



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

Methodische Grundlagen von kombinierten Schwerefeldmodellen

T. Fecher

IAPG / FESG No. 26

Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie
Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie

München 2008

Methodische Grundlagen von kombinierten Schwerefeldmodellen

T. Fecher

IAPG / FESG No. 26

München 2008

ISSN 1437-8280

ISBN-13: 978-3-934205-25-3

Hinweis: Eine PDF-Version dieser Arbeit mit farbigen Abbildungen ist erhältlich unter
<http://www.iapg.bv.tum.de/Schriftenreihe/>

Adressen:

Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie

Technische Universität München

Arcisstrasse 21

D-80290 München

Germany

Telefon: +49-89-289-23190

Telefax: +49-89-289-23178

<http://www.iapg.bv.tum.de/>

Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie

Technische Universität München

Arcisstrasse 21

D-80290 München

Germany

Telefon: +49-89-289-23191

Telefax: +49-89-289-23178

<http://www.iapg.bv.tum.de/>



Methodische Grundlagen von kombinierten Schwerefeldmodellen

Diplomarbeit

Thomas Fecher

Betreuer: Dr.-Ing. Christian Gerlach
Dr.-Ing. Thomas Gruber
Abgabe: 30. Mai 2008

Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie

1	Einleitung	1
2	Grundlegendes zum Schwerfeld	5
3	Beschreibung der Messsysteme	13
3.1	Terrestrische Schweremessungen.....	13
3.2	Flug- und Schiffsgravimetrie	15
3.3	Satellite-Gravity-Gradiometry (SGG).....	18
3.4	Satellite-to-Satellite-Tracking (SST).....	22
3.5	GPS-Nivellement	24
3.6	Satellitenaltimetrie	24
3.7	Übersicht Messsysteme	28
4	Randwertaufgabe.....	31
5	Modellierungsansätze.....	41
5.1	Schwerfeldberechnung nach Stokes	41
5.2	Schwerfeldberechnung nach Molodenski.....	43
5.3	Kollokation.....	44
5.4	Ausgleichung.....	52
5.5	Downward Continuation	56
5.6	Übersicht	59
6	Korrekturen / Reduktionen.....	61
6.1	Terrestrische Gravimetrie.....	61
6.1.1	Quadratische Normalschwerekorrektur.....	61
6.1.2	Atmosphärenkorrektur	64
6.1.3	Ellipsoidische Korrektur	68
6.1.4	Gezeiten.....	74
6.1.5	Geländekorrektur.....	80
6.2	Fluggravimetrie	83
6.2.1	Ellipsoidische Korrektur	83
6.2.2	Gezeiten.....	85
6.2.3	Atmosphärenkorrektur	86
6.3	Satellitengradiometrie	86
6.3.1	Atmosphärenkorrektur	86
6.3.2	Ellipsoidische Korrektur	87
6.3.3	Gezeiten.....	88
6.4	Satellite-to-Satellite Tracking	89
6.4.1	Ellipsoidische Korrektur	89
6.4.2	Gezeiten.....	89
6.4.3	Atmosphärenkorrektur	90
6.5	Satellitenaltimetrie	90
6.5.1	Ellipsoidische Korrektur	90
6.5.2	Gezeiten.....	92
6.6	GPS-Nivellement	93
6.7	Fazit.....	93
7	Abschließendes Schema.....	95
8	Literaturliste	99

1 Einleitung

Ziel der physikalischen Geodäsie ist die Bestimmung der Erdfigur und des äußeren Schwerefeldes. Um dieses Ziel zu erreichen wurde eine Vielzahl von Verfahren entwickelt, mit denen Schwerefeldgrößen gemessen werden können und ein Formelapparat entworfen, mit dem auf verschiedenen Wegen das Schwerefeld berechnet werden kann.

Eines der Verfahren ist die Gravimetrie, bei der Schwerebeschleunigungen gemessen werden. Dies geschieht zumeist durch Geräteaufstellungen an Land, kann aber auch vom Flugzeug oder vom Schiff aus erfolgen. Gravimetrie liefert Punktwerte, die alle spektralen Anteile des Schwerefeldsignals enthalten. Da Gravimetrie nur Punktwerte erfasst, ist es schwer, sie für großflächige oder gar globale Aufgaben zu verwenden.

Das globale Schwerefeld hingegen wird im Rahmen von Schwerefeldsatellitenmissionen gemessen. Hierzu wurden spezielle Methoden entwickelt, nämlich Satellite-to-Satellite-Tracking (SST) bzw. Satellite-Gravity-Gradiometry (SGG). Da mit steigender Entfernung von der Erde vor allem das hochfrequente Schwerefeldsignal gedämpft wird, können Satelliten nicht das volle Spektrum des Schwerefeldes wahrnehmen. Da durch die Satellitenbahnen allerdings die Erde komplett überdeckt wird, können besonders der lang- und mittelwellige Anteil des Schwerefelds hochgenau bestimmt werden.

Ozean- und Eisflächen können mit Hilfe der Satellitenaltimetrie beobachtet werden. Mit ihr wird zwar eigentlich nicht direkt das Schwerefeld gemessen, dafür jedoch andere Größen, aus denen sich wiederum Schwerefeldbeobachtungen ableiten lassen.

Alle Verfahren messen das gleiche Schwerefeld, bringen jedoch verschiedene Vor- und Nachteile mit sich. Um das Schwerefeld also bestmöglich mit seinem kompletten Informationsgehalt zu bestimmen, scheint es notwendig zu sein, möglichst alle verschiedenen Verfahren miteinander zu kombinieren und gemeinsam zu verarbeiten, um den Vorteil jeder Methode abgreifen zu können. Wie aber lassen sich die Beobachtungen der verschiedenen Methoden kombinieren? Wie macht man eine Messung auf dem Erdboden mit der Messung in einem Flugzeug vergleichbar? Als gutes Beispiel für die schwierige Vergleichbarkeit dient z.B. die Rolle der Atmosphärenmassen. Diese wirken sich auf die unterschiedlichen Messverfahren verschieden aus. Ein Satellit beispielsweise, der sich oberhalb der Atmosphärenmassen befindet, nimmt das Schwerefeld bestehend aus Erde und Atmosphäre wahr, während bei terrestrischen Messungen die Atmosphäre über dem Messpunkt in erster Näherung überhaupt nicht wahrgenommen wird.

Neben der Kombination der verschiedenen Verfahren stellt sich darüber hinaus auch noch die Schwierigkeit, mit dem komplexen Formelapparat umzugehen. Es gilt zu überlegen, was getan werden muss, um die Messgrößen in dieses Formelkorsett zu „zwingen“. Man sollte überdies auch die Gültigkeit der Formeln an sich hinterfragen. Unter was für Bedingungen ist eine Formel gültig, welche Vereinfachungen zur Realität setzt diese Formel voraus? Insbesondere die Frage nach der Genauigkeit spielt hier eine entscheidende Rolle. Viele Approximationsformeln wurden schon vor längerer Zeit entwickelt und man muss sich die Frage stellen, ob sie die Genauigkeitsanforderungen, die z.B. die neuen Satellitenmissionen stellen, noch erfüllen.

Wie man sieht muss also eine Vielzahl von Fragen bedacht werden, bevor ein Schwerefeld berechnet werden kann. Ziel dieser Arbeit ist es, die Messgrößen auf ihrem Weg von der

1 Einleitung

Messung bis zu dem Schritt, bei dem sie in die Schwerefeldberechnung eingehen, zu begleiten. Es soll gezeigt werden, wie sie miteinander kombiniert werden können und wie man sie bearbeitet, damit sie in den Formalapparat passen.

Hierzu ist die Arbeit in folgende Schritte untergliedert:

- Grundlegendes zum Schwerefeld:

Es soll ein kurzer Überblick darüber gegeben werden, wie das Schwerefeld der Erde entsteht und aus welchen Anteilen es sich zusammensetzt. Es soll gezeigt werden, durch welche Funktionale das Schwerefeld beschrieben wird und wie diese berechnet werden und zusammenhängen.

- Beschreibung der Messsysteme:

Hier soll ein Überblick darüber gegeben werden, mit welchen Messverfahren das Schwerefeld gemessen werden kann. Das Augenmerk liegt hierbei zum einen auf der Funktionsweise des Verfahrens, sowie zum anderen auf der Schwerefeldgröße, welche das entsprechende Verfahren liefert. Besonders wird hierbei beachtet werden, ob das Verfahren einzelne Punktwerte oder flächenhafte Werte liefert, und ob das Verfahren das Schwerefeld auf der Erdoberfläche oder im Raum erfasst.

- Randwertaufgabe:

Es soll dargelegt werden, wie die Messgrößen, die entweder auf einer Randfläche oder darüber liegen, zur Schwerefeldberechnung verwendet werden können. Es wird erörtert, welche Rolle Stör- und Anomaliengrößen hierbei spielen.

- Modellierungsansätze:

Modellierungsansätze beschreiben konkrete Möglichkeiten, aus Messgrößen Schwerefelder zu berechnen. Vorgestellt werden hier unter anderem Verfahren, bei denen zur Schwerefeldberechnung die Messwerte auf der Randfläche vorliegen müssen und die nur eine Schwerefeldbeobachtung verarbeiten können, wie die Integralformel nach *Stokes*, als auch Verfahren, für die die Messwerte nicht auf die Randfläche reduziert werden müssen und die verschiedene Schwerefeldbeobachtungen auf einmal verarbeiten können, wie Kollokation oder Ausgleichung. Die Verfahren sollen hinsichtlich ihrer Vor- und Nachteile, sowie ihrer Anwendungsmöglichkeiten miteinander verglichen werden.

- Korrekturen / Reduktionen:

Auf diesem Schritt liegt das Hauptaugenmerk der Arbeit. In ihm sollen die Verarbeitungsschritte der Messgrößen erörtert werden. Verarbeitungsschritte sind zum Einen notwendig, um die Messgrößen miteinander vergleichbar zu machen, und zum Andren, um Voraussetzungen und Bedingungen, die die Modellierungsansätze fordern, zu erfüllen. Darum werden für die verschiedenen Messverfahren Reduktionen und Korrekturen vorgestellt und es soll möglichst gezeigt werden, wie groß der Fehler ist, der entsteht wenn man die Korrektur oder die Reduktion nicht beachtet.

- Schema zu Schwerefeldbestimmung:

Abschließend sollen die wichtigsten Zusammenhänge von der Messung über die Modellierungsansätze bis hin zu den Korrekturen in einem Schema zusammengefasst und erläutert werden. Dadurch soll die Verbindung zwischen den einzelnen bei der Schwerefeldberechnung auftretenden Elementen verdeutlicht werden.

2 Grundlegendes zum Schwerefeld

Das Schwerepotential

Ein Körper auf oder außerhalb der Erdoberfläche wird beeinflusst vom Schwerefeld der Erde, das durch die Rotation der Erde und die Gravitation der Erde erzeugt wird. Das Zentrifugalpotential Z eines Punktes P ist nur von seinem Abstand zur Rotationsachse (x_p, y_p) und der Winkelgeschwindigkeit ω abhängig

$$Z(P) = \frac{1}{2} \omega^2 (x_p^2 + y_p^2) = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \varphi. \quad (2.1)$$

Darum wird das Zentrifugalpotential für einen Punkt an den Polen null, während es für Punkte auf Äquatorhöhe maximal wird.

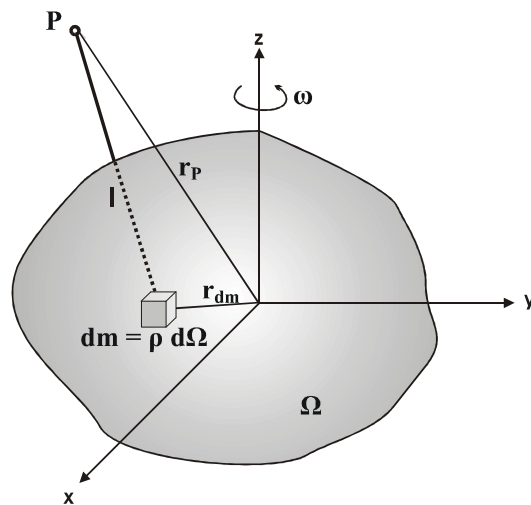


Abbildung 2.1: Zentrifugal- und Schwerkraft wirken auf einen Körper außerhalb der Erde

Das Gravitationspotential in P erhält man nach dem *Newton'schen* Gravitationsgesetz durch die Integration der Massenelemente dm des Erdkörpers und es ist vom Abstand l zwischen P und dem jeweiligen Integrationspunkt abhängig

$$V(P) = G \iiint_{\Omega} \frac{1}{l} dm = G \iiint_{\Omega} \frac{1}{l} \rho d\Omega. \quad (2.2)$$

G ist die allgemeine Gravitationskonstante.

Aus der Summe des Zentrifugalpotentials und des Gravitationspotentials resultiert das Schwerepotential

$$W(P) = V(P) + Z(P) = G \iiint_{\Omega} \frac{1}{l} dm + \frac{1}{2} \omega^2 (x_P^2 + y_P^2). \quad (2.3)$$

Die Einheit des Schwerepotentials ist $\left[\frac{m^2}{s^2} \right]$.

Schwerevektoren, Niveauflächen und Lotlinien

Wendet man auf $W(P)$ den Gradientenoperator $grad$ an, so erhält man die auf den Punkt P wirkende Schwerebeschleunigung \underline{g} , welche die Richtung der stärksten Potentialänderung beschreibt

$$\underline{g} = grad W = \left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right). \quad (2.4)$$

Der Schwerebeschleunigungsvektor lässt sich aufspalten in seinen Betrag und seine Richtung. Den Betrag der Schwerebeschleunigung bezeichnet man als Schwere. Die Einheit der Schwere ist $\left[\frac{m}{s^2} \right]$. In der Geodäsie nutzt man allerdings meist die Einheit $[mgal] = 10^{-5} \left[\frac{m}{s^2} \right]$.

Die Richtung der Schwerebeschleunigung entspricht der wahren Lotrichtung.

Flächen mit konstantem Schwerepotential $W(x, y, z) = konst.$ bezeichnet man als Niveauflächen des Schwerfelds.

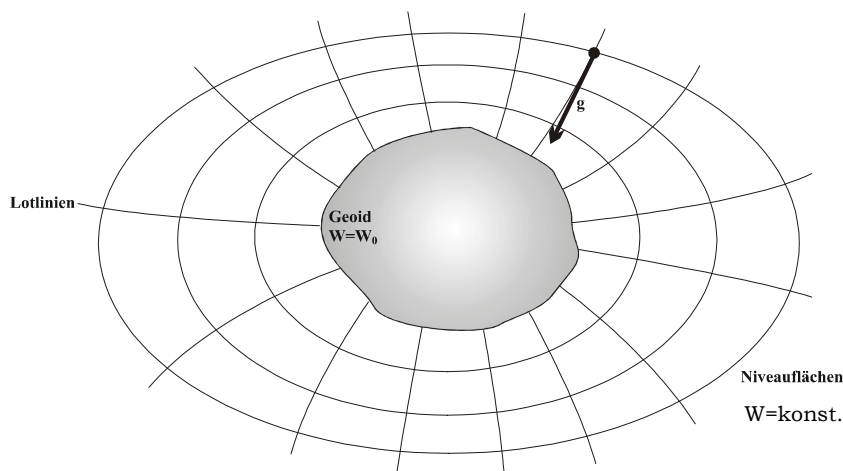


Abbildung 2.2: Niveauflächen und Lotlinien

Der Schwerebeschleunigungsvektor \underline{g} im Punkt P steht senkrecht auf der Niveaufläche, die durch P verläuft. Darum sind die horizontalen Komponenten, die in der Tangentialebene an die Niveaufläche anliegen Null und es wirkt keine Beschleunigung in der Horizontalen. Entlang einer Niveaufläche fließt folglich kein Wasser.

Die Niveaufläche, welche ungefähr mit dem idealisierten Meeresspiegel, also dem Meeresspiegel, der unbeeinflusst von äußeren Kräften wie z.B. Wellen oder Meeresströmungen ist, zusammenfällt, bezeichnet man als Geoid. Man kann sich das Geoid als unter den Kontinenten fortgesetzt vorstellen. Es stellt die wichtigste Niveaufläche in der Geodäsie dar, da es als Bezugsfläche für ein Höhensystem verwendet wird.

Die Niveauflächen werden senkrecht von den Lotlinien geschnitten. Wegen der Abplattung der Erde sind die Lotlinien leicht zu den Polen hin gekrümmt. Der Schwerevektor ist in jedem

Punkt eine Tangente an die Lotlinie, was in Abbildung 2.2 sehr schön zu erkennen ist und stellt somit den vertikalen Gradienten des Schwerepotentials W dar. Die Höhe über dem Geoid, die man als orthometrische Höhe H bezeichnet, wird entlang der Lotlinie gemessen. Die natürlichen Koordinaten (astronomische Länge Λ , astronomische Breite Φ und H) hängen somit vom Schwerfeld ab, werden also physikalisch definiert.

Geoidhöhe, Schwerestörung, Schwereanomalie und Lotabweichung

Demgegenüber sind geodätische Koordinaten (geodätische Länge λ , geodätische Breite φ und ellipsoidische Höhe h) vom Erdschwerfeld unabhängig. Sie beziehen sich auf ein der Erde angepasstes Ellipsoid. Dieses Ellipsoid rotiert mit derselben Winkelgeschwindigkeit wie die Erde selbst und verfügt über ein Schwerepotential, welches man als Normalschwerepotential U bezeichnet und welches auf der Ellipsoidoberfläche identisch mit dem Potential auf dem Geoid sein soll, d.h. $U_0 = W_0$. Das Normalschwerepotential ist bis zu 99% mit dem wirklichen Schwerepotential identisch und approximiert dieses somit relativ gut.

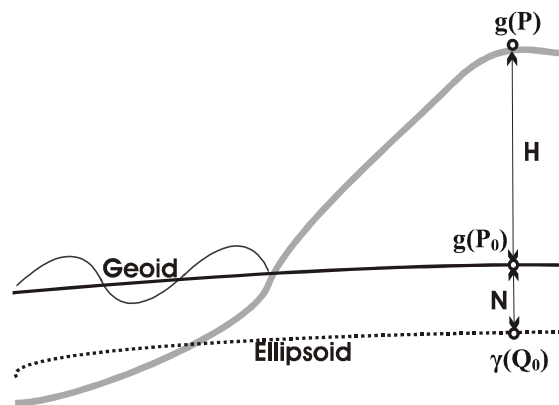


Abbildung 2.3: Beziehungen wichtiger geodätischer Bezugsflächen zueinander

Folglich existieren auch im Normalschwerfeld Niveaulflächen. Diese werden senkrecht von den Ellipsoidnormalen geschnitten. Der Abstand zwischen dem Ellipsoid und dem Geoid gemessen entlang der Ellipsoidnormalen wird als Geoidhöhe N bezeichnet. In Abbildung 2.3 wird die Beziehung der Flächen Geoid, Ellipsoid und Erdoberfläche zueinander graphisch dargestellt. Dem Schwerevektor \underline{g} entspricht im Normalschwerfeld der Normalschwerevektor $\underline{\gamma}$. Beobachtet man beide Vektoren in einem Punkt, beispielsweise P_0 auf dem Geoid, so bezeichnet man ihre Differenz im Betrag als Schwerestörung

$$\delta g = g_{P_0} - \gamma_{P_0} \quad (2.5)$$

Die Differenz in der Richtung in diesem Punkt bezeichnet man als Lotabweichung ϵ . Sie lässt sich aufspalten in eine Nord-Süd Komponente ξ und eine Ost-West Komponente η . Die Komponenten erhält man durch einen Vergleich der natürlichen mit den geodätischen Koordinaten im Punkt P_0

$$\begin{aligned} \xi &= \Phi - \varphi \\ \eta &= (\Lambda - \lambda) \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.6)$$

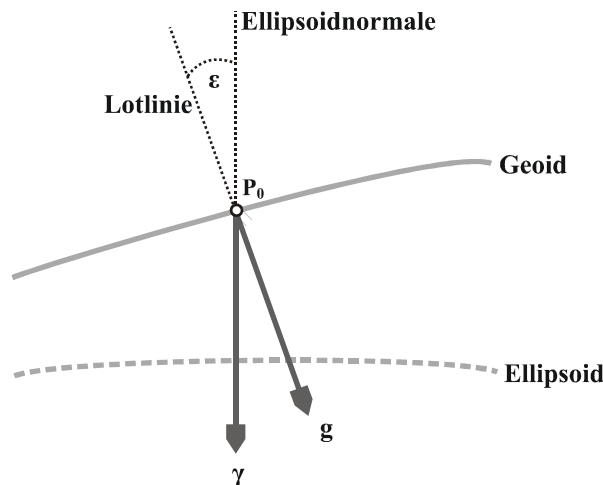


Abbildung 2.4: Schwere- und Normalschwerevektor

Vergleicht man den Schwerevektor in P_0 mit dem Normalschwerevektor in einem zugeordneten Punkt Q_0 , in dem das Normalschwerepotential gleich dem Schwerepotential in P_0 ist - Q_0 liegt also auf dem Ellipsoid, da dort das Normalschwerepotential gleich dem Schwerepotential auf dem Geoid ist -, so bleibt die Differenz der Vektoren in der Richtung näherungsweise unverändert. Diese ist also ebenfalls die Lotabweichung ε . Die Differenz im Betrag wird allerdings jetzt durch die Schwereanomalie

$$\Delta g = g_{P_0} - \gamma_{Q_0} \quad (2.7)$$

beschrieben.

Quellstärke der Schwerevektoren / Laplace- und Poisson-Gleichung

Die Schwerevektoren \underline{g} stellen ein Vektorfeld dar. Dessen Quellstärke erhält man, indem man den Divergenzoperator div auf die Schwerevektoren anwendet

$$div \underline{g} = div grad W = \begin{cases} 2\omega^2 - 4\pi G\rho, & \text{innerhalb der Erdoberfläche} \\ 2\omega^2, & \text{außerhalb der Erdoberfläche} \end{cases} \quad (2.8)$$

Der Anteil $2\omega^2$ resultiert aus dem Zentrifugalpotential,

$$div grad Z = 2\omega^2, \quad (2.9)$$

der Term $-4\pi G\rho$ mit ρ für die Dichte der Erdmassen resultiert aus dem Gravitationspotential:

$$div grad V_I = -4\pi G\rho. \quad (2.10)$$

Gleichung (2.10) bezeichnet man als *Poisson-Gleichung*.

Da außerhalb der Erde die Dichte Null ist, gilt für das Gravitationspotential außerhalb der Erdoberfläche:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} V_A = 0. \quad (2.11)$$

Dies bezeichnet man als *Laplace-Gleichung*.

Marussi-Tensor

Wendet man den Gradientenoperator auf den Schwerevektor \underline{g} an, so erhält man den so genannten Marussi-Tensor

$$W_{ij} = \operatorname{grad} \underline{g} = \operatorname{grad} \operatorname{grad} W = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \end{pmatrix} = -g \begin{pmatrix} k_1 & t_1 & f_1 \\ t_1 & k_2 & f_2 \\ f_1 & f_2 & -2\bar{H} + \frac{4\pi G\rho - 2\omega^2}{g} \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

k_1 und k_2 beschreiben hierbei die Krümmung der Niveauläche im Beobachtungspunkt in Nord- bzw. Ostrichtung, t_1 die Torsion und f_1 bzw. f_2 die Krümmung der Lotlinie im Beobachtungspunkt. \bar{H} im ersten Term von $\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}$ beschreibt die mittlere Krümmung der

Niveauläche $\bar{H} = \frac{k_1 + k_2}{2}$, den zweiten Term $4\pi G\rho - 2\omega^2$ haben wir weiter oben in Gleichung (2.8) kennen gelernt. Da die Dichte ρ außerhalb der Erde Null ist, vereinfacht er sich außerhalb der Erde zu $-2\omega^2$. Für eine kugelförmige Erde würden alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen Null werden, da die Lotlinien dann gerade wären und keine Torsion vorläge. Die Einheit der Tensorelemente ist $\left[\frac{1}{s^2}\right]$. Weit verbreitet ist allerdings auch

noch die Einheit $[Eötvös] = 10^{-9} \left[\frac{1}{s^2}\right]$.

Für eine ausführliche Herleitung der Elemente des Marussi-Tensors sei verwiesen auf RUMMEL (2005). Für die Elemente des Marussi-Tensors wird oft der Name Schweregradienten verwendet.

Reihendarstellungen

Das Gravitationspotential kann alternativ zur Darstellung in Gleichung (2.2) auch in einer Reihendarstellung ausgedrückt werden

$$\begin{aligned} V(P) &= \frac{GM}{R} \sum_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} V_n(\theta, \lambda) \\ &= \frac{GM}{R} \sum_n \left(\frac{R}{r_P}\right)^{n+1} \sum_m \bar{P}_{nm}(\cos \theta) [\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)] \end{aligned} \quad (2.13)$$

Hierbei steht $\bar{P}_{nm}(\cos \theta)$ für die voll normalisierten zugeordneten Legendre-Funktionen, die aus einer Reihendarstellung des reziproken Abstands $\frac{1}{l}$ resultieren. Die voll normalisierten

2 Grundlegendes zum Schwerefeld

und dimensionslosen Koeffizienten \bar{C}_{nm} und \bar{S}_{nm} werden als Potentialkoeffizienten bezeichnet. In ihnen ist das komplette Signal des Schwerefelds enthalten. Die Potentialkoeffizienten stellen eine Art Gewicht für die so genannten Kugelflächenfunktionen $\bar{P}_{nm}(\cos\theta)\cos(m\lambda)$ bzw. $\bar{P}_{nm}(\cos\theta)\sin(m\lambda)$ dar. n und m beschreiben Grad und Ordnung der Reihenentwicklung, wobei die Summe für n von 0 bis ∞ und für m von 0 bis n läuft. r_p steht für den Abstand des Berechnungspunktes zum Geozentrum.

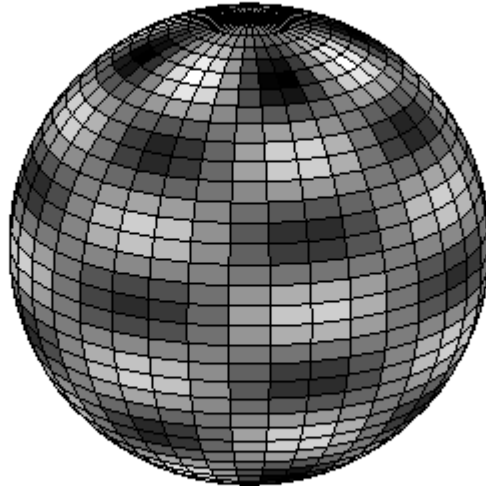


Abbildung 2.5: Kugelflächenfunktionen ($n=10, m=4$)

Der aus dem Produkt GM aus Gravitationspotential und Masse der Erde, sowie dem Kugelradius R bestehende Ausdruck $\frac{GM}{R}$ legt die Dimension des Gravitationspotentials fest.

Mit (2.13) lässt sich das Schwerepotential nun darstellen als

$$W(P) = \frac{GM}{R} \sum_n \left(\frac{R}{r_p} \right)^{n+1} \sum_m \bar{P}_{nm}(\cos\theta) [\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)] + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \varphi. \quad (2.14)$$

Analog zum Schwerepotential lässt sich auch das Normalschwerepotential in Reihendarstellung abbilden

$$U(P) = \frac{GM}{R} \sum_n \left(\frac{R}{r_p} \right)^{n+1} \sum_m \bar{P}_{nm}(\cos\theta) [\bar{c}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{s}_{nm} \sin(m\lambda)] + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \varphi. \quad (2.15)$$

Außer den geraden zonalen Koeffizienten \bar{c}_{n0} sind alle Potentialkoeffizienten des Normalfelds Null. Das Geodetic Reference Frame 1980 (GRS80) beispielsweise verfügt nur über die Koeffizienten $\bar{c}_{00} = 1$, \bar{c}_{20} , \bar{c}_{40} , \bar{c}_{60} und \bar{c}_{80} .

Ein großer Vorteil der Reihenentwicklungen ist, dass die Ableitungen des Schwerepotentials sehr leicht berechnet werden können. Die ersten Ableitungen von (2.14) sind (mit $\cos\varphi = \sin\theta$):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial W}{\partial \theta} &= \frac{GM}{R} \sum_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_m \frac{\partial \bar{P}_{nm}(\cos \theta)}{\partial \theta} [\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)] + \omega^2 r^2 \cos \theta \sin \theta \\
 \frac{\partial W}{\partial \lambda} &= \frac{GM}{R} \sum_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_m \bar{P}_{nm}(\cos \theta) [-m\bar{C}_{nm} \sin(m\lambda) + m\bar{S}_{nm} \cos(m\lambda)] \\
 \frac{\partial W}{\partial r} &= -\frac{GM}{R^2} \sum_n (n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} \sum_m \bar{P}_{nm}(\cos \theta) [\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)] + \omega^2 r \sin^2 \theta
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Die zweiten Ableitungen sind:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} &= \frac{GM}{R} \sum_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_m \frac{\partial^2 \bar{P}_{nm}(\cos \theta)}{\partial \theta^2} [\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)] + \omega^2 r^2 [\cos^2 \theta - \sin^2 \theta] \\
 \frac{\partial^2 W}{\partial \theta \partial \lambda} &= \frac{GM}{R} \sum_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_m \frac{\partial \bar{P}_{nm}(\cos \theta)}{\partial \theta} [-m\bar{C}_{nm} \sin(m\lambda) + m\bar{S}_{nm} \cos(m\lambda)] \\
 \frac{\partial^2 W}{\partial \theta \partial r} &= -\frac{GM}{R^2} \sum_n (n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} \sum_m \frac{\partial \bar{P}_{nm}(\cos \theta)}{\partial \theta} [\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)] + 2\omega^2 r \cos \theta \sin \theta \\
 \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda^2} &= \frac{GM}{R} \sum_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_m \bar{P}_{nm}(\cos \theta) [-m^2 \bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) - m^2 \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)] \\
 \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda \partial r} &= -\frac{GM}{R^2} \sum_n (n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} \sum_m \bar{P}_{nm}(\cos \theta) [-m\bar{C}_{nm} \sin(m\lambda) + m\bar{S}_{nm} \cos(m\lambda)] \\
 \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} &= \frac{GM}{R^3} \sum_n (n+1)(n+2) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+3} \sum_m \bar{P}_{nm}(\cos \theta) [\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)] + \omega^2 \sin^2 \theta
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Sie sind, wie z.B. in RUMMEL (1997) ersichtlich ist, folgendermaßen mit dem Marussi-Tensor verknüpft:

$$W_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} & -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta \partial \lambda} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta \partial r} \\ -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta \partial \lambda} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda} & \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda^2} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda \partial r} - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta \partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda \partial r} - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda} & \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

Der Marussi-Tensor ist hier im lokal sphärischen Koordinatensystem dargestellt.

3 Beschreibung der Messsysteme

Nachdem einige grundlegende Dinge zum Schwerfeld erläutert wurden, sollen im Folgenden einige Verfahren mit denen man das Schwerfeld messen kann vorgestellt werden. Die Verfahren liefern Beobachtungen, die jeweils einer der oben vorgestellten Schwerfeldgrößen entsprechen.

3.1 Terrestrische Schweremessungen

Terrestrische Schweremessungen werden zur Bestimmung der Schwere in einem räumlich begrenzten Gebiet verwendet. Mit jeder Aufstellung des Geräts erhält man einen neuen Messwert auf der Erdoberfläche. Liegen genügend Messwerte in einem ausreichend großen Gebiet vor, lassen sich diese zu einem Netz verknüpfen, auf dessen Grundlage ein lokales Schwerfeld berechnet werden kann. Jeder Schwerewert erfasst das vollständige Signal des aktuellen Schwerfelds am Messort. Um das Schwerfeld für größere Gebiete oder gar global berechnen zu können, müssen allerdings die Schwerewerte mehrerer Messkampagnen miteinander verknüpft werden, was oftmals nicht ohne weiteres möglich ist, da die Werte aus verschiedenen Kampagnen oft über unterschiedliche Genauigkeiten verfügen und zudem in der Vergangenheit in Datenbanken zumeist nicht als reine Schwerewerte abgespeichert wurden, sondern als Schwereanomalien (die Größe Schwereanomalie wird im Kapitel 4 ausführlich erläutert). Dies ist problematisch, da in die Berechnung der Anomalien zumeist die orthometrische Höhe des Messpunktes eingeht. Durch Versatz zwischen den Höhensystemen (unterschiedlicher Pegelanschluss) kommt es zu einem Versatz zwischen verschiedenen Anomaliendatensätzen, was einen langwelligen systematischen Fehler verursacht. Außerdem liegen nicht in jedem Gebiet gleich viele Schwerewerte vor. Für globale Berechnungen stellt sich gar das Problem, dass in einigen Gebieten gar keine Schweremessungen existieren oder nur reduzierte Anomalien, wie Bogoueranomalien, vorliegen.

Um die Höhe des Messpunktes zu erhalten, werden terrestrische Schweremessungen meistens von Nivellements begleitet. Aus den Höheninkrementen des Nivellements und den Schweremessungen lässt sich die orthometrische Höhe H bestimmen. Die Lage des Messpunktes wird zumeist nicht extra bestimmt, sondern es werden Koordinaten aus dem Landesnetz übernommen. Diese werden dann in einer Koordinatentransformation in ellipsoidische Koordinaten umgerechnet. Für den Messpunkt liegen also letztendlich die Lagekoordinaten (φ, λ) zusammen mit der orthometrischen Höhe H vor.

Heutzutage wird es allerdings mehr und mehr Usus, Schweremessungen von GPS-Messungen begleiten zu lassen. Diese liefern direkt die geodätischen Koordinaten (λ, φ, h) für den Messpunkt, was vorteilhaft ist, wie weiter unten erläutert werden wird.

Bei der Schweremessung wird zwischen zwei unterschiedlichen Verfahren unterschieden, der relativen und der absoluten Schweremessung.

Relative Schweremessungen

Relative Schweremessungen sind gebräuchlicher als absolute Schweremessungen, da sie leichter und schneller auszuführen sind und die Geräte billiger und einfacher zu transportieren sind. Wie der Name bereits vermuten lässt, liefert die relative Schweremessung an einem Punkt P den Schwereunterschied $\delta g_{diff.}$ zu einem anderen Schwerepunkt $P_{ref.}$, so dass für die Schwere am Messpunkt gilt:

$$g_P = g_{P_{ref.}} + \delta g_{diff.} \quad (3.1)$$

Es ist auch möglich, die Änderung der Schwere an einem Punkt mit der Zeit zu messen, was besonders für Gezeitenanalysen interessant ist. Nach TORGE (2003) werden bei der relativen Schweremessung entweder Zeit- oder Ortunterschiede beobachtet, die jeweils andere Größe wird konstant gehalten. Zumeist wird das Prinzip der Federwaage nach *Newton* verwendet. Wenn sich die Schwere ändert, verändert sich auch die Länge der Feder, wobei das statische Gleichgewicht zwischen Schwer- und Federkraft erhalten bleibt. Bei einer vertikalen Federaufhängung führen Schwereänderungen allerdings oft nur zu einer geringen Federauslenkung. Diese ist sehr schwer zu messen, weswegen eine hohe relative Genauigkeit kaum zu erreichen ist. Darum wird die Feder zumeist schief - und damit instabil (a-statisch) - aufgehängt, was zu einer größeren Federauslenkung führt. Beispiel hierfür ist die allgemeine Hebelfederwaage, bei der die Feder-Gegenkraft unter einem bestimmten Winkel an den die Masse tragenden Hebel angreift.

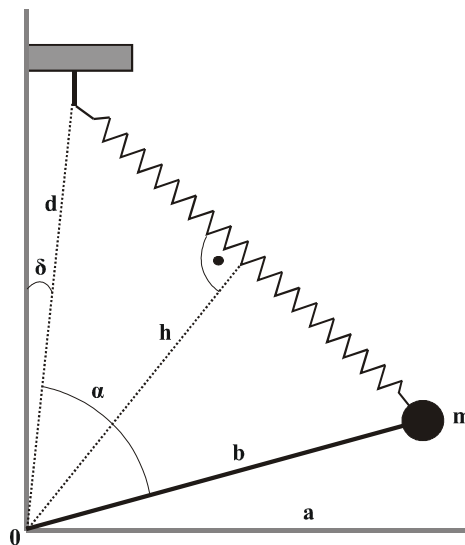


Abbildung 3.1: Prinzip der allgemeinen Hebelfederwaage.

Nach TORGE (2003) lautet die Gleichgewichtsbedingung der allgemeinen Hebelfederwaage

$$mga \sin(\alpha + \delta) - kbd \frac{l - l_0}{l} \sin \alpha = 0, \quad (3.2)$$

wobei

$$h = \left(\frac{bd}{l} \right) \sin \alpha \quad (3.3)$$

der senkrechte Abstand zwischen dem Punkt 0 und der Feder ist. m ist die Testmasse, k ist die Federkonstante und l bzw. l_0 die Länge der belasteten bzw. unbelasteten Feder. Sonstige Längen und Winkel sind in Abbildung 3.1 ersichtlich.

Absolute Schweremessungen

Für absolute Schweremessungen ist eine gleichzeitige Längen- und Zeitmessung von Nöten, weswegen das Verfahren aufwendiger ist als die relative Schweremessung. Allerdings können dafür aus den Längen- und Zeitmessungen direkt - wie der Name schon sagt - Absolutschwerewerte abgeleitet werden. Mehrere hundert Jahre lang wurde für Absolutschweremessungen die Pendelmethode verwendet, die auf der Messung der Schwingungsdauer eines frei schwingenden Pendels beruhte. Sie verlor an Bedeutung und heute wird fast ausschließlich die Freifallmethode verwendet.

Bei der Freifallmethode wird der Weg einer entlang einer senkrechten Linie fallenden Testmasse beobachtet und die dazugehörige Zeit gemessen. Die Beobachtung erfolgt in einer Vakuumkammer und als Testmasse wird zumeist ein Reflektor verwendet. Die Streckenmessung erfolgt in der Regel mit Laserinterferometrie.

Nach TORGE (2003) verbindet dann folgende Gleichung die Position z des frei fallenden Körpers zur Zeit t mit der Schwere

$$z = z_0 + \dot{z}_0 t + \frac{g}{2} t^2, \quad (3.4)$$

wobei z_0 und \dot{z}_0 für den Ort und die Geschwindigkeit zu Beginn der Messung stehen. Gleichung (3.4) basiert auf der zweifachen Integration der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{z} = mg(z) \quad (3.5)$$

eines frei fallenden Körpers der Masse m - ein homogenes Schwerfeld längs der Fallstrecke vorausgesetzt. Für die Lösung von (3.4) benötigt man 3 Positionen mit den zugehörigen Zeiten. Es folgt:

$$g = 2 \frac{(z_3 - z_1)(t_2 - t_1) - (z_2 - z_1)(t_3 - t_1)}{(t_3 - t_1)(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}. \quad (3.6)$$

Da wir durch hochgenaue Zeitmessungen und die Laserinterferometrie allerdings über viel mehr als drei Zeit/Positionspaare verfügen, bestimmt man g in der Regel durch eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate, in der (3.4) als Beobachtungsgleichung dient.

3.2 Flug- und Schiffsgravimetrie

Fluggravimetrie wird in erster Linie in Gebieten angewandt, in denen bislang kaum Schweremessungen vorliegen. Ein gutes Beispiel hierfür sind polare Regionen. Hier kann naturgemäß nur bedingt mit terrestrischer Gravimetrie gearbeitet werden und auch von den meisten Satelliten kann das polare Schwerfeld auf Grund zu geringer Inklination nur schwer erfasst werden. Auch für andere Gebiete, die zu Fuß schwer oder gar nicht erreichbar sind, eignet sich die Fluggravimetrie. Dies sind vor allem Hochgebirgsregionen, Ozeane oder auch Wälder. Im Gegensatz zu Satellitenmethoden, die nur eine räumliche Auflösung von bis zu 70 km erreichen, kann mit Fluggravimetrie eine räumliche Auflösung von 4 km erreicht werden,

wobei laut BOEDECKER & STÜRZE (2006) bei zukünftigen Kampagnen eine räumliche Auflösung von 1 km bei einer Genauigkeit von 1 mgal erreicht werden könnte.

Fluggravimetrie ist komplizierter als terrestrische Gravimetrie, da eine Vielzahl von zusätzlichen Einflüssen bedacht werden muss. Im Gegensatz zur terrestrischen Schweremessung, bei der das Gravimeter unbewegt auf dem Erdboden steht, befindet sich das Gravimeter jetzt in einem bewegten Objekt, dessen Eigenbewegung berücksichtigt werden muss. Auf das Flugzeug wirken sogenannte Scheinkräfte, die immer entstehen, wenn eine Bewegung im Inertialraum vom erdfesten System aus beobachtet wird. Vor Allem die Coriolisbeschleunigung ist hier zu nennen. Diese muss bei jeglichen Bewegungen in einem beschleunigten Bezugssystem berücksichtigt werden.

Gravimeter auf stabilisierten Plattformen

Für die Fluggravimetrie verwendet man oft modifizierte terrestrische Gravimeter, die auf gedämpften zweiachsigen Plattformen aufgebaut werden. Die Plattform sorgt dafür, dass sich das Messsystem immer in der Horizontalen befindet. Die Schwere ergibt sich dann aus folgender Beobachtungsgleichung:

$$g = f_z - \ddot{x}_z + 2\omega \cos \varphi \sin \alpha v + \frac{v^2}{r}. \quad (3.7)$$

Hierbei ist f_z die vertikale Komponente des Beschleunigungsvektors der Testmasse gegenüber dem Gehäuse, also die Größe, die eigentlich gemessen wird. Der Beschleunigungsmesser wird auch als spezifische Kraft bezeichnet. Die Eigenbewegung der Plattform, wird durch die vertikale Beschleunigung \ddot{x}_z ausgedrückt, v ist die Plattformgeschwindigkeit gegenüber der Erde, r der Abstand zum Geozentrum und α das geodätische Azimut. Die beiden letzten Terme auf der rechten Seite bezeichnet man als *Eötvös-Korrektur*

$$\delta g_{Eöt} = 2\omega \cos \varphi \sin \alpha v + \frac{v^2}{r}, \quad (3.8)$$

wobei der erste der beiden für den radialen Anteil der Coriolisbeschleunigung steht, und der zweite für eine Zentrifugalbeschleunigung, die für die fast kreisförmige Plattformbewegung um den Erdschwerpunkt steht.

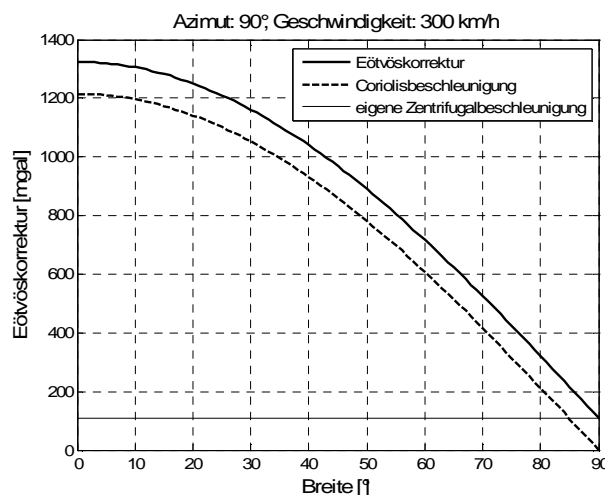


Abbildung 3.2: Eötvös-Reduktion

Wie man sieht, wird der Anteil der radialen Coriolisbeschleunigung Null, für ein geodätisches Azimut von 0° oder 180° . Darum liegt es nahe, Messkampagnen in Nord-Südrichtung, bzw. in Süd-Nordrichtung stattfinden zu lassen, da dann die Coriolisbeschleunigung nicht berücksichtigt werden muss. Einzelne, rechtwinklig zu den Nord-Südspuren angelegte Spuren, können zur Kontrolle der Messungen an den Kreuzungspunkten verwendet werden.

Wie man in Abbildung 3.2 sehen kann, beträgt die Eötvös-Reduktion für ein Flugzeug, das mit 300 km/h in West-Ostrichtung fliegt je nach Breitengrad bis zu 1320 mgal. Dies zeigt zum Einen, dass die Reduktion nicht vernachlässigt werden darf, und zum Anderen, warum es sinnvoll ist, die Flugspuren in Nord-Südrichtung anzulegen.

Aus Position und Geschwindigkeit des Flugzeugs, welche man mit GPS-Trägerphasenmessungen erhält, kann man die Eigenbeschleunigung \ddot{x}_z der Plattform berechnen, indem man die erste Ableitung der Geschwindigkeit oder die zweite Ableitung der Höhe bildet. Die Höhe lässt sich alternativ über Wasser oder Eisflächen auch mit Altimetrie messen.

Die Genauigkeit, die mit Fluggravimetrie erreicht werden kann, beträgt laut TORGE (2003) etwa ± 2 bis ± 5 mgal bei einer Auflösung von fünf bis zehn Kilometer.

StrapDown-Vektorgravimetrie

Als Gegenmodell zu den auf stabilisierten Plattformen fixierten Gravimetern existieren so genannte StrapDown-InertialNavigationssysteme (StrapDown-INS), die sich wahrscheinlich in Zukunft einer immer stärkeren Nutzung erfreuen werden. StrapDown bedeutet, dass der Bezugsrahmen des Messsystems („body frame“) fest mit dem des Fahrzeugs („vehicle frame“) verbunden ist, während er bei stabilen Plattformen mit dem „local-level-frame“ verbunden ist, da die Plattform das System in der Horizontalen hält. Diese Systeme sind im Gegensatz zu den Plattformsystemen klein und robust, somit handlicher und auch einfacher zu bedienen. Wesentlicher Vorteil im Gegensatz zu den Gravimetern auf zweiachsigen Plattformen ist, dass der komplette Schwerebeschleunigungsvektor \underline{g} bestimmt wird.

INS-Systeme werden eigentlich wie der Name schon sagt zur Navigation verwendet und liefern Position, Orientierung und Geschwindigkeit eines Fahrzeugs ohne dafür Information von außen zu benötigen. Lediglich eine Anfangsposition und -orientierung muss bekannt sein. Das StrapDown-INS System besteht aus 3 Beschleunigungsmessern und 3 Gyroskopen. Die Beschleunigungsmesser messen die spezifische Kraft, die auf eine Testmasse wirkt. Zieht man den gravitativen Anteil von der spezifischen Kraft ab, bleiben kinematische Beschleunigungen übrig, deren zweifache Integration die Entfernung zum Ausgangspunkt der Messung liefert. Die Gyroskope messen Drehraten, deren Integration die Änderung der Lagewinkel gegenüber der Ausgangslage beschreiben. Die Änderung der Lagewinkel und die Entfernung im Vergleich zum Ausgangspunkt liefern zusammen die neue Position.

Für gravimetrische Zwecke nutzt man das INS-System, da es, wie bereits erwähnt, die spezifische Kraft misst. Diese besteht aus dem Schwerebeschleunigungsvektor \underline{g} und der kinematischen Beschleunigung \ddot{x} , die auf die Messanordnung, also auf das Flugzeug, wirkt. Die kinematische Beschleunigung wird meistens mit differentiellen GPS-Messungen bestimmt, kann aber auch mit Precise-Point-Positioning (Absolutpositionierung in Post-Prozessierung mit genauen Bahnen und Uhren) bestimmt werden.

Bildet man dann die Differenz aus der spezifischen Kraft und der kinematischen Beschleunigung, so erhält man den Schwerebeschleunigungsvektor. Die Eötvös-Reduktion muss auch hier beachtet werden.

Schiffsgravimetrie

Bei der Schiffsgravimetrie findet wie bei der Fluggravimetrie die Messung der Schwere in einem bewegten System statt. Darum lassen sich alle in diesem Kapitel hinsichtlich der

Fluggravimetrie aufgezeigten Inhalte auf die Schiffsgravimetrie übertragen. Diese findet häufig in Küstenregionen oder in Gebieten von geologischem Interesse statt. Nach TORGE (2003) liegt die Messgenauigkeit in der Schiffsgravimetrie bei ± 0.5 bis ± 2 mgal bei einer räumlichen Auflösung von 1 km in Fahrtrichtung.

Im Weiteren soll hinsichtlich der Gravimetrie im bewegten System nur die Fluggravimetrie berücksichtigt werden.

3.3 Satellite-Gravity-Gradiometry (SGG)

Mit Gradiometrie misst man Differenzen der Schwerebeschleunigung in verschiedenen Raumrichtungen. Dieses Signal entspricht den Gradienten des Schwerebeschleunigungsvektors, also dem so genannten Marussi-Tensor und liefert wichtige lokale Schwerefeldinformation.

Satellitengradiometrie wurde bislang von der Wissenschaft nur theoretisch behandelt. Erst im Sommer 2008, wird mit dem ESA Satelliten GOCE (Gravityfield-and-steady-state-Ocean-Circulation-Explorer) das erste Mal ein Satellit mit einem Gradiometer ausgerüstet sein, der Schwerebeschleunigungsdifferenzen vom Weltraum aus messen wird. Aus aktuellem Anlass wird darum das Verfahren der Satellitengradiometrie an dieser Stelle ein wenig ausführlicher beschrieben, als die anderen Schwerefeldmessverfahren.

Prinzip der Satellitengradiometrie

In RUMMEL (1986) wird das Prinzip der Satellitengradiometrie an Hand eines einfachen Beispiels erläutert. Dieses Beispiel ist hilfreich um ein Gefühl dafür zu erlangen, was bei der Gradiometrie überhaupt gemessen wird:

Ausgangspunkt ist eine kugelförmige Erde mit homogener Massenverteilung. Im Abstand r_p vom Geozentrum befindet sich der Punkt P , der sich im freien Fall um die Erde befindet. Auf der Lotlinie - diese entspricht bei unserer Ausgangssituation der Kugelnormalen -, die mit der z-Achse zusammenfällt, befinden sich in gleichem Abstand $\frac{s}{2}$ unter und über P die

Testmassen T_1 und T_2 , deren Schwerebeschleunigungsdifferenz bestimmt werden soll.

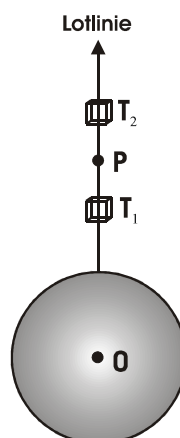


Abbildung 3.3: Prinzip der Satellitengradiometrie

Für das Gravitationspotential und die Schwerebeschleunigung in P gilt dann:

$$V(P) = \frac{GM}{r_P} \quad (3.9)$$

$$\underline{g}(P) = -\frac{GM}{r_P^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Da die Lotlinie in unserem Beispiel der Kugelnormalen entspricht, sind die x- und y-Komponente der Schwerebeschleunigung Null. Durch eine Taylorreihe mit P als Ausgangspunkt lässt sich die Schwerebeschleunigung, die auf die Testmassen wirkt, entwickeln als

$$\underline{g}(T_1) \approx \underline{g}(P) + \frac{\partial \underline{g}}{\partial r_i} \cdot r_i^{(T_1)} \quad (3.11)$$

$$\underline{g}(T_2) \approx \underline{g}(P) + \frac{\partial \underline{g}}{\partial r_i} \cdot r_i^{(T_2)}, \quad (3.12)$$

wobei $r_i^{(T_1/T_2)}$ für den jeweiligen Koordinatenvektor zwischen den Testmassen und P steht und $\frac{\partial \underline{g}}{\partial r_i}$ den Marussi-Tensor beschreibt. Da alle Punkte auf der Kugelnormalen liegen, sind die x- und y-Komponenten von $r_i^{(T_1/T_2)}$, sowie alle Elemente des Marussi-Tensors außer $\frac{\partial \underline{g}}{\partial r_z}$ Null. Es entspricht $r_z^{(T_1/T_2)}$ zudem $-\frac{s}{2}$ bzw. $\frac{s}{2}$. Man erhält also für die Schwerebeschleunigungen in den Testmassen

$$\underline{g}(T_1) = -\frac{GM}{r_P^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \frac{GM}{r_P^3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{s}{2} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

$$\underline{g}(T_2) = -\frac{GM}{r_P^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \frac{GM}{r_P^3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{s}{2} \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

und erhält aus deren Differenz die gesuchte Schwerebeschleunigungsdifferenz zwischen den Testmassen

$$d\underline{g} = \underline{g}(T_2) - \underline{g}(T_1) = 2 \frac{GM}{r_P^3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & s \end{pmatrix} = 2 \frac{GM}{r_P^3} s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Teilt man die vertikale Komponente dg durch den Abstand zwischen den Testmassen ($= s$), so erhält man den Schweregradienten

$$V_{zz} \approx \frac{dg}{s} = 2 \frac{GM}{r_p^3}. \quad (3.16)$$

Für den Fall, dass die Testmassen nicht in der Vertikalen, sondern horizontal zum Punkt P liegen, sowie für den allgemeinen Fall, sei verwiesen auf RUMMEL (1986).

Gradiometrie bei der GOCE Mission

Im Gegensatz zu den Vereinfachungen, die für obiges Beispiel getroffen wurden, ist die Erde in der Realität nicht kugelförmig und die Massenverteilung ist nicht homogen, so dass der Marussi-Tensor voll besetzt ist. Außerdem sind die Testmassen nicht nur der Gravitation ausgesetzt, sondern es wirken noch zusätzliche Störeinflüsse auf sie. Dies sind vor allem der Luftwiderstand und der solare Strahlungsdruck. Durch die Drehung des Satelliten im Raum entstehen überdies Winkelgeschwindigkeiten und -beschleunigungen, die von den Beschleunigungsmessern wahrgenommen werden. Die Schwierigkeit besteht also darin, das gemessene Signal aufzuteilen in gravitativen Anteil, Winkelbeschleunigungen und Störeinflüsse.

Im Falle von GOCE besteht das Gradiometer aus drei orthogonal aufeinander stehenden Beschleunigungsmesserpaaren. Diese messen die Schwerebeschleunigungsdifferenz zwischen den sechs Testmassen in drei räumliche Richtungen. Die Basislinie zwischen den Beschleunigungsmesserpaaren beträgt 50 cm. Die Messung erfolgt im Gradiometer-Reference-Frame (GRF), welcher durch die Basislinien zwischen den Beschleunigungsmessern aufgespannt wird.

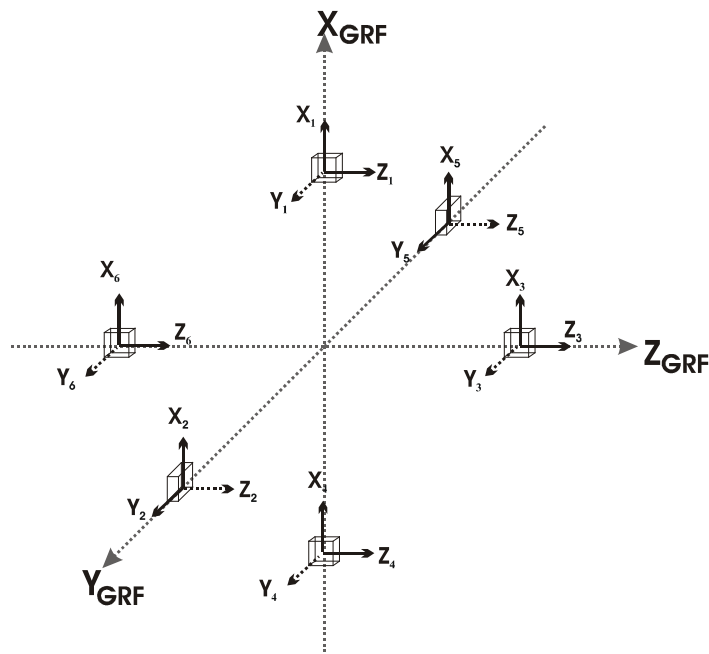


Abbildung 3.4: Anordnung der Beschleunigungsmesser im GOCE Gradiometer

Zusätzlich verfügt jeder Beschleunigungsmesser noch über ein eigenes Referenzsystem. Von den drei Achsen eines jeden Beschleunigungsmessers sind jeweils zwei hochgenau mit $10^{-12} \text{ms}^{-2} / \sqrt{\text{Hz}}$. Aus bautechnischen Gründen ist die jeweils dritte Achse weniger sensitiv mit $10^{-10} \text{ms}^{-2} / \sqrt{\text{Hz}}$. In Abbildung 3.4 sind die weniger sensitiven Achsen durch gestrichelte Linien gekennzeichnet. Generell beträgt die Messbandbreite des Geräts 5 – 100 mHz. Die untere Grenze von 5 mHz entspricht dabei einer räumlichen Auflösung von ca. 3000 km. Darum, und auch wegen der kurzen Basislinienlängen, kann der langwellige Anteil des

Schwerefeldes mit der Gradiometrie nur ungenau bestimmt werden. Zu dessen Bestimmung wird Satellite-to-Satellite-Tracking verwendet, was weiter unten erläutert wird.

Mit Hilfe eines „Drag-Free Control“ Systems, welches aus zwei Ionenantriebssystemen besteht, sollen nicht-gravitative Störeinflüsse, die in Flugrichtung auf den Satelliten wirken, eliminiert werden. Die Information zur Steuerung des Ionenantriebs resultiert aus den so genannten „Common Mode“ Beschleunigungen, die im Folgenden noch ausführlicher beschrieben werden.

Allgemeine GOCE Gradiometergleichungen

Wir folgen dem Weg nach MÜLLER (2001) und beobachten eines der GOCE Beschleunigungsmesserpaare. Die Beobachtungsgleichung für die beiden Beschleunigungen a_1 und a_2 lautet dann wie folgt:

$$\begin{aligned} a_1 &= [V_{ij} + \dot{\Omega} + \Omega\Omega] \Delta x + f_{ng} = \Gamma \Delta x + f_{ng} \\ a_2 &= -[V_{ij} + \dot{\Omega} + \Omega\Omega] \Delta x + f_{ng} = -\Gamma \Delta x + f_{ng} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Δx ist hierbei der Vektor vom Schnittpunkt der Koordinatenachsen bis zum entsprechenden Beschleunigungsmesser, Ω ist eine schiefsymmetrische Matrix, die die Winkelgeschwindigkeiten enthält - demzufolge muss $\Omega\Omega$ symmetrisch sein - und f_{ng} beschreibt die nicht-gravitativen Kräfte, die auf den Beschleunigungsmesser wirken. Summiert man beide Beschleunigungen und teilt durch zwei, so lassen sich die nicht-gravitativen Kräfte extrahieren

$$f_{ng} = \frac{(a_1 + a_2)}{2}. \quad (3.18)$$

Dies bezeichnet man bei GOCE als „Common Mode“ Modus. Dadurch, dass die Störbeschleunigungen bekannt sind, kann der Ionenantrieb gezielt gegen diese ansteuern. Im „Differential Mode“ werden a_1 und a_2 voneinander abgezogen und durch zwei geteilt

$$\Gamma \Delta x = \frac{(a_1 - a_2)}{2}. \quad (3.19)$$

Da Δx mit 25 cm bekannt ist, müssen im Weiteren lediglich die einzelnen Anteile von Γ bestimmt werden. Auf Grund der Symmetrieeigenschaften der Matrizen - welche ausführlich z.B. in HOFFMAN-WELLENHOFF & MORITZ (2005) beschrieben werden - gilt weiter

$$\begin{aligned} \frac{(\Gamma - \Gamma^T)}{2} &= \dot{\Omega} \\ \frac{(\Gamma + \Gamma^T)}{2} &= V_{ij} + \Omega\Omega \end{aligned} \quad (3.20)$$

Mit $\dot{\Omega}$ (3.20) kann Ω durch Integration bestimmt werden

$$\Omega(t) = \Omega(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{\Omega} dt, \quad (3.21)$$

wobei $\Omega(t_0)$ durch zusätzliche Messsensoren geliefert wird. Jetzt sind alle Größen außer den Schweregradienten bekannt, die man erhält mit

$$V_{ij} = \frac{(\Gamma + \Gamma^T)}{2} - \Omega\Omega. \quad (3.22)$$

Da nicht alle Achsen der Beschleunigungsmesser hochsensitiv sind, können nicht alle Winkelbeschleunigungen und Schweregradienten hochgenau bestimmt werden. Bei GOCE wurden die Genauigkeiten der Achsen (siehe Abbildung 3.4) so gewählt, dass die Terme V_{xx} , V_{yy} , V_{zz} und V_{xz} hochgenau bestimmt werden können.

3.4 Satellite-to-Satellite-Tracking (SST)

Wie bereits erwähnt, kann mit dem GOCE Gradiometer der langwellige Schwerefeldanteil nicht hochgenau bestimmt werden. Darum verwendet man zusätzlich das Verfahren des Satellite-to-Satellite-Trackings, welches schon bei den Schwerefeldsatellitenmissionen CHAMP (**CH**allenging **MIN**isatellite **PAY**load) und GRACE (**G**RAVITY **R**ECOVERY **A**ND **C**LIMATE **E**xperiment) erfolgreich verwendet wurde und hier kurz beschrieben werden soll.

Beim Satellite-to-Satellite-Tracking im high-low Modus befindet sich an Board eines Schwerefeldsatelliten ein GPS-Empfänger, den man benutzt, um die Position x eines Schwerefeldsatelliten kontinuierlich mit GPS zu bestimmen, so dass die Bahn des Satelliten bestimmt werden kann.

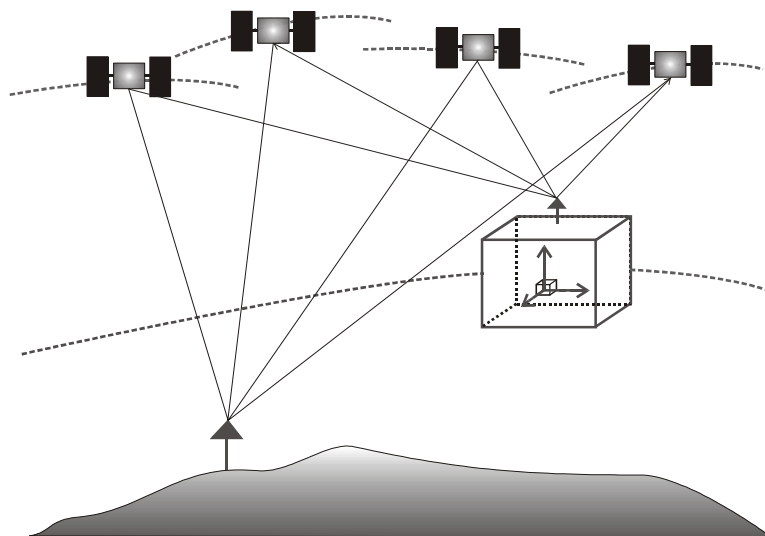


Abbildung 3.5: Prinzip des Satellite-to-Satellite-Trackings (SST) im high-low Modus

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, wie man aus der Bahn Schwerefeldgrößen berechnen kann. GERLACH et al. (2003) schlagen einen Weg vor, der erfolgreich im Rahmen der CHAMP Mission getestet und auch bei der GOCE Mission verwendet werden wird. Ausgehend von kinematischen Bahnen kann man das Gravitationspotential wie folgt berechnen:

Die Bewegungsgleichung des Satelliten im erdfesten System lautet

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = f, \quad (3.23)$$

wobei f der Vektor der spezifischen Kraft ist, bestehend aus allen Beschleunigungen, die auf den Satelliten wirken, ist. Multipliziert man (3.23) mit $v = \frac{\partial x}{\partial t}$ und integriert die Gleichung über die Zeit, erhält man das so genannte Energieintegral

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \int_t f \cdot v dt. \quad (3.24)$$

Die linke Seite beschreibt die kinetische Energie des Satelliten, die rechte entspricht der Arbeit, die notwendig ist, um den Satelliten entlang der Bahn zu bewegen. Der Vektor v beschreibt die Geschwindigkeit des Satelliten. Der Beschleunigungsvektor f lässt sich aufspalten in einen gravitativen Anteil, einen Störbeschleunigungsanteil (Luftwiderstand, solarer Strahlungsdruck) und einen Anteil für das Zentrifugalpotential, so dass sich ausgehend von Gleichung (3.24) das Gravitationspotential ergibt mit

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 - \int_t a \cdot v dt - Z - c, \quad (3.25)$$

wobei c eine unbekannte Integrationskonstante ist, die hier nicht weiter beachtet werden soll. Das Zentrifugalpotential kann bei bekanntem Ort leicht berechnet werden, so dass im Weiteren nur noch der durch die Störbeschleunigungen a verursachte Energieverlust von der kinetischen Energie subtrahiert werden muss, damit man das Gravitationspotential berechnen kann. Zur Bestimmung von a kann, wie es bei der CHAMP Mission gemacht wurde und wie es auch in Abbildung 3.5 zu sehen ist, ein Beschleunigungsmesser benutzt werden. Dieser ist im Massenzentrum des Satelliten angebracht, befindet sich also im „freien Fall“ um die Erde. Demzufolge nimmt der Beschleunigungsmesser keine gravitativen Signale wahr, da Testmasse und Gehäuse gleich auf diese reagieren und somit die Testmasse relativ zum Gehäuse unbewegt bleibt. Der Beschleunigungsmesser misst folglich nur die Oberflächenkräfte a , die wir benötigen um Gleichung (3.25) zu lösen.

Bei der GOCE Mission soll theoretisch mit Hilfe des Common Mode das System frei von Oberflächenkräften gehalten werden, so dass das Gravitationspotential direkt bestimmt werden kann.

Alternativ zu dem in GERLACH (2003) beschriebenen Verfahren, kann auch die in REIGBER (1989) beschriebene „dynamische Methode“ verwendet werden. Dabei wird auf Grundlage eines dynamischen Modells durch numerische Integration eine a-priori Bahn gerechnet. Aus der Analyse der Differenzen zwischen der beobachteten und der a-priori Bahn werden in einem Ausgleichungsprozess Verbesserungen für die Parameter des dynamischen Modells geschätzt. Hierunter finden sich unter anderem die Koeffizienten eines a-priori Schwerfelds.

Satellite-to-Satellite-Tracking ist ein Verfahren, mit dem der langwellige Anteil des Schwerfelds hochgenau bestimmt werden kann. Dies liegt daran, dass durch die Satellitenbahnen die Erde annähernd komplett überdeckt wird. Dass das hochfrequente Signal mit Hilfe von SST nicht bestimmt werden kann, liegt daran, dass das Schwerfeld in Satellitenhöhe stark geglättet ist. So wurde bei der CHAMP Mission das Signal des Schwerfeldes ungefähr bis Grad und Ordnung 70 erfasst.

Bei Satellite-to-Satellite-Tracking im low-low Modus wird neben den mit Hilfe von GPS bestimmten Positionen der Abstand D und die Abstandsänderung \dot{D} zwischen zwei Schwerfeldsatelliten mit Hilfe eines Mikrowellensystems gemessen. In den Abstandsänderungen zwischen beiden Satelliten spiegelt sich die unterschiedliche Wirkung

des Schwerefeldes auf die Satelliten wieder. Damit lassen sich auch höhere Frequenzen des Schwerefeldes ableiten, als es bei SST im high-low Modus der Fall ist, wo nur die Wirkung des Schwerefeldes auf einen Satelliten beobachtet wird.

Für jeden der beiden Satelliten kann nach (3.25) das Gravitationspotential berechnet werden. Die Potentialdifferenz dV zwischen dem voraus fliegenden Satellit 1 und dem hinterher fliegenden Satelliten 2 lässt sich dann berechnen mit

$$dV = V_2 - V_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_2}{\partial t} \right)^2 - \int_t a_2 \cdot v_2 dt - Z_2 - c_2 - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 - \int_t a_1 \cdot v_1 dt - Z_1 - c_1 \right) \quad (3.26)$$

PETERS (2007) zeigt, wie sich Gleichung (3.26) umformen lässt, um den Bezug zu den beiden Hauptmessgrößen im low-low Verfahren, D und \dot{D} , herzustellen:

$$dV = \frac{1}{2} \dot{D}^2 + \frac{1}{2D^2} (x_{12} \times \dot{x}_{12})^2 + |\dot{x}_1| \dot{D} + |\dot{x}_1| u \cdot \dot{x}_{12} - \int_t a_2 \cdot v_2 dt + \int_t a_1 \cdot v_1 dt - Z_2 + Z_1 - c_2 + c_1. \quad (3.27)$$

Hierbei sind x_{12} die Relativbewegung und \dot{x}_{12} die Relativgeschwindigkeit und u der Differenzvektor zwischen der Richtung des Geschwindigkeitsvektors im Satellit 1 und der Richtung der Verbindungslinie zwischen den beiden Satelliten.

SST im low-low Modus wird im Rahmen der GRACE Mission erfolgreich durchgeführt. Hierbei konnte das Schwerefeld bis circa Grad 150 bestimmt werden.

3.5 GPS-Nivellement

Ein modernes, allerdings noch nicht sehr weit verbreitetes Verfahren, mit dem sich Beobachtungen des Erdschwerefeldes gewinnen lassen, ist das GPS-Nivellement. Eigentlich wird das GPS-Nivellement zur Höhenbestimmung verwendet. Zieht man von mit Hilfe von GPS gemessenen ellipsoidischen Höhen die Geoidhöhe ab, so gewinnt man die orthometrische Höhe. Allerdings lässt sich dieses Verfahren natürlich auch umkehren, und man kann bei bekannter orthometrischer und ellipsoidischer Höhe „direkt“ die Geoidhöhe messen. Es ist auch möglich, die Störpotentialdifferenz zwischen zwei Punkten zu bestimmen. (Die Größe Störpotential wird in Kapitel 4 ausführlich erläutert).

Für die Bestimmung der Störpotentialdifferenz wird zunächst die orthometrische Höhendifferenz dH zwischen zwei Messpunkten, sowie Schweremessungen zwischen den beiden Punkten benötigt. Daraus lässt sich, wie HEISKANEN & MORITZ (1967) in Kapitel 4-4 zeigen, klassisch der Potentialunterschied $\Delta W(P_1, P_2)$ zwischen P_1 und P_2 bestimmen.

Mit Hilfe des ellipsoidischen Höhenunterschieds dh und den Normalschwerewerten zwischen P_1 und P_2 kann analog die Normalpotentialdifferenz $\Delta U(P_1, P_2)$ berechnet werden.

Wie im nächsten Kapitel in Formel (4.3) zu sehen ist, kann die Störpotentialdifferenz zwischen beiden Punkten mit

$$\Delta T(P_1, P_2) = \Delta W(P_1, P_2) - \Delta U(P_1, P_2). \quad (3.28)$$

hergeleitet werden.

Ist das Störpotential z.B. am Punkt P_2 bekannt, ergibt sich das Störpotential in P_1 mit

$$T(P_1) = T(P_2) + \Delta T(P_1, P_2). \quad (3.29)$$

Dieses Verfahren ist besonders für regionale oder lokale Anwendungen geeignet. Es empfiehlt sich, in Gebieten, in denen bereits umfangreiche Schweremessungen und Nivellements stattgefunden haben, nachträglich GPS-Messungen durchzuführen, um so in diesen Gebieten Störpotentialwerte ableiten zu können.

3.6 Satellitenaltimetrie

Ein weiteres Verfahren, das zwar nicht das Schwerfeld direkt beobachtet, mit dessen Hilfe sich aber eine Vielzahl von Schwerfeldbeobachtungen herleiten lassen, ist die Satellitenaltimetrie. Diese kann zwar nur über Wasserflächen angewandt werden, liefert dort aber eine Vielzahl von großflächigen, konsistenten Höhenbeobachtungen.

Bestimmung der Geoidhöhe aus altimetrischen Messungen

Die wesentliche Messgröße der Satellitenaltimetrie ist die Entfernung des Satelliten von der Meeresoberfläche d . Diese wird mit Hilfe eines Radaraltimeters an Bord des Satelliten bestimmt. Das Radaraltimeter sendet kurze Impulse aus. Diese bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit c und werden von der Meeresoberfläche reflektiert. Das reflektierte Signal wird am Satelliten empfangen. Mit der Laufzeit des Signals lässt sich der Abstand d zwischen Satellit und Meeresoberfläche ermitteln mit

$$d = c \frac{\Delta t}{2}. \quad (3.30)$$

Des Weiteren wird mit Hilfe von Bahnbestimmung die Position des Satelliten ermittelt, so dass die Höhe h_{SAT} des Satelliten über dem Ellipsoid bekannt ist.

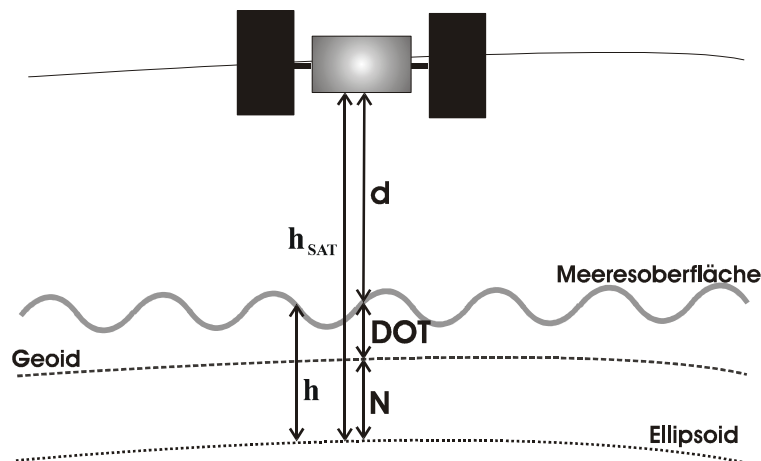


Abbildung 3.6: Prinzip der Satellitenaltimetrie

Zieht man von ihr den Abstand d ab, so bleibt der Abstand von der Ellipsoidoberfläche zur Meeresoberfläche übrig, die so genannte Meereshöhe h . Diese würde der Geoidhöhe entsprechen, wenn es keine Meeresströmungen gäbe. Durch diese entsteht die so genannte Meerestopographie DOT (= Dynamic Ocean Topography), die zwar mit $\pm 2\text{m}$ relativ klein ist, aber bei Weitem nicht vernachlässigt werden darf. Die Beobachtungsgleichung lautet also wie folgt:

$$h_{SAT} = N + DOT + d = h + d. \quad (3.31)$$

Die für Beobachtungen des Schwerefeldes interessante Größe in dieser Gleichung ist die Geoidhöhe N . Da d aus der Altimeter- und h_{SAT} aus der Bahnbestimmung bekannt ist, muss nur noch die Meerestopographie DOT ermittelt werden, um die Geoidhöhe zu erhalten.

Laut Diskussion in GRUBER (2000) empfiehlt sich hierzu ein „Ozeanographischer Ansatz“. Bei diesem berechnet man ein auf der hydrostatischen Differentialgleichung basierendes sterisches Nivellement. Die Basisgleichung des sterischen Nivellements

$$g \partial DOT = \frac{1}{\rho} \partial p \quad (3.32)$$

sagt aus, dass die Schwere entlang einer differentiellen Wassersäule ∂DOT , der inversen Dichte ρ entlang eines differentiellen hydrostatischen Druckfeldes ∂p entspricht. Die Integration dieser Gleichung liefert die Meerestopographie

$$DOT = \int g dDOT = \int_{p_0}^{p=0} \frac{1}{\rho} \partial p. \quad (3.33)$$

Die Dichteverteilung entlang der Wassersäule wird in ozeanographischen Schiffsexpeditionen bestimmt und ist von Temperatur und Salzgehalt des Wassers abhängig. Nachteil dieser Methode ist, dass eine Referenzfläche für die Integration gewählt werden muss, auf der der Startwert p_0 liegt. Man benutzt hierfür die hypothetische Referenzfläche „Level of no Motion“, die mit einer Niveaufläche zusammenfallen soll. Das ist problematisch, da man so nur eine Topographie relativ zu einer Fläche enthält, die nicht mit dem Geoid übereinstimmt.

Ausgehend von einem so berechneten Topographiemodell kann mit Hilfe von Windfeldern, Wärmeflussdaten, Oberflächentemperatur und Salzgehalt das Topographiemodell zeitlich fortgeschrieben werden, so dass globale Ozeanzirkulationsmodelle entstehen.

Bei diesen wird die Tiefe, bis zu der sich Oberflächenkräfte fortpflanzen können mitbestimmt, so dass der Startwert der Integration p_0 nicht länger hypothetisch ist. Die absolute Meerestopographie könnte also bestimmt werden, vorausgesetzt das Modell wäre fehlerlos.

Neben dem ozeanographischen Ansatz existiert für die Bestimmung der Meerestopographie der altimetrische Ansatz, der in GRUBER (2000) ausführlich beschrieben wird.

Bestimmung von Lotabweichungen aus altimetrischen Messungen

Neben der Geoidhöhe lassen sich als weitere Schwerefeldbeobachtung auch Lotabweichungen mit Hilfe altimetrischer Messungen bestimmen. Allgemein können Lotabweichungen aus der Neigung des Geoids berechnet werden. Da die Neigung der Meeresoberfläche im Wesentlichen der Neigung des Geoids entspricht, kann sie direkt benutzt werden, um Lotabweichungen zu bestimmen.

Aus der Analyse der Meereshöhen benachbarter Messpunkte in Flugrichtung lässt sich die Neigung der Meeresoberfläche in Flugrichtung bestimmen, was in SAVCENKO (2003) ausführlich beschrieben wird. Hierbei wird unterschieden zwischen der Neigung der Meeresoberfläche in Flugrichtung entlang des aufsteigenden Bahnknotens \dot{N}_a und der Neigung der Meeresoberfläche in Flugrichtung entlang des absteigenden Bahnknotens \dot{N}_d .

Aus \dot{N}_a und \dot{N}_d in einem Kreuzungspunkt der Bodenspuren ergibt sich die Neigung der Meeresoberfläche in Längsrichtung mit

$$\frac{\partial N}{\partial \lambda} = \frac{1}{2\dot{\lambda}} (\dot{N}_a + \dot{N}_d) \quad (3.34)$$

und in Breitenrichtung mit

$$\frac{\partial N}{\partial \varphi} = \frac{1}{2|\dot{\varphi}|} (\dot{N}_a + \dot{N}_d). \quad (3.35)$$

Hieraus kann wiederum die Lotabweichung bestimmt werden:

$$\eta = -\frac{1}{R \cos \varphi} \frac{\partial N}{\partial \lambda} \quad (3.36)$$

$$\xi = -\frac{1}{R} \frac{\partial N}{\partial \varphi}$$

Die Bestimmung der Lotabweichungen hat gegenüber der Bestimmung von Geoidhöhe den Vorteil, dass keine aufwendige Schätzung der Meerestopographie mehr notwendig ist. Allerdings muss bedacht werden, dass, wie beschrieben, der Unterschied zwischen der Neigung der Meeresoberfläche und der Neigung des Geoids vernachlässigt wird.

Bestimmung von Schwereanomalien aus altimetrischen Messungen

Aus den aus altimetrischen Messungen abgeleiteten Geoidhöhen und Lotabweichungen lassen sich auch Schwereanomalien ableiten. Dies ist wichtig, da, wie weiter hinten ersichtlich werden wird, einige Modellierungsansätze zur Schwerefeldbestimmung nur einen Beobachtungstyp des Schwerefelds auf einmal verarbeiten können. Leitet man also aus altimetrischen Messungen Schwereanomalien ab, so können diese gemeinsam mit terrestrischen Schwereanomalien verarbeitet werden (siehe hierzu Kapitel: 5.1).

Die Schwereanomalie ist über die *Stokes-Formel* (5.2) mit den Geoidhöhen verknüpft. Die Verknüpfung mit der Lotabweichung ergibt sich über die Formel nach *Vening-Meinesz* (siehe HEISKANAN & MORITZ (1967), Formel (2-210)).

Die Inversion beider Formeln führt jeweils zu Schwereanomalien. Dies soll an dieser Stelle nicht weiter ausgeführt werden, es sei auf GRUBER (2000) verwiesen.

Fehlereinflüsse bei der Altimetermessung

Abschließend sei erwähnt, dass bei Altimetermessungen noch einige Fehlereinflüsse berücksichtigt werden müssen. So wird die Laufzeit des Radarimpulses in der Ionosphäre und der Troposphäre verzögert, was zu einem Fehler im Meterbereich führt. Da die Ionosphäre dispersiv ist, kann der Fehlereinfluss durch die Messung mit zwei Frequenzen eliminiert werden, der Troposphäreneinfluss muss jedoch modelliert werden.

Die genaue Herleitung und Beschreibung dieser Einflüsse, so wie weiterer Effekte die z.B. durch die Oberflächenbeschaffenheit des Wassers entstehen, ist in STEIGENBERGER (2003) ersichtlich.

Festzuhalten bleibt, dass Satellitenaltimetrie zwar nicht direkt die Bestimmung des Schwerefeldes zum Ziel hat, allerdings für die kompletten Ozeangebiete die Geoidhöhe N näherungsweise liefert. Dies ist sehr bedeutend, da der komplette Ozean nie vollständig mit gravimetrischen Messungen überdeckt werden könnte. Dadurch nimmt die Satellitenaltimetrie eine gewichtige Rolle in der Schwerefeldbestimmung ein.

3.7 Übersicht Messsysteme

Dieses Kapitel soll mit einer Übersicht über die oben vorgestellten Schwerefeldmessverfahren beendet werden. Besonders im Blickpunkt liegt hierbei, welche Größe beobachtet wird. Es soll allerdings auch festgehalten werden, welches Spektrum die Messung grob erfasst und für welche räumlichen Ausdehnungen das Verfahren in der Regel angewendet wird.

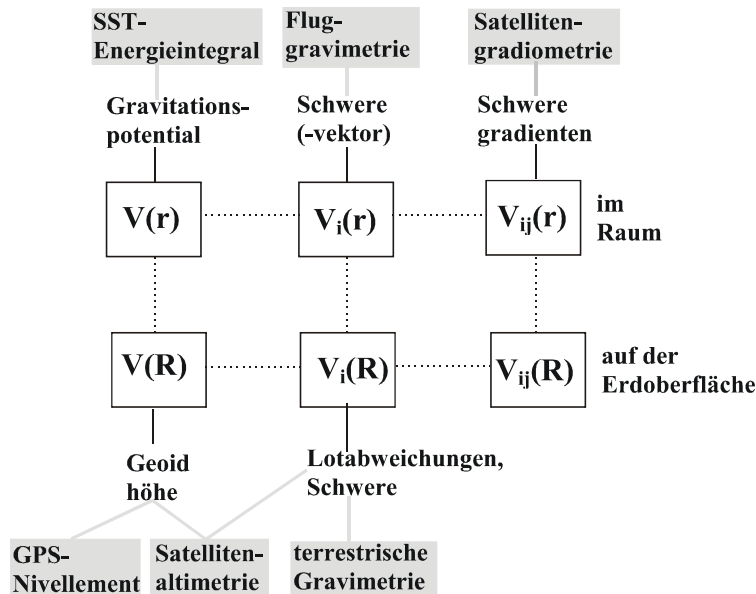


Abbildung 3.7: Schweremessverfahren und ihre Verbindung zum Schwerepotential

In Abbildung 3.7 wird aufgezeigt, wie alle hier vorgestellten Messgrößen mit dem Schwerepotential verknüpft sind und ob die Messgröße im Raum oder auf der Erdoberfläche liegt.

Die terrestrische Gravimetrie und das GPS-Nivellement bringen den Nachteil mit sich, dass mit ihnen nur Punktwerte bestimmt werden. Auf Grund des Messaufwands muss bei beiden Verfahren die Messung auf regional begrenzte Gebiete beschränkt werden. Beide Verfahren liefern Messwerte auf der Erdoberfläche, die je nach Planung nur wenige Kilometer voneinander entfernt sind. Beide Verfahren sind trotzdem sehr interessant. Die terrestrische Gravimetrie ist ein Messverfahren, bei dem im Gegensatz zu den meisten anderen Verfahren das komplette Schwerefeldsignal gemessen wird. Das GPS-Nivellement besticht dadurch, dass das Störpotential „direkt“ gemessen werden kann und nicht erst aufwendig berechnet werden muss. Auch die Messgrößen aus der Satellitenaltimetrie liegen auf der Erdoberfläche (\approx Ozeanoberfläche). Ihre räumliche Auflösung beträgt wenige Kilometer und sie erstrecken sich im Gegensatz zu den Messgrößen aus den vorher genannten Verfahren nicht auf regional begrenzte Flächen, sondern auf die kompletten Ozeanflächen, also nahezu zwei Drittel der gesamten Erde. Die Satellitenaltimetrie ist als Datenquelle in Ozeangebieten sehr wertvoll, da es vom Aufwand unmöglich wäre, ähnliche Datenmassen mit Schiffsgravimetrie (oder auch Fluggravimetrie) zu erhalten.

Bei der Fluggravimetrie werden die Messgrößen im Raum betrachtet. Dies ist besonders dann von Vorteil, wenn in einem Messgebiet nur sehr schwer terrestrische Messungen durchgeführt werden können. Messungen der Fluggravimetrie finden in regional begrenzten Gebieten statt. Auch in geringer Flughöhe ist das Signal des Schwerefeldes bereits gedämpft. Mit den Schwerefeldsatelliten kann das Schwerefeld in relativ kurzer Zeit global beobachtet werden. Allerdings ist das Schwerefeldsignal in der Flughöhe von Satelliten sehr stark gedämpft, es

kann nur der lang- bis mittelwellige Anteil des Schwerefeldes bestimmt werden, dieser jedoch dafür sehr genau.

	Messgröße:	Lage der Messgröße:	Position:	Räumliche Auflösung:	Einsatzgebiet:
Terrestrische Gravimetrie (relativ)	Schweredifferenz δg_{diff}	Erd- oberfläche	Geodätische Koord. (λ, φ, h) ODER Geod. Lage (φ, λ) und Orthom. Höhe H	wenige km*	regional
Terrestrische Gravimetrie (absolut)	Schwere g				
Flug-Gravimetrie (Plattform)	Schwere g	Raum	Geodätische Koord. (λ, φ, h)	wenige km	regional
Flug-Gravimetrie (StrapDown)	Schwerevektor \underline{g}	Raum			
Satelliten-Gradiometrie (GOCE)	Schweregradienten W_{ij}	Raum	Geodätische Koord. (λ, φ, h)	bis 80 km (ungefähr Grad 250)	global
SST high-low Energie-Integral	Gravitationspotential V	Raum	Geodätische Koord. (λ, φ, h)	bis 280 km (ungefähr Grad 70)	global
SST low-low Energie-integral	Potential (-differenz) $V (dV)$	Raum	Geodätische Koord. (λ, φ, h)	bis 130 km (ungefähr Grad 150)	global
GPS-Nivellement	Störpotential T	Erd- oberfläche	Geodätische Koord. (λ, φ, h)	wenige km*	regional
Satelliten- altimetrie	Geoidhöhe N	Ozean- (\approx Erd-) oberfläche	Geodätische Koord. (λ, φ, h)	wenige km	global (nur Ozean- flächen)
Satelliten- altimetrie	Lotabweichungen (ξ, η)	Ozean- (\approx Erd-) oberfläche	Geodätische Koord. (λ, φ, h)	wenige km	global (nur Ozean- flächen)
Satelliten- altimetrie	Schwereanomalie Δg	Ozean- (\approx Erd-) oberfläche	Geodätische Koord. (λ, φ, h)	wenige km	global (nur Ozean- flächen)

Tabelle 3-1: Übersicht über die Messverfahren

*: Punktabstand zwischen den Messpunkten

** : aus den altimetrischen Geoidhöhen abgeleitete Größen

4 Randwertaufgabe

In Kapitel 3 wurden mehrere Verfahren beschrieben, mit denen das Schwerefeld gemessen werden kann. Darauf aufbauend soll jetzt erläutert werden, wie diese Größen für die Schwerefeldberechnung verwendet werden können.

Um das Schwerefeld der Erde zu berechnen, muss eine Randwertaufgabe gelöst werden, das heißt, dass man ausgehend von Beobachtungen des Schwerefeldes auf einer Randfläche das Schwerefeld der Erde bestimmt. Hierzu wird die Gültigkeit der *Laplace*-Gleichung im Außenraum vorausgesetzt, was dazu führt, dass für die Schwerefeldberechnung auch Beobachtungen verwendet werden können, die nicht auf der Randfläche vorliegen, sondern im Außenraum und das sich überdies alle linearen Funktionale des Schwerefeldes auf der Randfläche und im Außenraum berechnen lassen, wenn das Schwerefeld bekannt ist.

Einige Ansätze zur Lösung der Randwertaufgabe erfordern, dass alle Beobachtungen auf der Randfläche liegen. D.h., wir müssten alle Beobachtungen in Flugzeug- oder Satellitenhöhe, auf die Erdoberfläche reduzieren bzw. die Gesamtheit aller Beobachtungen auf das Geoid. Besonders die Reduktion von Beobachtungen auf das Geoid ist schwierig, da die Beobachtungen an Land dann in die Landmassen hineinreduziert werden müssen, was weitere Probleme mit sich führt.

Als Randfläche kann das Geoid dienen. Da sich außerhalb des Geoids Land- und Atmosphärenmassen, sowie die Meerestopographie befinden, was in Abbildung 2.3 sichtbar ist, wird die wesentliche Bedingung der *Laplace*-Gleichung, nämlich Massenfreiheit im Außenraum, verletzt. Allerdings kann der Effekt, der durch diese Massen entsteht, mit Hilfe von verschiedenen Verfahren reduziert werden. Dies soll weiter unten gezeigt werden.

Des Weiteren kann die Erdoberfläche als Randfläche dienen. Diese bringt den Vorteil mit sich, dass sich außerhalb von ihr keine Landmassen befinden, so dass der Gültigkeit der *Laplace*-Gleichung lediglich die Atmosphärenmassen im Weg stehen. Nachteil dieser Möglichkeit ist allerdings, dass die Erdoberfläche im Gegensatz zum Geoid keine Niveaulfläche des Schwerefeldes ist.

Allgemein kann man sich alle Beobachtungen des Schwerefeldes als eine Funktion des Schwerepotentials W und des Punktes P , an dem die Beobachtung stattfindet vorstellen

$$b = b(W, P). \quad (4.1)$$

Zur Berechnung des Schwerefeldes versucht man diese Beziehung umzukehren, und auf Grund der Kenntnis von b das Schwerefeld zu bestimmen. Schwierig hierbei ist, dass diese Aufgabe nicht linear ist. Dieses Problem lässt sich im Rahmen einer Linearisierung umgehen.

Störgrößen

Die Linearisierung setzt eine näherungsweise Kenntnis des Schwerepotentials voraus. Als Näherungsgröße dient das Normalschwerepotential U , welches, wie weiter oben erwähnt, zu über 99% dem Schwerepotential W entspricht.

Mit dem Normalpotential U lässt sich dann der erste Schritt der Linearisierung vollziehen mit

4 Randwertaufgabe

$$\delta b = b(P, W) - b'(P, U), \quad (4.2)$$

wobei δb die Differenz zwischen Mess- und Näherungsgröße im Punkt P darstellt. Eine residuale Größe wie δb bezeichnet man als Störgröße. Sie vergleicht eine Messgröße am Messort (im Schwerfeld) mit einer Näherungsgröße am Messort (im Normalschwerfeld). Vergleicht man gemäß Gleichung (4.2) in einen Punkt P das Schwerepotential W mit dem Normalschwerepotential U , so erhält man das Störpotential

$$T(P) = W(P) - U(P). \quad (4.3)$$

Das Störpotential beschreibt den Anteil des Schwerfeldes, der durch das Normalschwerfeld nicht abgedeckt ist. Seine Reihendarstellung lautet

$$T(P) = \frac{GM}{R} \sum_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_m \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \left[\Delta \bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \Delta \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda) \right], \quad (4.4)$$

wobei $\Delta \bar{C}_{nm}, \Delta \bar{S}_{nm}$ für die (Differenz-)Potentialkoeffizienten $\Delta \bar{C}_{nm} = \bar{C}_{nm} - \bar{c}_{nm}$ bzw. $\Delta \bar{S}_{nm} = \bar{S}_{nm} - \bar{s}_{nm}$ steht. Im Störpotential ist der Anteil des Zentrifugalpotentials, der sehr genau bekannt ist, eliminiert, weil dieser nicht nur im Schwerpotential, sondern auch im Normalpotential enthalten ist. Demzufolge ist das Störpotential eine harmonische Funktion, was auch folgende Gleichung zeigt:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} T = \operatorname{div} \operatorname{grad} (W - U) = \operatorname{div} \operatorname{grad} (V - V_{\text{Ellip.}}) = 0. \quad (4.5)$$

Da das Störpotential den unbekannteren Anteil des Schwerfeldes beschreibt und eine harmonische Funktion im Außenraum ist, ist das Ziel der Schwerfeldberechnung das Störpotential zu bestimmen.

Weitere Beispiele für Störgrößen sind die skalare Schwerestörung, die bereits aus Gleichung (2.5) bekannt ist und die Lotabweichungen, die aus Gleichung (2.6) bekannt ist. Diese sind mit dem Störpotential verbunden durch

$$\operatorname{grad} T = \operatorname{grad} (W - U) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r \cos(\varphi)} \frac{\partial T}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial T}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma\xi \\ -\gamma\eta \\ -\delta g \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

sind also die Gradienten des Störpotentials. Gleichung (4.6) verknüpft verschiedene Schwerfeldbeobachtungen mit dem Störpotential.

Wie wir festhalten können, muss anscheinend für alle Beobachtungen aus Kapitel 3, die mit dem Schwerpotential verbunden sind, wie Schwerevektoren oder Schweregradienten, die Differenz mit einer Näherungsgröße gebildet werden, um sie für die Schwerfeldberechnung verwendbar zu machen. Dies ist für Messungen, die von GPS-Messungen begleitet werden problemlos durchführbar, da mit den geodätischen Koordinaten aus der GPS-Messung der Messort in Bezug zum Ellipsoid bekannt ist und somit die Näherungsgröße am Messort berechnet werden kann. Nicht ohne Weiteres durchführbar ist dies allerdings, wenn für eine Messung die Position in Bezug zum Ellipsoid nicht bekannt ist, wie das der Fall ist, wenn für

einen Messpunkt nur die orthometrische Höhe bekannt ist. Dann kann keine Störgröße nach (4.2) berechnet werden.

Anomaliengrößen

In diesem Fall benötigt man zusätzlich zum Näherungswert des Messwertes einen Näherungsort des Messpunktes.

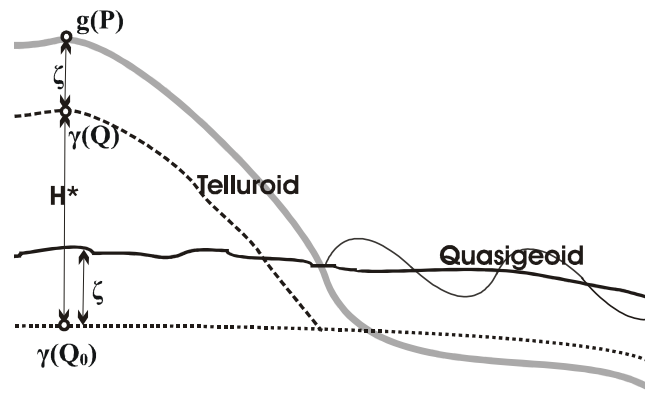


Abbildung 4.1: Das Telluroid in Beziehung zu Erdoberfläche und Ellipsoid

Ist das Geoid die Randfläche, so eignet sich das Rotationsellipsoid als Näherung des Geoids, da das Potential auf dem Geoid gleich dem Normalpotential auf dem Ellipsoid ist. Etwas schwieriger ist es, eine Approximation für Punkte auf der Erdoberfläche zu finden, falls diese als Randfläche dient, da die Erdoberfläche keine Niveaulfläche des Schwerfeldes ist, und demzufolge die Näherungsfläche auch keine Niveaulfläche sein kann. Es wird eine Fläche mit dem Namen Telluroid eingeführt, für das die Bedingung gilt, dass das Normalpotential in jedem Telluroidpunkt gleich dem Schwerepotential in dem Oberflächenpunkt ist, dem er zugeordnet ist. Die Telluroidpunkte bilden demzufolge das Profil der Erdoberfläche nach, weswegen das Telluroid hervorragend als Approximation der Erdoberfläche verwendet werden kann (siehe Abbildung 4.1). Den Abstand zwischen Ellipsoid und Telluroid entlang der Lotlinien durch das Telluroid nennt man Normalhöhe H^N . Diese lässt sich, wie die orthometrische Höhe, aus Schweremessungen und Nivellement bestimmen. Der Abstand zwischen Telluroid und Erdoberfläche wird als Höhenanomalie ζ bezeichnet. Diese kann man als eine Art Geoidhöhe an der Erdoberfläche verstehen. Die Normalhöhe H^N von der Erdoberfläche nach unten abgetragen liefert das Quasigeoid, dessen Verlauf ungefähr dem des Geoids entspricht, aber keine Niveaulfläche des Schwerfeldes ist.

Da die Differenz Δx zwischen Näherungspunkt Q (siehe Abbildung 4.1) und Messpunkt P unbekannt ist, wird ein weiterer Linearisierungsschritt notwendig. Dieser wird im Rahmen einer Taylorreihe vollzogen, die nach dem ersten Glied abgebrochen wird

$$b'(P,U) = b'(Q,U) + \partial_i b'(Q) \Delta x + (0^2). \quad (4.7)$$

Setzt man (4.7) in (4.2) ein, so erhält man

$$\Delta b = b(P,W) - b'(Q,U) = b(P,W) - b'(P,U) + \partial_i b'(Q) \Delta x = \delta b + \partial_i b'(Q) \Delta x, \quad (4.8)$$

was man als Anomaliengröße bezeichnet. Diese besteht, wie schön zu erkennen ist, aus der Störgröße δb und dem linearen Teil der Taylorentwicklung.

Ein Beispiel für eine Anomaliengröße stellt die Schwereanomalie dar, die wir aus Gleichung (2.7) kennen. Nach HEISKANEN & MORITZ (1967) lässt sich die Schwereanomalie nach Formel (4.8) darstellen mit

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T \left[= \delta g + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T = \delta g + \frac{\partial \gamma}{\partial h} \zeta \right], \quad (4.9)$$

und ist somit eine Linearkombination zwischen dem Störpotential und dessen erster vertikalen Ableitung. Gleichung (4.9) bezeichnet man als Fundamentalgleichung der physikalischen Geodäsie, da sie die traditionell am häufigsten auftretende Beobachtung Schwereanomalie mit dem Störpotential verknüpft. Wie zu erkennen ist, stellt die skalare Schwerestörung einen Anteil der Schwereanomalie dar. Da das Referenzellipsoid nur geringfügig von einer Kugel abweicht, nämlich mit einer Abplattung f von $f = 1:298.3$, ist es üblich bei Berechnung von Δg , N oder T das Referenzellipsoid sphärisch zu nähern. Dadurch entsteht ein Fehler, der weiter unten behandelt werden soll. Für die sphärische Näherung gilt

$$\gamma = \frac{GM}{r^2} \Rightarrow \frac{\partial \gamma}{\partial h} = \frac{\partial \gamma}{\partial r} = -2 \frac{GM}{r^3} = -2 \frac{\gamma}{r}, \quad (4.10)$$

was dazu führt, dass (4.9) vereinfacht werden kann, so dass die sphärische Näherung der Fundamentalgleichung entsteht

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r} T. \quad (4.11)$$

Hierbei findet kein Übergang auf eine Kugel statt, die Schwereanomalie bleibt am selben Ort. Im Gegensatz zu (4.9) wird jetzt allerdings die radiale Richtung betrachtet.

Freiluftkorrektur

Im Rahmen der Berechnung von Schwerestörungen oder -anomalien muss eine sogenannte Freiluftkorrektur durchgeführt werden. Korrekturen werden zwar eigentlich erst in Kapitel 6 behandelt, allerdings wird die Freiluftkorrektur auf Grund ihrer Bedeutung für die Definition der Schwereanomalie und der Schwerestörung bereits an dieser Stelle erörtert. Sie ist notwendig, um Schwerewerte auf das Geoid, oder Normalschwerewerte an den Mess- oder Näherungspunkt zu bringen. Es muss also zwischen zwei Fällen unterschieden werden:

Reduktion von Schwerewerten auf das Geoid

Der erste Fall ist ein Spezialfall, der allerdings sehr wichtig ist, da er historisch eine starke Bedeutung hat. Ausgangssituation ist, dass man eine Randwertaufgabe lösen möchte, bei der vorausgesetzt wird, dass alle Beobachtungen auf dem Geoid liegen. Als Randwerte werden Anomaliengrößen gebildet zwischen Beobachtungen auf dem Geoid und Näherungsgrößen auf dem Ellipsoid. In der Realität liegen die Beobachtungen allerdings - je nach Messverfahren - auf der Erdoberfläche oder im Raum. Sie müssen also zunächst mit der Freiluftkorrektur auf das Geoid reduziert werden. Als Beispiel beobachten wir einen Schwerewert $g(P)$ am Punkt P auf der Erdoberfläche, der durch die Freiluftkorrektur zum Schwerewert $g(P_0)$ am Geoidpunkt P_0 reduziert werden soll. Dieses Szenario ist in

Abbildung 2.3 sichtbar. Mit Hilfe einer Taylorreihe kann $g(P)$ entlang der Lotlinie zu $g(P_0)$ entwickelt werden

$$g(P) = g(P_0) + \frac{\partial g}{\partial h} \cdot H \dots, \quad (4.12)$$

wobei H für die orthometrische Höhe steht. Die Entwicklung wird in der Regel nach dem ersten Glied abgebrochen, $-\frac{\partial g}{\partial h}$ bezeichnet man als vertikalen Freiluftgradienten dg_{Fl} . Mit (4.12) kann die Berechnung der Schwereanomalie angesetzt werden mit

$$\Delta g = \left(g(P) - \frac{\partial g}{\partial h} \cdot H \right) - \gamma(Q_0) = \left(g(P) + dg_{Fl} \cdot H \right) - \gamma(Q_0), \quad (4.13)$$

wobei $\gamma(Q_0)$ für die Normalschwere im Ellipsoidpunkt Q_0 steht. Diese Schwereanomalie ist mit der Höhe des Messpunktes korreliert, da die topographischen Massen zwischen Messpunkt und Geoid in der Freiluftkorrektur nicht berücksichtigt werden (dies soll weiter unten geschehen). Um die Berechnung durchzuführen muss allerdings noch der vertikale Freiluftgradient δg_{Fl} bestimmt werden. Er entspricht, wie man an der Formulierung $-\frac{\partial g}{\partial h}$ sehen kann, dem Negativen des Schweregradienten W_{zz} im Außenraum (siehe auch Gleichung (2.12))

$$\frac{\partial g}{\partial h} = -W_{zz} = -2g\bar{H} - 2\omega^2. \quad (4.14)$$

Diese Gleichung verbindet den vertikalen Freiluftgradienten mit der mittleren Krümmung der Niveauflächen \bar{H} . Da die mittlere Krümmung in der Regel unbekannt ist, kann der vertikale Freiluftgradient mit dieser Formel nicht ohne Weiteres bestimmt werden.

Es empfiehlt sich darum, $\frac{\partial g}{\partial h}$ aufzuspalten in seinen normalen und anormalen Anteil

$$\frac{\partial g}{\partial h} = \frac{\partial \Delta g}{\partial h} + \frac{\partial \gamma}{\partial h}. \quad (4.15)$$

Da der anormale Anteil kompliziert zu berechnen (siehe HEISKANEN & MORITZ (1967), S.115-116) und im Vergleich zum normalen Anteil sehr klein ist, da er nur den geringen Anteil zwischen Schwere- und Normalschwerefeld beschreibt, kann man annehmen

$$\frac{\partial g}{\partial h} \approx \frac{\partial \gamma}{\partial h}, \quad (4.16)$$

und es wird Gleichung (4.14) zu

$$\frac{\partial \gamma}{\partial h} \approx -U_{zz} = -2\gamma\bar{H}_{Ellip.} - 2\omega^2, \quad (4.17)$$

4 Randwertaufgabe

wobei $\bar{H}_{Ellip.}$ als mittlere Krümmung des Ellipsoids leicht berechnet werden kann. γ ist nur von der Definition der Ellipsoidparameter und der Kobreite θ abhängig und berechnet sich mit

$$\gamma = \frac{GM}{r^2} \left(1 - 3 \left(\frac{a}{r} \right)^2 J_2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) + \frac{\omega^2}{GM} r^2 \sin^2 \theta \right). \quad (4.18)$$

Eine Reihenentwicklung von (4.17) führt zu dem ebenfalls nur von den Ellipsoidparametern und der Kobreite abhängigen Ausdruck

$$\frac{\partial g}{\partial h} \approx \frac{\partial \gamma}{\partial h} = -\frac{2\gamma}{a} (1 + f + m - 2f \sin^2 \theta), \quad (4.19)$$

der leicht berechnet werden kann. Oftmals verwendet man für den linearen Freiluftgradienten auch einfach den konstanten Wert 0.3086 mgal/m , was z.B. von TORGE (2003) vorgeschlagen wird.

Mit Gleichung (4.19) kann die Schwereanomalie in Gleichung (4.13) berechnet werden.

Der zweite Fall für die Freiluftkorrektur wird benötigt, wenn zur Berechnung von Stör- oder Anomaliengrößen die Messgrößen am Messort belassen werden, dafür aber die Normalgröße am Messpunkt bzw. Näherungspunkt benötigt wird. Wir betrachten hierzu wiederum das Beispiel der Schwereanomalie und außerdem das der Schwerestörung.

Die Normalschwere muss jetzt vom Ellipsoid mit der Freiluftkorrektur nach oben gebracht werden (dies ist in Abbildung 4.1 zu sehen für den Fall, dass die Schwereanomalie in einem Messpunkt auf der Erdoberfläche berechnet werden soll).

Analog zum ersten Fall benötigt man eine Taylorentwicklung um die Normalschwere vom Ellipsoid nach oben zu entwickeln

$$\gamma(Q) = \gamma(Q_0) + \frac{\partial \gamma}{\partial h} \cdot H^N \dots \quad (4.20)$$

Anstelle der orthometrischen Höhe H wird jetzt eigentlich die Normalhöhe H^N benötigt. Oftmals verwendet man trotzdem die orthometrische Höhe. Da nach HEISKANEN & MORITZ (1967) die Differenz zwischen orthometrischer und Normalhöhe in Gebirgen bis zu maximal 2m beträgt, ist der maximal mögliche Fehler hierdurch bei der Freiluftkorrektur ungefähr $2\text{m} \cdot 0.3086 \text{ mgal/m} \approx 0.6 \text{ mgal}$.

Da $\frac{\partial \gamma}{\partial h}$ aus Gleichung (4.19) bekannt ist, lässt sich die Schwereanomalie direkt berechnen mit

$$\Delta g = g(P) - \left(\gamma(Q_0) + \frac{\partial \gamma}{\partial h} \cdot H^N \right) = g(P) - \left(\gamma(Q_0) - dg_{Fl} \cdot H^N \right). \quad (4.21)$$

Die Schwereanomalie auf diese Weise zu berechnen ist vorteilhaft gegenüber der Methode nach (4.13), da dort der vertikale Freiluftgradient durch Annahme (4.16) nur näherungsweise bekannt ist.

Die Schwerestörung ergibt sich mit

$$\delta g = g(P) - \left(\gamma(Q_0) + \frac{\partial \gamma}{\partial h} \cdot h \right) = g(P) - \left(\gamma(Q_0) - dg_{Fl} \cdot h \right), \quad (4.22)$$

wobei h die Höhe des Messpunktes über dem Ellipsoid ist.

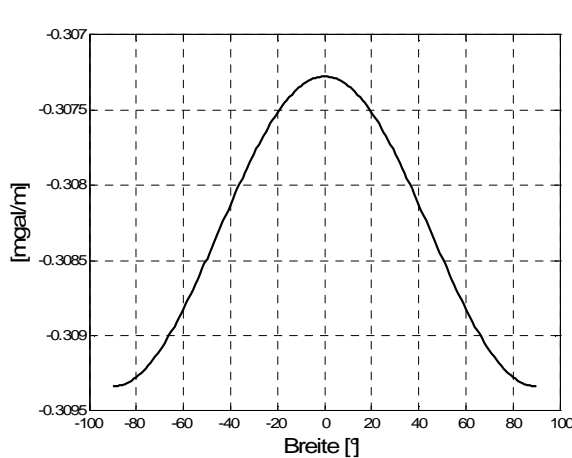


Abbildung 4.2: vertikaler Freiluftgradient in Abhängigkeit von der Breite

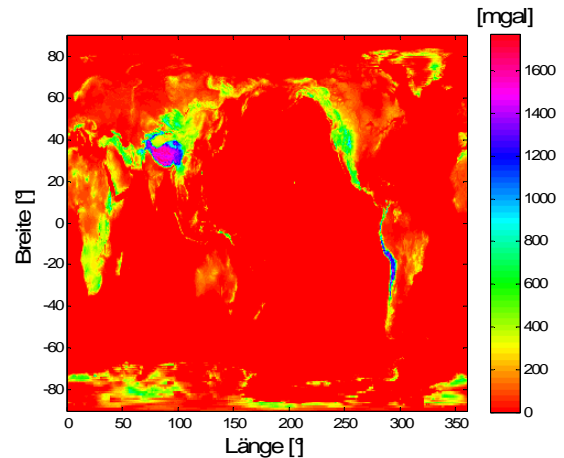


Abbildung 4.3: Freiluftkorrektur global

In Abbildung 4.2 ist der vertikale Freiluftgradient in Abhängigkeit von der Breite dargestellt. Man sieht, dass der Unterschied zwischen Minimal- und Maximalwert circa 0.002 mgal/m beträgt. Bei der Freiluftkorrektur eines Punktes in 1000 m Höhe am Äquator - die Differenz zwischen tatsächlichem und angenommenem Freiluftgradienten 0.3086 mgal/m beträgt hier also ungefähr 0.001 mgal/m - würde bereits ein Fehler von circa 1 mgal in Kauf genommen werden.

Deswegen scheint es in der Regel besser zu sein, nicht den konstanten Wert 0.3086 mgal/m als vertikalen Freiluftgradienten zu verwenden. In Abbildung 4.3 ist die Freiluftkorrektur dargestellt. Diese beträgt bis zu 1600 mgal, wenn man global Werte auf der Erdoberfläche auf das Geoid hinunterreduziert.

Da Schwerewerte historisch eine stärkere Bedeutung als andere Schwerefeldgrößen haben, wurde ausführlich beschrieben, wie sie zu Schwerestörungen oder -anomalien verarbeitet werden. Es soll der Vollständigkeit wegen noch kurz erläutert werden, wie mit den anderen Schwerefeldbeobachtungen zu verfahren ist. Sowohl bei Satellite-to-Satellite-Tracking, als auch bei Satellitengradiometrie werden in der Regel Störgrößen gebildet, da auf Grund von GPS-Messungen die Position des Satelliten bekannt ist.

Zieht man von den in Satellitenhöhe gemessenen Schweregradienten W_{ij} die Normalschweregradienten U_{ij} ab, so erhält man

$$T_{ij}(P) = W_{ij}(P) - U_{ij}(P). \quad (4.23)$$

Um U_{ij} am Messort zu erhalten, berechnet man zunächst analog zu (2.17) die zweiten Ableitungen des Normalschwerepotentials in Satellitenhöhe mit Hilfe von sphärisch harmonischen Reihen. Kombiniert man diese Ableitungen analog zu (2.18), so erhält man U_{ij} und kann den Tensor T_{ij} berechnen.

Für die Gravitationspotentialwerte, die aus dem SST-Energieintegral resultieren, empfiehlt sich ebenfalls mit einer Reihenentwicklung das Normalpotential am Messpunkt zu berechnen, um das Störpotential am Messort zu bestimmen.

4 Randwertaufgabe

Die Größen, die mit Satellitenaltimetrie gewonnen werden, müssen grundsätzlich nicht mehr bearbeitet werden. Die Lotabweichungen und Schwereanomalien stellen, wie wir in Gleichung (4.6) gesehen haben, bereits Stör- bzw Anomaliengrößen da. Die Geoidhöhe beschreibt eine Sonderrolle. Sie ist für den Fall, dass das Schwerepotential im Punkt P_0 gleich dem Normalpotential in dem P_0 zugeordneten Punkt Q_0 ist, nach der berühmten *Bruns*'schen Formel direkt mit dem Störpotential verknüpft

$$N = \frac{T}{\gamma}, \quad (4.24)$$

und kann darum direkt in die Schwerefeldberechnung einfließen. Wie wir weiter unten sehen werden, gibt es allerdings Schwerefeldberechnungsmethoden, für die es erforderlich ist, Lotabweichungen und Geoidhöhen in Schwereanomalien oder Schwerestörungen umzurechnen.

Übersicht

	Messgröße:	Linearisierung:		Messgröße:	Linearisierung:
<i>Terrestrische Gravimetrie (relativ)</i>	Schwere g	Schwere- störung δg	<i>Satelliten- Gradiometrie</i>	Schwere- gradienten W_{ij}	Gradienten der vektoriellen Schwerestörung T_{ij}
<i>Terrestrische Gravimetrie (absolut)</i>		Schwere- anomalie Δg	<i>SST (high-low und low-low) Energieintegral</i>	Gravitations- potential V	Störpotential T
<i>Flug- Gravimetrie (Plattform)</i>	Schwere g	Schwere- störung δg	<i>Satelliten- altimetrie</i>	Geoidhöhe * N	Geoidhöhe ** N
<i>Flug- Gravimetrie (StrapDown)</i>	Schwere- vektor \underline{g}	vektorielle Schwere- störung $\delta \underline{g}$	<i>Satelliten- altimetrie</i>	Geoidhöhe * N	Lot- ** abweichungen (ξ, η) aus der Geoidneigung
<i>GPS- Nivellement</i>	Störpotential T	Störpotential T **	<i>Satelliten- altimetrie</i>	Geoidhöhe * N	Schwere- ** anomalie Δg aus der inversen Stokesformel

Tabelle 4-1: Schwerefeldbeobachtungen und zugeordnete Stör- bzw. Anomaliengrößen

*: Eigentliche Messgröße der Satellitenaltimetrie ist der Abstand zwischen Satellit und Ozeanoberfläche, aus der sich mit Zusatzinformation die Geoidhöhe ableiten lässt.

** : Da die Messgröße bereits eine Störgröße ist, wurde diese übernommen oder in eine andere Stör- bzw. Anomaliengröße umgewandelt.

In diesem Kapitel wurde die Bedeutung von Stör- und Anomaliengrößen verdeutlicht. Festzuhalten ist hierbei besonders, dass die Störgröße die Differenz zwischen Messgröße und Näherungsgröße im Messpunkt ist, während die Anomaliengröße die Differenz zwischen

Messgröße im Messpunkt und Näherungsgröße im Näherungspunkt beschreibt. Die Störgröße ist überdies immer in der entsprechenden Anomaliengröße enthalten. Obige Tabelle zeigt, in welche Stör- oder Anomaliengrößen die ursprünglich gemessenen Schwerefeldgrößen verarbeitet werden. Hierbei stehen in der Spalte *Messgröße* die in Kapitel 3 vorgestellten Beobachtungen, und in der Spalte *Linearisierung* die zugehörigen Stör- oder Anomaliengrößen, in die die Beobachtungen in der Regel verarbeitet werden.

Wie man sieht, werden die meisten Beobachtungen heutzutage in Störgrößen verarbeitet, da nahezu alle Messungen von GPS begleitet werden und somit die Koordinaten des Messpunktes im Bezug auf das Ellipsoid vollständig bekannt sind, weswegen problemlos die Normalschwere im Messpunkt berechnet werden kann. Es sei allerdings nochmals erwähnt, dass aus historischen Gründen die Schwereanomalie die größte Datenquelle für Schwerefeldberechnungen darstellt, und Anomaliengrößen darum auch heute noch sehr bedeutsam sind. Die Beobachtungen, die wir aus den Messungen der Satellitenaltimetrie ableiten, sind, wie weiter oben erläutert wurde, bereits Störgrößen (auch die Geoidhöhe ist im Grunde eine Störgröße, wie die *Bruns'sche* Formel zeigt).

Die folgenden Grafiken zeigen, wie Stör- oder Anomaliengrößen aus den Beobachtungen berechnet werden können.

Abbildung 4.4 zeigt, wie mit Hilfe der Freiluftkorrektur aus der Schwere im Messpunkt P entweder die Schwereanomalie auf dem Geoid oder der Erdoberfläche berechnet werden kann, oder die Schwerestörung auf der Erdoberfläche.

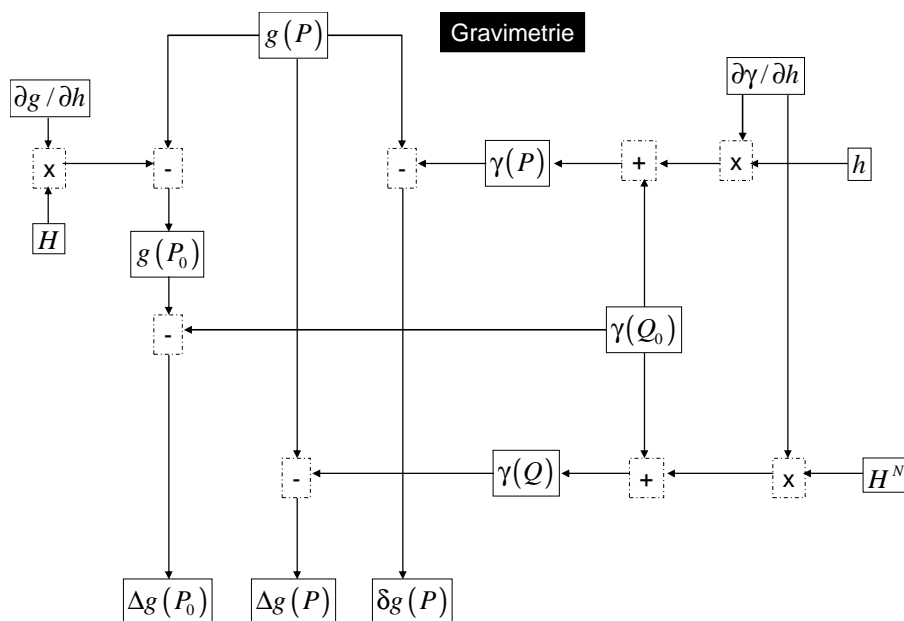


Abbildung 4.4: Übersicht über Verarbeitungsmöglichkeiten der Schwere

In Abbildung 4.5 wird gezeigt, wie aus verschiedenen im Außenraum gemessenen Beobachtungen Störgrößen berechnet werden können. Entscheidend hierbei ist, dass mit Hilfe von Reihenentwicklungen die zugehörige Näherungsgröße im Messpunkt direkt berechnet werden kann.

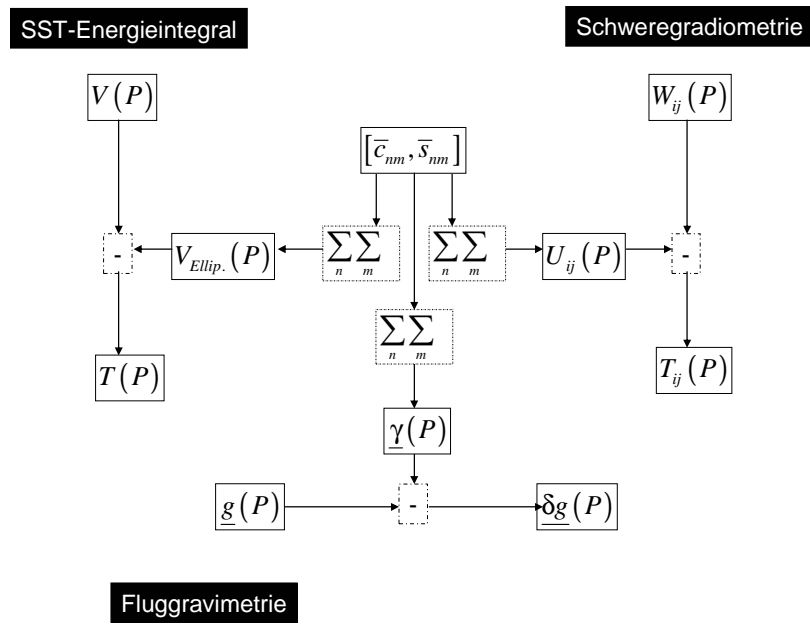


Abbildung 4.5: Übersicht Verarbeitungsmöglichkeiten bei SGG und SST

5 Modellierungsansätze

Im obigen Kapitel wurde dargelegt, dass das Schwerfeld berechnet werden kann, indem man eine Randwertaufgabe löst. Hierbei wird, wie beschrieben, die Gültigkeit der *Laplace*-Gleichung vorausgesetzt und es ist nötig, die Beobachtungen des Schwerfeldes in Stör- oder Anomaliengrößen zu verarbeiten. Im Folgenden sollen Modellierungsansätze zur Lösung der Randwertaufgabe vorgestellt werden. Besonderes Augenmerk soll hier auf die Bedingungen gelegt werden, die für die Anwendung eines Verfahrens vorausgesetzt werden.

5.1 Schwerfeldberechnung nach Stokes

Zunächst soll die Schwerfeldberechnung nach Stokes vorgestellt werden. Die sogenannte *Stokes*'sche Integralformel

$$T(P) = \frac{R}{4\pi} \int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \Delta g(P') S(\psi_{PP'}) \cos \varphi_P' d\lambda_P' d\varphi_P' \quad (5.1)$$

oder kurz

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (5.2)$$

ist die Lösung der geodätischen Randwertaufgabe auf der Grundlage der Differentialgleichung (4.11), also der sphärischen Näherung der Fundamentalgleichung der physikalischen Geodäsie.

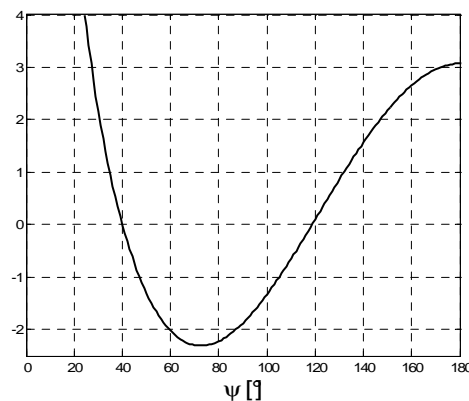


Abbildung 5.1: Stokesfunktion $S(\psi)$

Sie sagt aus, dass die Integration von Schwereanomalien Δg , die in Abhängigkeit ihres sphärischen Abstands ψ zum Berechnungspunkt P mit Hilfe der Stokesfunktion $S(\psi)$ gewichtet werden, über die Erdkugel hinweg zum Störpotential T führt. Dadurch, dass die Formel auf einer sphärischen Approximation basiert, entsteht ein Approximationsfehler. Dieser soll weiter unten betrachtet werden.

Wie man sieht, kann mit Hilfe der *Stokes'schen* Formel nur die Beobachtungsgröße Schwereanomalie verarbeitet werden. Außerdem wird für die Anwendung der Formel vorausgesetzt, dass alle Schwereanomalien auf einer Niveauläche, in der Regel dem Ellipsoid, liegen. Nichts desto trotz ist sie sehr wichtig und historisch sehr bedeutsam, da früher die meisten Beobachtungen Schweremessungen waren. Da es noch keine GPS-Messungen gab, die die Koordinaten des Messpunktes im Bezug zum Ellipsoid lieferten, und mit Hilfe von Nivellement nur physikalische Höhen ohne Ellipsoidbezug bestimmt werden können, konnten aus den Schwerewerten nur Schwereanomalien berechnet werden.

Weiterer Nachteil dieser Formel ist, dass vorausgesetzt wird, dass Schwereanomalien global als Funktion vorliegen. Wie weiter oben bereits erwähnt, liefern Schweremessungen allerdings nur Punktwerte, und es gibt sogar Gebiete auf der Erde, für die kaum Schweremessungen vorliegen. Eine Lösung für dieses Problem liefert die kleinste-Quadrate-Prädiktion, die in RUMMEL (1991) ausführlich beschrieben wird und auf die später nochmals eingegangen werden soll.

Entsprechend der *Stokes'schen* Integralformel gibt es für Schwerestörungen die Integralformel nach *Neumann-Hotine*

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \delta g H(\psi) d\sigma, \quad (5.3)$$

die sich von der *Stokes*-Formel lediglich durch den Integralkern H unterscheidet.

Da Schwerestörungen in der Regel allerdings nicht auf das Ellipsoid reduziert werden, findet Gleichung (5.3) in dieser Form nur selten Anwendung.

Theoretisch kann aus jeder Schwerfeldbeobachtung das Störpotential mit Hilfe ähnlicher Integralformeln berechnet werden.

Wie bereits erwähnt, ist ein Nachteil solcher Integralformeln, dass sie ohne weitere Modifikationen keine gleichzeitige Nutzung von verschiedenen Schwerfeldbeobachtungen zulassen, sondern immer nur ein Beobachtungstyp verwendet werden kann, wie bei der *Stokes*-Formel die Schwereanomalien. Um trotzdem viele Beobachtungen in die Berechnung einfließen lassen zu können, versucht man, andere Schwerfeldbeobachtungen in die benötigte Schwerfeldbeobachtung zu überführen. In Ozeangebieten, in denen kaum Schweremessungen vorliegen, werden beispielsweise Geoidhöhen oder Lotabweichungen, die mit Hilfe von Satellitenaltimetrie gewonnen wurden, mit der inversen *Stokes*-Formel oder der inversen Formel nach *Vening-Meinesz* - die *Vening-Meinesz*-Formel berechnet eigentlich Lotabweichungen aus Schwereanomalien (siehe HEISKANEN & MORITZ (1967), S.114) - zunächst in Schwereanomalien umgewandelt, um sie dann gemeinsam mit den terrestrisch gewonnenen Schwereanomalien für die Schwerfeldberechnung nach *Stokes* zu nutzen (siehe hierzu GRUBER (2000)).

Ein weiterer Nachteil, nämlich dass alle Beobachtungen auf das Geoid reduziert werden müssen, kann durch eine Modifizierung der Integralformeln beseitigt werden, wie die Schwerfeldberechnung nach *Molodenski* zeigt.

5.2 Schwerefeldberechnung nach Molodenski

Der Versuch, die Randwertaufgabe mit Schwereanomalien an der Erdoberfläche zu lösen, mit dem Ziel, Reduktionen zu vermeiden, wird als *Molodenski-Problem* bezeichnet. Schwereanomalien an der Erdoberfläche zu belassen, bringt allerdings zunächst eine Schwierigkeit mit sich. Diese ist darin begründet, dass Schwereanomalien im Rahmen der Randwertaufgabe als Randwerte verwendet werden, welche, wie wir bisher außer Acht gelassen haben, streng genommen eine Linearkombination aus Störpotential und dessen Ableitung in Richtung der Flächennormalen sind (siehe HOFMANN-WELLENHOF & MORITZ (2005), S.30). Wir betrachten aber bei den Schwereanomalien an Stelle der Ableitung in Richtung der Flächennormalen die Ableitung in vertikale Richtung. Dies ist für den *Stokes-Fall* auch kein Problem, da die Flächennormale zum Geoid mit der vertikalen Richtung zusammenfällt. Für den *Molodenski-Fall* jedoch fallen die Erdoberflächennormale und die vertikale Richtung nicht zusammen. Dies ist in Abbildung 5.2 (linke Seite) zu sehen.

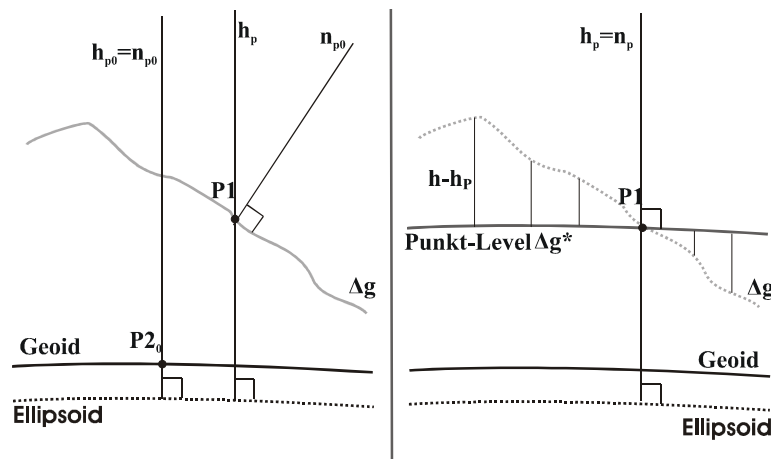


Abbildung 5.2: Schwerefeldberechnung nach Molodenski

Folglich kann Formel (5.2) nicht angewendet werden, wenn die Schwereanomalien auf der Erdoberfläche liegen. Allerdings lässt sich diese Gleichung erweitern, so dass mit Hilfe eines Kunstgriffs das Störpotential berechnet werden kann. Diesen von *Moritz* vorgeschlagenen Lösungsweg bezeichnet man als „Analytische Fortsetzung“. Hierzu betrachtet man das sogenannte „Punkt-Level“, die Niveaulfläche, die durch den jeweiligen Berechnungspunkt P verläuft. Die Flächennormale des Punkt-Levels fällt mit der vertikalen Richtung zusammen (siehe Abbildung 5.2, rechte Seite). Setzt man für jeden Berechnungspunkt alle Schwereanomalienwerte analytisch auf dessen Niveau fort, kann das Störpotential berechnet werden. Dies geschieht mit Hilfe der *Taylor-Reihe*,

$$\Delta g^* = \Delta g - \frac{\partial \Delta g}{\partial h} (h - h_p), \quad (5.4)$$

die nach dem linearen Term abgebrochen wird.

Die Integrationsformel ergibt sich dann aus (5.2) und (5.4) mit

$$T(P) = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \left[\Delta g - \frac{\partial \Delta g}{\partial h} (h - h_p) \right] St(\psi) d\sigma = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g^* St(\psi) d\sigma. \quad (5.5)$$

Der Unterschied zur *Stokes*-Formel entsteht also durch die geländeabhängigen Terme der sogenannten *Molodenski*-Reihe, die umso kleiner werden, je flacher das Gelände ist. Sind diese sehr klein, so ist die Lösung des *Stokes*-Integrals der Lösung des *Molodenski*-Problems sehr ähnlich. Darum ist das *Stokes*-Integral auch eine Näherung der Ordnung Null für das *Molodenski*-Problem.

Möchte man aus Schwerestörungen das Störpotential berechnen, und diese an ihrem Messort belassen, so kann analog formuliert werden

$$T(P) = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \left[\delta g - \frac{\partial \delta g}{\partial h} (h - h_p) \right] H(\psi) d\sigma. \quad (5.6)$$

Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass in den bisher behandelten Ansätzen zur Schwerfeldberechnung immer nur eine Beobachtungsart einfließen kann. Wie wir aber schon in der Einleitung festgestellt haben, ist es nötig, möglichst alle Schwerfeldbeobachtungen gemeinsam zu verarbeiten, um ein bestmögliches Ergebnis zu erhalten. Es folgen nun Ansätze, mit denen alle Größen verarbeitet werden können.

5.3 Kollokation

Die Kollokation ist ein statistisches Verfahren, mit dem alle Schwerfeldbeobachtungen gemeinsam verarbeitet werden können und das es zudem erlaubt die Beobachtungen am Messort direkt für die Schwerfeldberechnung zu verwenden. Kollokation kann auch als Interpolationsverfahren betrachtet werden, da, ausgehend von Funktionswerten verschiedener (allerdings miteinander verbundener) Funktionen, ein Funktionswert einer Funktion an einem unbekanntem Ort berechnet werden kann. Ein Spezialfall der Kollokation ist die kleinste-Quadrate-Prädiktion, kurz LSP (aus Englisch: Least-Squares-Prediction), mit der, ausgehend von gleichartigen Funktionswerten, der Wert dieser Funktion an einem beliebigen Ort bestimmt werden kann. Eine wichtige Bedeutung für die Kollokation hat die Kovarianzfunktion $C(\psi)$.

Kovarianzfunktion

Die Kovarianzfunktion beschreibt die Korrelation zwischen Funktionswerten einer Funktion und gibt so die Signaleigenschaften der Funktion wieder. Da sie nur vom sphärischen Abstand ψ abhängt, wird vorausgesetzt, dass es sich um eine homogene und isotrope Funktion handelt. Ist die Kovarianzfunktion Null für einen sphärischen Abstand, so sind die Funktionswerte, die sich in diesem Abstand voneinander entfernt befinden, unabhängig voneinander. Die Signalvarianz C_0 beschreibt den Wert der Kovarianzfunktion beim sphärischen Abstand von Null und ist deren Maximalwert, da die Funktion an jedem Punkt natürlich mit sich selbst am ähnlichsten ist.

Die Kovarianz zwischen den Funktionswerten y und y' einer global vorliegenden Funktion mit dem Mittelwert Null an den Punkten P und P' , die im sphärischen Abstand ψ voneinander entfernt sind, berechnet sich in einem Faltungsprozess mit

$$C(\psi) = \frac{1}{8\pi^2} \iint_{\sigma} \int_{\alpha} y y' d\alpha d\sigma, \quad (5.7)$$

wobei die Integration über die Oberfläche σ Homogenität, und die Integration über den Azimut α Isotropie erzwingt. Wird Gleichung (5.7) für alle beliebigen ψ durchgeführt, so erhält man die Kovarianzfunktion

Die Kovarianzfunktion liefert mit den Signaleigenschaften einer Funktion die wesentliche Information für die kleinste-Quadrate-Prädiktion. Diese wendet man an, um aus Schwereanomalienansätzen an jedem Punkt der Erde den Wert der Schwereanomalie berechnen zu können. Die Schwereanomalie $\Delta g(P')$ am Punkt P' ergibt sich so mit Hilfe der kleinsten-Quadrate-Prädiktion aus dem Schwereanomalienansatz $\Delta g(P_i)$ mit

$$\Delta g(P') = C^t(P', P_i) C^{-1} \Delta g(P_i). \quad (5.8)$$

Hierbei ist $C(P', P_i)$ ein Vektor, der die Kovarianzen zwischen den Beobachtungspunkten P_i und P' enthält ($'$ steht für transponiert), und C eine Matrix mit den Kovarianzen zwischen den Beobachtungspunkten.

Da es sich bei einer Prädiktion um keine exakte Berechnung handelt, entsteht der Prädiktionsfehler

$$\sigma^2 = C_0 - C^t(P', P_i) C^{-1} C(P_i, P'). \quad (5.9)$$

Die Kovarianzfunktion lässt sich durch die Legendre-Polynome $P_n(\cos \psi)$ in Reihendarstellung bringen:

$$C(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 P_n(\cos \psi). \quad (5.10)$$

Hierbei steht c_n^2 für die Signalgradvarianzen, die den spektralen Gehalt einer Schwerefeldgröße wiedergeben.

Gradvarianzen

Diese berechnen sich aus der Quadratsumme der Potentialkoeffizienten $[\Delta \bar{C}_{nm}, \Delta \bar{S}_{nm}]$ pro Grad n

$$c_n^2 = \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm}^2 + \Delta \bar{S}_{nm}^2). \quad (5.11)$$

Die Kovarianzfunktion lässt sich folglich nicht nur aus der Faltung einer Funktion berechnen, sondern auch, indem man aus den Potentialkoeffizienten der global vorliegenden Funktion y_i zunächst Gradvarianzen berechnet, und aus diesen dann die Kovarianzfunktion.

Dies ist in Abbildung 5.3 dargestellt. Die Richtung der Pfeile verdeutlicht, dass der Faltungsprozess, bzw. die Berechnung der Gradvarianzen aus den Potentialkoeffizienten nicht mehr rückgängig gemacht werden kann.

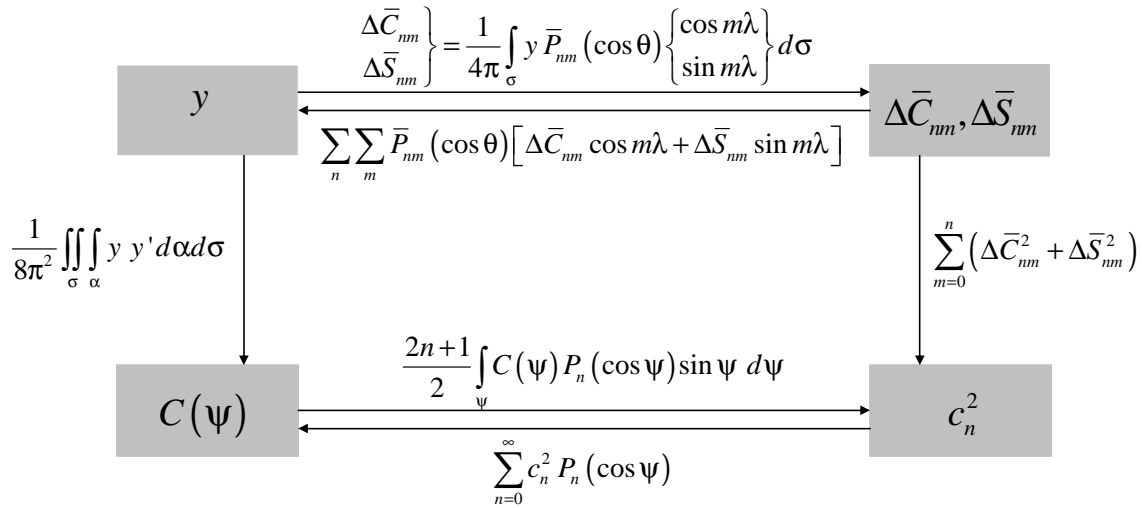


Abbildung 5.3: Verbindung zwischen Funktion, Potentialkoeffizienten, Gradvarianzen und Kovarianzfunktion

Im Gegensatz dazu kann zwischen Funktion und Potentialkoeffizienten, sowie zwischen Kovarianzfunktion und Gradvarianzen hin- und zurück gerechnet werden kann. So lautet der inverse Ausdruck zu (5.10)

$$c_n^2 = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} C(\psi) P_n(\cos\psi) \sin\psi d\psi. \quad (5.12)$$

Als Beispiele für Gradvarianzen sind in Abbildung 5.4 die des Störpotentials und der Schwereanomalien dargestellt (berechnet aus dem EGM96 Modell). Die Gradvarianzen des Störpotentials sind für die niedrigen Grade am höchsten und fallen mit steigenden Graden rasch ab. Das bedeutet, dass der Signalanteil der niedrigen Grade am Störpotential viel höher ist als der der hohen Grade. Die niedrigen Grade repräsentieren den langwelligen bzw. tieffrequenten Signalanteil und demzufolge ist das Störpotential eine Funktion mit langwelligem Charakter.

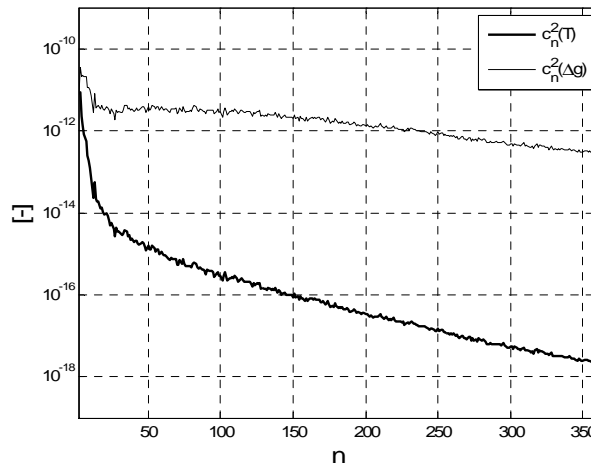


Abbildung 5.4: Dimensionslose Gradvarianzen der Geoidhöhe und der Schwereanomalien

Die Werte der Schwereanomaliengradvarianzen werden zwar auch kleiner mit steigendem Grad, allerdings geschieht dies sehr langsam. Der Signalanteil der hohen Grade ist darum

nicht viel kleiner als der der niedrigen Grade, was dazu führt, dass die Charakteristik der Schwereanomalien von räumlichen Details geprägt wird.

In Abbildung 5.5 und Abbildung 5.6 sind Kovarianzfunktionen dargestellt, wiederum für Störpotential und Schwereanomalien (Berechnung nach (5.10) mit den Gradvarianzen des EGM96 Modells). Wie zu erkennen ist, ist die Signalvarianz in der Tat der Maximalwert der Kovarianzfunktion. Beide Kovarianzfunktionen gehen mit steigendem sphärischem Abstand gegen Null. Die Kovarianzfunktion des Störpotentials fällt allerdings im Gegensatz zu der Schwereanomalie deutlich langsamer. Das bedeutet, dass beim Störpotential auch noch relativ weit voneinander entfernte Punkte stark miteinander korreliert sind. Dies belegt den langwelligigen Charakter des Störpotentials, denn der Wert an einem Punkt wird nicht nur von Punkten aus der Umgebung beeinflusst.

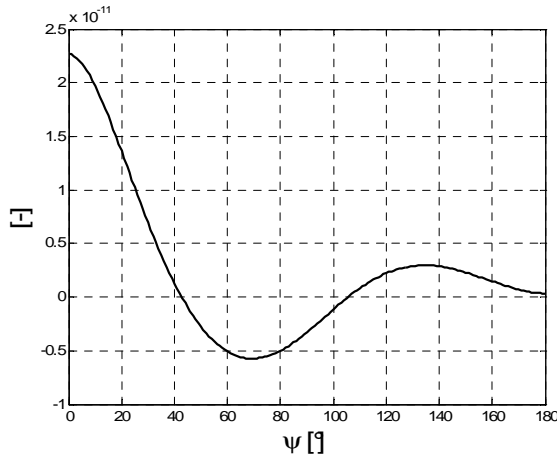


Abbildung 5.5: dimensionslose Kovarianzfunktion des Störpotentials

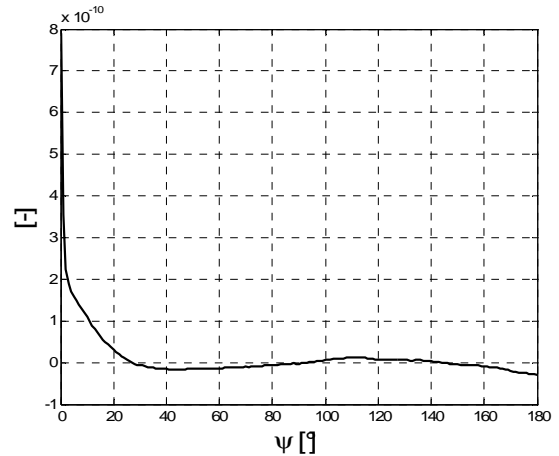


Abbildung 5.6: dimensionslose Kovarianzfunktion der Schwereanomalie

Bei den Schwereanomalien ist die Korrelation mit weiter entfernten Punkten sehr gering. Dies zeigt, dass ein Schwereanomalienpunktwert am stärksten von den Punkten in seiner direkten Umgebung geprägt wird, wodurch abermals belegt wird, dass kleinräumige Details bei der Schwereanomalie stärker zu Tage treten.

Es ist auch möglich, zwischen den Gradvarianzen und Kovarianzfunktionen verschiedener Funktionale des Störpotentials $f(T)$ hin und her zu rechnen. Für Gradvarianzen ist dies sehr einfach möglich, da diese über Eigenwerte λ_n der isotropen Operatoren miteinander verbunden sind:

$$c_n^2(f_1(T)) = \lambda_n^2(f_1(T), f_2(T)) \cdot c_n^2(f_2(T)). \quad (5.13)$$

Nach (5.13) können also die Gradvarianzen einer Schwerefeldgröße mit Hilfe des Eigenwertes in die Gradvarianzen einer anderen Schwerefeldgröße überführt werden, wobei wir hier der Übersicht wegen wie auch im Folgenden die Dimension der Funktionale nicht berücksichtigen. Beispielsweise sind über den Eigenwert $\lambda_n(T, \Delta g) = \frac{1}{n-1}$ die Schwereanomalien mit dem Störpotential verbunden

$$c_n^2(T) = \frac{1}{(n-1)^2} c_n^2(\Delta g). \quad (5.14)$$

Überdies kann mit dem Eigenwert $\lambda_n(T(R), T(r)) = \left(\frac{r}{R}\right)^{n+1}$ eine Messgröße im Außenraum mit einer Messgröße auf der Kugeloberfläche verbunden werden

$$T_n(R) = \left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} T_n(r), \quad (5.15)$$

wobei R hierbei dem Kugelradius entspricht und r sich aus R und der Höhe h über der Kugeloberfläche zusammensetzt (dies wird in Kapitel 5.5 ausführlich behandelt).

Wenn der Eigenwert nicht quadratisch multipliziert wird, so wie in (5.13), ist es auch möglich Gradvarianzen $c_n^2(f_1(T), f_2(T))$ zu berechnen, die die Verbindung zwischen zwei Funktionen ausdrücken. Allgemein lautet die Gleichung hierzu

$$c_n^2(f_1(T), f_2(T)) = \lambda_n \cdot c_n^2(f_2(T)), \quad (5.16)$$

und für die Verbindung zwischen Störpotential und Schwereanomalien

$$c_n^2(T, \Delta g) = \frac{1}{(n-1)} c_n^2(\Delta g). \quad (5.17)$$

Wie in RUMMEL (1991) erläutert wird, können die Gleichungen (5.13) und (5.16) in dieser einfachen Form allerdings nur angewendet werden, wenn zwei Schwerefeldgrößen über einen isotropen Operator miteinander verknüpft sind und die Anwendung des isotropen Operators S auf die Kugelfunktionen der Anwendung eines Eigenwerts λ_n auf die Kugelfunktionen entspricht

$$S \begin{cases} \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \cos(m\lambda) \\ \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \sin(m\lambda) \end{cases} = \lambda_n \begin{cases} \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \cos(m\lambda) \\ \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \sin(m\lambda) \end{cases}. \quad (5.18)$$

Tabelle 5-1 enthält die Funktionale des Störpotentials, die mit dem Störpotential über einen isotropen Operator verknüpft sind. Außerdem sind die Eigenwerte dargestellt, die die jeweiligen Funktionale mit dem Störpotential verbinden.

<i>Schwerefeldgröße</i>	<i>Eigenwert</i>
$f(T)$	$\lambda_n(T, f(T))$
δg	$1/(n+1)$
Δg	$1/(n-1)$
T_{zz}	$1/((n+1)(n+2))$
$T(r)$	$(r/R)^{n+1}$

Tabelle 5-1: Schwerefeldgrößen und der Eigenwert, der sie mit dem Störpotential verbindet.

Berechnet man nach Gleichung (5.10) aus den Gradvarianzen $c_n^2(f_1(T), f_2(T))$ eine Kovarianzfunktion, so bezeichnet man diese als Kreuzkovarianzfunktion

$$C^{f_1 f_2}(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2(f_1(T), f_2(T)) P_n(\cos \psi). \quad (5.19)$$

Die Kreuzkovarianzfunktion beschreibt nun nicht mehr die Korrelation einer Funktion mit sich selbst, sondern die Ähnlichkeit einer Funktion mit einer anderen. Die Verbindung zwischen Störpotential und Schwereanomalien erfolgt so über die Kreuzkovarianzfunktion

$$C^{T \Delta g}(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2(T, \Delta g) P_n(\cos \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n-1} c_n^2(\Delta g) P_n(\cos \psi). \quad (5.20)$$

Mit der Kreuzkovarianzfunktion aus (5.20) lässt sich Gleichung (5.8) modifizieren und anstelle der Schwereanomalie das Störpotential T im Punkt P' bestimmen

$$T(P') = (C^{T \Delta g}(P', P_i))^t C^{-1} \Delta g(P_i). \quad (5.21)$$

Gleichung (5.21) ist ein Beispiel für eine Kollokationsgleichung. Generell lässt sich aus einem Satz Beobachtungen einer Schwerefeldgröße mit Hilfe der Kollokation eine andere Schwerefeldgröße an einem unbekanntem Punkt berechnen. Hierzu wird nur die Kreuzkovarianzfunktion benötigt. Der Fehler, der bei der Kollokation entsteht, beträgt analog zu (5.9)

$$\sigma^2 = C_0^T - (C^{T \Delta g}(P', P_i))^t C^{-1} C(P_i, P')^{T \Delta g}. \quad (5.22)$$

In einem Kollokationsansatz ist es auch möglich, mehr als eine Beobachtungsgröße zu verarbeiten. Dies zeigt folgendes kleines Beispiel:

Gegeben seien eine Schwereanomalie Δg am Punkt P_1 , eine Schwerestörung δg am Punkt P_2 und der Schweregradient T_{zz} am Punkt P_3 . Das Störpotential im Punkt P' ist dann

$$T(P') = \begin{bmatrix} C_{P'P_1}^{T \Delta g} \\ C_{P'P_2}^{T \delta g} \\ C_{P'P_3}^{T T_{zz}} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} C_{P_1P_1}^{\Delta g \Delta g} & C_{P_1P_2}^{\Delta g \delta g} & C_{P_1P_3}^{\Delta g T_{zz}} \\ C_{P_2P_1}^{\delta g \Delta g} & C_{P_2P_2}^{\delta g \delta g} & C_{P_2P_3}^{\delta g T_{zz}} \\ C_{P_3P_1}^{T_{zz} \Delta g} & C_{P_3P_2}^{T_{zz} \delta g} & C_{P_3P_3}^{T_{zz} T_{zz}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta g(P_1) \\ \delta g(P_2) \\ T_{zz}(P_3) \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

Hierbei ist $C(P', P_i)$ jetzt ein Vektor, der die Kreuzkovarianzen zwischen den unterschiedlichen Funktionalen an den Beobachtungspunkten P_i und dem Störpotential am Berechnungspunkt P' enthält, und C eine Matrix mit den Kreuzkovarianzen zwischen den Beobachtungspunkten.

Analog zu (5.19) lauten beispielsweise die Kreuzkovarianzfunktionen zwischen Schwerestörung und Schwereanomalie

$$C^{\delta g \Delta g}(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2(\delta g, \Delta g) P_n(\cos \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n-1} c_n^2(\Delta g) P_n(\cos \psi) \quad (5.24)$$

bzw. zwischen Schweregradient T_{zz} und Schwerestörung

$$C^{T_{zz}\delta g}(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2(T_{zz}, \delta g) P_n(\cos \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n+1} c_n^2(\delta g) P_n(\cos \psi). \quad (5.25)$$

Es sei nochmals erwähnt, dass der Übersicht und Einfachheit wegen die Dimensionen der Größen, also ihre Einheiten, vernachlässigt wurden.

Es wurde gezeigt, wie einfach Kreuzkovarianzfunktionen im spektralen Bereich gebildet werden können, wodurch die Kollokationsaufgabe enorm erleichtert wird.

Kreuzkovarianzfunktion bei nicht - isotropen Operatoren

Da eine Vielzahl von Schwerefeldbeobachtungen, wie etwa Lotabweichungen oder die meisten Komponenten des Schweregradiententensors, nicht mit dem Störpotential über einen isotropen Operator verbunden sind, kann für sie die Kreuzkovarianzfunktion nicht einfach über den spektralen Weg gebildet werden, sondern es müssen aufwändige Differentiationsoperationen durchgeführt werden.

Wir folgen der Erläuterung aus MORITZ (1980):

Gegeben seien Messungen eines Funktionales l_i des Störpotentials, die mit dem Störpotential in den Punkten P_i über die linearen Funktionale L_i verbunden sind

$$l_i = L_i T(P_i). \quad (5.26)$$

Die Kovarianzen des Störpotentials zwischen dem Punkt P' und den Punkten P_i werden als Mutterkovarianzen $K(P', P_i)$ bezeichnet und aus ihnen ergeben sich die Kreuzkovarianzen $C^{T l_i}(P', P_i)$ zwischen dem Störpotential und dem gemessenen Funktional bei Anwendung des Operators L_i auf $K(P', P_i)$ mit

$$C^{T l_i}(P', P_i) = L_i K(P', P_i) \quad (5.27)$$

und die Kovarianzfunktion $C^{l_i l_j}$ zwischen den Messungen mit

$$C^{l_i l_j} = L_i L_j K(P', P_i). \quad (5.28)$$

Alle für Kollokationsaufgaben notwendigen Kovarianzfunktionen können also alternativ zum spektralen Weg auch nach (5.27) bzw. (5.28) berechnet werden, indem der gleiche Operator, der die gemessene Funktion mit dem Störpotential verbindet, auch auf die Mutterkovarianzfunktion angewendet wird. Dies bezeichnet man als Kovarianzfortpflanzung. Beispiele für Kreuzkovarianzfunktionen $C^{T l_i}(P', P_i)$ und $C^{l_i l_j}$, die nicht über den spektralen Weg berechnet werden können, sind bis zu den ersten Ableitungen des Störpotentials in MORITZ (1980) oder TSCHERNING & RAPP (1974) zu finden. Wir wollen zusätzlich noch einige Kreuzkovarianzfunktionen bis zu den zweiten Ableitungen des Störpotentials herleiten:

$$C^{T l_{\theta'}} = -\frac{1}{r'^2 \sin \theta'} \frac{\partial^2 K}{\partial \theta' \partial \lambda'} + \frac{\cos \theta'}{r'^2 \sin^2 \theta'} \frac{\partial K}{\partial \lambda'}$$

$$C^{T l_{r'}} = \frac{1}{r'^2} \frac{\partial K}{\partial \theta'} - \frac{1}{r'} \frac{\partial^2 K}{\partial \theta' \partial r'}$$

$$\begin{aligned}
 C^{T\gamma_z} &= -\frac{1}{r' \sin \theta'} \frac{\partial^2 K}{\partial \lambda' \partial r'} - \frac{1}{r'^2 \sin \theta'} \frac{\partial K}{\partial \lambda'} \\
 C^{T\xi} &= \frac{1}{\gamma} \frac{1}{r'} \frac{\partial K}{\partial \theta'} \\
 C^{T\eta} &= -\frac{1}{\gamma} \frac{1}{r' \sin \theta'} \frac{\partial K}{\partial \lambda'}
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

$$\begin{aligned}
 C^{T\alpha_{xx}} &= \frac{1}{r'} \frac{\partial K}{\partial r'} + \frac{1}{r'^2} \frac{\partial^2 K}{\partial \theta'^2} \\
 C^{T\alpha_{yy}} &= \frac{1}{r'} \frac{\partial K}{\partial r'} + \frac{1}{r'^2 \tan \theta'} \frac{\partial K}{\partial \theta'} + \frac{1}{r'^2 \sin^2 \theta'} \frac{\partial^2 K}{\partial \lambda'^2}
 \end{aligned}$$

$$C^{\xi\xi} = \frac{1}{rr'} \frac{\partial^2 K}{\partial \theta \partial \theta'} \frac{1}{\gamma^2}$$

$$C^{\eta\eta} = \frac{1}{rr' \sin \theta \sin \theta'} \frac{\partial^2 K}{\partial \lambda \partial \lambda'} \frac{1}{\gamma^2}$$

$$C^{\xi\eta} = -\frac{1}{rr' \sin \theta'} \frac{\partial^2 K}{\partial \theta \partial \lambda'} \frac{1}{\gamma^2}$$

$$C^{T_{xx}\xi} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \frac{1}{r'} \frac{\partial K}{\partial \theta'} \frac{1}{\gamma} = \left(\frac{1}{rr'} \frac{\partial^2 K}{\partial r \partial \theta'} + \frac{1}{r^2 r'} \frac{\partial^3 K}{\partial \theta^2 \partial \theta'} \right) \frac{1}{\gamma}$$

$$\begin{aligned}
 C^{T_{xy}\eta} &= -\left(-\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \lambda} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \frac{1}{r' \sin \theta'} \frac{\partial K}{\partial \lambda'} \frac{1}{\gamma} \\
 &= \left(\frac{1}{r^2 r' \sin \theta \sin \theta'} \frac{\partial^3 K}{\partial \theta \partial \lambda \partial \lambda'} - \frac{\cos \theta}{r^2 r' \sin^2 \theta \sin \theta'} \frac{\partial^2 K}{\partial \lambda \partial \lambda'} \right) \frac{1}{\gamma}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C^{T_{xx}T_{xx}} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{1}{r'} \frac{\partial K}{\partial r'} + \frac{1}{r'^2} \frac{\partial^2 K}{\partial \theta'^2} \right) \\
 &= \frac{1}{rr'} \frac{\partial^2 K}{\partial r \partial r'} + \frac{1}{rr'^2} \frac{\partial^3 K}{\partial r \partial \theta'^2} + \frac{1}{r'r^2} \frac{\partial^3 K}{\partial r' \partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 r'^2} \frac{\partial^4 K}{\partial \theta^2 \partial \theta'^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C^{T_{yy}T_{yy}} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right) \left(\frac{1}{r'} \frac{\partial K}{\partial r'} + \frac{1}{r'^2 \tan \theta'} \frac{\partial K}{\partial \theta'} + \frac{1}{r'^2 \sin^2 \theta'} \frac{\partial^2 K}{\partial \lambda'^2} \right) \\
 &= \frac{1}{rr'} \frac{\partial^2 K}{\partial r \partial r'} + \frac{1}{rr'^2 \tan \theta'} \frac{\partial^2 K}{\partial r \partial \theta'} + \frac{1}{r^2 r' \tan \theta} \frac{\partial^2 K}{\partial \theta \partial r'} + \frac{1}{r^2 r'^2 \tan \theta \tan \theta'} \frac{\partial^2 K}{\partial \theta \partial \theta'} + \\
 &\quad + \frac{1}{rr'^2 \sin^2 \theta'} \frac{\partial^3 K}{\partial r \partial \lambda'^2} + \frac{1}{r'r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^3 K}{\partial r' \partial \lambda^2} + \frac{1}{r^2 r'^2 \tan \theta \sin^2 \theta'} \frac{\partial^3 K}{\partial \theta \partial \lambda'^2} + \\
 &\quad + \frac{1}{r^2 r'^2 \sin^2 \theta \tan \theta'} \frac{\partial^3 K}{\partial \lambda^2 \partial \theta'} + \frac{1}{r^2 r'^2 \sin^2 \theta \sin^2 \theta'} \frac{\partial^4 K}{\partial \lambda^2 \partial \lambda'^2}
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

$$\begin{aligned}
 C^{T_{xz}T_{yz}} &= \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} \right) \left(\frac{1}{r' \sin \theta'} \frac{\partial^2 K}{\partial \lambda' \partial r'} - \frac{1}{r'^2 \sin \theta'} \frac{\partial K}{\partial \lambda'} \right) \\
 &= -\frac{1}{r^2 r'^2 \sin \theta'} \frac{\partial^2 K}{\partial \theta \partial \lambda'} + \frac{1}{r^2 r' \sin \theta'} \frac{\partial^3 K}{\partial \theta \partial \lambda' \partial r'} + \frac{1}{rr'^2 \sin \theta'} \frac{\partial^3 K}{\partial \theta \partial r \partial \lambda'} - \frac{1}{rr' \sin \theta'} \frac{\partial^4 K}{\partial \theta \partial r \partial \lambda' \partial r'}
 \end{aligned}$$

Aus Gründen des Umfangs wurden hier nicht alle möglichen Kombinationen hergeleitet, sondern nur eine kleine Auswahl. Die Berechnung der Kollokation kann mit Hilfe der Kovarianzen analog zu Gleichung (5.23) erfolgen.

Einschränkungen der Kollokation

Ein Problem, das bei der Kollokation auftritt, ist, dass die Matrix, die die Kovarianzen zwischen den Beobachtungen enthält, je nach Anzahl der Beobachtungen sehr groß werden kann. Die notwendige Inversion dieser Matrix gestaltet sich dann auf Grund des großen Rechen- und Speicherplatzbedarfs äußerst schwierig. MORITZ (1980) liefert Ansätze, wie sich dieses Problem umgehen lässt.

5.4 Ausgleichung

Einen weiteren Modellierungsansatz für die Schwerefeldberechnung stellt die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate dar. Diese erlaubt, wie die Kollokation, die gemeinsame Bearbeitung verschiedener Schwerefeldbeobachtungen unabhängig von ihrer Lage im Raum in einem Ansatz. Als Ergebnis der Ausgleichung resultieren Potentialkoeffizienten $\Delta\bar{C}_{nm}$ und $\Delta\bar{S}_{nm}$, die, wie in Kapitel 2 erläutert, das Signal des Schwerefeldes beschreiben. Voraussetzung zur Anwendung dieses Verfahrens ist, dass die Schwerefeldbeobachtungen global vorliegen, also die komplette Erde überdecken.

Allgemeiner Modellansatz

Der allgemeine Ansatz der kleinsten Quadrate Ausgleichung lautet

$$Ax = l + v. \quad (5.31)$$

Hierbei steht l für den Vektor der Beobachtungen, v für den zugehörigen Vektor der Beobachtungsfehler bzw. Verbesserungen, x für den Vektor der Unbekannten und A für die Koeffizientenmatrix, die die Ableitungen der Beobachtungen nach den Unbekannten enthält, welche somit die Beobachtungen mit den Unbekannten linear verknüpfen. Es gilt für den Erwartungswert E der Beobachtungsfehler

$$E(v) = 0. \quad (5.32)$$

Die Fehler-Varianz-Kovarianzmatrix der Beobachtungen Q_{ll} lautet in Abhängigkeit der Gewichtsmatrix der Beobachtungen P und der Varianz der Gewichtseinheit σ^2

$$Q_{ll} = \sigma^2 P^{-1}. \quad (5.33)$$

Da Gleichung (5.31) neben den Beobachtungen und der aus den Beobachtungen berechenbaren Koeffizientenmatrix die beiden unbekannt Vektoren x und v enthält, kann sie nicht einfach gelöst werden. Allerdings gilt bei der kleinsten Quadrate Ausgleichung die Bedingung

$$v^T P v = \min., \quad (5.34)$$

die aussagt, dass die Schätzung der Unbekannten so erfolgen soll, dass die Summe der Verbesserungsquadrate minimal wird.

Aus (5.31) und (5.34) kann mit Hilfe der *Lagrange*'schen Funktion die Bestimmungsgleichung für die Unbekannten gebildet werden (siehe hierzu GRUBER (2000), S.63)

$$\hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P l = N^{-1} A^T P l, \quad (5.35)$$

die direkt die Unbekannten liefert und aus der man durch Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes die Varianz-Kovarianzmatrix der Unbekannten

$$Q_{xx} = \sigma^2 (A^T P A)^{-1} = \sigma^2 N^{-1} \quad (5.36)$$

erhält. N ist hierbei die Matrix der Normalgleichungen.

Reihendarstellung der Schwerefeldbeobachtungen

Bei der Schwerefeldberechnung entsprechen die Potentialkoeffizienten den Unbekannten x und die Stör- und Anomaliengrößen stellen den Beobachtungsvektor l dar. Da für die Koeffizientenmatrix die Ableitung der Beobachtungen nach den Potentialkoeffizienten erforderlich ist, muss für jede Beobachtung eine Beobachtungsgleichung in Reihendarstellung formuliert werden. Diese lautet allgemein

$$l + v = f_d \sum_n f_u \sum_m f_l \left[\Delta \bar{C}_{nm} f_c + \Delta \bar{S}_{nm} f_s \right]. \quad (5.37)$$

Hierbei steht der Parameter f_d für die Dimension der Beobachtung, f_u enthält den spektralen Eigenwert der Funktionale inklusive Fortsetzung des Funktionales auf die Höhe des Messortes, f_l steht für die Legendre Polynome bzw. deren Ableitungen und f_c bzw. f_s für die Sinus- und Kosinusfunktionen bzw. deren Ableitungen. Die Parameter und Funktionen für die einzelnen Beobachtungstypen sind in Tabelle 5-2 dargestellt.

Beobachtung	f_d	f_u	f_l	f_c	f_s
T	$\frac{GM}{R}$	$\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}$	$\bar{P}_{nm}(\cos \theta)$	$\cos(m\lambda)$	$\sin(m\lambda)$
N	R	$\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}$	$\bar{P}_{nm}(\cos \theta)$	$\cos(m\lambda)$	$\sin(m\lambda)$
Δg	$\frac{GM}{R^2}$	$(n-1)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}$	$\bar{P}_{nm}(\cos \theta)$	$\cos(m\lambda)$	$\sin(m\lambda)$
δg	$\frac{GM}{R^2}$	$(n+1)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}$	$\bar{P}_{nm}(\cos \theta)$	$\cos(m\lambda)$	$\sin(m\lambda)$
ξ	$\frac{GM}{R^2\gamma}$	$\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}$	$\frac{\partial \bar{P}_{nm}(\cos \theta)}{\partial \theta}$	$\cos(m\lambda)$	$\sin(m\lambda)$
η	$\frac{-GM}{R^2\gamma \sin \theta}$	$\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}$	$\bar{P}_{nm}(\cos \theta)$	$-m \sin(m\lambda)$	$m \cos(m\lambda)$
$T_{\theta\theta}$	$\frac{GM}{R}$	$\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}$	$\frac{\partial^2 \bar{P}_{nm}(\cos \theta)}{\partial \theta^2}$	$\cos(m\lambda)$	$\sin(m\lambda)$
$T_{\lambda\lambda}$	$\frac{GM}{R}$	$\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}$	$\bar{P}_{nm}(\cos \theta)$	$-m^2 \cos(m\lambda)$	$-m^2 \sin(m\lambda)$
T_{rr}	$\frac{GM}{R^3}$	$(n+1)(n+2)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+3}$	$\bar{P}_{nm}(\cos \theta)$	$\cos(m\lambda)$	$\sin(m\lambda)$
$T_{\theta\lambda}$	$\frac{GM}{R}$	$\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}$	$\frac{\partial \bar{P}_{nm}(\cos \theta)}{\partial \theta}$	$-m \sin(m\lambda)$	$m \cos(m\lambda)$
$T_{\theta r}$	$\frac{-GM}{R^2}$	$(n+1)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}$	$\frac{\partial \bar{P}_{nm}(\cos \theta)}{\partial \theta}$	$\cos(m\lambda)$	$\sin(m\lambda)$
$T_{\lambda r}$	$\frac{-GM}{R^2}$	$(n+1)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}$	$\bar{P}_{nm}(\cos \theta)$	$-m \sin(m\lambda)$	$m \cos(m\lambda)$

Tabelle 5-2: Faktoren für die verschiedenen Beobachtungstypen

(Anmerkung: $T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}, T_{xy}, T_{xz}$ und T_{yz} erhält man durch Kombination der Größen in Tabelle 5-2 nach Gleichung (2.18) .)

Die partiellen Ableitungen der Beobachtungen nach den Unbekannten lassen sich aus (5.37) bilden mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \Delta C_{nm}} &= f_d f_u f_l f_c \\ \frac{\partial l}{\partial \Delta S_{nm}} &= f_d f_u f_l f_s \end{aligned} \quad (5.38)$$

Fehler-Varianz-Kovarianzmatrix der Beobachtungen

Die Fehler-Varianz-Kovarianzmatrix der Beobachtungen enthält die Korrelationen zwischen den verschiedenen Beobachtungen und deren Fehlervarianzen. Da eine vollbesetzte Matrix zu einem sehr hohen Rechen- und Speicherplatzbedarf führen würde, geht man der Einfachheit halber davon aus, dass die verschiedenen Beobachtungen unkorreliert sind. Das führt dazu, dass nur die Diagonale der Fehler-Varianz-Kovarianzmatrix, die die Varianzen der Beobachtungen enthält, besetzt ist.

Lösung der Bestimmungsgleichung

Die Bestimmungsgleichung der Unbekannten (5.35) kann, nachdem alle Elemente auf deren rechten Seite bekannt sind, gelöst werden. Es empfiehlt sich hierzu, die beiden Teile $A^t PA$ - diesen Teil bezeichnet man als Normalgleichungsmatrix N - und $A^t Pl$ gesondert zu betrachten. Nach GRUBER (2000) berechnet sich jedes Element der Normalgleichungsmatrix, welches einen Potentialkoeffizienten von Grad n und Ordnung m mit irgendeinem anderen Potentialkoeffizienten vom Grad k und Ordnung h verknüpft, ausgehend von (5.37) und (5.38) mit

$$\left. \begin{aligned} (A^t PA)_{n,m,k,h}^{C^a, C^b} \\ (A^t PA)_{n,m,k,h}^{S^a, S^b} \\ (A^t PA)_{n,m,k,h}^{C^a, S^b} \end{aligned} \right\} = f_d^a f_d^b f_u^a f_u^b \sum_{\theta_j=\theta_1}^{\theta_j} f_l^a(n, m, \theta_j) f_l^b(k, h, \theta_j) \sum_{\lambda_k=\lambda_1}^{\lambda_k} p_{jk} \begin{cases} f_c^a(m, \lambda_k) f_c^b(h, \lambda_k) \\ f_s^a(m, \lambda_k) f_s^b(h, \lambda_k) \\ f_c^a(m, \lambda_k) f_s^b(h, \lambda_k) \end{cases} \quad (5.39)$$

wobei a und b jeweils für einen Beobachtungstyp stehen. Analog dazu ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} (A^t Pl)_{n,m}^{C^a} \\ (A^t Pl)_{n,m}^{S^a} \end{aligned} \right\} = f_d^a f_u^a \sum_{\theta_j=\theta_1}^{\theta_j} f_l^a(n, m, \theta_j) \sum_{\lambda_k=\lambda_1}^{\lambda_k} p_{jk} l_{jk} \begin{cases} f_c^a(m, \lambda_k) \\ f_s^a(m, \lambda_k) \end{cases}, \quad (5.40)$$

was die Potentialkoeffizienten mit den Beobachtungen verknüpft. Mit (5.39) und (5.40) kann (5.35) jetzt berechnet werden. p_{jk} steht für die Gewichtungsfaktoren der Beobachtungen.

Einschränkungen der Ausgleichung und daraus folgende Vereinfachungen

Ein Nachteil, den das Verfahren der kleinsten Quadrate Ausgleichung mit sich bringt, ist, dass wie Gleichung (5.35) zeigt, die Normalgleichungsmatrix invertiert werden muss. Ist diese voll besetzt, so verlangt die Invertierung einen enormen Speicher- und Rechenplatzbedarf. Es ist darum nicht ohne Weiteres möglich, eine höchauflösende Schwerefeldlösung zu berechnen. Allerdings gibt es verschiedene Vereinfachungen, die zu einer günstigeren

Normalgleichungsmatrix führen und so eine Berechnung bis zu höheren Graden ermöglichen. Ohne diese Vereinfachungen ist derzeit nur eine Schwerefeldberechnung bis circa Grad 360 möglich. Sie sollen hier nur kurz genannt werden, für eine ausführliche Beschreibung und Erläuterung sei auf GRUBER (2000) Kapitel 4 verwiesen.

Im ersten Schritt lassen sich die Unbekannten so anordnen, dass sich eine Block-Diagonal-Struktur ergibt, die dazu führt, dass große Teile des Normalgleichungssystems mit Nullen besetzt sind (Anordnung siehe GRUBER (2000), S.68). Als weitere Bedingung führt man ein, dass die Beobachtungen in einem gleichmäßigen Gitter mit gleichen Längenintervallen und Äquatorsymmetrie vorliegen müssen und die Beobachtungen vollständig und gleichartig sind, sowie, dass die Gewichtung der Einzelbeobachtungen nicht längenabhängig sein darf. Dies führt dazu, dass Orthogonalitätsbeziehungen angewendet werden können, auf Grund derer alle Korrelationen zwischen \bar{C} und \bar{S} Koeffizienten Null werden. Mit der Bedingung der Gleichartigkeit der Daten geht allerdings ein wesentlicher Vorteil der Ausgleichungsmethode verloren, nämlich dass verschiedene Beobachtungstypen gemeinsam verarbeitet werden können.

Sind überdies die Einzelbeobachtungen äquatorsymmetrisch gewichtet, so entstehen in den Normalgleichungen auf Grund der Symmetrieeigenschaft der Legendre Polynome weitere Null-Terme für Koeffizienten gleicher Ordnung.

Um ein hochaufgelöstes Schwerefeldmodell zu berechnen, verknüpft man in der Realität die genaue Technik mit den eben beschriebenen Vereinfachungen, so dass zum Einen ein vollständiges Normalgleichungssystem beschrieben werden kann bis zu den niedrigen Graden, und zum Anderen, wenn die Rechenkapazitäten überschritten werden, die Vereinfachungen eingeführt werden, so dass für die restlichen Grade die Matrix in Block-Diagonal-Struktur aufgestellt wird.

5.5 Downward Continuation

Das Signal des Erdschwerefeldes wird mit zunehmendem Abstand von der Erde gedämpft, da die Gravitation proportional zum Quadrat des reziproken Abstands abnimmt. Die Dämpfung des Schwerefeldes ist bereits bei Messungen der Schwere in einem Flugzeug, aber vor allem bei Messungen der Schwere in Satellitenhöhe spürbar und wirkt sich vor allem auf den kurzwelligen Anteil des Schwerefeldes aus.

Für uns interessant ist hierbei die Frage, wie der Bezug zwischen Schwerefeldbeobachtungen in verschiedenen Höhen hergestellt werden kann, bzw. wie eine Beobachtung auf die Randfläche gebracht werden kann. Die Lösung hierfür wird durch die Downward Continuation beschrieben.

Bevor wir uns mit dieser befassen, soll zunächst die Upward Continuation, der Gegensatz der Downward Continuation betrachtet werden. Diese wurde historisch zuerst betrachtet und ihr Lösungsansatz kann zum Lösungsansatz der Downward Continuation umgeformt werden.

Upward Continuation

In Zeiten, weit bevor man das Schwerefeld im Raum messen konnte, wurde überlegt, wie ausgehend vom Potential auf der Randfläche das Potential im Außenraum berechnet werden kann. Die Lösung dieser mit „erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie“ oder *Dirichlet*-Problem bezeichneten Aufgabe findet sich bereits in Gleichung (2.13)

$$V(\theta, \lambda, r) = \frac{GM}{R} \sum_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} V_n(\theta, \lambda),$$

die aussagt, dass das Potential eines Punktes, der sich im Abstand r vom Massenzentrum der Erde im Außenraum befindet, mit Hilfe des Faktors $\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}$ aus dem Potential auf einer sphärischen Randfläche mit Radius R berechnet werden kann. Dieser Faktor enthält das Verhältnis des Erdradius zu r und stellt in Abhängigkeit des Entwicklungsgrades n ein Gewicht für die Potentialkoeffizienten dar. Wie man erkennen kann, wird diese Gewichtung umso kleiner, je höher der Entwicklungsgrad ist und umso größer r wird. Gleichung (2.13) setzt die Kenntnis der Potentialkoeffizienten voraus, die sich in einer sphärisch harmonischen Synthese des Gravitationspotentials auf der Erdkugel $V(\theta', \lambda', R)$ herleiten lassen. HEISKANEN & MORITZ (1967) setzen die Analyseformel direkt in (2.13) ein und liefern unter Berücksichtigung einiger weiterer Umformungen als direkte Lösung für das *Dirichlet*-Problem das so genannte *Poisson*-Integral

$$V(\theta, \lambda, r) = \frac{R^2 (r^2 - R^2)}{4\pi} \iint_{\lambda', \theta'} \frac{V(\theta', \lambda', R)}{l^3} \sin \theta' d\theta' d\lambda', \quad (5.41)$$

mit

$$l = \sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \cos(\psi)}. \quad (5.42)$$

Wie man in Gleichung (5.41) erkennen kann, wird für die Berechnung des Potentials im Außenraum vorausgesetzt, dass der Wert des Potentials auf der gesamten Erdkugel bekannt ist, was nicht verwundert, da diese Formel ja die Lösung der ersten Randwertaufgabe ist. Die allgemeine Darstellung von Gleichung (5.41) für alle Funktionale des Störpotentials lautet

$$F(T(r)) = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{r^2 - R^2}{l^3} F(T(R)) d\sigma \quad (5.43)$$

oder auch

$$F(T(r)) = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \sum_n (2n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \psi) F(T(R)) d\sigma, \quad (5.44)$$

mit

$$\frac{R(r^2 - R^2)}{l^3} = \sum_n (2n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \psi). \quad (5.45)$$

Downward Continuation allgemein

Nachdem wir gesehen haben, wie das Schwerfeld im Außenraum berechnet werden kann, soll nun gezeigt werden, wie ausgehend vom Schwerfeld im Raum das Schwerfeld auf der Randfläche berechnet werden kann.

Aus Gleichung (2.13) lässt sich entnehmen

$$V_n(r) = \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} V_n(R), \quad (5.46)$$

was sich umkehren lässt zu

$$V_n(R) = \left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} V_n(r). \quad (5.47)$$

Dies stellt die Grundlage für die Downward Continuation dar, die mit (5.47) im Signalraum berechnet werden kann. Problematisch hierbei ist, dass Gleichung (5.47) für $n \rightarrow \infty$ singulär wird. Auch kann im Ortsraum keine entsprechende Formel zu (5.43) gefunden werden. Eine weitere Schwierigkeit ist, dass die Downward Continuation nicht nur auf das Signal, sondern auch auf den Fehler einer Messung wie ein Verstärker wirkt. Die eben genannten Punkte begründen, dass die Downward Continuation eine große Herausforderung der physikalischen Geodäsie darstellt.

Downward Continuation in den Modellierungsansätzen

Bei der Kollokation müssen die Messgrößen nicht auf die Randfläche gebracht werden, sondern die Messgröße kann direkt in den Rechenansatz einfließen. Dies geschieht, wie weiter oben bereits erläutert, mit Hilfe der Kreuzkovarianzfunktion, in der direkt die Beziehung zwischen der Messhöhe und der Randfläche hergestellt werden kann.

Auch in die Ausgleichung kann der Messwert am Messpunkt direkt in die Berechnung eingehen. Hier wird die Beziehung zwischen der Randfläche und dem Messpunkt über f_u hergestellt.

Ein Problem entsteht nur dann, wenn der Modellierungsansatz verlangt, dass die Beobachtungen alle auf der Randfläche vorliegen, sowie das bei der *Stokes-Integralformel* oder der *Neumann-Hotine* Gleichung der Fall ist.

Hier kann man entweder mit (5.47) arbeiten oder man versucht dieses Problem im Rahmen eines Ausgleichungsprozesses mit Gleichung (5.43) als Beobachtungsgleichung zu lösen.

Signalverlust in der Höhe

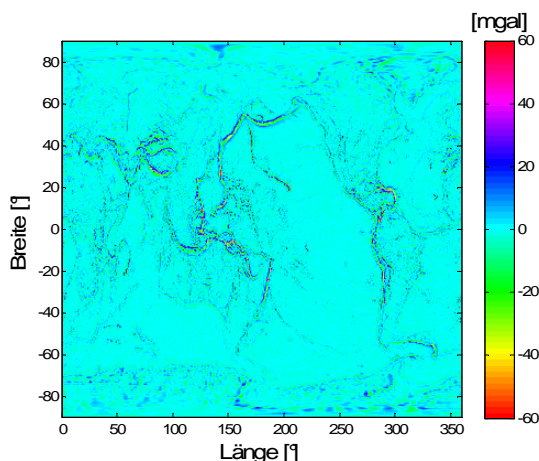


Abbildung 5.7: Differenz zwischen Schwerstörungen in 0 und 10 Kilometern Höhe

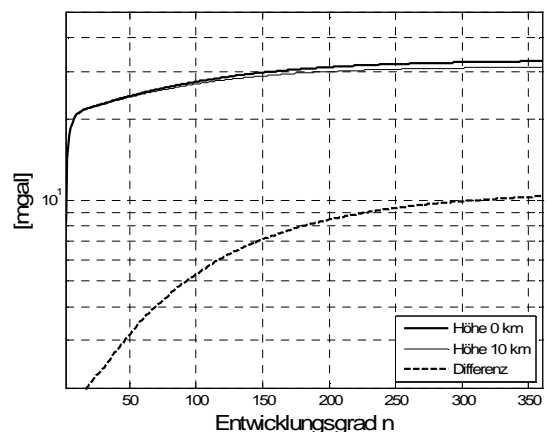


Abbildung 5.8: Signalgradstandardabweichung(kummulativ) der Schwerstörung in 0 und 10 Kilometern Höhe und deren Differenz

An dieser Stelle soll verdeutlicht werden, wie hoch der Signalverlust bei Schwerstörungen ist, wenn man diese in einer Höhe von zehn Kilometern und nicht auf der Erdoberfläche

misst. Hierzu wurde aus dem EGM96 Modell ein Gitter der Schwerestörung in zehn und null Kilometern Höhe berechnet und deren Differenz geplottet (Abbildung 5.7). Wie man sieht, kann ein Unterschied von mehr als 60 mgal in Gebieten mit extremer Topographie festgestellt werden. Der kurzwellige Signalanteil ist also bereits in dieser geringen Höhe spürbar gedämpft. Die kummulative Signalgradstandardabweichung (Abbildung 5.8) der Schwerestörung in einer Höhe von zehn Kilometern fällt in der Tat eher ab, als die der kumulativen Signalstandardabweichung in Höhe von Null Kilometern. Die Differenz beträgt bis zu Grad 360 ungefähr 10 mgal .

5.6 Übersicht

In obigem Kapitel wurden verschiedene Modellierungsansätze beschrieben, die zeigen, wie das Schwerefeld berechnet werden kann. Das Wichtigste soll an dieser Stelle nochmals kurz zusammengefasst werden. In erster Linie muss bei den Modellierungsansätzen unterschieden werden zwischen Verfahren, die nur einen oder mehrere verschiedene Beobachtungstypen auf einmal verarbeiten können. Abbildung 5.9 fasst dies in einer kurzen Übersicht zusammen. Integralkerne (z.B. *Stokes-Integralkern*) können immer nur eine einzelne Schwerefeldbeobachtung zur Schwerefeldberechnung verwenden, aber theoretisch kann so aus jedem Satz einer Beobachtung eine Schwerefeldlösung berechnet werden. Praktisch liegen allerdings für viele Beobachtungen nur Sätze in lokal begrenzten Gebieten vor, so dass mit den Integralkernen für die meisten Beobachtungstypen nur das lokale Schwerefeld berechnet werden kann. Die verschiedenen Schwerefeldlösungen, die über Integralkerne berechnet werden, können später theoretisch miteinander verknüpft werden.

Am sinnvollsten erscheint jedoch, von vorneherein alle Beobachtungen b in einem Ansatz zu verwenden und eine gemeinsame Schwerefeldlösung daraus zu berechnen. Dies ist möglich mit Kollokation oder mit der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Kollokation kann sowohl in räumlich begrenzten Gebieten, als auch zur globalen Schwerefeldberechnung verwendet werden. Die Ausgleichung liefert als Ergebnis Potentialkoeffizienten, wird also zur globalen Schwerefeldberechnung verwendet.

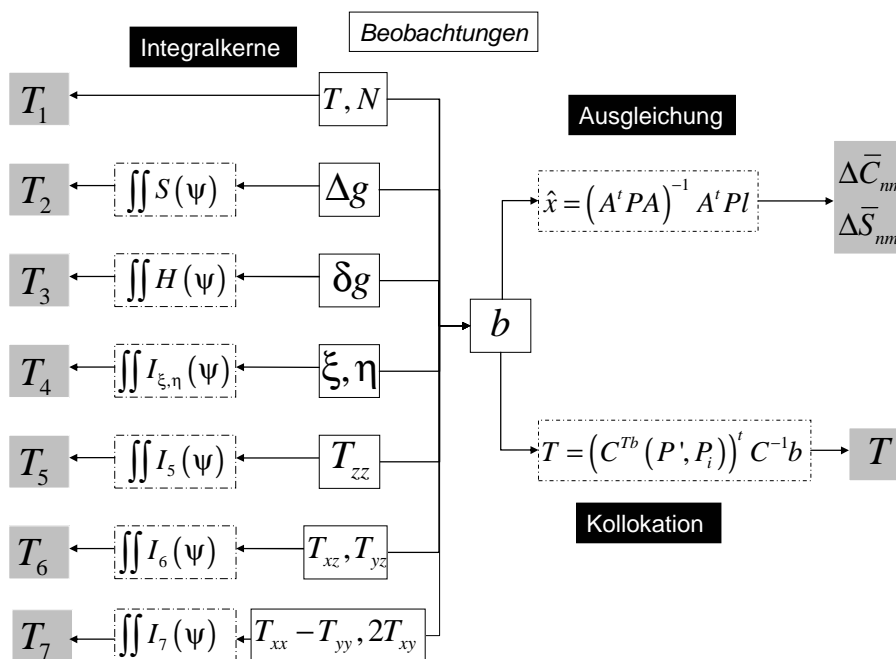


Abbildung 5.9: Übersicht Modellierungsansätze

Historisch gesehen spielt der Integralkern nach *Stokes* die größte Rolle in der Schwerefeldberechnung, was man auch am Aufbau vieler einschlägiger geodätischer Werke erkennen kann. In HEISKANAN & MORITZ (1967) beispielsweise ist das *Stokes*-Integral ein zentrales Element. Dies liegt daran, dass, wie bereits erläutert, in der Vergangenheit zumeist Schwereanomalien als Beobachtungen vorlagen. Auch heute noch besteht ein Großteil der Datenquellen zur Schwerefeldberechnung aus Schwereanomalien. Dies ist auch der Grund, warum die Schwereanomalie in dieser Arbeit oftmals ausführlicher betrachtet wird als andere Datenquellen. Heutzutage gewinnen die Verfahren, die mehrere Schwerefeldbeobachtungen verarbeiten können allerdings immer mehr an Bedeutung, da durch die verschiedenen Schwerefeldmessverfahren eine Vielzahl unterschiedlicher Beobachtungen geliefert werden, und das Hauptaugenmerk nicht mehr auf Schwereanomalien liegt.

Zur Erläuterung von Abbildung 5.9 muss abschließend darauf hingewiesen werden, dass nur Größen, die über einen isotropen Operator miteinander verknüpft sind, über einen Integralkern miteinander verbunden werden können. Lotabweichungen, sowie die tangentialen oder gemischttangentialen Elemente des Marussi-Tensors können nur in Kombination über einen Integralkern mit dem Schwerefeld verknüpft werden. Der Zusammenhang zwischen den entsprechenden Größen wird in RUMMEL (1997) erläutert.

6 Korrekturen / Reduktionen

Bislang wurde in dieser Arbeit dargelegt, welche Verfahren verwendet werden können, um das Schwerefeld der Erde zu beobachten. Es wurde gezeigt, dass die Beobachtungen in Stör- oder Anomaliengrößen verarbeitet werden müssen um für die Schwerefeldberechnung genutzt werden zu können und im vorigen Kapitel wurden Modellierungsansätze beschrieben, mit denen das Schwerefeld berechnet werden kann. Der Weg von der Beobachtung bis zum Schwerefeld wird dadurch klar. Allerdings sind in den letzten Kapiteln einige Probleme deutlich geworden. Diese Probleme hängen zumeist damit zusammen, dass Annahmen oder Bedingungen vorausgesetzt werden, die in der Realität nicht zutreffen, wie z.B. dass der Außenraum massenfrei sein muss. Dies ist er nämlich nie, unabhängig von der gewählten Randfläche, man bedenke die Atmosphärenmassen. Weitere Probleme entstehen, indem Vereinfachungen zur Realität eingeführt werden. Hierfür kann beispielsweise das *Stokes-Integral* genannt werden. Dieses löst schließlich nur die sphärische Näherung, und nicht die exakte Fundamentalgleichung der physikalischen Geodäsie.

Dieses Kapitel soll darum Korrekturen und Reduktionen behandeln, die nötig sind, um das Schwerefeld nach den oben beschriebenen Methoden möglichst genau zu berechnen. Werden diese Korrekturen und Reduktionen vernachlässigt, so werden Fehler in Kauf genommen.

Grundsätzlich muss zwischen den Begriffen Korrektur und Reduktion unterschieden werden.

Eine Korrektur dient dazu, eine fehlerbehaftete Größe zu berichtigen, eine Reduktion nutzt man, um eine reale Größe einem Modell anzupassen.

Im Sprachgebrauch allerdings werden beide Begriffe oftmals miteinander vermischt, so dass man manchmal, wenn man von einer Korrektur spricht von einer Reduktion sprechen müsste.

Kapitel 6 ist von der Struktur ähnlich aufgebaut wie Kapitel 3. Dies bedeutet, es werden erneut nacheinander die verschiedenen Messsysteme aufgelistet und die jeweiligen Korrekturen und Reduktionen, die mit der Messgröße verbunden sind, welches das System liefert, erläutert.

6.1 Terrestrische Gravimetrie

Zunächst sollen alle Korrekturen und Reduktionen betrachtet werden, die in Zusammenhang mit der terrestrischen Gravimetrie stehen. Diese Korrekturen oder Reduktionen werden an den aus der Messung abgeleiteten Schwerestörungs- oder Schwereanomalienwert angebracht.

Die Messgenauigkeit moderner Gravimeter beträgt wenige μgal .

Allgemein kann man sagen, dass zufällige Einflüsse auf eine Messung nur dann berücksichtigt werden müssen, falls sie im Bereich der Messgenauigkeit liegen oder größer als diese sind. Systematische Einflüsse dagegen müssen bis zu einer Größenordnung unter der Messgenauigkeit berücksichtigt werden, da durch sie ein größerer Fehler verursacht werden kann.

6.1.1 Quadratische Normalschwerekorrektur

Eine für die terrestrische Gravimetrie elementare Korrektur, die Freiluftkorrektur, mit der man Schwerewerte auf das Geoid reduzieren kann oder Normalschwerewerte auf das Telluroid

bzw. den Berechnungspunkt, wurde auf Grund ihrer Bedeutung für die Definition der Schwereanomalie und der Schwerestörung bereits in Kapitel 4 behandelt.

Dabei haben wir gesehen, dass sich die Schwere auf der Erdoberfläche mit Hilfe einer Taylorreihe in die Schwere auf dem Geoid entwickeln lässt und ebenso, dass sich die Normalschwere auf dem Ellipsoid ebenso mit einer Taylorreihe in die Normalschwere auf dem Telluroid (oder auch auf den Ort der Messung) entwickeln lässt. Dies zeigen die Gleichungen (4.12) und (4.20). In beiden Gleichungen wurde die Reihe nach dem linearen Term abgebrochen, so dass also nur der lineare Gradient für die Berechnung der Freiluftkorrektur verwendet wurde.

Durch den Abbruch nach dem linearen Grad wird ein Abbruchfehler in Kauf genommen, der verhindert, dass hohe Genauigkeitsansprüche in der Schwerfeldberechnung erfüllt werden können. Darum empfiehlt es sich, zusätzlich einen quadratischen Korrekturterm in die

Freiluftkorrektur einzuführen, einen der den quadratischen Gradienten $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial h^2} \right)$ bzw.

$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} \right)$ berücksichtigt.

Auf Grund des geringen Unterschieds zwischen Schwere und Normalschwerefeld können wir analog zu (4.16) annehmen

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial h^2} \right) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} \right). \quad (6.1)$$

Nach TORGE (2003) ist es zudem ausreichend, den quadratischen Normalschweregradienten in sphärischer Näherung zu berechnen. Die Normalschwere auf einer Kugel beträgt $\gamma = \frac{GM}{r^2}$ und folglich ergibt sich

$$\frac{\partial^2 g}{\partial h^2} \approx \frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} \approx \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r^2} = 6 \frac{GM}{r^4} = 6 \frac{\gamma}{r^2}. \quad (6.2)$$

Mit (6.2) lassen sich die Gleichungen für die Schwereanomalien (4.13) und (4.21) sowie für die Schwerestörung (4.22) erweitern um den quadratischen Anteil der Freiluftkorrektur zu

$$\begin{aligned} \Delta g(P_0) &= \left(g(P) - \frac{\partial g}{\partial h} \cdot H - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial h^2} \cdot H^2 \right) - \gamma(Q_0) \\ \Delta g(P) &= g(P) - \left(\gamma(Q_0) + \frac{\partial \gamma}{\partial h} \cdot H^N + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} \cdot H^{N^2} \right). \\ \delta g(P) &= g(P) - \left(\gamma(Q_0) + \frac{\partial \gamma}{\partial h} \cdot h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} \cdot h^2 \right) \end{aligned} \quad (6.3)$$

Mit (4.19) und (6.2) findet sich eine geschlossene Formel, mit der die Normalschwere an einem Punkt außerhalb des Ellipsoids berechnet werden kann unter Berücksichtigung des linearen und des quadratischen Gradienten

$$\gamma(h, \varphi) = \gamma(Q_0) \left(1 - \frac{2}{a} (1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi) h + \frac{3}{a^2} h^2 \right) \quad (6.4)$$

und es kann direkt berechnet werden mit $r = a$

$$\Delta g(P_0) = \frac{g(P)}{\left(1 - \frac{2}{a}(1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi)H + \frac{3}{a^2}H^2\right)} - \gamma(Q_0)$$

$$\Delta g(P) = g(P) - \gamma(Q_0) \left(1 - \frac{2}{a}(1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi)H + \frac{3}{a^2}H^2\right). \quad (6.5)$$

$$\delta g(P) = g(P) - \gamma(Q_0) \left(1 - \frac{2}{a}(1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi)h + \frac{3}{a^2}h^2\right)$$

In Abbildung 6.1 ist die quadratische Normalschwerekorrektur in Abhängigkeit von der Höhe dargestellt. Abbildung 6.2 zeigt die quadratische Normalschwerekorrektur für ein Gitter des Topographiemodell JPG95. Die Korrektur beträgt bis zu 2 mgal im Himalajagebirge, in den Anden deutlich über 1 mgal .

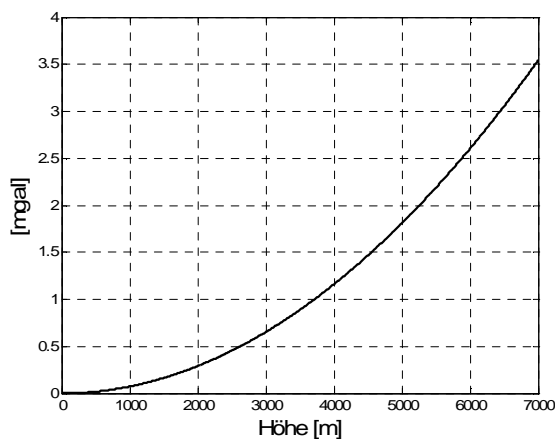


Abbildung 6.1: Quadratische Normalschwerekorrektur in Abhängigkeit von der Höhe

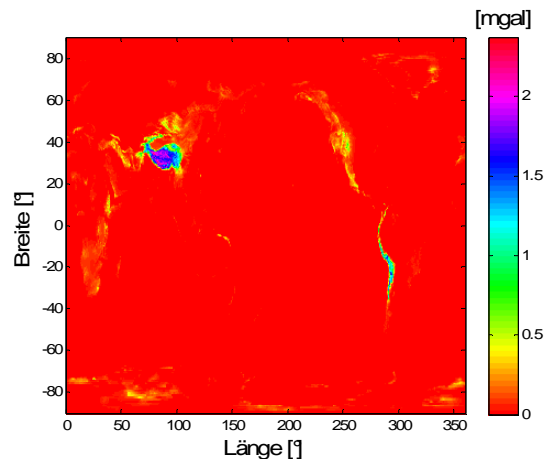


Abbildung 6.2: Quadratische Normalschwerekorrektur für das Topographiemodell JPG95

In einer sphärisch-harmonischen Analyse lassen sich die Potentialkoeffizienten der quadratischen Normalschwerekorrektur bestimmen und aus den Potentialkoeffizienten lässt sich der Einfluss der quadratischen Normalschwerekorrektur in Geoidhöhen berechnen. Dieser ist in Abbildung 6.3 abgebildet. Man sieht, dass dieser bis zu 1.8 m beträgt. Abbildung 6.4 zeigt die aufkummulierte Signalgradvarianzen der in Geoidhöhen ausgedrückten Normalschwerekorrektur. Die letzten Abbildungen verdeutlichen den enormen Einfluss der quadratischen Normalschwerekorrektur. Diese muss, außer vielleicht in Gebieten die sich nicht hoch über dem Meeresspiegel befinden, bei der Schwerefeldberechnung berücksichtigt werden um systematische Fehler zu vermeiden.

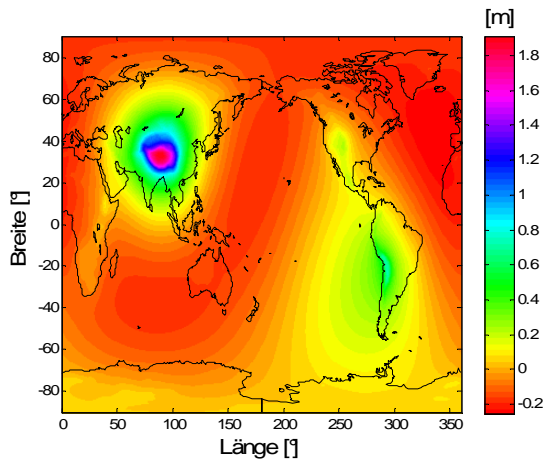


Abbildung 6.3: Quadratische Normalschwerekorrektur in Geoidhöhen

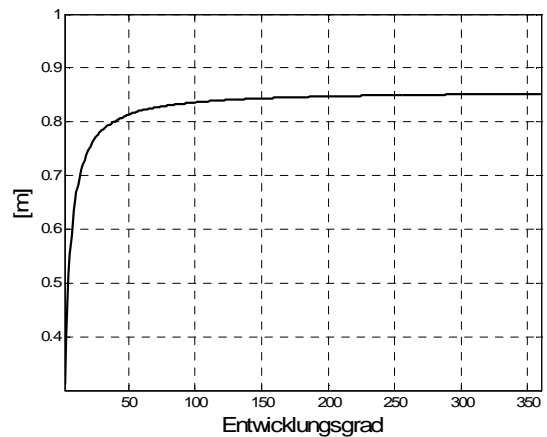


Abbildung 6.4: Aufkummulierte Signalstandardabweichung zu Abbildung 6.3

6.1.2 Atmosphärenkorrektur

Wie wir in Kapitel 4 erörtert haben, wird in der Schwerefeldberechnung die Gültigkeit der *Laplace*-Gleichung im Außenraum vorausgesetzt. Das System Erde erfüllt diese Bedingung allerdings nicht, da der Außenraum auf Grund der Atmosphäre nicht massenfrei ist.

Man versucht dieses Problem zu lösen, indem man das Schwerefeld der Erde unter Berücksichtigung des Atmosphäreneinflusses betrachtet. Die Berücksichtigung des Atmosphäreneinflusses wird deutlich im Term *Gravitationskonstante x Masse (GM)*. Dieser ist so definiert, dass die Masse M nicht nur für die Erdmasse an sich steht, sondern für eine totale Masse, die sich im Wesentlichen aus der Erdmasse (inklusive Eis- und Wassermassen) und der Atmosphärenmasse M_A zusammensetzt.

Das Normalschwerefeld enthält durch seine Definition über GM folglich die Atmosphärenmasse und man kann sich vorstellen, die Atmosphäre wäre in das Rotationsellipsoid hinein verschoben. Ein Punkt, der sich auf oder über dem Ellipsoid befindet, erfährt somit die Anziehung der Atmosphärenmassen aus derselben Richtung wie die eigentliche Anziehung des Ellipsoids. Modelliert man die Atmosphärenmasse einfachheitshalber als Punktmasse, beträgt die Anziehung der Atmosphäre auf den Punkt in Abhängigkeit von seinem Abstand zum Geozentrum r

$$F_{Ellips.} = G \frac{M_A}{r^2}. \quad (6.6)$$

Kugelförmiges Atmosphärenmodell

Um die Anziehung der Atmosphärenmassen im tatsächlichen Schwerefeld zu veranschaulichen, empfiehlt sich ein vereinfachtes Modell einzuführen, dass z.B. von MORITZ (1980) oder von PAVLIS (1988) verwendet wird. Hierfür geht man anstelle von einem Ellipsoid von einer kugelförmigen Erde aus, die umgeben ist von kugelförmigen Atmosphärenschichten, siehe Abbildung 6.5. Außerdem nimmt man der Einfachheit halber an, dass sich außerhalb der Erde keine Topographie, sondern nur Atmosphärenmassen befinden (diese müsste man sich in Abbildung 6.5 wegdenken).

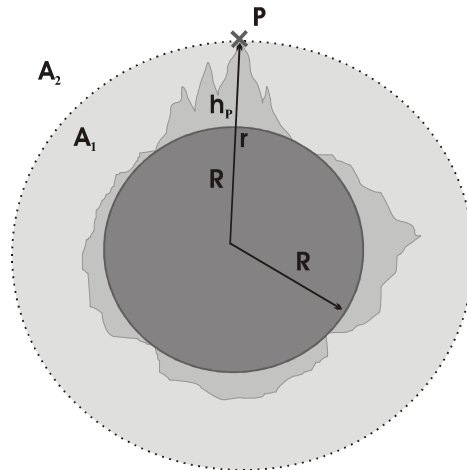


Abbildung 6.5: Kugelförmiges Atmosphärenmodell

Die Anziehung F auf einen Punkt P setzt sich dann zusammen aus der Anziehung F_1 der Schichten A_1 zwischen der Kugeloberfläche und der Kugel um das Geozentrum, auf der sich P selber befindet, und der Anziehung F_2 der Schichten A_2 außerhalb davon mit

$$F = F_1 + F_2. \quad (6.7)$$

Da, wie aus der Potentialtheorie bekannt ist, die Anziehung einer Kugelschale auf einen Punkt innerhalb der Kugelschale Null ist, folgt

$$F_2 = 0, \quad (6.8)$$

woraus sich schließen lässt, dass die Atmosphärenschichten über dem Beobachtungspunkt keine Anziehung auf diesen ausüben. Dies bedeutet außerdem, dass ein Punkt, der direkt auf der Erdoberfläche liegt, nicht von den Atmosphärenmassen angezogen wird. Für diesen Punkt ist also der Bezug zu dem in der Definition des Normalschwerefelds enthaltenen GM Wert zunächst falsch, da er nur von der eigentlichen Erdmasse Anziehung erfährt. Damit ergibt sich folgendes Problem:

Eine Schweremessung auf der Kugeloberfläche wird nur von den Massen der festen Erde beeinflusst, während ein zugehöriger Normalschwerewert per Definition auch von der Anziehung der Atmosphäre beeinflusst wird. Es könnten nur verfälschte Stör- und Anomaliengrößen berechnet werden, da die Messgrößen mit den Näherungsgrößen nicht wirklich vergleichbar wären. Mess- und Näherungsgrößen sind zunächst nur vergleichbar, wenn sich der Messpunkt - wie es z.B. bei Satellitenmessungen der Fall ist - über den Atmosphärenmassen befindet. Denn dann erfahren Mess- und Näherungspunkt die gleiche Anziehung der Atmosphärenmassen im Betrag und in der Richtung.

Atmosphärenkorrektur

Um dieses Problem zu umgehen, wird die Atmosphärenkorrektur dg_A eingeführt. Diese beschreibt den Teil der Anziehung der Atmosphäre, der von einer Schweremessung nicht wahrgenommen wird, repräsentiert also die Atmosphärenschichten, die über dem Messpunkt liegen. Addiert man diese Korrektur zu einer Schweremessung, so wird diese genau wie die zugehörige Normalschwere von der kompletten Atmosphäre beeinflusst. Die Atmosphärenkorrektur dient also eigentlich dazu, die Realität an ein Modell anzupassen, ist also streng genommen eher eine Reduktion als eine Korrektur.

Nun kann man Stör- oder Anomaliengrößen bilden, in denen durch die Differenzbildung der komplette Atmosphären Einfluss eliminiert wird, die Laplace-Bedingung wird also erfüllt. Wie berechnet sich aber die Korrektur?

Zunächst kann man sagen, dass sich die Anziehung F_1 , die mit der radialen Ableitung $\frac{\partial V_{F1}}{\partial r}$ des Atmosphärenpotentials identisch ist, berechnet mit

$$F_1 = \frac{Gm(r)}{r^2}, \quad (6.9)$$

was, wie MORITZ (1980) schreibt, sich wiederum in der Potentialtheorie begründet, da das äußere Schwerfeld eines sphärisch symmetrischen Körpers dem eines Punktes entspricht, der über die selbe Masse wie der Körper verfügt und in dessen Zentrum gelagert ist. Der Ausdruck $m(r)$ steht für die Atmosphärenmassen des Layers A_1 .

Die atmosphärische Schwerekorrektur erhält man folglich, indem man die in der Schweremessung gemessene Anziehung F_1 von der Anziehung der kompletten Atmosphärenmassen $\frac{GM_A}{r^2}$ abzieht

$$dg_A = \frac{GM_A}{r^2} - \frac{Gm(r)}{r^2} = \frac{GM(r)}{r^2}. \quad (6.10)$$

Die Atmosphärenmasse $M(r)$ des Layers A_2 lässt sich berechnen durch Integration der Atmosphärendichte ρ innerhalb des Layers mit

$$M(r) = 4\pi \int_r^\infty \rho(r') r'^2 dr'. \quad (6.11)$$

Betrachtet man Gleichung (6.10) so fällt auf, dass die Korrektur maximal wird für Punkte auf der Kugeloberfläche. Dies ist logisch, da, wie wir weiter oben beschrieben haben, Punkte auf der Kugeloberfläche von den darüber liegenden Atmosphärenmassen keine Anziehung erfahren und somit die komplette Atmosphärenanziehung als Korrektur angebracht werden muss. In Satellitenhöhe wird die Korrektur Null, da sich alle Atmosphärenmassen unterhalb des Satelliten befinden und, wie schon weiter oben beschrieben, die komplette Anziehung der Atmosphäre wahrgenommen wird.

Abbildung 6.6 stellt die Atmosphärenkorrektur dg_A , die radiale Ableitung des Atmosphärenpotentials $\frac{\partial V_A}{\partial r}$ und die Anziehung der kompletten Atmosphärenmassen in

Abhängigkeit von der Höhe gegenüber und zeigt schön, dass die beiden zuerst genannten Größen die Dritte ergeben. Es wird auch sehr schön die Abnahme der Atmosphärenkorrektur mit der Höhe deutlich. In Abbildung 6.7 ist die Atmosphärenkorrektur für ein globales Gitter dargestellt (Berechnung mit JPG95). Es wird bestätigt, dass die Korrektur in Gebieten auf Meereshöhe maximal wird. Stellt man die Korrektur wie in Kapitel 6.1.1 in Geoidhöhen dar, so sieht man, dass bei Vernachlässigung dieser Korrektur ein Geoidfehler von bis zu einem halben Meter auftritt. Die kummulative Signalstandardabweichung beträgt bei Grad 360 über 25 cm. Die Atmosphärenkorrektur ist somit zwar kleiner als die quadratische Normalschwerekorrektur, dafür allerdings großflächiger und muss somit auf alle Fälle berücksichtigt werden, um grobe Fehler zu vermeiden.

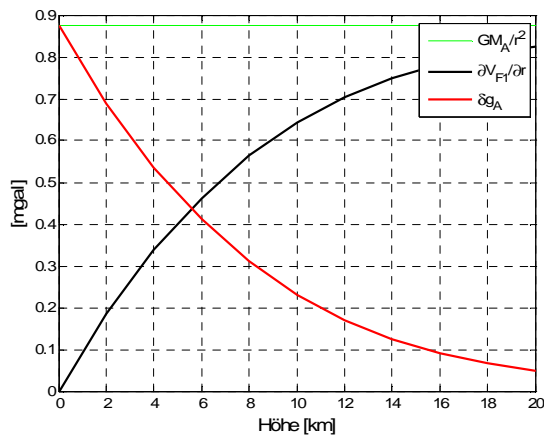


Abbildung 6.6: Atmosphärenkorrektur

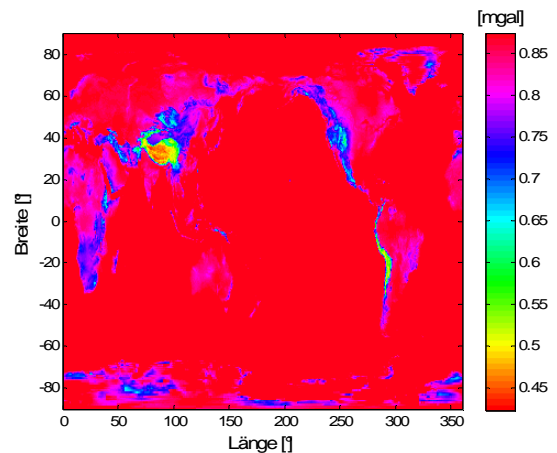


Abbildung 6.7: Atmosphärenkorrektur global

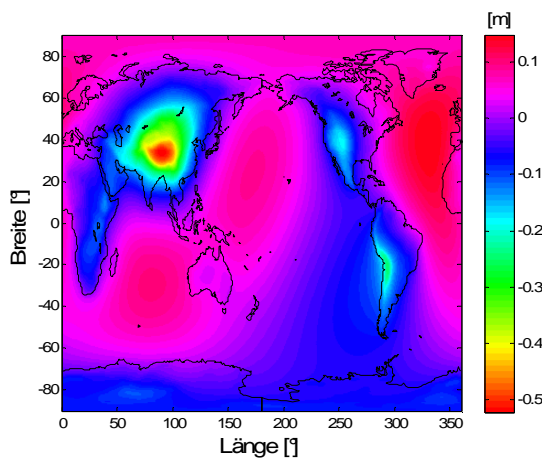


Abbildung 6.8: Atmosphärenkorrektur in Geoidhöhen

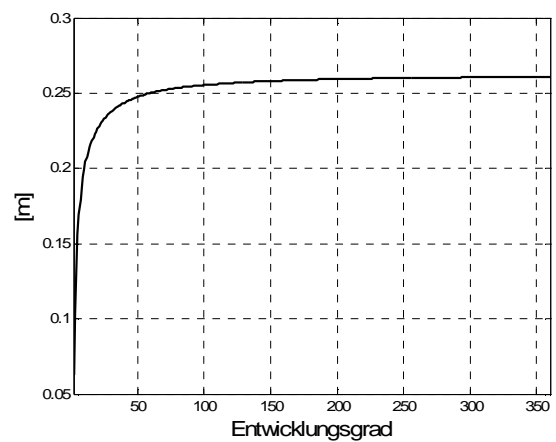


Abbildung 6.9: Kummulative Signalstandardabweichung zu Abbildung 6.8

Atmosphärenmasse

Für die Berechnung der Atmosphärenkorrektur müssen die Atmosphärenmasse und der Verlauf der Dichte entlang der Atmosphärenschichten bekannt sein. Für die Berechnung der obigen Plots wurden Werte aus einem Kombinationsmodell der **Cospar International Reference Atmosphere** von 1961 (CIR61) und der **US Standard Atmosphere** von 1965 (USSA65) verwendet. Die Atmosphärenmasse wird dort mit $M_A = 5.31694 \cdot 10^{18} \text{ kg}$ angenommen. Die Berechnung der Atmosphärenmasse und weiterer Werte dieses Modells sind in WENZEL (1985) ersichtlich. Für dieses Modell existiert auch eine Approximationsformel, mit der die Atmosphärenkorrektur direkt berechnet werden kann

$$\delta g_A [\text{mgal}] = 0.874 - 9.9 \cdot 10^{-5} \cdot H [\text{m}] + 3.5625 \cdot 10^{-9} \cdot H^2 [\text{m}]. \quad (6.12)$$

Für geodätische Zwecke wurden in der Vergangenheit zumeist ähnliche Atmosphärenmodelle verwendet.

Wie die neueren wissenschaftlichen Ergebnisse vermuten lassen, liegt die tatsächliche Masse der Atmosphäre allerdings deutlich unter der von in der Geodäsie verwendeten Modellen. Klimatologische Untersuchungen nach TRENBERTH & SMITH (2005) führen zu einer Atmosphärenmasse von $5.1480 \cdot 10^{18} \text{ kg}$. Ähnliche Ergebnisse liefern GRUBER et al. (2008), die die Atmosphärenmasse in einer Analyse des Grades Null des Atmosphärenpotentials schätzen, welches sich aus dem Luftdruck auf der Erdoberfläche berechnen lässt. In GRUBER et al. (2008) ist zudem eine schöne Übersicht zu finden, in der verschiedene Schätzungen der Atmosphärenmasse aus dem letzten Jahrhundert aufgelistet werden.

Zeitvariable Veränderung der Atmosphärenmassen

Neben der eigentlichen Atmosphärenkorrektur muss noch eine weitere, wesentlich kleinere, Korrektur an den Schwerewert angebracht werden, die durch die Atmosphäre verursacht wird. Diese ist darin begründet, dass sich die Atmosphäre in einer ständigen Fluktuation befindet. Die Änderung der Atmosphäre während einer Messkampagne wirkt sich nach TORGE (2003) durch einen direkten und einen indirekten Effekt auf die Schweremessungen aus. Der direkte Effekt beschreibt die Änderung der Schwere in Folge der veränderten Anziehung durch die Luftmassen und der indirekte Effekt die Änderung der Schwere in Folge der aus der Änderung des Luftdrucks resultierenden Deformation der Erde.

Beide Effekte kompensieren sich ein wenig gegenseitig. Dies liegt daran, dass mehr Atmosphärenmasse über der Station den Schwerewert direkt verringert, aber gleichzeitig wird die Schwere auch indirekt vergrößert, da durch die Atmosphärenmassen die Erdoberfläche nach unten gedrückt wird.

Um Schwerewerte vergleichbar zu machen, die unter verschiedenem atmosphärischem Einfluss gemessen wurden, wird eine Schwerekorrektur dg_p an den Schwerewert angebracht. Diese kann mit Hilfe des am Beobachtungspunkt gemessenen Luftdrucks p berechnet werden, da die Änderung der Atmosphäre über einem Punkt zu einer Änderung des Luftdrucks an diesem Punkt führt. Mit der Korrektur versucht man, den Schwerewert auf den Normaldruck p_n am Messpunkt zu beziehen, so dass für alle Schwerewerte gleiche atmosphärische Bedingungen simuliert werden. Aus der Differenz des gemessenen Luftdrucks p und des Normaldrucks p_n ergibt sich die Schwerekorrektur

$$dg_p = 3 \cdot 10^{-4} (p - p_n) \quad [\text{mgal}]. \quad (6.13)$$

Der Faktor $3 \cdot 10^{-4}$ steht für den Luftdruckschweregradienten, der eine Art Transferkoeffizient darstellt, der den direkten und indirekten Effekt berücksichtigt. Der Luftdruck muss in hPa in die Gleichung eingehen. Die Korrekturwerte liegen im Bereich von $4-5 \mu \text{ gal}$. Dies liegt in der Messgenauigkeit der Geräte und muss demnach berücksichtigt werden. In der Regel wird diese Korrektur direkt im Rahmen der Messung berücksichtigt und muss nicht nachträglich angebracht werden.

6.1.3 Ellipsoidische Korrektur

Eine weitere wichtige Korrektur für die Schwerefeldberechnung ist die ellipsoidische Korrektur. Viele Modellierungsansätze, die verschiedene Stör- und Anomaliengrößen miteinander verbinden, vernachlässigen die Abplattung der Erde und verlangen somit, dass in sphärische Richtungen abgeleitete Größen in den Formelapparat eingehen. Wenn aber in einem Modellierungsansatz die wirklichen Eingangsgrößen von den theoretisch geforderten abweichen, entstehen Fehler, die verhindern, dass hohe Genauigkeitsansprüche in der Schwerefeldberechnung erfüllt werden können. Dadurch wird die ellipsoidische Korrektur

notwendig, die diesen „Fehler“ ausgleicht. Da man mit der ellipsoidischen Korrektur eine Größe an ein Modell annähern möchte und nicht einen tatsächlichen Fehler korrigiert, müsste hier eigentlich von einer ellipsoidischen Reduktion gesprochen werden.

In dieser Arbeit wurden verschiedene Ansätze vorgestellt, die unter anderem die Schwereanomalie und die Schwerestörung mit dem Störpotential verbinden. Alle diese Ansätze verwenden sphärische Approximationen. So ist beispielsweise die Integralformel nach *Stokes* (Gleichung (5.2)), die die Schwereanomalie mit dem Störpotential verbindet, wie bereits weiter oben beschrieben, die Lösung der sphärischen Näherung der Fundamentalgleichung der physikalischen Geodäsie (Gleichung (4.11)) und nicht die Lösung der Fundamentalgleichung an sich. Demzufolge müsste die Schwereanomalie, die in die Integralformel eingeht, die Ableitung des Störpotentials in radialer Richtung beinhalten. In die tatsächlich beobachteten Schwereanomalie geht allerdings die Ableitung des Störpotentials in Richtung der Höhe h bzw. der Normalen n ein. Dieses Problem ergibt sich entsprechend für die *Neumann-Hotine*-Gleichung (5.3).

Auch im Ausgleichungsansatz nach Kapitel 5.4 ist eine sphärische Näherung in der Beobachtungsgleichung (5.37) enthalten, die die Schwereanomalie mit dem Störpotential verbindet, da auch die Reihentwicklung der Schwereanomalie nur die sphärische Näherung der Fundamentalgleichung wiedergibt, da nach r abgeleitet wird:

$$\begin{aligned} \Delta g &= \frac{GM}{R^2} \sum_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} (n+1) \sum_m \bar{P}_{nm}(\cos \theta) [\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda] \\ &\quad - \frac{GM}{R^2} \sum_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} 2 \sum_m \bar{P}_{nm}(\cos \theta) [\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda] \quad . \quad (6.14) \\ &= \frac{GM}{R^2} \sum_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} (n-1) \sum_m \bar{P}_{nm}(\cos \theta) [\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda] \end{aligned}$$

In Gleichung (6.14) entspricht der erste Term auf der rechten Seite der Ableitung des Störpotentials in radialer Richtung. (Zudem erkennt man schön, wie sich aus beiden Termen auf der rechten Seite der Term mit dem Eigenwert $(n-1)$ ergibt.)

Allgemeiner Ansatz

Einen einfachen Ansatz zur Berechnung der ellipsoidischen Korrektur liefert MORITZ (1980). Hierbei geht man davon aus, dass sich jede beliebige gemessene Stör- oder Anomaliengröße F in einer Potenzreihe nach einem Abplattungsparameter entwickeln lässt. Als Abplattungsparameter kann die Exzentrizität

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (6.15)$$

verwendet werden. Auf Grund des geringen Unterschieds zwischen den betrachteten Größen kann die Reihe ab dem quadratischen Term abgebrochen werden, so dass gilt

$$F = F^0 + e^2 F^1 . \quad (6.16)$$

Das Produkt $e^2 F^1(\theta, \lambda)$ bezeichnet man als ellipsoidische Korrektur.

Im Weiteren wird festgelegt, dass bei der ellipsoidischen Korrektur des Störpotentials gilt

$$T^1 = 0 \quad (6.17)$$

und folglich für das Störpotential

$$T = T^0. \quad (6.18)$$

Dies kann angenommen werden, da das Störpotential im Gegensatz zu den restlichen Stör- oder Anomaliengrößen unabhängig von einer Richtungsableitung ist. Über sphärische Beziehungen sind so Schwereanomalien Δg^0 und Schwerestörungen δg^0 mit T^0 verbunden und die wirklich gemessenen Schwereanomalien Δg und Schwerestörungen δg sind über ellipsoidische Beziehungen mit $T = T^0$ verbunden.

Streng genommen lauten demnach z.B. die Gleichungen (5.2), (5.3) und (6.14)

$$T = T^0 = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g^0 S(\psi) d\sigma, \quad (6.19)$$

$$T = T^0 = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \delta g^0 H(\psi) d\sigma \quad (6.20)$$

und

$$\Delta g^0 = \frac{GM}{R^2} \sum_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} (n-1) \sum_m \bar{P}_{nm}(\cos \theta) [\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda]. \quad (6.21)$$

Als Eingangsgrößen für die Schwerefeldberechnung liegen oft auf das Ellipsoid bezogene Stör- oder Anomaliengrößen F vor. Diese können theoretisch direkt in das Störpotential überführt werden. Allerdings ist der Formelapparat hierfür sehr kompliziert bzw. liegt für manche Schwerefeldgrößen nicht vor. Darum ist es einfacher, sphärische Näherungsformeln zu verwenden, die die Größen F^0 in das Störpotential überführen. Dies ist in Abbildung 6.10 dargestellt. Wie man sieht, muss hierfür zunächst F^1 berechnet werden, um F in F^0 überführen zu können.

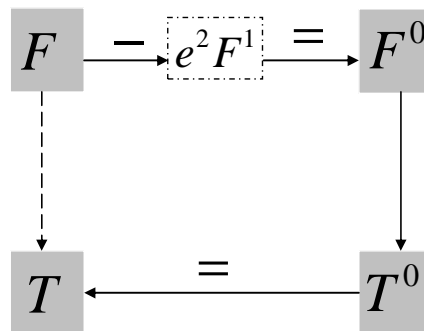


Abbildung 6.10: Rolle der ellipsoidischen Korrektur

Ellipsoidische Korrektur der Schwereanomalie und der Schwerestörung

Nach Gleichung (6.16) gilt für Schwereanomalien bzw. Schwerestörungen

$$\begin{aligned} \Delta g &= \Delta g^0 + e^2 \Delta g^1 \\ \delta g &= \delta g^0 + e^2 \delta g^1 \end{aligned} \quad (6.22)$$

Es müssen also Δg^1 bzw. δg^1 bekannt sein, um Δg^0 und δg^0 berechnen zu können.

Nach PAVLIS (1988) entspricht die ellipsoidische Korrektur für Schwereanomalien den drei Korrekturtermen e_h , e_p und e_γ

$$e^2 \Delta g^1 = e_h + e_p + e_\gamma. \quad (6.23)$$

Hierbei beschreibt

$$e_h = e^2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{\partial T}{r \partial \theta} \right) \quad (6.24)$$

den Unterschied der Normalenableitung $\frac{\partial}{\partial n}$ zur sphärischen Näherung $\frac{\partial}{\partial r}$ in der Randwertbedingung und

$$e_\gamma = \left[6J_2 \frac{a^2}{r^3} P_2(\cos \theta) - \frac{3\omega^2 r^2}{GM} \sin^2 \theta \right] T \quad (6.25)$$

mit $J_2 = c_{20}$ den Unterschied der Normalschwere γ und des zugehörigen Gradienten $\frac{\partial \gamma}{\partial h}$ von der sphärischen Näherung in der Randwertbedingung. e_p ist der Unterschied zwischen dem Betrag der Schwereanomalie unter Annahme von zusammenfallenden Lotrichtungen von Schwere- und Normalschwerevektor und der isozentralen Projektion und soll formell weiter unten erläutert werden. Wie man erkennt, setzen die Gleichungen (6.24) und (6.25) die Kenntnis des Störpotentials voraus. Da dieses allerdings eigentlich die Zielgröße der Schwerefeldberechnung darstellt, muss eine bekannte Schwerefeldlösung eingeführt werden, aus der die Korrektur dann berechnet werden kann. Die Gleichungen (6.24) und (6.25) können in Reihendarstellung gebracht werden und es können dann Potentialkoeffizienten eines bekannten Schwerefeldes eingeführt werden. Die Reihendarstellungen lauten

$$e_h = c_1 \left[\left(\sum_n \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_m D_{nm} a_{nm} v_{nm} P_{n+2,m} \right) + \left(\sum_n \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_m D_{nm} b_{nm} P_{n,m} \right) + \left(\sum_n \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_m D_{nm} c_{nm} u_{nm} P_{n-2,m} \right) \right] \quad (6.26)$$

$$e_\gamma = 3c_2 \left[\left(\sum_n \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_m D_{nm} \alpha_{nm} v_{nm} P_{n+2,m} \right) + \left(\sum_n \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_m D_{nm} \beta_{nm} P_{n,m} \right) + \left(\sum_n \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_m D_{nm} \gamma_{nm} u_{nm} P_{n-2,m} \right) \right] - 3c_3 \left[\sum_n \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_m D_{nm} P_{n,m} \right] \quad (6.27)$$

Aus e_h lässt sich e_p in Näherung berechnen mit

$$e_p = \frac{c_2}{c_1} e_h. \quad (6.28)$$

Alle Faktoren der Gleichungen (6.26), (6.27) und (6.28) zu erläutern würde an dieser Stelle zu weit führen, es sei auf PAVLIS (1988), S.32 oder GRUBER (2000), S.165 verwiesen. Dort ist zudem eine Herleitung der Reihendarstellungen zu finden.

Ausgehend vom EGM96 Modell (siehe LEMOINE et al., 1998) wurde in dieser Arbeit die ellipsoidische Korrektur bis Grad 360 berechnet um ihren Einfluss abschätzen zu können. Die Korrektur ist in den folgenden Plots (Abbildung 6.11 - Abbildung 6.14) dargestellt. Die Summe der Korrekturen kann, wie Abbildung 6.14 zeigt, bis zu 1.5mgal betragen. Zur besseren Veranschaulichung des Einflusses der ellipsoidischen Korrektur der Schwereanomalie wird diese dann in Geoidhöhen dargestellt (Abbildung 6.15 - Abbildung 6.18). Dies geschieht erneut, indem die Korrektur einer sphärisch harmonischen Analyse unterzogen wird und die daraus resultierenden Potentialkoeffizienten in Geoidhöhen entwickelt werden. Der Einfluss der ellipsoidischen Korrekturen e_h, e_p, e_γ beträgt in Geoidhöhen bis zu 0.9m . Die ellipsoidische Korrektur an Schwereanomalien kann folglich nicht vernachlässigt werden, da sonst ein großer systematischer Fehler in Kauf genommen werden würde.

Die ellipsoidische Korrektur für die Schwerestörung kann analog mit den Formeln (6.26) und (6.28) berechnet werden, da sie aus den Korrekturtermen e_h und e_p besteht. Da die Normalschwere und deren Gradient bei der Berechnung der Schwerestörung unerheblich sind, spielt e_γ bei der Korrektur der Schwerestörung keine Rolle. Es gilt also

$$e^2\delta g^1 = e_h + e_p. \quad (6.29)$$

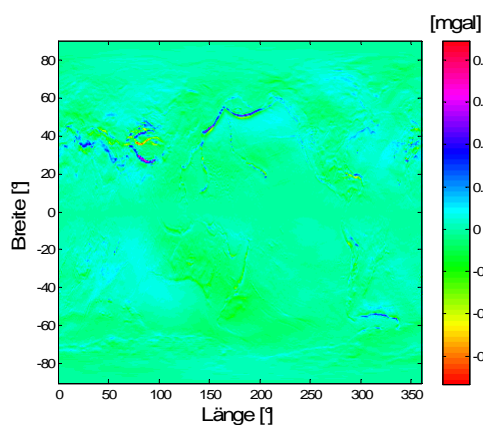


Abbildung 6.11: Ellipsoidische Korrektur an Schwereanomalien e_h

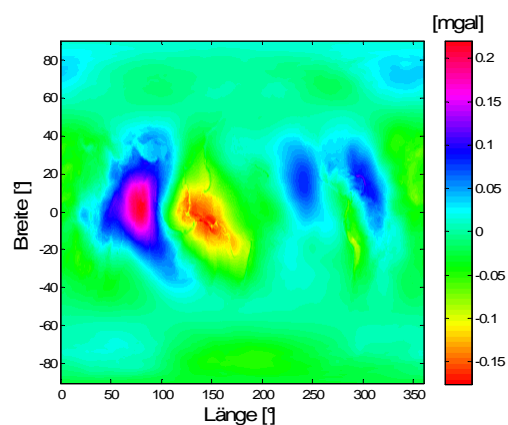


Abbildung 6.12: Ellipsoidische Korrektur an Schwereanomalien e_γ

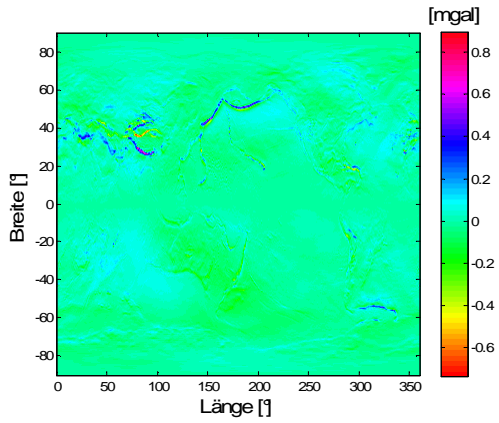


Abbildung 6.13: Ellipsoidische Korrektur der Schwereanomalien e_p

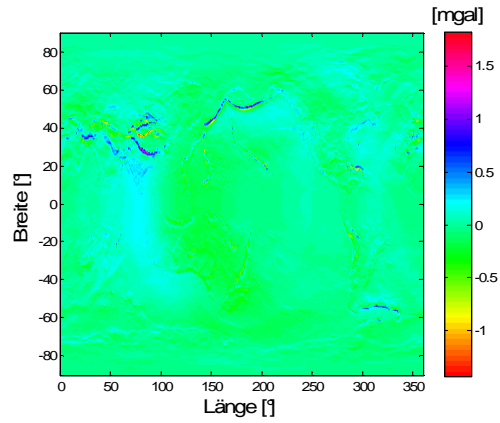


Abbildung 6.14: Ellipsoidische Korrektur der Schwereanomalien $e_h + e_\gamma + e_p$

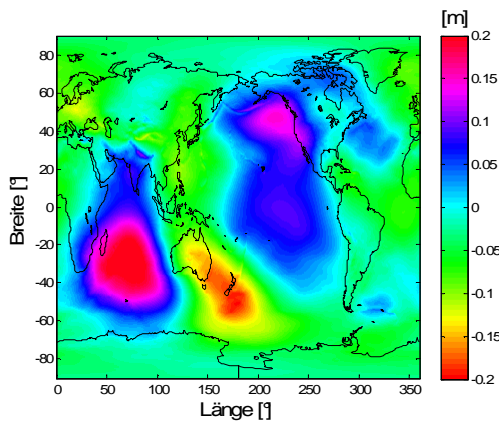


Abbildung 6.15: e_h in Geoidhöhen

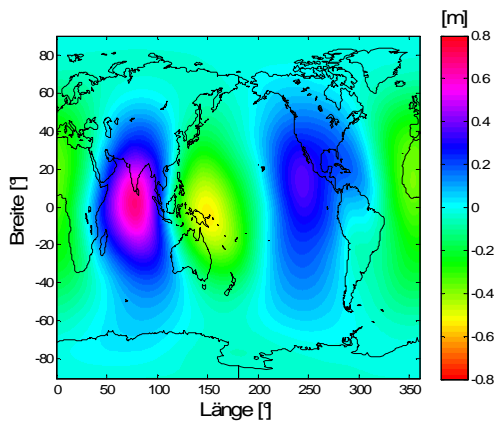


Abbildung 6.16: e_γ in Geoidhöhen

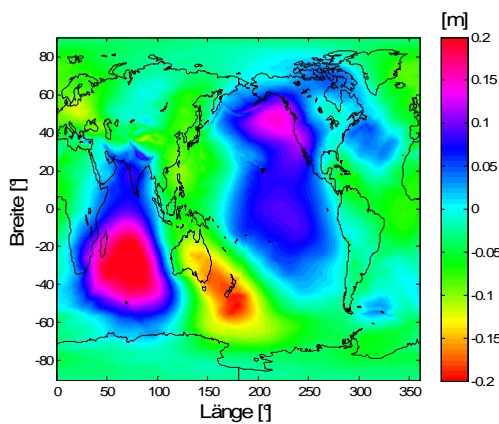


Abbildung 6.17: e_p in Geoidhöhen

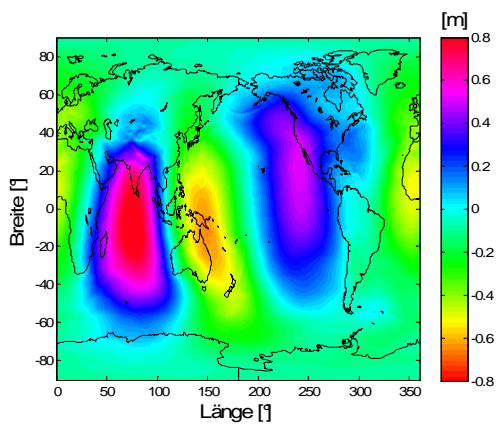


Abbildung 6.18: $e_h + e_p + e_\gamma$ in Geoidhöhen

Ellipsoidische Korrektur in den Modellierungsansätzen

Die in Kapitel 5 beschriebenen Modellierungsansätze lassen sich unter Berücksichtigung der ellipsoidischen Korrektur darstellen. So lautet die *Stokes-Integralformel* (5.2) jetzt

$$T = T^0 = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} (\Delta g - e^2 \Delta g^1) S(\psi) d\sigma. \quad (6.30)$$

Vom gemessenen Schwereanomalienmesswert Δg muss die ellipsoidische Korrektur $e^2 \Delta g^1 = e_h + e_\gamma + e_p$ abgezogen werden, weil der Ansatz die sphärische Näherung als Eingangsgröße verlangt. Gleichung (6.18) zeigt dann, dass das Ergebnis T^0 dem exakten Ergebnis entspricht. Analog ergibt sich für die Schwerestörung (5.3)

$$T = T^0 = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} (\delta g - e^2 \delta g^1) H(\psi) d\sigma. \quad (6.31)$$

Die ellipsoidische Korrektur kann auch in den Kollokationsansatz eingefügt werden, wie MORITZ (1980) zeigt. Es ergibt sich (5.21) jetzt mit

$$T(P') = T^0(P') = \left(C^{T\Delta g^0} \right)^t (P', P_i) C^{-1} (\Delta g(P_i) - e^2 \Delta g^1(P_i)). \quad (6.32)$$

Auch hier muss vom gemessenen Wert die Korrektur abgezogen werden. Der Vollständigkeit halber sei auch die Beobachtungsgleichung für den Ausgleichungsansatz, Gleichung (5.37), unter Berücksichtigung der ellipsoidischen Korrektur dargestellt:

$$l - e^2 l^1 + v = f_d \sum_n f_u \sum_m f_l \left[\Delta \bar{C}_{nm} f_c + \Delta \bar{S}_{nm} f_s \right]. \quad (6.33)$$

6.1.4 Gezeiten

Eine weitere Problematik in der Schwerefeldbestimmung ergibt sich durch den Einfluss der Gezeiten. Als diese werden von Sonne und Mond verursachte Anziehungskräfte auf einen Punkt - dies kann ein Punkt auf der Erdoberfläche oder im Raum sein - relativ zum Massenzentrum der Erde bezeichnet. Die vom Mond verursachten Gezeiten sind stärker als die der Sonne. Die Sonne hat zwar eine deutlich höhere Masse, ist aber im Gegensatz zum Mond sehr weit von der Erde entfernt. Da die Gezeiten immer wirken, wird der Gezeiteneinfluss bei jeder Schwerefeldmessung miterfasst. Das Problem hierbei ist, dass die Gezeiten nicht durch Massen innerhalb der Erdoberfläche, sondern durch Massen im Außenraum verursacht werden. Dies widerspricht wiederum der durch die *Laplace-Bedingung* geforderten Massenfreiheit im Außenraum, die bei der Schwerefeldberechnung vorausgesetzt wird. Folglich muss überlegt werden, wie mit dem Gezeiteneinfluss auf die Messungen zu verfahren ist.

Gezeitensysteme

Die Gezeitenwirkung wird im Schwerefeld sichtbar durch direkte und indirekte Effekte. Als direkte Effekte werden die konkret von Sonne und Mond verursachten Potentialänderungen bezeichnet, während die indirekten Einflüsse der Gezeiten auf das Schwerefeld eine Potentialänderung beschreiben, die aus einer Verformung des Erdkörpers infolge des Gezeiteneinflusses resultieren. Die indirekte Wirkung folgt also aus der Massenordnung des Erdkörpers selbst und steht somit der Erfüllung der *Laplace-Bedingung* nicht im Weg.

Desweiteren bestehen die Gezeiten aus einem zeitunabhängigen und einem zeitabhängigen Anteil. Der zeitabhängige Anteil der Gezeiten wird verursacht durch die Rotation der Erde (halbtägliche und tägliche Perioden) und die Bahnen von Mond und Sonne (14-tägige und halbjährliche Perioden). Die Perioden werden näher erläutert und veranschaulicht in RUMMEL (2005). Während sich dieser periodische Anteil über die Zeit herausmittelt, wirkt der zeitunabhängige Gezeiteneinfluss immerfort und wird deswegen als „permanente Gezeiten“ bezeichnet. Die permanenten Gezeiten entstehen in Abhängigkeit von der geographischen Breite des Beobachtungspunktes und müssen bei der Schwerefeldberechnung berücksichtigt werden, um Fehler zu vermeiden. Grundsätzlich existieren hierzu drei Systeme:

Das **Mean Tide (MT)** System gibt das Schwerefeld inklusive der permanenten (direkten und indirekten) Gezeiten wieder, also unter dem Einfluss von Sonne und Mond.

Das **Zero Tide (ZT)** System beschreibt ein Schwerefeld, das dem direkten Einfluss von Sonne und Mond nicht ausgesetzt ist, berücksichtigt aber die permanente Deformation des Erdkörpers durch die Gezeiten.

Im **Tide Free (TF)** System hingegen wird das Schwerefeld der Erde beschrieben, wie es existieren würde, wenn Sonne und Mond nicht existieren würden bzw., wenn diese unendlich weit entfernt wären, d.h., alle direkten und indirekten Gezeiteneffekte sind entfernt.

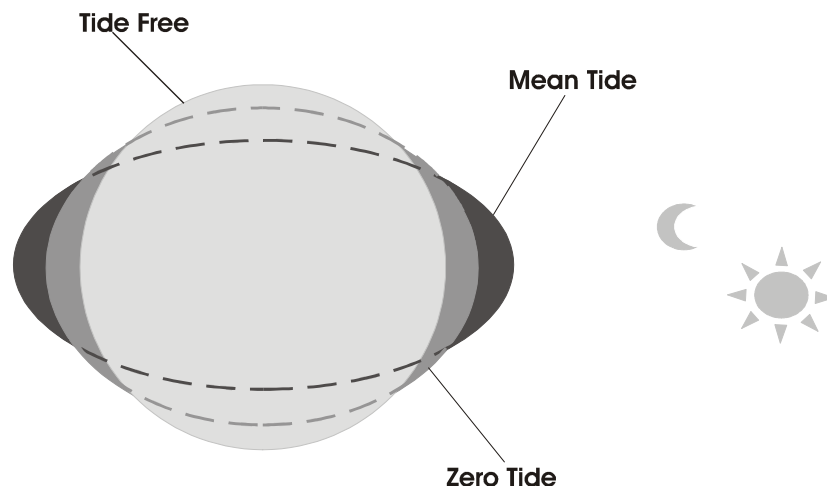


Abbildung 6.19: Grobform des Geoids im MT, ZT und TF System

Abbildung 6.19 gibt die grobe Form des Geoids im jeweiligen Gezeitensystem wieder.

Während im Mean Tide System das Geoid am meisten „abgeplattet“ ist, da in diesem System der meiste Gezeiteneinfluss enthalten ist, ist der Einfluss im Zero Tide System schon geringer und im Tide Free System gar nicht vorhanden.

Wie HUGHES & BINGHAM (2006) schreiben, entspricht das Geoid bei der Wahl des Mean Tide Systems einer realen Niveaufläche, nämlich dem Meeresspiegel, vorausgesetzt dieser wird nicht von Strömungen usw. beeinflusst. In diesem System ist das Geoid zum Einen am besten für ozeanographische Zwecke (z.B. Erstellung von Meerestopographiemodellen) nutzbar und zum Anderen mit Daten aus der Satellitenaltimetrie kombinierbar. Auch die überwiegende Anzahl der Höhensysteme bezieht sich auf das MT System und nur im MT System geben Potentialunterschiede den wahren Wasserfluss auf der Erde wieder.

Nachteil des Mean Tide Systems ist, dass Beobachtungen in diesem System nicht ohne Weiteres für die Schwerefeldberechnung verwendet werden können. Dies liegt daran, dass, wie weiter oben bereits erläutert, die Beobachtungen hier auf Grund des direkten Gezeiteneinflusses von Massen im Außenraum der Erde beeinflusst werden und folglich die Laplace-Bedingung nicht erfüllt ist. Liegen also Schwerefeldbeobachtungen in diesem

System vor, so können sie nicht ohne eine zusätzliche Korrektur, die den Kräften im Außenraum Rechnung trägt, angewandt werden, es sei denn, auch in der Definition des Ellipsoids sind die permanenten Gezeiten enthalten, da dann bei der Bildung einer Stör- oder Anomaliengröße Kräfte von außerhalb der Erdoberfläche eliminiert werden. Wie EKMAN (1989) zu entnehmen ist, würde ein Geoidfehler von 72 cm entstehen, wenn man das Geoid mit der Stokesformel (5.2) aus Mean Tide Schwerewerten berechnet.

Das Mean Tide System verfügt also zum Einen über den Vorteil, dass es die Realität beschreibt, aber zum Andren über den Nachteil, dass es grundsätzlich für die Schwerefeldberechnung ungünstig ist.

Die meisten Schwerefeldgrößen liegen gemäß der IAG Resolution von 1983 im Zero Tide System vor. Dies scheint zweckmäßig, um den Bedingungen der Schwerefeldberechnung gerecht zu werden. Allerdings werden gerade Schwerewerte und Höhen oft gemeinsam miteinander verwendet, woraus ersichtlich ist, dass Probleme entstehen, wenn beide Größen in unterschiedlichen Systemen vorliegen. Darum haben einige Länder (z.B. Schweden und Finnland) mittlerweile den Höhenbezug auf das Zero Tide System umgestellt und auch das „Welthöhensystem“ ist im Zero Tide System geplant. Wie aber MÄKINEN und IHDE in ihrem IUGG Vortrag in Perugia herausgestellt haben, muss hinterfragt werden, ob die Problematik der Schwerefeldberechnung als Begründung ausreichend ist, um alle Größen auf dieses System festzulegen. Dies begründet sich darauf, dass dieses System, wie erwähnt, nicht die Realität wiedergibt und so für spezielle Anwendungen in der Metrologie, der Ozeanographie oder auch für Uhren (, da die Uhrenfrequenz vom Potential abhängt,) nicht ohne Weiteres zu gebrauchen ist.

Etwas im Hintertreffen bei der Diskussion um das richtige System ist das Tide Free System. Wie beim Zero Tide System wird auch hier die *Laplace* Bedingung erfüllt, was dieses System für die Geodäsie zunächst interessant macht. Gegen das System allerdings spricht, dass es nicht exakt realisierbar ist, da die Beobachtungen auf Grund der ungenauen Kenntnis der durch die permanenten Gezeiten verursachten Verformung der Erde nicht exakt ins wirkliche Tide Free System übertragen werden können.

Die Wahl muss also zwischen Mean Tide und Zero Tide System getroffen werden, was, wie es MÄKINEN und IHDE in ihrem oben erwähnten Vortrag bezeichnen, einer Wahl zwischen der Einfachheit für den Anwender (einfache Beziehungen zwischen den üblichen geodätischen Größen) und der Schönheit der Theorie (Erfüllung der Bedingungen für die Schwerefeldbestimmung) entspricht. Die Meinungen zu diesem Thema sind geteilt und es kann in naher Zukunft wohl nicht mit der Entscheidung für eines der beiden Systeme gerechnet werden.

Die für die Schwerefeldberechnung entscheidenden Schlüsse können jedoch bereits aus dieser Diskussion gezogen werden. Wir haben zwei Möglichkeiten.

Bei der Schwerefeldberechnung müssen alle Beobachtungen entweder:

- a) im Zero Tide System vorliegen, um direkt vorauszusetzen, dass die Schwerefeldbeobachtungen nur von Kräften innerhalb der Erdoberfläche beeinflusst werden, oder im
- b) Mean Tide System, vorausgesetzt die Definition des Ellipsoids enthält ebenso die Definition der permanenten Gezeiten, damit sichergestellt ist, dass bei der Bildung von Stör- oder Anomaliengrößen der Einfluss von Kräften außerhalb der Erdoberfläche eliminiert ist.

Für die Geodäsie ist es also durchaus möglich, das Mean Tide System zu verwenden, was mit Rücksicht auf andere Wissenschaften bzw. Problemstellungen auch sehr sinnvoll erscheint. Falls die Definition des entsprechenden Ellipsoids die Gezeiten nicht berücksichtigt, muss dann vor der Schwerefeldberechnung eine Korrektur an die Gezeiten angebracht werden, die diesen Umstand berücksichtigt.

Korrekturformeln für Schwerewerte

An dieser Stelle wollen wir überlegen, wie man die verschiedenen Gezeitsysteme ineinander überführen kann, bzw. überhaupt einmal eine Messgröße, die ja den kompletten Gezeiteinfluss (direkte und indirekte, wie auch zeitabhängige und -unabhängige Anteile) enthält, in eines der Systeme überträgt. Dies wird z.B. auch in den IERS Konventionen (siehe MC CARTHY et al. (2004)) erläutert.

Wie MÄKINEN & IHDE in ihrem Vortrag dargestellt haben, ist es historisch üblich gewesen, eine Beobachtung zunächst ohne Unterscheidung von zeitabhängigem und permanentem Anteil von jeglichen Gezeiteinflüssen zu befreien, so dass diese im sogenannten konventionellen Tide Free System vorliegt. Dies geschieht mit Hilfe der konventionellen Love'schen Zahlen, Proportionalitätsfaktoren, die die elastische Deformation der Erde in Folge der Gezeiten beschreiben. Da die konventionellen Love'schen Zahlen die wirkliche Deformation nicht exakt beschreiben - exakte Love'sche Zahlen für die permanente Deformation sind nicht bekannt -, entspricht das konventionelle Tide Free System nicht dem wirklichen TF System.

Die Berechnung der gesamten auf eine Schweremessung wirkende Gezeitenbeschleunigung kann, wie wir es im Folgenden machen, nach TORGE (2003) erfolgen.

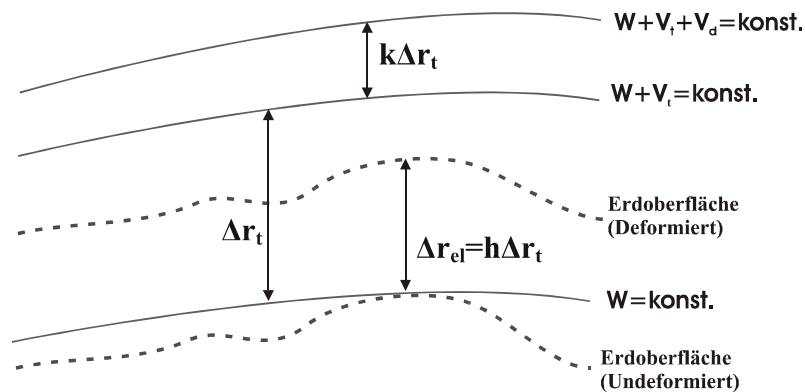


Abbildung 6.20: Vertikale Verschiebung der Erdoberfläche und der Niveauläche durch die Gezeiten

Sonne und Mond verursachen das Gezeitenpotential

$$dV(P) = \frac{1}{2} GM_{SM} \frac{r^2}{r_{SM}^3} (3 \cos^2 \psi - 1), \quad (6.34)$$

wobei M_{SM} für die Masse der Sonne bzw. des Mondes steht, r_{SM} für den Radius vom Massenzentrum der Erde zu Sonne bzw. Mond und ψ für den Winkel zwischen Beobachtungspunkt (also der Punkt, an dem die Gezeiten betrachtet werden) und Sonne bzw. Mond im Bezug zum Massenzentrum der Erde.

Ein auf der Erdoberfläche aufgestelltes Gravimeter nimmt dann bei der Messung die Gezeitenbeschleunigung dV_r wahr, die sich aus dem Gezeitenpotential dV ergibt mit

$$\begin{aligned} dV_r(P) &= \frac{\partial dV}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2} GM_{SM} \frac{r^2}{r_{SM}^3} (3 \cos^2 \psi - 1) \right) \\ &= GM_{SM} \frac{r}{r_{SM}^3} (3 \cos^2 \psi - 1) = 2 \frac{dV}{r} \end{aligned} \quad (6.35)$$

Wäre die Erde starr und nicht deformierbar, so würde b_r die Gezeitenbeschleunigung bereits vollständig beschreiben.

Die von den Gezeiten verursachte Deformation der Erde verursacht das Deformationspotential dVD . Dieses kann in Reihenentwicklung dargestellt werden

$$dVD(P) = \frac{GM_{SM}}{r_{SM}} \sum_{n=2}^{\infty} k_n \left(\frac{R}{r_{SM}} \right)^n \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi), \quad (6.36)$$

wobei k_n für die Love Zahlen stehen.

Aus dem Deformaionspotential folgt die radiale Beschleunigung

$$dVD_r(P) = -\frac{GM_{SM}}{r_{SM}} \sum_{n=2}^{\infty} k_n \frac{n+1}{r} \left(\frac{R}{r_{SM}} \right)^n \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi). \quad (6.37)$$

Der Hauptanteil ist im Grad $n=2$ enthalten. Der Signalanteil der weiteren Grade ist relativ klein und nimmt mit steigendem Grad ab. Im Weiteren soll nur der Grad $n=2$ betrachtet werden. Dies wird den Formelapparat erheblich erleichtern. Es sei allerdings darauf hingewiesen, dass in der Realität auch höhere Grade zu berücksichtigen sind, um den hohen Genauigkeitsansprüche der Schwerefeldberechnung gerecht zu werden.

Bei Beschränkung auf $n=2$ werden (6.36) und (6.37) unter Berücksichtigung von $P_2(\cos \psi) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \psi - 1)$ und mit $r = R$ zu

$$dVD = \frac{1}{2} k_2 GM_{SM} \frac{R^2}{r_{SM}^3} (3 \cos^2 \psi - 1) = k_2 \cdot dV \quad (6.38)$$

$$dVD_r = -\frac{3}{2} k_2 GM_{SM} \frac{R}{r_{SM}^3} (3 \cos^2 \psi - 1) = -\frac{3}{R} k_2 \cdot dV. \quad (6.39)$$

Beide Größen sind proportional über die Love Zahl k_2 mit dem Gezeitenpotential dV verbunden.

Neben den Beschleunigungen dV_r und dVD_r muss noch ein weiterer Einfluss auf die Gravimetermessung bedacht werden. Das Messergebnis des Gravimeters wird von der Vertikalverschiebung der Erdoberfläche beeinflusst. Durch die Defomration und die daraus resultierende Verschiebung steht das Gravimeter an einem anderen Ort. Hierdurch entsteht eine Potentialänderung

$$dVV(P) = h_2 dV, \quad (6.40)$$

die proportional über die Love Zahl h_2 mit dem Gezeitenpotential dV verbunden ist. Die entsprechende Beschleunigung lautet

$$dVV_r(P) = h_2 dV_r. \quad (6.41)$$

Die Herleitung von dVV und dVV_r wird ausführlich in TORGE (2003) erläutert.

Das vollständige Gezeitenpotential ergibt sich so mit

$$dV_{ges} = dV(1 + k_2 - h_2) \quad (6.42)$$

und die vollständige Gezeitenbeschleunigung lautet

$$dV_{r_{ges}} = \left(1 - \frac{3}{2}k_2 + h_2\right) dV_r. \quad (6.43)$$

Als Love'sche Zahlen werden in der Regel $h_2 = 0.60$ und $k_2 = 0.30$ verwendet.

Zieht man die vollständige Gezeitenbeschleunigung $dV_{r_{ges}}$ von einem Schwerewert ab, so ist dieser von allen Gezeiteneinflüssen befreit, er befindet sich also im konventionellen Tide Free System.

Ausgehend vom konventionellen TF System lässt sich die Beobachtung ins Zero Tide und Mean Tide System transferieren, indem zunächst der indirekte Gezeiteneinfluss (mit Hilfe der konventionellen Love'schen Zahlen) und dann der direkte Gezeiteneinfluss modelliert und zurückaddiert werden. (Dies entspricht einem Restore-Vorgang.) Hierzu muss zunächst das permanente Gezeitenpotential \overline{dV} berechnet werden. Dies ist möglich, indem man in der in TORGE (2003) aufgezeigten Formel (3.123) die nicht-zonalen Anteile vernachlässigt. Alternativ kann man auch die von POUTANEN et al. (1996) aufgezeigte Formel für das permanente Gezeitenpotential verwenden

$$\overline{dV} = D \left(\frac{1}{2} \sin^2 \varepsilon - \frac{1}{3} \right) (3 \sin^2 \varphi - 1), \quad (6.44)$$

die von der Schiefe der Ekliptik ε und der Doodson Konstante D abhängt.

Hieraus lässt sich dann nach (6.35) die permanente Gezeitenbeschleunigung $\overline{dV_r}$ berechnen, mit der die totale permanente Gezeitenbeschleunigung $\overline{dV_{r_{ges}}}$ nach (6.43) berechnet werden kann. Addiert man dann dieses $\overline{dV_{r_{ges}}}$ zu den Schwerewerten im TF System, gelangt man ins Mean Tide System. Um ins Zero Tide System zu gelangen, darf in (6.43) der Anteil der direkten Gezeiten nicht berücksichtigt werden (also der erste Term in der Klammer). Der Schwereunterschied zwischen den Systemen lässt sich nach EKMAN (1989) auch direkt berechnen mit

$$\begin{aligned} g^{MT} - g^{ZT} &= (-30.4 + 91.2 \sin^2 \varphi) \cdot 10^{-3} \quad [mgal] \\ g^{MT} - g^{TF} &= (-30.4 + 91.2 \sin^2 \varphi) \cdot 1.16 \cdot 10^{-3} \quad [mgal]. \\ g^{ZT} - g^{TF} &= (-30.4 + 91.2 \sin^2 \varphi) \cdot 0.16 \cdot 10^{-3} \quad [mgal] \end{aligned} \quad (6.45)$$

Eine Beobachtung im wahren Tide Free System könnte theoretisch aus der Beobachtung im ZT System berechnet werden, wenn die exakten Love'schen Zahlen für die permanente Deformation der Erde bekannt wären.

All diese Vorgänge sind in Abbildung 6.21 zusammengefasst.

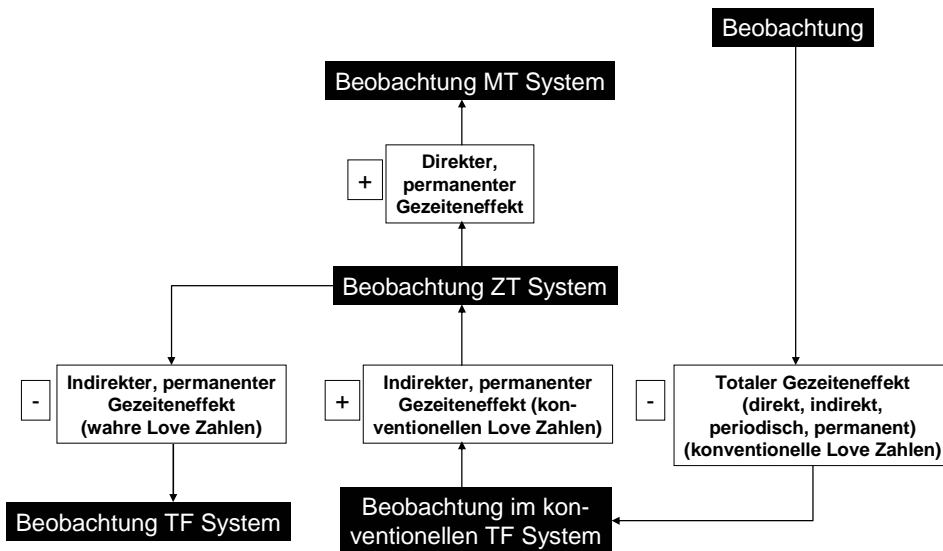


Abbildung 6.21: Verknüpfung der Beobachtungen in den verschiedenen Gezeitsystemen

In Abbildung 6.22 ist die Differenz zwischen den Schwerewerten im Mean Tide und Zero Tide System dargestellt. Der Unterschied ist sehr langwellig und beträgt bis zu 0.06 mgal.

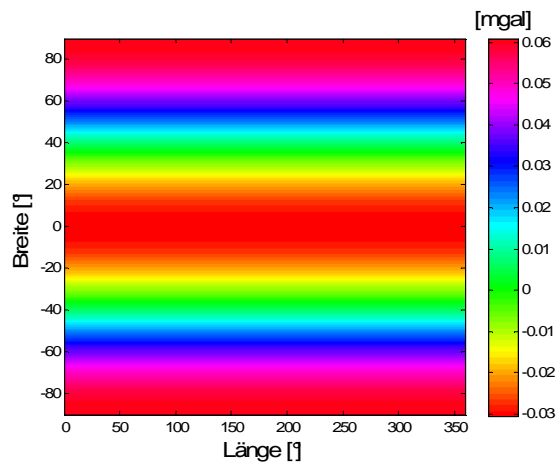


Abbildung 6.22: Differenz zwischen Schwerewerten im Mean Tide und Zero Tide System

Für Berechnungen jeglicher Art (also nicht nur zur Schwerfeldberechnung) ist es wichtig, dass alle Beobachtungen im selben System vorliegen, da sonst keine Vergleichbarkeit der Beobachtungen gewährleistet ist und sonst Fehler in Kauf genommen werden. D.h. altimetrische Meereshöhen, GPS-Positionen und Schweremessungen müssen im gleichen System sein.

Für die Schwerfeldberechnung und im Allgemeinen muss überlegt werden, welches System am besten und praktischsten erscheint.

6.1.5 Geländekorrektur

Wie bereits mehrfach in dieser Arbeit erläutert, muss das Störpotential T eine harmonische Funktion im Außenraum sein, damit die Schwerfeldberechnung als ein Randwertproblem betrachtet werden kann, was bedeutet, dass der Außenraum massenfrei sein muss. Wir haben bereits gesehen, dass diese Bedingung von Natur aus nie erfüllt ist, was am immerwährenden Einfluss der Atmosphäre und der Gezeiten liegt. Allerdings wurden bereits Lösungsansätze erörtert, die zeigen, wie wir mit diesen Problemen umgehen können.

Ein weitaus größeres Problem als die Gezeiten und die Atmosphäre stellen die topographischen Massen der Erde dar, vorausgesetzt das Geoid wird als Randfläche gewählt. Durch die topographischen Massen wird die Bedingung der Massenfreiheit im Außenraum erheblich verletzt und es muss eine Möglichkeit gefunden werden, wie mit den Massen zu verfahren ist, um eine Schwerefeldberechnung durchführen zu können. In HOFMANN-WELLENHOF & MORITZ (2005) wird eine Vielzahl von Ansätzen hierzu beschrieben.

Einer dieser Lösungsansätze ist die Kondensationsmethode nach *Helmert*. Wie der Name schon sagt, stellt man sich bei dieser Methode vor, dass alle topographischen Massen entlang der Vertikalen auf das Geoid kondensiert werden, d.h. es befindet sich keine Topographie außerhalb des Geoids, sondern alle Massen befinden sich in einer Schicht mit dementsprechend hoher Dichte auf dem Geoid. Dies stellt Massenfreiheit im Außenraum des Geoids sicher, ohne dabei die Gesamtmasse zu verändern.

Die Kondensation der Massen führt zu einer Schwereänderung, da die Anziehung A_r der topographischen Massen auf den Messpunkt anders ist als die Anziehung A_c der auf das Geoid kondensierten Massen. Darum muss auf den gemessenen Schwerewert die Schwerekorrektur

$$\delta A = -A^T + A^C \tag{6.46}$$

angebracht werden, um zu simulieren, dass dieser von der Massenschicht auf dem Geoid und nicht von der Topographie angezogen wird.

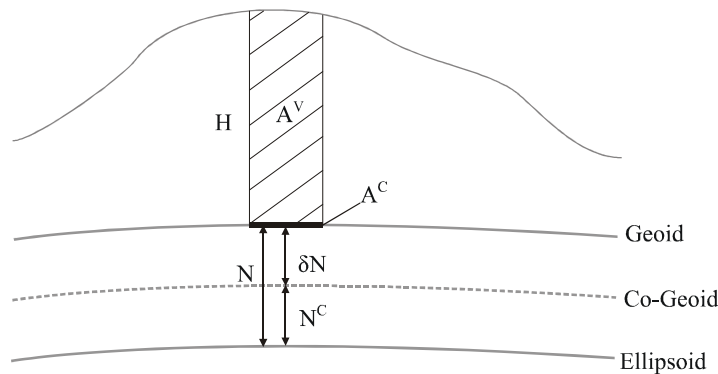


Abbildung 6.23: Kondensationsmethode nach *Helmert* und der indirekte Effekt

GRUBER (2000) beschreibt ausführlich, wie die Korrektur δA global berechnet werden kann. Mit Hilfe von Kugelfunktionsentwicklungen der Potenzen k der normalisierten topographischen Höhen $\left(\frac{h}{R}\right)^k$ ergibt sich mit der mittleren Dichte der topographischen Massen $\rho = 2.67 \text{ g/cm}^3$

$$\delta A = -4\pi G\rho R \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} \frac{n+1}{2n+1} \sum_{k=2}^n \left[\frac{(n+2)!}{k!(n+3-k)!} \left(\frac{h}{R}\right)_n^k \right]. \tag{6.47}$$

Bei der Berechnung geht man von einer kugelförmigen Erde aus, wodurch ein Fehler entsteht, der vernachlässigt werden kann, da die Korrektur selbst klein ist.

Abbildung 6.24 stellt die *Helmert'sche* Gelände­korrektur in Schwereanomalien dar. Sie kann im extremen Gebirge bis zu 20 mgal betragen. Sie stellt damit die bislang größte Korrektur

dar, die an Schwerewerte angebracht werden muss (abgesehen vom linearen Anteil der Freiluftkorrektur).

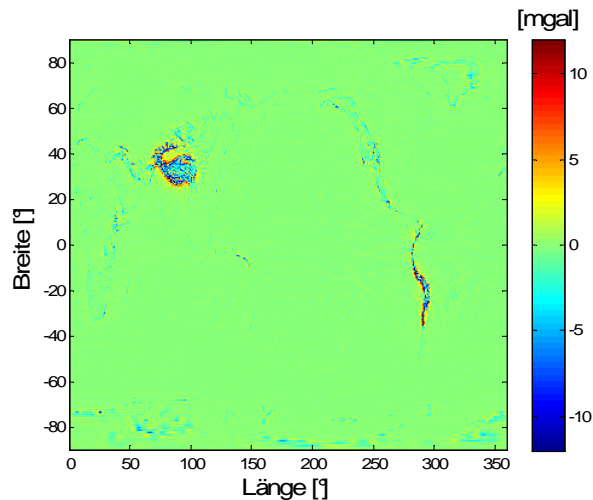


Abbildung 6.24: Geländekorrektur nach Helmert in Schwereanomalien

Indirekter Effekt

Durch die Kondensation der Landmassen kommt es am Geoid zu einer Änderung des Schwerepotentials δW , infolgedessen auch das Geoid verschoben wird. Dies bezeichnet man als indirekten Effekt. Das verschobene Geoid bezeichnet man als Co-Geoid und die Höhe des Co-Geoids über dem Ellipsoid bezeichnet man als Co-Geoidhöhe N^C . Der Potentialunterschied δW zwischen Geoid und Co-Geoid kann unter Berücksichtigung der Formel nach *Bruns* (4.24) in den Höhenunterschied δN zwischen Geoid und Co-Geoid umgerechnet werden

$$\delta N = \frac{\delta W}{\gamma}, \quad (6.48)$$

und es ergibt sich so die wahre Geoidhöhe mit

$$N = N^C + \delta N. \quad (6.49)$$

Diese Größen sind in Abbildung 6.23 dargestellt.

Berechnet man aus den um den Geländeeinfluss korrigierten Schwereanomalien Geoidhöhen - die Schwereanomalie wird dabei auf dem Co-Geoid gebildet und hierzu muss der Berechnungspunkt mit δN vom Geoid aufs Co-Geoid gebracht werden -, so erhält man als Ergebnis das Co-Geoid. Um die tatsächlichen Geoidhöhen zu erhalten muss δN addiert werden. Versucht man aus diesen Schwereanomalien das Störpotential zu berechnen, so muss auf das Ergebnis noch der Potentialunterschied δW addiert werden, um das wahre Ergebnis zu erhalten.

Da sich das Co-Geoid unter dem Geoid innerhalb der Landmassen befindet, müsste eigentlich eine zweite Massenreduktion in den Berechnungen berücksichtigt werden. Deren Einfluss ist aber so gering, dass er nach HOFMANN-WELLENHOF & MORITZ (2005) nicht berücksichtigt werden muss.

Analog zu Gleichung (6.47) kann δN berechnet werden mit

$$\delta N = -4\pi G\rho \frac{R^2}{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=2}^{\infty} \left[(-1)^{k-1} \frac{(n-3+k)!}{k!(n-2)!} \left(\frac{h}{R} \right)_n^k \right]. \quad (6.50)$$

Abbildung 6.25 stellt den indirekten Effekt der Geländekorrektur in Geoidhöhen dar. Dieser kann im Hochgebirge bis zu 1.5 m betragen.

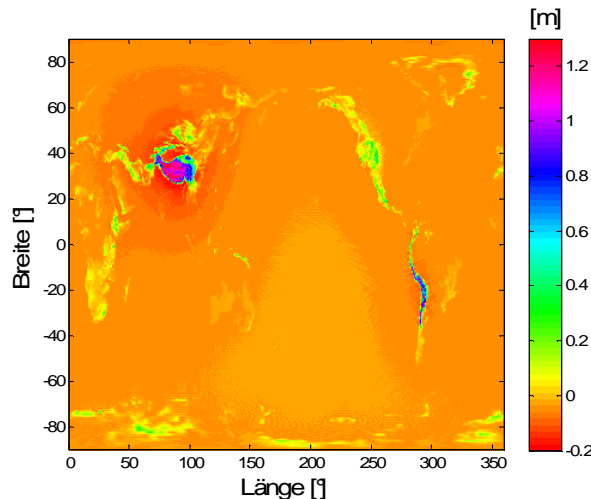


Abbildung 6.25: Indirekter Effekt der Geländekorrektur δN in Geoidhöhen

6.2 Fluggravimetrie

Die Fluggravimetrie liefert den Schwerebeschleunigungsvektor, aus dem sich Schwerstörungen und –anomalien sowie Lotabweichungen herleiten lassen. Da die Korrekturen und Reduktionen für die Schwerstörungen und –anomalien größtenteils im vorherigen Kapitel betrachtet wurden, sollen hier vor allem die Lotabweichungen behandelt werden. In der Fluggravimetrie soll, wie bereits oben erwähnt, nach BOEDECKER & STÜRZE (2006) für Schwerewerte eine Messgenauigkeit von 1 mgal bei einer räumlichen Auflösung von 1 km erreicht werden, bzw. 0.2" bei Lotabweichungen. Systematische Effekte, die mindestens eine Größenordnung unter diesen Werten liegen, müssen nicht berücksichtigt werden.

6.2.1 Ellipsoidische Korrektur

Wie in Kapitel 3.2 beschrieben wurde, kann mit Fluggravimetrie der Schwerebeschleunigungsvektor \underline{g} bestimmt werden. Aus diesem lassen sich die Schwerstörung δg und die Lotabweichungskomponenten ξ und η bestimmen. Während die ellipsoidische Korrektur für die Schwerstörung bereits in Kapitel 6.1.3 beschrieben wurde, soll die Beschreibung der Korrektur für die Lotabweichungskomponenten an dieser Stelle folgen. Nach Gleichung (6.18) gilt für die Lotabweichungen

$$\begin{aligned} \xi &= \xi^0 + e^2 \xi^1 \\ \eta &= \eta^0 + e^2 \eta^1 \end{aligned} \quad (6.51)$$

Die gemessenen Größen ξ und η ergeben sich aus der Neigung des Geoids mit

$$\begin{aligned}\xi &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial N}{\partial \varphi} \\ \eta &= -\frac{1}{v \cos \varphi} \frac{\partial N}{\partial \lambda}\end{aligned}\tag{6.52}$$

wobei sich die Krümmungen des Ellipsoids μ und v nach MORITZ (1980) ausdrücken lassen durch

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu} &= \frac{1}{R} \left(1 + \frac{5}{6} e^2 - \frac{3}{2} e^2 \sin^2 \varphi \right) \\ \frac{1}{v} &= \frac{1}{R} \left(1 - \frac{1}{6} e^2 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi \right)\end{aligned}\tag{6.53}$$

Da in sphärischer Näherung die Exzentrizität e Null ist und sich Gleichung (6.53) dementsprechend vereinfacht, ergeben sich ξ^0 und η^0 zu

$$\begin{aligned}\xi^0 &= -\frac{1}{R} \frac{\partial N}{\partial \varphi} \\ \eta^0 &= -\frac{1}{R \cos \varphi} \frac{\partial N}{\partial \lambda}\end{aligned}\tag{6.54}$$

Anzumerken ist, dass (φ, λ) bei Näherungsgrößen für sphärische Koordinaten stehen, und bei den originalen Größen für geodätische Koordinaten, wobei die numerischen Werte der Koordinatendatensätze identisch sind. Dies erscheint zunächst verwirrend, wird allerdings nach *Moritz*, dessen Weg wir folgen, so gehandhabt.

Die für die Berechnung der Korrektur entscheidenden Terme ξ^1 und η^1 lauten

$$\begin{aligned}\xi^1 &= \left(\frac{12}{13} - \frac{9}{4} \sin^2 \varphi \right) \xi^0 + \frac{3}{2} \sin \varphi \cos \varphi \frac{N^0}{R} \\ \eta^1 &= \left(\frac{1}{12} - \frac{5}{4} \sin^2 \varphi \right) \eta^0\end{aligned}\tag{6.55}$$

Ihre Herleitung ist wiederum in MORITZ (1980) zu finden. Man sieht an Hand von Formel (6.55), dass die ellipsoidische Korrektur, wie auch für die Schwereanomalie und Schwerestörung, nicht ohne a-priori Schwerefeldinformation zu berechnen ist. Es werden Näherungswerte für ξ^0 , η^0 und N^0 benötigt. Es empfiehlt sich, diese mit Hilfe von bekannten Schwerefeldmodellen zu berechnen. Die folgenden Abbildungen zeigen Plots der ellipsoidischen Korrekturen $e^2 \xi^1$ und $e^2 \eta^1$. Die Plots wurden erneut auf Basis des EGM96 Modells bis Grad und Ordnung 360 berechnet. Aus Abbildung 6.26 ist ersichtlich, dass $e^2 \xi^1$ in den mittleren Breiten und $e^2 \eta^1$ in den äquatornahen Gebieten minimal wird, was Abbildung 6.27 zeigt. Beides wird verursacht durch die Nullstellen der von $\sin^2 \varphi$ abhängigen Terme in Gleichung (6.55). Es sind in den Korrekturen auch noch die für die Lotabweichungskomponenten typischen Ost-West und Nord-Süd Strukturen zu erkennen.

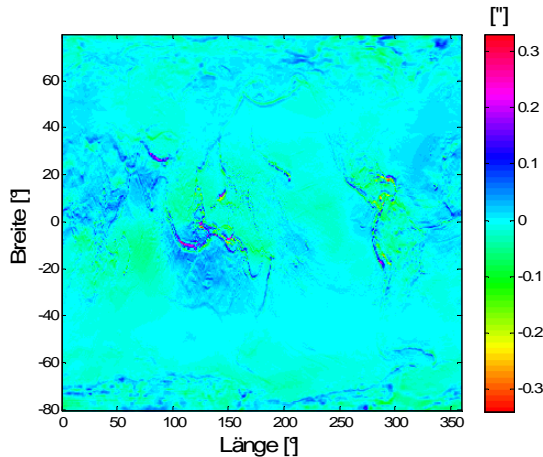


Abbildung 6.26: Ellipsoidische Korrektur $e^2 \xi^1$
in Bogensekunden

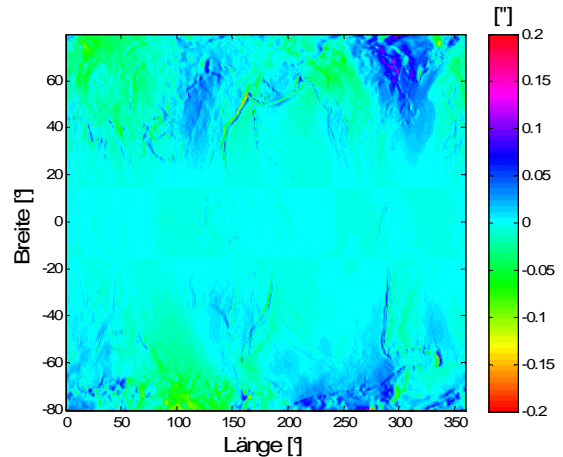


Abbildung 6.27: Ellipsoidische Korrektur $e^2 \eta^1$
in Bogensekunden

Die ellipsoidischen Korrekturen für die Lotabweichungen haben Werte bis zu 0.3". Bei digitalen Zenitkameras beträgt die Messgenauigkeit etwa 0.1" und auch in der Fluggravimetrie sollen in Zukunft Genauigkeiten von etwa 0.2" erreicht werden (dies ergibt sich, wenn man den in Kapitel 3.2 genannten Zielwert von *Boedecker* umrechnet). Die ellipsoidische Korrektur liegt also im Bereich der Messgenauigkeit und muss daher berücksichtigt werden.

6.2.2 Gezeiten

Bei im Flugzeug gemessenen Schwerewerten müssen die Gezeiten, wie für jeden anderen Schwerewert auch, zunächst vollständig herausgerechnet werden. Dies geschieht, wie in Kapitel 6.1.4 erläutert, indem man die vollständige Gezeitenbeschleunigung (Gleichung (6.43)) vom Schwerewert abzieht. Da das Gravimeter an Bord des Flugzeugs allerdings im Gegensatz zum Gravimeter auf der Erdoberfläche die Vertikalverschiebung auf Grund der Deformation der Erdoberfläche selbst nicht erfährt, ist der letzte Term in der Klammer von (6.43) (also der von der Love Zahl h abhängige Anteil) Null.

Der Wechsel von der im Tide Free System vorliegenden Größe in die anderen Systeme erfolgt dann wie oben beschrieben, wobei erneut beachtet werden muss, dass dem Flugzeug selbst keine Vertikalverschiebung widerfährt.

Die Gezeiten spiegeln sich auch in den gemessenen Lotabweichungen wieder. Dies ist darin begründet, dass sie zu einer Richtungsauslenkung des Lotes führen. Diese beträgt in Nordrichtung

$$d\varphi = \frac{1}{r \cdot g} \frac{\partial dV}{\partial \varphi} \quad (6.56)$$

und in Ostrichtung

$$d\lambda = \frac{1}{r \cdot g \cos \varphi} \frac{\partial dV}{\partial \lambda} \quad (6.57)$$

Die Deformation der Erde in Folge der Gezeiten führt zu den sekundären Horizontalverschiebungen Δx_{sec} und Δy_{sec} des Erdkörpers, die sich mit der Love Zahl l

proportional zu den primären Verschiebungen ergeben. Sie sind in Nordrichtung und in Ostrichtung

$$\begin{aligned}\Delta x_{\text{sec}} &= \frac{l}{g} \frac{\partial dV}{\partial \varphi} \\ \Delta y_{\text{sec}} &= \frac{l}{g \cos \varphi} \frac{\partial dV}{\partial \lambda}\end{aligned}\quad (6.58)$$

Analog zu (6.43) lassen sich dann Gleichungen aufstellen, die den kompletten Einfluss der Gezeiten widerspiegeln. Diese sind in Nordrichtung

$$d\varphi_{\text{ges}} = \frac{1}{r \cdot g} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \cdot g} \frac{\partial V_d}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \Delta x_{\text{sec}} \quad (6.59)$$

und in Ostrichtung

$$d\lambda_{\text{ges}} = \frac{1}{r \cdot g \cos \varphi} \frac{\partial V}{\partial \lambda} + \frac{1}{r \cdot g \cos \varphi} \frac{\partial V_d}{\partial \lambda} + \frac{1}{r} \Delta y_{\text{sec}} \quad (6.60)$$

Die jeweils letzten Terme in den Gleichungen (6.59) und (6.60) werden im Fall der Fluggravimetrie Null, da sich das Flugzeug im Raum befindet und so die Verschiebung der Erdoberfläche nicht selber erfährt.

Laut TORGE (2003), der die obigen Formeln in diesem Kapitel ausführlich herleitet, erreichen die durch den totalen Gezeiteneinfluss hervorgerufenen Neigungen auf der Erdoberfläche 0.01" bis 0.02". Dies liegt eine Größenordnung unter der Messgenauigkeit für Lotabweichungen. Demzufolge muss der Gezeiteneffekt nicht zwingend aus den gemessenen Lotabweichungen eliminiert werden und der Unterschied zwischen den Gezeitemsystemen ist kaum wahrnehmbar.

6.2.3 Atmosphärenkorrektur

An die aus der Fluggravimetrie resultierenden Schwerewerte muss eine Schwerekorrektur angebracht werden. Es sei hier auf Kapitel 6.1.2 verwiesen, wo diese ausführlich beschrieben wird. Wie in Abbildung 6.6 zu sehen, ist die Atmosphärenkorrektur im Falle der Fluggravimetrie viel geringer als im Falle der terrestrischen Gravimetrie. Dies ist logisch, da in Flughöhe bereits ein sehr großer Teil der Atmosphärenanziehung wahrgenommen wird und somit nur noch eine geringe Korrektur angebracht werden muss, um den Bezug zur vollständigen Atmosphärenmasse herzustellen.

6.3 Satellitengradiometrie

An dieser Stelle werden Korrekturen hinsichtlich der Schweregradienten betrachtet. Die Gradienten können nach STUMMER (2006) mit bis zu $2 \cdot 10^{-3} Eötvös$ Genauigkeit bestimmt werden. Es müssen also Effekte und Reduktionen berücksichtigt werden, deren Werte darüber hinausgehen.

6.3.1 Atmosphärenkorrektur

In der Satellitengradiometrie ist keine Atmosphärenkorrektur notwendig. Dies liegt daran, dass, wie bereits weiter oben beschrieben, sich der Satellit oberhalb der Atmosphärenmassen

befindet. Er nimmt also, wie gefordert, schon das Schwerefeld als Einheit von Erd- und Atmosphärenmassen war.

Allerdings muss die Bewegung der Atmosphärenmassen berücksichtigt werden. Schwerefeldsatelliten nehmen die Verteilung der Massen war, die sich unter ihnen befinden. An ein und derselben Stelle wirkt demzufolge insgesamt eine andere Anziehung auf den Satelliten, wenn sich die Verteilung der Atmosphärenmassen verändert. Darum werden die Variationen in der Atmosphärenmasse in Bezug auf einen Mittelwert, der aus einer Standardatmosphäre stammen kann, berücksichtigt. Hierzu berechnet man die Masse der Luftsäule, die sich unter dem Satelliten befindet. Diese lässt sich aus dem Luftdruck auf der Erdoberfläche herleiten. Eine detaillierte Beschreibung, wie diese Berechnung durchzuführen ist, findet sich in GRUBER et al. (2008). Bleiben die atmosphärischen Variationen unberücksichtigt, so können sich die daraus entstehenden Ungenauigkeiten im Spektrum des Schwerefelds widerspiegeln.

6.3.2 Ellipsoidische Korrektur

Auch für alle Schweregradienten gilt nach (6.16)

$$T_{ij} = T_{ij}^0 + e^2 T_{ij}^1. \quad (6.61)$$

Als Beispiel an dieser Stelle soll stellvertretend für die ellipsoidischen Korrekturen der Schweregradienten $e^2 T_{hh}$ dargestellt werden. Zu den restlichen Korrekturen sei nur gesagt, dass diese sich ähnlich herleiten lassen wie die ellipsoidischen Korrekturen der Lotabweichungen.

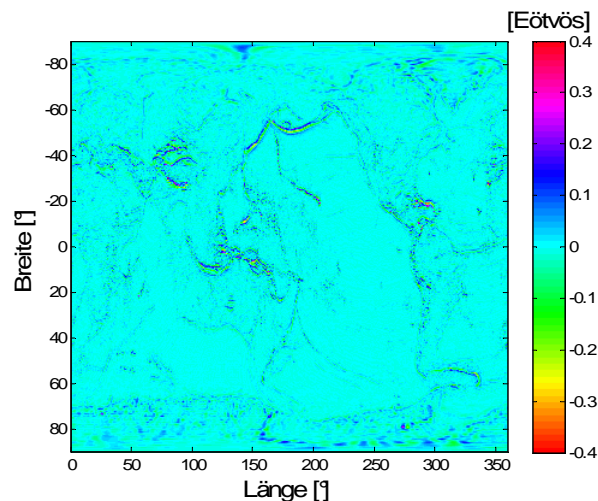


Abbildung 6.28: Ellipsoidische Schweregradientenkorrektur $e^2 T_{hh}$

In MORITZ (1974) wird ausführlich der Weg zur Berechnung von $e^2 T_{hh}$ hergeleitet. Es ergibt sich T_{hh}^1 mit

$$T_{hh}^1 = \frac{GM}{R^3} \sum_n \sum_m \bar{P}_{nm} \left(\cos \left(\frac{1}{2} \pi - \varphi + \frac{1}{2} e^2 \cos \varphi \sin \varphi \right) \right) \left[(n+m+1)(n-m+1) \frac{2n+5}{2n+3} - (n+1) \cos^2 \left(\frac{1}{2} \pi - \varphi + \frac{1}{2} e^2 \cos \varphi \sin \varphi \right) \right] \left[\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda \right] \quad (6.62)$$

In Abbildung 6.28 ist die ellipsoidische Korrektur $e^2 T_{hh}$ dargestellt. Diese beträgt für gradiometrische Messungen auf der Erdoberfläche bis zu $0.4 E\ddot{o}tv\ddot{o}s$.

An die GOCE-Messungen muss diese Korrektur nicht angebracht werden, da hier bereits (zumindest nahezu) T_{rr} gemessen wird, und nicht T_{hh} .

6.3.3 Gezeiten

An dieser Stelle soll überlegt werden, ob auch für die Schweregradienten eine Gezeitenkorrektur berechnet werden muss. In Kapitel 6.2.2 haben wir bereits gesehen, dass sich die Gezeiten viel stärker auf die vertikale als auf horizontale Komponenten auswirken. Deswegen soll an dieser Stelle exemplarisch für die Komponente T_{zz} der Gezeiteneinfluss aufgezeigt werden.

Den direkten Gezeiteneinfluss auf diese Komponente erhält man, indem man die radiale Ableitung von Gleichung (6.35) bildet

$$\begin{aligned} dV_{rr} &= \frac{\partial^2 dV}{\partial r^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{2} GM_{SM} \frac{r^2}{r_{SM}^3} (3 \cos^2 \psi - 1) \right) \\ &= GM_{SM} \frac{1}{r_{SM}^3} (3 \cos^2 \psi - 1) = 2 \frac{dV}{r^2} \end{aligned} \quad (6.63)$$

Den indirekten Einfluss erhält man durch radiale Ableitung von Gleichung (6.37) mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 dVD}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{GM_{SM}}{r_{SM}} \sum_{n=2}^{\infty} k_n \left(\frac{R}{r_{SM}} \right)^n \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi) \right) \\ &= \frac{GM_{SM}}{r_{SM}} \sum_{n=2}^{\infty} k_n \frac{(n+1)(n+2)}{r^2} \left(\frac{R}{r_{SM}} \right)^n \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi) \end{aligned} \quad (6.64)$$

und beschränkt man in Gleichung (6.64) die Entwicklung wiederum auf $n=2$ so erhält man mit $r=R$ und $P_2(\cos \psi) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \psi - 1)$

$$dVD_{rr} = 6k_2 \frac{GM_{SM}}{r_{SM}^3} (3 \cos^2 \psi - 1) = \frac{12}{R^2} k_2 \cdot dV. \quad (6.65)$$

Da die Messung der Schweregradienten im Raum erfolgt, muss kein dritter Korrekturterm berücksichtigt werden, da das Messgerät nicht von der Verschiebung der Erdoberfläche beeinflusst wird, d.h. der Messort bleibt unverändert. Darum ergibt sich die komplette Gezeitenkorrektur $dV_{rr \text{ ges}}$ mit

$$dV_{rr \text{ ges}}^{Sat} = (1 + 6k) (dV_{rr}). \quad (6.66)$$

Durch Abzug von $dV_{rr\text{ ges}}$ kann der gemessenen T_{zz} Wert ins konventionelle Free Tide System übertragen werden. Mit den weiter oben beschriebenen Restore-Schritten kann dann der Übergang ins Mean Tide oder Zero Tide System stattfinden.

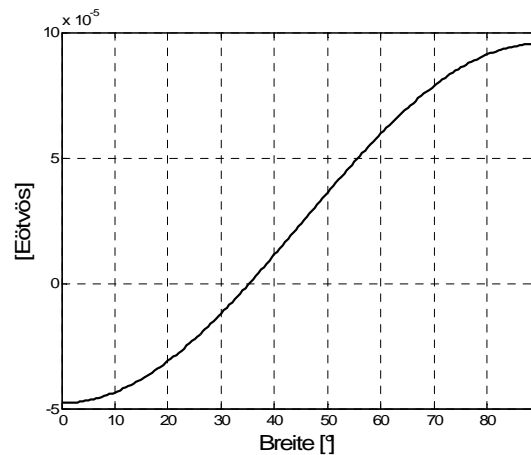


Abbildung 6.29: Unterschied zwischen T_{zz} im Mean und Zero Tide System

In Abbildung 6.29 ist der Unterschied zwischen T_{zz} im Mean und Zero Tide System dargestellt. Er beträgt gerade einmal bis zu $9 \cdot 10^{-5}$ Eötvös. Der Unterschied zwischen Free Tide und Mean Tide System beträgt bis zu $2 \cdot 10^{-4}$ Eötvös.

Dies liegt weit unter der Genauigkeit, mit der im Rahmen der GOCE Mission die Schweregradienten gemessen werden. Diese liegt laut STUMMER (2006) bei bis zu $2 \cdot 10^{-3}$ Eötvös.

Darum kann davon ausgegangen werden, dass die Gezeiten hier vernachlässigt und nicht berücksichtigt werden müssen. Ursache ist wohl, dass das Gezeitenfeld sehr glatt ist und kaum starke Krümmungen in diesem auftreten.

6.4 Satellite-to-Satellite Tracking

6.4.1 Ellipsoidische Korrektur

In Kapitel 3.4 wurde Satellite-to-Satellite Tracking in Zusammenhang mit der für die GOCE-Mission relevanten Energiebilanzmethode betrachtet. Diese liefert das Gravitationspotential V , aus dem wiederum das Störpotential T berechnet werden kann. Anhand von Gleichung (6.18) $T = T^0$ wird ersichtlich, dass hier keine ellipsoidische Korrektur angebracht werden muss.

6.4.2 Gezeiten

Beim SST-Energieintegral muss der totale Gezeiten effekt in den entlang der Bahn zu integrierenden Beschleunigungen eliminiert werden. Dies geschieht im Rahmen von Gleichung (3.25), denn der totale Gezeiten effekt ist in den Störbeschleunigungen a enthalten. Der Gezeiten effekt kann mit Hilfe von Formel (6.43), berechnet werden, wobei die von h abhängigen Terme vernachlässigt werden müssen.

Das Gravitationspotential, das man als Ergebnis des Energieintegrals erhält, befindet sich dann im Tide Free System. Der Wechsel in die anderen Systeme kann dann erneut im Restore Verfahren geschehen.

6.4.3 Atmosphärenkorrektur

Das Schwerfeld in Höhe des Satelliten wird bereits als Einheit von Erd- und Atmosphärenmassen wahrgenommen, weswegen keine Atmosphärenkorrektur an die Messungen anzubringen ist.

Wie bei der Satellitengradiometrie müssen allerdings beim Satellite-to-Satellite-Tracking die Variationen der Atmosphärenmassen bedacht werden. Dies ist besonders beim low-low Verfahren zu berücksichtigen.

Im Rahmen der GRACE Mission wurde, wie GRUBER & FLECHTNER (2008) zu entnehmen ist, das Potentialfeld, das aus der Variation der Atmosphärenmassen verursacht wird, aus dem Atmosphärenmodell des European Centre for Medium-Range Weather Forecasts (ECMWF) berechnet. Aus den Abweichungen des Atmosphärendrucks von der mittleren Atmosphäre der Jahre 2001 und 2002 konnten dann Korrekturkoeffizienten berechnet werden.

6.5 Satellitaltimetrie

Aus Satellitaltimetriemessungen lassen sich Geoidhöhen, Lotabweichungen und Schwereanomalien bestimmen. Lotabweichungen wurden bereits im Rahmen der Fluggravimetrie behandelt. Wir haben gesehen, dass für Lotabweichungen die ellipsoidische Korrektur berücksichtigt werden muss.

Auch an Schwereanomalien müssen viele Korrekturen angebracht werden, wie wir weiter vorne gesehen haben. Viele davon können allerdings im Rahmen der Satellitaltimetrie außer Acht gelassen werden. Altimetrische Schwereanomalien werden aus der inversen Stokes-Formel hergeleitet. Die Anwendung der inversen Stokes-Formel setzt voraus, dass die eingehenden Geoidhöhen bereits ellipsoidisch korrigiert sind und im Zero-Tide System vorliegen. Folglich liegen die resultierenden altimetrischen Schwereanomalien auch im Zero-Tide System vor und sind bereits ellipsoidisch korrigiert. Die Schwereanomalien liegen direkt auf dem maritimen Geoid, es ist also auch keine Freiluftkorrektur mehr notwendig.

Im Weiteren sollen die Korrekturen und Reduktionen für Geoidhöhen behandelt werden, nachdem sie bereits für Lotabweichungen und Schwereanomalien betrachtet wurden.

6.5.1 Ellipsoidische Korrektur

Wie wir in Formel (4.24) gesehen haben, ist die Geoidhöhe über die Normalschwere auf dem Ellipsoid mit dem Störpotential verbunden

$$N = \frac{T}{\gamma}.$$

Da nach (6.18) gilt $T = T^0$, liegt es Nahe, dass auch N gleich N^0 ist, und somit keine ellipsoidische Korrektur notwendig wird. Dies ist allerdings ein Irrtum, da man bei dieser Annahme vernachlässigt, dass die Normalschwere γ auf dem Ellipsoid nicht gleich der Normalschwere γ^0 in sphärischer Näherung ist. Folglich gilt für die Geoidhöhe

$$N = N^0 + e^2 N^1. \quad (6.67)$$

Die aus der Messung abgeleitete Geoidhöhe setzt sich also zusammen aus der sphärischen Näherung für die Geoidhöhe und einer ellipsoidischen Korrektur. Es ergibt sich hierbei analog zu (4.24) N^0 mit

$$N^0 = \frac{T}{\gamma^0} = \frac{T^0}{\gamma^0}. \quad (6.68)$$

Man erkennt, dass für die Berechnung der ellipsoidischen Korrektur die Beziehung zwischen γ und γ^0 entscheidend ist. MORITZ (1980) leitet einen Ausdruck her, mit dem es möglich ist, γ aus γ^0 darzustellen:

$$\gamma = \gamma^0 \left(1 - \frac{1}{4} e^2 + \frac{3}{4} e^2 \sin^2 \varphi \right). \quad (6.69)$$

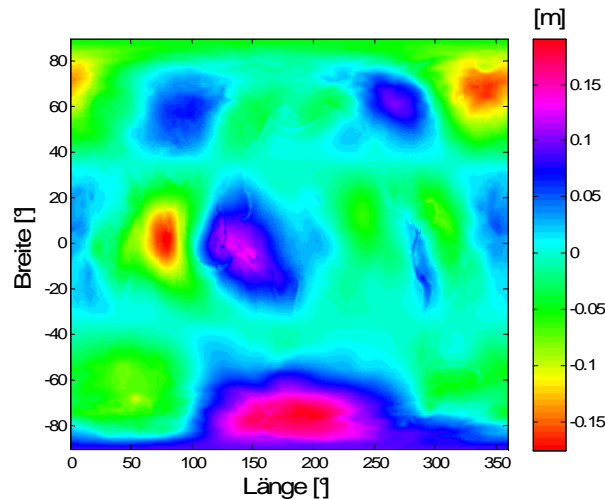


Abbildung 6.30: Ellipsoidische Korrektur $e^2 N^1$ für Geoidhöhen.

Setzt man (6.69) in (4.24) ein, so erhält man

$$N = \frac{T}{\gamma^0} \left(1 + \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{4} e^2 \sin^2 \varphi \right). \quad (6.70)$$

Zieht man dann noch (6.68) in Betracht, erhält man

$$N = N^0 \left(1 + \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{4} e^2 \sin^2 \varphi \right) = N^0 + e^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \sin^2 \varphi \right) N^0, \quad (6.71)$$

woraus folgt, wie man im Vergleich mit Gleichung (6.67) feststellen kann,

$$N^1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \sin^2 \varphi \right) N^0. \quad (6.72)$$

Erneut wird sichtbar, dass für die Berechnung der ellipsoidischen Korrektur a-priori Information für N^0 benötigt wird.

Abbildung 6.30 stellt die ellipsoidische Korrektur für Geoidhöhen dar. Wie zu erkennen ist, beträgt diese zum Teil mehr als 0.15 m. Deutlich zu sehen ist auch, dass die Korrektur Null wird bei Breitenwerten von circa 35° , was wiederum daran liegt, dass der von φ -abhängige Term in (6.72) hier Null wird.

6.5.2 Gezeiten

Die permanenten Gezeiten spielen in der Satellitenaltimetrie eine entscheidende Rolle. Dies liegt daran, dass, wie weiter oben erwähnt, das Geoid nur unter Einfluss von Sonne und Mond dem mittleren Meeresspiegel entspricht, vorausgesetzt dieser wird nicht von Strömungen usw. beeinflusst. Demzufolge ist die Satellitenaltimetrie von Natur her mit dem Mean Tide Geoid verbunden.

Wie in RAPP (1989) ersichtlich wird, ist es auch in der Satellitenaltimetrie üblich, zunächst den vollständigen Gezeiteneffekt von den Messungen abzuziehen und anschließend den permanenten Anteil zurückzuaddieren. So erhält man die von periodischen Einflüssen befreite „permanente“ Meereshöhe

$$\bar{h} = h - dh_t + \overline{dh_t}, \quad (6.73)$$

wobei dh_t für die Korrektur aller Gezeiteneinflüsse, $\overline{dh_t}$ für die Korrektur der permanenten Gezeiten und h für die gemessene Meereshöhe stehen.

Aus \bar{h} kann dann, wie in Kapitel 3.5 beschrieben, das Mean Tide Geoid hergeleitet werden.

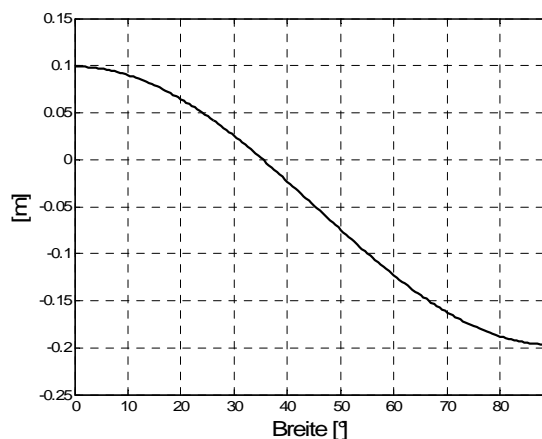


Abbildung 6.31: Unterschied zwischen Mean Tide und Zero Tide Geoid

Unter anderem in LEMOINE et al. (1989) sind Formeln zu finden, mit denen die Differenz zwischen Mean Tide Geoid und den Geoiden in den anderen Gezeitensystemen berechnet werden können. Diese sind

$$\begin{aligned} N_{MT} - N_{ZT} &= 9.9 - 29.6 \sin^2 \varphi \quad [cm] \\ N_{ZT} - N_{TF} &= 0.3(9.9 - 29.6 \sin^2 \varphi) \quad [cm]. \\ N_{MT} - N_{TF} &= 1.3(9.9 - 29.6 \sin^2 \varphi) \quad [cm] \end{aligned} \quad (6.74)$$

In Abbildung 6.31 ist die Differenz zwischen dem Mean Tide und dem Zero Tide Geoid dargestellt. Diese beträgt bis zu 20 cm.

6.6 GPS-Nivellement

Auch im Rahmen des GPS-Nivellements müssen einige Korrekturen und Reduktionen berücksichtigt werden.

Zunächst muss der totale Gezeiteneinfluss aus den Schwere- und GPS-Messungen eliminiert werden. Ist dies geschehen, so können die Schwere- und GPS-Messungen in eines der Gezeitensysteme transferiert werden. Die Geoidhöhen, die danach berechnet werden, liegen dann im selben Gezeitensystem vor. Die Berechnung des totalen Gezeiteneinflusses und des Unterschiedes zwischen den Gezeitensystemen bei Schwerewerten wird in Kapitel 6.1.4 beschrieben. Für die GPS-Messungen sei verwiesen auf POUTANEN et al. (1996).

6.7 Fazit

In Kapitel 6 wurden verschiedene Reduktionen und Korrekturen vorgestellt, die im Rahmen der Schwerefeldberechnung berücksichtigt werden müssen. Wie wir gesehen haben, werden einige davon alleine durch die Wahl der Randfläche verursacht.

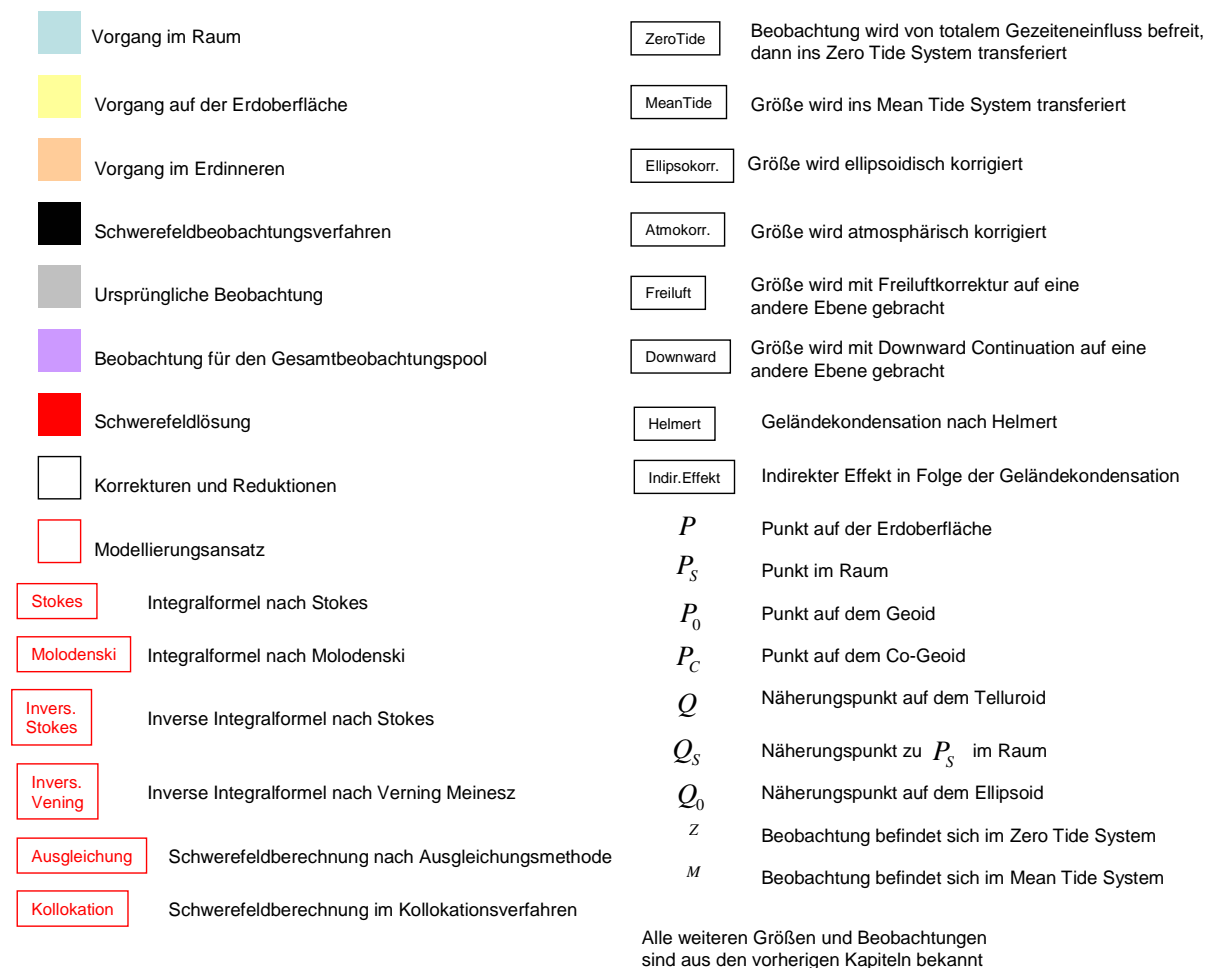
Korrekturen und Reduktionen sind oftmals sehr klein und können vernachlässigt werden, wenn sie eine Größenordnung kleiner als die Genauigkeit sind, mit denen Beobachtungen gemessen werden können. Die Rolle von Reduktionen und Korrekturen ist umso größer, je besser die Messgenauigkeit unserer Geräte ist. Vor Allem bei dem sehr genauen Verfahren der terrestrischen Gravimetrie spielen Korrekturen und Reduktionen eine große Rolle.

Viele Korrekturen und Reduktionen werden oftmals wiederum auf Basis von Näherungen und Vereinfachungen berechnet. Da sie sehr klein sind, geht man davon aus, dass der Fehler, der dadurch entsteht vernachlässigt werden kann.

Es ist davon auszugehen, dass die Genauigkeit geodätischer Verfahren in Zukunft weiter ansteigt. Dies bedeutet, dass in Zukunft Korrekturen, die momentan bei einigen Verfahren nicht notwendig sind, notwendig werden könnten, und auch im allgemeinen Korrekturen und Reduktionen eine noch größere Rolle spielen werden.

7 Abschließendes Schema

In den vorherigen Kapiteln wurden verschiedene Aspekte der Schwerefeldbestimmung dargelegt. Zunächst haben wir die verschiedenen Verfahren betrachtet, mit denen das Schwerefeld der Erde gemessen werden kann. Diese liefern unterschiedliche Beobachtungen, die die Grundlage der Schwerefeldbestimmung darstellen (siehe Tabelle 3-1). Dann haben wir uns mit speziellen Anforderungen beschäftigt, die die Beobachtungen erfüllen müssen, damit sie für die Schwerefeldberechnung verwendet werden können. Hier haben wir gesehen, dass alle Beobachtungen, die zur Schwerefeldbestimmung verwendet werden, in Stör- oder Anomaliengrößen umgewandelt werden müssen. Die wichtigsten Stör- und Anomaliengrößen sind in Tabelle 4-1 zusammengefasst. Zur Berechnung des Schwerefeldes können verschiedene Modellierungsansätze verwendet werden. Diese wurden in Kapitel 5 vorgestellt und sind in Abbildung 5.9 zusammengefasst. In Kapitel 6 wurden die wichtigsten Reduktionen und Korrekturen vorgestellt, die berücksichtigt werden müssen, damit eine hochgenaue Schwerefeldbestimmung möglich ist. In diesem Kapitel soll als Abschluss dieser Arbeit ein Schema folgen, in dem die wichtigsten Inhalte der vorherigen Kapitel zusammengefasst und miteinander verknüpft werden:



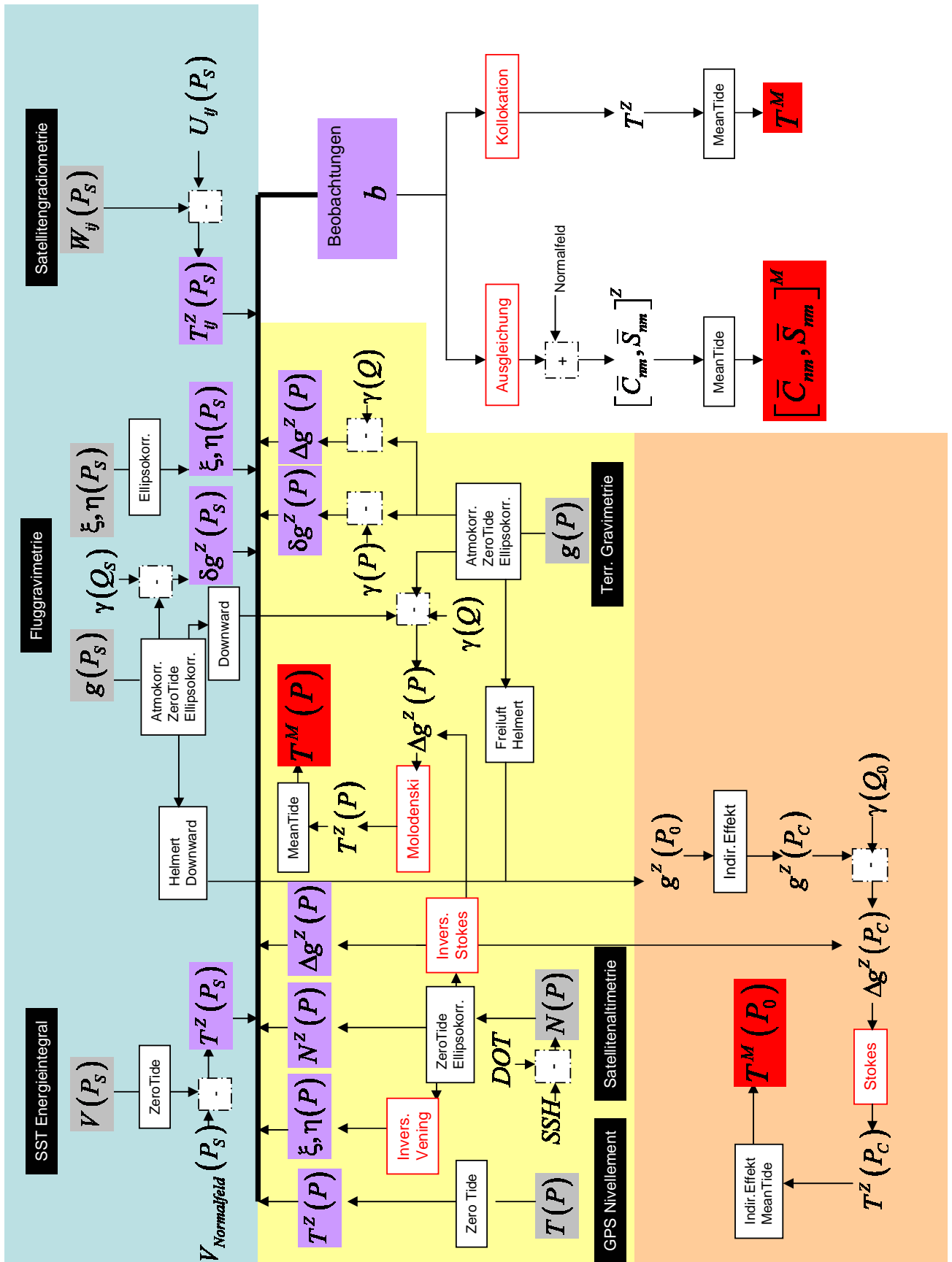


Abbildung 7.1: Schema zur Schwerefeldbestimmung (bitte wenden)

Im Raum erhalten wir aus der SST Energieintegralmethode das Gravitationspotential - dieses ist bereits frei vom Gezeiteneinfluss, da dieser bereits in den Beschleunigungen, die im Rahmen der Energieintegralmethode integriert werden müssen, eliminiert wurde -, aus der Fluggravimetrie den Schwerevektor und aus der Satellitengradiometrie Schweregradienten. Alle diese Größen können, nachdem die notwendigen Korrekturen und Reduktionen (siehe Abbildung 7.1) vorgenommen worden sind, durch Differenzbildung mit den entsprechenden Größen im Normalfeld zu Störgrößen verarbeitet werden, d.h. das Gravitationspotential zum Störpotential, der Schwerebeschleunigungsvektor zu Schwerstörungen und Lotabweichungen und die Schweregradienten zu den zweiten Ableitungen des Störpotentials. Die Störgrößen können dann einem Beobachtungspool zugeführt werden, aus dem in einem Ausgleichungs- oder Kollokationsprozess eine Schwerefeldlösung berechnet werden kann. Würde man in den Ausgleichungs- oder Kollokationsprozess nur die Störpotentialwerte aus dem Energieintegral einführen, würde man eine Satellite-Only Schwerefeldlösung erhalten. Würden auch noch die zweiten Ableitungen des Störpotentials aus der Satellitengradiometrie berücksichtigt, würde man eine Schwerefeldlösung erhalten, wie man sie ungefähr von GOCE erhalten wird. Die Schwerewerte im Raum, die man aus der Fluggravimetrie erhält, können alternativ auch in die Schwerefeldberechnung nach *Stokes* oder *Molodenski* eingehen. Hierzu müssen sie zunächst mit Hilfe der Downward Continuation auf die entsprechende Randfläche gebracht werden, wo dann die Schwereanomalie gebildet werden kann, die in die *Stokes*- bzw. *Molodenski*-Integralformeln eingehen. Bei der *Stokes*-Methode müssen zusätzlich noch die Landmassen außerhalb des Geoids berücksichtigt werden, was mit der Kondensationsmethode nach *Helmert* möglich ist. Auch der dadurch entstehende indirekte Effekt darf nicht vernachlässigt werden, mit dem ein Übergang aufs Co-Geoid verbunden ist, der nach der Anwendung der Integralformel wieder rückgängig gemacht werden muss.

Auf der Erd- bzw. Meeresoberfläche kann das Schwerefeld mit Hilfe von GPS-Nivellement, Satellitenaltimetrie und terrestrischer Gravimetrie beobachtet werden. Das GPS-Nivellement und die Satellitenaltimetrie liefern Störpotentialwerte bzw. Geoidhöhen, also bereits Störgrößen, die direkt, nachdem die notwendigen Korrekturen und Reduktionen vorgenommen worden sind (siehe wiederum wie auch im Folgenden Abbildung 7.1), dem Beobachtungspool für die Ausgleichung bzw. die Kollokation zugeführt werden können. Die altimetrischen Geoidhöhen können mit Hilfe der inversen Formel nach *Vening-Meinesz* auch in Lotabweichungen umgewandelt werden, die wiederum in den Beobachtungspool einfließen. Die Schwerewerte aus der terrestrischen Gravimetrie können, nachdem die notwendigen Korrekturen und Reduktionen angebracht worden sind, durch Subtraktion der entsprechenden Näherungsgrößen in Schwereanomalien oder Schwerstörungen verarbeitet werden, die wiederum in den Beobachtungspool einfließen. Mit Hilfe der Intragralformel nach *Molodenski* kann aus den Schwereanomalien auch direkt das Schwerefeld berechnet werden. Mit Hilfe der Freiluftkorrektur können die Schwerewerte auch auf das Geoid gebracht werden. Hier muss dann wiederum der Einfluss der Landmassen und des daraus resultierenden Effekts bedacht werden. Bildet man dann Schwereanomalien, kann mit der *Stokes*-Formel das Schwerefeld berechnet werden. Da terrestrische Gravimetrie nur Beobachtungen an Land liefert, ist es möglich, mit Hilfe der inversen *Stokes*-Formel aus den altimetrischen Geoidhöhen Schwereanomalien zu berechnen, die zusätzlich zu den terrestrischen Schwereanomalien in die *Stokes*- oder die *Molodenski*-Formeln eingehen können.

Aus dem Modellierungsansatz der Ausgleichung resultieren Differenzpotentialkoeffizienten. Addiert man Normalfeldkoeffizienten zu diesen, erhält man einen fertigen Satz Potentialkoeffizienten. Die Kollokation und die Integralformeln liefern das Störpotential. Aus diesem lassen sich mit Hilfe der sphärisch harmonischen Synthese (siehe HEISKANAN & MORITZ (1967)) ebenso Differenzpotentialkoeffizienten berechnen, die durch Addition von Normalfeldkoeffizienten in einen fertigen Satz Potentialkoeffizienten überführt werden

können. In Bezugnahme auf Kapitel 6.1.4 empfiehlt es sich, die endgültige Schwerefeldlösung ins Mean Tide System zu transferieren, um so einen möglichst realitätsnahen Bezug herzustellen.

Im Rahmen dieser Arbeit sollte ein Überblick über den Weg von der Beobachtung des Schwerefeldes bis zu dessen Berechnung gegeben werden, mit besonderer Berücksichtigung der entsprechenden Korrekturen und Reduktionen.

Hierzu wurden viele verschiedene Themenbereiche angeschnitten, von denen auf Grund der Masse leider nicht alle detailliert behandelt werden konnten. Um einen vertieften Einblick zu erhalten, sei auf die nachfolgende Literatur verwiesen, auf die sich diese Arbeit stützt.

Herauszuheben sind hierbei vor allem HEISKANEN & MORITZ (1967), die in ihrem fundamentalen Werk die Besonderheiten der meisten Schwerefeldbeobachtungen darstellen, ausführlich die Thematik Randwertaufgabe und verschiedene Integralformeln behandeln, sowie MORITZ (1980), der das Kollokationsverfahren ausführlich vorstellt und zeigt, wie dieses am besten angewendet werden kann, und GRUBER (2000), der die Ausgleichung detailliert darstellt und verdeutlicht, was berücksichtigt werden muss, damit die Ausgleichungssysteme mit normalen Rechen- und Speicherkapazitäten überhaupt gelöst werden können.

8 Literaturliste

Boedecker G, A Stürze (2006) *SAGS4 – Strap Down Airborne Gravimetry System Analysis*. In: “Observation of the Earth System from Space”, 463-478. Ed: J Flury, R Rummel, C Reigber, M Rothacher, G Boedecker, U Schreiber. Springer Verlag, Berlin/Heidelberg.

Bruns H (1878) *Die Figur der Erde*. Königliches Preußisches Geodätisches Institut, Berlin.

Ecker E, A Mittermayer (1989) *Gravity corrections for the influence of the atmosphere*. Bollettino di geofisica teorica version, 11, 70-80.

Ekman M (1989) *Impacts of Geodetic Phenomena on Systems for Height and Gravity*. Journal of Geodesy, 63, 3, 281-296. Springer Verlag, Berlin/Heidelberg.

Gerlach C, L Földvary, D Svehla, T Gruber, M Wermuth, N Sneeuw, B Frommknecht, H Oberndorfer, T Peters, M Rothacher, R Rummel, P Steigenberger (2003) *A CHAMP only gravity field model from kinematic orbits using the energy integral*. Geophysical Research Letters, 30(20), 2037, doi:10.1029/2003GL018025.

Gerlach C (2003) *Zur Höhensystemumstellung und Geoidberechnung in Bayern*. C, 571, Deutsche Geodätische Kommission, München.

Gruber T (2000) *Hochauflösende Schwerefeldbestimmung aus Kombination von terrestrischen Messungen und Satellitendaten über Kugelfunktionen*. STR00/16, GeoForschungsZentrum Potsdam, Potsdam.

Gruber T, R Rummel, O Abrikosov, R van Hees (2007) *GOCE High Level Processing Facility-GOCE Level 2 Product Data Handbook*. The European GOCE Gravity Consortium, ESA.

Gruber T, T Peters, L Zenner (2008) *The Role of the Atmosphere for Satellite Gravity Missions*. IAG Symposium.

Gruber T, F Flechtner (2008) *Vereinfachte Darstellung der GRACE Datenanalyse*. Persönliche Mitteilung.

Heiskanen W A, H Moritz (1967) *Physical Geodesy*. W.H. Freeman and Company, San Francisco.

Hofmann-Wellenhof B, H Moritz (2005) *Physical Geodesy*. Springer Verlag, Wien.

Hughes C W, J R Bingham (2008) *An Oceanographer’s Guide to GOCE and the Geoid*. Ocean Science Discussions, 4, 15-29.

- Lemoine F G, S C Kenyon, J K Factor, R G Trimmer, N K Pavlis, D S Chinn, C M Cox, S M Klosko, S B Luthcke, M H Torrence, Y M Wang, R G Williamson, E C Pavlis, R H Rapp, T R Olson (1998) *The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96*. Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland.
- Mäkinen J, J Ihde (2007) *The permanent tide in height systems*. IUGG Vortrag in Perugia.
- McCarthy D D, G Petit (2004) *IERS Conventions (2003)*. IERS Technical Note 32, Verlag des Bundesamt für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main.
- Moritz H (1980) *Advanced Physical Geodesy*. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe.
- Moritz H (1974) *Precise Gravimetric Geodesy*. 219, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.
- Müller J (2001) *Die Satellitengradiometriemission GOCE – Theorie, technische Realisierung und wissenschaftliche Nutzung*. C, 541, Deutsche Geodätische Kommission, München.
- Pavlis N K (1988) *Modeling and estimation of a low degree geopotential model from terrestrial gravity data*. 386, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.
- Peters T (2007) *Modellierung zeitlicher Schwerevariationen und ihre Erfassung mit Methoden der Satellitengravimetrie*. C, 606, Deutsche Geodätische Kommission, München.
- Poutanen M, M Vermeer, J Mäkinen (1996) *The permanent Tide in GPS Positioning*. Journal of Geodesy, 70, 8, 499-504. Springer Verlag, Berlin/Heidelberg.
- Rapp R H (1989) *The treatment of permanent tidal effects in the analysis of satellite altimeter data for sea surface topography*. Manuscripta geodaetica, 14, 368-372. Springer Verlag, Berlin/Heidelberg.
- Reigber Ch (1989) *Gravity Field Recovery from Satellite Tracking Data*. In: "Theory of Satellite Geodesy and Gravity Field Determination", Lecture Notes in Earth Sciences, 25, 197-234. Ed: F Sanso, R Rummel. Springer Verlag, Berlin/Heidelberg.
- Rummel R (1986) *Satellite Gradiometry*. In: "Mathematical and Numerical Techniques in Physical Geodesy", Lecture Notes in Earth Sciences, 7, 317-363. Ed: H Sünkel. Springer Verlag, Berlin.
- Rummel R (1991) *Fysische Geodesie II*. Vorlesungsscriptum. Faculteit der Geodesie, TU Delft.
- Rummel R (2005) *Erdmessung*. Vorlesungsscriptum. Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie, TU München.
- Rummel R (1997) *Spherical Spectral Properties of the Earth's Gravitational Potential and its First and Second Derivatives*. In: "Geodetic Boundary Value Problems in View of the One Centimeter Geoid", Lecture Notes in Earth Sciences, 65, 359-404. Ed: F Sanso, R Rummel. Springer Verlag, Berlin.

Savcenko R (2007) *Berechnung von Schwereanomalien aus Altimeterdaten*. Diplomarbeit. Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie, TU München.

Schmeer M (2006) *Zeitliche Stabilität und zeitliche Veränderungen im Gravimetereichsystem Garmisch-Zugspitze*. Diplomarbeit. Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie, TU München.

Steigenberger P (2006) *MATLAB-Toolbox zur TOPEX/POSEIDON Altimeterdatenverarbeitung*. Diplomarbeit. Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie, TU München.

Stummer C (2006) *Analyse der Gradiometergleichungen der GOCE Satellitenmission zur Schwerefeldbestimmung*. 25, Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie, TU München.

Torge W (2003) *Geodäsie*. W de Gruyter, Berlin.

Torge W (1989) *Gravimetrie*. W de Gruyter, Berlin.

Trenberth K E, L Smith (2005) *The Mass of the Atmosphere: A Constraint on Global Analyses*. Journal of Climate, 18, 6, 864-875.

Tscherning C C, R H Rapp (1974) *Closed Covariance Expressions for Gravity Anomalies, Geoid Undulations and Deflections of the Verticals Implied by Anomaly Degree Variance Models*. 208, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.

Wenzel H G (1985) *Hochauflösende Kugelfunktionsmodelle für das Gravitationspotential der Erde*. 137, Fachrichtung Vermessungswesen, Universität Hannover.

Veröffentlichungen in der Schriftenreihe IAPG / FESG (ISSN 1437-8280):
Reports in the series IAPG / FESG (ISSN 1437-8280):

- No. 1:** Müller J., Oberndorfer H. (1999). *Validation of GOCE Simulation*. ISBN-10 3-934205-00-3, ISBN-13 978-3-934205-00-0.
- No. 2:** Nitschke M. (1999). *SATLAB – Ein Werkzeug zur Visualisierung von Satellitenbahnen*. ISBN-10 3-934205-01-1, ISBN-13 978-3-934205-01-7..
- No. 3:** Tsoulis D. (1999). *Spherical harmonic computations with topographic/isostatic coefficients*. ISBN-10 3-934205-02-X, ISBN-13 978-3-934205-02-4..
- No. 4:** Dorobantu R. (1999). *Gravitationsdrehwaage*. ISBN-10 3-934205-03-8, ISBN-13 978-3-934205-03-1.
- No. 5:** Schmidt R. (1999). *Numerische Integration gestörter Satellitenbahnen mit MATLAB*. ISBN-10 3-934205-04-6, ISBN-13 978-3-934205-04-8.
- No. 6:** Dorobantu R. (1999). *Simulation des Verhaltens einer low-cost Strapdown-IMU unter Laborbedingungen*. ISBN-10 3-934205-05-4, ISBN-13 978-3-934205-05-5.
- No. 7:** Bauch A., Rothacher M., Rummel R. (2000). *Bezugssysteme in Lage und Höhe. Tutorial zum Kursus INGENIEURVERMESSUNG 2000*. ISBN-10 3-934205-06-2, ISBN-13 978-3-934205-06-2.
- No. 8:** Rothacher M., Zebhauser B. (2000). *Einführung in GPS. Tutorial zum 3. SAPOS-Symposium 2000 in München*. ISBN-10 3-934205-07-0, ISBN-13 978-3-934205-07-9.
- No. 9:** Ulrich M. (2000). *Vorhersage der Erdrotationsparameter mit Hilfe Neuronaler Netze*. ISBN-10 3-934205-08-9, ISBN-13 978-3-934205-08-6.
- No. 10:** Seitz F. (2000). *Charakterisierung eines bistatischen Rayleigh- und Raman-Lidars zur Bestimmung von höhenaufgelösten Wasserdampfprofilen*. ISBN-10 3-934205-09-7, ISBN-13 978-3-934205-09-3.
- No. 11:** Meyer F. (2000). *Messung von höhenaufgelösten Wasserdampfprofilen unter Verwendung eines bistatischen Raman-Lidars*. ISBN-10 3-934205-10-0, ISBN-13 978-3-934205-10-9.
- No. 12:** Peters T. (2001). *Zeitliche Variationen des Gravitationsfeldes der Erde*. ISBN-10 3-934205-11-9, ISBN-13 978-3-934205-11-6.
- No. 13:** Egger D. (2001). *Astronomie und Java – Objekte der Astronomie*. ISBN-10 3-934205-12-7, ISBN-13 978-3-934205-12-3.
- No. 14:** Steigenberger P. (2002). *MATLAB-Toolbox zur TOPEX/POSEIDON Altimeterdatenverarbeitung*. ISBN-10 3-934205-13-5, ISBN-13 978-3-934205-13-0.
- No. 15:** Schneider M. (2002). *Zur Methodik der Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten*. ISBN-10 3-934205-14-3, ISBN-13 978-3-934205-14-7.
- No. 16:** Dorobantu R., Gerlach C. (2004). *Investigation of a Navigation-Grade RLG SIMU type iNAV-RQH*. ISBN-10 3-934205-15-1, ISBN-13 978-3-934205-15-4.
- No. 17:** Schneider M. (2004). *Beiträge zur Bahnbestimmung und Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten sowie zur Orientierung von Rotationssensoren*. ISBN-10 3-934205-16-X, ISBN-13 978-3-934205-16-1.
- No. 18:** Egger D. (2004). *Astro-Toolbox, Theorie*. ISBN-10 3-934205-17-8, ISBN-13 978-3-934205-17-8.
- No. 19:** Egger D. (2004). *Astro-Toolbox, Praxis*. ISBN-10 3-934205-18-6, ISBN-13 978-3-934205-18-5.
- No. 20:** Fackler U. (2005). *GRACE - Analyse von Beschleunigungsmessungen*. ISBN-10 3-934205-19-4, ISBN-13 978-3-934205-19-2.
- No. 21:** Schneider M. (2005). *Beiträge zur Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten*. ISBN-10 3-934205-20-8, ISBN-13 978-3-934205-20-8.
- No. 22:** Egger D. (2006). *Sinus-Netzwerk*. ISBN-10 3-934205-21-6, ISBN-13 978-3-934205-21-5.
- No. 23:** Schneider M. (2006). *Gravitationsfeldbestimmung unter Verwendung von Bilanzgleichungen für beliebige Observablen*. ISBN-10 3-934205-22-4, ISBN-13 978-3-934205-22-2.
- No. 24:** Mladek F. (2006). *Hydrostatische Isostasie*. ISBN-10 3-934205-23-2, ISBN-13 978-3-934205-23-9.
- No. 25:** Stummer C. (2006). *Analyse der Gradiometergleichungen der GOCE Satellitenmission zur Schwerefeldbestimmung*. ISBN-10 3-934205-24-0, ISBN-13 978-3-934205-24-6.
- No. 26:** Fecher T. (2008). *Methodische Grundlagen von kombinierten Schwerefeldmodellen*. ISBN-13 978-3-934205-25-3.

Weitere Exemplare können bezogen werden unter / Copies are available from:

Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie

Technische Universität München

Arcisstrasse 21, D-80290 München, Germany

Telefon: +49-89-289-23190, Telefax: +49-89-289-23178, Email: rechel@bv.tum.de

Oder im Internet / Or via Internet:

<http://www.iapg.bv.tum.de/Schriftenreihe/>

