.2.3 gezeigt wird, ist $6n + 3$, womit das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist.

2.2.3 Ungeschichteter Halbraum

Randbedingungen beim ungeschichteten Halbraum

Beim ungeschichteten Halbraum, der nur an der Oberfläche belastet wird, lassen sich drei lokale Randbedingungen für $\hat{\sigma}_z(z=0), \hat{\sigma}_{xz}(z=0), \hat{\sigma}_{yz}(z=0)$ aufstellen. Drei weitere Randbedingungen, die sog. *Sommerfeld'schen Abstrahlbedingungen*, lassen sich durch die Reduzierung der Anzahl der Unbekannten von sechs auf drei einarbeiten:

¹Ein gemischtes Randwertproblem, also eine Kombination aus Spannungs- und Verschiebungsrandwerten, ist bei der gewählten Formulierung nicht möglich. Grundsätzlich wäre es möglich, Verschiebungsrandbedingungen an der Oberfläche einzuführen. In kaum einem Fall ist jedoch die Verschiebung an der kompletten Oberfläche bekannt.

Es muss gewährleistet sein, dass die Wellenausbreitung nur in positiver z -Richtung stattfindet und die Amplituden der Wellen mit der Tiefe abnehmen.

In den Gleichungen (2.16) kann λ_1 bzw. λ_2 rein reell sein oder aber rein imaginär. Entsprechend handelt es sich dann um Oberflächenwellen oder um Raumwellen. Im Falle von Oberflächenwellen, also bei rein reellen Exponenten, ist leicht zu sehen, dass die Exponenten in diesen Gleichungen negativ sein müssen, um die oben genannten Bedingungen des Halbraums einhalten zu können.

Müller [Mül89] hat gezeigt, wie die Ausbreitungsrichtungen der beiden Wellenarten von den Wellenzahlen und der Frequenz abhängen. Im Ergebnis zeigt sich, dass die Beiträge $A_{x11}e^{\lambda_1 z}$, $A_{x21}e^{\lambda_2 z}$, $A_{y21}e^{\lambda_2 z}$ bzw. $A_1e^{\lambda_1 z}$, $B_{x1}e^{\lambda_2 z}$, $B_{y1}e^{\lambda_2 z}$ für negative Frequenzen $\omega < 0$ immer Wellen entsprechen, die sich zur Oberfläche hin bewegen bzw. deren Amplituden mit der Tiefe zunehmen. Um diese Wellen zu eliminieren, müssen diese Beiträge also gestrichen und das Gleichungssystem mit den verbleibenden drei Unbekannten für negative Frequenzen gelöst werden. Das Ergebnis für positive Frequenzen lässt sich dann als die konjugiert komplexe Lösung des Ergebnisses der negativen Frequenzen gewinnen.

Berechnung der transformierten Verschiebungen

Durch Einarbeitung der Randbedingungen ergibt sich aus (2.23) folgendes Gleichungssystem für den ungeschichteten Halbraum:

$$\frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2ik_x\lambda_1 & k_x k_y & -(\lambda_2^2 + k_x^2) \\ -2ik_y\lambda_1 & \lambda_2^2 + k_y^2 & -k_x k_y \\ 2k_r^2 - k_s^2 & 2ik_y\lambda_2 & -2ik_x\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ B_{x2} \\ B_{y2} \end{bmatrix} . \quad (2.24)$$

Die Determinante der Matrix lautet:

$$\begin{aligned} \Delta &= -4k_r^2\lambda_1\lambda_2^3 + 2k_r^2\lambda_2^4 + 4k_x^2\lambda_2^2k_y^2 + 2k_r^4\lambda_2^2 - k_s^2\lambda_2^4 - k_s^2\lambda_2^2k_r^2 \\ &= (2k_r^2 - k_s^2)^2\lambda_2^2 - 4k_r^2\lambda_1\lambda_2^3 . \end{aligned} \quad (2.25)$$

Mit Hilfe der Cramer'schen Regel ist es möglich, den analytischen Lösungsvektor zu bestimmen:

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ B_{x2} \\ B_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\hat{p}_z}{\mu\Delta}(2k_r^2 - k_s^2)\lambda_2^2 \\ -\frac{\hat{p}_z}{\mu\Delta} 2ik_y\lambda_1\lambda_2^2 \\ \frac{\hat{p}_z}{\mu\Delta} 2ik_x\lambda_1\lambda_2^2 \end{bmatrix} . \quad (2.26)$$

Setzt man diesen Lösungsvektor in (2.18) ein, dann ergeben sich die transformierten Verschiebungen an der Halbraumoberfläche ($z = 0$) zu

$$\begin{aligned} \hat{u}_x &= -\frac{\hat{p}_z}{\mu\Delta} \frac{ik_x}{\lambda_2^2 + k_r^2\lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2^3} \\ \hat{u}_y &= -\frac{\hat{p}_z}{\mu\Delta} \frac{ik_y}{\lambda_2^2 + k_r^2\lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2^3} \\ \hat{u}_z &= -\frac{\hat{p}_z}{\mu\Delta} \frac{\lambda_1\lambda_2^2}{k_s^2} . \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.2.4 Lösung für $\omega = 0$

In zwei Fällen kann es im Rahmen dieser Dissertation vorkommen, dass die Verschiebung des Bodens im Fourier-transformierten Wellenzahl-Frequenzbereich an der Stelle $\omega = 0$ ausgewertet werden muss: bei bewegter harmonischer Last im mitbewegten Koordinatensystem und bei der Berechnung der Impulsreaktionsfunktion des Bodens. In beiden Fällen wird auf Kapitel 5 verwiesen.

Für $\omega = 0$, d.h. für die statische Lösung, verschwindet die Determinante in (2.25), weshalb die transformierten Verschiebungen in (2.27) einen unendlichen Wert liefern. Das deutet darauf hin, dass die Ansätze in (2.9) für $\omega = 0$ nicht vollständig sein könnten.

Aus diesem Grund müssen die mathematischen Charakteristika der gekoppelten, Fourier-transformierten Lamé'schen Differentialgleichungen detailliert untersucht werden.

Eingehende Untersuchung der Lamé'schen Gleichungen

Bei (2.8) handelt es sich um lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Nach Bronstein/Semendjajew [BS91] lautet die Lösungsstrategie für lineare homogene Systeme von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten folgendermaßen:

1. Die Normalform des Systems wird aufgestellt
2. Man bestimmt die Wurzeln des charakteristischen Polynoms. Sie sind identisch mit den Eigenwerten der Koeffizientenmatrix des Fundamentalsystems.
3. Für einfache Wurzeln a_l des charakteristischen Polynoms setzt man $\underline{y}_l(z) = e^{a_l z} [A_1, A_2, \dots, A_r]^T$ in das System ein und bestimmt die A_i in Abhängigkeit einer beliebigen Konstanten. Dabei ist r die Anzahl der Gleichungen des Fundamentalsystems bzw. die Zahl der Unbekannten.
4. Falls a_l eine p -fache Wurzel des charakteristischen Polynoms ist, setzt man $\underline{y}_l(z) = e^{a_l z} [A_1(z), A_2(z), \dots, A_r(z)]^T$ in das System ein, wobei $A_i(x)$ Polynome vom Grad $(p-1)$ mit unbestimmten Koeffizienten sind. Dadurch bleiben p unabhängige Konstanten übrig.

Um das System in seiner Normalform zu erhalten, werden folgende Substitutionen vorgenommen:

$$\begin{aligned} X_1 &= \hat{u}_x & X_2 &= \hat{u}'_x \\ Y_1 &= \hat{u}_y & Y_2 &= \hat{u}'_y \\ Z_1 &= \hat{u}_z & Z_2 &= \hat{u}'_z \end{aligned} \quad (2.28)$$

(...') bedeutet hier die Ableitung bzgl. z . Dann lautet die Normalform von (2.8):

$$\underline{\underline{\mathbf{L}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_r^2 + \frac{\lambda+\mu}{\mu} k_x^2 - \frac{\rho\omega^2}{\mu} & 0 & \frac{\lambda+\mu}{\mu} k_x k_y & 0 & 0 & -\frac{\lambda+\mu}{\mu} i k_x \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda+\mu}{\mu} k_x k_y & 0 & k_r^2 + \frac{\lambda+\mu}{\mu} k_y^2 - \frac{\rho\omega^2}{\mu} & 0 & 0 & -\frac{\lambda+\mu}{\mu} i k_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} i k_x & 0 & -\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} i k_y & \frac{\mu}{\lambda+2\mu} k_r^2 - \frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ Y'_1 \\ Y'_2 \\ Z'_1 \\ Z'_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{L}}} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Die Eigenwerte der Matrix $\underline{\underline{\mathbf{L}}}$ sind die Werte β_i in (2.14) und (2.15), wobei letzterer ein doppelter Eigenwert ist. Oben beschriebener Lösungsstrategie entsprechend müsste für $\pm\lambda_2$ also ein Ansatz $\hat{u}_i(z) = (A_{i1}z + A_{i2})e^{\pm\lambda_2 z}$ aufgestellt werden. Durch Einsetzen dieses Ansatzes in (2.8) findet man aber heraus, dass die Konstanten A_{i1} Null sind, weshalb für $\omega \neq 0$ die Ansätze (2.9) vollständig sind.

Neuer Ansatz für $\omega = 0$

Setzt man $\omega = 0$ in $\underline{\underline{\mathbf{L}}}$, dann gibt es nur noch zwei jeweils dreifache Eigenwerte $\pm\lambda_1 = \pm\lambda_2 = \pm k_r^2$ von $\underline{\underline{\mathbf{L}}}$ (vgl. (2.14) und (2.15)). Folgt man der oben beschriebenen Lösungsstrategie, so lautet der Ansatz nun:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \end{bmatrix} = e^{|k_r|z} \left(\begin{bmatrix} A_{0x11} \\ A_{0y11} \\ A_{0z11} \end{bmatrix} z^2 + \begin{bmatrix} A_{0x21} \\ A_{0y21} \\ A_{0z21} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} A_{0x31} \\ A_{0y31} \\ A_{0z31} \end{bmatrix} \right) + e^{-|k_r|z} \left(\begin{bmatrix} A_{0x12} \\ A_{0y12} \\ A_{0z12} \end{bmatrix} z^2 + \begin{bmatrix} A_{0x22} \\ A_{0y22} \\ A_{0z22} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} A_{0x32} \\ A_{0y32} \\ A_{0z32} \end{bmatrix} \right). \quad (2.30)$$

Jeder der beiden Lösungsanteile für $\pm|k_r|$ muss (2.8) erfüllen. Von den 18 Unbekannten verbleiben nur sechs unabhängige, da u.a. alle Koeffizienten von z^2 entfallen. Die transformierten Verschiebungen für $\omega = 0$ lauten:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 1 & 0 & z & 1 & 0 \\ \frac{k_y}{k_x} z & 0 & 1 & \frac{k_y}{k_x} z & 0 & 1 \\ \frac{-i(\lambda+\mu)|k_r|z+i(\lambda+3\mu)}{(\lambda+\mu)k_x} & \frac{-ik_x}{|k_r|} & \frac{-ik_y}{|k_r|} & \frac{i(\lambda+\mu)|k_r|z+i(\lambda+3\mu)}{(\lambda+\mu)k_x} & \frac{ik_x}{|k_r|} & \frac{ik_y}{|k_r|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{0x21}e^{|k_r|z} \\ A_{0x31}e^{|k_r|z} \\ A_{0y31}e^{|k_r|z} \\ A_{0x22}e^{-|k_r|z} \\ A_{0x32}e^{-|k_r|z} \\ A_{0y32}e^{-|k_r|z} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Um die Matrizen mit denjenigen für $\omega \neq 0$ vergleichen zu können, wird eine zu (2.17) analoge Substitution für die Unbekannten durchgeführt. Die Null als führender Index deutet an, dass

diese Koeffizienten für den Fall $\omega = 0$ gelten.

$$\begin{aligned} A_{01} &= A_{0x21}/(ik_x) & A_{02} &= A_{0x22}/(ik_x) \\ B_{0x1} &= A_{0y31}/|k_r| & B_{0x2} &= -A_{0y32}/|k_r| \\ B_{0y1} &= -A_{0x31}/|k_r| & B_{0y2} &= A_{0x32}/|k_r| \end{aligned} \quad (2.32)$$

Nach entsprechender Umordnung der Unbekannten lauten die Verschiebungsansätze:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ik_x z & ik_x z & 0 & 0 & -|k_r| & |k_r| \\ ik_y z & ik_y z & |k_r| & -|k_r| & 0 & 0 \\ |k_r|z - \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu} & -|k_r|z - \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu} & -ik_y & -ik_y & ik_x & ik_x \end{bmatrix} \underline{\mathbf{C}}_0 \quad (2.33)$$

mit dem Vektor der Unbekannten

$$\underline{\mathbf{C}}_0^T = \left[A_{01}e^{|k_r|z} \quad A_{02}e^{-|k_r|z} \quad B_{0x1}e^{|k_r|z} \quad B_{0x2}e^{-|k_r|z} \quad B_{0y1}e^{|k_r|z} \quad B_{0y2}e^{-|k_r|z} \right] .$$

Analog dem dynamischen Fall ergeben sich die Spannungen zu

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{bmatrix} -(2k_x^2 z + 2\frac{\lambda|k_r|}{\lambda+\mu}) & -(2k_x^2 z - 2\frac{\lambda|k_r|}{\lambda+\mu}) & 0 & 0 & -2ik_x|k_r| & 2ik_x|k_r| \\ -(2k_y^2 z + 2\frac{\lambda|k_r|}{\lambda+\mu}) & -(2k_y^2 z - 2\frac{\lambda|k_r|}{\lambda+\mu}) & 2ik_y|k_r| & -2ik_y|k_r| & 0 & 0 \\ 2k_r^2 z - 2\frac{(\lambda+2\mu)|k_r|}{\lambda+\mu} & 2k_r^2 z + 2\frac{(\lambda+2\mu)|k_r|}{\lambda+\mu} & -2ik_y|k_r| & 2ik_y|k_r| & 2ik_x|k_r| & -2ik_x|k_r| \\ -2k_x k_y z & -2k_x k_y z & ik_x|k_r| & -ik_x|k_r| & -ik_y|k_r| & ik_y|k_r| \\ 2ik_y(|k_r|z - \frac{\mu}{\lambda+\mu}) & -2ik_y(|k_r|z + \frac{\mu}{\lambda+\mu}) & k_r^2 + k_y^2 & k_r^2 + k_y^2 & -k_x k_y & -k_x k_y \\ 2ik_x(|k_r|z - \frac{\mu}{\lambda+\mu}) & -2ik_x(|k_r|z + \frac{\mu}{\lambda+\mu}) & k_x k_y & k_x k_y & -(k_r^2 + k_x^2) & -(k_r^2 + k_x^2) \end{bmatrix} \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_x \\ \hat{\sigma}_y \\ \hat{\sigma}_z \\ \hat{\sigma}_{xy} \\ \hat{\sigma}_{yz} \\ \hat{\sigma}_{xz} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\Sigma}} \underline{\mathbf{C}}_0 \quad (2.34)$$

Geschichteter Boden

Wie im Fall $\omega \neq 0$ ist es numerisch sinnvoll, den Vektor der Unbekannten analog (2.21) umzuformen. Damit erhält man die Verschiebungen und die für die lokalen Randbedingungen wichtigen Spannungen in einer Schicht der Höhe h zu

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ik_x z e^{|k_r|(z-h)} & ik_y z e^{|k_r|(z-h)} & (|k_r|z - \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu})e^{|k_r|(z-h)} \\ ik_x z e^{-|k_r|z} & ik_y z e^{-|k_r|z} & (-|k_r|z - \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu})e^{-|k_r|z} \\ 0 & |k_r|e^{|k_r|(z-h)} & -ik_y e^{|k_r|(z-h)} \\ 0 & -|k_r|e^{-|k_r|z} & -ik_y e^{-|k_r|z} \\ -|k_r|e^{|k_r|(z-h)} & 0 & ik_x e^{|k_r|(z-h)} \\ |k_r|e^{-|k_r|z} & 0 & ik_x e^{-|k_r|z} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{A}_{01} \\ A_2 \\ \bar{B}_{0x1} \\ B_{0x2} \\ \bar{B}_{0y1} \\ B_{0y2} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$\underline{\underline{\Sigma}}_{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 2ik_x(|k_r|z - \frac{\mu}{\lambda+\mu})e^{|k_r|(z-h)} & 2ik_y(|k_r|z - \frac{\mu}{\lambda+\mu})e^{|k_r|(z-h)} & (2k_r^2z - 2\frac{(\lambda+2\mu)|k_r|}{\lambda+\mu})e^{|k_r|(z-h)} \\ -2ik_x(|k_r|z + \frac{\mu}{\lambda+\mu})e^{-|k_r|z} & -2ik_y(|k_r|z + \frac{\mu}{\lambda+\mu})e^{-|k_r|z} & (2k_r^2z + 2\frac{(\lambda+2\mu)|k_r|}{\lambda+\mu})e^{-|k_r|z} \\ k_xk_ye^{|k_r|(z-h)} & (k_r^2 + k_y^2)e^{|k_r|(z-h)} & -2ik_y|k_r|e^{|k_r|(z-h)} \\ k_xk_ye^{-|k_r|z} & (k_r^2 + k_y^2)e^{-|k_r|z} & 2ik_y|k_r|e^{-|k_r|z} \\ -(k_r^2 + k_x^2)e^{|k_r|(z-h)} & -k_xk_ye^{|k_r|(z-h)} & 2ik_x|k_r|e^{|k_r|(z-h)} \\ -(k_r^2 + k_x^2)e^{-|k_r|z} & -k_xk_ye^{-|k_r|z} & -2ik_x|k_r|e^{-|k_r|z} \end{bmatrix}^T$$

$$\frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{xz}(z) \\ \hat{\sigma}_{yz}(z) \\ \hat{\sigma}_z(z) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\Sigma}}_{\mathbf{S}} \begin{bmatrix} \bar{A}_{01}A_2\bar{B}_{0x1}B_{0x2}\bar{B}_{0y1}B_{0y2} \end{bmatrix}^T . \quad (2.36)$$

Das Aufstellen des Gleichungssystems mit den Rand- und Übergangsbedingungen der Schichtgrenzen ist identisch mit dem Fall $\omega \neq 0$ und ist in Abschnitt 2.2.2 beschrieben.

Ungeschichteter Halbraum

Da sowohl Spannungen als auch Verformungen mit der Tiefe z abnehmen müssen, entfallen wie im Fall $\omega \neq 0$ in Abschnitt 2.2.3 die Beiträge der Unbekannten mit positivem Exponenten. Dadurch sind die nichtlokalen Randbedingungen in das Gleichungssystem eingebaut. Folgendes aus (2.36) entstehendes Gleichungssystem muss daher für einen an der Oberfläche ohne Schubbehinderung belasteten Halbraum gelöst werden:

$$\frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2ik_x\frac{\mu}{\lambda+\mu} & k_xk_y & -(k_r^2 + k_x^2) \\ -2ik_y\frac{\mu}{\lambda+\mu} & k_r^2 + k_y^2 & -k_xk_y \\ 2\frac{(\lambda+2\mu)|k_r|}{\lambda+\mu} & 2ik_y|k_r| & -2ik_x|k_r| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ B_{x2} \\ B_{y2} \end{bmatrix} . \quad (2.37)$$

Mit Hilfe der Cramer'schen Regel bestimmen sich die Unbekannten zu:

$$A_{02} = -\frac{\hat{p}_z}{2\mu|k_r|} \quad (2.38)$$

$$B_{0x2} = -\frac{\hat{p}_z ik_y}{2(\lambda + \mu)|k_r|^3} \quad (2.39)$$

$$B_{0y2} = \frac{\hat{p}_z ik_x}{2(\lambda + \mu)|k_r|^3} . \quad (2.40)$$

Setzt man diese Ergebnisse in (2.33) ein, dann erhält man die Verschiebungen an der Halbrauoberfläche:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \end{bmatrix} = \frac{\hat{p}_z}{\lambda + \mu} \begin{bmatrix} \frac{ik_x}{2k_r^2} \\ \frac{ik_y}{2k_r^2} \\ \frac{\lambda+2\mu}{2\mu|k_r|} \end{bmatrix} . \quad (2.41)$$

Bei Verwendung von komplexen Lamé'schen Konstanten nach dem Korrespondenzprinzip (s. Abschnitt 2.2.1) erhält die Verschiebung $\hat{u}_z(\omega = 0)$ einen Imaginärteil. Für kausale Funktionen muss der Imaginärteil antimetrisch bzgl. ω sein. Deshalb gibt es einen Sprung im Imaginärteil der Funktion $\hat{u}_z(k_x, k_y, \omega)$ an der Stelle $\omega = 0$. Bei den beiden anderen Verschiebungen \hat{u}_x und \hat{u}_y ergibt sich auch ohne die Verwendung komplexer Lamé'scher Konstanten aus obiger Argumentation ein Sprung an der Stelle $\omega = 0$.

2.3 Kopplung von Balken und Boden

Das hier verwendete Prinzip der Kopplung eines in Querrichtung starren Balkens mit dem Halbraum wurde von Grundmann [Gru99] entwickelt und von Dinkel [Din01] für harmonische Anregungen umgesetzt. Der Begriff "Halbraumsteifigkeit" wurde erstmals von Dietermann und Metrikine [DM96] eingeführt.

2.3.1 Halbraumsteifigkeit im Wellenzahl-Frequenzbereich

Um eine konstante Einsenkung des Balkens in Querrichtung zu gewährleisten, erfolgt eine Annäherung der Spannungsverteilung in dieser Richtung durch skalierte Legendre-Polynome (s. Anhang D). Da die Spannung in y -Richtung symmetrisch ist, entfallen die ungeraden Glieder der Legendre-Polynome. Dadurch, dass diese wiederum durch n_P Rechteckstreifen der Breite $2b_L$ angenähert werden, genügt es, durch Ansnutzen der Reziprozitätsbeziehungen pro betrachtetem (k_x, ω) nur eine Halbraumberechnung durchzuführen. Mit der Forderung, dass die Flächen der einzelnen Rechteckstreifen jenen der kontinuierlichen Legendre-Polynom-Funktion entsprechen, ergeben sich die Amplituden $P_{P,i}$ zwischen den Werten y_1 und y_2 :

$$P_{P,i} = \frac{\int_{y_1}^{y_2} P_P(y) dy}{2b_L} . \quad (2.42)$$

Die besondere Eignung der Legendre-Polynome zur Annäherung der Spannungsverteilung gründet in zwei Eigenschaften: Bereits mit wenigen Gliedern lässt sich die Spannungsverteilung zwischen einer starren Lastfläche und dem Halbraum ausreichend exakt beschreiben. Darüber hinaus sind die Legendre-Polynome orthogonal zueinander, was eine einfache integrale Gewichtung möglich macht.

Abbildung 2.1 zeigt schematisch die Annäherung der Spannungsverteilung durch die ersten drei symmetrischen Legendre-Polynome. Zu erkennen ist auch, wie der Verlauf der einzelnen Legendre-Polynome wiederum über Rechteckfunktionen angenähert wird.

In den Anwendungsbeispielen erfolgte die Annäherung über 36 Rechteckfunktionen. Abbildung 2.2 zeigt diese Annäherung für das höchste verwendete, das achte Legendre-Polynom.

Die dreifache Fourier-Transformation eines wellenzahl-frequenzabhängigen Streifens der Amplitude 1 und Breite $2b_L$ liefert als Belastung auf den Halbraum

$$\hat{p}_z(k_x, k_y, \omega) = \hat{p}(k_x, \omega) 2b_L \frac{\sin k_y b_L}{k_y b_L} . \quad (2.43)$$

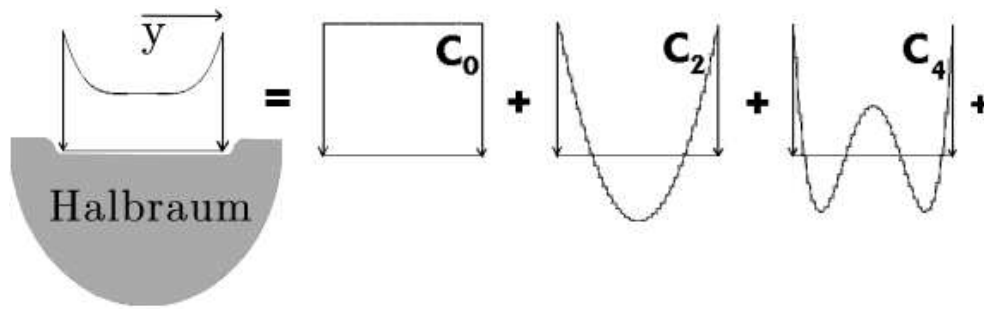


Abbildung 2.1: Annäherung der Spannungsverteilung durch Legendre-Polynome, die wiederum über Rechteckfunktionen dargestellt werden.

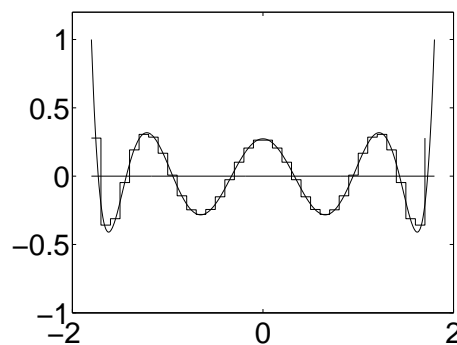


Abbildung 2.2: Achtes Legendre-Polynom mit Annäherung über 36 Rechteckfunktionen

Kapitel 2.2 zeigt die Berechnung der Antwort des Bodens $\hat{u}_z(k_x, k_y, z = 0, \omega)$ an der Oberfläche im dreifach Fourier-transformierten Raum (k_x, k_y, ω) . Diese liegt im Falle eines homogenen Halbraums analytisch, im Falle eines geschichteten Bodens numerisch vor.

Da die Einsenkung in Balkenquerrichtung konstant sein soll, ist eine eindimensionale Fast-Fourier-Rücktransformation $k_y \bullet \rightarrow y$ nötig. Dabei müssen der zu transformierende Bereich und die Auflösung so gewählt sein, dass die Verschiebung in den n_P Mittelpunkten der Streifen (Breite $2b_L$) berechnet werden kann, mit denen die Legendre-Polynome angenähert sind.

Abbildung 2.3 zeigt schematisch die Verschiebung des Bodens im rücktransformierten (k_x, y, ω) -Bereich aufgrund der in Gleichung 2.43 definierten Rechtecklast. Mit $\hat{y}_A(1), \hat{y}_A(2), \dots, \hat{y}_A(n)$ werden die Verschiebungen in den Mittelpunkten der Streifen bezeichnet. Aufgrund der Reziprozität lässt sich die Verschiebung \hat{w}_{is} am Ort i infolge einer Rechtecklast im Punkt s durch

$$\hat{w}_{is} = \hat{y}_A(|i - s| + 1) \quad (2.44)$$

ausdrücken. Bezeichnet man den Wert des Legendre-Polynoms $P_{(P)}$ an der Stelle s mit $P_{(P,s)}$, so ist es mittels Superposition möglich, die Verschiebungsantwort mit nur einer Halbraumberechnung pro (k_x, ω) zu ermitteln. Am Ort i ist dann die entsprechende Verschiebung durch

$$\hat{w}_P(k_x, y_i, \omega) = \sum_s P_{P,s} \hat{w}_{is} \quad (2.45)$$

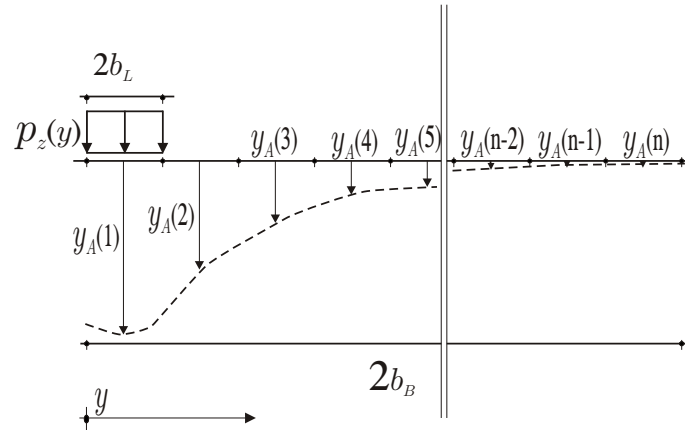


Abbildung 2.3: Reziprozität

beschrieben. Mit der Orthogonalität der Legendre-Polynome und der Forderung einer konstanten Einsenkung $\hat{w}_0(k_x, \omega)$ im Bereich $-b_B \leq y \leq b_B$ kann man die Vorfaktoren \hat{C}_P der Legendre-Polynome durch eine integrale Fehlerminimierung ermitteln. In y -Richtung kontinuierlich formuliert und die Symmetrie ausnutzend ergeben sich für n_P Legendre-Polynome zur Lastannäherung n_P Gleichungen:

$$\int_0^{b_B} \sum_i \hat{C}_i(k_x, \omega) \hat{w}_i(k_x, y, \omega) P_{(P)}(y) dy = \int_0^{b_B} \hat{w}_0(k_x, \omega) P_{(P)}(y) dy \quad (p) = 0, 2, \dots, n_P \quad . \quad (2.46)$$

Nur für das nullte, konstante Legendre-Polynom liefert das Integral auf der rechten Seite einen Wert ungleich Null, nämlich $\int_0^{b_B} \hat{w}_0(k_x, \omega) P_{(0)}(y) dy = b_B \hat{w}_0$. Das lineare Gleichungssystem (2.46) kann nun nach den Unbekannten \hat{C}_P aufgelöst werden.

Die Resultierende der Last in y -Richtung ist $2b_B \hat{C}_0$. Da ein linearer Zusammenhang zwischen dieser Last und der Verschiebung besteht, lässt sich als Quotient aus Kraft und Verschiebung eine Wellenzahl-Frequenzabhängige *Halbraumsteifigkeit* ausdrücken.

$$\hat{K}_s(k_x, \omega) = \frac{\hat{p}(k_x, \omega)}{\hat{u}_z(k_x, \omega)} = \frac{2b_B \hat{C}_0}{\hat{w}_0(k_x, \omega)} \quad . \quad (2.47)$$

2.3.2 Einbindung der Halbraumsteifigkeit in das Balkenmodell

Der Ausdruck $(i\omega c + k)$ stellt für die Gleichungen (2.3) und (2.6) des Abschnitts 2.1 im transformierten Raum (k_x, ω) einen linearen, wellenzahlunabhängigen Zusammenhang zwischen Kraft und Verschiebung her. Die in Gleichung (2.47) definierte *Halbraumsteifigkeit* stellt im Wellenzahl-Frequenzbereich den gleichen, jedoch zusätzlich wellenzahlabhängigen Zusammenhang her. Ersetzt man entsprechend den Ausdruck $(i\omega c + k)$ in den Gleichungen (2.3) und (2.6) durch

die *Halbraumsteifigkeit* $\hat{K}_s(k_x, \omega)$, erhält man die Verschiebung des gekoppelten Systems Balken/Halbraum. Dabei ist dann automatisch eingehalten, dass die Einsenkung des Halbraums unter dem Balken in Querrichtung konstant ist.

Bei der Berechnung der *Halbraumsteifigkeit* wird zur Vereinfachung angenommen, dass die Schubspannungen zwischen Balken und Halbraumoberfläche Null sind. Der dadurch entstehende Fehler ist bei den von Dinkel [Din01] gewählten Gegebenheiten zu vernachlässigen.

Kapitel 3

Wavelettransformation

3.1 Grundlagen

In der folgenden Darstellung der eindimensionalen Wavelettransformation wird nur sehr knapp auf die unmittelbar relevanten Beziehungen eingegangen. Einen umfassenderen Überblick kann man in der entsprechenden mathematischen Literatur [SN96, Dau92, LMR94, Chu92, Kai94, RO98] und speziell in der Arbeit von Lieb [Lie97] gewinnen. In der eigenen Vorarbeit [Len01] wurden die Grundlagen auch für den dreidimensionalen Fall bereits in knapper Form dargelegt.

3.1.1 Kontinuierliche Wavelettransformation

Die Wavelettransformierte $(W_\psi f)(a, b)$ einer Funktion $f(t)$ ($f \in L^2(\mathbb{R})$) ist definiert als

$$\begin{aligned}(W_\psi f)(a, b) &= |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \\ &= \langle f, \psi_{a,b} \rangle .\end{aligned}\tag{3.1}$$

Mit $\psi_{a,b}$ bezeichnet man also dilatierte (Koeffizient a) und translatierte (Koeffizient b) Versionen eines sog. *mother-Wavelets* ψ .

Erfüllt eine Funktion die Zulässigkeitsbedingung

$$0 < C_\psi := 2\pi \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty ,\tag{3.2}$$

dann nennt man sie Wavelet. Diese Bedingung kann nur erfüllt sein, wenn $\hat{\psi}(0) = 0$ ist, wenn also $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$ gilt.

Mit der Konstanten C_ψ lässt sich die Rekonstruktion der Ausgangsfunktion durchführen:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} (W_\psi f)(a, b) \left(|a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right) da db .\tag{3.3}$$

3.1.2 Diskrete Wavelettransformation

Um die Komprimierungseigenschaft der Wavelettransformation nutzen zu können, muss ein Übergang auf die diskrete Wavelettransformation erfolgen. Die Wahl der Parameter

$$a = 2^{-j} \quad j \in \mathbb{Z} \quad (3.4)$$

$$b = 2^{-j}k \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (3.5)$$

ermöglicht die Vermeidung von Redundanz.

Dadurch nimmt Gleichung (3.1) eine diskrete Form an. Die sog. Waveletkoeffizienten berechnen sich nun zu

$$c_{j,k} = (W_\psi f)(2^{-j}, 2^{-j}k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) 2^{j/2} \psi(2^j t - k) dt \quad . \quad (3.6)$$

Die Indizes j, k der Waveletkoeffizienten repräsentieren Skala bzw. Auflösung (j) und Ort (k). Falls der Index j größer als Null ist, wird der entsprechende Koeffizient durch eine Integration der Funktion mit einer gestauchten Version des Wavelets gewonnen. Dadurch können Details der Funktion, d.h. hochfrequente Anteile, analysiert werden. Umgekehrt können für Indizes $j < 0$ die niederfrequenten Anteile einer Funktion ermittelt werden. Da der Ort k des Koeffizienten ebenfalls bekannt ist, kann die Funktion gleichzeitig in Zeit und Frequenz betrachtet werden, eingeschränkt nur durch die *Heisenberg'sche Unschärferelation*. Durch die Kopplung von Skala j und Ort k werden die Koeffizienten $c_{j,k}$ für hohen Index j an eng nebeneinander liegenden Orten t berechnet, umgekehrt vergrößert sich der Abstand der Koeffizienten für kleines j . Dieser Zusammenhang lässt sich anschaulich durch das sog. Phasenraumgitter (vgl. Abbildung 3.1) darstellen.

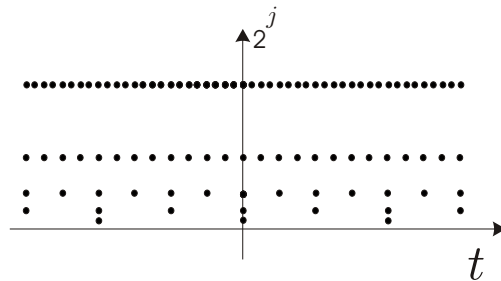


Abbildung 3.1: Verteilung der Phasenraumpunkte

Um eine numerisch stabile Rekonstruktion der Funktion gewährleisten zu können, muss die Menge aller im diskreten Fall gebildeter Wavelets $\{\psi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$ einen *frame* bilden. Das bedeutet, es muss positive Konstanten $A > 0$ und $B < \infty$ geben, so dass gilt:

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad . \quad (3.7)$$

Jedem Wavelet ψ ist nun über die Biorthonormalitätsbedingung für die Rekonstruktion ein duales Wavelet $\tilde{\psi}$ zugeordnet:

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,m} \quad j, k, l, m \in \mathbb{Z} \quad . \quad (3.8)$$

Damit ergibt sich im diskreten Fall als Rekonstruktionsvorschrift (vgl. Gleichung (3.3))

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} 2^{j/2} \tilde{\psi}(2^j t - k) \quad . \quad (3.9)$$

3.1.3 Mehrskalanalyse

Mit den Formeln aus Absatz 3.1.2 lässt sich nun die Wavelettransformation für “zulässige” Wavelets durchführen. Da jeder Waveletkoeffizient durch Integration nach Gleichung (3.6) numerisch eher aufwändig ermittelt werden muss, stellt sich die Frage nach einem effizienteren Algorithmus. Die Lösung liegt in der Mehrskalanalyse (MSA), die auf der Idee beruht, eine Integration nur auf der feinsten Skala (d.h. für sehr hohes gewähltes j) durchzuführen. Durch gewichtetes Kombinieren dieser feinsten Waveletkoeffizienten ergeben sich dann die Waveletkoeffizienten der nächstgrößeren Stufe. Dieses Verfahren wird sukzessive bis zur größten Auflösung fortgeführt.

Vom mathematischen Standpunkt betrachtet versteht man unter einer Mehrskalanalyse eine aufsteigende Folge abgeschlossener Unterräume $V_m \subset L^2(\mathbb{R})$.

$$\{0\} \subset \cdots \subset V_{j-1} \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \cdots \subset L^2(\mathbb{R}) \quad (3.10)$$

Diese müssen neben der Invarianz bei ganzzahligen Verschiebungen noch folgende Bedingungen erfüllen:

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}) \quad (3.11)$$

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\} \quad (3.12)$$

$$f(\cdot) \in V_j \iff f(2^{-j} \cdot) \in V_0 \quad . \quad (3.13)$$

Nun erfolgt die Einführung der Skalierungsfunktion ϕ . Sie spanne mit ihren ganzzahligen Translaten die Riesz-Basis V_j auf:

$$V_j = \overline{\text{span}\{\phi_{j,k}; k \in \mathbb{Z}\}}, \quad (3.14)$$

wobei sich $\phi_{j,k}$ zu

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k); \quad j, n \in \mathbb{Z} \quad (3.15)$$

berechnen lässt. Daraus ergibt sich die Existenz einer Skalierungsgleichung, auch *refinement equation* genannt:

$$\phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n \phi(2t - n) \quad . \quad (3.16)$$

Diese besagt, dass sich die Skalierungsfunktion einer bestimmten Auflösung durch gewichtete Kombination der Skalierungsfunktionen der nächstfeineren Auflösung darstellen lässt. Für die duale Skalierungsfunktion gilt Analoges.

W_j bezeichne die orthogonalen Komplemente zu V_j , die von den Wavelets aufgespannt werden:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad V_j \perp W_j \quad (3.17)$$

$$W_j = \overline{\text{span}\{\psi_{j,k}; k \in \mathbb{Z}\}} \quad . \quad (3.18)$$

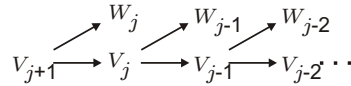


Abbildung 3.2: Schematische Darstellung der Mehrskalenaanalyse

Graphisch ist dieser Zusammenhang in Abbildung 3.2 dargestellt.

Die Waveletunterräume erben die Skalierungseigenschaft (analog Gleichung (3.13)) und weisen zusätzlich folgende Charakteristika auf:

$$V_j = \bigoplus_{i \leq j-1} W_i \quad (3.19)$$

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} W_i \quad (3.20)$$

Außerdem lassen sich auch die Wavelets analog Gleichung (3.16) durch gewichtete Kombination der Skalierungsfunktionen der nächstfeineren Auflösung darstellen:

$$\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n \phi(2t - n) \quad (3.21)$$

Analoges gilt für die dualen Wavelets.

Im Rahmen dieser Arbeit werden auch die Fourier-rücktransformierten dualen Wavelets benötigt. Diese bestimmen sich mit den Regeln der Fourier-Transformation (s. (A.6)) aus der analogen Anwendung von (3.21) zu

$$\check{\psi}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{q}_n e^{int/2} \frac{1}{2} \check{\phi}(t/2) \quad (3.22)$$

Das praktische Vorgehen zur Berechnung der Waveletkoeffizienten sieht nun wie folgt aus: Zuerst werden die sog. Skalierungskoeffizienten $d_{j,k}$ auf der feinsten vorgegebenen Stufe j berechnet:

$$d_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) 2^{j/2} \phi(2^j t - k) dt. \quad (3.23)$$

Setzt man Gleichung (3.21) und Gleichung (3.23) mit veränderten Indizes in den Ausdruck (3.6) ein, so erhält man den Waveletkoeffizienten einer Auflösung aus der gewichteten Summe der Skalierungskoeffizienten der nächstfeineren Stufe:

$$c_{j,k} = 2^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n d_{j+1,2k+n} \quad (3.24)$$

Durch analoges Vorgehen lässt sich der Ausdruck für die Skalierungskoeffizienten finden:

$$d_{j,k} = 2^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n d_{j+1,2k+n} \quad (3.25)$$

Nachdem alle Skalierungskoeffizienten der feinsten Stufe durch Integration der Funktion mit der Skalierungsfunktion ermittelt wurden, berechnen sich also die Wavelet- und Skalierungskoeffizienten der nächstgrößeren Stufen durch sukzessives Anwenden der Gleichungen (3.24) und (3.25).

Die Mehrskalenganalyse kann auf beliebiger Skala abgebrochen werden, wobei dann die Funktion jeweils vollständig durch die Skalierungskoeffizienten der größten Skala und sämtliche Waveletkoeffizienten repräsentiert ist. Die Gesamtzahl der Koeffizienten, die die Funktion vollständig repräsentieren, ändert sich durch dieses Vorgehen nicht. Ausgehend von m Skalierungskoeffizienten der feinsten Skala werden $2^{-1}m$ Skalierungs- und ebenso viele Waveletkoeffizienten der nächstgrößeren Skala gebildet, wobei erstere wieder sukzessive unterteilt werden. Der Sinn der Mehrskalenganalyse liegt darin, möglichst viele Waveletkoeffizienten zu gewinnen, da diese die gewünschten besonderen Eigenschaften aufweisen.

Nach Durchführung der Mehrskalenganalyse ausgehend von den Skalierungskoeffizienten der feinsten Stufe ($N + 1$) bis zur Stufe J kann eine vollständige Rekonstruktion der Funktion mit Hilfe der dualen Funktionen erfolgen:

$$f_N(t) = \sum_k \sum_{j=J}^N c_{j,k} 2^{j/2} \tilde{\psi}(2^j t - k) + \sum_k d_{J,k} 2^{J/2} \tilde{\phi}(2^J t - k) \quad . \quad (3.26)$$

Aus den Wavelet- und Skalierungskoeffizienten lässt sich aber nicht nur die Funktion selbst, sondern auch ihre Fourier-Transformierte gewinnen. Die Berechnung erfolgt durch Anwenden der Rechenregeln der Fourier-Transformation (s. (A.5)):

$$\hat{f}_N(\omega) = \sum_k \sum_{j=J}^N c_{j,k} 2^{-j/2} \hat{\tilde{\psi}}(2^{-j} \omega) e^{-i k \omega 2^{-j}} + \sum_k d_{J,k} 2^{-J/2} \hat{\tilde{\phi}}(2^{-J} \omega) e^{-i k \omega 2^{-J}} \quad .$$

Im Rahmen dieser Arbeit ist die Lösung eines Problems im Fourier-transformierten Raum gegeben. Benötigt wird eine Rücktransformation in den Originalraum. Diese Rücktransformierte (angedeutet durch das Zeichen $\check{\sim}$) ergibt sich unter Verwendung von (A.6) zu

$$\check{f}(t) = \sum_{j,k} c_{j,k} 2^{-j/2} \check{\tilde{\psi}}(2^{-j} t) e^{i k t 2^{-j}} + \sum_k d_{J,k} 2^{-J/2} \check{\tilde{\phi}}(2^{-J} t) e^{i k t 2^{-J}} \quad . \quad (3.27)$$

3.2 Mehrdimensionale Wavelettransformation

Im Rahmen dieser Arbeit werden die mehrdimensionalen Wavelets durch Bildung des Tensorproduktes aus den eindimensionalen Wavelets gewonnen. Wie im eindimensionalen Fall lässt sich eine Mehrskalenganalyse aus abgeschlossenen Unterräumen $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ bilden, nun aber für n Dimensionen im $L^2(\mathbb{R}^n)$. Die Gleichungen (3.10), (3.11), (3.12), (3.13) und (3.14) gelten analog für den mehrdimensionalen Fall.

Bei n Dimensionen gibt es durch die Bildung über das Tensorprodukt $2^n - 1$ Wavelets und eine Skalierungsfunktion. Wie im eindimensionalen Fall (vgl. Abschnitt 3.1.3) ändert sich dadurch aber die Gesamtzahl der Wavelet- und Skalierungskoeffizienten, die die Funktion im Zuge der

Mehrskalenanalyse vollständig repräsentieren, nicht: Ist die Funktion im \mathbb{R}^n auf der feinsten Skala durch m^n Skalierungskoeffizienten dargestellt, so werden auf der nächstgrößeren Skala $(2^n - 1)(2^{-1}m)^n$ Waveletkoeffizienten und $(2^{-1}m)^n$ Skalierungskoeffizienten gebildet. Die Summe aus diesen Skalierungs- und Waveletkoeffizienten ergibt wieder m^n . Fährt man nun fort und bildet aus den $(2^{-1}m)^n$ Skalierungskoeffizienten wieder $(2^n - 1)(2^{-2}m)^n$ Waveletkoeffizienten und $(2^{-2}m)^n$ Skalierungskoeffizienten, so erkennt man, dass die Gesamtzahl der ermittelten Koeffizienten gleich bleibt.

3.2.1 Zweidimensionale Wavelettransformation

Aus Gleichung (3.17) entsteht im zweidimensionalen Fall

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{j+1} &= V_{j+1} \otimes V_{j+1} \\ &= (V_j \oplus W_j) \otimes (V_j \oplus W_j) \\ &= (V_j \otimes V_j) \oplus (V_j \otimes W_j) \oplus (W_j \otimes V_j) \oplus (W_j \otimes W_j) \quad . \end{aligned} \quad (3.28)$$

Daraus ergeben sich die Skalierungsfunktion und die drei Wavelets zu

$$\begin{aligned} \Phi(k_x, k_y) &= \phi(k_x)\phi(k_y) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} p_n p_m \Phi(2k_x - n, 2k_y - m) \\ \Psi^{(1)}(k_x, k_y) &= \psi(k_x)\phi(k_y) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} q_n p_m \Phi(2k_x - n, 2k_y - m) \\ \Psi^{(2)}(k_x, k_y) &= \phi(k_x)\psi(k_y) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} p_n q_m \Phi(2k_x - n, 2k_y - m) \\ \Psi^{(3)}(k_x, k_y) &= \psi(k_x)\psi(k_y) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} q_n q_m \Phi(2k_x - n, 2k_y - m) \quad . \end{aligned} \quad (3.29)$$

Analog lassen sich die duale Skalierungsfunktion und die dualen Wavelets bilden.

Zur Gewinnung der Skalierungskoeffizienten der feinsten Stufe im Fourier-transformierten Raum ist folgende, (3.23) entsprechende Gleichung anzuwenden:

$$d_{j,u,v} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(k_x, k_y) 2^j \phi(2^j k_x - u, 2^j k_y - v) dk_x dk_y \quad . \quad (3.30)$$

Daraus lassen sich im Zuge der Mehrskalenanalyse wieder sukzessive die Skalierungskoeffizienten

und die Waveletkoeffizienten der nächstgrößeren Stufen berechnen:

$$\begin{aligned}
d_{j,u,v} &= 2^{-1} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} p_n p_m d_{j+1,2u+n,2v+m} \\
c_{j,u,v}^{(1)} &= 2^{-1} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} q_n p_m d_{j+1,2u+n,2v+m} \\
c_{j,u,v}^{(2)} &= 2^{-1} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} p_n q_m d_{j+1,2u+n,2v+m} \\
c_{j,u,v}^{(3)} &= 2^{-1} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} q_n q_m d_{j+1,2u+n,2v+m} \quad .
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Die Rekonstruktion im Fourier-rücktransformierten Raum ergibt sich analog (3.27) zu

$$f(x, y) = \sum_{i,j,k,l} c_{j,k,l}^{(i)} 2^{-j} \check{\Psi}^{(i)}(2^{-j}x, 2^{-j}y) e^{i(kx+ly)2^{-j}} + \sum_{k,l} d_{J,k,l} 2^{-J} \check{\Phi}(2^{-J}x, 2^{-J}y) e^{i(kx+ly)2^{-J}} \quad . \tag{3.32}$$

3.2.2 Dreidimensionale Wavelettransformation

Im dreidimensionalen Fall ist die analoge Form zu Gleichung (3.17) folgende:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{j+1} &= V_{j+1} \otimes V_{j+1} \otimes V_{j+1} \\
&= (V_j \oplus W_j) \otimes (V_j \oplus W_j) \otimes (V_j \oplus W_j) \\
&= (V_j \otimes V_j \otimes V_j) \oplus (V_j \otimes W_j \otimes V_j) \oplus (V_j \otimes V_j \otimes W_j) \oplus (V_j \otimes W_j \otimes W_j) \oplus \\
&\oplus (W_j \otimes V_j \otimes V_j) \oplus (W_j \otimes V_j \otimes W_j) \oplus (W_j \otimes W_j \otimes V_j) \oplus (W_j \otimes W_j \otimes W_j) \quad .
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Auf diese Weise sind eine dreidimensionale Skalierungsfunktion und sieben Wavelets festgelegt:

$$\begin{aligned}
\Phi(k_x, k_y, \omega) &= \Phi(k_x)\Phi(k_y)\Phi(\omega) = \sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty} p_l p_m p_n \Phi(2k_x - l, 2k_y - m, 2\omega - n) \\
\Psi^{(1)}(k_x, k_y, \omega) &= \Phi(k_x)\Psi(k_y)\Phi(\omega) = \sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty} p_l q_m p_n \Phi(2k_x - l, 2k_y - m, 2\omega - n) \\
\Psi^{(2)}(k_x, k_y, \omega) &= \Phi(k_x)\Phi(k_y)\Psi(\omega) = \sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty} p_l p_m q_n \Phi(2k_x - l, 2k_y - m, 2\omega - n) \\
\Psi^{(3)}(k_x, k_y, \omega) &= \Phi(k_x)\Psi(k_y)\Psi(\omega) = \sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty} p_l q_m q_n \Phi(2k_x - l, 2k_y - m, 2\omega - n) \\
\Psi^{(4)}(k_x, k_y, \omega) &= \Psi(k_x)\Phi(k_y)\Phi(\omega) = \sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty} q_l p_m p_n \Phi(2k_x - l, 2k_y - m, 2\omega - n) \\
\Psi^{(5)}(k_x, k_y, \omega) &= \Psi(k_x)\Phi(k_y)\Psi(\omega) = \sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty} q_l p_m q_n \Phi(2k_x - l, 2k_y - m, 2\omega - n) \\
\Psi^{(6)}(k_x, k_y, \omega) &= \Psi(k_x)\Psi(k_y)\Phi(\omega) = \sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty} q_l q_m p_n \Phi(2k_x - l, 2k_y - m, 2\omega - n) \\
\Psi^{(7)}(k_x, k_y, \omega) &= \Psi(k_x)\Psi(k_y)\Psi(\omega) = \sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty} q_l q_m q_n \Phi(2k_x - l, 2k_y - m, 2\omega - n) .
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Die dualen Funktionen sind wieder analog zu bilden.

Um die Skalierungskoeffizienten der feinsten Stufe im Fourier-transformierten Raum zu erhalten, ist folgende, (3.23) entsprechende Gleichung anzuwenden:

$$d_{j,u,v,w} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(k_x, k_y, \omega) 2^{3/2j} \phi(2^j k_x - u, 2^j k_y - v, 2^j \omega - w) dk_x dk_y d\omega. \tag{3.35}$$

Anschließend liefert die Mehrskalenganalyse wieder sukzessive die Skalierungskoeffizienten und

die Waveletkoeffizienten der nächstgrößeren Stufen:

$$\begin{aligned}
d_{j,u,v,w} &= 2^{-3/2} \sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty} p_l p_m p_n d_{j+1,2u+l,2v+m,2w+n} \\
c_{j,u,v,w}^{(1)} &= 2^{-3/2} \sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty} p_l q_m p_n d_{j+1,2u+l,2v+m,2w+n} \\
c_{j,u,v,w}^{(2)} &= 2^{-3/2} \sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty} p_l p_m q_n d_{j+1,2u+l,2v+m,2w+n} \\
c_{j,u,v,w}^{(3)} &= 2^{-3/2} \sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty} p_l q_m q_n d_{j+1,2u+l,2v+m,2w+n} \\
c_{j,u,v,w}^{(4)} &= 2^{-3/2} \sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty} q_l p_m p_n d_{j+1,2u+l,2v+m,2w+n} \\
c_{j,u,v,w}^{(5)} &= 2^{-3/2} \sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty} q_l p_m q_n d_{j+1,2u+l,2v+m,2w+n} \\
c_{j,u,v,w}^{(6)} &= 2^{-3/2} \sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty} q_l q_m p_n d_{j+1,2u+l,2v+m,2w+n} \\
c_{j,u,v,w}^{(7)} &= 2^{-3/2} \sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty} q_l q_m q_n d_{j+1,2u+l,2v+m,2w+n} .
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Die analoge Anwendung von (3.27) führt für die Rekonstruktion im Fourier-rücktransformierten Raum zu

$$\begin{aligned}
f(x, y, t) &= \sum_{m,j,u,v,w} c_{j,u,v,w}^{(m)} 2^{-3/2j} \check{\Psi}^m(2^{-j}x, 2^{-j}y, 2^{-j}t) e^{i(ux+vy+wt)2^{-j}} + \\
&+ \sum_{u,v,w} d_{J,u,v,w} 2^{-3/2J} \check{\Phi}(2^{-J}x, 2^{-J}y, 2^{-J}t) e^{i(ux+vy+wt)2^{-J}} .
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Mit den folgenden Bildern soll ein qualitativer Eindruck von den dreidimensionalen Funktionen vermittelt werden. Aus diesem Grunde sind in Abbildung 3.3 nur die Skalierungsfunktion mit dem ersten der sieben Wavelets und die duale Skalierungsfunktion mit dem ersten dualen Fourier-transformierten Wavelet dargestellt. Letzteres ist komplex, weshalb sowohl der Real- als auch der Imaginärteil zu sehen sind.

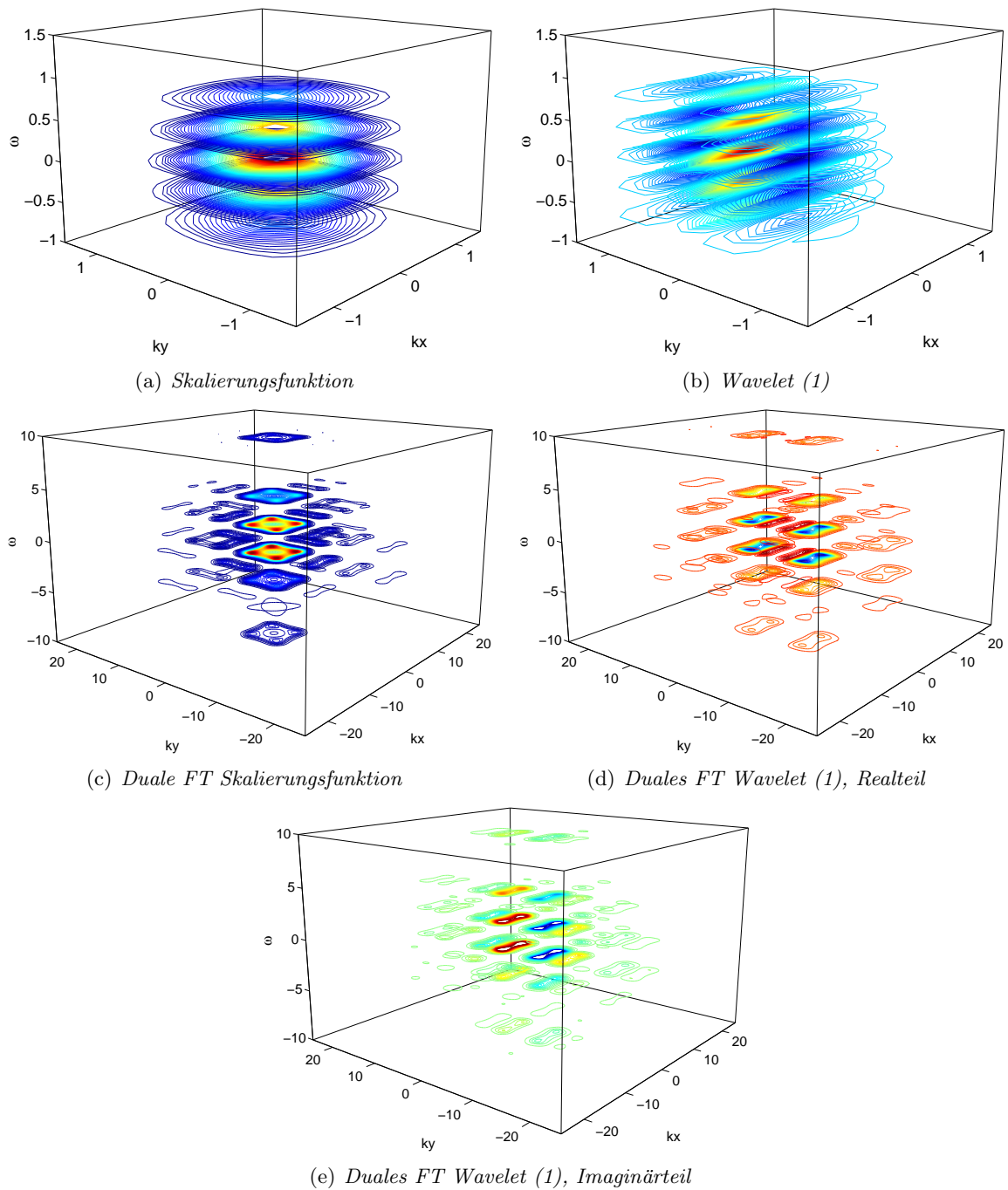


Abbildung 3.3: Dreidimensionale Skalierungsfunktionen und Wavelets

3.3 Spezielle Eigenschaften der *B-spline Wavelets*

Im Rahmen dieser Arbeit werden *B-spline Wavelets* aus folgenden Gründen verwendet:

- Für die Waveletzerlegung können *Finite Impulse Response (FIR)*-Filter, d.h. Filter endlicher Länge verwendet werden, da Skalierungsfunktion und Wavelet einen kompakten Träger aufweisen.
- Eine Integration der Funktion mit der Skalierungsfunktion zur Gewinnung der Skalierungskoeffizienten der feinsten Stufe ist relativ leicht und genau möglich.
- Die Fourier-Transformierte bzw. Fourier-Rücktransformierte von Skalierungsfunktion und Wavelet ist analytisch bekannt.

Ein Nachteil der *B-spline Wavelets* ist, dass sie nur die Biorthogonalitätsbedingung (3.8) erfüllen. Deshalb wird für die Rekonstruktion ein duales Wavelet benötigt. Da die Orthogonalitätsbedingung für Wavelets von verschiedenen Skalen gilt, jedoch nicht für Wavelets einer Skala, nennt man *B-spline Wavelets* semiorthogonal:

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = 0, \quad j \neq l; \quad j, k, l, m \in \mathbb{Z} \quad . \quad (3.38)$$

Die dualen Funktionen weisen keinen kompakten Träger auf, was zu *Infinite Impulse Response (IIR)*-Filtern führt. Für die Rekonstruktion wirkt sich dieser Nachteil jedoch kaum aus, da sie mit abgespeicherten Werten für die duale (rücktransformierte) Skalierungsfunktion und das duale (rücktransformierte) Wavelet erfolgt.

3.3.1 Formeln für *B-spline Wavelets*

Ausgehend von der Skalierungsfunktion $\phi_{B_1}(x)$ des Haar-Wavelets

$$\phi_{B_1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.39)$$

ist die Skalierungsfunktion des *B-splines* N -ter Ordnung rekursiv definiert:

$$\phi_{B_N}(x) = \phi_{B_{(N-1)}} * \phi_{B_1} = \int_0^1 \phi_{B_{(N-1)}}(x-t) dt, \quad N \geq 2 \quad . \quad (3.40)$$

Die Fourier-Transformierte der Skalierungsfunktion ergibt sich aus (3.40), wobei nach den Regeln der Fourier-Transformation die Faltung in eine Multiplikation übergeht und die verschobene Fensterfunktion in den gedrehten Sinus-Cardinalis:

$$\hat{\phi}_{B_N}(k_x) = e^{-iNk_x/2} \left(\frac{\sin k_x/2}{x/2} \right)^N \quad \text{bzw.} \quad (3.41)$$

$$\check{\phi}_{B_N}(x) = \frac{e^{iNx/2}}{2\pi} \left(\frac{\sin x/2}{k_x/2} \right)^N \quad . \quad (3.42)$$

Im Fourier-transformierten Raum lässt sich aus der Skalierungsfunktion die entsprechende duale Skalierungsfunktion durch

$$\hat{\check{\phi}}(k_x) = \frac{\hat{\phi}(k_x)}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \hat{\phi}(k_x + 2\pi n) \right|^2} = \frac{\hat{\phi}(k_x)}{\hat{g}(k_x)} \quad \text{bzw.} \quad (3.43)$$

$$\check{\check{\phi}}(x) = \frac{\check{\phi}(x)}{\hat{g}(x)} \quad (3.44)$$

bestimmen. Gleichung (3.44) gilt, da der Nenner in (3.43) reell und symmetrisch ist.

Mit N als Ordnung des betrachteten *B-splines* kann der Nenner in diesen Gleichungen mittels trigonometrischer Funktionen ausgedrückt werden:

$$\hat{g}(k_x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \hat{\phi}(k_x + 2\pi n) \right|^2 = \frac{-2^{2N-1} \sin^{2N}(k_x/2)}{(2N-1)!} \frac{d^{2N-1}}{dk_x^{2N-1}} \cot(k_x/2) \quad . \quad (3.45)$$

Um die duale Skalierungsfunktion auch im Ausgangsraum einfach darstellen zu können, berechnet man sich die Fourier-Koeffizienten der Funktion $1/\hat{g}(k_x)$

$$u_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\hat{g}(k_x)} e^{ink_x} dk_x \quad (3.46)$$

und erhält dann die Beziehung

$$\hat{\check{\phi}}(k_x) = \sum_n u_n e^{-ink_x} \hat{\phi}(k_x) \bullet \circ \check{\phi}(x) = \sum_n u_n \phi(x-n) \quad . \quad (3.47)$$

3.4 Eindimensionale *B-splines* 1., 2. und 4. Ordnung

3.4.1 *B-spline* 1. Ordnung

Aufgrund seiner Orthonormalität gibt es beim Haar-Wavelet keine eigenen dualen Funktionen. In Tabelle B.1 finden sich die Filterkoeffizienten, die entsprechend für Hin- und Rücktransformation identisch sind. Abbildung 3.4(a) zeigt die Skalierungsfunktion und das *mother-Wavelet*, die nach (3.39) bzw. (3.21) definiert sind. Für $N = 1$ ergibt sich aus Gleichung (3.42)

$$\check{\phi}_{B_1}(x) = \frac{e^{ix/2}}{2\pi} \left(\frac{\sin x/2}{x/2} \right) \quad . \quad (3.48)$$

Erwartungsgemäß ergibt die Auswertung von (3.45) den Wert 1, da keine dualen Funktionen existieren. In Abbildung 3.6(a) sind sowohl diese rücktransformierte Skalierungsfunktion als auch das rücktransformierte Wavelet dargestellt, wobei letzteres durch (3.22) definiert ist.

3.4.2 *B-spline* 2. Ordnung

Für das *B-spline* 2. Ordnung lässt sich die Skalierungsfunktion noch leicht analytisch darstellen:

$$\phi_{B_2}(x) = \begin{cases} 1 - |x - 1| & \text{für } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.49)$$

In Abbildung 3.4(b) sind diese Skalierungsfunktion und das durch (3.21) definierte Wavelet dargestellt, Abbildung 3.5(a) gibt die entsprechenden dualen Funktionen wieder. Die duale Skalierungsfunktion lässt sich durch (3.47) mit den Koeffizienten u_n für $N = 2$ aus Tabelle B.4 erzeugen, das duale Wavelet mittels analoger Anwendung von (3.21) und den Koeffizienten aus Tabelle B.3 ebenfalls für $N = 2$.

(3.42) definiert die rücktransformierte Skalierungsfunktion für $N = 2$ zu

$$\check{\phi}(x) = \frac{e^{ix}}{2\pi} \left(\frac{\sin x/2}{x/2} \right)^2 \quad (3.50)$$

Damit erhält man unter Auswertung von (3.44) und (3.45) für die duale rücktransformierte Skalierungsfunktion:

$$\check{\check{\phi}}(x) = \frac{1}{\frac{2}{3} \cos^2(x/2) + \frac{1}{3}} \check{\phi}(x) \quad (3.51)$$

Diese und das durch (3.22) definierte duale rücktransformierte Wavelet sind in Abbildung 3.6(b) dargestellt.

3.4.3 *B-spline* 4. Ordnung

Um die Skalierungsfunktion des *B-splines* 4. Ordnung visualisieren zu können, bieten sich rekursive Formeln an. Eine allgemeine und effiziente Formel für *B-splines* N -ter Ordnung lautet:

$$\phi_{B_N}(x) = \frac{x}{N-1} \phi_{B_{N-1}}(x) + \frac{N-x}{N-1} \phi_{B_{N-1}}(x-1) \quad (3.52)$$

Hier soll der sogenannte Kaskadenalgorithmus verwendet werden:

$$\phi_{B_j}(x) = \sum p_k \phi_{B_{j-1}}(2x - k) \quad (3.53)$$

Dabei wird mit der Skalierungsfunktion des Haar-Wavelets als $\phi_{B_1}(x)$ begonnen, und die Filterkoeffizienten für $N = 4$ aus Tabelle B.2 werden als p_k genommen.

Damit und mit (3.21) erhält man die in Abbildung 3.4(c) dargestellte Skalierungsfunktion und das Wavelet. In Abbildung 3.5(b) findet man die dualen Funktionen, die analog Abschnitt 3.4.2 gebildet werden.

Mit (3.42) ist die rücktransformierte Skalierungsfunktion für $N = 4$ definiert zu:

$$\check{\phi}(x) = \frac{e^{2ix}}{2\pi} \left(\frac{\sin x/2}{x/2} \right)^4 \quad (3.54)$$

Unter Auswertung von (3.44) und (3.45) ergibt sich für die rücktransformierte duale Skalierungsfunktion:

$$\check{\phi}(x) = \frac{315}{17 + 180 \cos^2(x/2) + 114 \cos^4(x/2) + 4 \cos^6(x/2)} \check{\phi}(x) \quad . \quad (3.55)$$

Diese und das durch (3.22) definierte duale rücktransformierte Wavelet sind in Abbildung 3.6(c) dargestellt.

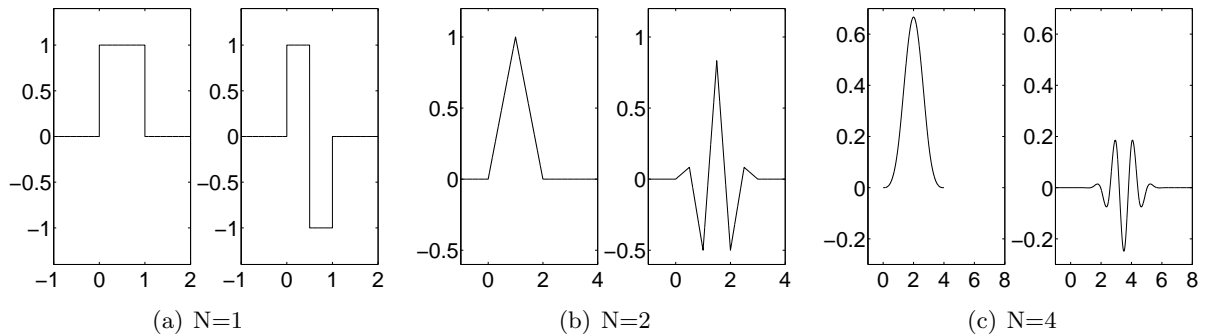


Abbildung 3.4: Skalierungsfunktion und Wavelet von *B-splines* verschiedener Ordnung

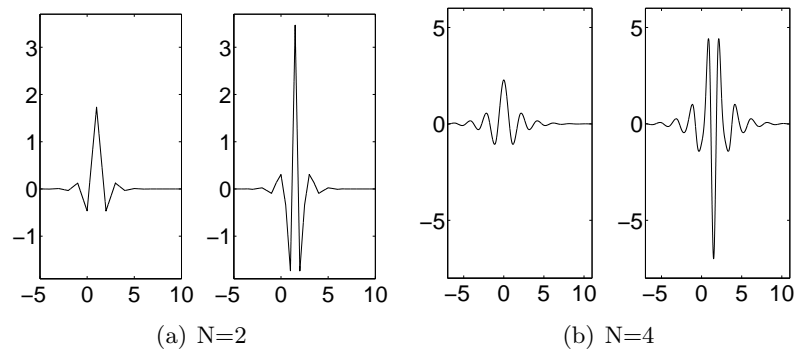


Abbildung 3.5: Duale Skalierungsfunktion und Wavelet von *B-splines* 2. und 4. Ordnung

3.4.4 Vergleich der *B-splines* 1., 2. und 4. Ordnung

Die Vermutung liegt nahe, dass sich durch die Verwendung von *B-splines* höherer Ordnung die Komprimierungseigenschaften der Wavelettransformation verbessern. Deshalb wird hier ein Vergleich der Eignung von *B-splines* 1., 2. und 4. Ordnung für die Wavelettransformation einer typischen Funktion vorgenommen. Der Einfachheit und Übersichtlichkeit halber bezieht sich dieser Vergleich auf eine eindimensionale Funktion, die Erkenntnisse gelten jedoch auch für den mehrdimensionalen Fall. Die Funktion wird sowohl im Ausgangsraum als auch im Fourier-rücktransformierten Raum rekonstruiert.

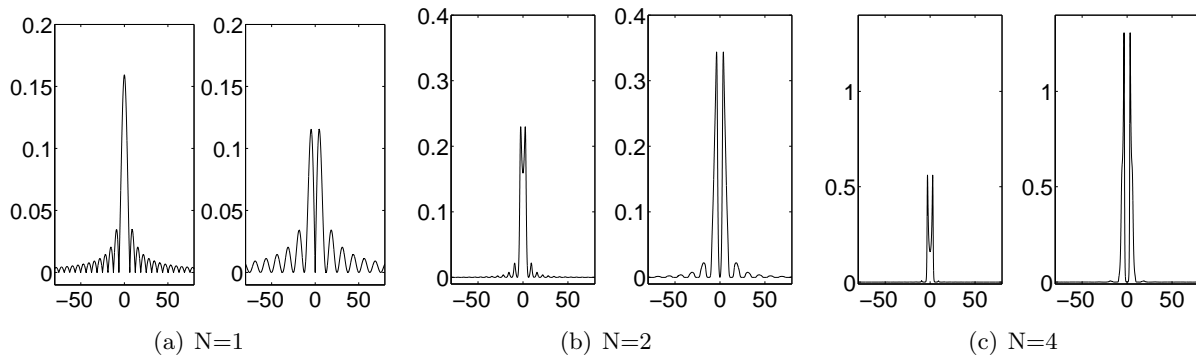


Abbildung 3.6: Duale rücktransformierte Skalierungsfunktion und Wavelet von *B-splines* verschiedener Ordnung (Darstellung des Betrags)

Die betrachtete Beispielfunktion lautet:

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{EI k_x^4 - \mu_B \omega^2 + i \omega c_w + k_w} & \text{für } -128 \leq \omega \leq 128, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.56)$$

mit festen Parametern $EI = 1000$, $\mu_B = 100$, $k_w = 25000$, $c_w = 200$, $k_x = 5$.

Diese Funktion weist die typischen Eigenschaften auf, für die das in Abschnitt 4 beschriebene Programmpaket entwickelt wurde: Sie ist überwiegend glatt, verfügt aber über lokale Spitzen.

Die Waveletzerlegung erfolgt hier nach den Formeln (3.23), (3.24), (3.25), die Rekonstruktion mittels (3.27) bzw. (3.26). Bei der Funktionsabtastung wurde ein Abstand von $\Delta_\omega = 2^{-4}$ gewählt, was im Funktionsbereich $-128 \leq \omega \leq 128$ eine Anzahl von $2^{12} + 1 = 4097$ Datenpunkten bedeutet. Zusätzlich wurden wie bei den Programmpaketen zusätzliche Werte an den Bereichsrändern verwendet (s. Abschnitt 4.4.1), um Randverzerrungen zu vermeiden.

Rekonstruktion im Ausgangsbereich

In Abbildung 3.7 sind Real- und Imaginärteil der Funktion $\hat{f}(\omega)$ sowie deren Rekonstruierte unter Verwendung der verschiedenen Wavelets dargestellt. Es wurden jeweils 101 Waveletkoeffizienten für die Rekonstruktion verwendet, was einem Anteil von 2.5% entspricht. Optisch ist praktisch in keinem der Fälle ein Unterschied zwischen Funktion und Rekonstruierter zu erkennen. Um die Abweichung mit einer Zahl beschreiben zu können, wird folgendes Kriterium definiert:

$$\Delta_F = \Delta_\omega \sum |\hat{f}_n - y_n| \quad , \quad (3.57)$$

wobei \hat{f}_n die Funktionswerte der Originalfunktion und y_n diejenigen der rücktransformierten Funktion in den Punkten der ursprünglichen Abtastung sind. Mit diesem Fehlerkriterium ergeben sich die in Tabelle 3.1 in der Spalte *Originalfunktion* angegebenen Werte.

Abbildung 3.8 zeigt die gleichen Funktionen wie Abbildung 3.7 mit dem Unterschied, dass nur 0.5% der Waveletkoeffizienten, also genau 19, für die Rekonstruktion verwendet werden.

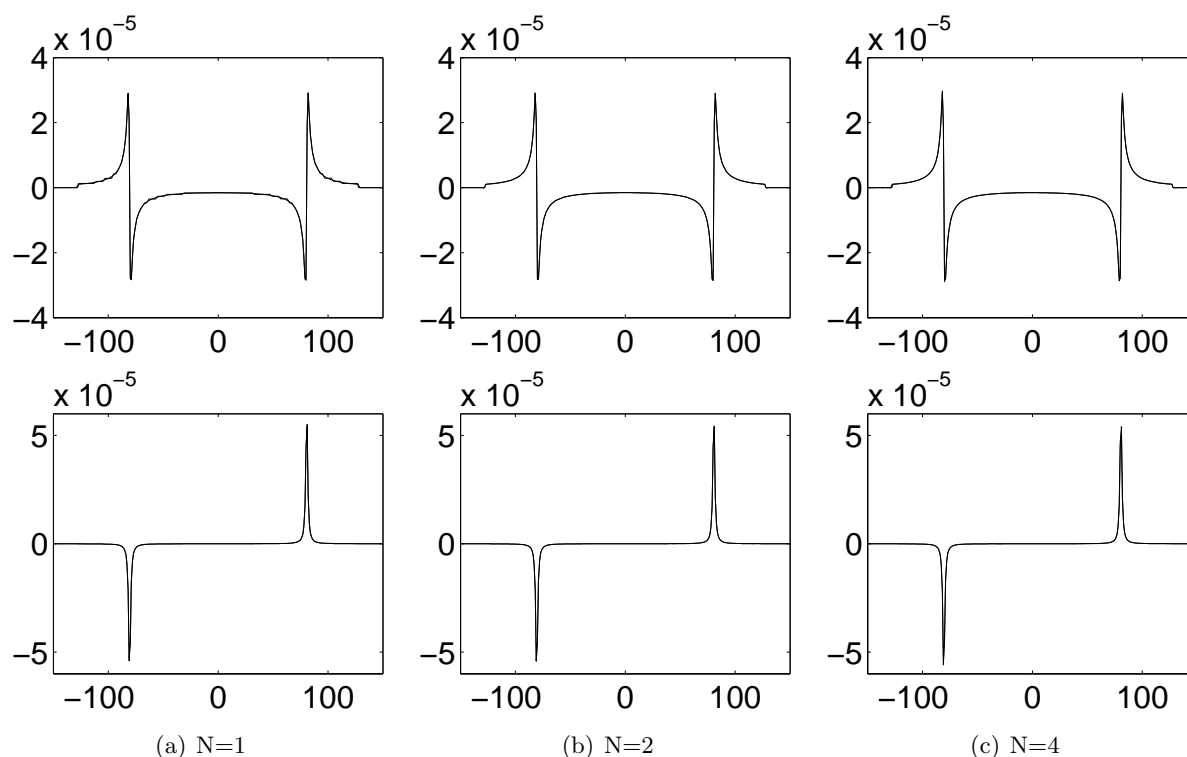


Abbildung 3.7: Rekonstruktion mit 2.5% der Waveletkoeffizienten unter Verwendung verschiedener *B-splines*

Rekonstruktion im Fourier-rücktransformierten Bereich

Da die Waveletzerlegung dazu verwendet wird, die Fourier-Rücktransformierte einer Funktion zu berechnen, folgt ein Vergleich der Ergebnisse der Fourier-Rücktransformation der Funktion (3.56) unter Verwendung der verschiedenen Wavelets. Als Referenzlösung dient die Lösung einer Fast-Fourier-(Rück)-Transformation (*FFT*), für die ein extrem großer Bereich $-20000 \leq \omega \leq 20000$ mit $2^{19} \approx 5 \cdot 10^5$ Abtastpunkten gewählt wurde. Dadurch minimieren sich die Fehler aus *leakage* und *aliasing*. Bei analytischer Rücktransformation ergäbe sich eine rein reelle Funktion. Kausalität wird durch die Fallunterscheidung bei der Funktionsdefinition verhindert.

Analog dem Fall der Rekonstruktion im Ausgangsbereich lässt sich ein Fehlerkriterium aufstellen, wobei der Bezugswert die Lösung der *FFT* ist. Diese Fehlerwerte finden sich in Tabelle 3.1 in der Spalte *rücktransformierte Funktion* für 2.5% (entsprechend 101 Koeffizienten) und 0.5% (entsprechend 19 Koeffizienten) Anteile der Waveletkoeffizienten für die Rekonstruktion.

Abbildung 3.9 zeigt die rücktransformierten Funktionen unter Verwendung von 19 Waveletkoeffizienten für die Rekonstruktion. Aus Visualisierungsgründen ist jeweils nur ein Ausschnitt der Funktion dargestellt. Die Amplituden des Imaginärteils liegen in jedem Fall um mehr als eine Zehnerpotenz unter denjenigen des Realteils. Bei Verwendung von 101 Waveletkoeffizienten ist optisch in keinem der Fälle ein Unterschied zwischen *FFT* und Wavelettransformation zu erkennen.

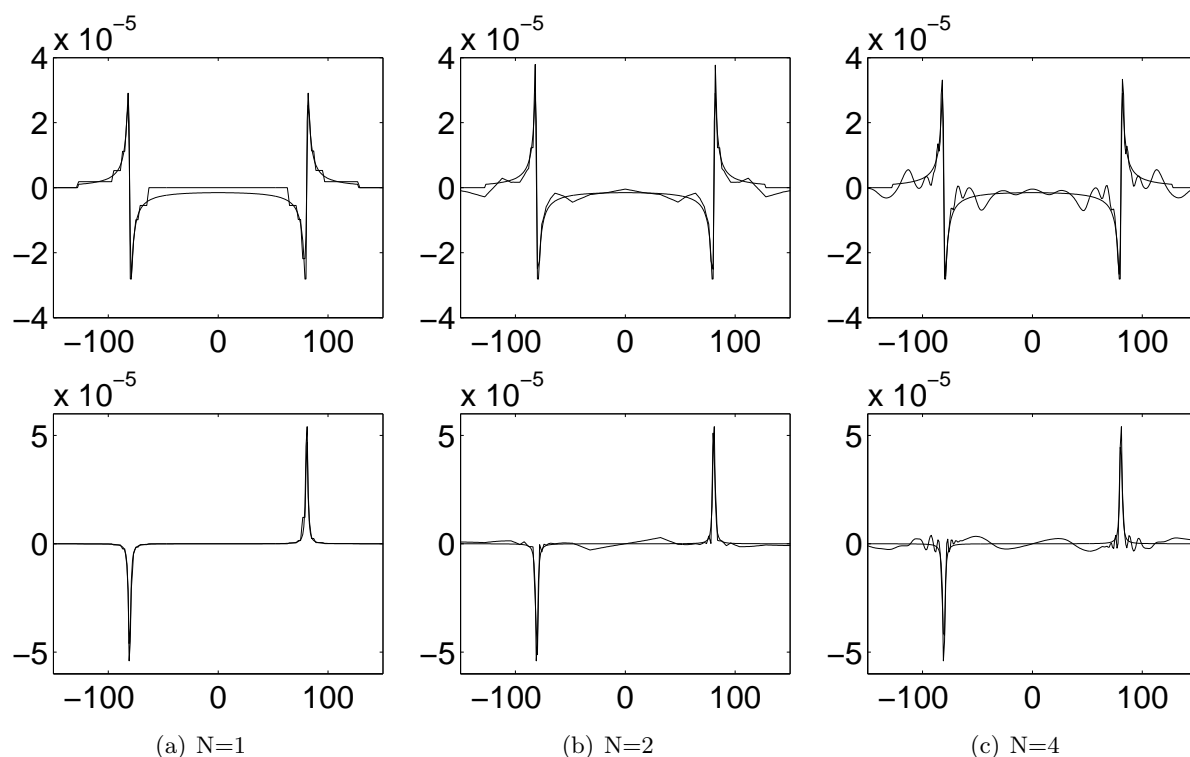


Abbildung 3.8: Rekonstruktion mit 0.5% der Waveletkoeffizienten unter Verwendung verschiedener *B-splines*

Bewertung

Es ist zu erkennen, dass das *B-spline* 2. Ordnung für beide Fälle, die Rekonstruktion im Ausgangsbereich und im rücktransformierten Bereich, optisch am besten abschneidet. Dieser Eindruck wird durch die geringen Fehlerwerte nach Tabelle 3.1 noch verstärkt. Unter Verwendung von extrem wenigen Waveletkoeffizienten (0.5%) sind die Fehlerwerte erstaunlicherweise sogar beim Haar-Wavelet geringfügig besser. Tatsächlich sind jedoch für eine gute Rekonstruktion mehr Waveletkoeffizienten nötig, wobei das *B-spline* 2. Ordnung eindeutig vorzuziehen ist. Zumindest für diese Art von Funktion bringt das *B-splines* 4. Ordnung keine Vorteile gegenüber dem *B-spline* 2. Ordnung. Die Fehler durch eine Komprimierung sind größer und es entsteht ein nicht unerheblicher Zusatzaufwand durch die größere Filterlänge. Somit erweist es sich als sinnvoll, für die Zwecke dieser Arbeit das *B-spline* 2. Ordnung zu wählen.

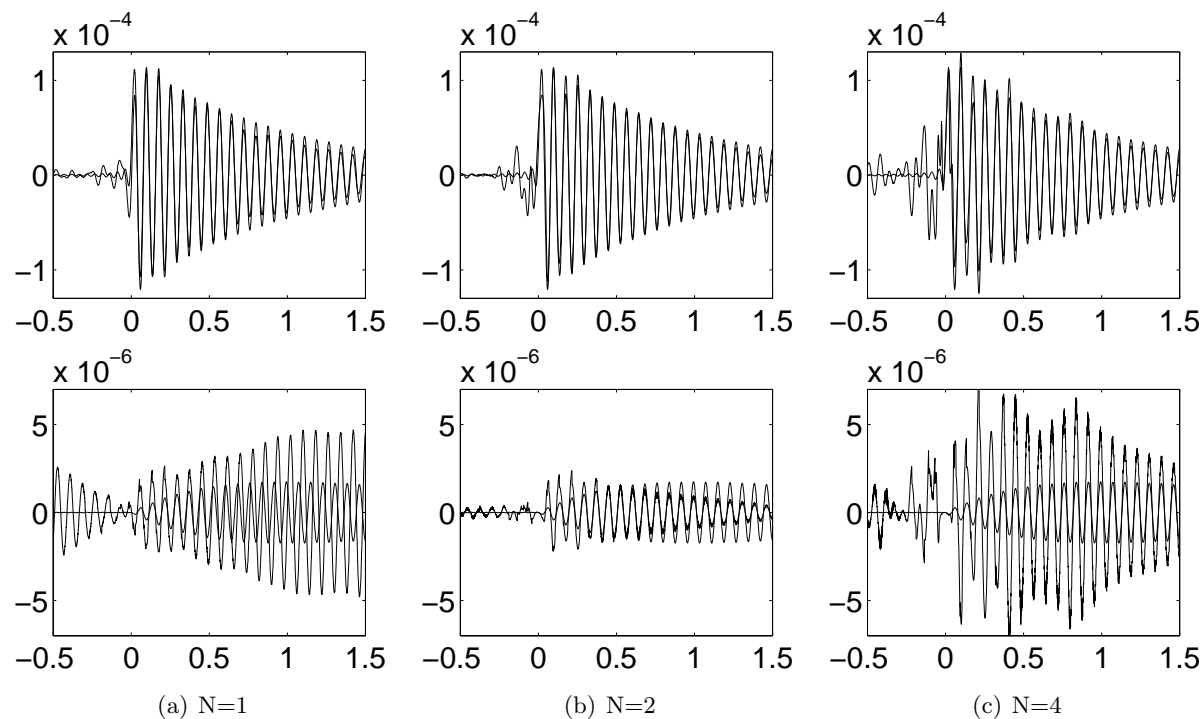


Abbildung 3.9: Rekonstruktion im Fourier-rücktransformierten Raum mit 0.5% der Waveletkoeffizienten unter Verwendung verschiedener *B-splines*

Anteil	Originalfunktion			Rücktransformierte Funktion		
	$N = 1$	$N = 2$	$N = 4$	$N = 1$	$N = 2$	$N = 4$
2.5%	$6.19 \cdot 10^{-5}$	$9.92 \cdot 10^{-6}$	$2.82 \cdot 10^{-5}$	$6.14 \cdot 10^{-6}$	$3.55 \cdot 10^{-6}$	$6.02 \cdot 10^{-6}$
0.5%	$4.87 \cdot 10^{-4}$	$6.62 \cdot 10^{-4}$	$1.01 \cdot 10^{-3}$	$2.49 \cdot 10^{-5}$	$2.69 \cdot 10^{-5}$	$3.74 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 3.1: Fehlerwerte nach (3.57)

Kapitel 4

Beschreibung der Programmpakete für die mehrdimensionale Wavelet-/Fourier-Transformation

Auf Grund der guten Visualisierungsmöglichkeiten und der Matrizenorientiertheit wurden sowohl zwei- als auch das dreidimensionale Programmpaket in MATLAB programmiert.

4.1 Vorgehensweise

Die Struktur der beiden Programmpakete ist im Prinzip gleich. Zuerst erzeugt der Gittergenerator das autoadaptive Netz, mit dem die Funktion abgetastet wird. Dazu müssen neben der zu erzielenden Genauigkeit die Integrationsgrenzen und eventuell ein Skalierungsfaktor angegeben werden. Nach der Gittererzeugung ist die Generierung zusätzlicher Netzelemente an den Rändern von Netzbereichen gleicher Auflösung nötig. Auf der feinsten Auflösungsebene wird die Funktion mit der Skalierungsfunktion integriert, woraufhin die Mehrskalenganalyse sämtliche Waveletkoeffizienten liefert. Nach der Datenreduktion erfolgt die Rekonstruktion der Fourier-rücktransformierten Funktion. In dieser Struktur (ohne Skalierung der Achsen) gleichen die beiden Programmpakete dem von Lieb [Lie97] entwickelten. In der Umsetzung gibt es jedoch erhebliche Unterschiede, wodurch die Behandlung des dreidimensionalen Falles erst in sinnvoller Weise möglich wird. Während im Programm von Lieb sämtliche Daten in FORTRAN 77 als Vektoren gespeichert wurden, werden in den vorliegenden MATLAB-Programmen die Möglichkeiten von Matrizen und mehrdimensionalen Feldern intensiv genutzt.

4.2 Skalierung der Achsen

Zu beachten ist, dass das Abtastgitter aus Quadraten (im zweidimensionalen Fall) bzw. aus Würfeln (im dreidimensionalen Fall) besteht. Im Rahmen dieser Arbeit liegen zu transformierende Funktionen im Wellenzahl-Frequenzbereich vor. Da die Größenordnung dieser beiden Richtungen stark unterschiedlich ist, wird die Frequenzachse mit einem Faktor so skaliert, dass die

Integrationsgrenzen aller Achsen identisch sein können. Dies ist über die Angabe eines Skalierungsfaktors r möglich, der z.B. im dreidimensionalen Fall bewirkt, dass statt der Funktion $\hat{f}(k_x, k_y, \omega)$ die Funktion $\hat{f}(k_x, k_y, r\omega)$ mit $r > 1$ abgetastet und weiterbearbeitet wird. Die Auswirkung der Skalierung im Wellenzahl-Frequenzbereich wird im Orts-Zeitbereich über die entsprechenden Zusammenhänge der Fourier-Transformation (vgl. (A.6)) in den Programmen automatisch analytisch berücksichtigt. Aus der Rücktransformation der Funktion $\hat{f}(k_x, k_y, r\omega)$ erhält man

$$\hat{f}(k_x, k_y, r\omega) \bullet \circ \frac{1}{r} f(x, y, \frac{t}{r}) \quad . \quad (4.1)$$

Um auf die Rücktransformierte der Ausgangsfunktion zu kommen, muss das Ergebnis somit noch mit r multipliziert und die t -Achse mit dem Faktor $1/r$ gestaucht werden.

4.3 Gittergenerator

Nach der Erläuterung des dem Gittergenerator zugrundeliegenden Prinzips im eindimensionalen Fall wird auf die jeweiligen Besonderheiten im zwei- bzw. dreidimensionalen Fall eingegangen.

Die in [GW98, GW00] beschriebene eindimensionale numerische Integrationsmethode *adaptsim* liegt in MATLAB als Funktion *quad.m* vor. Integriert wird mittels der adaptiven *Simpson Quadratur*. Dabei erfolgt zunächst eine Funktionsauswertung an den Integrationsgrenzen und an drei weiteren äquidistant verteilten Punkten im Integrationsbereich. Mit Hilfe dieser 5 Funktionswerte ergibt sich über die erweiterte *Simpson-Regel* eine erste Näherung für das Integral

$$\int_{k_{x1}}^{k_{x2}} \hat{f}(k_x) dk_x = h \left(\frac{1}{12} f_1 + \frac{4}{12} f_2 + \frac{2}{12} f_3 + \frac{4}{12} f_4 + \frac{1}{12} f_5 \right) + O(h^5 f^{(4)}) \quad (4.2)$$

Dabei stellen $h = k_{x2} - k_{x1}$ die Intervallbreite und $f_1 \dots f_5$ die Funktionswerte in aufsteigender k_x -Richtung dar. Für Polynome bis zum Grad 3 ist diese Integration exakt.

Bei 5 Integrationspunkten lässt sich über eine Romberg-Extrapolation aus der erweiterten *Simpson-Regel* die *Bode-Regel* herleiten, die auch in [PFTV02] zu finden ist:

$$\int_{k_{x1}}^{k_{x2}} \hat{f}(k_x) dk_x = h \left(\frac{7}{90} f_1 + \frac{32}{90} f_2 + \frac{12}{90} f_3 + \frac{32}{90} f_4 + \frac{7}{90} f_5 \right) + O(h^7 f^{(6)}) \quad (4.3)$$

Diese integriert Polynome bis zum Grad 5 exakt.

Die Wichtungsfaktoren der Funktionswerte in entsprechenden Vektoren gesammelt lauten also:

$$\underline{\mathbf{b}}_{\mathbf{S1}} = \left[\frac{1}{12} \quad \frac{4}{12} \quad \frac{2}{12} \quad \frac{4}{12} \quad \frac{1}{12} \right]^T \quad (4.4)$$

$$\underline{\mathbf{b}}_{\mathbf{B1}} = \left[\frac{7}{90} \quad \frac{32}{90} \quad \frac{12}{90} \quad \frac{32}{90} \quad \frac{7}{90} \right]^T \quad . \quad (4.5)$$

Ist die Differenz der Integralwerte aus (4.2) und (4.3) kleiner als eine vorgegebene Toleranz, dann liegt der gewünschte Integralwert vor. Andernfalls erfolgt eine Unterteilung des Integrationsbereichs in zwei gleich große Bereiche, in denen unabhängig voneinander weiter rekursiv nach obigem Schema integriert wird. Indem die Funktionswerte als Parameter in jedem Rekursions-Schritt übergeben werden, müssen nur jeweils zwei neue Funktionsauswertungen erfolgen. Das

Prinzip der Intervall-Halbierung im Zuge der adaptiven Integration entspricht genau den Anforderungen, die ein fertiges Raster für die Mehrskalenanalyse aufweisen muss. Durch die rekursive Formulierung weist *quad.m* eine sehr übersichtliche und kompakte Form auf, weshalb es leicht auf mehrere Dimensionen erweitert werden kann.

4.3.1 Gittergenerator im zweidimensionalen Fall

Im zweidimensionalen Fall handelt es sich beim Netz um Quadrate, die durch sukzessive Unterteilung von übergeordneten Quadraten in jeweils vier Unterquadrate halber Kantenlängen entstehen. Hier ist die in 4.2 beschriebene Anpassung der Größenordnungen der betreffenden Koordinatenachsen wichtig.

Die zweidimensionalen Erweiterungen der 5- Punkt- Simpson- bzw. Bode-Regel lassen sich aus (4.4) und (4.5) gewinnen:

$$\int_{lim_1}^{lim_2} \int_{lim_1}^{lim_2} \hat{f}(k_x, k_y) dk_x dk_y = h^2 \underline{\mathbf{b}}_{S1}^T \underline{\mathbf{f}} \underline{\mathbf{b}}_{S1} \quad \text{bzw.} \quad (4.6)$$

$$\int_{lim_1}^{lim_2} \int_{lim_1}^{lim_2} \hat{f}(k_x, k_y) dk_x dk_y = h^2 \underline{\mathbf{b}}_{B1}^T \underline{\mathbf{f}} \underline{\mathbf{b}}_{B1} \quad (4.7)$$

mit

$$\underline{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & f_{25} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & f_{35} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & f_{45} \\ f_{51} & f_{52} & f_{53} & f_{54} & f_{55} \end{bmatrix} \quad . \quad (4.8)$$

Die Werte $f_{11} \dots f_{55}$ stellen die Funktionswerte an den 25 Integrationspunkten des betrachteten Quadrates dar. Im Zuge der rekursiven Netzermittlung müssen pro Unterteilungsschritt analog dem eindimensionalen Fall $5^2 - 3^2 = 16$ neue Funktionswerte ermittelt werden.

Gespeichert wird das Netz in einer Matrix vom Typ *sparse*. Aus der gewünschten feinstmöglichen Auflösung h_{min} und den Integrationsgrenzen lim_1, lim_2 berechnet sich die Größe der Dimensionen dieser quadratischen Matrix zu:

$$ndim = \frac{lim_2 - lim_1}{h_{min}} \quad . \quad (4.9)$$

Jedes einzelne Quadrat ist definiert durch die Lage seiner linken unteren Ecke und durch seine Kantenlänge. Indem die Indizes der Matrix nun als Lage im Koordinatensystem aufgefasst werden, ergibt sich eine sehr vorteilhafte Speicherung des Netzes: Es muss nur die Kantenlänge der Quadrate an der betreffenden Stelle der Matrix stehen. Durch den Matrix-Typ *sparse* ist eine sehr hohe potentielle Auflösung bei geringem Speicherbedarf möglich.

Da bei der Mehrskalenanalyse der umgekehrte Weg von feineren Skalen zu größeren hin beschritten wird, muss die "Teilungsgeschichte" der Quadrate bekannt sein. Wie bei Lieb [Lie97] ist die Kantenlänge der Quadrate als Bitmuster codiert, wobei jede Skala einem *bit* entspricht. Entsprechend sind bei einer Zahl mit 8 Byte 64 Skalen möglich, was bei weitem nicht benötigt

wird. Kleinere Kantenlängen, d.h. höhere Auflösungen bedeuten, dass ein höheres *bit* gesetzt wird.

Neben der Netzstruktur liefert der Gittergenerator auch die Funktionswerte an den linken unteren Ecken der Quadrate des fertigen Netzes. Damit können dann ohne neue Funktionsauswertungen die Skalierungskoeffizienten berechnet werden. Auch diese Funktionswerte werden in einer *sparse* Matrix nach obigem Prinzip gespeichert, womit deren Lage bekannt ist.

Bei der Berechnung der Skalierungskoeffizienten geht man davon aus, dass die Funktion in einem um den Funktionswert zentrierten Bereich der Größe des betreffenden Quadrates konstant ist. Die Integrale für das Abbruchkriterium bei der Gittergenerierung werden aber zum einen über eine wesentlich genauere 25- Punkt-Integration gewonnen. Zum anderen handelt es sich beim Funktionswert um denjenigen der linken unteren Ecke des Quadrates, nicht um den zentralen Wert. Das fertige Gitter ist also einerseits zu grob und andererseits erfolgt die Funktionsauswertung zur Berechnung der Skalierungskoeffizienten nicht an optimalen Stellen. Das erste Problem lässt sich leicht durch eine weitere Unterteilung des ermittelten Netzes mildern. Das zweite Problem wirkt sich nicht merklich aus, wenn die Abtastung fein genug ist.

Zur Kontrolle gibt das Programm einerseits den Wert des Gesamtintegrals aus der Simpson- bzw. Bode-Regel aus, der als Nebenprodukt der Rasterung anfällt. Andererseits erfolgt auch die Ausgabe des Gesamtintegrals, das die Summe der Produkte von Quadratflächen und Funktionswerten der linken unteren Ecken liefert. Diese beiden Integrale sind bei ausreichender Rasterung nahezu identisch.

4.3.2 Gittergenerator im dreidimensionalen Fall

Das Netz besteht im dreidimensionalen Fall aus Würfeln, wobei im Zuge der Netzverfeinerung ein übergeordneter Würfel in jeweils acht Unterwürfel halber Kantenlängen geteilt wird. Wie im zweidimensionalen Fall ist dazu eine Skalierung der drei Dimensionen der Funktion nötig.

MATLAB bietet die Möglichkeit der Verwendung von dreidimensionalen Feldern, für die jedoch nur eine elementweise Multiplikation definiert ist. Deshalb werden für die 5- Punkt- Simpson- bzw. Bode-Regel dreidimensionale Felder $\underline{\underline{\mathbf{b}}}_{\mathbf{S3}}$ bzw. $\underline{\underline{\mathbf{b}}}_{\mathbf{B3}}$ mit den Wichtungsfaktoren aus (4.4) und (4.5) aufgestellt:

$$b_{S3_{i,j,k}} = b_{S1_i} b_{S1_j} b_{S1_k} \quad \text{bzw.} \quad (4.10)$$

$$b_{B3_{i,j,k}} = b_{B1_i} b_{B1_j} b_{B1_k} \quad i, j, k = 1 \dots 5 \quad . \quad (4.11)$$

Das Integral über die Funktion lässt sich dann mittels

$$\int_{\lim_1}^{\lim_2} \int_{\lim_1}^{\lim_2} \int_{\lim_1}^{\lim_2} \hat{f}(k_x, k_y, \omega) dk_x dk_y d\omega = \sum_{i,j,k} h^3 \underline{\underline{\mathbf{b}}}_{\mathbf{S3}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{f}}} \quad \text{bzw.} \quad (4.12)$$

$$\int_{\lim_1}^{\lim_2} \int_{\lim_1}^{\lim_2} \int_{\lim_1}^{\lim_2} \hat{f}(k_x, k_y, \omega) dk_x dk_y d\omega = \sum_{i,j,k} h^3 \underline{\underline{\mathbf{b}}}_{\mathbf{B3}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{f}}} \quad (4.13)$$

berechnen. Der Operator \cdot steht für das elementweise Multiplizieren der beiden Felder und $\underline{\underline{\mathbf{f}}}$ ist das dreidimensionale Feld mit den 125 Funktionswerten analog (4.8). Pro Unterteilungsschritt ist eine Neuauswertung der Funktion an $5^3 - 3^3 = 98$ Stellen nötig.

Um das Netz analog dem zweidimensionalen Fall abzuspeichern, wäre es wünschenswert, ein dreidimensionales Feld vom Typ *sparse* verwenden zu können. MATLAB bietet zwar diesen Datentyp nicht an, durch die Definition entsprechender Klassen und Objekte kann ihn sich der Benutzer jedoch selbst programmieren. Entsprechende lauffähige Dateien hat z.B. Fackler [Fac02] entwickelt. Diese weisen jedoch für die Anwendung im Rahmen dieser Arbeit einen gravierenden Nachteil auf:

In MATLAB kann jedes Element einer Matrix über zwei relative Indizes (Zeile, Spalte) oder über einen absoluten Index (eindeutiger Wert, aus Zeile und Spalte berechnet) angesprochen werden. Je nach Aufgabenstellung kann es günstiger sein, die eine oder andere Methode zu verwenden. Der größte Index, den MATLAB darstellen kann, ist 2^{31} . Da Fackler [Fac02] bei der Programmierung darauf Wert gelegt hat, beide Indizierungsmöglichkeiten zu behalten, muss das Produkt der Dimensionen des Feldes kleiner als 2^{31} sein. Bei den benötigten drei Dimensionen bedeutet das eine maximale Anzahl von $2^{31/3} \approx 2^{10} = 1024$ Elementen pro Richtung. Damit sind maximal 10 Auflösungsebenen möglich, was die Anwendbarkeit des Programms nach Meinung des Autors zu stark einschränkt.

Eine relativ einfache Problemlösung ergibt sich, wenn man mit Hilfe des zweidimensionalen *sparse*-Datentyps den dreidimensionalen folgendermaßen erzeugt: Man stellt sich vor, dass sich die dritte Dimension durch Übereinanderlegen von zweidimensionalen “Seiten” ergibt. Legt man diese “Seiten” nun nebeneinander, so ergibt sich aus dem dreidimensionalen Feld der Größe $[ndim \times ndim \times ndim]$ mit den Indizes i, j, k eine Matrix mit den Dimensionen $[ndim \times ndim^2]$ und den zwei Indizes i, cc . In Abbildung 4.1 ist dieser Zusammenhang für $4 \times 4 \times 4$ Elemente schematisch dargestellt. Entsprechend gelten folgende Umrechnungsregeln zwischen den zwei- und dreidimensionalen Indizes:

$$cc = j + (k - 1)ndim \quad \text{bzw.} \quad (4.14)$$

$$j = \text{rem}((cc - 1), ndim) + 1$$

$$k = \text{floor}\left(\frac{cc - 1}{ndim}\right) + 1 \quad . \quad (4.15)$$

“rem” bezeichnet den Rest der ganzzahligen Division und “floor” bewirkt die ganzzahlige Division.

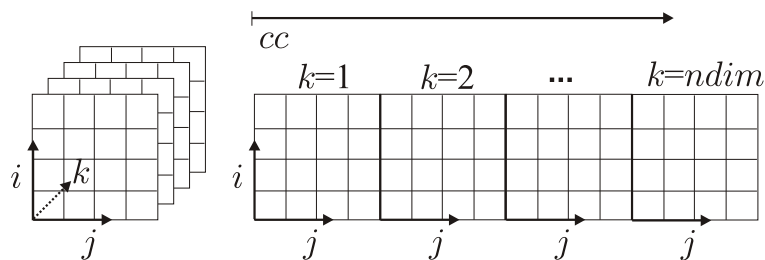


Abbildung 4.1: Schema der Datenstruktur für das 3D-Raster

Der Vorteil dieser Vorgehensweise liegt darin, dass einerseits sämtliche Möglichkeiten, die MATLAB für *sparse*-Matrizen bietet, zur Verfügung stehen. Durch die konsequente doppelte Indizierung ist außerdem eine deutlich größere Matrix möglich. Sie kann theoretisch maximal die Größe $[2^{15} \times 2^{30}]$ annehmen, entsprechend 15 Skalen pro Richtung. Die Beschränkung ergibt sich

hier aus der Größe des Arbeitsspeichers. In den Beispielfällen wurde mit zwölf möglichen Skalen gerechnet. Erkauft wird dieser Vorteil durch eine z.T. umständlichere Ansprache von Elementen.

Die zweidimensionale Matrix kann auf die beschriebene Weise ein dreidimensionales Gitter darstellen. Analog dem zweidimensionalen Fall ist jeder Würfel definiert durch seine Kantenlänge und die Lage seiner linken unteren vorderen Ecke. Es genügt, die binär codierte Kantenlänge in der Rastermatrix mit entsprechenden Indizes i, j, k bzw. i, cc zu speichern. Auch hier entsprechen höhere *bits* kürzeren Kantenlängen und damit einer höheren Auflösung.

Auch die Aussagen aus Abschnitt 4.3.1 bzgl. der Funktionsauswertungen und bzgl. der Kontrollmöglichkeiten über das Gesamtintegral gelten sinngemäß.

4.3.3 Eigenschaften des Rasters

Da das Raster durch Halbierung der Seitenlängen entsteht, stellt es keine Einschränkung dar, dass als Kantenlänge des Ausgangsquadrats bzw. des Ausgangswürfels eine Potenz von zwei verwendet wird. Bei den betrachteten Funktionen erfolgt die Rasterung ausgehend von einem symmetrisch um den Ursprung gelegten Ausgangsquadrat bzw. Ausgangswürfel. Da die Funktionen im Ursprung oftmals Singularitäten aufweisen, kann es sinnvoll sein, eine Funktionsauswertung im Ursprung durch einen geringfügigen Versatz des Ausgangsquadrats bzw. Ausgangswürfels zu vermeiden.

Das fertige Raster weist auf jeder Auflösungsebene in einem zusammenhängenden Gebiet in jeder Dimensionsrichtung eine gerade Anzahl von Rasterelementen auf.

4.4 Mehrskalenganalyse

Das Gitter wurde unabhängig von den verwendeten Wavelets erzeugt. Daher ist noch eine Anpassung an die Mehrskalenganalyse nötig. Bei der Mehrskalenganalyse werden wie in 3.1.3 gezeigt, ausgehend von der feinsten Skala sukzessive aus den Skalierungskoeffizienten einer Skala die Wavelet- und Skalierungskoeffizienten der nächstgrößeren Skala berechnet.

Da die Funktion nicht äquidistant abgetastet wurde, gibt es keine feinste Skala, die für alle Funktionsbereiche identisch ist. Daher existieren Übergänge zwischen Auflösungsebenen des Gitters, die eine spezielle Behandlung erfordern.

Im folgenden wird der Begriff *Element* mit *Skalierungskoeffizient* gleichgesetzt. Das liegt daran, dass für jedes Element des Abtastgitters durch Integration ein Skalierungskoeffizient gewonnen wird. Die Skalierungskoeffizienten, die nach dem nun folgenden Prinzip an den Skalaübergängen zusätzlich erzeugt werden, erhalten eine Kennzeichnung. Das Anfügen eines zusätzlichen Randes entfällt dann für diese Elemente. Gespeichert wird der Wert der Skalierungskoeffizienten in einer Matrix, deren Typ mit dem der *sparse*-Rastermatrix identisch ist.

Anhand der *sparse*-Matrix mit den *bit*-Mustern der Kantenlängen der Rasterelemente (s. Abschnitte 4.3.1, 4.3.2) ist es möglich, die Elemente der bearbeiteten Skala zu ermitteln. Begonnen wird mit der global feinsten Skala. Nur für jedes zweite Element werden die nächstgrößeren Skalierungs- und Waveletkoeffizienten gebildet. Diese entsprechenden Elemente sind dadurch gekennzeichnet, dass neben dem *bit* der aktuellen Auflösung auch noch das nächstniedrigere

gesetzt ist. Bei diesen Elementen muss gewährleistet sein, dass sie von einer durch die Filter bestimmten Anzahl von Nachbarelementen umgeben sind.

4.4.1 Erzeugung der Elemente am Rand einer Skala

Da bei den verwendeten *B-splines* sowohl Skalierungsfunktion als auch Wavelet kompakten Träger aufweisen, ist die jeweilige Anzahl der Filterkoeffizienten endlich. Die Indizes der Filterkoeffizienten bestimmen, wie viele Nachbarelemente des betrachteten Elements der aktuellen Stufe benötigt werden, um daraus den Skalierungskoeffizienten bzw. den Waveletkoeffizienten der nächstgrößeren Skala zu berechnen. Je Dimensionsrichtung ist die Anzahl der anzuhängenden Elemente gleich. Deshalb wird im folgenden aus Gründen der Einfachheit nur eine Dimension betrachtet. Gegeben sind die Filterkoeffizienten des Wavelets p_{np} und der Skalierungsfunktion q_{nq} mit

$$\begin{aligned} np &= n_{p,low} \dots n_{p,high}, & n_{p,low} &\leq 0, & n_{p,high} &> 0 \\ nq &= n_{q,low} \dots n_{q,high}, & n_{q,low} &\leq 0, & n_{q,high} &> 0 \end{aligned} .$$

Die Anzahl der links und rechts benötigten Nachbarelemente ermittelt sich dann zu

$$add_{low} = \max(0, -n_{low}, \text{floor}(\frac{n_{high}}{2})2 - n_{low}) \tag{4.16}$$

$$add_{high} = \max(0, n_{high}, \text{floor}(\frac{-n_{high} + 1}{2})2 + n_{high}) \quad \text{mit} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned} n_{low} &= \min(n_{p,low}, n_{q,low}) \\ n_{high} &= \max(n_{p,high}, n_{q,high}) \end{aligned} .$$

Falls diese Elemente nicht vorhanden sind, müssen sie neu erzeugt werden.

In Abbildung 4.2 ist dieser Zusammenhang für $n_{low} = -1$ und $n_{high} = 2$ dargestellt.

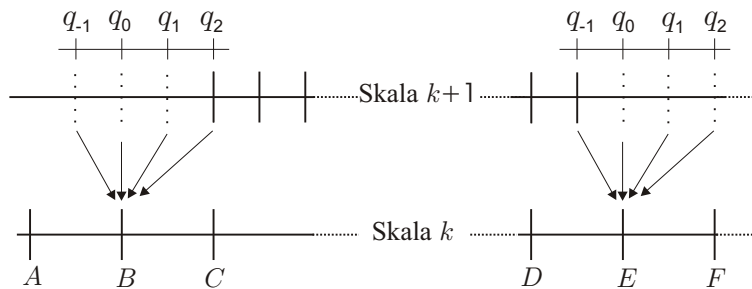


Abbildung 4.2: Benötigte Nachbarelemente für die Mehrskaligenanalyse

Am linken Rand müssen in diesem Fall drei Elemente angehängt werden, da für die Berechnung des Koeffizienten in *B* auf der Skala *k* der Filterkoeffizient q_2 mit einem vorhandenen Skalierungskoeffizienten der Skala $k + 1$ multipliziert wird. Der Koeffizient in *A* muss durch Neuintegration der Funktion gewonnen werden.

Am rechten Rand wird auf der Stufe $k + 1$ betrachtet, wieviele Elemente dem Element an der Stelle *D* angehängt werden müssen. Das sind insgesamt vier. In *F* muss der Skalierungskoeffizient auf der Stufe *k* durch Neuintegration gewonnen werden.

4.4.2 Ermittlung der Wavelet- und Skalierungskoeffizienten der nächstgrößeren Skala

Nach der Erzeugung der zusätzlich benötigten Elemente am Rand der betrachteten Skala folgt die Integration mit der Skalierungsfunktion. Da die Skalierungsfunktion der *B-splines 2. Ordnung* nur im Intervall $[0 \dots 2]$ ungleich 0 ist, führt Gleichung (3.23) beispielsweise im dreidimensionalen Fall zu

$$d_{j,u,v,w} = \int_{k_x=au}^{au+2a} \int_{k_y=av}^{av+2a} \int_{\omega=aw}^{aw+2a} \hat{f}(k_x, k_y, \omega) a^{-3/2} \Phi(a^{-1}k_x - u, a^{-1}k_y - v, a^{-1}\omega - w) dk_x dk_y d\omega, \quad (4.18)$$

wobei a die Kantenlänge der Würfel bezeichnet und zu $a = 2^{-j}$ definiert ist.

Mit Hilfe der Skalierungskoeffizienten und der Filterkoeffizienten (s. Anhang B) erfolgt die Berechnung der Wavelet- und Skalierungskoeffizienten der nächstgrößeren Skala entsprechend (3.31) bzw. (3.36). Von den Waveletkoeffizienten wird neben dem eigentlichen Wert die Auflösung, der Ort in den zwei bzw. drei Koordinatenrichtungen und die Art des zugehörigen Wavelets (1...3 bzw. 1...7) gespeichert. Die Speicherung des Orts erfolgt im dreidimensionalen Fall in der Art

$$b_x = 2^{-j}u = au \quad b_y = 2^{-j}v = av \quad b_t = 2^{-j}w = aw \quad (4.19)$$

mit a als aktueller Kantenlänge. Im Folgenden wird der k -te ermittelte Waveletkoeffizient der Art j entsprechend mit $c_{a,b_x,b_y,b_t}^{(j)}(k)$ bezeichnet.

Die Skalierungskoeffizienten müssen zwischengespeichert werden, bis sämtliche Wavelet- und Skalierungskoeffizienten der aktuellen Stufe berechnet sind. Anschließend erfolgt wieder ein Abspeichern in der in 4.4 beschriebenen *sparse*-Matrix der Skalierungskoeffizienten. Von den *bit*-Mustern der *sparse* Raster-Matrix ist abschließend noch das aktuelle *bit* zu entfernen.

Die Mehrskalenganalyse wird anschließend auf der nächstgrößeren Skala fortgesetzt und endet auf der größten Skala mit vier bzw. acht Skalierungskoeffizienten.

4.4.3 Sortierkriterium

Nachdem die Funktion durch die Wavelet- und die Skalierungskoeffizienten vollständig abgebildet ist, soll nun die Komprimierungseigenschaft der Wavelettransformation genutzt werden. Typischerweise ist ein Großteil der Waveletkoeffizienten klein und damit ohne großen Genauigkeitsverlust zu vernachlässigen. Anzumerken ist, dass diese Eigenschaft durch die effektive adaptive Rasterung der Funktion vermindert wird. Um nun kleine Koeffizienten von großen unterscheiden zu können, ist ein Sortierkriterium nötig.

Da die Rekonstruktion der Funktion im Fourier-rücktransformierten Raum erfolgt, liefert eine ungewichtete Sortierung allein nach dem Betrag schlechte Ergebnisse. Daher wird das von Lieb [Lie97] entwickelte und vom Autor [Len01] für den dreidimensionalen Fall erweiterte Sortierkriterium für die Wavelets verwendet.

Eine Sortierung der verbleibenden Skalierungskoeffizienten ist nicht erforderlich, da deren Anzahl am Ende der Mehrskalenganalyse sehr gering ist.

Folgende Wichtungsfunktionen kommen im dreidimensionalen Fall zur Anwendung:

$$\begin{aligned}
 \Psi^{(1)} &= \Phi(x)\Psi(y)\Phi(t) \Rightarrow \mathbf{H}_w^1(x, y, t) = H_s(x)H_w(y)H_s(t) \\
 \Psi^{(2)} &= \Phi(x)\Phi(y)\Psi(t) \Rightarrow \mathbf{H}_w^2(x, y, t) = H_s(x)H_s(y)H_w(t) \\
 \Psi^{(3)} &= \Phi(x)\Psi(y)\Psi(t) \Rightarrow \mathbf{H}_w^3(x, y, t) = H_s(x)H_w(y)H_w(t) \\
 \Psi^{(4)} &= \Psi(x)\Phi(y)\Phi(t) \Rightarrow \mathbf{H}_w^4(x, y, t) = H_w(x)H_s(y)H_s(t) \\
 \Psi^{(5)} &= \Psi(x)\Phi(y)\Psi(t) \Rightarrow \mathbf{H}_w^5(x, y, t) = H_w(x)H_s(y)H_w(t) \\
 \Psi^{(6)} &= \Psi(x)\Psi(y)\Phi(t) \Rightarrow \mathbf{H}_w^6(x, y, t) = H_w(x)H_w(y)H_s(t) \\
 \Psi^{(7)} &= \Psi(x)\Psi(y)\Psi(t) \Rightarrow \mathbf{H}_w^7(x, y, t) = H_w(x)H_w(y)H_w(t) \quad .
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Für die eindimensionale Wichtungsfunktion der Skalierungsfunktion gilt:

$$H_s(x) = \begin{cases} |\check{\Phi}(x)| & \text{falls } 0 \leq |x| \leq \pi \\ \frac{6}{\pi x^2} & \text{sonst} \quad . \end{cases} \tag{4.21}$$

Dies entspricht im Bereich $0 \leq |x| \leq \pi$ der Fourier-rücktransformierten dualen Skalierungsfunktion und im Bereich $\pi < |x|$ ihrer Hüllkurve. Analog wird die eindimensionale Wichtungsfunktion des Wavelets gebildet:

$$H_w(x) = \begin{cases} |\check{\Psi}(x)| & \text{falls } 0 \leq |x| \leq 2\pi \\ \frac{24}{\pi x^2} & \text{sonst} \quad . \end{cases} \tag{4.22}$$

Durch die Fourier-Rücktransformation ist die Sortierreihenfolge abhängig von der Ortskoordinate. Nicht sinnvoll wäre es sicherlich, für jeden Punkt x, y, t die Waveletkoeffizienten zu sortieren. Daher werden die Ortskoordinatenbereiche der drei Richtungen der rücktransformierten Funktion jeweils in eine bestimmte Anzahl von Bereichen unterteilt. In jedem Bereich erfolgt dann die Wichtung der Koeffizienten mit dem größten Faktor, der in diesem Bereich vorkommt. Mit den Bezeichnungen

- $a = 2^{-j}$: Dilatationsparameter des Wavelets
- x_u, x_o : untere, bzw. obere Grenze der Ortskoordinaten der rücktransformierten Funktion
- X : $X = \pi$ für Skalierungsfunktion, $X = 2\pi$ für Wavelet

ergibt sich der eindimensionale Wichtungsfaktor dann zu

$$f_{w,s} = \begin{cases} H_{w,s}(\min(X, x_o a)) & \text{falls } x_u a < X \\ H_{w,s}(x_u a) & \text{sonst} \quad . \end{cases} \tag{4.23}$$

Dieser Wichtungsfaktor gilt nun im betrachteten Unterteilungsbereich ortsunabhängig. Mit Hilfe von (4.20) kann im dreidimensionalen Fall der ortsunabhängige Wichtungsfaktor $F_W^{(j)}$ für jeden Wavelettyp gebildet werden, indem $H_s(x)$ durch f_s und $H_w(x)$ durch f_w ersetzt wird. Im Zweidimensionalen ist das Vorgehen analog.

4.5 Rekonstruktion der Fourier-rücktransformierten Funktion

Der Anteil der zu berücksichtigenden Koeffizienten bei der Rekonstruktion kann auf zweierlei Arten festgeschrieben werden: entweder durch manuelles Festlegen des Prozentsatzes oder durch Festlegen eines relativen Fehlers f_rel_rek . Im zweiten Fall ergibt sich die Zahl max_wav der zu berücksichtigenden Koeffizienten aus den sortierten, gewichteten Waveletkoeffizienten je Bereich zu (vgl. [Lie97])

$$\frac{\sum_{k=1}^{max_wav} (F_W^{(j)} c_{a,b_x,b_y,b_t}^{(j)}(k))^{gew_fehler}}{\sum_{k=1}^{n_wav} (F_W^{(j)} c_{a,b_x,b_y,b_t}^{(j)}(k))^{gew_fehler}} = (1 - f_rel_rek)^{gew_fehler} \quad . \quad (4.24)$$

Dabei ermöglicht die Größe gew_fehler noch zusätzlich eine nichtlineare Gewichtung dieses Kriteriums.

Mit Hilfe der Wavelet- und Skalierungskoeffizienten lässt sich die Fourier-Rücktransformierte der Funktion entsprechend Formel (3.32) bzw. (3.37) bestimmen. Im dreidimensionalen Fall ergibt sich:

$$\begin{aligned} f(x, y, t) = & \sum_{k=1}^{max_wav} c_{a_c,b_{x_c},b_{y_c},b_{t_c}}^{(j)}(k) \check{\Psi}^j(xa_c, ya_c, ta_c) a^{3/2} e^{i(b_{x_c}x + b_{y_c}y + b_{t_c}t)} + \\ & + \sum_{k=1}^{n_scal} d_{a_d,b_{x_d},b_{y_d},b_{t_d}}(k) \check{\Phi}(xa_d, ya_d, ta_d) a^{3/2} e^{i(b_{x_d}x + b_{y_d}y + b_{t_d}t)}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Dabei sind b_x, b_y, b_t entsprechend (4.19) festgelegt, a ist der Dilatationsparameter und n_scal die Anzahl der verbleibenden (unsortierten) Skalierungskoeffizienten.

4.6 Berechnungsaufwand

Beim Berechnungsaufwand sind die benötigte Rechenzeit und der benötigte Arbeitsspeicher zu betrachten.

4.6.1 Beurteilung der Rechenzeit

Unter der Annahme, dass genügend Arbeitsspeicher zur Verfügung steht und damit zeitraubendes temporäres Auslagern von Daten aus dem Arbeitsspeicher auf die Festplatte und zurück unnötig ist, wird die Geschwindigkeit der jahrelang optimierten Fast-Fourier-Transformation für die reine Transformation durch das beschriebene Verfahren bei weitem nicht erreicht. Vorausgesetzt wird dabei jedoch, dass die zu transformierenden Funktionswerte bereits vorliegen.

Falls die Ermittlung der Funktionswerte jedoch relativ zeitaufwändig ist, zahlt es sich aus, dass die Funktion beim beschriebenen Verfahren adaptiv abgetastet wird. Die Rasterung selbst benötigt kaum Zeit, da sie mit der MATLAB-Funktion `quad.m` auf einer höchst optimierten Basis aufbaut und die zur Rasterermittlung benötigten Funktionswerte bei der Wavelettransformation direkt weiterverwendet werden. Als relativ zeitaufwändig gestaltet sich die Behandlung der Ränder von Auflösungsebenen und die Rekonstruktion, falls die Funktion an sehr vielen

Stellen rekonstruiert werden soll. Letzteres wird ebenfalls entscheidend davon beeinflusst, wie stark die Funktion komprimiert werden kann.

Bei den vorliegenden zu transformierenden Funktionen ermöglicht die adaptive Abtastung eine enorme Reduzierung der zu berechnenden Werte im Vergleich zur Fast-Fourier-Transformation, die eine äquidistante Abtastung voraussetzt. Speziell das zweidimensionale Programmpaket wird dazu eingesetzt, eine Funktion zu transformieren, bei der hinter jedem Funktionswert ein umfangreicher Formelapparat steckt. Dabei überwiegt der Geschwindigkeitsgewinn aus der verminderten Anzahl an benötigten Funktionsauswertungen deutlich im Vergleich zum erhöhten Aufwand für die Transformation.

4.6.2 Beurteilung des Arbeitsspeicherbedarfs

Die Vorteile des vorgestellten Verfahrens kommen dann zur Geltung, wenn die Funktion in kleinen Bereichen über ausgeprägte “Grate” verfügt und ansonsten relativ glatt ist. In diesem Fall kann die Funktion bei vergleichbarer Genauigkeit mit deutlich weniger Werten transformiert werden als das wegen der nötigen äquidistanten Abtastung bei der Fast-Fourier-Transformation möglich ist. Das bedeutet erheblich verringerten Arbeitsspeicherbedarf, wodurch selbst bei PCs der neuesten Generation gerade im dreidimensionalen Fall Berechnungen erst möglich werden. Bei den dreidimensionalen Berechnungen war die feinste Auflösungsebene in den meisten Fällen $1/512$, in Ausnahmefällen bis zu $1/1024$ der Ausgangslänge, abhängig von der abzutastenden Funktion. Die Anzahl der erzeugten Rasterelemente lag entsprechend bei $150000 - 300000$. Sämtliche Berechnungen wurden auf einem PC mit 1GB Arbeitsspeicher durchgeführt.

Bei Verwendung der Fast-Fourier-Transformation würden allein zur Speicherung des dreidimensionalen komplexen Ausgangsfeldes und des entsprechenden Ergebnisses

$$\begin{aligned} 2 \cdot 512^3 \frac{16[\text{Byte}]}{2^{20}[\text{Byte}/\text{MB}]} &= 4096 \text{ MB} = 4 \text{ GB} \quad \text{bzw.} \\ 2 \cdot 1024^3 \frac{16[\text{Byte}]}{2^{20}[\text{Byte}/\text{MB}]} &= 32768 \text{ MB} = 32 \text{ GB} \end{aligned} \quad (4.26)$$

benötigt. Dabei wurden die in MATLAB benötigten 16Byte Arbeitsspeicher pro komplexem Wert angesetzt. Hinzu käme noch Speicher für das Berechnungsprogramm und für die Berechnung selbst.

Kapitel 5

Nichtlineare Interaktion Fahrzeug/Fahrweg im Zeitbereich

Bei der Fahrt von Fahrzeugen auf Fahrbahnen ergeben sich durch Unebenheiten der Fahrbahn und Unrundheiten der Räder Kräfteinwirkungen auf den Untergrund, von denen im Folgenden nur die vertikalen betrachtet werden. Es kommt zur Interaktion der dynamischen Systeme Fahrzeug und Fahrbahn, wobei das Fahrzeug in Schwingungen versetzt wird und eine Wellenausbreitung im Untergrund stattfindet. Das bewegte Eigengewicht des Fahrzeugs wirkt zwar ebenfalls als Belastung auf den Untergrund, bewirkt aber keine Wellenausbreitung bzgl. des bewegten Koordinatensystems, was in Abschnitt 5.6 beschrieben wird.

Wenn der Boden näherungsweise durch einen ungeschichteten oder horizontal geschichteten dreidimensionalen Halbraum, und die Fahrbahn durch einen unendlich langen Balken endlicher Breite modelliert werden kann, eignen sich Integraltransformationmethoden in besonderem Maße zur Berechnung dieses gekoppelten Systems *Balken/Untergrund*. Die unendliche Ausdehnung der Fahrbahn in Längsrichtung (x -Richtung) und des Bodens in den zwei horizontalen Richtungen (x -, y -Richtung) und in der Tiefe (z -Richtung) wird im transformierten Raum analytisch berücksichtigt. Dadurch ist im Gegensatz zur *Methode der Finiten Elemente* die Wellenabstrahlung ins Unendliche von vorne herein korrekt beschrieben. Das Problem der Integraltransformationmethoden liegt darin, dass die Rücktransformation in den Originalbereich analytisch meist nicht möglich ist und numerisch trotz Anwendung der Fast-Fourier-Transformation sehr aufwändig bzw. unmöglich werden kann, v.a. bei mehrdimensionalen Problemen. Für die hier betrachteten Funktionen ermöglichen die in Abschnitt 4 entwickelten Programmpakete eine effektive Berechnung der Rücktransformierten. Im Folgenden soll beim Fahrzeug eine nichtlineare Federkennlinie berücksichtigt werden. Daher muss die Interaktion zwischen Fahrzeug und Untergrund im Gegensatz zur Arbeit von Dinkel [Din01] im Zeitbereich berechnet werden. Außerdem soll wie dort auch die Einsenkung des Balkens in Querrichtung konstant sein. Dies wird durch eine Annäherung der tatsächlichen Spannungsverteilung in Balkenquerrichtung durch Legendre-Polynome gewährleistet, s. Abschnitt 2.3.1.

Vorgehen bei der Berechnung: Es ist möglich, eindimensionale, zeitabhängige Impulsreaktionsfunktionen für das Balken/Boden- System in einem mit der Fahrzeuggeschwindigkeit mitbewegten Koordinatensystem herzuleiten.

Im Zeitbereich wird mit dem Newton-Raphson- und dem Newmark- $(\beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{2})$ -Verfahren die nichtlineare Interaktion zwischen Fahrzeug und dem durch die Impulsreaktionsfunktionen beschriebenen Balken/Boden-System berechnet.

Die Interaktionskräfte zwischen Fahrzeug und Balken werden nach einer Umrechnung auf das ortsfeste Koordinatensystem als Belastung auf den Halbraum im dreifach Fourier-transformierten Raum aufgebracht. Die Schwingungsausbreitung an der Halbraumoberfläche im Orts-Zeitbereich erhält man nach einer dreidimensionalen Fourier-Rücktransformation.

5.1 Bewegtes Koordinatensystem

In Kapitel 2 wurde die Antwort \hat{w} des Balkens, des Bodens und des gekoppelten Balken/Boden-Systems auf eine Last im ortsfesten Koordinatensystem betrachtet. Mit den Gleichungen (2.3), (2.6) und (2.47) lassen sich die Verschiebungen jeweils als Quotient aus Last und einer entsprechenden wellenzahl- und frequenzabhängigen Steifigkeit ausdrücken.

Im Folgenden beschränkt sich die Argumentation exemplarisch auf den gebetteten Timoshenko-Balken, die Folgerungen gelten jedoch für alle drei Systeme.

Die Belastung besteht aus n_L Einzellasten, die sich mit konstanter Geschwindigkeit v fortbewegen. Dabei befindet sich die Last mit dem Index 0 zum Zeitpunkt 0 im Nullpunkt (d.h. $l_0 = 0$) und die weiteren Lasten folgen im Abstand l_k entgegen der positiven x -Achse. Abbildung 5.1 verdeutlicht die Zusammenhänge.

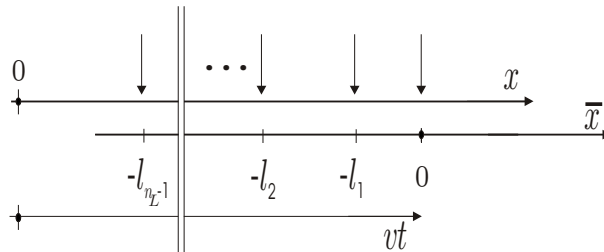


Abbildung 5.1: Bewegtes Koordinatensystem

Im Orts-Zeitbereich sieht diese Belastung folgendermaßen aus:

$$p(x, t) = \sum_{k=0}^{n_L-1} \delta(x - vt + l_k) p_k(t) \quad . \quad (5.1)$$

Die entsprechende Fourier-Transformierte lautet:

$$\hat{p}(k_x, \omega) = \sum_{k=0}^{n_L-1} e^{i l_k k_x} \hat{p}_k(\omega + v k_x) \quad . \quad (5.2)$$

Im bewegten Koordinatensystem $\bar{x} = x - vt$ führt die zweifache Fourier-Rücktransformation von

(2.6) zu

$$w_s(\bar{x}, t) = \frac{1}{4\pi^2} \iint \frac{\sum_k \hat{p}_k(\omega + vk_x) e^{il_k k_x}}{D_s(k_x, \omega)} e^{i(\bar{x}+vt)k_x} e^{i\omega t} dk_x d\omega \quad (5.3)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \iint \frac{\sum_k \hat{p}_k(\omega + vk_x) e^{il_k k_x}}{D_s(k_x, \omega)} e^{i(\omega+vk_x)t} e^{i\bar{x}k_x} dk_x d\omega. \quad (5.4)$$

Durch die zusätzliche Substitution $\bar{\omega} = \omega + vk_x$ erhält man

$$w_s(\bar{x}, t) = \frac{1}{4\pi^2} \iint \frac{\sum_k \hat{p}_k(\bar{\omega}) e^{il_k k_x}}{D_s(k_x, \bar{\omega} - vk_x)} e^{i\bar{x}k_x} dk_x e^{i\bar{\omega} t} d\bar{\omega} \quad (5.5)$$

$$w_s(k_x, \bar{\omega}) = \frac{\sum_k \hat{p}_k(\bar{\omega}) e^{il_k k_x}}{D_s(k_x, \bar{\omega} - vk_x)}. \quad (5.6)$$

Die Einführung eines bewegten Koordinatensystems im Originalraum bewirkt einen Perspektivwechsel: Nun bleiben die Lasten “stehen” und der Untergrund “bewegt” sich. Im Bildraum wird dadurch die Lastfrequenz wellenzahlunabhängig, dafür geht die Wellenzahl in die Frequenz der Untergrundsteifigkeit ein.

5.2 Impulsreaktionsfunktionen des Balken-Bodenmodells

Da die Veränderlichkeit der Lasten im Bildbereich im bewegten Koordinatensystem wellenzahlunabhängig ist, lässt sich Gleichung (5.5) in eine Summe von Faltungen im Zeitbereich umformen:

$$w_s(\bar{x}, t) = \sum_k p_k(t) * IF T_{\bar{\omega}} \left(IF T_{k_x} \left(\frac{e^{il_k k_x}}{D_s(k_x, \bar{\omega} - vk_x)} \right) \right). \quad (5.7)$$

Die Verschiebung des Balkens lässt sich somit als eindimensionale Faltung von Lastfunktionen mit rücktransformierten Systemreaktionsfunktionen im Zeitbereich darstellen. Bei den Lastfunktionen handelt es sich um die Interaktionskräfte zwischen den einzelnen Achsen und dem Balken im mitbewegten Koordinatensystem. Die rücktransformierten Systemreaktionsfunktionen stellen die Impulsreaktionsfunktionen des Balkens im mitbewegten Koordinatensystem dar.

Eine Interaktion des Fahrzeugs mit dem Untergrund findet nur in den Rad-Kontaktpunkten statt. Um die gegenseitige Beeinflussung der n_L -Achsen über den Untergrund korrekt zu erfassen, sind für die Interaktionsberechnung n_L^2 Impulsreaktionsfunktionen nötig. Bezeichnet man die Impulsreaktionsfunktion an der Stelle $\bar{x} = i$ aufgrund eines Impulses an der Stelle $\bar{x} = j$ mit h_{ij} , dann gilt $h_{ii} = h_{jj}$, da das System Balken/Boden in x -Richtung überall gleiches Verhalten aufweist. Entsprechend sind nur $n_L^2 - n_L + 1$ Impulsreaktionsfunktionen unterschiedlich. Im Falle äquidistanter Achsen genügt es, h_{j0} (mit $j = -(n_L - 1) \dots n_L - 1$) d.h. $2n_L - 1$ unterschiedliche zeitabhängige Funktionen zu berechnen. Abbildung 5.2 veranschaulicht die Zusammenhänge für drei Lasten. Danach gilt z.B., dass die Einsenkung an der Stelle 0 infolge der Last an der Stelle 1 gleich der Einsenkung an der Stelle -1 infolge einer Last an der Stelle 0 ist: $w_{01} = w_{-10}$.

Damit wird auch klar, dass es genügt, nur eine Funktion bzgl. $(k_x, \bar{\omega})$ rückzutransformieren, die Auswertung dann aber entsprechend für n_L Achsen an $n_L^2 - n_L + 1$ Stellen erfolgen muss.

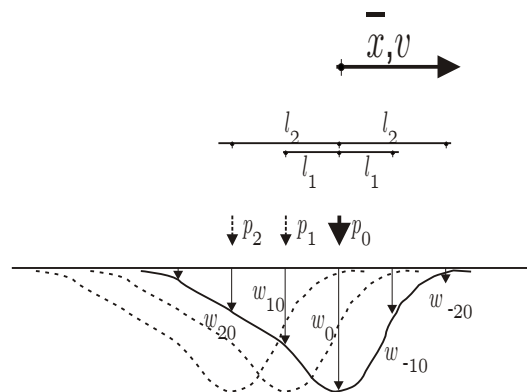


Abbildung 5.2: Zusammenhänge für die Oberflächenverschiebung im bewegten Koordinatensystem

Die Einführung des bewegten Koordinatensystems ermöglicht also eine Reduzierung des Problems im Orts-Zeitbereich um eine Dimension auf mehrere zeitabhängige Funktionen. Mit dem in Kapitel 4 vorgestellten zweidimensionalen Programmpaket liegt ein ideales Werkzeug für die Rücktransformation vor. Zum einen wird die relativ aufwändige Funktionsermittlung im (k_x, ω) -Raum durch die adaptive Abtastung nur an vergleichsweise wenigen Stellen durchgeführt. Zum anderen ist es möglich, die Auswertung im Originalbereich auf die nötigen, von der Anzahl der Achsen abhängigen Punkte im bewegten Koordinatensystem zu beschränken.

Abbildung 5.3 zeigt skizzenhaft die Verschiebungs- und Geschwindigkeitsantworten verschiedener Systeme unmittelbar nach Aufbringen eines Impulses. Aufgrund seiner Trägheit setzt sich eine Einzelmasse erst allmählich in Bewegung. Eine Feder dagegen reagiert ohne Zeitverzögerung in Form eines Delta-Diracs für die Verschiebung bzw. eines Dipols für die Geschwindigkeit. Der Fall eines Balkens auf Halbraum, auf den ein Impuls als Einzellast aufgebracht wird, stellt eine Zwischenform dar. Entsprechend existiert mit Aufbringen des Impulses bereits eine Verschiebung.

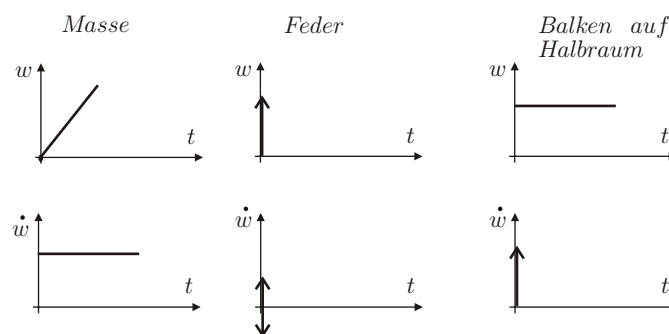


Abbildung 5.3: Antworten verschiedener Systeme auf einen Impuls

5.3 Zeitintegration der Bewegungsgleichungen

Alle relevanten Eigenschaften der Kombination Balken/Boden werden durch die Impulsreaktionsfunktionen beschrieben. Im Zeitbereich berechnet sich nun die Balkenverschiebung über die Faltung von Last und Impulsreaktionsfunktion. Als Lasten wirken dabei die Interaktionskräfte zwischen den Rädern und dem Balken, die durch Radunrundheiten hervorgerufen werden. Der Sonderfall *bewegtes Eigengewicht* wird in Abschnitt 5.6 gesondert betrachtet.

Die Modellierung der Fahrzeuge betreffend wird zum einen ein Einmassenschwinger untersucht, bei dem das Rad masselos ist und nur benötigt wird, um die Anregung in Form von Radunrundheiten auf den Balken zu übertragen. Näher an der Realität der Bahn ist dagegen das ebenfalls untersuchte Drehgestellmodell von Ripke [Rip95] mit massebehafteten Radsätzen. In beiden Fällen sind die Federn an den Rädern durch eine *nichtlineare Federkennlinie* gekennzeichnet.

5.3.1 Numerische Aufbereitung der Faltung

Die Faltung zweier kontinuierlicher Funktionen $F(t)$ und $h(t)$ ist definiert als

$$w_s(t) = \int_0^t F(\tau)h(t - \tau)d\tau. \quad (5.8)$$

Da im vorliegenden Fall der Faltung von Impulsreaktionsfunktion und Interaktionskraft eine analytische Auswertung des Integrals nicht möglich ist, wird eine numerische Aufbereitung nötig. Vorausgesetzt wird im folgenden *äquidistantes sampling* der Funktionen mit dem Abstand Δt . Der aktuelle Zeitpunkt t ist durch den $i + 1$ Schritt mit $t = (i + 1)\Delta t$ gegeben, die Schritte sind im Exponenten angezeigt.

Bei Annahme konstanten Funktionsverlaufs zwischen zwei Abszissenwerten ergibt sich für die Verschiebung w_s unter Verwendung der Impulsreaktionsfunktion h und der einwirkenden Kraft F :

$$\begin{aligned} w_s^{i+1} &= \frac{\Delta t}{4} \sum_{k=1}^i F^k \left(h^{i+1-k+1} + 2h^{i+1-k} + h^{i+1-k-1} \right) + \frac{\Delta t}{4} F^{i+1}(h^0 + h^1) + \frac{\Delta t}{4} F^0(h^i + h^{i+1}) \\ &= \frac{\Delta t}{4} w^{\text{hist}} + \frac{\Delta t}{4} F^{i+1}(h^0 + h^1) + \frac{\Delta t}{4} F^0(h^i + h^{i+1}) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Durch die Benennung w^{hist} wird angedeutet, dass von der Größe F nur Beiträge aus früheren Zeitschritten eingehen. Bei der Berechnung mit dem Zeitschrittverfahren wird sichergestellt, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ keine Interaktionskraft vorliegt. Wie aus Abbildung 5.3 hervorgeht, ist der Wert der Impulsreaktionsfunktion zu diesem Zeitpunkt ungleich Null. Damit entsteht aus (5.9)

$$w_s^{i+1} = \frac{\Delta t}{4} w^{\text{hist}} + \frac{\Delta t}{4} F^{i+1}(h^0 + h^1) \quad . \quad (5.10)$$

Für die Ableitung von (5.8) gilt:

$$\dot{w}_s(t) = \int_0^t F(\tau)\dot{h}(t - \tau)d\tau + F(t)h(0). \quad (5.11)$$

Numerisch aufbereitet erhält man (vgl. (5.9))

$$\begin{aligned}\dot{w}_s^{i+1} &= \frac{\Delta t}{4} \sum_{k=1}^i F^k \left(\dot{h}^{i+1-k+1} + 2\dot{h}^{i+1-k} + \dot{h}^{i+1-k-1} \right) + \\ &\quad + \frac{\Delta t}{4} F^{i+1} (\dot{h}^0 + \dot{h}^1) + \frac{\Delta t}{4} F^0 (\dot{h}^i + \dot{h}^{i+1}) + F^{i+1} h^0 \\ &= \frac{\Delta t}{4} \dot{w}^{\text{hist}} + \frac{\Delta t}{4} F^{i+1} (\dot{h}^0 + \dot{h}^1) + \frac{\Delta t}{4} F^0 (\dot{h}^i + \dot{h}^{i+1}) + F^{i+1} h^0.\end{aligned}\quad (5.12)$$

Stellt man wieder sicher, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ keine Interaktionskraft vorliegt, ergibt sich schließlich

$$\dot{w}_s^{i+1} = \frac{\Delta t}{4} \dot{w}^{\text{hist}} + \frac{\Delta t}{4} F^{i+1} (\dot{h}^0 + \dot{h}^1) + F^{i+1} h^0. \quad (5.13)$$

5.3.2 Differentialgleichungen für die Interaktionsberechnung; Fahrzeugmodell Einmassenschwinger

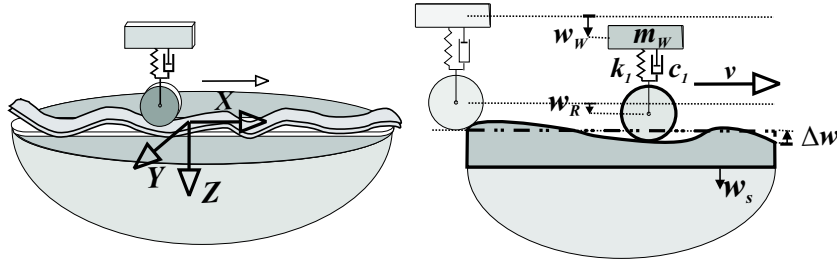


Abbildung 5.4: Modellierung des Fahrzeugs als Einmassenschwinger

Mit den Benennungen von Abbildung 5.4 erhält man folgende Differentialgleichungen, wobei aus Gründen der Übersichtlichkeit die Zeitabhängigkeit der beteiligten Funktionen nur in der dritten Gleichung angezeigt wird:

$$m_w \ddot{w}_W + c_1 \dot{w}_W - c_1 \dot{w}_R + k_1 w_W - k_1 w_R = 0 \quad (5.14)$$

$$F - c_1 \dot{w}_W + c_1 \dot{w}_R - k_1 w_W + k_1 w_R = 0 \quad (5.15)$$

$$w_R = \int_0^t h(t - \tau) F(\tau) d\tau - \Delta w \quad (5.16)$$

Die Beziehung zwischen Radunrundheit Δw , Radverschiebung w_R und Balkenverschiebung w_s ist zu

$$w_s = w_R + \Delta w \quad (5.17)$$

definiert und F stellt die Interaktionskraft zwischen Rad und Balken dar. $h(t)$ ist die aus (5.7) ermittelte Impulsreaktionsfunktion der Balken-Bodenkombination für eine bestimmte Fahrgeschwindigkeit v :

$$h(t) = IFT_\omega \left(IFT_{k_x, \bar{x}=0} \left(\frac{1}{D_s(k_x, \omega - vk_x)} \right) \right) \quad (5.18)$$

$$= IFT_\omega \left(\hat{h}(\omega) \right) \quad (5.19)$$

Auffällig an den drei gekoppelten Gleichungen (5.14), (5.15), (5.16) ist, dass die ersten beiden Differentialgleichungen sind und die dritte eine algebraische Gleichung ist, die ein Integral beinhaltet.

Lutzenberger [Lutb] hat sich in seiner Arbeit intensiv mit diesen sogenannten differentiell algebraischen Gleichungen beschäftigt. Selbst bei Verwendung von numerisch stabilen Zeitschrittintegrationsalgorithmen, wie z.B. dem *Newmark* ($\beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{2}$)-Verfahren, können solche Gleichungssysteme ohne weitere Aufbereitung numerische Instabilitäten hervorrufen.

Zwei mögliche Lösungswege werden im Folgenden besprochen: Im ersten Fall bleibt die Interaktionskraft F als Unbekannte im Gleichungssystem erhalten, im zweiten Fall wird sie eliminiert.

Indexreduktion beim algebraischen Differentialgleichungssystem

Wichtig ist im Zusammenhang mit algebraischen Differentialgleichungssystemen der sogenannte Differentiationsindex. Er bestimmt sich aus der Anzahl der nötigen Differentiationen der algebraischen Gleichung (Nebenbedingung), damit das Gleichungssystem in seiner Normalform vorliegt. Anhand des Index lässt sich beurteilen, ob ein Zeitschrittalgorithmus stabil und störungsfrei funktioniert. Differentiation von (5.15) liefert

$$\dot{F} = c_1 \ddot{w}_W - c_1 \ddot{w}_R + k_1 \dot{w}_W - k_1 \dot{w}_R \quad . \quad (5.20)$$

Die zweifache Ableitung der algebraischen Gleichung (5.16) ergibt:

$$\ddot{w}_R = \int_0^t \ddot{h}(t - \tau) F(\tau) d\tau + \dot{h}(0) F(t) + h(0) \dot{F}(t) - \Delta \ddot{w} \quad (5.21)$$

Mit den Substitutionen

$$\begin{aligned} X_1 &= w_W & X_2 &= \dot{w}_W \\ X_3 &= w_R & X_4 &= \dot{w}_R \\ X_5 &= F \end{aligned} \quad (5.22)$$

können die Gleichungen (5.20) und (5.21) vereinfacht als Funktionen f_{h4} und f_{h5} angeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \dot{X}_5 &= f_{h5}(X_2, X_4, \dot{X}_2, \dot{X}_4) \\ \dot{X}_4 &= f_{h4}(X_5, \dot{X}_5) \end{aligned}$$

Gegenseitiges Einsetzen der Gleichungen ermöglicht es schließlich, das Gleichungssystem in seiner Normalform darzustellen:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2 \\ \dot{X}_2 &= \frac{1}{m_W} (-c_1 X_2 + c_1 X_4 - k_1 X_1 + k_1 X_3) \\ \dot{X}_3 &= X_4 \\ \dot{X}_4 &= f_4(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \\ \dot{X}_5 &= f_5(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \quad , \end{aligned} \quad (5.23)$$

wobei aus Gründen der Übersichtlichkeit die Funktionen f_4 und f_5 nicht näher beschrieben werden. Aus der benötigten zweifachen Ableitung der algebraischen Gleichung bestimmt sich der Index des Systems zu 2.

Nach [Luta] liefert das *Newmark* $\beta = \frac{1}{4}$ -Verfahren für dieses System störungsfreie und stabile Lösungen, falls der Index von 2 auf 1 reduziert wird. Das bedeutet, dass im Gleichungssystem (5.16) in einmal differenzierter Form verwendet werden muss. Bei diesem Vorgehen ist zwar \ddot{F} instabil und \ddot{w}_R sowie \dot{F} sind störungsbehaftet. Diese Größen gehen jedoch nicht in das Gleichungssystem ein, weshalb sie sich nicht negativ auswirken.

Mit Hilfe der Zeitschrittintegration ist unter Verwendung von (5.17) und (5.13) entsprechend folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} m_W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\Delta t}{4}(\dot{h}^0 + \dot{h}^1) - h^0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} w_W \\ w_R \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\Delta t}{4}\dot{w}^{\text{hist}} - \Delta w^{i+1} \end{bmatrix} . \quad (5.24)$$

Mit \dot{w}^{hist} wird dabei folgender Ausdruck bezeichnet:

$$\dot{w}^{\text{hist}} = \sum_{k=1}^i F^k \left(\dot{h}^{i+1-k+1} + 2\dot{h}^{i+1-k} + \dot{h}^{i+1-k-1} \right) . \quad (5.25)$$

Außerdem beschreibt der Exponent den betreffenden Zeitschritt wie in (5.13). In die Größe \dot{w}^{hist} gehen bzgl. der Interaktionskraft F nur Beiträge aus früheren Zeitschritten ein.

Um numerische Probleme aufgrund schlecht konditionierter Matrizen zu vermeiden, ist es vorteilhaft, die dritte Gleichung und die Größe F in (5.24) noch mit einem Skalierungsfaktor zu versehen. D.h. man berechnet das Gleichungssystem für eine der Größenordnung der Verschiebungen angepasste Interaktionskraft. Anschließend muss sie in jedem Zeitschritt wieder auf ihre richtige Größenordnung zurückskaliert werden.

Aus (5.24) ist ersichtlich, dass für die Zeitschrittintegration die Impulsgeschwindigkeitsreaktionsfunktion des Untergrundes benötigt wird. Da nach (5.18) die Bestimmung der Impulsreaktionsfunktion im Fourier-transformierten Raum erfolgt, lässt sich deren Ableitung nach den Regeln der Fourier-Transformation durch den Vorfaktor $i\omega$ im Bildbereich prinzipiell sehr einfach berechnen:

$$\dot{h}(t) = IFT_{\omega} \left(IFT_{k_x, \bar{x}=0} \left(\frac{i\omega}{D_s(k_x, \omega - vk_x)} \right) \right) . \quad (5.26)$$

Dadurch verliert die Funktion im Bildbereich jedoch ihr günstiges Abklingverhalten bzgl. ω . Im Originalraum betrachtet erkennt man, dass die Geschwindigkeit des Systems *Balken auf Halbraum* am Kräfteinwirkungsort infolge eines Impulses zum Zeitpunkt 0 sehr groß bzw. unendlich sein muss, wie in Abbildung 5.3 skizzenhaft dargestellt ist.

Da das Integrationsintervall für die Fourier-Rücktransformation numerisch bedingt endlich groß ist, kann der Funktionswert an der Stelle $t = 0$ nicht richtig erfasst werden. Nimmt man näherungsweise an, dass es sich um einen Delta-Dirac handelt, lässt sich dessen Integral durch die Bedingung

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{h}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{h}(t) e^{i0t} dt = i\omega \hat{h}(\omega)|_{\omega=0} = 0 \quad (5.27)$$

bestimmen. Aus dem numerisch gewonnenen Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{h}(t) dt$ ohne $\dot{h}(0)$ ergibt sich ein Rest, der nach obiger Gleichung dem negativen Integral über den Delta-Dirac entsprechen muss. Damit erhält man eine genügend genaue Beschreibung der gesuchten Impulsgeschwindigkeitsreaktionsfunktion des Untergrundes.

Nicht möglich bei diesem Vorgehen ist es, das Rad ebenfalls mit einer Masse zu versehen, denn dann handelte es sich um ein Index-3-System. Um dieses zuverlässig mit einem Zeitschrittintegrationsalgorithmus integrieren zu können, wären noch höhere Ableitungen der Impulsreaktionsfunktion nötig. Diese lassen sich jedoch nicht mehr problemlos numerisch gewinnen.

Elimination der Interaktionskraft aus dem Gleichungssystem

Eine zweite Möglichkeit, das Gleichungssystem (5.14), (5.15), (5.16) zu lösen, ist, die Interaktionskraft aus dem Gleichungssystem zu eliminieren.

Mit Hilfe von (5.10) lässt sich (5.16) näherungsweise zeitlich diskretisieren:

$$w_R^{i+1} = \frac{\Delta t}{4} w^{\text{hist}} + \frac{\Delta t}{4} F^{i+1} (h^0 + h^1) - \Delta w^{i+1} \quad (5.28)$$

und anschließend nach der Interaktionskraft F^{i+1} des aktuellen Zeitschritts auflösen:

$$F^{i+1} = \frac{4}{\Delta t (h^0 + h^1)} (w_R^{i+1} + \Delta w^{i+1}) - \frac{1}{h^0 + h^1} w^{\text{hist}} \quad (5.29)$$

Dabei ist

$$w^{\text{hist}} = \sum_{k=1}^i F^k \left(h^{i+1-k+1} + 2h^{i+1-k} + h^{i+1-k-1} \right) \quad (5.30)$$

Beiträge der Interaktionskraft F aus früheren Zeitschritten gehen in die Größe w^{hist} ein.

Ersetzt man in (5.15) F^{i+1} durch diesen Ausdruck, dann verbleibt folgendes Gleichungssystem

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} m_W & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + \frac{4}{\Delta t (h^0 + h^1)} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} w_W \\ w_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{w^{\text{hist}}}{h^0 + h^1} - \frac{4}{\Delta t (h^0 + h^1)} \Delta w \end{bmatrix}, \quad (5.31)$$

bei dem in die rechte Seite nur Größen aus vergangenen Zeitschritten und gegebene Größen eingehen.

Bei diesem Gleichungssystem gibt es keine algebraische Gleichung, die eine Behandlung im Sinne der differentiellen algebraischen Gleichungen nötig macht. Daher ist es auch problemlos möglich, dem Rad eine Masse zuzuweisen. Dieses Gleichungssystem kann direkt in den Zeitschrittalgorithmus eingegeben werden. Um w^{hist} berechnen zu können, ist am Ende jedes Zeitschritts auch die Interaktionskraft für den folgenden Zeitschritt nach (5.29) zu berechnen.

5.3.3 Differentialgleichungen für die Interaktionsberechnung; Fahrzeugmodell Drehgestell

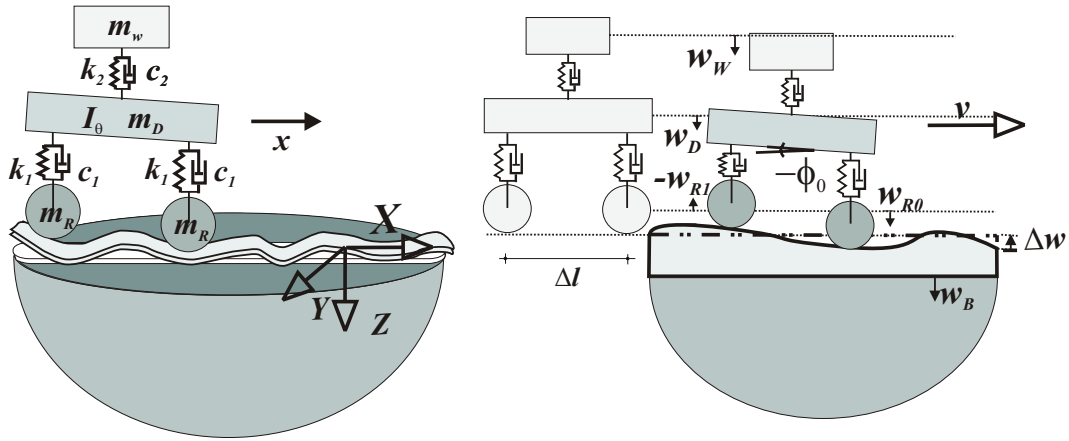


Abbildung 5.5: Modellierung des Fahrzeugs als Drehgestell

Mit den Benennungen aus Abbildung 5.5 ergeben sich für die fünf Freiheitsgrade des Fahrzeugs und die beiden Interaktionskräfte folgende Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
 m_R \ddot{w}_{R0} + F_0 + c_1 (\dot{w}_{R0} - \dot{w}_D + \dot{\phi}_0 \frac{\Delta l}{2}) + k_1 (w_{R0} - w_D + \phi_0 \frac{\Delta l}{2}) &= 0 \\
 m_R \ddot{w}_{R1} + F_1 + c_1 (\dot{w}_{R1} - \dot{w}_D - \dot{\phi}_0 \frac{\Delta l}{2}) + k_1 (w_{R1} - w_D - \phi_0 \frac{\Delta l}{2}) &= 0 \\
 w_{R0}(t) + \Delta w_0(t) &= \int_0^t (h_{00}(t-\tau)F_0(\tau) + h_{01}(t-\tau)F_1(\tau)) d\tau \\
 w_{R1}(t) + \Delta w_1(t) &= \int_0^t (h_{10}(t-\tau)F_0(\tau) + h_{11}(t-\tau)F_1(\tau)) d\tau \\
 m_D \ddot{w}_D + c_2 (\dot{w}_D - \dot{w}_w) + c_1 (-\dot{w}_{R1} - \dot{w}_{R0} + 2\dot{w}_D) + k_2 (w_D - w_w) + k_1 (-w_{R1} - w_{R0} + 2w_D) &= 0 \\
 I_\theta \ddot{\phi}_0 + c_1 (\dot{w}_{R0} \frac{\Delta l}{2} + 2\dot{\phi}_0 \frac{\Delta l^2}{4} - \dot{w}_{R1} \frac{\Delta l}{2}) + k_1 (w_{R0} \frac{\Delta l}{2} + 2\phi_0 \frac{\Delta l^2}{4} - w_{R1} \frac{\Delta l}{2}) &= 0 \\
 m_w \ddot{w}_w + c_2 (-\dot{w}_D + \dot{w}_w) + k_2 (-w_D + w_w) &= 0
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

In den obigen Gleichungen wird die Abhängigkeit der Freiheitsgrade von der Variablen t zur besseren Übersichtlichkeit nur bei den Faltungsintegralen angegeben. Bezüglich der Zusammenhänge zwischen Radachsenverschiebung und Balkenverschiebung wurde die Definition von

(5.17) analog für beide Achsen übernommen. h_{ij} ist die Bezeichnung für die Impulsreaktionsfunktion der Balken/Boden Kombination an der Stelle i ($i = 0$ vorderes Rad, $i = 1$ hinteres Rad) infolge eines Impulses an der Stelle j ($j = 0$ vorderes Rad, $j = 1$ hinteres Rad). Entsprechend sind h_{00} und h_{11} identisch. Die Auswertung der Impulsreaktionsfunktionen erfolgt jeweils im mitbewegten Koordinatensystem.

Da nun die Räder ebenfalls massebehaftet modelliert werden, ist es erforderlich, die Interaktionskraft aus dem Gleichungssystem zu eliminieren. Dazu werden analoge Gleichungen zu (5.29) mit (5.30) verwendet. Es verbleibt ein Gleichungssystem mit den 5 Unbekannten

$$\underline{\mathbf{w}}^T = \left[w_{R0} \quad w_{R1} \quad w_D \quad \phi_0 \quad w_W \right] , \quad (5.33)$$

der Massenmatrix

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} m_R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_W \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

und der Dämpfungsmatrix

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -c_1 & c_1 \frac{\Delta l}{2} & 0 \\ 0 & c_1 & -c_1 & -c_1 \frac{\Delta l}{2} & 0 \\ -c_1 & -c_1 & 2c_1 + c_2 & 0 & -c_2 \\ c_1 \frac{\Delta l}{2} & -c_1 \frac{\Delta l}{2} & 0 & c_1 \frac{\Delta l^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -c_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix} . \quad (5.35)$$

Durch die Einführung von

$$a_0 = -(h_{00}^1 + h_{00}^0)^2 + h_{01}^0 h_{10}^1 + h_{01}^0 h_{10}^0 + h_{01}^1 h_{10}^1 + h_{01}^1 h_{10}^0 \quad (5.36)$$

ermittelt sich die Steifigkeitsmatrix zu

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \begin{bmatrix} \frac{-4(h_{00}^1 + h_{00}^0)}{a_0 \Delta t} + k_1 & \frac{4(h_{01}^1 + h_{01}^0)}{a_0 \Delta t} & -k_1 & k_1 \frac{\Delta l}{2} & 0 \\ \frac{4(h_{10}^0 + h_{10}^1)}{a_0 \Delta t} & \frac{-4(h_{00}^1 + h_{00}^0)}{a_0 \Delta t} + k_1 & -k_1 & -k_1 \frac{\Delta l}{2} & 0 \\ -k_1 & -k_1 & 2k_1 + k_2 & 0 & -k_2 \\ k_1 \frac{\Delta l}{2} & -k_1 \frac{\Delta l}{2} & 0 & k_1 \frac{\Delta l^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & 0 & k_2 \end{bmatrix} . \quad (5.37)$$

Für die Last findet sich folgender Ausdruck:

$$p_1 = ((-(w_0^{\text{hist}h_{00}} + w_1^{\text{hist}h_{01}})(h_{00}^1 + h_{00}^0) + (w_0^{\text{hist}h_{10}} + w_1^{\text{hist}h_{00}})(h_{01}^1 + h_{01}^0))\Delta t + 4(h_{00}^0 + h_{00}^1)\Delta w_0^{i+1} - 4(h_{01}^0 + h_{01}^1)\Delta w_1^{i+1})/(a_0 \Delta t)$$

$$p_2 = ((+(w_0^{\text{hist}h_{00}} + w_1^{\text{hist}h_{01}})(h_{10}^1 + h_{10}^0) - (w_0^{\text{hist}h_{10}} + w_1^{\text{hist}h_{00}})(h_{00}^1 + h_{00}^0))\Delta t + 4(h_{00}^0 + h_{00}^1)\Delta w_0^{i+1} - 4(h_{01}^0 + h_{01}^1)\Delta w_1^{i+1})/(a_0 \Delta t)$$

$$\underline{\mathbf{p}}^T = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Die Berechnung der einzelnen $w_x^{\text{hist}h_{yz}}$ erfolgt analog (5.30), wobei die Kraft F an der Stelle x (mit $x = 0$ oder $x = 1$) und die Impulsreaktionsfunktionen h_{yz} verwendet werden.

5.3.4 Newton-Raphson-Verfahren für nichtlineare Federkennlinien

In den Beispielen kommt eine nichtlineare Federkennlinie zur Anwendung, die durch folgende Funktion beschrieben wird:

$$k_{nl} = \frac{k_o}{1 + a|w|^n}, \quad a, n > 0 \quad . \quad (5.39)$$

Dabei stellt k_o die Grundfedersteifigkeit und w die Zusammendrückung der Feder dar. Durch die Parameter a und n lässt sich die Nichtlinearität verstärken oder abschwächen. In jedem Fall reagiert die Feder auf hohe Ausschläge weicher als eine lineare Feder.

Nach dem *Newmark* $\beta = \frac{1}{4}$ -Verfahren ist die dynamische Steifigkeit und die dynamische Last eines durch Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix definierten Systems zum Zeitpunkt $t = (i + 1)\Delta t$ folgendermaßen gegeben:

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{\mathbf{k}}}_c &= \underline{\mathbf{K}} + \frac{2}{\Delta t} \underline{\mathbf{C}} + \frac{4}{\Delta t^2} \underline{\mathbf{M}} \\ \tilde{\underline{\mathbf{p}}}_c &= \underline{\mathbf{p}} + \underline{\mathbf{C}} \left(\frac{2}{\Delta t} \underline{\mathbf{w}}^i + \underline{\dot{\mathbf{w}}}^i \right) + \underline{\mathbf{M}} \left(\frac{4}{\Delta t^2} \underline{\mathbf{w}}^i + \frac{4}{\Delta t} \underline{\dot{\mathbf{w}}}^i + \underline{\ddot{\mathbf{w}}}^i \right) \end{aligned}$$

Die dynamische Steifigkeitsmatrix ist dabei im linearen Fall zeitunabhängig. Im nichtlinearen Fall muss sie von Zeitschritt zu Zeitschritt iterativ berechnet werden. Beim Newton-Raphson-Verfahren wird diese Iteration innerhalb eines Zeitschritts mittels eines Verformungszuwachses ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{w}}_{n+1} &= \underline{\mathbf{w}}_n + \Delta \underline{\mathbf{w}}_n \quad \text{mit den Größen} \\ \Delta \underline{\mathbf{w}}_n &= - \left(\underline{\Psi}'(\underline{\mathbf{w}}_n) \right)^{-1} \left(\tilde{\underline{\mathbf{k}}}_c(\underline{\mathbf{w}}_n) \underline{\mathbf{w}}_n - \tilde{\underline{\mathbf{p}}}_c \right) \\ \underline{\Psi}'(\underline{\mathbf{w}}) &= \frac{\partial \left(\tilde{\underline{\mathbf{k}}}_c(\underline{\mathbf{w}}) \underline{\mathbf{w}} - \tilde{\underline{\mathbf{p}}}_c \right)}{\partial \underline{\mathbf{w}}} \quad . \end{aligned} \quad (5.40)$$

Bleibt der Verformungszuwachs unterhalb einer gegebenen Grenze, so kann die Iteration abgebrochen werden.

Für die Fälle Einmassenschwinger und Drehgestell geben die folgenden beiden Abschnitte die entsprechenden Matrizen $\underline{\Psi}'$ an. Damit sind alle Größen, die in die Zeitschrittintegration eingehen, definiert.

Einmassenschwinger

Beim Einmassenschwinger mit nichtlinearer Feder erhält man für die Matrix $\underline{\underline{\Psi}}'$, falls die Interaktionskraft nicht eliminiert wird, folgenden Ausdruck:

$$\underline{\underline{\Psi}}' = \begin{bmatrix} \frac{4m_W}{\Delta t^2} + k_1 \frac{g}{q^2} (w_W - w_R) + \frac{2c_1}{\Delta t} + \frac{k_1}{q} & k_1 \frac{g}{q^2} (w_R - w_W) - \frac{2c_1}{\Delta t} - \frac{k_1}{q} & 0 \\ k_1 \frac{g}{q^2} (w_R - w_W) - \frac{2c_1}{\Delta t} - \frac{k_1}{q} & k_1 \frac{g}{q^2} (w_W - w_R) + \frac{2c_1}{\Delta t} + \frac{k_1}{q} & \text{scal} \\ 0 & \frac{2\text{scal}}{\Delta t} & \text{scal}^2 (-h^0 - (\dot{h}^0 + \dot{h}^1) \frac{\Delta t}{4}) \end{bmatrix}. \quad (5.41)$$

Die Größen g und q sind dabei folgendermaßen definiert:

$$g = a|w_R - w_W|^{n-1} n \operatorname{sgn}(w_R - w_W) \quad (5.42)$$

$$q = 1 + a|w_R - w_W|^n. \quad (5.43)$$

Dabei ist scal die Bezeichnung für den Skalierungsfaktor, der in 5.3.2 erwähnt wird und dafür sorgt, dass die Matrizen besser konditioniert sind.

Falls die Interaktionskraft im Gleichungssystem eliminiert wird, ergibt sich für $\underline{\underline{\Psi}}'$

$$\underline{\underline{\Psi}}' = \begin{bmatrix} \frac{4m_W}{\Delta t^2} + k_1 \frac{g}{q^2} (w_W - w_R) + \frac{2c_1}{\Delta t} + \frac{k_1}{q} & k_1 \frac{g}{q^2} (w_R - w_W) - \frac{2c_1}{\Delta t} - \frac{k_1}{q} \\ k_1 \frac{g}{q^2} (w_R - w_W) - \frac{2c_1}{\Delta t} - \frac{k_1}{q} & k_1 \frac{g}{q^2} (w_W - w_R) + \frac{2c_1}{\Delta t} + \frac{k_1}{q} + \frac{4}{(h^1 + h^0)\Delta t} \end{bmatrix}. \quad (5.44)$$

Drehgestell

Mit der Matrix $\underline{\underline{\Psi}}_1$, deren Elemente im Anhang C.1 gegeben sind, ist die Matrix $\underline{\underline{\Psi}}'$ für das Drehgestell wie folgt definiert:

$$\underline{\underline{\Psi}}' = \underline{\underline{\Psi}}_1 + \frac{2}{\Delta t} \underline{\underline{\mathbf{C}}} + \frac{4}{\Delta t^2} \underline{\underline{\mathbf{M}}}. \quad (5.45)$$

Dabei wird angenommen, dass nur die Primärfedern, also die Federn zwischen Rad und Drehgestell, eine nichtlineare Charakteristik aufweisen, die durch (5.39) definiert ist.

5.4 Überprüfung der Ergebnisse bei harmonischer Belastung

Setzt man eine harmonische Radunrundheit als Belastung und einen linearen Einmassenschwinger als Fahrzeug an, gibt es eine analytische Lösung für die Interaktion Fahrzeug und Balken/Boden. Diese wurde im Prinzip von Dinkel [Din01] entwickelt. Die Rücktransformation bzgl. k_x muss zwar weiterhin numerisch stattfinden, sie erfolgt in dieser Arbeit aber nicht über die Wavelettransformation, sondern über den MATLAB internen Integrator *quad.m*. In k_y -Richtung wird unverändert die Fast-Fourier-Transformation verwendet. Somit handelt es sich um eine semi-analytische bzw. weitgehend analytische Kontrollberechnung.

5.4.1 Einmassenschwinger

Die Impedanz $\hat{k}_w(\omega)$ eines Einmassenschwingers mit der Masse m , der Dämpferkonstante c und der Federsteifigkeit k lautet:

$$\hat{k}_w(\omega) = \frac{1}{-\frac{1}{m\omega^2} + \frac{1}{k+i\omega}} \quad . \quad (5.46)$$

Im Frequenzraum gilt für die Interaktionskraft zwischen dem masselosen Rad des Einmassenschwingers und dem System Balken/Boden folgender Zusammenhang:

$$\hat{F}(\omega) = \hat{w}_R(\omega)\hat{k}_w(\omega) \quad . \quad (5.47)$$

Für Balken/Boden lässt sich im mitbewegten Koordinatensystem für $\bar{x} = 0$ ebenfalls eine lineare Kraft-Verschiebungsbeziehung formulieren:

$$\hat{w}_s(\omega) = -\hat{F}(\omega)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_x}{D_s(k_x, \omega - vk_x)} \quad (5.48)$$

$$= -\hat{F}(\omega)\hat{H}_u(\bar{x} = 0, \omega) \quad . \quad (5.49)$$

Mit $\hat{w}_s(\omega) = \hat{w}_R(\omega) + \Delta\hat{w}(\omega)$ (vgl. Definition der Verschiebungen (5.17)) kann (5.49) schließlich nach der Verschiebung des Rades aufgelöst werden.

$$\hat{w}_R(\omega) + \Delta\hat{w}(\omega) = -\hat{w}_R(\omega)\hat{k}_w(\omega)\hat{H}_u(\bar{x} = 0, \omega) \quad (5.50)$$

$$\hat{w}_R(\omega) = -\frac{\Delta\hat{w}(\omega)}{\hat{k}_w(\omega)\hat{H}_u(\bar{x} = 0, \omega) + 1} \quad . \quad (5.51)$$

Im Frequenzraum ist die Sinus-förmige Radunrundheit mit Amplitude A_{Last} und Frequenz Ω gegeben durch

$$\Delta\hat{w}(\omega) = A_{Last}i\pi(\delta(\omega + \Omega) - \delta(\omega - \Omega)) \quad (5.52)$$

Eingesetzt in (5.51) und unter Ausnutzung des Delta-Dirac-Kalküls erhält man die Verschiebung des Rades im Zeitbereich:

$$w_R(t) = -A_{Last}\frac{i}{2}\left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\hat{k}_w(-\Omega)\hat{H}_u(\bar{x} = 0, -\Omega) + 1} - \frac{e^{i\Omega t}}{\hat{k}_w(\Omega)\hat{H}_u(\bar{x} = 0, \Omega) + 1}\right) \quad (5.53)$$

Dabei handelt es sich um zwei konjugiert komplexe Lösungen, so dass es genügt, nur eine davon zu berechnen und den entsprechenden Realteil zu verdoppeln. Entsprechend erhält man für die Verschiebung des Balkens

$$w_s(t) = 2A_{Last}\Re\left(\frac{-\frac{i}{2}e^{-i\Omega t}}{\hat{k}_w(-\Omega)\hat{H}_u(\bar{x} = 0, -\Omega) + 1}\right) + \Delta w(t) \quad (5.54)$$

5.4.2 Drehgestellmodell

Beim Drehgestellmodell gibt es zwei Interaktionspunkte zwischen Fahrzeug und Untergrund, nämlich die beiden Räder. Nach (5.2) gilt bei einem Abstand Δl zwischen den beiden Rädern:

$$\hat{p}(k_x, \omega) = \hat{F}_0(\omega + vk_x) + \hat{F}_1(\omega + vk_x)e^{ik_x\Delta l} \quad . \quad (5.55)$$

Dabei ist \hat{F}_0 die Interaktionskraft des in Fahrtrichtung vorderen Rades und \hat{F}_1 die Interaktionskraft des hinteren Rades.

Um für das Fahrzeugmodell einen Zusammenhang zwischen der Verschiebung der Räder und den Interaktionskräften zu erhalten, leitet man sich zuerst aus den Differentialgleichungen (5.32) die Bewegungsgleichungen im Frequenzbereich her:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}(\omega)\underline{\mathbf{w}}(\omega) = \underline{\mathbf{p}}(\omega) \quad (5.56)$$

mit

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}(\omega) = \begin{bmatrix} -\omega^2 m_R + i\omega c_1 + k_1 & 0 & -i\omega c_1 - k_1 & i\omega \Delta l / 2 c_1 + \Delta l / 2 k_1 & 0 \\ & -\omega^2 m_R + i\omega c_1 + k_1 & -i\omega c_1 - k_1 & -i\omega \Delta l / 2 c_1 - \Delta l / 2 k_1 & 0 \\ & & -\omega^2 m_D + i\omega(2c_1 + c_2) + 2k_1 + k_2 & 0 & -i\omega c_2 - k_2 \\ & & & -\omega^2 I_\theta + \Delta l^2 / 2 (i\omega c_1 + k_1) & 0 \\ & \text{sym} & & & -\omega^2 m_W + i\omega c_2 + k_2 \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

$$\underline{\mathbf{w}}^T(\omega) = \begin{bmatrix} \hat{w}_{R0}(\omega) & \hat{w}_{R1}(\omega) & \hat{w}_D(\omega) & \hat{\phi}_D(\omega) & \hat{w}_W(\omega) \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

$$\underline{\mathbf{p}}^T(\omega) = \begin{bmatrix} \hat{F}_0(\omega) & \hat{F}_1(\omega) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

Mit Hilfe des Formelmanipulators MAPLE lässt sich dieses Gleichungssystem nach den Verschiebungen w_{R0} und w_{R1} auflösen. Es entsteht ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{bmatrix} \hat{w}_{R0}(\omega) \\ \hat{w}_{R1}(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(\omega) & A_{12}(\omega) \\ A_{21}(\omega) & A_{22}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{F}_0(\omega) \\ \hat{F}_1(\omega) \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

$$\underline{\hat{\mathbf{w}}}_R = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\hat{\mathbf{F}}} \quad (5.61)$$

Im Anhang C.2 sind die einzelnen Elemente der Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ aufgelistet.

Dieses Gleichungssystem kann wiederum nach den Interaktionskräften aufgelöst werden:

$$\underline{\hat{\mathbf{F}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \underline{\hat{\mathbf{w}}}_R \quad (5.62)$$

Diese beiden Gleichungen beschreiben den gesuchten Zusammenhang zwischen Kraft und Verschiebung im Frequenzbereich.

Analog (5.48) lässt sich die Balkenverschiebung in den Interaktionspunkten über die Interaktionskräfte und den Differentialoperator des Bodens im mitbewegten Koordinatensystem \bar{x} beschreiben:

$$\begin{aligned}\hat{w}_s(\bar{x} = 0, \omega) &= \hat{F}_0(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{2\pi} \frac{dk_x}{D_s(k_x, \omega - vk_x)} + \hat{F}_1(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{2\pi} \frac{e^{ik_x \Delta l} dk_x}{D_s(k_x, \omega - vk_x)} = \\ &= \hat{w}_{R0}(\omega) + \Delta \hat{w}_0(\omega)\end{aligned}\quad (5.63)$$

$$\begin{aligned}\hat{w}_s(\bar{x} = -\Delta l, \omega) &= \hat{F}_0(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{2\pi} \frac{e^{-ik_x \Delta l} dk_x}{D_s(k_x, \omega - vk_x)} + \hat{F}_1(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{2\pi} \frac{dk_x}{D_s(k_x, \omega - vk_x)} \\ &= \hat{w}_{R1}(\omega) + \Delta \hat{w}_1(\omega)\end{aligned}\quad (5.64)$$

Benennt man die Integrale mit B_{11}, \dots, B_{22} , wobei $B_{11} = B_{22}$ gilt, so lassen sich die Gleichungen folgendermaßen anschreiben:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} B_{11}(\omega) & B_{12}(\omega) \\ B_{21}(\omega) & B_{22}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{F}_0(\omega) \\ \hat{F}_1(\omega) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{w}_{R0}(\omega) \\ \hat{w}_{R1}(\omega) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \hat{w}_0(\omega) \\ \Delta \hat{w}_1(\omega) \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{\mathbf{B}}} \underline{\underline{\hat{\mathbf{F}}}} &= \underline{\underline{\hat{\mathbf{w}}}}_{\mathbf{R}} + \underline{\underline{\Delta \hat{\mathbf{w}}}}\end{aligned}\quad (5.65)$$

Setzt man nun die Interaktionskräfte nach (5.62) in die Gleichungen (5.65) ein, kann man nach den unbekanntem Radverschiebungen w_{R0} und w_{R1} auflösen:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\hat{\mathbf{w}}}}_{\mathbf{R}} &= (\underline{\underline{\mathbf{B}}} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} - \underline{\underline{\mathbf{I}}})^{-1} \underline{\underline{\Delta \hat{\mathbf{w}}}} \\ &= \frac{1}{A_{12}A_{21} - B_{21}A_{12} - B_{12}A_{21} + B_{22}A_{11} + B_{11}A_{22} + B_{12}B_{21} - A_{11}A_{22} - B_{11}B_{22}} \cdot \\ &\cdot \begin{bmatrix} B_{21}A_{12} - B_{22}A_{11} + A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} & -B_{11}A_{12} + B_{12}A_{11} \\ B_{21}A_{22} - B_{22}A_{21} & -B_{11}A_{22} + B_{12}A_{21} + A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \end{bmatrix} \underline{\underline{\Delta \hat{\mathbf{w}}}} \\ &= \begin{bmatrix} n_{11}(\omega) & n_{12}(\omega) \\ n_{21}(\omega) & n_{22}(\omega) \end{bmatrix} \underline{\underline{\Delta \hat{\mathbf{w}}}}\end{aligned}\quad (5.66)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit fehlt in den obigen Gleichungen zum Teil die Kennzeichnung der ω -Abhängigkeit der Größen. Gibt man sich zwei sinusförmige Radunrundheiten $\Delta \hat{w}_0(\Omega_{L0}), \Delta \hat{w}_1(\Omega_{L1})$ mit den Amplituden $\text{Amp}_0, \text{Amp}_1$ analog (5.52) vor, dann lassen sich die Verschiebungen der Räder im Zeitbereich folgendermaßen bestimmen:

$$\begin{bmatrix} w_{R0}(t) \\ w_{R1}(t) \end{bmatrix} = \frac{2\pi}{2\pi} \Re \left(\begin{bmatrix} n_{11}(\Omega_{L0}) & n_{12}(\Omega_{L1}) \\ n_{21}(\Omega_{L0}) & n_{22}(\Omega_{L1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \text{Amp}_0 e^{i\Omega_{L0}t} \\ i \text{Amp}_1 e^{i\Omega_{L1}t} \end{bmatrix} \right)\quad (5.67)$$

Entsprechend sind nun die Verschiebungen des Balkens in den Kontaktpunkten folgendermaßen definiert:

$$\begin{bmatrix} w_{s0}(t) \\ w_{s1}(t) \end{bmatrix} = \Re \left(\begin{bmatrix} n_{11}(\Omega_{L0}) & n_{12}(\Omega_{L1}) \\ n_{21}(\Omega_{L0}) & n_{22}(\Omega_{L1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \text{Amp}_0 e^{i\Omega_{L0}t} \\ i \text{Amp}_1 e^{i\Omega_{L1}t} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} \text{Amp}_0 \sin(\Omega_{L0}t) \\ \text{Amp}_1 \sin(\Omega_{L1}t) \end{bmatrix}\quad (5.68)$$

5.5 Berechnung der Wellenausbreitung im Halbraum

Neben der Antwort des Balken/Boden-Systems unter den Fahrzeugachsen sind auch die Auswirkungen einer Fahrzeugüberfahrt an festen Punkten der Halbraumoberfläche interessant. Daher muss ein Übergang auf das ortsfeste Koordinatensystem erfolgen. Mit Hilfe der in Abschnitt 5.3 beschriebenen Interaktionsberechnung ergeben sich die Interaktionskräfte unter den n_L Achsen des Fahrzeugs. Nach einer eindimensionalen Fast-Fourier-Transformationen und unter Verwendung von Gleichung (5.2) kann daraus die Belastung $\hat{p}(k_x, \omega)$ der Halbraumoberfläche berechnet werden.

Um die Belastung auch in k_y -Richtung korrekt zu beschreiben, müssen die Vorfaktoren der Legendre-Polynome $C_i(k_x, \omega)$ (aus (2.46)) und der Differentialoperator des Halbraums $D_s(k_x, \omega)$ (aus (2.6)) im unbewegten Koordinatensystem ausgewertet werden. Dazu bieten sich zwei Möglichkeiten an: Man kann diese Größen entweder im unbewegten Koordinatensystem neu berechnen, oder man ermittelt sie durch Interpolation aus den vorhandenen Werten.

Für die Möglichkeit der Neuberechnung spricht, dass hier eine optimale Genauigkeit erzielt wird. Trotz der adaptiven Abtastung durch das dreidimensionale Programmpaket ist der Aufwand jedoch beträchtlich. Außerdem muss eine mehrfache Hin- und Rücktransformation in y - bzw. k_y -Richtung erfolgen: Zur Ermittlung der Legendre-Koeffizienten ist eine inverse Fast-Fourier-Transformation bzgl. k_y nötig. Danach wird die Last k_y -abhängig angesetzt und das dreidimensionale Programmpaket übernimmt noch einmal die Rücktransformation bzgl. k_y . Alternativ könnte das Ergebnis aus der Rücktransformation über die inverse Fast-Fourier-Transformation bzgl. k_y genutzt werden und die Ergebnisse nur noch zweidimensional bzgl. (k_x, ω) rücktransformiert werden. Dies müsste aber für jedes gesuchte y erfolgen, was bei größerer Anzahl von Werten wieder sehr aufwändig wird.

Die Berechnung durch Interpolation der neuen Werte aus den entsprechenden alten ist zwar geringfügig ungenauer, aber mit Sicherheit deutlich schneller. Problematisch ist in diesem Zusammenhang die adaptive Abtastung der Funktion. Der Gitter-Erzeugungsalgorithmus orientiert sich an der transformierten Verschiebung. Das heißt, dass eine feine Abtastung in Bereichen vorliegt, in denen die Funktion Spitzen aufweist. In diesen Punkten erfolgt auch die Berechnung der Legendre-Vorfaktoren C_i . Jedoch fallen nicht unbedingt Spitzen der Verschiebungsfunktion mit Spitzen der ebenfalls (k_x, ω) -abhängigen Legendre-Vorfaktoren zusammen. Um eine ausreichende Abtastgenauigkeit für die C_i in allen Bereichen zu erreichen ist es daher sinnvoll, die Verschiebungsfunktion mit einem vorgegebenen Höchstabstand zu rastern. Das erhöht zwar die Rechenzeit zur Ermittlung der Impulsreaktionsfunktionen der Balken/Boden-Kombination leicht, vermindert aber letztendlich den Aufwand zur Berechnung der Wellenausbreitung beträchtlich. Auf Grund ihrer hohen Effizienz und ausreichenden Genauigkeit erfolgt die Berechnung der Wellenausbreitung im Rahmen dieser Arbeit auf diese Weise.

Die Werte C_i liegen aus der Berechnung der Impulsreaktionsfunktionen im bewegten Koordinatensystem nicht an äquidistanten Stellen vor. Außerdem ist das Abtastgitter wegen der Auswertung in $(k_x, \omega - vk_x)$ bzgl. (k_x, ω) gedreht. Durch Interpolation mittels der MATLAB-Funktion *griddata.m* lassen sich die Vorfaktoren in einem äquidistanten (k_x, ω) -Gitter berechnen und in einer Matrix abspeichern. Bei entsprechend feiner Diskretisierung kann zur Berechnung der Wellenausbreitung während der Abtastung der Verschiebungsfunktion durch das dreidimensionale Programmpaket der nächstliegende Wert in der Matrix als gesuchter Legendre-Vorfaktor

eingesetzt werden.

Es genügt, die Vorfaktoren C_i in Matrizen abzuspeichern. Der Wert D_s dagegen lässt sich mit diesen Werten berechnen, wenn die Halbraumsteifigkeit K_s aus (2.47) anstatt der Bettungsziffer k in (2.6) eingesetzt wird.

Aus dem Differentialoperator $D_s(k_x, \omega)$ und der Belastung $\hat{p}(k_x, \omega)$ erhält man die Verschiebung des Balkens zu

$$\hat{w}_s(k_x, \omega) = \frac{\sum_{k=0}^{n_L-1} e^{ikx} \hat{p}_k(\omega + vk_x)}{D_s(k_x, \omega)} \quad , \quad (5.69)$$

wobei für die bewegte Interaktionskraft die Beziehung (5.2) verwendet wurde. Damit können die tatsächlich vorhandenen Vorfaktoren der Legendre-Polynome $C_{i,tat}(k_x, \omega)$ berechnet werden (vgl. (2.46)):

$$C_{i,tat}(k_x, \omega) = \frac{\hat{w}_s(k_x, \omega) C_i(k_x, \omega)}{\hat{w}_0(k_x, \omega)} \quad . \quad (5.70)$$

Schließlich ergibt sich daraus die Belastung auf die Halbraumoberfläche zu

$$\hat{p}(k_x, k_y, \omega) = \sum_i C_{i,tat}(k_x, \omega) \hat{P}_i(k_y) \quad . \quad (5.71)$$

Im Anhang D.2 finden sich die Definitionen der geradzahigen Fourier-transformierten Legendre-Polynome $\hat{P}_0(k_y) \dots \hat{P}_8(k_y)$. Die dreidimensionale Fourier-Rücktransformation der Halbraumantwort in den Orts-Zeitbereich infolge der durch (5.71) gegebenen Belastung liefert dann die Wellenausbreitung.

Aus der Interaktionsberechnung liegen die Verschiebungen des Balkens an den Radachsen vor. Diese können nun mit den entsprechenden Verschiebungen der Halbraumoberfläche verglichen werden, wodurch eine Überprüfung des Verfahrens möglich ist. Zusätzlich lässt sich durch Augenschein leicht feststellen, ob die Interpolation der Legendre-Polynom-Vorfaktoren genau genug war. Nur in diesem Fall ergibt sich tatsächlich wieder eine konstante Einsenkung der Oberfläche in Querrichtung unter dem Balken.

Die Skizzen von Abbildung 5.6 veranschaulichen die zu transformierende Funktion für $\hat{p}_z(k_x, k_y, \omega) = 1$, also die Systemreaktionsfunktion. Dargestellt ist jeweils ein Doppelkegel, der den Ort größter Funktionswerte im Wellenzahl-Frequenzbereich darstellen soll. Im Falle ungeschichteten Halbraums entspricht der Kegel der Rayleighwellenzahl. Für ebenen Verformungszustand, d.h. $k_y = 0$, erhält man in der (k_x, ω) -Ebene entsprechend zwei sich im Ursprung kreuzende Geraden. Bei geschichtetem Halbraum dagegen ähnelt der geometrische Ort der größten Funktionswerte eher zwei "Schüsseln", deren Böden sich bei $\omega = 0$ berühren. In diesem Fall liegen die Orte der größten Funktionswerte für $k_y = 0$ in der (k_x, ω) -Ebene auf zwei gekrümmten Linien, die bzgl. $\omega = 0$ symmetrisch sind.

In den drei Skizzen sind verschiedene Schnittflächen dargestellt. Liegt als Anregung an der Halbraumoberfläche kein Impuls vor, dann ist die Lösung der Oberflächenverschiebung im transformierten Raum nicht der vollständige dargestellte Doppelkegel, sondern es sind nur Teile davon. Nimmt man als Anregung z.B. eine zeitlich rein harmonische Einzellast der Frequenz Ω an der Oberfläche an, so wird der Doppelkegel in den Ebenen $\omega = \pm\Omega$ geschnitten (Abbildung 5.6(a)). Nur in diesen Schnittebenen ist die Lösung ungleich Null, der Rest des Doppelkegels verschwindet. In den Schnittebenen liegen die größten Funktionswerte auf Kreisen. Außerdem

haben die beiden Lösungen in ω -Richtung Delta-Dirac-Charakteristik. Wegen den Eigenschaften des Delta-Dirac kann und muss die Rücktransformation der Funktion vom Frequenz- in den Zeitbereich $\omega \bullet \rightarrow t$ analytisch erfolgen, numerisch sind nur die Transformationen $k_x \bullet \rightarrow x$, $k_y \bullet \rightarrow y$ zu berechnen.

Bewegt sich nun die harmonische Einzellast mit konstanter Geschwindigkeit in x -Richtung, so werden aus dem Doppelkegel zwei bzgl. k_x geneigte Ebenen "ausgeschnitten". Dabei hängt der Schnittwinkel von der Bewegungsgeschwindigkeit der Einzellast ab. In Abbildung 5.6(b) ist der Fall dargestellt, dass die Lastgeschwindigkeit kleiner als die Rayleighwellengeschwindigkeit ist. Für letztere gilt $c_R = \frac{\omega_R}{k_R}$ und sie entspricht gerade der Neigung der Wandung des Doppelkegels. Für Lastgeschwindigkeiten unterhalb der Rayleighwellengeschwindigkeit spricht man vom unterkritischen Fall, andernfalls vom überkritischen Fall (Abbildung 5.6(c)).

Die herausgeschnittenen Ebenen weisen für eine harmonische Einzellast auch im bewegten Fall eine Delta-Dirac-Charakteristik auf. Betrachtet man die Lösungsfunktionen im bewegten Koordinatensystem, so begibt man sich gedanklich in die geneigten Schnittebenen. Die Rücktransformation bzgl. ω im bewegten Koordinatensystem kann wieder analytisch erfolgen. Bei der numerischen Rücktransformation in die (bewegten) Ortskoordinaten liegen die größten Funktionswerte im unterkritischen Fall auf Ellipsen, im überkritischen Fall auf Hyperbeln.

Wird die Halbraumoberfläche durch eine zeitlich beliebig veränderliche bewegte Einzellast belastet, so ist die Funktion, abhängig von der Bandbreite der Anregung, in weiteren Bereichen bzgl. ω ungleich Null. In diesem Fall kann die Funktion sowohl im bewegten als auch im unbewegten Koordinatensystem numerisch dreidimensional rücktransformiert werden.

Bei der vorliegenden Berechnung der Wellenausbreitung findet eine Auswertung im unbewegten Koordinatensystem statt. Da das Frequenzband der Anregung schmal ist, bieten die Skizzen von Abbildung 5.6 eine gute Orientierungshilfe. Hinzu kommt, dass die Funktion sowohl in k_x , als auch in k_y -Richtung gewichtet wird, da die Belastung auf die Halbraumoberfläche nicht punktförmig ist.

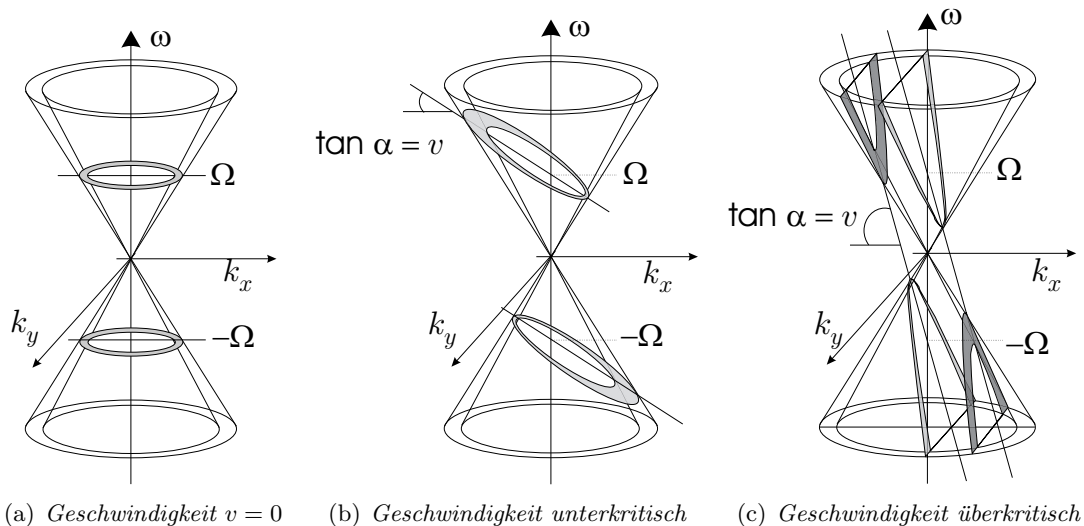


Abbildung 5.6: Lösungen im transformierten Raum (schematisch)

5.6 Reaktion aus Eigengewicht des Fahrzeugs

Die Reaktion der Balken/Boden-Kombination setzt sich aus einem statischen und einem dynamischen Anteil zusammen. Meist sind die Verschiebungen aus Eigengewicht deutlich größer als die dynamisch induzierten Verschiebungen, aber sie rufen keine Wellenausbreitung bzgl. des bewegten Koordinatensystems hervor. Die statische Belastung des Balkens durch die n_L -Lasten G_k ist beschrieben durch

$$p(x, t) = \sum_{k=0}^{n_L-1} G_k \delta(x - vt + l_k) \quad (5.72)$$

mit der Fourier-Transformierten

$$\hat{p}(k_x, \omega) = 2\pi \sum_{k=0}^{n_L-1} G_k e^{il_k k_x} \delta(\omega + vk_x). \quad (5.73)$$

Durch Einsetzen dieser Belastung in (5.69) und unter Zuhilfenahme von (5.71) erhält man für die transformierte Verschiebung des Halbraums

$$\hat{w}_B(k_x, k_y, \omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_i \frac{2\pi \sum_k G_k e^{il_k k_x} \delta(\omega + vk_x)}{D_s(k_x, \omega)} \frac{C_i(k_x, \omega)}{\hat{w}_0(k_x, \omega)} \hat{P}_i(k_y) \hat{H}_B(k_x, k_y, \omega), \quad (5.74)$$

wobei $\hat{H}_B(k_x, k_y, \omega)$ für die Grundlösung steht, d.h. für die Greensche Funktion des Halbraums.

Unter Ausnützung der Delta-Dirac-Eigenschaften ist eine analytische Rücktransformation in den Zeitbereich möglich:

$$\begin{aligned} \hat{w}_B(k_x, k_y, t) &= \sum_i \frac{\sum_k G_k e^{il_k k_x}}{D_s(k_x, \omega = -vk_x)} \frac{C_i(k_x, \omega = -vk_x)}{\hat{w}_0(k_x, \omega = -vk_x)} \hat{P}_i(k_y) \hat{H}_B(k_x, k_y, \omega = -vk_x) e^{-ivk_x t} \\ &= \hat{F}(k_x, k_y) e^{-ivk_x t} \quad . \end{aligned} \quad (5.75)$$

Im mitbewegten Koordinatensystem $\bar{x} = x - vt$ sieht man, dass durch das bewegte Eigengewicht keine Wellenausbreitung bzgl. des bewegten Koordinatensystems stattfindet. Die Verschiebung der Halbraumoberfläche ist in diesem Koordinatensystem unabhängig vom Zeitpunkt t :

$$w_B(\bar{x}, y, t) = \frac{1}{4\pi^2} \iint \hat{F}(k_x, k_y) e^{i\bar{x}k_x} e^{iyk_y} dk_x dk_y \quad (5.76)$$

$$= IFT_{k_x} \left(IFT_{k_y} \left(\hat{F}(k_x, k_y) \right) \right) \quad . \quad (5.77)$$

Kapitel 6

Anwendungsbeispiele

In allen Anwendungsbeispielen wird der Balken als Timoshenko-Balken modelliert und es ist gewährleistet, dass die Einsenkung unter dem Balken in Querrichtung konstant bleibt, d.h. dass die entsprechenden Spannungen nicht konstant sind.

6.1 Antwortfunktionen eines Balkens auf verschiedenen Böden infolge eines Impulses

In den Beispielen dieses Abschnitts erfolgt eine Untersuchung des Verhaltens eines Balkens auf ungeschichtetem und geschichtetem Halbraum im mitbewegten Koordinatensystem. Dabei wird zusätzlich zur Geschwindigkeit des Koordinatensystems der Elastizitätsmodul der einzelnen Bodenschichten variiert. Die Parameter aus Tabelle 6.1 bleiben in allen Fällen gleich. Geschichteter Boden ist durch zwei jeweils $2m$ hohe Schichten auf Halbraum charakterisiert. In den Bildern sind kleine Skizzen integriert, die Auskunft über die variablen Parameter geben sollen.

Balken:			
Breite:	$2b_s$	3.6	m
Höhe:	h_s	0.40	m
Dichte:	ρ_s	2400	kg/m^3
E -Modul:	E_s	$3.4 \cdot 10^{10}$	N/m^2
Schubsteifigkeitsmaß:	GA_Q	$1.46 \cdot 10^{10}$	N/m^2
Boden:			
Dichte:	ρ_B	2000	kg/m^3
Querdehnzahl	ν_B	0.3	-
Dämpfungsgrad	ζ_B	2.5	%

Tabelle 6.1: Balken- und Bodenparameter

6.1.1 Impulsgeschwindigkeitsreaktionsfunktionen

Um die Interaktion eines Einmassenschwingers mit der Balken/Boden-Kombination mittels (5.24) zu lösen, wird die Impulsgeschwindigkeitsreaktionsfunktion des Bodens im Ursprung des mitbewegten Koordinatensystems $\bar{x} = 0$ benötigt. Diese lässt sich durch die Rücktransformation der im transformierten Raum mit $i\omega$ multiplizierten Systemreaktionsfunktion (s. (5.26)) gewinnen.

Für einen ungeschichteten Halbraum mit einem Elastizitätsmodul von $E = 50 \cdot 10^6 [N/m^2]$ erhält man im bewegten Koordinatensystem die in Abbildung 6.1 dargestellten Impulsgeschwindigkeitsreaktionsfunktionen. Die Rayleighwellengeschwindigkeit dieses Bodens beträgt $c_R = 91 m/s$.

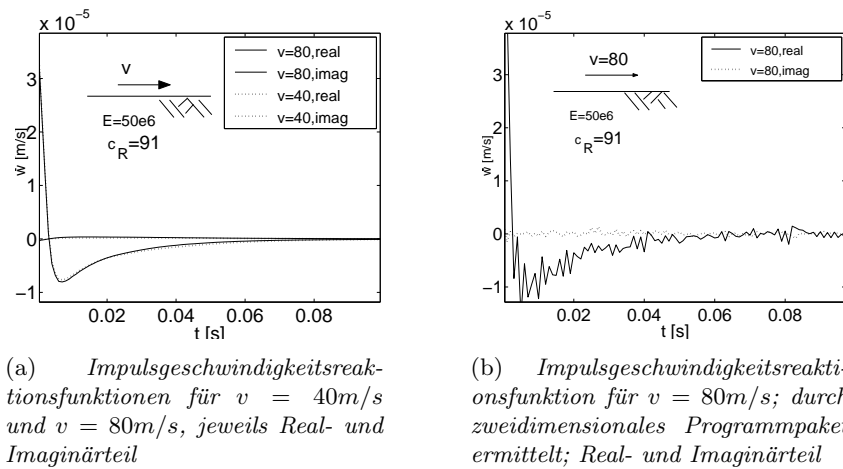


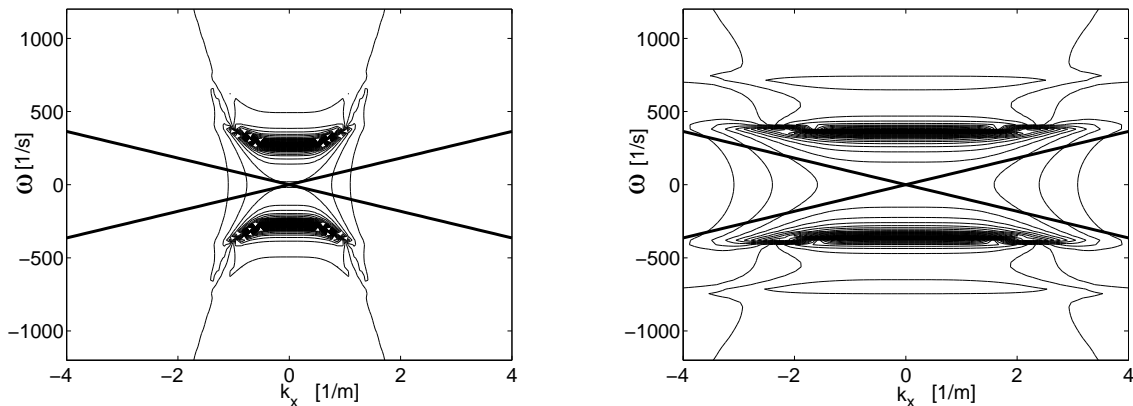
Abbildung 6.1: Impulsgeschwindigkeitsreaktionsfunktionen eines Balkens auf ungeschichtetem Halbraum

Zwischen den Impulsgeschwindigkeitsreaktionsfunktionen für $v = 40 m/s$ und $v = 80 m/s$ in Abbildung 6.1(a) ist praktisch kein Unterschied zu erkennen. Außerdem ist der Imaginärteil dieser Funktionen praktisch Null, was darauf hinweist, dass die Funktion im transformierten Raum genau genug abgetastet wurde.

Der Grund für die große Übereinstimmung in den Impulsgeschwindigkeitsreaktionsfunktionen für $v = 40 [m/s]$ und $v = 80 [m/s]$ besteht darin, dass beide Geschwindigkeiten unterhalb der Rayleighwellengeschwindigkeit und damit auch unterhalb der Primär- und Sekundärwellengeschwindigkeit liegen. Einen zusätzlichen Einfluss hat in diesem Zusammenhang auch die Kopplung des Bodens mit dem Balken. Streng genommen entwickelt sich dadurch an der Halbraumoberfläche keine klassische Rayleighwelle, da kein freier Rand vorliegt. Die hohe Steifigkeit des Balkens bewirkt höhere Wellengeschwindigkeiten zumindest im Balken und damit in gewissem Maße auch im Boden in Balkenlängsrichtung. In Querrichtung wird aufgrund der geringen Balkenbreite der Einfluss der Balken/Boden-Kopplung relativ gering sein. Die beiden Graphen in Abbildung 6.2 verdeutlichen diesen Zusammenhang: In Abbildung 6.2(a) sind die Höhenlinien der Impulsreaktionsfunktion des Balkens eingetragen. Im Falle ungeschichteten Halbraums bildet die Rayleighwelle im (k_x, k_y, ω) -Raum einen Kegel (s. Erläuterungen zu Abbildung 5.6). In der Ebene $k_y = 0$ erhält man entsprechend zwei sich im Ursprung kreuzende Geraden, die den

Ort der Rayleighwelle angeben. Diese Linien für die Rayleighwelle des Bodens ($c_R = 91[m/s]$) sind zusätzlich in den Abbildungen 6.2 eingetragen.

Wie erwartet, liegen die Geschwindigkeiten der Wellen des gekoppelten Balken/Boden-Systems weit oberhalb der Rayleighwellengeschwindigkeit. Dies äußert sich darin, dass die Steigung der Höhenlinien deutlich größer ist als die Steigung der angedeuteten Rayleighwelle. Zum Vergleich dazu ist in Abbildung 6.2(b) noch der Fall dargestellt, dass der Balken sehr geringe Steifigkeit und Masse aufweist. Dann nähern sich die Höhenlinien asymptotisch an die Linien der Rayleighwelle an.



(a) Höhenlinien der Impulsreaktionsfunktion des Balken/Boden-Systems im Wellenzahl-Frequenzbereich (k_x, ω); Eintragung der Rayleighwelle

(b) Höhenlinien der Impulsreaktionsfunktion des Balken/Boden-Systems für einen sehr weichen, leichten Balken im Wellenzahl-Frequenzbereich (k_x, ω); Eintragung der Rayleighwelle

Abbildung 6.2: Auswirkung der Balken-Boden-Kopplung auf die Wellengeschwindigkeiten im Balken

Abbildung 6.1(a) wurde durch eine relativ langwierige Berechnung mit einer zweidimensionalen Fast-Fourier-Transformation gewonnen. Durch die adaptive Abtastung des zweidimensionalen Programmpakets konnte eine Reduktion der Rechenzeit um ca. den Faktor 40 erzielt werden. Die auf diesem Weg erzeugte Funktion ist in Abbildung 6.1(b) dargestellt. Aufgrund der Multiplikation der Funktion mit $i\omega$ im Fourier-transformierten Raum verschlechtert sich das gute Abklingverhalten der Funktion, so dass zwischen dem Ergebnis der *FFT* und dem Ergebnis des zweidimensionalen Programmpakets sichtbare Unterschiede bestehen. Für die Interaktionsberechnung ist die erreichte Genauigkeit jedoch ausreichend.

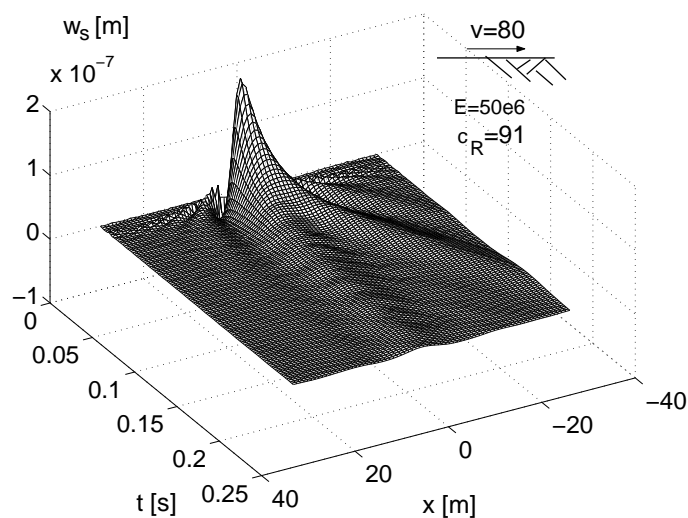
6.1.2 Impulsreaktionsfunktionen

Wird die Interaktionskraft aus dem Gleichungssystem eliminiert, so kann im Zeitschrittalgorithmus anstatt der Impulsgeschwindigkeitsreaktionsfunktion auch die Impulsreaktionsfunktion selbst verwendet werden. In diesem Fall weist die Funktion im transformierten Raum Eigenschaften auf, unter denen das zweidimensionale Programmpaket optimal funktioniert: Nur in kleinen Bereichen muss die Funktion mit hoher Auflösung abgetastet werden, in großen Bereichen dagegen genügt aufgrund der Glattheit der Funktion eine grobe Auflösung. Das Programm ermöglicht

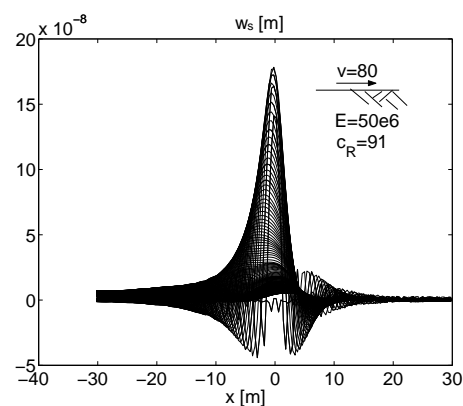
eine Rücktransformation der Funktion in den Orts-Zeitbereich mit gezielt hoher Auflösung und großem Wertebereich für die Zeitachse und niedrigerer Auflösung in \bar{x} -Richtung.

Zu beachten ist, dass in den Abbildungen der Impulsreaktionsfunktion im bewegten Koordinatensystem die Koordinate \bar{x} nicht konsequent mit einem Querstrich gekennzeichnet ist. Bei den Graphen handelt es sich um den Realteil der Funktionen, falls weitere Angaben fehlen.

Balken auf ungeschichtetem Halbraum



(a) Darstellung im Orts-Zeitbereich (\bar{x}, t)



(b) Ansicht der Funktion senkrecht zur \bar{x} -Achse

Abbildung 6.3: Impulsreaktionsfunktion eines Balkens auf ungeschichtetem Halbraum für $E = 50 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$, $v = 80 \text{ m/s}$; Realteil

In Abbildung 6.3 ist die Impulsreaktionsfunktion eines ungeschichteten Halbraums mit einem E -Modul von $E = 50 \cdot 10^6 \text{ [N/m}^2\text{]}$ im mit $v = 80 \text{ [m/s]}$ bewegten Koordinatensystem dargestellt. Abbildung 6.3(a) zeigt die Funktion in ihrer Orts- und Zeitabhängigkeit. Wie zu erwarten ist, befindet sich die maximale Amplitude der Oberflächenverschiebung zu frühen Zeitpunkten in der Nähe des Ortsursprungs. Mit zunehmender Zeit breitet sich die Oberflächenverschiebung sowohl in positive als auch in negative \bar{x} -Richtung aus.

Zu erkennen sind zumindest zwei Wellentypen: ein langsamerer, der sich für größere Zeitpunkte t in Form von zwei "Armen" abzeichnet, wovon einer fast parallel zur t -Achse liegt. Zusätzlich ist ein schneller Wellentyp vorhanden, der nur für kleine Zeitpunkte sichtbar ist und dort die "Arme" einhüllt.

Sowohl aus dieser Perspektive als auch aus der Ansicht der Funktion in Abbildung 6.3(b) ist ersichtlich, dass sich die Wellen in negativer \bar{x} -Richtung im betrachteten Zeitraum weiter ausbreiten als in positiver \bar{x} -Richtung. Begründet ist dieser Effekt durch die Betrachtung der Impulsreaktionsfunktion im mitbewegten Koordinatensystem: Die Relativgeschwindigkeit der Welle in positiver \bar{x} -Richtung ist geringer als diejenige in negativer \bar{x} -Richtung.

Trägt man die berechnete Impulsreaktionsfunktion für $\bar{x} = 0$ über t auf, so erhält man als Realteil die dicke durchgezogene Linie (“h,orig,real”) und als Imaginärteil die gestrichelte Linie (“h,orig,imag”) in Abbildung 6.4(a).

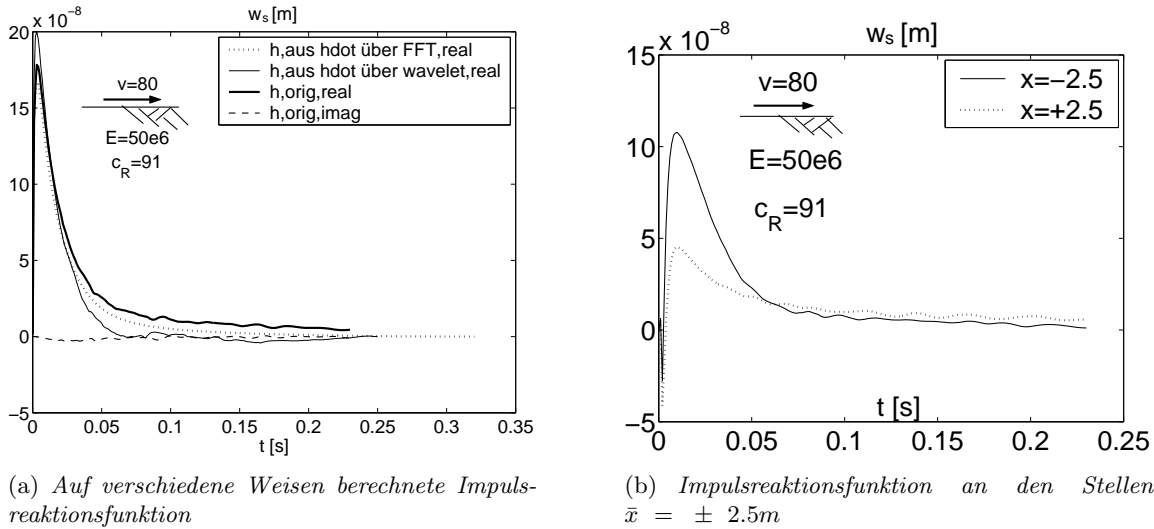


Abbildung 6.4: Impulsreaktionsfunktion eines Balkens auf ungeschichtetem Halbraum mit $E = 50 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$, $v = 80 \text{ m/s}$, Vergleich der Rechnergebnisse

In dieser Abbildung wird ein Vergleich der Ergebnisse verschiedener Berechnungsarten dargestellt. Die gepunktete Linie ist das Ergebnis aus der Integration der in Abbildung 6.1(a) dargestellten Funktion des Realteils für $v = 80 \text{ m/s}$, denn es gilt:

$$h(t) = \int_0^t \dot{h}(\tau) d\tau + c_h \quad . \quad (6.1)$$

Dabei wird c_h aus (5.27) gewonnen und bewirkt, dass die Funktion am Ende des betrachteten Zeitraums gleich Null ist. Die dünne durchgezogene Linie ergibt sich bei gleichem Vorgehen aus dem Realteil der Funktion in Abbildung 6.1(b), die mit Hilfe des zweidimensionalen Programmpakets ermittelt wurde.

Vergleicht man die Realteile dieser Funktionen, die an sich identisch sein sollten, so zeigt sich eine gute Übereinstimmung insbesondere der Lösungen, die aus den Funktionen der Abbildungen 6.1(a) und 6.3(a) entstanden sind.

Abbildung 6.4(b) zeigt die Impulsreaktionsfunktionen an den Stellen $\bar{x} = \pm 2.5 \text{ m}$ im mitbewegten Koordinatensystem. Hier wirkt sich aus, was bereits im Zusammenhang mit Abbildung 6.3(a) erläutert wurde: Der Impuls wird zum Zeitpunkt $t = 0$ im Ortsursprung aufgebracht. Ab diesem Moment bewegen sich die Wellen in positive und negative \bar{x} -Richtung symmetrisch mit gleicher Geschwindigkeit. Da sich das Koordinatensystem in positiver \bar{x} -Richtung bewegt, klingt die Amplitude der Balkenverschiebung in dieser Richtung stärker ab. Deshalb wird in Abbildung 6.4(b) im Falle $\bar{x} = -2.5 \text{ m}$ eine größere Amplitude erreicht als im Falle $\bar{x} = +2.5 \text{ m}$.

Balken auf geschichtetem Boden

Wie bereits erwähnt, besteht der hier beschriebene geschichtete Halbraum aus zwei jeweils $2m$ hohen Schichten auf Halbraum.

Im (x, t) -Koordinatensystem erhält man für $v = 80[m/s]$ die Abbildung 6.6(a) als Impulsreaktionsfunktion eines Balkens auf einem Boden mit $E_o = 30 \cdot 10^6 [N/m^2]$, $E_m = 90 \cdot 10^6 [N/m^2]$, $E_u = 50 \cdot 10^6 [N/m^2]$, wobei die Indizes o, m, u die obere und mittlere Schicht sowie den untenliegenden Halbraum bezeichnen. Dieser Boden ist gekennzeichnet durch eine extrem weiche Schicht auf einer festen Schicht, die wiederum auf einem relativ weichen Halbraum lagert. Abbildung 6.6(c) zeigt die Antwort eines Balkens auf einem Boden, der durch eine mittelfeste Schicht auf extrem weicher Schicht auf relativ weichem Halbraum beschrieben ist (Schließlich ist in Abbildung 6.6(e) noch der Fall dargestellt, dass der Boden aus einer festen Schicht auf extrem weicher Schicht auf relativ weichem Halbraum besteht ($E_o = 90 \cdot 10^6 [N/m^2]$, $E_m = 30 \cdot 10^6 [N/m^2]$, $E_u = 50 \cdot 10^6 [N/m^2]$).

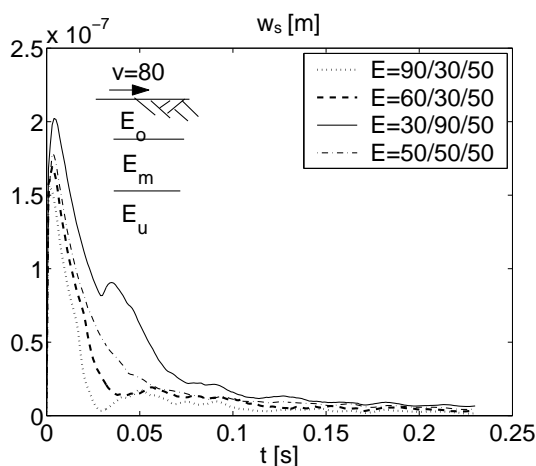


Abbildung 6.5: Impulsreaktionsfunktionen eines Balkens auf verschiedenen Böden für $\bar{x} = 0$ und $v = 80m/s$

In den Fällen $v = 40[m/s]$ und $v = 80[m/s]$ unterscheiden sich die Funktionen für die verschiedenen Bodenparameter (s. Abbildung 6.6(b), Abbildung 6.6(d) und Abbildung 6.6(f)) nur unwesentlich.

In Abbildung 6.5 ist eine Zusammenstellung der Impulsreaktionsfunktionen eines Balkens auf verschiedenen Böden für $\bar{x} = 0$ und $v = 80m/s$ dargestellt. Die Elastizitätsmodule der einzelnen Bodenschichten sind in verkürzter Form in der Bildlegende mit der Reihenfolge $E_o/E_m/E_u$ angegeben. Wie auch in den anderen Bildern zu erkennen ist, findet offensichtlich eine Reflexion der Wellen an den Schichtgrenzen statt, die sich in Form weiterer Funktionsextrema im Verlauf der Zeit t äußert.

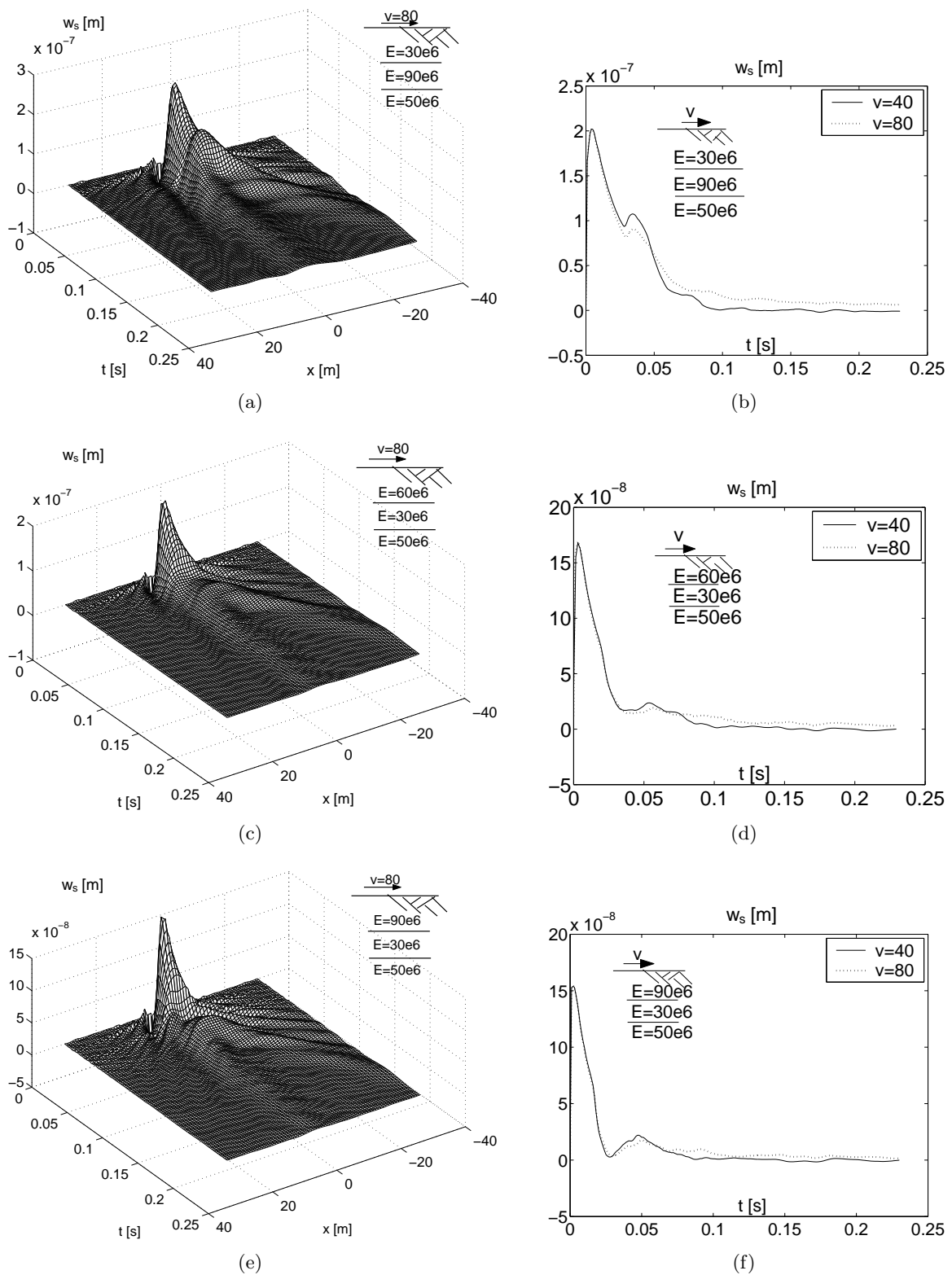


Abbildung 6.6: Linke Spalte: Impulsreaktionsfunktionen eines Balkens auf geschichtetem Halbraum in (x, t) ; rechts: Vergleich verschiedener Geschwindigkeiten bei $\bar{x} = 0$

6.2 Vorfaktoren der Legendre-Polynome

Um die im vorherigen Abschnitt angegebenen Antwortfunktionen eines Balkens auf Halbraum zu erhalten, müssen die Vorfaktoren der Legendre-Polynome zur Einhaltung der konstanten Einsenkung unter dem Balken in Querrichtung wellenzahl-frequenz- $(k_x, \omega - vk_x)$ -abhängig berechnet werden. In Abschnitt 5.5 wird erklärt, wie diese im Zuge der Berechnung abgespeicherten Werte im äquidistanten (k_x, ω) -Raster beschrieben werden können. Diese Ergebnisse erlauben eine sehr effektive Berechnung der Wellenausbreitung auf der Halbraumoberfläche mit Hilfe des dreidimensionalen Programmpakets.

Im unbewegten (k_x, ω) -Koordinatensystem gilt für die Vorfaktoren C_i

$$\begin{aligned} C_i(-k_x, \omega) &= C_i(k_x, \omega) \\ C_i(k_x, -\omega) &= \bar{C}_i(k_x, \omega) \quad , \end{aligned} \quad (6.2)$$

wobei hier $\bar{\cdot}$ die konjugiert komplexe Größe kennzeichnet. Diese beiden Symmetrien bewirken zum einen, dass alle bei der Rasterermittlung berechneten Punkte auf einen Quadranten (hier den dritten) projiziert werden können und somit für die zweidimensionale Interpolation mehr Punkte zur Verfügung stehen. Zum anderen genügt es anschließend, nur die interpolierten Werte in diesem Quadranten abzuspeichern, da sich daraus alle übrigen Werte ableiten lassen.

Darüber hinaus gilt, dass die Vorfaktoren im unbewegten Koordinatensystem geschwindigkeitsunabhängig sind. Deshalb genügt es, sie nur für eine bestimmte Geschwindigkeit im Zuge der Ermittlung der Impulsreaktionsfunktion eines Balkens auf einem bestimmten Boden zu bestimmen.

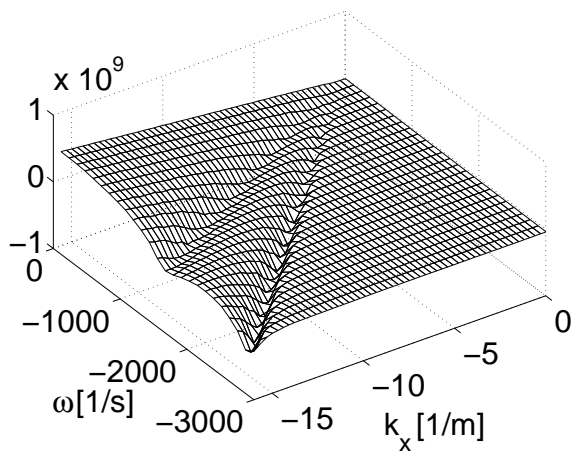
Zur Erinnerung: Die Vorfaktoren werden benötigt, um einen Spannungsverlauf auf der Halbraumoberfläche so zu beschreiben, dass die Einsenkung der Oberfläche infolge dieser Spannung in einem vorgegebenem Bereich, der Balkenbreite, konstant ist. Den Spannungsverlauf erhält man aus der Superposition der mit den Vorfaktoren multiplizierten Legendre-Polynome, die in Abschnitt D aufgelistet sind.

Im Falle von ungeschichtetem Halbraum erhält man für eine Einheitseinsenkung die Graphen von Abbildung 6.7 für die Vorfaktoren des nullten, vierten und achten Polynoms.

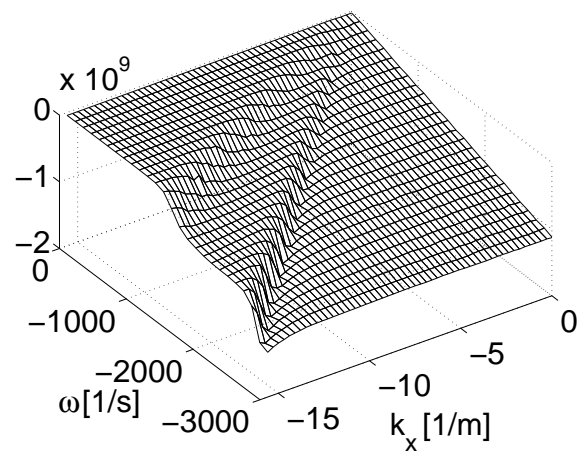
Zumindest dem Nulldurchgang im Realteil des Vorfaktors des nullten Polynoms (Abbildung 6.7(a)) kann eine physikalische Bedeutung zugeordnet werden: Die Größe dieses Vorfaktors gibt die wellenzahl-frequenzabhängige Kraft an, die benötigt wird, um eine Einheitseinsenkung des Bodens über die Balkenbreite zu erzielen. Für die Rayleighwelle ist diese benötigte Kraft minimal, da dort die größten Verschiebungen auftreten. Im Falle ungeschichteten Halbraums bildet die Rayleighwelle im (k_x, k_y, ω) -Raum einen Kegel (s. Erläuterungen zu Abbildung 5.6). In der Ebene $k_y = 0$ erhält man entsprechend zwei sich im Ursprung kreuzende Geraden, die den Ort der Rayleighwelle angeben.

Trägt man die Gerade, die die Rayleighwelle charakterisiert, in Abbildung 6.7(a) ein, so erkennt man das Zusammenfallen des Nulldurchgangs mit der Rayleighwelle, (s. Abbildung 6.9(a)). Für diesen Boden beträgt die Rayleighwellengeschwindigkeit $c_R = 91\text{m/s}$. Zur Verdeutlichung ist in Abbildung 6.9(b) der Kehrwert des Betrags des nullten Polynoms mit der gleichen Geraden dargestellt. Hier fallen erwartungsgemäß die Maxima mit der Rayleighwelle zusammen.

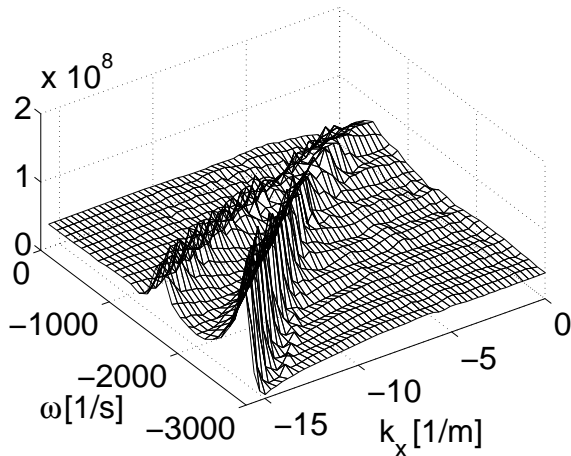
Bei geschichtetem Halbraum ist eine zusätzliche Wellencharakteristik in ω -Richtung erkennbar. Diese ergibt sich vermutlich aus den Eigenfrequenzen der Schichten, da der Abstand der Wellenmaxima bzgl. ω für den Fall “weiche Schicht oben” kürzer ist als für den Fall “feste Schicht oben”. Das deckt sich mit der Tatsache, dass weichere Schichten niedrigere Eigenfrequenzen haben als festere. Für das nullte Polynom ist dieser Zusammenhang in Abbildung 6.10 dargestellt.



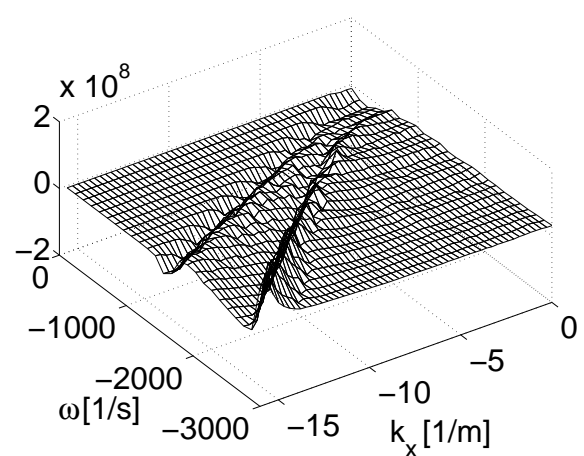
(a) 0. Polynom, Realteil



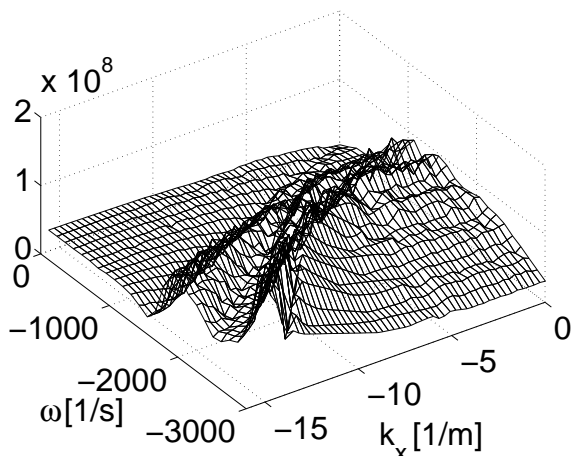
(b) 0. Polynom, Imaginärteil



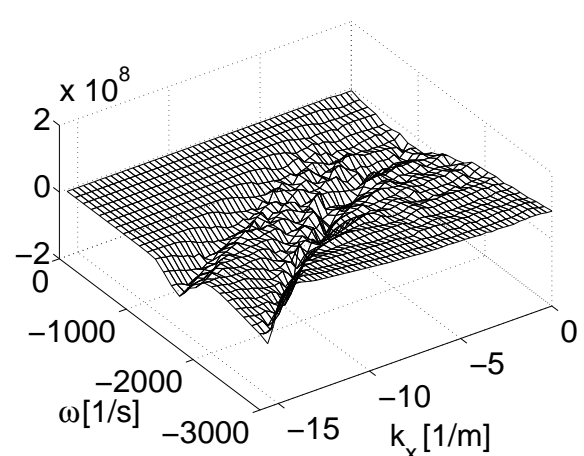
(c) 4. Polynom, Realteil



(d) 4. Polynom, Imaginärteil

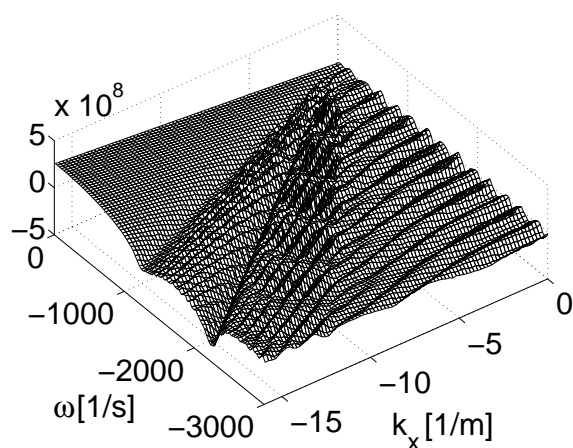


(e) 8. Polynom, Realteil

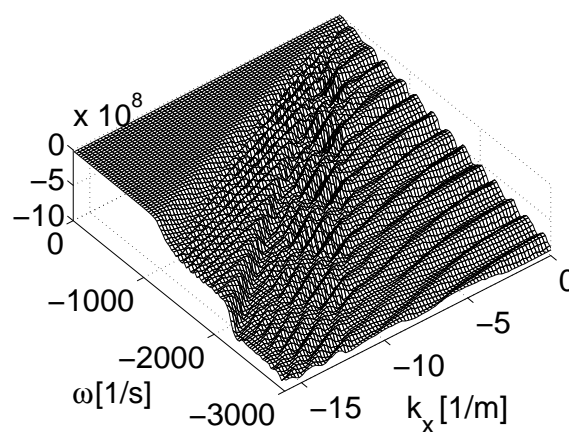


(f) 8. Polynom, Imaginärteil

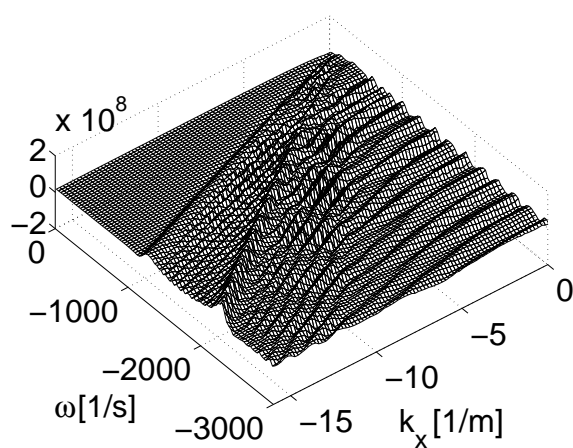
Abbildung 6.7: Vorfaktoren der Legendre-Polynome für ungeschichteten Boden mit $E = 50 \cdot 10^6 [N/m^2]$ für eine Einheitseinsenkung



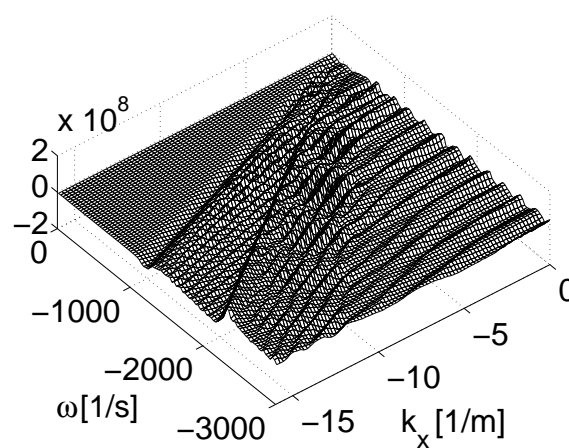
(a) 0. Polynom, Realteil



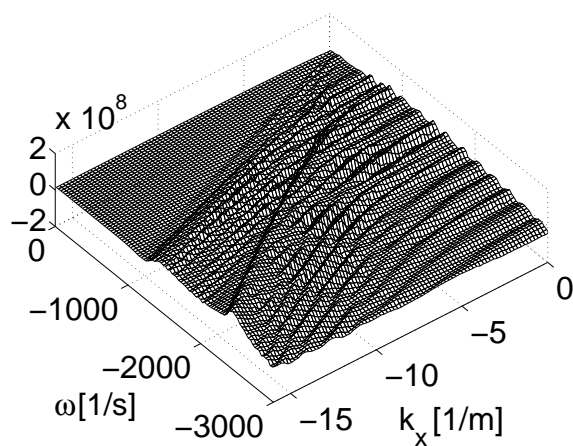
(b) 0. Polynom, Imaginärteil



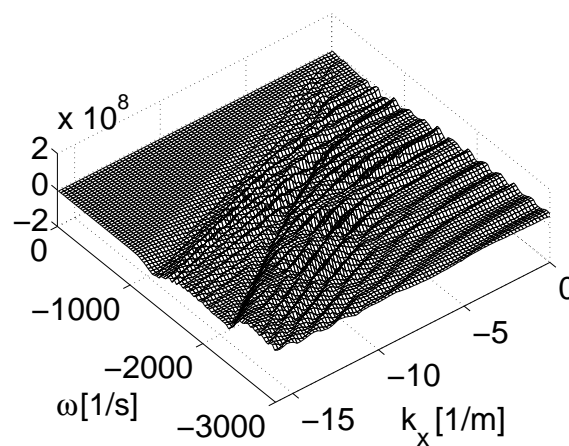
(c) 4. Polynom, Realteil



(d) 4. Polynom, Imaginärteil



(e) 8. Polynom, Realteil



(f) 8. Polynom, Imaginärteil

Abbildung 6.8: Vorfaktoren der Legendre-Polynome für *geschichteten* Boden mit $E_o = 30 \cdot 10^6 [N/m^2]$, $E_m = 90 \cdot 10^6 [N/m^2]$, $E_u = 50 \cdot 10^6 [N/m^2]$ für eine Einheitseinsenkung

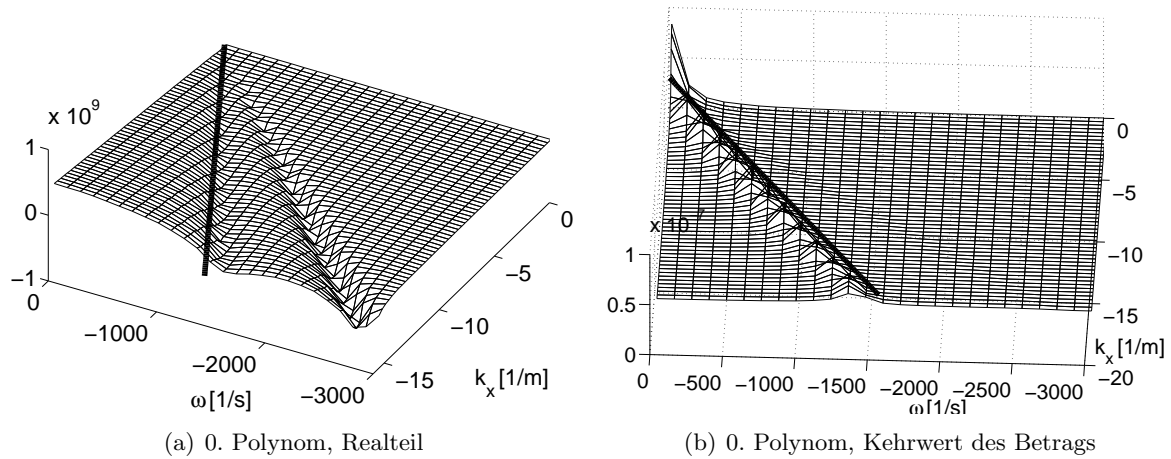


Abbildung 6.9: Identifizierung der *Rayleighwelle* im Vorfaktor des Legendre-Polynoms nullter Ordnung für ungeschichteten Halbraum mit $E = 50 \cdot 10^6 \text{ [N/m}^2\text{]}$

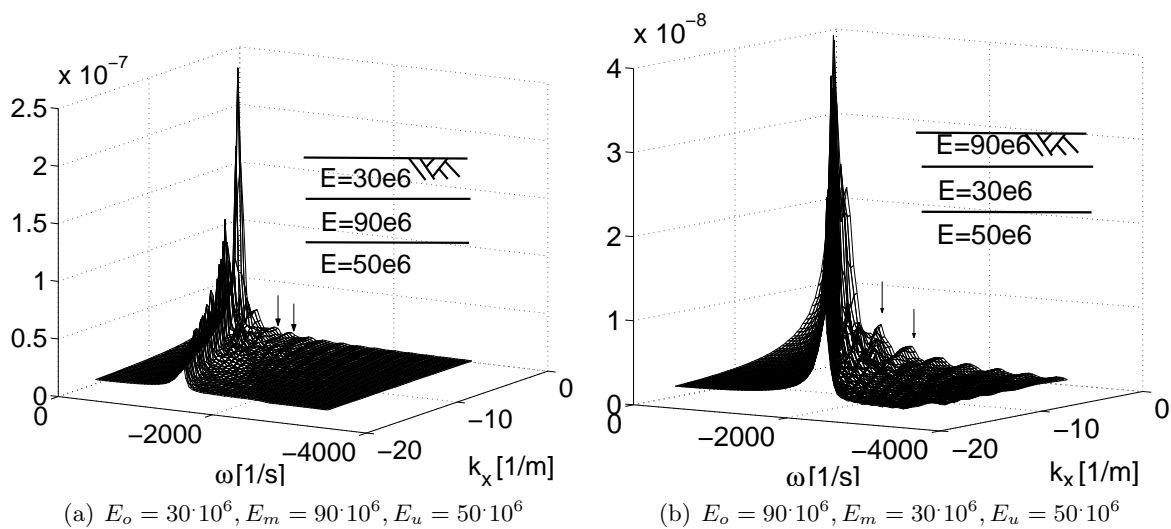


Abbildung 6.10: Vergleich der Kehrwerte der Beträge der Legendre-Polynom-Vorfaktoren nullter Ordnung für geschichtete Böden mit unterschiedlichen Materialparametern (Elastizitätsmodule in $\text{[N/m}^2\text{]}$)

6.3 Anmerkungen zur Anwendung des zweidimensionalen Programmpakets

Bisher wurden nur die Ergebnisse des zweidimensionalen Programmpakets dargestellt. Anhand einer Beispielfunktion soll auch kurz auf die Zwischenschritte *Rasterung* und *Wavelettransformation* eingegangen werden. Auf einem Pentium III-Prozessor mit 500 MHz beträgt die Rechenzeit zur Ermittlung der Impulsreaktionsfunktion und der Legendre-Polynome des Balkens auf geschichtetem Boden zwischen 20 und 30 Stunden. Bei der Rasterung werden dabei zwischen 15000 und 20000 Elemente erzeugt. Am zeitintensivsten erweist sich die eindimensionale Fast-Fourier-Rücktransformation der Wellenzahlen k_y in den Ortsbereich y . Für diese Rücktransformation werden je betrachtetem (k_x, ω) 1500 Funktionswerte in k_y -Richtung ermittelt. Für jeden dieser Funktionswerte muss ein Gleichungssystem für den geschichteten Boden gelöst werden. Die enorme Anzahl der Gleichungssysteme, die nicht parallel gelöst werden konnten, bedingt die relativ hohe Rechenzeit. Sowohl die Anzahl der zu ermittelnden k_y -Werte als auch das Lösen der Gleichungssysteme lassen sich jedoch mit Sicherheit noch optimieren.

Es darf allerdings nicht übersehen werden, dass in den ermittelten Impulsreaktionsfunktionen bereits die komplette Kopplung des Bodens mit dem Balken für ein sehr breites Frequenzband möglicher Anregungen enthalten ist.

Für ungeschichteten Halbraum ist die Berechnungszeit erheblich kürzer, da für den Boden keine Gleichungssysteme gelöst werden müssen und damit die Berechnung problemlos vektorisiert werden kann.

6.3.1 Darstellung des Abtastrasters

Für den Balken auf geschichtetem Boden mit $E_o = 60 \cdot 10^6 [N/m^2]$, $E_m = 30 \cdot 10^6 [N/m^2]$, $E_u = 50 \cdot 10^6 [N/m^2]$ und für eine Systemgeschwindigkeit von $v = 80 [m/s]$ zeigt Abbildung 6.11 die Funktion und das Raster, mit der das zweidimensionale Programmpaket diese Funktion abtastet. In allen Beispielen wurde die ω -Achse mit dem Faktor $1/300$ gestaucht, um die Funktionen sinnvoll mit einem Quadratraster abtasten zu können. Um eine ausreichende Genauigkeit bei der Interpolation der Legendre-Polynom-Vorfaktoren in einem äquidistanten Raster zu erreichen, wurde im Rasterprogramm eine Obergrenze für den Abtastabstand vorgegeben. Wird ein Balken auf Boden bei verschiedenen Geschwindigkeiten untersucht, so kann diese Obergrenze bei den Folgeberechnungen entfallen (vgl. 6.2). Dadurch steigt wegen der geringeren Anzahl von Funktionsauswertungen die Berechnungsgeschwindigkeit deutlich.

6.3.2 Waveletkoeffizienten

In Abbildung 6.12 sind die Realteile der ermittelten Waveletkoeffizienten der im vorigen Abschnitt untersuchten Funktion dargestellt. Zu erkennen ist nicht zuletzt auch im Detailausschnitt, dass ein Großteil der Koeffizienten klein ist und damit ohne großen Fehler vernachlässigt werden kann. Der Anteil der Waveletkoeffizienten, die in den Beispielen für die Rücktransformation verwendet wurden, betrug zwischen zwei und fünf Prozent.

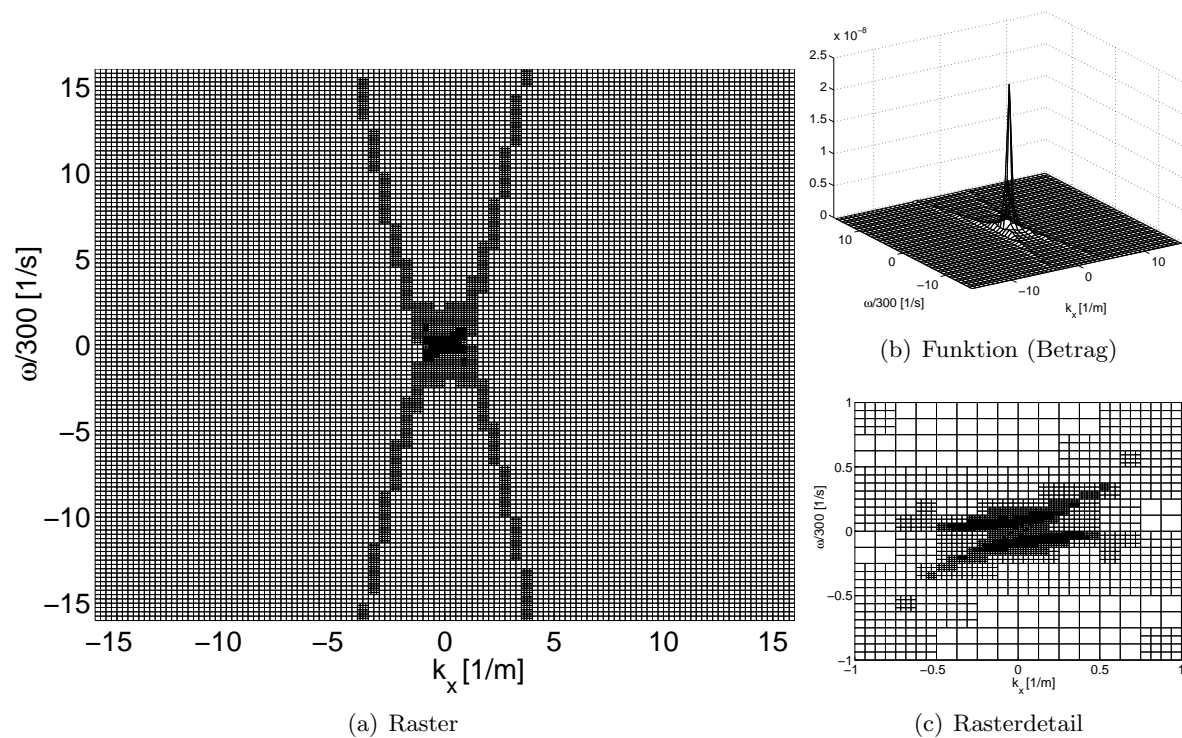


Abbildung 6.11: Impulsreaktionsfunktion und Raster für den Balken auf geschichtetem Boden mit $E_o = 60 \cdot 10^6 [N/m^2]$, $E_m = 30 \cdot 10^6 [N/m^2]$, $E_u = 50 \cdot 10^6 [N/m^2]$ und $v = 80 [m/s]$

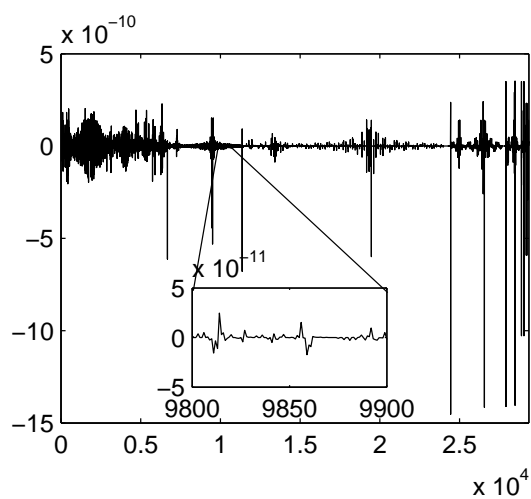


Abbildung 6.12: Waveletkoeffizienten der Funktion von Abschnitt 6.3.1

6.4 Nichtlineare Interaktion zwischen Fahrzeug und 3D-Balken/Boden-System

6.4.1 Fahrzeugmodell Einmassenschwinger

Für den Balken auf ungeschichtetem Halbraum zeigt Abbildung 6.14 einen Vergleich der Berechnungen mit und ohne Interaktionskraft als Unbekannter im Gleichungssystem. Die nichtlinearen Berechnungen wurden mit den Systemmatrizen von (5.24) bzw. (5.31) vorgenommen. Die verwendete Impulsgeschwindigkeitsreaktionsfunktion für den ersten Fall ist in Abbildung 6.1(a) gegeben, die Impulsreaktionsfunktion für den Fall, bei dem die Interaktionskraft eliminiert wird, in Abbildung 6.3(a). Abschnitt 5.3.4 beschreibt das verwendete Newton-Raphson Verfahren.

Als Fahrzeugparameter wurden die in Tabelle 6.2 angegebenen Werte verwendet. Bei den angegebenen Parametern für die Feder verhält sich diese stark nichtlinear und weist die in Abbildung 6.13 dargestellte Federkennlinie auf. Die Anregung ist der ersten Radunrundheit nachempfunden.

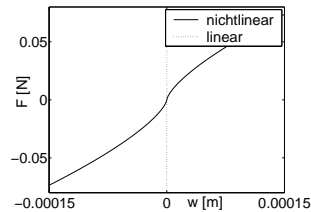


Abbildung 6.13: Nichtlineare Federkennlinie und lineare Vergleichslinie mit Steifigkeit k_o

den. Deren Frequenz ergibt sich für einen Radumfang von $2.883m$ bei einer Geschwindigkeit von $80m/s$ zu $f = 80/2.883 \approx 28Hz$. Damit erhält man:

$$\Delta w(t) = 1.5 \cdot 10^{-4} \sin(28 \cdot 2\pi t) [m] \quad .$$

In Abbildung 6.14 sind die Ergebnisse aus den beiden nichtlinearen Vergleichsberechnungen jeweils in einem Graphen dargestellt. Erwartungsgemäß sind beide Ergebnisse praktisch identisch, weshalb nur jeweils eine Linie für die Verschiebung der Masse (w_W), die Verschiebung des Balkens (w_s) und die Interaktionskraft (F) zu erkennen ist. Mit Hilfe von (5.54) kann die weitgehend analytische Lösung des linearen, harmonischen Falles berechnet werden (kleines Bild in Abbildung 6.15). Zusammen mit dem Ergebnis der linearen Zeitschrittberechnung ist diese

Geschwindigkeit:	v	80	m/s
Masse:	m_W	3000	kg
Grundwert der Federsteifigkeit:	k_o	$7 \cdot 10^5$	N/m
Nichtlinearer Federparameter 1:	n	0.3	–
Nichtlinearer Federparameter 2:	a	20000	–
Dämpfung:	c_1	3670	Ns/m

Tabelle 6.2: Parameter des Einmassenschwingers

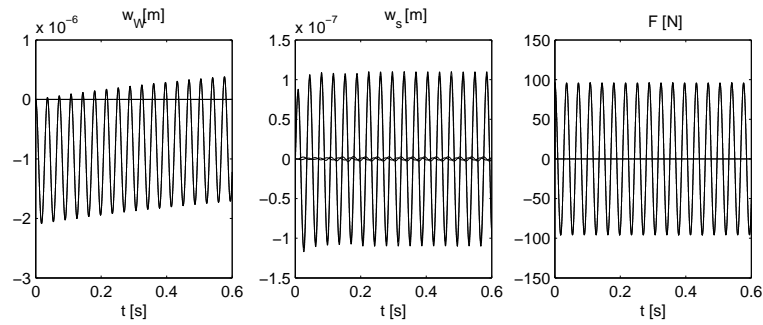


Abbildung 6.14: Vergleich der Ergebnisse aus den Berechnungen mit und ohne Interaktionskraft als Unbekannter im Gleichungssystem. In den Graphen sind jeweils beide Ergebnisse dargestellt.

Lösung in Abbildung 6.15 dargestellt. Als Federsteifigkeit der linearen Feder wurde dabei deren Grundsteifigkeit k_o verwendet. Im linearen Fall ist in den Antworten deutlich ein homogener Lösungsanteil zu erkennen. Dieser entsteht dadurch, dass sich das Fahrzeug aus der Ruhe mit konstanter Geschwindigkeit in Bewegung setzt. Die sinusförmige Radunrundheit bewirkt einen Impuls auf den Balken, da die vertikale Geschwindigkeit des Rades von Null auf einen konstanten Wert ansteigt, was nur durch eine ‐unendliche‐ Beschleunigung erreicht werden kann. Dieser homogene Lösungsanteil dominiert im betrachteten Zeitraum die Antwort der Masse und hat einen sichtbaren Einfluss auch auf die Verschiebung des Balkens. Eliminiert man gedanklich den homogenen Anteil aus der Balkenantwort, so findet man in den Amplituden eine sehr gute Übereinstimmung mit der analytischen Berechnung. Auch die Frequenz des partikulären Anteils stimmt erwartungsgemäß mit der Anregungsfrequenz überein.

Durch die weichere Feder sind die Amplituden der Antwortgrößen im nichtlinearen Fall (Abbildung 6.14) kleiner als im linearen Fall (Abbildung 6.15). Die Nichtlinearität bewirkt hier auch, dass der homogene Lösungsanteils in der Antwort des Balkens und in der Interaktionskraft weitgehend verschwindet. Bei der Antwort des Wagens hat sich die Frequenz des homogenen Anteils deutlich verringert.

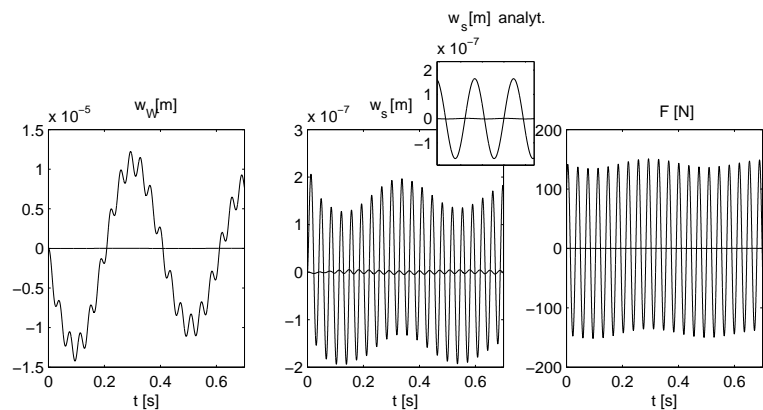


Abbildung 6.15: Lineare Berechnung der Interaktion im Zeitbereich und analytische Lösung

6.4.2 Fahrzeugmodell Drehgestell

In den hier behandelten Beispielen fahren im Rechenmodell Drehgestelle mit unterschiedlichen linearen und nichtlinearen Federkennlinien der Primärfedern mit einer Geschwindigkeit von 80m/s auf Fahrbahnen, die auf geschichtetem Halbraum lagern.

Tabelle 6.3 listet die Fahrzeugparameter auf, die in allen Beispielen gleich sind.

Geschwindigkeit:	v	80	m/s
Achsabstand:	Δl	2.5	m
Masse Wagenkasten:	m_W	20300	kg
Masse Drehgestell:	m_D	2980	kg
Masse Radsatz:	m_R	1760	kg
Grundwert der Federsteifigkeit der Primärfederung:	k_o	$7.04 \cdot 10^5$	N/m
Dämpfung der Primärfederung:	c_1	$2.02 \cdot 10^4$	Ns/m
Federsteifigkeit der Sekundärfederung:	k_2	$19.44 \cdot 10^5$	N/m
Dämpfung der Sekundärfederung:	c_2	$2.38 \cdot 10^4$	Ns/m
Rotationsträgheitsmoment des Drehgestells:	I_θ	650	kgm^2
Frequenz der Radunrundheit des führenden Rads:	f_0	28	Hz
Frequenz der Radunrundheit des hinteren Rads:	f_1	56	Hz
Amplitude der Radunrundheiten:	$A_{\Delta w}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$	m

Tabelle 6.3: Parameter des Einmassenschwingers

Als Anregung wurden wie im Fall des Einmassenschwingers Radunrundheiten verwendet, da im linearen Fall für harmonische Belastungen analytische Vergleichslösungen angegeben werden können. Ebenso gut können beliebige Rauigkeiten der Fahrbahn als Anregungen angenommen werden. Für das vordere Rad wurde eine Anregung aus der ersten Radunrundheit als dominant festgelegt, die sich wie beim Fall *Einmassenschwinger* zu 28 Hz ergibt. Beim hinteren Rad soll dagegen die zweite Radunrundheit mit 56 Hz dominieren. In den Beispielen beginnen die Anregungen der beiden Räder sinusförmig

Lineare Interaktionsberechnung

Zur Überprüfung des Verfahrens stellt Abbildung 6.16 die Interaktion unter der Annahme linearer Primärfedern der Steifigkeit k_o dar. Der Boden ist durch die Impulsreaktionsfunktion in Abbildung 6.6(e) charakterisiert, weist also $E_o = 90 \cdot 10^6 [\text{N/m}^2]$, $E_m = 30 \cdot 10^6 [\text{N/m}^2]$, $E_u = 50 \cdot 10^6 [\text{N/m}^2]$ und $v = 80 [\text{m/s}]$ als Parameter auf. Die folgende Zusammenstellung wiederholt kurz die Bedeutung der einzelnen in Abbildung 5.5 dargestellten Größen:

- w_{s0} , w_{s1} : Balkenverschiebungen unter der vorderen und der hinteren Radachse
- F_0 , F_1 : Interaktionskräfte Rad-Balken unter vorderer und hinterer Radachse
- w_D : Verschiebung des Drehgestells

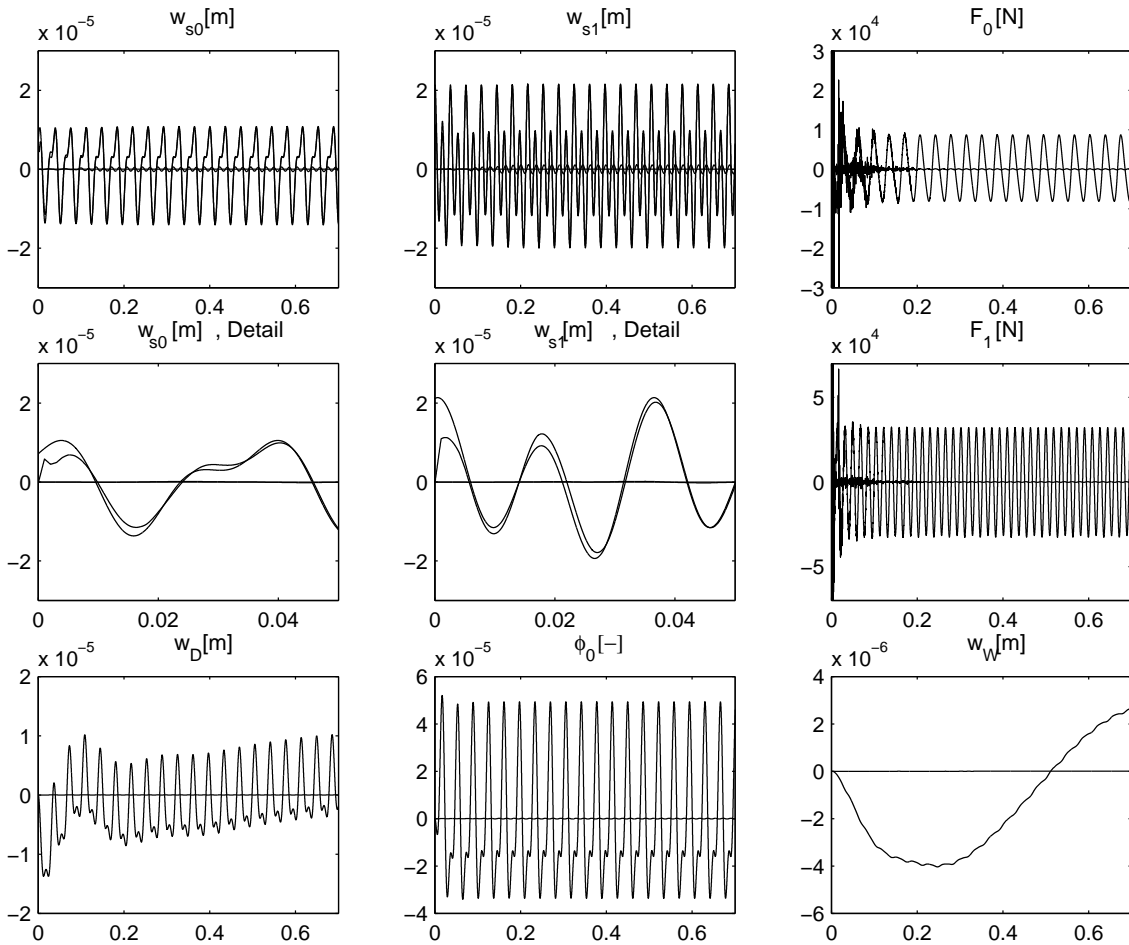


Abbildung 6.16: Zeitverläufe der linearen Interaktion eines Drehgestells ($v = 80[m/s]$) mit einem Balken auf geschichtetem Boden $E_o = 90 \cdot 10^6 [N/m^2]$, $E_m = 30 \cdot 10^6 [N/m^2]$, $E_u = 50 \cdot 10^6 [N/m^2]$ und $v = 80[m/s]$ und weitgehend analytische Vergleichslösung

- ϕ_0 : Verdrehung des Drehgestells
- w_W : Verschiebung des Wagenkastens

In den Graphen der Balkenverschiebungen unter den beiden Radachsen (w_{s0} und w_{s1}) sind sowohl die Ergebnisse der Berechnung mittels Zeitschrittverfahren als auch diejenigen der analytischen Berechnung dargestellt. Nur in den Detailausschnitten (w_{s0} , Detail und w_{s1} , Detail) ist aufgrund der Anwesenheit eines homogenen Lösungsanteils für die dortigen frühen Zeitpunkte ein Unterschied zwischen beiden Berechnungen festzustellen. Dieser homogene Lösungsanteil kommt wie beim Fahrzeugmodell *Einmassenschwinger* durch das plötzliche Anfahren zustande. Er wirkt sich hauptsächlich auf die Verschiebungsantworten des Drehgestells und des Wagenkastens aus. Auffällig sind die numerischen Schwankungen bei den Interaktionskräften der beiden Radachsen zu Beginn der Zeitschrittintegration. Diese beeinflussen jedoch weder die Stabilität des Verfahrens noch die Genauigkeit der Verschiebungsergebnisse.

Erstes Beispiel für eine nichtlineare Interaktionsberechnung

Abbildung 6.17 zeigt die Interaktion eines Drehgestells (nichtlineare Primärfederparameter $a = 2 \cdot 10^5$, $n = 0.1$) mit dem Balken auf geschichtetem Boden, dessen Impulsreaktionsfunktion in Abbildung 6.6(e) dargestellt ist, d.h. $E_o = 90 \cdot 10^6 [N/m^2]$, $E_m = 30 \cdot 10^6 [N/m^2]$, $E_u = 50 \cdot 10^6 [N/m^2]$ und $v = 80 [m/s]$.

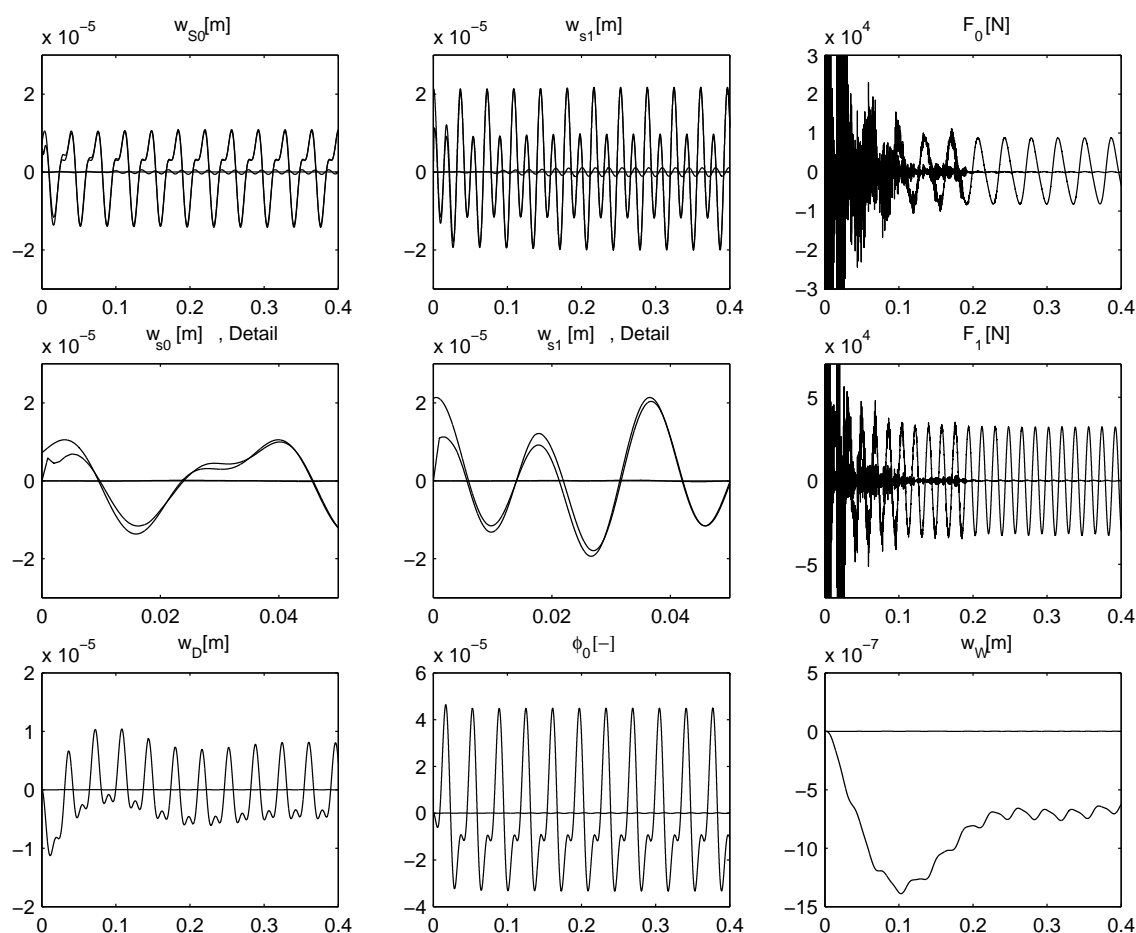


Abbildung 6.17: Zeitverläufe der nichtlinearen Interaktion eines Drehgestells ($v = 80 [m/s]$, $a = 2 \cdot 10^5$, $n = 0.1$) mit einem Balken auf geschichtetem Boden $E_o = 90 \cdot 10^6 [N/m^2]$, $E_m = 30 \cdot 10^6 [N/m^2]$, $E_u = 50 \cdot 10^6 [N/m^2]$ und $v = 80 [m/s]$ und weitgehend analytische Vergleichslösung für den linearen Fall

In den Graphen der Balkenverschiebungen unter den beiden Radachsen (w_{s0} und w_{s1}) sind wieder sowohl die Ergebnisse der nichtlinearen Berechnung als auch diejenigen der linearen, analytischen Berechnung dargestellt. Trotz der starken Nichtlinearität der Primärfedern stimmen diese Verschiebungen praktisch mit den Ergebnissen der analytischen linearen Berechnung überein. Der Grund für den marginalen Einfluss der Nichtlinearität der Primärfedern auf die Balkenverschiebungen liegt darin, dass die Balken/Boden-Antwort von der ungedämpften Massenträgheit der Räder bestimmt wird. In dieser Hinsicht unterscheiden sich die beiden Fälle *Einmassen-*

schwinger und *Drehgestell* u.a. deutlich. Im Vergleich zum linearen Fall (Abbildung 6.16) sind die numerischen Störungen in den Interaktionskräften noch etwas deutlicher, ihr Einfluss auf die anderen Antwortgrößen ist jedoch unmerklich.

Auf die Antwort des Wagenkastens wirkt sich die Nichtlinearität der Primärfedern offensichtlich stark aus. Der homogene Lösungsanteil unterscheidet sich deutlich von demjenigen des linearen Falls.

Zweites Beispiel für eine nichtlineare Interaktionsberechnung

Mit den Parametern $a = 2 \cdot 10^5$, $n = 0.3$ für die nichtlinearen Primärfedern des Drehgestells und $E_o = 30 \cdot 10^6 [N/m^2]$, $E_m = 90 \cdot 10^6 [N/m^2]$, $E_u = 50 \cdot 10^6 [N/m^2]$, $v = 80 [m/s]$ für den Boden zeigt Abbildung 6.18 das Ergebnis der nichtlinearen Interaktionsberechnung. Die verwendete Impulsreaktionsfunktion ist in Abbildung 6.6(a) dargestellt. Die Antworten sind in ihrer Charakteristik

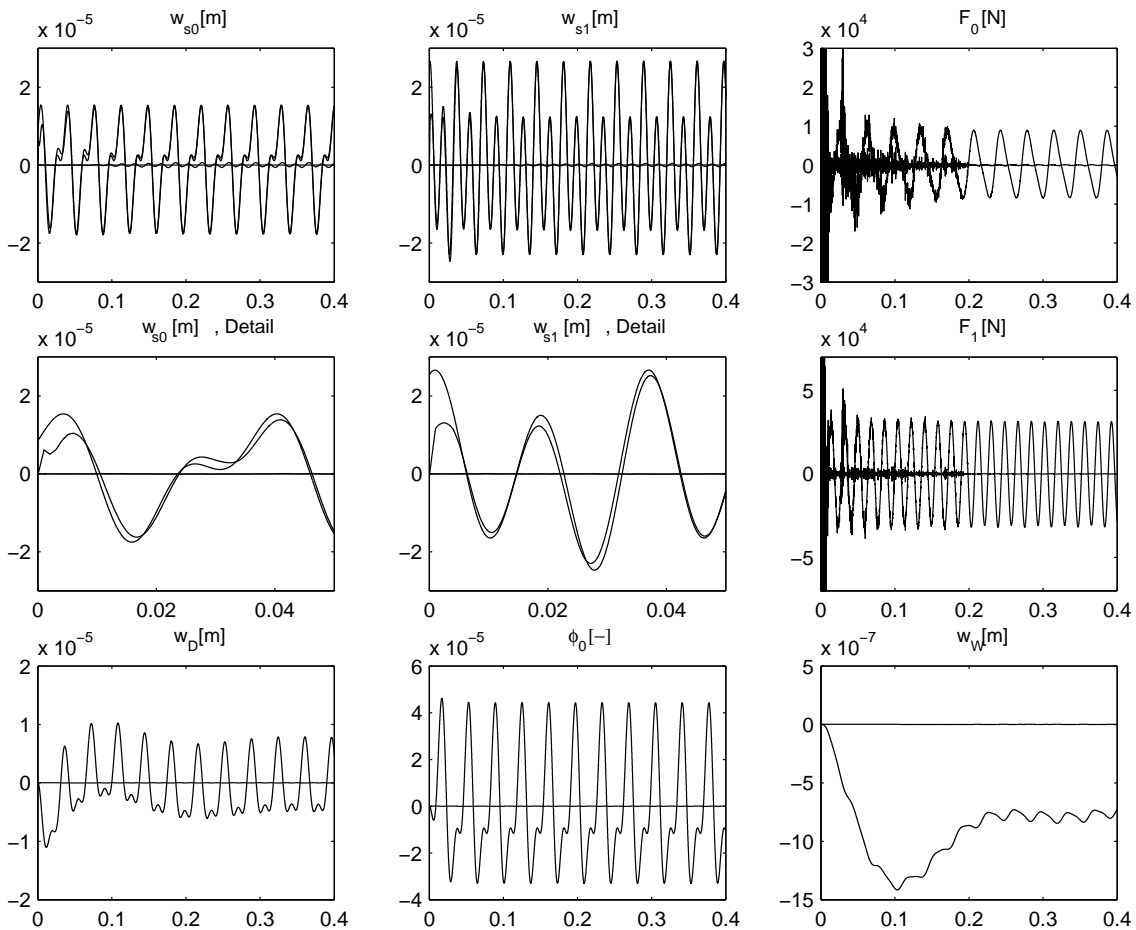


Abbildung 6.18: Zeitverläufe der nichtlinearen Interaktion eines Drehgestells ($v = 80 [m/s]$, $a = 2 \cdot 10^5$, $n = 0.3$) mit einem Balken auf geschichtetem Boden $E_o = 30 \cdot 10^6 [N/m^2]$, $E_m = 90 \cdot 10^6 [N/m^2]$, $E_u = 50 \cdot 10^6 [N/m^2]$ und $v = 80 [m/s]$ und weitgehend analytische Vergleichslösung für den linearen Fall

denen des vorangehenden Beispiels sehr ähnlich. Wegen der größeren Amplitude bei der Impulsreaktionsfunktion sind die Amplituden der Balkenverschiebung hier etwas höher als im vorigen Beispiel. Die etwas schwächere Nichtlinearität der Primärfedern hat dagegen keinen Einfluss auf den Unterschied in den Balkenantworten der beiden Fälle.

6.5 Einsenkungsmulde infolge Eigengewicht

Wie in Abschnitt 5.6 erklärt, verursacht das bewegte Eigengewicht des Fahrzeugs keine Wellenausbreitung, sondern lediglich eine mitbewegte Einsenkungsmulde. Die Berechnung erfolgt mit dem zweidimensionalen Programmpaket unter Verwendung der ermittelten Vorfaktoren der Legendre-Polynome. Da die Fast-Fourier-Rücktransformation $k_y \bullet \rightarrow y$ entfällt, dauert die Berechnung wegen des adaptiven Rasters in allen drei Dimensionen auf dem verwendeten Pentium III (500 MHz)-Prozessor nur wenige Minuten.

Abbildung 6.19(a) stellt die Einsenkungsmulde für den Einmassenschwinger und den Halbraum des Beispiels von Abbildung 6.14 zum Zeitpunkt $t = 0$ perspektivisch dar. Einen Schnitt dieser Funktion in der Achse $y = 0$ und die Lage der Last (Pfeil) zeigt Abbildung 6.19(c).

Für das Drehgestell und den Boden der Interaktionsberechnung des Beispiels von Abbildung 6.18 zeigt Abbildung 6.19(b) die vom bewegten Eigengewicht verursachte Einsenkung. Aufgrund des geringen Achsabstands ist nur eine große Mulde mit einem Extremum sichtbar. Dies ist auch gut im Schnitt dieser Funktion bei $y = 0$ zu erkennen (Abbildung 6.19(d)). Die beiden Pfeile kennzeichnen die Lage der Radachsen.

In allen Fällen zeigt sich deutlich die Einhaltung der geforderten konstanten Einsenkung der Bodenoberfläche infolge des aufliegenden Balkens. Wie auch vom Winkler-gebeteten Balken bekannt ist, zeigt sich die Balkeneinsenkung aufgrund einer statischen Einzellast nicht als kontinuierlich abnehmende Funktion in positiver und negativer x -Richtung, sondern als oszillierende Funktion. Wegen der Fahrgeschwindigkeit ist die Einsenkung in x -Richtung nicht symmetrisch bzgl. der Symmetrieachse des jeweiligen Fahrzeugs. Vor dem Fahrzeug ist die Balkenverschiebung jeweils kurzweilliger als hinter dem Fahrzeug.

6.6 Wellenausbreitung an der Halbraumoberfläche

Aus den Interaktionsberechnungen erhält man die Zeitverläufe der Interaktionskräfte. Durch eindimensionale Fast-Fourier-Transformationen lassen sich diese auf die in Abschnitt 5.5 beschriebene Weise als transformierte Lasten auf die Halbraumoberfläche aufbringen.

Die Rücktransformation der Lösungsfunktion aus dem (k_x, k_y, ω) Wellenzahl-Frequenzbereich in den (x, y, t) Orts-Zeitbereich übernimmt das dreidimensionale Programmpaket. Im Ergebnis erhält man eine Funktion, die sich am besten als zeitliche Sequenz der Oberflächenverschiebungen darstellen lässt.

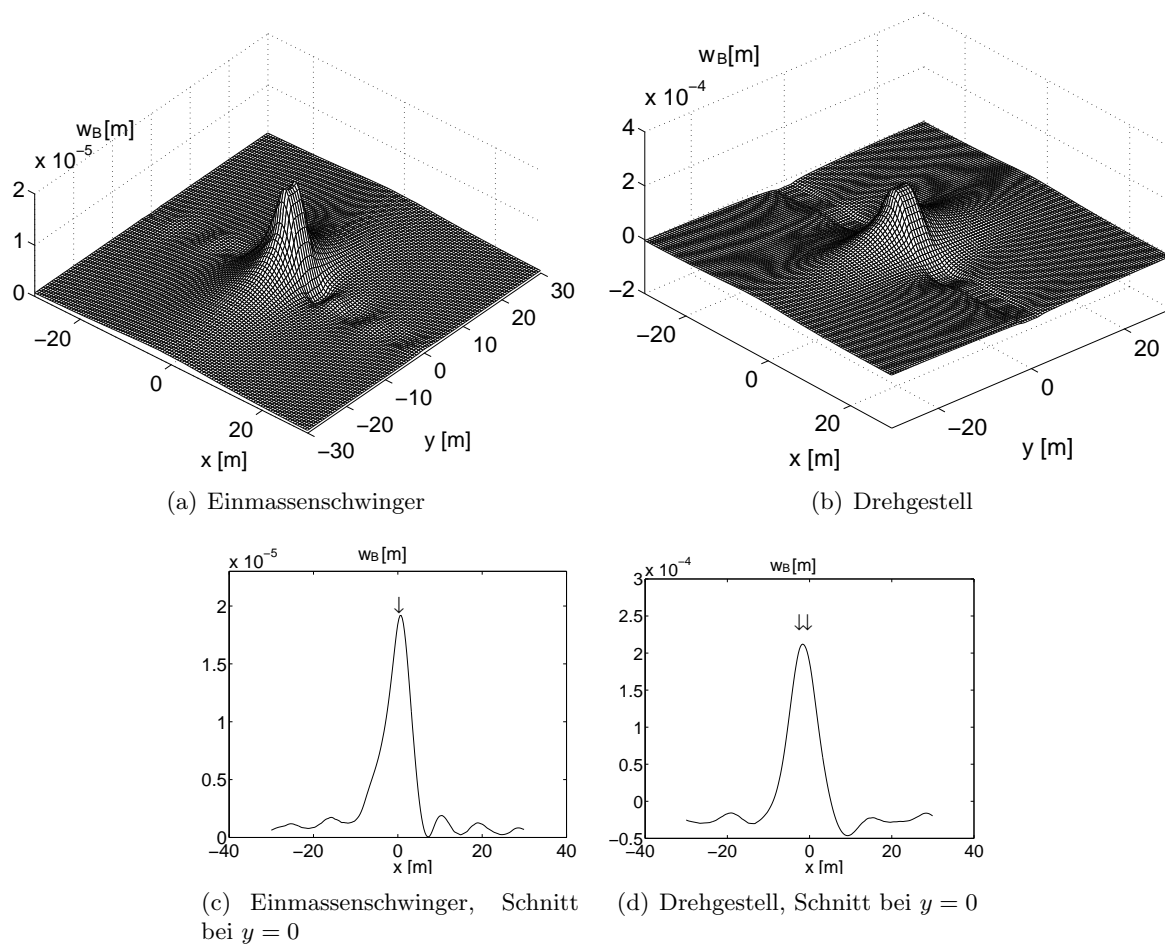


Abbildung 6.19: Einsenkungsmulden der beiden Fahrzeugmodelle aufgrund des bewegten Eigengewichts

6.6.1 Fahrzeugmodell Einmassenschwinger

Für das Beispiel der nichtlinearen Interaktion Einmassenschwinger-Balken/Boden von Abbildung 6.14 zeigt Abbildung 6.20 Momentaufnahmen der Oberflächenverschiebung. Zusätzlich sind in den Bildern drei Kugeln eingezeichnet. Die jeweils oberste Kugel repräsentiert die skalierte Bewegung der Masse des Fahrzeugs aus der Interaktionsberechnung. Die mittlere Kugel zeigt ebenfalls in skaliertem Maßstab den Ort der Radachse an. Schließlich ist mit der untersten, kleinsten Kugel das Ergebnis der Balkenverschiebung unter dem Rad aus der Interaktionsberechnung dargestellt. Die Höhenlage dieser kleinsten Kugel stimmt mit der Verschiebung der Oberfläche überein. Deutlich ersichtlich ist auch die konstante Einsenkung des Balkens in Querrichtung über seine gesamte Länge. Schön zu erkennen ist auch, dass sich die Oberfläche zu den frühen Zeitpunkten in Ruhe befindet und sich die Oberflächenwelle erst mit der Zeit ausbreitet. Im betrachteten Zeitraum bewegt sich das Fahrzeug um $(0.0888 - 0.0498) \cdot 80 = 3.12[m]$ in positive x -Richtung und durchläuft $(0.0888 - 0.0498) \cdot 28 = 1.09$ Schwingungen.

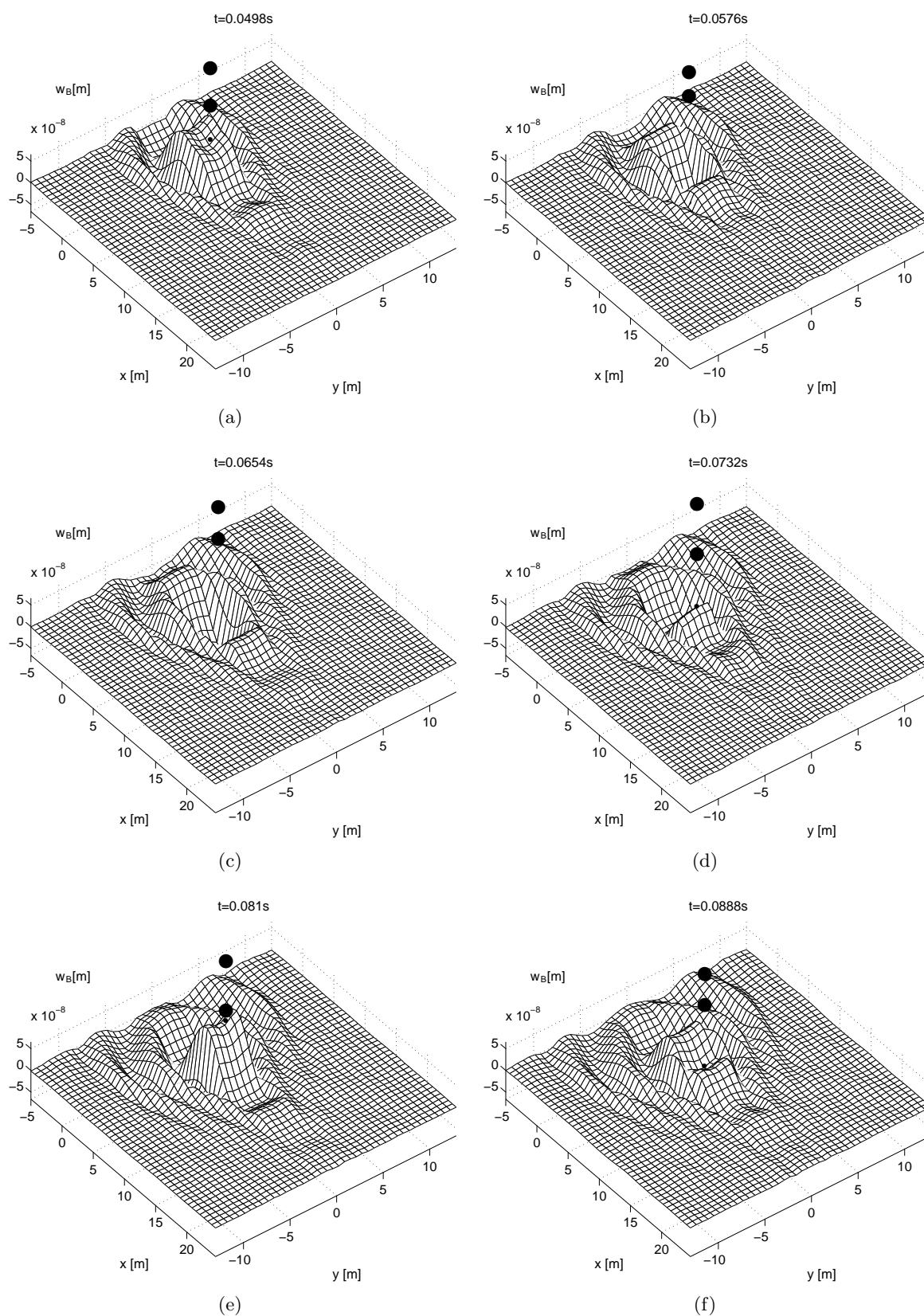


Abbildung 6.20: Wellenausbreitung auf der Halbraumoberfläche infolge der *nichtlinearen Einmassenschwinger-Fahrweg-Interaktion*

6.6.2 Fahrzeugmodell Drehgestell

Mit dem Ergebnis der Interaktionsberechnung Drehgestell-Balken/Boden von Abbildung 6.18 wurde die in Abbildung 6.21 dargestellte Wellenausbreitung an der Halbraumoberfläche ermittelt. Auch hier ist die konstante Einsenkung des Balkens in Querrichtung deutlich zu erkennen. Zusätzlich zur Wellenausbreitung sind die Ergebnisse der Interaktionsberechnung in den Bildern eingetragen. Die zwei unteren kleinen Kugeln symbolisieren die Balkenverschiebung unter den Radachsen aus der Interaktionsberechnung. Ihre Höhenlage stimmt sehr gut mit den Oberflächenverschiebungen überein. Die beiden mittleren großen Kugeln stellen die Bewegung der Radachsen in skaliertem Maßstab dar. Durch das große Rechteck ist das Drehgestell angedeutet, dessen Verschiebungs- und Drehbewegungen ebenfalls in skaliertem Maßstab aus der Interaktionsberechnung übernommen wurden. Mit dem obersten kleinen Rechteck ist schließlich die Wagenmasse symbolisiert. Im betrachteten Zeitraum bewegt sich das Fahrzeug um $(0.0981 - 0.0751) \cdot 80 = 1.84[m]$ in positive x -Richtung. Dabei durchläuft das vordere Rad mit $(0.0981 - 0.0751) \cdot 28 = 0.64$ etwas mehr als eine halbe Schwingungsperiode, das hintere Rad mit $(0.0981 - 0.0751) \cdot 56 = 1.29$ etwas mehr als eine volle Schwingungsperiode.

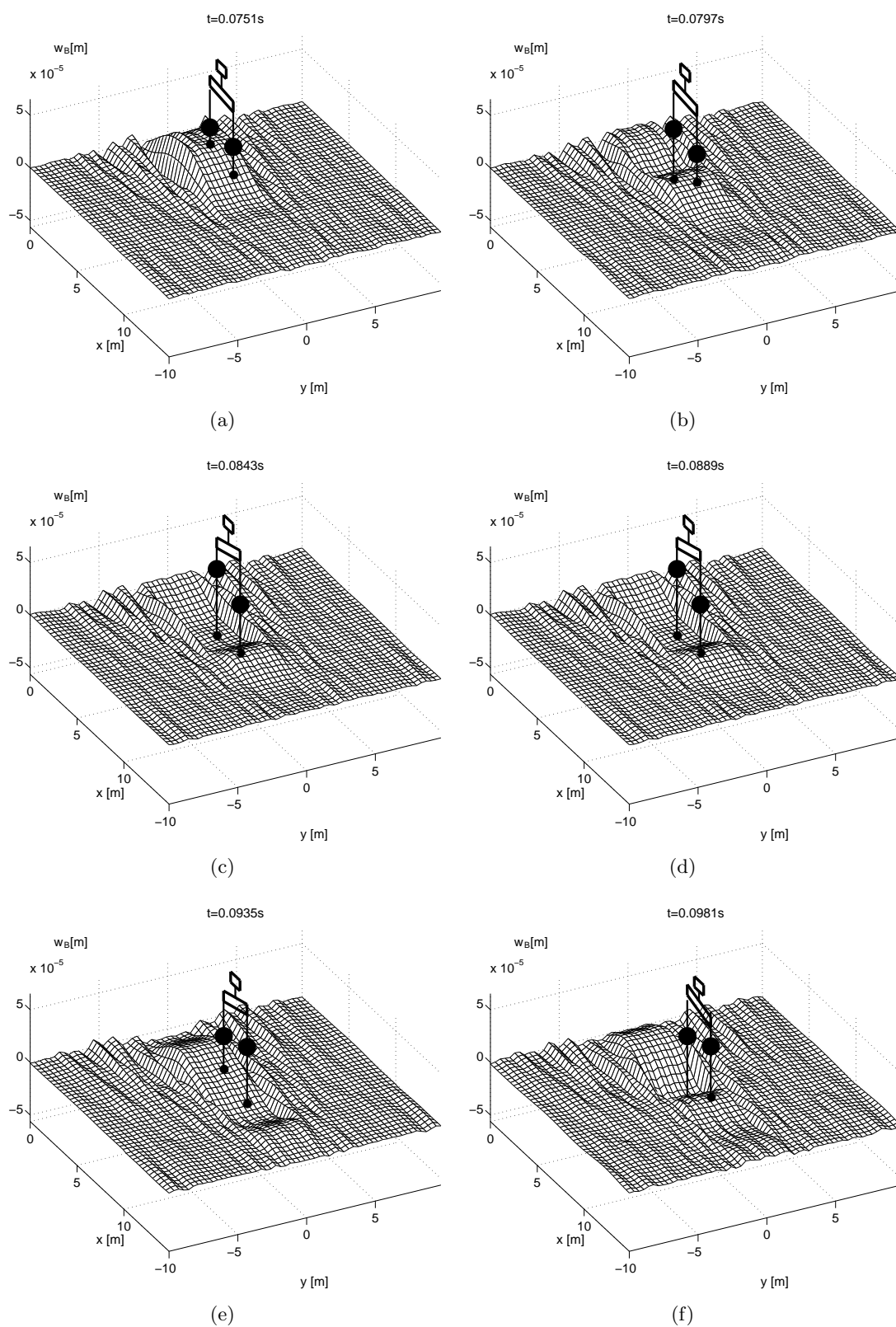


Abbildung 6.21: Wellenausbreitung auf der geschichteten Halbraumoberfläche infolge der *nicht-linearen Drehgestell-Fahrweg*-Interaktion

6.7 Anmerkungen zur Fourier-Rücktransformation mit Hilfe des dreidimensionalen Programmpakets

Numerische Störungen im Kraftverlauf, die sich aus der Interaktionsberechnung ergeben, können durch die Elimination der hohen Frequenzen bei der Fast-Fourier-Transformation beseitigt werden.

Zu beachten ist, dass die Zeitverläufe eine gewisse Mindestlänge haben sollten, da sonst der dem Zeitfenster entsprechende *Sinus-Cardinalis* eine extreme Welligkeit aufweist. Diese erfordert bei der Rasterung u.U. zu viele Elemente.

In den Beispielen wurde die ω -Achse um den Faktor 1/100 gestaucht. Bei der Ermittlung der Impulsreaktionsfunktionen mit dem zweidimensionalen Programmpaket war dieser Faktor zu 1/300 gewählt. Die Unterschiedlichkeit rührt daher, dass die Impulsreaktionsfunktionen auch für sehr hochfrequente Anregungen anwendbar sein sollen und deshalb ein extrem breites Frequenzband rücktransformiert wurde. Da die tatsächliche Anregungsfrequenz aus den Radunrundheiten relativ niedrig ist, genügt es, die Rücktransformation der Wellenausbreitungsfunktion mit einem schmäleren Frequenzband vorzunehmen.

Wie bei der Ermittlung der Impulsreaktionsfunktionen lag der Anteil der Waveletkoeffizienten, die für die Rücktransformation verwendet wurden, zwischen zwei und fünf Prozent. Da sich die Waveletkoeffizienten qualitativ nicht von den in Abschnitt 6.3.2 gezeigten zweidimensionalen unterscheiden, wird auf deren Darstellung verzichtet.

Die Rechenzeit auf einem Pentium III-Prozessor mit 500 MHz beträgt für die Berechnung der Wellenausbreitung zwischen drei und acht Stunden, stark abhängig davon, wie hoch der Anteil der Waveletkoeffizienten für die Rücktransformation ist und an wie vielen Stellen die Funktion im Originalraum ausgewertet werden soll. Bei der Rekonstruktion der Funktion zeigt sich ein Dilemma: Die Rechenzeit könnte durch Vektorisierung erheblich verkürzt werden, dadurch stiege aber der Arbeitsspeicherbedarf, der bei diesem Verfahren bewusst niedrig gehalten werden soll. Die angegebene Rechenzeit kann jedoch in Anbetracht der Komplexität des behandelten Problems sicherlich als akzeptabel bezeichnet werden.

Im Gegensatz zur Ermittlung der Impulsreaktionsfunktionen dauert hier die Ermittlung des Abtastgitters und damit der Waveletkoeffizienten deutlich unter einer Stunde. In k_y -Richtung müssen wegen der adaptiven Abtastung erheblich weniger Funktionswerte abgetastet werden als im Vergleichsfall. Damit sinkt auch die Anzahl der zu lösenden Gleichungssysteme bei geschichtetem Boden. Dadurch, dass die gespeicherten Werte der Legendre-Polynom-Vorfaktoren verwendet werden, erfordert die Beachtung der konstanten Einsenkung unter dem Balken in Querrichtung keine zeitintensiven Rechenoperationen.

Die Angabe des Abbruchkriteriums bei der Rasterung kann gerade im dreidimensionalen Fall u.U. Probleme bereiten. Da es nur indirekt die Anzahl der erzeugten Funktionsabtastungen beeinflusst, kann es vorkommen, dass die Funktion zu fein abgetastet wird. Damit reicht die reservierte Feldgröße der Variablen bzw. der Arbeitsspeicher des Rechners nicht aus. Dann muss der Rechenlauf von Neuem mit etwas höherer Toleranz gestartet werden. Von Vorteil ist jedoch, dass die Rechenzeiten relativ niedrig und damit Fehlversuche tolerierbar sind.

Abbildung 6.22 zeigt das dreidimensionale Raster, mit dem die Funktion von Abschnitt 6.6.1 abgetastet wurde. In k_x -Richtung ist deutlich die Fahrgeschwindigkeit zu erkennen, wie sie sche-

matisch in Abbildung 5.6 dargestellt ist und dort auch erläutert wird. Aufgrund der Forderung der konstanten Einsenkung des Balkens in Querrichtung sind in k_y -Richtung auch höhere Wellenzahlen vorhanden.

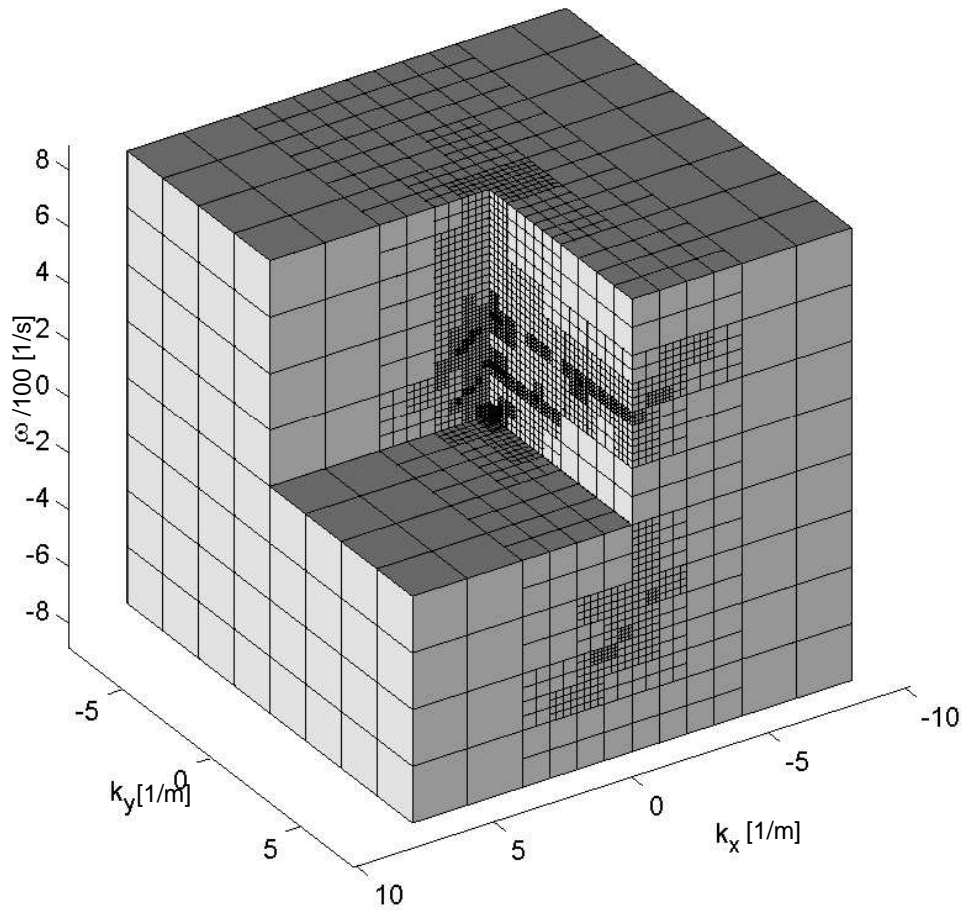


Abbildung 6.22: Dreidimensionales Raster zur Ermittlung der Wellenausbreitungsfunktion von Abschnitt 6.6.1

Kapitel 7

Schlussbemerkungen

Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine weitgehend analytische, effiziente Methode zur Berechnung der nichtlinearen Interaktion Fahrzeug/Fahrbahn aufgezeigt. Dabei wurde von den Annahmen linearen Verhaltens des Subsystems Fahrbahn/Boden, konstanter Fahrzeuggeschwindigkeit und gerader Streckenführung ausgegangen. Außerdem erfolgte nur eine Beachtung der vertikalen Interaktionskräfte zwischen Fahrzeug und Fahrbahn und der vertikalen Koppelspannungen zwischen Fahrbahn und Boden.

Für das Subsystem Fahrbahn/Boden wurden eindimensionale, zeitabhängige Impulsreaktionsfunktionen in einem bewegten Koordinatensystem berechnet, die die Kopplung der Fahrbahn mit dem dreidimensionalen geschichteten Boden enthalten. Um eine konstante Einsenkung der Fahrbahn in Querrichtung zu gewährleisten, wurde der entsprechende (nicht konstante) Spannungsverlauf numerisch günstig durch Legendre-Polynome angenähert. Die Impulsreaktionsfunktionen ersetzen das Verhalten der auf dem Halbraum lagernden Fahrbahn auf mechanisch korrekte Weise. Dadurch vereinfacht sich die Berechnung der Interaktion zwischen dem nichtlinear modellierten Fahrzeug und seiner Fahrbahn von einem orts- und zeitabhängigen zu einem rein zeitabhängigen Problem. Deshalb sind z.B. sehr effiziente Parameterstudien zu Radunrundheiten bzw. Fahrbahnunebenheiten sowie zu unterschiedlichen Fahrzeugmodellen möglich.

Mit den in der Interaktionsberechnung ermittelten Kräften zwischen den Fahrzeugrädern und der Fahrbahn konnte anschließend die Wellenausbreitung an der Bodenoberfläche berechnet werden, die durch das darüberfahrende Fahrzeug ausgelöst wird. Dies kann zur Einschätzung der Auswirkungen von Fahrzeugüberfahrten auf benachbarte Infrastruktur von Bedeutung sein.

Sowohl die Berechnung der Impulsreaktionsfunktionen als auch die Ermittlung der Wellenausbreitung an der Bodenoberfläche erfolgte mit Hilfe der Integraltransformationsmethode weitgehend analytisch im Fourier-transformierten Raum. Für die jeweils notwendige zwei- bzw. dreidimensionale Fourier-Rücktransformation in den Orts-Zeitbereich wurde eine Wavelettransformation verwendet. Diese bot die Vorteile non-äquidistanter Funktionsabtastung und der Datenkompression. Damit konnte eine signifikante Reduzierung des numerischen Aufwands erreicht werden.

Das hier verwendete Modell eines Timoshenko-Balkens als Fahrbahn lässt sich problemlos auf ein realistischeres Modell erweitern, etwa des Systems Feste Fahrbahn mit Schiene, Zwischenlage und Betontragplatte (s. [Din01]). Auch das hier u.a. verwendete Drehgestellmodell mit nichtlinearer

Federkennlinie der Primärfedern lässt sich in beliebiger Weise realitätsnah beschreiben.

Außerdem ist die Anwendung der entwickelten Programmpakete zur Berechnung der zwei- und dreidimensionalen inversen Fourier-Transformation durchaus auch auf andere Feldprobleme wie z.B. die Wärmeleitung denkbar.

Literaturverzeichnis

- [BD02] BITZENBAUER, J. und J. DINKEL: *Dynamic interaction between a moving vehicle and an infinite structure excited by irregularities - Fourier transforms solution*. Archive of Applied Mechanics, Springer-Verlag, Seiten 199–211, 2002.
- [Bey95] BEYLKIN, G.: *On the Fast Fourier Transform of Functions with Singularities*. Applied and Computational Harmonic Analysis, (2):363–381, 1995.
- [BS91] BRONSTEIN, I.N. und K.A. SEMENDJAJEW: *Taschenbuch der Mathematik*. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, Leipzig, 25. Auflage, 1991.
- [Chu92] CHUI, C. K.: *An Introduction to Wavelets*. Academic Press, San Diego, CA, 1992.
- [CP93] CLOUGH, R.W. und J. PENZIEN: *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill, 2te Auflage, 1993.
- [Dau92] DAUBECHIES, I.: *Ten Lectures on Wavelets*. CBMS-NSF Regional Conf. Series in Appl. Math., Vol. 61. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1992.
- [Deg02] DEGRANDE, G.: *Wave propagation in the soil: Theoretical background and application to traffic induced vibrations*. In: GRUNDMANN, H. und G.I.S. SCHUËLLER (Herausgeber): *Structural Dynamics, eurodyn2002*, Band 1. A.A. Balkema Publishers, 2002.
- [Din01] DINKEL, J.: *Ein semi-analytisches Modell zur dynamischen Berechnung des gekoppelten Systems Fahrzeug-Fahrweg-Untergrund für das Oberbausystem Feste Fahrbahn*. Doktorarbeit, Doktorarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, Berichte aus dem Konstruktiven Ing.Bau, Heft 9, Technische Universität München, 2001.
- [DM96] DIETERMAN, H.A. und A. METRIKINE: *The equivalent stiffness of a half-space interacting with a beam. Critical Velocities of a moving load along the beam*. European Journal of Mechanics, 15(1):67–90, January 1996.
- [Dud97] DUDDECK, F.E.M.: *Funktional-Analysis der Kontinuumsmechanik - Fouriertransformation bezüglich Raum und Zeit der Energiemethoden*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, Mitteilungen a.d. Institut f. Bauingenieurwesen I, Heft 5/97, Technische Universität München, 1997.

- [EW02] EKEVID, T. und N.E. WIBERG: *Wave propagation related to high-speed train; A scaled boundary FE-approach for unbounded domains*. Computer methods in applied mechanics and engineering, (191):3947–3964, 2002.
- [Fac02] FACKLER, P.L.: *Sparse Multidimensional Arrays in MATLAB*. <http://www4.ncsu.edu/~pfackler/>, 2002.
- [Flü72] FLÜGGE, W.: *Tensor Analysis and Continuum Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 1972.
- [FvE02] FIRUZIAAN, M. und O. VON ESTORFF: *Transient 3D soil/structure interaction analyses including nonlinear effects*. In: GRUNDMANN, H. und G.I.S. SCHUËLLER (Herausgeber): *Structural Dynamics, eurodyn2002*, Band 2. A.A. Balkema Publishers, 2002.
- [GF97] GAUL, L. und C. FIEDLER: *Methode der Randelemente in Statik und Dynamik*. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1997.
- [GL02] GRUNDMANN, H. und S. LENZ: *Nonlinear SDOF-system moving on a beam-halfspace-system*. In: GRUNDMANN, H. und G.I.S. SCHUËLLER (Herausgeber): *Structural Dynamics, eurodyn2002*, Band 1. A.A. Balkema Publishers, 2002.
- [GLT99] GRUNDMANN, H., M. LIEB und E. TROMMER: *The response of a layered half-space to traffic loads moving along its surface*. Archive of Applied Mechanics, 69(1):55–67, 1999.
- [GLW01] GRUNDMANN, H., S. LENZ und H. WAUBKE: *Time dependent moving load on a half space with random properties; transform technique for a numerical approach*. In: *European Conference on Computational Mechanics ECCM*, Krakau, Polen, 2001.
- [GM88] GRUNDMANN, H. und G. MÜLLER: *Schwingungen infolge zeitlich veränderlicher, bewegter Lasten im Untergrund. (FE-Berechnungen unter Verwendung analytischer Lösungen*. In: WUNDERLICH, W. und E. STEIN (Herausgeber): *Finite Elemente. Anwendungen in der Baupraxis. FEM'88, Bochum*, Seiten 177–187, Berlin, 1988. Ernst & Sohn.
- [Gru99] GRUNDMANN, H.: *Dynamic interaction of structures with the subsoil*. In: FRÝBA, L. und J. NÁPRSTEK (Herausgeber): *Structural Dynamics, Eurodyn '99*, Seiten 31–40, Rotterdam, 1999. A.A. Balkema.
- [GW98] GANDER, W. und GAUTSCHI W.: *Adaptive Quadrature - Revisited*. Technischer Bericht, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Institut für wissenschaftliches Rechnen, August 1998.
- [GW00] GANDER, W. und GAUTSCHI W.: *Adaptive Quadrature - Revisited*. BIT, 40(1):84 – 101, March 2000.
- [JS] JAWERTH, B. und W. SWELDENS: *An overview of wavelet based multiresolution analyses*.

- [JST02] JONES, C.J.C., X. SHENG und D.J. THOMPSON: *The roles of track roughness and axle-load time history in the generation of ground vibration from surface-running trains*. In: GRUNDMANN, H. und G.I.S. SCHÜELLER (Herausgeber): *Structural Dynamics, eurodyn2002*, Band 1. A.A. Balkema Publishers, 2002.
- [Kai94] KAISER, GERALD: *A friendly guide to wavelets*. Birkhäuser, Boston, 1994.
- [Kau81] KAUSEL, E.: *An explicit solution for the dynamic loads in layered media*. Technischer Bericht R81-13, MIT, 1981.
- [Kau94] KAUSEL, E.: *Thin-layer method: formulation in the time domain*. International Journal of Numerical Engineering Mechanics, 37:927–941, 1994.
- [Kon85] KONRAD, A.: *Der Zylinder, der zylindrische Hohlraum und die dickwandige Kreis-zylinderschale unter beliebigen, ruhenden oder bewegten Lasten*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, Mitteilungen a.d. Institut f. Bauingenieurwesen I, Heft 17, Technische Universität München, 1985.
- [Lam04] LAMB, H.: *Philosophical Transactions: On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid*. Phil. Trans. Royal Soc., (A203):1–42, October 1904.
- [Len01] LENZ, S.: *Zwischenbericht zum DFG-Forschungsprojekt 712/9-1 "Halbraumdynamik-Wavelets"*. 2001.
- [Lie97] LIEB, M.: *Adaptive numerische Fouriertransformation in der Bodendynamik unter Verwendung einer Waveletzerlegung*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, Mitteilungen a.d. Institut f. Bauingenieurwesen I, Heft 2/97, Technische Universität München, 1997.
- [LMR94] LOUIS, A., P. MAASS und A. RIEDER: *Wavelets*. Teubner, Stuttgart, 1994.
- [Luta] LUTZENBERGER, S. unveröffentlicht.
- [Lutb] LUTZENBERGER, S.: *Ein differentiell - algebraisches Simulationsmodell zur Fahrzeug - Fahrweg Interaktion*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, erscheint in Mitteilungen a.d. Institut f. Bauingenieurwesen I, Technische Universität München.
- [Mül89] MÜLLER, G.: *Ein Verfahren zur Erfassung der Fundament-Boden Wechselwirkung unter Einwirkung periodischer Lasten*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, Mitteilungen a.d. Institut f. Bauingenieurwesen I, Heft 25, Technische Universität München, 1989.
- [PFTV02] PRESS, W.H., B.P. FLANNERY, S.A. TEUKOLSKY und W.T. VETTERLING: *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2002.
- [Ray85] RAYLEIGH, L.: *On waves propagated along the plane surface of an elastic solid*. London math. soc. proc., 17, 1885.
- [Rip95] RIPKE, B.: *Hochfrequente Gleismodellierung und Simulation der Fahrzeug-Gleis-Dynamik unter Verwendung einer nichtlinearen Kontaktmechanik*. Doktorarbeit, Technische Universität Berlin, Düsseldorf, 1995.

- [RO98] RESNIKOFF, H.L. und WELLS O.JR.: *Wavelet Analysis*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [SBHH99] SAVIDIS, S., C. BODE, R. HIRSCHAUER und J. HORNIG: *Dynamic soil-structure-interaction with partial uplift*. In: FRÝBA, L. und J. NÁPRSTEK (Herausgeber): *Structural Dynamics, Eurodyn '99*, Seiten 957–962, Rotterdam, 1999. A.A. Balkema.
- [SJP99] SHENG, X., C.J.C. JONES und M. PETYT: *Ground vibration generated by a harmonic load acting on a railway track*. Journal of Sound and Vibration, 225(1):3–28, 1999.
- [SN96] STRANG, G. und T. NGUYEN: *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley-Cambridge Press, Wellesley MA 02181 USA, 1996.
- [SP] SWELDENS, W. und R. PIESENS: *Quadrature Formulae and Asymptotic Error Expansions for wavelet approximations of smooth functions*.
- [Swe94] SWELDENS, W.: *The Construction and Application of Wavelets in Numerical Analysis*. Technischer Bericht, Department Computerwetenschappen, K.U. Leuven, Leuven, Department of Mathematics, University of South Carolina, Columbia, ftp.math.scarcolumbia.edu:/pub/wavelets/papers/thesis, 1994.
- [Swe97] SWELDENS, W.: *The lifting scheme: A construction of second generation wavelets*. SIAM J. Math. Anal., 29(2):511–546, 1997.
- [Tak03] TAKEMIYA, H.: *Simulation of track-ground vibrations due to a high-speed train: the case of X-2000 at Ledsgard*. Journal of Sound and Vibration, (261):503–526, 2003.
- [Waa72] WAAS, G.: *Linear Two-Dimensional Analysis of Soil Dynamics Problems in Semi-Infinite Layered Media*. Doktorarbeit, University of California, Berkeley, 1972.
- [Wau03] WAUBKE, H.: *Waves in a layered orthotropic medium with and without random properties*. Vortrag auf dem Tenth International Congress on Sound and Vibration, Stockholm, Schweden, 2003.
- [Wol85] WOLF, J. P.: *Dynamic soil-structure interaction*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1985.
- [WS00a] WOLF, J.P. und C. SONG: *The scaled boundary finite-element method- a primer: derivations*. Computers and Structures, (78):191–210, 2000.
- [WS00b] WOLF, J.P. und C. SONG: *The scaled boundary finite-element method- a primer: solution procedures*. Computers and Structures, (78):211–225, 2000.
- [wwwa] <http://cm.bell-labs.com/who/wim/>.
- [wwwb] <http://linwww.ira.uka.de/bibliography/Theory/Wavelets/>.
- [Zir96] ZIRWAS, G.: *Ein hybrides Verfahren zur Behandlung der Bauwerk-Bodenwechselwirkung mit analytischen Integraltransformationen und numerischen Ansätzen*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, Mitteilungen a.d. Institut f. Bauingenieurwesen I, Heft 10/96, Technische Universität München, 1996.

Anhang A

Fourier-Transformation

A.1 Definition

$$\hat{f}(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ik_x x} dx \quad (\text{A.1})$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k_x) e^{ik_x x} dk_x \quad (\text{A.2})$$

A.2 Rechenregeln

Differentiation

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) \quad \circ \bullet \quad (i k_x)^n \hat{f}(k_x) \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{d^n}{dk_x^n} \hat{f}(k_x) \quad \bullet \circ \quad (-i x)^n f(x) \quad (\text{A.4})$$

Kombinierte Dilatation - Translation

$$f(ax - b) = f(a(x - b/a)) \quad \circ \bullet \quad \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{k_x}{a}\right) e^{-ibk_x/a} \quad (\text{A.5})$$

$$\hat{f}(ak_x - b) \quad \bullet \circ \quad \frac{1}{|a|} \left(\frac{x}{a}\right) e^{ibx/a} \quad (\text{A.6})$$

Multiplikation - Faltung

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x - \xi) d\xi \quad . \quad (\text{A.7})$$

$$f(x) \cdot g(x) \quad \circ \bullet \quad \frac{1}{2\pi} \hat{f}(k_x) * \hat{g}(k_x) \quad (\text{A.8})$$

$$f(x) * g(x) \quad \circ \bullet \quad \hat{f}(k_x) \cdot \hat{g}(k_x) \quad (\text{A.9})$$

A.3 Häufig verwendete Funktionen **δ -Dirac**

$$\delta(x) \quad \circ \bullet \quad 1 \quad (\text{A.10})$$

Fensterfunktion

$$H(x + a) - H(x - a) \quad \circ \bullet \quad 2 \frac{\sin(ak_x)}{k_x} \quad (\text{A.11})$$

Sinusfunktion

$$\sin(\Omega t) \quad \circ \bullet \quad i \pi (\delta(\omega + \Omega) - \delta(\omega - \Omega)) \quad (\text{A.12})$$

Cosinusfunktion

$$\cos(\Omega t) \quad \circ \bullet \quad \pi (\delta(\omega + \Omega) + \delta(\omega - \Omega)) \quad (\text{A.13})$$

Anhang B

Filterkoeffizienten

B.1 Filterkoeffizienten für die Waveletzerlegung

n	p_n	q_n
0	1	1
1	1	-1

Tabelle B.1: Filterkoeffizienten des Haar-Wavelets für die Waveletzerlegung und für die Rekonstruktion

	N=2		N=4	
n	p_n	q_{n+1}	p_{n+1}	q_{n+4}
1	1	$20/4!$	$6/8$	$-24264/8!$
2	$1/2$	$-12/4!$	$4/8$	$-18482/8!$
3		$2/4!$	$1/8$	$-7904/8!$
4				$1677/8!$
5				$-124/8!$
6				$1/8!$

Tabelle B.2: Filterkoeffizienten der *B-splines* 2. und 4. Ordnung für die Waveletzerlegung. Für kleinere Werte von n sind die Koeffizienten symmetrisch zu ergänzen.

B.2 Filterkoeffizienten zur Ermittlung der dualen Skalierungsfunktion und des dualen Wavelets für die Rekonstruktion

Für kleinere Werte von n sind die Koeffizienten symmetrisch zu ergänzen.

n	N=2		N=4	
	\tilde{p}_n	\tilde{q}_{n+1}	\tilde{p}_{n+1}	\tilde{q}_{n+4}
1	1.366025404	1.732050808	1.7863257126	-2.9507890397
2	0.633974596	-0.633974596	0.8013616509	0.9368451932
3	-0.232050808	-0.464101615	-0.5644237416	1.4841953969
4	-0.169872981	0.169872981	-0.4658492522	-0.6915417815
5	0.062177826	0.124355653	0.2581671424	-0.7794911616
6	0.045517328	-0.045573281	0.2529148927	0.3935885546
7	-0.016660498	-0.033320997	-0.1328416747	0.4153816767
8	-0.012196331	0.012196331	-0.1358072169	-0.2135516067
9	0.004464167	0.008928334	0.0704522033	-0.2221168814
10	0.003267997	-0.003267997	0.0727471739	0.1146619045
11			-0.0376313732	0.1188667767
12			-0.0389465387	-0.0614194017
13			0.0201334950	-0.0636236226
14			0.0208481043	0.0328818893
15			-0.0107758596	0.0340560589
16			-0.0111596784	-0.0176016796
17			0.0057679589	-0.0182294902
18			0.0059735692	0.0094219140
19			-0.0030874574	0.0097578830
20			-0.0031975361	-0.0050433759
21			0.0016526533	-0.0052232030
⋮				

Tabelle B.3: Filterkoeffizienten der *B-splines* 2. und 4. Ordnung für die Rekonstruktion

B.3 Fourier-Koeffizienten zur Ermittlung der dualen Fourier-transformierten Skalierungsfunktion

Für negative Werte von n sind die Koeffizienten symmetrisch zu ergänzen.

n	u_n	
	N=2	N=4
0	1.73205063	4.96471723
1	-0.46410148	-3.09102684
2	0.12435559	1.70794328
3	-0.03332097	-0.92076617
4	0.00892832	0.49366296
5	-0.00239233	-0.26433915
6	0.00064102	0.14150035
7	-0.00017176	-0.07573657
8	0.00004602	0.04053321
⋮		

Tabelle B.4: Fourier-Koeffizienten der *B-splines* 2. und 4. Ordnung zur Ermittlung der dualen Fourier-transformierten Funktion

Anhang C

Matrizen für die Drehgestellberechnung

C.1 Matrix Ψ_1 für das Newton-Raphson-Verfahren

Folgende Substitutionen wurden der Übersichtlichkeit halber vorgenommen:

$$\begin{aligned}w_0 &= w_{R0} - w_D + 1/2\phi_0\Delta l \\w_1 &= w_{R1} - w_D - 1/2\phi_0\Delta l\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{11,1} = & -\frac{1}{2}(8(h_{00}^1) + 8(h_{00}^0) + 16(h_{00}^1)a |w_0^n| \\
& - 2k_1 \Delta t (h_{01}^0)(h_{01}^0) a |w_0^n| \\
& + 4(h_{00}^1) k_1 \Delta t (h_{00}^0) a |w_0^n| \\
& - 2k_1 \Delta t (h_{01}^1)(h_{01}^0) a |w_0^n| \\
& - 2k_1 \Delta t (h_{01}^1)(h_{01}^1) a |w_0^n| \\
& + 2k_1 a n \operatorname{sgn}(w_0) \Delta t |w_0^{(n-1)}| (h_{01}^0)(h_{01}^1) w_0 \\
& - 4k_1 a n \operatorname{sgn}(w_0) \Delta t |w_0^{(n-1)}| (h_{00}^1)(h_{00}^0) w_0 \\
& + 2k_1 a n \operatorname{sgn}(w_0) \Delta t |w_0^{(n-1)}| (h_{01}^1)(h_{01}^0) w_0 \\
& - 2k_1 a n \operatorname{sgn}(w_0) \Delta t |w_0^{(n-1)}| (h_{00}^1)^2 w_0 \\
& + 2k_1 a n \operatorname{sgn}(w_0) \Delta t |w_0^{(n-1)}| (h_{01}^0)(h_{01}^0) w_0 \\
& - 2k_1 a n \operatorname{sgn}(w_0) \Delta t |w_0^{(n-1)}| (h_{00}^0)^2 w_0 \\
& + 2k_1 a n \operatorname{sgn}(w_0) \Delta t |w_0^{(n-1)}| (h_{01}^1)(h_{01}^1) w_0 \\
& + 2k_1 \Delta t (h_{00}^0)^2 a |w_0^n| + 2(h_{00}^1)^2 k_1 \Delta t a |w_0^n| \\
& - 2k_1 \Delta t (h_{01}^0)(h_{01}^1) a |w_0^n| + 4(h_{00}^1) k_1 \Delta t (h_{00}^0) \\
& - 2k_1 \Delta t (h_{01}^0)(h_{01}^0) - 2k_1 \Delta t (h_{01}^1)(2)(h_{01}^1) \\
& + 2k_1 \Delta t (h_{00}^0)^2 + 2(h_{00}^1)^2 k_1 \Delta t \\
& - 2k_1 \Delta t (h_{01}^1)(h_{01}^1) + 8(h_{00}^0) a^2 |w_0^n|^2 \\
& + 16(h_{00}^0) a |w_0^n| + 8(h_{00}^1) a^2 |w_0^n|^2 \\
& - 2k_1 \Delta t (h_{01}^1)(h_{01}^0) / ((1 + a |w_0^n|)^2 \Delta t ((h_{01}^1)(h_{01}^0) \\
& - (h_{00}^0)^2 + (h_{01}^1)(h_{01}^0) - 2(h_{00}^1)(h_{00}^0) - (h_{00}^1)^2 \\
& + (h_{01}^0)(h_{01}^0) + (h_{01}^0)(h_{01}^1))) \\
\Psi_{11,2} = & 4((h_{01}^1) + (h_{01}^0)) / (\Delta t ((h_{01}^1)(h_{01}^0) - (h_{00}^0)^2 \\
& + (h_{01}^1)(h_{01}^1) - 2(h_{00}^1)(h_{00}^0) - (h_{00}^1)^2 + (h_{01}^0)(h_{01}^0) \\
& + (h_{01}^0)(h_{01}^1))) \\
\Psi_{11,3} = & \frac{1}{2} \frac{k_1 (-2 + 2 a n \operatorname{sgn}(w_0) |w_0^{(n-1)}| w_0 - 2 a |w_0^n|)}{(1 + a |w_0^n|)^2} \\
\Psi_{11,4} = & -\frac{1}{2} \frac{k_1 (-1 + a n \operatorname{sgn}(w_0) |w_0^{(n-1)}| w_0 - a |w_0^n|) \Delta l}{(1 + a |w_0^n|)^2} \\
\Psi_{11,5} = & 0 \\
\Psi_{12,1} = & 4((h_{01}^1) + (h_{01}^0)) / (\Delta t ((h_{01}^1)(h_{01}^0) - (h_{00}^0)^2 \\
& + (h_{01}^1)(h_{01}^1) - 2(h_{00}^1)(h_{00}^0) - (h_{00}^1)^2 + (h_{01}^0)(h_{01}^0) \\
& + (h_{01}^0)(h_{01}^1)))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{12,2} = & -\frac{1}{2}(-2 k_I a n \operatorname{sgn}(w_I) \left| w_I^{(n-1)} \right| \Delta t (h_{01}^0) (h_{01}^1) w_I \\
& + 2 k_I \Delta t (h_{01}^1) (h_{01}^0) a \left| w_I^n \right| - 2 k_I \Delta t (h_{00}^1)^2 a \left| w_I^n \right| \\
& + 2 k_I a n \operatorname{sgn}(w_I) \left| w_I^{(n-1)} \right| \Delta t (h_{00}^1)^2 w_I \\
& - 2 k_I a n \operatorname{sgn}(w_I) \left| w_I^{(n-1)} \right| \Delta t (h_{01}^1) (h_{01}^0) w_I \\
& - 2 k_I \Delta t (h_{00}^0)^2 a \left| w_I^n \right| + 2 k_I \Delta t (h_{01}^1) (h_{01}^1) a \left| w_I^n \right| \\
& - 2 k_I a n \operatorname{sgn}(w_I) \left| w_I^{(n-1)} \right| \Delta t (h_{01}^1) (h_{01}^1) w_I \\
& - 2 k_I a n \operatorname{sgn}(w_I) \left| w_I^{(n-1)} \right| \Delta t (h_{01}^0) (h_{01}^0) w_I \\
& - 2 k_I \Delta t (h_{00}^0)^2 - 2 (h_{00}^1)^2 k_I \Delta t \\
& - 4 k_I \Delta t (h_{00}^1) (h_{00}^0) a \left| w_I^n \right| \\
& + 2 k_I \Delta t (h_{01}^0) (h_{01}^0) a \left| w_I^n \right| \\
& + 2 k_I \Delta t (h_{01}^0) (h_{01}^1) a \left| w_I^n \right| \\
& + 4 k_I a n \operatorname{sgn}(w_I) \left| w_I^{(n-1)} \right| \Delta t (h_{00}^1) (h_{00}^0) w_I \\
& + 2 k_I a n \operatorname{sgn}(w_I) \left| w_I^{(n-1)} \right| \Delta t (h_{00}^0)^2 w_I - 8 (h_{00}^1) \\
& - 8 (h_{00}^0) + 2 k_I \Delta t (h_{01}^1) (h_{01}^1) + 2 k_I \Delta t (h_{01}^1) (h_{01}^0) \\
& + 2 k_I \Delta t (h_{01}^0) (h_{01}^0) - 4 (h_{00}^1) k_I \Delta t (h_{00}^0) \\
& + 2 k_I \Delta t (h_{01}^0) (h_{01}^1) - 8 (h_{00}^1) a^2 \left| w_I^n \right|^2 \\
& - 16 (h_{00}^1) a \left| w_I^n \right| - 16 (h_{00}^0) a \left| w_I^n \right| - 8 (h_{00}^0) a^2 \left| w_I^n \right|^2) / (\\
& (1 + a \left| w_I^n \right|)^2 \Delta t (2 (h_{00}^1) (h_{00}^0) + (h_{00}^1)^2 - (h_{01}^1) (h_{01}^0) \\
& - (h_{01}^1) (h_{01}^1) - (h_{01}^0) (h_{01}^1) - (h_{01}^0) (h_{01}^0) + (h_{00}^0)^2)
\end{aligned}$$

$$\Psi_{12,3} = \frac{1}{2} \frac{k_I (-2 + 2 a n \operatorname{sgn}(w_I) \left| w_I^{(n-1)} \right| w_I - 2 a \left| w_I^n \right|)}{(1 + a \left| w_I^n \right|)^2}$$

$$\Psi_{12,4} = \frac{1}{4} \frac{k_I \Delta t (-2 + 2 a n \operatorname{sgn}(w_I) \left| w_I^{(n-1)} \right| w_I - 2 a \left| w_I^n \right|)}{(1 + a \left| w_I^n \right|)^2}$$

$$\Psi_{12,5} = 0$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{13,1} = & k_I \left(-\frac{1}{2} a n \operatorname{sgn}(w_0) \left| w_0^{(n-1)} \right| \phi_0 \Delta l - a \left| w_0^n \right| \right. \\
& \left. + a n \operatorname{sgn}(w_0) \left| w_0^{(n-1)} \right| (w_0 - 1) \right) / (1 + a \left| w_0^n \right|)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{13,2} = & k_I \left(\frac{1}{2} a n \operatorname{sgn}(w_I) \left| w_I^{(n-1)} \right| \phi_0 \Delta l - a \left| w_I^n \right| \right. \\
& \left. + a n \operatorname{sgn}(w_I) \left| w_I^{(n-1)} \right| (w_I - 1) \right) / (1 + a \left| w_I^n \right|)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{13,3} = & ((k_1 n a^2 \operatorname{sgn}(w_0) \left| w_0^{(n-1)} w_1^n \right| \\
& + \frac{1}{2} k_1 a n \operatorname{sgn}(w_0) \left| w_0^{(n-1)} \right| \\
& + \frac{1}{2} k_1 n \operatorname{sgn}(w_0) a^3 \left| w_0^{(n-1)} (w_1^n)^2 \right| \\
& - \frac{1}{2} k_1 n a^3 \operatorname{sgn}(w_1) \left| (w_0^n)^2 w_1^{(n-1)} \right| \\
& - \frac{1}{2} k_1 a n \operatorname{sgn}(w_1) \left| w_1^{(n-1)} \right| \\
& - k_1 n a^2 \operatorname{sgn}(w_1) \left| w_0^n w_1^{(n-1)} \right|) \phi_0 \Delta l + k_2 + 2 k_1 \\
& + 3 k_1 a \left| w_0^n \right| + 2 k_2 a \left| w_0^n \right| - k_1 a n \operatorname{sgn}(w_0) \left| w_0^{(n-1)} \right| w_0 \\
& + k_1 a^3 \left| (w_0^n)^2 w_1^n \right| - k_1 n \operatorname{sgn}(w_0) a^3 \left| w_0^{(n-1)} (w_1^n)^2 \right| w_0 \\
& - 2 k_1 n a^2 \operatorname{sgn}(w_0) \left| w_0^{(n-1)} w_1^n \right| w_0 + 3 k_1 a \left| w_1^n \right| \\
& + 2 k_2 a \left| w_1^n \right| + 4 k_2 a^2 \left| w_0^n w_1^n \right| + 4 k_1 a^2 \left| w_0^n w_1^n \right| \\
& + 2 k_2 a^3 \left| w_0^n (w_1^n)^2 \right| + 2 k_2 a^3 \left| (w_0^n)^2 w_1^n \right| \\
& - k_1 a n \operatorname{sgn}(w_1) \left| w_1^{(n-1)} \right| w_1 + k_2 a^4 \left| (w_0^n)^2 (w_1^n)^2 \right| \\
& + k_1 a^3 \left| w_0^n (w_1^n)^2 \right| + k_1 a^2 \left| w_1^n \right|^2 + k_1 a^2 \left| w_0^n \right|^2 + k_2 a^2 \left| w_1^n \right|^2 \\
& - k_1 n a^3 \operatorname{sgn}(w_1) \left| (w_0^n)^2 w_1^{(n-1)} \right| w_1 + k_2 a^2 \left| w_0^n \right|^2 \\
& - 2 k_1 n a^2 \operatorname{sgn}(w_1) \left| w_0^n w_1^{(n-1)} \right| w_1) / (\\
& (1 + a \left| w_0^n \right|)^2 (1 + a \left| w_1^n \right|)^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{13,4} = & \frac{1}{2} k_1 a n \Delta l ((-\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(w_0) \left| w_0^{(n-1)} \right| \\
& - a \operatorname{sgn}(w_0) \left| w_0^{(n-1)} w_1^n \right| - \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sgn}(w_0) \left| w_0^{(n-1)} (w_1^n)^2 \right| \\
& - \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sgn}(w_1) \left| (w_0^n)^2 w_1^{(n-1)} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(w_1) \left| w_1^{(n-1)} \right| \\
& - a \operatorname{sgn}(w_1) \left| w_0^n w_1^{(n-1)} \right|) \phi_0 \Delta l \\
& - 2 a \operatorname{sgn}(w_1) \left| w_0^n w_1^{(n-1)} \right| w_1 + \operatorname{sgn}(w_0) \left| w_0^{(n-1)} \right| w_0 \\
& - a^2 \operatorname{sgn}(w_1) \left| (w_0^n)^2 w_1^{(n-1)} \right| w_1 - \operatorname{sgn}(w_1) \left| w_1^{(n-1)} \right| w_1 \\
& + 2 a \operatorname{sgn}(w_0) \left| w_0^{(n-1)} w_1^n \right| w_0 \\
& + a^2 \operatorname{sgn}(w_0) \left| w_0^{(n-1)} (w_1^n)^2 \right| w_0) / (\\
& (1 + a \left| w_0^n \right|)^2 (1 + a \left| w_1^n \right|)^2)
\end{aligned}$$

$$\Psi_{13,5} = -k_2$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{14,1} &= -\frac{1}{4}k_1 \Delta l(2 a n \operatorname{sgn}(w_0) \left| w_0^{(n-1)} \right| wD - 2 a \left| w_0^n \right| \\
&\quad + 2 a n \operatorname{sgn}(w_0) \left| w_0^{(n-1)} \right| w_0 - 2) / (1 + a \left| w_0^n \right|)^2 \\
\Psi_{14,2} &= \frac{1}{4}k_1 \Delta l(2 a n \operatorname{sgn}(w_1) \left| w_1^{(n-1)} \right| wD - 2 a \left| w_1^n \right| \\
&\quad + 2 a n \operatorname{sgn}(w_1) \left| w_1^{(n-1)} \right| w_1 - 2) / (1 + a \left| w_1^n \right|)^2 \\
\Psi_{14,3} &= \frac{1}{4}k_1 a n \Delta l((2 \operatorname{sgn}(w_0) \left| w_0^{(n-1)} \right| \\
&\quad + 4 a \operatorname{sgn}(w_0) \left| w_0^{(n-1)} w_1^n \right| + 2 a^2 \operatorname{sgn}(w_0) \left| w_0^{(n-1)} (w_1^n)^2 \right| \\
&\quad - 2 \operatorname{sgn}(w_1) \left| w_1^{(n-1)} \right| - 4 a \operatorname{sgn}(w_1) \left| w_0^n w_1^{(n-1)} \right| \\
&\quad - 2 a^2 \operatorname{sgn}(w_1) \left| (w_0^n)^2 w_1^{(n-1)} \right|) wD \\
&\quad - 4 a \operatorname{sgn}(w_1) \left| w_0^n w_1^{(n-1)} \right| w_1 + 2 \operatorname{sgn}(w_0) \left| w_0^{(n-1)} \right| w_0 \\
&\quad - 2 a^2 \operatorname{sgn}(w_1) \left| (w_0^n)^2 w_1^{(n-1)} \right| w_1 \\
&\quad + 4 a \operatorname{sgn}(w_0) \left| w_0^{(n-1)} w_1^n \right| w_0 - 2 \operatorname{sgn}(w_1) \left| w_1^{(n-1)} \right| w_1 \\
&\quad + 2 a^2 \operatorname{sgn}(w_0) \left| w_0^{(n-1)} (w_1^n)^2 \right| w_0) / (\\
&\quad (1 + a \left| w_0^n \right|)^2 (1 + a \left| w_1^n \right|)^2) \\
\Psi_{14,4} &= -\frac{1}{8}k_1 \Delta l^2((2 a n \operatorname{sgn}(w_1) \left| w_1^{(n-1)} \right| \\
&\quad + 4 n a^2 \operatorname{sgn}(w_1) \left| w_0^n w_1^{(n-1)} \right| + 2 a n \operatorname{sgn}(w_0) \left| w_0^{(n-1)} \right| \\
&\quad + 4 n a^2 \operatorname{sgn}(w_0) \left| w_0^{(n-1)} w_1^n \right| \\
&\quad + 2 n \operatorname{sgn}(w_0) a^3 \left| w_0^{(n-1)} (w_1^n)^2 \right| \\
&\quad + 2 n a^3 \operatorname{sgn}(w_1) \left| (w_0^n)^2 w_1^{(n-1)} \right|) wD - 6 a \left| w_1^n \right| - 2 a^2 \left| w_1^n \right|^2 \\
&\quad - 2 a^2 \left| w_0^n \right|^2 + 2 n a^3 \operatorname{sgn}(w_1) \left| (w_0^n)^2 w_1^{(n-1)} \right| w_1 - 6 a \left| w_0^n \right| \\
&\quad + 2 a n \operatorname{sgn}(w_1) \left| w_1^{(n-1)} \right| w_1 \\
&\quad + 4 n a^2 \operatorname{sgn}(w_1) \left| w_0^n w_1^{(n-1)} \right| w_1 - 2 a^3 \left| (w_0^n)^2 w_1^n \right| \\
&\quad + 2 a n \operatorname{sgn}(w_0) \left| w_0^{(n-1)} \right| w_0 \\
&\quad + 2 n \operatorname{sgn}(w_0) a^3 \left| w_0^{(n-1)} (w_1^n)^2 \right| w_0 - 2 a^3 \left| w_0^n (w_1^n)^2 \right| \\
&\quad - 8 a^2 \left| w_0^n w_1^n \right| - 4 + 4 n a^2 \operatorname{sgn}(w_0) \left| w_0^{(n-1)} w_1^n \right| w_0) / (\\
&\quad (1 + a \left| w_0^n \right|)^2 (1 + a \left| w_1^n \right|)^2)
\end{aligned}$$

$$\Psi_{14,5} = \Psi_{15,1} = \Psi_{15,2} = 0$$

$$\Psi_{15,3} = -k_2 \quad \Psi_{15,4} = 0 \quad \Psi_{15,5} = k_2$$

C.2 Impedanzmatrix

$$\begin{aligned}
A_{11} := & -\frac{1}{2}(-2\omega^4 \Delta l^2 c_1 m_{R0} m_D c_2 + 2\omega^2 \Delta l^2 m_w k_2 k_1 m_{R0} \\
& + 8\omega^2 I_\theta k_2 k_1 m_{R0} + 4\omega^2 I_\theta k_2 k_1 m_D + 4\omega^2 I_\theta m_w k_2 k_1 \\
& - 8\omega^4 I_\theta c_1 m_{R0} c_2 - 8\omega^4 I_\theta m_w k_1 m_{R0} - 4\omega^4 I_\theta m_w m_{R0} k_2 \\
& - 4\omega^4 I_\theta m_w k_1 m_D - 4\omega^4 I_\theta m_w c_1^2 - \omega^4 \Delta l^2 m_w c_1^2 m_D \\
& - \Delta l^2 m_w k_1^2 k_2 - \Delta l^2 m_D k_1^2 k_2 + 2\omega^2 \Delta l^2 k_1 m_D c_2 c_1 \\
& + 8\omega^2 I_\theta k_1 c_2 c_1 - 4\omega^4 I_\theta c_1 m_D c_2 - 4\omega^4 I_\theta m_w c_1 c_2 \\
& + 4\omega^2 \Delta l^2 c_1^2 k_2 m_{R0} + 2\omega^2 \Delta l^2 k_2 m_D k_1 m_{R0} + 8\omega^2 \Delta l^2 k_1 c_1 m_{R0} c_2 \\
& + \omega^2 \Delta l^2 m_D c_1^2 k_2 - 4\Delta l^2 k_2 k_1^2 m_{R0} - 2\omega^4 \Delta l^2 m_w m_D k_1 m_{R0} \\
& - 2\omega^4 \Delta l^2 c_1 m_w m_{R0} c_2 - 4\omega^4 I_\theta m_{R0} m_D k_2 + 8I\omega^3 I_\theta m_w k_1 c_1 \\
& - 2I\omega \Delta l^2 m_w c_1 k_2 k_1 - 8I\omega I_\theta c_1 k_2 k_1 - 4I\omega I_\theta k_1^2 c_2 \\
& - I\omega \Delta l^2 m_w k_1^2 c_2 - 2I\omega \Delta l^2 m_D k_1 k_2 c_1 + 2I\omega^3 \Delta l^2 m_w k_1 m_D c_1 \\
& + I\omega^3 \Delta l^2 c_1^2 m_w c_2 + I\omega^3 \Delta l^2 c_1^2 m_D c_2 + 4I\omega^3 I_\theta c_1^2 c_2 \\
& - 8I\omega^5 I_\theta m_w c_1 m_{R0} + \omega^2 \Delta l^2 m_w c_1^2 k_2 + 2\omega^2 \Delta l^2 m_w k_1 c_2 c_1 \\
& + \omega^2 \Delta l^2 m_w k_1^2 m_D - 2I\omega^5 c_1 m_{R0} m_D m_w \Delta l^2 - I\omega \Delta l^2 k_1^2 m_D c_2 \\
& - 4I\omega^5 I_\theta m_{R0} m_D c_2 + 8I\omega^3 I_\theta c_1 m_{R0} k_2 \\
& + 2I\omega^3 \Delta l^2 c_1 m_{R0} m_D k_2 + 4\omega^2 I_\theta m_w k_1^2 + 4I\omega^3 I_\theta c_2 k_1 m_D \\
& - 4I\omega \Delta l^2 c_2 k_1^2 m_{R0} + 2I\omega^3 \Delta l^2 c_2 m_D k_1 m_{R0} \\
& + 8I\omega^3 I_\theta c_2 k_1 m_{R0} + 8I\omega^3 \Delta l^2 m_w c_1 k_1 m_{R0} \\
& - 8I\omega \Delta l^2 c_1 m_{R0} k_2 k_1 + 4I\omega^3 \Delta l^2 c_2 c_1^2 m_{R0} \\
& - 4I\omega^5 I_\theta m_w m_{R0} c_2 - 4I\omega^5 I_\theta m_w c_1 m_D \\
& + 2I\omega^3 \Delta l^2 m_w c_1 m_{R0} k_2 + 4I\omega^3 I_\theta k_2 c_1 m_D \\
& + 2I\omega^3 \Delta l^2 m_w c_2 k_1 m_{R0} + 4m_{R0} m_D m_w I_\theta \omega^6 \\
& + 4I\omega^3 I_\theta m_w c_1 k_2 + 4I\omega^3 I_\theta m_w k_1 c_2 + 4\omega^2 I_\theta c_1^2 k_2 \\
& - 4I_\theta k_1^2 k_2 + 4\omega^2 \Delta l^2 m_w k_1^2 m_{R0} - 4\omega^4 \Delta l^2 c_1^2 m_{R0} m_w) / ((\\
& -I\omega^3 m_{R0} m_D c_2 - 2I\omega^3 c_1 m_{R0} m_w + I\omega m_w c_1 k_2 + I\omega c_2 k_1 m_D \\
& + I\omega m_w k_1 c_2 - I\omega^3 m_w m_{R0} c_2 - I\omega^3 m_w c_1 m_D + I\omega k_2 c_1 m_D \\
& + 2I\omega k_2 c_1 m_{R0} + 2I\omega c_2 k_1 m_{R0} + k_1 k_2 m_w + k_2 k_1 m_D + 2k_2 k_1 m_{R0} \\
& - \omega^2 c_2 c_1 m_D - 2\omega^2 c_1 m_{R0} c_2 - \omega^2 m_{R0} m_D k_2 - \omega^2 m_w c_1 c_2 \\
& - \omega^2 m_w m_{R0} k_2 - \omega^2 m_w k_1 m_D - 2\omega^2 m_w k_1 m_{R0} + \omega^4 m_{R0} m_D m_w)\omega^2(\\
& 2I_\theta m_{R0} \omega^2 - 2I\omega I_\theta c_1 - I\omega m_{R0} c_1 \Delta l^2 - 2I_\theta k_1 \\
& - m_{R0} k_1 \Delta l^2))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A12 := & -\frac{1}{2}(I\omega \Delta l^2 k_1^2 m_D c_2 + 2I\omega \Delta l^2 m_w c_1 k_2 k_1 - 4I\omega I_\theta k_1^2 c_2 \\
& + I\omega \Delta l^2 m_w k_1^2 c_2 - 8I\omega I_\theta c_1 k_2 k_1 - I\omega^3 \Delta l^2 c_1^2 m_w c_2 \\
& - 2I\omega^3 \Delta l^2 m_w k_1 m_D c_1 + 2I\omega \Delta l^2 m_D k_1 k_2 c_1 + 4I\omega^3 I_\theta c_1^2 c_2 \\
& + 8I\omega^3 I_\theta m_w k_1 c_1 - I\omega^3 \Delta l^2 c_1^2 m_D c_2 - \omega^2 \Delta l^2 m_w c_1^2 k_2 \\
& - \omega^2 \Delta l^2 m_w k_1^2 m_D + 4\omega^2 I_\theta c_1^2 k_2 - 2\omega^2 \Delta l^2 m_w k_1 c_2 c_1 \\
& + 4\omega^2 I_\theta m_w k_1^2 + 8\omega^2 I_\theta k_1 c_2 c_1 - 4\omega^4 I_\theta m_w c_1^2 \\
& + \omega^4 \Delta l^2 m_w c_1^2 m_D + \Delta l^2 m_D k_1^2 k_2 + \Delta l^2 m_w k_1^2 k_2 - 4I_\theta k_1^2 k_2 \\
& - 2\omega^2 \Delta l^2 k_1 m_D c_2 c_1 - \omega^2 \Delta l^2 m_D c_1^2 k_2) / ((-I\omega^3 m_{R0} m_D c_2 \\
& - 2I\omega^3 c_1 m_{R0} m_w + I\omega m_w c_1 k_2 + I\omega c_2 k_1 m_D + I\omega m_w k_1 c_2 \\
& - I\omega^3 m_w m_{R0} c_2 - I\omega^3 m_w c_1 m_D + I\omega k_2 c_1 m_D + 2I\omega k_2 c_1 m_{R0} \\
& + 2I\omega c_2 k_1 m_{R0} + k_1 k_2 m_w + k_2 k_1 m_D + 2k_2 k_1 m_{R0} - \omega^2 c_2 c_1 m_D \\
& - 2\omega^2 c_1 m_{R0} c_2 - \omega^2 m_{R0} m_D k_2 - \omega^2 m_w c_1 c_2 - \omega^2 m_w m_{R0} k_2 \\
& - \omega^2 m_w k_1 m_D - 2\omega^2 m_w k_1 m_{R0} + \omega^4 m_{R0} m_D m_w)\omega^2(2I_\theta m_{R0} \omega^2 \\
& - 2I\omega I_\theta c_1 - I\omega m_{R0} c_1 \Delta l^2 - 2I_\theta k_1 - m_{R0} k_1 \Delta l^2))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A21 := & -\frac{1}{2}(I\omega \Delta l^2 k_1^2 m_D c_2 + 2I\omega \Delta l^2 m_w c_1 k_2 k_1 - 4I\omega I_\theta k_1^2 c_2 \\
& + I\omega \Delta l^2 m_w k_1^2 c_2 - 8I\omega I_\theta c_1 k_2 k_1 - I\omega^3 \Delta l^2 c_1^2 m_w c_2 \\
& - 2I\omega^3 \Delta l^2 m_w k_1 m_D c_1 + 2I\omega \Delta l^2 m_D k_1 k_2 c_1 + 4I\omega^3 I_\theta c_1^2 c_2 \\
& + 8I\omega^3 I_\theta m_w k_1 c_1 - I\omega^3 \Delta l^2 c_1^2 m_D c_2 - \omega^2 \Delta l^2 m_w c_1^2 k_2 \\
& - \omega^2 \Delta l^2 m_w k_1^2 m_D + 4\omega^2 I_\theta c_1^2 k_2 - 2\omega^2 \Delta l^2 m_w k_1 c_2 c_1 \\
& + 4\omega^2 I_\theta m_w k_1^2 + 8\omega^2 I_\theta k_1 c_2 c_1 - 4\omega^4 I_\theta m_w c_1^2 \\
& + \omega^4 \Delta l^2 m_w c_1^2 m_D + \Delta l^2 m_D k_1^2 k_2 + \Delta l^2 m_w k_1^2 k_2 - 4I_\theta k_1^2 k_2 \\
& - 2\omega^2 \Delta l^2 k_1 m_D c_2 c_1 - \omega^2 \Delta l^2 m_D c_1^2 k_2) / ((-I\omega^3 m_{R0} m_D c_2 \\
& - 2I\omega^3 c_1 m_{R0} m_w + I\omega m_w c_1 k_2 + I\omega c_2 k_1 m_D + I\omega m_w k_1 c_2 \\
& - I\omega^3 m_w m_{R0} c_2 - I\omega^3 m_w c_1 m_D + I\omega k_2 c_1 m_D + 2I\omega k_2 c_1 m_{R0} \\
& + 2I\omega c_2 k_1 m_{R0} + k_1 k_2 m_w + k_2 k_1 m_D + 2k_2 k_1 m_{R0} - \omega^2 c_2 c_1 m_D \\
& - 2\omega^2 c_1 m_{R0} c_2 - \omega^2 m_{R0} m_D k_2 - \omega^2 m_w c_1 c_2 - \omega^2 m_w m_{R0} k_2 \\
& - \omega^2 m_w k_1 m_D - 2\omega^2 m_w k_1 m_{R0} + \omega^4 m_{R0} m_D m_w)\omega^2(2I_\theta m_{R0} \omega^2 \\
& - 2I\omega I_\theta c_1 - I\omega m_{R0} c_1 \Delta l^2 - 2I_\theta k_1 - m_{R0} k_1 \Delta l^2))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{22} := & -\frac{1}{2}(-2\omega^4 \Delta l^2 c_1 m_{R0} m_D c_2 + 2\omega^2 \Delta l^2 m_w k_2 k_1 m_{R0} \\
& + 8\omega^2 I_\theta k_2 k_1 m_{R0} + 4\omega^2 I_\theta k_2 k_1 m_D + 4\omega^2 I_\theta m_w k_2 k_1 \\
& - 8\omega^4 I_\theta c_1 m_{R0} c_2 - 8\omega^4 I_\theta m_w k_1 m_{R0} - 4\omega^4 I_\theta m_w m_{R0} k_2 \\
& - 4\omega^4 I_\theta m_w k_1 m_D - 4\omega^4 I_\theta m_w c_1^2 - \omega^4 \Delta l^2 m_w c_1^2 m_D \\
& - \Delta l^2 m_w k_1^2 k_2 - \Delta l^2 m_D k_1^2 k_2 + 2\omega^2 \Delta l^2 k_1 m_D c_2 c_1 \\
& + 8\omega^2 I_\theta k_1 c_2 c_1 - 4\omega^4 I_\theta c_1 m_D c_2 - 4\omega^4 I_\theta m_w c_1 c_2 \\
& + 4\omega^2 \Delta l^2 c_1^2 k_2 m_{R0} + 2\omega^2 \Delta l^2 k_2 m_D k_1 m_{R0} + 8\omega^2 \Delta l^2 k_1 c_1 m_{R0} c_2 \\
& + \omega^2 \Delta l^2 m_D c_1^2 k_2 - 4\Delta l^2 k_2 k_1^2 m_{R0} - 2\omega^4 \Delta l^2 m_w m_D k_1 m_{R0} \\
& - 2\omega^4 \Delta l^2 c_1 m_w m_{R0} c_2 - 4\omega^4 I_\theta m_{R0} m_D k_2 + 8I\omega^3 I_\theta m_w k_1 c_1 \\
& - 2I\omega \Delta l^2 m_w c_1 k_2 k_1 - 8I\omega I_\theta c_1 k_2 k_1 - 4I\omega I_\theta k_1^2 c_2 \\
& - I\omega \Delta l^2 m_w k_1^2 c_2 - 2I\omega \Delta l^2 m_D k_1 k_2 c_1 + 2I\omega^3 \Delta l^2 m_w k_1 m_D c_1 \\
& + I\omega^3 \Delta l^2 c_1^2 m_w c_2 + I\omega^3 \Delta l^2 c_1^2 m_D c_2 + 4I\omega^3 I_\theta c_1^2 c_2 \\
& - 8I\omega^5 I_\theta m_w c_1 m_{R0} + \omega^2 \Delta l^2 m_w c_1^2 k_2 + 2\omega^2 \Delta l^2 m_w k_1 c_2 c_1 \\
& + \omega^2 \Delta l^2 m_w k_1^2 m_D - 2I\omega^5 c_1 m_{R0} m_D m_w \Delta l^2 - I\omega \Delta l^2 k_1^2 m_D c_2 \\
& - 4I\omega^5 I_\theta m_{R0} m_D c_2 + 8I\omega^3 I_\theta c_1 m_{R0} k_2 \\
& + 2I\omega^3 \Delta l^2 c_1 m_{R0} m_D k_2 + 4\omega^2 I_\theta m_w k_1^2 + 4I\omega^3 I_\theta c_2 k_1 m_D \\
& - 4I\omega \Delta l^2 c_2 k_1^2 m_{R0} + 2I\omega^3 \Delta l^2 c_2 m_D k_1 m_{R0} \\
& + 8I\omega^3 I_\theta c_2 k_1 m_{R0} + 8I\omega^3 \Delta l^2 m_w c_1 k_1 m_{R0} \\
& - 8I\omega \Delta l^2 c_1 m_{R0} k_2 k_1 + 4I\omega^3 \Delta l^2 c_2 c_1^2 m_{R0} \\
& - 4I\omega^5 I_\theta m_w m_{R0} c_2 - 4I\omega^5 I_\theta m_w c_1 m_D \\
& + 2I\omega^3 \Delta l^2 m_w c_1 m_{R0} k_2 + 4I\omega^3 I_\theta k_2 c_1 m_D \\
& + 2I\omega^3 \Delta l^2 m_w c_2 k_1 m_{R0} + 4m_{R0} m_D m_w I_\theta \omega^6 \\
& + 4I\omega^3 I_\theta m_w c_1 k_2 + 4I\omega^3 I_\theta m_w k_1 c_2 + 4\omega^2 I_\theta c_1^2 k_2 \\
& - 4I_\theta k_1^2 k_2 + 4\omega^2 \Delta l^2 m_w k_1^2 m_{R0} - 4\omega^4 \Delta l^2 c_1^2 m_{R0} m_w) / ((\\
& -I\omega^3 m_{R0} m_D c_2 - 2I\omega^3 c_1 m_{R0} m_w + I\omega m_w c_1 k_2 + I\omega c_2 k_1 m_D \\
& + I\omega m_w k_1 c_2 - I\omega^3 m_w m_{R0} c_2 - I\omega^3 m_w c_1 m_D + I\omega k_2 c_1 m_D \\
& + 2I\omega k_2 c_1 m_{R0} + 2I\omega c_2 k_1 m_{R0} + k_1 k_2 m_w + k_2 k_1 m_D + 2k_2 k_1 m_{R0} \\
& - \omega^2 c_2 c_1 m_D - 2\omega^2 c_1 m_{R0} c_2 - \omega^2 m_{R0} m_D k_2 - \omega^2 m_w c_1 c_2 \\
& - \omega^2 m_w m_{R0} k_2 - \omega^2 m_w k_1 m_D - 2\omega^2 m_w k_1 m_{R0} + \omega^4 m_{R0} m_D m_w)\omega^2(\\
& 2I_\theta m_{R0} \omega^2 - 2I\omega I_\theta c_1 - I\omega m_{R0} c_1 \Delta l^2 - 2I_\theta k_1 \\
& - m_{R0} k_1 \Delta l^2))
\end{aligned}$$

Anhang D

Legendre - Polynome

Nach Bronstein [BS91] sind die Legendre-Polynome zu

$$P_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0, \\ \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n) & \text{falls } n > 0 \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

definiert. Die geraden Polynome sind achsensymmetrisch bzgl. der Ordinate und haben den Wert $P_{2n}(\pm 1) = 1$. Die ungeraden Polynome sind punktsymmetrisch zum dem Ursprung und haben den Wert $P_{2n+1}(\pm 1) = \pm 1$.

Hier werden nur die im Rahmen dieser Dissertation benötigten ersten acht geraden Legendre-Polynome angegeben. Dabei erfolgt eine Skalierung der Abszisse in der Weise, dass die Funktionen bei $\pm b$ den Wert 1 annehmen. Für $|y| > b$ sollen die Legendre Polynome Null sein, da mit ihnen die Spannungsverteilung in Querrichtung unter einem Balken der Breite $2b$ angenähert werden soll. Daher müssen sie noch mit der Fensterfunktion multipliziert werden.

D.1 Skalierte gefensterte Legendre-Polynome im Originalraum

$$\begin{aligned} P_0(y) &= 1 (H(y+b) - H(y-b)) \\ P_2(y) &= \left(\frac{3}{2} \frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{2} \right) (H(y+b) - H(y-b)) \\ P_4(y) &= \left(\frac{35}{8} \frac{y^4}{b^4} - \frac{15}{4} \frac{y^2}{b^2} + \frac{3}{8} \right) (H(y+b) - H(y-b)) \\ P_6(y) &= \left(\frac{231}{16} \frac{y^6}{b^6} - \frac{315}{16} \frac{y^4}{b^4} + \frac{105}{16} \frac{y^2}{b^2} - \frac{5}{16} \right) (H(y+b) - H(y-b)) \\ P_8(y) &= \left(\frac{12870}{256} \frac{y^8}{b^8} - \frac{6006}{64} \frac{y^6}{b^6} + \frac{3465}{64} \frac{y^4}{b^4} - \frac{315}{32} \frac{y^2}{b^2} + \frac{35}{128} \right) (H(y+b) - H(y-b)) \end{aligned}$$

D.2 Fourier-transformierte skalierte gefensterter Legendre-Polynome

Zur Berechnung der Wellenausbreitung werden auch die Fourier-Transformierten der auf das Intervall $-b \leq y \leq b$ beschränkten skalierten Legendre-Polynome benötigt. Diese lauten:

$$\begin{aligned}\hat{P}_0(k_y) &= 2 \frac{\sin(k_y b)}{k_y} \\ \hat{P}_2(k_y) &= \frac{(8b^2 k_y^2 - 24) \sin(k_y b) + 24 k_y b \cos(k_y b)}{4b^2 k_y^3} \\ \hat{P}_4(k_y) &= \left((32b^4 k_y^4 - 1440b^2 k_y^2 + 3360) \sin(k_y b) \right. \\ &\quad \left. + (320b^3 k_y^3 - 3360 k_y b) \cos(k_y b) \right) / (16b^4 k_y^5) \\ \hat{P}_6(k_y) &= \left((128b^6 k_y^6 - 26880b^4 k_y^4 + 604800b^2 k_y^2 - 1330560) \sin(k_y b) \right. \\ &\quad \left. + (2688b^5 k_y^5 - 161280b^3 k_y^3 + 1330560 k_y b) \cos(k_y b) \right) / (64b^6 k_y^7) \\ \hat{P}_8(k_y) &= \left((512b^8 k_y^8 - 322560b^6 k_y^6 + 26611200b^4 k_y^4 - 484323840b^2 k_y^2 \right. \\ &\quad \left. + 1037836800) \sin(k_y b) + \right. \\ &\quad \left. (18432b^7 k_y^7 - 3548160b^5 k_y^5 + 138378240b^3 k_y^3 - 1037836800b k_y) \right. \\ &\quad \left. \cos(k_y b) \right) / (256b^8 k_y^9)\end{aligned}$$

Abbildungsverzeichnis

2.1	Annäherung der Spannungsverteilung durch Legendre-Polynome, die wiederum über Rechteckfunktionen dargestellt werden	25
2.2	Achtes Legendre-Polynom mit Annäherung über 36 Rechteckfunktionen	25
2.3	Reziprozität	26
3.1	Verteilung der Phasenraumpunkte	29
3.2	Schematische Darstellung der Mehrskalenganalyse	31
3.3	Dreidimensionale Skalierungsfunktionen und Wavelets	37
3.4	Skalierungsfunktion und Wavelet von <i>B-splines</i> verschiedener Ordnung	41
3.5	Duale Skalierungsfunktion und Wavelet von <i>B-splines</i> 2. und 4. Ordnung	41
3.6	Duale rücktransformierte Skalierungsfunktion und Wavelet von <i>B-splines</i> verschiedener Ordnung (Darstellung des Betrags)	42
3.7	Rekonstruktion mit 2.5% der Waveletkoeffizienten unter Verwendung verschiedener <i>B-splines</i>	43
3.8	Rekonstruktion mit 0.5% der Waveletkoeffizienten unter Verwendung verschiedener <i>B-splines</i>	44
3.9	Rekonstruktion im Fourier-rücktransformierten Raum mit 0.5% der Waveletkoeffizienten unter Verwendung verschiedener <i>B-splines</i>	45
4.1	Schema der Datenstruktur für das 3D-Raster	50
4.2	Benötigte Nachbarelemente für die Mehrskalenganalyse	52
5.1	Bewegtes Koordinatensystem	58
5.2	Zusammenhänge für die Oberflächenverschiebung im bewegten Koordinatensystem	60
5.3	Antworten verschiedener Systeme auf einen Impuls	60
5.4	Modellierung des Fahrzeugs als Einmassenschwinger	62
5.5	Modellierung des Fahrzeugs als Drehgestell	66

5.6	Lösungen im transformierten Raum (schematisch)	75
6.1	Impulsgeschwindigkeitsreaktionsfunktionen eines Balkens auf ungeschichtetem Halbraum	78
6.2	Auswirkung der Balken-Boden-Kopplung auf die Wellengeschwindigkeiten im Balken	79
6.3	Impulsreaktionsfunktion eines Balkens auf ungeschichtetem Halbraum für $E = 50 \cdot 10^6 N/m^2, v = 80 m/s$; Realteil	80
6.4	Impulsreaktionsfunktion eines Balkens auf ungeschichtetem Halbraum mit $E = 50 \cdot 10^6 N/m^2, v = 80 m/s$, Vergleich der Rechenergebnisse	81
6.5	Impulsreaktionsfunktionen eines Balkens auf verschiedenen Böden für $\bar{x} = 0$ und $v = 80 m/s$	82
6.6	Linke Spalte: Impulsreaktionsfunktionen eines Balkens auf geschichtetem Halbraum in (x, t) ; rechts: Vergleich verschiedener Geschwindigkeiten bei $\bar{x} = 0$	83
6.7	Vorfaktoren der Legendre-Polynome für ungeschichteten Boden mit $E = 50 \cdot 10^6 [N/m^2]$ für eine Einheitseinsenkung	86
6.8	Vorfaktoren der Legendre-Polynome für <i>geschichteten</i> Boden mit $E_o = 30 \cdot 10^6 [N/m^2], E_m = 90 \cdot 10^6 [N/m^2], E_u = 50 \cdot 10^6 [N/m^2]$ für eine Einheitseinsenkung	87
6.9	Identifizierung der <i>Rayleighwelle</i> im Vorfaktor des Legendre-Polynoms nullter Ordnung für ungeschichteten Halbraum mit $E = 50 \cdot 10^6 [N/m^2]$	88
6.10	Vergleich der Kehrwerte der Beträge der Legendre-Polynom-Vorfaktoren nullter Ordnung für geschichtete Böden mit unterschiedlichen Materialparametern (Elastizitätsmodule in $[N/m^2]$)	88
6.11	Impulsreaktionsfunktion und Raster für den Balken auf geschichtetem Boden mit $E_o = 60 \cdot 10^6 [N/m^2], E_m = 30 \cdot 10^6 [N/m^2], E_u = 50 \cdot 10^6 [N/m^2]$ und $v = 80 [m/s]$	90
6.12	Waveletkoeffizienten der Funktion von Abschnitt 6.3.1	90
6.13	Nichtlineare Federkennlinie und lineare Vergleichslinie mit Steifigkeit k_o	91
6.14	Vergleich der Ergebnisse aus den Berechnungen mit und ohne Interaktionskraft als Unbekannter im Gleichungssystem. In den Graphen sind jeweils beide Ergebnisse dargestellt.	92
6.15	Lineare Berechnung der Interaktion im Zeitbereich und analytische Lösung	92
6.16	Zeitverläufe der linearen Interaktion eines Drehgestells ($v = 80 [m/s]$) mit einem Balken auf geschichtetem Boden $E_o = 90 \cdot 10^6 [N/m^2], E_m = 30 \cdot 10^6 [N/m^2], E_u = 50 \cdot 10^6 [N/m^2]$ und $v = 80 [m/s]$ und weitgehend analytische Vergleichslösung	94
6.17	Zeitverläufe der nichtlinearen Interaktion eines Drehgestells ($v = 80 [m/s], a = 2 \cdot 10^5, n = 0.1$) mit einem Balken auf geschichtetem Boden $E_o = 90 \cdot 10^6 [N/m^2], E_m = 30 \cdot 10^6 [N/m^2], E_u = 50 \cdot 10^6 [N/m^2]$ und $v = 80 [m/s]$ und weitgehend analytische Vergleichslösung für den linearen Fall	95

6.18	Zeitverläufe der nichtlinearen Interaktion eines Drehgestells ($v = 80[m/s]$, $a = 2 \cdot 10^5$, $n = 0.3$) mit einem Balken auf geschichtetem Boden $E_o = 30 \cdot 10^6[N/m^2]$, $E_m = 90 \cdot 10^6[N/m^2]$, $E_u = 50 \cdot 10^6[N/m^2]$ und $v = 80[m/s]$ und weitgehend analytische Vergleichslösung für den linearen Fall	96
6.19	Einsenkungsmulden der beiden Fahrzeugmodelle aufgrund des bewegten Eigengewichts	98
6.20	Wellenausbreitung auf der Halbraumoberfläche infolge der <i>nichtlinearen Einmassenschwinger-Fahrweg</i> -Interaktion	99
6.21	Wellenausbreitung auf der geschichteten Halbraumoberfläche infolge der <i>nichtlinearen Drehgestell-Fahrweg</i> -Interaktion	101
6.22	Dreidimensionales Raster zur Ermittlung der Wellenausbreitungsfunktion von Abschnitt 6.6.1	103