



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

Zeitliche Variationen des Gravitationsfeldes der Erde

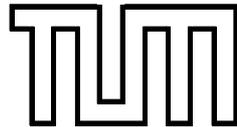
T. Peters

IAPG / FESG No. 12

Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie
Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie

München 2001

Technische Universität München



Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie

Zeitliche Variationen des Gravitationsfeldes der Erde

Diplomarbeit

Thomas Peters

Betreuer: Prof. Dr.-Ing. Reiner Rummel
Dr.-Ing. Nico Sneeuw

Abgabe: 30. Mai 2001

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Mathematische Beschreibung der Schwerevariationen	3
2.1. Gravitationspotential	3
2.2. Modellierung zeitlicher Variationen	6
2.2.1. Ansatz nach Euler	8
2.2.2. Ansatz nach Lagrange	13
2.3. Auflast und Love'sche Zahlen	14
2.4. Massenerhalt und Massenzentrum	16
2.5. Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen	17
2.6. Schwere und Gravitation	19
3. Ursachen für Schwerefeldvariationen	20
3.1. Das dynamische System Erde	20
3.2. Geophysikalische Prozesse	23
3.2.1. Gezeiten	24
3.2.2. Atmosphäre	24
3.2.3. Hydrosphäre	25
3.2.4. Kryosphäre	26
3.2.5. Postglaziale Hebungen	27
3.2.6. Vulkanismus und Erdbeben	27
3.2.7. Prozesse der festen Erde	28

4. Effekt der Atmosphäre	29
4.1. Massenveränderung und Atmosphäre	29
4.2. Daten	32
4.3. Wechselwirkung mit dem Ozean	33
4.4. Berechnung	35
4.4.1. Höhenkorrektur des Luftdrucks	35
4.4.2. Berechnung der Oberflächendichten	36
4.4.3. Zusammenstellung des Rechenweges	37
4.5. Ergebnisse	40
4.5.1. Teilschritte für einen Tag	40
4.5.2. Zeitreihe von 1990 - 2000	44
4.6. Analyse	47
4.6.1. Räumliche Unterschiede im Luftdruck	47
4.6.2. Weltweite Schwerefeldschwankungen	52
4.7. Vergleich der Ergebnisse mit anderen Studien	58
5. Schwerefeldvariationen und Satellitenmissionen	62
5.1. Vergleich der Grad-RMS	62
5.2. Einfluß auf GOCE-Meßgrößen	64
6. Zusammenfassung und Ausblick	70
6.1. Zusammenfassung	70
6.1.1. Mathematische Formulierung	71
6.1.2. Übersicht der Ursachen	72
6.1.3. Berechnung und Analyse der Effekte	73
6.1.4. Einfluß auf Satellitenmissionen	73
6.2. Ausblick	74
A. Legendre-Polynome und Kugelflächenfunktionen	76
A.1. Legendre-Polynome	76
A.2. Assoziierte Legendre-Funktionen	77
A.3. Normierte assoziierte Legendre-Funktionen	78

A.4. Kugelflächenfunktionen	79
A.5. Rechenoperationen	80
A.5.1. Kontinuierliche Darstellung	80
A.5.2. Diskrete Rechenoperationen	81
B. Fouriertransformation	83
B.1. Kontinuierliche periodische Signale	83
B.2. Diskrete periodische Signale	85
C. Anmerkungen zu den verwendeten Daten	87
D. Übersicht über verwendete Programme	89
Literaturverzeichnis	91

1. Einleitung

Das durch die Massenverteilung der Erde bestimmte Gravitationsfeld ist eine der grundlegenden physikalischen Kräfte aller dynamischen Prozesse in der Erde und auf ihrer Oberfläche. Seit Beginn des Zeitalters der Raumfahrt wird die Bestimmung des Gravitationsfeldes der Erde als eine zentrale Aufgabe angesehen. Erst mit einem genauen und hochauflösenden Gravitationsfeld können viele geodynamische Prozesse besser verstanden werden. Neben der Geophysik mit all ihren Disziplinen wird auch die Geodäsie von diesen Kenntnissen profitieren. So stellt das Gravitationsfeld die Basis für globale geodätische Bezugssysteme zur Bestimmung von horizontalen und vertikalen Bewegungen und zur Vereinheitlichung von Höhensystemen dar. Nur mit seiner Kenntnis können Satellitenbahnen besser berechnet werden. Zudem ist ein genau bestimmtes Geoid die Voraussetzung für ein Nivellement mit GPS.

Moderne Meßmethoden der Satellitengeodäsie haben wesentlich zu den momentan vorhandenen Modellen für das Gravitationsfeld beigetragen. Diese Modelle enthalten das statische Gravitationsfeld und ein Mittel seiner zeitlichen Variationen. Die Variationen sind durch Massenverlagerungen in der Erde sowie auf und oberhalb ihrer Oberfläche verursacht und treten in den unterschiedlichsten Größenordnungen, räumlichen Ausdehnungen und Zeitskalen auf.

Zur Verbesserung der Modelle des Gravitationsfeldes sollen drei Satellitenmissionen dienen: das momentan bereits laufende Projekt CHAMP¹ sowie GRACE² und GOCE³, die sich in der Vorbereitungsphase befinden. Mit ihnen soll der statische Anteil des Gravitationsfeldes erheblich genauer und in besserer Auflösung erfaßt werden. Gleichzeitig werden lange Zeitreihen von konsistenten, globalen und hochgenauen Beobachtungen zur Verfügung stehen, die es erlauben, Teile der zeitvariablen Effekte zu messen.

¹ CHAMP: Challenging Mini-Satellite Payload for Geophysical Research and Applications [1]

² GRACE: Gravity Recovery And Climate Experiment [2]

³ GOCE: Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer Mission [3]

Es ist daher notwendig, sich mit den zeitlichen Variationen des Gravitationsfeldes der Erde auseinanderzusetzen. Dabei muß geprüft werden, ob die auftretenden Effekte mit den Satellitensensoren und der gewählten Bahnkonfiguration innerhalb der Missionsdauer meßbar sind und vor allem, ob sie vom statischen Feld trennbar sind oder nicht. Da immer nur die Summe aller Effekte gemessen wird, benötigt man in jedem Fall Daten aus anderen Meßverfahren, um die Satellitendaten mit Modellen korrigieren zu können. Andernfalls wird die angestrebte Genauigkeit für das statische Feld nicht erreichbar sein und kein Rückschluß auf einzelne Effekte möglich sein.

Vor diesem Hintergrund behandelt die vorliegende Arbeit die zeitlichen Variationen des Gravitationsfeldes der Erde. Da es sich hier um ein sehr umfassendes Thema handelt, können nicht alle Aspekte gleichermaßen berücksichtigt werden. Das Ziel ist vielmehr eine grundlegende Darstellung, die einen vollständigen Formelsatz zur Berechnung und Analyse der zeitvariablen Effekte sowie ihrer Auswirkungen auf die erwähnten Satellitenmissionen enthält. Die Anwendung dieses Formelsatzes wird dann am Beispiel des Atmosphärenbeitrags ausführlich demonstriert. Hierbei wird auf Fallstudien für spezielle Annahmen und Modellierungsansätze verzichtet. Die Arbeit soll damit als Basis für weitergehende Untersuchungen dienen. Sie gliedert sich in die folgenden Abschnitte:

1. Ausgehend vom Newton'schen Gravitationsgesetz wird in Kapitel 2 die Frage nach der mathematischen Beschreibung der Schwerevariationen und den dabei möglichen Annahmen erörtert.
2. Kapitel 3 gibt eine Übersicht über die Ursachen für Schwerevariationen und ihre jeweiligen Eigenschaften, wie sie in der Literatur zu finden sind.
3. Kapitel 4 zeigt am Beispiel der Atmosphäre ausführlich die Anwendung der Modellierung nach Kapitel 2 sowie die Analyse der erhaltenen Ergebnisse mit Hilfe einer Fouriertransformation.
4. Ansätze, mit denen die Auswirkungen der zeitvariablen Effekte auf die Messungen der Satelliten überprüft werden können, finden sich in Kapitel 5.
5. Abschließend werden eine Zusammenfassung und ein kurzer Ausblick gegeben.
6. Der Anhang bietet neben ergänzenden Bemerkungen vor allem eine Formelsammlung zu den verwendeten Rechenoperationen.

2. Mathematische Beschreibung der Schwerevariationen

Massenverlagerungen im System Erde verursachen zeitliche Schwankungen im Schwerfeld der Erde. Ziel dieses Kapitels ist es, den Rückschluß von einem Datensatz mit Informationen über Massentransporte auf ein Schweresignal zu erhalten und die dabei getroffenen Annahmen sowie mögliche Fehlerquellen zu erkennen.

2.1. Gravitationspotential

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist das Gravitationsgesetz von Newton, ausgedrückt durch das zugehörige Potential:

$$V(P) = G \iiint_{\Sigma} \frac{\rho(Q)}{\ell_{PQ}} d\Sigma_Q \quad . \quad (2.1)$$

Das Gravitationspotential V am Beobachtungsort P ist bestimmt durch das Integral über alle Volumenelemente $d\Sigma$ mit der Dichte ρ am Punkt Q . Der räumliche Abstand zwischen P und Q ist mit ℓ_{PQ} bezeichnet, G ist die Gravitationskonstante.

Für die Gleichung (2.1) gilt:

$$\nabla_P^2 V = \Delta_P V = \begin{cases} 0 & \text{für } P \text{ außerhalb } \Sigma \\ -4\pi G\rho & \text{für } P \text{ innerhalb } \Sigma \end{cases} \quad . \quad (2.2)$$

Im Falle der Berechnung im Außenraum bezeichnet man die Gleichung als Laplace-Gleichung, im Falle des Innenraums als Poisson-Gleichung. Für den Außenraum ist V also eine harmonische Funktion und kann daher nach dem Theorem von Stokes eindeutig aus Randwerten bestimmt werden (siehe z.B. [Heiskanen und Moritz, 1967]).

Da die Erde in hier genügender Näherung kugelähnliche Gestalt hat, wird im folgenden ein sphärisches Koordinatensystem gewählt, dessen Ursprung beispielsweise in das Massenzentrum der Erde gelegt wird (vgl. Kapitel 2.4). Das Volumenelement im Punkt Q ergibt sich dann zu (Abb. 2.1):

$$d\Sigma_Q = r_Q^2 \sin \theta_Q d\lambda_Q d\theta_Q dr_Q \quad . \quad (2.3)$$

Die jeweiligen Abstände der Punkte P bzw. Q vom Ursprung des Koordinatensystems sind mit r_P bzw. r_Q bezeichnet, θ steht für die Kobreite, λ für die Länge, ψ im folgenden für den sphärischen Winkel zwischen P und Q .

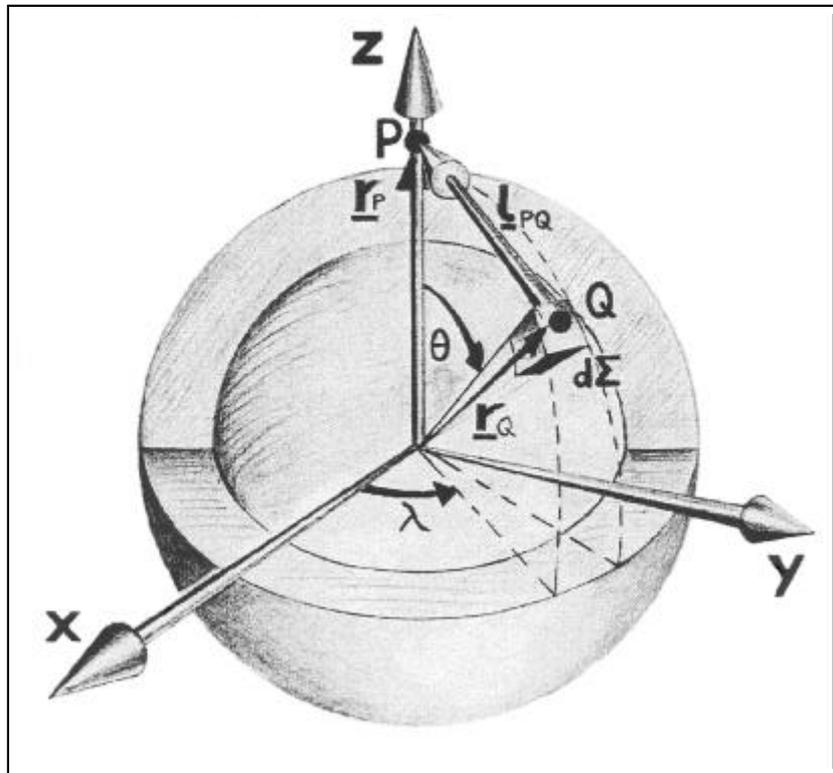


Abb. 2.1.: Beliebige Lage von P und Q , ℓ_{PQ} und $d\Sigma_Q$ in Kugelkoordinaten
 (Quelle: [Rummel, 2000])

Im folgenden soll für die Berechnung von (2.1) ein anderer Ansatz als der der Determinierung über die Randwerte gewählt werden. Zunächst wird der inverse Abstand $\frac{1}{\ell_{PQ}}$ durch Legendre-Polynome P_n (s. Anhang A.1) in eine Potenzreihe für $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ entwickelt:

$$\frac{1}{\ell_{PQ}} = \frac{1}{\sqrt{r_P^2 + r_Q^2 - 2r_P r_Q \cos \psi_{PQ}}} = \begin{cases} \frac{1}{r_P} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_Q}{r_P}\right)^n P_n(\cos \psi_{PQ}) & \text{für } r_P > r_Q \\ \frac{1}{r_Q} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_P}{r_Q}\right)^n P_n(\cos \psi_{PQ}) & \text{für } r_P < r_Q \end{cases} \quad . \quad (2.4)$$

Der sich hieraus nach Vertauschen von Integration und Summation ergebende Ausdruck für das Gravitationspotential V im Außenraum

$$V(P) = G \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r_P^{n+1}} \iiint_{\Sigma} r_Q^n P_n(\cos \psi_{PQ}) \rho_Q d\Sigma_Q \quad (2.5)$$

ist umständlich zu berechnen, da der Winkel ψ_{PQ} direkt mit dem Berechnungspunkt verknüpft ist. Eine Auftrennung in einen von P und einen von Q abhängigen Teil kann durch Anwendung des sich aus

$$\cos \psi_{PQ} = \cos \theta_P \cos \theta_Q + \sin \theta_P \sin \theta_Q \cos(\lambda_P - \lambda_Q) \quad (2.6)$$

mit

$$\cos(\lambda_P - \lambda_Q) = \cos \lambda_P \cos \lambda_Q + \sin \lambda_P \sin \lambda_Q \quad (2.7)$$

ergebenden Additionstheorems für Kugelflächenfunktionen erreicht werden:

$$P_n(\cos \psi_{PQ}) = \frac{1}{2n+1} \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos \theta_P) \bar{P}_{nm}(\cos \theta_Q) [\cos m\lambda_P \cos m\lambda_Q + \sin m\lambda_P \sin m\lambda_Q]. \quad (2.8)$$

Dabei bezeichnet \bar{P}_{nm} die vollständig normierten, assoziierten Legendre-Funktionen vom Grad n und der Ordnung m (s. Anhang A.3).

Die Anwendung dieses Additionstheorems liefert für den inversen Abstand für $r_P > r_Q$ den Ausdruck:

$$\frac{1}{\ell_{PQ}} = \frac{1}{r_P} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_Q}{r_P}\right)^n \frac{1}{2n+1} \cdot \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos \theta_P) \bar{P}_{nm}(\cos \theta_Q) [\cos m\lambda_P \cos m\lambda_Q + \sin m\lambda_P \sin m\lambda_Q]. \quad (2.9)$$

Einsetzen von (2.9) anstelle von (2.4) in (2.1) ergibt nach Vertauschen von Integration und Summation:

$$\begin{aligned} V(P) = & G \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{r_P^{n+1}} \bar{P}_{nm}(\cos \theta_P) \cdot \\ & \cdot \cos m\lambda_P \frac{1}{2n+1} \iiint_{\Sigma} r_Q^n \bar{P}_{nm}(\cos \theta_Q) \cos m\lambda_Q \rho(Q) d\Sigma_Q + \\ & + \sin m\lambda_P \frac{1}{2n+1} \iiint_{\Sigma} r_Q^n \bar{P}_{nm}(\cos \theta_Q) \sin m\lambda_Q \rho(Q) d\Sigma_Q \Big]. \quad (2.10) \end{aligned}$$

Betrachtet man nun den von Q abhängigen Teil separat und multipliziert ihn mit $1/(M \cdot R^n)$ (M : Masse der Erde, R : Radius, meist große Halbachse des GRS80-Ellipsoids), so entsteht die Definitionsgleichung für die dimensionslosen Potentialkoeffizienten:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{array} \right\} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{M} \iiint_{\Sigma} \left(\frac{r_Q}{R}\right)^n \rho(Q) \bar{P}_{nm}(\cos \theta_Q) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda_Q \\ \sin m\lambda_Q \end{array} \right\} d\Sigma_Q \quad (2.11)$$

Die notwendige Multiplikation des von P abhängigen Teils mit $M \cdot R^n$ führt schließlich zu der aus der Lösung der Laplace-Gleichung in sphärischen Koordinaten bekannten spektralen Darstellung für das Gravitationspotential:

$$V(P) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r_P}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos \theta_P) \left[\bar{C}_{nm} \cos m\lambda_P + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda_P \right]. \quad (2.12)$$

Die Informationen über die Dichteverteilung im Erdinneren sind in den Potentialkoeffizienten verborgen.

2.2. Modellierung zeitlicher Variationen

Schwankungen im Gravitationsfeld werden durch Schwankungen in der Massenverteilung und damit in der Dichteverteilung verursacht. Da diese in das Potential eingehen, werden die Potentialkoeffizienten \bar{C}_{nm} und \bar{S}_{nm} zeitabhängig. Bezeichnet man mit $\Delta\rho$ die Änderung der Dichte am Ort Q und mit $\Delta\bar{C}_{nm}$ bzw. $\Delta\bar{S}_{nm}$ die Änderung in den Koeffizienten, so kann statt (2.11) geschrieben werden:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta\bar{C}_{nm} \\ \Delta\bar{S}_{nm} \end{array} \right\} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{M} \iiint_{\Sigma} \left(\frac{r_Q}{R}\right)^n \Delta\rho(r_Q, \theta_Q, \lambda_Q) \bar{P}_{nm}(\cos \theta_Q) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda_Q \\ \sin m\lambda_Q \end{array} \right\} d\Sigma_Q. \quad (2.13)$$

Zur Berechnung dieser Gleichung gibt es nach [Chao, 1994] zwei unterschiedliche, in erster Näherung gleichwertige Ansätze, den Euler'schen und den Lagrange'schen. Die grundlegenden Unterschiede dieser beiden Ansätze sollen nun kurz skizziert werden, anschließend wird näher auf die Anwendung auf das Schwerefeld eingegangen. Welcher von beiden Ansätzen gewählt wird, entscheidet sich nach der Eignung für den betrachteten Effekt.

Massenverlagerungen in und auf der Erde finden immer in einem bestimmten Gebiet statt, das im Extremfall auch die ganze Erde umfassen kann. Beim Ansatz nach Euler werden die Massenveränderungen an allen Punkten dieses Gebiets betrachtet. Der Ansatz nach Lagrange hingegen verfolgt die Wege (Trajektorien) aller Masseteilchen des Gebietes während des Transports. In der Praxis wird natürlich diskretisiert und es werden ausgewählte Punkte bzw. bestimmte Wege betrachtet.

Zur Verdeutlichung sei das Beispiel der Meeresströmungen erläutert. Betrachtet man nach Euler die Massenverlagerung an bestimmten Punkten, so bedeutet dies, an diesen raumfesten Punkten mit geeigneten Sensoren die Strömung nach Richtung und Stärke zu gleichen Zeitpunkten zu messen. Beim Lagrange'schen Ansatz hingegen werden die

Wege von an der Wasseroberfläche treibenden Gegenständen erfaßt (vgl. Abb. 2.2). Solange die Strömung nicht zeitabhängig ist, entsprechen die Strömungsvektoren des Euler'schen Ansatzes den Tangenten an die Wege nach Lagrange. Treten zeitliche Änderungen der Strömung auf, stellt die Abb. 2.2 nur eine Momentaufnahme dar, die Strömungsvektoren ändern laufend Richtung und Betrag und die Wege des Lagrange'schen Ansatzes ergeben sich aus der schrittweisen Summation der örtlichen Strömungsvektoren [Pond und Pickard, 1983].

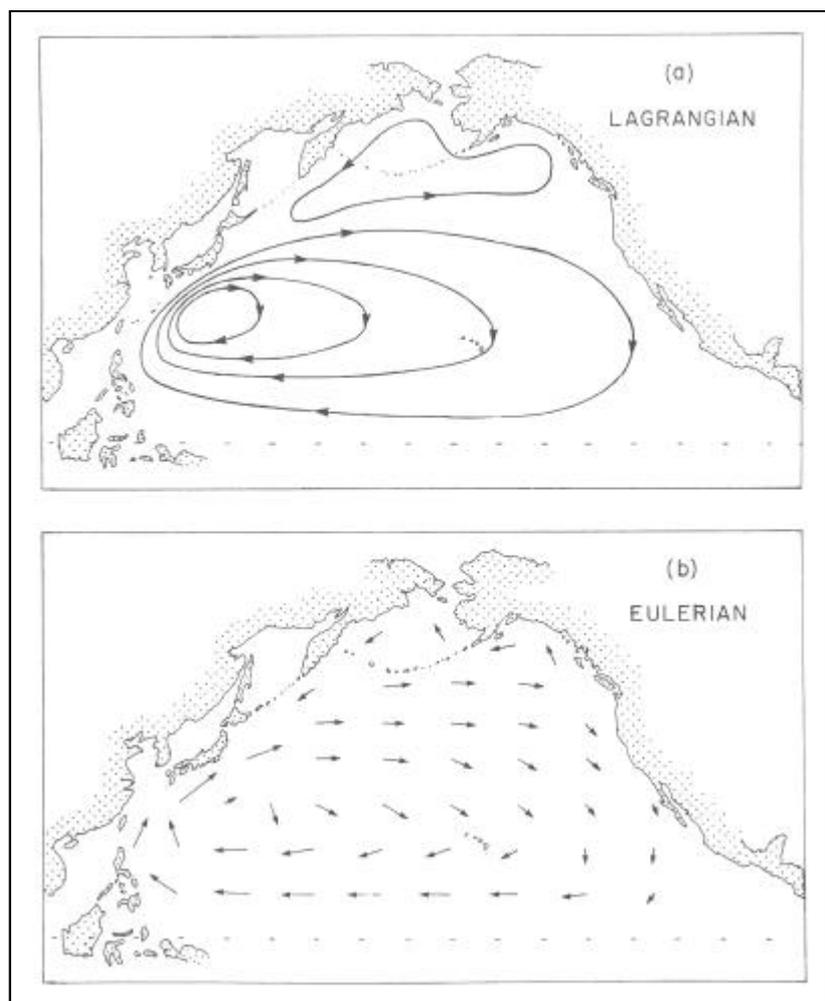


Abb. 2.2.: Meeresströmungen beschrieben nach Lagrange (a) und Euler (b)
(Quelle: [Pond und Pickard, 1983])

Analog kann man sich den später betrachteten Fall der Atmosphäre vorstellen, bei dem der Luftdruck die zu beobachtende Größe darstellt. Nach Euler beobachtet man z.B. mit einem Barographen den Luftdruckverlauf an bestimmten Orten, nach Lagrange verfolgt man die Wege der Hoch- und Tiefdruckgebiete mit ihren Frontsystemen oder bestimmter Isobaren.

2.2.1. Ansatz nach Euler

Wie bereits festgestellt, geht man von der Massenveränderung an bestimmten Punkten aus. Anders ausgedrückt wird die Umverteilung der Masse durch die räumliche Dichteverteilung als Funktion der Zeit t dargestellt, $\rho(r, \theta, \lambda; t)$. Die Berechnung nach (2.13) erfordert damit eine Integration über den verformten Körper. Zur Vereinfachung der Notation wird im folgenden auf die Zeit t verzichtet, die dargestellten Formeln sind nur für einzelne Zeitpunkte gültig.

In der Gleichung (2.13) treten innerhalb des Integrals zwei von der Höhe des Punktes Q abhängige Funktionen auf: zum einen das Verhältnis von r_Q zum Erdradius R und zum anderen die Dichteänderung $\Delta\rho$. Die Integration über r kann wegen $\Delta\rho$ nicht direkt ausgeführt werden. Daher trifft man folgende *Annahme*: Alle Dichteschwankungen $\Delta\rho$ finden in einer dünnen Schicht der Dicke H nahe der Erdoberfläche statt, innerhalb dieser Schicht jedoch nicht in radialer Richtung. Darunter und evtl. auch darüber habe die Erde eine konstante mittlere Dichte $\bar{\rho}$ (ca. 5517 kg/m³). Die radiale Integration beschränkt sich damit auf die Dicke der Schicht. Für die Masse der Erde ergibt sich die Annahme:

$$M \approx \frac{4}{3}\pi R^3 \bar{\rho} \quad . \quad (2.14)$$

Nach Einsetzen in (2.13) und Aufspalten der Integration in Lage und Höhe erhält man:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta\bar{C}_{nm} \\ \Delta\bar{S}_{nm} \end{array} \right\} = \frac{3}{4\pi R\bar{\rho}(2n+1)} \iint_{\sigma} \Delta\hat{\rho}(\theta_Q, \lambda_Q) \bar{P}_{nm}(\cos\theta_Q) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda_Q \\ \sin m\lambda_Q \end{array} \right\} \cdot \int_{r=R}^{R+H} \left(\frac{r_Q}{R}\right)^{n+2} dr_Q d\sigma_Q \quad . \quad (2.15)$$

Eine eventuelle Variation von $\Delta\rho$ in radialer Richtung innerhalb der Schicht wurde vernachlässigt, die Dichteschwankung bleibt aber lageabhängig, $\Delta\hat{\rho}(\theta_Q, \lambda_Q)$. Das Volumenelement wurde ersetzt durch ein sphärisches Oberflächenelement über die Beziehung

$$d\Sigma_Q = r_Q^2 dr_Q d\sigma_Q \quad \text{mit} \quad d\sigma_Q = \sin\theta_Q d\theta_Q d\lambda_Q \quad . \quad (2.16)$$

Dieser Ansatz eignet sich v.a. für Massenverlagerungen, die an der Oberfläche der Erde stattfinden, wie sie in Atmosphäre und Hydrosphäre auftreten. Für Prozesse im Erdinneren bietet sich dagegen der Ansatz von Lagrange an.

Die Dicke der Schicht H ist im Falle der Atmosphäre durch die Mächtigkeit der Troposphäre bestimmt und liegt folglich im Bereich von 10–15 km [Wahr et al., 1998]. Man

kann sich die Schicht auch zusammengesetzt aus vielen Schichten der Dicke ΔH denken. Im weiteren wäre dann H durch ΔH zu ersetzen mit anschließender Summation über die einzelnen Teilschichten, was hier jedoch unterlassen werden soll.

Nun kann nach [Rummel et al., 1988] und [Verhagen, 2000] die radiale Integration über $r_Q(\theta_Q, \lambda_Q) = R + H(\theta_Q, \lambda_Q)$ durchgeführt werden. Es folgt mit $H = H(\theta_Q, \lambda_Q)$:

$$\int_{r=R}^{R+H} \left(\frac{r_Q}{R}\right)^{n+2} dr_Q = \frac{R}{n+3} \left[\left(\frac{R+H}{R}\right)^{n+3} - 1 \right] . \quad (2.17)$$

Zur Vereinfachung und aus numerischen Gründen ($H \ll R$, $(R+H)/R \approx 1$ auch für Potenzen) entwickelt man (2.17) in eine binomische Reihe und formt um:

$$\begin{aligned} (2.17) &= \frac{R}{n+3} \left[\sum_{k=0}^{n+3} \binom{n+3}{k} \left(\frac{H}{R}\right)^k - 1 \right] \\ &= \frac{R}{n+3} \left[1 + \binom{n+3}{1} \frac{H}{R} + \binom{n+3}{2} \left(\frac{H}{R}\right)^2 + \binom{n+3}{3} \left(\frac{H}{R}\right)^3 + \dots - 1 \right] \\ &= H \left[1 + \frac{(n+2)H}{2R} + \frac{(n+2)(n+1)}{6} \left(\frac{H}{R}\right)^2 + \dots \right] . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Für eine vereinfachte Berechnung ohne Glieder in Abhängigkeit vom Grad n bricht man nach dem linearen Term ab. Um die dadurch gemachten Fehler abzuschätzen, können die restlichen Glieder mit der binomischen Reihe $0.5H[(1+H/R)^{n+2} - 1]$ majorisiert oder durch Vergleich mit der exakten Formel (2.17) berechnet werden. Die relativen Fehler δ_r , je Grad n ergeben sich im zweiten Fall zu:

$$\delta_r = \frac{R}{(n+3)H} \left[\left(1 + \frac{H}{R}\right)^{n+3} - 1 \right] - 1 . \quad (2.19)$$

Der weitaus größte Anteil stammt dabei vom quadratischen Glied $(n+2)H/(2R)$. Die Fehler nehmen mit der Dicke der Schicht und dem maximalen Grad n_{\max} zu. Dieser hängt mit der räumlichen Auflösung L auf der Erde über die einfache Beziehung

$$L = \frac{U}{2n_{\max}} \quad (2.20)$$

zusammen, wobei $U = 2\pi R$ für den Erdumfang steht. Die Auflösung wird in der Praxis meist durch die Auflösung der verfügbaren Datensätze festgelegt. Eine Abschätzung für die Obergrenze von δ_r mit $n_{\max} = 72$ führt bei einer Schichtdicke von $H = 15$ km zu Fehlern von $\delta_r = 9.2\%$, bei allerdings entsprechend dem hohen Grad sehr geringen Beträgen. Der Anteil des quadratischen Terms am gesamten Relativfehler liegt mit 8.7% bei über 94% . Es empfiehlt sich eine Betrachtung im Einzelfall.

Durch Abbruch von (2.18) nach dem linearen Term bleibt von der radialen Integration lediglich die Höhe H selbst übrig, und (2.15) wird zu:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \bar{C}_{nm} \\ \Delta \bar{S}_{nm} \end{array} \right\} = \frac{3}{4\pi R \bar{\rho} (2n+1)} \iint_{\sigma} \Delta \hat{\rho}(\theta_Q, \lambda_Q) H(\theta_Q, \lambda_Q) \bar{P}_{nm}(\cos \theta_Q) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda_Q \\ \sin m\lambda_Q \end{Bmatrix} d\sigma_Q \quad . \quad (2.21)$$

Das Produkt aus horizontaler Dichteänderung $\Delta \hat{\rho}$ und Höhe H ist eine *Oberflächendichte* $\Delta \sigma$ einer *einfachen Schicht*, also Masse pro Fläche [kg/m²]. Im später betrachteten Fall der Atmosphäre verwendet man auch das Produkt einer konstanten Dichte von Wasser ρ_w (1000 kg/m³) mit äquivalenten Wasserhöhen $h_w(\theta_Q, \lambda_Q)$. Die gemessenen Luftdruckschwankungen sind sowohl in Oberflächendichten als auch in äquivalente Wasserhöhen umrechenbar. Es gilt somit:

$$\Delta \sigma(\theta_Q, \lambda_Q) = \rho_w h_w(\theta_Q, \lambda_Q) = \Delta \hat{\rho}(\theta_Q, \lambda_Q) H(\theta_Q, \lambda_Q) \quad . \quad (2.22)$$

Nun kann (2.21) geschrieben werden als

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \bar{C}_{nm} \\ \Delta \bar{S}_{nm} \end{array} \right\} = \frac{3}{4\pi R \bar{\rho} (2n+1)} \iint_{\sigma} \Delta \sigma(\theta_Q, \lambda_Q) \bar{P}_{nm}(\cos \theta_Q) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda_Q \\ \sin m\lambda_Q \end{Bmatrix} d\sigma_Q \quad . \quad (2.23)$$

Die Gleichung (2.23) beschreibt den direkten Anteil der gravitativen Anziehung der Oberflächenmasse.

Bei Massenverlagerungen an der Erdoberfläche, wie sie z.B. in Atmosphäre und Hydrosphäre vorkommen, müssen wir auch die zusätzlichen Lasten oder Auflasten betrachten, die auf den Erdkörper wirken. Die Erde ist kein starrer Körper. Deshalb verformt eine Auflast die darunterliegende massive Erde, was sich zusätzlich zur Massenverlagerung auf das Gravitationspotential auswirkt. Man spricht hier von einem indirekten Effekt [Tomaschek, 1957].

In Abb. 2.3 wird dies durch die Äquipotentialflächen für drei Situationen veranschaulicht: zunächst ohne Auflast ($V = \text{const.}$), dann mit Auflast ($V + \Delta V = \text{const.}$) und schließlich mit Auflast und Deformation ($V + \Delta V + \Delta V_{\text{indirekt}} = \text{const.}$). Es entsteht ein zusätzlicher indirekter Beitrag zu den Potentialkoeffizienten, der aus einer elastischen Verformung des Erdkörpers resultiert und durch eine Proportionalitätskonstante k'_n ausgedrückt werden kann:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \bar{C}_{nm} \\ \Delta \bar{S}_{nm} \end{array} \right\}_{\text{indirekt}} = \frac{3k'_n}{4\pi R \bar{\rho} (2n+1)} \iint_{\sigma} \Delta \sigma(\theta_Q, \lambda_Q) \bar{P}_{nm}(\cos \theta_Q) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda_Q \\ \sin m\lambda_Q \end{Bmatrix} d\sigma_Q \quad . \quad (2.24)$$

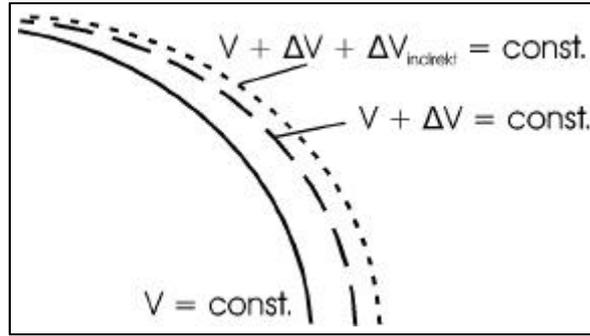


Abb. 2.3.: Direkte und indirekte Verschiebung der Niveaufläche $V = \text{const.}$

Die Konstante k'_n wird als Love'sche Zahl für Auflast vom Grad n (siehe Kapitel 2.3) bezeichnet. Die Gesamtänderung der Koeffizienten ergibt sich aus der Summe des direkten und des indirekten Anteils:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \bar{C}_{nm} \\ \Delta \bar{S}_{nm} \end{array} \right\} = \frac{3(1 + k'_n)}{4\pi R \bar{\rho} (2n + 1)} \iint \Delta \sigma(\theta_Q, \lambda_Q) \bar{P}_{nm}(\cos \theta_Q) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda_Q \\ \sin m\lambda_Q \end{Bmatrix} d\sigma_Q . \quad (2.25)$$

Wenn die Funktion $\Delta \sigma$ mit Messungen erfaßt oder aus Meßdaten abgeleitet wird, so lassen sich jetzt die zeitabhängigen Effekte berechnen (vgl. [Chao et al., 1987]). Wie man von Meßdaten auf Oberflächendichten übergeht, ist bei jedem Effekt gesondert zu betrachten. Bei der Atmosphäre sind beispielsweise Luftdruckdifferenzen die Meßgröße, aus ihnen kann $\Delta \sigma$ abgeleitet werden. Näheres hierzu in den Kapiteln 4.1 und 4.4.2.

Für die weitere Berechnung der zeitabhängigen Effekte wird die dimensionslose Größe $\Delta \sigma / (R \rho_w)$ in Kugelflächenfunktionen entwickelt (siehe Anhänge A.4 und A.5). Dies führt zu den Koeffizienten:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \hat{C}_{nm} \\ \Delta \hat{S}_{nm} \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi R \rho_w} \iint \Delta \sigma(\theta_Q, \lambda_Q) \bar{P}_{nm}(\cos \theta_Q) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda_Q \\ \sin m\lambda_Q \end{Bmatrix} d\sigma_Q . \quad (2.26)$$

Der Faktor $1/R\rho_w$ wird eingeführt, damit auch die neuen Koeffizienten dimensionslos sind. Dies muß bei der Synthese (siehe Anhang A.5) von $\Delta \sigma$ berücksichtigt werden (vgl. [Wahr et al., 1998]):

$$\Delta \sigma(\theta_Q, \lambda_Q) = R \rho_w \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos \theta_Q) (\Delta \hat{C}_{nm} \cos m\lambda_Q + \Delta \hat{S}_{nm} \sin m\lambda_Q) . \quad (2.27)$$

Ein Vergleich von (2.25) und (2.26) führt zu den folgenden einfachen Beziehungen zwischen den jeweiligen Koeffizienten:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \bar{C}_{nm} \\ \Delta \bar{S}_{nm} \end{array} \right\} = \frac{1 + k'_n}{2n + 1} \cdot \frac{3\rho_w}{\bar{\rho}} \begin{Bmatrix} \Delta \hat{C}_{nm} \\ \Delta \hat{S}_{nm} \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \hat{C}_{nm} \\ \Delta \hat{S}_{nm} \end{array} \right\} = \frac{2n + 1}{1 + k'_n} \cdot \frac{\bar{\rho}}{3\rho_w} \begin{Bmatrix} \Delta \bar{C}_{nm} \\ \Delta \bar{S}_{nm} \end{Bmatrix} . \quad (2.29)$$

Angewendet auf (2.27) ergibt sich

$$\Delta\sigma(\theta_Q, \lambda_Q) = \frac{R\bar{\rho}}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{2n+1}{1+k'_n} \bar{P}_{nm}(\cos\theta_Q) \left(\Delta\bar{C}_{nm} \cos m\lambda_Q + \Delta\bar{S}_{nm} \sin m\lambda_Q \right) . \quad (2.30)$$

Hiermit können die Variationen in der Oberflächendichte aus gemessenen oder mit Hilfe eines Modells berechneten Kugelflächenfunktionen rückgerechnet werden.

Die Änderung im Gravitationspotential kann zusammen mit (2.28), (2.26) und (2.12) berechnet werden zu:

$$\begin{aligned} \Delta V(P) = & \frac{3GM}{R} \cdot \frac{\rho_w}{\bar{\rho}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+k'_n}{2n+1} \left(\frac{R}{r_P} \right)^{n+1} \\ & \cdot \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos\theta_P) \left[\Delta\hat{C}_{nm} \cos m\lambda_P + \Delta\hat{S}_{nm} \sin m\lambda_P \right] . \end{aligned} \quad (2.31)$$

Alternativ kann mit (2.26) und (2.28) auch geschrieben werden (vgl. 2.12):

$$\Delta V(P) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r_P} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos\theta_P) \left[\Delta\bar{C}_{nm} \cos m\lambda_P + \Delta\bar{S}_{nm} \sin m\lambda_P \right] . \quad (2.32)$$

Diese Form ist praktikabler für die Berechnung, da bei der Synthese dann auf eventuell vorhandene Programme zurückgegriffen werden kann. Analog lassen sich die Variationen beliebiger anderer Größen ermitteln, die aus den Potentialkoeffizienten berechnet werden, beispielsweise Geoidhöhen oder Schwereanomalien.

2.2.2. Ansatz nach Lagrange

Anders als beim Ansatz nach Euler wird hier die Massenumverteilung durch das Verfolgen des Massentransports beschrieben, also in Form eines Geschwindigkeitsvektorfeldes. Legt man das Prinzip der Massenerhaltung zugrunde, so kann die Integration über den undeformierten Körper ausgeführt werden. Dieser Ansatz eignet sich nach [Chao, 1994] für Massenverlagerungen aufgrund von Prozessen im Erdinneren. Beispiele sind Erdbeben, postglaziale Hebungen, Mantelkonvektion oder Strömungen im Erdkern. Angemerkt sei noch, daß es für diese Ereignisse sehr schwierig ist, die für den Euler'schen Ansatz benötigte entsprechende Änderung der Oberflächendichte zu finden.

Folgt man [Chao und Gross, 1987] und kürzt ab

$$\mathbf{r} = (r_Q, \theta_Q, \lambda_Q) \quad \text{und} \quad (2.33)$$

$$Q_{nm}(\mathbf{r}) = r_Q^n \bar{P}_{nm}(\cos \theta_Q) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda_Q \\ \sin m\lambda_Q \end{Bmatrix}, \quad (2.34)$$

so folgt für eine Verschiebung $\mathbf{u} = (\delta r, \delta \theta, \delta \lambda)$ für die Änderung der Potentialkoeffizienten aus (2.11):

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \bar{C}_{nm} \\ \Delta \bar{S}_{nm} \end{array} \right\} = \frac{1}{(2n+1) M R^n} \iiint_{\Sigma} \rho(\mathbf{r}) [Q_{nm}(\mathbf{r} + \mathbf{u}) - Q_{nm}(\mathbf{r})] d\Sigma_Q \quad . \quad (2.35)$$

Unter der Annahme, daß \mathbf{u} klein ist, kann mit dem linearen Term einer Taylorreihe genähert werden

$$Q_{nm}(\mathbf{r} + \mathbf{u}) - Q_{nm}(\mathbf{r}) = \mathbf{u} \cdot \nabla Q_{nm}(\mathbf{r}) + (0)^2 \quad . \quad (2.36)$$

∇ steht für den Nabla-Operator, hier in sphärischen Koordinaten. Aus (2.35) wird damit:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \bar{C}_{nm}(t) \\ \Delta \bar{S}_{nm}(t) \end{array} \right\} = \frac{1}{(2n+1) M R^n} \iiint_{\Sigma} \rho(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla Q_{nm}(\mathbf{r}) d\Sigma_Q \quad . \quad (2.37)$$

Die zeitabhängigen Glieder sind durch den Zusatz t gekennzeichnet.

Auch diesem Ansatz liegen Annahmen zugrunde, insbesondere über die (ungestörte) Dichteverteilung im Erdinneren, da sie für die Berechnung benötigt wird. Hierfür wird ein einfaches Kugelschalenmodell oder ein komplizierteres Modell wie etwa das PREM (Preliminary Reference Earth Model, vgl. [Dziewonski und Anderson, 1981]) herangezogen. Für die Berechnung des Störungfeldes \mathbf{u} für jeden Effekt sei auf die Literatur verwiesen (z.B. [Chao und Gross, 1987]).

2.3. Auflast und Love'sche Zahlen

Im Abschnitt über die Modellierung des Einflusses von Oberflächenmassen wurde das indirekte Potential aufgrund von Auflast erwähnt. Nun soll anhand des Gezeitenpotentials etwas genauer auf diesen Sachverhalt eingegangen werden. Die anschließend abgeleiteten Formeln gelten aber für jedes gravitative Potential, das eine elastische Verformung der Erde verursacht.

Die Reaktionen der Erdkruste auf den direkten Einfluß der astronomischen Gezeitenkräfte werden als feste Erdgezeiten bezeichnet. Sie wirken auf die feste Erde und damit auch auf den Ozeanboden, ohne Berücksichtigung der darüberliegenden Wassermassen. Es gäbe dort also auch ohne Wasser die Erdgezeiten.

Die Schwankungen des Wasserspiegels aufgrund der Gezeitenkräfte nennt man Ozeangezeiten. Sie können entweder mit Pegeln an der Küste oder mit Drucksensoren am Ozeanboden gemessen werden.

Die Deformation des Ozeanbodens und auch der Küstenregionen durch die Umverteilung der Wassermassen infolge der Ozeangezeiten wird unter dem Begriff Auflast der Ozeangezeiten subsummiert. Die wichtigsten Effekte hierbei sind die Massenanziehung des Wassers auf die umliegenden Massen, die Deformation der Erdkruste sowie eine Variation des Gravitationspotentials der Erde. Um die Auflasteffekte berechnen zu können, wird ein Modell des Ozeans und der Eigenschaften der festen Erde benötigt.

Die Summe aus Ozeangezeiten und Auflast nennt man elastische Ozeangezeiten. Diese Größe erhält man aus den meisten Ozeangezeitenmodellen. Die z.B. mit Schweremessungen auf der Erde beobachteten Erdgezeiten beinhalten die festen Erdgezeiten und die Auflast der Ozeangezeiten. Darüberhinaus gibt es noch die geozentrischen Gezeiten, die mit Altimetern beobachtet werden können. Sie setzen sich aus Ozeangezeiten, Auflast und festen Erdgezeiten zusammen ([Pail et al., 2000], [Zahran, 2000]).

Für die mathematische Formulierung nach [Lambeck, 1988] schreibt man das Gravitationspotential in der verkürzten Form

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n v_{nm} \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \quad (2.38)$$

mit

$$v_{nm} = \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda \quad . \quad (2.39)$$

Love [Love, 1927] nahm an, daß die Deformation \mathbf{u} an der Erdoberfläche durch ein Potential in der obigen Form beschrieben werden kann mit

$$\mathbf{u} = \frac{1}{g} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n h_{nm} v_{nm} \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \mathbf{e}_r + \nabla_t \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \ell_{nm} v_{nm} \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \mathbf{e}_t \right] \quad (2.40)$$

und das zusätzliche Potential als

$$\Delta V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n k_{nm} v_{nm} \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \quad . \quad (2.41)$$

Dabei bedeuten \mathbf{e}_r und \mathbf{e}_t die Einheitsvektoren in radialer und tangentialer Richtung, ∇_t steht für den Gradienten an der Oberfläche und die drei Größen h_{nm} , ℓ_{nm} und k_{nm} werden als *Love'sche Zahlen* bezeichnet. Manchmal findet man für ℓ_{nm} auch die Bezeichnung *Shida'sche Zahl*. Die Indizes n und m deuten dabei auf die Abhängigkeit von Grad und Ordnung hin. Die Abhängigkeit von der Ordnung ist sehr gering und wird meist vernachlässigt. In der Folge wird dementsprechend nur h_n , ℓ_n und k_n geschrieben [Pail et al., 2000].

Diese Formeln werden verwendet, wenn die Ursache der Deformation eine Kraft wie etwa die Zentrifugalkraft ist, die keine Auflasteffekte verursacht. Im Falle der später genauer betrachteten Atmosphäre oder auch der Ozeangezeiten treten solche, wie oben beschrieben, jedoch auf. Deshalb werden nach [Munk und MacDonald, 1960] anstelle der Love'schen Zahlen die *Love'schen Zahlen für Auflast* h'_n , ℓ'_n und k'_n in die Gleichungen (2.40) und (2.41) eingesetzt. Diese Zahlen beschreiben radiale und tangentielle geometrische Effekte (h'_n und ℓ'_n) sowie indirekte Effekte auf das Potential (k'_n).

Um Deformationen aufgrund von horizontalen Reibungskräften wie Wind oder Ozeanströmungen, die auf die Erdoberfläche einwirken, zu beschreiben, benötigt man einen dritten Satz von Love'schen Zahlen. Sie werden mit h''_n , ℓ''_n und k''_n bezeichnet und *Love'sche Zahlen für Scherung* genannt. Von den insgesamt 9 Sätzen von Love'schen Zahlen sind nur 6 unabhängig voneinander. Es gelten nach [Molodenski, 1977] die Beziehungen:

$$\begin{aligned} k'_n &= k_n - h_n \\ k''_n &= \ell_n = h''_n + \ell'_n \\ h''_n &= \ell_n - \ell'_n = k''_n - \ell'_n \quad . \end{aligned} \quad (2.42)$$

Die Love'schen Zahlen werden mit Hilfe von Erdmodellen berechnet. Ein Beispiel hierfür bei Verwendung des PREM findet sich in [Han und Wahr, 1995].

2.4. Massenerhalt und Massenzentrum

Trotz aller Prozesse, die zu zeitlichen Variationen im Schwerfeld führen, sollte die Gesamtmasse der Erde einschließlich der Ozeane und der Atmosphäre unverändert bleiben. Da der Term für den Grad $n = 0$ proportional zu dieser Gesamtmasse ist, wird auch er nicht zeitabhängig sein. Für Satellitenmessungen gilt also: $\Delta\bar{C}_{00} = 0$. Dies kann dahingehend interpretiert werden, daß z.B. bei Schneefall (Massenzuwachs) sich die Ozeanmasse reduziert. Durch den Wasserkreislauf ist die Massenbilanz ausgeglichen, die Summe aller Änderungen ergibt Null.

Betrachtet man nur einen einzelnen Effekt und will dessen Auswirkungen ermitteln, so können hier sehr wohl Massenüberschüsse oder -defizite auftreten. Die Masse der Atmosphäre etwa ist zeitlich nicht konstant. Damit ist das betreffende $\Delta\hat{C}_{00}$ ungleich Null. Die Auflast des einzelnen Effektes verursacht aber keine Änderung der Gesamtmasse der Erde. Daher folgt: $k'_0 = 0$.

Die Terme vom Grad $n = 1$ sind proportional zu der Beziehung zwischen dem Massenzentrum und dem Ursprung des gewählten Koordinatensystems und hängen folglich von dessen Wahl ab. Legt man den Ursprung des Koordinatensystems so, daß er stets mit dem momentanen Massenzentrum der Erde übereinstimmt, dann verschwinden alle Terme mit $n = 1$, es gilt also $\Delta\bar{C}_{10} = \Delta\bar{C}_{11} = \Delta\bar{S}_{11} = 0$. Auch hier können bei Betrachtung einzelner Effekte Abweichungen auftreten, beispielsweise kann das Massenzentrum der Atmosphäre variieren. Dies wirkt sich jedoch auf das Massenzentrum der festen Erde aus, so daß in der Summe das Massenzentrum ortsfest bleibt. Für eine solche Wahl des Bezugssystems gilt demnach: $k'_1 = -1$, d.h. hier treten keine zeitlichen Variationen auf.

Eine andere Wahl des Ursprungs des Bezugssystems ist die als Mittelpunkt des Körpers der festen Erdoberfläche, wie sie durch Messungen auf der Erdoberfläche realisiert wird. In diesem Fall sind die $n = 1$ Terme ungleich Null und die Love'sche Zahl für Auflast k'_1 wird bestimmt durch den Unterschied zwischen dem Massenmittelpunkt der Oberflächenmasse zuzüglich der deformierten festen Erde und dem Mittelpunkt des Körpers der deformierten festen Erdoberfläche. Es ergibt sich $k'_1 = -(h_1 + 2\ell_1)/3$, wobei h_1 und ℓ_1 für den Fall des Ursprungs im Massenzentrum der deformierten Erde berechnet werden.

Entsprechende Zahlenwerte für k'_n bei Verwendung des PREM-Erdmodells finden sich in [Wahr et al., 1998] und sind hier numerisch und graphisch wiedergegeben (Tab. 2.1 und Abb. 2.4). Weitere Zwischenwerte bis zum Grad 200 können linear interpoliert werden. Dadurch entstehende Fehler liegen im Bereich von weniger als 0.05%.

n	k'_n	n	k'_n
0	0.000	12	-0.064
1	+0.027	15	-0.058
2	-0.303	20	-0.051
3	-0.194	30	-0.040
4	-0.132	40	-0.033
5	-0.104	50	-0.027
6	-0.089	70	-0.020
7	-0.081	100	-0.014
8	-0.076	150	-0.010
9	-0.072	200	-0.007
10	-0.069		

Tab. 2.1.: Love'sche Zahlen für
 Auflast k'_n

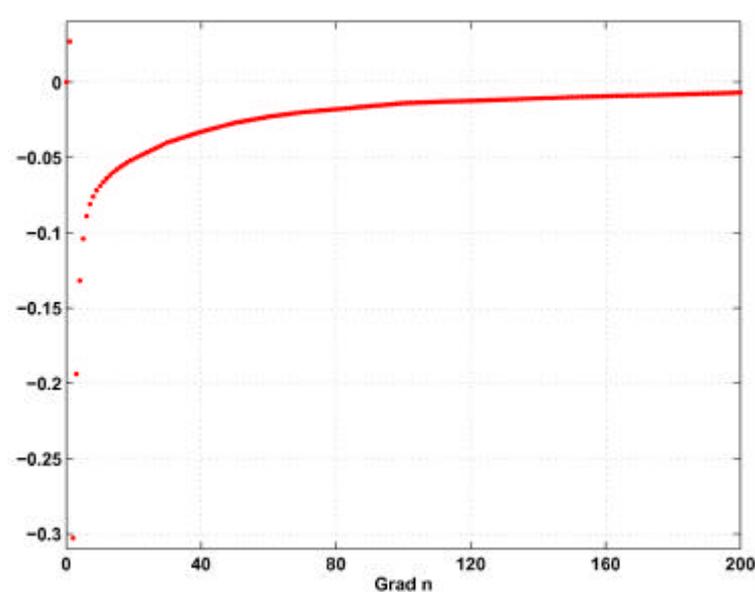


Abb. 2.4.: Love'schen Zahlen k'_n je Grad n

2.5. Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen

In Kapitel 2.1 werden für die Berechnung des Gravitationspotentials Kugelflächenfunktionen verwendet. Die Reihenentwicklung in Kugelflächenfunktionen entspricht einer Fourierreihe auf der Kugel. Die damit berechneten Ergebnisse sollten identisch mit denen aus der direkten Integration (Gleichung (2.1)) sein.

Kugelflächenfunktionen sind orthonormale Basisfunktionen, die kontinuierliche globale Datensätze benötigen. Probleme treten daher bei diskret gemessenen Daten auf, wenn Datenlöcher oder Diskontinuitäten vorliegen oder die Datensätze inhomogen in der räumlichen Auflösung oder der Qualität sind.

Die Wirkung der Datenlöcher (meist aus nicht polaren Satellitenbahnen resultierende Polkappen) besteht darin, daß die Orthonormalität der Kugelflächenfunktionen verloren geht. Durch eine rechenintensive Orthonormierung kann die Orthogonalität zwar wiederhergestellt werden, allerdings geht dabei die strenge Beziehung zu bestimmten Wellenlängen verloren. Um die gewünschte hohe räumliche Auflösung zu erhalten, wird zur klassischen Berechnung geraten [Pail et al., 2000].

Häufig treten am Übergang vom Ozean zum Land, also an Küsten, Sprünge in den Datensätzen auf. Diese führen ebenso wie die Datenlöcher zu Oszillationen der Fourierreihe,

deren räumliche Ausdehnung vom maximalen Berechnungsgrad abhängt. Diese Erscheinung wird Gibbs-Phänomen¹ genannt.

Das Gibbs-Phänomen kann sichtbar gemacht werden, indem man eine Land-Ozean-Maske (Ozean = 0, Land = 1) wie in Abb. 4.3 zunächst in Kugelflächenfunktionen entwickelt, mit den Koeffizienten in einer Synthese wieder zurückrechnet und schließlich die Differenz mit der Ausgangsmaske bildet. Die Ergebnisse solcher Simulationen für zwei unterschiedliche Entwicklungsgrade zeigt Abb. 2.5. Die Auswirkungen sind in beiden Fällen ähnlich, es treten große maximale Abweichungen bis fast ± 1 auf. Je höher jedoch der Entwicklungsgrad, desto kleinräumiger werden die Effekte. Es handelt sich dann um Fehler in den Koeffizienten von hohem Grad und hoher Ordnung. In [Pail et al., 2000] finden sich weitere Untersuchungen zu diesem Thema, dessen Auswirkungen im Einzelfall studiert werden sollten.

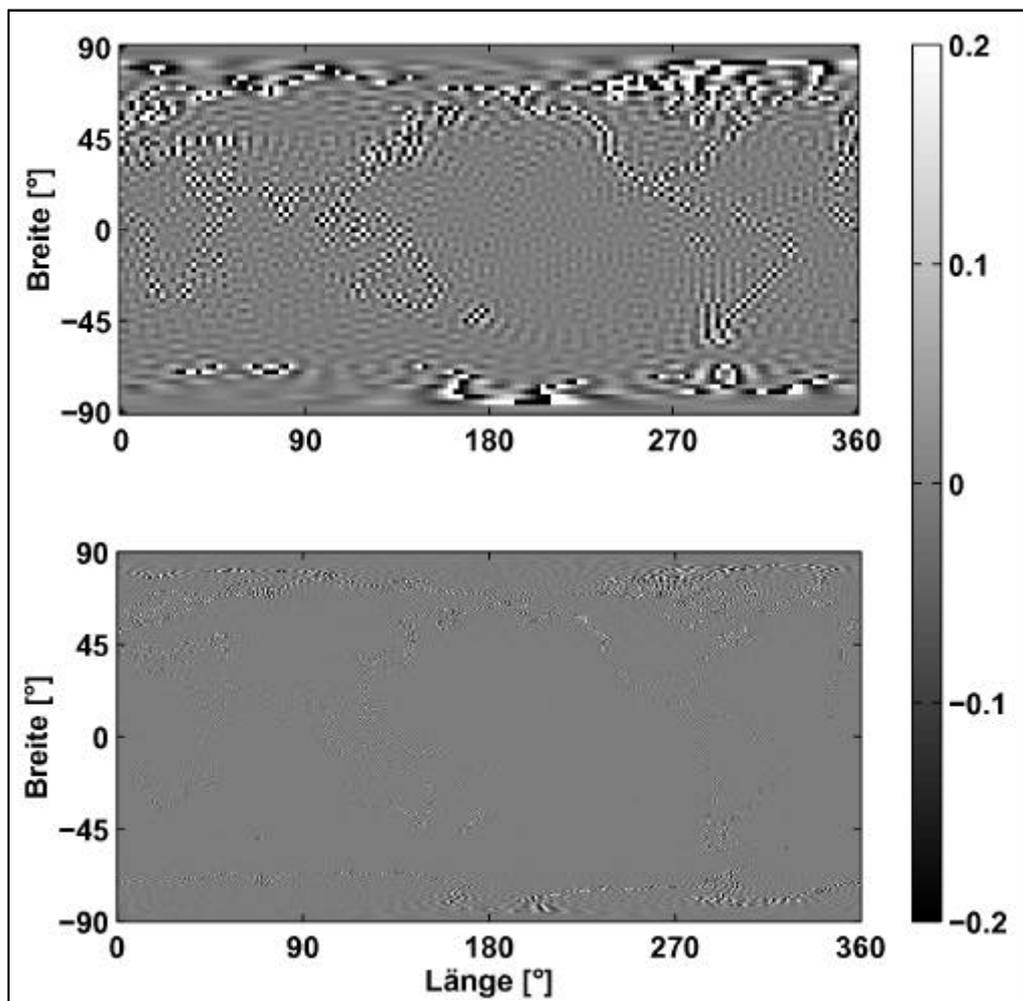


Abb. 2.5.: Auswirkung des Gibbs-Phänomens (Simulation mit Land-Ozean-Maske),
Reihenentwicklungen bis Grad und Ordnung 72 (oben) und 360 (unten)

¹ Nach Gibbs, der das Phänomen 1899 in einem Brief an *Nature* beschrieben hat.

2.6. Schwere und Gravitation

Das Schwerefeld der Erde besteht aus zwei Komponenten: der Gravitation und der durch die Erdrotation erzeugten Zentrifugalbeschleunigung.

$$W = V + Z = G \iiint_{\Sigma} \frac{\rho(Q)}{\ell_{PQ}} d\Sigma_Q + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \varphi \quad (2.43)$$

Das Schwerepotential W setzt sich aus der Summe von Gravitationspotential V und Zentrifugalpotential Z zusammen; ω steht für die Rotationsgeschwindigkeit der Erde, φ für die Breite des betrachteten Ortes.

Wenn bisher von den Schwankungen des Schwerefeldes die Rede war, wurden streng genommen jedoch nur die Variationen des Gravitationsfeldes betrachtet. Dies kann damit erklärt werden, daß das Verhältnis der beiden Beschleunigungen bei etwa 1:300 in der Größenordnung der Abplattung der Erde liegt. Die durch die Vernachlässigung von Schwankungen in Z gemachten Fehler werden also gering sein.

Eine einfache Abschätzung für die Variation der Erdrotation zeigt die beim Zentrifugalpotential in etwa zu erwartenden Größenordnungen. Eine durchschnittliche Tageslängenschwankung ΔLOD von 1 ms [Lambeck, 1988] führt zu einer maximalen Abweichung am Äquator von $\Delta Z = 0.0025 \text{ m}^2/\text{s}^2$, was etwa $2 \cdot 10^{-8}$ des Gesamtbeitrags von Z entspricht. Der Beitrag der Polbewegung erreicht bei einer Schwankung der Rotationsachse von $0.3''$ seinen Maximalwert $\Delta Z = 0.16 \text{ m}^2/\text{s}^2$ für Breiten von 45° , was etwa $3 \cdot 10^{-6}$ von Z entspricht. Der relative Anteil am Gesamtbeitrag steigt in den Polbereichen auf ca. $2 \cdot 10^{-5}$ an, allerdings bei sehr geringen Absolutwerten.

Alle Massenverlagerungen, die das Schwerefeld der Erde beeinflussen, führen gleichzeitig zu Schwankungen in der Erdrotation. Dies wurde im Rahmen dieser Arbeit ausgeklammert. Einen Einstieg in dieses Thema findet man z.B. in [Chao, 1994]. Die Auswirkungen auf die Variationen des Schwerefeldes der Erde werden nach obigen Abschätzungen sehr gering sein und im weiteren vernachlässigt.

3. Ursachen für Schwerefeldvariationen

Nachdem in Kapitel 2 mögliche mathematische Beschreibungen zur Berechnung der Schwerefeldvariationen aufgezeigt wurden, sollen nun die tatsächlich vorhandenen Ursachen für die Variationen mit den dabei auftretenden Größenordnungen kurz vorgestellt werden. Da bereits einige Veröffentlichungen zu jedem einzelnen Effekt vorliegen, wird auf Details verzichtet und im wesentlichen nach der umfassenden Darstellung des National Research Council [NRC, 1997] und der Zusammenstellung der bisherigen Ergebnisse in [Verhagen, 2000] vorgegangen.

3.1. Das dynamische System Erde

Die Erde ist ein dynamisches System, in dem ständig Prozesse der Massenumverteilung ablaufen. Da das Gravitationsfeld der Erde von der Massenverteilung abhängt, unterliegt es fortwährenden Schwankungen. Nun soll zunächst unterschieden werden, welche Prozesse auf der Erde signifikante Änderungen in der Gravitation verursachen und welche nicht.

Nach [Chao, 1994] bedarf es einer ausreichend großen Menge an Masse, die einem Transport über eine hinreichend große Distanz unterliegt, damit die Änderungen im Gravitationsfeld signifikant sind. Beispiele für nicht signifikante Massentransporte sind:

- Öl- und Gütertransport durch Schiffe, da zu geringe Massen bewegt werden,
- Eisbildung und -verteilung in den Polarmeeren,
- Sterische¹ Änderungen des Meeresspiegels, weil hier nur Volumenänderungen und keine Massentransporte stattfinden,

¹ Dichteveränderungen aufgrund von Änderungen in der Temperatur oder im Salzgehalt [Wahr et al., 1998]

- Einzelne Vulkanausbrüche, da zu geringe Distanzen des Massentransportes vorliegen.

Im Gegensatz hierzu stehen die Effekte, die signifikante Variationen im Gravitationsfeld hervorrufen [NRC, 1997]:

- Flüssige und bewegliche Atmosphäre und Ozeane
- Ständig sich ändernde Verteilung von Eis, Schnee und Grundwasser
- Flüssiger Erdkern mit hydromagnetischen Bewegungen
- Erdmantel mit Wärmekonvektion und postglazialen Hebungen
- Plattentektonische Bewegungen

Die durch diese Effekte verursachten Schwerevariationen treten in den unterschiedlichsten räumlichen Ausdehnungen und zeitlichen Perioden auf, wobei erstere von einigen Kilometern bis zu mehr als 10 000 km und letztere von wenigen Stunden bis zu hunderten von Jahren reichen können. Über 99 % der Abweichungen des Gravitationsfeldes der Erde von einer rotierenden flüssigen Figur mit der Masse der Erde, ihrem mittleren Radius und Trägheitsmoment können jedoch als statisch angesehen werden. Dieses statische Feld ist bestimmt von Unregelmäßigkeiten der festen Erde durch Konvektionsprozesse, die die Erde in geologischen Zeiträumen deformieren. Alle Betrachtungen in dieser Arbeit zielen lediglich auf das eine verbleibende Prozent ab.

Neben den oben genannten Effekten auf der Erde selbst kommen noch weitere wichtige Einflüsse von außen hinzu. Dies sind insbesondere die Gezeiten aufgrund der Anziehung von Sonne und Mond. Die nachfolgende Tabelle 3.1 aus [Chao, 1994] gibt einen Überblick über alle relevanten Effekte. Als Größenangabe dient dabei die Angabe in den Koeffizienten J_2 und J_3 , die sich aus den \bar{C}_{nm} ergeben nach:

$$J_n = -\sqrt{2n+1} \cdot \bar{C}_{n0} \quad . \quad (3.1)$$

Die beiden angegebenen Koeffizienten beschreiben große Wellenlängen des Gravitationspotentials, stehen also für große räumliche Ausdehnungen. Deshalb sind Ursachen, die eine geringere räumliche Ausdehnungen besitzen (z.B. tektonische Bruchzonen, Erscheinungen an Plattenrändern) hier ebenso wie die noch nicht bestimmten Effekte (z.B. Aktivitäten des Erdkerns) mit einem Fragezeichen versehen.

<i>Ursache</i>	<i>zeitliche Periode</i>	$\Delta J_2 [10^{-10}]$	$\Delta J_3 [10^{-10}]$
Feste Erdgezeiten	langperiodisch	bis zu 20	?
	täglich	0	0
	halbtaglich	0	0
Ozeangezeiten	alle Gezeitenperioden	bis zu 4	?
Atmosphäre, Fall IB	täglich–jahreszeitlich	8 (max.)	10 (max.)
		3 (jährlich)	5 (jährlich)
Atmosphäre, Fall NIB	täglich–jahreszeitlich	15 (max.)	20 (max.)
		5 (jährlich)	6 (jährlich)
Schnee	jahreszeitlich bedingt	2 (jährlich)	1 (jährlich)
Regen	jahreszeitlich bedingt	1 (jährlich)	1.7 (jährlich)
Gletscher	säkular	0.02 pro Jahr	0.01 pro Jahr
Stauseen	kumulativ seit 1950	−0.4	0.3
Eisdecken	säkular	?	?
Grundwasser	jahreszeitlich bedingt	?	?
Meeresspiegel	säkular	0.03 pro Jahr	−0.02 pro Jahr
Ozeanzirkulation	jahreszeitlich bedingt	?	?
Erdbeben	nach Ereignis	0.5 (Alaska '64)	0.3 (Chile '60)
	kumul. säkular (77–90)	−0.002 pro Jahr	0.008 (max.)
Postglaziale Hebungen	säkular	−0.3 pro Jahr	?
Gezeitenreibung	säkular	−0.005 pro Jahr	?
Mantelkonvektion, Plattentektonik	säkular	?	?
Aktivitäten im Erdkern	säkular	?	?

Tab. 3.1.: Globale geophysikalische Massentransporte und deren vorhergesagte Auswirkungen auf das Gravitationsfeld (Quelle: [Chao, 1994])

Während die größten Effekte mit jährlicher und kürzerer Periode von der Atmosphäre und Hydrosphäre verursacht werden, sind die größten langperiodischen Schwankungen auf postglaziale Hebungen zurückzuführen. Insgesamt liegt die Größenordnung der zeitlichen Variationen bei etwa 10^{-8} des statischen Feldes (siehe auch Abb. 3.1).

Neben diesen Ergebnissen aus Modellierungen gibt es auch Zahlenwerte für die jährlichen und halbjährlichen Schwankungen von J_2 und J_3 aus SLR-Beobachtungen, die mit obigen Werten recht gut übereinstimmen. Problematisch ist jedoch, aus den mit SLR gemessenen Variationen, die aus der Summe der einzelnen Glieder bestehen, Rückschlüsse auf einzelne Effekte zu ziehen. Eine Übersicht hierzu mit Quellenangaben zu den einzelnen Untersuchungen kann [Verhagen, 2000] entnommen werden.

3.2. Geophysikalische Prozesse

In diesem Kapitel werden die Effekte aus Tabelle 3.1 sowie die Gezeiten in bezug auf ihre Größe und spektralen Eigenschaften etwas näher betrachtet. Auch die Frage nach der Möglichkeit einer Messung der Effekte mit zukünftigen Schwerefeldmissionen soll jeweils kurz angesprochen werden. Eine Liste von relevanten Internetseiten mit weitergehenden Informationen sowie Datensätzen zu den einzelnen Effekten findet man in [Rummel und Sneeuw, 2000].

Abb. 3.1 gibt eine Übersicht zu den erwarteten Frequenzen und räumlichen Ausdehnungen der einzelnen Effekte mit der jeweils zu erwartenden Größenordnung in Einheiten von $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Die Gezeiten sind nicht dargestellt, da sie in nahezu allen Frequenzen und räumlichen Ausdehnungen auftreten.

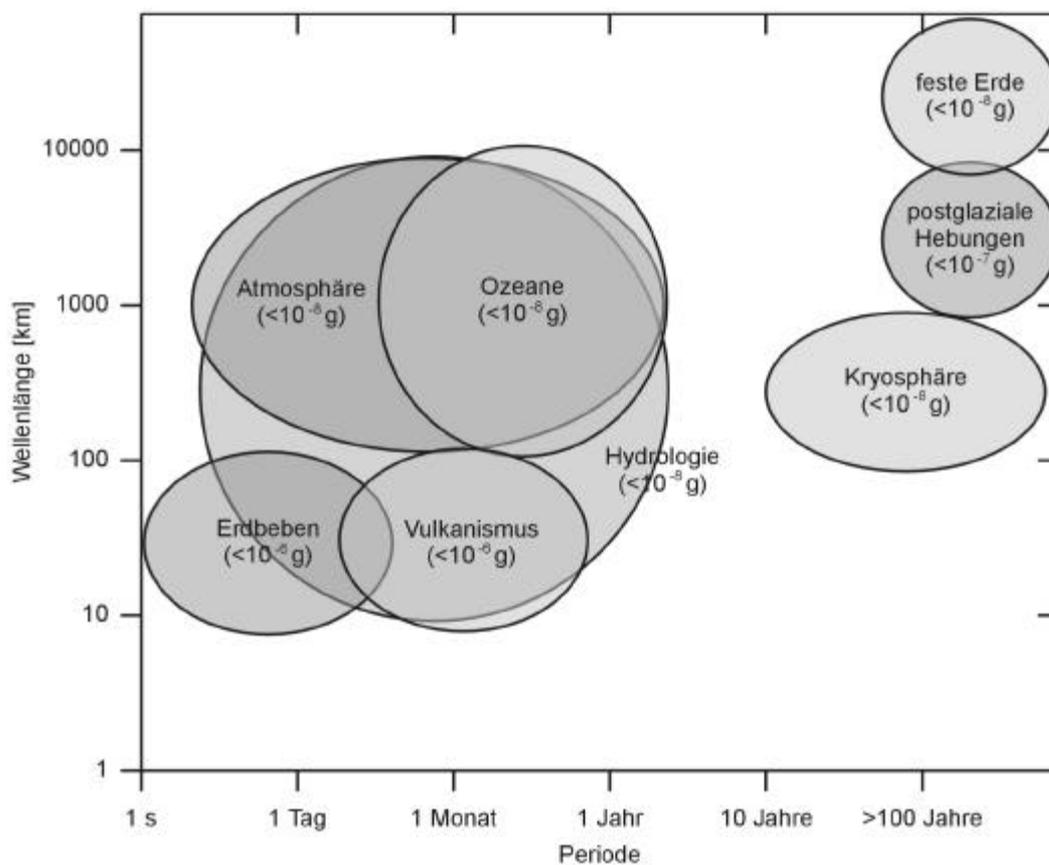


Abb. 3.1.: Erwartete Perioden, Wellenlängen und Größenordnungen der zeitlichen Variationen des Gravitationsfeldes für jeden geophysikalischen Prozeß (Quelle: [Verhagen, 2000], Angaben nach [Torge, 1989] und [NRC, 1997])

3.2.1. Gezeiten

Die Gezeiten auf der Erde werden durch die Anziehung von Sonne und Mond verursacht, man spricht deshalb auch von lunisolaren Gezeiten. Andere Himmelskörper haben einen hier vernachlässigbaren Anteil. Die lunisolaren Gezeiten sind folglich von der Position der drei beteiligten Himmelskörper zueinander abhängig. Eine Unterscheidung bezüglich der Auswirkungen auf die Erde gibt Kapitel 2.3. Alle Gezeitenerscheinungen treten in halbtäglichen, täglichen und längeren Perioden auf. Da die kurzperiodischen Effekte auf niedrig fliegende Satelliten wie ein Rauschen wirken können, empfiehlt es sich, sie nicht mit Satelliten zu beobachten, sondern vorhandene Modelle zu verwenden, um die Satellitenmessungen damit zu korrigieren.

Unter der in Tabelle 3.1 genannten Gezeitenreibung versteht man die Wirkung des aufgrund der Schiefstellung der Erdachse von Sonne und Mond ausgeübten Drehmomentes auf die Erdrotation. Sie besteht in einer stetigen Verlangsamung der Erdrotation (Anstieg der Tageslängen). Daraus wiederum resultiert eine geringere Abplattung der Erde, was sich in einer Abnahme des Koeffizienten J_2 äußert. Diese Auswirkung auf das Schwerefeld ist gering und säkular.

3.2.2. Atmosphäre

Die Masse der Atmosphäre beträgt etwa 10^{-6} der Masse der Erde. Trotzdem ist die Atmosphäre eine der Hauptursachen für jährliche und kürzer periodische Schwerevariationen. Dies rührt daher, daß die Massen in den Luftsäulen in der Troposphäre um bis zu 10 % variieren. Die Auswirkungen sind mit einer Meßgenauigkeit von etwa 10^{-8} folglich meßbar.

Die Atmosphäre ist zugleich von den hier betrachteten Effekten derjenige, der am besten mit Messungen (vor allem des Luftdrucks) erfaßt werden kann. Daher ist es wichtig, diesen Effekt möglichst genau zu bestimmen, um andere schwächere Signale überhaupt erkennen zu können. Teilweise sind die Unsicherheiten in den meteorologischen Daten die größte Fehlerquelle für hydrologische und glaziologische Berechnungen.

Aufgrund dieser herausragenden Stellung gab es bereits einige Studien zu diesem Effekt. Auch in dieser Arbeit soll die Atmosphäre als Beispiel für das Vorgehen bei der Berechnung und Analyse der Schwerefeldvariationen dienen. Probleme resultieren bei der Atmosphäre daraus, daß die Massenverteilung ähnlich wie das Wettergeschehen starke Abweichungen von festen Perioden und Amplituden zeigt. So kann die räumliche Ausdehnung der Effekte

von 100 bis 10 000 km reichen bei halbtäglichen bis mehrjährigen Perioden. Im Hinblick auf zukünftige Schwerefeldmissionen ist somit ein möglichst dichtes globales Netzwerk an Barometern erstrebenswert, um das Atmosphärensignal aus den Messungen herausfiltern zu können.

3.2.3. Hydrosphäre

Unter den Begriff Hydrosphäre fällt die Verteilung des Wassers auf den Kontinenten, in den Ozeanen und in der Luft. Der Massentransport findet hier im Rahmen des Wasserkreislaufs durch Verdunstung und Niederschlag sowie Fließbewegungen statt. Für eine bessere Unterteilung der Hydrosphäre wird sie in einzelne Bereiche gegliedert: das Wasser auf den Kontinenten, die Ozeanmassen und die Eismassen, die aufgrund ihres völlig anderen Verhaltens in einem eigenen Kapitel behandelt werden.

Wasser auf den Kontinenten

Die Variationen im kontinentalen Wasser bestehen im wesentlichen aus den Schwankungen im Grundwasserspiegel, in der Bodenfeuchtigkeit, im Oberflächenwasser von Seen und Flüssen aufgrund von Regen, Abfluß und Verdunstung sowie in der Schneebedeckung. Es treten großräumig vor allem jahreszeitlich bedingte und niedrigere Frequenzen auf (z.B. Schneeauflast), bei Hochwasserereignissen kann es aber auch zu kurzfristigen kleinräumigen Effekten kommen. Von den in Tabelle 3.1 genannten Stauseen wird angenommen, daß in Zukunft keine weiteren säkularen kumulativen Effekte mehr auftreten, unter der Voraussetzung, daß keine bedeutenden neuen Projekte mehr realisiert werden.

Auch zur Hydrosphäre auf den Kontinenten gibt es bereits mehrere Untersuchungen, etwa die von [Chao et al., 1987], [Wahr et al., 1998] und [Pail et al., 2000]. Sie ergaben ähnlich wie bei der Atmosphäre eine jährliche und eine halbjährliche Hauptfrequenz, deren Signalstärken sogar noch über denen der Atmosphäre liegen. Probleme gibt es sowohl bei der Verfügbarkeit (z.B. Antarktis und Grönland oder Grundwasserdaten allgemein) und Qualität der Datensätze bezüglich der Verdunstung, der Bodenfeuchtigkeit oder des Grundwasserstandes als auch bei der Modellierung mit dem Treffen von Annahmen wie beispielsweise der über die Dichte von Schnee. Es wird daher mit einer Kombination verschiedener Parameter wie der Temperatur und dem Niederschlag gearbeitet.

Aufgrund dieser ganzen Probleme wird versucht, die Wassermassenverteilung mit Schweremessungen zu erfassen. Bei einer Schwerefeldmission mit Satelliten sind nicht die einzelnen Effekte meßbar, sondern nur die Änderungen in vertikal integrierten Wassermassen. Trotzdem scheint ein Rückschluß auf Erscheinungen wie die Erschöpfung von Grundwasserreserven möglich [NRC, 1997].

Ozeanmassenverteilung

Der Einfluß der Ozeanmassen auf das Gravitationsfeld kann in zwei Komponenten aufgeteilt werden: zum einen in den Anstieg des Meeresspiegels und zum anderen in die Ozeanströmungen. Der erste Effekt steht in Zusammenhang mit Klimamodellen, die noch erhebliche Unsicherheiten aufweisen, wird aber auch mit Pegelmessungen nachgewiesen und liegt bei 1.0 - 2.5 mm/Jahr. Schwierig ist die Trennung zwischen thermaler Ausdehnung und echtem Massenzuwachs. Die Dichteänderung durch Erwärmung führt ebenso wie die durch einen anderen Salzgehalt nicht zu horizontalen Massentransporten, sondern nur zu einer Veränderung des Volumens bei gleicher Masse und hat keinen Einfluß auf das Gravitationsfeld (sterische Änderungen).

Die Ozeanströmungen führen zu Variationen im Gravitationsfeld mit sehr hohen (Tage) bis jahreszeitlichen (z.B. El Niño) Perioden bei einer räumlichen Ausdehnung von 100 bis 10 000 km. Die Signalstärke ist etwas unsicher, liegt aber deutlich unterhalb der der kontinentalen Wassermassen oder der Atmosphäre. Dennoch sind die Effekte bei einer Ausdehnung von mindestens 100 km mit Schwerefeldmissionen meßbar. Vielversprechend scheint die Kombination eines gemessenen zeitvariablen Schwerefeldes mit Altimetriedaten wie denen der Mission TOPEX/Poseidon im Hinblick auf eine Verbesserung der Modelle über die Ozeanzirkulation (OGCM², z.B. POP³).

3.2.4. Kryosphäre

Die Kryosphäre setzt sich aus den Eismassen an den Polkappen und den kontinentalen Gletschern zusammen. Auch sie unterliegen ständigen Masse- und Dichteveriationen durch Abschmelzung und Niederschlag sowie Kompaktierung. Der Einfluß des Abschmelzens der Eismassen Grönlands und der Antarktis auf den Anstieg der Meeresspiegel liegt bei etwa

² OGCM: Ocean General Circulation Model

³ POP: Parallel Ocean Program des Los Alamos National Laboratory, USA

± 0.4 bzw. ± 1.4 mm für das vergangene Jahrhundert. Darüber hinaus ist relativ wenig bekannt über die Auswirkungen des Verhaltens der Eismassen auf das Gravitationsfeld.

Die kontinentalen Gletscher zeigen individuell sehr unterschiedliches Verhalten, was eine Modellierung erheblich erschwert. Die Modelle über die großen Eismassen in den Polregionen sind ebenfalls noch mit größeren Unsicherheiten behaftet (z.B. isostatischer Ausgleich). In jedem Falle sind die Auswirkungen auf das Gravitationsfeld im Bereich der säkularen Perioden und eher kleinräumig mit geringen Folgen (etwa 10^{-12}) für die niedrigen zonalen Koeffizienten. Aus den Schwerefeldmissionen werden aufgrund der flächendeckenden und direkten Messung der Massenverteilung und deren Änderungen erhebliche Fortschritte für die Glaziologie erwartet.

3.2.5. Postglaziale Hebungen

In Zusammenhang mit dem Abschmelzen der Eismassen stehen immer die isostatischen Reaktionen der visko-elastischen Erdkruste auf den Wegfall der Eisauflast, die postglazialen Hebungen. Sie sind in Bereichen wie Kanada und Skandinavien mit Modellen erfaßt, in gegenwärtig vergletscherten Gebieten wie der Antarktis hingegen schwer von den Effekten der Eisabschmelzung zu trennen. Nach Tabelle 3.1 sind sie die größte Ursache für langperiodische Variationen im Gravitationsfeld. Da sie großräumig auftreten und innerhalb weniger Jahre nur geringe Variationen hervorrufen, sind sie nur mit im Bereich der niedrigen Koeffizienten hochsensitiven, mehrjährigen Satellitenmissionen meßbar.

3.2.6. Vulkanismus und Erdbeben

Vulkanismus und insbesondere Erdbeben sind nur sehr kurzzeitig auftretende Erscheinungen, führen aber dennoch zu enormen Massenverlagerungen und Dichteveränderungen. Sie können im Falle der Erdbeben Signale von bis zu 3 mGal oder 3 cm Geoidhöhenänderung bei einer Wellenlänge von bis zu 100 km hervorrufen ([NRC, 1997], [Chao und Gross, 1987]). Diese räumliche Ausdehnung ist jedoch so gering, daß die Effekte mit Satellitenmissionen nicht meßbar sind. Daneben besteht praktisch keine Möglichkeit einer Vorhersage, so daß auf örtliche (häufig terrestrische) Messungen zur Erfassung von bereits erfolgten Veränderungen zurückgegriffen werden muß.

3.2.7. Prozesse der festen Erde

Neben den bereits gesondert angeführten Erscheinungen des Vulkanismus und der Erdbeben können weitere Prozesse der festen Erde wie die Mantelkonvektion, die davon angetriebene Plattentektonik mit ihren Verwerfungszonen und Gräben sowie Aktivitäten im Erdkern unterschieden werden. Sie verursachen Massenverlagerungen über sehr lange Zeiträume. Die Auswirkungen auf das Gravitationsfeld sind jedoch ungewiß. Für jeden dieser Prozesse gibt es Modelle, die noch große Unsicherheiten aufweisen und bisher nicht für Vorausberechnungen zu gebrauchen sind. Da die Effekte auf das Gravitationsfeld über der Meßgenauigkeit der geplanten Schwerefeldmissionen liegen, ist es eines der Hauptziele, aus diesen Messungen Erkenntnisse über die Eigenarten der Vorgänge in der Erde zu erhalten, was angesichts einer Missionslänge von z.B. 5 Jahren für GRACE jedoch nicht leicht sein wird.

4. Effekt der Atmosphäre

In Kapitel 2 wurde die mathematische Modellierung mit ihren Annahmen und Problemen beschrieben, in Kapitel 3 waren kurz die Ursachen für die zeitlichen Schwankungen des Erdschwerefeldes dargestellt. Nun soll anhand des Beispiels der Atmosphäre die Berechnung mit Ergebnissen und deren Analyse im einzelnen erläutert werden. Zuvor wird eine kurze einleitende Darstellung über die hier relevanten Eigenschaften der Atmosphäre gegeben.

4.1. Massenveränderung und Atmosphäre

Die Eigenschaften der Atmosphäre können mit Parametern wie Luftdruck, Wasserdampfgehalt, Dichte, Reflektivität und Temperatur sowie mit deren vertikaler Verteilung beschrieben werden. Dabei können in vertikaler Richtung z.B. nach der Temperatur bestimmte Schichten wie Troposphäre, Tropopause, Stratosphäre, Stratopause, Mesosphäre und Thermosphäre unterschieden werden. Solche Einteilungen sind auch nach anderen Parametern möglich und teilweise üblich. Die Höhe der Atmosphäre wird mit insgesamt etwa 200 km angegeben [Bergmann-Schäfer, 1997].

Für die Untersuchung der Variationen des Schwerefeldes benötigt man Informationen über Massentransporte, in diesem Fall die der Atmosphäre. Die Masse der Atmosphäre hängt von deren Dichte ρ ab, die wiederum dem Luftdruck p proportional ist. Dieser Zusammenhang soll kurz erläutert werden. Es gelte die hydrostatische Grundgleichung:

$$dp = -g\rho dh \quad . \quad (4.1)$$

Sie beschreibt die Druckabnahme dp für einen Höhenunterschied dh (dh positiv nach oben) in differentieller Form für eine infinitesimale Schicht und gilt für ein ruhendes Geofluid exakt, für ein bewegtes in sehr guter Näherung [Bergmann-Schäfer, 1997].

Durch vertikale Integration von z_s bis z (z vertikal nach oben positiv) kann hieraus die Druckänderung für beliebige Höhenunterschiede ermittelt werden:

$$p(z) - p(z_s) = - \int_{h=z_s}^z g(h) \rho(h) dh \quad . \quad (4.2)$$

Der Index s steht hierbei für die Erdoberfläche (surface), g bezeichnet die Schwerebeschleunigung. Aus dem Dichtefeld kann folglich durch Integration das Druckfeld gewonnen werden. Schreibt man diese Gleichung für ein festes g

$$p(z_s) - p(z) = g \int_{h=z_s}^z \rho(h) dh \quad , \quad (4.3)$$

so wird aus dem Integral das Verhältnis der Masse je Höhe z zur Fläche F und man kommt für $p(\infty) = 0$ zu der Aussage: der Bodenluftdruck $p(z_s)$ ist der Gesamtmasse der Luft in der Atmosphärensäule mit der Grundfläche F proportional. Anders ausgedrückt: der Luftdruck p ist das Gewicht der Luftsäule senkrecht über einem Punkt relativ zur Bodenfläche F , das aus der Wirkung der Schwerkraft auf die Masse der Luft resultiert. Die physikalische Dimension ist demnach $\text{N/m}^2 = \frac{\text{kg}}{\text{ms}^2} = \text{Pa}$ (pascal) und der Luftdruck wird auch als Schweredruck bezeichnet.

Für die Massenverlagerungen in der Atmosphäre genügt damit die Betrachtung der Luftdruckschwankungen auf der Erdoberfläche. Hieraus können die letztlich benötigten Änderungen der Oberflächendichten abgeleitet werden können (siehe Kapitel 4.4.2).

Um eine Vorstellung von der Massenverteilung in der Atmosphäre zu bekommen, seien der Luftdruck- und Dichteverlauf einer sog. Standardatmosphäre betrachtet. Sie ergeben sich aus der Barometerformel für eine polytrope¹ Atmosphäre:

$$H - H_0 = \frac{T_0}{\gamma} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{R\gamma/g_0} \right] \quad . \quad (4.4)$$

Es ist [Bergmann-Schäfer, 1997]: p der Luftdruck in der geopotentiellen Höhe H^2 über der Meereshöhe H_0 , $T_0 = 288.15$ K die Temperatur und $p_0 = 1013.25$ hPa der Luftdruck auf Meereshöhe, γ der Temperaturgradient je Schicht, R die spezifische Gaskonstante (bei trockener Luft: 287.04 J/(kg K)) und $g_0 = 9.8$ m/s² eine genäherte mittlere Schwerebeschleunigung in der Troposphäre. Die Temperatur nimmt bis 11 km Höhe linear um 6.5 K/km ab, anschließend ist sie bis 20 km Höhe konstant bei -56.5°C , darüber nimmt sie wieder zu. Ein typischer Wert für den Exponenten ist $R\gamma/g_0 \approx 0.19$.

¹ Polytrop: konstantes Temperaturgefälle je Schicht

² $H = C/g_0$, C : geopotentielle Kote, g_0 : genähertes weltweites Mittel von g in der Troposphäre

Abb. 4.1 zeigt den sich daraus ergebenden Luftdruck- und Dichteverlauf. Es kann leicht gesehen werden, daß in Höhen über 15 km, also etwa oberhalb der Tropopause, nur noch geringe Massen vorkommen, deren Verlagerungen kaum Auswirkungen auf das Schwerfeld haben. An dieser Stelle sei nochmals auf die getroffene Annahme einer dünnen Schicht im Ansatz nach Euler hingewiesen.

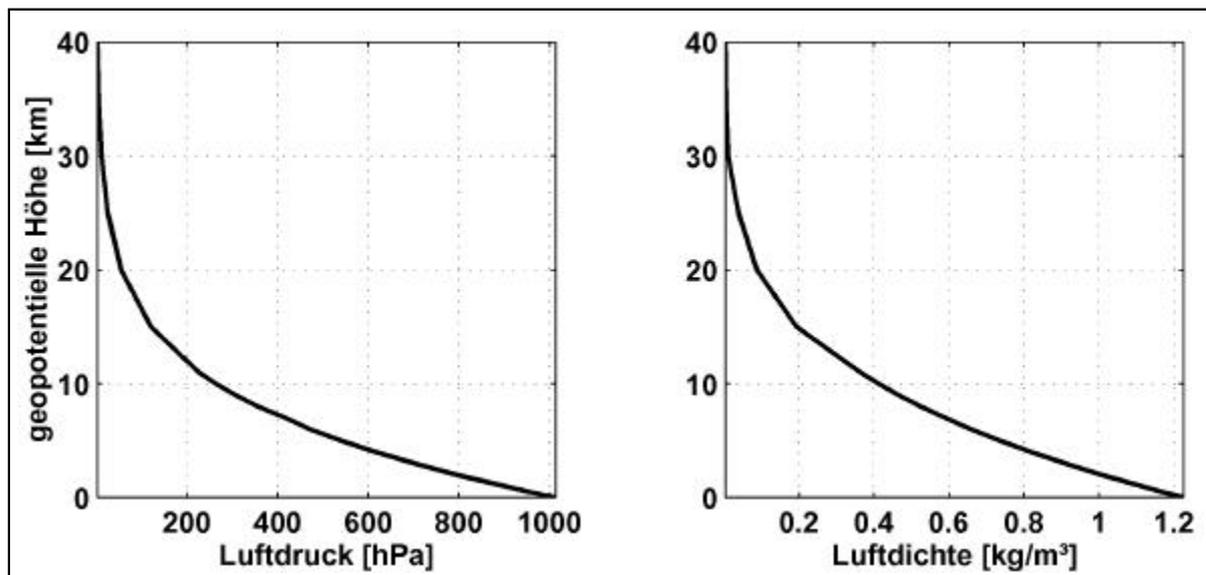


Abb. 4.1.: Luftdruck und Dichte in der Standardatmosphäre

Die weitaus größten Luftmassen sind in geringen Höhen anzutreffen. In diesen Höhen trifft man auf der Erde vielerorts auf Topographie. Der am Boden gemessene *Oberflächendruck* („surface pressure“) ist somit von der Topographie abhängig. Dieser Luftdruck ist es, der in unserem Fall benötigt wird. Daneben gibt es für verschiedenste Anwendungen insbesondere der Meteorologie den auf ein bestimmtes Höhenniveau, zumeist Meeresniveau bezogenen Luftdruck. Er wird *reduzierter Luftdruck* („sea level pressure“) genannt und entsteht durch Anbringen einer Höhenkorrektur an die gemessenen Werte. Mögliche Ansätze für die Rückrechnung sind in Kapitel 4.4.1 angegeben. In Bereichen ohne nennenswerte Topographie, also auf allen Ozeanen, ist diese Unterscheidung natürlich hinfällig.

Ziel der folgenden Kapitel ist es nun, aus Datensätzen mit Angaben über den Oberflächendruck zunächst die Abweichung Δp vom langjährigen Luftdruckmittel festzustellen, diese Größe in Oberflächendichten $\Delta \sigma$ umzuwandeln und darauf die Formeln des Kapitels 2.2.1 anzuwenden, um das von der momentanen Luftdruckverteilung erzeugte Gravitationsignal zu erhalten. Besonderes Augenmerk wird dabei auf die Wechselwirkung mit dem Ozean durch Auflasteffekte gelegt. Die zu erwartenden Größenordnungen liegen für die Luftdruckdifferenzen Δp bei etwa ± 40 hPa, was zu Variationen in den Geoidhöhen ΔN von etwa ± 10 mm führt.

4.2. Daten

Wie oben festgestellt, werden Datensätze mit der Luftdruckverteilung für die gesamte Erde in einem bestimmten Zeitintervall benötigt. Dabei müssen folgende allgemeine Gesichtspunkte berücksichtigt werden:

- Je höher die räumliche und zeitliche Auflösung, desto genauer werden die damit ermittelbaren Schwerefeldschwankungen, allerdings bei immer größerem Rechenaufwand.
- Da Luftdruckschwankungen auch Perioden von über einem Jahr aufweisen können, sollte sich die Zeitreihe für die spätere Analyse über mehrere Jahre erstrecken.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden Daten des National Center for Environmental Prediction (NCEP) aus dem „Reanalysis project“ des NOAA-CIRES³ Climate Diagnostics Center (CDC), Boulder, Colorado, USA verwendet. Hier⁴ sind Datensätze für reduzierten Luftdruck und für Oberflächendruck jeweils mit einem oder mit 4 Werten pro Tag, beginnend mit dem 1. Januar 1948 frei erhältlich. Die Daten liegen in einem $((N + 1) \times 2N)$ -Gitter von $2.5^\circ \times 2.5^\circ$ über die Bereiche $90^\circ\text{N} - 90^\circ\text{S}$ und $0^\circ - 357.5^\circ$ östlicher Länge im Format „NetCDF“ vor. Die Meßwerte entsprechen momentanen Ablesungen, die Tageswerte sind gemittelt aus den 6-stündigen Ablesungen. Als Meßstationen dienen neben terrestrischen meteorologischen Stationen auch Bojen auf den Ozeanen. Die Abdeckung ist dennoch nicht ideal, Problemzonen stellen die polaren Meere, die Antarktis und die großen Wüstengebiete dar. Die Gitterwerte sind aus den Meßwerten interpoliert, die in der Einheit Pa gegeben und laut Angabe des CDC auf 10 Pa signifikant bestimmt sind. Weitere Angaben zu den Daten können im Anhang C nachgelesen werden.

Bei der vorliegenden Arbeit wurden nur die Daten für den Oberflächendruck verwendet, da es sich hier abgesehen von der Interpolation um die originären Meßwerte handelt und da der Schwerpunkt dieser Arbeit nicht auf der Höhenkorrektur des Luftdrucks liegen soll. Ein DGM für die Rückrechnung vom reduzierten Luftdruck auf den Oberflächendruck wird vom CDC nicht vorgehalten und müßte aus anderen Quellen bezogen werden. Zudem ist bei verschiedenen Datenquellen auch von unterschiedlichen Korrekturmodellen auszugehen, die dann entsprechend wieder rückgerechnet werden müßten. Um den Rechenaufwand zu begrenzen, kamen nur die täglichen Werte und daraus abgeleitete Monatsmittel aus dem Zeitraum vom 1. Januar 1990 bis zum 31. Dezember 2000 zum Einsatz.

³ NOAA: National Oceanic and Atmospheric Administration, USA

CIRES: Cooperative Institute for Research in Environmental Sciences, University of Colorado, USA

⁴ Download über <http://www.cdc.noaa.gov/Datasets/ncep.reanalysis.dailyavgs/surface/>

4.3. Wechselwirkung mit dem Ozean

Wenn man davon ausgeht, daß sich der Ozean wie ein starrer Körper verhält und keinerlei Reaktion auf Luftdruckschwankungen zeigt, können die Daten über den Oberflächendruck direkt für die Berechnung der Oberflächendichten verwendet werden. Dann ist keine weitere Unterscheidung zwischen Land und Ozean notwendig. Dieser Fall wird in der Literatur als „non-inverted barometer“ bezeichnet und im folgenden mit NIB abgekürzt.

Dieser Ansatz entspricht jedoch nicht der Wirklichkeit. Realitätsnäher ist die Annahme, daß das Verhalten des Ozeans hydrostatisch ist: Ein Luftdruckanstieg von 1 hPa verursacht ein Absinken des Meeresspiegels um etwa 1 cm. Das Verhalten ist also umgekehrt zu dem eines Barometers, weswegen man von einem „inverted barometer“ (IB) spricht. Dieser Regel liegen die folgenden Annahmen zugrunde (nach [Verhagen, 2000]).

Es gelte wiederum die hydrostatische Grundgleichung:

$$dp = -g\rho dh \quad . \quad (4.5)$$

Desweiteren geht man von einer Äquipotentialfläche in einer bestimmten Tiefe D unter der Meeresoberfläche aus, bei der der Druck konstant sei (vgl. Abb. 4.2). Dieser Druck p_D berechnet sich nach:

$$p_D = p_i + \int_D^{h_i} dp(h) = p_i - g \int_D^{h_i} \rho(h) dh \quad i = 1, 2 \quad . \quad (4.6)$$

Der Oberflächendruck in den Punkten 1 und 2 wird dabei mit p_1 und p_2 bezeichnet. Die Druckdifferenz zwischen diesen beiden Punkten kann abgeleitet werden zu:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = -g \left(\int_D^{h_1} \rho(h) dh - \int_D^{h_2} \rho(h) dh \right) \quad . \quad (4.7)$$

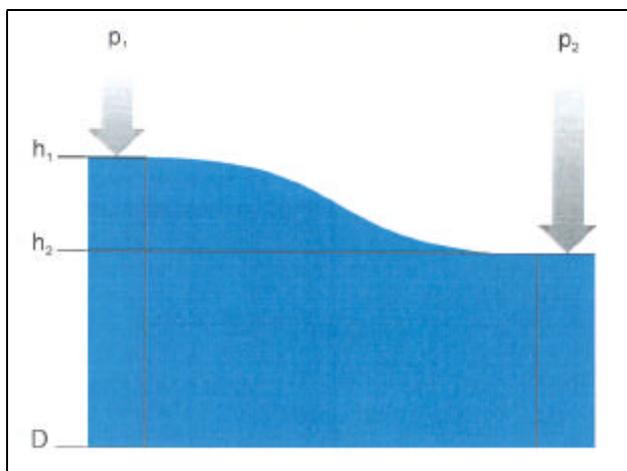


Abb. 4.2.: Druckdifferenz zweier Punkte und Reaktion des Ozeans

Nimmt man nun noch an, daß die Dichteverteilung zwischen der Tiefe D und h_2 für beide Punkte identisch ist und die Dichte bei 1 zwischen h_2 und h_1 konstant ist, gelangt man zu einer einfachen linearen Beziehung zwischen der Luftdruckdifferenz Δp und der daraus resultierenden Meeresspiegelschwankung Δh :

$$\begin{aligned} \Delta p &= -g\rho(h_2 - h_1) \\ \Rightarrow \Delta h &= -\frac{\Delta p}{g\rho} \quad . \quad (4.8) \end{aligned}$$

Setzt man $g = 10 \text{ m/s}^2$ und $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, so erhält man obige Aussage: eine Luftdruckänderung um 1 hPa führt zu einer Schwankung der Ozeanoberfläche von 1 cm. Das Vorzeichen ist im Sinne der Situation der Abb. 4.2 zu verstehen.

Da nach der Annahme in der Tiefe D keine tatsächlichen Druckänderungen mehr festgestellt werden können, ist dies im allgemeinen am Ozeanboden auch nicht möglich. Anders ausgedrückt: es finden keine Veränderungen der Gesamtmasse bei vertikaler Integration über Ozean und darüberliegende Atmosphäre statt. Daher können hier die Luftdruckschwankungen Δp ebenso wie der daraus abgeleitete Beitrag zu den Schwankungen des Schwerfeldes zu Null gesetzt werden, wenn die Auflasteffekte der Atmosphäre auf dem Ozean bei der Betrachtung von Schwerfeldvariationen durch Ozeanmassenverlagerungen ebenfalls zu Null gesetzt werden [Wahr et al., 1998].

Es ist bekannt, daß diese Annahmen in der Realität nicht exakt erfüllt sind. So treten bei langfristigen Betrachtungen Abweichungen durch Massenerhalt der Ozeanmasse, Massenanziehung der Ozeanmassen untereinander und durch Effekte der Auflast der Atmosphäre auf der festen Erde sowie durch indirekte Effekte auf. Es werden auch keine Reaktionen des Ozeans auf Luftdruckschwankungen mit kürzeren Perioden als 3–4 Tage erwartet. Daneben ergaben Pegelmessungen größere Abweichungen in den Tropen, in Küstenbereichen, Meerbusen und in Flachwasserbereichen. Nicht zuletzt treten auch auf den Kontinenten geringe Deformationen durch die Auflast auf, sie können jedoch vernachlässigt werden [Pail et al., 2000].

Es gibt mehrere Ansätze, alle Abweichungen zu berücksichtigen. Da sie zumeist sehr aufwendig in der Berechnung sind, die Abweichungen selbst aber nur gering und trotzdem Restfehler übrig bleiben, wird im Rahmen dieser Arbeit darauf verzichtet und auf die Literatur verwiesen ([Wunsch und Stammer, 1997], [Wahr et al., 1998], [Pail et al., 2000], [Verhagen, 2000]). Es soll lediglich noch der einfache Ansatz zur Berücksichtigung des Massenerhalts der Ozeanmasse vorgestellt werden.

Hierzu wird die mittlere Luftdruckschwankung $\Delta \bar{p}_0(t)$ über den Ozeanen verwendet. Die Idee ist, daß nur der mittlere Luftdruck über den Ozeanen auf den Grund übertragen wird. Bezeichnet man mit \bar{p}_0 den (konstanten) langfristigen mittleren Luftdruck aller Ozeanflächen und mit $\bar{p}_0(t)$ den momentanen mittleren Luftdruck aller Ozeanflächen, so berechnet sich die Luftdruckdifferenz für Ozeangebiete nach:

$$\Delta p = \Delta \bar{p}_0(t) = \bar{p}_0(t) - \bar{p}_0 \quad . \quad (4.9)$$

Im folgenden sei dieser Ansatz mit IBcon („inverted barometer + conservation of mass“) bezeichnet.

Bei den Berechnungen wird im folgenden zumeist nur der Fall IB betrachtet, da alle weiteren Zusatzmodelle erhöhten Rechenaufwand mit relativ geringem Informationsgewinn bedeuten und der Fall NIB eine zu unrealistische Annahme darstellt. Die Wirklichkeit liegt irgendwo zwischen IB und NIB, eher näher bei IB als bei NIB.

4.4. Berechnung

Alle im Rahmen dieser Arbeit gemachten Berechnungen erfolgten mit MATLAB. Hinweise zum Einlesen der Daten aus dem NetCDF-Format finden sich im Anhang C.

4.4.1. Höhenkorrektur des Luftdrucks

Für die Rückrechnung des reduzierten Luftdrucks auf den Oberflächendruck gibt es mehrere Formeln mit unterschiedlichen Vereinfachungen. Sie wurden im Rahmen dieser Arbeit nicht benötigt, sollen hier dennoch kurz wiedergegeben werden. Die genauesten Ergebnisse liefert die *temperaturkorrigierte barometrische Höhenformel*, die in physikalischen Nachschlagewerken zu finden ist:

$$p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{g(h-h_0)}{R \cdot T_m}\right) \quad , \quad (4.10)$$

bzw. unter Anwendung eines Temperaturgradienten von -0.0065 K/m für die Troposphäre:

$$p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{g(h-h_0)}{R(T_0 - 0.00325(h-h_0))}\right) \quad . \quad (4.11)$$

Der Luftdruck p in einer beliebigen Höhe h über einem Bezugsniveau h_0 kann damit aus $p(h_0) = p_0$, der mittleren Schwere g , der spezifischen Gaskonstanten R ($287.04 \text{ m}^2/(\text{s}^2\text{K})$) und der mittleren Temperatur T_m zwischen h_0 und h bzw. einem linearen Temperaturgradienten und der Temperatur auf Bezugsniveau T_0 berechnet werden. Obwohl diese Formeln nahezu exakte Ergebnisse liefern, liegen doch einige idealisierende Annahmen zugrunde:

- Die Schwerebeschleunigung g sei in Lage und Höhe konstant.
- Die Gaskonstante R sei konstant.
- Luft sei ein ideales Gas.

- Vorhandene Luftfeuchtigkeit habe keinen Einfluß.
- Der Temperaturgradient in der Troposphäre sei konstant und besitze obigen Wert.

Problematisch bei der Anwendung dieser Gleichungen ist die Bestimmung der Temperatur. In der Praxis ist es oft ausreichend, den temperaturabhängigen Teil im Exponenten durch eine Konstante a zu ersetzen. Dafür gibt es verschiedene Ansätze.

Geht man von der *barometrischen Höhenformel* für eine isotherme Atmosphäre aus:

$$p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g}{p_0} h\right) \quad \text{und} \quad \rho(h) = \rho_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g}{p_0} h\right), \quad (4.12)$$

so kann mit $h_{1/2}$ diejenige Höhe eingeführt werden, bei der Luftdruck und Dichte auf ihre halben Werte abgefallen sind. Die Höhenformel vereinfacht sich dann zu:

$$p(h) = p_0 \cdot e^{ah} \quad \text{mit} \quad a = -\frac{\rho_0 g}{p_0} \approx -\frac{\ln(2)}{h_{1/2}}. \quad (4.13)$$

Beispielhafte Zahlenwerte für eine Normatmosphäre nach DIN 5450 ($T_0 = 0^\circ\text{C}$, $p_0 = 1013.25 \text{ hPa}$, $\rho_0 = 1.293 \text{ kg/m}^3$) wären $h_{1/2} = 5540 \text{ m}$ und daraus $a = -1.256 \cdot 10^{-4}$.

Eine weitere Möglichkeit zur Berechnung der Korrektur bis zur Tropopause (ca. 11 km Höhe) bietet sich durch Annahme einer konstanten Temperatur von 15°C auf Bezugsniveau mit:

$$p(h) = p_0 \cdot \left(1 - \frac{6.5}{288} h\right)^{5.255} \quad (4.14)$$

Dies ist die *internationale Höhenformel* mit Temperaturkorrektur. Die Höhe h ist dabei in km einzusetzen [Hering et al., 1997]. Eine Betrachtung der Unterschiede und eventueller Fehler bei den jeweiligen Formeln findet sich in [Verhagen, 2000].

Für die Berechnung des Oberflächendrucks benötigt man bei beiden Ansätzen lediglich noch ein digitales Geländemodell (DGM) in der gleichen Gittergröße und -art wie das der Luftdruckdaten. Die Rückrechnung darf natürlich nur mit einem DGM vorgenommen werden, das für Ozeanflächen die Höhe 0 m aufweist anstatt der Meerestiefen. Punkte an Land können evtl. negative Höhen haben.

4.4.2. Berechnung der Oberflächendichten

Bei der Ableitung eines mathematischen Modells für den Ansatz nach Euler wurde die Auswirkung einer Variation der Oberflächendichte $\Delta\sigma$ auf die Potentialkoeffizienten gezeigt. Die Oberflächendichte konnte durch das Produkt einer konstanten Dichte von Wasser ρ_w mit äquivalenten Wasserhöhen $h_w(\theta, \lambda)$ ausgedrückt werden, vgl. Gleichung (2.22).

Das Problem besteht nun darin, Luftdruckschwankungen Δp in diese Größen umzuwandeln.

Wie in Kapitel 4.1 bereits festgestellt, erhält man durch radiale Integration aus dem Dichtefeld das Druckfeld (Gleichung (4.3)). Dies gilt ebenso für Dichteschwankungen. Bei Verwendung von sphärischen Koordinaten entsteht:

$$\Delta p(\theta, \lambda) = g \int_r \Delta \rho(r, \theta, \lambda) dr \quad . \quad (4.15)$$

Ein Vergleich von (4.15) mit (2.22) führt sofort auf die einfache Beziehung:

$$\Delta \sigma(\theta, \lambda) = \rho_w h_w(\theta, \lambda) = \frac{\Delta p(\theta, \lambda)}{g} \quad . \quad (4.16)$$

Mit g wird die mittlere Schwere bezeichnet, hier kann ein Näherungswert oder die Normal schwere verwendet werden. Im Zuge der folgenden Berechnungen wurde g mit 10 m/s^2 angesetzt. Das Einführen einer Breitenabhängigkeit hätte geringfügig größere Werte in den höheren Breiten zur Folge. Für die Berücksichtigung einer ebenfalls vorhandenen Höhenabhängigkeit von g wäre wiederum ein DGM nötig.

Dieses Vorgehen liefert Ergebnisse für $\Delta \sigma$, die sowohl Änderungen im Wasserdampfgehalt wie auch in der Masse der trockenen Luft enthalten. Die Gesamtmasse der Luftsäule befindet sich also nahezu im hydrostatischen Gleichgewicht [Wahr et al., 1998].

Löst man (4.16) nach h_w auf, so ergibt sich:

$$h_w(\theta, \lambda) = \frac{\Delta p(\theta, \lambda) [\text{Pa}]}{g \rho_w} \approx 0.01 \Delta p(\theta, \lambda) [\text{hPa}]. \quad (4.17)$$

Diese Gleichung stellt nichts anderes als die vertraute $1 \text{ cm} / 1 \text{ hPa}$ Beziehung dar, die schon in Kapitel 4.3 aufgetaucht ist.

4.4.3. Zusammenstellung des Rechenweges

In den vorangegangenen Kapiteln wurden alle Einzelschritte für die Berechnung der Änderung der Potentialkoeffizienten des Erdschwerefeldes $\Delta \bar{C}_{nm}$ und $\Delta \bar{S}_{nm}$ erläutert, nun sollen sie noch einmal übersichtlich zusammengestellt werden. Ausgangspunkt ist die Luftdruckverteilung zu einem bestimmten Zeitpunkt $p(\theta, \lambda, t)$, von der zunächst ein langjähriges Mittel $\bar{p}(\theta, \lambda)$ abgezogen wird, anschließend wird $\Delta \sigma$ nach (4.16) berechnet.

Bei Verwendung von reduziertem Luftdruck („SLP“) muß im Schritt 3 für Landgebiete die Luftdruckdifferenz wie angegeben oder durch eine andere Formel nach Kapitel 4.4.1 höhenkorrigiert werden.

1. Luftdruckdifferenzen

$$\Delta p(\theta, \lambda, t) = p(\theta, \lambda, t) - \bar{p}(\theta, \lambda)$$

2. Ozean

a) Fall NIB: $\Delta p(\theta, \lambda, t) = \Delta p(\theta, \lambda, t)$

b) Fall IB: $\Delta p(\theta, \lambda, t) = 0$

c) Fall IBcon: $\Delta p(\theta, \lambda, t) = \Delta \bar{p}_0(t)$

3. Land

a) Oberflächendruck: $\Delta p(\theta, \lambda, t) = \Delta p(\theta, \lambda, t)$

b) reduz. Luftdruck: $\Delta p(\theta, \lambda, t) = \Delta p_{SLP}(\theta, \lambda, t) \cdot e^{ah}$

4. Oberflächendichten

$$\Delta \sigma(\theta, \lambda, t) = \frac{\Delta p(\theta, \lambda, t)}{g}$$

5. Koeffizienten aus Entwicklung in Kugelflächenfunktionen

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \hat{C}_{nm}(t) \\ \Delta \hat{S}_{nm}(t) \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi R \rho_w} \iint_{\sigma} \Delta \sigma(\theta, \lambda, t) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix} d\sigma$$

6. Übergang auf Potentialkoeffizienten mit Auflasteffekt

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \bar{C}_{nm}(t) \\ \Delta \bar{S}_{nm}(t) \end{array} \right\} = \frac{1 + k'_n}{2n + 1} \cdot \frac{3\rho_w}{\bar{\rho}} \begin{Bmatrix} \Delta \hat{C}_{nm}(t) \\ \Delta \hat{S}_{nm}(t) \end{Bmatrix}$$

Bei der Berechnung der Fälle IB und IBcon sowie bei der Höhenkorrektur bei Verwendung des reduzierten Luftdrucks ist eine Unterscheidung zwischen Ozean und Land bzw. ein DGM notwendig. Verwendet man für die Unterscheidung eine mit den Luftdruckdaten erhältliche Maske, so können Differenzen mit dem verwendeten DGM auftreten.

So ist es möglich, daß Punkte mit negativen Höhen existieren, die nach der Maske auf Land liegen. Umgekehrt können Punkte mit positiven Höhen nach DGM im Bereich Ozean nach Maske zu liegen kommen. In diesen Fällen ist eine möglichst gute Übereinstimmung von Maske und DGM anzustreben. Im Rahmen dieser Arbeit kamen nur Daten mit Oberflächendruck zum Einsatz, folglich wurde auch ausschließlich die dort erhältliche Maske verwendet (vgl. Abb. 4.3).

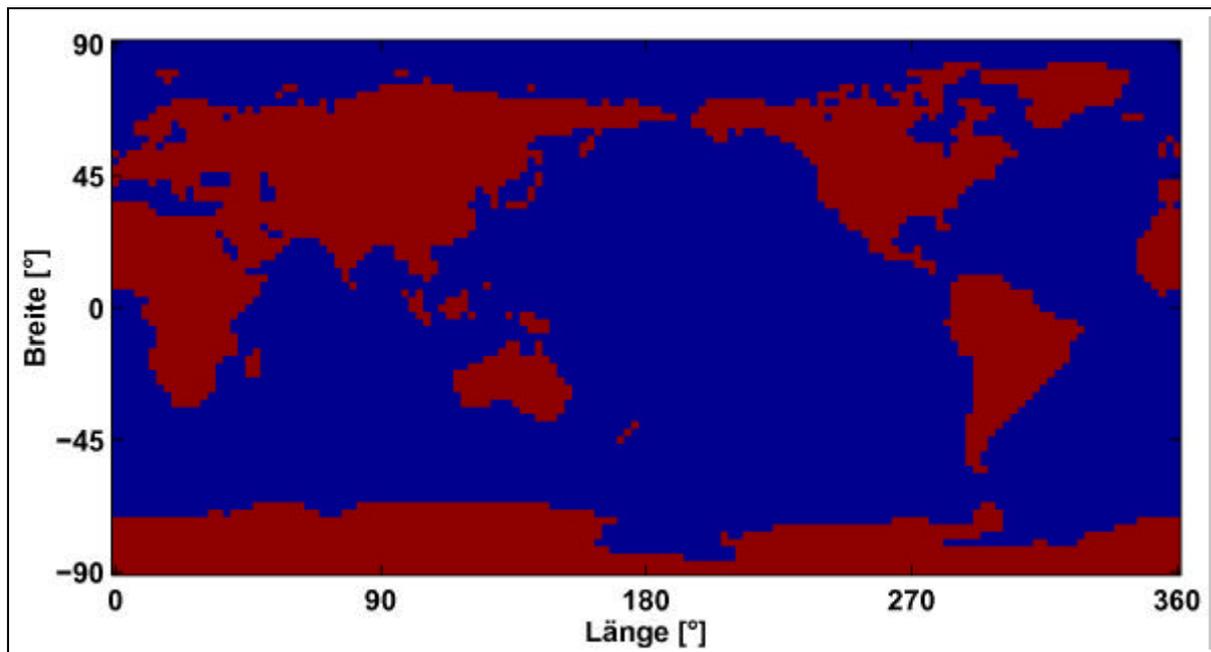


Abb. 4.3.: Land-Ozean-Maske des CDC

Die Abb. 4.4 zeigt das verwendete langjährige Mittel der Jahre 1990 - 2000. Da es sich um Oberflächendruck handelt, ist es einem DGM ähnlich. Auf den Ozeanen treten nur leichte Unterschiede auf, insbesondere in der Westwindzone rund um die Antarktis ist ein tieferer Wert zu sehen. Die jeweiligen Jahresmittel weichen im übrigen an manchen Punkten bis zu ± 6 hPa vom langjährigen Mittel ab.

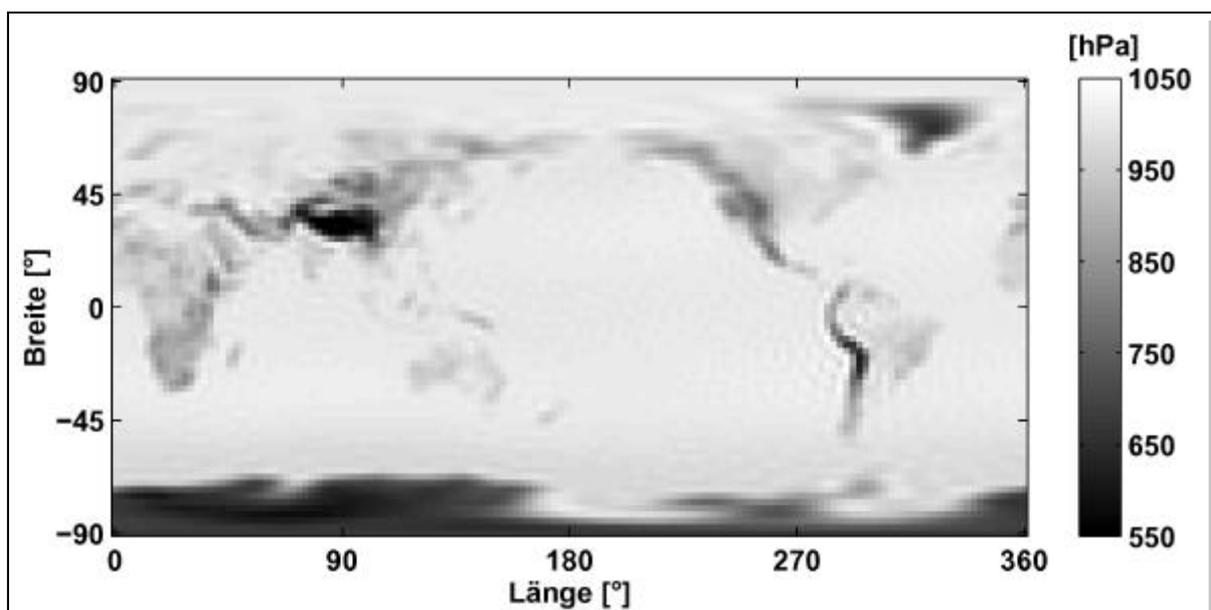


Abb. 4.4.: Mittlerer Oberflächendruck der Jahre 1990-2000

4.5. Ergebnisse

Die Berechnung nach dem in Kapitel 4.4.3 vorgestellten Schema führt zu einem Feld von Potentialkoeffizienten zu jedem Berechnungszeitpunkt. Um den Rechenweg deutlich zu machen, werden zunächst die Ergebnisse pro Berechnungsschritt anhand eines willkürlich gewählten Tages (1. Januar 2000) gezeigt. Im Anschluß daran finden sich die Ergebnisse für Monatsmittel für den Zeitraum von 1990 - 2000.

Als Ergebnisgröße für die Schwerfeldschwankungen wurden Geoidhöhen N gewählt, da diese wohl am ehesten anschaulich und vorstellbar sind. Sie ergeben sich aus den $\Delta\bar{C}_{nm}$ und $\Delta\bar{S}_{nm}$ zu:

$$\Delta N(\theta, \lambda, t) = R \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \left[\Delta\bar{C}_{nm}(t) \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{nm}(t) \sin m\lambda \right] \quad . \quad (4.18)$$

4.5.1. Teilschritte für einen Tag

Betrachten wir zunächst die Ausgangsdaten (Abb. 4.5). Da es sich um Oberflächendruckwerte handelt, ist hier, wie schon beim langjährigen Mittel, nichts wirklich anderes als ein DGM in einem $2.5^\circ \times 2.5^\circ$ -Gitter zu sehen. Die Werte liegen im Bereich zwischen 505.7 hPa und 1087.2 hPa, sind also entsprechend den Höhenlagen sehr weit gestreut.

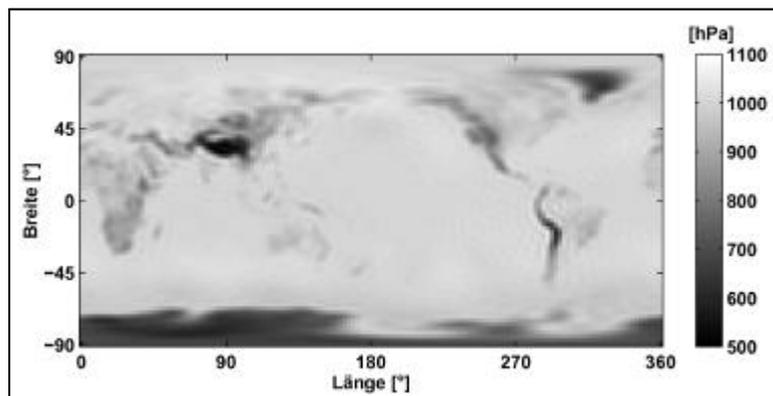


Abb. 4.5.: Luftdruckverteilung am 1.1.2000

Zieht man im ersten Schritt das langjährige Mittel ab, so entsteht die Luftdruckdifferenz (Luftdruckanomalie) Δp mit Werten im Bereich von -44.3 hPa bis 32.5 hPa (Fall NIB) bzw. -43.3 hPa bis 31.4 hPa bei Weglassen der Differenzen auf den Ozeanflächen (Abb. 4.6). Letzteres ist der Fall IB, der im folgenden weiter betrachtet wird. Diese Luftdruckdifferenzen haben ihre Ursachen in den Hoch- und Tiefdruckgebieten, die auch das

Wettergeschehen bestimmen. Deutlich zu sehen ist, daß diese vor allem in den mittleren Breiten (Westwindzonen) vorkommen, am Äquator und in der südlichen Polarregion hingegen nur geringe Differenzen entlang der Breitenkreise erscheinen. Auf der Nordhalbkugel dominieren die Polarbereiche mit einem ausgeprägten Hoch über Sibirien und einem Tief über Kanada und Grönland. Dies ist nicht immer so, häufig sind auch hier nur geringe Luftdruckschwankungen anzutreffen. Der Fall NIB wird im weiteren nicht mehr behandelt, er ist hier nur zum besseren Verständnis angegeben.

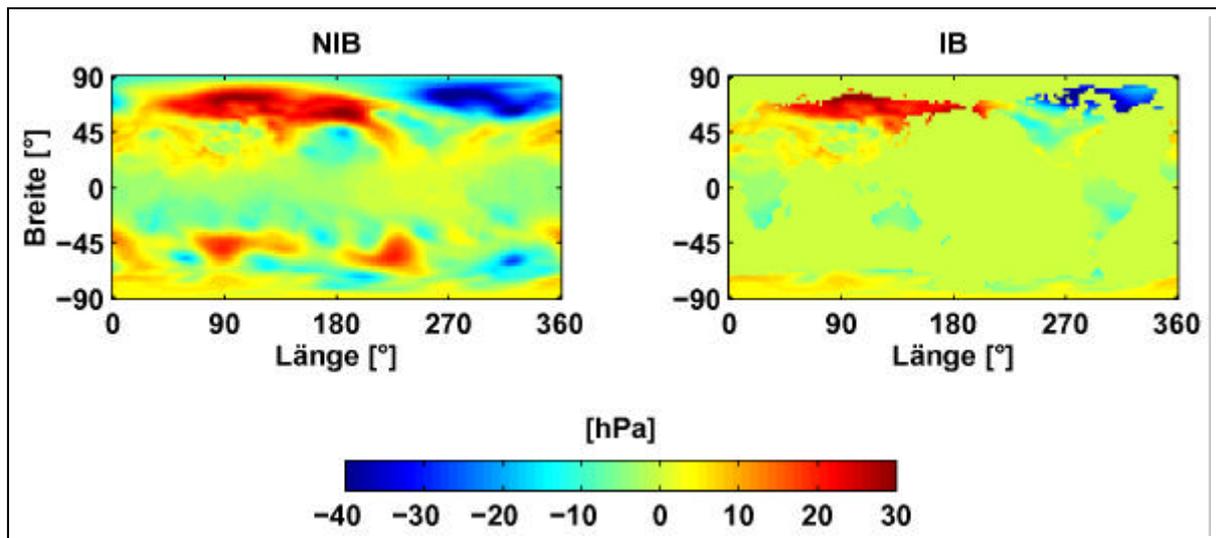


Abb. 4.6.: Δp am 1.1.2000, links Fall NIB, rechts Fall IB

Das Bild im Fall IBcon gleicht dem des Falls IB mit dem Unterschied, daß auf den Ozeanen nicht 0 hPa, sondern der konstante Wert von $\Delta \bar{p}_0(t) = -1.2$ hPa gesetzt wird. Ebenso sind je nach Fall die Bilder für die Oberflächendichte $\Delta \sigma$ und die äquivalente Wasserhöhe h_w identisch mit Abb. 4.6. Für die Oberflächendichten ist mit dem Faktor g (genähert 10) zu multiplizieren und die Einheit auf kg/m^2 zu ändern. Um äquivalente Wasserhöhen zu erhalten, braucht lediglich die Einheit auf cm geändert zu werden. Alle weiteren Berechnungen erfolgen ausschließlich nach dem in Kapitel 4.4.3 angegebenen Schema über die Reihenentwicklung von $\Delta \sigma$ für den Fall IB und Oberflächendruck als Ausgangsdaten.

Der folgende Rechenschritt ist die Entwicklung in Kugelflächenfunktionen (globale sphärisch-harmonische Analyse – GSHA) bis zu dem der Gitterweite entsprechenden maximalen Entwicklungsgrad 72. Um einen Eindruck von den Auswirkungen der in Kapitel 2.5 beschriebenen Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen, wie etwa des Gibbs-Phänomens, zu bekommen, wird, ähnlich wie in Abb. 2.5, gleich nach der Analyse wieder eine Synthese (GSHS) ausgeführt. Die dabei entstehende Differenz in $\Delta \sigma$ ist in Abb. 4.7 dargestellt. Es zeigen sich erschreckend große Maximalwerte. Sie liegen in etwa in der Größenordnung des Ausgangssignals selber.

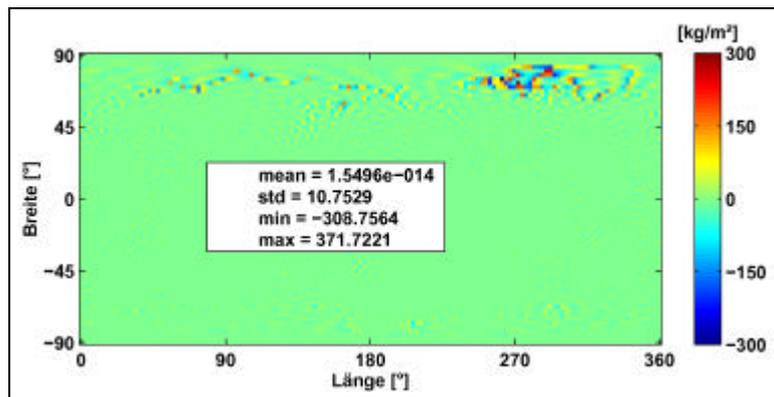


Abb. 4.7.: Fehler in $\Delta\sigma$ nach GSHA und GSHS, Fall IB

Die Abweichungen beschränken sich allerdings auf sehr kleine Gebiete insbesondere an den Kontinentalrändern. Der Mittelwert hingegen ist nahezu Null und die Standardabweichung bewegt sich im Rahmen von umgerechnet 1 hPa, also dem zehnfachen Wert des Signifikanzniveaus der Daten selbst. Dies hängt mit der enormen Größe der Extremwerte zusammen. Abhilfe würde ein höherer Entwicklungsgrad n_{\max} schaffen. Da die Fehler kleinräumig sind, beschränkt sich ihre Auswirkung auf die höheren Terme der Potentialkoeffizienten. Sie werden in den weiteren Betrachtungen daher vernachlässigt.

Weitere Zwischenergebnisse sind die Koeffizienten bis zu Grad und Ordnung 72, einmal für die Reihenentwicklung der Oberflächendichten $\Delta\hat{C}_{nm}, \Delta\hat{S}_{nm}$ und, daraus abgeleitet, die Änderungen der Potentialkoeffizienten $\Delta\bar{C}_{nm}, \Delta\bar{S}_{nm}$. Die Maximalwerte finden sich bei den zonalen Termen niedrigen Grades, etwa bei $\Delta\hat{C}_{20}, \Delta\hat{C}_{30}$ und $\Delta\hat{C}_{40}$. Bei Zunahme von Grad und Ordnung ist eine Abnahme der Beträge zu erkennen. Deutlich sichtbar ist auch die Wirkung des Skalierungsfaktors $(1 + k'_n)/(2n + 1)$. Hiermit und mit dem Faktor $3\rho_w/\bar{\rho}$ sind die insgesamt kleineren Werte der $\Delta\bar{C}_{nm}$ und $\Delta\bar{S}_{nm}$ zu erklären.

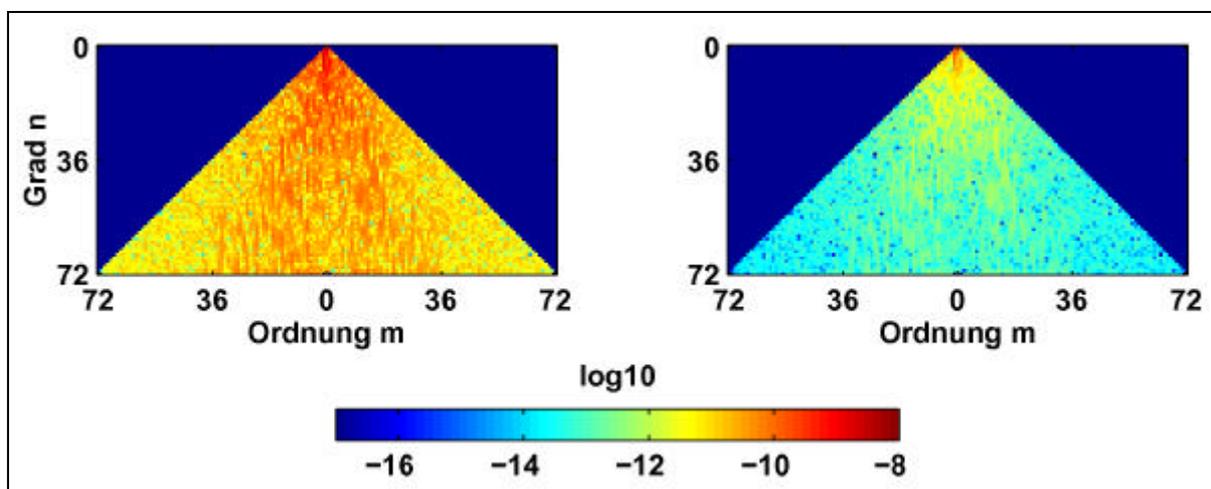


Abb. 4.8.: 1.1.2000, links: Beträge von $\Delta\hat{C}_{nm}, \Delta\hat{S}_{nm}$, rechts: Beträge von $\Delta\bar{C}_{nm}, \Delta\bar{S}_{nm}$

Da in beiden Feldern sowohl positive wie auch negative Werte auftreten, ist jeweils nur der Betrag dargestellt. Es sei noch angemerkt, daß nach den Überlegungen des Kapitels 2.4 weder die Terme vom Grad 0 noch die vom Grad 1 zu Null gesetzt wurden, also kein Mittelwert abgezogen ist.

Durch die abschließende Synthese nach Gleichung (4.18) ergeben sich Änderungen in den Geoidhöhen ΔN im Bereich von -7 mm bis 15 mm. Diese Größenordnung ist repräsentativ. Um den Anteil des indirekten Effektes aufzuzeigen, sind die Komponenten des Gesamteffekts auch getrennt dargestellt. Dabei liegt der direkte Anteil mit -8.6 mm bis 16.4 mm etwa fünf- bis zehnmal höher als der des indirekten Effektes mit -2.0 mm bis 1.4 mm. Dies ist die Wirkung der Skalierung mit den Love'schen Zahlen für Auflast.

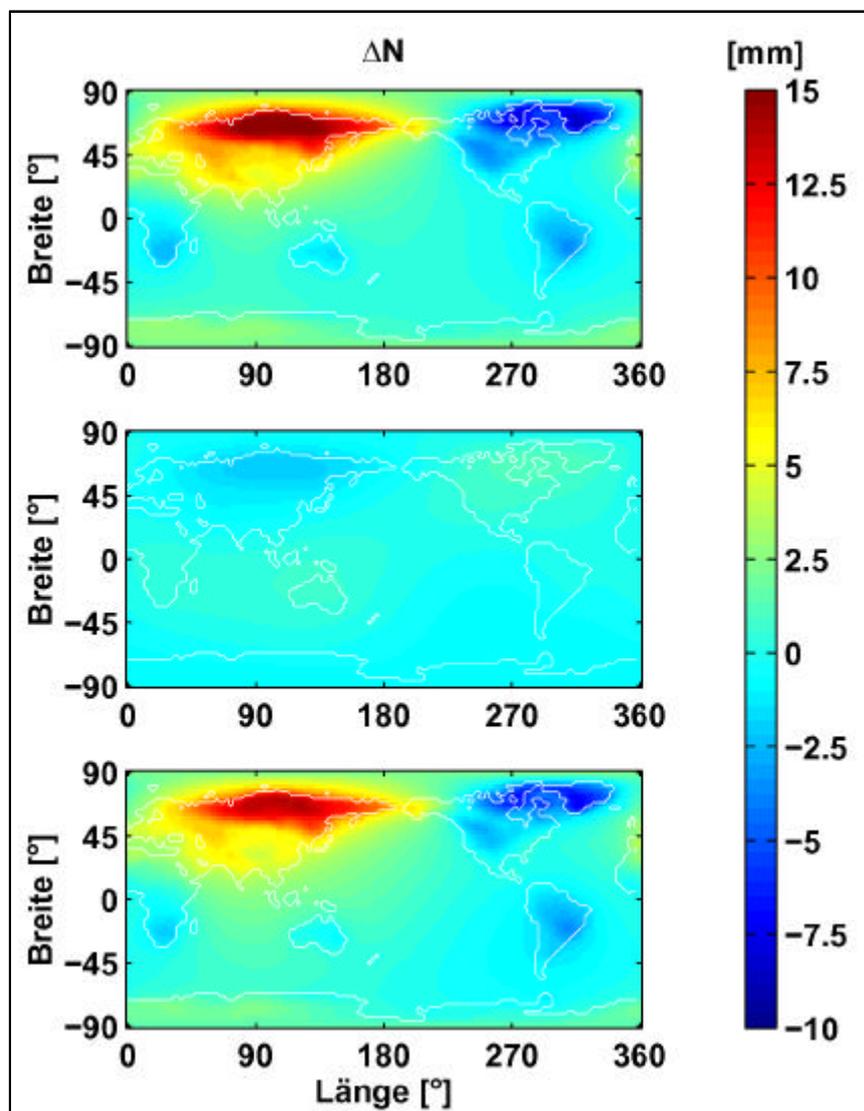


Abb. 4.9.: ΔN am 1. Januar 2000

oben: direkter Effekt, Mitte: indirekter Effekt, unten: Gesamteffekt

4.5.2. Zeitreihe von 1990 - 2000

Nach der Betrachtung der einzelnen Berechnungsschritte sollen nun die zeitlichen Variationen genauer angesehen werden. Dies geschieht mittels einer Zeitreihe über 11 Jahre vom 1. Januar 1990 bis zum 31. Dezember 2000, entsprechend 4018 Tagen. Um die Berechnung angesichts der 10512 Punkte des weltweiten Gitters pro Tag nicht allzu aufwendig werden zu lassen und die Ergebnisse auf Papier darstellen zu können, werden zunächst aus den Luftdruckdaten Monatsmittel gebildet und anschließend nur noch diese weiter betrachtet.

Aufgrund der Linearität der angewendeten Rechenoperationen Analyse und Synthese erhält man das gleiche Ergebnis wie bei einer Berechnung pro Tag mit anschließender Mittelung der Ergebnisse.

In den Abb. 4.10 und 4.11 auf den folgenden beiden Seiten sind die Geoidschwankungen unter der IB-Annahme für jeden Monat in Form einer Weltkarte dargestellt. Die Werte liegen im Bereich von -9.8 mm bis 13.8 mm. In den Abbildungen sind jedoch nur Werte zwischen -8 mm und 8 mm farblich unterschieden.

Eine jährliche Periode ist vor allem im Bereich des asiatischen Kontinents gut zu erkennen. In den Monaten November bis Februar treten zumeist große positive Werte auf, während sie von Juni bis August stark negativ sind. Einzelne Monate wie der April 1998 oder der Dezember 2000 zeigen wiederum starke Abweichungen von allen anderen Monaten. Dies hängt nicht direkt mit den Luftdruckwerten zusammen, hier bietet sich vor allem aufgrund der IB-Annahme ein teilweise sehr unterschiedliches Bild im Vergleich zu einer Bilderserie mit den Luftdruckdifferenzen. Ein ähnliches Bild zeigen die Ergebnisse für den Fall NIB. Meistens treten dort etwas größere Werte auf, die Perioden und die räumliche Verteilung sind weitgehend ähnlich.

Versucht man, die Bereiche mit großen und kleinen Schwankungen räumlich zuzuordnen, so können besonders Eurasien und hier vor allem Zentralasien sowie die Antarktis zu den Gebieten mit großen Schwankungen gerechnet werden, während auf den Ozeanen, insbesondere dem Pazifik, nur kleine Werte auftreten. Auch dies rührt zum Teil von der IB-Annahme her.

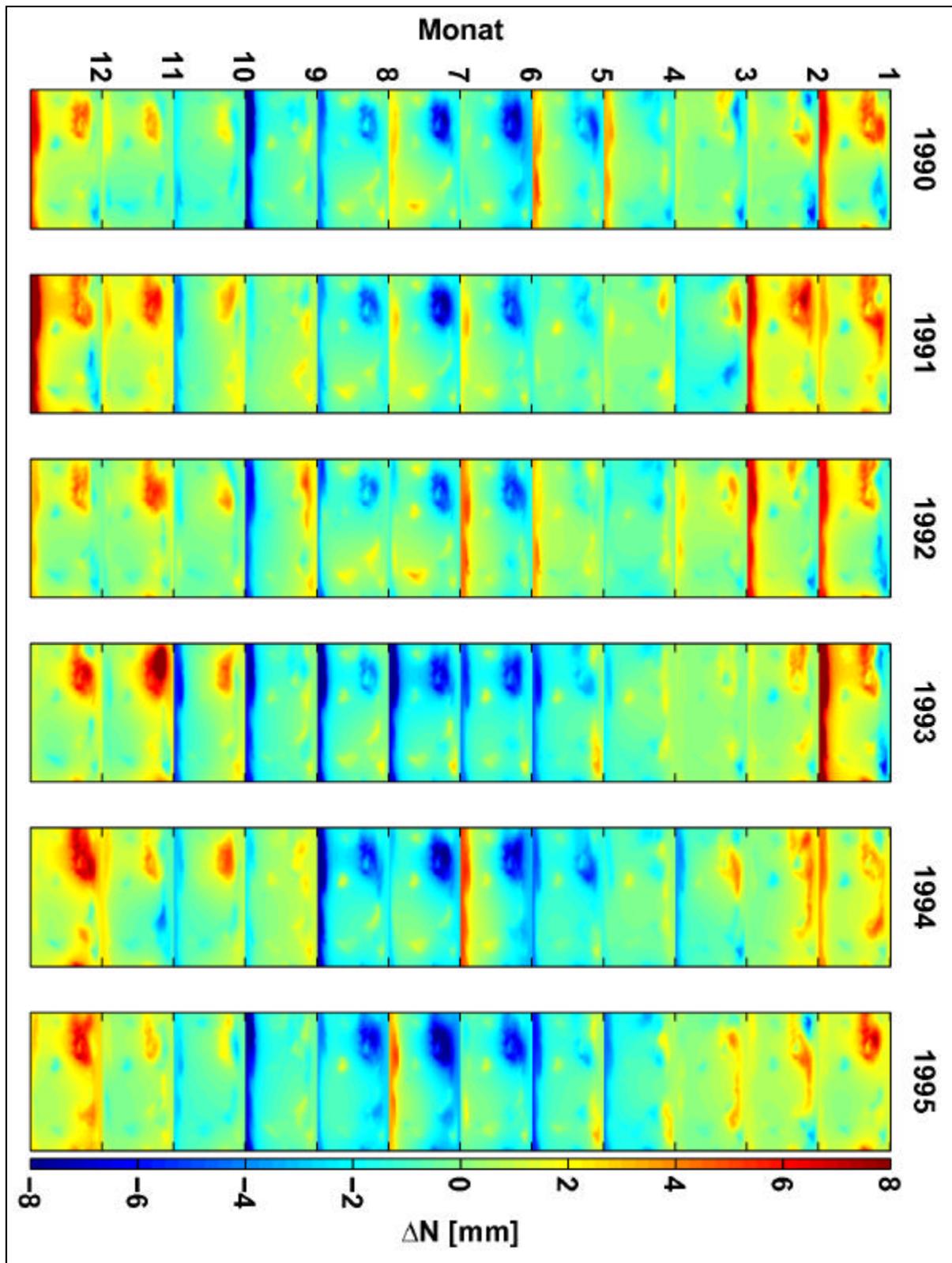


Abb. 4.10.: Monatliche Geoidhöhenvariationen ΔN von 1990 - 1995

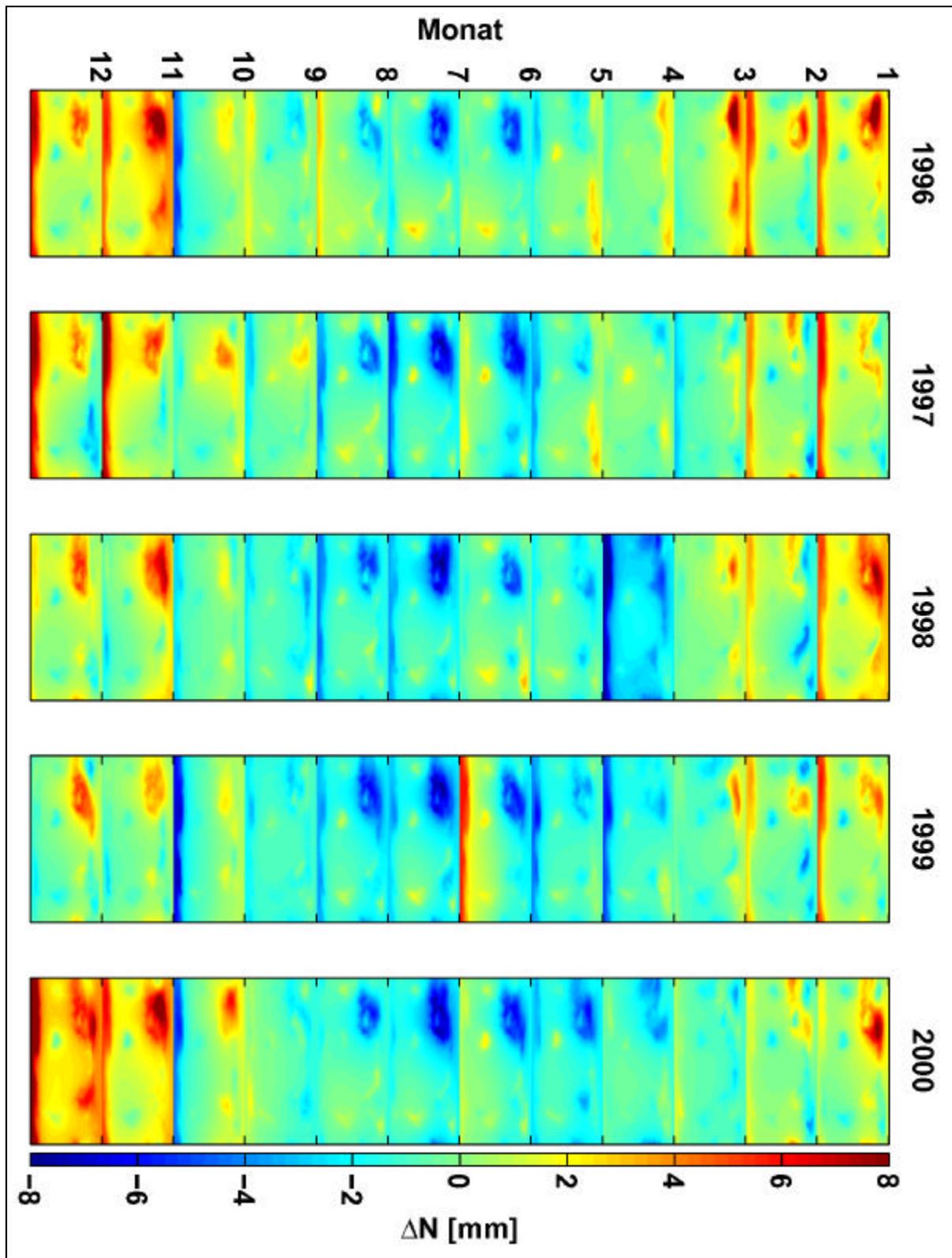


Abb. 4.11.: Monatliche Geoidhöhenvariationen ΔN von 1996 - 2000

4.6. Analyse

Ziel der Analyse ist es, die Schwankungen des Schwerefeldes der Erde modellieren zu können. Eine Analyse verschiedener Zeitreihen soll die auftretenden Amplituden und Perioden aufzeigen, um sie vorhersagbar zu machen. Wichtig sind dabei die räumliche und die zeitliche Auflösung. Zur Berechnung der Amplituden und Frequenzen wird eine Diskrete Fouriertransformation vorgenommen. Anmerkungen hierzu finden sich im Anhang B.2. Analysiert werden einerseits Luftdruckschwankungen selber und andererseits die resultierenden Potentialfelder.

4.6.1. Räumliche Unterschiede im Luftdruck

Wie aus den Ergebnissen für die Zeitreihe bereits ersichtlich war, gibt es Regionen mit großen und solche mit kleineren Geoidschwankungen. Daneben erkennt man teilweise sehr geringe Variationen entlang der Breitenkreise. Deshalb werden nun vier ausgewählte Punkte, vier Meridianschnitte, ein Mittel über die Breitenkreise und ein weltweites Mittel in den Ausgangsdaten Δp hinsichtlich ihrer Frequenzen und Amplituden untersucht. Für eine möglichst hohe zeitliche Auflösung werden tägliche Daten verwendet, die sich auf einen Zeitraum von drei Jahren vom 1. Januar 1998 bis zum 31. Dezember 2000 beziehen.

In Abb. 4.12 ist die Lage der vier Punkte auf der Erde dargestellt. Wie bereits festgestellt, liegen sie in Gebieten mit großen (Antarktis, Himalaya), mittleren (Nordamerika) und mit kleinen (am Äquator im Pazifik) Variationen des Schwerefeldes, deren Minima und Maxima zu unterschiedlichen Zeitpunkten auftreten.

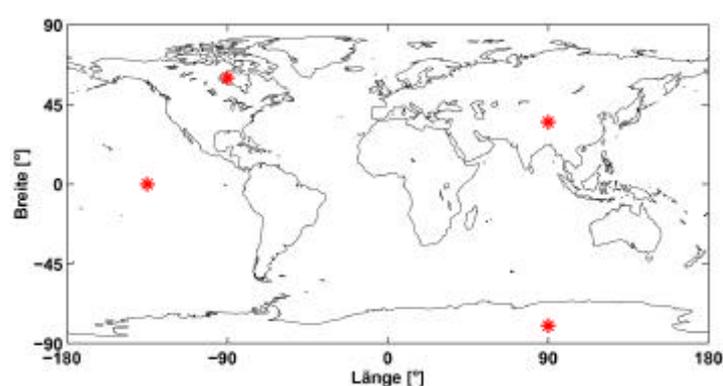


Abb. 4.12.: Lage der vier Punkte auf der Erde

Die Variationen im Luftdruck bewegen sich allgemein im Bereich von ± 20 hPa, einzelne Ausreißer haben auch doppelt so große Werte. An den vier ausgewählten Punkten zeigen sich sehr unterschiedliche Luftdruckverläufe von nahezu konstant (Pazifik) über deutlich periodische Kurven mit geringem Rauschen (Himalaya) bis zu stark schwankenden Signalen (Nordamerika), vgl. Abb. 4.13.

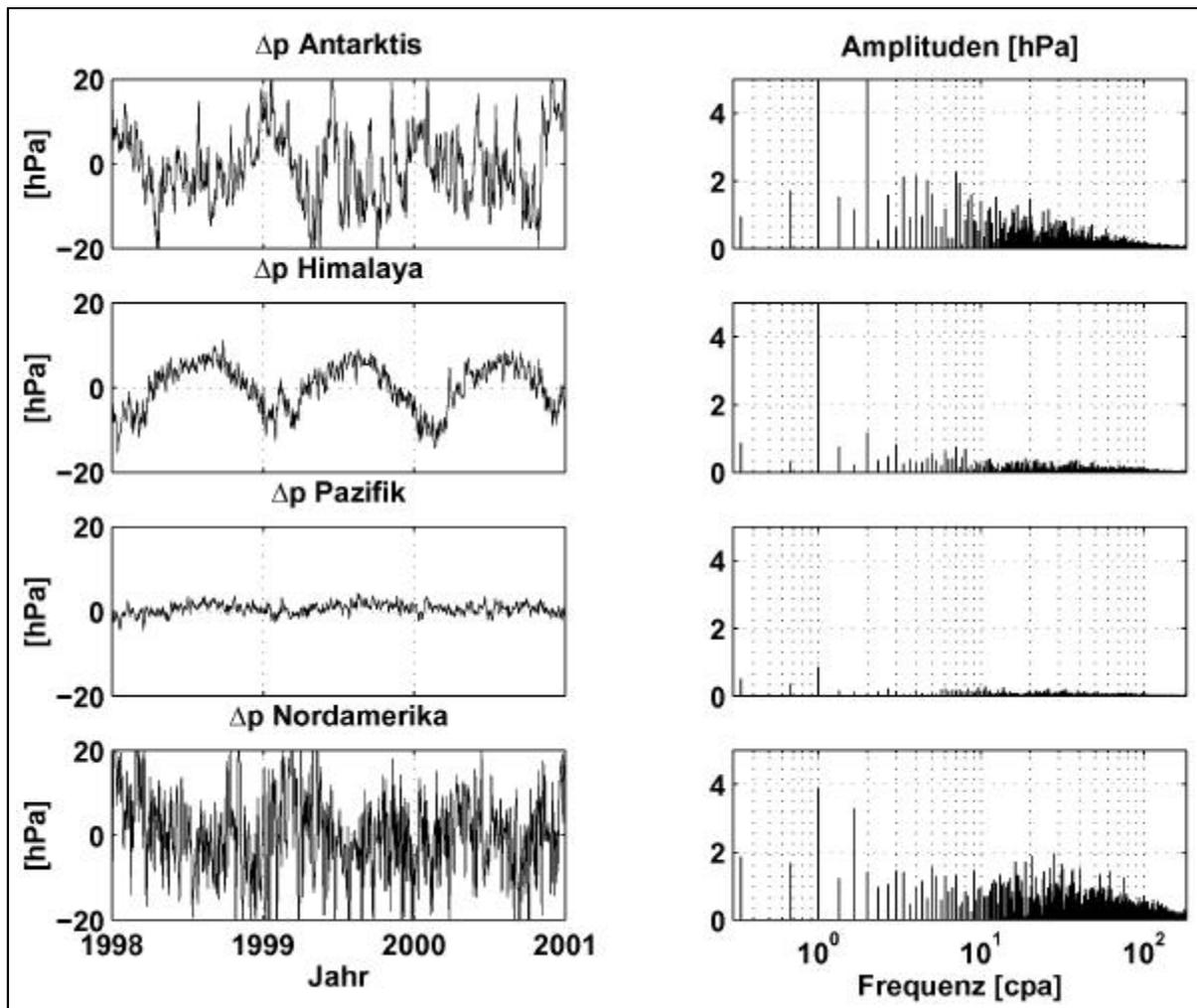


Abb. 4.13.: Luftdruckverlauf an den vier ausgewählten Punkten (cpa: Perioden pro Jahr)

Es treten jedoch in allen Fällen die maximalen Amplituden bei der jährlichen Frequenz auf, daneben gibt es vor allem noch eine halbjährliche Frequenz. Die Amplituden sind nur bis 5 hPa dargestellt, betragen teilweise aber bis zu 6.8 hPa. Weitere markante Frequenzen wie etwa eine monatliche oder 14-tägige sind nicht feststellbar.

Ein ähnliches Bild zeigt sich bei Betrachtung der Meridianschnitte entlang der Meridiane von Greenwich, 90°, 180° und 270° östlicher Länge (Abb. 4.14). Der Schwankungsbereich des Luftdrucks liegt bei etwa ± 40 hPa mit Einzelwerten bis ± 60 hPa. In den Tropen fällt er wesentlich kleiner aus. Die Amplituden liegen mit Ausnahme der jährlichen Frequenzen – hier gehen sie bis zu 10 hPa – immer unter 5 hPa. Die halbjährliche Frequenz ist zumeist nicht so stark ausgeprägt, daneben gibt es teilweise noch größere Werte bei der 3-Jahres-Frequenz. Markant ist außerdem die Jahresfrequenz beim Meridian von 90° Länge auf einer geringen nördlichen Breite, die vom bereits betrachteten Gebiet des Himalaya stammt. Signifikante höhere Frequenzen sind insbesondere in den Tropen nicht vorhanden.

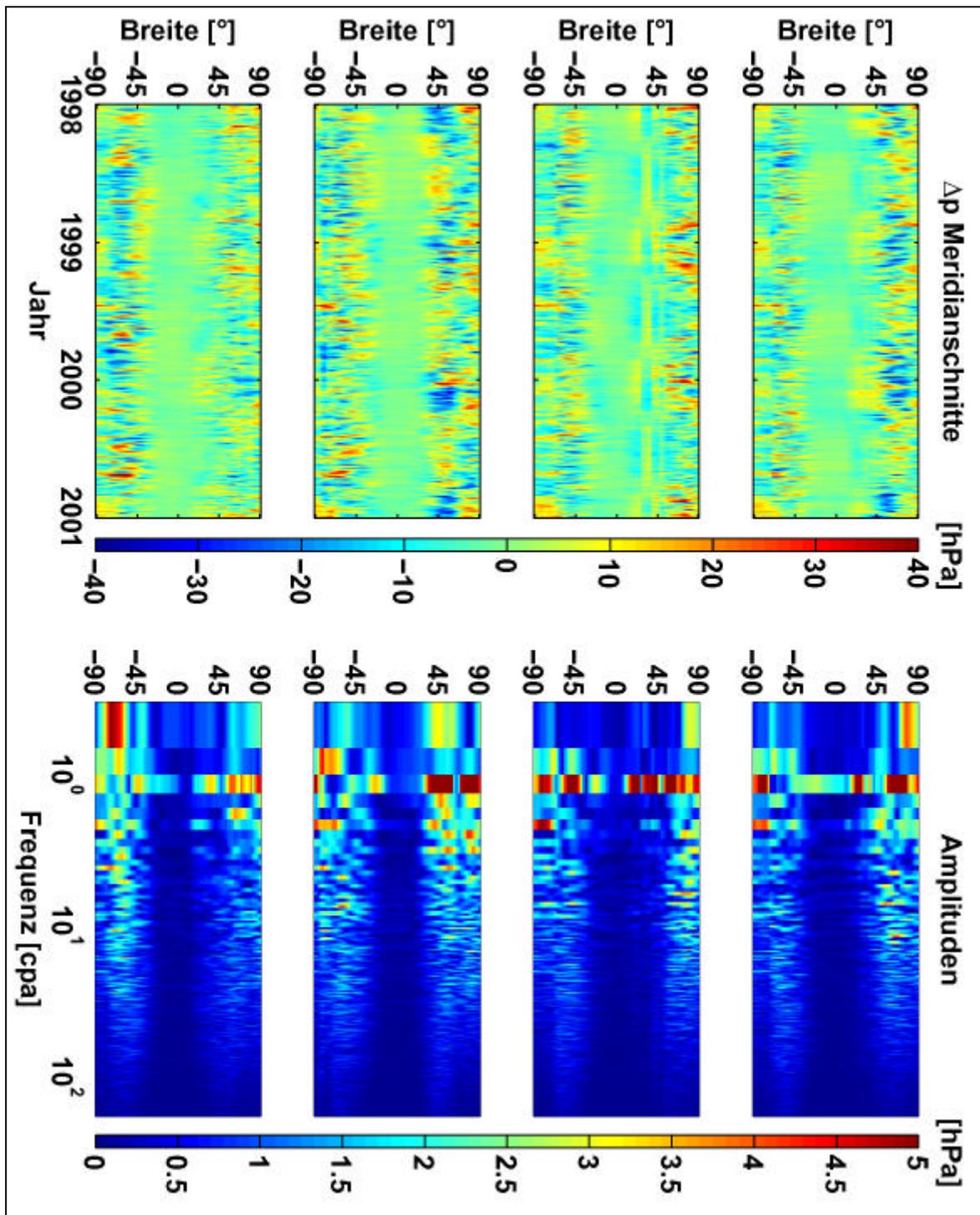


Abb. 4.14.: Meridianschnitte bei 0° , 90° , 180° und 270° Länge (von oben nach unten)

Trotz der recht unterschiedlichen Ergebnisse für jeden Meridianschnitt soll auch ein Blick auf die Mittel über die Breitenkreise von Δp und der Amplituden geworfen werden (vgl. Abb. 4.15 und 4.16). Sehr deutlich ist wieder die Jahresfrequenz mit bis zu 5.4 hPa Amplitude. Alle anderen Frequenzen scheinen ebenso wie die Luftdruckschwankungen geglättet zu sein.

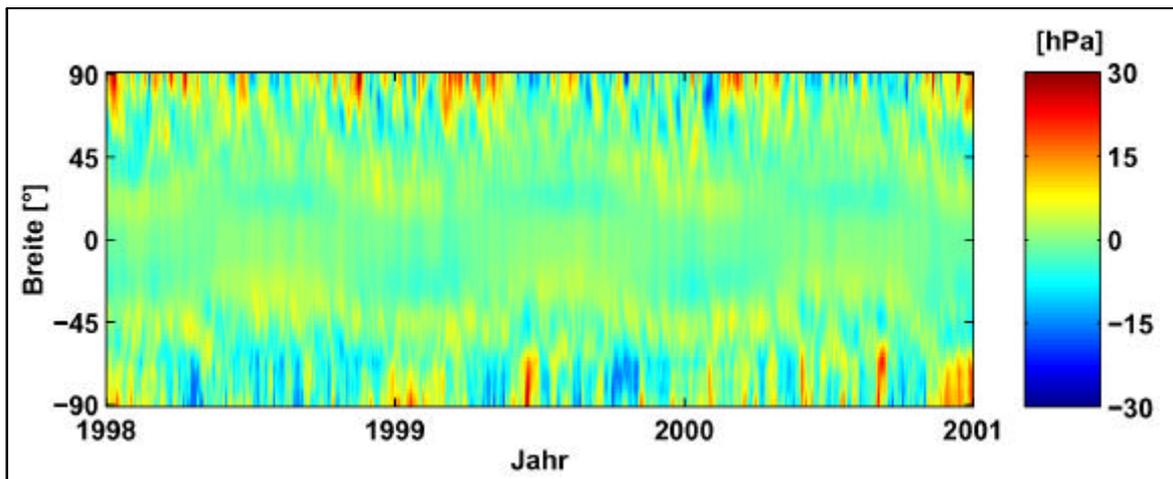


Abb. 4.15.: Mittel der Druckschwankungen Δp über Breitenkreise

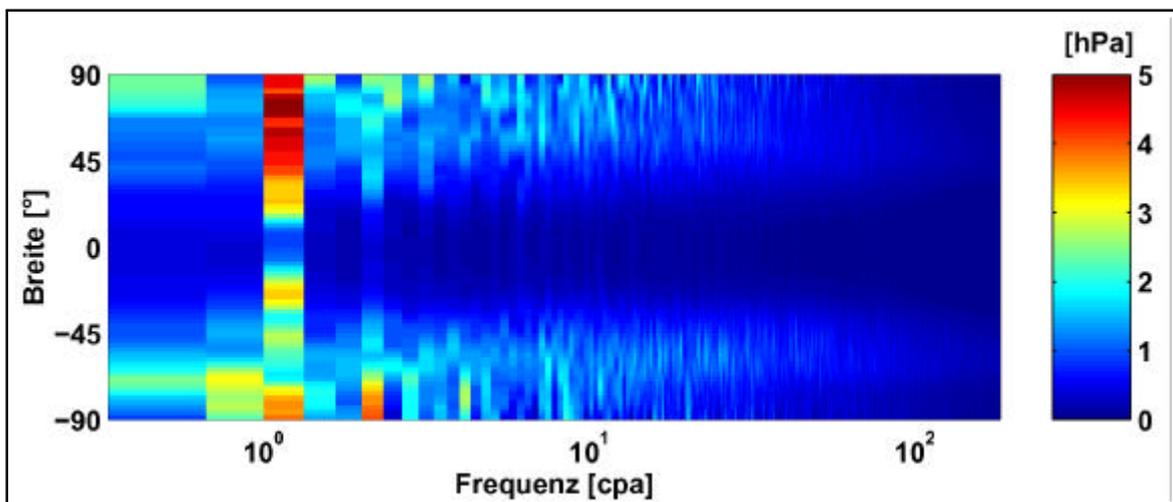


Abb. 4.16.: Mittel der Amplituden über Breitenkreise

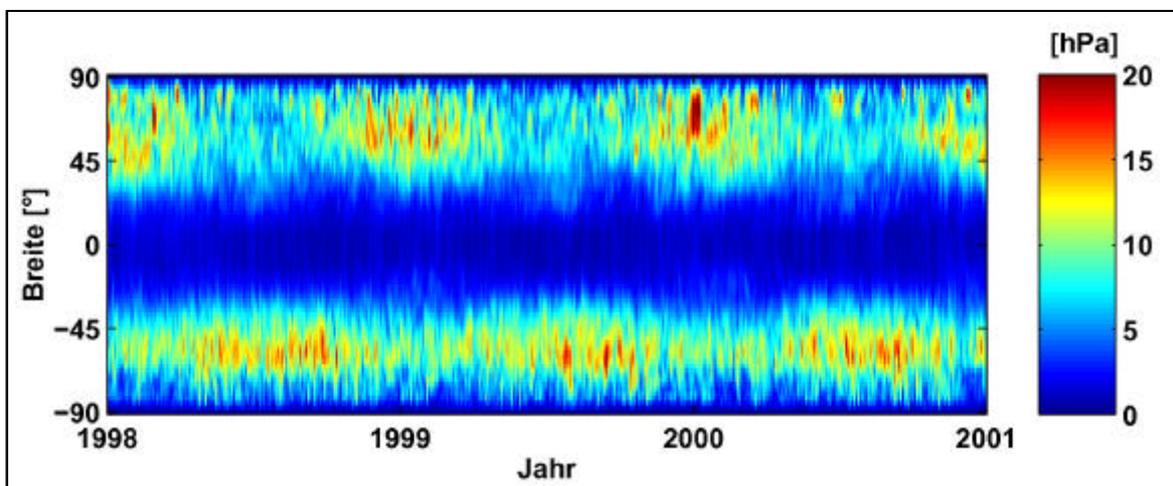


Abb. 4.17.: Standardabweichung der mittleren Druckschwankungen über Breitenkreise

Auch in den über die Längen gemittelten Standardabweichungen ist eine Jahresperiode zu erkennen (vgl. Abb. 4.17). Ebenso treten in den Breiten von 30° bis 80° sehr große Abweichungen vom Mittel über die Breitenkreise auf mit Maximalwerten in den jeweiligen Wintermonaten, was angesichts des Wechsels von meist westziehenden Hoch- und Tiefdruckgebieten in den mittleren Breiten nicht anders zu erwarten war.

Eine räumliche Auflösung der Abweichungen vom Mittel über die Breitenkreise ist in Abb. 4.18 zu sehen. Die Maximalwerte des zeitlichen Mittels der Abweichung pro Ort liegen mit ± 3 hPa erheblich niedriger als die Standardabweichung aus Abb. 4.17. Eine Zuordnung zur Topographie der Erde ist jedoch nicht möglich.

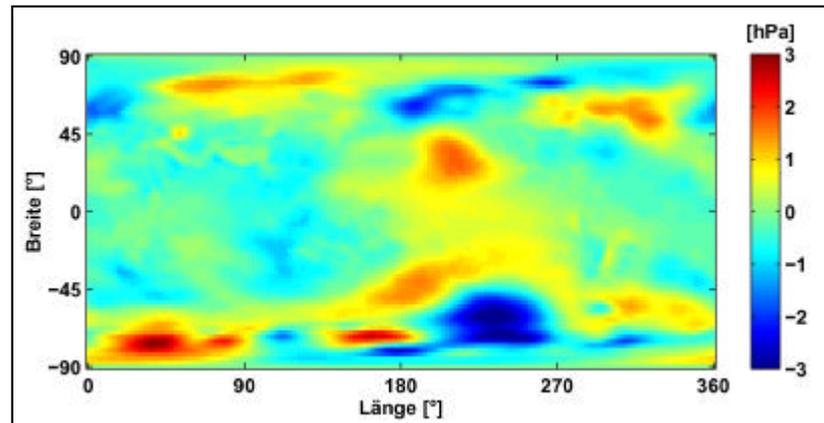


Abb. 4.18.: Zeitmittel der Abweichung vom Mittel über Breitenkreise in Δp

Insgesamt kann damit festgestellt werden, daß eine Mittelung über die Breitenkreise nur eine grobe Näherung darstellt. Sie wird deshalb im weiteren nicht vorgenommen. Dafür scheint es ohne größeren Informationsverlust möglich zu sein, sich auf Monatsmittel zu beschränken. Eine solche Verringerung der zeitlichen Auflösung macht jedoch eine im Rahmen der Modellierung der Effekte erforderliche Rückrechnung für hochfrequente Schwankungen unmöglich. Nach dem Abtasttheorem muß für eine fehlerfreie Rekonstruktion ein Signal mit einer Frequenz abgetastet werden, die mehr als doppelt so groß ist wie die höchste im Signal vorkommende Frequenz. Andernfalls kommt es zu einer Überlappung der Teilspektren und damit zu fehlerhaften Ergebnissen insbesondere in den hohen Frequenzen (auch „Aliasing“ genannt). Durch die Beschränkung auf Monatsmittel sind also höchstens zweimonatliche Schwankungen rekonstruierbar.

Zu bedenken ist auch, daß bisher weltweite Luftdruckschwankungen untersucht wurden, deren Erscheinungsbild in den abzuleitenden Oberflächendichten $\Delta\sigma$ dem Fall NIB entspricht. Für den realistischen Fall IB ergeben sich teilweise leicht andere Amplituden und Frequenzen.

Der Ansatz einer Mittelung über die gesamte Erde macht angesichts der obigen Ergebnisse nur eingeschränkt Sinn. Die dabei erzielten Ergebnisse sollen trotzdem in Abb. 4.19 kurz gezeigt werden. Interessant ist, daß die weltweite Schwankung des Luftdrucks pro

Tag nahezu bei Null liegt, allerdings mit einer um ein Vielfaches höheren Standardabweichung. Die Amplituden zeigen entsprechend kleine Werte, spiegeln aber recht gut die Größenverhältnisse der Frequenzen zueinander wieder.

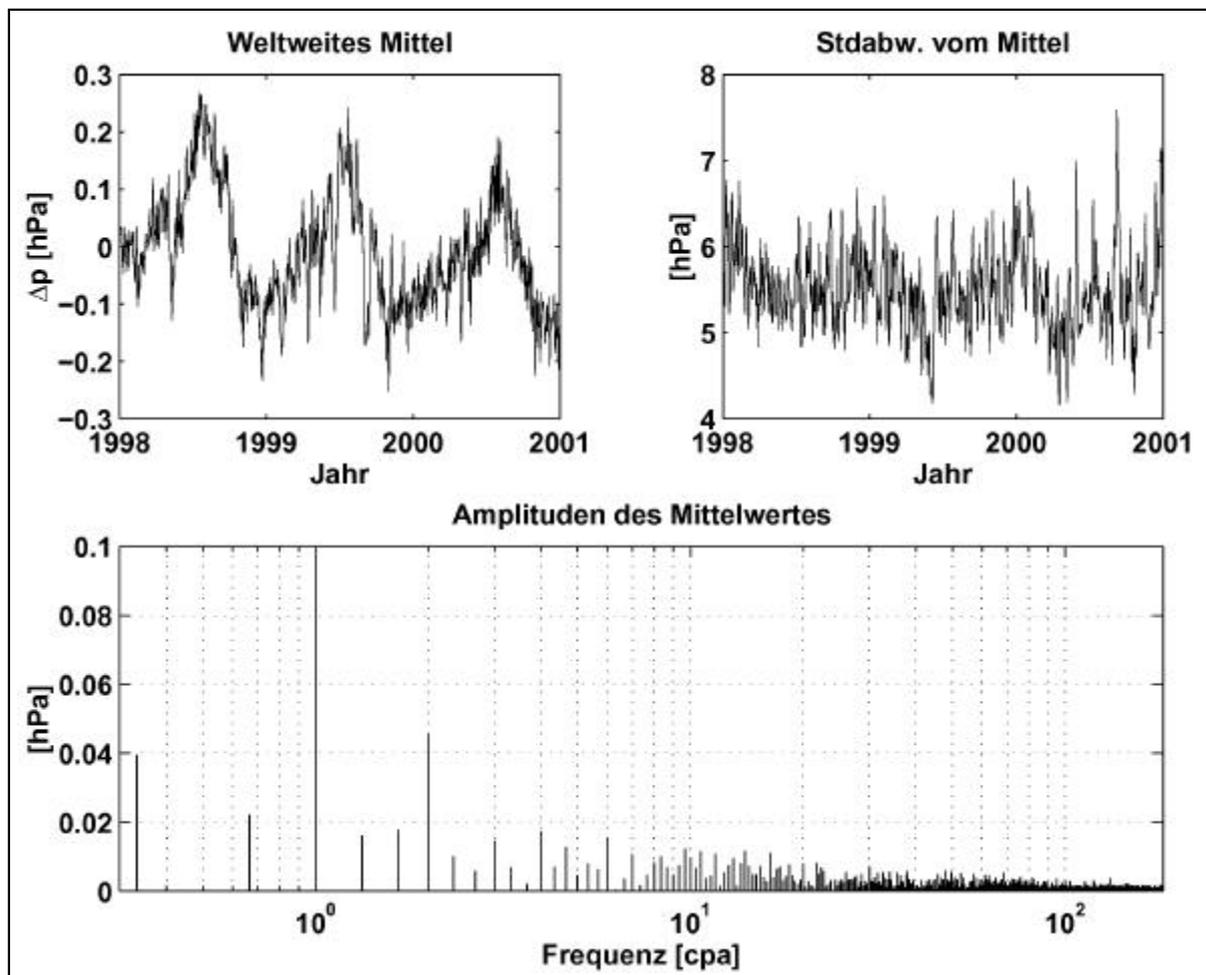


Abb. 4.19.: Weltweite Mittel von Δp , zugehörige Standardabweichung und Amplituden

4.6.2. Weltweite Schwerefeldschwankungen

Weltweite Schwerefeldvariationen, wie sie in Kapitel 4.5.2 gezeigt wurden, bestehen immer aus zwei räumlichen Dimensionen, nämlich Breite und Länge, sowie der Zeit als dritter Dimension. Dieser Umstand erschwert ihre Darstellung. Da eine Beschränkung der räumlichen Auflösung auf eine Dimension nicht zweckdienlich ist, sollen nun kurz weitere Größen für die Analyse weltweiter Schwerefeldvariationen vorgestellt und hierfür Ergebnisse gezeigt werden. Das Ziel ist eine eventuelle Beschränkung auf die Frequenzen mit den größten Amplituden.

Eine übliche Größe sind die Gradvarianzen σ_n^2 der Potentialkoeffizienten. Sie ergeben sich durch Summation über die Ordnung m :

$$\sigma_n^2 = \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2) \quad . \quad (4.19)$$

Eine daraus abgeleitete, nicht quadratische Größe ist der Grad-RMS, RMS_n . Dabei wird durch Division mit der Anzahl der Koeffizienten $2n + 1$ je Grad n der Mittelwert der Gradvarianzen gebildet. Dessen Quadratwurzel repräsentiert einen Durchschnittswert für die Einzelkoeffizienten je Grad:

$$\text{RMS}_n = \sqrt{\frac{1}{2n + 1} \sigma_n^2} \quad . \quad (4.20)$$

Beide Größen können je nach Eingangsgröße sowohl in Abhängigkeit der Zeit t als auch der Frequenz und damit der Wellenzahl k (s. Anhänge B.1 und B.2) angegeben werden. In unserem Fall sind die Eingangsgrößen nicht die Potentialkoeffizienten selber, sondern deren Änderungen aufgrund von Atmosphäreneffekten $\Delta\bar{C}_{nm}$ und $\Delta\bar{S}_{nm}$.

Summiert man weiter auch über den Grad n , erhält man Varianzen. Dies soll hier jedoch nicht getan werden, sondern nach [Pail et al., 2000] eine Größe Γ_t gezeigt werden, die sich berechnet gemäß:

$$\Gamma_t(k) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \text{RMS}_n(k) \quad . \quad (4.21)$$

Sie enthalte ähnlich einer Leistungsspektraldichte (PSD) Information über die durchschnittliche Stärke des Signals pro Frequenz. Es handelt sich mathematisch jedoch nicht um eine PSD, da kein Übergang auf eine Dichte gemacht wird. Diese Größe soll daher vornehmlich zum Vergleich der Ergebnisse mit anderen Studien verwendet werden. Wie dem auch sei, nun sollen Ergebnisse für die Grad-RMS der $\Delta\bar{C}_{nm}$ und $\Delta\bar{S}_{nm}$ betrachtet werden (Abb. 4.20 und 4.21).

Es handelt sich zum einen um die gleichen Daten wie in Kapitel 4.5.2, also um Monatsmittel über 11 Jahre (Abb. 4.20). Um eine höhere zeitliche Auflösung zu erreichen, besteht eine zweite Zeitreihe aus Tageswerten des Jahres 2000 (Abb. 4.21). In beiden Fällen haben die niedrigen Koeffizienten weitaus größere Werte als die mit höheren Graden. Bei den Frequenzen ist in Abb. 4.20 erneut eine deutliche Jahresperiode für $\text{cpa} = 1$ und eine Halbjahresperiode für $\text{cpa} = 2$ zu sehen. Weder die längeren Frequenzen bis zur 11-Jahresperiode noch die kürzeren bis zur zweitägigen Periode treten ansonsten hervor. Die Werte der beiden Hauptfrequenzen liegen fast immer mindestens um den Faktor 10 über allen anderen Frequenzen. Auffällig ist noch die relativ gleichmäßige Abnahme des Signals bei Perioden, die kürzer als ein Monat sind, die bei den vergleichsweise niedrigen Frequenzen in Abb. 4.20 nicht festgestellt werden kann.

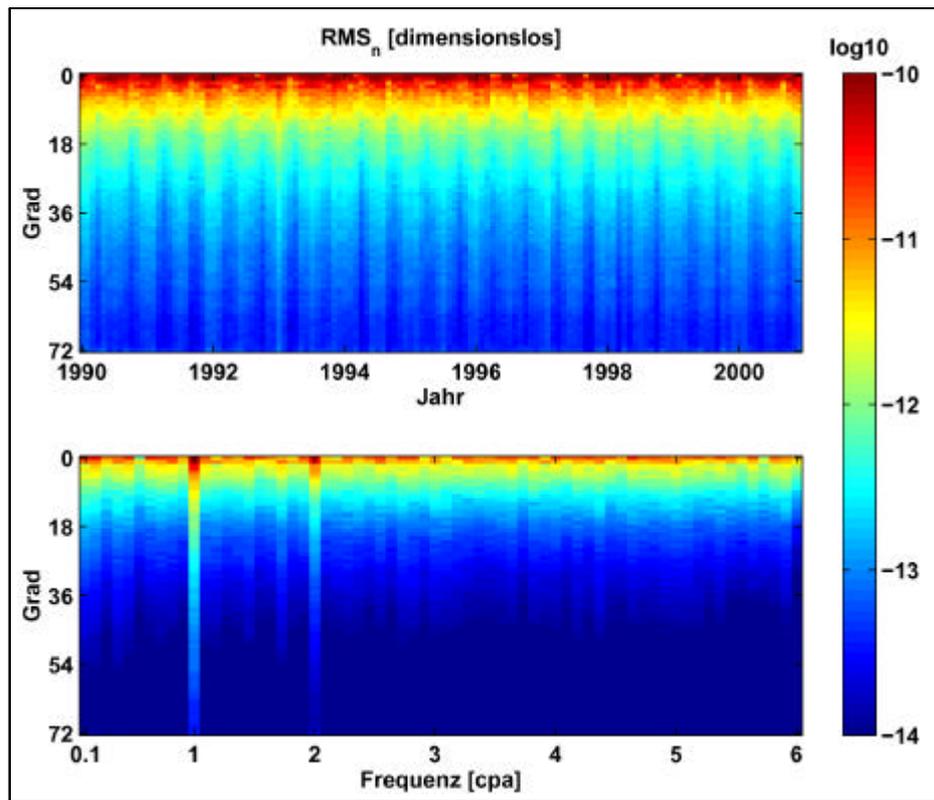


Abb. 4.20.: Grad-RMS der Zeitreihe über 11 Jahre

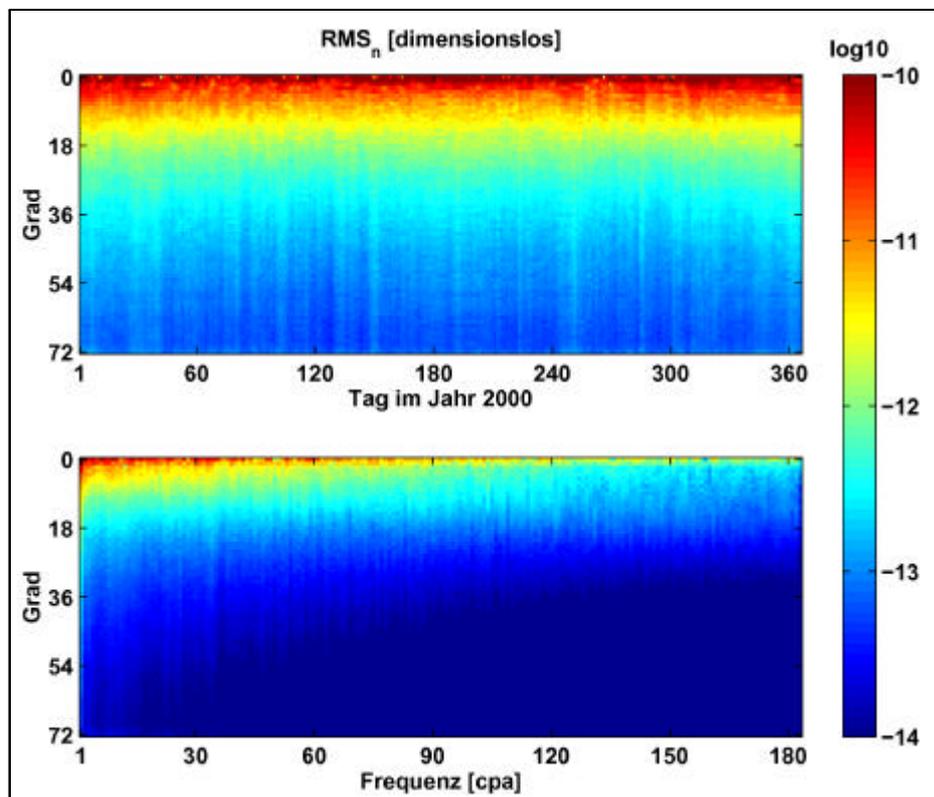


Abb. 4.21.: Grad-RMS der Zeitreihe über 1 Jahr

Ein ähnliches Fazit kann aus Abb. 4.22 für die dimensionslose Größe Γ_t mit den identischen Eingangsdaten wie oben gezogen werden. Wiederum sind die Jahres- und Halbjahresfrequenz dominant und mit Zunahme der Frequenz geht erneut wie in Abb. 4.21 eine deutliche Abnahme des Signals einher.

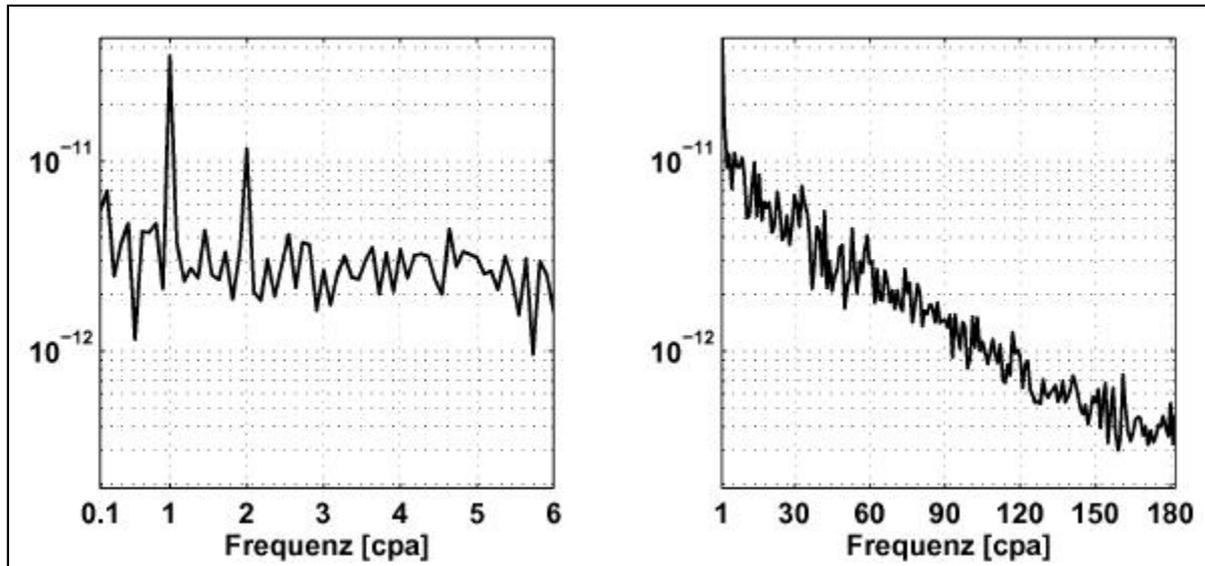


Abb. 4.22.: $\Gamma_t(k)$ für Monatsmittel 1990-2000 (links) und Tageswerte 2000 (rechts)

Interessant ist hier, daß bei Verwendung von Tageswerten wesentlich höhere Amplituden für die gleichen niedrigen Frequenzen wie bei den Monatsmitteln auftreten. Dies kann einerseits damit erklärt werden, daß durch die Mittelung Information verlorengeht (Faltung mit Monatsfenster im Ortsbereich, entspricht Multiplikation mit sinc-Funktion⁵ im Spektralbereich). Andererseits wird bei der Fouriertransformation von diskreten Daten stets das Spektrum der periodisch fortgesetzten Daten berechnet (vgl. Anhang B.2), was bei einer Zeitreihe von nur einem Jahr zu Fehlern führt, da der Luftdruckverlauf aperiodisch ist. Im letzteren Fall entspricht die Beschränkung auf ein Jahr einer Multiplikation mit dem Zeitfenster im Ortsbereich, was einer Faltung mit der sinc-Funktion im Spektralbereich gleicht. Man spricht hier von „Leakage“: der Signalinhalt wird verschmiert auf die benachbarten Frequenzen. Wählt man im übrigen die Zeitreihe mit den Tageswerten doppelt so lang, so nähert man sich bei den niedrigen Frequenzen wieder deutlich dem Fall mit den Monatsmitteln an (ohne Abb.).

Es kann somit festgehalten werden, daß die Signalstärke wesentlich von der Wahl der Länge und der Auflösung der Zeitreihe abhängt. Dies ist insbesondere beim Vergleich der Ergebnisse mit anderen Studien zu beachten.

⁵ $\text{sinc } x = \sin x/x$

Eine räumliche Betrachtung zeigt für die Jahresperiode maximale Amplituden von 6 mm im Bereich Zentralasiens, bei der Halbjahresperiode liegen sie mit knapp 3 mm im Bereich der Antarktis. Neben diesen beiden Gebieten können keine signifikanten Erscheinungen der Topographie zugeordnet werden (Abb. 4.23).

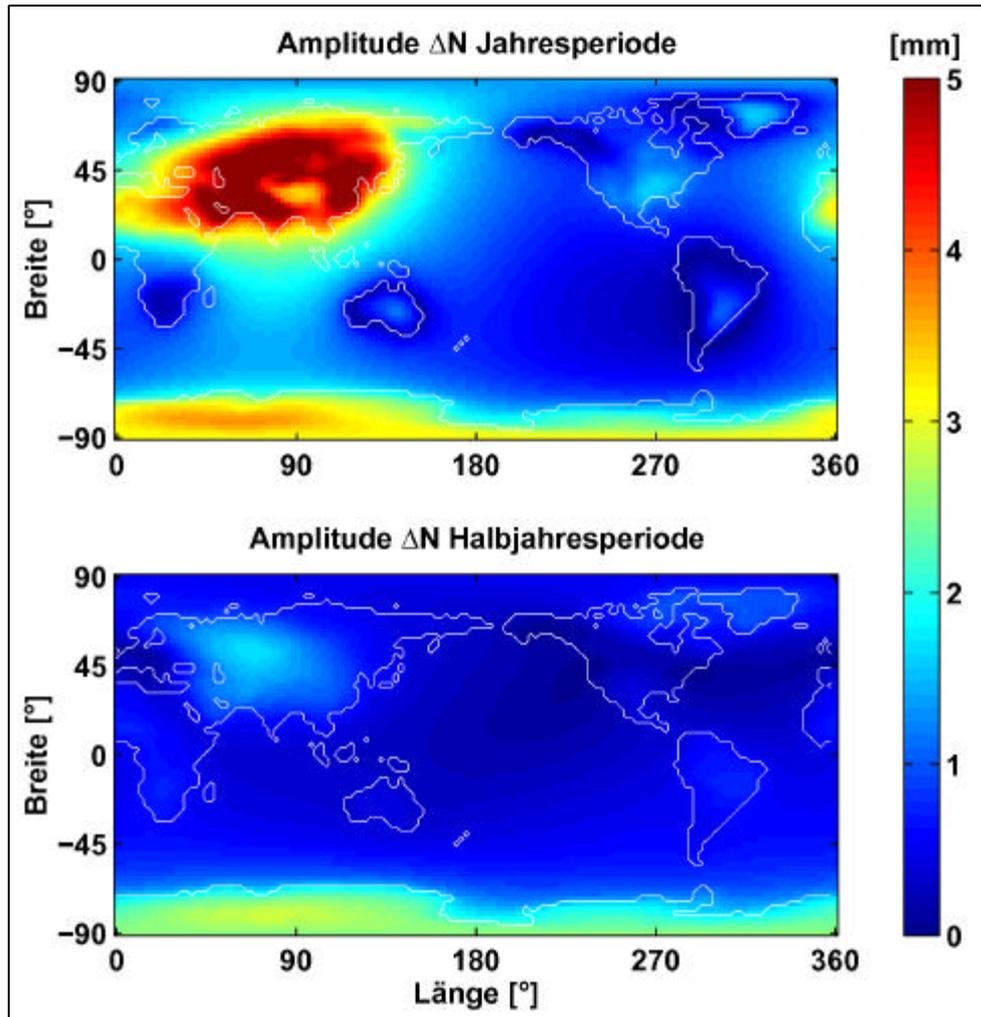


Abb. 4.23.: Amplituden der beiden Hauptfrequenzen, Zeitreihe der Monatsmittel

Für eine bessere Vorstellung der Variationen des Signals sei abschließend noch eine Art RMS-Wert der Schwerefeldvariationen aus der Differenz zwischen den Potentialkoeffizienten und ihrem zeitlichen Mittel betrachtet. Das zeitliche Mittel entspricht dem Fourierkoeffizienten a_0 , also den $\Delta\tilde{C}_{nm}(k=0)$ und $\Delta\tilde{S}_{nm}(k=0)$. Dieser RMS-Wert der Streuung, bezeichnet mit \tilde{r}_{nm} und \tilde{s}_{nm} , ergibt sich aus [Pail et al., 2000]:

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{r}_{nm} \\ \tilde{s}_{nm} \end{array} \right\} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left(\begin{array}{l} \Delta\tilde{C}_{nm}(t) - \Delta\tilde{C}_{nm}(k=0) \\ \Delta\tilde{S}_{nm}(t) - \Delta\tilde{S}_{nm}(k=0) \end{array} \right)^2} \quad (4.22)$$

Abb. 4.24 zeigt das Zeitmittel der Potentialkoeffizienten für die beiden bisher betrachteten Zeitreihen, Abb. 4.25 die obigen RMS-Werte.

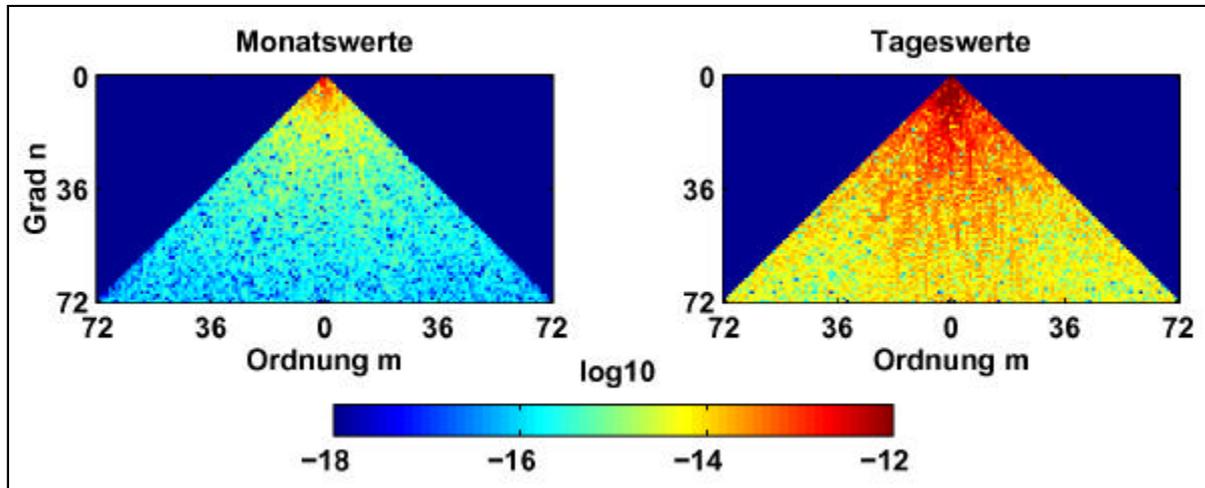


Abb. 4.24.: Zeitmittel der $\Delta\bar{C}_{nm}$ und $\Delta\bar{S}_{nm}$

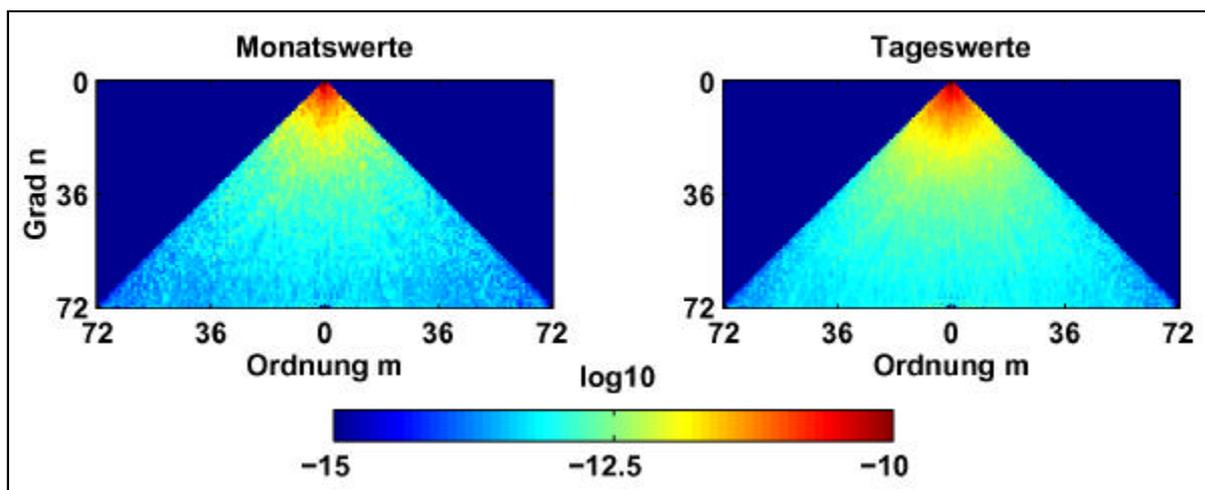


Abb. 4.25.: RMS der Streuung der Schwerefeldvariationen

In Abb. 4.24 sind in beiden Fällen die Werte für die niedrigen Grade und Ordnungen erwartungsgemäß am höchsten. Zonale und auch tesserale Koeffizienten zeigen höhere Werte als sektorielle. Interessant ist auch hier wieder das wesentlich stärkere Signal bei den Tageswerten mit den gleichen Ursachen wie oben bei der Größe Γ_t .

Die RMS-Werte haben in beiden Fällen ein ähnliches Erscheinungsbild, jedoch um 2-3 Zehnerpotenzen höhere Werte als das zeitliche Mittel. Es kommen also große Variationen innerhalb beider Zeitreihen vor.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß die durch die Atmosphäre verursachten Schwerefeldschwankungen hauptsächlich eine Jahresperiode und eine etwa halb so starke

Halbjahresperiode aufweisen. Die größten Amplituden dieser Frequenzen treten in Zentralasien auf. Darüberhinaus scheint der Gebrauch von Daten mit möglichst hoher zeitlicher Auflösung sowie ausreichender Länge der Zeitreihe wichtig, andernfalls wird der Informationsgehalt und die Stärke des Signals reduziert und es kommt zu Fehlern in den spektralen Darstellungen.

Für eine Abschätzung des Einflusses des Atmosphäreneffektes auf niedrig fliegende Satelliten wie GRACE und GOCE kann eine Beschränkung auf die beiden Hauptfrequenzen in Betracht gezogen werden. Es ist jedoch zu beachten, daß die Summe der Signalstärken der anderen Frequenzen auch im Bereich der Amplituden der Jahresfrequenz liegt.

4.7. Vergleich der Ergebnisse mit anderen Studien

Will man die Ergebnisse verschiedener Studien miteinander vergleichen, so sind zunächst einmal die jeweils getroffenen Annahmen sowie die verwendeten Datensätze hinsichtlich ihrer räumlichen und zeitlichen Auflösung zu betrachten. Bezüglich der Modellierung sollte überprüft werden,

- ob der Ansatz von Euler oder der von Lagrange gewählt wurde,
- wie mit dem Problem der dünnen Schicht beim Euler'schen Ansatz umgegangen wird,
- welche Love'schen Zahlen für Auflast verwendet werden und auf welches Erdmodell sie sich beziehen,
- ob das Prinzip des Massenerhalts auf der Erde zugrunde gelegt ist (Koeffizient vom Grad 0),
- wie mit den Termen vom Grad 1 umgegangen wird,
- und für den Effekt der Atmosphäre vor allem, welches Modell für die Wechselwirkung von Ozean und Atmosphärenauflast verwendet wird (NIB, IB, IBcon, weitere).

Größere Unterschiede in den Ergebnissen bei gleicher oder ähnlicher Modellierung sind wohl zumeist auf Unterschiede in den verwendeten Daten zurückzuführen. Wichtige Fragen hierzu sind:

- Daten: wird reduzierter Luftdruck zurückgerechnet oder direkt Oberflächendruck verwendet?
- Datenquelle: wo liegen die Meßstationen, welche Gebiete werden großflächig interpoliert?
- Datensätze: liegen sie weltweit vor oder gibt es Löcher in den Daten?
- Räumliche Auflösung der Daten und deren Gitterart: Gitterweite, Punktgitter oder Blockmittelwerte?
- Zeitliche Auflösung der Daten: 6-Stundenwerte bis Monatsmittel?
- Länge der untersuchten Zeitreihe: ein Jahr bis mehrere Jahrzehnte?
- Zeitraum: welche Jahre werden betrachtet?

Angesichts dieser vielen Möglichkeiten der Berechnung ist nicht zu erwarten, daß sich die Ergebnisse verschiedener Studien vollkommen gleichen. Ähnliche Größenordnungen und gleiche Hauptfrequenzen sollten jedoch immer festgestellt werden können. Mit diesen Überlegungen im Hinterkopf soll nun ein Vergleich mit den Ergebnissen der Arbeiten von [Chao und Au, 1991], [Wahr et al., 1998], [Pail et al., 2000] und [Verhagen, 2000] gemacht werden.

In [Chao und Au, 1991] werden Tageswerte über 9 Jahre reduzierten Luftdrucks des ECMWF⁶ zur Bestimmung der zonalen Koeffizienten mit niedrigem Grad verwendet.

Für den Fall IB treten vor allem jährliche und halbjährliche Perioden mit den Amplituden aus Abb. 4.26 auf. Zum Vergleich sind die Größen aus der Zeitreihe der Monatsmittel angegeben. Es ist eine deutliche Ähnlichkeit zu sehen, wobei die NCEP-Zeitreihe insbesondere beim Koeffizienten J_5 in der Jahresfrequenz eine geringere Signalstärke aufweist. Die geringere Signalstärke kann wohl wie oben bei der Größe Γ_t auf die Mittelung zurückgeführt werden.

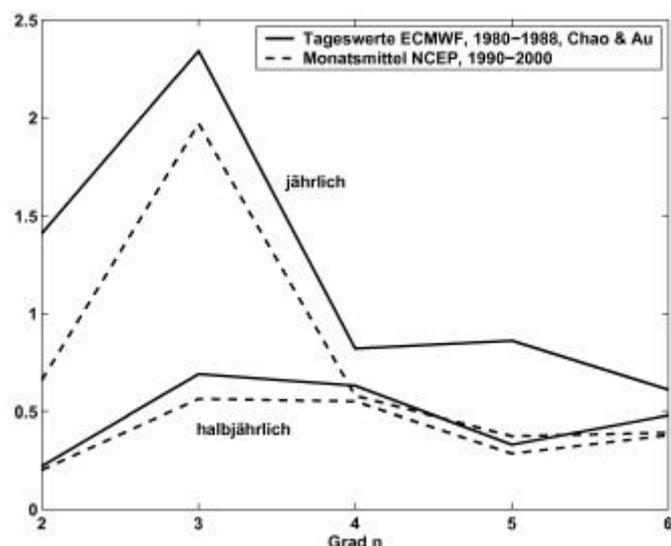


Abb. 4.26.: Variationen in J_n in Einheiten von 10^{-10}

⁶ ECMWF: European Centre for Medium-Range Weather Forecasts, <http://www.ecmwf.int/>

Die Arbeit von [Wahr et al., 1998] verwendet ebenso wie die von [Pail et al., 2000] 6-stündliche ECWMF-Oberflächendruckdaten. Im ersten Fall werden jedoch Monatsmittel für drei Jahre gebildet, während im zweiten Fall zum einen 4 Wochen der Originaldaten und zum anderen monatliche Mittel über 2 Jahre die Grundlage der Berechnung darstellen.

Als Ergebnis geben [Wahr et al., 1998] Amplituden pro Grad d_n für eine Jahresfrequenz an, die sich aus den Gradvarianzen σ_n^2 berechnen gemäß

$$d_n(k) = \frac{R}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma_n^2(k)}, \quad (4.23)$$

wobei R für den Erdradius steht und k für $\text{cpa}=1$ gewählt werden muß. Zum Vergleich seien in Abb. 4.27 die entsprechenden Werte für die langjährige Zeitreihe mit Monatsmitteln angegeben, zusätzlich ist noch das Ergebnis für die halbjährliche Frequenz abgebildet. Die Kurvenverläufe ähneln sich erneut sehr stark, auch hier ist eine, diesmal nur geringfügig kleinere Signalstärke als in [Wahr et al., 1998] (figure 1) zu erkennen (Vergleich mit den Werten für die ganze Erde *einschließlich* der Antarktis).

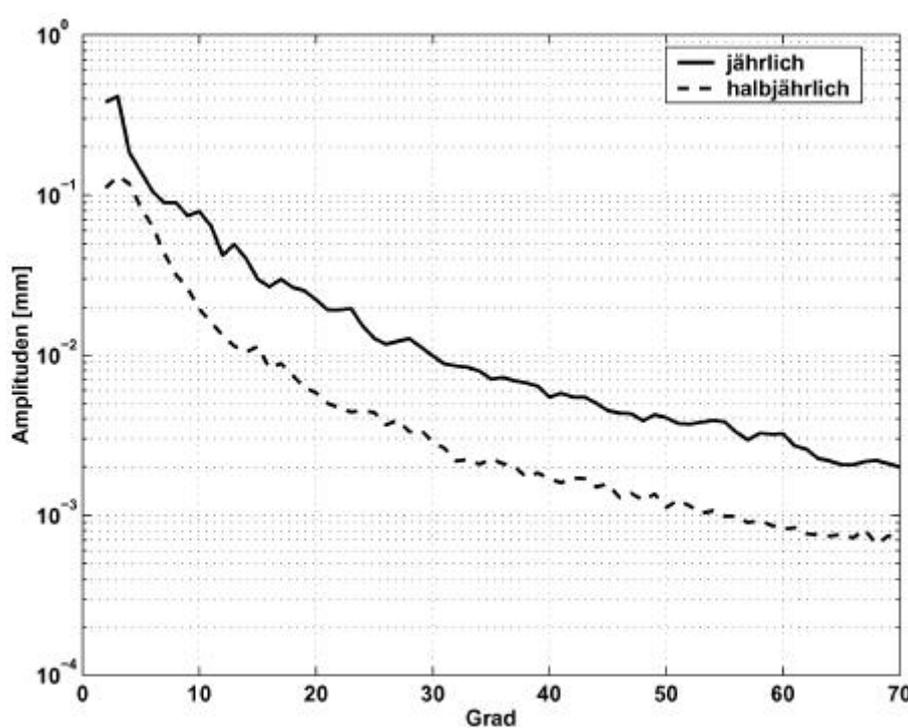


Abb. 4.27.: Amplituden pro Grad d_n für die beiden Hauptfrequenzen

In der Arbeit von [Pail et al., 2000] wird eine ähnliche Ergebnisgröße angegeben, der Grad-RMS für mehrere Frequenzen. Die Werte können verglichen werden mit Abb. 5.1 in Kapitel 5.1. Wiederum ist eine höhere Signalstärke auffällig, was wohl vor allem an der

unterschiedlichen zeitlichen Auflösung liegen dürfte. Bei Vergleich mit einer zweijährigen Zeitreihe aus Tageswerten sind die Unterschiede schon wesentlich geringer (ohne Abb.).

Nahezu alle abgebildeten Größen aus Kapitel 4.6.2 können mit [Verhagen, 2000] verglichen werden, die ebenfalls Daten des NCEP, allerdings für reduzierten Luftdruck, verwendet hat. Es treten im Rahmen des bisher Festgestellten keine größeren Abweichungen auf. Häufig sind die Ergebnisse sehr ähnlich, beispielsweise für die Größe Γ_t .

Insgesamt muß festgestellt werden, daß es nicht ausreicht, einen beliebigen Datensatz mit seiner spezifischen räumlichen und zeitlichen Auflösung zu betrachten. Die Ergebnisse für die Signalstärke des Atmosphäreneffektes sind relativ stark von den oben aufgelisteten Vorgaben bei der Berechnung abhängig. Die einzelnen Kurven sollten folglich immer als ein Wert aus einer gewissen Bandbreite, also als sehr dicke Linien verstanden werden.

5. Schwerefeldvariationen und Satellitenmissionen

Der Nutzen der Untersuchung zeitlicher Variationen des Schwerefeldes der Erde besteht zu einem großen Teil darin, ihre Auswirkungen auf die Messungen zukünftiger Satellitenmissionen zur Schwerefeldbestimmung abschätzen zu können. In der Übersicht in Kapitel 3 sind Angaben zur Meßbarkeit der einzelnen Effekte aufgrund der auftretenden Größenordnungen gemacht. Kapitel 4 beschäftigt sich ausgiebig mit den Folgen der Luftdruckschwankungen für die Potentialkoeffizienten und den daraus abgeleiteten Geoidhöhen. In diesem Kapitel sollen nun hauptsächlich am Beispiel der Gradiometriemission GOCE Ansätze vorgestellt werden, die einen genaueren Vergleich zwischen der Meßgenauigkeit der Satellitensensoren und der Signalstärke der zeitvariablen Effekte erlauben.

GOCE verfügt über einen Gradiometer, mit dem Schweregradienten in alle drei Raumrichtungen gemessen werden können. Meßgröße sind Differenzen in der Beschleunigung von Testmassen, die in einer speziellen Diamantkonfiguration angeordnet sind. Aus ihnen können Komponenten des Gravitationsensors \mathbf{V} abgeleitet werden, der aus den zweiten Ableitungen des Gravitationspotentials V besteht.

5.1. Vergleich der Grad-RMS

Eine erste Möglichkeit für den Vergleich bieten die Gradvarianzen σ_n^2 aus Gleichung (4.19). Sie repräsentieren die totale Leistung pro Grad n . Besser geeignet als nicht-quadratische Größe ist der daraus abgeleitete Grad-RMS:

$$\text{RMS}_n = \sqrt{\frac{1}{2n+1} \sigma_n^2}.$$

Er gibt die Größenordnung der Einzelkoeffizienten pro Grad an. Damit können die Signale der zeitvariablen Effekte für bestimmte Frequenzen dem entsprechenden Grad-RMS der erwarteten Meßgenauigkeit der Satelliten gegenüber gestellt werden. Dies soll hier für die jährliche und die halbjährliche Periode der Atmosphäre gemacht werden, da dort die stärksten Signale dieses Effektes auftreten. Die Kurven entsprechen den Spektrallinien für die beiden Frequenzen aus Abb. 4.20. Es sind sowohl der erwartete Grad-RMS für GOCE als auch der für GRACE angegeben.

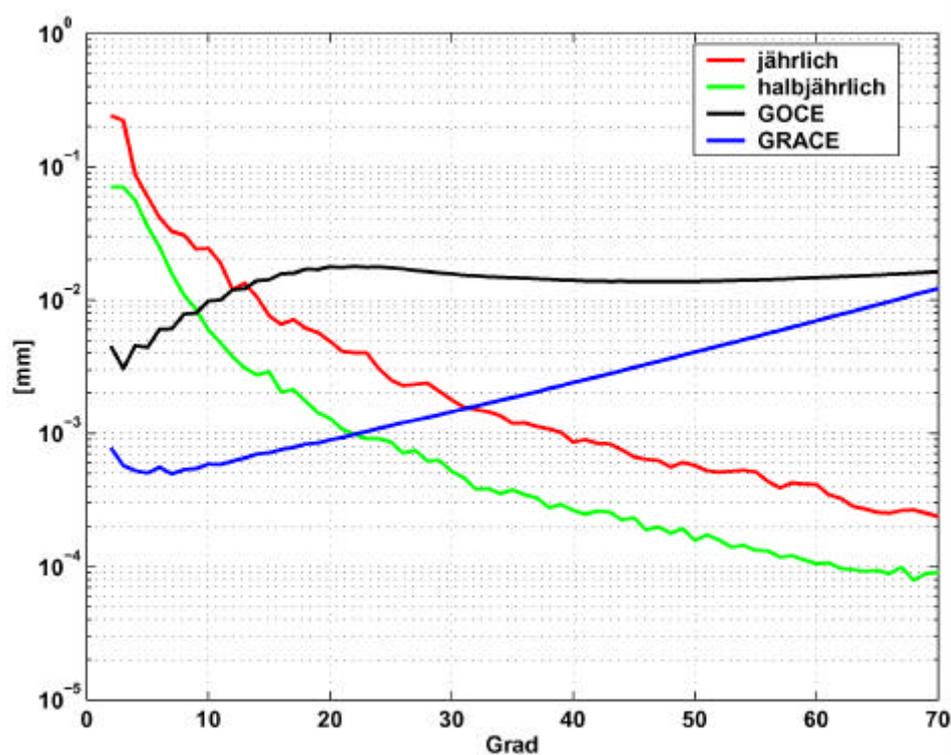


Abb. 5.1.: RMS_n der Hauptfrequenzen des Atmosphäreneffektes, von GOCE und GRACE

Das Signal für die Jahresperiode liegt etwa um den Faktor 3–5 über dem der Halbjahresperiode. Abgesehen von den Absolutwerten sind die Kurven denen aus Abb. 4.27 sehr ähnlich. Solange das Signal des Atmosphäreneffekts größer als die Meßgenauigkeit des Satelliten ist, kann es gemessen werden. Liegt es darunter, geht es im Rauschen des Sensors unter. Der Schnittpunkt mit den erwarteten GOCE-Genauigkeiten liegt etwa bei Grad 10 bzw. 15, während er für GRACE aufgrund der höheren Meßgenauigkeit für niedrige Grade erst bei Grad 22 bzw. 32 erscheint. In [Wahr et al., 1998] und [Verhagen, 2000] wird der Schnittpunkt für das jährliche Signal im Falle von GRACE etwa für den Grad 40 erwartet, was jedoch stark mit den Annahmen über die Meßgenauigkeit von GRACE zusammenhängt. Da stets nur die Summe aller Effekte gemessen wird, sollte in jedem Fall eine Korrektur durch Modelle angebracht werden. Andernfalls können keine Rückschlüsse aus den Messungen auf einzelne Effekte gezogen werden.

Alle übrigen hier nicht dargestellten Frequenzen haben eine wesentlich geringere Signalstärke. Mit GOCE werden diese Effekte deshalb kaum meßbar sein, was aber auch nicht den Hauptzweck dieser Mission darstellt. Die Mission GRACE hingegen eignet sich aufgrund ihrer längeren Missionsdauer von fünf Jahren und den höheren Meßgenauigkeiten für niedrige Grade wesentlich besser, um zeitliche Variationen im Schwerefeld der Erde zu messen.

5.2. Einfluß auf GOCE-Meßgrößen

Will man den Einfluß von Schwerefeldvariationen auf die direkten Meßgrößen von GOCE ermitteln, so muß man die Schwerevariationen aufgrund der geophysikalischen Prozesse entlang der Satellitenbahn berechnen. Dies kann beispielsweise durch eine Darstellung des Atmosphäreneffektes als ein Störpotential T in Form dessen zweiten radialen Ableitung T_{rr} geschehen. Diese Größe ergibt sich aus den $\Delta\bar{C}_{nm}$ und $\Delta\bar{S}_{nm}$ zu:

$$T_{rr}(\theta, \lambda) = \frac{2GM}{R^3} \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)(n+2) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \cdot \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \left[\Delta\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{nm} \sin m\lambda \right]. \quad (5.1)$$

Für eine Satellitenhöhe von $h = 250$ km, also $r = R + h$ (R : Erdradius) in Gleichung (5.1), ist für den bereits in Kapitel 4.5.1 betrachteten 1. Januar 2000 der Effekt exemplarisch abgeleitet und in Abb. 5.2 wiedergegeben.

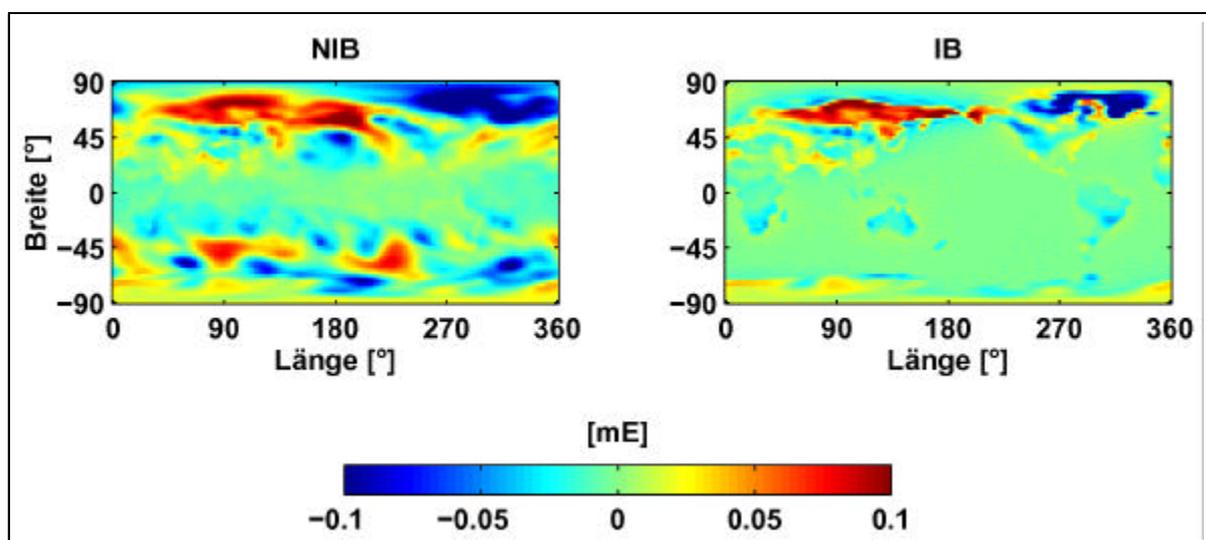


Abb. 5.2.: T_{rr} für $h = 250$ km am 1. Januar 2000, links: Fall NIB, rechts: Fall IB

Die dargestellte Einheit ist mE (1 E = 1 Eötvös = 10^{-9} s^{-2}). Auftretende Größenordnungen sind in der Abb. erkennbar und können räumlich zugeordnet werden. Abb. 5.2 ist jedoch weiter nicht aussagekräftig, da hiermit kein Vergleich mit einer Fehlerspektraldichte von GOCE möglich ist.

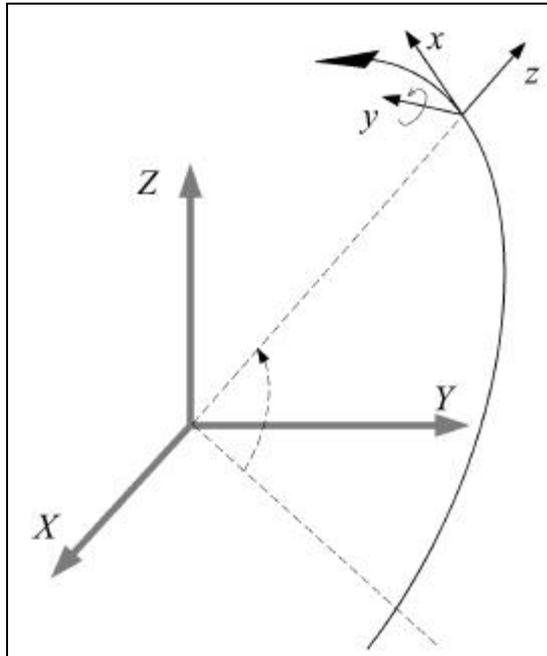


Abb. 5.3.: Bahn- und erdfestes Koordinatensystem
 (Quelle: [Sneeuw, 2000])

Zielführender ist der Ansatz einer Transformation der Schwerefeldvariationen in das Bahnkoordinatensystem des Satelliten. Definiert man dieses gemäß der Abb. 5.3 mit der x -Achse in Flugrichtung, der y -Achse senkrecht dazu und der z -Achse radial nach außen, so können Vergleiche mit den Fehlerkurven für die drei mit GOCE meßbaren Komponenten V_{xx} , V_{yy} und V_{zz} des symmetrischen Gravitationstensors \mathbf{V} im Bahnkoordinatensystem angestellt werden.

\mathbf{V} hat das Aussehen:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

und erfüllt die Laplace-Gleichung, d.h. es gilt:

$$\Delta \mathbf{V} = V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0 . \quad (5.3)$$

Die benötigte Transformation ist beispielsweise in [Sneeuw, 2000] ausführlich abgeleitet, für eine Darstellung mit reellwertigen Formeln kann [Karrer, 2000] herangezogen werden. Im folgenden sollen nur die wichtigsten Schritte davon wiedergegeben werden.

Zunächst wird das Gravitationspotential V in Abhängigkeit der Kepler'schen Bahnelemente ausgedrückt. Macht man dies für eine *nominelle* Bahn, d.h. eine durch die Abplattung der Erde säkular gestörte Kreisbahn mit konstanter Inklination, so kann anstelle von Gleichung (2.12) für $V(\theta, \lambda)$ geschrieben werden:

$$V(r, u, I, \Lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n \sum_{k=-n(2)}^n \bar{F}_{nmk}(I) [\alpha_{nm} \cos \psi_{mk} + \beta_{nm} \sin \psi_{mk}] . \quad (5.4)$$

Es bedeuten R den Erdradius, r den Bahnradius, $u = \omega + f$ das aus der Perigäumslage ω und der wahren Anomalie f zusammengesetzte Argument der Breite, I die Bahnneigung

und $\Lambda = \lambda - \Theta$ steht für die Differenz aus der Rektaszension des aufsteigenden Bahnknotens λ und der als Winkel ausgedrückten Sternzeit Greenwich Θ . Die Funktionen $\bar{F}_{nmk}(I)$ sind Neigungsfunktionen nach [Kaula, 1966] und ψ_{mk} ist definiert als:

$$\psi_{mk} = ku + m\Lambda . \quad (5.5)$$

Diese Glieder beinhalten auch die Zeitabhängigkeit der Darstellung nach (5.4):

$$\psi_{mk} = \dot{\psi}_{mk} \cdot t + \psi_{mk}^0 = (k\dot{u} + m\dot{\Lambda}) \cdot t + ku_0 + m\Lambda_0 , \quad (5.6)$$

wobei der Index 0 für einen Startwert steht. Schließlich verbergen sich hinter den α_{nm} und β_{nm} die bekannten \bar{C}_{nm} und \bar{S}_{nm} gemäß den Fallunterscheidungen:

$$\alpha_{nm} = \begin{cases} \bar{C}_{nm} & \text{für } n - m \text{ gerade} \\ -\bar{S}_{nm} & \text{für } n - m \text{ ungerade} \end{cases} \quad (5.7)$$

$$\beta_{nm} = \begin{cases} \bar{S}_{nm} & \text{für } n - m \text{ gerade} \\ \bar{C}_{nm} & \text{für } n - m \text{ ungerade} \end{cases} \quad (5.8)$$

Nun können ebenso wie das Potential selbst auch dessen zweite Ableitungen V_{ij} mit $i, j \in \{x, y, z\}$ im Bahnkoordinatensystem beschrieben werden. Dafür zerlegt man die Berechnung analog zur Synthese von Kugelflächenfunktionen (vgl. Anhang A.5.2) in zwei Schritte und leitet zunächst zweidimensionale Fourierkoeffizienten A_{mk} und B_{mk} ab. Es entsteht für V_{ij} der Ausdruck:

$$V_{ij} = \sum_{m=0}^N \sum_{k=-N}^N A_{mk}^{ij} \cos \psi_{mk} + B_{mk}^{ij} \sin \psi_{mk} . \quad (5.9)$$

Die Berechnung läuft nun bis zu einem maximalen Grad N . Die Fourierkoeffizienten A_{mk} und B_{mk} werden auch als *lumped coefficients* bezeichnet. Sie bilden je Ordnung m eine Linearkombination der Potentialkoeffizienten über die Grade n .

Eingeschränkt auf die drei mit GOCE meßbaren Größen V_{xx} , V_{yy} und V_{zz} gilt für die Koeffizienten A_{mk} und B_{mk} :

$$\left. \begin{matrix} A_{mk}^{ij} \\ B_{mk}^{ij} \end{matrix} \right\} = \sum_{n=n_{\min}(2)}^N H_{nmk}^{ij} \begin{cases} \alpha_{nm} \\ \beta_{nm} \end{cases} , \quad (5.10)$$

wobei

$$n_{\min} = \max(|k|, m) + \delta$$

und

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{für } k - \max(|k|, m) \text{ gerade} \\ 1 & \text{für } k - \max(|k|, m) \text{ ungerade} \end{cases} .$$

Mit H_{nmk} sind sog. Transferkoeffizienten bezeichnet, die den Übergang von den Potentialkoeffizienten auf die lumped coefficients leisten. Für den Fall einer nominellen Bahn sind sie konstant und können aus den Neigungsfunktionen \bar{F}_{nmk} gewichtet mit spezifischen Transferkoeffizienten λ_{nk}^{ij} berechnet werden zu:

$$H_{nmk}^{ij} = \frac{GM}{R^3} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+3} \lambda_{nk}^{ij} \bar{F}_{nmk}(I) \quad (5.11)$$

mit

$$\begin{aligned} \lambda_{nk}^{xx} &= -(k^2 + n + 1) \\ \lambda_{nk}^{yy} &= k^2 - (n + 1)^2 \\ \lambda_{nk}^{zz} &= (n + 1)(n + 2) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Bildet man nun noch die Frequenzen des zweidimensionalen Signals der Atmosphäre $\dot{\psi}_{mk}$ auf die eindimensionale Bahn ab und multipliziert die Beträge der lumped coefficients mit der Wurzel aus der Missionsdauer, um auf eine Spektraldichte überzugehen, so wird das Atmosphärensignal als PSD entlang der Bahn abgebildet. Diese Größe kann mit der Fehler-PSD der Gradienten von GOCE verglichen werden. Die Abbildungen 5.4, 5.5 und 5.6 zeigen einen solchen Vergleich für die drei Komponenten V_{xx} , V_{yy} und V_{zz} . Für GOCE wurde eine Flughöhe von 250 km und eine Missionsdauer von 3 Monaten gewählt. Das Atmosphärensignal ist erneut das vom 1. Januar 2000, Fall IB.

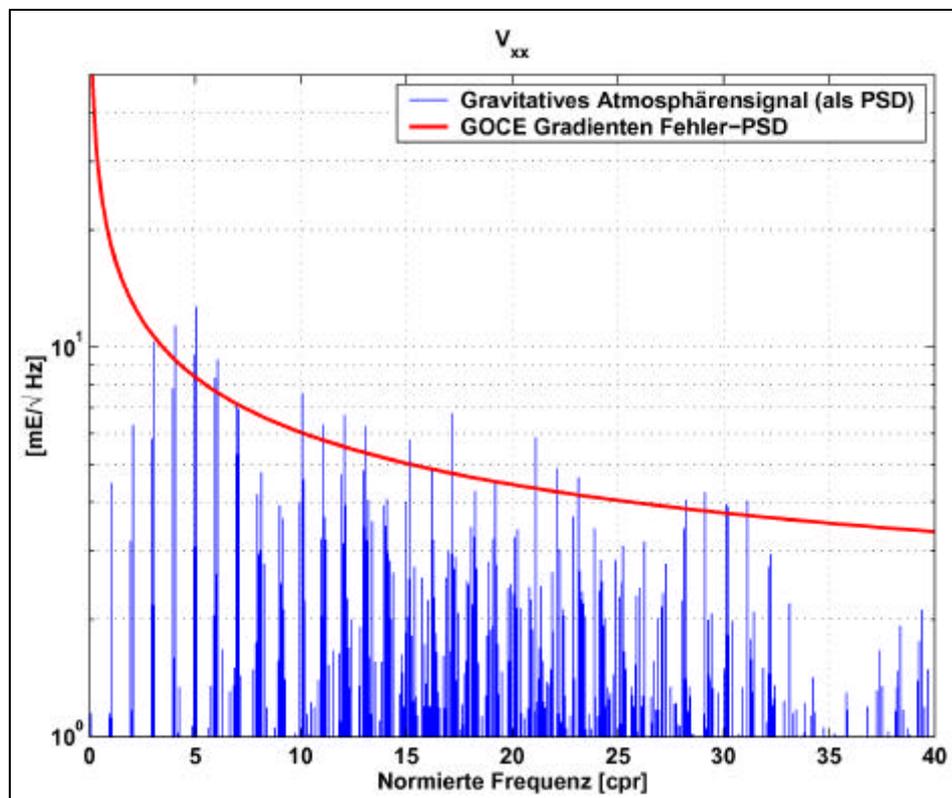


Abb. 5.4.: Atmosphärensignal und Gradienten Fehler-PSD in Flugrichtung

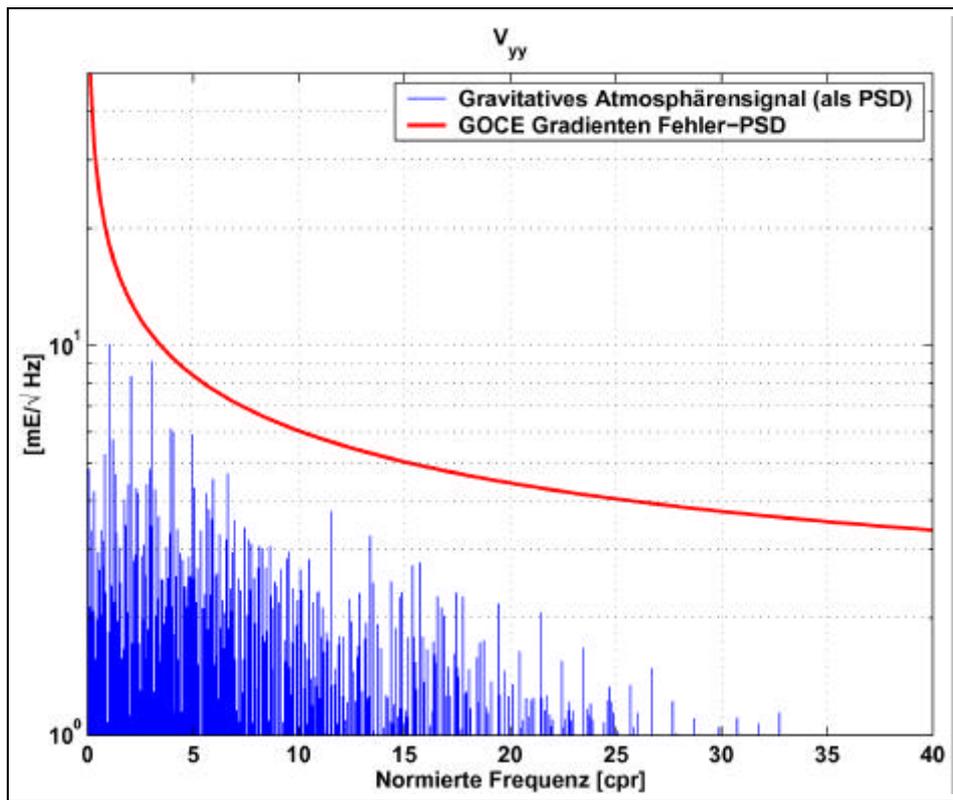


Abb. 5.5.: Atmosphärensignal und Gradienten Fehler-PSD quer zur Flugrichtung

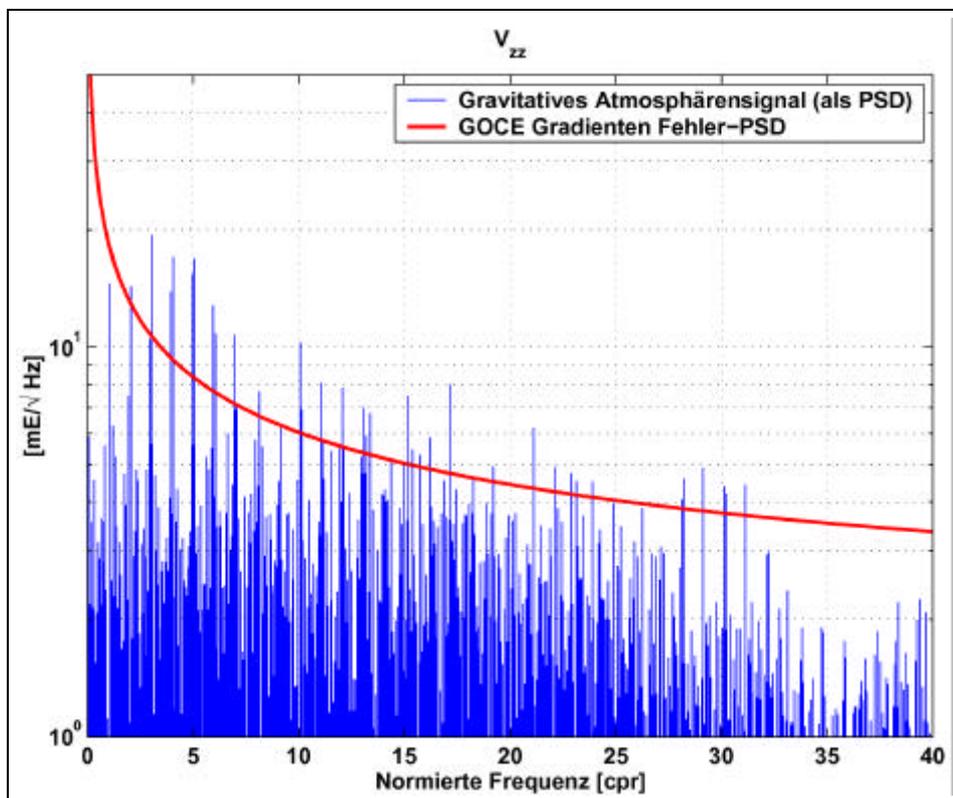


Abb. 5.6.: Atmosphärensignal und Gradienten Fehler-PSD, radiale Komponente

Die dargestellten Einheiten sind normierte Frequenzen in Perioden pro Umlauf (cpr: cycle per revolution) und mE/\sqrt{Hz} . Während in Flugrichtung das Atmosphärensignal vereinzelt oberhalb der Fehler-PSD von GOCE liegt und damit meßbar wäre, ist dies quer zur Flugrichtung nicht der Fall. In radialer Richtung ist das Atmosphärensignal am stärksten und liegt des öfteren im meßbaren Bereich. Zu beachten ist jedoch, daß hier die Tageswerte vom 1. Januar 2000 als repräsentativ für eine Missionsdauer von 3 Monaten angenommen wurden. Einerseits sind damit hochfrequente Luftdruckschwankungen vernachlässigt, andererseits können erheblich stärkere und schwächere Signalstärken durch die Atmosphäre verursacht werden.

Die gezeigten Abbildungen können trotzdem als Beispiel für eine Abschätzung des Einflusses des Atmosphäreneffektes auf die Meßgrößen von GOCE und als Anhaltswert für dessen Größenordnung angesehen werden. Darüberhinaus kann festgehalten werden, daß mit der Mission GOCE nur Teile des Atmosphäreneffektes gemessen werden können und eine Korrektur durch eine Modellierung angebracht werden sollte. Über die Frage, welche dieser Teile des Effektes gemessen werden können, entscheidet letztlich die endgültig realisierbare Meßgenauigkeit der Sensoren im Satelliten.

6. Zusammenfassung und Ausblick

Dieses abschließende Kapitel enthält eine kurze Zusammenfassung der zentralen Punkte sowie der Ergebnisse der einzelnen Kapitel. Gleichzeitig gibt es eine Übersicht über die in dieser Arbeit behandelten Themen. Der abschließende Ausblick weist auf weiterführende Problemstellungen in Zusammenhang mit den zeitlichen Variationen des Gravitationsfeldes hin, ohne Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.

6.1. Zusammenfassung

Das Ziel der Arbeit ist eine grundlegende Darstellung zu den zeitlichen Variationen des Gravitationsfeldes der Erde. Von entscheidender Bedeutung sind daher die vier Themen:

- Mathematische Formulierung der Zeitabhängigkeit des Gravitationsfeldes
- Übersicht über Prozesse im dynamischen System Erde, die signifikante zeitliche Variationen verursachen
- Berechnung und Analyse der Effekte auf das Gravitationsfeld
- Einfluß der Schwankungen auf Satellitenmissionen zur Schwerefeldbestimmung

Die Diskussion findet am Beispiel der Atmosphäre statt. Für diesen Effekt werden auch Ergebnisse abgeleitet und präsentiert. Im folgenden sei die Kurzfassung der wichtigen Punkte für die obigen vier Themenbereiche gegeben.

6.1.1. Mathematische Formulierung

Die Beschreibung erfolgt durch eine spektrale Darstellung des Gravitationspotentials der Erde in Form einer Kugelfunktionsreihe. Die Zeitabhängigkeit schlägt sich in der Zeitabhängigkeit der Reihenkoeffizienten des Potentials nieder. Für die Ableitung des Zusammenhanges zwischen der Massenumverteilung und den Potentialkoeffizienten gibt es zwei alternative Ansätze, den Euler'schen und den Lagrange'schen. Die Wahl des Ansatzes entscheidet sich nach der Art, wie die Information über die Massenverlagerungen vorliegt.

Beim Ansatz nach Euler wird der Massentransport an bestimmten ortsfesten Punkten beispielsweise durch eine zeitabhängige Oberflächendichte oder äquivalente Wasserhöhen ausgedrückt. Dem liegt die Darstellung der Massenveränderung als dünne Schicht zugrunde, was zu Fehlern führen kann. Da die Massenumverteilung an der Oberfläche stattfindet, kommt es zu zusätzlichen Auflasteffekten, die mit den Love'schen Zahlen für Auflast modelliert werden. Ihnen liegt ein Modell über das elastische Verhalten des Erdkörpers zugrunde.

Beim Ansatz nach Lagrange wird die Massenumverteilung durch das Verfolgen der Masseiteilchen während des Transports beschrieben, d.h. in Form eines Geschwindigkeitsvektorenfeldes. Für die Berechnung benötigt man dann die Dichteverteilung innerhalb der Erde, die üblicherweise aus einem Erdmodell wie dem PREM abgeleitet wird.

Weitere wichtige Punkte für beide Ansätze sind:

- Umgang mit den Termen vom Grad 0 und Grad 1: Massenerhalt und Massenzentrum.
- Verwendung von Kugelflächenfunktionen als orthonormale Basisfunktionen: Probleme bei Inhomogenitäten, Datenlöchern und Sprüngen in den Daten (Gibbs-Phänomen).

Der Einfluß von Schwankungen des Zentrifugalpotentials aufgrund von Polbewegung und Tageslängenschwankung auf das Schwerepotential ist gering. Die Auswirkungen der Massentransporte auf die Erdrotation sind in dieser Arbeit nicht behandelt.

6.1.2. Übersicht der Ursachen

Ursachen für signifikante, d.h. mit Satelliten meßbare Schwerevariationen sind:

- Lunisolare Gezeiten
- Atmosphäre: Luftdruckschwankungen
- Hydrosphäre
 - Wasser auf den Kontinenten: Grundwasserspiegel, Bodenfeuchtigkeit, Oberflächenwasser und Schneebedeckung
 - Ozeanmassenverteilung: Ozeanströmungen (Meerestopographie) und Anstieg des Meeresspiegels
- Kryosphäre: Massenhaushalt der kontinentalen Gletscher und der Polkappen
- Postglaziale Hebungen
- Vulkanismus und Erdbeben
- Prozesse der festen Erde
 - Mantelkonvektion
 - Plattentektonik
 - Aktivitäten im Erdkern

Die größten Effekte mit jährlichen und kürzeren Perioden verursachen Hydro- und Atmosphäre, langfristige Schwankungen haben vor allem in postglazialen Hebungen ihren Ursprung. Im Hinblick auf die Satellitenmissionen gilt: Gezeiteneffekte sind mit Modellen zu korrigieren, der Atmosphäreneffekt aus barometrischen Luftdruckmessungen zu erfassen. Auch die Hydrosphäreneffekte sollten mit Daten oder durch Modelle korrigiert werden, wobei die bisher verfügbaren Datensätze noch sehr mangelhaft sind. Durch Erdbeben und Vulkanismus bedingte Massentransporte sind zu kleinräumig und daher mit Satelliten nicht meßbar. Aussagen über die Effekte der Kryosphäre und der festen Erde sind mit großen Unsicherheiten behaftet. Hier erhofft man sich ebenso wie für die Hydrosphäre Erkenntnisse aus den Satellitenbeobachtungen.

6.1.3. Berechnung und Analyse der Effekte

Die Genauigkeit der Berechnung der Effekte hängt vor allem von der Auflösung und Genauigkeit der verfügbaren Daten ab. Daneben ist auf eine möglichst realitätsnahe Modellierung des Zusammenhanges zwischen den gemessenen Größen und dem tatsächlichen Massentransport zu achten. Für den Fall der Atmosphäre bedeutet dies z.B. eine Verbesserung der Annahme eines „inversen Barometer“-Verhaltens für Gebiete, in denen Abweichungen davon auftreten. Nötig wären außerdem bessere Daten für die Antarktis.

Als Ergebnisgröße der Berechnung eignen sich Änderungen in den Geoidhöhen. Für die Atmosphäre können hier Variationen von etwa ± 10 mm festgestellt werden. Interessant ist auch eine räumliche Betrachtung, da nicht überall gleich starke Effekte auftreten. Die größten Variationen der Atmosphäre treten im Bereich Zentralasiens auf.

Für eine Analyse der zeitlichen Variationen bietet sich eine Fouriertransformation an. Sie liefert die auftretenden Amplituden, Phasen und Frequenzen. Dabei ist sicher zu stellen, daß die Zeitreihe hohe zeitliche und räumliche Auflösung sowie ausreichende Länge hat. Andernfalls sind die Ergebnisse nicht repräsentativ oder kann es zu Fehlern durch Aliasing und Leakage kommen sowie Signalstärke verlorengehen. Ergebnisgrößen sind hier meist Gradvarianzen und daraus abgeleitete RMS-Werte.

Die Atmosphäre zeigt für jeden Ort auf der Erde ein so unterschiedliches Verhalten, daß eine Mittelung über Breiten- oder Längengrade nicht sinnvoll ist. Für weltweite Luftdruckdaten kann eine jährliche und eine schwächere halbjährliche Periode festgestellt werden mit Amplituden von etwa 6 bzw. 3 mm Geoidschwankung. Daneben treten sowohl längere wie auch kürzere Perioden mit geringerer Signalstärke auf. Die Signale nehmen mit zunehmendem Grad ab, kleinräumige Effekte haben folglich geringere Auswirkungen. Markant ist auch die hohe Variabilität des Signals, was seine Vorhersagbarkeit erheblich erschwert.

6.1.4. Einfluß auf Satellitenmissionen

Einer der Hauptgründe für die Untersuchung der zeitvariablen Effekte ist die Frage nach ihren Auswirkungen auf bzw. ihrer Meßbarkeit mit den Satellitenmissionen CHAMP, GRACE und GOCE. Dies kann durch einen Vergleich der Grad-RMS der Signale mit denen der Fehler der Satellitensensoren beantwortet werden. Für die Gradiometriemission GOCE kann auch direkt die Anziehungswirkung durch den Effekt in Satellitenhöhe berechnet werden. Drückt man dazu das Signal im Bahnkoordinatensystem aus, so kann

die Wirkung auf die einzelnen Komponenten ermittelt und mit deren Fehler-PSD verglichen werden.

Von ihrer Konzeption her eignen sich die beiden Missionen CHAMP und GRACE für die Messung der zeitvariablen Effekte. Ihre Missionsdauer ist auf mehrere Jahre geplant und sie besitzen hohe Meßgenauigkeit im Bereich der niedrigen Grade. So wird das jährliche Atmosphärensignal mit GRACE etwa bis zu Grad 40 meßbar sein, mit GOCE ist dies hingegen nur bis Grad 10 möglich. Die Atmosphäreneffekte wirken sich hier vor allem in Flugrichtung und in radialer Richtung aus.

Für alle Missionen ist bei jedem Effekt eine Korrektur mit Modellen und den hierfür erforderlichen Daten notwendig, um einerseits die zeitvariablen Anteile vom statischen Feld trennen zu können und andererseits Rückschlüsse auf einzelne Effekte ziehen zu können. Nur so kann auch die hochauflösende Messung des statischen Feldes möglichst fehlerfrei realisiert werden.

6.2. Ausblick

Aus den Ergebnissen dieser Arbeit folgt, daß auch weiterhin Bedarf an Forschung besteht, um die zeitlichen Variationen des Erdschwerefeldes genauer vorhersagen zu können.

Im Bereich der Modellierung kann der Einsatz anderer Basisfunktionen als der Kugelflächenfunktionen überlegt werden. Mit Wavelets ließen sich eventuell besser regionale Betrachtungen wie für den Bereich Zentralasiens anstellen oder Probleme mit Löchern in den Datensätzen wie in der Antarktis in den Griff kriegen.

Die Annahme einer dünnen Schicht könnte auch im Sinne eines Schichtenmodells durch mehrere Schichten aus einem Atmosphärenmodell oder Luftdruckdaten in verschiedenen Höhenschichten erweitert werden. Zu prüfen wäre auch die Möglichkeit einer radialen Integration mittels der hydrostatischen Gleichung. Ähnliche Überlegungen können auch für die Hydrosphäre angestellt werden.

Für alle Effekte benötigt man eine Verbesserung der Informationen über Massentransporte in den polaren Gebieten, insbesondere für Grönland und die Antarktis. Dies ist vor allem für GRACE wünschenswert, da diese Mission eine polare Bahn aufweist. Daneben besteht Bedarf an besseren Daten über die Wasserverteilung auf dem Land und an Fortschritten bei der Modellierung und Erfassung des Massenhaushalts von Gletschern und der polaren Eisschilde.

Im weiteren kann der in Kapitel 5 nur kurz angedeuteten Verknüpfung der Schwerevariationen mit den Meßgrößen der Satellitenmissionen größere Beachtung geschenkt werden. Dies kann von Umrechnungen der Signale der Hauptfrequenzen in das Bahnkoordinatensystem bis hin zur Untersuchung von Aliasingeffekten der zeitlichen Variationen mit der Umlauffrequenz des Satelliten reichen.

Ein weiterer Themenbereich, der in Zukunft große Bedeutung gewinnen wird, ist die Rückrechnung von gemessenen Daten der Satellitenmissionen auf die einzelnen Massenverlagerungen. Das Problem liegt hier in der Auftrennung der Signale und der Zuordnung zu den einzelnen Ursachen, was zur Gewinnung neuer Erkenntnisse beispielsweise über Prozesse im Erdinneren erforderlich ist. Auch eine Verifikation der bisherigen Modelle mit Daten der CHAMP-Mission wäre sehr erstrebenswert. Eventuell können die Modelle für die Missionen GRACE und GOCE damit verbessert werden.

A. Legendre-Polynome und Kugelflächenfunktionen

A.1. Legendre-Polynome

Der Grad der Legendre-Polynome P_n sei mit n , das Argument zunächst mit $t = \cos \psi$ bezeichnet (ψ : Zentriwinkel zwischen P und Q).

Charakteristische Differentialgleichung:

$$(1 - t^2)P_n''(t) - 2tP_n'(t) + n(n + 1)P_n(t) = 0 \quad (\text{A.1})$$

In der Form von Rodriguez:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \quad (\text{A.2})$$

Dabei gilt mit $\psi \in [0, \pi]$ und $t \in [-1, 1]$:

$$P_n(-t) = (-1)^n P_n(t) \quad (\text{A.3})$$

$$P_n(1) = 1 \quad (\text{A.4})$$

$$P_n(-1) = (-1)^n. \quad (\text{A.5})$$

Orthogonalität:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(t) P_l(t) dt = \frac{2}{2n + 1} \delta_{nl} \quad (\text{A.6})$$

Rekursion:

$$(n + 1)P_{n+1}(t) - (2n + 1)tP_n(t) + nP_{n-1}(t) = 0 \quad (\text{A.7})$$

mit $P_0 = 1$ und $P_1 = t$.

Legendre-Polynome werden auch als zonale Kugelflächenfunktionen bezeichnet.

A.2. Assoziierte Legendre-Funktionen

Zusammenhang mit den Legendre-Polynomen:

$$P_{nm}(t) = (1-t^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(t)}{dt^m} \quad (\text{A.8})$$

$$P_{n0}(t) = P_n(t) \quad (\text{A.9})$$

Das Argument ist jetzt $t = \cos \theta$ (θ : Kobreite von Q), n steht für den Grad, m für die Ordnung.

Charakteristische Differentialgleichung:

$$(1-t^2)P''_{nm}(t) - 2tP'_{nm}(t) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-t^2} \right] P_{nm}(t) = 0 \quad (\text{A.10})$$

In der **Form von Rodriguez:**

$$P_{nm}(t) = (1-t^2)^{m/2} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} (t^2-1)^n \quad (\text{A.11})$$

Symmetrie und maximale Ordnung:

$$P_{nm}(-t) = (-1)^{n+m} P_{nm}(t) \quad (\text{A.12})$$

$$P_{nm}(t) = 0 \quad \text{für } m > n \quad (\text{A.13})$$

Orthogonalität:

$$\int_{-1}^{+1} P_{nm}(t) P_{lm}(t) dt = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{lk} \quad (\text{A.14})$$

und damit auch:

$$\int_{-1}^{+1} P_{nm}(t) dt = 2 \delta_{n0} \quad (\text{A.15})$$

Rekursionen, geschrieben mit Argument $\cos \theta$:

$$\bar{P}_{nn}(\cos \theta) = (2n-1) \sin \theta \cdot \bar{P}_{n-1,n-1}(\cos \theta) \quad (\text{A.16})$$

$$\bar{P}_{n,n-1}(\cos \theta) = (2n-1) \cos \theta \cdot \bar{P}_{n-1,n-1}(\cos \theta) \quad (\text{A.17})$$

$$\bar{P}_{nm}(\cos \theta) = \frac{(2n-1)}{n-m} \cos \theta \cdot \bar{P}_{n-1,m}(\cos \theta) - \frac{n+m-1}{n-m} \cdot \bar{P}_{n-2,m}(\cos \theta) \quad (\text{A.18})$$

mit $P_{00} = P_0 = 1$.

A.3. Normierte assoziierte Legendre-Funktionen

Vollständige Normierung:

$$\bar{P}_{nm}(t) = H_{nm}P_{nm}(t) \quad (\text{A.19})$$

mit

$$H_{nm} = \begin{cases} \sqrt{2n+1} & \text{für } m = 0 \\ \sqrt{2(2n+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} & \text{für } m \neq 0 \end{cases} . \quad (\text{A.20})$$

Orthogonalität:

$$\int_{-1}^{+1} \bar{P}_{nm}(t)\bar{P}_{km}(t)dt = \begin{cases} 2\delta_{nk} & \text{für } m = 0 \\ 4\delta_{nk} & \text{für } m \neq 0 \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

Rekursionen, geschrieben mit Argument $\cos \theta$:

$$\bar{P}_{nn}(\cos \theta) = W_{nn} \sin \theta \cdot \bar{P}_{n-1,n-1}(\cos \theta) , \quad (\text{A.22})$$

$$\bar{P}_{nm}(\cos \theta) = W_{nm} \left[\cos \theta \cdot \bar{P}_{n-1,m}(\cos \theta) - \frac{1}{W_{n-1,m}} \bar{P}_{n-2,m}(\cos \theta) \right] , \quad (\text{A.23})$$

wobei

$$W_{1,1} = \frac{H_{1,1}}{H_{0,0}} = \sqrt{3} , \quad (\text{A.24})$$

$$W_{n,n} = (2n-1) \frac{H_{n,n}}{H_{n-1,n-1}} = \sqrt{\frac{2n+1}{2n}} \quad \text{für } n > 1 , \quad (\text{A.25})$$

$$W_{n,m} = \frac{2n-1}{n-m} \frac{H_{n,m}}{H_{n-1,m}} = \sqrt{\frac{(2n+1)(2n-1)}{(n+m)(n-m)}} \quad (\text{A.26})$$

und $\bar{P}_{00} = H_{00} \cdot P_{00} = 1$.

Anmerkung: Assoziierte Legendre-Funktionen werden auch als zugeordnete Legendre-Funktionen bezeichnet.

A.4. Kugelflächenfunktionen

a) Reelle Notation

Kugelflächenfunktionen sind Funktionen $f(\theta, \lambda)$ auf der Kugeloberfläche.

$$\left. \begin{array}{l} \bar{Y}_{nm}^c(\theta, \lambda) \\ \bar{Y}_{nm}^s(\theta, \lambda) \end{array} \right\} = \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \begin{cases} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

Orthogonalität:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \bar{P}_{lk}(\cos \theta) \begin{cases} \cos m\lambda \cos k\lambda \\ \cos m\lambda \sin k\lambda \\ \sin m\lambda \cos k\lambda \\ \sin m\lambda \sin k\lambda \end{cases} \sin \theta \, d\lambda \, d\theta = \delta_{nl} \delta_{mk} \delta_{c,s} \quad (\text{A.28})$$

Dabei soll analog zum Kroneckersymbol für $\delta_{c,s}$ mit $c, s \in \{\cos, \sin\}$ gelten:

$$\delta_{c,s} = \begin{cases} 1 & \text{für } c = s \\ 0 & \text{für } c \neq s \end{cases} .$$

b) Komplexe Notation

In komplexer Notation mit $i = \sqrt{-1}$ gilt:

$$\bar{Y}_{nm}(\theta, \lambda) = \bar{P}_{n,|m|}(\cos \theta) e^{im\lambda} = \bar{P}_{n,|m|}(\cos \theta) [\cos m\lambda + i \sin m\lambda] \quad (\text{A.29})$$

Orthogonalität:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \bar{Y}_{nm}^*(\theta, \lambda) \bar{Y}_{kl}(\theta, \lambda) \sin \theta \, d\lambda \, d\theta = \delta_{nk} \delta_{ml} \quad (\text{A.30})$$

Das Sternchen * steht für die konjugiert Komplexe.

c) Zusammenhang zwischen den beiden Schreibweisen

$$\begin{aligned} \Re(\bar{Y}_{nm}) &= \bar{Y}_{nm}^c \\ \Im(\bar{Y}_{nm}) &= \bar{Y}_{nm}^s \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

\Re steht für den Realteil, \Im für den Imaginärteil.

A.5. Rechenoperationen

Die beiden grundlegenden Rechenoperationen Synthese und Analyse werden in reeller und in komplexer Notation analytisch für kontinuierliche Kugelflächenfunktionen dargestellt, anschließend wird der Zusammenhang zwischen beiden Schreibweisen angegeben. Die Beweise erfolgen mit der Orthogonalitätsrelation; auf sie wird hier verzichtet. Im folgenden Kapitel wird das Vorgehen bei der diskreten Berechnung von Analyse und Synthese aufgezeigt, ohne dabei auf Probleme mit unterschiedlichen Gitterarten und Analysemethoden einzugehen. Eine übersichtliche Darstellung hierzu enthält [Sneeuw, 1994].

A.5.1. Kontinuierliche Darstellung

a) Reelle Notation

Synthese:

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \left[\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda \right] \quad (\text{A.32})$$

Analyse:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} f(\theta, \lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{array} \right\} \sin \theta \, d\lambda \, d\theta \quad (\text{A.33})$$

b) Komplexe Notation

Synthese:

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \bar{K}_{nm} \bar{Y}_{nm}(\theta, \lambda) \quad (\text{A.34})$$

Analyse:

$$\bar{K}_{nm} = \frac{1}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} f(\theta, \lambda) \bar{Y}_{nm}^*(\theta, \lambda) \sin \theta \, d\lambda \, d\theta \quad (\text{A.35})$$

\bar{C}_{nm} und \bar{S}_{nm} bzw. \bar{K}_{nm} sind die jeweiligen in der Regel dimensionslosen Kugelfunktionskoeffizienten.

c) Zusammenhang zwischen den beiden Schreibweisen

$$\begin{aligned} \bar{K}_{n,m} &= \frac{1}{2}(\bar{C}_{nm} - i\bar{S}_{nm}) & \text{für } m \geq 0 \\ \bar{K}_{n,-m} &= \frac{1}{2}(\bar{C}_{nm} + i\bar{S}_{nm}) & \text{für } m < 0 \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

A.5.2. Diskrete Rechenoperationen

Zunächst wird die Reihenfolge der Summationen gemäß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \longrightarrow \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty}$$

vertauscht, damit die Längen- und Breiteninformation unabhängig voneinander behandelt werden kann. Die Berechnung erfolgt dann in zwei Schritten. Als Zwischenergebnis entstehen die Fourierkoeffizienten A_m und B_m .

Kontinuierliche Synthese in zwei Schritten:

$$\left. \begin{array}{l} A_m(\theta) \\ B_m(\theta) \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^{\infty} \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{array} \right. \quad (\text{A.37})$$

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(\theta) \cos m\lambda + B_m(\theta) \sin m\lambda \quad (\text{A.38})$$

Kontinuierliche Analyse in zwei Schritten:

$$\left. \begin{array}{l} A_m(\theta) \\ B_m(\theta) \end{array} \right\} = \frac{1}{(1 + \delta_{m0})\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} f(\theta, \lambda) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{array} \right\} d\lambda \quad (\text{A.39})$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{array} \right\} = \frac{1 + \delta_{m0}}{4} \int_{\theta=0}^{\pi} \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \left\{ \begin{array}{l} A_m(\theta) \\ B_m(\theta) \end{array} \right\} \sin \theta d\theta \quad (\text{A.40})$$

Da A_m und B_m Fourierkoeffizienten sind, können die Gleichungen (A.38) und (A.39) als (inverse) Fouriertransformationen entlang der Breitenkreise berechnet werden.

In einem zweiten Schritt folgt die Diskretisierung. Die Reihenentwicklung endet dann bei einem maximalen Grad L . Bei einer Beschränkung auf ein gleichabständiges Gitter mit diskreten Punktwerten sei das Diskretisierungsintervall in Breitenkreisrichtung mit $\Delta\lambda = \pi/L$ bezeichnet. Die Punkte haben dann die Längen $\lambda_j = j\Delta\lambda$ mit $j = 0, 1, \dots, 2L - 1$. Ebenso seien die Meridiane gleichabständig diskretisiert in einem Intervall $\Delta\theta$ für Punkte mit den Kobreiten $\theta_i, i = 1, 2, \dots, N$, wobei $N \geq L + 1$. Es entstehen damit die folgenden Gleichungen:

Diskrete GSHS:

$$\left. \begin{array}{l} A_m(\theta_i) \\ B_m(\theta_i) \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^L \bar{P}_{nm}(\cos \theta_i) \left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{array} \right. \quad (\text{A.41})$$

$$f(\theta_i, \lambda_j) = \sum_{m=0}^L A_m(\theta_i) \cos m\lambda_j + B_m(\theta_i) \sin m\lambda_j \quad (\text{A.42})$$

Diskrete GSHA:

$$\left. \begin{matrix} A_m(\theta_i) \\ B_m(\theta_i) \end{matrix} \right\} = \frac{1}{L(1 + \delta_{m0} + \delta_{mL})} \sum_{j=0}^{2L-1} f(\theta_i, \lambda_j) \begin{cases} \cos m\lambda_j \\ \sin m\lambda_j \end{cases} \quad (\text{A.43})$$

$$\left. \begin{matrix} \tilde{C}_{nm} \\ \tilde{S}_{nm} \end{matrix} \right\} = \frac{1 + \delta_{m0}}{4} \sum_{i=1}^N \frac{\pi}{N} \sin \theta_i \cdot \bar{P}_{nm}(\cos \theta_i) \begin{cases} A_m(\theta_i) \\ B_m(\theta_i) \end{cases} \quad (\text{A.44})$$

Hier können die Gleichungen (A.42) und (A.43) mit einer Diskreten Fouriertransformation, beispielsweise nach dem FFT-Algorithmus, berechnet werden (vgl. Anhang B.2). Bei der Analyse gehört zu jedem Breitenkreis ein Gewicht proportional zur Kobreite.

Die hier vorgestellte Methode des zweiten Schrittes der Analyse wird als genäherte Quadratur („approximate quadrature“) bezeichnet. Daneben gibt es für diesen Schritt weitere Methoden, die auf Gauß und Neumann zurückgehen, wie z.B. die Auflösung des linearen Gleichungssystems in (A.41) nach den \tilde{C}_{nm} und \tilde{S}_{nm} (siehe [Sneeuw, 1994]).

B. Fouriertransformation

B.1. Kontinuierliche periodische Signale

Jede kontinuierliche periodische Funktion $x(t)$ kann in eine Fourierreihe entwickelt werden. Diese Reihe entspricht einer Zerlegung in Cosinus- und Sinusfunktionen, die mit jeweiligen Koeffizienten a_k und b_k multipliziert werden:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) \quad . \quad (\text{B.1})$$

Dies wird auch als Synthese bezeichnet. Umgekehrt ergeben sich die Fourierkoeffizienten zu:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{t=0}^T x(t) dt \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{t=0}^T x(t) \cos(k\omega_0 t) dt, \quad k \neq 0 \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{t=0}^T x(t) \sin(k\omega_0 t) dt \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Die geraden Anteile von $x(t)$ bestimmen die Cosinus-Glieder a_k , die ungeraden Anteile die Sinus-Glieder b_k . Der Koeffizient a_0 ist das arithmetische Mittel von $x(t)$, $T = 2\pi/\omega_0$ die Grundperiode oder Periodendauer von $x(t)$ und k die Wellen- oder Ordnungszahl der Spektrallinien. Das Fourierreihenspektrum ist ein diskretes und aperiodisches Linienspektrum im Sinne einer unendlichen Reihe mit dem Linienabstand $1/T$.

Der Übergang von den Fourierkoeffizienten zur Darstellung mit Amplituden A_k und Phasen φ_k geschieht durch die Umstellung der Gleichung (B.1) auf:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) \quad . \quad (\text{B.3})$$

Die Amplituden (Beträge) und Phasen sind unter Berücksichtigung einer Quadrantenabfrage für den Arcustangens damit:

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0 \\ A_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ \varphi_k &= \arctan\left(\frac{-b_k}{a_k}\right) . \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Für die folgenden Überlegungen bietet sich die Verwendung der komplexen Darstellung an, die sich aus der Euler'schen Formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (\text{B.5})$$

bzw.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (\text{B.6})$$

mit $i = \sqrt{-1}$ ergibt. Hier entfällt die Spezialbehandlung des Gliedes a_0 und es entsteht

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t} \quad (\text{B.7})$$

für die Synthese und die Koeffizienten berechnen sich nach:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T x(t) e^{-ik\omega_0 t} dt . \quad (\text{B.8})$$

Für die Umrechnung zwischen den Koeffizienten gilt:

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 \\ a_k &= c_k + c_{-k} \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}) . \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Die Amplituden und Phasen folgen aus:

$$\begin{aligned} A_k &= 2\sqrt{c_k \cdot c_{-k}} \\ \varphi_k &= \arctan\left(-i \frac{c_k - c_{-k}}{c_k + c_{-k}}\right) . \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Im Falle eines aperiodischen kontinuierlichen Signals strebt die Periode T gegen ∞ und es entstehen leicht abgewandelte Formeln. Man spricht dann von einer (inversen) Fouriertransformation. Mit dem Grenzübergang der Periodendauer verschmelzen die Spektrallinien zu einem kontinuierlichen Spektrum, dem Fourierspektrum [Meyer, 1998].

B.2. Diskrete periodische Signale

Bei der Analyse von gemessenen Zeitreihen liegt keine kontinuierliche Funktion, sondern ein abgetastetes und damit diskretes Signal vor. Dieses Signal kann als eine Folge von Werten angesehen werden, die in einem bestimmten Intervall abgetastet wurden. Aufgrund der Dualität der Fouriertransformation haben diskrete Signale ein periodisches Spektrum.

In der Praxis ist die Abtastung nur an endlich vielen Stellen und nur während einer bestimmten Zeitdauer (Länge der Zeitreihe, auch Zeitsequenz) möglich. Bezeichnet man mit Δt das Abtastintervall und mit N die Anzahl der abgetasteten Werte, so hat die Zeitreihe eine Länge von $N \cdot \Delta t$. Aus N Werten können höchstens N Spektralwerte berechnet werden, da nicht mehr Informationsgehalt vorliegt. Die Frequenzachse wird deswegen diskret und der Abstand zwischen zwei möglichen Frequenzen auf ihr zu $2\pi/(N\Delta t)$. Die Spektralfunktion ist nun ebenso wie das Signal eine Folge von Werten, beide sind diskret und periodisch.

Schreibt man für die Folge der Abtastwerte $x[n]$ und für die Folge der Spektralwerte $X[k]$, so ist die Diskrete Fouriertransformation (DFT):

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i2\pi kn/N} \quad (\text{B.11})$$

und die inverse DFT:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{i2\pi kn/N}, \quad (\text{B.12})$$

mit $n = 0, 1, \dots, N-1$ der Nummer der Abtastwerte und $k = 0, 1, \dots, N-1$ der Nummer der Spektrallinien oder Ordnungszahl. Der Zusammenhang mit dem Abtastintervall ist $\omega = 2\pi k/(N\Delta t)$.

Die Verwandtschaft mit der komplexen Fourierreihe aus Kapitel B.1 ist klar zu erkennen, wenn man in Gleichung (B.8) das Integral durch eine Riemann'sche Summe ersetzt. Dann wird $x(t)$ zu $x[n]$, dt zu Δt , t zu $n\Delta t$ und T zu $N\Delta t$:

$$c_k = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i2\pi kn\Delta t/(N\Delta t)} \cdot \Delta t = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i2\pi kn/N} \quad (\text{B.13})$$

Es bleibt nach Gleichsetzen von (B.13) und (B.11) der Zusammenhang zwischen den komplexen Fourierkoeffizienten und der DFT:

$$c_k = \frac{1}{N} X[k] \quad . \quad (\text{B.14})$$

Dies gilt nur unter der Voraussetzung, daß das Abtasttheorem¹ eingehalten wird. Der konstante Faktor $1/N$ enthält keinerlei Information, so daß gilt: die Folge der komplexen Fourierkoeffizienten und das DFT-Spektrum sind vom Informationsgehalt her absolut gleichwertig [Meyer, 1998].

Eine weitere Voraussetzung für eine fehlerfreie Berechnung ist die Periodizität des Ausgangssignals. Da die DFT das Spektrum der periodischen Fortsetzung des abgetasteten Signals berechnet, kann es bei einem nicht-periodischen Signal zu Sprungstellen an den Rändern des Zeitfensters kommen, was zu Fehlern führt. Weitere Fehlermöglichkeiten liegen in der Quantisierung des Signals bei der Abtastung, je nachdem, wie stark die Stellenzahl für den abgetasteten Wert beschränkt ist.

Für eine möglichst schnelle und effiziente Berechnung der DFT wurden verschiedene Algorithmen entwickelt. Ein häufig verwendeter ist der FFT-Algorithmus („Fast Fourier Transformation“), der die Zeitsequenz immer wieder halbiert. Dies geschieht so lange, bis die zu berechnende Blocklänge N eine Zweierpotenz ist. Nach diesem Algorithmus arbeiten auch die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten MATLAB-Routinen.

Abschließend sei noch eine weitere Möglichkeit zur Berechnung der Fourierkoeffizienten a_k und b_k erwähnt, die auch zu Kontrollzwecken verwendet werden kann. Dies ist der Ansatz einer vermittelnden Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Dabei werden die Beobachtungen $x(t)$ als Funktion der Unbekannten (a_k und b_k) ausgedrückt und entsprechende Gleichungssysteme aufgestellt. Ein Beispiel hierfür kann zusammen mit einem entsprechenden MATLAB-Programmcode [Verhagen, 2000] entnommen werden.

¹ Nyquist-Theorem: Ein kontinuierliches Signal der Bandbreite B kann aus seiner abgetasteten Version (Abtastfrequenz f_A) nur dann fehlerfrei rekonstruiert werden, wenn $f_A > 2B$ ist.

C. Anmerkungen zu den verwendeten Daten

Die verwendeten Luftdruckdaten stammen aus dem NCEP/NCAR Reanalysis project des Climate Diagnostics Center (CDC), Boulder, Colorado, USA. Sie können über die Webseite <http://www.cdc.noaa.gov/Datasets/ncep.reanalysis.dailyavgs/> (via FTP ebenso möglich) frei bezogen werden. Im Unterverzeichnis `.../surface/` sind unter den Namen `pres.sfc.jjjj.nc` Daten mit Oberflächendruck und unter `slp.jjjj.nc` Daten mit reduziertem Luftdruck zu finden, wobei `jjjj` für die vierstellige Jahreszahl steht. Weitere Informationen zu den Daten können unter `...dailyavgs/README` nachgelesen werden.

Wie die Dateiendung `„.nc“` bereits andeutet, handelt es sich um Daten, die im Format NetCDF (Network Common Data Form) abgespeichert sind. NetCDF ist eine Schnittstelle für vektororientierte Datenverwaltung und beinhaltet Programmbibliotheken für C, Fortran, C++, JAVA und PERL, die eine Implementierung der Schnittstelle bereitstellen. Diese Bibliotheken definieren ein rechnerunabhängiges Format für die Speicherung von und den Zugriff auf wissenschaftliche Daten. Zusätzlich werden auch Metadaten abgespeichert. Der Quellcode ist frei verfügbar und im WWW erhältlich¹. Er wurde vom Unidata Program Center in Boulder, Colorado, USA entwickelt.

Für das Einlesen der NetCDF-Daten in MATLAB empfiehlt sich die Verwendung der „MexCDF and NetCDF Toolbox for MATLAB 5“ von Dr. Charles R. Denham vom US Geological Service. Sie ist zusammen mit einer Installationsanleitung im WWW frei erhältlich². Um die Daten im Batchbetrieb lesen zu können, kann zusätzlich zur obigen Toolbox eine weitere Schnittstelle benutzt werden, das „CSIRO matlab/netCDF interface“ von Jim Mansbridge, Australien. Auch diese Schnittstelle ist zusammen mit Erläuterungen frei verfügbar³, kann aber nur als Zusatz zur Toolbox verwendet werden.

¹ Einstieg über <http://www.unidata.ucar.edu/packages/netcdf/>

² Download über <http://crusty.er.usgs.gov/~cdenham/MexCDF/nc4m15.html>

³ Download über <http://www.marine.csiro.au/sw/matlab-netcdf.html>

Abschließend drei praktische Hinweise zum Umgang mit der im Rahmen dieser Arbeit vorwiegend genutzten Funktion `getnc.m` der letztgenannten Schnittstelle:

- Die Funktion erzeugt beim Einlesen weltweiter Daten für mehrere Zeitpunkte standardmäßig dreidimensionale Matrizen. Da diese schnell große Mengen an Speicherplatz belegen, sollten die entsprechenden Variablen vorinitialisiert werden.
- Es können nur Dateien gelesen werden, die im aktuellen Verzeichnis stehen. Es reicht nicht aus, wenn das Verzeichnis mit den nc-Dateien im Pfad angegeben ist. Die entsprechende Fehlermeldung im MATLAB-Workspace lautet (leicht verwirrend):

```
** ERROR ** ncopen: rcode = -1
```

- Das Argument `change_miss` muß gleich 1 gesetzt werden (return missing values unchanged), andernfalls erhält man keine Luftdruckwerte in der Ausgabevariablen.

D. Übersicht über verwendete Programme

Die Berechnungen wurden ausschließlich mit MATLAB 5.3 gemacht. Alle folgenden Programme sind die verwendeten Erweiterungen des Standardumfangs von MATLAB, zu meist sog. „function m-files“. Weitere Toolboxes werden nicht benötigt. Die Programme sind nach Einsatzbereichen gegliedert. Zu dem jeweils links stehenden Namen wird rechts die Anwendung genannt. Nicht aufgeführt sind sämtliche Plotdateien.

1. Daten einlesen , zusätzlich zu Toolbox und Interface	
jahresp.m	Steuerung der Berechnung von Monatsmitteln für ein Jahr mittels p_quer.m
nc2mat.m	Menüsteuerung für Anwendung von getnc.m auf Luftdruckdaten
p_quer.m	Batchbetrieb für Mittelung der Daten beim Auslesen
2. Berechnungen	
2.1 SH-Tools: Paket für sphärisch-harmonische Berechnungen (Dr. Nico Sneeuw)	
cs2sc.m	Konvertierung von $ C\backslash S $ in $/S C\backslash$ -Format für Koeffizienten
gsha.m	Diskrete globale sphärisch-harmonische Analyse
gshs.m	Diskrete globale sphärisch-harmonische Synthese
isotf.m	Isotroper spektraler Transfer je Schwerefeldfunktional
plm.m	Normalisierte assoziierte Legendre-Polynome
sc2cs.m	Konvertierung von $/S C\backslash$ in $ C\backslash S $ -Format für Koeffizienten
2.2 Atmosphäre	
dg_atm.m	$\Delta\sigma(\theta, \lambda)$ aus $p(\theta, \lambda)$ und $\bar{p}(\theta, \lambda)$, Fälle IB, NIB und IBcon
dgrav.m	Variationen im Gravitationsfeld aus $\Delta\sigma(\theta, \lambda)$ je Funktional
3. Analyse	
cs2sc3.m	cs2sc.m für 3D-Matrizen, Zeit ist dritte Dimension

csrms.m	RMS-Werte \tilde{r}_{nm} und \tilde{s}_{nm} aus 3D-Koeffizientenfeldern
fit.m	a_k und b_k sowie A_k und φ_k für 3D-Matrizen über Ausgleichung nach kleinsten Quadraten (Sandra Verhagen)
gradvar3.m	Gradvarianzen und Grad-RMS für 3D-Matrizen
ispec.m	Inverse DFT für Eingangsgrößen a_k und b_k (Dr. Nico Sneeuw)
psd_gam.m	$\Gamma_t(k)$ aus $\text{RMS}_n(k)$, verschiedene Berechnungsarten
sc2cs3.m	sc2cs.m für 3D-Matrizen, Zeit ist dritte Dimension
spec.m	Koeffizienten a_k und b_k aus FFT-Berechnung (Dr. Nico Sneeuw)
spec3.m	Anwendung von spec.m auf 3D-Matrizen
4. GOCE-Vergleich , zusätzliche Programme von Dr. Nico Sneeuw	
betamk.m	Normierte Frequenzen β_{mk} einer gestörten Satellitenbahn
cs2ab.m	Konvertierung von \bar{C}_{nm} und \bar{S}_{nm} nach α_m und β_m
degmedian.m	Medianwert pro Grad eines Koeffizientenfeldes
gradpsd.m	Fehler-PSD für Schweregradienten
klm2amk.m	A_{mk} und B_{mk} für eine nominelle Bahn aus \bar{C}_{nm} und \bar{S}_{nm}
omegas.m	Säkulare Störungen der Keplerelemente durch J_2
repeat.m	Vorschläge für Wiederholungsbahnen nach Vorgaben
sunsync.m	Bahnneigung für eine sonnensynchrone Bahn je Halbachse
5. Visualisierung , von Dr. Nico Sneeuw	
logstem.m	Logarithmische diskrete Folge, logarithmischer „stem-plot“
statsleg.m	Legende mit statistischer Info zu Feld, mit Breitenkorrektur
suptitle.m	Überschrift für mehrere Subplots
6. Sonstige	
const.m	Konstanten für Berechnung: $R, \bar{\rho}, \rho_w, g, a, k'_n$

Literaturverzeichnis

- [Bergmann-Schäfer, 1997] : Bergmann-Schäfer: Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 7, Erde und Planeten. Herausgeber: W. Raith. Berlin: de Gruyter, 1997
- [Chao et al., 1987] : Chao, B.F., O'Connor, W.P., Chang, A.T.C., Hall, D.K. and J.L. Foster: Snow load effect on the Earth's rotation and gravity field. Journ. Geoph. Res. 92 (B9), 9415–9422, 1987
- [Chao und Gross, 1987] : Chao, B.F. and R.S. Gross: Changes in the Earth's rotation and low-degree gravitational field induced by earthquakes. Geophys. J. R. astr. Soc. 91, 569–596, 1987
- [Chao und Au, 1991] : Chao, B.F. and A.Y. Au: Temporal variation of the Earth's low-degree zonal gravitational field caused by atmospheric mass redistribution: 1980–1988. Journ. Geoph. Res. 96 (B4), 6569–6575, 1991
- [Chao, 1994] : Chao, B.F.: The Geoid and Earth rotation. In: Vaníček, P. and N.T. Christou: Geoid and its geophysical interpretations. Boca Raton: CRC Press, 1994
- [Dziewonski und Anderson, 1981] : Dziewonski, A. and D.L. Anderson: Preliminary reference Earth model. Phys. Earth Planet. Inter. 25, 297–356, 1981
- [Han und Wahr, 1995] : Han, D. and J. Wahr: The viscoelastic relaxation of a realistically stratified Earth, and a further analysis of postglacial rebound. Geophys. J. Int., 120, 287–311, 1995
- [Heiskanen und Moritz, 1967] : Heiskanen, W.A. and H. Moritz: Physical Geodesy. San Francisco: W.H. Freeman and Company, 1967
- [Hering et al., 1997] : Hering, E., Martin, R. und M. Stohrer: Physik für Ingenieure. Berlin: Springer, 6. Auflage 1997

- [Karrer, 2000] : Karrer, M.: Schwerefeldbestimmung aus Satellitengradiometrie — torus approach. München: Diplomarbeit an der TU München (unveröffentlicht), 2000
- [Kaula, 1966] : Kaula, W.M.: Theory of satellite geodesy. Waltham, Mass.: Blaisdell, 1966
- [Lambeck, 1988] : Lambeck, K.: Geophysical Geodesy — the slow deformations of the Earth. Oxford Science Publications, 1988
- [Love, 1927] : Love, A.E.H.: A treatise on the mathematical theory of elasticity (4th edition). Cambridge University Press, 1927
- [Meyer, 1998] : Meyer, M.: Signalverarbeitung. Wiesbaden: Vieweg Verlag, 1998
- [Molodenski, 1977] : Molodenski, S.M.: Relation between Love numbers and load factors. Izv. Phys. Solid Earth, 13, 147–9, 1977
- [Munk und MacDonald, 1960] : Munk, W.H. and G.J.F. MacDonald: The rotation of the Earth. Cambridge University Press, 1960
- [NRC, 1997] : National Research Council: Satellite gravity and the geosphere. Washington, D.C.: National Academic Press, 1997
- [Pail et al., 2000] : Pail, R., Sünkel, H., Hausleitner, W., Höck, E. and G. Plank: Temporal variations / Oceans. In: From Eötvös to mGal. Draft final report. Graz, ESA, 2000
- [Pond und Pickard, 1983] : Pond, S. and G.L. Pickard: Introductory dynamical oceanography. 2nd edition. Oxford: Pergamon Press, 1983
- [Rummel et al., 1988] : Rummel, R., Rapp, R.H., Sünkel, H. and C.C. Tscherning: Comparison of global topographic/isostatic models to the Earth's observed gravity field. Columbus: Ohio State University, 1988
- [Rummel, 2000] : Rummel, R.: Grundlagen der Erdmessung 2 — Potentialtheorie. München: Vorlesungsskript an der TU München, 2000
- [Rummel und Sneeuw, 2000] : Rummel, R. and N. Sneeuw: Overall scientific data strategy. In: From Eötvös to mGal. Draft final report. Graz, ESA, 2000
- [Sneeuw, 1994] : Sneeuw, N.: Global spherical harmonic analysis by least-squares and numerical quadrature methods in historical perspective. Geophys. J. Int., 118, 707–716, 1994

- [Sneeuw, 2000] : Sneeuw, N.: A semi-analytical approach to gravity field analysis from satellite observations. München: Verlag d. Bay. Akademie d. Wissenschaften, DGK Reihe C, Nr. 527, Dissertation, 2000
- [Tomaschek, 1957] : Tomaschek, R.: Tides of the Solid Earth. In: Flügge, S.: Encyclopedia of physics, Vol. XLVII, Geophysics II. Berlin: Springer-Verlag, 1957
- [Torge, 1989] : Torge, W.: Gravimetry. Berlin: de Gruyter, 1989
- [Verhagen, 2000] : Verhagen, S.: Time variations in the gravity field — the effect of the atmosphere. Delft: Diploma thesis at TU Delft (unreleased), 2000
- [Wahr et al., 1998] : Wahr, J., Bryan, F. and M. Molenaar: Time variability of the Earth's gravity field: Hydrological and oceanic effects and their possible detection using GRACE. Journ. Geoph. Res. 103 (B12), 30,205–30,229, 1998
- [Wunsch und Stammer, 1997] : Wunsch, C. and D. Stammer: Atmospheric loading and the oceanic “inverted barometer” effect. Rev. Geophys., 35(1), 79–107, 1997
- [Zahran, 2000] : Zahran, K.: Accuracy assessment of ocean tide loading computations for precise geodetic observations. Hannover: Wiss. Arb. d. Fachrichtg. Vermessungswesen der Uni Hannover, Nr. 238, Dissertation, 2000

Internetseiten:

- [1] : http://op.gfz-potsdam.de/champ/index_CHAMP.html
- [2] : <http://essp.gsfc.nasa.gov/grace/>
- [3] : <http://www.estec.esa.nl/vrwww/explorer/GRAVITY.html>
<http://www.esa.int/export/esaCP/index.html>
<http://www.sron.nl/missions/GOCE/>