



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

Hydrostatische Isostasie

F. Mladek

IAPG / FESG No. 24

Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie
Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie

München 2006

Hydrostatische Isostasie

F. Mladek

IAPG / FESG No. 24

München 2006

ISSN 1437-8280

ISBN 3-934205-23-2

Hinweis: Eine PDF-Version dieser Arbeit mit farbigen Abbildungen ist erhältlich unter
<http://tau.fesg.tu-muenchen.de/~iapg/web/veroeffentlichung/schriftenreihe/schriftenreihe.php>

Adressen:

Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie

Technische Universität München

Arcisstrasse 21

D-80290 München

Germany

Telefon: +49-89-289-23190

Telefax: +49-89-289-23178

<http://tau.fesg.tu-muenchen.de/~iapg/>

Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie

Technische Universität München

Arcisstrasse 21

D-80290 München

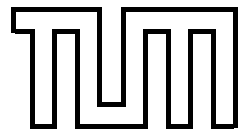
Germany

Telefon: +49-89-289-23191

Telefax: +49-89-289-23178

<http://tau.fesg.tu-muenchen.de/~fesg/>

Technische Universität München



Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie

Hydrostatische Isostasie

Diplomarbeit

Franziska Mladek

Februar 2006

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	iii
1 Einleitung	1
2 Grundlagen der Isostasie	3
2.1 Definition	3
2.2 Geschichtliche Entwicklung	4
2.3 Schalenbau des Erdinneren	6
2.4 Physikalische Grundlagen	9
2.5 Lokale geodätische Kompensationsmodelle	12
2.5.1 Airy-Heiskanen-Modell	12
2.5.2 Pratt-Hayford-Modell	18
3 Einführung in wichtige Rechenmethoden	25
3.1 Berechnung globaler Schwerefeldfunktionale	25
3.1.1 Kugelfunktionsentwicklung des Gravitationspotentials	25
3.1.2 Kugelfunktionsentwicklung der Schwerefeldfunktionale	31
3.2 Werkzeuge zur Analyse von Funktionen	33
3.2.1 Analysewerkzeuge für den Ortsbereich einer Funktion	33
3.2.2 Analysewerkzeuge für den Spektralbereich einer Funktion	35
4 Berechnung von isostatisch reduzierten Schwerefeldfunktionalen	37
4.1 Verfügbare Datensätze	37
4.1.1 Höhendatensatz JPG95E	37
4.1.2 Schwerefeldmodell EGM96	44
4.2 Nach dem Airy-Heiskanen-Modell	51

4.2.1	Isostatisch reduzierte Schwereanomalien	51
4.2.2	Isostatisch reduzierte Geoidhöhen	68
4.3	Nach dem Pratt-Hayford-Modell	70
4.3.1	Isostatisch reduzierte Schwereanomalien	70
4.3.2	Isostatisch reduzierte Geoidhöhen	80
5	Diskussion der Ergebnisse	83
5.1	Isostatisch reduzierte Schwereanomalien	83
5.1.1	Globaler Vergleich	83
5.1.2	Regionaler Vergleich	89
5.1.3	Vergleich von Profilen	93
5.2	Isostatisch reduzierte Geoidhöhen	98
5.2.1	Globaler Vergleich	98
5.2.2	Regionaler Vergleich	101
5.2.3	Vergleich von Profilen	104
6	Zusammenfassung und Ausblick	109
	Anhang	113
A.1	Normalisierte zugeordnete Legendre-Polynome	113
B.1	Integrale der normalisierten zugeordneten Legendre-Polynome	113
B.2	Blockfläche	114
B.3	Integrale der Kosinus- und Sinusfunktion	114
	Abbildungsverzeichnis	117
	Literaturverzeichnis	121

Kapitel 1

Einleitung

Die Theorie der Isostasie beschreibt das Phänomen des topographischen Massenausgleichs. Sie verbindet geodätische, geophysikalische und geologische Beobachtungen und Erkenntnisse miteinander und gehört zu dem interdisziplinären Forschungsbereich der Geodynamik. In der Geodäsie betrachtet man vorrangig die hydrostatische Isostasie. Unter hydrostatischer Isostasie versteht man die lokale Kompensation der Massen in vertikalen unabhängigen Säulen, d.h. die Elastizität der Lithosphärenplatten wird nicht berücksichtigt. Damit können einfache mathematische Modelle der Isostasie formuliert werden. Sie werden in der Geodäsie eingesetzt für die präzise Geoidbestimmung mit der sogenannten Remove-Restore-Technik. In der Geologie und Geophysik betrachtet man hingegen die sogenannte Flexurisostasie. Sie berücksichtigt die Elastizität der Lithosphärenplatten. Die Flexurisostasie geht von einer regionalen Kompensation der Massen aus, d.h. hier werden die bei vertikalen Bewegungen auftretenden Scherspannungen berücksichtigt. Auf diese Weise lassen sich viele großräumige geologische Phänomene erklären. Die Erforschung des isostatischen Verhaltens ist ein wichtiger Anhaltspunkt um Aussagen über die Struktur und die Entstehungsprozesse der Erdoberfläche zu treffen. Die Theorie der Isostasie spielt folglich eine wichtige Rolle in der Erforschung unserer Planeten, da sie Auskunft über den physikalischen Aufbau von Planeten liefert.

Im Rahmen dieser Arbeit erfolgt die Berechnung von globalen isostatisch reduzierten Schwereanomalien und Geoidhöhen nach zwei isostatischen Modellen: Airy-Heiskanen-Modell und Pratt-Hayford-Modell. Bei diesen isostatischen Modellen handelt es sich um die zwei bekanntesten lokalen Kompensationsmodelle der Geodäsie. Isostatisch reduzierte Schwereanomalien und Geoidhöhen werden zur Schwerefeldprädiktion und -interpretation verwendet. Sie eignen sich besonders gut zur Schwerefeldprädiktion, da ihr Verlauf glatter ist als der der freiluftreduzierten Schwerefeldfunktionale und weil sie weniger stark mit dem Geländeverlauf korreliert sind. Die Residuen der isostatisch reduzierten Schwereanomalien bzw. Geoidhöhen geben Aufschluss über Dichteveränderungen in der Erdkruste und dem Erdmantel und weisen auf isostatisch nicht vollständig kompensierte Gebiete hin, oder darauf, dass die isostatischen Modelle die Realität nur unvollständig approximieren. Eine umfassende Analyse soll Aufschluss darüber geben für welches isostatische Modell die Residuen der isostatisch reduzierten Schwereanomalien und Geoidhöhen am glattesten und am kleinsten sind. Dabei soll nicht nur das globale Verhalten der isostatisch reduzierten

Schwereanomalien und Geoidhöhen untersucht werden sondern auch das regionale Verhalten, um herauszufinden, in welchen tektonischen Zonen die isostatischen Modelle die Realität besser approximieren.

Im zweiten Kapitel wird auf die theoretischen Grundlagen der Isostasie eingegangen. Am Anfang befindet sich die Definition der Theorie der Isostasie. Anschließend wird Schritt für Schritt erläutert, wie die Theorie der Isostasie entwickelt wurde. Zum besseren Verständnis der Theorie der Isostasie wird ein kurzer Überblick über den Schalenbau der Erde gegeben, sowie über die physikalischen Grundlagen, auf denen das Phänomen des topographischen Massenausgleichs beruht. Am Ende werden die lokalen Kompensationsmodelle von AIRY und PRATT vorgestellt. Diese beiden Modelle werden in dieser Arbeit verwendet um isostatisch reduzierte Schwereanomalien und Geoidhöhen zu berechnen.

Im dritten Kapitel werden Rechenmethoden behandelt, die zum Verständnis der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen wichtig sind. Zu Beginn dieses Abschnittes wird erläutert, wie man mit Hilfe der Kugelfunktionsentwicklung Schwerefeldfunktionale berechnen kann. Es werden zwei Methoden zur Durchführung der globalen, sphärisch harmonischen Synthese und Analyse vorgestellt, deren Verwendung davon abhängt, ob die globale diskrete Funktion des Schwerefeldfunktionals repräsentative Punktwerte oder Blockmittelwerte enthält. Im Anschluss daran werden verschiedene Analysewerkzeuge vorgestellt, mit deren Hilfe globale diskrete Funktionen im Orts- und Spektralbereich untersucht werden können.

Im vierten Kapitel wird ausführlich geschildert, wie man isostatisch reduzierte Schwereanomalien und Geoidhöhen nach dem Airy-Heiskanen-Modell und nach dem Pratt-Hayford-Modell berechnen kann. Am Anfang werden die Datensätze, die für die Berechnungen dieser Arbeit verwendet wurden, beschrieben. Anschließend werden die Formeln zur Berechnung der isostatisch reduzierten Schwereanomalien und Geoidhöhen nach dem Airy-Heiskanen-Modell ausführlich hergeleitet und die einzelnen Ergebnisse der Berechnungen dargestellt. Auf dieselbe Weise wird erklärt wie man die isostatisch reduzierten Schwereanomalien und Geoidhöhen nach dem Pratt-Hayford-Modell berechnen kann.

Im fünften Kapitel werden die im Rahmen dieser Arbeit berechneten isostatisch reduzierten Schwereanomalien und Geoidhöhen nach den zwei isostatischen Modellen global, regional und entlang von Profilen untersucht. Mit Hilfe von Gradvarianzen wird der Glättungsgrad der isostatisch reduzierten Schwerefeldfunktionale global untersucht. Mit Hilfe von RMS-Werten wird das regionale Glättungsverhalten der isostatisch reduzierten Schwereanomalien und Geoidhöhen in den Gebieten: Himalaya, Anden, Australien, ostpazifischer Rücken, mittelatlantischer Rücken und Marianengraben analysiert. Mit Hilfe von Profilen wird das Verhalten der Freiluftanomalien, der freiluftreduzierten Geoidhöhen, der isostatisch reduzierten Schwereanomalien und Geoidhöhen, der orthometrischen Höhen und der Schwerereduktionen untersucht.

Im sechsten Kapitel wird eine Kurzfassung der zentralen Punkte und Ergebnisse dieser Arbeit gegeben sowie ein kurzer Ausblick über noch offene Problemstellungen.

Kapitel 2

Grundlagen der Isostasie

In diesem Kapitel werden die Grundkenntnisse, die man zum besseren Verständnis der Theorie der Isostasie benötigt, erläutert. Zunächst werden folgende grundlegende Fragestellungen geklärt:

- Wie ist die Theorie der Isostasie definiert?
- Wie wurde das Phänomen der Massenkompensation im Erdinneren entdeckt und die Theorie der Isostasie daraus entwickelt?
- Wie ist die Erde im Inneren aufgebaut?
- Auf welchen physikalischen Gesetzen beruht die Theorie der Isostasie?

Im Anschluss daran werden die zwei bekanntesten, geodätischen, lokalen Kompensationsmodelle vorgestellt, die die Massenkompensation im Erdinneren beschreiben.

2.1 Definition

Die Theorie der Isostasie (griechisch: *isostasios* = im Gleichgewicht mit) beschreibt das Massengleichgewicht der Erdkruste und des Erdmantels in einer gewissen Kompensationstiefe. Dieses Massengleichgewicht stellt sich ein, wenn Massenüberschüsse (Gebirge) und Massendefizite (Ozeane) in den darunterliegenden Erdschichten kompensiert werden.

2.2 Geschichtliche Entwicklung

Die Theorie der Isostasie entstand durch erfolgreiche Zusammenarbeit von Geodäten, Geophysikern und Geologen. Im Folgenden wird Schritt für Schritt die Entwicklung der Theorie der Isostasie beschreiben. Von der Entdeckung des Phänomens des topographischen Massenausgleichs bis hin zur Entwicklung der lokalen Kompensationsmodelle (Airy-Heiskanen-Modell und Pratt-Hayford-Modell) und des regionalen Kompensationsmodells (Vening-Meinesz-Modell) [GRÜNINGER (1990), RUMMEL (2002), WATTS (2001)]. Dabei werden die beiden lokalen Kompensationsmodelle, die im Rahmen dieser Arbeit untersucht werden, erstmals vorgestellt.

- 1735–1744** Expedition der FRANZÖSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN nach Peru/Ecuador um Gradmessungen durchzuführen. Die Ergebnisse dieser Expedition sollten zur Bestimmung des Erdellipsoids dienen.
- 1744** Berichtete BOUGUER in seinem Buch „*La figure de la terre*“, dass die Anden eine kleinere Anziehungskraft besitzen, als angenommen wurde.
- 1750** Führte BOSCOVICH die kleinere Anziehungskraft der Anden darauf zurück, dass Berge durch thermische Ausdehnung des tieferliegenden Materials entstehen. Er nahm an, dass das entstandene Massendefizit im Erdinneren durch die darüberliegenden Erdschichten kompensiert wird.
- 1800–1870** Landesvermessung von Indien durch die ENGLÄNDER. Die Nord-Süd-Komponente der Lotabweichung $\zeta = \Phi - \phi$ in Kalianpur an der Südspitze Indiens und Kaliaana am Fuße des Himalayamassivs wurden aus den Ergebnissen der Triangulation ϕ und der astronomischen Breitenbestimmung Φ ermittelt. Die Differenz der „gemessenen“ Nord-Süd-Komponenten der Lotabweichungen in Kaliaana und Kalianpur betrug 5.237".
- 1855** Berechnete PRATT aus den topographischen Massen die Nord-Süd-Komponenten der Lotabweichungen in Kalianpur und Kaliaana. Die Differenz der „berechneten“ Nord-Süd-Komponenten der Lotabweichungen in Kaliaana und Kalianpur betrug 15.885". Sie ist ungefähr dreimal so groß wie die Differenz der „gemessenen“ Nord-Süd-Komponenten der Lotabweichungen. Dies konnte man sich nur dadurch erklären, dass die topographischen Massen im Erdinneren kompensiert werden.
- AIRY entwickelte ein lokales Kompensationsmodell, bei dem die leichtere Erdkruste auf dem schweren viskosen Erdmantel schwimmt. Er nahm an, dass die Erdkruste keine nennenswerten Dichteunterschiede besitzt und das Massenüberschüsse deshalb durch Wurzeln der Erdkruste kompensiert werden, die in den Erdmantel eintauchen. Massendefizite hingegen werden durch Antiwurzeln des Erdmantels kompensiert, die in die Erdkruste eintauchen [STÜWE (2000)].

- 1889** Entwickelte PRATT ein lokales Kompensationsmodell, bei dem die leichtere Lithosphäre auf der schwereren Asthenosphäre schwimmt. Er stellte fest, dass die Lithosphärendichte unterhalb von jungen Gebirgen geringer ist als unterhalb von Ozeanen. Deshalb nahm er an, dass die Lithosphäre bis zu einer konstanten Ausgleichstiefe in die Asthenosphäre eintaucht und das Massenüberschüsse und Massendefizite durch Dichteveränderungen der Lithosphäre kompensiert werden [STÜWE (2000)].
- 1889** Definierte DUTTON die Theorie der Massenkompensation im Erdinneren als Isostasie.
- 1909** Startet HELMERT den Versuch die Kompensationstiefe zu bestimmen.
- 1921** Gelang HAYFORD die mathematische Formulierung des Kompensationsmodells von PRATT. Man bezeichnet es daher als **Pratt-Hayford-Modell**.
- 1924** Brachte HEISKANEN die mathematische Formulierung des Kompensationsmodells von Airy heraus, man bezeichnet es deshalb als **Airy-Heiskanen-Modell**.
- 1931** Ersetzte VENING MEINESZ das lokale Schwimmgleichgewicht der unabhängigen senkrechten Säulen im Airy-Heiskanen-Modell durch eine regionale Kompensation. Er betrachtete die Erdkruste als eine elastische Platte, die sich unter Massenüberschüssen verformt. Das **Vening-Meinesz-Modell** ist genauer aber dafür auch viel rechenintensiver als die lokalen Kompensationsmodelle. Aus diesem Grund wird es von Geodäten kaum verwendet.
- 1940–1960** Wurden die lokalen Kompensationsmodelle von AIRY und PRATT mit Ergebnissen von seismischen Messungen verglichen, die Auskunft über die Struktur und die materiellen Eigenschaften der Erdkruste und des Erdmantels geben. Man stellte fest, dass die Erdkruste unterhalb der Kontinente dicker ist als unterhalb der Ozeane. Diese Entdeckung stimmte mit dem Airy-Heiskanen-Modell besser überein als mit dem Pratt-Hayford-Modell.

2.3 Schalenaufbau des Erdinneren

Wie in PRESS & SIEVER (1995) ausführlich beschrieben wird, können Geologen mit Hilfe von seismischen Wellen das Erdinnere erforschen. Seismische Wellen entstehen bei Erdbeben oder unterirdischen Tests von Atombombenexplosionen. Mit Hilfe von Seismographen können die seismischen Wellen aufgezeichnet werden. Es gibt drei Arten von seismischen Wellen: P-Wellen (Primärwellen), S-Wellen (Sekundärwellen) und Oberflächenwellen. P-Wellen gehören zur Gruppe der Longitudinalwellen, d.h. sie breiten sich durch periodisches Verdichten und Verdünnen des durchlaufenen Materials in Fortpflanzungsrichtung aus. S-Wellen breiten sich mit etwa der halben Geschwindigkeit der P-Wellen aus. Sie gehören zu der Gruppe der Transversalwellen, d.h. sie schwingen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Oberflächenwellen sind geringfügig langsamer als S-Wellen und verhalten sich wie Wellen auf dem offenen Meer.

Mit Hilfe von Seismographen kann die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen gemessen werden. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit seismischer Wellen in der Erde hängt vom Material ab. Man kann deshalb ausgehend von der Ausbreitungsgeschwindigkeit auf gewisse Materialeigenschaften des durchlaufenen Mediums schließen. Seismische Wellen durchlaufen Basalt beispielsweise rascher als Granit. Im Gegensatz zu P-Wellen breiten sich S-Wellen nicht in Flüssigkeiten (z.B. äußerer Erdkern) aus.

Der Grad der Reflektion und Brechung kann aus dem Ort des Ursprungs der Welle und dem Ort der Aufzeichnung ermittelt werden. Es kommt zur Reflektion und Brechung der seismischen Wellen, wenn sie auf eine Grenzschicht zwischen zwei Medien treffen. Dabei ändert sich die Richtung der Wellen aufgrund der veränderten Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Abbildung 2.1 zeigt den schalenförmigen Aufbau der Erde, den die Seismologen mit Hilfe dieser Technik nachgewiesen haben [STÜWE (2000)].

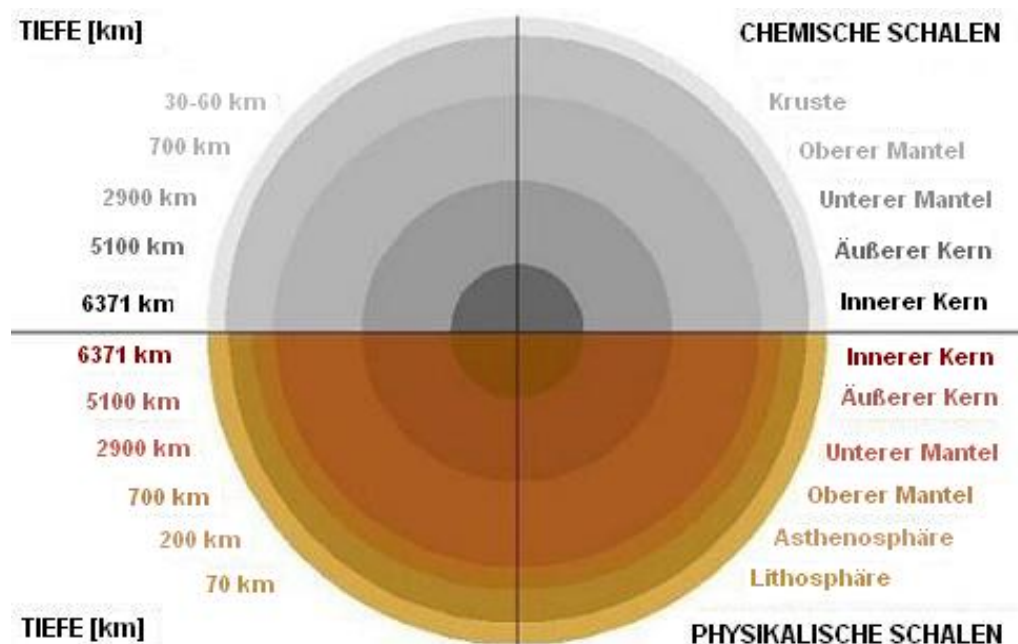


Abb. 2.1: Schalenaufbau des Erdinneren

Die Einteilung der Erde in einzelne Schalen schien sinnvoll, da abrupte Geschwindigkeitsänderungen der seismischen Wellen in gleicher Tiefe nachgewiesen werden konnten. Aufgrund der Abhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit vom Gesteinsmaterial, kann man auf die materielle Zusammensetzung der einzelnen Schichten schließen. Die Abgrenzung der einzelnen Schalen erfolgt nach der chemischen Zusammensetzung des Materials (chemische Schalen) oder den physikalischen Eigenschaften des Materials (physikalische Schalen). Zur Untersuchung von geodynamischen Prozessen betrachtet man meistens die chemischen Schalen der Erde, da sie ein typisches Temperatur- und Dichteprofil aufweisen. Zur Untersuchung von tektonischen Prozessen großer Ausdehnung betrachtet man die physikalischen Schalen der Erde, da die Lithosphäre als Ganzes agiert. AIRYSs Kompensationsmodell bezieht sich auf die chemischen Schalen der Erde und PRATTs Kompensationsmodell auf die physikalischen Schalen.

Chemische Schalen:

Erdkruste: Dies ist die äußerste Schicht der Erde. Unter den Ozeanen beträgt ihre mittlere Dicke 5 km und sie besteht zum größten Teil aus Basalt und Gabbro. Unter den Kontinenten besitzt sie eine mittlere Mächtigkeit von 35 km und besteht überwiegend aus Granit und Gabbro. Die chemischen Eigenschaften der Kruste sind sehr unterschiedlich, während die thermischen und mechanischen Eigenschaften denen von Quarz ähneln. Die Dichte der Erdkruste bewegt sich im Bereich von 2.6 bis 3.0 g/cm^3 . Zwischen der leichten Erdkruste und dem schweren Erdmantel befindet sich eine Grenzschicht, die im Allgemeinen als Mohorovičić-Diskontinuität (kurz: MOHO) bezeichnet wird.

Erdmantel: Der Mantel setzt sich aus einem oberen Teil bis zu einer Tiefe von 700 km und einem unteren Teil bis zu einer Tiefe von 2900 km zusammen. Der obere Mantel besteht zu großen Teilen aus den Gesteinen: Peridotit, Olivin und Spinell. Diese Gesteine sind fest, wenn man ihr Verhalten über eine kurze Zeitspanne (einige Jahre) betrachtet. Betrachtet man ihr Verhalten allerdings über eine große Zeitspanne (Tausende bis Millionen Jahre), dann sind sie plastisch und verhalten sich unter Druck wie eine hochviskose Flüssigkeit. Der obere Mantel besitzt eine Dichte von 3.1 bis 4.2 g/cm^3 . Der untere Mantel besteht überwiegend aus Perowskit und besitzt eine Dichte von 5.6 g/cm^3 .

Erdkern: Der Kern besteht aus flüssigem und festem Eisen und stellt ein Drittel der Gesamtmasse der Erde dar. Der flüssige äußere Kern befindet sich in einer Tiefe von 2900 bis 5100 km und besitzt eine mittlere Dichte von 12.1 g/cm^3 . Der feste innere Kern erstreckt sich bis 6371 km Tiefe und besitzt eine mittlere Dichte von 12.5 g/cm^3 .

Physikalische Schalen:

Lithosphäre: Hier stellt die Lithosphäre die äußerste Schicht der Erde dar. Sie entspricht einer ca. 70 km dicken Platte aus Gesteinsmaterial (griechisch: *lithos* = Stein). Nach geologischen Maßstäben ist diese Schale fest. Sie besteht aus verschiedenen Materialien und weist daher ein charakteristisches Temperatur- und Dichteprofil auf. Es gibt eine mechanische und eine thermische Definition der Lithosphäre, die in STÜWE (2000) ausführlich beschrieben sind.

Asthenosphäre: Die Asthenosphäre enthält geringe Mengen von flüssigem Magma und ist daher über längere Zeiträume gesehen viskos (griechisch: *asthenia* = weich). Durch den Druck des Gewichtes der Kontinente und Gebirge auf die Asthenosphäre, verhält sie sich wie eine hochviskose Flüssigkeit. Die Asthenosphäre befindet sich in einer Tiefe von 70 bis 200 km.

Oberer Erdmantel: Unterhalb der Asthenosphäre zwischen 200 bis 400 km Tiefe befindet sich eine Zone, die überwiegend aus festem Peridotit besteht. Darunter kommt es aufgrund der Druckzunahme zu einer dichteren Packung der Atome und es entstehen Minerale mit der Kristallstruktur des Spinells. Zwischen 450 bis 650 km Tiefe ändern sich die Eigenschaften nur geringfügig. Erst ab einer Tiefe von 670 km werden die Atome noch dichter gepackt und es entsteht Perowskit. Der obere Teil des Erdmantels reicht bis zu einer Tiefe von 700 km.

Unterer Erdmantel: Der untere Teil des Erdmantels erstreckt sich bis zu einer Tiefe von 2900 km und besteht überwiegend aus Perowskit.

Erdkern: Der Kern besteht aus flüssigem und festem Eisen und stellt ein Drittel der Gesamtmasse der Erde dar. Der flüssige äußere Kern befindet sich in einer Tiefe von 2900 bis 5100 km und besitzt eine mittlere Dichte von 12.1 g/cm^3 . Der feste innere Kern erstreckt sich bis 6371 km Tiefe und besitzt eine mittlere Dichte von 12.5 g/cm^3 .

2.4 Physikalische Grundlagen

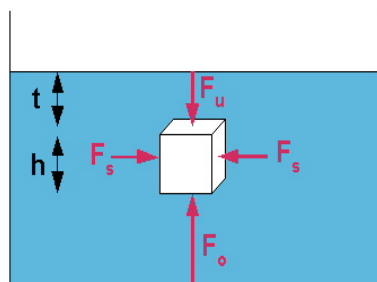
In diesem Abschnitt wird das Prinzip des Schwimmgleichgewichtes erklärt, da über längere Zeiträume gesehen die leichtere feste Erdkruste bzw. Lithosphäre auf dem schwereren viskosen Erdmantel bzw. Asthenosphäre schwimmt.

Jeder Körper, der in eine Flüssigkeit eintaucht, erfährt eine *Auftriebskraft* F_A , die der *Gewichtskraft* F_G des Körpers entgegenwirkt. Nach dem **archimedischen Prinzip**, ist die Auftriebskraft gleich der Gewichtskraft, der vom Körper verdrängten Flüssigkeit [KUCHLING (1996)]:

$$F_A = \rho_{Fl} V_{Fl} g. \quad (2.1)$$

Mit ρ_{Fl} = Dichte der verdrängten Flüssigkeit,
 V_{Fl} = Volumen der verdrängten Flüssigkeit,
 und g = Schwerebeschleunigung.

In der Hydrostatik ist die Auftriebskraft die nach oben gerichtete Kraft, die ein Körper erfährt, wenn er ganz in eine Flüssigkeit eintaucht. Auf die untere und obere Grundfläche des Körpers wirkt senkrecht nach oben der sogenannte *Aufdruck* p_o und senkrecht nach unten der sogenannte *Schweredruck* p_u . Die entsprechenden Druckkräfte erhält man durch Multiplikation mit der *Kraftangriffsfläche* A . Die *seitlichen Druckkräfte* F_s müssen nicht berücksichtigt werden, da sie sich gegenseitig aufheben [GERTHSEN (1966)]. Abbildung 2.2 dient zur Veranschaulichung des Prinzips des hydrostatischen Gleichgewichts.



$$F_A = F_o - F_u$$

$$F_u = p_u A \quad \text{mit} \quad p_u = \frac{F_G}{A} = \rho_{Fl} g t$$

$$F_o = p_o A \quad \text{mit} \quad p_o = \frac{F_G}{A} = \rho_{Fl} g (t + h)$$

$$F_A = \rho_{Fl} g (At + Ah - At) = \rho_{Fl} V_{Fl} g$$

Abb. 2.2: Hydrostatisches Gleichgewicht

Mit h = Höhe des eintauchenden Körpers
 und t = Mächtigkeit der über dem Körper liegenden Flüssigkeitsschicht.

Wenn die Auftriebskraft größer ist als die Gewichtskraft des Körpers, dann schwimmt der Körper. Da er nur soweit in die Flüssigkeit eintaucht, bis sich alle auf ihn wirkenden Kräfte ausgleichen. Die Gewichtskraft des Körpers ist dann genauso groß wie die Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit. Grund dafür ist, dass physikalische Systeme bestrebt sind einen Druckausgleich herzustellen.

Hydrostatische Gleichgewichtsbedingung:

$$F_G = F_A, \quad (2.2)$$

$$\rho_K V_K g = \rho_{Fl} V_{Fl} g. \quad (2.3)$$

Mit ρ_K = Dichte des Körpers
und V_K = Volumen des Körpers.

Die Schwerebeschleunigung, die auf einen Körper und die darüberliegende Flüssigkeitsschicht wirkt, ist gleich groß. Deshalb stellt sich das Schwimmgleichgewicht ebenfalls ein, wenn die **Massengleichgewichtsbedingung**

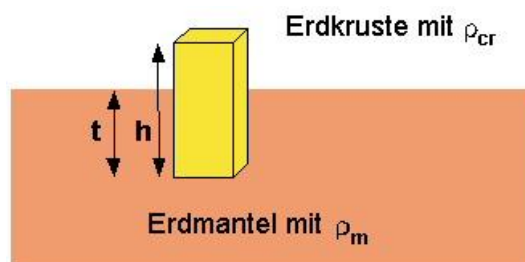
$$m_K = m_{Fl} \quad (2.4)$$

erfüllt ist. Die Massengleichgewichtsbedingung bildet die Grundlage für die beiden lokalen Kompensationsmodelle von AIRY und PRATT, die in Kapitel 2.2 vorgestellt wurden. Im Folgenden wird je ein Beispiel für das Kompensationsmodell von AIRY und für das Kompensationsmodell von PRATT beschreiben.

Beispiel für das Airy-Heiskanen-Modell:

AIRY hat angenommen, dass die leichtere Erdkruste auf dem schwereren Erdmantel schwimmt. Mit Hilfe der Massengleichgewichtsbedingung lässt sich berechnen wie tief die Erdkruste in den Erdmantel eintaucht. Dazu betrachte man folgendes Beispiel für das Airy-Heiskanen-Modell.

Eine Säule, mit der Grundfläche A und Höhe h , besitzt die mittlere Dichte der Erdkruste $\rho_{cr} = 2.67 \text{ g/cm}^3$. Wie tief taucht die Säule in den auf längere Zeiträume gesehenen viskosen oberen Teil des Erdmantels mit der Dichte $\rho_m = 3.27 \text{ g/cm}^3$ ein?



$$Ah\rho_{cr} = At\rho_m$$

$$t = \frac{\rho_{cr}}{\rho_m} h$$

Abb. 2.3: Schwimmgleichgewicht des Airy-Heiskanen-Modells

Beispiel für das Pratt-Hayford-Modell:

PRATT hat angenommen, dass die Lithosphäre bis zu einer bestimmten Ausgleichstiefe in die Asthenosphäre eintaucht. Mit Hilfe der Massengleichgewichtsbedingung kann man die Dichte, die die Lithosphäre besitzen muss, berechnen. Dazu betrachte man folgendes Beispiel für das Pratt-Hayford-Modell.

Eine Säule, mit der Grundfläche A und der Höhe h , taucht in die Asthenosphäre mit Dichte ρ_A bis zu einer bestimmten Ausgleichstiefe $D = 100 \text{ km}$ ein. Wenn die Dichte der Asthenosphäre nicht bekannt ist, dann muss eine weitere Bedingung eingeführt werden. Zum Beispiel, dass die Säule, mit der Grundfläche A und der Höhe $h = D$, die mittlere Dichte der Lithosphäre $\rho_0 = 2.915 \text{ g/cm}^3$ besitzt. Welche Dichte muss dann eine Säule mit Höhe $h \neq D$ besitzen, damit sie die oben aufgeführten Bedingungen erfüllt?



Abb. 2.4: Schwimmgleichgewicht des Pratt-Hayford-Modells

2.5 Lokale geodätische Kompensationsmodelle

In diesem Kapitel werden die isostatischen Modelle: Airy-Heiskanen-Modell und Pratt-Hayford-Modell der hydrostatischen Isostasie ausführlich erklärt. Bei diesen beiden Modellen handelt es sich um lokale geodätische Kompensationsmodelle, die die Elastizität der Lithosphärenplatten nicht berücksichtigen. Wichtig ist, dass einem bewusst ist, dass es sich dabei nur um Modelle handelt. Modelle sind idealisierte Annäherungen an die wirklichen Gegebenheiten bzw. Vorgänge in der Natur. Mit ihnen versucht man lediglich die Natur bestmöglichst durch konsistente mathematische Formulierungen zu beschreiben.

2.5.1 Airy-Heiskanen-Modell

AIRY ging bei der Entwicklung seines lokalen Kompensationsmodells davon aus, dass die leichtere Erdkruste auf dem schweren viskosen Erdmantel schwimmt, so wie Eisberge auf dem Wasser. Das verdrängte Volumen bewirkt eine Auftriebskraft, die dafür sorgt, dass sich ein Schwimmgleichgewicht einstellt. Dabei gilt, dass der Betrag der Auftriebskraft gleich dem Betrag der Gewichtskraft ist. Angenommen die Figur der Erde würde dem Geoid gleichen, d.h. es würde keine Topographie und Bathymetrie existieren, dann wäre die Kruste überall gleich dick und das hydrostatische Gleichgewicht würde sich für eine konstante Kompensationstiefe einstellen. Berücksichtigt man die Topographie und Bathymetrie dann stellt sich das hydrostatische Gleichgewicht nicht für eine konstante Kompensationstiefe ein. Massenüberschüsse der Topographie werden dadurch kompensiert, dass die leichtere Erdkruste, wie eine Wurzel, in den Erdmantel eintaucht. Das Massendefizit, das die Wurzeln bewirken, muss gleich dem Massenüberschüsse der Topographie sein. Massendefizite der Ozeane werden dadurch kompensiert, dass die leichtere Erdkruste weniger tief in den Erdmantel einsinkt, es entstehen sogenannte Antiwurzeln des Erdmantels. Der Massenüberschuss, den die Antiwurzeln bewirken, muss gleich dem Massendefizit der Ozeane sein. In Abbildung 2.5 ist das Airy-Heiskanen-Modell dargestellt zur Stärkung des Vorstellungsvermögens. Die Grenzschicht zwischen Erdkruste und Erdmantel ähnelt der Mohorovičić-Diskontinuität, die mit Hilfe der Seismologie nachgewiesen wurde (Kapitel 2.3).

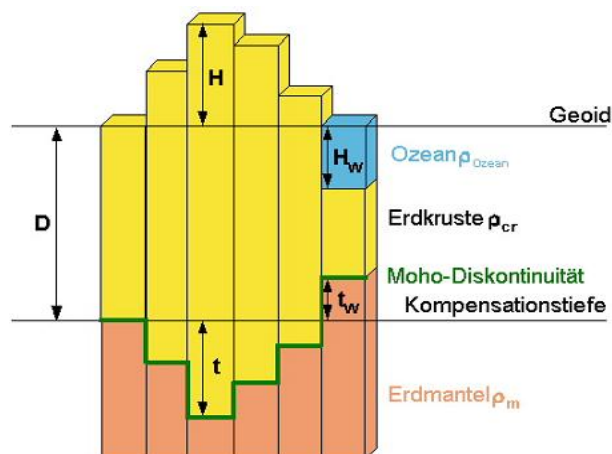
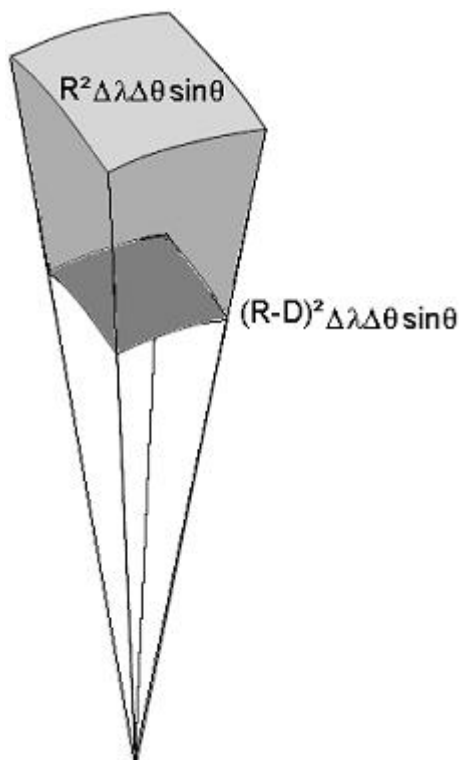


Abb. 2.5: Zeigt wie sich das Airy-Heiskanen-Modell im Land- und Ozeanbereich verhält. Es wird deutlich warum man von sogenannten Wurzeln der Erdkruste und Antiwurzeln des Erdmantels spricht.

Mit	D	=	Kompensationstiefe $D = 30$ km,
	H	=	orthometrische Höhe der Topographie $H \geq 0$,
	H_W	=	orthometrische Höhe (Tiefe) der Bathymetrie $H_w > 0$,
	t	=	Dicke der Wurzel,
	t_W	=	Dicke der Antiwurzel,
	ρ_{cr}	=	mittlere Dichte der Erdkruste $\rho_{cr} = 2.67$ g/cm ³ ,
	ρ_m	=	mittlere Dichte des Erdmantels $\rho_m = 3.27$ g/cm ³
und	ρ_{Ocean}	=	mittlere Dichte der Ozeane $\rho_{Ocean} = 1.03$ g/cm ³ .

Zerlegt man die Erde in vertikale Säulen, dann ergeben sich zwei Gruppen von Säulen. Alle Säulen mit Höhe H bezeichnet man als Landsäulen, sie stellen Massenüberschüsse dar. Ihre Dichte entspricht der mittleren Krustendichte. Sie werden durch Wurzeln der Erdkruste kompensiert, die Massendefizite mit einer Differenzdichte von $\Delta\rho = \rho_m - \rho_{cr}$ darstellen. Alle Säulen mit Höhe H_W bezeichnet man als Ozeansäulen, sie stellen Massendefizite mit der Dichte $\rho_{cr} - \rho_{Ocean}$ dar. Diese werden durch Antiwurzeln des Erdmantels kompensiert, die Massenüberschüsse mit einer Differenzdichte von $\Delta\rho = \rho_m - \rho_{cr}$ darstellen. Beim Aufstellen der Gleichungen für die Massengleichgewichtsbedingungen der Land- und Ozeansäulen muss die Konvergenz der Säulen zum Erdmittelpunkt berücksichtigt werden. Abbildung 2.6 zeigt eine zum Erdmittelpunkt konvergierende Säule mit ihrer oberen und unteren Fläche.



Die Grundfläche der Säule an der Erdoberfläche beträgt $R^2 \Delta\lambda \Delta\theta \sin\theta$. Auf Grund der Konvergenz der Säule zum Erdmittelpunkt ist die Grundfläche der Säule in der Tiefe D kleiner. Sie beträgt nur noch $(R - D)^2 \Delta\lambda \Delta\theta \sin\theta$. Das Volumen einer konvergierenden Säule erhält man folglich durch Integration über den quadratischen Abstand vom Erdmittelpunkt [RUMMEL (2002)]:

$$V = \int_{R-D}^R r^2 dr \cdot \Delta\lambda \Delta\theta \sin\theta.$$

Die Masse einer konvergierenden Säule ergibt sich durch Multiplikation des Volumens mit der Dichte:

$$m = V \cdot \rho.$$

Abb. 2.6: Konvergierende Säule

Die Massengleichgewichtsbedingung für eine Land- bzw. Ozeansäule kann vereinfacht werden, indem man durch $\Delta\lambda\Delta\theta \sin\theta$ teilt. Es ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\text{Landsäule: } \int_{r=R}^{R+H} \rho_{cr} r^2 dr = \int_{r=R-D-t}^{R-D} \Delta\rho r^2 dr, \quad (2.5)$$

$$\text{Ozeansäule: } \int_{r=R-H_W}^R (\rho_{cr} - \rho_{Ozean}) r^2 dr = \int_{r=R-D}^{R-D+t_W} \Delta\rho r^2 dr. \quad (2.6)$$

In RAPP et al. (1988) werden die Formeln zur Berechnung der Dicke einer Wurzel bzw. Antiwurzel ausführlich hergeleitet. Im Rahmen dieser Arbeit werden die linearen Näherungsformeln verwendet, da der lineare Näherungsfehler sehr klein ist ($\leq 1\%$).

$$\text{Dicke einer Wurzel: } t = \frac{\rho_{cr}}{\Delta\rho} \left(\frac{R}{R-D} \right)^2 H \quad (2.7)$$

$$\text{Dicke einer Antiwurzel: } t_W = \frac{\rho_{cr} - \rho_{Ozean}}{\Delta\rho} \left(\frac{R}{R-D} \right)^2 H_W \quad (2.8)$$

Zur Steigerung der numerischen Effizienz kann man nach RAPP et al. (1988) ein einheitliches Säulenmodell für die Erde einführen. In Abbildung 2.7 ist der Übergang zu einem einheitlichen Säulenmodell dargestellt. Dieses Säulenmodell ermöglicht es für den Land- und Ozeanbereich eine Gleichung für die Massengleichgewichtsbedingung aufzustellen und die Dicke einer Wurzel bzw. Antiwurzel mit Hilfe einer Formel auf die gleiche Weise zu berechnen. Ein einheitliches Säulenmodell für die Erde erhält man, indem man die Massendefizite der Ozeane durch Krustenmaterial gleicher Masse, aber höherer Dichte ersetzt. Da es sich um Massendefizite handelt, besitzt das einheitliche Säulenmodell der Erde keine Ozeane mehr. Die Meerestiefen werden gedämpft, da das Krustenmaterial eine höhere Dichte besitzt, als das Wasser der Ozeane.

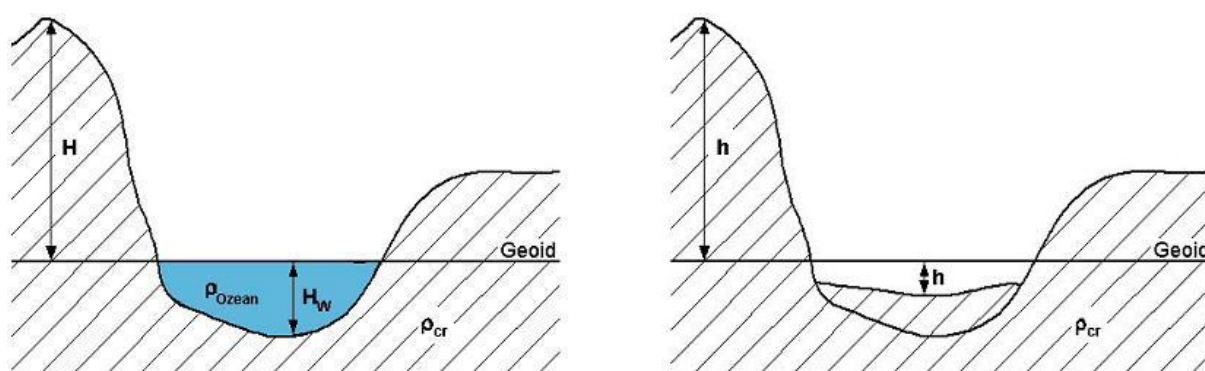


Abb. 2.7: Topographie und Bathymetrie (links), äquivalente Gesteinstopographie (rechts)

Die Höhen dieses Erdmodells bezeichnet man im Allgemeinen als *äquivalente Gesteinstopographie* h . Im Folgenden wird gezeigt wie die Formeln zur Berechnung der äquivalenten Gesteinstopographie aus den Ozeantiefen abgeleitet werden können. Dabei wird die Konvergenz der Säulen zum Erdmittelpunkt zunächst nicht berücksichtigt. Die Grundfläche jeder Säule soll der Einheitsfläche $A = 1 \text{ m}^2$ entsprechen.

Berechnung der äquivalenten Gesteinstopographie ohne Berücksichtigung der Konvergenz:

1. Damit die gleichen Bedingungen im Land- und im Ozeanbereich vorliegen, muss die Ozeansäule durch eine Säule ersetzt werden, die dasselbe Massendefizit darstellt bei mittlerer Krustendichte.

$$(\rho_{cr} - \rho_{Ozean})H_W = \rho_{cr}h \quad (2.9)$$

2. Die Gleichung enthält nur eine Unbekannte, die äquivalente Gesteinstopographie, nach der aufgelöst werden kann. Es ergibt sich folgende Formel zur Berechnung der äquivalenten Gesteinstopographie ohne Berücksichtigung der Konvergenz der Säulen:

$$h = \frac{\rho_{cr} - \rho_{Ozean}}{\rho_{cr}} H_W. \quad (2.10)$$

3. Zur Kontrolle vergleicht man das Massendefizit der Ozeansäule berechnet aus der ursprünglichen Ozeantiefe mit dem Massendefizit derselben Ozeansäule berechnet aus der äquivalenten Gesteinstopographie.

$$m_{Soll} = (\rho_{cr} - \rho_{Ozean})H_W \quad (2.11)$$

$$m_{Ist} = \rho_{cr}h \quad (2.12)$$

Die Massendifferenz $m_{Soll} - m_{Ist}$ wurde im Rahmen dieser Arbeit für alle Ozeansäulen berechnet. Das Ergebnis ist in Abbildung 2.8 dargestellt.

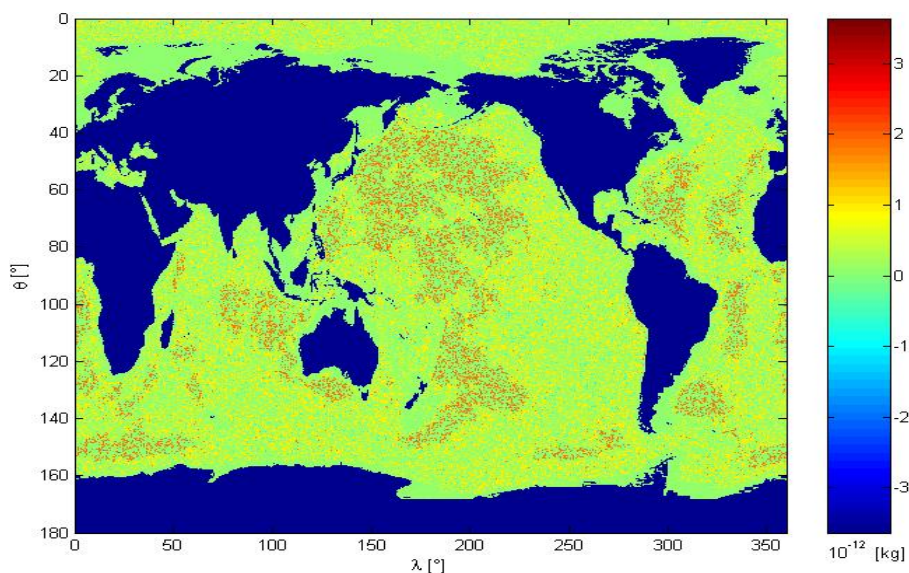


Abb. 2.8: Massendifferenz $m_{Soll} - m_{Ist}$

Statistische Werte	
Wertebereich [kg]	$[-3.6380 \cdot 10^{-12} \quad 3.6380 \cdot 10^{-12}]$
Mittelwert [kg]	$3.1292 \cdot 10^{-13}$
Varianz [kg ²]	$2.8368 \cdot 10^{-25}$
RMS [kg]	$\pm 5.3262 \cdot 10^{-13}$
Prozentualer Fehler [%]	$1.9 \cdot 10^{-14}$

Die Abweichungen sind sehr klein, so dass man davon ausgehen kann, dass die äquivalente Gesteinstopographie ohne Berücksichtigung der Konvergenz der Säulen zum Erdmittelpunkt richtig berechnet wurde. Der Prozentuale Fehler gibt an wie groß der RMS-Werte der Massendifferenz im Vergleich zu dem RMS-Wert der tatsächlichen Massen der Ozeansäulen ist.

Berechnung der äquivalenten Gesteinstopographie mit Berücksichtigung der Konvergenz:

1. Damit die gleichen Bedingungen im Land- und im Ozeanbereich vorliegen, muss die Ozeansäule durch eine Säule ersetzt werden, die dasselbe Massendefizit darstellt bei mittlerer Krustendichte.

$$\int_{r=R-H_W}^R (\rho_{cr} - \rho_{Ozean}) r^2 dr = \int_{r=R-h}^R \rho_{cr} r^2 dr \quad (2.13)$$

2. Die Gleichung enthält nur eine Unbekannte, die äquivalente Gesteinstopographie, nach der aufgelöst werden kann. Es ergibt sich folgende Formel zur Berechnung der äquivalenten Gesteinstopographie mit Berücksichtigung der Konvergenz der Säulen:

$$h = R - \left(\frac{\rho_{Ozean} R^3 + (\rho_{cr} - \rho_{Ozean})(R - H_W)^3}{\rho_{cr}} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (2.14)$$

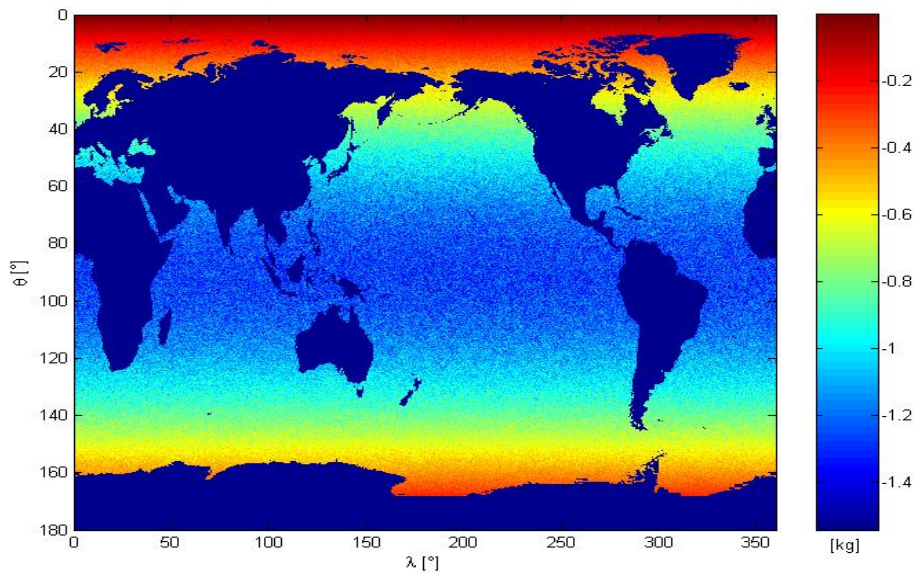
3. Zur Kontrolle vergleicht man das Massendefizit der Ozeansäule berechnet aus der ursprünglichen Ozeantiefe mit dem Massendefizit derselben Ozeansäule berechnet aus der äquivalenten Gesteinstopographie.

$$m_{Soll} = \int_{r=R-H_W}^R (\rho_{cr} - \rho_{Ozean}) r^2 dr \Delta\theta \Delta\lambda \sin\theta \quad (2.15)$$

$$m_{Ist} = \int_{r=R-h}^R \rho_{cr} r^2 dr \Delta\theta \Delta\lambda \sin\theta \quad (2.16)$$

In der folgenden Abbildung sind die Massendifferenzen $m_{Soll} - m_{Ist}$ für alle Ozeansäulen dargestellt, die im Rahmen dieser Arbeit berechnet wurde.

Statistische Werte	
Wertebereich [kg]	$[-1.5444 \quad -9.5481 \cdot 10^{-4}]$
Mittelwert [kg]	-0.8664
Varianz [kg ²]	0.1376
RMS [kg]	± 0.3709
Prozentualer Fehler [%]	$1.6 \cdot 10^{-10}$

Abb. 2.9: Massendifferenz $m_{Soll} - m_{Ist}$

Auch hier sind die Abweichungen sehr klein, dies ist ein Hinweis darauf, dass die äquivalente Gesteinstopographie unter Berücksichtigung der Konvergenz der Säulen ebenfalls richtig berechnet wurde.

Im Landbereich stimmt die äquivalente Gesteinstopographie mit den Höhen der Topographie überein und im Ozeanbereich lassen sich die Höhen aus den Ozeantiefen ableiten. Gebiete mit negativen orthometrischen Höhen, die nicht zu den Ozeanen zählen, werden hier nicht separat berücksichtigt. Formeln zur Berechnung der globalen **äquivalenten Gesteinstopographie**:

$$\text{Landsäule:} \quad h = H, \quad (2.17)$$

$$\text{Ozeansäule:} \quad h = -R + \left(\frac{\rho_{Ozean} R^3 + (\rho_{cr} - \rho_{Ozean})(R - H_W)^3}{\rho_{cr}} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (2.18)$$

Die **Massengleichgewichtsbedingung** kann dann mit Hilfe folgender Gleichung:

$$\int_{r=R}^{R+h} \rho_{cr} r^2 dr = \int_{r=R-D-t}^{R-D} \Delta \rho r^2 dr \quad (2.19)$$

für alle Säulen, sowohl im Land- als auch im Ozeanbereich, beschrieben werden. Die einheitliche lineare Näherungsformel, die sowohl zur Berechnung der **Wurzel-** als auch der **Antiwurzel-**dicke gilt, lautet:

$$t = \frac{\rho_{cr}}{\Delta \rho} \left(\frac{R}{R-D} \right)^2 h. \quad (2.20)$$

In Abbildung 2.10 ist das Airy-Heiskanen-Modell, dass man durch Einführen der äquivalenten Gesteinstopographie erhält, dargestellt.

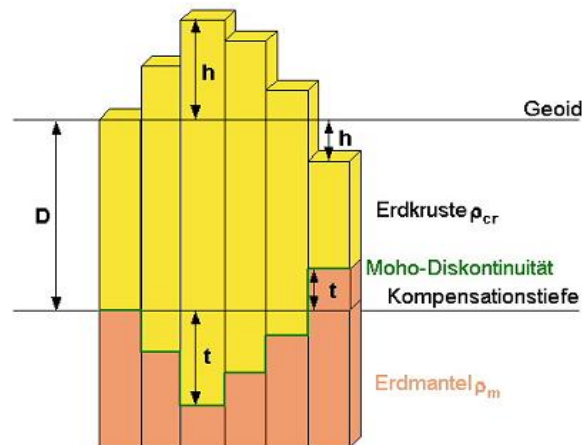


Abb. 2.10: Vereinheitlichtes Airy-Heiskanen-Modell

2.5.2 Pratt-Hayford-Modell

PRATT entwickelte ein alternatives lokales Kompensationsmodell, nach dem die leichtere Lithosphäre auf der schwereren Asthenosphäre schwimmt. Er nahm an, dass unterhalb einer konstanten Kompensationstiefe ein hydrostatischer Gleichgewichtszustand vorliegt. Massenüberschüsse und -defizite werden durch Dichtevariationen der Lithosphäre kompensiert. Zerlegt man die Erde bis zur Kompensationstiefe in vertikale Säulen, dann muss jede Säule die gleiche Masse besitzen wie die Normalsäule. Als Normalsäule bezeichnet man Säulen mit Höhe der Kompensationstiefe und mittlerer Lithosphärendichte ρ_0 . Alle Säulen mit Höhen größer als die Kompensationstiefe bezeichnet man als Landsäulen. Ihre Dichte ist immer geringer als die mittlere Lithosphärendichte und hängt von der Topographie ab. Alle Säulen im Ozeanbereich bezeichnet man als Ozeansäulen, sie setzen sich aus zwei Teilen zusammen. Den ersten Teil bildet die Säule mit Höhe der Ozeantiefe und mittlerer Ozeandichte, den zweiten Teil bildet die Säule mit Höhe der um die Ozeantiefe verringerten Kompensationstiefe und variabler Dichte. Diese Dichte ist immer größer als die mittlere Lithosphärendichte und hängt von der Bathymetrie ab. Abbildung 2.11 dient zur Veranschaulichung des Pratt-Hayford-Modells.

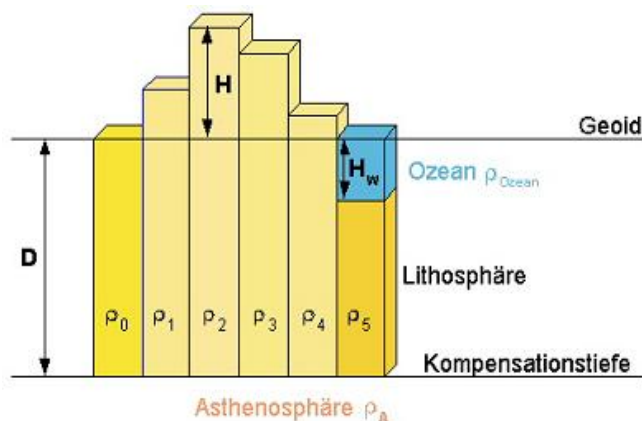


Abb. 2.11: Zeigt wie sich das Pratt-Hayford-Modell im Land- und Ozeanbereich verhält. Die Farbintensität der einzelnen Säulen spiegelt die Dichtevariationen wider. Säulen mit geringerer Farbintensität besitzen eine geringere Dichte als Säulen mit höherer Farbintensität.

Mit D = konstanter Kompensationstiefe $D = 100$ km,
 H = orthometrische Höhe der Topographie $H \geq 0$,
 H_W = orthometrische Höhe (Tiefe) der Bathymetrie $H_W > 0$,
 ρ_0 = Dichte der Normalsäule $\rho_0 = 2.915$ g/cm³,
 ρ_i^{Land} = Dichte einer Landsäule in Abhängigkeit von ihrer Höhe über der Kompensationstiefe und der Dichte der Normalsäule,
 ρ_i^{Ocean} = Dichte der Ozeansäule in Abhängigkeit von ihrer Höhe über der Kompensationstiefe und der Dichte der Normalsäule
und ρ_{Ocean} = mittlere Dichte der Ozeane $\rho_{Ocean} = 1.03$ g/cm³.

Nach RUMMEL (2002) lassen sich unter Berücksichtigung der Konvergenz der Säulen zum Erdmittelpunkt, folgende Massengleichgewichtsbedingungen für die Land- und Ozeansäulen aufstellen:

$$\text{Landsäule: } \int_{r=R-D}^{R+H} \rho_i^{Land} r^2 dr = \int_{r=R-D}^R \rho_0 r^2 dr, \quad (2.21)$$

$$\text{Ozeansäule: } \int_{r=R-D}^{R-H_W} \rho_i^{Ocean} r^2 dr + \int_{r=R-H_W}^R \rho_{Ocean} r^2 dr = \int_{r=R-D}^R \rho_0 r^2 dr. \quad (2.22)$$

Nach Auflösen der Integrale können folgende Formeln:

$$\text{Landsäule: } \rho_i^{Land} = \rho_0 \left(\frac{R^3 - (R-D)^3}{(R+H)^3 - (R-D)^3} \right), \quad (2.23)$$

$$\text{Ozeansäule: } \rho_i^{Ocean} = \frac{\rho_0 [R^3 - (R-D)^3] - \rho_{Ocean} [R^3 - (R-H_W)^3]}{(R-H_W)^3 - (R-D)^3} \quad (2.24)$$

zur Berechnung der variablen Dichten im Land- und Ozeanbereich abgeleitet werden. Zur Steigerung der numerischen Effizienz führt man auch hier ein einheitliches Säulenmodell für die Erde ein. Dieses Säulenmodell soll ermöglichen, dass für den Land- und Ozeanbereich eine Gleichung für die Massengleichgewichtsbedingung aufgestellt werden kann und die variable Dichte einer Land- bzw. Ozeansäule mit Hilfe einer Gleichung berechnet werden kann. Dieses einheitliche Säulenmodell erhält man durch Einführen der *äquivalenten Höhen für das Modell von PRATT* h . Im Folgenden wird erklärt wie im Rahmen dieser Arbeit die Formel zur Berechnung der äquivalenten Höhen für das Modell von PRATT entwickelt wurden. Abbildung 2.12 dient zur Veranschaulichung der zugrunde liegenden Überlegungen.

Die Konvergenz der Säulen zum Erdmittelpunkt wird zunächst nicht berücksichtigt, um mit einfacheren Formeln arbeiten zu können. Die Grundfläche jeder Säule soll der Einheitsfläche $A = 1$ m² entsprechen.

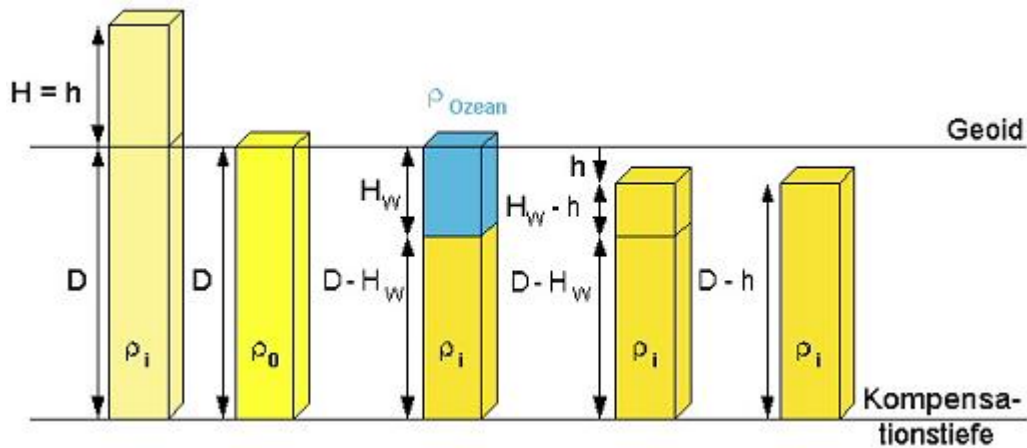


Abb. 2.12: Entwicklung der äquivalenten Höhen für das Modell von PRATT

Berechnung der äquivalenten Höhen ohne Berücksichtigung der Konvergenz:

1. Damit die gleichen Bedingungen für eine Ozeansäule vorliegen wie für eine Landsäule, wird nach einer Säule mit der Höhe $D - h$ und der Dichte ρ_i gesucht, die folgende Massengleichgewichtsbedingung

$$\rho_i(D - h) = \rho_0 D \quad (2.25)$$

erfüllt. Aus dieser Massengleichgewichtsbedingung lässt sich die Formel für die variable Dichte

$$\rho_i = \rho_0 \frac{D}{D - h} \quad (2.26)$$

ableiten.

2. Desweiteren muss die Masse der Säule mit Höhe H_W und der mittleren Ozeandichte gleich der Masse der Säule mit Höhe $H_W - h$ und Dichte ρ_i sein.

$$\rho_{Ozean} H_W = \rho_i (H_W - h) \quad (2.27)$$

3. Setzt man Gleichung 2.26 in Gleichung 2.27 ein, so enthält diese Gleichung nur noch eine Unbekannte, die äquivalente Höhe für das Modell von PRATT, nach der aufgelöst werden kann. Es ergibt sich folgende Formel zur Berechnung der äquivalenten Höhen für das Modell von PRATT ohne Berücksichtigung der Konvergenz der Säulen:

$$h = \frac{D H_W (\rho_0 - \rho_{Ozean})}{\rho_0 D - \rho_{Ozean} H_W} \quad (2.28)$$

4. Zur Kontrolle vergleicht man die Masse der Ozeansäule berechnet aus der ursprünglichen Ozeantiefe mit der Masse derselben Ozeansäule berechnet aus der äquivalenten Höhe für das Modell von PRATT.

$$m_{Soll} = \rho_i^{Ozean} (D - H_W) + \rho_{Ozean} H_W \quad \text{mit} \quad \rho_i^{Ozean} = \frac{\rho_0 D - \rho_{Ozean} H_W}{D - H_W} \quad (2.29)$$

$$m_{Ist} = \rho_i (D - h) \quad (2.30)$$

Die Massendifferenz $m_{Soll} - m_{Ist}$ wurde im Rahmen dieser Arbeit für alle Säulen, bei denen die orthometrischen Höhen negativ sind, berechnet. Das Ergebnis ist in der folgenden Abbildung dargestellt.

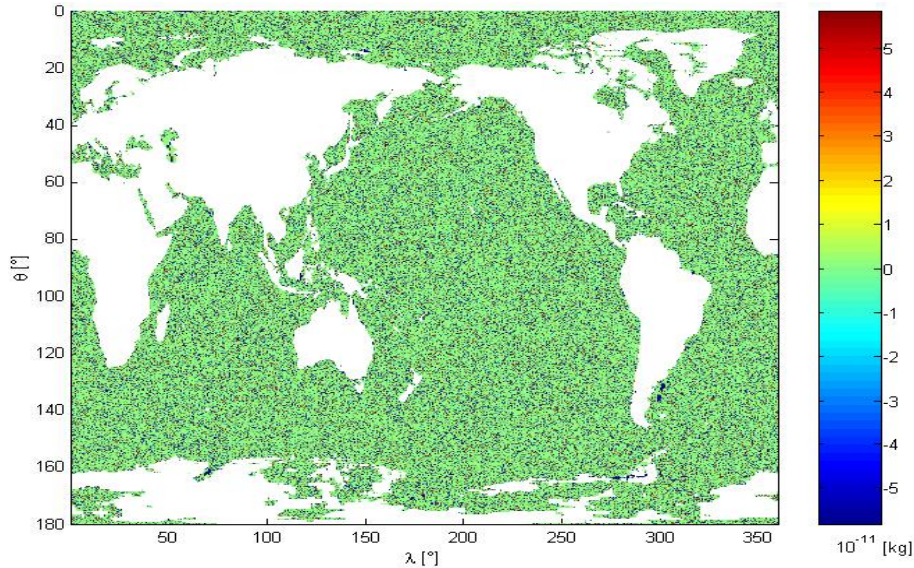


Abb. 2.13: Massendifferenz $m_{Soll} - m_{Ist}$

Statistische Werte	
Wertebereich [kg]	$[-5.8280 \cdot 10^{-11} \quad 5.8208 \cdot 10^{-11}]$
Mittelwert [kg]	$-3.7050 \cdot 10^{-12}$
Varianz [kg ²]	$7.3403 \cdot 10^{-22}$
RMS [kg]	$\pm 2.7093 \cdot 10^{-11}$
Prozentualer Fehler [%]	$1.1 \cdot 10^{-14}$

Da die Abweichungen sehr klein sind wird davon ausgegangen, dass die äquivalenten Höhen für das Modell von PRATT ohne Berücksichtigung der Konvergenz der Säulen richtig berechnet wurden und das der Ansatz der Berechnungen stimmt.

Berechnung der äquivalenten Höhen mit Berücksichtigung der Konvergenz:

1. Die Massengleichgewichtsbedingung für den Ozeanbereich unter Berücksichtigung der Konvergenz der Säulen lautet:

$$\int_{r=R-D}^{R-h} \rho_i r^2 dr = \int_{r=R-D}^R \rho_0 r^2 dr. \quad (2.31)$$

Aus der Massengleichgewichtsbedingung kann die Formel zur Berechnung der variablen Dichte

$$\rho_i = \rho_0 \left(\frac{R^3 - (R-D)^3}{(R-h)^3 - (R-D)^3} \right) \quad (2.32)$$

abgeleitet werden.

2. Die Massengleichgewichtsbedingung für die Säule mit Höhe H_W und der mittleren Ozeandichte und die Säule mit Höhe $H_W - h$ und Dichte ρ_i lautet unter Berücksichtigung der Konvergenz der Säulen, wie folgt:

$$\int_{r=R-H_W}^R \rho_{Ozean} r^2 dr = \int_{r=R-H_W}^{R-h} \rho_i r^2 dr. \quad (2.33)$$

3. Nach Einsetzen der Gleichung 2.32 in Gleichung 2.33 und entsprechenden Umformungen erhält man folgende Formel zur Berechnung der äquivalenten Höhen für das Modell von PRATT mit Berücksichtigung der Konvergenz der Säulen:

$$l = \rho_{Ozean} [R^3 - (R - H_W)^3] - \rho_0 [R^3 - (R - D)^3], \quad (2.34)$$

$$k = \rho_0 (R - H_W)^3 [-R^3 + (R - D)^3] - \rho_{Ozean} (R - D)^3 [-R^3 + (R - H_W)^3], \quad (2.35)$$

$$h = R - \left(\frac{k}{l} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (2.36)$$

4. Zur Kontrolle vergleicht man wieder die Masse der Ozeansäule berechnet aus der ursprünglichen Ozeantiefe mit der Masse derselben Ozeansäule berechnet der äquivalenten Höhe.

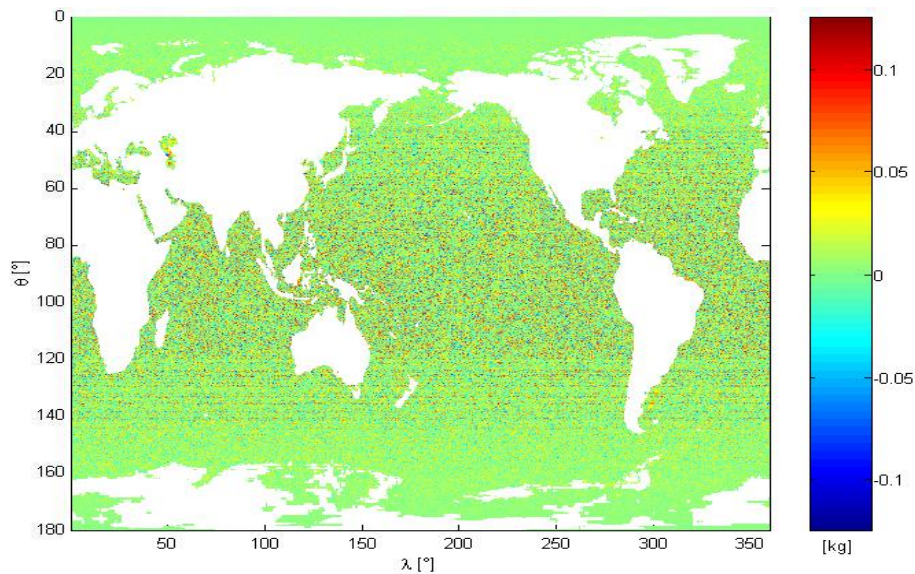
$$\begin{aligned} m_{Soll} = & \rho_i^{Ozean} \left[\frac{1}{3} (R - H_W)^3 - \frac{1}{3} (R - D)^3 \right] \Delta\lambda\Delta\theta \sin\theta + \\ & + \rho_{Ozean} \left[\frac{1}{3} R^3 - \frac{1}{3} (R - H_W)^3 \right] \Delta\lambda\Delta\theta \sin\theta \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$m_{Ist} = \rho_i \left[\frac{1}{3} (R - h)^3 - \frac{1}{3} (R - D)^3 \right] \Delta\lambda\Delta\theta \sin\theta \quad (2.38)$$

Die Massendifferenz $m_{Soll} - m_{Ist}$ wurde im Rahmen dieser Arbeit für alle Säulen, bei denen die orthometrischen Höhen negativ sind, berechnet. Das Ergebnis ist in Abbildung 2.14 dargestellt.

Statistische Werte	
Wertebereich [kg]	[-0.1250 0.1250]
Mittelwert [kg]	0.0060
Varianz [kg ²]	8.2507 · 10 ⁻⁴
RMS [kg]	±0.0287
Prozentualer Fehler [%]	1.6 · 10 ⁻¹⁴

Da die Abweichungen sehr klein sind wird davon ausgegangen, dass die äquivalenten Höhen für das Modell von PRATT unter Berücksichtigung der Konvergenz der Säulen richtig berechnet wurden.

Abb. 2.14: Massendifferenz $m_{Soll} - m_{Ist}$

In Abbildung 2.15 ist der Übergang zu einem einheitlichen Säulenmodell der Erde dargestellt. Durch Einführen der äquivalenten Höhen, werden die Massen der Ozeane durch Material der Lithosphäre gleicher Masse, aber höherer Dichte, ersetzt. Es entsteht ein einheitliches Erdmodell ohne Ozeane. Die Meerestiefen werden gedämpft, da das Material der Lithosphäre eine höhere Dichte besitzt, als das Wasser der Ozeane.

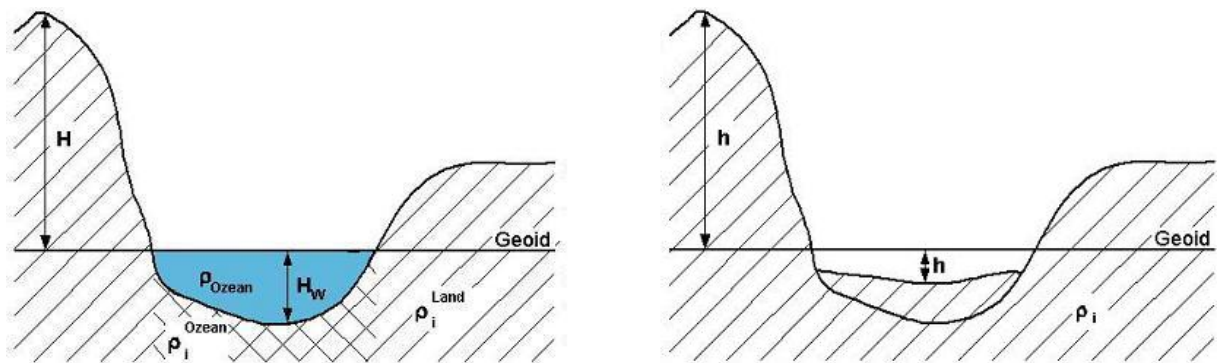


Abb. 2.15: Topographie und Bathymetrie (links), äquivalente Höhen für das Modell von PRATT (rechts)

Im Landbereich stimmten die **äquivalenten Höhen für das Modell von Pratt** mit den Höhen der Topographie überein, im Ozeanbereich lassen sie sich aus den Ozeantiefen ableiten:

$$\text{Landsäule:} \quad h = H, \quad (2.39)$$

$$\text{Ozeansäule:} \quad h = -R + \left(\frac{k}{l}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (2.40)$$

Die **variablen Dichten** für die Land- und Ozeansäulen

$$\rho_i = \rho_0 \left(\frac{R^3 - (R - D)^3}{(R + h)^3 - (R - D)^3} \right) \quad (2.41)$$

können dank der äquivalenten Höhen mit einer einheitlichen Formel berechnet werden. Das Kompensationsmodell von PRATT kann mit Hilfe der äquivalenten Höhen einheitlich dargestellt werden (Abbildung 2.16).

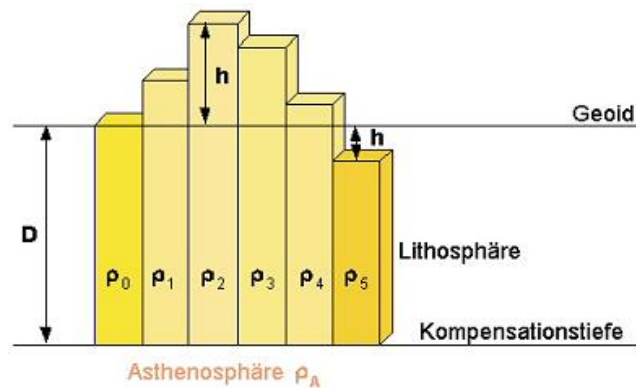


Abb. 2.16: Vereinheitlichtes Pratt-Hayford-Modell

Kapitel 3

Einführung in wichtige Rechenmethoden

In diesem Kapitel werden mathematische Techniken erklärt, die zum Verständnis der in dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen wichtig sind. Im ersten Abschnitt wird erläutert wie man globale Schwerefeldfunktionale berechnen kann, da im Rahmen dieser Arbeit die globalen isostatisch reduzierten Schwereanomalien und Geoidhöhen nach dem Airy-Heiskanen-Modell und nach dem Pratt-Hayford-Modell berechnet und untersucht werden. Im zweiten Abschnitt werden Werkzeuge zur Analyse von globalen Funktionen im Orts- und Spektralbereich vorgestellt. Sie helfen bei der Interpretation der in dieser Arbeit verwendeten Datensätze und berechneten Funktionen.

3.1 Berechnung globaler Schwerefeldfunktionale

In diesem Abschnitt wird erläutert, wie man mit Hilfe der *globalen, sphärisch harmonischen Synthese* GSHS und der *globalen, sphärisch harmonischen Analyse* GSHA globale Schwerefeldfunktionale berechnen kann. Grundlage dieser Rechenmethode bildet die Reihenentwicklung des Gravitationspotentials in Kugelfunktionen, die zunächst ausführlich erklärt wird. Im Anschluss daran werden zwei Methoden zur Durchführung der GSHS und GSHA vorgestellt, deren Verwendung davon abhängt, ob die globale diskrete Funktion repräsentative Punktwerte oder Blockmittelwerte enthält.

3.1.1 Kugelfunktionsentwicklung des Gravitationspotentials

Nach dem **Newtonschen Gravitationsgesetz** kann das Gravitationspotential für einen Punkt P wie folgt berechnet werden:

$$V(\lambda_P, \theta_P, r_P) = G \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{r_Q} \frac{\rho_Q}{l_{PQ}} d\Sigma_Q. \quad (3.1)$$

Mit λ_P, θ_P, r_P = sphärische geozentrische Koordinaten des Berechnungspunktes P ,
 λ_Q, θ_Q, r_Q = sphärische geozentrische Koordinaten des Integrationspunktes Q ,
 G = Gravitationskonstante,
 ρ_Q = Dichte des infinitesimalen Volumenelements im Integrationspunkt Q ,
 l_{PQ} = Abstand zwischen Berechnungspunkt P und dem infinitesimalen
Volumenelement im Integrationspunkt Q
und $d\Sigma_Q$ = Volumen des infinitesimalen Volumenelements im Integrations-
punkt Q : $d\Sigma_Q = r_Q^2 \sin \theta_Q d\lambda_Q d\theta_Q dr_Q$.

Geht man von dem Idealzustand aus, d.h., dass das Gravitationspotential eine harmonische Funktion ist, dann kann das Gravitationspotential als Kugelfunktionsentwicklung dargestellt werden. Da die *Laplace-Gleichung* $\Delta V = 0$ nur für das äußere Gravitationsfeld erfüllt ist, ist die Funktion nur im Außenraum harmonisch und nicht im Innenraum. Das Gravitationspotential kann folglich im Außenraum mit Hilfe der Kugelfunktionsentwicklung dargestellt werden, da hier $r_P > r_Q$ ist und die Reihenentwicklung deshalb konvergiert. Im Innenraum konvergiert die Reihenentwicklung nicht, sondern nimmt exponentiell um den Faktor $(r_Q/r_P)^{n+1}$ zu. Der Innenraum kann daher nicht mit Hilfe einer Reihenentwicklung dargestellt werden. Aus diesem Grund arbeitet man oft auf der *Brillouin-Kugel*. Das ist die Kugel mit Radius r , die den Erdkörper gerade einschließt [TORGE (2003)]. Der *reziproken Abstandes* $1/l_{PQ}$ ist für $r_P > r_Q$ ebenfalls eine harmonische Funktion und kann als Kugelfunktionsentwicklung

$$\frac{1}{l_{PQ}} = \frac{1}{r_P} \sum_{n=0}^N \left(\frac{r_Q}{r_P}\right)^n \frac{1}{2n+1} \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos \theta_P) \bar{P}_{nm}(\cos \theta_Q) [\cos m\lambda_P \cos m\lambda_Q + \sin m\lambda_P \sin m\lambda_Q] \quad (3.2)$$

dargestellt werden [RUMMEL (2002)].

Mit n = Grad der Kugelfunktionsentwicklung,
 m = Ordnung der Kugelfunktionsentwicklung
und $\bar{P}_{nm}(\cos \theta)$ = normierte zugeordnete Legendre Polynome (Anhang A.1).

Setzt man die Kugelfunktionsentwicklung des reziproken Abstands (3.2) in Gleichung (3.1) ein und erweitert die neue Formel anschließend mit $M = \frac{4}{3}\pi\bar{\rho}_{Erde}R^3$ und R^n , so erhält man die Kugelfunktionsentwicklung des Gravitationspotentials

$$V(\lambda_P, \theta_P, r_P) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^N \left(\frac{R}{r_P}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos \theta_P) [\bar{C}_{nm} \cos m\lambda_P + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda_P]. \quad (3.3)$$

Bei der Berechnung des **Gravitationspotentials auf der Kugelschale mit Radius R** wird der Faktor $\left(\frac{R}{r_P}\right)^{n+1}$ für alle n gleich eins.

$$V(\lambda_P, \theta_P) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos \theta_P) [\bar{C}_{nm} \cos m\lambda_P + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda_P] \quad (3.4)$$

Mit den *dimensionslosen normierten Potentialkoeffizienten* \bar{C}_{nm} und \bar{S}_{nm}

$$\left. \begin{array}{l} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{array} \right\} = \frac{3}{\bar{\rho}_{Erde} R^3 (2n+1)} \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{r_Q} \left(\frac{r_Q}{R}\right)^n \rho_Q \bar{P}_{nm}(\cos \theta_Q) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda_Q \\ \sin m\lambda_Q \end{array} \right\} d\Sigma_Q. \quad (3.5)$$

Mit GM = Gravitationskonstante multipliziert mit der Masse der Erde,
 R = mittlerer Erdradius
 und $\bar{\rho}_{Erde}$ = mittlere Dichte der Erde.

Durch Umformen der Gleichung (3.4) ergibt sich die numerisch günstigere Schreibweise der **GSHS für die kontinuierliche Funktion des Gravitationspotentials** [SNEEUW (1994)]:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{A}_m(\theta) \\ \bar{B}_m(\theta) \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^N \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{GM}{R}\right) \bar{C}_{nm} \\ \left(\frac{GM}{R}\right) \bar{S}_{nm} \end{array} \right\}, \quad (3.6)$$

$$V(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^N \bar{A}_m(\theta) \cos m\lambda + \bar{B}_m(\theta) \sin m\lambda. \quad (3.7)$$

Durch Umformen der Gleichung (3.5) ergibt sich die numerisch günstigere Schreibweise der **GSHA für die kontinuierliche Funktion des Gravitationspotentials** [SNEEUW (1994)]:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{A}_m(\theta) \\ \bar{B}_m(\theta) \end{array} \right\} = \frac{1}{(1 + \delta_{m0})\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} V(\theta, \lambda) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{array} \right\} d\lambda, \quad (3.8)$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{array} \right\} = \frac{1 + \delta_{m0}}{4} \int_{\theta=0}^{\pi} \left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_m(\theta) \\ \bar{B}_m(\theta) \end{array} \right\} \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (3.9)$$

$$\text{mit } \delta_{m0} = \begin{cases} 1 & \text{für } m = 0 \\ 0 & \text{für } m \neq 0 \end{cases}. \quad (3.10)$$

Diese Gleichungen gelten nur für die kontinuierliche globale Funktion des Gravitationspotentials. Aus diesen Gleichungen lassen sich Formel für die GSHS und GSHA ableiten, die für die globale diskrete Funktion des Gravitationspotentials gelten. Im Folgenden werden zwei Methoden zur Durchführung der GSHS und GSHA vorgestellt, deren Verwendung davon abhängt, ob die globale diskrete Funktion des Gravitationspotentials repräsentative Punktwerte oder Blockmittelwerte enthält.

Repräsentative Punktwerte

Für den Fall das die globale diskrete Funktion des Gravitationspotentials repräsentative Punktwerte, die im Blockzentrumspunkt registriert sind, enthält, müssen die Gleichungen 3.6 und 3.7 für die GSHS diskretisiert werden [SNEEUW (1994)].

$$\left. \begin{array}{l} \overline{A}_m(\theta_i) \\ \overline{B}_m(\theta_i) \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^N \overline{P}_{nm}(\cos \theta_i) \left\{ \begin{array}{l} \overline{C}_{nm} \\ \overline{S}_{nm} \end{array} \right. \quad (3.11)$$

$$V(\theta_i, \lambda_j) = \sum_{m=0}^N \overline{A}_m(\theta_i) \cos m\lambda_j + \overline{B}_m(\theta_i) \sin m\lambda_j \quad (3.12)$$

Durch Diskretisieren der Gleichungen 3.8 und 3.9 erhält man auch die Formeln für die GSHA. Da die repräsentativen Punktwerte im *Blockzentrumspunkt* Z registriert sind, werden zunächst die Koordinaten der Blockzentrumspunkte definiert. Die Koordinaten der Blockzentrumspunkte hängen von der *Blockgröße* $\Delta\theta$ bzw. $\Delta\lambda$ ab. Hier werden die Berechnungen für quadratische Blöcke durchgeführt, d.h. $\Delta\theta = \Delta\lambda$. Die Anzahl der Blöcke entlang eines Meridians

$$L = \frac{\pi}{\Delta\theta} \quad (3.13)$$

ergibt sich aus der Blockgröße. Die Koordinaten der Blockzentrumspunkte können einheitlich dargestellt werden durch Einführung von $i = 0, 2, \dots, L-1$ und $j = 0, 2, \dots, 2L-1$.

$$Z(\theta_i, \lambda_j) = Z\left(\frac{\pi}{L}\left(\frac{1}{2} + i\right), \frac{\pi}{L}\left(\frac{1}{2} + j\right)\right) \quad (3.14)$$

Jede diskrete periodische Funktion kann als Kombination aus Kosinus- und Sinusfunktion dargestellt werden [BULIRSCH & STOER (1980)]:

$$f(\theta_i, \lambda_j) = \frac{\overline{A}_0(\theta_i)}{2} + \sum_{m=1}^{N-1} \overline{A}_m(\theta_i) \cos m\lambda_j + \overline{B}_m(\theta_i) \sin m\lambda_j + \frac{\overline{B}_N(\theta_i)}{2} \sin N\lambda_j \quad (3.15)$$

mit

$$\left. \begin{array}{l} \overline{A}_0(\theta_i) \\ \overline{B}_0(\theta_i) \end{array} \right\} = \frac{1}{L} \sum_{j=0}^{2L-1} f(\theta_i, \lambda_j) \left\{ \begin{array}{l} \cos 0 = 1 \\ \sin 0 = 0 \end{array} \right. , \quad (3.16)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{A}_L(\theta_i) \\ \overline{B}_L(\theta_i) \end{array} \right\} = \frac{1}{L} \sum_{j=0}^{2L-1} f(\theta_i, \lambda_j) \left\{ \begin{array}{l} \cos \pi(\frac{1}{2} + j) = 0 \\ \sin \pi(\frac{1}{2} + j) = \pm 1 \end{array} \right. , \quad (3.17)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{A}_m(\theta_i) \\ \overline{B}_m(\theta_i) \end{array} \right\} = \frac{1}{L} \sum_{j=0}^{2L-1} f(\theta_i, \lambda_j) \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{m\pi}{L}(\frac{1}{2} + j) \\ \sin \frac{m\pi}{L}(\frac{1}{2} + j) \end{array} \right. \quad (3.18)$$

für den Fall, dass N gerade ist und N gleich L .

Nach Einführen folgender Notationen:

$$\delta_{m0} = \begin{cases} 1 & \text{für } m = 0 \\ 0 & \text{für } m \neq 0 \end{cases}, \quad (3.19)$$

$$\delta_{mL} = \begin{cases} 1 & \text{für } m = L \\ 0 & \text{für } m \neq L \end{cases} \quad (3.20)$$

erhält man die Formeln für die GSHA:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{A}_m(\theta_i) \\ \bar{B}_m(\theta_i) \end{array} \right\} = \frac{1}{L(1 + \delta_{m0} + \delta_{mL})} \sum_{j=0}^{2L-1} V(\theta_i, \lambda_j) \begin{cases} \cos m\lambda_j \\ \sin m\lambda_j \end{cases}, \quad (3.21)$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{array} \right\} = \frac{1 + \delta_{m0}}{4} \sum_{i=0}^{L-1} \left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_m(\theta_i) \\ \bar{B}_m(\theta_i) \end{array} \right\} \bar{P}_{nm}(\cos \theta_i). \quad (3.22)$$

Es gibt verschieden Methoden zur Berechnung der Potentialkoeffizienten \bar{C}_{nm} und \bar{S}_{nm} . In der Arbeit von SNEEUW (1994) sind folgende Methoden beschrieben:

- „least squares solution“ (auch bekannt als „Gauss method of GSHA“)
- „weighted least squares solution“
- „approximate quadrature“
- „first Neumann method“
- „second Neumann method“ (auch bekannt als „Gauss-Legendre quadrature“)

Der Hauptunterschied zwischen den oben genannten Methoden liegt darin, dass bei den Methoden „least squares solution“ und „weighted least squares solution“ eine kleinste quadrate Ausgleichung durchgeführt wird und bei den anderen Methoden eine numerische Integration. Vorteil der Ausgleichung ist, dass man genauere Ergebnisse erzielen kann, Nachteil der Ausgleichung ist, dass der Rechenaufwand steigt.

Blockmittelwerte

Meistens enthalten globale diskrete Funktionen keine repräsentativen Punktwerte, sondern Blockmittelwerte, die im Blockzentrumspunkt registriert sind. Dies hat zur Folge, dass sowohl bei den Gleichungen 3.11 und 3.12 für die GSHS als auch bei den Gleichungen 3.21 und 3.22 für die GSHA über die Legendre-Polynome, die Kosinus- und Sinusfunktion integriert werden muss. Bei der GSHS muss zusätzlich auch noch durch die Blockfläche geteilt werden, da nicht die Fläche unterhalb der Legendre-Polynome, der Kosinus- und Sinusfunktion von Interesse ist, sondern der Mittelwert dieser Funktionen [GRUBER (2000)].

Die GSHS für die globale diskrete Funktion des Gravitationspotentials, die globale Blockmittelwerte enthält, lautet:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{A}_m(\theta_i) \\ \bar{B}_m(\theta_i) \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^N \bar{I}P_{nm}(\cos \theta_i) \left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{array} \right., \quad (3.23)$$

$$V(\theta_i, \lambda_j) = \frac{1}{F(\theta_i, \lambda_j)} \sum_{m=0}^N \bar{A}_m(\theta_i) IC_m(\lambda_j) + \bar{B}_m(\theta_i) IS_m(\lambda_j). \quad (3.24)$$

Mit den integrierten dimensionslosen normierten zugeordneten Legendre Polynomen (Anhang B.1)

$$\bar{I}P_{nm}(\cos \theta_i) = \int_{\theta_i - \frac{\Delta\theta}{2}}^{\theta_i + \frac{\Delta\theta}{2}} \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (3.25)$$

der Blockfläche des Blockmittelwertes (Anhang B.2)

$$F(\theta_i, \lambda_j) = \left| \int_{\lambda_j - \frac{\Delta\lambda}{2}}^{\lambda_j + \frac{\Delta\lambda}{2}} \int_{\theta_i - \frac{\Delta\theta}{2}}^{\theta_i + \frac{\Delta\theta}{2}} \sin \theta d\theta d\lambda \right|, \quad (3.26)$$

und der integrierten Kosinus- und Sinusfunktion (Anhang B.3)

$$IC_m(\lambda_j) = \int_{\lambda_j - \frac{\Delta\lambda}{2}}^{\lambda_j + \frac{\Delta\lambda}{2}} \cos m\lambda d\lambda, \quad (3.27)$$

$$IS_m(\lambda_j) = \int_{\lambda_j - \frac{\Delta\lambda}{2}}^{\lambda_j + \frac{\Delta\lambda}{2}} \sin m\lambda d\lambda. \quad (3.28)$$

Die GSHA für die globale diskrete Funktion des Gravitationspotentials, die Blockmittelwerte enthält, lautet:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{A}_m(\theta_i) \\ \bar{B}_m(\theta_i) \end{array} \right\} = \frac{1}{L(1 + \delta_{m0} + \delta_{mL})} \sum_{j=0}^{2L-1} V(\theta_i, \lambda_j) \left\{ \begin{array}{l} IC_m(\lambda_j) \\ IS_m(\lambda_j) \end{array} \right., \quad (3.29)$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{array} \right\} = \frac{1 + \delta_{m0}}{4} \sum_{i=0}^{L-1} \left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_m(\theta_i) \\ \bar{B}_m(\theta_i) \end{array} \right\} \bar{I}P_{nm}(\cos \theta_i). \quad (3.30)$$

Die Potentialkoeffizienten \bar{C}_{nm} und \bar{S}_{nm} lassen sich auch hier nach den im vorherigen Abschnitt aufgeführten Methoden berechnen.

3.1.2 Kugelfunktionsentwicklung der Schwerefeldfunktionale

In diesem Kapitel wird erklärt wie man verschiedene Schwerefeldfunktionale mit Hilfe der GSHS berechnen kann. Die folgenden Formeln beziehen sich auf globale kontinuierliche Funktionen. Aus diesen Formeln können nach dem Prinzip, das im vorherigen Abschnitt beschrieben ist, Formeln abgeleitet werden, die für globale diskrete Funktionen gelten. Zu Beginn dieses Kapitels wird erläutert wie das Störpotential mit Hilfe der GSHS berechnet werden kann. Aus dem Störpotential können verschiedene Schwerefeldfunktionale abgeleitet werden.

Das Störpotential

Das *Störpotential* T ist die Differenz aus *Schwerepotential* W im wirklichen Schwerefeld und *Normalpotential* U im Normalschwerefeld (z.B. GRS80). Deshalb werden bei der Berechnung des Störpotentials mit Hilfe der GSHS die *Differenzkoeffizienten* $\Delta\bar{C}_{nm}$ und $\Delta\bar{S}_{nm}$ verwendet [RUMMEL (2002)]. Die Formeln zur Berechnung des Störpotentials auf einer Kugelschale mit Radius R lauten:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{A}_m(\theta) \\ \bar{B}_m(\theta) \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^N \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \left\{ \begin{array}{l} \Delta\bar{C}_{nm} \\ \Delta\bar{S}_{nm} \end{array} \right., \quad (3.31)$$

$$T(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^N \bar{A}_m(\theta) \cos m\lambda + \bar{B}_m(\theta) \sin m\lambda. \quad (3.32)$$

$$\Delta\bar{C}_{nm} = \bar{C}_{nm} - \bar{c}_{nm} \quad (3.33)$$

$$\Delta\bar{S}_{nm} = \bar{S}_{nm} - \bar{s}_{nm} \quad (3.34)$$

Mit $\bar{c}_{nm}, \bar{s}_{nm} =$ Dimensionslose normierte Potentialkoeffizienten des Normalschwerefeldes.

Die Schwerefeldfunktionale

Aus dem Störpotential lassen sich in sphärischer Näherung weitere Schwerefeldfunktionale ableiten, so dass eine allgemeine Formel der GSHS zur Berechnung verschiedener Schwerefeldfunktionale auf der Kugelschale mit Radius R aufgestellt werden kann:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{A}_m(\theta) \\ \bar{B}_m(\theta) \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^N \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \left\{ \begin{array}{l} \lambda_n^f \Delta\bar{C}_{nm} \\ \lambda_n^f \Delta\bar{S}_{nm} \end{array} \right., \quad (3.35)$$

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^N \bar{A}_m(\theta) \cos m\lambda + \bar{B}_m(\theta) \sin m\lambda. \quad (3.36)$$

Mit $\lambda^f =$ Eigenwerte der Funktion.

Formeln zur Berechnung der Eigenwerte der verschiedenen Schwerefeldfunktionale auf der Kugelschale mit Radius R :

$$\begin{aligned}\lambda_n^T &= \frac{GM}{R}, \\ \lambda_n^N &= R, \\ \lambda_n^{\Delta g} &= (n-1)\frac{GM}{R^2}, \\ \lambda_n^{T_r} &= -(n+1)\frac{GM}{R^2}, \\ \lambda_n^{T_{rr}} &= (n+1)(n+2)\frac{GM}{R^3}.\end{aligned}$$

Mit $\lambda_n^T =$ Eigenwert des Störpotentials,
 $\lambda_n^N =$ Eigenwert der Geoidhöhe,
 $\lambda_n^{\Delta g} =$ Eigenwert der Schwereanomalien,
 $\lambda_n^{T_r} =$ Eigenwert der Störbeschleunigung
 und $\lambda_n^{T_{rr}} =$ Eigenwert der radialen Komponente des Schweregradienten.

Abbildung 3.1 stellt dar, wie man aus dem Störpotential Schwereanomalien gewinnen kann. Die grau hinterlegten Kästchen kennzeichnen den Spektralbereich, die weiß hinterlegten Kästchen den Ortsbereich. Die gestrichelten Pfeile deuten auf den Übergang vom Orts- in den Spektralbereich hin und umgekehrt. Die Berechnung der Schwereanomalien im Ortsbereich über die geodätische Fundamentalformel $-\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r}T$ ist sehr aufwendig, da das Störpotential nach r abgeleitet werden muss. Die Berechnung im Spektralbereich ist hingegen recht einfach und schnell durchzuführen, da lediglich mit dem Eigenwert multipliziert werden muss. Aus diesem Grund führt man in der Regel solche Berechnungen im Spektralbereich durch.

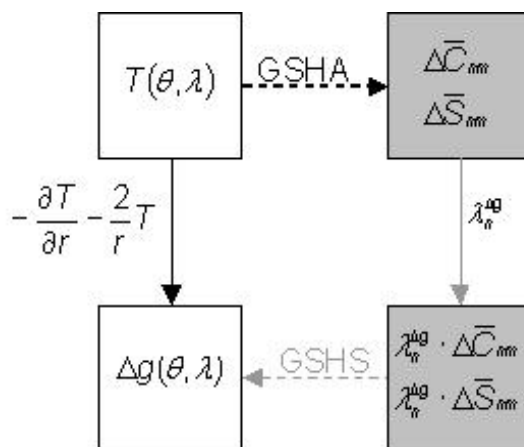


Abb. 3.1: Berechnung der Schwereanomalien aus dem Störpotential im Orts- und Spektralbereich

3.2 Werkzeuge zur Analyse von Funktionen

In der vorliegenden Arbeit werden die für die Berechnungen verwendeten Datensätze und die Funktionen der Ergebnisse mit Hilfe der in diesem Abschnitt beschriebenen Analysewerkzeuge im Orts- und Spektralbereich untersucht.

3.2.1 Analysewerkzeuge für den Ortsbereich einer Funktion

Wertebereich: Der Wertebereich einer Funktion gibt an in welchem Bereich die Werte einer Funktion liegen. Er ergibt sich aus dem minimalen und maximalen Wert einer Funktion.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Funktion gibt an mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Wert des Wertebereichs auftritt. Die Verteilung der Werte kann mit Hilfe vom Mittelwert und Streuungswerten ausgedrückt werden.

Mittelwert: Der Mittelwert liefert Information über die Lage der Verteilung. Im Rahmen dieser Arbeit werden vorrangig globale Funktionen behandelt, die Blockmittelwerte enthalten. Der *gewichtete Mittelwert* M für die gesamte Erde entspricht dem Integral über die Einheitskugel geteilt durch ihre Fläche [HEISKANEN & MORITZ (1967)]

$$M = \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} f(\theta, \lambda) \sin \theta d\lambda d\theta. \quad (3.37)$$

Die numerische Integration dieser Formel lautet:

$$M = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J f(\theta_i, \lambda_j) \cdot \sin \theta_i \Delta\lambda \Delta\theta. \quad (3.38)$$

Streuungswerte: Die Streuungswerte liefern Information über die Breite der Verteilung. Zu den Streuungswerten gehören die Varianz und der RMS-Wert. Die *gewichtete Varianz* var entspricht dem quadratischen Mittelwert der zentrierten globalen Funktion [HEISKANEN & MORITZ (1967)]

$$var = \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} (f(\theta, \lambda) - M)^2 \sin \theta d\lambda d\theta. \quad (3.39)$$

Die zentrierte globale Funktion erhält man durch Subtraktion des gewichteten Mittelwertes. Die gewichtete Varianz liefert folglich Information über die mittlere quadratische Abweichung der Funktionswerte vom Mittelwert. Die numerische Integration dieser Formel lautet:

$$var = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (f(\theta_i, \lambda_j) - M)^2 \cdot \sin \theta_i \Delta\lambda \Delta\theta. \quad (3.40)$$

Der *gewichtete RMS-Wert* RMS entspricht der Wurzel des quadratischen Mittelwerts der zentrierten globalen Funktion (englisch: *root mean square value* = Wurzel des quadratischen Mittelwerts) [HEISKANEN & MORITZ (1967)]

$$RMS = \pm\sqrt{\overline{var}}. \quad (3.41)$$

Der gewichtete RMS-Wert liefert Information darüber in welchem Bereich sich die Funktionswerte hauptsächlich bewegen.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung kann mit Hilfe eines Histogramms oder dem Graph der Wahrscheinlichkeitsfunktion dargestellt werden.

Histogramm: Das Histogramm einer Funktion erhält man, indem man den Wertebereich der Funktion in gleich breite Klassen eingeteilt. Jeder Wert der Funktion wird einer Klasse zugewiesen. Danach wird die Häufigkeit jeder Klasse ermittelt, d.h. wie viele Werte in eine Klasse fallen. Es werden Rechtecke über den Klassen errichtet, deren Flächen den absoluten Häufigkeiten gleichen. In Abbildung 3.2 ist ein Histogramm für eine beliebige Funktion dargestellt.

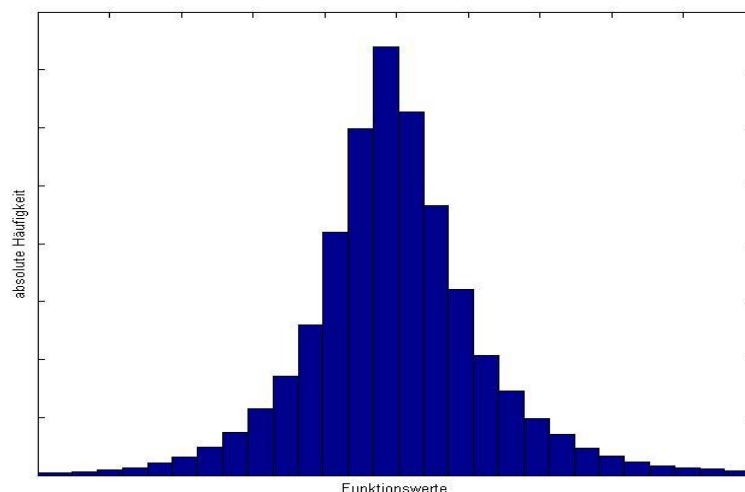


Abb. 3.2: Beispiel für ein Histogramm

Wahrscheinlichkeitsfunktion: Die Wahrscheinlichkeitsfunktion erhält man, indem man die absolute Häufigkeit jeder Klasse durch die Anzahl der gesamten Funktionswerte teilt. Sie gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Funktion einen bestimmten Wert besitzt. Wenn die Kurve der Wahrscheinlichkeitsfunktion der *Gaußschen Glockenkurve* ähnelt dann sind die Werte nahezu normalverteilt. Die Glockenkurve kann für jede Funktion aus ihrer Standardabweichung und ihrem Mittelwert berechnet werden.

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.42)$$

3.2.2 Analysetools für den Spektralbereich einer Funktion

Signalgradvarianzen: Die spektrale Stärke eines globalen Signals kann mit Hilfe von Signalgradvarianzen analysiert werden. Die Gradvarianzen eines Signals werden pro Entwicklungsgrad berechnet und liefern somit Information darüber, welcher Anteil des Gesamtsignals aus einem bestimmten Frequenzbereich stammt. Man erhält sie durch Summation über alle Quadrate der Kugelfunktionskoeffizienten eines Entwicklungsgrades [GRUBER (2000)]. Aus den Differenzkoeffizienten erhält man die so genannten *dimensionslosen Gradvarianzen* c_n^2 . Mit Hilfe von Eigenwerten λ_n^N bzw. $\lambda_n^{\Delta g}$ lassen sich daraus die *Signalgradvarianzen der Geoidhöhen* $c_n^2(N)$ bzw. die der *Schwereanomalien* $c_n^2(\Delta g)$ ableiten.

$$c_n^2 = \sum_{m=0}^n \Delta \bar{C}_{nm}^2 + \Delta \bar{S}_{nm}^2 \quad (3.43)$$

$$c_n^2(N) = R^2 c_n^2 \quad (3.44)$$

$$c_n^2(\Delta g) = \left(\frac{GM}{R^2} \right)^2 (n-1)^2 c_n^2 \quad (3.45)$$

Kreuzgradvarianzen: Sie liefern Information darüber wie stark zwei Signale in einem bestimmten Frequenzbereich miteinander korreliert sind. Man erhält sie durch Summation über alle Produkte ihrer Kugelfunktionskoeffizienten eines Entwicklungsgrades. Da sich die Geoidhöhen und Schwereanomalien aus den Differenzkoeffizienten und den jeweiligen Eigenwerten berechnen lassen, erhält man die Kreuzgradvarianzen auch durch Multiplikation der dimensionslosen Gradvarianzen mit dem Produkt der Eigenwerten:

$$cov_n(N, dg) = R \cdot \left(\frac{GM}{R^2} \right) (n-1) \cdot c_n^2. \quad (3.46)$$

Fehlergradvarianzen: Die Fehlergradvarianzen geben Aufschluss über den spektralen Fehler eines Signals und können aus den Fehlern der einzelnen Potentialkoeffizienten, analog zu den Signalgradvarianzen, abgeleitet werden. Wenn die Fehlergradvarianzen größer sind als die Signalgradvarianzen, dann sind die Potentialkoeffizienten nicht mehr signifikant.

$$\sigma_n^2 = \sum_{m=0}^n \sigma_{C_{nm}}^2 + \sigma_{S_{nm}}^2 \quad (3.47)$$

$$\sigma_n^2(N) = R^2 \sigma_n^2 \quad (3.48)$$

$$\sigma_n^2(\Delta g) = \left(\frac{GM}{R^2} \right)^2 (n-1)^2 \sigma_n^2 \quad (3.49)$$

Commission error: Aus den Fehlergradvarianzen lässt sich der kummulative Schwerefeldfehler, der bis zur maximalen Auflösung begangen wird, berechnen. Man bezeichnet ihn im Allgemeinen als „*commission error*“ (englisch: *commission* = Begehen). Er ist ein Maß für die mittlere Genauigkeit der Schwerefeldfunktionale, die aus Potentialkoeffizienten bestimmt wurden, bis zum jeweiligen Grad.

$$\sigma_{com}^2(N) = \sum_{n=0}^{N_{max}} \sigma_n^2(N) \quad (3.50)$$

$$\sigma_{com}^2(\Delta g) = \sum_{n=0}^{N_{max}} \sigma_n^2(\Delta g) \quad (3.51)$$

Omission error: Dies ist der spektrale Abbruchfehler, den man begeht, wenn man die Kugelfunktionsentwicklung bei einem maximalen Grad N_{max} abbricht. Man nennt diesen Fehler deshalb im Allgemeinen „*omission error*“ (englisch: *omission* = Unterlassung). Theoretisch lässt er sich nur bestimmen, wenn man die Signalgradvarianzen für die Grade größer als N_{max} kennt. Da man diese Gradvarianzen nicht kennt, hat man Gradvarianzmodelle für die dimensionslosen Signalgradvarianzen modelliert, die das Verhalten der Gradvarianzen im Unendlichen widerspiegeln. Im Rahmen dieser Arbeit wird das weit verbreitete Gradvarianzmodell von KAULA zur Berechnung des spektralen Abbruchfehlers verwendet.

Formel zur Berechnung der Gradvarianzen nach dem Modell von KAULA:

$$c_n^2 = 0.5 \frac{1.6 \cdot 10^{-10}}{n^3}. \quad (3.52)$$

Man erhält den spektralen Abbruchfehler durch Summation über die dimensionierten Gradvarianzen des Modells von KAULA:

$$\sigma_{om}^2(N) = \sum_{n=N_{max}+1}^{\infty} c_n^2(N), \quad (3.53)$$

$$\sigma_{om}^2(\Delta g) = \sum_{n=N_{max}+1}^{\infty} c_n^2(\Delta g). \quad (3.54)$$

Kapitel 4

Berechnung von isostatisch reduzierten Schwerefeldfunktionalen

In diesem Kapitel wird ausführlich erklärt, wie man isostatisch reduzierte Schwereanomalien und Geoidhöhen nach dem Airy-Heiskanen-Modell und nach dem Pratt-Hayford-Modell berechnen kann. Isostatisch reduzierte Schwereanomalien und Geoidhöhen werden zur Schwerefeldprädiktion und -interpretation verwendet. Sie eignen sich besonders gut zur Schwerefeldprädiktion, da ihr Verlauf glatter ist als der der freiluftreduzierten Schwerefeldfunktionale und weil sie weniger stark mit dem Geländeverlauf korreliert sind. Die Residuen der isostatisch reduzierten Schwereanomalien bzw. Geoidhöhen geben Aufschluss über Dichtevariationen in der Erdkruste und dem Erdmantel und weisen auf isostatisch nicht vollständig kompensierte Gebiete hin, oder darauf, dass die isostatischen Modelle die Realität nur unvollständig approximieren. Zu Beginn dieses Kapitel werden die Datensätze vorgestellt, die für die Berechnungen zur Verfügung standen.

4.1 Verfügbare Datensätze

In diesem Abschnitt werden alle Datensätze beschrieben, die im Rahmen dieser Arbeit für die Berechnung der isostatisch reduzierten Schwerefeldfunktionalen nach AIRY und PRATT verwendet wurden.

4.1.1 Höhendatensatz JPG95E

Der globale Höhendatensatz JPG95E enthält orthometrische Höhen der Topographie und Bathymetrie mit 5'-Auflösung. Dieser Datensatz wurde von W.J. CUNNINGHAM, N.K. PAVLIS, J. FACTOR und S. KENYON für das *Defense Mapping Agency* DMA und das *National Aeronautics and Space Administration/Goddard Space Flight Center* NASA/GSFC erstellt zur Entwicklung des globalen Schwerefeldmodells EGM96 bis Grad und Ordnung 360.

JPG95E ist laut LEMOINE et al. (1998) aus folgenden Datensätzen aufgebaut:

1. TB, Bathym. gabs / 0 values on land
2. TB, Africa 5' DEM
3. TB, North America 5' DEM
4. TB, Andes Mountains 3' DEM
5. TB, Australia 5' DEM
6. TB, Brazil Cerrados 2' DEM
7. TB, Europe 5' DEM
8. TB, Global FNOC 10' DEM
9. TB, Greenland 5' × 10' DEM
10. TB, Haiti 30'' DEM
11. TB, Italy 30'' DEM
12. TB, Japan 5' DEM
13. TB, Madagascar 30'' DEM
14. TB, Netherlands 3' × 5' DEM
15. TB, Northwest Territories 5' DEM
16. TB, Global Bathymetry 5' DBM
17. TB, United States 30'' DEM
18. NIMA 5' DTED
19. NIMA 5' DTED and Map Source Mixed
20. NIMA Map Source
21. ETOPO5 5' DEM
22. TUG87
23. ALTIM94
24. Smoothed Antarctic
25. GGTOPO.MOD
26. Avg. Ross Ice Shelf
27. Avg. Ronne Ice Shelf
28. Caspian Sea (surf. elevation = $-27m$)
29. TB, Alpha version

Bei den orthometrischen Höhen des Höhendatensatz JGP96E handelt es sich um Blockmittelwerte für $5' \times 5'$ -Blöcke, die in den Blockzentrumspunkten registriert sind. In Abbildung 4.1 ist der Höhendatensatz JGP96E dargestellt.

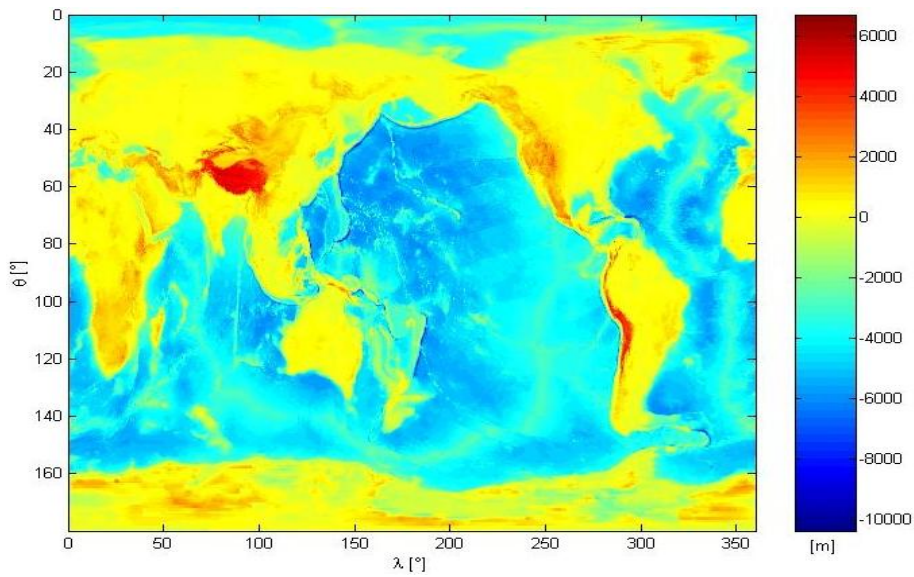


Abb. 4.1: Höhendatensatz JGP95E

Abbildung 4.2 zeigt die verschiedenen Geländetypen der orthometrischen Höhen.

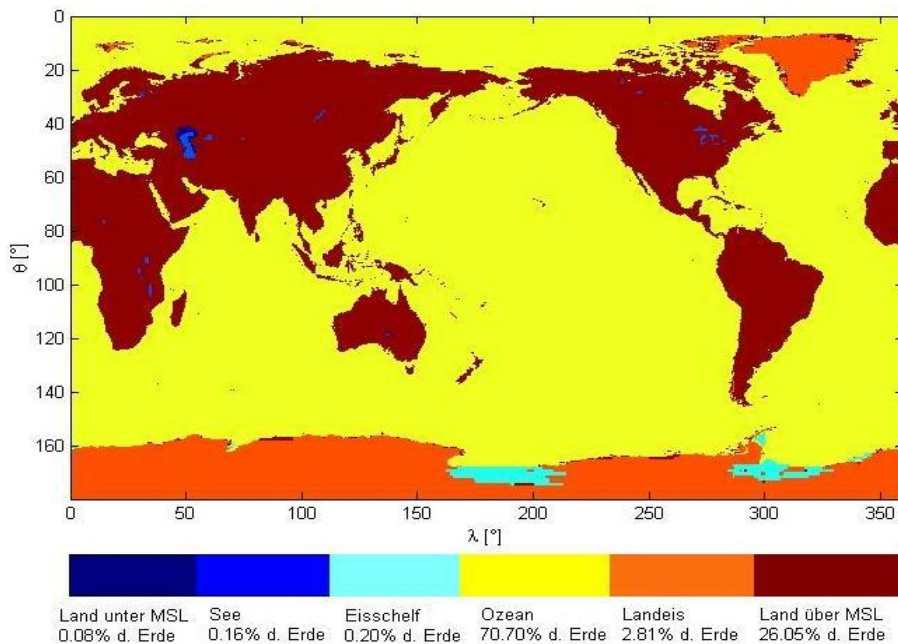


Abb. 4.2: Geländetypen des Höhendatensatzes JGP95E

In Abbildung 4.3 ist ein Ausschnitt des Säulenmodells der Erde dargestellt, der alle 6 Geländetypen enthält. Diese Abbildung dient zur Verdeutlichung wie die orthometrischen Höhen des Höhendatensatzes JGP96E für die verschiedenen Geländetypen definiert sind.

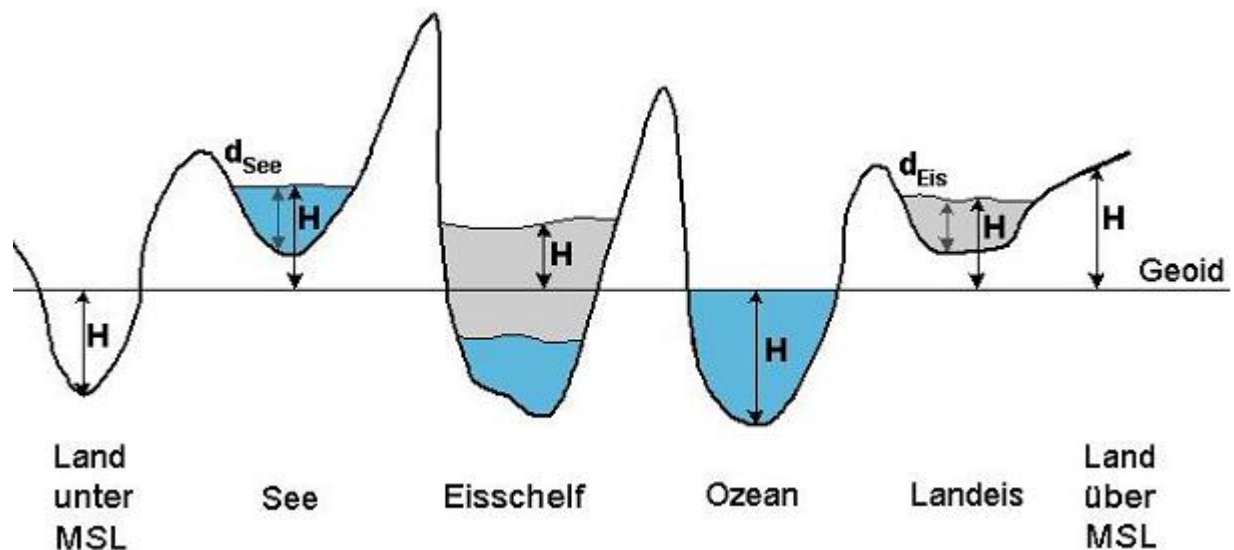


Abb. 4.3: Säulenmodell

Mit H = orthometrische Höhe des Höhendatensatzes JGP95E,
 d_{See} = Seetiefe,
 und d_{Eis} = Eisdicke.

Durch Mittelung der orthometrischen Höhen über 9 Blöcke, kann der Datensatz reduziert werden, aus $5' \times 5'$ -Blöcke entstehen auf diese Weise $15' \times 15'$ -Blöcke. Eine Blockseite entspricht dann am Äquator ca. 28 km. Diese Vergrößerung ist zulässig da keine isostatische Kompensation von Massenüberschüssen und -defiziten unter 100 km Ausdehnung stattfindet. Durch die Reduzierung des Datensatzes kann die Rechenzeit erheblich vermindert werden.

Die globale diskrete Funktion der orthometrischen Höhen wurde mit Hilfe der Analysewerkzeuge, die in Kapitel 3.2.1 beschrieben sind, im Ortsbereich untersucht. D.h. es wurden die statistischen Werte und die Wahrscheinlichkeitsfunktion der orthometrischen Höhen ermittelt. Betrachtet man die in Abbildung 4.4 dargestellte Wahrscheinlichkeitsfunktion der Topographie und Bathymetrie so stellt man fest, dass die Bathymetrie rauer ist als die Topographie. Mit Hilfe der getrennt ermittelten statistischen Werte für die Topographie und Bathymetrie kann anhand der gewichteten RMS-Werte ebenfalls festgestellt werden, dass die Bathymetrie rauer ist als die Topographie. Je größer der RMS-Wert, desto größer ist der Bereich in dem sich die Funktionswerte hauptsächlich bewegen.

Statistische Werte	Topographie	Bathymetrie
Wertebereich [m]	[0 6159.9]	[-9463.8 0]
Gewichteter Mittelwert [m]	181.8545	-2630.1
Gewichtete Varianz [m ²]	271240	4623300
Gewichteter RMS [m]	±520.8061	±2150.2

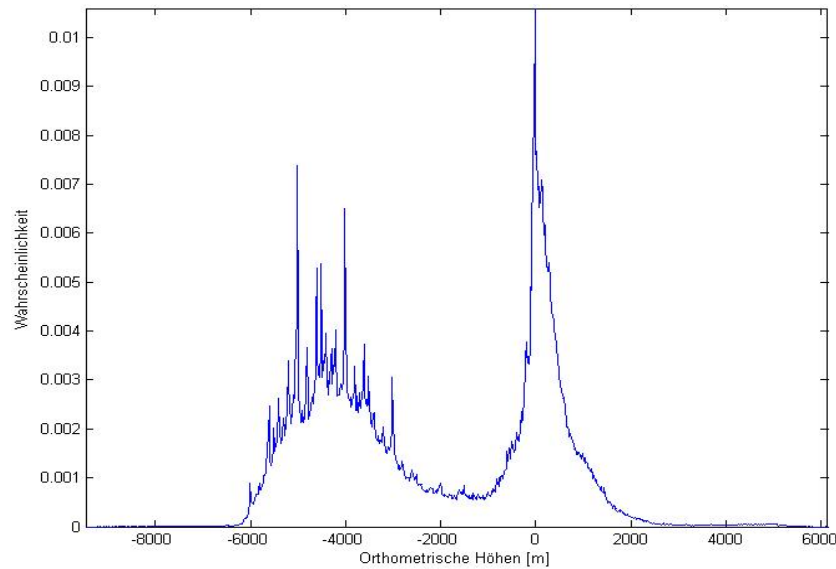


Abb. 4.4: Wahrscheinlichkeitsfunktion der Topographie und Bathymetrie

Äquivalente Gesteinstopographie

Aus den orthometrischen Höhen der Topographie und Bathymetrie lässt sich die äquivalente Gesteinstopographie, die bereits in Kapitel 2.5.1 vorgestellt wurde, ableiten. Vorteil der äquivalenten Gesteinstopographie ist, dass man ein einheitliches Säulenmodell der Erde erhält, mit dessen Hilfe die numerische Effizienz gesteigert werden kann. In Kapitel 2.5.1 wird beschrieben wie man die äquivalente Gesteinstopographie unter Berücksichtigung der Konvergenz der Säulen aus den orthometrischen Höhen der Topographie und Bathymetrie ableiten kann.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde die äquivalente Gesteinstopographie unter Berücksichtigung der Konvergenz der Säulen zunächst für ein $5'$ -Gitter berechnet mit einer mittleren Krustendichte von 2.67 g/cm^3 und einer mittleren Ozeandichte von 1.03 g/cm^3 . Anschließend wurde die äquivalente Gesteinstopographie durch Mittelung über 9 Blöcke in ein $15'$ -Gitter umgerechnet. In Abbildung 4.5 ist die globale äquivalente Gesteinstopographie dargestellt. Die globale diskrete Funktion der äquivalenten Gesteinstopographie wurde mit Hilfe der Analysewerkzeuge die in Kapitel 3.2.1 beschrieben sind im Ortsbereich untersucht. Vergleicht man die Abbildungen 4.1 und 4.5, so stellt man fest, dass die orthometrischen Höhen im Ozeanbereich gedämpft werden. Das liegt daran, dass die Massendefizite der Ozeane durch Krustenmaterial gleicher Masse, aber höherer Dichte ersetzt werden. Da es sich um Massendefizite handelt, erhält man ein Erdmodell ohne Ozeane. Das einheitliche Säulenmodell der Erde besteht nur noch aus den Massen der Erdkruste, des Erdmantels und des Erdkerns.

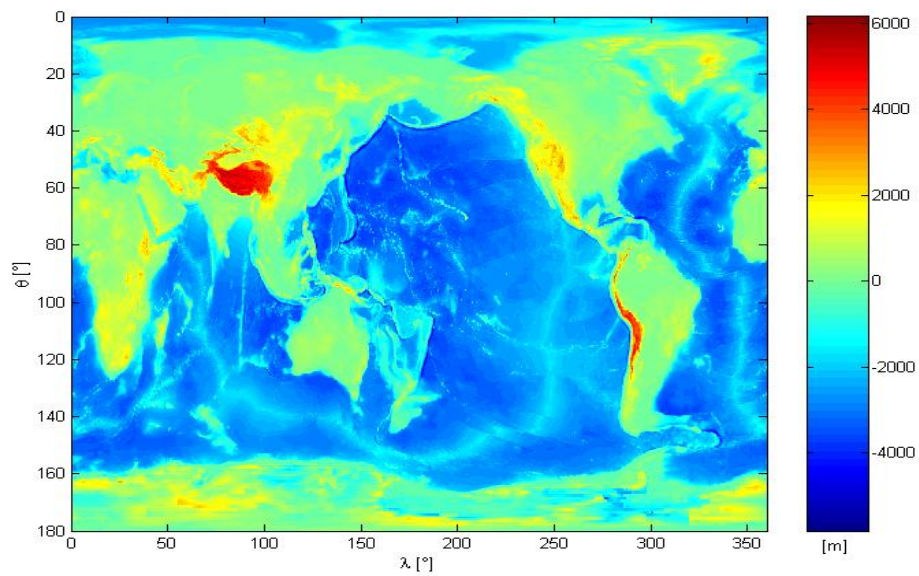


Abb. 4.5: Äquivalente Gesteinstopographie

Statistische Werte	
Wertebereich [m]	[-5809.6 6159.9]
Gewichteter Mittelwert [m]	-1436.1
Gewichtete Varianz [m ²]	2598200
Gewichteter RMS [m]	±1611.9

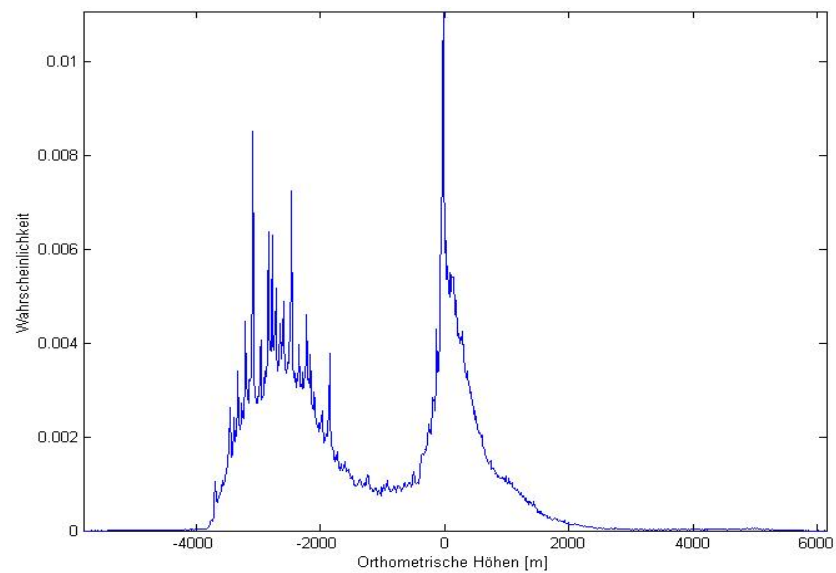


Abb. 4.6: Wahrscheinlichkeitsfunktion der äquivalenten Gesteinstopographie

Äquivalente Höhen für das Kompensationsmodell von PRATT

Aus den orthometrischen Höhen der Topographie und Bathymetrie lassen sich die äquivalenten Höhen für das Kompensationsmodell von PRATT ableiten. Wie bei der äquivalenten Gesteinstopographie erhält man ein einheitliches Säulenmodell der Erde. Die Massen der Ozeane werden hier durch Lithosphärenmaterial gleicher Masse aber höherer Dichte ersetzt. In Kapitel 2.5.2 wird ausführlich erläutert wie man die äquivalenten Höhen für das Kompensationsmodell von PRATT unter Berücksichtigung der Konvergenz der Säulen berechnen kann.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden die äquivalenten Höhen für das Modell von PRATT unter Berücksichtigung der Konvergenz der Säulen zunächst für ein $5'$ -Gitter berechnet mit einer mittleren Lithosphärendichte von 2.915 g/cm^3 , einer mittleren Ozeandichte von 1.03 g/cm^3 und einer konstanten Kompensationstiefe von 100 km. Anschließend wurden sie durch Mittelung über 9 Blöcke in ein $15'$ -Gitter umgerechnet. Abbildung 4.7 zeigt die äquivalenten Höhen für das Modell von PRATT. Es zeigt sich auch hier, dass die orthometrischen Höhen im Ozeanbereich gedämpft werden.

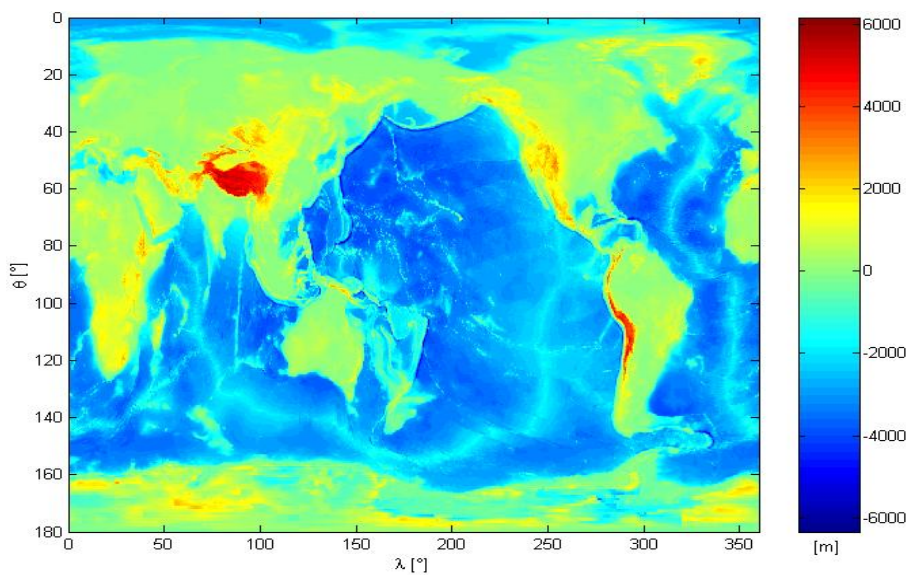


Abb. 4.7: Äquivalente Höhen für das Modell von PRATT

Statistische Werte	
Wertebereich [m]	$[-6332.7 \quad 6159.9]$
Gewichteter Mittelwert [m]	-1548.4
Gewichtete Varianz [m^2]	2899000
Gewichteter RMS [m]	± 1702.6

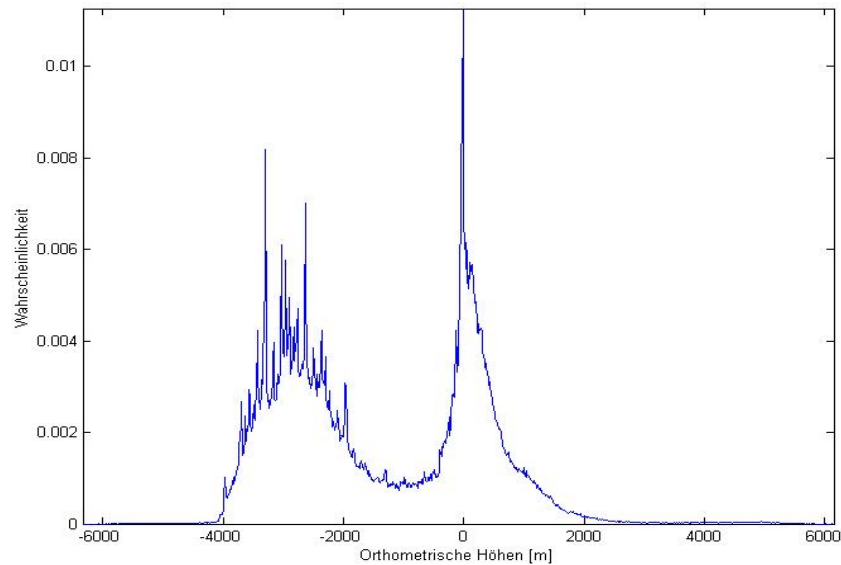


Abb. 4.8: Wahrscheinlichkeitsfunktion der äquivalenten Höhen für das Modell von PRATT

4.1.2 Schwerefeldmodell EGM96

Das *Earth Gravity Model 1996* EGM96 wurde von der *National Imagery and Mapping Agency* NIMA, der *National Aeronautics and Space Administration* NASA und der *Ohio State University* OSU entwickelt. Es handelt sich um ein hochaufgelöstes sphärisch harmonisches Modell des Gravitationsfeld der Erde das bis Grad und Ordnung 360 entwickelt wurde. Dieses Schwerefeldmodell berücksichtigt terrestrische Schwerefelddaten, altimetrisch abgeleitete Schwereanomalien der Satellitenmissionen ERS1 und Geosat sowie umfassende Satellitendaten - SLR, GPS, TDRSS, DORIS und US NAVY TRANET Doppler tracking system. Es ist das beste bisherige Schwerefeldmodell das vor der neuen Generation der Schwerefeldmissionen CHAMP, GRACE und GOCE entwickelt wurde [LEMOINE et al. (1998)].

Das Schwerefeldmodell EGM96 wurde bis Grad und Ordnung 360 entwickelt. Dies entspricht einer räumlichen Auflösung von ungefähr 56 km am Äquator. Es enthält einen Satz von $(360 + 1)^2$ Potentialkoeffizienten \bar{C}_{nm} und \bar{S}_{nm} sowie die Standardabweichungen der Potentialkoeffizienten $\sigma_{\bar{C}_{nm}}$ und $\sigma_{\bar{S}_{nm}}$. Mit Hilfe der Potentialkoeffizienten lassen sich globale Schwerefeldfunktionale ableiten. Zur Berechnung der isostatisch reduzierten Schwereanomalien und Geoidhöhen nach dem Airy-Heiskanen-Modell und nach dem Pratt-Hayford-Modell benötigt man unter anderem globale Freiluftanomalien und freiluftreduzierte Geoidhöhen. In Kapitel 3.1.2 wird beschrieben wie man mit Hilfe der GSHS die globale diskrete Funktion der Schwereanomalien und Geoidhöhen berechnen kann. In Kapitel 3.1.1 werden zwei Methoden zur Durchführung der GSHS und der GSHA vorgestellt, deren Verwendung davon abhängt, ob die globale diskrete Funktion repräsentative Punktwerte oder Blockmittelwerte enthält. Da die orthometrischen Höhen des Höhendatensatzes JGP95E in Form von Blockmittelwerten gegeben sind, muss die globale diskrete Funktion der Freiluftanomalien und freiluftreduzierten Geoidhöhen auch Blockmittelwerte enthalten.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden die Freiluftanomalien und freiluftreduzierten Geoidhöhen berechnet. Die Rechengenauigkeit der GSHS und GSHA wurde mit Hilfe eines „closed loop“ auf Basis von Freiluftanomalien überprüft. Im Folgenden werden die Rechenschritt, die im Rahmen des „closed loop“ durchgeführt werden mussten, erklärt.

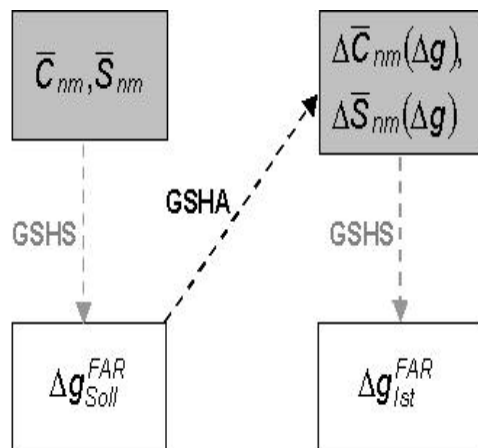


Abb. 4.9: Prinzip des „closed loop“ auf Basis der Freiluftanomalien

1.Schritt: Berechnung der Freiluftanomalien Δg_{Soll}^{FAR} mit Hilfe der GSHS aus den Potentialkoeffizienten des Schwerefeldmodells EGM96.

2.Schritt: Berechnung der dimensionierten Differenzkoeffizienten mit Hilfe der GSHA aus den Freiluftanomalien Δg_{Soll}^{FAR} .

3.Schritt: Berechnung der Freiluftanomalien Δg_{Ist}^{FAR} mit Hilfe der GSHS aus den dimensionierten Differenzkoeffizienten.

4.Schritt: Die Untersuchung der Differenz der Freiluftanomalien $\Delta g_{Soll}^{FAR} - \Delta g_{Ist}^{FAR}$ im Ortsbereich gibt Aufschluss über die Rechengenauigkeit der GSHS und GSHA.

Der „closed loop“ wurde zunächst für 30' Blockmittelwerte durchgeführt. Die Differenz der Freiluftanomalien $\Delta g_{Soll}^{FAR} - \Delta g_{Ist}^{FAR}$ ist in Abbildung 4.10 dargestellt.

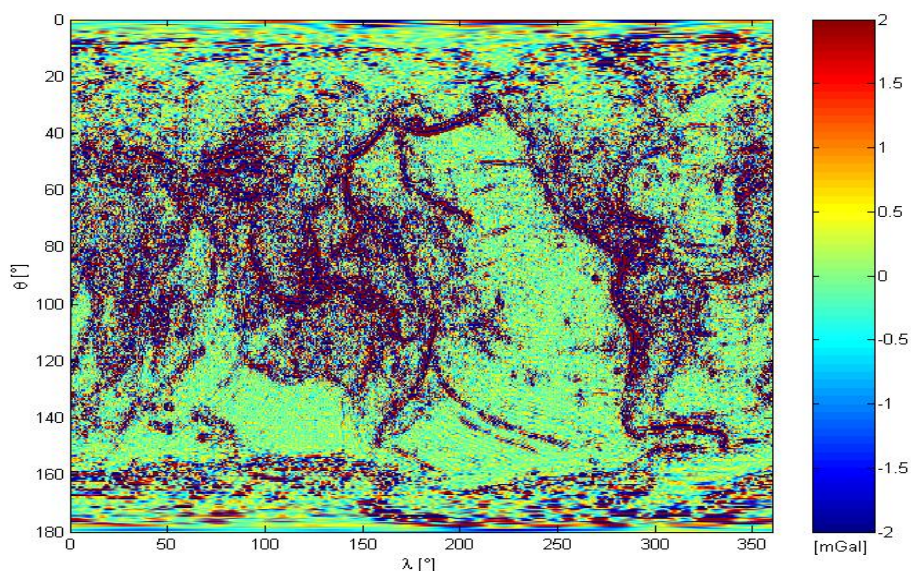


Abb. 4.10: Differenz $\Delta g_{Soll}^{FAR} - \Delta g_{Ist}^{FAR}$

Statistische Werte	
Wertebereich [mGal]	$[-43.8969 \quad 72.9096]$
Gewichteter Mittelwert [mGal]	$-7.7858 \cdot 10^{-15}$
Gewichtete Varianz [mGal ²]	10.5190
Gewichteter RMS [mGal]	± 3.2433
Prozentualer Fehler [%]	12

Da der prozentuale Fehler relativ hoch ist wurde der „closed loop“ auch für 15' Blockmittelwerte durchgeführt, um zu sehen welche Genauigkeitssteigerung dadurch erreicht werden kann. Die Differenz $\Delta g_{Soll}^{FAR} - \Delta g_{Ist}^{FAR}$ ist in Abbildung 4.11 dargestellt.

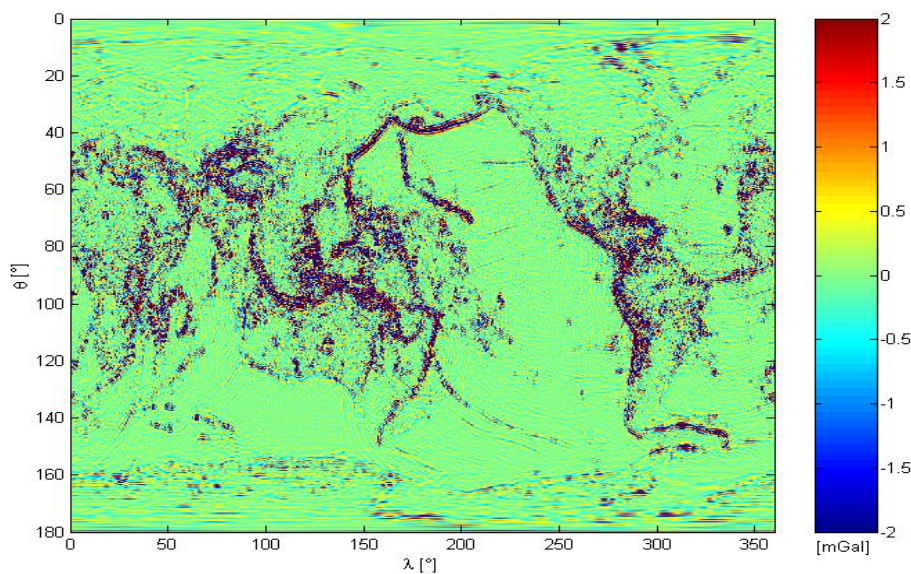


Abb. 4.11: Differenz $\Delta g_{Soll}^{FAR} - \Delta g_{Ist}^{FAR}$

Statistische Werte	
Wertebereich [mGal]	$[-16.0047 \quad 22.6433]$
Gewichteter Mittelwert [mGal]	$1.3301 \cdot 10^{-14}$
Gewichtete Varianz [mGal ²]	1.1676
Gewichteter RMS [mGal]	± 1.0806
Prozentualer Fehler [%]	4

Die Genauigkeit kann um das 3-fache gesteigert werden. Aus diesem Grund werden im Rahmen dieser Arbeit die Freiluftanomalien und die freiluftreduzierten Geoidhöhen für $15' \times 15'$ -Blöcke berechnet.

In den Abbildungen 4.12 ist die globale diskrete Funktion der Freiluftanomalien dargestellt, die mit der GSHS aus dem Schwerfeldmodell EGM96 abgeleitet wurde.

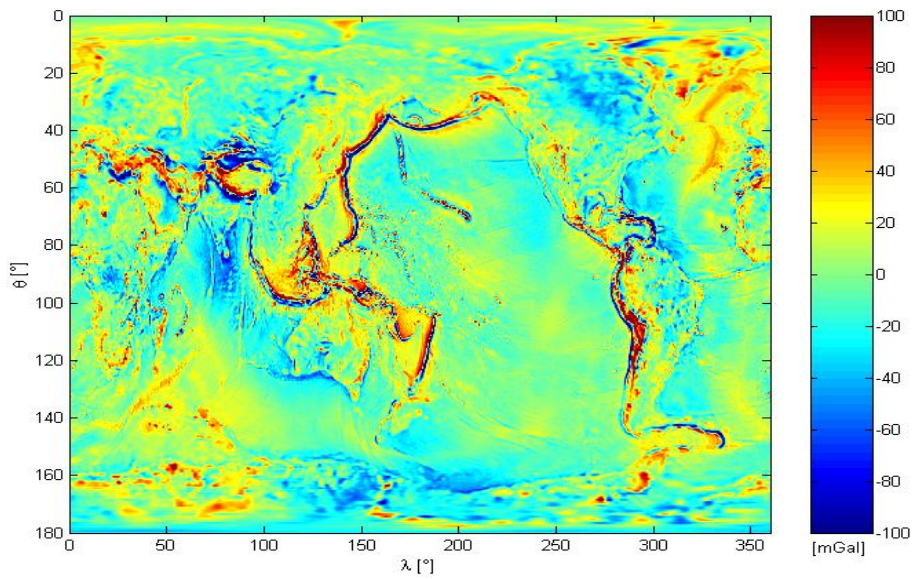


Abb. 4.12: Freiluftanomalien des Schwerefeldmodells EGM96

Statistische Werte	
Wertebereich [mGal]	$[-330.1302 \quad 451.3258]$
Gewichteter Mittelwert [mGal]	$-6.5590 \cdot 10^{-16}$
Gewichtete Varianz [mGal ²]	740.3864
Gewichteter RMS [mGal]	± 27.2100

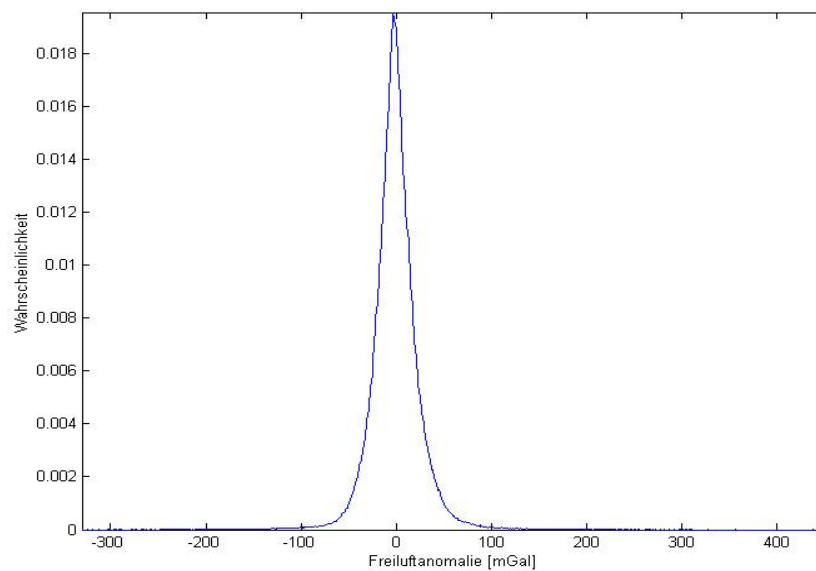


Abb. 4.13: Wahrscheinlichkeitsfunktion der Freiluftanomalien des Schwerefeldmodells EGM96

In Abbildung 4.14 sind die Geoidhöhen dargestellt, die mit der GSHS aus dem Schwerefeldmodell EGM96 berechnet wurden.

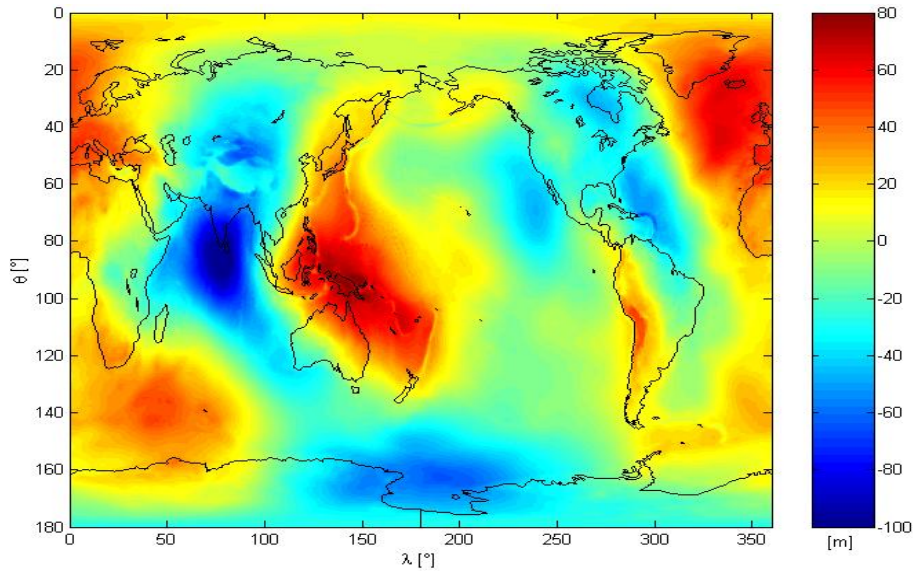


Abb. 4.14: Geoidhöhen des Schwerefeldmodells EGM96

Statistische Werte	
Wertebereich [m]	$[-106.2704 \quad 85.6966]$
Gewichteter Mittelwert [m]	$-4.1083 \cdot 10^{-14}$
Gewichtete Varianz [m ²]	924.2678
Gewichteter RMS [m]	± 30.4018

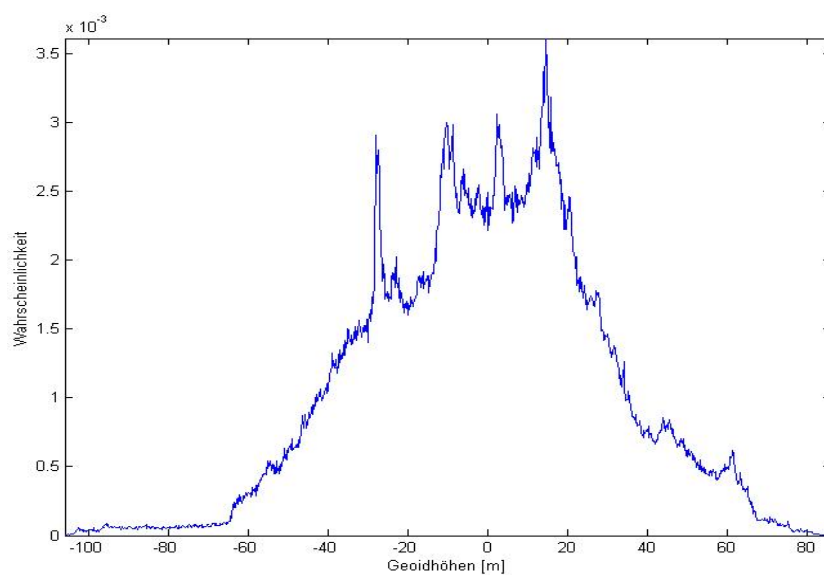


Abb. 4.15: Wahrscheinlichkeitsfunktion der Geoidhöhen des Schwerefeldmodells EGM96

Die globale diskrete Funktion der Schwereanomalien bzw. der Geoidhöhen kann mit Hilfe der Analysewerkzeuge, die in Kapitel 3.2.2 beschreiben sind, im Spektralbereich untersucht werden. Aus den Potentialkoeffizienten und ihren Standardabweichungen können die Signalgradvarianzen, die Fehlergradvarianzen, der kummulative Fehler und der spektrale Abbruchfehler abgeleitet werden. Bei der Berechnung der Fehlergradvarianzen und des kumulativen Fehlers muss berücksichtigt werden, dass die Standardabweichungen des Schwerefeldmodells EGM96 mit dem Kalibrierungsfaktor 2 zu multiplizieren sind. Erst nach der Fehlerkalibrierung erhält man ein möglichst realistisches äußeres Genauigkeitsmass [GRUBER (2000)].

In Abbildung 4.16 und 4.17 sind die Signal- und Fehlergradvarianzen der Schwereanomalien bzw. der Geoidhöhen dargestellt. Vergleicht man die beiden Abbildungen miteinander, so stellt man fest, dass das Signal der Schwereanomalien mit zunehmenden Grad eine Verstärkung gegenüber dem Signal der Geoidhöhen erfährt. Grund dafür ist der Faktor $(n - 1)$ der bei der Berechnung der Gradvarianzen der Schwereanomalien einfließt (Kapitel 3.2.2). Schwereanomalien eignen sich daher zur Untersuchung des Verhaltens des Erdschwerefeldes im kurzwelligen Bereich. Geoidhöhen eignen sich hingegen zur Untersuchung des Verhaltens des Erdschwerefeldes im langwelligen Bereich.

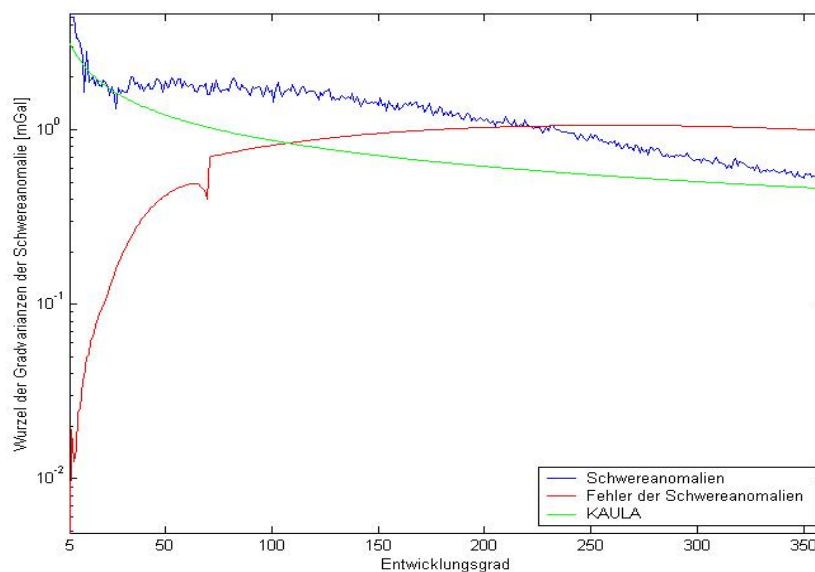


Abb. 4.16: Wurzel der Signal- und Fehlergradvarianzen der Schwereanomalien des Schwerefeldmodells EGM96

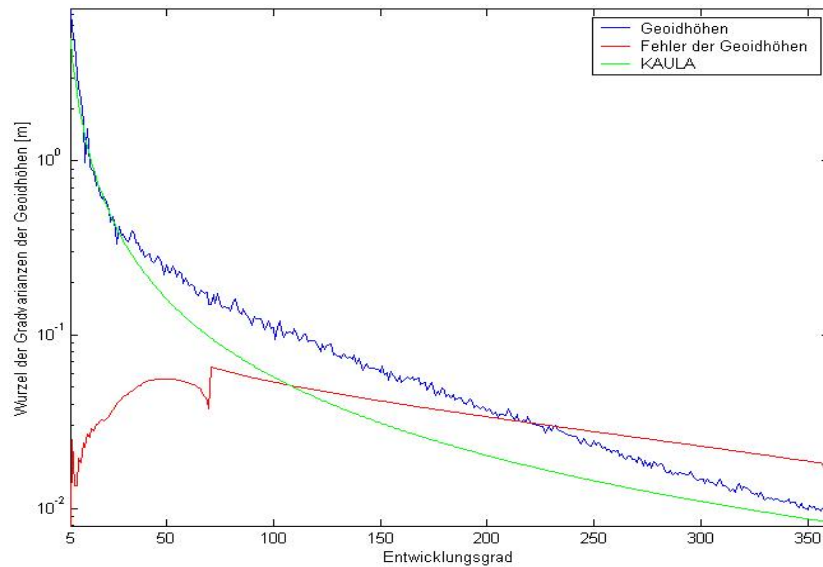


Abb. 4.17: Wurzel der Signal- und Fehlergradvarianzen der Geoidhöhen des Schwerefeldmodells EGM96

Die Graphen der Fehlergradvarianzen und Signalgradvarianzen schneiden sich sowohl für die Schwereanomalien als auch für die Geoidhöhen ungefähr beim Grad 220. Das bedeutet, dass die über diesen Grad hinaus geschätzten Schwerefeldkoeffizienten nicht mehr signifikant (aussagekräftig) sind.

Die kumulativen Schwereanomalie- und Geoidhöhenfehler sagen uns, welche mittlere Genauigkeit mit dem Schwerefeldmodell EGM96 erreicht werden kann. Bei vollständiger Auflösung des Potentialmodells EGM96 liegt die mittlere erreichbare Genauigkeit für die Schwereanomalien bei etwa 17 mGal und für die Geoidhöhen bei etwa 72 cm.

Der spektrale Abbruchfehler der Schwereanomalien $\sigma_{om}(\Delta g) = 0.4606 \text{ mGal}$ und der der Geoidhöhen $\sigma_{om}(N) = 8.4 \text{ mm}$ wurde mit Hilfe des Gradvarianzmodells von KAULA, nach dem Prinzip das in Kapitel 3.2.2 beschrieben ist, berechnet.

4.2 Nach dem Airy-Heiskanen-Modell

In diesem Abschnitt wird ausführlich erklärt wie die isostatisch reduzierten Schwereanomalien und Geoidhöhen nach dem Airy-Heiskanen-Modell berechnet werden können.

4.2.1 Isostatisch reduzierte Schwereanomalien

Die isostatisch reduzierten Schwereanomalien können nach dem Airy-Heiskanen-Modell in drei Schritten berechnet werden [RUMMEL (2002)]. In Abbildung 4.18 ist das schematische Erdmodell, von dem AIRY bei der Entwicklung seines Kompensationsmodells ausgegangen ist, dargestellt. Diese Modell dient als Ausgangsmodell für die folgenden Berechnungen. Es wird angenommen, dass die gemessenen Schwerewerte unter den dargestellten Voraussetzungen entlang der orangen Linie beobachtet wurden.

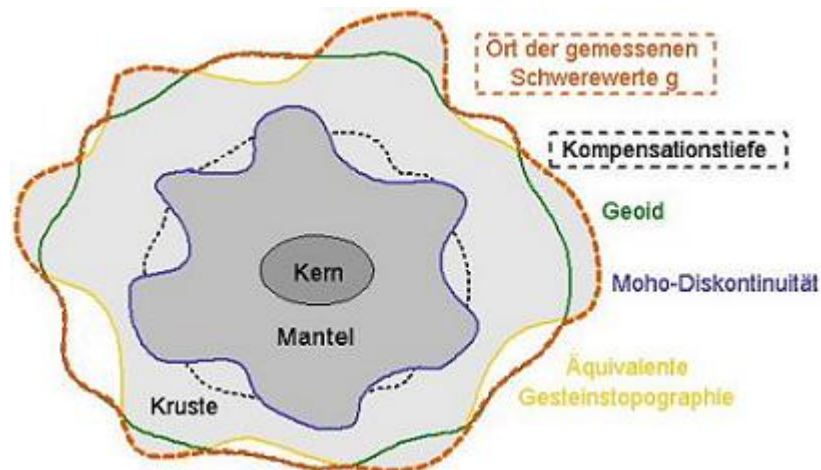


Abb. 4.18: Erdmodell nach AIRY

1.Schritt: Die äquivalente Gesteinstopographie wird entfernt, so dass die Erdoberfläche dem Geoid gleicht. Die *beobachteten Schwerewerte g* auf dem Land und auf dem Meeresspiegel verändern sich aufgrund dieser Reduktion. Im Landbereich nehmen die Schwerewerte ab, da die Anziehungskraft der Topographie verschwindet. Im Ozeanbereich nehmen sie zu, da der Hohlraum zwischen der äquivalenten Gesteinstopographie und dem Geoid mit Erdmaterial aufgefüllt wird. Das Gesteinsmaterial bewirkt eine zusätzliche Anziehungskraft. In Abbildung 4.19 ist das schematische Erdmodell ohne Massenüberschüsse und -defizite dargestellt. Die Reduktion der Schwerewerte bezeichnet man als *verfeinerte Bouguerreduktion BTR*.

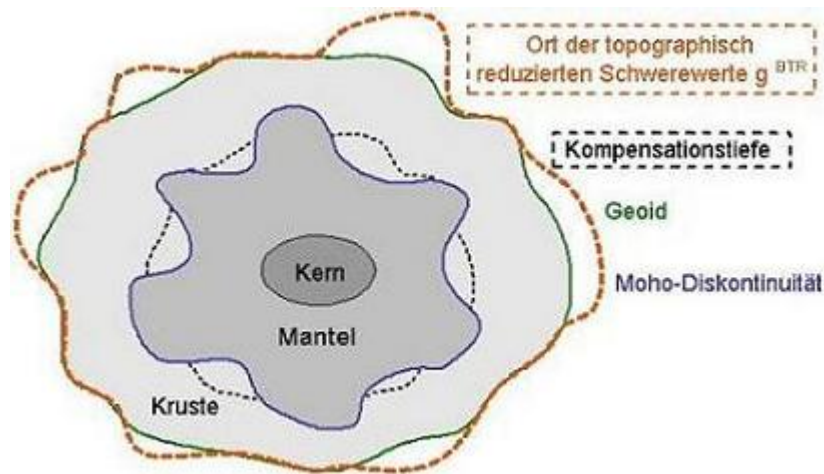


Abb. 4.19: Erdmodell nach AIRY ohne Massenüberschüsse und -defizite

2.Schritt: Die Massendefizite und -überschüsse der Wurzeln und Antiwurzeln werden entfernt, es entsteht ein Erdkörper mit konstanter Krustendicke. Die Schwerewerte nehmen im Landbereich zu, da die Wurzeln durch das dichtere Material des Erdmantels ersetzt werden. Im Ozeanbereich nehmen sie ab, da die Antiwurzel durch das weniger dichtere Material der Erdkruste ersetzt werden. In Abbildung 4.20 ist dieser Vorgang dargestellt. Diese Reduktion bezeichnet man als *Airy-Heiskanen-Reduktion AHC*.

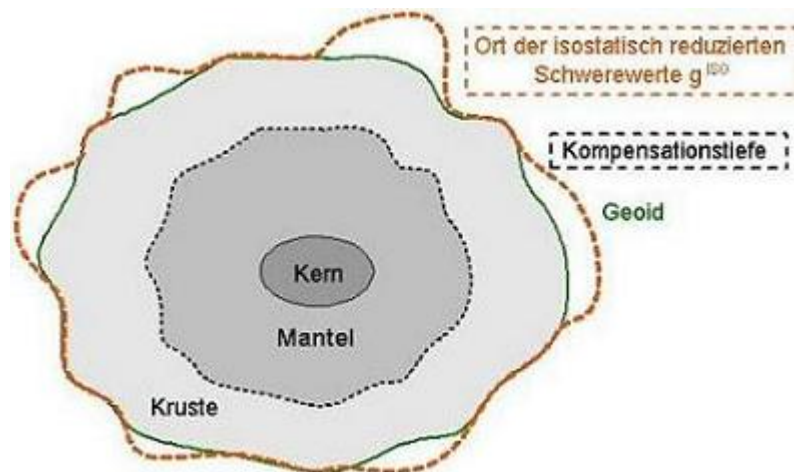


Abb. 4.20: Erdmodell nach AIRY ohne Massenüberschüsse, -defizite, Wurzeln und Antiwurzeln

3.Schritt: Die isostatisch reduzierten Schwerewerte nach AIRY befinden sich immer noch entlang der orangenen Linie. Sie „schweben“ aufgrund der Reduktionen zum Teil über dem Geoid. Mit Hilfe der *Freiluftreduktion FAR* können sie auf das Geoid reduziert werden. Wegen des geringeren Abstandes zum Erdmittelpunkt, nehmen die Schwerewerte im Landbereich zu. Im Ozeanbereich ändern sie sich nicht, da sie sich bereits auf dem Geoid befinden. Durch Subtraktion der *Normalschwere* γ des Referenzellipsoids erhält man die *isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach AIRY* Δg_{Airy}^{ISO} .

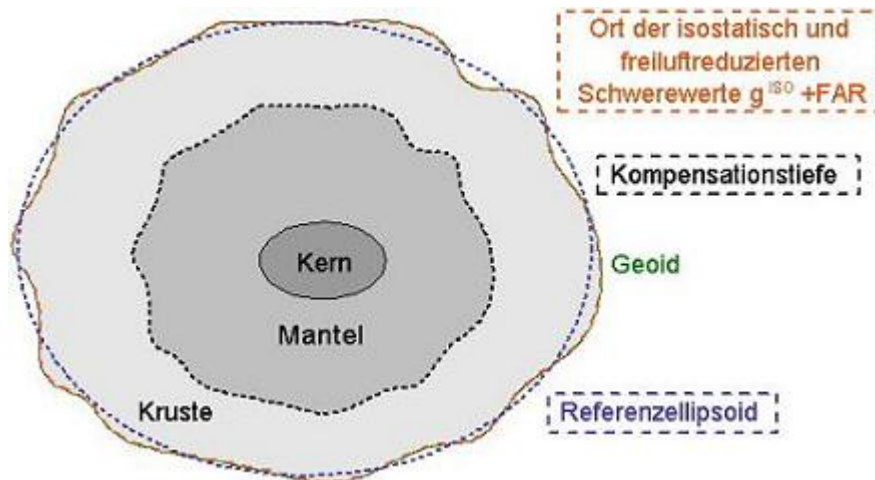


Abb. 4.21: Ort der isostatisch und freiluftreduzierten Schwerewerte

Bei der Berechnung der isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach dem Airy-Heiskanen-Modell kommt es nicht darauf an in welcher Reihenfolge die einzelnen Rechenschritte durchgeführt werden.

Verfeinerte Bouguerreduktion

Im Folgenden wird erklärt wie man nach TSOULIS (1999) in 3 Schritten die verfeinerte Bouguerreduktion aus der äquivalenten Gesteinstopographie berechnen kann. In Abbildung 4.22 ist der Rechenweg dargestellt. Die weiß hinterlegten Kästchen kennzeichnen den Ortsbereich und die grau hinterlegten Kästchen den Spektralbereich.

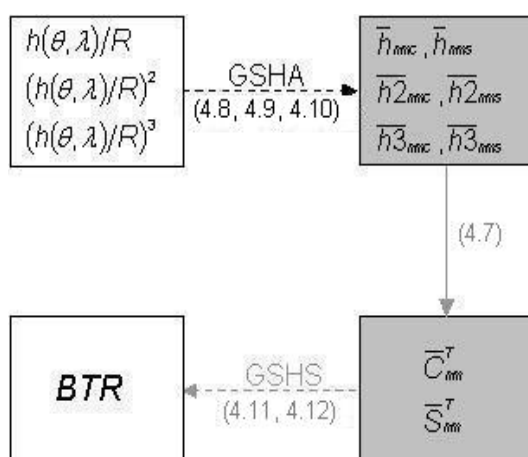


Abb. 4.22: Rechenweg der BTR

1.Schritt: Berechnung der *Kugelfunktionskoeffizienten* \bar{h}_{nmc} , \bar{h}_{nms} usw. aus der normalisierten äquivalenten Gesteinstopographie $h(\theta, \lambda)/R$ und ihren Potenzen mit Hilfe der GSHA.

2.Schritt: Berechnung der *topographischen dimensionslosen normierten Potentialkoeffizienten* \bar{C}_{nm}^T und \bar{S}_{nm}^T aus den topographischen Kugelfunktionskoeffizienten.

3.Schritt: Berechnung der verfeinerten Bouguerreduktion aus den topographischen dimensionslosen normierten Potentialkoeffizienten mit Hilfe der GSHS.

Im folgenden Abschnitt werden die Formeln, die zur Berechnung der verfeinerten Bouguerreduktion benötigt werden, hergeleitet. Die verfeinerte Bouguerreduktion entspricht der ersten Ableitung des *Gravitationspotentials der äquivalenten Gesteinstopographie* V^T nach der sphärischen geozentrischen Koordinate r_P des Berechnungspunktes P. Im Rahmen dieser Arbeit werden die isostatisch reduzierten Schwereanomalien und Geoidhöhen auf der Kugelschale mit Radius R berechnet. Aus diesem Grund werden die Reduktionen ebenfalls auf der Kugelschale mit Radius R berechnet. Die sphärische geozentrische Koordinate r_P ist folglich für alle Berechnungspunkte gleich dem Radius R der Kugelschale.

Die Kugelfunktionsentwicklung des Gravitationspotential der äquivalenten Gesteinstopographie auf der Kugelschale mit Radius R kann aus Gleichung 3.4 abgeleitet werden.

$$V^T(\lambda_P, \theta_P) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos \theta_P) [\bar{C}_{nm}^T \cos m\lambda_P + \bar{S}_{nm}^T \sin m\lambda_P] \quad (4.1)$$

Die topographischen dimensionslosen normierten Potentialkoeffizienten lassen sich aus Gleichung 3.5 ableiten.

$$\left. \begin{array}{l} \bar{C}_{nm}^T \\ \bar{S}_{nm}^T \end{array} \right\} = \frac{3}{\bar{\rho}_{Erde} R^3 (2n+1)} \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=R}^{R+h_Q} \left(\frac{r_Q}{R}\right)^n \rho_{cr} \bar{P}_{nm}(\cos \theta_Q) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda_Q \\ \sin m\lambda_Q \end{array} \right\} d\Sigma_Q \quad (4.2)$$

Diese Formel kann umgeformt werden durch Einführen von A_Q^T . Mit

$$A_Q^T = \int_{r=R}^{R+h_Q} \left(\frac{r_Q}{R}\right)^{n+2} \rho_{cr} dr = \rho_{cr} \cdot \frac{R}{n+3} \left[\left(\frac{R+h_Q}{R}\right)^{n+3} - 1 \right] \quad (4.3)$$

entsteht folgende Formel für die topographischen dimensionslosen normierten Potentialkoeffizienten

$$\left. \begin{array}{l} \bar{C}_{nm}^T \\ \bar{S}_{nm}^T \end{array} \right\} = \frac{3}{\bar{\rho}_{Erde} R (2n+1)} \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} A_Q^T \bar{P}_{nm}(\cos \theta_Q) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda_Q \\ \sin m\lambda_Q \end{array} \right\} d\sigma_Q. \quad (4.4)$$

Mit $d\sigma_Q = \sin \theta d\theta d\lambda$ dem infinitesimalen Flächenelement.

Diese Formel lässt sich vereinfachen, indem man die exakte Formel 4.3 für A_Q^T durch eine Potenzreihenentwicklung bis zur 3. Ordnung ersetzt. Die Potenzreihenentwicklung bis zur 3. Ordnung von A_Q^T ergibt sich aus der Potenzreihenentwicklung bis zur 3. Ordnung des Faktors $\left(\frac{R+h_Q}{R}\right)^{n+3}$.

$$\left(\frac{R+h_Q}{R}\right)^{n+3} = 1 + (n+3) \frac{h_Q}{R} + \frac{(n+3)(n+2)}{2} \left(\frac{h_Q}{R}\right)^2 + \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} \left(\frac{h_Q}{R}\right)^3 \quad (4.5)$$

$$A_Q^T = \rho_{cr} h_Q \left[1 + \frac{n+2}{2} \left(\frac{h_Q}{R}\right) + \frac{(n+2)(n+1)}{6} \left(\frac{h_Q}{R}\right)^2 \right] \quad (4.6)$$

Nach Einsetzen der neuen Gleichung 4.6 für A_Q^T in die Gleichung 4.4 für \overline{C}_{nm}^T und \overline{S}_{nm}^T und nach entsprechenden Umformungen und Einführung von Notationen erhält man folgende Gleichung für die **topographischen dimensionslosen normierten Potentialkoeffizienten**

$$\left. \begin{array}{l} \overline{C}_{nm}^T \\ \overline{S}_{nm}^T \end{array} \right\} = \frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\rho_{cr}}{\bar{\rho}_{Erde}} \left[\left\{ \begin{array}{l} \overline{h}_{nmc} \\ \overline{h}_{nms} \end{array} \right\} + \frac{(n+2)}{2} \left\{ \begin{array}{l} \overline{h2}_{nmc} \\ \overline{h2}_{nms} \end{array} \right\} + \frac{(n+2)(n+1)}{6} \left\{ \begin{array}{l} \overline{h3}_{nmc} \\ \overline{h3}_{nms} \end{array} \right\} \right] \quad (4.7)$$

mit den **Kugelfunktionskoeffizienten der normalisierten äquivalenten Gesteinstopographie und ihren Potenzen**, die mit Hilfe der GSHA berechnet werden können:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{h}_{nmc} \\ \overline{h}_{nms} \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda_Q=0}^{2\pi} \int_{\theta_Q=0}^{\pi} \left(\frac{h_Q}{R} \right) \overline{P}_{nm}(\cos \theta_Q) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda_Q \\ \sin m\lambda_Q \end{array} \right\} d\sigma_Q, \quad (4.8)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{h2}_{nmc} \\ \overline{h2}_{nms} \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda_Q=0}^{2\pi} \int_{\theta_Q=0}^{\pi} \left(\frac{h_Q}{R} \right)^2 \overline{P}_{nm}(\cos \theta_Q) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda_Q \\ \sin m\lambda_Q \end{array} \right\} d\sigma_Q, \quad (4.9)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{h3}_{nmc} \\ \overline{h3}_{nms} \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda_Q=0}^{2\pi} \int_{\theta_Q=0}^{\pi} \left(\frac{h_Q}{R} \right)^3 \overline{P}_{nm}(\cos \theta_Q) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda_Q \\ \sin m\lambda_Q \end{array} \right\} d\sigma_Q. \quad (4.10)$$

Diese Gleichungen gelten nur für den Fall, dass die äquivalente Gesteinstopographie als globale kontinuierliche Funktion vorliegt.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit stand die äquivalente Gesteinstopographie als globale diskrete Funktion zur Verfügung, die Blockmittelwerte, die im Blockzentrumspunkt registriert sind, enthält (Kapitel 4.1.1). Die GSHA der normalisierten äquivalenten Gesteinstopographie und ihren Potenzen wurde deshalb nach der Methode, die für Blockmittelwerte gilt (Kapitel 3.1), durchgeführt.

Die verfeinerte Bouguerreduktion kann mit Hilfe der GSHS aus \overline{C}_{nm}^T und \overline{S}_{nm}^T berechnet werden. Die verfeinerte Bouguerreduktion entspricht der Schwereanziehung der äquivalenten Gesteinstopographie. Die Kugelfunktionsentwicklung der kontinuierlichen Funktion der **verfeinerten Bouguerreduktion auf der Kugelschale mit Radius R** lautet:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{A}_m^T(\theta) \\ \overline{B}_m^T(\theta) \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^N \overline{P}_{nm}(\cos \theta) \left\{ \begin{array}{l} -\frac{GM}{R^2}(n+1)\overline{C}_{nm}^T \\ -\frac{GM}{R^2}(n+1)\overline{S}_{nm}^T \end{array} \right\}, \quad (4.11)$$

$$BTR(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^N \overline{A}_m^T(\theta) \cos m\lambda + \overline{B}_m^T(\theta) \sin m\lambda. \quad (4.12)$$

In der vorliegenden Arbeit wurde nicht die kontinuierliche Funktion der verfeinerten Bouguerreduktion berechnet sondern die diskrete Funktion, die 15' Blockmittelwerte, die im Blockzentrumspunkt registriert sind, enthält. Die Berechnungen wurden nach dem Prinzip, das in Kapitel 3.1 für Blockmittelwerte beschrieben ist, durchgeführt. In Abbildung 4.23 ist die verfeinerte Bouguerreduktion dargestellt. Laut der Überlegungen des vorherigen Abschnitts müsste die verfeinerte Bouguerreduktion im Landbereich negativ und im

Ozeanbereich positive sein. Betrachtet man Abbildung 4.23 so stellt man fest, dass die verfeinerte Bouguerreduktion nur für die großen Gebirge: Himalaya, Anden und Rocky Mountains negativ ist. In den übrigen Landbereichen ist die verfeinerte Bouguerreduktion positiv. In dieser Arbeit konnte nicht eindeutig geklärt werden warum die Überlegungen nicht mit den Berechnungen übereinstimmen, es wird aber vermutet das dieses Phänomen auf einer Massenverlagerung beruht. Startet man die Kugelfunktionsentwicklung der verfeinerten Bouguerreduktion erst mit dem Grad 2, so setzt man die Massengleichheit von Ellipsoid und Erdkörper und das Zusammenfallen der beiden Schwerpunkte voraus. In diesem Fall erhält man im Landbereich negative Werte für die verfeinerte Bouguerreduktion und im Ozeanbereich positive Werte mit Ausnahme des ostpazifischen Rückens.

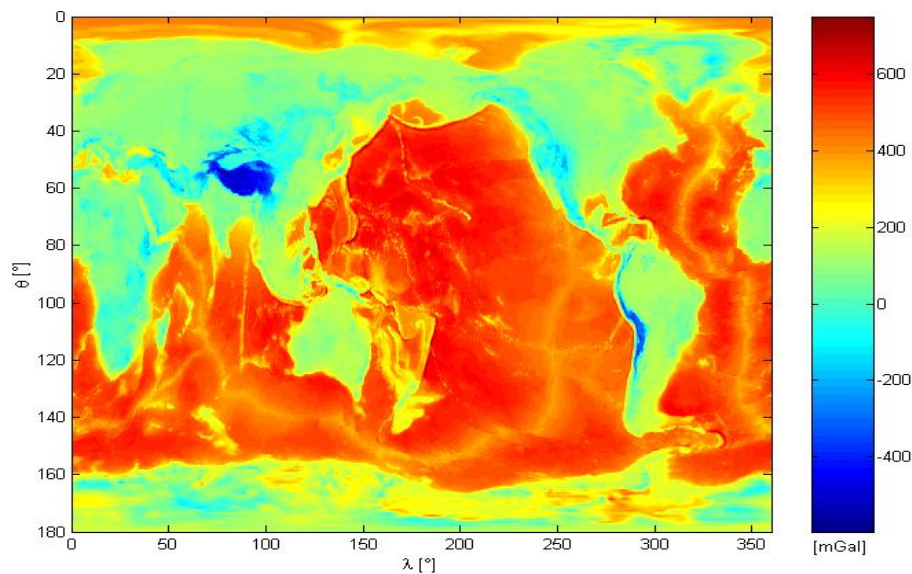


Abb. 4.23: Verfeinerte Bouguerreduktion

Statistische Werte	
Wertebereich [mGal]	[-596.6963 751.8270]
Gewichteter Mittelwert [mGal]	321.4914
Gewichtete Varianz [mGal ²]	42021
Gewichteter RMS [mGal]	±204.9915

Zur Überprüfung der verfeinerten Bouguerreduktion wurde die *einfache Bouguerreduktion BOR* berechnet, da sie eine einfache topographische Reduktion ist. Bei dieser Reduktion wird die Anziehungskraft der topographischen Massen, die auf einen Geländepunkt wirkt, mit Hilfe einer unendlich ausgedehnten ebenen Platte konstanter mittlere Krustendichte berechnet. Die Mächtigkeit der Platte entspricht der orthometrischen Höhe des Geländepunktes. Diese Platten bezeichnet man im Allgemeinen als Bouguerplatten. Da die Anziehungskraft der topographischen Massen mit dem Quadrat des Abstandes zum Geländepunkt abnimmt [RUMMEL (2002)], stellt die Anziehungskraft der Bouguerplatte eine gute Näherung für die Anziehungskraft der topographischen Massen dar. In Abbildung 4.25 ist die Bouguerplatte für einen Geländepunkt dargestellt. Die Anziehung einer

Bouguerplatte entspricht der Anziehung eines Kreiszyinders mit unendlichem Radius. Die Formel zur Berechnung der **einfachen Bouguerreduktion** lautet nach RUMMEL (2002) wie folgt:

$$BOR(\theta, \lambda) = -2\pi G\rho_{cr}h(\theta, \lambda). \quad (4.13)$$

In Abbildung 4.24 ist die einfache Bouguerreduktion, die im Rahmen dieser Arbeit für $15' \times 15'$ -Blöcke berechnet wurde, dargestellt. Die einfache Bouguerreduktion ist im Landbereich negativ und im Ozeanbereich positiv.

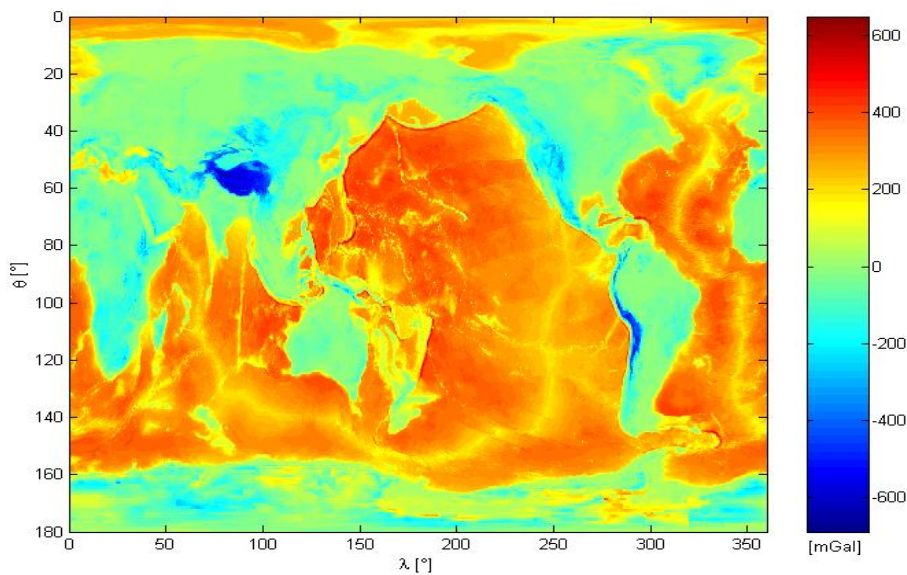


Abb. 4.24: Einfache Bouguerreduktion

Statistische Werte	
Wertebereich [mGal]	[-689.5384 650.3276]
Gewichteter Mittelwert [mGal]	160.7548
Gewichtete Varianz [mGal ²]	32557
Gewichteter RMS [mGal]	±180.4365

Vergleicht man Abbildung 4.23 mit Abbildung 4.24, so wird deutlich, dass die beiden topographischen Schwerereduktionen einander ähneln. Dies ist ein Hinweis darauf, dass die Berechnungen der beiden Reduktionen richtig durchgeführt wurden. Der Unterschied zwischen der verfeinerten und der einfachen Bouguerreduktion entspricht der *topographischen Geländekorrektur TOC*. Sie ist in Abbildung 4.25 für einen Geländepunkt schematisch dargestellt.

Wenn sich die tatsächliche Topographie oberhalb der Bouguerplatte befindet, dann nimmt die Anziehung zu, da die Massen oberhalb der Bouguerplatte berücksichtigt werden. Befindet sich die tatsächliche Topographie unterhalb der Bouguerplatte, dann nimmt die Anziehung ebenfalls zu, da die Massen unterhalb der Bouguerplatte entfernt werden und somit keine Anziehung nach oben bewirken. Die topographische Geländekorrektur ist folglich immer positiv [RUMMEL (2002)].

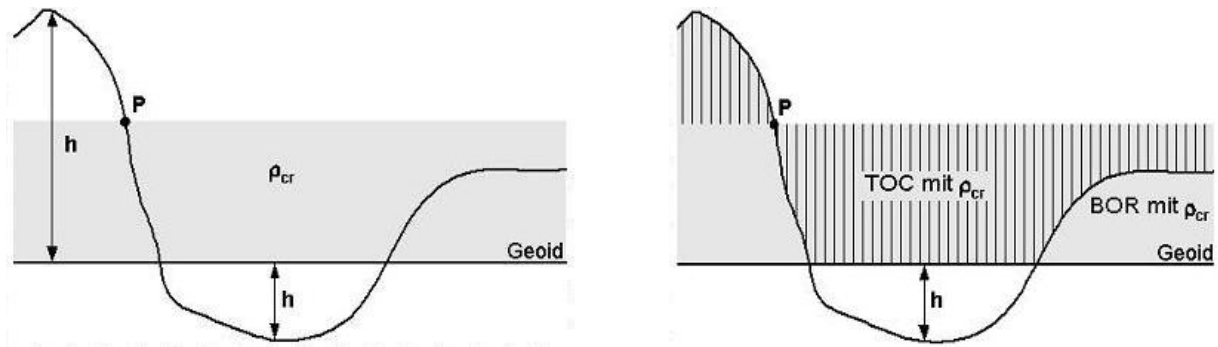


Abb. 4.25: Schematische Darstellung der einfachen Bouguerreduktion (links) und der topographischen Geländekorrektur (rechts)

In Abbildung 4.26 ist die topographische Geländekorrektur dargestellt, die sich aus der Differenz der verfeinerten und der einfachen Bouguerreduktion ergeben hat.

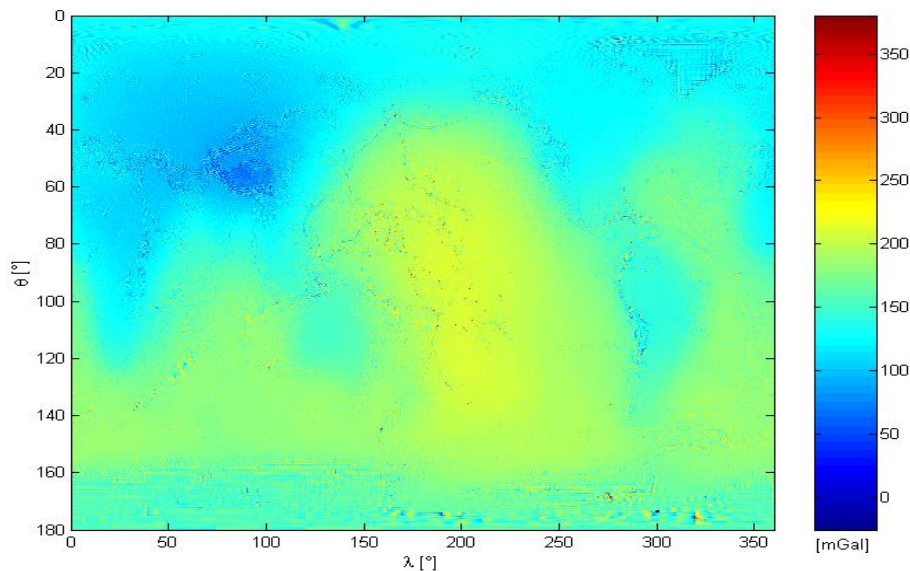


Abb. 4.26: Topographische Geländekorrektur

Statistische Werte	
Wertebereich [mGal]	$[-25.7319 \quad 380.3562]$
Gewichteter Mittelwert [mGal]	160.7367
Gewichtete Varianz [mGal ²]	1085.8
Gewichteter RMS [mGal]	± 32.9511

Die statistischen Ergebnisse der topographischen Geländekorrektur stimmen mit den Überlegungen nicht überein, da die topographische Geländekorrektur negative Werte enthält. Aus diesem Grund wurde untersucht wieviele Werte negativ sind. Es sind 19 Blöcke von insgesamt 1036800 Blöcken negativ. Es konnte in der vorliegenden Arbeit nicht geklärt werden warum die topographische Geländekorrektur negative Werte enthält. Da die Anzahl

der negativen Werte jedoch sehr klein ist wird vermutet, dass die Berechnung trotzdem weitest gehend richtig durchgeführt wurden. Abbildung 4.26 zeigt, dass die topographische Geländekorrekturen für die Ozeanbereiche größer ist als für die Landbereiche. Dies könnte an der Rauigkeit der Bathymetrie liegen, die in Kapitel 4.1.1 festgestellt wurde. Je rauer die Erdoberfläche, desto größer die Abweichungen von der Bouguerplatte.

Airy-Heiskanen-Reduktion

Im Folgenden wird erklärt wie man nach TSOLIS (1999) in 3 Schritten die Airy-Heiskanen-Reduktion aus der äquivalenten Gesteinstopographie berechnen kann. In Abbildung 4.27 ist der Rechenweg dargestellt.

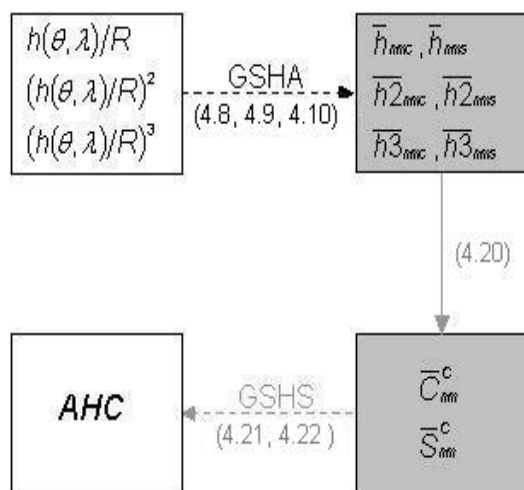


Abb. 4.27: Rechenweg der AHC

1.Schritt: Berechnung der *Kugelfunktionskoeffizienten* $\bar{h}_{nmc}, \bar{h}_{nms}$ usw. aus der normalisierten äquivalenten Gesteinstopographie $h(\theta, \lambda)/R$ und ihren Potenzen mit Hilfe der GSHA.

2.Schritt: Berechnung der *dimensionslosen normierten Potentialkoeffizienten der Kompensation* \bar{C}^c_{nm} und \bar{S}^c_{nm} aus den topographischen Kugelfunktionskoeffizienten.

3.Schritt: Berechnung der Airy-Heiskanen-Reduktion aus den dimensionslosen normierten Potentialkoeffizienten der Kompensation mit Hilfe der GSHS.

Im folgenden Abschnitt werden die Formeln, die zur Berechnung der Airy-Heiskanen-Reduktion auf der Kugelschale mit Radius R benötigt werden, hergeleitet. Die Airy-Heiskanen-Reduktion entspricht der ersten Ableitung des *Gravitationspotentials der Wurzeln und Antiwurzeln* V^C nach der sphärischen geozentrischen Koordinate r_P des Berechnungspunktes P . Die Kugelfunktionsentwicklung des Gravitationspotential der Wurzeln und Antiwurzeln auf der Kugelschale mit Radius R kann aus Gleichung 3.4 abgeleitet werden:

$$V^C(\lambda_P, \theta_P) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos \theta_P) [\bar{C}^c_{nm} \cos m\lambda_P + \bar{S}^c_{nm} \sin m\lambda_P]. \quad (4.14)$$

Mit den dimensionslosen normierten Potentialkoeffizienten der Kompensation, die sich aus Gleichung 3.5 ableiten lassen.

$$\left. \begin{array}{l} \overline{C}_{nm}^C \\ \overline{S}_{nm}^C \end{array} \right\} = -\frac{3}{\overline{\rho}_{Erde} R^3 (2n+1)} \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=R-D-t_Q}^{R-D} \left(\frac{r_Q}{R}\right)^n \Delta\rho \overline{P}_{nm}(\cos\theta_Q) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda_Q \\ \sin m\lambda_Q \end{Bmatrix} d\Sigma_Q \quad (4.15)$$

Diese Formel kann umgeformt werden durch Einführen von A_Q^C . Mit

$$A_Q^C = \int_{r=R-D-t_Q}^{R-D} \left(\frac{r_Q}{R}\right)^{n+2} \Delta\rho dr = \Delta\rho \cdot \frac{R}{n+3} \left[\left(\frac{R-D}{R}\right)^{n+3} - \left(\frac{R-D-t_Q}{R}\right)^{n+3} \right] \quad (4.16)$$

entsteht folgende Formel für die dimensionslosen normierten Potentialkoeffizienten der Kompensation

$$\left. \begin{array}{l} \overline{C}_{nm}^C \\ \overline{S}_{nm}^C \end{array} \right\} = -\frac{3}{\overline{\rho}_{Erde} R (2n+1)} \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} A_Q^C \overline{P}_{nm}(\cos\theta_Q) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda_Q \\ \sin m\lambda_Q \end{Bmatrix} d\sigma_Q. \quad (4.17)$$

Diese Formel lässt sich vereinfachen, indem man die exakte Formel 4.16 für A_Q^C durch eine Potenzreihenentwicklung bis zur 3. Ordnung ersetzt. Die Potenzreihenentwicklung bis zur 3. Ordnung von A_Q^C ergibt sich aus der Potenzreihenentwicklung bis zur 3. Ordnung des Faktors $\left(\frac{R-D-t_Q}{R-D}\right)^{n+3}$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{R-D-t_Q}{R-D}\right)^{n+3} &= 1 - (n+3) \frac{t_Q}{R-D} + \frac{(n+3)(n+2)}{2} \left(\frac{t_Q}{R-D}\right)^2 - \\ &\quad - \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} \left(\frac{t_Q}{R-D}\right)^3 \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$A_Q^C = \Delta\rho t_Q \left(\frac{R-D}{R}\right)^{n+2} \left[1 - \frac{n+2}{2} \frac{t_Q}{R-D} + \frac{(n+2)(n+1)}{6} \left(\frac{t_Q}{R-D}\right)^2 \right] \quad (4.19)$$

Nach Einsetzen in Gleichung 4.17, Ersetzen der *Dicke der Wurzel* bzw. *Antiwurzel* t_Q durch Gleichung 2.20 und nach entsprechenden Umformungen und Einführung von Notationen erhält man folgende Gleichung für **dimensionslosen normierten Potentialkoeffizienten der Kompensation**

$$\left. \begin{array}{l} \overline{C}_{nm}^C \\ \overline{S}_{nm}^C \end{array} \right\} = -\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\rho_{cr}}{\overline{\rho}_{Erde}} \left[\left(\frac{R-D}{R}\right)^n \begin{Bmatrix} \overline{h}_{nmc} \\ \overline{h}_{nms} \end{Bmatrix} - \frac{(n+2)}{2} \frac{\rho_{cr}}{\Delta\rho} \left(\frac{R-D}{R}\right)^{n-3} \begin{Bmatrix} \overline{h}_{2nmc} \\ \overline{h}_{2nms} \end{Bmatrix} + \right. \\ \left. + \frac{(n+2)(n+1)}{6} \left(\frac{\rho_{cr}}{\Delta\rho}\right)^2 \left(\frac{R-D}{R}\right)^{n-6} \begin{Bmatrix} \overline{h}_{3nmc} \\ \overline{h}_{3nms} \end{Bmatrix} \right] \quad (4.20)$$

mit den **Kugelfunktionskoeffizienten der normalisierten äquivalenten Gesteinstopographie und ihren Potenzen**. Im vorherigen Abschnitt wird ausführlich beschrieben wie diese Größen zu berechnen sind.

Jetzt kann die Airy-Heiskanen-Reduktion berechnet werden. Sie entspricht der Schwereanziehung der Wurzeln und Antiwurzeln, die mit Hilfe der GSHS aus \overline{C}_{nm}^C und \overline{S}_{nm}^C ermittelt werden kann. Die Kugelfunktionsentwicklung der kontinuierlichen Funktion der **Airy-Heiskanen-Reduktion auf der Kugelschale mit Radius R** lautet:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{A}_m^C(\theta) \\ \overline{B}_m^C(\theta) \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^N \overline{P}_{nm}(\cos \theta) \left\{ \begin{array}{l} -\frac{GM}{R^2}(n+1)\overline{C}_{nm}^C \\ -\frac{GM}{R^2}(n+1)\overline{S}_{nm}^C \end{array} \right., \quad (4.21)$$

$$AHC(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^N \overline{A}_m^C(\theta) \cos m\lambda + \overline{B}_m^C(\theta) \sin m\lambda. \quad (4.22)$$

In dieser Arbeit wurde nicht die kontinuierliche Funktion sondern die diskrete Funktion der Airy-Heiskanen-Reduktion, die Blockmittelwerte enthält, nach dem Prinzip das in Kapitel ?? beschreiben ist berechnet. In Abbildung 4.28 ist die Airy-Heiskanen-Reduktion für $15' \times 15'$ -Blöcke dargestellt. Laut der Überlegungen am Anfang dieses Kapitels müsste die Airy-Heiskanen-Reduktion im Landbereich positiv und im Ozeanbereich negativ sein. Betrachtet man Abbildung 4.23 so stellt man fest, dass die Airy-Heiskanen-Reduktion nur für die großen Gebirge: Himalaya, Anden und Rocky Mountains positiv ist. In den übrigen Landbereichen ist die Airy-Heiskanen-Reduktion negativ. Startet man die Kugelfunktionsentwicklung der Airy-Heiskanen-Reduktion erst mit dem Grad 2, dann erhält man im Landbereich positive Werte für die Airy-Heiskanen-Reduktion und im Ozeanbereich negative Werte mit Ausnahme des ostpazifischen Rückens. Die Airy-Heiskanen-Reduktion verhält sich folglich genau entgegengesetzt der verfeinerten Bouguerreduktion.

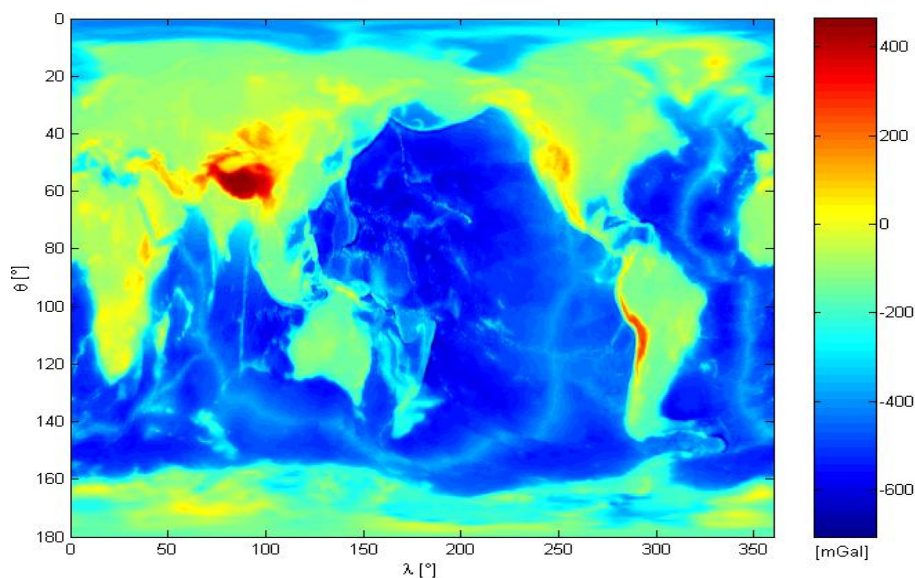


Abb. 4.28: Airy-Heiskanen-Reduktion

Statistische Werte	
Wertebereich [mGal]	[-705.3730 463.9218]
Gewichteter Mittelwert [mGal]	-322.3952
Gewichtete Varianz [mGal ²]	39494
Gewichteter RMS [mGal]	±198.7305

Zur Überprüfung der Airy-Heiskanen-Reduktion vergleicht man sie mit der verfeinerten Bouguerreduktion. Die verfeinerte Bouguerreduktion entspricht der Anziehungskraft der Topographie und die Airy-Heiskanen-Reduktion entspricht der Anziehungskraft der Wurzeln und Antiwurzeln. Betrachtet man die linearen Gleichungen 4.23 und 4.24 der beiden Reduktionen so stellt man fest, dass sie sich bei einer Addition aufheben würden, wenn die Kompensationstiefe gleich Null ist. Das bedeutet, dass die topographischen Massen perfekt kompensiert werden. Wenn die Kompensationstiefe gleich dem mittleren Erdradius R ist, dann ist die Airy-Heiskanen-Reduktion gleich Null. Das bedeutet, dass die topographischen Massen nicht kompensiert werden.

$$\left. \begin{array}{l} \overline{C}_{nm}^T \\ \overline{S}_{nm}^T \end{array} \right\} = \frac{3}{2n+1} \frac{\rho_{cr}}{\overline{\rho}_{Erde}} \left\{ \begin{array}{l} \overline{h}_{nmc} \\ \overline{h}_{nms} \end{array} \right. \quad (4.23)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{C}_{nm}^C \\ \overline{S}_{nm}^C \end{array} \right\} = -\frac{3}{2n+1} \frac{\rho_{cr}}{\overline{\rho}_{Erde}} \left(\frac{R-D}{R} \right)^n \left\{ \begin{array}{l} \overline{h}_{nmc} \\ \overline{h}_{nms} \end{array} \right. \quad (4.24)$$

Diese beiden extrem Fälle wurden im Rahmen dieser Arbeit getestet und haben diese Aussagen bestätigt. Man kann also davon ausgehen, dass die Berechnungen für die Airy-Heiskanen-Reduktion richtig durchgeführt wurden.

Zur Berechnung der Airy-Heiskanen-Reduktion muss man unter anderem die Kompensationstiefe kennen. Sie kann als konstante Größe betrachtet werden oder als eine Größe die vom Grad der Kugelfunktionsentwicklung abhängig ist. Verschiedene Studien haben ergeben, dass die Kompensationstiefe gut mit der Tiefe der Moho-Diskontinuität übereinstimmt [TORGE (2003)]. Da die mittlere Krustendicke bei 35 km liegt, kann man z.B. davon ausgehen, dass die mittlere Kompensationstiefe 30 km beträgt. In RAPP et al. (1988) werden 3 Methoden zur Berechnung der Kompensationstiefen in Abhängigkeit von dem Grad der Kugelfunktionsentwicklung vorgestellt. Hier werden die Formeln zur Berechnung der gradabhängigen Kompensationstiefe nach den 3 Methoden kurz aufgeführt.

Methode 1: Die Gradvarianzen des *beobachteten Gravitationspotentials* V^{EGM96} und des *Gravitationspotential der isostatisch kompensierten Topographie* $V^I = V^T + V^C$ sollen übereinstimmen. Das bedeutet, man sucht nach den *gradabhängigen Kompensationstiefen* D_n , bei denen das *isostatisch reduzierte Gravitationspotential* $V^{ISO} = V^{EGM96} - V^I$ kleine Residuen besitzt. Man ist an möglichst kleinen Residuen interessiert, da diese von Vorteil beim Durchführen von Interpolationen sind. Betrachtet man allerdings nur die Gradvarianzen, so begeht man einen Fehler, da die Kreuzgradvarianzen $cov_n(V^I, V^{ISO})$ vernachlässigt werden. D.h., wenn $c_n^2(V^{EGM96})$ gleich $c_n^2(V^I)$ ist, dann müssen die Residuen des isostatisch reduzierten Gravitationspotentials nicht zwingend klein sein, da gilt:

$$c_n^2(V^{EGM96}) = c_n^2(V^I) + 2cov_n(V^I, V^{ISO}) + c_n^2(V^{ISO}). \quad (4.25)$$

Aus der fehlerhaften Bedingung $c_n^2(V^{EGM96}) - c_n^2(V^I) = 0$ kann die lineare Näherungsformel zur Berechnung der gradabhängigen Kompensationstiefen abgeleitet werden, sie lautet:

$$D_n = R \left[1 - \left(1 - \frac{\sqrt{c_n^2(V^{EGM96})}}{\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\rho_{cr}}{\rho_{Erde}} \sqrt{c_n^2\left(\frac{h}{R}\right)}} \right)^{\frac{1}{n}} \right]. \quad (4.26)$$

Im Rahmen dieser Arbeit wurde lediglich die lineare Näherungsformel betrachtet, um ein Gefühl für das Verhalten der gradabhängigen Kompensationstiefen zu erhalten. Da die lineare Näherungsformel für den Entwicklungsgrad $n = 0$ nicht definiert ist, wurden die Kompensationstiefe erst ab dem Entwicklungsgrad $n = 2$ berechnet. In Abbildung 4.29 sind die gradabhängigen Kompensationstiefen dargestellt.

Methode 2: Hier werden gradabhängige Kompensationstiefen bestimmt, bei denen das *Gravitationspotential der Topographie* V^T minimale Korrelation mit dem *isostatisch reduzierten Gravitationspotential* V^{ISO} zeigt. Mit anderen Worten der Betrag der Kreuzgradvarianzen $|cov_n(V^T, V^{ISO})|$ muss minimal sein. Diese Bedingung zielt ebenfalls darauf ab, dass die Residuen des isostatisch reduzierten Gravitationspotentials möglichst klein und glatt werden sollen. Die lineare Näherungsformel für die gradabhängigen Kompensationstiefen

$$D_n = R \left[1 - \left(1 - \frac{cov_n(V^{EGM96}, \frac{h}{R})}{\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\rho_{cr}}{\rho_{Erde}} c_n^2\left(\frac{h}{R}\right)} \right)^{\frac{1}{n}} \right] \quad (4.27)$$

kann verwendet werden um ein Gefühl für das Verhalten der gradabhängigen Kompensationstiefen zu bekommen. Auch hier ist die lineare Näherungsformel für den Grad $n = 0$ nicht definiert. Die Kompensationstiefe wurden daher erst ab dem Entwicklungsgrad $n = 2$ berechnet. In Abbildung 4.29 sind die gradabhängigen Kompensationstiefen dargestellt.

Methode 3: Bei dieser Methode werden gradabhängigen Kompensationstiefen berechnet bei denen das *quadrierte isostatisch reduzierte Gravitationspotential* V^{ISO^2} minimal ist. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, dann ist das Signal des isostatisch reduzierten Gravitationspotentials glatt. Es ergibt sich dieselbe lineare Näherungsformeln zur Berechnung der gradabhängigen Kompensationstiefen, die sich auch für Methode 2 ergeben hat. Die Formeln zur Berechnung der gradabhängigen Kompensationstiefen nach Methode 2 und 3 unterscheiden sich erst in der quadratischen Näherungsformel.

In Abbildung 4.29 sind die gradabhängigen Kompensationstiefen nach Methode 1, 2 und 3 dargestellt. Für den Entwicklungsbereich $n = [1 \quad 4]$ ergaben sich sehr große Kompensationstiefen. Diese erscheinen aus der Sicht eines Geophysikers unrealistisch und könnten ein Hinweis darauf sein das Gebiete mit einer Ausdehnung von ca. 10000 km auf Mantelkonvektionen zurückzuführen sind.

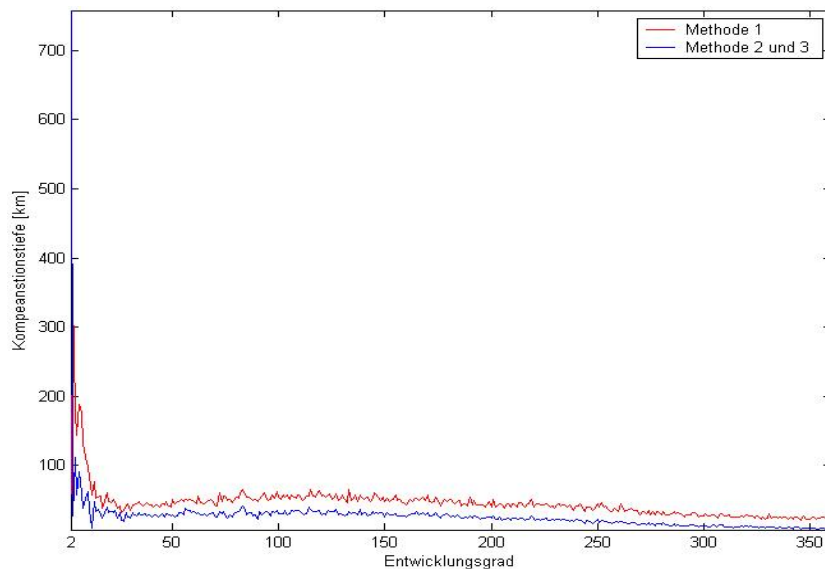


Abb. 4.29: Gradabhängige Kompensationstiefen nach Methode 1, 2 und 3

Statistische Werte	Methode 1	Methode 2 u. 3
Wertebereich [km]	[19.9569 344.8107]	[6.9638 757.9995]
Mittelwert [km]	45.1262	25.9718
Varianz [km ²]	611.2633	1618.7
RMS [km]	± 24.6893	± 40.1771

Zur Untersuchung des Verhaltens der gradabhängigen Kompensationstiefen nach Methode 1, 2 und 3 wurden in dieser Arbeit die Mittelwerte der Kompensationstiefen für verschiedene Entwicklungsbereiche ermittelt. Die Kompensationstiefen nehmen mit zunehmenden Entwicklungsgrad ab.

Entwicklungsbereich	Statistische Werte	Methode 1	Methode 2 u. 3
$n = [2 \quad 29]$	Mittelwert [km]	85.2553	65.3374
$n = [30 \quad 180]$	Mittelwert [km]	50.8519	30.1151
$n = [181 \quad 360]$	Mittelwert [km]	34.0806	16.3726

Freiluftanomalien

Die Freiluftreduktion läßt sich in einen linearen und quadratischen Teil trennen. Sie können näherungsweise aus dem linearen bzw. quadratischen Normalschweregradient berechnet werden [GRUBER (2000)]. Der *lineare Anteil der Freiluftreduktion* FAR_1

$$FAR_1 \approx -\frac{\partial\gamma_{45^\circ}}{\partial h}h \approx 0.3086 \left[\frac{mGal}{m} \right] h \quad (4.28)$$

und der *quadratische Anteil der Freiluftreduktion* FAR_2

$$FAR_2 \approx -\frac{\partial^2\gamma}{\partial h^2}h^2 \approx 3\gamma_Q \left(\frac{h}{a} \right)^2 h^2 \quad (4.29)$$

können auf diese Weise berechnet werden.

Mit a = Große Halbachse des Referenzellipsoids,
 $\frac{\partial\gamma_{45^\circ}}{\partial h}$ = Freiluftgradient der Normalschwere bei einer mittleren Breite von 45° ,
 γ_Q = Normalschwere im Ellipsoidpunkt
 und h = orthometrische Höhe.

Konstanten des Referenzellipsoids GRS80:

a	= 6378137 m	Große Halbachse des Referenzellipsoids GRS80
GM	= $3.986005 \cdot 10^{14} m^3/s^2$	Gravitationskonstante multipliziert mit der Masse der Erde
ω	= $7.292115 \cdot 10^{-5} rad/s$	Mittlere Winkelgeschwindigkeit
$\frac{1}{f}$	= 1/298.257222101	Abplattung

Weiterer Referenzellipsoid Größen, die sich laut [HEISKANEN & MORITZ (1967)] aus den Konstanten des Referenzellipsoids ableiten lassen:

b	= Kleine Halbachse des Referenzellipsoids
e	= 1. Numerische Exzentrizität
e'	= 2. Numerische Exzentrizität
γ_a	= Normalschwere am Äquator
γ_p	= Normalschwere an den Polen

Die Normalschwere γ_Q kann über die Formel von Somigliana berechnet werden [HEISKANEN & MORITZ (1967)].

$$\gamma_Q = \gamma_a \left(\frac{1 + k \sin^2 \phi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} \right) 10^5 \quad (4.30)$$

Die Freiluftanomalien erhält man durch anbringen der Freiluftreduktion an die beobachteten Schwerewerte und durch Subtraktion der Normalschwere.

$$\Delta g^{FAR} = g + FAR_1 + FAR_2 - \gamma \quad (4.31)$$

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden die globalen Freiluftanomalien nicht nach diesem Prinzip berechnet, sondern aus dem Schwerefeldmodell EGM96 abgeleitet (Kapitel 4.1.2).

Isostatisch reduzierte Schwereanomalien

In diesem Abschnitte wird erklärt wie man die isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach dem Airy-Heiskanen-Modell berechnen kann. Am Anfang von Kapitel 4.2.1 wird der Rechenweg beschrieben, demnach erhält man die isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach AIRY durch Addition der Freiluftanomalien, der verfeinerten Bouguerreduktion und der Airy-Heiskanen-Reduktion. Dies ist nicht ganz richtig, da man auf diese Weise die sekundären indirekten Effekte der Massenverlagerungen vernachlässigt. Die Verlagerung der Massen bei der verfeinerten Bouguerreduktion und der Airy-Heiskanen-Reduktion führt zu einer Veränderung des Erdschwerefeldes und damit auch des Geoids (indirekter Effekt). Die Schwerewerte müssen deshalb vom Geoid auf das jeweilige Cogeoid mit Hilfe folgender Formeln reduzierte werden [TORGE (2003)].

$$\delta g^{BTR}(\theta, \lambda) = \frac{2}{R} V^T(\theta, \lambda) \quad (4.32)$$

$$\delta g^{AHC}(\theta, \lambda) = \frac{2}{R} V^C(\theta, \lambda) \quad (4.33)$$

Die isostatische Reduktion nach AIRY für die Schwereanomalien auf der Kugelschale mit Radius R erhält man durch Addition der verfeinerten Bouguerreduktion, der Airy-Heiskanen-Reduktion und der beiden sekundären indirekten Effekte.

$$ISO_{Airy}^{\Delta g}(\theta, \lambda) = BTR(\theta, \lambda) + \delta g^{BTR}(\theta, \lambda) + AHC(\theta, \lambda) + \delta g^{AHC}(\theta, \lambda) \quad (4.34)$$

Die **isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach AIRY** erhält man durch Addition der Freiluftanomalien und der isostatischen Reduktion.

$$\Delta g_{Airy}^{ISO}(\theta, \lambda) = \Delta g^{FAR}(\theta, \lambda) + ISO_{Airy}^{\Delta g}(\theta, \lambda) \quad (4.35)$$

In Abbildung 4.30 ist die isostatische Reduktion nach AIRY für die Schwereanomalien, die im Rahmen dieser Arbeit für $15' \times 15'$ -Blöcke berechnet wurde, dargestellt. Wenn das Airy-Heiskanen-Modell die Realität vollständig approximieren würde, dann könnte man mit Hilfe der isostatischen Reduktion die Erdkruste komplett regulieren, so dass sie eine konstante Mächtigkeit besitzt und homogen ist. Die isostatische Reduktion wäre in diesem Fall gleich Null und die isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach AIRY würden den Freiluftanomalien entsprechen. Da das Airy-Heiskanen-Modell die Realität nicht vollständig approximiert, schwanken die Residuen der isostatischen Reduktion nach AIRY für die Schwereanomalien um Null.

Statistische Werte	
Wertebereich [mGal]	[-244.5548 145.1212]
Gewichteter Mittelwert [mGal]	0.9038
Gewichtete Varianz [mGal ²]	253.1114
Gewichteter RMS [mGal]	±15.9095

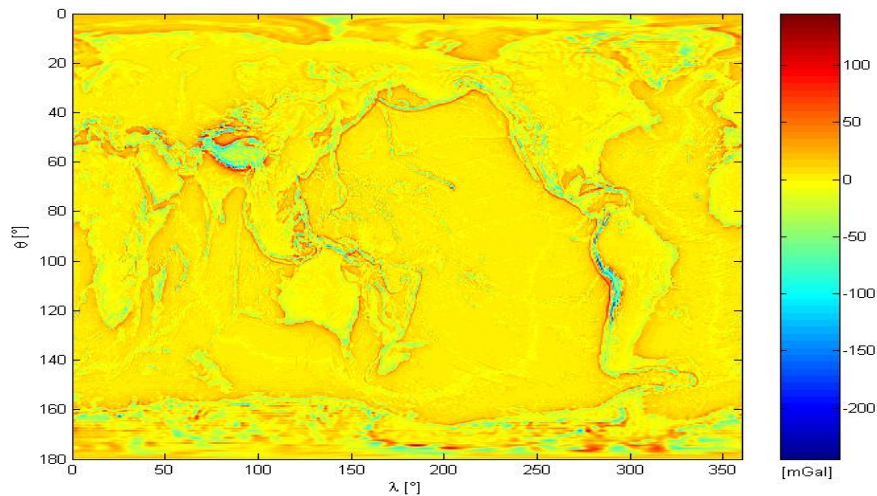


Abb. 4.30: Isostatische Reduktion nach AIRY für die Schwereanomalien

Abbildung 4.31 zeigt die isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach AIRY für einer konstante Kompensationstiefe von 30 km, die im Rahmen dieser Arbeit für $15' \times 15'$ -Blöcke berechnet wurden. Wenn das Airy-Heiskanen-Modell die Kompensation der topographischen Massen in den darunterliegenden Erdschichten perfekt beschreiben würde, dann würde das isostatisch reduzierte Gravitationspotential laterale Dichteveränderungen des Erdmantels und -kerns widerspiegeln, da es frei vom Einfluss der Erdkruste wäre. In Kapitel 5 werden die isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach AIRY ausführlich analysiert.

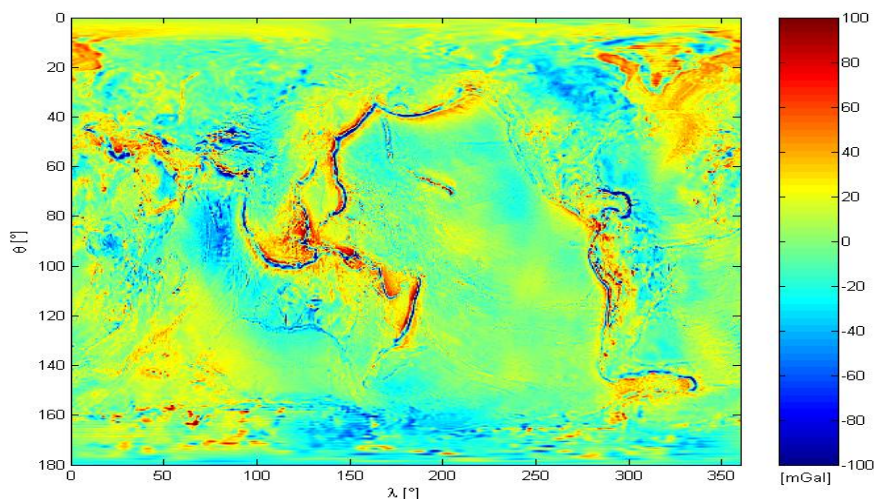


Abb. 4.31: Isostatisch reduzierte Schwereanomalien nach AIRY

Statistische Werte	
Wertebereich [mGal]	$[-276.4061 \quad 348.6836]$
Gewichteter Mittelwert [mGal]	0.9038
Gewichtete Varianz [mGal ²]	473.5369
Gewichteter RMS [mGal]	± 21.7609

4.2.2 Isostatisch reduzierte Geoidhöhen

In diesem Abschnitte wird erklärt wie man die isostatisch reduzierten Geoidhöhen nach dem Airy-Heiskanen-Modell berechnen kann. Die *isostatisch reduzierten Geoidhöhen nach AIRY* N_{Airy}^{ISO} könnten analog zu den isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach AIRY aus den einzelnen Reduktionen oder mit Hilfe der isostatisch reduzierten Potentialkoeffizienten und den Potentialkoeffizienten des Normalschwerefeldes berechnet werden. Der Rechenaufwand des zweiten Rechenwegs ist geringer und wird deshalb hier vorgestellt. Auf diese Weise berechnet man allerdings nicht das Geoid selbst sondern das Cogeoid. Da es, wie schon im vorherigen Kapitel erklärt wurde, aufgrund der Massenverlagerungen zur Veränderung des Schwerefeld und somit auch des Geoids kommt (indirekter Effekt) [TORGE (2003)].

Die GSHS der kontinuierlichen Funktion der **isostatisch reduzierten Geoidhöhen nach AIRY auf der Kugelschale mit Radius R** lautet:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{A}_m^{ISO^N_{Airy}}(\theta) \\ \bar{B}_m^{ISO^N_{Airy}}(\theta) \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^N \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \left\{ \begin{array}{l} R\Delta\bar{C}_{nm}^{ISO_{Airy}} \\ R\Delta\bar{S}_{nm}^{ISO_{Airy}} \end{array} \right\}, \quad (4.36)$$

$$N_{Airy}^{ISO}(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^N \bar{A}_m^{ISO^N_{Airy}}(\theta) \cos m\lambda + \bar{B}_m^{ISO^N_{Airy}}(\theta) \sin m\lambda \quad (4.37)$$

$$\text{mit } \left. \begin{array}{l} \Delta\bar{C}_{nm}^{ISO_{Airy}} \\ \Delta\bar{S}_{nm}^{ISO_{Airy}} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_{nm}^{EGM96} \\ \bar{S}_{nm}^{EGM96} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_{nm}^T \\ \bar{S}_{nm}^T \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_{nm}^C \\ \bar{S}_{nm}^C \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \bar{c}_{nm} \\ \bar{s}_{nm} \end{array} \right\}. \quad (4.38)$$

Die isostatische Reduktion nach AIRY für die Geoidhöhen ISO_{Airy}^N erhält man durch Bilden folgender Differenz:

$$ISO_{Airy}^N(\theta, \lambda) = N_{Airy}^{ISO}(\theta, \lambda) - N^{EGM96}(\theta, \lambda). \quad (4.39)$$

Sie entspricht dem vertikalen Abstand zwischen Geoid und Cogeoid δN . Das Theorem von BRUNS 4.40

$$\delta N = \frac{V_{Airy}^I}{\gamma} \quad (4.40)$$

verbindet den vertikalen Abstand mit dem indirekten Effekt, der sich auf das Erdschwerefeld auswirkt [TORGE (2003)]. Der indirekte Effekt entspricht dem Gravitationspotential der kompensierten äquivalenten Gesteinstopographie $V_{Airy}^I = V^T + V^C$.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden nicht die kontinuierlichen Funktionen sondern die globalen diskreten Funktionen, nach dem Prinzip das in Kapitel ?? beschreiben ist, berechnet. Abbildung 4.32 zeigt die isostatische Reduktion nach AIRY für die Geoidhöhen, die für $15' \times 15'$ -Blöcke berechnet wurde.

Statistische Werte	
Wertebereich [m]	[-33.7757 - 0.5192]
Gewichteter Mittelwert [m]	-5.8831
Gewichtete Varianz [m ²]	13.0179
Gewichteter RMS [m]	±3.6080

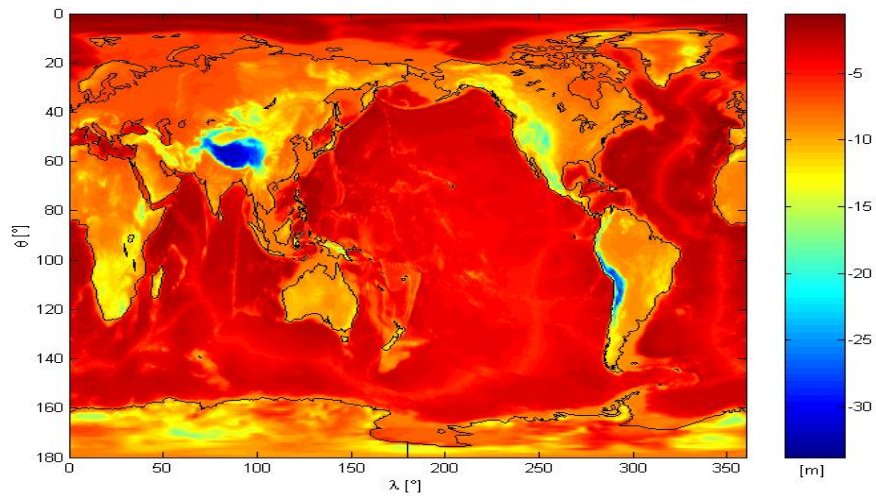


Abb. 4.32: Isostatische Reduktion nach AIRY für die Geoidhöhen

Abbildung 4.33 zeigt die isostatisch reduzierten Geoidhöhen nach AIRY für eine konstante Kompensationstiefe von 30 km, die ebenfalls für $15' \times 15'$ -Blöcke berechnet wurden. Eine ausführliche Untersuchung der isostatisch reduzierten Geoidhöhen nach AIRY erfolgt in Kapitel 5.

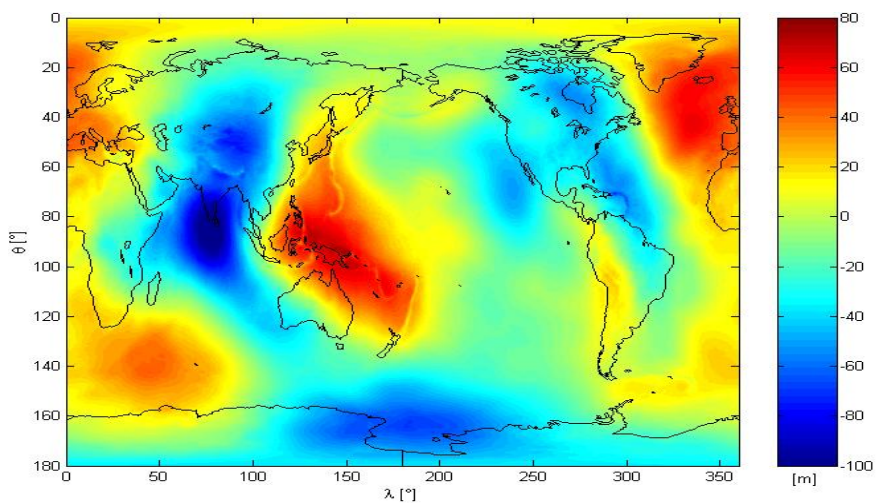


Abb. 4.33: Isostatisch reduzierte Geoidhöhen nach AIRY

Statistische Werte	
Wertebereich [m]	$[-108.7764 \quad 74.7365]$
Gewichteter Mittelwert [m]	-5.8831
Gewichtete Varianz [m ²]	938.4330
Gewichteter RMS [m]	± 30.6339

4.3 Nach dem Pratt-Hayford-Modell

In diesem Abschnitt wird ausführlich erklärt wie die isostatisch reduzierten Schwereanomalien und Geoidhöhen nach dem Pratt-Hayford-Modell berechnet werden können.

4.3.1 Isostatisch reduzierte Schwereanomalien

In diesem Kapitel werden die Formeln zur Berechnung der isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach dem Pratt-Hayford-Modell hergeleitet. In RUMMEL (2002) wird beschrieben wie man in 3 Schritten die isostatisch reduzierten Schwereanomalien berechnen kann. Dieses Prinzip wurde aufgegriffen und in dieser Arbeit in die Praxis umgesetzt. Die einzelnen Rechenschritte werden in den folgenden Abschnitten ausführlich erklärt. Zur Veranschaulichung wurde für jeden Rechenschritt eine schematische Darstellungen der Erde angefertigt. In Abbildung 4.34 ist das schematische Erdmodell, von dem PRATT bei der Entwicklung seines lokalen Kompensationsmodells ausgegangen ist, dargestellt. Dieses Modell dient als Ausgangsmodell für die folgenden Berechnungen. Es wird angenommen, dass die gemessenen Schwerewerte unter den dargestellten Voraussetzungen entlang der orangen Linie beobachtet wurden. Die hell- und dunkelgrau eingefärbten Bereiche kennzeichnen die Dichteveriationen innerhalb der Lithosphäre.

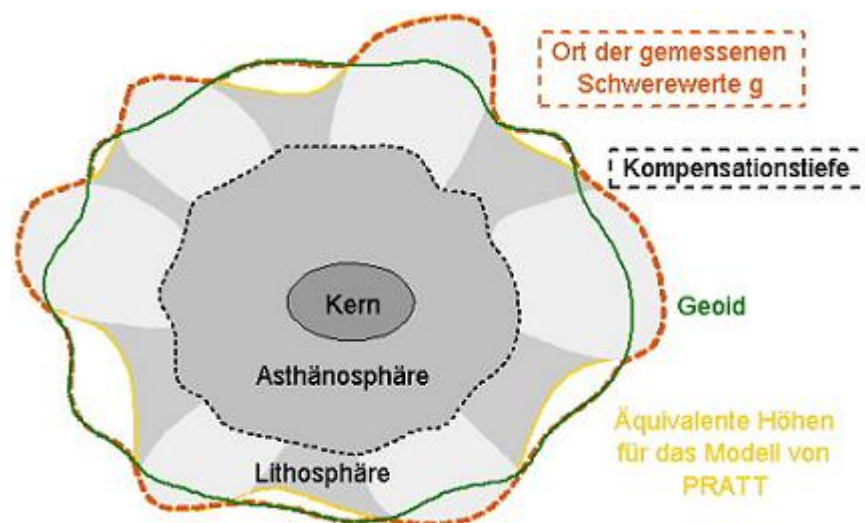


Abb. 4.34: Erdmodell nach PRATT

1.Schritt: Alle Massen werden von der äquivalenten Topographie für das Modell von PRATT bis zur Kompensationstiefe entfernt. Es entsteht ein Erdkörper, der dem um die Kompensationstiefe verkleinertem Geoid gleicht. Die *beobachteten Schwerewerte g* nehmen überall ab, da die Anziehungskraft dieser Massen fehlt. In Abbildung 4.35 ist dieser Rechenschritt dargestellt. Die Reduktion wird als *Removereduktion REM* bezeichnet (englisch: *remove* = entfernen).

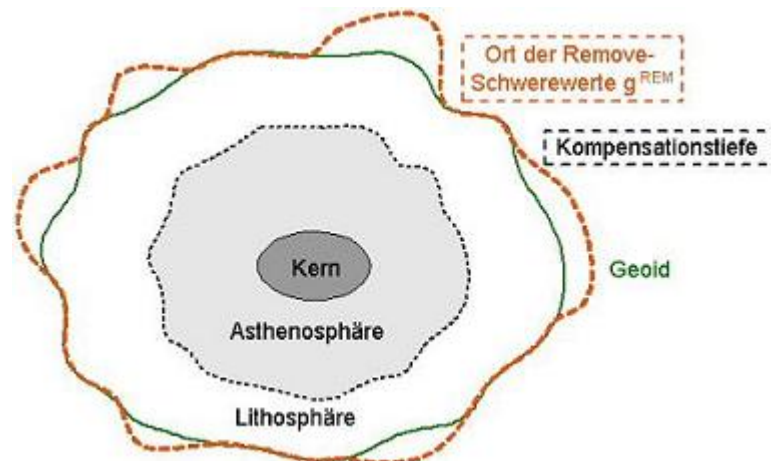


Abb. 4.35: Erdmodell nach PRATT ohne alle Massen mit variabler Dichte bis zur Kompensationstiefe

2.Schritt: Hinzufügen von Massen mit einer konstanten Dichte von der Kompensationstiefe bis zum Geoid. Die Figur des Erdkörpers gleicht nun dem Geoid und besitzt eine konstante Dichte bis zur Kompensationstiefe. Die Schwerewerte nehmen zu, da diese Massen eine zusätzliche Anziehungskraft bewirken. In Abbildung 4.36 ist dieser Vorgang dargestellt. Die Reduktion bezeichnet man als *Restorereduktion RES* (englisch: *restore* = zurücksetzen).

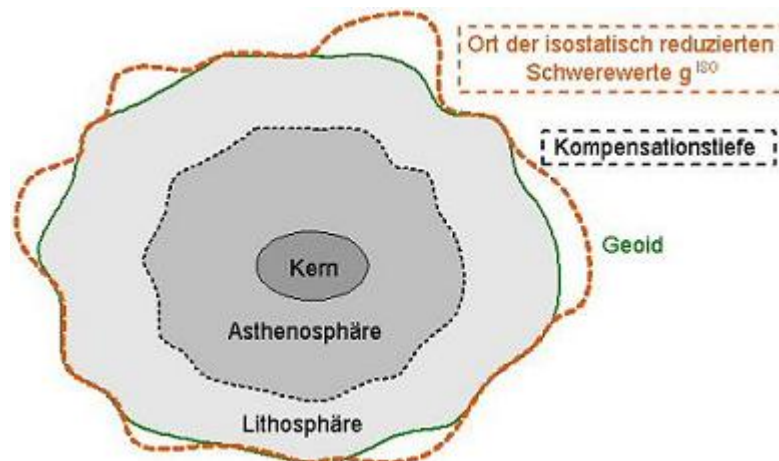


Abb. 4.36: Erdmodell nach PRATT bei dem die Lithosphäre eine konstante Dichte bis zur Kompensationstiefe besitzt

3.Schritt: Die isostatisch reduzierten Schwerewerte nach PRATT befinden sich immer noch entlang der orangenen Linie. Sie „schweben“ folglich zum Teil über dem Geoid. Mit Hilfe der *Freiluftreduktion FAR* können sie auf das Geoid reduziert werden. Aufgrund des geringeren Abstandes zum Erdmittelpunkt, nehmen die Schwerewerte im Landbereich zu. Im Ozeanbereich ändern sie sich nicht, da sie sich bereits auf dem Geoid befinden. Durch Subtraktion der *Normalschwere* γ des Referenzellipsoids erhält man die *isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach PRATT* Δg_{Pratt}^{ISO} .

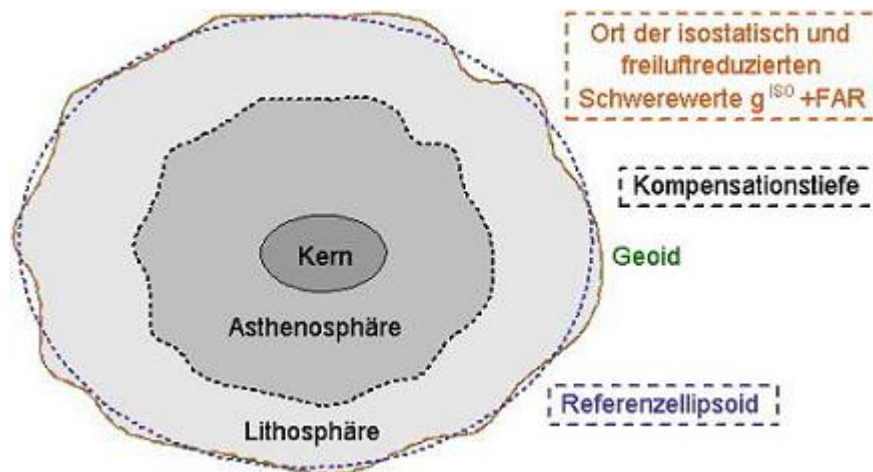
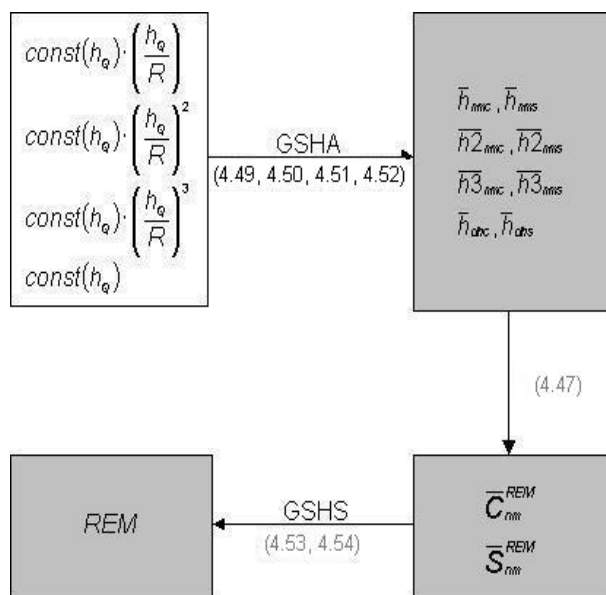


Abb. 4.37: Ort der isostatisch und freiluftreduzierten Schwerewerte

Bei der Berechnung der isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach dem Pratt-Hayford-Modell kommt es nicht darauf an, in welcher Reihenfolge man die einzelnen Rechenschritte durchführt.

Removereduktion

Die Removereduktion kann in 3 Schritten aus den äquivalenten Höhen für das Modell von PRATT berechnet werden. Der Rechenweg ist analog zu dem der verfeinerten Bouguerreduktion. In Abbildung 4.38 ist der Rechenweg dargestellt. Die weiß hinterlegten Kästchen kennzeichnen den Ortsbereich und die grau hinterlegten Kästchen den Spektralbereich.



1.Schritt: Berechnung der *Kugelfunktionskoeffizienten* \bar{h}_{nmc} , \bar{h}_{nms} usw. aus der erweiterten normalisierten äquivalenten Höhenfunktion für das Modell von Pratt $\left(\frac{R^3 - (R-D)^3}{(R+h)^3 - (R-D)^3}\right) \frac{h}{R}$ und ihren Potenzen mit Hilfe der GSHA.

2.Schritt: Berechnung der *dimensionslosen normierten Potentialkoeffizienten der Removereduktion* \bar{C}_{nm}^{REM} und \bar{S}_{nm}^{REM} aus den Kugelfunktionskoeffizienten.

3.Schritt: Berechnung der Removereduktion aus den dimensionslosen normierten Potentialkoeffizienten der Removereduktion mit Hilfe der GSHS.

Abb. 4.38: Rechenweg der REM

Im folgenden Abschnitt werden die Formeln, die man zur Berechnung der Removereduktion benötigt, hergeleitet. Die Removereduktion entspricht der ersten Ableitung des *Gravitationspotentials der Massen von der äquivalenten Topographie des Modells von PRATT bis zur Kompensationstiefe* V^{REM} nach der sphärischen geozentrischen Koordinate r_P des Berechnungspunktes P. Im Rahmen dieser Arbeit werden die isostatisch reduzierten Schwerefeldfunktionale nach dem Pratt-Hayford-Modell auf der Kugelschale mit Radius R berechnet. Aus diesem Grund müssen die Reduktionen ebenfalls auf der Kugelschale mit Radius R berechnet werden. Die sphärische geozentrische Koordinate r_P aller Berechnungspunkte ist deshalb gleich dem Radius R der Kugelschale.

Die Kugelfunktionsentwicklung des Gravitationspotentials der Massen von der äquivalenten Topographie des Modells von PRATT bis zur Kompensationstiefe auf der Kugelschale mit Radius R, lässt sich aus Gleichung 3.4 ableiten.

$$V^{REM}(\lambda_P, \theta_P) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos \theta_P) [\bar{C}_{nm}^{REM} \cos m\lambda_P + \bar{S}_{nm}^{REM} \sin m\lambda_P] \quad (4.41)$$

Die dazu gehörigen dimensionslosen normierten Potentialkoeffizienten lassen sich aus Gleichung 3.5 ableiten.

$$\left. \begin{array}{l} \bar{C}_{nm}^{REM} \\ \bar{S}_{nm}^{REM} \end{array} \right\} = \frac{3}{\bar{\rho}_{Erde} R^3 (2n+1)} \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=R-D}^{R+h_Q} \left(\frac{r_Q}{R}\right)^n \rho_i \bar{P}_{nm}(\cos \theta_Q) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda_Q \\ \sin m\lambda_Q \end{Bmatrix} d\Sigma_Q \quad (4.42)$$

Diese Formel kann umgeformt werden durch Einführen von A_Q^{REM} . Mit

$$A_Q^{REM} = \int_{r=R-D}^{R+h_Q} \left(\frac{r_Q}{R}\right)^{n+2} \rho_i dr = \rho_i \cdot \frac{R}{n+3} \left[\left(\frac{R+h_Q}{R}\right)^{n+3} - \left(\frac{R-D}{R}\right)^{n+3} \right] \quad (4.43)$$

entsteht folgende Formel für die dazu gehörigen dimensionslosen normierten Potentialkoeffizienten

$$\left. \begin{array}{l} \bar{C}_{nm}^{REM} \\ \bar{S}_{nm}^{REM} \end{array} \right\} = \frac{3}{\bar{\rho}_{Erde} R (2n+1)} \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} A_Q^{REM} \bar{P}_{nm}(\cos \theta_Q) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda_Q \\ \sin m\lambda_Q \end{Bmatrix} d\sigma_Q. \quad (4.44)$$

Diese Formel lässt sich vereinfachen, indem man die exakte Formel 4.43 für A_Q^{REM} durch eine Potenzreihenentwicklung bis zur 3. Ordnung ersetzt. Die Potenzreihenentwicklung bis zur 3. Ordnung von A_Q^{REM} ergibt sich aus der Potenzreihenentwicklung bis zur 3. Ordnung des Faktors $\left(\frac{R+h_Q}{R}\right)^{n+3}$.

$$\left(\frac{R+h_Q}{R}\right)^{n+3} = 1 + (n+3) \frac{h_Q}{R} + \frac{(n+3)(n+2)}{2} \left(\frac{h_Q}{R}\right)^2 + \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} \left(\frac{h_Q}{R}\right)^3 \quad (4.45)$$

$$A_Q^{REM} = \rho_i R \left[\frac{h_Q}{R} + \frac{n+2}{2} \left(\frac{h_Q}{R}\right)^2 + \frac{(n+2)(n+1)}{6} \left(\frac{h_Q}{R}\right)^3 \right] + \rho_i \frac{R}{n+3} \left[1 - \left(\frac{R-D}{R}\right)^{n+3} \right] \quad (4.46)$$

Nach Einsetzen der neuen Gleichung 4.46 für A_Q^{REM} und der Gleichung 2.41 für ρ_i in die Gleichung 4.44 für \overline{C}_{nm}^{REM} und \overline{S}_{nm}^{REM} und entsprechenden Umformungen und Einführung von Notationen erhält man folgende Gleichung für die **dimensionslosen normierten Potentialkoeffizienten der Removeduktion**

$$\left. \begin{array}{l} \overline{C}_{nm}^{REM} \\ \overline{S}_{nm}^{REM} \end{array} \right\} = \frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\rho_0}{\overline{\rho}_{Erde}} \left[\left\{ \frac{\overline{h}_{nmc}}{\overline{h}_{nms}} \right\} + \frac{(n+2)}{2} \left\{ \frac{\overline{h}^2_{nmc}}{\overline{h}^2_{nms}} \right\} + \frac{(n+2)(n+1)}{6} \left\{ \frac{\overline{h}^3_{nmc}}{\overline{h}^3_{nms}} \right\} \right] + \frac{3}{(2n+1)(n+3)} \frac{\rho_0}{\overline{\rho}_{Erde}} \left[1 - \left(\frac{R-D}{R} \right)^{n+3} \right] \left\{ \frac{\overline{h}_{dhc}}{\overline{h}_{dhs}} \right\} \quad (4.47)$$

mit den **Kugelfunktionskoeffizienten der erweiterten normalisierten äquivalenten Topographie für das Modell von PRATT und ihren Potenzen**, die mit Hilfe der GSHA berechnet werden können:

$$const(h_Q) = \frac{R^3 - (R-D)^3}{(R+h_Q)^3 - (R-D)^3}, \quad (4.48)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{h}_{nmc} \\ \overline{h}_{nms} \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda_Q=0}^{2\pi} \int_{\theta_Q=0}^{\pi} const(h_Q) \left(\frac{h_Q}{R} \right) \overline{P}_{nm}(\cos \theta_Q) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda_Q \\ \sin m\lambda_Q \end{array} \right\} d\sigma_Q, \quad (4.49)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{h}^2_{nmc} \\ \overline{h}^2_{nms} \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda_Q=0}^{2\pi} \int_{\theta_Q=0}^{\pi} const(h_Q) \left(\frac{h_Q}{R} \right)^2 \overline{P}_{nm}(\cos \theta_Q) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda_Q \\ \sin m\lambda_Q \end{array} \right\} d\sigma_Q, \quad (4.50)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{h}^3_{nmc} \\ \overline{h}^3_{nms} \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda_Q=0}^{2\pi} \int_{\theta_Q=0}^{\pi} const(h_Q) \left(\frac{h_Q}{R} \right)^3 \overline{P}_{nm}(\cos \theta_Q) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda_Q \\ \sin m\lambda_Q \end{array} \right\} d\sigma_Q, \quad (4.51)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{h}_{dhc} \\ \overline{h}_{dhs} \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda_Q=0}^{2\pi} \int_{\theta_Q=0}^{\pi} const(h_Q) \overline{P}_{nm}(\cos \theta_Q) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda_Q \\ \sin m\lambda_Q \end{array} \right\} d\sigma_Q. \quad (4.52)$$

Diese Gleichungen gelten nur für den Fall, dass die äquivalenten Höhen für das Modell von PRATT als globale kontinuierliche Funktion vorliegt.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit standen die äquivalenten Höhen für das Modell von PRATT als globale diskrete Funktion zur Verfügung, die Blockmittelwerte, die im Blockzentrumspunkt registriert sind, enthält (Kapitel 4.1.1). Die GSHA der erweiterten normalisierten äquivalenten Höhen für das Modell von PRATT und ihren Potenzen wurde deshalb nach der Methode, die für Blockmittelwerte gilt (Kapitel 3.1), durchgeführt.

Jetzt kann die Removereduktion mit Hilfe der GSHS aus \overline{C}_{nm}^{REM} und \overline{S}_{nm}^{REM} berechnet werden. Die Removereduktion entspricht der Schwereanziehung der Massen mit unterschiedlicher Dichte von der äquivalenten Topographie für das Modell von PRATT bis zur Kompensationstiefe. Die GSHS für die kontinuierliche Funktion der **Removereduktion auf der Kugelschale mit Radius R** lautet:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{A}_m^{REM}(\theta) \\ \overline{B}_m^{REM}(\theta) \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^N \overline{P}_{nm}(\cos \theta) \left\{ \begin{array}{l} -\frac{GM}{R^2}(n+1)\overline{C}_{nm}^{REM} \\ -\frac{GM}{R^2}(n+1)\overline{S}_{nm}^{REM} \end{array} \right., \quad (4.53)$$

$$REM(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^N \overline{A}_m^{REM}(\theta) \cos m\lambda + \overline{B}_m^{REM}(\theta) \sin m\lambda. \quad (4.54)$$

In dieser Arbeit wurde nicht die kontinuierliche Funktion sondern die globale diskrete Funktion der Removereduktion, die Blockmittelwerte enthält, nach dem Prinzip das in Kapitel 3.1.1 beschrieben ist berechnet. In Abbildung ?? ist die Removereduktion dargestellt, die für $15' \times 15'$ -Blöcke berechnet wurde.

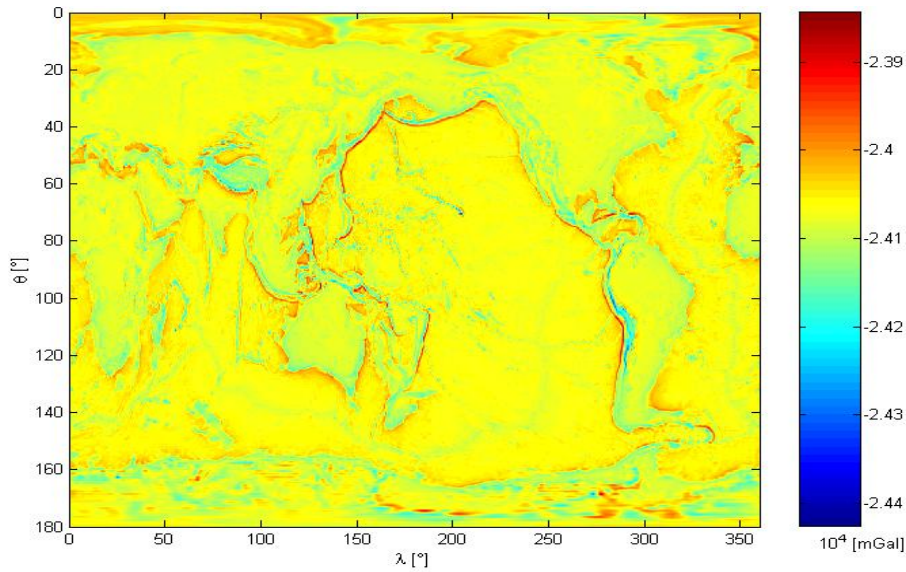
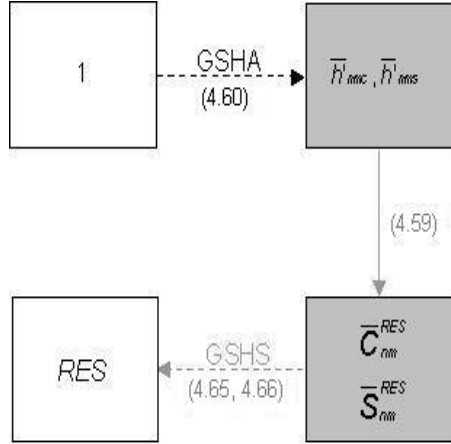


Abb. 4.39: Removereduktion

Statistische Werte	
Wertebereich [mGal]	[-24427 - 23844]
Gewichteter Mittelwert [mGal]	-24072
Gewichtete Varianz [mGal ²]	762.8299
Gewichteter RMS [mGal]	±27.6194

Restorereduktion

Im Folgenden wird erklärt wie man in 3 Schritten die Restorereduktion berechnen kann. In Abbildung 4.40 ist der Rechenweg dargestellt. Die weiß hinterlegten Kästchen kennzeichnen den Ortsbereich und die grau hinterlegten Kästchen den Spektralbereich. Im folgenden



1.Schritt: Berechnung der *Kugelfunktionskoeffizienten* \bar{h}'_{nmc} und \bar{h}'_{nms} der Konstanten 1 mit Hilfe der GSHA.

2.Schritt: Berechnung der *dimensionslosen normierten Potentialkoeffizienten der Restorereduktion* \bar{C}_{nm}^{RES} und \bar{S}_{nm}^{RES} aus den Kugelfunktionskoeffizienten.

3.Schritt: Berechnung der Restorereduktion aus den dimensionslosen normierten Potentialkoeffizienten der Restorereduktion mit Hilfe der GSHS.

Abb. 4.40: Rechenweg der RES

Abschnitt werden die Formeln, die zur Berechnung der Restorereduktion auf der Kugelschale mit Radius R benötigt werden, hergeleitet. Die Restorereduktion entspricht der ersten Ableitung des *Gravitationspotentials der Massen vom Geoid bis zur Kompensationstiefe* V^{RES} nach r_P . Deshalb wird zunächst die Kugelfunktionsentwicklung dieses Gravitationspotential betrachtet, die sich aus Gleichung 3.4 abgeleitet lässt. Mit Hilfe folgender Formel kann das Gravitationspotential der Massen vom Geoid bis zur Kompensationstiefe auf der Kugelschale mit Radius R berechnet werden.

$$V^{RES}(\lambda_P, \theta_P) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos \theta_P) [\bar{C}_{nm}^{RES} \cos m\lambda_P + \bar{S}_{nm}^{RES} \sin m\lambda_P] \quad (4.55)$$

Die dazu gehörigen dimensionslosen normierten Potentialkoeffizienten lassen sich aus Gleichung 3.5 ableiten.

$$\left. \begin{array}{l} \bar{C}_{nm}^{RES} \\ \bar{S}_{nm}^{RES} \end{array} \right\} = -\frac{3}{\bar{\rho}_{Erde} R^3 (2n+1)} \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=R-D}^R \left(\frac{r_Q}{R}\right)^n \rho_0 \bar{P}_{nm}(\cos \theta_Q) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda_Q \\ \sin m\lambda_Q \end{Bmatrix} d\sigma_Q \quad (4.56)$$

Diese Formel kann umgeformt werden durch Einführen von A_Q^{RES} . Mit

$$A_Q^{RES} = \int_{r=R-D}^R \left(\frac{r_Q}{R}\right)^{n+2} \rho_0 dr = \rho_0 \cdot \frac{R}{n+3} \left[1 - \left(\frac{R-D}{R}\right)^{n+3} \right] \quad (4.57)$$

entsteht folgende Formel für die dazu gehörigen dimensionslosen normierten Potentialkoeffizienten

$$\left. \begin{array}{l} \bar{C}_{nm}^{RES} \\ \bar{S}_{nm}^{RES} \end{array} \right\} = -\frac{3}{\bar{\rho}_{Erde} R (2n+1)} \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} A_Q^{RES} \bar{P}_{nm}(\cos \theta_Q) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda_Q \\ \sin m\lambda_Q \end{Bmatrix} d\sigma_Q. \quad (4.58)$$

Nach Einsetzen der neuen Gleichung ?? für A_Q^{RES} in die Gleichung 4.58 für \overline{C}_{nm}^{RES} und \overline{S}_{nm}^{RES} und nach entsprechenden Umformungen und Einführung von Notationen erhält man folgende Gleichung für die **dimensionslosen normierten Potentialkoeffizienten der Restorereduktion**

$$\left. \begin{array}{l} \overline{C}_{nm}^{RES} \\ \overline{S}_{nm}^{RES} \end{array} \right\} = -\frac{3}{(2n+1)(n+3)} \cdot \frac{\rho_0}{\overline{\rho}_{Erde}} \left[1 - \left(\frac{R-D}{R} \right)^{n+3} \right] \left\{ \begin{array}{l} \overline{h}'_{nmc} \\ \overline{h}'_{nms} \end{array} \right\} \quad (4.59)$$

mit den **Kugelfunktionskoeffizienten der Konstanten 1**, die mit Hilfe der GSHA berechnet werden können:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{h}'_{nmc} \\ \overline{h}'_{nms} \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda_Q=0}^{2\pi} \int_{\theta_Q=0}^{\pi} \overline{P}_{nm}(\cos \theta_Q) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda_Q \\ \sin m\lambda_Q \end{array} \right\} d\sigma_Q, \quad (4.60)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{h}'_{nmc} \\ \overline{h}'_{nms} \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda_Q=0}^{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda_Q \\ \sin m\lambda_Q \end{array} \right\} d\lambda_Q \int_{\theta_Q=0}^{\pi} \overline{P}_{nm}(\cos \theta_Q) \sin \theta d\theta. \quad (4.61)$$

Das Integral über die zugeordneten normalisierten Legendre Polynome kann mit Hilfe der Orthogonalität der zugeordneten normalisierten Legendre Polynome gelöst werden.

$$\int_{\theta_Q=0}^{\pi} \overline{P}_{nm}(\cos \theta_Q) \sin \theta d\theta = \begin{cases} 2 & \text{für } n=m=0 \\ 0 & \text{für } n \neq 0 \end{cases} \quad (4.62)$$

Die Lösung des Integrals über die Kosinus- bzw. Sinusfunktion lautet:

$$\int_{\lambda_Q=0}^{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} \cos 0\lambda_Q \\ \sin 0\lambda_Q \end{array} \right\} d\lambda_Q = \begin{cases} 2\pi \\ 0 \end{cases}. \quad (4.63)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen 4.62 und 4.63 in Gleichung 4.61 erhält man die Kugelfunktionskoeffizienten der Konstanten 1:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{h}'_{nmc} \\ \overline{h}'_{nms} \end{array} \right\} = \begin{cases} 1 & \text{für } n=m=0 \\ 0 & \text{für } n \neq 0 \end{cases} \quad (4.64)$$

Die Kugelfunktionskoeffizienten der Konstanten 1 werden ebenfalls in einer Matrix dargestellt, damit es später keine Probleme bei den weiteren Berechnungen aufgrund der Dimensionen gibt.

Jetzt kann die Restorereduktion mit Hilfe der GSHS aus \overline{C}_{nm}^{RES} und \overline{S}_{nm}^{RES} berechnet werden. Die Restorereduktion entspricht der Schwereanziehung der Massen vom Geoid bis zur Kompensationstiefe. Die GSHS für die kontinuierliche Funktion der **Removereduktion auf der Kugelschale mit Radius R** lautet:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{A}_m^{RES}(\theta) \\ \overline{B}_m^{RES}(\theta) \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^N \overline{P}_{nm}(\cos \theta) \left\{ \begin{array}{l} -\frac{GM}{R^2}(n+1)\overline{C}_{nm}^{RES} \\ -\frac{GM}{R^2}(n+1)\overline{S}_{nm}^{RES} \end{array} \right., \quad (4.65)$$

$$RES(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^N \overline{A}_m^{RES}(\theta) \cos m\lambda + \overline{B}_m^{RES}(\theta) \sin m\lambda. \quad (4.66)$$

In der vorliegenden Arbeit wurde nicht die kontinuierliche Funktion sondern die diskrete Funktion der Removereduktion, die Blockmittelwerte enthält, nach dem Prinzip das in Kapitel 3.1.1 beschrieben ist berechnet. Die Removereduktion wurde nicht abgebildet, da sie für die gesamte Erde nahe zu konstant ist.

Statistische Werte	
Wertebereich [mGal]	[24072 24072]
Gewichteter Mittelwert [mGal]	24072
Gewichtete Varianz [mGal ²]	$1.0066 \cdot 10^{-15}$
Gewichteter RMS [mGal]	$\pm 3.1727 \cdot 10^{-8}$

Isostatisch reduzierte Schwereanomalien

In diesem Abschnitte wird erklärt wie man die isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach dem Pratt-Hayford-Modell berechnen kann. Am Anfang von Kapitel 4.3.1 wird der Rechenweg beschrieben, demnach erhält man die isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach PRATT durch Addition der Freiluftanomalien, der Removereduktion und der Restorereduktion. Dies ist nicht ganz richtig, da man auf diese Weise die sekundären indirekten Effekte der Massenverlagerungen vernachlässigt. Die Verlagerung der Massen bei der Removereduktion und der Restorereduktion führt zu einer Veränderung des Erdschwerefeldes und damit auch des Geoids (indirekter Effekt). Die Schwerewerte müssen deshalb vom Geoid auf das jeweilige Cogeoid mit Hilfe folgender Formeln reduzierte werden [TORGE (2003)].

$$\delta g^{REM}(\theta, \lambda) = \frac{2}{R} V^{REM}(\theta, \lambda) \quad (4.67)$$

$$\delta g^{RES}(\theta, \lambda) = \frac{2}{R} V^{RES}(\theta, \lambda) \quad (4.68)$$

Die isostatische Reduktion nach PRATT für die Schwereanomalien auf der Kugelschale mit Radius R erhält man durch Addition der Removereduktion, der Restorereduktion und der beiden sekundären indirekten Effekte.

$$ISO_{Pratt}^{\Delta g}(\theta, \lambda) = REM(\theta, \lambda) + \delta g^{REM}(\theta, \lambda) + RES(\theta, \lambda) + \delta g^{RES}(\theta, \lambda) \quad (4.69)$$

Die **isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach PRATT** erhält man durch Addition der Freiluftanomalien und der isostatischen Reduktion.

$$\Delta g_{Pratt}^{ISO}(\theta, \lambda) = \Delta g^{FAR}(\theta, \lambda) + ISO_{Pratt}^{\Delta g}(\theta, \lambda) \quad (4.70)$$

In Abbildung 4.41 ist die isostatische Reduktion nach PRATT für die Schwereanomalien, die im Rahmen dieser Arbeit für $15' \times 15'$ -Blöcke berechnet wurde, dargestellt. Wenn das Pratt-Hayford-Modell die Realität vollständig approximieren würde, dann könnte man mit Hilfe der isostatische Reduktion die Erdkruste komplett regulieren, so dass sie eine konstante Mächtigkeit besitzt und homogen ist. Die Residuen der isostatischen Reduktion nach PRATT für die Schwereanomalien sind im Durchschnitt größer als die der isostatischen Reduktion nach AIRY. Dies ist ein erster Hinweis darauf, dass das Pratt-Hayford-Modell die Realität schlechter approximiert als das Airy-Heiskanen-Modell.

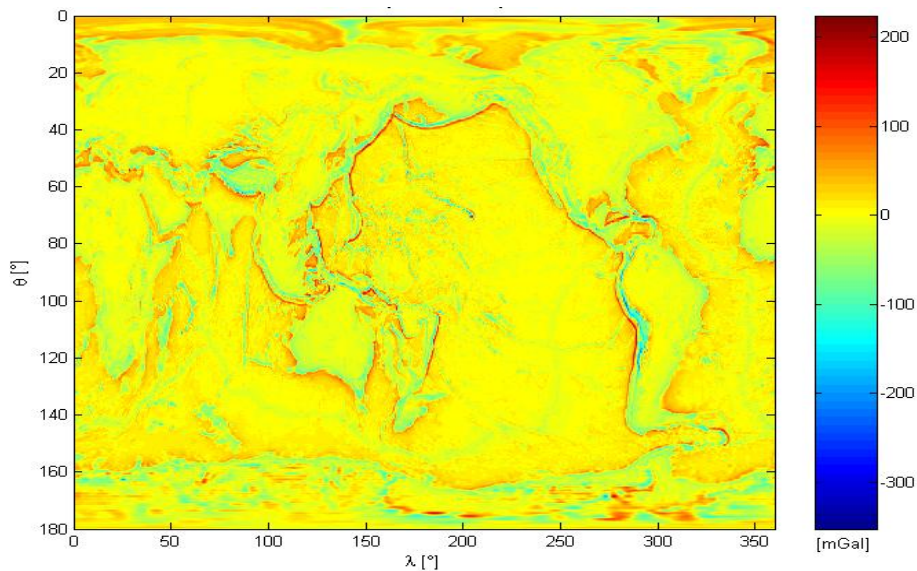


Abb. 4.41: Isostatische Reduktion nach PRATT für die Schwereanomalien

Statistische Werte	
Wertebereich [mGal]	[-352.0396 224.1823]
Gewichteter Mittelwert [mGal]	$8.5678 \cdot 10^{-12}$
Gewichtete Varianz [mGal ²]	691.8182
Gewichteter RMS [mGal]	± 26.3024

Abbildung 4.42 zeigt die isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach PRATT, die im Rahmen dieser Arbeit für $15' \times 15'$ -Blöcke berechnet wurden. In Kapitel 5 werden die isostatisch reduzierten Schwereanomalien ausführlich analysiert.

Statistische Werte	
Wertebereich [mGal]	[-266.8998 334.0418]
Gewichteter Mittelwert [mGal]	$8.5647 \cdot 10^{-12}$
Gewichtete Varianz [mGal ²]	566.1143
Gewichteter RMS [mGal]	± 23.7932

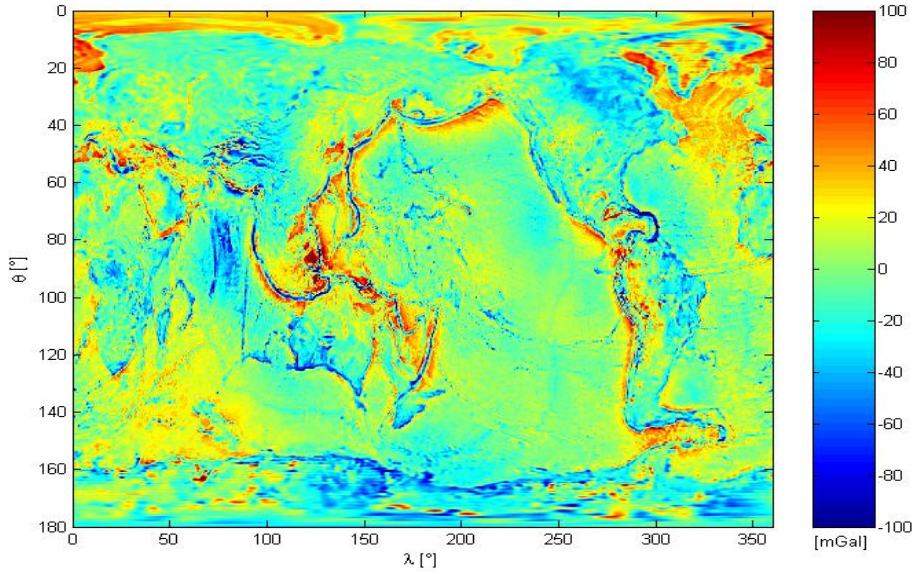


Abb. 4.42: Isostatisch reduzierte Schwereanomalien nach PRATT

4.3.2 Isostatisch reduzierte Geoidhöhen

In diesem Abschnitte wird erklärt wie man die isostatisch reduzierten Geoidhöhen nach dem Pratt-Hayford-Modell berechnen kann. Die *isostatisch reduzierten Geoidhöhen nach PRATT* N_{Pratt}^{ISO} könnten analog zu den isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach PRATT aus den einzelnen Reduktionen oder mit Hilfe der isostatisch reduzierten Potentialkoeffizienten und den Potentialkoeffizienten des Normalschwerefeldes berechnet werden. Der Rechenaufwand des zweiten Rechenwegs ist geringer und wird deshalb hier vorgestellt. Auf diese Weise berechnet man allerdings nicht das Geoid selbst sondern das Cogeoid. Da es, wie schon in Kapitel 4.2.2 erklärt wurde, aufgrund der Massenverlagerungen zur Veränderung des Schwerefeld und somit auch des Geoids kommt (indirekter Effekt) [TORGE (2003)].

Die GSHS der kontinuierlichen Funktion der **isostatisch reduzierten Geoidhöhen nach PRATT auf der Kugelschale mit Radius R** lautet:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{A}_m^{ISO_{Pratt}^N}(\theta) \\ \overline{B}_m^{ISO_{Pratt}^N}(\theta) \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^N \overline{P}_{nm}(\cos \theta) \left\{ \begin{array}{l} R \Delta \overline{C}_{nm}^{ISO_{Pratt}} \\ R \Delta \overline{S}_{nm}^{ISO_{Pratt}} \end{array} \right., \quad (4.71)$$

$$N_{Pratt}^{ISO}(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^N \overline{A}_m^{ISO_{Pratt}^N}(\theta) \cos m\lambda + \overline{B}_m^{ISO_{Pratt}^N}(\theta) \sin m\lambda \quad (4.72)$$

$$\text{mit } \left. \begin{array}{l} \Delta \overline{C}_{nm}^{ISO_{Pratt}} \\ \Delta \overline{S}_{nm}^{ISO_{Pratt}} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overline{C}_{nm}^{EGM96} \\ \overline{S}_{nm}^{EGM96} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \overline{C}_{nm}^{REM} \\ \overline{S}_{nm}^{REM} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \overline{C}_{nm}^{RES} \\ \overline{S}_{nm}^{RES} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \overline{c}_{nm} \\ \overline{s}_{nm} \end{array} \right\}. \quad (4.73)$$

Die isostatische Reduktion nach PRATT für die Geoidhöhen ISO_{Pratt}^N erhält man durch Bilden folgender Differenz:

$$ISO_{Pratt}^N(\theta, \lambda) = N_{Pratt}^{ISO}(\theta, \lambda) - N^{EGM96}(\theta, \lambda). \quad (4.74)$$

Im Rahmen dieser Arbeit wurde nicht die kontinuierliche Funktion sondern die globale diskrete Funktion, nach dem Prinzip das in Kapitel ?? beschreiben ist, berechnet. Abbildung 4.43 zeigt die isostatische Reduktion nach PRATT für die Geoidhöhen, die für $15' \times 15'$ -Blöcke berechnet wurde.

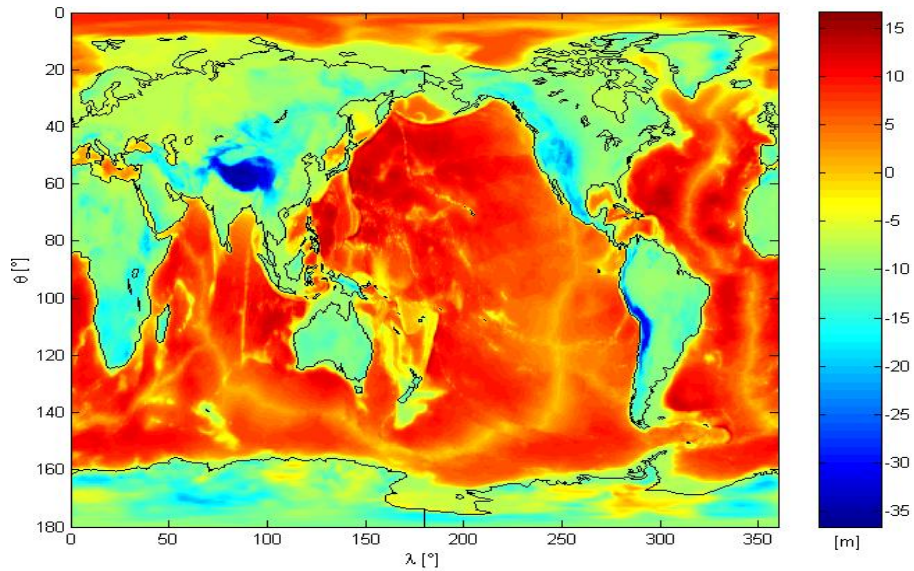


Abb. 4.43: Isostatische Reduktion nach PRATT für die Geoidhöhen

Statistische Werte	
Wertebereich [m]	$[-36.6623 \quad 16.6469]$
Gewichteter Mittelwert [m]	$-2.3175 \cdot 10^{-14}$
Gewichtete Varianz [m ²]	75.6112
Gewichteter RMS [m]	± 8.6955

Abbildung 4.44 zeigt die isostatisch reduzierten Geoidhöhen nach PRATT, die ebenfalls für $15' \times 15'$ -Blöcke berechnet wurden. Eine ausführliche Untersuchung der isostatisch reduzierten Geoidhöhen nach PRATT erfolgt in Kapitel 5.

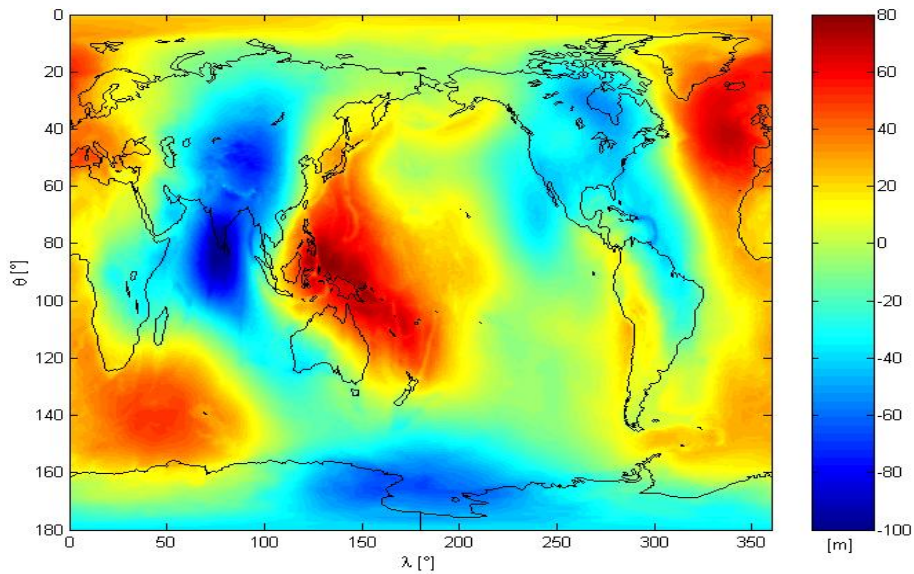


Abb. 4.44: Isostatisch reduzierte Geoidhöhen nach PRATT

Statistische Werte	
Wertebereich [m]	$[-104.9841 \quad 80.5768]$
Gewichteter Mittelwert [m]	$-7.1120 \cdot 10^{-14}$
Gewichtete Varianz [m ²]	992.2689
Gewichteter RMS [m]	± 31.5003

Kapitel 5

Diskussion der Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die isostatisch reduzierten Schwerefeldfunktionale nach dem Airy-Heiskanen-Modell und nach dem Pratt-Hayford-Modell global, regional und entlang von Profilen untersucht. Ziel dieser Untersuchung ist es, Antworten auf folgende Fragestellungen zu finden:

- Sind die isostatisch reduzierten Schwereanomalien glatter als die Freiluftanomalien?
- Sind die isostatisch reduzierten Geoidhöhen glatter als die freiluftreduzierten Geoidhöhen?
- In welchen tektonischen Zonen approximieren die isostatischen Modelle die Realität besser?
- Sind die isostatisch reduzierten Schwereanomalien weniger stark mit dem Gelände-verlauf korreliert als die Freiluftanomalien?
- Sind die isostatisch reduzierten Geoidhöhen weniger stark mit dem Gelände-verlauf korreliert als die freiluftreduzierten Geoidhöhen?
- Verhalten sich die isostatisch reduzierten Geoidhöhen ähnlich wie die isostatisch re-duzierten Schwereanomalien?

5.1 Isostatisch reduzierte Schwereanomalien

5.1.1 Globaler Vergleich

In diesem Kapitel werden die Eigenschaften der Freiluftanomalien, der verfeinerten Bougueranomalien und der isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach dem Airy-Heiskanen-Modell und nach dem Pratt-Hayford-Modell verglichen. Mit Hilfe dieser Schwereanomalien können unter anderem Geoidhöhen nach der Methode von STOKES berechnet werden. Sie unterscheiden sich in der Art der topographischen Massenverlagerung. Die Verlagerung der

topographischen Massen ruft eine Veränderung des Erdschwerefeldes hervor, die sich wiederum auf das Geoid niederschlägt. Dieses Phänomen bezeichnet man als indirekten Effekt und das veränderte Geoid als Cogeoid. Je nach Schwerereduktion ist der indirekte Effekt größer (verfeinerte Bouguerreduktion) oder kleiner (Freiluftreduktion und isostatische Schwerereduktion).

Im Folgenden werden die Eigenschaften der verschiedenen Schwereanomalien aufgelistet [RUMMEL (2002) und TORGE (2003)]:

Freiluftanomalien: Beruhen auf der Annahme, dass sich keine Massen zwischen der Erdoberfläche und dem Geoid befinden. Die beobachteten Schwerewerte werden auf das Geoid reduziert.

$$\Delta g^{FAR} = g + FAR - \gamma \quad (5.1)$$

Eigenschaften der Freiluftanomalien:

- Die Freiluftreduktion ist die einfachste und die am weitest verbreitete Schwerereduktion.
- Da der indirekte Effekt klein ist, eignen sie sich zur Geoidbestimmung.
- Sie zeigen eine starke Korrelation mit der Topographie und eignen sich daher nicht zur Inter- oder Extrapolation.
- Sie sind relativ rau.
- Es ist keine geophysikalische Interpretation der Freiluftanomalien möglich.

Verfeinerte Bougueranomalien: Hier geht man von einem Erdmodell ohne Topographie aus. Dazu werden die topographischen Massen der Erde entfernt und die beobachteten Schwerewerte werden auf das Geoid reduziert.

$$\Delta g^{BTR} = g + FAR + BTR + \delta g^{BTR} - \gamma \quad (5.2)$$

Eigenschaften der verfeinerten Bougueranomalien:

- Sie werden bevorzugt von Geophysikern und Geologen verwendet.
- Sie bewirken einen sehr großen indirekten Effekt und eignen sich daher nicht zur Geoidbestimmung.
- Sie zeigen eine deutliche Antikorrelation mit dem langwelligen Geländeverlauf und eignen sich gut zur Inter- und Extrapolation. Die Antikorrelation lässt vermuten, dass die topographischen Massen kompensiert werden.
- Sie sind glatter als Freiluftanomalien, da kurzwellige Strukturen des Geländeverlaufs ausgeschaltet werden.
- Sie spiegeln Dichtevariationen in der Erdkruste und dem oberen Erdmantel wider und sind mit bestimmten tektonischen Strukturen (ozeanische Riftsysteme, Tiefseegräben, kontinentale Gräben, junge Faltengebirgen) korreliert.

Isostatisch reduzierte Schwereanomalien: Beruhen auf der Annahme, dass die topographischen Massen in den darunterliegenden Erdschichten kompensiert werden. Neben den topographischen Massen werden auch die Kompensationsmassen entfernt, so dass man ein Erdmodell mit einer Kruste konstanter Mächtigkeit und Dichte erhält. Die beobachteten Schwerewerte werden auch hier auf das Geoid reduziert. Die Berechnung der isostatisch reduzierten Schwereanomalien ist abhängig von der Wahl des Kompensationsmodells.

$$\Delta g_{Airy}^{ISO} = g + FAR + BTR + \delta g^{BTR} + AHC + \delta g^{AHC} - \gamma \quad (5.3)$$

$$\Delta g_{Pratt}^{ISO} = g + FAR + REM + \delta g^{REM} + RES + \delta g^{RES} - \gamma \quad (5.4)$$

Eigenschaften der isostatisch reduzierten Schwereanomalien:

- Sie lassen sich nicht so leicht wie die anderen Schwereanomalien berechnen.
- Da der indirekte Effekt größer ist, als der der Freiluftanomalien werden sie seltener zur Geoidberechnung verwendet.
- Sie weisen eine geringe Korrelation mit dem Geländeverlauf auf, da der Großteil der Topographie isostatisch kompensiert ist. Sie eignen sich deshalb zur Schwerefeldprädiktion.
- Sie sind glatter als Bouguer- und Freiluftanomalien.
- Sie geben Aufschluss über Dichteveränderungen in den oberen Erdschichten und weisen auf nicht vollständig kompensierte Gebiete hin, oder darauf, dass die isostatischen Modelle die Realität nur unvollständig approximieren. Sie eignen sich daher auch zur Schwerefeldinterpretation.

In Abbildung 5.1 sind die vier Schwereanomalien dargestellt. Einige der oben beschriebenen Eigenschaften spiegeln sich in dieser Abbildung wider. Vergleicht man die isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach AIRY mit den isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach PRATT so stellt man fest, dass die isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach AIRY glatter sind. Die isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach PRATT wirken auf den ersten Blick sogar rauer als die Freiluftanomalien. Bei näherer Betrachtung kann jedoch festgestellt werden, dass sie zum Beispiel in den Gebieten: Himalaya, Anden, Rocky Mountains, mittellatlantischer Rücken glatter sind.

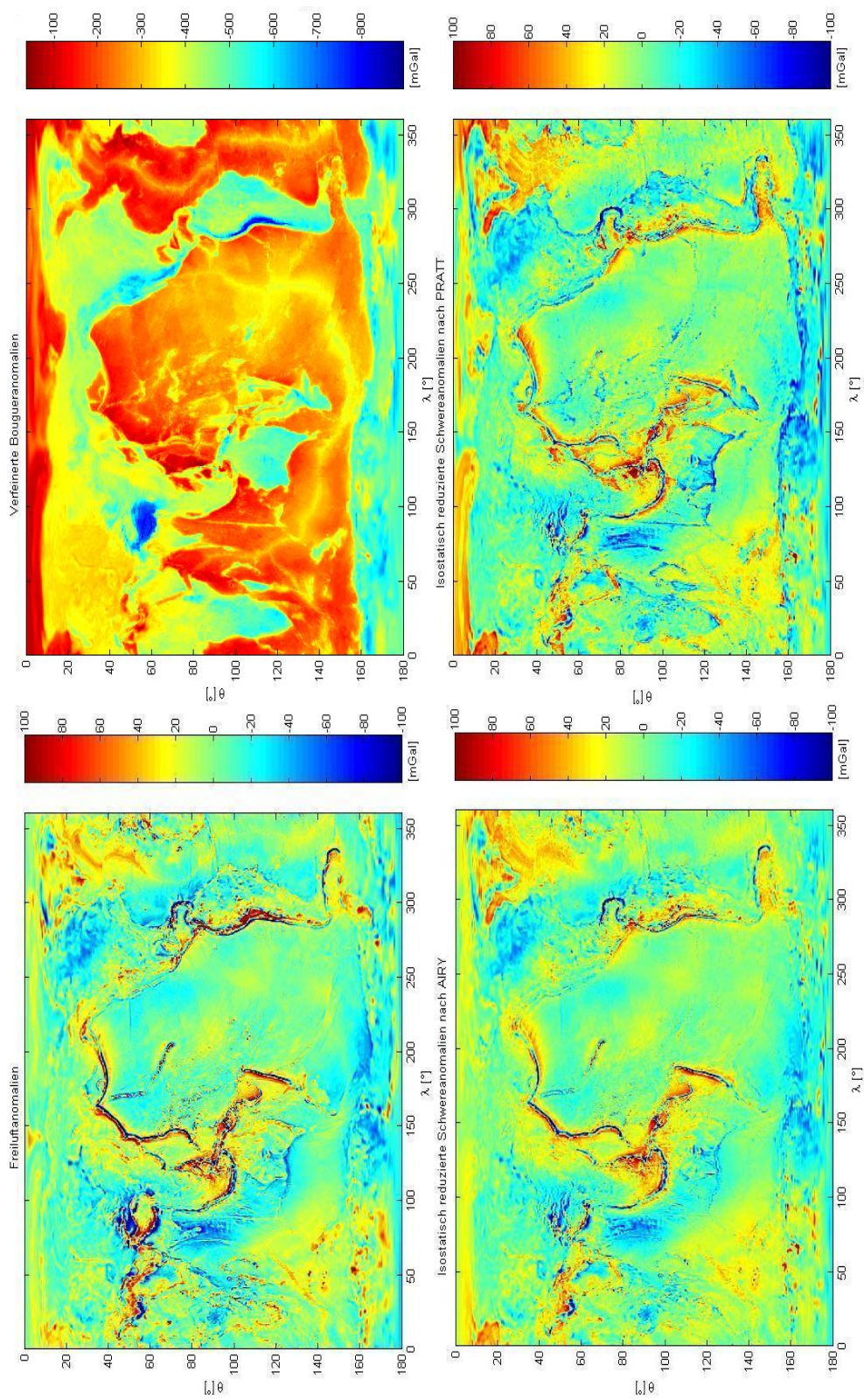


Abb. 5.1: Globaler Vergleich der Schwereanomalien

Da im Rahmen dieser Arbeit eine präzise Antwort auf die Frage gefunden werden soll, ob isostatisch reduzierte Schwereanomalien glatter sind als Freiluftanomalien, wird im Folgenden die Glättung der isostatisch reduzierten Schwereanomalien untersucht. Das Maß der Glättung spielt eine wichtige Rolle bei der Schwerefeldprädiktion. Je glatter die isostatisch reduzierten Schwereanomalien, desto besser können Werte interpoliert werden.

Mit Hilfe von Gradvarianzen kann die Glättung der isostatisch reduzierten Schwereanomalien untersucht werden, da sie Aufschluss über die spektrale Stärke eines globalen Signals geben (Kapitel 3.2.2). In Abbildung 5.2 sind die Wurzeln der Signalgradvarianzen der verschiedenen Schwereanomalien dargestellt.

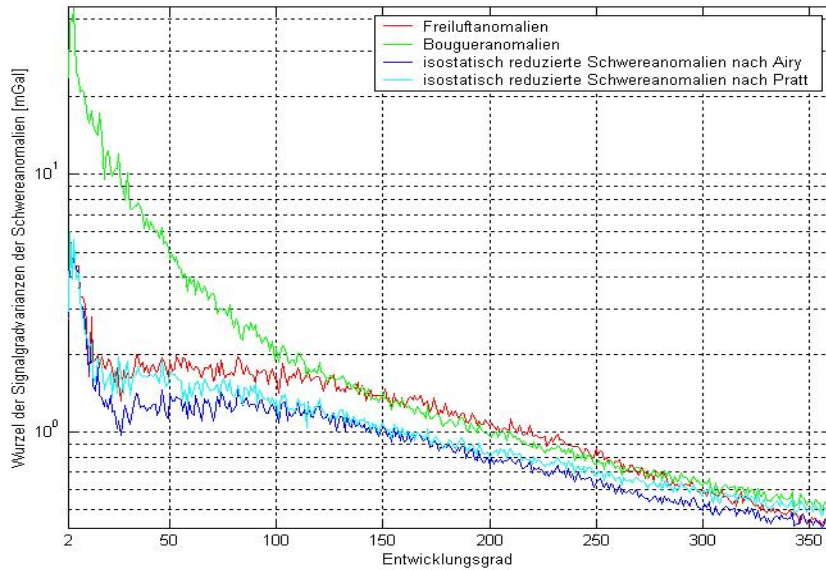


Abb. 5.2: Wurzel der Signalgradvarianzen der Schwereanomalien

Dieser Abbildung kann man sofort entnehmen, dass die isostatisch reduzierten Schwereanomalien glatter sind als die Freiluftanomalien. Desweiteren stellt sich heraus, dass die isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach AIRY glatter sind als die isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach PRATT. Demnach approximiert das Airy-Heiskanen-Modell die Realität besser als das Pratt-Hayford-Modell. Diese Aussage bezieht sich allerdings nur auf das globale Verhalten der beiden Funktionen. Aus diesem Grund wird im anschließenden Kapitel das regionale Verhalten der beiden Funktionen untersucht.

Zur genaueren Analyse des globalen Glättungsgrades der isostatisch reduzierten Schwereanomalien wurden die *Glättungswerte pro Entwicklungsgrad* G_n und die *kumulativen Glättungswerte* $G_{n1,n2}$ berechnet [RAPP et al. (1988)]. Die Glättungswerte pro Entwicklungsgrad

$$G_n = \sqrt{\frac{c_n^2(\Delta g^{ISO})}{c_n^2(\Delta g^{FAR})}} \cdot 100 \quad (5.5)$$

geben den prozentualen Anteil der Gradvarianzen der isostatisch reduzierten Schwereanomalien gegenüber den Gradvarianzen der Freiluftanomalien an.

Der kummulative Glättungswert

$$G_{n1,n2} = \frac{1}{n2 - n1 + 1} \sum_{n=n1}^{n2} G_n \quad (5.6)$$

gibt den prozentualen Anteil der Gradvarianzen der isostatisch reduzierten Schwereanomalien gegenüber den Gradvarianzen der Freiluftanomalien in einem bestimmten Entwicklungsbereich an. Je kleiner G_n bzw. $G_{n1,n2}$, desto kleiner ist der Anteil der Gradvarianzen der isostatisch reduzierten Schwereanomalien gegenüber den Gradvarianzen der Freiluftanomalien, d.h. desto glatter sind die isostatisch reduzierten Schwereanomalien.

Im Folgenden wird mit Hilfe der Glättungswerte pro Entwicklungsgrad und der kummulativen Glättungswerte das Maß der Glättung der isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach dem Airy-Heiskanen-Modell und nach dem Pratt-Hayford-Modell untersucht. In Abbildung 5.3 sind die Ergebnisse dieser Untersuchung dargestellt. Demnach weisen die isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach PRATT ab dem Entwicklungsgrad $n = 275$ keine Glättung gegenüber den Freiluftanomalien auf, die isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach AIRY hingegen erst ab dem Entwicklungsgrad $n = 340$. Die Glättung der isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach AIRY ist bis auf den Entwicklungsbereich $n = [100 \quad 200]$ wesentlich größer als die der isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach PRATT. Laut der kummulativen Glättungswerte ist die Glättung der isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach AIRY um 10% bis 20% größer als die der isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach PRATT.

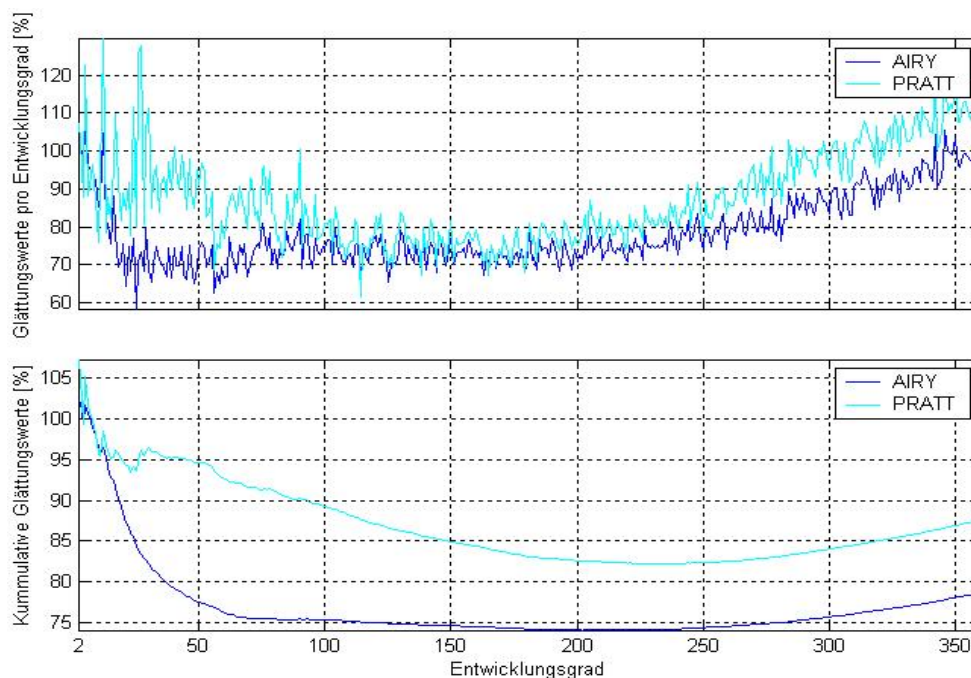


Abb. 5.3: Glättungswerte pro Entwicklungsgrad und kummulative Glättungswerte der isostatisch reduzierten Schwereanomalien

Da die isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach PRATT bis zu dem Entwicklungsgrad $n = 50$ keine Glättung aufweisen, wurden die kumulativen Glättungswerte für die Entwicklungsbereiche: $n = [51 \ 100]$, $n = [101 \ 200]$, $n = [201 \ 360]$ berechnet und in der folgenden Abbildung dargestellt. Die Glättung der beiden isostatisch reduzierten Schwereanomalien nimmt ab dem Entwicklungsgrad $n = 220$ stetig ab.

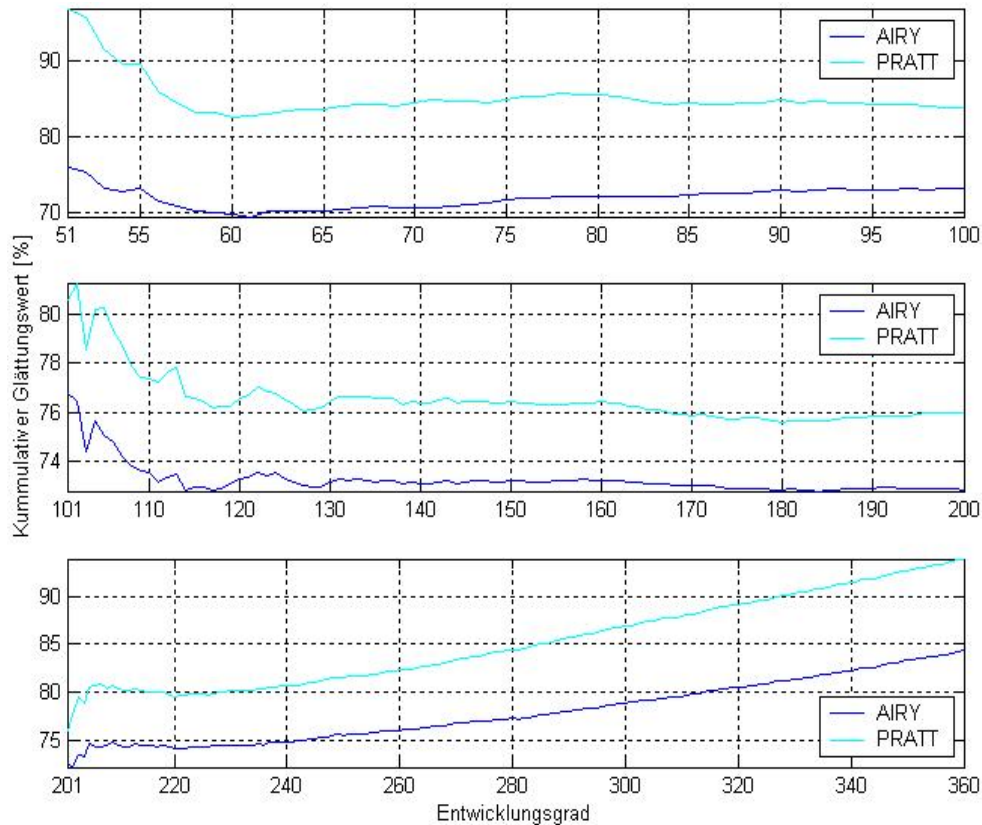


Abb. 5.4: Kummulative Glättungswerte der isostatisch reduzierten Schwereanomalien für verschiedene Entwicklungsbereiche

5.1.2 Regionaler Vergleich

In diesem Kapitel wird das Verhalten der Freiluftanomalien und der isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach AIRY und PRATT in verschiedenen regionalen Gebiete untersucht. Ziel dieser Untersuchung ist es herauszufinden, ob das Airy-Heiskanen-Modell in allen Gebieten die Realität besser approximiert als das Pratt-Hayford-Modell oder ob in bestimmten tektonischen Zonen der Kompensationsmechanismus von PRATT eine bessere Näherung darstellt. Zu diesem Zweck wurden folgende Gebiete: Himalaya, Anden, Australien, ostpazifischer Rücken, mittelatlantischer Rücken und Marianengraben untersucht.

Auf den nächsten Seiten befindet sich für jedes Gebiet eine Tabelle, die die statistischen Werte der isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach AIRY und PRATT und das Verhältnis der RMS-Werte der isostatisch reduzierten Schwereanomalien und der Freiluftanomalien enthält.

Die kumulativen Glättungswerte lassen sich nur für globale Funktionen aus den Gradvarianzen ableiten, für regionale Funktionen können sie aus den gewichteten RMS-Werten abgeleitet werden. Nach HEISKANEN & MORITZ (1967) entspricht die Gradvarianz der Schwereanomalien für den Entwicklungsgrad n dem quadratischen Mittelwert der sphärisch harmonischen Funktion der Schwereanomalie für denselben Entwicklungsgrad $\Delta g_n(\theta, \lambda)$

$$c_n^2(\Delta g) = M(\Delta g_n(\theta, \lambda)^2). \quad (5.7)$$

Den quadratischen Mittelwerte einer zentrierten Funktion bezeichnet man als Varianz und die Wurzel der Varianz als RMS-Wert. Die Glättungswerte pro Entwicklungsgrad einer regionalen Funktion können demnach mit folgender Formel berechnet werden:

$$G_n = \frac{RMS(\Delta g_n^{ISO})}{RMS(\Delta g_n^{FAR})} \cdot 100. \quad (5.8)$$

Die Formel zur Berechnung der kumulativen Glättungswerte einer regionalen Funktion lautet:

$$G_{n1, n2} = \frac{1}{n2 - n1 + 1} \sum_{n=n1}^{n2} G_n. \quad (5.9)$$

Da diese Berechnung sehr aufwendig ist, wurden das Glättungsverhalten in den regionalen Gebiete nicht mit Hilfe der kumulativen Glättungswerte untersucht, sondern mit Hilfe des Verhältnis der RMS-Werte der isostatisch reduzierten Schwereanomalien und der Freiluftanomalien.

$$G_{RMS} = \frac{RMS(\Delta g_{n1, n2}^{ISO})}{RMS(\Delta g_{n1, n2}^{FAR})} \cdot 100 \quad (5.10)$$

Es können folgende Informationen aus der Untersuchung der regionalen Gebiete gewonnen werden:

- In den Anden und im Himalaya ist die Glättung der isostatisch reduzierten Schwereanomalien wesentlich größer als in den übrigen Gebieten. D.h. in tektonischen Zonen, in denen sehr hohe Gebirge vorliegen, wird die Kompensation der topographischen Massen durch das Airy-Heiskanen-Modell und das Pratt-Hayford-Modell gut approximiert.
- In den Anden und im Himalaya approximiert das Pratt-Hayford-Modell die Realität geringfügig besser als das Airy-Heiskanen-Modell. Dies ist ein Hinweis darauf, dass es tektonische Zonen gibt, die sich eher nach dem Kompensationsmechanismus des Pratt-Hayford-Modell verhalten.
- In Australien versagt das Pratt-Hayford-Modell, da hier keine Glättung der isostatisch reduzierten Schwereanomalien erfolgt. Das Verhältnis der RMS-Werte der isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach PRATT und der Freiluftanomalien ist hier größer als 100%. Das Airy-Heiskanen-Modell beschreibt den hier vorliegenden Kompensationsmechanismus besser.

- Im ostpazifischen Rücken versagen für den Entwicklungsbereich $n = [2 \ 360]$ beide isostatischen Modelle. Für den Entwicklungsbereich $n = [50 \ 260]$ versagt das Airy-Heiskanen-Modell jedoch nicht. D.h. mittelwellige Strukturen werden geringfügig geglättet. Dem ostpazifischen Rücken muss folglich ein Kompensationsmechanismus zugrunde liegen, der weder dem Airy-Heiskanen-Modell noch dem Pratt-Hayford-Modell entspricht.
- Der mittelatlantische Rücken verhält sich nicht analog zum ostpazifischen Rücken, da hier eine Glättung mit beiden isostatischen Modellen für den Entwicklungsbereich $n = [2 \ 360]$ erzielt werden kann. Für beide ozeanische Rücken kann mit dem Airy-Heiskanen-Modell eine stärkere Glättung erzielt werden. Daraus läßt sich allerdings nicht ableiten, ob allen ozeanischen Rücken ein ähnlicher Kompensationsmechanismus zugrunde liegt.
- Im Marianengraben approximiert das Pratt-Hayford-Modell die Realität besser als das Airy-Heiskanen-Modell. Die Glättung ist beinahe so groß wie bei den großen Gebirgen: Himalaya und Anden. D.h. in tektonischen Zonen, in denen sehr tiefe Ozeangraben vorliegen, wird die Kompensation der topographischen Massen durch das Pratt-Hayford-Modell gut approximiert.

HIMALAYA ($\theta = [50^\circ \ 70^\circ]$ und $\lambda = [70^\circ \ 110^\circ]$):

Δg_{Airy}^{ISO}	$n = [10 \ 49]$	$n = [50 \ 260]$	$n = [2 \ 360]$
Werteb. [mGal]	[-35.0868 43.1591]	[-121.1458 271.7903]	[-169.3386 326.9712]
M [mGal]	2.7489	-0.5181	-12.0144
RMS [mGal]	12.7715	27.1598	32.9532
G_{RMS} [%]	44.4099	65.6352	62.4401
Δg_{Pratt}^{ISO}	$n = [10 \ 49]$	$n = [50 \ 260]$	$n = [2 \ 360]$
Werteb. [mGal]	[-31.8597 36.5286]	[-115.3649 268.0181]	[-173.6562 313.7983]
M [mGal]	2.1334	-0.5163	-14.3208
RMS [mGal]	11.7386	25.9481	31.5721
G_{RMS} [%]	40.8183	62.7068	59.8231

ANDEN ($\theta = [80^\circ \quad 130^\circ]$ und $\lambda = [275^\circ \quad 295^\circ]$):

Δg_{Airy}^{ISO}	$n = [10 \quad 49]$	$n = [50 \quad 260]$	$n = [2 \quad 360]$
Werteb. [mGal]	[-29.4519 33.8481]	[-128.1076 136.6983]	[-138.0527 176.8753]
M [mGal]	1.1943	-0.0528	12.7627
RMS [mGal]	10.3128	25.7661	29.8317
G_{RMS} [%]	46.5292	61.7588	59.2211
Δg_{Pratt}^{ISO}	$n = [10 \quad 49]$	$n = [50 \quad 260]$	$n = [2 \quad 360]$
Werteb. [mGal]	[-54.0660 36.9886]	[-133.0442 140.6186]	[-167.5858 158.0436]
M [mGal]	0.5760	-0.0275	11.1882
RMS [mGal]	14.8268	23.7876	29.5321
G_{RMS} [%]	66.8957	57.0166	58.6262

AUSTRALIEN ($\theta = [100^\circ \quad 130^\circ]$ und $\lambda = [110^\circ \quad 150^\circ]$):

Δg_{Airy}^{ISO}	$n = [10 \quad 49]$	$n = [50 \quad 260]$	$n = [2 \quad 360]$
Werteb. [mGal]	[-39.6547 27.3484]	[-96.4459 93.4211]	[-112.1628 85.7310]
M [mGal]	0.9839	-0.1691	-3.8636
RMS [mGal]	8.4406	15.0407	22.1063
G_{RMS} [%]	70.3227	83.5360	86.9978
Δg_{Pratt}^{ISO}	$n = [10 \quad 49]$	$n = [50 \quad 260]$	$n = [2 \quad 360]$
Werteb. [mGal]	[-42.0374 39.1295]	[-107.0978 90.2554]	[-132.4131 84.7939]
M [mGal]	0.7805	-0.0309	-6.5794
RMS [mGal]	12.5650	18.5912	27.1040
G_{RMS} [%]	104.6850	103.2555	106.6663

OSTPAZIFISCHER RÜCKEN ($\theta = [110^\circ \quad 140^\circ]$ und $\lambda = [225^\circ \quad 275^\circ]$):

Δg_{Airy}^{ISO}	$n = [10 \quad 49]$	$n = [50 \quad 260]$	$n = [2 \quad 360]$
Werteb. [mGal]	[-11.8701 14.6659]	[-21.9455 15.8976]	[-34.0043 27.3049]
M [mGal]	-0.2014	0.0380	-0.3231
RMS [mGal]	4.7795	3.1713	4.9747
G_{RMS} [%]	78.8514	93.2314	109.0110
Δg_{Pratt}^{ISO}	$n = [10 \quad 49]$	$n = [50 \quad 260]$	$n = [2 \quad 360]$
Werteb. [mGal]	[-11.1909 13.2840]	[-39.6780 28.9722]	[-60.8267 39.0792]
M [mGal]	-0.4876	0.0848	-0.5788
RMS [mGal]	5.0613	5.5397	7.4514
G_{RMS} [%]	83.5017	162.8590	163.2842

MITTELATLANTISCHER RÜCKEN ($\theta = [30^\circ \ 50^\circ]$ und $\lambda = [320^\circ \ 340^\circ]$):

Δg_{Airy}^{ISO}	$n = [10 \ 49]$	$n = [50 \ 260]$	$n = [2 \ 360]$
Werteb. [mGal]	[-12.2276 11.7077]	[-18.7603 13.1024]	[-1.4248 50.9361]
M [mGal]	0.7720	0.0828	28.3426
RMS [mGal]	5.6750	4.5492	7.2346
G_{RMS} [%]	65.2005	70.3218	71.5807
Δg_{Pratt}^{ISO}	$n = [10 \ 49]$	$n = [50 \ 260]$	$n = [2 \ 360]$
Werteb. [mGal]	[-18.7712 15.2834]	[-43.1932 26.5651]	[-16.2988 53.3868]
M [mGal]	0.2443	0.2345	30.3981
RMS [mGal]	4.7799	7.7948	8.8256
G_{RMS} [%]	54.9167	120.4931	87.3225

MARIANENGRABEN ($\theta = [60^\circ \ 80^\circ]$ und $\lambda = [135^\circ \ 155^\circ]$):

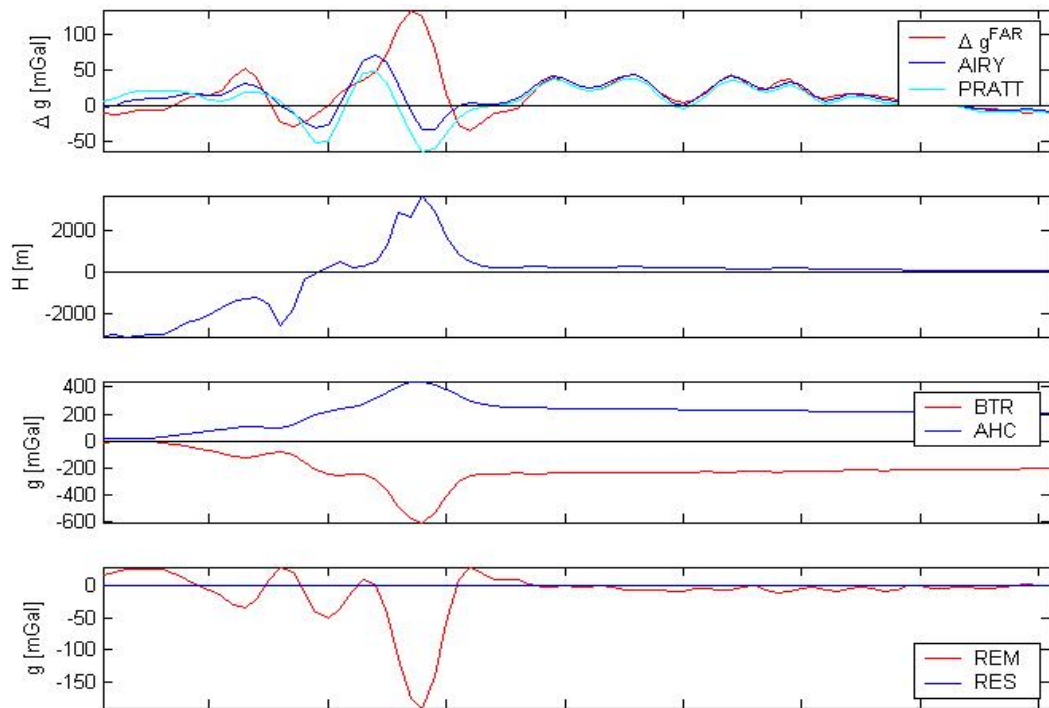
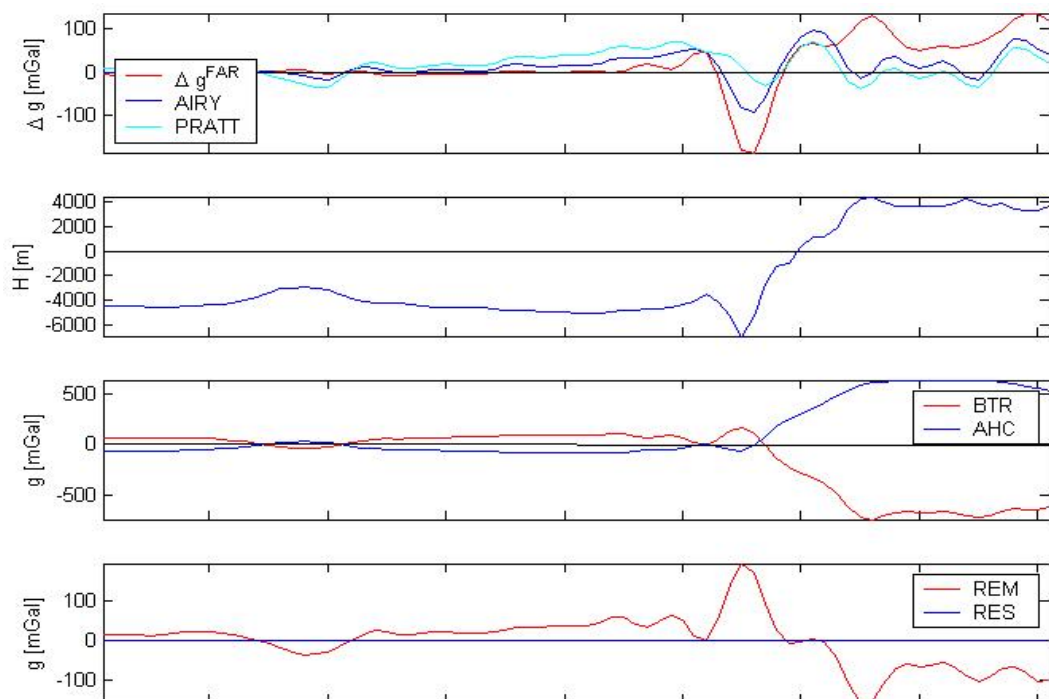
Δg_{Airy}^{ISO}	$n = [10 \ 49]$	$n = [50 \ 260]$	$n = [2 \ 360]$
Werteb. [mGal]	[-30.8148 31.8222]	[-195.2628 180.5629]	[-232.4560 195.4262]
M [mGal]	1.3312	-0.4180	8.1898
RMS [mGal]	12.4450	32.9317	36.5835
G_{RMS} [%]	95.9461	80.3167	81.3914
Δg_{Pratt}^{ISO}	$n = [10 \ 49]$	$n = [50 \ 260]$	$n = [2 \ 360]$
Werteb. [mGal]	[-32.7894 32.6413]	[-108.1225 120.9983]	[-135.1669 125.5188]
M [mGal]	0.8436	-0.0225	11.0764
RMS [mGal]	12.8527	25.0604	29.3454
G_{RMS} [%]	99.0886	61.1196	65.2880

5.1.3 Vergleich von Profilen

In diesem Abschnitt wird das Verhalten der Freiluftanomalien, der isostatisch reduzierten Schwereanomalien nach dem Airy-Heiskanen-Modell und nach dem Pratt-Hayford-Modell, der orthometrischen Höhen, der verfeinerten Bouguerreduktion, der Airy-Heiskanen-Reduktion, der Removerreduktion und der Restorerreduktion mit Hilfe von Profilen durch die Gebiete: Anden, Australien, ostpazifischer Rücken, mittelatlantischer Rücken und Marianengraben untersucht. In den Abbildungen auf den nächsten drei Seiten sind diese Profile für den Entwicklungsbereich $n = [2 \ 360]$ dargestellt.

Aus den Abbildungen kann folgende Information gewonnen werden:

- In den Anden und für den Marianengraben sind die Freiluftanomalien mit der Topographie bzw. Bathymetrie korreliert. In Australien und für den ostpazifischen Rücken kann keine Korrelation der Freiluftanomalien mit dem Geländeverlauf festgestellt werden. In diesen beiden Gebieten sind die isostatisch reduzierten Schwereanomalien nicht oder nur geringfügig glatter als die Freiluftanomalien. Es könnte folglich ein Zusammenhang zwischen der Korrelation der Freiluftanomalien mit dem Geländeverlauf und dem Glättungsgrad der isostatisch reduzierten Schwereanomalien bestehen.
- Die isostatisch reduzierten Schwereanomalien sind kaum mit der Topographie und Bathymetrie korreliert.
- Die Residuen der isostatisch reduzierten Schwereanomalien sind in den Anden und für den Marianengraben kleiner als die Residuen der Freiluftanomalien und schwanken um Null. Das Signal der isostatisch reduzierten Schwereanomalien ist in diesen beiden Gebieten folglich glatter als das Signal der Freiluftanomalien.
- In Gebirgsregionen kommt es zur Unterkompensation der topographischen Massen bei dem Airy-Heiskanen-Modell. Dies könnte unter anderem daran liegen, dass die Anden ein junges Gebirge sind. Die Gebirgsbildung (Orogenese) ist hier nicht abgeschlossen, da die ozeanische Nazca-Platte stetig weiter unter die kontinentale südamerikanische Platte absinkt.
- Je langwelliger die Strukturen des Gebirges, desto geringer die Unterkompensation bei dem Airy-Heiskanen-Modell.
- Für den ostpazifischen Rücken verhalten sich die verfeinerte Bouguerreduktion und die Airy-Heiskanen-Reduktion nicht so wie erwartet. Hier ist die verfeinerte Bouguerreduktion nicht im gesamten Bereich positiv und die Airy-Heiskanen-Reduktion ist nicht für den gesamten Bereich negativ. Die Antikorrelation der verfeinerten Bouguerreduktion und der Airy-Heiskanen-Reduktion ist hingegen vorhanden. Demnach liegt hier ein anderer Kompensationsmechanismus vor als der des Airy-Heiskanen-Modells und Pratt-Hayford-Modells.
- Die Removerreduktion ist in allen Gebieten bis auf den mittelozeanischen Rücken mit den kurz- und mittelwelligen Strukturen des Geländeverlaufs antikorreliert.

Abb. 5.5: Profil durch die Anden ($\theta = 90.125^\circ$ und $\lambda = [275.125^\circ \quad 295.125^\circ]$)Abb. 5.6: Profil durch die Anden ($\theta = 110.125^\circ$ und $\lambda = [275.125^\circ \quad 295.125^\circ]$)

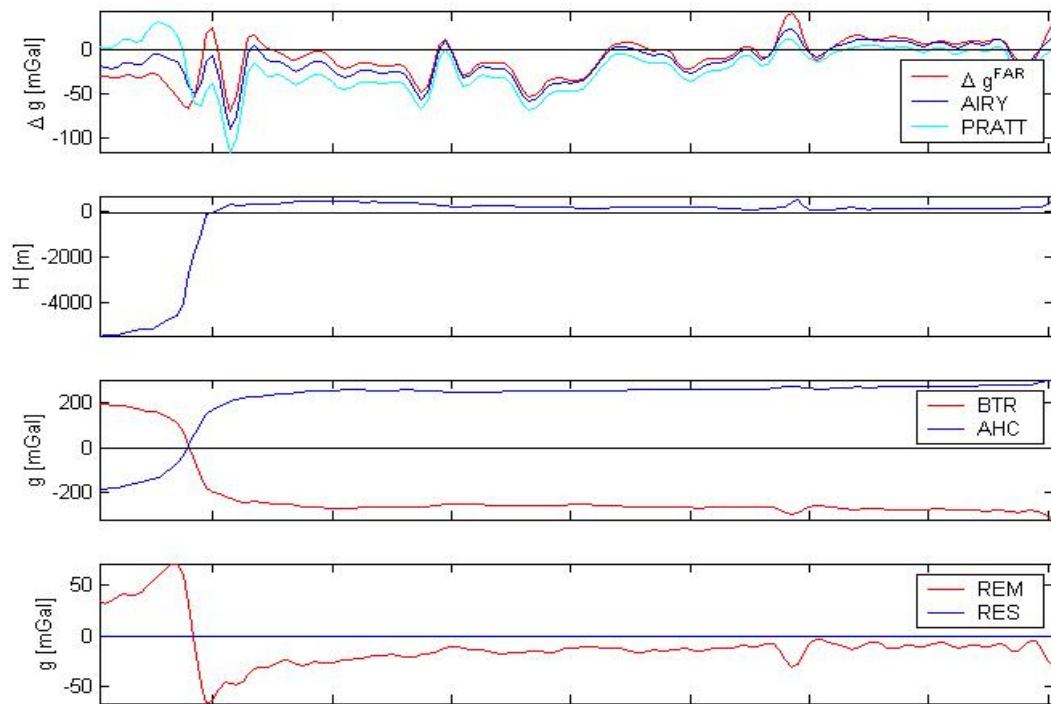


Abb. 5.7: Profil durch Australien ($\theta = 120.125^\circ$ und $\lambda = [110.125^\circ \quad 150.125^\circ]$)

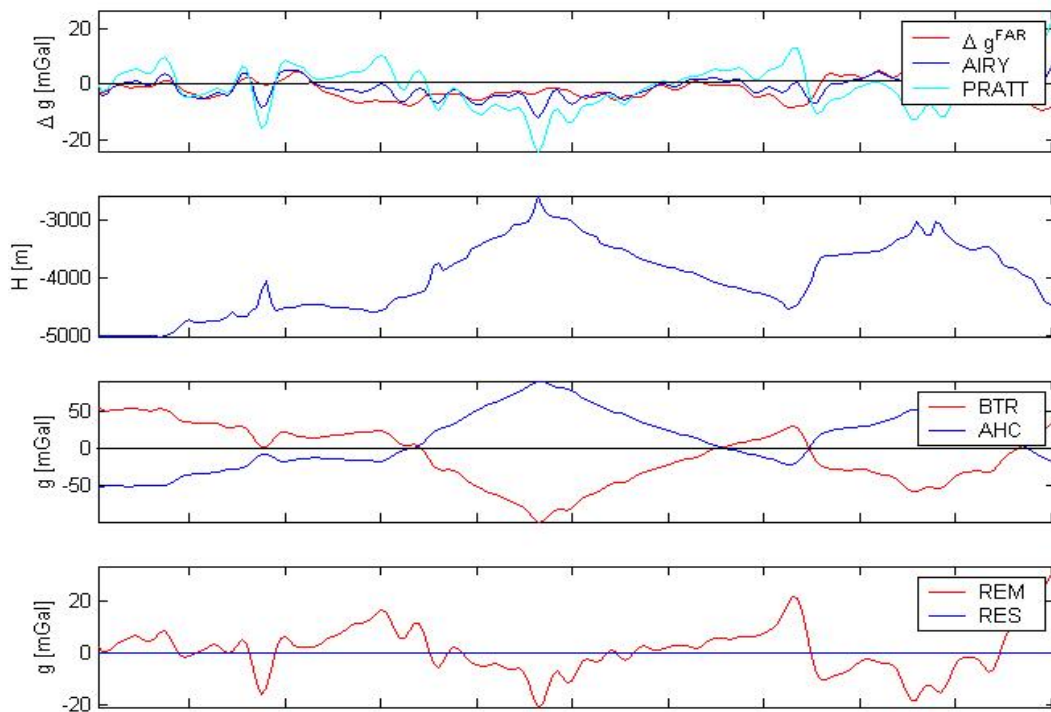


Abb. 5.8: Profil durch den ostpazifischen Rücken ($\theta = 130.125^\circ$ und $\lambda = [225.125^\circ \quad 275.125^\circ]$)

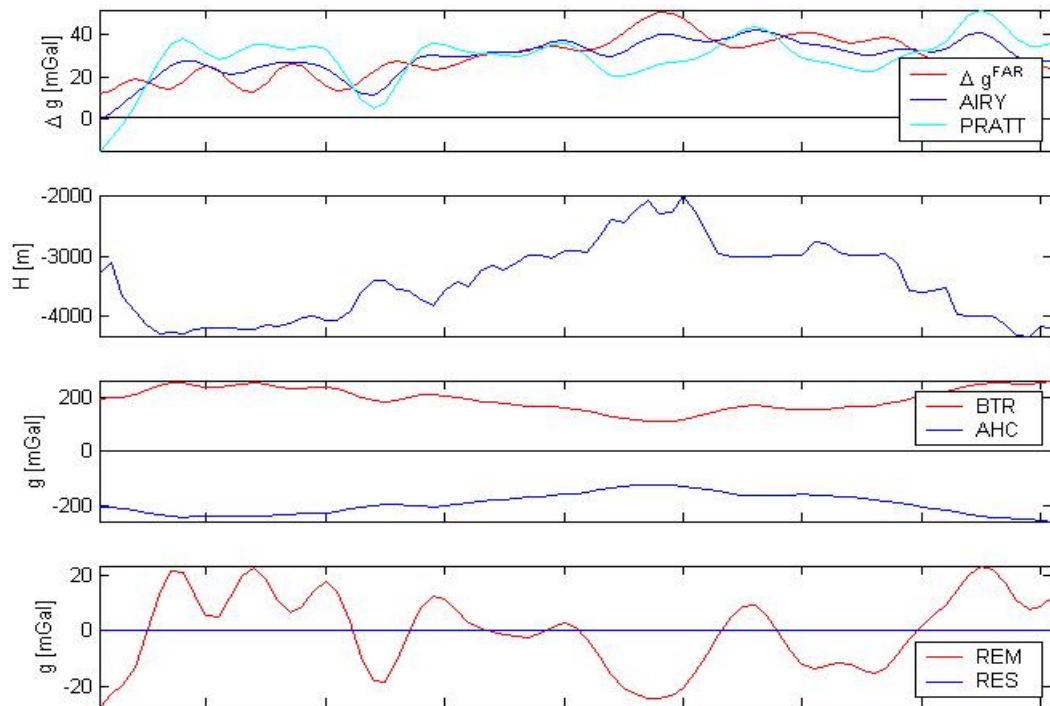


Abb. 5.9: Profil durch den mittelatlantischen Rücken ($\theta = 45.125^\circ$ und $\lambda = [320.125^\circ \quad 340.125^\circ]$)

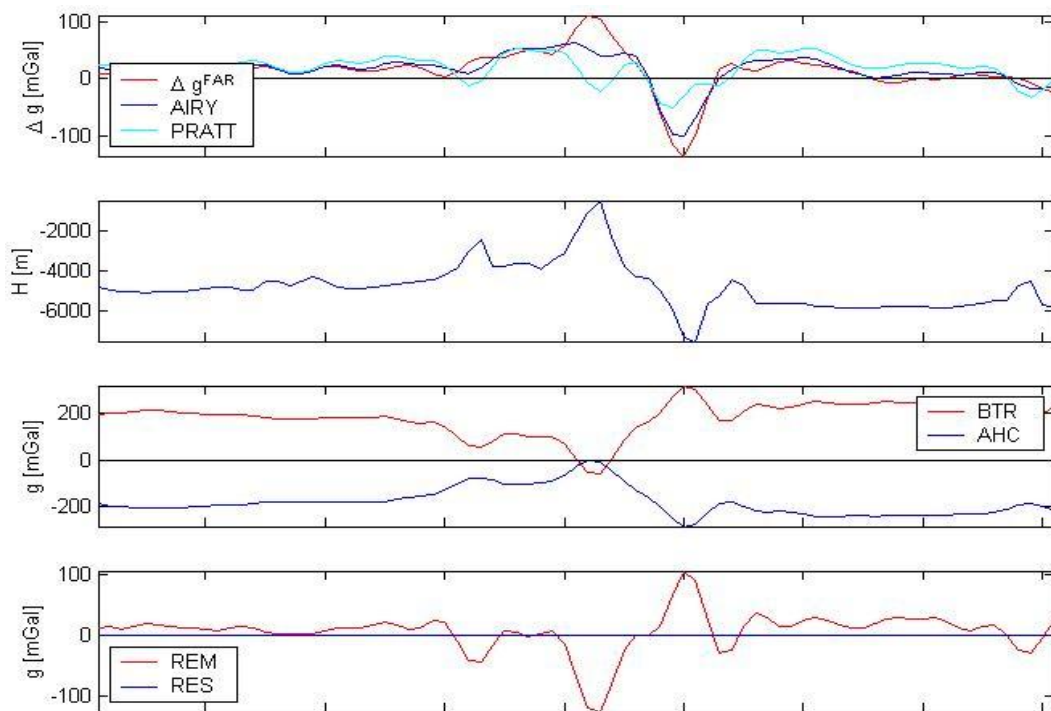


Abb. 5.10: Profil durch den Marianengraben ($\theta = 75.125^\circ$ und $\lambda = [135.125^\circ \quad 155.125^\circ]$)

5.2 Isostatisch reduzierte Geoidhöhen

5.2.1 Globaler Vergleich

In diesem Kapitel werden die freiluftreduzierten, die verfeinerten bouguerreduzierten und die isostatisch reduzierten Geoidhöhen nach dem Airy-Heiskanen-Modell und nach dem Pratt-Hayford-Modell untersucht. Ziel dieser Untersuchung ist es herauszufinden, ob die isostatisch reduzierten Geoidhöhen glatter sind als die freiluftreduzierten Geoidhöhen und ob die isostatisch reduzierten Geoidhöhen ein ähnliches Verhalten aufweisen wie die isostatisch reduzierten Schwereanomalien. Die Geoidhöhen wurden nach demselben Prinzip untersucht wie die Schwereanomalien.

In Kapitel 5.1 wurde bereits darauf hingewiesen, dass die Geoidhöhen über die Stokes-Methode aus den Schwereanomalien abgeleitet werden können. Die Eigenschaften der verschiedenen Geoidhöhen können folglich aus den Eigenschaften der jeweiligen Schwereanomalien abgeleitet werden. Da dieser Rechenweg sehr aufwendig ist wurden im Rahmen dieser Arbeit die verschiedenen Geoidhöhen mit Hilfe der GSHS aus den Potentialkoeffizienten abgeleitet. Die Formeln zur Berechnung der freiluftreduzierten und der isostatisch reduzierten Geoidhöhen nach dem Airy-Heiskanen-Modell und nach dem Pratt-Hayford-Modell wurden in den voranstehenden Kapiteln vorgestellt. Die GSHS für die kontinuierliche Funktion der verfeinerten bouguerreduzierten Geoidhöhen lautet:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{A}_m^{BTR}(\theta) \\ \overline{B}_m^{BTR}(\theta) \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^N \overline{P}_{nm}(\cos \theta) \left\{ \begin{array}{l} R\Delta\overline{C}_{nm}^{BTR} \\ R\Delta\overline{S}_{nm}^{BTR} \end{array} \right., \quad (5.11)$$

$$N^{BTR}(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^N \overline{A}_m^{BTR}(\theta) \cos m\lambda + \overline{B}_m^{BTR}(\theta) \sin m\lambda \quad (5.12)$$

$$\text{mit } \left. \begin{array}{l} \Delta\overline{C}_{nm}^{BTR} \\ \Delta\overline{S}_{nm}^{BTR} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overline{C}_{nm}^{EGM96} \\ \overline{S}_{nm}^{EGM96} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \overline{C}_{nm}^T \\ \overline{S}_{nm}^T \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \overline{c}_{nm} \\ \overline{s}_{nm} \end{array} \right\}. \quad (5.13)$$

In Abbildung 5.11 sind vier verschiedenen Geoidhöhen, die im Rahmen dieser Arbeit für $15' \times 15'$ -Blöcke berechnet wurden, dargestellt. Vergleicht man die isostatisch reduzierten Geoidhöhen mit den freiluftreduzierten Geoidhöhen so stellt man fest, dass sie glatter sind. Dies zeigt sich besonders gut in den Gebieten: Himalaya, Anden und Rocky Mountains.

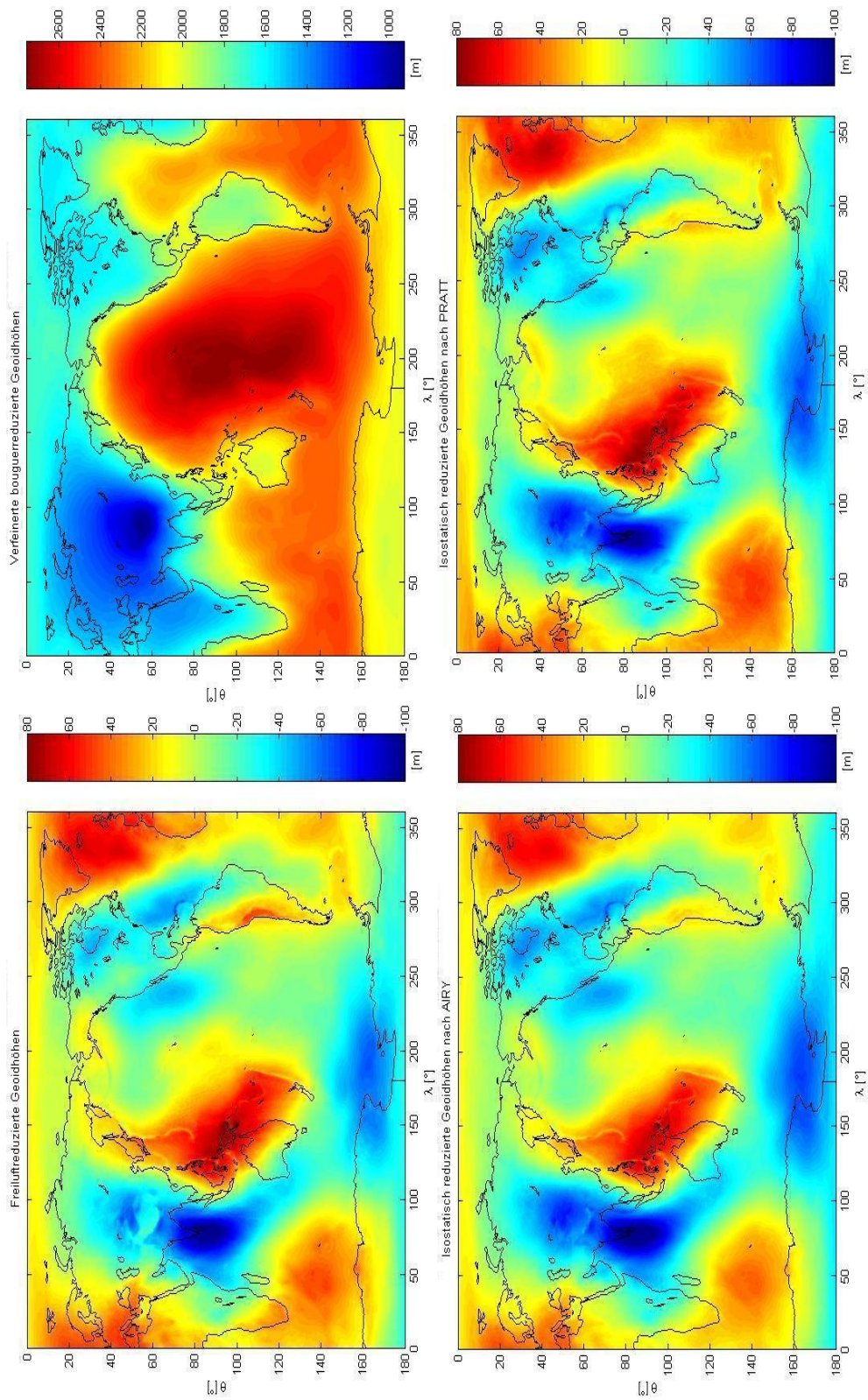


Abb. 5.11: Globaler Vergleich der Geoidhöhen

Mit Hilfe von Gradvarianzen kann der Glättungsgrad der isostatisch reduzierten Geoidhöhen untersucht werden. In Abbildung 5.12 sind die Wurzeln der Signalgradvarianzen der verschiedenen Geoidhöhen dargestellt.

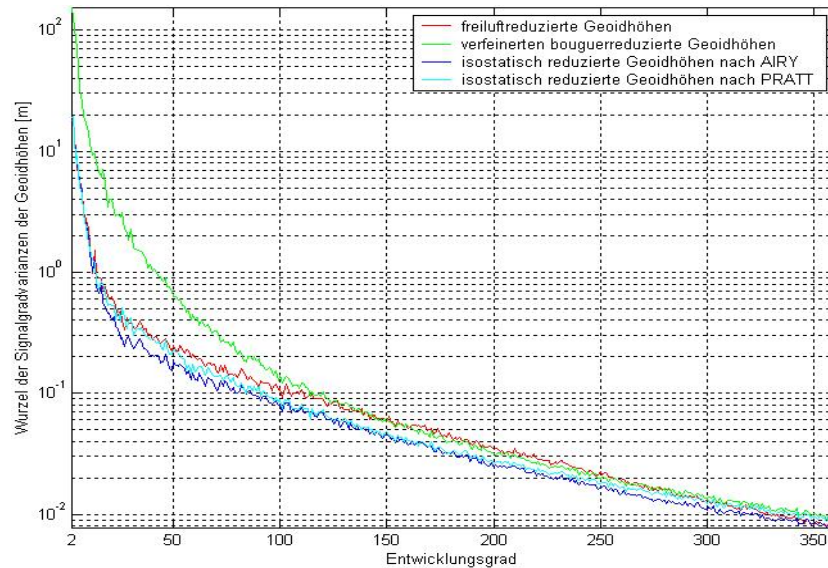


Abb. 5.12: Wurzel der Signalgradvarianzen der Geoidhöhen

Dieser Abbildung kann man sofort entnehmen, dass die isostatisch reduzierten Geoidhöhen glatter sind als die freiluftreduzierten Geoidhöhen. Die Geoidhöhen verhalten sich analog zu den Schwereanomalien, nur mit dem Unterschied das der kurzwellige Anteil des Signals der Geoidhöhen nicht verstärkt wird (Kapitel 4.1.2). Die isostatisch reduzierten Geoidhöhen nach AIRY sind folglich ebenfalls glatter als die isostatisch reduzierten Geoidhöhen nach PRATT. Diese Aussage bezieht sich wiederum nur auf das globale Verhalten der beiden Funktionen.

Die Glättungswerte pro Entwicklungsgrad und die kumulativen Glättungswerte der isostatisch reduzierten Geoidhöhen sind nach den Gleichungen 5.5 und 5.6 gleich den Glättungswerten der isostatisch reduzierten Schwereanomalien. Deshalb wurden im Rahmen dieser Arbeit für den Entwicklungsbereich $n = [2 \ 360]$ die Differenzen der Glättungswerte pro Entwicklungsgrad und die Differenzen der kumulativen Glättungswerte von $n_1 = 2$ bis $n_2 = 3, 4, 5, \dots$ berechnet. Die statistischen Werte dieser Differenzen befinden sind in der folgenden Tabelle. Da die Differenzen sehr klein sind, kann davon ausgegangen werden, dass die Berechnungen richtig durchgeführt wurden.

Statistische Werte	$G_n(\Delta g_{Airy}^{ISO}) - G_n(N_{Airy}^{ISO})$	$G_{n1,n2}(\Delta g_{Airy}^{ISO}) - G_{n1,n2}(N_{Airy}^{ISO})$
Wertebereich [%]	[-0.0132 0.0156]	$[-2.3280 \cdot 10^{-4} \quad 1.3425 \cdot 10^{-4}]$
Mittelwert [%]	$3.2086 \cdot 10^{-5}$	$-3.9871 \cdot 10^{-5}$
Varianz [% ²]	$5.2485 \cdot 10^{-6}$	$3.1975 \cdot 10^{-9}$
RMS [%]	± 0.0023	$\pm 5.6468 \cdot 10^{-5}$
Statistische Werte	$G_n(\Delta g_{Pratt}^{ISO}) - G_n(N_{Pratt}^{ISO})$	$G_{n1,n2}(\Delta g_{Pratt}^{ISO}) - G_{n1,n2}(N_{Pratt}^{ISO})$
Wertebereich [%]	[-0.0197 0.0183]	$[-0.0011 \quad 9.7658 \cdot 10^{-5}]$
Mittelwert [%]	$-7.0312 \cdot 10^{-5}$	$-1.3416 \cdot 10^{-4}$
Varianz [% ²]	$1.2972 \cdot 10^{-5}$	$8.0024 \cdot 10^{-9}$
RMS [%]	± 0.0036	$\pm 8.9332 \cdot 10^{-5}$

5.2.2 Regionaler Vergleich

In diesem Kapitel wird das Verhalten der freiluftreduzierten und der isostatisch reduzierten Geoidhöhen nach AIRY und PRATT in den selben Gebieten untersucht wie die Schwereanomalien.

Es können folgende Informationen aus der Untersuchung der regionalen Gebiete gewonnen werden:

- Im Himalaya und für den Marianengraben verhalten sich die isostatisch reduzierten Geoidhöhen analog zu den isostatisch reduzierten Schwereanomalien. Die Glättung der Schwereanomalien ist stärker als die der Geoidhöhen.
- In den Anden erzielt für den Entwicklungsbereich $n = [2 \quad 360]$ das Airy-Heiskanen-Modell eine stärkere Glättung als das Pratt-Hayford-Modell. Bei den isostatisch reduzierten Schwereanomalien hingegen erzielt das Pratt-Hayford-Modell eine stärkere Glättung für diesen Entwicklungsbereich.
- In Australien verhalten sich die isostatisch reduzierten Geoidhöhen anders als die isostatisch reduzierten Schwereanomalien, da hier eine Glättung mit Hilfe des Pratt-Hayford-Modells erzielt wird. Für den Entwicklungsbereich $n = [2 \quad 360]$ bewirkt das Pratt-Hayford-Modell sogar eine stärkere Glättung als das Airy-Heiskanen-Modell.
- Für den ostpazifischen Rücken verhalten sich die isostatisch reduzierten Geoidhöhen analog zu den isostatisch reduzierten Schwereanomalien bis auf den Entwicklungsbereich $n = [10 \quad 49]$, hier bewirkt das Pratt-Hayford-Modell einer stärkere Glättung.
- Für den mittelozeanischen Rücken verhalten sich die isostatisch reduzierten Geoidhöhen analog zu den isostatisch reduzierten Schwereanomalien bis auf den Entwicklungsbereich $n = [2 \quad 360]$, hier bewirkt das Pratt-Hayford-Modell eine stärkere Glättung.

HIMALAYA ($\theta = [50^\circ \ 70^\circ]$ und $\lambda = [70^\circ \ 110^\circ]$):

N_{Airy}^{ISO}	$n = [10 \ 49]$	$n = [50 \ 260]$	$n = [2 \ 360]$
Werteb. [m]	[-10.0364 11.8856]	[-8.0340 12.4566]	[-69.8574 - 13.0041]
M [m]	1.7802	-0.0492	-50.7942
RMS [m]	4.2021	1.8251	10.0884
G_{RMS} [%]	51.9396	57.3120	82.7581
N_{Pratt}^{ISO}	$n = [10 \ 49]$	$n = [50 \ 260]$	$n = [2 \ 360]$
Werteb. [m]	[-10.4959 11.2136]	[-8.0926 12.3115]	[-76.5559 - 17.2457]
M [m]	1.3690	-0.0481	-55.9453
RMS [m]	4.0810	1.7061	10.0102
G_{RMS} [%]	50.4422	53.5755	82.1166

ANDEN ($\theta = [80^\circ \ 130^\circ]$ und $\lambda = [275^\circ \ 295^\circ]$):

Δg_{Airy}^{ISO}	$n = [10 \ 49]$	$n = [50 \ 260]$	$n = [2 \ 360]$
Werteb. [m]	[-9.5039 12.8125]	[-6.8185 7.4435]	[-30.9995 31.7623]
M [m]	0.7393	-0.0009	11.5753
RMS [m]	4.6082	1.5342	9.0009
G_{RMS} [%]	63.1121	51.7038	71.3463
N_{Pratt}^{ISO}	$n = [10 \ 49]$	$n = [50 \ 260]$	$n = [2 \ 360]$
Werteb. [m]	[-15.9193 12.7992]	[-6.9548 7.8372]	[-36.4931 25.6967]
M [m]	0.4403	0.0036	7.4677
RMS [m]	4.9357	1.5130	9.0971
G_{RMS} [%]	67.5971	50.9867	72.1086

AUSTRALIEN ($\theta = [100^\circ \ 130^\circ]$ und $\lambda = [110^\circ \ 150^\circ]$):

N_{Airy}^{ISO}	$n = [10 \ 49]$	$n = [50 \ 260]$	$n = [2 \ 360]$
Werteb. [m]	[-9.5459 5.6731]	[-6.4501 5.9378]	[-37.7491 74.9864]
M [m]	0.5187	-0.0120	7.9530
RMS [m]	2.6694	1.1149	29.9545
G_{RMS} [%]	65.1393	80.5977	96.9747
N_{Pratt}^{ISO}	$n = [10 \ 49]$	$n = [50 \ 260]$	$n = [2 \ 360]$
Werteb. [m]	[-7.9416 8.5544]	[-5.9424 5.5632]	[-42.8998 68.7950]
M [m]	0.3407	0.0055	2.8276
RMS [m]	3.5997	1.3634	28.3566
G_{RMS} [%]	87.8416	98.5596	91.8018

OSTPAZIFISCHER RÜCKEN ($\theta = [110^\circ \ 140^\circ]$ und $\lambda = [225^\circ \ 275^\circ]$):

N_{Airy}^{ISO}	$n = [10 \ 49]$	$n = [50 \ 260]$	$n = [2 \ 360]$
Werteb. [m]	[-4.7570 7.6833]	[-1.3346 0.7553]	[-16.7519 6.1695]
M [m]	-0.1698	0.0054	-6.4235
RMS [m]	2.8791	0.2157	4.9759
G_{RMS} [%]	84.5294	59.6312	105.5373
N_{Pratt}^{ISO}	$n = [10 \ 49]$	$n = [50 \ 260]$	$n = [2 \ 360]$
Werteb. [m]	[-5.3739 7.4415]	[-2.2384 1.6335]	[-15.4801 7.0519]
M [m]	-0.3091	0.0114	-7.1158
RMS [m]	2.7453	0.3610	5.3418
G_{RMS} [%]	80.5995	99.7945	113.2983

MITTELATLANTISCHER RÜCKEN ($\theta = [30^\circ \ 50^\circ]$ und $\lambda = [320^\circ \ 340^\circ]$):

N_{Airy}^{ISO}	$n = [10 \ 49]$	$n = [50 \ 260]$	$n = [2 \ 360]$
Werteb. [m]	[-3.5990 3.9552]	[-1.1590 0.8760]	[37.6798 69.3140]
M [m]	0.5605	0.0102	61.4717
RMS [m]	1.9541	0.3211	6.2457
G_{RMS} [%]	68.7307	57.2471	96.4025
N_{Pratt}^{ISO}	$n = [10 \ 49]$	$n = [50 \ 260]$	$n = [2 \ 360]$
Werteb. [m]	[-4.6970 5.3101]	[-2.5491 1.8258]	[45.5092 75.3519]
M [m]	0.6434	0.0330	65.9356
RMS [m]	1.7053	0.5655	5.7473
G_{RMS} [%]	59.9790	100.8279	88.7102

MARIANENGRABEN ($\theta = [60^\circ \ 80^\circ]$ und $\lambda = [135^\circ \ 155^\circ]$):

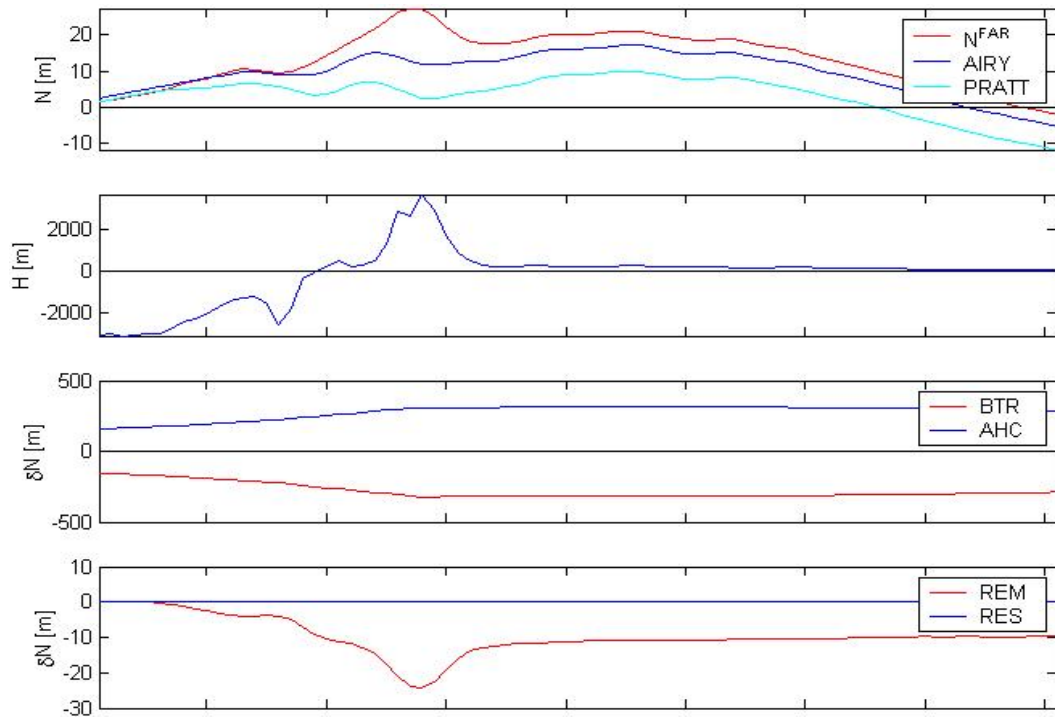
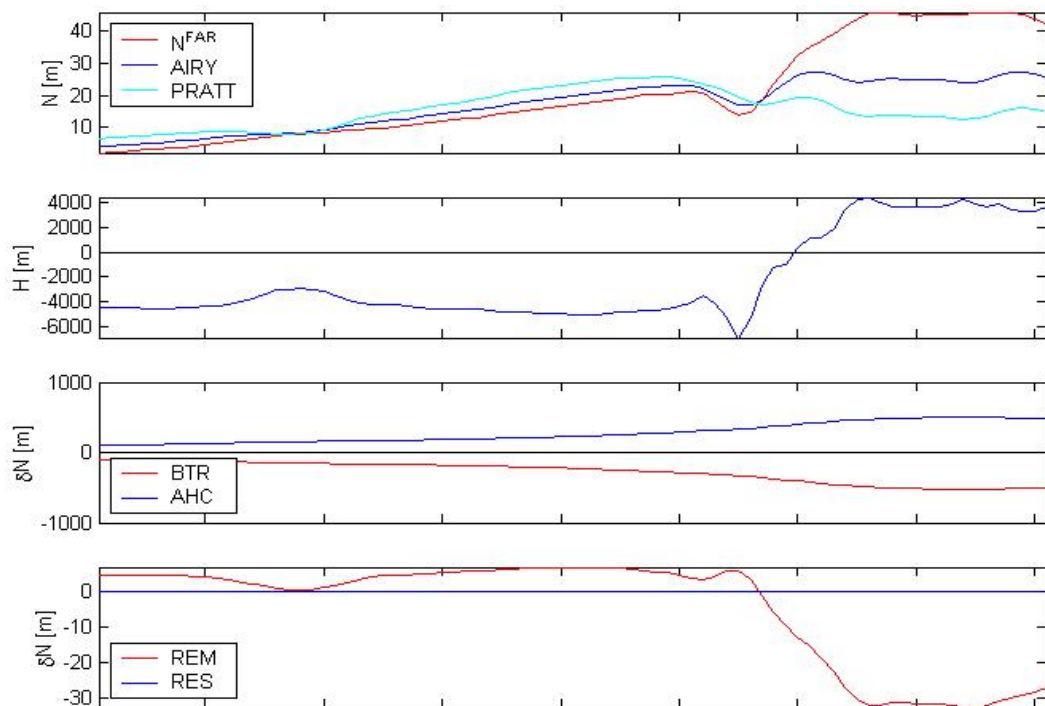
N_{Airy}^{ISO}	$n = [10 \ 49]$	$n = [50 \ 260]$	$n = [2 \ 360]$
Werteb. [m]	[-7.8326 7.0369]	[-11.3743 8.2101]	[14.4256 63.2981]
M [m]	0.5179	-0.0585	43.6125
RMS [m]	3.1636	2.2789	9.5914
G_{RMS} [%]	97.6142	84.4459	97.3851
N_{Pratt}^{ISO}	$n = [10 \ 49]$	$n = [50 \ 260]$	$n = [2 \ 360]$
Werteb. [m]	[-9.8777 6.7148]	[-6.6212 5.9880]	[23.5211 68.3642]
M [m]	0.1368	-0.0143	49.4103
RMS [m]	3.5459	1.8572	8.4769
G_{RMS} [%]	109.4129	68.8202	86.0689

5.2.3 Vergleich von Profilen

In diesem Abschnitt wird das Verhalten der freiluftreduzierten Geoidhöhen, der isostatisch reduzierten Geoidhöhen nach dem Airy-Heiskanen-Modell und nach dem Pratt-Hayford-Modell, der orthometrischen Höhen, der verfeinerten Bouguerreduktion, der Airy-Heiskanen-Reduktion, der Removerreduktion und der Restorerreduktion mit Hilfe von Profilen durch die Gebiete: Anden, Australien, ostpazifischer Rücken, mittelatlantischer Rücken und Marianengraben untersucht. In den Abbildungen auf den nächsten drei Seiten sind diese Profile für den Entwicklungsbereich $n = [2 \quad 360]$ dargestellt.

Aus den Abbildungen kann folgende Information gewonnen werden:

- Die freiluftreduzierten Geoidhöhen und die isostatisch reduzierten Geoidhöhen verhalten sich analog zu den Freiluftanomalien und isostatisch reduzierten Schwereanomalien. Ihr Verhalten unterscheidet sich lediglich darin, dass die Geoidhöhen keine kurzwelligen Strukturen aufweisen.
- Die verfeinerte Bouguerreduktion und die Airy-Heiskanen-Reduktion verhalten sich analog zu denen der Schwereanomalien. Mit dem Unterschied, dass bei den Reduktionen der Geoidhöhen keine kurzwelligen Strukturen auftreten.
- Die Removerreduktion und Restorerreduktion der Geoidhöhen verhalten sich ebenfalls analog zu denen der Schwereanomalien. Mit dem Unterschied, dass auch hier keine kurzwelligen Strukturen auftreten.

Abb. 5.13: Profil durch die Anden $\theta = 90.125^\circ$ und $\lambda = [275.125^\circ \quad 295.125^\circ]$ Abb. 5.14: Profil durch die Anden $\theta = 110.125^\circ$ und $\lambda = [275.125^\circ \quad 295.125^\circ]$

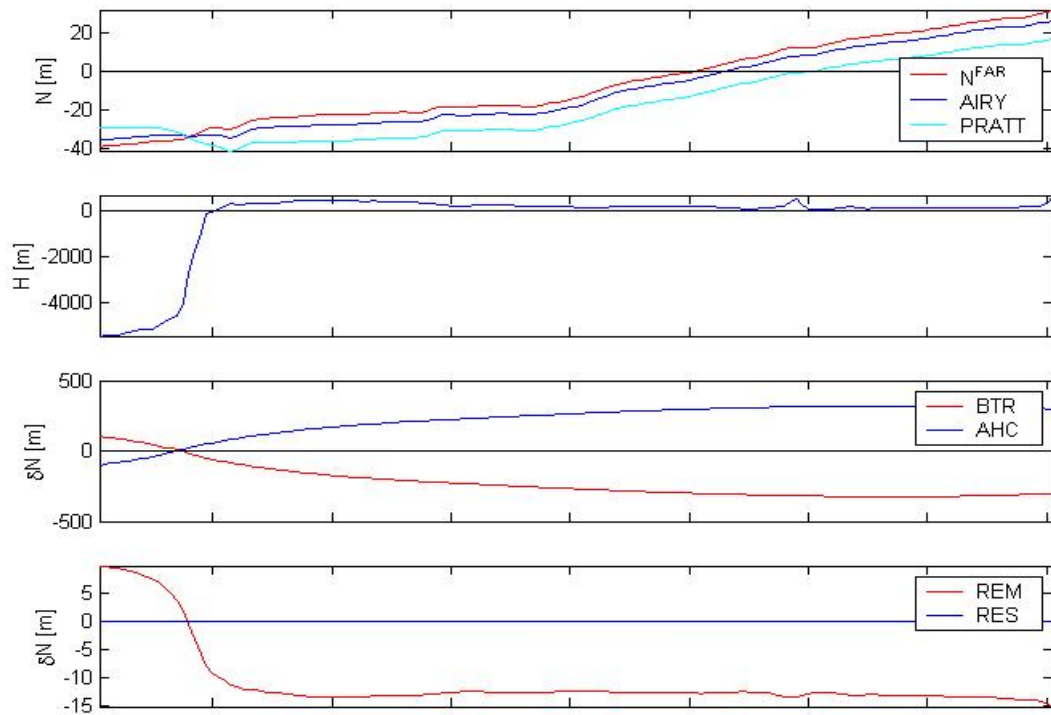


Abb. 5.15: Profil durch Australien $\theta = 120.125^\circ$ und $\lambda = [110.125^\circ \quad 150.125^\circ]$

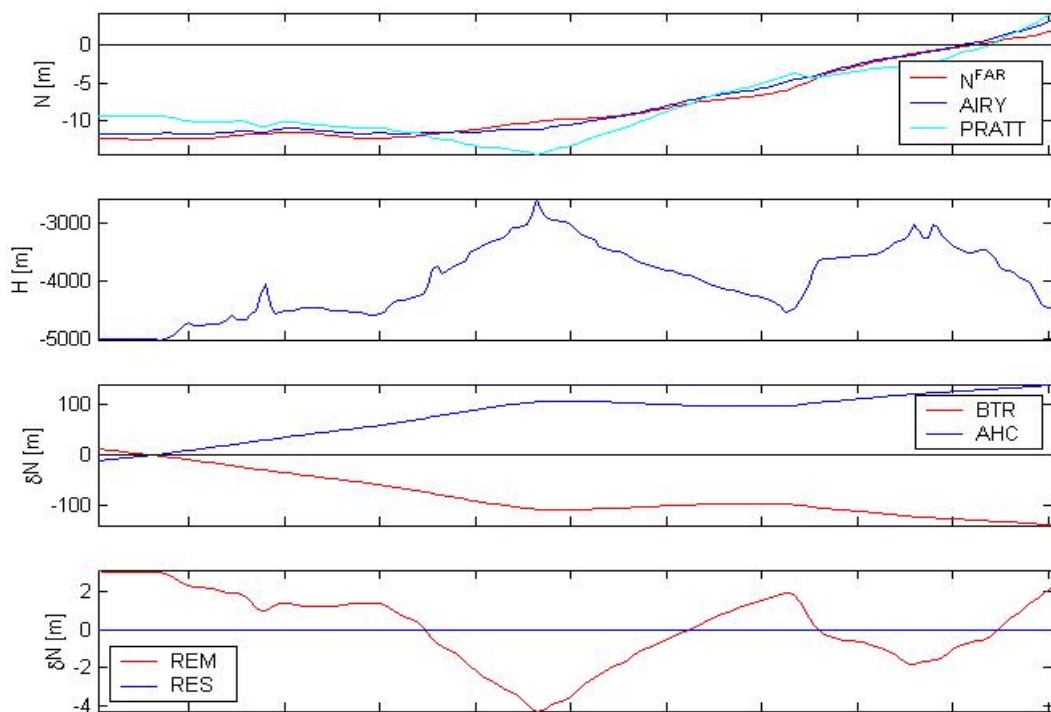


Abb. 5.16: Profil durch den ostpazifischen Rücken $\theta = 130.125^\circ$ und $\lambda = [225.125^\circ \quad 275.125^\circ]$

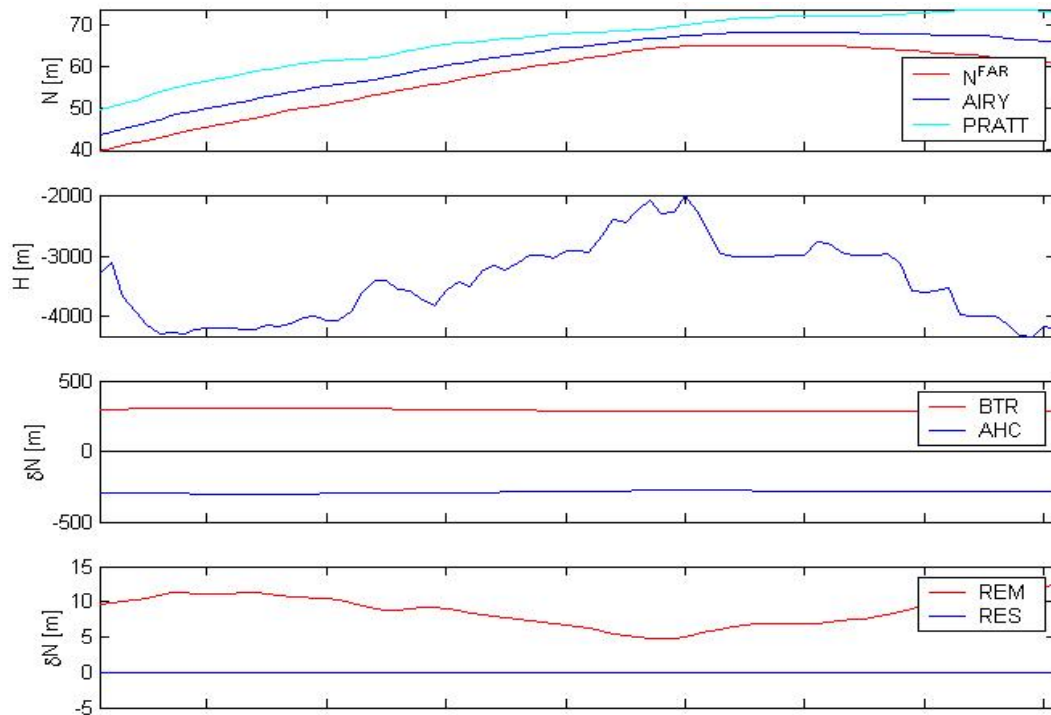


Abb. 5.17: Profil durch den mittelatlantischen Rücken $\theta = 45.125^\circ$ und $\lambda = [320.125^\circ \quad 340.125^\circ]$

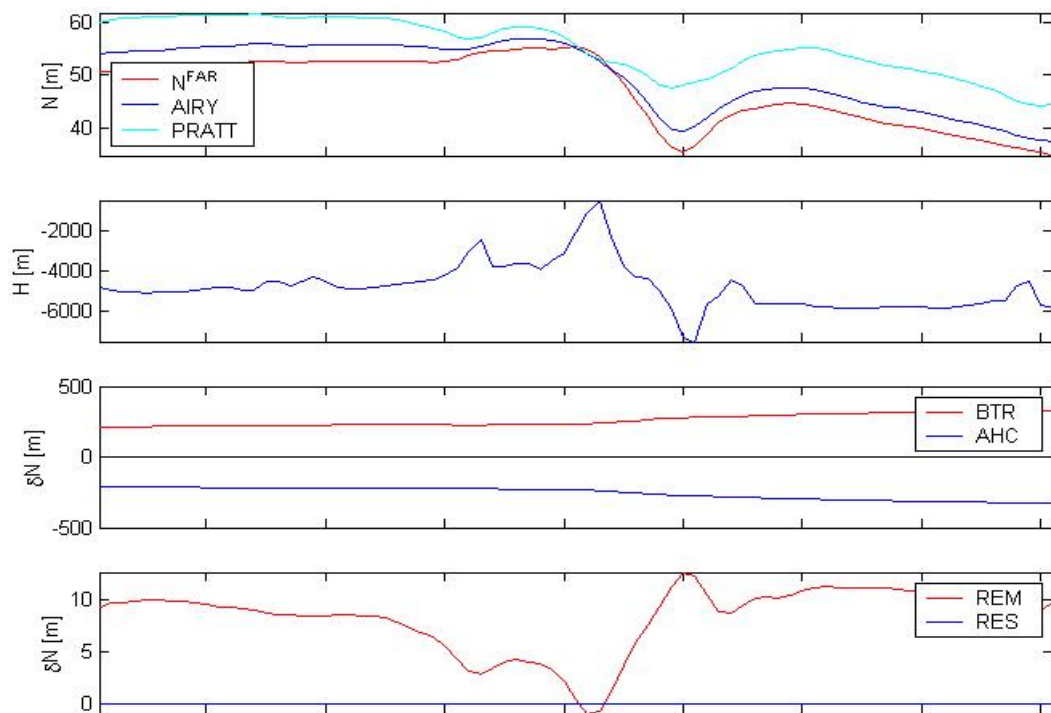


Abb. 5.18: Profil durch den Marianengraben $\theta = 75.125^\circ$ und $\lambda = [135.125^\circ \quad 155.125^\circ]$

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel wird eine Kurzfassung der zentralen Punkte und Ergebnisse dieser Arbeit gegeben sowie ein kurzer Ausblick über noch offene Problemstellungen.

Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit werden effiziente Rechenwege zur Berechnung der isostatisch reduzierten Schwereanomalien und Geoidhöhen nach dem Airy-Heiskanen-Modell und nach dem Pratt-Hayford-Modell vorgestellt. Desweiteren wird eine umfassende Analyse der isostatisch reduzierten Schwereanomalien und Geoidhöhen beschrieben. Sie gibt Aufschluss darüber, mit welchem hydrostatischen Kompensationsmodell eine stärkere Glättung erzielt werden kann bzw. welches isostatische Modell die Realität besser approximiert.

Mathematische Grundlagen: Mit Hilfe der globalen, sphärisch harmonischen Synthese und Analyse können die isostatisch reduzierten Schwereanomalien und Geoidhöhen aus den orthometrischen Höhen und den Potentialkoeffizienten eines Schwerefeldmodells abgeleitet werden. Es gibt zwei Methoden zur Durchführung der GSHS und GSHA, deren Verwendung davon abhängt, ob die globale diskrete Funktion repräsentative Punktwerte oder Blockmittelwerte enthält. Im Rahmen dieser Arbeit wurde die GSHS und GSHA für globale diskrete Funktionen, die Blockmittelwerte, die im Blockzentrumspunkt registriert sind, enthalten, durchgeführt. Beim Überprüfen der Rechengenauigkeit der GSHS und GSHA, mit Hilfe eines „closed loop“ auf Basis von Freiluftanomalien, wurde festgestellt, dass die Genauigkeit um das 3-fache gesteigert werden kann, wenn man $15' \times 15'$ -Blöcke anstatt $30' \times 30'$ -Blöcke betrachtet. Der prozentuale Fehler des „closed loop“ liegt für $15' \times 15'$ -Blöcke bei ungefähr 4%. Der prozentuale Fehler ist relativ hoch, da bei der Berechnung der Potentialkoeffizienten keine kleinste quadrate Ausgleichung sondern eine numerische Integration durchgeführt wurde.

Airy-Heiskanen-Modell: Der hier vorgestellte effiziente Rechenweg zur Berechnung der isostatisch reduzierten Schwereanomalien und Geoidhöhen nach dem Airy-Heiskanen-Modell stützt sich auf Aussagen von RAPP et al. (1988), RUMMEL (2002) und TSOULIS (1999). Er gliedert sich in 3 Rechenschritte:

- (1) Berechnung der verfeinerten Bouguerreduktion bzw. der topographischen dimensionslosen normierten Potentialkoeffizienten \overline{C}_{nm}^T und \overline{S}_{nm}^T .
- (2) Berechnung der Airy-Heiskanen-Reduktion bzw. der dimensionslosen normierten Potentialkoeffizienten der Kompensation \overline{C}_{nm}^C und \overline{S}_{nm}^C .
- (3) Berechnung der isostatisch reduzierten Schwereanomalien und Geoidhöhen durch Addition der Freiluftanomalien bzw. der freiluftreduzierten Geoidhöhen, der verfeinerten Bouguerreduktion, der Airy-Heiskanen-Reduktion und der zwei sekundären indirekten Effekte oder mit Hilfe der GSHS direkt aus den isostatisch reduzierten Potentialkoeffizienten.

Um die Berechnungen durchführen zu können muss man unter anderem die äquivalente Gesteinstopographie und die Kompensationstiefe kennen. Die Formeln zur Berechnung der äquivalenten Gesteinstopographie aus den orthometrischen Höhen werden in dieser Arbeit ausführlich hergeleitet und in Bezug auf ihre Genauigkeit überprüft. Die Kompensationstiefe kann als konstante Größe oder als eine Größe, die vom Grad der Kugelfunktionsentwicklung abhängig ist, betrachtet werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine konstante Kompensationstiefe von 30 km verwendet. Es gibt 3 Methoden zur Berechnung der Kompensationstiefen in Abhängigkeit von dem Grad der Kugelfunktionsentwicklung, die in RAPP et al. (1988) ausführlich beschrieben sind und in der vorliegenden Arbeit nur kurz wiedergegeben werden.

Pratt-Hayford-Modell: Der hier vorgestellte effiziente Rechenweg zur Berechnung der isostatisch reduzierten Schwereanomalien und Geoidhöhen nach dem Pratt-Hayford-Modell wurde aus dem so eben beschriebenen Rechenweg für das Airy-Heiskanen-Modell, nach dem in RUMMEL (2002) aufgeführten Prinzip, abgeleitet. Dieser Rechenweg setzt sich ebenfalls aus 3 Rechenschritten zusammen:

- (1) Berechnung der Removereduktion bzw. der dimensionslosen normierten Potentialkoeffizienten der Removereduktion \overline{C}_{nm}^{REM} und \overline{S}_{nm}^{REM} .
- (2) Berechnung der Restorereduktion bzw. der dimensionslosen normierten Potentialkoeffizienten der Restorereduktion \overline{C}_{nm}^{RES} und \overline{S}_{nm}^{RES} .
- (3) Berechnung der isostatisch reduzierten Schwereanomalien und Geoidhöhen durch Addition der Freiluftanomalien bzw. der freiluftreduzierten Geoidhöhen, der Removereduktion, der Restorereduktion und der zwei sekundären indirekten Effekte oder mit Hilfe der GSHS direkt aus den isostatisch reduzierten Potentialkoeffizienten.

Zur Berechnung der Removereduktion benötigt man unter anderem die äquivalenten Höhen für das Modell von PRATT, um im Land- und Ozeanbereich mit gleichen Formeln arbeiten zu können. Die Formel zur Berechnung der äquivalenten Höhen für das Modell von PRATT wurden im Rahmen dieser Arbeit selbständig hergeleitet und in Bezug auf ihre Genauigkeit überprüft. Durch das Einführen der äquivalenten Höhen für das Modell von PRATT kann die numerische Effizienz des oben aufgeführten Rechenwegs gesteigert werden.

Diskussion der Ergebnisse: Ein weiterer zentraler Punkt dieser Arbeit ist die Analyse des Glättungsverhaltens der isostatisch reduzierten Schwereanomalien und Geoidhöhen nach dem Airy-Heiskanen-Modell und nach dem Pratt-Hayford-Modell. Mit Hilfe von Gradvarianzen kann das Glättungsverhalten der isostatisch reduzierten Schwerefeldfunktionale global untersucht werden. Die isostatisch reduzierten Schwerefeldfunktionale nach AIRY sind glatter als die nach PRATT. Demnach approximiert das Airy-Heiskanen-Modell die Realität besser als das Pratt-Hayford-Modell. Diese Aussage bezieht sich allerdings nur auf das globale Verhalten der beiden Funktionen. Betrachtet man die Glättungswerte pro Entwicklungsgrad und die kumulativen Glättungswerte so stellt man fest, dass das Airy-Heiskanen-Modell für den Entwicklungsbereich $n = [20 \quad 340]$ eine Glättung bewirkt, das Pratt-Hayford-Modell hingegen nur für den Entwicklungsbereich $n = [50 \quad 275]$. Mit Hilfe des Verhältnisses der RMS-Werte der isostatisch reduzierten Schwereanomalien bzw. Geoidhöhen und der Freiluftanomalien bzw. freiluftreduzierten Geoidhöhen wird das regionale Glättungsverhalten in den Gebieten: Himalaya, Anden, Australien, ostpazifischer Rücken, mittelatlantischer Rücken und Marianengraben untersucht. In tektonischen Zonen, in denen sehr hohe Gebirge vorkommen, wird die Kompensation der topographischen Massen in den darunterliegenden Erdschichten durch beide isostatische Modelle gut approximiert. Es gibt tektonische Zonen (Anden, Himalaya, Marianengraben), die eher dem Kompensationsmechanismus des Pratt-Hayford-Modells unterliegen als dem des Airy-Heiskanen-Modells. Global gesehen approximiert jedoch das Airy-Heiskanen-Modell die Realität besser. Es gibt tektonische Zonen (ostpazifischer Rücken) in denen beide isostatischen Kompensationsmodelle versagen. Diesen Zonen liegt ein Kompensationsmechanismus zugrunde, der weder dem Airy-Heiskanen-Modell noch dem Pratt-Hayford-Modell entspricht. Die isostatisch reduzierten Schwereanomalien und Geoidhöhen weisen ein ähnliches Glättungsverhalten auf, wobei die Glättung der isostatisch reduzierten Schwereanomalien stärker ist als die der Geoidhöhen. Mit Hilfe von Profilen wird das Verhalten der isostatisch reduzierten Schwereanomalien und Geoidhöhen, der orthometrischen Höhen und der Schwerereduktionen untersucht. Es wird vermutet, dass ein Zusammenhang zwischen der Korrelation der Freiluftanomalien bzw. freiluftreduzierten Geoidhöhen mit dem Geländeverlauf und dem Glättungsgrad der isostatisch reduzierten Schwereanomalien bzw. Geoidhöhen besteht. Je höher die Korrelation der Freiluftanomalien bzw. freiluftreduzierten Geoidhöhen mit dem Geländeverlauf ist, desto stärker ist die Glättung der isostatisch reduzierten Schwereanomalien bzw. Geoidhöhen. Die isostatisch reduzierten Schwereanomalien und Geoidhöhen sind kaum mit der Topographie und Bathymetrie korreliert. Beim Airy-Heiskanen-Modell kommt es in Gebirgsregionen zur Unterkompensation. Je langwelliger die Strukturen des Gebirges sind, desto geringer ist die Unterkompensation.

Ausblick

In künftigen Arbeiten könnten folgende Problemstellungen untersucht werden:

- (1) Genauigkeitssteigerung bei der Durchführung der GSHS und GSHA für eine globale diskrete Funktion die Blockmittelwerte enthält. Dazu müssen folgende Punkte untersucht werden:
 - Genauigkeitssteigerung der Kugelfunktionsentwicklung durch Berücksichtigen höherer Entwicklungsgrade.
 - Betrachten von globalen diskreten Funktionen, die kleinere Blockmittelwerte als 15' Blockmittelwerte enthalten.
 - Berechnung der Potentialkoeffizienten, im Rahmen der GSHA, mit Hilfe der kleinsten quadrate Ausgleichung anstatt mit Hilfe der numerischen Integration.
 - Berücksichtigen der ellipsoidischen Korrektur bei der Kugelfunktionsentwicklung.
- (2) Verwenden neuer hochaufgelöster Schwerefeldmodelle und Höhendatensätze. Gegenwärtig und in den nächsten Jahren gibt es eine Reihe von simultan operierenden Satellitenmissionen: CHAMP, GRACE, GOCE, ENVISAT und Jason, die einen deutlichen Fortschritt in der Erforschung des statischen und zeitvariablen Erdschwerefeldes sowie der Erdoberfläche bringen werden. Im Bereich der Schwerefeldmodelle erwartet man eine Genauigkeitssteigerung um mehrere Größenordnungen gegenüber dem besten bisherigen Schwerefeldmodell EGM96. Mit Hilfe der Satellitenmission X-SAR/SRTM wurden 80% der festen Erdoberfläche neu kartiert. Derzeit werden mit SRTM-Daten globale digitale Höhenmodelle mit einer Auflösung von 30" abgeleitet.
- (3) Optimierung der lokalen Kompensationsmodelle nach folgende Aspekte:
 - Ermittlung der optimalen Kompensationstiefe.
 - Bestimmung der optimalen mittleren Krustendichte, Manteldichte und Lithosphärendichte mit Hilfe neuer Informationen über den Aufbau der Erde.
 - Überprüfung ob Seen und Landeis-Gebiete in den mathematischen Modellen separate berücksichtigt werden müssen.
 - Entwickeln eines neuen lokalen Kompensationsmodells, dass die Vorteile des Airy-Heiskanen-Modells und Pratt-Hayford-Modells verbindet.
- (4) Entwickeln weiterer Analysemethoden mit deren Hilfe die isostatisch reduzierten Schwerkreanomalien und Geoidhöhen global, regional und entlang von Profilen genauer untersucht werden können. Ziel ist es den Zusammenhang zwischen verschiedenen tektonischen Zonen und den unterschiedlichen Kompensationsmechanismen herauszufinden.

Anhang

A.1 Normalisierte zugeordnete Legendre-Polynome

Die normalisierten zugeordneten Legendre Polynome können rekursiv berechnet werden (TSOULIS (1999)).

Startwerte zur Berechnung der normalisierten zugeordneten Legendre Polynome:

$$W_{11} = \sqrt{3} \quad (\text{A.1})$$

$$W_{nn} = \sqrt{\frac{2n+1}{2n}} \quad \text{für } n > 1 \quad (\text{A.2})$$

$$W_{nm} = \sqrt{\frac{(2n+1)(2n-1)}{(n+m)(n-m)}} \quad (\text{A.3})$$

$$\bar{P}_{00}(\cos \theta) = 1 \quad (\text{A.4})$$

$$\bar{P}_{m-1,m}(\cos \theta) = 0 \quad (\text{A.5})$$

Rekursive Berechnung von $\bar{P}_{nm}(\cos \theta)$:

$$\bar{P}_{nm}(\cos \theta) = W_{nn} \sin \theta \bar{P}_{n-1,n-1}(\cos \theta) \quad (\text{A.6})$$

$$\bar{P}_{n,n-1}(\cos \theta) = W_{nn} \cos \theta \bar{P}_{n-1,n-1}(\cos \theta) \quad (\text{A.7})$$

$$\bar{P}_{nm}(\cos \theta) = W_{nm}(\cos \theta \bar{P}_{n-1,m}(\cos \theta) - W_{n-1,m}^{-1} \bar{P}_{n-2,m}(\cos \theta)) \quad (\text{A.8})$$

B.1 Integrale der normalisierten zugeordneten Legendre-Polynome

Die Integrale der normalisierten zugeordneten Legendre Polynome lassen sich nach TSOULIS (1999) rekursiv berechnen:

$$\bar{I}P_{nm}(\cos \theta_i) = \int_{\theta_i - \Delta\theta}^{\theta_i + \Delta\theta} \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (\text{B.1})$$

Startwerte zur Berechnung der Integrale der normalisierten zugeordneten Legendre Polynome:

$$\theta_1 = \theta_i - \Delta\theta \quad (\text{B.2})$$

$$\theta_2 = \theta_i + \Delta\theta \quad (\text{B.3})$$

$$\overline{IP}_{00}(\cos \theta_i) = \cos \theta_1 - \cos \theta_2 \quad (\text{B.4})$$

$$\overline{IP}_{11}(\cos \theta_i) = W_{11} \frac{1}{2} (\theta_2 - \theta_1 - \cos \theta_2 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_1) \quad (\text{B.5})$$

$$\overline{IP}_{m-1,m}(\cos \theta_i) = 0 \quad (\text{B.6})$$

Rekursive Berechnung von $\overline{IP}_{n,m}(\cos \theta_i)$:

$$\begin{aligned} \overline{IP}_{nn}(\cos \theta_i) &= \frac{W_{nn}}{n+1} (nW_{n-1,n-1} \overline{IP}_{n-2,n-2}(\cos \theta_i) - \cos \theta_2 W_{nn}^{-1} \overline{P}_{nn}(\cos \theta_2) + \\ &\quad + \cos \theta_1 W_{nn}^{-1} \overline{P}_{nn}(\cos \theta_1)) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$$\overline{IP}_{n,n-1}(\cos \theta_i) = \frac{W_{n,n-1}}{n} (\sin^2 \theta_2 \overline{P}_{n-1,n-1}(\cos \theta_2) - \sin^2 \theta_1 \overline{P}_{n-1,n-1}(\cos \theta_1)) \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} \overline{IP}_{nm}(\cos \theta_i) &= \frac{W_{nm}}{m+1} ((n-2)W_{n-1,m}^{-1} \overline{IP}_{n-2,m}(\cos \theta_i) - \sin^2 \theta_2 \overline{P}_{n-1,m}(\cos \theta_2) - \\ &\quad - \sin^2 \theta_1 \overline{P}_{n-1,m}(\cos \theta_1)) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

B.2 Blockfläche

Berechnung der Blockfläche durch Integration über λ und θ :

$$F(\theta_i, \lambda_j) = \left| \int_{\lambda_j - \frac{\Delta\lambda}{2}}^{\lambda_j + \frac{\Delta\lambda}{2}} \int_{\theta_i - \frac{\Delta\theta}{2}}^{\theta_i + \frac{\Delta\theta}{2}} \sin \theta d\theta d\lambda \right| \quad (\text{B.10})$$

$$F(\theta_i, \lambda_j) = \Delta\lambda \left(-2 \sin \theta_i \sin \frac{\Delta\theta}{2} \right) \quad (\text{B.11})$$

B.3 Integrale der Kosinus- und Sinusfunktion

Integration der Kosinus- und Sinusfunktion über λ_i :

$$IC_m(\lambda_j) = \int_{\lambda_j - \frac{\Delta\lambda}{2}}^{\lambda_j + \frac{\Delta\lambda}{2}} \cos m\lambda d\lambda \quad (\text{B.12})$$

$$IC_m(\lambda_j) = \frac{2}{m} \cos m\lambda_i \sin m \frac{\Delta\lambda}{2} \quad (\text{B.13})$$

$$IS_m(\lambda_j) = \int_{\lambda_j - \frac{\Delta\lambda}{2}}^{\lambda_j + \frac{\Delta\lambda}{2}} \sin m\lambda d\lambda \quad (\text{B.14})$$

$$IS_m(\lambda_j) = \frac{2}{m} \sin m\lambda_i \sin m \frac{\Delta\lambda}{2} \quad (\text{B.15})$$

Abkürzungsverzeichnis

AHC	Airy-Heiskanen-Reduktion
ALTIM94	DEM für die Antarktis
BOR	Bouguerreduktion
BTR	Verfeinerte Bouguerreduktion
CHAMP	Challenging Mini-Satellite Payload for Geo-scientific Research and Applications program
DEM	Digital Elevation Model
DMA	Defense Mapping Agency
DORIS	Doppler Orbit determination and Radiopositioning Integrated on Satellite
DTED	Digital Terrain Elevation Data
DTM	Digital Topographic Model
EGM96	Earth Gravity Model 1996
ETOPO	Globales DEM, das am National Geophysical Data Center in Boulder entwickelt wurde
ERS1	European Remote Sensing Satellite 1
FAR	Freiluftreduktion
FFT	Fast Fourier Transformation
FNOC	Fleet Numerical Oceanography Center
FSU	Former Soviet Union
GGTOPO.MOD	Modifiziertes globales DTM, das an der Universität Trent in Peterborough entwickelt wurde
GOCE	Gravity Field and Steady State Ocean Circulation Explorer
GPS	Global Positioning System
GRACE	Gravity Recovery and Climate Experiment
GSFC	Goddard Space Flight Center
GSHA	Globale sphärisch harmonische Analyse
GSHS	Globale sphärisch harmonische Synthese
IGSN71	International Gravity Standardization Net 1971
JGP95E	Joint Gravity Point 1995 E
KMS	Kort & Matrikelstyrelsen
LSC	Least Squares Collocation
MOHO	Mohorovičić-Diskontinuität

MSL	Mean Sea Level
NASA	National Aeronautics and Space Administration
NIMA	National Imagery and Mapping Agency
OSU	Ohio State University
PGA	Point Gravity Anomaly
REM	Remove-Reduktion
RES	Restore-Reduktion
SLR	Satellite Laser Ranging
TB	TerrainBase
TDRSS	NASA's Tracking and Data Relay Satellite System
TOC	Topographische Geländekorrektur
TUG87	Globales DEM, das an der Technische Universität Graz 1987 entwickelt wurde
WGS84	World Geodetic System 1984

Abbildungsverzeichnis

2.1	Schalenaufbau des Erdinneren	6
2.2	Hydrostatisches Gleichgewicht	9
2.3	Schwimmgleichgewicht des Airy-Heiskanen-Modells	10
2.4	Schwimmgleichgewicht des Pratt-Hayford-Modells	11
2.5	Airy-Heiskanen-Modell	12
2.6	Zum Erdmittelpunkt konvergierende Säule	13
2.7	Übergang von der Topographie und Bathymetrie zur äquivalenten Gesteinstopographie	14
2.8	Genauigkeit der äquivalenten Gesteinstopographie ohne Berücksichtigung der Konvergenz der Säulen	15
2.9	Genauigkeit der äquivalenten Gesteinstopographie mit Berücksichtigung der Konvergenz der Säulen	17
2.10	Vereinheitlichtes Airy-Heiskanen-Modell	18
2.11	Pratt-Hayford-Modell	18
2.12	Entwicklung der äquivalenten Höhen für das Modell von PRATT	20
2.13	Genauigkeit der äquivalenten Höhen für das Modell von PRATT ohne Berücksichtigung der Konvergenz der Säulen	21
2.14	Genauigkeit der äquivalenten Höhen für das Modell von PRATT mit Berücksichtigung der Konvergenz der Säulen	23
2.15	Übergang von der Topographie und Bathymetrie zu den äquivalenten Höhen für das Modell von PRATT	23
2.16	Vereinheitlichtes Pratt-Hayford-Modell	24
3.1	Rechenweg im Orts- und Spektralbereich für das Störpotential	32
3.2	Beispiel für ein Histogramm	34
4.1	Höhendatensatz JPG95E	39

4.2	Geländetypen des Höhendatensatzes JPG95E	39
4.3	Säulenmodell	40
4.4	Wahrscheinlichkeitsfunktion der Topographie und Bathymetrie	41
4.5	Äquivalente Gesteinstopographie	42
4.6	Wahrscheinlichkeitsfunktion der äquivalenten Gesteinstopographie	42
4.7	Äquivalente Höhen für das Modell von PRATT	43
4.8	Wahrscheinlichkeitsfunktion der äquivalenten Höhen für das Modell von PRATT	44
4.9	Prinzip des „closed loop“ auf Basis der Freiluftanomalien	45
4.10	Ergebnis des „closed loop“ auf Basis von Freiluftanomalien für 30' Blockmittelwerte	45
4.11	Ergebnis des „closed loop“ auf Basis von Freiluftanomalien für 15' Blockmittelwerte	46
4.12	Freiluftanomalien des Schwerefeldmodells EGM96	47
4.13	Wahrscheinlichkeitsfunktion der Freiluftanomalien des Schwerefeldmodells EGM96	47
4.14	Geoidhöhen des Schwerefeldmodells EGM96	48
4.15	Wahrscheinlichkeitsfunktion der Geoidhöhen des Schwerefeldmodells EGM96	48
4.16	Wurzel der Signal- und Fehlergradvarianzen der Schwereanomalien des Schwerefeldmodells EGM96	49
4.17	Wurzel der Signal- und Fehlergradvarianzen der Geoidhöhen des Schwerefeldmodells EGM96	50
4.18	Erdmodell nach AIRY	51
4.19	Erdmodell nach AIRY ohne Massenüberschüsse und -defizite	52
4.20	Erdmodell nach AIRY ohne Massenüberschüsse, -defizite, Wurzeln und Antiwurzeln	52
4.21	Ort der isostatisch und freiluftreduzierten Schwerewerte	53
4.22	Rechenweg der verfeinerten Bouguerreduktion	53
4.23	Verfeinerte Bouguerreduktion	56
4.24	Einfache Bouguerreduktion	57
4.25	Schematische Darstellung der einfachen Bouguerreduktion und der topographischen Geländekorrektur	58
4.26	Topographische Geländekorrektur	58
4.27	Rechenweg der Airy-Heiskanen-Reduktion	59
4.28	Airy-Heiskanen-Reduktion	61

4.29	Gradabhängige Kompensationstiefen nach Methode 1, 2 und 3	64
4.30	Isostatische Reduktion nach AIRY für die Schwereanomalien	67
4.31	Isostatisch reduzierte Schwereanomalien nach AIRY	67
4.32	Isostatische Reduktion nach AIRY für die Geoidhöhen	69
4.33	Isostatisch reduzierte Geoidhöhen nach AIRY	69
4.34	Erdmodell nach PRATT	70
4.35	Erdmodell nach PRATT ohne alle Massen mit variabler Dichte bis zur Kompensationstiefe	71
4.36	Erdmodell nach PRATT bei dem die Lithosphäre eine konstante Dichte bis zur Kompensationstiefe besitzt	71
4.37	Ort der isostatisch und freiluftreduzierten Schwerewerte	72
4.38	Rechenweg der Removereduktion	72
4.39	Removereduktion	75
4.40	Rechenweg der Restoredreduktion	76
4.41	Isostatische Reduktion nach PRATT für die Schwereanomalien	79
4.42	Isostatisch reduzierte Schwereanomalien nach PRATT	80
4.43	Isostatische Reduktion nach PRATT für die Geoidhöhen	81
4.44	Isostatisch reduzierte Geoidhöhen nach PRATT	82
5.1	Globaler Vergleich der Schwereanomalien	86
5.2	Wurzel der Signalgradvarianzen der Schwereanomalien	87
5.3	Glättungswerte pro Entwicklungsgrad und kummulative Glättungswerte der isostatisch reduzierten Schwereanomalien	88
5.4	Kummulative Glättungswerte der isostatisch reduzierten Schwereanomalien für verschiedene Entwicklungsbereiche	89
5.5	Profil durch die Anden	95
5.6	Profil durch die Anden	95
5.7	Profil durch Australien	96
5.8	Profil durch den ostpazifischen Rücken	96
5.9	Profil durch den mittelatlantischen Rücken	97
5.10	Profil durch den Marianengraben	97
5.11	Globaler Vergleich der Geoidhöhen	99
5.12	Wurzel der Signalgradvarianzen der Geoidhöhen	100
5.13	Profil durch die Anden	105

5.14 Profil durch die Anden	105
5.15 Profil durch Australien	106
5.16 Profil durch den ostpazifischen Rücken	106
5.17 Profil durch den mittelatlantischen Rücken	107
5.18 Profil durch den Marianengraben	107

Literaturverzeichnis

- Bulirsch R., Stoer J. (1980): *Introduction to numerical analysis*. Springer Verlag
- Gerlach C. (2003): *Zur Höhensystemumstellung und Geoidberechnung in Bayern*. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 571, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München
- Gerthsen C. (1966): *Physik*. Springer Verlag
- Gruber T. (2000): *Hochauflösende Schwerefeldbestimmung aus Kombination von terrestrischen Messungen und Satellitendaten über Kugelfunktionen*. Scientific Technical Report GFZ Potsdam STR00/16
- Grüninger W. (1990): *Zur topographische-isostatischen Reduktion der Schwere*. Universität Fridericiana zu Karlsruhe
- Heiskanen W. A., Moritz H. (1967): *Physical Geodesy*. W. H. Freeman and Company
- Heki K., Sugano T. (2004): *Isostasy of the Moon from high-resolution gravity and topography data: Implication for its thermal history*. Geophysical Research Letters 31, L24703
- Jonston P., Lambeck K. (1999): *Postglacial rebound and sea level contributions to changes in the geoid and the Earth's rotation axis*. Geophysical Journal International 136, 537-558
- Kaban M., Schwintzer P., Artemieva I. M., Mooney W.D. (2003): *Density of the continental roots - Compositional and thermal effects*. EPSL 209, 53-69
- Kaban M., Schwintzer P., Tikhotsky S. A. (2001): *A Global Isostatic Gravity Model of the Earth*. Geophysical Journal International 136, 519-536
- Kaufmann G., Lambeck K. (2002): *Glacial isostatic adjustment and the radial viscosity profile from inverse modeling*. Journal of Geophysikal Research 107, B11, 2280
- Klingelé E., Kissling E. (1982): *Zum Konzept der isostatischen Modelle in Gebirgen am Beispiel der Schweizer Alpen*. Geodätische Kommission der Schweiz, Band 35
- Kuchling H. (1996): *Taschenbuch der Physik*. Fachbuchverlag Leipzig, Carl Hanser Verlag

- Lemoine F. G., Kenyon S. C., Factor J. K., Trimmer R. G., Pavlis N. K., Chinn D. S., Cox C. M., Klosko S. M., Luthcke S. B., Torrence M. H., Wang Y. M., Williamson R. G., Pavlis E. C., Rapp R. H., Olson T. R. (1998): *The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96*. NASA Technical Report NASA/TP-1998-206861, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, USA
- Press F., Siever R. (1995): *Allgemeine Geologie*. Spektrum Verlag
- Rapp R. H., Rummel R., Sünkel H., Tscherning C. C. (1988): *Comparisons of global topographic/isostatic models to the earth's observed gravity field*. Report No. 388, Dept. of Geodetic Science and Surveying, Ohio State University
- Rummel R. (2002): *Vorlesungsskript Erdmessung und Satellitengeodäsie Teil III*. Institut für astronomische und physikalische Geodäsie der TU München
- Schubert G., Turcotte D.L. (1982): *Geodynamics applications of continuum physics to geological problems*. John Wiley & Sons Verlag
- Sneeuw N. (1994): *Global spherical harmonic analysis by least squares and numerical quadrature methods in historical perspective*. Geophysical Journal International 118, 707-716
- Sünkel H. (1985): *An Isostatic earth model*. Report No. 367, Dept. of Geodetic Science and Surveying, Ohio State University
- Strang van Hees G. L. (2000): *Some elementary relations between massdistributions inside the earth and the geoid and gravity field*. Journal of Geodynamics 29, 111-123
- Stüwe K. (2000): *Einführung in die Geodynamik der Lithosphäre*. Springer Verlag
- Torge W. (2003): *Geodäsie*. deGruyter Verlag
- Tsoulis D. (1999): *Spherical harmonic computations with topographic/isostatic coefficients*. Nr. 3, Schriftreihe des Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie und der Forschungseinrichtung Stellitengeodäsie der TU München
- Tsoulis D. (2001): *A comparison between the Airy/Heiskanen and the Pratt/Hayford isostatic models for the computation of potential harmonic coefficients*. Journal of Geodesy 74, 637-643, Springer Verlag
- Watts A. B. (2001): *Isostasy and Flexure of the Lithosphere*. Cambridge University Press

**Veröffentlichungen in der Schriftenreihe IAPG / FESG (ISSN 1437-8280):
Reports in the series IAPG / FESG (ISSN 1437-8280):**

- No. 1:** Müller J., Oberndorfer H. (1999). *Validation of GOCE Simulation*. ISBN 3-934205-00-3.
- No. 2:** Nitschke M. (1999). *SATLAB – Ein Werkzeug zur Visualisierung von Satellitenbahnen*. ISBN 3-934205-01-1.
- No. 3:** Tsoulis D. (1999). *Spherical harmonic computations with topographic/isostatic coefficients*. ISBN 3-934205-02-X.
- No. 4:** Dorobantu R. (1999). *Gravitationsdrehwaage*. ISBN 3-934205-03-8.
- No. 5:** Schmidt R. (1999). *Numerische Integration gestörter Satellitenbahnen mit MATLAB*. ISBN 3-934205-04-6.
- No. 6:** Dorobantu R. (1999). *Simulation des Verhaltens einer low-cost Strapdown-IMU unter Laborbedingungen*. ISBN 3-934205-05-4.
- No. 7:** Bauch A., Rothacher M., Rummel R. (2000). *Bezugssysteme in Lage und Höhe. Tutorial zum Kursus INGENIEURVERMESSUNG 2000*. ISBN 3-934205-06-2.
- No. 8:** Rothacher M., Zebhauser B. (2000). *Einführung in GPS. Tutorial zum 3. SAPOS-Symposium 2000 in München*. ISBN 3-934205-07-0.
- No. 9:** Ulrich M. (2000). *Vorhersage der Erdrotationsparameter mit Hilfe Neuronaler Netze*. ISBN 3-934205-08-9.
- No. 10:** Seitz F. (2000). *Charakterisierung eines bistatischen Rayleigh- und Raman-Lidars zur Bestimmung von höhenaufgelösten Wasserdampfprofilen*. ISBN 3-934205-09-7.
- No. 11:** Meyer F. (2000). *Messung von höhenaufgelösten Wasserdampfprofilen unter Verwendung eines bistatischen Raman-Lidars*. ISBN 3-934205-10-0.
- No. 12:** Peters T. (2001). *Zeitliche Variationen des Gravitationsfeldes der Erde*. ISBN 3-934205-11-9.
- No. 13:** Egger D. (2001). *Astronomie und Java – Objekte der Astronomie*. ISBN 3-934205-12-7.
- No. 14:** Steigenberger P. (2002). *MATLAB-Toolbox zur TOPEX/POSEIDON Altimeterdatenverarbeitung*. ISBN 3-934205-13-5.
- No. 15:** Schneider M. (2002). *Zur Methodik der Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten*. ISBN 3-934205-14-3.
- No. 16:** Dorobantu R., Gerlach C. (2004). *Investigation of a Navigation-Grade RLG SIMU type iNAV-RQH*. ISBN 3-934205-15-1.
- No. 17:** Schneider M. (2004). *Beiträge zur Bahnbestimmung und Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten sowie zur Orientierung von Rotationssensoren*. ISBN 3-934205-16-X.
- No. 18:** Egger D. (2004). *Astro-Toolbox, Theorie*. ISBN 3-934205-17-8.
- No. 19:** Egger D. (2004). *Astro-Toolbox, Praxis*. ISBN 3-934205-18-6.
- No. 20:** Fackler U. (2005). *GRACE - Analyse von Beschleunigungsmessungen*. ISBN 3-934205-19-4.
- No. 21:** Schneider M. (2005). *Beiträge zur Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten*. ISBN 3-934205-20-8.
- No. 22:** Egger D. (2006). *Sinus-Netzwerk*. ISBN 3-934205-21-6.
- No. 23:** Schneider M. (2006). *Gravitationsfeldbestimmung unter Verwendung von Bilanzgleichungen für beliebige Observablen*. ISBN 3-934205-22-4.
- No. 24:** Mladek F. (2006). *Hydrostatische Isostasie*. ISBN 3-934205-23-2.

Weitere Exemplare können bezogen werden unter:

Copies are available from:

Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie

Technische Universität München

Arcisstrasse 21

D-80290 München

Germany

Telefon: +49-89-289-23190

Telefax: +49-89-289-23178

Email: rechel@bv.tum.de

Oder im Internet:

Or via Internet:

<http://tau.fesg.tu-muenchen.de/~iapg/web/veroeffentlichung/schriftenreihe/schriftenreihe.php>

