Lehrstuhl für Baumechanik
der Technischen Universität München

Abschätzung des Schwingungsverhaltens von Konstruktionen mit zufälligen Systemeigenschaften

Jutta Kristina Gehrmann

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. E. Schunck

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. H. Grundmann
2. apl. Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. habil. G. Müller

Die Dissertation wurde am 4. April 2001 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen am 26. Juni 2001 angenommen.

Abschätzung des Schwingungsverhaltens von Konstruktionen mit zufälligen Systemeigenschaften

Zusammenfassung

Unsicherheiten bei der dynamischen Berechnung von Konstruktionen entstehen durch Modellierungsvereinfachungen und streuende Material- und Lastkennwerte. Es wird ein Verfahren entwickelt, das streuende Systemgrößen auf Grundlage des Polynomen Chaos beschreibt und aufbauend auf einer Finiten-Element-Formulierung streuende Eigenfrequenzen näherungsweise ermittelt. Für konstruktiv vorgegebene Grenzwerte von Verschiebungsgrößen werden in Verbindung mit der dynamischen Vergrößerungsfunktion Überschreitenswahrscheinlichkeiten berechnet. Das Vorgehen ist in anwenderorientierten Programmen aufbereitet. Ihre Funktionsweise wird anhand von Beispielen erläutert.

Estimation of the dynamic behaviour for constructions with random system parameters

Summary

Uncertainties in the dynamic calculation of system behaviour arise by simplification in modelling, random material and loading parameters. An approach is developed which describes random parameters using the functions of the Polynomial Chaos. Based on a Finite Element description random eigenvalues are derived approximately. By use of a random transfer function the probability is calculated that the system response exceeds given limits. The approach leads to software for engineering practice. Its functionality is explained by meaningful examples.

Die vorliegende Arbeit entstand am Lehrstuhl für Baumechanik der Technischen Universität München während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Angestellte im Rahmen des DFG–Projekts *Gebäudeerschütterungen - Prognosesicherheit* und meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Assistentin in den Jahren 1995-2001.

Mein Dank gilt in erster Linie Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Grundmann für seine Unterstützung und die fachlichen Diskussionen. Herrn apl. Prof. Dr.-Ing G. Müller danke ich für die Übernahme des Koreferats und die praktischen Anregungen zur vorliegenden Arbeit. Herrn Prof. Dipl.-Ing. E. Schunck gilt mein Dank für die Übernahme des Vorsitzes des Prüfungsausschusses.

Allen meinen ehemaligen Kollegen danke ich für die von ihnen gelegten Grundlagen, auf die ich in Forschung und Lehre aufbauen durfte. Meinen derzeitigen Kollegen gilt mein Dank für ihre Diskussionsbereitschaft, insbesondere Herrn Dipl.-Ing. Erwin Trommer und Herrn Dipl.-Ing. Stefan Lutzenberger.

Meinen Eltern danke ich für ihre Unterstützung und den steten Rückhalt.

München im Juli 2001 Jutta Gehrmann

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen 1

1 Einleitung **3**

1.1 Aufgabenstellung 3

1.2 Zielsetzung 4

1.3 Vorgehen 4

1.4 Lösungsansätze aus der Literatur 6

2 Formulierung streuender Größen **11**

2.1 Entstehung und Darstellung unsicherer Systemeigenschaften 11

2.2 Grundbegriffe des stochastischen Raums 12

2.3 Darstellung einer Zufallsvariablen 13

2.4 Darstellung eines stochastischen Prozesses 15

3 Aufstellen des Gleichungssystems **17**

3.1 Stochastische Systemmatrizen für den dynamischen Fall 17

3.2 Einsetzen von Zufallsvariablen 17

3.3 Einsetzen von Zufallsprozessen 19

4 Lösung des Gleichungssystems **21**

4.1 Transformation des Polynomen Chaos 21

4.1.1 Gleichungssystem für den statischen Fall 22

4.1.2 Gleichungssystem für den dynamischen Fall 23

4.2 Ermittlung der Verschiebungen 24

5 Eigenwertproblem und Rayleighquotient **26**

5.1 Eigenwertproblematik 26

5.2 Determinantenverfahren 26
5.3 Näherungslösung mit dem Rayleighquotienten 28

6 Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte 30
6.1 Momentenbasierte Reihenentwicklungen 30
6.1.1 Momente der Verteilung 30
6.1.2 Gram-Charlier-Reihe 31
6.1.3 Edgeworth-Reihe 34
6.2 Numerische Auswertung des Lösungsvektors 34
6.3 Anwendungsbeispiel Einmassenschwinger 36
6.3.1 Anzunähernde analytische Funktion 36
6.3.2 Näherungslösung mit Chaospolynomen 37
6.3.3 Vergleich der Reihenentwicklungen 40

7 Stochastische Vergrößerungsfunktion 42
7.1 Berechnung von Überschreitenswahrscheinlichkeiten 42
7.2 Weitere streuende Größen 44
7.3 Anwendungsbeispiel 45
7.3.1 Untersuchung des gedämpften Einmassenschwingers 46
7.3.2 Untersuchung des Einmassenschwingers bei streuender Anregefrequenz 47
7.3.3 Untersuchung des Einmassenschwingers bei streuender Anregefrequenz und Dämpfung 49
7.4 Ergebnisse für den untersuchten Einmassenschwinger 52

8 Multifrequente Last, Mehrfreiheitsgradsysteme 53
8.1 Modalanalyse 53
8.2 Rückblick auf Einfreiheitsgradsysteme 54
8.3 Modale Beteiligungen 55
8.4 Dominante Eigenform 58
8.4.1 Monofrequente Anregung 58
8.4.2 β-Punkt 60
8.4.3 Multifrequente Anregung 61

8.5 Mehrere dominante Eigenformen 64
8.5.1 Monofrequente Anregung 64
8.5.2 Multifrequente Anregung 64

9 Anwendung auf Ersatzmodelle 66
9.1 Gebäudeerschütterungen 67
9.2 Ersatzmodelle nach Breitsamter 67
9.3 Stochastische Formulierung der Ersatzmodelle 69
9.3.1 Anwendung auf das Timoshenkogrundmodell 70
9.3.2 Anwendung auf das erweiterte Timoshenkomodell 73
9.3.3 Anwendung auf das Vertikalschwingungsmodell 77
9.3.4 Anwendung auf das Säulenmodell 79
9.4 Zusammenfassung der Ersatzmodelle 83

10 Anwenderprogramme 86
10.1 Zielsetzung 86
10.2 Leistungsumfang und Module 87
10.3 Programm `qeigenf` 88
10.3.1 Deterministische Eingangsdaten 88
10.3.2 Stochastische Eingangsdaten 89
10.3.3 Rayleighmultiplizierte Matrizen 91
10.3.4 Berechnungsverlauf 92
10.3.5 Manual für Programm `qeigenf` 94
10.4 Programm `puealpha` 97
10.4.1 Berechnungsverlauf 97
10.4.2 Manual für Programm `puealpha` 97
10.5 Programm `puemono` 98
10.5.1 Allgemeine Aspekte 98
10.5.2 Einfreiheitsgradsystem 99
10.5.3 Mehrfreiheitsgradsystem mit dominanter Eigenform 100
10.5.4 Mehrfreiheitsgradsystem ohne dominante Eigenform 102
10.5.5 Berechnungsverlauf 102
10.5.6 Manual für Programm `puemono` 102

10.6 Programm `puemulti` 105
10.6.1 Allgemeine Aspekte 105
10.6.2 Einfreiheitsgradsystem 106
10.6.3 Mehrfreiheitsgradsystem 107
10.6.4 Berechnungsverlauf 107
10.6.5 Manual für Programm `puemulti` 108
10.7 Zusammenfassung der Programme 109

11 Säulenmodell **111**
11.1 Programm `saeule` 112
11.2 Manual für Programm `saeule` 114

12 Anwendungsbeispiele **116**
12.1 Beispiel Zweifreiheitsgradsystem 116
12.1.1 Erzeugung der Funktion für α 116
12.1.2 Wahrscheinlichkeit für Frequenzbereich 118
12.1.3 Monofrequente Fußpunkterregung 119
12.1.4 Multifrequente Fußpunkterregung 124
12.1.5 Keine dominante Eigenform - Parameterstudien 126
12.2 Anwendung auf teileingespannte Decke 127
12.2.1 Streuender Einspanngrad 127
12.3 Anwendung auf Säulenmodell 131
12.3.1 Streuender Elastizitätsmodul der repräsentativen Säule 131
12.3.2 Streuende Massebelegung der Decken 132
12.4 Abschließende Bemerkungen zu den Beispielen 135

13 Zusammenfassung **136**

Literaturverzeichnis **139**

Bezeichnungen

Lateinische Buchstaben

A	Fläche
$-a, a$	Definitionsgrenzen eines stochastischen Prozesses
b	Korrelationslänge des stochastischen Prozesses
$\mathbf{C}$	Dämpfungsmatrix
$C(.)$	Kovarianzfunktion
c	inverse Korrelationslänge des stochastischen Prozesses, Beiwerte der Gram-Charlier-Reihe
D	Lehrsches Dämpfungsmaß
E	Erwartungswert, Elastizitätsmodul
$\mathbf{f}$	Lastvektor
f	Frequenz
$f(.)$	Eigenfunktion der Kovarianzfunktion eines stochastischen Prozesses, Funktion der Gram-Charlier-Reihenentwicklung
G	Schubmodul
$g(.)$	Zeitfunktion der Last
$H(.)$	Hermitesche Polynome der Gram-Charlier-Reihenentwicklung
I	Flächenträgheitsmoment
$\mathbf{K}$	Steifigkeitsmatrix
k	Federsteifigkeit, generalisierte Steifigkeit
l	Länge
$\mathbf{M}$	Massenmatrix
m	Masse, generalisierte Masse, stochastisches Moment
$P(.)$	Verteilungsfunktion einer Größe
$p(.)$	Verteilungsdichte einer Größe
p	Polynomgrad der Chaospolynomentwicklung
$p_{ü}$	Überschreitenswahrscheinlichkeit
t	Zeit
$\mathbf{u}$	Vektor der Verschiebungsgrößen
$\dot{\mathbf{u}}$	Vektor der Geschwindigkeiten
$\ddot{\mathbf{u}}$	Vektor der Beschleunigungen
$V(.)$	Vergrößerungsfunktion der krafterregten Schwingung
$V_r(.)$	Vergrößerungsfunktion der fußpunkterregten Schwingung
w	Verschiebungsgröße
w_r	Relativverschiebung
x	Längskoordinate eines Bauteils, streuende Größe
y	modale Verschiebungsgröße
y_r	modale Größe einer Relativverschiebung

Griechische Buchstaben

α	Quadrat der streuenden Eigenkreisfrequenz
Γ	Funktion des Polynomen Chaos

γ	Schiefe einer Verteilung, Phasenversatz
η	Frequenzverhältnis Ω/ω,
	Faktor zur Berücksichtigung der Schubverformung
θ	Koordinate des stochastischen Raums
λ	Eigenwerte der Kovarianzfunktion eines stochastischen Prozesses
μ	Mittelwert, zentrales Moment
ξ	Zufallsgröße
Π	Permutationssymbol
ρ	Korrelationskoeffizient
σ	Standardabweichung
ϕ	Verdrehung
$\phi(.)$	Normalverteilungsdichte
$\mathbf{\Psi}$	Eigenvektor
$\Psi(.)$	Ansatzfunktion für ein Finites Element, Eigenform
$\mathbf{\Omega}$	stochastischer Raum
Ω	Erregerkreisfrequenz
ω	Eigenkreisfrequenz

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Aufgabenstellung

Eine der wichtigsten Aufgaben des konstruktiv tätigen Ingenieurs ist es, technische Strukturen zu entwickeln, die gegebene Zielvorgaben erfüllen. Dabei gilt es, vorab anhand von Berechnungen festzustellen, ob die erdachte Struktur den gestellten Anforderungen entspricht und den anfallenden Belastungen standhält.

Vor der Berechnung steht eine Modellbildung, welche die wesentlichen Eigenschaften einer Struktur beschreibt. Dabei sind Annahmen zu treffen - beispielsweise über das Zusammenwirken einzelner Strukturelemente -, welche die Berechnung vereinfachen oder im Rahmen bestehender Methoden erst möglich machen. Zudem sind die Kenngrößen der verwendeten Materialien für die Berechnung abzuschätzen. Gerade im Bauwesen weisen die Eigenschaften von Baustoffen eine große Streubreite auf. So sind in jeder noch so genauen Modellierung gewisse Unsicherheiten enthalten.

Bei dynamischen Untersuchungen fällt die Unsicherheit der Eingangsgrößen besonders ins Gewicht. Das Ergebnis einer dynamischen Berechnung hängt stark davon ab, wie System und dynamische Last zusammenwirken. Wird bei für eine bestimmte Konstellation von Eingangswerten kein kritisches Verhalten ermittelt, können nur geringfügig variierte Eingangsgrößen eine dynamische Systemreaktion zeigen, die als kritisch eingeschätzt werden muß und somit nicht mehr tolerierbar ist. Ist die dynamische Last insbesondere auf einen schmalen Frequenzbereich begrenzt, wird die Systemantwort durch die Zufälligkeit der Strukturgrößen bestimmt.

Bislang gibt es kein flexibles und leicht handhabbares Hilfsmittel, um in der Praxis den Einfluß von streuenden Größen auf beliebige dynamische Systeme wie z.B. aus dem Bauwesen und dem Maschinenbau zu berechnen. Die Beschreibung streuender Größen geschieht in der Regel auf Grundlage der Wahrscheinlichkeitstheorie. Die Berechnung mit stochastischen Werten kann zumeist nur mit großem Aufwand erfolgen.

Die vorliegende Arbeit hat die Aufgabe, ein Vorgehen zu entwickeln, das die stochastische Berechnung einem praktisch tätigen Ingenieur auf einfache Weise ermöglicht. Im Zuge von Vorberechnungen soll er durch Anwendung des entwickelten Verfahrens Einblick in das streuende dynamische Systemverhalten gewinnen, um die Bandbreite möglicher Ergebnisse abstecken zu können. Zudem soll das Verfahren die Bestimmung von Überschreitenswahrscheinlichkeiten vorgegebener Antwortgrenzen möglich machen.

1.2 Zielsetzung

Bei der Entwicklung eines Hilfsmittels für stochastische Berechnungen von dynamischen Systemen stand die einfache Anwendbarkeit in der Praxis im Vordergrund. Der Anwender soll ohne vertiefte Kenntnisse der Stochastik mit einfachen - deterministischen - Rechenschritten Aufschluß über die Streubreite von Systemkenngrößen erhalten. Als charakteristische Kennwerte eines Systems sollen streuende Eigenfrequenzen und die Überschreitenswahrscheinlichkeiten vorgegebener Verschiebungsgrößen im eingeschwungenen Zustand bestimmt werden. Die Eigenfrequenzen sind nur von den Systemeigenschaften abhängig; sie bieten einen besonders aussagekräftigen Einblick in das Systemverhalten. Die Antwort eines Systems auf eine dynamische Last nach Abschluß des Einschwingvorgangs kennzeichnen die Verschiebungsgrößen des eingeschwungenen Zustands. Für sie sind im Regelfall bestimmte Grenzwerte einzuhalten. Der Einschwingvorgang wird an dieser Stelle nicht weiter betrachtet. Für ihn sind unabhängig weitere Untersuchungen anzustellen. Aufgrund des unregelmäßigen dynamischen Verhaltens im Einschwingvorgang weist ein System jedoch eine geringere Empfindlichkeit gegenüber Parameterstreuungen auf als im eingeschwungenen Zustand.

Das Hilfsmittel soll den entwerfenden Ingenieur vor allem bei der Vorplanung unterstützen. Er soll durch die Zusatzinformation der Streubreite eine Systemreaktion besser abschätzen können. Zudem soll er ihre Sensitivität hinsichtlich der Systemgrößen einfach untersuchen können. Die stochastische Berechnung muß überdies schnell ausführbar sein. Parameterstudien für Eingangsgrößen müssen effizient gestaltbar sein.

Das Verfahren soll einfach mit der herkömmlichen Berechnungsmethode der Finiten Elemente (FE) kombinierbar sein, welche gegenwärtig in der Praxis bei der Untersuchung dynamischer Systeme hauptsächlich angewendet wird.

Im folgenden wird ein Berechnungsverfahren vorgestellt, welches die gesetzten Ziele erfüllt. Zunächst wird ein kurzer Überblick über das verwendete Vorgehen und die Einordnung in vorhandene stochastische Berechnungsmethoden gegeben.

1.3 Vorgehen

Im ersten Schritt werden die streuenden Systemeigenschaften, d.h. Unsicherheiten hinsichtlich der Modellbildung und der Materialeigenschaften als probabilistische Systemparameter aufgefaßt und mit Wahrscheinlichkeiten belegt.

Es wird durchgängig von normalverteilten Zufallsvariablen bzw. Gaußschen Prozessen ausgegangen. Die tatsächliche Streuung von Materialparametern läßt sich im Grundsatz gut

durch eine Normalverteilung darstellen. Vorteilhaft an der Normalverteilung ist, daß die Berechnungen einen weit geringeren Aufwand erfordern als bei anderen Verteilungsdichten und der Anwender am einfachsten die notwendigen Parameter zum Aufstellen der Funktion ermitteln kann. Allerdings besitzt die Normalverteilung Werte im negativen Bereich, was im Falle von Steifigkeits- und Masseparametern den physikalischen Eigenschaften widerspricht. Es handelt sich jedoch um auslaufende Randbereiche der Funktionen, die stets mit geringen Wahrscheinlichkeiten belegt sind und kaum Einfluß auf das Gesamtergebnis haben. Somit kann zur Darstellung der Streuung eine Normalverteilung gewählt werden.

Mit Hilfe des Polynomen Chaos, wie es von Ghanem und Spanos [47] präsentiert wird, ist es möglich, sowohl Zufallsvariablen als auch stochastische Prozesse als Reihenentwicklung in einem besonders definierten stochastischen Raum darzustellen. Die Berechnung baut auf der Systembeschreibung durch Steifigkeits-, Massen- und Dämpfungsmatrix auf, wie sie bei einer FE-Darstellung entsteht. Die Reihenentwicklungen der Zufallsgrößen gehen bei einer FE-Untersuchung in die Systemmatrizen ein. Die Systemmatrizen liegen damit im Grundsatz ebenfalls als Reihenentwicklung im stochastischen Raum vor.

Das gewonnene matrizielle Gleichungssystem könnte direkt nach den unbekannten Verschiebungsgrößen gelöst werden. Allerdings kann es riesige Dimensionen annehmen und damit einen erheblichen Rechenaufwand auslösen. Dies widerspricht dem Ziel der schnellen und flexiblen Ausführbarkeit der stochastischen Berechnung. Das Gleichungssystem wird zwar vorgestellt, in das entwickelte Berechnungsverfahren jedoch nicht integriert.

Das Gleichungssystem kann auch auf seine Eigenwerte hin untersucht werden, welche in die Eigenfrequenzen der Struktur umrechenbar sind. Unter Verwendung der Massen- und Steifigkeitsmatrix, welche streuende Werte enthalten, und geschätzter Eigenvektoren werden die streuenden Eigenwerte ermittelt. Es wird eine Rayleighabschätzung verwendet, die auf ein erheblich reduziertes Gleichungssystem führt. Bis zu diesem Punkt gehen nur die streuenden Größen der Massen- und Steifigkeitsterme ein.

Im nächsten Schritt wird die Verteilungsdichte der Ergebnisgröße im Originalraum bestimmt (Verschiebungsgröße bei Auswertung des Gesamtgleichungssystems bzw. Eigenwerte). Dazu werden alternative Verfahren verglichen, welche auf einer Momentenbestimmung der Ergebnisgrößen beruhen bzw. auf einer numerischen Auswertung der Lösungsvektoren.

Weitergehend werden mit Hilfe der Vergrößerungsfunktion für harmonische Belastungen für die Quadrate der Eigenfrequenzen zulässige Bereichsgrenzen abgesteckt, so daß vorgegebene zulässige Antwortwerte im eingeschwungenen Zustand nicht überschritten werden. Die Wahrscheinlichkeit, mit der Eigenfrequenzen in den unzulässigen Bereich fallen, ist die Überschreitenswahrscheinlichkeit des Verschiebungsgrenzwerts. Mit der Vergrößerungsfunktion werden gleichzeitig weitere streuende Größen eingeführt. Die Berechnung kann auch für nichtharmonische Lasten ausgeführt werden, wenn diese zuvor im Sinne einer Fourieranalyse in ihre harmonischen Bestandteile aufgespalten wurden.

Als Beispiele werden Systeme aus dem Bauwesen untersucht. Ein spezielles Augenmerk liegt auf fußpunkterregten Gebäuden. Für diese Systeme liegen z.T. standardisierte Ersatzmodelle vor, die mit einer stark reduzierten Anzahl an Freiheitsgraden gegenüber einer herkömmlichen FE-Beschreibung auskommen und dennoch das Systemverhalten in zuverlässiger Genauigkeit wiedergeben (vgl. Breitsamter [14]). Vorteilhaft ist die kleinere Dimension der Systemmatrizen, die eine stochastische Berechnung vereinfacht, gegenüber einer herkömmlichen FE-

Formulierung. Abhängig vom Gebäudetyp sind spezielle Eingangswerte zu berechnen, welche die Eigenschaften des Systems abbilden. Die Übertragbarkeit auf stochastische Untersuchungen wird vorgestellt.

Auf Grundlage der gewonnenen Erkenntnisse wird ein Verfahren entwickelt, das in Computerprogrammen anwendergerecht umgesetzt wird. Es beschränkt sich nicht auf den Einsatzbereich der Ersatzmodelle, sondern ist darüber hinaus für vielfältige dynamische Fragestellungen verwendbar, welche mit einer FE-Darstellung beschrieben werden. Abschließend werden die Programme auf typische dynamische Beispiele angewendet.

1.4 Lösungsansätze aus der Literatur

Einführende Literatur

Einführungen in die Stochastik geben Fisz [39] in umfassender Weise und Bronstein, Semendjajew [16] in konzentrierter Form. Die Verbindung von streuenden Eingangsgrößen mit dynamischen Systemreaktionen mit Bezug auf praktische Anwendungen stellen Heinrich, Henning [71], Clough, Penzien [20] und Lin [88] dar.

Neben der Ermittlung von Überschreitenswahrscheinlichkeiten steht in vielen Fällen die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit von Bauwerken im Vordergrund. Schuëller, Rackwitz, Bachmann [95] und Schuëller [114] stellen hierzu grundsätzliche Überlegungen an. Im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 96 wurden an der TU München Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie von Bauwerken veröffentlicht (z.B. Hohenbichler [74], Großmann, Juli [51], Rackwitz [107], Fiessler [38] und Grundmann [55]). Die dort gezeigten Ansätze fanden Eingang in die deutschen Baunormen und mittlerweile auch in die europäischen Baunormen (Rackwitz [108]).

Nachfolgend wird Literatur vorgestellt, die sich speziell auf die Beschreibung von streuenden Größen, die Einbeziehung in die Methode der Finiten Elemente und die Bestimmung von streuenden Eigenfrequenzen sowie von Überschreitenswahrscheinlichkeiten bezieht.

Beschreibung streuender Größen

Die mathematische Beschreibung von Unsicherheiten wird üblicherweise im Rahmen der Wahrscheinlichkeitstheorie vorgenommen. Das bedeutet, daß für streuende Größen Werte (Realisationen) bestimmt und mit zugehörigen Wahrscheinlichkeiten belegt werden. Die Berechnung mit Stochastischen Finiten Elementen verlangt die numerische Beschreibung eines stochastischen Feldes als diskrete Zufallsvariable. Dazu stehen unterschiedliche Verfahren zur Verfügung. Eine punktweise Diskretisierung bezogen auf die Mittelpunkte der Finiten Elemente stellen Shinozuka, Yamazaki [121] vor. Brenner [15] bezieht die Diskretisierung auf Punkte, die für die nachfolgende Integration benötigt werden. Die örtliche Mittelungsmethode erzeugt aus einem gegebenen stochastischen Feld diskrete Werte durch Integration über die Zeit bzw. über die Dimension eines Finiten Elements (Fenton, Vanmarke [36]). Die Beschreibung des stochastischen Feldes mit Ansatzfunktionen verwenden Liu et al. [89].

Oftmals wird eine Reihenentwicklung des stochastischen Feldes verwendet. Eine Taylor-

Reihenentwicklung stellt die Störungsrechnung (Perturbationsmethode) dar. Sie entwickelt das stochastische Feld um den Mittelwert der Zufallsvariablen. Die Perturbationsmethode verlangt eine hohe Anzahl an Termen, um große Streuungen abbilden zu können. Angewendet für kleine Streuungen zeigt sie jedoch ausreichend gute Ergebnisse und kommt mit relativ geringer Rechenzeit aus (Shinozuka, Yamazaki [121]).

Eine spektrale Methode ist die Karhunen-Loève-Entwicklung, die auf der Zerlegung des Kovarianzkerns in seine Eigenwerte und Eigenfunktionen beruht [47]. Der Lösungsprozeß bzw. das Lösungsfeld kann in diesem Fall vorteilhaft auf Grundlage der Polynome des Homogenen Chaos dargestellt werden (Ghanem, Spanos [45], [46], [47]). Die Methode wird in der vorliegenden Arbeit verwendet.

Neben den Methoden innerhalb der Wahrscheinlichkeitstheorie gibt es neuerdings andere Ansätze zur Beschreibung von Unsicherheiten: Die Intervallmathematik weist einer Größe ein Intervall mittels eines unteren und eines oberen Grenzwerts zu (vgl. Lange [87]), die Fuzzyarithmetik wichtet die Werte des Intervalls mit einer Beteiligungsfunktion (vgl. Zimmermann [137], Lowen [91] und Kaufmann, Gupta [82]). Das Verfahren der Fuzzy Numbers wird bereits für Fragestellungen aus dem Bauwesen angewendet (Möller [96] und Fetz et al. [37]), wobei sich die Anwendung als problematisch erweist.

Stochastische Finite Elemente

Eine weitverbreitete Methode zur Bestimmung von Systemverschiebungsgrößen und Schnittgrößen für den statischen wie für den dynamischen Fall ist die Methode der Finiten Elemente. Die Implementierung streuender Größen führt zu Stochastischen Finiten Elementen.

Für die Lösung des stochastischen Gleichungssystems können folgende Methoden unterschieden werden: Zur Darstellung der Systemmatrizen verwenden Deodatis [25] und Takada [128] die Weighted Integral Methode. Elemente der Matrizen werden erzeugt, indem die enthaltenen Zufallsgrößen mit Ansatzfunktionen multipliziert und integriert werden.

Alternativ läßt sich die Inverse der Systemmatrizen mit einer Neumann-Reihe abbilden. Die Methode wird von Shinozuka et al. [135], [120] und Ghanem, Spanos [47] angewendet.

Die Störungsrechnung (Perturbationsmethode) mit Systemmatrizen zeigen Beiträge von Liu et al. [90], Hisada, Nakagiri [72] und Kleiber, Hien [86]. Für größere Streuungen stellen Der Kiureghian und Taylor ein verbessertes Vorgehen vor [28]. Analog zur Darstellung der streuenden Eingangsgrößen verwenden Ghanem, Spanos die Polynome des Homogenen Chaos zur Darstellung der Lösung und führen so die Spektrale Stochastische Finite Elemente-Methode (SSFEM) ein [47].

Die Methode der Monte-Carlo-Simulation beschreiben Shinozuka, Dasgupta [119] und Shinozuka, Yamazaki [121]. In einem Übersichtsartikel vergleichen Matthies, Brenner, Bucher, Soares [93] die einzelnen Verfahren.

Stochastische Eigenfrequenzen, Eigenformen und Vergrößerungsfunktionen

Die Anwendung der Stochastischen Finite Elemente führt üblicherweise auf die Bestimmung streuender Verschiebungsgrößen. Die Ermittlung von streuenden Eigenfrequenzen und Eigen-

formen ermöglicht vorab eine Einschätzung der Streuung des Antwortverhaltens. Oftmals sind die Berechnungen der stochastischen Eigenwerte in die oben genannten Verfahren der Stochastischen Finite Elemente-Methode eingebettet.

Einen guten Überblick über die zur Verfügung stehenden Methoden gibt Székely [127].

Für kontinuierlich formulierte Systeme können sogenannte „honest methods“ und „dishonest methods“ unterschieden werden. Als mögliche Ansätze stehen nach Boyce [12, 13] und nach vom Scheidt, Purkert [113] Methoden der Störungsrechnung, Variationsmethoden, asymptotische Schätzungen und die Auswertung von Integralgleichungen zur Verfügung.

Für diskretisierte Systeme, welche mit Hilfe der FE-Methode untersucht werden, existieren verschiedene Vorgehensweisen, stochastische Eigenwerte und Eigenvektoren zu bestimmen. Erste Untersuchungen unter Zugrundelegung der Störungsrechnung stellen Collins [21] und Collins, Thompson [22] vor. Hasselman, Hart [70] wenden die Methode zusammen mit der Modalanalyse an, Sniady und Zukowski [122] ermitteln die Sensitivität des Mittelwertes der streuenden Eigenfrequenzen.

Auf Grundlage des Verfahrens von Collins und Thompson [22] entwickelt Juli [80] einen Lösungsansatz zur Berechnung der Überschreitenswahrscheinlichkeit eines vorgegebenen Grenzzustandes. Daneben stellt er stochastische Vergrößerungsfunktionen für Einmassenschwinger und Balkenschwinger für periodische Lasten vor. Großmann [52] entwickelt stochastische Vergrößerungsfunktionen unter Zuhilfenahme der Impedanzmethode und berechnet damit die Zuverlässigkeit dynamisch beanspruchter Tragwerke.

Grigoriu [48] gibt Grenzen für den Mittelwert der streuenden Eigenfrequenzen an. Weiterhin stellt er einen Ansatz vor, bei dem er die Nullstellen der charakteristischen Funktion des Eigenwertproblems untersucht [49], [50].

Eine Vorgehensweise zur Bestimmung der streuenden Eigenfrequenzen und Eigenformen innerhalb der Stochastischen FE-Methode (SFEM) wird von Zhu und Wu [136] auf Grundlage der Störungsrechnung vorgestellt. Grundmann et al. [57] wenden den Rayleighquotienten zur näherungsweisen Ermittlung von Eigenfrequenzen an.

Sakamoto, Ghanem [111] ermitteln mit Hilfe der Spektralen Stochastischen FE-Methode die stochastischen Übertragungsfunktionen verschiedener fußpunkterregter Systeme mit streuenden Systemparametern. Dessombz, Thouverez, Jézéquel [29] berechnen u.a. auf Grundlage der Veröffentlichung von Ghanem und Spanos [47] die Eigenformen und die stochastische Vergrößerungsfunktion für verschiedene krafterregte Systeme.

Eine Vorgehensweise zur Berechnung von stochastischen Eigenwerten und Eigenformen innerhalb der Monte-Carlo-Simulation stellt Székely [127] vor.

Berechnungsprogramme

Für die Praxis stehen Computerprogramme zur Verfügung, die eine stochastische Berechnung ermöglichen. Beispielsweise am Lehrstuhl Mechanik der Leopold-Franzens-Universität Innsbruck entstand das kommerzielle Programm `COSSAN`, das Zufallseigenschaften von Eingabedaten mit der Methode der Finiten Elemente kombiniert. Der Lösungsalgorithmus beruht auf einer Monte-Carlo-Simulation.

Das Programmpaket STRUREL der Firma RCP GmbH steht zur Einschätzung der Zuverlässigkeit von Systemen zur Verfügung. Im Vordergrund steht dabei die Ermittlung von Versagenswahrscheinlichkeiten.

Den Programmen ist gemeinsam, daß sie Berechnungen mit relativ hohem numerischen Aufwand ausführen. Für die Eingabe und die Interpretation der Ergebnisse werden vom Anwender fundierte Kenntisse der Wahrscheinlichkeitstheorie erwartet.

Allgemeine Grundlagen zu Gebäudeerschütterungen

Da in der vorliegenden Arbeit fußpunkterregte Gebäude auf ihre streuende Systemreaktion untersucht werden, wird eine kurze Zusammenstellung möglicher Berechnungsmethoden gegeben. Dabei handelt es sich zunächst um deterministische Verfahren.

Ansätze zur Bestimmung der Gebäudereaktion aufgrund von Erfahrungswerten gibt Flesch in einem Übersichtsartikel [40] an. Dieser enthält auch Angaben über die Entstehung und Weiterleitung von Störungen sowie über Maßnahmen zur Herabsetzung von Immissionen. Auf die Auswertung von Messungen gestützte Verfahren finden sich bei Hölzl [75] und in einer Veröffentlichung der ARGE Schwingungen [97].

In einer Vielzahl von Arbeiten werden die für die Erschütterungseinleitung wesentlichen Grundlagen der Bauwerk-Boden-Interaktion dargestellt, beispielsweise Wolf [132, 133], Waas [129], Gazetas [42], Huh, Schmid [76] sowie Antes [1] und von Estorff [34].

Grundmann et al. [58] berichten am Beispiel einer Aufgabe aus der Baupraxis über Untersuchungen zum Erschütterungs- und Schallschutz eines Gebäudes, in [61] und [54] von Berechnungsmethoden über die Fortleitung hochfrequenter Anregungen. Vorgehensweisen zum Erschütterungsschutz unter vereinfachender Ausnutzung typischer mechanischer Eigenschaften enthält die Veröffentlichung (Grundmann, Müller [60]), in der auch eine kurze Übersichtsdarstellung allgemeiner Gesichtspunkte zur Prognose von Bauwerkserschütterungen zu finden ist.

Zur Ermittlung der Bauwerkserschütterungen wurden von Breitsamter [14] vereinfachte Ersatzmodelle entwickelt und im Vergleich zu aufwendigen FE-Untersuchungen hinsichtlich Anwendungsgrenzen und Zuverlässigkeit getestet. Diese Untersuchungen haben zu leistungsfähigen Ersatzsystemen für Hochhäuser und für flächig ausgedehnte Bauwerke geringerer Höhe sowie zu einer Modellierung der Erschütterungseinleitung geführt.

Berechnung der Gebäudereaktion bei streuenden Systemeigenschaften

Zur Berechnung stochastischer Bauwerksschwingungen existiert eine überaus reichhaltige Literatur. Die überwiegende Zahl der Veröffentlichungen befaßt sich mit der zufälligen Reaktion deterministisch betrachteter Tragwerke auf stochastische Anregung.

Die Zahl der Untersuchungen zur Berücksichtigung streuender Systemeigenschaften ist demgegenüber weitaus geringer. Collins, Thompson [22] und Hasselman, Hart [70] haben erste Anstrengungen unternommen, die zufälligen Veränderungen der Eigenfrequenzen und Eigenformen mit Methoden der Störungsrechnung zu analysieren. Weitere Arbeiten zur 2.Momente-Statistik stammen von Hasselman [70] sowie Astill, Shinozuka [118].

Für die Anregung durch Erdbeben gibt K.H. Müller [99] einen Lösungsweg unter Verwendung der totalen Wahrscheinlichkeit zur gleichzeitigen Berücksichtigung der Zufälligkeit der Anregung und der zufälligen Systemeigenschaften an.

Schwingungen von Balken und Rahmen mit streuenden Systemeigenschaften bei geometrisch nichtlinearem Verhalten beschreiben Chang, Yang [19] unter Verwendung einer äquivalenten Linearisierung und der Störungsrechnung zweiter Ordnung.

Für Systeme mit zufälligen Eigenschaften unter stochastischer Anregung haben Igusa, Der Kiureghian [79] Zuverlässigkeitsuntersuchungen nach Methoden erster und zweiter Ordnung publiziert sowie eine Methode für a-priori- und a-posteriori-Sensitivitätsanalysen entwickelt. In Verbindung mit der Backward-Kolmogorov-Gleichung zur Behandlung des First-Passage-Problems benutzen Spencer, Elishakoff [124] das Theorem der totalen Wahrscheinlichkeit zur Untersuchung linearer und nichtlinearer Ein-Freiheitsgrad-Schwinger mit zufälliger Steifigkeit unter stochastischer Anregung. Ibrahim [78] beschreibt Techniken zur Reduktion des Simulationsaufwandes bei der Ermittlung der totalen Wahrscheinlichkeit unter Ausnutzung der Resonanzeigenschaften, die sich für Systeme mit bedingten deterministischen Eigenschaften ergeben.

Ein Konzept für eine durchgängige stochastische Bearbeitung mit Hilfe der Monte-Carlo-Simulation, die sowohl die Zufälligkeit der Belastungen als auch der Systemparameter erfaßt, wird von Schuëller, Bucher, Pradlwarter [115] dargestellt.

Die genannten Verfahren sind nicht direkt in der Praxis anwendbar. Allein die letztgenannte Methode ist in dem anwenderorientierten Programmpaket `COSSAN` umgesetzt. Die Berechnung erfordert jedoch relativ hohen numerischen Aufwand und ist für eine Vorplanung rechenzeitintensiv.

Gebäudeantwort bei hochfrequenter Anregung

Der Vollständigkeit halber werden Verfahren für die Ermittlung des Antwortverhaltens bei hochfrequenter Anregung (ab ca. 100 Hz) angegeben. Sie ist für die Fortleitung des Körperschalls von Bedeutung. Aufgrund der Zufälligkeit der Systemeigenschaften sind den deterministischen Verfahren, wie der FE-Methode, in der Regel enge Grenzen gesetzt. Diese spezielle Fragestellung hat zur Entwicklung der energetischen Mittelung, der SEA-Methode (Statistical Energy Analysis, Lyon [92]) geführt, mit der in den entsprechenden Frequenzbereichen unter der Voraussetzung einer ausreichenden Modendichte aussagekräftige Ergebnisse zu erzielen sind. Die SEA-Methode hat sich insbesondere in der Akustik bewährt. Sie dient zur Berechnung globaler mittlerer Antwortgrößen eines Systems. Eine Abschätzung von Energiewerten durch Festlegung unterer und oberer Grenzen bei ungenauer Kenntnis von Verschiebungs- und Spannungsgrößen eines Systems gibt Guyader [68] an.

Untersuchungen zur Anwendbarkeit der SEA-Methode präsentieren Pradlwarter und Schuëller [105]. Mit Hilfe einer stochastischen, globalen Modalanalyse entwickeln sie für deterministische Systeme Leistungsflußbeziehungen einzelner Subsysteme, die bei korrelierter Anregung und nichtkonservativer bzw. starker Kopplung für den gesamten Frequenzbereich anzuwenden sind.

Kapitel 2

Formulierung streuender Größen

2.1 Entstehung und Darstellung unsicherer Systemeigenschaften

Die Tatsache, daß Systemeigenschaften unzureichend bekannt sind, hat vielerlei Gründe. Verwendete Bau- und Werkstoffe weisen hohe Streuungen auf gegenüber theoretisch angenommenen Kennwerten. Steifigkeits- und Massekennwerte streuen in unterschiedlich hohem Maße. Eine weitere Unsicherheit besteht auch in einer möglichen Abweichung des tatsächlich ausgeführten vom geplanten System. Im übrigen müssen Annahmen getroffen werden, die beispielsweise das Mitwirken leichter Einbauten und das Mitwirken von Nutzmassen bei Schwingungen einschließen.

Es wird davon ausgegangen, daß all diese Einflüsse als probabilistische Größen beschreibbar sind. Hierfür wird in ingenieurmäßiger Abschätzung der zu erwartende Schwankungsbereich bestimmt. Die Werte werden mit Wahrscheinlichkeiten belegt. Daraus entsteht im einfachsten Fall eine Gaußsche Normalverteilung. Oftmals wird auch eine log-Normalverteilung angenommen, bei der keine Werte im negativen Bereich auftreten können. Als Schwierigkeit erweist sich, daß die Verteilungsfunktionen nicht durchgängig in die Berechnung integrierbar sind. Es muß dann auf eine numerische Auswertung zurückgegriffen werden.

Eine Möglichkeit, mit der streuende Größen mit Hilfe einer Reihenentwicklung dargestellt werden können, stellen Ghanem und Spanos [47] vor. Sie zeigen auch, wie die Formulierung der Größen mit der Methode der Finiten Elemente kombinierbar ist.

Im folgenden werden einige Grundbegriffe dieser Vorgehensweise erläutert.

2.2 Grundbegriffe des stochastischen Raums

Grundlegend ist die Definition eines stochastischen Raums $\mathbf{\Omega}$, der durch orthogonale Vektoren

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird. Die Basisvektoren sind gegenseitig stochastisch unabhängig. Standardnormalverteilte Zufallsgrößen ξ_i (Mittelwert $\mu_i = 0$ und Standardabweichung $\sigma_i = 1$) sind den Koordinaten θ_i zugeordnet.

Um beliebige Verteilungen im stochastischen Raum abbilden zu können, werden die Hermiteschen-Polynome des Homogenen Chaos $\Gamma_i(\theta)$ eingeführt (im weiteren Chaospolynome genannt). Sie sind Funktionen der Basisgrößen ξ_i. Sie werden abgeleitet nach der von Ghanem und Spanos [47] angegebenen und von Waubke [130] richtiggestellten Bildungsvorschrift. $\Pi(.)$ stellt eine Permutation und $E(.)$ den Erwartungswert dar:

$$\begin{aligned} \Gamma_{(p)} &= \sum_{\substack{r=p \\ r \text{ gerade}}}^{0} (-1)^{(p-r)/2} \sum_{\pi(i_1 \ldots i_p)} \prod_{k=1}^{r} \xi_{i_k} \, E\left(\prod_{l=r+1}^{p} \xi_{i_l} \right) \qquad \text{p gerade} \\ \Gamma_{(p)} &= \sum_{\substack{r=p \\ r \text{ ungerade}}}^{1} (-1)^{(p-r)/2} \sum_{\pi(i_1 \ldots i_p)} \prod_{k=1}^{r} \xi_{i_k} \, E\left(\prod_{l=r+1}^{p} \xi_{i_l} \right) \qquad \text{p ungerade} \end{aligned} \tag{2.1}$$

So ergeben sich beispielsweise die Chaospolynome Γ_i einer Zufallsgröße ξ_1 bis zum Polynomgrad 3 zu:

$$\begin{aligned} p = 0: &\quad \Gamma_0 = 1 \\ p = 1: &\quad \Gamma_1 = \xi_1 \\ p = 2: &\quad \Gamma_2 = \xi_1^2 - 1 \\ p = 3: &\quad \Gamma_3 = \xi_1^3 - 3\xi_1 \end{aligned}$$

Die Verteilungsfunktionen der Chaospolynome sind in Abbildung 2.1 dargestellt.

Die Chaospolynome Γ_i auf Basis zweier Zufallsgrößen ξ_1, ξ_2 lauten bis zum Polynomgrad 3:

$$\begin{array}{llllll} p = 0: & \Gamma_0 = 1 & & & & \\ p = 1: & \Gamma_1 = \xi_1 & \Gamma_2 = \xi_2 & & & \\ p = 2: & \Gamma_3 = \xi_1^2 - 1 & \Gamma_4 = \xi_1 \cdot \xi_2 & \Gamma_5 = \xi_2^2 - 1 & & \\ p = 3: & \Gamma_6 = \xi_1^3 - 3\xi_1 & \Gamma_7 = \xi_1^2\xi_2 - \xi_2 & \Gamma_8 = \xi_1\xi_2^2 - \xi_1 & \Gamma_9 = \xi_2^3 - 3\xi_2 & \end{array}$$

Wesentliche Eigenschaften des Polynomen Chaos - wie Vollständigkeit und Orthogonalität - werden von Ghanem und Spanos [47] ausführlich dargestellt.

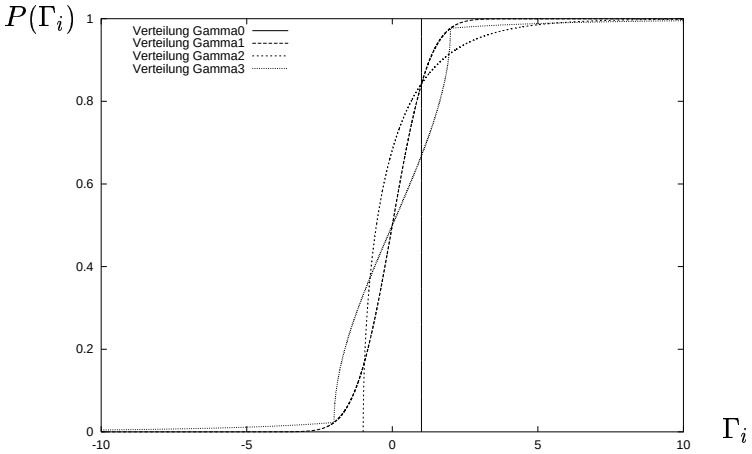


Abbildung 2.1: Verteilungsfunktionen $P(\Gamma_i)$

Zu unterscheiden ist, ob eine streuende Größe als Zufallsvariable oder als stochastischer Prozeß zu erfassen ist. Handelt es sich um eine Streuung, welche unabhängig von Ort und Zeit ist, ist die einfachere Darstellung mittels einer Zufallsvariablen ausreichend. Ist die Streuung unterschiedlich für Ortskoordinaten des Systems bzw. abhängig von Betrachtungszeitpunkten, ist die Größe etwas aufwendiger durch einen stochastischen Prozeß zu beschreiben.

2.3 Darstellung einer Zufallsvariablen

Zunächst wird die Darstellung als Zufallsvariable vorgestellt. Mit Hilfe der Chaospolynome läßt sich jede Zufallsgröße im Raum $\mathbf{\Omega}$ durch eine unendliche Reihenentwicklung vollständig beschreiben. Für den praktischen Gebrauch muß die Reihe jedoch nach einer festzulegenden Anzahl von Gliedern abgebrochen werden:

$$X(\theta) \;=\; \sum_{i=0}^{\infty} X_i \cdot \Gamma_i(\theta) \;\approx \sum_{i=0}^{m} X_i \cdot \Gamma_i(\theta). \tag{2.2}$$

Die Koeffizienten X_i sind deterministische Größen. Die Zufallseigenschaften werden durch die Chaospolynome $\Gamma_i(\theta)$ erfaßt. Für die Darstellung einer Zufallsvariablen sind die Koeffizienten demnach so zu bestimmen, daß sie zusammen mit den Chaospolynomen die gegebene Verteilungsdichte abbilden.

Eine normalverteilte Zufallsgröße X, deren Verteilungsdichte nach Gauß durch

$$f(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\;\sigma}\; e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \qquad \sigma > 0$$

beschrieben ist, wobei μ den Mittelwert der Funktion und σ die Standardabweichung bezeichnet, ist mit Hilfe der Chaospolynomentwicklung bis zum zweiten Glied bereits vollständig beschrieben:

$$X \;=\; \mu \cdot \Gamma_0 + \sigma \cdot \Gamma_1. \tag{2.3}$$

Neben der Normalverteilung wird im Ingenieurwesen häufig die log-Normalverteilung verwendet. Sie bietet den Vorteil, daß sie keine Realisationen im negativen Wertebereich annehmen kann, was z.B. zur Beschreibung von Steifigkeits- oder Massewerten sinnvoll ist. Ihre Koeffizienten sind nicht analytisch ableitbar. Waubke [130] gibt eine näherungsweise Bestimmung der Reihenentwicklung auf Grundlage der normalverteilten Größe ξ an:

$$e^{\sigma\xi+\mu} \cong e^{\frac{1}{2}\sigma^2+\mu}\left[\Gamma_0 + \sigma\,\Gamma_1 + \frac{\sigma^2}{2}\,\Gamma_2 + \frac{\sigma^3}{6}\,\Gamma_3 + \frac{\sigma^4}{24}\,\Gamma_4\right]. \tag{2.4}$$

Daß die Näherung zu hervorragend genauen Ergebnissen führt, zeigt Abbildung 2.2. Die beiden fast nicht zu unterscheidenden Graphen zeigen die Verteilungsfunktion einer log-Normalverteilung und ihrer Näherungslösung nach Gleichung (2.4) z.B. für $\sigma = 0.5$ und $\mu = 0.0$. Lediglich im Anfangsbereich unterscheiden sich die Funktionen geringfügig.

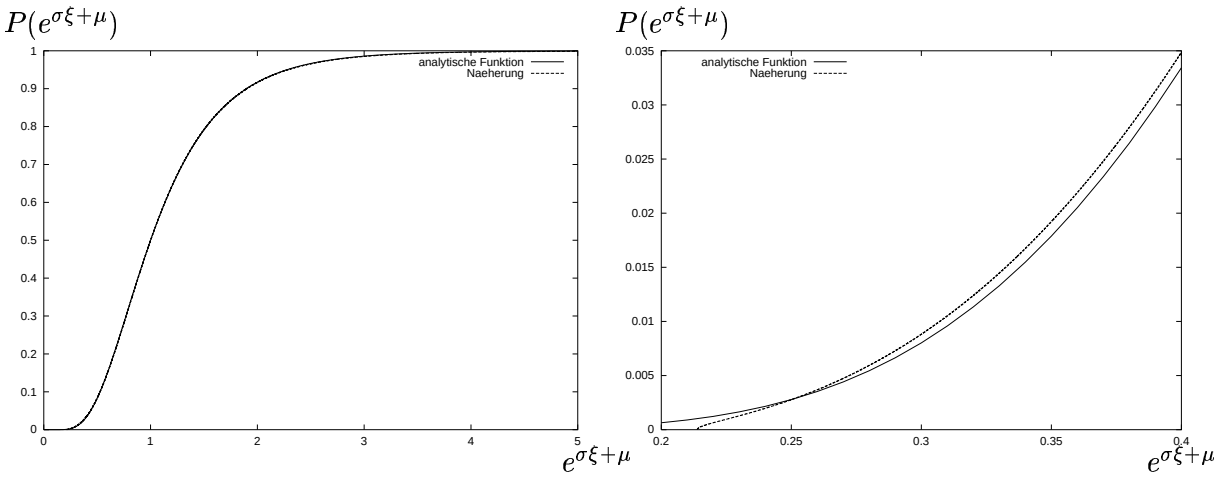


Abbildung 2.2: Vergleich der analytischen log-Normalverteilung mit der Näherungsdarstellung, rechts: Ausschnitt des Anfangsbereichs

Bei der Verwendung komplexerer Verteilungen als der Normalverteilung ist jedoch zu bedenken, daß zur Beschreibung eine größere Anzahl Chaospolynome einbezogen werden muß. Reichen zur Beschreibung einer Normalverteilung die Polynome Γ_0 und Γ_1 aus, sind für eine log-Normalverteilung Polynome bis Γ_4 nötig, wodurch die Beschreibung wesentlich umfangreicher wird. Dadurch werden auch die nachfolgenden Berechnungen wesentlich aufwendiger. Parameterstudien haben gezeigt, daß in der Berechnung Polynomgrade mit $p > 4$ zu numerischen Instabilitäten innerhalb des Lösungsalgorithmus führen und implausible Ergebnisse liefern. Um zuverlässige Ergebnisse zu gewährleisten, werden die weiteren Berechnungen auf normalverteilte Größen beschränkt. Dies hat den Nachteil, daß sich Realisationen im negativen Wertebereich ergeben. Bei geeigneter Wahl von Mittelwert und Standardabweichung erhalten die in den negativen Bereich fallenden Werte jedoch äußerst kleine Wahrscheinlichkeiten, so daß der begangene Fehler vernachlässigbar bleibt. Zudem ist eine Normalverteilung

für den praktisch tätigen Ingenieur leicht aufstellbar. So wird zur Sicherstellung verläßlicher Ergebnisse und aus Gründen einfacher Anwendbarkeit im weiteren von Normalverteilungen ausgegangen.

2.4 Darstellung eines stochastischen Prozesses

Die Darstellung einer Zufallsgröße, deren Streuung für Ortskoordinaten des Systems unterschiedlich bzw. von Zeitpunkten abhängig ist, kann nur mittels eines stochastischen Prozesses erfolgen. So kann beispielsweise die Steifigkeit eines Stabes in Stablängsrichtung als stochastischer Prozeß aufgefaßt werden.

Er kann - wie die Zufallsvariable - als Reihenentwicklung auf Grundlage der Chaospolynome abgebildet werden. Zur Darstellung wird eine Karhunen-Loève-Entwicklung verwendet. Für die entlang der $x-$Koordinate streuende Steifigkeit $k(x,\theta)$ ergibt sich:

$$k(x,\theta) = E[k(x,\theta)] + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i}\ f_i(x)\ \xi_i(\theta). \tag{2.5}$$

$E[k(x,\theta)]$ stellt dabei den Mittelwert (Erwartungswert) des Prozesses dar, der ebenfalls von der Längskoordinate x abhängen kann. $\xi_i(\theta)$ sind Zufallsgrößen, die nicht zwangsläufig normalverteilt sein müssen. λ_i und $f_i(x)$ sind die zunächst unbekannten Eigenwerte bzw. Eigenformen des mittelwertfreien Prozesses. Zur Bestimmung der Eigenwerte und der Eigenformen ist von der Kovarianzfunktion $C(x_1,x_2)$ des Prozesses auszugehen, ihre Bestimmungsgleichung ist eine Fredholm-Integralgleichung der 2. Art:

$$\int_{\mathbf{D}} C(x_1,x_2)\ f_i(x_1)\ dx_1 = \lambda_i\ f_i(x_2). \tag{2.6}$$

Sie ist nach den unbekannten Größen λ_i und $f_i(x)$ zu lösen. $\mathbf{D}$ ist der Bereich, in dem x definiert ist.

Die Lösung der Gleichung ist jedoch nur für wenige Kovarianzfunktionen analytisch bestimmbar. Ghanem und Spanos [47] geben beispielsweise die Lösung für eine exponentiell abklingende Kovarianzfunktion an. Für den mittelwertfreien, über die Längsrichtung in den Grenzen $[-a;a]$ streuenden Gaußschen Prozeß wird die Kovarianzfunktion mit b, einem variablen Längenparameter (Korrelationslänge), skaliert. Ist b groß gegenüber der Abmessung $2a$, so ist die Korrelation innerhalb der Struktur beträchtlich. Für die weiteren Berechnungen wird die inverse Korrelationslänge $c = 1/b$ verwendet.

Die Kovarianzfunktion lautet:

$$C_E(x_1,x_2) = e^{-c|x_1-x_2|}. \tag{2.7}$$

Setzt man die Funktion in Gleichung (2.6) ein, erhält man:

$$\int_{\mathbf{D}} e^{-c|x_1-x_2|}\ f_i(x_1)\ dx_1 = \lambda_i\ f_i(x_2). \tag{2.8}$$

Die Gleichung wird durch zweifache partielle Integration gelöst. Nach Einführung einer rechnerischen Hilfsgröße ω mit

$$\omega^2 = \frac{2c - c^2\lambda}{\lambda} \tag{2.9}$$

lauten die Bestimmungsgleichungen für die impliziten Eigenwerte λ:

$$\begin{aligned} c - \omega_n \tan(\omega_n\ a) &= 0, \qquad n \quad \text{ungerade,} \\ \omega_m + c\tan(\omega_m\ a) &= 0, \qquad m \quad \text{gerade.} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Die Eigenfunktionen lauten:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{\cos(\omega_n x)}{\sqrt{a + \frac{\sin(2\omega_n a)}{2\omega_n}}}, \\ f_m(x) &= \frac{\sin(\omega_m x)}{\sqrt{a - \frac{\sin(2\omega_m a)}{2\omega_m}}}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Die zugehörigen Eigenwerte lauten:

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{2c}{\omega_n^2 + c^2}, \\ \lambda_m &= \frac{2c}{\omega_m^2 + c^2}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Eingesetzt in Gleichung (2.5) ist damit der Prozeß für die streuende Steifigkeit beschrieben.

Die Entwicklung des Prozesses für die Steifigkeit ausgeschrieben bis zum zweiten Term lautet:

$$\begin{aligned} k(x,\theta) = E[k(x,\theta)] + k_1\ \sqrt{\lambda_1}\ \frac{\cos(\omega_1(x-a))}{\sqrt{a + \frac{\sin(2\omega_1 a)}{2\omega_1}}}\ \xi_1 + \\ +k_2\ \sqrt{\lambda_2}\ \frac{\sin(\omega_2(x-a)}{\sqrt{a - \frac{\sin(2\omega_2 a)}{2\omega_2}}}\ \xi_2 \ldots\ . \end{aligned} \tag{2.13}$$

Für den Gaußschen Prozeß entsprechen die Beiwerte k_1 und k_2 Standardabweichungen. Die Funktionen ξ_i werden explizit nach folgender Vorschrift abgeleitet. Für den Fall des Gaußschen Prozesses sind sie normalverteilt.

$$\xi_i(\theta) = \frac{1}{\lambda_i} \int_{\mathbf{D}} \bar{k}(x,\theta)\ f_i(x)\ dx. \tag{2.14}$$

$\bar{k}(x,\theta)$ ist der mittelwertfreie Prozeß von $k(x,\theta)$, d.h. $k(x,\theta) - E[k(x,\theta)]$.

Kapitel 3

Aufstellen des Gleichungssystems

Zur Beurteilung des Systemverhaltens wird zunächst ein Gleichungssystem vorgestellt, das nach Verschiebungsgrößen gelöst werden kann. Es entsteht beispielsweise bei Anwendung der Methode der Finiten Elemente. Unter dem Begriff Verschiebungsgrößen seien im folgenden Verschiebungen und Verdrehungen verstanden. Die Verschiebungsgrößen kennzeichnen die Reaktion eines Systems auf eine äußere Belastung. Die Methode der Finiten Elemente wird nunmehr aufbereitet für die Einführung der im stochastischen Raum beschriebenen Zufallsgrößen. Die vorgestellte Reihenentwicklung der Zufallsgrößen überträgt sich dabei auf eine Reihenentwicklung der Systemmatrizen.

3.1 Stochastische Systemmatrizen für den dynamischen Fall

Das deterministische, matrizielle Gleichungssystem für den dynamischen Fall lautet:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} \;+\; \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} \;+\; \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} \;=\; \mathbf{f}. \tag{3.1}$$

Dabei stellt $\mathbf{K}$ die Steifigkeitmatrix des Systems dar, $\mathbf{C}$ die Dämpfungsmatrix, $\mathbf{M}$ die Massenmatrix, $\mathbf{f}$ den Vektor der äußeren Lasten und $\mathbf{u}$ den Vektor der unbekannten Verschiebungsgrößen. Überträgt man die deterministisch formulierte Gleichung in den dargestellten stochastischen Raum, so hängen die Matrizen nunmehr von den Vektoren θ ab.

Die entstehende Gleichung lautet:

$$\mathbf{K}(\theta)\mathbf{u}(\theta) \;+\; \mathbf{C}(\theta)\dot{\mathbf{u}}(\theta) \;+\; \mathbf{M}(\theta)\ddot{\mathbf{u}}(\theta) \;=\; \mathbf{f}(\theta). \tag{3.2}$$

Zufallsgrößen lassen sich wie gezeigt als Zufallsvariablen und als stochastische Prozesse darstellen. Zunächst wird die Einführung von Zufallsvariablen in das Gleichungssystem zur Bestimmung der Verschiebungsgrößen gezeigt, danach die Implementierung von stochastischen Prozessen.

3.2 Einsetzen von Zufallsvariablen

Werden die Zufallsvariablen entsprechend (2.2) als Reihenentwicklung beschrieben, so geht diese in eine Reihenentwicklung der Systemmatrizen über. In die deterministischen Matri-

zen $\mathbf{K}$, $\mathbf{C}$ und $\mathbf{M}$ und den Vektor $\mathbf{f}$ sind die Reihenentwicklungen der streuenden Größen einzusetzen. Jedem Γ_i sind zugehörige deterministische Koeffizientenmatrizen bzw. -vektoren zugeordnet. Die Beiwerte eines Chaospolynoms ergeben sich ausgeführt am Beispiel der Steifigkeitsmatrix nach der Vorschrift:

$$\mathbf{K}_i = \frac{E(\mathbf{K}(\theta)\ \Gamma_i(\theta))}{E(\Gamma_i(\theta)\ \Gamma_i(\theta))}. \tag{3.3}$$

Das Ergebnis, in diesem Fall der Vektor der Verschiebungsgrößen $\mathbf{u}$, ist ebenfalls als Reihendarstellung einzuführen. Der Grad der Entwicklung ist so auszulegen, daß alle Chaospolynome, die zur Entwicklung der streuenden Eingangsgrößen eingeführt werden, auch im Ergebnis berücksichtigt werden. Besser ist es jedoch, für die Reihenentwicklung des Ergebnisses Chaospolynome mit einzubeziehen, die mindestens einen Polynomgrad höher liegen als die der Eingangsgrößen. Nur so werden Momente höherer Ordnung des Ergebnisses ausreichend berücksichtigt. Die Reihenentwicklung der Größen für das Gleichungssystem ist gegeben zu:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(\theta) &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{K}_i\ \Gamma_i \approx \sum_{i=0}^{n} \mathbf{K}_i\ \Gamma_i \\
\mathbf{C}(\theta) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j\ \Gamma_j \approx \sum_{j=0}^{o} \mathbf{C}_j\ \Gamma_j \\
\mathbf{M}(\theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{M}_k\ \Gamma_k \approx \sum_{k=0}^{p} \mathbf{M}_k \Gamma_k \\
\mathbf{u}(\theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{u}_l\ \Gamma_l \approx \sum_{l=0}^{q} \mathbf{u}_l\ \Gamma_l \\
\mathbf{f}(\theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{f}_m\ \Gamma_m \approx \sum_{m=0}^{r} \mathbf{f}_m\ \Gamma_m.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Wird für das System eine harmonische Anregung mit der deterministischen Erregerkreisfrequenz Ω angenommen und die Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{u}}(\theta)$ durch $i \cdot \Omega \cdot \mathbf{u}(\theta)$ bzw. die Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{u}}(\theta)$ durch $-\Omega^2 \cdot \mathbf{u}(\theta)$ ersetzt, lautet das zu lösende Gleichungssystem:

$$\left[\sum_{i=0}^{n} \mathbf{K}_i\ \Gamma_i + i\ \Omega\ \sum_{j=0}^{o} \mathbf{C}_j\ \Gamma_j - \Omega^2\ \sum_{k=0}^{p} \mathbf{M}_k\ \Gamma_k\right] \sum_{l=0}^{q} \mathbf{u}_l\ \Gamma_l = \sum_{m=0}^{r} \mathbf{f}_m\ \Gamma_m. \tag{3.5}$$

Wird die Erregerfrequenz ebenfalls als streuend berücksichtigt, muß sie ebenso wie die Systemmatrizen in Abhängigkeit von θ als Reihenentwicklung abgebildet werden:

$$\Omega(\theta) = \sum_{s=0}^{\infty} \Omega_s\ \Gamma_s \approx \sum_{s=0}^{t} \Omega_s\ \Gamma_s. \tag{3.6}$$

Zur Vereinfachung werden Ω und Ω^2 durch jeweils eigene, aufeinander abgestimmte Verteilungsdichten beschrieben. Sie werden nicht aus einer einzigen Verteilung funktional hergeleitet.

3.3 Einsetzen von Zufallsprozessen

Werden in der FE-Berechnung die enthaltenen Zufallsgrößen - im Gegensatz zu Zufallsvariablen - als stochastische Prozesse angenommen, so ist deren Implementierung in die Systemmatrizen nicht in der für die Variablen gezeigten direkten Weise möglich. Da die Streuung der Zufallsgrößen nun von den Koordinatenrichtungen der Elemente abhängt, muß auf die Bildungsvorschrift der verwendeten Elementtypen zurückgegriffen und es müssen neue Systemmatrizen erzeugt werden.

Am Beispiel eines Biegebalkenelements mit den Freiheitsgraden Verdrehung und Verschiebung am linken und rechten Rand wird das Vorgehen beschrieben. Der Elastizitätsmodul wird dabei als stochastischer Prozeß nach Gleichung (2.5) angenommen.

$$E(x,\theta) = E[E(x,\theta)] + \sum_{i=1}^{m} \sqrt{\lambda_i}\ f_i(x)\ \xi_i(\theta). \tag{3.7}$$

Unter Zuhilfenahme der Hermiteschen Ansatzfunktionen

$$\begin{aligned}
\Psi_1(x) &= 1 - 3(x/l)^2 + 2(x/l)^3 \\
\Psi_2(x) &= -x\ (1 - x/l)^2 \\
\Psi_3(x) &= 3(x/l)^2 - 2(x/l)^3 \\
\Psi_4(x) &= -x^2/l\ (x/l - 1).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

wird die Verschiebung $w(x)$ über das Element näherungsweise angegeben mit:

$$w(x) = w_1\ \Psi_1(x) + w_2\ \Psi_2(x) + w_3\ \Psi_3(x) + w_4\ \Psi_4(x). \tag{3.9}$$

Die Bildungsvorschrift für die Steifigkeitsmatrix des Elementes beruht auf der Forderung nach der Stationarität des inneren Potentials. Sie enthält für den betrachteten Fall des streuenden Elastizitätsmoduls die Funktion des stochastischen Prozesses $E(x,\theta)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi_i}{\partial w_i} &= \frac{\partial}{2\partial w_i} \int_0^l E(x,\theta) I \frac{d^2w}{dx^2}\frac{d^2w}{dx^2} dx = \\
&= \frac{\partial}{2\partial w_i} \int_0^l \left(E[E(x,\theta)] + \sum_{i=1}^{m} \sqrt{\lambda_i}\ f_i(x)\ \xi_i(\theta) \right) I \frac{d^2w}{dx^2}\frac{d^2w}{dx^2} dx.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Aus den partiellen Ableitungen nach den vier Beiwerten w_i entsteht ein Gleichungssystem mit vier Unbekannten, das in Matrizenschreibweise die Steifigkeitsmatrix des Elements für die gewählten Freiheitsgrade ergibt.

Aus dem Ergebnis lassen sich die Zufallsgrößen ξ_i ausklammern und die Steifigkeitsmatrix wiederum als Reihenentwicklung in Abhängigkeit der Chaospolynome darstellen:

$$K(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} K_i\ \Gamma_i \tag{3.11}$$

mit

$$\Gamma_0 = 1 \qquad \Gamma_1 = \xi_1 \qquad \Gamma_2 = \xi_2 \quad \ldots \; .$$

Eingesetzt in die gegebene dynamische Differentialgleichung ergibt sich wiederum die Gleichung (3.5).

Soll eine andere Größe als der Elastizitätsmodul als stochastischer Prozeß ausgedrückt werden oder wird ein anderer Elementtyp als der des Biegebalkenelements gewählt, so ist die entsprechende Bildungsvorschrift zur Erstellung einer Steifigkeits-, Massen- bzw. Dämpfungsmatrix heranzuziehen.

Kapitel 4

Lösung des Gleichungssystems

4.1 Transformation des Polynomen Chaos

Das gezeigte Gleichungssystem (3.5) ist noch nicht ausreichend einfach nach den unbekannten Verschiebungsgrößen lösbar. Es wird deshalb ein Verfahren angewendet, das mit dem Begriff „Transformation des Polynomen Chaos“ bezeichnet wird, wobei die Gleichungen des Gleichungssystems mit allen verwendeten Chaospolynomen multipliziert werden. Anschließend wird jede neu entstandene Gleichung beidseits über den stochastischen Raum $\mathbf{\Omega}$ integriert. Der Vorgang entspricht einer Erwartungswertbildung.

Vor der Erläuterung des Vorgehens wird deshalb kurz die Erwartungswertbildung beschrieben. Der Erwartungswert einer Funktion $g(X)$ wird berechnet nach der Vorschrift

$$E\left(g(X)\right) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\; f_X(x)\; dx, \tag{4.1}$$

wobei $f_X(x)$ die Verteilungsdichtefunktion der Zufallsvariablen X und $g(X)$ eine beliebige Funktion in Abhängigkeit von X ist.

Ist $g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ die Funktion der Zufallsgrößen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, lautet der Erwartungswert:

$$E\left(g(\xi)\right) \;=\; \int_{\mathbf{\Omega}} g(\theta)\; f_\xi(\theta)\; d\theta. \tag{4.2}$$

Für den Fall einer zweidimensionalen Verteilung in Abhängigkeit von den Variablen ξ_1 und ξ_2 lautet die Bildungsvorschrift ausgeschrieben:

$$E\left(g(\xi_1, \xi_2)\right) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta_1, \theta_2)\; f_{\xi_1,\xi_2}(\theta_1, \theta_2)\; d\theta_1\; d\theta_2. \tag{4.3}$$

Für den Erwartungswert eines Chaospolynoms $\Gamma_i(\xi)$ ergibt sich:

$$E\left(\Gamma_i(\xi)\right) \;=\; \int_{\mathbf{\Omega}} \Gamma_i(\theta)\; f_\xi(\theta)\; d\theta. \tag{4.4}$$

Erwartungswerte höherer Ordnungen für Chaospolynome lassen sich ebenfalls bestimmen:

$$E\left(\Gamma_i \Gamma_j\right) = \int_{\mathbf{\Omega}} \Gamma_i \; \Gamma_j \; f_\xi(\theta) \; d\theta \qquad \text{Erwartungswert 2. Ordnung} \tag{4.5}$$

$$E\left(\Gamma_i \Gamma_j \Gamma_k\right) = \int_{\mathbf{\Omega}} \Gamma_i \; \Gamma_j \; \Gamma_k \; f_\xi(\theta) \; d\theta \qquad \text{Erwartungswert 3. Ordnung.} \tag{4.6}$$

Aufgrund der Orthogonalitätseigenschaften der Chaospolynome ergeben die Erwartungswerte zweiter Ordnung $E\left(\Gamma_i \Gamma_j\right)$ für den Fall $i \neq j$ den Wert Null.

4.1.1 Gleichungssystem für den statischen Fall

Die Vorgehensweise der Erwartungswertbildung wird auf die Gleichung (3.5) angewendet. Obwohl Verschiebungsgrößen und ihre Streuungen für eine dynamische Last berechnet werden sollen, wird zunächst eine statische Berechnung beschrieben. In diesem Fall haben die Dämpfungsmatrix und die Massenmatrix keine Bedeutung. Die Gleichungen werden einfacher und die Vorgehensweise kann übersichtlich dargestellt werden. Beide Seiten des Gleichungssystems werden nacheinander mit allen verwendeten Chaospolynomen ($n = 0 \ldots u$) und mit $f_\xi(\theta)$ multipliziert und integriert.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{\Omega}} \sum_{i=0}^{n} \sum_{l=0}^{q} \mathbf{K}_i \; \Gamma_i \; \Gamma_l \; \Gamma_0 \; \mathbf{u}_l \; f_\xi(\theta) \; d\theta &= \int_{\mathbf{\Omega}} \sum_{m=0}^{r} \Gamma_m \; \Gamma_0 \; \mathbf{f}_m \; f_\xi(\theta) \; d\theta \\
\int_{\mathbf{\Omega}} \sum_{i=0}^{n} \sum_{l=0}^{q} \mathbf{K}_i \; \Gamma_i \; \Gamma_l \; \Gamma_1 \; \mathbf{u}_l \; f_\xi(\theta) \; d\theta &= \int_{\mathbf{\Omega}} \sum_{m=0}^{r} \Gamma_m \; \Gamma_1 \; \mathbf{f}_m \; f_\xi(\theta) \; d\theta \\
&\vdots \\
\int_{\mathbf{\Omega}} \sum_{i=0}^{n} \sum_{l=0}^{q} \mathbf{K}_i \; \Gamma_i \; \Gamma_l \; \Gamma_u \; \mathbf{u}_l \; f_\xi(\theta) \; d\theta &= \int_{\mathbf{\Omega}} \sum_{m=0}^{r} \Gamma_m \; \Gamma_u \; \mathbf{f}_m \; f_\xi(\theta) \; d\theta.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Bei der Transformation des Polynomen Chaos entsteht ein Gleichungssystem mit $u + 1$ Gleichungen. Nach der Integration läßt sich das Gleichungssystem mit Hilfe der Erwartungswerte darstellen:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \sum_{l=0}^{q} \mathbf{K}_i \; E(\Gamma_i \; \Gamma_l \; \Gamma_0) \; \mathbf{u}_l &= \sum_{m=0}^{r} E(\Gamma_m \; \Gamma_0) \; \mathbf{f}_m \\
\sum_{i=0}^{n} \sum_{l=0}^{q} \mathbf{K}_i \; E(\Gamma_i \; \Gamma_l \; \Gamma_1) \; \mathbf{u}_l &= \sum_{m=0}^{r} E(\Gamma_m \; \Gamma_1) \; \mathbf{f}_m \\
&\vdots \\
\sum_{i=0}^{n} \sum_{l=0}^{q} \mathbf{K}_i \; E(\Gamma_i \; \Gamma_l \; \Gamma_u) \; \mathbf{u}_l &= \sum_{m=0}^{r} E(\Gamma_m \; \Gamma_u) \; \mathbf{f}_m.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Die Berechnung der Erwartungswerte zweiter und dritter Ordnung hängt nicht von dem speziellen zu untersuchenden System ab. Für die Berechnung können die Erwartungswerte mit einem Computerprogramm einmalig bestimmt und in einer Datei abgelegt werden.

Für die rechentechnische Umsetzung ist es vorteilhaft, wenn alle Reihenentwicklungen die gleiche obere Grenze, d.h. alle die gleiche Anzahl Summanden besitzen. Die Reihenentwicklung des Ergebnisses bestimmt im Regelfall die anzusetzende Anzahl. Die Anzahl u der für die Chaospolynom-Transformation verwendeten Chaospolynome sollte ebenfalls mit dem Grad der Reihenentwicklung übereinstimmen.

Die Gleichungen lassen sich in Matrizenschreibweise darstellen. Dabei wird ausgenutzt, daß aufgrund der Orthogonalitätseigenschaft der Chaospolynome die Erwartungswerte zweiter Ordnung $E(\Gamma_k\Gamma_l)$ für alle $k \neq l$ zu Null werden. Als obere Grenze der Reihenentwicklung (maximale Anzahl der Terme) wurde r gewählt:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{r} \mathbf{K}_i E(\Gamma_i\Gamma_0\Gamma_0) & \sum_{i=0}^{r} \mathbf{K}_i E(\Gamma_i\Gamma_0\Gamma_1) & \dots & \sum_{i=0}^{r} \mathbf{K}_i E(\Gamma_i\Gamma_0\Gamma_r) \\ \sum_{i=0}^{r} \mathbf{K}_i E(\Gamma_i\Gamma_1\Gamma_0) & \sum_{i=0}^{r} \mathbf{K}_i E(\Gamma_i\Gamma_1\Gamma_1) & \dots & \sum_{i=0}^{r} \mathbf{K}_i E(\Gamma_i\Gamma_1\Gamma_r) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=0}^{r} \mathbf{K}_i E(\Gamma_i\Gamma_r\Gamma_0) & \sum_{i=0}^{r} \mathbf{K}_i E(\Gamma_i\Gamma_r\Gamma_1) & \dots & \sum_{i=0}^{r} \mathbf{K}_i E(\Gamma_i\Gamma_r\Gamma_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_r \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 \; E(\Gamma_0\Gamma_0) \\ \mathbf{f}_1 \; E(\Gamma_1\Gamma_1) \\ \vdots \\ \mathbf{f}_r \; E(\Gamma_r\Gamma_r) \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

Vereinfacht geschrieben:

$$\sum_{i=0}^{r} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_i E(\Gamma_i\Gamma_0\Gamma_0) & \mathbf{K}_i E(\Gamma_i\Gamma_0\Gamma_1) & \dots & \mathbf{K}_i E(\Gamma_i\Gamma_0\Gamma_r) \\ \mathbf{K}_i E(\Gamma_i\Gamma_1\Gamma_0) & \mathbf{K}_i E(\Gamma_i\Gamma_1\Gamma_1) & \dots & \mathbf{K}_i E(\Gamma_i\Gamma_1\Gamma_r) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{K}_i E(\Gamma_i\Gamma_r\Gamma_0) & \mathbf{K}_i E(\Gamma_i\Gamma_r\Gamma_1) & \dots & \mathbf{K}_i E(\Gamma_i\Gamma_r\Gamma_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_r \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 \; E(\Gamma_0\Gamma_0) \\ \mathbf{f}_1 \; E(\Gamma_1\Gamma_1) \\ \vdots \\ \mathbf{f}_r \; E(\Gamma_r\Gamma_r) \end{bmatrix}. \tag{4.10}$$

4.1.2 Gleichungssystem für den dynamischen Fall

Das Verfahren wird nun auf den dynamischen Fall übertragen. Die Lösung des Gleichungssystems nach den Verschiebungsgrößen des eingeschwungenen Zustands läßt sich für eine harmonische Anregung mit dem statischen Fall vergleichen, sofern die Massen- und Dämpfungsmatrix und die Erregerfrequenz deterministisch sind. Ist dies nicht der Fall, muß jede der streuenden Größen in Abhängigkeit von θ entwickelt werden (vgl. (3.4) und (3.6)). Das zu lösende Gleichungssystem mit der gewählten oberen Grenze r der Reihenentwicklung lautet:

$$\left[\sum_{i=0}^{r} \mathbf{K}_i \; \Gamma_i \; + \; i \sum_{j=0}^{r} \Omega_j \; \Gamma_j \; \sum_{i=0}^{r} \mathbf{C}_i \; \Gamma_i \; - \; \sum_{j=0}^{r} \Omega_j^2 \; \Gamma_j \; \sum_{i=0}^{r} \mathbf{M}_i \; \Gamma_i \right] \sum_{l=0}^{r} \mathbf{u}_l \Gamma_l = \\ = \sum_{m=0}^{r} \mathbf{f}_m \; \Gamma_m. \tag{4.11}$$

Zusammengefaßt:

$$\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{r}\sum_{l=0}^{r}\left[\mathbf{K}_i\,\Gamma_i\Gamma_l\;+\;i\Omega_j\;\mathbf{C}_i\;\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_l\;-\;\Omega_j^2\;\mathbf{M}_i\;\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_l\right]\mathbf{u}_l\;=$$

$$=\sum_{m=0}^{r}\mathbf{f}_m\;\Gamma_m. \tag{4.12}$$

Für das Gleichungssystem (4.12) ergibt die Chaospolynom-Transformation :

$$\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{r}\sum_{l=0}^{r}\left[\mathbf{K}_i\;E(\Gamma_i\Gamma_l\Gamma_u)\;+\;i\Omega_j\;\mathbf{C}_i\;E(\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_l\Gamma_u)\;-\;\Omega_j^2\;\mathbf{M}_i\;E(\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_l\Gamma_u)\right]\mathbf{u}_l\;=$$

$$=\sum_{m=0}^{r}\mathbf{f}_m\;E(\Gamma_m\Gamma_u)\;=\;\mathbf{f}_u\;E(\Gamma_u\Gamma_u)\qquad u=0\ldots r.$$

In Matrizenschreibweise dargestellt:

$$\left\{\begin{bmatrix}\sum_{i=0}^{r}\mathbf{K}_iE(\Gamma_i\Gamma_0\Gamma_0) & \sum_{i=0}^{r}\mathbf{K}_iE(\Gamma_i\Gamma_0\Gamma_1) & \cdots & \sum_{i=0}^{r}\mathbf{K}_iE(\Gamma_i\Gamma_0\Gamma_r)\\ \sum_{i=0}^{r}\mathbf{K}_iE(\Gamma_i\Gamma_1\Gamma_0) & \sum_{i=0}^{r}\mathbf{K}_iE(\Gamma_i\Gamma_1\Gamma_1) & \cdots & \sum_{i=0}^{r}\mathbf{K}_iE(\Gamma_i\Gamma_1\Gamma_r)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sum_{i=0}^{r}\mathbf{K}_iE(\Gamma_i\Gamma_r\Gamma_0) & \sum_{i=0}^{r}\mathbf{K}_iE(\Gamma_i\Gamma_r\Gamma_1) & \cdots & \sum_{i=0}^{r}\mathbf{K}_iE(\Gamma_i\Gamma_r\Gamma_r)\end{bmatrix}+\right.$$

$$+\sum_{j=0}^{r}i\Omega_j\begin{bmatrix}\sum_{i=0}^{r}\mathbf{C}_iE(\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_0\Gamma_0) & \sum_{i=0}^{r}\mathbf{C}_iE(\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_0\Gamma_1) & \cdots & \sum_{i=0}^{r}\mathbf{C}_iE(\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_0\Gamma_r)\\ \sum_{i=0}^{r}\mathbf{C}_iE(\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_1\Gamma_0) & \sum_{i=0}^{r}\mathbf{C}_iE(\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_1\Gamma_1) & \cdots & \sum_{i=0}^{r}\mathbf{C}_iE(\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_1\Gamma_r)\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ \sum_{i=0}^{r}\mathbf{C}_iE(\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_r\Gamma_0) & \sum_{i=1}^{n}\mathbf{C}_iE(\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_r\Gamma_1) & \cdots & \sum_{i=0}^{r}\mathbf{C}_iE(\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_r\Gamma_r)\end{bmatrix}-$$

$$\left.-\sum_{j=0}^{1}\Omega_j^2\begin{bmatrix}\sum_{i=0}^{r}\mathbf{M}_iE(\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_0\Gamma_0) & \sum_{i=0}^{r}\mathbf{M}_iE(\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_0\Gamma_1) & \cdots & \sum_{i=0}^{r}\mathbf{M}_iE(\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_0\Gamma_r)\\ \sum_{i=0}^{r}\mathbf{M}_iE(\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_1\Gamma_0) & \sum_{i=0}^{r}\mathbf{M}_iE(\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_1\Gamma_1) & \cdots & \sum_{i=0}^{r}\mathbf{M}_iE(\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_1\Gamma_r)\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ \sum_{i=0}^{r}\mathbf{M}_iE(\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_r\Gamma_0) & \sum_{i=0}^{r}\mathbf{M}_iE(\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_r\Gamma_1) & \cdots & \sum_{i=0}^{r}\mathbf{M}_iE(\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_r\Gamma_r)\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_0\\ \mathbf{u}_1\\ \vdots\\ \mathbf{u}_r\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{f}_0\;E(\Gamma_0\Gamma_0)\\ \mathbf{f}_1\;E(\Gamma_1\Gamma_1)\\ \vdots\\ \mathbf{f}_r\;E(\Gamma_r\Gamma_r)\end{bmatrix}. \tag{4.13}$$

4.2 Ermittlung der Verschiebungen

Die Gleichungssysteme (4.10) und (4.13) werden nach den Vektoren der unbekannten Verschiebungen $\mathbf{u}_l$ gelöst. Dabei enthält der Vektor $\mathbf{u}_0$ die Mittelwerte der gesuchten Verschiebungsgrößen, die Vektoren $\mathbf{u}_1\ldots\mathbf{u}_r$ die Koeffizienten der Reihenentwicklung zugehörig zu den Γ_l-Polynomen.

Damit ist die Lösung des Gleichungssystems im stochastischen Raum bekannt. Die Transformation des Ergebnisses in den Originalraum wird in Kapitel 6 beschrieben.

Die Dimension des zu lösenden Gleichungssystems hängt zum einen von der Zahl der Freiheitsgrade ab, die das zu untersuchende System in der FE-Formulierung besitzt. Es ist zu bedenken, daß die Koeffizientenmatrizen $\mathbf{K}_i$, $\mathbf{C}_i$ und $\mathbf{M}_i$ jeweils die Systemmatrizen des Gesamtsystems darstellen. Je größer die Anzahl der Freiheitsgrade ist, desto größer ist der Berechnungsaufwand. Zum anderen hängt die Größe des Gleichungssystems vom Grad der Reihenentwicklung des Ergebnisses ab.

Doch nicht nur die Größe des zu lösenden Gleichungssystems bestimmt den Aufwand, sondern auch die im Vorfeld zu berechnenden Erwartungswerte der Chaospolynome. Für den Fall von n verwendeten Chaospolynomen ist z.B. für die Erwartungswerte dritter Ordnung ein Datenfeld von n^3 Werten zu erzeugen und zu verwalten. Für eine dynamische Untersuchung werden die Erwartungswerte vierter Ordnung benötigt, das heißt insgesamt n^4 Werte.

Für den Einsatz in der Praxis stellt die Auswertung des Gleichungssystems derzeit einen zu hohen Aufwand dar. Überdies könnten die Ergebnisse nur bedingt auf Plausibilität geprüft werden. Bei offensichtlich falschen Lösungen erschwert die Komplexität des Gleichungssystems das Auffinden der Fehlerursache.

Nachfolgend wird untersucht, ob sich der Rechenaufwand begrenzen bzw. die Ergebniskontrolle verbessern läßt, wenn statt streuender Verschiebungsgrößen zunächst streuende Eigenfrequenzen berechnet werden und in einem zweiten Schritt die Überschreitenswahrscheinlichkeit von Verschiebungsgrößen für den eingeschwungenen Zustand bestimmt wird.

Kapitel 5

Eigenwertproblem und Rayleighquotient

5.1 Eigenwertproblematik

Zur Einschätzung des dynamischen Verhaltens von Strukturen bietet das Spektrum der Eigenfrequenzen wichtige Hinweise. Ist beispielsweise das Frequenzspektrum der Last bekannt, kann abgeschätzt werden, ob das Auftreten von Resonanzeffekten zu erwarten ist. Für die Bestimmung deterministischer Eigenwerte stehen wohlerprobte Verfahren zur Verfügung.

Werden bei der Untersuchung eines Gebäudes mehrere Parameter als streuende Größen betrachtet, fassen stochastische Eigenfrequenzen die Streuungen zusammen und geben einen Einblick in das mögliche Systemverhalten. Damit ist die Sensitivität hinsichtlich gegebener Anregefrequenzen abschätzbar. Die Ermittlung stochastischer Eigenfrequenzen ist nur in Ausnahmefällen analytisch möglich; im allgemeinen müssen die Eigenfrequenzen durch aufwendige Näherungsverfahren abgeschätzt werden.

Fraglich ist nun, wie die Lösung des Eigenwertproblems zu gestalten ist, wenn die streuenden Systemparameter mit Hilfe der Chaospolynome beschrieben werden. Im folgenden wird zunächst untersucht, ob ein klassisches deterministisches Verfahren zur Bestimmung der stochastischen Eigenfrequenzen geeignet ist.

5.2 Determinantenverfahren

Üblicherweise wird für die Bestimmung deterministischer Eigenfrequenzen das Determinantenverfahren angewendet. Für den Fall einer dynamischen Untersuchung ist das matrizielle Gleichungssystem

$$\mathbf{K}\ \mathbf{u} = \alpha\ \mathbf{M}\ \mathbf{u} \tag{5.1}$$

nach Werten α zu lösen. Die Eigenwerte α entsprechen den Quadraten der Eigenkreisfrequenzen ω des Systems. Die Formulierung des Gleichungssystems für den stochastischen Fall lautet:

$$\mathbf{K}(\theta)\ \mathbf{u}(\theta) = \alpha(\theta)\ \mathbf{M}(\theta)\ \mathbf{u}(\theta). \tag{5.2}$$

Die Bildung der Determinante wird exemplarisch anhand eines Zweifreiheitsgradsystems gezeigt. Waubke [131] fertigte dazu erste Entwürfe an.

Werden die Systemmatrizen und die Quadrate der Eigenfrequenzen wie beschrieben als streuende Größen mit Hilfe der Chaospolynome in Reihen entwickelt, entsteht folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} &\sum \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}_i \Gamma_i \sum \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_l \Gamma_l = \\ &= \sum \alpha_j\ \Gamma_j \sum \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}_k \Gamma_k \sum \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_l \Gamma_l. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Die zu bildende Determinante lautet:

$$\begin{aligned} &\det\left\{\sum \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}_i \Gamma_i - \sum \alpha_j \sum \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}_k \Gamma_j \Gamma_k\right\} = \\ &= \det\left\{\begin{bmatrix} \sum k_{11_i}\Gamma_i - \sum \alpha_j \sum m_{11_k}\Gamma_j\Gamma_k & \sum k_{12_i}\Gamma_i - \sum \alpha_j \sum m_{12_k}\Gamma_j\Gamma_k \\ \sum k_{21_i}\Gamma_i - \sum \alpha_j \sum m_{21_k}\Gamma_j\Gamma_k & \sum k_{22_i}\Gamma_i - \sum \alpha_j \sum m_{22_k}\Gamma_j\Gamma_k \end{bmatrix}\right\}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Ausmultipliziert:

$$\begin{aligned} & \sum k_{11_i} \sum k_{22_j}\Gamma_i\Gamma_j - \sum k_{11_i} \sum \alpha_j \sum m_{22_k}\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_k \\ - & \sum k_{22_i} \sum \alpha_j \sum m_{11_k}\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_k + \sum \alpha_i \sum \alpha_j \sum m_{11_k} \sum m_{22_l}\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_k\Gamma_l \\ - & \sum k_{12_i} \sum k_{21_j}\Gamma_i\Gamma_j + \sum k_{12_i} \sum \alpha_j \sum m_{21_k}\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_k \\ + & \sum k_{21_i} \sum \alpha_j \sum m_{12_k}\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_k - \sum \alpha_i \sum \alpha_j \sum m_{12_k} \sum m_{21_l}\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_k\Gamma_l. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Sortiert nach der Anzahl der beteiligten Chaospolynome:

$$\begin{aligned} & \sum_k \sum_l \alpha_k\alpha_l \sum_i \sum_j (m_{11_i}m_{22_j} - m_{12_i}m_{21_j})\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_k\Gamma_l + \\ + & \sum_k \alpha_k \sum_i \sum_j (-k_{11_i}m_{22_j} + k_{12_i}m_{21_j} + k_{21_i}m_{12_j} - k_{22_i}m_{11_j})\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_k \\ + & \sum_i \sum_j (k_{11_i}k_{22_j} - k_{12_i}k_{21_i})\Gamma_i\Gamma_j. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Diese Gleichung ist zu null zu setzen und nach den unbekannten Koeffizienten α_i zu lösen. Zu diesem Zweck wird auf die Gleichung die zuvor geschilderte Chaospolynom-Transformation

angewendet. Es entsteht ein homogenes, algebraisches, nichtlineares Gleichungssystem mit $n+1$ Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\sum_k \sum_l \alpha_k \alpha_l \sum_i \sum_j (m_{11_i} m_{22_j} - m_{12_i} m_{21_j}) E(\Gamma_i \Gamma_j \Gamma_k \Gamma_l \Gamma_m) + \\
&+ \sum_k \alpha_k \sum_i \sum_j (-k_{11_i} m_{22_j} + k_{12_i} m_{21_j} + k_{21_i} m_{12_j} - k_{22_i} m_{11_j}) E(\Gamma_i \Gamma_j \Gamma_k \Gamma_m) + \\
&+ \sum_i \sum_j (k_{11_i} k_{22_j} - k_{12_i} k_{21_j}) E(\Gamma_i \Gamma_j \Gamma_m) = 0 \\
&i, j, k, l, m = 0 ... n. \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

Allgemein ergibt sich die Größe des zu lösenden Gleichungssystems zu q x r Unbekannten. Dabei ist q die Anzahl der Freiheitsgrade und damit der Eigenwerte und r die Anzahl der verwendeten Chaospolynome.

Die Ordnung der zu berechnenden Erwartungswerte beträgt im Falle, daß die Matrix $\mathbf{K}$ stochastisch und die Matrix $\mathbf{M}$ deterministisch ist, $q+1$. Ist die Matrix $\mathbf{M}$ zudem stochastisch, so beträgt die Ordnung der zu berechnenden Erwartungswerte $2q+1$. Bei Beschränkung der Erwartungswertbildung auf die Werte einschließlich fünfter Ordnung sind folglich maximal vier Freiheitsgrade berechenbar, wenn $\mathbf{M}$ deterministisch ist. Maximal zwei Freiheitsgrade sind nur noch möglich, wenn $\mathbf{M}$ zusätzlich stochastisch ist. Die Methode des Determinantenverfahrens ist somit nur auf äußerst einfache Systeme anzuwenden.

Die Ermittlung höherer Erwartungswerte ist aufgrund der Anzahl der zu berechnenden Werte und der numerischen Instabilitäten nicht sinnvoll. Das Determinantenverfahren ist demnach nicht ausreichend geeignet, die Eigenfrequenzen zu ermitteln.

5.3 Näherungslösung mit dem Rayleighquotienten

Grundmann et al. [57] verwenden den Rayleighquotienten zur Abschätzung streuender Eigenwerte. Die Anwendung des Rayleighquotienten stellt ein etabliertes Näherungsverfahren zur Abschätzung von Eigenfrequenzen in den Fällen dar, in denen sich aus vielerlei Gründen Eigenfrequenzen nicht einfach berechnen lassen. Das Verfahren wird nun auf das stochastische Eigenwertproblem übertragen und auf seine Anwendbarkeit untersucht.

Anstelle eines berechneten Verschiebungsvektors $\mathbf{u}$ wird der geschätzte Vektor einer Eigenform $\mathbf{\Psi}$ eingesetzt, die Gleichung im Sinne einer Wichtung mit dem transponierten Vektor multipliziert und nach dem zugehörigen, unbekannten Eigenwert gelöst. Die Wurzel des Eigenwerts stellt eine erste Näherung der Eigenkreisfrequenz dar.

Wird das Vorgehen für eine stochastische Berechnung verwendet, so müßte für jede Realisation ein zugehöriger Eigenvektor geschätzt werden. Aufgrund der Fülle der Fälle ist dies jedoch nicht umsetzbar. Als beste Schätzung für die Gesamtheit aller Fälle sind die Eigenvektoren anzusehen, die deterministisch mit den Mittelwerten der streuenden Größen berechnet werden. So werden in der Ausgangsgleichung (5.2) die Vektoren der stochastischen Verschiebungsgrößen $\mathbf{u}(\theta)$ durch einen deterministischen Eigenvektor $\mathbf{\Psi}_0$ ersetzt und das Gleichungssystem

mit dem transponierten Eigenvektor $\mathbf{\Psi}_0^T$ multipliziert:

$$\mathbf{\Psi}_0^T\ \mathbf{K}(\theta)\ \mathbf{\Psi}_0 = \mathbf{\Psi}_0^T\ \alpha(\theta)\ \mathbf{M}(\theta)\ \mathbf{\Psi}_0. \tag{5.8}$$

Werden die stochastischen Größen in Abhängigkeit der Chaospolynome entwickelt, ergibt sich die folgende Gleichung:

$$\mathbf{\Psi}_0^T \sum \mathbf{K}_i\Gamma_i\ \mathbf{\Psi}_0 - \mathbf{\Psi}_0^T \sum \alpha_j\Gamma_j \sum \mathbf{M}_i\Gamma_i\ \mathbf{\Psi}_0 = 0$$

$$i, j = 0...r. \tag{5.9}$$

Dabei ist $r+1$ die Anzahl der Koeffizienten des Eigenwerts α, mit dessen geschätzter Eigenform die Gleichung multipliziert wurde. Auch hier wird die Chaospolynomtransformation angewendet, wobei sich das folgende lineare Gleichungssystem ergibt:

$$\mathbf{\Psi}_0^T \sum \mathbf{K}_i\ E(\Gamma_i\Gamma_k)\ \mathbf{\Psi}_0 - \sum \alpha_j\ \mathbf{\Psi}_0^T \sum \mathbf{M}_i\ E(\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_k)\ \mathbf{\Psi}_0 = 0$$

$$\mathbf{\Psi}_0^T\ [\mathbf{K}_i\ E(\Gamma_i\Gamma_k)]\ \mathbf{\Psi}_0 - \mathbf{\Psi}_0^T \sum \alpha_j \sum \mathbf{M}_i\ E(\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_k)\ \mathbf{\Psi}_0 = 0$$

$$i, j, k = 0...r. \tag{5.10}$$

Dadurch sind unabhängig von der Anzahl der Systemfreiheitsgrade $r+1$ lineare Gleichungen entstanden, die nach den $r+1$ unbekannten Größen α_k gelöst werden können:

$$\begin{array}{c} \rightarrow j = 0..r \\ \downarrow k = 0..r \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}_0^T \sum_{i=0}^{r} [\mathbf{M}_i E(\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_k)]\ \mathbf{\Psi}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_j \end{bmatrix} \downarrow j = 0..r \ =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}_0^T\ [\mathbf{K}_k E(\Gamma_k\Gamma_k)]\ \mathbf{\Psi}_0 \end{bmatrix} \downarrow k = 0..r. \tag{5.11}$$

Durch die Multiplikation mit $\mathbf{\Psi}_0$ und $\mathbf{\Psi}_0^T$ schrumpfen die einzelnen Systemmatrizen auf einen Wert zusammen. Die Matrix auf der linken Seite besitzt nunmehr die Dimension $(r+1)$ x $(r+1)$, die Matrix auf der rechten Seite die Dimension 1 x $(r+1)$. Zudem beschränkt sich die Bestimmung von Erwartungswerten auf Werte dritter Ordnung, während für das nach Verschiebungsgrößen zu lösende Gleichungssystem (4.13) Erwartungswerte bis vierter Ordnung benötigt werden. Das entstehende Gleichungssystem ist damit einfach nach den Werten α_k lösbar. Diese stellen die deterministischen Koeffizienten der Reihenentwicklung eines, zu dem verwendeten Eigenvektor $\mathbf{\Psi}_0$ gehörigen, Eigenwerts α dar.

Aufgrund der Unsicherheiten, die bei der Berechnung höherer Eigenformen entstehen, sollte das Verfahren auf Eigenformen des unteren bis mittleren Frequenzbereichs (bis etwa 100 Hz) beschränkt bleiben.

Kapitel 6

Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte

Nach Lösung des Kapitel 5 beschriebenen Gleichungssystems ist das Ergebnis im stochastischen Raum bekannt. Die Lösung nach den Eigenwerten ergibt für das Quadrat einer Eigenkreisfrequenz:

$$\alpha(\theta) = \sum_{j=0}^{r} \alpha_j \; \Gamma_j. \tag{6.1}$$

Um das Quadrat der Eigenkreisfrequenz im Originalraum darzustellen, gibt es zum einen die Möglichkeit, seine Verteilungsdichte auf Basis der Momente der streuenden Größe zu beschreiben. Dazu müssen in einem ersten Schritt die Momente aus der Darstellung auf Grundlage der Chaospolynome gewonnen werden. Zum anderen besteht die Möglichkeit einer numerischen Auswertung des Lösungsvektors.

6.1 Momentenbasierte Reihenentwicklungen

6.1.1 Momente der Verteilung

Die Bestimmung der Momente geschieht nach Waubke [130]:

$$\begin{aligned} E\left(\prod_{j=1}^{n} u_j^{i_j}\right) &= E\Bigg(\underbrace{\sum_{k_{1,1}=0}^{\infty} a_{1,k_{1,1}}\Gamma_{k_{1,1}} \ldots \sum_{k_{1,i_1}=0}^{\infty} a_{1,k_{1,i_1}}\Gamma_{k_{1,i_1}}}_{j=1} \ldots \\ &\quad \ldots \underbrace{\sum_{k_{n,1}=0}^{\infty} a_{n,k_{n,1}}\Gamma_{k_{n,1}} \ldots \sum_{k_{n,i_n}=0}^{\infty} a_{n,k_{n,i_n}}\Gamma_{k_{n,i_n}}}_{j=n}\Bigg) \quad \text{mit} \quad u_j = \sum_{i=0}^{\infty} a_{j,i}\Gamma_i. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Die Konstanten können aus dem mit der Erwartungswertbildung verbundenen Integral ausgeklammert werden, wodurch nur die Erwartungswerte von Produkten der Chaospolynome zu bilden sind. Die wichtigsten Momente bezogen auf das Ergebnis $\alpha(\theta)$ der Eigenwertanalyse lauten:

$$\begin{aligned}
E(\alpha) &= m_1 = \alpha_0 \\
E(\alpha^2) &= m_2 = \sum_{i=0}^{\infty} E(\Gamma_i\Gamma_i)\alpha_i^2 \\
E(\alpha^3) &= m_3 = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} E(\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_k)\alpha_i\alpha_j\alpha_k \\
E(\alpha^4) &= m_4 = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} E(\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_k\Gamma_l)\alpha_i\alpha_j\alpha_k\alpha_l.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Die zentralen Momente μ_i ergeben sich auf Grundlage der Momente m_i zu:

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= 0 \\
\mu_2 &= m_2 - m_1^2 = \sum_{i=1}^{\infty} E(\Gamma_i\Gamma_i)\alpha_i^2 \\
\mu_3 &= m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^2.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Der Mittelwert, die Standardabweichung und die Schiefe der Größe α lassen sich demnach berechnen:

$$\begin{aligned}
\mu_\alpha &= m_1 \\
\sigma_\alpha &= \sqrt{\mu_2} \\
\gamma_\alpha &= \frac{\mu_3}{\sigma_\alpha^3}.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Für die Ermittlung einer momentenbasierten Verteilungsdichte gibt es verschiedene Ansätze. Oftmals wird auf eine Gram-Charlier-Reihenentwicklung zurückgegriffen, welche im folgenden vorgestellt wird.

6.1.2 Gram-Charlier-Reihe

Die Ausgangsgleichung der Reihenentwicklung einer beliebigen Verteilungsdichtefunktion $f(x)$ einer streuenden Größe x lautet:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \; H_j(x) \; \phi(x). \tag{6.6}$$

Dabei stellt $\phi(x)$ eine Normalverteilungsdichte dar, $H_j(x)$ ein Hermitesches Polynom und c_j den zugehörigen Koeffizienten.

Kendall und Stuart [83] geben die Ermittlung der Koeffizienten und der Hermiteschen Polynome auf Grundlage der Standardnormalverteilungsdichte an. Die Anwendung dieser Größen

führt im vorliegenden Fall jedoch nicht zu plausiblen Ergebnissen für die gesuchte Dichteverteilung.

So werden an dieser Stelle analog zu den in [83] gegebenen Koeffizienten und Hermiteschen Polynomen Koeffizienten c_j und Polynome $H_j(x)$ abgeleitet, die zu einer korrekten Darstellung der Ergebnisse führen. Zur Ableitung der Hermiteschen Polynome und der Koeffizienten wird statt von der Standardnormalverteilungsdichte von der Normalverteilungsdichte $\phi(x)$ ausgegangen, mit dem Mittelwert μ und der Standardabweichung σ:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \tag{6.7}$$

Wird die Funktion mit dem Differentialoperator $D = \frac{d}{dx}$ mehrfach nach x differenziert, so ergeben die Ableitungen von $\phi(x)$:

$$\begin{aligned} D\ \phi(x) &= -\frac{x-\mu}{\sigma^2}\phi(x) \\ D^2\phi(x) &= \left[\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2}\right]\phi(x) \\ D^3\phi(x) &= -\left[\frac{(x-\mu)^3}{\sigma^6} - \frac{3(x-\mu)}{\sigma^4}\right]\phi(x) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{6.8}$$

Allgemein werden Hermitesche Polynome $H_r(x)$ für x im Bereich von $-\infty \leq x \leq \infty$ eingeführt, so daß gilt:

$$(-D)^r\phi(x) = H_r(x)\ \phi(x). \tag{6.9}$$

Die Reihenentwicklung der Hermiteschen Polynome $H_r(x)$ lautet:

$$\begin{aligned} H_r(x) &= \sum_0^j \frac{(-1)^j}{\sigma^{2j}} \frac{r!}{(r-2j)!\ 2^j\ j!} \left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)^{r-2j} = \\ &= \left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)^r - \frac{1}{2}\frac{r!\ \left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)^{r-2}}{\sigma^2\ (r-2)!} + \frac{1}{8}\frac{r!\ \left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)^{r-4}}{\sigma^4\ (r-4)!} - \frac{1}{48}\frac{r!\ \left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)^{r-6}}{\sigma^6\ (r-6)!} \cdots \\ &\qquad \text{für} \quad 0 \leq j \leq r/2 \quad j, r \in \mathbb{N}^+. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Die Polynome bis zum Polynomgrad fünf ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= \frac{x-\mu}{\sigma^2} \\ H_2(x) &= \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2} \\ H_3(x) &= \frac{(x-\mu)^3}{\sigma^6} - 3\frac{x-\mu}{\sigma^4} \\ H_4(x) &= \frac{(x-\mu)^4}{\sigma^8} - 6\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^6} + 3\frac{1}{\sigma^4} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
H_5(x) &= \frac{(x-\mu)^5}{\sigma^{10}} - 10\frac{(x-\mu)^3}{\sigma^8} + 15\frac{x-\mu}{\sigma^6} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{6.11}
$$

Analog zu Kendall und Stewart [83] werden die Koeffizienten c_j ermittelt. Dazu wird die Gleichung (6.6) auf beiden Seiten mit $H_r(x)$ multipliziert und beide Seiten von $-\infty$ bis ∞ integriert. Unter Berücksichtigung der Orthogonalitätseigenschaft der Polynome hinsichtlich $\phi(x)$ ergeben sich die Koeffizienten der Reihenentwicklung zu:

$$
c_r = \frac{\sigma^2 r}{r!} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ H_r(x)\ dx. \tag{6.12}
$$

Wird $H_r(x)$ eingesetzt, ergibt sich folgende Reihe:

$$
\begin{aligned}
c_r &= \sum_0^j \frac{(-1)^j}{(r-2j)!}\ \frac{\sigma^{2j}}{2^j\ j!}\ \mu_{r-2j} = \\
&= \frac{\mu_r}{r!} - \frac{\sigma^2}{(r-2)!\ 2\cdot 1!}\ \mu_{r-2} + \frac{\sigma^4}{(r-4)!\ 4\cdot 2!}\ \mu_{r-4} - \frac{\sigma^6}{(r-6)!\ 8\cdot 3!}\ \mu_{r-6} + \dots \\
&\qquad\qquad \text{für} \quad 0 \le j \le r/2 \quad j, r \in \mathbb{N}^+.
\end{aligned} \tag{6.13}
$$

Dabei sind μ_i die zentralen Momente der Verteilung. Die ersten Koeffizienten lauten:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \mu_0 = 1 \\
c_1 &= \mu_1 = 0 \\
c_2 &= \frac{1}{2}(\mu_2 - \sigma^2) = \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_2) = 0 \\
c_3 &= \frac{1}{6}(\mu_3 - 3\sigma^2\mu_1) = \frac{1}{6}\mu_3 \\
c_4 &= \frac{1}{24}(\mu_4 - 6\sigma^2\mu_2 + 3\sigma^4) = \frac{1}{24}(\mu_4 - 3\mu_2^2) \\
c_5 &= \frac{1}{120}(\mu_5 - 10\sigma^2\mu_3 + 15\sigma^4\mu_1) = \frac{1}{120}(\mu_5 - 10\mu_3\mu_2) \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{6.14}
$$

Für die Funktion $f(x)$ entsteht folgende Reihenentwicklung ausgeschrieben bis zum vierten Polynomgrad:

$$
f(x) = \phi(x)\left\{1 + \frac{1}{6}\ \mu_3\ H_3 + \frac{1}{24}(\mu_4 - 3\mu_2^2)\ H_4 + \dots\right\} \tag{6.15}
$$

Für die Gram-Charlier-Reihe existieren neben der von Kendall und Stuart [83] vorgestellten Formulierung auch noch andere Darstellungen. Bover [11] stellt die Ableitung einer mehrdimensionalen Gram-Charlier-Reihe dar. Die Hermiteschen Polynome und die Koeffizienten, abgeleitet für den Fall einer streuenden Größe, entsprechen den in der vorliegenden Ableitung gefundenen. Donley und Spanos [30] geben ebenfalls die Ableitung einer mehrdimensionalen Gram-Charlier-Reihe an. Dabei berufen sie sich auf Beaman, Hedrick [7] und Nigam [102]. In ihrer Darstellung werden zwar die gleichen ein- bzw. mehrdimensionalen Hermitepolynome

wie bei Bover und in der vorliegenden Ableitung verwendet, die Koeffizienten werden jedoch auf Grundlage der zentralen Kumulanten ermittelt. Für den eindimensionalen Fall sind die Koeffizienten auf Grundlage der zentralen Momente bzw. der zentralen Kumulanten bis zum fünften Polynomgrad identisch. Ab dem sechsten Polynomgrad unterscheiden sie sich zunehmend. Bover [11] geht auf dieses Problem ein und kommt zu dem Schluß, daß die Verwendung der über die zentralen Momente hergeleiteten Koeffizienten eine bessere Annäherung an die tatsächliche Verteilung ermöglicht. Der Literaturvergleich zeigt, daß die Gram-Charlier-Reihenentwicklung nicht ausreichend standardisiert ist.

Für die nachfolgenden Beispiele ist die Wahl der verwendeten Ableitung der Koeffizienten unerheblich. Aufgrund des steigenden numerischen Aufwandes für die Berechnung höherer zentraler Momente werden nur zentrale Momente bis zur 4. Ordnung berechnet. Damit ist eine Reihenentwicklung auch nur bis zum vierten Polynomgrad möglich. Für diesen Fall sind die Koeffizienten nach beiden Ableitungen identisch.

6.1.3 Edgeworth-Reihe

Kendall und Stewart [83] beschreiben auch die Ableitung einer Edgeworth-Reihe. Die Edgeworth-Reihe läßt sich ähnlich einer Gram-Charlier-Reihe darstellen. Tatsächlich stimmen die beiden Reihenentwicklungen bis zum sechsten Glied überein. Erst ab dem siebenten Glied unterscheiden sie sich. Da jedoch die Berechnung bereits für Momente vierter Ordung numerisch instabil wird, besteht eine sinnvolle Entwicklung aus maximal fünf Termen. Für diesen Fall sind Edgeworth-Reihe und Gram-Charlier-Reihe identisch.

6.2 Numerische Auswertung des Lösungsvektors

Für die numerische Darstellung des Ergebnisses werden die Funktionen der Chaospolynome zahlenmäßig ausgewertet. Die Lösung für die Ergebnisgröße $\alpha(\theta)$ ergibt sich zu:

$$\alpha(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \; \Gamma_i,$$

was für den eindimensionalen Fall, d.h. für den Fall einer streuenden Größe verbunden mit ξ_1 bedeutet:

$$\alpha(\theta) = \alpha_0 + \alpha_1 \; \xi_1 + \alpha_2 \; (\xi_1^2 - 1) + \alpha_3 \; (\xi_1^3 - 3\xi_1) \ldots \tag{6.16}$$

Von der Größe ξ_1 ist aufgrund der Definition des stochastischen Raums bekannt, daß sie standardnormalverteilt ist. Mit jeder Realisation von ξ_1 ist eine gewisse Wahrscheinlichkeit verbunden, die bei Einsetzen des zugehörigen Wertes ξ_1 in Gleichung (6.16) dem Ergebnis α zugeordnet wird. In der praktischen Umsetzung wird die Standardnormalverteilung in Streifen gleichen Wahrscheinlichkeitsinhalts P_0 diskretisiert (vgl. Abbildung 6.1). Als Realisationen von ξ_1 werden die Mittelwerte der Streifen z.B. ξ_{1_i}, ξ_{1_m} eingesetzt und damit Werte für α berechnet. Bei Auswertung sämtlicher Stützstellen für ξ_1 entsteht für α ein Feld von Werten, wobei jedem Wert die Wahrscheinlichkeit P_0 zugeordnet ist. Aus dem Wertefeld wird die Verteilungsfunktion für α gewonnen. Durch numerische Ableitung kann anschließend die Verteilungsdichte von α erzeugt werden.

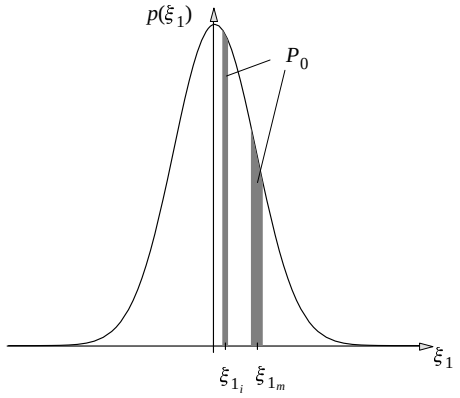


Abbildung 6.1: Aufteilung der Standardnormalverteilung in Streifen gleicher Wahrscheinlichkeit P_0

Im zweidimensionalen Fall, d.h. für zwei streuende Basisgrößen ξ_1 und ξ_2 ist entsprechend eine zweidimensionale Standardnormalverteilung auszuwerten. In diesem Fall wird das Volumen unter der in Abbildung 6.2 gezeigten Glockenkurve in Volumina gleicher Wahrscheinlichkeit P_0 zerlegt. Wie das Auswerteraster gestaltet werden kann, zeigt die rechte Skizze. Als Punkte für die Auswertung (ξ_1, ξ_2) werden die Mittelpunkte der Segmente verwendet. (Die Gitterlinien der linken Skizze in Abbildung 6.2 haben keinen Bezug zu der Aufteilung rechts.) Zu den Wertepaaren (ξ_1, ξ_2) werden die α-Werte ermittelt, was wiederum zu einem Wertefeld für α führt, wobei den Werten die Wahrscheinlichkeit P_0 zugeordnet ist.

Für n streuende Basisgrößen ξ_n muß die zugehörige n-dimensionale Dichtefunktion der Standardnormalverteilung ausgewertet werden.

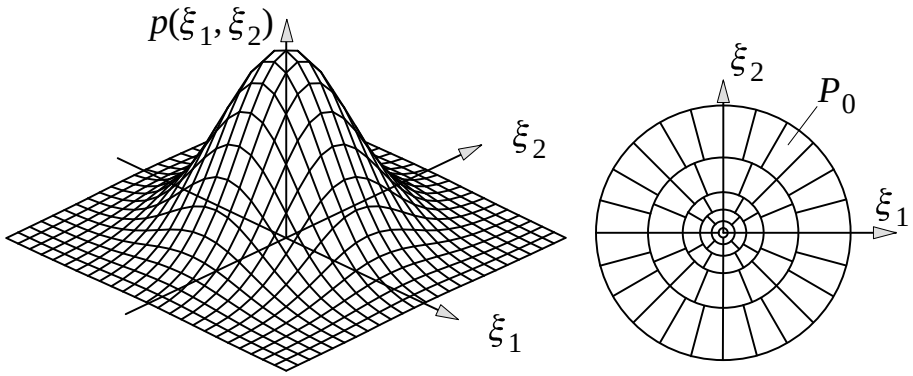


Abbildung 6.2: Aufteilung der zweidimensionalen Standardnormalverteilung in Segmente gleicher Wahrscheinlichkeit P_0

6.3 Anwendungsbeispiel Einmassenschwinger

Am Beispiel eines Einmassenschwingers wird die bisher geschilderte Vorgehensweise zur Bestimmung der streuenden Eigenfrequenzen dargestellt, ihre Anwendbarkeit und die zu erreichende Genauigkeit diskutiert sowie die Grenzen der Anwendung überprüft. Das einfache Beispiel des Einmassenschwingers bietet sich für die Untersuchung besonders an, da für die streuende Eigenfrequenz eine analytische Lösung zu ermitteln ist. Der Vergleich der erzielbaren Ergebnisse einer momentenbasierten Entwicklung und einer numerischen Auswertung zu denen der analytischen Funktion steht dabei im Vordergrund.

Im Beispiel wird die Masse m als streuend betrachtet. Sie steht im Nenner der Gleichung $\alpha = k/m$ für die zu bestimmende Größe α, das Quadrat der Eigenkreisfrequenz . Bei der nachfolgenden Untersuchung zeigt sich, daß für diesen „nichtproportionalen“ Fall die Verteilungsdichte für α eine ausgeprägte Schiefe erhält, die sich mit Hinzunahme weiterer streuender Größen (wie der Steifigkeit k) verliert. Bei reiner Streuung der Steifigkeit besteht ein linearer Zusammenhang zwischen k und α. Die Darstellung des Ergebnisses auf Grundlage einer Normalverteilung mit berechnetem Mittelwert und Standardabweichung ist bereits die exakte Lösung.

Wegen der Schiefe ist gerade der Fall der streuenden Masse - als einzige streuende Größe - bei der Einschätzung der Güte der Auswertemethoden besonders aussagekräftig.

Verglichen wird die Lösung für α auf Grundlage einer Normalverteilung, einer Gram-Charlier-Reihe, entwickelt bis zum dritten bzw. vierten Polynomgrad nach Gleichung (6.15), und einer numerischen Auswertung.

Da in den folgenden Berechnungsschritten das Quadrat der Eigenfrequenzen benötigt wird - und nicht die Eigenfrequenzen selbst -, wird auf ein Wurzelziehen, bei dem weitere Rechenungenauigkeiten auftreten würden, verzichtet.

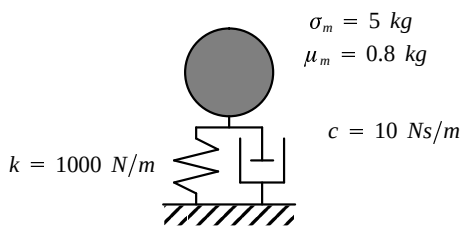


Abbildung 6.3: Einmassenschwinger mit streuender Masse

6.3.1 Anzunähernde analytische Funktion

Im folgenden wird der in Abbildung 6.3 dargestellte viskos gedämpfte Einmassenschwinger mit streuender Masse betrachtet. Die Streuung der Masse wird als normalverteilt angenom-

men; zugehörige Mittelwerte und Standardabweichung sind in Abbildung 6.3 gegeben. Die Verteilungsdichte für m lautet:

$$p(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_m} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-\mu_m}{\sigma_m}\right)^2} \tag{6.17}$$

Für den vorliegenden Fall kann die Lösung für die Wahrscheinlichkeitsdichte des Quadrats der Eigenkreisfrequenz $\alpha = \omega^2 = k/m$ analytisch bestimmt werden (vgl. z.B. Schuëller, Shinozuka [116]):

$$\begin{aligned} p(\alpha) &= p(m)\left|\frac{dm}{d\alpha}\right| = \\ &= p\left(m = \frac{k}{\alpha}\right)\left|\frac{d(\frac{k}{\alpha})}{d\alpha}\right| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_m} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{k}{\alpha}-\mu_m}{\sigma_m}\right)^2} \frac{k}{\alpha^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_m} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k\alpha-\mu_m\alpha^2}{\sigma_m\alpha^2}\right)^2} \frac{k}{\alpha^2}. \end{aligned} \tag{6.18}$$

6.3.2 Näherungslösung mit Chaospolynomen

Für die näherungsweise Ermittlung des Quadrats der Eigenkreisfrequenz wird die Streuung der Masse mit Hilfe der Chaospolynome dargestellt. Die Normalverteilung der Masse wird durch den Ansatz mit zwei Chaospolynomen bereits vollständig beschrieben:

$$\begin{aligned} m(\theta) &= m_0\,\Gamma_0 + m_1\,\Gamma_1 \\ m_0 &= \mu_m \\ m_1 &= \sigma_m. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Das Ergebnis, die quadratische Eigenkreisfrequenz α, wird bis zum Polynomgrad 3 entwickelt:

$$\alpha(\theta) = \alpha_0\,\Gamma_0 + \alpha_1\,\Gamma_1 + \alpha_2\,\Gamma_2 + \alpha_3\,\Gamma_3. \tag{6.20}$$

Dabei sind:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= 1 \\ \Gamma_1 &= \xi \\ \Gamma_2 &= \xi^2 - 1 \\ \Gamma_3 &= \xi^3 - 3\xi. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Das entstandene Eigenwertproblem lautet:

$$k - \alpha(\theta)m(\theta) = 0. \tag{6.22}$$

Nach Einsetzen der Reihenentwicklungen lautet es:

$$\begin{aligned} k - \sum_{j=0}^{3} \alpha_j \; \Gamma_j \sum_{i=0}^{1} m_i \; \Gamma_i &= 0 \\ k - \sum_{j=0}^{3} \sum_{i=0}^{1} \alpha_j \; m_i \; \Gamma_i \Gamma_j &= 0 \\ \sum_{j=0}^{3} \sum_{i=0}^{1} \alpha_j \; m_i \; \Gamma_i \Gamma_j &= k. \end{aligned} \tag{6.23}$$

Beim Einmassenschwinger ist die Anwendung des Rayleighquotienten hinfällig. Die Systemmatrizen besitzen in diesem Fall bereits die Dimension 1x1, der Eigenvektor läßt sich mit dem Wert $\mathbf{\Psi}_1 = [1]$ beschreiben.

Wird auf die Gleichung (6.23) die Chaospolynom-Transformation angewendet, wird also die Gleichung nacheinander beidseitig mit den Chaospolynomen $\Gamma_i, i = 0 \ldots 3$ und $f_\xi(\theta)$ multipliziert, entsteht nach Integration folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{c} \\ \downarrow l = 0..3 \end{array} \begin{array}{c} \rightarrow j = 0..3 \\ \left[\quad \sum_{i=0}^{1} m_i \; E(\Gamma_j \Gamma_i \Gamma_l) \quad \right] \end{array} \left[\quad \alpha_j \quad \right] \downarrow j = 0..3 \; = \left[\quad k_l E(\Gamma_l \Gamma_l) \quad \right] \downarrow l = 0..3 \; . \tag{6.24}$$

Nach Einsetzen der Erwartungswerte ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} m_0 & m_1 & 0 & 0 \\ m_1 & m_0 & 2m_1 & 0 \\ 0 & 2m_1 & 2m_0 & 6m_1 \\ 0 & 0 & 6m_1 & 6m_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6.25}$$

Das Gleichungssystem wird nach den unbekannten Koeffizienten α_j gelöst. Für die in Abbildung 6.3 genannten Parameter ergeben sich folgende Werte:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 205.57 \\ \alpha_1 &= -34.82 \\ \alpha_2 &= 6.03 \\ \alpha_3 &= -0.97. \end{aligned} \tag{6.26}$$

Der Lösungsbeitrag von Chaospolynomen nimmt mit steigender Ordnung kontinuierlich ab. In dem vorliegenden Fall ist es demnach ausreichend, das Ergebnis bis zum gewählten Polynomgrad drei (Γ_3) zu entwickeln.

Im nächsten Schritt werden aus den Koeffizienten und den Erwartungswerten der Chaospolynome nach Gleichung (6.3) die Momente der Verteilung berechnet. In diesem Fall wurden noch Momente 4. Ordnung ermittelt. Momente höherer Ordnung erfordern Erwartungswerte höherer Ordnung. Im Hinblick auf einen vertretbaren Rechenaufwand sollten jedoch nur

Erwartungswerte vierter Ordnung bestimmt werden. Für die verwendeten Eingangswerte betragen die zentralen Momente bis vierter Ordnung:

$$\begin{aligned}
\mu_0 &= 1 \\
\mu_1 &= 0 \\
\mu_2 &= 1291 \\
\mu_3 &= 53582 \\
\mu_4 &= 9229276.
\end{aligned}$$

Zum Vergleich werden die zentralen Momente der analytischen Funktion (6.18) nach folgender Vorschrift berechnet:

$$\mu_i = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha - \alpha_0)^i \; p(\alpha) \; d\alpha \tag{6.27}$$

Eine analytische Integration ist aufgrund der Komplexität der zu integrierenden Funktion nicht möglich. Es muß auf eine numerische Auswertung des Integrals zurückgegriffen werden. Dabei zeigt sich, daß die Bestimmung der ersten drei zentralen Momente problemlos ist; der Wert von μ_2 stimmt mit dem mit den Chaospolynomen berechneten Wert fast genau überein. Die Berechnung von μ_3 und μ_4 ist mit erheblichen numerischen Problemen behaftet. Die Ergebnisse schwanken stark je nach Wahl der Integrationsgrenzen. Eine Überprüfung der mit den Chaospolynomen berechneten Werte ist nicht möglich. Die Abschätzung deren Güte kann somit nicht erfolgen. Es muß aber auch für diese Werte mit numerischen Ungenauigkeiten gerechnet werden.

Im folgenden wird auf Grundlage der berechneten zentralen Momente die Ergebnisgröße „Quadrat der Eigenkreisfrequenz“ durch eine Normalverteilung und durch eine Gram-Charlier-Reihe bis zum dritten bzw. vierten Polynomgrad angenähert. Verglichen werden die Ergebnisse mit denen einer numerischen Auswertung.

Normalverteilungsdichte

Mit $\mu_\alpha = \alpha_0 = 205.57$ und $\sigma_\alpha = \sqrt{\mu_2} = 35.93$ kann eine Normalverteilungsdichte formuliert werden. Da die Normalverteilung keine Schiefe abbildet, liegt nur eine grobe Näherung der gesuchten Funktion vor, die allenfalls einen ersten Anhalt über Lage und Breite der Lösungsfunktion geben kann.

Gram-Charlier-Reihenentwicklung

Zur Darstellung der Verteilungsdichte werden die Polynome und Koeffizienten einer Gram-Charlier-Reihe formuliert. Nach den vorab beschriebenen numerischen Schwierigkeiten bei Berechnung der zentralen Momente, erscheint es allenfalls sinnvoll, die Reihe bis einschließlich μ_4, d.h. bis zum fünften Term zu entwickeln.

Auf Grundlage einer Normalverteilungsdichtefunktion mit $\mu_\alpha = 205.57$ und $\sigma_\alpha = 35.93$ der Ergebnisgröße werden die ersten vier Hermiteschen Polynome nach Gleichung (6.11) ermittelt. Die Koeffizienten der Reihenentwicklung c_j werden nach Gleichung (6.14) berechnet.

Allgemein ergibt sich die bis zum fünften Glied erstellte Gram-Charlier-Reihenentwicklung zu (Die Terme mit μ_1 und μ_2 werden null.):

$$p(\alpha) \quad = \quad \phi(\alpha)\left\{1 + \frac{1}{6}\,\mu_3\,H_3 + \frac{1}{24}(\mu_4 - 3\sigma_\alpha^2)H_4\right\}. \tag{6.28}$$

Numerische Auswertung

Für die numerische Auswertung des Lösungsvektors wird die zu ξ zugehörige Standardnormalverteilung in 10 000 Streifen gleichen Wahrscheinlichkeitsinhalts diskretisiert. Als Auswertestellen werden ξ-Koordinaten der Streifenmitte eingesetzt. Es werden die zugehörigen 10 000 α-Werte berechnet und in aufsteigender Reihenfolge geordnet. Aus diesem Datenfeld wird zunächst die Wahrscheinlichkeitsverteilung erstellt und anschließend numerisch zur Erzeugung der Verteilungsdichte abgeleitet.

6.3.3 Vergleich der Reihenentwicklungen

In Abbildung 6.4 ist die analytische Funktion $p(\alpha)$ und es sind die Annäherungen durch Reihenentwicklungen mit unterschiedlicher Anzahl an Summanden dargestellt. Verglichen wird dabei die analytische Dichtefunktion mit der auf Grundlage der ersten beiden Momente entwickelten Normalverteilung und einer Reihenentwicklung bis zum Polynomgrad drei bzw. vier.

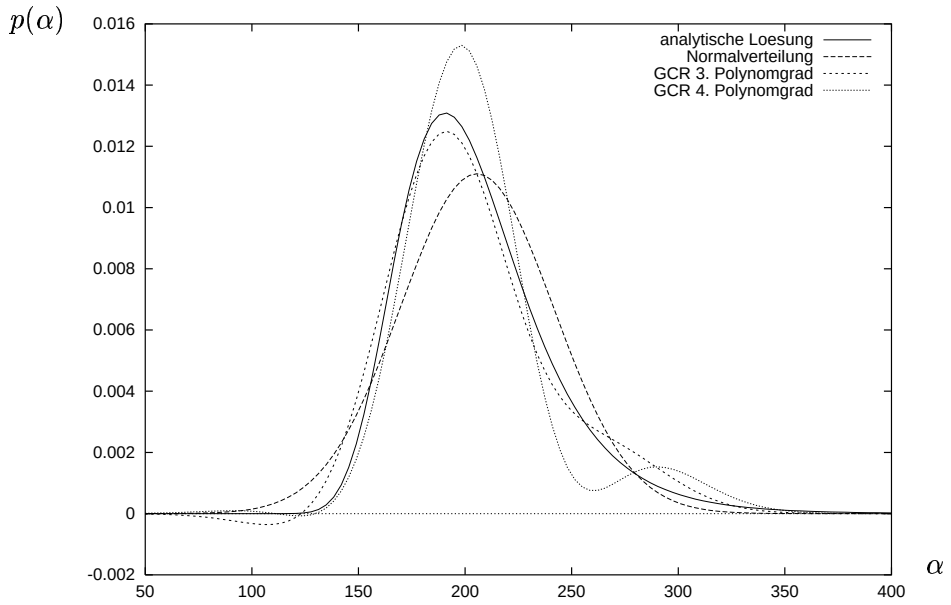


Abbildung 6.4: Wahrscheinlichkeitsdichte $p(\alpha)$ analytisch und genähert durch Reihenentwicklung

Es ist zu erkennen, daß sich die bis zum 3. Polynomgrad entwickelte Reihe der analytischen Funktion am besten nähert. Die Beobachtung wird von Kendall und Stuart [83] anhand des von ihnen gewählten Beispiels bestätigt. Die bis zum 4. Polynomgrad entwickelte Funktion zeigt deutliche Abweichungen um den Mittelwert und im rechten Randbereich. Damit ist gezeigt, daß die Reihenentwicklung nicht zur abzubildenden Funktion konvergiert. Eine Hinzunahme weiterer Glieder stellt keine Garantie für verbesserte Ergebnisse dar. Allgemein läßt sich bei Betrachtung des jeweiligen Funktionsverlaufs feststellen, daß die Näherung mit der Gram-Charlier-Reihenentwicklung in den Randbereichen der Funktionen zu unbefriedigenden Ergebnissen führt. In der Regel spielen die Randbereiche bei der Ermittlung von Überschreitenswahrscheinlichkeiten jedoch eine entscheidende Rolle. Die Funktionen nehmen zudem bereichsweise negative Werte an, was dem Wahrscheinlichkeitsbegriff widerspricht. Es ist anzunehmen, daß die Abweichungen durch die nur unzureichend genau ermittelbaren höheren zentralen Momente entstehen.

Abbildung 6.5 zeigt den Vergleich der analytischen Verteilungsdichte mit der numerischen Näherungsauswertung. Die analytische Funktion und die numerisch erzeugte Funktion liegen enger beieinander als die Graphen der analytischen Funktion und jeder momentenbasierten Reihe. In den zur Bestimmung der Überschreitenswahrscheinlichkeit wichtigen Randbereichen wird eine hervorragende Übereinstimmung erzielt. Lediglich im Bereich des Mittelwerts zeigen die Dichtefunktionen eine leichte, jedoch unerhebliche Abweichung.

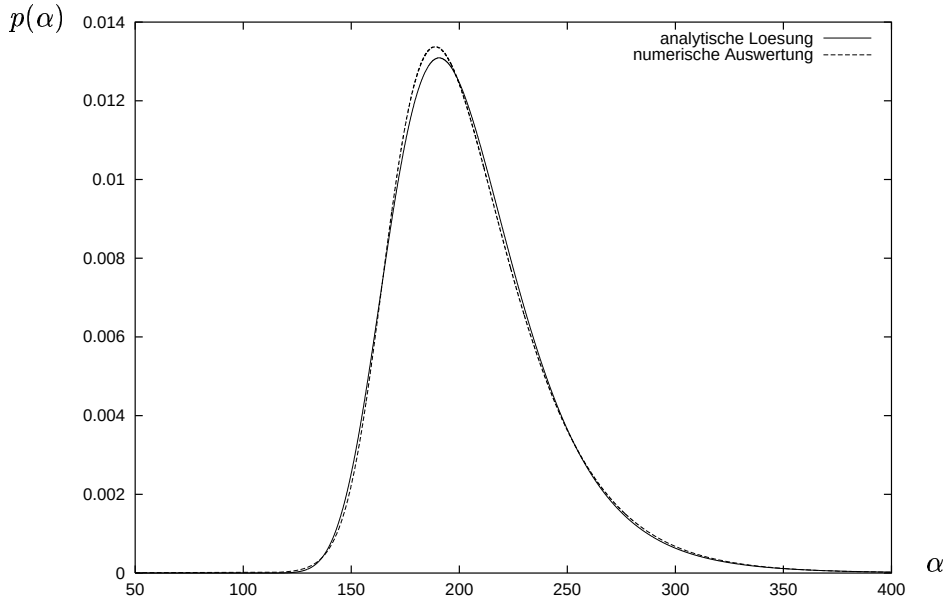


Abbildung 6.5: Wahrscheinlichkeitsdichte $p(\alpha)$ analytisch und genähert durch numerische Auswertung

Eine numerische Auswertung ist hinsichtlich der Ergebnisgenauigkeit einer momentenbasierten Funktion vorzuziehen. Die momentenbasierten Funktionen bieten jedoch den Vorteil, daß die nächsten Berechnungsschritte analytisch ausführbar sind und damit weniger Aufwand benötigen. So werden auch sie auf ihre Anwendbarkeit beim weiteren Vorgehen überprüft.

Kapitel 7

Stochastische Vergrößerungsfunktion

7.1 Berechnung von Überschreitenswahrscheinlichkeiten

Die Verteilung des Quadrats der streuenden Eigenkreisfrequenz liegt nun für weitere Berechnungsschritte vor. Beispielsweise kann bekannt sein, in welchen Bereichen die Eigenfrequenz nicht liegen darf, um einen ausreichend großen Abstand zu einer Anregefrequenz zu gewährleisten. Anhand der Verteilungsfunktion kann die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, mit welcher die Eigenfrequenz in dem unerwünschten Bereich liegt.

Zumeist ist jedoch eine Verschiebungsgröße bzw. eine Schwingschnelle vorgegeben, die das System nicht überschreiten darf. Die maximale Schwingschnelle $\dot{u}_{max}$ berechnet sich bei harmonischer Anregung mit der maximalen Verschiebung u_{max} im eingeschwungenen Zustand zu $\dot{u}_{max} = \Omega \cdot u_{max}$, wobei Ω die Anregekreisfrequenz bezeichnet. So läßt sich auch der Grenzwert der Schwingschnelle auf eine zulässige Maximalverschiebung umrechnen.

Die nachfolgenden Untersuchungen gelten für den eingeschwungenen Zustand. Das setzt voraus, daß das System ausreichend lang harmonisch angeregt wird, damit sich der eingeschwungene Zustand einstellen kann. Innerhalb des Einschwingvorgangs können sich durch Überlagerung von einsetzender Eigenschwingung des Systems und Antwort auf die dynamische Last (homogene und partikuläre Schwingungsantwort) kurzfristig deutlich größere Verschiebungsgrößen als im eingeschwungenen Zustand einstellen. Die Eigenschwingung klingt durch Dämpfung nach einiger Zeit ab. Der Einschwingvorgang muß eigens untersucht werden.

Die maximale Relativverschiebung eines harmonisch fußpunkterregten Systems im eingeschwungenen Zustand berechnet sich aus der maximalen Fußpunktverschiebung multipliziert mit einem Vergrößerungsfaktor. Der Faktor wiederum bestimmt sich aus einer Vergrößerungsfunktion, die neben der Anregekreisfrequenz und der Dämpfung des Systems die quadrierte Eigenkreisfrequenz enthält. Ist für die Relativverschiebung ein maximal zulässiger Wert gegeben und ist die maximale Fußpunktverschiebung ein deterministischer Wert, so ist der Vergrößerungsfaktor zu limitieren. Dafür muß wiederum das Quadrat der streuenden Eigenkreisfrequenz außerhalb gewisser Grenzen liegen. Die Wahrscheinlichkeit, mit der α innerhalb

der geforderten Grenzen liegt, gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der die zulässige Relativverschiebung überschritten wird.

So wird nach der Bestimmung des Quadrats der streuenden Eigenfrequenz die Überschreitenswahrscheinlichkeit einer gegebenen Relativverschiebung mit Hilfe der Vergrößerungsfunktion bestimmt. Das Vorgehen wird zunächst am Einmassenschwinger dargestellt und auf Mehrfreiheitsgradsysteme erweitert (Kapitel 8).

Wird für den Einmassenschwinger als dynamische Last eine harmonische Fußpunktanregung mit $w_0 \cdot \sin(\Omega t)$ vorgegeben, so läßt sich die Relativverschiebung zwischen Verschiebungsamplitude der Anregung und Verschiebung des Kopfpunktes als Antwort des Systems berechnen mit:

$$w_r(t) = w_0 \; V_r(\eta) \; \sin(\Omega t - \gamma). \tag{7.1}$$

Dabei ist w_0 die Verschiebungsamplitude und Ω die Erregerkreisfrequenz der Fußpunkterregung. $V_r(\eta)$ ist die Vergrößerungsfunktion des fußpunkterregten Systems in Abhängigkeit des Frequenzverhältnisses $\eta = \Omega/\omega$, γ der Phasenversatz zwischen Erregung und Antwort.

$$\tan\gamma = \frac{2D\eta}{1-\eta^2} \tag{7.2}$$

Der Maximalwert der Relativverschiebung beträgt somit:

$$w_{r,max} = w_0 \; V_r(\eta) \quad \text{mit} \quad V_r(\eta) = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}. \tag{7.3}$$

Wird in der Vergrößerungsfunktion η^2 durch den Zusammenhang Ω^2/α ersetzt, so ist die maximale Relativverschiebung gegeben zu:

$$w_{r,max} = w_0 \; \frac{\frac{\Omega^2}{\alpha}}{\sqrt{(1-\frac{\Omega^2}{\alpha})^2 + (2D)^2 \; \frac{\Omega^2}{\alpha}}}. \tag{7.4}$$

Für einen festgelegten Wert $w_{r,zul}$ ist bei gegebenem w_0 ein Wert $V_{r,zul}$ einzuhalten. Sind zudem Ω und das Lehrsche Dämpfungsmaß D vorgegeben, läßt sich ein zulässiger Wertebereich für α berechnen, damit kein Überschreiten des einzuhaltenden Grenzwerts $V_{r,zul}$ auftritt.

$$V_{r,zul} = \frac{\frac{\Omega^2}{\alpha}}{\sqrt{(1-\frac{\Omega^2}{\alpha})^2 + (2D)^2 \; \frac{\Omega^2}{\alpha}}}. \tag{7.5}$$

Aus der Lösung der Gleichung (7.5) nach α ergibt sich eine untere Grenze g_1 und eine obere Grenze g_2. Die Bedingungen, daß kein Überschreiten auftritt, lauten:

$$\begin{aligned} \alpha \;&<\; g_1 = \Omega^2 \; \frac{V_{r,zul}(1-2D^2) - \sqrt{1 + 4\; V_{r,zul}^2 \; D^2(D^2-1)}}{V_{r,zul}} \quad \text{oder} \\ \alpha \;&>\; g_2 = \Omega^2 \; \frac{V_{r,zul}(1-2D^2) + \sqrt{1 + 4\; V_{r,zul}^2 \; D^2(D^2-1)}}{V_{r,zul}}. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Ist die Funktion der Verteilungsdichte von α bekannt, kann die Wahrscheinlichkeit, mit der α im unzulässigen Bereich liegt, nach folgender Vorschrift bestimmt werden. Der Wert $p_{\ddot{u}}$ ist die Überschreitenswahrscheinlichkeit der gegebenen zulässigen Maximalverschiebung:

$$p_{\ddot{u}} = \int_{g1}^{g2} p(\alpha)\ d\alpha. \tag{7.7}$$

Diese Vorschrift ist auf die momentenbasierten Verteilungsdichten anzuwenden.

Im Falle der numerischen Auswertung liegen die Werte der Verteilungsfunktion punktweise vor. Für spezielle Auswertestellen von α ist der zugehörige Wert der Verteilungsfunktion $P(\alpha)$ bekannt. Die Überschreitenswahrscheinlichkeit berechnet sich in diesem Fall zu:

$$p_{\ddot{u}} = P(\alpha = g_2)\ - P(\alpha = g_1). \tag{7.8}$$

Liegen die Werte $P(\alpha)$ für g_1 und g_2 nicht exakt vor, so muß zwischen benachbarten Auswertepunkten interpoliert werden.

Bislang geht bei der Bestimmung der Überschreitenswahrscheinlichkeit nur die Streuung der Eigenfrequenz ein, die eine Streuung der Steifigkeit und Masse repräsentiert. Ein Weg, wie zusätzlich die Streuungen der Lastamplitude, der Lastfrequenz und der Dämpfung berücksichtigt werden können, wird im folgenden erläutert.

7.2 Weitere streuende Größen

In Gleichung (7.4) sind neben dem Quadrat der Eigenkreisfrequenz die Größen w_0, Ω und D enthalten, die ebenfalls eine Streuung aufweisen können. (Der Grenzwert $w_{r,zul}$ ist als deterministische Größe gegeben.) Zur Bestimmung der Überschreitenswahrscheinlichkeit der einzuhaltenden Systemreaktion bei Einführung weiterer streuender Größen, wird auf die Formulierung der totalen Wahrscheinlichkeit zurückgegriffen. Diese lautet allgemein für diskrete Zufallsvariablen A und B_n (vgl. z.B. Feldman und Fox [35]):

$$P(A) = \sum_n P(AB_n) = \sum_n P(A|B_n)\ P(B_n). \tag{7.9}$$

Dabei bezeichnet $P(A|B_n)$ die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A unter der Bedingung, daß die Ereignisse B_n mit $P(B_n) \neq 0$ bereits eingetreten sind; $P(A|B_n)$ heißt die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter den Bedingungen B_n. Für stetige Zufallsgrößen von Zufallsvektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ beliebiger Dimension im stochastischen Raum $\Re^k$ gilt laut Feldmann und Fox [35]:

$$p_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) = \int_{\Re^k} p_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}|\mathbf{Y} = \mathbf{v})\ p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{v})\ d\mathbf{v}. \tag{7.10}$$

Angewendet auf das vorliegende Problem der Bestimmung der Überschreitenswahrscheinlichkeit ergibt sich folgender Weg:

In einem ersten Schritt werden anhand von Gleichung (7.4) die Grenzen für den zulässigen α-Bereich bestimmt und in Abhängigkeit von w_0, $w_{r,zul}$, D und Ω angegeben. Die Beschränkung der Darstellung mit $V_{r,zul} = w_{r,zul}/w_0$ - wie im vorhergehenden Fall - ist nicht sinnvoll, wenn w_0 als streuende Größe eingeht. Die Ausdrücke für die Grenzen sind demnach:

$$\begin{aligned}
\alpha &< g_1 = \Omega^2 \cdot \frac{w_{r,zul} - 2\ D^2\ w_{r,zul} - \sqrt{-4\ D^2\ w_{r,zul}^2 + 4\ D^4\ w_{r,zul}^2 + w_0^2}}{w_{r,zul}} \\
\alpha &> g_2 = \Omega^2 \cdot \frac{w_{r,zul} - 2\ D^2\ w_{r,zul} + \sqrt{-4\ D^2\ w_{r,zul}^2 + 4\ D^4\ w_{r,zul}^2 + w_0^2}}{w_{r,zul}}.
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Für einzelne Werte w_0, Ω und D wird die Verteilungsdichte des Quadrats der Eigenkreisfrequenz nach Gleichung (7.7) in den Grenzen g_1 und g_2 integriert bzw. die diskrete Verteilungsfunktion nach Gleichung (7.8) ausgewertet. Es ergibt sich die Funktion $p_{ü}(w_{r,zul}|[w_0, \Omega, D])$ analytisch bzw. diskret. Wird die Funktion mit der Wahrscheinlichkeitsdichte der Größen w_0, Ω und D multipliziert und darüber integriert, ist damit die totale Überschreitenswahrscheinlichkeit berechnet, d.h. die Überschreitenswahrscheinlichkeit unter Berücksichtigung der Streuung der Größen α, w_0, Ω und D. Die Dimension der Integration ist gleich der Zahl der zu der Streuung der Eigenfrequenz zusätzlich als streuend angenommenen Größen. Diese Integration kann in der Regel nicht mehr analytisch erfolgen, sondern muß auch für die analytisch vorliegenden Funktionen mit numerischen Integrationsroutinen ausgeführt werden.

Dazu muß vorab die Wahrscheinlichkeitsdichte der Größen w_0, Ω und D bestimmt werden. Wird neben der streuenden Eigenkreisfrequenz nur eine weitere Größe als streuend angesehen, wird mit der Verteilungsfunktion dieser Größe multipliziert und eine eindimensionale Integration ausgeführt.

Werden mehrere Größen als streuend betrachtet, so ist die mehrdimensionale Verteilungsdichte dieser Größen zu bestimmen. Sind die Größen nicht korreliert, ist ihre gemeinsame Verteilungsdichte durch einfache Multiplikation der einzelnen Verteilungsdichten zu ermitteln:

$$p(A, B) = p(A) \cdot p(B). \tag{7.12}$$

Dies könnte für Lastamplitude und Dämpfung der Fall sein. Bei zwei normalverteilten, korrelierten Größen A und B ergibt sich die zweidimensionale Verteilungsdichte zu:

$$p(A, B) = \frac{1}{2\pi\sigma_A\sigma_B\sqrt{1-\rho_{A,B}}}\ e^{-\frac{1}{2(\rho_{A,B})}\left[\frac{(A-\mu_A)^2}{\sigma_A^2} - 2\rho_{A,B}\frac{(A-\mu_A)(B-\mu_B)}{\sigma_A\sigma_B} + \frac{(B-\mu_B)^2}{\sigma_B^2}\right]}. \tag{7.13}$$

Dabei muß neben den Mittelwerten μ_A und μ_B und den Standardabweichungen σ_A und σ_B der Korrelationskoeffizient $\rho_{A,B}$ bekannt sein. Beispielsweise Lastfrequenz und Lastamplitude könnten korreliert sein. Ihre gemeinsame Verteilungsdichte muß, sofern nicht Gleichung (7.13) angewendet werden kann, in einer Voruntersuchung bestimmt werden.

7.3 Anwendungsbeispiel

Die gefundenen Vorgehensweisen werden auf den in Kapitel 6.3 vorgestellten gedämpften Einmassenschwinger angewendet. Obwohl bekannt ist, daß die numerische Auswertung die

beste Näherung der analytischen Funktion darstellt, werden auch Näherungslösungen auf Grundlage der Gram-Charlier-Reihenentwicklung auf ihre Verwendbarkeit hin untersucht.

Der einfache Fall des Einfreiheitsgradsystems bietet sich an, um den Einfluß der streuenden Größen im einzelnen zu untersuchen. Der Berechnung der Überschreitenswahrscheinlichkeiten wird das Quadrat der Eigenkreisfrequenz als analytische Funktion, als Gram-Charlier-Reihenentwicklung und als numerisch ausgewertete Funktion zugrunde gelegt. Damit werden die Unterschiede der Näherungslösungen quantitativ beurteilt.

7.3.1 Untersuchung des gedämpften Einmassenschwingers

Für die zulässige Relativverschiebung des Systems wird als fiktiver Wert gefordert, daß sie maximal das Doppelte der Fußpunktverschiebung betragen darf. Die zulässige Vergrößerung $V_{r,zul}$ ist damit zu 2 vorgegeben. Als Anregekreisfrequenz wird ein Wert von Ω= 25 rad/s gewählt. In der Praxis wird zumeist das dimensionslose Lehrsche Dämpfungsmaß D abgeschätzt oder aus Messungen ermittelt. Im vorliegenden Fall des Einmassenschwingers mit viskosem Dämpfer wird die Dämpferkonstante c mittels Gleichung (7.14) in das Lehrsche Dämpfungsmaß D umgerechnet. Für m und $\omega = \sqrt{k/m}$ wird der Mittelwert der Masse verwendet.

$$D = \frac{c}{2\ m\ \omega} = \frac{10}{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{1000/5}} = 7 \cdot 10^{-2} \tag{7.14}$$

Die Streuung der Masse ist hierbei somit nicht erfaßt. Da der Dämpfungsgrad generell mit großen Unsicherheiten behaftet ist, kann die Vereinfachung akzeptiert werden.

Die Berechnung der zulässigen Grenzwerte des Quadrats der Eigenfrequenz ergibt, daß es für α im Bereich

$$g_1 = 318.95\ \mathrm{rad}^2/\mathrm{s}^2\ < \alpha\ < 918.55\ \mathrm{rad}^2/\mathrm{s}^2 = g_2 \tag{7.15}$$

zu einem Überschreiten der maximalen Verschiebung $w_{r,zul} = 2\ w_0$ käme. Durch Integration ist die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, mit der sich Werte von α in diesem Bereich befinden. Anschaulich ist der in Abbildung 7.1 schraffierte Flächeninhalt zu berechnen, um die Überschreitenswahrscheinlichkeit $p_{\ddot{u}}$ zu ermitteln. (Die obere Grenze g_2 spielt hierbei keine Rolle.)

Dargestellt ist die in Kapitel 6.3 bereits berechnete analytische Verteilungsdichte für α bei streuender Masse. Der Flächeninhalt zwischen den ermittelten Grenzen beträgt 0.00988 und bedeutet somit eine Überschreitenswahrscheinlichkeit von 0.988 %.

Werden statt der analytisch ermittelten Wahrscheinlichkeitsdichte die Näherungslösungen für das Quadrat der Eigenfrequenz verwendet, so ergeben sich die in der Tabelle 7.1 gezeigten Überschreitenswahrscheinlichkeiten. Darin sind die Ergebnisse für folgende Näherungen aufgelistet: die Näherung durch eine Normalverteilung, durch eine Reihenentwicklung bis zum dritten Polynomgrad und bis zum vierten Polynomgrad sowie durch die numerisch ausgewertete Funktion. Der Fehler der Näherung a zum analytischen Ergebnis z wurde nach der Formel zur Bestimmung des wahren relativen Fehlers berechnet(Bronstein, Semendjajew [16]):

$$\text{wahrer relativer Fehler} = \frac{a - z}{z} \cdot 100\ [\%].$$

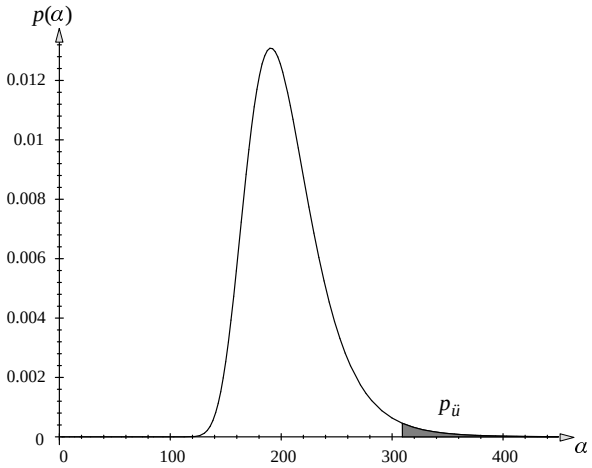


Abbildung 7.1: Wahrscheinlichkeit $p_{ü}$, daß zulässiges α überschritten wird

	Überschreitens-wahrscheinlichkeit $p_{ü}$[%]	Fehler [%]
analytische Funktion	0.988	
Normalverteilung	0.080	-91.9
Polynomentwicklung 3. Grad	0.554	-43.9
Polynomentwicklung 4. Grad	1.192	20.6
numerische Auswertung	0.985	-0.3

Tabelle 7.1: Überschreitenswahrscheinlichkeit und Fehler für den gedämpften Einmassenschwinger für $\mu_m = 5$ und $\sigma_m = 0.8$

Die Beschreibung der Verteilungsdichte durch momentenbasierte Reihenentwicklungen erweist sich als problematisch. Die Funktionen liefern in den Randbereichen eine unbefriedigende Annäherung an die darzustellende Funktion. Da für die Ermittlung der Überschreitenswahrscheinlichkeit gerade über diese Bereiche integriert werden muß, kommt es zu den gezeigten starken Abweichungen zur analytisch berechneten Wahrscheinlichkeit. Die Ergebnisse können somit nur als eine grobe Abschätzung der Überschreitenswahrscheinlichkeiten gelten. Der mit der Normalverteilung berechnete Wert sollte aufgrund der großen Abweichung für eine Systembeurteilung nicht herangezogen werden.

Das Ergebnis der numerischen Auswertung für α weist - wie zu erwarten war - den bei weitem geringsten Fehler auf. Mit einer Fehlerrate von -0.3 % ermöglicht diese Methode eine äußerst zuverlässige Bewertung der tatsächlich vorliegenden Überschreitenswahrscheinlichkeit.

7.3.2 Untersuchung des Einmassenschwingers bei streuender Anregefrequenz

Normalverteilte Anregefrequenz (μ_Ω weit entfernt von der Eigenfrequenz)

Zunächst wird die Überschreitenswahrscheinlichkeit des gedämpften Einmassenschwingers be-

rechnet, wenn zusätzlich zur Masse auch die Anregekreisfrequenz Ω normalverteilt streut.

Zu diesem Zweck ist folgendes Integral zu lösen:

$$p_{\ddot{u}} = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\ddot{u}}(w_{r,zul}|\Omega)\ p(\Omega)\ d\Omega. \tag{7.16}$$

Im folgenden werden einige Parameterkonstellationen untersucht:

Zunächst wird als Mittelwert μ_Ω der in Kapitel 7.3.1 verwendete deterministische Wert $\Omega = 25$ rad/s eingesetzt. Der mit den Mittelwerten deterministisch berechnete Wert der Eigenfrequenz beträgt 14.2 rad/s. Die beiden Werte weisen einen so deutlichen Abstand auf, daß keine Resonanzphänomene zu erwarten sind.

In einer ersten Untersuchung wird die Standardabweichung auf $\sigma_\Omega = 1.0$, also auf 4 % des Mittelwertes gesetzt.

Die Tabelle 7.2 zeigt Ergebnisse und Fehler gegenüber dem analytischen Ergebnis.

	Überschreitens-wahrscheinlichkeit $p_{\ddot{u}}$[%]	Fehler [%]
analytische Funktion	1.403	
Normalverteilung	0.458	-67.4
Polynomentwicklung 3. Grad	1.307	-6.8
Polynomentwicklung 4. Grad	1.957	39.5
numerische Auswertung	1.424	1.5

Tabelle 7.2: Überschreitenswahrscheinlichkeit und Fehler für $\mu_\Omega = 25$ und $\sigma_\Omega = 1.0$

Im Vergleich zu dem zuvor betrachteten Fall der deterministischen Anregekreisfrequenz von $\Omega = 25$ rad/s steigt die Überschreitenswahrscheinlichkeit an. Die Anregefrequenz Ω nimmt nun Realisationen an, die zu einer stärkeren Überhöhung der statischen Verschiebung führen.

Wird nun die Standardabweichung σ_Ω auf 10 % des Mittelwertes ($\sigma_\Omega = 2.5$ rad/s) gesetzt, ergeben sich die in Tabelle 7.3 dargestellten Ergebnisse und Fehler.

	Überschreitens-wahrscheinlichkeit $p_{\ddot{u}}$[%]	Fehler [%]
analytische Funktion	5.203	
Normalverteilung	4.970	-4.5
Polynomentwicklung 3. Grad	5.425	4.3
Polynomentwicklung 4. Grad	5.320	2.2
numerische Auswertung	5.229	0.5

Tabelle 7.3: Überschreitenswahrscheinlichkeit und Fehler für $\mu_\Omega = 25$ und $\sigma_\Omega = 2.5$

Der Tabelle 7.3 ist zu entnehmen, daß die Überschreitenswahrscheinlichkeiten gegenüber dem zuvor betrachteten Fall mit einem Variationskoeffizienten von 4 % noch ansteigen. Die Wahrscheinlichkeit ist mit der Wahl eines größeren Wertes für σ_Ω gestiegen, da Werte von Ω mit einer größeren Wahrscheinlichkeit in den resonanzgefährdeten Bereich fallen.

Die Fehler in den Ergebnissen der angenäherten Funktionen sind unter 5 % gefallen. Die Streuungen der Masse und der Anregekreisfrequenz überlagern sich. Der Einfluß der Streuung der Masse und damit der Einfluß der Funktionsbeschreibung für α auf die Überschreitenswahrscheinlichkeit sinkt. Die Ergebnisse der momentenbasierten Funktionen sind nunmehr akzeptabel.

Normalverteilte Anregefrequenz (μ_Ω nahe der Eigenfrequenz)

Wird anstelle des Mittelwertes μ_Ω ein Wert gewählt, der nahe bei der Eigenfrequenz des Einmassenschwingers liegt, ist zu erwarten, daß die Überschreitenswahrscheinlichkeit aufgrund des Resonanzphänomens deutlich ansteigen wird. Es ist aber ebenfalls zu erwarten, daß die Überschreitenswahrscheinlichkeit mit Zunahme der Standardabweichung σ_Ω sinken wird, da die Erregerfrequenz dann mit zunehmender Wahrscheinlichkeit in Bereiche fällt, für die keine Resonanz zu erwarten ist.

Tabelle 7.4 bestätigt die Vermutung. Sie gibt die Überschreitenswahrscheinlichkeiten für einen Mittelwert $\mu_\Omega = 15$ rad/s und Werte σ_Ω von 4 % (= 0.6 rad/s), 10 % (= 1.5 rad/s) und 20 % (= 3.0 rad/s) des Mittelwertes an. Der Variationskoeffizient von 20 % wird gewählt, um die gefundene Tendenz zu festigen.

	σ_Ω=0.6 $p_{ü}$[%]	σ_Ω=1.5 $p_{ü}$[%]	σ_Ω=3.0 $p_{ü}$[%]
analytische Funktion	99.02	95.16	77.50
Normalverteilung	98.43	94.90	77.58
Polynomentwicklung 3. Grad	99.04	94.32	76.76
Polynomentwicklung 4. Grad	100.3	95.52	77.47
numerische Auswertung	98.98	95.12	77.48

Tabelle 7.4: Überschreitenswahrscheinlichkeit für $\mu_\Omega = 15$ und verschiedene Werte für σ_Ω

Wie festzustellen ist, kommt es für die Polynomentwicklung 4. Grades zu numerischen Problemen, die sogar zu einer Überschreitenswahrscheinlichkeit von über 100 % führen.

7.3.3 Untersuchung des Einmassenschwingers bei streuender Anregefrequenz und Dämpfung

In einem letzten Beispiel wird der zusätzliche Einfluß einer streuenden Dämpfung auf die Überschreitenswahrscheinlichkeit untersucht. Die Dämpfung wird als normalverteilte Größe angenommen, die nicht mit der Anregefrequenz korreliert ist. Die Dämpferkonstante c des viskosen Dämpfers wird mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung belegt und mittels Gleichung (7.14) in ein streuendes Lehrsches Dämpfungsmaß D umgerechnet.

Allgemein ist zu erwarten, daß der Einfluß der Dämpfung und damit auch der Einfluß der Streuung der Dämpfung umso größer wird, je näher die Anregefrequenz bei der Eigenfrequenz liegt. Wie anhand der Vergrößerungsfunktionen in Abbildung 7.2 für den ungedämpften und gedämpften fußpunkterregten Einmassenschwinger zu erkennen ist, ist der Einfluß der Dämpfung auf den Maximalwert der Vergrößerungsfunktion im Resonanzbereich erheblich ($\eta = 1$). Je weiter sich Anregefrequenz und Eigenfrequenz voneinander entfernen, desto geringer wird

er. Wird für einen einzuhaltenden Grenzwert der Vergrößerungsfunktion der zulässige Bereich von η abgeleitet (schraffierter Bereich), zeigt sich hingegen, daß der Einfluß der Dämpfung den Bereich nur geringfügig erweitert. Der daraus abgeleitete zulässige Bereich für $\alpha(\theta)$ wird ebenfalls durch Dämpfung kaum vergrößert. Es ist zu erwarten, daß der Einfluß der Dämpfung auf die Überschreitenswahrscheinlichkeit des Verschiebungsgrenzwerts gering ist.

Ungleich wichtiger jedoch ist der Einfluß der Dämpfung, falls ein Überschreiten des gesetzten Verschiebungsgrenzwerts tatsächlich eintritt. Im Falle eines ungedämpften Systems können Verschiebungen auftreten, die erheblichen Schaden am System verursachen. Mit entsprechender Dämpfung können die Verschiebungen und damit möglicher Schaden begrenzt werden. Die Überschreitenswahrscheinlichkeit sagt somit nichts über ein Schadensrisiko aus. Zur Beurteilung des möglichen Schadens sind Parameterstudien anzustellen.

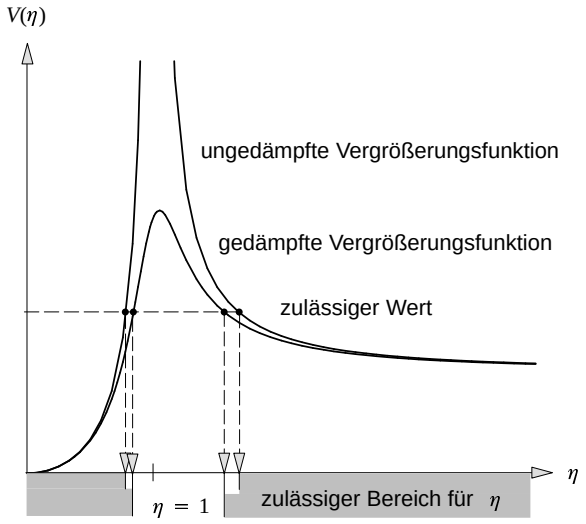


Abbildung 7.2: Zulässiger Bereich für $\eta = \Omega/\omega$

Die zuvor für die streuende Anregefrequenz betrachteten Fälle werden mit einer Streuung der Dämpferkonstante c kombiniert. Zur Berechnung der Überschreitenswahrscheinlichkeit ist das folgende Doppelintegral auszuwerten:

$$p_{\ddot{u}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\ddot{u}}(w_{r,zul}|[\Omega, c])\ p(\Omega)\ p(c)\ d\Omega\ dc. \tag{7.17}$$

Für Ω werden zunächst die Werte $\mu_\Omega = 25$ und $\sigma_\Omega = 1.0$ und für c $\mu_c = 10$ und $\sigma_c = 0.4$ eingesetzt und wiederum die Überschreitenswahrscheinlichkeiten und die Abweichungen zu der analytischen Lösung bestimmt. Tabelle 7.5 zeigt die Ergebnisse.

	Überschreitens-wahrscheinlichkeit $p_{ü}$[%]	Fehler [%]
analytische Funktion	1.402	
Normalverteilung	0.458	-67.3
Polynomentwicklung 3. Grad	1.306	-6.8
Polynomentwicklung 4. Grad	1.956	39.5
numerische Auswertung	1.423	1.5

Tabelle 7.5: Überschreitenswahrscheinlichkeit und Fehler für $\mu_\Omega = 25$ und $\sigma_\Omega = 1.0$ sowie $\mu_c = 10$ und $\sigma_c = 0.4$

Im Vergleich zu Tabelle 7.2 ist zu erkennen, daß sich die Überschreitenswahrscheinlichkeiten kaum ändern. Ω und ω weisen einen großen Abstand auf, das System befindet sich nicht im resonanzgefährdeten Bereich; die Streuung der Dämpfung hat wie erwartet kaum Einfluß. Selbst bei Erhöhung der Standardabweichung der Dämpfung auf 10% und 20% des Mittelwertes ändern sich die Überschreitenswahrscheinlichkeiten nur geringfügig. Auch bei einer größeren Streuung der Anregefrequenz, d.h. bei einer Erhöhung deren Standardabweichung, fällt die Streuung der Dämpfung nur sehr wenig ins Gewicht.

Untersucht wird nun der Einfluß der Streuung der Dämpfung, wenn die Erregerfrequenz nahe bei der Eigenfrequenz liegt. Für diese Untersuchung wird für Ω $\mu_\Omega = 15$ und $\sigma_\Omega = 1.5$ angesetzt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 7.6 erfaßt.

	σ_c=0.4 $p_{ü}$[%]	σ_c=1.0 $p_{ü}$[%]	σ_c=2.0 $p_{ü}$[%]
analytische Funktion	95.15	95.14	95.11
Normalverteilung	94.32	94.31	94.27
Polynomentwicklung 3. Grad	95.51	95.50	95.47
Polynomentwicklung 4. Grad	94.89	94.88	94.85
numerische Auswertung	95.11	95.10	95.07

Tabelle 7.6: Überschreitenswahrscheinlichkeit für $\mu_\Omega = 15$ und $\sigma_\Omega = 1.5$ sowie $\mu_c = 10$ und verschiedene Werte für σ_c

Die Überschreitenswahrscheinlichkeiten sind immer noch sehr hoch, wie auch für den Fall deterministischer Dämpfung und streuender, eigenfrequenznaher Anregekreisfrequenz festzustellen war (vgl. Tabelle 7.4). Die Streuung der Dämpfung verringert die Überschreitenswahrscheinlichkeit jedoch um einige Prozentpunkte. Sie hat damit - wie erwartet - beschränkten Einfluß auf die Überschreitenswahrscheinlichkeiten; er ist jedoch größer als für den zuvor betrachteten Fall, bei dem die Erregerfrequenz den höheren Wert hatte.

Der Werte $p_{ü}$ sinken kontinuierlich mit zunehmender Streuung für c, da dadurch mit zunehmender Wahrscheinlichkeit höhere Werte für die Dämpfung erreicht werden.

7.4 Ergebnisse für den untersuchten Einmassenschwinger

Zusammenfassend läßt sich aufgrund der gezeigten theoretischen Ansätze und der Parameterbetrachtungen folgendes festhalten:

- Für die Darstellung des Quadrats der streuenden Eigenfrequenz lassen sich Funktionen mit Hilfe von Reihenentwicklungen aufstellen. Im Fall der streuenden Steifigkeit des Einmassenschwingers entspricht die analytische Lösung einer Normalverteilung. Sie läßt sich nach Berechnung der Momente exakt darstellen. Für den Fall der streuenden Masse erhält die Funktion $p(\alpha)$ eine Schiefe. Die Näherungsverfahren sind in unterschiedlich hohem Maße zur Darstellung der Funktion geeignet. Dadurch entstehen Abweichungen in den berechneten Überschreitenswahrscheinlichkeiten zu der analytisch ermittelten Vergleichsgröße. Die beste Näherung der analytischen Funktion ergibt sich bei numerischer Auswertung des Lösungsvektors.

- Werden neben der Streuung von Systemparametern, die auf eine Streuung der Eigenfrequenz führen, weitere Berechnungsgrößen als streuend betrachtet und wird die totale Wahrscheinlichkeit ermittelt, ist folgendes festzustellen: Durch Hinzuziehung weiterer streuender Größen sinkt der bestimmende Einfluß der Streuung der Eigenfrequenz, was sich durch die kleineren Fehler bei der Verwendung von Näherungsdarstellungen gegenüber der analytischen Lösung ausdrückt. Es kommen weitere Größen hinzu, die die Überschreitenswahrscheinlichkeit stark beeinflussen, so daß eine fehlerhafte Darstellung der Eigenfrequenz nicht so stark ins Gewicht fällt. Je größer die Streuung der neu hinzugekommenen Größen ist, desto stärker wird ihr Einfluß auf das Gesamtergebnis. Der Einfluß der Eigenfrequenz sinkt zunehmend.

- Für die Erregerfrequenz gilt: Liegt sie weit entfernt von der Eigenfrequenz, steigt die Überschreitenswahrscheinlichkeit mit zunehmender Streubreite der Erregerfrequenz. Dann fallen mit größer werdender Wahrscheinlichkeit Werte von Ω in einen Bereich, in dem es zu einem starken Anstieg des Wertes der Vergrößerungsfunktion kommt.
  Liegt der Mittelwert der Erregerfrequenz in der Nähe der Eigenfrequenz, wird eine gesetzte Verschiebungsgrenze generell mit größerer Wahrscheinlichkeit aufgrund von Resonanzeffekten überschritten. Je größer die Streubreite der Erregerfrequenz in diesem Fall ist, desto kleiner wird die Überschreitenswahrscheinlichkeit, da mit zunehmender Wahrscheinlichkeit Werte außerhalb des kritischen Resonanzbereichs liegen.

- Der Einfluß der Dämpfung wird für den gezeigten Einmassenschwinger lediglich im resonanznahen Bereich sichtbar, d.h. je näher die Anregefrequenz bei der Eigenfrequenz liegt. Die Dämpfung besitzt jedoch auch dort nur beschränkten Einfluß auf den zulässigen Bereich der Eigenkreisfrequenz; der Bereich wird nur geringfügig erweitert. Für den untersuchten Einmassenschwinger ist außerhalb des Resonanzbereichs der Einfluß der Dämpfung und damit auch ihrer Streuung kaum spürbar.

- Die Überschreitenswahrscheinlichkeit allein gibt noch keinen Aufschluß über das Schadensrisiko. Sie prognostiziert lediglich die Wahrscheinlichkeit des Überschreitens eines vorgegebenen Grenzwerts. Zur Abschätzung der Auswirkungen bei einer Grenzwertüberschreitung sind weitere Untersuchungen (z.B. Parameterstudien) nötig.

Kapitel 8

Multifrequente Last, Mehrfreiheitsgradsysteme

8.1 Modalanalyse

Bislang wurde zur Bestimmung von Überschreitenswahrscheinlichkeiten lediglich ein Einmassenschwinger mit monofrequenter Fußpunktbelastung untersucht. Im folgenden wird vorgestellt, wie das beschriebene Verfahren auf Mehrfreiheitsgradsysteme im eingeschwungenen Zustand bei modaler Betrachtung übertragen werden kann. Als Lastfall wird eine beliebige, zeitlich veränderliche Belastung angenommen.

Eine geschlossene probabilistische Modaluntersuchung im Rahmen des geschilderten Vorgehens ist nicht einfach möglich. Bei der Bestimmung von generalisierten Größen gehen Informationen über einzelne Parameter innerhalb der Systemmatrizen verloren, Korrelationen zwischen einzelnen Moden sind nicht mehr zurückzuverfolgen.

Deswegen wird ein Vorgehen verfolgt, bei dem mit deterministischen Vorberechnungen erforderliche Näherungsannahmen über das Zusammenwirken einzelner Moden ermittelt werden. Zeichnet sich für die untersuchte Verschiebungsgröße ein maßgeblicher Einfluß einer einzelnen Eigenfrequenz ab, führt das Verfahren zu zuverlässigen Aussagen über eine Überschreitenswahrscheinlichkeit. Sind mehrere Moden stark am Ergebnis beteiligt, kann mit dem Verfahren die Überschreitenswahrscheinlichkeit durch einfach auszuführende Parameterstudien eingegrenzt werden. Im Stadium des Entwurfs eines Systems sind die gefundenen Aussagen ausreichend.

Ist genauerer Aufschluß nötig, so muß die Auswertung der Verschiebungsgrößen nach dem Gleichungssystem (4.13) erfolgen. Es enthält die Gesamtbeschreibung des Systems. Die Lösung führt demnach zu zuverlässigeren Aussagen, die Berechnung verlangt jedoch einen sehr viel höheren Aufwand als das nachfolgend geschilderte Vorgehen. Alternativ kann auch auf eine Monte-Carlo-Simulation zurückgegriffen werden, die ebenfalls das Gesamtsystem statt einzelner modaler Beiträge untersucht. Auch dieses Verfahren erfordert einen großen Berechnungsaufwand.

Beim modalen Näherungsverfahren wird im ersten Schritt eine deterministische Modalanalyse des Mehrfreiheitsgradsystems erstellt, wobei für die streuenden Parameter deren Mittelwerte

eingesetzt werden. Der Beitrag einzelner Moden zur untersuchten Verschiebungsgröße des Systems wird abgeschätzt. Auf Grundlage eines einzuhaltenden Grenzwerts für die untersuchte Verschiebungsgröße wird ein maximal zulässiger modaler Beitrag der maßgeblichen Eigenform bestimmt.

Zunächst wird nochmals der einzuhaltende Grenzwert für ein Einfreiheitsgradsystem unter Fußpunktanregung bzw. Lastanregung erläutert. Danach werden für Mehrfreiheitsgradsysteme modale Beteiligungen und einzuhaltende modale Grenzwerte bestimmt.

8.2 Rückblick auf Einfreiheitsgradsysteme

Fußpunkterregte Schwingung

Wie in Kapitel 7 geschildert, wird die Relativverschiebung eines Einfreiheitsgradsystems auf eine Fußpunkterregung mit $w_0(t) = w_0 \cdot \sin(\Omega t)$ ermittelt nach:

$$\begin{aligned} w_r(t) &= w_0 \cdot V_r(\eta) \cdot \sin(\Omega t - \gamma) \\ w_{r,max} &= w_0 \cdot V_r(\eta) \end{aligned} \tag{8.1}$$

mit

$$\begin{aligned} V_r(\eta) &= \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \\ \tan\gamma &= \frac{2D\eta}{1-\eta^2}. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Ist ein Grenzwert der Absolutverschiebung w_{zul} einzuhalten, so muß daraus der Grenzwert $w_{r,zul}$ für die Relativverschiebung bestimmt werden:

$$w_{r,zul}(t) = w_{zul}(t) - w_0(t). \tag{8.3}$$

$w_{r,zul}$ ist der Maximalwert der Funktion $w_{r,zul}(t)$. Zu beachten ist dabei der Phasenversatz γ zwischen der Fußpunktanregung und der Antwort $w(t)$.

Krafterregte Schwingung

Für die krafterregte Schwingung mit $F(t) = F_0 \cdot \sin(\Omega t)$ wird die Absolutverschiebung des Einfreiheitsgradsystems bestimmt:

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{F_0}{k} \cdot V(\eta) \cdot \sin(\Omega t - \gamma) \\ w_{max} &= \frac{F_0}{k} \cdot V(\eta) \end{aligned} \tag{8.4}$$

mit $V(\eta)$, der Vergrößerungsfunktion der krafterregten Schwingung und dem Phasenversatz γ (entspricht dem Phasenversatz der fußpunkterregten Schwingung):

$$V(\eta) = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}. \tag{8.5}$$

Ist ein Grenzwert w_{zul} gegeben, so ist diese Forderung direkt auf die Gleichung (8.4) anzuwenden.

Das Verfahren, wie die Überschreitenswahrscheinlichkeit einer gegebenen Verschiebungsgrenze $w_{r,zul}$ des fußpunkterregten Einfreiheitsgradsystems bei streuender Eigenkreisfrequenz sowie weiterer streuender Größen berechnet werden kann, wurde im Kapitel 7 vorgestellt. Das Vorgehen ist für den krafterregten Schwinger analog anzuwenden.

8.3 Modale Beteiligungen

Fußpunkterregte Schwingung

Bei Verwendung der Modalanalyse werden die Antworten einer jeden Mode i auf die Anregung berechnet und zur Bildung der Gesamtantwort superponiert. Das entsprechende Vorgehen wird für die Lastfälle Fußpunkterregung und Krafterregung geschildert. Nach Berechnung der Gesamtantwort wird untersucht, welchen Anteil die einzelnen Moden beitragen.

Die Gesamtantwort eines monofrequent fußpunkterregten Mehrfreiheitsgradsystems in Relativverschiebungen $\mathbf{w}_r(t)$ gestaltet sich nach Anwendung der Modalanalyse mit den Eigenvektoren $\mathbf{\Psi}_i$ zu:

$$\mathbf{w}_r(t) = \sum_{i=1}^{n} y_{r,0,i} \cdot V_{r,i}(\omega_i, \Omega, D_i) \cdot \mathbf{\Psi}_i \sin(\Omega t - \gamma_i) = \sum_{i=1}^{n} y_{r,i} \cdot \mathbf{\Psi}_i \sin(\Omega t - \gamma_i). \tag{8.6}$$

Dabei ist ω_i die Eigenkreisfrequenz und D_i die modale Dämpfung der Mode i. Insgesamt werden n Moden berücksichtigt. $V_{r,i}(\omega_i, \Omega, D_i)$ ist die Vergrößerungsfunktion der fußpunkterregten Schwingung und γ_i der Phasenversatz einer Mode i auf die Anregung:

$$\begin{aligned} V_{r,i}(\omega_i, \Omega, D_i) &= \frac{(\Omega/\omega_i)^2}{\sqrt{(1-(\Omega/\omega_i)^2)^2 + (2D_i\Omega/\omega_i)^2}} \\ \tan\gamma_i &= \frac{2D_i\Omega/\omega_i}{1-(\Omega/\omega_i)^2}. \end{aligned} \tag{8.7}$$

$y_{r,0,i}$ ist die modale Fußpunktverschiebung und berechnet sich nach:

$$y_{r,0,i} = \frac{\mathbf{\Psi}_i^T \mathbf{f}_r}{\Omega^2 \mathbf{\Psi}_i^T \mathbf{M} \mathbf{\Psi}_i} = \frac{f_{r,i}^*}{\Omega^2 m_i}. \tag{8.8}$$

Der Lastvektor $\mathbf{f}_r$ ist die rechte Seite des in Relativverschiebungen formulierten Gleichungssystems. Er enthält u.a. die Amplitude der Fußpunktverschiebung w_0.

Krafterregte Schwingung

Die Bestimmung der Antwort $\mathbf{w}(t)$ der krafterregten Schwingung in Absolutverschiebungen auf Grundlage der Eigenvektoren $\mathbf{\Psi}_i$ ergibt sich analog:

$$\mathbf{w}(t) = \sum_{i=1}^{n} y_{0,i} \cdot V_i(\omega_i, \Omega, D_i) \cdot \mathbf{\Psi}_i \sin(\Omega t - \gamma_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \mathbf{\Psi}_i \sin(\Omega t - \gamma_i). \tag{8.9}$$

Dabei ist n wiederum die Anzahl der berücksichtigten Moden. $V_i(\omega_i, \Omega, D_i)$ ist die Vergrößerungsfunktion der krafterregten Schwingung:

$$V_i(\omega_i, \Omega, D_i) = \frac{1}{\sqrt{(1-(\Omega/\omega_i)^2)^2 + (2D_i\Omega/\omega_i)^2}}. \tag{8.10}$$

$y_{0,i}$ ist die modale statische Verschiebung und berechnet sich nach:

$$y_{0,i} = \frac{\mathbf{\Psi}_i^T \mathbf{f}}{\mathbf{\Psi}_i^T \mathbf{K} \mathbf{\Psi}_i} = \frac{f_i^*}{k_i}. \tag{8.11}$$

Der Lastvektor $\mathbf{f}$ ist die rechte Seite des in Absolutverschiebungen formulierten Gleichungssystems. Er enthält die Amplitude der Last F_0.

Bestimmung modaler Verschiebungsanteile

Um den Beitrag einer jeden Mode zu einer untersuchten Verschiebungsgröße zu quantifizieren, werden modale Beteiligungsfaktoren berechnet. Anhand der Faktoren kann der Anwender entscheiden, welche Moden er im weiteren stochastisch untersuchen wird.

Am Beispiel eines krafterregten Systems wird erläutert, wie der Beitrag jeder Mode zu einer Verschiebungsgröße $\mathbf{w}[k]$ bestimmt werden kann ($\mathbf{w}[k]$ ist eine bestimmte Größe aus dem Verschiebungsvektor $\mathbf{w}$). Für die Mitwirkung von drei Moden beispielsweise ergibt sich die Antwort ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}[k](t) &= \frac{f_1^*}{k_1} \cdot V_1(\omega_1, \Omega, D_1) \cdot \mathbf{\Psi}_1[k] \sin(\Omega t - \gamma_1) + \\ &+ \frac{f_2^*}{k_2} \cdot V_2(\omega_2, \Omega, D_2) \cdot \mathbf{\Psi}_2[k] \sin(\Omega t - \gamma_2) + \\ &+ \frac{f_3^*}{k_3} \cdot V_3(\omega_3, \Omega, D_3) \cdot \mathbf{\Psi}_3[k] \sin(\Omega t - \gamma_3). \end{aligned} \tag{8.12}$$

Zur Verdeutlichung der modalen Beiträge zur Gesamtantwort $\mathbf{w}[k](t)$ wird die Darstellung in der komplexen Ebene herangezogen.

Abbildung 8.1 zeigt die Antwortbeiträge als Vektoren in einem Zeigerdiagramm in der komplexen Ebene (Horizontalachse entspricht Realteil, Vertikalachse Imaginärteil). Ihre Superposition ergibt die Gesamtantwort $\mathbf{w}[k]$. Die Zeiger rotieren mit der Winkelgeschwindigkeit Ω. Die Phasenlage der Antwortbeiträge spiegelt sich in ihrer gegenseitigen Lage wider. Der horizontale Anteil (Realteil) eines Verschiebungsvektors zu einem Zeitpunkt t_i zeigt den „sichtbaren“ Anteil der Verschiebung; dieser sichtbare Anteil folgt einem Sinusverlauf. Die Amplitude einer Verschiebung zeigt sich, wenn der Vektor $\mathbf{w}[k]$ im Zeigerdiagramm horizontal zu liegen kommt. Die reale Gesamtverschiebung läßt sich somit darstellen:

$$\mathbf{w}[k](t) = \mathbf{w}[k] \cdot \sin(\Omega t) = \mathbf{w}[k] \cdot g(t) \tag{8.13}$$

Der Vektor $\mathbf{w}[k]$ erfaßt die auftretenden Verschiebungen, die Funktion $g(t)$ ihren zeitlichen Verlauf. Sie bewegt sich in den Grenzen $-1 \leq g(t = t_i) \leq 1$.

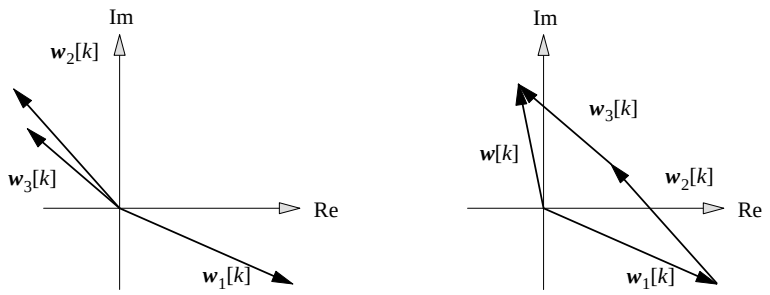


Abbildung 8.1: Antwortbeiträge und Superposition der drei Moden

Für die Bestimmung der maximalen modalen Beiträge zur Gesamtverschiebung $\mathbf{w}[k]$ müßte der Vektorzug bildlich gesprochen jeweils so gedreht werden, daß jeder einzelne Verschiebungsvektor und der Vektor der Gesamtverschiebung einmal horizontal zu liegen kommt, sein Beitrag also maximal wird. In jeder einzelnen Position ist der Beitrag jeder der drei Moden zu dem dann sichtbaren Anteil (Realteil) der Gesamtverschiebung in Beziehung zu setzen. Anhand aller vier Beobachtungszeitpunkte müßten maßgebliche modale Beiträge abgeleitet werden.

Das Verfahren ist relativ aufwendig. Zur Vereinfachung wird ein Vorgehen vorgeschlagen, welches den Phasenversatz γ_i vereinfacht zu $\gamma_i = 0$ für den Fall Anregefrequenz $\Omega <$ Eigenfrequenz ω_i und $\gamma_i = \pi$ für $\Omega > \omega_i$. Es entspricht der Ermittlung des Phasenversatzes für ein ungedämpftes System. (Im stets zu vermeidenden Resonanzfall $\Omega = \omega_i$ beträgt der Phasenversatz $\pi/2$). Das Zeigerdiagramm in Abbildung 8.2 zeigt die Lage der zuvor betrachteten drei modalen Beiträge für diese vereinfachte Annahme ($\omega_1 < \Omega$, $\omega_2, \omega_3 > \Omega$).

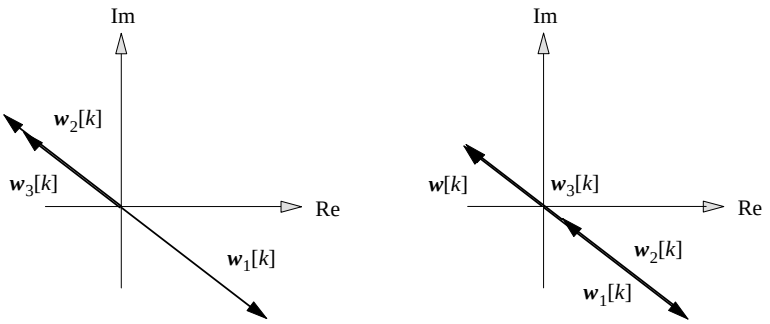


Abbildung 8.2: Antwortbeträge und Superposition der drei Moden mit vereinfacht berechnetem Phasenversatz

Der „sichtbare“ Anteil einer jeden Mode zum „sichtbaren“ Anteil der Gesamtverschiebung ist in jeder Lage des Vektorzugs der gleiche. Damit läßt sich auch der Beitrag einer Mode i zur vorab berechneten Verschiebungsgröße $\mathbf{w}[k]$ einfach abschätzen:

$$\text{modaler Beitrag der Mode } i: \quad fak\ \frac{f_i^*}{k_i} \cdot V_i(\omega_i, \Omega, D_i) \cdot \mathbf{\Psi}_i[k]/\mathbf{w}[k]. \tag{8.14}$$

Der Faktor fak ist 1 bzw. -1 je nach gewählter Phasenlage der Antwort auf die Anregung. Beträgt die Phase $\gamma_i = 0$, ist $\sin(\Omega t - 0) = \sin(\Omega t)$ und $fak = 1$; ist $\gamma_i = \pi$, ist $\sin(\Omega t - \pi) = -\sin(\Omega t)$ und $fak = -1$.

Die vereinfachte Annahme des Phasenversatzes erscheint gerechtfertigt bei geringer Dämpfung. Zudem wird sie nur zur Bestimmung des maximalen modalen Beitrags und nicht der Verschiebung selbst verwendet. Das Verfahren ist entsprechend auch für den fußpunkterregten Schwinger anzuwenden:

$$\text{modaler Beitrag der Mode } i: \quad fak\ \frac{f_{r,i}^*}{\Omega^2 m_i} \cdot V_{r,i}(\omega_i, \Omega, D_i) \cdot \mathbf{\Psi}_i[k]/\mathbf{w}_r[k]. \tag{8.15}$$

Modale Dämpfung

Als Eingangsgröße für die Berechnung wird die modale Dämpfung D_i benötigt. Für die Berechnung gibt es mehrere Ansätze. Ist nur eine Systemdämpfung vorhanden und wird die Dämpfungsmatrix als steifigkeits- und/oder masseproportional nach der Vorschrift

$$\mathbf{C} = \beta\ \mathbf{M} + \gamma\ \mathbf{K} \tag{8.16}$$

formuliert, entsteht bei der Modalanalyse $\mathbf{\Psi}^T \mathbf{C} \mathbf{\Psi}$ mit der Modalmatrix $\mathbf{\Psi}$ eine Diagonalmatrix. Ein modaler Dämpfungswert D_i kann einer bestimmten Mode i zugeordnet werden.

Ist jedoch beispielsweise ein diskreter Dämpfer vorhanden, so entsteht bei der Modalanalyse keine diagonalisierte generalisierte Dämpfungsmatrix; Nebendiagonalglieder sind vorhanden. Es entsteht ein Gleichungssystem mit gekoppelten Gleichungen. Zur Rechenvereinfachung werden in diesem Fall oftmals alle Nebendiagonalglieder vernachlässigt und auf eine Modenkopplung verzichtet. Der auf der Hauptdiagonalen stehende Wert D_i wird der Mode i als modaler Dämpfungswert zugewiesen. Dies wird mit dem Begriff „Bequemlichkeitshypothese“ bezeichnet.

(Baseler [5] beschreibt, daß die Annahme der Modenentkopplung in speziellen Fällen zu einer deutlichen Verfälschung des Ergebnisses führen kann. Daher ist die Auswirkung dieser Vereinfachung im voraus sorgfältig zu untersuchen.)

8.4 Dominante Eigenform

8.4.1 Monofrequente Anregung

Im günstigsten Fall liegt für die stochastische Berechnung eine monofrequente Anregung vor, und es handelt sich um ein Einfreiheitsgradsystem bzw. ein Mehrfreiheitsgradsystem mit einer dominanten, d.h. die untersuchte Systemantwort maßgeblich bestimmenden, Eigenform. Daß

sich eine Eigenform besonders stark an der Antwort beteiligt, ist dann zu erwarten, wenn die zugehörige Eigenfrequenz nahe der Erregerfrequenz liegt, die modale Last groß ist und die übrigen Eigenfrequenzen einen großen Abstand zur Erregerfrequenz besitzen. Für die stochastische Berechnung wird der Beitrag anderer Moden in guter Näherung deterministisch behandelt. Die im weiteren auf Grundlage einer Mode berechnete Überschreitenswahrscheinlichkeit gibt einen sehr guten Einblick in das Verhalten des Gesamtsystems. Das System wird als Einmassenschwinger formuliert und die in Kapitel 7 vorgestellten Methoden zur Berechnung von Überschreitenswahrscheinlichkeiten werden angewendet.

Zudem sind vorab die Funktionen $p(\alpha_n)$ mit dem im Kapitel 5 und Kapitel 6 geschilderten Vorgehen zu ermitteln. Die Umrechnung einer zulässigen Verschiebungsgröße auf eine zulässige modale Verschiebung wird im folgenden beschrieben.

Modaler Grenzwert für fußpunkterregte Schwingungen

Für ein fiktiv untersuchtes fußpunkterregtes System wird angenommen, daß sich nach deterministischer Bestimmung (Mittelwerte der streuenden Größen) der modalen Beteiligungsfaktoren herausstellt, daß die erste Mode z.B. zu 90 % die untersuchte Verschiebungsgröße dominiert. Diese Mode wird im folgenden stochastisch untersucht, die übrigen Moden werden deterministisch behandelt. Für den fußpunkterregten Schwinger ist die zulässige Verschiebung $\mathbf{w}_{zul}[k]$ auf eine Relativverschiebung $\mathbf{w}_{r,zul}[k]$ nach Gleichung (8.3) unter Beachtung des Phasenversatzes zwischen Anregung und Antwort zu bestimmen. Aus dem einzuhaltenden Grenzwert $\mathbf{w}_{r,zul}[k]$ ist der einzuhaltende modale Beitrag der ersten Mode abzuleiten. Die Tatsache, daß die erste Mode zu 90 % an der Antwort beteiligt ist, bedeutet, daß folgende Ungleichung einzuhalten ist:

$$y_{r,0,1} \cdot V_{r,1}(\omega_1, \Omega, D_1) \cdot \mathbf{\Psi}_1[k] = y_{r,1} \cdot \mathbf{\Psi}_1[k] \leq 0.9 \cdot \mathbf{w}_{r,zul}[k]. \tag{8.17}$$

Damit liegt der einzuhaltende modale Verschiebungsbeiwert $y_{r,1,zul}$ fest:

$$y_{r,1,zul} = \frac{0.9 \cdot \mathbf{w}_{r,zul}[k]}{\mathbf{\Psi}_1[k]}. \tag{8.18}$$

Modaler Grenzwert für krafterregte Schwingungen

Analog wird der einzuhaltende modale Beitrag der dominierenden Mode für die krafterregte Schwingung ermittelt. Wiederum wird angenommen, daß die erste Mode zu 90 % an der untersuchten Verschiebungsgröße beteiligt ist. Für eine einzuhaltende Absolutverschiebung $\mathbf{w}_{zul}[k]$ gilt demnach:

$$y_{0,1} \cdot V_1(\omega_1, \Omega, D_1) \cdot \mathbf{\Psi}_1[k] = y_1 \cdot \mathbf{\Psi}_1[k] \leq 0.9 \cdot \mathbf{w}_{zul}[k]. \tag{8.19}$$

Die einzuhaltende modale Beteiligung $y_{1,zul}$ beträgt:

$$y_{1,zul} = \frac{0.9 \cdot \mathbf{w}_{zul}[k]}{\mathbf{\Psi}_1[k]}. \tag{8.20}$$

Die zulässige Beteiligung der dominanten Mode für das fußpunkterregte bzw. krafterregte Mehrfreiheitsgradsystem liegt damit fest. Wie in Kapitel 7 geschildert, kann die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, mit der nun die zulässige modale Beteiligung $y_{r,1,zul}$ bei Fußpunkterregung bzw. analog $y_{1,zul}$ für Krafterregung überschritten wird. Anstelle der Systemgrößen

des in Kapitel 7 betrachteten Einmassenschwingers sind die generalisierten Größen der untersuchten Mode einzusetzen. Die berechnete Überschreitenswahrscheinlichkeit ist gleichzeitig die Wahrscheinlichkeit, mit der die für das Gesamtsystem einzuhaltende Verschiebungsgröße überschritten wird.

8.4.2 β-Punkt

Zur Absicherung der Ergebnisse ist es wünschenswert, die Realisationen der Systemparameter zu kennen, für welche die dominante Eigenform den modal vorgegebenen Grenzwert überschreitet. Wären sie bekannt, könnte damit ein näherer Aufschluß über den bislang vereinfacht deterministisch angenommen Beitrag anderen Moden gewonnen werden. Eventuell müßte dann eine Korrektur der Beteiligungsfaktoren erfolgen. Dies ist jedoch nicht allgemein möglich, da es sich um unendlich viele Realisationen handelt. Anhand des sogenannten β-Punktes wird dennoch versucht, einen verbesserten Einblick in den jeweiligen Beitrag einer Mode zu gewinnen. Der β-Punkt ist die wahrscheinlichste Kombination streuender Systemparameter, für die der gesetzte Grenzwert überschritten ist.

Mit den zum β-Punkt zugehörigen Systemparametern wird die deterministische Modalanalyse nochmals ausgeführt und überprüft, ob sich die prozentualen modalen Beteiligungen ändern. Bei starken Abweichungen ist die stochastische Berechnung anhand der neuen Beteiligungsfaktoren nochmals auszuführen.

Der Zusammenhang soll stellvertretend für eine modale Betrachtung an dem in Kapitel 6.3 gezeigten Einmassenschwinger erläutert werden. Zusätzlich zur Streuung der Masse wird eine Streuung der Federsteifigkeit angenommen; somit ist eine zweidimensionale Verteilung auszuwerten. Die Vergrößerungsfunktion der fußpunkterregten Schwingung soll einen gewählten Wert 2 nicht überschreiten. Abbildung 8.3 zeigt im linken Bild den Teil der Wertekombinationen, der zu einer Vergrößerung ≤ 2 führt, belegt mit zugehörigen Wahrscheinlichkeiten. Das rechte Bild zeigt vergrößert die Parameterkonstellationen, für welche die Vergrößerungsfunktion Werte größer 2 annimmt. Das Volumen unter dem rechten Funktionsausschnitt ergibt demnach die Überschreitenswahrscheinlichkeit der Grenze 2.

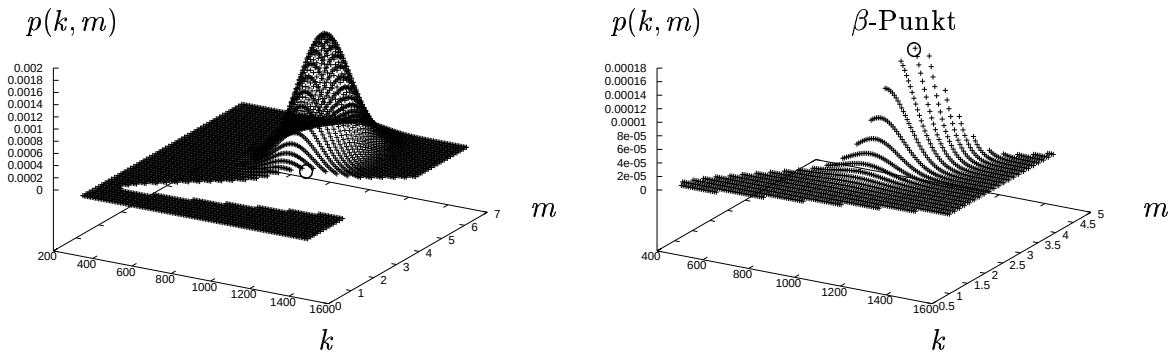


Abbildung 8.3: Parameterkonstellationen für $V \leq 2$ (links) und $V > 2$ (rechts)

Auf den vorderen Achsen sind die Werte für die Steifigkeit angegeben, auf den nach hinten weisenden Achsen die Werte für die Masse.

Den Systemzustand, für den $V = 2$ gilt, kennzeichnet die Trennlinie der Funktionsausschnitte. Unter Zuhilfenahme der zweidimensionalen Verteilungsdichte kann die Parameterkombination mit der größten Wahrscheinlichkeit (β-Punkt) gesucht werden. Er liegt wie in Abbildung 8.3 gezeigt auf der Grenzzustandslinie. Mit den Eingangswerten des Einmassenschwingers $\mu_m = 5.0$ kg, $\sigma_m = 0.8$ kg, $\mu_k = 1000$ N/m und $\sigma_k = 100$ N/m besitzt die zweidimensionale Normalverteilungsdichte an der Stelle des β-Punktes den Wert 0.00117. Steifigkeit und Masse des β-Punktes betragen $k_\beta = 1001$ N/m und $m_\beta = 3.098$ kg.

Entsprechend können die Überlegungen für die dominante Eigenform eines Mehrfreiheitsgradsystems angestellt werden. Allerdings kann dann nur der β-Punkt der generalisierten Größen bestimmt werden. Es ist jedoch ein Rückschluß auf die Systemmatrizen erforderlich.

Im einfachsten Fall gehen die streuenden Größen in jeden Term der Systemmatrizen gleichermaßen ein, so daß die Werte vor die Steifigkeitsmatrix bzw. Massenmatrix gezogen werden können. Die zum β-Punkt zugehörigen Matrizen können dann erzeugt werden, indem die Massenmatrix mit einem Faktor m_β/μ_m und die Steifigkeitsmatrix mit einem Faktor k_β/μ_k multipliziert wird. Mit den neuen Ausgangsmatrizen werden neue modale Beteiligungsfaktoren erzeugt und die Anteile der einzelnen Moden zu den mit den Mittelwerten erzeugten Faktoren verglichen. Bei dieser Vorgehensweise wird vernachlässigt, daß sich aufgrund der geänderten Ausgangsparameter die Eigenformen verändern und bereits die Rückrechnung über den Faktor β-Punkt/Mittelwert nur eine Näherung darstellt.

Schwierig wird es, wenn die streuenden Ausgangsgrößen innerhalb der Systemmatrizen ungleichmäßig verteilt sind, da dann eine einfache Rückrechnung auf die Systemkonfiguration mittels der generalisierten Größen des β-Punktes nicht möglich ist. Es ist in diesem Fall auch davon auszugehen, daß sich die Eigenformen nicht unerheblich ändern. Ein Rückschluß ist demnach nur iterativ möglich.

Da sich die Berechnung über den β-Punkt nur unter größeren Schwierigkeiten bewerkstelligen läßt, wurde keine Aufbereitung für die Anwendung in der Praxis vorgenommen. Ein Beispiel für eine Anwendung ist jedoch in Kapitel 12.1.3 gegeben.

8.4.3 Multifrequente Anregung

Wird das System durch eine beliebige, zeitlich veränderliche Last angeregt, so ist diese im Sinne einer Fouriertransformation in ihre harmonischen Anteile zu zerlegen. Damit entsteht ein Amplitudenspektrum mit zugehörigen Frequenzen. In einem weiteren Schritt ist zu überlegen, ob zur Rechenvereinfachung gewisse Frequenzbereiche durch Filterung zusammengefaßt und durch eine Frequenz mit zugehöriger Lastamplitude repräsentiert werden können.

Zur Bestimmung der Gesamtantwort wird im deterministischen Fall jede Amplitude mit zugehöriger Frequenz als harmonische Last formuliert, einzeln auf das System aufgebracht und die zugehörige Verschiebungsfunktion ermittelt.

Die Antwort des fußpunkterregten Schwingers für den Lastanteil j mit der Anregefrequenz

Ω_j lautet in modaler Darstellung:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_{r,j}(t) &= \sum_{i=1}^{n} y_{r,0,i,j} \cdot V_{r,i,j}(\omega_i, \Omega_j, D_{i,j}) \cdot \mathbf{\Psi}_i \sin(\Omega_j t - \gamma_{i,j}) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} y_{r,i,j} \cdot \mathbf{\Psi}_i \sin(\Omega_j t - \gamma_{i,j}) = \\
&= \mathbf{w}_{r,j} \cdot g_j(t). \qquad (8.21)
\end{aligned}$$

Der Index i bezieht sich wiederum auf einen modalen Beitrag, die Anzahl der betrachteten Moden ist n. Die Vergrößerungsfunktion $V_{r,i,j}(\omega_i, \Omega_j, D_{i,j})$ und der Phasenversatz $\gamma_{i,j}$ ist abhängig von der Mode und der Anregefrequenz, die modale Dämpfung $D_{i,j}$ kann je nach Wahl ebenfalls zusätzlich von der Anregefrequenz abhängig sein.

Der Beiwert $y_{r,0,i,j}$ und der Phasenversatz $\gamma_{i,j}$ berechnen sich nach:

$$\begin{aligned}
y_{r,0,i,j} &= \frac{\mathbf{\Psi}_i^T \mathbf{f}_{r,j}}{\Omega_j^2 \mathbf{\Psi}_i^T \mathbf{M} \mathbf{\Psi}_i} = \frac{f_{r,i,j}^*}{\Omega_j^2 m_i} \\
\tan \gamma_{i,j} &= \frac{2 D_{i,j} \Omega_j / \omega_i}{1 - (\Omega_j / \omega_i)^2}. \qquad (8.22)
\end{aligned}$$

Die generalisierte Last $f_{r,i,j}^*$ der Mode i enthält die Amplitude der Fußpunktverschiebung $w_{0,j}$ des Lastanteils j.

Für den krafterregten Schwinger lautet die Antwort auf den Lastanteil j:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_j(t) &= \sum_{i=1}^{n} y_{0,i,j} \cdot V_{i,j}(\omega_i, \Omega_j, D_{i,j}) \cdot \mathbf{\Psi}_i \sin(\Omega_j t - \gamma_{i,j}) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} y_{i,j} \cdot \mathbf{\Psi}_i \sin(\Omega_j t - \gamma_{i,j}) = \\
&= \mathbf{w}_j \cdot g_j(t). \qquad (8.23)
\end{aligned}$$

Die Größe $y_{0,i,j}$ ist zu berechnen nach:

$$y_{0,i,j} = \frac{\mathbf{\Psi}_i^T \mathbf{f}_j}{\mathbf{\Psi}_i^T \mathbf{K} \mathbf{\Psi}_i} = \frac{f_{i,j}^*}{k_i}. \qquad (8.24)$$

Die generalisierte Last $f_{i,j}^*$ der Mode i enthält die Amplitude der Last $F_{0,j}$ des Lastanteils j.

Für die Berechnung der Maximalamplitude der Gesamtantwort des Systems werden im Falle fußpunkterregter Schwingung zunächst die berechneten Relativverschiebungen auf die Absolutverschiebungen für jeden Lastanteil umgerechnet; im Falle krafterregter Schwingung liegen sie bei Auswertung von Gleichung (8.23) bereits vor. Aus den Absolutverschiebungen $\mathbf{w}_j[k]$ der Einzelantworten wird nach einer Art energetischer Mittelung die maximale Verschiebungsamplitude $\mathbf{w}_{ges}[k]$ infolge aller Lastanteile j ermittelt:

$$\mathbf{w}_{ges}[k] = \sqrt{\sum_j \mathbf{w}_j^2[k]}. \qquad (8.25)$$

Die überschlägige Ermittlung vernachlässigt zur Rechenvereinfachung den gegenseitigen Phasenversatz der Einzelantworten. Damit ist kein geschlossener Ausdruck zur Suche nach einem Maximum der Gesamtantwort gegeben.

Als Eingangswert für eine stochastische Berechnung werden zunächst die modalen Beteiligungsfaktoren für jeden Lastanteil j getrennt wie im Fall der monofrequenten Anregung deterministisch ermittelt (vgl. Gleichungen (8.14) und (8.15)). Im günstigsten Fall stellt sich heraus, daß wiederum eine Mode für alle Lastanteile eine dominante Rolle spielt.

Diese Mode wird im folgenden stochastisch ausgewertet, während die übrigen Moden deterministisch behandelt werden. Beteiligungsfaktoren $bet_{i,j}$ beschreiben den Beitrag der Mode i zur Gesamtantwort für den Lastanteil j. Die Antworten auf die Lastanteile j in Gleichung (8.25) lassen sich aufspalten in den stochastisch zu untersuchenden maßgeblichen modalen Anteil $\mathbf{w}_{i,j}[k]$ und den verbleibenden, im weiteren deterministisch behandelten Rest von $(1.0 - bet_{i,j}) \cdot \mathbf{w}_j[k]$:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{ges}[k] &= \sqrt{\sum_j \mathbf{w}_j[k]^2} = \\ &= \sqrt{\sum_j (\mathbf{w}_{i,j}[k] + (1.0 - bet_{i,j}) \cdot \mathbf{w}_j[k])^2}. \end{aligned} \tag{8.26}$$

Die Antwortbeiträge $\mathbf{w}_{i,j}[k]$ werden durch $y_{0,i,j} \cdot V_{i,j}(\omega_i, \Omega_j, D_{i,j}) \cdot \mathbf{\Psi}_i$ ersetzt. Die stochastische Auswertung beschränkt sich im weiteren auf das in der Vergrößerungsfunktion $V_{i,j}(\omega_i, \Omega_j, D_{i,j})$ enthaltene Quadrat der streuenden Eigenkreisfrequenz $\alpha_i = \omega_i^2$.

In einem willkürlich gewählten Beispiel mit zwei harmonischen Lastanteilen wird für die erste Mode ein Beitrag von 90 % auf die untersuchte Antwortgröße $\mathbf{w}_1[k]$ infolge des Lastanteils 1 und 80 % auf die untersuchte Antwortgröße $\mathbf{w}_2[k]$ infolge des Lastanteils 2 ermittelt:

$$\begin{aligned} \text{Mode 1, Lastanteil 1} \quad &: \quad \mathbf{w}_{1,1}[k] = bet_{1,1} \cdot \mathbf{w}_1[k] = 0.9 \cdot \mathbf{w}_1[k] \\ \text{Mode 1, Lastanteil 2} \quad &: \quad \mathbf{w}_{1,2}[k] = bet_{1,2} \cdot \mathbf{w}_2[k] = 0.8 \cdot \mathbf{w}_2[k]. \end{aligned}$$

Auf Grundlage von Gleichung (8.26) ergibt sich für die beiden Lastanteile:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{ges}[k] &= \sqrt{\mathbf{w}_1[k]^2 + \mathbf{w}_2[k]^2} = \\ &= \sqrt{(\mathbf{w}_{1,1}[k] + (1.0 - 0.9) \cdot \mathbf{w}_1[k])^2 + (\mathbf{w}_{1,2}[k] + (1.0 - 0.8) \cdot \mathbf{w}_2[k])^2} = \\ &= \sqrt{(y_{0,1,1} \cdot V_{1,1} \cdot \mathbf{\Psi}_1[k] + 0.1 \cdot \mathbf{w}_1[k])^2 + (y_{0,1,2} \cdot V_{1,2} \cdot \mathbf{\Psi}_1[k] + 0.2 \cdot \mathbf{w}_2[k])^2}. \end{aligned} \tag{8.27}$$

Für den Fall der multifrequenten Anregung ist eine Umrechnung eines gegebenen zulässigen Grenzwerts $\mathbf{w}_{zul}[k]$ auf einzuhaltende modale Grenzwerte nicht sinnvoll. Die Vergrößerungsfunktionen $V_{1,1}$ und $V_{1,2}$ werden durch stochastische Funktionen $V_{1,1}(\theta)$ und $V_{1,2}(\theta)$ ersetzt. Sie enthalten die streuende Eigenfrequenz α_1. Die Gleichung (8.27) wird für gewählte diskrete Realisationen von α_1 ausgewertet und dem Ergebnis die Wahrscheinlichkeit der gewählten Realisation zugeordnet. Daraus entsteht eine Verteilungsfunktion der Gesamtverschiebung, anhand derer das Überschreiten eines gegebenen Grenzwerts $\mathbf{w}_{zul}[k]$ berechnet wird.

Auf die Einführung von streuenden Größen neben den in α_i enthaltenen (d.h. auf eine Streuung der modalen Dämpfung, der Anregefrequenzen Ω_i oder den zugehörigen Lastamplituden) sollte verzichtet werden. Für die Berechnung mit zusätzlichen Streuungen wäre eine vieldimensionale numerische Auswertung von Funktionen nötig, deren Aufwand im Rahmen einer Erstabschätzung nicht gerechtfertigt scheint.

Die programmtechnische Umsetzung des Vorgehens für den Fall monofrequenter und multifrequenter Anregung ist in Anwenderprogrammen aufbereitet (vgl. Kapitel 10).

8.5 Mehrere dominante Eigenformen

8.5.1 Monofrequente Anregung

Ist nach Bestimmung der Beteiligungsfaktoren keine dominante Eigenform erkennbar, so muß auf ein modifiziertes Verfahren zurückgegriffen werden. Grundsätzlich ist die gleichzeitige stochastische Behandlung mehrerer Eigenformen innerhalb des beschriebenen Vorgehens nicht in praxisgerechter Weise möglich.

Die stochastische Berechnung muß auf eine Mode beschränkt bleiben, wobei die anderen Moden in einer quasi-stochastischen Auswertung erfaßt werden. Wie in Kapitel 8.4.1 angeführt werden zunächst die Beteiligungsfaktoren der einzelnen Moden an der untersuchten Verschiebungsgröße berechnet. Danach sollte jene Eigenform stochastisch untersucht werden, die den größten (wenn auch nicht allein maßgeblichen) Einfluß auf die Antwort hat. Für den mit dem Beteiligungsfaktor berechneten Grenzwert wird die Überschreitenswahrscheinlichkeit dieses Wertes ermittelt. Zur quasi-stochastischen Einbeziehung der anderen beteiligten Moden werden weitere Beteiligungsfaktoren in deterministischen Parameterstudien ermittelt. Dazu werden beispielsweise für die streuenden Größen Mittelwert $\pm$ Standardabweichung eingesetzt und damit neuerlich der maximal zulässige Beitrag der stochastisch betrachteten Eigenform berechnet. Wird das Verfahren im Sinne einer Simulation für weitere Wertekombinationen durchgeführt, so entsteht ein Feld möglicher Überschreitenswahrscheinlichkeiten, das einen umfassenderen Eindruck des Systemverhaltens vermitteln kann als eine einzelne Auswertung.

Soll die Überschreitenswahrscheinlichkeit bei Mitwirkung mehrerer Moden genauer bestimmt werden, so wäre, wie eingangs erwähnt, auf die Berechnung der streuenden Verschiebungsgrößen nach Gleichung (4.13) zurückzugreifen. Die Berechnung ist jedoch sehr aufwendig und sollte nur bei starken Zweifeln an dem näherungsweise bestimmten Wertebereich angewendet werden.

8.5.2 Multifrequente Anregung

Auch für den Fall multifrequenter Anregung sollten Parameterstudien erstellt werden, wenn keine Mode zu erkennen ist, die für jeden der betrachteten Lastanteile den dominierenden Beitrag leistet. Dies dürfte in der Praxis der Regelfall sein. Die Berechnung sollte sich auf die für den einzelnen Lastanteil dominierende Mode beschränken, allerdings sollte dabei, wie oben für den monofrequenten Fall beschrieben, eine quasi-stochastische Einbeziehung anderer mitwirkender Eigenformen erfolgen. Zur Anwendung kommt das in Kapitel 8.4.3 geschilderte Vorgehen.

Im Falle von Mehrfreiheitsgradsystemen mit streuenden Größen ergeben sich gewisse Nachteile für das gewählte modale Vorgehen. Zeigt sich keine Eigenform dominant, so muß durch Parameterstudien ein Wertebereich für die gesuchte Überschreitenswahrscheinlichkeit abgesteckt werden. Dies mag als Einschränkung für das Verfahren aufgefaßt werden. Aus der praktischen Erfahrung zeigt sich jedoch, daß viele Systemreaktionen überschlägig mit einem Einfreiheitsgradsystem abschätzbar sind. Gerade für Vorberechnungen wird in der Regel auf eine aufwendige Systemformulierung verzichtet. In diesem Fall stellt das gefundene Verfahren eine zuverlässige Möglichkeit zur Erfassung der Streubreite des Ergebnisses und von Überschreitenswahrscheinlichkeiten dar.

Kapitel 9

Anwendung auf Ersatzmodelle

Das entwickelte Verfahren soll nun an praktischen Beispielen von Gebäuden erprobt werden. Als spezielle Anregungsart wird Fußpunkterschütterung betrachtet. Die Gebäude werden durch die von Breitsamter [14] entwickelten Ersatzsysteme beschrieben. Sie besitzen den Vorteil, mit einer reduzierten Zahl von Freiheitsgraden die mechanischen Eigenschaften der Systeme abbilden zu können. So wird der Mehraufwand der stochastischen Berechnung durch die Vereinfachung der Systemmatrizen zumindest teilweise kompensiert. Das Verhalten von Decken, Wandscheiben und das Zusammenspiel einzelner Bauteile wird durch charakterisierende Kennwerte abgebildet, die in die Systemmatrizen des reduzierten Systems Eingang finden. Die Ersatzsysteme sind bislang auf deterministische Eingangsgrößen beschränkt. Ihre Verwendbarkeit für streuende Größen wird im folgenden untersucht.

Dabei steht die Ermittlung der streuenden Eigenfrequenzen im Vordergrund. Sie stellt den ersten Schritt der stochastischen Berechnung dar. Es wird sich hier bereits zeigen, inwieweit die Ersatzmodelle mit dem gefundenen Verfahren kombinierbar sind. Es wird überdies ein Ausblick auf die Bestimmung der Überschreitenswahrscheinlichkeiten von im eingeschwungenen Zustand einzuhaltenden Antwortgrößen gegeben.

Hierzu werden Beispiele untersucht, für die Breitsamter [14] eine FE-Formulierung dem Ersatzmodell gegenüberstellt und dabei die Anwendung der Ersatzmodelle für eine deterministische Berechnung absichern konnte. Somit ist eine Überprüfung möglich, ob die stochastische Berechnung zu plausiblen Werten der streuenden Eigenfrequenzen führt.

Darüber hinaus werden weitere Fragestellungen betrachtet, die den theoretischen Hintergrund des Vorgehens absichern. Zum einen wird untersucht, welche Unterschiede entstehen, wenn ein streuender Parameter anstatt durch eine Zufallsgröße durch einen Zufallsprozeß dargestellt wird. Zum anderen wird anhand einer Vergleichsrechnung mit einer Monte-Carlo-Simulation überprüft, wie der Rayleighquotient die Güte der Ergebnisse beeinflußt.

Es zeigt sich, daß die Verwendung der Ersatzmodelle bei stochastischen Untersuchungen in bestimmten Fällen Probleme verursacht. Diese lassen sich zumeist durch einen Verzicht auf Anwendung des Ersatzmodells und durch die Verwendung einer herkömmlichen FE-Formulierung umgehen. Für diese Fälle und auch für die Fälle, in denen ein Ersatzmodell ohne Schwierigkeiten einsetzbar ist, werden in Kapitel 10 Computerprogramme vorgestellt, die dem Anwender eine stochastische Berechnung in einfacher Weise ermöglichen.

Zunächst wird kurz auf die Problematik der Gebäudeerschütterungen eingegangen und die Ersatzmodelle werden mit ihren Eigenschaften und ihren Anwendungsbereichen vorgestellt.

9.1 Gebäudeerschütterungen

Gebäudeerschütterungen werden durch unterschiedlichste Arten der Anregung ausgelöst, beispielsweise infolge Straßen- und Schienenverkehr, infolge von Sprengungen und Bauarbeiten, z.B. beim Einvibrieren oder Ziehen von Spundbohlen, oder infolge von dynamischen Arbeitsvorgängen, wie dem Einsatz großer Pressen und Maschinen.

Die Prognose der Auswirkungen von Erschütterungen auf Gebäude stützt sich derzeit auf grobe Abschätzungen, auf Berechnungen mit vereinfachten Ersatzmodellen oder auf meist aufwendige Berechnungen mit Finiten Elementen. Einfache Abschätzungen sind mit großen Unsicherheiten verbunden und können nur bestimmte Arten von Voraussagen zuverlässig treffen, z.B. hinsichtlich globaler Energiegrößen. Genaue deterministische Untersuchungen erfordern einen hohen Modellierungs- und Rechenaufwand. Dieser steht in deutlichem Widerspruch zu unvermeidlichen Unsicherheiten bei der Anregung und bei Systemparametern. Unsicherheiten treten dadurch auf, daß mitbewegte Massen, Einspanngrade, die Mitwirkung leichter Einbauten, die räumliche Tragwirkung und insbesondere die Bodeneigenschaften im Planungsstadium nicht genau erfaßbar sind.

9.2 Ersatzmodelle nach Breitsamter

Breitsamter geht von mehrstöckigen Neubauten aus, für die ein Schwingungsnachweis gegen von außen eingetragene Erschütterungen zu führen ist.

Die Erschütterungen am Ort des geplanten Bauwerks liegen als Meßwerte der Freifeldbewegung des Bodens im Frequenzraum vor. Betrachtet werden nur Anregefrequenzen des niedrigen und mittleren Frequenzbereichs (bis ca. 100 Hz). Für die Berechnung wird die Anregung für eine Frequenz als stehende Welle formuliert.

Zur Darstellung der Boden-Bauwerk-Wechselwirkung werden neben Feder-Dämpfer-Systemen aus der Literatur (z.B. Wolf [132] und [133]) „Interaktionsfedern“ und „Interaktionsdämpfer“ verwendet. Sie berücksichtigen bei unterschiedlichen Fundamentgeometrien die Wechselwirkung benachbarter Fundamente.

Es wird zwischen Hochhäusern und Flachbauten mit jeweils steifem bzw. weichem Keller sowie starker bzw. schwacher Aussteifung unterschieden.

Den Anwendungsfällen stehen vier Arten von Ersatzmodellen gegenüber:

- Timoshenkogrundmodell,
- erweitertes Timoshenkomodell,

- Vertikalschwingungsmodell,
- Säulenmodell.

Die Ersatzmodelle werden kurz vorgestellt. Die Auswahl des Modells, die Anleitung zur Formulierung und Anwendungsgrenzen sind der Arbeit von Breitsamter [14] zu entnehmen.

Das Timoshenkogrundmodell

Das Timoshenkogrundmodell sieht vor, ein Hochhaus durch einen aufrecht stehenden Balken zu modellieren, wobei Rahmensteifigkeiten durch die Schubsteifigkeiten abgebildet werden. Mit seiner Hilfe ist es möglich, Hochhäuser mit steifem Keller direkt zu modellieren. Für Hochhäuser mit weichem Keller muß das Kellergeschoß in einer FE-Formulierung vorliegen, auf die das Timoshenkogrundmodell aufgesetzt wird.

Wird ein höheres Bauwerk mit aufgehendem Kern, welcher die Biegung aufnehmen kann, abgebildet, so ist die Euler-Bernoulli-Balkentheorie (reine Biegeverformung) ausreichend. Bei Darstellung eines niedrigeren Gebäudes mittels eines gedrungenen Balkens ist die Berücksichtigung der Schubverformung erforderlich, was durch die Formulierung des Balkens als Timoshenkobalken gewährleistet wird.

Bei einem FE-Programm, das die Wölbkrafttorsion und die getrennte Lage von Schwerpunkt und Schubmittelpunkt berücksichtigen kann, ist die FE-Formulierung des Ersatzmodells einfach möglich.

Falls nicht vorhanden, ist eine Aufbereitung für ein Programm mit konventionellen Elementen vorgesehen. Konventionell bedeutet in diesem Zusammenhang, daß das Programm Normalkraft, Biegung, Schubverformung, St.Venantsche Torsion und Rotationsträgheiten berücksichtigen kann. Um alle mechanischen Eigenschaften des Systems zu erfassen, werden Einzelstäbe mit besonderen Eigenschaften in charakteristischen Punkten des Querschnitts definiert.

Das erweiterte Timoshenkomodell

Das erweiterte Timoshenkomodell baut auf dem Grundmodell auf und dient dazu, die Kopplung zwischen den gleichsinnigen Deckenschwingungen und der Längsschwingung des Gesamtgebäudes abzubilden.

Hierfür werden die entsprechenden Deckeneigenformen als Einmassenschwinger abgebildet und diese an den Timoshenkobalken angehängt. Die Ermittlung der Kennwerte für Decken mit unterschiedlichen Einspanngraden ist in einem sogenannten Deckenkatalog niedergelegt. Die Anwendung der Methode ist nur im Frequenzraum möglich.

Das Vertikalschwingungsmodell

Das Vertikalschwingungsmodell wurde entwickelt, um die „Querschnittsverwölbung“ infolge Normalkraft zu berücksichtigen. Als Querschnitt wird hierbei die Fläche angesehen, die bei einem horizontalen Schnitt durch das Gebäude sichtbar wird. Das Modell ist auf vertikale Deckenbewegungen beschränkt. Die Normalkraftverwölbung bildet sich dann aus, wenn der

Gebäudequerschnitt aus steifen Teilen und aus weichen Teilen besteht. Die Modellierung kann für Hochhäuser mit steifem Keller direkt erfolgen. Für Hochhäuser mit weichem Keller wird das Vertikalschwingungsmodell auf eine FE-Modellierung des Kellergeschosses aufgesetzt.

Das Vertikalschwingungsmodell verwendet in Längsrichtung die Eigenformmethode und in Querrichtung die FE-Methode. Die Bestimmung der Querschnittswerte entfällt, dafür ist ein FE-Modell des gesamten Stockwerks zu erstellen.

Das Säulenmodell

Das Säulenmodell wird angewendet für Flachbauten mit weichem Keller. Es stellt einen Spezialfall des erweiterten Timoshenkomodells dar. Das Säulenmodell ist auf vertikale Verschiebungen beschränkt, während bei Anwendung des erweiterten Timoshenkomodells vertikale und horizontale Verschiebungen berechnet werden.

Die Modellierung des Gebäudes wird auf einen im Grundriß kleinen, „repräsentativen“ Ausschnitt beschränkt und auf eine „repräsentative“ Säule reduziert. Die Säule wird als vertikaler massebelegter Dehnstab (EA-Stab) modelliert, dessen Fußpunkt auf Bodenfedern gelagert ist. Die Geschoßdecken werden wie beim erweiterten Timoshenkomodell gemäß ihren Eigenformen als Einmassenschwinger jeweils in den Deckenebenen auf den EA-Stab aufgebracht.

9.3 Stochastische Formulierung der Ersatzmodelle

Die oben genannten Ersatzmodelle werden nunmehr hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit innerhalb einer stochastischen Berechnung untersucht. Es werden die Gebäude verwendet, die Breitsamter zum jeweiligen Ersatzsystem vorstellt. Damit ist die Vergleichbarkeit zwischen deterministischer und stochastischer Berechnung erleichtert.

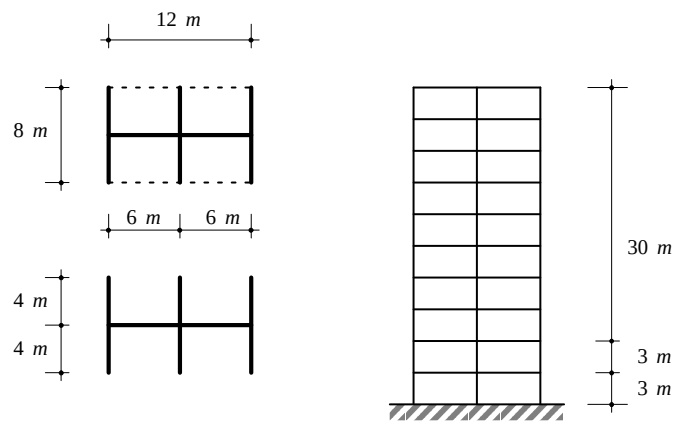


Abbildung 9.1: Grundriß, Querschnitt und Aufriß des betrachteten Gebäudes

9.3.1 Anwendung auf das Timoshenkogrundmodell

Der Betrachtung wird das in Abbildung 9.1 gezeigte Stockwerksgebäude zugrunde gelegt. Für die Berechnung wird das Timoshenkogrundmodell verwendet.

An diesem Beispiel wird zum einen überprüft, welche Unterschiede sich ergeben, wenn statt einer Zufallsgröße ein stochastischer Prozeß zur Beschreibung des Elastizitätsmoduls verwendet wird. Zum anderen wird die Formulierung der Kennwerte für eine stochastische Berechnung hergeleitet.

Elastizitätsmodul als Prozeß und Zufallsgröße

Der Elastizitätsmodul der Wände wird als streuend betrachtet und mittels einer normalverteilten Zufallsgröße und eines Gaußschen Zufallsprozesses definiert. Die unterschiedlichen Ergebnisse der ersten beiden Eigenfrequenzen und ihrer Streuungen werden verglichen (Gehrmann, Grundmann [43]). Die Ergebnisse sind in Abbildung 9.2 wiedergegeben.

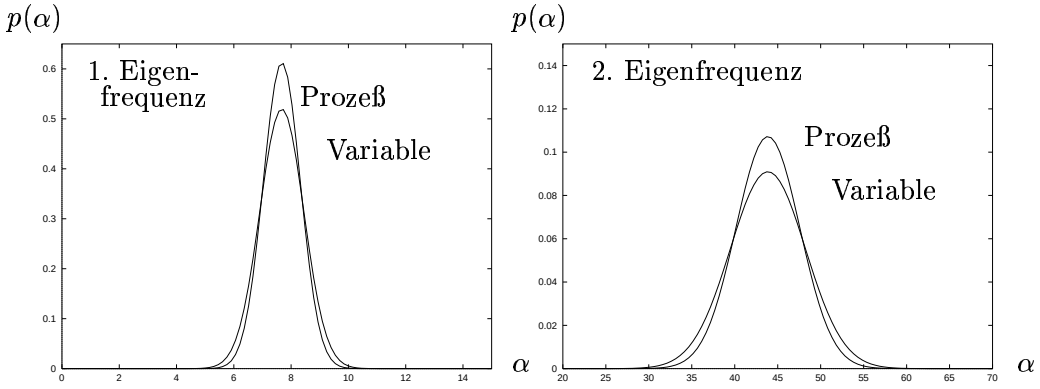


Abbildung 9.2: Quadrat der ersten beiden Biegeeigenfrequenzen für den Elastizitätsmodul als stochastischen Prozeß und als stochastische Variable

Für eine zunächst einfache Beschreibung wird der Prozeß nach zwei Termen abgebrochen:

$$\begin{aligned} E(x,\theta) &= E_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i}\, f_i(x)\, \xi_i(\theta) = \\ &= E_0 + E_1 \sqrt{\lambda_1}\, \frac{\cos(\omega_1 (x-a))}{\sqrt{a + \frac{\sin(2\omega_1 a)}{2\omega_1}}}\, \xi_1. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Der Mittelwert E_0 wird als unabhängig von der Längskoordinate des Balkens angenommen. Die Koordinate x wird so gewählt, daß ihr Ursprung auf halber Höhe eines jeden Stockwerks liegt. Der Prozeß ist über ein Stockwerk, das einem Finiten Element des aufgehenden Biegebalkens entspricht, in den Grenzen [-a;a] definiert.

Die Steifigkeitsmatrix des Biegebalkens mit dem Elastizitätsmodul als stochastischem Prozeß wird mit Gleichung (3.10) entwickelt. In diesem speziellen Fall werden folgende Eingangswerte verwendet:

$$\begin{aligned} E_0 &= 30\,000 \text{ MN/m}^2 \\ E_1 &= 3\,000 \text{ MN/m}^2 \\ a &= 1.5 \text{ m} \qquad \text{halbe Stockwerkshöhe} \\ b = c^{-1} &= 4 \text{ m} \qquad \text{Korrelationslänge.} \end{aligned}$$

Die Variable wird als normalverteilte Zufallsgröße mit dem Ansatz

$$E(\theta) \quad = \quad E_0 + E_1 \, \xi_1 \tag{9.2}$$

beschrieben. Es ist zu beobachten, daß die Darstellung mittels einer Variablen zu einer breiteren Verteilungsdichte führt und eine größere Überschreitenswahrscheinlichkeit bei Integration der Randbereiche ergibt. Die Darstellung des Elastizitätsmoduls als Variable liegt damit auf der sicheren Seite. Dies bestätigt die von Juli [80] getroffene Aussage, daß allgemein der ungünstigste Fall gegeben ist, wenn für ein Balkenelement die streuende Steifigkeit und Massebelegung längs der Systemachse als Zufallsvariable mit konstantem Mittelwert und konstanter Streuung angenommen wird.

Streicher [125] stellte im Rahmen einer Diplomarbeit weitergehende Untersuchungen hinsichtlich des Grads der Reihenentwicklung und der Wahl der Parameter an. Er formulierte zudem ein Biegebalkenelement und ein Stabelement innerhalb des FE-Programms Cal88, mit denen der Elastizitätsmodul und die Massebelegung als stochastische Prozesse in die FE-Berechnung einzuführen sind. Zusammenfassend lassen sich folgende Aussagen festhalten:

- Die Wahl der Korrelationslänge $b = c^{-1}$ (vgl. Gleichung (2.7)) hat entscheidenden Einfluß auf das Verhalten des stochastischen Prozesses. Ist b klein gegenüber der Elementlänge, so ergibt sich eine relativ kleine Standardabweichung der Eigenkreisfrequenz. Für ein gegenüber der Elementlänge großes b nähert sich der Elastizitätsmodul, welcher durch einen Prozeß beschrieben wird, einer Variablen; für $b \to \infty$ geht der Prozeß in eine Zufallsvariable über. Die Standardabweichung der Ergebnisse wird entsprechend größer.

- Die zweidimensionale Entwicklung des stochastischen Prozesses einer Eingangsgröße ist ausreichend, d.h. der Zufallsprozeß wird mit zwei Zufallsvariablen ξ_1 und ξ_2 ausreichend genau beschrieben. Reihenglieder, die sich ab ξ_3 ergeben, haben unbedeutenden Einfluß auf das Ergebnis und werden zur Verringerung des Rechenaufwandes vernachlässigt.

- Zwischen Steifigkeit und Quadrat der Eigenkreisfrequenz besteht ein proportionaler Zusammenhang. So genügt es im Falle des Elastizitätsmoduls als einziger streuenden Größe, den Polynomgrad der Chaospolynome in der Entwicklung der Ergebnisgröße mit $p = 1$ zu wählen. Damit ist die Standardabweichung bestimmt. Höhere Momente existieren nicht. Ist eine streuende Massebelegung zu berücksichtigen, ist der Polynomgrad der Ergebnisgröße mit $p \geq 2$ anzusetzen.

- In einer FE-Formulierung kann der stochastische Prozeß für jedes Systemelement neu definiert werden, ohne das gesamte Tragwerk betrachten und Korrelationen zwischen

den Bereichen herstellen zu müssen. Vereinfachend können für jeden Bereich dieselben Basisvariablen verwendet werden. Ein Vergleich zeigt, daß sich die Streuung der Ergebnisse nur unerheblich gegenüber den Ergebnissen ändert, für die je Bereich ein neuer Satz Basisgrößen ξ_i eingeführt wurde. Die Erweiterung des stochastischen Raums für jeden Bereich bzw. jedes Finite Element ist somit nicht notwendig.

Formulierung stochastischer Kennwerte

Bei Anwendung des Timoshenkogrundmodells wird das Gebäude durch einen aufgehenden Hauptstab abgebildet. Der Stab wird in stockwerkshohe Elemente diskretisiert. Die Elemente werden als Timoshenkobalken mit folgender Steifigkeitsmatrix formuliert [94]:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \frac{EI}{l^3\,(1+\eta)} \cdot \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ & (4+\eta)l^2 & 6l & (2-\eta)l^2 \\ & & 12 & 6l \\ \text{symm.} & & & (4+\eta)l^2 \end{bmatrix} \\ \text{mit } \eta &= \frac{12EI}{GA_s l^2}. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Der Faktor η berücksichtigt das Schubverhalten des Querschnitts. Wird η zu Null gesetzt, so entspricht $\mathbf{K}$ der Steifigkeitsmatrix des Biegebalkens nach Bernoulli.

Bei der stochastischen Formulierung der Matrix ergibt sich aus der Verwendung von η eine Schwierigkeit: Der Faktor η enthält u.a. den Elastizitätsmodul E, den Schubmodul G, das Flächenträgheitsmoment I_y bzw. I_z und die in einer Vorlaufrechnung zu bestimmende Schubfläche A_s. Solange die Geometriegrößen als deterministisch angesetzt werden, ist η auch bei streuendem Elastizitätsmodul und Schubmodul - wegen $G = \frac{E}{2\cdot(1+\nu)}$ - eine deterministische Größe. Werden Geometriegrößen als streuend angenommen, ist eine Darstellung der Steifigkeitsmatrix als Reihenentwicklung nach

$$\mathbf{K}(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{K}_i\,\Gamma_i \approx \sum_{i=0}^{n} \mathbf{K}_i\,\Gamma_i \tag{9.4}$$

nicht mehr in einfacher Weise möglich. Eine Vorberechnung (beispielsweise Koeffizientenvergleich mit stochastischer Wichtung) wäre notwendig, was jedoch einen zusätzlichen Rechenaufwand bedeutet. Wenn möglich sollte auf streuende Geometriegrößen verzichtet werden. Da die Größen in der Regel bekannt sind, stellt dies keine erhebliche Einschränkung dar. Besteht jedoch die dringende Notwendigkeit für eine Untersuchung mit streuender Geometrie, muß das zu untersuchende System durch eine herkömmliche Formulierung mit Bernoullibalken-Elementen ohne Rückgriff auf die Ersatzmodelle und den Timoshenkobalken dargestellt werden. Allerdings ist auch in diesem Fall zu berücksichtigen, daß Größen im Nenner der Elementmatrizen deterministisch sein müssen.

Die Berechnung von lokalen Verschiebungsgrößen - beispielsweise Deckenverschiebungen - ist vom Timoshenkogrundmodell nicht vorgesehen. Es erfaßt das globale Verhalten eines Hochhauses und ist vor allem zur Bestimmung von Eigenfrequenzen geeignet. Die Berechnung von Überschreitenswahrscheinlichkeiten gegebener Grenzen von Verschiebungsgrößen ist mit diesem Modell somit nicht möglich.

Zusammenfassend ist für den Ersatzmodelltyp „Timoshenkogrundmodell“ festzuhalten, daß die Annahme streuender Materialparameter einfach in die stochastische Rechnung einzubeziehen ist. Bei Berücksichtigung der Schubverformung ist auf streuende Geometriegrößen zu verzichten. Die Schubfläche A_s, die Flächenträgheitsmomente I_y bzw. I_y und die Elementlänge l müssen deterministische Werte besitzen.

9.3.2 Anwendung auf das erweiterte Timoshenkomodell

Die Modellierung des erweiterten Timoshenkomodells sieht vor, die Deckeneigenformen durch in den Stockwerksknoten eingehängte Einmassenschwinger darzustellen. Die Kopplung von Biegeschwingungen der Decken und Wände wird über sogenannte Koppelfedern berücksichtigt. Ein Deckenschwinger besteht in diesem Fall aus einer generalisierten Masse, einer generalisierten Feder und einer ruhenden Restmasse.

Die Kennwerte der Einmassenschwinger werden auch für das Säulenmodell verwendet als Sonderfall des erweiterten Timoshenkomodells. Sie sind für unterschiedliche Einspanngrade in einem Deckenkatalog zusammengestellt.

Werden für die stochastische Berechnung streuende Deckeneigenschaften angenommen, so ist zunächst eine stochastische Vorberechnung der Kenngrößen der Einmassenschwinger vonnöten.

Gelenkig gelagerter Einfeldträger

Anhand des einfachen Beispiels eines gelenkig gelagerten Einfeldträgers wird die Auswirkung streuender Deckeneigenschaften auf die Berechnung der Einmassenschwinger-Kennwerte betrachtet.

Allgemein erfolgt die Ermittlung der Kennwerte aus dem Vergleich der Schwingungsantwort eines Einmassenschwingers und der Eigenform einer Decke, jeweils unter Fußpunktanregung. Aus einer analytischen Lösung mit dem dynamischen Drehwinkelverfahren oder einem FE-Programm sind für die Decke zu ermitteln:

Eigenkreisfrequenz:	ω_i
Eigenform (deterministisch):	ψ_i
Ruhemasse:	$M = \int dm$
Koppelmasse:	$\overline{M_i} = \int \psi_i dm$
Generalisierte Masse:	$M_i^* = \int \psi_i^2 dm$
Generalisierte Steifigkeit:	$K_i^* = \omega_i^2 M_i^*$

Der Index i steht für die i-te darzustellende Eigenform. Die Begriffe wie „Ruhemasse“, „Koppelmasse“, usw. werden von Breitsamter erklärt [14]. Die Restmasse wird hier mit m_R bezeichnet (bei Breitsamter: m_0), um eine Verwechslung mit m_0, dem Mittelwert der Chaospolynom-Reihenentwicklung zu verhindern. Die Steifigkeitswerte werden mit k bezeichnet, während Breitsamter c verwendet.

Damit erhält man die Kennwerte des auf Fußpunkterregung abgestimmten Einmassenschwingers: die ruhende Deckenrestmasse m_R, die Federkonstante k_i und die schwingende Masse m_i. Die Formeln zur Berechnung dieser Größen lauten:

$$m_i = \frac{\overline{M_i}^2}{M_i^*}, \quad k_i = \omega_i^2 m_i \quad \text{und} \quad m_R = M - \sum m_i.$$

Die Werte sind für den Fall einer gleichphasigen und einer gegenphasigen Anregung der beiden Auflager zu ermitteln. Dabei werden unterschiedliche Eigenformen angeregt. Für die tatsächlich vorhandene Phasenlage werden beide Beschreibungen nach Vorschrift interpoliert.

Die Größen sind nun für eine stochastische Berechnung aufzubereiten.

Streuende Steifigkeit

Wird nur der Elastizitätsmodul als streuend betrachtet, die Masse dagegen als deterministisch, ist nur die Federsteifigkeit durch eine Reihenentwicklung auszudrücken. Da der Elastizitätsmodul linear in k_i eingeht, sind die streuenden Federkennwerte direkt zu formulieren. Für gleichphasige Anregung lauten sie:

$$k_i(\theta) = \frac{4(2i-1)^2\pi^2 E(\theta) I}{L^3}. \tag{9.5}$$

Die Federsteifigkeiten $k_i(\theta)$ bei gegenphasiger Anregung lauten:

$$k_i(\theta) = \frac{16 i^2 \pi^2 E(\theta) I}{L^3}. \tag{9.6}$$

Streuende Massebelegung

Wird die Massebelegung der gelenkig gelagerten Decke als streuend betrachtet und bleibt die Steifigkeit ein deterministischer Wert, ist zur Berechnung der Streuung der Einzelmassen $m_i(\theta)$ und Restmasse $m_R(\theta)$ eine Division der Massekenngrößen notwendig. Sie führt aufgrund von Reihenentwicklungen im Zähler und Nenner zu Schwierigkeiten bei der weiteren Berechnung. Für eine konstante Massebelegung des gelenkig gelagerten Balkens $\mu(\theta)$ läßt sich jedoch die Berechnungsvorschrift für $m_i(\theta)$ durch Ausklammern vereinfachen zu:

$$m_i(\theta) = \mu(\theta) \frac{(\int_0^l \psi(x)_i dx)^2}{\int_0^l \psi(x)_i^2 dx} = \sum_j m_{j_i} \Gamma_j.$$

Der Index j bezieht sich auf die Reihenentwicklung mit den Chaospolynomen, der Index i auf die betrachtete Mode. Die Beiwerte für $\mu(\theta)$ als normalverteilte Größe bei gleichphasiger Anregung ergeben für Γ_0 und Γ_1:

$$\begin{aligned} m_{0_i} &= m_\mu \frac{4L}{(2i-1)^2\pi^2} \\ m_{1_i} &= \sigma_\mu \frac{4L}{(2i-1)^2\pi^2}. \end{aligned}$$

Bei gegenphasiger Anregung lauten die Beiwerte für zu Γ_0 und Γ_1:

$$\begin{aligned} m_{0_i} &= m_\mu \frac{L}{i^2\pi^2} \\ m_{1_i} &= \sigma_\mu \frac{L}{i^2\pi^2}. \end{aligned}$$

Die Restmasse m_{R_n} ergibt sich für den Fall gleichphasiger Anregung zu:

$$\begin{aligned} m_{R_n} &= \frac{\mu(\theta)L}{2} - \sum_{i=1}^{n} m_i(\theta) = \\ &= \left(\frac{m_\mu L}{2} - \sum_{i=1}^{n} m_{0_i}\right)\Gamma_0 + \left(\frac{\sigma_\mu L}{2} - \sum_{i=1}^{n} m_{1_i}\right)\Gamma_1. \end{aligned}$$

Die Variable n bezeichnet dabei die Anzahl der einbezogenen Eigenformen. Bei gegenphasiger Anregung erhält man für die Restmasse:

$$\begin{aligned} m_{R_n} &= \frac{\mu(\theta)L}{6} - \sum_{i=1}^{n} m_i(\theta) = \\ &= \left(\frac{m_\mu L}{6} - \sum_{i=1}^{n} m_{0_i}\right)\Gamma_0 + \left(\frac{\sigma_\mu L}{6} - \sum_{i=1}^{n} m_{1_i}\right)\Gamma_1. \end{aligned}$$

Die Berechnung der Ersatzfederkonstanten k_i hängt nicht von der streuenden Massebelegung ab.

Zur Überprüfung, ob die Federsteifigkeit auch bei Anwendung des Zusammenhangs $k_i(\theta) = \alpha(\theta)m_i(\theta)$ eine deterministische Größe ergibt, um also die Güte der Chaospolynomentwicklung zu testen, werden die Größen $\alpha(\theta)$ und $m_i(\theta)$ mit ihrer Reihenentwicklung auf Grundlage der Chaospolynome eingesetzt. Dazu ist in einer Vorlaufrechnung die Reihenentwicklungen für die Eigenwerte α_i der Decken zu bestimmen. Anschließend ist diese Reihenentwicklung mit der Reihenentwicklung der Einzelmassen zu multiplizieren. Im vorliegenden Fall wird von einer normalverteilten Streuung der Einzelmasse ausgegangen und das Quadrat der Eigenfrequenz bis zum dritten Polynomgrad entwickelt. Die verwendeten Chaospolynome lauten:

$$\Gamma_0 = 1, \quad \Gamma_1 = \xi, \quad \Gamma_2 = \xi^2 - 1, \quad \Gamma_3 = \xi^3 - 3\,\xi.$$

Bei der Ausmultiplikation entstehen Mischglieder, welche Produkte von Chaospolynomen enthalten:

$$\begin{aligned} k(\theta) &= \alpha(\theta)\cdot m(\theta) = \\ &= (\alpha_0\Gamma_0 + \alpha_1\Gamma_1 + \alpha_2\Gamma_2 + \alpha_3\Gamma_3)\cdot(m_0\Gamma_0 + m_1\Gamma_1) = \\ &= \alpha_0\, m_0\, \underbrace{\Gamma_0\,\Gamma_0}_{\Gamma_0} + \alpha_0\, m_1\, \underbrace{\Gamma_0\,\Gamma_1}_{\Gamma_1} + \alpha_1\, m_0\, \underbrace{\Gamma_1\,\Gamma_0}_{\Gamma_1} + \alpha_1\, m_1\, \underbrace{\Gamma_1\,\Gamma_1}_{\xi^2} + \\ &\quad + \alpha_2\, m_0\, \underbrace{\Gamma_2\,\Gamma_0}_{\Gamma_2} + \alpha_2\, m_1\, \underbrace{\Gamma_2\,\Gamma_1}_{\xi^3-\xi} + \alpha_3\, m_0\, \underbrace{\Gamma_3\,\Gamma_0}_{\Gamma_3} + \alpha_3\, m_1\, \underbrace{\Gamma_3\,\Gamma_1}_{\xi^4-3\xi^2}. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Der Index i für die Eigenfrequenz wird aus Gründen der Übersichtlichkeit vernachlässigt. Für das weitere Vorgehen muß jedoch eine Reihenentwicklung auf Grundlage einzelner Chaospolynome vorliegen. So sind die Produkte in eine Summe von Chaospolynomen aufzulösen. Da Γ_0 den Wert 1 besitzt, können einige der Produkte direkt auf ein Chaospolynom zurückgeführt werden. Bei anderen Produkten, in diesem Fall $\Gamma_1\Gamma_1 = \xi^2$, $\Gamma_1\Gamma_2 = \xi^3 - \xi$ und $\Gamma_1\Gamma_3 = \xi^4 - 3\xi^2$ müssen Polynome höheren Grades zu Hilfe genommen werden, um eine Summenentwicklung des Produktes zu erzielen. In diesem Fall ist das Chaospolynom vierten Polynomgrades $\Gamma_4 = \xi^4 - 6\ \xi^2 + 3$ nötig:

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 \cdot \Gamma_1 &= \xi^2 = (\xi^2 - 1) + 1 = \Gamma_2 + \Gamma_0 \\
\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 &= \xi^3 - \xi = (\xi^3 - 3\xi) + 2\xi = \Gamma_3 + 2\Gamma_1 \\
\Gamma_1 \cdot \Gamma_3 &= \xi^4 - 3\xi^2 = (\xi^4 - 6\xi^2 + 3) + 3\xi^2 - 3 = \Gamma_4 + 3\Gamma_2.
\end{aligned} \tag{9.8}$$

Werden die gefundenen Zusammenhänge eingesetzt, ergibt sich folgende Reihenentwicklung für die streuende Federkonstante $c(\theta)$:

$$\begin{aligned}
k(\theta) &= \sum_{i=0}^{4} k_i \Gamma_i = \\
&= (\alpha_0\ m_0 + \alpha_1\ m_1)\ \Gamma_0 + (\alpha_0\ m_1 + \alpha_1\ m_0 + 2\alpha_2\ m_1)\ \Gamma_1 + \\
&\quad (\alpha_1\ m_1 + \alpha_2\ m_0 + 2\alpha_3\ m_1)\ \Gamma_2 + (\alpha_2\ m_1 + \alpha_3\ m_0)\ \Gamma_3 + (\alpha_3\ m_1)\ \Gamma_4.
\end{aligned} \tag{9.9}$$

Die Berechnungsvorschrift wird anhand des zuvor analytisch betrachteten Falls der streuenden konstanten Massebelegung erprobt. Das Ergebnis darf nur einen Mittelwert für $k_i(\theta)$ liefern und keine Abhängigkeit von der Streuung der Masse. Die zu den Polynomen $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ und Γ_4 zugehörigen Koeffizienten müssen zu Null werden. Es zeigt sich, daß für die gegenphasigen bzw. gleichphasigen Ersatzschwinger die Koeffizienten k_1, k_2 und k_3 Werte im Bereich $1.0{\cdot}10^{-8}$ bis $1.0{\cdot}10^{-12}$ annehmen, während k_0 im Bereich von $1.3{\cdot}10^7$ bzw. $5.2{\cdot}10^7$ liegt. Der Beiwert k_4 wird nicht zu null, beträgt aber in den untersuchten Fällen maximal 1.7 % vom Wert k_0. Die über die Chaospolynome näherungsweise hergeleitete Federsteifigkeit ist demnach eine deterministische Größe und stimmt mit der analytischen bis auf geringe, tolerierbare Abweichungen überein.

Deckenkatalog

Die stochastischen Kennwerte für die einachsig gespannte beidseits gelenkig gelagerte Decke liegen für den Fall streuender Steifigkeit und für den Fall streuender Massebelegung vor. Für andere Deckenlagerungen und die sich ergebenden Kennwerte müssen die gleichen Überlegungen zu stochastischen Kenngrößen wie zuvor beschrieben angestellt werden.

Die Ermittlung der stochastischen Kenngrößen für eingespannte und teileingespannte Decken wird aufwendiger als für die gelenkig gelagerte Decke. Für deren Berechnung muß ein Einspanngrad gewählt werden, der das Zusammenwirken von Stielen und Riegeln des Systems beschreibt. Dieser Einspanngrad kann nur abgeschätzt werden. Ihn als stochastisch zu formulieren wäre allem voran wünschenswert. Allerdings wird der Einspanngrad innerhalb der Berechnung als Potenz benötigt, zudem steht er im Nenner für die Ermittlung der Ersatzschwingerwerte einer teileingespannten Decke. Soll für ihn eine Streuung angenommen werden,

ergeben sich Berechnungsschwierigkeiten, die nur durch grobe Näherungen überbrückbar sind. Zudem ist der Anwendungsbereich der Ersatzmodelle für eingespannte Decken auf spezielle Fälle beschränkt, in denen zwischen der Frequenz der Fußpunktanregung und der Gebäudegeometrie bestimmte Beziehungen bestehen (vgl. Breitsamter [14]). Diese Situation tritt in der Praxis in den seltensten Fällen auf.

In dem Fall der eingespannten Decken ist es demnach günstiger, auf eine herkömmliche Gesamtbeschreibung des Systems auszuweichen. Der streuende Einspanngrad kann beispielsweise durch eine Drehfeder mit streuender Federkonstante erfaßt werden. Ebenfalls lassen sich beliebige Fälle für Anregefrequenz - Gebäudegeometrie untersuchen.

Mit dem erweiterten Timoshenkomodell lassen sich im Gegensatz zum Timoshenkogrundmodell auch Verschiebungsgrößen der Decken berechnen. In einer Nachlaufbetrachtung werden die Decken getrennt vom Ersatzmodell betrachtet. Die am Gebäudemodell berechneten Antworten der Ersatzschwinger werden als Fußpunkterregung auf die Decken aufgebracht. Grundsätzlich ist diese Berechnung stochastisch möglich, allerdings sind bei der Berechnung am Ersatzmodell Korrelationsinformationen verlorengegangen. Zu einer bestimmten Realisation der streuenden Deckenschwingerantwort gehört eine spezielle Parameterkonstellation. Für diese müßte die Deckenantwort berechnet werden, sie läßt sich allerdings nicht mehr zurückverfolgen. So sollte bei Ermittlung der Überschreitenswahrscheinlichkeiten von Antwortgrößen der Decken eine herkömmliche FE-Formulierung gewählt werden. Die Ermittlung von Überschreitenswahrscheinlichkeiten für die Antwort der aufgehenden Wände ist jedoch möglich und kann, wie im Kapitel 8 für Mehrfreiheitsgradsysteme geschildert, erfolgen.

Zusammenfassend läßt sich für das Ersatzmodell „erweitertes Timoshenkomodell“ festhalten, daß Materialkenngrößen der aufgehenden Säule problemlos in eine stochastische Berechnung integriert werden können. Einzeln streuende Materialwerte der Decken sind auf Ersatzschwingerkennwerte umrechenbar. Für alle anderen Deckentypen als die gelenkig gelagerte Decke sollte das Ersatzmodell bei einer stochastischen Rechnung nicht verwendet werden.

9.3.3 Anwendung auf das Vertikalschwingungsmodell

Für das Vertikalschwingungsmodell sind wie für das erweiterte Timoshenkomodell generalisierte Größen in einer Vorberechnung zu bestimmen. Es sind generalisierte Federkenngrößen zu ermitteln, welche die Vertikalschwingformen des Gebäudes repräsentieren. Ersatzstockwerke sind zugehörig zu einer Eigenform zu formulieren. Dafür sind generalisierte Steifigkeits- und Massekenngrößen zu ermitteln.

Für Ersatzfedern und die Materialkenngrößen ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$
\begin{aligned}
K_{ers,i} &= \frac{2EA_i}{\bar{H}} \quad \text{für flexiblen Untergrund} \\
K_{ers,i} &= k^2\frac{\pi^2 EA_i}{4n\bar{H}} \quad \text{für starren Untergrund} \\
\frac{m_k}{m_{stw}} &= \frac{8n}{k^2\pi^2} \qquad k = 1, 3, 5, \ldots \\
E_k &= \frac{8n}{k^2\pi^2}E
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_k &= \frac{8n}{k^2\pi^2}G \\
\rho_k &= \frac{8n}{k^2\pi^2}\rho.
\end{aligned}
$$

Dabei ist n die Anzahl der vorhandenen Stockwerke und $\bar{H}$ eine Ersatzgebäudehöhe. Der Index k bezeichnet die in der Berechnung verwendeten Eigenformen ($k = 1, 3, 5...$). K_{ers} sind die generalisierten Federn einer Eigenform. E_k ist der Elastizitätsmodul , G_k der Schubmodul, m_k die Masse und ρ_k die Dichte eines Ersatzstockwerks. m_{stw} ist die Masse eines Stockwerks, EA_i die Dehnsteifigkeit eines aufgehenden Bauteils.

Die Stockwerksgeneralisierung berührt nicht die Darstellung der Materialkenngrößen als streuende Werte. Der Faktor $\frac{8n}{k^2\pi^2}$ enthält rein deterministische Werte. Die stochastische Entwicklung der Ersatzfedern stellt keine Schwierigkeit dar. Der Elastizitätsmodul und die Teilquerschnittsfläche A_i - Größen, welche als zufällig betrachtet werden können - stehen im Zähler; in den Systemmatrizen werden die Federgrößen zu den Elementsteifigkeitsmatrizen addiert.

Schwierigkeiten können lediglich entstehen, wenn wie beim Timoshenkomodell erläutert, die Querschnittsfläche bei gleichzeitiger Berücksichtigung der Schubverformung als streuend angenommen wird. Die von Breitsamter mit Schubverformung berechneten Beispiele werden verglichen mit Berechnungen ohne Schubverformung. Die Ergebnisse für die Eigenfrequenzen unterscheiden sich nur geringfügig. Auf die Berücksichtigung der Schubverformung kann somit verzichtet werden.

Als Beispiel für eine stochastische Berechnung wird das System „10-stöckiger, dreistieliger Stockwerksrahmen auf starrem Untergrund“ gewählt, wobei nur die erste Normalschwingform mittels eines Ersatzstockwerks betrachtet wird. In Abbildung 9.3 ist die Streuung der Quadrate der ersten beiden Eigenfrequenzen dargestellt. Der Elastizitätsmodul und die Massebelegung werden einzeln und in Kombination als streuend betrachtet. Es wird jeweils eine Standardabweichung von 10 % vom Mittelwert angenommen.

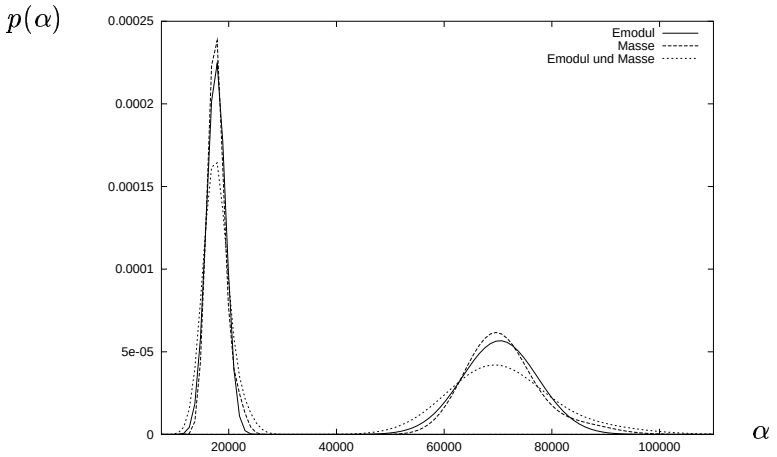


Abbildung 9.3: Streuung der ersten beiden Eigenfrequenzen

Die Graphen sind für die zweite Eigenfrequenz breiter. Der einzeln streuende Elastizitätsmodul und die einzeln streuende Massebelegung führen auf ähnliche Darstellungen. Die Kombina-

tion beider streuender Größen läßt die Graphen breiter werden. Es bestätigt sich die allgemein zu beobachtende Tendenz, daß die Graphen mit höherer Modenkennzahl und zunehmender Streuung der Eingangsgrößen breiter und flacher werden.

Das Ersatzmodell liefert die Schwingungsantwort in modalen Koordinaten. Zur Bestimmung der realen Gebäudeantwort muß die Relativverschiebung einzelner Verschiebungswerte berechnet werden. Im Falle eines flexiblen Unterbaus (z.B. weicher Keller) müßten bei einer stochastischen Berechnung zwei streuende Größen subtrahiert werden (Antwort des Unterbaus und Antwort des modalen Ersatzstockwerks). Die Größen sind zwar korreliert, jedoch ist der Korrelationszusammenhang bei der Berechnung verlorengegangen. So ist die Subtraktion nicht eindeutig möglich. Zur Bestimmmung der Überschreitenswahrscheinlichkeiten von Antwortgrößen ist die herkömmliche FE-Beschreibung des Systems besser geeignet. Im Falle eines starren Unterbaus entfällt die Subtraktion und die Überschreitenswahrscheinlichkeit einer Antwortgröße ist berechenbar, indem ein nicht zu überschreitender Grenzwert für ein Ersatzstockwerk bestimmt wird.

Generell ist zu sagen, daß der Modelltyp „Vertikalschwingungsmodell“ einer stochastischen Berechnung am einfachsten zugänglich ist. Es besteht keine Beschränkung der streuend anzunehmenden Größen. Es ist lediglich darauf zu achten, daß sich die Systemmatrizen auf Grundlage der Chaospolynome in eine Reihe entwickeln lassen.

9.3.4 Anwendung auf das Säulenmodell

Bei Anwendung des Säulenmodells sind die gleichen stochastischen Kenngrößen für die Deckenschwinger zu verwenden wie beim erweiterten Timoshenkomodell.

Die Berechnung von Überschreitenswahrscheinlichkeiten einzuhaltender Deckenantwortgrößen erzeugt die gleichen Schwierigkeiten wie beim erweiterten Timoshenkomodell. So ist das Modell bei einer stochastischen Berechnung auf die Ermittlung streuender Eigenfrequenzen beschränkt.

Bei den nachfolgenden Berechnungen am Säulenmodell steht die Überprüfung der Güte des Rayleighquotienten im Vordergrund, d.h. der näherungsweisen Ermittlung der Streuung des Quadrats der Eigenfrequenzen.

Rayleighquotient

Anhand des Beispiels eines zweigeschossigen Säulenmodells mit gelenkig gelagerten Decken, werden die näherungsweise ermittelten streuenden Quadrate der Eigenfrequenzen mit den Ergebnissen einer Monte-Carlo-Simulation verglichen. Das System ist in Abbildung 9.4 dargestellt. Die links von der Säule gezeigten Ersatzschwinger repräsentieren die gleichphasige Antwort der rechten und linken Decken. Da die Decken identische Stützweiten und Materialeigenschaften besitzen, können die einzelnen Ersatzschwingerkennwerte mit dem Faktor 2 zusammengefaßt werden. Analog gilt dies für den gegenphasigen Antwortbeitrag. Die entsprechenden Ersatzschwinger sind rechts von der Säule dargestellt.

Bei der Monte-Carlo-Simulation wird die Verteilungsdichte der betrachteten streuenden Größe in Streifen gleicher Wahrscheinlichkeit zerlegt und die Streifenmitte als zugehörige Realisa-

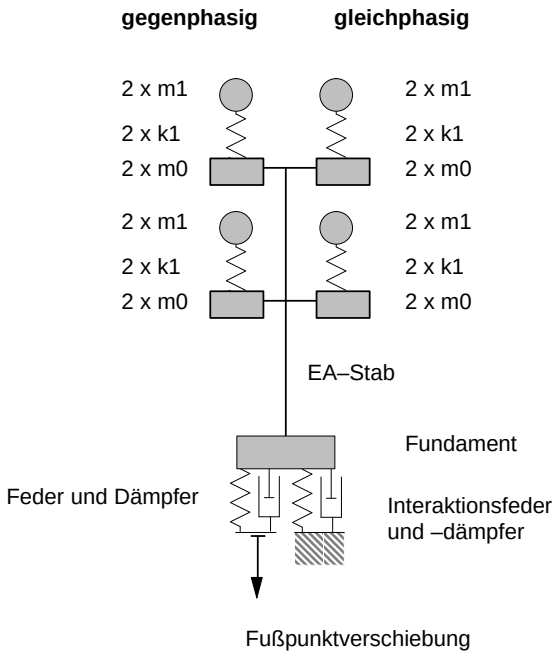


Abbildung 9.4: Säulenmodell mit Ersatzschwingern

tion bestimmt (vgl. Kapitel 6.2). Die Realisationen werden eingesetzt und die zugehörigen Quadrate sämtlicher Eigenfrequenzen aus dem Gleichungssystem unter Umgehung des Rayleighquotienten und der Chaospolynom-Reihenentwicklung bestimmt. Den jeweiligen Werten wird die gewählte Eingangswahrscheinlichkeit zugewiesen. Die entstandenen Verteilungsfunktionen aller Eigenfrequenzen werden mit den unter Verwendung des Rayleighquotienten und der Chaospolynomentwicklung ermittelten Lösungen verglichen.

Dabei ist zu beobachten, daß es sich um einen äußerst genauen Näherungsansatz handelt, der beste Übereinstimmung mit der Lösung der Monte-Carlo-Simulation unter Einhaltung einer zulässigen Massenstreuung aufweist.

Ausgewertet wurden folgende Parameterstreuungen:

- streuender Elastizitätsmodul der Säule,
- streuende Massebelegung der Säule,
- streuender Elastizitätsmodul der Decken,
- streuende Massebelegung der Decken.

Abbildung 9.5 zeigt die Streuung des Quadrats der sechsten Eigenfrequenz für eine Standardabweichung des Elastizitätsmoduls der Säule von 10% bzw. 30% vom Mittelwert. Die Berechnung erfolgte jeweils mit Anwendung des Rayleighquotienten und der zuvor geschilderten Monte-Carlo-Simulation (MCS). Die Graphen sind quasi identisch. Die sechste Eigenfrequenz wurde gewählt, da die streuende Eingangsgröße das Ergebnis deutlich beeinflußt. Für die anderen Eigenfrequenzen ergeben sich ähnlich gute Übereinstimmungen.

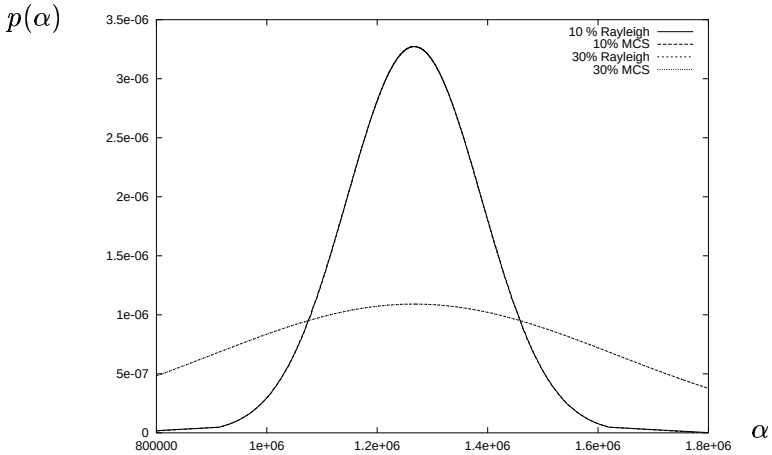


Abbildung 9.5: Darstellung des Quadrats der sechsten Eigenfrequenz [rad^2/s^2] für 10% bzw. 30% Streuung des Elastizitätsmoduls der Säule

Abbildung 9.6 zeigt die Streuung des Quadrats der dritten Eigenfrequenz für eine Standardabweichung der Massebelegung der Säule von 10% bzw. 30% vom Mittelwert. (Für die Rayleigh-multiplizierte „deterministische“ und „stochastische“ Massenmatrix bedeutet dies, daß der Rayleighwert der stochastischen Massenmatrix kleiner als 20% des Rayleighwerts der deterministischen Massenmatrix ist. Unter „deterministischer“ Massenmatrix wird die Matrix der Mittelwerte $\mathbf{M}_0$ verstanden, unter „stochastischer“ Matrix die die Standardabweichung enthaltende Matrix $\mathbf{M}_1$.) Gezeigt wird das Quadrat der dritten Eigenfrequenz, da hier wiederum der Einfluß der streuenden Größe deutlich wird. Auch bei diesem Beispiel fallen die Kurven der beiden Auswertungsarten zusammen.

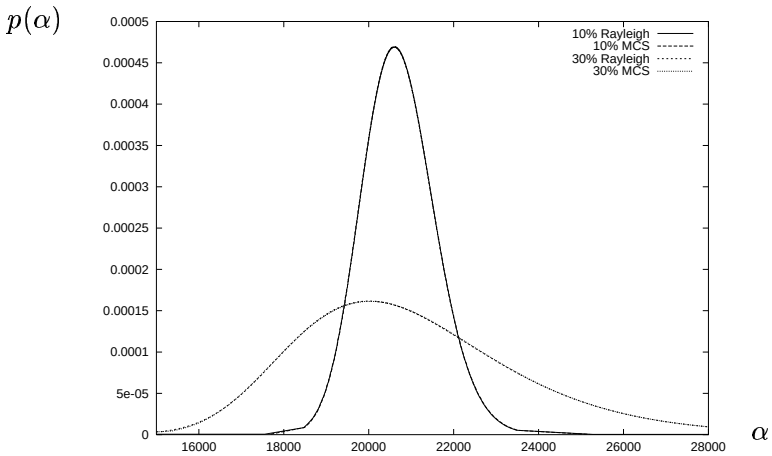


Abbildung 9.6: Darstellung des Quadrats der dritten Eigenfrequenz [rad^2/s^2] für 10% bzw. 30% Streuung Massebelegung der Säule

Abbildung 9.7 zeigt die Streuung des Quadrats der ersten Eigenfrequenz für Variationskoeffizienten des Elastizitätsmoduls der Decken von wiederum 10% bzw. 30%. In diesem Fall sind leichte Unterschiede der jeweiligen Graphen zu erkennen. Die Abweichungen bei einer Streuung von 10% sind erwartungsgemäß geringer als bei der größeren Streuung von 30%. Für höhere Eigenfrequenzen fallen die Graphen jedoch wieder zusammen.

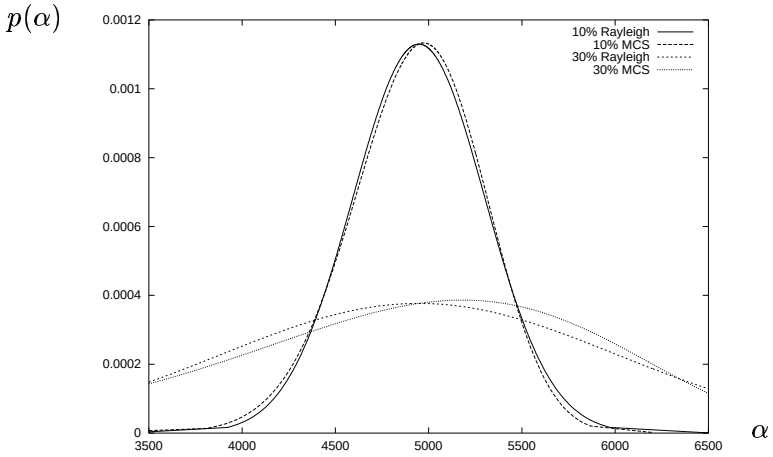


Abbildung 9.7: Darstellung des Quadrats der ersten Eigenfrequenz [rad^2/s^2] für 10% bzw. 30% Streuung des Elastizitätsmoduls der Decken

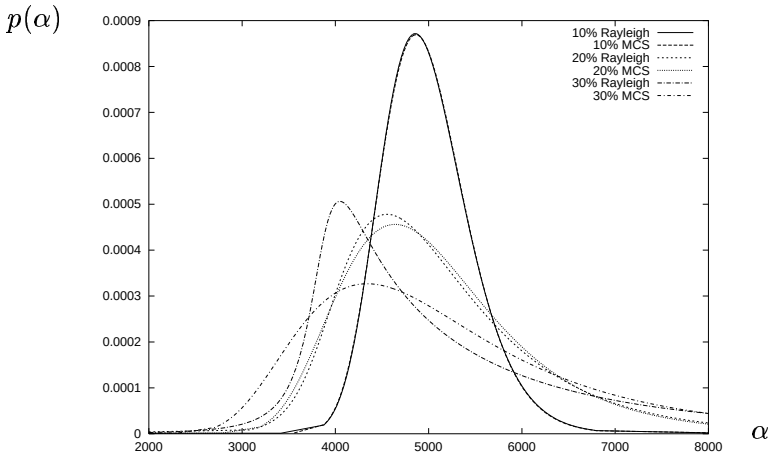


Abbildung 9.8: Darstellung des Quadrats der ersten Eigenfrequenz [rad^2/s^2] für 10%, 20 % bzw. 30% Streuung der Massebelegung der Decken

Abbildung 9.8 zeigt die Streuung des Quadrats der ersten Eigenfrequenz für eine Standardabweichung der Massebelegung der Decken von 10%, 20% bzw. 30% vom Mittelwert. Für die Streuungen von 10% und 20% führt die Näherungslösung mit dem Rayleighquotienten zu guten Ergebnissen. Für die Streuung von 30% zeigt die Lösung mit dem Rayleighquotienten deutliche Abweichungen von der Referenzlösung der Monte-Carlo-Simulation. Der Grund liegt

in der numerischen Instabilität der Lösung des Gleichungssystems.

Im Kapitel 10.3.4 wird erläutert, worauf die Probleme bei der Lösung zurückzuführen sind. Es stellt sich heraus, daß der Rayleighwert der stochastischen Massenmatrix bei der gewählten Reihenentwicklung maximal etwa 20% des Rayleighwertes der deterministischen Massenmatrix betragen darf. Im Falle der gezeigten ersten Eigenfrequenz bei 30 % Streuung steigt der Rayleighwert der stochastischen Massenmatrix ebenfalls bis auf etwa 30% der deterministischen Massenmatrix an. (Es handelt sich um eine Deckeneigenfrequenz, für die Beiträge der Säule kaum eine Rolle spielen.) Somit gelangt die Bestimmung der Lösung in den instabilen Bereich.

Zusammenfassend läßt sich festhalten, daß die Näherungslösung mit dem Rayleighquotienten hervorragende Übereinstimmung mit der Referenzlösung der Monte-Carlo-Simulation in allen Fällen bietet, sofern die zulässige Massenstreuung eingehalten wird.

Beispiele für das Säulenmodell

In [43] und [44] werden Beispiele für das Säulenmodell aufgegriffen und auf den Einfluß von streuenden Größen untersucht. Die Gebäude werden nicht mit Ersatzmodellen dargestellt, sondern es wird eine FE-Formulierung gewählt. Die Wirkung streuender Einspanngrade soll betrachtet werden. Die Untersuchung kann nicht in einfacher Weise an dem Ersatzmodell vorgenommen werden. Das Vorgehen ist durchaus sinnvoll, da die Anzahl der notwendigen Freiheitsgrade gering ist und die Untersuchung der FE-Systeme weniger Rechenaufwand erfordert als eine stochastische Voruntersuchung der Decken.

Es werden jeweils die Quadrate stochastischer Eigenfrequenzen ermittelt und Überschreitenswahrscheinlichkeiten bestimmter Antwortgrößen bei gegebener deterministischer Belastung berechnet. Der Einspanngrad der Decken und die Massebelegung werden als Zufallsvariable und der Elastizitätsmodul als stochastischer Prozeß eingeführt. Weitere Beispiele enthält Kapitel 12.

9.4 Zusammenfassung der Ersatzmodelle

Die Anwendung der Ersatzmodelle für stochastische Fragestellungen wurde für jeden Ersatzmodelltyp anhand einiger Beispiele erläutert. Zusammenfassend läßt sich festhalten:

- Der Vorteil für die Berechnung von streuenden Eigenfrequenzen und Überschreitenswahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Ersatzsysteme liegt in der stark reduzierten Anzahl von Freiheitsgraden. Die Systemmatrizen besitzen deutlich kleinere Dimensionen als bei einer kompletten FE-Modellierung des Gebäudes. Deterministische Eigenfrequenzen und -formen sind einfach zu bestimmen. Die Modenzahl entspricht der Anzahl der Freiheitsgrade und ist somit deutlich geringer als bei einer FE-Untersuchung. Die stochastische Rechnung wird erheblich vereinfacht.

- In allen Beispielen war zu beobachten, daß die Verteilungen der Quadrate der Eigenfrequenzen für höhere Moden und für eine steigende Zahl an beteiligten Zufallsgrößen „breiter“ und „flacher“ werden und sich der Normalverteilung annähern.

Die Aussagekraft der Berechnungsergebnisse schwindet jedoch, wenn mehrere streuende Größen angenommen werden. Die Einflüsse der Streuungen überlagern sich; eine Zuordnung, welche Streuung welche Auswirkung hat, ist nicht mehr einfach möglich. So sollten immer im Sinne von Parameterstudien zunächst alle Größen einzeln als streuend angenommen und danach Kombinationen untersucht werden. So bleiben die Ergebnisse für den Anwender interpretierbar.

- Die Darstellung eines streuenden Parameters als Zufallsgröße führt zu einer größeren Streuung des Ergebnisses als bei Verwendung eines vergleichbaren stochastischen Prozesses. Die Berechnung von Überschreitenswahrscheinlichkeiten, welche einer Integration der Randbereiche der Ergebnisverteilung entspricht, ergibt für die Zufallsvariable höhere Werte als für einen stochastischen Prozeß. Die mit der Zufallsvariablen berechneten Ergebnisse liegen damit auf der sicheren Seite. In der praxisgerechten Aufbereitung des Verfahrens werden demnach nur noch Zufallsvariablen verwendet.

- Die Überprüfung der Güte des Rayleighquotienten anhand des Säulenmodells zeigt eine hervorragende Übereinstimmung der Ergebnisse für die Quadrate von Eigenfrequenzen, berechnet auf Grundlage der Chaospolynome und des Rayleighquotienten, mit den Ergebnissen einer Monte-Carlo-Simulation. Die Rechenvereinfachung, die der Rayleighquotient bewirkt, geht damit nicht zu Lasten der Genauigkeit der Ergebnisse. Für das Verhältnis Standardabweichung der streuenden Masse / Mittelwert der Massenkennwerte ist dabei ein bestimmter Grenzwert einzuhalten, der im folgenden Kapitel genauer erläutert wird.

- Bei Anwendung aller Ersatzmodelle sind einige Einschränkungen für die Wahl streuender Eingangswerte zu beachten. Die für die Systemberechnung nötigen Vorlaufrechnungen erfordern bei der Übertragung auf eine stochastische Berechnung Zusatzüberlegungen. Die Eingangsgrößen müssen dahingehend bearbeitet werden, daß sie in einfacher Weise in die Reihenentwicklung der Systemmatrizen übernommen werden können. Abhängig vom Ersatzmodelltyp und den als streuend angenommenen Größen bereiten die Umrechnungen unterschiedliche Schwierigkeiten. Hinweise zur Ausführung zeigen die einzelnen Kapitel.

  Die Nachlaufrechnungen zur Bestimmung streuender Systemreaktionen sind nur in Sonderfällen ausführbar. Auf die Bestimmung von Überschreitenswahrscheinlichkeiten gegebener Antwortgrößen muß bei Anwendung der Ersatzmodelle zumeist verzichtet werden.

  Sind die Vor- bzw. Nachberechnungen nicht stochastisch ausführbar, sollte auf eine herkömmliche Beschreibung mit Finiten Elementen zurückgegriffen werden. Nachteilig ist dabei die größere Dimension der Systemmatrizen. Vorteilhaft ist, daß streuende Größen, welche bei einer Berechnung mit Ersatzmodellen auszuschließen bzw. nur umständlich einzuführen sind, problemlos in die Elementmatrizen Eingang finden.

- Im Zusammenhang mit dem erweiterten Timoshenkomodell und dem Säulenmodell liegen die Ersatzschwingerkennwerte einer gelenkig gelagerten Decke für den Fall streuender Steifigkeit und streuender Masse vor. Der Deckenkatalog müßte für eingespannte und teileingespannte Decken mit streuenden Größen erweitert werden. Da jedoch eine durchgängige stochastische Darstellung auf Grundlage der Chaospolynome nur unter groben Vereinfachungen und zudem der Einsatz der Ersatzmodelle nur in Sonderfällen

möglich ist, wird auf eine Weiterentwicklung des Deckenkatalogs verzichtet. Das Ergebnis einer stochastischen Untersuchung ist für den Anwender einfacher und in besserer Genauigkeit zu erzielen, wenn er auf eine herkömmliche FE-Beschreibung des Systems zurückgreift.

- Zur Begrenzung des Berechnungsaufwands ist die Anwendung der Ersatzmodelle grundsätzlich vorteilhaft. Sie ist jedoch nicht in allen Fällen möglich bzw. sinnvoll. Würden Berechnungsprogramme zur praktischen Anwendung für stochastische Berechnungen erstellt, wären diese nur eingeschränkt einsetzbar. Lediglich für den Fall des Säulenmodells mit gelenkig gelagerten Decken ist die Erstellung eines Berechnungsprogramms sinnvoll. Das System hat sich in der praktischen Anwendung bewährt. Zudem ist die Einführung streuender Größen mit noch vertretbarem Aufwand möglich.

Nachfolgend werden Programme vorgestellt, die sich von den Ersatzmodellen als Grundlage lösen und auf alle dynamischen Problemstellungen anwendbar sind, die mit Finiten Elementen zu formulieren sind. Die Anwendung auf Ersatzmodelle in den Fällen, in denen ihr Einsatz sinnvoll ist, ist somit ebenfalls möglich.

Kapitel 10

Anwenderprogramme

10.1 Zielsetzung

Mit den nachfolgend beschriebenen Programmen sollen Hilfsmittel für eine stochastische Berechnung geschaffen werden. Ihre Anwendung soll umfassend möglich sein, d.h. in Fällen, in denen die Ersatzmodelle verwendet werden können, aber auch in Fällen, in denen eine konventionelle FE-Formulierung vorteilhafter ist.

Oberstes Ziel ist es, anwenderfreundliche Programme zu erstellen, die ein praktisch tätiger Ingenieur in einfacher Weise bedienen kann, ohne daß vertiefte Kenntnisse der Stochastik und speziell des Polynomen Chaos erforderlich sind. Lediglich einige zusätzliche, deterministisch auszuführende Berechnungen werden dem Benutzer abverlangt.

Neben der einfachen Anwendbarkeit stehen als weiteres Ziel kurze Rechenzeiten der Programme im Vordergrund. So ist es möglich, ohne großen Aufwand verschiedene Ausgangssituationen in Parameterstudien durchzurechnen und einen Einblick in das dynamische Systemverhalten zu gewinnen.

Die Ziele können nur durch einige bereits erwähnte Vereinfachungen erreicht werden, wie z.B. die Anwendung des Rayleighquotienten und die Beschränkung der streuenden Eingabeparameter auf normalverteilte Größen.

Die Programme dienen der Vorberechnung eines Systems. Sowohl bei einem Einfreiheitsgradsystem als auch bei einem Mehrfreiheitsgradsystem mit einer die untersuchte Verschiebungsgröße dominierenden Eigenform führen die Berechnungen zu zuverlässigen Ergebnissen. Für alle übrigen Fälle kann durch Parameterstudien ein Bereich möglicher Überschreitenswahrscheinlichkeiten abgesteckt werden. Oftmals sind die Informationen für die endgültige Bemessung bereits ausreichend. Erscheint dem Anwender eine Aussage über das Systemverhalten zu unsicher bzw. liegen die Ergebnisse in einem kritischen Bereich, sollten weitere Berechnungen angestellt werden. So sollte eine genauere Untersuchung der Verschiebungsgrößen bzw. eine Untersuchung mit einer Monte-Carlo-Simulation erfolgen.

Die Programme sind so universell formuliert, daß jedes dynamische Problem, das mit Finiten Elementen beschreibbar ist, unter Wahrung bestimmter Randbedingungen untersucht werden kann. Die Anwendung ist demnach nicht auf das Bauwesen beschränkt, sondern kann

beispielsweise auch für Systeme aus dem Maschinenwesen eingesetzt werden.

Im folgenden wird zunächst eine Übersicht über die zur Verfügung stehenden Programmelemente gegeben, anschließend werden die Module dargestellt und die von dem Benutzer einzugebenden Daten erläutert. Die einzuhaltenden Randbedingungen werden beschrieben.

10.2 Leistungsumfang und Module

Zuerst muß die Verteilungsfunktion des Quadrats einer gewählten Eigenkreisfrequenz mit dem Programmodul `qeigenf` erstellt werden (`q`$\hat{=}$ Quadrat, `eigenf`$\hat{=}$ Eigenkreisfrequenz). Im Anschluß daran kann der Anwender, je nach Fragestellung Überschreitenswahrscheinlichkeiten mit drei verschiedenen Programmodulen berechnen. Steht ein unzulässiger Bereich für die Eigenkreisfrequenz fest, kann mit dem Programmodul `puealpha` die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, daß α in dem unzulässigen Bereich liegt (`pue`$\hat{=}$ Überschreitenswahrscheinlichkeit $p_{\ddot{u}}$, `alpha`$\hat{=}\alpha$). Sind gegebene Grenzen der Verschiebungsgrößen einzuhalten, stehen zur Berechnung der zugehörigen Überschreitenswahrscheinlichkeiten die Module `puemono` im Falle der monofrequenten Anregung und `puemulti` im Falle der multifrequenten Anregung zur Verfügung (`pue`$\hat{=}p_{\ddot{u}}$, `mono`$\hat{=}$ monofrequent, `multi`$\hat{=}$ multifrequent). Eine Übersicht über die Berechnungsmodule gibt Abbildung 10.1.

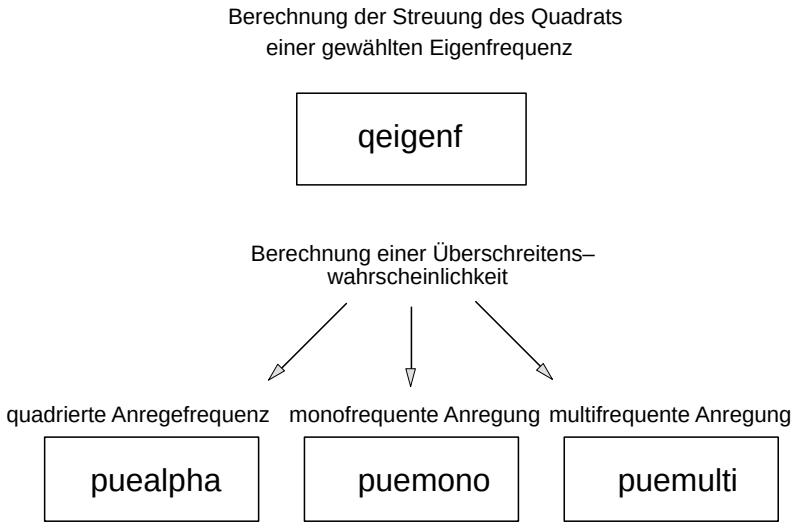


Abbildung 10.1: Übersicht über Berechnungsmodule

Die Programme und Eingabedateien stehen unter der Adresse `www.bm.bv.tum.de` zum Download zur Verfügung.

Die Eingabedaten für die Berechnung werden grundsätzlich mit Hilfe von Eingabedateien eingelesen; die Eingabe erfolgt nicht über den Bildschirm. Der Anwender kann so nach Erstellung der Dateien das Programm starten, ohne weitere Eingaben vornehmen zu müssen. So ist es beispielsweise mit Hilfe eines shellscripts möglich, mehrere Fälle nacheinander untersuchen zu lassen, ohne für jeden Rechenlauf die erforderlichen Daten eingeben zu müssen.

Die Kontrolle der Daten erfolgt am Bildschirm. Die Bestätigung der Daten bzw. eine Verbesserung durch den Anwender ist nicht vorgesehen. Dazu müßte die Ausführung des Programms unterbrochen werden und das Programm könnte erst wieder starten, wenn eine Freigabe erfolgt wäre. Werden mehrere Fälle nacheinander mit einem shellscript untersucht, wird der Berechnungsablauf dadurch behindert. Die Korrektur muß in den Eingabedateien erfolgen.

10.3 Programm `qeigenf`

Für das Startprogramm **`qeigenf`** sind einige Eingangsdaten zu erstellen, die im folgenden ausführlich erläutert werden. Eine Übersicht der zur Berechnung notwendigen Eingaben und der durch den Programmodul berechneten Ausgaben zeigt Abbildung 10.2.

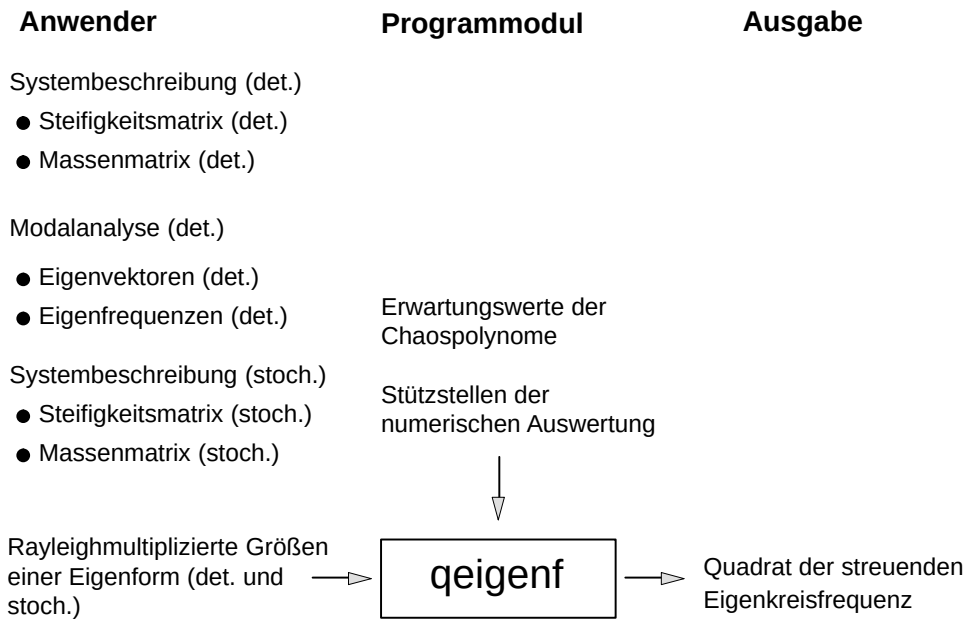


Abbildung 10.2: Übersicht über Ein- und Ausgabe zur Erstellung des Quadrats der steuenden Eigenfrequenz

10.3.1 Deterministische Eingangsdaten

Der Anwender hat vorab das System deterministisch zu beschreiben und gegebenenfalls mittels eines FE-Softwarepaketes die Systemmatrizen zu erzeugen. Mit deterministischer Steifigkeits- und Massenmatrix muß er eine Modalanalyse ausführen, die als Ergebnis die Eigenvektoren und Eigenfrequenzen des Systems liefert. Damit sind die generalisierten Steifigkeiten und Massen der einzelnen Moden zu berechnen.

Wird zugleich der deterministische Lastvektor formuliert, können die Beteiligungsfaktoren der einzelnen Eigenformen an einer Verschiebungsgröße nach Kapitel 8 berechnet werden. Damit kann schon eine Vorentscheidung getroffen werden, für welche Moden eine stochastische Berechnung benötigt wird.

10.3.2 Stochastische Eingangsdaten

Bei der Formulierung der stochastischen Eigenschaften des betrachteten Systems sind einige Randbedingungen zu beachten:

- Im Programm ist vorgesehen, nur einen Parameter innerhalb der Steifigkeitsmatrix als streuend zu betrachten (beispielsweise den Elastizitätsmodul eines Materials). Soll dennoch ein zweiter oder mehrere Parameter gleichzeitig mit einer Streuung belegt werden, so müssen die Größen untereinander mit „1“ korreliert sein. Nimmt eine Größe ihren Mittelwert an, nehmen alle anderen Größen ebenfalls ihren Mittelwert an. Dies gilt auch für Maximal- bzw. Minimalwerte. Die streuenden Größen sind unter der Annahme einer Normalverteilung zu formulieren. Die Wahl der Standardabweichung ist zunächst beliebig, die Verteilung sollte jedoch in einem physikalisch sinnvollen Bereich liegen. Beispielsweise sollten die in den negativen Wertebereich fallenden Realisationen mit möglichst kleinen Wahrscheinlichkeiten belegt sein.

- Auch für die Massenmatrix gilt, daß nur ein Parameter als streuend angenommen werden darf. Werden auch hier mehrere Größen streuend formuliert, so sind sie automatisch ebenfalls „1“-korreliert. Ebenso der Masseparameter ist normalverteilt zu formulieren. Die Standardabweichung dieses Werts ist aufgrund unvermeidbarer numerischer Instabilitäten innerhalb des Verfahrens zu begrenzen. Die Ermittlung der zulässigen Grenze ist in Kapitel 10.3.4 beschrieben. Zur Sicherheit des Anwenders leistet das Programm `qeigenf` eine Überprüfung, ob der Wert eingehalten ist.

- Die streuenden Größen dürfen nur im Zähler der Elemente der Steifigkeitsmatrix bzw. Massenmatrix stehen. Es muß gewährleistet sein, daß eine Reihenentwicklung der stochastischen Systemmatrizen auf Grundlage der Chaospolynome nach folgender Vorschrift möglich ist:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\theta) &= \mathbf{K}_0\Gamma_0 + \mathbf{K}_1\Gamma_1 \ldots \quad \text{bzw.} \\ \mathbf{M}(\theta) &= \mathbf{M}_0\Gamma_0 + \mathbf{M}_1\Gamma_1 \ldots \ . \end{aligned}$$

  Dies bedeutet allerdings auch, daß die als streuend gewählte Größe nicht potenziert werden oder als Potenz auftreten darf.

- Eine streuende Größe kann innerhalb der Steifigkeitsmatrix und eine zweite innerhalb der Massenmatrix eingeführt werden. Die beiden Größen werden als unkorreliert behandelt.

Für die Berechnung eines streuenden Eigenwerts ist die Formulierung des stochastischen Anteils der Steifigkeits- und der Massenmatrix notwendig. Da nur standardnormalverteilte

Größen eingesetzt werden, ist die Reihenentwicklung der Systemmatrizen bis zum zweiten Term ausreichend:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\theta) &= \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1\Gamma_1 \qquad \text{mit} \quad \Gamma_1 = \xi_1 \\ \mathbf{M}(\theta) &= \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1\Gamma_2 \qquad \text{mit} \quad \Gamma_2 = \xi_2. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Die im folgenden als stochastische Matrizen bezeichneten Anteile $\mathbf{K}_1$ und $\mathbf{M}_1$ werden vom Anwender, analog zu den deterministischen Anteilen $\mathbf{K}_0$ und $\mathbf{M}_0$, beispielsweise unter Anwendung eines FE-Programms erzeugt.

Dazu wird ein zweites „paralleles“ System mit gleicher Geometrie, aber veränderten Materialeigenschaften formuliert. Die Belegung der neu zu erzeugenden Matrizen wird vom Anwender durch die Eingabe der Materialparameter gesteuert. Dabei ist zu beachten, daß lediglich die Terme vorhanden sein dürfen, welche die als streuend betrachteten Größen enthalten. Für die streuenden Größen werden ihre Standardabweichungen eingesetzt. Die restlichen Terme, die keine streuenden Größen enthalten, müssen den Wert Null annehmen. (Hinweis: Erzeugt die Eingabe von Werten gleich Null für Materialparameter Schwierigkeiten bei Anwendung eines FE-Programms, so sind möglichst kleine Werte ungleich Null einzusetzen.) Die enstandenen Matrizen besitzen die gleiche Dimension wie die deterministischen Systemmatrizen.

Das Vorgehen wird an einem einfachen Beispiel verdeutlicht (vgl. Abbildung 10.3):

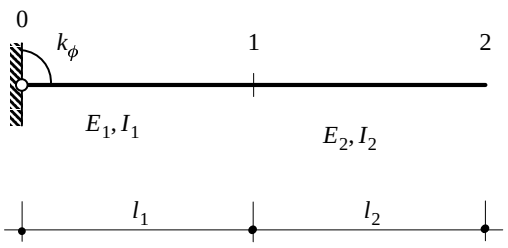


Abbildung 10.3: Beispielsystem

Der durch eine Drehfeder teileingespannte Kragarm wird in zwei Elemente diskretisiert (Längen l_1 und l_2). Die deterministische Steifigkeitsmatrix lautet für vertikale Verschiebungen und Verdrehungen ϕ_0, w_1, ϕ_1, w_2 und ϕ_2:

$$\begin{bmatrix} k_\phi + 4\frac{E_1I_1}{l_1} & 6\frac{E_1I_1}{l_1^2} & 2\frac{E_1I_1}{l_1} & 0 & 0 \\ 6\frac{E_1I_1}{l_1^2} & 12\frac{E_1I_1}{l_1^3} + 12\frac{E_2I_2}{l_2^3} & 6\frac{E_1I_1}{l_1^2} - 6\frac{E_2I_2}{l_2^2} & -12\frac{E_2I_2}{l_2^3} & -6\frac{E_2I_2}{l_2^2} \\ 2\frac{E_1I_1}{l_1} & 6\frac{E_1I_1}{l_1^2} - 6\frac{E_2I_2}{l_2^2} & 4\frac{E_1I_1}{l_1} + 4\frac{E_2I_2}{l_2} & 6\frac{E_2I_2}{l_2^2} & 2\frac{E_2I_2}{l_2} \\ 0 & -12\frac{E_2I_2}{l_2^3} & 6\frac{E_2I_2}{l_2^2} & 12\frac{E_2I_2}{l_2^3} & 6\frac{E_2I_2}{l_2^2} \\ 0 & -6\frac{E_2I_2}{l_2^2} & 2\frac{E_2I_2}{l_2} & 6\frac{E_2I_2}{l_2^2} & 4\frac{E_2I_2}{l_2} \end{bmatrix}$$

Wird der Elastizitätsmodul des zweiten Balkenabschnitts als streuend angenommen, gestaltet sich die stochastische Steifigkeitsmatrix mit der Standardabweichung von E_2 σ_{E_2}:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{\sigma_{E_2} I_2}{l_2^3} & -6\frac{\sigma_{E_2} I_2}{l_2^2} & -12\frac{\sigma_{E_2} I_2}{l_2^3} & -6\frac{\sigma_{E_2} I_2}{l_2^2} \\ 0 & -6\frac{\sigma_{E_2} I_2}{l_2^2} & 4\frac{\sigma_{E_2} I_2}{l_2} & 6\frac{\sigma_{E_2} I_2}{l_2^2} & 2\frac{\sigma_{E_2} I_2}{l_2} \\ 0 & -12\frac{\sigma_{E_2} I_2}{l_2^3} & 6\frac{\sigma_{E_2} I_2}{l_2^2} & 12\frac{\sigma_{E_2} I_2}{l_2^3} & 6\frac{\sigma_{E_2} I_2}{l_2^2} \\ 0 & -6\frac{\sigma_{E_2} I_2}{l_2^2} & 2\frac{\sigma_{E_2} I_2}{l_2} & 6\frac{\sigma_{E_2} I_2}{l_2^2} & 4\frac{\sigma_{E_2} I_2}{l_2} \end{bmatrix}$$

Würde zusätzlich E_1 mit σ_{E_1} als streuend angenommen, so wäre die stochastische Steifigkeitsmatrix folgendermaßen besetzt:

$$\begin{bmatrix} 4\frac{\sigma_{E_1} I_1}{l_1} & 6\frac{\sigma_{E_1} I_1}{l_1^2} & 2\frac{\sigma_{E_1} I_1}{l_1} & 0 & 0 \\ 6\frac{\sigma_{E_1} I_1}{l_1^2} & 12\frac{\sigma_{E_1} I_1}{l_1^3} + 12\frac{\sigma_{E_2} I_2}{l_2^3} & 6\frac{\sigma_{E_1} I_1}{l_1^2} - 6\frac{\sigma_{E_2} I_2}{l_2^2} & -12\frac{\sigma_{E_2} I_2}{l_2^3} & -6\frac{\sigma_{E_2} I_2}{l_2^2} \\ 2\frac{\sigma_{E_1} I_1}{l_1} & 6\frac{\sigma_{E_1} I_1}{l_1^2} - 6\frac{\sigma_{E_2} I_2}{l_2^2} & 4\frac{\sigma_{E_1} I_1}{l_1} + 4\frac{\sigma_{E_2} I_2}{l_2} & 6\frac{\sigma_{E_2} I_2}{l_2^2} & 2\frac{\sigma_{E_2} I_2}{l_2} \\ 0 & -12\frac{\sigma_{E_2} I_2}{l_2^3} & 6\frac{\sigma_{E_2} I_2}{l_2^2} & 12\frac{\sigma_{E_2} I_2}{l_2^3} & 6\frac{\sigma_{E_2} I_2}{l_2^2} \\ 0 & -6\frac{\sigma_{E_2} I_2}{l_2^2} & 2\frac{\sigma_{E_2} I_2}{l_2} & 6\frac{\sigma_{E_2} I_2}{l_2^2} & 4\frac{\sigma_{E_2} I_2}{l_2} \end{bmatrix}$$

In diesem Fall werden beide Elastizitätsmodule als streuend eingeführt, sind jedoch untereinander „1“-korreliert und nehmen gleichzeitig Minimal-, Maximal- und Mittelwerte an.

Würde die Einspannung als einzige streuende Größe eingeführt, wäre die stochastische Steifigkeitsmatrix nur am Element (1,1) mit σ_{k_ϕ} besetzt. Alle weiteren Elemente hätten den Wert Null.

10.3.3 Rayleighmultiplizierte Matrizen

Schließlich ist vom Anwender zur Ermittlung der Streuung des Quadrats der Eigenkreisfrequenz die interessierende Mode i auszuwählen (beispielsweise aufgrund der berechneten Beteiligungsfaktoren). Daraufhin sind sowohl die deterministischen Matrizen $\mathbf{K}_0$ und $\mathbf{M}_0$ wie auch die stochastischen Matrizen $\mathbf{K}_1$ und $\mathbf{M}_1$ mit dem zugehörigen, zuvor deterministisch berechneten Eigenvektor $\mathbf{\Psi}_{0,i}$ nach der Vorschrift

$$\begin{aligned} k_{0,i} &= \mathbf{\Psi}_{0,i}^T \, \mathbf{K}_0 \, \mathbf{\Psi}_{0,i} \\ m_{0,i} &= \mathbf{\Psi}_{0,i}^T \, \mathbf{M}_0 \, \mathbf{\Psi}_{0,i} \end{aligned}$$

$$\text{bzw.} \qquad \begin{aligned} k_{1,i} &= \mathbf{\Psi}_{0,i}^T \, \mathbf{K}_1 \, \mathbf{\Psi}_{0,i} \\ m_{1,i} &= \mathbf{\Psi}_{0,i}^T \, \mathbf{M}_1 \, \mathbf{\Psi}_{0,i} \end{aligned}$$

zu multiplizieren (Rayleigh-Multiplikation vgl. Kapitel 5.3). Die Daten sind in der Datei `rayleigh.dat` abzulegen. Die Formulierung der Datei ist im Kapitel 10.3.5 beschrieben.

10.3.4 Berechnungsverlauf

Das Vorgehen, das innerhalb von `qeigenf` zur Bestimmung des Quadrats der streuenden Eigenfrequenz verwendet wird, gliedert sich in folgende Schritte:

1. Aufstellen des in Gleichung (5.11) dargestellten Gleichungssystems. Das Gleichungssystem enthält neben den Rayleigh-multiplizierten Massen- und Steifigkeitswerten die Erwartungswerte zweiter und dritter Ordnung der verwendeten Chaospolynome. Für den vorliegenden Fall zweier Basisvariablen ξ_1 (Streuung innerhalb von $\mathbf{K}(\theta)$) und ξ_2 (Streuung innerhalb von $\mathbf{M}(\theta)$) und die Chaospolynom-Reihenentwicklung, entwickelt bis zum dritten Polynomgrad (Γ_0 bis Γ_9), wurden die Erwartungswerte bestimmt. Sie sind unabhängig vom betrachteten dynamischen System. Die Werte wurden in den Dateien `Erw2_2.dat` und `Erw3_2.dat` abgelegt. Der Anwender kann sie für das zu untersuchende System verwenden, solange er die im vorangegangenen Kapitel aufgeführten Randbedingungen beachtet. Die Dateien müssen vom Anwender in das Verzeichnis kopiert werden, in dem er das Programm `qeigenf` startet.

2. Einlesen der Anwenderdaten aus `rayleigh.dat`. Zur Kontrolle werden die eingelesenen Daten auf dem Bildschirm ausgegeben.

3. Zur Lösung des Gleichungssystems (5.11) werden die Erwartungswerte und die Rayleigh-multiplizierten Matrizen eingesetzt. Nach Einsetzen der Erwartungswerte zweiter und dritter Ordnung ergibt sich das Gleichungssystem in diesem speziellen Fall zu:

$$\begin{bmatrix} m_0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_1 & m_0 & 0 & 2m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2m_1 & 0 & 2m_0 & 0 & 0 & 6m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & m_0 & 0 & 0 & 2m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2m_0 & 0 & 0 & 2m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6m_1 & 0 & 0 & 6m_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2m_1 & 0 & 0 & 2m_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2m_1 & 0 & 0 & 2m_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6m_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{10.2}$$

(Auf den Index i der Eigenform wurde der Übersicht wegen verzichtet.) Als Lösung dieses speziellen Gleichungssystems ergibt sich in Abhängigkeit von k_0, m_0, k_1 und m_1:

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{3m_1^3k_1 - m_1m_0^2k_1 - 5m_0m_1^2k_0 + k_0m_0^3}{-6m_1^2m_0^2 + 3m_1^4 + m_0^4} \\
\alpha_1 &= \frac{(-3m_1^2 + m_0^2)(m_0k_1 - m_1k_0)}{-6m_1^2m_0^2 + 3m_1^4 + m_0^4} \\
\alpha_3 &= \frac{-m_1m_0(m_0k_1 - m_1k_0)}{-6m_1^2m_0^2 + 3m_1^4 + m_0^4} \\
\alpha_6 &= \frac{m_1^2(m_0k_1 - m_1k_0)}{-6m_1^2m_0^2 + 3m_1^4 + m_0^4} \\
\alpha_2 &= \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_7 = \alpha_8 = \alpha_9 = 0. \qquad (10.3)
\end{aligned}
$$

Für die numerische Stabilität der Lösung ist entscheidend, daß der Nenner der Lösungen nicht den Wert Null annimmt. Für alle Lösungen lautet die Bedingung, daß $-6m_1^2m_0^2 + 3m_1^4 + m_0^4$ ungleich Null bleiben muß. Der Ausdruck wird nach den vier unzulässigen Werten für m_1 in Abhängigkeit von m_0 gelöst:

$$
\begin{aligned}
m_{1_{1,2}} &= \pm 1.35 m_0 \\
m_{1_{3,4}} &= \pm 0.43 m_0.
\end{aligned}
$$

Um in den Bereich der ersten positiven Lösung $m_1 = 1.35 \cdot m_0$ zu gelangen, muß die Standardabweichung größer als der Mittelwert der Verteilung sein. Da dies zwangsläufig zu einer großen Anzahl von Werten im negativen Wertebereich führt, wird dieser Fall grundsätzlich vermieden. Ebenso scheidet die negative Lösung $m_1 = -1.35 \cdot m_0$ aus. Die dritte Lösung ist dagegen von Relevanz, da m_1 ein positiver Bruchteil von 43 % von m_0 ist. Dieser Wert ist bei der Formulierung der Streuung zu meiden. Wie Block [9] zeigt, ist jedoch ein deutlicher Sicherheitsabstand zu diesem Wert zu wahren, damit es zu keinen unsinnigen Lösungen kommt. Aufgrund der Untersuchungen wird eine Begrenzung des Verhältnisses m_1/m_0 von 20 % vorgeschlagen. Dies gilt speziell für das in dem Programm enthaltene Gleichungssystem (10.2). Für andere Konstellationen von streuenden Größen und die daraus entstehenden Gleichungssysteme sind entsprechende Grenzwerte zu entwickeln. Ein Beispiel für den vorliegende Fall, bei dem ein Verhältnis von $m_1/m_0 > 20$ % überschritten wird, zeigt Abbildung 9.8. Die Kurve der Näherungslösung auf Grundlage der Chaospolynome weicht bei einer Streuung der Deckenmassen deutlich von der Lösung der Monte-Carlo-Simulation ab.

Eine entsprechende Überprüfung nimmt das Programm vor. Bei Überschreiten des Wertes wird ein Warnhinweis auf dem Bildschirm ausgegeben. Ein Programmabbruch erfolgt jedoch nicht. Die Einhaltung des Verhältniswertes setzt nicht zwangsläufig die Beschränkung der Standardabweichung der streuenden Größe auf 20 % des Mittelwerts voraus. Der Grenzwert ist beim Vergleich der Rayleigh-multiplizierten Größen einzuhalten. Die Beschränkung der Streuung auf der Massenseite stellt keine Einschränkung der Methode dar. Massenkennwerte sind i.a. ausreichend genau bekannt und unterliegen nicht den Streuungen wie Steifigkeitswerte.

4. Berechnung der Momente aus dem Lösungsvektor nach Gleichung (6.3): Diese werden in einer Datei `momente`*i*`.dat` abgelegt und dienen dem Anwender zur Einschätzung des

Mittelwerts, der Standardabweichung sowie des dritten zentralen Moments. Für die weitere Berechnung wird die Datei nicht benötigt.

5. Verteilungsfunktion des Quadrats der Eigenkreisfrequenz : Im nächsten Schritt wird der Lösungsvektor ausgewertet wie in Kapitel 6.2 für den zweidimensionalen Fall beschrieben. Die Stützstellen einer zweidimensionalen Standardnormalverteilung können wie die Erwartungswerte der Chaospolynome unabhängig vom untersuchten System vorab bestimmt werden. Sie sind in der Datei `stuetzstellen_2dim.dat` gespeichert und werden für die Auswertung eingelesen. Die Datei muß sich in dem Verzeichnis befinden, in dem das Programm aufgerufen wird. Es werden insgesamt 10 000 Stellen ausgewertet. Als Ergebnis werden zwei Dateien erzeugt: `alpha`i`.dat` und `alpha_nl`i`.dat`. Die Datei `alpha`i`.dat` enthält die bei Auswertung entstandenen 10 000 Datenpaare (Quadrat der Eigenkreisfrequenz und zugehörige Werte der Verteilungsfunktion) mit verringerter Genauigkeit. Die diskret erzeugte Funktion läßt sich mittels eines Programms zur Darstellung von Funktionen (beispielsweise `gnuplot`) oder einem Tabellenkalkulationsprogramm darstellen. `alpha_nl`i`.dat` (`nl` für „nicht lesbar“) enthält die Daten in einem nur maschinenlesbaren Format, dafür mit größerer Genauigkeit. Sie wird für die weitere Berechnung von Überschreitenswahrscheinlichkeiten benötigt.

10.3.5 Manual für Programm `qeigenf`

Für die Anwendung von `qeigenf` ist in einem Manual kurz zusammengestellt, welche Dateien in dem Berechnungsverzeichnis erforderlich sind, welchen Aufbau die vom Anwender zu erstellende Datei `rayleigh.dat` besitzen muß, wie das Programm zu starten ist und welche Ausgabedateien erzeugt werden:

1. Eingabedateien im Programmverzeichnis (bereits erzeugt, Download über `www.bm.bv.tum.de`, gelten für zwei Basisgrößen ξ_1 und ξ_2)

`Erw2_2.dat`	Erwartungswerte 2. Ordnung
`Erw3_2.dat`	Erwartungswerte 3. Ordnung
`stuetzstellen_2dim.dat`	Koordinaten der zweidimensionalen Auswertung

2. vom Anwender zu erstellende Dateien:
   `rayleigh.dat`

Zeile 1:	i	Nummer der betrachteten Eigenfrequenz
Zeile 2:	$k_{0,i}$	Wert der Rayleigh-multiplizierten deterministischen Steifigkeitsmatrix
Zeile 3:	$m_{0,i}$	Wert der Rayleigh-multiplizierten deterministischen Massenmatrix
Zeile 4:	$k_{1,i}$	Wert der Rayleigh-multiplizierten stochastischen Steifigkeitsmatrix
Zeile 5:	$m_{1,i}$	Wert der Rayleigh-multiplizierten stochastischen Massenmatrix

3. Programmaufruf
   `qeigenf`

4. Ausgabedaten
   `momente`i`.dat` zentrale Momente

Zeile 1:	i	Nummer der betrachteten Eigenfrequenz
Zeile 2:	$\mu_{\alpha,i}$	Mittelwert des Quadrats der Eigenfrequenz
Zeile 3:	$\sigma_{\alpha,i}$	Standardabweichung
Zeile 4:	$\mu_{3,\alpha,i}$	drittes zentrales Moment

`alpha`i`.dat`	Verteilungsfunktion α_i (lesbar)
`alpha_nl`i`.dat`	Verteilungsfunktion α_i (nur maschinenlesbar)

Mit den Ergebnissen des Programms `qeigenf` können je nach Fragestellung die Programme `puealpha`, `puemono` oder `puemulti` aufgerufen werden. Eine Übersicht der benötigten Eingabedaten gibt Abbildung 10.4. Die Programme werden im folgenden erklärt. Die Anwendung der Programme sowie die Formulierung der Eingabegrößen und -dateien sind in Kapitel 12 anhand von Beispielen erläutert.

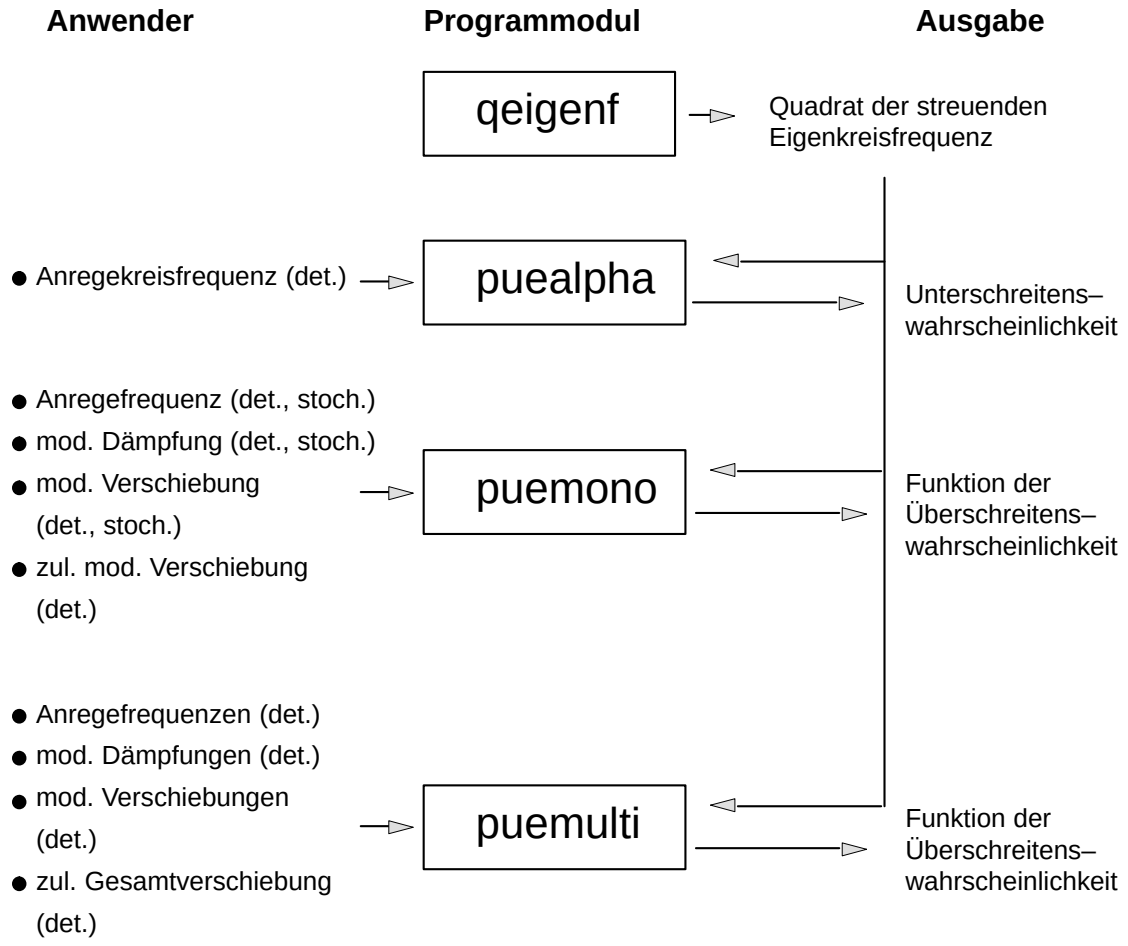


Abbildung 10.4: Übersicht über Ein- und Ausgabe zur Berechnung von Überschreitenswahrscheinlichkeiten

10.4 Programm puealpha

10.4.1 Berechnungsverlauf

Ist bereits ein Bereich bestimmt, in dem die Eigenfrequenzen nicht liegen dürfen, so kann mit `puealpha` die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, mit der die Eigenfrequenz unter einem Grenzwert liegt.

Dafür ist eine Eingabedatei `eingabe_alpha.dat` zu formulieren, welche die Kennzahl (Nummer) der betrachteten Eigenfrequenz und den gegebenen Grenzwert Ω in [rad/s] enthält. Die Eingabe wird auf dem Bildschirm zu Kontrollzwecken wiedergegeben. Als Ausgabe erscheint die Wahrscheinlichkeit, mit der Werte von α unterhalb von Ω^2 liegen. Dies ist auch die Wahrscheinlichkeit, mit der Realisationen der Eigenkreisfrequenz ($\sqrt{\alpha}$) unter dem Grenzwert Ω liegen. Dazu untersucht das Programm, zwischen welchen diskret gegebenen Werten α der Wert Ω^2 liegt und interpoliert entsprechend die Wahrscheinlichkeit.

Soll bestimmt werden, mit welcher Wahrscheinlichkeit $\sqrt{\alpha}$ innerhalb eines Bereichs $\Omega_1 < \sqrt{\alpha} < \Omega_2$ zu liegen kommt, ist das Programm zunächst mit dem Grenzwert Ω_1 zu starten, anschließend mit Ω_2. Die Wahrscheinlichkeit für $\sqrt{\alpha}$ im Bereich $\Omega_1 < \sqrt{\alpha} < \Omega_2$ ist zu berechnen nach:

$$P(\Omega_1 < \sqrt{\alpha} < \Omega_2) = P(\sqrt{\alpha} < \Omega_2) - P(\sqrt{\alpha} < \Omega_1).$$

10.4.2 Manual für Programm puealpha

1. Eingabedateien in Programmverzeichnis (durch `qeigenf` erzeugt):

   `alpha_nl`i`.dat` Verteilungsfunktion α_i (nur maschinenlesbar)

2. Vom Anwender zu erstellende Datei:

   `eingabe_alpha.dat`

Zeile 1:	i	Nummer der betrachteten Eigenkreisfrequenz
Zeile 2:	Ω	oberer Grenzwert der Eigenkreisfrequenz

3. Programmaufruf:
   `puealpha`

4. Ausgabedaten:
   Bildschirm: Wahrscheinlichkeit, mit der die Eigenkreisfrequenz unter dem Grenzwert liegt.

10.5 Programm puemono

10.5.1 Allgemeine Aspekte

Mit den vorliegenden Verteilungsfunktionen der Quadrate von Eigenfrequenzen ist es möglich, analog zu Kapitel 7 Überschreitenswahrscheinlichkeiten vorgegebener Grenzwerte von Verschiebungsgrößen im eingeschwungenen Zustand zu ermitteln. Für den Fall monofrequenter Anregung geschieht dies mit dem Programm `puemono`.

Dem Programm liegt zur Bestimmung der maximalen Verschiebungsgröße die Vergrößerungsfunktion des fußpunkterregten Einmassenschwingers V_r zugrunde. Bezogen auf eine Verschiebungsgröße w_r lautet sie:

$$\begin{aligned} w_{r,max} &= w_0 \cdot V_r = \\ &= w_0 \frac{\frac{\Omega^2}{\alpha}}{\sqrt{(1-\frac{\Omega^2}{\alpha})^2 + (2D)^2 \frac{\Omega^2}{\alpha}}}. \end{aligned} \tag{10.4}$$

Das Vorgehen hat auch bei der Berechnung krafterregter Systeme Vorteile. Krafterregte Systeme können nach Vorberechnungen, die nachfolgend erläutert werden, mit dem gleichen Programm behandelt werden.

Neben den Streuungen innerhalb der Steifigkeitsmatrix und der Massenmatrix, die sich in der Verteilungsfunktion des Quadrats der Eigenkreisfrequenzen α widerspiegeln, ist es möglich, die Größen w_0 (modale Verschiebungsamplitude - analog für Verdrehungsamplitude ϕ_0 anwendbar), D (modale Dämpfung) und Ω (Anregekreisfrequenz) als streuend anzunehmen. Es ist möglich, jede dieser drei Größen getrennt als normalverteilt anzunehmen, während die anderen beiden deterministisch behandelt werden. Ebenso können w_0 und Ω sowie D und Ω mit der jeweilig zugehörigen zweidimensionalen Verteilungsdichte als gleichzeitig streuend in der Berechnung behandelt werden. Die Beschreibung der zweidimensionalen Normalverteilungsdichten lautet:

$$\begin{aligned} p(w_0,\Omega) &= \frac{1}{2\pi\sigma_{w_0}\sigma_\Omega\sqrt{1-\rho_{w_0,\Omega}}}\, e^{-\frac{1}{2(\rho_{w_0,\Omega})}\left[\frac{(w_0-\mu_{w_0})^2}{\sigma^2_{w_0}} - 2\rho_{w_0,\Omega}\frac{(w_0-\mu_{w_0})(\Omega-\mu_\Omega)}{\sigma_{w_0}\sigma_\Omega} + \frac{(\Omega-\mu_\Omega)^2}{\sigma^2_\Omega}\right]} \\ \text{bzw.} \\ p(D,\Omega) &= \frac{1}{2\pi\sigma_D\sigma_\Omega\sqrt{1-\rho_{D,\Omega}}}\, e^{-\frac{1}{2(\rho_{D,\Omega})}\left[\frac{(D-\mu_D)^2}{\sigma^2_D} - 2\rho_{D,\Omega}\frac{(D-\mu_D)(\Omega-\mu_\Omega)}{\sigma_D\sigma_\Omega} + \frac{(\Omega-\mu_\Omega)^2}{\sigma^2_\Omega}\right]} \end{aligned} \tag{10.5}$$

Dabei bezeichnet μ die Mittelwerte der Verteilungen, σ die Standardabweichung und ρ den Korrelationskoeffizienten der betreffenden Größen. ρ kann Werte $-1 < \rho < +1$ annehmen. (Die Grenzwerte ± 1 führen zu Unendlichkeitsstellen der Funktion.) Im Falle von einem Wert nahe -1 nimmt eine Größe ihre maximalen Realisationen an, während die andere ihre minimalen Realisationen annimmt und umgekehrt. Für ρ nahe 1 nehmen beide Werte gleichzeitig ihre maximalen bzw. minimalen Realisationen an. Für $\rho = 0$ sind beide Funktionen nicht korreliert und die Realisationen haben gegenseitig keinen Zusammenhang.

Das Programm ist sowohl für Ein- als auch Mehrfreiheitsgradsysteme unter Fußpunkt- und Krafterregung anzuwenden. Benötigte Eingabewerte wie α der betrachteten Eigenform liegen bereits vor oder können wie Ω bzw. μ_Ω und σ_Ω einfach abgeschätzt werden. Für Mehrfreiheitsgradsysteme erfordert die Angabe von D bzw. μ_D und σ_D Zusatzüberlegungen (vgl. Kapitel 8). Die Formulierung von $w_{r,zul}$ bzw. w_{zul}, w_0 bzw. μ_{w_0} und σ_{w_0} muß auf jeden Anwendungsfall abgestimmt werden.

Im folgenden wird beschrieben, wie für Einfreiheitsgradsysteme und Mehrfreiheitsgradsysteme mit und ohne dominante Eigenform für die Lastfälle Fußpunkt- und Krafterregung vorzugehen ist.

10.5.2 Einfreiheitsgradsystem

Fußpunkterregte Schwingung

Für den einfachsten Fall - den fußpunkterregten Einmassenschwinger - sind die vom Programm benötigten Größen direkt anzugeben: w_0 ist der deterministische Wert für die Maximalamplitude der harmonischen Fußpunkterregung. Für die stochastische Betrachtung sind μ_{w_0} und σ_{w_0} so zu wählen, daß ein physikalisch sinnvoller Wertebereich entsteht.

Zur Bestimmung der Überschreitenswahrscheinlichkeit einer gegebenen Verschiebungsgröße w_{zul} ist zunächst die maximal zulässige Relativverschiebung $w_{r,zul}$ abzuleiten. Sie berechnet sich aus der Differenz der Gesamtverschiebung und der Fußpunkterregung unter Berücksichtigung des Phasenversatzes (vgl. Gleichung (8.3)):

$$w_{r,zul}(t) = w_{zul}(t) - w_0(t).$$

$w_{r,zul}$ ist dann der Maximalwert der Funktion $w_{r,zul}(t)$. Wird die Amplitude w_0 als streuend aufgefaßt, wird der Grenzwert bei der stochastischen Berechnung näherungsweise mit dem Mittelwert der Verteilung bestimmt:

$$w_{r,zul}(t) = w_{zul}(t) - \mu_{w_0}(t)$$

oder mit einem dem Anwender als sinnvoll erscheinenden Wert.

Im Programm ist vorgesehen, daß der Anwender nicht allein den einzuhaltenden Grenzwert einzutragen hat, sondern einen Bereich, der den Grenzwert enthält (Eingabe eines unteren und eines oberen Grenzwerts, g_u und g_o). Er erhält dadurch die Zusatzinformation, wie sensitiv die berechnete Überschreitenswahrscheinlichkeit auf den einzuhaltenden Grenzwert reagiert. Der Anwender ersieht daraus, welche Überschreitenswahrscheinlichkeiten entstehen, wenn der Grenzwert (geringfügig) variiert wird. Es entsteht eine Funktion, in der diskreten Werten des angegebenen Bereichs die jeweilige Überschreitenswahrscheinlichkeit zugeordnet wird. Um chrakteristische Kennwerte zur Einschätzung zu gewinnen, werden für die Funktion ein erstes Moment und die Wurzel aus einem zweiten zentralen Moment berechnet, analog zur Bestimmung des Mittelwertes und der Standardabweichung einer Verteilung:

$$\begin{aligned} \text{erstes Moment} \quad &: \quad mom_1 = \int_{g_u}^{g_o} p_{\ddot{u}}(w_{r,zul})\,dw_{r,zul} \\ \text{zweites Moment} \quad &: \quad mom_2 = \int_{g_u}^{g_o} (p_{\ddot{u}}(w_{r,zul}) - mom_1)^2\,dw_{r,zul}. \end{aligned} \tag{10.6}$$

Die Kennwerte mom_1 und mom_2 sind besonders hilfreich bei Parameterstudien, in denen der Einfluß einer Größe auf die Überschreitenswahrscheinlichkeit untersucht wird. Sie erlauben einen Vergleich der Sensitivität des Ergebnisses bei Variation des Eingangswerts.

Krafterregte Schwingung

Liegt statt einer harmonischen Fußpunkterregung eine harmonische Krafterregung vor, wird die Maximalamplitude der Antwortverschiebung üblicherweise mit der Vergrößerungsfunktion der krafterregten Schwingung berechnet:

$$w_{max} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\Omega^2}{\alpha})^2 + (2D)^2 \, \frac{\Omega^2}{\alpha}}}. \tag{10.7}$$

Dafür ist der Quotient aus Maximalamplitude der Lastfunktion F_0 und der Federsteifigkeit k zu bilden. Die Steifigkeit k kann eine streuende Größe mit relativ großer Streubreite sein. Da k im Nenner steht, ist eine stochastische Berechnung nicht unmittelbar möglich. Vereinfachend den Mittelwert für k einzusetzen, stellt eine zu grobe Näherung dar.

Für den krafterregten Fall wird in den Anwenderprogrammen im Gegensatz zum üblichen Verfahren die Vergrößerungsfunktion des fußpunkterregten Schwingers aus Gleichung (10.4) verwendet. Der für die krafterregte Schwingung umgerechnete Wert $\bar{w}_0$ berechnet sich aus Vergleich der beiden Vergrößerungsfunktionen (Gleichung (10.4) und Gleichung (10.7)) zu:

$$\begin{aligned} \bar{w}_0 \cdot \frac{\Omega^2}{\alpha} &= \frac{F_0}{k} \\ \bar{w}_0 \cdot \frac{\Omega^2}{\frac{k}{m}} &= \frac{F_0}{k} \\ \bar{w}_0 &= \frac{F_0}{\Omega^2 \, m}. \end{aligned} \tag{10.8}$$

Die Amplitude der Absolutverschiebung lautet:

$$w_{max} = \bar{w}_0 \cdot V_r. \tag{10.9}$$

Auch Masse und Erregerfrequenz können streuen. Sind ihre Streubreiten geringer als die der Steifigkeit und werden zur Bestimmung von $\bar{w}_0$ ihre Mittelwerte eingesetzt, ist die zu erwartende Abweichung bei Anwendung von $\bar{w}_0$ geringer als bei Anwendung von $w_0 = F_0/k$.

Die Berechnung mit $\bar{w}_0$ führt in diesem Fall zu Absolutverschiebungen. Ein vorgegebener zulässiger Grenzwert w_{zul} ist direkt zu übernehmen.

10.5.3 Mehrfreiheitsgradsystem mit dominanter Eigenform

Wird nach Auswerten von Gleichung (8.14) bzw. Gleichung (8.15), der Ermittlung der modalen Beteiligungsfaktoren, festgestellt, daß sich die Systemantwort nahezu mit einer Eigenform beschreiben läßt, so ist nur diese Eigenform zu untersuchen.

Für das Beispiel aus Kapitel 8.4.1 - einer Beteiligung der ersten Mode von 90% - ergibt sich für Fußpunkterregung

$$0.9 \cdot \mathbf{w}_r[k] \quad = \quad \mathbf{w}_{r,1}[k] = y_{r,0,1} \cdot V_{r,1}(\omega_1, \Omega, D_1) \cdot \mathbf{\Psi}_1[k] \tag{10.10}$$

und für Krafterregung

$$0.9 \cdot \mathbf{w}[k] \quad = \quad \mathbf{w}_1[k] \quad = y_{0,1} \cdot V_1(\omega_1, \Omega, D_1) \cdot \mathbf{\Psi}_1[k]. \tag{10.11}$$

Der Wert w_0, die Maximalamplitude der harmonischen Fußpunkterregung des Einmassenschwingers, ist für fußpunkterregte Mehrfreiheitsgradsysteme durch seine modale Entsprechung $y_{r,0,i}$ zu ersetzen. Der zulässige Grenzwert ist ebenfalls modal zu formulieren (vgl. Gleichungen (8.8) und (8.18)):

$$y_{r,0,i} = \frac{\mathbf{\Psi}_i^T \mathbf{f}_r}{\Omega^2 \mathbf{\Psi}_i^T \mathbf{M}_0 \mathbf{\Psi}_i} = \frac{f_{r,i}^*}{\Omega^2 m_{0,i}} \qquad y_{r,1,zul} = \frac{0.9 \cdot \mathbf{w}_{r,zul}[k]}{\mathbf{\Psi}_1[k]}. \tag{10.12}$$

Für die Krafterregung muß aufgrund der Verwendung der Vergrößerungsfunktion eines fußpunkterregten Schwingers eine modale Ersatzgröße $\bar{y}_{0,i}$ analog zu Gleichung (10.8) formuliert werden. Gleichung (8.11) wird variiert, die Bestimmung des zulässigen modalen Grenzwerts (Gleichung (8.20)) ändert sich nicht.

$$\bar{y}_{0,i} = \frac{\mathbf{\Psi}_i^T \mathbf{f}}{\Omega^2 \mathbf{\Psi}_i^T \mathbf{M}_0 \mathbf{\Psi}_i} = \frac{f_i^*}{\Omega^2 m_{0,i}} \qquad y_{1,zul} = \frac{0.9 \cdot \mathbf{w}_{zul}[k]}{\mathbf{\Psi}_1[k]}. \tag{10.13}$$

Es wird näherungsweise der deterministische Eigenvektor $\mathbf{\Psi}_i$, ein deterministischer Wert für Ω und die deterministische Massenmatrix $\mathbf{M}_0$ eingesetzt.

Alle bisher beschriebenen Eingangswerte sind durch eine deterministische Berechnung zu gewinnen. Bei Verwendung eines FE-Programms ist der Formulierung des Lastvektors bei Fußpunkterregung besondere Aufmerksamkeit zu schenken.

Bei der Bestimmung von $y_{0,r,i}$ bzw. $y_{r,i,zul}$ muß sich der Anwender vergewissern, ob der Lastvektor $f_{r,i}^*$ tatsächlich für ein in Relativverschiebungen formuliertes Gleichungssystem aufgestellt wurde. Am einfachsten kann dies anhand der Lastformulierung eines Einmassenschwingers nachgeprüft werden. Lautet die zu lösende Differentialgleichung für einen Einmassenschwinger

$$m\ \ddot{w}_r + k\ w_r = m\ w_0\ \Omega^2,$$

so deutet der Lastvektor $m \cdot w_0 \cdot \Omega^2$ auf die Lösung nach der Relativverschiebung und anschließende Addition mit w_0 hin. Die Werte $y_{r,0,i}$ und $y_{r,i,zul}$ sind wie gezeigt für die fußpunkterregte Schwingung zu formulieren.

Wird hingegen die Differentialgleichung

$$m\ \ddot{w} + k\ w = k\ w_0$$

mit dem Lastvektor $k \cdot w_0$ gelöst, so wird das Problem im FE-Programm in Absolutverschiebungen formuliert und wie eine krafterregte Schwingung behandelt. Der gewonnene

Lastvektor **f** entspricht dem eines krafterregten Systems. Die weitere stochastische Berechnung ist, wie für den krafterregten Schwinger geschildert, fortzusetzen und erfolgt mit den Werten $\bar{y}_{0,i}$ und $y_{1,zul}$.

Im unmittelbaren Fall krafterregter Schwingung wird generell nach den Absolutverschiebungen gelöst, und $y_{i,zul}$ ist entsprechend anzugeben.

10.5.4 Mehrfreiheitsgradsystem ohne dominante Eigenform

Das Vorgehen für die Behandlung von Mehrfreiheitsgradsystemen, deren Schwingungsantwort nicht dominant von einer Eigenform bestimmt wird, enthält Kapitel 8.5. In der praktischen Anwendung werden unterschiedliche Realisationen der streuenden Größen zur Bestimmung der Beteiligungsfaktoren eingesetzt. Für die daraus berechneten verschiedenen Beteiligungsprozentsätze werden nach Kapitel 10.5.3 die Eingangswerte für eine zu untersuchende Eigenform erstellt und mit `puemono` die zugehörige Überschreitenswahrscheinlichkeit bestimmt. Die einzelnen Berechnungsergebnisse führen zu einem Bereich möglicher Überschreitenswahrscheinlichkeiten.

10.5.5 Berechnungsverlauf

Die benötigten Daten werden aus den Dateien `alpha_nl`*i*`.dat` und `eingabe_mono.dat` eingelesen und die zulässigen Grenzen für α_i nach Gleichung (7.11) in Abhängigkeit von Ω, D und w_0, $\bar{w}_0$ ($y_{r,0,i}$, $\bar{y}_{0,i}$) für $w_{r,zul}$, w_{zul} ($y_{r,i,zul}$, $y_{i,zul}$) ermittelt. Handelt es sich um deterministische Variablen Ω, D und w_0, $\bar{w}_0$, werden die Grenzen direkt berechnet und die Verteilungsfunktion α_i ausgewertet. Wird ein bzw. werden zwei Parameter als normalverteilt angenommen, wird zusätzlich deren ein- bzw. zweidimensionale Verteilungsdichte diskret abgetastet. Für einzelne Realisationen werden die zugehörigen Grenzen für α_i bestimmt, die Wahrscheinlichkeit, daß α_i innerhalb der Grenzen liegt, berechnet und der Wert mit der Wahrscheinlichkeit, mit der die Realisation angenommen wird, multipliziert. Die Produkte werden für die ausgewerteten Realisationen addiert. Die Summe ist die totale Überschreitenswahrscheinlichkeit der Antwortgrenze.

Das Vorgehen wird für eine gewisse Anzahl von Werten im Bereich zwischen unterer und oberer Grenze für w_0, $\bar{w}_0$ bzw. $y_{r,0,i}$, $\bar{y}_{0,i}$ wiederholt und eine Verteilung der Überschreitenswahrscheinlichkeit zugehörig zu w_0, $\bar{w}_0$ bzw. $y_{r,0,i}$, $\bar{y}_{0,i}$ erstellt.

Die Verteilung wird in Form von Wertepaaren in `pue_funk`*i*`.dat` abgelegt und kann mit einem Programm zur Darstellung von Funktionen oder einem Tabellenkalkulationsprogramm dargestellt werden. Am Bildschirm werden das erste Moment und die Wurzel aus dem zweiten zentralen Moment der Funktion ausgegeben.

10.5.6 Manual für Programm `puemono`

1. Eingabedatei im Programmverzeichnis (durch `qeigenf` erzeugt):

   `alpha_nl`*i*`.dat` Verteilungsfunktion α_i (nur maschinenlesbar)

2. Vom Anwender zu erstellende Datei:

   `eingabe_mono.dat`

   In der ersten Zeile steht ein Kennwert, der die Berechnungsart der Überschreitenswahrscheinlichkeit bestimmt. Folgende Möglichkeiten stehen zur Verfügung:

Kennwert	Auswertung für
1	lediglich streuende Eigenfrequenz α
2	zusätzlich streuende modale Verschiebungsgröße w_0, $\bar{w}_0$ bzw. $y_{r,0,i}$, $\bar{y}_{0,i}$
3	zusätzlich streuende Anregefrequenz Ω
4	zusätzlich streuende modale Dämpfung D
5	zusätzlich Kombination streuende modale Verschiebungsgröße w_0, $\bar{w}_0$ bzw. $y_{r,0,i}$, $\bar{y}_{0,i}$ und streuende Anregefrequenz Ω
6	zusätzlich Kombination streuende modale Dämpfung D und streuende Anregefrequenz Ω

   Für die unterschiedlichen Fälle ist die Datei `eingabe_mono.dat` jeweils gesondert zu formulieren. Im einzelnen muß sie enthalten:

   (a) Fall: lediglich streuende Eigenfrequenz α

Zeile 1:	1	Kennwert der Berechnung
Zeile 2:	i	Kennzahl der betrachteten Mode
Zeile 3:	$w^u_{r,zul}$, w^u_{zul} bzw. $y^u_{r,i,zul}$, $y^u_{i,zul}$	zulässige modale Verschiebungsgröße, untere Grenze [m bzw. rad]
Zeile 4:	$w^o_{r,zul}$, w^o_{zul} bzw. $y^o_{r,i,zul}$, $y^o_{i,zul}$	zulässige modale Verschiebungsgröße, obere Grenze [m bzw. rad]
Zeile 5:	w_0, $\bar{w}_0$ bzw. $y_{r,i,0}$, $\bar{y}_{i,0}$	modale Fußpunktverschiebungsgröße [m bzw. rad]
Zeile 6:	Ω	Erregerfrequenz [rad/s]
Zeile 7:	D	modale Dämpfung [dimensionslos]

   (b) Fall: zusätzlich streuende modale Verschiebung/Verdrehung w_0

Zeile 1:	2	Kennwert der Berechnung
Zeile 2:	i	Kennzahl der betrachteten Mode
Zeile 3:	$w^u_{r,zul}$, w^u_{zul} bzw. $y^u_{r,i,zul}$, $y^u_{i,zul}$	zulässige modale Verschiebungsgröße, untere Grenze [m bzw. rad]
Zeile 4:	$w^o_{r,zul}$, w^o_{zul} bzw. $y^o_{r,i,zul}$, $y^o_{i,zul}$	zulässige modale Verschiebungsgröße, obere Grenze [m bzw. rad]
Zeile 5:	μ_{w_0}, $\mu_{\bar{w}_0}$ bzw. $\mu_{y_{r,0,i}}$, $\mu_{\bar{y}_{0,i}}$	Mittelwert modale Verschiebungsgröße [m bzw. rad]
Zeile 6:	σ_{w_0}, $\sigma_{\bar{w}_0}$ bzw. $\sigma_{y_{r,0,i}}$, $\sigma_{\bar{y}_{0,i}}$	Standardabweichung modale Verschiebungsgröße [m bzw. rad]
Zeile 7:	Ω	Erregerfrequenz [rad/s]
Zeile 8:	D	modale Dämpfung [dimensionslos]

(c) Fall: zusätzlich streuende Anregefrequenz Ω

Zeile 1:	3	Kennwert der Berechnung
Zeile 2:	i	Kennzahl der betrachteten Mode
Zeile 3:	$w^u_{r,zul}$, w^u_{zul} bzw. $y^u_{r,i,zul}$, $y^u_{i,zul}$	zulässige modale Verschiebungsgröße, untere Grenze [m bzw. rad]
Zeile 4:	$w^o_{r,zul}$, w^o_{zul} bzw. $y^o_{r,i,zul}$, $y^o_{i,zul}$	zulässige modale Verschiebungsgröße, obere Grenze [m bzw. rad]
Zeile 5:	w_0, $\bar{w}_0$ bzw. $y_{r,i,0}$, $\bar{y}_{i,0}$	modale Fußpunktverschiebungsgröße [m bzw. rad]
Zeile 6:	μ_Ω	Mittelwert Erregerfrequenz [rad/s]
Zeile 7:	σ_Ω	Standardabweichung Erregerfrequenz [rad/s]
Zeile 8:	D	modale Dämpfung [dimensionslos]

(d) Fall: zusätzlich streuende modale Dämpfung D

Zeile 1:	4	Kennwert der Berechnung
Zeile 2:	i	Kennzahl der betrachteten Mode
Zeile 3:	$w^u_{r,zul}$, w^u_{zul} bzw. $y^u_{r,i,zul}$, $y^u_{i,zul}$	zulässige modale Verschiebungsgröße, untere Grenze [m bzw. rad]
Zeile 4:	$w^o_{r,zul}$, w^o_{zul} bzw. $y^o_{r,i,zul}$, $y^o_{i,zul}$	zulässige modale Verschiebungsgröße, obere Grenze [m bzw. rad]
Zeile 5:	w_0, $\bar{w}_0$ bzw. $y_{r,i,0}$, $\bar{y}_{i,0}$	modale Fußpunktverschiebungsgröße [m bzw. rad]
Zeile 6:	Ω	Erregerfrequenz [rad/s]
Zeile 7:	μ_D	Mittelwert modale Dämpfung [dimensionslos]
Zeile 8:	σ_D	Standardabweichung modale Dämpfung [dimensionslos]

(e) Fall: zusätzlich Kombination streuende modale Verschiebungsgröße w_0 bzw. ϕ_0 und streuende Anregefrequenz Ω

Zeile 1:	5	Kennwert der Berechnung
Zeile 2:	i	Kennzahl der betrachteten Mode
Zeile 3:	$w^u_{r,zul}$, w^u_{zul} bzw. $y^u_{r,i,zul}$, $y^u_{i,zul}$	zulässige modale Verschiebungsgröße, untere Grenze [m bzw. rad]
Zeile 4:	$w^o_{r,zul}$, w^o_{zul} bzw. $y^o_{r,i,zul}$, $y^o_{i,zul}$	zulässige modale Verschiebungsgröße, obere Grenze [m bzw. rad]
Zeile 5:	μ_{w_0}, $\mu_{\bar{w}_0}$ bzw. $\mu_{y_{r,0,i}}$, $\mu_{\bar{y}_{0,i}}$	Mittelwert modale Verschiebungsgröße [m bzw. rad]
Zeile 6:	σ_{w_0}, $\sigma_{\bar{w}_0}$ bzw. $\sigma_{y_{r,0,i}}$, $\sigma_{\bar{y}_{0,i}}$	Standardabweichung modale Verschiebungsgröße [m bzw. rad]
Zeile 7:	μ_Ω	Mittelwert Erregerfrequenz [rad/s]
Zeile 8:	σ_Ω	Standardabweichung Erregerfrequenz [rad/s]
Zeile 9:	$\rho_{w_0,\Omega}$	Korrelationskoeffizient w_0, $\bar{w}_0$ bzw. $y_{r,i,0}$, $\bar{y}_{i,0}$, Ω [dimensionslos]
Zeile 10:	D	modale Dämpfung [dimensionslos]

(f) Fall: zusätzlich Kombination streuende modale Dämpfung D und streuende Anregefrequenz Ω

Zeile 1:	6	Kennwert der Berechnung
Zeile 2:	i	Kennzahl der betrachteten Mode
Zeile 3:	$w^u_{r,zul}$, w^u_{zul} bzw. $y^u_{r,i,zul}$, $y^u_{i,zul}$	zulässige modale Verschiebungsgröße, untere Grenze [m bzw. rad]
Zeile 4:	$w^o_{r,zul}$, w^o_{zul} bzw. $y^o_{r,i,zul}$, $y^o_{i,zul}$	zulässige modale Verschiebungsgröße, obere Grenze [m bzw. rad]
Zeile 5:	μ_{w_0}, $\mu_{\bar{w}_0}$ bzw. $\mu_{y_{r,0,i}}$, $\mu_{\bar{y}_{0,i}}$	Mittelwert modale Verschiebungsgröße [m bzw. rad]
Zeile 6:	μ_Ω	Mittelwert Erregerfrequenz [rad/s]
Zeile 7:	σ_Ω	Standardabweichung Erregerfrequenz [rad/s]
Zeile 8:	μ_D	Mittelwert modale Dämpfung [dimensionslos]
Zeile 9:	σ_D	Standardabweichung modale Dämpfung [dimensionslos]
Zeile 10:	$\rho_{D,\Omega}$	Korrelationskoeffizient D, Ω [dimensionslos]

3. Programmaufruf:
   `puemono`

4. Ausgabedaten:
   `funk_pue.dat`: Enthält Verteilungsfunktion der Überschreitenswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von $w_{r,zul}$, w_{zul} bzw. $y_{r,i,zul}$, $y_{i,zul}$.

   Bildschirm: erstes Moment und Wurzel aus zweitem zentralen Moment der Funktion [m bzw. rad]

10.6 Programm `puemulti`

10.6.1 Allgemeine Aspekte

Das Programm `puemulti` berechnet für eine gewählte Eigenform die Wahrscheinlichkeit, daß bei multifrequenter Anregung ein gegebener Grenzwert $\mathbf{w}_{zul}[k]$ überschritten wird. Das untersuchte Problem ist vorteilhaft in Absolutverschiebungen zu formulieren. Das weitere Vorgehen wird entsprechend geschildert.

Wie in Kapitel 8.4.3 beschrieben, sind zunächst die Beteiligungsfaktoren der einzelnen Moden an den Antworten der einzelnen Lastanteile zu berechnen. Im Programm wird allgemein der Zusammenhang von Gleichung (8.26) für die dominante Mode i ausgewertet (in diesem Fall z.B. Mode 1 bei zwei Lastanteilen, Beteiligungsfaktor 1. Lastanteil 90 %, 2. Lastanteil 80 %):

$$\mathbf{w}_{ges}[k] \quad = \quad \sqrt{\mathbf{w}_1[k]^2 + \mathbf{w}_2[k]^2} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{(\mathbf{w}_{1,1}[k] + (1.0 - 0.9) \cdot \mathbf{w}_1[k])^2 + (\mathbf{w}_{1,2}[k] + (1.0 - 0.8) \cdot \mathbf{w}_2[k])^2} = \\
&= \sqrt{(y_{0,1,1} \cdot V_{1,1} \cdot \mathbf{\Psi}_1[k] + 0.1 \cdot \mathbf{w}_1[k])^2 + (y_{0,1,2} \cdot V_{1,2} \cdot \mathbf{\Psi}_1[k] + 0.2 \cdot \mathbf{w}_2[k])^2}.
\end{aligned} \tag{10.14}
$$

Die Gleichung wird für jede Realisation von α_i ausgewertet. Dem Ergebnis wird die zugehörige Wahrscheinlichkeit für die Realisation zugeordnet. Anschließend wird für einen gegebenen Grenzwert untersucht, mit welcher Wahrscheinlichkeit er überschritten wird.

Die verwendeten Anregefrequenzen sind zeilenweise in die Datei `Omega.dat` einzugeben. Das Programm liest die Anregefrequenzen ein, merkt sich die Anzahl und gibt sie zur Kontrolle auf dem Bildschirm aus. Es sind maximal 100 Anregefrequenzen möglich, bei mehr Eingabewerten erfolgt ein Programmabbruch. Zudem ist eine Datei `damping.dat` zu erstellen, die die modalen Dämpfungen zeilenweise je Anregefrequenz enthält. Zwar handelt es sich für alle modalen Dämpfungen um die gleiche Mode, dem Anwender ist jedoch die Möglichkeit gegeben, die Dämpfung für jede Anregefrequenz zu variieren. Die Anzahl der eingegebenen Dämpfungen muß mit der Anzahl der Anregefrequenzen übereinstimmen, ansonsten wird der Programmlauf abgebrochen.

In der Datei `beteil.dat` sind die Beteiligungsfaktoren abzulegen, mit der die untersuchte Mode sich an den Antworten auf die einzelnen Lastanteile beteiligt. Die Datei `gesamt_ver.dat` enthält die maximalen Gesamtantworten des Systems $\mathbf{w}_j[k]$ auf einen Lastanteil j und zwar zeilenweise untereinander in der gleichen Reihenfolge wie die zugehörigen Anregefrequenzen Ω_j. Danach sind in der Datei `modale_ver.dat` je Anregefrequenz Ω_j die statischen modalen Verschiebungsgrößen $\bar{y}_{0,i,j}$ einzugeben (zeilenweise untereinander in Reihenfolge j). Die Bestimmung dieser Werte wird im folgenden erläutert.

Zuletzt wird die Datei `eingabe_multi.dat` eingelesen, welche die Kennzahl der betrachteten Mode und den Bereich für $\mathbf{w}_{zul}[k]$ enthalten muß. Auch in diesem Fall hat der Anwender eine untere und eine obere Grenze für den einzuhaltenden Wert $\mathbf{w}_{zul}[k]$ einzugeben. Zudem ist der Wert des Eigenvektors $\mathbf{\Psi}_i[k]$ einzugeben. Die Normierung der Eigenvektoren ist dem Anwender überlassen.

Auf die Eingabemöglichkeit weiterer streuender Größen als Ergänzung zu jenen, welche die streuende Eigenfrequenz repräsentiert, wird aufgrund des dann anfallenden enormen Auswertebedarfs verzichtet. Nur so kann gewährleistet werden, daß der Anwender in angemessen kurzer Zeit Parameterstudien ausführen kann.

Zur Belegung der Dateien `gesamt_ver.dat` und `modale_ver.dat` wird das Vorgehen für ein Einfreiheitsgradsystem und ein Mehrfreiheitsgradsystem im Anschluß geschildert.

10.6.2 Einfreiheitsgradsystem

Im Falle des Einfreiheitsgradsystems gestaltet sich die Eingabe von $\bar{w}_{0,j}$ und w_{zul} wie im Kapitel 10.5.2 für die monofrequente Anregung geschildert. Für den Fall der harmonischen Krafterregung sind die Werte $\bar{w}_{0,j}$ nach folgender Formel zu berechnen:

$$
\bar{w}_{0,j} = \frac{F_{0,j}}{\Omega_j^2 \, m}.
$$

$F_{0,j}$ sind die Maximalamplituden der Last. Zudem ist die Maximalverschiebung w_j für jeden Lastanteil j zu bestimmen:

$$w_j(t) = w_j \cdot g_j(t) = \bar{w}_{0,j} \cdot V_r(\omega, \Omega_j, D_j) \cdot \sin(\Omega t - \gamma_j). \tag{10.15}$$

Der Beteiligungsfaktor an der Antwort auf einen Lastanteil j beträgt für den Einmassenschwinger in jedem Fall 100 % = 1.0.

w_{zul} ist die maximal zulässige Absolutverschiebung, sie liegt direkt vor.

10.6.3 Mehrfreiheitsgradsystem

Für den Fall des Mehrfreiheitsgradsystems, dessen Antwort durch eine Eigenform i dominiert wird, sind die Eingangswerte $\bar{y}_{0,i,j}$, wie in Kapitel 10.5.3 in Gleichung (10.13) gezeigt, für jede Anregefrequenz Ω_j zu berechnen:

$$\bar{y}_{0,i,j} = \frac{\mathbf{\Psi}_i^T \mathbf{f}_j}{\Omega_j^2 \mathbf{\Psi}_i \mathbf{M}_0 \mathbf{\Psi}_i^T} = \frac{f_{i,j}^*}{\Omega_j^2 m_{0,i}}.$$

$\mathbf{f}_j$ ist der zu Ω_j zugehörige Lastvektor eines in Absolutverschiebungen formulierten Gleichungssystems.

Die Verschiebung des Systems $\mathbf{w}_j[k](t)$ bezüglich jedes Lastanteil j berechnet sich nach:

$$\mathbf{w}_j(t) = \sum_{i=1}^{n} y_{0,i,j} \cdot V_{i,j}(\omega_i, \Omega_j, D_{i,j}) \cdot \mathbf{\Psi}_i \sin(\Omega_j t - \gamma_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} y_{i,j} \cdot \mathbf{\Psi}_i \sin(\Omega_j t - \gamma_{i,j}). \tag{10.16}$$

Der Wert $\mathbf{w}_{zul}[k]$ liegt direkt vor.

Für den Fall, daß die Schwingungsantwort durch keine Eigenform dominiert wird, ist das in Kapitel 8.5.2 gezeigte Verfahren anzuwenden.

10.6.4 Berechnungsverlauf

Nach dem Einlesen wird für jede Realisation von $\alpha_i(\theta)$ die zugehörige quadratische Verschiebungsgröße aus den Beiträgen aller harmonischer Anregungen berechnet und diesem Wert die Wahrscheinlichkeit der zugrundeliegenden Realisation zugeordnet. Es entsteht ein Datenfeld mit quadratischen Verschiebungsgrößen und zugehörigen Wahrscheinlichkeiten. Der vom Anwender gegebene Bereich für w_{zul} bzw. $\mathbf{w}_{zul}[k]$ wird dahingehend ausgewertet, daß für diskrete Werte die Überschreitenswahrscheinlichkeit bestimmt wird. Die Überschreitenswahrscheinlichkeiten werden als Verteilungsfunktion in Wertepaaren in der Datei `funk_pue.dat` abgespeichert. Am Bildschirm wird für die Funktion das erste Moment und die Wurzel des zweiten zentralen Moments ausgegeben.

10.6.5 Manual für Programm `puemulti`

1. Eingabedateien in Programmverzeichnis (durch `qeigenf` erzeugt)

   `alpha_nl`i`.dat` Verteilungsfunktion α_i (nur maschinenlesbar)

2. Vom Anwender zu erstellende Dateien

   `eingabe_multi.dat`

Zeile 1:	i	Kennzahl der betrachteten Mode
Zeile 2:	w^u_{zul} bzw.	zulässige Verschiebungsgröße,
	$\mathbf{w}_{zul}[k]^u$	untere Grenze [m bzw. rad]
Zeile 3:	w^o_{zul} bzw.	zulässige Verschiebungsgröße,
	$\mathbf{w}_{zul}[k]^o$	obere Grenze [m bzw. rad]
Zeile 4 :	$\mathbf{\Psi}_i[k]$	Wert des Eigenvektors an der Stelle [k]

   `Omega.dat`

Zeile 1:	Ω_1	1. Anregefrequenz [rad/s]
Zeile j:	Ω_j	j. Anregefrequenz [rad/s]
Zeile n:	Ω_n	n. Anregefrequenz [rad/s]

   maximal $n = 100$ Eingaben zulässig

   `damping.dat`

Zeile 1:	D_1	modale Dämpfung 1. Anregefrequenz [dimensionslos]
Zeile 2:	D_j	modale Dämpfung j. Anregefrequenz [dimensionslos]
Zeile n:	D_n	modale Dämpfung n. Anregefrequenz [dimensionslos]

   entsprechend `Omega.dat` maximal $n = 100$ Eingaben zulässig

   `modale_ver.dat`

Zeile 1:	$\bar{w}_{0,1}$ bzw.	modale Verschiebungsgröße für Mode i
	$\bar{y}_{0,i,1}$	bei Ω_1 [m bzw. rad]
Zeile j:	$\bar{w}_{0,j}$ bzw.	modale Verschiebungsgröße für Mode i
	$\bar{y}_{0,i,j}$	bei Ω_j [m bzw. rad]
Zeile n:	$\bar{w}_{0,n}$ bzw.	modale Verschiebungsgröße für Mode i
	$\bar{y}_{0,i,n}$	bei Ω_n [m bzw. rad]

   entsprechend `Omega.dat` sind maximal 100 Eingaben möglich

   `gesamt_ver.dat`

Zeile 1:	w_1 bzw.	maximale Verschiebungsgröße für Lastanteil 1
	$\mathbf{w}_1[k]$	[m bzw. rad]
Zeile j:	w_j bzw.	maximale Verschiebungsgröße für Lastanteil j
	$\mathbf{w}_j[k]$	[m bzw. rad]
Zeile n:	w_n bzw.	maximale Verschiebungsgröße für Lastanteil n
	$\mathbf{w}_n[k]$	[m bzw. rad]

   entsprechend `Omega.dat` sind maximal 100 Eingaben möglich

3. Programmaufruf
   `puemulti`

4. Ausgabedaten
   `funk_pue.dat`: Enthält Verteilungsfunktion der Überschreitenswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von w_{zul} bzw. $y_{i,zul}$

   Bildschirm: erstes Moment und Wurzel aus zweitem Moment der Funktion [m bzw. rad]

Abschließend ist in einem Diagramm Abbildung 10.5 die Struktur aller Eingabe- und Ausgabedateien zur besseren Übersicht über die zur Verfügung stehenden Programme für die untersuchte Eigenfrequenz „1“ zusammengefaßt.

10.7 Zusammenfassung der Programme

Es sind Programme vorgestellt worden, die dem Anwender die Berechnung streuender Eigenkreisfrequenzen bei Annahme eines streuenden Masse- und Steifigkeitskennwerts ermöglichen. Darauf aufbauend können Überschreitenswahrscheinlichkeiten gegebener Antwortgrößen bestimmt werden. Dafür stehen Programme zur Behandlung monofrequenter und multifrequenter Lasten zur Verfügung. Beispiele mit Anwendung der Programme werden in Kapitel 12 vorgestellt.

Das Programmpaket ist ein leistungsfähiges Hilfsmittel zur stochastischen Untersuchung von Systemen. Es ist für jene Systeme anwendbar, für die eine FE-Formulierung vorliegt. Für Einfreiheitsgradsysteme und Mehrfreiheitsgradsysteme mit einer dominanten Eigenform geben die Programme zuverlässige Werte der Überschreitenswahrscheinlichkeiten aus. Bei Mehrfreiheitsgradsystemen mit mehreren maßgeblichen Eigenformen ist eine Parameterstudie erforderlich. Da das Programm eine FE-Formulierung des Systems voraussetzt, ist es umfassend einsetzbar auch in Bereichen außerhalb des Bauwesens.

Möchte der Anwender zusätzlich eine streuende Größe einführen, die bislang nicht als solche vorgesehen ist, so kann dies mittels einer Parameterstudie und der anschließenden Berechnung der totalen Wahrscheinlichkeit geschehen: Für die deterministisch vorgesehene Größe werden mögliche Realisationen eingesetzt, die Ergebnisgröße berechnet und diese Größe mit der Wahrscheinlichkeit der Realisation multipliziert. Nach Gleichung (7.9) ist die Gesamtwahrscheinlichkeit die Summe aller Einzelprodukte.

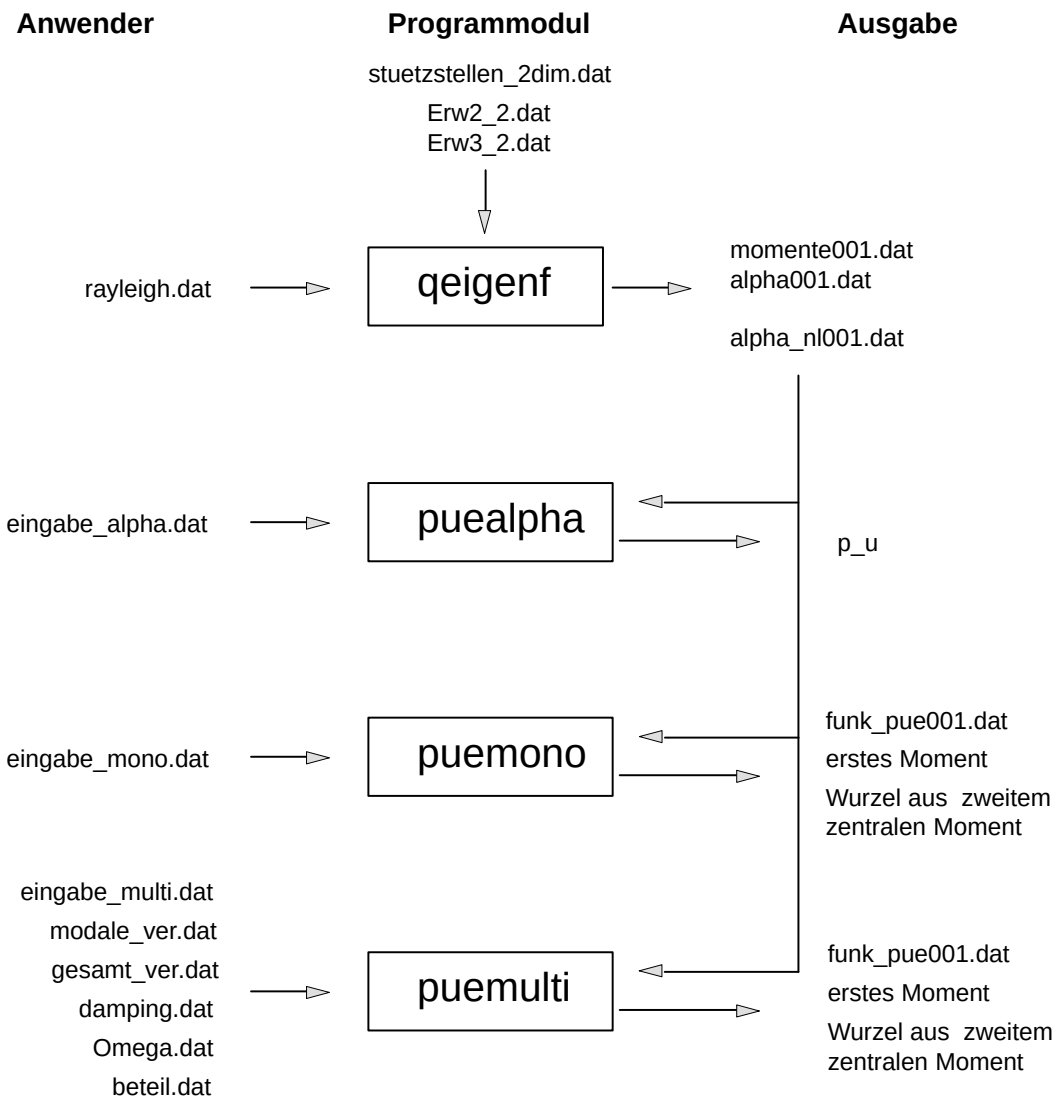


Abbildung 10.5: Übersicht über Ein- und Ausgabedateien

Kapitel 11

Säulenmodell

In diesem Kapitel wird ein Programm vorgestellt, mit dem sich der Ersatzmodelltyp „Säulenmodell“ untersuchen läßt. Dieses Modell hat sich in der praktischen Anwendung für deterministische Größen besonders bewährt. Die Einführung streuender Größen ist für den Fall gelenkig gelagerter Decken mit vertretbarem Aufwand möglich. Zudem führt das Ersatzmodell zu standardisierten Systemen, deren Systemmatrizen in einen Programmcode integriert werden können. Es besteht aus stockwerkshohen Normalkraftstäben und angehängten Einmassenschwingern, deren Kennwerte für bestimmte Auswertungen leicht angegeben werden können (vgl. Kapitel 9).

Für die Modelltypen „Timoshenkogrundmodell“, „erweitertes Timoshenkomodell“ und „Vertikalschwingungsmodell“ ist es nicht möglich, Programme zu entwickeln, die allgemein ein beliebiges System abbilden und stochastisch berechnen können. Zudem zeigte sich bei der Untersuchung der Ersatzmodelle hinsichtlich ihrer Eignung für eine stochastische Berechnung, daß die Einführung bestimmter streuender Größen Schwierigkeiten bei der Berechnung der Vorwerte verursacht.

Für diese Modelle stehen die im Kapitel 10 beschriebenen Anwenderprogramme - aufbauend auf `qeigenf` - zu Verfügung. Der Anwender hat dabei die Rayleigh-Kennwerte der Massenmatrix und Steifigkeitsmatrix einzugeben. Dabei hat er die Möglichkeit, zur Erstellung eine herkömmliche FE-Formulierung oder die Ersatzmodellformulierung zu verwenden. Letztere bietet den Vorteil der reduzierten Anzahl an Freiheitsgraden.

Das Programm `saeule` berechnet die Quadrate der streuenden Eigenfrequenzen, das der Anwender für das Säulenmodell mit gelenkig gelagerten Decken anstelle des in Kapitel 10.3 beschriebenen Programms `qeigenf` verwenden kann. Dafür sind von ihm die Geometrie-, Material- und Lastkennwerte einzusetzen. Die Modalanalyse und die Berechnung der Rayleigh-multiplizierten Größen erfolgt durch das Programm.

Enthalten ist in dem Programm die FE-Darstellung eines Säulenmodells mit folgenden Eigenschaften:

- Gebäude mit Wandscheiben und Streifenfundamenten in einer Richtung,
- einachsig gelenkig gelagerte Decken,
- harmonische Anregung durch Rayleighwelle,

- maximal zu berücksichtigende Stockwerksanzahl: 5 (die Zahl ist für Flachbauten ausreichend),
- Berücksichtigung der ersten Deckeneigenfrequenzen, d.h. jede Decke wird durch einen Einmassenschwinger für gleichphasige und einen für gegenphasige Anregung abgebildet.

Mit dem Programm werden folgende Situationen streuender Größen untersucht:

- Elastizitätsmodul der Säule streut normalverteilt,
- Elastizitätsmodul der Decken streut normalverteilt,
- Massebelegung der Säule streut normalverteilt,
- Massebelegung der Decken streut normalverteilt.

Eine gewählte Streuung, welche als Prozentsatz vom Mittelwert anzugeben ist, gilt für das Gesamtsystem. Wird beispielsweise die Massebelegung der Decken als streuend angenommen, streut die Massebelegung aller Decken mit der gleichen prozentualen Standardabweichung. Zudem sind die Massebelegungen „1"-korreliert, so daß gleichzeitig Minimal-, Mittel- und Maximalwerte erreicht werden.

Die Berechnung bei gleichzeitiger Berücksichtigung streuender Masse und Steifigkeit der Decken ist bei einer herkömmlichen FE-Formulierung des Systems mit den in Kapitel 10 vorgestellten Programmen ausführbar.

Das Programm und zugehörige Eingabedateien stehen wie die im Kapitel 10 gezeigten Programme unter `www.bm.bv.tum.de` zum Download zur Verfügung.

Für dieses Programm wird auf Grundlage einer streuenden Größe ξ zur Lösung des in Gleichung (5.11) vorgestellten Gleichungssystems die Erwartungswerte zweiter und dritter Ordnung benötigt. Für die Auswertung des Lösungsvektors werden die Stützstellen einer eindimensionalen Standardnormalverteilung benötigt (vgl. Kapitel 6.2). Die Werte wurden vorab bestimmt und in den Dateien `Erw2_1.dat` (Erwartungswerte 2. Ordnung), `Erw3_1.dat` (Erwartungswerte 3. Ordnung) und `stuetzstellen_1dim.dat` abgelegt.

11.1 Programm `saeule`

Das Programm `saeule` berechnet aufgrund gegebener Geometriedaten und Materialkennwerte die Ersatzschwinger der Decken. Ist eine Streuung der Deckenparameter angegeben, werden die stochastischen Ersatzschwingerkennwerte berechnet. Die Systemmatrizen werden mit den Schwingerkennwerten und den deterministischen bzw. stochastischen Kenndaten für die aufgehende EA-Säule erstellt. Eine deterministische Eigenwertuntersuchung führt zu den Eigenvektoren und Rayleigh-multiplizierten Systemmatrizen. Die Streuung der Quadrate der Eigenkreisfrequenzen wird bestimmt und in den Dateien `alpha`*i*`.dat` und `alpha_nl`*i*`.dat` ausgegeben. Das Datenfeld in `alpha`*i*`.dat` kann mit einem Programm zur Darstellung von Funktionen oder einem Tabellenkalkulator als Graph dargestellt werden, mit `alpha_nl`*i*`.dat` erfolgt die weitere Berechnung.

Die Dateien `momente_Emodul_Saeule.dat`, `momente_Emodul_Decken.dat`, `momente_m_Saeule.dat` bzw. `momente_m_Decken.dat`, welche je nach gewünschter Auswertung entstehen, enthalten für jede streuende Eigenfrequenz zeilenweise den Mittelwert, die Standardabweichung und das dritte zentrale Moment.

Falls bei Massenstreuung zu große Standardabweichungen gewählt werden, gibt das Programm eine Warnung aus, für welche Eigenformen eventuell numerisch inkorrekte Werte zu erwarten sind. Ein Programmabbruch erfolgt jedoch nicht.

Überschreitenswahrscheinlichkeiten von Antwortgrößen sind mit dem Programm nicht zu berechnen. So wie Vorlaufrechnungen bei den Ersatzmodellen nötig sind, erfordert die Bestimmung von Verschiebungsgrößen Nachlaufrechnungen. Mit ihnen sind die Verschiebungsgrößen des „Originalsystems“ auf Grundlage der Ergebnisse des Ersatzsystems zu bestimmen. Die Nachberechnungen beim Säulenmodell erfordern die Berechnung von Relativverschiebungen. Soll eine Maximalverschiebung eingehalten werden, so ist die Relativverschiebung zweier streuender Verschiebungen zu begrenzen. Eine Rückrechnung auf die zugehörigen Realisationen der beiden beteiligten Verschiebungsgrößen ist nicht eindeutig möglich. Nur eine grobe Näherung (deterministische Annahme einer der beiden Verschiebungen) würde die Berechnung der Überschreitenswahrscheinlichkeit erlauben. Eine zuverlässige Einschätzung der Systemreaktion kann dabei nicht mehr gewährleistet werden.

Ist die Berechnung von Überschreitenswahrscheinlichkeiten nötig, so sollte der Anwender eine herkömmliche FE-Beschreibung des Systems verwenden und die in Kapitel 10 beschriebenen Programme verwenden.

Abbildung 11.1 zeigt eine Übersicht über Ein- und Ausgabedateien.

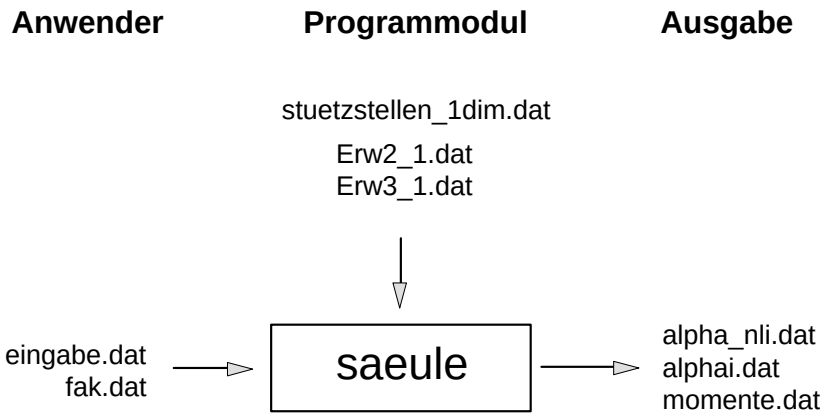


Abbildung 11.1: Ein- und Ausgaben für das Programm `saeule`

11.2 Manual für Programm `saeule`

Für die Anwendung von `saeule` wird in einem Manual zusammengestellt, welche Dateien in dem Berechnungsverzeichnis erforderlich sind, welchen Aufbau die vom Anwender zu erstellenden Dateien besitzen müssen, wie das Programm zu starten ist und welche Ausgabedateien erzeugt werden.

1. Eingabedateien im Programmverzeichnis (bereits erzeugt, Download über `www.bm.bv.tum.de`, gelten für eine Basisgröße ξ)

`Erw2_1.dat`	Erwartungswerte 2. Ordnung
`Erw3_1.dat`	Erwartungswerte 3. Ordnung
`stuetzstellen_1dim.dat`	Koordinaten der eindimensionalen Auswertung

2. vom Anwender zu erstellende Dateien:
`eingabe.dat`

Zeile 1:	i	Kennwert der gewünschten Auswertung
	1 -	E-Modul der Säule streut normalverteilt
	2 -	E-Modul der Decken streut normalverteilt
	3 -	Massebelegung der Säule streut normalverteilt
	4 -	Massebelegung der Decken streut normalverteilt
Zeile 2:	n	Anzahl der Stockwerke (max. 5)
Zeile 3:	E_1	E-Modul Säule [N/m^2]
Zeile 4:	A_1	Querschnittsfläche Säule [m^2]
Zeile 5:	l_1	Stockwerkshöhe [m]
Zeile 6:	μ_1	Massebelegung Säule [kg/m^2]
Zeile 7:	E_{li}	E-Modul Decke links [N/m^2]
Zeile 8:	d_{li}	Deckendicke links [m]
Zeile 9:	l_{li}	Stützweite links [m]
Zeile 10:	μ_{li}	Massebelegung Decke links [kg/m^2]
Zeile 11:	E_{re}	E-Modul Decke rechts [N/m^2]
Zeile 12:	d_{re}	Deckendicke rechts [m]
Zeile 13:	l_{re}	Stützweite rechts [m]
Zeile 14:	μ_{re}	Massebelegung Decke rechts [kg/m^2]
Zeile 15:	m_{fu}	Fundamentmasse [kg]
Zeile 16:	$Re(Cw)$	Realteil Steifigkeitskoeffizient Cw (vgl. [14])
Zeile 17:	$Im(Cw)$	Imaginärteil Steifigkeitskoeffizient Cw (vgl. [14])
Zeile 18:	Ω	Anregekreisfrequenz
Zeile 19:	λ_r	Wellenlänge der Rayleighwelle
Zeile 20:	w_{mi}	Fußpunktverschiebung der Säule (Amplitude der Rayleighwelle)

`fak.dat`

Zeile 1:	σ	Standardabweichung vom Mittelwert [%]

3. Programmaufruf
   `saeule`

4. Ausgabedaten

`alpha`i`.dat`	Verteilungsfunktion α_i (lesbar)
`alpha_nl`i`.dat`	Verteilungsfunktion α_i (nur maschinenlesbar)

`momente_Emodul_Saeule.dat`	Mittelwert,
`momente_Emodul_Decken.dat`	Standardabweichung und
`momente_m_Saeule.dat`	drittes zentrales Moment
`momente_m_Decken.dat`	für jede Eigenfrequenz

Kapitel 12

Anwendungsbeispiele

Zur Veranschaulichung der Anwendung der entwickelten Programme werden drei Beispielsysteme untersucht. Zunächst wird ein Zweifreiheitsgradsystem betrachtet, für das die Programme `qeigenf`, `puealpha`, `puemono` und `puemulti` angewendet werden. Die Einfachheit des Systems eignet sich besonders zum Kennenlernen der Programme. Alle Berechnungsschritte des Anwenders lassen sich übersichtlich dokumentieren, die zu berechnenden Matrizen und Vektoren sind einfach zu ermitteln. Die Berechnung erfordert dennoch die Überlegungen, die für ein Mehrfreiheitsgradsystem anzustellen sind. Das Beispiel ist als Leitfaden für komplexere Systeme zu verstehen. Jeder Rechenschritt ist ausführlich beschrieben, um dem Anwender das Benutzen der Programme zu erleichtern.

Danach wird eine teileingespannte Decke mit streuendem Einspanngrad mit den Programmen `qeigenf` und `puemono` untersucht.

Zudem werden für ein Säulenmodell mit dem Programm `saeule` streuende Eigenfrequenzen berechnet.

Die Eingabe- und Ausgabedateien der Beispiele sind unter `www.bm.bv.tum.de` herunterzuladen.

12.1 Beispiel Zweifreiheitsgradsystem

Abbildung 12.1 stellt das verwendete Zweifreiheitsgradsystem mit seinen Systemparametern vor. Zur Sicherstellung hoher Transparenz des Verfahrens, wird bewußt ein einfaches Beispiel mit kleinen Werten gewählt.

12.1.1 Erzeugung der Funktion für α

Deterministische Eingabe

Zunächst wird die deterministische Steifigkeitsmatrix und Massenmatrix formuliert:

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \text{ und } \qquad \mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}.$$

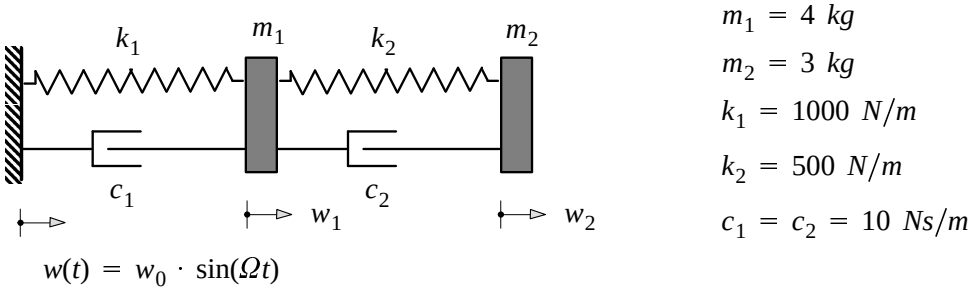


Abbildung 12.1: Zweifreiheitsgradsystem

Eingesetzt für die Werte $k_1 = 1000$ N/m, $k_2 = 500$ N/m, $m_1 = 4$ kg und $m_2 = 3$ kg ergeben sich die Eigenvektoren $\mathbf{\Psi}_1$ und $\mathbf{\Psi}_2$ zu:

$$\mathbf{\Psi}_1 = \begin{bmatrix} 0.443 \\ 1.0 \end{bmatrix} \text{ und } \qquad \mathbf{\Psi}_2 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ -0.591 \end{bmatrix}.$$

Die deterministischen Eigenkreisfrequenzen betragen $\omega_1 = 9.64$ rad/s und $\omega_2 = 21.19$ rad/s.

Die zugehörigen Rayleigh-multiplizierten Größen $k_{0,i} = \mathbf{\Psi}_i^T \mathbf{K}_0 \mathbf{\Psi}_i$ und $m_{0,i} = \mathbf{\Psi}_i^T \mathbf{M}_0 \mathbf{\Psi}_i$ sind:

1. Eigenform: $k_{0,1} = 352.4$, $m_{0,1} = 3.78$
2. Eigenform: $k_{0,2} = 2265$, $m_{0,2} = 5.05$.

Stochastische Eingabe

Für die stochastische Berechnung werden die Größen k_2 und m_2 als streuend betrachtet. σ_{k_2} beträgt 30% vom Mittelwert ($\sigma_{k_2} = 150$ N/m), σ_{m_2} ist 10% des Mittelwerts ($\sigma_{m_2} = 0.3$ kg).

Die „stochastische“ Steifigkeitsmatrix und Massenmatrix lauten:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{k_2} & -\sigma_{k_2} \\ -\sigma_{k_2} & \sigma_{k_2} \end{bmatrix} \text{ und } \qquad \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{m_2} \end{bmatrix}.$$

Ihre Rayleigh-multiplizierten Größen sind:

1. Eigenform: $k_{1,1} = 17.1$, $m_{1,1} = 0.3$
2. Eigenform: $k_{1,2} = 229.5$, $m_{1,2} = 0.1$.

Anhand der Werte wird überprüft, ob es bei der Berechnung aufgrund der Verhältnisse der Massenwerte zu numerischen Instabilitäten kommen kann. Für beide Eigenfrequenzen sind die Verhältnisse m_1/m_0 deutlich kleiner als 20%. Es sind somit keine numerischen Instabilitäten zu erwarten.

Berechnung

Zunächst wird die Datei `rayleigh.dat` für die erste Eigenform formuliert:

```
1      , Kennzahl Mode
352.4  , k01
3.78   , m01
17.1   , k11
0.3    , m11
```

Die mit „,“ abgetrennten Kommentare dienen der Übersicht und werden vom Programm ignoriert. Im Verzeichnis, in dem die Berechnung gestartet wird, müssen zusätzlich zu `rayleigh.dat` vorhanden sein: `Erw2_2.dat`, `Erw3_2.dat`, `stuetzstellen_2dim.dat` und das Programm `qeigenf` selbst.

Der Programmaufruf `qeigenf` erzeugt die Dateien `momente001.dat`, `alpha001.dat` und `alpha_nl001.dat`. Die mit `gnuplot` erzeugte Funktion auf Grundlage von `alpha001.dat` ist in Abbildung 12.2 dargestellt. Das Quadrat der streuenden zweiten Eigenkreisfrequenz ist analog zu ermitteln.

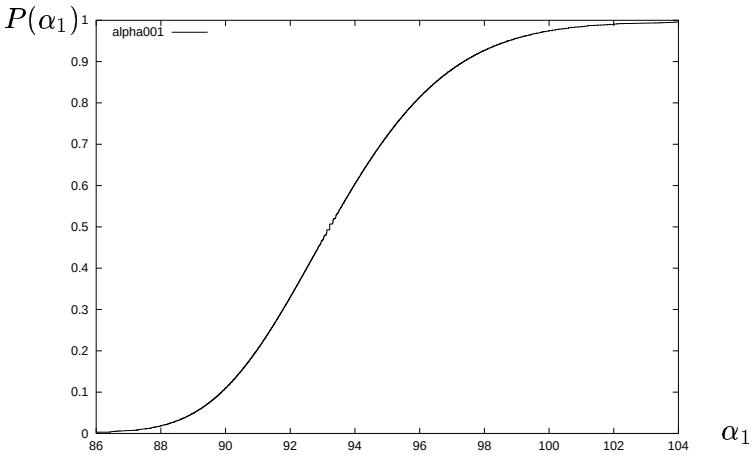


Abbildung 12.2: Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(\alpha_1)$

12.1.2 Wahrscheinlichkeit für Frequenzbereich

Im folgenden Berechnungsschritt wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, mit der die erste bzw. zweite Eigenfrequenz in dem für das Beispiel frei gewählten Bereich 12 rad/s $< \omega_i <$ 15 rad/s liegt.

Dazu wird die Datei `eingabe_alpha.dat` der ersten Grenze für die Mode 1 erzeugt mit:

1 , Kennzahl Mode
12 , Omega1

Die Datei `eingabe_alpha.dat` der zweiten Grenze:

1 , Kennzahl Mode
15 , Omega2

Die ausgegebenen Ergebnisse sind zu subtrahieren: $P(\omega_1 < 15) - P(\omega_2 < 12) = .997001891 - .997000625 = 1.3 \cdot 10^{-6}$

Die Wahrscheinlichkeit von Werten im kritischen Bereich zwischen 12 rad/s $< \omega_i <$ 15 rad/s ergibt sich für die zweite Eigenfrequenz zu $8.7 \cdot 10^{-7}$.

12.1.3 Monofrequente Fußpunkterregung

Im nächsten Schritt wird angenommen, daß das System durch eine monofrequent-harmonische Fußpunkterregung mit der Amplitude w_0 und der Frequenz Ω belastet wird. Trotz des Lastfalls „Fußpunkterregung“ wird die Reaktion in Absolutkoordinaten formuliert und folglich ein „krafterregtes“ System untersucht. Für den eingeschwungenen Zustand ergibt sich dabei das nach den Absolutverschiebungen $\mathbf{w}$ zu lösende deterministische Gleichungssystem zu:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \sqrt{k_1^2 + \Omega^2 c_1^2} \cdot w_0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{12.1}$$

Der Lastvektor $\mathbf{f}(t)$ ergibt sich aus der Summe

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} k_1 \cdot w_0(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \cdot \dot{w}_0(t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Für eine harmonische Schwingung ist $w_0(t) = w_0 \sin(\Omega t)$ und $\dot{w}_0(t) = \Omega \cdot w_0 \cos(\Omega t) = \Omega \cdot w_0 \sin(\Omega t + \frac{\pi}{2})$. Aus beiden Anteilen $A_i \cdot \sin(\Omega t - \gamma_i)$ wird eine gemeinsame Funktion $A \cdot \sin(\Omega t - \gamma) = \sum_i A_i \sin(\Omega t - \gamma_i)$ ermittelt. Die Amplitude A berechnet sich nach Bronstein, Semendjajew [16]:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\gamma_1 - \gamma_2)} = \\ &= \sqrt{(k_1^2 w_0)^2 + (\Omega c_1 w_0)^2 + 2(k_1^2 w_0)(\Omega c_1 w_0)\cos(\frac{\pi}{2} - 0)} = \\ &= \sqrt{(k_1^2 w_0)^2 + (\Omega c_1 w_0)^2}. \end{aligned}$$

Der Phasenversatz γ ist unerheblich und wird zu null gewählt, da im eingeschwungenen Zustand der Beginn des Betrachtungszeitraums beliebig gewählt werden kann.

Im folgenden werden zwei Fälle untersucht: Zum einen wird nur α als streuende Größe behandelt und alle anderen Eingaben als deterministisch angesehen; zum anderen werden sowohl Amplitude als auch Anregefrequenz zusätzlich als streuend eingeführt.

Zunächst werden mit einer deterministischen Berechnung die Beteiligungsfaktoren der Moden für eine Last mit einer Amplitude $w_0 = 2$ mm und mit einer Frequenz von 1.5 Hz = 9.42 rad/s berechnet. Da die Anregefrequenz nahe an der ersten, deterministisch berechneten Eigenfrequenz von 9.64 rad/s liegt, ist zu erwarten, daß die Antwort maßgeblich von der ersten Eigenform bestimmt wird. Die generalisierten Lasten betragen für diesen Fall: f_1^*=0.890, f_2^*=2.009.

Die Gesamtantwort des Systems ergibt sich aus modaler Superpostion zu:

$$\mathbf{w}(t) = \sum_{i=1}^{2} \frac{f_i^*}{k_{0,i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{\Omega^2}{\omega_i^2})^2 + (2D_i\frac{\Omega_i}{\omega_i})^2}} \cdot \mathbf{\Psi}_i \cdot \sin(\Omega t - \gamma_i). \tag{12.2}$$

Zur Bestimmung der Beteiligungsfaktoren wird der Phasenversatz der modalen Beiträge vereinfacht zu null angenommen. Beide Eigenfrequenzen liegen über der Anregefrequenz (vgl. Kapitel 8.1).

Die modalen Dämpfungen D_i werden nach der Bequemlichkeitshypothese mit den „generalisierten“ Dämpfungen $c_i = \mathbf{\Psi}_i^T \mathbf{C} \mathbf{\Psi}_i$, den Eigenkreisfrequenzen ω_i und den generalisierten Massen $m_{0,i}$ berechnet zu: $D_1 = c_1/(2m_{0,1}\omega_1) = 0.07$ und $D_2 = c_2/(2m_{0,2}\omega_2) = 0.165$

Der Verschiebungsvektor mit den Maximalverschiebungen zur Bestimmung der Beteiligungsfaktoren ergibt sich zu:

$$\mathbf{w} = fak \cdot \frac{f_1^*}{k_{0,1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{\Omega^2}{\omega_1^2})^2 + (2D_1\frac{\Omega}{\omega_1})^2}} \cdot \mathbf{\Psi}_1 + fak \cdot \frac{f_2^*}{k_{0,2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{\Omega^2}{\omega_2^2})^2 + (2D_2\frac{\Omega}{\omega_2})^2}} \cdot \mathbf{\Psi}_2.$$

Die Definition von *fak* ist Kapitel 8.3 zu entnehmen. In diesem Fall liegen beide Eigenfrequenzen über der Anregefrequenz und damit ist *fak*=1. Mit den vorab bestimmten Werten ergibt sich :

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00895 \\ 0.0171 \end{bmatrix} [\mathrm{m}].$$

Als nicht zu überschreitender Grenzwert ist für den Kopfpunkt des Systems w_2 ein Wert von 1.75 cm vorgegeben. Die Beiträge der einzelnen Moden zur Kopfpunktverschiebung werden bestimmt nach:

$$\text{Beitrag Mode } i = \left(fak \cdot \frac{f_i^*}{k_{0,i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{\Omega^2}{\omega_i^2})^2 + (2D_i\frac{\Omega}{\omega_i})^2}} \mathbf{\Psi}_i[2] \right) / \mathbf{w}[2]. \tag{12.3}$$

Nach Auswerten der beiden modalen Beiträge zeigt sich, daß die erste Mode wie erwartet den maßgeblichen Einfluß auf die Kopfpunktverschiebung hat:

$$\text{Beitrag Mode 1 :} \quad = \left(\frac{0.890}{351.4} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{(9.42)^2}{(9.64)^2})^2 + (2\ 0.07\frac{9.42}{9.64})^2}} [.443] \right) / [0.0171] = 104\%.$$

Die zweite Mode besitzt entsprechend einen Anteil von -4 % an der Kopfpunktverschiebung. Für die einzuhaltende Grenze von 1.75 cm steuert die erste Mode demzufolge einen Beitrag von $1.04 \cdot 1.75$ cm $= 1.82$ cm bei. Die Forderung zur Formulierung von $y_{1,zul}$ in [m] lautet somit:

$$\begin{aligned} & y_{1,zul} \cdot \mathbf{\Psi}_1[2] = y_{1,zul} \cdot 1.0 \leq \mathbf{w}_{1,zul}[2] = 1.04 \cdot 0.0175 = 0.0182 \\ \rightarrow \quad & y_{1,zul} = 0.0182[\mathrm{m}]. \end{aligned}$$

$y_{1,zul}$ hat damit den Wert von 0.0182 m einzuhalten. Um die Sensitivität des Systems hinsichtlich des vorgegebenen Grenzwerts festzustellen, wird für $y_{1,zul}$ der Bereich 0.0 m $< y_{1,zul} <$ 0.025 m untersucht, der den Grenzwert $y_{1,zul}$= 0.0182 m enthält.

Der vorhandene Wert $\bar{y}_{0,1}$ bezogen auf die Vergrößerungsfunktion der fußpunkterregten Schwingung, welche im Programm `puemono` umgesetzt ist, ergibt sich aus Gleichung (10.13):

$$\bar{y}_{0,1} = \frac{\mathbf{\Psi}_1^T \mathbf{f}}{\Omega^2 \mathbf{\Psi}_1^T \mathbf{M}_0 \mathbf{\Psi}_1} = 0.0026 \text{ m}.$$

Antwort bei nur streuender Eigenkreisfrequenz

Damit liegen zur Bestimmung der streuenden Eigenkreisfrequenz die Eingangsdaten fest und die Datei `eingabe_mono.dat` ist wie folgt zu formulieren:

```
1      , Kennzahl Berechnung (nur alpha streuend)
1      , Kennzahl der Mode
0.0    , zul. mod. Verschiebung, untere Grenze
0.025  , zul. mod. Verschiebung, obere Grenze
0.0026 , modale Verschiebung
9.42   , Erregerfrequenz
0.07   , modale Dämpfung
```

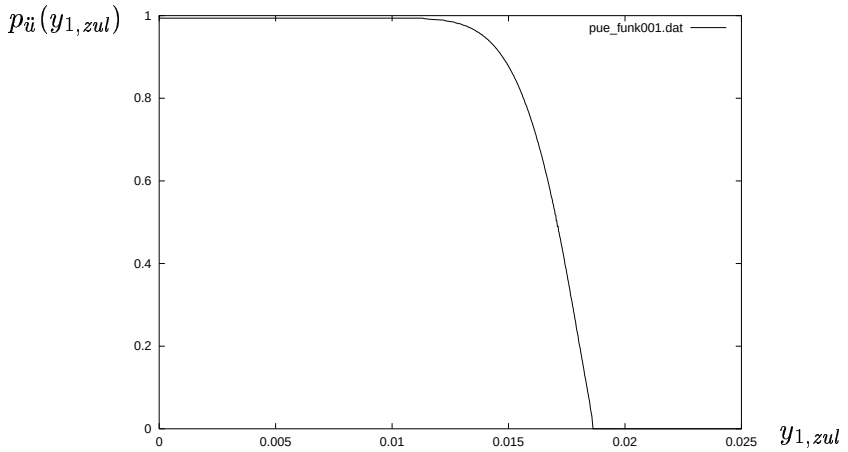


Abbildung 12.3: Funktion der Überschreitenswahrscheinlichkeiten $p_{\ddot{u}}(y_{1,zul})$

Die Überschreitenswahrscheinlichkeit beträgt etwa 15 % für $y_{1,zul} = 0.0182$ m. Die Funktion der Überschreitenswahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit der zulässigen modalen Verschiebung ist in der Datei `pue_funk001.dat` enthalten. Am Bildschirm wird das erste Moment der Funktion zu 0.0138621407 m ausgegeben. Die Wurzel aus dem zweiten zentralen Moment beträgt 8.4577449E-06 m. Die Funktion der Überschreitenswahrscheinlichkeiten ist in Abbildung 12.3 dargestellt.

Überprüfung der Beteiligungsfaktoren mit dem β-Punkt

Die Überprüfung der Beteiligungsfaktoren mit dem β-Punkt wurde für den Anwender nicht in einem Programm aufbereitet. Da die Neuberechnung der Beteiligungsfaktoren zumeist iterativ zu erfolgen hat, ist sie in der Praxis zu aufwendig (vgl. Kapitel 8.4.2). Der Vollständigkeit halber wird das Verfahren kurz geschildert.

Um das Systemverhalten und die Beteiligungsfaktoren besser einschätzen zu können, wird für die erste Eigenfrequenz der β-Punkt zugehörig zu einer einzuhaltenden maximalen Vergrößerung von $0.0182/0.0026 = 7.0$ gesucht. Als Mittelwerte der zweidimensionalen Normalverteilungsdichte werden die generalisierten Größen $\mu_{k_1} = 351.4$ N/m, $\sigma_{k_1} = 17.1$ N/m, $\mu_{m_1} = 3.78$ kg und $\sigma_{m_1} = 0.3$ kg eingesetzt. Abbildung 12.4 zeigt den Bereich, für den die Parameterkonstellationen Steifigkeit/Masse kein Überschreiten der Grenze ergeben.

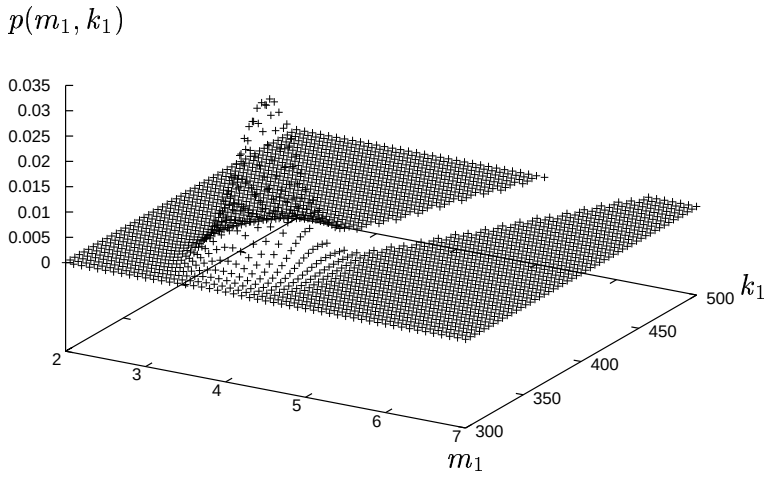


Abbildung 12.4: Parameterkonstellationen für $V \leq 7.0$

Der β-Punkt hat die Koordinaten $k_{1,\beta} = 350.4$ N/m und $m_{1,\beta} = 3.84$ kg. Zur Bestimmung der sich daraus ergebenden Beteiligungsfaktoren müßte die Steifigkeitsmatrix mit dem Faktor $350.4/351.4 = 0.997$ und die Massenmatrix mit dem Faktor $3.84/3.78 = 1.02$ multipliziert werden. Damit müßte neuerlich eine deterministische Modalanalyse ausgeführt, die Gesamtantwort neu bestimmt und die Beteiligungsfaktoren berechnet werden. Die Größen-

ordnung der Korrekturfaktoren zeigt, daß sich die Beteiligungsfaktoren der beiden Moden an der Verschiebung $\mathbf{w}[2]$ nur unerheblich ändern würden. Die dominante Rolle der ersten Mode ist dadurch bestätigt. Auf eine Neuberechnung der Überschreitenswahrscheinlichkeit mit neuen Beteiligungsfaktoren wird somit verzichtet. Allerdings stellt die Multiplikation der Systemmatrizen mit den Faktoren bereits eine gewisse Näherung dar, da die nichtstreuenden Parameter (k_1 und m_1) ebenfalls verändert werden.

Antwort bei zusätzlich streuender Amplitude und Anregefrequenz

Das Zweifreiheitsgradsystem mit den gezeigten streuenden Masse- und Federkennwerten soll durch eine Fußpunkterregung mit streuender Amplitude und Anregefrequenz belastet werden. Für die Mittelwerte der Amplitude und Anregefrequenz werden die zuvor deterministischen Werte $w_0 = 2$ mm und $\Omega = 9.42$ rad/s verwendet. Als Standardabweichung werden jeweils 5% vom Mittelwert und ein Korrelationskoeffizient von 0.99 angesetzt. Für diesen Fall ist ebenfalls die Datei `eingabe_mono.dat` zu formulieren. Für Grenzwerte und Beteiligungsfaktoren werden die deterministischen Ergebnisse als Näherungen beibehalten.

5	, Kennzahl Berechnung
1	, Kennzahl der Mode
0.0	, zul. mod. Verschiebung, untere Grenze
0.025	, zul. mod. Verschiebung, obere Grenze
0.0026	, Mittelwert modale Verschiebung
0.00013	, Standardabweichung modale Verschiebung ($0.05 \cdot 0.0026$)
9.42	, Mittelwert Erregerfrequenz
0.47	, Standardabweichung Erregerfrequenz ($0.05 \cdot 9.42$)
0.99	, Korrelation
0.07	, modale Dämpfung

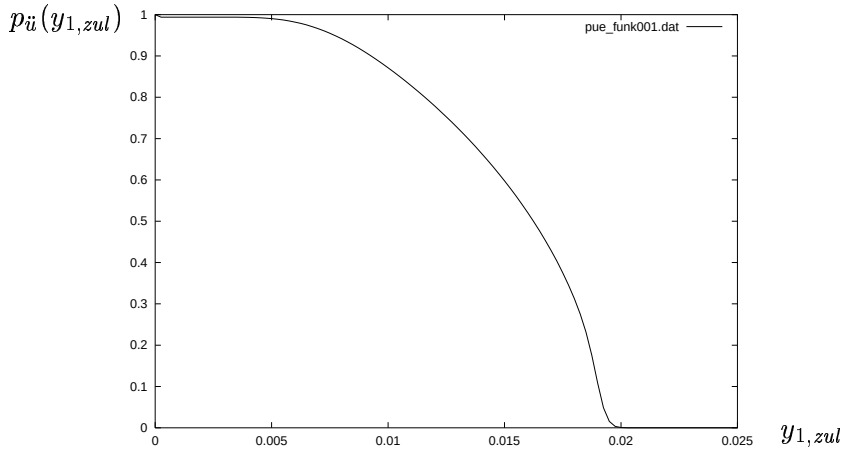


Abbildung 12.5: Funktion der Überschreitenswahrscheinlichkeiten $p_{\ddot{u}}(y_{1,zul})$

Die Auswertung benötigt eine längere Rechenzeit als im Fall der lediglich streuenden Eigenfrequenz. Für $y_{1,zul} = 0.0182$ m ist die Überschreitenswahrscheinlichkeit von zuvor 15 %

auf 28 % gestiegen. Es gibt etliche Realisationen der Last, die eine Anregefrequenz in noch größerer Nähe der Eigenfrequenz besitzen bzw. Realisationen mit höherer Amplitude.

Die Funktion der Überschreitenswahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von der zulässigen modalen Verschiebung $y_{1,zul}$ ist wiederum in der Datei `pue_funk001.dat` enthalten. In Abbildung 12.5 ist die Funktion dargestellt.

Die Funktion ist weniger steil als jene der Abbildung 12.3. Sie erstreckt sich über einen weiteren Bereich. Der Wert, bei dem die Überschreitenswahrscheinlichkeit zu null wird, ist größer als im zuvor behandelten Fall. Andererseits sinkt beispielsweise für den Verschiebungswert 0.01 m die Überschreitenswahrscheinlichkeit . Die Streuung der Anregefrequenz und Verschiebungsamplitude führt somit zu Parameterkonstellationen des Systems, die sich bereichsweise günstig aber auch ungünstig auf die Überschreitenswahrscheinlichkeit auswirken.

12.1.4 Multifrequente Fußpunkterregung

Im nächsten Schritt wird das System für den Fall zweier harmonischer Fußpunktanregungen untersucht. Für die Anregungen wird die gleiche Amplitude von 2 mm und für die Anregefrequenzen 4 Hz = 25.13 rad/s und 5 Hz = 31.42 rad/s angesetzt. Für diesen Fall wird gewählt, daß die Verschiebung $\mathbf{w}[1]$ den Wert 0.5 cm nicht überschreiten darf.

Die Verschiebung $\mathbf{w}_1[1](t)$ infolge Lastanteil 1 und die Verschiebung $\mathbf{w}_2[1](t)$ infolge Lastanteil 2 berechnet sich für zwei Moden nach:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1[1](t) &= \sum_{i=1}^{2} y_{0,i,1} \cdot V_{i,1}(\omega_i, \Omega_1, D_{i,1}) \cdot \mathbf{\Psi}_i[1] \sin(\Omega_1 t - \gamma_{i,1}) \\
\mathbf{w}_2[1](t) &= \sum_{i=1}^{2} y_{0,i,2} \cdot V_{i,2}(\omega_i, \Omega_2, D_{i,2}) \cdot \mathbf{\Psi}_i[2] \sin(\Omega_2 t - \gamma_{i,2}).
\end{aligned} \tag{12.4}$$

Der Phasenversatz wurde für alle Beiträge vereinfacht zu $\gamma_{i,j} = \pi$ angenommen. Die Antworten $\mathbf{w}_j[1]$ betragen für $\mathbf{w}_j[1](t) = \mathbf{w}_j[1] \cdot g_j(t)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1[1] &= -0.0018 \\
\mathbf{w}_2[1] &= -0.00084.
\end{aligned}$$

Sie sind in der Datei `gesamt_ver.dat` abzulegen:

```
-0.0018      , w1 - Omega1
-0.00084     , w1 - Omega2
```

Der Beitrag beider Eigenformen zu den Verschiebungen $\mathbf{w}_j[1]$ wird nach Gleichung (12.5) jeweils für Ω_1= 25.13 rad/s und Ω_2= 31.42 rad/s berechnet:

$$\text{Beitrag Mode } i = \left(fak \cdot \frac{f^*_{i,j}}{k_{0,i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\Omega_j^2}{\omega_i^2})^2 + (2D_{i,j}\frac{\Omega_j}{\omega_i})^2}} \mathbf{\Psi}_i[1] \right) / \mathbf{w}_j[1]. \tag{12.5}$$

Da beide Anregefrequenzen größer als die beiden Eigenfrequenzen sind, ist in allen Fällen für fak der Wert -1 einzusetzen. Die Berechnung aller anderen Werte ist dem Kapitel 12.1.3 analog für jeden Lastanteil j zu entnehmen. Es zeigt sich, daß für die Verschiebung $\mathbf{w}_j[1]$ die zweite Mode einen Beitrag von 89 % auf die Anregung mit 4 Hz und einen Beitrag von 85 % auf die Anregung mit 5 Hz liefert.

Die Datei `beteil.dat` ist demnach für die stochastische Untersuchung der zweiten Mode zu formulieren:

0.89 , Beteiligung - Omega1
0.85 , Beteiligung - Omega2

Um eine Sensitivität hinsichtlich des vorgebenen Grenzwerts zu bestimmen, wird für $\mathbf{w}_{zul}[1]$ ein Bereich von 0.0 m $< \mathbf{w}_{zul}[1] <$ 0.010 m gewählt. In der Datei `eingabe_multi.dat` ist für einen gewählten Bereich einzutragen:

2 , Kennzahl der Mode
0.0 , zulässige Verschiebung, untere Grenze
0.010 , zulässige Verschiebung, obere Grenze
1.0 , Psi2[1]

In die Datei `Omega.dat` werden die Anregefrequenzen in [rad/s] eingetragen:

25.13 , Omega1
31.42 , Omega2

In der Datei `damping.dat` stehen die (unabhängig von der Anregefrequenz) gleichen modalen Dämpfungen unter Zugrundelegung der Bequemlichkeitshypothese:

0.165 , D2 - Omega1
0.165 , D2 - Omega2

Danach ist die Datei `modale_ver.dat` zu formulieren:

$$\bar{y}_{0,2,j} = fak \cdot \frac{\mathbf{\Psi}_2^T \mathbf{f}_j}{\Omega_j^2 \mathbf{\Psi}_2^T \mathbf{M}_0 \mathbf{\Psi}_2}.$$

-0.00065 , y2 - Omega1
-0.00042 , y2 - Omega2

Für den Wert $\mathbf{w}_{zul}[1] = 0.5$ cm ergibt sich eine Überschreitenswahrscheinlichkeit von 0%. Das erste Moment der Funktion beträgt 0.00198825845 m, die Wurzel aus dem zweiten zentralen Moment 3.6142859E-08 m. Wird in einer Parameterstudie die modale Dämpfung für beide Moden auf $D = 0.07$ herabgesetzt, steigt das erste Moment auf 0.00246923139 m und die Wurzel aus dem zweiten Moment auf 1.51214461E-07 m an.

Die Funktionen der Überschreitenswahrscheinlichkeiten für beide Dämpfungen sind für den gewählten Bereich von $0.0 < \mathbf{w}_{zul}[1] < 0.01$ in Abbildung 12.6 dargestellt.

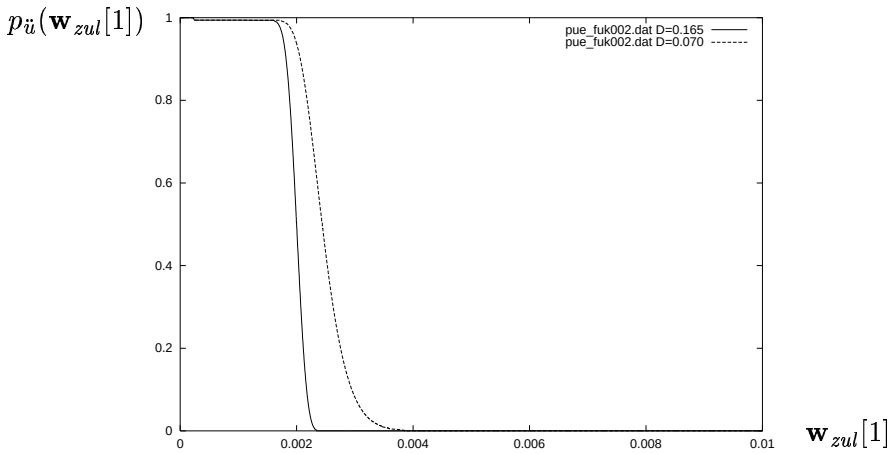


Abbildung 12.6: Funktionen der Überschreitenswahrscheinlichkeiten $p_{ü}(\mathbf{w}_{zul}[1])$

12.1.5 Keine dominante Eigenform - Parameterstudien

Bei den bislang untersuchten Beispielen zeigte jeweils eine Mode eine dominante Beteiligung an der Schwingungsantwort. In einem abschließenden Beispiel soll das Vorgehen gezeigt werden, wenn beide Eigenformen des Zweimassenschwingers etwa gleichen Einfluß haben.

Dazu wird das monofrequent belastete System aus Kapitel 12.1.3 betrachtet. Zur Vereinfachung wird auf eine Massenstreuung verzichtet und lediglich die Federsteifigkeit k_2 als streuend betrachtet.

Als Last wird eine harmonische Fußpunkterregung mit $w_0 = 2$ mm und einer Anregekreisfrequenz von $\Omega = 15$ rad/s angenommen, die zwischen den Eigenfrequenzen $\omega_1 = 9.64$ rad/s und $\omega_2 = 21.19$ rad/s liegt.

Analog, wie in Kapitel 12.1.3 geschildert, werden die Beteiligungsfaktoren der Moden für diesen Lastfall bestimmt. Die Mode 1 trägt 65 % zu der Kopfpunktverschiebung bei, die Mode 2 die restlichen 35 %. Der Einfluß der Mode 1 ist zwar immer noch deutlich, jedoch nicht mehr eindeutig dominant. Um einen Bereich möglicher Überschreitenswahrscheinlichkeiten zu gewinnen, wird eine Parameterstudie durchgeführt. Für die Federsteifigkeit k_2 wird zur Bestimmung der Beteiligungsfaktoren neben ihrem Mittelwert auch der Wert Mittelwert + Standardabweichung = 650 N/m und der Wert Mittelwert - Standardabweichung = 350 N/m eingesetzt. Für $k_2 = 650$ N/m ergibt sich ein Beteiligungsfaktor der zweiten Mode von 70 %, für $k_2 = 350$N/m von 59 %. Für diese Beteiligungsfaktoren wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, daß ein Verschiebungsgrenzwert überschritten wird. Für die Kopfpunktverschiebung $\mathbf{w}[2]$ soll diesmal ein Maximalwert von 0.8 cm gelten.

Zunächst wird das Quadrat der streuenden Eigenkreisfrequenz der ersten Mode berechnet. Da

die Masse m_2 deterministisch angenommen wird, ist die Verteilung neuerlich zu bestimmen. Die Eingabedatei `rayleigh.dat` unterscheidet sich von der in Kapitel 12.1.1 vorgestellten Eingabedatei jedoch lediglich im Wert der Rayleigh-multiplizierten Massenmatrix $m_{1,1}$. Statt des Wertes 0.3 ist 0.0 einzutragen.

Danach werden die einzuhaltenden modalen Beiträge für die einzelnen Beteiligungen an $\mathbf{w}[2]$ bestimmt.

$$\begin{aligned}
59\% &: \; y_{1,zul} \cdot \mathbf{\Psi}_1[2] = y_{1,zul} \cdot 1.0 \leq 0.59 \cdot 0.008 \rightarrow y_{1,zul} = 0.00472 \\
65\% &: \; y_{1,zul} \cdot \mathbf{\Psi}_1[2] = y_{1,zul} \cdot 1.0 \leq 0.65 \cdot 0.008 \rightarrow y_{1,zul} = 0.0052 \\
70\% &: \; y_{1,zul} \cdot \mathbf{\Psi}_1[2] = y_{1,zul} \cdot 1.0 \leq 0.70 \cdot 0.008 \rightarrow y_{1,zul} = 0.0056.
\end{aligned}$$

Die Eingabedatei `eingabe_mono.dat` wird so formuliert, daß im Bereich der zulässigen modalen Verschiebungen $0.0 \leq y_{1,zul} \leq 0.06$ alle drei einzuhaltenden modalen Werte enthalten sind:

1 , Kennzahl Berechnung
1 , Kennzahl der Mode
0.0 , zul. mod. Verschiebung, untere Grenze
0.06 , zul. mod. Verschiebung, obere Grenze
0.0026 , modale Fußpunktverschiebung
15.0 , Erregerfrequenz
0.07 , modale Dämpfung

Für den Beteiligungsfaktor 59 % beträgt die Überschreitenswahrscheinlichkeit 1.2 %, für den Beteiligungsfaktor 65 % $2.6 \cdot 10^{-5}$ und für den Beteiligungsfaktor 70 % $2.3 \cdot 10^{-5}$. Somit ist ein Bereich für eine mögliche Überschreitenswahrscheinlichkeit abgesteckt. Dem Anwender steht es frei, weitere Parameter für die Federsteifigkeit zu untersuchen.

12.2 Anwendung auf teileingespannte Decke

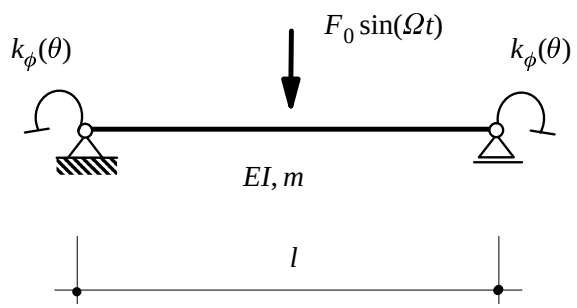
12.2.1 Streuender Einspanngrad

Die Programme werden auf das in Abbildung 12.7 dargestellte ungedämpfte System angewendet.

Hierbei handelt es sich um ein Beispiel, welches eine typische praktische Fragestellung darstellt: Es wird die Wahrscheinlichkeit gesucht, mit der eine einzuhaltende Anforderung hinsichtlich der Schwingschnellen der Decke überschritten wird, wenn der Einspanngrad der Decke nicht genau ermittelbar ist.

Der Einspanngrad, ausgedrückt durch die Drehfedern an den Auflagern, wird als streuend angenommen. Es wird eine Federsteifigkeit von $1 \cdot 10^8$ N/m gewählt, die eine mittlere Einspannung zwischen gelenkig gelagert und Volleinspannung bewirkt. Die Standardabweichung der Federsteifigkeit soll 20 % vom Mittelwert betragen. Es wird ein Deckenstreifen von 1 m Breite untersucht.

Für das System wird gefordert, daß in Deckenmitte (dem Lastangriffspunkt sowie Punkt maximaler Verschiebung und Schwingschnelle) eine Schwingschnelle von 1 mm/s nicht überschritten wird. Für die gegebene Anregefrequenz von 30 Hz bedeutet dies umgerechnet, daß eine Verschiebung in Deckenmitte von (1 mm/s) $/(2\pi \cdot 30) = 5.31 \cdot 10^{-4}$ cm nicht überschritten werden darf.



$l = 6\ m$
$E = 30 \cdot 10^9\ N/m^2$
$I = 0.0025\ m^4$
$m = 800\ kg/m^2$

$\mu_{k_\phi} = 1 \cdot 10^8\ N/m$
$\sigma_{k_\phi} = 2 \cdot 10^7\ N/m$

$F_0 = 200\ N$
$\Omega = 30\ Hz$

Abbildung 12.7: Teileingespannte Decke

Für die Berechnung wird das System mit einer FE-Darstellung mit 10 Elementen mit gleicher Elementlänge (entspricht 20 Freiheitsgraden) formuliert. Das Vorgehen gestaltet sich in folgenden Schritten:

1. Im ersten Schritt wird eine deterministische Modalanalyse des Systems ausgeführt. Es wird zudem berechnet, wie groß der Einfluß der einzelnen Moden auf die untersuchte Verschiebung ist. Zunächst werden die Eigenfrequenzen und Eigenformen bestimmt. Die ersten vier Eigenfrequenzen betragen beispielsweise $f_1 = 21.7$ Hz, $f_2 = 63.3$ Hz, $f_3 = 128.8$ Hz und $f_4 = 218.7$ Hz. Zudem werden die generalisierten Steifigkeiten und Massen aller Moden berechnet. Für Eigenformen, welche durch das verwendete FE-Programm so normiert sind, daß die generalisierten Massen jeweils den Wert 1 besitzen, ergibt sich für die generalisierten Steifigkeiten der ersten vier Moden beispielsweise $k_{0,1} = 1.864$E+04, $k_{0,2} = 1.582$E+05, $k_{0,3} = 6.550$E+05 und $k_{0,4} = 1.889$E+07 (Der Index 0 bezieht sich auf die deterministische Berechnung mit Mittelwerten). Die modalen Lasten der ersten vier Moden lauten bei gleicher Normierung: $f_1^* = 4.33$, $f_2^* = 0.005$, $f_3^* =$ -3.99 und $f_4^* = 0.051$.

   Die Gesamtantwort des ungedämpften Systems ergibt sich aus modaler Superpostion zu:

$$\mathbf{w}(t) = \sum_i \frac{f_i^*}{k_{0,i}} \cdot \frac{1}{|1 - \Omega^2/\omega_i^2|} \cdot \mathbf{\Psi}_i \cdot \sin(\Omega t - \gamma_i). \tag{12.6}$$

Die Eigenkreisfrequenzen berechnen sich mit $\omega_i = 2\pi f_i$. Da keine Dämpfung vorhanden ist, beträgt der jeweilige Phasenversatz γ_i entweder null oder π. Für die Mode 1 ist er π ($\omega_1 < \Omega$), alle anderen $\gamma_2, \gamma_3, \ldots$ werden null ($\omega_2 > \Omega, \omega_3 > \Omega, \ldots$). Der Wert *fak* der ersten Mode ist damit -1, alle übrigen Werte *fak* betragen 1.

Anschließend werden die Beiträge der einzelnen Moden zur Verschiebung in Feldmitte (im Vektor der Verschiebungsgrößen bei der gewählten FE-Beschreibung das 10. Element) berechnet nach:

$$\text{Beitrag Mode } i = \left(fak \cdot \frac{f_i^*}{k_{0,i}} \cdot \frac{1}{|1 - \Omega^2/\omega_i^2|} \mathbf{\Psi}_i[10]. \right) / \mathbf{w}[10]. \tag{12.7}$$

Die Verschiebung in Feldmitte ergibt sich zu $-5.38 \cdot 10^{-6} \sin(\Omega t)$. Nach Auswerten aller modalen Beiträge nach Gleichung (12.7) zeigt sich, daß die erste Mode den maßgeblichen Einfluß auf die Verschiebung in Feldmitte hat ($\mathbf{\Psi}_1[10] = [.2163 \cdot 10^{-1}]$ bei gegebener Normierung):

$$\begin{aligned} &\text{Beitrag Mode 1 :} \\ &\left((-1) \cdot \frac{4.33}{1.864 \cdot 10^4} \cdot \frac{1}{|1 - (2\pi 30)^2/(2\pi 21.7)^2|} [.2163 \cdot 10^{-1}] \right) / [-5.38 \cdot 10^{-6}] = \\ = \quad & 102\% \approx 100\%. \end{aligned} \tag{12.8}$$

Dies war zu erwarten, da die Anregefrequenz in der Nähe der ersten Eigenfrequenz liegt und zudem die Lastgeometrie die Moden mit ungerader Ordnungszahl anregt. Im folgenden wird nur der Beitrag der ersten Mode betrachtet.

2. Im nächsten Schritt werden die stochastischen Größen zur Ermittlung der streuenden Eigenfrequenz berechnet. Für die streuende Drehfederkonstante wird die „stochastische Steifigkeitsmatrix“ formuliert. Sie ist lediglich an den Stellen [1,1] (Verdrehung am linken Auflager) und [20,20] (Verdrehung am rechten Auflager) mit $\sigma_{k_\phi} = 2 \cdot 10^7$ N/m besetzt. Mit dem zuvor ermittelten Eigenvektor $\mathbf{\Psi}_1$ der Mode 1 wird die Rayleigh-Multiplikation ausgeführt. Für $k_{1,1}$ ergibt sich der Wert 1.317E+03.

   Auf Grundlage der deterministisch berechneten generalisierten Größen und der Rayleigh-multiplizierten stochastischen Steifigkeitsmatrix ist die Eingabedatei `rayleigh.dat` wie folgt zu formulieren:

   ```
   1            , Kennzahl Mode
   1.864E+04    , k01
   1.           , m01
   1.317E+03    , k11
   0            , m11 (kein streuender Masseparameter)
   ```

   Zusätzlich zu `rayleigh.dat` müssen die Dateien `Erw2_2.dat`, `Erw3_2.dat`, `stuetzstellen_2dim.dat` und das Programm `qeigenf` im Verzeichnis vorhanden sein. Der Programmaufruf `qeigenf` erzeugt die Dateien `momente001.dat`, `alpha001.dat` und `alpha_nl001.dat`.

3. Das Programm `puemono` berechnet die Überschreitenswahrscheinlichkeit, mit der ein gegebener Verschiebungsgrenzwert überschritten wird. Die vorhandene modale Verschiebung $\bar{y}_{0,1}$ wird nach Gleichung (10.13) bestimmt:

$$\bar{y}_{0,1} = \frac{f_1^*}{\Omega^2 m_{0,1}} = \frac{4.33}{(2\pi 30)^2 \cdot 1} = 1.218 \cdot 10^{-4} \text{ m}. \tag{12.9}$$

Der einzuhaltende modale Beitrag, damit eine Verschiebung in Feldmitte von $5.31 \cdot 10^{-6}$ m nicht überschritten wird, berechnet sich mit dem Verschiebungswert des ersten Eigenvektors in Feldmitte $\mathbf{\Psi}_1[10] = .2163\text{E-}01$ zu:

$$y_{1,zul} \cdot \mathbf{\Psi}_1[10] \leq 5.31 \cdot 10^{-6} \rightarrow y_{1,zul} \leq 2.45 \cdot 10^{-4}. \tag{12.10}$$

Um die Sensitivität der Überschreitenswahrscheinlichkeit hinsichtlich des einzuhaltenden Grenzwerts einschätzen zu können, wird der den Wert von $2.45 \cdot 10^{-4}$ enthaltende Bereich $[0.0, 4.0 \cdot 10^{-4}]$ untersucht. Entsprechend wird die Eingabedatei `eingabe_mono.dat` formuliert:

1	, Kennzahl Berechnung
1	, Kennzahl der Mode
0.0	, zulässige modale Verschiebung, untere Grenze
4.E-04	, zulässige modale Verschiebung, obere Grenze
0.1218E-03	, modale Verschiebung
188.5	, Erregerfrequenz
0.	, modale Dämpfung

Abbildung 12.8 zeigt die Funktion der Überschreitenswahrscheinlichkeiten. Das Programm gibt als erstes Moment den Wert 0.000235573296 und als Wurzel aus dem zweiten zentralen Moment den Wert 5.91733888E-10 aus.

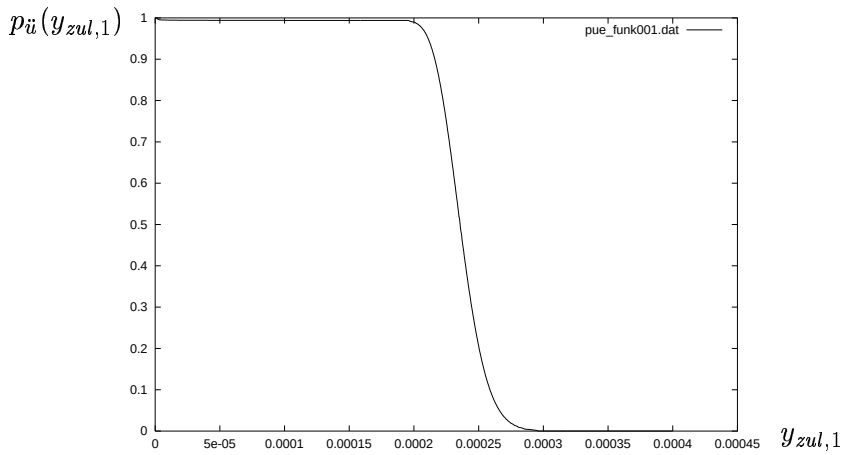


Abbildung 12.8: Funktion der Überschreitenswahrscheinlichkeiten $p_{ü}(w_{zul})$

Die Überschreitenswahrscheinlichkeit des einzuhaltenden modalen Grenzwerts $y_{1,zul} = 2.45 \cdot 10^{-4}$ m und damit die Wahrscheinlichkeit, daß die vorgegebene Schwingschnelle überschritten wird, beträgt anhand von Abbildung 12.8 knapp 30 %.

Der Anwender hat nun zu entscheiden, ob ihm diese Wahrscheinlichkeit als tragbar erscheint oder ob konstruktive Veränderungen am System vorgenommen werden müssen.

Das Beispiel entspricht den von Breitsamter [14] gewählten Decken für das Säulenmodell. Es zeigt sich, wie einfach sich die Deckenreaktion ohne das Säulenmodell für einen streuenden Einspanngrad berechnen läßt. Bei Verwendung des Säulenmodells wäre die Berechnung nur mit großem Aufwand und unter groben Näherungen möglich.

12.3 Anwendung auf Säulenmodell

Mit dem Progamm `saeule` wird das von Breitsamter [14] beschriebene Beispiel eines zweigeschossigen Gebäudes mit gelenkig gelagerten Decken gleicher Stützweite untersucht.

Berechnet werden die streuenden Eigenfrequenzen des Systems. Dabei wird der Einfluß der Streuung der Eingangsgrößen Elastizitätsmodul der Säule und Massebelegung der Decken auf das Ergebnis untersucht. Es ergeben sich theoretisch 11 Eigenfrequenzen , wobei vier davon doppelt vorkommen, so daß sich die Zahl der zu betrachtenden Moden auf sieben reduziert.

12.3.1 Streuender Elastizitätsmodul der repräsentativen Säule

Der Elastizitätsmodul wird als normalverteilte Zufallsvariable angenommen. Die Standardabweichung σ_E wird so gewählt, daß sie Werte von 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28 und 30 % des Mittelwertes von 30 000 MN/m^2 annimmt.

Als Last wird eine Fußpunkterregung mit einer Frequenz von 10 Hz und eine zugehörige Wellenlänge von 24 m angenommen. Die Amplitude der Fußpunktverschiebung beträgt 1 mm.

Die Datei `eingabe.dat` ist wie folgt zu besetzen:

Zeile 1:	1	, Kennwert der gewünschten Auswertung
Zeile 2:	2	, Anzahl der Stockwerke
Zeile 3:	30e9	, E-Modul Säule
Zeile 4:	0.25	, Fläche Säule
Zeile 5:	3.0	, Stockwerkshöhe
Zeile 6:	625.	, Massebelegung Säule
Zeile 7:	30e9	, E-Modul Decke links
Zeile 8:	0.3	, Deckendicke links
Zeile 9:	6.0	, Stützweite links
Zeile 10:	800	, Massebelegung Decke links
Zeile 11:	30e9	, E-Modul Decke rechts
Zeile 12:	0.3	, Deckendicke rechts
Zeile 13:	6.0	, Stützweite rechts
Zeile 14:	800	, Massebelegung Decke rechts
Zeile 15:	1500	, Fundamentmasse
Zeile 16:	1.33e8	, Realteil Steifigkeitskoeffizient
Zeile 17:	0.89e8	, Imaginärteil Steifigkeitskoeffizient
Zeile 18:	62.83	, Anregekreisfrequenz

Zeile 19:	24.	, Wellenlänge der Rayleighwelle
Zeile 20:	0.001	, Fußpunktverschiebung der Säule

In der Datei `fak.dat` steht jeweils ein Wert aus dem Wertebereich von 1 bis 30, je nach auszuwertender Standardabweichung.

Abbildung 12.9 stellt den Zusammenhang des gewählten Variationskoeffizienten des Elastizitätsmoduls und des Variationskoeffizienten der Ergebnisgröße „Quadrat der Eigenfrequenzen“ her.
Die horizontale Achse bezeichnet Standardabweichung/ Mittelwert des Elastizitätsmoduls [%]; die vertikale Achse gibt Standardabweichung/Mittelwert des Quadrats einer Eigenfrequenz [%] an.

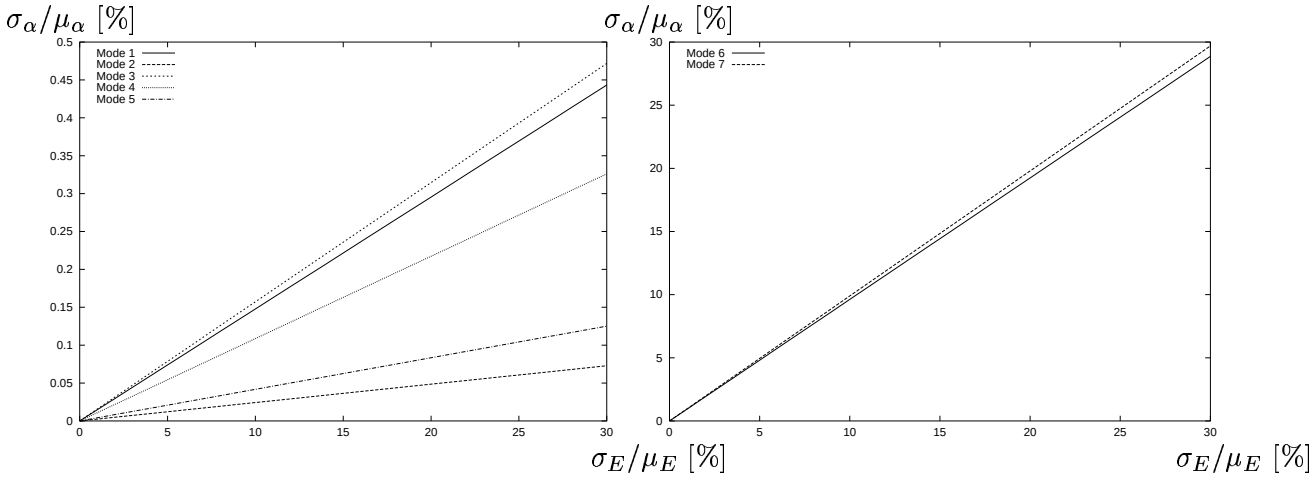


Abbildung 12.9: Darstellung der ersten bis siebenten Eigenfrequenz

Der Mittelwert der Quadrate der Eigenfrequenzen bleiben für alle Standardabweichung gleich, die dritten zentralen Momente besitzen den Wert Null.

Der Einfluß des Elastizitätsmoduls der Säule auf die ersten fünf Eigenfrequenzen ist äußerst gering. Es handelt sich dabei um vier Deckeneigenfrequenzen und um die Starrkörperfrequenz. Die sechste und siebente Eigenform sind Normalkrafteigenformen der Säule, in deren zugehörige Eigenfrequenzen die Streuung des Elastizitätsmoduls nahezu linear im Verhältnis 1:1 eingeht.

12.3.2 Streuende Massebelegung der Decken

Im nächsten Schritt wird die Massebelegung der Decken als streuend angenommen. Der Variationskoeffizient wird, wie am Beispiel des Elastizitätsmoduls gezeigt, in den gleichen Stufen, jedoch nur zwischen 1 % und 20 % variiert. Für höhere Werte der Standardabweichung meldet das Programm eventuell auftretende numerische Instabilitäten bei der Berechnung der Deckeneigenformen.

Die Datei `eingabe.dat` unterscheidet sich vom vorangegangenen Beispiel nur in der ersten Zeile. Dort ist statt der Auswertekennziffer 1 die Kennziffer 4 für streuende Massebelegung der Decken einzugeben. Die Datei `fak.dat` enthält einen Wert zwischen 1 und 20.

Für die Quadrate der sieben streuenden Eigenfrequenzen werden die Mittelwerte, die Standardabweichungen und die zentralen dritten Momente in Abhängigkeit der Standardabweichung der Masse ermittelt.

Die Streuung der Massebelegung hat erwartungsgemäß erheblichen Einfluß auf die Quadrate der streuenden Eigenfrequenzen der Eigenformen 1, 2, 4 und 5, welche die Deckenmoden darstellen.

Auf die Quadrate der streuenden Eigenfrequenzen der Eigenformen 3, 6 und 7 hat die Streuung der Massebelegung ebenfalls noch deutlichen Einfluß. Die Eigenformen 6 und 7 stellen die Normalkraftmoden der repräsentativen Säule dar, bei der dritten Eigenform handelt sich um die Starrkörpermode.

Die Mittelwerte der Quadrate der Eigenfrequenzen ändern sich mit der Streuung der Massebelegung. In Abbildung 12.10 sind die Verhältniswerte Mittelwert der stochastischen Berechnung / deterministischer Berechnung über dem Variationskoeffizienten für die Moden 1, 2, 4 und 5 angetragen. (Die Kurven der Moden 2 und 4 fallen zusammen.)

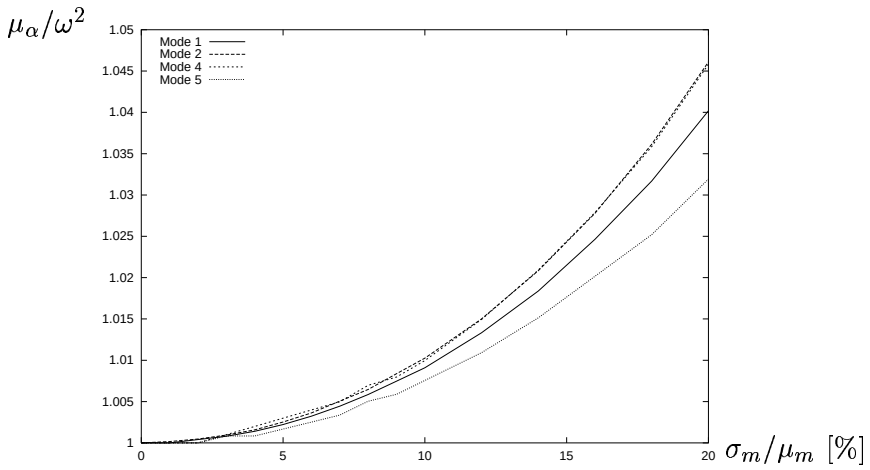


Abbildung 12.10: Darstellung der Veränderlichkeit der Mittelwerte des Quadrats der Eigenkreisfrequenzen 1, 2, 4 und 5 in Abhängigkeit der Standardabweichung der Massebelegung

Der Zusammenhang zwischen Variationskoeffizient der Massebelegung und Variationskoeffizient der Quadrate der Eigenfrequenzen ist ebenfalls nicht in allen Fällen linear. Abbildung 12.11 zeigt im linken Bild den Einfluß auf die Standardabweichung der Eigenfrequenzen 1, 2, 4 und 5, im rechten Bild auf jene der Eigenfrequenzen 3, 6 und 7.

Bei der Auswertung der Standardabweichungen zeigt sich, daß der Einfluß der streuenden Massebelegung auf die Deckeneigenformen überproportional groß ist. (Die Kurven der Eigenformen 2 und 4 fallen zusammen.) Die Standardabweichung steigt bei 20 % Streuung der

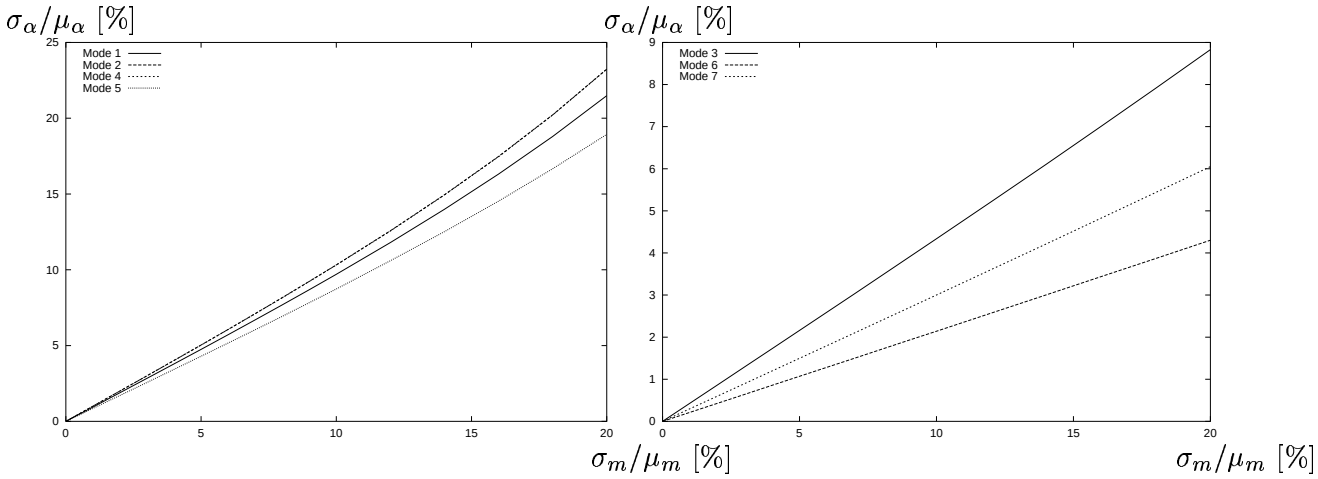


Abbildung 12.11: Darstellung der Standardabweichung der ersten bis siebenten Eigenfrequenz

Massebelegung auf bis zu 27 % des Mittelwertes an. Die Standardabweichungen der Moden 3, 6 und 7 steigen linear mit Zunahme der Streuung der Massebelegung, jedoch nur bis zu einem Prozentsatz von etwa 9 % bei 20 % Streuung der Massebelegung.

Die Veränderlichkeit der dritten zentralen Momente ist in Abbildung 12.12 in logarithmischem Maßstab dokumentiert (linkes Bild: Eigenfrequenzen 1, 2, 4 und 5, rechtes Bild: 3, 6, 7).

Der Einfluß der Massebelegung der Decken auf die Deckeneigenfrequenzen ist erheblich. Die Massebelegung hat starken Einfluß auf die Starrkörpermode 3 und auf die sechste und siebente Eigenform. Die dritten zentralen Momente für diese Fälle steigen mit zunehmender Streuung des Eingangswertes stark an.

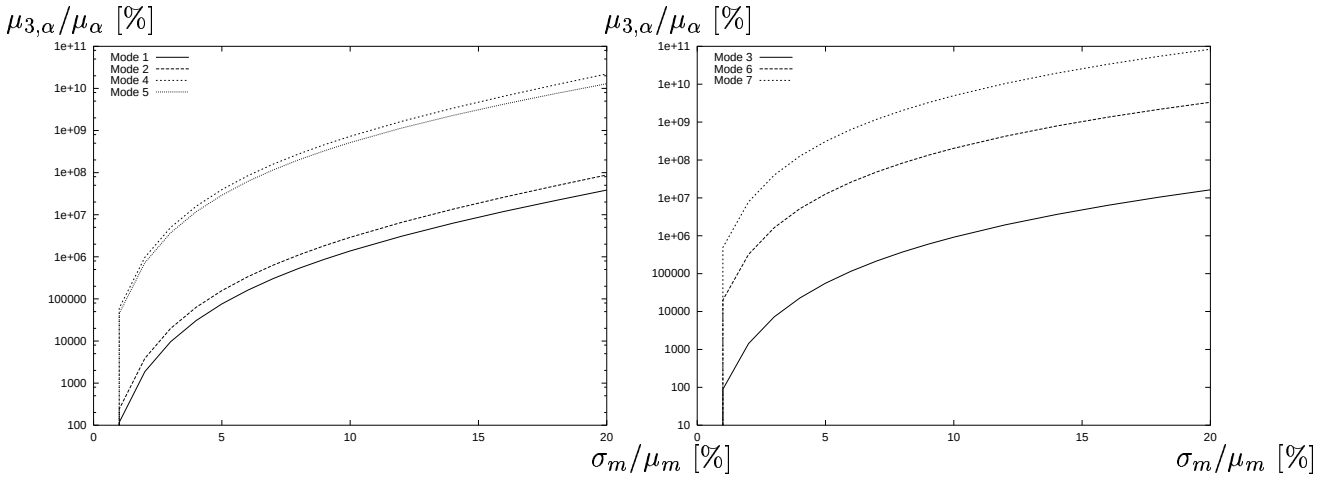


Abbildung 12.12: Darstellung der dritten zentralen Momente der ersten bis siebenten Eigenfrequenz

Für die Praxis bedeutet das, daß die Streuung einer Größe zu einer wesentlich größeren Streuung des Ergebnisses führen kann. Allerdings ist es auch möglich, daß das System hinsichtlich der Größe nicht sensitiv reagiert, d.h. bei Veränderung der Eingangsgröße keine wesentliche Veränderung des Ergebnisses zu beobachten ist. Die Bestimmung der streuenden Eigenkreisfrequenz gibt einen guten Einblick in das Systemverhalten und kann beispielsweise auch zur Klassifizierung der Moden herangezogen werden.

12.4 Abschließende Bemerkungen zu den Beispielen

Das akademische Beispiel eines Zweifreiheitsgradsystems wurde gewählt, um die Vorgehensweise und die Berechnung der Eingabedaten zu verdeutlichen.

Zur Vorabschätzung in der Praxis werden oft stark vereinfachte Modellsysteme verwendet, die mit wenigen Freiheitsgraden auskommen.

Bei der Ermittlung von Überschreitenswahrscheinlichkeiten von Verschiebungen konnte jeweils auch bei multifrequenter Anregung eine Eigenform als maßgeblich erkannt werden. In der Praxis wird dies sicherlich die Ausnahme sein. Deshalb sollten unter Zuhilfenahme der entwickelten Programme Parameterstudien für einzelne Eigenformen angestellt werden wie ebenfalls für das Beispiel des Zweifreiheitsgradsystems gezeigt. Der Anwender erhält zwar keine strenge Überschreitenswahrscheinlichkeit unter Berücksichtigung aller Effekte, aber Anhaltswerte zur Einschätzung des Systemverhaltens.

Das Beispiel der teileingespannten Decke zeigt einen typischen Anwendungsfall aus der Praxis.

Die streuenden Eigenkreisfrequenzen für das Säulenmodell sind eine gute Grundlage zur Einschätzung des möglichen Antwortverhaltens. Mit dem Programm `puealpha` kann die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, daß eine Eigenkreisfrequenz innerhalb gegebener Grenzwerte liegt. Auf die Berechung von Überschreitenswahrscheinlichkeiten von Antwortgrößen anhand des Säulenmodells muß verzichtet werden. Zu grobe Vereinfachungen wären zu treffen, um überhaupt ein Ergebnis zu erzielen.

Kapitel 13

Zusammenfassung

Theoretischer Hintergrund

Die vorliegende Arbeit beschreibt ein Verfahren zur näherungsweisen Ermittlung der dynamischen Reaktion von Konstruktionen mit streuenden Systemeigenschaften. Hierzu wurde eine durchgängige Methode entwickelt von der Darstellung streuender Größen über die Berechnung streuender Eigenwerte bis zur Ermittlung der Überschreitenswahrscheinlichkeiten von im eingeschwungenen Zustand einzuhaltenden Antwortgrößen.

Streuende Eingangsgrößen werden mit Hilfe des Polynomen Chaos als Zufallsvariablen und als stochastische Prozesse formuliert. Die Darstellung mit Chaospolynomen läßt sich einfach mit einer gebräuchlichen FE-Systembeschreibung kombinieren.

Das entstehende Gleichungssystem wird auf seine Eigenwerte untersucht. Die deterministisch übliche Abschätzung von Eigenwerten mit Hilfe des Rayleighquotienten wird dabei auf die stochastische Berechnung übertragen. Dadurch sind die Quadrate der streuenden Eigenkreisfrequenzen des Systems darstellbar. Eine erste umfassende Einschätzung des Systemverhaltens ist möglich.

Mittels der dynamischen Vergrößerungsfunktion werden Grenzen für die streuenden Eigenwerte bestimmt. Aus den Grenzwerten ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, daß eine einzuhaltene Systemantwort im eingeschwungenen Zustand überschritten wird. Die Eigenwerte bilden nur die Streuung von Werten innerhalb der Steifigkeitsmatrix und der Massenmatrix ab. Bei zusätzlicher Streuung der Dämpfung und der Last wird die Vergrößerungsfunktion stochastisch formuliert. Überschreitenswahrscheinlichkeiten unter Einbeziehung aller streuenden Größen werden nach der Regel der totalen Wahrscheinlichkeit berechnet.

Bei der Herleitung der theoretischen Grundlage standen drei Gesichtspunkte im Vordergrund.

- Für die Übertragung der streuenden Ergebnisse aus dem stochastischen Raum der Chaospolynome in den Originalraum wurden alternative Verfahren getestet. Es zeigte sich, daß die hierfür naheliegende Anwendung der momentenbasierten Gram-Charlier-Reihe keine zuverlässige Darstellung des Ergebnisses im Originalraum lieferte. Zusätzlich hinzugenommene Reihenglieder führten zu keiner verbesserten Konvergenz der Reihe. Eine numerische Auswertung des Ergebnisses wurde also vorgezogen.

- Die Anwendung der stochastischen Vergrößerungsfunktion wurde anhand eines Einmassenschwingers, für den eine analytische Betrachtung möglich ist, intensiv untersucht. Dabei wurde die Masse und zusätzlich die Lastfrequenz und die Dämpfung als streuend angenommen. Die Überschreitenswahrscheinlichkeiten eines für die Vergrößerungsfunktion vorgegebenen Grenzwerts stimmten bei einer numerischen Auswertung des Eigenwerts mit den analytisch berechneten Referenzwerten hervorragend überein.

- Die Güte der näherungsweisen Berechnung der Eigenwerte mit dem Rayleighquotienten wurde anhand eines Gebäudes geprüft. Die mit ihm gewonnen streuenden Eigenwerte wurden mit denen einer Monte-Carlo-Simulation verglichen. Es konnten sehr gute Übereinstimmungen festgestellt werden. Abweichungen ergaben sich lediglich, wenn die Massenstreuung zu groß wurde und damit der Lösungsalgorithmus zu numerisch ungenauen Ergebnissen führte. Dies konnte jedoch durch vorherige Bestimmung des zulässigen Bereichs der Massenstreuung verhindert werden.

Das für den Einmassenschwinger hergeleitete Verfahren ließ sich bei modaler Untersuchung auf Mehrfreiheitsgradsysteme übertragen. Besonders geeignet ist es für Verschiebungsgrößen, deren Betrag maßgeblich durch eine Eigenform bestimmt wird.

Aufbauend auf der theoretischen Grundlage konnte ein in sich geschlossenes Verfahren erarbeitet werden, das für die Anwendung in der Praxis aufbereitet wurde.

Anwendung

Um die stochastische Berechnung dem Anwender zugänglich zu machen, wurden Hilfsmittel in Form von Computerprogrammen entwickelt. Sie sind vor allem im Zuge von Vorberechnungen für den praktisch tätigen Ingenieur einfach anwendbar. Aus den streuenden Eingangsgrößen eines dynamisch belasteten Systems hat er durch lediglich deterministisch auzuführende Vorberechnungen Eingabewerte abzuleiten. Aus ihnen werden durch die Programme streuende Eigenfrequenzen und Wahrscheinlichkeiten, daß zulässige Antwortgrößen überschritten werden, ermittelt. Die berechneten Überschreitenswahrscheinlichkeiten sind umso zuverlässiger, je dominanter eine Eigenform eine untersuchte Verschiebungsgröße bestimmt. Die Programme sind darüber hinaus in jedem Fall geeignet, Bereiche möglicher Überschreitenswahrscheinlichkeiten abzustecken.

Die Programme wurden auf ausgewählte standardisierte Ersatzmodelle für fußpunkterregte Gebäude angewendet. Durch die reduzierte Zahl an Freiheitsgraden war die nachfolgende stochastische Berechnung einfacher als für eine herkömmliche FE-Beschreibung auszuführen. Wegen der Vorberechnungen und Nachlaufrechnungen, die stochastisch zum Teil nur mit erhöhtem Aufwand bzw. gar nicht ausführbar sind, sind die Ersatzmodelle nur in Sonderfällen einsetzbar. Ansonsten müßte auf eine FE-Gesamtbeschreibung des System ausgewichen werden. Die entwickelten Programme sind jedoch in beiden Fällen anwendbar.

Das Verfahren der stochastischen Berechnung läßt sich einfach mit der Methode der Finiten Elemente kombinieren. Der Anwender kann die Daten, die er mit einer FE-Rechnung erzeugt, einfach in das vorgestellte Programmpaket integrieren. Nur wenige Zusatzberechnungen sind notwendig. Da die Programme auf den Systemmatrizen aufbauen, sind sie generell für die Untersuchung aller dynamischen Probleme geeignet, die sich matriziell ausdrücken lassen. Bei

Einführung streuender Größen sind gewisse Rahmenbedingungen einzuhalten, die ausführlich erläutert sind. So können die Programme auch in Bereichen außerhalb des Bauwesens zum Einsatz kommen.

Die Programme verlangen vom Anwender keine vertieften Kenntnisse der Stochastik. Der theoretische Hintergrund der Berechnung bleibt für ihn unsichtbar, ohne daß dadurch die Anwendbarkeit eingeschränkt wird.

Die Rechenzeit der Programme ist für eine stochastische Berechnung außergewöhnlich kurz. Untersuchungen unterschiedlicher Eingangsparameter lassen sich effizient gestalten.

Das oberste Ziel, die Entwicklung eines einfach anwendbaren Berechnungshilfsmittels für die Abschätzung des Schwingungsverhaltens von Konstruktionen mit zufälligen Einflußgrößen konnte damit erreicht werden.

Literaturverzeichnis

[1] ANTES, H.: *A boundary element procedure for transient wave propagation in two-dimensional isotropic elastic media.* Finite Elements in Analysis and Design, (1):313–322, 1985.

[2] AUERSCH, L.: *Durch Bodenerschütterungen angeregte Gebäudeschwingungen - Ergebnisse von Modellrechnungen.* Technischer Bericht 108, BAM - Bundesanstalt für Materialprüfung Berlin, 1984.

[3] BACHMANN, H. U.V.A.: *Vibration problems in structures.* Birkhäuser, Basel, 1995.

[4] BARNES, D.C.: *Some approximation formulas for stochastic eigenvalues.* SIAM Journal on Mathematical Analysis, 18(4):933 – 940, 1987.

[5] BASELER, J.: *Die Schwingungsantwort der Eigenformen unter Berücksichtigung ihrer Dämpfungskopplung.* Dissertation, Technische Universität München, Lehrstuhl für Baumechanik, 1989.

[6] BAŤA, M. und V. PLACHÝ: *Analysis of dynamic effects on engineering structures.* Elsevier Science Publishers, Amsterdam, Oxford, New York, Tokyo, 1987.

[7] BEAMAN, J.J. und J.K. HEDRICK: *Improved statistical linearization for analysis and control of nonlinear stochastic systems. Part I: An extended statistical linearization technique.* Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 103:14 – 21, 1981.

[8] BEAMAN, J.J. und J.K. HEDRICK: *Improved statistical linearization for analysis and control of nonlinear stochastic systems. Part II: Application to control system design.* Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 103:22 – 27, 1981.

[9] BLOCK, U.: *Vergleich der Perturbationsmethode und der Spektralen Stochastischen Finite-Element-Methode.* Diplomarbeit, Technische Universität München, Lehrstuhl für Baumechanik, 2000.

[10] BOVER, D.C.C.: *A computational study of several problems in stochastic modelling.* Dissertation, Australian National University, 1978.

[11] BOVER, D.C.C.: *Moment equation methods for nonlinear stochastic systems.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 65:306–320, 1978.

[12] BOYCE, W.E.: *A 'dishonest' approach to certain stochastic eigenvalue problems.* SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. I, 1968.

[13] BOYCE, W.E.: *Random eigenvalue problems.* Probabilistic Methods in Applied Mathematics, Vol. I, 1968.

[14] BREITSAMTER, N.: *Ersatzmodelle zur Bestimmung der Schwingungsantwort von Gebäuden unter Anregung durch Bodenerschütterungen.* Dissertation, TU München, Lehrstuhl für Baumechanik, 1996.

[15] BRENNER, C.E.: *Ein Beitrag zur Zuverlässigkeitsanalyse von Strukturen unter Berücksichtigung von Systemunsicherheiten mit Hilfe der Methode der Stochastischen Finiten Elemente.* Dissertation, Universität Innsbruck, Lehrstuhl für Baumechanik, 1989.

[16] BRONSTEIN, I.N. und K.A. SEMENDJAJEW: *Taschenbuch der Mathematik.* Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/Main, 24. Auflage, 1989.

[17] BUCHER, C.G. und Y.K. LIN: *Stochastic stability of bridges considering coupled modes-I.* Journal of Engineering Mechanics, 114(12):2055–2071, 1988.

[18] BUCHER, C.G. und Y.K. LIN: *Stochastic stability of bridges considering coupled modes-II.* Journal of Engineering Mechanics, 115(2):384–400, 1989.

[19] CHANG, C. C. und H. YANG: *Random vibration of flexible, uncertain beam element.* Journal of Engineering Mechanics, 117(10):2329–2350, 1991.

[20] CLOUGH, R.W. und J. PENZIEN: *Dynamics of Structures.* McGraw-Hill, Inc., New York, 2. Auflage, 1993.

[21] COLLINS, J.D.: *The eigenvalue problem for systems with statistical properties.* Dissertation, UCLA, 1967.

[22] COLLINS, J.D. und THOMPSON W.T.: *The eigenvalue problem for structural systems with statistical properties.* AIAA Journal, 17(4), 1969.

[23] CRANDALL, S.H. und W.D. MARK: *Random vibrations in mechanical systems.* Academic Press, New York, London, 1963.

[24] DEMANT, B.: *Fuzzy-Theorie oder Die Faszination des Vagen.* Vieweg, 1993.

[25] DEODATIS, G.: *The weighted integral method. I - Stochastic stiffness matrix.* Journal of Engineering Mechanics, 117(8):1851–1864, 1991.

[26] DEODATIS, G. und M. SHINOZUKA: *Bounds of response variability of stochastic systems.* Journal of Engineering Mechanics, 115(11):2543–2563, 1989.

[27] DEODATIS, G. und M. SHINOZUKA: *Weighted integral method. II - Response variability and reliability.* Journal of Engineering Mechanics, 117(8):1865–1877, 1991.

[28] DER KIUREGHIAN, A. und R.L. TAYLOR: *Numerical methods in structural reliability.* Proceedings of the 4th International Conference on Application of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, Seiten 769–784, 1983.

[29] DESSOMBZ, O., F. THOUVEREZ und JÉZÉQUEL: *Analysis of stochastic structures: projection on homogeneous chaos.* In: *Euromech 405: Numerical Modelling of Uncertainties*, Seiten 221–226, November 1999.

[30] DONLEY, M.G. und P.D. SPANOS: *Dynamic analysis of non-linear structures by the method of statistical quadratization.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1990.

[31] EGGWERTZ, S. und N.C. LIND (Herausgeber): *Probabilistic methods in the mechanics of solids and structures, IUTAM Symposium Stockholm/Sweden.* Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[32] ELISHAKOFF, I.: *Probabilistic methods in the theory of structures.* A Wiley-Interscience publication. Wiley, New York, 1983.

[33] ELISHAKOFF, I. und R.H. LYON (Herausgeber): *Random vibration - Status and recent developments.* Elsevier, Amsterdam, 1986.

[34] ESTORFF, O. VON: *Zur Berechnung der dynamischen Wechselwirkung zwischen Bauwerken und ihrer Umgebung mittels zeitabhängiger Randintegralgleichungen, Technisch-Wissenschaftliche Mitteilungen.* Technischer Bericht 86-10, Ruhr-Universität Bochum, 1986.

[35] FELDMAN, D. und M. FOX: *Probability - The mathmatics of uncertainty.* Marcel Dekker, New York, 1991.

[36] FENTON, A.G. und E.H. VANMARKE: *Simulation of random fields via local average subdivision.* Journal of Engineering Mechanics, 116(8), 1990.

[37] FETZ, TH., M. HOFMEISTER, G. HUNGER, J. JÄGER, H. LESSMANN, M. OBERGUGGENBERGER, A. RIESER und R. STARK: *Tunnelberechnung - fuzzy?* Bauingenieur, 72:33–40, 1997.

[38] FIESSLER, B.: *Entwicklung von Regeln zur Kombination stochastischer Lasten für die Tragwerksbemessung.* Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke 68, Laboratorium für den Konstruktiven Ingenieurbau, Technische Universität München, 1983.

[39] FISZ, M.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978.

[40] FLESCH, R.: *Schwingungen im Wohn- und Industriebau.* In: STEINWACHS, M. (Herausgeber): *Ausbreitung von Erschütterungen in Boden und Bauwerk.* Trans Tech Publications, 1986.

[41] FRANK, P.M.: *Empfindlichkeitsanalyse dynamischer Systeme.* R. Oldenbourg Verlag, München, Wien, 1976.

[42] GAZETAS, G.: *Analysis of machine foundations: State of the art.* Soil Dynamics and Earthquake Engineering, (2), 1983.

[43] GEHRMANN, J. und H. GRUNDMANN: *The impact of uncertain system parameters on the vibration response of buildings.* In: *Proceedings of the fourth European Conference on Structural Dynamics- Eurodyn '99*, Band 2, Seiten 863–868, Juni 1999.

[44] GEHRMANN, J. und H. GRUNDMANN: *Stochastic vibration response calculated with uncertain system parameters.* In: *Euromech 405: Numerical Modelling of Uncertainties*, Seiten 21–29, November 1999.

[45] GHANEM, R. und P.D. SPANOS: *Stochastic finite element expansion for random media.* Journal of Engineering Mechanics, 115(5):1035–1053, 1989.

[46] GHANEM, R. und P.D. SPANOS: *Spectral stochastic finite-element formulation for reliability analysis.* Journal of Engineering Mechanics, 117(10):2351–2372, 1991.

[47] GHANEM, R.G. und P.D. SPANOS: *Stochastic finite elements: A spectral approach.* Springer-Verlag, New York, Berlin, 1991.

[48] GRIGORIU, M.: *Eigenvalue problem for uncertain systems.* Applied Mechanics Reviews, 44(11, Teil 2):89–95, 1991.

[49] GRIGORIU, M.: *Solution of a random eigenvalue problem by crossing theory and pertubation.* Computational Stochastic Mechanics (Herausgeber: Spanos, P.D. und C.A. Brebbia), Seiten 81-89, 1991.

[50] GRIGORIU, M.: *A solution of a random eigenvalue problem by crossing theory.* Journal of Sound and Vibration, 158(1):69–80, 1992.

[51] GROSSMANN, E. und R. JULI: *Zufällige Systemeigenschaften bei dynamisch belasteten Tragwerken mit einem Freiheitsgrad.* Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke 57, Laboratorium für den Konstruktiven Ingenieurbau, Technische Universität München, 1981.

[52] GROSSMANN, E.A.: *Auswirkung streuender Systemeigenschaften auf die Zuverlässigkeit dynamisch beanspruchter Tragwerke.* Dissertation, Technische Universität München, Lehrstuhl für Baumechanik, 1984.

[53] GRUNDMANN, H.: *On the reliability of structures under periodic loading.* ICOSSAR 77, The 2nd International Conference on Structural Safety and Reliability, Düsseldorf, 1977.

[54] GRUNDMANN, H.: *Über den Einfluß von Schallbrücken auf die Körperschalldämmung von Decken mit schwimmendem Estrich. Beiträge aus Lehre und Forschung. O.Prof Dr.-Ing. B. Heimeshoff zum 60. Geburtstag.* Lehrstuhl für Baukonstruktion und Holzbau, Technische Universität München, März 1986.

[55] GRUNDMANN, H.: *Zuverlässigkeit der Bauwerke - Allgemeiner Teil (Abschlußbericht Sonderforschungsbereich 96).* Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke 86, Laboratorium für den Konstruktiven Ingenieurbau, Technische Universität München, 1989.

[56] GRUNDMANN, H. und N. BREITSAMTER: *Service state response of buildings excited by ground motion: A simplified stochastic approach.* In: AUGUSTI, G., C. BORRI und P. SPINELLI (Herausgeber): *Structural Dynamics*, Band 1 der Reihe *Proceedings of the third European Conference on Sructural Dynamics: EURODYN '96*, Seiten 371–378, Florence, Italy, June 1996. European Association for Structural Dynamics.

[57] GRUNDMANN, H., F. DUDDECK und H. WAUBKE: *On some stochastic eigenvalue problems for technical applications.* The Second International Conference on Computional Structures Technology, Athen, 1994.

[58] GRUNDMANN, H., F.H. MÜLLER und R. MÜLLER: *Erschütterungs- und Schallschutzmaßnahmen für ein Gebäude über einem S-Bahn Tunnel.* In: NATKE, H.G. (Herausgeber): *Dynamische Probleme, Modellierung und Wirklichkeit*, Mitteilungen des Curt-Risch-Instituts der Universität Hannover, Seiten 241–291. 1984.

[59] GRUNDMANN, H. und G. MÜLLER: *Schwingungen infolge zeitlich veränderlicher, bewegter Lasten im Untergrund (FE-Berechnungen unter Verwendung analytischer Lösungen).* Finite-Elemente - Anwendung in der Baupraxis. FEM 88, Ruhr-Universität Bochum, März 1988.

[60] GRUNDMANN, H. und G. MÜLLER: *Untergrundbewegungen infolge ortsveränderlicher Lasten an der Oberfläche.* Mitteilungen aus dem Institut für Bauingenieurwesen I, Heft 22, Technische Unversität München, 1988.

[61] GRUNDMANN, H. und G. MÜLLER: *Erschütterungseinleitung in Bauwerke und Maßnahmen zur Reduzierung von Erschütterungen und sekundären Luftschallemissionen.* Bauingenieur, (69):129–137, 1994.

[62] GRUNDMANN, H. und G.I. SCHUËLLER: *Über die Rolle stochastisch dynamischer Prozesse in der Zuverlässigkeitstheorie.* In: NATKE, H.G. (Herausgeber): *Dynamische Probleme, Modellierung und Wirklichkeit*, Mitteilungen des Curt-Risch-Instituts der Universität Hannover. 1984.

[63] GRUNDMANN, H. und H. WAUBKE: *Stochastische Finite Elemente zur Ermittlung der Bewegungen eines mehrschichtigen ebenen Kontinuums unter periodischer Belastung, Festschrift zum 80. Geburtstag von Herrn Prof. Dr. rer. nat. Dr.-Ing. E.h. Kurt Magnus.* Lehrstuhl B für Mechanik, Technische Universität München, 1992.

[64] GRUNDMANN, H. und H. WAUBKE: *Zur Berechnung eines geschichteten Halbraums mit zufällig streuenden Steifigkeitsbeiwerten bei Einwirkung periodischer Belastung, Festschrift zum 60. Geburtstag von Herrn Prof. Krätzig.* Technisch-Wissenschaftliche Mitteilungen des Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau. Ruhr-Universität Bochum, 1992.

[65] GRUNDMANN, H. und H. WAUBKE: *Approximate solution for the response of a layered stochastic linear soil to a dynamic excitation at the surface.* Eurodyn 93, Proceedings of the European Conference of Structural Dynamics, Trondheim, Norwegen, Juni 1993.

[66] GRUNDMANN, H. und H. WAUBKE: *An approach to stochastic linear soil-structure-interaction under dynamic loading.* Structural Safety and Reliability, Proc. ICOSSAR '93, Seiten 341–348, 1994.

[67] GRUNDMANN, H., H. WAUBKE und S. LENZ: *Dynamic response of an elastic half space with random properties.* In: *Proc. IMACS2000*, Lausanne, 2000.

[68] GUYADER, J.L.: *Uncertainty bounds for energy of imperfectly described vibration fields. Application to the validity of truncated modal expansion.* International Journal of Solids and Structures, 27(2):171–188, 1991.

[69] HAMPE, E. und K.-H. MÜLLER: *Stochastische Untersuchung seismisch erregter Turmbauwerke.* Bauingenieur, Seiten 373–387, 1989.

[70] HASSELMAN, T.K. und G.C. HART: *Modal analysis of random structural systems.* Journal of ASCE, EM3(4), 1972.

[71] HEINRICH, W. und K. HENNIG: *Zufallsschwingungen mechanischer Systeme.* Vieweg, Braunschweig, 1978.

[72] HISADA, T. und S. NAKAGIRI: *Role of the stochastic finite element method in structural safety and reliability.* ICOSSAR 85, International Conference on Structural Safety and Reliability, Band I, Seiten 385–394, 1985.

[73] HÖFFER, R., J.-J. NIEMANN und J.X. LOU: *Modeling of artificial stochastic wind loads and interaction forces on oscillating line-like structures.* ICOSSAR 93, The 6th International Conference on Structural Safety and Reliability, Band 3, Seiten 1631–1638, Innsbruck, August 1993.

[74] HOHENBICHLER, M.: *Zur zuverlässigkeitstheoretischen Untersuchung von Seriensystemen.* Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke 48, Laboratorium für den Konstruktiven Ingenieurbau, Technische Universität München, 1980.

[75] HÖLZL, G.: *Körperschall- bzw. Erschütterungsausbreitung an Schienenverkehrswegen. Ergebnisse des Forschungsvorhabens und praktische Anwendungen bei der DB.* ETR-Eisenbahntechnische Rundschau, (31), 1982.

[76] HUH, Y. und G. SCHMID: *Dynamische Boden-Baugrund-Wechselwirkung im Frequenzbereich mit Hilfe der Randelementemethode.* Bauingenieur, (63):125–131, 1988.

[77] HURTY, W.C. und M.F. RUBINSTEIN: *Dynamics of structures.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.

[78] IBRAHIM, Y.: *Reliability analysis of uncertain dynamic systems.* National Structural Engineering Conference, Seiten 28–32, Adelaide, Australia, 1990.

[79] IGUSA, T. und A. DER KIUREGHIAN: *Response of uncertain systems to stochastic excitation.* Journal of Engineering Mechanics, 114(5):812–832, 1988.

[80] JULI, R.: *Zur Berechnung von periodisch belasteten Tragwerken mit streuenden Systemeigenschaften.* Dissertation, Technische Universität München, Lehrstuhl für Baumechanik, 1983.

[81] KASPERSKI, M.: *Codification of stochastic loads on structures in the Eurocode 1: Wind action.* ICOSSAR 93, The 6th International Conference on Structural Safety and Reliability, Band 3, Seiten 1655–1662, Innsbruck, August 1993.

[82] KAUFMANN, A. und M.M. GUPTA: *Fuzzy mathematical models in engineering and management science.* Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1988.

[83] KENDALL, M. und A. STUART: *Distribution theory*, Band 1 der Reihe *The Advanced Theory of Statistics.* Charles Griffin, London, vierte Auflage, 1977.

[84] KENDALL, M. und A. STUART: *Inference and relationship*, Band 2 der Reihe *The Advanced Theory of Statistics.* Charles Griffin, London, vierte Auflage, 1979.

[85] KENDALL, M., A. STUART und J.K. ORD: *Design and analysis, and time-series*, Band 3 der Reihe *The Advanced Theory of Statistics.* Charles Griffin, London, vierte Auflage, 1983.

[86] KLEIBER, M. und T.D. HIEN: *The stochastic finite element method.* Wiley, Chichester, 1992.

[87] LANGE, D.: *Zur Anwendung der Intervallrechnung in der Sicherheitstheorie.* Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 1986.

[88] LIN, Y.K.: *Probabilistic theory of structural dynamics.* McGraw-Hill, New York, 1967.

[89] LIU, W.K., T.B. BELYTSCHKO und G.H. BESTERFIELD: *Probabilistic finite element method* . In: LIU, W.K. und T.B. BELYTSCHKO (Herausgeber): *Computational Mechanics of Probabilistic and Reliability Analysis*, Seiten 115–140. Elmepress International, Lausanne, 1989.

[90] LIU, W.K., T.B. BELYTSCHKO und A. MANI: *Probabilistic finite elements for nonlinear structural dynamics.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 56:61–81, 1986.

[91] LOWEN, R.: *Fuzzy set theory.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, Zweite Auflage, 1996.

[92] LYON, R.H.: *Statistical energy analysis of dynamical systems: Theory and application.* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1975.

[93] MATTHIES, H.G., C.E. BRENNER, C.G. BUCHER und C.G. SOARES: *Uncertainties in probabilistic numerical analysis of structures* . SIAM Journal on Mathematical Analysis, 18(4):933 – 940, 1987.

[94] MEHLHORN, G. (HRSG.): *Der Ingenieurbau: Baustatik, Baudynamik.* Ernst & Sohn, Berlin, 1995.

[95] MEHLHORN, G. (HRSG.): *Der Ingenieurbau: Tragwerkszuverlässigkeit, Einwirkungen.* Ernst & Sohn, Berlin, 1997.

[96] MÖLLER, B.: *Fuzzy-Modellierung in der Baustatik.* Bauingenieur, 72:75–84, 1997.

[97] MÜLLER-BBM, IGI NIEDERMEYER und LGA BAYERN: *Schwingungsausbreitung an Schienenverkehrswegen. Hauptstudie 1 und 2.* Technischer Bericht ARGE Schwingungsausbreitung, 1980/1981.

[98] MÜLLER, G.: *Ein Verfahren zur Erfassung der Fundament-Boden-Wechselwirkung unter Einwirkung periodischer Lasten.* Mitteilungen aus dem Institut für Bauingenieurwesen I,, Technische Universität München, 1992.

[99] MÜLLER, K.-H.: *Seismisch erregte turmartige Bauwerke mit zufälligen Systemeigenschaften.* Bauplanung - Bautechnik, (5):196–198, 1990.

[100] NASHIF, A.D., D.I.G. JONES und J.P. HENDERSON: *Vibration damping.* John Wiley & Sons, New York, 1985.

[101] NEWLAND, D. E.: *An introduction to random vibrations, spectral and wavelet analysis.* Longman, Harlow, 3. Auflage, 1994.

[102] NIGAM, N.C.: *Introduction to random vibrations.* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1983.

[103] ØKSENDAL, B. (Herausgeber): *Stochastic differential equations.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, zweite Auflage, 1989.

[104] PAPOULIS, A.: *Probability, random variables, and stochastic processes.* McGraw-Hill, New York, 1991.

[105] PRADLWARTER, H.J. und G.I. SCHUËLLER: *Statistical energy analysis in view of stochastic modal analysis.* IUTAM Symposium on Statistical Energy Analysis. Kluwer Publish, 1997.

[106] PRESS, W.H., B.P. FLANNERY, S.A. TEUKOLSKY und W.T. VETTERLING: *Numerical recipes - The art of scientific computing.* Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[107] RACKWITZ, R.: *Response surfaces in structural reliability.* Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke 67, Laboratorium für den Konstruktiven Ingenieurbau, Technische Universität München, 1982.

[108] RACKWITZ, R.: *Klassifizierungsprüfungen, DIN-Fachbericht 32: Grundlagen zur Festlegung von Anforderungen und Prüfplänen für die Überwachung von Baustoffen und Bauteilen mit Hilfe statistischer Betrachtungsweisen.* Seiten 158–163, 1991.

[109] ROBERTS, J.B. und P.D. SPANOS: *Random vibration and statistical linearization.* John Wiley & Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore, 1990.

[110] ROBSON, J.D.: *An introduction to random vibration.* Edinburgh University Press, Edinburgh, 1964.

[111] SAKAMOTO, S. und R.G. GHANEM: *Dynamic analysis of stochastic frame structures.* In: *Proceedings of the fourth European Conference on Structural Dynamics- Eurodyn '99*, Band 1, Seiten 255–260, Juni 1999.

[112] SCHEIDT, J. VOM, B. FELLENBERG und U. WÖHRL: *Analyse und Simulation stochastischer Schwingungssysteme.* B.G. Teubner, Stuttgart, 1994.

[113] SCHEIDT, J. VOM und W. PURKERT: *Random eigenvalue problems.* Akademie-Verlag, Berlin, 1983.

[114] SCHUËLLER, G.I.: *Einführung in die Sicherheit und Zuverlässigkeit von Tragwerken.* Ernst & Sohn, Berlin-München, 1981.

[115] SCHUËLLER, G.I., C.G. BUCHER und H.J. PRADLWARTER: *Computational methods in stochastic structural dynamics.* Eurodyn 90, Proceedings of the European Conference of Structural Dynamics, Band 2, Seiten 599–606, Juni 1990.

[116] SCHUËLLER, G.I. und M. SHINOZUKA: *Stochastic methods in structural dynamics.* Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, Boston, Lancaster, 1987.

[117] SELZLE, A.: *Baudynamische Untersuchung von Gebäuden mit streuenden Systemparametern unter Verwendung vereinfachter Gebäudemodelle.* Diplomarbeit, Technische Universität München, Lehrstuhl für Baumechanik, 1999.

[118] SHINOZUKA, M. und J. ASTILL: *Random eigenvalue problems in structural mechanics.* AIAA Journal, 10(4):456–462, 1972.

[119] SHINOZUKA, M. und G. DASGUPTA: *Stochastic finite element methods in dynamics.* Proceedings of the Third Conference of Dynamic Response of Structures, Seiten 44–54, University of California, Los Angeles, CA, March 31 - April 2 1986. EMN Dir./ ASCE.

[120] SHINOZUKA, M. und G. DEODATIS: *Response variability of stochastic finite element systems.* Technischer Bericht Department of Civil Engineering, Columbia University, New York, 1986.

[121] SHINOZUKA, M. und F. YAMAZAKI: *Stochastic finite element analysis: An introduction.* In: ARIARATNAM, S.T., G.I. SCHUËLLER und I. ELISHAKOFF (Herausgeber): *Stochastic Structural Dynamics*, Seiten 241–291. Elsevier Applied Science Publishers Ltd., 1988.

[122] SNIADY, P. und S. ZUKOWSKI: *Design sensitivity random eigenvalue problem in dynamics and buckling of structures.* In: GHANEM, P.D., Y.T. WU und I. ELISHAKOFF (Herausgeber): *Probabilistic Structural Mechanics: Advances in Structural Reliability Methods, IUTAM Symposium, San Antonio, Texas, USA.* Springer Verlag, 1993.

[123] SOBCZYK, K.: *Stochastic differential equations.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, Lancaster, 1991.

[124] SPENCER, B.F. und I. ELISHAKOFF: *Reliability of uncertain linear and nonlinear systems.* Journal of Engineering Mechanics, 114(1):135–148, 1988.

[125] STREICHER, H.: *Der Einfluß von streuenden Systemparametern dargestellt als stochastische Prozesse auf die Eigenfrequenzen baudynamischer Strukturen.* Diplomarbeit, Technische Universität München, Lehrstuhl für Baumechanik, 1999.

[126] SZABÓ, I.: *Einführung in die Technische Mechanik.* Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 4. Auflage, 1959.

[127] SZÉKELY, G.S.: *An efficient computational method for the calculation of eigenvectors and eigenvalues within the Monte Carlo simulation.* Dissertation, Leopold-Franzens-Universität Innsbruck, 1997.

[128] TAKADA, T.: *Weighted integral method in stochastic finite element analysis.* Probabilistic Engineering Mechanics, 5(3):146–156, 1990.

[129] WAAS, G.: *Linear twodimensional analysis of soil dynamic problems in semi-infinite layered media.* Doktorarbeit, Universitiy of California, Berkley, 1972.

[130] WAUBKE, H.: *Dynamische Berechnungen für den Halbraum mit streuenden Parametern mittels orthogonaler Polynome.* Dissertation, Technische Universität München, Lehrstuhl für Baumechanik, 1996.

[131] WAUBKE, H.: *Eigenwertprobleme mittels Chaos-Polynomtransformation.* Interner Bericht, Technische Universität München, Lehrstuhl für Baumechanik, o.J.

[132] WOLF, J. P.: *Dynamic soil-structure interaction.* Prentice-Hall international series in civil engineering and engineering mechanics. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1985.

[133] WOLF, J. P.: *Foundation vibration analysis using simple physical models.* PTR Prentice Hall, 1994.

[134] YAGER, R.R., S. OVCHINNIKOV, R.M. TONG und H.T. NGUYEN (Herausgeber): *Fuzzy sets and applications: Selected papers by L.A. Zadeh.* John Wiley & Sons, New York, 1987.

[135] YAMAZAKI, F., M. SHINOZUKA und G. DASGUPTA: *Neumann expansion for stochastic finite element analysis.* Journal of Engineering Mechanics, 114(8):1335–1354, 1988.

[136] ZHU, W.Q. und W. Q. WU: *A stochastic finite element method for real eigenvalue problems.* Stochastic Structural Dynamics 2, New Practical Applications, 2nd International Conference on Stochastic Structural Dynamics. Springer Verlag, 1991.

[137] ZIMMERMANN, H.J.: *Fuzzy Set theory - and its applications.* Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht, London, 2. Auflage, 1991.