

FAKULTÄT FÜR BAUINGENIEUR-  
UND VERMESSUNGSWESEN

**Schwerefeldfunktionale im Gebirge:  
Modellierungsgenauigkeit, Messpunktdichte und  
Darstellungsfehler**

**am Beispiel des Testnetzes Estergebirge**

**Dissertation  
von**

**Jakob Flury**



TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Technische Universität München  
Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen  
Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie

**Schwerefeldfunktionale im Gebirge:  
Modellierungsgenauigkeit, Messpunktdichte und  
Darstellungsfehler**  
**am Beispiel des Testnetzes Estergebirge**

**Jakob Flury**

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor – Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzende: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Liqiu Meng  
Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Reiner Rummel  
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. habil. Karl-Heinz Illk,  
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Die Dissertation wurde am 23. Januar 2002 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen am 8. Mai 2002 angenommen.

---

## Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Frage, in welcher Genauigkeit Geoidhöhen aus Messungen verschiedener Schwerefeldfunktionale in diskreten, aber sehr dichten Messpunkten berechnet werden können. Dabei werden die schwierigen Bedingungen im Gebirge für die erforderliche Modellierung der Topographie berücksichtigt.

Im Estergebirge in den Bayerischen Alpen wurde vom Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie der TU München in den vergangenen Jahren ein sehr dichtes, alle Höhenlagen umfassendes Netz von Schweremessungen, Präzisionsnivellements, genauen GPS-Höhenmessungen sowie astronomischen Lotrichtungsmessungen geschaffen. Diese Messungen und die erreichten Genauigkeiten werden in der Arbeit beschrieben. Aus Nivellements, Schweremessungen und GPS-Höhen werden Höhenanomalien und Geoidhöhen bestimmt, untersucht und mit dem EGG97-Modell verglichen. Die genaue Modellierung der Wirkung der Topographie auf Schwere und Lotrichtung, gestützt auf ein hochauflösendes Geländemodell und auf Geländeaufnahmen des Nahbereichs, wird beschrieben. Nach der topographischen Reduktion zeigen sich verschiedene für Gebirge typische Störkörper abweichender Dichte. Einige dieser Störkörper wurden unter Einbeziehung geophysikalischer Messungen modelliert und reduziert. Die ermittelten Modelle ermöglichen eine gemeinsame Dichtebestimmung für Topographie und Störkörper über einen Ausgleichungsansatz.

Danach folgt eine statistische Analyse von Schwerestörungen aus dem Estergebirge sowie weiterer Datensätze aus den Alpen. Empirische Signalkovarianzfunktionen und Leistungsspektraldarstellungen werden gezeigt. Aus den unterschiedlichen Datensätzen ergeben sich konsistente Signaleigenschaften. Mit Hilfe von Messungen in unabhängigen Kontrollpunkten wurden realistische Fehler für die flächenhafte Darstellung von Schwerestörungen ermittelt und ihr Verhalten in Abhängigkeit von der Punktdichte untersucht. Es wird gezeigt, dass der Darstellungsfehler auch bei hohen Punktdichten noch vom hochfrequenten Signalgehalt dominiert wird, während Mess- und Modellierungsfehler nur eine geringe Rolle spielen. Die für die jeweiligen Punktdichten ermittelten Darstellungsfehler werden unter der Annahme global einheitlicher Signaleigenschaften auf Geoidhöhen und Kugelfunktionskoeffizienten fortgepflanzt. Auf diese Weise ergibt sich, dass für eine Geoidfehlerstandardabweichung von 1 cm für die Schweremessungen Punktabstände von ca. 5 km eingehalten werden müssen.

## Abstract

In this work the question is examined, which geoid accuracies can be achieved from gravity field functionals which are measured at discrete, but very dense points. The difficult conditions for the required modeling of the topography in mountainous terrain have been considered.

In the Estergebirge mountains in the Bavarian Alps since the year 1994 a very dense network of gravity measurements, precision levelings, precise GPS height measurements and deflections of the vertical has been created, covering all height zones of the terrain. These measurements and their accuracies are described in this work. From leveling, gravity measurements and GPS measurements height anomalies and geoid heights have been determined, analyzed and compared to the german EGG97 geoid model. A precise modeling of the topographic attraction is described for gravity and the deflections of the vertical, based on a high resolution terrain model and a terrain survey of the very near zone of each data point. After the topographic reduction different disturbing bodies with anomalous densities have been detected, with typical characteristics for mountainous areas. Some of these bodies have been modeled taking into account various geo-

physical data. The models have been used in an adjustment to determine the densities of the topography and the disturbing bodies.

In the second part a statistical analysis of gravity disturbances from the Estergebirge and from other data sets from the Alps is carried out. Empirical signal covariance functions and spectral representations of signal power are shown. The comparison of the different data sets shows good agreement of signal properties. Using measurements in independent control points realistic errors for the continuous representation of the gravity disturbances have been obtained, depending on the density of data points. It is shown, that for high point densities the high frequent parts of the signal are still dominating the representation error, whereas errors of measurement and modeling play a minor role. The representation error computed for selected data point densities have been propagated to geoid errors and errors of spherical harmonic coefficients. The error volume is used as an intermediate step, assuming homogeneous signal properties all over the earth. By this approach it can be shown, that for a geoid error standard deviation of 1 cm the spacing of gravity measurements may not exceed about 5 km.

## Dank

Große Teile der hier vorgestellten Modellierungen und Untersuchungen wären nicht möglich gewesen ohne die bereitwillige Unterstützung durch andere Einrichtungen. Mein Dank gilt

- dem Bayerischen Landesvermessungsamt München (BLVA), welches eine Vielzahl von Daten zur Verfügung stellte, nämlich das hochauflösende Geländemodell, Koordinaten, Höhen und Schwerewerte von amtlichen Festpunkten, Nivellementdaten, Transformationspunkte zum Übergang zwischen den Systemen DREF und DHDN sowie Kartenmaterial (P. Reiß, D. Weber),
- der Bayerischen Kommission für die Internationale Erdmessung (BEK) der Bayerischen Akademie der Wissenschaften in München für die Messung von genauen Lotrichtungen (W. Wende),
- der Fachhochschule München, Fachbereich Vermessungswesen, für die Durchführung von Präzisionsnivellements und GPS-Messungen (G. Merkel, A. Schließer, J. Strehle, H. Wimmer),
- dem Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen Wien (BEV), welches amtliche österreichische Höhen, Kartenmaterial und geopotentielle Koten aus dem gerade entstehenden neuen österreichischen Höhensystem beitrug (E. Erker, N. Höggerl),
- dem Bundesamt für Kartographie und Geodäsie (BKG), Außenstelle Leipzig, für Ergebnisse und Punktinformationen aus der SatNiv-Geoid-Kampagne (J. Ihde),
- dem Institut für Theoretische Geodäsie der Technischen Universität Graz für einen österreichischen Auswahldatensatz von Schweremessungen (N. Kührtreiber),
- dem Institut für Erdmessung und Navigation (IfEN) der Universität der Bundeswehr in Neubiberg für einen Datensatz von Lotabweichungen in der Umgebung des Estergebirges (G. Hein),
- dem Deutschen Geodätischen Forschungsinstitut München (DGFI) für die Bereitstellung von Schweredaten aus dem Deutschen Schwerearchiv (H. Drewes)



- und dem Bayerischen Geologischen Landesamt München (BGLA) für die Einsicht in Akten und Karten und für die Beratung in geologischen und geophysikalischen Fragen (K. Bader, K. Schwerd).

Für die Erteilung der erforderlichen Fahrgenehmigungen im Estergebirge und für die Unterstützung des Projektes möchte ich der Forstdirektion Oberbayern, den lokalen Forstdienststellen, den Gemeinden, dem Landratsamt Garmisch-Partenkirchen sowie den betroffenen Grundbesitzern danken.

Ein besonders herzlicher Dank gilt den Mitarbeitern und Diplomanden des Instituts für Astronomische und Physikalische Geodäsie (IAPG) der Technischen Universität München, auf deren unter großem Einsatz durchgeführten Messungen im Estergebirge diese Arbeit basiert.

---

Diese Arbeit wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft als Projekt „Estergebirge“ (Kennzeichen RU 586/2) gefördert.

Auf den Webseiten <http://step.iapg.verm.tu-muenchen.de/groups/testnetz/index.html> kann eine Präsentation des Estergebirges, der verwendeten Messverfahren und einiger Ergebnisse abgerufen werden.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Zusammenfassung</b>	<b>2</b>
<b>Abstract</b>	<b>2</b>
<b>Dank</b>	<b>3</b>
<b>1 Einführung</b>	<b>7</b>
<b>2 Theoretische Grundlagen</b>	<b>9</b>
2.1 Topographisch reduzierte Schwerefeldgrößen . . . . .	9
2.1.1 Schwerestörungen und -anomalien . . . . .	9
2.1.2 Lotabweichungen . . . . .	10
2.1.3 Wirkung der Topographie . . . . .	11
2.2 Höhen, Höhenanomalien, Geoidhöhen . . . . .	12
2.3 Fehlerkovarianzfunktion für $\delta g$ und Fortpflanzung durch Integraloperatoren . . .	13
2.3.1 Fehlerkovarianzfunktion . . . . .	13
2.3.2 Umformung und Näherung: Fehlervolumen . . . . .	16
2.3.3 Vereinfachung durch Annahme einheitlicher Genauigkeit . . . . .	17
2.3.4 Vereinfachung für unkorrelierte Fehler . . . . .	18
<b>3 Das Projektgebiet Estergebirge</b>	<b>20</b>
3.1 Gebietsbeschreibung, Topographie . . . . .	20
3.2 Geologische Übersicht . . . . .	20
<b>4 Schwere- und Lotrichtungsmessungen</b>	<b>23</b>
4.1 GPS-Positionierung und Bezugsrahmen . . . . .	23
4.2 Schweremessungen . . . . .	24
4.2.1 Einzelheiten zur Gravimetrie . . . . .	24
4.2.2 Positionierung für die Schweremessungen . . . . .	26
4.2.3 Schweredaten anderer Quellen . . . . .	27
4.3 Astronomische Lotrichtungen, Lotabweichungen . . . . .	29
<b>5 Höhenanomalien und Geoidhöhen aus Nivellement und GPS</b>	<b>31</b>
5.1 Nivellement, Genauigkeiten . . . . .	31
5.2 Nivellementreduktionen . . . . .	34
5.3 Genaue GPS-Höhenbestimmung . . . . .	36
5.4 Höhenanomalien und Geoidhöhen, Vergleich mit dem EGG97 . . . . .	36
<b>6 Geländemodellierung</b>	<b>41</b>
6.1 Geländemodelle . . . . .	43

---

6.1.1	50 m-DGM des Bayerischen Landesvermessungsamtes . . . . .	43
6.1.2	30"-DGM gtopo30 . . . . .	44
6.2	Modellierung des Nahbereichs . . . . .	45
6.3	Modellierung mit Rastergeländemodellen . . . . .	48
6.4	Topographisch reduzierte Schwerestörungen und Lotabweichungen . . . . .	52
<b>7</b>	<b>Störkörper</b>	<b>58</b>
7.1	Gründe für die Modellierung von Störkörpern . . . . .	58
7.2	Dichtewerte aus Proben und Literatur . . . . .	60
7.3	Quartäre Talfüllungen . . . . .	62
7.4	Flyschzone . . . . .	64
7.5	Wamberger Sattel . . . . .	68
7.6	Plattenkalk . . . . .	69
7.7	Schlussfolgerungen aus der Störkörpermodellierung . . . . .	70
<b>8</b>	<b>Dichtebestimmung über Ausgleichungsansätze</b>	<b>72</b>
<b>9</b>	<b>Statistische Beschreibung der Signaleigenschaften</b>	<b>76</b>
9.1	Histogramme, Signalvarianzen . . . . .	78
9.2	Empirische Autokovarianzfunktion . . . . .	81
9.3	Leistungsdichtespektrum . . . . .	88
9.4	Gradvarianzspektrum . . . . .	90
9.5	Empirischer Prädiktionsfehler . . . . .	92
<b>10</b>	<b>Fehlervolumen für Schwerestörungen und Fehlerfortpflanzung</b>	<b>101</b>
10.1	Fehlerkovarianzfunktion . . . . .	101
10.2	Fehlervolumen . . . . .	102
10.2.1	$E$ -Blockwerte . . . . .	102
10.2.2	Kontinuierliche $E$ -Funktion . . . . .	105
10.3	Vom Fehlervolumen des Darstellungsfehlers zum Geoidfehler . . . . .	106
10.4	Fehler für Kugelfunktionskoeffizienten . . . . .	109
<b>11</b>	<b>Schlussfolgerungen</b>	<b>111</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>114</b>
	<b>Karten</b>	<b>119</b>

# 1 Einführung

Die Erfassung und Beschreibung des Schwerefeldes im Gebirge ist eine in vielerlei Hinsicht anspruchsvolle Aufgabe. Schwerefeldfunktionale, also z.B. Schwerestörungen, Lotabweichungen oder Geoidhöhen, sind im Gebirge geprägt durch einen starken, hochfrequenten Signalanteil aus der Topographie. Durch Tektonik und Erosion entstandene Dichteveränderungen in der Topographie und in verschiedenen Tiefen der Erdkruste bewirken zusätzliche, manchmal bedeutende Signalanteile. Es kann sich dabei um Strukturen mit sehr unterschiedlichen Amplituden und Ausdehnungen handeln; ihre Modellierung ist oft aufwendig und schwierig.

Gleichzeitig ist die Messung von Schwerefeldgrößen im Gebirge mit erhöhtem Aufwand verbunden. In den Alpen sind daher die Punktdichten für Messungen der Schwere, der astronomischen Lotrichtung und von Höhenanomalien oder Geoidhöhen bislang deutlich geringer als im europäischen Durchschnitt, und in anderen Gebirgen sind die Punktdichten meist noch wesentlich geringer als in den Alpen. Zudem liegen die Messpunkte überwiegend, nicht selten sogar ausschließlich in den Tälern, während die Gipfelregion höchstens mit wenigen Punkten erfasst wird. Es ergibt sich somit die unbefriedigende Situation, dass Schwerefeldfunktionale gerade dort besonders schlecht abgetastet sind, wo ihr Verlauf besonders rauh ist und wo deshalb für eine genaue Erfassung eine besonders dichte Abtastung erforderlich wäre.

Durch die unvollkommene Abtastung in einer begrenzten Anzahl von diskreten Punkten entsteht bei der Darstellung eines Funktionals zwischen den Messpunkten ein Darstellungsfehler, welcher von der Punktdichte und der Rauheit des Signals abhängt. Bei der Anwendung von Integraloperatoren für geodätische Randwertaufgaben, also z.B. beim Stokes- oder Hotine-Operator zur Geoidberechnung, pflanzt sich der Darstellungsfehler kombiniert mit Fehlern in den Messpunkten (bestehend aus Messfehlern und Fehlern der verwendeten Reduktionen) fort.

Für die geodätische Erfassung des Schwerefeldes kristallisieren sich damit folgende Kernfragen heraus: Wie groß sind die Signalanteile, die unerfasst bleiben, wenn ein Schwerefeldfunktional in diskreten Punkten in einer bestimmten Punktdichte gemessen wird? Wie kann der Fehler bei der Darstellung (Interpolation) des Funktionals zwischen den Punkten quantifiziert werden? Wie dicht müsste gemessen werden, damit gar keine wesentlichen Anteile mehr vernachlässigt würden? Und wie wirken Punktdichte, Signalrauheit und Punktfehler (Messfehler und Reduktionsfehler) in der Fehlerfortpflanzung bei der Berechnung anderer Funktionale zusammen?

Entscheidend für die Rauheit bzw. Glattheit des zu interpolierenden Signals und damit für den Darstellungsfehler ist, wie weit die kurzwelligen Signalanteile aus der Topographie und gegebenenfalls auch aus Dichteveränderungen modelliert und reduziert werden können, ob es also gelingt, durch topographische Reduktion ein Schwerefeld zu erhalten, welches demjenigen im Flachland nahekommt, um somit gewissermaßen ein „Dänemark in den Alpen“ zu erreichen.

Vor dem Hintergrund dieser Fragen wurde vom Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie (IAPG) der Technischen Universität München im Estergebirge bei Garmisch-Partenkirchen seit 1994 ein Schwerefeld-Testnetz aufgebaut. In einem relativ kleinen Gebiet von 15 km  $\times$  15 km Ausdehnung wurde ein exemplarischer Datensatz von sehr dichten Messungen verschiedener Schwerefeldfunktionale geschaffen, um gerade die hochfrequenten Signalanteile gut zu

erfassen. Insbesondere für die Schwere (mit 2.5 Messpunkten/km<sup>2</sup>), aber auch für Höhenanomalien aus Nivellement und GPS liegen dort heute Messpunkte in einer Dichte und Gleichmäßigkeit vor, welche an anderer Stelle in den Alpen noch nicht erreicht wurde. Dabei wurden auch Gipfel und schwer zugängliches Steilgelände nicht ausgespart.

In dieser Arbeit erfolgt zu Beginn in Kap. 2 eine Zusammenstellung der wichtigsten theoretischen Grundlagen und in Kap. 3 eine topographische und geologische Übersicht über das Estergebirge. Dann werden alle bis heute im Rahmen des Testnetzes durchgeführten Messungen dargestellt, nämlich Schwere- und Lotrichtungsmessungen in Kap. 4 sowie Nivellements und genaue GPS-Höhenmessungen zur Bestimmung von Höhenanomalien und Geoidhöhen in Kap. 5. In Kap. 6 wird die durchgeführte sorgfältige topographische Reduktion für die Schwere und die Lotrichtungskomponenten beschrieben. Weil das Interesse dieser Arbeit besonders den kurzwelligen Signalanteilen gilt, erhält dabei die Modellierung der unmittelbaren Punktumgebung erhöhte Aufmerksamkeit. Es zeigt sich, dass die topographisch reduzierten Schwerestörungen stark durch einige oberflächennahe Störkörper abweichender Dichte geprägt sind. Diese treten aufgrund der hohen Messpunktdichte sehr deutlich hervor. In Kap. 7 werden einige von ihnen unter Einbeziehung von Ergebnissen geophysikalischer Messungen modelliert und reduziert. Dies erwies sich als interessante und ergiebige, allerdings auch als zeitaufwendige Aufgabe. In den Kapiteln 6 und 7 werden manche technischen Aspekte der Modellierung detailliert besprochen. Dem daran weniger interessierten Leser wird empfohlen, entsprechende Abschnitte zu überspringen. In Kap. 8 folgt eine ausgleichende Dichtebestimmung, in welche alle Modellkörper der topographischen Reduktion einschließlich der modellierten Störkörper einbezogen werden.

Danach werden die statistischen Signaleigenschaften von Schwerestörungen für kurze und sehr kurze Wellenlängen untersucht (Kap. 9). Dafür werden Datensätze unterschiedlicher Punktdichte aus dem Estergebirge und (für etwas längere Wellenlängen) aus den umgebenden bayerischen und Tiroler Alpen herangezogen. Insbesondere geht es dabei darum, mit Hilfe von Kontrollpunkten Signalkovarianzfunktionen zu finden, welche für diese Datensätze bei der Kleinste-Quadrate-Prädiktion realistische Prädiktionsfehler ergeben. Daneben werden Spektraldarstellungen (Fourier-Leistungsdichte und sphärisch-harmonische Gradvarianzen) für die untersuchten Wellenlängen abgeleitet. Im letzten Kapitel werden – als Beispiele für die Fehlerfortpflanzung bei geodätischen Randwertaufgaben – die ermittelten Mess- und Darstellungsfehler für Schwerestörungen gemeinsam auf Geoidhöhen (mit dem Hotine-Operator) und auf Kugelfunktionskoeffizienten fortgepflanzt. Es wird dabei jeweils angenommen, dass die untersuchten Punktdichten und Signaleigenschaften global gelten. Als Zwischenschritt in dem von Moritz entwickelten Verfahren wird das Fehlervolumen aus der Fehlerkovarianzfunktion für den Darstellungsfehler bestimmt. Auf diese Weise werden Beziehungen zwischen gewünschten Geoid-Genauigkeiten und dafür erforderlichen Messpunktdichten erhalten.

## 2 Theoretische Grundlagen

### 2.1 Topographisch reduzierte Schwerefeldgrößen

#### 2.1.1 Schwerestörungen und -anomalien

Diese Arbeit beschäftigt sich in erster Linie mit *Schwerestörungen*  $\delta g$

$$\delta g = g_P - \gamma_P, \quad (2.1)$$

also mit Differenzen zwischen der gemessenen Schwere  $g$  und der Normalschwere  $\gamma$  aus einem Normalschwerefeld, jeweils in ein und demselben Punkt P. Die *Schwereanomalie*  $\Delta g$  hingegen ist definiert als Differenz zwischen Schwere in P und Normalschwere in einem Näherungs-(Taylor-)Punkt Q

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q, \quad (2.2)$$

für welchen gilt

$$U_Q = W_P$$

Normalschwerepotential in Q = Schwerepotential in P.

Oft werden P bzw. Q am Geoid bzw. am Ellipsoid des Normalfeldes gewählt (Abb. 2.1), so dass

$$\Delta g = g_{P_0} - \gamma_{Q_0}. \quad (2.3)$$

Die Schwere am Geoid  $g_{P_0}$  erhält man durch verschiedene Schwerereduktionen:

- Freiluftreduktion ergibt die Freiluftanomalie

$$\Delta g_{FA} = g_P - \frac{\partial g}{\partial h} H - \gamma_{Q_0}, \quad (2.4)$$

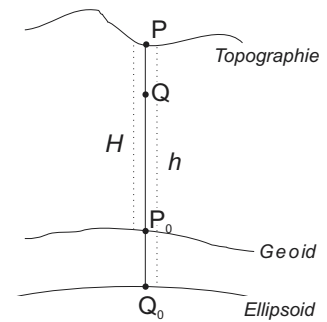
üblicherweise angenähert durch

$$\Delta g_{FA} = g_P - \frac{\partial \gamma}{\partial h} H - \gamma_{Q_0}, \quad (2.5)$$

- Bouguerreduktion ergibt die einfache Bougueranomalie

$$\Delta g_{BO} = g_P - \frac{\partial \gamma}{\partial h} H - 2\pi G \rho H - \gamma_{Q_0} \quad (2.6)$$

mit der Gravitationskonstanten  $G$  und der Topographiedichte  $\rho$ ,



**Abbildung 2.1:** Messpunkt, Geoidpunkt und Näherungspunkte

- topographische Reduktion ergibt die topographisch reduzierte Anomalie

$$\Delta g_{\text{TOP}} = g_{\text{P}} - \frac{\partial \gamma}{\partial h} H - V_z^{\text{TOP}} - \gamma_{\text{Q}_0}, \quad (2.7)$$

dabei bezeichnet  $V_z^{\text{TOP}}$  die Anziehung der Topographie in vertikaler Richtung oder gleichbedeutend die Ableitung des Gravitationspotentials der Topographie  $V^{\text{TOP}}$  in vertikaler Richtung (zur Berechnung siehe Kap. 2.1.3).

Zur Berechnung von Schwereanomalien muss die Höhe  $H$  über dem Geoid bekannt sein, zur Berechnung von Schwerestörungen hingegen die ellipsoidische Höhe  $h$ . Mit  $h$  ist  $\gamma_{\text{P}}$  entweder über die bekannten Formeln zur Integration entlang der Lotlinie (Heiskanen und Moritz, 1967) berechenbar, oder häufig genügend genau mit:

$$\gamma_{\text{P}} = \gamma_{\text{Q}_0} + \frac{\partial \gamma}{\partial h} h.$$

Aus (2.1) erhält man

$$\delta g = g_{\text{P}} - \frac{\partial \gamma}{\partial h} h - \gamma_{\text{Q}_0} \quad (2.8)$$

und erkennt die Ähnlichkeit zu  $\Delta g_{\text{FA}}$  (2.5). Der Unterschied zwischen Störungen (2.8) und Anomalien (2.5)

$$-\frac{\partial \gamma}{\partial h} (h - H) = -\frac{\partial \gamma}{\partial h} N$$

mit der Geoidhöhe  $N$  ist für die in dieser Arbeit untersuchten kleinen Gebiete mit Geoidvariationen von wenigen Metern nahezu konstant. In Anlehnung an  $\Delta g_{\text{FA}}$  wird  $\delta g$  nach (2.8) im folgenden Freiluftscherestörung  $\delta g_{\text{FA}}$  genannt. Analog zu den entsprechenden Schwereanomalien erhält man

- Bouguerstörungen

$$\delta g_{\text{BO}} = g_{\text{P}} - 2\pi G \rho h - \gamma_{\text{P}} \quad (2.9)$$

- sowie topographisch reduzierte Störungen

$$\delta g_{\text{TOP}} = g_{\text{P}} - V_z^{\text{TOP}} - \gamma_{\text{P}}. \quad (2.10)$$

Die Untersuchung von topographisch reduzierten Schwerestörungen bildet den Schwerpunkt dieser Arbeit. Bei den verwendeten Schweremessungen wurde die Position in der Regel mit GPS bestimmt; es lagen somit ellipsoidische Höhen  $h$  vor. Daher bot es sich an, jeweils Störungen (nicht Anomalien) zu berechnen und diese auch für die weitergehenden statistischen Untersuchungen zu verwenden.

### 2.1.2 Lotabweichungen

Aus gemessenen astronomischen Koordinaten  $\Phi, \Lambda$  und aus geographischen Koordinaten  $B, L$  bezüglich des Ellipsoides des gewählten Normalfeldes ergeben sich die Lotabweichungen (in den Oberflächenpunkten) mit den Komponenten

$$\begin{aligned} \xi &= \Phi - B \\ \eta &= (\Lambda - L) \cos \Phi. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Gemeinsam mit der Schwerestörung  $\delta g$  bilden sie die vektorielle Schwerestörung  $\delta \mathbf{g}$ . Topographisch reduzierte Lotabweichungskomponenten erhält man mit

$$\begin{aligned}\xi_{\text{TOP}} &= \xi - \frac{\varrho}{\gamma} V_y^{\text{TOP}} - \delta\Phi_{\text{normal}} \\ \eta_{\text{TOP}} &= \eta - \frac{\varrho}{\gamma} V_x^{\text{TOP}}.\end{aligned}\quad (2.12)$$

$V_x^{\text{TOP}}$  und  $V_y^{\text{TOP}}$  sind dabei die Komponenten der Anziehung der Topographie in x-(Ost-) bzw. y-(Nord-)Richtung,  $\gamma$  ist die Normalschwere,  $\varrho$  die Umrechnung vom Bogenmaß ins Winkelmaß und  $\delta\Phi_{\text{normal}}$  die Korrektur aufgrund der Krümmung der Normalotlinie

$$\delta\Phi_{\text{normal}} \approx 0.17'' h[\text{km}] \sin 2\Phi, \quad (2.13)$$

welche allerdings nur Beträge am Rand der astronomischen Messgenauigkeit erreicht.

### 2.1.3 Wirkung der Topographie

Die einfachste Beschreibung der Anziehung der Topographie verwendet die Annäherung durch die Anziehung eine Platte. In Frage kommt die wohlbekannte ebene unendlich ausgedehnte Bouguerplatte

$$V_z^{\text{BO}} = 2\pi G\rho H \quad (2.14)$$

oder auch eine Kugelkappe um den Berechnungspunkt bis zum sphärischen Grenzabstand  $\psi_K$ . Deren Anziehung auf den Mittelpunkt der äußeren Oberfläche beträgt

$$V_z^{\text{Kappe}} = 2\pi G\rho H \left( 1 - \frac{(R+H)\cos\psi_K - R}{\sqrt{(R+H)^2 + R^2 - 2(R+H)R\cos\psi_K}} \right). \quad (2.15)$$

Die Wahl von  $\psi_K$  ist allerdings mit einer gewissen Willkür verbunden (Jung, 1961). Wenn nicht das Geoid, sondern ein Ellipsoid als Reduktionsniveau gewählt wird, ist anstelle der Meereshöhe  $H$  die ellipsoidische Höhe  $h$  zu verwenden. Die Beschreibung einer bewegten Topographie durch eine Platte ist allerdings in der Regel nicht ausreichend und höchstens zur Erfassung von entfernten, nur noch sehr schwach wirkenden Zonen geeignet.

Wenn ein Geländemodell als Raster-DGM in einem lokalen kartesischen Koordinatensystem vorliegt, bietet sich die Modellierung mit Quaderprismen an. Die 3 Komponenten der Anziehung eines Quaders erhält man mit

$$\begin{aligned}V_x &= G\rho \left\| \left\| y \operatorname{arsinh} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} + z \operatorname{arsinh} \frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}} - x \arctan \frac{yz}{x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right\|_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2} \right. \\ V_y &= G\rho \left\| \left\| z \operatorname{arsinh} \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}} + x \operatorname{arsinh} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} - y \arctan \frac{xz}{y\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right\|_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2} \right. \\ V_z &= G\rho \left\| \left\| x \operatorname{arsinh} \frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}} + y \operatorname{arsinh} \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}} - z \arctan \frac{xy}{z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right\|_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2} \right.\end{aligned}\quad (2.16)$$

Dabei sind  $x_i, y_i, z_i$  mit  $i = 1, 2$  die Koordinaten der Ecken des Quaders relativ zum Berechnungspunkt, und alle Kanten des Quaders sind parallel zu einer Koordinatenachse. Die  $\operatorname{arsinh}$ -Terme werden häufig in  $\ln$ -Ausdrücke umgeformt, die Berechnung ist dann etwas schneller, aber numerisch etwas ungünstiger (Mader, 1951; Tsoulis, 1999; Nagy et al., 2000).



Die Wirkung des Geländes ergibt sich aus der Summe von Einzelquadern

$$V_z^{\text{TOP}} = \sum_{\text{DGM}} V_{z_i}. \tag{2.17}$$

Die Höhe der Quader kann dabei entweder die Höhe des Geländes über dem Reduktionsniveau (Geoid oder Ellipsoid) oder aber die Höhendifferenz zwischen Gelände und Platte sein. Wenn die Erdkrümmung berücksichtigt werden soll, oder wenn das DGM in geographischen Koordinaten vorliegt, sind Anpassungen erforderlich (s. Kap. 6).

Im Gebirge reichen ebene Quaderoberflächen bei der Geländemodellierung im Nahbereich um den Berechnungspunkt für höhere Genauigkeiten nicht aus. Dafür können Formeln für beliebig geformte Prismen verwendet werden. Solche wurden z.B. von Götze (1976) und Barnett (1976) hergeleitet. In dieser Arbeit werden sie in der von Petrović (1996) und Tsoulis (1999) entwickelten Form verwendet. Da ihre Darstellung ziemlich umfangreich ist, werden sie hier nicht aufgeführt; es sei auf Tsoulis (1999), Formeln (1.126)ff. verwiesen.

## 2.2 Höhen, Höhenanomalien, Geoidhöhen

Tab. 2.1 gibt eine Übersicht über die in dieser Arbeit verwendeten Höhentypen und ihre Berechnung, einerseits über die geopotentielle Kote  $C = \int_{W_0}^P g \, dn$ , andererseits über an das Nivellement anzubringende Reduktionen. Für alle Höhentypen mit Ausnahme der normalorthometrischen Höhe sind Schweremessungen an ausreichend vielen Punkten entlang der Nivellementlinien erforderlich. Die Abstände zwischen Schweremesspunkten dürfen allerdings größer sein, wenn Schwerewerte in Zwischenpunkten sorgfältig interpoliert werden. Im Gebirge muss bei der Inter-

**Tabelle 2.1:** Höhentypen

System	Definition	Nivellementreduktion	Eigenschaften
Dynamische Höhe $H_D$	$\frac{C}{\gamma_0}$	$DR = \sum \frac{g_i - \gamma_0}{\gamma_0} \Delta n_i$	skalierte geopot. Kote, keine geometrische Deutung
Normalorth. Höhe $H_{NO}$	–	$NOR = \sum \frac{\gamma_i - \gamma_0}{\gamma_0} \Delta n_i + \frac{\bar{\gamma}_A - \gamma_0}{\gamma_0} H_A - \frac{\bar{\gamma}_B - \gamma_0}{\gamma_0} H_B$	wegabhängig, keine exakte geometrische Deutung, kleine Reduktionen
Normalhöhe $H_N$	$\frac{C}{\bar{\gamma}}$	$NR = \sum \frac{g_i - \gamma_0}{\gamma_0} \Delta n_i + \frac{\bar{\gamma}_A - \gamma_0}{\gamma_0} H_A - \frac{\bar{\gamma}_B - \gamma_0}{\gamma_0} H_B$	Länge der Normallotlinie zwischen Ellipsoid und Telluroid, kleine Reduktionen
Orthometr. Höhe $H_O$	$\frac{C}{\bar{g}}$	$OR = \sum \frac{g_i - \gamma_0}{\gamma_0} \Delta n_i + \frac{\bar{g}_A - \gamma_0}{\gamma_0} H_A - \frac{\bar{g}_B - \gamma_0}{\gamma_0} H_B$	Länge der Lotlinie zwischen Geoid und Oberfläche, größere Reduktionen, dichteabhängig

mit der geopotentiellen Kote  $C$ , dem Skalierungsfaktor  $\gamma_0$  (i.d.Regel Normalschwere bei 45° Breite), der Oberflächenschwere  $g_i$  und dem rohen Nivellement  $\Delta n_i$  des jeweiligen Nivellementabschnittes, den Endpunkten A, B des Abschnittes, der mittleren Schwere  $\bar{g}$  und der mittleren Normalschwere  $\bar{\gamma}$  entlang der Lotlinie, und der Höhe  $H$  im jeweiligen System.

polation die Geländewirkung berücksichtigt werden. Interpolationsgenauigkeiten bei gegebenen Punktabständen werden in Kap. 9 ermittelt.

Zur Berechnung orthometrischer Höhen ist der Mittelwert  $\bar{g}$  der Schwere entlang der Lotlinie zwischen dem Oberflächenpunkt P und dem zugehörigen Geoidpunkt  $P_0$  erforderlich.  $\bar{g}$  kann näherungsweise mit der Prey-Reduktion

$$\bar{g} = g_P - \frac{\partial \gamma}{\partial h} \frac{H}{2} - 2\pi G \rho H \quad (2.18)$$

bestimmt werden. Dabei wird die Topographie durch eine Bouguerplatte angenähert. Im Gebirge ist dies in der Regel nicht ausreichend. Dort kann die Zunahme der Schwere entlang der Lotlinie beschrieben werden mit

$$g = g_P + (\gamma - \gamma_P) + (V_z^{\text{TOP}} - V_z^{\text{TOP}}_P); \quad (2.19)$$

der Wert der hinteren Klammer ist dabei negativ. Der Mittelwert ergibt sich dann mit

$$\bar{g} = g_P + (\bar{\gamma} - \gamma_P) + \frac{1}{H} \int_P^{P_0} (V_z^{\text{TOP}} - V_z^{\text{TOP}}_P) dH. \quad (2.20)$$

Der Wert des Integrals kann durch Berechnung von  $V_z^{\text{TOP}}$  in geeigneten Abständen und anschließende numerische Integration erhalten werden. Der Mittelwert  $\bar{\gamma}$  ist streng berechenbar (Heiskanen und Moritz, 1967). In jedem Fall ist  $\bar{g}$  und damit die orthometrische Höhe von einer Dichteannahme für die topographischen Massen abhängig.

Aus der Kombination der beschriebenen Höhentypen mit ellipsoidischen Höhen  $h$  ergeben sich dann Höhenanomalien  $\zeta$  bzw. Geoidhöhen  $N$

$$\begin{aligned} \zeta &= h - H_N \\ \text{bzw. } N &= h - H_O. \end{aligned} \quad (2.21)$$

## 2.3 Fehlerkovarianzfunktion für $\delta g$ und Fortpflanzung durch Integraloperatoren

### 2.3.1 Fehlerkovarianzfunktion

Im folgenden geht es um die Fortpflanzung von Fehlern eines Schwerefeldfunktionals auf andere Funktionale im Rahmen von geodätischen Randwertaufgaben durch die Anwendung von Integraloperatoren. Exemplarisch wird dabei die Fehlerfortpflanzung von Schwerestörungen  $\delta g$  auf Geoidhöhen und Kugelfunktionskoeffizienten untersucht. Die Vorgehensweise ist grundsätzlich auf andere Operatoren übertragbar. Es wird in wesentlichen Teilen dem Vorgehen von Heiskanen und Moritz (1967) und Strang van Hees (1986) gefolgt.

Geoidhöhen erhält man aus Schwereanomalien mit dem Stokes-Operator

$$N_P = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\Sigma} \Delta g_Q \text{St}(\psi_{PQ}) d\Sigma_Q \quad (2.22)$$

oder aus Schwerestörungen mit dem Hotine-Operator

$$N_P = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\Sigma} \delta g_Q \text{Ho}(\psi_{PQ}) d\Sigma_Q \quad (2.23)$$

als Integration über die Einheitskugel  $\Sigma$ , mit der Stokes-Funktion  $\text{St}(\psi)$ , dem sphärischen Abstand  $\psi_{\text{PQ}}$  zwischen Berechnungs- und Integrationspunkt, der Hotine-Funktion  $\text{Ho}(\psi)$

$$\text{Ho}(\psi) = \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} - 1 - \frac{3}{2} \cos \psi + \ln \frac{\sin \frac{\psi}{2}}{1 + \sin \frac{\psi}{2}} \quad , \quad (2.24)$$

dem Flächenelement des Integrationspunktes  $d\Sigma_{\text{Q}}$  sowie dem Erdradius  $R$ . (Die Hotine-Funktion ist in der Form dargestellt, welche sich aus der Summation über Legendre-Polynome ab Grad 2 ergibt, um später mit der Stokes-Funktion vergleichbar zu sein, siehe van Gelderen und Rummel, 2001.)

Vollständig normierte Kugelfunktionskoeffizienten für  $\delta g$  erhält man aus der sphärisch-harmonischen Analyse

$$\left. \begin{array}{l} \bar{a}_{nm} \\ \bar{b}_{nm} \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \delta g(\theta, \lambda) \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) \\ \bar{S}_{nm}(\theta, \lambda) \end{array} \right\} d\Sigma \quad (2.25)$$

mit

$$\left. \begin{array}{l} \bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) \\ \bar{S}_{nm}(\theta, \lambda) \end{array} \right\} = \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{array} \right.$$

aus den vollständig normierten Legendre-Funktionen  $\bar{P}_{nm}(\cos \theta)$ .

Die zugehörigen Genauigkeiten (Fehlervarianzen) für Geoidhöhen und für die Koeffizienten  $\bar{a}_{nm}$  und  $\bar{b}_{nm}$  erhält man mit

$$\sigma_N^2 = \left( \frac{R}{4\pi\gamma} \right)^2 \int_{\Sigma} \int_{\Sigma'} \sigma(\theta, \lambda, \theta', \lambda') \text{Ho}(\psi_{\text{PQ}}) \text{Ho}(\psi_{\text{PQ}'}) d\Sigma_{\text{Q}} d\Sigma_{\text{Q}'} \quad (2.26)$$

sowie

$$\sigma_{nm}^2 = \frac{1}{16\pi^2} \int_{\Sigma} \int_{\Sigma'} \sigma(\theta, \lambda, \theta', \lambda') \bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) \bar{R}_{nm}(\theta', \lambda') d\Sigma d\Sigma' \quad (2.27)$$

bzw. entsprechend für  $\bar{S}_{nm}$ .

Die *Fehlerkovarianzfunktion* für die Schwerstörungen  $\sigma(\theta, \lambda, \theta', \lambda')$  wird dabei als homogener, isotroper Prozess vorausgesetzt. Sie setzt sich zusammen aus dem Messfehler der Schweremessung, aus dem Fehler der beschriebenen Schwerereduktionen sowie aus dem Darstellungs- oder Interpolationsfehler.

Der *Messfehler* ist für terrestrische Messungen häufig wenig korreliert, d.h. die Fehlerkovarianzen zwischen den Messpunkten sind nahe bei 0 und nur die Fehlervarianz ist von Bedeutung:  $\sigma_{\text{Mess}}(\theta, \lambda, \theta', \lambda') \approx \sigma_{\text{Mess}}^2(\theta, \lambda)$ .

Der *Reduktionsfehler* enthält unkorrelierte Anteile, z.B. durch DGM-Fehler, eine schlechte Geländemodellierung in der unmittelbaren Messpunktumgebung oder Fehler der Höhenmessung. Diese können mit dem Messfehler zum unkorrelierten *Punktrauschen* mit Varianz  $\sigma_{\nu}^2 = \sigma_{\text{Mess}}^2 + \sigma_{\text{Red}}^2$  ( $\nu$  für ‚noise‘) zusammengefasst werden. Andere Anteile des Reduktionsfehlers sind über große Distanzen korreliert, z.B. durch die Verwendung unterschiedlicher Reduktionsparameter (DGM-Größe, Referenzniveau). Auf diese soll hier jedoch nicht weiter eingegangen werden, weil in dieser Arbeit das Hauptinteresse den kurzwelligen Signalanteilen gilt.

Der *Darstellungsfehler* ergibt sich daraus, dass die  $\delta g$  für die Integrationen in (2.23) und (2.25) kontinuierlich vorliegen müssten, in Wirklichkeit aber nur in einer begrenzten Anzahl diskreter Punkte gemessen wurden. Der Darstellungsfehler hängt – unabhängig von der gewählten Interpolationsmethode – von der Punktdichte der Messpunkte (Stützpunkte der Interpolation) und

von der Signalrauheit, ausgedrückt durch die Signalkovarianzfunktion  $C$ , ab. Die Fehlerkovarianzfunktion des Darstellungsfehlers berechnet sich mit

$$\sigma_e(\theta, \lambda, \theta', \lambda') = C_{PP'} - \sum_i \alpha_{P_i} C_{P_i} - \sum_i \alpha_{P'_i} C_{P_i} + \sum_i \sum_j \alpha_{P_i} \alpha_{P'_j} C_{ij} \quad (2.28)$$

( $e$  für ‚estimation‘,  $P, P'$ : Interpolationspunkte,  $i, j$ : Stützpunkte,  $C$ : Signalkovarianzfunktion,  $\alpha$ : Basisfunktionen der Interpolation, siehe auch Moritz, 1964; Heiskanen und Moritz, 1967, Kap.7).

In Kap. 9 wird gezeigt, dass der Darstellungsfehler für Schwerestörungen auch nach bestmöglicher Reduktion der Geländewirkung bis zu sehr engen Punktabständen gegenüber dem Punkt-rauschen dominiert. Bei sorgfältiger Messung und Reduktion kann der Punktfehler klein gehalten werden (0.1–0.3 mGal). Der Darstellungsfehler hingegen kann je nach Signalrauheit erst mit Punktabständen von deutlich unter 1 km auf ein vergleichbares Niveau gedrückt werden. Gerade im Gebirge sind so dichte Messungen in der Regel nicht realisierbar. Auf dem Darstellungsfehler liegt daher der Hauptschwerpunkt dieser Arbeit. (Anders sieht das Verhältnis zwischen Mess- und Darstellungsfehler für flugzeug- oder satellitengestützte Messungen aus. Dort ist das Signal viel glatter, und es kann nahezu kontinuierlich gemessen werden. Für solche Messungen entsteht allenfalls ein geringer Interpolationsfehler, welcher vom Messfehler dominiert wird.)

Beim Darstellungsfehler spielen die Korrelationen eine wichtige Rolle. Wenn mit Hilfe von Stützpunkten eine kontinuierliche Funktion interpoliert wird, wobei man sich ‚kontinuierlich‘ als ein Raster mit genügend feiner Maschenweite vorstellen kann, dann sind die Fehler zweier nah benachbarter interpolierter Punkte stark korreliert. Die Korrelationen fallen etwa bis zum jeweils nächstgelegenen Stützpunkt oder noch etwas darüber hinaus ins Gewicht, je nach Interpolationsverfahren. Mit noch größerer Entfernung zwischen den Interpolationspunkten hingegen werden sie vernachlässigbar klein. Die Korrelationen können auch negativ sein.

Häufig werden aus den Messpunkten Blockmittelwerte anstelle einer kontinuierlichen Funktion interpoliert. Auch dabei entsteht ein Darstellungs-(Interpolations-)Fehler mit der Fehlerkovarianzfunktion

$$\sigma_e(K, K') = \overline{\overline{C}}_{KK'} - \sum_i \alpha_{K_i} \overline{C}_{K_i} - \sum_i \alpha_{K'_i} \overline{C}_{K_i} + \sum_i \sum_j \alpha_{K_i} \alpha_{K'_j} C_{ij} \quad (2.29)$$

mit den Blocknummern  $K, K'$ , der Signalkovarianzfunktion zwischen Punkten  $C$ , zwischen Blockmittelwerten  $\overline{\overline{C}}$  sowie zwischen Punkten und Blockmittelwerten  $\overline{C}$ . Die Korrelationen zwischen benachbarten Blöcken sind dabei erheblich, wenn nur wenige Messpunkte pro Block vorliegen. Je nach Anwendung kann aufgrund der durch die Blockbildung verminderten Auflösung ein weiterer Darstellungsfehler entstehen.

Mit (2.28) bzw. (2.29) erhält man im Prinzip für jedes Interpolationsverfahren (z.B. Repräsentation durch ausgewählten Wert, arithmetisches oder gewichtetes Mittel, lineare Interpolation, Kleinste-Quadrate-Prädiktion) und für jeden interpolierten Punkt bzw. Block die zugehörige Fehlerkovarianzfunktion. Das Interpolationsverfahren wird jeweils durch die entsprechenden Basisfunktionen  $\alpha$  ausgewählt. Manche Interpolationsverfahren berücksichtigen das Rauschen in den Stützpunkten. Gleichung (2.28) wird dann zu

$$\sigma_{(e+\nu)}(\theta, \lambda, \theta', \lambda') = C_{PP'} - \sum_i \alpha_{P_i} C_{P_i} - \sum_i \alpha_{P'_i} C_{P_i} + \sum_i \sum_j \alpha_{P_i} \alpha_{P'_j} (C_{ij} + D_{ij}) \quad (2.30)$$

mit  $D_{ij} = I \cdot \sigma_\nu^2$  für ein unkorreliertes Rauschen  $\sigma_\nu^2$  in den Stützpunkten.

Das in dieser Arbeit eingesetzte Interpolationsverfahren ist die *Kleinste-Quadrate-Prädiktion*. Einen prädizierten Wert  $\delta g_P$  in einem Punkt  $P(\theta, \lambda)$  erhält man mit

$$\delta g_P(\theta, \lambda) = C_{P_i} (C_{ij} + D_{ij})^{-1} \delta g_i \quad (2.31)$$

und seine Genauigkeit mit

$$\sigma(\theta, \lambda, \theta', \lambda') = C_{PP'} - C_{Pi} (C_{ij} + D_{ij})^{-1} C_{P'j}. \quad (2.32)$$

Einen präziierten Blockmittelwert erhält man mit

$$\delta g_K = \bar{C}_{Ki} (C_{ij} + D_{ij})^{-1} \delta g_i \quad (2.33)$$

und seine Genauigkeit mit

$$\sigma(K, K') = \bar{\bar{C}}_{KK'} - \bar{C}_{Ki} (C_{ij} + D_{ij})^{-1} \bar{C}_{K'j}. \quad (2.34)$$

(2.32) bzw. (2.34) ergeben sich, wenn in den allgemeinen Formeln (2.28) bzw. (2.29) für die Basisfunktionen der Interpolation

$$\alpha_{Pi} = C_{Pi} (C_{ij} + D_{ij})^{-1} \quad (2.35)$$

bzw.

$$\alpha_{Ki} = \bar{C}_{Ki} (C_{ij} + D_{ij})^{-1} \quad (2.36)$$

gesetzt wird (Heiskanen und Moritz, 1967; Moritz, 1964).

### 2.3.2 Umformung und Näherung: Fehlervolumen

In Analogie zu Strang van Hees (1986) kann (2.26) mit der Aufspaltung

$$\text{Ho}(\psi_{PQ}) \text{Ho}(\psi_{PQ'}) = \frac{1}{2} \text{Ho}^2(\psi_{PQ}) + \frac{1}{2} \text{Ho}^2(\psi_{PQ'}) - \frac{1}{2} (\text{Ho}(\psi_{PQ}) - \text{Ho}(\psi_{PQ'}))^2 \quad (2.37)$$

umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} \sigma_{N_P}^2 &= \left( \frac{R}{4\pi\gamma} \right)^2 \int_{\Sigma} \int_{\Sigma'} \sigma(\theta, \lambda, \theta', \lambda') \text{Ho}^2(\psi_{PQ}) d\Sigma_Q d\Sigma_{Q'} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{R}{4\pi\gamma} \right)^2 \int_{\Sigma} \int_{\Sigma'} \sigma(\theta, \lambda, \theta', \lambda') (\text{Ho}(\psi_{PQ}) - \text{Ho}(\psi_{PQ'}))^2 d\Sigma_Q d\Sigma_{Q'} \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$= \frac{1}{16\pi^2\gamma^2} \int_{\Sigma} E(\theta, \lambda) \text{Ho}^2(\psi_{PQ}) d\Sigma_Q - \frac{1}{16\pi^2\gamma^2} \int_{\Sigma} F_{\text{Ho}}(\theta, \lambda) d\Sigma_Q. \quad (2.39)$$

Das sogenannte *Fehlervolumen*  $E$

$$E(\theta, \lambda) = R^2 \int_{\Sigma'} \sigma(\theta, \lambda, \theta', \lambda') d\Sigma_{Q'} \quad (2.40)$$

ist eine nur von der Fehlerkovarianzfunktion abhängige Größe. Sie kann daher, einmal berechnet, für verschiedene Integraloperatoren (z.B. auch für die sphärisch-harmonische Analyse) verwendet werden. Die Integration über  $\Sigma'$  in (2.40) muss nicht über die ganze Kugel, sondern nur in dem kleinen Gebiet, in welchem  $\sigma(\theta, \lambda, \theta', \lambda')$  von 0 verschieden ist, durchgeführt werden, also etwa bis zum übernächsten Stützpunkt (bei der kontinuierlichen Interpolation) oder bis zum nächsten Block (bei der Interpolation von Blockmitteln).

Der in (2.39) verbleibende Rest

$$F_{\text{Ho}}(\theta, \lambda) = \frac{1}{2} R^2 \int_{\Sigma'} \sigma(\theta, \lambda, \theta', \lambda') (\text{Ho}(\psi_{PQ}) - \text{Ho}(\psi_{PQ'}))^2 d\Sigma_{Q'} \quad (2.41)$$

ist sowohl von der Fehlerkovarianzfunktion als auch vom verwendeten Operator, in diesem Fall vom Hotine-Operator, abhängig. Für andere Operatoren, z.B. für die sphärisch-harmonische Analyse, muss er erneut berechnet werden.  $F_{\text{Ho}}$  ist in der Regel positiv, da  $\sigma(\theta, \lambda, \theta', \lambda')$  in der Regel positiv ist. Ein Vernachlässigen von  $F_{\text{Ho}}$ , also die Beschränkung auf

$$\sigma_{N_P}^2 \approx \frac{1}{16\pi^2\gamma^2} \int_{\Sigma} E(\theta, \lambda) \text{Ho}^2(\psi_{PQ}) d\Sigma_Q \quad (2.42)$$

führt daher wegen (2.39) dazu, dass der Geoidfehler  $\sigma_N^2$  überschätzt wird. Da für größere Abstände vom Berechnungspunkt P stets entweder die Differenz  $\text{Ho}(\psi_{PQ}) - \text{Ho}(\psi_{PQ'})$  oder  $\sigma(\theta, \lambda, \theta', \lambda')$  vernachlässigbar klein werden, muss  $F_{\text{Ho}}(\theta, \lambda)$ , wenn überhaupt, nur für den Nahbereich um den Berechnungspunkt bestimmt werden.

Für die Kernzone unmittelbar am Berechnungspunkt sind die Integrale in (2.39) wegen der Singularität der Hotine-Funktion nicht berechenbar. Wege zur Behandlung dieser Kernzone werden in Kap. 10 diskutiert.

Eine analoge Umformung für die sphärisch-harmonische Analyse führt von Gleichung (2.27) zu

$$\sigma_{nm}^2 = \frac{1}{16\pi^2 R^2} \int_{\Sigma} E(\theta, \lambda) \bar{R}_{nm}^2(\theta, \lambda) d\Sigma - \frac{1}{16\pi^2 R^2} \int_{\Sigma} F_{nm}(\theta, \lambda) d\Sigma \quad (2.43)$$

mit  $E(\theta, \lambda)$  aus (2.40) und

$$F_{nm}(\theta, \lambda) = \frac{1}{2} R^2 \int_{\Sigma'} \sigma(\theta, \lambda, \theta', \lambda') (\bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) - \bar{R}_{nm}(\theta', \lambda'))^2 d\Sigma'. \quad (2.44)$$

Das Vernachlässigen von  $F_{nm}$  ist gleichbedeutend mit der Annahme, dass sich die Basisfunktion  $\bar{R}_{nm}$  im erwähnten kleinen Gebiet von  $\Sigma'$ , in welchem  $\sigma(\theta, \lambda, \theta', \lambda') \neq 0$ , nicht wesentlich ändert, d.h. wenn  $\bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) - \bar{R}_{nm}(\theta', \lambda') \approx 0$ . Dies trifft zu, wenn der Grad  $n$  der Basisfunktion niedrig im Vergleich zur Messpunktdichte (für kontinuierliche Interpolation) bzw. zur Blockgröße (für Interpolation von Blockmitteln) ist. Dann geht  $\sigma(\theta, \lambda, \theta', \lambda')$  schon für kleine Abstände  $QQ'$  gegen 0, für welche sich  $\bar{R}_{nm}$  noch nicht merklich geändert hat.

### 2.3.3 Vereinfachung durch Annahme einheitlicher Genauigkeit

Das Fehlervolumen  $E$  ist über die Fehlerkovarianzfunktion vom Signalverhalten, von der Punktdichte und vom Punktrauschen abhängig.  $E(\theta, \lambda)$  gibt regionale Variationen dieser bestimmenden Größen wieder. In  $E$  spiegeln sich z.B. unterschiedliche Messbedingungen auf Land und Meer oder die Punktdichten nationaler Schwerenetze oder das unterschiedliche Signalverhalten in Gebirge und Flachland wider. In dieser Arbeit werden allerdings nicht regionale Variationen untersucht, sondern lokale Datensätze mit unterschiedlicher Punktdichte, aber einheitlichem Punktrauschen und (mit Einschränkungen) einheitlichem Signalverhalten. Mittelwerte für  $E$  aus solchen exemplarischen Datensätzen eignen sich für Abschätzungen zur Fehlerfortpflanzung. Es kann so untersucht werden, welche Genauigkeiten bei der Berechnung verschiedener Funktionale (z.B. Geoidhöhen oder Kugelfunktionskoeffizienten aus Schwerstörungen) erreichbar wären, wenn die Punktdichte eines exemplarischen Datensatzes weltweit vorläge.

Wenn ein solcher  $E$ -Mittelwert als global gültig angenommen wird, kann er bei der Fehlerfortpflanzung (2.39) bzw. (2.43) vor das Integral über die Kugel  $\Sigma$  gezogen werden. Im Integral stehen dann nur noch die Integralkerne (Hotine-Kern bzw. Kugelfunktionen). Unter Vernachlässigung des  $F$ -Anteils und Ausnutzung der Orthogonalitäten bei Kugelfunktionen erhält man einfache Beziehungen:

1. aus (2.39) (Hotine-Operator):

$$\sigma_N^2 = \frac{E}{8\pi\gamma^2} \int_{\psi=\psi_0}^{\pi} \text{Ho}^2(\psi) \sin(\psi) d\psi \quad (2.45)$$

wobei die Kernzone von 0 bis  $\psi_0$  separat behandelt werden muss, sowie

2. aus (2.43) (sphärisch-harmonische Analyse):

$$\sigma_{nm}^2 = \frac{E}{4\pi R^2}, \quad (2.46)$$

dabei bezeichnet  $\sigma_{nm}^2$  wie in (2.27) und (2.43) den Fehler von  $\delta g$ -Kugelfunktionskoeffizienten (nicht von Potentialkoeffizienten).

Wenn die Interpolation und damit auch die Berechnung von  $E$  allerdings nicht blockweise, sondern kontinuierlich erfolgt, dann variiert  $E$  auch bei homogener Punktdichte je nach der Entfernung des Interpolationspunktes von den umliegenden Stützpunkten. Es entsteht ein Golfballmuster für  $E$ . Bei einer Interpolation von etwas größeren Blöcken sowie der Annahme einer einigermaßen einheitlichen Messpunktdichte und der Verwendung einer einheitlichen Signalkovarianzfunktion hingegen ist die Variation von  $E$  von Block zu Block nur noch relativ gering, und man kommt der Annahme einer konstanten Funktion näher (unter dieser Annahme wird das Fehlervolumen bei Heiskanen und Moritz (1967) Fehlerkonstante  $S$  genannt).

### 2.3.4 Vereinfachung für unkorrelierte Fehler

Wenn die Fehlerfortpflanzung auf Blöcke mit untereinander unkorrelierten Fehlern angewendet wird, kann das Fehlervolumen durch das Produkt von Fehlervarianz und Blockfläche angenähert werden (Jekeli-Rapp-Modell, nach Jekeli und Rapp, 1980). Die Diskretisierung von (2.27) für Blöcke  $K$  ergibt

$$\sigma_{nm}^2 = \frac{1}{16\pi^2} \sum_{\Sigma} \sum_{\Sigma'} \sigma_{KK'} \bar{R}_{nmK} \bar{R}_{nmK'} \Delta\Sigma_K \Delta\Sigma_{K'}. \quad (2.47)$$

Wenn die Fehler der Blockmittel unkorreliert sind, beschränkt sich die Summe über  $\Sigma'$  auf den jeweiligen Block selbst, und man erhält

$$\sigma_{nm}^2 = \frac{1}{16\pi^2} \sum_{\Sigma} \sigma_K^2 \bar{R}_{nmK}^2 \Delta\Sigma_K^2 \quad (2.48)$$

Für gleich genaue Blockmittel zieht man  $\sigma^2 \Delta\Sigma$  vor die Summe und erhält

$$\begin{aligned} \sigma_{nm}^2 &= \frac{\sigma^2 \Delta\Sigma}{16\pi^2} \sum_{\Sigma} \bar{R}_{nmK}^2 \Delta\Sigma_K \\ &= \frac{\sigma^2 \Delta\Sigma}{4\pi} = \frac{\sigma^2 R^2 \Delta\Sigma}{4\pi R^2} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Der Vergleich von (2.49) mit (2.46) zeigt, dass das Fehlervolumen  $E$  ersetzt wurde durch  $\sigma^2 R^2 \Delta\Sigma$ , also durch Rauschen mal Flächenelement (auf einer Kugel mit Radius  $R$ ).

Ein solches Vorgehen ist geeignet für unkorrelierte Messungen, z.B. aus Satellitenmessverfahren. Dann steht jeder Messpunkt für einen Block. Für terrestrische Messungen kann das Vorgehen nur eingesetzt werden, wenn zunächst Blockmittelwerte aus ausreichend vielen Stützpunkten

gebildet werden, deren Fehler untereinander dann nahezu unkorreliert sind. Der Preis für die Vereinfachung ist allerdings die verringerte Auflösung durch die Blockbildung.

Mit den Gleichungen (2.45), (2.46) und (2.49) stehen nun beispielhafte, einfache Modelle für Genauigkeiten zur Verfügung, welche bei der Berechnung verschiedener Funktionale aus Schwerstörungen zu erwarten sind, wenn für die Schwerstörungen Parameter für Punktdichte, Signalverhalten (Signalkovarianzfunktion  $C$ ) und Messfehler vorliegen, und wenn dabei jeweils ein global einheitliches Datenmaterial vorausgesetzt wird.



# 3 Das Projektgebiet Estergebirge

## 3.1 Gebietsbeschreibung, Topographie

Das Estergebirge nordöstlich von Garmisch-Partenkirchen bedeckt eine Fläche von ca. 15 km × 15 km und umfasst Höhenlagen zwischen 630 m und 2086 m. Eine detaillierte Karte des Gebietes ist am Schluss der Arbeit angefügt; eine Übersichtskarte zeigt Abb. 5.3 auf S. 33. Es liegt nahe am Alpenrand und ist Teil der Bayerischen Voralpen, aber durch die Höhe seiner Gipfel und in seiner Charakteristik bereits recht alpin. So fallen beispielsweise die höheren Gipfel nach Nordwesten in einem großen schroffen Steilhang über eine Höhendifferenz von 1400 m zum Talboden des Loisachtals hin ab.

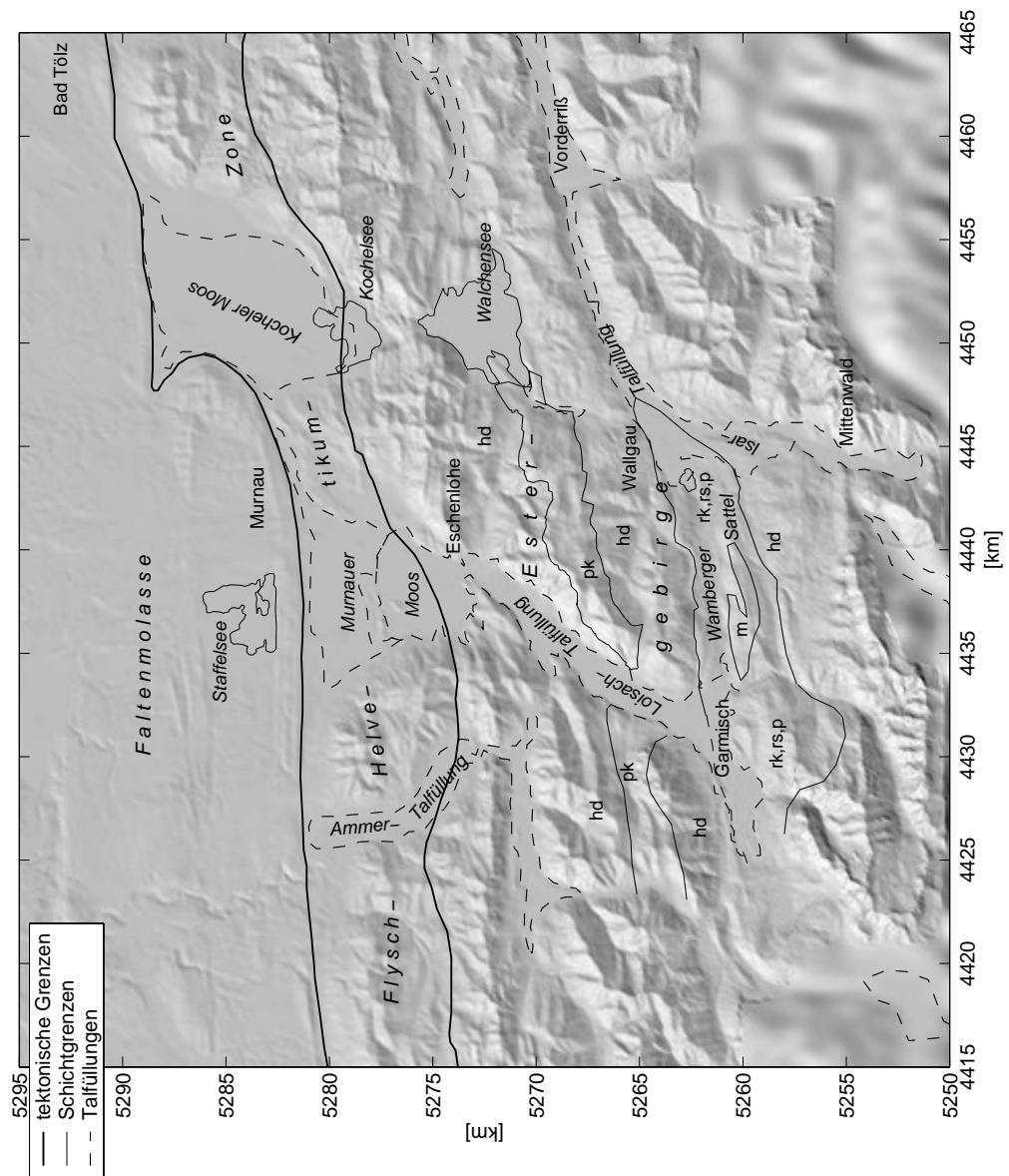
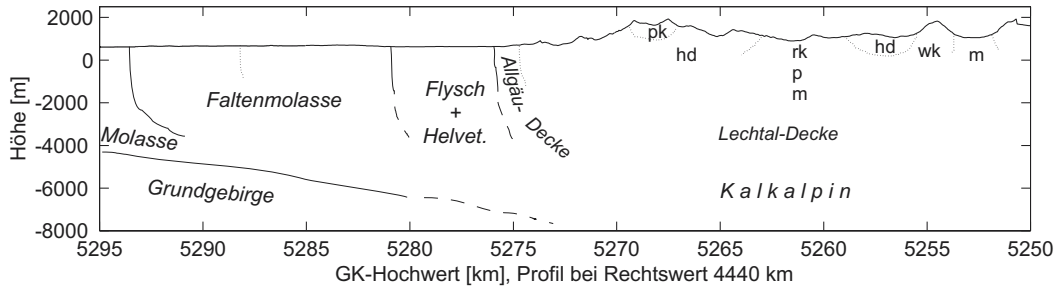
Von den Talböden und den höheren Gipfeln abgesehen, ist der Großteil des Gebietes bewaldet. Alle Siedlungen (Garmisch-Partenkirchen, Farchant, Oberau, Eschenlohe, Walchensee, Wallgau, Krün, Klais) befinden sich in den das Estergebirge umschließenden Tallagen. Die Waldzone ist gut durch Forststraßen erschlossen, was den Zugang mit Messinstrumenten erleichtert. Einige Almen und viele kleinere Lichtungen ermöglichen die Positionierung mit GPS. Oberhalb der Waldgrenze schließt meist ein dichter, teilweise undurchdringlicher Gürtel von Latschenkiefern an, stellenweise findet man aber auch freies Almgelände. Die Gipfel (Krottenkopf 2086 m, Bischof 2033 m, Hoher Fricken 1940 m, Hohe Kisten 1922 m, Simetsberg 1840 m) sind über Wanderwege oder weglos gut erreichbar, erfordern allerdings teilweise Trittsicherheit. Der Gipfel des Wanks (1780 m) ist Ziel einer Seilbahn und einiger Skilifte. In allen Höhenlagen finden sich felsige Zonen, auch Schluchten, allerdings nicht so ausgedehnt, dass die angestrebte Punktdichte verhindert worden wäre. Im ganzen bot das Estergebirge geeignete Bedingungen für das Vorhaben, in echt alpinem Gelände eine dichte, gleichmäßige Überdeckung mit Messpunkten zu erreichen.

## 3.2 Geologische Übersicht

Dieser Abschnitt soll einen Überblick geben über die geologischen Strukturen im Estergebirge selbst und in einem Umkreis von ca. 30 km, in welchem Schwerstörungen und Lotabweichungen untersucht wurden (vgl. Abb. 3.1).

Im nördlichsten Teil des Untersuchungsgebietes, dem Alpenvorland, liegen bis zu einer Tiefe von 3–5 km die Molasseschichten. Sie wurden im Tertiär (seit ca. 40 Mio.) Jahren abgelagert, zu einer Zeit, als die Alpenfaltung schon weit fortgeschritten war. Im Untersuchungsgebiet wurde die Molasse nach ihrer Ablagerung durch den andauernden Schub der Alpen von Süden gefaltet. Durch die Faltung und Erosion stehen heute in der Faltenmolassezone Schichten an der Oberfläche an, welche aus Tiefen von bis zu 6 km stammen. Die Faltenmolasse bildet typische langgezogene Riegel. Zwischen ihnen liegen Mulden, in welchen die Molasse meist mit Moränenmaterial bedeckt ist.

Im Süden der Molasse schließen in einer schmalen Zone die tektonischen Einheiten Flysch und Helvetikum an. Diese Zone erstreckt sich entlang des Alpennordrands vom Bodensee bis nach Wien. Sie besteht aus Gesteinen der Kreidezeit (ca. 130–50 Mio. Jahre alt), welche zwischen dem



**Abbildung 3.1:** Geologische Übersicht Estergebirge und Umgebung. Erläuterung der Abkürzungen im Text. Koordinaten: Gauss-Krüger-Koordinaten in [km], wie bei vielen der folgenden Abbildungen.

europäischen Kontinent und der sich von Süden heranschiebenden afrikanischen Platte abgelagert wurden. Sie wurden von den kalkalpinen Decken afrikanischer Herkunft überfahren, und ihre Reste wurden auf die Molasse aufgeschoben. Wie an vielen Stellen in den Alpen dienten die weichen Flyschgesteine als Gleitschicht für die überschobenen Decken.

Die Gesteine der kalkalpinen Decken im Estergebirge wurden in der Trias vor ca. 200 Mio. Jahren abgelagert. In der Umgebung des Estergebirges liegen darauf stellenweise noch erhaltene dünnere Schichten aus Jura- und Kreidezeit. Mit den kalkalpinen Decken besteht die am höchsten liegende tektonische Einheit aus den ältesten Gesteinen. Innerhalb des Kalkalpins liegen zwei ähnlich gebaute Decken, die Lechtal- und die Allgäu-Decke, aufeinander. Die Decken sind stark gefaltet, die sie aufbauenden Gesteinsschichten liegen aber im wesentlichen noch in der Reihenfolge ihrer Ablagerung. Den Hauptanteil bildet sowohl im Estergebirge wie auch in den ganzen bayerischen Alpen die mächtige, relativ homogene Schicht des Hauptdolomit (hd in Abb. 3.1). Der darüber liegende Plattenkalk (pk) baut die Gipfel des Estergebirges auf. Er ist stark zerklüftet und weist Höhlen und Karstbildungen auf; so wird im Estergebirge ein großer Teil des Oberflächenwassers durch die Plattenkalkschicht zu einem Höhlenausgang bei Garmisch hin abgeleitet (Hofmann et al., 1997). Unter dem Hauptdolomit liegen die Raibler Schichten, eine Folge von Schichten, welche hinsichtlich Gesteinsart, -dichte und Schichtmächtigkeit stark variieren (Raibler Kalke rk, Raibler Sandsteine rs, darunter Partnachschichten p und Muschelkalk m). Sie erscheinen am Südrand des Estergebirges in einer geologischen Sattelstruktur an der Oberfläche (Wamberger Sattel).

In den Tälern liegen teilweise mächtige Talfüllungen aus verschiedenen Eiszeiten. Sie bestehen hauptsächlich aus Seetonen, sind also aus verlandenden Seen entstanden. Daneben sind Kiese und Moränen eingelagert. Die im Bereich der Talfüllung typischen sehr flachen Talböden gehen meist knickartig in die Berghänge über; an manchen Stellen ergießen sich große Geröllschuttkegel in die Ebenen. Auch außerhalb der Talfüllungen sind an einigen Stellen mächtige Moränen abgelagert (Krün, Eschenlohe, Walchensee). Kleinere Moränen und Geröllhalden finden sich in vielen Karen. Am Eibsee sowie an der Esterbergalm liegen lockere Schuttmassen aus Bergstürzen.

Auf die Gesteinsdichten wird in Kap. 7 eingegangen.

## 4 Schwere- und Lotrichtungsmessungen

### 4.1 GPS-Positionierung und Bezugsrahmen

Da die meisten Koordinaten im Testnetz mit GPS bestimmt werden, wurde als Bezugsrahmen DREF gewählt, nicht Landeskoordinaten (DHDN). Die Anbindung an DREF wurde realisiert, indem 6 Punkte im Testnetz, welche sich als Referenzpunkte zur Neupunktbestimmung mit GPS eignen, d.h. keine Abschattungen über  $15^\circ$  Elevation und eine günstige Lage aufweisen, gegenüber dem DREF-Punkt Hohenpeissenberg eingemessen wurden. Die Auswahlmöglichkeiten für solche Punkte sind im Gebirge wegen der Steilheit der Hänge stark eingeschränkt. Die Einmessung der Referenzpunkte wurde in einer Genauigkeit von 1–2 cm in Lage und Höhe realisiert durch eine anfängliche Beobachtung aller Punkte mit Aufstellzeiten von 6–8 Stunden und späteren Ergänzungsmessungen mit ähnlicher Dauer für einzelne Verbindungen. Für die Einbindung der Referenzpunkte in DREF wurden ausschließlich Trimble 4000 SSE/SSI - Empfänger und Antennen verwendet. Für die Bestimmung der übrigen Neupunkte wurden zusätzlich Geotronics- sowie Leica-Geräte eingesetzt. Als Auswertesoftware wurde für die Einbindung der Referenzpunkte die Bernese GPS Software sowie GeoGPS verwendet.

Die Punkte wurden mit Eisenrohren in Asphalt- oder Kiesstraßen oder durch Felsnägel vermarktet. Die Stabilität der Eisenrohre ist nicht optimal. Die Punkte in den Tälern, welche den Abschattungskriterien genügen, liegen meist auf einer dicken Schicht aus Talschotter. Ein wiederholtes Nivellement zu dem wichtigen Punkt ES01 zeigte, dass der Punkt (Eisenrohr im Asphalt) sich innerhalb von 5 Jahren um 1.5 cm gesenkt hat, vermutlich aufgrund einer Senkung des ganzen Dammes des betreffenden Wirtschaftsweges. Einige der wichtigen Referenzpunkte wurden deshalb durch Zwillingpunkte in wenigen m Abstand versichert.

**Transformation ins Landessystem.** Für manche Zwecke wurden neben DREF-Koordinaten auch Lagekoordinaten im Landessystem (DHDN) benötigt. So ist das zur Geländereduktion verwendete digitale Geländemodell in einem Gauß-Krüger-DHDN-Gitter gegeben. Desweiteren wurden trigonometrische Punkte und Nivellementpunkte mitverwendet, für welche nur DHDN-Koordinaten vorlagen.

Deshalb war eine lokale Transformation zwischen DREF und DHDN erforderlich. Sie wurde als Helmerttransformation mit 5 identischen Punkten realisiert. Die identischen Punkte sind trigonometrische Punkte, welche vom Bayerischen Landesvermessungsamt ausgewählt und mit Koordinaten und ellipsoidischen Höhen bezüglich DREF und DHDN zur Verfügung gestellt wurden. Die Restklaffungen der Helmerttransformation liegen unter 10 cm. Diese Genauigkeit ist für die Zwecke, für welche die DHDN-Lagekoordinaten benötigt werden, völlig ausreichend.

**Umrechnung zwischen ellipsoidischen und physikalischen Höhen.** An den meisten Messpunkten wurden mit GPS ellipsoidische Höhen gemessen. Einige Punkte sowie das DGM lagen hingegen in Meereshöhen vor. Für die Kombination der beiden Höhenarten, z.B. zur Berechnung der Geländeanziehung, war eine Umrechnung über ein Geoidmodell erforderlich. Dafür wurde das EGG97-Quasigeoid verwendet (Torge und Denker, 1999). Der Vergleich des EGG97 mit über

Nivellement und GPS gemessenen Höhenanomalien ergibt im Estergebirge einen Versatz von ca. 40 cm; nach der Korrektur des Versatzes bleiben die Fehler des EGG97 aber unter 10 cm (siehe Kap. 5). Somit kann die Umrechnung für das Estergebirge in für die Schwerereduktion ausreichender Genauigkeit durchgeführt werden, indem aus dem EGG97 Höhenanomaliedifferenzen zu einem Punkt berechnet werden und an die in diesem Punkt gemessene Höhenanomalie angehängt werden.

## 4.2 Schweremessungen

Der Schwerpunkt der Messungen im Estergebirge wurde bisher auf die Gravimetrie gelegt. Seit Beginn des Projekts wurde die Schwere in dem ca. 170 km<sup>2</sup> umfassenden Estergebirge in 520 Punkten gemessen. Dafür waren ca. 70 Messtage eines in der Regel zweiköpfigen Messtrupps erforderlich. Im gesamten Estergebirge wurde eine gleichmäßige Punktdichte von 2.5 Punkten/km<sup>2</sup> erreicht. Im Gebiet Eschenloher Kühalm - Michelfeld im zentralen Teil der Estergebirges wurde die Punktdichte auf 12 Punkte/km<sup>2</sup> erhöht, und um den Punkt ES03 auf der Kühalm wurde auf einer Fläche von 300×400 m eine besonders dichte gravimetrische Detailaufnahme mit Punktabständen von durchschnittlich 40 m durchgeführt. Die Verteilung der Schweremesspunkte ist der Karte am Schluss der Arbeit zu entnehmen.

In nichtgebirgigen Gebieten sind heute schon vielerorts Schweremessungen in vergleichbar hoher Punktdichte vorhanden. Sie stammen teilweise aus Prospektionskampagnen, in manchen Ländern aber auch aus dichten flächendeckenden Landesaufnahmen (z.B. ehemalige DDR, Schweiz, Italien). In den Alpen ist uns jedoch kein Messgebiet bekannt, in welchem eine vergleichbar hohe homogene Punktdichte erreicht wurde. Oft ist die Punktdichte nur in den Tälern hoch (siehe z.B. Daxinger, 1996; Bernauer und Geiger, 1986; Rosselli et al., 1999). Als Beispiel für ein Gebiet mit relativ hoher Punktdichte, welche auch in der Gipfelregion nicht vermindert wurde, sei die Gegend südlich des Vierwaldstättersees (Schweiz) genannt, wo aber „nur“ ca. 0.33 Punkte/km<sup>2</sup> erreicht werden.

Anfangs wurden oft bewusst topographisch exponierte Punkte wie z.B. Bergspitzen zur Messung ausgewählt. In diesen Punkten ist allerdings die Modellierung des Geländes besonders schwierig und fehleranfällig (siehe Kap. 6.2). Um möglichst genaue geländereduzierte Schwerestörungen zu erhalten, sollten die Messpunkte gleichmäßig verteilt werden und Stellen mit besonders rauer Topographie möglichst gemieden werden. Dieser Grundsatz kann allerdings in der Praxis nicht immer berücksichtigt werden, da manchmal nur auf exponierten Punkten ein ausreichender GPS-Signalempfang möglich ist.

### 4.2.1 Einzelheiten zur Gravimetrie

Zur Schweremessung wurden 3 LaCoste-Romberg-Gravimeter (G87, G195 und G587) und ein Scintrex CG3M eingesetzt. Das G87 wurde freundlicherweise vom Deutschen Geodätischen Forschungsinstitut München zur Verfügung gestellt. Mit diesen Geräten lassen sich im Gelände mit relativ geringem Aufwand Messgenauigkeiten um 50  $\mu$ Gal erzielen.

Um die angestrebte gleichmäßig hohe Punktdichte zu erreichen, konnten die Messungen nur teilweise entlang von Forststraßen erfolgen. Zum größeren Teil der Messpunkte hin musste die Ausrüstung zu Fuß transportiert werden, oft auf Wanderwegen, manchmal aber auch nur auf Tritts Spuren der Jäger oder ganz weglos. Die Gravimeter wurden dafür auf ein Tragegestell oder in einen mit Schaumstoff gepolsterten Rucksack gepackt. Es wurde auf eine ruhige Gehweise geachtet; dennoch sind die Geräte dabei unvermeidlichen Erschütterungen ausgesetzt. Sie erwiesen sich jedoch alle als robust und stabil im Messverhalten.

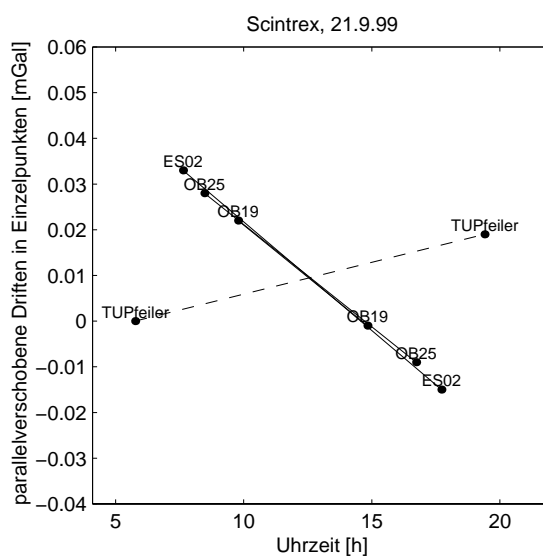
Die Gravimeter wurden auf Böden von sehr unterschiedlicher *Stabilität* aufgestellt. Beim Scintrex lässt sich diese anhand der laufend angezeigte Standardabweichung der Einzelmessungen und des Verhaltens

der elektronischen Neigungsmesser leicht einschätzen. Die ruhigsten Messungen erhält man meist auf Fels; manchmal erweisen sich auch kleine kiesige Verebnungen, z.B. auf einem Wanderweg, als sehr ruhig. In manchen Fällen musste allerdings auf weiche oder sogar leicht sumpfige Böden ausgewichen werden, um zu starke Abschattungen für die GPS-Positionierung zu vermeiden. Dort dauert zwar das Horizontieren wesentlich länger, und jede Erschütterung oder Gewichtsverlagerung in der Nähe des Geräts muss vermieden werden. Letztlich ergaben aber meist auch Messungen auf solchen schwierigen Böden gute, reproduzierbare Werte.

Ein wichtiger Punkt bei der Messung großer Schwereunterschiede ist die korrekte *Eichung* der Gravimeter. Im Estergebirge beträgt die größte auftretende Schweredifferenz zwischen Tal und höchstem Gipfel 320 mGal. Um ein Genauigkeitslimit von 0.1 mGal einzuhalten, durfte der Fehler des Eichfaktors deshalb einen Wert von  $3 \cdot 10^{-4}$  nicht übersteigen. Beim relativ neuen Scintrex wurden Änderungen des Eichfaktors in dieser Größe innerhalb von 2 Jahren, bei den älteren LCR-Geräten innerhalb von 10 Jahren festgestellt. Daher war eine regelmäßige Eichung erforderlich.

Zur Bestimmung von *Absolutschwerewerten* wurden 5 Punkte durch wiederholte Verbindungsmessungen an den DSGN76-Punkt der TU München angeschlossen. Die übrigen Punkte wurden jeweils in eintägigen Schleifen an einen dieser Anschlusspunkte angehängt. In einigen Fällen war es wegen der langen Gehzeiten notwendig, eine Schleife an einen der untergeordneten Punkte anzuhängen oder eine Linie zwischen einen Anschlusspunkt und einen untergeordneten Punkt einzuhängen.

Wegen der Erschütterungen beim Transport auf dem Rücken muss generell mit größeren und teilweise unregelmäßigen *Driften* der Gravimeter gerechnet werden. Im Estergebirge wurde jeweils die Morgen- und Abendmessung auf einem Anschlusspunkt zur linearen Driftbestimmung verwendet. Der lineare Driftanteil für die jeweils etwa 6-11stündigen Messtage betrug für alle Geräte in der Regel zwischen  $+5 \mu\text{Gal}/\text{Std.}$  und  $-10 \mu\text{Gal}/\text{Std.}$ . Für das Scintrex wird allerdings schon durch die Gerätesoftware eine Vorkorrektur von  $+7.0 \mu\text{Gal}/\text{Std.}$  angebracht. Wenn es der Messweg ohne großen Mehraufwand zuließ, wurden zusätzliche Punkte mehrfach besetzt, um die Linearität der Drift zu prüfen oder um Nichtlinearitäten zu modellieren. Die sich ergebenden Abweichungen vom linearen Verlauf waren oft gering; in manchen Fällen erreichten sie bis zu  $60 \mu\text{Gal}$ . Beim Scintrex wurde häufig ein Widerspruch im Driftverlauf zwischen dem Transport während der eigentlichen Messung im Testnetz und der 1-2stündigen Autofahrt von bzw. nach München festgestellt. Abb. 4.1 zeigt ein solches Beispiel. Das Instrument scheint sich während der längeren Autofahrt deutlich anders zu verhalten als bei kurzen Autofahrten und Fußmärschen, während das Verhalten bei letzteren sehr konsistent ist. Eine mögliche Ursache dafür könnten in beim Scintrex bekannten Hystereseeffekten liegen, welche durch das längere Stehen im Auto in nicht horizontierter Lage auftreten könnten. Das festgestellte Ausmaß ist mit  $30-50 \mu\text{Gal}$  nach 1 Stunde allerdings deutlich mehr als im Scintrex-Handbuch (Scintrex, 1992) angegeben. Schwereunterschiede zwischen



**Abbildung 4.1:** Typisches Driftverhalten des Scintrex-Gravimeters. Der Punkt TUPfeiler liegt in München, die übrigen Punkte im Estergebirge.

zeigt ein solches Beispiel. Das Instrument scheint sich während der längeren Autofahrt deutlich anders zu verhalten als bei kurzen Autofahrten und Fußmärschen, während das Verhalten bei letzteren sehr konsistent ist. Eine mögliche Ursache dafür könnten in beim Scintrex bekannten Hystereseeffekten liegen, welche durch das längere Stehen im Auto in nicht horizontierter Lage auftreten könnten. Das festgestellte Ausmaß ist mit  $30-50 \mu\text{Gal}$  nach 1 Stunde allerdings deutlich mehr als im Scintrex-Handbuch (Scintrex, 1992) angegeben. Schwereunterschiede zwischen

München und dem Testnetz, welche nur auf einer einzigen Verbindungsmessung basieren, wurden aus diesen Gründen nicht verwendet.

*Wiederholgenauigkeit* der Schweremessungen: Einige Punkte wurden vermarktet und durch Messungen an anderen Tagen, teilweise auch mit anderen Gravimetern oder von anderen Anschlusspunkten aus kontrolliert. Wenn Messungen verglichen werden, die an unterschiedlichen Tagen, aber mit dem gleichen Gravimeter gemacht wurden, dann zeigen sich zufällige Fehler der einzelnen Messungen, korrelierte Fehler aus der Driftbestimmung und Fehler der Anschlusspunkte (sofern unterschiedliche verwendet wurden). Dieser Vergleich ist an 22 Punkten möglich. Abb. 4.2a zeigt für diese Punkte die Abweichungen der Einzelmessungen vom jeweiligen Mittelwert. Wenn Ergebnisse unterschiedlicher Instrumente verglichen werden, dann enthalten die Abweichungen zusätzlich Fehler aus der Eichung (Abb. 4.2b, aus 32 Punkten); solche scheinen sich allerdings nicht auszuwirken, da die Fehlerstandardabweichung in Abb. 4.2b nicht angestiegen ist. Trotz der relativ geringen Anzahl von Kontrollpunkten darf wohl für die äußere Genauigkeit eines nur einfach besetzten Punktes eine Standardabweichung von 20-30  $\mu\text{Gal}$ , sicher aber von unter 50  $\mu\text{Gal}$  angenommen werden. Die maximale Differenz zweier Messungen im gleichen Punkt betrug 90  $\mu\text{Gal}$ . Das als Ziel festgelegte Genauigkeitslimit für die Schweremessung von 0.1 mGal wurde somit in allen kontrollierten Punkten eingehalten und weder durch den Eichfehler, noch durch den Fehler aus der Driftbestimmung, noch durch andere Instrumentenfehler überschritten.

*Exzentrizität* des Gravimeters in Lage und Höhe: Das Gravimeter wurde in der Regel nicht direkt am GPS-Punkt aufgestellt, sondern daneben in bis zu 2 m Entfernung, allerdings auf wenige cm genau auf der gleichen Höhe wie der GPS-Punkt. Die Höhe des Gravimeters wurde gemessen und mit dem Freiluftschwereregradienten korrigiert. Die Instrumentenhöhe sollte gering sein, möglichst kleiner als  $\pm 20$  cm, um Fehler aus der Abweichung des lokalen vertikalen Gradienten vom Freiluftgradienten zu vermeiden.

Die Berechnung der *Erdzeitenkorrektion* erfolgt beim Scintrex durch die eingebaute Software, welche das Longman-Modell verwendet. Daneben steht ein Programm zur direkten Berechnung der Anziehung von Mond und Sonne zur Verfügung. Die Abweichungen beider Programme vom Cartwright-Taylor-Edden-Modell liegen unter 10  $\mu\text{Gal}$ .

#### 4.2.2 Positionierung für die Schweremessungen

Für die Positionierung der Schweremesspunkte wurde eine Höhengenaugigkeit von 5-10 cm angestrebt. Daraus ergibt sich bei der Freiluftschwerereduktion mit dem Gradienten 0.3 mGal/m ein



a) Mehrfachbesetzungen an unterschiedlichen Tagen jeweils mit dem gleichen Gravimeter (meist mit Scintrex),  $\sigma = 21 \mu\text{Gal}$

b) nur Mehrfachbesetzungen mit unterschiedlichen Gravimetern,  $\sigma = 20 \mu\text{Gal}$

**Abbildung 4.2:** Histogramme für Abweichungen der Werte von Mehrfachbesetzungen eines Punktes vom Punktmittelwert aus den wiederholten Besetzungen. Die Asymmetrien der Histogramme werden durch 3- bzw. 4-fache Besetzungen verursacht.

Fehler aus der Höhenbestimmung von 15-30  $\mu\text{Gal}$ . Auch bei einem etwas größeren Höhenfehler von bis zu 30 cm würde bei der Schwerereduktion die angestrebte Genauigkeit von 0.1 mGal noch eingehalten werden.

In der Regel erfolgte die Positionierung mit GPS im Rapid-Static-Verfahren. Da für die Gravimetrie keine bestimmten Punkte zu messen waren, sondern nur die angestrebte Punktdichte einzuhalten war, konnten die Messpunkte jeweils auf die günstigsten Lichtungen gelegt werden. Auf diese Weise war in fast jedem Gelände ein ausreichender GPS-Signalempfang möglich, auch in steilen Nordhängen. An schwierigen Punkten musste allerdings die Messung gelegentlich abgebrochen werden, wenn sich der Empfang als ungenügend erwies, und in der Nähe neu versucht werden. Häufig wurde die Antenne mit Hilfe von Verlängerungsstäben bis auf 4.5 m Höhe ausgefahren. Dies verbessert bei nahe stehenden Bäumen den Satellitenempfang oft entscheidend. An windigen Tagen schwankt dann allerdings die Antenne um einige cm. Einige unerwartete Probleme bei der Auswertung waren möglicherweise durch schlechte Beobachtungen aufgrund dieses Schwankens verursacht. Unter windigen Bedingungen war dann eine Antennenhöhe von etwa 3 m ein guter Kompromiss.

Um eine sichere *Auswertbarkeit* zu gewährleisten, erwiesen sich die Mindestmesszeiten aus Tab. 4.1 als erforderlich. Bei Signalabbrissen der Satelliten wurde zur Sicherheit noch etwas länger gemessen. Die Trimble-Empfänger erwiesen sich als günstig, da bei ihnen während der Messung die Signale auf Abrisse überprüft werden können. Die Auswertung ergab bei den meisten Punkten ohne manuelle Eingriffe zuverlässige Ergebnisse. Bei den übrigen mussten die Beobachtungsdaten nachbearbeitet werden, um die Fixierung der Mehrdeutigkeiten zu erreichen, z.B. durch Herausschneiden verrauschter Signalabschnitte.

**Tabelle 4.1:** GPS-Mindestmesszeiten bei rapid static im Estergebirge

Anzahl permanent empfangene Satelliten	Mindestmesszeit (min)
$\leq 6$	20
5	25
4	30

Insgesamt erfüllt GPS im Rapid-Static-Verfahren die Erfordernisse der Gravimetrie im Gebirge sehr gut. Wiederbesetzungen ergaben Abweichungen unter 5 cm in Lage und Höhe. Gegenüber früher bei der Gravimetrie üblichen Verfahren wie z.B. der barometrischen Höhenmessung bringt GPS einen deutlichen Genauigkeitsgewinn, nicht zuletzt weil man neben der genauen Höhe auch die Lagekoordinaten erhält, welche Voraussetzung für eine genaue Geländereduktion sind.

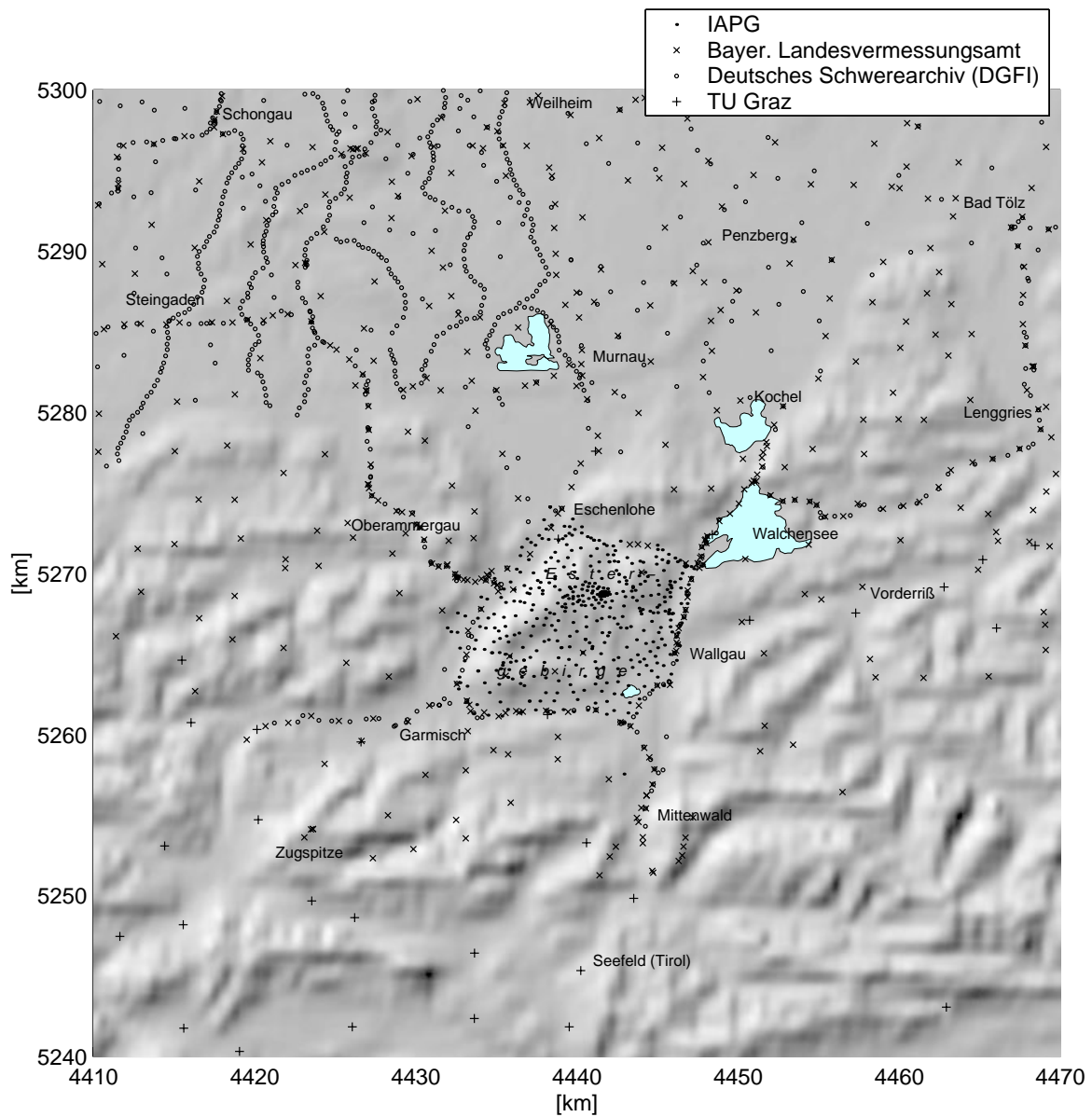
Zur Verkürzung der Messzeit wäre prinzipiell eine Echtzeit-GPS-Positionierung interessant. Damit könnte man die erfolgreiche Fixierung der Mehrdeutigkeiten schon im Feld feststellen und müsste nicht die angegebenen, relativ großzügig bemessenen Mindestmesszeiten beachten. Versuche mit einer Real-Time-Kinematic-Ausrüstung zeigten aber, dass im Gebirge schon ab 1 km Entfernung von der Referenzstation der erforderliche Funkkontakt nicht mehr gewährleistet ist. Ähnlich schwierig dürfte der bislang nicht getestete Empfang von SAPOS-Korrektursignalen im Gebirge sein.

Während der GPS-Messung wurde zur Verbesserung der Geländemodellierung die Topographie im Umkreis von ca. 20 m mit Maßband, Kompass und Neigungsmesser aufgenommen (siehe Kap. 6.2).

#### 4.2.3 Schweredaten anderer Quellen

Die topographisch reduzierten Schwerestörungen im Estergebirge weisen Strukturen auf, deren Beurteilung die Einbeziehung einer weiteren Umgebung erforderlich machten. Für die folgenden Untersuchungen wurden daher zusätzlich Schweremesspunkte aus einem Umkreis von 20-30 km um das Estergebirge verwendet, welche zwar in viel geringerer Punktdichte, aber dennoch einigermaßen flächendeckend vorlagen.





**Abbildung 4.3:** Schweremesspunkte Estergebirge und Umgebung

Diese Messungen stammen aus folgenden Quellen (vgl. Abb.4.3):

- Bayerisches Landesvermessungsamt

Das BLVA führte im Rahmen der Verdichtung des Schwerefestpunktnetzes in den letzten Jahren auch in den Alpen eine größere Anzahl Schweremessungen durch. Im alpinen Bereich des untersuchten Ausschnitts wird eine mittlere Punktdichte von  $0.08$  Punkten/ $\text{km}^2$  (1 Punkt auf  $12 \text{ km}^2$ ) erreicht, im Alpenvorland liegt die Dichte etwas höher. Häufig wurde auf Berggipfeln an trigonometrischen Punkten gemessen.

- Deutsches Schwerearchiv

Das am Deutschen Geodätischen Forschungsinstitut (DGFI) vorgehaltene Deutsche Schwe-

rearchiv enthält eine größere Anzahl von Messungen im Alpenvorland. Davon sind für die vorliegende Arbeit vor allem einige Profilmessungen mit engen Punktabständen (ca. 400 m) nordwestlich von Murnau interessant.

- Technische Universität Graz

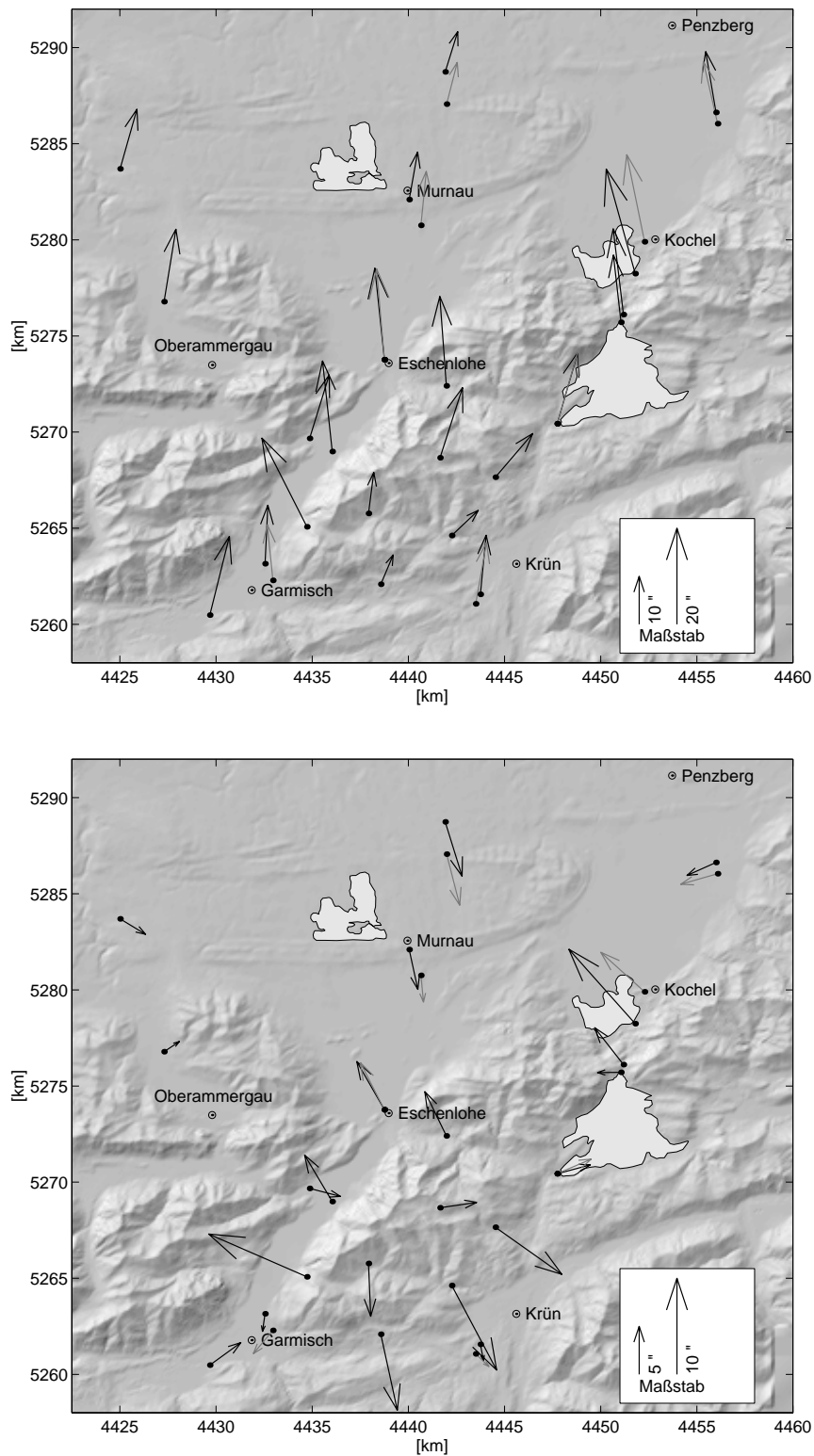
Für die Fortsetzung nach Süden wurde ein vom Institut für Theoretische Geodäsie der TU Graz zur Verfügung gestellter österreichischer Auswahl Datensatz einbezogen, welcher Schwerewerte und topographische Reduktionen enthält. Hier liegt die mittlere Punktdichte bei einem Punkt auf  $40 \text{ km}^2$ . Im Gegensatz zu den Messungen des BLVA befinden sich nur wenige Punkte in Hochlagen. Im Karwendelgebirge südöstlich von Mittenwald sind in einem Gebiet von über  $600 \text{ km}^2$  bisher gar keine Messungen vorhanden.

### 4.3 Astronomische Lotrichtungen, Lotabweichungen

In Zusammenarbeit mit der Bayerischen Kommission für die Internationale Erdmessung (BEK, W. Wende) wurden an 9 Punkten im Estergebirge astronomische Lotrichtungen gemessen. Es wurden jeweils astronomische Länge und Breite simultan aus Durchgängen im gleichen Almkantarat bestimmt. Messinstrument war ein Zeiss Ni2 Nivellier mit Astrolabvorsatz. Die Zeitmessung geschah mit Handtaster. Die Zeithaltung während der Messung lief über den Quarz eines Taschencomputers, welcher mit DCF77-Langwellenzeitsignalen synchronisiert wurde. Der Temperaturgang des Quarzes wurde gemessen und als Korrektur an die Zeitmessung angebracht. Auch der Temperaturgang des Nivelliers wurde gemessen und bei der Auswertung berücksichtigt.

An jedem Punkt wurden 2 Sätze gemessen, in welchen jeweils ca. 15 Sterne angezielt wurden. Die Abweichungen zwischen den Ergebnissen zweier Sätze lagen in der Regel unter  $0''5$ , in Ausnahmefällen zwischen  $0''5$  und  $1''0$ . Als Messpunkte wurden trigonometrische Punkte oder mit GPS bestimmte Punkte verwendet. Somit lagen geodätische Koordinaten zur Bildung von Lotabweichungen nach Gleichung (2.11) vor (für die geodätischen Koordinaten ist ja eine Genauigkeit im m-Bereich ausreichend). Die Abstände zwischen den Messpunkten liegen im Mittel bei 3–4 km, der höchste Punkt liegt auf 1650 m. Alle Punkte waren mit Fahrzeugen erreichbar.

Zusätzlich zu diesen Messungen lagen im Estergebirge und in der näheren Umgebung schon frühere Messungen der BEK vor sowie Messungen mit einer Zenitkamera der ETH Zürich im Auftrag des Instituts für Erdmessung und Navigation der Universität der Bundeswehr (IfEN), welche uns dieses Institut freundlicherweise zur Verfügung stellte. Die Messgenauigkeit für die Zenitkamera ist ähnlich wie beim BEK-Verfahren. Somit sind im Estergebirge und der näheren Umgebung in insgesamt 29 Punkten hochgenaue Lotabweichungen vorhanden (Abb. 4.4). Zur Bestimmung der äußeren Meßgenauigkeit wurden 2 Punkte, in welchen sowohl Ni2- als auch Zenitkamera-Messungen vorliegen, sowie der Vergleich von topographisch reduzierten Lotabweichungen in benachbarten Punkten mit Distanzen von weniger als 1 km verwendet (Abb. 6.15). Daraus ergeben sich Fehlerstandardabweichungen von  $0''3$  für  $\xi$  und  $0''6$  für  $\eta$ .



**Abbildung 4.4:** Lotabweichungen Estergebirge und Umgebung. Oben: gegenüber DREF, unten: nach Abzug von Mittelwerten für  $\xi$  und  $\eta$ . Schwarz: BEK/IAPG-Punkte, grau: IEN/ETHZ-Punkte

## 5 Höhenanomalien und Geoidhöhen aus Nivellement und GPS

Die Kombination von nivellierten Höhen mit ellipsoidischen GPS-Höhen ermöglicht die punktweise Bestimmung von Höhenanomalien und Geoidhöhen nach (2.21). Diese können dann mit flächenhaft vorliegenden Geoidmodellen (z.B. aus gravimetrischer oder astrogeodätischer Geoidberechnung) verglichen werden, woraus empirische Genauigkeitsmaße für solche Modelle abgeleitet werden können. Zur Zeit werden zwar vermehrt Messungen zur Geoidbestimmung aus Nivellement und GPS durchgeführt, in Deutschland z.B. die Sat-Niv-Kampagne des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie BKG (Ihde et al., 1998). Dennoch gibt es bisher noch relativ wenige Messdaten, da die genaue GPS-Höhenbestimmung mit einem beträchtlichen Aufwand verbunden ist. Datensätze mit Messpunktabständen unter 15 km scheinen noch kaum vorhanden zu sein, insbesondere nicht im Gebirge. Zudem sind nur selten Nivellements in größere Höhen vorhanden. Nur wenn jedoch auch Punkte im Gipfelbereich vorliegen, können kurzweilige Geoidanteile (mit Wellenlängen unterhalb des Abstands zweier Täler) sowie Geländeeffekte bei der Geoidberechnung nachgewiesen und analysiert werden. Genauigkeitsaussagen für Geoidmodelle sind aus diesen Gründen für Gebirge bislang sehr unsicher (Marti, 1997).

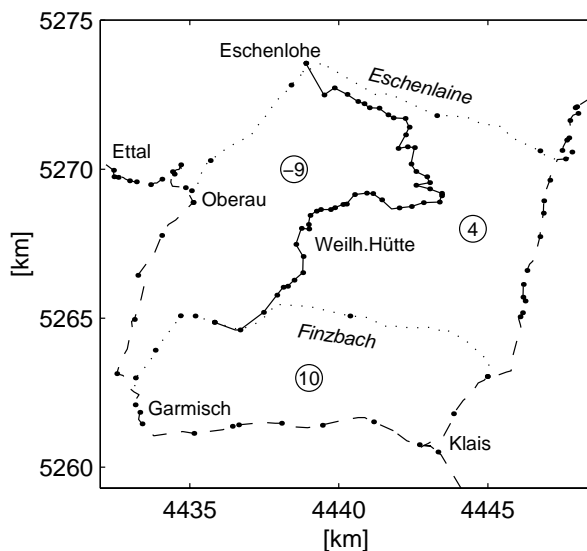
In den bayerischen Alpen sind Präzisionsnivellements meist nur in den Tallagen oder über niedrige Pässe verfügbar. Einzelne Nivellementäste des Bayerischen Landesvermessungsamtes stoßen in mittlere Höhen oder auf niedrige Gipfel vor. Am höchsten reichen die Linien Hochries (2. Ordnung, 1550 m, bei Rosenheim), Rossfeld (3. Ordnung, 1550 m, bei Berchtesgaden), Einödsbach (3. Ordnung, ca. 1700 m, bei Oberstdorf) und Schachen (3. Ordnung, 1940 m) bei Garmisch (BLVA, 1993). Daneben gab es ein Nivellement der Bayerischen Zugspitzbahn zum Fenster 1 der Zahnradbahn in 1900 m Höhe (Messerer, 1931). Im Bereich höherer Gipfel gab es aber bislang keine nivellierten Punkte.

Im Estergebirge und seiner Umgebung wurde nun ein größerer Datensatz von Höhenanomalien und Geoidhöhen in einer Genauigkeit von 1–2 cm bestimmt. Im eigentlichen Estergebirge entstand in Zusammenarbeit mit der Fachhochschule München (FHM) ein dichter Datensatz von 53 Punkten, welcher auch Punkte aus der Gipfelregion bis 2000 m Höhe einschließt (siehe die Karte am Schluss der Arbeit sowie Abb. 5.1). Die Punktabstände liegen bei 0.5–2 km entlang der Nivellementlinien und bei bis zu 4 km zwischen den Linien. Damit liegen zum ersten Mal in den bayerischen Alpen genaue Höhenanomalien und Geoidhöhen in wirklich gebirgigem Gelände bei hoher Punktdichte vor.

Daneben wurden GPS-Höhen an Nivellementpunkten in geringerer Punktdichte in einem 100 km × 50 km großen Gebiet der bayerischen und Tiroler Alpen rings um das Estergebirge bestimmt (Abb. 5.3). Im bayerischen Teil wurden diese Punkte als Verdichtung des SatNiv-Netzes des BKG angelegt. Gemeinsam mit diesen Punkten ergibt sich ein mittlerer Punktabstand von ca. 15 km.

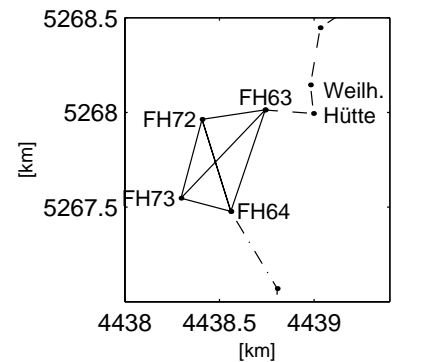
### 5.1 Nivellement, Genauigkeiten

**Linien 1. Ordnung.** Die Nivellements der Linien 1. Ordnung stammen aus den Wiederholungsmessungen 1980–1985 des Deutschen Haupthöhennetzes (AdV, 1993). Schweremessungen wurden



- - Niv. 1. Ordnung, Normalhöhen vom LVA
- ⋯ Niv. 3. Ordnung, Niv.reduktionen durch IAPG
- IAPG-Präzisionsnivellement
- Schweremessungen
- Schleifenschluss in mm (Normalhöhen)

**Abbildung 5.1:** Nivellementnetz Estergebirge



- Zenitwinkel
- - Präzisionsnivellement
- ⋯ trigonometrisches Nivellement

**Abbildung 5.2:** Netz für trigonometrische Höhenübertragung

alle 1–3 km ausgeführt, bei sehr bewegter Topographie auch dichter (z.B. bei Ettal, Abb. 5.1). In der Ausgleichung zum Deutschen Haupthöhennetz 1992 (DHHN92) (AdV, 1995) wurden für diese Linien geopotentielle Knoten und Normalhöhen bestimmt. In Klais liegt der Knotenpunkt 8533/73 des DHHN92. Bei den für diese Arbeit verwendeten Schleifen liegt der größte Schleifenschluss bei 17 mm (auf 246 km Schleifenlänge). Für die innerhalb des eigentlichen Estergebirges liegenden Teilstücke von ca. 40 km Länge bleiben die Verzerrungen aus der DHHN92-Ausgleichung unter 5 mm. Mit dem DHHN92 liegt somit eine genaue und einheitliche Höhenreferenz vor, und es bot sich daher an, im Estergebirge bevorzugt mit dem System der Normalhöhen zu arbeiten.

**Linien 3. Ordnung.** Die Linien im Finzbachtal und Eschenlainetal (Abb. 5.1) wurden vom BLVA in den Jahren 1961 und 1962 gemessen. Wegen des relativ hohen Alters dieser Messungen ist die Gefahr, dass sich die Festpunkte seit der Messung bewegt haben könnten, größer als bei den anderen Linien. Schweremessungen wurden nur etwa alle 5 km durchgeführt. Die Berechnung von Normalhöhen erfolgte am IAPG.

Die Linie Oberau - Eschenlohe ist eine sogenannte Einschaltlinie 1. Ordnung. Die Messung stammt aus dem Jahr 1990.

**Linie über die Weilheimer Hütte (IAPG/FHM).** In den Jahren 1995 bis 1997 wurde die Verbindungslinie Eschenlohe - Weilheimer Hütte - Esterbergalm (Finzbachtal) gemessen. Sie ist wegen der großen Höhen das für die Geoidbestimmung interessanteste Teilstück des Nivellementnetzes.

Das Nivellement zur 1950 m hoch gelegenen Weilheimer Hütte wurde nordseitig als Präzisionsnivellement ausgeführt, beginnend in Eschenlohe auf 630 m. Im unteren Teil bis zur Eschenloher Kühalm (1650 m) führt es über eine Forststraße. Die Differenz zwischen Hin- und Rückmes-



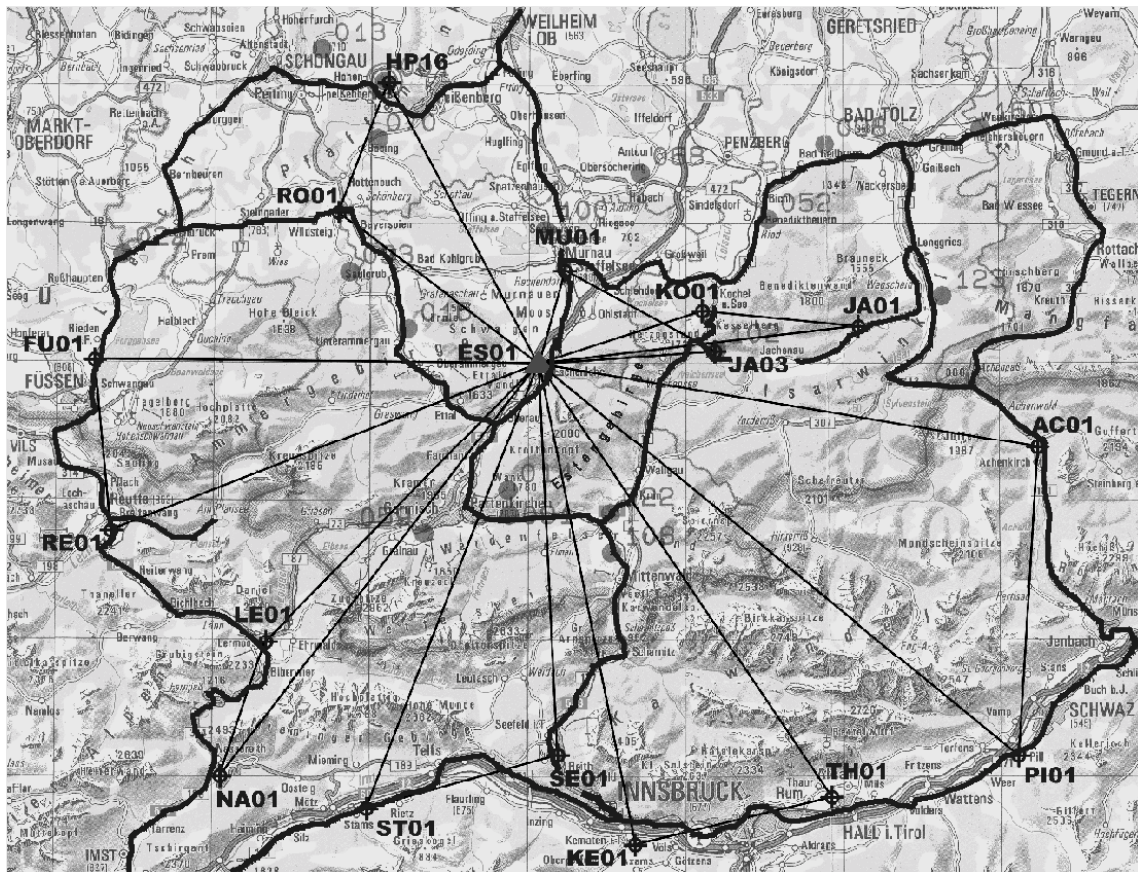


Abbildung 5.3: GPS/Niv-Punkte der weiteren Umgebung um das Estergebirge mit Nivellementlinien

sung betrug in diesem Teil 0.35 mm bei 11 km Strecke. In oberen Teil verläuft die Linie teilweise über steile Wanderwege, aber auch durch weglose Almweiden und Hänge mit grobem Geröll. An den steilsten Stellen waren nur noch sehr geringe Zielweiten von unter 2 m möglich. Trotz sehr schwieriger Messbedingungen (wie z.B. die Aufstellungen im Geröll) wurde in diesem Teil die sehr geringe Differenz von nur 1.3 mm zwischen Hin- und Rückmessung über 4 km Strecke erreicht. Für beide Teilstrecken wurden damit die amtlichen Fehlergrenzen für das Präzisionsnivellement eingehalten.

Auf der Südseite der Weilheimer Hütte wurde das Nivellement über 3.5 km trigonometrisch ausgeführt. Dabei wurden mit einem Theodolit (Leica TC1610) und einem Kanalprismenstab mit zwei Prismen Zenitwinkel und Strecken gemessen. Der Vorteil gegenüber dem herkömmlichen geometrischen Nivellement liegt darin, dass die Zielweiten unabhängig von der Steilheit des Geländes konstant gehalten werden können. Das Verfahren war zuvor auf dem nördlichen Steilabschnitt getestet worden und ergab eine Abweichung gegenüber dem geometrischen Präzisionsnivellement von 5.9 mm über 4 km Strecke. Die Schwere wurde auf der Bergstrecke zwischen Eschenlohe und dem Finzbachtal an allen Nivellementfestpunkten, d.h. alle 200–600 m gemessen.

Unmittelbar südlich der Weilheimer Hütte wurde ein Steilabschnitt mit 300 m Höhenunterschied über eine Horizontalentfernung von 560 m zwischen den Punkten FH63 und FH64 mit Hilfe einer trigonometrischen Höhenübertragung überwunden. Dazu wurden in einem Netz von 4 Punkten (Abb. 5.2) für alle Verbindungen jeweils gegenseitige, nahezu gleichzeitige Zenitwinkel und Strecken gemessen (im Abstand von wenigen Minuten). Das Netz wurde an zwei Tagen jeweils komplett gemessen, so dass für jede Verbindung zwei unabhängige Messungen vorliegen. Es wurden die Theodolite Leica TM1800 und TC1610

eingesetzt. Die Netzausgleichung ergab für die Höhenunterschiede innere Genauigkeiten von 2–6 mm.

Die sich im Estergebirge ergebenden Schleifenschlüsse liegen bei höchstens 1 cm (Abb. 5.1). Nicht nur die Linien 1.Ordnung des BLVA, sondern auch die Bergstrecke mit ihren sehr schwierigen Messbedingungen genauso wie die BLVA-Linien 3.Ordnung sind offensichtlich sehr genau.

**Österreichische Nivellementpunkte** In Österreich läuft zur Zeit die Umstellung auf das System der orthometrischen Höhen und den Anschluss an den Amsterdamer Pegel. Die Ausgleichung des neuen Höhennetzes geschieht wie diejenige des DHHN92 in geopotentiellen Koten. Die Realisierung des Anschlusses an den Pegel ist allerdings leicht unterschiedlich (für das DHHN92 im Punkt Wallenhorst, für die neuen österreichischen Höhen in einigen Punkten des europäischen Höhennetzes UELN95/98). Diese Unterschiede im Höhendatum sind im hier untersuchten Teil von Tirol gut bestimmbar, da in die Ausgleichung des DHHN92 einige Tiroler Linien einbezogen wurden. An diesen Linien liegen somit Koten aus beiden Systemen in identischen Punkten vor. Aus den Differenzen wurden für die betrachteten Messpunkte Korrekturen interpoliert und angebracht (mit Beträgen von 15–20 mm), so dass nunmehr für alle Punkte DHHN92-Höhen vorhanden waren.

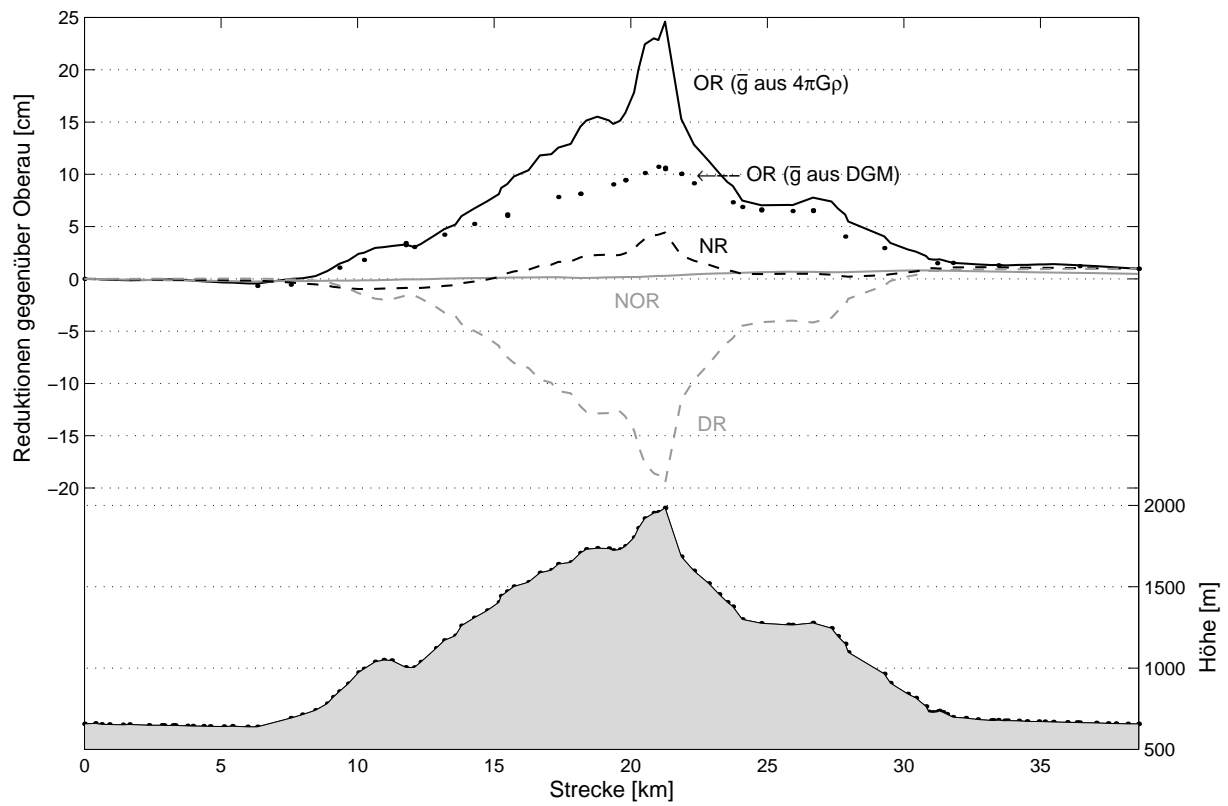
Innerhalb des ganzen hier betrachteten Nivellementnetzes ist von maximalen Höhenfehlern für Normalhöhen aus Nivellement und Schweremessungen von ca. 1–2 cm auszugehen. Die Nachbarschaftsgenauigkeit ist allerdings wesentlich besser, der Fehler zwischen nah benachbarten Punkten erreicht wohl höchstens wenige mm.

## 5.2 Nivellementreduktionen

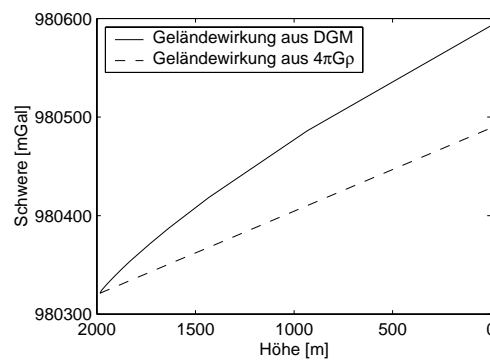
Zur Bestimmung von physikalischen Höhen (dynamische Höhen  $H_D$ , orthometrische Höhen  $H_O$ , Normalhöhen  $H_N$ , normalorthometrische Höhen  $H_{NO}$ ) müssen die schwereabhängigen Nivellementreduktionen  $DR, OR, NR, NOR$  (Tab. 2.1) berechnet und an das Nivellement angebracht werden. Abb. 5.4 zeigt die Reduktionen für die Nivellementsleife mit dem größten Höhenunterschied.

Relativ aufwendig ist dabei lediglich die Berechnung der orthometrischen Reduktion  $OR_{DGM}$ , wenn die mittlere Schwere entlang der Lotlinie  $\bar{g}$  mit der strengen Formel (2.20) berechnet wird. Für die Integration über die Schwereänderung wurde die Geländewirkung  $V_z^{TOP}$  für eine ausreichende Anzahl von Diskretisierungspunkten entlang der Lotlinie aus Quaderprismen bestimmt (Gleichungen (2.16),(2.17)). Für mm-Genauigkeit sind in der Regel ca. 8 Diskretisierungspunkte ausreichend. Abb. 5.5 zeigt für einen Messpunkt die aus dem DGM berechnete Zunahme der Schwere im Vergleich zu der Annahme bei der Prey-Reduktion. Die numerische Integration über die Kurve ergibt dann  $\bar{g}$ . Die Abweichung zwischen  $\bar{g}_{DGM}$  und  $\bar{g}_{Prey}$  betrug in den topographisch exponiertesten Punkten bis zu 70 mGal, mit unterschiedlichem Vorzeichen.

Die Kurven der Nivellementreduktionen erlauben einige Schlussfolgerungen. Die Reduktionen, welche gemessene Schwerewerte verwenden ( $DR, NR, OR$ ), weisen eine deutliche Höhenabhängigkeit auf. Diese Abhängigkeit erreicht über den maximalen Höhenunterschied der Schleife von ca. 1400 m für  $DR$  -19.5 cm, für  $NR$  4.4 cm und für  $OR_{DGM}$  10.5 cm. Die negative Korrelation von  $DR$  mit der Höhe ist von der Wahl von  $\gamma_0$  abhängig.  $OR_{Prey}$  steigt im Gipfelbereich, wo die zugrundeliegende Annahme der Bouguerplatte besonders stark von der Wirklichkeit abweicht, im Vergleich zur Topographie überproportional an mit Ausschlägen von bis zu 14 cm relativ zu  $OR_{DGM}$  (insgesamt 24.6 cm). Die normalorthometrische Reduktion enthält nur eine sehr schwache Höhenabhängigkeit. Sie ist im Gebirge als Näherung für andere Reduktionen ungeeignet. Die



**Abbildung 5.4:** Nivellementreduktionen für die Schleife Oberau–Eschenlohe–Weilheimer Hütte–Garmisch–Oberau mit extremen Höhenunterschieden



**Abbildung 5.5:** Schwerezunahme entlang der Lotlinie für Punkt FH63 (Höhe 1984 m)



Kurven für NR und OR weisen untereinander eine höhenabhängige Differenz von bis zu 7 cm auf. Darin zeigt sich bereits der unterschiedliche Verlauf von Höhenanomalien und Geoidhöhen.

### 5.3 Genaue GPS-Höhenbestimmung

Das Erreichen der geforderten Höhengenaugigkeit von 1–2 cm mit GPS ist gerade im Gebirge keine leichte Aufgabe. An geeigneten Nivellementpunkten müssen wegen der Berghänge oft Abschattungen bis zu Höhenwinkeln von ca. 30° in Kauf genommen werden. Zudem ist die Modellierung der im Gebirge oft heterogenen Troposphäre nur eingeschränkt möglich. In der Regel wurden Aufstellzeiten von 6–8 Stunden pro Punkt eingehalten. Es wurden meist Trimble 4000 SSI Empfänger benutzt, für kurze Basislinien manchmal auch Leica- und Geotronics-Geräte. Für kürzere Basislinien (< 15 km) ergab die Auswertung mit den kommerziellen Programmen GeoGPS/GeoGenius, GPSurvey und (mit Einschränkungen) SKI gute Ergebnisse; für die längeren Basislinien kam die Bernese GPS Software zum Einsatz. Als unabhängige Kontrolle wurden einige Punkte wiederholt bestimmt (in unterschiedlichen Kampagnen); die Abweichungen der Ergebnisse lagen dabei unter 1 cm.

Um eine gute Vergleichbarkeit mit den Ergebnissen im SatNiv-Netz des BKG zu gewährleisten, wurde das Gesamtnetz im Punkt Hohenpeissenberg des BKG eingehängt, und zwar nicht an DREF-Koordinaten, sondern – um die bekannten Zwänge des DREF zu vermeiden – an Koordinaten aus einer freien Ausgleichung des SatNiv-Netzes.

### 5.4 Höhenanomalien und Geoidhöhen, Vergleich mit dem EGG97

Aus den nach Anbringen der Nivellementreduktionen erhaltenen Normalhöhen bzw. orthometrischen Höhen sowie den ellipsoidischen GPS-Höhen liegen nun gemessene Höhenanomalien  $\zeta$  bzw. Geoidhöhen  $N$  vor. Diese können mit flächenhaften Quasigeoid- oder Geoidmodellen verglichen werden. Im folgenden werden Ergebnisse des Vergleichs mit dem EGG97-Modell (Torge und Denker, 1999) gezeigt.

Der Abzug von Modellwerten  $\zeta_{\text{EGG}}$  bzw.  $N_{\text{EGG}}$  ergibt Residual-Höhenanomalien  $\zeta_r$  bzw. Residual-Geoidhöhen  $N_r$ . Das EGG97-Modell ist grob an in Deutschland gemessene Höhenanomalien angepasst. Dennoch treten regional Abweichungen von einigen dm auf, z.B. aufgrund langwelliger Fehler des verwendeten Geopotentialmodells. Diese wurden für die hier untersuchten Gebiete als konstanter Versatz  $b_{\text{EGG}}$  angesetzt; er beträgt ca. 40 cm. Man erhält damit

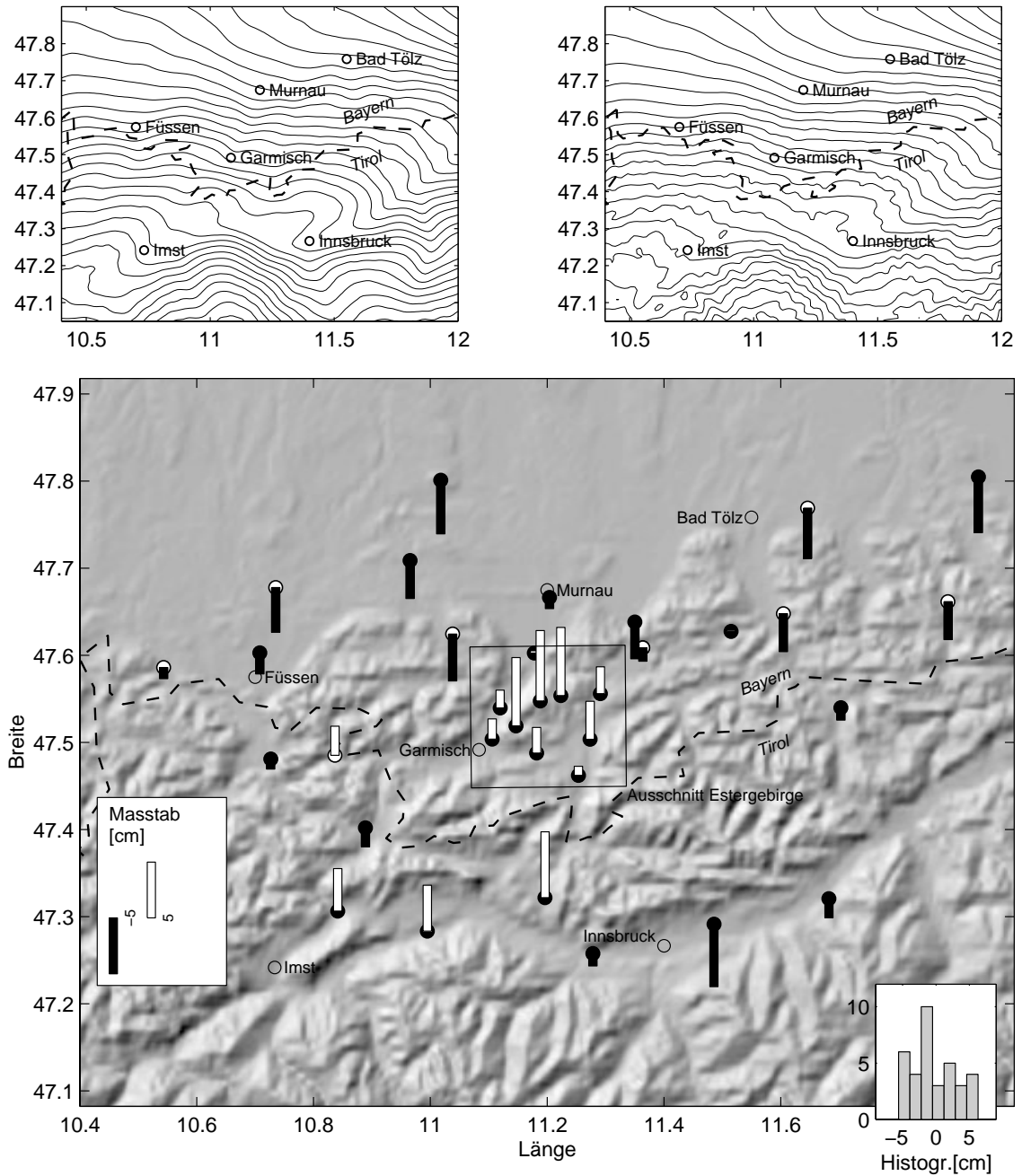
$$\zeta_r = (h_{\text{GPS}} - H_N) - (\zeta_{\text{EGG}} + b_{\text{EGG}}) \quad (5.1)$$

$$N_r = (h_{\text{GPS}} - H_O) - (N_{\text{EGG}} + b_{\text{EGG}}). \quad (5.2)$$

Abb. 5.6 zeigt das EGG97-Modell (Höhenanomalien und Geoidhöhen) für das Untersuchungsgebiet sowie aus dem Vergleich mit den Messungen erhaltene Residual-Höhenanomalien  $\zeta_r$ . In der Isoliniendarstellung fällt zunächst auf, dass  $N_{\text{EGG}}$  im Gegensatz zu  $\zeta_{\text{EGG}}$  kurzweilige Oszillationen aufweist, obwohl Geoidhöhen eigentlich glatter als Höhenanomalien verlaufen müssten. Die Oszillationen liegen oft im Gipfelbereich.  $N_{\text{EGG}}$  wurde nicht direkt berechnet, sondern über die Umrechnung

$$N = \zeta + \frac{\bar{g} - \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} H \approx \zeta + \frac{\Delta g_{\text{BO}}}{\gamma} H \quad (5.3)$$

in den Gitterpunkten des EGG97 aus  $\zeta_{\text{EGG}}$  abgeleitet. Die enthaltene Näherung setzt die im Gebirge unzureichende Annäherung des Geländes durch die Bouguerplatte zur Berechnung von  $\bar{g}$  voraus; dies dürfte für die Oszillationen in  $N_{\text{EGG}}$  verantwortlich sein.

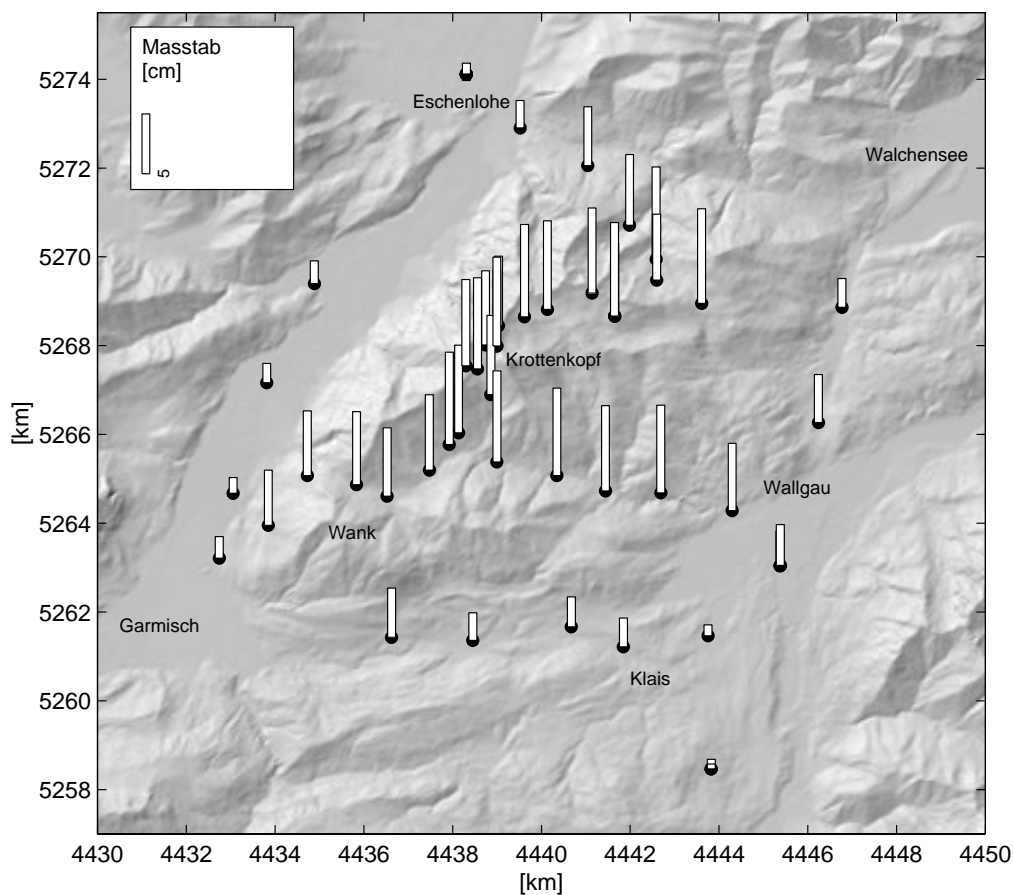


**Abbildung 5.6:** oben: EGG97, Höhenanomalien (links) und Geoidhöhen (rechts), Äquidistanz je 0.2 m. Unten: Differenzen zwischen gemessenen und EGG97-Höhenanomalien, Versatz abgezogen. Weiß gefüllte Punktssignaturen: SatNiv-Punkte des BKG, schwarze Punktssignaturen: IAPG-Punkte.

Die Residual-Höhenanomalien nach dem Abzug des Modells und des Versatzes  $b_{EGG}$  (Abb. 5.6 unten) sind im Vergleich zum gesamten Höhenanomalien-Signal gering. Sie erreichen Beträge von  $\pm 6$  cm mit einer Standardabweichung von 3.5 cm. Zwischen Punkten mit größeren Abständen ( $> 10$  km) sind die Korrelationen gering.

An der Grenze zu Österreich ist kein Sprung feststellbar. Die Kombination der österreichischen und deutschen Normalhöhen ist also offensichtlich gut gelungen. Allerdings sind die Beträge der  $\zeta_r$  in Österreich etwas größer. Dies könnte u.a. auf eine etwas schlechtere Qualität des EGG97 in Österreich hinweisen, möglicherweise dadurch verursacht, dass für Österreich weniger dichte Schweredaten vorlagen (siehe Torge und Denker, 1999, Abb. 1).

Im Estergebirge mit seiner hohen Punktdichte (Ausschnitt Abb. 5.7) sind benachbarte  $\zeta_r$ -Werte deutlich korreliert. Für die hochgelegenen Punkte in der Mitte des Estergebirges sind die  $\zeta_r$  um bis zu 7 cm größer als im Tal. Systematische höhenabhängige Messfehler in dieser Größe kommen wohl für GPS und Nivellement nicht in Betracht, so dass die Ursache dieser Korrelation am ehesten beim EGG97-Modell zu vermuten ist.



**Abbildung 5.7:** Differenzen zwischen gemessenen und EGG97-Höhenanomalien, Ausschnitt Estergebirge

Möglicherweise handelt es sich dabei um einen topographieabhängigen Effekt, dessen Ursache in der Modellierung bei der Quasigeoidberechnung zu suchen wäre. Es können aber auch Fehler aus dem Darstellungsfehler der dem EGG97 zugrunde liegenden Schweredaten beteiligt sein. Nach Abb. 1 in Torge und Denker (1999) dürften die Abstände der für das EGG97 verwendeten Schweremesspunkte im Bereich des Estergebirges bei 5–10 km liegen. Aus der Untersuchung

der Fortplanzung des Darstellungsfehlers für Schwerestörungen in Kap. 10 dieser Arbeit ergibt sich für einen mittleren Punktabstand der Schweremesspunkte von 5–10 km eine Geoidfehler-Standardabweichung von 1–3 cm (Tab. 10.2); die gemessenen  $\zeta_r$  wären demnach nur teilweise durch die Punktdichte der Schweremesspunkte erklärbar.

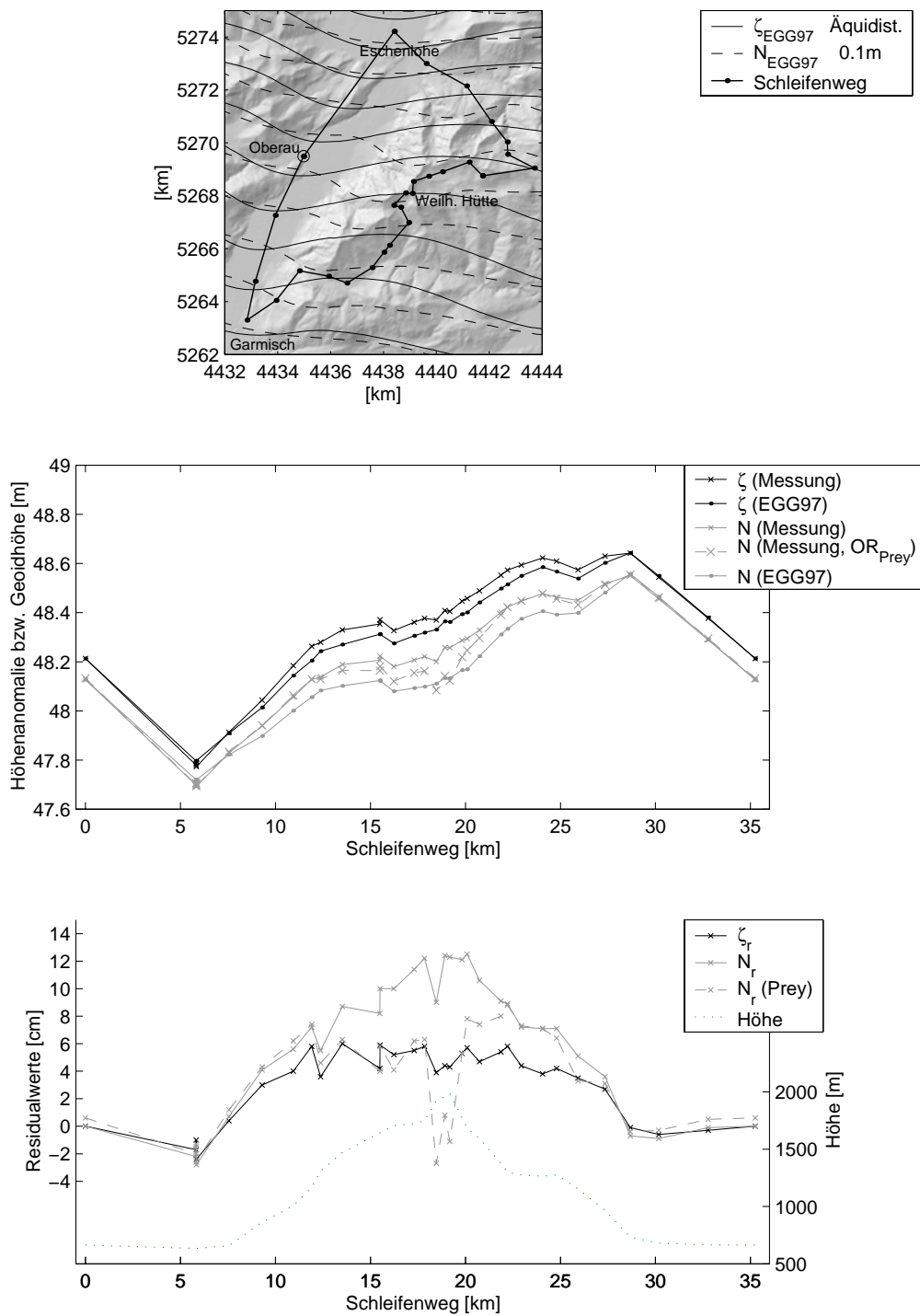
Abb. 5.8 gibt ein noch etwas detaillierteres Bild der Modell-, Mess- und Residualwerte entlang der Nivellementschleife aus Abb. 5.4. In der flächenhaften Darstellung des EGG97 (oben) ist die starke Neigung von  $\zeta$  und  $N$  sowie teilweise die beschriebenen kurzwelligen Oszillationen in  $N$  erkennbar. In den Differenzen zwischen Messung und Modell (Mitte/unten) erscheint wiederum die festgestellte Korrelation mit der Topographie. Für Höhenanomalien  $\zeta_r$  erreicht sie bis zu 7 cm, für Geoidhöhen  $N_r$  sogar bis zu 15 cm. Die Abhängigkeit ist allerdings nicht linear mit der Höhe.

Zusätzlich zu dieser Korrelation weisen die Kurven eher zufällige Variationen (Zacken) auf. Bei  $\zeta_r$  erreichen diese maximal eine Amplitude von 1.9 cm, zwischen km 11 und km 15 der Schleife ausnahmsweise bis 2.8 cm. Dort waren die GPS-Aufstellzeiten etwas kürzer (3–4 Std.), was sich offensichtlich in einer etwas schlechteren Genauigkeit niederschlägt. Diese Maximalwerte zeigen, dass die GPS-Höhen auch im Sinn einer äußeren Genauigkeit eine gute Qualität haben. Gleichzeitig geben sie auch eine obere Grenze für die Variation der Höhenanomalien im sehr kurzwelligen Bereich bis ca. 2 km vor.

Die Kurve für  $N_r$  weist stärkere Zacken von bis zu 4 cm auf. Hier wirken sich wohl die fehlerhaften Oszillationen von  $N_{\text{EGG}}$  aus. Daneben spielen für  $N_r$  aber auch bei der Modellierung der Topographie vernachlässigte Dichteunterschiede eine Rolle. Zum einen ist ihr Potential im EGG97 nicht berücksichtigt. Für die in Kap. 7 modellierte Loischtafüllung wurde beispielsweise eine Wirkung auf das Geoid von bis zu 1.5 cm ermittelt. Zum anderen enthält auch die orthometrische Höhe über  $\bar{g}$  die Wirkung solcher Störkörper. Für die beschriebene Schleife können sich Störkörper Abschätzungen zufolge mit bis ca. 1 cm auf die orthometrische Höhe auswirken.

Bei Verwendung der Prey-Reduktion weisen die  $\zeta_r$  im Gipfelbereich starke Ausschläge von bis ca. 10 cm nach unten auf. Dies zeigt, dass die Bouguerplatte hier für die Modellierung nicht ausreicht, und beweist, dass der bei  $\text{OR}_{\text{Prey}}$  in Abb. 5.4 festgestellte überproportionale Anstieg im Gipfelbereich unrealistisch ist.

Die Ergebnisse dieses Kapitels erlauben einige Schlussfolgerungen: Höhenanomalien sind im Gebirge über Nivellement und GPS mit einer Genauigkeit von ca. 1–2 cm messbar. Bei Geoidhöhen ist die Unsicherheit wegen der orthometrischen Reduktion etwas größer. Die Qualität des gravimetrischen EGG97-Modells ist im untersuchten Gebiet – abgesehen von langwelligen Fehlern – flächendeckend gut; nach Abzug eines Versatzes zeigen sich noch nicht erfasste lokale Signalanteile von ca.  $\pm 6$ –8 cm. Zur Klärung der interessanten Frage, ob Geoidmodelle wie das EGG97 vielleicht tatsächlich einen höhenabhängigen systematischen Fehler enthalten, wären weitere Nivellements und GPS-Höhenmessungen in anderen gebirgigen Gebieten erforderlich.



**Abbildung 5.8:** Vergleich mit EGG97-Modell entlang der Nivellementschleife Oberau-Eschenlohe-Weilheimer Hütte-Garmisch-Oberau. Oben: Schleife mit EGG97-Isolinien, Äquidistanz je 0.1m; mitte: Höhenanomalien und Geoidhöhen in den Profilpunkten, EGG97 so verschoben, dass Kurven im Anfangspunkt der Schleife übereinstimmen; unten: Differenzen Messung – EGG97

## 6 Geländemodellierung

Bei Freiluftscherestörungen  $\delta g_{FA}$  wird im Gebirge der größte Signalanteil durch die Topographie verursacht. Abb. 6.1 zeigt  $\delta g_{FA}$  für das Estergebirge. In den Isolinien ist die Geländeform klar erkennbar. Die Vektoren der Lotabweichungen sind genauso durch die Topographie geprägt und haben eine starke Komponente in der Richtung der Falllinien des Geländes am Messpunkt. Bei den Lotabweichungspunkten im Estergebirge (Abb. 4.4) wird der Effekt der Topographie allerdings durch eine nordwärts gerichtete Komponente überlagert und daher erst nach Abzug des Mittelwerts sichtbar.

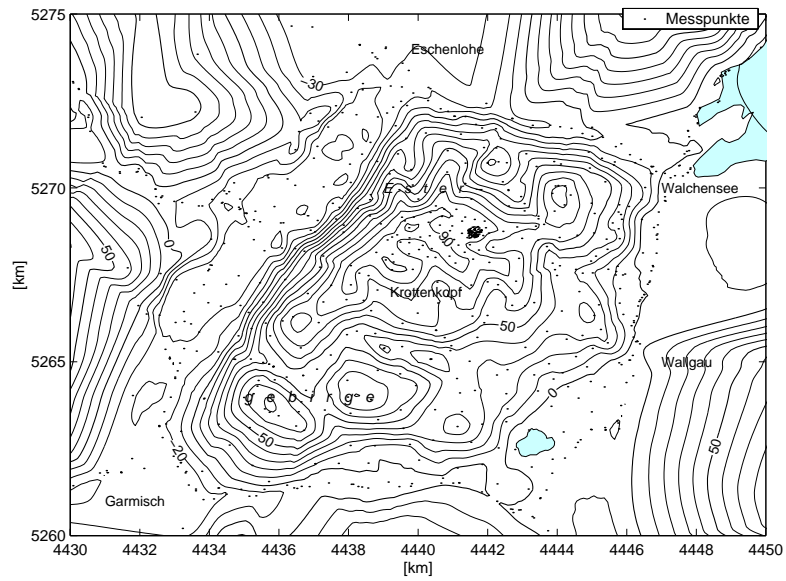
Für das Hauptziel dieser Arbeit, die Untersuchung des Darstellungsfehlers, muss das zu interpolierende Signal möglichst glatt verlaufen.  $\delta g_{FA}$ ,  $\xi$  und  $\eta$  sind ohne Geländereduktion im Gebirge völlig ungeeignet zur Interpolation. Um die Signalanteile aus der Topographie einigermaßen zu erfassen, müsste so dicht gemessen werden wie bei einer detaillierten topographischen Geländeaufnahme. Abb. 6.2 zeigt, dass eine einfache Bouguerreduktion das Ergebnis im Gebirge teilweise eher verschlimmert als verbessert, denn bei  $\delta g_{BO}$  stechen alle Punkte im Gipfelbereich als extreme Spitzen heraus. Eine sorgfältige topographische Reduktion ist also unerlässlich.

Die hohe Punktdichte der Schweremessungen ermöglicht die Erfassung von hochfrequenten Signalanteilen. Also muss auch die Reduktion für hochfrequente Anteile sehr sorgfältig erfolgen. Solche stammen hauptsächlich aus dem Nahbereich der unmittelbaren Messpunktumgebung. Eine genaue Modellierung des Nahbereichs ist daher wichtig, besonders da oft an topographisch exponierten Punkten gemessen wurde. Bei weitmaschigeren Messungen gehen hingegen Fehler aus der Modellierung eher in nicht erfassten Signalanteilen unter. Bei sorgfältigem Vorgehen kann die Genauigkeit der Modellierung nahe an der Messgenauigkeit liegen, wenn die angenommene Modelldichte realistisch ist. Als einheitliche Näherungsdichte wird im folgenden  $2.7 \text{ g/cm}^3$  angenommen, ein runder Wert, welcher gleichzeitig für die nördlichen Kalkalpen etwa einer mittleren Dichte entspricht.

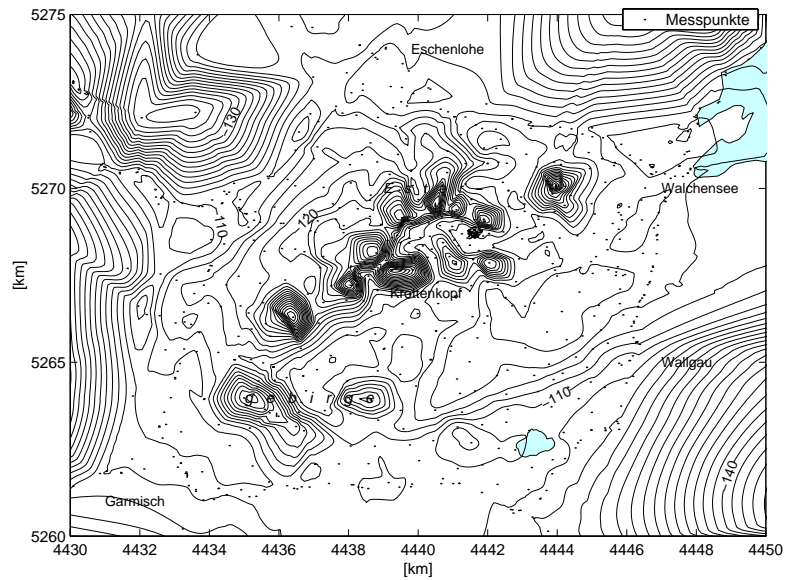
Anteile der Geländewirkung, welche für alle Punkte des betrachteten, begrenzten Gebiets konstant sind, wie z.B. die Wirkung weit entfernter Gebiete, können für den Zweck der Interpolation vernachlässigt werden.

Die Geländemodellierung für Schwere und Lotrichtung soll die Abnahme der Anziehung mit dem inversen quadratischen Abstand berücksichtigen, sie soll also im Nahbereich um den Messpunkt hochauflösend und genau sein, während mit wachsendem Abstand die Anforderungen rasch abnehmen. Dieser Gedanke war bei den früher verwendeten Sektorenmodellen gut realisiert. Die heute üblichen Rastergeländemodelle hingegen sind zwar aufgrund der leichten programmier-technischen Handhabung weit überlegen. Man übersieht aber leicht, dass einerseits für größere Abstände die Rasterweite meist bei weitem nicht erforderlich wäre, dass aber andererseits im Nahbereich ein 50 m-Raster ein stark bewegtes Gelände nur recht grob beschreiben kann. Zudem ist die begrenzte Genauigkeit der Höhen eines Rastermodells zwar für weiter entfernte Teile mehr als ausreichend, kann aber im Nahbereich spürbare Fehler in der berechneten Geländewirkung verursachen.

In den folgenden Abschnitten (Kap. 6.1 – 6.3) wird auf Details der Geländemodellierung einge-



**Abbildung 6.1:** Freiluftschwerestörungen Estergebirge, Äquidistanz 10 mGal, mit Messpunkten



**Abbildung 6.2:** Einfache Bouguerschwerestörungen Estergebirge, Äquidistanz 2 mGal, mit Messpunkten

gangen, welche der daran weniger interessierte Leser überspringen möge.

## 6.1 Geländemodelle

### 6.1.1 50 m-DGM des Bayerischen Landesvermessungsamtes

Für das Estergebirge und den bayerischen Teil der Umgebung lag ein digitales Geländemodell im 50 m-Raster in Gauss-Krüger-Koordinaten vor. Es stammt im wesentlichen aus Luftbildauswertungen in Höhenlinien; dieses Verfahren gibt in der Regel das Gelände detailliert und genau wieder. Das DGM enthält aus diesen Auswertungen an den Rasterpunkten interpolierte Punkthöhen, nicht mittlere Höhen.

Die erste Version, welche das BLVA im Jahr 1995 zur Verfügung stellte, erwies sich als heterogen. Größere rechteckige Teilblöcke des DGMs wiesen fehlerhafte Verschiebungen in der Lage von bis zu 100 m auf. Die dadurch verursachten Sprünge an den Grenzen der Teilblöcke lassen sich im Gebirge oft gut durch schummerungsähnliche Neigungsdarstellungen des DGMs aufdecken. Zudem waren die DGM-Höhen zwar in den meisten Teilen in m- oder dm-Auflösung angegeben, in einigen Gebieten aber nur auf 10 m oder 20 m gerundet.

In einer neueren Version des DGM vom Jahr 1999 waren diese Mängel beseitigt. An einigen Stellen enthielt es dafür Fehler einer anderen Art: Manche extreme Geländekanten waren abgeschnitten, wie es Abb. 6.3 am Beispiel der nordseitigen Felswand der Benediktenwand zeigt. An anderen Stellen zeigten sich bei knickartigen Neigungsänderungen, z.B. am Rand des Loisach-Talbodens, fehlerhafte Oszillationen. Diese Fehler könnten bei der Interpolation der Rasterhöhen aus den Punktwerten der photogrammetrischen Auswertung entstanden sein. Bei detaillierter Betrachtung von Schummerungsdarstellungen fällt zudem auf, dass manchmal die Rauheit der Oberfläche zwischen benachbarten rechteckigen Teilblöcken abrupt wechselt. Dies deutet daraufhin, dass in den Teilblöcken unterschiedliche Interpolationsverfahren verwendet wurden.

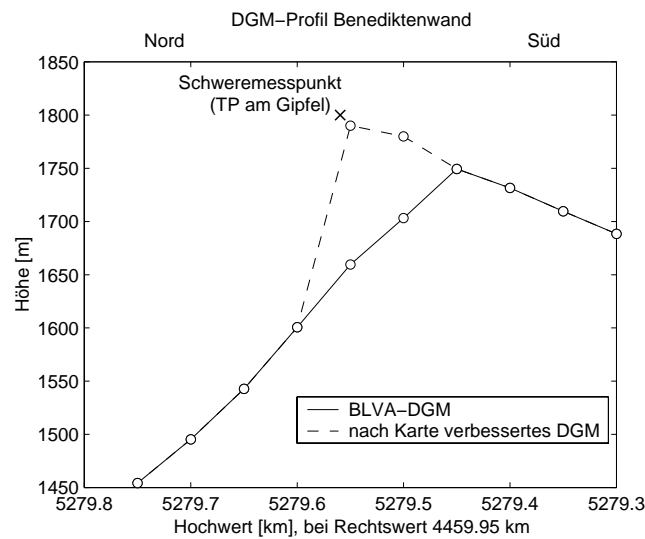
Die beschriebenen Beispiele zeigen, dass die heute vorliegenden digitalen Geländemodelle teilweise noch mit groben Fehlern behaftet sind. Wenn diese nicht entdeckt und korrigiert werden, können sie in ungünstigen Fällen zu deutlichen Fehlern in der Geländemodellierung führen. So erreichten die durch die erwähnten Verschiebungen verursachten Fehler bis zu 2.5 mGal in der vertikalen Komponente der Geländewirkung und bis zu 1'' in den horizontalen Komponenten.

Für die Geländemodellierung wurden nun die in der älteren DGM-Version nicht verschobenen DGM-Teile weiterverwendet. Nur die damals verschobenen Teile wurden durch die entsprechenden Ausschnitte der neueren Version ersetzt; in diesen Ausschnitten gefundene grob fehlerhafte Elemente wurden mit Hilfe der TK 1:25 000 korrigiert.

Eine Stichprobe zur Überprüfung der DGM-Qualität war in einem 300 m x 400 m großen Ausschnitt um den Punkt ES03 auf der Eschenloher Kühalm möglich. Im Zug der erwähnten gravimetrischen Detailaufnahme in diesem kräftig strukturierten Almgelände auf ca. 1650 m Höhe wurde auch das Gelände in Punktabständen von 30–60 m mit GPS aufgenommen. An den Rasterpunkten innerhalb dieses Ausschnitts wurden die DGM-Höhen mit aus der topographischen Geländeaufnahme interpolierten Höhen verglichen. Die Differenzen betragen höchstens 6 m bei einer Standardabweichung von 2.3 m. Verschiebungen von mehr als 1 m vertikal bzw. mehr als 5 m horizontal konnten ausgeschlossen werden. Diese Stichprobe ergab also eine gute DGM-Genauigkeit, allerdings bei einem für die Luftbildauswertung einfachen Geländeausschnitt. Ein Vergleich von Höhenlinien aus dem DGM mit denjenigen der TK 1:25 000 in waldigem Steilgelände zeigte, dass die Kleinformen der TK vom DGM teilweise eher grob wiedergegeben werden.

Einen Eindruck von der durchschnittlichen DGM-Qualität kann der Vergleich von gemessenen Punkthöhen (z.B. von Schweremesspunkten) mit für diese Punkte aus dem DGM-Raster interpolierten Höhen vermitteln. Die festgestellten Differenzen werden allerdings nicht nur durch





**Abbildung 6.3:** Eine extreme Geländekante (die Gipfelwand der Benediktenwand nordöstlich des Walchensees) wird durch das BLVA-DGM abgeschnitten. Der Schweremesspunkt würde danach 150 m über dem Gelände schweben. Das nach Karte verbesserte Raster liegt nahe am wirklichen Gelände.

Fehler der Rasterhöhen verursacht, sondern auch durch kurzweilige, mit dem 50 m-Raster nicht erfassbare Signalanteile des Geländes. Abb. 6.4 zeigt Histogramme der Differenzen; die angegebenen Standardabweichungen zeigen eine im Durchschnitt gute DGM-Qualität.

Zu einer sorgfältigen stichprobenhaften Überprüfung böte sich die Überlagerung mit einem Stereomodell aus Luftbildern mit Hilfe einer photogrammetrischen Software an. Dies ist heute mit relativ geringem Aufwand durchführbar. Dabei könnte beispielsweise die engere Punktumgebung von Messpunkten untersucht werden, welche in sehr bewegttem, photogrammetrisch ungünstigem Gelände liegen. Für das Estergebirge wurde dies aber noch nicht durchgeführt.

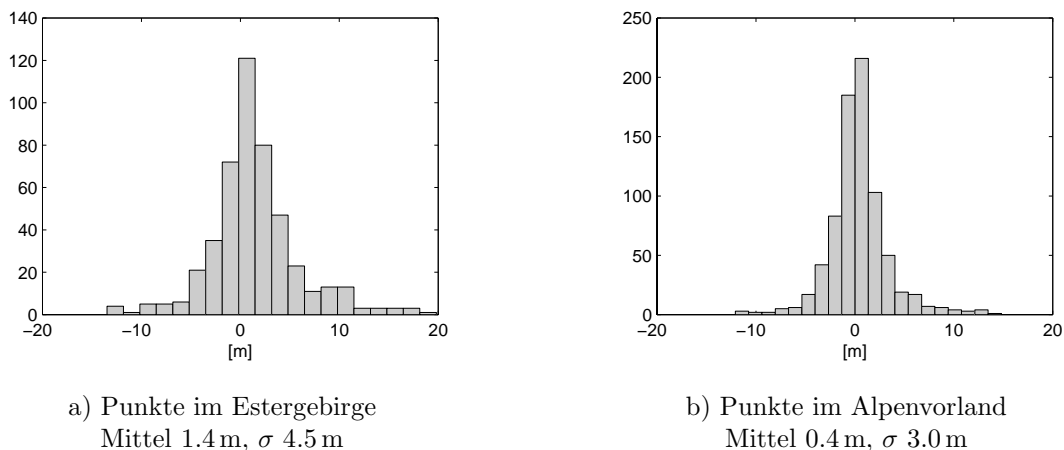
Beim BLVA liegt für die bayerischen Alpen auch ein DGM in 25 m Rasterweite vor. Für das Estergebirge wurde davon nur ein kleiner Musterausschnitt getestet. Die Detailauflösung ist naturgemäß erheblich besser als beim 50 m Raster. Damit könnte die Modellierung des Nahbereichs noch etwas verbessert werden (siehe auch Abschnitt 6.2). Einige Interpolationsfehler der beschriebenen Art waren allerdings auch in dem 25 m-DGM-Muster enthalten.

Bei Seen ist in den DGMs des BLVA nur die Oberfläche erfasst, nicht aber der Seegrund. Die TK 1 : 25 000 gibt aber für den Grund der meisten Seen Höhenlinien an. Um die Wassermassen mit der korrekten Dichte zu modellieren, wurden aus diesen Höhenlinien 50 m-Seegrund-Raster für den Walchensee, den Kochelsee und den Barmsee interpoliert. Besonders wichtig war dies für den Walchensee wegen seiner Tiefe von bis zu 200 m.

### 6.1.2 30''-DGM gtopo30

Das 50 m-DGM des BLVA endet an der bayerischen Grenze in ca. 8 km Entfernung vom Estergebirge. Für die Geländemodellierung war daher eine Erweiterung nach außen unerlässlich. Da die Auflösung mit zunehmender Entfernung stark abnehmen darf, wurde dafür kein hochauflösendes DGM beschafft, sondern es wurde auf das frei verfügbare 30''-DGM *gtopo30* des U.S. Geological Survey (USGS, 1996) zurückgegriffen, welches die Topographie der Landoberflächen weltweit vollständig erfasst. Die Größe der Maschen beträgt in der Breite des Testgebiets ca. 930 m x 630 m.

Das *gtopo30*-DGM ist aus Datensätzen unterschiedlicher Herkunft und Qualität zusammenge-



**Abbildung 6.4:** Differenzen zwischen gemessenen Höhen und aus dem 50 m-DGM interpolierten Höhen (Histogramme)

setzt. Der Vergleich mit dem DGM des BLVA ergab, dass das gtopo30-DGM um  $30''$ , also um ein Element, nach Westen verschoben ist. Nach der Korrektur dieses Fehlers zeigte die Überlagerung von Höhenlinien der beiden Modelle keine groben Fehler mehr. Die Differenzen der Rasterhöhen des gtopo30 zu aus dem BLVA-DGM interpolierten Höhen weisen eine Standardabweichung von 40 m auf; die größten Differenzen liegen in der Regel bei 150 m, an größeren Felswänden ausnahmsweise bei 300 m.

## 6.2 Modellierung des Nahbereichs

Wenn die Höhe des Messpunktes, in welchem die Geländewirkung bestimmt werden soll, in guter Genauigkeit vorliegt, sollte diese Höheninformation unbedingt in die Geländemodellierung einbezogen werden. Im Testnetz Estergebirge ist sie aus der GPS-Positionierung auf 5–10 cm genau bekannt und damit wesentlich genauer als die Höhen der umliegenden Punkte des Rastergeländemodells. Zudem liegen die Messpunkte im Gebirge oft an topographisch exponierten Punkten oder auf Geländekleinformen, die durch das Raster des DGM nicht erfasst werden können. Wenn auf die Einbeziehung des Messpunkts selbst verzichtet werden sollte (z.B. um mit einem reinen Rastermodell arbeiten zu können), dann müssten die Messpunkte jeweils an möglichst gleichmäßig geneigten Hängen angelegt werden, wo eine Interpolation zwischen den benachbarten Rasterpunkten das Gelände gut genug wiedergeben würde. Gerade im bewaldeten Steilgelände ist aber oft nur an exponierten Stellen überhaupt ein ausreichender Signalempfang für eine GPS-Messung möglich.

Im Lauf der Messungen im Estergebirge wurde für Schweremesspunkte als weitere Verbesserung eine einfache topographische Nahaufnahme eingeführt: Während der GPS-Positionsmessung wurden ausgehend vom GPS-Messpunkt einige Punkte im Umkreis von ca. 15 m mit Maßband und einfachem Kompass mit integriertem Neigungsmesser polar an den GPS-Punkt angehängt. Die Lage und Höhe dieser Punkte erhält man so mit einer Genauigkeit von ca. 1 m. Die Punkte werden so gewählt, dass bei einer Dreiecksvermaschung eine Interpolation innerhalb der Maschen das Gelände gut beschreibt. In der Regel reichen 4–7 Punkte aus, damit geneigte Dreiecksflächen die Geländehöhe überall innerhalb der Punkte der Nahaufnahme auf 1–2 m genau wiedergeben. Mit einem Zeitaufwand von nur ca. 5 min pro Punkt wird so der Nahbereich viel besser erfasst als durch die relativ groben Maschen des DGMs (Abb. 6.5). An der Bachrinne in Abb. 6.5 ist

allerdings auch zu erkennen, dass Kleinformen jenseits der Punkte der Nahaufnahme durch die Vermaschung nur schlecht wiedergegeben werden.

Durch die Nahaufnahme können auch Auswirkungen von grob falschen Höhen des DGM in der unmittelbaren Punktumgebung vermieden werden. Wie schon weiter oben diskutiert wurde, kann das verwendete DGM leicht Höhenfehler von einigen m oder mehr aufweisen. Je näher ein grob falscher Rasterpunkt am Berechnungspunkt liegt, desto stärker verfälscht er die Geländeanziehung. Innerhalb des Bereichs einer Nahaufnahme hingegen können die DGM-Rasterpunkte generell eliminiert werden, wodurch sich solche groben Fehler im Nahbereich nicht mehr auswirken (Abb. 6.6).

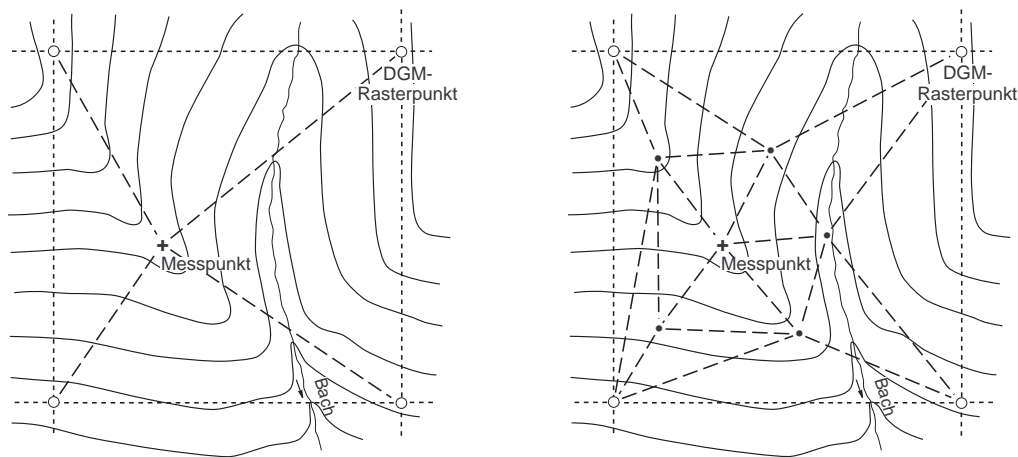
Die Anziehung des Geländenahebereichs wurde nun mit den in Kap. 2 erwähnten Formeln für beliebig geformte Prismen von Petrović (1996) berechnet. Der ganze Nahbereich wurde als ein einziges Prisma modelliert, bestehend aus senkrechten Seitenflächen, waagrechter Grundfläche im Reduktionsniveau und einer komplizierten Oberfläche; diese besteht aus geneigten Dreiecken aus einer Delaunay-Triangulation, in welche der Messpunkt selbst, die Punkte der Nahaufnahme sowie die DGM-Punkte bis zu einer bestimmten Entfernung vom Messpunkt (400 m für die Schwerereduktion, 200 m für die Reduktion der Lotrichtung) eingehen (Abb. 6.7). Die Topologie in der unmittelbaren Punktumgebung sollte bei der Berechnung für jeden Punkt überprüft und gegebenenfalls verändert werden, falls die durch die automatische Triangulation festgelegten Dreieckseiten das Gelände ungünstig wiedergeben (wenn sie z.B. Geländekanten durchstoßen). Dafür sollte eine Topologieskizze des Beobachters vorliegen, der die Nahaufnahme durchführte. Durch die geneigten Dreiecke wird auch in den angrenzenden DGM-Maschen, in welchen keine Zusatzinformation durch die Nahaufnahme mehr vorliegt, eine gewisse Verbesserung gegenüber der Modellierung mit Quaderprismen erzielt (Tsoulis, 1999). Für die Einbeziehung der Rasterpunkte in die Modellierung mit geneigten Dreiecken ist es günstig, dass die DGM-Höhen als Punkthöhen vorliegen. Wenn sie mittlere Höhen darstellen würden, wäre die Modellierung des Nahbereichs nicht so sauber möglich.

Für die quadratischen DGM-Maschen ist die Triangulation hinsichtlich der Richtung der Diagonalen uneindeutig. Ihre Festlegung wurde dem Zufall, d.h. der Rechenunschärfe der Delaunay-Triangulation, überlassen; es wurde aber die Möglichkeit programmiert, die Vermaschung mit dem Höhenlinienbild aus dem DGM zu vergleichen und gegebenenfalls die Richtung von auszuwählenden Diagonalen zu verändern. Bei Abständen von mehr als 50 m vom Berechnungspunkt wirken sich solche Änderungen kaum noch aus.

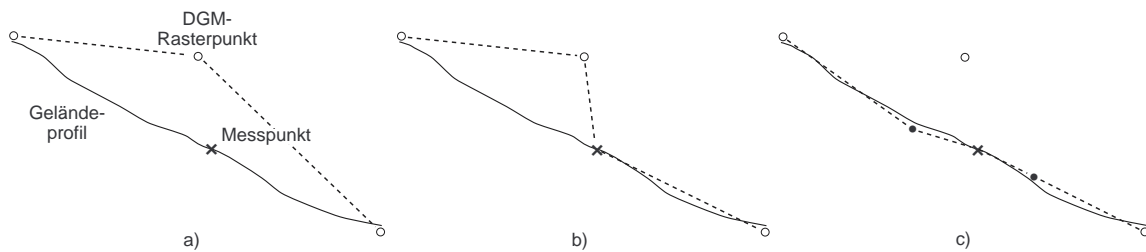
Auch die Seitenflächen des Nahbereichsprismas wurden in Dreiecke unterteilt (Abb. 6.7). Eigentlich könnte man jeweils eine Seitenfläche als ein einziges Polygon mit einer größeren Anzahl von Ecken einführen; bei einer uneinheitlichen Kantenanzahl pro Fläche würde aber die Programmierung unübersichtlicher und aufwendiger, beispielsweise bei den erforderlichen Abfragen, ob die Projektion der Berechnungspunktes in die jeweilige Fläche innerhalb oder außerhalb des Polygons liegt.

Abb. 6.8a zeigt das Histogramm der Differenzen  $V_z^{\text{Nah}} - \sum V_z^{\text{Quader}}$  zwischen der Schwerewirkung  $V_z^{\text{Nah}}$  des Nahbereichsprismas mit geneigten Dreiecksflächen unter Einbeziehung des Messpunkts und der Wirkung des gleichen Nahbereichs in der Modellierung mit Quadern (für welche der Messpunkt nicht verwendet wird). Die Differenzen erreichen bis zu 1.3 mGal und sind systematisch positiv mit einem Mittel von 0.38 mGal, d.h. die Modellierung mit Quaderprismen ohne Einbeziehung des Messpunkts unterschätzt in der Regel die Geländewirkung. Nur in einigen wenigen Fällen, wenn sich der Messpunkt an exponierter Stelle und gleichzeitig nahe an einem DGM-Rasterpunkt befindet (Abb. 6.8b), ist die mit Quaderprismen ermittelte Schwerewirkung zu groß; so kommen die wenigen negativen Werte im Histogramm Abb. 6.8a zustande.

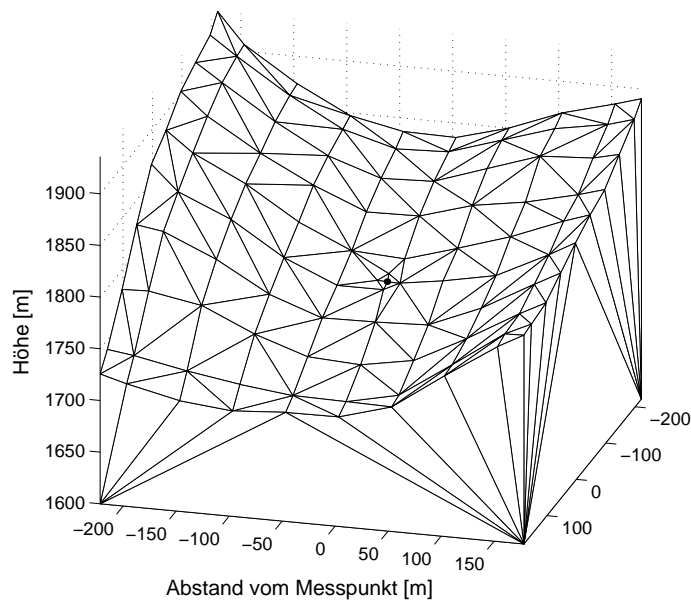
Eine ähnliche Systematik durch die Einbeziehung des Messpunkts zeigte sich auch an den untersuchten Schweremesspunkten des Alpenvorlandes. Dort ist die Wirkung der Quaderprismen im Mittel um 0.20 mGal zu klein (Histogramm Abb. 6.8c). Die Differenzen liegen zwischen 0 und 1.1 mGal, die Wirkung der Quaderprismen ist also in keinem Punkt größer als die Wirkung des



**Abbildung 6.5:** Erfassung einer schwierigen Geländeform (dargestellt durch Höhenlinien) mit Hilfe einer Dreiecksvermaschung. Links: mit DGM-Rasterpunkten und Messpunkt; rechts: mit DGM-Rasterpunkten, Messpunkt und Punkten einer einfachen topographischen Nahaufnahme



**Abbildung 6.6:** Geländeprofil als Beispiel für die Auswirkung eines groben DGM-Fehlers unmittelbar neben dem Messpunkt auf die Modellierung a) nur mit DGM-Rasterpunkten, b) mit DGM-Rasterpunkten und Messpunkt, c) mit DGM-Rasterpunkten, Messpunkt und Punkten der Nahaufnahme (innerhalb der Nahaufnahme liegender Rasterpunkt eliminiert)



**Abbildung 6.7:** Nahbereichsprisma

Prismas mit schrägen Oberflächen.

Bei den Horizontalkomponenten, die bei der Reduktion der Lotrichtung benötigt werden, ist die Genauigkeit im Nahbereich weniger wichtig. Abb. 6.8d zeigt, dass der Unterschied in den Horizontalkomponenten  $V_x^{\text{TOP}}, V_y^{\text{TOP}}$  zwischen Quadern und geneigten Oberflächen unter Einbeziehung des Messpunkts zwar bis zu 0.5 mGal erreicht (obere Skala); dies entspricht allerdings einem Winkel von weniger als  $0''1$  (untere Skala) und liegt damit unter der Messgenauigkeit. Wichtig ist bei der Lotrichtungsreduktion hingegen, dass die Geländewirkung wirklich im Punkt der astronomischen Messung berechnet wird und nicht in Exzentren, über welche oft die geodätischen Koordinaten erhalten werden. Hierbei können sich nicht berücksichtigte Lageexzentrizitäten ab ca. 10 m spürbar auswirken.

Abb. 6.9 zeigt die Änderung der Schwerewirkung des Nahbereichsprismas, wenn neben dem Messpunkt auch noch die Punkte einer Nahaufnahme einbezogen werden. Die Differenz ist im Mittel wiederum leicht positiv (0.08 mGal). In Extremfällen kommen durch die Nahaufnahme noch einmal bis zu 0.7 mGal hinzu, meist beträgt die Verbesserung aber weniger als 0.2 mGal. Große Werte treten dabei meist dann auf, wenn ein schlechter DGM-Rasterpunkt in der Nähe liegt, wenn nämlich der erwähnte Vorteil der Nahaufnahme zum Tragen kommt, dass grob falsche Rasterpunkte eliminiert werden können.

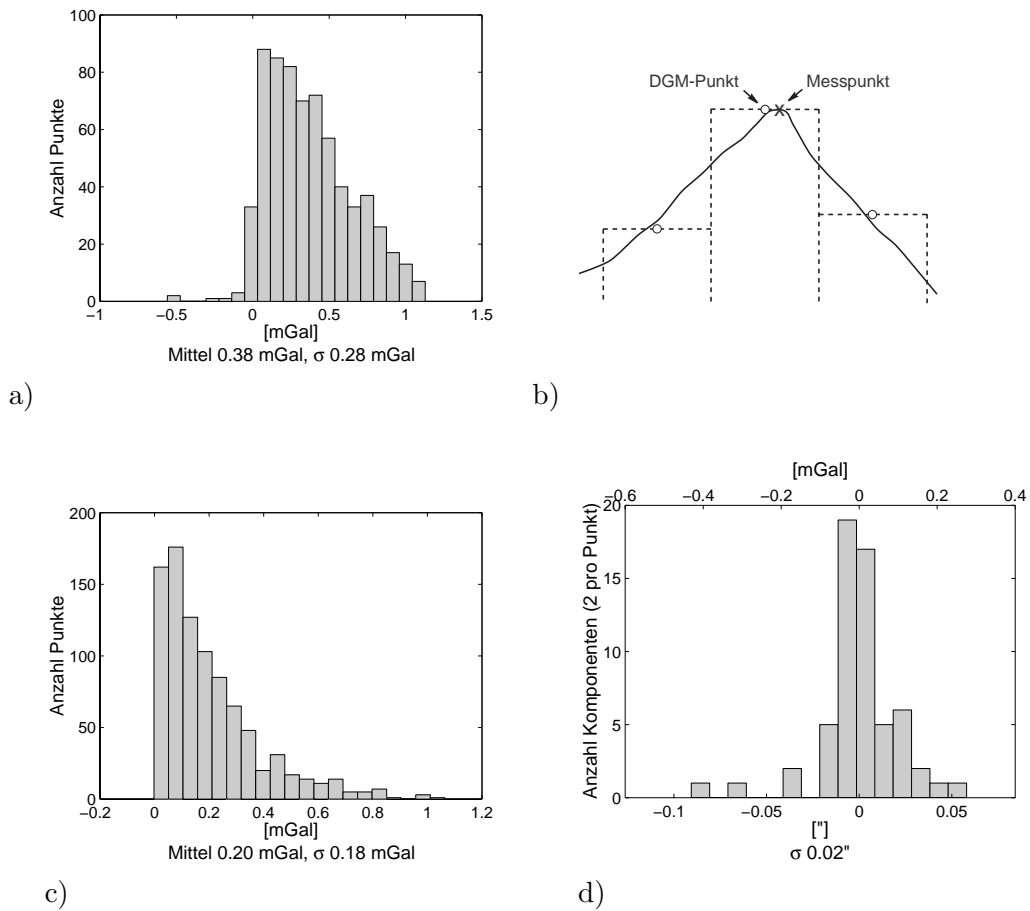
Eine einfache und wirkungsvolle Alternative zum Einsatz von schrägen Oberflächen soll nicht unerwähnt bleiben: Mit den Punkten der Nahaufnahme, dem Messpunkt sowie den nahegelegenen DGM-Punkten als Stützpunkten kann für den Nahbereich ein feineres Raster zur Modellierung mit Quaderprismen interpoliert werden. Mit einer Rasterweite von 5 m im Nahbereich erreicht man ähnliche Genauigkeiten wie bei der Verwendung von schrägen Oberflächen. In Testpunkten der ES03-Punktverdichtung betragen die Abweichungen zwischen den beiden Methoden maximal 0.1 mGal.

Für die Schwerereduktion sollte also bei der Modellierung des Nahbereichs auf keinen Fall auf die Einbeziehung des Messpunkts in das Geländemodell verzichtet werden; ansonsten ist im Gebirge bei Verwendung eines 50 m-DGMs mit Fehlern von bis zu 1.5 mGal zu rechnen. Zusätzlich ist die Einbeziehung einer Geländenahaufnahme zu empfehlen. Diese ist sehr wichtig, wenn an besonders exponierten Punkten gemessen wird, z.B. um einen guten GPS-Empfang zu ermöglichen. Aber auch an anderen Punkten liegt der Genauigkeitsgewinn noch deutlich über dem Messrauschen der Schweremessung. Besonders empfehlenswert ist die Nahaufnahme auch, wenn das DGM Mängel aufweist. Die Verbesserung der Geländemodellierung bewirkt eine teilweise systematische Änderung der resultierenden Anziehung: je besser das Gelände im Nahbereich erfasst wird, desto größer wird in der Regel die berechnete Geländeanziehung. Für die topographische Reduktion von Lotabweichungen ist die Modellierungsgenauigkeit mit 50 m-Quaderprismen im Vergleich zur Messgenauigkeit ausreichend.

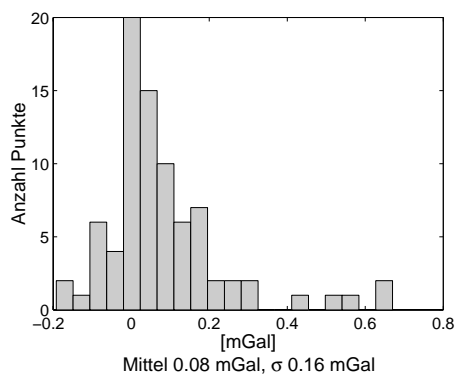
### 6.3 Modellierung mit Rastergeländemodellen

Außerhalb des Nahbereichs wurde das Gelände mit Quaderprismen mit den Gleichungen (2.16) und (2.17) in den Rastern der Geländemodelle BLVA 50 m bzw. gtopo30 modelliert. Dabei liegt jeder Rasterpunkt in der Mitte der Oberfläche einer senkrechten Quadersäule, welche senkrecht auf der lokalen Horizontalebene des Berechnungspunkts steht. Die obere Begrenzung der Quader wird durch die DGM-Höhe festgelegt, die untere Begrenzung durch das Ellipsoid als Referenzniveau für Schwerestörungen. Es wird also die Anziehung des gesamten Geländes bestimmt, nicht die Abweichung gegenüber einer Platte.

Ein Geländemodell ist strenggenommen mit seinem Bezugsniveau (Geoid oder Ellipsoid) an die Erdkrümmung gebunden. Dies verhindert eigentlich eine Modellierung mit Quaderprismen. Die Massenelemente des Geländes liegen mit zunehmender Entfernung immer weiter unterhalb der



**Abbildung 6.8:** Differenzen zwischen der Modellierung mit geneigten Oberflächen unter Einbeziehung des Messpunkts und der Modellierung mit Quaderprismen: a) Histogramm der Differenzen  $V_z^{\text{Nah}} - \sum V_z^{\text{Quader}}$  für Punkte im Alpenbereich, b) Beispiel für größere Wirkung der Quader, c) Histogramm der Differenzen  $V_z^{\text{Nah}} - \sum V_z^{\text{Quader}}$  für Punkte im Alpenvorland, d) entsprechende Differenzen der Horizontalkomponenten  $V_x^{\text{TOP}}$  und  $V_y^{\text{TOP}}$ .

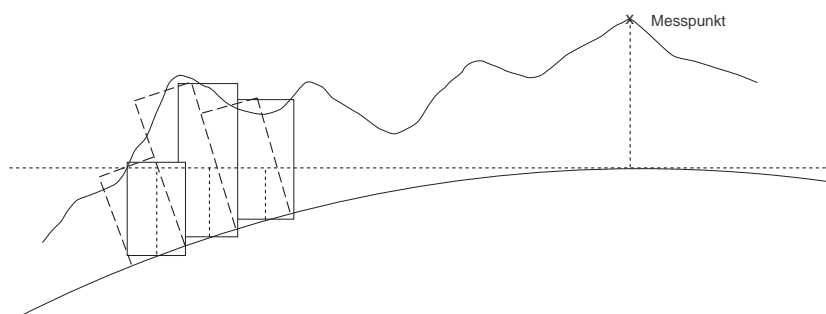


**Abbildung 6.9:** Nahbereichprisma bei der Schwerereduktion: Verbesserung durch Einbeziehung der Nahaufnahme gegenüber Modellierung nur mit DGM und Schweremesspunkt (Histogramm)

lokalen Horizontebene, sie sind gegenüber der Vertikalen im Berechnungspunkt gekippt (bei den üblichen Maximalentfernungen allerdings nur geringfügig), und ihr Querschnitt nimmt mit der Höhe zu. Bei einem DGM im geographischen Raster sind zudem die Grundflächen der Elemente keine Rechtecke. Aus diesen Gründen wurden schon verschiedene Alternativen zu den Quaderprismen vorgeschlagen. Genannt seien hier geneigte Massenlinien (Daxinger, 1996) sowie Tesseroiden (Grüniger, 1990 als Näherungslösung mit Reihenentwicklungen, Seitz und Heck, 2001 mit strenger Lösung). Die Abweichungen der Form der Geländeelemente vom Quaderprisma bleiben aber in ihrer Wirkung sehr klein, da die quadratische Abnahme der Anziehung die Zunahme der Vernachlässigungen mit der Entfernung mehr als kompensiert. Wenn überhaupt, dann spielen sie am ehesten noch in der näheren Umgebung des Berechnungspunkts eine Rolle. Einzig die vertikale Komponente der Erdkrümmung sollte nicht vernachlässigt werden.

Es wurde nun folgende Modellierung gewählt: Im inneren Bereich bis ca. 10 km Entfernung wird das 50 m-DGM im Gauß-Krüger(GK)-Raster auf einem ebenen Bezugshorizont verwendet. Für das anschließende geographische Gitter des *gtopo30* wurden die geneigten Tesseroid-Elemente durch volumengleiche senkrechte Quaderprismen ersetzt; diese wurden entsprechend der Krümmung des Bezugsellipsoids oder (ausreichend genau) einer Kugel gegenüber der lokalen Tangentialebene im Berechnungspunkt abgesenkt (Abb. 6.10). Dabei entstehen Überschneidungen und Leerräume zwischen den Quadern, deren Wirkung aber unter der Messgenauigkeit der verwendeten Messungen bleibt. Für die horizontalen Koordinaten der Quadermittelpunkte im lokalen Horizontsystem müssen die geographischen Koordinaten in eine Ebene projiziert werden. Dafür kann die GK-Projektion verwendet werden, was zu Streckenverzerrungen führt; deren Auswirkung auf die Anziehung der Quader bleibt aber ebenfalls vernachlässigbar klein. Strenger ist eine Orthogonalprojektion in die Tangentialebene aus Abb. 6.10. Diese kann durch Drehung von kartesischen geozentrischen Koordinaten in das lokale Horizontsystem im Messpunkt durchgeführt werden. Wenn allerdings diese Orthogonalprojektion an die im inneren 50 m-Raster verwendete GK-Projektion stößt, können dort problematische Überlappungen aufgrund der unterschiedlichen Projektion entstehen. Auch bei einheitlicher GK-Projektion ist für den korrekten Übergang zwischen 50 m- und 30''-Raster ein Streifen von Quadern mit variabler Breite, welche jeweils vom Rand des 50 m-Bereichs bestimmt wird, erforderlich.

In größeren Abständen vom Berechnungspunkt könnten die Quader eigentlich in genügender Genauigkeit durch Massenlinien, noch weiter entfernt sogar durch Punktmassen ersetzt werden. Darauf wurde hier verzichtet. Mit zunehmender Entfernung wurde jedoch stufenweise die Auflösung der DGMs reduziert (Tab. 6.1). Die Grenzabstände sind dabei recht groß, also vorsichtig gewählt. Marti (1997) geht nach einer gründlichen Untersuchung der erforderlichen Grenzabstände bei ähnlichen Genauigkeitsansprüchen schon deutlich früher zu gröberen Rastern über.



**Abbildung 6.10:** Abgesenkte, aber senkrechte Quaderprismen

**Tabelle 6.1:** Bei der Geländemodellierung verwendete DGM-Auflösung

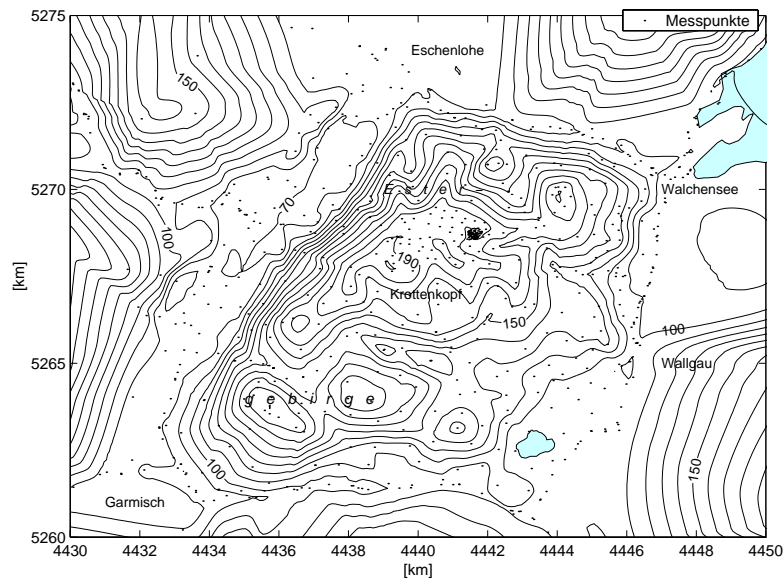
Auflösung	bis zur Entfernung
50 m mit Zusatzpunkten	400 m (Schwere) / 200 m (Lotrichtung)
50 m	5 km
200 m	ca. 10 km
30''	ca. 80 km
2'5	ca. 150 km
10' × 15'	ca. 350 km (nur Lotrichtung)

Zwischen 150 km und 350 km wurde nur noch zur Reduktion der Lotrichtungen mit einem DGM gearbeitet. Für die Schwerereduktion ist die Wirkung dieser Zone nur noch gering und nur von der Höhe des Berechnungspunktes abhängig, nicht mehr von seiner Lage. Die vertikale Komponente kann genau genug bestimmt werden, indem die Anziehung einer ebenen oder sphärischen Platte mit Gleichung (2.14) bzw. (2.15) berechnet wird, deren Höhe der mittleren Geländehöhe in dieser Zone entspricht. Die schon berücksichtigten inneren Zonen müssen aus dieser Platte ausgespart werden. Aus dem DGM ergab sich für die Zone ab 150 km eine mittlere Geländehöhe von ca. 300 m. Wenn außerhalb der verwendeten DGMs noch eine Platte angesetzt wird, dann sollte immer eine Platte mittlerer Höhe gewählt werden und nicht eine, deren Höhe der Punkthöhe des Berechnungspunktes entspricht. Denn die Höhe der zu modellierenden Topographie ist ja in größeren Abständen nicht mehr mit der Höhe des Berechnungspunktes korreliert.

In Abb. 6.11 ist die gesamte Schwerewirkung  $V_z^{\text{TOP}}$  der Topographie für die Messpunkte des Estergebirges dargestellt. Die Isolinien sehen Höhenlinien ähnlich. Bei genauem Vergleich erkennt man, dass sich die Berggipfel in  $V_z^{\text{TOP}}$  etwas verflacht abbilden (z.B. der Krottenkopf). Dies kann damit veranschaulicht werden, dass zu den Bergspitzen hin wegen der immer geringeren Masse in der Punktumgebung die Freiluftreduktion dem Verlauf der Schwere immer besser gerecht wird und somit eine geringere Massenreduktion erforderlich ist. Abb. 6.12 und 6.13 zeigen die vertikalen und horizontalen Beiträge der Geländewirkung in den verschiedenen Abstandszonen der Modellierung. Für die vertikale Komponente wird in Abb. 6.12 deutlich, dass die Beiträge entfernter Zonen im wesentlichen nur noch von der Höhe des Messpunkts abhängen. Der Beitrag des Nahbereichs hingegen ist sehr stark von der lokalen Geländeform abhängig. Auf Spitzen und an Felswänden ergeben sich die kleinsten Werte; einige Beispiele sind in der Abbildung beschriftet. Die Beiträge zu den Horizontalkomponenten sind im Nahbereich von der lokalen Hangrichtung und Hangneigung abhängig. Bei den entfernteren Zonen dominiert wegen der Lage des Estergebirges am Alpennordrand die Wirkung der zentralen Bereiche der Alpen, welche sich in einer starken nordwärts gerichteten Komponente niederschlägt.

Die Wirkung der Wassermassen der modellierten Seen beträgt maximal 2 mGal für die vertikale bzw. 2'' für die horizontalen Komponenten. Die Höchstwerte werden am Steilufer des Walchensees erreicht. Die Wirkung liegt bis ca. 3–4 km Entfernung vom Seeufer im messbaren Bereich, beim relativ kleinen Barmsee hingegen nur bis in wenige 100 m Entfernung. Der Wasserspiegel des als Speichersee genutzten Walchensees variiert um ca. 8 m. Die Modellierung enthält daher für unmittelbar am Ufer liegende Messpunkte eine Unsicherheit von bis zu 0.15 mGal für die vertikale und bis zu 0''15 für die horizontalen Komponenten.





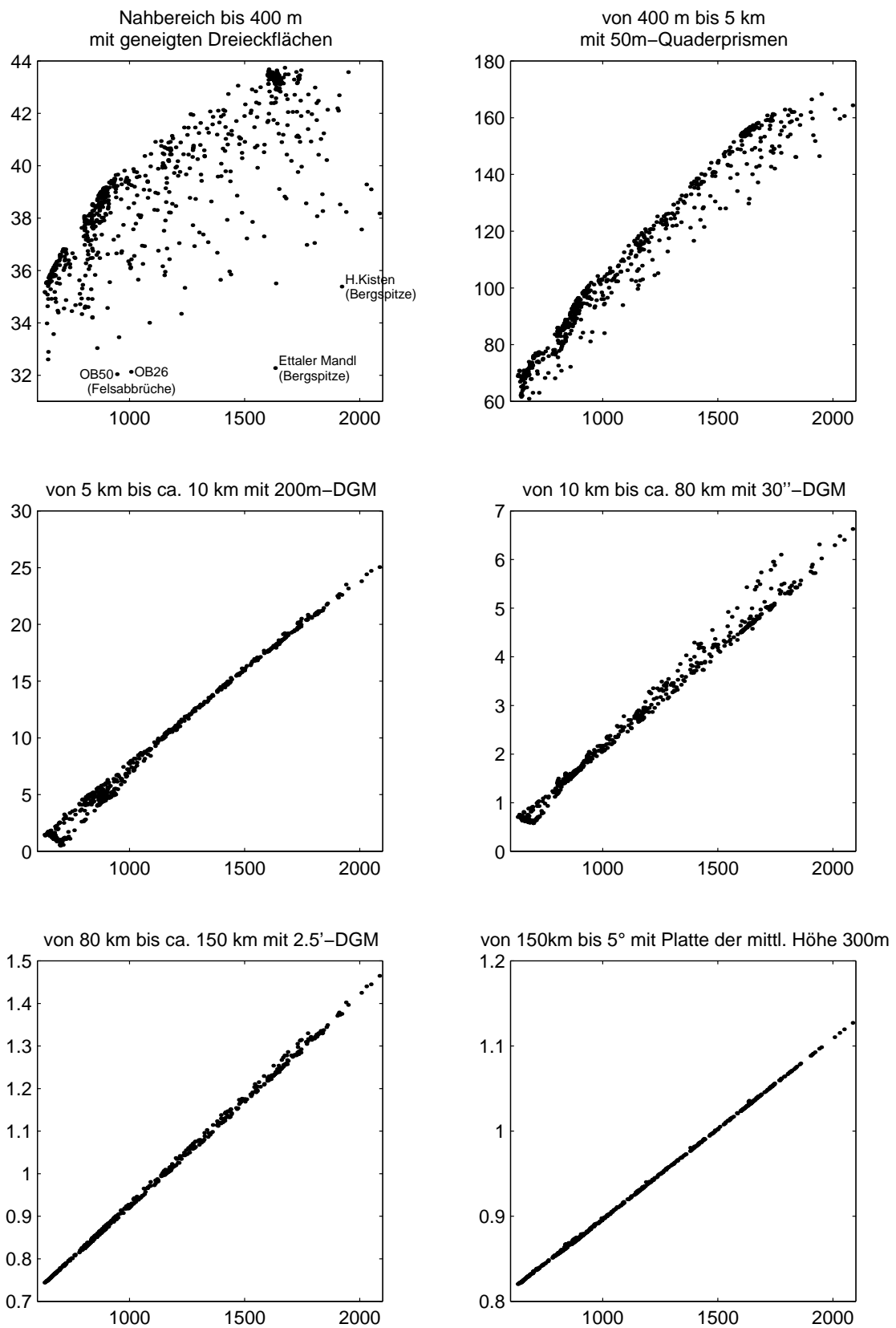
**Abbildung 6.11:** Geländewirkung  $V_z^{\text{TOP}}$ , bis 150 km Abstand aus DGM, darüber hinaus aus Platte mittlerer Höhe, mit Ellipsoid als Reduktionsniveau, in den Messpunkten des Estergebirges. Äquidistanz 10 mGal

## 6.4 Topographisch reduzierte Schwerstörungen und Lotabweichungen

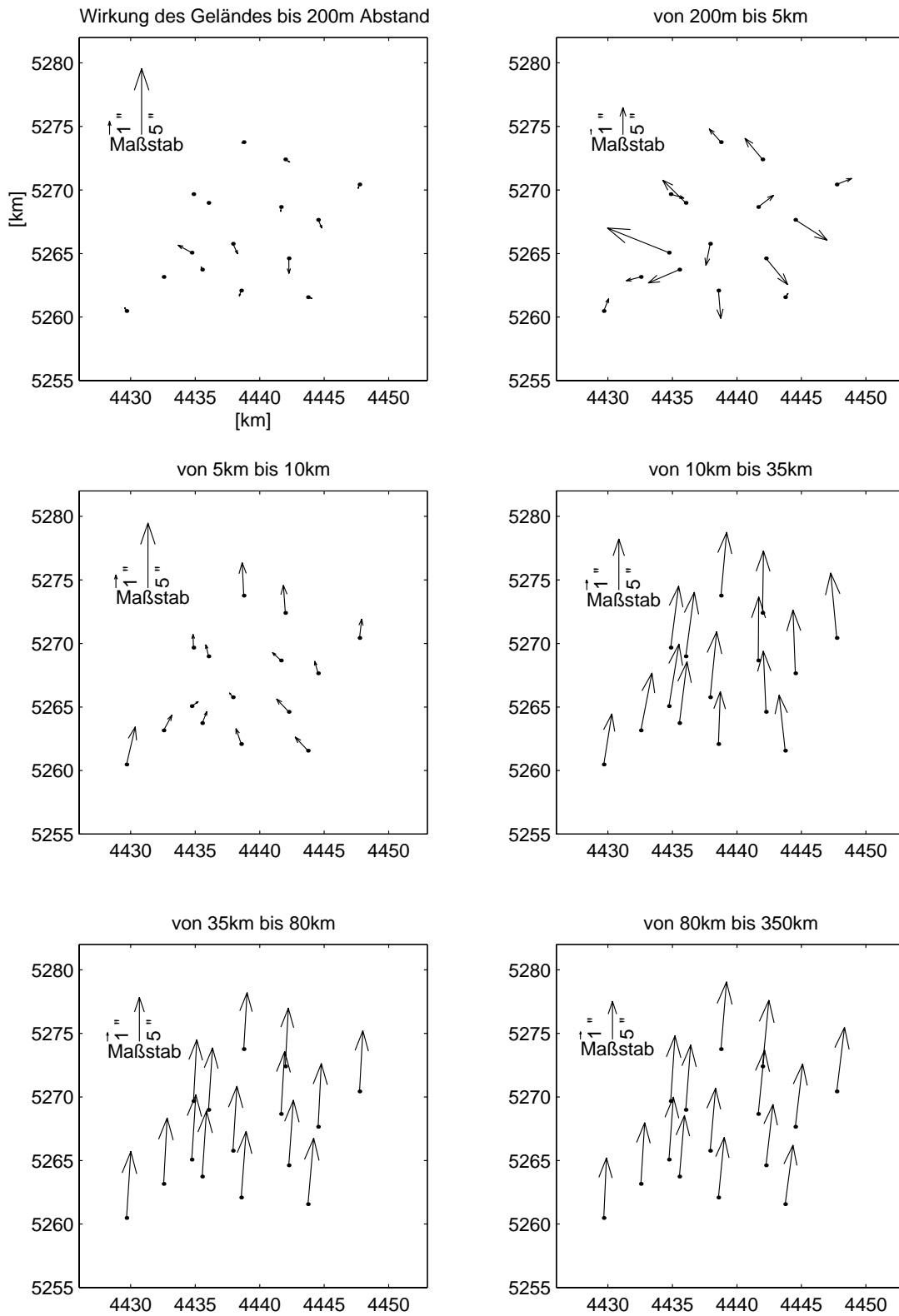
Abb.6.14 zeigt die in der beschriebenen Weise topographisch reduzierten Schwerstörungen  $\delta g_{\text{TOP}}$ . Die erkennbaren Strukturen werden in Kap. 7 näher beschrieben. Für die Schweremesspunkte des IAPG sind in Tab.6.2 die untersuchten Fehlerquellen zusammengestellt. Die Wirkungen von Dichteveränderungen, welche aufgrund ihrer Ausdehnung mehrere oder viele Punkte betreffen, werden im folgenden nicht als Fehler, sondern als Signalanteile betrachtet. Den Werten der Tabelle folgend, dürfte die Standardabweichung des teils zufälligen, teils gering korrelierten Gesamttrauschens bei etwa 0.1–0.3 mGal liegen. Bei sehr engen Punktabständen können aus empirischen Signalkovarianzfunktionen Obergrenzen für das Rauschen abgeleitet werden (siehe Kap.9.2). Für die Punktverdichtung Kühalm-Michelfeld nördlich des Krottenkopfs ergibt sich daraus, dass das Rauschen unter 0.12 mGal liegen muss. In der Punktwolke um den Punkt ES03 auf der Kühalm muss es sogar kleiner als 0.03 mGal sein; dort sind allerdings die Bedingungen für die Geländemodellierung besonders günstig.

Für die Punkte des BLVA und des Deutschen Schwerearchivs ist von einer etwas weniger genauen Geländemodellierung auszugehen. Häufig sind ihre Lagekoordinaten nur auf ca. 30 m genau aus der Karte abgegriffen.

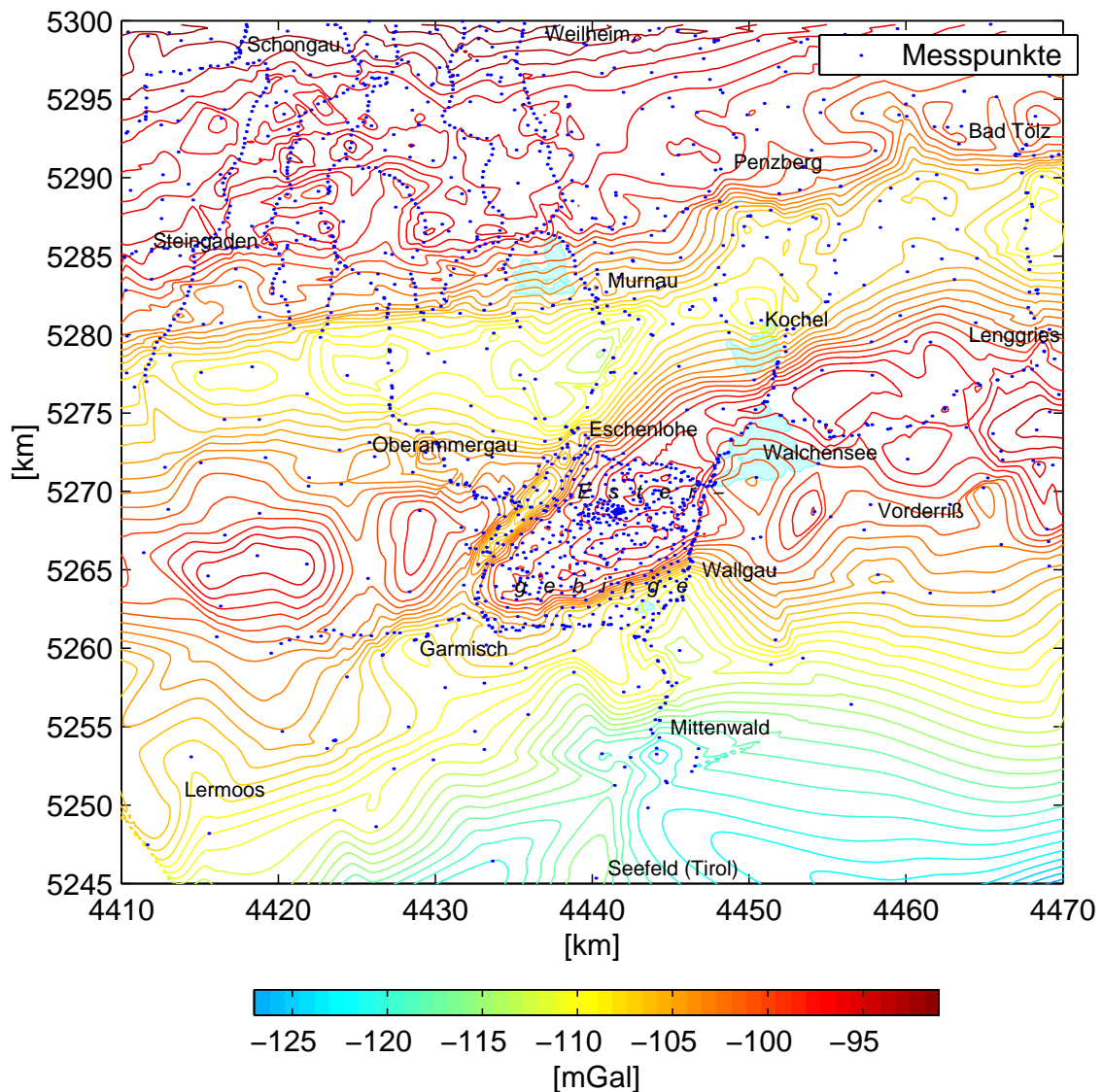
Für die österreichischen Punkte wurde die Geländereduktion aus dem Datensatz der TU Graz übernommen. Diese ist mit einem gröberen DGM mit Maschen von 350 m × 400 m bis zu einem Abstand von 167 km für Anomalien berechnet, also bis zum Geoid als Reduktionsniveau. Die Differenzen zu den anderen Datensätzen, die sich aus dem unterschiedlichen Reduktionsniveau für Anomalien und Störungen sowie aus dem unterschiedlichen Grenzabstand bei der Geländemodellierung ergeben, wurden aus nahezu identischen Punkten auf ca. ±1 mGal genau ermittelt



**Abbildung 6.12:** Beiträge zur Schwerereduktion aus den verschiedenen Zonen der Geländemodellierung in [mGal], dargestellt jeweils abhängig von der Höhe der Messpunkte in [m]



**Abbildung 6.13:** Komponenten der topographischen Reduktion der Lotrichtungen für verschiedene Zonen, jeweils mit GK-Koordinaten in [km]



**Abbildung 6.14:** Topographisch reduzierte Schwerestörungen  $\delta g_{\text{TOP}}$ , Dichte  $2.7 \text{ g/cm}^3$ , Äquidistanz  $1 \text{ mGal}$

und als Konstante angebracht.

Der relativ glatte Verlauf der  $\delta g_{\text{TOP}}$  ermöglichte die Elimination einiger grober Fehler, welche durch falsche Koordinaten, grobe DGM-Fehler im Nahbereich oder falsche Schwerewerte verursacht waren. Die sichere Identifizierbarkeit von nicht mit den benachbarten Punkten korrelierten Spitzen als grobe Fehler war bei den engen Punktabständen des Estergebirges schon bei Fehlern von  $1 \text{ mGal}$  gegeben, bei den größeren Punktabständen in der Umgebung hingegen erst ab  $5 - 10 \text{ mGal}$ .

Abb. 6.15 zeigt die topographisch reduzierten Lotabweichungen mit den Komponenten  $\xi_{\text{TOP}}$  und  $\eta_{\text{TOP}}$ . Die  $\xi_{\text{TOP}}$ -Komponente ist wegen der Lage des Netzes am Alpennordrand stark durch die Wirkung der Moho-Eintiefung unter den Alpen geprägt. Um die Resteffekte zu sehen, wurde in Abb. 6.15 von  $\xi_{\text{TOP}}$  ein Mittel von  $9''3$  abgezogen.

Tab. 6.3 zeigt das Fehlerbudget für topographisch reduzierte Lotabweichungen mit abgeschätzten Maximalfehlern. Anders als bei Schwerestörungen ist hier die Messgenauigkeit der astrono-

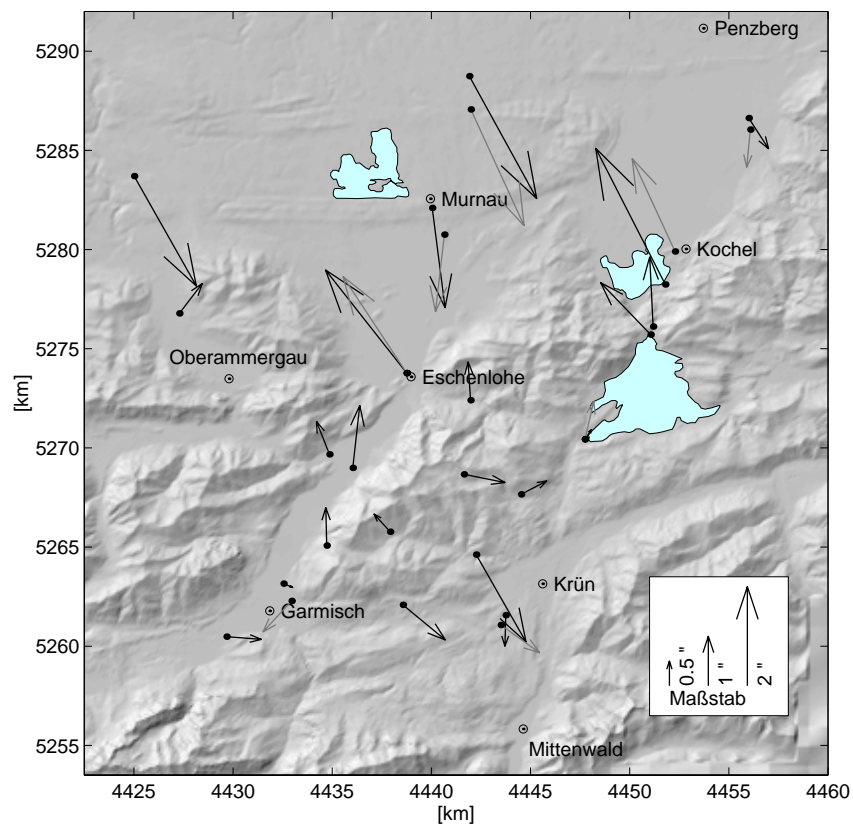
**Tabelle 6.2:** Fehlerbudget  $\delta g_{\text{TOP}}$ 

Fehler	$\sigma$ [mGal]	Maximum [mGal]	
zufälliger Meßfehler	0.02	0.1	
Fehler Driftmodellierung		0.1	entlang des Messwegs korreliert
Eichfehler		0.2	höhen- und instrumenten-abhängig
GPS-Höhenfehler ( $\sigma \approx 4$ cm, Max. 10 cm)	0.012	0.03	zufällig
fehlende oder fehlerhafte Geländenaufnahme	0.16	0.7	zufällig, $\sigma$ wegen weniger Ex- tremfälle relativ hoch
Rasterweite und Vereinfachun- gen der Geländemodellierung außerhalb des Nahbereichs		< 0.1	
DGM-Verschiebungen horizon- tal/ vertikal			zuverlässige Abschätzung auf- wendig, weitgehend durch DGM-Prüfung vermieden
kleinräumige Dichteanomalien (v.a. Lockermaterial direkt un- ter Messpunkt)		0.8	bei 20 m Dicke und $\Delta\rho =$ 1 g/cm <sup>3</sup> , zufällig

mischen Messung der dominierende Fehler. Aus dem schon in Kap. 4.3 angesprochenen Vergleich zwischen nah benachbarten Punkten ergeben sich Fehlerstandardabweichungen von 0''3–0''6.

**Tabelle 6.3:** Fehlerbudget  $\xi_{\text{TOP}}, \eta_{\text{TOP}}$ 

	max. Fehler [']
Messgenauigkeit astronomische Messung	0.5–1.0
geodätische Lagegenauigkeit	< 0.1
Modellierung Nahbereich	0.2
Seespiegelvariation Walchensee	0.15



**Abbildung 6.15:** Topographisch reduzierte Lotabweichungen, Mittel abgezogen, schwarz: BEK/IAPG-Punkte, grau: IfEN/ETHZ-Punkte

# 7 Störkörper

## 7.1 Gründe für die Modellierung von Störkörpern

Die topographisch reduzierten Schwerestörungen  $\delta g_{TOP}$  zeigen im untersuchten Gebiet ein stark differenziertes Bild. Dies gilt insbesondere dort, wo eine hohe Messpunktdichte eine gute Erfassung der Details ermöglicht, wie im Estergebirge oder entlang der Profile aus dem DGFI-Schwerearchiv westlich von Murnau. Dort wechseln größere relativ ruhige Zonen mit kleinräumigen schnellen Änderungen ab. Diese Zonen mit unterschiedlich stark bewegtem Signal sind auch in den topographisch reduzierten Lotabweichungen zu sehen, allerdings wegen der geringeren Punktdichte weniger klar. Ruhige Zonen bedeuten, dass die verwendete Reduktionsdichte nahe an der tatsächlichen Dichte der Topographie liegt, und dass deshalb die Wirkung der Topographie wirklich fast vollständig reduziert werden konnte. Dies ist im untersuchten Gebiet häufig gerade in Teilen mit sehr stark bewegter Topographie der Fall. Unruhig verlaufen die reduzierten Signale hingegen im Bereich von Störkörpern abweichender Dichte, vor allem wenn diese an oder nahe der Oberfläche liegen. Abb. 7.1 und Abb. 7.2 zeigen noch einmal die topographisch reduzierten Schwerestörungen und Lotabweichungen und enthalten zusätzlich die Grenzen der festgestellten Störkörper. Die Wirkung dieser Körper soll in diesem Kapitel untersucht werden.

Schwerefeldfunktionale, welche mit einheitlicher Dichte topographisch reduziert wurden, sind also inhomogene Signale. Dies gilt zwar im Prinzip nicht nur im Gebirge, weil Störkörper auch in flachen und hügeligen Gebieten vorkommen. Durch die intensive Verfaltung unterschiedlicher Schichten stehen im Gebirge aber auf kleinem Raum relativ große Einheiten unterschiedlicher Dichte nebeneinander an der Oberfläche an.

Bei der Untersuchung des Signalverhaltens und des daraus resultierenden Darstellungfehlers geht man üblicherweise von einem homogenen Signal aus, also davon, dass die Signalparameter Varianz und Korrelationslänge für das gesamte Gebiet gelten. Bei einem inhomogenen Signal hängen empirisch bestimmte Signalparameter stark vom jeweils gewählten Signalausschnitt ab und unterscheiden sich abhängig von den Anteilen an ruhigen bzw. unruhigen Signalanteilen, welche das gewählte Gebiet enthält. Es ist daher fraglich, ob die Funktionale in den im folgenden beschriebenen Teilgebieten als Teile des gleichen Signals betrachtet werden können, und ob es möglich und sinnvoll ist, die Signalparameter aus möglichst repräsentativen Ausschnitten zu bestimmen. Um dies zu beurteilen, ist es wichtig, eine Vorstellung von den Signalanteilen der Störkörper zu haben, also von ihrer Häufigkeit, Ausdehnung und ihren typischen Formen. Aus diesen Gründen ist die Untersuchung von Störkörpern - sonst eher Gegenstand der Geophysik und Geologie - auch für die geodätische Untersuchung des Schwerefeldes interessant.

Gestützt und zusätzlich motiviert wurde die Störkörpermodellierung durch die relativ große Anzahl der aus dem Umkreis des Estergebirges vorliegenden geophysikalischen Messungen. Neben den im folgenden genannten Quellen basiert die Modellierung auf der Geologischen Karte von Bayern 1 : 25 000 des Bayerischen Geologischen Landesamtes BGLA (Blätter 8333, 8334, 8432, 8433, 8533 sowie der unveröffentlichte Entwurf für Blatt 8532).

Die im folgenden untersuchten Störkörper eignen sich für eine Modellierung mit Quaderpris-

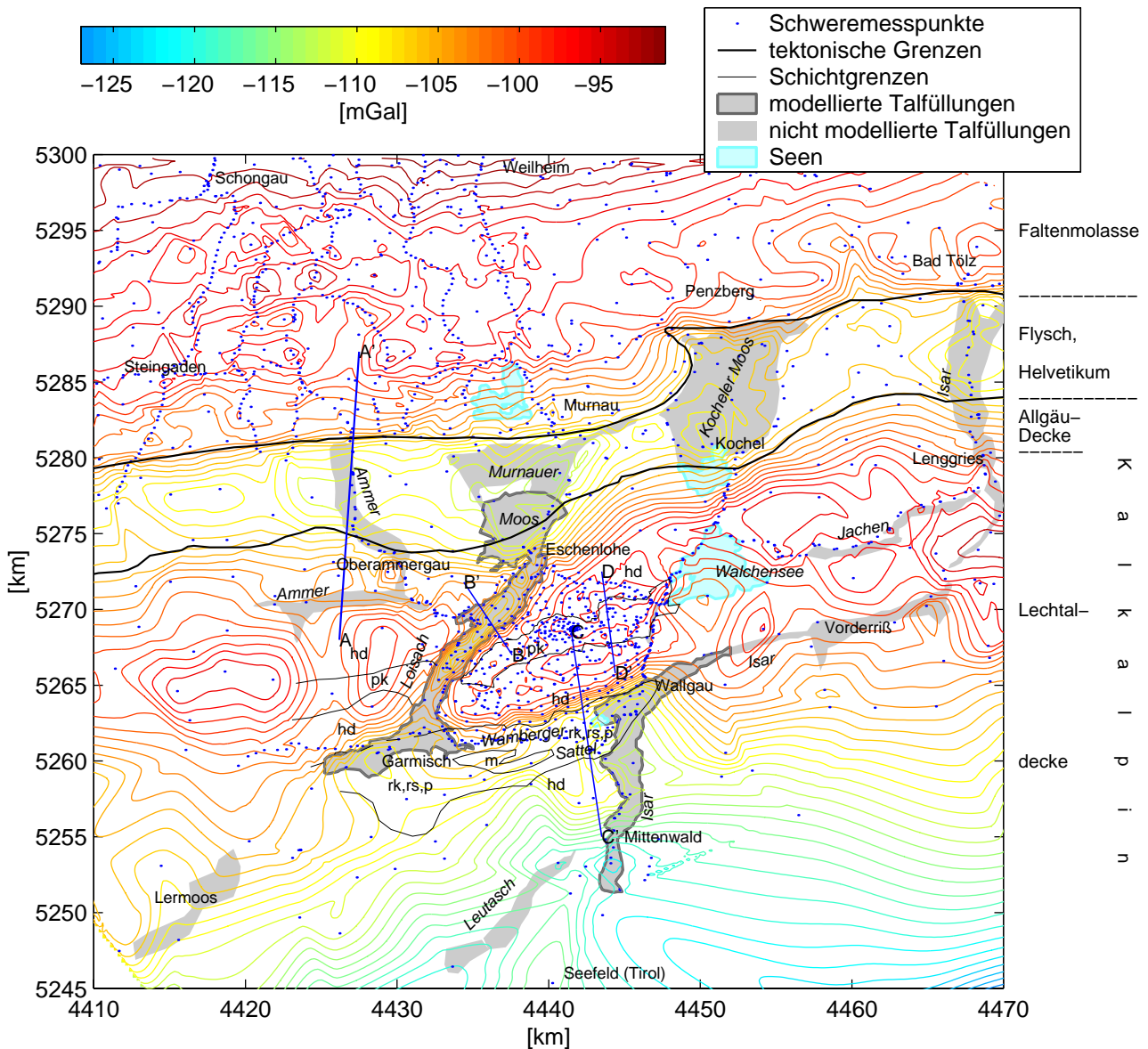


Abbildung 7.1:  $\delta g_{TOP}$  mit geologischen Strukturen, Äquidistanz 1 mGal, siehe Abb. 3.1

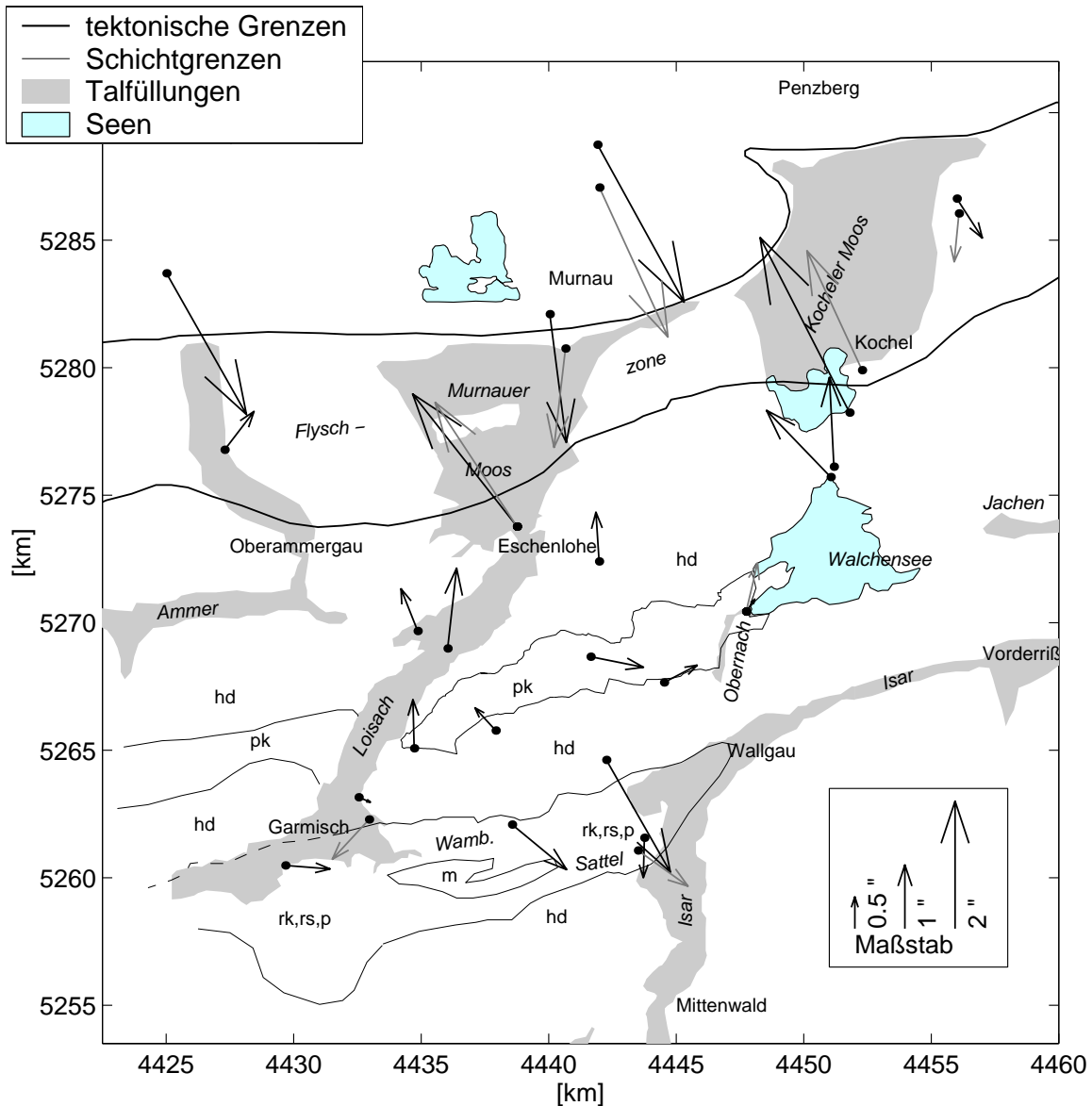
men, analog zur Geländemodellierung. Dabei müssen in einem umgrenzten Gebiet  $A$  jeweils Höhenraster für die untere und die obere Begrenzungsfläche des Körpers vorliegen. Diese Rasterwerte werden als  $z_1, z_2$  in den Quaderformeln (2.16) verwendet; anstelle der Topographiedichte  $\rho_{TOP}$  wird dabei ein Dichteunterschied für den Störkörper  $K$  mit  $\Delta\rho = \rho_K - \rho_{TOP}$  gewählt. Die Addition der Beiträge  $V_z^{\Delta\rho}$  der Einzelquader ergibt dann die Gesamtwirkung des Störkörpers

$$V_z^K = \sum_A V_z^{\Delta\rho}, \quad (7.1)$$

oder entsprechend für  $V_x$  und  $V_y$ . Störkörperreduzierte Schwerstörungen ergeben sich nun, indem die Wirkungen aller modellierten Körper von den  $\delta g_{TOP}$  subtrahiert werden:

$$\delta g_{STÖR} = \delta g_{TOP} - \sum_i V_z^{K_i}. \quad (7.2)$$





**Abbildung 7.2:** Topographisch reduzierte Lotabweichungen  $\xi_{\text{TOP}}$ ,  $\eta_{\text{TOP}}$  mit geologischen Strukturen (siehe Abb. 6.15)

## 7.2 Dichtewerte aus Proben und Literatur

Für die Bestimmung der Wirkung der Topographie auf Schwerefeldgrößen können im Labor bestimmte Dichten von Gesteinsproben wertvolle Anhaltspunkte geben. Sie sind allerdings selten direkt repräsentativ für die tatsächliche Gesamtdichte eines größeren Gesteinsverbandes (Verbandsdichte, Blockdichte). Abweichungen ergeben sich aus Hohlraumanteilen aufgrund der Porosität und der Zerklüftung des Gesteins, aber auch aus lokalen Variationen der eigentlichen Korndichte innerhalb eines Gesteinsverbandes.

Für das Gebiet des Estergebirges selbst sind keine Werte von Gesteinsproben bekannt. In der nahegelegenen Tiefbohrung Vorderriß wurden für die meisten im Estergebirge vorkommenden Gesteine Dichtewerte bestimmt (Tab. 7.1, nach Dohr, 1981).

Im 10 km entfernten Estergebirge können die Dichten der entsprechenden Schichten allerdings

**Tabelle 7.1:** Dichtewerte aus der Tiefbohrung Vorderriß

Abkürzung	Schicht	Dichte ( $\text{g}/\text{cm}^3$ )
hd	Hauptdolomit	2.6–2.8, meist 2.75
r	Raibler Schichten	
	rr Raibler Rauhwanke	2.6
	Anhydrit	2.8–2.9
	Dolomit	2.55–2.9
	rk Raibler Kalke	2.3–2.5
	rs Raibler Sandstein, Tonstein	2.4–2.6
p	Partnachsichten	2.2–2.7
m	Alpiner Muschelkalk	2.6–2.8

stratigraphisch (in der Reihenfolge ihres Alters)

schon deutlich von den Werten in Vorderriß abweichen, insbesondere für die heterogenen Raibler Schichten. So treten die in Vorderriß ca. 800 m mächtigen Raibler Anhydrite und Dolomite mit meist hoher Dichte im Estergebirge (zumindest an der Oberfläche) gar nicht auf. An ihrer Stelle liegt hier bis ca. 150 m mächtige Raibler Rauhwanke, welche möglicherweise durch Auslaugung aus Anhydrit und Dolomit entstanden ist (Bachmann und Müller, 1981; Jerz, 1966). Die Raibler Schichten enthalten lokale Gipseinlagerungen, für welche von nur ca.  $2.2\text{--}2.3\text{ g}/\text{cm}^3$  auszugehen ist. Die eher hohen, homogenen Werte für Dolomite sowie die niedrigeren, stärker schwankenden Werte für Kalke und Sandsteine decken sich einigermaßen mit den Ergebnissen anderer Quellen (Landolt-Börnstein, 1982).

Für die Flyschzone findet man in der Literatur niedrige Dichten von  $2.3\text{--}2.6\text{ g}/\text{cm}^3$  (Götze et al., 1979; Granser et al., 1983). Für die Molasse ergibt sich aus Bohrungen im Alpenvorland bei ungestörter Lagerung eine Zunahme der Dichte von  $2.1\text{ g}/\text{cm}^3$  an der Oberfläche über  $2.3\text{--}2.5\text{ g}/\text{cm}^3$  in 500 m Tiefe bis zu  $2.5\text{--}2.6\text{ g}/\text{cm}^3$  in 4000 m Tiefe (Bohrproben in Inselmann, 1985, zur Dichtezunahme s. Müller, 1988; Kahle und Marti, 1993; Schwendener, 1984). Die vorliegende Arbeit beschränkt sich jedoch auf die Zone der Faltenmolasse. In ihr wurden ursprünglich sehr tief liegende Molasseschichten gefaltet und an die Oberfläche geschoben. Deshalb ist für diesen Bereich von eher höheren Dichten um  $2.6\text{ g}/\text{cm}^3$  auszugehen.

Sehr geringe Dichten weisen die eiszeitlichen (quartären) Talfüllungen auf. Eine 60 m tiefe Bohrung des BGLA in der Talfüllung des Ammertales bei Unterammergau ergab Werte zwischen  $1.8$  und  $2.1\text{ g}/\text{cm}^3$ , für die ganz unten liegende Grundmoräne  $2.2\text{ g}/\text{cm}^3$ . Eine exakte Bestimmung ist wegen der nicht genau bekannten Wassersättigung schwierig. Bei der Modellierung von Talfüllungen anderer Alpentäler gehen die meisten Autoren von Dichten in diesem Bereich aus (Aric und Steinhauser, 1976; Granser et al., 1983; Schwendener, 1984; Bernauer und Geiger, 1986; Militzer, 1984). In einigen Fällen wird auch für Talfüllungen eine geringe Dichtezunahme mit der Tiefe modelliert. Von ähnlich niedrigen Dichten ist für Moränen, Bergsturzmassen und Geröllschutt auszugehen.

Aus zahlreichen seismischen Messungen liegen Geschwindigkeitsangaben für Talfüllungen und Gestein vor. Die theoretisch mögliche Umrechnung der Geschwindigkeiten in Dichtewerte ist jedoch leider in den oberflächennahen Schichten bis ca. 1–2 km Tiefe mit zu großen Unsicherheiten behaftet, da die seismischen Geschwindigkeiten dort stark von Poren und Klüften beeinflusst werden. Gemessene Geschwindigkeitsunterschiede ermöglichen allerdings eine gute Lokalisierung von Dichtekontrasten wie der Grenze zwischen Talfüllung und Felsuntergrund.

### 7.3 Quartäre Talfüllungen

In vielen großen Alpentälern trifft man mächtige Seetone und Kiese aus den Eiszeiten (Quartärzeit) als Talfüllungen an. Aufgrund ihrer geringen Dichte haben sie einen prägenden Einfluss auf das Schwerfeld im alpinen Raum. In topographisch reduzierten Schwerstörungen wirken sie sich als grabenartige Vertiefungen aus, weil in ihrem Bereich aufgrund der zu hohen Reduktionsdichte zu viel Masse reduziert wird. Die Talfüllungen bewirken auf diese Weise die zunächst überraschende Situation, dass die größten Variationen der Schwerstörungen sich nach der topographischen Reduktion nicht mehr im Bereich der Berggipfel befinden, sondern in den flachen Talböden. Solche Strukturen zeigen sich auch in schweizerischen und österreichischen Datensätzen als prägendes Element (Rosselli et al., 1999; Daxinger, 1996). Sie sind allerdings erst bei hoher Messpunktdichte eindeutig identifizierbar.

In der Umgebung des Estergebirges liegen in den beiden größten Tälern, dem Isar- und dem Loisachtal, mächtige Talfüllungen. Weniger mächtige, aber in ihrer Wirkung noch deutlich messbare Talfüllungen trifft man in den Tälern der Flüsse Ammer, Oberrach, Jachen und Leutasch an.

Die Loisachtalfüllung bewirkt in den  $\delta g_{\text{TOP}}$  einen Grabeneffekt von bis zu 8 mGal. Die scharfen Ränder dieses Grabens fallen mit dem Rand des Talbodens zusammen. In der Detailabbildung Abb. 7.3 ist die Struktur noch besser erkennbar. Weniger klar zeichnet sich die Isartalfüllung in den  $\delta g_{\text{TOP}}$  ab. Sie wird von den dichten Messpunkten des Estergebirges nur am Rand erfasst und ist in diesem Bereich weniger mächtig. Zudem sind hier andere überlagernde Effekte des Wamberger Sattels (s.u.) stärker prägend. Entlang der in Abb. 7.1 grau markierten Talfüllungen sind auch außerhalb des Estergebirges einige Spitzen und Steilstellen vorhanden. Die Talform ist dabei meist nicht als Graben erkennbar, weil die Messpunktstände deutlich größer als die Talstrukturen sind.

An vielen Stellen geben refraktionsseismische und geoelektrische Messungen sowie Bohrungen Aufschluss über die Tiefe des Felsuntergrundes unter den Talfüllungen, an welchem die Dichte sprunghaft ansteigt. Die Daten dieser Messungen wurden den Quellen Reich (1955); Kuhnert (1967); Doben (1976); Bader (1979); Frank (1979); Seiler (1979); Doben und Frank (1983) sowie Akten des BGLA entnommen. Eine Auswahl der wichtigsten Messungen ist in Abb. 7.4 eingezeichnet. Die Messungen haben an manchen Stellen ein kräftiges Relief im Felsuntergrund festgestellt. Stark übertiefte Senken wechseln mit Schwellen nahe der Oberfläche ab. Als Ursache dafür werden die glaziale Erosion sowie tektonische Bewegungen in Betracht gezogen. Durch die Übertiefungen erreichen die Talfüllungen Mächtigkeiten von bis zu 500 m (im Loisachtal bei Farchant). Aus den seismischen Geschwindigkeiten ergibt sich, dass meist nur die obersten Schichten der Talfüllungen nicht eisvorbelastet sind. Die tieferen Schichten sind hingegen bereits kompakter, müssen daher schon einmal eisbelastet gewesen sein und folglich älter als die jüngste (Würm-)Eiszeit sein (Bader, 1979; Frank, 1979). Am Alpenrand weitet sich das Loisachtal zu den Becken des Murnauer und des Kocheler Mooses. Auch diese enthalten quartäre Talfüllungen, allerdings nicht mehr ganz so mächtig wie die inneralpinen Täler. Die aus den Moosen aufragenden Felsrippen („Köchel“) lassen auch hier einen stark bewegten Felsuntergrund vermuten; allerdings liegen erst an wenigen Stellen geophysikalische Messungen vor.

Talfüllungen eignen sich gut für eine Modellierung mit Raster-Quaderprismen. Dies wurde für das Isartal zwischen Scharnitz (Landesgrenze) und unterhalb von Wallgau sowie für das Loisachtal von Grainau bis zum südlichen Teil des Murnauer Mooses durchgeführt.

Der Rand der quartären Füllungen wurde aus geologischen Karten abgegriffen. Das Raster für die obere Begrenzung der Quader innerhalb dieses Randes wurde dem DGM entnommen. Damit reicht das Störkörpermodell bis zur Oberfläche. Für die untere Begrenzung, den Felsuntergrund der Täler, wurden gestützt auf die geophysikalischen Messungen jeweils 50 m-Raster interpoliert. Die Stützpunkte für die

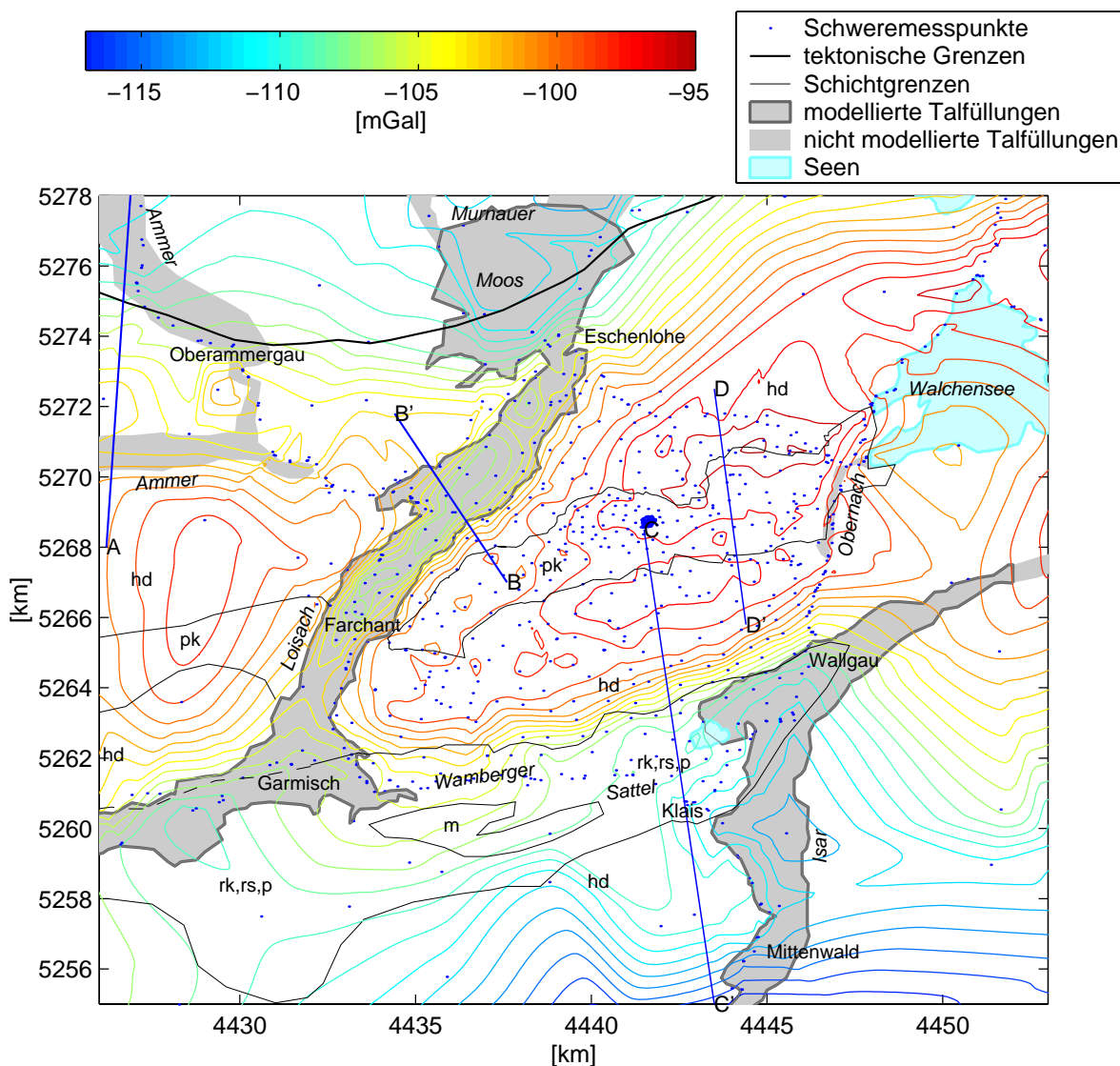
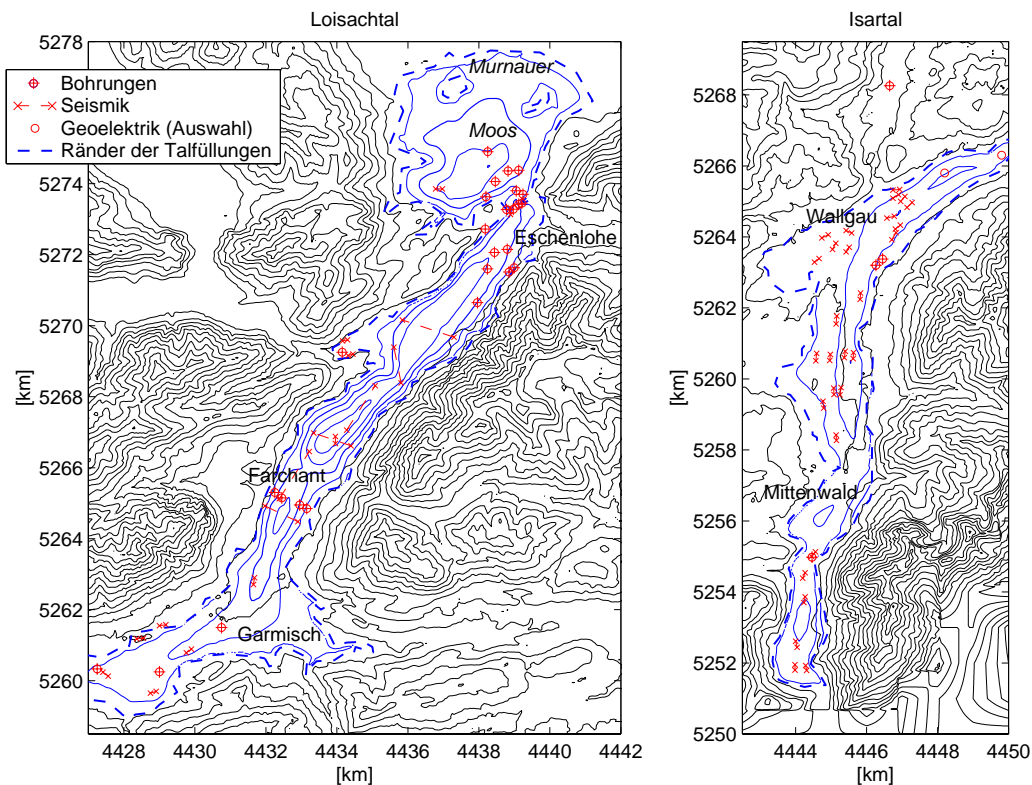


Abbildung 7.3:  $\delta g_{TOP}$  mit geologischen Strukturen, Detail Estergebirge, Äquidistanz 1 mGal

Interpolation wurden im Isartal aus einem Höhenlinienplan für den Felsuntergrund des BGLA von 1976 abgegriffen. Für den mittleren Teil des Loisachtals lag ebenfalls ein Höhenlinienplan aus Kuhnert (1967) vor. Dieser wurde unter Berücksichtigung neuerer Messungen des BGLA korrigiert, nach Norden und Süden erweitert und über daraus abgegriffene Stützpunkte in ein 50-m-Raster umgesetzt. In Abb. 7.4 sind die interpolierten Rastermodelle in Höhenlinien dargestellt. In die Modelle der Talfüllungen wurden einige angrenzende Moränen und Geröllkegel einbezogen, deren Dichte derjenigen der Talfüllungen nahekommen dürfte.

Abb. 7.5 zeigt am Beispiel des Loisachtals, dass die Berücksichtigung des Talmodells mit einem Dichtekontrast von  $0.7 \text{ g/cm}^3$  den Grabeneffekt in den Schwerestörungen weitgehend beseitigt. Dies ist im Isolinenbild der störkörper-reduzierten Schwerestörungen  $\delta g_{STÖR}$  (Abb. 7.6) auch flächenhaft erkennbar. Allerdings bleiben einige lokale Spitzen von ca.  $\pm 2\text{-}3 \text{ mGal}$  übrig, z.B. in der Nähe der unterirdischen Schwellen bei Farchant (Ziffer 1 in Abb. 7.6) und Eschenlohe (Ziffer 2). An diesen Stellen kann der Felsuntergrund aufgrund von ungenauer oder zu wenig dichter



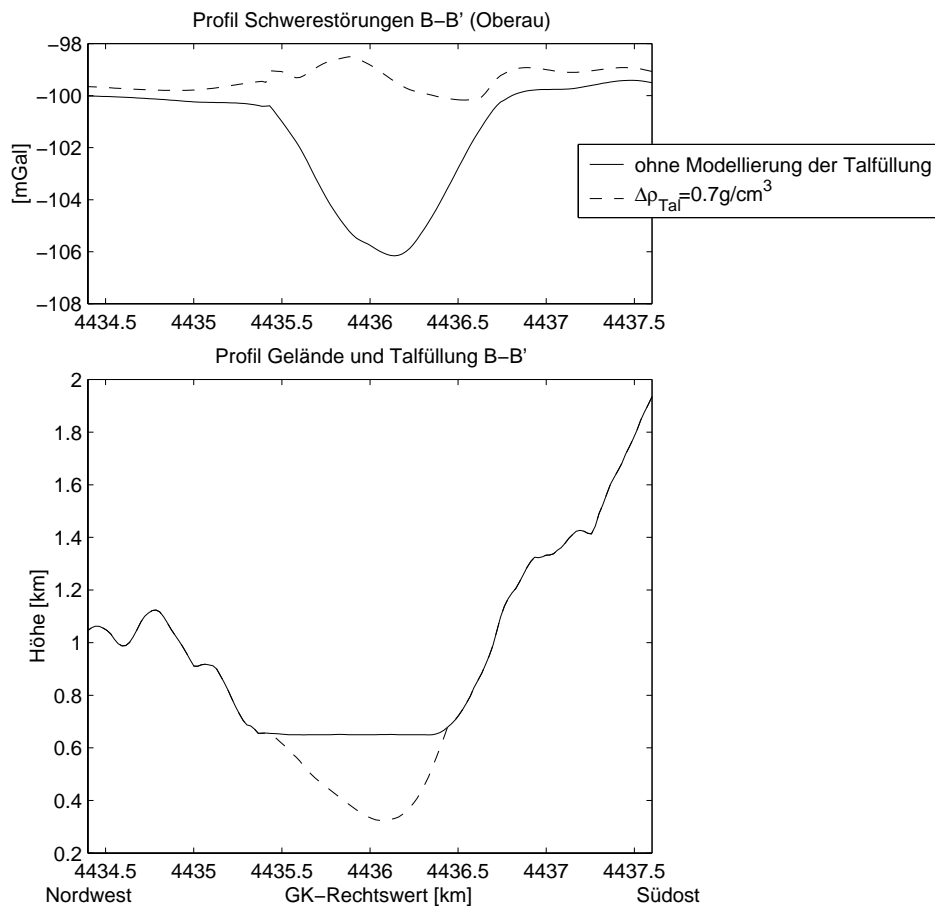
**Abbildung 7.4:** Modelle für Felsuntergrund, Höhenlinien mit Äquidistanz 100 m, mit geophysikalischen Messpunkten

seismischer Information fehlerhaft modelliert sein. Bei Eschenlohe können auch zum Rand der kalkalpinen Zone hin zunehmende Inhomogenitäten des Felsuntergrundes an den Resteffekten beteiligt sein. Auch Dichteunterschiede innerhalb der Talfüllung kommen in Frage.

## 7.4 Flyschzone

Die Flyschzone am Alpennordrand zeichnet sich in den  $\delta g_{TOP}$  als grabenartige Vertiefung ab. In den Bougueranomalien der Schwerekarte von Plaumann (1995) ist dieser Graben zwischen Sonthofen im Westen und Salzburg im Osten durchgehend und immer der Flyschzone folgend deutlich zu erkennen. Im hier untersuchten Ausschnitt erreicht der Effekt eine Amplitude von ca. 10 mGal. Bei hoher Punktdichte, v.a. entlang der Profilmessungen aus dem DGF-Schwerearchiv westlich von Murnau, wird die wahre Steilheit der Flanken des Grabens deutlich. Dies bedeutet, dass hier – ähnlich wie bei den Talfüllungen – eine Dichtekontrastfläche die Oberfläche erreichen muss. Der Flysch muss eine geringere Dichte sowohl als die kalkalpinen Decken im Süden als auch als die Faltenmolasse im Norden aufweisen. Die nördliche Grenze des Störkörpers ist durch die gegebenen Messpunkte meist klar vorgegeben, während die südliche Grenze durch die größeren Punktabstände teilweise weniger sicher lokalisiert ist. Der Befund wird durch die topographisch reduzierten Lotabweichungen bestätigt. Bei Störkörpern geringerer Dichte ist zu erwarten, dass die Lotabweichungsvektoren zum Zentrum des Störkörpers hin zeigen. Dies ist in der Umgebung des Flysch-Störkörpers in Abb. 7.2 deutlich zu erkennen.

Die Schichten der Flyschzone stehen an der Oberfläche fast senkrecht. In größerer Tiefe ver-



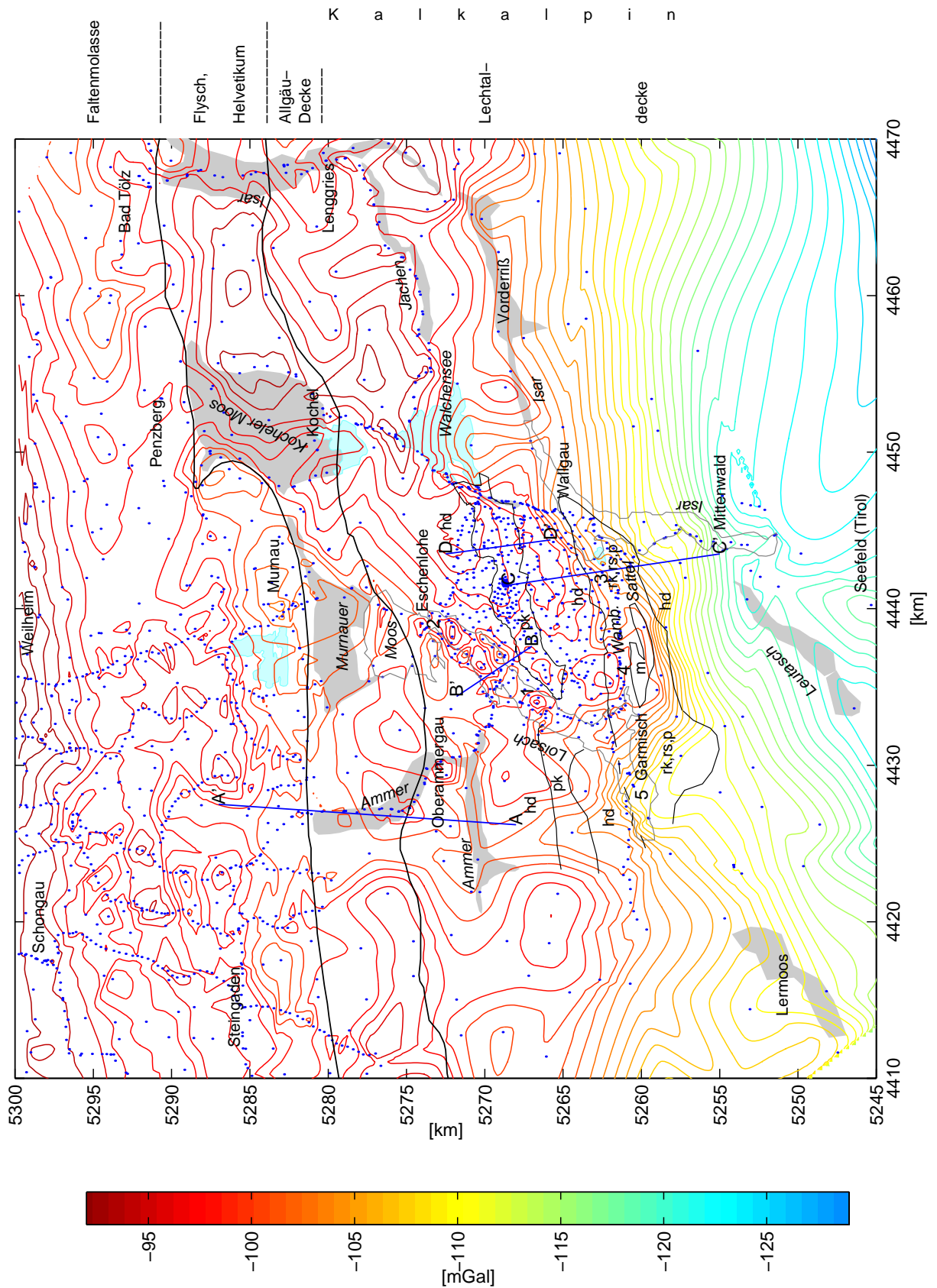
**Abbildung 7.5:** Querprofil Loisachtal B–B' mit Talfüllung als Störkörper. Lage des Profils siehe Abb. 7.1

flachen sie nach Süden hin und werden teilweise durch Helvetikum abgelöst (Doben und Frank, 1983). Der Flysch setzt sich vermutlich noch ein Stück weit nach Süden unter die Allgäu-Decke hinein fort, bevor er auskeilt. Für das Helvetikum ist die Fortsetzung nach Süden unter dem Kalkalpin in der Bohrung Vorderriß nachgewiesen (vgl. Abb. 3.1). Der unterirdische Verlauf der als Dichtekontrastfläche in Frage kommenden Schichtgrenzen ist hier viel unsicherer als bei der Modellierung der Talfüllungen. Trotz dieser Unsicherheiten konnte der Flysch-Störkörper im Bereich des untersuchten Gebietes mit gutem Ergebnis modelliert werden.

Die Grenzen an der Oberfläche wurden wieder geologischen Karten entnommen. Zwischen diesen Grenzen und geschätzten Stützpunkten für die untere Begrenzung des Körpers wurden Raster für die seitlichen und für die untere Begrenzungsfläche des Körpers interpoliert. Wegen des relativ geringen zu erwartenden Dichteunterschiedes sind auch die Genauigkeitsansprüche hinsichtlich der Form des Körpers geringer als bei der Topographie oder den Talfüllungen. Deshalb wurde mit 100 m Maschenweite ein etwas gröberes Raster gewählt.

In Abb. 7.7 sind Schwerestörungen nach der Reduktion unterschiedlicher Flysch-Modelle im Profil dargestellt. Dabei zeigt sich, dass der Effekt des Flysch-Störkörpers sowohl durch eine flache Schicht (Modell 1) mit großer Dichteanomalie  $\Delta\rho$  als auch durch einen tiefreichenden Körper (Modell 2) mit kleiner Dichteanomalie erklärt werden kann.

Vor allem unmittelbar am Nordrand des Körpers ist das Ergebnis des tiefreichenden Körpers etwas überzeugender, während nach der Reduktion der flachen Schicht immer noch ein gewisser Ausschlag nach unten als Resteffekt bleibt. Sicher kann festgestellt werden, dass der Nordrand des Störkörpers nicht genau



**Abbildung 7.6:** Schwerstörungen nach Reduktion der Störkörper, Äquidistanz 1 mGal, mit den Dichtewerten: Topographie 2.75 g/cm<sup>3</sup>, Talfüllungen Isar, Loisach 2.0 g/cm<sup>3</sup>, Flysch (Modell 2) 2.65 g/cm<sup>3</sup>, Wamberger Sattel (rk,rs,p,m) 2.5 g/cm<sup>3</sup>, Plattenkalk 2.63 g/cm<sup>3</sup>. Ziffern 1–5: siehe Erklärungen im Text



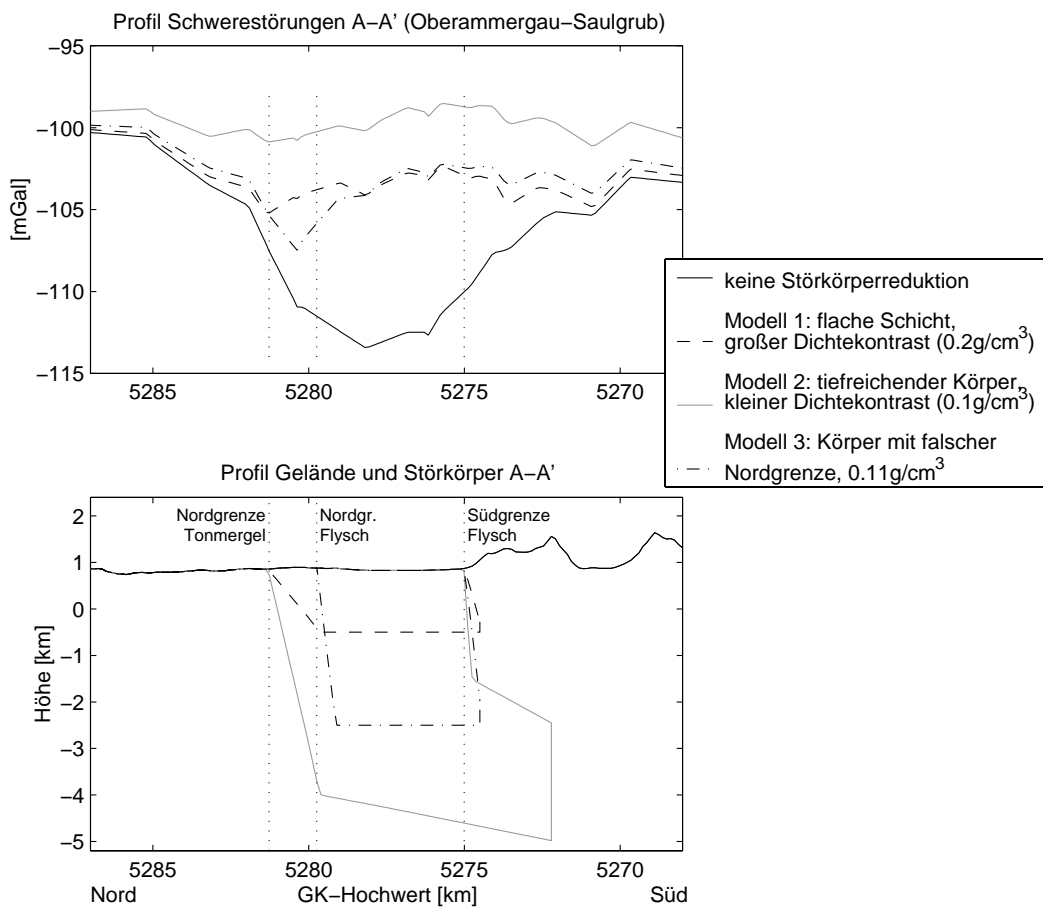


Abbildung 7.7: Querprofil Flyschzone A-A' mit verschiedenen Störkörpermodellen (Lage s. Abb. 7.1)

mit der Flyschgrenze zusammenfällt, wie zunächst (Modell 3) angenommen wurde. Dann bliebe nämlich eine deutlich fehlerhafte Spitze nach unten bei Hochwert 5280 übrig. Der Störkörper geringerer Dichte scheint zusätzlich zum Flysch zwei anschließende, 200-1500 m mächtige Schichten der Faltenmolasse zu umfassen (Deutenhausener Schichten und Rupel-Tonmergel).

Für die Darstellung der  $\delta g_{\text{STÖR}}$  in Abb. 7.6 wurde Modell 2 aus Abb. 7.7 verwendet. Durch das gewählte  $\Delta\rho$  wurde der Grabeneffekt der Flyschzone im wesentlichen beseitigt. Vor allem die beschriebenen steilen Flanken bei dichten Messpunkten sind fast vollständig verschwunden. Dort wurde die Grenze des Störkörpers gut getroffen.

In den  $\delta g_{\text{STÖR}}$  sind in der Flyschzone einige Vertiefungen im Bereich von nicht modellierten Talfüllungen (Ammer, nördliches Murnauer Moos, Kocheler Moos, Isar bei Bad Tölz) sowie eine ausgedehnte Senke zwischen Ammer und Kochelsee übrig geblieben. Hier könnte der Flysch weniger dicht oder mächtiger als angenommen sein. Am nordwestlichen Ende des Kocheler Mooses, wo die südlichste Mulde der Faltenmolasse abtaucht, verlaufen die  $\delta g_{\text{STÖR}}$  immer noch steil. Dort ist die Modellierung wohl schlecht gelungen.

Südlich der Flyschzone schließt ein 2–5 km breiter Streifen mit eher geringen  $\delta g_{\text{STÖR}}$ -Werten an. In diesem Bereich stehen in rascher Folge Schichten unterschiedlichen Alters aus Allgäu- und Lechtaldecke an, darunter einige Kalke mit möglicherweise geringerer Dichte. Deshalb ist zumindest bei der gegenwärtig vorhandenen Messpunktdichte in diesem Bereich auch der Dichteunterschied zwischen Flysch und dem weiter südlich anschließenden Hauptdolomit unsicher. Die für Abb. 7.6 angenommenen Dichtewerte für Faltenmolasse erscheinen im Vergleich mit den Werten aus Proben und Literatur (Kap. 7.2) eher zu hoch. Andererseits ist der Wert für den Hauptdolomit gut gesichert (siehe Kap. 8). Möglicherweise ist folgende



Dichteabfolge realistischer:

Faltenmolasse	2.67 g/cm <sup>3</sup>
Flysch, Helvetikum	2.60 g/cm <sup>3</sup>
Hauptdolomit	2.75 g/cm <sup>3</sup>

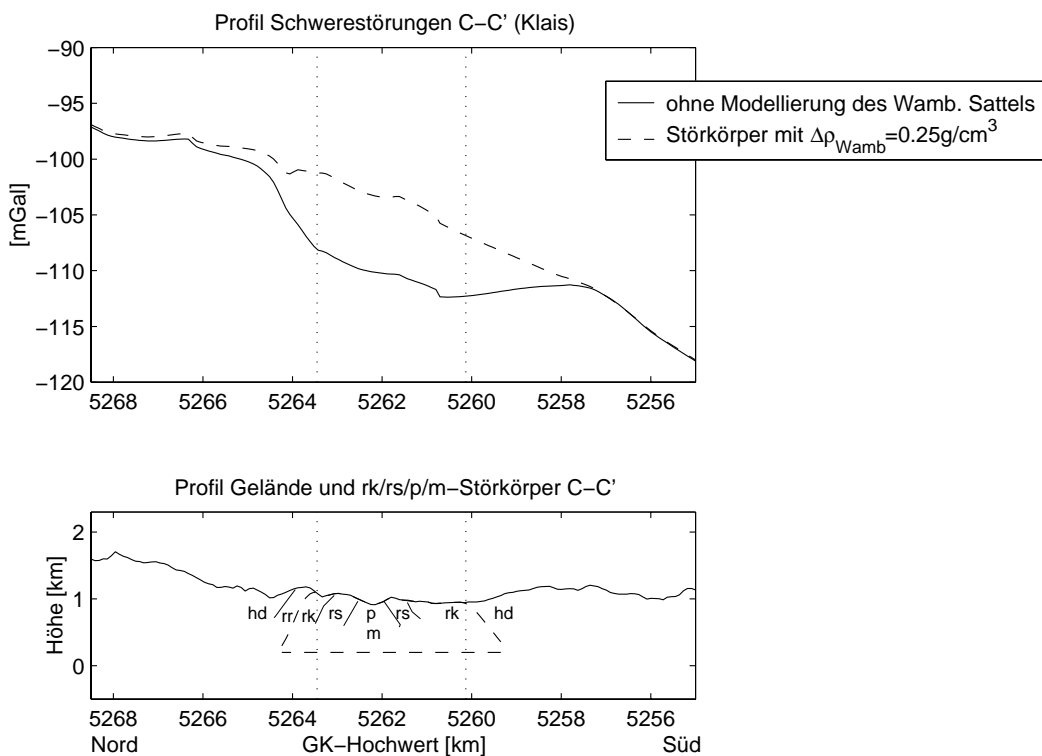
Erwähnt werden soll noch, dass die Kleinstrukturen der  $\delta g_{\text{TOP}}$  im Bereich der Faltenmolasse offensichtlich mit dem Wechsel zwischen an der Oberfläche anstehenden Gesteinsriegeln und mit Moränen bedeckten Becken zusammenhängt (zum Aufbau der Faltenmolasse s. Müller, 1970).

## 7.5 Wamberger Sattel

Im Süden des Estergebirges zwischen Garmisch und Wallgau enthalten die  $\delta g_{\text{TOP}}$  eine langgestreckte Struktur, welche auf einen Dichtekontrast an der Oberfläche hinweist. Die  $\delta g_{\text{TOP}}$  fallen dort auf kurzer Distanz um bis zu 10 mGal in Richtung Süden ab. Durch die hohe Messpunktdichte wird der Verlauf der Struktur in ihrem mittleren Teil sehr zuverlässig beschrieben. Die Reduktion der Isar-Talfüllung, welche diesen Bereich streift, verringert den Effekt nur wenig. Der Vergleich mit der geologischen Karte zeigt, dass die Struktur im wesentlichen der Grenze zwischen Raibler Rauhacke und Raibler Kalken folgt. Südlich dieser Grenze stehen im Inneren des Wamberger Sattels neben den Raibler Kalken noch Raibler Sandstein, Partnachsichten und Muschelkalk teilweise intensiv verfault an der Oberfläche an. Diese Gruppe von Schichten muss aufgrund des Verlaufs der  $\delta g_{\text{TOP}}$  eine geringere Dichte als die darüber liegenden Schichten der Rauhacke und des Hauptdolomits haben. Für die Raibler Kalke bis einschließlich der Partnachsichten befindet sich dieser Schluss im Einklang mit den Ergebnissen der Bohrung Vorderriß (Tab. 7.1). Im Süden des Wamberger Sattels, wo die Raibler Schichten wieder unter den Hauptdolomit eintauchen (außerhalb des eigentlichen Projektgebiets), ist der Dichtekontrast aufgrund der geringen Messpunktdichte schlechter lokalisierbar.

Auch dieser Störkörper wurde modelliert. Alle Schichten innerhalb der Grenze der Raibler Kalke wurden zu einem Körper zusammengefasst. Die nördliche und südliche Flanke wurden gemäß dem geologischen Befund an der Oberfläche jeweils mit 30° bis 40° Neigung fallend angenommen. Die Unterseite des Körpers wurde bei einer Höhe von 200 m NN angesetzt, so dass sich eine Mächtigkeit von 600 m–800 m bis zur Geländeoberfläche ergab. Diese Werte erscheinen im Vergleich zu den entsprechenden Schichtmächtigkeiten in Vorderriß als plausibel, sind aber wegen der starken Verfaltung und der Variation der Mächtigkeiten als unsicher einzustufen. Im Westen bei Garmisch sowie im Osten bei Wallgau tauchen die Raibler Schichten zunächst unter die Talfüllungen, dann unter Hauptdolomit ab. Wegen der Unsicherheit des weiteren unterirdischen Verlaufs wurde der Modellkörper jeweils nur wenig unter die bedeckenden Schichten hinein fortgesetzt. Als Dichtekontrast zur Umgebung wurde 0.25 g/cm<sup>3</sup> angesetzt. Die sich ergebenden reduzierten Schwerestörungen (Abb. 7.6 sowie Profil Abb. 7.8) zeigen im zentralen Teil einen ruhigen Verlauf (Ziffer 3 in Abb. 7.6). Hier gibt das Modell den gemessenen Effekt gut wieder. Östlich von Garmisch ergibt sich eine Aufwölbung (Ziffer 4). Dort wirkt die Modellreduktion zu stark. Daran ist vermutlich der dort im Sattelkern anstehende, nicht modellierte Muschelkalk mit wieder etwas höherer Dichte beteiligt; aber auch Dichteunterschiede innerhalb der Raibler Kalke könnten eine Rolle spielen. Westlich von Garmisch endet das Störkörpermodell. Das deutliche  $\delta g_{\text{STÖR}}$ -Tief (Ziffer 5) lässt hier aber die Fortsetzung der Schichten in größerer Mächtigkeit nahe der Oberfläche vermuten, wohl direkt unter der Talfüllung. Auch bei Wallgau wirkt die Modellreduktion noch zu schwach, um die Struktur an der rk-Grenze ganz zu beseitigen. Hier müsste das Modell wohl ebenfalls im Inneren in größerer Mächtigkeit weiter in Richtung Vorderriß fortgesetzt werden.

Für den Wamberger Sattel ist also die Modellierung in lokal unterschiedlicher Qualität gelun-



**Abbildung 7.8:** Profil C–C' durch Wamberger Sattel mit Störkörper

gen. Für eine sicherere Modellierung wären zusätzliche Messungen in den bisher nur mit wenigen Punkten abgedeckten Teilen des Sattels erforderlich. Dort wäre eine ähnlich hohe Punktdichte wie im Estergebirge wünschenswert.

In den Bereichen mit sehr hoher Punktdichte könnte versucht werden, die Steilheit des Einfallens der Dichtekontrastfläche im Erdinneren genauer zu bestimmen.

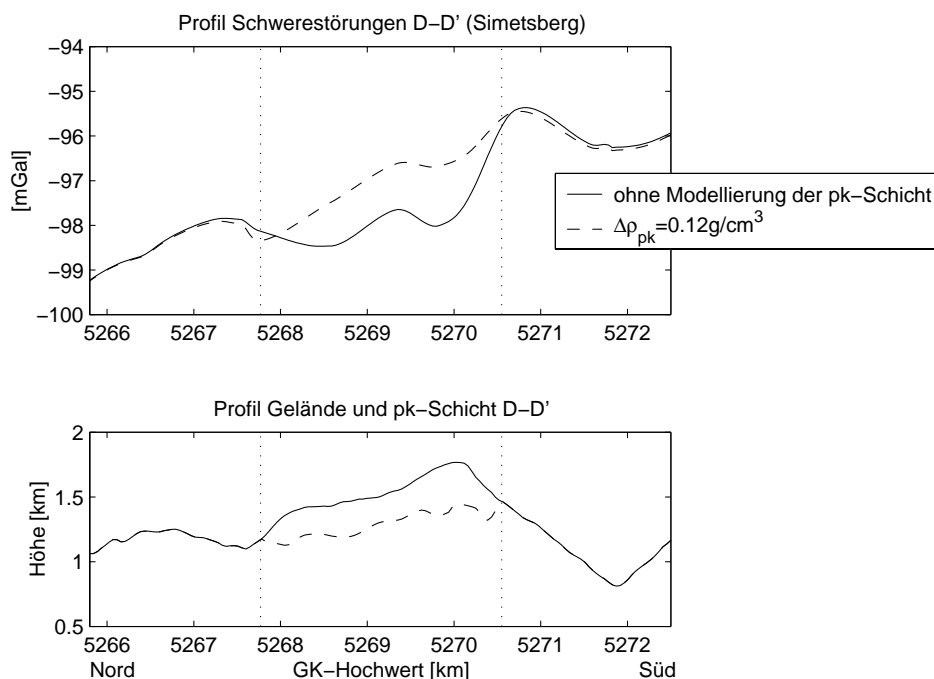
Es ist zu erwarten, dass sich die Störschichten des Wamberger Sattels in größeren Tiefen unter dem Hauptdolomit fortsetzen. Neben Schichten geringer Dichte müsste man in größeren Tiefen aber auch mit Anhydritschichten besonders hoher Dichte wie in der Bohrung Vorderriss rechnen. Je tiefer solche Störschichten liegen, desto unsicherer und mehrdeutiger ist ihre Bestimmung aus Schwerestörungen.

## 7.6 Plattenkalk

Die höchsten Gipfel des Estergebirges liegen in einer Plattenkalkmulde (Abb. 7.9). Diese Mulde ist auch in den  $\delta g_{TOP}$  erkennbar, allerdings mit einer Tiefe von nur ca. 2–3 mGal. Im Isolinienbild der Abb. 7.1 ist sie daher wenig ausgeprägt. Auch der Plattenkalk muss also weniger dicht als der umgebende Hauptdolomit sein. Die Wirkung bleibt aber wegen der in der Regel geringen Mächtigkeit der Schicht und dem offensichtlich eher geringen Dichteunterschied klein.

Für den Plattenkalk wurde ebenfalls eine Modellierung versucht. Die vermutete Untergrenze der pk-Schicht ist in den Profiltafeln zu den geologischen Karten skizziert. Mit Hilfe dieser Profile wurde ein Raster für die untere Grenzfläche der Schicht interpoliert. Dieses Modell wurde mit einem Dichteunterschied von  $0.12 \text{ g/cm}^3$  berücksichtigt. Dadurch wird die Mulde in den  $\delta g_{TOP}$  im Teilen des Gebiets weitgehend eingeebnet; an anderen Stellen zeigen Resteffekte von bis ca. 1.5 mGal vermutlich fehlerhafte Dicken der modellierten pk-Schicht an.

Im Estergebirge können aufgrund der hohen Punktdichte aus dem Vergleich von Strukturen der  $\delta g_{TOP}$



**Abbildung 7.9:** Profil D–D' durch die Plattenkalk-Zone, in welcher die Gipfel des Estergebirges liegen

mit der geologischen Karte noch eine Reihe kleinerer Störkörper mit Ausdehnungen von wenigen 100 m mehr oder weniger sicher identifiziert werden, wie Moränen, Geröllhalden und eine kleine Bergsturzmasse am Predigtstuhlsattel bei der Esterbergalm.

## 7.7 Schlussfolgerungen aus der Störkörpermodellierung

Der größte Signalanteil für topographisch reduzierte Schwerestörungen ist der durch die Moho-Diskontinuität und andere Strukturen der tieferen Erdkruste verursachte Trend. Ohne isostatische Reduktion werden auf die ganzen Alpen bezogen Amplituden von bis zu 200 mGal erreicht (Marti, 1997). In den Schwerestörungen des untersuchten Gebiets wird eine Dreiteilung erkennbar (Abb. 7.6). Von Norden kommend fallen die Werte bis zur Mitte der Faltenmolassezone etwa bei Hochwert 5295 km hin ab. Dann folgt eine ca. 30 km breite ebene Zone mit Werten von  $98 \pm 4$  mGal bis hin zu einer Linie über Garmisch–Wallgau–Vorderriß etwa in der Mitte der Kalkalpen. Südlich dieser Linie fallen die  $\delta g_{TOP}$  dann wieder steil in Richtung des Inntals hin ab. Dieser Verlauf im Großen kann von der Form der Moho und von Strukturen der mittleren bis unteren Kruste verursacht sein.

Lokal spielen daneben Dichteunterschiede zwischen geologischen Einheiten an und nahe der Oberfläche eine wichtige Rolle. Im untersuchten Gebiet wurden Strukturen mit Ausdehnungen von wenigen 100 m bis zu über 50 km festgestellt. Die Signalanteile erreichten dabei Amplituden von bis ca. 15 mGal.

Bei den untersuchten Talfüllungen ist die Modellierung gut gelungen, wenngleich nicht optimal. Die Wirkung von Störkörpern sowie die zugehörigen Dichteunterschiede sind offensichtlich gut bestimmbar, wenn ihre Form durch zusätzliche Informationen aus Bohrungen und Seismik einigermaßen bekannt ist. Die Berücksichtigung dieser Körper bei der Schwerereduktion ergibt im Vergleich zu lediglich topographisch reduzierten Schwerestörungen einen deutlich glatteren

Verlauf.

Schwieriger und in unterschiedlicher Qualität gelungen ist die Modellierung für Körper, welche die Oberfläche erreichen, deren Ausdehnung nach unten aber nur grob bekannt ist. Zwar ist auch dann der Verlauf des Dichtekontrasts an der Oberfläche oft gut feststellbar. Eindeutige Aussagen über Dichte und Ausdehnung nach unten erhält man hier aber in der Regel nicht. In günstigen Fällen, wie bei der Flyschzone, kann die Modellierung dennoch ein deutlich glatteres Signal ergeben. Zur sicheren Beurteilung, ob festgestellte Signalanteile Störkörpern an der Oberfläche oder tieferen Strukturen zuzuordnen sind, ist in jedem Fall eine hohe Messpunktdichte wertvoll. Durch die Einbeziehung von Lotabweichungen in die Modellierung könnten wohl noch bessere Ergebnisse erzielt werden, obwohl diese in wesentlich geringerer Punktdichte vorliegen als die Schwerestörungen.

Nach der Reduktion der Störkörpermodelle verbleiben im Bereich der Störkörper Restsignalanteile von einigen mGal aufgrund von Modellierungsfehlern. Das eigentliche Rauschen aus den Mess- und Reduktionsfehlern gemäß der Abschätzung in Tab. 6.2 ist im Vergleich zu diesen Signalanteilen um 1–2 Größenordnungen kleiner. Zumindest im Bereich der Störkörper muss daher die Notwendigkeit der beschriebenen Genauigkeiten für die Schweremessung und Schwerereduktion relativiert werden. Manche der kleinräumigen Resteffekte außerhalb des Estergebirges mit Ausschlägen von einigen mGal sind wegen der dort größeren Punktabstände nur durch 1–2 Messpunkte gestützt. Diese Signalanteile haben daher einen eher zufälligen (dem Rauschen ähnlichen) Charakter. Teilweise können sie Ursachen wie Talfüllungen zugeordnet werden. In anderen Fällen könnte ihre Ursache nur durch dichtere Messung verstanden werden. Unter Umständen könnten in Bereichen geringer Punktdichte auch noch grobe Fehler von bis ca. 5 mGal nicht aufgedeckt worden sein.

Auf der Grundlage der störkörperreduzierten Daten könnte eine weiterführende geophysikalische Krustenmodellierung ansetzen. Sie würde davon profitieren, dass Teile des Signals als oberflächennah verursachte Effekte identifiziert und abgetrennt wurden. Damit werden die tieferen Quellen zuzuordnenden Signalanteile kleiner. Dies verringert auch die Mehrdeutigkeiten bei der Modellierung der tieferen Schichten.

## 8 Dichtebestimmung aus Schwerestörungen und Lotabweichungen über Ausgleichungsansätze

Im vorhergehenden Abschnitt wurden Dichten und Dichteunterschiede daraus abgeleitet, dass die Schwerestörungen nach der Reduktion der zugehörigen Modellkörper einen möglichst ruhigen Verlauf aufweisen sollten. Zur Überprüfung wurden Isoliniendarstellungen und Profile verwendet. Im folgenden soll nun auf Ansätze eingegangen werden, dieses – oft als „Nettleton-Verfahren“ bezeichnete – Vorgehen mathematisch zu formulieren.

Im einfachsten Fall wird die Dichte  $\rho$  der Topographie aus der Annahme, dass die Bouguerstörungen  $\delta g_{\text{BO}}$  möglichst konstant verlaufen

$$\delta g_{\text{BO}} = \delta g_{\text{FA}} - 2\pi G\rho h = c, \quad (8.1)$$

über die Korrelation zwischen Freiluftstörung  $\delta g_{\text{FA}}$  und ellipsoidischer Höhe  $h$  bestimmt, mit der Gravitationskonstanten  $G$  und einer Konstanten  $c$  (Heiskanen und Moritz, 1967; Jung, 1961; Parasnis, 1972). Durch  $c$  wird das Regionalfeld näherungsweise erfasst. Aus Gleichung (8.1) kann eine vermittelnde Ausgleichung zur Bestimmung der Dichte und der Konstanten  $c$  formuliert werden:

$$\delta g_{\text{FA}} + \tilde{v} = 2\pi G\hat{\rho}h + \hat{c}, \quad (8.2)$$

wobei die Verbesserungen  $\tilde{v}$  sowohl Messfehler als auch (überwiegend) die Effekte der vereinfachenden Modellierung enthalten. Dieses einfache Verfahren ist unter den Voraussetzungen

- keine wesentliche Variation im Regionalfeld im verwendeten Ausschnitt (durch tieferliegende Dichteunterschiede),
- homogene Dichte der Topographie (keine größeren oberflächennahen Störkörper),
- hinreichend glatte Topographie (nicht im Hochgebirge)

gerechtfertigt.

Die letzte Voraussetzung kann entfallen, wenn das Gelände nicht durch eine Bouguerplatte angenähert wird. Mit der geometrischen, von der Dichte unabhängigen Geländewirkung

$$G_z^{\text{TOP}} = \frac{1}{\rho} V_z^{\text{TOP}} \quad (8.3)$$

kann die Ausgleichung (8.2) dann umformuliert werden zu

$$\delta g_{\text{FA}} + \tilde{v} = \hat{\rho}_{\text{TOP}} G_z^{\text{TOP}} + \hat{c}. \quad (8.4)$$

Die Dichte wird jetzt aus der Korrelation zwischen den  $\delta g_{\text{FA}}$  und der geometrischen Geländewirkung  $G_z^{\text{TOP}}$  anstelle der Höhe bestimmt.

Oft sind die Ergebnisse der gravimetrischen Dichtebestimmung allerdings schlecht, weil die beiden anderen Voraussetzungen nicht erfüllt sind. Eine Verbesserung kann dann eine Ausgleichung bringen, in welcher mehrere Dichteparameter sowie eine Trendfunktion zur Annäherung des Regionalfeldes gemeinsam bestimmt werden. Solche Ansätze werden in der geophysikalischen Literatur schon lange verwendet; eine Zusammenstellung findet sich bei Leppich (1976).

Mit einem zweidimensionalen Trendpolynom der Ordnung  $K$

$$\sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^k a_{kl} x^{k-l} y^l = a_{00} + a_{10}x + a_{11}y + a_{20}x^2 + a_{21}xy + a_{22}y^2 + \dots, \quad (8.5)$$

sowie mit der geometrischen Wirkung der Topographie  $G_z^{\text{TOP}}$ , der geometrischen Wirkung  $G_z^{K_i}$  der modellierten Störkörper  $K_i$

$$G_z^{K_i} = \frac{1}{\rho} V_z^{K_i},$$

und mit den eventuell noch zu berücksichtigenden Wirkungen von Körpern  $K_j$ , deren Dichteunterschied  $\Delta\rho_j$  nicht in der Ausgleichung geschätzt werden soll, sondern als bekannt eingeführt wird (im Estergebirge z.B. die Seen und die Isartalfüllung)

$$\sum_j \Delta\rho_j G_z^{K_j}$$

ergibt sich das Modell

$$\delta g_{\text{FA}} + \tilde{v} = \hat{\rho}_{\text{TOP}} G_z^{\text{TOP}} - \sum_i \Delta\hat{\rho}_i G_z^{K_i} - \sum_j \Delta\rho_j G_z^{K_j} + \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^k \hat{a}_{kl} x^{k-l} y^l. \quad (8.6)$$

Damit wird nun verlangt, dass die  $\delta g_{\text{FA}}$  durch die Massenreduktionen und den Trend bis auf einen zufälligen Rest  $\tilde{v}$  erklärt werden. Die Unbekannten

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{\rho}_{\text{TOP}} \\ \Delta\hat{\rho}_i \\ \hat{a}_{kl} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Dichte der Topographie} \\ \text{Dichteunterschiede der einzelnen Störkörper } \Delta\hat{\rho}_i = \hat{\rho}_{\text{TOP}} - \hat{\rho}_i \\ \text{Trendkoeffizienten} \end{array}$$

werden in einer vermittelnden Ausgleichung über den Ansatz  $\mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}$  bestimmt mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} G_{z_1}^{\text{TOP}} & G_{z_1}^{K_1} & G_{z_1}^{K_2} & \dots & 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{z_n}^{\text{TOP}} & G_{z_n}^{K_1} & G_{z_n}^{K_2} & \dots & 1 & x_n & y_n & x_n^2 & x_n y_n & y_n^2 & \dots \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

( $n$ : Anzahl Messpunkte)

sowie  $\mathbf{l} = \widetilde{\delta g_{\text{FA}}}$ .

In die Ausgleichung können auch Lotabweichungen einbezogen werden:

$$\xi + \tilde{v} = \hat{\rho}_{\text{TOP}} \frac{G_y^{\text{TOP}}}{\gamma} - \sum_i \Delta\hat{\rho}_i \frac{G_y^{K_i}}{\gamma} + \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^k \hat{b}_{kl} x^{k-l} y^l, \quad (8.8)$$

für  $\eta$  entsprechend, mit der Normalschwere  $\gamma$ .

Die Beobachtungen können Gewichte proportional zur Fläche erhalten, welche der jeweilige Messpunkt repräsentiert. Die Flächen können z.B. aus Voronoi-Polygonen über eine Delaunay-Triangulation bestimmt werden. Wenn starke Punktkonzentrationen vermieden werden, kann aber auch eine Gleichgewichtung der Beobachtungen gute Ergebnisse liefern.

Tab. 8.1 fasst die Ergebnisse von mehreren Ausgleichungen zusammen, bei welchen die Gewichtung, die Ordnung des Trendpolynoms (maximal 9. Ordnung) und die verwendeten Punktdatensätze (Ausschnitte) variiert wurden. Die a posteriori-Standardabweichungen für  $\rho$  sind unrealistisch klein und werden deshalb nicht dargestellt. Sie geben nur die hohe Redundanz aufgrund der vielen Datenpunkte wieder, aber nicht die verbleibenden Unsicherheiten der Modellierung. Die Tabelle zeigt, dass die Werte für die Topographie und den Flysch-Modellkörper sehr konsistent sind, unabhängig von der Wahl der Gewichte, der Ordnung des Trends und der Punktauswahl. Dabei wirken sich die großen Höhenunterschiede und die deshalb starke Variation der Geländeanziehung positiv aus. Der Wert für die Topographiedichte dürfte hauptsächlich den Hauptdolomit repräsentieren, der den größten Massenanteil im alpinen Teil des Gebietes hat. Für die Molassezone ist diese Topographiedichte aber wohl nicht sehr aussagekräftig. Dort liegen zwar viele Messpunkte, aber die Höhenunterschiede sind gering. Eine um  $0.1\text{--}0.2\text{ g/cm}^3$  abweichende Molassedichte wäre daher in der Ausgleichung wohl kaum feststellbar.

Für die kleineren Modellkörper (Loisachtal, Plattenkalk, Wamberger Sattel) unterscheiden sich die Ergebnisse stark je nach Gewichtung und Ordnung des Trends. In den relativ kleinen Bereichen dieser Körper kann das Trendpolynom systematisch von den Stützwerten abweichen und so das Ausgleichungsergebnis für den betreffenden Körper verfälschen. Diese Gefahr wird bei höheren Trendordnungen geringer, verschwindet aber nicht. Gleichgewichtete Beobachtungen ergaben wegen der hohen Punktdichten für diese Bereiche günstigere Trendfunktionen und daher konsistentere Ergebnisse als bei flächenabhängiger Gewichtung.

Leppich (1976) weist darauf hin, dass die Ausgleichungsergebnisse verfälscht werden können, wenn die Trendfunktion mit den Massenwirkungen korreliert ist. Die Massenwirkungen sollten dann in einen Trend- und einen Residualanteil aufgespalten werden, z.B. für die Topographie:

$$V_z^{\text{TOP}} = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^k c_{kl} x^{k-l} y^l + \left(V_z^{\text{TOP}}\right)^* \quad (8.9)$$

Die Trendkoeffizienten  $c_{kl}$  können in einer ersten Ausgleichung vorab bestimmt werden. Im zweiten Ausgleichungsschritt werden dann die Dichteparameter und der Trend der  $\delta g$  aus den Residualanteilen  $\left(V_z^{\text{TOP}}\right)^*$  und  $\left(V_z^{\text{K}_i}\right)^*$  bestimmt (Formeln s. Leppich, 1976). Dieses Vorgehen wurde getestet; es ergaben sich aber nur geringe Abweichungen gegenüber der Ausgleichung ohne Berücksichtigung dieser Korrelationen.

Wie Tab. 8.1 zeigt, stimmen die Ergebnisse der Ausgleichung in der Regel gut mit denjenigen von Kap. 7 überein. Für den alpinen Teil der Topographie (überwiegend Hauptdolomit) dürfte die Dichte somit zuverlässig bestimmt sein. Für die Störkörper kann die Dichte mit den vorhandenen Daten nur auf  $0.1\text{--}0.2\text{ g/cm}^3$  genau bestimmt werden. Dabei scheint die Prüfung von Isolinien und Profilen eher zuverlässiger zu sein als die Ausgleichung. Beim Flysch sind die Ergebnisse der beiden Vorgehensweisen zwar sehr konsistent, dennoch bleibt die in Abschnitt 7.4 gezeigte Mehrdeutigkeit von Tiefe und  $\Delta\rho$  bestehen.

Als Beispiel für ein noch komplexeres Ausgleichungsverfahren sei auf Bürki (1989) verwiesen. Dort werden bei der Modellierung des Ivrea-Körpers (Schweiz/Italien) zusätzlich Ausdehnungen und Neigungen von Prismen als Unbekannte mitgeschätzt.

**Tabelle 8.1:** Dichte und Dichteunterschiede ( $\text{g/cm}^3$ ) aus Schwerestörungen

	Ergebnis der Ausgleichung je nach Trendordnung, Punk- tauswahl, Gewichtung	Ergebnis der Prüfung von Iso- linien und Profilen (Kap. 7)
Topographie	2.74–2.80	2.75
Flysch (Modell 2)	0.09–0.12	0.10
Loisach-Talfüllung	0.55–0.80	0.6–0.8
Plattenkalk	0.07*–0.22	0.12
Wamberger Sattel (rk,rs,p)	0.18*–0.27	0.25

\*für besonders ungünstige Trendfunktionen noch niedriger (Plattenk. -0.1, Wamb.Sattel 0.1)

Für die Bestimmung der Dichte der Isartalfüllung sind nicht genügend Messpunkte vorhanden. Die Bestimmung der Wasserdichte der Seen wäre eine gute Kontrolle für das Ausgleichungsverfahren. In der Umgebung der Seen reicht aber die Punktdichte nicht für ein gutes Ergebnis aus.



## 9 Statistische Beschreibung der Signaleigenschaften

Bei der Bestimmung des Darstellungsfehlers nach Gleichung (2.28) spielt die Signal-Autokovarianzfunktion (AKF oder  $C$ ) eine zentrale Rolle. Besonders wichtig ist sie, wenn als Interpolationsverfahren die Kleinste-Quadrate-Prädiktion mit Gleichung (2.32) verwendet wird. Ziel dieses Kapitels ist es, Autokovarianzfunktionen für Schwerstörungen zu finden, welche mit (2.32) zu realistischen Darstellungsfehlern führen und damit auch eine realistische Fehlerfortpflanzung ermöglichen. Die AKF sollen *mittlere*, für Gebirge möglichst repräsentative Signaleigenschaften beschreiben. Von langwelligen Trends abgesehen, soll Stationarität und Isotropie des Signals angenommen werden; die AKF sollen auf Schwerstörungen im Gebirge allgemein anwendbar sein. Nicht im Vordergrund steht die Lokalisierung und Beschreibung lokaler Unterschiede im Signalverhalten. Zu diesem Zweck wären möglicherweise andere Ansätze wie die Waveletanalyse interessanter.

Als Datengrundlage dienen Datensätze von Schwerstörungen mit unterschiedlicher Ausdehnung und Punktdichte. Mit Hilfe dieser Datensätze soll untersucht werden, ob ein konsistentes, für unterschiedliche Punktdichten und Wellenlängenbereiche gültiges Fehlermodell gefunden werden kann. Aus den Daten des Testnetzes Estergebirge werden folgende Auswahldatensätze verwendet (in der Reihenfolge zunehmender Ausdehnung und abnehmender Punktdichte, siehe Abb. 9.1):

- Punktwolke um Punkt ES03 (Kühalm),
- Verdichtung Kühalm-Michelfeld,
- gesamtes Estergebirge.

Für etwas größere Ausdehnungen (mit geringerer Punktdichte) werden die Datensätze

- Bayerische Alpen (zentraler Teil, bestehend aus Schwerefestpunkten des BLVA und Punkten des Testnetzes) und
- Tirol (über TU Graz erhaltene Daten)

hinzugezogen (siehe Kap. 4.2.3). Damit können nun Datensätze mit Ausdehnungen zwischen 300 m und 180 km und entsprechend variierenden Punktdichten untersucht werden. Es wurde jeweils auf eine homogene Verteilung der ausgewählten Messpunkte innerhalb des jeweiligen Datensatzes geachtet. Alle Datensätze liegen vollständig im Gebirge. Topographisch reduzierte Schwereanomalien für den Tiroler Datensatz sind in Abb. 9.2 gezeigt; für die übrigen Datensätze wurden die Schwerstörungen bereits in den letzten Kapiteln dargestellt.

Eine lokale empirische AKF kann aufgrund der Ausdehnung und der Punktdichte des zugrundeliegenden Datensatzes nur Signale aus einem bestimmten Frequenzbereich korrekt wiedergeben. Nach einem Blick auf die Histogramme der Datensätze in Abschnitt 9.1 wird in Abschnitt 9.2

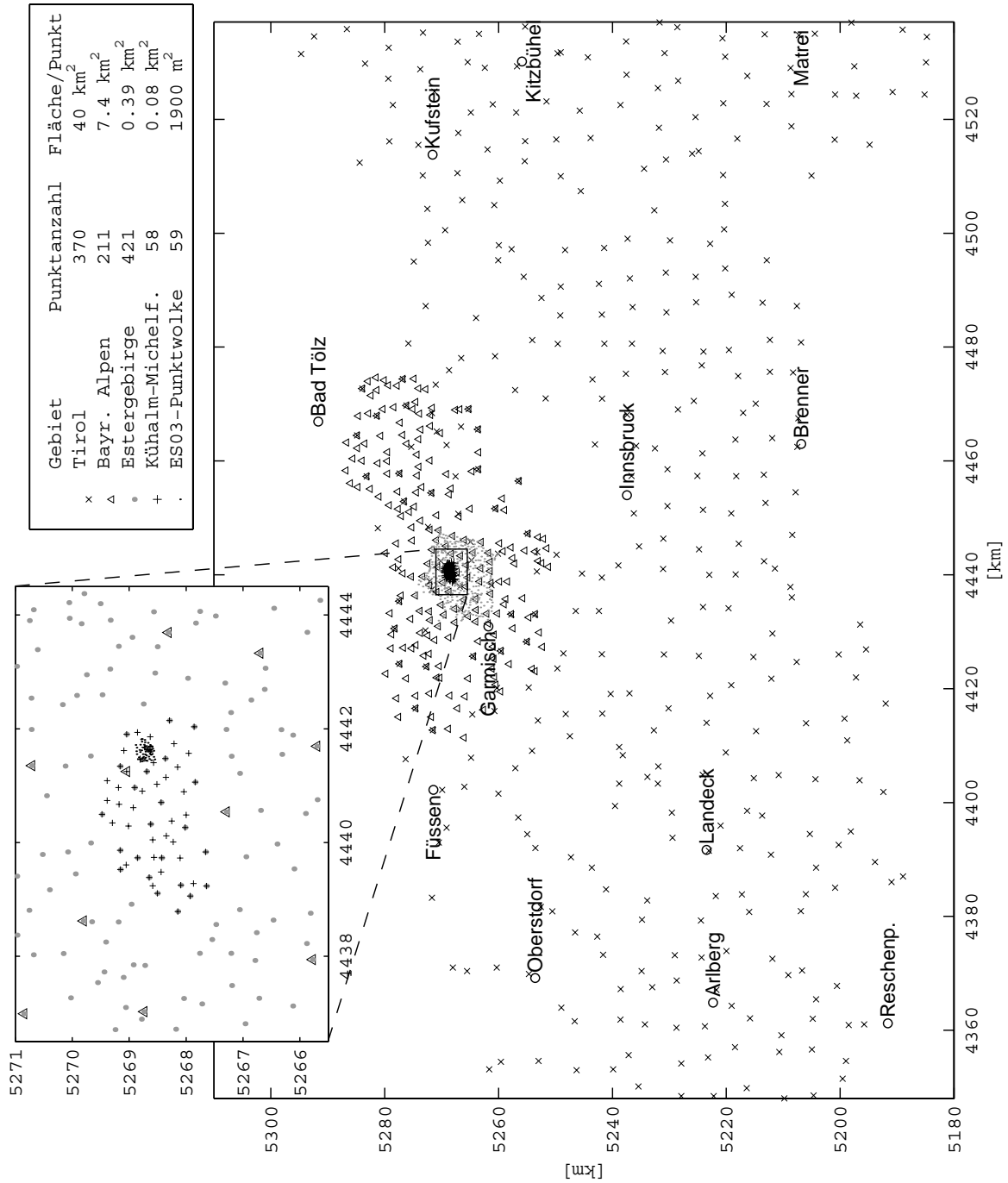
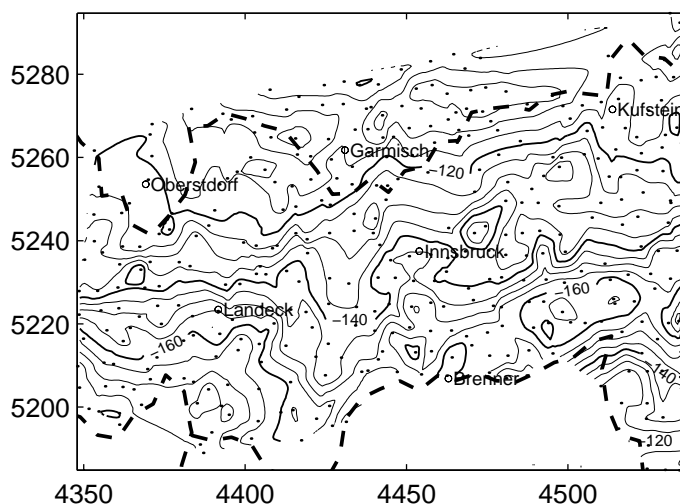


Abbildung 9.1: Messpunkte der verwendeten Datensätze, mit Gauss-Krüger-Koordinaten



**Abbildung 9.2:**  $\Delta g_{\text{TOP}}$ , Tiroler Datensatz, Äquidistanz 5 mGal, mit Messpunkten und Landesgrenzen. In der Struktur mit den größten Vertiefungen entlang des Alpenhauptkammes schlägt sich im wesentlichen die isostatische Kompensation der Alpen nieder.

gezeigt, dass empirische AKF gerade für topographisch reduzierte Schwerstörungen häufig durch Trends geprägt sind, welche schwer in geeigneter Weise entfernt werden können. Sie werden zwar zur Prädiktion weitverbreitet und erfolgreich eingesetzt. Allerdings ist das Ergebnis der Prädiktion selbst – nach Formel (2.31) – nicht sehr empfindlich hinsichtlich der verwendeten AKF. Der Prädiktionsfehler nach (2.32) hingegen reagiert sehr stark auf Änderungen der AKF. Für ihn ist die Bestimmung einer realistischen AKF entscheidend. Es ist daher sorgfältig zu prüfen, ob die Verwendung von Parametern aus empirischen AKF zu realistischen Prädiktionsfehlern führt.

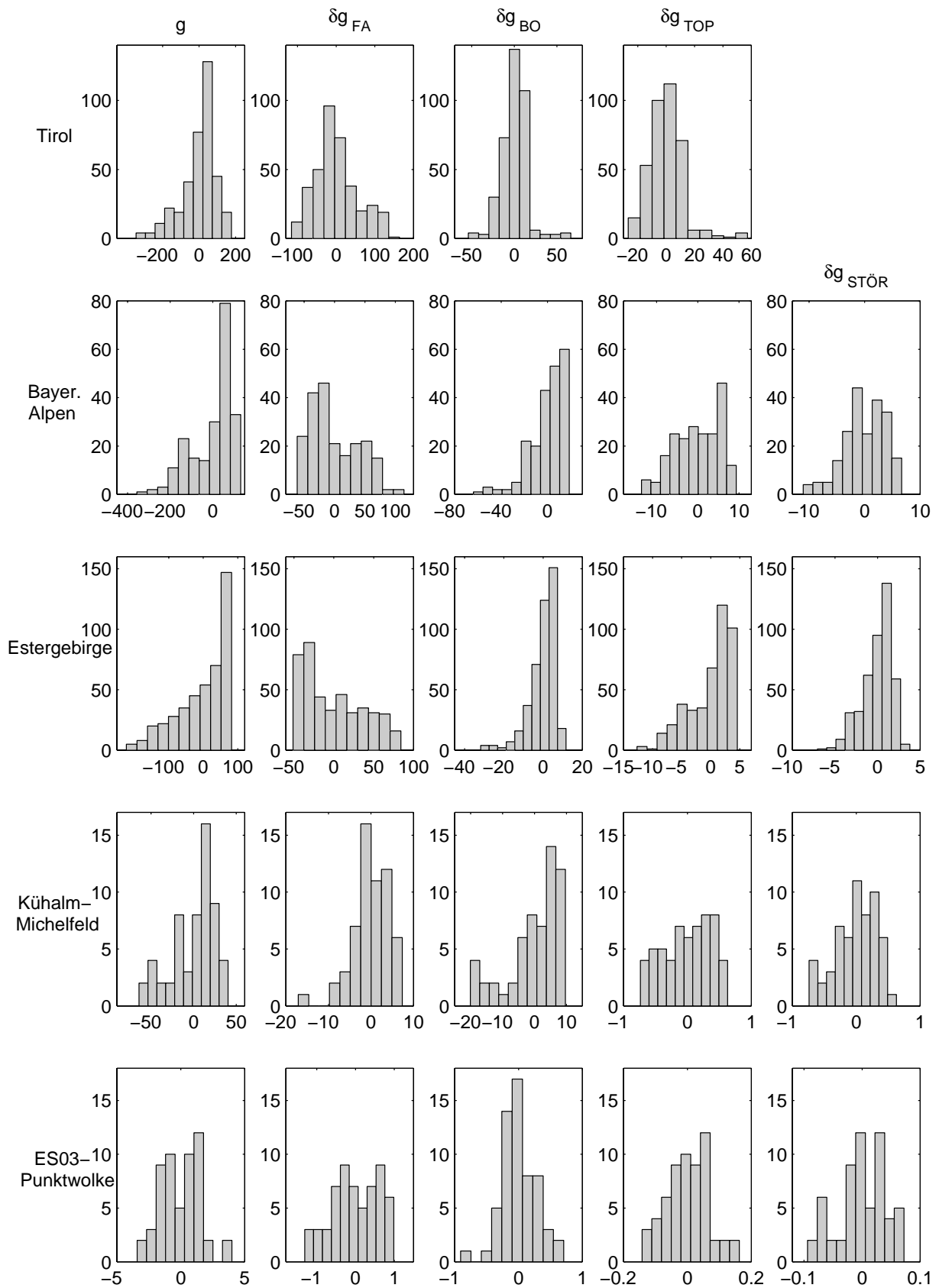
In den Abschnitten 9.3 und 9.4 werden die ermittelten empirischen AKF in Fourier-Leistungsdichtespektren und Gradvarianzspektren transformiert, um ihren Signalgehalt in bestimmten Frequenzbereichen zu prüfen.

Die entscheidende Qualitätskontrolle für AKF-Modelle stellt dann in Abschnitt 9.5 der Vergleich von formalen Prädiktionsfehlern mit empirisch bestimmten Prädiktionsfehlern in unabhängigen Kontrollpunkten dar.

Die in dieser Arbeit ermittelten Signaleigenschaften aus AKF- oder Spektraldarstellungen beziehen sich immer auf Schwerstörungen im Gebirge. In Kap. 7 wurde gezeigt, dass sich für Gebirge typische Dichteunterschiede im  $\delta g$ -Signal lokal deutlich auswirken können. Ob die hier ermittelten Signaleigenschaften unmittelbar auf Schwerstörungen außerhalb des Gebirges übertragbar sind, müsste ein sorgfältiger Vergleich mit Datensätzen ähnlicher Punktdichte aus dem Flachland zeigen.

## 9.1 Histogramme, Signalvarianzen

Einen ersten Eindruck von den Signaleigenschaften in den verschiedenen Datensätzen vermitteln Histogramme. Abb. 9.3 zeigt solche für die unreduzierte Schwere und für Schwerstörungen nach den jeweiligen Reduktionsschritten. Für die Histogramme wurden lineare Trends (ausgleichende Ebenen) von den jeweiligen Funktionswerten abgezogen. Sie sind deshalb zentriert (haben den Mittelwert 0). Ein Histogramm einer von einem linearen Trend geprägten Funktion ergäbe eine uniforme Verteilung, welche die anderen Signaleigenschaften zudecken würde.



**Abbildung 9.3:** Histogramme der untersuchten Datensätze für die aufeinanderfolgenden Stufen der Schwere-  
 rereduktion, jeweils nach Abzug einer ausgleichenden Ebene, in  $[mGal]$

In den Histogrammen erkennt man die schrittweise Reduktion des Signalgehalts durch die Schwerereduktionen. Durch die immer bessere Modellierung der Topographie verringert sich die Breite der Histogramme drastisch (von links nach rechts in der Abbildung), und auch ihre Form ändert sich:

- In den Histogrammen für  $g$  liegen die Spitzen bei den großen Funktionswerten (am rechten Rand der Histogramme). Sie repräsentieren die relativ zahlreichen Punkte in den Tälern mit großen Schwerewerten.
- Durch die Freiluftreduktion ergibt sich in der Regel eine Umkehr, da die Höhenabhängigkeit überkompensiert wird. Für  $\delta g_{\text{FA}}$  liegen nun die zahlreichen Talpunkte links bei den kleinen Funktionswerten, die weniger zahlreichen Gipfelpunkte rechts bei großen Werten.
- Die Überkompensation soll durch die Bouguerreduktion ausgeglichen werden. Die Bouguerplatte bewirkt allerdings bei Gipfelpunkten einen deutlich zu großen Effekt, so dass bei den  $\delta g_{\text{BO}}$  jetzt wieder die Gipfel (niedrige Histogrammsäulen) die kleinsten Funktionswerte haben, während die Talpunkte eher im rechten Teil des Histogramms liegen. (Beim Tiroler Datensatz ist dieser Effekt vom nichtlinearen Trend durch die Isostasie überlagert.)
- Nach der topographischen Reduktion sind die Histogramme gleichmäßiger, weisen allerdings noch Einseitigkeiten auf, im Estergebirge beispielsweise aufgrund der Störkörper.
- Die ausgeglichene Form wird schließlich für die Histogramme der  $\delta g_{\text{STÖR}}$  erreicht, wenngleich auch diese noch keine echten Normalverteilungen sind.

Eine andere Reduktion der Histogrammbreiten findet statt von den Datensätzen mit größerer Ausdehnung hin zu den sehr kleinen Ausschnitten Kühalm-Michelfeld und ES03-Punktwolke (also in vertikaler Richtung in Abb. 9.3), und zwar für alle Stufen der Schwerereduktion. Die kleinen Ausschnitte überdecken nur noch einen kleinen Teil der Geländehöhen.  $g$  und  $\delta g_{\text{FA}}$  enthalten deshalb für diese Ausschnitte nur noch einen Teil des Topographie-Signals. Auch für  $\delta g_{\text{TOP}}$  und  $\delta g_{\text{STÖR}}$  enthalten die kleinen Ausschnitte nur noch einen Teil des Gesamtsignals. Für die  $\delta g_{\text{STÖR}}$  im kleinsten Ausschnitt, der ES03-Punktwolke mit ihrer Ausdehnung von  $300 \text{ m} \times 400 \text{ m}$  und mittleren Punktabständen von  $40 \text{ m}$ , ist mit Maximalwerten von  $\pm 0.1 \text{ mGal}$  und einer Standardabweichung von  $0.04 \text{ mGal}$  das Niveau des Messfehlers erreicht. Offensichtlich übersteigt hier auch der Reduktionsfehler aus der Geländemodellierung den Messfehler nicht (aufgrund der guten Geländeerfassung durch die Messpunkte, siehe Kap. 6).

Tab. 9.1 zeigt die zu den Histogrammen gehörenden Signalstandardabweichungen (Wurzeln der Signalvarianzen  $C_0$ ), jeweils absolut und relativ zur Standardabweichung des vorangegangenen Reduktionsschrittes. Auch hier zeigt sich die Verringerung des Signalgehalts in beide Richtungen der Tabelle. Auf einige Zahlen soll besonders hingewiesen werden:

- Das Verhältnis  $\sqrt{\frac{C_0^{\text{TOP}}}{C_0^{\text{FA}}}}$  liegt (abgesehen vom trendbehafteten Tiroler Datensatz) relativ konstant bei 9–14%. Daraus kann aber wohl keine allgemeine Faustformel abgeleitet werden, denn  $C_0^{\text{FA}}$  hängt ja entscheidend von der Varianz der Topographie ab und steigt in der Regel mit der Höhe der höchsten Gipfel an;  $C_0^{\text{TOP}}$  hingegen sollte unabhängig von der Topographie sein.
- Die Störkörperreduktion verursacht gegenüber der topographischen Reduktion nochmal eine Verringerung der Signalstandardabweichung von bis zu 50%.

- Das Verhältnis  $\sqrt{\frac{C_0^{\text{BO}}}{C_0^{\text{FA}}}}$  schwankt stark. Wenn der Datensatz relativ viele Gipfelpunkte enthält (z.B. für Kühalm-Michelfeld), kann  $C_0^{\text{BO}}$  sogar größer sein als  $C_0^{\text{FA}}$ ; die einfache Bouguerreduktion hat hier eine aufrauhende Wirkung (siehe auch Abb.6.2).

**Tabelle 9.1:** Signalstandardabweichungen  $\sqrt{C_0}$  absolut in [mGal] (oben) und relativ zum jeweils vorherigen Reduktionsschritt in % (unten), jeweils nach Abzug einer ausgleichenden Ebene

Datensatz	$g$	$\delta g_{\text{FA}}$	$\delta g_{\text{BO}}$	$\delta g_{\text{TOP}}$	$\delta g_{\text{STÖR}}$
Tirol	93	54	16	12	
Bayerische Alpen	100	40	15	5.6	3.7
Estergebirge	73	38	6.8	3.6	1.7
Kühalm-Michelfeld	26	4.3	8.0	0.37	0.33
ES03-Punkt wolke	1.6	0.60	0.28	0.07	0.04

	$\sqrt{\frac{C_0^{\text{FA}}}{C_0^g}}$	$\sqrt{\frac{C_0^{\text{BO}}}{C_0^{\text{FA}}}}$	$\sqrt{\frac{C_0^{\text{TOP}}}{C_0^{\text{BO}}}}$	$\sqrt{\frac{C_0^{\text{TOP}}}{C_0^{\text{FA}}}}$	$\sqrt{\frac{C_0^{\text{STÖR}}}{C_0^{\text{TOP}}}}$	$\sqrt{\frac{C_0^{\text{STÖR}}}{C_0^{\text{FA}}}}$
Tirol	57	29	78	22		
Bayerische Alpen	40	37	38	14	67	9
Estergebirge	52	18	53	9	48	5
Kühalm-Michelfeld	17	188	5	9	88	8
ES03-Punkt wolke	38	46	24	11	61	7

## 9.2 Empirische Autokovarianzfunktion

Die Autokovarianzfunktion (AKF) einer zweidimensionalen Funktion  $f(x, y)$  ergibt sich unter Annahme von Isotropie als Funktion des Abstandes  $s$  zweier Punkte mit

$$C(s) = C(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = \frac{1}{XY} \int_{x=0}^X \int_{y=0}^Y f(x, y) f(x - \Delta x, y - \Delta y) dx dy. \quad (9.1)$$

$X$  und  $Y$  bezeichnen die Ausdehnung des betrachteten Gebietes,  $\Delta x$  und  $\Delta y$  den Abstand der beiden Punkte in den beiden Richtungen.

Die Bildung einer AKF setzt grundsätzlich ein stationäres (homogenes) Signal voraus. Es muss also den Mittelwert 0 haben (zentriert sein), und seine Varianz sollte im Definitionsbereich konstant sein, d.h. es dürfen keine Trends auftreten. Spektral ausgedrückt, müssen alle Wellenlängen des Signals im betrachteten Ausschnitt voll enthalten sein und somit die Leistung des Signals voll erfasst sein (Gelb, 1974). Für lokale Signalausschnitte von Schwerefeldfunktionalen ist dies in der Regel nicht gegeben, sondern Trends durch Strukturen, deren Ausdehnung diejenige des untersuchten Ausschnitts übersteigen, sind unvermeidlich; dies ist teilweise bereits aus den Histogrammen ersichtlich. Der Mittelwert des Funktionalen ist damit nicht mehr eindeutig definiert, sondern von der Lage und Größe des betrachteten Ausschnitts abhängig. Um eine wirklich zentrierte Funktion zu erhalten, müssen solche Trends eigentlich eliminiert werden, was aber wiederum verschiedene Probleme verursacht. Häufig werden Trends als ausgleichende Polynome modelliert und reduziert, was sich eher willkürlich und unkontrollierbar auf den Restsignalgehalt in allen Frequenzen auswirkt. Zudem ist bei der Kovarianz-Fortpflanzung einer trendreduzierten AKF auf andere Funktionale unsicher, wie sich die reduzierten Signalanteile auswirken würden. Besser definiert ist eine Trendbestimmung durch Kugelfunktionsentwicklungen bis zu einem Grad, dessen

Wellenlänge etwas kleiner als die Ausdehnung des jeweiligen Ausschnitts ist. Das trendreduzierte Signal kann dann als Restsignal unterhalb dieser Wellenlänge aufgefasst werden. Damit wäre ein Anschluss an ein globales Schwerefeldmodell möglich.

Zur Berechnung einer *empirischen* AKF aus einem Satz diskreter, unregelmäßig zweidimensional verteilter Messpunkte werden die Integrale in Gleichung (9.1) durch eine Summe ersetzt, welche jeweils die Paare von Punkten mit ähnlichen Abständen zu einer Abstandsklasse  $s_i$  zusammenfasst:

$$C(s_i) = \frac{1}{N_i} \sum_k \sum_l \frac{f(x_k, y_k) f(x_k - \Delta x_{kl}, y_k - \Delta y_{kl})}{\sqrt{\Delta x_{kl}^2 + \Delta y_{kl}^2} \in s_i} \quad (9.2)$$

mit der Anzahl  $N_i$  der gefundenen Paare pro Klasse.

Große lokale Unterschiede in der Messpunktdichte sind zu vermeiden. Sie würden die Zentrierung und somit die AKF beeinflussen. Besonders bei Signalen, welche aus Bereichen mit unterschiedlichen Eigenschaften bestehen (wie in Kap.7 beschrieben), sollte auf eine gleichmäßige Punktdichte geachtet werden, um eine repräsentative AKF zu erhalten. Solche Ungleichgewichte bei der Bildung der Kovarianzen können gemildert werden, wenn die einzelnen Paarprodukte in (9.2) abhängig von der Fläche gewichtet werden, welche die jeweiligen zwei Messpunkte repräsentieren (Knudsen, 1987). Diese Flächen können aus Voronoi-Polygonen (s. auch Kap.10.2.2) gewonnen werden. Für die untersuchten empirischen AKF unterschieden sich Varianz und Kovarianzen aus gewichteter und ungewichteter Mittelung in der Regel um max. 20%.

Im folgenden werden empirische AKF für alle Datensätze aus Abb. 9.1 dargestellt. Abb. 9.4 zeigt die AKF für Freiluftstörungen, Abb. 9.5 diejenigen für topographisch sowie störkörper-reduzierte Störungen, jeweils für verschiedene Varianten der Zentrierung, d.h. nach Abzug des Mittelwerts oder von Trendpolynomen. In Tab. 9.2 sind die Parameter Varianz  $C_0$  und Halbwertslänge  $\xi$  (nicht zu verwechseln mit der Lotabweichungskomponente  $\xi$ ) der dargestellten AKF zusammengestellt.

Die Abstandsklassen für die empirischen AKF wurden so festgelegt, dass jeweils eine ausreichende Anzahl von Paaren (z.B. 100) einen Klassenmittelwert bilden. Aufgrund der meist relativ regelmäßigen Messpunktverteilung sind jeweils für kurze Entfernungen nur wenige Punktepaare vorhanden. Dies bewirkt eine relativ grobe Auflösung der AKF nahe der Varianz. Für die Bildung der AKF wäre eine unregelmäßigere Punkteverteilung günstiger, allerdings ohne Punktkonzentrationen.

Die AKF der  $\delta g_{FA}$  weisen sehr kurze Halbwertslängen von wenigen km auf. Darin kommt zum Ausdruck, dass die  $\delta g_{FA}$  im Gebirge hauptsächlich durch die relativ hochfrequente Topographie geprägt werden. Außerhalb des Gebirges wäre für einen Datensatz der Ausdehnung von Tirol eine Halbwertslänge von ca. 10–20 km zu erwarten.  $C_0$  und  $\xi$  für das sehr viel kleinere Estergebirge liegen noch in der gleichen Größenordnung wie für Tirol. Im Estergebirge sind somit noch große Teile des Gesamtsignals der  $\delta g_{FA}$  enthalten; offensichtlich ist also auch der Signalgehalt der Topographie im Estergebirge nicht sehr viel kleiner als beim Tiroler Datensatz. Für Abstände von mehr als 20 km weichen die AKF kaum mehr von 0 ab. Dies bedeutet, dass die Anteile mit größeren Wellenlängen im Vergleich zu den hochfrequenten Anteilen sehr schwach sind. Für Ausschnitte mit Ausdehnungen von 20 km oder mehr kommen somit Freiluftscherestörungen der Eigenschaft der Stationarität relativ nahe, weil auch das Verhalten der Topographie nicht allzu weit von der Stationarität entfernt ist. Langwellige Trends werden durch den sehr starken Signalanteil aus der kurzwelligen Topographie völlig überdeckt. Die Trendreduktion ändert daher wenig an der AKF. Die noch kleineren Detailausschnitte enthalten nur noch kleine Gelände- bzw.  $\delta g_{FA}$ -Ausschnitte. Dementsprechend sinken Varianz und Halbwertslänge bei ihnen stark ab.

Für topographisch bzw. störkörper-reduzierte Störungen ist die Stationarität für keinen der untersuchten Datensätze gegeben. Nach der Reduktion des dominierenden Topographieanteils bleibt ein relativ geringes, glattes Signal übrig, welches nun jedoch durch einen langwelligen

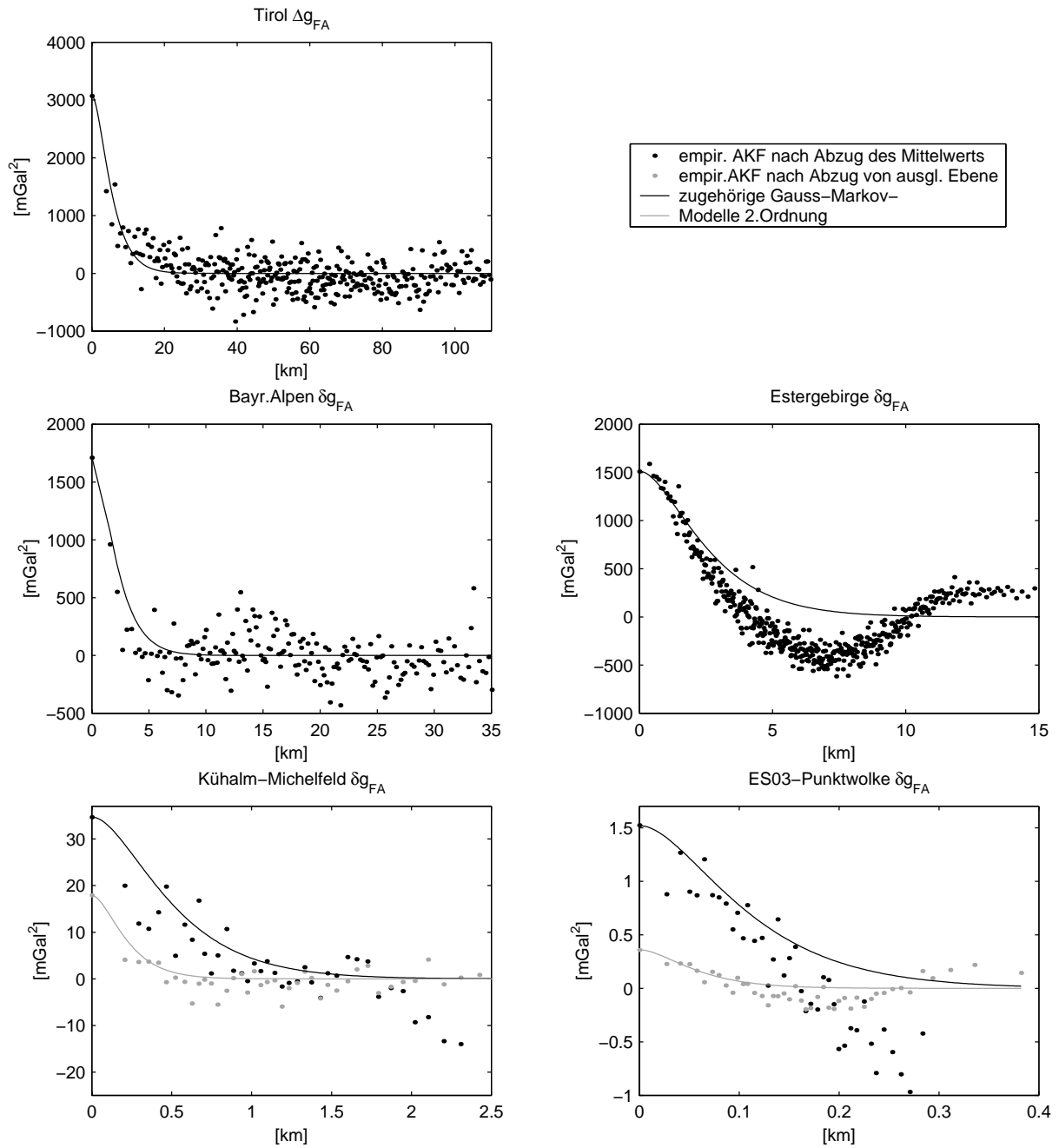
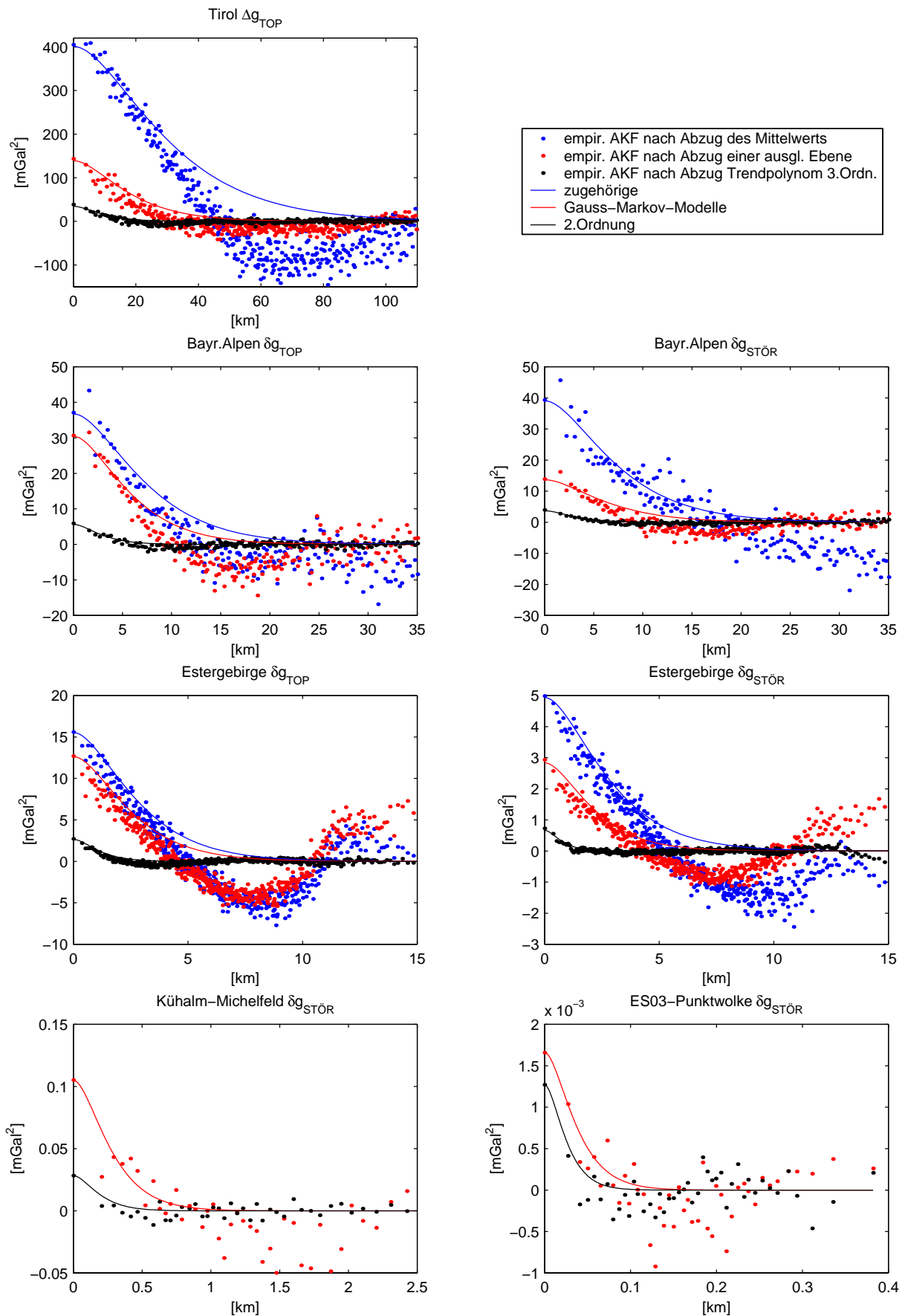


Abbildung 9.4: Autokovarianzfunktionen für Freiluftschwerestörungen (Tirol: Freiluftschwereanomalien)





**Abbildung 9.5:** Autokovarianzfunktionen für topographisch reduzierte bzw. zusätzlich um Störkörper reduzierte Schwerestörungen

**Tabelle 9.2:** Empirische Autokovarianzfunktionen für Schwerestörungen verschiedener Ausschnitte: Parameter Varianz  $C_0$  [ $\text{mGal}^2$ ] und Halbwertslänge  $\xi$  [ $\text{km}$ ]

Datensatz	AKF-Parameter						Rauschen $\sigma_\nu$ [mGal]	mittl. Mess- punktabstd. [km]
	$\delta g_{\text{FA}}$		$\delta g_{\text{TOP}}$		$\delta g_{\text{STÖR}}$			
	$C_0$	$\xi$	$C_0$	$\xi$	$C_0$	$\xi$		
Tirol	3080	4.2	405 143 <sup>l</sup> 38 <sup>c</sup> 46 <sup>n500</sup> 19 <sup>n1000</sup>	23 14 <sup>l</sup> 7.5 <sup>c</sup> 10 <sup>n500</sup> 5 <sup>n1000</sup>			2	6.3
Bayerische Alpen	1720	1.7	37 31 <sup>l</sup> 5.9 <sup>c</sup>	5.8 4.6 <sup>l</sup> 2.3 <sup>c</sup>	39 14 <sup>l</sup> 3.9 <sup>c</sup>	5.8 5.0 <sup>l</sup> 2.5 <sup>c</sup>	0.5	2.7
Estergebirge	1510	2.0	16 13 <sup>l</sup> 2.7 <sup>c</sup>	2.2 2.0 <sup>l</sup> 0.9 <sup>c</sup>	5 2.9 <sup>l</sup> 0.7 <sup>c</sup>	2.2 1.7 <sup>l</sup> 0.6 <sup>c</sup>	0.25	0.62
Kühalm-Michelfeld	35 18 <sup>l</sup>	0.39 0.17 <sup>l</sup>			0.11 <sup>l</sup> 0.028 <sup>c</sup>	0.22 <sup>l</sup> 0.15 <sup>c</sup>	0.12	0.28
ES03-Punktwolke	1.5 0.36 <sup>l</sup>	0.09 0.05 <sup>l</sup>			0.0017 <sup>l</sup> 0.0013 <sup>c</sup>	0.03 <sup>l</sup> 0.02 <sup>c</sup>	0.03	0.04

<sup>l</sup> nach linearer Trendreduktion<sup>c</sup> nach Abzug eines kubischen Trendpolynoms<sup>n500</sup> nach Abzug einer Kugelfunktionsentwicklung bis Grad u. Ordnung 500<sup>n1000</sup> nach Abzug einer Kugelfunktionsentwicklung bis Grad u. Ordnung 1000

Trend geprägt ist. Dieser ist innerhalb der Grenzen der untersuchten Ausschnitte nur unvollständig erfassbar. Dies ist bereits in den gezeigten Isolinienbildern erkennbar, aber auch daran, dass sich die AKF in Abb. 9.5 durch die Trendreduktion teilweise stark verändern. Der wesentliche Trendanteil wird durch die Wirkung der isostatischen Gebirgswurzel verursacht; für die kleineren Ausschnitte wirken teilweise auch die weiter oben untersuchten Störkörper als Trends. Die Trends sind je nach Wahl des Ausschnitts stärker oder schwächer ausgeprägt. Somit hängt die empirische AKF nicht nur von den Signaleigenschaften, sondern zusätzlich von der zufälligen Wahl des Daten-Ausschnitts ab. Varianz und Halbwertslänge sinken mit abnehmender Ausschnittsgröße, da immer mehr Signalanteile nicht erfasst werden, deren Wellenlänge die Ausdehnung des Ausschnitts übersteigt (Tab. 9.2). Auch die starken Ausschläge bei größeren Abständen in einigen der empirischen AKF in Abb. 9.5 deuten auf Trends hin. Solche Ausschläge treten bei den  $\delta g_{\text{FA}}$  zumindest für die größeren, im wesentlichen trendfreien Ausschnitte nicht auf.

Die meisten der trendreduzierten AKF in Abb. 9.4 und 9.5 nach Abzug einer ausgleichenden Ebene bzw. eines Trendpolynoms 3. Ordnung zeigen, dass die langwelligen Anteile zuverlässig entfernt wurden, und zwar bis hinunter zu Wellenlängen, welche deutlich unter der Gebietsgröße liegen. Dies bewirkt, dass die entsprechenden AKF für größere Abstände praktisch nicht mehr von 0 abweichen. Zusätzlich werden durch Polynome aber mehr oder weniger große Teile der kurzen Wellenlängen mit entfernt, abhängig von der lokalen Form des Signals. Deshalb sind AKF aus verschiedenen Gebieten nach der Reduktion von Trendpolynomen kaum noch miteinander vergleichbar. So kann in Abb. 9.5 abgelesen werden, dass eine kubische Reduktion gegenüber der linearen Reduktion die AKF-Parameter für manche Datensätze drastisch reduziert, für andere Datensätze hingegen nur wenig.

Wegen der nachteiligen Eigenschaften der Trendpolynome wurde für den Ausschnitt mit der

größten Ausdehnung (Tirol) alternativ ein Trend als Kugelfunktionsentwicklung bis Grad und Ordnung  $n_{\max} = 1000$  bestimmt. Aus den  $\Delta g_{\text{TOP}}$ -Werten dieses Datensatzes wurde zunächst ein Raster interpoliert; daraus wurden dann mit Gleichung (2.25) Kugelfunktionskoeffizienten  $\bar{a}_{nm}, \bar{b}_{nm}$  durch numerische Integration über das Gebiet des Datensatzes bestimmt. Diese Koeffizienten haben natürlich keine Bedeutung über den zugrundeliegenden Ausschnitt hinaus.  $n_{\max} = 1000$  entspricht einer minimalen Wellenlänge von 40 km. Damit sind alle Wellenlängen, welche einen Beitrag zum Trend liefern können, erfasst. Bei einer Entwicklung bis  $n_{\max} = 500$  würde die zugehörige minimale Wellenlänge von 80 km die Gebietsausdehnung stellenweise leicht überschreiten; nach der Reduktion könnte somit noch ein geringer Resttrend übrigbleiben. Abb. 9.6 zeigt AKFs nach der Reduktion von Kugelfunktionsentwicklungen bis  $n_{\max} = 500$  bzw. 1000. Für die noch kleinräumigeren Datensätze wäre die Anwendung von im Prinzip globalen Kugelfunktionsentwicklungen aber wohl immer problematischer.

Zur weiteren Verwendung (Prädiktion, Fehlerfortpflanzung) können die empirischen Funktionen meist nicht direkt verwendet werden, sondern werden durch analytische Modelle angenähert. Häufig werden Gauss-Markov-Exponentialmodelle oder Funktionen des Hirvonen-Typs

$$\frac{C_0}{(1 + \alpha^2 s^2)^p} = \frac{C_0 a^{2p}}{(a^2 + s^2)^p} \quad \text{mit} \quad a = \frac{1}{\alpha}$$

benutzt.

Tab. 9.3 enthält Beispiele für übliche AKF-Modelle sowie die entsprechenden, durch Fourier-Transformation erhaltenen Leistungsdichtespektren (PSDs, s.u.). Zu den AKF des Gauss-Markov-Typs gehören dabei jeweils PSDs des Hirvonen-Typs und umgekehrt, von konstanten Faktoren abgesehen (Gelb, 1974; Hofmann-Wellenhof und Moritz, 1986).

Von Moritz (1980) werden bei AKF des Hirvonen-Typs die Parameter  $p = 0.5$  bzw. 1.5 bevorzugt, da diese Funktionen harmonisch im Außenraum fortsetzbar sind. Gauss-Markov-Modelle 1. Ordnung sind als AKF weniger sinnvoll, da sie von einem völlig ungeglätteten Signal ausgehen. Dies entspricht der physikalischen Wirklichkeit von Schwerefeldgrößen schlecht, da diese ja immer eine Integration über begrenzt variierende Dichteanomalien enthalten.

Wie die Abbildungen zeigen, können die AKF von trendbehafteten Datensätzen nur bedingt durch analytische Modelle angenähert werden. Die trendbedingten Ausschläge nach dem ersten Nulldurchgang der empirischen AKF werden vernachlässigt. Für trendreduzierte Datensätze treffen Gauss-Markov-Modelle 2. Ordnung die empirische AKF meist gut. Noch besser geeignet wären manchmal Modelle, welche 0 unterschreiten und langsam um 0 herum ausschlagen.

Da die empirische AKF jeweils aus mit zufälligen Fehlern behafteten Daten bestimmt wird, sollte die Varianz der analytischen Modelle jeweils um das Punktrauschen  $\sigma_\nu^2$  geringer als die Varianz der empirischen AKF angesetzt werden (Abb. 9.7). Tab. 9.2 enthält die  $\sigma_\nu$ -Werte, welche für die einzelnen Datensätze angenommen wurden. Grundlage der Werte war das Fehlerbudget aus Tab. 6.2. Für die sehr kleinen Signalausschnitte mit kleiner Signalvarianz kann man aus der Differenz zwischen der Varianz und den Kovarianzen der kleinsten Abstände ableiten, wie groß  $\sigma_\nu^2$  höchstens sein kann (Abb. 9.5 ganz unten); daraus ergibt sich für die Kühalm-Michelfeld-Mulde ein maximales  $\sigma_\nu$  von 0.12 mGal, für die besonders dichte Punktwolke um ES03 sogar nur 0.03 mGal. Für den Tiroler Datensatz wurde wegen der dort verwendeten größeren Geländemodellierung ein höheres Rauschen angenommen. Im Vergleich zur Signalvarianz  $C_0$  ist das Rauschen jeweils sehr klein, mit Ausnahme der kleinsten Ausschnitte.

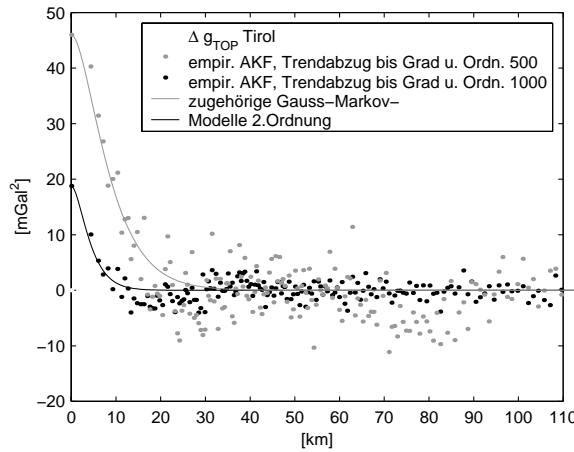


Abbildung 9.6: Autokovarianzfunktionen  $\Delta g_{TOP}$  Tirol nach Abzug von Kugelfunktionsentwicklungen

Tabelle 9.3: Analytische Modelle für Autokovarianzfunktion und Leistungsdichtespektrum

AKF	PSD	Beziehung zur empir. AKF
Gauss-Markov 1.Ordnung $e^{-as}$ (a)	Hirvonen p=1 $\frac{2a}{\omega^2+a^2}$ (b)	$a = \frac{\ln 2}{\xi}$
Gauss-Markov 2.Ordnung $(1 + bs)e^{-bs}$ (c)	Hirvonen p=2 $\frac{4b^3}{(\omega^2+b^2)^2}$ (d)	$b = \frac{1.6783}{\xi}$
Hirvonen p=1 $\frac{c^2}{s^2+c^2}$ (e)	Gauss-Markov 1.Ordnung $c\pi e^{-c\omega}$ (f)	$c = \xi$
Hirvonen p=2 $\frac{d^4}{(s^2+d^2)^2}$ (g)	Gauss-Markov 2.Ordnung $\frac{d\pi}{2}(1 + d\omega)e^{-d\omega}$ (h)	$d = \frac{\xi}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}$

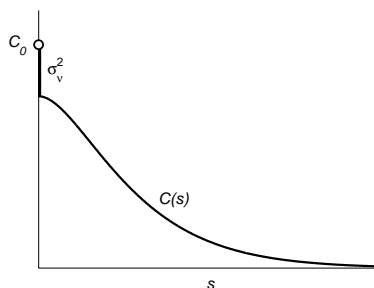


Abbildung 9.7: Analytische AKF und Rauschen

### 9.3 Leistungsdichtespektrum

Die spektralen Signalanteile, welche die betrachteten Datensätze enthalten, werden durch die Gebietsgröße (Durchmesser  $D$ ) und die Abtastung (mittlerer Messpunktabstand  $d = \sqrt{A/N}$  mit der Gebietsfläche  $A$  und der Messpunkanzahl  $N$ ) festgelegt. Anteile mit Frequenzen unterhalb von  $1/D$  sind aufgrund der beschränkten Gebietsgröße nur teilweise enthalten. Sie äußern sich als Trend. Anteile mit Frequenzen oberhalb von  $1/d$  werden durch die Abtastung unvollständig erfasst. Die Begrenzungen sind nicht scharf: Die Gebietsgröße  $D$  ist in der Regel nicht in jeder Richtung gleich, und auch der Messpunktabstand variiert. Im Sinne einer Nyquist-Frequenz müsste die Grenze der Auflösung schon bei  $1/(2d)$  liegen, nicht erst bei  $1/d$ . Zwischen den Frequenzen  $1/D$  und  $1/d$  (oder  $1/(2d)$ ) sollten die Datensätze den vollen Signalanteil enthalten. In diesem bei den verwendeten Datensätzen ziemlich schmalen Frequenzband sollte somit das Fourier-Leistungsdichtespektrum  $S(\omega)$  (Power Spectral Density PSD) für die Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C(s) e^{-i\omega s} ds \quad (9.3)$$

zuverlässig sein. (9.3) ist das PSD eines eindimensionalen Signals. Die Einheit ist z.B. [mGal<sup>2</sup>km]. Der Schritt zur Eindimensionalität wird allerdings schon bei der Berechnung der empirischen AKF (9.2) gemacht. Um dem eigentlich zweidimensionalen Signal Rechnung zu tragen, könnte an die Stelle der Fouriertransformation in (9.3) eine Hankel-Transformation treten (Forsberg, 1984; Hofmann-Wellenhof und Moritz, 1986; Moritz, 1980); das entsprechende PSD hätte dann die Einheit [mGal<sup>2</sup>km<sup>2</sup>].

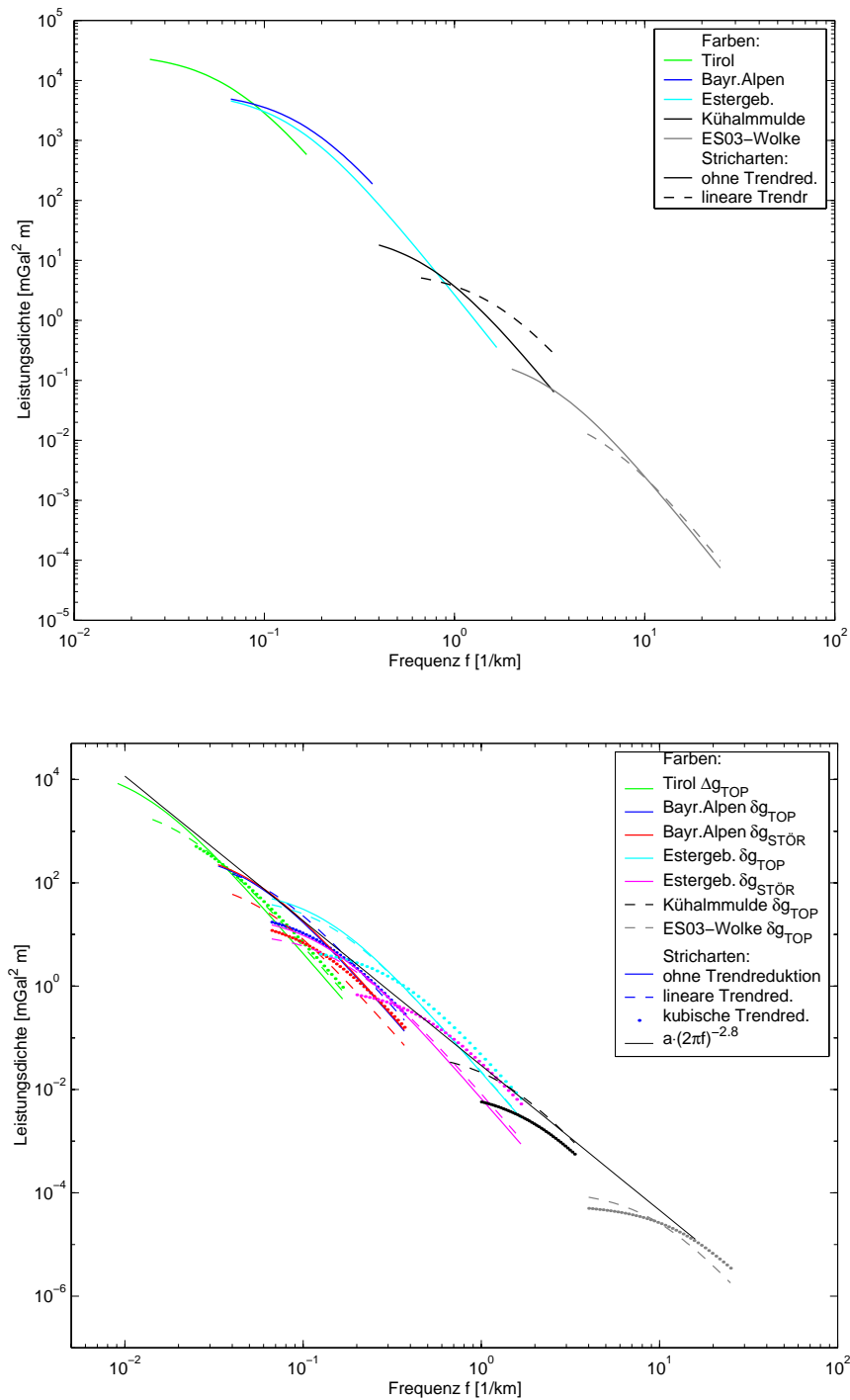
Über die Formeln in Tab.9.3 wurden nun PSDs zu den in Abschnitt 9.2 gefundenen AKF-Parametern berechnet. Abb.9.8 zeigt PSDs nach Tab.9.3 (d) für  $\delta g_{FA}$ ,  $\delta g_{TOP}$  sowie  $\delta g_{STÖR}$ ; die Kurven sind jeweils nur für das Frequenzband zwischen  $1/D$  und  $1/d$  dargestellt. Die PSDs der  $\delta g_{TOP}$  liegen dabei um das 50–500fache unter denjenigen der  $\delta g_{FA}$ . Dies repräsentiert die glättende Wirkung der Geländereduktion. Die Kurven der  $\delta g_{STÖR}$  liegen jeweils noch etwas tiefer aufgrund der zusätzlichen Glättung durch die Störkörperreduktion.

Wenn die verschiedenen Datensätze als Teil des gleichen Signals angesehen werden dürfen, dann müssten die jeweiligen PSD-Kurvenstücke Teile ein und derselben Kurve sein. In Abb.9.8 trifft dies einigermaßen zu. Funktionen nach Tab.9.3 (d) haben für höhere Frequenzen (etwa ab  $f > 0.4/\xi$ ) einen Neigungsverlauf mit  $1/\omega^4$  (in doppellogarithmischer Darstellung Geraden der Neigung -4). Eine aus den Einzelstücken der  $\delta g_{TOP}$ -Kurven in der Abbildung unten zusammengesetzte Gesamtkurve weist hingegen eher einen Verlauf mit  $1/\omega^{2.8}$  auf. Ein geeigneteres Modell der Art von Tab.9.3 (d) müsste daher im Nenner eher  $(\omega^2 + b^2)^{1.4}$  lauten.

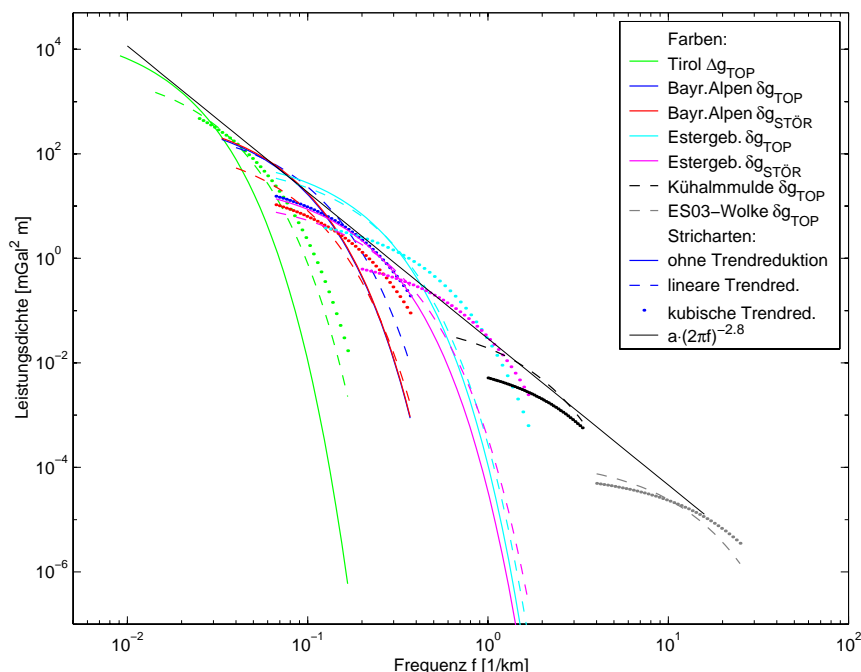
Für die kleinsten Ausschnitte sind allerdings (wie weiter oben ausgeführt) die AKF und somit auch die PSD-Kurvenstücke nicht mehr sehr aussagekräftig. Für  $\delta g_{FA}$  ist der Signalgehalt praktisch nur von der lokalen hochfrequenten Topographie abhängig.

Auch die PSDs nach der Reduktion unterschiedlicher Trends liegen in den dargestellten Stücken meist nahe beieinander. Die Trendreduktionen lassen also in diesen Frequenzen ähnlich große Signalanteile übrig. Vor allem für PSDs zu nicht trendreduzierten Daten, für welche das AKF-Modell wesentliche Teile der empirischen AKF vernachlässigt, überrascht dieses Ergebnis. Bei kubischer Trendreduktion liegt das PSD meist bei niedrigen Frequenzen etwas niedriger (mehr Signalanteile entfernt), bei höheren Frequenzen hingegen etwas höher (vielleicht geben die Modelle nach kubischer Reduktion die höheren Frequenzen etwas besser wieder).

Abb.9.9 zeigt PSDs nach Tab.9.3 (f) für AKF-Modelle des Hirvonen-Typs (mit  $p = 1$ ). Sie berühren nur in schmalen Frequenzbändern eine gemeinsame Hüllkurve. Dieses Modell ist daher



**Abbildung 9.8:** Leistungsdichtespektren nach Tab. 9.3d, jeweils aus AKF-Modellen Gauss-Markov 2. Ordnung (Tab. 9.3c). Oben: Freiluftschwerestörungen, unten: topographisch reduzierte bzw. zusätzlich um Störkörper reduzierte Schwerestörungen



**Abbildung 9.9:** Leistungsdichtespektren nach Tab. 9.3f für topographisch reduzierte Schwerestörungen aus Hirvonen-AKF-Modell (Tab. 9.3e)

vielleicht etwas weniger geeignet. Neigung und Lage der Hüllkurve sind aber praktisch identisch mit den Modellen von Abb. 9.8 unten.

## 9.4 Gradvarianzspektrum

Die dem Leistungsdichtespektrum PSD entsprechende Spektraldarstellung für eine Kugelfunktionsentwicklung sind Gradvarianzen  $c_n$  (Leistungsspektrum):

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi C(\psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi \quad (9.4)$$

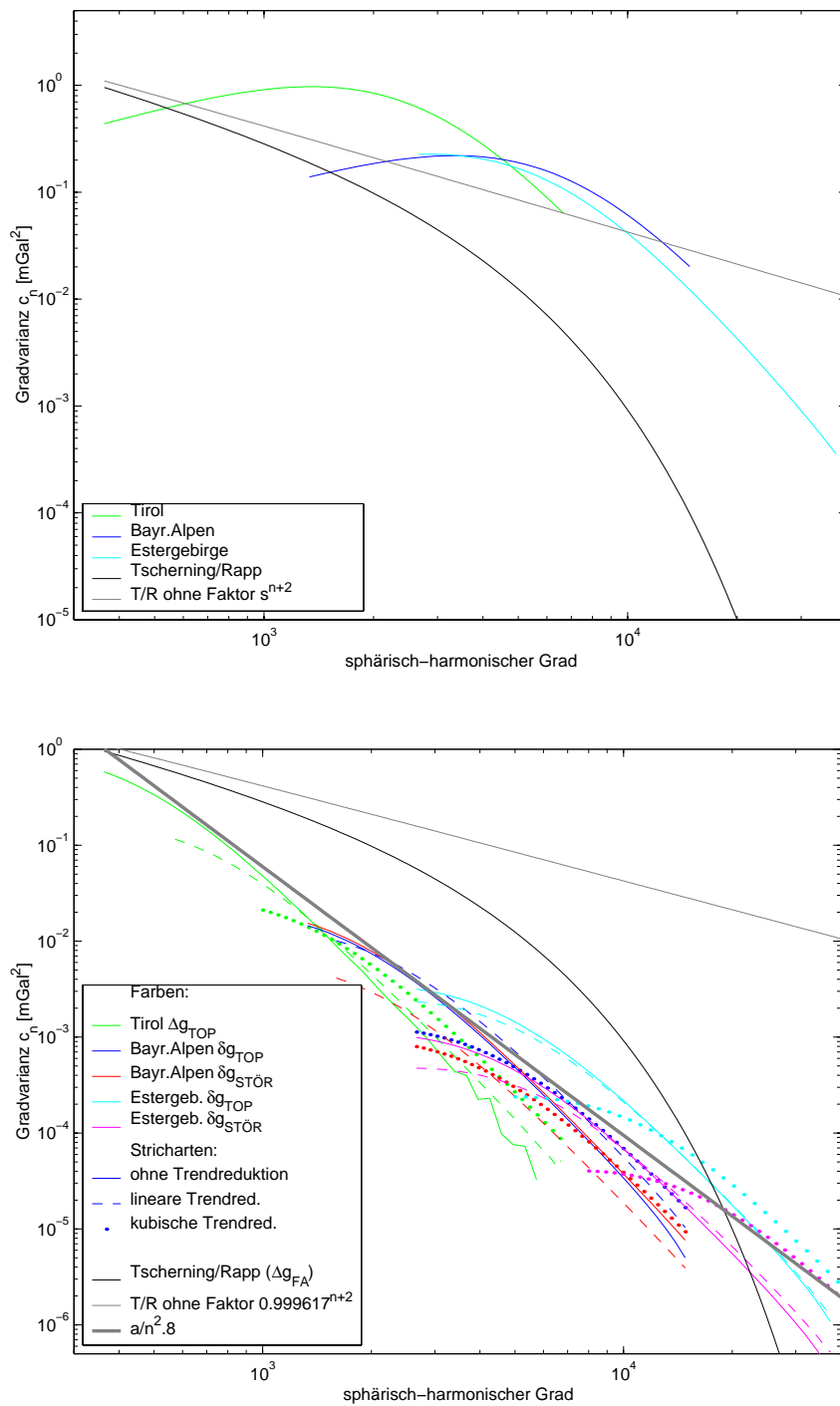
mit den Legendrepolynomen  $P_n$  des Grades  $n$  zum sphärischen Abstand  $\psi$ .

Die AKF-Modelle des Gauss-Markov-Typs 2. Ordnung wurden in geeigneten Intervallen  $\Delta\psi = \Delta s/R$  bis zu einem Abstand  $\psi_{\text{max}}$  abgegriffen. Numerische Integration ergibt dann die Gradvarianzen (Wenzel und Arabelos, 1981):

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \Delta\psi \sum_{\psi_i < \psi_{\text{max}}} C(\psi_i) P_n(\cos \psi_i) \sin \psi_i \quad (9.5)$$

(Anstelle der numerischen Integration wäre eventuell eine rekursive Berechnung möglich. Jekeli (1981) leitet eine Rekursionsformel für Gradvarianzen aus einem ähnlichen Exponentialmodell ab.) Auf die Berechnung der  $c_n$  für die Datensätze mit den kleinsten Ausdehnungen, für welche eine Entwicklung der Legendrepolynome bis zu extrem hohen Graden von 40 000 oder mehr notwendig wäre, wurde verzichtet.

Abb. 9.10 oben zeigt Gradvarianzen für Freiluftschwerestörungen, dargestellt jeweils zwischen



**Abbildung 9.10:** Gradvarianzen, jeweils aus AKF-Modellen Gauss-Markov 2.Ordnung. Oben: Freiluft-schwererestörungen, unten: topographisch reduzierte bzw. zusätzlich um Störkörper reduzierte Schwererestörungen



den Graden  $n_{\min} = 40\,000 \text{ km}/D$  und  $n_{\max} = 40\,000 \text{ km}/d$ , im Vergleich zum globalen Tscherning/Rapp-Gradvarianzmodell. Dieses Modell, welches allerdings eigentlich nicht für so hohe Grade ausgelegt ist, fällt wegen des Konvergenzfaktors  $s^{n+2}$  (mit dem Bjerhammar-Radius  $s = 0.999617$ ) bei den höchsten Graden sehr stark ab. Ohne diesen Faktor läge es im Bereich der dargestellten Datensätze. Dies wäre allerdings zu hoch für ein Modell, welches das durchschnittliche globale Signalverhalten wiedergeben soll und welches daher ein deutlich schwächeres Signal enthalten sollte als die hier ausgewählten Datensätze im Gebirge.

Für  $\delta g_{\text{TOP}}$  und  $\delta g_{\text{STÖR}}$  (Abb. 9.10 unten) ergänzen sich die  $c_n$ -Teilstücke einigermaßen zu einer Gesamtkurve, ähnlich wie die entsprechenden PSDs. Diese Kurve kann durch eine Funktion  $a/n^{2.8}$  mit  $a = 1.5 \cdot 10^7$  gut beschrieben werden. Ihre Neigung entspricht somit genau dem in Abschnitt 9.3 gefundenen Verlauf der PSDs mit  $1/\omega^{2.8}$ . Die Kurve der  $\delta g_{\text{TOP}}$  liegt wiederum um bis zum 300fachen unter den  $\delta g_{\text{FA}}$ -Gradvarianzen und für  $1000 < n < 10\,000$  auch deutlich unter dem Tscherning/Rapp- $\Delta g_{\text{FA}}$ -Modell.

Die Spektraldarstellungen zu den AKF-Modellen ergeben also in den Frequenzbändern, in welchen die jeweiligen Datensätze aussagekräftig sind, eine gute Übereinstimmung, allerdings im Rahmen einer gewissen Streubreite (welche häufig etwa dem Faktor 5 entspricht). Es kann somit zumindest näherungsweise von einem einheitlichen Signalverhalten gesprochen werden.

## 9.5 Empirischer Prädiktionsfehler

In diesem Abschnitt soll nun der formale Prädiktionsfehler aus der Prädiktion mit den ermittelten empirischen AKF-Modellen mit Hilfe von unabhängigen Kontrollpunkten überprüft werden, welche bei der Prädiktion nicht verwendet werden. In den Kontrollpunkten erhält man aus dem auf einer Messung basierenden Kontrollwert  $\delta g_{\text{K}}$  und dem mit (2.31) prädizierten Wert  $\delta g_{\text{Pr}}$  einen „empirischen“ Prädiktionsfehler  $\Delta$ :

$$\Delta = \delta g_{\text{K}} - \delta g_{\text{Pr}}. \quad (9.6)$$

Für eine Stütz- und Kontrollpunktauswahl aus dem Estergebirge sind solche empirische Prädiktionsfehler in Abb. 9.11 als Säulen dargestellt. Die Differenzen  $\Delta$  enthalten einerseits Punktfehler (Mess- und Reduktionsfehler) der Kontrollwerte und andererseits Prädiktionsfehler, welche sich wiederum aus Punktfehlern der Stützwerte sowie aus durch die Punktdichte nicht erfassten Signalanteilen zusammensetzen. Die Punktfehler der Kontrollpunkte sind überwiegend unkorreliert und werden als Rauschen  $\sigma_{\nu}^2$  angesetzt. Die Prädiktionsfehler ergeben sich aus der Prädiktion in den Kontrollpunkten mit Gleichung (2.32).

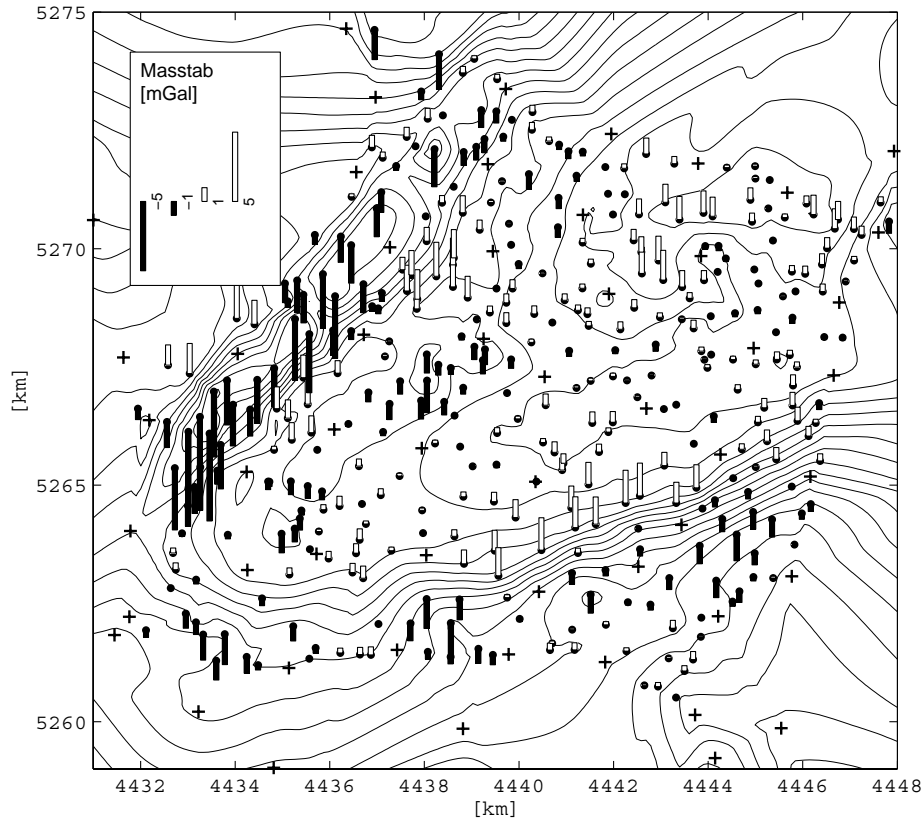
Als formales statistisches Maß (im folgenden als formale Fehler bezeichnet) für die  $\Delta$  ergeben sich Varianzen (jeweils in einem  $i$ -ten Kontrollpunkt)

$$\sigma_{\text{form}_i}^2 = \sigma_{\nu}^2 + \sigma_{\text{Pr}_i}^2. \quad (9.7)$$

sowie Kovarianzen zwischen je 2 Kontrollpunkten, für welche das Rauschen entfällt und nur die Prädiktionsfehlerkovarianz übrig bleibt:

$$\text{cov}(\Delta_{ij})_{\text{form}} = \sigma_{\text{Pr}_{ij}}. \quad (9.8)$$

Wenn genügend Kontrollpunkte vorliegen, können andererseits auch direkt empirisch aus den  $\Delta$ -Werten (also z.B. den Säulen in Abb. 9.11) statistische Maße bestimmt werden.  $\sigma_{\text{emp}}^2$  kann aus allen Kontrollpunkten eines Datensatzes gebildet werden:



**Abbildung 9.11:** Empirische Prädiktionsfehler: Differenzen  $\delta g_K - \delta g_{Pr}$  zwischen gemessenem Kontrollwert und prädiziertem Wert (Säulen),  $\delta g_{TOP}$  Estergebirge mit 1 mGal-Isolinien, Stützpunktsignatur +

$$\sigma_{\text{emp}}^2 = \sum_i^I \frac{\Delta_i^2}{I} \quad (9.9)$$

für  $I$  Kontrollpunkte. Die Kontrollpunkte können aber auch in Klassen abhängig von ihrer Entfernung  $d_{\min}$  zum jeweils nächsten Stützpunkt der Prädiktion aufgeteilt werden:

$$\sigma_{\text{emp}_k}^2 = \sum_{d_{\min} \in d_k}^{I_k} \frac{\Delta_i^2}{I_k} \quad (9.10)$$

für Abstandsklassen  $d_k$  und  $I_k$  Kontrollpunkten pro Abstandsklasse (entsprechend dem Vorgehen bei der Berechnung der empirischen AKF). Die Bildung von Kovarianzen zwischen verschiedenen Kontrollpunkten ist nur in Klassen abhängig von der Distanz  $d_{ij}$  zwischen den jeweils 2 Kontrollpunkten sinnvoll:

$$\text{cov}(\Delta_{ij})_k^{\text{emp}} = \sum_{d_{ij} \in d_k}^{I_k} \frac{\Delta_i \Delta_j}{I_k}. \quad (9.11)$$

Nun kann die Übereinstimmung zwischen empirischen und formalen Fehlermaßen, also die

Beziehungen

$$\sigma_{\text{emp}}^2 = \sigma_{\text{form}}^2 \quad (9.12)$$

$$\sigma_{\text{emp}_k}^2 = \sigma_{\text{form}_k}^2 \quad (9.13)$$

$$\text{cov}(\Delta_{ij})_k^{\text{emp}} = \text{cov}(\Delta_{ij})_k^{\text{form}} \quad (9.14)$$

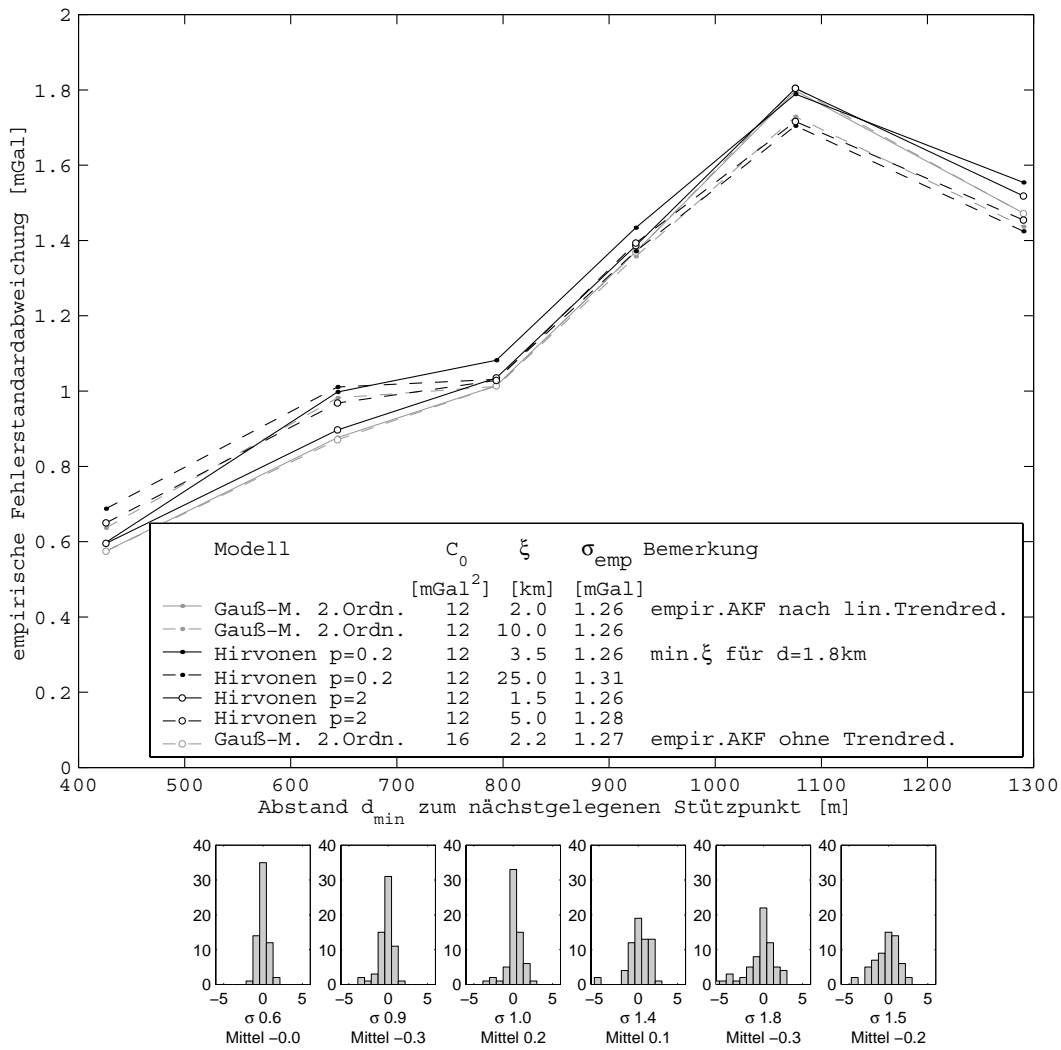
getestet werden.

Dafür sollen im folgenden zunächst empirische Fehler ermittelt und untersucht werden. Das Prädiktionsergebnis  $\delta g_{\text{Pr}}$  und somit auch die empirischen Prädiktionsfehler sind relativ unempfindlich gegenüber der Wahl des AKF-Modells und der AKF-Parameter bei der Prädiktion. Abb. 9.12 zeigt für das Beispiel aus Abb. 9.11, dass sehr unterschiedliche Modelle und Parameter zu fast identischen empirischen Fehlern führen. Die Tabelle in der Abbildung enthält die Gesamtstandardabweichungen  $\sigma_{\text{emp}}$ , die Grafik teilt sie in 6 Klassenwerte  $\sigma_{\text{emp}_k}$  auf und zeigt damit das Ansteigen der empirischen Fehler abhängig vom Abstand  $d_{\text{min}}$  zum nächstgelegenen Stützpunkt. Die Halbwertsbreite  $\xi$  muss allerdings zum mittleren Stützpunktabstand  $d$  passen. Bei zu kleinem  $\xi$  schlägt die Prädiktion zwischen den Stützpunkten zu 0 hin aus. Für das Modell  $C_0 e^{-as^2}$  geschieht dies für  $\xi < 0.7d$  (Bian und Menz, 1999); für das Gauß-Markov-Modell 2. Ordnung gilt wohl ein ähnlicher Wert, für Hirvonenmodelle mit kleinem Parameter  $p$  muss  $\xi$  noch größer sein. Wenn  $\xi$  andererseits zu groß gewählt wird (größer als die Maximalwerte in Abb. 9.12), dann glättet die Prädiktion stärker, und die empirischen Fehler  $\Delta$  steigen an.

Für die Bildung von Abstandsklassen wurden jeweils mindestens 60 Kontrollpunkte pro Klasse verwendet. Nur dann ist eine ausreichend homogene Verteilung der Fehler  $\Delta$  gewährleistet. Abb. 9.12 unten zeigt, dass die Verteilungen der  $\Delta$  für die 6 Abstandsklassen Normalverteilungen nahe kommen. Bei weniger Kontrollpunkten pro Klasse würden hingegen einzelne große  $\Delta$ -Werte, z.B. aus dem Loischachtal, das Klassenmittel zu stark prägen.

Abb. 9.13 zeigt die empirischen Fehler für  $\delta g_{\text{TOP}}$  bzw.  $\delta g_{\text{STÖR}}$  für die in Kap. 9.1–9.4 untersuchten Datensätze unterschiedlicher Ausdehnung. Mit gewissen Einschränkungen kann man aufgrund der empirischen Fehlerstandardabweichungen von einem relativ homogenen  $\delta g_{\text{TOP}}$ - bzw.  $\delta g_{\text{STÖR}}$ -Signal ausgehen. Aus den Datensätzen wurden Stützpunktsätze mit unterschiedlichen mittleren Stützpunktabständen  $d$  ausgewählt. Alle übrigen Punkte eines Datensatzes, in der Regel ca. 100–400 Punkte, dienen als Kontrollpunkte; ihrer jeweiligen Anzahl entsprechend wurden mehr oder weniger Abstandsklassen gebildet. Für die Prädiktion wurden Gauss-Markov-Modelle 2. Ordnung mit den Parametern der empirischen AKF des jeweiligen Datensatzes nach linearem Trendabzug verwendet (Tab. 9.2). Wenn  $\xi$  im Vergleich zu  $d$  zu klein war (s.o.), wurden die Parameter des nächstgrößeren Datensatzes verwendet. Die Kurven zeigen eine deutliche Abhängigkeit von  $d_{\text{min}}$ . Die vorhandenen Zacken deuten auf Inhomogenitäten der  $\Delta$  hin, z.B. darauf, dass Kontrollpunkte mit ähnlichem  $d_{\text{min}}$  aufgrund der Stützpunktauswahl zufällig bevorzugt in besonders rauen Zonen liegen. Zum späteren Vergleich mit den formalen Fehlern, und weil für die Datensätze unterschiedliche Werte für das Rauschen angenommen wurden, ist jeweils nicht  $\sigma_{\text{emp}}$ , sondern  $\sqrt{\sigma_{\text{emp}}^2 - \sigma_{\nu}^2}$  dargestellt, siehe die Gleichungen (9.7) und (9.12). Die Mittelwerte für  $\sigma_{\text{emp}}$  (Tabelle in Abb. 9.13) zeigen die Abnahme des Restsignals bei steigender Punktdichte.

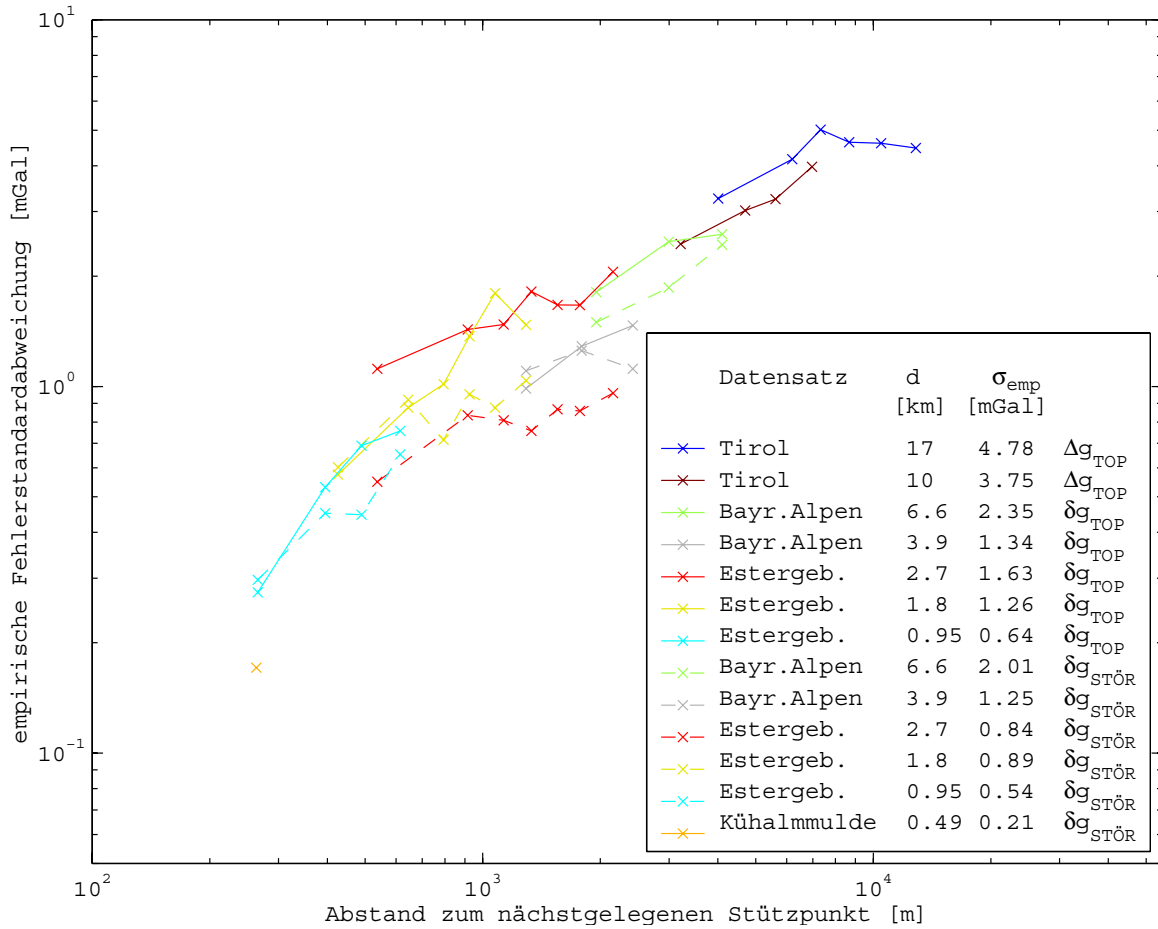
Wie zu erwarten ist, liegen die Fehler der  $\delta g_{\text{STÖR}}$  unterhalb derjenigen der  $\delta g_{\text{TOP}}$ . Die meisten Einzelkurven fügen sich zu einer recht homogenen Gesamtkurve zusammen. Bei gleichem  $d_{\text{min}}$  liegen die Fehler für weniger dichte Stützpunkte (größeres  $d$ ) meist über denjenigen für dichtere Stützpunkte, weil für die ersten die Entfernungen zu den restlichen Stützpunkten größer sind. Eine Ausnahme bilden die Fehler für die  $\delta g_{\text{TOP}}$  der Bayerischen Alpen bei  $d = 3.9$  km, welche deutlich unter den Fehlern aus dem Estergebirge liegen. Möglicherweise sind die  $\delta g_{\text{TOP}}$  im



**Abbildung 9.12:** Oben: Empirische Prädiktionsfehler in Abhängigkeit vom Abstand zum nächstgelegenen Stützpunkt für unterschiedliche AKF-Modelle und AKF-Parameter. Estergebirge, Datensatz mit mittlerem Stützpunktabstand 1.8 km  
 Unten: Verteilung der Fehler (in [mGal]) in den 6 Abstandsklassen der Grafik (für Gauss-Markov 2.Ordnung,  $C_0=12 \text{ mGal}^2$ ,  $\xi=2.0 \text{ km}$ )

Estergebirge durch die Störkörper des Loisachtals und des Wamberger Sattels etwas rauher als im Durchschnitt der Bayerischen Alpen. Ebenfalls deutlich unter den Fehlern des Estergebirges liegen diejenigen der Verdichtung Kühalm-Michelfeld. Dort ist das Signal also etwas glatter, vermutlich weil die gesamte Mulde in einer einheitlichen geologischen Schicht liegt (Plattenkalk). Weil der Datensatz Kühalm-Michelfeld insgesamt nur 60 Messpunkte umfasst, ist für ihn eine Aufteilung in Abstandsklassen nicht sinnvoll.

$\sigma_{\text{emp}}^2 - \sigma_{\nu}^2$ , also die empirische Fehlervarianz abzüglich des Rauschens, gibt auch ein Maß für den Restsignalgehalt in den Wellenlängen unterhalb des Stützpunktabstandes. Es zeigt sich, dass auch bei sehr kurzen Wellenlängen noch ein deutliches  $\delta g$ -Signal vorhanden ist. Aus Abb. 9.13 geht hervor, dass ein Restsignalgehalt mit einer Standardabweichung von unter 1 mGal für  $\delta g_{\text{TOP}}$  erst bei Messpunktabständen unter 1.5 km und für  $\delta g_{\text{STÖR}}$  bei Abständen unter 3 km erreicht wird. Erst bei Punktabständen um 500 m liegt der Restsignalgehalt in der Gegend des Rauschens (bei



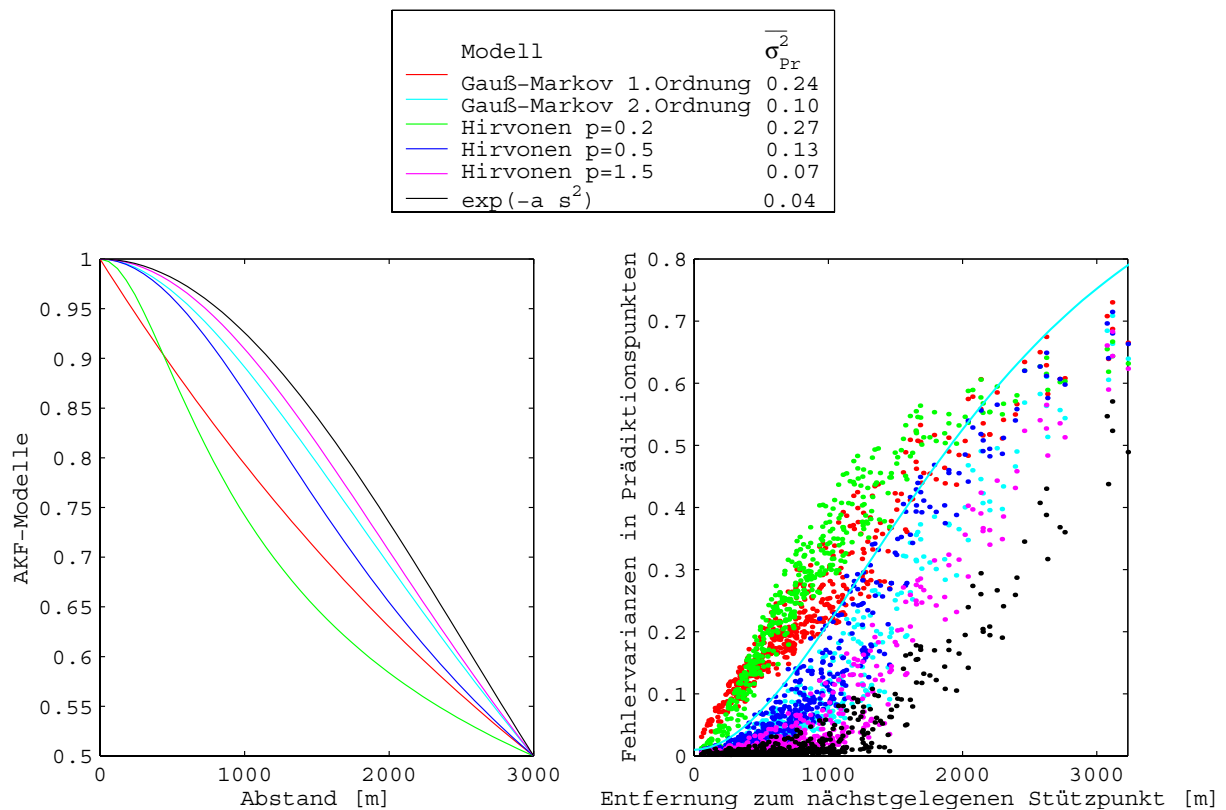
**Abbildung 9.13:** Empirische Prädiktionsfehler  $\delta g_{\text{TOP}}$  bzw.  $\delta g_{\text{STÖR}}$ . Die Ergänzung der einzelnen Datensätze zu einer Gesamtkurve deutet auf ein ähnliches Signalverhalten.

sorgfältiger Modellierung 0.1–0.3 mGal). Dies bedeutet auch, dass die Sorgfalt bei der Geländemodellierung, welche im Estergebirge angewendet wurde, erst bei sehr engen Punktabständen unter 1 km wirklich erforderlich ist. Im Gebirge wird eine solche Punktdichte und somit eine solche Genauigkeit wohl in der Regel nicht erreicht werden können.

Viel empfindlicher als der empirische reagiert der formale Fehler  $\sigma_{\text{Pr}}$  auf Änderungen der AKF-Parameter einschließlich der Krümmung des AKF-Modells bei kleinen Abständen. Abb. 9.14 zeigt, dass AKF-Modelle mit relativ geringen Unterschieden im Krümmungsverlauf deutlich verschiedene formale Fehler bewirken können. Dies äußert sich im Mittel  $\bar{\sigma}_{\text{Pr}}$

$$\bar{\sigma}_{\text{Pr}} = \sqrt{\sum_i \frac{\sigma_{\text{Pr}_i}^2}{I}} \tag{9.15}$$

für  $I$  prädierte Kontrollpunkte (Tabelle in Abb. 9.14) wie auch im Verlauf der  $\sigma_{\text{Pr}}$  in den Einzelpunkten abhängig von  $d_{\text{min}}$ . Diese deutliche Abhängigkeit der Fehler von  $d_{\text{min}}$  erweist sich als aussagekräftiges Untersuchungskriterium für die Prädiktion mit unregelmäßig verteilten Stützpunkten (Goad et al., 1984). Besonders extreme und unrealistische Verläufe von  $\sigma_{\text{Pr}}$  erhält man mit den Modellen Gauss-Markov 1.Ordnung (deutlich zu steil) und  $e^{-as^2}$  (deutlich zu flach), obwohl beide Modelle durchaus vernünftige prädierte Werte  $\delta g_{\text{Pr}}$  ergeben.



**Abbildung 9.14:** AKF-Modelle mit unterschiedlichen Krümmungen bei kleinen Abständen (links) und resultierende formale Fehler (rechts, jeder Punkt repräsentiert einen Prädiktionspunkt). Alle Modelle werden in der Praxis mit guten Prädiktionsergebnissen eingesetzt, ergeben aber teilweise unrealistische formale Fehler. Jeweils mit  $C_0=1$  (dimensionslos),  $\xi=3$  km und einen simulierten Datensatz mit  $d=1.4$  km. In der rechten Abbildung ist für das Gauss-Markov-Modell 2.Ordnung exemplarisch die theoretische Maximalkurve nach Gleichung (9.16) dargestellt.

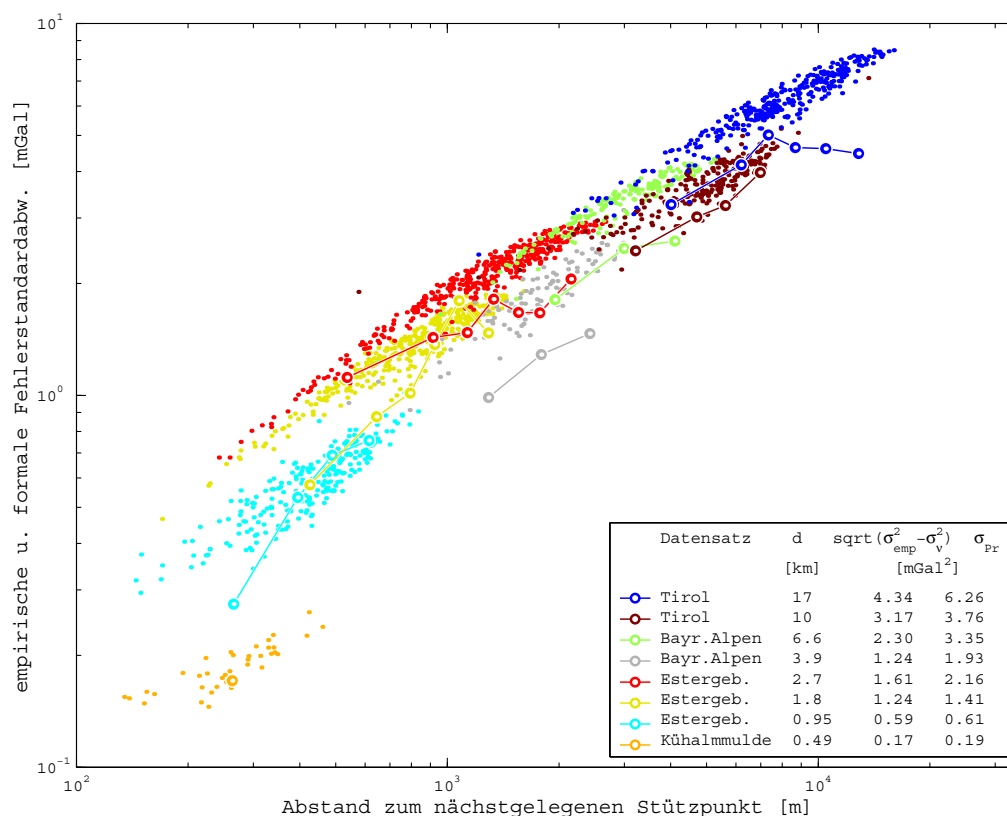
Für den Fall, dass nur 1 Stützpunkt vorhanden wäre, ergibt sich für  $\sigma_{Pr}$  aus (2.32) die Maximalkurve

$$\sigma_{Pr}^2(d_{\min}) = C_0 - \frac{C^2(d_{\min})}{C_0 + \sigma_v^2} \quad (9.16)$$

Für das Modell Gauss-Markov 2.Ordnung ist diese Kurve in Abb. 9.14 eingetragen.

Nach diesen separaten Untersuchungen der empirischen und formalen Fehler sollen nun beide verglichen werden, d.h. die Gleichungen (9.12)–(9.14) sollen getestet werden. Abb. 9.15 zeigt die empirischen Fehler aus Abb. 9.13 zusammen mit formalen Fehlern, welche mit Gauss-Markov-Modellen 2.Ordnung mit den Parametern der jeweiligen empirischen AKF nach Abzug einer ausgleichenden Ebene (Tab. 9.2) bestimmt wurden. Die Übereinstimmung ist für die meisten Datensätze gut; im Extremfall sind die formalen Fehler um den Faktor 1.7 zu groß, also zu pessimistisch.

Die Kovarianzparameter aus empirischen AKF führen also häufig zu ziemlich realistischen formalen Prädiktionsfehlern, zumindest bei Verwendung von Gauss-Markov-Modellen 2.Ordnung und nach Abzug eines linearen Trends. Die beschriebenen Vorbehalte gegenüber aus begrenzten trendbehafteten Ausschnitten gebildeten empirischen AKF erweisen sich also für den Prädikti-

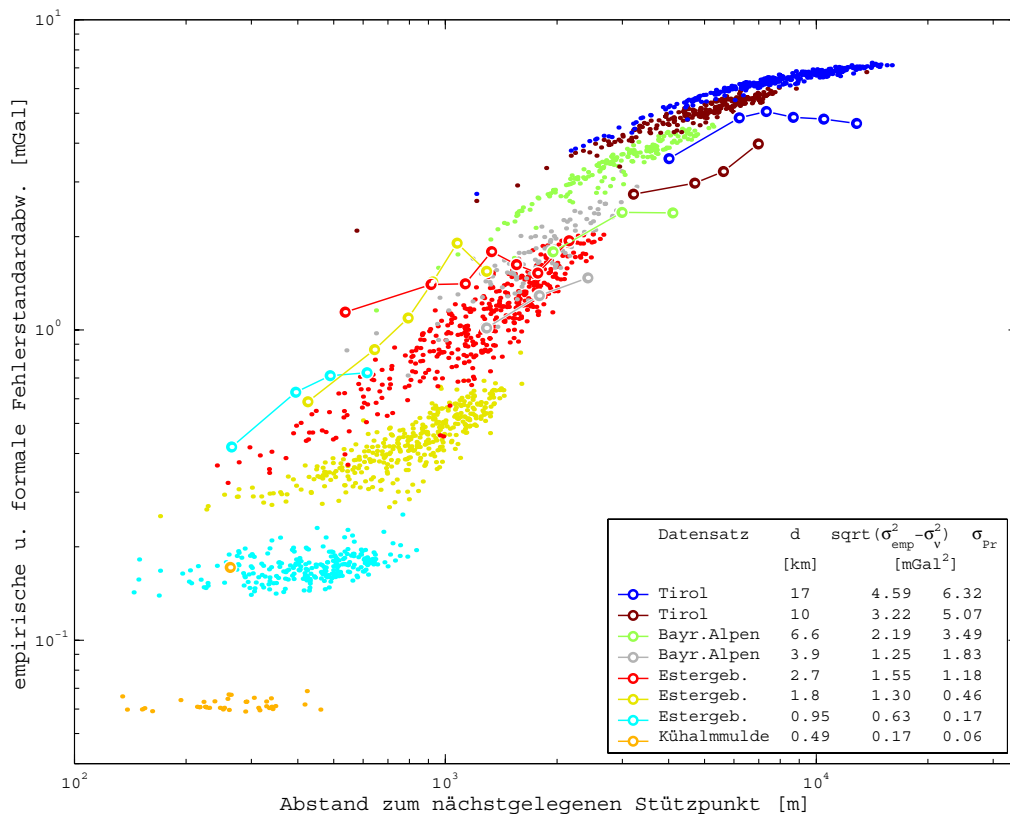


**Abbildung 9.15:** Formale Prädiktionsfehler (Punkte) für alle untersuchten Datensätze unter Verwendung der Parameter der empirischen AKF des jeweiligen Datensatzes nach linearem Trendabzug, im Vergleich mit empirischen Fehlern (mit Linien verbundene Kreise, siehe Abb. 9.13, hier nur  $\delta g_{\text{TOP}}$ , nicht  $\delta g_{\text{STÖR}}$ )

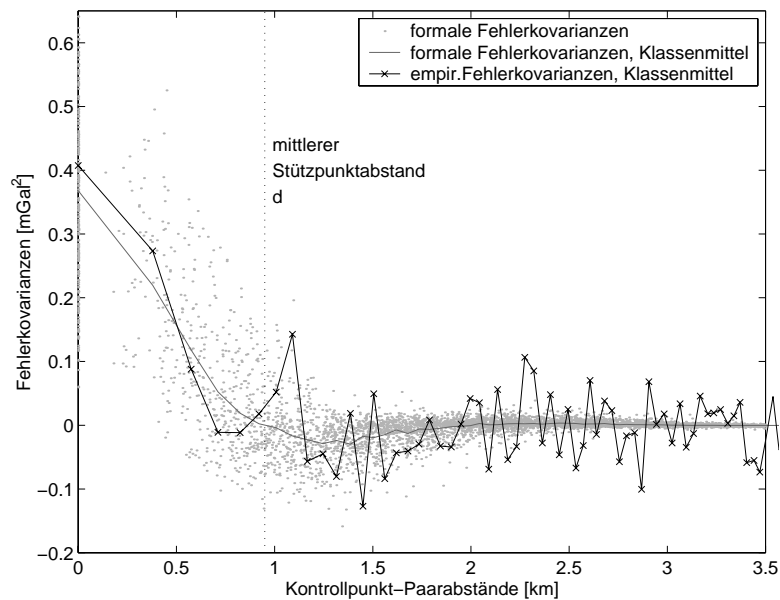
onsfehler als doch nicht so gravierend. Die Frage, wie sich die wegreduzierten Trends bei der Kovarianz-Fortpflanzung auf andere Funktionale auswirken, bleibt allerdings noch offen.

Ein solcher Vergleich kann auch verwendet werden, um ein einheitliches realistisches AKF-Modell für alle untersuchten Datensätze zu finden. In Abb. 9.16 sind den gleichen empirischen Fehlern nun formale Fehler aus einem durch Probieren gefundenen Hirvonenmodell mit  $p = 0.2$ ,  $C_0 = 100 \text{ mGal}^2$ ,  $\xi = 20 \text{ km}$  gegenübergestellt. Für die Datensätze mit großen Punktabständen  $d$  sind die Fehler aus dem Modell etwas zu pessimistisch, für mittlere  $d$  ungefähr realistisch, für die Datensätze mit sehr kleinem  $d$  (in der Abbildung links) hingegen unrealistisch (um bis zu Faktor 4 zu klein). Bei der Kombination von Datensätzen mit so unterschiedlichen Punktdichten und Ausdehnungen stößt man rasch an die Grenzen solcher einfacher analytischer AKF-Modelle. Ihre Krümmung kann das tatsächliche Signalverhalten meist nur für bestimmte Abstandsbereiche gut wiedergeben. Ein einheitliches Gauss-Markov-Modell 2.Ordnung lässt sich noch schlechter an die verschiedenen Datensätze anpassen als das gezeigte Hirvonenmodell.

Für die Bildung des Fehlervolumens mit Gleichung (2.40) sind realistische Fehlerkovarianzen ebenso wichtig wie realistische Fehlervarianzen. Tests zeigen allerdings, dass bei der Prädiktion mit AKF-Modellen, welche realistische formale Fehlervarianzen bewirken, die Kovarianzen unproblematisch sind. Abb. 9.17 zeigt ein solches Beispiel: Bei einem Datensatz und einem AKF-Modell, für welche schon die formale Fehlervarianz dem empirischen Wert sehr nahe kommt, stimmen auch die formalen Kovarianzen gut mit den über Gleichung (9.11) gebildeten empirischen überein. Der Verlauf der gezeigten Kurven wird weniger von der Form des AKF-Modells, sondern vielmehr



**Abbildung 9.16:** Formale Prädiktionsfehler für alle untersuchten Datensätze unter Verwendung einer einheitlichen Hirvonen-AKF mit  $p=0.2$ ,  $C_0=100 \text{ mGal}^2$ ,  $\xi=20 \text{ km}$ , im Vergleich mit empirischen Fehlern, Signaturen siehe Abb. 9.15



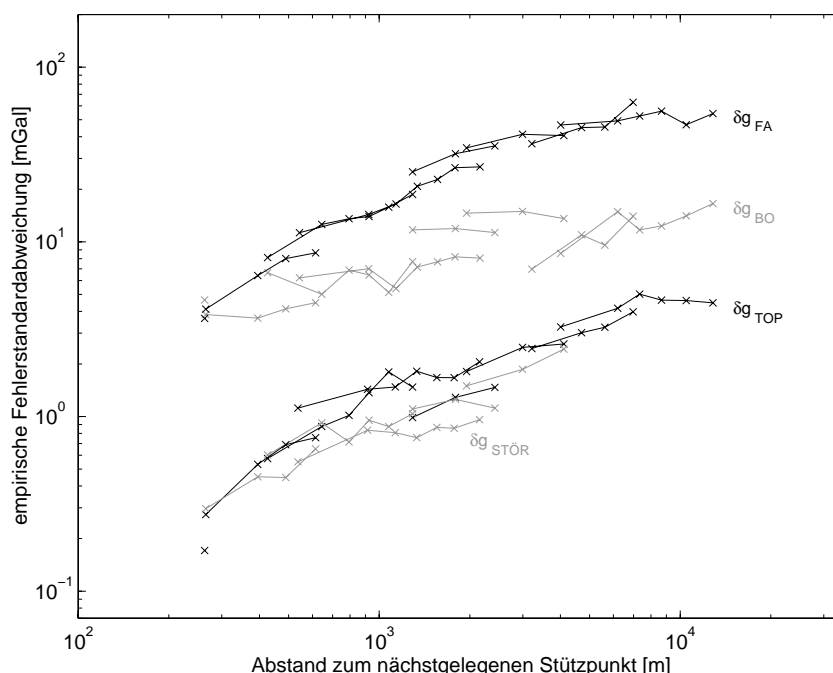
**Abbildung 9.17:** Formale Fehlerkovarianzen für das Estergebirge, Datensatz mit  $d=0.95 \text{ km}$ , Prädiktion mit Parametern der empir. AKF, im Vergleich mit empirischen Fehlerkovarianzen



von der Stützpunktdichte bestimmt. Etwa ab dem mittleren Stützpunktabstand  $d$  schlagen die Kovarianzen leicht ins negative aus, um dann schnell 0 zu erreichen.

Der entscheidende Test auf realistische formale Fehler ist also der Test der Varianzen; wenn er positiv ausfällt, gilt dies in der Regel auch für den Test der Kovarianzen.

Zum Schluss des Kapitels soll noch einmal die Signalreduktion durch die Reduktionsschritte der Schwerereduktionen gezeigt werden, nun allerdings anhand der punktdichteabhängigen empirischen Prädiktionsfehler. Abb. 9.18 zeigt noch einmal empirische Prädiktionsfehler, diesmal aber nicht nur für  $\delta g_{\text{TOP}}$  und  $\delta g_{\text{STÖR}}$ , sondern auch für  $\delta g_{\text{BO}}$  und  $\delta g_{\text{FA}}$ . Während der Vergleich von Signalstandardabweichungen (Kap. 9.1) wegen des Einflusses langwelliger Trends problematisch war, sind die empirischen Prädiktionsfehler unabhängig von solchen Trends, da nur das Restsignal unterhalb der Stützpunktdichte eingeht.



**Abbildung 9.18:** Reduktion des Signalgehalts (Glättung) durch die Schritte der Schwerereduktion, demonstriert an empirischen Prädiktionsfehlern für alle in den Abb. 9.13 bis Abb. 9.16 gezeigten Datensätze

Abb. 9.18 zeigt vor allem für das Verhältnis zwischen  $\delta g_{\text{FA}}$  und  $\delta g_{\text{TOP}}$  ein ziemlich konsistentes Bild: Für alle Punktdichten betragen die Fehler für topographisch reduzierte Störungen 4–9% der Fehler für Freiluftstörungen. Nach der Reduktion der Störkörper sind die Fehler teilweise noch einmal deutlich geringer, bei 60–90% der  $\delta g_{\text{TOP}}$ , je nach dem Umfang der modellierten Störkörper. Die Kurven für  $\delta g_{\text{BO}}$  hingegen variieren sehr stark im Mittelfeld zwischen Freiluft- und topographisch reduzierten Störungen, je nach dem Anteil der Berggipfel in den Datensätzen.

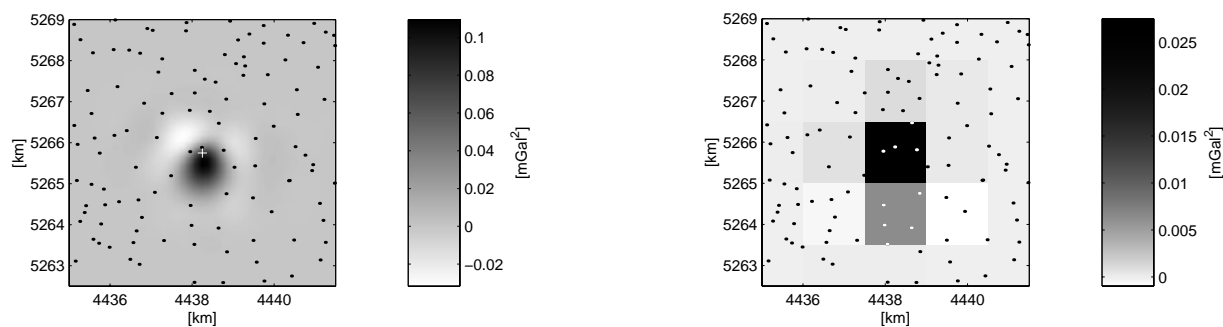
# 10 Fehlervolumen für Schwerestörungen und Fehlerfortpflanzung

Aus Kap. 9 liegen nun geprüfte AKF-Modelle für topographisch reduzierte Schwerestörungen  $\delta g_{\text{TOP}}$  vor, welche für bestimmte Stützpunktdichten realistische Prädiktionsfehler (Varianzen und Kovarianzen) ergeben. Dies ist der gewünschte Darstellungsfehler, welcher nun zur Fehlerfortpflanzung in dem in Kap. 2.3 dargestellten Verfahren eingesetzt werden kann. Mit diesen Modellen müssten – immer bezogen auf die zugehörigen Punktdichten – realistische Genauigkeiten für Geoidhöhen und Kugelfunktionskoeffizienten oder auch für andere Schwerefeldfunktionale erhalten werden.

In Heiskanen und Moritz (1967), Tab.(7-3), werden Geoidfehler aus Schwereanomalie-Rastern für Rasterweiten zwischen  $10^\circ$  und  $1^\circ$  angegeben. Im folgenden werden Geoidfehler und Fehler für Kugelfunktionskoeffizienten nach dem gleichen Verfahren, aber für wesentlich kleinere Stützpunktabstände zwischen 15 km und 0.5 km berechnet, jeweils nicht nur für Stützpunktraster, sondern auch für unregelmäßig verteilte Stützpunkte. Dabei wird das Vorliegen von Datensätzen mit jeweils global einheitlicher Punktdichte angenommen. Die Ergebnisse sind daher als Abschätzungen für ideale Situationen zu verstehen. Ähnliche Vorgehensweisen mit anderen Operatoren würden Genauigkeiten für die Berechnung weiterer Funktionale liefern.

## 10.1 Fehlerkovarianzfunktion

Grundlage für das weitere Vorgehen sind Fehlerkovarianzfunktionen für prädizierte  $\delta g_{\text{TOP}}$ -Punktwerte aus Gleichung (2.32) bzw. für prädizierte  $\delta g_{\text{TOP}}$ -Blöcke aus Gleichung (2.34). Da sich die Arbeit auf die Untersuchung lokaler Datensätze beschränkt, wird im folgenden mit ebenen Koordinaten gearbeitet, also mit  $\sigma(x, y, x', y')$  anstelle von  $\sigma(\theta, \lambda, \theta', \lambda')$ . Abb.10.1 zeigt Beispiele für eine Stützpunktverteilung aus dem Estergebirge. Schon in geringer Entfernung vom Berechnungspunkt bzw. -block verschwinden die Fehlerkovarianzen. Dort wo diese vernachlässigbar klein



**Abbildung 10.1:** Fehlerkovarianzfunktion für einen Einzelpunkt (+) (links) bzw. für einen  $1.5 \text{ km} \times 1.5 \text{ km}$ -Block (rechts), aus Prädiktion mit geprüfem AKF-Modell, mit GK-Koordinaten

werden, kann die Grenze des Integrationsgebietes  $\Sigma'$  gezogen werden, siehe die Gleichungen (2.26) bzw. (2.27). Bei unregelmäßig verteilten Einzelpunkten ist dies etwa ab dem übernächsten Stützpunkt der Fall. Die Korrelationen zwischen Blöcken hängen von der Anzahl und der Verteilung der Stützpunkte in den Blöcken ab. Ab ca. 10 einigermaßen gleichverteilten Punkten pro Block verschwinden die Korrelationen zwischen den Blockmittelwerten nahezu vollständig. Abb. 10.1 links zeigt, dass das Maximum der Fehlerkovarianzfunktion nicht die Varianz sein muss. Kovarianzen zu Gebieten mit schlechterer Erfassung durch Stützpunkte können die Varianz übersteigen. Die prädierten Fehlerkovarianzfunktionen sind in der Regel nicht homogen und nicht isotrop.

## 10.2 Fehlervolumen

Zur Fortpflanzung des Darstellungsfehlers (Prädiktionsfehlers) für Schwerstörungen auf Geoidhöhen und Kugelfunktionskoeffizienten wird nun das Fehlervolumen  $E$  als Integral über die Fehlerkovarianzfunktion  $\sigma(x, y, x'y')$ , Gleichung (2.40), benötigt.

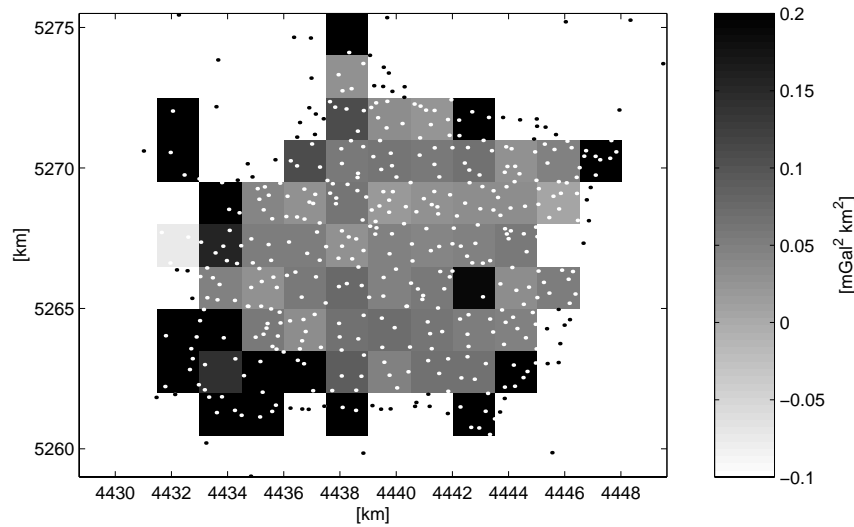
Oft ist für  $E$  eine grobe Auflösung ausreichend; dann kann es in Blöcken berechnet werden, so z.B. für den Geoidfehler nach Gleichung (2.39) für die Zonen außerhalb der näheren Umgebung des Berechnungspunktes. Dabei können die Blockgrößen mit der Entfernung zunehmen. Ebenfalls ausreichend sind  $E$ -Blockwerte für Fehler von Kugelfunktionskoeffizienten (2.43) für niedrige Grade, wenn die Wellenlänge der Kugelfunktionen die Blockgröße deutlich übersteigt. In diesen Fällen ist jeweils auch der  $F$ -Anteil in (2.39) und (2.43) vernachlässigbar. Für den Nahbereich der Geoidberechnung sowie für hohe Kugelfunktionsgrade wird eine höhere  $E$ -Auflösung sowie eventuell eine Berücksichtigung der  $F$ -Anteile notwendig.

### 10.2.1 $E$ -Blockwerte

Grundlage ist die Fehlerkovarianzfunktion für Blöcke (2.29). Die dafür erforderlichen Mittelwerte des AKF-Modells zwischen Blöcken  $\overline{C}_{KK'}$  bzw. zwischen Blöcken und Stützpunkten  $\overline{C}_{Ki}$  werden durch numerische Integration berechnet. Dafür werden die Blöcke in ausreichend kleiner Schrittweite abgetastet. Die Schrittweite soll zur Krümmung des AKF-Modells passen. Am aufwendigsten ist die Berechnung von  $\overline{C}$ . Als Stützpunkte werden jeweils alle Punkte eines Datensatzes verwendet, welche innerhalb des jeweiligen Blocks oder in einem gewissen Umkreis liegen. Die Integration bei der Bildung von  $E$  in Gleichung (2.40) kann nun durch die Summe jeweils über die nah benachbarten Blöcke ersetzt werden; man erhält Blockwerte für  $E$ . Abb. 10.2 zeigt  $E$ -Blockwerte aus dem Estergebirge.  $E$  wird meist in  $[\text{mGal}^2 \text{ km}^2]$  angegeben, manchmal stattdessen auch als  $E/R^2$  in  $[\text{mGal}^2]$  mit dem Erdradius  $R$ .

Wie schon erwähnt wurde, verschwinden die Fehlerkovarianzen zu Nachbarblöcken fast ganz, wenn ein Block genügend dicht mit Stützpunkten besetzt ist. In diesem Fall kann (bei meist nur geringer Unterschätzung von  $E$ ) die Integration bzw. Summation über  $\Sigma'$  ersetzt werden durch die Näherung  $\sigma^2 \Delta\Sigma$ , mit der Blockgröße  $\Delta\Sigma$ . Es müssen dann nur die Blockfehlervarianzen  $\sigma^2$  berechnet werden, keine Kovarianzen, also auch nur die Hauptdiagonale der Matrix  $\overline{C}_{KK'}$ . Für größere Blöcke, welche viele Stützpunkte umfassen, variieren die  $E$ -Blockwerte nur noch wenig, da sich lokale Unterschiede in der Punktdichte weniger auswirken. Man nähert sich so einem  $E$ -Mittelwert für den ganzen Datensatz. Nur an den Rändern des Datensatzes steigt  $E$  stark an, wenn außerhalb weniger dichte oder gar keine Stützpunkte vorhanden sind.

Für alle in Kap. 9 untersuchten Datensätze von topographisch reduzierten Schwerstörungen wurden nun  $E$ -Blockwerte für geeignete Blockgrößen berechnet, jeweils unter Verwendung eines zur Punktdichte passenden geprüften AKF-Modelles. Aus den Blockwerten (ohne Randblöcke)

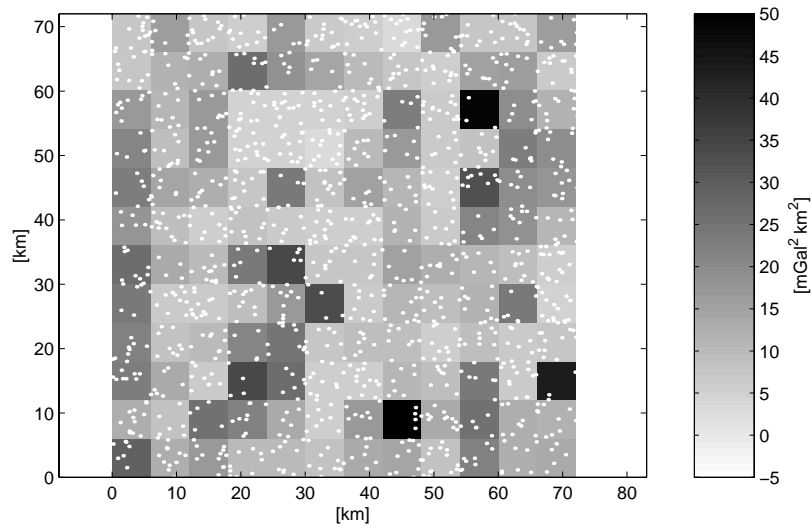


**Abbildung 10.2:**  $E$ -Blockwerte für das Estergebirge, mittlerer Punktabstand  $d=0.62$  km, Blockgröße  $1.5\text{ km}\times 1.5\text{ km}$ , geprüftes AKF-Modell, Gebietsmittel ohne Randblöcke:  $0.06\text{ mGal}^2\text{ km}^2$

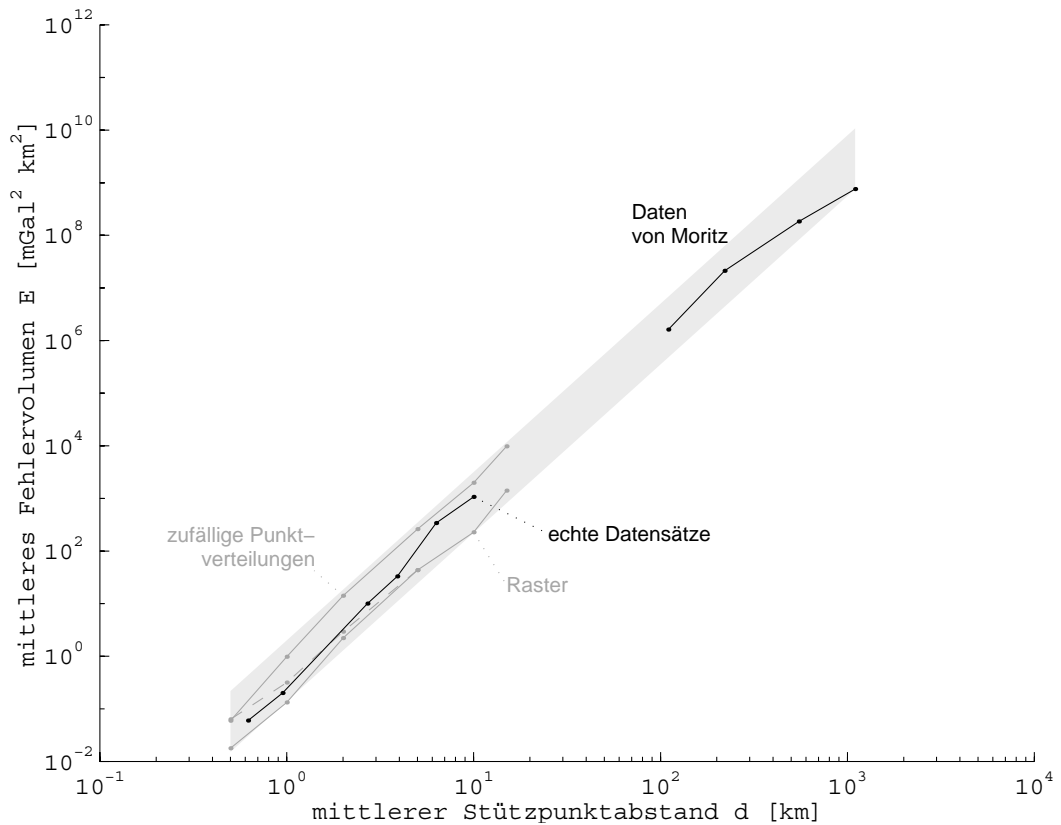
wurden  $E$ -Gebietsmittel bestimmt. Diese Datensätze geben realistische Messpunktverteilungen wieder; wegen der beschränkten Punktzahl bleiben allerdings oft nur kleine Teile von Randeffekten unberührt. Deshalb wurden zusätzlich größere Punktverteilungen simuliert, deren Punktdichten den echten Datensätzen entsprechen, und zwar sowohl als Stützpunktraster wie auch als zufällig (uniform in  $x$  und  $y$ ) verteilte Stützpunkte. Für diese Verteilungen wurden in gleicher Weise wie für die echten Datensätze  $E$ -Blockwerte und Gebietsmittel bestimmt. Abb. 10.3 zeigt  $E$ -Blockwerte für eine zufällige Verteilung.

In Abb. 10.4 sind die  $E$ -Gebietsmittel für die echten und die simulierten Datensätze in Abhängigkeit vom mittleren Punktabstand  $d$  eines Datensatzes aufgetragen. Für die Stützpunktraster entspricht  $d$  der Rasterweite. Für unregelmäßig verteilte Stützpunkte ist  $d = \sqrt{A/N_S}$  mit der Gebietsfläche  $A$  und der Stützpunktzahl  $N_S$ . Die ermittelten Gebietsmittel (in  $[\text{mgal}^2\text{ km}^2]$ ) liegen in einem Band etwa zwischen den Grenzkurven  $0.14 d[\text{km}]^{3.2}$  und  $2.0 d[\text{km}]^{3.2}$  (in der Grafik grau). Für zufällig verteilte Stützpunkte sind die Werte um den Faktor 7–15 größer als für Stützpunktraster. Dies wird durch die größeren Lücken in den zufälligen Verteilungen verursacht, in welchen  $E$  überproportional ansteigt. Die Kurve der echten Datensätze liegt jeweils dazwischen; diese sind ja keine Raster, aber auch keine zufälligen Verteilungen, da bei der Schweremessung oft auf gleichmäßige Überdeckung geachtet wird. Die Breite des grauen Bandes gibt somit die Wirkung von günstigen oder ungünstigen Stützpunktverteilungen auf  $E$  wieder (und damit später auch auf  $\sigma_N$  und  $\sigma_{nm}$ ). Wenn nicht auf gleichmäßige Überdeckung mit Messpunkten geachtet wird, kann dies also einen ca. 7–15fachen Geoidfehler im Vergleich zu einem Raster mit gleicher Gesamtstützpunktzahl zur Folge haben. Die  $E$ -Werte für Stützpunktraster wurden für ein Punktrauschen ( $D_{ij}$ ) von  $0.5\text{ mGal}$  sowie von  $0.25\text{ mGal}$  berechnet. Der erste Wert ist eher pessimistisch, der zweite wird bei sorgfältiger Geländereduktion erreicht (Kap. 6). Die Kurve mit dem größeren Rauschen ist in der Grafik grau gestrichelt eingezeichnet. Das größere Rauschen wirkt sich für  $d > 2\text{ km}$  nicht auf  $E$  aus. Für engere Stützpunkte hingegen wird der Unterschied in  $E$  deutlich sichtbar; hier wirkt sich also vor allem die Sorgfalt der Geländereduktion spürbar aus.

In Abb. 10.4 sind die Werte von Heiskanen und Moritz (1967), Tab. (7-3) – für deutlich größere  $d$  – mitaufgenommen. Sie liegen wie die hier berechneten Werte in dem beschriebenen Band. Die



**Abbildung 10.3:** *E-Blockwerte für simulierte zufällige Stützpunktverteilung, mittlerer Punktabstand  $d = 2$  km, Blockgröße  $6 \times 6$  km, geprüftes AKF-Modell, Gebietsmittel:  $14 \text{ mGal}^2 \text{ km}^2$*

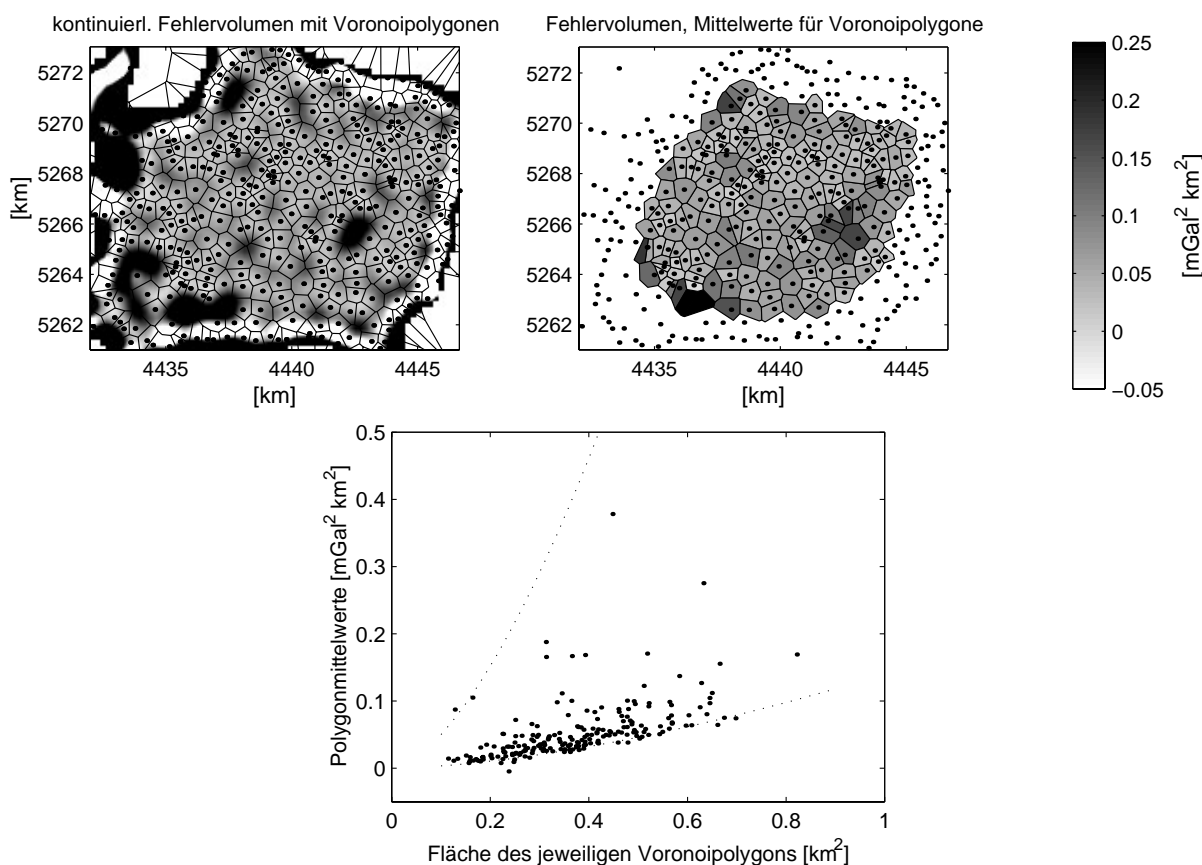


**Abbildung 10.4:** *Fehlervolumen in Abhängigkeit von der Punktdichte, echte und simulierte Datensätze*

Vergleichbarkeit mit unseren Werten ist allerdings eingeschränkt, da die Werte von Heiskanen und Moritz (1967) nicht auf topographisch reduzierten, sondern auf Freiluftanomalien beruhen.

### 10.2.2 Kontinuierliche $E$ -Funktion

Das Fehlervolumen nach (2.40) kann statt blockweise auch kontinuierlich berechnet werden, also etwa als Raster mit genügend kleiner Schrittweite, z.B.  $d/4$ . Für jeden Rasterpunkt wird mit (2.32) eine Fehlerkovarianzfunktion zu den anderen Rasterpunkten in einem ausreichenden Umkreis  $\Sigma'$  bestimmt und numerisch integriert. Am Beispiel von Abb. 10.5 (oben links) wird das Verhalten des Fehlervolumens bei unterschiedlichen Stützpunktabständen deutlich. In größeren Lücken steigt  $E$  stark an, deutlich stärker als die bloße Fehlervarianz. Zwischen sehr nah benachbarten Stützpunkten ist  $E$  sehr gering und kann sogar leicht negative Werte annehmen. Aus der Mittelung der kontinuierlichen  $E$ -Funktion über Blöcke können wiederum  $E$ -Blockwerte (s.o.) erhalten werden. Das aufwendige Verfahren ist aber nur sinnvoll, wenn eine hohe räumliche Auflösung für  $E$  verlangt wird.



**Abbildung 10.5:** Fehlervolumen, oben: kontinuierliche und wabenartige Darstellung, unten: flächenabhängige Darstellung der  $E$ -Polygonwerte, mit gepunkteten Grenzen des Bandes aus Abb. 10.4, diesmal in nichtlogarithmischer Darstellung

Abb. 10.5 zeigt den Versuch, einen Zusammenhang zwischen  $E$  und der Fläche zu bestimmen, für welche jeder einzelne Stützpunkt steht. Dafür wird die kontinuierliche  $E$ -Funktion jeweils für den Bereich von Voronoi-Polygonen rings um jeden Punkt gemittelt (Abb. 10.5 oben rechts). Wie bei der kontinuierlichen Darstellung treten auch in der wabenartigen Voronoi-Darstellung Gebiete

mit geringer Punktdichte als überproportional hohe  $E$ -Spitzen dunkel hervor. Der Zusammenhang mit der Polygonfläche ist nicht streng, da sich jeweils auch die Flächen der Nachbarpolygone auswirken. Die  $E$ -Polygonwerte bleiben aber im Rahmen des Bandes aus Abb. 10.4; sie sind also vergleichbar mit Gebietsmittelwerten, bei welchen ein Punkt *im Mittel* die gleiche Fläche repräsentiert.

### 10.3 Vom Fehlervolumen des Darstellungsfehlers zum Geoidfehler

Wenn ein global einheitliches Fehlervolumen  $E$  für Schwerstörungen angenommen wird, also eine homogene Punktdichte und homogene Signaleigenschaften vorausgesetzt werden, dann kann der Geoidfehler mit (2.45) einfach abgeschätzt werden. Mit

$$G_{\text{Ho}}(\psi_0) = \frac{1}{8\pi\gamma^2} \int_{\psi=\psi_0}^{\pi} \text{Ho}^2(\psi) \sin(\psi) d\psi \quad (10.1)$$

wird (2.45) zu

$$\sigma_N^2 = E G_{\text{Ho}}(\psi_0) \quad (10.2)$$

(Strang van Hees, 1986), und man erhält bis auf eine kleine Kernzone eine lineare Umrechnung zwischen  $\delta g$ -Fehlervolumen und Geoidfehler. Tab. 10.1 zeigt  $G_{\text{Ho}}(\psi_0)$  für kleine  $\psi_0$ -Werte. Daraus ergibt sich, dass die Umrechnung nicht dramatisch von der Wahl des Radius  $\psi_0$  der Kernzone abhängt. Die entsprechenden Werte  $G_{\text{St}}(\psi_0)$  für den Stokes-Operator sind etwa doppelt so groß; aus Schwereanomalien ergeben sich also doppelt so große  $\sigma_N^2$  wie aus Schwerstörungen.

Abb. 10.6 zeigt den sich mit Gleichung (10.2) aus den  $E$ -Werten ergebenden Geoidfehler. Für  $\psi_0$  wurde dabei jeweils  $1/5$  des Stützpunktabstandes  $d$  verwendet. Aus der Grafik sind die erzielbaren Geoidgenauigkeiten (im folgenden immer im Sinn einer Standardabweichung) für vorgegebene Punktdichten genauso ablesbar wie erforderliche Punktdichten für gewünschte Geoidgenauigkeiten. Für die untersuchten Messdatensätze sind die erzielbaren Geoidgenauigkeiten in Tab. 10.2 explizit aufgeführt. Wenn die hohe Punktdichte des Estergebirges (sowie die benötigte topographische Information) weltweit vorläge, wären demnach – wie zu erwarten – exzellente Geoidgenauigkeiten unter dem mm erzielbar. Mit abnehmender Punktdichte verschlechtert sich die Geoidgenauigkeit rasch, beispielsweise auf ca. 10 cm bei Punktabständen von 20 km. Mit dem Tiroler Datensatz, welcher ja einen erheblichen Teil der Ostalpen umfasst, müsste eine für Gebirge sehr gute Geoidgenauigkeit von ca. 2 cm erreichbar sein, zumindest in Teilen ohne größere Lücken zwischen Stützpunkten. Jedoch umfasst die größte Lücke innerhalb dieses Datensatzes im Karwendelgebirge (siehe Abb. 9.1) eine Fläche von ca. 20 km  $\times$  35 km. Dort muss gemäß Abb. 10.6 mit einer doch erheblichen Geoid-Fehlerstandardabweichung von 15–25 cm gerechnet werden.

Tab. 10.3 zeigt die erforderlichen Punktdichten für runde Geoid-Fehlerstandardabweichungen. Die untere Grenze für  $d$  gilt dabei für eine zufällige Punktverteilung, die obere Grenze für ein Raster. Für ein 1 cm-Geoid aus Schwerstörungen benötigt man demnach Punktabstände um 5 km, für ein 1 mm-Geoid Punktabstände um 1 km.

Die Behandlung der Kernzone bis zum sphärischen Abstand  $\psi_0$  wirft bei der Fehlerfortpflanzung einige Probleme auf. Wegen der Singularität der Hotine-Funktion ist  $G_{\text{Ho}}(\psi_0)$  nicht direkt berechenbar. Ferner wird der Geoidfehler durch (10.2) für den angrenzenden Nahbereich überschätzt, wenn die Kernzone sehr klein gehalten wird, da der  $F$ -Anteil vernachlässigt wurde (s. Kap. 2). Zudem ist es fraglich, ob im angrenzenden Nahbereich mit einem  $E$ -Mittelwert gearbeitet werden darf.

**Tabelle 10.1:** Integral  $G_{\text{Ho}}(\psi_0)$  bzw.  $G_{\text{St}}(\psi_0)$ , gültig jeweils ab Grad  $n = 2$ , in  $\left[\frac{\text{m}^2}{\text{mGal}^2\text{km}^2}\right]$

$\psi_0$ [km]	$G_{\text{Ho}}(\psi_0)$	$G_{\text{St}}(\psi_0)$
	$10^{-8*}$	
0.2	132	202
0.5	117	186
1	106	175
2	94	163
5	79	148
10	68	136
20	56	124

**Tabelle 10.2:** Geoidgenauigkeit aus  $\delta g_{\text{TOP}}$  für untersuchte Datensätze

Datensatz	$d$ [km]	$\sigma_{\text{N}}$ [mm]
Estergebirge	0.62	0.3
Estergebirge	0.95	0.5
Bayerische Alpen	2.7	3.4
Bayerische Alpen	3.9	6.0
Tirol	6.3	19
Tirol	10	32

**Tabelle 10.3:** Erforderliche Punktdichten für gewünschte Geoidgenauigkeit aus  $\delta g_{\text{TOP}}$

$\sigma_{\text{N}}$ [mm]	$d$ [km]
1	0.72 – 1.7
2	1.1 – 2.7
5	2.0 – 5.0
10	3.2 – 7.8
20	5.1 – 12
50	9.3 – 23

Der Fehlereinfluss der Kernzone von  $\psi = 0$  bis  $\psi_0$  ist im Prinzip berechenbar mit

$$\sigma_{N_0}^2 = \frac{r_0^2}{\gamma^2} \sigma_{\delta g_{\text{P}}}^2 \quad (10.3)$$

entsprechend der üblichen Berechnung des Kernzoneneinflusses auf  $N$

$$N_0 = \frac{r_0}{\gamma} \delta g \quad (10.4)$$

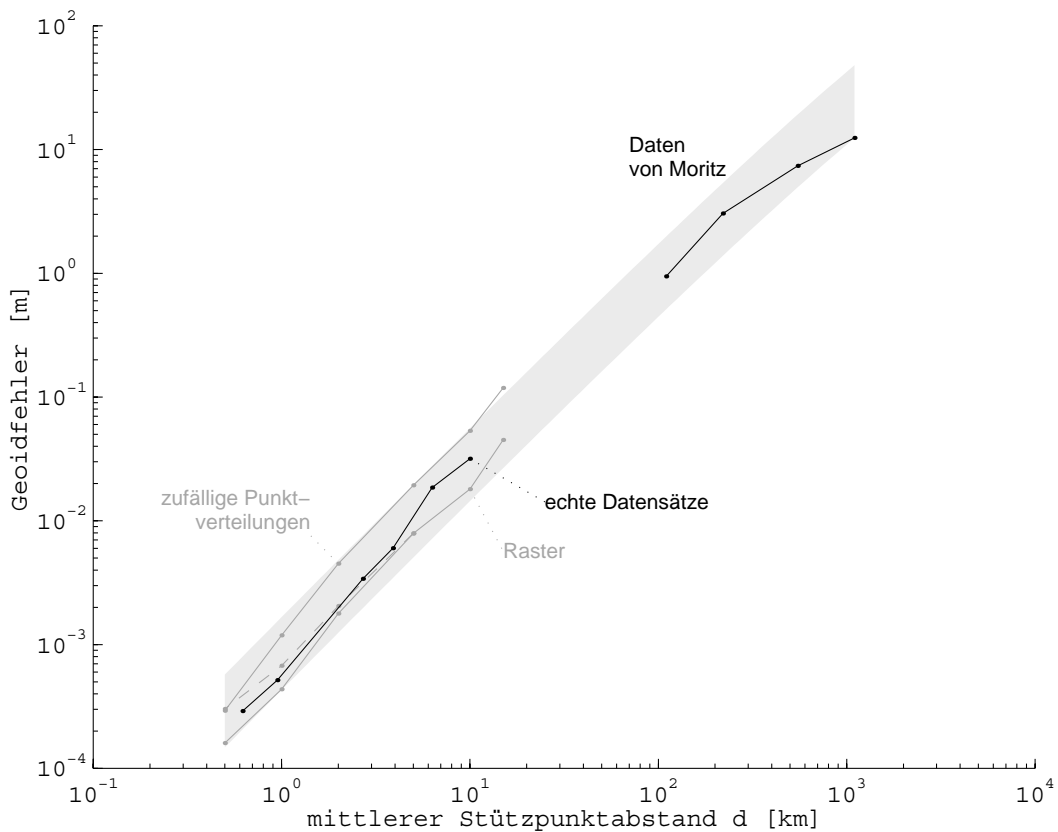
mit dem Radius der Kernzone  $r_0 = R\psi_0$  und der Normalschwere  $\gamma$  (Groten und Moritz, 1964).  $\sigma_{\delta g_{\text{P}}}$  ist dabei allerdings ein Punktfehler für  $\delta g$  im Geoidberechnungspunkt P, nicht ein Blockfehler für die Kernzone; daher ist dieses Vorgehen für den Darstellungsfehler weniger geeignet. Groten und Moritz (1964) leiten ab, dass sich die Fehler für die Kernzone (10.3) und für den Außenbereich (2.42) dann korrekt zu einem Gesamtfehler addieren, wenn  $\psi_0$  die Bedingung

$$\text{Ho}^2(\psi_0) \sin \psi_0 = \frac{16\pi R^2 \sigma_{\delta g_{\text{P}}}^2}{E} \psi_0 \quad (10.5)$$

erfüllt. Diese Bedingung ergibt für die in dieser Arbeit ermittelten Parameter (kleines Punktrauschen im Vergleich zum Darstellungsfehler) sehr kleine Werte für  $\psi_0$ , deutlich unter dem Stützpunktabstand, meist bei  $0.2d$ – $0.3d$ . Der Fehlereinfluss einer so kleinen Kernzone ist vernachlässigbar klein, so dass auf diese Kernzone verzichtet werden könnte.

Die beiden weiteren Schwachpunkte der Abschätzung von Geoidgenauigkeiten mit der einfachen Formel (10.2), nämlich die Vernachlässigung des  $F$ -Anteils sowie der Variation von  $E$  im



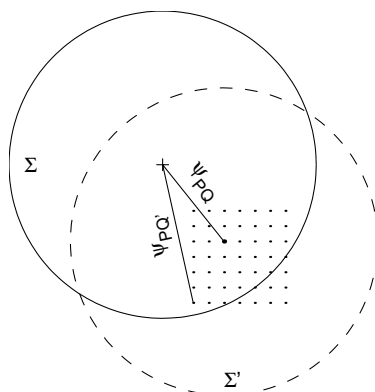


**Abbildung 10.6:** Geoidfehler, jeweils unter Annahme einer global einheitlichen Punktdichte

Nahbereich, können überprüft werden, indem der Geoidfehler für einen kleinen Umkreis um den Berechnungspunkt streng nach (2.26) berechnet wird. Wie für die kontinuierliche  $E$ -Funktion (Abschnitt 10.2.2) werden in einem ausreichend engen Raster für jeden Rasterpunkt die Fehlerkovarianzen zu den Rasterpunkten der näheren Umgebung (Gebiet  $\Sigma'$ , Abb. 10.7) bestimmt. Vor der jeweiligen Integration über  $\Sigma'$  wird nun aber noch die Multiplikation mit den Werten der Hotinefunktion  $\text{Ho}(\psi_{PQ'})$  für die Abstände zu allen Rasterpunkten in  $\Sigma'$  durchgeführt und vor der Integration über  $\Sigma$  die Multiplikation mit  $\text{Ho}(\psi_{PQ})$  zu den Rasterpunkten in  $\Sigma$  (Zentren der jeweiligen  $\Sigma'$ -Gebiete). Wenn ein Rasterpunkt mit dem Berechnungspunkt  $P$  zusammenfällt, muss die zugehörige Fehlerkovarianz wegen der Singularität der Hotinefunktion weggelassen werden.

Dieses strenge Vorgehen ist zwar aufwendiger, aber für einen relativ kleinen Nahbereich noch gut durchführbar (bei einer Rasterweite von z.B.  $d/3$ ). Auf diese Weise kann die Variation des Darstellungsfehlers zwischen den Stützpunkten (das Golfballmuster) korrekt berücksichtigt werden. Erste Tests für die Punktverteilung des Estergebirges ergaben allerdings keine dramatischen Unterschiede im Geoidfehler zu der einfachen Berechnung mit  $E$ -Mittelwerten für einen gleich großen Nahbereich bis heran an eine kleine Kernzone von 100 m Radius. Möglicherweise ist dieses einfache Vorgehen für viele Zwecke ausreichend.

In diesem Abschnitt wurden aus einer größeren Anzahl von Datensätzen unter Verwendung geprüfter AKF-Modelle Werte für die Geoidgenauigkeit in Abhängigkeit von der Punktdichte unter der Annahme gefunden, dass die Punktdichte des jeweiligen Datensatzes weltweit vorläge. Die Auswirkung der lokalen Variation des Darstellungsfehlers zwischen diskreten Messpunkten bei der Fehlerfortpflanzung wurde vorerst nur exemplarisch untersucht. Nicht untersucht wurde

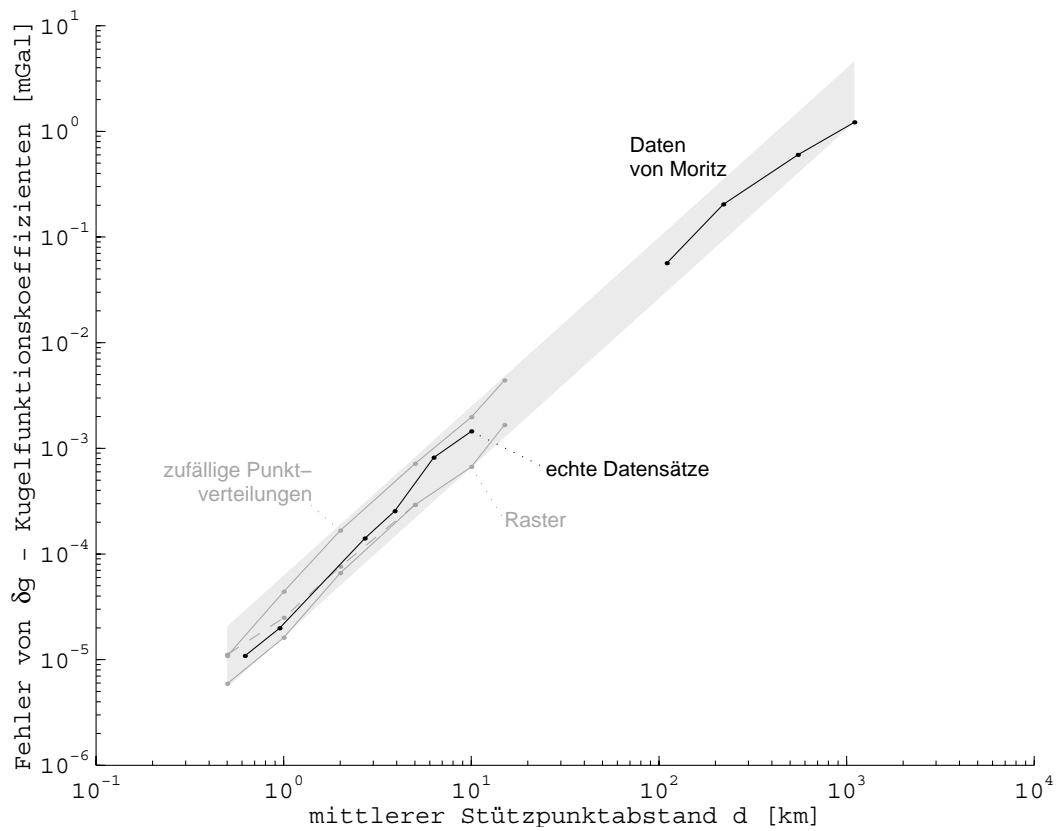


**Abbildung 10.7:** Integrationsgebiete für strenge Berechnung

die Fortpflanzung regional unterschiedlicher Darstellungsfehler aufgrund regionaler (langwelliger) Variationen in Punktdichte und Signaleigenschaften. Für entsprechende Formeln sei auf Strang van Hees (1986) verwiesen.

## 10.4 Fehler für Kugelfunktionskoeffizienten

Zum Abschluss wurden die  $E$ -Mittelwerte der untersuchten Datensätze noch auf Fehler von  $\delta g$ -Kugelfunktionskoeffizienten  $\{a_{nm}, b_{nm}\}_{\delta g}$  umgerechnet. Dabei wurde wiederum ein global einheitliches Fehlervolumen angenommen, um die einfache Formel (2.46) anwenden zu können. Für je eine Punktdichte und ein ihr zugehöriges Fehlervolumen erhält man dadurch einen konstanten (von Grad und Ordnung unabhängigen) spektralen Fehler  $\{\sigma_{nm}\}_{\delta g}$  für Schwerstörungen. Wenn dieser Fehler auf andere Funktionale wie z.B. Potentialkoeffizienten umgerechnet werden soll, kommt allerdings eine Abhängigkeit vom Grad  $n$  ins Spiel. Die Ergebnisse sind aus Abb. 10.8 abzulesen. Eine Berücksichtigung der lokalen Variation des Darstellungsfehlers zwischen den Stützpunkten wie bei der Geoidberechnung wäre sehr aufwendig und nur für höchste Grade eventuell interessant.



**Abbildung 10.8:** Fehler für  $\delta g$ -Kugelfunktionskoeffizienten, jeweils unter Annahme einer global einheitlichen Punktdichte

# 11 Schlussfolgerungen

Zu den wichtigsten Ergebnissen dieser Arbeit gehören die ermittelten empirischen Darstellungsfehler für Schwerstörungen bei Stützpunktabständen zwischen wenigen 100 m und ca. 15 km. Diese wurden aus Differenzen zwischen prädierten Werten und unabhängigen Kontrollmesswerten bestimmt. Es wurden Messdatensätze unterschiedlicher Ausdehnung und Punktdichte mit in der Regel je 100 bis 400 gleichmäßig verteilten Kontrollpunkten verwendet, um zuverlässige Fehlerstandardabweichungen zu erhalten.

Die empirischen Darstellungsfehler zeigen (Abb. 9.13), dass Schwerstörungen selbst nach topographischer Reduktion auch im Bereich sehr kurzer Wellenlängen noch deutlich wahrnehmbare Signalanteile enthalten. Erst mit extrem engen Stützpunktabständen von ca. 1.5 km kann das vernachlässigte  $\delta g_{\text{TOP}}$ -Restsignal in den dazwischen liegenden Kontrollpunkten auf eine Standardabweichung von 1 mGal gedrückt werden. Eine so hohe Stützpunktdichte wird allerdings in der Praxis nur in Ausnahmefällen vorkommen. Das Niveau des Rauschens aus Fehlern der Schweremessung und der Geländemodellierung, welches bei sorgfältiger Modellierung bei ca. 0.1–0.3 mGal Standardabweichung liegt, kann sogar erst mit Stützpunktdichten um 500 m erreicht werden. Daraus kann der Schluss gezogen werden, dass für künftige Messkampagnen zur genauen flächenhaften Erfassung von Schwerstörungen im Gebirge die erste Priorität der hohen Punktdichte zukommt. Nur wenn diese erreicht wird, sind auch eine genaue Schweremessung und eine sorgfältige Geländemodellierung wichtig. (An den dichtesten Datensätzen, in welchen das Rauschen gut identifizierbar ist, zeigte sich im übrigen, dass die Fehleranteile aus der Geländereduktion bei sorgfältiger Geländeaufnahme und -modellierung bis auf das Niveau der Messfehler gedrückt werden können.) Die erzielten Ergebnisse sind – zumindest soweit Wellenlängen unter ca. 5 km betroffen sind – neu und wurden erst durch das im Estergebirge gesammelte Datenmaterial ermöglicht.

Der Vergleich der Kurven der empirischen Darstellungsfehler für die unterschiedlichen Datensätze ergibt ein ziemlich homogenes, klar von der Punktdichte abhängiges Bild. Die untersuchten Ausschnitte repräsentieren offensichtlich Teile eines recht homogenen Gesamtsignals. Für ein homogenes Signal sprechen auch die untersuchten Spektraldarstellungen (Abb. 9.8 und 9.10). Dort wurde in allen Datensätzen ein Verlauf mit etwa  $1/\omega^{2.8}$  bzw.  $1/n^{2.8}$  gefunden. Lokal kann das  $\delta g_{\text{TOP}}$ -Signal zwar aufgrund von Störkörpern sehr inhomogen sein; die Anteile unterschiedlicher Rauheit sind aber wohl etwa gleichmäßig über die Datensätze verteilt. Die ermittelten Fehlermaße dürften daher – zumindest in ihrer Größenordnung – auf andere gebirgige Gebiete übertragbar sein.

Insbesondere fügen sich die Fehlerkurven aus dem Tiroler Datensatz, welcher hauptsächlich die geologisch ganz anders gearteten Zentralalpen umfasst, gut an diejenigen der bayerischen Datensätze aus dem Bereich der Kalkalpen. Weil in den Zentralalpen allerdings die geologischen Einheiten oft noch deutlich kleinräumiger sind als in den Kalkalpen, wäre es im Hinblick auf die Signalanteile mit sehr kurzen Wellenlängen sehr interessant, die Erkenntnisse aus dem Estergebirge an einem zentralalpinen Testnetz mit ähnlich hoher Punktdichte zu überprüfen. Ein Ansatz dazu wäre das schweizerische Testnetz Turtmann (Bernauer und Geiger, 1986), in welchem allerdings die Gipfelzone nicht erfasst wurde.

Es wurde festgestellt, dass im Estergebirge größere homogene geologische Einheiten, in welchen die angenommene Reduktionsdichte die Wirklichkeit gut trifft, abwechseln mit Störkörpern wie Talfüllungen oder einzelnen Gesteinsschichten mit abweichender Dichte. Dementsprechend besteht das Signal der  $\delta g_{\text{TOP}}$  aus größeren ruhigen Zonen im Wechsel mit Zonen mit großen Signalausschlägen. Diese Situation ist typisch für viele gebirgige Gebiete. Einige Störkörper konnten aufgrund der hohen Messpunktdichte gut lokalisiert und modelliert werden. Gerade schmale tiefreichende Störkörper wie Talfüllungen mit räumlich begrenzten, aber kräftigen Signalspitzen sind nur durch sehr dichte Messung gut erfassbar; bei größeren Punktabständen verschlechtern sie die Darstellungsgenauigkeit erheblich. Durch die Modellierung von Störkörpern konnten die empirischen Fehlerstandardabweichungen der Schwerestörungen um bis zu 40% gedrückt werden; die Reduktion des Restsignals auf das Niveau von 1 mGal kann nach der Störkörperreduktion schon durch Stützpunktabstände von ca. 3 km erreicht werden.

Den Eckpfeiler für die weitergehende Modellierung und die Fehlerfortpflanzung auf andere Schwerefeldfunktionale bildet die Signalkovarianzfunktion. Es wurde gezeigt, dass lokale empirische Autokovarianzfunktionen durch manche Unsicherheitsfaktoren beeinträchtigt sind. Für diese Arbeit stand das Kriterium im Vordergrund, ob die AKF eine realistische Beschreibung des Darstellungsfehlers ermöglichen. Kovarianzparameter aus empirisch nach Abzug von ausgleichenden Ebenen ermittelten AKF, eingesetzt in Gauss-Markov-Modelle 2. Ordnung, ergaben für diesen Zweck – eher wider Erwarten – gute Ergebnisse. Die Parameter passen allerdings jeweils nur für bestimmte Stützpunktdichten gut. Es wurden jeweils die Standardabweichungen des formalen Darstellungsfehlers für einen ganzen Datensatz sowie das punktdichteabhängige Verhalten geprüft.

Mit den so geprüften AKF-Modellen für topographisch reduzierte Schwerestörungen wurden Abschätzungen zur Fehlerfortpflanzung auf andere Funktionale unter der Annahme durchgeführt, dass die untersuchten Punktdichten weltweit vorlägen. Auf diese Weise wurden Genauigkeiten für Geoidhöhen (über den Hotine-Operator) sowie für Kugelfunktionskoeffizienten (über die sphärisch-harmonische Analyse) abgeschätzt. Dabei wurden Fehlervarianzen und -kovarianzen über den Zwischenschritt des Fehlervolumens berücksichtigt. Die erhaltenen Werte stellen eine Fortsetzung der Ergebnisse von Heiskanen und Moritz (1967, Kap. 7) für sehr viel höhere Punktdichten dar. Es ergab sich ein bandförmiger Bereich für die fortgepflanzten Genauigkeiten, abhängig von der Stützpunktdichte und der Regelmäßigkeit der Stützpunktverteilung. Dieses Band schließt in konsistenter Weise an die Ergebnisse von Heiskanen und Moritz (1967) an. Aus den entsprechenden Grafiken (Abb. 10.6 und 10.8) können einerseits die erzielbaren Genauigkeiten bei vorgegebener Punktdichte und andererseits erforderliche Punktdichten für gewünschte Genauigkeiten abgelesen werden. Für ein 1 cm-Geoid ergeben sich beispielsweise erforderliche Punktabstände von ca. 5 km. In manchen Teilen der Alpen sind die heute vorliegenden Punktdichten für Schweremessungen davon bereits nicht sehr weit entfernt. Bei dem untersuchten Tiroler Datensatz, welcher einen erheblichen Teil der Ostalpen umfasst, liegen die durchschnittlichen Punktabstände bei 7 km; in manchen Teilen existieren noch dichtere Daten (Daxinger, 1996), die größten Lücken erreichen allerdings noch eine Ausdehnung von ca. 30 km. Die Situation in der Schweiz ist vergleichbar; dort weisen die Schweremessungen vielerorts auch im Gebirge geringe Abstände von 2–5 km und größte Lücken um 20 km auf. Rein aus Sicht des Darstellungsfehlers könnte also zumindest ein 2 cm-Geoid aus Schweremessungen für die Alpen in absehbarer Zeit erreichbar sein. Dabei sind allerdings andere Modellierungsschwierigkeiten noch nicht berücksichtigt, genauso wenig wie für den Darstellungsfehler besonders problematische Zonen wie beispielsweise vergletscherte Gebiete.

Zum Vergleich mit den so abgeschätzten Geoidgenauigkeiten können die Differenzen der im

Estergebirge und der Umgebung gemessenen Höhenanomalien aus Nivellement und GPS zum gravimetrischen Quasigeoid EGG97 herangezogen werden (siehe Kap. 5). Die festgestellten Residualhöhenanomalien von bis zu 7 cm (mit 3–5 cm Standardabweichung) sind allerdings etwas größer als mit dem Darstellungsfehler zu erklären wäre, welcher sich aus der Punktdichte der beim EGG97 verwendeten Schweremessungen ergibt. Möglicherweise spielen andere Modellierungsfehler eine Rolle. Die Variationen der Residualhöhenanomalien in nah benachbarten Punkten zeigen andererseits, dass das Signal der Höhenanomalien für Wellenlängen unter 2 km sehr gering ist und im Messrauschen aus Nivellement und GPS von 1–2 cm verschwindet. Für fundiertere Schlüsse in dieser Hinsicht wäre die Bestimmung von Höhenanomalien aus Nivellement und GPS in weiteren Punkten wichtig. Der Vergleich zwischen dem fortgepflanzten Darstellungsfehler und gemessenen Residualhöhenanomalien birgt allerdings auch noch theoretische Probleme. Zum einen müsste dafür die Fehlerfortpflanzung nicht mit dem Hotine-Operator, sondern einem Molodenski-Operator berechnet werden. Zum anderen geben die fortgepflanzten Darstellungsfehler eine Genauigkeit für absolute Geoidhöhen an (oder strenggenommen ab  $n = 2$ ), während aus den gemessenen Höhenanomalien nur die lokalen Abweichungen des EGG97, also eher relative Genauigkeiten, erhalten werden.

Die nächste Stufe für eine wirklich zuverlässige Beschreibung des Schwerefeldes im Gebirge bestünde darin, die hier für Schwerestörungen ermittelten und geprüften Autokovarianzmodelle in Kreuz- bzw. Autokovarianzmodelle für andere Funktionale wie Geoidhöhen, Lotabweichungen oder Schweregradienten zu übersetzen und dann zu testen, ob eine Prädiktion bzw. Kollokation für Werte dieser Funktionale in Kontrollpunkten ebenfalls realistische Fehlermaße ergibt. Datensätze in ähnlich hoher Punktdichte und gleichzeitig ausreichender Punktanzahl (möglichst einige 100 Punkte) sind allerdings gegenwärtig für andere Funktionale als die Schwere noch kaum vorhanden. Zumindest für die sehr kurzwelligen Signalanteile dürfte es deshalb schwierig sein, für andere Funktionale statistisch aussagekräftige Maße aus Kontrollpunkten zu erhalten.

Zum Abschluss noch eine Bemerkung zur Übertragbarkeit der Ergebnisse auf nichtgebirgige Gebiete: Der Einfluss der Topographie auf die Schwerestörungen wurde in dieser Arbeit sehr sorgfältig modelliert und reduziert. Die erhaltenen Fehlermaße müssten somit grundsätzlich auf Schwerefeldgrößen außerhalb des Gebirges übertragbar sein. Wie gezeigt wurde, können jedoch die geologischen Verhältnisse und damit die Gesteinsdichten im Gebirge auf kleinem Raum sehr stark variieren, wohl deutlich stärker als außerhalb des Gebirges. Diese Effekte können in der Regel nicht oder nur unvollständig modelliert werden. Daher werden topographisch reduzierte Schwerefeldgrößen im Gebirge meist rauher sein als im Flachland. Die in dieser Arbeit abgeleiteten Fehlermaße können wohl für das Flachland und somit auch für das globale Schwerefeld im Sinn von oberen Grenzwerten angesehen werden.

# Literaturverzeichnis

- Arbeitsgemeinschaft der Vermessungsverwaltungen der Bundesrepublik Deutschland (AdV), Arbeitskreis Höhenfestpunktfeld und Schwerefestpunktfeld (1993): Die Wiederholungsmessungen 1980 bis 1985 im Deutschen Haupthöhennetz und das Haupthöhennetz 1985 der Bundesrepublik Deutschland. Bayerisches Landesvermessungsamt München
- Arbeitsgemeinschaft der Vermessungsverwaltungen der Bundesrepublik Deutschland (AdV), Arbeitskreis Höhenfestpunktfeld und Schwerefestpunktfeld (1995): Deutsches Haupthöhennetz 1992 (DHHN92). Bayerisches Landesvermessungsamt München
- Aric, K., P. Steinhauser (1976): Geophysikalische Untersuchung des Inntal-Untergrundes bei Thaur, östlich von Innsbruck. Zeitschrift für Gletscherkunde und Glazialgeologie 12/1, S.37-54
- Bader, K. (1979): Exarationstiefen würmeiszeitlicher und älterer Gletscher in Südbayern. Eiszeitalter und Gegenwart 29, S.49-61
- Bachmann, G.H., M. Müller (1981): Geologie der Tiefbohrung Vorderriß. In: Die Tiefbohrung Vorderriß (Kalkalpen, Bayern). Geologica Bavarica 81, Bayerisches Geologisches Landesamt München, S.17-53
- Barnett, C.T. (1976): Theoretical modeling of the magnetic and gravitational fields of an arbitrary shaped three-dimensional body. Geophysics 41, S.1353-1364
- Bayerisches Landesvermessungsamt München BLVA (1993): Die Nivellements 1. bis 3. Ordnung in Bayern. Übersichtskarte 1:500 000, Stand 1993
- Bernauer, I., A. Geiger (1986): Lokale Schwerefeldbestimmung und gravimetrische Modellrechnung im Satelliten(GPS)-Testnetz Turtmann (Wallis). Geodätisch-geophysikalische Arbeiten in der Schweiz 38, Schweizerische Geodätische Kommission Zürich
- Bian, S., J. Menz (1999): Determining the parameter of a covariance function by analytical rules. Zeitschrift für Vermessungswesen 124/7, S.211-216
- Bürki, B. (1989): Integrale Schwerefeldbestimmung in der Ivrea-Zone und deren geophysikalische Interpretation. Geodätisch-geophysikalische Arbeiten in der Schweiz 40, Schweizerische Geodätische Kommission Zürich
- Daxinger, W. (1996): Astrogravimetrische Geoidbestimmung für Ingenieurprojekte. Geowissenschaftliche Mitteilungen 45, Technische Universität Wien
- Doben, K. (1976): Geologische Karte von Bayern 1:25 000, Erläuterungen zum Blatt Nr.8433 Eschenlohe. Bayerisches Geologisches Landesamt München
- Doben, K., H. Frank (1983): Geologische Karte von Bayern 1:25 000, Erläuterungen zum Blatt Nr.8333 Murnau. Bayerisches Geologisches Landesamt München

- Dohr, G. (1981): Geophysikalische Untersuchungen im Gebiet der Tiefbohrung Vorderriß 1. In: Die Tiefbohrung Vorderriß (Kalkalpen, Bayern). *Geologica Bavarica* 81, Bayerisches Geologisches Landesamt München, S.55-64
- Flury, J. (1999): Local gravity field determination in the Estergebirge (Bavarian alps). 2nd international symposium Geodynamics of the Alps-Adria area by means of terrestrial and satellite methods, proceedings, Zagreb, S.87-95
- Flury, J. (2000): Abschlussbericht zur DFG-Sachbeihilfe Estergebirge. Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie, Technische Universität München
- Forsberg, R. (1984): Local covariance functions and density distributions. Ohio State University Dep. of Geodetic Science Report 356
- Frank, H. (1979): Glazial übertiefte Täler im Bereich des Isar-Loisach-Gletschers. *Eiszeitalter und Gegenwart* 29, S.77-99
- Gelb, A. (Hrsg., 1974): Applied optimal estimation. The Analytic Sciences Corporation, MIT Press Cambridge(MA)
- Gelderen, M. van, R. Rummel (2001): The solution of the general geodetic boundary value problem by least squares. *Journal of Geodesy* 75, S.1-11
- Goad, C.C., C.C. Tscherning, M.M. Chin (1984): Gravity empirical covariance values for the continental United States. *Journal of Geophysical Research* 89 B9, S.7962-7968
- Götze, H.-J. (1976): Ein numerisches Verfahren zur Berechnung der gravimetrischen Feldgrößen für dreidimensionale Modellkörper. Dissertation Technische Universität Clausthal
- Götze, H.-J., O. Rosenbach, W. Schöler (1979): Gravimetrische Untersuchungen in den östlichen Zentralalpen. *Geologische Rundschau* 68, S.61-82
- Götze, H.-J. (1984): Über den Einsatz interaktiver Computergraphik im Rahmen 3-dimensionaler Interpretationstechniken in Gravimetrie und Magnetik. Habilitationsschrift Technische Universität Clausthal
- Granser, H., K. Hösch, P. Steinhauser, D. Zych (1983): Über das Dichtemodell in Österreich. In: Das Geoid in Österreich. Geodätische Arbeiten Österreichs für die Internationale Erdmessung, Neue Folge Bd. III, Österreichische Kommission für die Internationale Erdmessung, Graz, S.159-182
- Groten, E., H. Moritz (1964): On the accuracy of geoid heights and deflections of the vertical. Ohio State University Inst. of Geodesy, Photogrammetry and Cartography Report 38
- Grüniger, W. (1990): Zur topographisch-isostatischen Reduktion der Schwere. Dissertation Technische Hochschule Karlsruhe
- Heiskanen, W., H. Moritz (1967): Physical geodesy. Freeman San Francisco
- Hofmann, P. (Hrsg.) et al.(1997): Das Estergebirge. Karst und Höhle, Band 1996/97, Verband der deutschen Höhlen- und Karstforscher München
- Hofmann-Wellenhof, B., H. Moritz (1986): Introduction to spectral analysis. In: H. Sünkel (Hrsg.), Mathematical and numerical techniques in physical geodesy. Springer Berlin, S.157-259



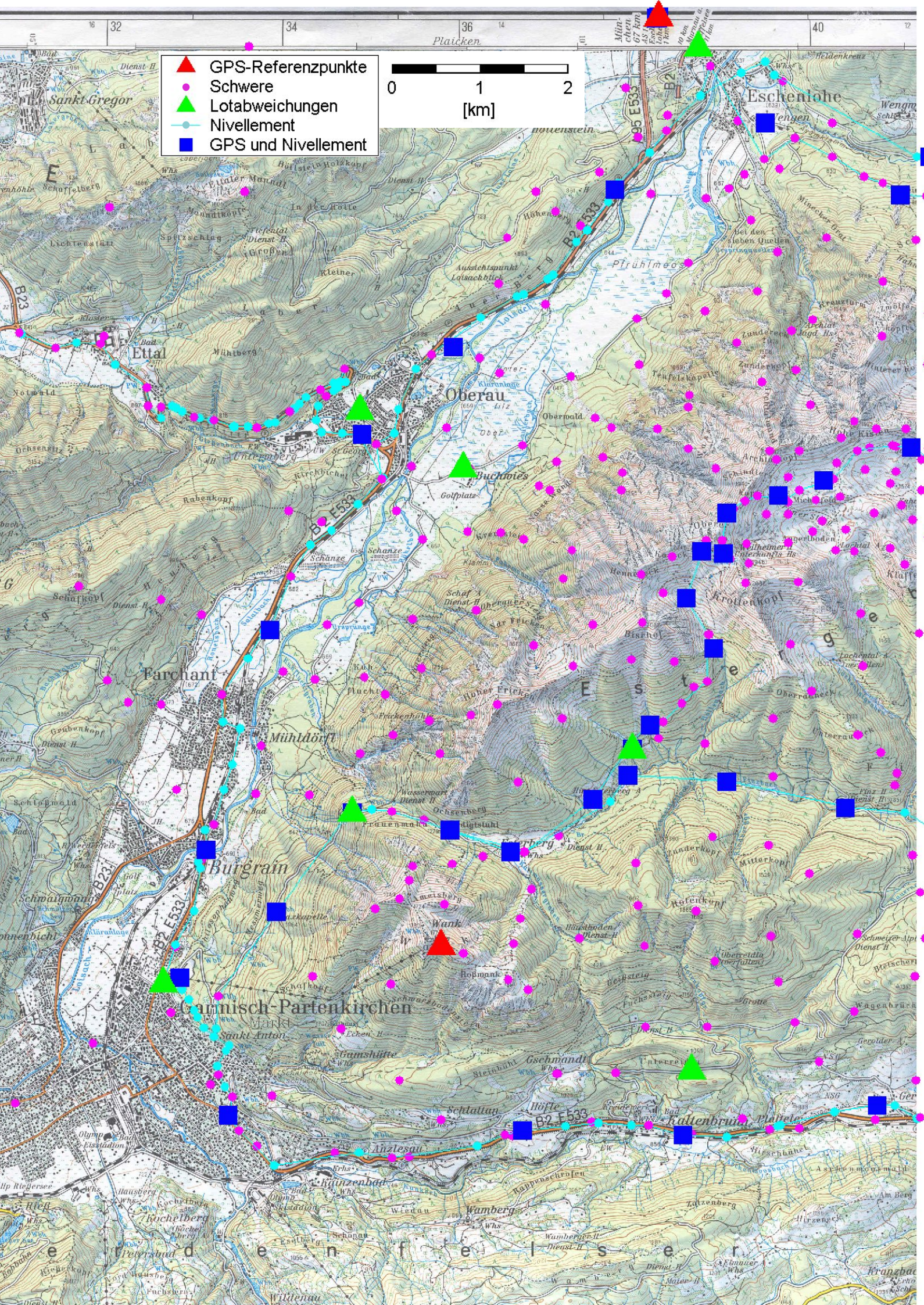
- Ihde, J., U. Schirmer, F. Stefani, F. Töppe (1998): Geoid modelling with point masses. Second continental workshop on the geoid in Europe, proceedings, Budapest
- Inselmann, R. (1985): Dichte-Messungen in der Bundesrepublik Deutschland. Erdöl-Erdgas 101/3, S.76-79
- Jekeli, C., R.H. Rapp (1980): Accuracy of the determination of mean anomalies and mean geoid undulations from a satellite gravity field mapping mission. Ohio State University Dep. of Geodetic Science Report 307
- Jekeli, C. (1981): Alternative methods to smooth the earth's gravity field. Ohio State University Dep. of Geodetic Science Report 327
- Jerz, H. (1966): Untersuchungen über Stoffbestand, Bildungsbedingungen und Paläogeographie der Raibler Schichten zwischen Lech und Inn (Nördliche Kalkalpen). Geologica Bavarica 56, Bayerisches Geologisches Landesamt München, S.3-102
- Jung, K. (1961): Schwerkraftverfahren in der Angewandten Geophysik. Geest und Portig Leipzig
- Kahle, H.-G., U. Marti (Hrsg., 1993): NFP20 (Nationales Forschungsprogramm 20), Beitrag der Geodäsie zur Geologischen Tiefenstruktur und Alpendynamik. Geodätisch-geophysikalische Arbeiten in der Schweiz 47, Schweizerische Geodätische Kommission Zürich
- Knudsen, P. (1987): Estimation and modelling of the local empirical covariance function using gravity and satellite altimeter data. Bulletin geodésique 61 No.2, S.145-160
- Kühtreiber, N. (1999): Recent geoid computations for Austria. 2nd international symposium Geodynamics of the Alps-Adria area by means of terrestrial and satellite methods, proceedings, Zagreb, S.163-169
- Kuhnert, C. (1967): Geologische Karte von Bayern 1:25 000, Erläuterungen zum Blatt Nr.8432 Oberammergau. Bayerisches Geologisches Landesamt München
- Landolt-Börnstein (1982): Zahlenwerte und Funktionen aus Naturwissenschaften und Technik. Neue Serie, Gruppe V, Band 1a/1b: Physikalische Eigenschaften der Gesteine, Heidelberg
- Leppich, W. (1976): Gravimetrische Dichtebestimmung in den westlichen und mittleren Hohen Tauern (Ostalpen). Dissertation Technische Universität Clausthal
- Mader, K. (1951): Das Newtonsche Raumpotential prismatischer Körper und seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen Sonderheft 11, Wien
- Marti, U. (1997): Geoid der Schweiz 1997. Geodätisch-geophysikalische Arbeiten in der Schweiz 56, Schweizerische Geodätische Kommission Zürich
- Messerer, K. (1931): Vermessung des Zugspitzbahntunnels. AEG-Mitteilungen 27/4, S.214-217
- Militzer, H., F. Weber (Hrsg., 1984): Angewandte Geophysik, Band 1 Gravimetrie und Magnetik. Springer Wien
- Moritz, H. (1964): Accuracy of mean gravity anomalies obtained from point and profile measurements. Publications of the Isostatic Institute of the IAG No.45, Helsinki, auch als Ohio State University Inst. of Geodesy, Photogr. and Cartogr. Report 24

- Moritz, H. (1980): *Advanced physical geodesy*. Wichmann Karlsruhe und Abacus Press Kent
- Müller, K. (1988): *Anwendung moderner gravimetrischer Interpretationstechniken zur Erkundung der Kruste von Süddeutschland*. Dissertation Freie Universität Berlin
- Müller, M. (1970): *Das Ergebnis der Bohrung Staffelsee 1 als Grundlage für neue Vorstellungen über Bau und Untergrund der gefalteten Molasse*. *Geologica Bavarica* 63, Bayerisches Geologisches Landesamt München, S.86-106
- Nagy, D., G. Papp, J. Benedek (2000): *The gravitational potential and its derivatives for the prism*. *Journal of Geodesy* 74, S.552-560
- Parasnis, D.S. (1972): *Principles of applied geophysics*. Chapman and Hall London
- Petrović, S. (1996): *Determination of the potential of homogeneous polyhedral bodies using line integrals*. *Journal of Geodesy* 71, S.44-52
- Plaumann, S. (1995): *Die Schwerekarte 1:500 000 der Bundesrepublik Deutschland (Bouguer-Anomalien)*, Blatt Süd. *Geologisches Jahrbuch Reihe E, Heft 53*, Hannover
- Reich, H. (1955): *Feststellungen über diluviale Bewegungen am Nordrand der Bayerischen Alpen auf Grund seismischer Untersuchungen*. *Geologische Rundschau* 42, S.158-168
- Rosselli, A., R. Olivier, P. Logean, B. Dumont (1999): *Les anomalies gravifiques de la vallée du Rhône entre Villeneuve et Brigue*. *Matériaux pour la Géologie de la Suisse, partie Geophysique No. 34*, Genève
- Rummel, R., P. Teunissen, M. van Gelderen (1989): *Uniquely and overdetermined geodetic boundary value problems by least squares*. *Bulletin Geodésique* 63, No.1, S.1-33
- Sansò, F., R. Rummel (1994): *A discussion on the correct way of representing white noise on the sphere and its propagation from measured to estimate quantities*. *IAG section IV bulletin* 1, S.3-16
- Schwendener, H. (1984): *Ein gravimetrisches Krusten-Mantel-Modell für ein Profil vom nördlichen Alpenvorland bis an die Ligurische Küste*. *Geodätisch-geophysikalische Arbeiten in der Schweiz* 36, Schweizerische Geodätische Kommission Zürich
- Scintrex (1992): *Autograv operator manual version 4.4 (Handbuch zum CG3-Gravimeter)*. Scintrex, Concord (Ontario)
- Seiler, K.-P. (1979): *Glazial übertiefte Talabschnitte in den Bayerischen Alpen. Eiszeitalter und Gegenwart* 29, S.35-48
- Seitz, K., B. Heck (2001): *Anziehung und Potential von Tesseroiden*. Vortrag Geodätische Woche Köln 18.9.2001
- Strang van Hees, G. (1986): *Precision of the geoid, computed from terrestrial gravity measurements*. *Manuscripta geodaetica* 11, S.1-14
- Torge, W., H. Denker (1999): *Zur Verwendung des Europäischen Gravimetrischen Quasigeoids EGG97 in Deutschland*. *Zeitschrift für Vermessungswesen* 124/5, S.154-166

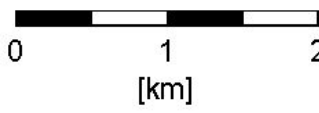
- 
- TRANSALP Working Group (2001): European orogenic processes research transects the eastern alps. EOS Transactions Vol.82 No.40
- Tsoulis, D. (1999): Analytical and numerical methods in gravity field modelling of ideal and real masses. Deutsche Geodätische Kommission Reihe C, Heft 510
- United States Geological Survey USGS (1996): Weltweites Topographiemodell gtopo30. Zu beziehen über ftp oder auf CDs, Informationen unter <http://edcdaac.usgs.gov>
- Wenzel, H.-G., D. Arabelos (1981): Zur Schätzung von Anomalie-Gradvarianzen aus lokalen empirischen Kovarianzfunktionen. Zeitschrift für Vermessungswesen 106, S.234-243

## Karten





- ▲ GPS-Referenzpunkte
- Schwere
- ▲ Lotabweichungen
- Nivellement
- GPS und Nivellement





- ▲ GPS-Referenzpunkte
- Schwere
- ▲ Lotabweichungen
- Nivellement
- GPS und Nivellement

