

FAKULTÄT FÜR BAUINGENIEUR-  
UND VERMESSUNGSWESEN

**Zur Höhensystemumstellung  
und Geoidberechnung  
in Bayern**

**Dissertation  
von**

**Christian Gerlach**



TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Technische Universität München  
Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen  
Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie

# **Zur Höhensystemumstellung und Geoidberechnung in Bayern**

**Christian Gerlach**

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor – Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing.habil. Thomas Wunderlich  
Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Reiner Rummel  
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Jürgen Müller, Universität Hannover

Die Dissertation wurde am 02.10.2002 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen am 10.12.2002 angenommen.

# Zusammenfassung

Topographische Höhen werden für verschiedenste Zwecke und mit Hilfe verschiedener Messmethoden bestimmt. Die vorliegende Arbeit soll einen Beitrag zu einem präzisen Höhensystem in Bayern leisten. Dabei geht es zum einen um die Bestimmung physikalischer Höhen durch die Kombination von geometrischem Nivellement und Schweremessungen, zum anderen um die Berechnung eines genauen Geoids. Letzteres ermöglicht, das effektive Verfahren des Nivellement mit GPS anzuwenden. Dabei ist natürlich darauf zu achten, dass das verwendete Geoid mit dem Höhensystem konsistent ist. Für beide Größen gibt es unterschiedliche Definitionen, deren Differenzen im Rahmen der angestrebten Zentimetergenauigkeit nicht vernachlässigt werden können.

In der alten Bundesrepublik wurde aus historischen Gründen das System der *normalorthometrischen Höhen* verwendet, die an den Pegel Amsterdam angeschlossen waren. In der ehemaligen DDR hingegen wurden *Normalhöhen* verwendet, die mit dem Wasserspiegel im Baltischen Meer verbunden waren. Durch die politische Wiedervereinigung entstand deshalb in Deutschland ein inhomogenes Höhennetz. Die Arbeitsgemeinschaft der Vermessungsverwaltungen der Bundesrepublik Deutschland beschloss daher, die Berechnung eines neuen, einheitlichen Höhensystems. Es wurden Normalhöhen gewählt, angeschlossen am Pegel Amsterdam. Das Höhennetz 1. Ordnung wurde in einer Gesamtausgleichung berechnet. Die Höhen der weiteren Verdichtungsstufen müssen von den jeweiligen Landesbehörden bestimmt werden.

Der erste Teil der vorliegenden Arbeit beschäftigt sich mit der Bestimmung von Normalhöhen im untergeordneten Festpunktfeld in Bayern. Es werden Transformationsmethoden zwischen altem und neuem Höhensystem untersucht. Dabei soll der Rückgriff auf die nicht immer digital vorliegenden originalen Messdaten vermieden werden. Es zeigt sich, dass in den meisten Regionen relativ einfache Algorithmen ausreichend sind. In gebirgigem Raum, also vor allem in den Alpen, können die amtlichen Genauigkeitsmaße jedoch nicht mehr ohne weiteres eingehalten werden. Entscheidender Faktor ist hier die Interpolationsgenauigkeit der benötigten Schwerewerte. Abhilfe schafft die Verwendung topographisch reduzierter Bougueranomalien oder auch eine geeignete Verteilung von Stütz- und Interpolationspunkten. Die dargestellten Genauigkeitsuntersuchungen basieren auf einem Fehlerbudget, das alle Einflussfaktoren gegenüberstellt. Prädizierte Fehlermaße werden mittels empirischer Kovarianzfunktionen abgeleitet.

Höhenbezugsfläche für die neu eingeführten Normalhöhen ist das Quasigeoid nach *Molodenskii*. Im zweiten Teil dieser Arbeit wird ein genaues Quasigeoid für Bayern bestimmt. Grundlage ist das globale Potentialmodell EGM96, das mit terrestrischen Schwereanomalien in einer Umgebung von ca.  $4^\circ$  rund um Bayern kombiniert wird. Zur Reduktion topographischer Anteile wird innerhalb Bayerns ein hochauflösendes Geländemodell mit einer Gitterweite von 50 m verwendet. Es werden die Terme der *Molodenskii*-Reihe bis zur dritten Ordnung einbezogen und verschiedene Modifikationen der *Stokes*-Funktion getestet. Anschließende Vergleiche mit GPS/Nivellementhöhen zeigen, dass die genaueste Lösung auf der originalen Kernfunktion basiert, wobei jedoch noch lang- und mittelwellige Fehler von mehreren Dezimetern in der Lösung enthalten sind. Dies zeigt sich in ähnlicher Weise auch bei Verwendung des Europäischen Gravimetrischen Geoids EGG97. Die weitergehende Untersuchung der Fehler lässt vermuten, dass sie durch das globale Potentialmodell verursacht werden. Um aus dem abgeleiteten Quasigeoid trotzdem genaue physikalische Höhen ableiten zu können, wird es an einen Satz von GPS/Nivellementpunkten angepasst. Dadurch kann eine Genauigkeit von 2–3 cm erreicht werden, was etwa der mit GPS ableitbaren Höhen-genauigkeit entspricht.

## Abstract

Topographic heights are determined for various purposes and using different measurement techniques. This work gives a contribution to an accurate national height system for the federal state of Bavaria, Germany. One aspect is the determination of physical heights by means of geometric levelling combined with gravity measurements. The other aspect is to derive an accurate geoid in order to make use of the efficient method of levelling by GPS. Of course the definitions of the heights must be consistent with the used geoid. For both quantities (heights and geoid) there exist different definitions and the differences between those cannot be neglected when it comes to the cm-level.

For historic reasons, the former West-German national height system was computed in *normal-orthometric heights* and connected to the tide gauge Amsterdam. In the former German Democratic Republic *normal heights* were introduced, connected to a tide gauge in the Baltic sea. Thus, the reunification of Germany resulted in an inhomogeneous height system. The working group of the federal surveying authorities decided to set up a new consistent system, based on normal heights and connected to the level of Amsterdam. The first order network was computed in one step for the whole of Germany. It is the task of each federal state to compute the lower

order networks for its own area.

The first part of this work deals with height computations in the area of Bavaria. Transformation algorithms from the old spheroidal heights into normal heights are investigated under the precondition, that the use of the original measurement records should be avoided because not all of them are available in digital form. It is shown that in most parts of Bavaria a relatively simple procedure can be used, while in mountainous regions, like the Alps, gravity interpolation becomes the critical point. The accuracy requirements can still be met by using Bouguer anomalies (including topographic reductions) or by a proper distribution of data and interpolation points. The quality descriptions are based on a comprehensive error budget of all relevant error sources and make use of empirical covariance functions.

As the new height system will be given in normal heights, the proper geoid is the quasi-geoid, based on the theory of *Molodensky*. The second part of this work deals with the computation of an accurate quasi-geoid in Bavaria. It is based on a combination of the global potential model EGM96 and terrestrial gravity anomalies within a  $4^\circ$  cap around Bavaria. A high resolution digital terrain model with a grid spacing of 50 m is used in Bavaria to compute topographic reductions. *Molodensky's* series is computed up to third order and different kinds of modifications of *Stokes'* function are tested. Comparison to GPS/levelling heights shows, that the best results are achieved using the original *Stokes*-kernel. Still there are long and medium wavelength errors of some decimeters in all solutions. This holds true for the European quasi-geoid EGG97, too. Error simulations indicate that those are due to errors in the global potential model. In order to allow the use of the derived quasi-geoid for the determination of physical heights, it is fitted to a set of GPS/levelling points. This way an accuracy of 2–3 cm is achieved, which is at the accuracy level of geodetic GPS measurements.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Zusammenfassung</b>	<b>1</b>
<b>Abstract</b>	<b>1</b>
<b>1 Aufgabenstellung</b>	<b>5</b>
<b>2 Grundlegendes zum Schwerefeld</b>	<b>7</b>
<b>3 Höhensystemumstellung</b>	<b>11</b>
3.1 Realisierung von Höhensystemen . . . . .	11
3.1.1 Bestimmung Physikalischer Höhen . . . . .	11
3.1.2 Grundlagennetze in Bayern . . . . .	12
3.1.3 Höhenberechnung in der Praxis . . . . .	14
3.2 Systemdifferenz und Umrechnungskonzepte . . . . .	17
3.2.1 Größenordnung der Systemdifferenz . . . . .	17
3.2.2 Flächenhafte Umrechnung . . . . .	18
3.2.3 Linienweise Umrechnung . . . . .	19
3.2.4 Fehlerfortpflanzung bei linienweiser Umrechnung . . . . .	19
3.3 Verfahren und Qualität der Schwereprädiktion . . . . .	23
3.3.1 Prädiktionsverfahren . . . . .	23
3.3.2 Prädiktionsgenauigkeit . . . . .	24
3.3.3 Bestimmung empirischer Kovarianzfunktionen . . . . .	25
3.3.4 Qualität empirischer Kovarianzfunktionen . . . . .	28
3.3.5 Beispiel Estergebirge . . . . .	29
3.4 Genauigkeit der Höhensystemumstellung in Bayern . . . . .	32
3.4.1 Beispiel Frankenwald . . . . .	32
3.4.2 Beispiel Estergebirge . . . . .	34
3.4.3 Ergebnisse . . . . .	37
<b>4 Geoidberechnung</b>	<b>38</b>
4.1 Einführendes zur Geoidberechnung . . . . .	38
4.2 Randwertaufgabe nach Molodenskii . . . . .	40
4.2.1 Formulierung der Randwertaufgabe . . . . .	40
4.2.2 Lösung nach Molodenskii . . . . .	43
4.2.3 Lösung durch analytische Fortsetzung . . . . .	44
4.3 Spektrale Darstellung des Schwerefelds . . . . .	47
4.3.1 Sphärisch harmonische Reihen . . . . .	47
4.3.2 Darstellung des Gravitationspotentials . . . . .	49
4.3.3 Lineare Schwerefeldgrößen und ihre Eigenwerte . . . . .	50
4.3.4 Darstellung der topographischen Massen . . . . .	52
4.3.5 Kovarianzfunktionen und Gradvarianzen . . . . .	53
4.3.6 Prädiktion mit lokalen Gradvarianzmodellen . . . . .	54
4.4 Methodik der Geoidberechnung . . . . .	57
4.4.1 Kombination unterschiedlicher Datenquellen . . . . .	57
4.4.2 Topographische Reduktionen . . . . .	62
4.4.3 Numerische Berechnungsverfahren . . . . .	67
4.4.4 Fehleranteile und Datenfilterung . . . . .	73
4.5 Geoidberechnung in Bayern . . . . .	81
4.5.1 Daten und Datenaufbereitung . . . . .	81
4.5.2 Effekte der Datenfilterung . . . . .	89
4.5.3 Abschätzung verbleibender Fehleranteile . . . . .	93

4.5.4	Zusammenstellung der berechneten Signalanteile . . . . .	98
4.5.5	Qualitätstest der berechneten Geoide . . . . .	99
<b>5</b>	<b>Resultate und Schlussbemerkungen</b>	<b>110</b>
<b>Anhang</b>		<b>113</b>
A.1	Schwerereduktion des Nivellements . . . . .	113
A.2	Amtliche Fehlermaße im Höhenfestpunktfeld . . . . .	116
B.1	Berechnung ellipsoidischer Korrekturen für Schwereanomalien . . . . .	117
B.2	Berechnung Meissl-modifizierter Molodenskii-Koeffizienten . . . . .	117
<b>Danksagung</b>		<b>119</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>120</b>

# 1 Aufgabenstellung

Für eine Vielzahl von Aufgaben im Kataster, in der Planung, in verschiedensten Ingenieurbereichen und in den Geowissenschaften werden genaue Höhen benötigt. Grundlage hierfür ist ein landesweites Höhennetz, das von den zuständigen Vermessungsbehörden angelegt, verwaltet und dem Nutzer zur Verfügung gestellt wird. Dieses sollte eindeutig bestimmbar und leicht zugänglich sein, was natürlich Fragen nach der Höhendefinition und den geeigneten Messverfahren aufwirft.

Grundsätzlich kann man zwei verschiedene Höhenarten unterscheiden, nämlich geometrische und physikalische. Geometrisch bedeutet, man legt eine zunächst beliebige Bezugsfläche per Definition fest und weist jedem Punkt im Raum den lotrechten Abstand von dieser Bezugsfläche als Höhenkote zu. Bezugsflächen können z.B. eine Ebene, eine Kugel oder ein Ellipsoid sein. Für viele Anwendungen sind geometrische Höhen allerdings unbrauchbar. Will man z.B. einen Kanal bauen, so ist man weniger daran interessiert, welche Höhen die beiden Kanalenden im dreidimensionalen Raum haben, sondern ob das Wasser von A nach B oder umgekehrt fließt. Hier ist eine physikalische Definition gefragt, die besagt: Punkt A liegt höher als Punkt B, wenn das Wasser von A nach B fließt. Dieses Fließen des Wassers ist direkt mit dem Schwerfeld der Erde verknüpft. Das Zusammenwirken von Gravitations- und Zentrifugalbeschleunigung bestimmt, wohin sich ein Partikel unter dem Einfluss des Schwerfeldes bewegt und somit auch, in welche Richtung das Wasser fließt. Eine geeignete Bezugs- oder Höhennullfläche für physikalisch definierte Höhen ist deshalb eine Fläche, entlang der Wasser gerade nicht fließt. Solche Flächen nennt man *Niveau-* oder *Äquipotentialflächen* des Schwerfeldes. Theoretisch gibt es unendlich viele solcher Flächen. In der Praxis ist es gebräuchlich, diejenige Fläche auszuwählen, die mit dem beobachteten mittleren Meeresspiegel eines oder mehrerer Pegel zusammenfällt. Physikalische Höhen nennt man deshalb auch *Meereshöhen*.

Aber nicht nur der Zweck, sondern auch die Methode der Höhenbestimmung, also auch die Frage, wie sich der Nutzer Zugang zu Höhenwerten verschaffen kann, legt die Brauchbarkeit eines Höhensystems fest. Das klassische Messverfahren des geometrischen Nivellements liefert in Kombination mit Schweremessungen Potentialdifferenzen zwischen verschiedenen Niveauflächen. Es entstehen dadurch physikalische Höhen. Hingegen liefern die modernen satellitengestützten Verfahren, wie z.B. das *Global Positioning System* GPS, Positionen im dreidimensionalen Raum. Durch geometrische Transformationen lassen sich daraus leicht Höhen bezüglich eines Ellipsoides berechnen. Ergebnis eines solchen Vorgehens sind deshalb geometrische Höhen.

Die gebräuchlichen landesweiten Grundlagennetze werden aus Meereshöhen aufgebaut, basieren also auf Potentialdifferenzen. Eigentliche Koten der Festpunkte sind deshalb Potentialwerte, so genannte *Geopotentielle Koten*, mit der Einheit  $\text{m}^2\text{s}^{-2}$ . In der Praxis sind allerdings metrische Höhen gewünscht und auch sinnvoll. Der Übergang zwischen beiden Größen kann auf unterschiedliche Weise erfolgen, was zu unterschiedlich definierten metrischen Höhensystemen führt. In Europa entstand im Laufe der Zeit ein relativ inhomogenes Gebilde aus Landesnetzen in verschiedenen Systemen und mit unterschiedlichen Pegelanschlüssen. Das in Deutschland Anfang der 90er Jahre aufgrund der politischen Wiedervereinigung gebildete Höhennetz bestand aus zweien solcher unterschiedlicher Netzteile. Entlang der ehemaligen innerdeutschen Grenze traten Sprünge in den Höhenkoten von bis zu 15 cm auf. Eine Vereinheitlichung der Grundlagennetze war also dringend erforderlich. Das neue gesamtdeutsche Netz sollte in dem in der ehemaligen DDR gebräuchlichen System der *Normalhöhen* berechnet werden. In den alten Bundesländern wurde deshalb eine Umstellung des Höhensystems erforderlich. Ein Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Qualitätsanalyse möglichst einfacher Transformationsverfahren zwischen alten und neuen Höhen im Bereich des untergeordneten Festpunktfeldes in Bayern. In Kapitel 3.2 werden deshalb, ausgehend von den in der Praxis angewandten Methoden zur Bestimmung physikalischer Höhen (Kapitel 3.1), die Transformationsgleichungen zwischen altem und neuem Höhensystem abgeleitet. Danach werden verschiedene Näherungsverfahren auf ihre Eignung hin untersucht und mittels Fehlerfortpflanzung die entsprechenden Genauigkeitsanforderungen dargestellt. Das Ziel ist die Einhaltung der amtlichen Fehlergrenzen für das Nivellement. Da sich die Umrechnung als empfindlich bezüglich der Genauigkeit der verwendeten Schwerewerte erweist, wird in Kapitel 3.3 ausführlich die Qualität der Schwereprädiktion behandelt. Dabei werden sowohl empirische Fehler gegenüber bekannten Werten, als auch theoretische Fehler angegeben, die auf lokalen Signalkovarianzfunktionen beruhen. Das diesen Teil abschließende Kapitel 3.4 stellt die Ergebnisse beispielhaft an zwei Testregionen im Fichtelgebirge und in den bayerischen Alpen dar.

Das neue Höhensystem bietet gegenüber dem alten unter anderem den Vorteil, dass man unabhängig vom Nivellement die Abweichungen der Höhenbezugsfläche, des so genannten *Quasigeoids*, bezüglich eines Ellipsoides berechnen kann. Damit entsteht eine Verbindung zwischen ellipsoidischen und physikalischen Höhen. GPS- und

Meereshöhen lassen sich somit ineinander überführen und Messungen gegenseitig durchgreifend kontrollieren. In Kombination mit einem Geoid ist sogar die Ablösung des geometrischen Nivellements durch die effizient bestimmbaren GPS-Höhen denkbar. Im zweiten Teil dieser Arbeit (Kapitel 4) soll deshalb in Bayern, auf Grundlage der Theorie von *Molodenskii*, eine möglichst genaue Quasigeoidbestimmung durchgeführt werden. Hierbei wird zunächst auf die Theorie von *Molodenskii* sowie auf das in dieser Arbeit verwendete Lösungsverfahren durch analytische Fortsetzung eingegangen (Kapitel 4.2). Die Geoidberechnung basiert auf der Kombination verschiedener Datenquellen, nämlich einem globalen Potentialmodell, regional vorliegenden Schwereanomalien und topographischen Daten. Die entsprechenden Filter- und Kombinationsverfahren sowie deren numerische Umsetzung werden in Kapitel 4.4 behandelt. In Kapitel 4.5 werden schließlich unterschiedliche Geoidflächen präsentiert, die unter Verwendung verschiedener Modifikationen der *Stokes*-Funktion berechnet wurden. Die Differenzen zwischen diesen Flächen, die Größe der üblicherweise vernachlässigten höheren Terme der *Molodenskii*-Reihe sowie die Größenordnung der verbleibenden Fehleranteile werden diskutiert. Die Genauigkeit der Flächen wird durch Vergleich mit Quasigeoidhöhen aus GPS/Nivellement bestimmt. Aufgrund der Residuen wird zum Abschluss eine langwellige Anpassung des Geoids an einen Satz bayernweit verteilter GPS/Nivellementpunkte durchgeführt. Dies gewährleistet, dass das Quasigeoid in Bayern zur Bestimmung von Normalhöhen verwendet werden kann. Im Zusammenwirken mit der Höhensystemumstellung soll so ein Beitrag zu einem Landesnetz geleistet werden, das den modernen Erfordernissen von Verwaltung, Wissenschaft und Praxis gerecht wird.

Die beiden Teilaspekte (Höhensystemumstellung und Geoidberechnung) werden in dieser Arbeit getrennt voneinander behandelt (Kapitel 3 und 4). Da sie thematisch jedoch eng miteinander verknüpft sind, wird in Kapitel 2 zunächst eine Einführung in diejenigen Grundlagen gegeben, die für beide Teile relevant sind.

## 2 Grundlegendes zum Schwerfeld

Zielsetzung dieser Arbeit ist ein Beitrag zur (höhenmäßigen) Bestimmung eines Teils der Erdoberfläche. Im Prinzip könnte diese Aufgabe auch durch rein geometrische Verfahren gelöst werden, z.B. durch GPS-Messungen. Wie bereits angesprochen basieren die in der Praxis verwendeten Höhen aber auf physikalischen Definitionen und das Geoid<sup>1</sup> bildet die Verknüpfung dieser physikalischen mit der rein geometrischen Betrachtungsweise. Im Folgenden werden zunächst die relevanten physikalischen Zusammenhänge dargestellt.

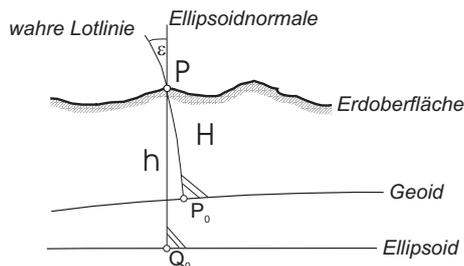


Abbildung 2.1: Zusammenhang zwischen natürlichen und geodätischen Koordinaten. Die wahre Lotrichtung wird festgelegt durch die astronomischen Koordinaten  $(\Phi, \Lambda)$ , die Richtung der Ellipsoidnormalen durch die geodätischen Koordinaten  $(\varphi, \lambda)$ . Die Differenz der beiden Richtungen ist die Lotabweichung  $\epsilon$ .

Die Koordinaten eines Punktes der Erdoberfläche können alternativ dargestellt werden durch die *geodätischen* oder die *natürlichen Koordinaten*. Die *geodätischen Koordinaten*  $(\varphi, \lambda, h)$  sind die Breite, Länge und Höhe bezüglich eines den Erdkörper approximierenden Ellipsoides. Sie haben rein geometrischen Charakter und sind unabhängig vom Erdschwerfeld. Die Höhe  $h$  ist die Länge der Ellipsoidnormalen zwischen Ellipsoid und Erdoberfläche. Sie heißt deshalb ellipsoidische Höhe. Im Gegensatz dazu hängen die *natürlichen Koordinaten*  $(\Phi, \Lambda, H)$  vom Schwerfeld der Erde ab. Dieses wird erzeugt durch die Gravitation des Erdkörpers und dessen Rotation um die eigene Achse und es gilt für das Schwerepotential  $W$  am Punkt  $P$

$$W(P) = V(P) + Z(P). \quad (2.1)$$

Darin ist  $Z$  das durch die Rotation des Erdkörpers erzeugte Zentrifugalpotential

$$Z(P) = \frac{1}{2} \omega^2 (x_P^2 + y_P^2). \quad (2.2)$$

Es wird angenommen, dass die Erde mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die  $z$ -Achse eines geozentrischen, kartesischen Bezugssystems rotiert.

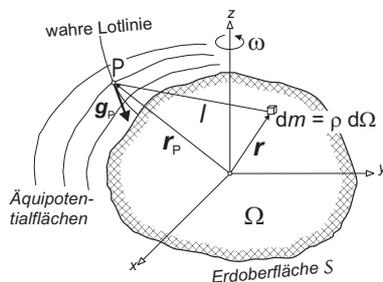


Abbildung 2.2: Das Schwerfeld der Erde wird erzeugt durch das Gravitationspotential aller Masselemente  $dm$  des Erdkörpers und das Zentrifugalpotential aufgrund der Erdrotation. Der Schwerevektor  $\mathbf{g}$  ist der Gradient des Potentialfelds.

Basierend auf dem *Newton'schen* Gravitationsgesetz gilt für das Gravitationspotential

$$V(P) = G \iiint_{\Omega} \frac{1}{l} dm = G \iiint_{\Omega} \frac{1}{l} \rho(\mathbf{r}) d\Omega. \quad (2.3)$$

<sup>1</sup>Die Begriffe Geoid und Quasigeoid werden in dieser Arbeit häufig äquivalent im Sinne einer Höhenbezugsfläche verwendet. Wenn eine Unterscheidung zwischen beiden Flächen notwendig ist, so wird darauf speziell hingewiesen.

Dabei ist  $l$  der Abstand zwischen Berechnungspunkt  $P$  und dem jeweiligen Integrationspunkt  $Q(\mathbf{r})$  und  $G$  die allgemeine Gravitationskonstante. Das Massenelement  $dm$  kann auch dargestellt werden als Produkt aus Volumenelement  $d\Omega$  und dessen Dichte  $\rho(\mathbf{r})$ . Die auf einen Körper im Schwerfeld der Erde wirkende Beschleunigung ist durch

$$\mathbf{g} = \text{grad} W = -g \begin{pmatrix} \cos \Phi \cos \Lambda \\ \cos \Phi \sin \Lambda \\ \sin \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

als Richtung der stärksten Änderung des Potentials gegeben. Die Richtung des Vektors  $\mathbf{g}$  entspricht der wahren Lotrichtung, sein Betrag  $g$  ist die Größe der Schwerebeschleunigung, die sogenannte *Schwere*. Die Richtungskomponenten  $\Phi$  und  $\Lambda$  können durch astronomische Messungen bestimmt werden und heißen deshalb auch astronomische Breite und Länge. Flächen konstanten Schwerepotentials heißen *Äquipotentialflächen*. Sie werden senkrecht von den wahren Lotlinien geschnitten. Aus (2.4) folgt mit  $W = \text{konst.}$ , dass entlang der Äquipotentialfläche keine Beschleunigung wirkt und somit Wasser entlang von Äquipotentialflächen nicht fließt. Jede solche Fläche repräsentiert also ein einheitliches Niveau, weshalb sie auch Niveauflächen des Schwerfeldes genannt werden. Sie eignen sich damit ideal als Bezugsflächen für die Höhenfestlegung.

Hat man einen beliebigen Punkt  $D$  als Datumspunkt ausgewählt, so lässt sich die Höhe  $H$  eines Punktes  $P$  definieren als die Länge der wahren Lotlinie zwischen  $P$  und der Niveaufläche durch  $D$ . In der Praxis wählt man einen Datumspunkt auf Meeresniveau. Dieser wird realisiert durch Wasserstandsmessungen an einer oder mehreren Pegelstationen, wie z.B. Amsterdam. Die Äquipotentialfläche in Höhe des weltweiten mittleren Meeresspiegels wird als *Geoid* bezeichnet. Aufgrund von Dichte- und Temperaturunterschieden im Wasser und äußerer Einflüsse, wie z.B. Windreibung, weicht die mittlere Meeresoberfläche jedoch von einer Niveaufläche ab, so dass verschiedene Datumspunkte zwar den jeweils lokalen mittleren Meeresspiegel repräsentieren, jedoch nicht notwendig auf einer einheitlichen Niveaufläche liegen müssen. Bezüglich eines Datumspunkts jedoch lässt sich die Höhe  $H$  eindeutig definieren und somit die dritte Komponente der natürlichen Koordinaten des Punktes  $P(\Phi, \Lambda, H)$  festlegen. Identisch mit der Definition  $(\Phi, \Lambda, H)$  ist die Verwendung des Koordinatentripels  $(\Phi, \Lambda, \Delta W)$ , wobei  $\Delta W$  der Potentialunterschied zwischen  $P$  und Datumspunkt  $D$  ist. Er lässt sich nach HEISKANEN & MORITZ (1967) durch

$$\Delta W = - \int_D^P \mathbf{g} \, d\mathbf{n} \quad (2.5)$$

bestimmen. Dabei ist  $d\mathbf{n}$  der vertikale Abstand zweier infinitesimal benachbarter Äquipotentialflächen. Das Vorzeichen ist konventionell und bedeutet, dass das Potential  $W$  mit abnehmender Höhe über dem Erdkörper größer wird. Im mathematischen Sinn stellt (2.5) ein Linienintegral dar, wobei über das durch  $\mathbf{g}$  gegebene Vektorfeld integriert wird. Laut (2.4) ist  $\mathbf{g}$  Gradient des Potentialfelds  $W$ , was gleichzeitig bedeutet, dass  $\mathbf{g}$  ein konservatives Vektorfeld ist und der nach (2.5) berechnete Potentialunterschied unabhängig vom gewählten Integrationsweg ist (siehe z.B. BRONSTEIN & SEMENDJAJEW, 1991). Die Potentialdifferenz zwischen dem Datumspunkt  $D$  und einem beliebigen Oberflächenpunkt  $P$  wird auch als geopotentielle Kote  $C(P)$  bezeichnet, wobei gilt

$$C(P) = W(D) - W(P) = -\Delta W. \quad (2.6)$$

Die Bestimmung der Erdoberfläche mittels der natürlichen Koordinaten ist also eng verwoben mit der Kenntnis des Schwerfeldes der Erde. Die auf der Oberfläche ausgeführten Messungen von Funktionalen des Schwerfeldes (z.B. Schweremessungen) liefern Randwerte zur Bestimmung des Schwerepotentials  $W$  im Außenraum. Die zu lösende Randwertaufgabe (RWA) hat die allgemeine Form

$$F(W(\mathbf{r}))|_{\mathcal{S}} = f(\boldsymbol{\xi}). \quad (2.7)$$

Dabei sind die durch die Funktion  $F$  gegebenen Werte  $f$  auf der Randfläche  $\mathcal{S}$  gemessen und die Potentialfunktion  $W$  am Rand und im Außenraum gesucht. Die Punkte  $P \in \mathcal{S}$  sind durch den Koordinatenvektor  $\boldsymbol{\xi}$  festgelegt.

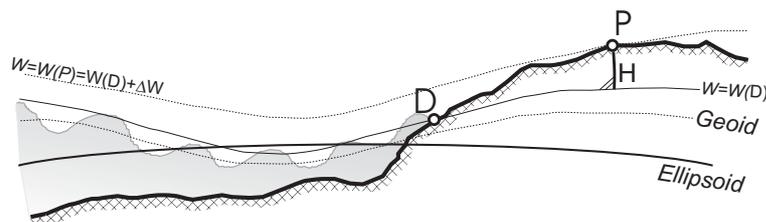


Abbildung 2.3: Globales Geoid in mittlerer Meereshöhe und Niveaufläche durch den Datumspunkt  $D$ .

Die RWA der Potentialtheorie unterstellt im allgemeinen, dass die Randfläche  $\mathcal{S}$  bekannt ist. Für die geodätischen Randwertaufgaben (GRWA) gilt dies in der Regel nicht. Es handelt sich dann um eine so genannte *freie GRWA* bei der neben  $W(\mathbf{r})$  auch  $\mathcal{S}$  selbst bestimmt wird. Im Fall der Geoidberechnung ist  $\mathcal{S}$  sogar die eigentliche Zielgröße. Zur Lösung der freien GRWA werden Näherungsgrößen  $U$  bzw.  $S_0$  für Schwerepotential  $W$  bzw. Randfläche  $\mathcal{S}$  eingeführt. Die geodätischen Messgrößen

$$f(\boldsymbol{\xi}) = F(\boldsymbol{\xi}, W) \quad (2.8)$$

können dann in einer Taylorreihe um die eingeführten Näherungswerte entwickelt werden. Da die Abweichungen von den Näherungswerten in der Regel klein sind, kann die Reihenentwicklung nach dem linearen Term abgebrochen werden und es gilt

$$f(\boldsymbol{\xi}) = F(\boldsymbol{\xi}_0, U) + \left. \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right|_{S_0, U} \cdot (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial W} \right|_{S_0, U} \cdot (W - U) . \quad (2.9)$$

Der Erdkörper lässt sich in guter Näherung durch ein an den Polen abgeplattetes Ellipsoid gleicher Masse darstellen, wobei die Richtung der kleinen Halbachse mit der Richtung der mittleren Rotationsachse der Erde zusammenfällt. Rotiert das Ellipsoid mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Erde um seine kleine Halbachse, so erzeugt es ähnlich wie die Erde ein Schwerepotential

$$U = V^N + Z, \quad (2.10)$$

das als *Normalpotential* bezeichnet wird und sich aus normalem Gravitationspotential  $V^N$  und Zentrifugalpotential  $Z$  zusammensetzt. Entsprechend Gleichung (2.4) gilt für die Normalschwere  $\gamma$  als Gradient des Normalpotentials

$$\boldsymbol{\gamma} = \text{grad} U = -\gamma \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Im Gegensatz zur Schwere  $g$ , die gemessen werden muss, kann die Normalschwere  $\gamma$  aus den Parametern des gewählten Bezugsellipsoids auf einfache Art streng berechnet werden (siehe z.B. MORITZ, 1988).

Die Abweichungen der Funktionale von Normalfeld und Erdschwerefeld im freien Randwertproblem werden als Anomaliengrößen

$$\Delta f = F(\boldsymbol{\xi}, W) - F(\boldsymbol{\xi}_0, U) \quad (2.12)$$

bezeichnet. Ziel der GRWA ist es, aus diesen Anomalien die unbekannte Potentialdifferenz  $W - U$  und die unbekannte Koordinatendifferenz  $\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0$  zu bestimmen. Sind die ellipsoidischen Koordinaten  $(\varphi, \lambda)$  des Oberflächenpunkts z.B. durch GPS-Messungen bekannt, so reduziert sich die Koordinatenunbekannte auf die vertikale Komponente, also auf die Höhe der Randfläche über dem Ellipsoid.

In der klassischen Theorie von *Stokes* wird das Geoid als Randfläche verwendet. Die Koordinatenunbekannte ist somit die Geoidhöhe  $N$ . Das Normalpotential auf der Ellipsoidoberfläche  $U(Q_0)$  sollte den gleichen Wert haben, wie das Schwerepotential  $W(P_0) = W_0 = \text{konst.}$  am Geoid, was in der Praxis jedoch nur näherungsweise gelingt. Die gesuchte Geoidhöhe wird schließlich nach (siehe z.B. HEISKANEN & MORITZ, 1967)

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g St(\psi) d\sigma \quad (2.13)$$

durch globale Integration der Schwereanomalien

$$\Delta g = g(\boldsymbol{\xi}) - \gamma(\boldsymbol{\xi}_0) \quad (2.14)$$

berechnet. Dabei sind in der Formel von *Stokes* (2.13)  $R$  und  $\gamma$  globale Mittelwerte von Erdradius und Normalschwere;  $St(\psi)$  bezeichnet die *Stokes-Funktion*, die in Kapitel 4 näher beschrieben wird. Die Höhe  $H$  eines Oberflächenpunkts  $P$  ist die Länge der wahren Lotlinie zwischen Geoid und Oberflächenpunkt. Sie wird als *orthometrische Höhe* bezeichnet (siehe Abbildung 2.4). Zwischen der ellipsoidischen Höhe  $h$ , der Geoidhöhe  $N$  und der orthometrischen Höhe  $H$  gilt die Beziehung

$$h = H + N, \quad (2.15)$$

wobei die orthometrische Höhe am Punkt  $P$  gemäß

$$H(P) = \frac{C(P)}{\bar{g}} = -\frac{\Delta W}{\bar{g}} \quad (2.16)$$

aus der geopotentiellen Kote  $C(P)$  und der mittleren Schwere entlang der Lotlinie  $\bar{g}$  berechnet werden kann.

Die Theorie von *Stokes* enthält allerdings einige Annahmen, die in der Realität nicht erfüllt sind. Da das Geoid durch Lösung der GRWA bestimmt wird, wird unterstellt, dass das Geoid Randfläche der felderzeugenden Massen ist. Dies ist allerdings aufgrund topographischer (das Geoid liegt im kontinentalen Bereich meist im Erdinneren) und atmosphärischer Massen nicht der Fall. Es ist deshalb notwendig, die Massen im Außenraum (außerhalb des Geoids) rechnerisch zu entfernen bzw. ins Erdinnere zu verschieben. Desweiteren sind die gemessenen Schwerewerte nicht direkt als Randwerte verwendbar, da sie sich auf den Ort der Messung, also die Erdoberfläche und nicht auf die Randfläche (das Geoid) beziehen. Die Werte müssen deshalb auf das Geoid reduziert werden. Sowohl Reduktionen, wie auch Massenverlagerungen erfordern die Kenntnis der Dichte der topographischen Massen. Da diese in der Regel nicht gut bekannt ist, müssen diesbezüglich Annahmen getroffen werden, wodurch die zu berechnende Geoidhöhe  $N$  immer hypothesenbehaftet ist. Ebenso ist auch die zugehörige orthometrische Höhe  $H$  hypothesenbehaftet (durch Berechnung der mittleren Schwere  $\bar{g}$ ). Trifft man bei Berechnung von  $N$  und  $H$  identische Annahmen über die Dichteverteilung, so liefert ihre Summe entsprechend (2.15) die eindeutige ellipsoidische Höhe  $h$ .

Die Berechnung hypothesenbehafteter Größen ist aus theoretischer Sicht unbefriedigend und die Bestimmung eines, die physikalische Realität repräsentierenden Geoids aufgrund der notwendigen Reduktionen und Massenmodellierungen relativ aufwendig. Einen alternativen Weg zur klassischen Bestimmung der Erdfigur nach *Stokes* stellt die Theorie von *Molodenskii* dar. Um eine hypothesenfreie Lösung zu ermöglichen wird hierbei allerdings das Konzept der natürlichen Koordinaten aufgegeben. *Molodenskii* führt an Stelle der orthometrischen Höhe  $H$  die *Normalhöhe*  $H^N$  ein, die analog (2.16) aus der geopotentiellen Kote  $C(P)$  berechnet wird. Allerdings wird hierzu statt der hypothesenbehafteten mittleren Schwere  $\bar{g}$  die streng berechenbare mittlere Normalschwere  $\bar{\gamma}$  verwendet und es gilt

$$H^N(P) = \frac{C(P)}{\bar{\gamma}}. \quad (2.17)$$

Um auch bei der Lösung der GRWA von Dichteannahmen unabhängig zu sein, wird nicht das Geoid, sondern die physische Oberfläche der Erde bestimmt, welche – abgesehen von den atmosphärischen Massen – tatsächlich eine Randfläche ist. Zur Approximation dieser Randfläche wird das so genannte *Telluroid* eingeführt. Die ellipsoidische Höhe der Telluroidpunkte  $Q$  entspricht der Normalhöhe der zugehörigen Oberflächenpunkte  $P$ , wobei gilt:

$$W(P) = U(Q) \quad (2.18)$$

Die als Randwerte verwendeten Schwereanomalien beziehen sich jetzt nicht mehr, wie bei *Stokes* auf das Geoid, sondern auf die Erdoberfläche, so dass analog zu Formel (2.14) gilt

$$\Delta g = g(P) - \gamma(Q). \quad (2.19)$$

Die gemessenen Schwerewerte müssen also nicht mehr mit dem eigentlich unbekanntem Schweregradienten auf das Geoid reduziert werden. Statt dessen wird die Normalschwere am Telluroid streng berechnet.

Die Lösung der Randwertaufgabe nach *Molodenskii* liefert die vertikale Abweichung der Erdoberfläche vom Telluroid, die so genannte *Höhenanomalie*  $\zeta$ , wobei analog zu Formel (2.15) die Beziehung

$$h = H^N + \zeta \quad (2.20)$$

gilt. In dieser Darstellung ist  $H^N$  die ellipsoidische Höhe des Telluroids. Betrachtet man jedoch  $H^N$  entsprechend (2.17) als physikalische Höhe der Oberflächenpunkte, so entspricht  $\zeta$  der ellipsoidischen Höhe der Normalhöhen-Nullfläche. In dieser Konzeption übernimmt  $\zeta$  die Rolle der Geoidhöhe  $N$  und die Normalhöhen-Nullfläche wird entsprechend als *Quasigeoid* bezeichnet (Abbildung 2.4). Im Gegensatz zum Geoid sind weder Quasigeoid noch Telluroid Niveauflächen des Schwerefelds. Die Begriffe Höhenanomalie und Quasigeoidhöhe werden im Weiteren gleichwertig verwendet.

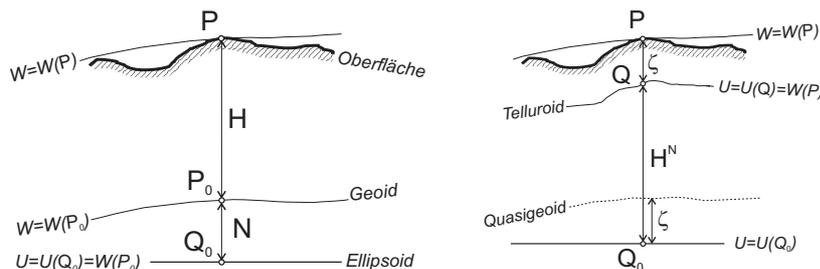


Abbildung 2.4: Niveauflächen und Erdfigur in den Theorien von Stokes (links) und Molodenskii (rechts).

# 3 Höhensystemumstellung

## 3.1 Realisierung von Höhensystemen

### 3.1.1 Bestimmung Physikalischer Höhen

Grundlage physikalischer Höhen sind Potentialdifferenzen zwischen verschiedenen Niveauflächen des Erdschwerefelds (siehe Kapitel 2). Diese können durch die Kombination von geometrischem Nivellement (liefert nivellierte Höhenunterschiede  $\Delta n$ ) und Schweremessung berechnet werden. Dabei wird das Linienintegral (2.5) durch die Summe

$$\Delta W_{A,E} = - \sum_A^E g \Delta n \tag{3.1}$$

approximiert. Entlang einer geschlossenen Nivellementschleife gilt aufgrund der in Kapitel 2 beschriebenen Wegunabhängigkeit des Integrals (2.5)

$$\Delta W = - \sum_A^A g \Delta n = 0. \tag{3.2}$$

Da die Schwere  $g$  entlang des Messwegs nicht konstant ist, liefert die Integration über die rohen Nivellementhöhen  $\Delta n$  den von Null verschiedenen *theoretische Schleifenschlussfehler*

$$\oint dn = \epsilon \approx \sum_A^A \Delta n \neq 0. \tag{3.3}$$

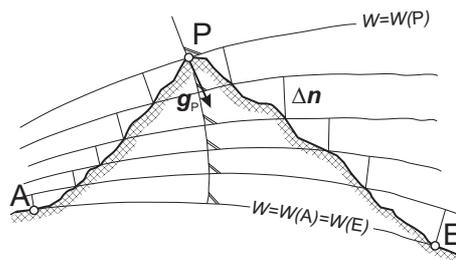
Nivellementhöhen sind also im Gegensatz zu Potentialdifferenzen nicht wegunabhängig. Theoretisch eindeutige Höhen lassen sich nur in Kombination mit Schweremessungen bestimmen. Die Tatsache  $g \neq konst.$  bedeutet, dass die Niveauflächen des Schwerefelds nicht parallel sind.

Die Verwendung geopotentieller Koten ist in der Praxis ungeeignet. Vielmehr ist dort ein metrisches Maß erwünscht. Der Übergang kann formal mittels der Division

$$H \text{ [m]} = \frac{C \text{ [m}^2 \text{ s}^{-2}\text{]}}{G \text{ [m s}^{-2}\text{]}} \tag{3.4}$$

durch den zunächst beliebigen Schwerewert  $G$  erfolgen. Dieser kann als Höhenmaßstab einer einparametrischen Transformation zwischen Potential- und Höhenkoten angesehen werden.

Im einfachsten Fall werden die örtlichen Variationen des Schwerefelds vernachlässigt und ein ortsunabhängiger, konstanter Wert  $G_0 = konst.$  verwendet. Dies liefert *dynamische Höhen*  $H^D$ . Sie zeichnen sich dadurch aus, dass aufgrund des konstanten Höhenmaßstabs die Geometrie des Potentialfelds erhalten bleibt. Dies bedeutet, dass die Flächen gleicher dynamischer Höhen mit den Niveauflächen des Schwerefelds übereinstimmen. Zwischen



**Abbildung 3.1:** Äquipotentialflächen und Nivellementhöhen im Erdschwerefeld. Wegen der Nichtparallelität der Niveauflächen ist die Summe der Nivellementhöhen von A nach P kleiner als von P nach E. Die Summe aller Nivellementhöhen von A über P, E und zurück nach A liefert den theoretischen Schleifenschlussfehler  $\epsilon \neq 0$ .

Punkten gleicher dynamischer Höhe fließt somit kein Wasser. Dies gilt nicht für all die Höhensysteme, die einen ortsabhängigen Höhenmaßstab verwenden, wie z.B. normalorthometrische Höhen, orthometrische Höhen oder Normalhöhen. Allerdings erweist es sich als nachteilig für die dynamischen Höhen, dass v.a. in geographisch relativ ausgedehnten Gebieten der tatsächliche Schwerewert erheblich von dem konventionellen Wert  $G_0$  abweichen kann. Dies bedeutet in der Praxis, dass die Nivellementreduktion *RED* (siehe Kapitel 3.1.3) so groß werden kann, dass sie auch bei lokalen Vermessungen nicht vernachlässigt werden darf. Die dynamischen Höhen sind deshalb als landesweites System ungeeignet.

Als Landeshöhensystem bieten sich besser solche Höhentypen an, die einen ortsabhängigen Höhenmaßstab verwenden. Dies sind z.B. die in (2.16) und (2.17) definierten orthometrischen bzw. Normalhöhen, mit den in Kapitel 2 genannten Vor- und Nachteilen. Die Verwendung unterschiedlicher Schwerewerte  $G$  führt also zu unterschiedlichen Höhendefinitionen. Die Höhenkoten verschiedener Höhentypen haben natürlich an ein und dem selben Punkt unterschiedliche numerische Werte. Mehr zu den unterschiedlichen Konzeptionen ist z.B. LEISMAN et al. (1992) zu entnehmen.

### 3.1.2 Grundlagennetze in Bayern

Das erste bayernweite Präzisionshöhenetz entstand etwa ab dem Jahre 1865 (siehe AdV, 1993). Da es aus technischen Gründen damals noch nicht möglich war, Schwerewerte wirtschaftlich mit der erforderlichen Genauigkeit zu messen, konnten keine eindeutigen physikalischen Höhen, die der Definition nach (3.4) entsprechen, bestimmt werden. In Bayern wurde deshalb in (3.1) statt der Schwere  $g$  die Normalschwere  $\gamma$  verwendet, was zu *sphäropotentiellen Koten*  $C^s$  führt. Die entstehenden Höhen werden als *normalorthometrische* oder (*normal-*) *sphäroidische Höhen* bezeichnet und nach

$$H^{No} = \frac{C^s}{\bar{\gamma}} \quad (3.5)$$

berechnet. Ein Vergleich mit (2.17) zeigt, dass normalorthometrische Höhen als Vorstufe zu Normalhöhen angesehen werden können. Da mit  $\gamma$  allerdings nur eine Näherung für die tatsächliche Schwere  $g$  in Formel (3.1) eingeführt wird, bleibt die Wegabhängigkeit der reinen Nivellementhöhen  $\Delta n$  erhalten.

Die Zunahme der an Höheninformationen gestellten Ansprüche erforderte etwa ab 1912 deutschlandweit umfassende Neumessungen. Die dabei in den einzelnen Ländern entstandenen Teilnetze wurden durch Anfelderung zum Deutschen Haupthöhennetz DHHN12 zusammengeschlossen. Die Berechnungen erfolgten erneut im System der normalorthometrischen Höhen. Datumspunkt war zunächst der im Jahre 1879 an der Sternwarte in Berlin angelegte Normalhöhenpunkt (NHP), der später nach Hoppegarten, nahe Berlin, verlegt wurde. Das Niveau des NHP wurde vom Pegel Amsterdam (Normaal Amsterdams Peil NAP) abgeleitet. Dieser repräsentiert genähert den mittleren Meeresspiegel an der Nordseeküste (siehe WEBER, 1994). Die Höhen des DHHN12 werden als Höhen über Normal Null (NN) im neuen System bezeichnet (AdV, 1992). Im Jahre 1959 wurde die Differenz zwischen NN und NAP zu 1.3 cm im Sinne NAP - NN festgestellt (siehe RUMMEL, 1991a).

Das deutsche Nivellementnetz ist hierarchisch gegliedert und besteht aus den Netzen 1. bis 4. Ordnung. Die Punkte 1. Ordnung (NivP(1)) aller Bundesländer bilden das DHHN. Es besteht aus großen Schleifen von 30 bis 80 km Durchmesser (vgl. Abbildung 3.2). Die weiteren Ordnungen verdichten das Festpunktfeld. Ihre Anlage und Berechnung ist Sache der jeweiligen Vermessungsverwaltungen. In Bayern ist dies das Bayerische Landesvermessungsamt (BLVA). Um ein bundesweit einheitliches Festpunktfeld zu schaffen, werden die Höhen der übergeordneten Punkte bei Einrechnung von Schleifen oder Linien geringerer Ordnung festgehalten. Das DHHN12 wurde aufgrund kriegsbedingter Unterbrechungen erst im Jahre 1956 fertiggestellt. Der lange Entstehungszeitraum, die Berechnung in verschiedenen Netzteilen sowie Höhenänderungen und Punktverluste in vielen Netzabschnitten führten zu einem zunehmend inkonsistenten Festpunktfeld. Deshalb beschloss die Arbeitsgemeinschaft der Vermessungsverwaltungen Deutschlands (AdV) in den 70er Jahren umfangreiche Neumessungen entlang den Schleifen 1. Ordnung. Das entstehende Netz wurde durch bundesweite Ausgleichung in normalorthometrischen Höhen berechnet (Spannungen zwischen Teilnetzen einzelner Bundesländer sollten damit vermieden werden). Es erhielt die Bezeichnung DHHN85. Als Anschlusspunkt an das Niveau des DHHN12 wurde der Punkt UF Wallenhorst nahe Osnabrück verwendet. Vor Abschluss der endgültigen zwangsfreien Ausgleichung waren die Wiederholungsmessungen in Bayern bereits in die NivP-Nachweise eingearbeitet worden, was einer Erneuerung des bayerischen Anteils am DHHN12 entspricht. Dieses Vorgehen führt zu einer vom DHHN85 abweichenden Lösung. Deshalb wurden in Bayern die DHHN85-Höhen nicht in die NivP-Nachweise übernommen und das DHHN12 als amtliches Höhensystem beibehalten.

Durch die politische Vereinigung Deutschlands entstand im Jahre 1990 das DHHN90, das im Westteil aus dem DHHN85 und im Ostteil aus dem Staatlichen Nivellementnetz von 1976 (SNN76) der ehemaligen DDR gebildet wurde. Letzteres war Teil des Einheitlichen Präzisionsnivellementnetzes der osteuropäischen Staaten (EPPN),

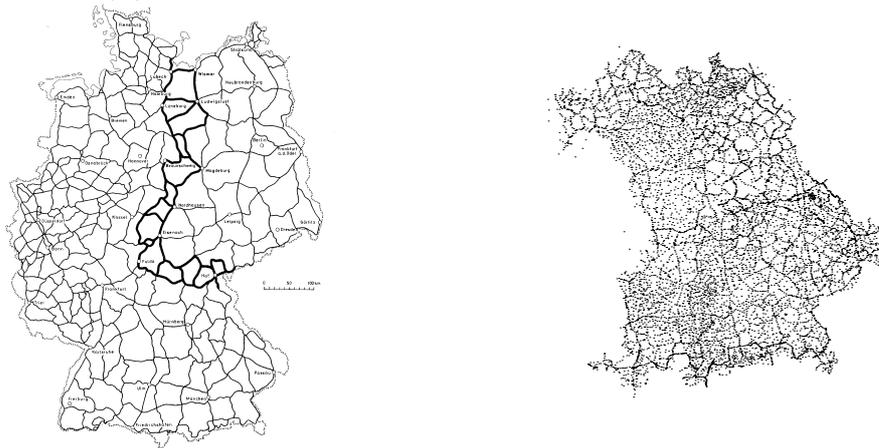


Abbildung 3.2: Nivellimentlinien des DHHN92 (links, Quelle: LANG, 1994) und Schwerfestpunkte in Bayern (rechts).

das im gesamten damaligen Ostblock verwendet wurde. In dessen Entstehungszeitraum war die Technik der Schweremessung bereits soweit fortgeschritten, dass die sphäropotentiellen Knoten durch geopotentielle Knoten ersetzt werden konnten. Die Berechnung wurde in Normalhöhen durchgeführt und an den Ostseepegel Kronstadt bei St.Petersburg angeschlossen. Damit stand in den neuen Bundesländern bereits ein theoretisch einwandfreies, weil wegunabhängiges und hypothesenfreies Höhensystem zur Verfügung.

Im Oktober 1993 beschloss die AdV die Berechnung eines gesamtdeutschen Nivellementnetzes DHHN92. Dieses sollte zwangsfrei in geopotentiellen Knoten ausgeglichen werden. Das Niveau wurde vom Knotenpunkt Wallenhorst des europäischen Nivellementnetzes REUN übernommen, das an den NAP angeschlossen ist. Als Höhensystem wurden Normalhöhen gewählt. Die Höhen des DHHN92 werden auch als Höhen über Normalhöhennull (NHN) bezeichnet. Die Berechnungen konnten im Jahr 1994 abgeschlossen werden. Sie wurden vom Niedersächsischen Landesverwaltungsamt, Abteilung Landesvermessung, und unabhängig davon vom damaligen Institut für Angewandte Geodäsie IfAG (dem heutigen Bundesamt für Kartographie und Geodäsie, BKG) durchgeführt. Damit lag in Bayern ein fester Bezugsrahmen für die Einrechnung der untergeordneten Festpunktstufen vor. Die folgenden Arbeiten sind Aufgabe des BLVA. Der bayerische Netzteil umfasst ca. 24000 NivP(1), 23000 NivP(2) und 60000 NivP(3) und NivP(4).

Daneben entstand unter Führung der Arbeitsgruppe Schwerfestpunktfeld der AdV ab dem Jahr 1978 das Deutsche Hauptschwerenetz DHSN82. Dieses aus Relativgravimetrierung aufgebaute Netz dient als Grundlage für die weiteren Verdichtungsstufen innerhalb der Bundesländer. Niveau und Maßstab wurden durch Anschluss an 21 Punkte des Deutschen Schweregrundnetzes DSGN76 aus den dort verwendeten 4 Absolutschweremessungen abgeleitet. Dadurch ist das DHSN82 gleichzeitig Teil des International Gravity Standardization Net IGSN71 (siehe AdV, 1989).

Die Verdichtung des Schwerenetzes in Bayern führte zunächst entlang den Nivellementlinien 1. Ordnung. Im Rahmen der Arbeiten für das DHHN85 entstand so ein Netz mit Punktabständen von 1 bis 4 km (siehe AdV, 1993). Danach wurde entlang den Linien 2. Ordnung und schließlich in geringerer Dichte flächenhaft dazwischen gravimetriert. Wenn möglich wurden die Schwerfestpunkte (SFP) an bereits bestehenden topographischen Punkten (TP) oder NivP angelegt. Damit lagen genaue Lage- bzw. Höhenkoordinaten vor. Wo dies nicht der Fall war, wurde in Bayern die Lage aus den Flurkarten 1 : 2 500 bzw. 1 : 5 000 auf  $\pm 5$  m entnommen und die Höhe durch Nivellement bestimmt. Diese SFP wurden auch in die NivP-Nachweise übernommen. Das auf diese Weise in Bayern angelegte Netz umfasst derzeit ca. 9000 Punkte.

### 3.1.3 Höhenberechnung in der Praxis

Die Berechnung von Höhen erfolgt entsprechend Kapitel 3.1.1 durch Kombination von geometrischem Nivellement und Schweremessungen. In der Praxis ist es gebräuchlich, den Einfluss der Schwere durch Anbringung einer Reduktion  $RED$  an die reinen Nivellementhöhen  $\Delta n$  zu berücksichtigen. Diese kann bei lokal begrenzten Vermessungen vernachlässigt werden, so dass Höhenunterschiede auch ohne Kenntnis der Schwere alleine aus den Nivellementhöhen  $\Delta n$  bestimmt werden können. Die Höhenbestimmung entlang einer Nivellementlinie erfolgt vom Anfangspunkt  $A$  ausgehend nach

$$H_k = H_A + \sum_i \Delta n_i + \sum_i RED_i. \quad (3.6)$$

Eine übersichtliche Ableitung der Reduktionsterme in verschiedenen Höhengsystemen findet man z.B. in (HECK, 1987). Die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Formeln sind in Anhang A.1 zusammengestellt. Die Reduktion der normalorthometrischen Höhen wird im folgenden als  $NOR$ , diejenige der Normalhöhen als  $NR$  bezeichnet. Die für die Höhentransformation benötigte Systemdifferenz ergibt sich daraus zu

$$H_k^N - H_k^{No} = H_A^N - H_A^{No} + \sum_i (NR_i - NOR_i) \quad (3.7)$$

bzw. mit den Bezeichnungen  $DNH = H^N - H^{No}$  und  $DNR = NR - NOR$

$$DNH_k = DNH_A + \sum_i DNR_i. \quad (3.8)$$

Dies ist die Basisgleichung der Höhengsystemumstellung.

Schaltet man im Rahmen der hierarchischen Höhenbestimmung eine Linie in eine übergeordnete Schleife ein, so dienen die Linienendpunkte  $A$  und  $E$  als Zwangspunkte (vgl. Abbildung 3.3).

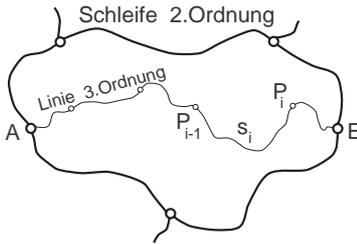


Abbildung 3.3: Hierarchische Netzberechnung. Die  $NivP(3)$  werden in eine übergeordnete Schleife eingerechnet. Der Widerspruch  $w$  am Linienende wird entlang den Nivellementstrecken  $s_i$  verteilt.

Aufgrund von Messfehlern und je nach System auftretender Wegabhängigkeitseffekte (diese werden im weiteren auch als Modellfehler bezeichnet) wird am Endpunkt  $E$  der Linienwiderspruch

$$w = w_{Modell} + w_{Mess} = H_E^{soll} - H_E^{ist} \quad (3.9)$$

auftreten, d.h. Ist- und Sollhöhe stimmen in der Regel nicht überein. Der Widerspruch kann entlang der Linie in Abhängigkeit der Längen  $s_i$  der einzelnen Nivellementstrecken verteilt werden. Die Höhenberechnung nach (3.6) erweitert sich demnach zu

$$H_k = H_A + \sum_i \Delta n_i + \sum_i RED_i + \sum_i p_i w, \quad (3.10)$$

wobei die Gewichtungsfaktoren  $p_i$  aus den  $s_i$  berechnet werden. Die Summe aller Gewichte beträgt  $\sum_i p_i = 1$ . Entsprechend gilt für die Systemdifferenz

$$DNH_k = DNH_A + \sum_i DNR_i + \sum_i p_i (w^N - w^{No}). \quad (3.11)$$

Aus den Gleichungen (3.6) und (3.9) folgt für den Widerspruch allgemein

$$w = H_E - \left( H_A + \sum_A^E \Delta n_i + \sum_A^E RED_i \right) \quad (3.12)$$

und speziell für die Differenz der Widersprüche in beiden Systemen

$$w^N - w^{No} = DNH_E - DNH_A - \sum_A^E DNR_i. \quad (3.13)$$

Nach (3.9) ist der Widerspruch zusammengesetzt aus Mess- und Modellfehlern. Die Messfehler sind natürlich vom gewählten Höhensystem unabhängig und fallen damit in der Differenzbildung heraus. Gleichung (3.13) ist damit frei von Messfehlern und enthält nur Terme der Systemdifferenzen. Neben möglichen Datumsunterschieden in den Anschlusspunkten drücken sich darin die Modellfehler der alten normalorthometrischen Höhen aus. Wie man an (3.11) erkennt, lassen sich diese im Zuge der Transformation rückgängig machen.

Es sei noch angemerkt, dass neben Mess- und Modellfehlern zusätzliche Fehler durch die Diskretisierung des Wegintegrals (2.5) auftreten. Im Falle der Nivellementinkremente stellt dies kein Problem dar, da man bei den üblichen Zielweiten des Nivellements eine genügend dichte Punktverteilung hat. Problematischer wird es im Fall von Schwerewerten. Da diese in der Regel nicht in jedem NivP vorliegen, müssen sie auf geeignete Weise interpoliert werden.

Für eine Höhensystemumstellung auf der Grundlage der Formeln (3.11) benötigt man

1. die Systemdifferenzen in den Linienendpunkten (diese sind aufgrund der hierarchischen Berechnung bekannt),
2. die Reduktionsdifferenzen  $DNR_i$  entlang der Linie und,
3. die Gewichtungsfaktoren  $p_i$ , sprich Informationen über den ursprünglichen Messweg.

Entsprechend den Ableitungen in Kapitel A.1 können die Reduktionsdifferenzen  $DNR$  in  $m$  zwischen zwei NivP nach

$$DNR = 0.102 \cdot \Delta g_{FA} \Delta n \quad (3.14)$$

berechnet werden, wobei die  $\Delta g_{FA}$  in  $m \text{ s}^{-2}$  und die  $\Delta n$  in  $m$  einzusetzen sind. Die  $DNR$  hängen also wesentlich von den Freiluftschwereanomalien  $\Delta g_{FA}$  und den Höhenunterschieden  $\Delta n$  ab. Problematisch wird die Umstellung in Gebieten, in denen die Topographie und das Anomalienfeld sehr rau sind. In Bayern sind dies im wesentlichen die Mittelgebirgsregionen wie Spessart, Fichtelgebirge oder Bayerischer Wald und vor allem der Alpenbereich.

### Situation in Bayern

Bisher wurde gezeigt, wie man in der Praxis die Umstellung vom alten auf das neue Höhensystem vollziehen kann und welche Informationen dazu nötig sind. Wie aber steht es um die Verfügbarkeit dieser Daten?

Zuständig für Anlage und Unterhalt des bayerischen Höhenfestpunktfelds ist das BLVA. Dort werden auch die nötigen Daten verwaltet. Wichtig für die Nutzung der Daten ist deren Verfügbarkeit, die in der Anwendung nur dann gegeben ist, wenn die Daten digital vorliegen. Dementsprechend müssen diese entweder direkt digital erzeugt werden, was nur für die Messungen neueren Datums gilt, oder die analogen Daten müssen digitalisiert werden, was einen erheblichen Aufwand bedeuten kann. Die Verfügbarkeit der im Rahmen der Höhensystemumstellung relevanten Daten ist im Folgenden beschrieben.

- Nivellementergebnisse: Bei den im Rahmen des DHHN85 in den 80er Jahren durchgeführten Neumessungen der NivP(1) wurden die Messdaten direkt digital erzeugt. Zur Vorbereitung der Berechnung von Normalhöhen werden im Bereich der NivP(2) umfangreiche Digitalisierungsmaßnahmen am BLVA durchgeführt. Die Nivellementergebnisse entlang den Linien 3. und 4. Ordnung jedoch liegen nur in analoger Form vor. Eingang in die Berechnungen finden die Nivellementergebnisse  $\Delta n$  in den Reduktionsdifferenzen  $DNR$  (vgl. Formel(3.14)). Da diese nur in der Größenordnung bis zu wenigen  $cm$  liegen (vgl. Kapitel A.1), sind die Genauigkeitsanforderungen an die Höheninkremente relativ gering. Es ist also auch eine Näherungslösung denkbar, bei der die Messelemente rekonstruiert werden.
- Schwerewerte: Das SFP-Feld in Bayern umfasst gut 9000 Punkte. Die gesamten Daten liegen in digitaler Form vor. In der Anfangszeit seiner Entstehung wurden SFP entlang den Nivellementlinien 1. Ordnung angelegt. Dort liegen Schwerewerte in so dichter Folge vor, dass man den Diskretisierungs- bzw. Interpolationsfehler vernachlässigen kann. Außerdem ist entlang diesen Linien nicht mit großen Variationen des Schwerfelds zu rechnen, da die Linien selbst im Gebirge in Bereichen mit relativ glattem Signalverhalten verlaufen, nämlich in den Tälern. Die weitere Verdichtung des SFP-Feldes erfolgte zunächst entlang der Nivellementlinien 2. Ordnung und später flächenhaft dazwischen. Ob die Punktdichte ausreicht, um die an allen NivP benötigte Information genügend genau zu interpolieren, wird der Schwerpunkt der folgenden Untersuchungen sein. Dies schließt auch die Fragen ein, welches Interpolationsverfahren Verwendung finden soll und welche Funktionale (sprich welcher Anomalientyp) sich am besten eignen. Neben den gemessenen Schwerewerten  $g$  werden in (3.14) zur Berechnung der Schwereanomalien auch die Normalschwerewerte in den NivP benötigt. Hierzu sind Lagekoordinaten und Höhenwerte der NivP erforderlich. Diese Daten sind im NivP-Nachweis enthalten, wobei die Genauigkeiten allerdings sehr unterschiedlich sind. Direkt lagemäßig angemessene NivP sind  $cm$ -genau, graphisch (die Lage der NivP wird oftmals nur aus

der TK25 gegriffen) ermittelte Koordinaten weisen eine Unsicherheit von  $\pm 100\text{ m}$  auf. Wie die später folgende Fehlerfortpflanzung zeigen wird, ist diese Genauigkeit im Rahmen der Höhenbestimmung ausreichend.

- **Linienverläufe:** Für die Punktfolge innerhalb der Linien, d.h. den originalen Messweg, gilt dasselbe wie für die Nivellementergebnisse. Auch hier liegen nur für die Netzteile 1. und 2. Ordnung digitale Informationen vor. Hinzu kommen noch Probleme durch Unterhalt (pro Jahr ist mit einer Zerstörung von ca. 2% aller NivP zu rechnen) und Verdichtung des NivP-Feldes. Dadurch ist das Netz ständigen Veränderungen unterworfen, und es ist oftmals nicht mehr möglich, den originalen Messweg zu rekonstruieren. Dies bedeutet, dass die Gewichtsfaktoren  $p_i$  in (3.10) nicht korrekt bestimmt werden. Dadurch können Mess- und Modellfehler nicht vollständig eliminiert bzw. rückgängig gemacht werden.

Dies zeigt, dass die Umstellung des Höhengsystems nach (3.11) bei der praktischen Umsetzung vor erhebliche Probleme gestellt wird. Die mangelhafte Datenverfügbarkeit verhindert eine exakte Transformation. Dies betrifft sowohl die digitale, als auch die reale Verfügbarkeit. Real bedeutet dabei, dass z.B. einige Messwege tatsächlich nicht rekonstruierbar sind, oder dass die Dichte des Schwerefestpunktfeldes nicht so hoch ist, dass man a priori von einer ausreichenden Interpolationsgenauigkeit der  $\Delta g$  an den NivP ausgehen kann.

Das BLVA hat sich deshalb zu folgendem Vorgehen entschlossen:

1. Die Höhen des DHHN92, also der NivP(1), dienen als Zwangspunkte für eine hierarchische Einrechnung der restlichen Festpunktstufen.
2. Nachdem die Nivellementdaten für die 2. Ordnung digitalisiert sind (die Arbeiten konnten im Frühjahr 1999 abgeschlossen werden), sollen zunächst geopotentielle Koten durch Ausgleichung und daraus Normalhöhen berechnet werden.
3. Der enorme Aufwand zur Bereitstellung der Daten im Bereich der 3. und 4. Festpunktstufen soll umgangen werden. Es ist somit ein geeignetes Näherungsverfahren zu suchen, das es ermöglicht, die Normalhöhen genügend genau aus den vorhandenen normalorthometrischen Höhen zu bestimmen. Die bestehende Genauigkeit des NivP-Feldes soll dabei natürlich erhalten bleiben.

Auf Grundlage dieses Vorgehens werden im Folgenden geeignet erscheinende Verfahren verglichen. Hierzu wurden bereits von ILK (1998) umfangreiche Untersuchungen angestellt. Die anschließende Fehlerfortpflanzung soll die kritischen Stellen der Umrechnung identifizieren. Bei der Wahl eines geeigneten Verfahrens wird das Augenmerk neben der erzielbaren Qualität auch auf die Einfachheit der Methode gelegt.

## 3.2 Systemdifferenz und Umrechnungskonzepte

### 3.2.1 Größenordnung der Systemdifferenz

Die Systemdifferenz zwischen Normalhöhen und normalorthometrischen Höhen ist dort exakt bekannt, wo Höhenwerte in beiden Systemen vorliegen. Dies ist der Fall an den NivP(1) (durch das DHHN92) und soll in Kürze auch an den NivP(2) gelten. Die Auswahl eines geeigneten Näherungsverfahrens in den Bereichen der Netzstufen 3 und 4 ist wesentlich von der Größe und der Variation der Systemdifferenzen abhängig. Je geringer die Beträge sind, desto größere Näherungswerte können anstatt der ursprünglichen Messelemente verwendet werden. Je glatter die Systemdifferenzfunktion ist, desto einfacher kann der Transformationsalgorithmus sein. Im einfachsten Fall könnte man z.B. auf eine flächenhafte Umrechnung zurückgreifen, bei der die in den Schleifen 1. und 2. Ordnung bekannten Systemdifferenzen als Stützwerte für eine ausgleichende Fläche geringer Ordnung (z.B. eine schiefe Ebene) dienen. Dies hätte unter anderem den Vorteil, dass man auf die ursprünglichen Messwege gar nicht zurückgreifen muss. Wie groß sind aber nun die Systemdifferenzen, und lässt ihre Variation innerhalb einer übergeordneten Schleife ein solches Vorgehen überhaupt zu?

Aus den NivP-Nachweisen des BLVA lassen sich Systemdifferenzen  $DNH$  an den NivP(1) von bis zu ca. 2 cm feststellen, wenn man DHHN85-Höhen verwendet. Aufgrund von Deformationen des DHHN12 gegenüber dem DHHN85 sowie unzureichender Datumsfestlegung im DHHN12 (vgl. Kapitel 3.1.2) werden im Fall von DHHN12-Höhen Werte bis zu 5 cm erreicht. Die Variation der  $DNH$  ist nach (3.14) eine Funktion der Schwereanomalien und der Höhenunterschiede. Zur Abschätzung der möglichen Größenordnungen werden die Berechnungen im Alpenbereich durchgeführt, um einen *worst case* zu simulieren.

In den bayerischen Alpen unterhält das Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie (IAPG) der Technischen Universität München das Testnetz Estergebirge (siehe FLURY, 2002). Hier wurden in hoher Dichte Schweremessungen ausgeführt und eine Nivellementlinie in extremem Gelände angelegt. Zusätzlich stehen Daten mehrerer Nivellementlinien 1. bis 3. Ordnung des BLVA zur Verfügung (Netzübersicht siehe Abbildung 3.4). Die Schleifen 1 und 2 sind zusammengestellt aus Nivellementlinien 1. und 2. Ordnung des BLVA.

Die Linien 3, 4 und 5 sind Linien 3. Ordnung des BLVA. Der eigentliche Gebirgsblock des Estergebirges liegt im Bereich südlich Linie 4 und wird von Schleife 1 umgrenzt. Die vom IAPG angelegte Linie 6 kann als Linie 3. bzw. 4. Ordnung angesehen werden. Sie verläuft über den Gebirgsblock hinweg, wie auch die Linien 3,4 und 5, wohingegen die Schleifen 1 und 2 ausschließlich in den Tälern verlaufen. Die Systemdifferenz erreicht entlang allen Nivellementlinien 1. Ordnung im Alpengebiet zwischen Lech und Inn maximal 13 mm (bei Verwendung von

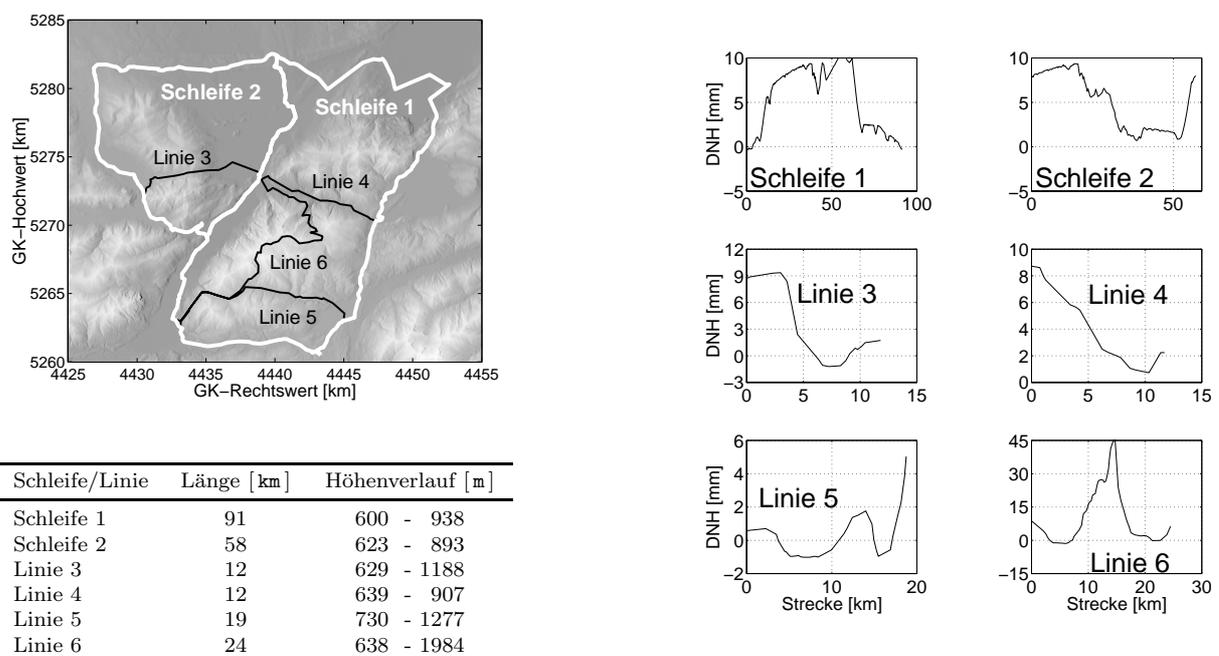


Abbildung 3.4: Nivellementlinien rund um das Testnetz Estergebirge (links oben: Lageübersicht). Rechts: Systemdifferenzen zwischen Normalhöhen und normalorthometrischen Höhen entlang verschiedener Nivellementlinien und -schleifen.

DHHN85-Höhen). Dies entspricht auch dem Betrag, der entlang den beiden Testschleifen erzielt wird. Um die Effekte im untergeordneten Punktfeld abzuschätzen, wurden die aus dem NivP-Nachweis des BLVA stammenden Höhenwerte der entsprechenden Anschlusspunkte festgehalten und mit den bekannten Messelementen die Höhen in beiden Systemen berechnet. Anhand der in Tabelle 3.1 zusammengestellten Werte zeigt sich, dass entlang der Linien 3. Ordnung die Systemdifferenzen innerhalb weniger km um bis zu 1 cm variieren können. Weist eine Linie extreme Höhenunterschiede auf (Linie 6), so können Werte bis zu 5 cm erreicht werden. Im Folgenden sollen nun die möglichen Umrechnungskonzepte näher beschrieben und daraufhin geprüft werden, ob sie im Hinblick auf Größe und Variation der Systemdifferenzen geeignet sind.

Tabelle 3.1: Systemdifferenzen (in mm) des untergeordneten Festpunktfeldes im Estergebirge.

Schleife/Linie	Anschlusspunkte		Maximum	RMS
Linie 3	8.7	1.7	9.4	5.1
Linie 4	8.7	2.2	8.7	4.7
Linie 5	0.6	5.0	5.0	1.5
Linie 6	4.7	4.7	46.0	17.9

### 3.2.2 Flächenhafte Umrechnung

Die flächenhafte Umrechnung geht entsprechend Kapitel 3.1.3 davon aus, dass die Systemdifferenz entlang der Schleifen 1. und 2. Ordnung bekannt ist. Innerhalb dieser Schleifen liegen die NivP(3) und (4). Von diesen sind aus den NivP-Nachweisen nur die Koordinaten und die normalorthometrischen Höhen bekannt. Im einfachsten Fall können Normalhöhen bestimmt werden, indem man aus den Stützwerten der NivP(1) und (2) eine ausgleichende Flächendifferenzfunktion  $FDF$  ableitet und damit die gesuchten Systemdifferenzen im untergeordneten NivP-Feld modelliert. Dies ist sicherlich eine sehr grobe, allerdings auch sehr einfache Näherung zur Bestimmung der Normalhöhen. Sie wird dort versagen, wo die Systemdifferenzen innerhalb einer Schleife große Variationen aufweisen. Als mögliche Modelle für Flächendifferenzfunktionen werden im Folgenden ausschließlich flächenhafte Polynome verwendet, im einfachsten Fall also eine schiefe Ebene. Generell sind auch komplexere Verfahren denkbar, bei denen neben den Systemdifferenzen entlang der Nivellements Schleifen zusätzliche Informationen zur Modellierung der Systemdifferenzen, wie z.B. Schwereanomalien oder topographische Daten, innerhalb der Schleifen verwendet werden. Hierauf wird jedoch im Folgenden nicht näher eingegangen, vielmehr soll durch Bestimmung von Flächenpolynomen das Verhalten der Systemdifferenzen auf einfache Art untersucht werden. Sind die Systemdifferenzen sehr glatt, so sollte auch bei Anpassung eines Polynoms genügend kleine Residuen erzielbar sein. Bei Verwendung von Polynomen ist jedoch zwischen den Stützpunkten mit unerwünschten Ausschwingeffekten zu rechnen, weshalb maximal Funktionen 3. Ordnung verwendet wurden.

Aus den Nivellements Schleifen rund um das Estergebirge wurde durch vermittelnde Ausgleichung Trendflächen verschiedener Ordnung bestimmt. Die in den Stützwerten verbleibenden Residuen sind in Tabelle 3.2 enthalten. Sie dienen zur Beurteilung der Güte der Anpassung der Funktion an die Stützwerte. Man erkennt, wie die Anpassung an die Stützwerte mit steigender Ordnung der  $FDF$  besser wird. Selbst bei einer Funktion 3. Ordnung muss man allerdings noch mit Residuen im Bereich von wenigen mm rechnen. Wie sieht es mit den Systemdifferenzen innerhalb

Tabelle 3.2: Residuen in den Stützpunkten verschiedener Flächendifferenzfunktionen.

Schleife	$FDF$	Residuen [mm]	RMS [mm]
1	1. Ordnung	-4.6 bis 5.7	1.5
	2. Ordnung	-3.2 bis 4.7	1.3
	3. Ordnung	-2.7 bis 3.9	0.7
2	1. Ordnung	-3.0 bis 2.5	1.4
	2. Ordnung	-2.2 bis 2.5	1.1
	3. Ordnung	-1.4 bis 2.1	0.8

Tabelle 3.3: Abweichungen der Flächendifferenzfunktion von den wahren Systemdifferenzen im untergeordneten Festpunktfeld zwischen den Stützpunkten.

Linie	$FDF$	Residuen [mm]	RMS [mm]
3	1. Ordnung	-3.1 bis 5.5	3.2
	2. Ordnung	-1.9 bis 6.1	3.2
	3. Ordnung	-3.1 bis 4.9	2.7
4	1. Ordnung	-1.4 bis 2.7	1.6
	2. Ordnung	-1.2 bis 3.2	1.9
	3. Ordnung	-0.7 bis 2.2	1.2
5	1. Ordnung	-0.3 bis 6.4	3.6
	2. Ordnung	-1.4 bis 7.1	4.0
	3. Ordnung	-0.1 bis 7.5	3.8
6	1. Ordnung	-41.6 bis 6.6	15.3
	2. Ordnung	-41.0 bis 7.1	15.1
	3. Ordnung	-40.8 bis 7.0	15.1

der Schleifen aus? Dazu wurden die Funktionswerte der oben bestimmten  $FDF$  an den NivP entlang den Linien und die wahren Systemdifferenzen gegenübergestellt. Hierbei zeigt sich (siehe Tabelle 3.3), dass man zwischen den Stützpunkten von keiner einheitlichen Verbesserung bei steigender Ordnung der  $FDF$  sprechen kann. Die Güte der flächenhaften Interpolation hängt davon ab, wie rauh die Systemdifferenzen innerhalb der übergeordneten Schleifen sind.

Die Ergebnisse zeigen, dass

- die Modellierung einer  $FDF$  ohne Kenntnis des Signalverhaltens (Schwereanomalien und Höhenunterschiede) innerhalb der Schleifen nicht mit ausreichender Genauigkeit möglich ist (die Differenzen liegen im Bereich mehrerer mm bis zu cm) und
- die Residuen in den Stützpunkten im Bereich mehrerer mm liegt, was beim Anschluss an die übergeordneten Schleifen zu einem inkonsistenten Festpunktfeld führt.

Desweiteren ist zu beachten, dass

- die  $FDF$  eigentlich nur an den NivP selbst definiert ist, da die normalorthometrischen Höhen wegabhängig sind (hätte man einen anderen Messweg gewählt, so hätte sich ein anderer Wert der  $FDF$  ergeben). Bei flächenhafter Umrechnung werden die Effekte der Wegabhängigkeit flächenhaft verschmiert, jedoch nicht vollständig rückgängig gemacht. Dies ist nur bei linienweiser Umrechnung möglich.

### 3.2.3 Linienweise Umrechnung

Grundlage der linienweisen Umrechnung sind die Formeln aus Kapitel 3.1.3. Stehen Informationen über den Messweg, sprich die Punktfolge innerhalb einer Linie sowie die Längen der einzelnen Nivellementstrecken zur Verfügung, so können die Wegabhängigkeitseffekte der normalorthometrischen Höhen rückgängig gemacht werden. Wie in Kapitel 3.1.3 beschrieben, liegen diese Daten jedoch im Falle des untergeordneten Festpunktfeldes nicht (zumindest nicht digital) vor. Die Idee der linienweisen Umrechnung ist es, aus den flächenhaft verteilten NivP selbst eine Linie zusammenzustellen. Dazu werden die NivP linienweise zusammengefasst und an den Endpunkten an das übergeordnete NivP-Feld angehängt. Dieses Vorgehen wurde bereits in ILK (1998) als Umrechnung mit simulierten Nivellementlinien beschrieben.

In der Regel wird man den groben Verlauf der originalen Messlinien gut rekonstruieren können, da die Messung linienweise erfolgte, und diese Linienstruktur in einer Lageübersicht optisch meist gut erkennbar ist. Trotzdem wird es in einigen Fällen nicht möglich sein, die ursprüngliche Punktfolge exakt zu bestimmen, weil die NivP in manchen Bereichen sehr dicht liegen, so dass der Liniencharakter nicht sichtbar ist, manche Punkte zerstört worden sind oder es nicht eindeutig erkennbar ist, an welchen Punkten die Linie ins übergeordnete Netz eingehängt wurde. Bezüglich der Modellfehler gilt:

- Erfolgt die linienweise Umrechnung nicht entlang des originalen Messwegs, so können die Modellfehler der normalorthometrischen Höhen nicht vollständig beseitigt werden. Die Effekte werden dann durch die linienweise Ausgleichung innerhalb des Festpunktfeldes verschmiert.
- Die größten Beträge der Modellfehler treten bei großen Höhenunterschieden und rauhem Schwerefeld auf, also im Gebirge. Da dort die Nivellementpunkte nicht flächenhaft sondern stark linienweise angeordnet sind, ist es relativ leicht, den originalen Messweg zu rekonstruieren. In Gegenden mit dichteren Punktwolken, wie z.B. Stadtgebieten, sind wiederum die Wegabhängigkeitseffekte gering, so dass sich auch ein grob falsch rekonstruierter Weg nicht wesentlich auswirken kann.

Im Vergleich mit den in Kapitel 3.2.2 untersuchten Flächenpolynomen ist die linienweise Umrechnung eindeutig vorzuziehen. Es entsteht durch linienweisen Anschluss an die Schleifen höherer Ordnung ein konsistentes Festpunktfeld und die Wegabhängigkeitseffekte des alten Höhensystems können besser rückgängig gemacht werden. Deshalb werden die folgenden Untersuchungen ausschließlich mit der linienweisen Umrechnungsmethode durchgeführt. Die anschließende Fehlerfortpflanzung soll zeigen, welche Genauigkeitsanforderungen dabei an die einzelnen Messelemente gestellt werden.

### 3.2.4 Fehlerfortpflanzung bei linienweiser Umrechnung

Die linienweise Umrechnung von normalorthometrischen zu Normalhöhen erfolgt entsprechend (3.11) nach

$$H_k^N = H_k^{No} + DNH_A + \sum_i DNR_i + \sum_i p_i \cdot (DNH_E - DNH_A - \sum_E^A DNR). \quad (3.15)$$

Die Eingangsgrößen sind teilweise genau bekannt und liegen digital vor, teilweise müssen sie durch geeignete Näherungswerte ersetzt werden. Im einzelnen sind das

- die Normalhöhen in den Anschlusspunkten an das übergeordnete NivP–Feld (diese sind aufgrund der schrittweisen hierarchischen Berechnung bekannt),
- die normalorthometrischen Höhen in allen NivP (diese sind in den NivP–Nachweisen enthalten),
- die Lagekoordinaten der NivP (diese liegen ebenfalls in den NivP–Nachweisen vor, sind allerdings unterschiedlich genau),
- die Schwerewerte  $g$  bzw. die Freiluftanomalien  $\Delta g$  in den NivP (diese Werte liegen zwar digital vor, jedoch nur an den SFP, nicht an den NivP; es ist deshalb eine genügend genaue Interpolation zu wählen),
- die Nivellementhöhen  $\Delta n$  zwischen den NivP (diese sind wie beschrieben nicht ohne weiteres zugänglich, können aber in guter Näherung durch die Differenzen der bekannten  $H^{No}$  ersetzt werden) sowie
- der Messweg, d.h. die Punktfolge innerhalb einer Linie sowie die Länge der nivellierten Strecke (auch hier stehen nur Näherungswerte zur Verfügung).

Für die Kovarianzmatrix  $\Sigma_y$  einer beliebige Funktion  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$  gilt nach dem allgemeinen Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$\Sigma_y = \mathbf{F} \cdot \Sigma_x \cdot \mathbf{F}' \quad (3.16)$$

Darin ist  $\mathbf{F}$  die Matrix der partiellen Ableitungen von  $f(\mathbf{x})$  nach den einzelnen Komponenten  $x_i$  und  $\mathbf{F}'$  ihre Transponierte. Die Dimension der Matrix

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

wird festgelegt durch die Anzahl  $n$  der Nivellementstrecken und die Anzahl  $m$  der Eingangsargumente. Die Funktion  $f(\mathbf{x})$  ist gegeben durch die rechte Seite von (3.15) oder, wenn man  $H_k^{No}$  auf die linke Seite bringt, durch

$$DNH_k = DNH_A + \sum_i DNR_i + \sum_i p_i (DNH_E - DNH_A - \sum_A^E DNR_i). \quad (3.18)$$

In dieser Gleichung kann man 3 voneinander unabhängige Argumentgruppen unterscheiden, nämlich

- die Systemdifferenzen  $DNH$  in den Anschlusspunkten (nur abhängig von den Anschlusshöhen in beiden Systemen),
- die Reduktionsdifferenzen  $DNR$  entlang der Linie (abhängig von den Schwereanomalien und den nivellierten Höhenunterschieden) und
- die Gewichtungsfaktoren  $p$  (abhängig von den Längen der einzelnen Nivellementstrecken).

Diese 3 Gruppen lassen sich jeweils auf die elementaren Eingangsgrößen zurückführen, die als unkorreliert angesehen werden können. Die Systemdifferenzen  $DNH$  in den Anschlusspunkten errechnen sich aus den bekannten Höhen in den beiden Systemen. Sie werden in der folgenden Fehleruntersuchung nicht weiter beachtet, da davon ausgegangen wird, dass die Systemdifferenzen in den Anschlusspunkten an das übergeordnete Festpunktfeld bekannt sind.

Die Reduktionsdifferenzen  $DNR$  enthalten Schwerewerte bzw. -anomalien, Nivellementhöhen und Normalschwerewerte bzw. einen konstanten mittleren Näherungswert (vgl. Formel (3.14)). Falls Normalschwerewerte in den NivP berechnet werden, kommen als weitere Eingangsgrößen die geographische Breite  $\varphi$  und die Normalhöhe  $H^N$  hinzu. Die Gewichtungsfaktoren werden berechnet aus den Streckenlängen  $ds$  der einzelnen Nivellementabschnitte. Damit ergibt sich bei unkorrelierten Eingangsgrößen

$$\Sigma_{DNH} = \Sigma_{ds} + \Sigma_{\Delta n} + \Sigma_g + \Sigma_\varphi + \Sigma_H + \Sigma_{\gamma_0} \quad (3.19)$$

Der dritte Term in (3.19) beschreibt den Einfluss der Schwereanomalien. Dabei wird angenommen, dass die Schwerewerte in den NivP z.B. durch Interpolation bekannt sind und daraus die Anomalien berechnet werden.

Der “ $\gamma_0$ -Term“ stellt den Fehlerbeitrag dar, der sich ergibt, wenn man in (A.6) den Normalschwerewert im Nenner durch eine Konstante ersetzt.

Zur Genauigkeitsabschätzung wurden die in Tabelle 3.4 für die verschiedenen Eingangsargumente angegebenen Standardabweichungen verwendet. Sie wurden folgendermaßen festgelegt:

- Strecken: Für die Standardabweichung  $\sigma_{ds}$  der Streckenlängen wurde die Differenz zwischen den wahren und den aus den ebenen GK-Koordinaten berechneten Strecken verwendet. Die linke Spalte in Tabelle 3.4 entspricht einem RMS-Wert, die rechte Spalte gibt das Maximum der einzelnen wahren Differenzen an.
- Nivellementhöhen: Statt der wahren Nivellementhöhen wurden die Differenzen der bekannten  $H^{No}$  verwendet.
- Schwerewerte: Die Genauigkeit, mit der Schwerewerte an den NivP bestimmt werden können, hängt vom Stützpunktstand und der Rauigkeit des Schwerefelds ab. Zur Abschätzung werden Werte von 1 bzw. 10 mGal verwendet.
- Geographische Breite: Die Lagegenauigkeit der NivP ist stark unterschiedlich und reicht vom cm-Niveau bis hin zu  $\pm 100$  m (für graphisch ermittelte Koordinaten). Dieser maximale Fehler entspricht etwa einer Genauigkeit von  $\pm 3''$ .
- Höhenwerte: Zur Bestimmung der Normalschwere ist streng genommen die Normalhöhe der NivP nötig, da sich die Schwereanomalie auf das Telluroid beziehen soll. Stattdessen steht die normalorthometrische Höhe zur Verfügung. Die wahren Werte der linken Spalte sind die Systemdifferenzen, wie sie sich bei den Berechnungen im Estergebirge ergaben (DHHN92 - DHHN85). Da allerdings bezüglich DHHN12 größere Differenzen auftreten, wurden überschlagsweise auch 10 cm verwendet.
- Normalschwere: Ersetzt man den Kehrwert der Normalschwere durch den konstanten Wert  $0.102 \text{ m}^{-1} \text{ s}^2$  (vgl. Kapitel A.1), so ergeben sich in jedem Punkt die angegebenen wahren Differenzen.

Die Ergebnisse der Fehlerfortpflanzung sind in Tabelle 3.5 enthalten. Zur Beurteilung sei beachtet, dass die Höhen der NivP laut AdV (1992) auf volle mm angegeben werden (abgesehen von einigen Punkten 4. Ordnung, die nur auf cm angegeben sind). Deshalb sind überschlagsmäßig nur diejenigen Werte wesentlich für die Genauigkeit der Höhen, die bei mindestens 10tel mm liegen.

Die Werte in Tabelle 3.5 identifizieren eindeutig die Schwere  $g$  als Hauptfehlerquelle. Alle anderen Anteile liegen unter dem genannten Niveau, so dass die dafür verwendeten Näherungen ohne Genauigkeitsverlust verwendet werden können.

Mit Vorsicht zu genießen ist allerdings der Fehlerbeitrag der Strecken  $ds$ . Die durchgeführten Berechnungen sagen nur aus, dass die Länge der tatsächlich nivellierten Strecke in guter Näherung durch die aus den Koordinaten der Endpunkte berechneten geradlinigen Verbindung ersetzt werden kann. Diese Aussage ist unabhängig davon, ob der dabei zugrundegelegte Messweg wirklich dem originalen Weg entspricht. Ist dies nicht der Fall, so können

*Tabelle 3.4: Standardabweichungen (jeweils linke Spalte) und maximale Werte (rechts) der einzelnen Parameter bei linienweiser Umrechnung.*

	$ds$ [m]	$\Delta n$ [mm]	$g$ [mGal]	$\varphi$ ["]	$H$ [cm]	$\gamma_0$ [mGal]
Schleife 1	150 / 1350	0.2 / 0.9	1 / 10	3	0.6 / 10	36 / 65
Schleife 2	50 / 190	0.1 / 0.6	1 / 10	3	0.6 / 10	29 / 48
Linie 3	200 / 710	1.2 / 3.4	1 / 10	3	0.5 / 10	59 / 131
Linie 4	160 / 540	0.2 / 0.5	1 / 10	3	0.2 / 10	28 / 47
Linie 5	330 / 1750	0.4 / 1.6	1 / 10	3	0.5 / 10	104 / 166
Linie 6	- / -	0.5 / 1.8	1 / 10	3	1.8 / 10	212 / 382

*Tabelle 3.5: Maximaler Fehleranteil der Eingangsgrößen bei linienweiser Umrechnung in  $\frac{1}{10}$  mm.*

	$\sigma_{ds}$	$\sigma_{\Delta n}$	$\sigma_g$	$\sigma_\varphi$	$\sigma_H$	$\sigma_{\gamma_0}$
Schleife 1	0.2 / 0.2	0.0003 / 0.0005	0.9 / 9.1	0.07	0.002 / 0.028	0.001 / 0.001
Schleife 2	0.1 / 0.1	0.0002 / 0.0003	0.4 / 4.3	0.04	0.001 / 0.013	0.0005 / 0.0005
Linie 3	0.2 / 0.3	0.001 / 0.001	1.8 / 18.4	0.15	0.003 / 0.060	0.002 / 0.002
Linie 4	0.0 / 0.0	0.0001 / 0.0002	0.5 / 5.3	0.04	0.001 / 0.016	0.0004 / 0.0005
Linie 5	0.3 / 0.5	0.0002 / 0.0002	1.5 / 14.6	0.12	0.001 / 0.045	0.002 / 0.002
Linie 6	- / -	0.001 / 0.001	2.6 / 26.3	0.21	0.014 / 0.081	0.03 / 0.04

durchaus größere Fehlerbeiträge im mm-Niveau auftreten (vgl. Kapitel 3.2.3). Bei sorgfältiger Zusammenstellung einer Nivellementlinie (z.B. unter Einbeziehung alter Messunterlagen und topographischer Karten) ist jedoch davon auszugehen, dass die rekonstruierte Punktfolge nicht wesentlich vom originalen Messweg abweicht. In diesem Fall verbleibt dann tatsächlich nur der Fehlerbeitrag der Schwerewerte.

Desweiteren sei noch angemerkt, dass die relativ geringen Anforderungen an die Normalschwerewerte auch zur Folge haben, dass sich die Verwendung unterschiedlicher Referenzsysteme nicht auf die berechneten Höhenwerte auswirkt. So ist es durchaus zulässig, dass bei Berechnung der  $H^{No}$  die Internationale Schwereformel INSF1930 Verwendung findet, wohingegen sich die Normalhöhen auf das GRS80 beziehen und die entsprechenden Systemdifferenzen in diesem System bestimmt werden. Für eine detaillierte Darstellung dieses Sachverhalts sei auf Kapitel A.1 verwiesen.

Folgerung der Fehlerfortpflanzung ist, dass die linienweise Umrechnung mit den in den NivP-Nachweisen vorhandenen Daten und den daraus abgeleiteten Näherungswerten mit ausreichender Genauigkeit durchgeführt werden kann. Voraussetzung sind allerdings ausreichend genaue Schweredaten entlang der Nivellementlinien. Im Bereich des untergeordneten Festpunktfeldes müssen diese aus den flächenhaft verteilten SFP präzisiert werden. Kernstück der folgenden Untersuchungen ist daher die Auswahl eines möglichst einfachen Prädiktionsverfahrens für Schwerewerte. Um die Qualität der untersuchten Verfahren zu testen, werden neben empirischen Fehlern an bekannten SFP auch statistische Fehlermaße angegeben. Besonderes Augenmerk bei der Qualitätsanalyse der Verfahren wird deshalb auf die Signifikanz der statistisch ableitbaren Werte gelegt.

### 3.3 Verfahren und Qualität der Schwereprädiktion

In Bayern liegen entlang den Linien 1. Ordnung Schwerewerte in Abständen zwischen 1 km (Bergland) und 4 km (Flachland) vor. Hinsichtlich der in LEDERSTEGGER (1969) angegebenen maximal zulässigen Werte von 6–25 km (Flachland und Mittelgebirge) ist davon auszugehen, dass selbst ein sehr einfaches Prädiktionsverfahren gute Ergebnisse liefert. Verwendung in den amtlichen Berechnungen fand die lineare Interpolation in einfachen Bougueranomalien entlang der Nivellementlinien (siehe AdV, 1993). Eine ähnliche Situation liegt auch für die NivP(2) vor, so dass auch hier, wie vom BLVA geplant, eine strenge Berechnung der Normalhöhen erfolgen kann. Innerhalb der Schleifen 2. Ordnung sind SFP jedoch nur noch in geringerer Dichte flächenhaft vorhanden. Lediglich die Knotenpunkte 3. Ordnung, also die Anschlüsse an das übergeordnete Feld wurden gezielt gravimetriert. Zur Bestimmung der Systemdifferenzen entlang rekonstruierter Nivellementlinien (siehe linienweise Umrechnung in Kapitel 3.2.3) müssen aus diesen SFP Schwerewerte an den NivP(3) und NivP(4) prädiziert werden.

Unverzichtbarer Bestandteil ist hierbei die Qualitätsbeschreibung der erzielten Ergebnisse, da nur so gewährleistet werden kann, dass die abgeleiteten Höhenwerte genügend genau sind. Für die Prädiktion selbst stehen verschiedene Methoden zur Verfügung, deren Eignung von der Rauigkeit des Signals, der Stützpunktdichte und der gewünschten Prädiktionsgenauigkeit abhängt. Im Hinblick auf die praktische Nutzung werden im Folgenden möglichst einfache Verfahren untersucht. Leider sinkt aber mit der Einfachheit der Methoden auch deren Genauigkeit. Abhilfe lässt sich hier durch geeignete Filtertechniken schaffen. Dabei wird das raue Signal vor der Prädiktion soweit geglättet, dass auch mit einfachen Verfahren gute Ergebnisse erzielt werden können. Im Falle der Schwere geschieht dies z.B. durch Verwendung von Schwereanomalien anstelle der Schwerewerte. Hierbei können die bereits erwähnten

- *Freiluftschwereanomalien*  $\Delta g_{FA} = g - \gamma$ ,
- *einfache Bougueranomalien*  $\Delta g_{BO} = g - \gamma - 2\pi G\rho h$ , welche um den Einfluss der Topographie in Form einer *Bouguerplatte* reduziert sind, oder auch
- *topographisch verfeinerte Bougueranomalien*  $\Delta g_{TC} = g - \gamma - 2\pi G\rho h + \delta g^{TC}$ , die um den Einfluss der vollständigen Topographie reduziert sind,

verwendet werden. Am Ende dieses Kapitels folgt in Abschnitt 3.3.5 am Beispiel der Region Estergebirge eine Darstellung der statistischen Eigenschaften der drei verschiedenen Anomalientypen. Eine nähere Beschreibung zur Berechnung der Anomalien wird in Kapitel 4.4.2 gegeben.

#### 3.3.1 Prädiktionsverfahren

Im Folgenden werden zur Schätzung von Schwerewerten nur lineare Prädiktionsverfahren untersucht, da bei höhergradigen Interpolationen zwischen den Stützpunkten mit Ausschwingeffekten zu rechnen ist, die dem wahren Signalverlauf nicht entsprechen (vgl. hierzu die Ergebnisse der *FDF* in Kapitel 3.2.2). Die Grundgleichung linearer Prädiktionsverfahren lautet nach HEISKANEN & MORITZ (1967)

$$\tilde{z}_P = \sum_i \alpha_{P,i} \cdot z_i, \quad (3.20)$$

wobei  $\tilde{z}_P$  der geschätzte Funktionswert am Prädiktionspunkt  $P$  ist,  $z_i$  der Wert am Stützpunkt  $i$  und  $\alpha_{P,i}$  der Gewichtskoeffizient des Stützwertes  $z_i$  bei Schätzung des Wertes  $z_P$ . Die Gewichtskoeffizienten  $\alpha$  werden durch das gewählte Prädiktionsverfahren festgelegt. Folgende Verfahren werden untersucht:

- *lineare linienweise Interpolation*: Als Stützwerte dienen hierbei nur die beiden innerhalb der Nivellementlinie benachbart liegenden SFP  $j$  und  $k$ . In einem zweidimensionalen Raum, der durch den Punktabstand und die Funktionswerte des Signals aufgespannt wird, liegt der Schätzwert auf der Verbindungsgeraden der beiden Stützwerte. Die Gewichtung erfolgt in Abhängigkeit der Distanzen  $s_{jk}$  (zwischen den beiden Stützpunkten  $j$  und  $k$ ) und  $s_{jP}$  (zwischen  $j$  und Berechnungspunkt  $P$ ) nach

$$\tilde{z}_P = z_j + (z_k - z_j) \cdot \frac{s_{jP}}{s_{jk}} \quad (3.21)$$

bzw. wenn man nach Termen von  $j$  und  $k$  ordnet

$$\tilde{z}_P = \left(1 - \frac{s_{jP}}{s_{jk}}\right) \cdot z_j + \frac{s_{jP}}{s_{jk}} \cdot z_k. \quad (3.22)$$

Daraus sind die Prädiktionskoeffizienten  $\alpha$  leicht ersichtlich, nämlich

$$\begin{aligned} \alpha_{Pj} &= 1 - \frac{s_{jP}}{s_{jk}} \\ \alpha_{Pk} &= \frac{s_{jP}}{s_{jk}} \\ \alpha_{Pi} &= 0 \quad , \text{ für } i \neq j, k \end{aligned} \quad (3.23)$$

- *lineare flächenhafte Interpolation*: Grundlage ist hier eine mathematische Triangulation aus allen zur Verfügung stehenden Stützpunkten. Die Eckpunkte  $j, k$  und  $l$  derjenigen Dreiecksmasche, in der der jeweilige Berechnungspunkt liegt, dienen als Stützwerte für die Interpolation.

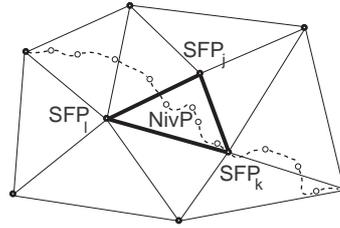


Abbildung 3.5: Dreiecksvermaschung zwischen flächenhaft verteilten SFP.

In einem dreidimensionalen Raum, der durch die Lagekoordinaten und die Funktionswerte aufgespannt wird, liegt der Schätzwert auf dem durch die Vermaschung festgelegten Polyeder. Die Koeffizienten  $\alpha$  ergeben sich zu

$$\begin{aligned}\alpha_{Pj} &= \frac{(x_k - x_P)(y_l - y_k) - (y_k - y_P)(x_l - x_k)}{(x_k - x_j)(y_l - y_k) - (y_k - y_j)(x_l - x_k)} \\ \alpha_{Pk} &= \frac{(x_l - x_P)(y_j - y_l) - (y_l - y_P)(x_j - x_l)}{(x_l - x_k)(y_j - y_l) - (y_l - y_k)(x_j - x_l)} \\ \alpha_{Pl} &= \frac{(x_j - x_P)(y_k - y_j) - (y_j - y_P)(x_k - x_j)}{(x_j - x_l)(y_k - y_j) - (y_j - y_l)(x_k - x_j)} \\ \alpha_{Pi} &= 0 \quad , \text{ für } i \neq j, k, l.\end{aligned}\tag{3.24}$$

- *Kleinste-Quadrate-Prädiktion* (least-squares-prediction, LSP): Dieses Verfahren liefert den minimalen Schätzungsfehler. Um dies zu erreichen ist Information über das statistische Verhalten des Signals nötig. Diese Information liefert die Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}_{xx}$ . Nach HEISKANEN & MORITZ (1967) ergeben sich die Prädiktionskoeffizienten zu

$$\alpha_{Pi} = \mathbf{C}_{Pi} \mathbf{C}_{ik}^{-1},\tag{3.25}$$

wobei  $\mathbf{C}_{ik}$  die Kovarianz zwischen den Stützwerten und  $\mathbf{C}_{ik}$  die Kovarianz zwischen Stützwert und Prädiktionswert beschreibt.

### 3.3.2 Prädiktionsgenauigkeit

Um die in Kapitel 3.2.4 dargestellte Fehlerfortpflanzung auf die berechneten Höhen anzuwenden, benötigt man Information über den Schätzungsfehler der Schwereinterpolation. In diesem Zusammenhang ergeben sich folgende Probleme:

1. Es besteht unmittelbar keine Möglichkeit, die Interpolationsgenauigkeit zu beurteilen. Lediglich in gravimetrierten Punkten, die nicht als Stützstellen in die Prädiktion eingegangen sind, kann der wahre (empirische) Fehler

$$\epsilon = z_P - \tilde{z}_P\tag{3.26}$$

berechnet werden. Dieser kann aber nicht ohne weiteres auf andere Punkte übertragen werden, so dass Fehlervarianzen nur sehr ungenau bekannt sind.

2. Aufgrund des Feldcharakters der Schwere und dem Schätzungsverfahren bestehen sowohl zwischen den Schwerewerten als auch den Schätzungsfehlern an verschiedenen Punkten Korrelationen. Verwendet man nur Fehlervarianzen, so vernachlässigt man diesen Umstand, was zu einer mangelhaften Fehlerfortpflanzung führen kann.

Um die Fehlervarianzen und -kovarianzen in realistischem Maße zu modellieren, ist Information über das statistische Verhalten des Signals notwendig. Weiss man z.B., dass ein Signal sehr glatt ist und nur eine geringe Bandbreite an Funktionswerten aufweist, so ist der zu erwartende Fehler relativ klein. Ist das Signal hingegen

rauer und die Bandbreite größer, so ist auch mit entsprechend größeren Fehlern zu rechnen. Steht diese Information in Form einer Kovarianzfunktion zur Verfügung, kann nach HEISKANEN & MORITZ (1967) die Berechnung der Kovarianzmatrix  $\Sigma_{PQ}$  der Prädiktionsergebnisse mit der Formel

$$\Sigma_{PQ} = C_{PQ} - \alpha'_{P_i} C_{Q_i} - \alpha'_{Q_i} C_{P_i} + \alpha'_{P_i} C_{ik} \alpha_{Q_k} \quad (3.27)$$

erfolgen. Setzt man in (3.27) die im letzten Abschnitt angegebenen Koeffizienten  $\alpha$  ein, so ergibt sich die Genauigkeit der jeweiligen Prädiktionsverfahren. Zusammen mit der Fehlerfortpflanzung in (3.19) ermöglicht dies eine Qualitätsanalyse der Höhensystemumstellung.

Die Ableitung einer für das jeweilige Prädiktionsgebiet realistischen Kovarianzfunktion ist relativ komplex. Sie basiert auf mathematischen Voraussetzungen, die in der Praxis streng nicht erfüllt sind. Ein stärkeres Abweichen der Realität von diesen Voraussetzungen kann dazu führen, dass überhaupt keine realistische Kovarianzfunktion abgeleitet werden kann oder diese zumindest unzuverlässig ist. Die Verwendung der linienweisen oder der flächenhaften linearen Interpolation ist deshalb in der Praxis einfacher als die Anwendung der theoretisch optimalen LSP, da für erstere Verfahren keine Kovarianzfunktionen bestimmt werden müssen. Diese werden nur für die Qualitätsanalyse der Verfahren nach (3.27) benötigt.

### 3.3.3 Bestimmung empirischer Kovarianzfunktionen

Betrachtet sei ein stochastisches, d.h. vom Zufall bestimmtes Signal, dessen Werte völlig regellos um den Mittelwert  $\bar{x} = 0$  streuen. Da das Signal vollkommen zufällig ist, lassen sich keine Voraussagen über den Signalwert an einer bestimmten Stelle machen. Mit Hilfe statistischer Größen aber kann ein mittleres Signalverhalten beschrieben werden. Eine solche Größe ist die *Kovarianz*  $C$ . Sie gibt an, wie stark zwei Signalwerte an verschiedenen Stellen des Definitionsbereichs miteinander korreliert sind (die Korrelation ist die auf den Wert 1 normierte Kovarianz). Erfüllt der das Signal generierende Prozess die Bedingungen

- *Homogenität* (der Prozess ist invariant gegenüber Translationen, d.h. die Kovarianz ist unabhängig von der absoluten Lage eines Punktpaares im Definitionsbereich) und
- *Isotropie* (der Prozess ist invariant gegenüber Rotationen, d.h. die Kovarianz ist unabhängig von der Richtung der Verbindung eines Punktpaares),

so lässt sich für den gesamten Definitionsbereich die Kovarianz als Funktion nur des Abstandes  $s$  zweier Punkte angeben. Die Funktion lässt sich beschreiben durch die *Varianz*

$$C(s=0) = C_0, \quad (3.28)$$

die Halbwertsbreite oder *Korrelationslänge*  $\xi$ , für die gilt

$$C(\xi) = \frac{1}{2} C_0, \quad (3.29)$$

sowie die Krümmung im Scheitelpunkt. Die Varianz ist ein Maß für die Größe der Signalwerte, die Korrelationslänge ist ein Maß für die Rauigkeit des Signals.

Im Allgemeinen bestehen Signale, wie z.B. Schwerewerte, aus einem deterministischen und einem stochastischen Anteil. Ersterer ist mit Hilfe von analytischen Funktionen, z.B. der Normalschwereformel, an jeder Stelle im Definitionsbereich streng berechenbar. Allerdings lässt sich das Signal damit nicht exakt reproduzieren. Die verbleibenden Residuen entsprechen im genannten Beispiel den Schwereanomalien. Diese enthalten Messfehler und die von der analytischen Funktion nicht erfassten Signalanteile. Interpretiert man sie als Ergebnis eines Zufallsprozesses, so kann man mittels einer Kovarianzfunktion ihr statistisches Verhalten beschreiben. Ob diese Beschreibung gültig ist und zu brauchbaren Ergebnissen führt, hängt davon ab, wie gut der stochastische Anteil die oben genannten, idealisierten Voraussetzungen Homogenität und Isotropie erfüllt.

Zur Bestimmung der Kovarianz  $C(s)$  eines gegebenen Signals seien alle  $n$  Beobachtungspaare  $x_i$  und  $y_i$  im Abstand  $s$  betrachtet. Die Kovarianz  $C(s)$  berechnet sich dann nach (siehe z.B. RUMMEL, 1991b)

$$C(s) = \frac{1}{n} \sum_i x_i \cdot y_i. \quad (3.30)$$

Zur Ableitung einer empirischen Kovarianzfunktion sind folgende Schritte auszuführen:

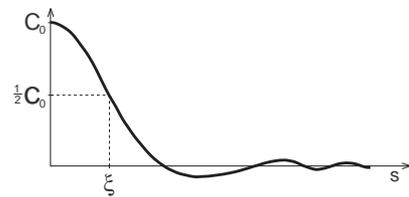


Abbildung 3.6: Kovarianzfunktion.

1. Bereitstellung von Stützwerten. Diese müssen sich im Definitionsbereich genähert stochastisch verhalten und zentriert sein.
2. Klassifikation der Stützwerte. Die Berechnung der Kovarianzen erfolgt nach (3.30) für genau einen Abstandswert  $s$ . Da in der Praxis kaum 2 Punktpaare den gleichen Abstand haben, fasst man mehrere Paare in einer Abstandsklasse der Breite  $\Delta s$  zusammen.
3. Bestimmung einer analytischen Funktion. Den diskreten Produktmittelwerten der vorliegenden Klasse wird ein funktionales Modell angepasst.

### Berechnung der Stützwerte

Als Stützwerte dienen Freiluft- bzw. Bougueranomalien. Da diese z.T. relativ inhomogen sind, wird keine einheitliche Kovarianzfunktion für ganz Bayern abgeleitet, sondern nur für kleinere Bereiche entsprechend den Kartenblättern der Topographischen Karte 1 : 25 000 TK25. Dadurch bleibt gleichzeitig die Stützpunktzahl beschränkt, was den Rechenaufwand reduziert. Eine derartige Einschränkung des Definitionsbereichs kann zur Folge haben, dass

- der Mittelwert des Signalausschnitts nicht 0 beträgt,
- langwellige Trendfunktionen oder
- Korrelationen (z.B. die Höhenabhängigkeit der Freiluftanomalien) deutlich werden,

so dass das Signal die Voraussetzungen Homogenität und Isotropie nicht mehr erfüllt. Es kann dann nach (3.30) keine sinnvolle Kovarianzfunktion abgeleitet werden. Im Prinzip hat man folgende Möglichkeiten der Handhabung:

- Man erweitert das deterministische Modell. Die analytische Funktion beschreibt dann immer feinere Signalstrukturen und die Residuen verhalten sich zunehmend stochastisch. Außerdem lässt sich dabei leicht dafür sorgen, dass das Signal zentriert wird.
- Man verändert den Definitionsbereich. Bei Ausweitung des Bereichs steigt allerdings in der Regel die Varianz und die abgeleitete Kovarianzfunktion wird weniger repräsentativ für das Signalverhalten im ursprünglichen Gebiet. Bei Einschränkung des Bereichs ergibt sich der Nachteil, dass in jedem Subraum des ursprünglichen Definitionsbereichs eine andere Kovarianzfunktion gilt.
- Man entwickelt eine neue Theorie z.B. auf der Basis an-isotroper Kovarianzfunktionen. Versuche in diese Richtung wurden z.B. von TSCHERNING (1998) unternommen. Absicht dabei ist es, die Parameter der Kovarianzfunktion in Abhängigkeit von der Richtung zwischen Berechnungs- und Stützpunkt zu variieren. Dies erscheint vernünftig, da z.B. von einem Stützpunkt im Alpenvorland aus in Richtung zum Gebirge hin die Varianz größer und die Korrelationslänge kürzer ist, als in Richtung vom Gebirge weg. Dies ergibt bei der Prädiktion realistischere Fehlermaße (der Fehler in Richtung Gebirge wird größer sein als in der Gegenrichtung), aber keine besseren Prädiktionsergebnisse.

In der vorliegenden Arbeit wird die erste Möglichkeit verwendet. Dabei wird aus den zunächst vorliegenden Freiluftanomalien eine Trendfläche geringer Ordnung bestimmt und die Stützwerte um diese reduziert. Dadurch werden Verkippungen, die z.B. aus langwelligem Signalanteilen herrühren, beseitigt. Im einfachsten Fall ist dies lediglich die Zentrierung auf den Mittelwert. Erweist sich das trendreduzierte und zentrierte Signal als nicht geeignet, so wird der deterministische Anteil durch Verwendung von Bougueranomalien erweitert und erneut eine Zentrierung und Trendreduktion durchgeführt.

### Zentrierung

Ein stochastisches Signal das durch eine Kovarianzfunktion beschrieben werden kann, zeichnet sich dadurch aus, dass die Signalwerte zufällig um den Mittelwert  $\bar{x} = 0$  streuen. Deshalb müssen zur Bestimmung einer geeigneten Kovarianzfunktion die vorliegenden Stützwerte zentriert werden. Dabei ist darauf zu achten, dass der Mittelwert tatsächlich repräsentativ für den Definitionsbereich ist. Bei Bestimmung des einfachen arithmetischen Mittels z.B. kann eine dichte Stützpunktwolke dafür sorgen, dass der Mittelwert der Stichprobe hin zu den Werten der Punktwolke verschoben wird und damit deutlich vom Mittelwert der Grundgesamtheit abweicht. Er kann dann nicht als repräsentativ angesehen werden und eine nach (3.30) abgeleitete Kovarianzfunktion ist *Bias*-behaftet. Nach ASSMUS & KRAUS (1974) strebt eine Kovarianzfunktion mit Bias  $M$  für größer werdende Abstände  $s$  nicht gegen 0, sondern gegen  $M^2$ . Wie wichtig ein repräsentativer Mittelwert ist, zeigt das in Abbildung 3.7 dargestellte Beispiel aus dem Bereich der Allgäuer Alpen.

Hier wurden Kovarianzen aus einfachen Bougueranomalien abgeleitet, wobei die Stützwerte systematisch verfälscht wurden. Dies simuliert die Situation eines falschen Mittelwertes. Das linke Bild zeigt die Kovarianzen der zentrierten Stützwerte (Bias  $M = 0$ ). In der Mitte und rechts wurde ein Bias  $M$  von 2 bzw. 10 mGal eingeführt. Es

bestätigt sich die Verschiebung der Funktion um den in ASSMUS & KRAUS (1974) angegebenen Betrag. Außerdem geht auch der typische Verlauf einer Kovarianzfunktion mit zunehmender Verschiebung verloren.

Im Falle des SFP-Feldes in Bayern ergeben sich Probleme bei Bestimmung eines verlässlichen Mittelwertes, da die Punkte sehr dicht vor allem entlang den Linien des übergeordneten NivP-Feldes liegen. Um dem zu begegnen, wird eine gewichtete Mittelbildung durchgeführt. Die Gewichte werden, ausgehend von einer mathematischen Triangulation der Stützpunkte, proportional zu den jeden Punkt umgebenden Dreiecksflächen vergeben. Dadurch werden SFP in dichten Punktwolken geringer gewichtet.

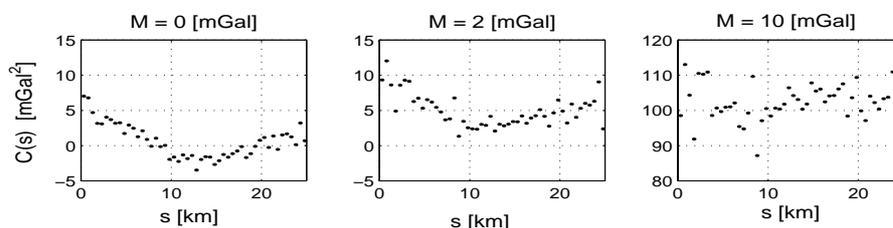


Abbildung 3.7: Kovarianzen abgeleitet aus Stützwerten ohne (links) und mit Bias  $M$ .

### Trendreduktion

Die Notwendigkeit einer Trendreduktion wird an Daten aus dem in Kapitel 3.4.1 näher beschriebenen Testgebiet Frankenwald gezeigt. Die Anomalien weisen dort eine deutliche Verkippung von Südwest nach Nordost auf (vgl. Abbildung 3.12). Es wurden Kovarianzfunktionen für zentrierte und trendreduzierte einfache Bougueranomalien  $\Delta g_{BO}$  verglichen, wobei als Trendfunktion eine schiefe Ebene verwendet wurde.

Betrachtet seien zunächst die einfach zentrierten Anomalien (obere Bildreihe in Abbildung 3.8). Die Stützwerte sind deutlich nicht normalverteilt, d.h. die stochastischen Voraussetzungen sind nicht erfüllt. Die Kovarianzen gehen für große Abstände nicht gegen null. Stattdessen ist die Funktion nahezu punktsymmetrisch zum Nulldurchgang. Dies bedeutet, dass sehr weit entfernte Punkte deutlich negativ miteinander korreliert sind, was dem Verlauf einer schiefen Ebene entspricht. Die Kovarianzfunktion beschreibt also im Wesentlichen den Trend, d.h. eine deterministische Funktion. Der eigentlich interessante stochastische Anteil entspricht den Abweichungen der Stützwerte von diesem Trend.

Verwendet man statt der originalen Anomalien die nach Reduktion um eine schiefe Ebene entstehenden Residualanomalien, so erhält man die in Abbildung 3.8 (untere Reihe) dargestellten Ergebnisse. Die schiefe Ebene wurde durch vermittelnde Ausgleichung bestimmt. Die empirischen Kovarianzen gehen nun gegen Null bzw. oszillieren um die x-Achse. Auch die Anomalien selbst zeigen keine auffälligen Strukturen und die Verteilung ähnelt einer Normalverteilung. Dies zeigt, wie wichtig die Trendreduktion ist, um die stochastischen Voraussetzungen zu schaffen und eine sinnvolle Kovarianzfunktion abzuleiten.

Im Prinzip können dabei beliebige Trendfunktionen verwendet werden. Es muss dann aber streng darauf geachtet werden, dass zur Prädiktion die Stützwerte um denselben Trend reduziert werden. Die Berechnung muss in folgender Reihenfolge ablaufen (ein derartiges Vorgehen wird allgemein mit *remove-restore* bezeichnet):

1. Reduktion der Stützwerte um die Trendfunktion, die auch bei Ableitung der Kovarianzfunktion verwendet wurde,
2. Prädiktion an den Neupunkten und
3. Rückgängigmachung der Reduktion durch Berücksichtigung der Trendfunktion in den Neupunkten.

Die vorliegende Arbeit dient der Bewertung linearer Interpolationsverfahren. Absicht ist, dass in der späteren Anwendung ohne vorausgehende Reduktion irgendeiner Trendfläche direkt aus den vorliegenden Stützwerten interpoliert werden kann. Deshalb ist es im vorliegenden Fall nicht zulässig, zur Ableitung der benötigten Kovarianzfunktionen Trendfunktionen von höherer als linearer Ordnung zu verwenden. Die Qualitätsanalyse wäre ansonsten gegenüber der späteren Praxis zu optimistisch. In den Regionen, in denen es nicht möglich ist, bereits durch Reduktion eines linearen Trends ein stochastisches Signalverhalten zu erreichen, muss das Signal zusätzlich gefiltert werden, d.h. es müssen als Stützwerte für die Schwereprädiktion Bougueranomalien statt Freiluftanomalien verwendet werden (siehe Kapitel 3.3.5).

### Anpassung eines Funktionalmodells

Nach Bestimmung der empirischen Kovarianzen wird den diskreten Werten ein funktionales Modell angepasst. Damit können Kovarianzen für beliebige Abstände berechnet werden. Sinnvolle Ergebnisse ergeben sich im Rahmen der anschließenden Fehlerfortpflanzung (3.16) nur dann, wenn alle Diagonalelemente von  $\Sigma_y$  positiv sind.

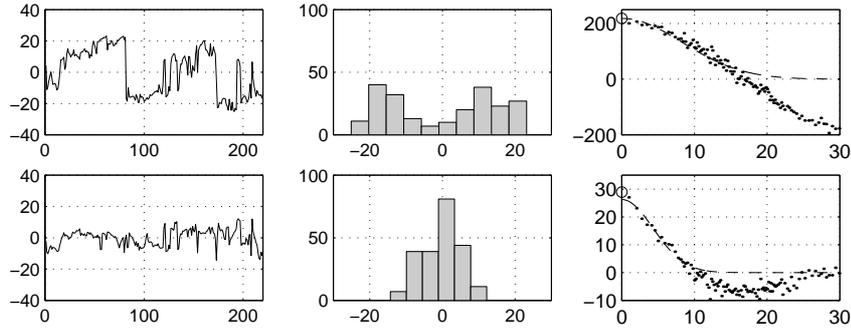


Abbildung 3.8: Einfache Bougueranomalien in  $mGal$  (links), Histogramm (Mitte) und Kovarianzfunktion (rechts) im Testgebiet Frankenwald; obere Reihe: aus einfach zentrierten Stützwerten, untere Reihe: nach Reduktion einer schiefen Ebene.

Anderenfalls sind die Standardabweichungen keine reellen Größen. Um dies zu gewährleisten, muss die Kovarianzmatrix  $\Sigma_x$  der Variablen  $x$  positiv definit sein (siehe HÖPKE, 1980). Deshalb sollten als Kovarianzfunktionen nur Modelle verwendet werden, die zu solchen Matrizen führen. Geeignete Funktionen sind nach MORITZ (1980) z.B. das

- *Exponentialmodell*

$$C(s) = C_0 \cdot e^{-\ln 2 \left(\frac{s}{\xi}\right)^2}, \quad (3.31)$$

mit den Parametern Varianz  $C_0$  und Korrelationslänge  $\xi$  oder das

- *Hirvonenmodell*

$$C(s) = C_0 \cdot \left(1 + \left(2^{\frac{1}{p}} - 1\right) \left(\frac{s}{\xi}\right)^2\right)^{-p}, \quad (3.32)$$

das zusätzlich noch vom Krümmungsparameter  $p$  abhängt. Dieser ist ein Maß für den Krümmungsradius der Funktion im Nullpunkt. Großes  $p$  bedeutet einen großen Krümmungsradius. Die Funktion verläuft dann anfangs relativ flach, konvergiert aber ab ihrem Wendepunkt relativ schnell gegen 0. Ein kleiner Wert für  $p$  hingegen lässt die Funktion relativ steil beginnen und sehr langsam konvergieren.

Die Modellparameter können entweder im Rahmen einer vermittelnden Ausgleichung oder durch graphische Anpassung an die empirischen Varianzen bestimmt werden.

### 3.3.4 Qualität empirischer Kovarianzfunktionen

Nach MORITZ (1980) setzt sich die Kovarianzmatrix der Beobachtungen  $l$

$$C_{ll} = C_{tt} + C_{nn} \quad (3.33)$$

zusammen aus dem Signalanteil  $C_{tt}$  und dem Beitrag der Messfehler  $C_{nn}$ . Demnach setzt sich die empirische Varianz

$$\sigma_l^2 = \sigma_t^2 + \sigma_n^2 \quad (3.34)$$

der Beobachtungen zusammen aus der Signalvarianz  $\sigma_t^2$  und der Varianz des Messfehlers  $\sigma_n^2$ . Die Varianz  $\sigma_t^2$  entspricht der Varianz  $C_0$  des angepassten Funktionalmodells und ist nach (3.34) in der Regel kleiner als die aus allen Stützwerten berechnete empirische Varianz  $\sigma_l^2$ . Wird zur Prädiktion die Diagonalmatrix<sup>1</sup>  $C_{nn}$  berücksichtigt, so lassen sich die Messfehler an den Stützpunkten herausfiltern. Man erhält somit eine geglättete Version des beobachteten Signals.

In vielen Fällen wird es allerdings vorkommen, dass der Filterbetrag  $\sigma_n$  deutlich größer als der erwartete Messfehler ist. Er enthält dann zusätzlich hochfrequente Signalanteile. Das Signal verhält sich in diesem Fall nicht stochastisch und kann nicht durch eine Kovarianzfunktion beschrieben werden. Bestimmt man trotzdem eine Kovarianzmatrix entsprechend Gleichung (3.33), so liefert die Prädiktion nur eine stark geglättete Version des Signals. Die Qualitätsanalyse wird in diesem Fall deutlich zu optimistisch ausfallen, da die Differenzen zwischen wahren und geglättetem Signal die nach Gleichung (3.27) theoretisch abgeleiteten Fehler überschreiten kann. Hierzu sei folgendes Beispiel gegeben:

<sup>1</sup>Die Messfehler werden als unkorreliert betrachtet, so dass die Matrix  $C_{nn}$  Diagonalgestalt annimmt.

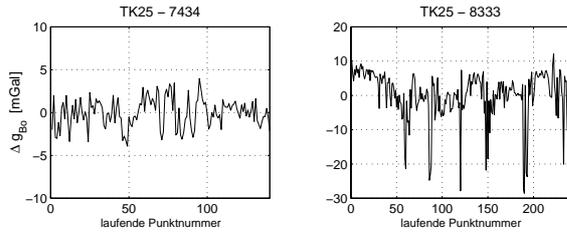


Abbildung 3.9: Bougueranomalien aus der Region Pfaffenhofen a.d. Ilm (links) und aus dem Voralpenland südlich Murnau (rechts).

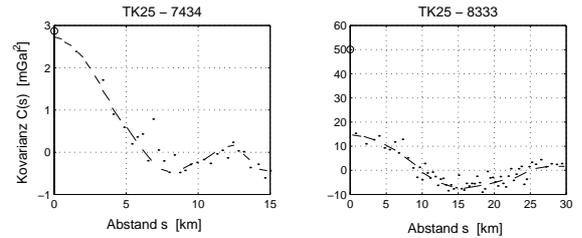


Abbildung 3.10: Empirische Kovarianzen. Die Varianz  $\sigma_1^2$  ist mit einem Kreis gekennzeichnet.

Betrachtet werden einfache Bougueranomalien aus unterschiedlichen Bereichen Bayerns (siehe Abbildung 3.9). Das linke Signal weist einen zufälligen Charakter ohne irgendwelche Besonderheiten auf, wohingegen im rechten Signal an einigen Stellen deutliche Abweichungen davon zu erkennen sind. Es handelt sich hier um wenige SFP, die zwischen Nivellementsleifen 1. und 2. Ordnung an topographisch exponierten Stellen liegen. Hier zeigen sich Signalanteile der Topographie, die aufgrund der geringen Stützpunktzahl zwischen den Schleifen nur als eine Art ‐Ausreißer‐ in Erscheinung treten. Eine glattere Version des Signals, bei der diese Punkte unberücksichtigt bleiben, weist stochastisches Verhalten auf. Das unterschiedliche stochastische Verhalten ist an den abgeleiteten Kovarianzen deutlich zu erkennen (siehe Abbildung 3.10). Links kann das Signal durch die Kovarianzfunktion fast gänzlich beschrieben werden. Rechts hingegen repräsentiert die Funktion nur das geglättete Signal. Ihre Varianz beträgt  $C_0 = 20 \text{ mGal}^2$ , die empirische Varianz hingegen  $\sigma_1^2 = 50 \text{ mGal}^2$ . Schränkt man den Definitionsbereich ein, indem man die ‐Ausreißer‐ entfernt, so verändert sich der Verlauf der Funktion nur unwesentlich, die empirische Varianz aber sinkt dann auf den Wert  $C_0$  des analytischen Modells. Prädiziert man nun Werte des geglätteten Signals an den topographisch exponierten Stellen zwischen den Schleifen, so können dort Abweichungen zum wahren Signal von bis zu  $30 \text{ mGal}$  auftreten. Der theoretisch berechenbare Fehler wird jedoch bei maximal  $\sigma = \sqrt{C_0} = 4.5 \text{ mGal}$  liegen und ist damit deutlich zu klein. Dieses Problem tritt oft bei Freiluft- und einfachen Bougueranomalien in den Alpen und zum Teil auch bei Freiluftanomalien in den Mittelgebirgen auf. Hier erweist sich die Punktverteilung im SFP-Feld hinsichtlich der Ableitung einer empirischen Kovarianzfunktion als relativ ungünstig. Die vor allem entlang den Nivellementlinien 1. und 2. Ordnung angeordneten SFP liegen in Bereichen mit relativ glattem Signalverlauf, wie z.B. in Gebirgstälern. Dies ist durch die hohen Genauigkeitsanforderungen an das übergeordnete NivP-Feld begründet. Dazwischen liegen zur Verdichtung des SFP-Feldes relativ wenige Punkte in einem Bereich mit rauem Signalverhalten.

Dieses Beispiel zeigt, dass eine empirisch bestimmte Kovarianzfunktion nicht bedenkenlos verwendet werden kann. Besonders wichtig ist die Wahl einer repräsentativen Kovarianzfunktion im Rahmen der hier beabsichtigten Fehleruntersuchung, da sich die Qualität der Kovarianzfunktion deutlicher auf die prädizierten Genauigkeiten als auf die Prädiktionsergebnisse selbst auswirkt (siehe MORITZ, 1976). In jedem Fall ist deshalb zu prüfen, ob die Funktion tatsächlich repräsentativ für den Definitionsbereich ist. Dies kann etwa durch Prädiktion an verschiedenen Stützstellen geschehen. Dort kann dann die Differenz zwischen wahren und prädiziertem Wert mit der errechneten Prädiktionsgenauigkeit verglichen werden. Zur Kontrolle werden die in der Fehlerlehre üblichen, an die Normalverteilung gekoppelten Grenzmaße verwendet (siehe z.B. HÖPKE, 1980). Eine Kovarianzfunktion wird demnach als repräsentativ angesehen, wenn die Differenz zwischen empirischem Fehler  $d$  (Differenz zwischen wahren und prädiziertem Wert) und theoretischem Prädiktionsfehler  $\sigma$  nicht signifikant ist, d.h. wenn gilt

$$\begin{aligned} |d| &\leq 3\sigma, \text{ in } 99.7\% \text{ und} \\ |d| &\leq \sigma, \text{ in } 67\% \text{ aller Fälle.} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Ist die Differenz zwischen beiden Fehlern jedoch signifikant, so wird die Kovarianzfunktion nicht als repräsentativ für das entsprechende Signal angesehen. Die Qualitätsanalyse führt dann auf Ergebnisse, die zu optimistisch sind und es können auch Fehler auftreten, die größer sind als die theoretisch berechneten.

### 3.3.5 Beispiel Estergebirge

Wie bereits angesprochen sind die zur Ableitung empirischer Kovarianzfunktionen notwendigen Bedingungen (Isotropie und Homogenität) nicht immer erfüllt und die Prädiktionsfehler können die theoretisch abgeleiteten Maße übersteigen. Im Folgenden sollen am Beispiel des Testnetzes Estergebirge empirische Kovarianzfunktionen bestimmt und bewertet werden. Dabei werden als Signal neben Freiluftanomalien auch die bereits zu Beginn von Kapitel 3.3 genannten einfachen und topographisch verfeinerten Bougueranomalien  $\Delta g_{BO}$  und  $\Delta g_{TC}$  verwendet. Im Rahmen der Höhensystemumstellung ersetzen die Bougueranomalien nicht die Freiluftanomalien, die in den

Formeln (3.11) und (3.14) zur Berechnung der Systemdifferenzen benötigt werden. Die Bougueranomalien werden nur dann verwendet, wenn sie eine höhere Prädiktionsgenauigkeit für die Freiluftanomalien ermöglichen. Deren Bestimmung erfolgt dann in folgenden Schritten (*remove-restore*):

1. Berechnung der Geländewirkung an den SFP und Reduktion der Freiluftanomalien zur Bestimmung der Bougueranomalien (im Falle von einfachen Bougueranomalien entspricht die Geländewirkung nur der Wirkung einer ebenen Bouguerplatte, im Falle topographisch verfeinerter Anomalien muss die Wirkung der gesamten Topographie reduziert werden),
2. Prädiktion von Bougueranomalien an den NivP und
3. Anbringen der Geländewirkung in den NivP, um aus den prädizierten Bougueranomalien wieder Freiluftanomalien zu bestimmen.

Dieses Vorgehen erhöht die Prädiktionsgenauigkeit, da die Bougueranomalien einen deutlich glatteren Verlauf und ein stochastischeres Verhalten als die Freiluftanomalien aufweisen (siehe Abbildung 3.11). Letztere sind deutlich mit der Punkthöhe korreliert. Die einfachen Bougueranomalien sind um diesen Effekt im wesentlichen reduziert, wobei an topographisch exponierten Stellen (Bergspitzen, Kämme, ...) noch relativ große Funktionswerte erhalten bleiben. Die einfache Bouguerplatte approximiert dort das Gelände nur unzureichend. Wird das deterministische Modell erweitert, indem das vollständige Gelände modelliert wird, so ist das Restsignal (die verfeinerten Anomalien  $\Delta g_{TC}$ ) nahezu normalverteilt.

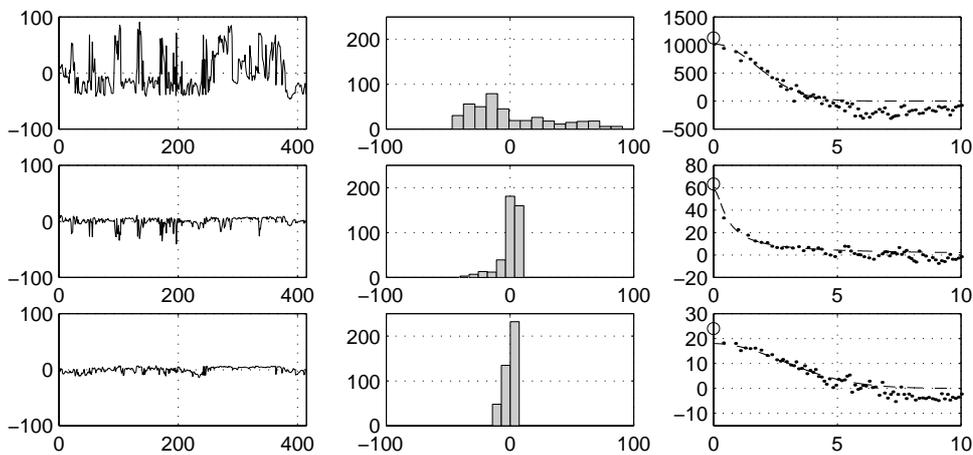


Abbildung 3.11: Signal (links), Histogramm (Mitte) und Kovarianzen für  $\Delta g_{FA}$  (oben),  $\Delta g_{BO}$  (Mitte) und  $\Delta g_{TC}$  (unten).

Den empirischen Varianzen wurden Funktionen nach dem Exponentialmodell und im Fall der einfachen Bougueranomalie auch nach dem Hirvonenmodell angepasst. Dieses hat eine deutlich höhere Varianz, was an den topographisch exponierten Stellen zu einer besseren Anpassung an das wahre Signalverhalten führt. Die Glättung des Signals zeigt sich beim Vergleich von empirischer und analytischer Varianz. Der Filterbetrag  $\sigma_n$  reduziert sich von den Freiluftanomalien über die einfachen bis hin zu den verfeinerten Bougueranomalien von 10 mGal auf 6 mGal (Exponentialmodell) und schließlich auf nur noch 2 mGal.

Neben den SFP des BLVA liegen im Estergebirge auch die Schweremessungen des IAPG vor. Um die Funktionen aus Tabelle 3.6 zu bewerten wurden aus den SFP an den Stellen der IAPG-Punkte Schwerewerte prädiziert und die empirischen Fehler bestimmt. Der Vergleich mit den theoretischen Prädiktionsfehlern ergab:

- *Freiluftanomalien*: Die empirischen Fehler betragen maximal 80 mGal, der theoretische Fehler maximal 32 mGal. Die in (3.35) angegebenen Fehlerschranken wurden nicht überschritten und die Kovarianzfunktion damit als repräsentativ bewertet.

Tabelle 3.6: Parameter verschiedener Kovarianzmodelle.

Anomalien	$\sigma_t^2$ [ mGal <sup>2</sup> ]	$C_0$ [ mGal <sup>2</sup> ]	$\xi$ [ km ]	$p$
$\Delta g_{FA}$	1128	1018	2.1	-
$\Delta g_{BO}$	64	30	1.7	-
$\Delta g_{BO}$	64	54	0.6	0.5
$\Delta g_{TC}$	24	18	3.3	-

- *Einfache Bougueranomalien:* Im Signal treten große Werte wesentlich seltener auf als bei Freiluftanomalien, wodurch die Signalvarianz gegenüber diesen maximalen Werten zu klein ausfällt. Dies führte an einigen Punkten zu einer zu optimistischen Fehlerschätzung. Selbst bei Verwendung des Hirvonen-Modells lagen nur 95 % der Punkte innerhalb der  $3\sigma$ -Grenze. Die Funktion wurde deshalb als nicht repräsentativ bewertet.
- *Verfeinerte Bougueranomalien:* Hier lag der maximale empirische Fehler bei 13 mGal, der theoretische bei gut 4 mGal. Die Fehlerschranken (3.35) konnten eingehalten und die Kovarianzfunktion als repräsentativ eingestuft werden.

Dies zeigt, dass empirische Kovarianzfunktionen nicht bedenkenlos zur Ableitung theoretischer Fehlermaße verwendet werden können. Die Eignung eines Signals hängt dabei, wie zuvor beschrieben, von den Eigenschaften Homogenität und Isotropie ab. Im vorliegenden Signalausschnitt ist die Varianz der Freiluftanomalien so hoch, dass die noch enthaltenen deterministischen Anteile sozusagen untergehen und die Kovarianzfunktion statistisch verlässliche Werte liefert. Trotzdem können die Funktionswerte nicht als stochastisch betrachtet werden, da die Werte nicht normalverteilt sind (siehe Histogramm in Abbildung 3.6). Die beiden anderen Signaltypen, nämlich die einfachen und die topographisch reduzierten Bougueranomalien erfüllen die Eigenschaft der Normalverteilung wesentlich besser. Jedoch sind im vorliegenden Ausschnitt noch mehrere Punkte in topographisch exponierter Lage enthalten, so dass die Varianz der einfachen Bougueranomalien insgesamt relativ klein ist, aber an diesen Stellen die empirischen Interpolationsfehler die theoretischen deutlich übersteigen. An solchen Stellen, ist es geeignet, topographisch reduzierte Bougueranomalien zu verwenden. Hierauf wird in Kapitel 3.4.2 näher eingegangen. Aus den gezeigten Ergebnissen sollte jedoch nicht geschlossen werden, dass Freiluftanomalien besser zur Interpolation geeignet sind als einfache Bougueranomalien. Die Varianz der Freiluftanomalien ist um ein Vielfaches höher, so dass genau das Gegenteil der Fall ist. Die Untersuchung zeigt jedoch, dass empirisch abgeleitete Kovarianzfunktionen an manchen Stellen zu unrealistischen Fehlerbeschreibungen führen können.

### 3.4 Genauigkeit der Höhengsystemumstellung in Bayern

Die Umstellung des bayerischen Höhenfestpunktfelds (Hierarchiestufen 3. und 4. Ordnung) kann, wie in Kapitel 3.1.3 gezeigt, unter Rückgängigmachung der Modellfehler der normalorthometrischen Höhen durch linienweise Umrechnung entsprechend Gleichung (3.11) erfolgen. In Kapitel 3.2.4 wurde die Schwere als ausschlaggebender Faktor für die Genauigkeit der so abgeleiteten Normalhöhen identifiziert. Verfahren zur Prädiktion von Schwerewerten an den NivP wurden in Kapitel 3.3 dargestellt. Insgesamt erfolgt die Umrechnung von normalorthometrischen Höhen auf Normalhöhen innerhalb einer Schleife 1. oder 2. Ordnung in folgenden Schritten:

1. Zusammenstellung der NivP(3) bzw. NivP(4) zu einer Nivellementlinie.
2. Prädiktion der Schwere an den NivP, wobei die flächenhaft verteilten SFP als Stützpunkte der Prädiktion dienen (lineare Interpolation in Dreiecksmaschen; alternativ kann auch eine linienweise Interpolation erfolgen).
3. Linienweise Berechnung der Systemdifferenz entsprechend Gleichung (3.11), wobei die Anschlusshöhen an das Festpunktfeld 1. und 2. Ordnung festgehalten werden.

Im Folgenden soll an den beiden Testregionen Frankenwald und Estergebirge die Genauigkeit der linienweisen Höhenumrechnung in Bayern dargestellt werden. Da die Prädiktion der Schwerewerte an den NivP der ausschlaggebende Faktor für die Genauigkeit ist, wird die durchgeführte Fehlerfortpflanzung auf den Beitrag  $\Sigma_g$  der Schwereprädiktion beschränkt. Die restlichen Fehlerbeiträge werden vernachlässigt. Als Bewertungskriterien dienen die aus den amtlichen Fehlergrenzen für das NivP-Feld abgeleiteten maximal zulässigen Fehlerbeiträge entsprechend Tabelle A.3. Diese Maße gelten für unausgeglichene reduzierte Höhenunterschiede. Deshalb wurden auch im Rahmen der Fehlerfortpflanzung unausgeglichene Höhen verwendet, die auf Höhendifferenzen pro  $\sqrt{\text{km}}$  umgerechnet wurden.

Da Schwerewerte nicht in die Berechnung der normalorthometrischen Höhen eingehen, entspricht der Fehler der Systemdifferenzen  $DNH$  demjenigen bei direkter Neuberechnung von Normalhöhen. Die abgeleiteten Aussagen gelten somit sowohl für die Umrechnung vom alten ins neue System nach Gleichung (3.11) (also für die 3. und 4. Ordnung des NivP-Feldes), wie auch für die Neuberechnung von Normalhöhen nach (3.10) (also für die 1. und 2. Ordnung).

Das Testgebiet Frankenwald weist in Bayern, mit Ausnahme des Alpenbereichs, die größten Variationen im Schweresignal auf. Die beiden gewählten Regionen können deshalb als *worst case* Szenarien verstanden werden. Liefert die Schwereprädiktion für die Höhenberechnung in diesen Regionen genügend genaue Ergebnisse, so ist dies auch im restlichen Bayern der Fall. Die Prädiktion wurde in Freiluft- und einfachen Bougueranomalien durchgeführt. Letztere weisen (bis auf wenige Extrempunkte im Alpenbereich) in ganz Bayern ein sehr glattes Verhalten auf, wohingegen die Freiluftanomalie in den Alpen und Mittelgebirgen deutlich mit der Topographie korreliert ist. Im Bereich Estergebirge wurden zusätzlich topographisch verfeinerte Bougueranomalien verwendet. Die Berechnung der an den NivP benötigten Freiluftanomalien erfolgt dabei entsprechend den in Kapitel 3.3.5 angegebenen Schritten.

Tabelle 3.7: Empirische Varianzen [ $\text{mGal}^2$ ].

Region	$\sigma_{\Delta g_{FA}}^2$	$\sigma_{\Delta g_{BO}}^2$
Alpenbereich	1400	160
Bayern ohne Alpen	123	42
Frankenwald	698	219

#### 3.4.1 Beispiel Frankenwald

Das Testgebiet Frankenwald liegt im Bereich der TK25 Nr. 5835. Es wurden die in den Datensätzen des BLVA vorhandenen SFP und NivP verwendet. Zur Ableitung der empirischen Kovarianzfunktionen der Schwereanomalie wurden zusätzlich SFP aus den direkt angrenzenden TK25-Kartenblättern verwendet. Aufgrund der hohen Varianz des Schweresignals in dieser Region (siehe Tabelle 3.7) wurden dort auch vom BLVA Testrechnungen zur Interpolation von Schwerewerten durchgeführt.

Aus den NivP wurde mit Hilfe der Übersichtskarte *Die Nivellements 1. bis 3. Ordnung in Bayern* (Maßstab 1 : 500 000) die in Abbildung 3.12 dargestellten Nivellementlinien zusammengestellt. Die Umrechnung von normalorthometrischen Höhen in Normalhöhen erfolgt nach Gleichung (3.14) entlang diesen rekonstruierten Linien. Die Länge der Linien liegt zwischen 6 km und 15 km, ihr Höhenverlauf zwischen 300 m und 600 m. Die Bezeichnung der Linien erfolgt entsprechend der Hierarchiestufe, wobei die erste Ziffer die Ordnung der Nivellementlinie angibt (Linie 32, z.B., ist demnach eine Linie 3. Ordnung).

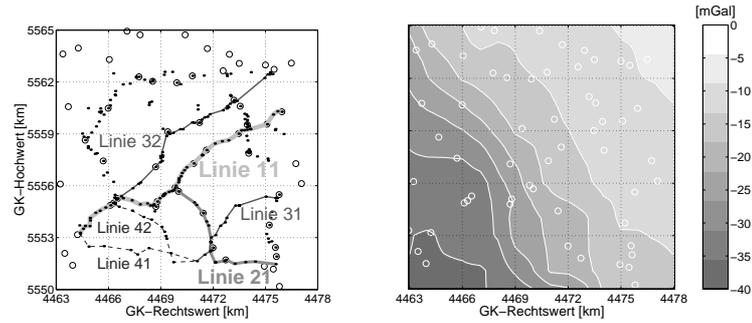


Abbildung 3.12: Simulierte Nivellementlinien (links) und Bougueranomalien (rechts) im Testnetz Frankenwald. Mit „.“ gekennzeichnet sind NivP, „o“ bedeutet SFP.

Die Ergebnisse der Schwereprädiktion (flächenhafte lineare Interpolation in Dreiecksmaschen) und die daraus folgende Genauigkeit der Normalhöhen sind in Tabelle 3.8 enthalten. Der Vergleich zwischen linearer Interpolation und LSP dient als zusätzlicher Anhaltspunkt für die Güte des Prädiktionsverfahrens. Zur Bestimmung der empirischen Kovarianzfunktion wurden die Anomalien um eine schiefe Ebene reduziert. Die maximalen Fehler liegen unter den in Tabelle A.3 angegebenen Werten. Daraus folgt, dass die lineare Interpolation genügend genaue Ergebnisse liefert. Dies gilt sowohl für die Berechnung mit einfachen Bougueranomalien als auch mit Freiluftanomalien. Dabei zeigt sich, dass eine wesentliche Genauigkeitssteigerung durch die Glättung des Signals (Übergang von Freiluft- auf Bougueranomalien), nicht jedoch durch die Wahl des Prädiktionsverfahrens (LSP statt linearer Interpolation in Dreiecksmaschen) erzielt werden kann. Der erhöhte Aufwand zur Bestimmung einer Kovarianzfunktion im Falle der LSP ist somit gegenüber einer einfachen linearen Interpolation nicht gerechtfertigt. Da die Berechnung der Bougueranomalien nicht aufwendiger als die Berechnung von Freiluftanomalien ist, wird im Hinblick auf Genauigkeit und Einfachheit des Verfahrens die lineare flächenhafte Interpolation (Dreiecksvermaschung) in einfachen Bougueranomalien empfohlen.

Betrachtet man Abbildung 3.12, so erkennt man, dass der Verlauf der einfachen Bougueranomalien im wesentlichen einer schiefen Ebene entspricht. Die hohe Signalvarianz in dieser Region ist hauptsächlich auf diesen Effekt zurückzuführen. Die aus trendreduzierten Anomalien abgeleiteten Varianzen sind mit  $C_0(\Delta g_{FA}) = 112 \text{ mGal}^2$  und  $C_0(\Delta g_{BO}) = 29 \text{ mGal}^2$  deutlich kleiner (vgl. Tabelle 3.7). In verschiedenen anderen Gebieten in den Mittelgebirgsregionen Rhön, Spessart, dem restlichen Fichtelgebirge und dem Bayerischer Wald treten in den trendreduzierten Anomalien durchaus größere Varianzen auf. Die Werte erreichen dort bis zu  $C_0(\Delta g_{FA}) = 284 \text{ mGal}^2$  bzw.  $C_0(\Delta g_{BO}) = 56 \text{ mGal}^2$ . Da zudem die SFP-Verteilung im Testgebiet Frankenwald relativ dicht und damit nicht repräsentativ für das restliche Bayern ist, wurde ein zusätzliches *worst case*-Szenario simuliert. Dazu wurden die bisherigen Berechnungen mit verringerter SFP-Dichte und einer Kovarianzfunktion mit erhöhter Signalvarianz erneut durchgeführt. Dadurch erhöhen sich die theoretisch abgeleiteten Interpolationsfehler. Diese erreichten im Falle der Bougueranomalien Werte von  $3 \text{ mGal}$ , was maximale Fehler in den Höhenunterschieden von  $0.9 \text{ mm}/\sqrt{\text{km}}$  bewirkt. Auch dies ist ausreichend genau. Im Fall der Freiluftanomalien wurden dann jedoch Fehler bis zu  $13 \text{ mGal}$  bzw.  $4 \text{ mm}/\sqrt{\text{km}}$  erreicht. In diesen Fällen ist die Freiluftanomalie nicht geeignet. Dies bestätigt die oben getroffene Empfehlung zur Verwendung von Bougueranomalien.

Zur Auswahl des Prädiktionsverfahrens sei noch auf die Testrechnungen am BLVA eingegangen. Dabei diente zur Prädiktion der Schwere an den NivP die LSP aus trendbereinigten Bougueranomalien  $\Delta g_{BO}$ . Trendfunktion war

Tabelle 3.8: Maximale Fehler aus linearer Schwereinterpolation an den NivP sowie resultierende Normalhöhenfehler. In Klammern jeweils das Ergebnis bei LSP.

Niv. Linie	Freiluftanomalien		Bougueranomalien	
	$\sigma_g [\text{mGal}]$	$\sigma_{\Delta H^N} [\text{mm}/\sqrt{\text{km}}]$	$\sigma_g [\text{mGal}]$	$\sigma_{\Delta H^N} [\text{mm}/\sqrt{\text{km}}]$
Linie 11	7.8 (6.0)	0.4 (0.3)	2.4 (1.9)	0.1 (0.1)
Linie 21	7.4 (6.2)	0.8 (0.7)	2.8 (2.0)	0.3 (0.2)
Linie 31	7.7 (6.0)	0.9 (0.8)	2.4 (2.1)	0.3 (0.1)
Linie 32	7.7 (6.3)	0.5 (0.4)	2.5 (2.1)	0.2 (0.1)
Linie 41	8.0 (6.4)	0.4 (0.3)	3.3 (2.2)	0.2 (0.1)
Linie 42	8.3 (6.4)	0.1 (0.1)	5.2 (2.2)	0.0 (0.0)

auch hier eine schiefe Ebene. Als Kovarianzfunktion wurde die reziproke Abstandsfunktion

$$C(s) = 1 - \frac{s}{s_{max}} \quad (3.36)$$

verwendet. Darin ist  $s_{max}$  der Abstand, an dem die Kovarianz gerade 0 beträgt. Aus Mangel an einer empirischen Kovarianzfunktion konnte am BLVA die Qualität der Berechnungen nicht bestimmt werden. Deshalb wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit ein Vergleich mit der LSP mit empirischer Kovarianzfunktion wie auch mit der linearen flächenhaften Interpolation durchgeführt. Die Lösung des BLVA wurde als  $LSP_{BLVA}$  bezeichnet.

Abbildung 3.13 zeigt, dass die Verfahren nicht signifikant voneinander abweichen. Vor allem die lineare flächenhafte Interpolation und die  $LSP_{BLVA}$  sind sich sehr ähnlich, da zur Prädiktion die lineare Kovarianzfunktion (3.36) verwendet wurde. Damit ist die zuvor getroffene Aussage bzgl. des günstigsten Verfahrens bestätigt. Die LSP kann in diesem Bereich durch eine lineare Interpolation ersetzt werden. Allerdings fallen auch einige Ausreißer auf, an denen die Abweichungen bis  $3\sigma$  erreichen. Ein Vergleich mit den in Tabelle 3.8 errechneten Werten zeigt, dass auch bei Werten dieser Größenordnung die amtlich zulässigen Fehlergrenzen nicht überschritten werden.

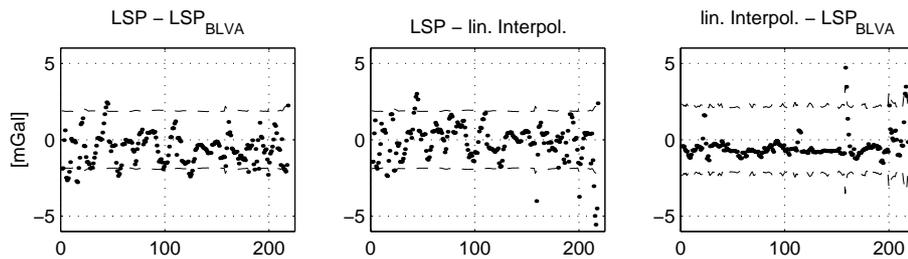


Abbildung 3.13: Differenz verschiedener Prädiktionsverfahren und ihre Genauigkeit (gestrichelte Linie).

### 3.4.2 Beispiel Estergebirge

Als zweite Region wurde das bereits in Kapitel 3.2 beschriebene Testnetz Estergebirge verwendet. Da hier auch im Fall der einfachen Bougueranomalien mit einem relativ rauen Signalverhalten zu rechnen ist, wurden zusätzlich topographisch verfeinerte Bougueranomalien verwendet. Die Kovarianzfunktionen wurden aus Kapitel 3.3.5 übernommen. Schwereinterpolation und Fehlerfortpflanzung wurden an den bereits in Kapitel 3.2 verwendeten Nivellementlinien 5 und 6 durchgeführt. Da im Estergebirge Schweremessungen des IAPG in hoher Dichte vorliegen, konnten Normalhöhen auch streng berechnet werden und somit neben den theoretischen auch empirische Fehlermaße abgeleitet werden. Damit konnte gleichzeitig die Qualitätsanalyse überprüft werden. Die IAPG-Punkte wurden dabei nicht als Stützpunkte zur Prädiktion verwendet. Die Ergebnisse sind in den Tabellen 3.9 und 3.10 dargestellt.

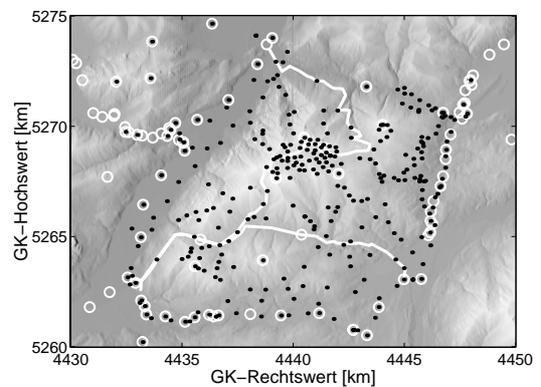


Abbildung 3.14: Nivellementlinien und SFP im Gebiet Estergebirge. Mit "o" gekennzeichnet sind die amtlichen SFP des BLVA, "•" sind IAPG Punkte.

Aus den Ergebnissen können folgende Schlüsse gezogen werden:

1. Freiluftanomalien scheiden für die Schwereinterpolation aus. Die zulässigen Grenzwerte von  $2.2$  bzw.  $2.4 \text{ mm}/\sqrt{\text{km}}$  wurden theoretisch und zum Teil auch tatsächlich überschritten.
2. Bei Verwendung einfacher Bougueranomalien werden die Grenzwerte nur entlang der extremen Linie 6 überschritten (theoretisch und empirisch). Die Interpolation entlang Linie 5 ist genügend genau.
3. Die verfeinerten Bougueranomalien erweisen sich als in allen Bereichen geeignet.
4. Die Ergebnisse der linearen flächenhaften Interpolation weichen erneut nur wenig von denen der LSP ab.

Zur Bestimmung der topographisch verfeinerten Bougueranomalien ist in jedem Berechnungspunkt eine Integration über den gesamten verwendeten DGM-Ausschnitt nötig. Dies ist rechnerisch relativ aufwendig, insbesondere

Table 3.9: Maximale theoretische Fehler von Schwere und Normalhöhen bei linearer flächenhafter Interpolation. In Klammern dahinter jeweils die Ergebnisse bei LSP.

Niv. Linie	Freiluftanomalien		einfach Bougueranomalien		verfeinerte Bougueranomalien	
	$\sigma_g$ [mGal]	$\sigma_{\Delta HN}$ [mm/ $\sqrt{\text{km}}$ ]	$\sigma_g$ [mGal]	$\sigma_{\Delta HN}$ [mm/ $\sqrt{\text{km}}$ ]	$\sigma_g$ [mGal]	$\sigma_{\Delta HN}$ [mm/ $\sqrt{\text{km}}$ ]
Linie 5	33.6 (28.8)	2.9 (2.6)	9.0 (7.7)	0.9 (0.8)	4.1 (3.4)	0.3 (0.3)
Linie 6	30.2 (27.7)	7.3 (7.0)	8.9 (7.7)	3.1 (2.8)	3.6 (3.2)	1.3 (1.2)

Table 3.10: Maximale empirische Fehler von Schwere und Normalhöhen bei linearer flächenhafter Interpolation. In Klammern dahinter jeweils die Ergebnisse bei LSP.

Niv. Linie	Freiluftanomalien		einfach Bougueranomalien		verfeinerte Bougueranomalien	
	$d_g$ [mGal]	$d_{\Delta HN}$ [mm/ $\sqrt{\text{km}}$ ]	$d_g$ [mGal]	$d_{\Delta HN}$ [mm/ $\sqrt{\text{km}}$ ]	$d_g$ [mGal]	$d_{\Delta HN}$ [mm/ $\sqrt{\text{km}}$ ]
Linie 5	26.5 (36.7)	1.4 (2.0)	5.0 (6.2)	0.5 (0.4)	6.0 (6.5)	0.6 (0.7)
Linie 6	40.2 (38.3)	5.2 (4.9)	27.0 (15.4)	4.8 (2.0)	3.6 (3.7)	0.3 (0.5)

da die Werte an allen NivP zur Verfügung stehen müssen, um aus den interpolierten Anomalien wieder Schwerewerte berechnen zu können. Die einfachen Bougueranomalien hingegen sind sehr effizient zu berechnen. Ihre Verwendung erlaubt, abgesehen von extremen Linien, in ganz Bayern eine genügend genaue Schwereinterpolation. Dies bedeutet bei der Höhensystemumstellung eine regionale bzw. sogar linienweise Differenzierung des zu verwendenden Anomalientyps. Um genauere Aussagen darüber treffen zu können, in welchen Fällen einfache Bougueranomalien im alpinen Bereich ausreichend sind, soll im Folgenden die Interpolation dieses Anomalientyps näher untersucht werden.

Wie sich im Verlaufe der bisherigen Berechnungen zeigte, verhalten sich Bougueranomalien abgesehen von topographisch exponiert liegenden Punkten auch im Alpenbereich stochastisch. Liegen Stütz- oder Berechnungspunkte allerdings an solchen Stellen, so können Differenzen auftreten, die die theoretisch bestimmten Fehler weit übersteigen. Entlang Nivellementlinie 6 wurden Schwerewerte interpoliert, wobei die SFP des BLVA wieder als Stützpunkte und die IAPG-Punkte als Kontrollpunkte zur Bestimmung der empirischen Fehler verwendet wurden. Es wurden die beiden in Abbildung 3.15 dargestellten Stützpunktverteilungen verwendet.

Innerhalb des Gebirgsblocks liegen die SFP meist an topographisch exponierten Stellen. Dort treten in den  $\Delta g_{BO}$  Spitzen auf, die für die meisten NivP nicht charakteristisch sind. Dies führt bei der Interpolation dazu, dass die prädierte Schwere zum Teil deutlich von den gemessenen Werten abweicht (siehe Abbildung 3.16). Die wenigen Stützpunkte an topographisch exponierten Stellen verschlechtern wegen der flächenhaften Interpolation das Ergebnis im gesamten Untersuchungsgebiet. Die empirischen Fehler der Schwereinterpolation erreichen über den gesamten Linienverlauf Werte von bis zu 20 oder 30 mGal. Dies führt zu Fehlern  $\sigma_{\Delta HN}$  in den Normalhöhenunterschieden, die mit maximal 5 mm/ $\sqrt{\text{km}}$  deutlich über den zulässigen Fehlermaßen liegen.

Verzichtet man bei der Interpolation auf die SFP innerhalb des Gebirgsblocks (Stützpunktverteilung SFP<sub>2</sub>), so verbessert sich das Ergebnis deutlich, ausgenommen an denjenigen NivP, die ihrerseits auf topographisch exponierten Stellen liegen. An allen anderen Punkten erreicht der Interpolationsfehler kaum mehr als 5 mGal. Allerdings werden an den exponierten NivP Fehler von fast 20 mGal erreicht, was zu Fehlern in den Höhenunterschieden von bis zu 3 mm/ $\sqrt{\text{km}}$  führt. Damit sind die amtlichen Fehlermaße überschritten. Es zeigt sich jedoch, dass die

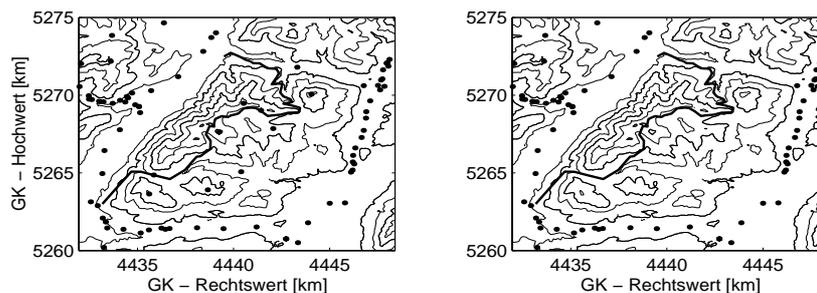


Abbildung 3.15: Stützpunktverteilung SFP<sub>1</sub> (links) mit allen SFP des BLVA und Punktverteilung SFP<sub>2</sub> (rechts) ohne Punkte innerhalb des zentralen Gebirgsblocks.

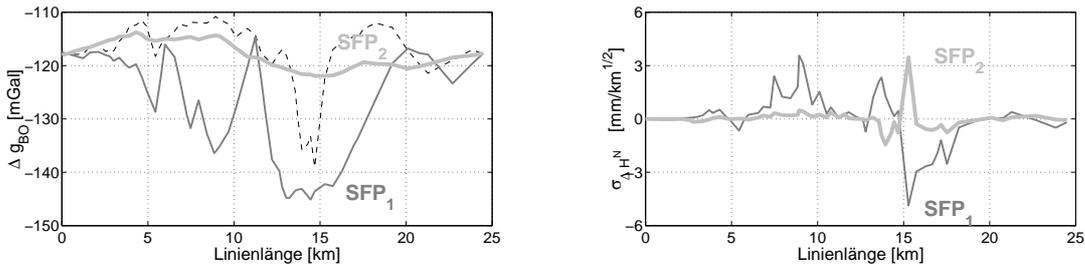


Abbildung 3.16: Flächenhaft interpolierte und wahre (gestrichelt) Bougueranomalien entlang Linie 6 (links) und die abgeleiteten Fehler der Höhendifferenzen (rechts).

Fehlermaße eingehalten werden können, wenn weder die Stützpunkte zur Schwereinterpolation, noch die NivP an exponierten Stellen liegen. Dies gilt auch für sehr große Stützpunktentfernungen (im vorliegenden Fall sind dies maximal ca. 24 km).

Alternativ könnte man im Gebirge statt einer flächenhaften eine linienweise Interpolation wählen. Damit wird die Interpolation an den NivP frei vom Einfluss umliegender SFP. Entlang einer Linie die nicht selbst über Bergspitzen verläuft, können dann gute Ergebnisse erwartet werden. Anderenfalls kann evtl. durch geeignete SFP-Verteilung innerhalb der Linie der Einfluss extremer Anomalienwerte abgefangen werden. Dies soll mit den in Abbildung 3.17 dargestellten Stützpunkten gezeigt werden.

Die Linienendpunkte in Eschenlohe (E) und Garmisch (G) wurden in allen Fällen als Stützpunkte verwendet. Die Punkte 1, 2 und 3 liegen im Bereich des höchsten Gipfels entlang der Linie. Es wurden alternativ nur die Anschlusspunkte E und G als Stützpunkte verwendet (Stützpunktanordnung SFP<sub>a</sub>) oder die Punkte E-1-G (SFP<sub>b</sub>) oder alle Punkte E-2-1-3-G (SFP<sub>c</sub>). In Abbildung 3.18 sind die jeweiligen Ergebnisse dargestellt.

Erwartungsgemäß ergaben sich im Fall SFP<sub>a</sub> gute Ergebnisse mit Ausnahme der exponiert gelegenen Punkte. Hier wurden wieder Interpolationsfehler von 26 mGal und Höhendifferenzfehler von 5 mm/√km erreicht.

Wählt man zusätzlich Punkt 1 als Stützpunkt, so verschlechtert sich das Interpolationsergebnis entlang der gesamten Linie. Die Höhendifferenzen weisen nun im gesamten Linienvverlauf Fehler bis zu 3 mm/√km auf.

Eine Stützpunktverteilung wie SFP<sub>c</sub>, die dem Signalverhalten Rechnung trägt, ergibt mit maximal 9 mGal die kleinsten Interpolationsfehler. Daraus ergeben sich Fehler in den Höhendifferenzen von maximal 1.2 mm/√km. Dies ist für alle Ordnungen des Nivellementnetzes ausreichend genau.

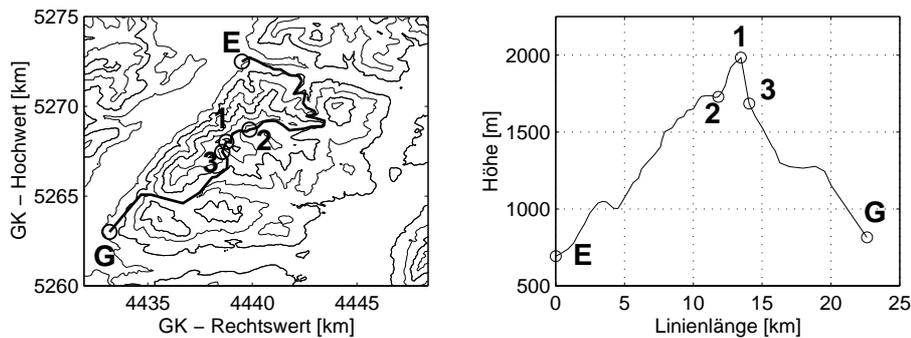


Abbildung 3.17: Stützpunkte zur Schwereinterpolation entlang Linie 6.

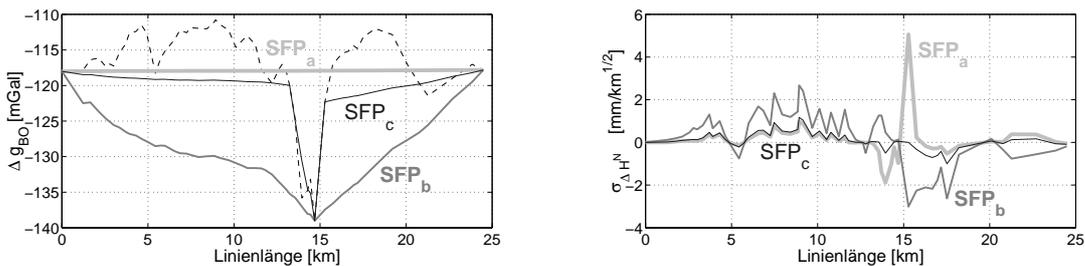


Abbildung 3.18: Linienweise interpolierte und wahre (gestrichelt) Bougueranomalien entlang Linie 6 (links) und die abgeleiteten Fehler der Höhendifferenzen (rechts).

### 3.4.3 Ergebnisse

Aus den in Kapitel 3 durchgeführten Berechnungen folgt, dass für die Systemumstellung von normalorthometrischen Höhen auf Normelhöhen die linienweise Berechnung entlang rekonstruierter Nivellementlinien empfehlenswert ist. Die amtlichen Fehlermaße des Nivellements können dabei eingehalten werden, wenn die Schwere an den NivP unter Verwendung einfacher Bougueranomalien prädictiert wird, z.B. durch flächenhafte lineare Interpolation in Dreiecksmaschen. Durch die Verwendung eines optimaleren Prädiktionsverfahrens, wie z.B. der LSP, ist kein wesentlicher Genauigkeitsgewinn erreichbar. Im Alpenbereich ist darauf zu achten, dass sich NivP und SFP nicht an topographisch exponiert liegenden Stellen befinden, da sonst eine genügend genaue Schwereprädiktion nicht gewährleistet werden kann. Dies liegt am Signalverhalten der Bougueranomalien und gilt unabhängig vom verwendeten Prädiktionsverfahren.

Neben der Eigenschaft der Wegunabhängigkeit haben die neu entstehenden Normalhöhen gegenüber den alten normalorthometrischen Höhen den Vorteil, dass die Höhenbezugsfläche (das Quasigeoid) unabhängig bestimmt werden kann. Dadurch ist sowohl eine durchgreifende Kontrolle der berechneten Höhen, als auch eine Ablösung des geometrischen Nivellements durch ein Nivellement mit GPS möglich. Das folgende Kapitel 4 beschäftigt sich mit der Berechnung eines Quasigeoids in Bayern auf Grundlage der Theorie von *Molodenskii*, wobei zunächst ein allgemeiner Überblick über einige Methoden der Geoidbestimmung sowie eine Darstellung der theoretischen Grundlagen gegeben wird.

# 4 Geoidberechnung

## 4.1 Einführendes zur Geoidberechnung

Wie bereits in Kapitel 2 angesprochen, kann die Bestimmung der Erdoberfläche auf unterschiedliche Arten erfolgen, nämlich durch Bestimmung der geodätischen  $(\varphi, \lambda, h)$  oder der natürlichen Koordinaten  $(\Phi, \Lambda, H)$  der Oberflächenpunkte. Erstere sind durch Nutzung von GPS auf relativ einfache Weise und mit guter Genauigkeit zugänglich. Die hochgenauen Verfahren des differentiellen GPS (DGPS), bei denen nicht absolute Positionen, sondern Positionsänderungen zu bekannten Festpunkten abgeleitet werden, erhöhen das Genauigkeitspotential in den mm-Bereich. Durch Einführung von landesweiten, permanent messenden Referenzstationen, z.B. durch das *Satellitenpositionierungssystem* SAPOS, kann ein einzelner Nutzer ohne großen Aufwand DGPS-Messungen ausführen. Die Nutzung der Ergebnisse, z.B. im Rahmen eines Bauprojekts, erfordert noch die Verbindung zum amtlich verwendeten Koordinatensystem. In Bayern sind die amtlichen Lagekoordinaten gegeben durch GK-Koordinaten im Datum des Deutschen Hauptdreiecksnetzes DHDN. Bezugsellipsoid ist ein bestanpassend gelagertes Bessel-Ellipsoid. Die Höhenkomponente wird nach Abschluss der Umstellungsarbeiten durch die Normalhöhen des DHHN92 realisiert sein. Die Verbindung der Lagekoordinaten zu den GPS-Koordinaten ist durch mathematisch streng definierte Transformationen und Ellipsoidübergänge möglich. Die Verbindung der ellipsoidischen Höhe mit den aus Nivellement und Schweremessung entstandenen Normalhöhen stellt das Quasigeoid dar (siehe Kapitel 2). Ist dieses bekannt, so können nivellierte DHHN92-Höhen durchgreifend kontrolliert bzw. durch Differenzen von GPS- und Quasigeoidhöhen ersetzt werden. Ziel dieses vierten Kapitels ist die Bestimmung eines Quasigeoids in Bayern. Im Folgenden werden diejenigen Methoden skizziert, die für die vorliegende Arbeit relevant sind.

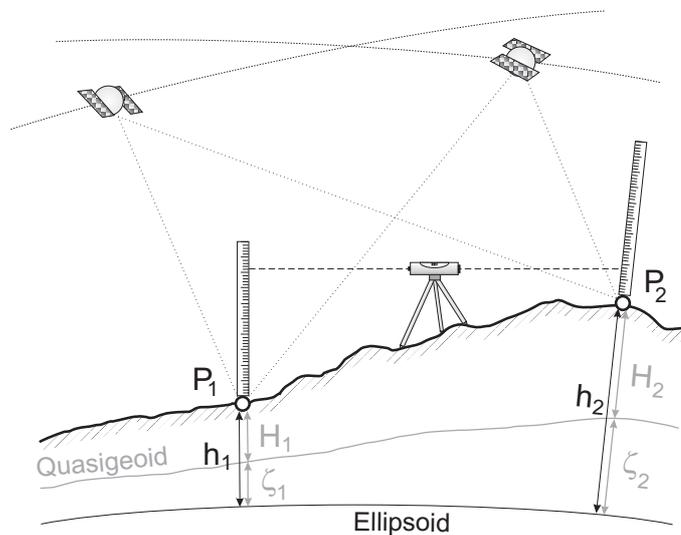


Abbildung 4.1: Höhenbestimmung durch geometrisches Nivellement oder durch Nivellement mit GPS.

### Gravimetrische Methode

Die gravimetrische Methode ist die gängige Methode zur Bestimmung hochauflösender regionaler Geoidmodelle. Sie liegt z.B. dem derzeit genauesten europaweit verfügbaren Geoidmodell, dem *European Gravimetric Geoid* EGG97 (siehe DENKER & TORGE, 1999) zugrunde.

Das Verfahren basiert auf der Lösung der im folgenden Kapitel beschriebenen Geodätischen Randwertaufgabe. Die Geoidhöhe wird dabei durch Integration von terrestrischen Schwereanomalien bestimmt. Im Prinzip müssen zur Lösung kontinuierlich über den ganzen Globus hinweg Schwereanomalien vorhanden sein. In der Praxis werden regional beschränkte Datensätze mit einem globalen Potentialmodell kombiniert. In dieser Arbeit wird hierzu das *Earth Gravity Model* EGM96 (LEMOINE et al., 1998) verwendet (siehe Kapitel 4.3.2).

### Dynamische Satellitenmethoden

Die zur Kombinationslösung verwendeten Potentialmodelle enthalten zwar selbst ebenfalls terrestrische Daten, ihre langwelligen Strukturen jedoch basieren auf den Ergebnissen dynamischer Satellitenmethoden. Darunter versteht man im Allgemeinen die Bestimmung des Schwerfelds aus der Bahnanalyse von Satelliten. Aus den Abweichungen gemessener Satellitenpositionen von einer vorausberechneten Referenzbahn, den Bahnstörungen, kann man die Differenzen zwischen tatsächlichem Schwerfeld und dem verwendeten Referenzfeld berechnen. Aufgrund der globalen Überdeckung lassen sich die langwelligen Anteile des Geoids aus Satellitenmethoden mit höherer Genauigkeit bestimmen als aus terrestrischen Schweredaten. Trotzdem treten auch in den momentan besten zur Verfügung stehenden Potentialmodellen Fehler im Bereich mehrerer  $\text{dm}$  auf. Eine Steigerung der Genauigkeit erhofft man sich durch die für geodätische Zwecke konzipierten niedrig fliegenden Satellitenmissionen CHAMP<sup>1</sup>, GRACE<sup>2</sup> und GOCE<sup>3</sup>. Nach Auswertung der Missionen soll die Genauigkeit des Geoids für Wellenlängen bis etwa  $120 \text{ km}$  auf wenige  $\text{cm}$  gesenkt werden. Es ist zu hoffen, dass damit die langwelligen Verbiegungen bzw. Verkippungen regionaler gravimetrischer Geoidlösungen korrigiert werden können.

Beschränkender Faktor der dynamischen Satellitenmethoden ist die spektrale Auflösung. Aufgrund der großen Entfernung zur Oberfläche sind nämlich auf Satellitenhöhe die Feinstrukturen des Geoids nicht erkennbar. Der rein aus Satellitenmethoden abgeleitete Anteil des EGM96 etwa ist auf eine räumlichen Auflösung (halbe Wellenlänge) von ca.  $200\text{--}300 \text{ km}$  beschränkt. Die Vernachlässigung kleinräumigerer Strukturen bewirkt Geoidfehler von mehreren Dezimetern. Eine Höhenbezugsfläche für Bayern lässt sich somit aus dynamischen Satellitenmethoden alleine nicht mit einer für das Nivellement mit GPS erforderlichen Genauigkeit ableiten.

### Geometrische Satellitenmethoden

Im Gegensatz zu den dynamischen Satellitenmethoden sind die geometrischen Methoden nicht von einer Beschränkung der spektralen Auflösung betroffen. Unter geometrischen Methoden sollen solche Verfahren verstanden werden, bei denen durch satellitengestützte Bestimmung von Oberflächenpunkten punktweise Geoidhöhen durch geometrische Beziehungen ermittelt werden können. Dies ist z.B. durch GPS Messungen an Nivellementpunkten möglich (GPS/Nivellement-Geoid). Auf diese Art lassen sich im Prinzip Geoide – im Sinne einer Höhenbezugsfläche – für alle möglichen Typen von Höhensystemen (orthometrisch, normalorthometrisch, normal, ...) und ohne Auftreten von Datumsproblemen bestimmen. Man muss lediglich an einer ausreichenden Zahl von Höhenfestpunkten genaue GPS-Messungen ausführen und kann aus den dann punktweise vorliegenden Werten eine Fläche bestimmen. In den Zwischenpunkten muss man dann, je nach Verfahren, mit mehr oder weniger großen Interpolationsfehlern rechnen. Ein Beispiel für ein solches Geoid ist das für die Bundesrepublik Deutschland vom Bundesamt für Kartographie und Geodäsie (BKG) konzipierte SAT/Niv-Geoid (siehe IHDE et al., 1998). Untersuchungen in den neuen Bundesländern haben dafür eine Genauigkeit von  $1\text{--}2 \text{ cm}$  für Punktabstände von  $100 \text{ km}$  ergeben.

Die im Folgenden dargestellte Geoidberechnung basiert auf der Kombination eines regional beschränkten Datensatzes terrestrischer Schwerewerte und einem globalen Potentialmodell, also auf der gravimetrischen und der dynamischen Satellitenmethode. Deshalb wird zunächst allgemein das Geodätische Randwertproblem und dessen Lösung sowie die Darstellung des Schwerfelds durch Potentialmodelle beschrieben. Das Ergebnis der Berechnungen wird schließlich an GPS-Nivellementpunkten, also durch geometrische Satellitenmethoden, überprüft.

<sup>1</sup> *Challenging Minisatellite Payload*, deutsch-amerikanische Mission, gestartet im Juni 2000

<sup>2</sup> *Gravity Recovery and Climate Experiment*, amerikanisch-deutsche Mission, gestartet im März 2001

<sup>3</sup> *Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer*, europäische Mission, geplanter Start 2006

## 4.2 Randwertaufgabe nach Molodenskii

### 4.2.1 Formulierung der Randwertaufgabe

Nach Kapitel 2 ist die Bestimmung der physischen Erdoberfläche Teil der Lösung eines freien geodätischen Randwertproblems. Zielgröße der GRWA ist das Gravitations- bzw. Schwerepotential der Erde. Die Feldlinien dieses skalaren Feldes sind nach (2.4) gegeben durch die Vektoren der Schwerebeschleunigung. Die Quellstärke eines solchen Vektorfeldes lässt sich (siehe z.B. BRONSTEIN & SEMENDJAJEW, 1991) durch die Divergenz

$$\operatorname{div} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right]' \equiv \nabla \quad (4.1)$$

ausdrücken, im Fall des Erdschwerefeldes also durch  $\operatorname{div} \mathbf{g}$ . Dabei gilt unter Beachtung von (2.4)

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = \nabla \cdot \nabla W = \nabla^2 W. \quad (4.2)$$

Außerhalb der felderzeugenden Massen gilt für das Gravitationspotential die *Laplace*-Gleichung

$$\nabla^2 V_a = 0, \quad (4.3)$$

innerhalb die Gleichung von *Poisson*

$$\nabla^2 V_i = -4\pi G\rho. \quad (4.4)$$

Dabei ist  $\rho$  die Massendichte und  $G$  die Gravitationskonstante  $G = 6.67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ .

Anwendung des Differentialoperators  $\nabla^2$  auf das Zentrifugalpotential (2.2) liefert zusammen mit (4.3) und (4.4) für die Quellstärke des Schwerepotentials (2.1) die Beziehungen

$$\nabla^2 W = \begin{cases} 2\omega^2 & , \text{ außerhalb der Massen} \\ 2\omega^2 - 4\pi G\rho & , \text{ innerhalb der Massen.} \end{cases} \quad (4.5)$$

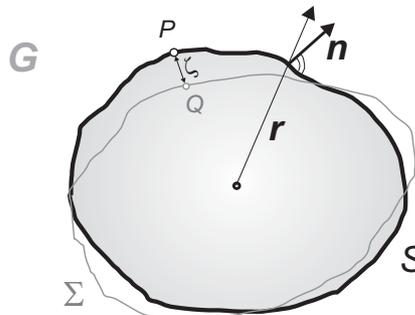
Üblicherweise wird der *Laplace*-Operator mit  $\Delta$  bezeichnet. Um jedoch Verwechslungen mit den ebenso bezeichneten Anomaliengrößen zu vermeiden, wird hier die Bezeichnung  $\nabla^2$  beibehalten.

Ist für eine skalare Funktion  $V$  in einem Gebiet  $\mathbf{G}$  die *Laplace*-Gleichung (4.3) erfüllt und ist  $V$  in  $\mathbf{G}$  zweimal stetig differenzierbar, so wird sie auch als *harmonische* Funktion bezeichnet (siehe BRONSTEIN & SEMENDJAJEW, 1991). Alle harmonischen Funktionen sind *analytisch*, d.h. sie lassen sich in der Umgebung jedes Punktes  $P_0 \in \mathbf{G}$  in eine konvergente Potenzreihe nach Koordinatendifferenzen entwickeln. Weiterhin gilt für eine in  $\mathbf{G}$  harmonische und reguläre Funktion die *Green'sche* Fundamentalformel der Potentialtheorie (siehe z.B. SIGL, 1973)

$$V(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left( \frac{1}{l} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{l} \right) \right) dS. \quad (4.6)$$

Dies bedeutet, dass das Potential im gesamten Gebiet  $\mathbf{G}$  bestimmt ist, wenn auf dem Rand  $S$  von  $\mathbf{G}$  die Werte des Potentials und dessen Ableitung in Richtung der Flächennormalen  $\mathbf{n}$  bekannt sind.

Im Falle der GRWA nach *Molodenskii* ist das Schwerepotential  $W$  im Außenraum der Erde gesucht. Die Randfläche  $S$  entspricht der Erdoberfläche. Durch Nivellement und Schweremessungen auf dieser Oberfläche können geopotentielle Koten  $C$  bestimmt werden, wodurch das Potential auf  $S$  – abgesehen von der Datumsunbekannten  $W_0$  am konventionellen Höhennullpunkt – bestimmt ist.



**Abbildung 4.2:** Erdoberfläche  $S$  und deren Approximation durch das Telluroid  $\Sigma$ . Die Abweichung von Oberflächenpunkt  $P$  und zugeordnetem Telluroidpunkt  $Q$  ist die Höhenanomalie  $\zeta$ . Der Außenraum der felderzeugenden Massen ist das Gebiet  $\mathbf{G}$ , die Randfläche der Massen ist  $S$ . Die äußere Flächennormale  $\mathbf{n}$  auf  $S$  fällt in der Regel nicht mit der radialen Richtung  $\mathbf{r}$  zusammen.

Leider ist aber die Lage von  $S$  nicht bekannt und  $W$  nach (4.5) keine harmonische Funktion. Aus den bekannten Potentialunterschieden können jedoch nach (2.17) Normalhöhen  $H^N$  berechnet werden. Trägt man diese über dem Ellipsoid auf, so entsteht das Telluroid  $\Sigma$  als Näherung für die wahre Oberfläche  $S$ . Führt man weiterhin, wie in Kapitel 2 beschrieben, ein Normalschwerefeld  $U$  als Approximation des gesuchten Potentials  $W$  ein, so reduziert sich die Bestimmung von  $W$  auf die Bestimmung der Differenz  $T = W - U$ . Unter Verwendung von (2.1) und (2.10) zeigt sich, dass  $T$  nur von den Gravitationspotentialen  $V$  und  $V^N$  abhängt und es gilt deshalb im Außenraum der felderzeugenden Massen

$$\nabla^2 T = \nabla^2(W - U) = \nabla^2(V - V^N) = \nabla^2 V - \nabla^2 V^N = 0. \quad (4.7)$$

Das Störpotential  $T$  ist im Außenraum harmonisch und analytisch. Dies bedeutet, dass erstens  $T$  nach (4.6) bestimmt werden kann und zweitens die näherungsweise Kenntnis des Randes genügt, da  $T \in S$  durch eine Potenzreihe um  $\Sigma$  dargestellt werden kann. Da die Differenzen zwischen  $S$  und  $\Sigma$  bzw. zwischen  $W$  und  $U$  relativ klein sind, wird diese Reihe nach dem linearen Term abgebrochen. Bessere Approximationen von  $T$  können durch Berücksichtigung von Termen höherer Ordnung oder durch Iteration erreicht werden. Die folgende Linearisierung entspricht im wesentlichen der Darstellung in MORITZ (1980).

### Linearisierung

Gegeben seien auf der Oberfläche  $S$  geopotentielle Knoten  $C$  sowie der Schwerevektor  $\mathbf{g}$ . Da die Datumsunbekannte  $W_0 = W - C$  auf unabhängige Weise bestimmt werden kann (siehe z.B. HEISKANEN & MORITZ, 1967), kann für die folgenden Ableitungen davon ausgegangen werden, dass das Potential  $W$  selbst bekannt ist. Aus der Kenntnis der geopotentiellen Knoten  $C$  folgt auch, dass das Telluroid bekannt ist. Dort können das Normalpotential  $U$  und der Normalschwerevektor  $\boldsymbol{\gamma}$  streng berechnet werden. Im Folgenden seien mit  $P$  Oberflächenpunkte und mit  $Q$  die Punkte des Telluroids  $\Sigma$  bezeichnet.  $\boldsymbol{\zeta}$  sei der Koordinatenvektor von  $Q$  nach  $P$ . Damit lassen sich  $U_P$  und  $\boldsymbol{\gamma}_P$  in einer Taylorreihe um  $Q$  entwickeln und es gilt in linearer Form

$$U_P = U_Q + \nabla U \cdot \boldsymbol{\zeta} \quad (4.8)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_P = \boldsymbol{\gamma}_Q + (\nabla \cdot \boldsymbol{\gamma}) \cdot \boldsymbol{\zeta}, \quad (4.9)$$

wobei nach (2.11)

$$\nabla U = \boldsymbol{\gamma} \quad (4.10)$$

gilt. Der Gradient der Komponenten der Normalschwere liefert die so genannte *Marussi*-Matrix

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\gamma}' = \nabla \cdot (\nabla U)' = \begin{pmatrix} U_{xx} & U_{xy} & U_{xz} \\ U_{yx} & U_{yy} & U_{yz} \\ U_{zx} & U_{zy} & U_{zz} \end{pmatrix} \equiv \mathbf{M}. \quad (4.11)$$

Für das Störpotential  $T_P$  gilt zunächst

$$T_P = T_Q + \nabla T \cdot \boldsymbol{\zeta}. \quad (4.12)$$

$T$  und  $\boldsymbol{\zeta}$  sind Größen 1. Ordnung, so dass das Produkt  $\text{grad} T \cdot \boldsymbol{\zeta}$  in der hier dargestellten linearen Näherung vernachlässigt werden kann. Mit dem selben Grad der Approximation wie in (4.8) und (4.9) gilt daher

$$T_P = T_Q. \quad (4.13)$$

Aus den Messungen lassen sich auch die Anomaliengrößen

$$\Delta W = W_P - U_Q \quad (4.14)$$

$$\Delta \mathbf{g} = \mathbf{g}_P - \boldsymbol{\gamma}_Q \quad (4.15)$$

bestimmen. Ersetzt man darin  $W_P$  durch  $T_P + U_P$  und setzt nach (4.13)  $T_P = T_Q \equiv T$ , so folgt

$$\Delta W = T_Q + \boldsymbol{\gamma}' \cdot \boldsymbol{\zeta} \quad (4.16)$$

$$\Delta \mathbf{g} = \nabla T + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\zeta}. \quad (4.17)$$

Ist die Matrix  $\mathbf{M}$  invertierbar, so kann man aus (4.17) den Vektor

$$\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{M}^{-1} \cdot (\Delta \mathbf{g} - \nabla T) \quad (4.18)$$

bestimmen, wodurch sich aus (4.16)

$$T - \boldsymbol{\gamma}' \mathbf{M}^{-1} \nabla T = \Delta W - \boldsymbol{\gamma}' \mathbf{M}^{-1} \Delta \mathbf{g} \quad (4.19)$$

ergibt. Es lässt sich zeigen (siehe z.B. MORITZ, 1980), dass Gleichung (4.19) identisch ist mit

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \tau} T = -\Delta g_{\tau} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \tau} \Delta W. \quad (4.20)$$

Darin bezeichnet  $\partial/\partial\tau$  die Ableitung in Isozentalenrichtung, also entlang den Linien konstanter Zenitrichtung. Diese Richtung ist nur genähert identisch mit der Richtung der Lotlinien im Normalschwerefeld.  $\Delta g_{\tau}$  bezeichnet die Projektion des Anomalienvektors  $\Delta \mathbf{g}$  auf die Richtung von  $\tau$ .

### Sphärische Approximation

Um die linearisierte Gleichung (4.20) weiter zu vereinfachen, wird eine sphärische Näherung eingeführt. Da ein die Erde approximierendes Ellipsoid nur um etwa 0.3% von einer Kugel abweicht, begeht man nur einen kleinen Fehler, wenn man die exakten ellipsoidischen Formeln durch sphärische Formeln ersetzt. Dies bedeutet nicht, dass das Referenzellipsoid durch eine Kugel ersetzt wird, sondern, dass in allen Formeln Terme die die Exzentrizität enthalten vernachlässigt werden. Wie sich später zeigen wird, kann man das Störpotential und damit auch die Höhenanomalie durch globale Potentialmodelle schon recht gut annähern, so dass die verbleibenden Anteile, für die die GRWA zu lösen ist, etwa im Bereich von 1 m liegen. Der durch eine sphärische Approximation eingeführte Fehler liegt somit bei rund 3 mm und kann vernachlässigt werden.

In den in Gleichung (4.20) enthaltenen Störparametern entfallen die Zentrifugalanteile, so dass die weiteren Betrachtungen nur gravitative Größen betreffen. Die sphärische Approximation gilt somit für eine nicht rotierende Kugel. In dieser Approximation fallen die Richtungen der Isozentalen, der Ellipsoidnormalen der Lotlinien und der sphärischen Radien zusammen. Die Ableitung  $\partial/\partial\tau$  kann also ersetzt werden durch die radiale Ableitung  $\partial/\partial r$  und es gilt

$$\gamma = \frac{GM}{r^2}. \quad (4.21)$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \tau} = \frac{\partial \gamma}{\partial r} = -2 \frac{GM}{r^3} = -2 \frac{\gamma}{r} \quad (4.22)$$

und die lineare Gleichung (4.20) lautet in sphärischer Approximation

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2}{r} T = -\Delta g + \frac{2}{r} \Delta W. \quad (4.23)$$

Theoretisch sollte nach der Definition in Gleichung (2.18) gelten  $W(P) = U(Q)$  bzw.  $\Delta W = 0$ . Setzt man dies in (4.23) ein, so folgt

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2}{r} T = -\Delta g. \quad (4.24)$$

Diese Darstellung ähnelt den in der *Green'schen* Fundamentalformel (4.6) verwendeten Randwerten. Diese sind eine Linearkombination des gesuchten Potentials und dessen Ableitung in Richtung der Flächennormalen. Für eine sphärische Randfläche stellt  $\Delta g$  genau diese Linearkombination dar und kann direkt als Randwert zur Lösung der RWA verwendet werden. Dies entspricht der klassischen Theorie nach *Stokes*. Will man jedoch die Oberfläche der Erde bestimmen, so fällt die Normale auf die Randfläche in der Regel nicht mit der radialen Richtung  $\partial/\partial r$  zusammen (siehe Abbildung 4.2). Will man trotzdem die nach (2.14) definierten Schwereanomalien als Randwerte verwenden, so ist ein schiefachsiges Randwertproblem zu lösen. Die von *Molodenskii* formulierte Randwertaufgabe lautet somit:

Gesucht ist das Störpotential  $T$  im Außenraum der Erde, das die *Laplace-Gleichung*

$$\nabla^2 T = 0 \quad (4.25)$$

erfüllt und das auf der Erdoberfläche die Randwerte

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r} T \quad (4.26)$$

annimmt.

Kann die Randwertaufgabe gelöst werden und ist damit  $T$  im Außenraum bekannt, so gilt nach Gleichung (4.16) unter Beachtung von (2.18)

$$T = -\gamma' \cdot \zeta. \quad (4.27)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung lässt sich auch in der Form  $\gamma(\mathbf{e}_{\gamma} \cdot \zeta)$  schreiben, wobei  $\mathbf{e}_{\gamma}$  der Einheitsvektor in Richtung  $\gamma$  ist. Das Produkt  $\mathbf{e}_{\gamma} \cdot \zeta$  entspricht also der Projektion des Koordinatendifferenzvektors  $\zeta$  auf die

Richtung von  $\gamma$ . Im Sinne der sphärischen Approximation fallen wieder die Richtungen von  $\gamma$  und der Ellipsoidnormalen zusammen und man begeht keinen weiteren Fehler, wenn man die Komponente  $e_\gamma \cdot \zeta = \zeta_\gamma$  von  $\zeta$  in Richtung  $\gamma$  mit der Projektion auf die Ellipsoidnormale gleich setzt, so dass gilt

$$T = \gamma \zeta. \quad (4.28)$$

Dies ist die auf die Theorie von *Molodenskii* angewandte Formel von *Bruns*. Sie ermöglicht bei bekanntem Störpotential  $T$  die Berechnung der Höhenanomalie

$$\zeta = \frac{T}{\gamma}. \quad (4.29)$$

Sie ist die eigentliche Zielgröße der Quasigeoidbestimmung.

### 4.2.2 Lösung nach Molodenskii

Die in Kapitel 4.2.1 formulierte Randwertaufgabe erfordert die Lösung der *Laplace*'schen Differentialgleichung unter vorgegebenen Randwerten. Bei dem von *Molodenskii* vorgeschlagenen Lösungsweg wird diese Differentialgleichung in eine Integralgleichung umgewandelt. Dazu wird das Störpotential durch das Potential einer einfachen Schicht der Dichte  $\mu$  auf der Oberfläche  $\Sigma$  dargestellt. Nach HEISKANEN & MORITZ (1967) ergibt sich dafür die Integralgleichung

$$\Delta g = 2\pi G \mu \cos \beta - G \iint_{\sigma} \left( \frac{r^2 - r_p^2}{2 r_p l^3} + \frac{3}{2 r_p l} \right) \mu \sec \beta r^2 d\sigma, \quad (4.30)$$

wobei  $\beta$  die Geländeneigung ist und  $l$  die Distanz zwischen Intergations- und Berechnungspunkt (zur Unterscheidung der beiden Punkte innerhalb des Integrals werden Größen, die sich auf den Berechnungspunkt beziehen mit  $P$  indiziert). Im Genauigkeitsrahmen der zur Formulierung der Randbedingung (4.26) eingeführten sphärischen Approximation begeht man keinen zusätzlichen Fehler, wenn man den Radiusvektor  $r = R + h$  durch den mittleren Erdradius  $R$  annähert. Mit der Abkürzung

$$G \mu \sec \beta \equiv \chi = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n \quad (4.31)$$

ergibt sich dann die Gleichung

$$\Delta g = 2\pi \chi (1 + \tan^2 \beta)^{-1} - \iint_{\sigma} \left( R^2 \frac{(h - h_p)}{l^3} + \frac{3R}{2l} \right) \chi d\sigma. \quad (4.32)$$

Eine Potenzreihenentwicklung führt schließlich zur Lösung

$$T = T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + \dots, \quad (4.33)$$

wobei für die einzelnen Terme dieser nach *Molodenskii* benannten Reihe (hier bis zur 3. Ordnung dargestellt) gilt

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} G_0 St(\psi) d\sigma \\ T_1 &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} G_1 St(\psi) d\sigma \\ T_2 &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} G_2 St(\psi) d\sigma - R^2 \iint_{\sigma} \frac{\chi_0}{2l_0} \eta^2 d\sigma \\ T_3 &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} G_3 St(\psi) d\sigma - R^2 \iint_{\sigma} \frac{\chi_1}{2l_0} \eta^2 d\sigma \end{aligned} \quad (4.34)$$

Darin ist  $l_0$  die ebene Distanz zwischen Berechnungs- und Integrationspunkt,  $\eta$  eine Funktion der Geländeneigung und die Terme  $G_n$  lassen sich jeweils aus den Flächenfunktionen  $\chi_m$  (mit  $0 \leq m < n$ ) bestimmen. Für den Term 0. Ordnung gilt  $G_0 = \Delta g$ . Er entspricht der klassischen Lösung nach *Stokes*. Im Gegensatz dazu beziehen sich die Schwereanomalien  $\Delta g$  im *Molodenskii*-Problem jedoch auf die Erdoberfläche, nicht auf das Geoid. Die Lösung der *Stokes*'schen GRWA kann als Näherung der Lösung der GRWA nach *Molodenskii* betrachtet werden. Die Güte der

Näherung hängt von der Größe der Reihenterme höherer Ordnung in (4.34) und damit von der Geländeneigung ab.

Es sei auch noch darauf hingewiesen, dass die in der von *Molodenskii* vorgeschlagenen Lösung verwendete Potenzreihenentwicklung nur dann konvergiert, falls die Geländeneigung unter  $45^\circ$  bleibt. In der Praxis werden zur Berechnung der Geoidhöhe mittlere Schwereanomalien einer bestimmten Blockgröße (z.B.  $3' \times 5'$  entspricht ca.  $5 \times 5 \text{ km}$ ) verwendet. Entsprechend werden in den Formeln von *Molodenskii* auch Blockmittelwerte der topographischen Höhen in der selben Auflösung benutzt. Die dabei durchgeführte blockweise Mittelung der Höhenwerte entspricht einer Glättung der Oberfläche, so dass die Bedingung  $\beta < 45^\circ$  auf jeden Fall im Flachland und weitestgehend in den Mittelgebirgen, jedoch nicht in den Alpen erfüllt ist. Je kleiner die Blockgröße ist, desto größer werden die Steigungen, was bei Berechnung der  $G_n$ -Terme zu numerischen Instabilitäten führen kann (DENKER & TZIAVOS, 1999). Hier ist ein Kompromiss zwischen einer guten Auflösung, sprich kleinen Blockgrößen, und der numerischen Stabilität der Berechnungen für Terme hoher Ordnung notwendig.

### 4.2.3 Lösung durch analytische Fortsetzung

Einen alternativen Weg zur Lösung der GRWA nach *Molodenskii* stellt die von *Moritz* vorgeschlagene Methode der analytischen Fortsetzung dar. *Pellinen* hat gezeigt (siehe z.B. MORITZ, 1980), dass die Terme der so bestimmten Lösung gliedweise identisch sind mit den Termen der *Molodenskii*-Reihe (4.33). Das Verfahren nach *Moritz* ist jedoch nicht von Konvergenzproblemen in steilem Gelände betroffen und ist zudem rechentechnisch leichter umsetzbar als die Lösung nach *Molodenskii*. Deshalb werden die in dieser Arbeit ausgeführten Berechnungen mit Hilfe der analytischen Fortsetzung durchgeführt. Das Verfahren basiert auf dem *Runge-Krarup*-Theorem (siehe z.B. MORITZ, 1980). Danach lässt sich immer eine in den topographischen Massen harmonische Funktion  $T^*$  finden, die außerhalb der Massen das Außenraumpotential  $T$  beliebig gut annähern kann.  $T^*$  heißt harmonische oder analytische Fortsetzung von  $T$  im Innenraum, also innerhalb der felderzeugenden Massen.

Zur Erläuterung sei ein Oberflächenpunkt  $P$  betrachtet, in dem Störpotential bzw. Höhenanomalie bestimmt werden sollen. Wären entlang der Niveaufläche durch  $P$  Schwereanomalien als Randwerte des harmonischen Außenraumpotentials  $T$  gegeben, so entspräche dies der GRWA nach *Stokes*. Die Niveaufläche durch  $P$  wird in der Regel zum Teil innerhalb und zum Teil außerhalb der topographischen Massen liegen. Anomalien außerhalb der Massen sind durch die Randbedingung (4.26) direkt mit dem harmonischen Außenraumpotential verbunden. Für Anomalien innerhalb der Massen gilt dies nicht, da sie Funktionale des nicht harmonischen Innenraumpotentials sind. Nach dem Theorem von *Runge-Krarup* ist es jedoch möglich, innerhalb der Massen eine analytische Fortsetzung  $\Delta g^*$  zu finden, die das gesuchte Außenraumpotential repräsentiert.

Dann gilt für die Höhenanomalie  $\zeta$  in  $P$

$$\zeta_p = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g^* St(\psi) d\sigma. \quad (4.35)$$

Diese Form ist identisch mit der klassischen Bestimmung der Geoidhöhe nach *Stokes*, jedoch beziehen sich die Anomalien jetzt nicht auf das Geoid, sondern auf die Niveaufläche durch den Oberflächenpunkt  $P$ . Höhenanomalien werden deshalb auch als *Geoidhöhen an der Oberfläche* bezeichnet. Die GRWA nach *Molodenskii* wird also durch analytische Fortsetzung in die klassische GRWA nach *Stokes* umformuliert.

Zur Lösung ist es nun notwendig, aus den gegebenen Oberflächenanomalien  $\Delta g$  ihre analytische Fortsetzung  $\Delta g^*$  zu bestimmen. Für die radiale Ableitung einer harmonischen Funktion  $f$  gilt nach HEISKANEN & MORITZ (1967) in sphärischer Näherung

$$\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{1}{R} f + \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{f - f_p}{l_0^3} d\sigma, \quad (4.36)$$

wobei die Funktionswerte  $f$  auf einer Kugel mit Radius  $R$  liegen. Der vertikale Gradient stellt somit eine Kugelflächenfunktion dar. In sphärischer Näherung liegen die Anomalien  $\Delta g^*$ , jedoch nicht die Oberflächenanomalien

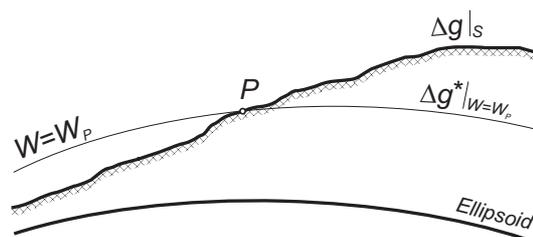


Abbildung 4.3: Analytische Fortsetzung  $\Delta g^*$  der Oberflächenanomalien  $\Delta g$  auf die Niveaufläche durch den Berechnungspunkt  $P$ .

$\Delta g$  auf einer solchen Kugel, so dass aus (4.36) der Gradient  $\partial\Delta g^*/\partial r$  bestimmt werden kann. In sphärischer Näherung fallen auch wieder die radiale und die vertikale Richtung zusammen ( $\partial/\partial r = \partial/\partial h$ ). Bezeichnet  $\Delta h = h - h_p$  die Höhe der Oberfläche über der Niveaulfläche durch  $P$ , lassen sich nach MORITZ (1975) die Oberflächenanomalien durch folgende Taylorreihe darstellen:

$$\Delta g = \Delta g^* + \frac{\partial\Delta g^*}{\partial h} \Delta h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2\Delta g^*}{\partial h^2} \Delta h^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3\Delta g^*}{\partial h^3} \Delta h^3 + \dots \quad (4.37)$$

Diese Gleichung sei symbolisch dargestellt durch den Operator  $U$

$$\Delta g = U \Delta g^*. \quad (4.38)$$

$U$  heißt *upward continuation* Operator, da damit die Fortsetzung beliebiger harmonischer Funktionswerte in den gesamten Außenraum ermöglicht wird. Gesucht ist nun der inverse so genannte *downward continuation* Operator  $D$ , für den gilt

$$\Delta g^* = D \Delta g. \quad (4.39)$$

Betrachtet man (4.37), so kann man  $U$  auch schreiben als

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} U_n = I + \sum_{n=1}^{\infty} U_n, \quad (4.40)$$

wobei für die einzelnen Reihenterme gilt

$$U_n = \Delta h^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial h^n} = \Delta h^n L_n. \quad (4.41)$$

Um den inversen Operator  $D$  zu bestimmen, führt Moritz den Parameter  $k$  ( $0 \leq k \leq 1$ ) ein und ersetzt die Höhen  $\Delta h$  durch  $k \cdot \Delta h$ . Dann gilt für die Reihe (4.41)

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} k^n \Delta h^n L_n = \sum_{n=0}^{\infty} k^n U_n = I + \sum_{n=1}^{\infty} k^n U_n. \quad (4.42)$$

Ebenso sei der inverse Operator  $D$  durch die Reihe

$$D = \sum_{m=0}^{\infty} k^m D_m \quad (4.43)$$

darstellbar. Da  $D$  die Inverse zu  $U$  ist, gilt natürlich die Bedingung

$$D \cdot U = I \quad (4.44)$$

und es folgt nach Einsetzen von (4.42) und (4.43)

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n U_n \sum_{m=0}^{\infty} k^m D_m = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} k^{n+m} L_n D_m = I. \quad (4.45)$$

Ordnet man diese Doppelsumme nach der Potenz  $r = n + m$  um, so ergibt sich

$$\sum_{r=0}^{\infty} k^r \sum_{s=0}^r U_s D_{r-s} - I = 0. \quad (4.46)$$

Daraus folgen die Bedingungsgleichungen

$$D_0 U_0 = I \quad (4.47)$$

für  $r = 0$  bzw.

$$\sum_{s=0}^r U_s D_{r-s} = 0 \quad (4.48)$$

für alle  $r > 0$ . Aus (4.40) folgt

$$U_0 = I \quad (4.49)$$

und deshalb wegen (4.44) auch

$$D_0 = I. \quad (4.50)$$

Verwendet man in der Bedingungsgleichung (4.48) die Beziehung (4.49), so folgt

$$\sum_{s=0}^r U_s D_{r-s} = U_0 D_r + \sum_{s=1}^r U_s D_{r-s} = D_r + \sum_{s=1}^r U_s D_{r-s} = 0 \quad (4.51)$$

bzw.

$$D_r = - \sum_{s=1}^r U_s D_{r-s}. \quad (4.52)$$

Dies bedeutet, dass die Terme  $D_r$ , ausgehend von  $D_{r=0} = I$ , rekursiv aus den jeweils vorangehenden Reihengliedern  $D_{p<r}$  berechnet werden können. Ausgeschrieben bis zu Termen 4. Ordnung lautet (4.52)

$$\begin{aligned} D_1 &= -U_1 D_0 \\ D_2 &= -U_1 D_1 - U_2 D_0 \\ D_3 &= -U_1 D_2 - U_2 D_1 - U_3 D_0 \\ D_4 &= -U_1 D_3 - U_2 D_2 - U_3 D_1 - U_4 D_0 \end{aligned} \quad (4.53)$$

und die Anomalie  $\Delta g^*$  ergibt sich entsprechend (4.39) zu

$$\Delta g^* = D_0 \Delta g + D_1 \Delta g + D_2 \Delta g + D_3 \Delta g + D_4 \Delta g + \dots \quad (4.54)$$

bzw. mit der Abkürzung  $g_n = D_n \Delta g$

$$\Delta g^* = g_0 + g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + \dots \quad (4.55)$$

Für die einzelnen  $g_n$ -Terme gilt dann unter Beachtung von (4.41)

$$\begin{aligned} g_0 &= \Delta g \\ g_1 &= -\Delta h L_1(\Delta g) \\ g_2 &= -\Delta h L_1(g_1) - \Delta h^2 L_2(\Delta g) \\ g_3 &= -\Delta h L_1(g_2) - \Delta h^2 L_2(g_1) - \Delta h^3 L_3(\Delta g) \\ g_4 &= -\Delta h L_1(g_3) - \Delta h^2 L_2(g_2) - \Delta h^3 L_3(g_1) - \Delta h^4 L_4(\Delta g), \end{aligned} \quad (4.56)$$

bzw. in allgemeiner Form

$$g_n = - \sum_{s=1}^r (h - h_p)^s L_s(g_{r-s}). \quad (4.57)$$

Die  $g_n$  lassen sich also rekursiv berechnen. Dies ist auch für die  $L_n$ -Terme möglich, denn nach (4.41) gilt

$$L_n(\cdot) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial h^n}(\cdot) = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial h}(L_{n-1}(\cdot)) = \frac{1}{n} L_1(L_{n-1}(\cdot)). \quad (4.58)$$

Der Gradient  $L_1 = \partial/\partial h = \partial/\partial r$  kann nach Gleichung (4.36) bestimmt werden.

Somit können alle Reihenterme in (4.55) berechnet werden und die Höhenanomalie in  $P$  ergibt sich schließlich zu

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} (g_0 + g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + \dots) St(\psi) d\sigma. \quad (4.59)$$

Dies ist die Lösung der Randwertaufgabe von *Molodenskii* durch analytische Fortsetzung. Sie wird in dieser Arbeit zur Bestimmung der Höhenanomalie verwendet.

Da alle Reihenterme höherer Ordnung auf einfache Art rekursiv aus den vorhergehende Terme bestimmt werden können, wobei zur Berechnung nur das Integral aus Formel (4.36) benötigt wird, ist diese Lösung einfacher als die umfangreichen Integralgleichungen der Lösung nach *Molodenskii*. Darüberhinaus sind die einzelnen Terme dieser Lösung einfacher interpretierbar und die Lösung wird anschaulicher.

## 4.3 Spektrale Darstellung des Schwerfelds

### 4.3.1 Sphärisch harmonische Reihen

Nach HEISKANEN & MORITZ (1967) kann jede im Außenraum einer Kugel mit Radius  $R$  harmonische Funktion  $f(r, \theta, \lambda)$  durch eine sphärisch harmonische Reihe (SH-Reihe) der Form

$$f(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (\bar{a}_{nm} \bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) + \bar{b}_{nm} \bar{S}_{nm}(\theta, \lambda)) \quad (4.60)$$

dargestellt werden. Dies entspricht einer *Fourier*-Entwicklung der Funktion  $f(\theta, \lambda)$  nach den Basisfunktionen  $\bar{R}_{nm}(\theta, \lambda)$  und  $\bar{S}_{nm}(\theta, \lambda)$ . Das 2-dimensionale Spektrum repräsentiert Signalanteile unterschiedlicher Wellenlängen auf der Kugel und wird in den Grad  $n$  und die Ordnung  $m$  aufgeteilt. Die Koeffizienten  $\bar{a}_{nm}$  und  $\bar{b}_{nm}$  sind die Amplituden dieser Signalanteile.

Für die Basisfunktionen, die auf der Kugel ein orthonormales System bilden, gelten die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \iint_{\sigma} \bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) \bar{R}_{pq}(\theta, \lambda) d\sigma \\ \iint_{\sigma} \bar{S}_{nm}(\theta, \lambda) \bar{S}_{pq}(\theta, \lambda) d\sigma \end{aligned} \right\} = 4\pi \delta_{np} \delta_{mq} \quad \text{und} \quad \iint_{\sigma} \bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) \bar{S}_{pq}(\theta, \lambda) d\sigma = 0, \quad (4.61)$$

wobei das *Kronecker*-Symbol  $\delta_{ij}$  die Werte  $\delta_{ij} = 1$  (für  $i = j$ ) und  $\delta_{ij} = 0$  (für  $i \neq j$ ) annimmt.

Die Bestimmung der Funktionswerte  $f(r, \theta, \lambda)$  aus bekannten Koeffizienten  $\bar{a}_{nm}$  und  $\bar{b}_{nm}$  nach Gleichung (4.60) nennt man *Sphärisch Harmonische Synthese* (SHS). Bestimmt man umgekehrt aus gegebenen Funktionswerten  $f(\theta, \lambda)$  die Koeffizienten, so spricht man von *Sphärisch Harmonischer Analyse* (SHA). Unter Ausnutzung der Orthogonalitätsbeziehungen (4.61) gilt

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{a}_{nm} \\ \bar{b}_{nm} \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} f(\theta, \lambda) \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) \\ \bar{S}_{nm}(\theta, \lambda) \end{array} \right\} d\sigma. \quad (4.62)$$

Die Basisfunktionen  $\bar{R}_{nm}(\theta, \lambda)$  und  $\bar{S}_{nm}(\theta, \lambda)$  können aus den so genannten vollständig normierten zugeordneten *Legendre* Funktionen  $\bar{P}_{nm}(\cos \theta)$  berechnet werden:

$$\bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) = \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \cos m\lambda \quad \text{und} \quad \bar{S}_{nm}(\theta, \lambda) = \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \sin m\lambda. \quad (4.63)$$

Die Funktionen  $P_{nm}(\cos \theta)$  heißen konventionelle zugeordnete *Legendre*-Funktionen. Für sie gilt allgemein:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \quad (4.64)$$

$$P_{nm}(t) = (1 - t^2)^{m/2} \frac{d^m}{dt^m} P_n(t). \quad (4.65)$$

Der Übergang von den konventionellen zu den in (4.63) verwendeten vollständig normierten *Legendre*-Funktionen erfolgt mittels des frequenzabhängigen Normierungsfaktors  $H_{nm}$  nach

$$\bar{P}_{nm}(t) = H_{nm} P_{nm}(t), \quad \text{mit} \quad H_{nm} = \begin{cases} \sqrt{2n+1} & , \text{für } m = 0 \\ \sqrt{2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} & , \text{für } m \neq 0. \end{cases} \quad (4.66)$$

Durch die Verwendung der vollständig normierten Funktionen ergeben sich die relativ einfachen Orthogonalitätsbeziehungen (4.61), die ohne Normierung etwas unhandlicher wären. Deshalb wird üblicherweise die normierte Darstellung verwendet. Da die Verwendung konventioneller und normierter Größen zum gleichen Ergebnis führen muss, gilt für die Koeffizienten die inverse Beziehung

$$\left. \begin{array}{l} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{array} \right\} = H_{nm}^{-1} \left\{ \begin{array}{l} C_{nm} \\ S_{nm} \end{array} \right\}. \quad (4.67)$$

Die Funktionen  $P_n(\cos \theta)$  von Grad  $n$  und Ordnung  $m = 0$  heißen *Legendre*-Polynome. Für diese gilt die Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos \psi) P_k(\cos \psi) \sin \psi d\psi = \frac{2}{2n+1} \delta_{nk}. \quad (4.68)$$

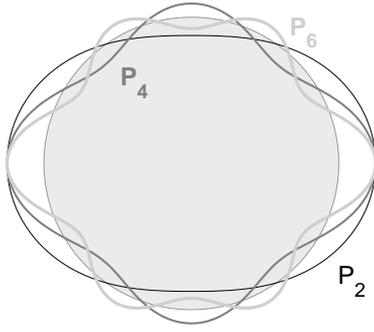


Abbildung 4.4: Legendre-Polynome  $P_2$ ,  $P_4$  und  $P_6$  auf der Kugel.

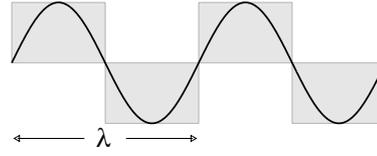


Abbildung 4.5: Zusammenhang zwischen Wellenlänge  $\lambda$  und Blockgröße.

Des Weiteren gilt für die Legendre-Polynome des sphärischen Abstandes  $\psi_{PQ}$  zwischen zwei Punkten  $P(\theta_P, \lambda_P)$  und  $Q(\theta_Q, \lambda_Q)$  das Additionstheorem

$$P_n(\psi_{PQ}) = \frac{1}{2n+1} \sum_{m=0}^n (\bar{R}_{nm}(\theta_P, \lambda_P) \bar{R}_{nm}(\theta_Q, \lambda_Q) + \bar{S}_{nm}(\theta_P, \lambda_P) \bar{S}_{nm}(\theta_Q, \lambda_Q)). \quad (4.69)$$

Theoretisch ist  $f(\theta, \lambda)$  eine kontinuierliche Funktion und das Spektrum hat unendlich viele Frequenzlinien. Die Auflösung der Funktion ist unendlich klein und  $n_{max} = \infty$ . Ist das Signal hingegen in Blockmittelwerten einer bestimmten Größe gegeben, so ist die kleinste bestimmbare Wellenlänge durch die zweifache Blockgröße gegeben (siehe Abbildung 4.5). Kurzwelligere Signalanteile können nicht aufgelöst werden. Gleichbedeutend damit ist der Abbruch der SH-Reihe bei einem endlichen Grad  $n_{max} = N$ . Betrachtet man die Periodizität der Legendre-Polynome entlang eines vollen Großkreises, z.B. entlang eines Meridians (siehe Abbildung 4.4), so erkennt man z.B. für  $P_2$  zwei Wellenzyklen, für  $P_4$  vier Zyklen, für  $P_6$  sechs Zyklen. Damit ergeben sich ungefähr Wellenlängen von  $1/2$ ,  $1/4$ ,  $1/6$  des Meridianumfangs. Allgemein gilt deshalb für den Zusammenhang zwischen dem Entwicklungsgrad  $n$  einer SH-Reihe und der Wellenlänge  $\lambda$  bzw. Blockgröße  $\Delta = \lambda/2$  auf einer Kugel mit Radius  $R$  näherungsweise

$$\lambda \approx \frac{2\pi R}{n}. \quad (4.70)$$

Die durch die SHS (4.60) definierten Funktionswerte  $f(r, \theta, \lambda)$  sind Punktwerte auf der Kugel. Dies gilt auch bei Abbruch der Reihe bei einem endlichen Grad  $N$ . Sollen Blockmittelwerte  $\bar{f}(r, \theta, \lambda)$  dargestellt werden, so muss das Signal geglättet werden. Dies geschieht durch Mittelung aller Funktionswerte innerhalb des Blocks bzw. innerhalb einer sphärischen Kappe gleicher Fläche. Nach MEISSL (1971) gilt bei Mittelung über eine Kappe vom Radius  $\psi_0$  für die Gewichte  $b(\psi)$  der Punktwerte

$$b(\psi) = \begin{cases} 1, & \text{für } \psi \leq \psi_0 \\ 0, & \text{für } \psi > \psi_0 \end{cases}. \quad (4.71)$$

Zur Mittelwertbildung wird nun über die Kappe integriert und durch das Integral aller Gewichte geteilt, also durch

$$\int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} b(\psi) d\sigma = \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\psi_0} 1 \sin \psi d\psi d\alpha = 2\pi \left[ -\cos \psi \right]_0^{\psi_0} = 2\pi (1 - \cos \psi_0). \quad (4.72)$$

Für den Glättungsoperator  $B(\psi)$  gilt somit

$$B(\psi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} (1 - \cos \psi_0)^{-1} & , \text{ für } \psi \leq \psi_0 \\ 0 & , \text{ für } \psi > \psi_0. \end{cases} \quad (4.73)$$

Dieser kann nun selbst als SH-Reihe dargestellt werden, wobei der Pol des Koordinatengitters im Kappenmittelpunkt liegt. Der sphärische Abstand  $\psi$  übernimmt dann die Rolle der Poldistanz  $\theta$  und das Azimut  $\alpha$  entspricht der geographischen Länge  $\lambda$  (siehe Abbildung 4.6). Da der Operator jedoch isotrop, d.h. richtungsunabhängig ist, verschwindet die Abhängigkeit von  $\lambda$  und es entfallen alle Terme der Ordnung  $m \neq 0$ . Für  $B(\psi)$  gilt dann

$$B(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{2n+1}{4\pi} P_n(\cos \psi), \quad (4.74)$$

mit den Koeffizienten

$$\beta_n = 2\pi \int_0^\pi B(\psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi = (1 - \cos \psi_0)^{-1} \int_0^{\psi_0} P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi. \quad (4.75)$$

Geglättete Signalwerte  $\bar{f}$  können damit nach

$$\bar{f}(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \beta_n Y_n(\theta, \lambda) \quad (4.76)$$

bestimmt werden. Die Glättungskoeffizienten  $\beta_n$  heißen *Pellinen*-Koeffizienten. Rekursionsformeln zu ihrer Berechnung sind z.B. in SJÖBERG (1980) zu finden.

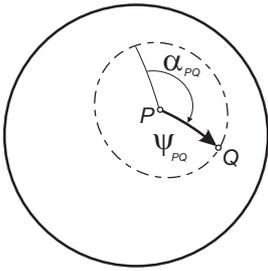


Abbildung 4.6: Polarkoordinaten auf der Kugel: sphärischer Abstand  $\psi_{PQ}$  und Azimut  $\alpha_{PQ}$ .

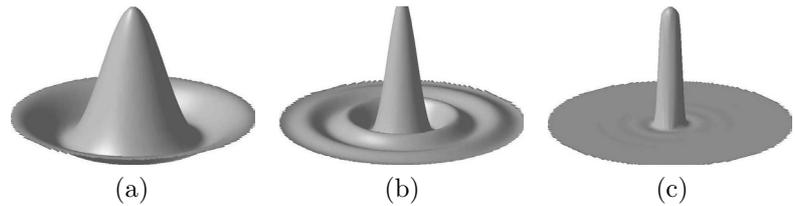


Abbildung 4.7: Isotroper Glättungsoperator  $B(\psi)$  aus SH-Entwicklung bis zum maximalen Grad  $N = 50$  (a),  $N = 110$  (b),  $N = 2000$  (c). Dargestellt ist die Funktion im Bereich  $0^\circ \leq \psi < 10^\circ$ , der Radius der sphärischen Kappe beträgt  $\psi_0 = 1^\circ$ .

### 4.3.2 Darstellung des Gravitationspotentials

Da das Gravitationspotential der Erde im Außenraum eine harmonische Funktion ist, kann es in einer SH-Reihe der Form (4.60) dargestellt werden. Die Koeffizienten  $\bar{a}_{nm}$  und  $\bar{b}_{nm}$  dieser Reihe haben wegen (4.62) die selbe physikalische Dimension wie das Potential selbst. Verwendet man statt dessen die dimensionslosen Koeffizienten  $\bar{C}_{nm}$  und  $\bar{S}_{nm}$ , so gilt für das Potential

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta). \quad (4.77)$$

#### Potentialmodelle

Für viele Anwendungen ist die obige Darstellung (4.77) vorteilhaft, da daraus das Potential  $V(r, \theta, \lambda)$  an beliebigen Stellen im Außenraum der Erde berechnet werden kann. Hierzu ist ein Satz von Potentialkoeffizienten  $\bar{C}_{nm}$ ,  $\bar{S}_{nm}$  notwendig. Aus (4.77) ist auch ersichtlich, dass sich die Koeffizienten auf eine Kugel vom Radius  $R$  beziehen und zusätzlich durch die geozentrische Gravitationskonstante  $GM$  skaliert werden. Beide Konstanten definieren zusammen mit den Koeffizienten ein Modell des Gravitationspotentials der Erde. Da dabei die Anzahl der Koeffizienten – im Gegensatz zur Formulierung in (4.77) – endlich ist, kann das Potential nicht beliebig genau angenähert werden. Der maximale Grad  $n$ , der im Potentialmodell enthalten ist, wird mit  $N_{max}$  bezeichnet. Damit ist nach (4.70) eine Beschränkung der Auflösung auf  $\lambda = 2\pi R/N_{max}$  verbunden. Die Anzahl der im Modell enthaltenen Koeffizienten beträgt  $(N_{max} + 1)^2$ .

Potentialmodelle basieren auf unterschiedlichen terrestrischen und satellitengestützten Daten. Die Wahl eines Modelles hängt von der Anwendung und der gewünschten Genauigkeit ab. Für Bahnberechnungen von Satelliten z.B. genügen Modelle mit geringer Auflösung als es für Anwendungen an der Erdoberfläche erforderlich ist. Hochauflösende Modelle basieren auf einer Kombination von terrestrischen Schwereanomalien und Satellitenbeobachtungen. Letztere liefern dabei die langwelligen, die Schwereanomalien die kurzwelligen Signalanteile. Die momentan gängigen Kombinationsmodelle erreichen Auflösungen bis  $N_{max} = 360$ , so z.B. das in dieser Arbeit verwendete Modell EGM96. Daneben gibt es einige ultrahochauflösende Modelle, z.B. das GPM98 (WENZEL, 1999) mit einem maximalen Entwicklungsgraden von  $N_{max} = 1800$ .

#### Das Potentialmodell EGM96

Das *Earth Gravity Model* EGM96 ist Teil des *World Geodetic System 1984* (WGS84). Dies ist ein vereinbartes terrestrisches Referenzsystem und enthält in seiner Definition ein geozentrisches Koordinatensystem, ein

Referenzellipsoid (festgelegt durch 4 Fundamentalparameter) und ein Geopotentialmodell - eben das EGM96 (SLATER & MALYS, 1998). Entwickelt wurde das WGS84 bzw. dessen Vorläufer WGS60/WGS66/WGS72 durch die U.S. - National Imagery and Mapping Agency NIMA bzw. deren Vorgängerorganisation, der Defence Mapping Agency DMA. Der Referenzrahmen wird definiert durch einen Satz global verteilter GPS-Stationen (GPS-Monitorstationen der U.S. Air Force, ergänzt durch Stationen von DMA/NIMA und dem Internationalen GPS Service IGS). Durch Festhalten der Koordinaten mehrerer IGS-Stationen auf ihren Werten aus dem International Terrestrial Reference Frame (ITRF) sind WGS84-Koordinaten praktisch identisch mit denen im ITRF. Der Referenzrahmen des EGM96 ist laut LEMOINE et al. (1998) innerhalb der Genauigkeitsgrenzen (ca. 10 cm) identisch mit den Rahmen ITRF91 und WGS84(G730<sup>4</sup>). Berechnungen mit dem EGM96 können somit unter Verwendung von WGS84-Koordinaten bzw. Koordinaten des ITRF und hierarchisch nachgeordneter Rahmen wie dem europäischen Referenzrahmen ETRS oder dem deutschen Referenzrahmen DREF durchgeführt werden (siehe auch NIMA, 1997).

Das EGM96 wurde in Zusammenarbeit von NIMA, NASA (National Aeronautics and Space Administration) und der Ohio State University erstellt. Abgeleitet wurde es durch Kombination von terrestrischen Schwerewerten, altimetrisch bestimmten Schwereanomalien über den Ozeanen und Bahnbeobachtungen von Satelliten (optische Beobachtungen, Laserdistanzmessungen sowie GPS- und Dopplerbeobachtungen zu ca. 40 verschiedenen Satelliten aus den frühen 70er bis Mitte der 90er Jahren). Das Modell enthält Potentialkoeffizienten  $\bar{C}_{nm}$ ,  $\bar{S}_{nm}$  vollständig bis Grad und Ordnung 360. Dies entspricht etwa einer räumlichen Auflösung von  $0.5^\circ \times 0.5^\circ$ .

### 4.3.3 Lineare Schwerefeldgrößen und ihre Eigenwerte

Wie in Kapitel 4.2 beschrieben, kann das Schwerefeld der Erde durch das Normalfeld eines Niveauellipsoids approximiert werden, so dass sich die Bestimmung des Schwerefelds auf die Bestimmung des Störpotentials  $T$  reduziert. Auch das Normalfeld kann in eine SH-Reihe entwickelt werden, wobei zu beachten ist, dass dieses wegen der Rotationssymmetrie des Ellipsoides von der geographischen Länge  $\lambda$  unabhängig ist. Dadurch entfallen alle Terme  $m > 0$ . Wegen der Symmetrie bezüglich des Äquators treten weiterhin nur Terme von geradzahligem Grad  $n$  auf, so dass sich für das Normalfeld

$$V^N(r, \theta) = \frac{GM^N}{R^N} \sum_{n=0(2)}^{\infty} \left(\frac{R^N}{r}\right)^{n+1} \bar{C}_n^N \bar{P}_n(\cos \theta) \quad (4.78)$$

schreiben lässt. Da das Normalfeld sehr glatt ist, kann die Reihe bei einem sehr niedrigen Grad abgebrochen werden. In NIMA (1997) werden Koeffizienten  $\bar{C}_n^N$  bis  $N_{max}^N = 10$  angegeben.

Mit (4.77) und (4.78) folgt für das Störpotential  $T = V - V^N$  die Beziehung

$$T = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n \left[ \left( \bar{C}_{nm} - \frac{GM^N}{GM} \left(\frac{R^N}{R}\right)^{n+1} \bar{C}_{nm}^N \right) \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda \right] \bar{P}_{nm}(\cos \theta). \quad (4.79)$$

Bei der Definition des Normalfelds ist man bestrebt, Masse  $M^N$  und Äquatorradius  $R^N$  so zu wählen, dass sie mit dem tatsächlichen Werten  $M$  bzw.  $R$  möglichst gut übereinstimmen. In Gleichung (4.79) entfällt dann der Zentralterm  $T_0$  vom Grad  $n = 0$  sowie die Skalierungsfaktoren vor den Koeffizienten  $\bar{C}_{nm}^N$ . Werden Ellipsoid und Koordinatensystem zudem geozentrisch gelagert, so entfallen die Terme von Grad  $n = 1$  und die Summation kann bei  $n = 2$  begonnen werden (zur Bedeutung der niederen harmonischen Koeffizienten siehe z.B. HEISKANEN & MORITZ (1967)). Es gilt dann

$$T = \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta), \quad (4.80)$$

mit

$$\Delta \bar{C}_{nm} = \begin{cases} \bar{C}_{nm} - \bar{C}_{nm}^N, & m = 0 \quad \wedge \quad n \in \{2, 4, 6, \dots, N_{max}^N\} \\ \bar{C}_{nm}, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Delta \bar{S}_{nm} = \bar{S}_{nm}.$$

Eine Abweichung der für das Niveauellipsoid vereinbarten Masse von der tatsächlichen Masse der Erde bewirkt einen konstanten Versatz der Potentialwerte um

$$T_0 = \frac{GM}{r} - \frac{GM^N}{r} = \frac{\delta GM}{r}. \quad (4.81)$$

<sup>4</sup>Zum Zeitpunkt der Erstellung des EGM96 war der Rahmen G730 die aktuelle Realisierung des WGS84. Die Bezeichnung G730 bedeutet, dass der Rahmen aus GPS-Messungen abgeleitet und operationell ab der GPS-Woche 730 (2. Januar 1994) genutzt wurde.

Hierauf wird im Zusammenhang mit dem EGM96 in Kapitel 4.4.4 noch näher eingegangen.

Aus (4.80) können auch SH-Darstellungen von Schwerefeldfunktionalen, wie Schwere- oder Höhenanomalien abgeleitet werden. Hierzu werden das Störpotential (4.80) bzw. dessen radiale Ableitung

$$T_r = -\frac{GM}{R^2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} (n+1) \sum_{m=0}^n (\Delta\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (4.82)$$

in die Fundamentalgleichung (4.24) bzw. in die Formel von *Bruns* (4.29) eingesetzt. Dann folgt für die Schwereanomalie

$$\begin{aligned} \Delta g &= -T_r - \frac{2}{r} T \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \Delta g_n \\ &= \frac{GM}{R^2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} (n-1) \sum_{m=0}^n (\Delta\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \end{aligned} \quad (4.83)$$

und für die Höhenanomalie

$$\begin{aligned} \zeta &= T/\gamma \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \zeta_n \\ &= \frac{GM}{\gamma R} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (\Delta\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta), \end{aligned} \quad (4.84)$$

wobei die  $\Delta g_n$  bzw.  $\zeta_n$  als Kugelflächenfunktionen des entsprechenden Funktionals bezeichnet werden. Nimmt man jeweils den geozentrischen Radiusvektor  $r$  statt dem Skalierungsfaktor  $R$  vor die Summe, so folgt mit dem einheitlichen *upward continuation* Operator

$$\lambda_n^{up} = \left(\frac{R}{r}\right)^n \quad (4.85)$$

für die Funktionale des Störpotentials

$$T = \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n^{up} \sum_{m=0}^n (\Delta\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (4.86a)$$

$$\zeta = \frac{GM}{\gamma r} \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n^{up} \sum_{m=0}^n (\Delta\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (4.86b)$$

$$\Delta g = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n^{up} (n-1) \sum_{m=0}^n (\Delta\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta). \quad (4.86c)$$

Der Term

$$\lambda_n^{\Delta g} = (n-1)/r \quad (4.87)$$

heißt spektraler Eigenwert der Schwereanomalie  $\Delta g$ . Für die Eigenwerte von Störpotential und Höhenanomalie gilt  $\lambda_n^T = \lambda_n^\zeta = 1$ . Die Eigenwerte ermöglichen im Spektralbereich einen sehr einfachen Übergang zwischen den verschiedenen Funktionalen. Der Übergang von Schwereanomalien zu Höhenanomalien erfolgt in SH-Darstellung durch eine einfache Multiplikation:

$$\zeta_n = \frac{r}{\gamma(n-1)} \Delta g_n. \quad (4.88)$$

Die äquivalente Darstellung im Ortsbereich ist gegeben durch das *Stokes'sche* Integral (4.35).

Auch die Stokesfunktion  $St(\psi)$  ist in einer SH-Reihe darstellbar. Da für alle isotropen Funktionen die Terme  $m > 0$  verschwinden, hängt auch  $St(\psi)$  nur vom SH-Grad ab und es gilt

$$St(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n P_n(\cos\psi), \quad (4.89)$$

mit

$$s_n = \frac{2n+1}{n-1} \quad (4.90)$$

### 4.3.4 Darstellung der topographischen Massen

Die verschiedenen spektralen Anteile des Gravitationspotentials gehen auf unterschiedliche Quellen zurück. Langwellige Strukturen werden meist von tiefer liegenden Massenordnungen z.B. im Erdmantel erzeugt, kurzwellige Strukturen hingegen von oberflächennahen Massen in der Erdkruste. Die topographischen Massen – sichtbarer Teil der Erdkruste – bestimmen durch ihre Form und Dichteverteilung die hochfrequenten Anteile des Gravitationsfelds. Unterschiedliche Funktionale des Gravitationsfelds tragen diesem Effekt in unterschiedlich starker Weise Rechnung. Schwereanomalien verstärken wegen des Faktors  $(n - 1)$  in (4.83) den Einfluss der Koeffizienten von hohem Grad. Sie sind damit deutlicher mit den kurzwelligen Strukturen korreliert als z.B. das Störpotential oder die Höhenanomalie. Aus numerischen Gründen ist es wünschenswert, mit möglichst glatten Signalen zu arbeiten. Deshalb wird versucht, das Schwerefeld von hochfrequenten Anteilen der Topographie zu befreien.

#### Isostasie

Reduziert man Freiluftanomalien um den Effekt der sichtbaren Massen, so erhält man Bougueranomalien. Diese sind zwar glatter als Freiluftanomalien, jedoch nicht frei vom Einfluss der Topographie, sondern stark negativ mit dieser korreliert. In Gebirgsregionen treten deutlich negative Anomalienwerte auf, über den Ozeanen hingegen positive. Dies ist die Folge der isostatischen Kompensation der Erde. Die leichtere Erdkruste schwimmt gleichsam auf dem schwereren Mantel. In der Theorie der Isostasie geht man davon aus, dass in der Tiefe ein statisches Gleichgewicht herrscht und der Druck, den die darüberliegenden Schichten ausüben, konstant ist. Um in einer bestimmten, so genannte Kompensationstiefe einen konstanten Druck zu bewirken, muss das Integral aller darüberliegenden Massenelemente konstant sein. Im hier verwendeten Modell nach *Airy/Heiskanen* wird dies dadurch erreicht, dass die leichte Kruste unter den Gebirgen dicker und unter den Ozeanen dünner ist. Unter den Gebirgen tritt im Untergrund ein Massendefizit auf, da das leichtere Krustenmaterial das schwerere Mantelmaterial ersetzt. Die tiefreichenden Krustenschichten unterhalb der Gebirge werden als Gebirgswurzeln bezeichnet.

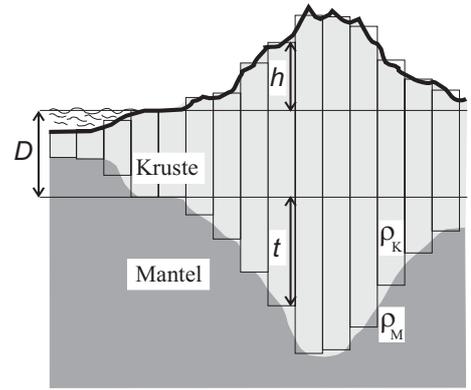


Abbildung 4.8: Isostatisches Modell von Airy und Heiskanen.

#### Topographisch–isostatische Potentialkoeffizienten

Zur Bestimmung des Gesamteffekts der topographischen Massen auf das Gravitationspotential sind auch die isostatischen Kompensationsmassen zu berücksichtigen. Im Modell von *Airy/Heiskanen* sind diese berechenbar durch den Dichteunterschied  $\Delta\rho = \rho_M - \rho_K$  zwischen Kruste und Mantel und es gilt die Gleichgewichtsbedingung

$$\iint_{\sigma} \int_{r=R-D-t}^{R-D} \Delta\rho r^2 dr d\sigma = \iint_{\sigma} \int_{r=R+h}^R \rho_K r^2 dr d\sigma, \quad (4.91)$$

worin für die Wurzeltiefe  $t$  in linearer Approximation (SÜNKELE, 1986) gilt

$$t = \left( \frac{R}{R-D} \right)^2 \frac{\rho_K}{\Delta\rho} h. \quad (4.92)$$

Dabei wurden, um kontinentale und ozeanische Bereiche nicht unterscheiden zu müssen, die Tiefen  $h'$  der Ozeane ersetzt durch die Höhe  $h$  einer Gesteinsschicht, die den selben Druck auf den Untergrund ausübt. Die so errechnete Höhe wird üblicherweise als *equivalent rock topography* bezeichnet (SÜNKELE, 1986). Sie ermöglicht eine global einheitliche Berechnung.

Die Ableitung der Koeffizienten basiert auf der allgemeinen Gleichung (??). Setzt man hierin für die Dichte jeweils die Dichte der Kruste  $\rho_K$  bzw. den Dichteunterschied  $\Delta\rho$  und integriert über die Höhe  $h$  der topographischen Massen bzw. die Tiefe  $t$  der Wurzel, so erhält man daraus die Koeffizienten der topographischen Massen

$$\left. \begin{array}{l} \bar{C}_{nm}^{topo} \\ \bar{S}_{nm}^{topo} \end{array} \right\} = \frac{1}{M} \frac{1}{2n+1} \iint_{\sigma} \int_{r=R}^{R+h} \left( \frac{r_Q}{R} \right)^n \rho_K(Q) \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{nm}(\theta_Q, \lambda_Q) \\ \bar{S}_{nm}(\theta_Q, \lambda_Q) \end{array} \right\} r_Q^2 d\sigma_Q \quad (4.93)$$

bzw. die Koeffizienten der isostatischen Kompensation

$$\left. \begin{array}{l} \bar{C}_{nm}^{com} \\ \bar{S}_{nm}^{com} \end{array} \right\} = \frac{1}{M} \frac{1}{2n+1} \iint_{\sigma} \int_{r=R-D-t}^{R-D} \left( \frac{r_Q}{R} \right)^n \Delta\rho(Q) \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{nm}(\theta_Q, \lambda_Q) \\ \bar{S}_{nm}(\theta_Q, \lambda_Q) \end{array} \right\} r_Q^2 d\sigma_Q. \quad (4.94)$$

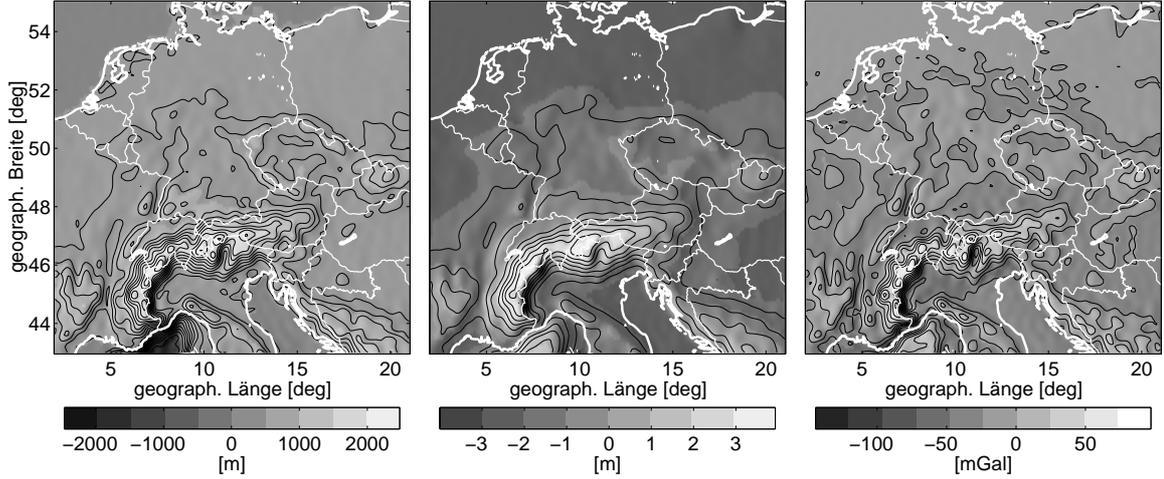


Abbildung 4.9: SH-Darstellung der Topographie in Mitteleuropa (links) aus globalem DGM bis  $N_{max} = 720$ . Daneben die zugehörigen topographisch-isostatischen Geoidhöhen (Mitte) und Schwereanomalien (rechts) nach dem Modell von Airy/Heiskanen. Die Geoidhöhen sind deutlich langwelliger als die Schwereanomalien.

Für die topographisch-isostatischen Koeffizienten, die beide Effekte berücksichtigen, gilt

$$\bar{C}_{nm}^{iso} = \bar{C}_{nm}^{topo} - \bar{C}_{nm}^{com} \quad \text{und} \quad \bar{S}_{nm}^{iso} = \bar{S}_{nm}^{topo} - \bar{S}_{nm}^{com}. \quad (4.95)$$

Für die Dichte von Kruste und Mantel werden meist die Standardwerte (TSOULIS, 1999b)  $\rho_K = 2.67 \text{ g/cm}^3$  und  $\rho_M = 3.27 \text{ g/cm}^3$  verwendet. Die Krustendicke  $D$  für eine topographische Höhe von  $h = 0$  kann nach HEISKANEN & VENING-MEINESZ (1958) zu ca. 30 km angenommen werden. Liegen topographische Höhen z.B. in Form eines Digitalen Geländemodells (DGM) global vor, so können aus (4.93) und (4.94) die topographisch-isostatischen Potentialkoeffizienten bestimmt werden. Daraus kann dann mittels der Formeln (4.86b) und (4.86c) direkt der Einfluss der topographischen Massen (inklusive Kompensation) auf Quasigeoid und Schwereanomalien bestimmt werden (siehe Abbildung 4.9).

### 4.3.5 Kovarianzfunktionen und Gradvarianzen

In Kapitel 3.3.3 wurden empirische Kovarianzfunktionen zur Beschreibung des Verhaltens gemessener Signale verwendet. Dabei wurden die Funktionen aus Messwerten innerhalb eines regional eng begrenzten Bereichs berechnet. Dehnt man diesen auf die gesamte Kugel aus, so können globale Kovarianzfunktionen abgeleitet werden. Wendet man zur Bestimmung der Signalvarianz Formel (3.30) global auf Schwereanomalien an, so ergibt sich im kontinuierlichen Fall

$$C(\psi = 0)^{\Delta g} = C_0^{\Delta g} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g(\theta, \lambda) \cdot \Delta g(\theta, \lambda) \, d\sigma, \quad (4.96)$$

wobei sich die Schwereanomalien  $\Delta g$  entsprechend (4.60) mit der SH-Reihe

$$\Delta g(\theta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \Delta g_n(\theta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\bar{a}_{nm} \bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) + \bar{b}_{nm} \bar{S}_{nm}(\theta, \lambda)) \quad (4.97)$$

darstellen lassen. Setzt man diese Darstellung in (4.96) ein, so ergibt sich unter Beachtung der Orthogonalitätsbeziehungen (4.61)

$$C_0^{\Delta g} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\bar{a}_{nm}^2 + \bar{b}_{nm}^2) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n^{\Delta g}. \quad (4.98)$$

Die  $c_n^{\Delta g}$  werden als *Gradvarianzen* der Schwereanomalien bezeichnet. Analog lassen sich die dimensionslosen Gradvarianzen  $c_n$  aus den dimensionslosen Potentialkoeffizienten bestimmen. Die in den Formeln (4.86a) bis (4.86c) verwendeten Dimensionierungsfaktoren und Eigenwerte  $\lambda$  gestatten eine Bestimmung der Gradvarianzen verschiedener Funktionale aus den  $c_n$ , z.B.

$$c_n^{\Delta g} = \gamma^2 (n-1)^2 c_n \quad (4.99)$$

oder auch die Transformation zwischen zwei beliebigen linearen Schwerefeldfunktionalen  $f(T)$  und  $g(T)$  nach

$$c_n^g = (\lambda^g / \lambda^f)^2 c_n^f. \quad (4.100)$$

Für die Kovarianzfunktion zwischen zwei Signalen im Abstand  $\psi$  gilt schließlich nach HEISKANEN & MORITZ (1967)

$$C(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n P_n(\cos \psi). \quad (4.101)$$

### Gradvarianzmodelle

Gradvarianzen geben Auskunft über die spektrale Stärke eines bestimmten Signals. Damit kann bestimmt werden, welcher Anteil am Gesamtsignal aus einem bestimmten Frequenzbereich zu erwarten ist. Dies ist nützlich, wenn man z.B. den Fehler bestimmen will, den man begeht, wenn man eine SH-Reihe bei einem endlichen Grad  $N$  abbricht. Theoretisch ist dies jedoch nur möglich, wenn man die Potentialkoeffizienten der Grade  $n > N$  kennt. Dies ist in der Praxis gerade nicht gegeben. Es zeigt sich jedoch, dass die Gradvarianzen des Gravitationspotentials über alle Grade ein typisches Abklingverhalten zeigen, das durch relativ einfache Funktionen modelliert werden kann. Gängige Gradvarianzmodelle sind z.B. das Modell nach *Kaula* (KAULA, 1966) für dimensionslose Gradvarianzen

$$c_n = 0.5 \frac{1.6 \cdot 10^{-10}}{n^3} \quad (4.102)$$

oder das *Tscherning/Rapp*-Modell für Gradvarianzen von Schwereanomalien (TSCHERNING & RAPP, 1974)

$$\begin{aligned} c_n^{\Delta g} &= 7.5 \text{ mGal}^2 & ; \text{ für } n = 2 \\ c_n^{\Delta g} &= s^{n+2} \frac{A(n-1)}{(n-2)(n+B)} & ; \text{ für } n \geq 3. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Dabei gilt für die Parameter  $s = 0.999617$ ,  $A = 425.28 \text{ mGal}^2$  und  $B = 24$ .

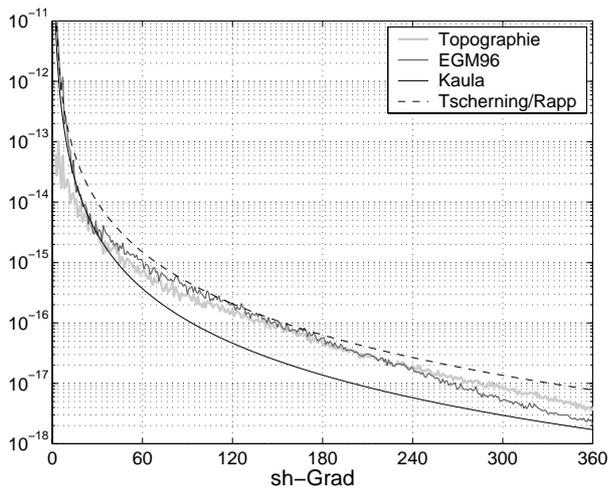


Abbildung 4.10: Gradvarianzen  $c_n$  aus EGM96 und aus isostatischen Potentialkoeffizienten der Topographie, sowie die Modelle nach Kaula und Tscherning/Rapp. Für niedere Grade  $n$  liegt das topographische Signal z.T. mehrere Größenordnungen unter der Signalstärke des EGM96. Die topographischen Massen leisten hier keinen wesentlichen Beitrag zum Schweresignal. Für höhere Grade wird der Signalanteil der Topographie immer größer. Etwa ab Grad  $n=250$  wird deutlich, dass das EGM96 gegenüber dem hier verwendeten DGM stark geglättet ist, da hier die aus dem DGM berechnete Signalstärke diejenige des EGM96 übersteigt. Evtl. ist auch der in den Berechnungen angenommene Betrag der Airy-Kompensation für hohe Grade etwas zu gering.

### 4.3.6 Prädiktion mit lokalen Gradvarianzmodellen

Die numerische Auswertung des *Stokes*'schen Integrals (2.13) erfolgt in diskretisierter Form und erfordert die Verwendung mittlerer Schwereanomalien in der Größe des entsprechenden Diskretisierungsintervalls. Oft stehen jedoch nur Punktwerte oder Blockmittelwerte unterschiedlicher Größe zur Verfügung. Zur Berechnung eines einheitlichen Satzes von Blockmittelwerten kann dann das bereits in Kapitel 3.3.1 beschriebene Verfahren der Prädiktion nach kleinsten Quadraten (LSP) verwendet werden.

Hiernach kann ein Schätzwert  $\Delta\tilde{g}_P$  der Schwereanomalie  $\Delta g_P$  am Punkt  $P$  bei bekannter Signalkovarianzfunktion  $C(s)$  aus den umliegenden Anomalien  $\Delta g_i$  folgendermaßen bestimmt werden:

$$\Delta\tilde{g}_P = C_{Pi} C_{ij}^{-1} \Delta g_i. \quad (4.104)$$

Darin ist  $C_{Pi}$  die Kovarianzmatrix zwischen Berechnungspunkt  $P$  und den Quellpunkten  $i$  und  $C_{ij}$  die Kovarianzmatrix zwischen den Quellpunkten.

Analog können Blockmittelwerte der Schwere aus Punktschwerewerten nach

$$\Delta\tilde{\bar{g}}_P = \bar{C}_{Pi} C_{ij}^{-1} \Delta g_i \quad (4.105)$$

und aus Blockmittelwerten nach

$$\Delta\tilde{\bar{g}}_P = \bar{C}_{Pi} \bar{C}_{ij}^{-1} \Delta\bar{g}_i \quad (4.106)$$

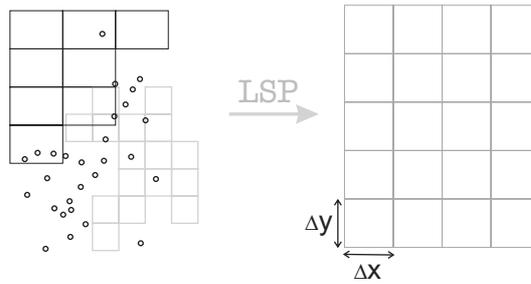


Abbildung 4.11: Schätzung eines einheitlichen Satzes von Blockmittelwerten der Größe  $\Delta x \times \Delta y$  aus einem inhomogenen Datensatz von Punktwerten und Blockmittelwerten unterschiedlicher Größe mittels Kleinst-Quadrate-Prädiktion.

berechnet werden, wobei  $\bar{C}$  Kovarianzmatrizen zwischen Punkt- und Blockmittelwerten und  $\bar{\bar{C}}$  Kovarianzmatrizen zwischen Blockmittelwerten bezeichnen.

### Empirische Kovarianzen im Ortsbereich

Für die Kovarianz zweier Schwereanomalien gilt nach HEISKANEN & MORITZ (1967)

$$C = \mathcal{M}\{\Delta g \cdot \Delta g\}. \quad (4.107)$$

Dies entspricht der Formulierung in Gleichung (3.30), wobei  $\mathcal{M}\{\cdot\}$  der von Moritz eingeführte Mittelwertoperator ist. Für die Kovarianz zwischen Punkt- und Blockmittelwert bzw. zwischen Blockmittelwerten gilt entsprechend

$$\bar{C}_i = \mathcal{M}\{\Delta \bar{g} \cdot \Delta g_i\} \quad (4.108)$$

$$\bar{\bar{C}} = \mathcal{M}\{\Delta \bar{g} \cdot \Delta \bar{g}\}. \quad (4.109)$$

Theoretisch gilt für die mittlere Schwereanomalie innerhalb eines Blocks der Größe  $\Delta x \times \Delta y$

$$\Delta \bar{g} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} \int_{y-\Delta y/2}^{y+\Delta y/2} \Delta g(x, y) \, dx dy. \quad (4.110)$$

Dies setzt eigentlich eine kontinuierliche Überdeckung des Blocks mit Schwereanomalien voraus. Gedanklich kann dies dadurch erreicht werden, dass man aus den wenigen diskret vorhandenen Schwereanomalien an allen Stellen innerhalb des Blocks Werte nach Gleichung (4.104) prädiziert. Setzt man den Blockmittelwert  $\Delta \bar{g}$  in (4.108) ein und vertauscht die Reihenfolge von Integration und Mittelwertbildung, so folgt für die Kovarianzfunktion zwischen Punkt- und Blockmittelwert

$$\begin{aligned} \bar{C}_i &= \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_x \int_y \mathcal{M}\{\Delta g(x, y) \cdot \Delta g(x_i, y_i)\} \, dx dy \\ &= \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_x \int_y C_i \, dx dy. \end{aligned} \quad (4.111)$$

Der Mittelwert

$$\bar{\bar{C}} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{x_i} \int_{y_i} \bar{C}_i \, dx_i dy_i \quad (4.112)$$

der Kovarianzfunktion  $\bar{C}_i$  aus allen, innerhalb eines beliebig anderen Blocks liegenden Punkte  $i$ , entspricht der Kovarianz  $\bar{C}$  zwischen Blockmittelwerten.

Bei der Durchführung der Berechnungen kann ein Block jeweils in eine Anzahl von Sub-Blöcken unterteilt werden. Sind diese nicht zu groß, so kann man ihre Kovarianz mit der des jeweiligen Blockmittelwerts gleichsetzen. Der Mittelwert aller Sub-Block-Kovarianzen ist dann die Kovarianz des Blocks. Setzt man Gleichung (4.111) in (4.112) ein, so erkennt man, dass zur Bestimmung der Block-Block-Kovarianz  $\bar{\bar{C}}$  eine 4-fach Integration bzw. Summation notwendig ist. Um eine verlässliche Kovarianzfunktion abzuleiten, müssen nach ASSMUS & KRAUS (1974) pro Abstandsklasse mindestens 20–30 Paare von Blöcken verwendet werden. Dies bedeutet einen enormen Rechenaufwand.

### Empirische Kovarianzen im Spektralbereich

Der hohe numerische Aufwand im Ortsbereich kann vermieden werden, wenn die Berechnungen statt dessen im Spektralbereich durchgeführt werden. Blockmittelwerte  $\Delta\bar{g}$  entstehen entsprechend Gleichung (4.76) durch Multiplikation mit den *Pellinen*-Koeffizienten  $\beta_n(\psi)$ . Der Radius  $\psi$  des Glättungsoperators wird dabei so gewählt, dass die zugehörige sphärische Kappe die selbe Fläche hat, wie der zu berechnende Blockmittelwert. Wie in Kapitel 4.3.5 beschrieben, gilt für die zur Prädiktion benötigten Kovarianzen

$$C = \sum_{n=2}^{\infty} c_n^{\Delta g} P_n(\cos \psi) \quad (4.113)$$

$$\bar{C}_i = \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n(\psi_P) c_n^{\Delta g} P_n(\cos \psi) \quad (4.114)$$

$$\bar{\bar{C}} = \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n(\psi_P) \beta_n(\psi_Q) c_n^{\Delta g} P_n(\cos \psi). \quad (4.115)$$

Darin ist  $\psi$  der sphärische Abstand zwischen den beteiligten Punkten bzw. Blockzentren und  $\psi_P$  bzw.  $\psi_Q$  entsprechen den Größen der jeweiligen Blockmittelwerte.

Voraussetzung für die sehr effektiv auszuwertenden Gleichungen (4.113)–(4.115) ist jedoch die Kenntnis der Gradvarianzen  $c_n^{\Delta g}$ . Die in Kapitel 4.3.5 beschriebenen globalen Modelle sind hierfür nicht geeignet, da sie lokale Signaleigenschaften oft nur unzureichend beschreiben. Lokale Gradvarianzen können jedoch aus lokalen empirischen Kovarianzfunktionen durch Invertierung der Gleichungen (4.113)–(4.115) abgeleitet werden. Wurde die Kovarianzfunktion beispielsweise aus Blockmittelwerten abgeleitet, so gilt unter Ausnutzung der Orthogonalitätsbeziehungen (4.68) der *Legendre*-Polynome

$$c_n^{\Delta g} = \frac{2n+1}{2} \beta_n(\psi_P)^{-2} \int_{\psi=0}^{\pi} \bar{\bar{C}}(\psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi. \quad (4.116)$$

Die so bestimmten Gradvarianzen können nun verwendet werden, um beliebige Kovarianzen zwischen Punkt- und Blockmittelwerten unterschiedlicher Größe zu berechnen. Dieses Vorgehen bietet sich vor allem dann an, wenn man mit inhomogenen Datensätzen arbeitet. Theoretisch ist zwar auch die Integration (4.116) numerisch recht aufwendig, da für genaue Ergebnisse ein feines Diskretisierungsintervall  $\Delta\psi$  verwendet werden muss, jedoch kann die Integration bereits nach kurzen sphärischen Distanzen  $\psi$  abgebrochen werden, wenn das Signal über größere Entfernungen unkorreliert ist. Dies ist der Fall, wenn das Signal vor der Berechnung um deterministisch bestimmbare Anteile (globales Modell, topographische Effekte) reduziert wurde.

## 4.4 Methodik der Geoidberechnung

### 4.4.1 Kombination unterschiedlicher Datenquellen

Die Berechnung eines genauen Geoids, sei es im Ortsbereich durch Lösung von Integralformeln oder im Frequenzbereich durch SH-Synthese, stellt folgende Anforderungen an die verwendeten Daten:

1. globale Überdeckung und
2. hohe Auflösung.

Beide Anforderungen sind mit den in der Praxis verwendeten Daten nicht ohne weiteres zu erfüllen:

- Potentialmodelle stellen das Schwerfeld global dar, sie erfüllen damit die erste Forderung. Ihre Auflösung ist jedoch begrenzt, so dass sie nur lang- und mittelwellige Strukturen des Geoids wiedergeben. Die spektrale Auflösung des Modells EGM96 beispielsweise beträgt  $n = 360$ , was nach Gleichung (4.70) etwa einer räumlichen Auflösung von 50 km entspricht. Kurzwelligere Signalanteile, die durchaus im Bereich mehrerer Dezimeter liegen können, sind in Potentialmodellen nicht enthalten.
- Schweremessungen liegen in regionalen Bereichen, wie z.B. in Mitteleuropa, oft in hoher räumlicher Dichte vor. Dies ermöglicht die Darstellung der Feinstruktur des Geoids, womit die zweite Forderung erfüllt ist. Eine verlässliche Ableitung langwelliger Strukturen ist jedoch mit einem regional begrenzten Datensatz nicht möglich. Auch die Zusammenführung verschiedener regionaler zu einem globalen Datensatz ist in der Praxis problematisch und führt zu langwelligen Verbiegungen des Geoids, da die unterschiedlichen Datensätze untereinander oft sehr inhomogen sind. Dies betrifft sowohl die Genauigkeit der Werte, die Datendichte und deren spektrale Auflösung (Verwendung von Blockmittelwerten unterschiedlicher Größe) als auch die verwendeten Bezugssysteme.

Potentialmodelle erfüllen also die erste, jedoch nicht die zweite Forderung, Schwerewerte hingegen die zweite, nicht aber die erste Forderung. Es ist daher von Vorteil, beide Datenquellen zu kombinieren. Wie bereits in Kapitel 4.1 beschrieben, genügt es, hochauflösende Schwereanomalien in einer begrenzten Umgebung des Berechnungspunkts zu verwenden. Die außerhalb dieser Umgebung erforderliche Information kann dann mit ausreichender Auflösung aus einem Potentialmodell bezogen werden. Zur Berechnung hochauflösender Geoiden und der Kombination unterschiedlicher Datensätze sei an dieser Stelle noch auf die Arbeiten von DENKER (1988) und BAŠIĆ (1989) verwiesen.

Neben Schwereanomalien und einem Potentialmodell ist es bei stark bewegtem Gelände (wie z.B. in Bayern) vorteilhaft, zusätzlich topographische Informationen in die Berechnung einzubeziehen. Dies geschieht in Form von Geländemodellen mit einer räumlichen Auflösung im Bereich von wenigen 100 m und darunter und ermöglicht die Modellierung hochfrequenter Strukturen, die durch Schwereanomalien mit einem durchschnittlichen Abstand im km-Bereich nicht erfassbar sind. Eine Reduktion der Anomalien um topographische Anteile führt zu einer deutlichen Glättung des Feldes. Dies ist bei geringer Stützpunktdichte oder inhomogener Verteilung der Schwerewerte vor allem in gebirgigen Regionen erforderlich, um repräsentative Blockmittelwerte der Anomalien bestimmen zu können. Außerdem wirkt sich eine Glättung des Feldes positiv auf das Konvergenzverhalten der *Molodenskii*-Reihe aus, so dass die Berechnung der Höhenanomalie schon nach wenigen Termen mit ausreichender Genauigkeit abgebrochen werden kann (mehr hierzu in Kapitel 4.5.2).<sup>5</sup>

Zusammenfassend können die drei genannten Datenquellen in folgende, sich gegenseitig überlappende Spektralbereiche eingeteilt werden:

- Potentialmodelle ermöglichen die Berechnung lang- und mittelwelliger Strukturen bis ca. 50 km.
- Regional vorliegende Schwereanomalien gestatten die Ableitung mittel- und kurzwelliger Strukturen bis zu einer Auflösung von wenigen km.
- Digitale Geländemodelle dienen der Modellierung kurz- und ultrakurzwelliger Strukturen bis unter 100 m.

#### Remove–Restore

Um die drei genannten Datenquellen zu kombinieren ist folgendes, als *remove–restore*-Technik bezeichnetes Vorgehen üblich:

<sup>5</sup>Topographische Reduktionen bedeuten eine rechnerische Entfernung der entsprechenden Massen. Bei Lösung der Randwertaufgabe nach *Molodenskii* werden Oberflächenschwerewerte verwendet. Da die Oberfläche selbst Randfläche ist, sind topographische Reduktionen theoretisch in keiner Weise erforderlich. Sie sind jedoch numerisch günstig. Im Gegensatz hierzu sind zur Lösung der *Stokes*'schen Randwertaufgabe topographische Reduktionen unumgänglich, da sich die Anomalien hier auf das Geoid beziehen, welches meist innerhalb der topographischen Massen liegt und deshalb keine Randfläche ist.

1. Reduktion der Schwereanomalien um die aus Potentialmodell und DGM modellierbaren lang- und kurzwelligen Anteile (*remove*-Schritt). Die reduzierten Werte werden im Folgenden als residuale Schwereanomalien, oder kurz als Residualanomalien bezeichnet.
2. Transformation der residualen Schwereanomalien in residuale Höhenanomalien durch Lösung der Randwertaufgabe (regional beschränkte Integration der Residualanomalien).
3. Bestimmung des Geoideffekts der zuvor reduzierten Anteile und deren Addition zu den residualen Höhenanomalien (*restore*-Schritt).

Dies bietet folgende Vorteile:

- Die rechenaufwendige Integration von Schwereanomalien kann auf eine relativ kleine Umgebung des eigentlichen Berechnungsgebiets beschränkt werden. Nur dort ist hochauflösende Information notwendig. Für weiter entfernte Integrationsgebiete reicht die langwellige Information des Potentialmodells aus.
- Die Berechnung der Geoidhöhe beruht auf der Integralformel von *Stokes*. Durch die sphärische Approximation entsteht ein Fehler in der Größenordnung der Erdabplattung (ca. 0.3%). Dieser Fehler ist kleiner, wenn statt der unreduzierten Schwereanomalien die Residualanomalien verwendet werden, da diese nur noch einen geringen Betrag des Gesamtsignals enthalten.
- Die Reduktion der kurzwelligen Strukturen durch ein DGM glättet das Anomalienfeld und verringert damit den Vertikalgradienten des Feldes. Die Reihenentwicklung zur Lösung der Randwertaufgabe konvergiert deshalb schneller.
- Die flächenhafte Integration erfordert die Berechnung von Blockmittelwerten der Schwereanomalien. Die Glättung des Feldes durch topographische Reduktionen ermöglicht eine genauere Schätzung dieser Blockmittelwerte.

Im Folgenden werden die einzelnen Reduktionsschritte näher beschrieben.

#### Kombination von Schwereanomalien und Potentialmodell

Zur Kombination von Schwereanomalien und Potentialmodell stehen prinzipiell zwei unterschiedliche Verfahren zur Verfügung, nämlich die

- Kombination im Ortsbereich und die
- Kombination im Spektralbereich.

Bei Kombination im Spektralbereich (siehe z.B. MARSH & VINCENT, 1973; RAPP & RUMMEL, 1975) wird das Signal in verschiedene spektrale Anteile aufgetrennt. Die Schwereanomalien  $\Delta g$  werden um die aus dem Potentialmodell berechenbaren lang- und mittelwelligen Anteile  $\Delta g^{EGM}$  (berechenbar nach Formel (4.86c)) reduziert, so dass sie nur noch hochfrequente Anteile enthalten. Die Integration dieser reduzierten Anomalien liefert entsprechend die hochfrequenten Anteile der Geoidhöhe. Die lang- und mittelwelligen Anteile werden wieder aus dem Potentialmodell berechnet. Dies entspricht der oben dargestellten *remove-restore*-Technik. Die Geoidhöhe lässt sich somit schreiben als <sup>6</sup>

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3, \quad (4.117)$$

wobei für die einzelnen Anteile gilt

$$\zeta_1 = R \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \quad (4.118)$$

$$\zeta_2 = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma^c} (\Delta g_Q - \Delta g_Q^{EGM}) St(\psi_{PQ}) d\sigma_Q \quad (4.119)$$

$$\zeta_3 = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma - \sigma^c} (\Delta g_Q - \Delta g_Q^{EGM}) St(\psi_{PQ}) d\sigma_Q. \quad (4.120)$$

Die Integration der reduzierten Anomalien wird in zwei räumlich getrennte Bereiche aufgeteilt, nämlich in eine sphärische Kappe  $\sigma^c$  vom Radius  $\psi_0$  um den Berechnungspunkt (Innenzone) und die entsprechende Außenzone  $\sigma - \sigma^c$ . Da die reduzierten Anomalien nur einen geringen Beitrag zum Gesamtsignal leisten und ihr Einfluss mit

<sup>6</sup>Die Formeln sollen das Prinzip der Kombination verdeutlichen und stellen nicht die exakte Formulierung für die Lösung des *Molodenskii*-Problems dar. Hierzu müsste die Residualanomalie  $\Delta g_{res} = \Delta g - \Delta g^{EGM}$  im Integrationsbereich noch analytisch fortgesetzt bzw. weitere Terme der Reihenentwicklung nach *Molodenskii* angefügt werden.

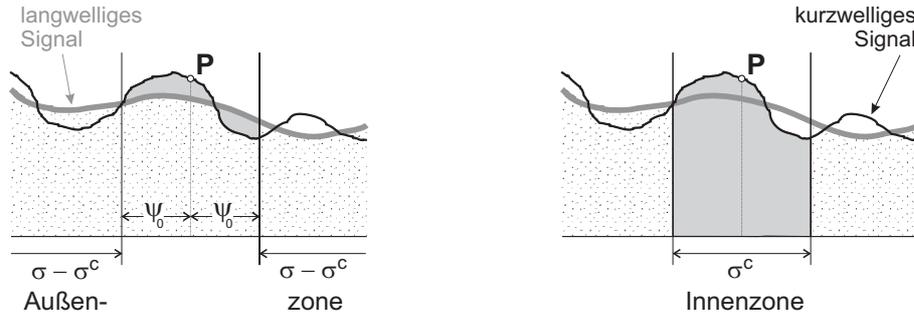


Abbildung 4.12: Verschiedene räumliche (Innen-/Außenzone) und spektrale (lang-/kurzwellig) Anteile der Schwereanomalien als Quelldaten für die Berechnung der Geoidhöhe am Punkt P. Dargestellt sind die Kombination von Potentialmodell (gepunktet) und regionalen Schwereanomalien (grau) im Spektralbereich (links) und im Ortsbereich (rechts).

wachsendem Abstand vom Berechnungspunkt zusätzlich sinkt, kann ihr Beitrag zur Geoidhöhe ab einer gewissen Entfernung vernachlässigt werden. Die Größe von  $\sigma^c$  wird deshalb in der Praxis so gewählt, dass  $\zeta_3$  vernachlässigt werden kann. Die Integration bleibt also tatsächlich auf die Innenzone  $\sigma^c$  beschränkt. Es werden nur die globalen lang- und mittelwelligen Anteile  $\zeta_1$  und die hochfrequenten Anteile aus der Innenzone  $\zeta_2$  berechnet.

Bei Kombination im Ortsbereich (siehe z.B. MOLODENSKII et al., 1962; HEISKANEN & MORITZ, 1967) wird das Signal in räumlich verschiedene Anteile aufgetrennt. Auch hier erfolgt die Integration der Schwereanomalien nur in einer Innenzone  $\sigma^c$ , jedoch werden hier statt der residualen die unreduzierten Anomalien  $\Delta g$  integriert. Die Geoidhöhe lässt sich dann schreiben als

$$\zeta' = \zeta'_1 + \zeta'_2 + \zeta'_3, \quad (4.121)$$

wobei gilt:

$$\zeta'_1 = R \sum_{n=2}^N \lambda_n^c(\psi_0) \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \quad (4.122)$$

$$\zeta'_2 = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma^c} \Delta g_Q St(\psi_{PQ}) d\sigma_Q \quad (4.123)$$

$$\zeta'_3 = R \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n^c(\psi_0) \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta). \quad (4.124)$$

Der Anteil  $\zeta'_2$  enthält die gesamte spektrale Bandbreite des Signals, es fehlt jedoch der Beitrag der Außenzone. Dieser wird wieder in zwei spektrale Bereiche getrennt. Der Anteil  $\zeta'_1$  deckt den Spektralbereich bis zum maximalen SH-Grad  $N$  des Potentialmodells ab, der Anteil  $\zeta'_3$  die höheren Frequenzen. Beide Anteile sind so gefiltert, dass die Innenzone bei der SHS keinen Beitrag leistet. Hierzu dienen die Koeffizienten  $\lambda_n^c(\psi_0)$ . Der Term  $\zeta'_3$  liefert analog zu  $\zeta_3$  nur die hochfrequenten Anteile aus der Außenzone und kann bei entsprechender Wahl von  $\sigma^c$  vernachlässigt werden kann.

Die beiden Kombinationsmethoden sind, wie RAPP & RUMMEL (1975) gezeigt haben, gleichwertig. Die Kombination im Ortsbereich bietet sich vor allem für Fehleranalysen an, da in diesem Fall das Fehlerfortpflanzungsgesetz eine einfachere Formel liefert und die Koeffizienten  $\lambda_n^c(\psi_0)$  eine einfache Darstellung der Fehleranteile im Spektralbereich ermöglichen. Hierzu sei auf die Fehlerbetrachtung in Kapitel 4.4.4 hingewiesen.

Die Kombination im Ortsbereich ist in der Praxis weniger gut geeignet, da die Schwereanomalien meist als Blockmittelwerte in einem regelmäßigen geographischen Gitter gegeben sind. Die  $\lambda_n^c$ -Koeffizienten schneiden jedoch eine sphärische Kappe um den Berechnungspunkt aus, so dass es an den Kappenrändern zu Inkonsistenzen kommt. Eine Bestimmung von Blockmittelwerten in regelmäßigen sphärischen Sektoren rund um den Berechnungspunkt würde dieses Problem zwar beheben, erfordert jedoch in jedem Berechnungspunkt eine Neuberechnung der Blockmittelwerte. Bei der späteren Geoidberechnung wird deshalb die Kombination im Spektralbereich verwendet. Dadurch können auch die genannten Vorteile der *remove-restore*-Technik voll ausgenutzt werden.

#### Räumliche Filterung des Potentialmodells:

Die spektralen Koeffizienten  $\lambda_n^c$  in den Gleichungen (4.122) und (4.124) bewirken eine räumliche Filterung des Potentialmodells. Die Innenzone leistet dann keinen Beitrag zum Signal. Der Anteil  $\zeta'_1$  lässt sich theoretisch auch

darstellen durch die Integration

$$\zeta'_1 = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma-\sigma^c} \int \Delta\bar{g}_Q St(\psi_{PQ}) d\sigma_Q = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=\psi_0}^{\pi} \Delta\bar{g}_Q St(\psi_{PQ}) \sin\psi d\psi d\alpha \quad (4.125)$$

oder, wenn man die modifizierte (im Ortsbereich gefilterte) *Stokes-Funktion* (siehe Abbildung 4.13)

$$\bar{St}(\psi) = \begin{cases} 0 & , \text{für } 0 \leq \psi < \psi_0 \\ St(\psi) & , \text{für } \psi_0 \leq \psi \leq \pi \end{cases} \quad (4.126)$$

verwendet durch

$$\zeta'_1 = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} \Delta\bar{g}_Q \bar{St}(\psi_{PQ}) \sin\psi d\psi d\alpha. \quad (4.127)$$

Dabei wurden in den Gleichungen (4.125) und (4.127) statt der Schwereanomalien  $\Delta g$  die zugehörigen Blockmittelwerte  $\Delta\bar{g}$  verwendet, da der Anteil  $\zeta'_1$  entsprechend Gleichung (4.122) nur den Signalanteil bis zu einer bestimmten Auflösung enthält. Für die hier dargestellte räumliche Filterung ist es jedoch unerheblich, ob  $\Delta g$  oder  $\Delta\bar{g}$  verwendet werden.

Analog Formel (4.89) ist die modifizierte *Stokes-Funktion* durch die Reihe

$$\bar{St}(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \bar{s}_n P_n(\cos\psi) \quad (4.128)$$

darstellbar und es gilt entsprechend Formel (4.90) für die Koeffizienten

$$\lambda_n^c(\psi_0) = \bar{s}_n(\psi_0) \frac{n-1}{2n+1}. \quad (4.129)$$

Wird bei der SHS keine Innenzone ausgespart, d.h. ist  $\psi_0 = 0^\circ$ , so gilt  $St(\psi) = \bar{St}(\psi)$  bzw.  $\bar{s}_n(0) = s_n = (2n+1)/(n-1)$  und es folgt speziell  $\lambda_n^c(\psi_0 = 0) = 1$ . Unter Ausnutzung der Orthogonalitätsbeziehung (4.68) der *Legendre-Polynome* folgt für die Koeffizienten

$$s_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} St(\psi) \cdot P_n(\cos\psi) \sin\psi d\psi \quad (4.130)$$

und analog für die Koeffizienten der modifizierten Funktion

$$\bar{s}_n(\psi_0) = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} \bar{St}(\psi) \cdot P_n(\cos\psi) \sin\psi d\psi = \frac{2n+1}{2} \underbrace{\int_{\psi_0}^{\pi} St(\psi) \cdot P_n(\psi) \sin\psi d\psi}_{=: Q_n(\psi_0)}. \quad (4.131)$$

Die Koeffizienten  $Q_n(\psi_0)$  werden als *Molodenskii-Abbruchkoeffizienten* bezeichnet. Ihre Berechnung ist mit dem von PAUL (1973) entwickelten Algorithmus effizient möglich. Setzt man Formel (4.131) in (4.129) ein, so ergibt sich weiterhin

$$\lambda_n^c(\psi_0) = \frac{n-1}{2} Q_n(\psi_0). \quad (4.132)$$

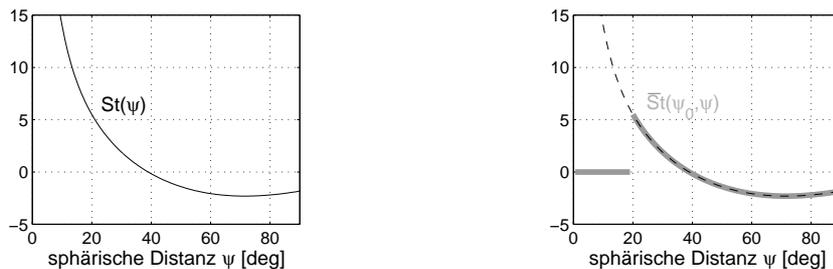


Abbildung 4.13: Unmodifizierte Stokes-Funktionen  $St(\psi)$  (links) und modifizierte Funktion  $\bar{St}(\psi_0, \psi)$  (rechts), hier dargestellt für eine Innenzone von  $\psi_0 = 20^\circ$ .

### Reduktion atmosphärischer Anteile

In der Formulierung der Randwertaufgabe (Kapitel 4.2.1) wurde davon ausgegangen, dass sich außerhalb der Randfläche, welche von der Oberfläche der Kontinente und Ozeane gebildet wird, keine Massen befinden. Demnach wäre die Laplace-Gleichung (4.3) im Außenraum erfüllt. Dies gilt jedoch aufgrund der atmosphärischen Massen nur genähert. Deshalb werden die Schwerewerte vor Lösung der Randwertaufgabe um die Wirkung  $\delta g_a$  der Atmosphäre reduziert und anschließend der entsprechende Effekt  $\delta \zeta_a$  auf das Geoid restituiert (*remove-restore*).

Zur Bestimmung der Schwerewirkung auf einen Punkt  $P$  in Höhe  $h$  wird das von MORITZ (1974) beschriebene Modell verwendet (siehe Abbildung 4.14). Darin werden Erde und Atmosphäre vereinfachend als sphärisch betrachtet und die Topographie vernachlässigt. Dichteveränderungen treten in der Atmosphäre nur in vertikaler Richtung auf. Die oberhalb  $P$  gelegenen Atmosphärenschichten  $S_o$  ( $h > h_P$ ) haben keine Wirkung auf die Schwere in  $P$ , so dass nur die Massen der Schichten  $S_u$  unterhalb  $P$  ( $h < h_P$ ) betrachtet werden müssen. Deren Schwerewirkung beträgt

$$g_a = \frac{Gm_u(r)}{r^2} = \frac{GM_a}{r^2} - \frac{Gm_o(r)}{r^2}, \quad (4.133)$$

worin  $r$  der geozentrische Radiusvektor von  $P$ ,  $m_u(r)$  die Masse von  $S_u$ ,  $m_o(r)$  die Masse der äußeren Schicht  $S_o$  und  $M_a$  die Gesamtmasse der Atmosphäre ist.

Bei Reduktion der Schwereanomalien um diesen Effekt ist zu beachten, dass in der Definition geodätischer Referenzsysteme, wie z.B. dem WGS84 (NIMA, 1997) oder dem GRS80 (MORITZ, 1988) die Gesamtmasse der Erde auch die Massen der Atmosphäre einschließt. Diese sind sozusagen in das Referenzellipsoid verschoben. Der Normalschwerewert  $\gamma$  beinhaltet somit bereits die Gesamtmasse  $M_a$  der Atmosphäre, welche bei Berechnung der Schwereanomalie

$$\Delta g = g - \gamma \quad (4.134)$$

implizit subtrahiert wird. Zur Reduktion der Schwereanomalie ist somit nur noch der zweite Term auf der rechten Seite von (4.133) zu beachten und es gilt für die reduzierte Schwereanomalie

$$\Delta g = g - \gamma - \left( -\frac{Gm_o(r)}{r^2} \right) = g - \gamma + \delta g_a. \quad (4.135)$$

Integration über die äußeren Atmosphärenschichten liefert für die demnach zu reduzierende Masse

$$m_o(r) = 4\pi \int_r^\infty \rho(r) r^2 dr, \quad (4.136)$$

wobei die höhenabhängige Dichte  $\rho(r)$  aus einem Atmosphärenmodell (z.B. *Cospar International Reference Atmosphere* CIRA oder *U.S. Standard Atmosphere*) entnommen werden kann. Eine vereinfachte Formel zur Berechnung lautet (siehe z.B. LEMOINE et al., 1998)

$$\delta g_a = 0.87 \cdot e^{-0.116 H^{1.047}}, \quad (4.137)$$

das Ergebnis in mGal gegeben ist und die Meereshöhe  $H$  des Berechnungspunkts in km einzusetzen ist.

Für den auf der Erdoberfläche relevanten Höhenbereich ergeben sich daraus für die Reduktion  $\delta g_a$  Werte zwischen 0.87 mGal ( $H = 0$  km) und 0.31 mGal ( $H = 8$  km). Diese Werte sind z.B. in IAG (1971) tabelliert.

RAPP & RUMMEL (1975) haben gezeigt, dass die Vernachlässigung dieser Reduktion bei Beschränkung der Integration auf eine sphärische Kappe zu langwelligen Geoidfehlern bis zu 3m führen kann. Dabei verursachen starke Höhenunterschiede in gebirgigem Gelände Variationen im Bereich weniger Dezimeter (siehe RUMMEL & RAPP, 1976). In Bayern ergeben sich bei Beschränkung der Integration auf eine sphärische Kappe von  $\psi = 4^\circ$  (dies entspricht etwa dem in Abbildung 4.32 dargestellten Bereich) Werte zwischen 41 cm und 43 cm. Dies Werte stimmen gut mit dem in SJÖBERG (1998) für eine Kappenradius von  $\psi = 5^\circ$  angegebenen Wert von 45 cm überein.

Der nach der Integration der reduzierten Schwereanomalien zu restituierende Geoideffekt beträgt nach MORITZ (1974)

$$\delta \zeta_a = -\frac{G}{\gamma} \int_r^\infty \frac{m_o(r)}{r^2} dr. \quad (4.138)$$

In Bayern ergeben sich hierfür Werte zwischen  $-0.65$  cm und  $-0.53$  cm. Da die Variationen deutlich unter 1 cm liegen, wurde der Effekt vernachlässigt.

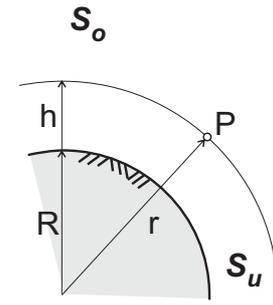


Abbildung 4.14: Atmosphärenschichten oberhalb und unterhalb des Berechnungspunkts  $P$ .

### Reduktion topographischer Anteile

Wie bereits zu Beginn dieses Kapitels angesprochen, erweisen sich topographische Reduktionen im Rahmen der Quasigeoidbestimmung als vorteilhaft, da sie eine Glättung des Schwerfelds bewirken. Hierzu bietet sich prinzipiell die Berechnung von Bougueranomalien oder von isostatisch kompensierten Anomalien an. Im ersten Fall wird die Wirkung aller Massen oberhalb des Geoids berechnet, im zweiten Fall zusätzlich die Wirkung der isostatischen Massendefizite im Untergrund (siehe Abbildung 4.15). Beide Reduktionstypen glätten das Anomalienfeld, wobei die Vernachlässigung der isostatischen Kompensation zu relativ großen lang- und mittelwelligen Restsignalen führt. Beide Reduktionsarten sind z.B. in HEISKANEN & MORITZ (1967) ausführlich beschrieben.

Bei Berechnung der Reduktionen ist jedoch zu beachten, dass die aus einem Potentialmodell berechenbaren Anomalien  $\Delta g^{EGM}$  die Wirkung aller Massen des Erdkörpers bis hin zur maximalen Auflösung des Modells beschreiben. Die Reduktion der verwendeten Anomalien um den globalen Anteil  $\Delta g^{EGM}$  bedeutet daher, dass implizit lang- und mittelwellige Anteile der topographischen und auch der isostatischen Massen entfernt werden (siehe z.B. FORSBERG, 1994; KUHN, 2000). Dies entspricht der Reduktion eines Geländemodells mit der Auflösung des verwendeten Potentialmodells. Eine zusätzliche Reduktion  $\delta g^{topo}$  aller Massen durch Berechnung von Bouguer- bzw. isostatischen Anomalien führt deshalb dazu, dass die bereits in  $\Delta g^{EGM}$  enthaltenen Effekte doppelt reduziert werden.

Es bietet sich daher an, wie von FORSBERG & TSCHERNING (1981) vorgeschlagen, in  $\delta g^{topo}$  nur die kurzwelligen Anteile der Topographie zu reduzieren. Man wählt sich hierzu eine mittlere Topographie als Referenzfläche und modelliert nur die Massendefizite bzw. -überschüsse der wahren Topographie bzgl. dieser Referenz. Das entstehende residuale Massenmodell wird als *residual terrain model* (RTM) bezeichnet und die entsprechende Reduktion mit  $\delta g^{RTM}$ . Die Auflösung der Referenztopographie sollte der Auflösung des verwendeten Potentialmodells entsprechen, um alle Massen zu reduzieren. Allerdings können auch Flächen mit höherer Auflösung verwendet werden. Dann verbleiben langwellige Signalanteile in den Residualanomalien. Die beabsichtigte Glättung des Feldes bleibt davon jedoch unberührt. Auf Vor- und Nachteile von Referenzflächen mit höherer Auflösung wie auch auf die Modellierung und Berechnung der RTM-Anomalien wird im folgenden Kapitel eingegangen.

Nach Reduktion aller beschriebenen Anteile (Potentialmodell  $\Delta g^{EGM}$ , Atmosphäre  $\delta g_a$ , Topographie  $\delta g^{topo}$ ) ergibt sich schließlich für die Residualanomalie

$$\Delta g^{res} = g - \gamma - \Delta g^{EGM} + \delta g_a - \delta g^{topo}. \quad (4.139)$$

Wird diese Anomalie in die *Molodenskii*-Reihe eingesetzt, so erhält man residuale Höhenanomalien  $\zeta^{res}$ . Restitution der lang- und mittelwelligen Anteile  $\zeta^{EGM}$  sowie der topographischen Wirkung  $\zeta^{topo}$  ergibt die endgültige Höhenanomalie  $\zeta$  (der atmosphärische Anteil wird vernachlässigt).

#### 4.4.2 Topographische Reduktionen

Grundlage für die Modellierung topographischer Effekte sind digitale Geländemodelle (DGM). Diese liegen üblicherweise als Matrix von Höhenwerten bezüglich eines regelmäßigen Koordinatengitters vor. Lokale und regionale Modelle beziehen sich meist auf ebene kartesische Koordinaten (z.B. GK-Koordinaten), globale Modelle auf geographische Koordinaten.

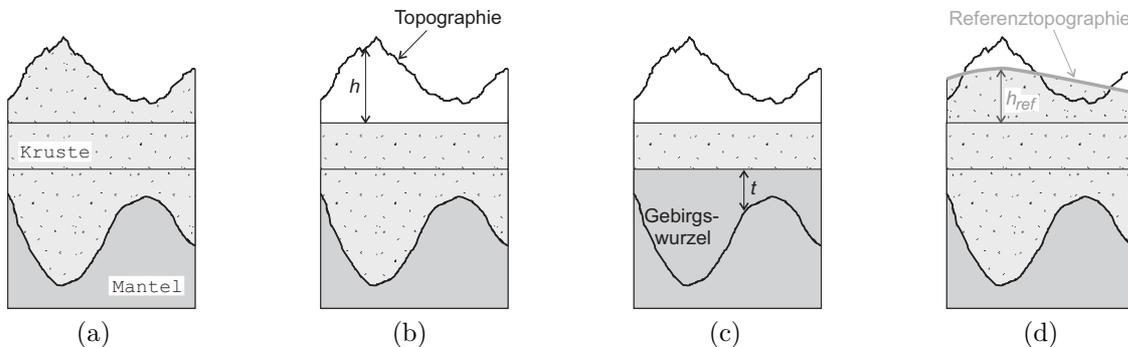


Abbildung 4.15: Verschiedene Schwereanomalien und zugehörige Massenmodelle. (a) Freiluftanomalien – hier werden keine topographischen Reduktionen angebracht. (b) Bougueranomalien – die topographischen Massen der Höhe  $h$  werden rechnerisch entfernt, die Anomalien sind deshalb glatter als Freiluftanomalien, enthalten jedoch langwellige Signalanteile wegen isostatischer Dichteanomalien im Untergrund. (c) Isostatische Anomalien – zusätzlich zur Topographiereduktion werden die Dichteanomalien der Gebirgsurzeln bis zur Tiefe  $t$  ausgeglichen. (d) RTM-Anomalien – es wird lediglich die kurzwellige Topographie über bzw. unter der Referenzhöhe  $h_{ref}$  reduziert, langwellige Strukturen bleiben erhalten.

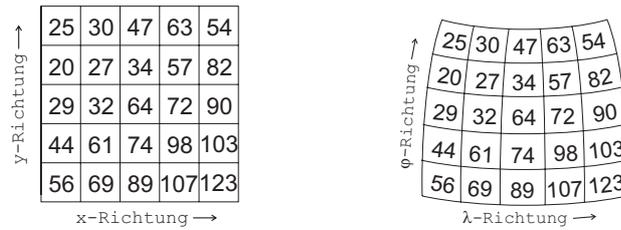


Abbildung 4.16: DGM als Matrix von Höhenwerten in ebenen kartesischen (links) und geographischen (rechts) Koordinaten.

Nach Gleichung (2.3) gilt für das Potential einer beliebigen Massenanzordnung

$$V(P) = G \iiint_{\Omega} \frac{1}{l} \rho(\mathbf{r}) d\Omega \quad (4.140)$$

und entsprechend (2.4) für deren Anziehung (Gravitationsbeschleunigung)

$$\mathbf{a} = \text{grad } V. \quad (4.141)$$

Zur numerischen Auswertung dieser Gleichungen wird das DGM in einfache geometrische Körper zerlegt, über deren Volumen  $\Omega$  analytisch integriert werden kann. Welche Körper hierzu verwendet werden, hängt vom vorliegenden Modell (eben oder geographisch) und der angestrebten Genauigkeit ab. Ebene DGM-Darstellungen legen eine Modellierung in Rechteckprismen nahe. Im sphärischen Fall würden sich entsprechend Tesseroiden ergeben (siehe z.B. KUHN, 2000), also Kugelsegmente, die von zwei Meridianebenen ( $\lambda = \text{konstant}$ ) und zwei Kegelmantelflächen (Kegelspitze im Geozentrum, Kegelmantel entlang von Breitenkreisen  $\varphi = \text{konstant}$ ) begrenzt werden. Die Verwendung von Tesseroiden ist vor allem dann vorteilhaft, wenn sich die Berechnung über Entfernungen erstreckt, in denen sich die Krümmung der Erde bemerkbar macht.

Da die Wirkung der Feinstruktur eines felderzeugenden Körpers mit wachsendem Abstand von diesem zunehmend gedämpft wird (siehe auch Kapitel 4.3), können für weit vom Berechnungspunkt entfernte Massen ohne Genauigkeitsverlust alternativ einfachere Modelle verwendet werden. Hierfür eignen sich z.B. Masselinien oder Punktmassen (siehe z.B. TSOULIS, 1999a; KUHN, 2000). Die vereinfachte Modellierung hat eine deutliche Erhöhung der Recheneffizienz zur Folge.

Wie bereits im letzten Kapitel angesprochen, ist es im Rahmen der *remove-restore*-Technik angebracht, nur die Wirkung einer residualen Topographie (RTM) zu bestimmen, da die Effekte langwelliger Geländeanteile bereits im globalen Potentialmodell enthalten sind. Ein RTM besteht aus positiven und negativen Massen (siehe Abbildung 4.18), deren Wirkungen sich bereits in relativ geringer Entfernung vom Berechnungspunkt gegenseitig aufheben. Die Auswertung kann somit auf ein relativ kleines Integrationsgebiet beschränkt werden. Über solch geringe Distanzen wirkt sich andererseits die Krümmung der Erde nicht wesentlich aus, so dass im Fall eines RTM genügend genau mit ebenen Rechteckprismen gearbeitet werden kann. Auf die Verwendung von Tesseroiden konnte deshalb in dieser Arbeit verzichtet werden.

Im Gegensatz zur Anziehung (Gravitationsbeschleunigung) wirken sich entfernte Massen noch relativ stark auf das Potential aus. Es muss deshalb zur Bestimmung der Potentialwirkung ein größeres Integrationsgebiet verwendet werden. Andererseits reagiert das Potential weniger empfindlich auf die Feinstruktur der felderzeugenden Massen

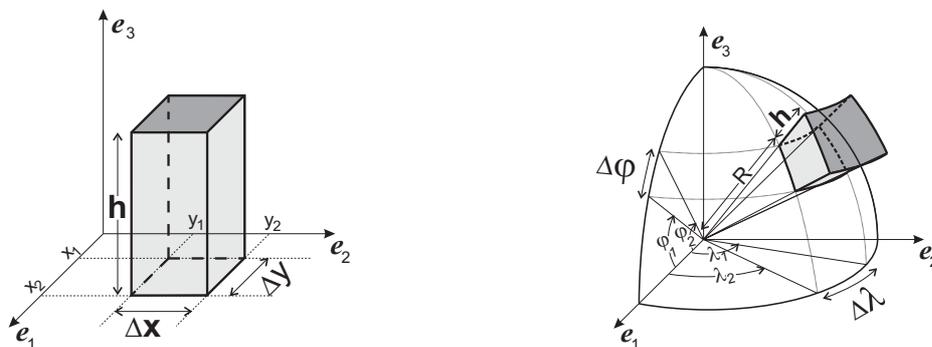


Abbildung 4.17: Modellierung des DGM in geometrischen Körpern: Rechteckprisma (links) und Tesseroid (rechts).

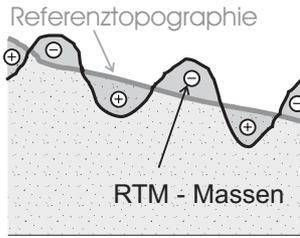


Abbildung 4.18: RTM-Massenmodell mit positiven und negativen Dichteanomalien. Das Vorzeichen entspricht der Wirkung der RTM-Reduktion.

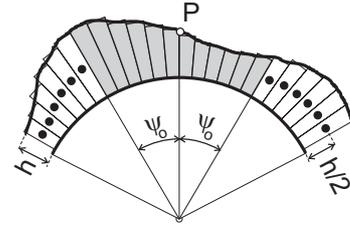


Abbildung 4.19: Modellierung der Topographie mit Prismen bzw. Tesseroiden der Höhe  $h$  innerhalb einer Innenzone  $\psi_0$  um den Berechnungspunkt  $P$ . Außerhalb werden Punktmassen in mittlerer Geländehöhe verwendet.

als die Anziehung, so dass schon in geringer Entfernung zum Berechnungspunkt mit ausreichender Genauigkeit ein Punktmassenmodell verwendet werden kann.

Insgesamt wurde also zur Berechnung der Anziehung ausschließlich ein ebenes Prismenmodell und zur Berechnung der Potentialwirkung in der innersten Zone ebenfalls ein Prismenmodell und ansonsten ein Punktmassenmodell verwendet. Für letzteres ergibt sich aus Gleichung (4.140)

$$V = \frac{GM}{r}, \quad (4.142)$$

wobei  $r$  der Abstand zwischen Punktmasse und Berechnungspunkt ist. Die Masse  $M$  der Punktmasse entspricht dabei der Gesamtmasse eines Prismas der Dichte  $\rho$  mit Grundfläche  $\Delta x \cdot \Delta y$  und Höhe  $h$

$$M = \rho \Delta x \Delta y h. \quad (4.143)$$

Für die Potentialwirkung eines Rechteckprismas mit konstanter Dichte ergibt sich in ebenen kartesischen Koordinaten am Berechnungspunkt  $P$

$$V(P) = G\rho \iiint_{x y z} [(x_P - x)^2 + (y_P - y)^2 + (z_P - z)^2]^{-1/2} dx dy dz. \quad (4.144)$$

Die Gravitationsbeschleunigung ergibt sich durch Differentiation von  $V$  in  $z$ -Richtung zu

$$|\mathbf{a}| = V_z(P) = G\rho \iiint_{x y z} \frac{z_P - z}{[(x_P - x)^2 + (y_P - y)^2 + (z_P - z)^2]^{3/2}} dx dy dz. \quad (4.145)$$

Zur Lösung der Integrale legt man den Ursprung des Koordinatensystems günstig in den Berechnungspunkt  $P$ . Dann folgt nach NAGY (1966) durch Integration

$$V(P) = G\rho \left\| \left\| \begin{aligned} &xy \ln(z+r) + xz \ln(y+r) + yz \ln(x+r) - \\ &-\frac{x^2}{2} \arctan \frac{yz}{rx} - \frac{y^2}{2} \arctan \frac{xz}{ry} - \frac{z^2}{2} \arctan \frac{xy}{rz} \end{aligned} \right. \right\|_{x_1} \left\| \right\|_{y_1} \left\| \right\|_{z_1}^{z_2} \quad (4.146)$$

und

$$V_z(P) = G\rho \left\| \left\| \begin{aligned} &x \ln(y+r) + y \ln(x+r) - z \arctan \frac{xy}{zr} \end{aligned} \right. \right\|_{x_1} \left\| \right\|_{y_1} \left\| \right\|_{z_1}^{z_2}. \quad (4.147)$$

Bezeichnet  $d = (x_2 - x_1)/2 = (y_2 - y_1)/2$  die halbe Ausdehnung des Prismas in  $x$ - und  $y$ -Richtung, so gilt für die Integrationsgrenzen in horizontaler Richtung

$$\begin{aligned} x_2 &= x - x_P + d & y_2 &= y - y_P + d \\ x_1 &= x - x_P - d & y_1 &= y - y_P - d. \end{aligned}$$

Die Integrationsgrenzen in vertikaler Richtung variieren je nach dem, ob zur Berechnung von Bougueranomalien die gesamte Topographie zwischen Meeresniveau und Oberfläche reduziert werden soll, oder im Fall von RTM-Anomalien nur eine residuale Topographie.



Abbildung 4.20: Modellierung der RTM-Topographie (links) und der gesamten Topographie (rechts) mit Prismen.



Abbildung 4.21: Alternative Modellierung der Gesamtopographie durch Bouguerplatte (links) und Geländekorrekturen (rechts).

*Integrationsgrenzen bei Berechnung von RTM-Anomalien:*

Zur Berechnung der RTM-Reduktion sind in (4.147) die Integrationsgrenzen

$$\begin{aligned} z_2 &= z - z_P \\ z_1 &= z_{ref} - z_P \end{aligned}$$

zu wählen, wobei  $z_{ref}$  die Höhe der langwelligen Referenztopographie ist (siehe Abbildung 4.20, links).

*Integrationsgrenzen bei Berechnung von Bougueranomalien:*

Für Bougueranomalien gilt wegen Integration über alle topographischen Massen (siehe Abbildung 4.20, rechts):

$$\begin{aligned} z_2 &= z - z_P & \text{bzw.} & & z_2 &= z_P - z \\ z_1 &= 0 - z_P & & & z_1 &= z_P. \end{aligned}$$

Alternativ kann das Gelände zur Berechnung von Bougueranomalien in eine horizontale Platte in Höhe  $h = z_P$  des Berechnungspunkts (Bouguerplatte) und die entsprechende Resttopographie aufgeteilt werden (siehe Abbildung 4.21, Mitte bzw. rechts). Für die Wirkung der Platte gilt

$$\delta g_{BO} = 2\pi G\rho h. \quad (4.148)$$

Die Reduktion von Freiluftanomalien um diesen Wert liefert *einfache Bougueranomalien*, zusätzliche Berücksichtigung der Resttopographie die *verfeinerte Bougueranomalie*

$$\Delta g_{TC} = \Delta g - 2\pi G\rho h + \delta g_{TC}. \quad (4.149)$$

Die Geländekorrekturen  $\delta g_{TC}$  ergibt sich wiederum aus Gleichung (4.147), wobei für die vertikalen Integrationsgrenzen gilt:

$$\begin{aligned} z_2 &= z_P - z \\ z_1 &= 0. \end{aligned}$$

Der Wert der Geländekorrekturen ist immer positiv. Dies unterscheidet sie von der RTM-Reduktion und bedeutet, dass die Berechnung der Geländekorrekturen nicht auf die nähere Umgebung des Berechnungspunkts beschränkt bleiben kann.

Die Wirkung der residualen Massen des RTM hängt davon ab, ob es sich bezüglich der Referenztopographie um „Täler“ ( $z < z_{ref}$ , Masse wird durch Reduktion aufgefüllt) oder um „Berge“ ( $z > z_{ref}$ , Masse wird durch Reduktion abgetragen) handelt und zusätzlich davon, ob sich die Massen oberhalb oder unterhalb des Berechnungspunkts  $P$  befinden. Prinzipiell vergrößern positive Massen unterhalb  $P$  ( $z < z_P$ ) den Schwerewert  $g_P$  in  $P$ , positive Massen oberhalb  $P$  ( $z > z_P$ ) verringern ihn. Insgesamt kann man die in Tabelle 4.1 dargestellten Fälle unterscheiden. Dabei zeigen die Fälle 1 und 2, dass die Wirkung der Massen am Berechnungspunkt selbst immer

Tabelle 4.1: Wirkung der RTM-Massen auf die Schwere  $g_P$  im Berechnungspunkt  $P$ . Der Beitrag gibt an, ob die entsprechenden Massen im Rahmen der RTM-Reduktion aufgefüllt (+) oder abgetragen (-) werden. In Kombination aus Wirkung und Beitrag ergibt sich die Gesamtwirkung der Reduktion auf die Schwere.

	Fall	Wirkung auf $g_P$	Beitrag	Gesamtwirkung
1)	$z_{ref} < z = z_P$	+	-	-
2)	$z_{ref} > z = z_P$	-	+	-
3)	$z < z_{ref} < z_P$	+	+	+
4)	$z > z_{ref} > z_P$	-	-	+
5)	$z_{ref} < z < z_P$	+	-	-
6)	$z_{ref} > z > z_P$	-	+	-

negativ ist. Die Fälle 3 bis 6 zeigen, dass die Reduktion  $\delta g^{RTM}$  an den restlichen Stellen positives und negatives Vorzeichen haben kann. Diese oszillierende positive und negative Wirkung hebt sich in größerer Entfernung vom Berechnungspunkt gegenseitig auf. Nach FORSBERG (1994) können abhängig von der halben Wellenlänge  $\Delta = \lambda/2$  der verwendeten Referenztopographie und dem vorliegenden Geländetyp (Flachland bis Hochgebirge) Massen ab einer Entfernung von  $2\Delta$  bis  $3\Delta$  vernachlässigt werden. In der vorliegenden Arbeit wurde eine Referenzfläche der Auflösung  $n = 720$  verwendet, was etwa einer halben Wellenlänge von 25 km entspricht. In Testrechnungen wurde festgestellt, dass die Beiträge der Topographie ab einer Entfernung von ca. 75 km vernachlässigt werden können. Dies stimmt gut mit den oben angegebenen Grenzen überein.

Nach Reduktion von  $\delta g^{RTM}$  entstehen Schwerewerte, die die Wirkung der geglätteten Topographie repräsentieren, jedoch am Ort der ursprünglichen Oberfläche liegen. In der Regel befindet sich keiner dieser Schwerewerte auf der Referenztopographie, sondern entweder darüber oder darunter, so dass die Schwerestationen bezüglich den Massen der Referenztopographie in freier Luft schweben oder in ihnen vergraben sind (vgl. Abbildung 4.22). Die RTM-reduzierten Schwerewerte an den Punkten innerhalb der Massen repräsentieren jedoch nicht mehr das harmonische Außenraumpotential (sie liegen ja innerhalb der Massen). Sie können deshalb nicht für die Lösung der GRWA verwendet werden. Es sind deshalb an diesen Punkten Schwerewerte gesucht, die das harmonischen Außenraumpotentials repräsentieren. Um dies zu erreichen haben FORSBERG & TSCHERNING (1981) vorgeschlagen, an die RTM-reduzierten Anomalien, welche unterhalb der Referenztopographie liegen, eine so genannte harmonische Korrektur anzubringen, welche in Anlehnung an die Reduktion von *Poincaré* und *Prey* (siehe z.B. HEISKANEN & MORITZ, 1967) gefunden werden kann. Hierzu sei angenommen, dass die Referenztopographie in der Umgebung der Schwerestation so glatt ist, dass sie durch eine Bouguerplatte angenähert werden kann. Die Tiefe der Schwerestation innerhalb der Massen betrage  $h = z_{ref} - z_P$ . Die mit dem harmonischen Außenraumpotential verknüpften Schwerewerte an der Stelle  $P$  findet man, indem man

1. das Gelände über der Station in Form einer Bouguerplatte entfernt (die Wirkung auf die Schwere beträgt  $\delta g_{BO} = +2\pi G\rho h$ ),
2. den Schwerewert nach oben fortsetzt (unter Verwendung des Freiluftgradienten – über der Station liegen ja keine Massen mehr),
3. die Bouguerplatte unter der um  $h$  angehobenen Station wieder einsetzt (die Wirkung auf die Schwere beträgt wieder  $\delta g_{BO} = +2\pi G\rho h$ ; die Schwere repräsentiert jetzt das harmonische Außenraumpotential) und
4. den Freiluftgradienten in umgekehrter Richtung anbringt. Man erhält eine harmonische Fortsetzung der Außenraum-Anomalien innerhalb der Massen.

Die Schritte 2 und 4 heben sich in ihrer Wirkung gegenseitig auf, so dass sich als Gesamtwirkung die harmonische Korrektur  $4\pi G\rho h$  ergibt. Dieser Wert ist an allen Schwerestationen anzubringen, die sich unterhalb der Referenz-



Abbildung 4.22: Gelände vor und nach Reduktion der RTM-Topographie. Die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  der realen Topographie repräsentieren nach der Reduktion Schwerestationen, die in „freier Luft schweben“ ( $P_1$ ) bzw. in den Massen „vergraben“ sind ( $P_2$ ).

topographie befinden. Danach können alle Anomalien als harmonisch fortgesetzte Funktionale des geglätteten Außenraumpotentials am Ort der ursprünglichen Topographie angesehen werden.

Eine alternative Berechnung der RTM-Reduktionen ist möglich, falls an den Schwerestationen die Geländekorrekturen  $\delta g_{TC}$  bzw. die so genannte Faye-Anomalie

$$\Delta g_{Faye} = \Delta g_{FA} + \delta g_{TC} \quad (4.150)$$

gegeben ist. In jedem Punkt  $P$  entspricht die Berechnung der Faye-Anomalie dem Auffüllen bzw. Abtragen des Geländes bis zur Höhe  $z_P$  dieses Punktes. Das Gelände um  $P$  entspricht dann einer Bouguerplatte der Höhe  $z_P$  (siehe Abbildung 4.23, Mitte). Der Schwerewert am Punkt  $P$  repräsentiert das harmonische Außenraumpotential. Ist die Referenztopographie wieder glatt genug, um durch eine ebene Platte angenähert werden zu können, so kann der Schwerewert bezüglich der Referenztopographie dadurch bestimmt werden, dass zunächst die Bouguerplatte der Höhe  $z_P$  entfernt wird und anschließend eine Platte der Höhe  $z_{ref}$  der Referenztopographie angebracht wird. Die entsprechenden Reduktionen betragen  $-2\pi G\rho z_P$  und  $+2\pi G\rho z_{ref}$ , so dass sich für die RTM-reduzierte Anomalie ergibt:

$$\begin{aligned} \Delta g_{RTM} &= \Delta g_{FA} - 2\pi G\rho(z_P - z_{ref}) + \delta g_{TC} \\ &= \Delta g_{Faye} - 2\pi G\rho(z_P - z_{ref}). \end{aligned} \quad (4.151)$$

Diese Näherung ist für langwellige Referenztopographien gültig und bietet sich dann an, wenn dem Nutzer in einem Gebiet kein DGM, jedoch ein Datensatz von Schwerewerten inkl. Geländekorrekturen  $\delta g_{TC}$  zur Verfügung steht. Die RTM-Reduktion kann dann ohne direkte Kenntnis des Geländes berechnet werden.

Zur Berechnung der harmonischen Korrektur und bei Bestimmung von RTM- aus Faye-Anomalien ist es günstig, möglichst langwellige Referenztopographien zu verwenden. Nur dann kann das Gelände in der Nähe des Berechnungspunktes als Bouguerplatte dargestellt werden. Andererseits sollte die Auflösung der Referenztopographie nicht unter der des verwendeten Potentialmodells liegen. Außerdem ist die Verwendung einer kurzwelligeren Topographie numerisch günstig, da sich die Referenztopographie dann besser an das wahre Gelände anpasst. Dann besteht das RTM aus kleineren und häufiger oszillierenden Massen, so dass der Integrationsradius bei Berechnung der Reduktionen kleiner gehalten werden kann. In der Praxis ist also ein Kompromiss zu finden, so dass der Rechenaufwand begrenzt werden kann und trotzdem die Referenzfläche genügend genau durch eine Bouguerplatte angenähert werden kann.

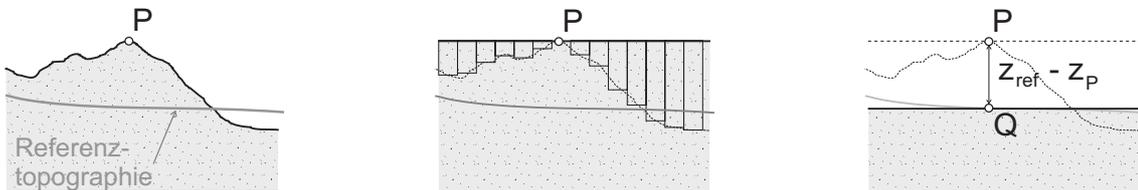


Abbildung 4.23: Alternative Reduktion der RTM-Massen: Anbringen der Geländekorrektur  $\delta g_{TC}$  entspricht dem Auffüllen des Geländes bis zur Bouguerplatte (Mitte). Anschließende Reduktion einer Platte der Höhe  $z_P - z_{ref}$  liefert bei glatter Referenztopographie ein RTM-reduziertes Gelände.

### 4.4.3 Numerische Berechnungsverfahren

In den vorangegangenen Kapiteln wurde der Weg zur Lösung des *Molodenskii*-Problems beschrieben. Numerisch sind dabei in fast allen Schritten aufwendige Integrationen durchzuführen. In diskreter Form geschrieben sind diese Integrale vom Typ

$$f(P) = \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{\varphi_Q=\varphi_1}^{\varphi_2} \sum_{\lambda_Q=\lambda_1}^{\lambda_2} g_Q h(\psi_{PQ}) \cos \varphi_Q \Delta\varphi_Q \Delta\lambda_Q. \quad (4.152)$$

Im mathematischen Sinn ist dies eine Faltung der Ortsfunktion  $g_Q$  mit der Gewichtsfunktion  $h(\psi_{PQ})$ . Die Abstandsfunktion wird dabei wie ein Fenster von Berechnungspunkt zu Berechnungspunkt geschoben, jeweils elementweise mit der Ortsfunktion multipliziert und schließlich werden all diese Produkte aufsummiert. Symbolisch wird die Faltung als

$$f = g * h \quad (4.153)$$

geschrieben. Diese im Ortsraum sehr aufwendige Operation kann jedoch durch Anwendung spektraler Techniken sehr viel effizienter ausgewertet werden. Grundlage hierfür ist die Fouriertransformation.

**Fouriertransformation**

Prinzipiell lässt sich jedes periodische Signal  $x(t)$  durch Überlagerung unendlich vieler Schwingungen der Kreisfrequenz  $n \cdot \omega_0$  in der *Fourierreihe*

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(n \cdot \omega_0 t) + b_n \sin(n \cdot \omega_0 t)] \tag{4.154}$$

darstellen. Dies ist das 1–dimensionale, ebene Analogon zu den in Kapitel 4.3.1 beschriebenen sphärisch harmonischen Reihen. Die Basisfunktionen sind hier die trigonometrischen Funktionen sin und cos. Die entsprechenden Orthogonalitätsbeziehungen lauten

$$\left. \begin{array}{l} \int_0^T \sin(n\omega_0 t) \sin(k\omega_0 t) dt \\ \int_0^T \cos(n\omega_0 t) \cos(k\omega_0 t) dt \end{array} \right\} = \frac{T}{2} \cdot \delta_{nk}; \quad n \neq 0 \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} \int_0^T \cos^2(n\omega_0 t) dt = T; \quad n = 0 \\ \int_0^T \cos(n\omega_0 t) \sin(k\omega_0 t) dt = 0. \end{array} \tag{4.155}$$

Unter Ausnutzung dieser Beziehungen können die Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  analog zur SHA (4.62) bestimmt werden durch

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n \\ b_n \end{array} \right\} = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \left\{ \begin{array}{l} \cos(n\omega_0 t) \\ \sin(n\omega_0 t) \end{array} \right\} dt \quad \text{und} \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt. \tag{4.156}$$

Die Bestimmung der Koeffizienten nach (4.156) wird als Fouriertransformation bezeichnet. Die Synthetisierung des Signals  $x(t)$  aus den Koeffizienten nach (4.154) ist die Inverse Fouriertransformation. Ein effizienter Algorithmus zur Durchführung von (4.156) ist die schnelle Fouriertransformation FFT (*fast Fourier transformation*). Die entsprechende Inverse ist die IFFT.

Das Spektrum wird auch als Fouriertransformierte  $X(\omega)$  bezeichnet und es gilt in symbolischer Schreibweise

$$x(t) \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \boxed{\text{FFT} := \mathcal{F}\{x(t)\}} \rightarrow \\ \leftarrow \boxed{\text{IFFT} := \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}} \leftarrow \end{array} \right\} X(\omega). \tag{4.157}$$

Im Falle eines 2–dimensionalen Signals

$$x(u, v) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} [c_{kl} \cos(k \omega_0 u + l \nu_0 v) + s_{kl} \sin(k \omega_0 u + l \nu_0 v)] \tag{4.158}$$

ist auch das Spektrum  $X(\omega, \nu)$  2–dimensional. Der Übergang zwischen Orts– und Frequenzraum erfolgt dann durch die 2D-FFT bzw. die 2D-IFFT. In symbolischer Schreibweise wird zur Unterscheidung von 1D und 2D–Operationen ein Index verwendet, z.B. bezeichnet  $\mathcal{F}_1\{\cdot\}$  eine 1D Fouriertransformation und  $\mathcal{F}_2^{-1}\{\cdot\}$  eine 2D inverse Fouriertransformation.

Die Fouriertransformation hat einige wichtige Eigenschaften (siehe z.B. SCHWARZ et al., 1990). Wesentlich für die durchzuführenden Berechnungen sind die Linearität, d.h. es gilt mit den Skalaren  $a$  und  $b$

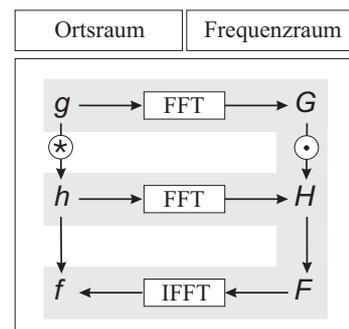
$$\mathcal{F}_2\{a \cdot g + b \cdot h\} = a \cdot \mathcal{F}_2\{G\} + b \cdot \mathcal{F}_2\{H\} = a \cdot G + b \cdot H, \tag{4.159}$$

sowie der Faltungssatz

$$\mathcal{F}_2\{g * h\} = \mathcal{F}_2\{g\} \cdot \mathcal{F}_2\{h\} = G \cdot H. \tag{4.160}$$

Nach dem Faltungssatz können alle Integrale vom Typ (4.152) durch eine einfache elementweise Multiplikation im Frequenzraum ausgewertet werden. Es ergibt sich das rechts dargestellte Berechnungsschema. Das Produkt  $G \cdot H$  liefert das vollständige Spektrum  $F$  der Zielfunktion  $f$ . Durch die IFFT kann diese an beliebigen Stellen des Ortsraums berechnet werden.

Voraussetzung zur Verwendung des Schemas ist, dass Ortsfunktion  $g$  und Abstandsfunktion  $h$  in einem regelmäßigen Gitter vorliegen und  $h$  homogen, also invariant gegenüber Translationen ist. Weiterhin wird vorausgesetzt, dass beide Funktionen periodisch sind.



### Auswertung des Stokes-Integrals mittels FFT

Das *Stokes*-Integral (2.13) ist eine Faltung, da  $St(\psi)$  isotrop und homogen ist. Zur Anwendung der FFT-Technik ist zusätzlich notwendig, dass die Ortsfunktion in einem regelmäßigen Gitter vorliegt. Die zur numerischen Integration verwendeten Blockmittelwerte  $\Delta\bar{g}$  sind üblicherweise in einem geographischen Gitter angeordnet. Die Gitterweite beträgt zwar konstant  $\{\Delta\varphi \times \Delta\lambda\}$ , was jedoch wegen der Meridiankonvergenz zu unterschiedlichen sphärischen Abständen  $\Delta\psi$  zwischen verschiedenen Blöcken führt. Es gilt für den Abstand  $\psi_{PQ}$  zwischen zwei Punkten  $P$  und  $Q$ , ausgedrückt in geographischen Koordinaten (siehe z.B. STRANG VAN HEES, 1990)

$$\sin^2 \frac{\psi_{PQ}}{2} = \sin^2 \frac{\varphi_P - \varphi_Q}{2} + \sin^2 \frac{\lambda_P - \lambda_Q}{2} \cos \varphi_P \cos \varphi_Q. \quad (4.161)$$

Die Abstandsfunktion  $St(\psi)$  ist also in einem regelmäßigen geographischen Gitter  $\{\Delta\varphi \times \Delta\lambda\}$  weder homogen noch isotrop, denn es gilt nach (4.161)

$$St = St(\Delta\varphi_{PQ}, \Delta\lambda_{PQ}, \varphi_P, \varphi_Q). \quad (4.162)$$

Um trotzdem FFT-Techniken anwenden zu können, wurden verschiedene Näherungsverfahren vorgeschlagen. In ebener Approximation (SCHWARZ et al., 1990) werden die Effekte der Erdkrümmung vernachlässigt und statt dessen mit ebenen kartesischen Koordinaten  $\{x, y\}$  gearbeitet. Die Abstandsfunktion hängt dann nur noch von den Koordinatendifferenzen  $\Delta x_{PQ}$  und  $\Delta y_{PQ}$  ab und erfüllt damit die Voraussetzungen zur Anwendung der FFT (Homogenität und Isotropie). In der von STRANG VAN HEES (1990) vorgeschlagenen sphärischen Approximation wird dies dadurch erreicht, dass in (4.161) die geographischen Breiten  $\varphi_P$  und  $\varphi_Q$  in den  $\cos$ -Termen ersetzt werden durch die konstante mittlere Breite  $\varphi_M$ . Damit gilt für die genäherte Abstandsfunktion  $St = St(\Delta\varphi_{PQ}, \Delta\lambda_{PQ})$ . Alternativ verwenden FORSBERG & SIDERIS (1993)

$$\cos \varphi_P \cos \varphi_Q = \cos \varphi_P \cos(\varphi_P - \Delta\varphi_{PQ}) \quad (4.163)$$

und setzten  $\varphi_P = \text{konstant}$ , so dass die gewünschten Bedingungen wieder erfüllt sind. Diese Näherung liefert am Breitenkreis  $\varphi = \varphi_P$  eine exakte Lösung und führt mit wachsendem Abstand von diesem zu immer größer werdenden Fehlern. Deshalb verwenden FORSBERG & SIDERIS (1993) nur den Teil der Lösung in einem schmalen Breitenkreisstreifen  $\{\varphi_P - \Delta\varphi \leq \varphi \leq \varphi_P + \Delta\varphi\}$ , was zu befriedigenden Ergebnissen führt, jedoch relativ ineffizient ist. Die Fehler der genannten Approximationen erreichen in regionalen Bereichen Beträge von mehreren Dezimetern und sind deshalb für die Bestimmung eines cm-Geoids nicht geeignet.

Eine effiziente und exakte Lösung stellt die von HAAGMANS et al. (1993) vorgeschlagene 1D-FFT dar. Die FFT wird dabei nur in Breitenkreisrichtung ausgeführt. Die Faltung in Meridianrichtung wird im Ortsbereich ausgeführt, so dass in einem Schritt nur die Lösung entlang eines Breitenkreises berechnet wird. Deshalb gilt ohne Näherung  $\varphi_P = \text{konstant}$  und auf einen Breitenkreis beschränkt sogar  $\Delta\varphi_{PQ} = \text{konstant}$ . Damit folgt für das diskrete *Stokes*-Integral

$$\zeta(\varphi_P) = \frac{R\Delta\varphi\Delta\lambda}{4\pi\gamma} \sum_{\varphi_Q=\varphi_1}^{\varphi_2} \mathcal{F}_1^{-1} \left\{ \mathcal{F}_1 \{ \overline{St}(\Delta\lambda_{PQ}) \} \cdot \mathcal{F}_1 \{ \Delta\bar{g}_{\cos} \} \right\}, \quad (4.164)$$

wobei im letzten Term  $\Delta\bar{g}_{\cos}$  die von  $Q$  abhängigen Größen  $\cos \varphi_Q$  und  $\Delta\bar{g}_Q$  zusammengefasst sind. Unter Ausnutzung der Linearitätseigenschaft der FFT folgt weiterhin

$$\zeta(\varphi_P) = \frac{R\Delta\varphi\Delta\lambda}{4\pi\gamma} \mathcal{F}_1^{-1} \left\{ \sum_{\varphi_Q=\varphi_1}^{\varphi_2} \mathcal{F}_1 \{ \overline{St}(\Delta\lambda_{PQ}) \} \cdot \mathcal{F}_1 \{ \Delta\bar{g}_{\cos} \} \right\}. \quad (4.165)$$

Diese Form ermöglicht eine exakte Lösung des *Stokes*'schen Integrals mittels 1D-FFT entlang eines Breitenkreises  $\varphi_P$ .

#### Faltung bei regional beschränkter Integration

Bei Transformation eines Signals in den Frequenzraum durch FFT wird davon ausgegangen, dass das Signal periodisch ist. Wird die 1D-FFT entlang eines vollständigen Breitenkreises  $\{0 \leq \lambda < 2\pi\}$  ausgeführt, so ist dies der Fall. Beschränkt man die Berechnung jedoch auf einen regionalen Bereich  $\{\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2\}$ , so gilt dies nicht. Trotzdem wird dies bei Anwendung der FFT unterstellt, so dass das Signal implizit zu beiden Seiten periodisch fortgesetzt wird. Dadurch spiegeln bei der Faltung an den Rändern des Bearbeitungsgebiets Daten vom gegenüberliegenden Teil des Ortsraums in die Lösung. Um dies zu verhindern, schlagen HAAGMANS et al. (1993) das so genannte *zero padding* vor. Dabei wird die Ortsfunktion zu beiden Seiten um jeweils die halbe Gebietsbreite mit Nullen fortgesetzt. Dies entspricht zwar auch nicht den wahren Gegebenheiten (die Anomalien

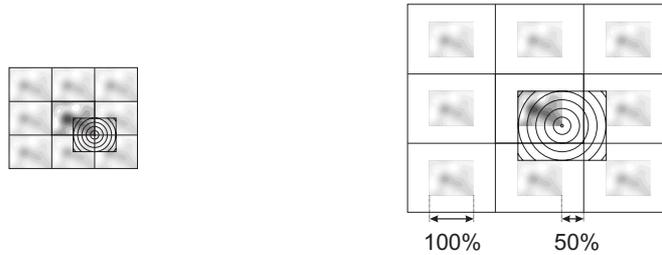


Abbildung 4.24: Faltung mit FFT: das Signal wird implizit periodisch fortgesetzt (links). Wird das Datengebiet zu allen Seiten mit Nullen gerändert (rechts), so wird im Berechnungsgebiet das Hereinspiegeln von Daten des gegenüberliegenden Gebietsrands (nächste Periode des Signals) verhindert.

haben außerhalb des Berechnungsgebiets in der Regel einen von Null verschiedenen Wert), jedoch wird das verfälschende Hereinspiegeln von Daten verhindert (siehe Abbildung 4.24). Die Lösung entspricht dann exakt der, auf den selben Datenbereich beschränkten numerischen Integration. Im Falle der 2D-FFT ist die Datenmatrix in alle Richtungen mit Nullen zu rändern, bei 1D-FFT nur westlich und östlich. Die Abstandsfunktion ist in allen Fällen auf den gesamten geränderten Bereich auszudehnen.

#### Behandlung der Innenzone

Die Auswertung von (4.165) führt am Berechnungspunkt selbst zu numerischen Problemen, da die *Stokes*-Funktion dort eine Singularität aufweist. Die innerste Zone wird deshalb zunächst aus der Lösung ausgeschlossen und ihr Beitrag separat berechnet. Dabei kann die Singularität umgangen werden, wenn man entsprechend HEISKANEN & MORITZ (1967) nicht über geographische sondern über polare Koordinaten integriert (siehe Abbildung 4.25). Es gilt dann

$$\zeta(P) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\psi=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \Delta g_Q St(\psi_{PQ}) \sin \psi d\psi d\alpha \quad (4.166)$$

und der gesuchte Beitrag  $\zeta_i(P)$  der innersten Zone  $0 \leq \psi < \psi_0$  beträgt (nach Integration über  $\alpha$ )

$$\zeta_i(P) = \frac{R}{\gamma} \int_{\psi=0}^{\psi_0} \Delta g_Q \underbrace{\frac{1}{2} St(\psi_{PQ}) \sin \psi}_{= F(\psi)} d\psi. \quad (4.167)$$

Dabei gilt für kleine  $\psi_0$  in guter Näherung  $F(\psi < \psi_0) = 1$  und damit für den Beitrag der kleinen Kugelkappe um den Berechnungspunkt

$$\zeta_i(P) = \frac{R\psi_0}{\gamma} \Delta \bar{g}_i, \quad (4.168)$$

wobei  $\Delta \bar{g}_i$  den Mittelwert dieses innersten Blocks bezeichnet. Arbeitet man mit Blockmittelwerten in einem geographischen Gitter, so wählt man  $\psi_0$  so, dass Block und sphärische Kappe flächengleich sind, d.h.  $\psi_0 = \sqrt{\cos \varphi \Delta \varphi \Delta \lambda / \pi}$ .



Abbildung 4.25: Integration über geographische (links) und über polare Koordinaten (rechts).

#### Berechnung topographischer Reduktionen mittels FFT

Auch die Berechnung der RTM-Reduktionen kann mittels FFT effizient gestaltet werden. Da die Berechnungen dabei auf einen örtlich begrenzten Raum beschränkt bleiben (siehe Kapitel 4.4.2), kann in ebener Approximation gerechnet werden und es gilt nach Gleichung (4.145)

$$\delta g^{RTM}(P) = G\rho \iiint_{x y z} \frac{h_P - z_Q}{\left[\Delta x_{PQ}^2 + \Delta y_{PQ}^2 + (h_P - z_Q)^2\right]^{3/2}} dx_Q dy_Q dz_Q. \quad (4.169)$$

Da die Abstandsfunktion im Nenner jedoch wegen  $(h_Q - z_Q)$  nicht invariant gegenüber Translationen ist, handelt es sich hier nicht um ein Faltungsintegral. Um (4.169) in ein Faltungsintegral umzuwandeln, wird zunächst die Integration nach  $z$  durchgeführt. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta g^{RTM}(P) &= G\rho \iint_{x y} \left| -[l_0^2 + (h_P - z_Q)^2]^{-1/2} \right|_{z_Q=h_{ref}}^{h(x,y)} dx_Q dy_Q \\ &= G\rho \iint_{x y} \frac{1}{l_0} \cdot \left( \left[ 1 + \frac{(h_P - h)^2}{l_0^2} \right]^{-1/2} - \left[ 1 + \frac{(h_P - h_{ref})^2}{l_0^2} \right]^{-1/2} \right) dx_Q dy_Q, \end{aligned} \quad (4.170)$$

wobei  $l_0$  der ebene Abstand  $(\Delta x_{PQ}^2 + \Delta y_{PQ}^2)^{1/2}$  zwischen  $P$  und  $Q$  ist. Die beiden inneren Terme sind Funktionen vom Typ  $(1 + \Delta)^{-1/2}$  und können für  $|\Delta| < 1$  in eine Binomialreihe entwickelt werden. Nach BRONSTEIN & SEMENDJAJEW (1991) gilt

$$(1 + \Delta)^{-1/2} = 1 - 1/2 \Delta + 3/8 \Delta^2 - 5/16 \Delta^3 + \dots \quad (4.171)$$

Wendet man dies auf (4.170) an, so folgt

$$\begin{aligned} \delta g^{RTM}(P) &= G\rho \iint_{x y} \left( \frac{1}{2} \frac{(h_P - h_{ref})^2 - (h_P - h)^2}{l_0^3} - \frac{3}{8} \frac{(h_P - h_{ref})^4 - (h_P - h)^4}{l_0^5} \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{16} \frac{(h_P - h_{ref})^6 - (h_P - h)^6}{l_0^7} - \dots \right) dx_Q dy_Q. \end{aligned} \quad (4.172)$$

Multipliziert man die Terme in den Zählern aus und trennt die entstehenden Anteile, so ergeben sich die Faltungsintegrale

$$\begin{aligned} \delta g^{RTM}(P) &= \frac{G\rho}{2} \left( [h_{ref}^2 * l_r^3] - 2h_P[(h_{ref} - h) * l_r^3] - [h^2 * l_r^3] \right) \\ &\quad - \frac{3G\rho}{8} \left( [h_{ref}^4 * l_r^5] - 4h_P^3[(h_{ref} - h) * l_r^5] + 6h_P^2[(h_{ref}^2 - h^2) * l_r^5] - 4h_P[(h_{ref}^3 - h^3) * l_r^5] - [h^4 * l_r^5] \right) \\ &\quad + \frac{5G\rho}{16} \left( [h_{ref}^6 * l_r^7] - 6h_P^5[(h_{ref} - h) * l_r^7] + 15h_P^4[(h_{ref}^2 - h^2) * l_r^7] - 20h_P^3[(h_{ref}^3 - h^3) * l_r^7] \right. \\ &\quad \left. + 15h_P^2[(h_{ref}^4 - h^4) * l_r^7] - 6h_P[(h_{ref}^5 - h^5) * l_r^7] - [h^6 * l_r^7] \right) - \dots \end{aligned} \quad (4.173)$$

Darin bezeichnet  $l_r$  den reziproken ebenen Abstand  $l_0^{-1}$ . Die Faltungsintegrale vom Typ  $[h * l_r]$  können jeweils mittels einer 2D-FFT ausgewertet werden, d.h.

$$[h * l_r] = \mathcal{F}_2^{-1}\{\mathcal{F}_2\{h\} \cdot \mathcal{F}_2\{l_r\}\}. \quad (4.174)$$

Wegen der periodischen Fortsetzung des Signals ist das Integrationsgebiet wieder mit Nullen zu rändern. Am Berechnungspunkt selbst ( $l_0 = 0$ ) tritt wieder eine Singularität auf ( $l_r = \infty$ ). Diese Stelle muss also wieder aus der Berechnung ausgespart und separat behandelt werden. Der Beitrag des Berechnungspunkts kann durch analytische Integration mittels (4.147) berechnet werden.

Es ist zu beachten, dass die Lösung (4.173) eine Reihenentwicklung ist, die nur für  $|\Delta| < 1$  konvergiert (siehe Abbildung 4.26). Es muss also gelten  $|(h_P - h)/l_0| < 1$  und  $|(h_P - h_{ref})/l_0| < 1$ . Diese Bedingungen sind eingehalten, falls die Geländeneigung und die Neigung des Geländes bzgl. der Referenztopographie weniger als  $45^\circ$  beträgt. In gebirgigem Gelände kann dies für die nähere Umgebung des Berechnungspunkts nicht immer gewährleistet werden. Deshalb wird entsprechend dem Vorschlag von TSOULIS (1999a) die FFT-Lösung mit der analytischen Integration (4.147) (Prismenmethode) kombiniert. In einer kleinen Innenzone wird die Prismenmethode verwendet, im restlichen Gebiet die 2D-FFT. Die Größe der Innenzone hängt von der Geländeneigung ab. Mindestens wird aber der Berechnungspunkt selbst ausgespart, um die dort auftretende Singularität zu umgehen.

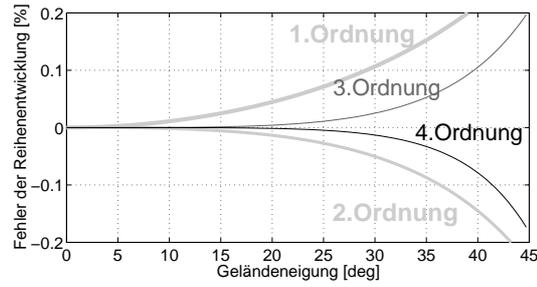


Abbildung 4.26: Fehler der Reihenentwicklung (4.172) bei Entwicklung bis zu verschiedenen Ordnungen in Abhängigkeit der Geländeneigung. Je steiler das Gelände, desto schneller divergiert die Reihe.

### Analytische Fortsetzung mittels FFT

Auch für die Lösung des *Molodenski*-Problems durch analytische Fortsetzung lässt sich eine Darstellung finden, die die Verwendung spektraler Verfahren ermöglicht. Die wesentlichen Formeln sind dabei die *Stokes*'sche Integralformel (4.35) angewandt auf die Anomalien  $\Delta g^*$ , sowie Gleichung (4.36) zur Berechnung des  $L_1$ -Operators. Dieser lautet, angewandt auf die Anomalie  $\Delta g$ ,

$$\begin{aligned} L_1(\Delta g) &= \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{\Delta g - \Delta g_P}{l_0^3} d\sigma = \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{\Delta g}{l_0^3} d\sigma + \frac{R^2 \Delta g}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{1}{l_0^3} d\sigma \\ &= \frac{R^2}{2\pi} [\Delta g * l_r^3] + \frac{R^2 \Delta g}{2\pi} [1 * l_r^3], \end{aligned} \quad (4.175)$$

wobei der erste Term in (4.36) vernachlässigt wurde<sup>7</sup>. Die Aufteilung der Integration liefert zwei Faltungsintegrale, die mittels FFT ausgewertet werden können. Dies ist jedoch nur möglich, da die Integranden vom Berechnungspunkt  $P$  unabhängig sind. Die Berechnung des *downward continuation* Operators  $D$  erfolgt nach (4.56) durch rekursive Anwendung des  $L_1$ -Operators. Deshalb sind die Integranden, entsprechend Gleichung (4.57), von der Form (4.57)

$$\sum_{k=1}^n (h - h_P) L_k(g_{n-k}),$$

also nicht unabhängig von  $P$ . Eine Auswertung der Rekursionen (4.57) mittels FFT sind somit nicht direkt möglich.

Nach SIDERIS (1987) kann dieses Problem jedoch vermieden werden, wenn man die Berechnung in den folgenden zwei Schritten ausführt:

1. Fortsetzung der Oberflächenanomalien  $\Delta g$  auf Meeresniveau. Dazu wird der *downward continuation* Operator  $D$  verwendet. Da bei diesem Schritt jedoch  $h_P = 0$  gilt, verschwindet in den Integranden die Abhängigkeit von  $h_P$ . Die Rekursionen (4.57) sind dann Faltungsintegrale und können mittels FFT ausgewertet werden. Für die auf Höhe  $h_P = 0$  fortgesetzten Anomalien  $\Delta g^0$  gilt

$$\Delta g^0 = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^0, \quad (4.176)$$

mit

$$g_0^0 = \Delta g \quad \text{und} \quad g_n^0 = -\sum_{k=1}^n h^k L_k(g_{n-k}^0). \quad (4.177)$$

2. Fortsetzung von  $\Delta g^0$  auf Berechnungspunktniveau. Hierzu wird der *upward continuation* Operator  $U$  verwendet, so dass für die nach oben fortgesetzten Anomalien gilt:

$$\Delta g^* = \sum_{n=0}^{\infty} (h_P - h)^n L_n(\Delta g^0). \quad (4.178)$$

<sup>7</sup>Der vernachlässigte Term liegt in der Größenordnung  $\Delta g/R \approx 0.1 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-2}$ , wohingegen der gesamte Gradient  $L_1(\Delta g)$  etwa der zweiten radialen Ableitung  $T_{rr}$  des Potentials entspricht, welche leicht Beträge der Größenordnung  $10 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-2}$  erreicht.

Dabei sind gegenüber der Darstellung in Kapitel 4.2.3 die Rollen von  $h$  und  $h_P$  vertauscht. In der dortigen Formulierung ist  $h_P$  das einheitliche Niveau, auf dem die Anomalien gegeben sind. Jetzt ist  $h_P$  das Berechnungspunktniveau, auf das fortgesetzt werden soll. Das Ausgangsniveau wird durch  $h$  beschrieben, wobei hier speziell gilt  $h = 0$  und damit

$$\Delta g^* = \sum_{n=0}^{\infty} h_P^n L_n(\Delta g^0) = \sum_{n=0}^{\infty} h_P^n L_n\left(\sum_{m=0}^{\infty} g_m^0\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h_P^n L_n(g_m^0). \quad (4.179)$$

Ordnet man diese Doppelsumme um, so lässt sich auch schreiben

$$\Delta g^* = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^r h_P^s L_s(g_{r-s}^0) = \sum_{r=0}^{\infty} g_r^0 + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^r h_P^s L_s(g_{r-s}^0) = g_0^0 + \sum_{r=1}^{\infty} \left( g_r^0 + \sum_{s=1}^r h_P^s L_s(g_{r-s}^0) \right). \quad (4.180)$$

Setzt man in (4.180) für die Terme  $g_r^0$  die Reihenentwicklung (4.177) und entsprechend für  $g_0^0 = \Delta g$ , so lässt sich die harmonische Fortsetzung  $\Delta g^*$  der Oberflächenanomalie  $\Delta g$  in der Reihe

$$\Delta g^* = \Delta g + \sum_{r=1}^{\infty} g_r \quad (4.181)$$

darstellen, wobei für die einzelnen Terme gilt

$$g_r = \sum_{s=1}^r (h_P^s - h^s) L_s(g_{r-s}^0). \quad (4.182)$$

Setzt man dies in Gleichung (4.35) ein, so folgt schließlich für die Höhenanomalie

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g St(\psi) d\sigma + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} g_r St(\psi) d\sigma = \zeta_0 + \sum_{r=1}^{\infty} \zeta_r, \quad (4.183)$$

wobei für die einzelnen Terme  $\zeta_r$  gilt

$$\begin{aligned} \zeta_r &= \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{s=1}^r \iint_{\sigma} (h_P^s - h^s) L_s(g_{r-s}^0) St(\psi) d\sigma \\ &= \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{s=1}^r \left( h_P^s \iint_{\sigma} L_s(g_{r-s}^0) St(\psi) d\sigma - \iint_{\sigma} h^s L_s(g_{r-s}^0) St(\psi) d\sigma \right) \\ &= \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{s=1}^r (h_P^s [L_s(g_{r-s}^0) * St(\psi)] - [h^s L_s(g_{r-s}^0)] * St(\psi)). \end{aligned} \quad (4.184)$$

Jeder Term  $\zeta_r$  lässt sich somit darstellen als die Summe mehrerer Faltungsintegrale. Die jeweiligen Ortsfunktionen  $L_s(g_{r-s}^0)$  bzw.  $h^s L_s(g_{r-s}^0)$  sind unter Verwendung von (4.175) ebenfalls als Faltungsintegrale darstellbar. Diese können jeweils mittels FFT ausgewertet werden. Dabei können im Prinzip alle oben genannten Varianten (1D- oder 2D-FFT mit oder ohne ebene Näherung) verwendet werden. In dieser Arbeit wurde die 1D-FFT verwendet, da sie als einziges Verfahren ohne Approximationen auskommt.

#### 4.4.4 Fehleranteile und Datenfilterung

##### Fehleranteile

Die bei der Geoidberechnung auftretenden Fehler können in 3 Klassen eingeteilt werden, nämlich in

- Modellfehler (durch Approximationen im Berechnungsmodell),
- Datenfehler (systematischer und zufälliger Natur) und
- Vernachlässigungsfehler (Anteile im Berechnungsmodell, die durch die verwendeten Daten nicht abgedeckt werden).

Diese unterscheiden sich qualitativ wie auch quantitativ und werden auf unterschiedliche Art behandelt, um den Gesamtfehler möglichst klein zu halten.

#### Modellfehler:

Modellfehler sind die im mathematischen Modell gemachten Näherungen, also im wesentlichen die in Kapitel 4.2.1 beschriebene Linearisierung und sphärische Approximation.

Der Linearisierungsfehler ist abhängig von der Differenz zwischen der gesuchten Größe (Erdoberfläche) und der bekannten Näherungsgröße (Telluroid). Im Prinzip kann der Linearisierungsfehler durch eine Iteration verringert werden.

Bei der sphärischen Approximation werden ellipsoidische Beziehungen formal durch sphärische ersetzt, wodurch ein relativer Fehler von der Größe der Erdabplattung entsteht. Dies betrifft die Anomalien  $\Delta g^{EGM}$ , welche entsprechend (4.83) aus einem Potentialmodell berechnet werden. Die terrestrischen Anomalien hingegen enthalten keine sphärische Approximation<sup>8</sup>. Verwendet man die formal sphärische *Stokes*-Integration zur Transformation der Anomalien in Geoidhöhen, so entsteht ein Fehler, der im Prinzip durch eine Iteration behoben werden könnte. Alternativ hat MORITZ (1974) vorgeschlagen,

1. die verwendeten Anomalien von ellipsoidischen Anteilen  $\Delta g_{ell}$  zu befreien (die Anomalien sind dann sphärische Größen),
2. mittels sphärischer *Stokes*-Integration sphärisch genäherte Geoidhöhen  $\zeta_s$  zu berechnen und
3. diese mittels der ellipsoidischen Korrektur  $d\zeta_{ell}$  in ellipsoidische Größen umzuwandeln.

Die ellipsoidische Korrektur  $d\zeta_{ell}$  der Geoidhöhen kann dabei genähert durch

$$d\zeta_{ell} = e^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \sin^2 \varphi \right) \cdot \zeta_s = k_{ell} \cdot \zeta_s \quad (4.185)$$

berechnet werden, wobei  $e^2$  das Quadrat der ersten numerischen Exzentrizität des Ellipsoides ist<sup>9</sup>. Der Faktor  $k_{ell}$  liegt etwa zwischen 0.0015 und  $-0.003$  und beträgt in Bayern ca.  $-0.001$ . Die ellipsoidische Korrektur angewandt auf die volle Geoidhöhe beträgt global bis zu maximal 30 cm und in Bayern ca. 4-5 cm.

Wird das Geoid durch Kombination mit einem Potentialmodell bestimmt, so ist der ellipsoidische Fehler geringer, da die *Stokes*-Integration nur auf die residualen Anomalien angewandt wird. Bei einer residualen Geoidhöhe von unter 5 m beträgt die ellipsoidische Korrektur in Bayern weniger als 5 mm und kann deshalb vernachlässigt werden. Der Geoidhöhenanteil  $\zeta^{EGM}$ , der aus dem Potentialmodell abgeleitet werden kann, bedarf keiner ellipsoidischen Korrektur<sup>10</sup>. Damit entfällt Schritt 3 in der oben dargestellten Vorgehensweise.

Hingegen muss die ellipsoidische Korrektur  $\Delta g_{ell}$  entsprechend Schritt 1 an den terrestrischen Anomalien angebracht werden. Für die in der *Stokes*-Integration zu verwendenden sphärisch genäherten Residualanomalien gilt damit

$$\begin{aligned} \Delta g_s^{res} &= \Delta g_s - \Delta g^{EGM} \\ &= \Delta g - \Delta g_{ell} - \Delta g^{EGM} \\ &= \Delta g - (\Delta g^{EGM} + \Delta g_{ell}). \end{aligned} \quad (4.186)$$

Es macht demnach formal keinen Unterschied, ob die terrestrischen Anomalien um die ellipsoidische Korrektur auf eine sphärische Größe reduziert werden, oder ob aus den eigentlich sphärischen Anomalien  $\Delta g^{EGM}$  durch ellipsoidische Korrektur eine ellipsoidische Größe gemacht wird.

Die Korrektur  $\Delta g_{ell}$  kann nach MORITZ (1974) genähert aus einem Potentialmodell berechnet werden. Die entsprechenden Formeln wurden von LELGEMANN (1970) entwickelt und sind in Kapitel B.1 dargestellt.

#### Datenfehler:

Datenfehler (*commission error*) sind Fehler der terrestrischen Schwereanomalien  $\Delta g$  und des verwendeten Potentialmodells (EGM). Entsprechend der in Kapitel 4.4.1 dargestellten Kombinationsmethode im Ortsbereich lassen

<sup>8</sup>Gemessene Schwerewerte enthalten alle – also auch ellipsoidische – Effekte, die Normalschwerewerte  $\gamma$  beziehen sich auf ein ellipsoidisches Normalfeld. Dementsprechend ist die Anomalie  $\Delta g = g - \gamma$  eine ellipsoidische Größe.

<sup>9</sup>Im Falle des Referenzellipsoides WGS84 beträgt  $e^2 = 0.006\,694\,380$ .

<sup>10</sup>Potentialwerte  $T$  können entsprechend Gleichung (4.80) an jedem beliebigen Punkt im Raum, also auch auf der Erdoberfläche, berechnet werden. Bestimmt man an den zugeordneten Telluroidpunkten die ellipsoidische Normalschwere  $\gamma$ , so ist die Geoidhöhe  $\zeta = T/\gamma$  eine ellipsoidische Größe. Dies gilt nicht, falls statt dem tatsächlichen Normalschwerewert am Berechnungspunkt ein globaler Mittelwert  $\gamma_0$  verwendet wird.

sich die beiden Fehleranteile darstellen als

$$\delta\zeta'_1 = \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^N Q_n(\psi_0) \epsilon_n^{EGM} \quad (4.187)$$

und

$$\delta\zeta'_2 = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma^c} \epsilon^T St(\psi) d\sigma, \quad (4.188)$$

wobei  $\epsilon_n^{EGM}$  die Fehler (pro Grad) der aus dem Potentialmodell berechneten Schwereanomalien  $\Delta g_n$  und  $\epsilon^T$  die Fehler der terrestrischen Schwereanomalien beschreiben.

Neben den Koeffizientenfehlern  $\epsilon_n^{EGM}$  können auch die im Potentialmodell enthaltenen Konstanten fehlerhaft sein. Im Falle des EGM96 z.B. entsprechen die Konstanten  $R$  und  $GM$  (siehe Kapitel 4.3.2) den Konstanten des WGS84 Referenzsystems (NIMA, 1997). Der für das WGS84 angenommene Potentialwert  $U_0$  auf der Oberfläche des Ellipsoides entspricht jedoch nicht mehr dem derzeit besten angenommenen Wert des Potentials  $W_0$  auf dem Geoid. Dies führt zu einem konstanten Versatz  $\delta W = W_0 - U_0$  im Potential und damit auch in der Höhenanomalie. In LEMOINE et al. (1998) sind folgende Werte angegeben

$$\begin{aligned} W_0 &= 62\,636\,856.88 \text{ m}^2\text{s}^{-2} \\ U_0 &= 62\,636\,851.71 \text{ m}^2\text{s}^{-2}, \end{aligned}$$

wodurch sich ein Versatz von

$$\delta W = W_0 - U_0 = 5.17 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$$

ergibt. Nach HEISKANEN & MORITZ (1967) berechnet sich der entsprechende Effekt in der Höhenanomalie zu

$$\zeta_0^{EGM} = -\frac{\delta W}{\gamma} = -52.8 \text{ cm}. \quad (4.189)$$

Dies ist ein globaler Schätzwert für die Differenz von EGM96-Quasigeoidhöhen gegenüber wahren Quasigeoidhöhen. Ein konstanter Versatz im Potential bewirkt wegen Gleichung (4.23) ebenfalls einen Versatz in den aus dem Potentialmodell berechneten Schwereanomalien um

$$\Delta g_0^{EGM} = \frac{2}{r} \delta W = 0.162 \text{ mGal}. \quad (4.190)$$

Für die residualen Anomalien  $\Delta g^{res} = \Delta g^T - \Delta g^{EGM}$  ergibt sich damit eine Korrektur von

$$\Delta g_0^{res} = -0.162 \text{ mGal}, \quad (4.191)$$

welche zu den berechneten Residualanomalien addiert werden muss. Die  $\Delta g^T$  stellen dabei die terrestrischen Anomalien dar und können sowohl Freiluftanomalien wie auch RTM-reduzierte Anomalien bedeuten.

Die Fehler der Schwereanomalien sind von mehreren Faktoren abhängig. Die Genauigkeit der aus den ursprünglichen Punktwerten gebildeten Blockmittelwerte hängt neben der Genauigkeit der Punktwerte wesentlich von der Größe der Blöcke, der Anzahl der Punktwerte innerhalb eines Blocks und der Rauigkeit des Feldes ab. Der Prädiktionsfehler der Blockmittelwerte liegt in der Regel deutlich über dem Messfehler der einzelnen Schwerewerte (siehe FLURY, 2002), so dass dieser vernachlässigbar ist. Systematische Effekte im Prädiktionsfehler können z.B. in gebirgigem Gelände entstehen, wenn Schweremessungen nur in den Tälern vorliegen.

Hinzu kommen, wie von HECK (1990) gezeigt, systematische Fehler aufgrund der Inkonsistenz horizontaler und vertikaler Bezugssysteme. Die verwendeten Schwerewerte werden zunächst in ihren jeweiligen nationalen Bezugssystemen koordiniert. Die Berechnung von Anomalienwerten erfordert die Berechnung der Normalschwere am jeweils zugeordneten Telluroidpunkt, d.h. es müssen Länge  $\lambda$  und Breite  $\varphi$  bezogen auf das dem verwendeten Normalfeld zugrunde liegenden mittleren Erdellipsoid (z.B. WGS84) bekannt sein. Die bei der Koordinierung verwendeten Landessysteme basieren jedoch meist auf regional bestanpassenden Ellipsoiden und sind in Größe und Lagerung von einem mittleren Erdellipsoid verschieden. Sind Transformationsparameter zwischen den verschiedenen Systemen oder gar die Bezugssysteme an sich nicht bekannt (dieser Situation stehen die Nutzer von Schweredatenbanken oft gegenüber), kommt es zu systematischen Fehlern in den berechneten Anomalien und damit auch im abgeleiteten Geoid. Das gleiche gilt auch für die Höhenkomponente. Zum einen beziehen sich unterschiedliche Landeshöhensysteme oft auf unterschiedliche Pegel, zum anderen liegen nicht überall Normalhöhen, sondern auch orthometrische oder normal-orthometrische Höhen vor. Die in dieser Arbeit verwendeten Daten und deren Bezugssysteme sind in Kapitel 4.5.1 aufgeführt. Die durch die Vernachlässigung der Transformationen in ein einheitliches Bezugssystem entstehenden Geoidfehler sind in Kapitel 4.5.3 dargestellt.

*Vernachlässigungsfehler:*

Vernachlässigungsfehler treten dadurch auf, dass sowohl das Potentialmodell wie auch die mittleren Schwereanomalien nur mit begrenzter spektraler Auflösung vorliegen. Die Auflösung des Potentialmodells ist durch den maximalen Grad  $N$  begrenzt, die der Schwereanomalien durch die Größe der verwendeten Blöcke (entsprechend einem sphärisch harmonischen Grad  $L$ ). Verwendet man wieder die Kombination im Ortsbereich, so lassen sich die beiden vernachlässigten Anteile durch

$$\delta\zeta_3 = \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=N+1}^{\infty} Q_n(\psi_0) \Delta g_n^{EGM} \quad (4.192)$$

und

$$\delta\zeta_4 = \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=L+1}^{\infty} \left( \frac{2}{n-1} - Q_n(\psi_0) \right) \Delta g_n^T \quad (4.193)$$

beschreiben. In beiden Fällen liegen Daten ( $\Delta g^{EGM}$  und  $\Delta g^T$ ) in den jeweiligen Spektralbereichen (oberhalb den Graden  $N$  bzw.  $L$ ) nicht vor und müssen vernachlässigt werden. Der dadurch entstehende spektrale Abbruchfehler wird als *omission error* bezeichnet. Daneben existiert der als *truncation error* bezeichnete räumlichen Abbruchfehler, der durch die Begrenzung der Stokes-Integration auf eine kleine sphärische Kappe  $\sigma^c$  entsteht. In  $\delta\zeta_3$  überlappen sich diese beiden Fehlerdefinitionen, da im Außenbereich das Frequenzband  $N < n \leq L$  sowohl als *truncation* wie auch als *omission error* bezeichnet werden könnte.

*Abschätzung von Daten- und Vernachlässigungsfehlern:*

Sind Fehler- bzw. Signalgradvarianzen  $s_n^{\Delta g}$  bzw.  $c_n^{\Delta g}$  der Schwereanomalien bekannt, so können daraus die im Geoid entstehenden Fehlerbeiträge für den *commission error*

$$\sigma_{com,N}^2 = \frac{R^2}{4\gamma^2} \sum_{n=2}^N Q_n^2(\psi_0) s_n^{\Delta g} \quad (4.194)$$

bis zum Grad  $n = N$  und für den *omission error*

$$\sigma_{om,N}^2 = \frac{R^2}{4\gamma^2} \sum_{n=N+1}^{\infty} Q_n^2(\psi_0) c_n^{\Delta g} \quad (4.195)$$

ab dem Grad  $n = N + 1$  abgeschätzt werden. Dabei werden Fehler bzw. Signal als homogen und isotrop betrachtet und alle Korrelationen zwischen verschiedenen spektralen Anteilen vernachlässigt.

Abbildung 4.27 zeigt den kumulativen Geoidfehler  $\sigma_{com,N}$  berechnet aus den Fehlervarianzen des EGM96, sowie den Abbruchfehler  $\sigma_{om,N}$  berechnet aus dem Gradvarianzmodell von *Tscherning/Rapp*. Dabei wurde eine Innenzone vom Radius  $\psi_0$  ausgespart. Im Fall  $\psi_0 = 0^\circ$  ergeben sich die Gesamtfehler der globalen Integration, im Falle  $\psi_0 = 4^\circ$  ergeben sich die Fehleranteile der Außenzone.

Der kumulative Fehler zeigt, dass sich aus dem EGM96 Fehlerbeiträge bis zu 40 cm ergeben. Bei Kombination mit fehlerfreien Schwereanomalien in einer Innenzone von  $\psi_0 = 4^\circ$  liegt der Fehlerbeitrag des EGM96 immerhin noch bei 10 cm.

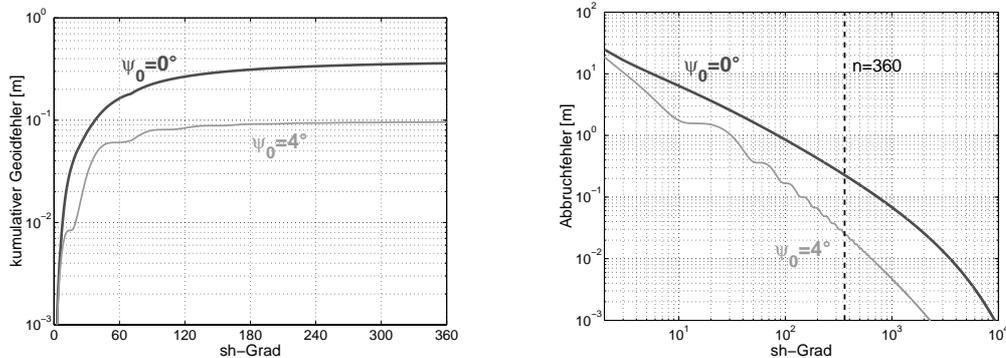


Abbildung 4.27: Kumulativer Geoidfehler aus EGM96 (links) und Abbruchfehler aus dem Gradvarianzmodell von *Tscherning/Rapp* (rechts).

Der Abbruchfehler zeigt, dass der Signalbeitrag der spektralen Anteile ab Grad  $n = 10000$  (entsprechend einer Darstellung der Schwereanomalien in Blockmittelwerten von etwa  $1'$  Seitenlänge) bei etwa  $1 \text{ mm}$  liegt. Dies entspricht der Verwendung von Blockmittelwerten mit einer Seitenlänge von  $1$  Bogenminute oder ca.  $2 \text{ km}$ . An der Kurve für  $\psi_0 = 4^\circ$  kann man ablesen, dass der Signalanteil bei Grad  $n = 360$  noch  $2 - 3 \text{ cm}$  beträgt. Dies entspricht dem *truncation error* bei Kombination des EGM96 mit terrestrischen Anomalien in einer Innenzone von  $4^\circ$ .

### Filterung und optimale Kombination

In der Vergangenheit wurden verschiedene Methoden entwickelt, um das Fehlerbudget aus Daten- und Vernachlässigungsfehlern möglichst gering zu halten. Die ursprünglich von MOLODENSKII et al. (1962), WONG & GORE (1969) oder MEISSL (1971) vorgeschlagenen deterministischen Methoden hatten zum Ziel, den *truncation error* möglichst klein zu halten. Später entwickelte stochastische Verfahren (z.B. WENZEL, 1981) zielten darauf ab, den *commission error* zu minimieren. Alle Methoden basieren auf einer Modifikation der *Stokes-Funktion*, über die die Gewichtung der Schwereanomalien in verschiedenen Frequenzbereichen gesteuert werden kann. Vergleichende Arbeiten verschiedener Methoden wurden z.B. von JEKELI (1980) oder VANICEK & FEATHERSTONE (1998) erstellt. In der vergleichenden Studie von SMEETS (1994) erweist sich das von WENZEL (1981) vorgeschlagene Verfahren als vorteilhaft. Da es jedoch oft schwierig ist, die hierfür notwendige Fehlerbeschreibung in Form einer realistischen Fehlerkovarianzfunktion zu liefern, wurden im Rahmen dieser Arbeit neben der Modifikation nach *Wenzel* auch diejenigen nach WONG & GORE (1969) und MEISSL (1971) getestet.

#### Modifikation nach Meissl

Die Absicht der von MEISSL (1971) vorgeschlagenen Modifikation ist es, den *truncation error* möglichst klein zu halten, so dass die *Stokes-Integration* auf eine relativ kleine räumliche Kappe mit Radius  $\psi_0$  beschränkt werden kann. Die entsprechenden Fehleranteile aus dem Außenbereich ( $\psi > \psi_0$ ) können aus Signalgradvarianzen entsprechend Gleichung (4.195) abgeschätzt werden. Um diese Fehler zu minimieren, sucht man die Minima der Funktion  $Q_n^2(\psi_0)$ . Mit der Substitution  $\cos \psi_0 = y_0$  folgt aus (4.131)

$$Q_n(y_0) = \int_{-1}^{y_0} St(y)P_n(y) dy. \quad (4.196)$$

Die Minima von  $Q_n^2(y_0)$  sind gleich der Minima von  $|Q_n(y_0)|$ . Sie liegen an den Nullstellen der ersten Ableitung von  $Q_n(y_0)$ . Für diese gilt

$$\frac{dQ_n(y_0)}{dy_0} = \frac{d}{dy_0} \left( \int_{-1}^{y_0} St(y)P_n(y) dy \right) = St(y_0)P_n(y_0). \quad (4.197)$$

Daraus folgt, dass die Funktion  $Q_n^2(\psi_0)$  und damit der Fehler  $\|\delta\zeta\|^2$  minimal werden, falls die *Stokes-Funktion* an der Stelle  $y_0$  – also am Kappenrand – eine Nullstelle hat. Die *Stokes-Funktion*  $St(\psi)$  hat zwei Nullstellen bei  $\psi \approx \{39^\circ, 118^\circ\}$ , die in der Regel nicht mit der Größe des Integrationsgebiets übereinstimmen. Es kann jedoch an beliebigen Stellen  $\psi_0$  eine Nullstelle erzeugt werden, indem  $St(\psi)$  um den Funktionswert  $St(\psi_0)$  an dieser Stelle

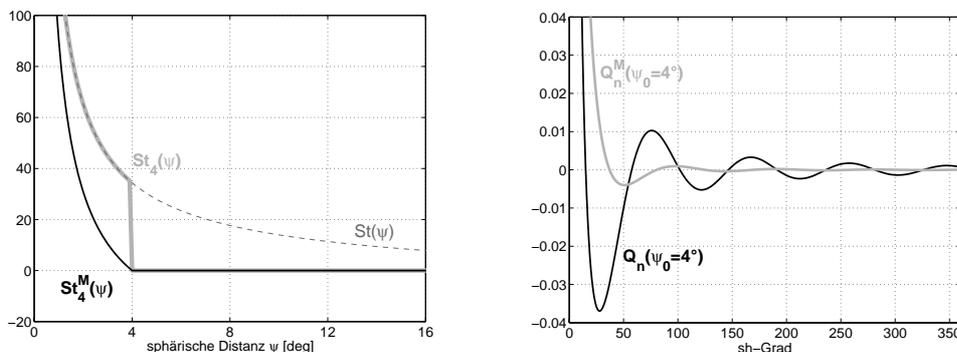


Abbildung 4.28: Originale, im Ortsraum (hier bei  $\psi_0 = 4^\circ$ ) abgebrochene sowie Meissl-modifizierte Stokes-Funktion (links) und die zugehörigen Abbruchkoeffizienten  $Q_n$  bzw.  $Q_n^M$  (rechts).

reduziert wird. Daraus ergibt sich die *Meissl*-modifizierte *Stokes*-Funktion

$$St_{\psi_0}^M(\psi) = \begin{cases} St(\psi) - St(\psi_0) & , 0 < \psi \leq \psi_0 \\ 0 & , \psi_0 < \psi \leq \pi. \end{cases} \quad (4.198)$$

In Abbildung 4.28 sind die originale Funktion  $St(\psi)$ , die am Kappenrand  $\psi_0$  abgebrochene Funktion  $St_{\psi_0}(\psi)$  und die *Meissl*-modifizierte Funktion  $St_{\psi_0}^M(\psi)$  dargestellt. Die Funktion  $St_{\psi_0}(\psi)$  weist eine deutliche Unstetigkeitsstelle am Kappenrand auf. Das zugehörige Spektrum enthält deshalb wesentlich höhere Frequenzen als im Falle einer stetigen Funktion. Dies ist an den rechts dargestellten Koeffizienten  $Q_n$  erkennbar, die das Spektrum der abgebrochenen *Stokes*-Funktion darstellen. Die *Meissl*-modifizierten Koeffizienten  $Q_n^M$  konvergieren schneller zu Null, so dass der Fehlerbeitrag aus dem Außengebiet minimiert wird. Die Berechnung der  $Q_n^M(\psi_0)$  ist in Anhang B.1 dargestellt.

#### Modifikation nach Wong&Gore

Bei der von WONG & GORE (1969) vorgeschlagenen Modifikation der *Stokes*-Funktion werden die langwelligen Anteile vom Grad  $n < K$  entfernt, so dass aus dem ursprünglichen Integrationkern (4.89) die Funktion

$$St_K^{WG}(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) - \sum_{n=2}^{K-1} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) = \sum_{n=K}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) \quad (4.199)$$

wird. Die Entfernung langwelliger Anteile bewirkt eine Erhöhung der Anzahl der Nullstellen von 2 auf  $K$ , so dass es bei geeigneter Wahl von  $K$  wieder möglich ist, am Kappenrand eine Nullstelle der *Stokes*-Funktion zu erzeugen und so die Fehlerbeiträge aus dem Außengebiet zu minimieren (siehe auch HECK & GRÜNINGER, 1983). Daneben bewirkt die Entfernung langwelliger Anteile der *Stokes*-Funktion bei der Berechnung von Geoidhöhen eine deutliche Hochpassfilterung der terrestrischen Schwereanomalien. Nach Gleichung (4.165) werden die Spektren von *Stokes*-Funktion und Schwereanomalien multipliziert. Enthält die *Stokes*-Funktion keine langwelliger Anteile, werden die entsprechenden spektralen Anteile der Schwereanomalien mit Null gewichtet und haben somit keinen Einfluss auf die Geoidhöhen. Diese Eigenschaft ist besonders bei der Kombination von Schwereanomalien und einem globalen Potentialmodell vorteilhaft. Dabei kann, wie bereits angemerkt, davon ausgegangen werden, dass die langwelliger Anteile des Schwerefeldes mit wesentlich höherer Genauigkeit durch das Potentialmodell als durch die Schwereanomalien dargestellt werden können. Die Modifikation nach Wong&Gore legt das Frequenzband (Grad  $n < K$ ) fest, in dem bei der Kombinationlösung auch im Innenraum ( $\psi < \psi_0$ ) die gesamte Information nur aus dem Potentialmodell bezogen wird. Eine derartige Gewichtung verschiedener Frequenzbänder ist notwendig, da man theoretisch zwar mit fehlerfreien Schwereanomalien die Fehlereinflüsse des verwendeten Potentialmodells verringern, umgekehrt aber ein fehlerfreies Potentialmodell nicht die Fehler der terrestrischen Anomalien ausgleichen kann<sup>11</sup> (siehe z.B. VANICEK & FEATHERSTONE, 1998).

Die Hochpassfilterung der Anomalien führt wegen der auch im Potentialmodell enthaltenen Fehler nicht zu einer optimalen Lösung. Diese kann theoretisch durch die im Folgenden dargestellte Methode der spektralen Gewichtung erzielt werden.

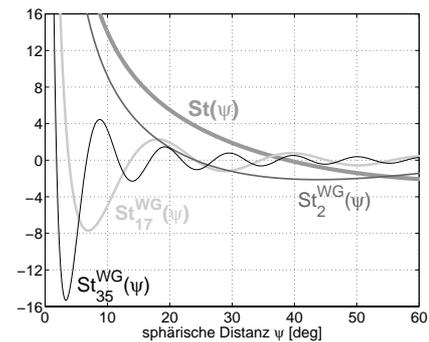


Abbildung 4.29: Modifikationen der *Stokes*-Funktion nach Wong&Gore.

<sup>11</sup>In der Kombinationslösung werden zunächst Geoidhöhen aus einem Potentialmodell berechnet, die alle Fehler dieses Modells enthalten. Danach wird der Beitrag der residualen Schwereanomalien  $\Delta g - \Delta g^{EGM}$  hinzuaddiert. Die residualen Anomalien enthalten alle Differenzen zwischen Potentialmodell und den terrestrischen Anomalien, insbesondere Differenzen wegen Fehlern von Potentialmodell und Schwereanomalien im langwelligen Bereich. Sind die Schwereanomalien fehlerfrei, so sind diese Differenzen die Fehler des Potentialmodells. Die globale Integration der Anomalien mit dem unmodifizierten *Stokes*-Kern berücksichtigt diese Differenzen und sorgt dafür, dass die Fehler des Potentialmodells vollständig ausgeglichen werden. Ist jedoch das Potentialmodell fehlerfrei, so entsprechen die Differenzen im langwelligen Bereich den Fehlern der Schwereanomalien. Wird die Integration erneut mit der unmodifizierten *Stokes*-Funktion durchgeführt, so gehen die Differenzen wieder in die Lösung ein, so dass die langwelligen Fehler der Anomalien den fehlerfreien Anteil des Potentialmodells verschlechtern. Wird statt dessen der Wong&Gore-modifizierte Integrationskern verwendet, so gehen die langwelligen Fehler der Anomalien nicht ein und die Gesamtlösung entspricht im langwelligen Bereich dem fehlerfreien Potentialmodell.

*Modifikation nach Wenzel*

In der von WENZEL (1981) vorgeschlagenen Kombination durch spektrale Gewichtung werden die Informationen aus Potentialmodell und Schwereanomalien pro SH-Grad in Abhängigkeit der jeweils zugehörigen Fehlerbeträge gewichtet. Zur Bestimmung der Gewichte ist die Kenntnis der Fehlergradvarianzen  $\sigma_{n,EGM}^2$  des Potentialmodells und  $\sigma_{n,T}^2$  der terrestrischen Anomalien notwendig. Der Gesamtfehler der Kombinationslösung beträgt

$$\sigma_n^2 = \sigma_{n,EGM}^2 + \sigma_{n,T}^2. \quad (4.200)$$

Entsprechend der so genannten *Wiener-Kolmogorov*-Filterung ergeben sich die spektralen Gewichte  $p_n$  zu

$$p_n^{EGM} = \frac{\sigma_{n,T}^2}{\sigma_n^2} \quad \text{und} \quad p_n^T = \frac{\sigma_{n,EGM}^2}{\sigma_n^2}. \quad (4.201)$$

Sind z.B. die Anomalien für einen bestimmten Grad  $n$  fehlerfrei, so erhält das Potentialmodell auf dieser Frequenz das Gewicht Null, d.h. die Information wird voll aus den Anomalien abgeleitet. Die Summe der beiden Gewichtungsfaktoren ergibt immer  $p_n^{EGM} + p_n^T = 1$ .

Verwendet man diese Gewichte in der Kombinationslösung, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^N p_n^{EGM} \Delta g_n^{EGM} + \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^N p_n^T \Delta g_n^T \\ &= \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^N p_n^{EGM} \Delta g_n^{EGM} + \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^N p_n^T \Delta g_n^T + \left( \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^N p_n^T \Delta g_n^{EGM} - \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^N p_n^T \Delta g_n^{EGM} \right) \end{aligned} \quad (4.202)$$

und wegen  $p_n^{EGM} + p_n^T = 1$

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^N (p_n^{EGM} + p_n^T) \Delta g_n^{EGM} + \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^N p_n^T (\Delta g_n^T - \Delta g_n^{EGM}) \\ &= \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^N \Delta g_n^{EGM} + \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^N p_n^T (\Delta g_n^T - \Delta g_n^{EGM}). \end{aligned} \quad (4.203)$$

Die Gewichte  $p_n^{EGM}$  sind aus der Gleichung verschwunden, d.h. es wird zunächst der mit allen Fehlern behaftete Geoidhöhenanteil aus dem Potentialmodell berechnet. Die Gewichte  $p_n^T$  steuern, wie stark die lang- und mittelwelligen Anteile der Residualanomalie in die Gesamtlösung einfließen. Sind die Schwereanomalien genauer als das Potentialmodell, so bewirken die Differenzen  $\Delta g_n^T - \Delta g_n^{EGM}$  eine Verbesserung der Gesamtlösung. Das Gewicht  $p_n^T$  ist dann sehr hoch, so dass die Verbesserung in die Lösung einfließt. Ist jedoch das Potentialmodell genauer, so entspricht die Differenz den Fehlern der terrestrischen Anomalien. Das Gewicht  $p_n^T$  ist in diesem Fall jedoch sehr klein, so dass die Fehler nicht in die Lösung eingehen.

Die spektralen Gewichte der Anomalien im Frequenzbereich oberhalb des maximalen Grades  $n = N$  des Potentialmodells betragen  $p_n^T = 1$ . Hier wird die gesamte Information aus dem terrestrischen Anomalienatz entnommen. Die kurzwelligen Fehler der Anomalien gehen somit voll in die Lösung ein.

Die entsprechend modifizierte *Stokes*-Funktion lautet

$$St^W(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n^T \cdot \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi). \quad (4.204)$$

Bei Berechnung der spektralen Gewichte wird davon ausgegangen, dass die Fehler von Potentialmodell und terrestrischen Anomalien homogen und isotrop sind, so dass keine Korrelationen zwischen verschiedenen Spektralbereichen auftreten. Dies ist nicht unbedingt realistisch, da sich das Fehlerverhalten in Abhängigkeit der Signalrauhigkeit und des Darstellungsfehlers deutlich ändern kann.

Außerdem wird angenommen, dass die Fehler in Potentialmodell und Schwereanomalien nicht miteinander korreliert sind. Dies ist nur der Fall, wenn es sich um ein *satellite-only* Modell handelt. Wird jedoch als Potentialmodell ein Kombinationsmodell, wie z.B. das EGM96, verwendet, in das bereits terrestrische Daten eingeflossen sind, so ist diese Annahme nicht uneingeschränkt gültig.

Es kann somit nicht davon ausgegangen werden, dass die durch die Methode der spektralen Gewichtung berechnete Lösung tatsächlich ein optimales Ergebnis liefert. Wie gut das Ergebnis vom Optimum abweicht hängt davon ab, wie weit das tatsächlichen Fehlerverhalten von den genannten Annahmen abweicht und wie realistisch die

zur Verfügung stehenden Fehlermaße sind. Im Falle der Potentialmodelle stehen in der Regel Fehlervarianzen zur Verfügung, Fehlerkovarianzen fehlen meist. Bei dem hier verwendeten Modell EGM96 steht die Kovarianzinformation nur bis zum Grad  $n = 70$  zur Verfügung. Die Datensätze der terrestrischen Anomalien enthalten in der Regel keine Information zur Genauigkeit. Diese kann nur dann erhalten werden, wenn aus verschiedenen Datensätzen mittels *Kleinster-Quadrate-Prädiktion* ein einheitlicher Datensatz geschaffen wird und dabei die Prädiktionsfehler mitbestimmt werden. Der so bestimmte Fehler hängt allerdings – wie bereits im ersten Teil dieser Arbeit angemerkt – wesentlich von der Qualität der verwendeten Signalkovarianzfunktion ab. Nur wenn diese realistisch ist, kann ein realistisches Fehlermaß angegeben werden. Die entstehenden Fehler sind dann im wesentlichen abhängig von der Punktdichte und vom Signalverhalten. Die entstehende Fehlerfunktion ist nicht notwendigerweise homogen und isotrop, so dass die berechneten Fehler beispielsweise gemittelt werden müssen, um ein einheitliches Fehlermaß abzuleiten.

## 4.5 Geoidberechnung in Bayern

Im Folgenden sollen die Ergebnisse der Quasigeoidberechnung in Bayern präsentiert werden. Nach Beschreibung der verwendeten Daten und deren Vorverarbeitung wird sowohl auf die Auswirkungen der angewandten Filterprozesse als auch der verbleibenden Fehleranteile aus Potentialmodell und Schwereanomalien eingegangen. Zur Überprüfung der Qualität der abgeleiteten Geoidmodelle wird danach ein Vergleich mit Quasigeoidhöhen aus GPS/Nivellement durchgeführt.

### 4.5.1 Daten und Datenaufbereitung

#### Verwendetes Datenmaterial

##### *Topographische Daten*

Zur Berechnung der RTM-Reduktionen wurden drei verschiedene Geländemodelle verwendet.

- Als langwellige Referenztopographie wurde ein  $15' \times 15'$ -DGM verwendet, das aus dem  $5' \times 5'$ -DGM TUG87 (siehe WIESER, 1987) der Technischen Universität Graz abgeleitet worden war. Um eine glatte Referenztopographie ohne Sprünge an den Kanten der  $15' \times 15'$ -Blöcke zu erhalten und auch um die topographischen Effekte dieser Topographie auf Potential und Schwere effektiv berechnen zu können, wurde eine SH-Darstellung des Geländes berechnet (vgl. Kapitel 4.9). Deren spektrale Auflösung beträgt  $n = 720$ , was einer räumlichen Auflösung (halbe Wellenlänge) von ca. 27 km entspricht.
- Zur Modellierung der Geländeoberfläche wurde innerhalb Bayerns das hochauflösende Geländemodell DGM25 mit der Auflösung  $50\text{ m} \times 50\text{ m}$  verwendet. Dieses Modell wurde vom Bayerischen Landesvermessungsamt zur Verfügung gestellt. Es liegt in ebenen Gauß-Krüger-Koordinaten (DHDN) bzgl. des  $12^\circ$ -Meridians vor.
- Außerhalb Bayerns stand zur Beschreibung der Oberfläche kein hochauflösendes Modell zur Verfügung. Hier wurde das  $30'' \times 30''$ -DGM GTOPO30 des U.S. Geological Survey (USGS) verwendet (siehe USGS, 1999), welches in geographischen Koordinaten bezüglich WGS84 verliegt. Die Verwendung dieses Modells führt außerhalb Bayerns zu einer etwas ungenaueren Beschreibung der Topographie. Dadurch konnten durch die RTM-Reduktionen nicht alle kurzwelligen Signalanteile entfernt werden, was jedoch nur im Gebirge eine größere Rolle spielt. Hilfreich war hier, dass in den im Alpenbereich verfügbaren Datensätzen oft neben der Schwere explizit topographische Reduktionen angegeben waren. Die RTM-Reduktionen konnten somit ohne direkte Kenntnis des Geländes entsprechend Formel (4.151) berechnet werden.

Die Verwendung verschiedener Geländemodelle erfordert natürlich eine Überprüfung deren Konsistenz. Hierzu wurden in ausgewählten Gebieten die Geländemodelle miteinander verglichen, um eventuell vorhandene systematische Versätze zu bestimmen. Da die Auflösung der Referenztopographie sehr gering ist, konnte kein Versatz der Referenztopographie gegenüber den beiden anderen Modellen festgestellt werden. Die folgenden Betrachtungen beschränken sich somit auf die Überprüfung von DGM25 und GTOPO30. Um einen Vergleich der Daten durchführen zu können, wurden die geographischen Koordinaten des GTOPO30 erst in GK-Koordinaten transformiert und entsprechend dem DGM25 auf ein  $50\text{ m}$  Raster interpoliert. Hierzu wurde aus einem in Bayern vorliegenden Satz von identischen Punkten Transformationsparameter bestimmt (näheres hierzu folgt bei der Beschreibung der Schweredaten).

Ein Vergleich der DGM-Gitter aus DGM25 und GTOPO30 in der Region Estergebirge (siehe Abbildung 4.30) zeigte einen Versatz des GTOPO30 um ca.  $600\text{ m}$  in Ost-West-Richtung gegenüber dem DGM25. Dies entspricht etwa einem Kompartiment des globalen Modells. Um Einlesefehler bei der Datenverarbeitung auszuschließen, wurde ein zweites unabhängiges, vom USGS stammendes Softwaremodul zum Einlesen von GTOPO30-Daten verwendet, was allerdings zum selben Ergebnis führte. Der selbe Versatz ergab sich auch in weiteren beispielhaft ausgewählten Regionen in ganz Bayern<sup>12</sup>. Um sicher zu gehen, dass der Versatz nicht nur in Bayern auftritt, wurden zum weiteren Vergleich mehrere topographische Karten der Schweiz verwendet<sup>13</sup>. Der Vergleich mit den topographischen Karten erfolgte graphisch und zeigte ebenfalls einen Versatz von ca.  $600\text{ m}$  in Breitenkreisrichtung. Deshalb wurde das GTOPO30 für alle Berechnungen um ein Kompartiment nach Osten verschoben.

Transformationsparameter der GTOPO30-Daten ins Schweizer Projektionssystem (SPS) konnten aus dem durch die Landestopographie der Schweiz zur Verfügung gestellten Schweredatensatz bestimmt werden. Die Punktkoordinaten sind dort sowohl bzgl. ETRS89 (und damit WGS84) wie auch im SPS angegeben.

<sup>12</sup>Es wurden Tests im Bereich der TK25 Kartenblättern HAMMELBURG (TK5825), STADTSTEINACH (TK5835), REGENSBURG (TK6938), GRAFENAU (TK7146), AUGSBURG (TK7631), TUTZING (TK8033) und KÖNIGSEE (TK8443) durchgeführt.

<sup>13</sup>Es wurden verwendet im Maßstab 1 : 25 000 die Kartenblätter LAUTERBRUNNEN (in den Berner Alpen) und FILISUR (in den Graubündner Alpen) sowie im Maßstab 1 : 50 000 die Blätter ROCHERS DE NAYE (am Genfer See) und WALENSTADT (am Rande der Appenzeller Alpen).

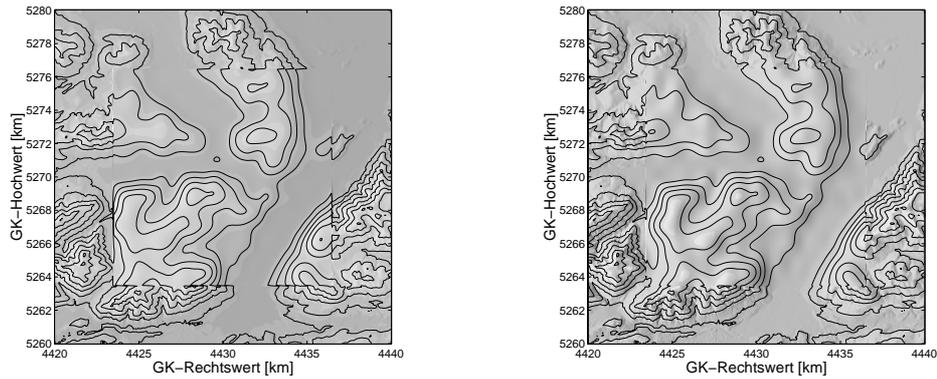


Abbildung 4.30: Kombination der beiden Geländemodelle GTOPO30 (innen) und DGM25 (außen) in der Region Ammer-/Estergebirge. Das linke Bild zeigt einen deutlichen Versatz der beiden Datensätze in Ost-Westrichtung. Im rechten Bild wurde das GTOPO-Modell um ein  $30''$ -Kompartment nach Osten verschoben. Wegen der unterschiedlichen Auflösung der beiden Modelle treten zwar auch hier noch Sprünge entlang den Schnittkanten auf, jedoch passen die Modelle wesentlich besser zueinander als im linken Bild.

### Globales Potentialmodell

Als globales Potentialmodell wurde das bereits in Kapitel 4.3.2 beschriebene EGM96 verwendet. Die spektrale Auflösung des Modells liegt bei  $n = 360$ , was einer räumlichen Auflösung von ca. 55 km entspricht. Die Auflösung der Referenztopographie liegt somit deutlich über der des Potentialmodells. Dies bedeutet, dass nach Reduktion der globalen Anteile sowie der RTM-Effekte noch Signalanteile in den Anomalien enthalten sind, die aus dem Frequenzbereich  $360 < n < 720$  der Topographie stammen. Die maximale Auflösung der Referenztopographie von  $n = 720$  stellt jedoch einen guten Kompromiss dar zwischen dem Bestreben, eine relativ langwellige Fläche zu wählen (glattes Residualfeld; Verwendung einer Bouguerplatte zur Berechnung der harmonischen Korrektur entsprechend Kapitel 4.4.2), gleichzeitig aber den Rechenaufwand für die RTM-Reduktionen möglichst gering zu halten (je kurzwelliger die Referenztopographie, desto geringer und häufiger oszillierend sind die RTM-Massen, so dass die Integration auf ein kleines Gebiet beschränkt werden kann).

### Terrestrische Schwerewerte

Zur Berechnung eines regionalen Quasigeoides in Bayern wurden terrestrische Schwerewerte aus einer Umgebung von ca.  $4^\circ$  verwendet. Dabei standen sowohl Punktschwerewerte wie auch mittlere Schwereanomalien unterschiedlicher Blockgröße zur Verfügung. Die Daten wurden von verschiedenen Organisationen zur Verfügung gestellt. Dies waren das Bayerische Landesvermessungsamt, das Bundesamt für Kartographie und Geodäsie, das Landesvermessungsamt der Tschechischen Republik, das Bureau Gravimetric International, die Landestopographie der Schweiz, die Technische Universität Graz, das Politecnico di Milano, die Universität Ljubljana und die Universität Budapest. Die Tabellen 4.3 und 4.2 enthalten eine Zusammenstellung der verwendeten Datensätze und die jeweils enthaltenen Informationen zu den entsprechenden Referenzrahmen.

Waren Informationen nicht zugänglich, so wurde angenommen, dass die Schwere sich auf das IGSN71 bezieht und Lage und Höhe sich auf die jeweiligen Landesnetze beziehen. Da für einige Landesnetze keine Transformationsparameter zur Verfügung standen, musste für diese auf die Transformation in ein einheitliches Bezugssystem verzichtet werden. Dadurch kommt es zu systematischen Fehlern in der erstellten Gesamtdatei. In der Höhenkomponente wurden zur Transformation in ein einheitliches Datum die von SACHER et al. (1999) publizierten Werte verwendet (siehe Abbildung 4.31). Diese waren dort als Differenzen zum gesamteuropäischen Nivellementnetz UELN angegeben worden und wurden hier auf Differenzen zum DHHN92 angegeben. Die Differenz zwischen UELN und DHHN92 beträgt nach SACHER et al. (1999) konstant 1 cm (im Sinne UELN-DHHN92).

In den angegebenen Werten sind nicht nur die Datumsdifferenzen aufgrund unterschiedlicher Pegelanschlüsse enthalten, sondern auch Differenzen aufgrund unterschiedlicher Höhentypen. In Ländern mit mehreren Zahlenwerten reicht ein konstanter Versatz nicht aus, sondern es müssen zur Transformation flächenhafte Polynome verwendet werden (siehe SACHER et al. (1999)). Die jeweiligen Höhenetze sind gegenüber dem gesamteuropäischen Nivellementnetz UELN verformt. Dies kann entweder durch die in den jeweiligen Netzausgleichungen verwendeten Zwänge oder durch unterschiedliche Höhentypen (die Differenz ist dann z.B. abhängig von der Höhenlage der Punkte) bewirkt werden.

Tabelle 4.2: In den Datenbeschreibungen enthaltene Informationen zu den Referenzrahmen der verwendeten Blockschwerewerte.

Region	Datentyp	Blockgröße	Lage	Höhe	Schwere
neue Bundesländer	FA	2.5' × 4'			
Mitteleuropa (Frankreich, Belgien, Luxemburg, Nordsee)	FA	6' × 10'			
Holland	FA	3' × 5'			
Polen	FA	5' × 5'			Potsdam
Tschechien	FA	5' × 7.5'	(Krasowsky)	EPPN(Kronstadt)	JGS
Ungarn	Faye	1.5' × 2.5'	(GRS80)	EPPN(Kronstadt)	ISGN71
Jugoslawien	FA	5' × 5'	(GRS80)	EPPN(Kronstadt)	ISGN71

Tabelle 4.3: In den Datenbeschreibungen enthaltene Informationen zu den Referenzrahmen der verwendeten Punktschwerewerte. Die Datentypen bedeuten gemessene Schwere  $g$ , Freiluftanomalie FA und Geländeanziehung TA. In den Lagekoordinaten ist neben dem Datum in Klammern das zugehörige Referenzellipsoid angegeben, in der Höhenkomponente zusätzlich der Pegelanschlusspunkt und der Höhentyp (normalorthometrisch NOH, Normalhöhe NH).

Region	Datentyp	mitt. Punktabstand	Lage	Höhe	Schwere
Bayern	$g$	2.7 km	DHDN (Bessel)	DHHN92 (Amsterdam, NOH)	DSGN
alte Bundesländer	FA	2.6 km	DHDN (Bessel)	DHHN92(Amsterdam, NOH)	DSGN
Estergebirge	$g$	0.7 km	DREF (WGS84)	nahe DHHN92( $\approx$ NH)	DSGN
Frankreich	$g$	3.2 km			
Italien	FA	4.3 km	ROMA40 (Hayford)	(Genua)	
Österreich	$g, TA$	6.2 km	MGI	Gebrauchshöhen (Triest)	IGSN71
Schweiz	$g, TA$	1.2 km	ETRS89 (WGS84)	Gebrauchshöhen (Genf)	
Slowenien	$g, TA$	2.1 km	EUREF (WGS84)	(Triest)	IGSN71
Slowakei	$g$	15.2 km			

Es wurde angestrebt, alle Berechnungen in einem einheitlichen Bezugssystem auszuführen. Die Lagekoordinaten sollten sich auf das WGS84 beziehen, das durch das ITRF89 bzw. hierarchisch nachgeordneten Referenzrahmen wie dem ETRS oder dem DREF realisiert wird. Da die Zielregion der Geoidberechnung Bayern war, wurde als Höhenbezug das DHHN92 verwendet, das am Pegel Amsterdam angeschlossen ist. Diese hinsichtlich der zu lösenden GRWA recht beliebige Festlegung führt zu einem unbekanntem Höhenversatz des Geoids, da nicht genau bekannt ist, wie weit der Pegel Amsterdam mit einem globalen Geoid (im langwelligen Bereich realisiert durch EGM96) übereinstimmt. Schwerebezug sollte das IGSN71 sein bzw. hierarchisch nachgeordnete Netze wie z.B. das DSGN.

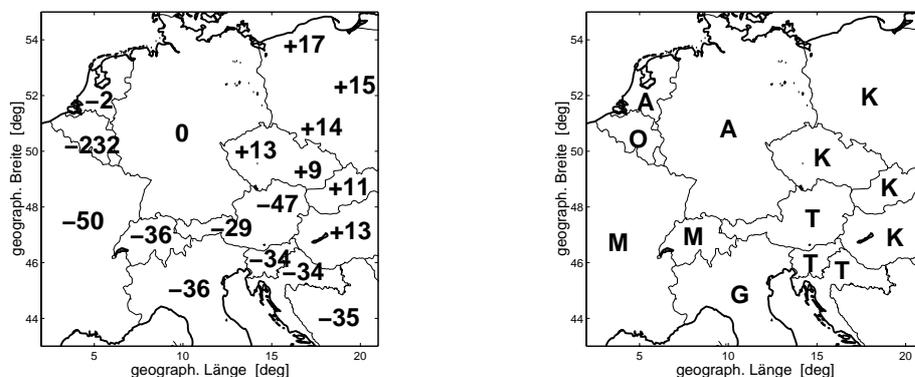


Abbildung 4.31: Höhendifferenzen (links) in [cm] zwischen DHHN92 und den Landeshöhen der angrenzenden Staaten (nach SACHER et al. (1999)) und die jeweiligen Pegelanschlüsse (rechts). Darin bedeuten A=Amsterdam, O=Ostende, M=Marseille, G=Genua, T=Triest, K=Kronstadt.

Entsprechend den vorliegenden Informationen wurde eine Transformation der Lagekoordinaten in folgenden Fällen durchgeführt:

- Bayern: In Bayern wurde ein Satz von 37 identischen Punkten verwendet, um die Parameter einer 3D-Helmerttransformation zwischen DHDN und ETRS89 zu bestimmen. Die Daten waren vom BLVA zur Verfügung gestellt worden. Die Differenz in den Lagekoordinaten zwischen den beiden Systemen beträgt etwa je 100 m in Längen- und Breitenrichtung. Die Restklaffungen in den identischen Punkten betragen ca. 0.5 m.
- Deutschland: Da hier weder Transformationsparameter noch identische Punkte vorlagen, wurden die in Bayern bestimmten Transformationsparameter verwendet. Dies bedeutet, dass identische Punkte nur in einem kleinen Bereich des Transformationsgebietes vorliegen. Es kann dadurch im übrigen Deutschland zu systematischen Fehlern kommen, die die Größe der in Bayern festgestellten Restklaffungen übersteigen. Aufgrund der Genauigkeiten von DHDN und DREF kann jedoch davon ausgegangen werden, dass diese Fehler für die vorliegende Aufgabe vernachlässigbar klein sind.
- Österreich: Die Transformation zwischen dem vom ehemaligen Militärgeographischen Institut definierten Lagedatum (MGI) und dem WGS84 wurde entsprechend den von HOFMANN-WELLENHOFF et al. (1994) angegebenen Formeln durchgeführt. Der Lageversatz der beiden Systeme beträgt bis zu 50 m in der Breite und 100 m in der Länge.
- Italien: Es wurde vom Militärgeographischen Institut Mailand eine Routine zur Transformation zwischen dem italienischen Datum ROMA40 und ETRS89 zur Verfügung gestellt. Diese gilt für den Bereich Norditalien und hat eine Genauigkeit von ca. 1 m. Die Differenz der beiden Systeme beträgt bis ca. 50 m in der Breite und 35 m in der Länge.
- Tschechien: In der Beschreibung der Daten wurden zur Transformation die konstanten Versätze  $\Delta\varphi = 1.4''$  ( $\approx 30$  m) und  $\Delta\lambda = 6.4''$  ( $\approx 130$  m) zum Übergang zwischen dem auf dem Krasowsky-Ellipsoid definierten Landesdatum und dem GRS80 angegeben. Der Übergang von GRS80 nach WGS84 erfolgte anschließend durch einen einfachen Ellipsoidübergang.

Da die verschiedenen Datensätze zum Teil gegenseitig überlappend waren, konnten systematische Fehler und grobe Ausreißer entdeckt werden. Zum Beispiel war der Bereich des südlichen Österreich sowohl im österreichischen, als auch im italienischen Datensatz enthalten. Es schienen dabei identische, aber systematisch versetzte Punkte in den Datensätzen enthalten zu sein. Unter Verwendung der obigen Transformationsparameter konnte festgestellt werden, dass es sich tatsächlich um identische Punkte handelte, die jedoch scheinbar ohne Datumsübergang vom österreichischen in den italienischen Datensatz übernommen worden waren. Die identischen Punkte wurden daraufhin aus dem italienischen Datensatz entfernt. Schließlich wurden ca. 78 000 Blockmittelwerte und ca. 86 900 Punktwerte verwendet (siehe Abbildung 4.32).

### Berechnung residueller Schwereanomalien

Im Anschluss an die Transformation in ein einheitliches Bezugssystem wurde die Geländewirkung der Residualtopographie bezüglich der  $15' \times 15'$ -Referenztopographie berechnet. Im Falle der Punktwerte wurde die numerische Integration nach Formel (4.147) durchgeführt. Für die Blockmittelwerte wurde die Reduktion in den entsprechenden Bereichen mittels FFT (siehe Formel (4.173)) an den Gitterpunkten des  $30'' \times 30''$ -DGM berechnet

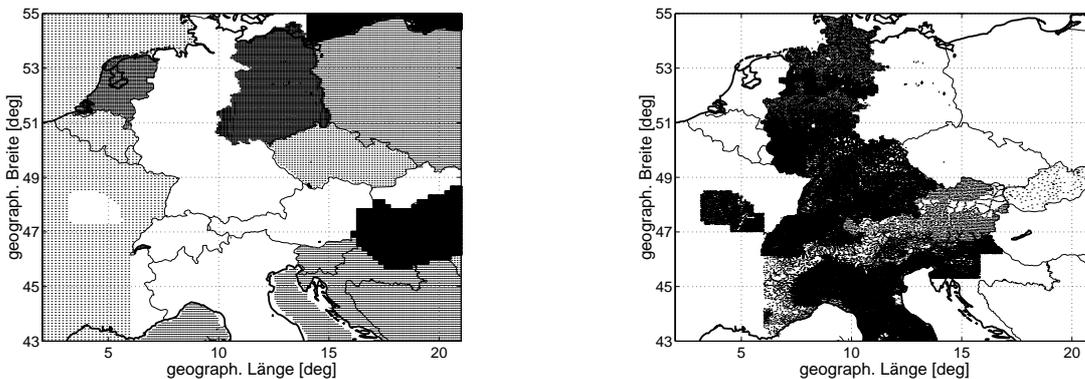


Abbildung 4.32: Verteilung der verwendeten Blockmittelwerte (links) und Punktschwerewerte (rechts).

und anschließend die innerhalb eines Blocks liegenden Werte gemittelt. Zur Vermeidung der in steilem Gelände in Berechnungspunktnähe auftretenden Konvergenzprobleme wurde die FFT-Methode, wie in Kapitel 4.4.3 beschrieben, mit der Prismenmethode kombiniert. Da die Residualanomalien einen sehr glatten Verlauf zeigen, konnten daraus noch einige grobe Fehler entdeckt werden, die aus den Dateien entfernt wurden.

### Schätzung von Blockmittelwerten

Aus den RTM-reduzierten Punkt- und Blockmittelwerten wurde entsprechend dem in Kapitel 4.3.6 dargestellten Verfahren ein einheitlicher Satz von Blockmittelwerten prädiert. Aus Konsistenzgründen wurde eine Blockgröße von  $30'' \times 30''$  gewählt. Dadurch liegen Schwereanomalien und Geländemodell an den selben Gitterpunkten vor, was für die Berechnung höherer Reihenglieder der Höhenanomalie notwendig ist. Die gewählte Blockgröße liegt meist unter dem mittleren Punktabstand der Stützpunkte, jedoch weisen die RTM-reduzierten Schwereanomalien einen so glatten Verlauf auf, dass auch bei geringer Punktdichte genaue Blockmittelwerte abgeleitet werden können.

Trotz eines insgesamt glatten Signalverlaufs verursachen größere Dichteanomalien und die teilweise zu grobe Geländedarstellung ein Residualfeld, das nicht durch eine einheitliche Signalkovarianzfunktion beschrieben werden kann. Deshalb wurden zur Prädiktion der Blockmittelwerte regional unterschiedliche Kovarianzfunktionen abgeleitet. Dabei treten die größten Residuen erwartungsgemäß in den Alpen auf. Hier erreicht das Residualfeld Beträge bis zu  $80 \text{ mGal}$ , so dass sich empirische Varianzen von ca.  $710 \text{ mGal}^2$  ergeben. Außerhalb der Alpen erreicht das Signal meist Beträge bis ca.  $22 \text{ mGal}$  (Varianz bei ca.  $54 \text{ mGal}^2$ ) bzw. bis zu  $45 \text{ mGal}$  (Varianz bei ca.  $225 \text{ mGal}^2$ ) in topographisch oder tektonisch bewegten Regionen wie den Mittelgebirgen oder dem Oberrheingraben zwischen Basel und Ludwigshafen. In den Abbildung 4.33 und 4.34 sind Kovarianzfunktionen für verschiedene Regionen dargestellt. Es wurde jeweils eine analytische Funktion nach dem Exponentialmodell angepasst. Die Kovarianzen wurden jeweils aus einem  $1^\circ \times 1.5^\circ$  großen Gebiet abgeleitet.

Deutlich ist die Zunahme der Signalstärke in den topographisch bewegten Regionen zu erkennen. Zum Teil weichen dort auch die empirischen Varianzen von denen der analytischen Modelle ab. Dies deutet darauf hin, dass das Signal in diesen Regionen zum Teil noch relativ rauh ist und durch die Kovarianzmodelle nur eine geglättete Version des Signals dargestellt werden kann. Dies gilt zum Beispiel für den Bereich zwischen süd- und osttiroler Alpen (Abbildung 4.34, links). Hier stand zur Reduktion der hochfrequenten Topographie nur das  $30'' \times 30''$  Modell GTOPO30 zur Verfügung. Dadurch kann die Wirkung von Topographieanteilen mit Wellenlängen kleiner  $600 \text{ m}$  nicht erfasst werden. Es verbleiben also hochfrequente Anteile im Signal, die für den großen Rauschanteil verantwortlich sind. Im Gegensatz dazu fallen in der italienisch-schweizerischen Grenzregion (Abbildung 4.34,

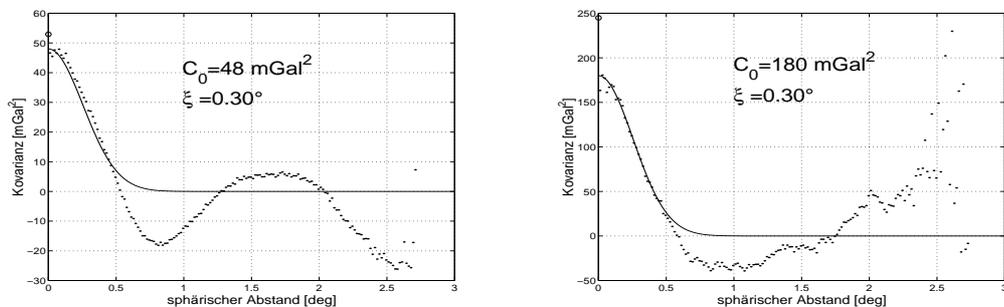


Abbildung 4.33: Kovarianzfunktionen der Residualanomalien in den Regionen Schwaben und Oberbayern (links) sowie im Bereich Rheingraben (rechts). Die empirische Varianz ist jeweils mit einem Kreis gekennzeichnet. Daneben sind die Parameter Varianz  $C_0$  und Korrelationslänge  $\xi$  des angepassten analytischen Exponentialmodells angegeben.

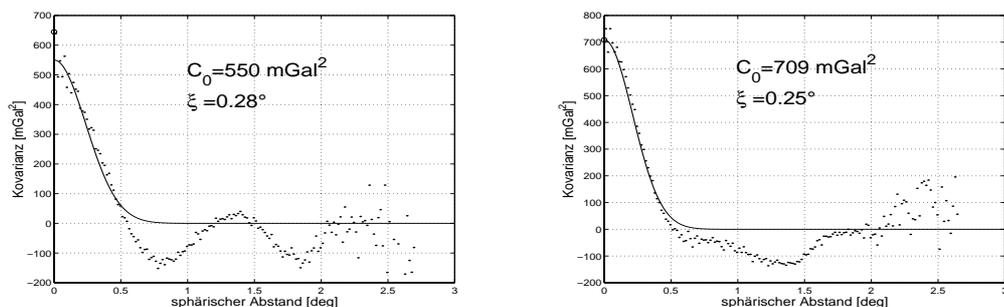


Abbildung 4.34: Kovarianzfunktionen der Residualanomalien in den süd- und osttiroler Alpen (links) sowie in der Grenzregion Italien-Schweiz zwischen nordwestlicher Poebene und Walliser Alpen (rechts).

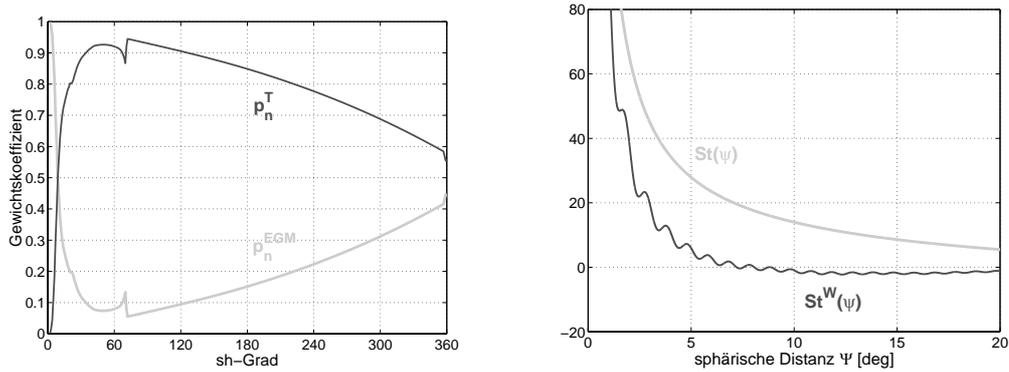


Abbildung 4.35: Spektrale Gewichte (links)  $p_n^T$  für terrestrischen Anomalien und  $p_n^{EGM}$  für EGM96-Anomalien sowie die entsprechend modifizierte Stokes-Funktion  $St^W(\psi)$  (rechts).

rechts) empirische und analytische Varianz (abgesehen vom Messrauschen) zusammen. Die Modellierung der Geländeeffekte ist dort wohl trotz bewegter Topographie (Höhen über 4000 m) recht gut gelungen. Das Signal erreicht trotzdem die im gesamten Datensatz größten Werte. Dies liegt an der im folgenden Abschnitt näher beschriebenen Dichteanomalie (Ivreazone).

Um die in Kapitel 4.4.4 beschriebene Kombination nach *Wenzel* durchführen zu können, müssen für die terrestrischen Anomalien Fehlergradvarianzen angegeben werden. Diese können nach Formel (4.116) bestimmt werden, wenn für die Blockmittelwerte eine einheitliche Fehlerkovarianzfunktion vorliegt. Hierzu wurde eine Funktion nach dem Exponentialmodell verwendet, wobei für Varianz und Korrelationslänge folgende vereinfachende Annahmen getroffen wurden:

- Zur Prädiktion der Blockmittelwerte wurden jeweils nur die Stützpunkte in nächster Umgebung verwendet. Der Suchraum der Stützpunkte betrug mindestens  $2'$  und wurde automatisch ausgeweitet, falls dort keine Punkte gefunden werden konnten. Geht man davon aus, dass die Fehler benachbarter Blockmittelwerte nur dann korreliert sind, wenn zur Prädiktion identische Stützpunkte verwendet wurden, so hängt die Korrelationslänge der Fehlerkovarianzfunktion von der Größe des Suchraums ab. Die Korrelationslänge wurde auf  $\xi = 2'$  festgelegt.
- Die Fehlervarianz der Blockmittelwerte hängt neben der Stützpunktdichte wesentlich von der Differenz zwischen empirischer und analytischer Varianz ab. Die Fehler sind deshalb insgesamt inhomogen und von der zur Prädiktion verwendeten Signalkovarianzfunktion abhängig. Um eine homogene Fehlerbeschreibung zu ermöglichen wurde ein konstanter mittlerer Fehler von  $2.4 \text{ mGal}$  verwendet (berechnet aus dem Mittel der Fehlervarianzen).

Aus der gewählten Fehlerkovarianzfunktion ergeben sich schließlich in Kombination mit den EGM96-Fehlervarianzen die in Abbildung 4.35 dargestellten spektralen Gewichte und die entsprechend modifizierte *Stokes*-Funktion.

### Darstellung und Interpretation der Schwereanomalien

Im globalen Mittel variieren Freiluftanomalien etwa im Bereich  $\pm 100 \text{ mGal}$ , wobei in extremen Fällen auch Werte von  $250 - 300 \text{ mGal}$  erreicht werden können. Die langwelligen Signalanteile sind dabei durch ein Potentialmodell beschreibbar, die verbleibenden Residuen durch die kurzwellige Topographie sowie Dichteanomalien, also Abweichungen der wahren Gesteinsdichte von dem für die topographischen Reduktionen angenommenen Wert<sup>14</sup>. Abbildung 4.36 zeigt die Histogramme der Freiluftanomalien vor und nach Reduktion des Potentialmodells und der RTM-Topographie (berechnet aus den ca. 3.3 Mio.  $30'' \times 30''$ -Blockmittelwerten).

Da der verwendete Datensatz global nur einen kleinen Ausschnitt darstellt, sind die Freiluftanomalien nicht genau um Null zentriert. Sie stellen im groben Verlauf eine Normalverteilung dar. Die Reduktion des Potentialmodells entfernt langwellige Strukturen, wodurch die verbleibenden Anomalien besser zentriert sind. Im Bereich bis zu  $\pm 25 \text{ mGal}$  entsprechen die Werte sehr gut einer Normalverteilung. Aufgrund kurzwelliger Topographie und Dichteanomalien treten allerdings noch relativ viele Werte mit größeren Beträgen auf. Diese Anteile werden zum Großteil durch die RTM-Reduktionen beseitigt. Das Restsignal entspricht am besten einer Normalverteilung. Die Werte erreichen jetzt kaum noch Beträge über  $30 \text{ mGal}$ . Die Glättung des Feldes ist in Abbildungen 4.37 dargestellt. In topographisch bewegtem Gelände ist eine deutliche Korrelation der unreduzierten Freiluftanomalie (a) mit der Geländehöhe erkennbar. Die Signalstruktur im Bereich der Alpen entspricht der eines DGM.

<sup>14</sup>In dieser Arbeit wurde als Krustendichte der konstante Wert von  $2.67 \text{ g/cm}^3$  verwendet.

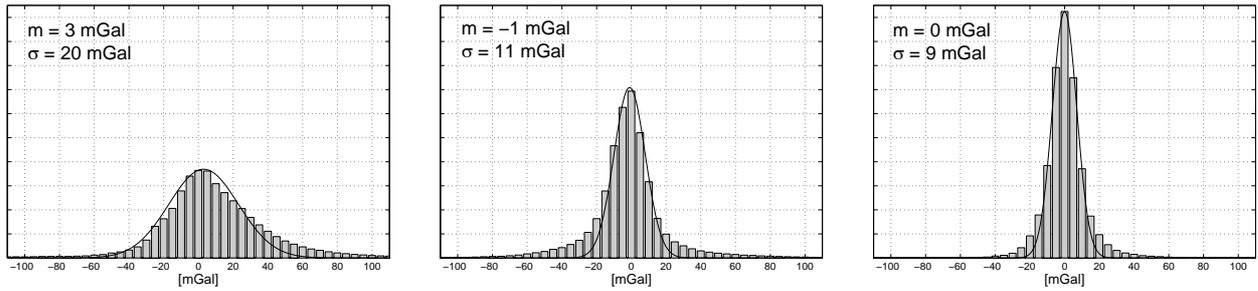


Abbildung 4.36: Histogramme von Freiluftanomalie  $\Delta g_{FA}$  (links), EGM-reduzierte Anomalie  $\Delta g_{FA} - \Delta g^{EGM}$  (Mitte) und EGM-reduzierte RTM-Anomalie  $\Delta g^{RTM} - \Delta g^{EGM}$  (rechts). Zusätzlich sind jeweils die Parameter Mittelwert  $m$  und Standardabweichung  $\sigma$  einer graphisch angepassten Normalverteilung gegeben.

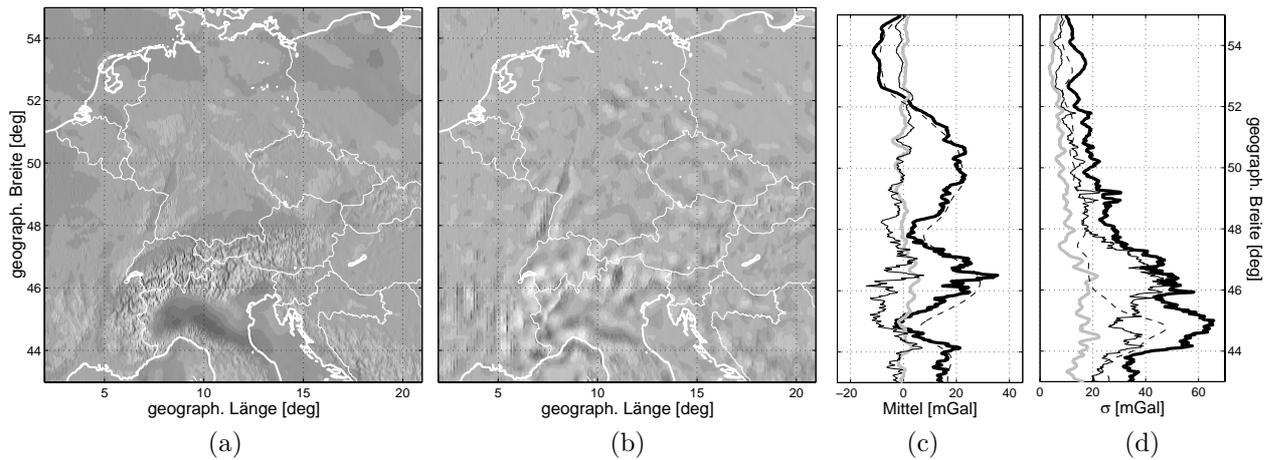


Abbildung 4.37: Freiluftanomalien (a) und EGM-reduzierte RTM-Anomalien (b). Daneben Mittelwert (c) und mittlere Signalvariation  $\sigma$  (d) pro Breitenkreis. Dargestellt sind in (c) und (d) jeweils: Freiluftanomalien (dick, schwarz), langwellige EGM-Anomalien (gestrichelt), EGM-reduzierte Freiluftanomalien (dünn, schwarz) und EGM-reduzierte RTM-Anomalien (dick, grau).

Tabelle 4.4: Statistische Werte verschiedener Schwereanomalien jeweils in [mGal]. Freiluftanomalie ( $\Delta g^{FA}$ ), RTM-reduzierte Anomalien ( $\Delta g^{RTM}$ ), EGM96-Anomalie ( $\Delta g^{EGM}$ ).

Anomaliotyp	min	max	Mittel	$\sigma$
$\Delta g_{FA}$	-155	347	9	35
$\Delta g^{EGM}$	-156	143	12	29
$\Delta g_{FA} - \Delta g^{EGM}$	-257	253	-3	21
$\Delta g^{RTM}$	-154	188	12	32
$\Delta g^{RTM} - \Delta g^{EGM}$	-70	94	0	12

In topographisch weniger bewegtem Gelände tritt die Abhängigkeit der Freiluftanomalie von Dichtestrukturen im Erdinneren deutlicher hervor. Eine Korrelation mit der Höhe ist dort wesentlich weniger ausgeprägt. Beispielsweise bewirken die gegenüber der mittleren Krustendichte leichteren Sedimentablagerungen in der Poebene deutlich negative Anomalien südlich der Alpen. Der Dichtekontrast beträgt in dieser Region nach BÜRKI (1989) zwischen  $\Delta\rho = -0.77 \text{ g/cm}^3$  an der Oberfläche und  $\Delta\rho = -0.2 \text{ g/cm}^3$  im Untergrund. Die Sedimentablagerungen erreichen Tiefen bis zu 15 km. Die Freiluftanomalien nehmen hier Werte bis zu  $-160 \text{ mGal}$  an. Im Breitenmittelwert (c) ist dieser Effekt im Bereich zwischen  $44^\circ$  und  $46^\circ$  nördlicher Breite klar erkennbar. Mit einer räumlichen Ausdehnung von ca.  $400 \text{ km} \times 100 \text{ km}$  liegt diese ausgeprägte Dichtestruktur deutlich über dem Auflösungsvermögen des verwendeten Potentialmodells. Ein wesentlicher Teil des Signals ist deshalb bereits gut durch das EGM modellierbar. Dies zeigt sich im Vergleich der Breitenmittelwerte von gemessenen und aus dem EGM berechneten Freiluftanomalien. Die Kurve der gemessenen Anomalien (dick, schwarz) folgt im wesentlichen dem gestrichelt gekennzeichneten Anteil des EGM. Die Reduktion der globalen EGM-Anteile führt zu einer Zentrierung des Signals, was sich in einem

kleineren Mittelwert zeigt. Allerdings bleiben starke kurzwellige Strukturen im Restsignal zurück, ausgedrückt durch die immer noch große Signalvarianz. Diese wurde lediglich im Breitenbereich der Poebene deutlich gesenkt und deutet darauf hin, dass die langwellige Muldenstruktur und die stark positiven Werte in den Westalpen im globalen Modell enthalten sind. Die Reduktion führt zu wesentlich kleineren Residuen bezüglich des Mittelwertes. Die Signalvariation der RTM-Anomalien (b) zeigt, dass die wesentlichen verbleibenden Signalanteile in der kurzwelligen Topographie stecken. Auch im Alpenbereich treten im Breitenmittel kaum größere Werte als 20 mGal auf. Da, wie aus Abbildung 4.36 ersichtlich ist, die RTM-Anomalien nahezu normalverteilt sind, kann man erwarten, dass in den Alpen keine Werte größer als 60 mGal mehr auftreten. Außerhalb der Alpen beträgt die Signalstärke sogar nur noch etwa die Hälfte. In Tabelle 4.4 sind statistische Werte der Schwereanomalien enthalten. Der Mittelwert der Freiluftanomalie liegt bei 9 mGal. Dieser Wert liegt höher als bei der an das Histogramm angepassten Normalverteilung (Abbildung 4.36). Dies zeigt, dass die Freiluftanomalie im Untersuchungsgebiet nicht ganz einer Normalverteilung entspricht, sondern unsymmetrisch zum Mittelwert verteilt ist. Auch die mittlere Signalvariation ist mit 35 mGal größer als die Standardabweichung der Normalverteilung, welche nur 20 mGal beträgt. Besser entsprechen die EGM-reduzierten Anomalien und vor allem die RTM-Anomalien den jeweils angepassten Normalverteilungen. Dies zeigt, dass die angebrachten Reduktionen tatsächlich einen Großteil der enthaltenen deterministischen Signalstruktur entfernen. Das Residualfeld hat in weiten Teilen Zufallscharakter. Die verbleibenden Signalanteile sind auf Dichteanomalien im Erdinneren sowie auf noch nicht entfernte Anteile der Topographie zurückzuführen. Im ersten Fall kommen allerdings nur Strukturen in Frage, deren räumliche Ausdehnung zu klein ist, um bereits im Potentialmodell enthalten zu sein. Im Falle der noch enthaltenen Resttopographie kommen zum einen ultrakurzwellige Anteile in Betracht, die aufgrund der beschränkten Auflösung der verwendeten Geländemodelle nicht entfernt werden konnten, und zum anderen mittelwellige Anteile im Spektralbereich  $360 < n < 720$ , also im Bereich zwischen Potentialmodell und RTM-Referenztopographie.

In der späteren Geoidberechnung werden die RTM-reduzierten Anomalien bezüglich der  $15' \times 15'$ -Topographie ( $n = 720$ ) verwendet. Diese sind hinreichend glatt, so dass in Bayern keine wesentlichen Beiträge durch die höheren Terme der *Molodenskii*-Reihe verursacht werden. Trotzdem ist es interessant, das Residualfeld zusätzlich um den Spektralbereich zwischen  $n = 360$  und  $n = 720$  zu reduzieren, wodurch sich eine zusätzliche Glättung ergeben müsste. Die entsprechenden Anteile wurden aus einer SH-Darstellung des TUG87-DGM abgeleitet. Da bei Bestimmung der topographischen Potentialkoeffizienten eine konstante Dichte angenommen wurde, ist zu erwarten, dass im Restsignal Dichteanomalien deutlich werden.

Abbildung 4.38 (oben links) zeigt die RTM-reduzierten Anomalien aus Abbildung 4.37 (b) in einem vergrößerten Ausschnitt. Es sind noch mittel- und kurzwellige Signalanteile mit Beträgen von fast 100 mGal enthalten. Ein Großteil dieses Signals ist durch die Wirkung der mittelwelligen Topographie (oben rechts) modellierbar. Dieser Anteil erreicht Werte bis zu  $\pm 80$  mGal. Nach entsprechender Reduktion verbleiben meist nur noch Signalanteile mit Beträgen unter 40 mGal, was eine erhebliche Reduktion des ursprünglichen Gesamtsignals darstellt. Deutlich tritt nun in Abbildung 4.38 (unten) ein Bereich am nordwestlichen Rand der Poebene hervor, in dem Werte bis ca. 110 mGal erreicht werden. Hierbei handelt es sich um eine Dichtestörung, die in der Geologie als Störzone *Ivrea*-

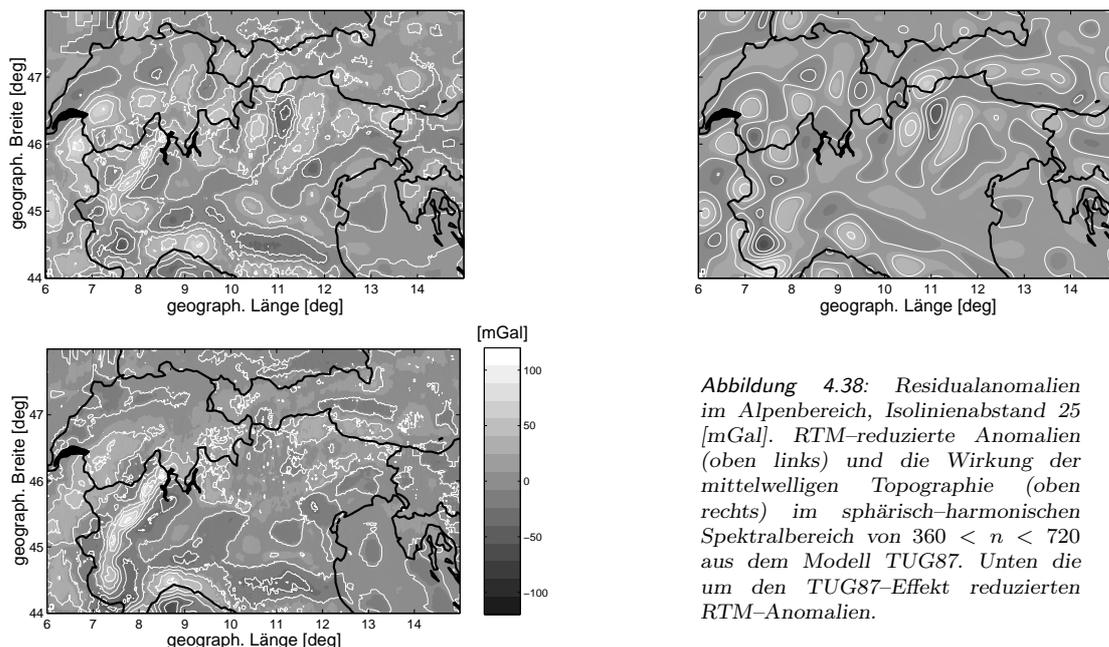


Abbildung 4.38: Residualanomalien im Alpenbereich, Isolinienabstand 25 [mGal]. RTM-reduzierte Anomalien (oben links) und die Wirkung der mittelwelligen Topographie (oben rechts) im sphärisch-harmonischen Spektralbereich von  $360 < n < 720$  aus dem Modell TUG87. Unten die um den TUG87-Effekt reduzierten RTM-Anomalien.

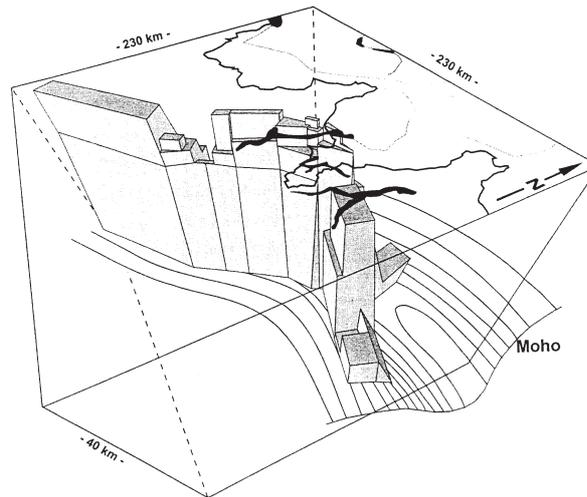


Abbildung 4.39: Modell des Ivrea-Körpers (aus: BÜRKI (1989)).

*Verbano* oder auch als *Ivrea-Körper* bekannt ist (siehe z.B. BÜRKI, 1989). Der Ivrea-Körper ist eine deutliche Störung der Erdkruste und bewirkt neben dem Alpenkörper selbst eine der größten Anomalienstrukturen in ganz Mitteleuropa. Die als Mohorovicic-Diskontinuität (Moho) bekannte Trennschicht zwischen leichter Erdkruste (Dichte bei ca.  $\rho = 2.7 \text{ g/cm}^3$ ) und schwererem Erdmantel ( $\rho = 3.1 \text{ g/cm}^3$ ) liegt im kontinentalen Bereich in der Regel in Tiefen von 30 km. Unter den Alpen taucht die Moho in Tiefen von etwa 50 km ab (GURTNER, 1978). Im Bereich der nordwestlichen Poebene jedoch schiebt sich der Erdmantel in einem räumlich sehr beschränkten Bereich wesentlich weiter nach oben in die Kruste, vermutlich als Folge der tektonischen Überschiebung der adriatischen auf die eurasische Platte. Die Moho reicht in dieser Region zum Teil bis fast an die Oberfläche. Der entstehende Störkörper erstreckt sich auf einer Länge von ca. 250 km vom Comer See über Locarno am Lago Maggiore bis weit südlich von Turin. Die Breite des Körpers liegt bei meist 10 – 15 km (BÜRKI, 1989). Das von BÜRKI (1989) bestimmte Modell des Ivrea-Körpers (siehe Abbildung 4.39) stimmt in seiner Lage und seinen Ausmaßen sehr gut mit dem starken Anomaliensignal in Abbildung 4.37 (unten) überein. Da der Störkörper sehr nahe an der Oberfläche liegt bleibt die Wirkung auf die Schwere lokal sehr begrenzt.

## 4.5.2 Effekte der Datenfilterung

### Topographische Reduktionen

Die Berechnung der Höhenanomalie erfolgt durch analytische Fortsetzung nach Gleichung (4.59). Die darin enthaltenen Reihenglieder  $g_i$  sind mit den Gleichungen (4.56) berechenbar, wobei der Operator  $L_n$  entsprechend Gleichung (4.58) von der Rauigkeit des Feldes abhängt. Je glatter das Anomalienfeld, desto geringer sind die Anteile der Terme höherer Ordnung und Reihe (4.59) kann früher abgebrochen werden. Verwendet man statt Freiluftanomalien RTM-reduzierte Anomalien, so wird üblicherweise davon ausgegangen, dass die Reihe bereits nach dem ersten Term abgebrochen werden kann (siehe z.B. DENKER, 1989; GROTE, 1996). Um die Konvergenz der *Molodenskii*-Reihe in Bayern zu untersuchen, wurden sowohl für Freiluftanomalien, als auch für RTM-reduzierte Anomalien die Reihenglieder bis zur 3. Ordnung berechnet. Beide Anomalientypen wurden jeweils um den globalen Anteil des Potentialmodells reduziert. Die Integration wurde auf eine Innenzone von  $4^\circ$  begrenzt, wobei die *Meissl*-modifizierte Funktion  $St_4^M(\psi)$  verwendet wurde. Die Ergebnisse der Berechnungen sind in Abbildung

Tabelle 4.5: Statistische Werte der *Molodenskii*-Terme aus Freiluft- (links) und RTM-reduzierten (rechts) Anomalien in Bayern (alle Angaben in [cm]).

Reihenterm	min	max	Mittel	RMS <sub>0</sub>	Reihenterm	min	max	Mittel	RMS <sub>0</sub>
$\zeta_0^{FA}$	-244.9	-15.5	-103.2	35.0	$\zeta_0^{RTM}$	-80.9	167.1	-8.7	44.1
$\zeta_1^{FA}$	5.7	210.6	54.1	49.9	$\zeta_1^{RTM}$	-0.2	10.6	1.7	1.4
$\zeta_2^{FA}$	-2.1	4.8	0.9	0.9	$\zeta_2^{RTM}$	-0.3	0.8	0.1	0.1
$\zeta_3^{FA}$	-5.8	-0.0	-1.1	1.2	$\zeta_3^{RTM}$	-0.1	0.0	-0.0	0.0

4.40 und Tabelle 4.5 dargestellt. Ähnliche Untersuchungen wurden bereits von DENKER & TZIAVOS (1999) für einen kleineren Ausschnitt in den Westalpen durchgeführt. Die Größenordnungen der errechneten Werte und die Konvergenzcharakteristika der Reihen stimmen mit den dort angegebenen Ergebnissen gut überein.

Man erkennt deutlich, dass die Reihenterme der Höhenanomalie aus RTM-reduzierten Anomalien schneller konvergieren als diejenigen aus Freiluftanomalien. Die größten Beträge werden in beiden Fällen in den Alpen erreicht, da dort die größten Gradienten der Schwereanomalien auftreten. Durch Integration der Anomalien werden die dortigen hohen Beträge auf eine größere Umgebung verschmiert, so dass in der Umgebung der Alpen langwellige Trendfunktionen entstehen. Verwendet man RTM-reduziert Anomalien, so nimmt der Betrag der Geoidhöhe pro Reihenterm um etwa eine Größenordnung ab. Schon der Term 1. Ordnung erreicht selbst in den Alpen nur mehr

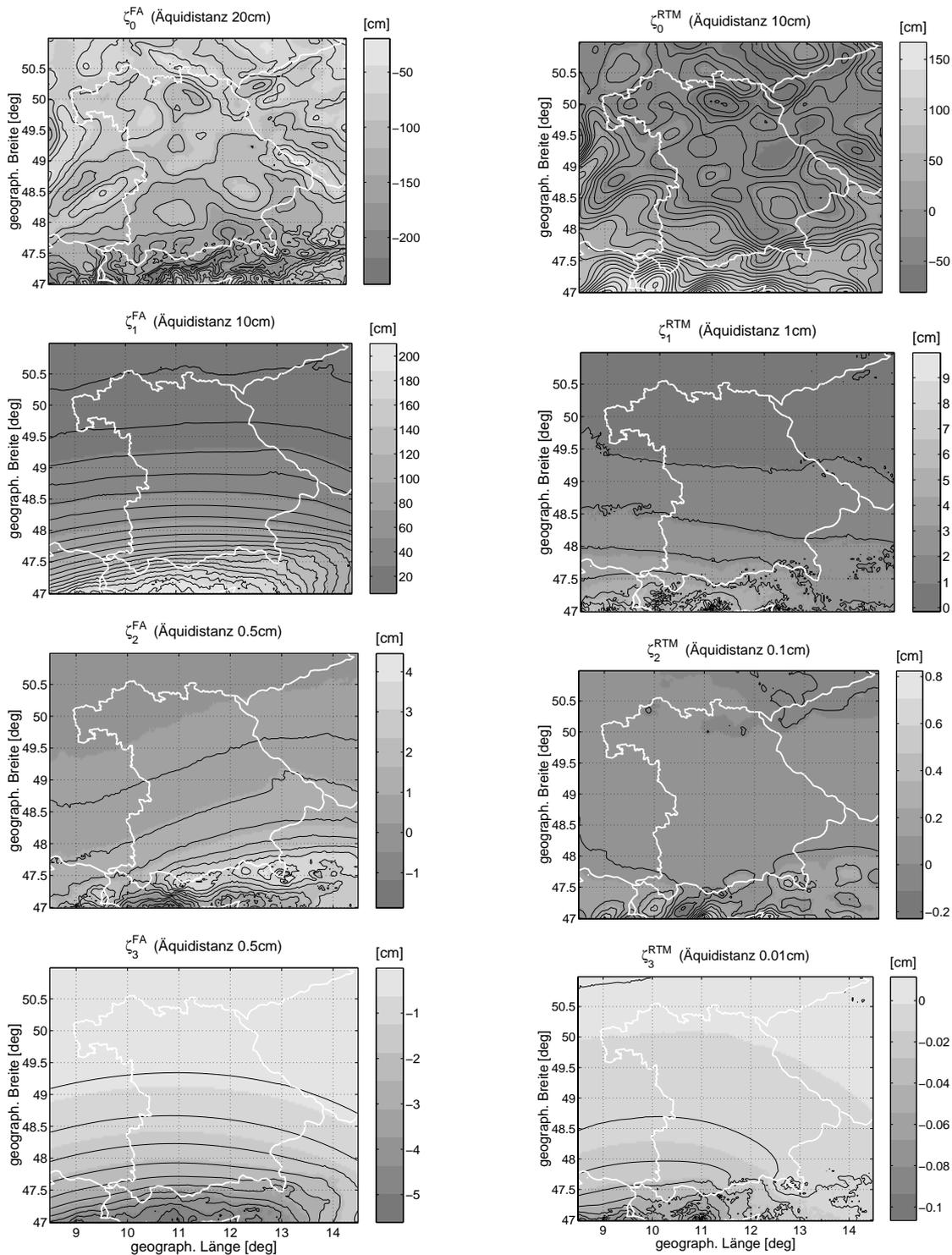


Abbildung 4.40: Molodenskii-Terme  $\zeta_0$  bis  $\zeta_3$  aus Freiluft- (links) und RTM-reduzierten Anomalien (rechts).

Beträge bis zu ca. 10 cm. In Bayern liefert dieser Term im wesentlichen eine schiefe Ebene mit einer Neigung von wenigen cm. Die Terme zweiter und dritter Ordnung sind in Bayern vernachlässigbar klein.

Im Falle von Freiluftanomalien erreichen jedoch auch diese Terme höherer Ordnung Beträge von mehreren cm. Auffällig ist außerdem, dass die Größe der Terme nicht von Ordnung zu Ordnung im selben Maße abnimmt. Die Reihe hat eher alternierenden Charakter und die Beträge der Terme  $\zeta_0^{FA}$  und  $\zeta_1^{FA}$  sowie der Terme  $\zeta_2^{FA}$  und  $\zeta_3^{FA}$  sind jeweils in der gleichen Größenordnung.

### Modifikation der Stokes-Funktion

Die in Kapitel 4.4.4 beschriebenen Modifikationen der Stokes-Funktion sollen dazu dienen, Daten- bzw. Abbruchfehler möglichst klein zu halten. Um zu untersuchen, welche Differenzen sich aus den unterschiedlichen Modifikationen ergeben, wurden die zugehörigen residualen Quasigeoide in Bayern untereinander verglichen. Da an dieser Stelle kein Vergleich zu unabhängigen Lösungen durchgeführt wird, kann nicht abgeleitet werden, welche der Lösungen den geringsten Fehler aufweist. Es geht zunächst nur um die Größe der Differenzen zwischen den Lösungen. Dabei wurde jeweils der aus den RTM-reduzierten Anomalien berechnete erste Term der *Molodenskii*-Reihe verwendet. Folgende Integrationskerne wurden getestet:

1. originale Stokes-Funktion  $St(\psi)$  (siehe Abbildung 4.28, links); dabei ging der gesamte Datensatz der terrestrischen Schwereanomalien in die Integration ein;
2. originale Stokes-Funktion  $St_4(\psi)$  beschränkt auf eine sphärische Kappe mit  $\psi_0 = 4^\circ$  (Abbildung 4.28, links);
3. *Meissl*-modifizierte Stokes-Funktion  $St_4^M(\psi)$  ebenfalls beschränkt auf  $\psi_0 = 4^\circ$  (Abbildung 4.28, links);
4. *Wong&Gore*-modifizierte Stokes-Funktion  $St_{361}^{WG}(\psi)$  ab Grad  $n = 361$ ; dadurch wird die Lösung vollständig auf dem EGM96 gelagert und es gehen nur die spektralen Anteile der Residualanomalien ab Grad  $n = 361$  in die Lösung ein;
5. *Wong&Gore*-modifizierte Stokes-Funktion  $St_{17}^{WG}(\psi)$  ab Grad  $n = 17$ ; die erste Nullstelle der Funktion liegt mit  $\psi = 4^\circ$  am Rand des Integrationsgebiets (Abbildung 4.29), langwellige Anteile bis Grad  $n = 16$  werden vollständig aus dem Potentialmodell übernommen;
6. durch spektrale Kombination nach *Wenzel* gewichtete Stokes-Funktion  $St^W(\psi)$  (Abbildung 4.35, rechts).

Als Referenzfläche für den folgenden Vergleich wurde die aus der originalen Stokes-Funktion  $St(\psi)$  abgeleitete Lösung verwendet. In Abbildung 4.41 und Tabelle 4.6 sind die Referenzfläche sowie die Differenzen zu den restlichen 5 Lösungen dargestellt.

Es zeigt sich, dass die Unterschiede zwischen den verschiedenen Quasigeoiden in Relation zur Signalstärke relativ hohe Beträge erreichen. Die Differenzen (siehe RMS-Werte in Tabelle 4.6) betragen gut 50% der Signalstärke. Die Differenz zu der voll auf dem EGM96 basierenden Lösung  $\zeta_{361}^{WG}$  erreicht sogar die gleichen Beträge wie das Signal selbst. Dabei treten deutliche Differenzen mit Wellenlängen bis hinunter zu ca. 100 km auf. Dies entspricht etwa der Auflösung des EGM96. Im Frequenzbereich bis  $n = 360$  sind also zwischen den terrestrischen Anomalien und dem Potentialmodell Differenzen enthalten, die zu Geoidhöhdifferenzen von mehreren dm bis hin zu m-Beträgen führen. Da die Qualität der terrestrischen Anomalien abgesehen von langwelligen Fehlern deutlich über dem Potentialmodell liegen dürfte, kann man davon ausgehen, dass die gezeigten Differenzen im wesentlichen den Fehlern des Potentialmodells entsprechen. Diese Fehler können durch Kombination mit Schwereanomalien verringert werden. Unterschiedliche Differenzen ergeben sich dann je nach Gewichtung der Anomalien und Größe des verwendeten Integrationsgebiets.

**Tabelle 4.6:** Residuale Quasigeoidhöhe abgeleitet unter Verwendung der originalen Stokes-Funktion  $St(\psi)$  und Differenz zu Lösungen unter Verwendung verschiedener modifizierter Funktionen.

	min [m]	max [m]	Mittel [m]	RMS [m]	RMS <sub>0</sub> [m]
$\zeta$	-0.531	2.001	0.196	0.505	0.466
$\zeta - \zeta_4$	-0.280	0.452	0.173	0.223	0.140
$\zeta - \zeta_4^M$	0.137	0.404	0.283	0.292	0.071
$\zeta - \zeta^W$	0.089	0.446	0.215	0.224	0.065
$\zeta - \zeta_{361}^{WG}$	-0.344	1.849	0.196	0.494	0.454
$\zeta - \zeta_{17}^{WG}$	0.117	0.484	0.289	0.302	0.089

In der Referenzlösung werden alle Anomalien des gesamten Datenbereichs verwendet. Dabei steht an jedem Berechnungspunkt mindestens eine Umgebung von ca.  $4^\circ$  zur Verfügung. Dies entspricht dem sphärischen Abstand z.B. zwischen der westlichen Grenze Bayerns und der westlichen Grenze des Datensatzes. Bis hin zur gegenüberliegenden östlichen Grenze stehen natürlich in noch größerem sphärischen Abstand zum Berechnungspunkt Daten zur Verfügung. Dies führt zu einer unsymmetrischen Datenverteilung bezüglich des jeweiligen Berechnungspunktes. Beschränkt man die Integration auf eine Kappe von  $4^\circ$  Radius, so ist das Integrationsgebiet zwar symmetrisch, jedoch führt die Unstetigkeitsstelle der Funktion  $St_4(\psi)$  an der Stelle  $\psi = 4^\circ$  (siehe Abbildung 4.28) dazu, dass sich das verwendete Datenmaterial von Berechnungspunkt zu Berechnungspunkt sprunghaft ändert. Dadurch kommt es zu mittelwelligen Verbiegungen des Geoids  $\zeta_4$  bezüglich der Referenzfläche. Verwendet man stattdessen die *Meissl*-modifizierte Funktion  $St_4^M(\psi)$ , so ergeben sich wesentlich langwelligere Differenzen. Der Betrag der mittelwelligen Differenzen nimmt deutlich ab.

Ein ähnliches Ergebnis liefert auch der Vergleich mit der *Wong&Gore*-modifizierten Lösung  $\zeta_{17}^{WG}$ . Die erste Nullstelle der *Stokes*-Funktion liegt bei  $4^\circ$ , so dass sich wie im Falle der *Meissl*-modifizierten Funktion ein kontinuierlicher Verlauf der Gewichtung am Kappenrand ergibt. Auch die *Wenzel*-modifizierte Lösung ergibt Differenzen in ähnlicher Größenordnung, allerdings führt die frequenzabhängige Gewichtung auch im mittelwelligen Bereich zu etwas größeren Differenzen gegenüber der unmodifizierten Lösung  $\zeta$ . Ob dies zu einem genaueren Gesamtsignal führt, hängt davon ab, ob die bei Bestimmung der spektralen Gewichte angenommenen Fehlermaße realistisch sind. Dies wird in Kapitel 4.5.5 beim Vergleich mit GPS/Nivellement-Messungen untersucht.

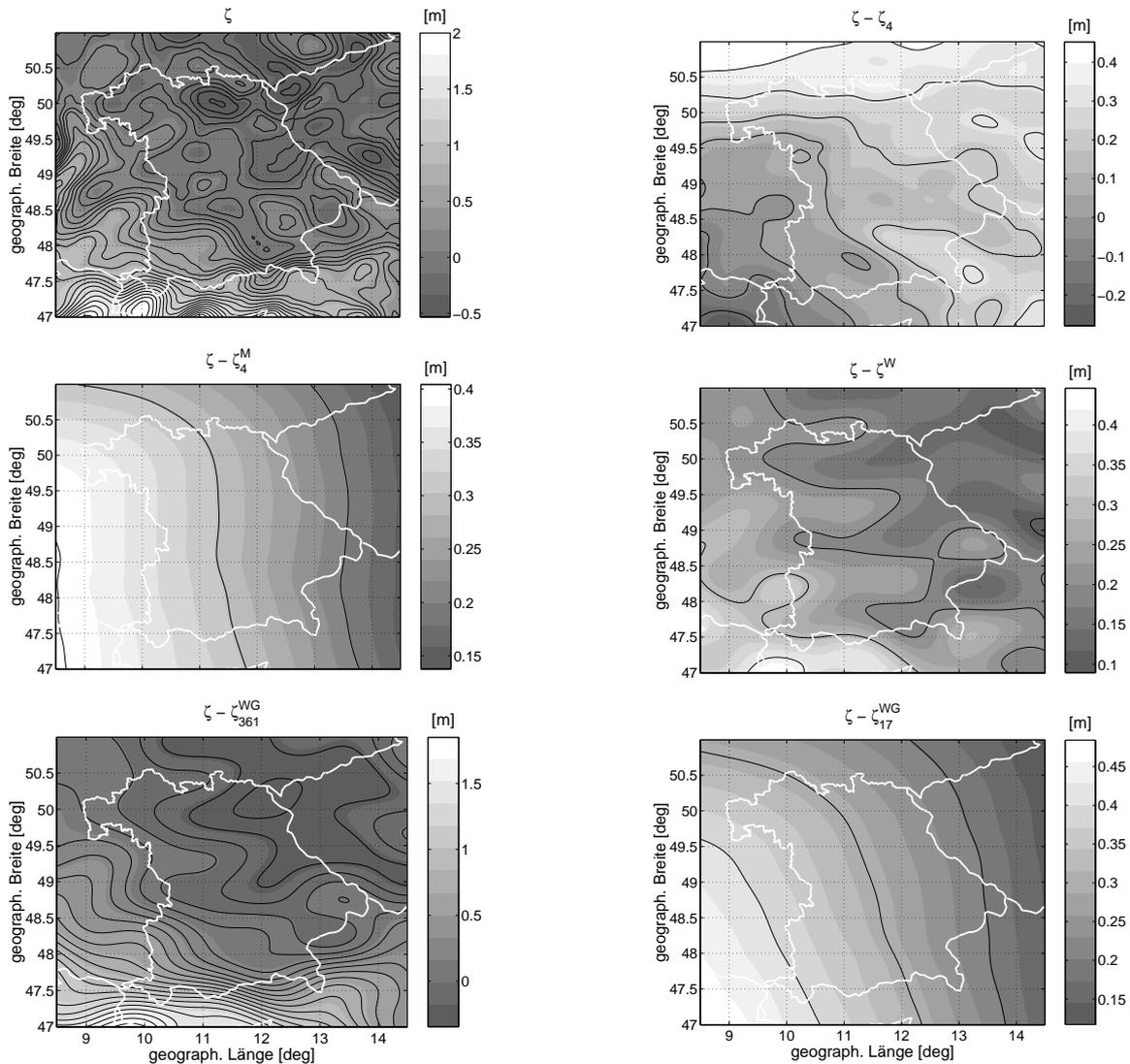


Abbildung 4.41: Residuale Quasigeoidhöhe abgeleitet unter Verwendung der originalen *Stokes*-Funktion  $St(\psi)$  (links oben) und Differenz zu Lösungen unter Verwendung verschiedener modifizierter Funktionen. Isolinenabstand 10 cm.

### 4.5.3 Abschätzung verbleibender Fehleranteile

Im diesem Abschnitt werden die zu erwartenden Geoidfehler abgeschätzt, die sich aus den Fehlern des Potentialmodells EGM96, der terrestrischen Schwereanomalien und der verwendeten Geländemodelle ergeben. Dadurch können die beim späteren Vergleich mit GPS/Nivellement festgestellten Differenzen besser beurteilt und mögliche Fehlerursachen identifiziert werden.

#### Fehler der Geländemodelle

Im Rahmen der Berechnung topographischer Anteile können Fehler durch fehlerhafte DGM-Daten bzw. durch die Verwendung zu grober DGM-Informationen entstehen. Hierzu wurden z.B. von GROTE (1996) umfangreiche Untersuchungen angestellt.

Da in dieser Arbeit innerhalb Bayerns ein hochauflösendes  $50\text{ m} \times 50\text{ m}$  DGM verwendet wurde, ist dort nicht mit Fehlern durch Vernachlässigung hochfrequenter Information zu rechnen. Anders sieht es am Alpenrand aus. In den aus der Schweiz und Österreich stammenden Datensätzen ist neben der Schwere zusätzlich die Anziehung der Topographie gegeben. In Österreich wurde hierfür ein  $350\text{ m} \times 400\text{ m}$ -DGM verwendet, was etwa einer Blockgröße von  $12'' \times 20''$  entspricht. Im schweizer Datensatz steht hierzu keine Information zur Verfügung. Zur Berechnung der RTM-Reduktionen wurden die gegebenen Geländekorrekturen entsprechend Gleichung (4.151) verwendet, so dass nicht selbst auf topographische Daten zurückgegriffen werden musste. Die damit – zumindest in Österreich – implizit verbundene Verwendung eines weniger hochauflösenden Geländemodells führt im *remove*-Schritt zu Vernachlässigungsfehlern gegenüber dem in Bayern verwendeten Modell. Im *restore*-Schritt wurde zur Berechnung des Anteils  $\zeta^{topo}$  das  $30'' \times 30''$ -DGM GTOPO30 verwendet. Dadurch treten auch hier Vernachlässigungsfehler auf. Die Größe dieser Fehler hat GROTE (1996) in einem  $1^\circ \times 1^\circ$  grossen Gebiet in den schweizer Alpen abgeschätzt. Da die Höhenunterschiede dort  $4500\text{ m}$  erreichen, ist am bayerischen Alpenrand mit geringeren Werten zu rechnen. Im Vergleich zu einem hochauflösenden  $3'' \times 3''$ -DGM (etwa  $90\text{ m} \times 60\text{ m}$ ) ergaben sich im Fall eines  $12'' \times 18''$ -DGM Geoiddifferenzen bis zu maximal  $2\text{ cm}$  und bei Verwendung eines  $30'' \times 45''$ -DGM bis zu maximal  $5\text{ cm}$ . Die größten Beträge treten an den Stellen mit der steilsten Geländeneigung auf. Es ist damit entlang der bayerischen Grenze im Alpenbereich mit lokal begrenzten Fehlern von wenigen  $\text{cm}$  zu rechnen. Zusätzliche Fehler können in die Berechnung eingehen, wenn es in den hochauflösenden DGM-Daten und dem als Referenzfläche verwendeten Geländemodell größere Inkonsistenzen gibt. Da in den berechneten residualen Schwereanomalien jedoch keine groben Unstimmigkeiten aufgetreten sind, wurden zu den möglichen Fehlerbeiträgen in dieser Arbeit keine weitergehenden Untersuchungen durchgeführt. Im Prinzip könnten solche Fehler vermieden werden, wenn die langwellige Referenztopographie aus den hochauflösenden Daten durch Filterung generiert wird.

Neben diesen Vernachlässigungsfehlern können zusätzliche Fehler aufgrund fehlerhafter DGM-Daten auftreten. Die Genauigkeit des DGM25 ist mit  $2 - 3\text{ m}$  angegeben, wobei nach FLURY (2002) in extremem Gelände, z.B. Steilwänden im Gebirge, aufgrund der Auswertetechnik vereinzelt Fehler von  $100 - 200\text{ m}$  auftreten können, die Schwereanomalienfehler von bis zu  $2.5\text{ mGal}$  verursachen können. Treten diese Fehler nur an einzelnen Blöcken auf, so ist der Einfluss auf die Geoidhöhe vernachlässigbar. Eine um  $2.5\text{ mGal}$  falsche Schwereanomalie liefert am Berechnungspunkt selbst (siehe Formel 4.168) einen Geoidhöhenfehler von ca.  $2\text{ mm}$ . Erst wenn solche Fehler über einen zusammenhängenden Block vieler DGM-Elemente auftreten, können Geoidhöhenfehler im  $\text{cm}$ -Bereich entstehen. Um fehlerhafte Regionen aufzudecken, wäre v.a. im Alpenbereich eine Überprüfung des DGM durch unabhängige Messungen oder zumindest durch Vergleich mit topographischen Karten notwendig. Dies wurde in dieser Arbeit jedoch nicht durchgeführt.

#### Fehler des Potentialmodells

Bei Kombination eines Potentialmodells mit einem Satz terrestrischer Schwereanomalien können die Fehler des Potentialmodells teilweise durch die genaueren Anomalien verbessert werden. Betrachtet man die Kombinationsmethode im Ortsbereich, so erkennt man an Formel (4.122) unter Beachtung von (4.132), dass aus dem Potentialmodell eine Innenzone vom Radius  $\psi_0$  ausgeschnitten wird. Dies entspricht dem Bereich, in dem Schwereanomalien zur Verfügung stehen. Somit können auch nur Fehler des Potentialmodells von außerhalb dieser Zone zum Gesamtfehler beitragen. In den folgenden Berechnungen wird jeweils eine Innenzone von  $4^\circ$  ausgeschnitten, was etwa der Größe des in dieser Arbeit verwendeten Datensatzes entspricht.

Zur Beschreibung der Datenfehler des verwendeten Potentialmodells sind Fehlerangaben der entsprechenden Koeffizienten notwendig. Damit lässt sich unter Annahme einer isotropen Fehlerverteilung mit Formel (4.194) der kumulative Geoidfehler abschätzen. Entsprechend Abbildung 4.27 ergibt sich im Fall des EGM96 ein mittlerer Fehler von ca.  $10\text{ cm}$ . Die tatsächlichen Fehler können von diesem Wert abweichen, da bei Berechnung des kumulativen Geoidfehlers nach (4.194) die Kovarianzen zwischen den Potentialkoeffizienten vernachlässigt werden. Außerdem gibt der kumulative Fehler keine Auskunft darüber, welche Struktur der entstehende Fehler hat. Deshalb wird im Folgenden eine vollständige Fehlerfortpflanzung unter Berücksichtigung aller Kovarianzen durchgeführt und durch empirische Fehlerberechnung untersucht, ob mittelwellige Fehlerbeiträge des Potentialmodells

zu befürchten sind. Schließlich soll der absolute Vergleich zu einem unabhängigen Potentialmodell Auskunft über die langwelligen Fehler geben.

Zusätzlich zum Datenfehler treten Vernachlässigungsfehler durch die beschränkte spektrale Auflösung des Potentialmodells auf. Entsprechend Abbildung 4.27 liegt dieser Fehler bei 1-2 cm. Aufgrund des nur beschränkten Datensatzes kann dieser Fehler nicht minimiert werden.

#### Vollständige Fehlerfortpflanzung

Das allgemeine Fehlerfortpflanzungsgesetz (3.16) liefert, angewandt auf die SHS (4.84) (siehe z.B. HAAGMANS & VAN GELDEREN, 1991), für die Fehlervarianz der Geoidhöhe

$$\sigma_{\zeta}^2(P) = \sum_{m=0}^{N_{max}} \sum_{k=0}^{N_{max}} \left( A_{mk} \cos m\lambda_P \cos k\lambda_P + B_{mk} \sin m\lambda_P \sin k\lambda_P + C_{mk} \cos m\lambda_P \sin k\lambda_P + D_{mk} \sin m\lambda_P \cos k\lambda_P \right), \quad (4.205)$$

wobei

$$A_{mk} = \sum_{n=m}^{N_{max}} \sum_{l=k}^{N_{max}} \lambda_n \lambda_l \text{cov}(C, C) \bar{P}_{nm}(\cos \theta_P) \bar{P}_{lk}(\cos \theta_P), \quad (4.206)$$

$$B_{mk} = \sum_{n=m}^{N_{max}} \sum_{l=k}^{N_{max}} \lambda_n \lambda_l \text{cov}(S, S) \bar{P}_{nm}(\cos \theta_P) \bar{P}_{lk}(\cos \theta_P), \quad (4.207)$$

$$C_{mk} = \sum_{n=m}^{N_{max}} \sum_{l=k}^{N_{max}} \lambda_n \lambda_l \text{cov}(C, S) \bar{P}_{nm}(\cos \theta_P) \bar{P}_{lk}(\cos \theta_P) \quad (4.208)$$

und

$$D_{mk} = \sum_{n=m}^{N_{max}} \sum_{l=k}^{N_{max}} \lambda_n \lambda_l \text{cov}(S, C) \bar{P}_{nm}(\cos \theta_P) \bar{P}_{lk}(\cos \theta_P) \quad (4.209)$$

bedeuten. Darin sind  $(\lambda_P, \theta_P)$  die Koordinaten des Berechnungspunktes  $P$  und  $\text{cov}(\cdot, \cdot)$  die Fehlerkovarianzen zwischen den SH-Koeffizienten (beispielsweise beschreibt  $\text{cov}(C, S)$  die Kovarianz zwischen den Koeffizienten  $\bar{C}_{nm}$  und  $\bar{S}_{lk}$ ).

Um den Geoidhöhenfehler ohne den Beitrag der innersten Zone vom Radius  $\psi_0$  abzuleiten, ist für die spektralen Eigenwerte entsprechend Gleichung (4.132)

$$\lambda_n = \frac{R(n-1)}{2} Q_n(\psi_0)$$

zu setzen. Im Falle des EGM96 ist die vollständige Fehler-Kovarianzmatrix bis Grad und Ordnung  $n = m = 70$  verfügbar (NASA, 1998). Die daraus in Bayern resultierenden Geoidfehler (Beitrag außerhalb einer Innenzone von  $4^\circ$ ) sind in Abbildung 4.42 dargestellt. Man erkennt, dass die mittleren Fehler nicht isotrop und homogen sind. Allerdings ist die Variation der Fehler mit ca. 0.6 cm relativ gering. Die Beträge liegen im Mittel bei 8.4 cm und stimmen damit gut mit den kumulativen Geoidfehlern aus Abbildung 4.27 überein. Dies bedeutet, dass man in Bayern zumindest bis Grad  $n = 70$  durch Vernachlässigung der Kovarianzen keinen Fehler begeht.

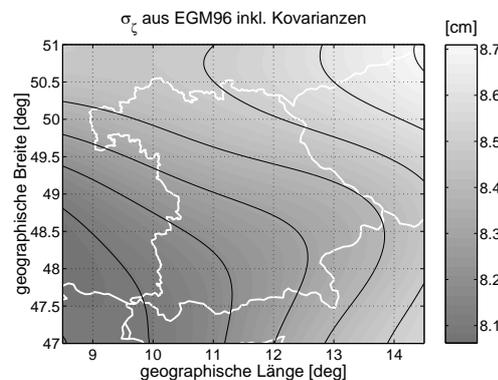


Abbildung 4.42: Geoidhöhenfehler aus voller EGM96-Kovarianzmatrix bis  $n=70$ ; Beitrag von außerhalb einer Kappe mit Radius  $\psi_0 = 4^\circ$ . Isolinienabstand 1 mm.

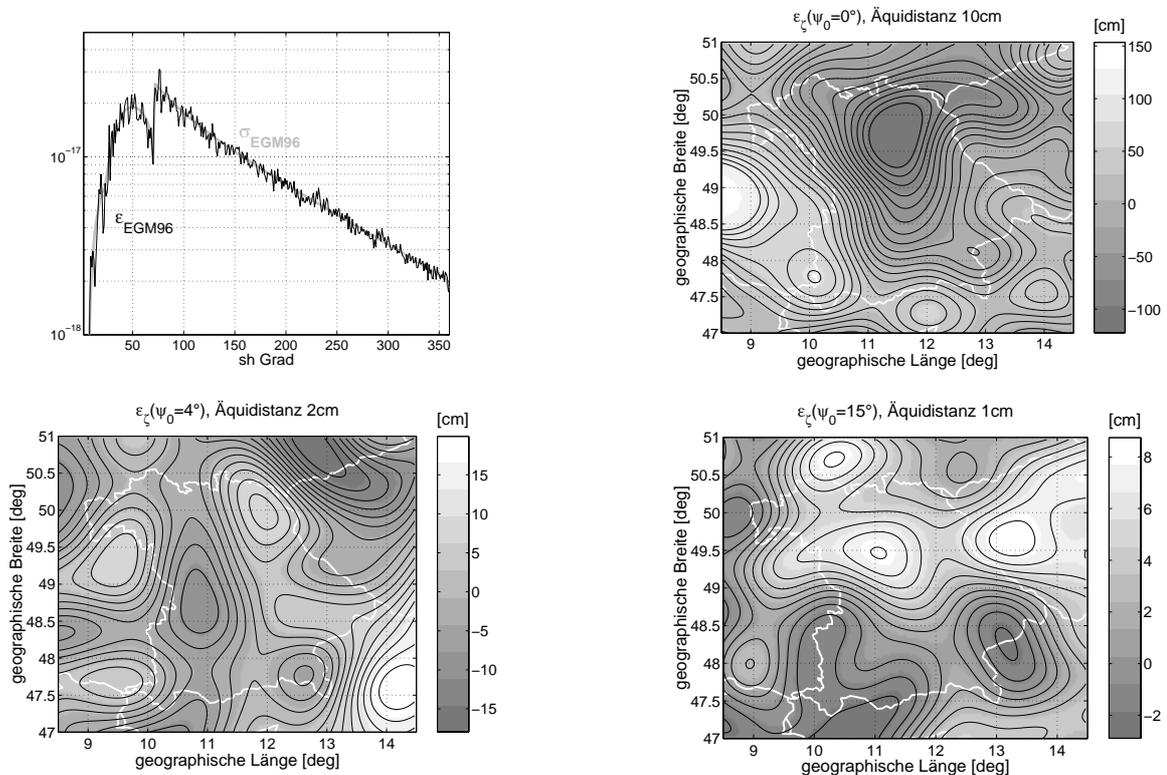
## Empirische Fehlerstudie und Gradvarianzen

Um neben der Größe auch die Struktur der Potentialmodellfehler abzuschätzen, wurde empirisch eine mittlere Fehlerfläche der Geoidhöhe berechnet. Hierzu wurden normalverteilte Fehler generiert, die den gegebenen Standardabweichungen der EGM96-Potentialkoeffizienten entsprechen. Aus diesen Fehlern wurde durch SHS eine mögliche Fehlerfläche abgeleitet. Dabei wurde der Fehlerbeitrag von außerhalb einer sphärischen Kappe von unterschiedlichem Radius  $\psi_0$  berechnet. Der erste Fall  $\psi_0 = 0^\circ$  entspricht einer Situation, in der die EGM96-Fehler voll in die Lösung eingehen. Der Fall  $\psi_0 = 4^\circ$  liefert den Fehlerbeitrag bei Kombination mit terrestrischen Schwereanomalien entsprechend dem in dieser Arbeit verwendeten Datensatz (Abbildung 4.37). Im dritten Fall beträgt die Umgebung des Schweredatensatzes rund um Bayern  $\psi_0 = 15^\circ$ . Der Datensatz würde sich dann über ganz Europa etwa von Irland bis zum Schwarzen Meer und von Skandinavien bis nach Nordafrika erstrecken. Dies entspricht etwa der Größe des Datensatzes, der bei Berechnung des EGG97 zur Verfügung stand (siehe DENKER & TORGE, 1999).

Aus Abbildung 4.43 und Tabelle 4.7 wird deutlich, dass mit größer werdender Innenzone vor allem die Fehlerbeiträge kleiner werden, das Signal jedoch nicht glatter wird. Es treten in allen Fällen Fehlerstrukturen mit halben Wellenlängen von 50-100 km auf. Ein Vergleich der Fehler  $\sigma_\zeta(\psi_0 = 15^\circ)$  und  $\sigma_\zeta(\psi_0 = 4^\circ)$  zeigt, dass aufgrund eines kleineren Datensatzes terrestrischer Schwerewerte mittelwellige Differenzen zwischen EGG97 und den in dieser Arbeit berechneten Geoiden im Bereich mehrerer Zentimeter auftreten können. Wiederholte Berechnungen möglicher Fehlerflächen unter Verwendung eines jeweils anderen Satzes zufälliger Fehler ergaben ähnliche Ergebnisse.

Tabelle 4.7: Statistik der in Abbildung 4.43 dargestellten empirischen Fehlerflächen.

Fläche	min [cm]	max [cm]	Mittel [cm]	RMS [cm]	RMS <sub>0</sub> [cm]
$\epsilon_\zeta(\psi_0 = 0^\circ)$	-122.4	160.1	4.4	50.0	49.8
$\epsilon_\zeta(\psi_0 = 4^\circ)$	-17.9	19.9	0.1	7.0	7.0
$\epsilon_\zeta(\psi_0 = 15^\circ)$	-3.6	8.7	2.8	4.1	3.0

Abbildung 4.43: Gradvarianzen (links oben) aus Standardabweichungen  $\sigma_{EGM96}$  und aus selbst generierten zufälligen Fehlern  $\epsilon_{EGM96}$  sowie mögliche Geoidfehler aus  $\epsilon_{EGM96}$  (jeweils ohne den Beitrag einer Innenzone mit unterschiedlichem sphärischem Radius  $\psi_0$ ).

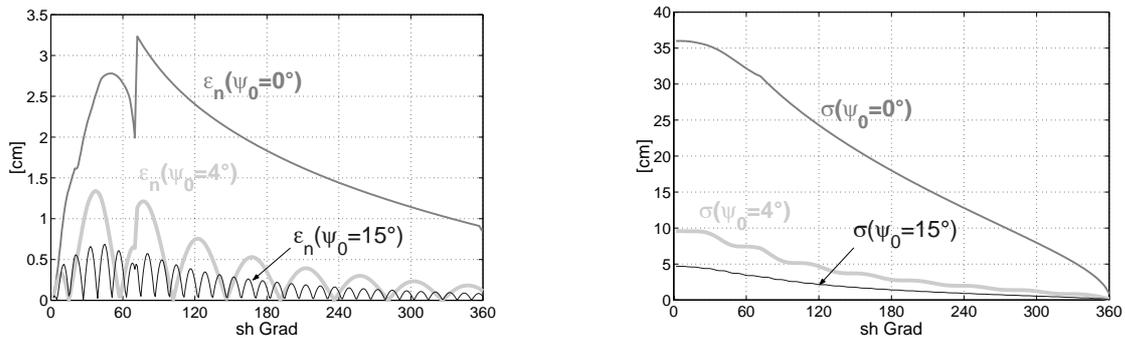


Abbildung 4.44: Geoidhöhenfehler des EGM96 pro Grad (links) und kumulativer Fehler bis zur maximalen Auflösung des Modells bei  $N_{max} = 360$  (rechts) für verschieden große Innenzonen.

Betrachtet man das Spektrum der mittleren Geoidhöhenfehler in Abbildung 4.44 (links), so wird der Effekt der räumlichen Filterung durch Kombination mit terrestrischen Daten deutlich. Es werden vor allem die Beträge der Fehler geringer, wobei auch hohe Frequenzen nicht vollkommen ausgefiltert werden können. Der kumulative Geoidfehler in Abbildung 4.44 (rechts) gibt an, wie groß der Betrag des mittleren Fehlers von einem bestimmten Grad  $n$  bis zur maximalen Auflösung des EGM96 bei  $N_{max} = 360$  ist, d.h. die kumulative Summierung wird in der Abbildung von rechts nach links ausgeführt. Wie man an den Fehlerflächen in Abbildung 4.43 erkennt, können durchaus größere Fehlerbeiträge im mittelwelligen Bereich bis hin zu halben Wellenlängen von etwa  $1^\circ$  entstehen. Der kumulative mittlere Geoidfehler ab dem zugehörigen Grad von  $n = 180$  beträgt bei einer Innenzone von  $\psi_0 = 4^\circ$  etwa 3 cm. Dies lässt Fehlerbeträge bis zu maximal 9 cm erwarten. Im Falle  $\psi_0 = 15^\circ$  liegt der entsprechende maximale Wert bei 4.5 cm. Für größere Strukturen bis hin zur Größe Bayerns werden entsprechend einem SH-Grad von  $n > 60$  mittlere Fehler von 7.5 cm ( $\psi_0 = 4^\circ$ ) bzw. 3.5 cm ( $\psi_0 = 15^\circ$ ) erreicht. Dies bestätigt die aus den empirischen Flächen abgeleiteten Schlussfolgerungen, wenngleich die dortigen Beträge etwas über den in Abbildung 4.44 gezeigten Werten liegen.

Externer Vergleich zwischen verschiedenen Potentialmodellen

Beim späteren Vergleich der berechneten Geoide zu Geoidhöhen aus GPS/Nivellement (siehe Kapitel 4.5.5) wird sich in den absoluten Differenzen eine langwellige Verbiegung der gravimetrischen Lösung mit Neigungen von ca. 40-50 cm über Bayern hinweg zeigen. Dies gilt auch für das EGG97. Da auch dieses Geoid auf dem Potentialmodell EGM96 basiert (siehe DENKER & TORGE, 1999), liegt die Vermutung nahe, dass die langwelligen Fehler durch das EGM96 verursacht werden. Deshalb soll durch den Vergleich des EGM96 mit einem unabhängigen Potentialmodell festgestellt werden, wie gut die langwelligen Strukturen der Modelle übereinstimmen und ob sich bezüglich der angegebenen Genauigkeiten signifikante Differenzen ergeben. Als Vergleichsmodell wurde das Modell EIGEN-1S verwendet (REIGBER et al., 2002), welches ausschließlich auf Satellitendaten basiert. Es wurde vom deutschen GeoForschungsZentrum Potsdam (GFZ) in Zusammenarbeit mit der französischen Groupe

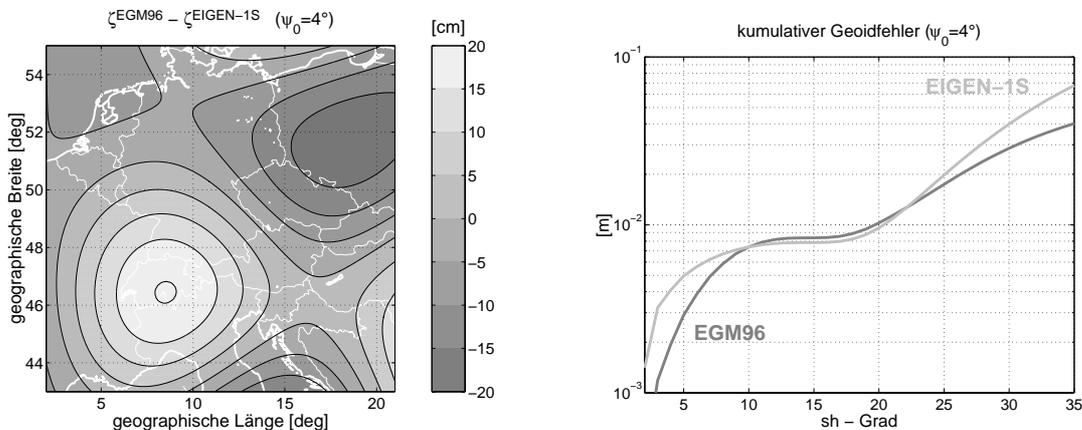


Abbildung 4.45: Differenz der Geoidhöhen (links, Isolinienabstand 5 cm) und kumulative Geoidfehler (rechts) aus EGM96 und EIGEN-1S bis Grad  $n=35$  und für  $\psi_0 = 4^\circ$ .

de *Recherches de Géodésie Spatiale* (GRGS) erstellt und basiert unter anderem auf aktuellen Bahndaten des CHAMP-Satelliten. Wieder wurde bei Berechnung der Geoidhöhe eine Innenzone von  $4^\circ$  ausgespart, so dass sich der Fehlerbeitrag entsprechend einer Kombinationslösung mit terrestrischen Schweredaten ergibt. Da hier der Beitrag langwelliger Strukturen untersucht werden soll, wurden die SHS nur bis zum Grad  $n = 35$  durchgeführt. Die Ausdehnung Bayerns ist etwa halb so groß wie die zugehörige Auflösung (halbe Wellenlänge) von ca. 600 km, so dass sich innerhalb Bayerns keine mittelwelligen Strukturen ergeben können. Die Differenz der Geoidhöhen sowie die entsprechenden kumulativen Geoidfehler sind in Abbildung 4.45 dargestellt. In Bayern könnte man diese Differenzen annähernd durch eine schiefe Ebene mit einer Gesamtneigung von ca. 20 cm darstellen. Geht man etwas über die Grenzen Bayerns hinaus, so ergeben sich absolute Differenzen von  $\pm 20$  cm. Dies entspricht etwa dem Betrag, den man bei einem mittleren kumulativen Geoidfehler von 7 cm maximal erwarten kann. Die Standardabweichung der Differenzen in Abbildung 4.45 liegt mit 9 cm etwas höher. Können die Fehler des Potentialmodells vollkommen ungedämpft in die Lösung eingehen (z.B. bei *Wong&Gore*-Modifikation mit  $n = 361$ ), so ist ein mittlerer kumulativer Geoidfehler von ca. 10 cm zu erwarten. Die Differenzen zwischen den Modellen erreichen dann etwa Werte von  $\pm 35$  cm, wodurch eine Verkipfung des Geoids von 70 cm möglich wäre.

### Fehleranteile der Schwereanomalien

Die wesentlichen Fehlerquellen der mittleren Schwereanomalien sind der Prädiktionsfehler sowie systematische Effekte aufgrund inkonsistenter Bezugssysteme (siehe Kapitel 4.4.4). Die Vernachlässigungsfehler liegen im Falle der Schwereanomalien im Submillimeter-Bereich (siehe Abbruchfehler in Abbildung 4.27) und können vernachlässigt werden. Zur vereinfachten Abschätzung der Effekte des Darstellungsfehlers kann man wieder von einem isotropen und homogenen Fehlerverhalten ausgehen. Nach dem allgemeinen Fehlerfortpflanzungsgesetz (3.16) gilt für die Fehlervarianz der Geoidhöhe (siehe z.B. HEISKANEN & MORITZ, 1967)

$$\sigma_{\zeta}^2(P) = \frac{R^2}{4\pi^2\gamma^2} \iint_{\sigma_k} \iint_{\sigma_l} \sigma_{kl}^{\Delta g} St(\psi_{Pk}) St(\psi_{Pl}) d\sigma_k d\sigma_l, \quad (4.210)$$

wobei  $\sigma_{kl}^{\Delta g}$  die Fehlerkovarianz zwischen den Schwereanomalien an den Punkten  $k$  und  $l$  ist. Für gleich genaue und unkorrelierte Blockmittelwerte  $\Delta\bar{g}$  hat STRANG VAN HEES (1986) die folgende Näherungsformel gefunden:

$$\sigma_{\zeta}(P) \approx 1.15 \cdot 10^{-3} \cdot a \cdot \sigma_{\Delta\bar{g}}, \quad (4.211)$$

wobei  $a$  die Seitenlänge (in km) der Anomalienblöcke ist und  $\sigma_{\Delta\bar{g}}$  der mittlere Fehler (in mGal) der Blockmittelwerte. Im vorliegenden Fall wurden  $30'' \times 30''$  Blöcke verwendet, so dass  $a$  bei ca. 750 m liegt. In diesem Fall sind jedoch benachbarte Blöcke nicht immer unkorreliert, da die Schwerewerte gar nicht in so hoher Dichte vorliegen. In Kapitel 4.5.3 wurde für die Anomalienfehler eine Korrelationslänge von  $2'$  angenommen, was etwa 3 km entspricht. Nimmt man dies als Seitenlänge unkorrelierter Blockmittelwerte an, so folgt bei einem mittleren Anomalienfehler von  $\sigma_{\Delta\bar{g}} = 2.4$  mGal aus (4.211) ein Geoidfehler von 0.8 cm. Dies ist der in Bayern zu erwartenden Geoidfehler aufgrund der zufälligen Fehler der Schwereanomalien. Da die Fehler in der Realität nicht isotrop und homogen sind, wird der Geoidfehler in vielen Gebieten Bayerns kleiner, in den Alpen etwas größer sein.

Zusätzlich ist mit systematischen Fehlern zu rechnen, da in den vorliegenden Datensätzen zum Teil keine Information zum zugehörigen Bezugssystem vorhanden ist bzw. die nötigen Transformationsparameter fehlen (siehe Datenbeschreibung in den Tabellen 4.2 und 4.3). Dadurch können nicht alle Daten in einen einheitlichen Bezugsrahmen transformiert werden. Um Größe und Struktur der entstehenden Fehler abzuschätzen, wurde folgende Testrechnung durchgeführt:

Entsprechend den in Abbildung 4.31 dargestellten Höhendifferenzen zwischen unterschiedlichen Landessystemen, ergeben sich Differenzen in den Schwereanomalien von ca. 0.05-0.1 mGal (in Belgien bis maximal 0.7 mGal). Vernachlässigt man die Transformation in ein einheitliches Höhendatum, so gehen diese Differenzen als systematische Fehler in die Gesamtlösung ein. Der entsprechend in Bayern resultierende Geoidfehler ist in Abbildung 4.46 dargestellt. DENKER (2001) hat für systematische Effekte in den Lagekoordinaten ähnliche Fehlerstrukturen mit leicht größeren Beträgen gefunden. Man kann somit insgesamt mit sehr langwelligenden Effekten im Bereich weniger cm rechnen. Die gezeigten Effekte aufgrund systematischer Fehler in den Schwereanomalien sind von ähnlicher Struktur, aber deutlich kleinerem Betrag wie die langwelligenden Fehler des Potentialmodells (siehe Abbildung 4.45). Diese werden in der Praxis oft durch langwellige Flächen, etwa einer ausgleichenden Ebene, korrigiert, um eine gute Anpassung an GPS/Nivellement-Messungen zu erzielen. Damit können gleichzeitig die Effekte der ähnlich strukturierten systematischen Anomalienfehler abgefangen werden, so dass keine allzu strengen Anforderungen an die Kenntnis der Bezugsrahmen (bzw. entsprechender Transformationsparameter) der verwendeten Daten zu stellen sind.

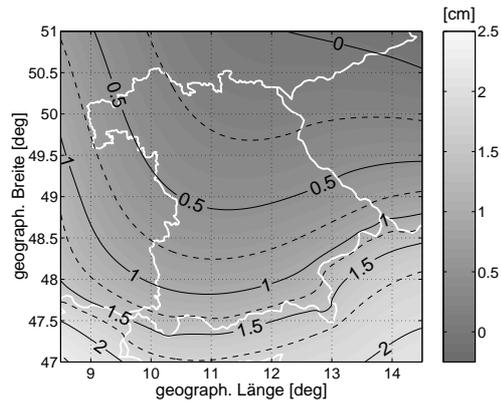


Abbildung 4.46: Geoidfehler aufgrund inkonsistenter Höhenbezugsrahmen entsprechend Abbildung 4.31.

### 4.5.4 Zusammenstellung der berechneten Signalanteile

Das in dieser Arbeit berechnete Quasigeoid wurde unter Verwendung der in Kapitel 4.4.1 dargestellten *remove-restore* Technik abgeleitet. Das Gesamtsignal besteht demnach entsprechend

$$\zeta = \zeta^{EGM} + \zeta^{res} + \zeta^{topo} \tag{4.212}$$

aus dem langwelligen Anteil  $\zeta^{EGM}$  des Potentialmodells, dem kurzwelligen Anteil  $\zeta^{topo}$  der im *remove*-Schritt reduzierten RTM-Massen und dem aus den Residualanomalien (4.139) berechneten Anteil  $\zeta^{res}$ . Darin sind wiederum verschiedene Signalanteile enthalten (z.B. die unterschiedlichen Terme der *Molodenskii*-Reihe in  $\zeta^{res}$ ), andere hingegen wurden im Hinblick auf die angestrebte Zentimetergenauigkeit vernachlässigt (z.B. die Potentialwirkung der Atmosphäre entsprechend Gleichung (4.138)). Die in Gleichung (4.212) enthaltenen Größen (diese wurden explizit berechnet) sind in Abbildung 4.47 dargestellt. Die zugehörigen statistischen Informationen sind in Tabelle 4.8 enthalten. Zusammenfassend stellt Tabelle 4.9 die durchgeführten Rechenschritte dar.

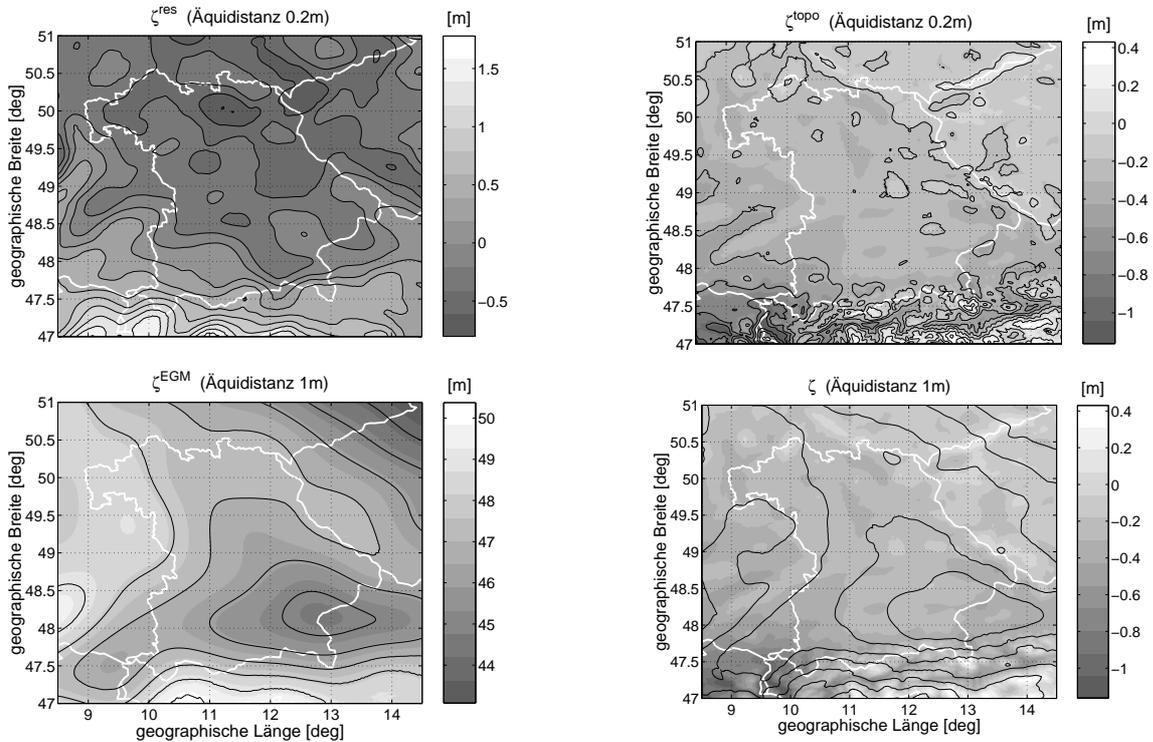


Abbildung 4.47: Signalanteile der Höhenanomalie in Bayern.

Tabelle 4.8: Signalanteile der Höhenanomalie in Bayern. Dabei ist  $RMS_0$  jeweils der RMS-Wert des zentrierten Signals.

	min [m]	max [m]	Mittel [m]	RMS [m]	$RMS_0$ [m]
$\zeta^{res}$	-0.8030	1.7796	-0.0703	0.4595	0.4541
$\zeta^{topo}$	-1.1629	0.4302	-0.2678	0.3234	0.1812
$\zeta^{EGM}$	43.0774	50.3780	46.9991	47.0146	1.2084
$\zeta$	43.0826	51.7044	46.6609	46.6816	1.3881

Tabelle 4.9: Berechnungsablauf.

Arbeitsschritte zur Berechnung des Quasigeoids in Bayern	
1.	Zusammenstellung der topographischen Daten (DGM25 innerhalb Bayerns, GTOPO30 in Europa, TUG87 global).
2.	Bestimmung der topographischen Koeffizienten einer SH-Entwicklung des TUG87-Modells durch SHA.
3.	Berechnung von Höhenwerten der Referenztopographie aus den TUG87-Koeffizienten in einem $30'' \times 30''$ -Gitter entsprechend den GTOPO30-Daten durch SHS (zur Bestimmung der RTM-Reduktionen).
4.	Zusammenstellung der gravimetrischen Daten (Punkt- und Blockmittelwerte von Schwere bzw. Schwereanomalien) und Bestimmung von Freiluftanomalien in einem einheitlichen Referenzrahmen (soweit Transformationsparameter bekannt sind).
5.	Berechnung des globalen Anteils der Freiluftanomalien $\Delta g^{EGM}$ an den Stellen der Datenpunkte aus dem Modell EGM96 entsprechend Gleichung (4.86c).
6.	Berechnung der Wirkung der RTM-Massen auf die Schweredaten entsprechend Gleichung (4.147). Dabei wurde zunächst die Wirkung der Massen des Modells GTOPO30 bezüglich der Referenztopographie und im Anschluss die Wirkung der Massen des DGM25 bezüglich dem GTOPO30 berechnet.
7.	Berechnung der Wirkung der Atmosphäre $\delta g_a$ auf die Schweredaten entsprechend Gleichung (4.137).
8.	Berechnung der Residualanomalien $\Delta g^{res}$ durch Reduktion der Freiluftanomalien um die in den Schritten 5–7 berechneten Anteile.
9.	Ableitung von Signalkovarianzfunktionen und zugehörigen Gradvarianzen der Residualanomalie (z.B. im Falle von Blockmittelwerten entsprechend Gleichung (4.116)) zur Prädiktion von Blockmittelwerten.
10.	Prädiktion eines einheitlichen Satzes von Blockmittelwerten der Residualanomalien an den Stellen des $30'' \times 30''$ -Gitters entsprechend den Gleichungen (4.105) und (4.106).
11.	Berechnung der ellipsoidischen Korrektur $\Delta g_{ell}$ entsprechend Gleichung (B.2) und Reduktion der Residualanomalien um den entsprechenden Betrag.
12.	Bestimmung einer geeignet modifizierten Stokes'schen Kernfunktion für die anschließende Integration.
13.	Berechnung der Terme $\zeta_0^{res}$ bis $\zeta_3^{res}$ der Molodenskii-Reihe im $30'' \times 30''$ -Gitter durch Integration der Residualanomalien entsprechend Gleichung (4.183).
14.	Berechnung des globalen Anteils $\zeta^{EGM}$ aus dem Potentialmodell EGM96 entsprechend Gleichung (4.86b).
15.	Berechnung der Wirkung der RTM-Massen $\zeta^{topo}$ auf die Höhenanomalie entsprechend Gleichung (4.146), wobei gilt $\zeta^{topo} = V/\gamma$ .
16.	Bestimmung der gesamten Quasigeoidhöhe durch Addition der in den Schritten 13-14 berechneten Größen entsprechend Gleichung (4.212).

### 4.5.5 Qualitätstest der berechneten Geoide

#### Bayernweiter GPS/Nivellement-Vergleich

Um die absolute Genauigkeit der berechneten Geoide zu beurteilen, wurde ein unabhängiger Vergleich mit Geoidhöhen aus GPS/Nivellement durchgeführt. Hierzu wurde vom BLVA ein Satz von 98 Punkten des Deutschen GPS-Referenznetzes DREF (Hierarchiestufen A, B und C) inklusive nivellierter Normalhöhen zur Verfügung gestellt, welche relativ gleichmäßig über ganz Bayern verteilt sind (siehe Abbildung 4.48). Die Genauigkeit der GPS-Höhen liegt bei etwa 1 cm (für Punkte des A- und B-Netzes) bzw. bei ca. 1–2 cm (C-Netz).

Neben den 6 verschiedenen aus RTM-reduzierten Anomalien berechneten Geoiden (siehe Vergleich der Modifikationen der Stokes-Funktion in Kapitel 4.5.2) wird hier auch die aus Freiluftanomalien berechnete Lösung  $\zeta_4^M(FA)$  überprüft. Um die Qualität der berechneten Geoidflächen besser einordnen zu können, wurde an den GPS/Nivellementpunkten zusätzlich ein Vergleich mit dem EGM97 durchgeführt. Tabelle 4.10 enthält statistische Werte der absoluten Differenzen zwischen GPS/Nivellement und den verschiedenen gravimetrischen Geoiden. Plottet man die Differenzen geographisch (Abbildung 4.49), so erkennt man, dass in allen Fällen die gravimetrischen Geoidhöhen gegenüber den GPS/Nivellementhöhen systematisch verfälscht sind. Im wesentlichen entsprechen die Differenzen einer schiefen Ebene, die von Süd/Südost nach Nord/Nordwest mit einer Steigung von ca. 10-15 cm auf 100 km abfällt (die GPS/Nivellementhöhen sind im Süden deutlich größer als die gravimetrischen

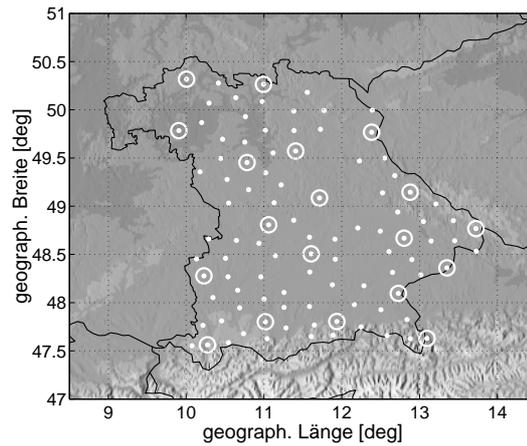


Abbildung 4.48: Verwendete GPS/Nivellementpunkte des BLVA in Bayern (zusätzlich mit “o“ markiert sind A- und B-Netzpunkte); Hintergrund: Topographie.

Geoide). Über ganz Bayern hinweg ergeben sich dadurch relative Differenzen bis zu 50 cm, wobei die voll auf dem EGM96 basierende Lösung  $\zeta_{361}^{WG}$  sogar Werte von 1.5 m erreicht. Wie in Kapitel 4.5.3 beim Vergleich der Potentialmodelle EGM96 und EIGEN-1S gezeigt, können Fehler dieser Art durch langwellige Fehler des verwendeten Potentialmodells erzeugt werden. Allerdings ist die dort berechnete Neigung in Bayern etwas geringer als die festgestellten absoluten Differenzen zu GPS/Nivellement.

Um die gravimetrischen Geoide im langwelligen Bereich zu verbessern, wurden aus den beobachteten Differenzen durch Ausgleichung Korrekturflächen berechnet. Hierbei wurden nur die genauen A- und B-Netzpunkte als Stützstellen verwendet, so dass die C-Netzpunkte zur Kontrolle dienen können. Damit wird gewährleistet, dass die entstehenden Residuen realistische Genauigkeitsmaße für die korrigierten Geoide sind. Würde man alle Punkte als Stützstellen für die Ausgleichung verwenden, so könnte man prinzipiell durch Wahl einer Fläche geeigneter Ordnung die Differenzen in den GPS/Nivellement-Punkten zu Null machen. Zwischen den Stützstellen kann es dann jedoch zu einem nicht überprüfbar Verhalten der korrigierten Geoide kommen. Dies soll vermieden werden.

Im ersten Schritt wurden die absoluten Differenzen aus Abbildung 4.49 jeweils um eine schiefe Ebene korrigiert. Die Parameter Azimut und Steigung der verschiedenen Ebenen sind in Tabelle 4.11 enthalten. Die geringste Steigung weist das EGG97 auf. Die größte Steigung tritt bei Verwendung des *Wong&Gore*-modifizierten Integrationskerns auf. Die anderen gravimetrischen Lösungen sind nur leicht stärker geneigt als das EGG97. Verbessert man die Geoide um die berechneten Ebenen, so verbleiben die in Tabelle 4.12 bzw. Abbildung 4.50 dargestellten Residuen (die angegebenen statistischen Werte wurden nur aus den C-Netzpunkten berechnet).

Die Residuen des EGG97 sind deutlich kleiner als die der restlichen Geoide. In allen Plots ist jedoch erkennbar, dass die Residuen nicht zufällig um die schiefe Ebene streuen, sondern über größere Bereiche hinweg korreliert sind. Die gravimetrischen Geoide sind im mittelwelligen Bereich gegenüber der GPS/Nivellement-Lösung verbogen. Vergleicht man die Lösungen  $\zeta$  und  $\zeta_4$ , so unterscheiden sie sich lediglich dadurch, dass im ersten Fall die Quellpunktverteilung bei der *Stokes*-Integration unsymmetrisch bezüglich des Berechnungspunktes ist, wohingegen im Fall  $\zeta_4$  die Integration pro Berechnungspunkt exakt auf eine Umgebung von  $4^\circ$  beschränkt bleibt.

Tabelle 4.10: Absolute (unreduzierte) Differenzen zwischen GPS/Nivellement und verschiedenen gravimetrischen Geoiden.

grav. Geoid	min [m]	max [m]	mean[m]	RMS <sub>0</sub> [m]
$\zeta$	-0.041	0.519	0.206	0.132
$\zeta_4^M$	0.075	0.802	0.356	0.144
$\zeta_4^M$	0.266	0.759	0.496	0.120
$\zeta_4^M(FA)$	0.288	1.126	0.606	0.219
$\zeta_{360}^{WG}$	-0.233	1.224	0.294	0.364
$\zeta_{17}^{WG}$	0.246	0.783	0.505	0.133
$\zeta^W$	0.165	0.785	0.416	0.143
$\zeta_{EGG97}$	0.023	0.413	0.213	0.100

Tabelle 4.11: Parameter einer ausgleichenden Ebene in den Differenzen zwischen GPS/Nivellement und verschiedenen gravimetrischen Geoiden an den A- und B-Netzpunkten.

grav. Geoid	Nordazimut [deg]	Steigung [cm/100 km]
$\zeta$	-27.25	13.3
$\zeta_4$	-66.12	13.3
$\zeta_4^M$	-1.17	12.3
$\zeta_4^M(FA)$	3.82	22.7
$\zeta_{360}^{WG}$	13.72	38.9
$\zeta_{17}^{WG}$	3.74	14.1
$\zeta^W$	-12.61	14.3
$\zeta_{EGG97}$	-1.76	10.8

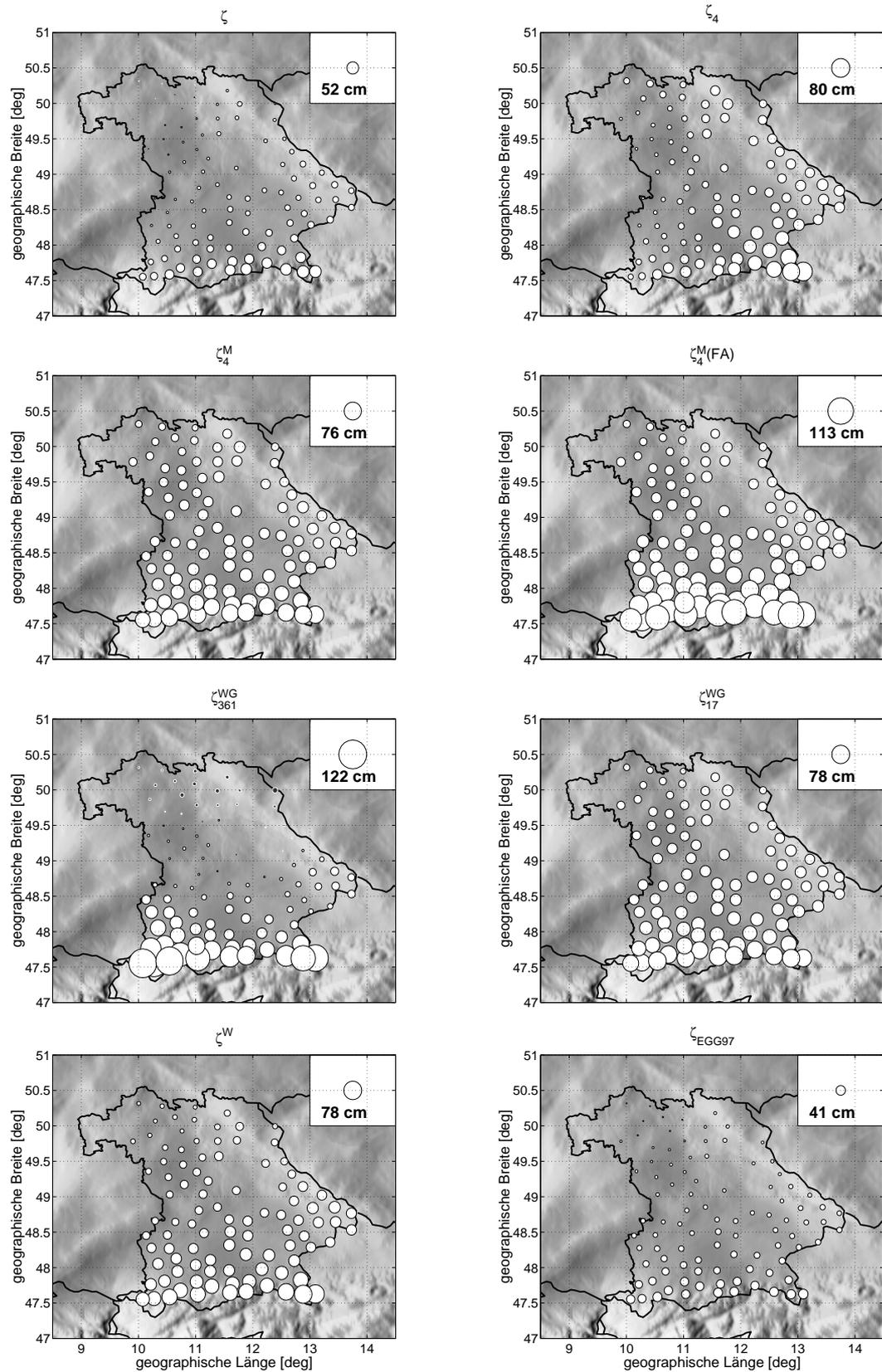


Abbildung 4.49: Absolute Differenzen (dargestellt als Kreise unterschiedlicher Radien) zwischen GPS/Niv. und verschiedenen gravimetrischen Geoiden (mit jeweils unterschiedlich modifizierter Stokes-Funktion). Hintergrund: Geoidhöhen.

Regional beschränkte Effekte, wie etwa durch fehlerhafte Behandlung der Topographie, müssten sich in den beiden Lösungen gleichermaßen wiederfinden. Es zeigt sich jedoch, dass die Fehlerbeträge im Falle  $\zeta_4$  größer sind als bei Verwendung der unmodifizierten Stokes-Funktion. Dies kann durch die bei  $\zeta_4$  auftretende sprunghafte Ände-

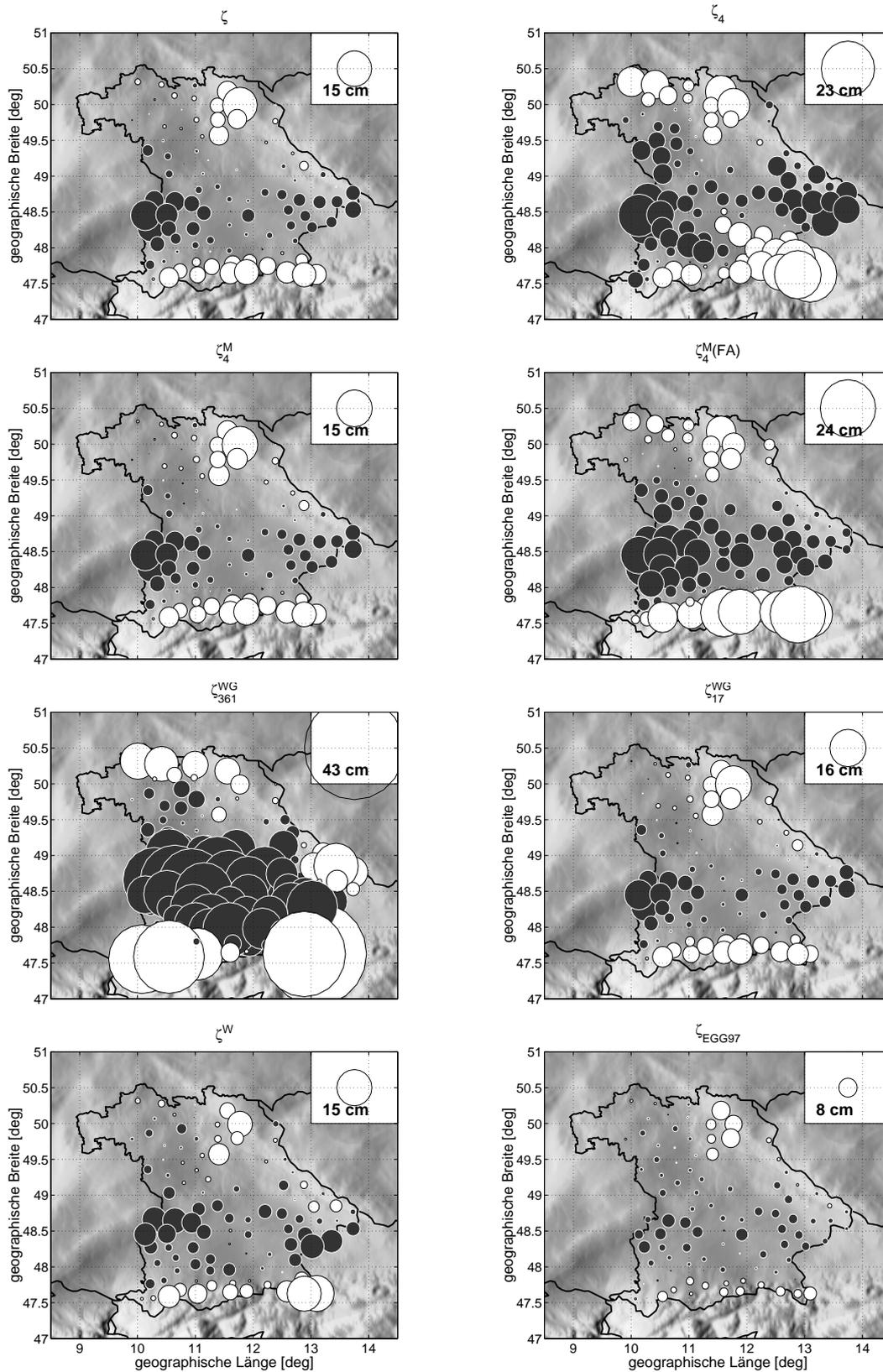


Abbildung 4.50: Residuen zwischen GPS/Niv. und gravimetrischen Geoiden bezüglich einer schiefen Ebene. Positive Werte (GPS/Niv. - grav. Geoid): weiß; negative Werte: schwarz.

rung in den Quelldaten erklärt werden. Die *Meissl*-Modifikation der *Stokes*-Funktion führt zu einer veränderten Gewichtung der Anomalien gegenüber dem Potentialmodell, so dass mittelwellige Beiträge des globalen Modells stärker gedämpft werden. Die Residuen der entsprechenden Lösung  $\zeta_4^M$  sind mit denen der originalen Lösung  $\zeta$

Tabelle 4.12: Residuen an den C-Netzpunkten bzgl. einer ausgleichenden Ebene.

grav. Geoid	min [m]	max [m]	mean[m]	RMS <sub>0</sub> [m]
$\zeta$	-0.127	0.150	-0.004	0.053
$\zeta_4$	-0.178	0.202	-0.011	0.081
$\zeta_4^M$	-0.131	0.155	-0.002	0.055
$\zeta_4^M(FA)$	-0.158	0.240	-0.013	0.085
$\zeta_{360}^{WG}$	-0.301	0.358	-0.051	0.141
$\zeta_{17}^{WG}$	-0.126	0.157	-0.002	0.053
$\zeta^W$	-0.107	0.148	-0.009	0.050
$\zeta_{EGG97}$	-0.057	0.080	-0.008	0.029

Tabelle 4.13: Residuen an den C-Netzpunkten bzgl. einer ausgleichenden Fläche 3. Ordnung.

grav. Geoid	min [m]	max [m]	mean[m]	RMS <sub>0</sub> [m]
$\zeta$	-0.049	0.125	-0.004	0.027
$\zeta_4$	-0.117	0.090	-0.008	0.044
$\zeta_4^M$	-0.046	0.126	-0.004	0.027
$\zeta_4^M(FA)$	-0.052	0.075	-0.005	0.025
$\zeta_{360}^{WG}$	-0.184	0.200	-0.012	0.076
$\zeta_{17}^{WG}$	-0.047	0.127	-0.004	0.027
$\zeta^W$	-0.091	0.085	-0.007	0.034
$\zeta_{EGG97}$	-0.045	0.072	-0.008	0.023

vergleichbar. Sie stimmen außerdem gut mit den in Kapitel 4.5.3 bestimmten empirischen Fehlerflächen überein. Dies führt zu der Annahme, dass die mittelwelligen Fehler durch das Potentialmodell erzeugt werden. Bekräftigt wird dies dadurch, dass die voll auf dem EGM96 basierende Lösung  $\zeta_{361}^{WG}$  die schlechtesten Ergebnisse liefert. In allen anderen Fällen können die Fehler je nach spektraler und räumlicher Filterung mehr oder weniger stark korrigiert werden. Dadurch wird auch erklärbar, dass das EGG97 die geringsten Fehlerbeträge aufweist. Hier ging nämlich ein deutlich größerer Datensatz von terrestrischen Schwereanomalien in die Berechnung ein (siehe auch Abbildung 4.43). Der Fehler des Potentialmodells kann dadurch in stärkerem Maße korrigiert werden.

Um die Residuen bezüglich der schiefen Ebene zu verbessern, können die Differenzen in den A- und B-Netzpunkten um eine Fläche höherer Ordnung reduziert werden. Hierzu wurde zunächst eine Fläche 3. Ordnung verwendet. Die verbleibenden Residuen sind in Abbildung 4.52 und Tabelle 4.13 dargestellt. Es zeigt sich erneut, dass die Lösungen  $\zeta_4$  und  $\zeta_{361}^{WG}$  am schlechtesten abschneiden. Die übrigen Lösungen sind nun zum Teil von ähnlicher Qualität wie das EGG97. Da dort die mittelwelligen Fehler aufgrund des größeren Datensatzes geringer sind, bewirkt die Reduktion einer Fläche 3. Ordnung keine gravierende Verbesserung mehr.

Die theoretisch beste Lösung sollte durch die Modifikation nach *Wenzel* erreicht werden. Da die gemessenen Residuen dies nicht bestätigen, ist anzunehmen, dass die in Kapitel 4.5.1 verwendeten Fehlermaße nicht realistisch sind. Der Vergleich mit den Residuen der unmodifizierten Lösung  $\zeta$  lässt den Schluss zu, dass das Potentialmodell zu optimistisch gewichtet wurde. Auffällig ist weiterhin, dass bei fast allen Lösungen die mit Abstand größten Residuen an zwei Punkten im Bereich des Fichtelgebirges verbleiben. Dies gilt in geringerem Umfang auch für das EGG97. Eventuell liegen hier größere Fehler in den GPS/Nivellementhöhen vor. Vernachlässigt man diese Punkte, so sind die Lösungen  $\zeta$ ,  $\zeta_4^M$  und  $\zeta_{17}^{WG}$  von der selben Qualität wie das EGG97.

Die Verwendung einer Fläche 3. Ordnung kann außerhalb des Stützpunktbereichs zu unerwünschten und unrealistischen Ausschwingeffekten führen. Da die Stützpunkte im vorliegenden Fall relativ gleichmäßig über ganz Bayern verteilt sind, dürften solche Effekte innerhalb Bayerns weitestgehend vernachlässigbar sein. Betrachtet man Abbildung 4.51 (links), so erkennt man jedoch außerhalb Bayerns sehr steile Anstiege bzw. Abfälle der Korrekturfläche. In beschränktem Umfang sind davon bereits die Grenzregionen am Alpenrand, im Fichtelgebirge und im Spessart betroffen. Dort kann es zu unrealistisch großen Werten der Korrekturfläche kommen. Um dies zu vermeiden, wurde alternativ eine Fläche durch LSP bestimmt. Als Signalkovarianzfunktion wurde dazu eine Funktion nach dem Exponentialmodell (siehe Formel (3.31)) gewählt. Als zufälliger Fehler der Stützpunkte wurde entsprechend der Genauigkeit der A- und B-Netzpunkte 1 cm gewählt. Die Signalvarianz wurde anhand

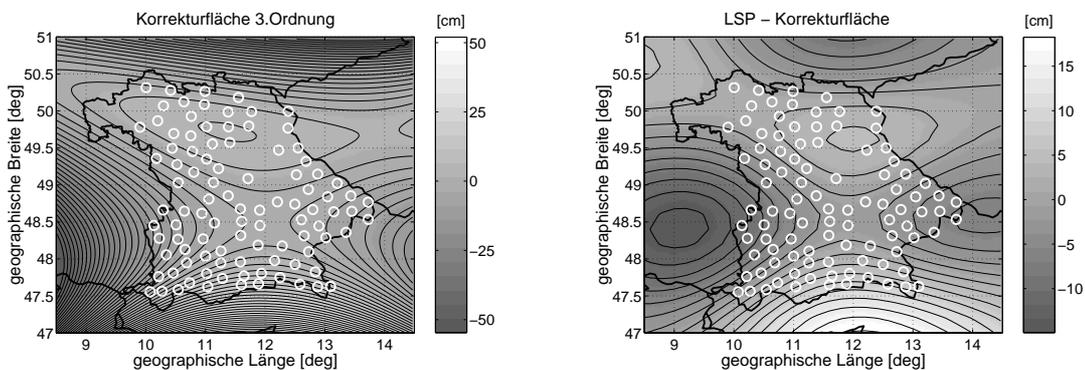


Abbildung 4.51: Korrekturflächen zur Reduktion der Residuen bezüglich einer ausgleichenden Ebene (siehe Abbildung 4.50). Äquidistanz 2 cm.

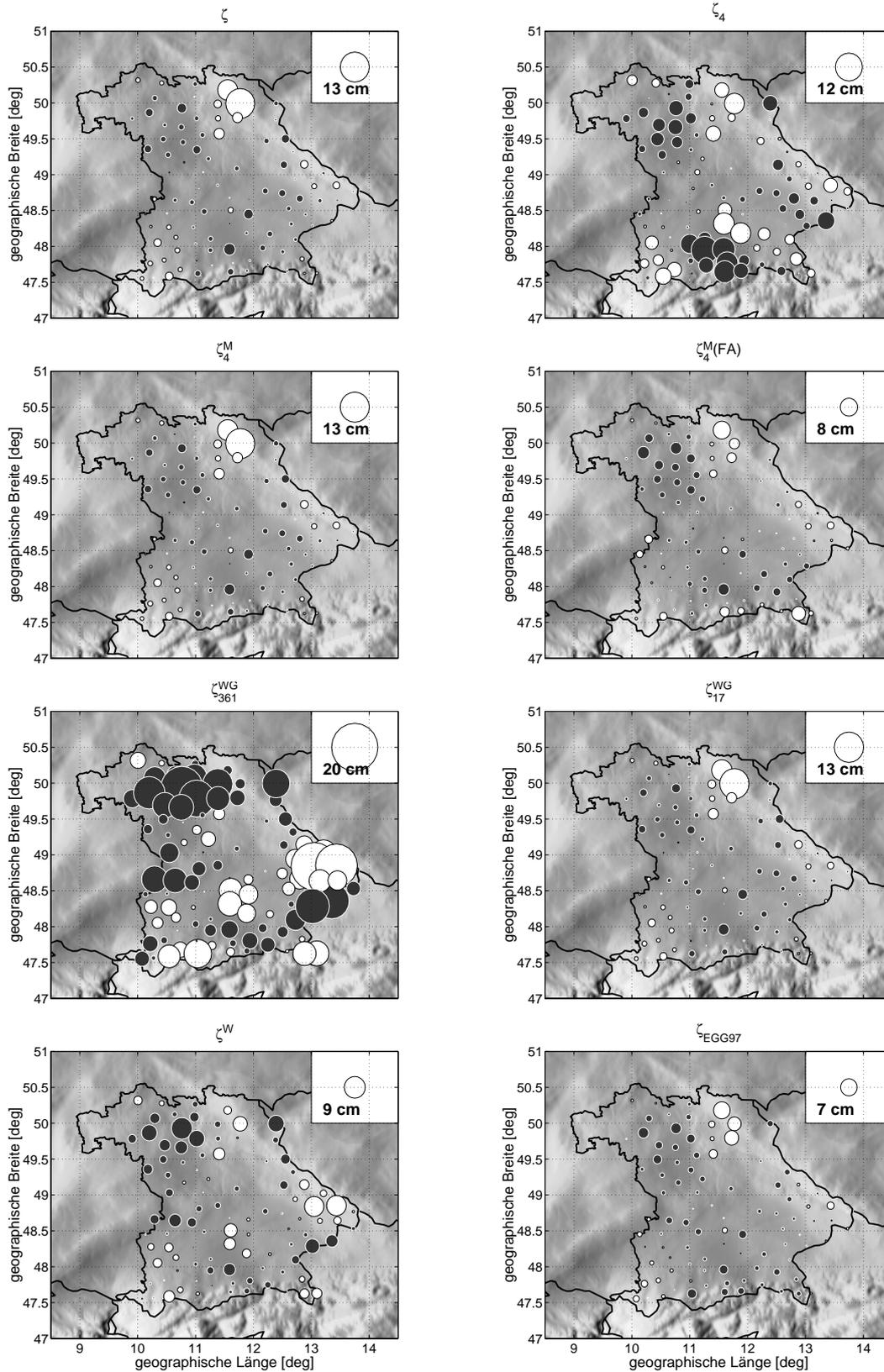


Abbildung 4.52: Residuen zwischen GPS/Niv. und gravimetrischen Geoiden bezüglich einer Fläche dritter Ordnung. Positive Werte (GPS/Niv. - grav. Geoid): weiß; negative Werte: schwarz.

der in Tabelle 4.12 gegebenen Residuen zu  $25 \text{ mGal}^2$  festgelegt, die Korrelationslänge entsprechend der Verteilung der Residuen in Abbildung 4.52. Da die Korrelation jedoch in Ost-West-Richtung größer zu sein scheint, als in Nord-Süd-Richtung, wurde der Wert nicht rein graphisch, sondern unter Berücksichtigung der sich in den Kon-

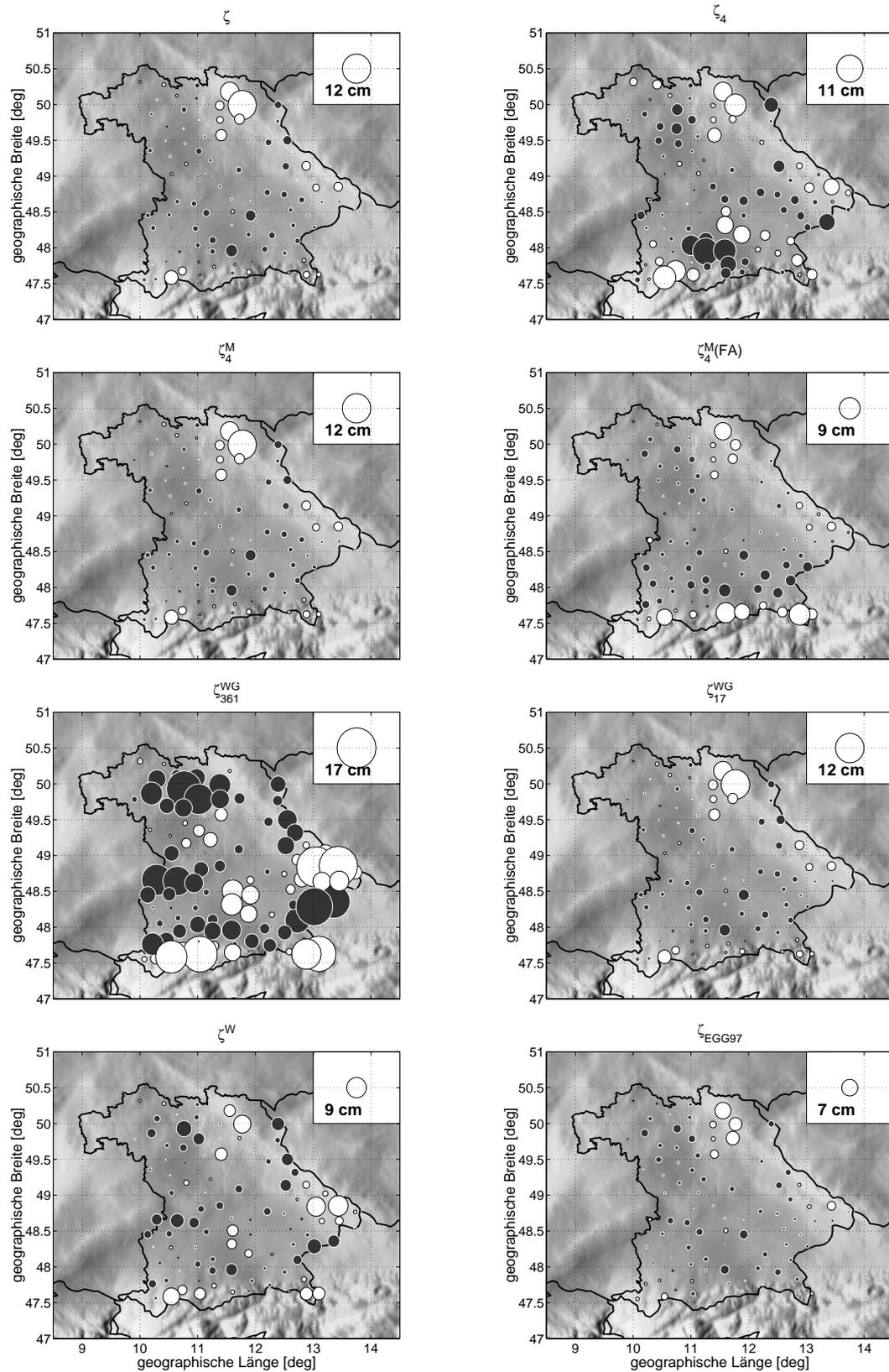


Abbildung 4.53: Residuen zwischen GPS/Niv. und gravimetrischen Geoiden bezüglich einer LSP-Korrekturfläche. Positive Werte (GPS/Niv. - grav. Geoid): weiß; negative Werte: schwarz.

trollpunkten ergebenden Residuen bestimmt. Der Wert  $\xi = 150$  km lieferte die besten Ergebnisse. Die Residuen sind in Tabelle 4.14 und Abbildung 4.53 dargestellt und entsprechen etwa den Ergebnisse bei Reduktion einer Fläche 3. Ordnung. Die LSP-Lösung ist jedoch zu bevorzugen, da dort nicht mit unrealistischen Ausschwingeffek-

Tabelle 4.14: Residuen an den C-Netzpunkten bzgl. einer durch LSP bestimmten Korrekturfläche.

grav. Geoid	min [m]	max [m]	mean[m]	RMS <sub>0</sub> [m]
$\zeta$	-0.052	0.123	-0.002	0.027
$\zeta_4$	-0.114	0.098	-0.004	0.042
$\zeta_4^M$	-0.049	0.124	-0.002	0.027
$\zeta_4^M(FA)$	-0.056	0.090	-0.004	0.030
$\zeta_{360}^{WG}$	-0.160	0.170	-0.014	0.072
$\zeta_{17}^{WG}$	-0.050	0.124	-0.002	0.027
$\zeta^W$	-0.068	0.086	-0.005	0.033
$\zeta_{EGG97}$	-0.038	0.070	-0.007	0.021

ten zu rechnen ist. Zum Vergleich sind in Abbildung 4.51 die beiden an der unmodifizierten Lösung  $\zeta$  angepassten Korrekturflächen dargestellt.

### GPS/Nivellement-Vergleich im Estergebirge

Um die Genauigkeit der berechneten Geoide im kurzweiligen Bereich zu untersuchen, wurde ein zweiter Vergleich an GPS/Nivellement-Punkten im Estergebirge durchgeführt. Da, wie in Abbildung 4.51 gezeigt, bereits am Alpenrand mit einem unrealistisch steilen Anstieg der Fläche 3. Ordnung zu rechnen ist, wurden die gravimetrischen Geoide zuvor jeweils um die LSP-Fläche korrigiert. Die GPS-Höhen haben laut FLURY (2002) eine Genauigkeit von 1-2 cm. Die maximalen Schleifenschlussfehler des Nivellements betragen 1 cm. Das Geoid selbst erreicht im Bereich des Estergebirges etwa Werte zwischen 47.5 m und 49 m (siehe Abbildung 4.54, rechts).

Die Residuen gegenüber GPS/Nivellement sind in Abbildung 4.55 und Tabelle 4.15 dargestellt. Abgesehen von der rein auf dem EGM96 basierenden Lösung erreichen alle Geoide die Genauigkeitsmarke von 3 cm, wobei die Lösungen  $\zeta$ ,  $\zeta_4^M$  und  $\zeta_{17}^{WG}$  mit knapp 2 cm am besten abschneiden. Die entsprechenden Residuen entlang den in Abbildung 3.4 eingezeichneten Nivellementlinien 5, 6 und einer verkleinerten Schleife rund um das Estergebirge (entsprechend Schleife 1, wobei der nördliche Teil durch Linie 4 abgekürzt wird) liegen im Bereich von 1 bis maximal 2 cm/km mit Standardabweichungen zwischen 8 und 13 mm/km (ein extremer Wert entlang des Kühalmweges (vgl. Abbildung 4.56) wurde hierbei ausgespart, da dort eine deutlich schlechtere Qualität der GPS-Messungen vorliegt). Eine wesentlich bessere Anpassung dürfte hinsichtlich der GPS-Höhengenaugkeit auch nicht realistisch sein. Auf den ersten Blick sind die Residuen bezüglich  $\zeta$ ,  $\zeta_4^M$  und  $\zeta_{17}^{WG}$  relativ homogen über das Gebiet verteilt, wobei in der Mitte des Gebirgsblocks besonders kleine Werte auffallen.

Im Falle des EGG97 hingegen erkennt man eine deutliche Korrelation der Residuen mit der Topographie bzw. dem Verlauf des Geoids. Die im Tal liegenden Punkte (vgl. Abbildung 4.54, links) weisen geringere Residuen auf als die Punkte innerhalb des Gebirgsblocks. Hierfür kommen zwei Ursachen in Betracht und zwar das verwendete

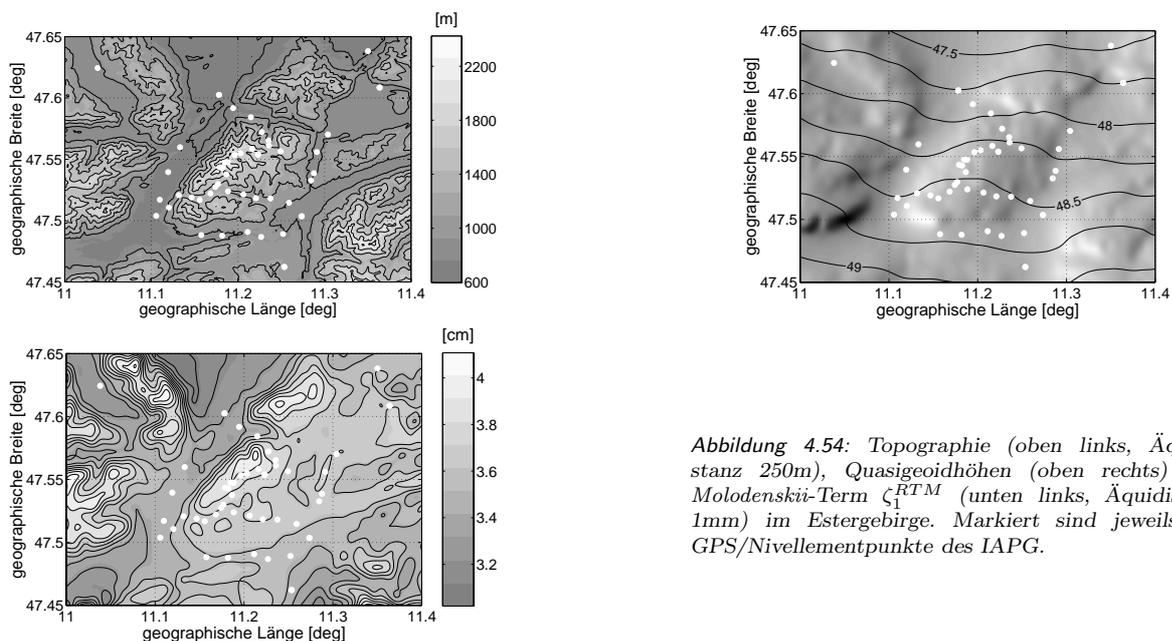


Abbildung 4.54: Topographie (oben links, Äquidistanz 250m), Quasigeoidhöhen (oben rechts) und Molodenskii-Term  $\zeta_1^{RTM}$  (unten links, Äquidistanz 1mm) im Estergebirge. Markiert sind jeweils die GPS/Nivellementpunkte des IAPG.

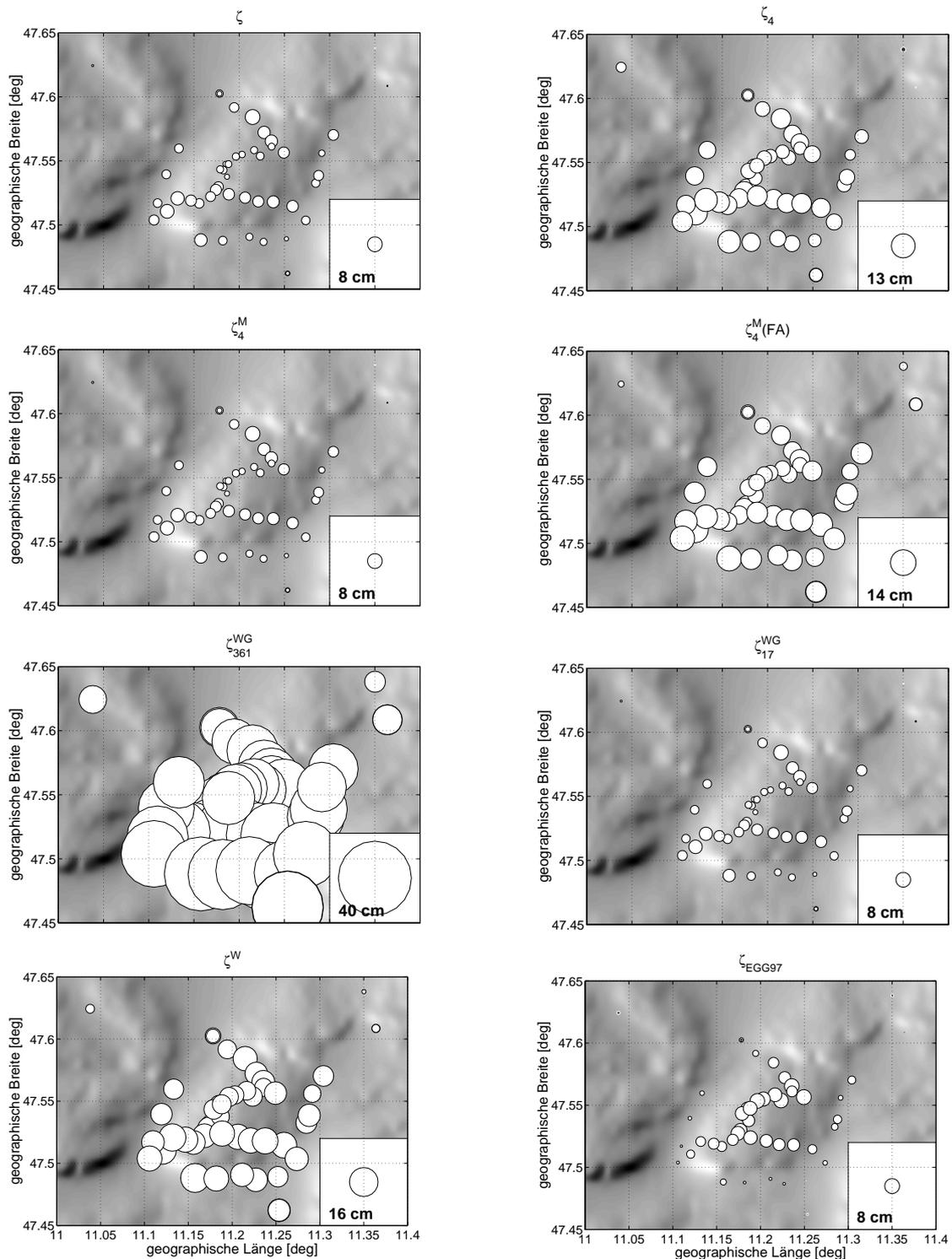


Abbildung 4.55: Differenzen zwischen GPS/Niv. und gravimetrischen Geoiden im Estergebirge.

Datenmaterial und die Berechnung der höheren Glieder der *Molodenskii*-Reihe, auf die im Falle des EGG97 verzichtet wurde. Nach Kapitel 4.5.2 kann der Reihenterm 1. Ordnung in den Alpen Werte bis zu ca. 10 cm erreichen. Im Estergebirge ergibt sich jedoch nur eine Bandbreite von etwa 1 cm (siehe Abbildung 4.54). Die Korrektur des EGG97 um diesen Term verbessert die mittlere Variation der Residuen nur unwesentlich von  $RMS_0 = 3.0$  cm (siehe Tabelle 4.15) auf 2.9 cm. Die *Molodenskii*-Terme sind somit nicht ausschlaggebend für die Qualitätsunterschiede der Geoide. Eine bessere Modellierung des Schwerfeldes im kurzwelligen Bereich ist aber sicherlich durch das dichtere Datenmaterial möglich. Da für die eigenen Berechnungen die umfangreiche Schweredatei des IAPG und das hochauflösende  $50\text{ m} \times 50\text{ m}$ -DGM des BLVA verwendet wurden, kann man davon

Tabelle 4.15: Residuen im Estergebirge bzgl. der bayernweit bestimmten LSP-Korrekturfläche.

grav. Geoid	min [m]	max [m]	mean[m]	RMS <sub>0</sub> [m]
$\zeta$	-0.008	0.082	0.045	0.019
$\zeta_4$	-0.026	0.132	0.084	0.030
$\zeta_4^M$	-0.008	0.082	0.045	0.019
$\zeta_4^M(FA)$	0.033	0.142	0.101	0.022
$\zeta_{360}^{WG}$	0.115	0.404	0.305	0.065
$\zeta_{17}^{WG}$	-0.007	0.081	0.044	0.018
$\zeta^W$	0.024	0.163	0.117	0.029
$\zeta_{EGG97}$	-0.018	0.085	0.045	0.030

ausgehen, dass die entsprechenden Blockmittelwerte genauer sind, als die für das EGG97 verwendeten. Dort wurden im Bereich des Estergebirge weniger Schweredaten verwendet und die Topographie durch ein DGM der Auflösung  $7.5'' \times 7.5''$  ( $7.5''$  entsprechen etwa 200 m) modelliert (siehe DENKER & TORGE, 1999).

Um dies näher zu betrachten sind in Abbildung 4.56 die Residuen des EGG97 und des hier berechneten Geoids  $\zeta$  dargestellt. Um die Residuen der beiden Lösungen untereinander besser vergleichbar zu machen, wurden alle Werte auf den Punkt ES01 reduziert. Im Falle des EGG97 ergeben sich dann Residuen zwischen etwa  $-1.8$  cm und  $6.7$  cm und für  $\zeta$  zwischen  $-1.1$  cm und  $4.7$  cm. Sowohl durch diese Reduktion, als auch durch die bayernweit angepasste Korrektionsfläche wird im lokalen Bereich ein Versatz der Residuen eingeführt, der im absoluten Sinn nicht der wahren Differenz zwischen gravimetrischer und geometrischer Lösung entsprechen muss. Die in Abbildung 4.56 dargestellten Werte dürfen deshalb nicht bezüglich ihrer absoluten Größe beurteilt werden. Kleines Residuum bedeutet also nicht notwendigerweise ein optimales Ergebnis. Vielmehr ist die Nachbarschaftstreue der Punkte zu beachten. Zusätzlich zu den Residuen sind in Abbildung 4.56 die Verteilungen der Schwerpunkte eingezeichnet, die in die Berechnung der mittleren Schwereanomalien eingegangen sind.

Im Falle des EGG97 erkennt man neben der bereits festgestellten Topographieabhängigkeit eine deutliche Korrelation mit der Dichte der Schwerewerte. Sowohl der Mangel an Schwerewerten, wie auch die mit ca. 200 m Auflösung relativ grobe Darstellung der Topographie verhindern eine detaillierte Modellierung des Schwerefeldes im Estergebirge. Dadurch steigen die Residuen innerhalb des Gebirgsblocks gegenüber den Vergleichspunkten im

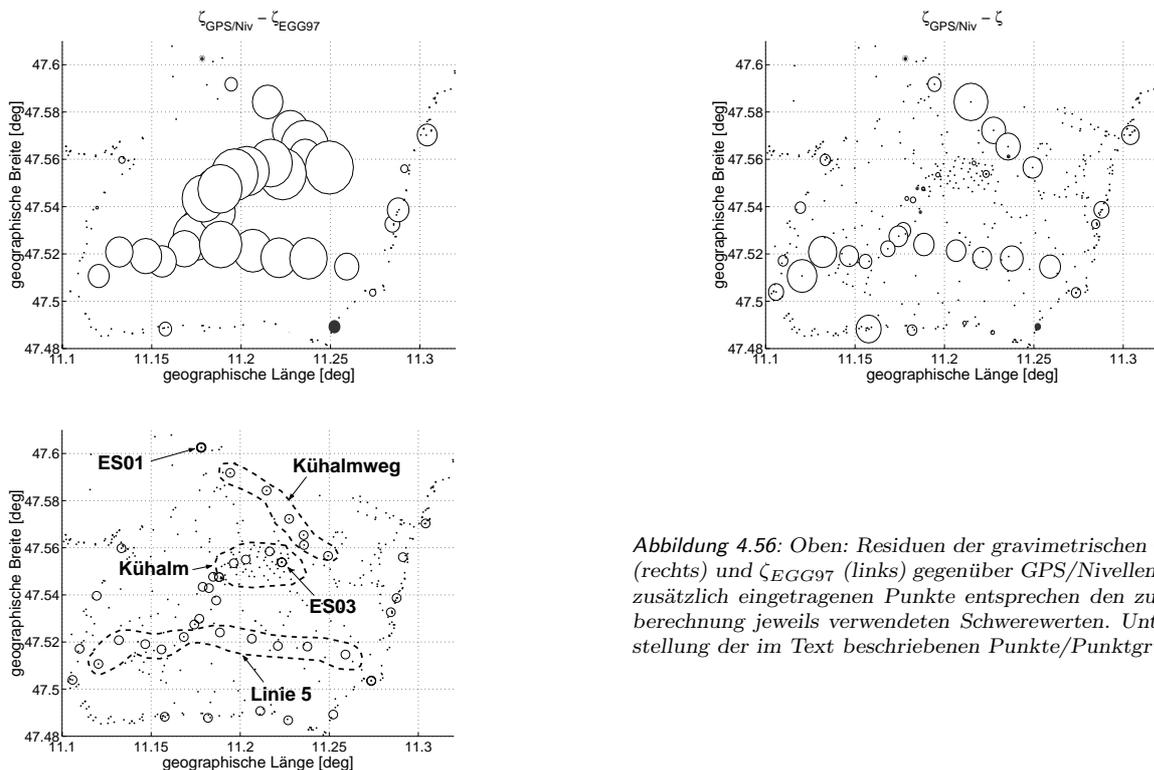


Abbildung 4.56: Oben: Residuen der gravimetrischen Geoid  $\zeta$  (rechts) und  $\zeta_{EGG97}$  (links) gegenüber GPS/Nivellement. Die zusätzlich eingetragenen Punkte entsprechen den zur Geoidberechnung jeweils verwendeten Schwerewerten. Unten: Darstellung der im Text beschriebenen Punkte/Punktgruppen.

Tal an. Die Genauigkeit der GPS/Nivellementhöhen wird deutlich überschritten.

Anders sieht es mit den Residuen der hier berechneten Lösung aus. Sie sind insgesamt kleiner, so dass sich entsprechend Tabelle 4.15 ein kleinerer RMS-Wert ergibt. Dadurch werden auch innerhalb des Gebirgsblocks verschiedene Details erkennbar. Da hier wesentlich mehr Schweremessungen in die Berechnungen eingeflossen sind und ein DGM mit deutlich höherer Auflösung verwendet wurde, ist die Modellierung des hochfrequenten Schwerefeldsignals besser gelungen als im Falle des EGG97. Für die genaue Analyse der Residuen ist jetzt allerdings eine detaillierte Kenntnis der GPS/Nivellement-Genauigkeiten notwendig. Die folgenden Anmerkungen sind zwar zum Teil eher spekulativ, da die wahren Fehler unbekannt bleiben, jedoch zeigen sich einige interessante Korrelationen, die die Struktur der Residuen erklären können.

Die GPS Messungen wurden in verschiedenen Kampagnen unter Verwendungen verschiedener Anschlusspunkte und verschiedener Antennentypen durchgeführt. Die meisten Punkten wurden dabei zweimal für jeweils 3 Stunden besetzt. Die Punkte entlang des Kühalmweges weichen hiervon, aufgrund starker Abschattungen, ab. Die Gesamtbeobachtungszeit beträgt dort oft nur etwa 3 Stunden. Als Anschlusspunkte wurden ES01 und ES03 verwendet. Da die Residuen deutlich von denen der Anschlusspunkte abweichen, kann man aufgrund der kürzeren Beobachtungszeiten auf eine geringere GPS-Höhengenauigkeit schließen. Weiterhin fällt auf, dass die Punkte im Bereich der Kühalm eine sehr hohe Nachbarschaftsgenauigkeit aufweisen, was auch im Vergleich zum hier verwendeten Anschlusspunkt ES03 gilt. All diese Punkte wurden innerhalb einer Messkampagne besetzt. Im Vergleich zur nahe gelegenen Nivellementlinie 5 treten jedoch größere Differenzen auf, wobei die Residuen innerhalb dieser Linie wieder relativ homogen sind. Eventuell kann es hier zwischen verschiedenen Kampagnen durch unterschiedliche Anschlusspunkte zu Differenzen kommen. Auch Geländehebungen sind in diesem Fall als Ursache für den Versatz nicht auszuschließen, da hier zwischen den LVA-Nivellements und den GPS-Messungen des IAPG etwa 40 Jahre liegen. Dies ist jedoch ohne genauere Prüfung schon weit im Bereich der Spekulation.

Insgesamt bleibt festzuhalten, dass durch die hohe Dichte an Schweremessungen und die hohe Auflösung des verwendeten DGM im Estergebirge eine Geoidgenauigkeit erzielt werden konnte, die der bei sorgfältiger Messung und entsprechend langen Messzeiten erzielbaren GPS-Genauigkeit entspricht. GPS-Fehler in der Größenordnung von wenigen Zentimetern sind dadurch feststellbar.

# 5 Resultate und Schlussbemerkungen

Durch die politisch bedingte Umstellung des amtlichen Höhensystems in Deutschland wurde eine Transformation der bestehenden Höhenwerte notwendig. Diese ist theoretisch auf relativ einfache Weise möglich, wobei auch Wegabhängigkeitseffekte der alten normalorthometrischen Höhen beseitigt werden können. Da die benötigten Daten jedoch nicht immer in nutzbarer (digitaler) Form zur Verfügung stehen, stößt man bei der Umsetzung der Transformationsverfahren auf Probleme. Ein Ziel dieser Arbeit war deshalb die Untersuchung geeigneter Näherungsverfahren, speziell für das Festpunktfeld 3. und 4. Ordnung in Bayern. Dabei wurde vor allem auf die Einfachheit des Verfahrens und die reale Verfügbarkeit der notwendigen Daten geachtet. In ersten Testrechnungen zeigte sich, dass flächenhafte Interpolationen zur Transformation nicht immer ausreichende Genauigkeit liefern. Eine genügend genaue Alternative stellt die Umrechnung entlang simulierter Nivellementlinien dar, wobei von zentraler Bedeutung ist, auf welche Art die an den Nivellementpunkten notwendige Schwerewerte beschafft wird. Entlang den Nivellementlinien 1. und 2. Ordnung liegen SFP so dicht vor, dass mit ausreichender Genauigkeit eine linienweise lineare Interpolation in einfachen Bougueranomalien durchgeführt werden kann. Dies entspricht dem von der Bayerischen Vermessungsverwaltung an den NivP(1) praktizierten Vorgehen. Im untergeordneten Festpunktfeld der 3. und 4. Ordnung sind die SFP nur flächenhaft in geringerer Dichte vorhanden. Im Hinblick auf Rechenaufwand und erzielbare Genauigkeit ist es gerechtfertigt, auf das optimale Verfahren der *Kleinsten-Quadrate-Prädiktion* mittels empirischer Kovarianzfunktionen zu verzichten. Stattdessen kann eine flächenhafte lineare Interpolation der Schwerewerte an den NivP auf Basis einer Dreiecksvermaschung verwendet werden.

Bleibt noch die Frage nach dem Signaltyp. Freiluftanomalien sind in Bayern nicht überall geeignet, da sie aufgrund der Topographie teilweise sehr unruhig sind und eine breite Streuung aufweisen. Dies gilt vor allem im Alpenbereich, aber auch in den Mittelgebirgen. Ein sehr glattes Signalverhalten zeigen topographisch verfeinerte Bougueranomalien. Diese ermöglichen in allen Regionen Bayerns eine ausreichende Interpolationsgenauigkeit, sind jedoch sehr rechenaufwendig. Einen guten Kompromiss stellen einfache Bougueranomalien dar. Diese weisen eine mit den geländekorrigierten Bougueranomalien vergleichbare Struktur auf. Lediglich an topographisch exponierten Stellen im Alpenbereich sind Abweichungen im Bereich einiger 10er mGal möglich. An diesen Stellen lassen sich die Genauigkeitsanforderungen des NivP-Feldes nicht erfüllen.

Teilt man Bayern in 2 Regionen, so gilt:

- In ganz Bayern können auf Grundlage des bestehenden SFP-Feldes Schwerewerte mit einer, für die Nivellementreduktion ausreichenden Genauigkeit, aus einer flächenhaften linearen Interpolation in einfachen Bougueranomalien berechnet werden (die Bouguer-Plattenreduktion muß nach der Interpolation wieder rückgängig gemacht werden, um die eigentlich benötigten Freiluftanomalien zu erhalten). Dies gilt nicht für die bayerischen Alpen.
- In den Alpen liefern nur verfeinerte Bougueranomalien uneingeschränkt ausreichende Genauigkeiten. Die Nutzung einfacher Bougueranomalien versagt an topographisch exponiert liegenden Punkten. Im Alpenbereich sind deshalb folgende Vorgehensweisen denkbar:
  1. Man verwendet zur Schwereprädiktion topographisch verfeinerte Bougueranomalien. Dies liefert in allen Fällen die geforderten Genauigkeiten, ist allerdings mit hohem Rechenaufwand verbunden.
  2. Man interpoliert flächenhaft in einfachen Bougueranomalien, läßt aber die auf Bergspitzen liegenden SFP als Stützpunkte unberücksichtigt. Dies bietet sich an, wenn eine Nivellementlinie selbst nicht über Bergspitzen oder Kämme führt.
  3. Führt ein Nivellement über topographisch exponierte Stellen, so kann man linienweise in einfachen Bougueranomalien interpolieren, sofern die SFP entlang der Linie geeignet verteilt sind. Hierzu sind allerdings eventuell Neumessungen von Schwerewerten nötig.
  4. Man verfährt auch in den Alpen so wie im restlichen Bayern, d.h. man interpoliert flächenhaft in einfachen Bougueranomalien. Dann hat man mit einer Überschreitung der zulässigen Fehlermaße um ca.  $2 \text{ mm}/\sqrt{\text{km}}$  zu rechnen. Da die praktischen Genauigkeitsanforderungen bei Nivellements im Gebirge sicherlich geringer als im Flachland sind, ist auch dieses Vorgehen eine erwägenswerte Alternative.

Daneben zeigt sich im Untersuchungsgebiet, dass die Genauigkeit der Schwereprädiktion

1. nicht wesentlich von der Art des Verfahrens, sondern vom verwendeten Signaltyp und
2. vor allem von der topographischen Lage der Stütz- und Berechnungspunkte abhängt. Sind keine topographisch exponierten Punkte beteiligt, so können mit einfachen Bougueranomalien auch über Stützpunktentfernungen von 20 km ausreichende Interpolationsgenauigkeiten erzielt werden. Eine wie z.B. in LEDERSTEGGER (1969) beschriebene Abhängigkeit von der Stützpunktentfernung scheint hier weniger wichtig.

Im Weiteren wurde eine Quasigeoidbestimmung für Bayern durchgeführt. Zur Filterung von Daten- und Vernachlässigungsfehlern wurden dabei verschiedene Modifikationen der *Stokes*-Funktion getestet. Die Qualität der Lösung wurde durch Vergleich mit GPS/Nivellementpunkten geprüft. Es zeigten sich sowohl im lang- als auch im mittelwelligen Bereich Verbiegungen der gravimetrischen Lösung gegenüber GPS/Nivellement mit Beträgen von mehreren Dezimetern. Dies gilt sowohl für alle in dieser Arbeit berechneten Quasigeoide, als auch für das derzeit genaueste europaweit verfügbare Quasigeoid EGG97. In erster Näherung entsprechen die gefundenen Differenzen etwa einer vom Alpenrand aus abfallenden schiefen Ebene. Zur Verbesserung der Lösungen wurden die Differenzen durch Modellierung mittelwelliger Korrekturflächen reduziert, wobei den durch *Kleinste-Quadrate-Prädiktion* bestimmten Flächen der Vorzug vor Flächenpolynomen gegeben wird. Größe und Struktur der Differenzen (lang- und mittelwellige Strukturen im Bereich einiger Zentimeter bis hin zu Dezimeter) lassen den Schluss zu, dass sie durch Fehler des Potentialmodells verursacht werden. Diese werden durch Kombination mit terrestrischen Schwereanomalien nur zum Teil korrigiert. Die Anomalien werden dabei durch Modifikation der *Stokes*-Funktion frequenzweise unterschiedlich gegenüber dem Potentialmodell gewichtet. Dies liefert je nach gewählter Modifikation und Größe des verwendeten Datenbereichs mehr oder weniger gute Ergebnisse. Am besten schneidet im bayernweiten Vergleich das EGG97 ab, in welches ein deutlich größerer Datensatz von Schwereanomalien eingegangen ist, als es in dieser Arbeit der Fall war. Diejenigen Lösungen, die die terrestrischen Anomalien hoch gewichten, sind jedoch von vergleichbarer Qualität. Dies sind die Lösung auf Grundlage der originalen *Stokes*-Funktion sowie der Modifikationen nach *Meissl* und *Wong&Gore* (ab Grad  $n = 17$ ). Die Standardabweichungen der Residuen liegen bei Berücksichtigung der Korrekturflächen im Bereich von 2–3 cm. In diesen Differenzen sind neben den Fehlern der Geoidberechnung auch Ungenauigkeiten der GPS/Nivellementhöhen enthalten. Die Größe

Table 5.1: Übersicht über Größe und Struktur der einzelnen Signalanteile bei Verwendung der *Remove-Restore*-Methode, sowie der in der resultierenden Höhenanomalie verbleibenden Fehleranteile in Bayern.

Größe und Struktur verschiedener Signal- und Fehleranteile bei der Geoidberechnung	
Schwereanomalien	- unreduzierte Freiluftanomalien $\Delta g^{FA}$ : lang- bis kurzwellig, bis zu ca. 300 mGal
	- globaler Anteil $\Delta g^{EGM}$ : langwellig, bis 150 mGal
	- RTM-Reduktion $\delta g^{topo}$ : kurzwellig, bis 250 mGal
	- atmosphärische Reduktion $\delta g_a$ : kurzwellig, ca. 0.5-0.8 mGal
	- ellipsoidische Korrektur $\Delta g_{ell}$ : langwellig, mehrere 0.1 mGal
	- Residualanomalie $\Delta g^{res}$ : mittelwellig, bis 80 mGal
Höhenanomalie	- globaler Anteil $\zeta^{EGM}$ : langwellig, ca. 45-50 m
	- Wirkung der RTM-Massen $\zeta^{topo}$ : kurzwellig, bis 1 m
	- Molodenskii-Terme der residualen Höhenanomalie $\zeta_0^{res}$ : mittelwellig, bis 1.5 m
	$\zeta_1^{res}$ : kurzwellig, bis 10 cm
	$\zeta_2^{res}$ : kurzwellig, bis 1 cm
	$\zeta_3^{res}$ : kurzwellig, bis 1 mm (vernachlässigbar)
- indirekter Effekt der Atmosphäre $\zeta_a$ : kurzwellig, wenige Millimeter (vernachlässigbar)	
- ellipsoidische Korrektur der $\zeta^{res}$ : langwellig, wenige Millimeter (vernachlässigbar)	
Fehler der Höhenanomalie	- globaler Datumsfehler : konstanter Versatz im Bereich mehrerer Dezimeter (unbekannt)
	- vertikale Datumsunterschiede der $\Delta g$ : langwellig, wenige Zentimeter
	- horizontale Datumsunterschiede der $\Delta g$ : langwellig, wenige Zentimeter
	- zufällige Fehler des Potentialmodells : lang- bis mittelwellig, bis zu mehreren Dezimetern
	- zufällige Fehler der Schwereanomalien : kurzwellig, bis 1 cm
	- Fehler der topographischen Reduktionen : kurzwellig, unter 1 cm
	- spektraler Abbruchfehler der $\Delta g^{res}$ (durch Verwendung von $30'' \times 30''$ Blockmittelwerten im Innengebiet) : kurzwellig, unter 1 mm (vernachlässigbar)
- räumlicher Abbruchfehler der $\Delta g^{res}$ (durch Beschränkung der Integration auf einen Innenzone von $4^\circ$ Radius) : mittel- bis kurzwellig, ca. 2 cm	

der verschiedenen Fehleranteile, wie auch die in den Berechnungen enthaltenen Signalanteile sind in Tabelle 5.1 abschließend zusammengestellt. Dabei ist zu beachten, dass vor allem die lang- und mittelwelligen Fehleranteile durch Anpassung einer Korrekturfläche an die GPS/Nivellementhöhen reduziert werden.

In dem etwa  $15\text{ km} \times 15\text{ km}$  großen Bereich des Estergebirges wurde gegenüber GPS/Nivellement eine Genauigkeit von  $2\text{ cm}$  erreicht. Hier schneidet das EGG97 mit einer Genauigkeit von ca.  $3\text{ cm}$  etwas schlechter ab. Als Ursache für die höhere Genauigkeit des hier berechneten Quasigeoides kommt die feinere Modellierung des Geländes sowie die wesentlich höhere Punktdichte der verwendeten Schwereanomalien in Frage. Dadurch können hochfrequente Signalanteile im Schwerefeld besser modelliert werden. Im Hinblick auf die im Estergebirge erzielten Ergebnisse und unter Berücksichtigung der dortigen extremen Signalvariationen kann man eine Genauigkeit von  $2\text{ cm}$  außerhalb den Alpen und etwa  $2 - 3\text{ cm}$  in den Alpen erwarten. Wenn man von Kampagnen mit extrem langen Beobachtungszeiten absieht, entspricht dies etwa der mit GPS erzielbaren Höhengenaugkeit. Für kurzzeitstatische Anwendungen im Ingenieurbereich mit Genauigkeitsanforderungen von wenigen  $\text{cm}$  ist mit den berechneten Quasigeoiden eine Höhenübertragung mit GPS möglich. Da hierbei ohnehin nur Höhendifferenzen von Interesse sind, spielen die angebrachten lang- und mittelwelligen Korrekturen für lokal beschränkte Projekte keine Rolle.

Im Hinblick auf eine Verbesserung der absoluten Genauigkeit der berechneten Geoide wäre es wünschenswert, einen größeren Datensatz an Schwerewerten zur Verfügung zu haben, um die Fehler des Potentialmodells in größerem Umfang beseitigen zu können. Eine zusätzliche Verbesserung ist zukünftig auch durch die Satellitenmissionen GRACE und GOCE zu erwarten, die eine deutliche Steigerung der Genauigkeit globaler Potentialmodelle versprechen. Angestrebt ist im Falle von GOCE ein kumulativer Geoidfehler von etwa  $4\text{ cm}$  im Frequenzbereich bis  $n = 300$  (ESA, 1999) gegenüber  $35\text{ cm}$  im Falle des in dieser Arbeit verwendeten Modells EGM96. Basiert die Lösung auf einem solch genauen Modell, ist damit zu rechnen, dass verschiedene Frequenzbereiche der terrestrischen Schwereanomalien nicht mehr genauer sind, als die des globalen Modells. Im Gegensatz zu den hier durchgeführten Berechnungen sollte dann tatsächlich die *Wenzel*-modifizierte Lösung die besten Ergebnisse liefern (unter der Voraussetzung, dass die Fehler der Schwereanomalien genügend genau modelliert werden können). Zudem wäre dann die dabei getroffene Annahme, dass die Fehler des globalen Modells und die der Schwereanomalien nicht korreliert sind, erfüllt, da das Potentialmodell dann nur auf Satellitendaten basiert. Die Modifikation nach *Wenzel* müsste allerdings unter Umständen modifiziert werden, wenn die Fehler der Schwereanomalien nicht isotrop und homogen verteilt sind.

# Anhang

## A.1 Schwerereduktion des Nivellements

Den Ableitungen in HECK (1987) Kapitel 9 folgend können die Reduktionsterme  $NR$  im System der Normalhöhen nach

$$NR_k = \sum_{i=A}^k \frac{g_i - \gamma_0}{\gamma_0} \Delta n_i + \frac{\bar{\gamma}_A - \gamma_0}{\gamma_0} H_A^N - \frac{\bar{\gamma}_i - \gamma_0}{\gamma_0} H_i^N \quad (\text{A.1})$$

bzw. alternativ nach

$$NR_k = \sum_{i=A}^k \frac{g_i - \gamma_i}{\gamma_i} \Delta n_i - f^* \sum_{i=A}^k H_i^N \sin 2\varphi_i \Delta\varphi_i \quad (\text{A.2})$$

berechnet werden. Darin bedeuten  $g_i$  bzw.  $\gamma_i$  die Schwere bzw. die Normalschwere im Nivellementpunkt  $i$ ,  $\bar{\gamma}$  die mittlere Normalschwere entlang der Lotlinie zwischen Geoid und Oberfläche,  $\gamma_0$  einen beliebigen (konstanten) Normalschwerewert,  $\Delta n$  den nivellierten Höhenunterschied,  $\varphi$  die geographische Breite der Nivellementlinie und  $\Delta\varphi$  die Breitendifferenz zwischen zwei Nivellementpunkten. Für die eigentlich unbekannte Normalhöhe  $H^N$  können Näherungswerte verwendet werden. Mit den analogen Bezeichnungen gilt für die Reduktionsterme  $NOR$  im System der normalorthometrischen Höhen

$$NOR_k = \sum_{i=A}^k \frac{\gamma_i - \gamma_0}{\gamma_0} \Delta n_i + \frac{\bar{\gamma}_A - \gamma_0}{\gamma_0} H_A^{No} - \frac{\bar{\gamma}_i - \gamma_0}{\gamma_0} H_i^{No} \quad (\text{A.3})$$

bzw. alternativ

$$NOR_k = -f^* \sum_{i=A}^k H_i^{No} \sin 2\varphi_i \Delta\varphi_i. \quad (\text{A.4})$$

Beim Übergang von normalorthometrischen zu Normalhöhen wird zur Berechnung der Systemdifferenz  $DNH$  nach (3.8) die Differenz  $DNR$  der Reduktionsterme  $NR$  und  $NOR$  benötigt. Unter Beachtung von (A.1) und (A.3) gilt für diese

$$DNR_k = \sum_{i=A}^k \frac{g_i - \gamma_i}{\gamma_0} \Delta n_i + \frac{\bar{\gamma}_A - \gamma_0}{\gamma_0} DNH_A - \frac{\bar{\gamma}_k - \gamma_0}{\gamma_0} DNH_k. \quad (\text{A.5})$$

Ihr Betrag liegt für die NivP(1) in Bayern bei maximal 5 cm. Es ist also höchstens mit einer Größenordnung von  $10^{-1}$  m zu rechnen. Nimmt man weiterhin für die Differenz  $\bar{\gamma}_i - \gamma_0$  in einem beliebigen Punkt  $i$  eine realistische Größenordnung von  $10^2 \text{ mGal} = 10^{-3} \text{ ms}^{-2}$  an, so ergibt sich für den 2. und 3. Term auf der rechten Seite von (A.5) jeweils ein Wert der Größe  $10^{-5}$  m bzw.  $10^{-2}$  mm. Die Differenz dieser Terme ist also mit Sicherheit vernachlässigbar, und (A.5) reduziert sich zu

$$DNR_k = \sum_{i=A}^k \frac{\Delta g_i}{\gamma_0} \Delta n_i. \quad (\text{A.6})$$

Dieses Ergebnis ist auch aus den Formeln (A.2) und (A.4) ersichtlich. Setzt man näherungsweise  $H^N$  und  $H^{No}$  gleich, so ergibt sich direkt die Darstellung (A.6). Jetzt erkennt man, dass die Systemdifferenzen wesentlich bestimmt werden durch die Größe der Freiluftschwereanomalien  $\Delta g$  und der Nivellementinkremente  $\Delta n$ .

### Amtliche Näherungsformeln

Ausgehend von Formel (A.4) wurden vom Bayerischen Landesvermessungsamt Diagramme in Abhängigkeit von der geographischen Breite und der mittleren Höhenlage einer Nivellementlinie erstellt. Aus diesen wurde in der Vergangenheit die normalorthometrische Reduktion graphisch ermittelt. Aus der Internationalen Schwereformel von 1930 (INSF1930) erhält man für die Schwereabplattung

$$f^* = \frac{\gamma_P - \gamma_{\ddot{A}}}{\gamma_{\ddot{A}}} = 0.005288, \quad (\text{A.7})$$

wobei  $\gamma_P$  die Normalschwere am Pol und  $\gamma_{\ddot{A}}$  diejenige am Äquator bezeichnen. Einsetzen in (A.4) ergibt für die Reduktion zwischen zwei NivP

$$NOR = -0.0053 \sin 2\bar{\varphi} \bar{H} \Delta\varphi. \quad (\text{A.8})$$

Darin bezeichnen  $\bar{\varphi}$  und  $\bar{H}$  jeweils Mittelwerte der geographischen Breite bzw. Höhe (es genügen genäherte normalorthometrische Höhen). Diese Formel diente bisher als amtliche Formel zur Bestimmung der Nivellementkorrekturen (vgl. z.B. WEBER (1994)).

Eine praxisgerechte Formel zur Berechnung der Normalhöhenreduktion für den Bereich des Bayerischen Höhenfestpunktfeldes läßt sich aus (A.2) ableiten. Zunächst stellt man den Breitenunterschied  $\Delta\varphi$  zwischen den NivP dar durch

$$\varphi = \frac{b}{M}. \quad (\text{A.9})$$

Darin bedeuten  $b$  die Länge des dem Breitenunterschied entsprechenden Meridianbogenstücks auf dem Ellipsoid und  $M$  den zugehörigen Meridianbogenhalbmesser. Ersetzt man nun  $b$  durch die Differenz der Hochwerte  $HW$  im ebenen, konformen Gauß-Krüger-Koordinatensystem, so folgt für den Reduktionsterm zwischen zwei NivP

$$NR_i = \frac{g_i - \gamma_i}{\gamma_i} \Delta n_i - 0.0053 \sin 2\varphi_i \frac{\Delta HW_i}{M_i} H_i^N. \quad (\text{A.10})$$

Da die Nord-Süd-Ausdehnung Bayerns nur ca.  $3^\circ$  beträgt, variieren die Werte für  $M$  bzw.  $\sin 2\varphi$  nicht wesentlich. Man kann sie deshalb zusammen mit  $f^*$  zu einer für ganz Bayern gültigen Konstanten zusammenfassen.

Für  $\varphi_{min} = 47.5^\circ$  und  $\varphi_{max} = 50.5^\circ$  ergeben sich die Werte

$$\begin{aligned} M_{min} &= 6370 \text{ km} \\ M_{max} &= 6374 \text{ km} \\ \sin 2\varphi_{min} &= 0.9962 \\ \sin 2\varphi_{max} &= 0.9816 \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} f^* \frac{\sin 2\varphi_{min}}{M_{min}} &= 8.29 \cdot 10^{-7} \text{ km}^{-1} \\ f^* \frac{\sin 2\varphi_{max}}{M_{max}} &= 8.16 \cdot 10^{-7} \text{ km}^{-1}. \end{aligned}$$

Der gerundete Mittelwert lautet  $8.2 \cdot 10^{-7} \text{ km}^{-1}$  und die maximale Abweichung von diesem beträgt  $0.09 \cdot 10^{-7} \text{ km}^{-1}$ . Dies bedeutet einen relativen Fehler von ca. 1 %. Der zweite Term in (A.10) liegt, je nach Breitendifferenz der NivP und deren mittlerer Höhenlage im Bereich weniger mm und darunter. Ein Fehler von 1 % ist im Rahmen der Genauigkeit des Höhenfestpunktfeldes vernachlässigbar.

Ebenso wie für  $M$  und  $\sin 2\varphi$  zeigt sich aufgrund der geringen Breitenausdehnung auch für die Normalschwere  $\gamma$  (bzw. für  $\gamma^{-1}$  in (A.10)) nur eine relativ kleine Variation innerhalb Bayerns. Verwendet man für den Kehrwert den Mittelwert

$$\gamma^{-1} = 0.102 \text{ s}^2 \text{ m}^{-1}, \quad (\text{A.11})$$

so begeht man einen relativen Fehler von ca. 0.07 %. Da die Freiluftanomalien  $\Delta g$  in Bayern maximal in der Größenordnung 100 mGal liegen, erreicht der erste Term in (A.10) realistisch höchstens Werte bis zu wenigen cm. Dies bedeutet bei Verwendung des obigen Mittelwertes einen Fehler im Bereich von  $10^{-2}$  mm. Dies entspricht der selben Größenordnung wie der Fehler im 2. Term und kann deshalb vernachlässigt werden.

Damit läßt sich (A.10) schreiben als

$$NR_i = 0.102 \Delta g_i \Delta n_i - 8.2 \cdot 10^{-10} \Delta HW_i H_i^N, \quad (\text{A.12})$$

wobei die Schwereanomalie in  $\text{m/s}^2$  und die restlichen Größen in m einzusetzen sind. Verwendet man die in WEBER (1998) angegebenen Einheiten, so gilt

$$NR_i [\text{mm}] = 0.000102 \cdot \Delta g_i [\mu\text{m s}^{-2}] \Delta n_i [\text{m}] - 0.00082 \cdot \Delta HW_i [\text{km}] H_i^N [\text{m}]. \quad (\text{A.13})$$

Dies ist die amtliche Formel, nach der in Zukunft die Normalhöhenreduktion zu berechnen ist.

Entsprechend (A.6) ergibt sich die Differenz der Reduktionsterme  $DNR$  innerhalb eines Nivellementabschnittes zu

$$DNR_i[\text{m}] = 0.102 \cdot \Delta g_i[\text{m s}^{-2}] \Delta n_i[\text{m}]. \quad (\text{A.14})$$

### Einfluss unterschiedlicher Referenzsysteme auf die Nivellementreduktion

Bei der Umstellung des Höhensystems von normalorthometrischen Höhen zu Normalhöhen nach Formel (3.11) ist die Differenz  $DNR$  zwischen den jeweiligen Reduktionstermen zu berechnen. Dabei gilt für die Normalhöhenreduktion nach Gleichungen (A.1)

$$NR_k = \sum_{i=A}^k \frac{g_i - \gamma_0}{\gamma_0} \Delta n_i + \frac{\bar{\gamma}_A - \gamma_0}{\gamma_0} H_A^N - \frac{\bar{\gamma}_i - \gamma_0}{\gamma_0} H_i^N$$

und für die Reduktion der normalorthometrischen Höhen nach (A.3)

$$NOR_k = \sum_{i=A}^k \frac{\gamma_i - \gamma_0}{\gamma_0} \Delta n_i + \frac{\bar{\gamma}_A - \gamma_0}{\gamma_0} H_A^{No} - \frac{\bar{\gamma}_i - \gamma_0}{\gamma_0} H_i^{No}.$$

Aufgrund fortschreitender Messmethoden und verbesserter Modelle verändern sich im Laufe der Zeit die Parameter der grundlegenden geodätischen Referenzsysteme. Normalschwerewerte beziehen sich auf die entsprechenden Niveauellipsoide und variieren somit in Abhängigkeit vom verwendeten Referenzsystem. Aktuelles System für die Berechnung der Normalschwere ist das GRS80. Auf dieses soll sich das neue Höhensystem beziehen. Die amtliche Formel (A.8) zur Bestimmung der normalorthometrischen Reduktion wurde aus der INSF1930 abgeleitet. Bezeichnet  $\gamma$  die Normalschwere im GRS80, so lässt sich die Normalschwere bzgl. der INSF1930 nach

$$\gamma^{30} = \gamma + \delta\gamma \quad (\text{A.15})$$

berechnen. Damit gilt für die normalorthometrische Reduktion zwischen den NivP 1 und 2

$$\begin{aligned} NOR &= \frac{\gamma + \delta\gamma - \gamma_0 - \delta\gamma_0}{\gamma_0 + \delta\gamma_0} \Delta n + \frac{\bar{\gamma}_1 + \delta\bar{\gamma}_1 - \gamma_0 - \delta\gamma_0}{\gamma_0 + \delta\gamma_0} H_1^{No} \\ &\quad - \frac{\bar{\gamma}_2 + \delta\bar{\gamma}_2 - \gamma_0 - \delta\gamma_0}{\gamma_0 + \delta\gamma_0} H_2^{No}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Trennen der Terme von  $\gamma$  und  $\delta\gamma$  ergibt

$$\begin{aligned} NOR &= \frac{(\gamma - \gamma_0) \Delta n + (\bar{\gamma}_1 - \gamma_0) H_1^{No} - (\bar{\gamma}_2 - \gamma_0) H_2^{No}}{\gamma_0 + \delta\gamma_0} \\ &\quad + \frac{(\delta\gamma - \delta\gamma_0) \Delta n + (\delta\bar{\gamma}_1 - \delta\gamma_0) H_1^{No} - (\delta\bar{\gamma}_2 - \delta\gamma_0) H_2^{No}}{\gamma_0 + \delta\gamma_0} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

bzw. in abgekürzter Notation

$$NOR = \frac{f + \delta f}{\gamma_0 + \delta\gamma_0}. \quad (\text{A.18})$$

Die Vernachlässigung unterschiedlicher Referenzsysteme bedeutet eine Approximation der normalorthometrischen Reduktion durch

$$NOR \approx \frac{f}{\gamma_0}. \quad (\text{A.19})$$

Der Fehler, den man dabei begeht, ergibt sich demnach zu

$$\delta NOR = \frac{f + \delta f}{\gamma_0 + \delta\gamma_0} - \frac{f}{\gamma_0}. \quad (\text{A.20})$$

Dieser Term wurde entlang aller Schleifen und Linien im Testnetz Estergebirge (siehe Kapitel 3.2.1) bestimmt. Dabei zeigten sich für einzelne Nivellementstrecken maximale Werte von  $4 \cdot 10^{-3}$  mm bzw. für den kumulativen Effekt maximal  $3 \cdot 10^{-2}$  mm. Im Hinblick auf eine angestrebte Höhengenaugigkeit von 1 mm ist dieser Effekt vernachlässigbar.

## A.2 Amtliche Fehlermaße im Höhenfestpunktfeld

Im Falle der Einrechnung von Nivellementlinien 3. und 4. Ordnung in übergeordnete Schleifen handelt es sich um Linieneinschaltungen. Laut AdV (1992) gilt dann für die zulässige Abweichung eines korrigierten und reduzierten Höhenunterschiedes von den entsprechenden Höhen im NivP-Nachweis:

Tabelle A.2: Zulässige Fehler des Nivellements [mm].  $S^{km}$  bedeutet die Länge der Linie in km.

Netzteil	zulässiger Fehler [mm]
Niv-Netz 1. Ordnung:	$\pm (2.0 + 2 \cdot \sqrt{S^{km}})$
Niv-Netz 2. Ordnung:	$\pm (2.0 + 3 \cdot \sqrt{S^{km}})$
Niv-Netz 3. Ordnung:	$\pm (2.0 + 5 \cdot \sqrt{S^{km}})$
Niv-Netz 4. Ordnung:	$\pm (2.0 + 6 \cdot \sqrt{S^{km}})$

Der konstante Term von 2.0 mm ergibt sich aus der Genauigkeit der Anschlusspunkte von 1 mm. Die Fehlermaße wurden für normalorthometrische Höhen abgeleitet. Bei Berechnung von Normalhöhen entstehen zusätzliche Fehler durch Schwereprädiktion in den NivP. Diese sollen die angegebenen Fehlermaße nicht verschlechtern. Damit ergeben sich für den Fehlerbeitrag, der durch Schwereprädiktion maximal entstehen darf:

Tabelle A.3: Zulässiger Fehlerbeitrag der Schwereprädiktion [mm].

Netzteil	zulässiger Fehlerbeitrag [mm]
Niv-Netz 1. Ordnung:	$\pm 1.4 \cdot \sqrt{S^{km}}$
Niv-Netz 2. Ordnung:	$\pm 1.7 \cdot \sqrt{S^{km}}$
Niv-Netz 3. Ordnung:	$\pm 2.2 \cdot \sqrt{S^{km}}$
Niv-Netz 4. Ordnung:	$\pm 2.4 \cdot \sqrt{S^{km}}$

Beispielsweise ergibt sich aus den Fehlerbeiträgen aus Nivellement und Schwere im Netz 3. Ordnung (unter Vernachlässigung der Fehler der Anschlusspunkte) ein Gesamtfehler von

$$\begin{aligned}
 \sigma_{gesamt} &= \sqrt{\sigma_{Niv}^2 + \sigma_g^2} \\
 &= \sqrt{(5 \text{ mm})^2 + (2.2 \text{ mm})^2} \\
 &= 5.46 \text{ mm} \approx 5 \text{ mm},
 \end{aligned}$$

wodurch das Genauigkeitsmaß in Tabelle A.2 eingehalten ist.

## B.1 Berechnung ellipsoidischer Korrekturen für Schwereanomalien

Nach MORITZ (1974) lässt sich die ellipsoidische Korrektur  $\Delta g_{ell}$  der Schwereanomalien genähert aus einem globalen Potentialmodell berechnen, wobei entsprechend Formel (4.186) gilt

$$\Delta g = \Delta g_s + \Delta g_{ell}. \quad (\text{B.1})$$

Sind  $\Delta \bar{C}_{nm}, \Delta \bar{S}_{nm}$  die relativen Koeffizienten eines globalen Potentialmodells bezüglich eines Referenzfeldes, so gilt für die ellipsoidische Korrektur:

$$\Delta g_{ell} = e^2 \cdot \gamma \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos \theta) (\Delta \bar{A}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{B}_{nm} \sin m\lambda), \quad (\text{B.2})$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} \Delta \bar{A}_{nm} &= \Delta \bar{C}_{n-2,m} \cdot p_{nm} + \Delta \bar{C}_{nm} \cdot q_{nm} + \Delta \bar{C}_{n+2,m} \cdot r_{nm} \\ \Delta \bar{B}_{nm} &= \Delta \bar{S}_{n-2,m} \cdot p_{nm} + \Delta \bar{S}_{nm} \cdot q_{nm} + \Delta \bar{S}_{n+2,m} \cdot r_{nm} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

und den Faktoren

$$\begin{aligned} p_{nm} &= \frac{-3(n-3)(n-m-1)(n-m)}{2(2n-3)(2n-1)} \\ q_{nm} &= \frac{n^3 - 3nm^2 - 9n^2 - 10n - 6m^2 + 9}{3(2n+3)(2n-1)} \\ r_{nm} &= \frac{-(3n+5)(n+m+2)(n+m+1)}{2(2n+5)(2n+3)}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

## B.2 Berechnung Meissl-modifizierter Molodenskii-Koeffizienten

Führt man bei der Berechnung von Geoidhöhen die Integration von Schwereanomalien nur innerhalb einer sphärischen Kappe vom Radius  $\psi_0$  aus, d.h. verwendet man die abgebrochene *Stokes*-Funktion

$$St_{\psi_0}(\psi) = \begin{cases} St(\psi) & , \psi \leq \psi_0 \\ 0 & , \psi > \psi_0, \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

so ergibt sich die Kernfunktion des entstehenden Abbruchfehlers zu

$$\bar{St}(\psi) = St(\psi) - St_{\psi_0}(\psi) = \begin{cases} 0 & , \psi \leq \psi_0 \\ St(\psi) & , \psi > \psi_0 \end{cases}. \quad (\text{B.6})$$

Dies entspricht dem Integrationskern (4.126), der verwendet wird, wenn aus dem Potentialmodell die Innenzone  $\psi < \psi_0$  ausgeschnitten wird. Die zugehörigen SH-Koeffizienten sind die *Molodenskii*-Abbruchkoeffizienten

$$Q_n(\psi_0) = \int_0^\pi \bar{St}(\psi) \cdot P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi = \int_{\psi_0}^\pi St(\psi) \cdot P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi. \quad (\text{B.7})$$

Verwendet man die *Meissl*-modifizierte *Stokes*-Funktion

$$St_{\psi_0}^M(\psi) = \begin{cases} St(\psi) - St(\psi_0) & , \psi \leq \psi_0 \\ 0 & , \psi > \psi_0 \end{cases}, \quad (\text{B.8})$$

so ergibt sich der Fehlerkern zu

$$K_{\psi_0}^M(\psi) = St(\psi) - St_{\psi_0}^M(\psi) = \begin{cases} St(\psi_0) & , \psi \leq \psi_0 \\ St(\psi) & , \psi > \psi_0 \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

und die zugehörigen SH-Koeffizienten zu

$$\begin{aligned}
Q_n^M(\psi_0) &= \int_0^\pi K_{\psi_0}^M(\psi) \cdot P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi \\
&= \int_0^{\psi_0} St(\psi_0) \cdot P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi + \int_{\psi_0}^\pi St(\psi) \cdot P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi \\
&= \int_0^\pi St(\psi_0) \cdot P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi + \int_{\psi_0}^\pi [St(\psi) - St(\psi_0)] \cdot P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi. \tag{B.10}
\end{aligned}$$

Dabei gilt für die Integration der *Legendre*-Polynome

$$\int_0^\pi P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi = 0 \tag{B.11}$$

und damit

$$\int_0^{\psi_0} P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi = - \int_{\psi_0}^\pi P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi. \tag{B.12}$$

Mit (B.11) lässt sich Gleichung (B.10) weiter umformen zu

$$\begin{aligned}
Q_n^M(\psi_0) &= St(\psi_0) \cdot \int_0^\pi P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi + \int_{\psi_0}^\pi [St(\psi) - St(\psi_0)] \cdot P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi \\
&= \int_{\psi_0}^\pi St(\psi) \cdot P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi - St(\psi_0) \cdot \int_{\psi_0}^\pi P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi, \tag{B.13}
\end{aligned}$$

woraus sich wegen (B.12) die *Meissl*-modifizierten *Molodenskii*-Koeffizienten schließlich nach

$$Q_n^M(\psi_0) = Q_n(\psi_0) + St(\psi_0) \cdot \int_0^{\psi_0} P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi \tag{B.14}$$

berechnen lassen.

## Danksagung

Durch Bereitstellung umfangreichen Datenmaterials bzw. Informationen zu verschiedenen Datensätzen haben mehrere Institutionen zu den Ergebnissen dieser Arbeit beigetragen. Mein herzlicher Dank gebührt deshalb

- dem Bayerischen Landesvermessungsamt, München (den Herren D. Weber, R. Gedon, W. Hettmer und G. Klein),
- dem Bundesamt für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt (E. Reinhart),
- dem Landesvermessungsamt der Tschechischen Republik, Prag (S. Olejník),
- dem Bureau Gravimétric International, Toulouse (B. Langellier),
- der Landestopographie der Schweiz, Wabern (U. Marti),
- der Technischen Universität Graz (N. Kührtreiber),
- dem Politecnico di Milano (R. Barzaghi),
- der Universität Ljubljana (M. Kuhar)
- der Universität Budapest (J. Ádám).
- dem Istituto Geografico Militare in Florenz (M. Pierozzi) und
- der Universität Hannover (H. Denker).

Weiterhin bin ich der Technischen Universität München dankbar, die diese Arbeit teilweise durch ein Promotionsstipendium gefördert hat. Mein Dank gilt insbesondere auch den Mitarbeitern der Stipendienstelle für deren freundliche Unterstützung.

# Literaturverzeichnis

- Arbeitsgemeinschaft der Vermessungsverwaltungen der Länder der Bundesrepublik Deutschland (1989): *Das Hauptschwerenetz der Bundesrepublik Deutschland 1982 (DHSN82)*. Hessisches Landesvermessungsamt Wiesbaden.
- Arbeitsgemeinschaft der Vermessungsverwaltungen der Länder der Bundesrepublik Deutschland (1992): *Richtlinien für einen Erlaß zum Nivellementpunktfeld*.
- Arbeitsgemeinschaft der Vermessungsverwaltungen der Länder der Bundesrepublik Deutschland (1993): *Die Wiederholungsmessungen 1980 bis 1985 im Deutschen Haupthöhennetz und das Haupthöhennetz 1985 der Bundesrepublik Deutschland*. Bayerisches Landesvermessungsamt, München.
- Asmuss E., K. Kraus (1974): *Die Interpolation nach kleinsten Quadraten - Prädiktionswerte simulierter Beispiele und ihre Genauigkeit*. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A, Heft Nr. 76, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München.
- Bašić T. (1989): *Untersuchungen zur regionalen Geoidbestimmung mit "dm"-Genauigkeit*. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 157.
- Bronstein I.N., K.A. Semendjajew (1991): *Taschenbuch der Mathematik*. B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart/Leipzig.
- Bürki B. (1989): *Integrale Schwerefeldbestimmung in der Ivrea-Zone und deren geophysikalische Interpretation*. Geodätisch-geophysikalische Arbeiten in der Schweiz, Band 40, Schweizerische Geodätische Kommission.
- Denker H. (1988): *Hochauflösende regionale Schwerefeldbestimmung mit gravimetrischen und topographischen Daten*. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 156.
- Denker H. (1989): *A New Gravimetric Quasigeoid for the Federal Republic of Germany*. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, Heft Nr. 291, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München.
- Denker H., W. Torge (1999): *Zur Verwendung des Europäischen Gravimetrischen Geoids EGG97*. Zeitschrift für Vermessungswesen, 5/1999.
- Denker H., I.N. Tziavos (1999): *Investigation of the Molodensky series terms for terrain reduced gravity field data*. Bolletino di Geofisica Teorica ed Applicata, Vol. 40, Nr. 3-4.
- Denker H. (2001): *On the Effect of Datum Inconsistencies in Gravity and Position on European Geoid Computations*. Beitrag zur IAG Scientific Assembly, 2.-8. September 2001, Budapest.
- European Space Agency (1999): *The Four Candidate Earth Explorer Core Missions - Gravity Field and Steady-state Ocean Circulation*, ESA Report, ESA SP-1233(1).
- Flury J. (2002): *Schwerefeldfunktionale im Gebirge: Modellierungsgenauigkeit, Messpunktdichte und Darstellungsfehler am Beispiel Estergebirge*. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 557, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München.
- Forsberg R. (1984): *A Study of Terrain Reductions, Density Anomalies and Geophysical Inversion Methods in Gravity Field Modelling*. Report Nr. 355, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.
- Forsberg R., C.C. Tscherning (1981): *The Use of Height Data in Gravity Field Approximation by Collocation*. Journal of Geophysical Research, Vol. 86, Nr. B9.
- Forsberg R. (1994): *Terrain Effects in Geoid Computations*. In Lecture Notes of the International School for the Determination and Use of the Geoid, International Geoid Service, Milan.
- Forsberg R., M.G. Sideris (1993): *Geoid computations by the multi-band spherical FFT approach*. manuscripta geodaetica, Nr. 18.
- Grote T. (1996): *Regionale Quasigeoidmodellierung aus heterogenen Daten mit "cm"-Genauigkeit*. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 212.

- Gurtner W. (1978): *Das Geoid in der Schweiz*. Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz, Band 32, Schweizerische Geodätische Kommission.
- Haagmans R., M. Van Gelderen (1991): *Error Variances-Covariances of GEM-T1: Their Characteristics and Implications in Geoid Computation*. Journal of Geophysical Research, Vol. 96, Nr. B12.
- Haagmans R., E. De Min, M. Van Gelderen (1993): *Fast evaluation of convolution integrals on the sphere using 1D FFT, and a comparison with existing methods for Stokes' integral*. manuscripta geodaetica, Nr. 18.
- Heck B., W. Grüninger (1983): *Zur Genauigkeit gravimetrisch bestimmter absoluter und relativer Geoidhöhen*. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A, Heft Nr. 97, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München.
- Heck B. (1987): *Rechenverfahren und Auswertemodelle der Landesvermessung*. H. Wichmann-Verlag, Karlsruhe.
- Heck B. (1990): *An evaluation of some systematic error sources affecting terrestrial gravity anomalies*. Bulletin Geodesique, Vol. 64.
- Heiskanen W.A., H. Moritz (1967): *Physical Geodesy*. W.H. Freeman and Company, San Francisco.
- Heiskanen W.A., F.A. Vening-Meinesz (1958): *The earth and its gravity field*. McGraw-Hill, New York.
- Hofmann-Wellenhoff B., H. Moritz (1986): *Introduction to Spectral Analysis*. In Lecture Notes in Earth Sciences: Mathematical and Numerical Methods in Physical Geodesy, Vol. 7, Springer-Verlag.
- Hofmann-Wellenhoff B., G. Kienast, H. Lichtenegger (1994): *GPS in der Praxis*. Springer Verlag, Wien/New York.
- Höpke W. (1980): *Fehlerlehre und Ausgleichsrechnung*. Walter de Gruyter Verlag, Berlin/New York.
- IAG (1971): *Geodetic Reference System 1967*. Publication Speciale, Nr. 3, Bulletin Geodesique.
- Ilde J., U. Schirmer, F. Stefani, F. Töppe (1998): *Geoid Modelling with Point Masses*. Reports of the Finish Geodetic Institute, Nr. 98.4.
- Ilk K.H. (1998): *Transformation und Verdichtung von Höhensystemen*. Seminar des Deutschen Vereins für Vermessungswesen zum Thema "Aktuelles zum Entstehen von 3d-/2d-Koordinaten und von Höhen" am Bayerischen Landesvermessungsamt, München.
- Jekeli C. (1980): *Reducing the error of geoid undulation computations by modifying Stokes' function*. Report Nr. 301, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.
- Kaula W.M. (1966): *Theory of Satellite Geodesy*. Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts.
- Kuhn M. (2000): *Geoidbestimmung unter Verwendung verschiedener Dichtehypothesen*. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 520, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München.
- Lang H. (1994): *Vorbereitende Arbeiten des IfAG zur Ausgleichung des Deutschen Haupthöhennetzes 1992(DHHN92)*. Allgemeine Vermessungsnachrichten, 10/1994.
- Ledersteger K. (1969): *Jordan-Egger-Kneissl, Handbuch der Vermessungskunde*. Band V, J.B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung Stuttgart.
- Leigemann D. (1970): *Untersuchungen zu einer genaueren Lösung des Problems von Stokes*. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 155, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München.
- Leismann M., R. Klees, H. Beckers (1992): *Untersuchungen verschiedener Höhensysteme, dargestellt an einer Testschleife in Rheinland-Pfalz*. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, 296, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München.
- Lemoine F.G., S.C. Kenyon, J.K. Factor, R.G. Trimmer, N.K. Pavlis, D.S. Chinn, C.M. Cox, S.M. Klosko, S.B. Luthcke, M.H. Torrence, Y.M. Wang, R.G. Williamson, E.C. Pavlis, R.H. Rapp, T.R. Olson (1998): *The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96*. NASA Technical Report NASA/TP-1998-206861.
- Marsh J., S. Vincent (1973): *Detailed Geoid Computations for GEOS-C Altimeter Experiment Areas*. NASA Document X-592-73-303 Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland.
- Meissl P. (1971): *Preparations for the numerical evaluation of second order Molodensky-type formulas*. Report Nr. 163, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.
- Molodenskii M.S., V.F. Eremeev, M.I. Yurkina (1962): *Methods for Study of the External Gravitational Field and Figure of the Earth*. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem.

- Moritz H. (1974): *Precise Gravimetric Geodesy*. Report Nr. 219, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.
- Moritz H. (1975): *Introduction to Molodensky's Theory*. Bolletino di geodesia e scienze affini, Nr. 2.
- Moritz H. (1976): *Covariance Functions in Least-Squares Collocation*. Report Nr. 240, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.
- Moritz H. (1980): *Advanced Physical Geodesy*. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe.
- Moritz H. (1988): *Geodetic Reference System 1980*. Bulletin Geodesique, Vol. 62, Nr. 3.
- Nagy D. (1966): *The gravitational attraction of a right rectangular prism*. Geophysics, Vol. 31.
- NASA (1998): *EGM96: The NASA GSFC and NIMA Joint Geopotential Model*. Offizielle EGM96 Internetseite von NASA und NIMA, <http://cddisa.gsfc.nasa.gov/926/egm96/>.
- NIMA WGS84 Update Committee (1997): *Department of Defense World Geodetic System 1984, Its Definitions and Relationships with Local Geodetic Systems*. NIMA Technical Report NIMA TR 8350.2.
- Paul M.K. (1973): *A Method of Evaluating the Truncation Error Coefficients for Geoidal Height*. Bulletin Geodesique, Nr. 110.
- Rapp R.H., R. Rummel (1975): *Methods for the Computation of Detailed Geoids and their Accuracy*. Report Nr. 233, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.
- Reigber C., P. Schwintzer, R. Koenig, K.H. Neumayer, A. Bode, F. Barthelmes, C. Foerste, G. Balmino, R. Biancale, J.M. Lemoine, S. Loyer, F. Perosanz (2001): Earth gravity field solutions from several months of CHAMP satellite data. EOS Trans AGU, 82(47), Fall Meeting Suppl. G41C092.
- Rummel R., R.H. Rapp (1976): *The Influence of the Atmosphere on Geoid and Potential Coefficient Determinations From Gravity Data*. Journal of Geophysical Research, Vol. 81, Nr. 32.
- Rummel R. (1991a): *Fysische Geodesie I*. Collegediktaat, Technische Universiteit Delft.
- Rummel R. (1991b): *Fysische Geodesie II*. Collegediktaat, Technische Universiteit Delft.
- Sacher M., J. Ihde, H. Seeger (1999): *Preliminary Transformation Relations between National European Height Systems and the United European Levelling Network*. In: Gubler, Torres, Hornik (eds.) Report on the Symposium of the IAG Subcommission for Europe (EUREF) held in Prague, 2–5 June 1999. Veröffentlichung der Bayerischen Kommission für die Internationale Erdmessung, Nr.60, München.
- Schwarz K.P., M.G. Sideris, R. Forsberg (1990): *The use of FFT techniques in physical geodesy*. Geophysical Journal International, Vol. 100.
- Sideris M.G. (1987): *Spectral methods for the numerical solution of Molodensky's problem*. UCSE Report Nr. 20024, Department of Surveying Engineering, University of Calgary.
- Sigl R. (1973): *Einführung in die Potentialtheorie*. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe.
- Sjöberg L.E. (1980): *A Recurrence Relation for the  $\beta_n$ -Function*. Bulletin Geodesique, Vol. 54, Nr. 1.
- Sjöberg L.E. (1998): *The atmospheric geoid and gravity corrections*. Bolletino di geodesia e scienze affini, Nr. 4.
- Slater J.A., S. Malys (1998): *WGS84 - Past, Present and Future*. In: Brunner (Ed.): *Advances in Positioning and Reference Frames*. IAG Scientific Assembly, Rio de Janeiro, September 3-9, 1997. IAG Symposia Vol. 118.
- Smeets I. (1994): *An error analysis for the height anomaly determined by combination of mean terrestrial gravity anomalies and a geopotential model*. Bolletino di geodesia e scienze affini, Nr. 1.
- Strang van Hees G. (1986): *Precision of the geoid, computed from terrestrial gravity measurements*. manuscripta geodaetica, Nr. 11, 1-14.
- Strang van Hees G. (1990): *Stokes formula using Fast Fourier Techniques*. manuscripta geodaetica, Nr. 15, 235-239.
- Sünkel H. (1986): *Global Topographic-Isostatic Models*. In: Sünkel (Ed.) *Mathematical and Numerical Techniques in Physical Geodesy*. Lecture Notes in Earth Sciences, Nr. 7, Springer Verlag.
- Tscherning C.C. (1998): *Construction of an-isotropic covariance-functions using Riesz-representers*. IV Hotine-Marussi-Symposium on Mathematical Geodesy, Trento.

- Tscherning C.C., R.H. Rapp (1974): *Closed covariance expressions for gravity anomalies, geoid undulations, and deflections of the vertical implied by anomaly degree variance models*. Report Nr. 208, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.
- Tsouliis D. (1999a): *Analytical and Numerical Methods in Gravity Field Modelling of Ideal and Real Masses*. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 510, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München.
- Tsouliis D. (1999b): *Spherical harmonic computations with topographic/isostatic coefficients*. Schriftenreihe des Instituts für Astronomische und Physikalische Geodäsie und der Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie der TU München, Nr. 3.
- U.S. Geological Survey (1999): *GTOPO30*. Global 30-Arc-Second Elevation Data Set, beziehbar unter <http://edcdaac.usgs.gov/gtopo30>.
- Vanicek P., W.E. Featherstone (1998): *Performance of three types of Stoke's kernel in the combined solution for the geoid*. Journal of Geodesy, Nr. 72.
- Weber D. (1994): *Das neue gesamtdeutsche Haupthöhennetz DHHN 92*. Allgemeine Vermessungsnachrichten 5/1994.
- Weber D. (1998): *Aktuelles zu den neuen amtlichen DHHN 92-Höhen*. Seminar des Deutschen Vereins für Vermessungswesen zum Thema "Aktuelles zum Entstehen von 3d-/2d-Koordinaten und von Höhen" am Bayerischen Landesvermessungsamt, München.
- Wenzel H.G. (1981): *Zur Geoidbestimmung durch Kombination von Schwereanomalien und einem Kugelfunktionsmodell mit Hilfe von Integralformeln*. Zeitschrift für Vermessungswesen, 3/1981.
- Wenzel H.G. (1999): *Schwerefeldmodellierung durch ultra-hochauflösende Kugelfunktionsmodelle*. Zeitschrift für Vermessungswesen, 5/1999.
- Wieser M. (1987): *The global digital Terrain Model TUG87. Internal Report on set-up, origin and characteristics*. Institut für Mathematische Geodäsie, Technische Universität Graz.
- Wong L., R. Gore (1969): *Accuracy of geoid heights from modified Stokes kernels*. Geophysical Journal, Royal Astronomical Society, Vol. 18.