TUM School of Education

Modellierung begrifflichen Wissens als Grundlage mathematischer Argumentation am Übergang vom sekundären in den tertiären Bildungsbereich

Kathrin Nagel

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät TUM School of Education der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Philosophie (Dr. phil.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzende:	Priv.-Doz. Dr. Christine Sälzer
Prüfende der Dissertation:	1. Prof. Dr. Kristina Reiss
	2. Prof. Dr. Stefan Ufer

Die Dissertation wurde am 5. Dezember 2016 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät TUM School of Education am 5. Mai 2017 angenommen.

Danksagung

Das Promovieren am Heinz Nixdorf-Stiftungslehrstuhl für Didaktik der Mathematik war eine sehr interessante und lehrreiche Zeit. Dabei konnte ich mich sowohl fachlich als auch persönlich weiterentwickeln. Die Zeit am Lehrstuhl habe ich sehr genossen und freue mich daher, mich an dieser Stelle bei meinen Unterstützerinnen und Unterstützern zu bedanken.

Ganz herzlich bedanke ich mich bei Prof. Kristina Reiss für die fachliche Betreuung meiner Doktorarbeit und Bereitstellung des interessanten Themas. Sie gab dieser Arbeit mit konstruktiven Ideen und ihrer Erfahrung immer wieder neue Impulse, unterstützte mich in allen Bereichen und hatte stets ein Ohr für anfallende Fragen. Zudem ermöglichte sie mir die aktive Teilnahme an zahlreichen nationalen und internationalen Konferenzen sowie den Aufenthalt an der Pointífica Universidad Católica de Chile. Ebenso bedanke ich mich herzlich bei meinem Zweitbetreuer Prof. Stefan Ufer, der mich durch sein wertvolles Feedback und fachliche Diskussionen unterstützte. Auch möchte ich mich bei meinem fachlichen Mentor Prof. Andreas Obersteiner bedanken, der mich insbesondere bei der Konstruktion und Durchführung meiner Studie beriet. Außerdem bedanke ich mich herzlich bei meiner Mentorin Ulrike Schätz, die mir im Laufe der letzten Jahre mit ihren wertvollen Ratschlägen vor allem in der Endphase meiner Dissertation stets beiseite stand. Ich danke Prof. Esther Brunner, die mich fachlich unterstützt und motiviert hat. Sie trug mit zahlreichen Anregungen und Diskussionen zum Gelingen dieser Arbeit bei. Prof. Oliver Deiser danke ich für die fachliche Unterstützung und konstruktiven Vorschläge bei der Erstellung meiner Studie. Ebenso danke ich Prof. Caroline Lasser, die mir die Gelegenheit bot, in ihren Lehrveranstaltungen im ersten Studienjahr praktisch mitzuwirken und dadurch Einblicke in die Schwierigkeiten von Studentinnen und Studenten zu erhalten. Zudem bedanke ich mich bei Priv.-Doz. Dr. Christian Karpfinger, Prof. Oliver Deiser und Prof. Kai Cieliebak für die Durchführung meiner Studie in ihren Lehrveranstaltungen. Ich danke meinen beiden wissenschaftlichen Hilfskräften Sheila Sabock und Martin Zilger für die Unterstützung bei der Kodierung der Daten. Daneben danke ich meinem chilenischen Ansprechpartner Prof. Horacio Solar, der mich während meines Aufenthaltes in Santiago de Chile sehr unterstützt hat. Er ermöglichte mir zahlreiche interessante Einblicke in seine Arbeit und in das chilenische Bildungssystem.

An dieser Stelle bedanke ich mich bei allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Lehrstuhls und der gesamten Fakultät für die kollegiale Zusammenarbeit. Das Klima war sehr angenehm und ermöglichte konstruktives Arbeiten. Der fachliche und persönliche Austausch gab mir immer wieder neue Anregungen. Ganz besonders bedanke ich mich bei Marian Anguela-González, meinen Zimmerkollegen Gabriele Moll und Stefan Hoch sowie Eva Seifert, Stefanie Schmidtner, Melanie Fischer, Delia Hillmayr und Janina Häusler, die mich stets unterstützten und mir mit vielen Anregungen, hilfreichen Diskussionen und Gesprächen beiseite standen.

Meiner Familie danke ich ganz herzlich für die hervorragende Unterstützung und Motivation während dieser Zeit. Sie hatten stets ein offenes Ohr und standen mir mit konstruktiven Ratschlägen zur Seite. Ein besonderer Dank gilt meinem Lebensgefährten Stefan, der mich gerade in dieser Zeit stets motiviert und bestärkt hat. Mit seinen wertvollen Tipps und seiner Geduld hat er mich beim Schreiben sehr unterstützt und entlastet.

Zusammenfassung

Für viele Studierende ist der Eintritt in das Mathematikstudium an der Universität oder Hochschule eine Herausforderung. Hohe Abbruchquoten und Untersuchungen zu den Beweggründen des Abbruchs des Studiums oder des Wechsels des Studienfaches belegen eine Überforderung mit den universitären Inhalten in der Studieneingangsphase.
Mathematisches Argumentieren zählt zu den Kernprozessen akademischer Mathematik und ist gleichzeitig eine sehr komplexe Tätigkeit. Daher ist es für viele Studierende mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden, mathematisch korrekt zu argumentieren. Eine wichtige Voraussetzung für das Argumentieren ist begriffliches Wissen. Durch den steigenden Abstraktions- und Formalisierungsgrad beim Eintritt in ein universitäres Mathematikstudium entstehen gerade im Aufbau begrifflichen Wissens Probleme. Dies kann zu Lücken innerhalb des begrifflichen Wissens führen, was zur Folge hat, dass Studierende mit Fachbegriffen nicht adäquat umgehen und sie zur Lösung mathematischer Probleme nur bedingt einsetzen können. An der Universität konstruieren Studierende sich meist selbstständig neues Wissen. Inhalte oder Begriffe werden kaum noch durch die Anleitung einer Lehrperson erlernt. Mangelnde Erfahrung mit dem Lernen von abstrakten Begriffen erschwert dabei den Aufbau begrifflichen Wissens zusätzlich.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Modell entwickelt, welches den Aufbau und die Entwicklung begrifflichen Wissens in Bezug auf die Übergangsphase von der Schule in die Hochschule beschreibt. Dabei werden Unterschiede zwischen anschaulichen und abstrakten Inhalten herausgearbeitet und deren Eigenschaften erläutert. Mithilfe dieser Betrachtungen können Schwierigkeiten beim Lernen und Anwenden mathematischer Begriffe identifiziert werden. Grundlagen des Modells sind die Theorien von Tall und Vinner (1981) und Sfard (1991), die sich mit dem Aufbau begrifflichen Wissens beschäftigen. Diese können jeweils zwei Komponenten identifizieren, die mathematischen Fachbegriffen angehören.
Es werden in der vorliegenden Arbeit diese vier Komponenten miteinander verknüpft und erläutert, auf welche Weise sie zusammenhängen und sich gegenseitig bedingen. Durch die Kombination entsteht ein spiralförmiger Prozess, der die Entwicklung begrifflichen Wissens dokumentiert. Daneben wurde ein Leistungstest konstruiert, welcher das theoretische Modell empirisch überprüft. Zudem untersucht er begriffliches Wissen von Studienanfängerinnen und -anfängern des Studienfachs Mathematik und auch ihre Fähigkeit, mathematisch zu argumentieren.

Die Ergebnisse zeigen eine Abhängigkeit von anschaulichen oder abstrakten Inhalten und der Qualität der Bearbeitung mathematischer Probleme im Schul- und Hochschulkontext. Außerdem bestätigen sie das theoretisch konstruierte Modell empirisch. Begriffliches Wissen ist für die Entwicklung mathematischer Argumentationen grundlegend. Um den Aufbau mathematischer Inhalte zu optimieren, kann der im Modell beschriebene Entwicklungsprozess leitend sein. Das zur Verbesserung der mathematischen Leistungen der Studentinnen und Studenten im ersten Studienjahr beitragen und daher zu einer Reduktion der Abbruchquoten führen.

Summary

The transition from secondary school to university mathematics is a challenge for many students both in the German context and internationally. High dropout rates as well as students' reasons for cancelling their studies or changing their subject indicate that many students are overstrained by the new situation and the more advanced learning content at the university level.
Mathematical argumentation is one of the core processes of academic mathematics and, therefore, of particular importance for university studies. However, argumentation is complex and difficult to learn. One main prerequisite for mathematical argumentation is conceptual knowledge. As mathematical content at university becomes more abstract, students face problems developing appropriate conceptual knowledge. Consequently, lack of conceptual knowledge causes difficulties in solving mathematical problems correctly. The reasons why students have problems learning university mathematics content properly and difficulties in solving mathematical problems in detail are not yet evident.

To reduce this uncertainty, a model was developed that shows the structure of conceptual knowledge adapted for the transition from secondary school to university mathematics. The model also allows for insights into properties of concrete and abstract concepts, as well as tracing their influence in learning concepts. The theories of Tall and Vinner (1981) and Sfard (1991) serve as a basis for the model. Meanwhile, the model developed in this study connects the four components of mathematical concepts identified separately by Tall and Vinner (1981) and Sfard (1991) as an appropriate description for the secondary-tertiary transition in mathematics. The components used by the model consist of: concept image, concept definition, operational, and structural component.
Additionally, an empirical analysis was designed in order to screen the accuracy of the theoretical model for describing this conceptual knowledge. Argumentation skills of first-year students in mathematics were also examined in the course of the study.

The results yielded by this empirical study verified the model's design, showing that students struggle with mathematical argumentation and that concrete and abstract content highly influences students' argumentation quality.
Conceptual knowledge—especially for abstract university content—acts as the basis for mathematical argumentation and for learning mathematics in general. An appropriate development of conceptual knowledge across the four separate components should be fostered during the first year of university. If students' conceptual knowledge learning is fostered in this manner, the high dropout rate in mathematics studies will possibly be reduced.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Problemstellung

Der Übergang von der Schule an die Hochschule im Fach Mathematik ist für angehende Studierende eine Herausforderung. Studien des Deutschen Zentrums für Hochschul- und Wissenschaftsforschung (DZHW) zeigen, dass die Abbruchquoten in den Bachelorstudiengängen Mathematik und Naturwissenschaften sehr hoch sind und zum Beispiel im Absolventenjahrgang des Jahres 2012 bei 39 % lagen (Heublein, Richter, Schmelzer & Sommer, 2014). Die durchschnittliche Abbruchquote aller Studiengänge an deutschen Hochschulen lag im Jahr 2012 dagegen bei 28 %, also elf Prozentpunkte darunter. Dies zeigt, dass zahlreiche Studentinnen und Studenten besonders in Mathematik und in naturwissenschaftlichen Fächern ihr Studienfach abbrechen oder wechseln. Die Gründe für einen Abbruch des Studiums oder den Wechsel eines Studienfachs können unterschiedlicher Art sein, wie zum Beispiel andere Erwartungen an das Fach oder ein steigender Schwierigkeitsgrad der Inhalte.

Insbesondere in der Mathematik und den Naturwissenschaften werden Fach- und Lehrkräfte benötigt, weswegen gerade in diesen Fachbereichen der Nachwuchs verstärkt gefördert und unterstützt werden sollte. Der Unterschied von elf Prozentpunkten zwischen den allgemeinen Abbruchquoten und denen der MINT (Mathematik, Informatik, Naturwissenschaft, Technik)-Studiengänge demonstriert, dass es für die Studentinnen und Studenten nicht einfach ist, den Übergang von der Schule an die Hochschule in mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern erfolgreich zu absolvieren.

In der Vergangenheit fokussierte die pädagogische Psychologie die Erforschung des schulischen Lernens, weniger die des Lernens an Universitäten (Krapp, Prenzel & Weidenmann, 2001). Zuletzt wurden auch verstärkt Lernprozesse im tertiären Bildungsbereich untersucht (Nagel, Quiring, Deiser & Reiss, 2016; Hefendehl-Hebeker, 2013). Aus den Ergebnissen dieser Forschung wird deutlich, dass an deutschen Hochschulen Reformen durchgeführt werden sollten, die sich auf wissenschaftliche Erkenntnisse stützen und die Lernbedingungen Studierender verbessern (Schiefele, Streblow, Ermgassen & Moschner, 2003).

Eine mögliche Ursache für die hohen Abbruchquoten zu Studienbeginn liegt in den Unterschieden von Schul- und Hochschulmathematik. Im Studiengang Mathematik und Lehramt an Gymnasien im Fach Mathematik ist zum Beispiel die Tätigkeit des mathematischen Argumentierens zentral und spielt in jeder Fachvorlesung eine bedeutende Rolle. Vor der Einführung der Bildungsstandards war die Förderung mathematischer Argumentation kaum in der Schule veranktert. Empirische Studien zeigen, dass die Fähigkeit, mathematisch zu argumentieren, bei Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe gering ist (Reiss, 2002; Healy & Hoyles, 2000). Auch Fallstudien an Universitäten bestätigen, dass Studierende der Mathematik Probleme beim Argumentieren haben (Harel & Sowder, 1998). Das eigenständige Entwickeln von Argumenten ist dabei eine der zentralen Herausforderungen. Durch die Einführung der bundesweiten Bildungsstandards wurde mathematisches Argumentieren als wesentliches Ziel schulischer Bildung ausgewiesen. Die Kul-

tusministerkonferenz (KMK) veröffentlichte Standards für die Sekundarstufe I und II, in denen festgelegt wurde, über welche Kompetenzen Schülerinnen und Schüler nach dem Mittleren Abschluss oder der Allgmeinen Hochschulreife verfügen sollen (KMK, 2004b, 2012). Mathematische Argumentationskompetenz zu fördern, ist seitdem wichtiger Teil schulischer Bildungs. Jedoch zeigen auch neuere Studien, dass die Argumentationsfähigkeit von Studienanfängerinnen und -anfängern trotz der Einführung der Bildungsstandards immer noch gering ist (Nagel & Reiss, 2016; Engelbrecht, 2010).
Zur Förderung mathematischer Argumentationsfähigkeit, die fundamental für wissenschaftliche Mathematik ist, ist es notwendig, Teilkompetenzen zu identifizieren und zu analysieren. Mathematisches Argumentieren ist ein komplexer Prozess, der Metawissen über den Beweisprozess, mathematisch-strategisches Wissen, Problemlösefähigkeiten und begriffliches Wissen erfordert (z. B. Reiss & Ufer, 2009). Eine zentrale Voraussetzung für das Argumentieren ist demnach das begriffliche Wissen, da es zum Verstehen von mathematischen Inhalten notwendig ist. Die Untersuchung der Entwicklung begrifflichen Wissens kann Aufschluss über dessen Aufbau geben und zudem offenlegen, welche Fähigkeiten ausgebildet sein sollten, um es in mathematischen Argumentationen erfolgreich einsetzen zu können.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es daher, die Entwicklung begrifflichen Wissens zu analysieren und seine Rolle im Argumentationsprozess zu erforschen. Dazu wird ein theoretisches Modell konstruiert, das auf Arbeiten basiert, die begriffliches Wissen in der Mathematik untersuchen. Das Modell wird für die Studieneingangsphase entworfen und ist im Kapitel 6 dargestellt. Es setzt sich aus den folgenden vier Teilkomponenten begrifflichen Wissens zusammen: *concept image* und *concept definition* (Vinner, 1991, 1983; Tall & Vinner, 1981) sowie *operationale Komponente* und *strukturelle Komponente* (Sfard, 1991). Die vier Komponenten beinhalten jeweils verschiedene Facetten eines mathematischen Begriffs. Um Problemstellungen aus dem Kontext der Hochschule erfolgreich bearbeiten zu können, ist vor allem Wissen über die concept definition und die strukturelle Komponente wichtig, was in den nachfolgenden Kapiteln erläutert wird. Im Kontext der Schule werden eher die beiden anderen Komponenten – das concept image und die operationale Komponente – gefördert. Für das Verständnis eines mathematischen Begriffs sowie um diesen adaptiv verwenden zu können, ist das Zusammenspiel aller vier Komponenten grundlegend.
Das Modell lässt somit Einblicke in die Struktur des begrifflichen Wissens zu und verbindet die Komponenten miteinander, die für die Begriffsbildung als notwendig erachtet werden. Mithilfe des Modells können Unterschiede zwischen anschaulichen und abstrakten Begriffen identifiziert und erklärt werden. Zudem kann untersucht werden, welchen Einfluss der Abstraktionsgrad der Begriffe auf die Qualität mathematischer Argumentationen hat. Darüber hinaus berücksichtigt das Modell den Kontext Schule sowie den Kontext Hochschule und ist damit zur Unterstützung von Studienanfängerinnen und -anfängern geeignet.
Um das theoretische Modell zu überprüfen und den Einfluss von abstrakten bzw. anschaulichen Inhalten in Bezug auf das mathematische Argumentieren zu untersuchen, wird ein Leistungstest konstruiert, der an Studienanfängerinnen und -anfänger des Fachs Mathematik adressiert ist. Darin wird das begriffliche Wissen von den vier geometrischen Fachbegriffen Mittelsenkrechte in

einem Dreieck, gleichschenkliges Dreieck, Vektor und seine Repräsentanten und lineare Abhängigkeit, erhoben. Bei den ersten beiden Fachbegriffen handelt es sich um anschauliche Begriffe und bei den letzten beiden um abstrakte Begriffe. Diese Fachbegriffe sind zentrale Konzepte der Schulmathematik, die auch im Hochschulstudium Relevanz aufweisen. Die Ergebnisse zeigen, dass sich das Modell empirisch bestätigen lässt. Zudem offenbaren sie, wie Studierende argumentieren und welchen Einfluss das begriffliche Wissen auf die Argumentationsqualität hat.

Die Arbeit modelliert den Aufbau begrifflichen Wissens, das eine der Voraussetzungen für das mathematische Argumentieren ist. Das Modell scheint insbesondere geeignet zu sein, Schwierigkeiten beim Lernen mathematischer Begriffe – insbesondere abstrakter Begriffe – zu identifizieren. Außerdem können entsprechende Maßnahmen zur Förderung begrifflichen Wissens an Universitäten und Hochschulen abgeleitet werden. Diese werden am Ende der vorliegenden Arbeit diskutiert. Damit können Studierende bei der Entwicklung begrifflichen Wissens unterstützt werden, was auch einen positiven Einfluss auf die mathematische Argumentationsfähigkeit hat.

1.1 Zielsetzung und Vorgehen

Die vorliegende Arbeit konzentriert sich darauf, die Übergangsschwierigkeiten im Fach Mathematik bei der Begriffsbildung und beim mathematischen Argumentieren besser zu verstehen. Dazu wurde im ersten Teil der vorliegenden Arbeit ein Modell entwickelt, welches den Prozess der Begriffsbildung für die Schnittstelle Schule-Hochschule aufzeigt und Erklärungsansätze anbietet, warum das Lernen abstrakter Begriffe schwer ist und Studierende beim Lösen von Aufgaben, welche sich auf die an der Universität neu gelernten Inhalte beziehen, Probleme haben. Im empirischen Teil der Arbeit werden die Ergebnisse einer Leistungserhebung vorgestellt, die begriffliches Wissen und mathematische Argumentationsfähigkeit von Studienanfängerinnen und -anfängern misst. Begriffliches Wissen ist dabei Voraussetzung für das Argumentieren (z. B. Reiss, 2002; Healy & Hoyles, 2000). Die Ergebnisse des Tests bestätigen das theoretisch hergeleitete Modell und geben einen Einblick in das begriffliche Wissen von Studierenden sowie in die Fähigkeit, mathematisch zu argumentieren. Daraus werden in der Diskussion mögliche Fördermaßnahmen für die Studieneingangsphase vorgestellt, die Studierende bei der Entwicklung des begrifflichen Wissens unterstützen und somit Übergangsschwierigkeiten reduzieren können.

1.2 Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in einen theoretischen und in einen empirischen Teil: Kapitel 2 bis 6 beinhalten den theoretischen Hintergrund und legen den aktuellen Forschungsstand zum begrifflichen Wissen als Teil mathematischer Argumentationskompetenz dar, in Kapitel 7 werden die Ziele der vorliegenden Arbeit formuliert und in den Kapiteln 8 bis 11 ist der empirische Teil der Arbeit enthalten.

In Kapitel 2 wird die Übergangsproblematik im Studienfach Mathematik thematisiert. Dabei wird herausgearbeitet, dass es bisher keine geeigneten Maßnahmen gibt, welche die Eingangsschwierigkeiten für Studienanfängerinnen und -anfänger dauerhaft verbessern können. Daneben

werden Ursachen für die Übergangsschwierigkeiten erläutert, die zum einen auf die Lernkultur an Universitäten und zum anderen auf das Fach Mathematik selbst zurückzuführen sind. In Kapitel 3 wird dargestellt, über welche Kompetenzen Studierende zu Beginn ihres Mathematikstudiums verfügen sollten. Dabei wird insbesondere das mathematische Argumentieren thematisiert, in dessen Rahmen auch begriffliches Wissen in der vorliegenden Arbeit untersucht wird. Im Anschluss wird in Kapitel 4 auf begriffliches Wissen und dessen Aufbau eingegangen. Dabei wird auch Abstraktion in der Mathematik behandelt und es werden in diesem Zusammenhang abstrakte und anschauliche Begriffe in der Mathematik definiert. Am Ende des Kapitels wird dargestellt, wie sich begriffliches Wissen in der Mathematik entwickelt. Kapitel 5 wendet sich dem mathematischen Argumentieren zu. Nach einer Begriffsklärung von Argumentieren und Beweisen werden Ergebnisse von Studien zum Argumentieren betrachtet, die für den Übergang an die Universität Relevanz aufzeigen. In Kapitel 6 wird schließlich ein Modell konstruiert, welches den Begriffsbildungsprozess beschreibt, der für Untersuchungen an der Schnittstelle Schule-Hochschule geeignet ist. Das Modell beinhaltet die Aspekte der Begriffsbildung, die zu Schwierigkeiten zu Beginn eines mathematischen Studiums an der Universität führen können. Kapitel 7 beinhaltet die Ziele, Forschungsfragen und Hypothesen der vorliegenden Arbeit.
In Kapitel 8 wird die Konstruktion des Messinstruments beschrieben, das begriffliches Wissen und dessen Anwendung in mathematischen Argumentationen untersucht. Die Methode und Evaluation des Messinstruments mithilfe von Pilotstudien sowie Expertenbefragungen werden ebenso in diesem Kapitel berichtet. Daneben wird die Durchführung der Studie beschrieben. Die Kodierung der Antworten der Teilnehmerinnen und Teilnehmer erfolgt in Kapitel 9. In Kapitel 10 werden die Ergebnisse bzgl. der Forschungsfragen dargestellt. Eine Diskussion der Ergebnisse findet sich in Kapitel 11. Dabei wird auf Limitationen und Konsequenzen für die Lehrerausbildung eingegangen. Zudem wird die Übertragbarkeit des theoretisch hergeleiteten Modells auf die Praxis diskutiert.

Teil I

Theoretische Grundlagen

2 Übergang von der Schule an die Universität im Fach Mathematik

In diesem Kapitel wird erläutert, was unter Studienabbruch zu verstehen ist. Daneben werden die Abbruchquoten der mathematisch-naturwissenschaftlichen Studiengängen in Deutschland vorgestellt. Im Anschluss wird Bezug zu Felix Klein hergestellt, der bereits zu Beginn des 20. Jahrhunderts Übergangsproblematiken im Fach Mathematik thematisiert hatte. Schließlich werden Ursachen für die Schwierigkeiten am Übergang von der Schule an die Hochschule im Fach Mathematik dargelegt.

2.1 Studienabbruch in Deutschland

Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit den Studienabbruchquoten deutscher Universitäten. Im Besonderen werden die Daten der MINT-Studiengänge sowie des Mathematikstudiums thematisiert. Zudem werden mögliche Gründe für den Studienabbruch behandelt.

2.1.1 Bestimmung der Studienabbruchquoten

Studienabbruchquoten sind ein Indikator dafür, wie Studentinnen und Studenten mit ihrem Studienfach zurecht kommen und inwiefern sie es erfolgreich beenden. Aus Zusatzbefragungen zu den Abbruchquoten kann darüber hinaus bestimmt werden, ob anfängliche Erwartungen an das Studienfach sich mit der tatsächlich wahrgenommenen Situation decken. In der empirischen Forschung wird Studienabbruch folgendermaßen definiert:

> Studienabbruch ist „eine spezielle Form von Schwund ..., die nur diejenigen [Studierenden] umfasst, die das Hochschulsystem ohne (ersten) Abschluss verlassen und ihr Studium nicht zu einem späteren Zeitpunkt wieder aufnehmen.“
> (Heublein, Richter, Schmelzer & Sommer, 2012, S. 216)

Bei der Berechnung von Studienabbruchquoten ist zu beachten, dass es Fluktuation in der Anzahl der Studierenden einer Hochschule gibt. Es können Studienfach- oder Hochschulwechsel, Studienunterbrechung oder zum Beispiel ein Wechsel ins Ausland, um dort das Studium zu beenden, vorliegen. Diese Faktoren kann man unter dem Begriff „Schwund“ zusammenfassen (Heublein et al., 2012, S. 216). Meist geben quantitative Zahlen lediglich Auskunft über den Schwund einer Kohorte von Studierenden innerhalb eines Jahrgangs (Heublein et al., 2012). Der Studienabbruch kann demnach bei einer reinen Betrachtung der Differenz zwischen den Anfängerinnen und Anfängern und den Absolventinnen und Absolventen nicht von einem Fachwechsel oder Ähnlichem unterschieden werden.

Zudem können Berechnungen auf Grundlage der oben genannten Definition Personen nicht miteinbeziehen, die nach der Erhebung der Zahlen ihr Studium wieder aufnehmen. Aufgrund dieser Schwierigkeiten ist es bei Aussagen über Studien„abbruch“ daher zweckmäßig, Vergleichswerte anderer Universitäten und Hochschulen sowie den Verlauf über einige Jahre zu betrachten, um aus den gegebenen Zahlen die tatsächlichen Abbruchquoten abschätzen zu können. Es existieren in Deutschland verschiedene Schätzverfahren, mithilfe derer die reale Studienabbruchquote approximiert werden kann (Heublein et al., 2012). Die in der vorliegenden Arbeit zitierten Studienabbruchquoten beziehen sich auf die geschätzten Werte des Hochschul-Informations-Systems (HIS).

2.1.2 Abbruchquoten im Mathematikstudium

Die durchschnittliche Abbruchquote aller Studiengänge an deutschen Universitäten liegt im Absolventenjahrgang 2012 bei 28 %. Die Abbruchquote in den MINT-Studiengängen ist im Vergleich dazu wesentlich höher: Es beenden 39 % der Studierenden ihr Studium vorzeitig, also elf Prozent mehr als durchschnittlich in allen Studiengängen deutscher Universitäten (Heublein et al., 2014). Auch zwei Jahre zuvor, im Absolventenjahrgang 2010, brechen 39 % der Studierenden von MINT-Studienfächern ihr Studium ab (Heublein, Hutzsch, Schreiber, Sommer & Besuch, 2010). Betrachtet man bei den Untersuchungen zum Studienabbruch nur den Studiengang Mathematik, so ist eine noch höhere Abbruchquote zu verzeichnen: Im Absolventenjahrgang 2010 brechen 55 % der Mathematikstudierenden ihr Studium erfolglos ab (Heublein et al., 2012). Dieser Wert verringert sich in den darauffolgenden zwei Jahren etwas, ist jedoch mit 47 % dennoch sehr hoch (Heublein et al., 2014). Diese Ergebnisse belegen, dass es für Studentinnen und Studenten schwer ist, das Studienfach Mathematik erfolgreich zu absolvieren.
Für den Studiengang Lehramt Mathematik für Gymnasien gibt es keine vergleichbaren Daten, die den Studienabbruch oder -wechsel dokumentieren. In den genannten Studien werden alle Studiengänge, die einen Examensabschluss anstreben, zusammengefasst. Darin sind neben den Lehramtsstudiengängen diverser Fachkombinationen und Schularten zum Beispiel auch die Studiengänge Medizin und Jura enthalten. Es lassen sich aus dieser Vielzahl an Studiengängen, die inhaltlich sehr verschieden ausgerichtet sind, keine aussagekräftigen Interpretationen ableiten. Die Lehramtsstudierenden für die Sekundarstufe II belegen normalerweise dieselben Module in Mathematik wie die Studierenden, die nur Mathematik studieren. Daher kann man die Studienbedingungen der Mathematikstudierenden mit denen des Lehramts für die Sekundarstufe II des Fachs Mathematik vergleichen.

Bei der Untersuchung der zeitlichen Entwicklung der Abbruchquoten zeigt sich ein Zuwachs an Studentinnen und Studenten, die vorzeitig das Studium beenden. Die Quoten der Studierenden, die ein MINT-Studium abbrechen, zum Beispiel der Jahrgänge 1999, 2002, 2004 und 2006, verdeutlichen, dass im Laufe der Zeit immer öfter ein Studium abgebrochen wird. Liegen die Abbruchquoten im Absolventenjahrgang 1999 noch bei 23 %, so vergrößert sich ihr Anteil bis zum Jahrgang 2002 auf 26 %. In den folgenden Absolventenjahrgängen 2004 und 2006 liegt die Abbruchquote in den MINT-Studiengängen bei jeweils 28 % (Heublein et al., 2010). Werden diese Ergebnisse mit den Daten aus den Jahrgängen der mathematischen und naturwissenschaftlichen

Studiengänge der Jahre 2010 bzw. 2012 verglichen, in denen jeweils 39 % der Studierenden ihr MINT-Studium erfolglos beendeten, so ist erkennbar, dass sich dieser Trend weiter fortsetzt. Die Differenz zwischen den durchschnittlichen Abbruchquoten aller universitären Studiengänge und denen der MINT-Studiengänge demonstriert, dass Lernende insbesondere in mathematischen und naturwissenschaftlichen Studiengängen Schwierigkeiten haben, ihr Studium erfolgreich zu beenden. Zudem wird deutlich, dass es Studentinnen und Studenten immer schwerer fällt, die Anforderungen eines Hochschulstudiums zu erfüllen.

2.1.3 Gründe für den Studienabbruch

Umfragen des HIS, die mögliche Ursachen für den Studienabbruch der Jahre 2000 und 2008 untersuchen, zeigen, dass 72 % der Exmatrikulierten des Jahres 2008 des Studiengangs Mathematik Leistungsprobleme als Hauptursache für das frühzeitige Beenden des Studiums nennen. Im Vergleich zu anderen Studienfächern ist dies ein überproportional hoher Wert (Heublein et al., 2012). Leistungsprobleme können dabei

> „individuelle Leistungsprobleme im Studium, die sowohl eine institutionelle Komponente (zu umfangreicher Studien- und Prüfungsstoff, zu hohe Studienanforderungen) als auch eine individuelle Komponente (Zweifel an persönlicher Eignung, dem Leistungsdruck nicht gewachsen)“ sein.
> (Heublein et al., 2012, S. 225)

Zudem berichten im Jahr 2008 32 % der Studienabbrecherinnen und -abbrecher des Fachs Mathematik von Überforderung im Studium – im Jahr 2000 geben dagegen 19 % Überforderung als Grund für den Studienabbruch an. Das Gefühl der Überforderung im Mathematikstudium steigt demnach an.
Daraus resultierende, ausbleibende Erfolgserlebnisse können die Übergangsproblematik zusätzlich verstärken (Beutelspacher, Danckwerts, Nickel, Spies & Wickel, 2011; Daskalogianni & Simpson, 2002). Es lässt sich festhalten, dass Hauptgründe, ein Mathematikstudium abzubrechen, in Leistungsproblemen und dem Gefühl der Überforderung liegen.

Schlussfolgerungen

Die hohen Zahlen an Studierenden, die ihr Studienfach abbrechen oder wechseln, belegen, dass es bedeutende Probleme beim Eintritt in das Mathematikstudium gibt. Auch internationale Studien bestätigen Eingangsschwierigkeiten in das Mathematikstudium (z. B. Gueudet, 2008; Hoyles, Newman & Noss, 2001). Dies ist insofern problematisch, als dass gut ausgebildete Fachkräfte in mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereichen in Deutschland fehlen (Bundesagentur für Arbeit, 2015; Vollmer, 2015).
Eine fundierte mathematische Ausbildung ist jedoch nicht nur für Fachkräfte, sondern auch für künftige Lehrerinnen und Lehrer grundlegend, um inner- und außermathematische Zusammenhänge zu erkennen, und ist Basis für die Weiterentwicklung mathematischer Kompetenzen (Ennemoser & Krajewski, 2013). Solide mathematische Fachkenntnisse wirken sich zudem positiv auf fachdidaktische Fähigkeiten aus und sind daher speziell für angehende Lehrerinnen und Lehrer wichtig (M. Brunner et al., 2006; Krauss, Baumert & Blum, 2008; Krauss, Neubrand

et al., 2008; Kunter, Baumert & Blum, 2011).
Aufgrund der hohen Abbruchquoten und der Indikatoren, dass Studierende sich vom Studium überfordert fühlen, ist es von Seiten der Universitäten und Hochschulen von Interesse, die Übergangsschwierigkeiten im Fach Mathematik zu analysieren und versuchen zu verstehen, wo genau die Herausforderungen beim Übergang liegen. Um dieser Problematik zu begegnen, gibt es bereits Bemühungen, die Hochschulmathematik besser an die Schulmathematik anzubinden. Ausgewählte Unterstützungsmaßnahmen deutscher Universitäten und Hochschulen werden in Kapitel 2.4 erläutert.
Bisher zeigen bundesweite Untersuchungen über Studienabbruch jedoch, dass die Quoten in den MINT-Fächern steigen. Schlussfolgernd kann also angenommen werden, dass aktuelle Maßnahmen zur Unterstützung beim Übergang von der Schule an die Universität im Fach Mathematik noch verbessert und weiterentwickelt werden müssen.

2.2 Die Übergangsproblematik: Ein altes Problem?

Schwierigkeiten beim Übergang von der Schule an die Hochschule sind keine neuen Probleme (z. B. Heublein et al., 2012). Bereits Klein (1908) thematisiert die Übergangsproblematik in seinem Werk *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte*. Darin beklagt er sowohl die Schwierigkeiten beim Eintritt in das Mathematikstudium als auch die beim Eintritt in den Lehrberuf nach dem Studium. Klein sieht die Studierenden beim Eintritt in ihr Mathematikstudium „vor Probleme gestellt, an denen ... nichts mehr an das erinnert, womit [sie] ... sich bisher beschäftigt ha[ben]“ (Klein, 1908, S. 1). Damit spricht er die fehlende Verknüpfung von Schul- und Hochschulmathematik an, die auch heute von vielen Studierenden als Herausforderung angesehen wird (z. B. Nagel et al., 2016; Bauer, 2013; Bauer & Partheil, 2009; Daskalogianni & Simpson, 2002). Im Gegensatz zur momentanen Situation ist es nicht so, dass Studierende daraufhin die Schulmathematik „rasch und gründlich“ (Klein, 1908, S. 1) vergessen und sich mit großem Eifer und Interesse an die Hochschulmathematik wagen, wie es Klein beschreibt. Vielmehr führt die fehlende Verbindung zu Motivations- und Leistungsproblemen (Daskalogianni & Simpson, 2002).
In Kleins Werk werden vordergründig eher die Schwierigkeiten beim Einstieg in den Lehrberuf nach Beenden des Studiums thematisiert, die Herausforderung der Studienanfängerinnen und -anfänger, Hochschulmathematik zu lernen, scheint zu Beginn des 20. Jahrhunderts weniger problematisch gewesen zu sein. Eher können die angehenden Lehrpersonen nach dem Studium „kaum selbstständig [die Schulmathematik] mit [d]er Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen“ (Klein, 1908, S. 2), sodass sie „bald die alte Unterrichtstradition auf[nehmen], und das Hochschulstudium ... nur eine mehr oder minder angenehme Erinnerung [bleibt], die auf [d]en Unterricht keinen Einflu[ss] hat“ (Klein, 1908, S. 2).
Klein spricht in diesem Zusammenhang von einer „doppelten Diskontinuität, die gewi[ss] weder der Schule noch der Universität jemals Vorteil brachte“ (Klein, 1908, S. 2) und bezeichnet damit die beiden Übergänge, die eine künftige Lehrerin oder ein künftiger Lehrer vom Eintritt in das Studium bis zum Ausüben des Berufs bewältigen muss. Klein verwendet den Begriff der *Diskontinuität*, da die jeweiligen Bildungs- bzw. Berufsabschnitte, die während der Lehramtsausbildung durchlaufen werden, inhaltlich und methodisch wenig aufeinander abgestimmt sind

und somit mehr oder weniger isoliert voneinander existieren. Um Studierende beim Überwinden dieser doppelten Diskontinuität zu unterstützen, schlägt er zum einen vor, in den bestehenden Unterrichtsstoff moderne und aktuelle Mathematik zu integrieren, zum anderen stärker die „Bedürfnisse der [Lehrerinnen und] Lehrer im Universtitätsunterricht“ (Klein, 1908, S. 2) zu berücksichtigen. Dazu stellt er eigens entwickelte und erprobte Vorlesungen vor, die Zusammenhänge zwischen Schul- und Hochschulmathematik herstellen, sodass eine Lehrerin oder ein Lehrer später beim Unterrichten auch Elemente der Hochschulmathematik berücksichtigen kann.

Zitiert man Klein, darf nicht übersehen werden, dass das Lehramtsstudium zu Beginn des 20. Jahrhunderts sich deutlich von dem derzeitigen unterscheidet. Studierende entscheiden sich heute oft bewusst für den Beruf der Lehrerin oder des Lehrers und weniger für eine Fachausbildung in bestimmten Fächern (Terhart, 2014; Rothland, 2011). Damit kann man auch die Motivation, fachmathematische Inhalte zu lernen, die offensichtlich in keiner Verbindung zum Schulstoff stehen, nicht mehr durch Interesse an universitärer Mathematik als gegeben ansehen, wie es zu Zeiten Kleins eher der Fall war. Es ist darauf zu achten, dass Interesse und Motivation während des universitären Studiums nicht abnehmen, da Studieninhalte mit dem späteren Lehrberuf zunächst wenig gemeinsam zu haben scheinen (Daskalogianni & Simpson, 2002). Eine explizite Verknüpfung zwischen schulischen und universitären Inhalten ist – auch im Sinne von Klein – sinnvoll, um die Bedeutung der mathematischen Inhalte für den späteren Lehrberuf zu aufzuzeigen.
Die Übergangsproblematik ist also ein altes Problem der Universitäten, das aber auch heute noch aktuell ist. Im vorhergehenden Kapitel wurden die zwei Hauptgründe für einen Abbruch des Mathematikstudiums – Leistungsprobleme und Überforderung – benannt, welche Studierende im Rahmen bundesweiter Umfragen angaben. Im folgenden Abschnitt wird erläutert, wie solche Gründe entstehen können, das heißt, welche Probleme beim Begriffserwerb und bei der Ausbildung mathematischer Arbeitsweisen auftreten.

2.3 Probleme beim Lernen mathematischer Inhalte und Arbeitsweisen am Übergang Schule-Hochschule

Als Hauptursachen für die Schwierigkeiten beim Eintritt in ein Mathematikstudium sowie bei der Beschäftigung mit hochschulmathematischen Inhalten werden vor allem fachbezogene Änderungen genannt (Reichersdorfer, Ufer, Lindmeier & Reiss, 2014; Rach & Heinze, 2013; Gueudet, 2008; Hourigan & O’Donoghue, 2007; Daskalogianni & Simpson, 2002). Fachbezogenen Differenzen lassen sich meist auf eine unterschiedliche Betonung des Prozess- bzw. Produktcharakters von Mathematik zurückführen. Mathematik kann sowohl als Prozess als auch als Produkt angesehen werden, beides sind jeweils gültige Ansichten auf das Fach (Borneleit, Danckwerts, Henn & Weigand, 2001). Jedoch resultieren daraus verschiedene Zugänge zur Mathematik sowie ein jeweils anderer Umgang mit mathematischen Inhalten und Arbeitsweisen.

Im Folgenden werden wesentliche Unterschiede zwischen Schul- und Hochschulmathematik dargelegt, die sich auf die Ziele, Erarbeitung von Wissen, Struktur sowie Sprache konzentrieren. Es wird dabei darauf eingegangen, welche Konsequenzen sich aus der unterschiedlichen Art der Wissensaufbereitung für den Begriffserwerb sowie für die Anwendung mathematischer Arbeitsweisen ergeben.

Unterschiedliche Ziele der Schul- und Hochschulmathematik

Schulmathematik hat im Vergleich zur Hochschulmathematik einen eigenen Charakter (Hoyles et al., 2001). Mathematisch anspruchsvolle Details oder komplexe Verbindungen zwischen verschiedenen Theorien können aus didaktischen oder kognitiven Gründen oft nicht im Schulunterricht besprochen werden – dafür wird thematisiert, was zur Allgemeinbildung der Schülerinnen und Schüler beiträgt und im Alltag Anwendung findet (KMK, 2012; Winter, 1995). Schülerinnen und Schüler sollen weniger den axiomatisch-deduktiven Aufbau der Mathematik kennenlernen, vielmehr den Praxisbezug von Mathematik in realen Situationen erkennen (Winter, 1995). Aus diesem Grund werden in der Schule neue mathematische Inhalte mittels des Produktcharakters der Mathematik eingeführt, um nicht die Entwicklung einer bestimmten mathematischen Theorie zu fokussieren, sondern die resultierenden Aussagen. Auf diese Weise kann Mathematik unmittelbar in praktischen Anwendungen vertieft und eingeübt werden.
An der Universität werden hingegen mathematische Theorien möglichst lückenlos dargestellt, sodass Lernende den typisch mathematischen Aufbau von Theorien erfahren können. Somit erhalten sie Einblicke in den Entstehens- und Entwicklungsprozess akademischer Mathematik. Dabei wird eher der Prozesscharakter der Mathematik deutlich, wodurch das mathematische Wissen aus der Schule komplettiert wird.

Unterschiede in der Erarbeitung mathematischer Inhalte

In der Schule erfolgt das Arbeiten und tatsächliche Einführen mathematischer Inhalte eher handlungsorientiert und es dominiert eine empirische Sichtweise auf das Fach (Witzke, 2013; Leuders, 2003). Diese Perspektive wird unter anderem bei der Betrachtung einschlägiger Schulbücher deutlich (z. B. Schätz & Eisentraut, 2013; H. Götz et al., 2010; Distel & Feuerlein, 2012). Bei der Erarbeitung mathematischer Inhalte stehen idealerweise die Lernenden im Fokus, die sich ihr Wissen aktiv konstruieren (Piaget, 1975; Resnick, 1987). Dabei unterstützt die Lehrperson den Lernprozess der Schülerinnen und Schüler. Oft werden Begriffe daher anhand von Beispielen, Visualisierungen oder konkreten Operationen eingeführt. Es liegt dabei eine Betonung auf mathematische Tätigkeiten vor (Leuders, 2003).
Mathematische Arbeitsweisen werden in der Schule in der Regel ebenfalls praxisnah eingeführt. Dabei zeigt sich ein eher instrumenteller Charakter der Mathematik (Reichersdorfer et al., 2014). Es wird weniger die Entwicklung der Arbeitsweise aus der Theorie fokussiert, vielmehr wird algorithmisches Arbeiten und das Anwenden von Kalkülen betont (Thomas & Klymchuk, 2012; Hourigan & O'Donoghue, 2007). Das Vorherrschen mathematischer Problemstellungen, die algorithmisch zu lösen sind, wird bei ebenso der Analyse bayerischer Abituraufgaben der Jahre

2011 bis 2014 im Bereich der Analysis deutlich (Obermeier, 2015). Obermeier (2015) berichtet, dass 69 % der Abituraufgaben durch Anwenden von Kalkülen korrekt beantwortet werden können, lediglich 6 % der Aufgaben erfordern argumentative Fähigkeiten und 16 % hauptsächlich begriffliches Wissen.
Die Fähigkeit, Rechenschemata auszuführen, kann dem prozeduralen Wissen zugeordnet werden (siehe Kapitel 4.1.4) und entspricht weniger einem kreativen Arbeiten mit mathematischen Inhalten, wie es zum Beispiel für den Argumentationsprozess wichtig ist. Es ist bei Studienanfängerinnen und -anfängern deutlich zu beobachten, dass sie versuchen, eine bestimmte Verfahrensweise zum Lösen eines mathematischen Problems anzuwenden. Führt diese nicht zum Erfolg, verfügen sie kaum über alternative Fähigkeiten, ihre Zwischenschritte zu interpretieren und das gewählte Lösungsverfahren anzupassen (Bosch, Fonseca & Gascón, 2004).
Beim Anwenden mathematischer Inhalte und Arbeitsweisen spielt der Umgang mit falschen mathematischen Aussagen, welcher das Entwickeln von Beispielen und Gegenbeispielen erfordert und ein umfassendes Verständnis von Begriffen fördert, in der Schule eine eher untergeordnete Rolle (Lin & Wu Yu, 1997). Das Konstruieren von Gegenbeispielen ist jedoch eine wichtige Strategie, um einen mathematischen Satz zu widerlegen. Im universitären Bereich ist das Konstruieren von Beispielen und Gegenbeispielen für den Aufbau mathematischen Wissens oder die Entwicklung spezieller mathematischer Methoden, wie auch für das mathematische Argumentieren wichtig (Boero, 1999; Reiss & Ufer, 2009). Jedoch liegt der Fokus in einer Mathematikvorlesung meist auf dem Nachvollziehen fertiger Theorien und Beweise (z. B. Reichersdorfer et al., 2014). Es findet in der Regel eine passive Aufnahme mathematischer Inhalte seitens der Studierenden statt. „[A]llenfalls ... durch Vormachen und Nachahmen“ (Lengnink & Prediger, 2000, S. 114) werden auf implizite Weise Vorgehensweisen und Methoden, wie auch das mathematische Argumentieren, thematisiert.
Es wird von Studierenden erwartet, sich umfangreiche Themengebiete im Wesentlichen selbstständig zu erarbeiten (Grünwald, Kossow, Sauerbier & Klymchuk, 2004). Für ein strukturiertes Vorgehen beim eigenständigen Lernen müssen geeignete Lernstrategien ausgewählt und angewendet werden (Schiefele et al., 2003). Es werden vor allem kognitive Strategien benötigt, welche helfen, den Lernstoff zu organisieren, Zusammenhänge herzustellen und neues Wissen zu elaborieren (Wild & Schiefele, 1994).

Unterschiede in der Struktur mathematischer Inhalte

Im schulischen Mathematikunterricht werden neu zu lernende Inhalte in der Regel so gegliedert, dass der Lernprozess für die Schülerinnen und Schüler optimiert wird. Die fachdidaktische und pädagogisch-psychologische Ausbildung der Lehrerinnen und Lehrer erlaubt es, neues Wissen in didaktisch sinnvoller Art aufzubereiten. Dazu können beispielsweise die Inhalte in kleine Informationseinheiten eingeteilt werden, damit das Lernen schrittweise erfolgen kann (Rach & Heinze, 2013). Auch eine historische Abfolge von Inhalten oder das Hinführen mithilfe didaktischer Prinzipien, wie nach den Stufen der Repräsentation nach Bruner (1966), erleichtern das Lernen. Dabei ist die Berücksichtigung entwicklungspsychologischer Bedingungen und Gegebenheiten bei der Aufbereitung des Lernstoffes vorteilhaft (Reiss & Hammer, 2013). Ebenso ist ein kumulatives Lernen im idealen Fall beobachtbar, welches neue Inhalte mit bestehendem Wissen vernetzt (Barzel, 2011; Meyer, 2004) und dadurch den Aufbau begrifflichen Wissens unterstützt (siehe Kapitel 4.4).

Im schulischen Unterricht wird selten die der wissenschaftlichen Mathematik zugrunde liegende Axiomatik thematisiert. Um zum Beispiel mathematische Argumentation zu fördern, welche die Entwicklung von Argumenten erfordert, die auf Axiome und bereits bewiesenen Aussagen basieren, müssen Lernende erkennen, was vorausgesetzt werden darf und was bewiesen werden muss. Dies fällt Studienanfängerinnen und -anfängern nicht leicht, wie die Ergebnisse einer empirischen Studie von Beitlich, Moll, Nagel und Reiss (2015) nahelegen. In dieser Studie wurde die Argumentationsfähigkeit von Studierenden des ersten Semesters untersucht, indem mathematische Sätze bewiesen werden sollten. Die Autoren berichten unter anderem von Schwierigkeiten zu unterscheiden, was die Voraussetzungen und was die Behauptungen eines gegebenen mathematischen Satzes sind. Solche Lücken lassen mathematisches Argumentieren oder Beweisen kaum zu.

An der Universität werden neue Inhalte selten in kleine Informationseinheiten gegliedert und schrittweise an die Studierenden weitergegeben, sondern es werden in der Regel vollständige Theorien dargelegt, die einem axiomatisch-deduktiven Aufbau folgen (Rach & Heinze, 2013; Hilbert, Renkl, Kessler & Reiss, 2008; Lengnink & Prediger, 2000). Die Reihenfolge der Einführung neuer Inhalte, die axiomatisch-deduktiv gegliedert sind, entspricht oft nicht einer didaktisch geeigneten Abfolge, die für den Lernprozess förderlich ist (Rach & Heinze, 2013). In universitären Veranstaltungen wird hauptsächlich „Wissen[...] über mathematische Gegenstände, also ... Definitionen, Sätze[...] und Beweise[...]“ (Lengnink & Prediger, 2000, S. 114) vermittelt, wodurch sich darüber hinaus ein sehr strukturiertes Muster *Definition-Satz-Beweis* ergibt, das unter Umständen für den individuellen Lernprozess hinderlich ist.

Zudem findet in der Regel kaum eine hochschuldidaktische Unterstützung bei der Vor- und Aufbereitung von Lehrveranstaltungen an der Universität statt. Aus diesem Grund wurden in den vergangenen Jahren Anstrengungen unternommen, Mathematikvorlesungen didaktisch aufzubereiten. An der Technischen Universität München gibt es beispielsweise im Rahmen des Projekts Teach@TUM seit dem Wintersemester 2015/16 eine Trainerin, die hochschuldidaktisches Coaching mit Dozentinnen und Dozenten durchführt. Jedoch gibt es bisher keine flächendeckenden Maßnahmen (Alsina, 2001).

Beim Eintritt in ein Mathematikstudium liegt es häufig an den Lernenden selbst, Inhalte so zu strukturieren, dass sie für den eigenen Lernprozess förderlich sind (Schiefele et al., 2003). Eine Anpassung der Lernstrategien vom Schul- auf den Hochschulkontext ist jedoch für viele Studienanfängerinnen und -anfänger eine Herausforderung und kann nicht immer selbstständig erfolgreich bewältigt werden (Rach & Heinze, 2013).

Aufgrund dieser Schwierigkeiten ist in vielen Fällen ein adäquater Aufbau begrifflichen Wissens nur bedingt möglich. Auch der Erwerb mathematischer Arbeitsweisen, wie zum Beispiel mathematisches Argumentieren, kann durch mangelnde Fähigkeiten, Lernstrategien anzupassen, erschwert werden.

Unterschiede in der mathematischen Fachsprache

Im schulischen Mathematikunterricht werden Inhalte zwar in der entsprechenden mathematischen Fachsprache dargestellt, die Konstruktion und Erarbeitung dieser Wissenselemente erfolgt jedoch in der Regel in der Umgangssprache. Die Schülerinnen und Schüler werden im schulischen Unterricht erst an die Fachsprache herangeführt und lernen deren Umgang beim Kommunizieren über Mathematik (KMK, 2004b, 2012). Aus diesem Grund sind im begrifflichen Wissen von Schülerinnen und Schülern kaum Formalismen oder das Beachten strenger mathematischer Fachsprache verankert. Beide Faktoren spielen jedoch für den Aufbau begrifflichen Wissens, das zum Lösen von Aufgaben und Verstehen mathematischer Inhalte wesentlich ist, im Hochschulkontext eine zentrale Rolle.
An der Universität wird die Beachtung strenger mathematischer Fachsprache von Studierenden erwartet und dementsprechend mathematische Inhalte üblicherweise formal dargestellt. Die Strenge in der fachmathematischen Darstellung kann ebenso zu Schwierigkeiten beim Erarbeiten mathematischer Begriffe und Arbeitsweisen führen (Beutelspacher et al., 2011). Auch Untersuchungen mit Studienanfängerinnen und -anfängern zeigen, dass es ihnen oftmals Probleme bereitet, Aussagen in mathematisch korrekter Fachsprache auszudrücken (Hoyles et al., 2001; A. Fischer, Heinze & Wagner, 2009). Zudem liegt ein steigender Formalisierungsgrad an der Universität vor, weswegen es für Studienanfängerinnen und -anfänger oft mit Schwierigkeiten verbunden ist, neue Begriffe zu verstehen und adäquate Vorstellungen aufzubauen, welche zentrale Teile des Verstehensprozesses sind (Tall & Vinner, 1981).

Schlussfolgerungen

Die Betonung von Mathematik als Produkt und als Prozess an der Schule und Universität liegt meist genau konträr vor, d. h. in den Fällen, in denen an der Schule der Produktcharakter der Mathematik deutlich wird, liegt der Fokus an der Universität meist auf dem Prozess und umgekehrt. In der Schule wird in Bezug auf das Arbeiten mit Begriffen und Rechenschemata oft der Produktcharakter deutlich und es wird meist direkt mit den Konklusionen aus mathematischen Theorien gearbeitet, die aber nicht bewiesen werden. An der Universität dienen Begriffe und Arbeitsweisen dem kontinuierlichen Aufbau mathematischer Theorien. Insbesondere mathematische Argumentieren zeigt den Prozesscharakter von Mathematik auf. Durch Argumentationen werden mathematische Aussagen auf ihre Allgemeingültigkeit hin untersucht, was zum Entstehen mathematischer Theorien beiträgt. Die Unterschiede zwischen schulischer und akademischer Mathematik werden besonders im ersten Semester deutlich wahrgenommen, da die Sichtweise auf das Studienfach noch vom Unterrichtsfach Mathematik geprägt ist (Reichersdorfer et al., 2014). Hinsichtlich der Erwartungen der Studierenden an ihr Studienfach berichten Autoren konträre Ergebnisse: Fellenberg und Hannover (2006) postulieren, dass es gerade in den ersten Wochen zu teils großen Differenzen zwischen den Erwartungen der Studentinnen und Studenten an ihr Studienfach und den realen Inhalten und Methoden der universitären Mathematik kommt. In einer Studie von Rach, Heinze und Ufer (2014) zeigen die Studierenden bereits größtenteils realistische Erwartungen an das Studienfach Mathematik.

2.4 Unterstützungsmaßnahmen am Übergang Schule - Universität

Um die Übergangsproblematik zu erleichtern und Studierende zu unterstützen, wurden in den letzten Jahren verschiedene Anstrengungen seitens der Universitäten und Hochschulen unternommen. Einer der verbreitetsten Ansätze ist das Anbieten mathematischer Vorkurse. Diese Kurse finden in der Regel vor dem offiziellen Beginn des ersten Semesters statt und können verschiedene Ziele verfolgen. Einige Vorkurse legen ihren Fokus auf dem Wiederholen von Schulwissen, das für das erste Semester relevant ist. Andere Vorkurse behandeln bereits Grundlagen der Universitätsmathematik, wie zum Beispiel Aussagenlogik. Auch in München wurden Vorkurse in Zusammenarbeit beider Universitäten konzipiert, die den Einstieg in das mathematische Studium erleichtern sollen (Reichersdorfer et al., 2014).
Zudem wurden an der Technischen Universität München eigene Veranstaltungen konzipiert, die sich speziell an Lehramtsstudierende im ersten Studienjahr richten. Das Ziel dieser Veranstaltungen ist es, die Relevanz der Hochschulmathematik für den späteren Lehrerberuf aufzuzeigen und Verknüpfungen zwischen Schul- und Universitätsmathematik herzustellen. Im Rahmen von Evaluationen wurden zudem Erwartungen der Studierenden abgefragt sowie die inhaltliche Ausrichtung der Kurse durch die Teilnehmerinnen und Teilnehmer bewertet. Grundsätzlich stimmten die Studierenden den Zielen der Kurse zu, sie waren also zufrieden mit der inhaltlichen und methodischen Schwerpunktsetzung der Kurse. Eine ausführliche Beschreibung der Veranstaltungen sowie der Ziele und Ergebnisse findet sich bei Nagel et al. (2016).
Daneben gibt es weitere Projekte, die Studierende im ersten Studienjahr unterstützen. Ein Überblick über verschiedene Projekte und Konzepte von Vorkursen an deutschen Universitäten und Hochschulen können bei Bausch et al. (2014) nachgelesen werden. Hervorzuheben ist das nationale Projekt der khdm, dem Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik der Universitäten Kassel und Paderborn sowie der Leuphana Universität Lüneburg, das sich die Förderung der Mathematik im tertiären Bereich sowie der Unterstützung von Studienanfängerinnen und -anfängern des Faches Mathematik zum Ziel gesetzt hat (siehe z. B. Kempen & Biehler, 2015; Hoppenbrock, Biehler, Hochmuth & Rück, 2016).

2.5 Einfluss von Kontext beim mathematischen Arbeiten

Die genannten Ursachen führen dazu, dass Studienanfängerinnen und -anfänger Schwierigkeiten beim Lernen mathematischer Inhalte haben. Hinzu kommt beim Übergang Schule-Hochschule eine Kontextänderung.
Die Rolle des Kontextes ist im Bereich der Mathematik schon früh untersucht worden (z. B. Bishop, 1988). In seinem Paper macht Bishop darauf aufmerksam, dass Mathematik nicht kontextlos ist und dabei einen stets allgemeingültigen Charakter besitzt, sondern letztlich ein Produkt kultureller Prozesse ist. Jede Kultur generiert eine etwas andere Mathematik, wie etwa indigene Völker oder generell nicht-westliche Kulturen. Zudem postuliert er, dass immer in einem kulturellen, soziologischen und individuellen Kontext gelernt wird. Auch Sfard (2007) macht darauf aufmerksam, dass der Kontext eine entscheidende Rolle beim Lernen spielt. Sfard versteht unter Lernen Kommunikation in einer Person oder zwischen Personen. Sie bezeichnet diesen Ansatz daher als einen „commognitive approach“ (Sfard, 2007, S. 567), der helfen solle, Interaktio-

nen im Unterricht zu interpretieren. Bei der Kommunikation von Lernenden mit Lehrpersonen kann es zu Missverständnissen kommen, wenn sich die Kommunikationspartner in verschiedenen Kontexten bewegen. Liegen der Kommunikation verschiedene Regeln eines Kontextes zugrunde, beeinträchtigt das den Lernprozess (Sfard, 2007). Bei dem Eintritt in ein universitäres Studium ist die Situation ähnlich: Die Studierenden sind an die Regeln, die im Mathematikunterricht an der Schule gelten, gewöhnt. An der Universität gibt es bzgl. des Bearbeitens von Aufgaben andere Regeln, welche den Studierenden zu Beginn noch nicht bekannt sind.
Der Kontext beeinflusst also maßgeblich die Performanz von Lernenden und ein Transfer in andere Kontexte stellt sich als schwierig heraus. Kontext sollte nach van Oers (1998) nicht nur als Synonym für externe Einflüsse stehen, sondern auch mentale und soziale Einflüsse miteinbeziehen. Man spricht dabei auch von der Theorie des *situated learning*, die davon ausgeht, dass Wissenserwerb immer in einem bestimmten inhaltlichen oder sozialen Kontext stattfindet (Lave & Wenger, 1991). Lernen in der Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten entsteht durch Kommunikation, die innerhalb einer Person oder mit anderen Personen stattfindet (Sfard, 2001; Resnick, Levine & Teasley, 1991). Auch mathematische Argumente werden letztlich erst durch die soziale Akzeptanz gültig (Reiss & Ufer, 2009; Hanna, 1991). Daher ist der soziale Aspekt bei der Beschäftigung mit Mathematik ein zentraler Faktor.
Übersichten zur Forschung des situated learnings sowie zur Transferforschung finden sich zum Beispiel bei Krapp und Weidenmann (2001) oder bei Seidel und Krapp (2014). In der vorliegenden Arbeit liegt der Fokus speziell auf Kontextänderungen an der Schnittstelle Schule-Hochschule.

Bei der Interpretation von Lernergebnissen werden Kontexteinflüsse häufig vernachlässigt (van Oers, 1998), obwohl sie auf den Lernprozess sowie auf die Performanz einen erheblichen Einfluss haben (z. B. DeVries, 2000; Stebler, Reusser & Pauli, 1994; Bruner, 1996; Perkins & Salomon, 1989; Resnick, 1987). Bearbeiten Lernende ein mathematisches Problem in einem bestimmten Kontext, so kann es sein, dass sie die dargebotenen Informationen bereits selektiert wahrnehmen, sodass diese „kontextkonform“ werden (Anderson, 2001). Die Wahrnehmung kann also vom Kontext abhängig sein, was als „Top-down-Verarbeitung“ (Anderson, 2001, S. 63) bezeichnet wird. Der Kontext bestimmt folglich, wie dargebotene Informationen vorab interpretiert und aufgenommen werden. Zudem stellt es sich oft als problematisch dar, Inhalte, die in einem bestimmten Kontext gelernt werden, auf einen anderen Kontext zu übertragen (Nückles & Wittwer, 2014). Es besteht dabei die Schwierigkeit des Transfers von einem Kontext in den anderen (Stebler et al., 1994; Perkins & Salomon, 1989). Reusser und Stebler (1997) untersuchen, wie Schülerinnen und Schüler Textaufgaben im Mathematikunterricht bearbeiten, zu deren realistischer Lösung auch Alltagsüberlegungen miteinbezogen werden müssen. Eine Beispielfrage ist:

> „Karl hat fünf Freunde und Georg hat sechs Freunde. Karl und Georg beschließen, gemeinsam eine Party zu veranstalten. Sie laden alle ihre Freunde ein. Alle Freunde kommen. Wie viele Freunde befinden sich auf der Party?“
> (zit. n. Nückles & Wittwer, 2014, S. 234)

Den Lernenden ist unbekannt, ob Karl und Georg gemeinsame Freunde haben und ob sie sich gegenseitig als Freunde bezeichnen. Aus diesen Gründen kann die Aufgabe nicht eindeutig gelöst werden. Die Studie wird im Schulkontext durchgeführt und 91% der Schülerinnen und Schüler geben die Lösung von $5 + 6 = 11$ an (Reusser & Stebler, 1997). Interviews mit den Lernenden im Anschluss an die Studie zeigen, dass sie es im Kontext ihres Mathematikunterrichts nicht gewohnt sind, sich realitätsbezogenen Gedanken über mathematische Lösungen zu machen. Außerdem gehen sie davon aus, dass es für Mathematikaufgaben immer genau eine Lösung gibt (Reusser & Stebler, 1997). Dies legt nahe, dass Mathematik von vielen Schülerinnen und Schülern als etwas angesehen wird, das von der realen Welt unabhängig ist. Auch eine Studie mit brasilianischen Straßenkindern verdeutlicht, dass Fähig- und Fertigkeiten, die im schulischen Mathematikunterricht gelehrt werden, oft nicht zum Lösen von Alltagsproblemen genutzt werden. In dieser Studie werden die mathematische Fähigkeiten brasilianischer Straßenkinder auf dem Markt, auf dem sie alleine oder mit ihrer Familie Waren verkauften, und mithilfe eines formalen Tests erhoben (Carraher, Carraher & Schliemann, 1985). Auf dem Markt zeigen die Kinder bessere Rechenfähigkeiten als beim Lösen von Rechenaufgaben in einem formalen Test, der ähnliche Strategien erfordert wie in der informellen Situation notwendig sind.

Die Ergebnisse der Studien legen dar, dass der Kontext einen maßgeblichen Einfluss auf das korrekte Lösen mathematischer Probleme hat. Ebenso kann die Änderung des Kontextes die mathematische Leistung von Studierenden beeinflussen, die von der Schule an die Hochschule wechseln. Im Kontext Schule werden Lernprozesse gefordert als im Kontext der Hochschule. Insbesondere die aktive bzw. passive Rolle der Lernenden kann sich hinderlich auf den Lernerfolg ausüben.

Ein vergleichsweise starker Kontexteinfluss liegt bei der Arbeitsweise des mathematischen Argumentierens beim Übergang an die Hochschule vor: Das Begründen mathematischer Sätze in der Schule erfolgt oftmals durch Plausibilitätsbetrachtungen, die das Erklären des Satzes als Ziel haben. In der Schule geht es meist weniger darum, einen formalen Beweis zu entwickeln, sondern vielmehr darum, einen mathematischen Satz so zu erklären, dass die Lernenden ihn verstehen (Hanna, 1995). Solche Beweisformen sind vor allem in unteren Schulstufen durchaus ausreichend. An der Universität in mathematischen Fachveranstaltungen wird hingegen axiomatisch-deduktiv begründet und Beweis meist formal aufgeschrieben. Dieses Vorgehen wird auch von Studienanfängerinnen und -anfängern erwartet.

Die Aufbereitung der Inhalte, die zum Lösen mathematischer Probleme benötigt werden, ist folglich an die entsprechenden Kontexte anzupassen. Zudem muss die Perspektive auf ein bestimmtes Problem in verschiedenen Kontexten gewechselt werden, um einen angemessen Lösungsweg zu entwickeln.

Im Laufe der Schulzeit verändern sich der soziale und externe Kontext, was mit sich ändernden Erwartungen der Lehrenden an die Lernenden einher geht. Das erwartete mathematische Niveau steigt an und auch das Arbeiten mit mathematischen Inhalten wird formaler. Zurückzuführen ist diese Änderung der gültigen mathematischen Arbeitsweisen und Inhalten auf eine Änderung der geltenden Normen, die den Kontext maßgeblich bestimmen. Liegen einer Lernsituation verschiedene Regeln zugrunde und sind diese verschiedenen Regeln nicht allen Lernpartnern bewusst, kann dies zu Schwierigkeiten beim Lernprozess führen (Sfard, 2007).

3 Mathematisches Argumentieren als zentrale Kompetenz

Mathematisches Argumentieren zählt zu den sechs allgemeinen Kompetenzen, die im Mathematikunterricht gefördert werden sollen (KMK, 2012, 2004b). Eine zweckmäßige Definition sowie ein direkter Praxisbezug sind für die Erfassung und Ausbildung von Kompetenzen in Lernsituationen unerlässlich (Klieme, 2004). In diesem Kapitel wird dargelegt, was unter dem Begriff *Kompetenz* in der vorliegenden Arbeit verstanden wird. Daneben wird erläutert, warum Bildungsstandards in das deutsche Schulwesen implementiert wurden. Zuletzt wird angegeben, wie die Kompetenz des mathematischen Argumentierens im Sinne der Bildungsstandards definiert wird.

3.1 Definition von Kompetenz

Grundlage der vorliegenden Arbeit ist die Kompetenzdefinition von Weinert (2002, S. 27f.):

> Unter Kompetenz versteht man „die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösestrategien in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können."

Diese Definition ist in der Bildungsforschung im deutschsprachigen Raum weit verbreitet und berücksichtigt im Vergleich zu anderen Kompetenzdefinitionen nicht nur kognitive Komponenten, sondern auch motivationale, volitionale und soziale Einflüsse. Zudem erhält die Definition den allgemeinen und universellen Charakter von Kompetenzen, der sich durch eine Unabhängigkeit von konkreten Inhalten auszeichnet (Klieme, 2004). Dies ist insbesondere für den Wechsel von der Schul- zur Hochschulmathematik wichtig: Die in der Schule ausgebildeten Kompetenzen können dabei adaptiert und weiterentwickelt, aber müssen nicht vollständig neu erworben werden.
Weinerts Kompetenzdefinition wird oft als Grundlage für wissenschaftliche Forschung herangezogen und bildet die Basis zahlreicher Kompetenzstufenmodelle (z. B. Reiss, Heinze & Pekrun, 2007). Einige wissenschaftliche Untersuchungen beschränken sich auf die Analyse kognitiver Komponenten von Kompetenz (Klieme, 2004).

3.2 Kompetenzen in der Schule: Bildungsstandards

Um den Erwerb von Kompetenzen als Bildungsziele in der Schule zu implementieren, wurden Bildungsstandards definiert, welche die Kompetenzen charakterisieren, über die Schülerinnen und Schüler nach einem bestimmten Bildungsabschnitt verfügen sollen (Klieme et al., 2003). Kompetenz wird durch die Kultusministerkonferenz (KMK, 2012, S. 5) folgendermaßen definiert:

> Unter dem Begriff *Kompetenz* versteht man im Bildungswesen die Fähigkeit, „Wissen und Können in den jeweiligen Fächern zur Lösung von Problemen anzuwenden“.

In dieser Definition liegt ein deutlicher Schulbezug vor, da explizit auf die Diversität der Förderung von Kompetenzen in den „jeweiligen Fächern“ (KMK, 2012, S. 5) verwiesen wird. Zudem werden die dazu benötigten Fähigkeiten nicht näher charakterisiert – bei Weinert wird klar auf erlernbare Fähigkeiten eingegangen.
Kompetenzen sind nicht direkt beobachtbar, sondern werden erst durch bestimmte Handlungen – durch ihre Performanz – erkennbar, wie etwa bei der korrekten Bearbeitung einer Aufgabe oder einer korrekt ausgeführten Operation. Aufgrund dessen werden sie als *Konstrukte* bezeichnet, die ebenfalls etwas beschreiben, was lediglich empirisch gedeutet werden kann (z. B. Schott & Azizi Ghanbari, 2012).

3.2.1 Bildungsstandards als Reform schulischer Bildung und Qualitätssicherung

Ein wesentlicher Auslöser, in Deutschland allgemein verbindliche Bildungsstandards für den schulischen Unterricht einzuführen, waren die mittelmäßigen Ergebnisse in internationalen Vergleichsstudien der Schülerinnen und Schüler aus Deutschland. Die Ergebnisse dieser Vergleichsstudien belegen, dass Deutschland im Vergleich zu anderen Ländern nicht zur oberen Leistungsgruppe gehörte, wie es innerhalb Deutschlands gerne gesehen worden wäre. Im Folgenden wird Bezug auf zwei wichtige Vergleichsstudien genommen und Ergebnisse der mathematischen Leistungen in Deutschland dargelegt.

TIMSS

Bei der ersten *Third International Mathematics and Science Study* (TIMSS) im Jahr 1995, bei der auch Deutschland teilnahm, wurde deutlich, dass das deutsche Schulwesen Mängel besitzt. An TIMSS/III nehmen in Deutschland gymnasiale und berufliche Oberstufenklassen aus insgesamt 152 Schulen teil. Im Rahmen des Konstanzer Beschlusses vom Jahr 1997 veranlasst die Kultusministerkonferenz, „das deutsche Schulsystem im Rahmen wissenschaftlicher Untersuchungen international vergleichen zu lassen [...] [mit dem] Ziel [...], gesicherte Befunde über Stärken und Schwächen der Schülerinnen und Schüler in den zentralen Kompetenzbereichen zu erhalten“ (KMK, 2005, S. 5).
Die Ergebnisse von TIMSS/III am Ende der Sekundarstufe im Bereich Mathematik zeigen zum Beispiel, dass die leistungsstärksten zehn Prozent der Schülerinnen und Schüler in Deutschland mit knapp 540 Punkten ein wesentlich schlechteres Ergebnis erzielten im Vergleich zu anderen Ländern, wie Slowenien (fast 630 Punkte), Frankreich (ca. 610 Punkte) oder der Schweiz (über

570 Punkte) (Baumert, Bos & Lehmann, 2000). Auch bei einem allgemeinen Vergleich mathematischer Leistung von Schülerinnen und Schülern in Deutschland zeigen die Ergebnisse, dass ein Viertel der Lernenden sich auf der basalen Stufe des Anwendens „einfacher Konzepte und Regeln“ (Baumert et al., 2000, S. 149) befand, während dies bei keinen Schülerinnen und Schülern in Slowenien oder in Frankreich der Fall ist. Bei den Probanden aus der Schweiz befinden sich bei diesem Vergleich nur elf Prozent auf dieser niedrigen Stufe.

PISA

Auch die Ergebnisse der Studie des *Programme for International Student Assessment* (PISA) aus dem Jahr 2000 zeigen, dass die Mathematikleistungen der Schülerinnen und Schüler in Deutschland unter dem Durchschnitt der Staaten der *Organisiation für wirtschafltiche Zusammenarbeit und Entwicklung* (OECD) liegen (Deutsches PISA-Konsortium, 2001; Artelt et al., 2001). Die PISA-Studie befragt querschnittlich alle drei Jahre eine repräsentative Stichprobe von 15-Jährigen aller Schularten der teilnehmenden OECD-Staaten. Im Jahr 2000 partizipierten neben Deutschland 31 weitere Länder, im Jahr 2003 verdoppelte sich die Anzahl an teilnehmenden Ländern auf insgesamt 63. Im Jahr 2012 beteiligten sich 65 Staaten an der PISA-Erhebung. In Deutschland wurden im Zeitraum von 2000 bis 2006 zusätzlich nationale Ergänzungsstudien durchgeführt, die einen Vergleich der verschiedenen Bundesländer zulassen.

Die im Rahmen von PISA getestete mathematische Leistung bezieht sich auf das Konstrukt der *mathematical literacy*, das folgendermaßen definiert wird:

> „Mathematical literacy is defined in PISA as:
> the capacity to identify, to understand, and to engage in mathematics and make well-founded judgements about the role that mathematics plays, as needed for an individual's current and future private life, occupational life, social life with peers and relatives, and life as a constructive, concerned, and reflective citizen.“
> (Schleicher & Tamassia, 2000, S. 51)

Bei der ersten PISA-Erhebung im Jahr 2000 lag der OECD-Durchschnitt der mathematical literacy bei 500 Punkten (Standardmessfehler $SE = 0,7$ und Standardabweichung $SD = 100$), Schülerinnen und Schüler in Deutschland erzielten in PISA 2000 im Mittel 490 Punkte ($SE = 2,5$, $SD = 103$) (Baumert et al., 2001). Bezüglich der mathematischen Leistung erreichten 10 % der Teilnehmerinnen und Teilnehmer aus Deutschland die ersten Kompetenzstufe nicht, d. h. diese Schülerinnen und Schüler konnten einfachste Aufgaben auf Grundschulniveau nicht lösen. Knapp 15 % der Jugendlichen befand sich nach diesen Ergebnissen auf der untersten Kompetenzstufe I (Deutsches PISA-Konsortium, 2001). Der Anteil der Schülerinnen und Schüler, die selbstständig mathematisch argumentieren konnten, lag bei $1,3\,\%$ (Stanat et al., 2002).
Seit dem Jahr 2000 sind in Deutschland positive Trends bei den PISA-Ergebnissen zu beobachten. Bei PISA 2003 lag der OECD-Durchschnittswert im Bereich der mathematischen Kompetenzen bei 500 Punkten ($SE = 0,6$, $SD = 100$), Schülerinnen und Schüler aus Deutschland erreichten im Mittel 503 Punkte ($SE = 2,4$, $SD = 103$), was keinem signifikanten Unterschied zum Mittelwert aller OECD-Staaten entspricht. Jedoch lag der Durchschnittswert der 15-Jährigen

in Deutschland bei PISA 2006 bereits durchschnittlich bei 504 Punkten ($SE = 3,9$) und der OECD-Durchschnittswert bei 498 Punkten ($SE = 0,5$), was einem signifikant höherem Ergebnis entspricht (Prenzel, Carstensen, Schöps & Maurischat, 2006). Bei PISA 2009 verbesserten sich die Jugendlichen in Deutschland im Bereich der Mathematik weiterhin und erreichten durchschnittlich 513 Punkte ($SE = 2,9$, $SD = 98$). Damit schnitten sie ebenfalls signifikant besser ab als die Jugendlichen im OECD-Durchschnitt, der bei 496 Punkten ($SE = 0,5$) lag (Prenzel et al., 2006). Daneben ist ein signifikanter Anstieg der mathematischen Leistungen im Vergleich zu der Vorgängerstudie von 2003 zu verzeichnen (L. Götz, Lingel & Schneider, 2013).
Die Ergebnisse der PISA-Studie des Jahres 2012 zeigten, dass sich Deutschland im Bereich der Mathematik weiter verbesserte: Die Schülerinnen und Schüler erreichten durchschnittlich 514 Punkte ($SE = 2,9$, $SD = 96$), was ein signifikant besseres Abschneiden im Vergleich zum OECD-Durchschnitt von 494 Punkten ($SE = 0,5$, $SD = 92$) ist (Prenzel, Sälzer, Klieme & Köller, 2013). Bezüglich der Leitidee *Raum und Form*, die geometrische Inhalte abfragt, erreichten Jugendliche aus Deutschland in PISA 2012 den niedrigsten Mittelwert (507 Punkte mit $SD = 98$) im Vergleich zu den anderen Inhaltsbereichen *Veränderung und Beziehungen*, *Quantität* und *Unsicherheit und Daten*. Dennoch erzielten sie in diesem Inhaltsbereich signifikant bessere Ergebnisse als der OECD-Durchschnitt im Bereich der Mathematik (Prenzel et al., 2013). Grundsätzlich lassen die Ergebnisse der PISA-Studien der letzten Jahre die Schlussfolgerung zu, dass sich die Jugendlichen in Deutschland in den letzten 12 Jahren bezüglich ihrer mathematischen Leistungen signifikant verbesserten.

3.2.2 Einführung der Bildungsstandards

Insbesondere die Ergebnisse der ersten PISA-Studie im Jahr 2000 offenbarten, dass die Leistungen von Schülerinnen und Schülern aus Deutschland insgesamt signifikant unter dem OECD-Durchschnittswert lagen. Speziell im Bereich der Mathematik wurden insbesondere solche Aufgaben mangelhaft gelöst, welche das „selbstständige Problemlösen und Modellieren von Lösungswegen in neuen Kontexten“ erforderten (Baumert et al., 2001).
Unter anderem deswegen wurden zur Sicherung und Verbesserung schulischer Leistungen in der Bundesrepublik Deutschland in den Jahren 2004 und 2012 Bildungsstandards für den Primarbereich, den Hauptschulabschluss, den Mittleren Schulabschluss sowie für die Allgemeine Hochschulreife eingeführt (KMK, 2004c, 2004a, 2004b, 2012). Seitdem liegt der Fokus schulischer Bildung eher auf dem Aufbau von Kompetenzen als auf das Erreichen bestimmter Lernziele. Das Konsortium Bildungsberichterstattung (2005, S. 17) drückt dies folgendermaßen aus:

> „Bildung und Qualifizierung lassen sich in einer modernen Industriegesellschaft nicht mehr durch einen festen Kanon fachlicher Kenntnisse, die an die nachfolgende Generation weiterzugeben sind, beschreiben.“

Bildung beinhaltet demnach nicht nur die Kenntnis von Fakten, sondern auch die Ausbildung von Fähig- und Fertigkeiten, die einen flexiblen Umgang mit dem Wissen sowie Transfer und Nachhaltigkeit gewährleisten (Klieme et al., 2003). Expertinnen und Experten aus Bildungsforschung, Erziehungswissenschaft und Fachdidaktiken, welche die Expertise zu den Bildungsstandards (Klieme et al., 2003) verfassen, betonen daher den Anschluss von neuem Wissen an bereits bestehende Wissensstrukturen. Weiterhin stellen sie heraus, dass durch die Förderung von Kompetenzen das Ziel schulischer Ausbildung nunmehr auf „Grunddimensionen der Lernentwicklung“ (Klieme et al., 2003, S. 15), anstatt auf Vermittlung konkreter Inhalte basiert. Aus diesem Grund sind diese Fähigkeiten nicht an bestimmte Inhaltsbereiche gebunden, sondern sie stellen „grundlegende[...] Handlungsanforderungen“ (Klieme et al., 2003, S. 15) dar. Durch die Einführung der Bildungsstandards wird das Erlangen wichtiger Kompetenzen als eine „notwendige Voraussetzung[...] für das Verständnis und die Durchführung von Rechenoperationen“ bestärkt (L. Götz et al., 2013, S. 242).

3.2.3 Charakterisierung der Bildungsstandards in Deutschland

Bildungsstandards sind normative Vorgaben für den Bildungsprozess, welche die Sicherung der Qualität des Bildungssystems zum Ziel haben. Sie beziehen sich auf übergeordnete Bildungsziele, die pädagogisch-psychologischer Art sind (Klieme et al., 2003). Dies hat unter anderem den Vorteil, dass die Einhaltung der Standards zwar verbindlich ist, jedoch der Lehrerin oder dem Lehrer inhaltliche und pädagogische Freiräume gelassen werden.
Die Kultusministerkonferenz versteht unter Bildungsstandards Folgendes:

> „Bildungsstandards formulieren Anforderungen an das Lehren und Lernen in der Schule. Sie benennen Ziele für die pädagogische Arbeit, ausgedrückt als erwünschte Lernergebnisse der Schülerinnen und Schüler. Damit konkretisieren Standards den Bildungsauftrag, den allgemein bildende Schulen zu erfüllen haben.“
> (zit. n. Klieme et al., 2003, S. 13)

Die von der Kultusministerkonferenz formulierten Bildungsstandards orientieren sich am Output schulischen Lernens und nicht mehr am Input (KMK, 2005). Wichtiges Ziel der Bildungsstandards ist es, dass Lernende „grundlegende[...] Begriffsvorstellungen [aufbauen sowie] ... damit verbundene[...] Denkoperationen und Verfahren und das ihnen zuzuordnende Grundlagenwissen“ (Klieme et al., 2003, S. 19) erwerben. Zudem besitzen sie sowohl immer einen funktionalen Charakter und sind vom Alltag der Lebens- und Arbeitswelt geprägt (Schott & Azizi Ghanbari, 2012). Sie beziehen sich ferner „auf einen bestimmten Lernbereich“ und orientieren sich an den grundlegenden Prinzipien des Fachs (Klieme et al., 2003, S. 18). Daher kann man sie als „inhaltsübergreifend und zugleich anforderungs- und situationsbezogen“ (Klieme, 2004, S. 11) bezeichnen.
Die Implementierung der Bildungsstandards in die schulische Praxis ist von großer Relevanz (Klieme et al., 2003), weswegen das Mitwirken von Expertinnen und Experten der entsprechenden Fachdidaktiken bei der „Ausarbeitung, Operationalisierung und Implementierung“ wesentlich ist (Reiss, 2004, S. 635). Sie verfügen über einschlägiges Wissen zu entscheiden, welche Inhalte wichtiger bzw. weniger wichtig für das künftige Leben der Schülerinnen und Schüler sind (Reiss, 2004).

3.2.4 Ausarbeitung der Bildungsstandards

Die nationalen Bildungsstandards in Deutschland sind an den Standards aus den USA angelehnt, die bereits in den 1980er Jahren vom *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1989) evaluieren und verbessern die Qualität des Bildungssystems in den USA und mathematische Leistungen der Schülerinnen und Schüler. Im Jahr 1987 wird ein erster Entwurf der NCTM-Standards vorgelegt, den Lehrerinnen und Lehrer, Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler aus Erziehungswissenschaft und Fachdidaktik sowie Mathematikerinnen und Mathematiker weiterentwickelen.
Die NCTM-Standards geben an, welche Inhalte im Schulcurriculum des Faches Mathematik zu priorisieren sind. Es handelt sich dabei um Idealstandards, also um Ziele, die ein vorbildlicher Mathematikunterricht erreichen soll (NCTM, 1989). Die Motivation in den USA, den Mathematikunterricht zu reformieren, war der Wandel der Gesellschaft in eine Informationsgesellschaft. Die Schülerinnen und Schüler sollen dazu Fähigkeiten erwerben, die sie wirklich benötigen und nicht mit trägem Wissen konfrontiert werden. Von Freudenthal (1973) inspiriert wurden auch Fähigkeiten wie Begründen, Explorieren oder Kommunizieren bei der Formulierung der NCTM-Standards berücksichtigt (Reiss, 2004). Die Basis bildet die konstruktivistische Lerntheorie, welche die Wissenskonstruktion eines aktiven Lerners fokussiert (Resnick, 1987).
Die *Common Core State Standards Initiative* (CCSSI) entwickelt im Jahr 2007 die nationalen Bildungsstandards weiter. Das Ziel der CCSSI ist es, weniger Themen im Mathematikunterricht zu fokussieren, diese jedoch ausführlicher zu behandeln und mehr Verknüpfungen zu anderen Inhalten zu schaffen. Heute richten sich 42 Staaten der USA nach den CCSSI-Standards (CCSSI, 2016).
Die KMK-Standards, die für Deutschland formuliert wurden, wurden von den NCTM-Standards beeinflusst. In den NCTM-Standards wird eher der Lösungsweg eines mathematischen Problems herausgestellt, die KMK-Standards hingegen betonen oftmals das zu erreichende Ziel (Reiss, 2004). Daneben orientieren sich die NCTM-Standards an einem pädagogischen Rahmen und übergreifenden Konzept, während die KMK-Standards für das Fach Mathematik eher auf den Grunderfahrungen nach Winter (1995) basieren (Reiss, 2004). Dies ist insofern legitim, als dass diese in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik eine wesentliche Rolle spielen.

Die Grunderfahrungen definiert Winter (1995, S. 37) folgendermaßen:

> „(1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
> (2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
> (3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben“.

Ein weiterer Unterschied zwischen den NCTM-Standards und den KMK-Standards besteht darin, dass die KMK-Standards nicht als Idealstandards formuliert sind. Die Expertise von Klieme et al. (2003) empfiehlt die Einführung von Mindeststandards, die ein Minimalniveau angeben, das für alle Schülerinnen und Schüler verbindlich ist: Eine „Konzentration auf Mindeststandards ist für die Qualitätssicherung im Bildungswesen von entscheidender Bedeutung“ (Klieme et al., 2003, S. 20). Die KMK führte dann allerdings Regelstandards ein, die angeben, welche Kompetenzen eine Schülerin oder ein Schüler im Durchschnitt im Unterricht entwickelt haben soll (KMK, 2005).

3.3 Mathematisches Argumentieren in den Bildungsstandards

Die Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife (KMK, 2012) legen dar, über welche Kompetenzen Schülerinnen und Schüler nach dem Abitur verfügen sollen. Damit definieren sie zugleich grundlegende Fähigkeiten, die angehende Studierende zu Beginn des Studiums besitzen sollen. Ein Erreichen der Standards soll die Lernenden dazu befähigen, ein Hochschulstudium erfolgreich zu beginnen, sodass wenige Schwierigkeiten beim Übergang Schule-Hochschule auftreten, die auf Defizite in der schulischen Bildung zurückzuführen sind.
Die Kultusministerkonferenz formuliert im Jahr 2012 sechs allgemeine Kompetenzen für die Allgemeine Hochschulreife: Neben dem mathematischen Argumentieren (K1) sind Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5) sowie mathematisch kommunizieren (K6) die Prozesse, an denen sich Lehrkräfte beim Unterrichten von Mathematik orientieren sollen.
Das Anforderungsniveau der allgemeinen Kompetenzen ist in drei Unterstufen I, II und III eingeteilt. In den Stufen I und II werden lediglich Grundkenntnisse der Schülerinnen und Schüler erworben, während die Stufe III ein erweitertes Wissen erfordert (KMK, 2012). Betrachtet man die Anforderungen der drei verschiedenen Niveaustufen bzgl. der Kompetenz des mathematischen Argumentierens, so lässt sich eine relativ große Spannbreite erkennen. Der Bereich des mathematischen Argumentierens umfasst neben dem Bearbeiten einfacher Routineaufgaben mittels bekannter Herleitungen, Sätze oder Verfahren das Entwickeln „einfache[r] rechnerische[r] Begründungen“ und die Angabe „einfache[r] logische[r] Schlussfolgerungen“ (KMK, 2012, S. 15). Argumentationen des ersten Anforderungsbereichs basieren lediglich auf „Alltagswissen“ (KMK, 2012, S. 15). Die Stufen I und II sind dem grundlegenden Niveau zugeordnet. Dieses bezieht sich auf Ziele, die eine Schülerin oder ein Schüler mit mindestens drei Wochenstunden Mathematikunterricht in der Oberstufe erreichen sollte (KMK, 2012). Im zweiten Anforderungsbereich können die Schülerinnen und Schüler bereits „überschaubare mehrschrittige Argumentationen und logische Schlüsse nachvollziehen, erläutern oder entwickeln“ (S. 15).
Die Stufe III beim mathematischen Argumentieren enthält Kompetenzen des erhöhten Anforderungsniveaus. Dieses soll eine Schülerin oder ein Schüler mit mindestens vier Wochenstunden Mathematikunterricht erreichen. Diese Stufe erfordert bereits Beweise sowie „anspruchsvolle Argumentationen“ (KMK, 2012, S. 15), die genutzt, erläutert oder entwickelt werden müssen. Die Evaluation von verschiedenen Aussagen im Hinblick auf die „Reichweite und Schlüssigkeit“ (S. 15) stellt einen weiteren Aspekt des höchsten Anforderungsniveaus dar.

Erreichen angehende Studierende im Schnitt die Stufe II der in den Bildungsstandards geforderten Anforderungen, können sie mehrschrittige Argumentationen selbst entwickeln. Ob dies mit der Einführung der Bildungsstandards realisiert werden konnte, ist – zumindest für geometrisches Argumentieren – eines der Forschungsziele der vorliegenden Arbeit.

Leitideen der Bildungsstandards

Die Inhaltsdimension der Bildungsstandards wird durch fünf Leitideen hergestellt. Diese sind Algorithmus und Zahl (L1), Messen (L2), Raum und Form (L3), Funktionaler Zusammenhang (L4) sowie Daten und Zufall (L5). Durch die Verknüpfung dieser mit den allgemeinen Kompetenzen ist eine inhaltsbezogene Förderung mathematischer Kompetenzen im Schulunterricht möglich, was für Lehrerinnen und Lehrer leichter zu realisieren ist.
Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Leistungstest zum mathematischen Argumentieren und begrifflichen Wissen in Bezug auf geometrische Inhalte konstruiert. Aus diesem Grund ist dabei die Leitidee (L3) Raum und Form relevant, welche den „Umgang mit Objekten im Raum“ (KMK, 2012, S. 24) beschreibt. Im Sinne der Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife soll die Leitidee Raum und Form das „räumliche[...] Vorstellungsvermögen aus der Sekundarstufe I“ weiterentwickeln (KMK, 2012, S. 19). Insbesondere sollen sowohl „Eigenschaften und Beziehungen [thematisiert] ... als auch ... Darstellungen mit geeigneten Hilfsmitteln“ gelehrt werden (KMK, 2012, S. 19).

Fazit

Die Ergebnisse internationaler Vergleichsstudien belegen, dass sich Schülerinnen und Schüler in Deutschland in den letzten Jahren in Bezug auf die *mathematical literacy* signifikant verbesserten. Die Ergebnisse der Zusatzerhebungen zu PISA oder TIMSS legen nahe, dass Lehrerinnen und Lehrer die Fähigkeiten der Lernenden oft überschätzen und zugleich Aufgabenschwierigkeiten unterschätzen (Klieme et al., 2003). Andererseits soll schulischer Unterricht kognitiv aktivierend sein, sodass nicht nur schwache Schülerinnen und Schüler, sondern auch leistungsstarke Lernenden individuell gefördert werden. Um diese differenzierten Unterrichtsziele mit dem Vorwissen und den realen Fähigkeiten der Lernenden zu vereinbaren, sind detaillierte Untersuchungen notwendig, die anzeigen, wo Schwierigkeiten im Lernprozess auftreten und wie man Schülerinnen und Schüler zum Beispiel beim mathematischen Argumentieren unterstützen kann.

4 Relevanz mathematischer Fachbegriffe im ersten Studienjahr

Die Förderung mathematischer Kompetenzen ist auch für den tertiären Bildungsbereich im Hochschulsektor relevant. An der Universität werden künftige Lehrerinnen und Lehrer ausgebildet, die später Schülerinnen und Schüler beim Aufbau fachlicher Kompetenzen unterstützen. Da insbesondere das mathematische Argumentieren Studienanfängerinnen und -anfängern Schwierigkeiten bereitet (Engelbrecht, 2010), es jedoch eine zentrale Kompetenz für das Fortschreiten an der Universität darstellt, ist die Analyse von Teilkompetenzen notwendig, um mathematische Argumentationsfähigkeit fördern zu können. Konkrete Ansätze, um die Entwicklung mathematischer Argumentationskompetenz in der Studieneingangsphase zu unterstützen, liegen bisher kaum vor. Es wurden allerdings für das erste Studienjahr Projekte realisiert, welche den Übergang von der schulischen zur universitären Mathematik im Allgemeinen erleichtern sollen (siehe Kapitel 2). Ein Modell, das aufzeigt, wo Schwierigkeiten beim Lernen mathematischer Argumentieren im Detail liegen und wie sich daraus Fördermaßnahmen entwickeln lassen, steht jedoch noch aus.

Die Kenntnis von begrifflichen Wissen stellt sich als zentrale Voraussetzung für mathematisches Argumentation im Sekundarbereich heraus (Chinnappan, Ekanayake & Brown, 2012; Reiss & Ufer, 2009; Ufer, Heinze & Reiss, 2008; Heinze, Cheng, Ufer, Lin & Reiss, 2008; Reiss, 2002; Healy & Hoyles, 2000, 1998; Moore, 1994). Diese Erkenntnis lässt sich ebenso auf den tertiären Bildungsbereich übertragen: Soll ein mathematischer Satz bewiesen werden, müssen Lernende primär verstehen, worum es inhaltlich in diesem Satz geht. Auch Forschungen zum Lesen mathematischer Beweise sehen das Verstehen der mathematischen Inhalte, die für die Argumentation wichtig sind, als grundlegend an (Mejia-Ramos, Fuller, Weber, Rhoads & Samkoff, 2012; Yang & Lin, 2008). Studierende müssen relevante Fachbegriffe kennen und sie in den im Satz dargestellten mathematischen Kontext einbetten können. Soll zum Beispiel bewiesen werden, dass die Komposition zweier injektiver Funktionen auch injektiv ist, oder etwa, dass Permutationen bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe bilden, ist es wesentlich, dass Lernende die Fachbegriffe kennen. Verstehen sie dabei die Begriffe „injektiv“ oder „Komposition“ nur rudimentär und kennen ihre Eigenschaften nicht, so ist es nur schwer möglich, den Satz zu beweisen. Auch bei dem zweiten genannten Beispiel wird es kaum gelingen, zu zeigen, warum die Permutationen eine Gruppe bilden, wenn Lernende nicht wissen, was eine „Permutation“ oder eine „Gruppe“ im mathematischen Sinne ist. Begriffliches Wissen ist also für die Entwicklung mathematischer Argumente von entscheidender Bedeutung. Jedoch ist belegt, dass viele Lernende die Kernbegriffe eines Beweises nicht inhaltlich deuten können (Conradie & Frith, 2000).

Um zu analysieren, wie begriffliches Wissen aufgebaut ist und wie es in mathematischen Argumentationen im tertiären Bereich eingesetzt wird, wird in der vorliegenden Arbeit begriffliches Wissen, das für Studienanfängerinnen und -anfänger relevant ist, im Detail untersucht. Das folgende Kapitel thematisiert zunächst mathematische Fachbegriffe, im Anschluss werden die Unterschiede von abstrakten und anschaulichen Begriffen herausgearbeitet und schließlich wird auf Begriffsverständnis und Begriffsbildung in der Mathematik eingegangen.

4.1 Begriffliches Wissen der universitären Mathematik

Zentral beim Lernen mathematischer Inhalte ist die mathematische Fachsprache, die ihrerseits aus Fachbegriffen besteht. Im tertiären Bildungsbereich werden bei der Einführung neuer mathematischer Inhalte fast ausschließlich Fachbegriffe verwendet. Dies kann auf Seiten der Studentinnen und Studenten zu Problemen beim Verstehen der Begriffe und weiterer Inhalte in einer Mathematikvorlesung führen, da einige Begriffe neu eingeführt werden. In der Regel wird der Stoff so dargeboten, dass er aufeinander aufbaut und zügig weiterentwickelt wird. Wird also ein zentraler Fachbegriff nicht richtig verstanden, so hat dies auch negative Auswirkungen auf das Verstehen der Inhalte, die auf diesem Fachbegriff aufgebaut werden.
Auf dem ersten Blick ist ein Fachbegriff ein Wort, mit dem etwas bezeichnet wird. Diese Auffassung ist jedoch nicht ausreichend, vielmehr werden mit einem Fachbegriff mehrere Objekte zusammengefasst. Spricht man zum Beispiel in der Hochschulmathematik von einem Vektorraum, so beinhaltet dieser Begriff alle möglichen Vektorräume, wie etwa den $\mathbb{R}^3$ oder bestimmte Funktionenräume. Eine Begriffsbezeichnung kann also mehrere Objekte beinhalten. Gagné (1975, S. 137) spricht daher von einem Begriff als eine „Klasse von beobachtbaren Gegenständen oder Gegenstandsmerkmalen". Wittgenstein bezeichnet die Begriffsbezeichnung als „Vorbereitung zur Beschreibung" eines Begriffs (Bosanquet, Malcom, Rhees, Smythies & Diamond, 1976, S. 39). Das bedeutet, dass die Begriffsbezeichnung zunächst und etwa beim ersten Lesen nicht alle wichtigen Informationen offenlegt, die mit dem Fachbegriff verbunden sind, sondern lediglich auf die relevanten Informationen vorbereitet. Werden Studienanfängerinnen und -anfänger also mit neuen mathematischen Fachbegriffen konfrontiert, sind die eigentlich relevanten Informationen noch nicht sichtbar, sondern kommen erst mit der weiteren Beschäftigung mit dem Fachbegriff zutage. Je nachdem, in welchen innermathematischen Kontexten die weitere Beschäftigung stattfindet, werden andere Eigenschaften des Fachbegriffs erkannt und mit ihm assoziiert. So hängen also mehrere Wissenselemente mit einem Fachbegriff zusammen, die bei seiner Benennung aktiviert werden. Die Teile des Wissensgefüges, die bei der Benennung eines Begriffs aktiviert werden, sind vom Kontext abhängig, in dem die Beschäftigung mit einem Fachbegriff stattfindet (Bosanquet et al., 1976).
Mathematische Fachbegriffe sind nach Aebli (1983, S. 245 f.) jedoch „nicht einfach [nur] *Inhalte* des geistigen Lebens, Begriffe sind seine *Instrumente*". Aebli spricht in diesem Zitat an, dass ein Begriff nicht nur die Begriffsbezeichnung sowie assoziierte Inhalte umfasst, sondern auch Instrumente, also praktische Anwendungen des Begriffs. Zum Begriff *Mittelsenkrechte* etwa kann man auch die Kenntnis der Konstruktion einer solchen zählen. Er schreibt weiter: „Die Rede von den Begriffen als ‚Inhalte' des menschlichen Geistes ist daher unvollständig" (S. 245 f.). Er verdeut-

licht in diesem Auszug, dass reine Inhalte im Sinne deklarativen Wissens (siehe Kapitel 4.1.4), nicht ausreichen, um einen Begriff vollständig zu charakterisieren. Ein Fachbegriff umfasst neben Eigenschaften oder Relationen also auch Verfahrensweisen oder Werkzeuge und ist nicht ausschließlich auf Inhalte beschränkt. Begriffe bilden also ein ganzes Wissens- und Operationsgefüge.

Den aufgeführten Definitionen ist gemeinsam, dass die Bezeichnung *Begriff* wesentlich mehr beinhaltet als nur den Namen eines Objekts zu kennen. Es werden darin mehrere Objekte zusammengefasst. Wird also in einer Lernumgebung ein mathematischer Fachbegriff verwendet, so werden implizit verschiedene weitere Objekte und Merkmale angesprochen. Diese Erkenntnis ist ein wichtiger Aspekt bei der Beschäftigung mit Hochschuldidaktik. Die Tatsache, dass mehrere Objekte, die für Studierende unter Umständen keine Ähnlichkeit besitzen, mit demselben Fachbegriff zusammengefasst werden, kann bereits Schwierigkeiten hervorrufen noch bevor mit einem Begriff gearbeitet wird. Zum Beispiel kann ein Funktionenraum, der mehrere Funktionen als Objekte besitzt, im ersten Studienjahr eine Herausforderung für sich sein. Der Zusammenhang zwischen einem Funktionenraum und dem aus der Schule bekannten $\mathbb{R}^3$ wird unter Umständen nicht erkannt.

4.1.1 Begriffe als verbundene Wissenselemente

Mathematische Begriffe beinhalten nicht nur mehrere mathematische Objekte, sie besitzen auch Eigenschaften und zeigen Relationen zu anderen Begriffen auf. Ein mathematischer Fachbegriff entsteht letztlich durch die Verknüpfung verschiedener Wissenselemente zu einem semantischen Netzwerk (z. B. Kluwe, 1992). Je mehr Verknüpfungen innerhalb des semantischen Netzwerks enthalten sind, desto höher ist die Qualität des Wissens (z. B. Renkl, 2009). Dichtere Netze zeugen von einem umfassenderen begrifflichen Wissen.

Eine Wissenseinheit, die zusammen mit anderen ein mentales Netz von Informationen bildet, wird Schema genannt. Tietze, Klika und Wolpers (2000b, S. 66) definieren ein „Schema“ als „eine spezifische Struktur der Repräsentation von Information“. Piaget verwendet den Begriff des Schemas für „geistige Strukturen, mit deren Hilfe Menschen die Welt interpretieren“ (zit. n. Gerrig & Zimbardo, 2015, S. 379). Schemata sind also organisierte Wissenssysteme, die „Objekte, Situationen und Ereignisse beschreib[en], und stell[en] Repräsentation[en] ... kleine[r] Ausschnitt[e] der Welt dar“ (Tietze, Klika & Wolpers, 2000b, S. 66). Tietze, Klika und Wolpers (2000b) konzentrieren sich allerdings auf deklaratives Wissen (siehe Kapitel 4.1.4).

Andere Autoren fassen den Begriff des Schemas weiter und definieren: „Schemata beinhalten die Erfahrungen in bestimmten, wiederholt vorkommenden (Problem-)Situationen in abstrahierter Weise“ (Renkl, 2009, S. 6). Diese Definition beinhaltet Wissenselemente, die nicht zwangsläufig deklarativer Art sein müssen, was sich auch mit der Auffassung anderer Autoren deckt (z. B. Sweller, 2005; Aebli, 1983). Aebli (1983, S. 261) drückt ganz explizit aus: „Begriffe können auch Handlungen und Operationen zum Gegenstand haben“.

Mathematische Fachbegriffe sind in ihrer Art komplex und enthalten viele Wissenselemente. Daher eignet sich für die Analyse begrifflichen Wissens in der Studieneingangsphase im Fach Mathematik eine Schemadefinition, die nicht auf deklaratives Wissen begrenzt ist. Vielmehr sind gerade auch Operationen und prozedurale Vorgehensweisen im ersten Studienjahr relevant, um die Eingangsphase mehr an schulische Vorgehensweisen im Mathematikunterricht anzubinden. Es ist somit sinnvoll, für die vorliegenden Zwecke in Schemata sowohl deklarative als auch prozedurale Wissenselemente zusammenzufassen. Die folgende Definition ist hierbei leitend:

> „In der kognitiven Psychologie werden **Schemata** allgemein als eine zentrale Repräsentationsform aufgefasst. Schemata sind die grundlegenden Bausteine unseres Wissens. Sie dienen dem Menschen als ‚Erkenntniswerkzeuge', um den Sinnesreizen bzw. den Daten, die er über seine Sinnesorgane aufnimmt, eine Bedeutung zuzuordnen." (Nückles & Wittwer, 2014, S. 228)

Dadurch, dass ein Schema sowohl deklarative als auch prozedurale Merkmale enthalten kann, besteht die Möglichkeit, einen Fachbegriff zunächst eher durch prozedurale Schemata aufzubauen. Auf diese Weise erhält er einen handlungsorientierten Charakter und kann im Besonderen für operationale Problemlösestrategien verwendet werden. Auf der anderen Seite ist es auch möglich, einen Begriff zunächst rein deklarativ zu definieren, um etwa Eigenschaften herauszuarbeiten oder Strukturen zu beschreiben, die zur Lösung algebraischer Aufgaben relevant sein können. Eine vollständige Beschreibung liegt dann vor, wenn sowohl deklarative als auch prozedurale Schemata miteinander verbunden werden.

4.1.2 Begriffsintension und -extension

Wie mathematische Begriffe charakterisiert werden und welche Eigenschaften oder Voraussetzungen vorliegen müssen, wird in der Definition eines Begriffs angegeben. Eine typische Einführung eines mathematischen Begriffs erfolgt an Universitäten anhand der Struktur *Definition-Satz-Beweis* (siehe Kapitel 2). Der Fachbegriff wird also zuerst mittels einer formalen Definition eingeführt, so wie es in der akademischen Mathematik üblich ist. Im Anschluss wird er in Verbindung zu anderen Fachbegriffen gesetzt und deren Zusammenhang in einem mathematischen Satz dargestellt. Dieser wird dann in der Fachvorlesung bewiesen, wobei die Entstehung des Beweisens meist keine Rolle spielt und lediglich das Produkt – also ein fertiger Beweis – präsentiert wird. Diese Vorgehensweise ist nicht nur zur Förderung von mathematischer Argumentation wenig erfolgversprechend, sondern auch weniger geeignet, um mathematische Begriffe und deren Eigenschaften genauer zu diskutieren, die für die Entwicklung von Argumentationen essentiell sind (Reichersdorfer et al., 2014).
Untersuchungen zum Funktionsbegriff im ersten Studienjahr zeigen, dass die meisten Studierenden die Voraussetzungen an ein Objekt innerhalb einer Definition vernachlässigen und lediglich die Eigenschaften betrachten, die ein Objekt besitzen muss (Beitlich et al., 2015). Für Studienanfängerinnen und -anfänger kann es daher sinnvoll sein offenzulegen, welche Aspekte in einer mathematischen Definition enthalten sein müssen. Die ersten Probleme beim Erwerb mathematischer Fachbegriffe können demnach bereits beim Angeben einer Definition auftreten, noch bevor eine Anwendung stattfindet.

Mathematische Definitionen beschreiben einerseits den Begriffsinhalt, die „Intension“, und andererseits den -umfang, die „Extension“ (Tietze, Klika & Förster, 2000, S. 51):

> Die *Intension* beinhaltet charakteristische Eigenschaften des Begriffs, die *Extension* alle Objekte, die durch diesen Begriff beschrieben werden.
> Für den Hochschulkontext, bei dem auch die Voraussetzungen an ein Objekt innerhalb einer Definition eine wichtige Rolle spielen, sollten auch die Voraussetzungen in der Begriffsintension enthalten sein.

Durch diese beiden Informationen werden nicht nur der Name eines Begriffs, sondern auch alle dadurch definierten Objekte charakterisiert. Zur Veranschaulichung ist hier das Beispiel eines gleichschenkligen Dreiecks angeführt: „Ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten heißt gleichschenkliges Dreieck“ (H. Götz et al., 2009, S. 144). Die Begriffsintension eines gleichschenkligen Dreiecks wäre dann die Information, dass mindestens zwei Seiten die gleiche Länge besitzen müssen. Die Voraussetzung wäre ein ebenes Dreieck im $\mathbb{R}^2$. Außerdem können weitere Eigenschaften zur Intension gezählt werden, wenn sie aus der definierenden Eigenschaft folgen. In diesem Fall wäre das zum Beispiel die Eigenschaft, dass auch mindestens zwei Innenwinkel des Dreiecks gleich groß sein müssen. Die Extension hingegen beschreibt hier alle Dreiecke, welche die angegebene(n) Eigenschaft(en) besitzen, also alle gleichschenkligen Dreiecke. Dazu zählen auch Spezialfälle wie etwa auch das gleichseitige Dreieck.

Auch bei Begriffen aus der Universitätsmathematik, wie zum Beispiel beim $\mathbb{K}$-Vektorraum, kann man zwischen Begriffsintension und -extension unterscheiden:

1. **Begriffsintension:**
   - Voraussetzungen:
     - Es existiert eine Menge V und
     - ein Körper $\mathbb{K}$ mit einer Verknüpfung $+ : V \times V \to V, (v, w) \mapsto v + w$ und einer skalaren Multiplikation $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$ für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.
   - Eigenschaften:
     - $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe,
     - es gilt $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v \quad \text{und} \quad \lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$,
     - es gilt $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$ und
     - es gilt $1 \cdot v = v$

     für alle $v, w \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

2. **Begriffsextension:**
   Alle $\mathbb{K}$-Vektorräume, wie zum Beispiel $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$, werden durch die Begriffsintension charakterisiert.

Das Beispiel aus der Universitätsmathematik zeigt, dass es für Studierende im ersten Studienjahr eine große Herausforderung sein kann, Definitionen wie die des $\mathbb{K}$-Vektorraums zu verstehen, da die Inhalte sehr abstrakt und formal dargestellt sind. Eine ausführliche Auseinandersetzung mit mathematischen Definitionen auf einer konkreteren Ebene kann beim Lernen unterstützen. Eine solche Vorgehensweise impliziert auch, ausgewählte Voraussetzungen oder Eigenschaften zu vernachlässigen und zu diskutieren, welchen Einfluss das Ausschließen von Voraussetzungen oder Eigenschaften auf den Begriff und sein semantisches Netz hat.
Aus mathematischer Sicht gibt es zwei verschiedene Arten von Begriffen: „Es gibt einerseits Grundbegriffe, die mehr oder minder eine anschauliche Grundlage haben[, andererseits] Begriffe, die über Definitionen auf andere Begriffe zurückgeführt werden“ (Reiss & Hammer, 2013, S. 55). Es ist dabei nicht festgelegt, welche Begriffe Grundbegriffe sind und welche aus ihnen abgeleitet werden (Reiss & Hammer, 2013; Zech, 1996). Eine solche Vorgehensweise ist für die Mathematik typisch: Es wird ein Axiomensystem erstellt, das die Grundlage eines mathematischen Gebiets bestimmt. Bei der Erstellung eines solchen Systems ist man in der Regel frei. Mathematische Objekte können dann jedoch – je nach zugrundeliegendem Axiomensystem – etwas anderes charakterisieren, d. h. die Begriffsextension könnte sich ändern. Insbesondere in der Geometrie gibt es viele auch praktisch sinnvolle Möglichkeiten, ein Axiomensystem zu erstellen und zu diskutieren, wie sich Objekte ändern, wenn sie auf verschiedene Axiome basieren.

Ein prominentes Beispiel ist das Parallelenaxiom, an dem diese typisch mathematische Vorgehensweise anschaulich diskutiert werden kann. Euklid postuliert in seinem Werk *Elemente* fünf Axiome, welche die Grundlage der euklidischen Geometrie bilden (zit. n. Arens et al., 2012, S. 4):

1. Zwei Punkte lassen sich stets durch eine Strecke verbinden.
2. Eine gerade Linie kann endlos als gerade Linie verlängert werden.
3. Um jeden Punkt lässt sich ein Kreis mit beliebigen Radius ziehen.
4. Alle rechten Winkel sind einander gleich.
5. Wenn beim Schnitt einer geraden Linie mit zwei weiteren geraden Linien die Summe der auf derselben Seite liegenden Innenwinkel kleiner als zwei rechte Winkel ist, dann schneiden sich die beiden Geraden auf der Seite, auf der die beiden Winkel liegen.

Das letzte Postulat Euklids ist äquivalent zum Parallelenaxiom: „Zu einer Geraden und einem nicht auf ihr liegenden Punkt gibt es eine und nur eine Gerade, die durch diesen Punkt verläuft und die ersten Gerade nicht schneidet“ (Arens et al., 2012, S. 4). Euklid verwendet zum Beweisen der damals bekannten Sätze aus der Geometrie alle vier ersten Postulate, das fünfte benötigt er für die Beweise nicht. Im 19. Jahrhundert gelang es Bolyai und Lobachevski unabhängig voneinander, eine Geometrie zu konstruieren, in der alle Axiome von Euklid außer das Parallelenaxiom gelten (Deiser, Lasser, Vogt & Werner, 2016). Diese Geometrie verläuft auf einer negativ gekrümmten Fläche, auf der zum Beispiel die Innenwinkelsumme im Dreieck nicht 180° beträgt. Sie wird hyperbolische Geometrie genannt (siehe Abbildung 4.1).

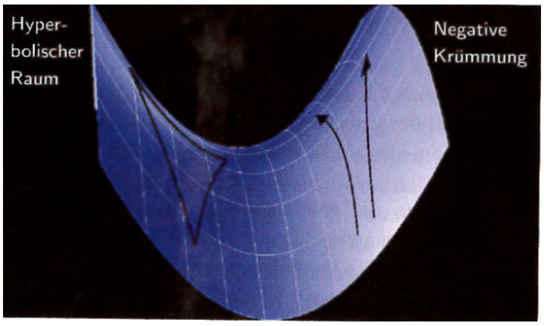


Abbildung 4.1: Hyperbolischer Raum
(Arens et al., 2012, S. 4)

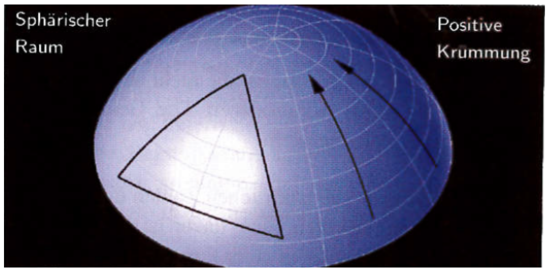


Abbildung 4.2: Sphärischer Raum
(Arens et al., 2012, S. 4)

Ein weiteres Beispiel für eine nicht-euklidische Geometrie, in der Euklids Axiome außer das Parallelenaxiom gelten, ist ein sphärischer Raum, der eine positive Krümmung aufzeigt (siehe Abbildung 4.2). Auch in dieser Geometrie beträgt zum Beispiel die Innenwinkelsumme eines Dreiecks nicht 180°, sondern ihr Wert ist größer – abhängig von der Krümmung.
Das explizite Wahrnehmen des zugrunde liegenden Axiomensystems ist auch für das Entwickeln mathematischer Argumentationen wichtig: Studierenden muss klar sein, welche Axiome und bereits bewiesene Sätze sie als Basis für ihre Begründungen hinzuziehen können, wenn sie axiomatisch-deduktiv argumentieren möchten.

Neben dieser eher formalen Einteilung können mathematische Begriffe auch rein inhaltlich gegliedert werden: Bezieht sich ein Begriff eher auf spezielle Eigenschaften, die ein Objekt besitzt, so spricht man von einem „Eigenschaftsbegriff“ (Zech, 1996, S. 165). Ein Beispiel hierfür ist der Begriff der Mittelsenkrechten in einem Dreieck. Eine Mittelsenkrechte in einem Dreiecks besitzt die folgenden Eigenschaften: Sie verläuft durch den Mittelpunkt der entsprechenden Dreiecksseite und steht auf dieser senkrecht.
Beschreibt ein Begriff hingegen eine Relation zwischen zwei oder mehreren Objekten, so nennt man ihn „Relationsbegriff“ (Zech, 1996, S. 165). Ein Beispiel aus der Schul- und Hochschulmathematik ist der Begriff der linearen Abhängigkeit. Dabei werden mehrere mathematische Objekte – in diesem Fall sind es Vektoren – in Beziehung zueinander gesetzt: Vektoren eines Vektorraumes heißen linear abhängig, wenn sie eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors bilden können. Die Relation in diesem Fall ist die nichttriviale Linearkombination.

4.1.3 Definitionen mathematischer Fachbegriffe

Begriffsdefinitionen enthalten eine Begriffsintension – mit Voraussetzungen – und eine Begriffsextension. Wie man die Informationen beider Teile darstellt, ist nicht festgelegt, vielmehr gibt es verschiedene Möglichkeiten, mathematische Definitionen zu formulieren.
Die „genetische Definition“ (Weigand et al., 2009, S. 114) befasst sich mit der Entstehung eines Begriffs. Sie definiert einen mathematischen Begriff mittels einer Konstruktion oder einer Operation. Der Begriff wird erst durch die Definition erzeugt, weswegen der Begriff einen handlungsorientierten und dynamischen Charakter bekommt. Daneben gibt es „charakteristische Definitionen“ (Weigand et al., 2009, S.115), die den Begriff anhand seiner Eigenschaften definieren. Der Begriff ist bereits vorhanden und wird in der Definition deskriptiv beschrieben. Charakteristische Definitionen sind im Allgemeinen stärker verbreitet und werden in der Regel in mathematischen Veranstaltungen an der Universität bevorzugt, da sie unabhängig von Operationen und Anschauungen sind. In der Schule werden hingegen häufig genetische Definitionen eingesetzt, da Begriffe dann auf enaktiver und ikonischer Ebene erfahrbar sind. Ein enaktiver oder ikonischer Zugang zu neuen Begriffen ist förderlich für den Lernprozess und Aufbau begrifflichen Wissens (Weigand et al., 2009; Bruner, 1966). Die Theorie der Repräsentationsformen – enaktiv, ikonisch und symbolisch – wird im Kapitel 4.4.4 erläutert. Zudem helfen genetische Definitionen beim Aufbau mentaler Modelle, die beim Begriffserwerb entstehen (siehe Kapitel 6). Die genetische Definition hat für Lernende zwar Vorteile, entspricht jedoch nicht der Defintion des Begriffs auf der Grundlage einer streng axiomatischen Theorie, die spätestens ab dem Eintritt in die Universität gefordert wird (Weigand et al., 2009).

Konsequenzen für die vorliegende Arbeit

Die verschiedenen Arten, Begriffe an Schulen und Hochschulen zu definieren, legen einen unterschiedlichen Aufbau begrifflichen Wissens nahe, abhängig von der Definitionsart. Daher empfiehlt es sich zu überprüfen, ob es Unterschiede im begrifflichen Wissen gibt, wenn Schulbegriffe der Sekundarstufe I und Begriffe, die im Hochschulkontext relevant sind, verwendet werden. Bei der Befragung von Studienanfängerinnen und -anfängern empfiehlt es sich, Begriffe zu verwenden, die den Lernenden bereits aus der Schule bekannt sind. Einflüsse, die den Dozentinnen und Dozenten der Lehrveranstaltungen zuzuschreiben sind, können dadurch minimiert werden.
Für den Kontext Schule werden die beiden Begriffe *Mittelsenkrechte in einem Dreieck* und *gleichschenkliges Dreieck* ausgewählt. Für den Hochschulkontext werden die Begriffe *Vektor im* $\mathbb{R}^2$ *mit seinen Repräsentanten* und *lineare Abhängigkeit* untersucht. Um im Detail das Verständnis und das begriffliche Wissen über diese Begriffe zu analysieren, werden Definitionen aus dem Schulunterricht betrachtet. Sie können Aufschluss darüber geben, welche Definitionsart hauptsächlich gelehrt wurde und wie die Begriffe in der Schule eingeführt wurden. Die vier gängigen Schulbücher an bayerischen Gymnasien Lambacher Schweizer (H. Götz et al., 2010), delta (Schätz & Eisentraut, 2013), Fokus (T. Jahnke & Scholz, 2009) und bsv (Distel & Feuerlein, 2012) wurden hierfür herangezogen.

Darin finden sich jeweils folgende vier Definitionen:

1. **Mittelsenkrechte in einem Dreieck:**

   a) „Unter der Mittelsenkrechten m einer Strecke $[AB]$ versteht man diejenige Gerade, die die Strecke $[AB]$ halbiert und senkrecht auf $[AB]$ steht. Also ist die Gerade Symmetrieachse zu der Strecke $[AB]$ und daher ist jeder Punkt der Mittelsenkrechten m von A und B jeweils gleich weit entfernt."
   (H. Götz et al., 2009, S. 16)

   b) „Die Symmetrieachse halbiert die Strecke $[PP^*]$ rechtwinklig; man nennt sie deshalb auch Mittelsenkrechte (Mittellot) der Strecke $[PP^*]$."
   (Schätz, Eisentraut & Brandl, 2005, S. 16)

   c) „Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks sind die Geraden, die senkrecht zu den Seiten durch deren Mittelpunkt verlaufen."
   (Brunnermeier, Freytag & Wagner, 2005, S. 171)

   d) „Aus der Konstruktion der Symmetrieachse gewinnen wir weitere Grundkonstruktionen. Verbinden wir Punkt und Bildpunkt durch eine Strecke, so steht die konstruierte Symmetrieachse senkrecht auf dieser Strecke und halbiert sie. Deshalb heißt die Symmetrieachse auch Mittelsenkrechte der Strecke $[AB]$."
   (Feuerlein, Bortolazzi, Stauch, Joerchel & Distel, 2005, S. 25)

2. **Gleichschenkliges Dreieck**

   a) „Ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten heißt gleichschenkliges Dreieck."
   (H. Götz et al., 2009, S. 144)

   b) „Dreiecke mit einer Symmetrieachse heißen gleichschenklig."
   (Schätz et al., 2005, S. 160)

   c) „Ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten nennt man gleichschenkliges Dreieck."
   (Brunnermeier et al., 2005, S. 152)

   d) „Ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten heißt gleichschenklig."
   (Feuerlein et al., 2005, S. 153)

3. **Vektor und seine Repräsentanten:**

   a) „Die Menge aller zueinander paralleler, gleich langer und gleich gerichteter Pfeile bezeichnet man als Vektor. Jeder einzelne Pfeil heißt Repräsentant des Vektors."
   (H. Götz et al., 2010, S. 93)

   b) „Parallelverschiebungen in der Ebene oder im Raum lassen sich sehr einfach durch Pfeile, also durch Strecken, denen man eine Orientierung zuordnet, beschreiben. Man fasst alle Pfeile der Ebene (bzw. des Raums), die gleich lang, zueinander parallel und gleich orientiert sind, zu einer Klasse zusammen. Jede solche Pfeilklasse nennt man Vektor; ein einzelner Pfeil aus der Klasse heißt Repräsentant des Vektors."
   (Schätz & Eisentraut, 2013, S. 91)

c) „Unter einem Vektor versteht man ein Tripel $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ reeller Zahlen. a_1, a_2, a_3 heißen Koordinaten des Vektors.“
(T. Jahnke & Scholz, 2009, S. 200)

d) „Die Menge aller parallelen, gleich langen und gleich gerichteten Pfeile nennt man Vektor. Jeder Pfeil ist ein Repräsentant des Vektors.“
(Distel & Feuerlein, 2012, S. 139)

4. **Lineare Abhängigkeit:**

a) „Die Vektoren $a_1, a_2, \ldots, a_n$ heißen linear abhängig, wenn mindestens einer dieser Vektoren als Linearkombination der anderen Vektoren darstellbar ist. Andernfalls heißen sie linear unabhängig.“
(Dorn, Götz, Herbst & Kestler, 2010, S. 118)

b) „Man bezeichnet zwei (oder mehr) Vektoren $u, v, \ldots$ als linear abhängig, wenn es eine Linearkombination $\lambda u + \mu v + \ldots$ gibt, die gleich 0 ist, ohne dass die Koeffizienten $\lambda, \mu, \ldots \in \mathbb{R}$ alle gleich 0 sind, sonst als linear unabhängig.“
(Eisentraut & Schätz, 2009, S. 130)

c) „Zwei zueinander parallele Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen linear abhängig oder kollinear. Drei Vektoren heißen linear abhängig oder komplanar, wenn einer parallel zu einer Ebene verläuft, die die anderen beiden aufspannen.“
(Scholz & Jahnke, 2010, S. 93)

d) „Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren u und v heißen linear abhängig, wenn ein Vektor ein Vielfaches des anderen Vektors ist: $v = \lambda u$. Drei vom Nullvektor verschiedene Vektoren u, v und w heißen linear abhängig, wenn ein Vektor eine Linearkombination der anderen Vektoren ist: $w = \lambda u + \mu v$. Andernfalls heißen die Vektoren linear unabhängig.“
(Distel & Feuerlein, 2010, S. 139)

Bei den angeführten Definitionen wird die Vielfältigkeit der Möglichkeiten zur Charakterisierung eines mathematischen Begriffs deutlich. Es werden charakteristische Definitionen eingesetzt, wie etwa die Definitionen 1c, 2a, 2b, 2c, 2d, 4a, 4b, 4d, 3a, 3c und 3d. Aber auch genetische Definitionen werden verwendet, wie z. B. die Definitionen 1d und 3b. Daneben kommt es auch zu Mischformen von charakteristischen und genetischen Definitionen, wie zum Beispiel in den Definitionen 1a, 1b oder 4c.
Begriffe werden also beschrieben oder entstehen durch Konstruktionen. Besonders bei der Mittelsenkrechte sind genetische Definitionen oder teilweise genetische Definitionen stark vertreten. Zudem wird bereits bei der Betrachtung der Definitionen deutlich, dass der Grad an Formalismus sehr variiert. Während die Vektordefinition des Schulbuches Fokus (Scholz & Jahnke, 2010) formal ist (Definition 3c), werden Vektoren bei delta (Eisentraut & Schätz, 2009) beispielsweise anschaulich definiert (Definition 3b).

Betrachtet man die Definitionen aller Begriffe, so wird deutlich, dass die Definitionen von Vektoren bzw. von linearer Abhängigkeit formaler sind als die Definitionen der Mittelsenkrechten und des gleichschenkligen Dreiecks. Damit geht auch ein steigender Grad an Abstraktion einher. Die beiden Begriffe Vektor und seine Repräsentanten und lineare Abhängigkeit sind also abstraktere Begriffe als Mittelsenkrechte und gleichschenkliges Dreieck (siehe auch Kapitel 6).

4.1.4 Definition begrifflichen Wissens für die Studieneingangsphase

Die unterschiedlichen Arten, mathematische Begriffe zu definieren, können den Aufbau begrifflichen Wissens beeinflussen. Wird ein Begriff beispielsweise anschaulich oder mithilfe einer Konstruktionsbeschreibung definiert, so werden die ersten Assoziationen mit dem Begriff geometrisch-anschaulicher Art sein (Tall & Vinner, 1981). Bei sehr formalen Definitionen entsteht das begriffliche Wissen zuerst durch die formale Darstellung der Definition, die meist Eigenschaften des Begriffs beinhaltet (Tall & Vinner, 1981). Daher können in diesem Fall zunächst Strukturen des Begriffs aufgebaut werden (siehe Kapitel 4.2).
Was unter begrifflichem Wissen in der vorliegenden Arbeit verstanden wird, wird in diesem Abschnitt dargelegt. In den folgenden Kapiteln wird dann auf den Aufbau begrifflichen Wissens eingegangen sowie sich der Struktur begrifflichen Wissens angenähert, die Aufschluss darüber geben kann, warum manche Begriffe leichter zu verstehen sind als andere.

Wissen im Allgemeinen kann man gemäß Anderson (1982) in *deklaratives* und *prozedurales* Wissen einteilen. Deklaratives Wissen beinhaltet dabei „Wissen, dass“ (Woolfolk, 2014, S. 293) und kann durch Worte oder „andere Symbole aller Art“ (Woolfolk, 2014, S. 293) dargestellt werden. Es enthält Fakten, also eher einzelne Informationseinheiten, die nicht zwangsläufig miteinander verbunden sein müssen – sie können es aber sein. Renkl zählt zum deklarativen Wissen auch „komplexes Zusammenhangswissen“ (Renkl, 2009, S. 4), wie die Relation zwischen bestimmten Eigenschaften eines Begriffs. Dieses Zusammenhangswissen ist allerdings ein theoretisches Wissen von Zusammenhängen, Regeln oder Abläufen und ist von der Fähigkeit oder Fertigkeit des praktischen Ausführens zu unterscheiden (Woolfolk, 2014).
Prozedurales Wissen wird als „Wissen wie“ (Renkl, 2009, S. 4) definiert, welches die Kenntnis über Prozeduren umfasst. Es kann in eine *wenn-dann*-Form gebracht werden, was an einen Code einer Programmiersprache erinnert. Prozedurales Wissen kann im Gegensatz zum deklarativen Wissen nicht verbalisiert werden. In der Mathematik kann man schematische Berechnungen oder das Anwenden von Algorithmen als prozedurales Wissen ansehen. Wird zum Beispiel eine Konstruktionsbeschreibung angefertigt, ist nicht nur prozedurales Wissen notwendig, sondern auch deklaratives Wissen (Renkl, 2009).
Auch Aebli beschäftigt sich mit mathematischen Begriffen und dem Begriffsbildungsprozess. Der innere Aufbau mathematischer Begriffe kann mithilfe eines Begriffsnetzes erstellt werden, welches den Begriff hinreichend charakterisiert. In so einem „Bedeutungsnetz“ (Aebli, 1983, S. 255) sind alle Informationen enthalten, die für einen bestimmten Begriff in einem bestimmten Kontext notwendig sind und es kann sowohl deklarative als auch prozedurale Wissenselemente enthalten. Der Begriff wird demnach immer im Kontext gesehen, in dem er Anwendung findet.

Hiebert und Lefevre definieren begriffliches Wissen („conceptual knowledge“) als „knowledge that is rich in relationships“ (Hiebert & Lefevre, 1986, S. 3). Begriffliches Wissen unterscheidet sich von deklarativem Wissen insofern, dass es theoretisches Wissen mit Verbindungen und Verknüpfungen zu anderen Begriffen oder Eigenschaften enthält, das heißt, das isolierte Kennen eines Begriffs reicht nicht aus, um von begrifflichen Wissen sprechen zu können. Zudem kann es sowohl deklarative als auch prozedurale Informationen beinhalten. In der vorliegenden Arbeit wird begriffliches Wissen an der Definition von Hiebert und Lefevre (1986) angelehnt:

> **Begriffliches Wissen** ist „a connected web of knowledge in which the linking relationships are as prominent as the discrete pieces of information.“
> (Hiebert & Lefevre, 1986, S. 3 f.)

Diese Sicht auf begrifflichen Wissen ist Basis für entdeckendes Lernen nach Bruner (1966). Beim Aufbau begrifflichen Wissens entsteht immer auch „meaningful learning“ (Hiebert & Lefevre, 1986, S. 8), da Verknüpfungen und Verbindungen zwischen Objekten erkannt und in bestehende Wissensstrukturen eingebettet werden, was für ein tiefes Verständnis von Inhalten essentiell ist.

4.2 Abstraktion in der Mathematik

Für den Übergang von der Schule an die Universität im Fach Mathematik sind geeignete Übergänge zwischen anschaulicher und abstrakter Ebene wichtig, um ein geeignetes begriffliches Wissen aufbauen zu können. Werden vor allem in unteren Jahrgangsstufen zumeist Inhalte mithilfe sehr konkreter und anschaulicher Objekte eingeführt, wie beispielsweise die Hinführung zum Symmetriebegriff mittels eines Geobretts, so findet eine eher abstrakte Herangehensweise in höheren Stufen statt, wie etwa die Darstellung von Symmetrieabbildungen durch Matrizen. Vor allem abstrakte Herangehensweisen können Verständnisprobleme bei Lernenden hervorrufen und führen unter Umständen dazu, dass„[f]ür viele Schülerinnen und Schüler ... der Eindruck [dominiert], dass sie es mit einem undurchschaubaren, unverstehbaren Begriffsgefüge und Regelwerk zu tun haben“ (Heymann, 2013, S. 7). Für die Mathematikdidaktik ist die Auseinandersetzung mit Abstraktion insoweit relevant, als dass Mathematik oft als abstrakt bezeichnet wird. Daneben müssen geeignete didaktische Wege gefunden werden, um die als abstrakt wahrgenommenen mathematischen Inhalte altersgerecht aufzubereiten. Aebli (1983) sieht Abstraktion auch als einen wesentlichen Bestandteil für die Begriffsbildung an. Er merkt an, dass es im Wesentlichen zwei Vorgänge gibt, welche den Begriffsbildungsprozess charakterisieren: „‚Begriffsbildung durch Abstraktion‘“ sowie „‚Begriffsbildung durch Verknüpfung‘“ (Aebli, 1983, S. 250). Abstraktion in seinem Sinne bedeutet Verallgemeinerung. Wird ein Begriff verallgemeinert, so vergrößert sich sein Begriffsumfang und immer weniger spezielle Eigenschaften werden bedeutsam. Abstraktion wird bei Aebli als Loslösung vom Kontext gesehen. Er beschreibt dies als Offenlegen der inneren Struktur des Begriffs (Aebli, 1981, S. 84): „Distanzierung von der Situation, Isolierung der in ihr enthaltenen Elemente und Beziehungen, reine, durchsichtige Fassung der Struktur [...], Abgrenzung derselben aus dem Kontext“.

Abstraktion ist ein Begriff, der in der Mathematik wie auch in der Philosophie, häufig diskutiert wird (z. B. Mitchelmore & White, 2007; Hershkowitz, Schwarz & Dreyfus, 2001). Bereits Wittenberg (1957) merkt im Gegensatz zu Aebli an, dass Abstraktion immer kontextabhängig ist, d. h. was in der Mathematik ein anschaulicher Begriff ist, wie etwa ein Dreieck, mag für andere Disziplinen zu einem abstrakten Begriff gehören. In der Forschung wurde zumeist zwischen dem Prozess des Abstrahierens und dem Produkt dieses Prozesses, der Abstraktion, unterschieden (z. B. Gray & Tall, 2007).

Hershkowitz et al. (2001) betrachten Abstraktion als Prozess, der bereits bestehende mathematische Wissenselemente vertikal vernetzt und in eine neue mathematische Struktur einordnet. Mithilfe von Fallstudien konnten Hershkowitz et al. (2001, S. 196) drei epistemische Aktivitäten beim Abstraktionsprozess identifizieren, durch die dieser Prozess sichtbar gemacht werden kann: „constructing, recognizing, and building-with“. Diese drei Aktivitäten beschreiben einen typischen Abstraktionsvorgang, können jedoch auch in dynamischer Weise ablaufen und sich gegenseitig beeinflussen. Während „constructing“ neue Strukturen erstellt, kommen in der Phase des „recognizing“ dem Lernenden diese Strukturen noch einmal ins Gedächtnis, werden also *wieder*entdeckt, da sie für den gegebenen Kontext von Relevanz sein könnten; im „building-with“ Prozess werden diese Strukturen schließlich angewendet (Hershkowitz et al., 2001).
Dabei orientieren sich die Autoren nicht an einem Abstraktionsbegriff, der einer kognitivistischen Sichtweise entspricht, die letztlich auf eine Extraktion vom Kontext abzielt und auf gemeinsame Eigenschaften oder Relationen fokussiert, sondern auf die Objekte selbst (vgl. Aebli, 1983; Rosch & Mervis, 1975; Piaget, 1970). Vielmehr beziehen sie sich auf den Ansatz von Davydov (1990), welcher den Abstraktionsprozess als Herstellen einer Struktur innerhalb eines Objekts beschreibt. Der Abstraktionsprozess wird ferner nicht stattfinden, wenn keine Notwendigkeit gesehen wird, eine neue Struktur aufzubauen. Er ist also nicht vom Kontext loslösbar und immer vom Indivuduum und der Lernumgebung abhängig: „the individual who is participating in an activity of abstraction [...] gradually interiorizes social interactions as well as material manipulations“ (Hershkowitz et al., 2001, S. 220).

Weigand (2015, S. 268) betrachtet den Abstraktionsprozess ebenso als „Entwicklung interner Repräsentationen oder die Konstruktion mentaler Modelle“. Jörissen und Schmidt-Thieme (2015) sehen Abstraktion zudem in dem von Bruner (1966) entwickelten Modell der drei Repräsentationsformen verwirklicht, das in Kapitel 4.4.4 näher beschrieben wird. Werden die drei Repräsentationen von Bruner durchlaufen, so findet ein Abstraktionsprozess statt, da ausgehend von einer handelnden Aktivität eine symbolische Ausdrucksweise entwickelt wird, die schließlich eine neue innere Struktur im mathematischen Begriff ausbildet. Dabei steigt auch der Grad an Formalisierung an, es liegt aber weniger eine Ablösung vom Kontext vor.
Gray und Tall (2007, S. 23) definieren Abstraktion als natürlichen Mechanismus des Menschen, in dem „complicated phenomena are compressed into thinkable concepts“. In einem jeden Menschen ist demnach der Wunsch enthalten, einer Reihe von Inhalten, die thematisch zusammengehören, einen gemeinsamen Namen zu geben.

Brückner (2013, S. 17) drückt dies auch als „Verdichtung“ aus. Für ihn ist die Entstehung eines Begriffs „auf der Grundlage von Diskrimination, Gegenüberstellung, Vergleich und Vereinigung [...] in der geistigen Welt, die eine Verdichtung von Wahrnehmungsinhalten darstellen“ möglich (Brückner, 2013, S. 17). Auch diese Sichtweisen orientieren sich eher an einer Ausbildung einer internen Struktur in einem Objekt als an einer Loslösung vom Kontext.

In der vorliegenden Arbeit wird Abstraktion ebenso als ein Prozess angesehen, welcher als Ziel den Ausbau einer inneren Struktur und nicht die Loslösung vom Kontext hat:

> „*Abstraction* is an activity of vertical reorganization previously constructed mathematics into a new mathematical structure.“
> (Hershkowitz et al., 2001, S. 202)

Abstrakte und anschauliche mathematische Begriffe

Nach den Betrachtungen von Definitionen zu Abstraktion wird im Folgenden der Frage nachgegangen werden, was abstrakte und was anschauliche mathematische Begriffe sind. Zudem wird analysiert, was einen abstrakten von einem anschaulichen Begriff unterscheidet.
Fachbegriffe zu verstehen und erfolgreich einsetzen zu können, ist grundlegend innerhalb einer jeden Disziplin. Nach Wittenberg (1957, S. 253) sind konkrete Begriffe solche, die „erkenntnistheoretisch durch Rückgriff auf das Erfahrene zu erläutern sind“. Abstrakte Begriffe sind solche, „bei denen dies nicht oder jedenfalls nicht unmittelbar der Fall ist“ (Wittenberg, 1957, S. 253). Diese Formulierung deutet an, dass die Abstraktheit eines Begriffs von externen oder individuellen Einflüssen abhängig sind, da der Rückgriff auf das „Erfahrene“ (S. 253) von Person zu Person unterschiedlich sein kann. Was also bereits zur Erfahrung gezählt werden kann, ist demnach nicht klar definierbar.
Zudem postuliert Wittenberg (1957, S. 256 f.), dass ein „‚konkrete[r]‘ Begriff[...] grundsätzlich von der gleichen Natur wie ... [ein] abstrakte[r]“ Begriff sei. Begriffe sind also einerseits einander ähnlich, andererseits gibt es bestimmten Eigenheiten, die bei abstrakten Begriffen anders sind als bei konkreten. Wittenberg (1957, S. 257) spricht in diesem Zusammenhang davon, dass die „begriffsschöpferische Leistung“ beim Verstehen abstrakter Begriffe deutlich ausgeprägter ist als bei anschaulichen Begriffen.

Sfard (1991) analysiert den inneren Aufbau mathematischer Begriffe und kommt zu der Erkenntnis, dass in jedem Begriff immer eine *strukturelle* und eine *operationale Komponente* enthalten ist. Diese beiden Komponenten sind zwar verschieden, beziehen sich jedoch auf denselben Begriff. Sie beleuchten ihn aus verschiedenen Perspektiven und heben dementsprechend jeweils bestimmte Facetten hervor. Nach Sfard (1991) ist in jedem mathematischen Begriff diese Dualität enthalten, dabei kann jedoch eine Komponente jeweils mehr oder weniger entwickelt sein.
Die strukturelle Komponente beinhaltet die innere Struktur des mathematischen Begriffs (Sfard, 1991), d. h. Relationen innerhalb des Begriffs, aber auch zu anderen Begriffen, sind hier zentral. Zudem spielen spezifische Eigenschaften eine Rolle, die der Ausbildung der inneren Struktur dienen. Der Begriff wird dabei als eigenständiges Objekt angesehen, das statisch ist und aufgrund

seiner inneren Struktur existiert. Details spielen eine untergeordnete Rolle. Durch die Betonung der Struktur kann diese Komponente als Ergebnis eines Abstraktionsprozesses angesehen werden. Das Produkt dieses Prozesses ist die Abstraktion, in diesem Fall also ein abstrakter Begriff. Der Fokus auf die strukturelle Komponente eines Begriffs verleiht dem mathematischen Begriff einen abstrakten Charakter. In den gängigen Schulbüchern für Gymnasien in Bayern wird beispielsweise der Begriff eines Vektors im $\mathbb{R}^2$ als Menge von gleich langen, gleich gerichteten und zueinander parallelen Pfeilen eingeführt (siehe Kapitel 4.1.3). Der Vektorbegriff wird also durch eine Menge charakterisiert, die bestimmte Elemente enthält. Diese Sichtweise betont die innere Struktur des Begriffs, sie offenbart schließlich das Grundgerüst des Begriffs. Durch diese strukturbetonte und gleichzeitig statische Auffassung bekommt der Begriff einen abstrakten Charakter.

Die operationale Komponente eines mathematischen Begriffs beschreibt ihn als ein potentielles Objekt, das erst entsteht, wenn Operationen vollzogen werden (Sfard, 1991). Der Begriff wird eher handlungsorientiert wahrgenommen und Details spielen eine entscheidende Rolle, wenn sie zur Ausführung der Operationen notwendig sind. Dadurch wird der Begriff dynamisch und prozessorientiert, was zu einer anschaulichen Sichtweise auf ihn führt. Begriffe wie die Mittelsenkrechte in einem Dreieck werden oft genetisch definiert (siehe Kapitel 4.1.3), hier wird der prozesshafte Charakter deutlich. Auch beim Begriff eines gleichschenkligen Dreiecks, der im Kapitel 4.1.3 definiert wurde, lässt sich eine Betonung von operationalen Aspekten beobachten. Die Eigenschaft, dass mindestens zwei Seiten die gleiche Länge besitzen müssen, kann direkt operationalisiert und veranschaulicht werden.

> In der vorliegenden Arbeit werden Begriffe als **anschaulich** bezeichnet, wenn die operationale Komponente dominiert. Begriffe, bei denen die strukturelle Komponente im Vordergrund steht, werden als **abstrakt** bezeichnet.

Bereits Gagné (1975, S. 138) spricht von abstrakten Begriffen, wenn sie „*Relationen* implizieren“. Zudem müssen solche Begriffe durch ihre Definition gelernt werden, die einen strukturellen Charakter hat, da sie die Struktur und Eigenschaften von Begriffen beinhaltet. Konkrete oder anschauliche Begriffe sind für Gagné (1975) solche, die durch Zeigen definiert werden können, also rein von der Anschauung her charakterisiert werden. Diese Sichtweise ist stark von der des Lernens von Begriffen eines Kindes geprägt, das in seinen ersten Jahren anschauungsbasiert neue Begriffe entdeckt. Für Lernende der Sekundarstufe oder der Universität kann die von Gagné verwendete Definition konkreter, hier anschaulicher, Begriffe erweitert werden. In der vorliegenden Arbeit werden auch Begriffe miteinbezogen, die mittels Operationen erzeugt werden.

Es ist notwendig, dass ein Begriff von Lernenden aus beiden Perspektiven betrachtet werden kann und somit ein Arbeiten sowohl in einem anschaulichen als auch in einem abstrakten Kontext möglich wird. Auf diese Weise kann jeweils die Perspektive eingenommen werden, die zur Lösung eines gegebenen Problems geeigneter ist. Im Idealfall kann der Lernende zwischen den beiden Komponenten flexibel hin und her wechseln.

Die Einteilung von Begriffskomponenten in operational und strukturell ist innerhalb der Mathematik bereits von anderen Mathematikern, Psychologen oder Philosophen vorgenommen worden. Grundsätzlich wurde dabei entweder der Prozesscharakter mathematischer Inhalte oder

der Produktcharakter betont. Die Unterscheidung von prozeduralen und deklarativen Wissen von Anderson (1982), das im Kapitel 4.1.4 behandelt wurde, basiert auf dieser Differenzierung. Auch Piaget (1970, S. 14) unterscheidet innerhalb der Mathematik zwischen „figurative[m]“ und „operative[m]“ Wissen. Ein weiteres Beispiel für eine Unterscheidung dieser Art nimmt Hiebert (1986) vor, der zwischen „conceptual knowledge“ und „procedural knowledge“ differenziert.

4.3 Verständnis von Begriffen

Mathematisches Argumentieren gelingt auf Basis eines gewissen Verständnisses über die Inhalte, die beim Begründen relevant sind. Darüber, was *Verstehen* eines mathematischen Inhalts bedeutet, gibt es jedoch keine einheitliche Auffassung. Eine ausführliche Diskussion über das Verstehen mathematischer Inhalte findet sich zum Beispiel bei Reusser und Reusser-Weyeneth (1994). Einig ist man sich aber darin, dass „[d]ie Begriffsgewinnung ... ein langfristiger Prozess [ist], der in unterschiedlichen Stufen abläuft“ (Franke, 2007, S. 111). Schon Wittenberg (1957) setzt sich mit der Problematik des Verstehens von Begriffen auseinander. Verstehen bezeichnet er als einen komplexen kognitiven, unsichtbaren Prozess, der nie abgeschlossen werden kann. Diese Aussage begründet er damit, dass es unmöglich ist, den „Gehalt [eines Begriffs] zuverlässig zu kennen, [und] erschöpfend zu übersehen“ (S. 164). Nicht alle Pädagoginnen und Pädagogen sowie Didaktikerinnen und Didaktiker teilen die Ansicht von Wittenberg (1957), wie im folgenden Abschnitt verdeutlicht wird.

4.3.1 Begriffsverständnis in der Studieneingangsphase

Aebli (1980) sieht im Verstehen das Deuten von Begriffen. Deuten ist dabei ein Prozess, der vom Individuum aktiv ausgeführt wird und er muss „einen subjektiven Beitrag zum Verständnis der Situation und des Geschehens leiste[n]“ (Aebli, 1980, S. 182). In diesem Sinne wird dabei ein neues Begriffsnetz erstellt oder es werden neue Schemata in ein bestehendes Begriffsnetz eingefügt. Weiterhin ist Verstehen für Aebli nicht nur die Ausbildung eines semantischen Netzes innerhalb eines Begriffs, sondern es kann unter Umständen auch ein neuer Rahmen des Netzes erstellt werden; dies nennt Aebli (1980, S. 182) „synthetische Gegenbewegung“. Bei Bruner, Goodnow, Austin und Brown (1956) ist Verstehen eher ein operatives Handeln und wird dabei stark mit dem Problemlöseprozess verknüpft.

Weiterhin wird von Moore (1994, S. 250) ein Modell zum „concept understanding“ im Bereich der Mathematik vorgeschlagen. Dabei steht bei ihm insbesondere die Verwendung mathematischer Begriffe in Argumentationen im Vordergrund. Für ihn zählen „images“, „definitions“ und „usage“ zum Begriffsverständnis (1994, S. 253). Die Bezeichnungen „image“ und „definition“ stehen dabei in einem engen Zusammenhang mit *concept image* und *concept definition*, die von Tall und Vinner (1981) eingeführt und ausführlich in Kapitel 4.4.3 dieser Arbeit dargestellt werden. Um einen mathematischen Beweis korrekt auszuführen, ist ein geeigneter Umgang mit Fachsprache und Fachbegriffen essentiell. In einer qualitativen Studie mit fünf Studienanfängerinnen und -anfängern im Rahmen einer fachmathematischen Veranstaltung stellt Moore fest, dass die Argumentationsqualität stark vom mathematischen Vorwissen abhängig ist. Die Studierenden verfügten meist nicht über ein adäquates *concept image*. Nach seiner Darstellung war dies darauf zurückzuführen, dass in universitären Mathematikveranstaltungen die Inhalte oft mit einer formalen Definition eingeführt werden, was in der Regel lediglich die *concept definition* fördert. Für die korrekte Anwendung mathematischer Definitionen hingegen war in der Studie ein informelles Verständnis notwendig, was durch das *concept image* aufgebaut wird. Aber auch ein gut ausgebildetes *concept image* war alleine nicht ausreichend, um die Argumentationen formal korrekt zu formulieren. *Concept image* und *concept definition* konnten erst im gegenseitigen Wechselspiel zum erfolgreichen Begründen genutzt werden. Die Ergebnisse legen nahe, dass beide Komponenten – *concept image* und *concept definition* – miteinander verbunden werden müssen, um anspruchsvolle Probleme, wie Argumentationsprobleme, in der Mathematik lösen zu können.

Auch Vollrath beschäftigt sich mit dem Verstehen mathematischer Begriffe und Sachverhalte. Er benennt das Lernen als Basis des Verstehens: „Das Lernen eines Begriffs ist ein Proze[ss], der zu dem Ergebnis führt, den Begriff zu verstehen“ (Vollrath, 1984, S. 20). Davon ausgehend stellt sich die Frage, wann ein Lernprozess beendet ist und man damit von einem Ergebnis sprechen kann. Vollrath (2001, S. 50) präzisiert seine Aussage dahingehend, dass er die Qualität des Lernens miteinbezieht: Wird „beim Lernen eines Gegenstandes eine hohe Qualität erreicht, ... spricht man vom Verstehen“. Entscheidend ist also die Qualität des Lernens, das seinerseits vom Grad der Vernetzung neuer Inhalte mit alten abhängig ist. Werden also neue Informationen in geeigneter Weise gelernt und mit bestehendem Wissen verknüpft, kann man nach Vollrath (2001) von Verständnis sprechen. Um Begriffsverständnis greifbar zu machen, benennt er zudem Aspekte, die vorhanden sein müssen – „typische Kenntnisse und Fähigkeiten“ –, um Verständnis zu identifizieren (Vollrath, 2001, S. 50).

> „Verständnis kann man also als Ergebnis eines geistigen Prozesses, des Lernens ansehen. Das Lernen eines Begriffs ist dabei eine Zustandsänderung im Denken des Lernenden, die sich dadurch zeigt, da[ss] der Lernende am Ende dieses Vorganges gewisse nachprüfbare Fähigkeiten besitzt, die er zu Beginn des Lernvorgangs noch nicht besaß.“ (Vollrath, 1984, S. 11)

Er postuliert, dass Begriffsverständnis anhand von nachweisbaren Leistungen erfassbar wird. „Je nach Art dieser Fähigkeiten kann man unterschiedliche Ausprägungen des Verständnisses feststellen“ (Vollrath, 1984, S. 20). Ganz konkret ist er der Meinung, dass Lernende einen mathematischen Begriff verstanden haben, wenn sie:

1. „die Bezeichnung des Begriffs kennen“
2. „Beispiele angeben und wenn sie begründen können, weshalb es sich um ein Beispiel handelt“
3. „begründen können, weshalb etwas nicht unter den Begriff fällt“
4. „charakteristische Eigenschaften des Begriffs kennen“
5. „Oberbegriffe, Unterbegriffe und Nachbarbegriffe kennen“

(Vollrath, 2001, S. 50 f.)

Das fünfte Merkmal, das die Einbettung eines Begriffs in ein Begriffsnetz beschreibt, ist nicht eindeutig festlegbar. Nicht immer gibt es zu einem Begriff eindeutige Eigenschaften, nach denen eine Hierarchie aufgebaut werden kann, woraus sich eindeutige Unter- und Oberbegriffe ableiten lassen. Dies wird im Folgenden anhand von zwei Beispielen erläutert.
Bei dem Begriff *Viereck* können als die Eigenschaften die Seitenlängen und die Winkel betrachtet werden. Es werden also Vierecke unterschieden, die gleichlange oder nicht gleichlange Seiten besitzen sowie gleich große oder nicht gleich große Winkel besitzen. Aus dieser Unterscheidung lässt sich ein eindeutiges Begriffsnetz erstellen, in dem jedes spezielle Viereck einen Namen besitzt. Beim Parallelogramm sind gegenüberliegende Seiten gleich lang und parallel und damit auch gegenüberliegende Winkel gleich groß. Das Quadrat besitzt dieselben Eigenschaften, wobei zusätzlich alle Seitenlängen und Winkel gleich groß sind. Entsprechend ist das Viereck der Oberbegriff zum Parallelogramm und zum Quadrat, wohingegen diese Unterbegriffe des Vierecks sind.
Bei dem Begriff der *Mittelsenkrechten* ist das Begriffsnetz nicht eindeutig bestimmbar. Die Mittelsenkrechte wird oft durch die Eigenschaften definiert, dass sie durch den Mittelpunkt der Strecke zweier Punkte verläuft und auf dieser senkrecht steht. Man könnte daher diese beiden Eigenschaften zum Aufbau eines Begriffsnetzes verwenden. Erhalten würde man dann zum Beispiel eine Gerade, die durch den Mittelpunkt einer Strecke verläuft, aber auf dieser nicht senkrecht steht. Zu diesem Begriff gibt es keine eindeutige Bezeichnung in der Mathematik. Daher können zur Mittelsenkrechte keine eindeutigen Ober- und Unterbegriffe benannt werden.

Es gibt also Begriffe, die sich eindeutig in ein hierarchisches Netz einteilen lassen, und solche, bei denen eine hierarchische Gliederung nicht sinnvoll ist. Daher ist es zweckmäßig, im Allgemeinen nicht von Ober- und Unterbegriffen zu sprechen, sondern den Fokus auf Relationen zu anderen Begriffen zu legen, woraus sich ebenso ein Begriffsnetz bilden lässt.

Gemäß Weigand (2009, S. 99) haben Lernende einen Begriff verstanden, wenn sie:

1. „Vorstellungen über Merkmale oder Eigenschaften eines Begriffs und deren Beziehungen untereinander entwickeln, also Vorstellungen über den Begriffsinhalt aufbauen“
2. „einen Überblick über die Gesamtheit aller Objekte erhalten, die unter einem Begriff zusammengefasst werden, also Vorstellungen über den Begriffsumfang entwickeln“
3. „Beziehungen des Begriffs zu anderen Begriffen aufzeigen können, also Vorstellungen über das Begriffsnetz ausbilden“

Die von Weigand (2009) beschriebenen Aspekte beziehen sich konkret auf Begriffsextension und -intension (siehe Kapitel 4.1.2), deren Kenntnis zum Begriffsverständnis notwendig ist. Daneben wird die Einbettung in das Begriffsnetz ergänzt.

Vergleicht man die Definitionen von Vollrath (2001) und Weigand (2009) miteinander, so sind Gemeinsamkeiten offensichtlich. Bei beiden ist die Einordnung eines Begriffs in ein bestehendes Informationsnetz wichtig, d. h. Relationen zu anderen Begriffen sollten von den Lernenden erkannt werden. Auch spielt die Kenntnis der Eigenschaften eines mathematischen Begriffs eine essentielle Rolle. Bei Vollrath wird explizit eine Angabe von Beispielen eingefordert, bei Weigand findet sich das Wissen über die Eigenschaften implizit in der Begriffsextension wieder. Was bei Vollrath betont wird, ist der Bezug zum Argumentieren: Der Lernende muss in der Lage sein, zu begründen, warum ein Objekt nicht zu dem Begriff gezählt werden kann oder warum es sich um ein korrektes Beispiel handelt, damit er einen Begriff verstanden hat. Bei den Indikatoren von Vollrath ist zu beachten, dass vor allem anschauliche Kriterien eine Rolle beim Begriffsverständnis spielen. Weniger wird Bezug auf die formale Perspektive auf mathematische Begriffe hergestellt. In der Hochschulmathematik ist jedoch besonders der Umgang mit formal dargestellten Inhalten erforderlich. Für die Studieneingangsphase ist daher eine Erweiterung der Kriterien von Vollrath sinnvoll, wie zum Beispiel die Verbindung von *concept image* und *concept definition* (Moore, 1994; Vinner, 1991; Tall & Vinner, 1981) (siehe Kapitel 2.3).

Stufen des Begriffsverständnisses

Verbreitet ist die Ansicht, dass Begriffsverständnis in Entwicklungsstufen abläuft. van Hiele (1984) unterscheidet zwischen dem intuitiven, dem inhaltlichen, dem integrierten und dem formalen Begriffsverständnis:

- **Intuitives Begriffsverständnis**
  Die Lernenden kennen verschiedene Repräsentanten des Begriffs. Sie sind in der Lage, Beispiele und Gegenbeispiele zu finden. Ein Vergleich mit einem Prototyp kann hier „ganzheitlich erfolgen und wird mit Formulierungen wie ‚sieht aus wie ...' begründet“ (Franke, 2007, S. 111 f.).

- **Inhaltliches Begriffsverständnis**
  Das inhaltliche Begriffsverständnis inkludiert bereits Eigenschaften des Begriffs. Die Lernenden „untersuchen, ob eine Figur Repräsentant eines Begriffs ist oder nicht und begründen dies mit Hilfe der begriffsbestimmenden Eigenschaften“ (Franke, 2007, S. 111). Liegt die Kenntnis über die Eigenschaften eines mathematischen Begriffs vor, so können Lernende Beispiele generieren.

- **Integriertes Begriffsverständnis**
  Auf dieser Stufe werden den Lernenden die Relationen sowohl innerhalb des Begriffs, also zwischen den Eigenschaften, als auch zu anderen Begriffen deutlich. Dabei entsteht ein Begriffsnetz. Erst auf dieser Stufe wird eine Definition angegeben, der Begriff also systematisch charakterisiert. Die Eigenschaften werden wichtiger und die Lernenden beginnen, Begriffe zuzuordnen oder auszuschließen (Franke, 2007).

- **Formales Begriffsverständnis**
  Der Begriff wird auf dieser Stufe in den mathematischen Rahmen eingebettet und zudem formal aufgefasst (Franke, 2007).

Das Verständnis über einen Begriff entwickelt sich beim Durchlaufen der einzelnen Stufen weiter. Dabei entstehen immer mehr Verbindungen zwischen einzelnen Informationseinheiten innerhalb des Begriffs. Es werden zudem Relationen zu anderen Begriffen vor allem bei der Einbettung in den mathematischen Kontext hergestellt. Die einzelnen Stufen unterscheiden sich im Grad an Formalismus und in der Größe des Begriffsnetzes. Während auf der Stufe des intuitiven Begriffsverständnis hauptsächlich Visualisierungen, etwa durch das Finden von Beispielen und Gegenbeispielen, entwickelt werden, wird der Begriff auf den höheren Stufen formalisiert. Neben dem Ausbilden von Eigenschaften, wird der Begriff schließlich formal in den mathematischen Kontext eingebettet. Tietze, Klika und Förster (2000) bemerken, dass die Stufen ineinander übergreifen und theoretisch linear ablaufen sollten. Zyklisches Verhalten ist jedoch normal und entspricht eher dem realistischen Begriffsbildungsprozess von Lernenden.

4.3.2 Verständnis mathematischer Sachverhalte in der Studieneingangsphase

Begriffsverständnis kann auch auf mathematische Sätze erweitert werden. Ein mathematischer Begriff ist Teil eines mathematischen Satzes. Vollrath (2001, S. 47) bezeichnet „Wissen über Sachverhalte“ als „Wissen über die Eigenschaften von Begriffen und ihre Beziehungen“. Ein mathematischer Satz enthält Begriffe, die fachlicher oder allgemeinsprachlicher Art sein können. Voraussetzung für das Verständnis eines Satzes ist das Verständnis der einzelnen Begriffe, welche im Satz enthalten sind, und deren Verknüpfung untereinander sowie mit anderen mathematischen Begriffen. Konventionen und der entsprechende Kontext spielt dabei ebenso eine Rolle. Wird zum Beispiel in einer Algebravorlesung von einer Gruppe gesprochen, so ist der Begriff der Gruppe auf eine andere Art zu deuten wie in einem Alltagsgespräch.

Beim Begriffslernen werden mentale Modelle aufgebaut und erstellt. Es handelt sich um einen Abstraktionsprozess. Vollrath (2001, S. 51) gibt zudem an, was „zum Verstehen eines Sachverhalts gehört, [nämlich] dass man weiß, worauf er sich bezieht, was er aussagt, unter welchen Voraussetzungen er gilt und welche Konsequenzen er hat. [...] Bei dem Verstehen eines Satzes geht es also um das Erfassen der Aussage des Satzes, um die Kenntnis eines Beweises, um die Fähigkeit, den Satz auf Sonderfälle anzuwenden und um das Wissen, welche Probleme sich mit ihm lösen lassen“.

Vollrath (2001, S. 51) gibt an, dass Lernende einen Sachverhalt verstanden haben, wenn sie:

1. „den Sachverhalt angemessen formulieren können“
2. „Beispiele für den Sachverhalt angeben können“
3. „wissen, unter welchen Voraussetzungen der Sachverhalt gilt“
4. „den Sachverhalt begründen können“
5. „Konsequenzen des Sachverhalts kennen“
6. „Anwendungen des Sachverhalts kennen“

Konsequenzen

Darüber, wie Verständnis eines mathematischen Begriffs zu definieren ist, herrscht bisher keine Einigkeit. Die Kriterien von Vollrath (2001) bilden jedoch eine erste Basis, sich dem Verständnis mathematischer Begriffe anzunähern und beinhalten Aspekte, die in jedem Fall von Lernenden erwarten werden, falls sie einen Begriff oder einen Sachverhalt verstanden haben. Seine Kriterien können daher als Indikatoren eines Tests verwendet werden, der begriffliches Wissen bestimmter mathematischer Inhalte misst.

4.4 Begriffsbildungprozess

In den vorherigen Kapiteln wurde dargelegt, wie mathematische Begriffe aufgebaut sind und welchen Einfluss der Kontext (siehe Kapitel 2.5) oder das Begriffsverständnis (siehe Kapitel 4.3) beim Lernen mathematischer Begriffe haben kann. Im Folgenden wird beschrieben, wie mathematische Begriffe so ausgebildet werden, dass die verschiedenen Komponenten eines Begriffs (siehe Kapitel 4.2) gefördert werden können.
Das vorliegende Kapitel wird zuerst auf den Prozess der Begriffsbildung nach Aebli (1983) eingehen, dann erläutern, wie Piaget (1975) Begriffsbildung auffasst und schließlich das Modell der Repräsentationsformen von Bruner (1966) zum Aufbau begrifflichen Wissens darstellen.

4.4.1 Begriffsbildung im Sinne von Aebli

Begriffsbildung findet nach Aebli (1983) durch Abstraktion des Begriffs oder durch Verknüpfung des Begriffs mit anderen Begriffen oder Inhalten statt. Beim Vergleich dieser beiden Prozesse stellt Aebli die Bildung von mathematischen Begriffen durch die Verknüpfung mit anderen Begriffen als überlegen gegenüber der Begriffsbildung durch Abstraktion dar. Er beschreibt, dass die Bildung von Begriffen, die durch Abstraktion – im Sinne einer Dekontextualisierung – entsteht, eher einer Begriffs*findung* entspricht. Er argumentiert, dass beim Prozess der Abstraktion gemeinsame Eigenschaften von Objekten identifiziert und wesentliche zusammengefasst werden. Dabei werden die einzelnen Objekte jedoch nicht neu entdeckt – wie es bei der Bildung von Begriffen der Fall ist. Aebli stellt fest, dass „die Versuchsperson den Begriff, der gebildet werden mu[ss], in den meisten Fällen entweder schon besitzt und in der Sache nur wiedererkennt, was aber keine Begriffsbildung ist, oder aber den Begriff nicht selbstständig zu bilden in der Lage ist, mindestens nicht durch Abstraktion, nämlich durch das bloße Weglassen von Akzidentien“ (Aebli, 1981, S. 91).
Der Abstraktionsprozess kann folglich nur unter der Bedingung stattfinden, dass wesentliche Begriffe und Eigenschaften bereits vor dem Abstraktionsprozess ausgebildet sind. Aus diesem Grund findet nach Aebli (1983) die *Bildung* von Begriffen bei der Verknüpfung mit anderen Begriffen statt. Er betont weiterhin, dass zur Begriffsbildung der Aufbau des Begriffsnetzes und der Begriffsintension wichtig ist.

4.4.2 Begriffsbildung im Sinne von Piaget

Kognitive Weiterentwicklung und damit auch Begriffsbildung verläuft nach Piaget (1975) mithilfe von *Assimilation* und *Akkomodation*. Unter Assimilation versteht man die Anpassung von Wahrgenommenem derart, dass es an bestehendes Wissen in geeigneter Form angegliedert werden kann (Piaget, 1975). Es wird demnach neu zu erwerbendes Wissen auf eine Weise adaptiert, dass es in bestehende Wissensstrukturen eingebaut werden kann. Kennen Lernende beispielsweise die Vorgehensweise bei der Addition reeller Zahlen, lässt sich dieses Wissen beim Lernen der algebraischen Vektoraddition verwenden. Das Wissen über die Vektoraddition wird dabei so interpretiert, dass sie als komponentenweise Addition reeller Zahlen angesehen wird. Das Wissen über die Addition von Vektoren wird demnach so verändert, dass eine Anpassung an bereits bestehendem Wissen über die Addition reeller Zahlen ermöglicht wird. Bei der Akkomodation gleicht sich das Individuum an neue Umwelteinflüsse an, d. h. vorhandene Schemata werden adaptiert oder neu ausgebildet, um das neu Wahrgenommene in bestehende Wissensstrukturen einzugliedern (Piaget, 1975). Werden beispielsweise gleichschenklige Dreiecke im Unterricht behandelt und kennen die Schülerinnen und Schüler bereits die Eigenschaften allgemeiner Dreiecke, so entwickeln sie neue Schemata, die mit dem Wissen über gleichschenklige Dreiecke übereinstimmen. Es werden zum Beispiel Eigenschaften hinzugefügt, wie, dass die Längen von mindestens zwei Dreiecksseiten gleich sind oder dass mindestens zwei Winkel gleich groß sind.
Assimilation und Akkomodation finden in der Regel wechselseitig statt (Piaget, 1975). Beim Lernen wird durch Assimilation zunächst überprüft, welche Wissensteile direkt an bestehendes Wissen angegliedert werden können. Zu den Wissenselementen, bei denen keine direkte Verknüpfung möglich ist, werden neue Schemata erstellt, was der Akkomodation entspricht. Nach der Akkomodation können die veränderten oder neu erstellten Schemata wieder an bereits bestehende Wissenselemente geknüpft werden, es findet also wieder eine Assimilation statt. Durch diesen Prozess werden kontinuierlich Informationen über Begriffe miteinander in Beziehung gesetzt und die Ausbildung eines semantischen Netzes von Wissenselementen entsteht.

4.4.3 Komponenten mathematischer Begriffe: Concept definition und concept image

In diesem Abschnitt werden die von Tall und Vinner (1981) identifizierten Komponenten mathematischer Begriffe – *concept image* und *concept definition* – erläutert, die zentral bei der Untersuchung von Schwierigkeiten zwischen Schul- und Hochschulmathematik sind. Beim Aufbau begrifflichen Wissens kann es aufgrund der Unterschiede zwischen Schul- und Hochschulmathematik zu Schwierigkeiten kommen. Tall und Vinner (1981) stellen zwei Komponenten mathematischer Begriffe vor, die miteinander verknüpft werden müssen, um einen mathematischen Begriff in angemessener Weise verstehen zu können. Non-verbale Assoziationen mit einem bestimmten Begriff, etwa mentale Vorstellungen oder auch Erfahrungen, definiert Vinner als *concept image*, formale Definitionen werden als *concept definition* bezeichnet (1983, S. 293). Während das *concept image* die visuell-anschauliche Seite eines mathematischen Begriffs repräsentiert, umfasst die *concept definition* die formale Seite einer mathematischen Definition des Begriffs (Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1983, 1991).

Das *concept image* enthält alle mentalen Repräsentationen, die mit einem Begriff assoziiert sind, wie etwa Beispiele, Skizzen, Spezialfälle oder Berechnungen. Vor allem in der Primar- und Sekundarstufe I werden mathematische Inhalte anschaulich über Beispiele oder Visualisierungen eingeführt, was das *concept image* fördert. In der Regel werden erst später formale Definitionen betrachtet, welche zur Ausbildung der *concept definition* beitragen. Beide Komponenten sollten im Idealfall miteinander verbunden werden, was für Lernende oft eine Herausforderung ist (Vinner, 1991).
Schwierigkeiten können dabei nicht nur mathematische Begriffe, die neu gelernt werden, hervorrufen, sondern auch solche, die bereits vorher bekannt waren. Bei der Behandlung des Funktionsbegriffs in der Sekundarstufe II werden in der Schule beispielsweise lediglich einige spezielle Funktionen besprochen, sodass das mentale Bild von Funktionen sich auf diese konkreten Beispiele beschränken kann. Das *concept image* enthält folglich die in der Schule besprochenen Funktionentypen und deren Veranschaulichungen mittels eines Funktionsgraphen. Wird der Funktionsbegriff dann in einer Vorlesung an der Universität verwendet, können mentale Konflikte entstehen, wenn dieser Begriff nicht mehr mit dem Begriff aus der Schule übereinstimmt (Beitlich et al., 2015). Es werden oft Funktionen diskutiert, die sich nicht mithilfe von Funktionsgraphen in einem Koordinatensystem veranschaulichen lassen, wie etwa die Funktion, die jedem Studierenden einen Studienplan zuordnet. Funktionen können also sehr allgemein verwendet werden.
Die Theorie von Tall und Vinner ist im Besonderen für den Übergang von der Schul- in die Hochschulmathematik relevant, da formale Definitionen eine entscheidende Rolle innerhalb der universitären Mathematik einnehmen. Zudem sind sie Grundlage für den Aufbau begrifflichen Wissens, das für das Arbeiten mit mathematischen Begriffen essentiell ist.

4.4.4 Modell der Repräsentationsformen nach Bruner

Bruner (1966) entwickelte ein Modell zum Lernen von Inhalten. Ursprünglich war es für das Lernen im Vorschul- oder Primarbereich entwickelt worden, weswegen es deutlich von entwicklungspsychologischen Aspekten beeinflusst ist. Bruner geht davon aus, dass das Lehren von Inhalten an die jeweilige Altersgruppe angepasst werden muss.
Mit dem Ausdruck „Repräsentation“ ist zum einen die „subjektive Repräsentation“ und zum anderen die „äußere Präsentation“ (Tietze, Klika & Förster, 2000, S. 56) gemeint. Am effektivsten ist es nach Bruner, Inhalte zunächst auf **enaktiver** Ebene zu erfahren. Das bedeutet, dass der erste Kontakt mit neuen Inhalten durch eine aktive Handlung stattfinden sollte. Weiterhin kann nach Bruner die **ikonische** Repräsentationsstufe angestrebt werden. In dieser Ebene findet eine erste Abstraktion statt: Es werden nunmehr keine konkreten Handlungen ausgeführt, sondern Inhalte werden mithilfe von Bildern veranschaulicht. Die **symbolische** Repräsentationsstufe ist frei von Bezügen zu konkreten Gegenständen oder Handlungen, vielmehr repräsentieren Symbole den Inhalt. Im Bereich der Mathematik kann man bei der symbolischen Ebene drei Unterkategorien bilden und zwischen einer „umgangssprachlichen, fachsprachlichen und (streng) formalen Darstellung“ unterscheiden (Tietze, Klika & Wolpers, 2000a, S. 56).
Das Modell von Bruner (1966) beschreibt Übergänge in verschiedene Repräsentationen: Auf der enaktiven Ebene findet eine Handlungsorientierung statt, in der der Begriff mittels konkreter

Objekte erfasst wird. Beim Übergang in die ikonische Ebene müssen Lernende die Repräsentationsform ändern, in diesem Fall müssen Lernende von konkreten Objekten und Handlungen zu einer visuellen Darstellung des Begriffs gelangen. Schließlich findet ein Übergang zur symbolischen Ebene statt. Bei der Einführung eines gleichschenkligen Dreiecks können Eigenschaften beispielsweise durch Ausschneiden und Basteln enaktiv entdeckt werden. Im Anschluss können Dreiecke gezeichnet oder konstruiert werden, was ebenso eine handelnde Tätigkeit ist. Liegt bereits eine Zeichnung vor, so können Lernende mit der ikonischen Repräsentation erkennen, welche Charakteristika ein gleichschenkliges Dreieck besitzt. Der Übergang zum Formalen wäre dann die Angabe einer Definition, d. h. die Eigenschaften werden mithilfe von Symbolen, in diesem Fall mithilfe von mathematischer Fachsprache, angegeben.
Auch Reiss und Hammer (2013) sowie Zech (1996) betrachten den Wechsel zwischen Repräsentationsformen als eine wichtige Unterstützung des Lernprozesses und Förderung des Transfers auf andere Inhalte. Für das Lernen mathematischer Inhalte ist es nach diesem Modell sinnvoll, mit Repräsentationen zu beginnen, welche die Inhalte für die Lernenden leicht zugänglich machen, und dann erst Repräsentationen zu wählen, die etwa auf einer höheren Abstraktionsebene liegen. Diese Vorgehensweise wird durch Tietze, Klika und Förster (2000, S. 62) gestützt. Demnach zeigte sich im „Rahmen der lernpsychologischen Diskussion ... da[ss] es nicht sinnvoll ist, formale Begriffe und Axiomensysteme an den Anfang einer Unterrichtseinheit zu stellen. Statt dessen sollte man zunächst mit inhaltlich-konkreten Definitionen, Sätzen und Regeln arbeiten, die dem Schüler anschaulich einsichtig sind“.
Daneben vertreten Aebli (1983) und Gagné (1975) die Ansicht, dass Begriffe – wenn möglich – praxisnah eingeführt werden sollten. Durch den direkten Umgang mit den Begriffen können sich die Lernenden mit diesen vertraut machen. Im weiteren Lernverlauf sollten dann Verknüpfungen zu bereits bestehen Begriffen hergestellt werden, sodass ein systematischer Aufbau des Begriffsnetzes ermöglicht wird.

4.4.5 Anpassung des Modells von Bruner an den Übergang von der Schule an die Hochschule

Das Modell von Bruner (1966) lässt sich auch auf den schulischen Unterricht sowie teilweise auf Lehrveranstaltungen an der Universität übertragen. Die enaktive Stufe im Modell, die eine Handlungsorientierung enthält, kann etwa nicht direkt auf die universitäre Praxis übertragen werden, da in universitären Lehrveranstaltungen kaum Begriffe behandelt werden, die mithilfe konkreter Verfahrensweisen erfasst werden können.
Eines der wenigen Beispiele für einen enaktiven Zugang zu universitären mathematischen Inhalten bieten etwa Zopfgruppen mit drei Strängen (Epple, 1999): Dies sind mathematische Gruppen, deren Verknüpfung durch das Flechten dreier Stränge eines Haarzopfes beschrieben werden können, also mit dem Übereinanderlegen der drei Haarstränge. Dass es sich dabei um eine Gruppe handelt, kann auf enaktive Weise, durch tatsächliches Flechten verschiedener Elemente, untersucht werden. Es gibt nicht viele solcher Beispiele aus dem universitären Kontext, die auf handelnde Weise erfahren werden können. Für die Hochschulmathematik ist es folglich sinnvoll, die enaktive Stufe dahingehend zu erweitern, dass auch das Generieren von Beispielen bzw.

Gegenbeispielen oder das Ausführen konkreter Operationen, wie zum Beispiel das Rechnen, in dieser Ebene enthalten sind. Es sind zwar keine Tätigkeiten in dem Sinn, dass etwas mit Händen haptisch erfasst wird, dennoch tragen sie zur Konkretisierung des Begriff bei und machen diesen für die Lernenden „fassbar“.

Zur Unterscheidung von Bruners ursprünglicher enaktiver Ebene zu der eben beschriebenen, erweiterten Ebene, die sich auf konkrete Beispiele und Operationen bezieht, wird sie im Folgenden als *Ebene der konkreten Beispiele* bezeichnet. Diese lässt sich ebenso wie Bruners enaktive Stufe in den Begriffsbildungsprozess eingliedern, der ausgehend von dieser Ebene weiter zu einer visuellen Ebene und schließlich zu einer formalen Ebene die Bildung von Begriffen unterstützt. Im Fall der Hochschulmathematik ist es zudem zweckmäßig, Bruners symbolische Stufe auf den fachsprachlichen Bereich und im Besonderen auf formale Darstellungen zu beziehen (Tietze, Klika & Wolpers, 2000a).

5 Anwendung begrifflichen Wissens beim mathematischen Argumentieren

Mathematisches Argumentieren ist die zentrale Tätigkeit in der Mathematik. Mithilfe mathematischer Argumentation können neue Sätze bewiesen werden, was wiederum die mathematische Forschung voranbringt. Die Relevanz mathematischer Argumentationen wurde sogar der breiten Öffentlichkeit deutlich, als Andrew Wiles im Jahr 1994 den letzten unbewiesenen Satz von Fermat beweisen konnte und damit große mediale Aufmerksamkeit auf sich zog. Beweisen kann – wie in dem Fall von Wiles – auch Faszination bei Nicht-Mathematikern auslösen.

Aufgrund dieser Bedeutung für die Mathematik werden in fachmathematischen Lehrveranstaltungen der Universität nicht nur Inhalte gelehrt, sondern typische Denk- und Arbeitsweisen der Mathematik – wie das Argumentieren – behandelt. Eine Voraussetzung, um mathematisch argumentieren oder beweisen zu können, ist begriffliches Wissen, das im Kapitel 4 thematisiert wird. Während mathematisches Argumentieren und seine Förderung in der Sekundarstufe vielfach untersucht (Heinze et al., 2008; Heinze & Reiss, 2007, 2004; Klieme, Reiss & Heinze, 2003; Reiss, 2002; Heinze & Kwak, 2002; Healy & Hoyles, 2000) sowie Ansätze entwickelt werden, um Argumentieren zu fördern, gibt es bisher kaum empirische Ergebnisse und Ansätze zur Förderung im tertiären Bereich.

5.1 Argumentieren und Beweisen

Die Begriffsklärung von „Argumentieren“ und „Beweisen“ ist für die Mathematik relevant, da es keine einheitliche Definition dieser beiden Begriffe gibt. Da mathematische Beweise und Argumentationen in der Hochschulmathematik eine wichtige Rolle spielen, ist es essentiell zu wissen, was diese beiden Begriffe bedeuten und wie sie zu unterscheiden sind. Einerseits können diese beiden Begriffe als gänzlich verschiedene Fähigkeiten angesehen werden, andererseits als ähnliche mathematischen Tätigkeiten. Generell bezieht sich der Begriff des Beweisens stets auf einen mathematischen Kontext, wohingegen der des Argumentierens auch in Alltagssituationen verwendet wird. In den Bildungsstandards wird keine klare Trennung zwischen mathematischen Argumentieren und Beweisen vorgenommen. Im Folgenden werden die für den Übergang von der Schule an die Hochschule im Fach Mathematik wichtigsten Aspekte im Rahmen mathematikdidaktischer Diskussionen dargelegt[1].

[1] Eine ausführliche Diskussion über den Unterschied zwischen mathematischer Argumentation und Beweisen, die auch den sekundären und primären Bildungsbereich einschließt, findet sich zum Beispiel bei Reiss und Ufer (2009), E. Brunner (2013, 2014), H. N. Jahnke und Ufer (2015) oder bei Grundey (2015).

Mathematisches Argumentieren

Argumentieren im Allgemeinen kann sowohl im mathematischen, juristischen oder philosophischen Kontext verwendet werden. Es ist aber auch Teil des Alltags und wird daher gerade auch in diesem Bereich angewendet. Argumentieren findet stets innerhalb eines kommunikativen Kontextes statt. Im Schulkontext gibt es Untersuchungen, die allgemeine argumentative Fähigkeiten von Schülerinnen und Schülern im Austausch untereinander und mit der Lehrperson im Mathematikunterricht analysieren (z. B. Pedemonte, 2007; Solar, Giménez & Piquet, 2012; Solar & Deulofeu, 2014). Im Rahmen dieser Studien ging es um die Analyse und Förderung argumentativer Fähigkeiten in einer Lernsituation. Solchen Untersuchungen liegt meist das Argumentationsmodell zugrunde, das von Toulmin (2003) entwickelt wurde. Das Modell legt die innere Struktur eines Arguments offen, mithilfe derer analysiert werden kann, wie Personen argumentieren und auf welche Weise sie ihr Argument begründen oder stützen. Damit ist es möglich zu analysieren, wie die Lehrperson auf Äußerungen der Schülerinnen und Schüler reagiert und ob dadurch die argumentativen Fähigkeiten der Lernenden eher gefördert oder gehemmt werden.
Argumentieren im innermathemaischen Kontext wird als „mathematisches Argumentieren" bezeichnet, um zu verdeutlichen, dass damit eine spezielle Form des Argumentierens gemeint ist. Die Bildungsstandards in Deutschland nennen die Aktivität des mathematischen Begründens daher auch „mathematisches Argumentieren" (KMK, 2012, 2004b). Im Kapitel 3.3 findet sich eine nähere Ausführung, was unter mathematischer Argumentation im Sinne der bundesweiten Bildungsstandards verstanden wird.

Wie mathematische Argumentation und Beweisen zusammenhängen, stellt zum Beispiel E. Brunner dar. Sie versteht unter mathematischem Beweisen ein „spezifisches, mathematisch strenges Begründen ... und ... eine sehr besondere Form des Argumentierens" (E. Brunner, 2013, S. 108). Beweisen ist demnach durch seine strenge logisch-deduktive Vorgehensweise vom Argumentieren abzugrenzen, das auch auf einer semantischen Ebene erfolgen kann. Autoren wie Weber und Alcock (2004) unterscheiden bei einem Beweis ganz explizit eine semantische und eine syntaktische Form. Die syntaktische Form zeichnet sich durch ihre formale Strenge aus, während beim semantischen Beweisen auch Intuition und Anschauung eine Rolle spielen. Mathematisches Argumentieren kann also als Vorstufe eines mathematischen Beweises angesehen werden.

Mathematisches Beweisen

Mathematisches Beweisen bezeichnet E. Brunner (2013, S. 62) als „Arbeit an Beweisproblemen ... auf der Basis von mathematischem Verständnis". Diese Ansicht verdeutlicht, dass Beweisen eine komplexe mathematische Tätigkeit ist. Wie in Kapitel 4.3 dargestellt wird, zeigt sich das Verstehen eines Begriffs oder Sachverhalts als anspruchsvoller Prozess, der viel Initiative und Aktivität auf Seiten der Lernenden voraussetzt. Beim Beweisen ist Verstehen demnach lediglich die Basis, auf Grundlage dessen das Beweisen beginnt.
Es kann entweder der Prozess oder das Produkt des Beweisens betont werden. Bereits Pólya (1949, S. 9) merkt an, dass die Mathematik „im Entstehen ... als experimentelle induktive Wissenschaft" erscheint. Ist hingegen der Prozess bereits abgeschlossen, hat sie eher einen „systematisch deduktive[n]" Charakter (Pólya, 1949, S. 9). Das bedeutet, dass aus einem Prozess des

Entstehens, dem Finden und dem Entwickeln eines Beweises, der fertige Beweis resultiert. Die Formulierung „Arbeit an einem Beweisproblem“ (E. Brunner, 2013, S. 62) bei der vorangegangenen Begriffsklärung bringt den *Prozess* des Beweisens in den Vordergrund, was insbesondere aus didaktischer Sicht den Kern trifft: Lernenden soll nicht ein fertiges Bild eines Beweises präsentiert werden, sondern es soll versucht werden, den Prozess des Beweisens und seine innere Struktur offenzulegen. Auf diese Weise ist es möglich, Lernende beim Entwickeln mathematischer Beweise zu unterstützen (Reiss & Ufer, 2009). Bei der Betrachtung eines fertigen Beweises ist im Gegensatz dazu für Studienanfängerinnen und -anfänger kaum nachvollziehbar, auf welche Weise ein Beweis entwickelt werden kann.

5.2 Modell zum Beweisen von Boero

Dass das Produkt – der formale Beweis – auch bei Expertinnen und Experten das Ergebnis eines Beweis*prozesses* ist, wird im Beweismodell von Boero (1999) deutlich. In diesem beschreibt Boero, welche Stufen typischerweise durchlaufen werden, bis ein formaler Beweis entsteht (zit. n. Reiss & Ufer, 2009, S. 162):

1. Finden einer Vermutung aus einem mathematischen Problemfeld heraus
2. Formulierung der Vermutung nach üblichen Standards
3. Exploration der Vermutung mit den Grenzen ihrer Gültigkeit; Herstellen von Bezügen zur mathematischen Rahmentheorie; Identifizieren geeigneter Argumente zur Stützung der Vermutung
4. Auswahl von Argumenten, die sich in einer deduktiven Kette zu einem Beweis organisieren lassen
5. Fixierung der Argumentationskette nach aktuellen mathematischen Standards
6. Annäherung an einen formalen Beweis

Später ergänzen Heinze und Reiss (2004) Boeros Modell um eine siebte Komponente: die „Akzeptanz durch die mathematische Community“ (Reiss & Ufer, 2009, S. 162). Auch Manin, Koblitz und Zilber (2010) betonen die soziale Komponente eines Beweises: „A proof becomes a proof only after the social act of ‚accepting it as a proof‘“ (Manin et al., 2010, S. 45). Erst wenn ein Beweis von einer bestimmten Community akzeptiert wird, handelt es sich um einen in dieser Gruppe gültigen Beweis. Beweisen besitzt somit immer eine soziale Komponente und seine Akzeptanz ist von der mathematischen Community abhängig. Je nachdem, um welche Community es sich handelt, werden bestimmte Inhalte vorausgesetzt und müssen nicht mehr bewiesen werden oder umgekehrt. Diese Erkenntnis ist insofern für die Übergangsphase relevant, als dass beim Eintritt in die Universität sich die Bezugsgruppe ändert, die entscheidet, ob Beweise als gültig akzeptiert werden. An der Schule war die Bezugsnorm die Schulklasse oder die Lehrperson. An der Universität hingegen nehmen diese Rolle die Hochschuldozentin oder der -dozent, die Kommilitonen oder aber mathematische Fachliteratur ein. Dementsprechend ändert sich die soziale Norm, die entscheidet, ob ein mathematischer Beweis als gültig akzeptiert wird oder nicht. Zudem ist eine

Verringerung des Wissensgefälles zwischen der Community und den Lernenden durch die Vermittlung von Fachwissen an der Universität zu verzeichnen. Studierende bauen im Laufe ihres Studiums immer mehr fachliches Wissen auf, was für die Validierung mathematischer Beweise essentiell ist.
Zu Beginn des Studiums wissen die Studienanfängerinnen und -anfänger jedoch in der Regel nicht, welche Beweise an der Universität akzeptiert werden und welche nicht. Es ist verständlich, dass sie in der Entwicklung von Beweisen geschult und unterstützt werden müssen.
Das Stufenmodell zum Beweisen von Boero (1999) stellt dar, wie aus dem anfänglichen Verstehen der zu beweisenden Aussage mit entsprechender Hypothesenfindung ein formaler Beweis entsteht. Gerade für Mathematikstudierende kann dieses Modell einen Einblick in eine realistische Beweiskonstruktion geben, um zu erkennen, dass selbst bei Expertinnen und Experten der Beweis erst auf der letzten oder vorletzten Stufe formalisiert wird. Boero beschreibt die Konstruktion eines Beweises, das Rezipieren oder Validieren mathematischer Beweise kann dabei jedoch kaum erlernt werden.
Im Kapitel 2 wird beschrieben, dass in universitären Vorlesungen Beweise meist in ihrer Produktform dargestellt werden. Der Prozess des Beweisens wird in der Regel nicht explizit thematisiert. Um Studierenden jedoch verständlich zu machen, was ein Beweis ist und woraus er sich zusammensetzt, ist gerade die Betrachtung und Analyse des Prozesses wichtig. Auf Basis dieses Modells wurden bereits Fördermaßnahmen zum Beweisen in der Sekundarstufe II ausgearbeitet, die im Folgenden beschrieben werden.

Fördermaßnahmen für Lernende zum Beweisen auf Basis des Modells von Boero

Mithilfe des Modells von Boero (1999) werden Maßnahmen entwickelt, die mathematisches Beweisen in der Sekundarstufe fördern, wie beispielsweise spezielle Lernumgebungen, welche die Entstehung eines Beweises etwa durch den Einsatz heuristischer Lösungsbeispiele aufzeigen (Reiss, Heinze, Renkl & Groß, 2008; Heinze et al., 2008; Reiss et al., 2006; Reiss & Renkl, 2002). Diese Lernumgebungen fokussieren nicht das Produkt des Beweises, sondern den Prozess der Beweisfindung und -entwicklung. Sie orientieren sich dabei an dem Modell von Boero (1999). Die Ergebnisse der genannten Studien verdeutlichen, dass heuristische Lösungsbeispiele zur Förderung mathematischer Argumentation in der Sekundarstufe beitragen. Aufgrund der positiven Ergebnisse im Sekundarbereich werden ebenso heuristische Lösungsbeispiele für den Übergang Schule-Hochschule entwickelt. Beispiele solcher heuristischen Lösungsbeispiele finden sich in Kollar et al. (2014).
Im Rahmen des DFG-Projekts *ELK-Math*, das an der Universität Augsburg, der Ludwig-Maximilians-Universität München sowie der Technischen Universität München durchgeführt wird, wird untersucht, ob heuristische Lösungsbeispiele auch für die Übergangsphase geeignet sind und sich mathematische Argumentationsfähigkeit fördern lässt. Die Ergebnisse können jedoch keine Fortschritte im individuellen Beweisprozess nach der Betrachtung der Lösungsbeispiele feststellen (Kollar et al., 2014).

5.3 Ergebnisse zur Analyse mathematischer Argumentation im Hochschulsektor

Um mathematische Argumentation an der Universität in geeigneter Weise zu fördern, muss der Entwicklungsstand der Studienanfängerinnen und -anfänger hinsichtlich des mathematischen Argumentierens bekannt sein. Spezifisches Vorwissen ist für den weiteren Lernerfolg bedeutend (z. B. Hattie, 2009). Darauf aufbauend können Unterstützungsmaßnahmen entwickelt werden, die an die Voraussetzungen der Lernenden adaptiert sind. In diesem Kapitel werden Forschungsergebnisse präsentiert, die auf Untersuchungen zum mathematischen Argumentieren basieren.
In der vorliegenden Arbeit wird das Argumentieren in der Geometrie untersucht (siehe Kapitel 8). Daher ist es von Interesse, wie das geometrische Denken bei Studienanfängerinnen und -anfängern entwickelt ist. Ein wesentlicher Unterschied zwischen Schul- und Hochschulmathematik ist der steigende Grad an Formalismus (siehe Kapitel 2.3). Es wird daher im Folgenden untersucht, welche Schwierigkeiten im Detail hinsichtlich des Formalismus auftreten. Des Weiteren ist es wichtig zu wissen, auf welche Weise die Lernenden zu Beginn des Studiums argumentieren, also welche Art von Argumenten sie beim Beweisen verwenden. Am Ende des Kapitels wird ein Prozessmodell zum Beweisen von E. Brunner (2013) vorgestellt, das den Entwicklungsprozess beim Argumentieren, ausgehend von Beispielen bis hin zur Formulierung eines formal-deduktiven Beweises, beschreibt.

5.3.1 Geometrisches Denken beim mathematischen Argumentieren

Gegenstand der Untersuchungen der vorliegenden Arbeit sind Fachbegriffe und mathematische Sätze aus dem Bereich der Geometrie. Daher ist es relevant, die Entwicklung geometrischen Denkens zu analysieren, das einen Einfluss auf das mathematische Argumentieren hat. In der mathematikdidaktischen Forschung hat sich dabei das Modell von van Hiele (1984) durchgesetzt, das Entstehung und Weiterentwicklung geometrischen Denkens speziell beim Argumentieren ausführt (zit. n. Klieme, Reiss & Heinze, 2003):

1. Level: rein visuell
2. Level: deskriptiv, analytisch
3. Level: abstrakt, relational
4. Level: formal, deduktiv
5. Level: korrektes meta-mathematisches Verständnis

Die fünf Ebenen beginnen mit sehr anschaulichem und konkretem Argumentieren. Dies kann auf Basis von visuellen Darstellungen oder der Betrachtung von Beispielen erfolgen. Im Anschluss daran wird begonnen, analytisch zu denken und die Argumente sowie die zu beweisende mathematische Aussage zu untersuchen. Dabei wird auch deskriptiv argumentiert. Auf dem dritten Level werden Relationen zu anderen Fachbegriffen oder Sätzen hergestellt. Der Satz oder die Argumente werden damit in einem mathematischen Kontext eingebettet und es entsteht ein

Begriffsnetz. Durch die Vernetzung des Begriffs mit anderen Inhalten findet ein Abstraktionsprozess statt (vgl. Kapitel 4.2). Auf dem vierten Level können die Argumente bereits formal-deduktiv dargestellt werden. Die letzte Stufe ermöglicht den Lernenden einen Überblick über die relevanten geometrischen Inhalte, die mit der Argumentation verknüpft sind. Sie bauen dabei meta-mathematisches Verständnis über Axiome und Theoreme auf.
Das folgende Beispiel soll die Abfolge der Levels veranschaulichen: Möchten Lernende beispielsweise beweisen, dass im $\mathbb{R}^2$ drei beliebige Vektoren immer linear abhängig sind, ist eine Veranschaulichung auf visueller Ebene sinnvoll. Sie können zum Beispiel verschiedene Pfeile im Koordinatensystem zeichnen und damit die mathematische Aussage des Satzes untersuchen. Im Anschluss an die rein visuelle Anschauung können Lernende deskriptiv berichten, welche Informationen sie aus der Visualisierung gewonnen haben und Hypothesen aufstellen. Dabei bemerken sie, dass bereits zwei gut gewählte, also nicht kollineare Vektoren den ganzen $\mathbb{R}^2$ aufspannen und man alle anderen Vektoren des $\mathbb{R}^2$ als Linearkombinationen daraus erhalten kann. Eine detaillierte Untersuchung des Sachverhalts erfolgt durch die Betrachtung von Beispielen und dem Versuch, Gegenbeispiele zu entwickeln. Argumente und Hypothesen werden auf dem dritten Level in Zusammenhang mit anderen mathematischen Inhalten gesetzt. Daraus entsteht das Argument, dass die Linearkombination dreier Vektoren im $\mathbb{R}^2$ für geeignete Koeffizienten der Nullvektor ist. Auf den höheren Levels folgt dann die Formalisierung der Argumente und die typische Darstellung der Linearkombination dreier Vektoren.

Betrachtet man den idealen Aufbau mathematischer Begriffe, der sich an dem Modell der Repräsentationsformen von Bruner orientiert (siehe Kapitel 4.4.4), so erkennt man, dass die Entwicklung geometrischen Denkens mit seinem Modell Ähnlichkeiten besitzt: Es wird ebenso beschrieben, wie auf dem ersten Level lediglich eine visuelle Anschauung des Satzes oder der Argumente möglich ist. Erst auf höherem Level können Argumente auf formale Weise wahrgenommen und formuliert werden. Für den Aufbau geometrischer Argumentationen ist es demnach förderlich, aus der Anschauung heraus Argumente zu formulieren und diese dann zu formalisieren.
Der Prozess, der bei diesem Beispiel durchlaufen wird, hat zudem Ähnlichkeiten mit dem Beweisprozess von Boero (siehe Kapitel 5.2), obwohl dieser den Argumentationsprozess von Expertinnen und Experten beschreibt. Während das Modell von van Hiele (1984) eher die Denkprozesse fokussiert, die bei der Argumentation mit geometrischen Inhalten ablaufen, werden im Modell von Boero konkrete Handlungsschritte beschrieben. Eine Kombination beider Modelle ist also für Untersuchungen zum Argumentieren sinnvoll, so wie es in einer ähnlichen Weise im Prozessmodell von E. Brunner (2013) realisiert wurde (siehe Kapitel 5.3.4).
Das Modell von van Hiele (1984) stellt eine idealisierte Entwicklung mathematischen Denkens in der Geometrie dar. Abweichungen vom linearen Verlauf sowie Übergänge auf höhere Stufen, obwohl untere noch nicht vollständig ausgebildet sind, können auftreten. Die Stufen sollten demnach nicht als abgeschlossene Entwicklungsstadien aufgefasst werden, vielmehr können sie als Prozess des Denkens gedeutet werden, der sowohl kontinuierlich als auch unregelmäßig verlaufen kann und durchlässig bzgl. höherer und niedrigerer Levels ist.
Jedoch kann das Modell als Orientierung für die Förderung von Denkprozessen verwendet werden. Werden an der Universität beispielsweise Sätze zu linearen Abbildungen bewiesen, Lernende

jedoch erst auf deskriptive Weise mit linearen Abbildungen arbeiten können – also dem zweiten Level des geometrischen Denkens zugeordnet werden können – so können Schwierigkeiten entstehen, einen formal-deduktiven Beweis zu verstehen oder eigenständig zu entwickeln.
Dieses Vorgehen lehnt sich an die Theorie der *zone of proximal development* an, die von Vygotsky (1978) geprägt wurde. Aufgrund entwicklungspsychologischer und kognitiver Voraussetzungen befinden sich Lernende nach dieser Theorie auf einer bestimmten Entwicklungsstufe bzgl. des Denkens. Um höhere Denkniveaus zu erreichen, ist die Unterstützung durch Lehrpersonen sinnvoll. Eine lernförderliche Entwicklung stellt es dabei dar, immer zunächst die nächsthöhere Stufe anzustreben (Vygotsky, 1978).

5.3.2 Problem der formalen Strenge beim mathematischen Argumentieren

Es ist problematisch, dass oft der Prozess, wie ein Beweis in universitären Lehrveranstaltungen entsteht, für viele Studierende nicht sichtbar wird. Aus diesem Grund bleibt es Studierenden oft verborgen, welche Strategien sie zu Beginn des Beweisprozesses anwenden können (z. B. Moore, 1994). Zusätzlich wird der Einblick in einen Argumentationsprozess durch die formale Strenge, in der Beweise an Universitäten üblicherweise dargestellt werden, erschwert.
Lakatos (1979) kritisiert diesen Formalismus, da er nichts über den Fortschritt der Mathematik aussagt. Er vertritt die Ansicht, dass die Wissenschaft Mathematik an sich kein fertiges Gebilde ist, das stets allgemeine wahre Aussagen produziert, sondern eine Wissenschaft, in der stetig Hypothesen aufgestellt sowie Sätze weiterentwickelt und optimiert werden. Dabei spielt vor allem die Logik eine entscheidende Rolle, weniger der Formalismus (Lakatos, 1979). Um den Prozess- und Entwicklungscharakter der Mathematik zu unterstreichen, verfasste er sein Werk *Beweise und Widerlegungen* in Dialogform.
Seine Ansichten lösten Diskussionen innerhalb der Mathematik über die notwendige formale Strenge eines Beweises aus. Tatsächlich fand ein Umdenken in der Mathematikdidaktik statt: Neben streng formalen Beweisen sollten – vor allem an Schulen – auch nicht-formale und anschauliche Beweise behandelt werden. Hanna (1997) postuliert zum Beispiel, dass mathematisches Beweisen auch in der Schule gefördert werden sollte, da Beweisen bei Schülerinnen und Schülern in erster Linie Verständnis über einen Sachverhalt ausbilden und Überzeugungarbeit leisten solle; formale Strenge sei dabei noch nicht so wichtig. Auch Pólya (1949) vertrat die Ansicht, dass im schulischen Unterricht eher Wert auf plausibles Schließen und inhaltlich-anschauliche Beweise gelegt werden sollte, die unter Umständen auch unvollständig sein können. Weiterführende Literatur zu der Diskussion innerhalb der Mathematikdidaktik, ob Beweise im Schulunterricht entwickelt werden sollten und mit welcher formalen Strenge, kann zum Beispiel bei Hanna (1997, 1991) oder anderen (Hanna & de Villiers, 2008; Hanna & Jahnke, 1997, 1993; Lakatos, 1979) nachgelesen werden.
Für die Hochschuldidaktik bedeutet diese Entwicklung zum einen, dass Studierende an den Umgang mit wissenschaftlicher Mathematik herangeführt werden sollen und zum anderen, dass ein Bruch entstehen kann, wenn Studierende aus der Schule an die Universität wechseln, da Beweise auf eine andere Art geführt werden als im Schulkontext. Es ist daher plausibel, im ersten Studienjahr an die Vorgehensweise der Schule anzuknüpfen und durch offene Diskussionen den Wert eines axiomatisch-deduktiven Beweises herauszustellen. Die Studierenden können auf diese Wei-

se schrittweise erfahren, was axiomatisch-deduktive Beweise sind und wie man diese entwickelt. Auch sollte auf Formalisierung eingegangen und Vor- und Nachteile diskutiert werden. Oft ist es Lernenden nämlich nicht bewusst, dass formale Strenge und eine korrekte mathematische Argumentation nicht miteinander gleichzusetzen sind. Die Ergebnisse einiger Studien zeigen, dass die Ansicht, mathematische Beweise immer formal darzustellen, bei Schülerinnen und Schülern, aber auch bei Studierenden weit verbreitet ist (Reiss & Ufer, 2009; Healy & Hoyles, 1998; Martin & Harel, 1989). Wird ein Beweis formal ausgedrückt, so wird er von Lernenden eher als korrekt angesehen als ein nicht-formaler Beweis. Diese Ergebnisse werden auch von Wittmann und Müller (1988) bestätigt. Sie berichten von Diskussionen mit Lehramtsstudierenden, die davon überzeugt waren, dass mathematische Beweise immer streng formal dargestellt sein müssen und daher für die Schule pauschal ungeeignet wären. Selbst als die Dozentinnen und Dozenten Beispiele von korrekt bearbeiteten Beweisaufgaben von Schülerinnen und Schülern, die auf inhaltlich-anschaulicher Ebene argumentierten, zeigten, änderte sich die Meinung der Studierenden nicht (Wittmann & Müller, 1988). Dass es beim Beweisen jedoch hauptsächlich auf die Logik der Argumentation ankommt und formale Strenge erst beim Aufschreiben eines Beweises eine Rolle spielt, wird von vielen Lernenden nicht erkannt.
Die äußere Form eines Beweises kann also den eigentlichen Inhalt in den Hintergrund stellen. Dies ist problematisch, da dies dazu führen kann, dass die Tätigkeit des Beweisens eher als formaler Akt angesehen wird, bei der die inhaltliche Begründung eine untergeordnete Rolle spielt. Gerade aus diesem Grund ist es wichtig, nicht nur den fertigen, formalen Beweis darzustellen, sondern den Prozess in einer nicht-formalen Art mit anschaulichen Elementen zu thematisieren. Gerade für die Übergangsphase an der Universität im Fach Mathematik eignet sich demnach eine Herangehensweise, die auf inhaltlich-anschauliche Art an den formalen Beweisprozess heranführt.

5.3.3 Einsatz empirischer Argumentationen

Was mit den im vorhergehenden Kapitel dargestellten Befunden einhergeht, sind die Ergebnisse von Martin und Harel (1989), die berichten, dass für die meisten Studierenden ein deduktiver Beweis nicht ausreicht, um sie von der Wahrheit einer mathematischen Aussage zu überzeugen. Dies zeigt, dass besonders für Studienanfängerinnen und -anfänger ein axiomatisch-deduktiver Beweis zwar eher als korrekt angesehen wird, allerdings noch keine inhaltliche Überzeugungskraft besitzt. Vielmehr erwies sich eine Kombination aus induktiver und deduktiver Begründung als überzeugend. Das deutet darauf hin, dass formal-deduktive Argumente noch zu abstrakt sind, als dass ihr Inhalt von Studierenden hinreichend inhaltlich nachvollziehbar ist. Das könnte mit ein Grund sein, dass insbesondere empirische Argumentationen von Lernenden sehr häufig eingesetzt werden, um mathematische Aussagen zu begründen (z. B. Reiss, 2002; Healy & Hoyles, 2000, 1998; Martin & Harel, 1989).
Studien von Healy und Hoyles (2000) zeigen beispielsweise, dass vor allem das eigenständige Beweisen Lernenden schwer fällt. Bei ihrer Untersuchung wurde das Verständnis von Beweisen, die Fähigkeit, Beweise selbst zu konstruieren, sowie die Sichtweise auf die Rolle von Beweisen analysiert. Bei den Testpersonen handelte es sich um Schülerinnen und Schüler der 10. Jahrgangsstufe in Großbritannien. Die Probanden verfügten im Allgemeinen über sehr gute Mathematikkennt-

nisse. Bei der Studie nahmen ca. 2500 Lernende teil. Es zeigte sich, dass neben der Tatsache, dass es Lernenden schwer fällt, eigene Beweise zu führen, häufig empirische Argumente eingesetzt werden, die lediglich auf der Betrachtung einzelner Beispiele basieren. Dass eine solche Vorgehensweise zu keinen allgemeingültigen Aussagen führt, ist den Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe noch nicht bewusst (Healy & Hoyles, 2000).

Die Notwendigkeit zu erforschen, wie mathematisches Argumentieren gefördert werden kann, wird durch die Ergebnisse von Knuth (2002) unterstrichen: In der Studie wurden 16 Lehrerinnen und Lehrer der Sekundarstufe befragt, die bereits im Schuldienst arbeiten. Es wurden sowohl Interviews als auch Fragebögen ausgewertet. Die Ergebnisse verdeutlichen, dass viele Lehrkräfte Schwierigkeiten mit dem mathematischen Argumentieren haben und Begründungen auf Basis von Beispielen als überzeugend einschätzen.
Ebenso wie Studien mit Studierenden weisen die Ergebnisse darauf hin, dass die Darstellung mathematischer Argumentationen einen erheblichen Einfluss darauf hat, was als ein korrekter Beweis angesehen wird. Solche Ergebnisse verdeutlichen die Notwendigkeit einer angemessenen Förderung des mathematischen Argumentierens im Hochschulsektor, insbesondere auch in der Lehramtsausbildung.
Reiss und Ufer (2009) identifizieren vier Teilkompetenzen, welche die Grundlage für mathematisches Argumentieren sind: Problemlösefähigkeiten, Metawissen eines Beweises, mathematisch-strategisches Wissen und begriffliches Wissen. Die Tendenz, hauptsächlich empirische Argumentationen durchzuführen und formale Argumentationen als weniger überzeugend zu beurteilen (Martin & Harel, 1989), zeigt, dass Lernende meist nicht über alle diese Teilkompetenzen verfügen. Trotz der empirisch belegten Probleme von Schülerinnen und Schülern sowie Studierenden beim mathematischen Argumentieren, sind bisher kaum geeignete, didaktisch aufbereitete Fördermöglichkeiten für die Universität bekannt.

5.3.4 Prozessmodell zum Begründen für die Schule

Für das schulische Argumentieren entwickelte E. Brunner (2013) ein Modell, das den Prozess von einem experimentellen zu einem formal-deduktiven Beweis beschreibt und in Abbildung 5.1 dargestellt ist. Das Modell fasst theoretische Überlegungen sowie Forschungsergebnisse zusammen.

Sie berücksichtigt in ihrem Modell nicht nur die Individualebene und kognitive Prozesse, sondern auch soziale Einflüsse auf das Lernen von Beweisen. Des Weiteren integriert E. Brunner das Expertenbeweisprinzip von Boero (1999) (siehe Kapitel 5.2), das die Übergange von der Ebene der Beispiele zur semantischen Ebene sowie zur syntaktischen Verstehensebene führt, die schließlich das formal-deduktive Beweisen beinhaltet.
Im Wesentlichen beginnt der Prozess des Beweisens in der Schule mit der Motivation, überhaupt etwas begründen zu wollen. Dies kann mithilfe eines kognitiven Konflikts herbeigeführt werden. Wichtig ist, dass ein Beweisbedürfnis entsteht. Aufbauend auf dem Bedürfnis, einen Sachverhalt auf seine Korrektheit hin überprüfen zu wollen, stellt E. Brunner die Entwicklung von einem experimentellen zu einem operativen und schließlich zu einem formal-deduktiven Beweis dar. Ausgehend von einer basalen Ebene, die sich an der Betrachtung von Beispielen, Gegenbeispie-

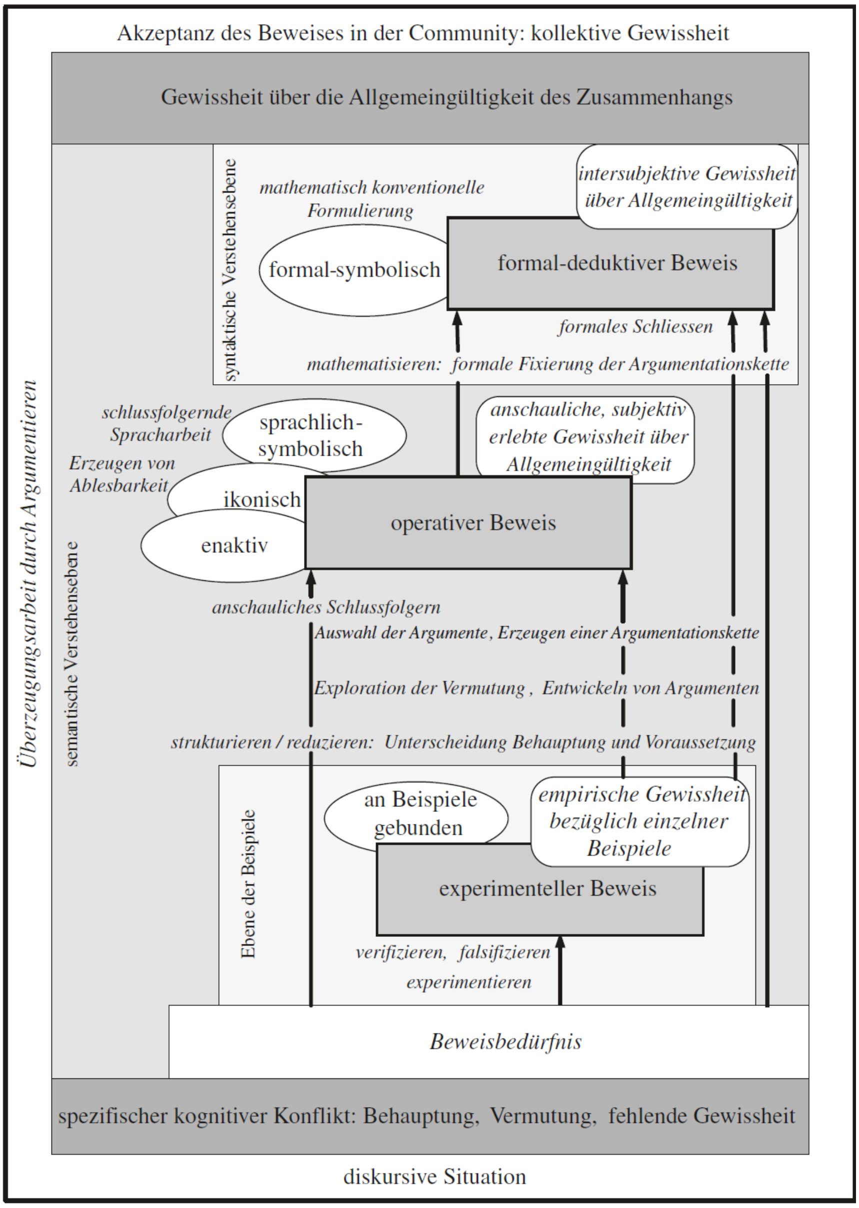


Abbildung 5.1: Prozessmodell mathematischer Argumentation von E. Brunner (2013)

len oder anderer empirisch gewonnener Evidenz orientiert, gelangt der Lernende – im idealen Fall – zum experimentellen Beweis. Dieser fördert die individuelle Einsicht der mathematischen Aussage und führt zur Hypothesenbildung. Eine systematische Fortsetzung des Beweisprozesses geschieht auf Basis des Expertenmodells von Boero (1999) (siehe Kapitel 5.2). Dabei löst sich die Lernende oder der Lernende durch Strukturierung relevanter Inhalte, Exploration der Vermutung und Auswahl geeigneter Argumente von der „Ebene der Beispiele“ (E. Brunner, 2013, S. 72). Anschauliches Schlussfolgern führt zu einem „operative[n] Beweis“ (E. Brunner, 2013, S. 72). Der Übergang von der semantischen zur syntaktischen Verstehensebene beschreibt E. Brunner als kritischen Schritt, der für Lernende nicht einfach ist. Das Durchlaufen der Repräsentationsstufen von Bruner (1966) (siehe Kapitel 4.4.4) und Formalisierung der Argumente ermöglichen den Übergang zum formal-deduktiven Beweis. Dabei vergrößert sich die Überzeugungskraft der Argumente, die fortlaufend zur Allgemeingültigkeit führen. Zuletzt sind formal-deduktive Ar-

gumente von der Community oder der Lerngemeinschaft zu akzeptieren, bis die Wahrheit des Satzes zur „kollektiven Gewissheit“ (E. Brunner, 2013, S. 72) wird. Der von E. Brunner (2013) in diesem Modell beschriebene Prozess stellt die Idealform einer Entwicklung eines mathematischen Beweises in der Schule dar. Im realen Lernprozess können Abweichungen und nichtlineare Abläufe auftreten.
Einige Studien mit Schülerinnen und Schülern aus der Sekundarstufe zur mathematischen Argumentationskompetenz zeigen, dass häufig empirische Argumentationen genutzt werden, die auf Beispielen beruhen (Healy & Hoyles, 2000; Reiss, 2002) (vgl. Kapitel 5.3.3). Im Prozessmodell von E. Brunner (2013) wäre das die Ebene der Beispiele, in der ein „experimentelle[r] Beweis“ (E. Brunner, 2013, S. 72) geführt wird, der lediglich auf Beispielen basiert. Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe befinden sich demnach noch auf der untersten der drei Stufen in diesem Modell. Um zu einem formal-deduktiven Beweis zu kommen, ist es für Lernende einfacher, zunächst die semantische Verstehensebene zu erreichen, also aus der Beispielebene zu einem operativen Beweis zu gelangen.
Das Prozessmodell wurde zwar für die Schule entwickelt, kann aber auf den universitären Bereich ausgeweitet werden. Fraglich ist dabei, auf welcher Stufe sich Studienanfängerinnen und -anfänger typischerweise befinden. Verwenden sie, wie Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe, häufig empirische Argumente oder befinden sie sich bereits auf einer höheren Stufe des Prozessmodells? Ergebnisse von Studien zum mathematischen Argumentieren an der Universität (Nagel & Reiss, 2016) deuten darauf hin, das Lernende zu Beginn des Universitätsstudiums nur vereinzelt empirische Argumentationen nutzen. Die Studierenden dieser Stichprobe befinden sich demnach auf einer höheren Stufe. Jedoch ist unklar, ob sich diese spezielle Klientel bereits in der Schule auf einem höherem Niveau befand. Für den universitären Bereich ist insbesondere der Übergang vom operationalen zum formalen Beweis interessant. Die Entwicklung einer formal-deduktiven mathematischen Argumentation, die E. Brunner in ihrem Modell beschreibt, geht mit dem Aufbau geometrischen Denkens konform, das im Kapitel 5.3.1 vorgestellt wird. Somit unterstützt das Prozessmodell zum Argumentieren die Entwicklung geometrischen Denkens von Lernenden beim Aufbau von Argumentationen.

5.3.5 Argumentationsschemata von Studierenden

Um Studierende an formales Beweisen heranzuführen, muss sinnvollerweise untersucht werden, wie ihre übliche Herangehensweise an Beweise ist. Auf diese Weise können mögliche Defizite schneller erkannt und thematisiert werden.
Harel und Sowder (1998) identifizieren in einer qualitativen Studie mit Studierenden drei grundsätzliche Arten von Argumenten, die beim mathematischen Beweisen eingesetzt werden.

1. **Externe Überzeugung:** Dabei sind die Lernenden von der Korrektheit eines Satzes oder einer Aussage überzeugt, können jedoch nicht fundiert angeben, warum sie das sind. Bei diesem Beweisprinzip orientieren sich die Lernenden beim Beweisen beispielsweise an Rituale oder formale Umformungen. Es spielt dabei weniger die Kreativität eine Rolle, sondern eher das Erinnern an Lösungsschemata für bestimmte mathematische Probleme. Zudem beziehen sich die Argumentationen oft auf Autoritäten, wie zum Beispiel Lehrerinnen und Lehrer, Dozentinnen und Dozenten oder Fachliteratur. Es wird also nicht

begründet, *warum* ein Sachverhalt gilt.

2. **Empirische Argumente:** Dazu zählen Argumentationen, die sich auf empirische Evidenz beziehen. Typischerweise werden hier Beispiele betrachtet und daraus allgemeine Schlussfolgerungen gezogen. Die Autoren unterschieden dabei induktiv-empirische und wahrnehmend-empirische Vorgehensweisen. Letztere beruht auf rudimentären Vorstellungen des zu beweisenden Sachverhalts.

3. **Analytische Argumente:** Bei der analytischen Argumentation werden Argumentationen auf Basis logischer Deduktion geführt. Die Argumente müssen jedoch nicht streng formal sein, der Schwerpunkt liegt hier auf logischer Verknüpfung der Argumente. Auch axiomatische Argumentationen werden dieser Kategorie zugeordnet.

Diese Beweisschemata wurden auf exploratorische Weise ermittelt und nicht *a priori* aufgestellt. Sie stellen daher einen realistischen Überblick der Vorgehensweisen von Studierenden dar, die einen mathematischen Sachverhalt beweisen wollten. Harel und Sowder (1998) gaben an, dass die aufgeführten Beweisprinzipien sich nicht gegenseitig ausschließen und es durchaus Überschneidungen innerhalb eines Beweises geben kann.
Auch andere Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler untersuchen die Beweisprinzipien von Studierenden: Recio und Godino (2001) analysieren in einer quantitativen Studie ebenfalls die Beweisschemata von Studienanfängerinnen und -anfängern. Die gefundenen Schemata ordnen die Autoren darüber hinaus den folgenden Kontexten zu: Alltag („daily life“), experimentelle Wissenschaften („experimental sciences“), Fachmathematik („professional mathematics“), Logik und grundlegende Mathematik („logic and foundations of mathematics“) (Recio & Godino, 2001, S. 83). Bei der Untersuchung zeichnen sich die folgenden vier Typen ab (Recio & Godino, 2001, S. 97):

1. personal explanatory argumentation schemes

2. empirical-inductive proof schemes

3. informal deductive schemes

4. formal deductive proof schemes

Beweisschemata des Typs 1 werden dem Alltagskontext zugeordnet. Schemata vom Typ 2 sind solche, die konkrete Beispiele als Argumentationen verwenden. Es handelt sich dabei um eine exploratorische Vorgehensweise. Beweistyp 3 beinhaltet zwar auch die Betrachtung von Beispielen, jedoch liegt keine Generalisierung ausgehend von diesen speziellen Beispielen vor. Es ist eine eher empirisch-induktive Herangehensweise. Im vierten Schema wird bereits logisch-deduktiv begründet, jedoch basieren die Argumentationen auf Analogien oder graphischen Werkzeugen, weswegen dieser Typ als nicht-formal deduktiv bezeichnet wird. Der letzte Typ beinhaltet Argumentationen, die logisch-deduktiv geführt werden und eine gewisse formale Strenge aufweisen. Es wird hier eine symbolische oder algebraische Fachsprache angewendet.
Vergleicht man diese Beweisprinzipien mit denen von Harel und Sowder (1998), so werden bei Recio und Godino (2001) im ersten Schema Begründungen zusammengefasst, die den Lernenden

helfen, den Sachverhalt zu verstehen, also auf Basis von Alltagsüberlegungen stattfinden. Bei Harel und Sowder kommt dieser Aspekt hingegen nicht vor. Eine Unterscheidung in eine induktive und deduktive Vorgehensweise wird bei beiden Schemata explizit vorgenommen. Auch eine empirische, auf Beispielen basierende, Argumentation weisen beide bei den Studienanfängerinnen und -anfängern nach. Recio und Godino weisen explizit darauf hin, dass je nach Kontext alle der aufgeführten Schemata geeignet sein können und dass – vor allem zu Beginn des Lernens mathematischer Beweise – auch die ersten Stufen sinnvoll sind.

Auch Martin und Harel (1989) untersuchen die Art der Beweisführung von Studienanfängerinnen und -anfängern. Zusätzlich werden in dieser Studie den Probanden verschiedene Argumente vorgelegt, bei denen sie entscheiden müssen, ob sie das Argument als überzeugend empfinden. Martin und Harel (1989) können dabei im Wesentlichen zwischen induktiven und deduktiven Herangehensweisen bei mathematischen Begründungen unterscheiden.

6 Modell zur Entwicklung begrifflichen Wissens am Übergang Schule - Universität

Um begriffliches Wissen im mathematischen Argumentationsprozess für die Lösung eines mathematischen Problems einsetzen zu können, ist Verständnis über die Begriffe und den dargestellten Sachverhalt notwendig (siehe Kapitel 4.3 und 4.4). Im Folgenden werden zuerst drei Ebenen vorgestellt, welche einen idealtypischen Ablauf bei der Entwicklung begrifflichen Wissens am Übergang von der Schule in die Hochschule darstellen und sich an den Stufen der Repräsentation von Bruner (1966) orientieren. Anschließend werden die Theorien zum begrifflichen Wissen von Sfard (1991) sowie Tall und Vinner (1981) miteinander kombiniert, woraus sich ein angemessenes Modell des begrifflichen Wissens für den Übergang Schule-Hochschule konstruieren lässt. Schließlich werden am Ende des Kapitels Schwierigkeiten, die sich bei der Anwendung anschaulicher und abstrakter Begriffe im Schul- und im Hochschulkontext ergeben können, aus der dargestellten Theorie abgeleitet.

6.1 Idealtypischer Ablauf der Entwicklung begrifflichen Wissens

Im Kapitel 4.4.4 wird die Theorie der drei Repräsentationsformen von Bruner (1966) vorgestellt. Für die vorliegende Thematik ist die wichtigste Aussage dieser Theorie, dass es für das Lernen von Begriffen förderlich ist, wenn eine Handlungsorientierung bzgl. des Begriffs stattfindet, dann eine Visualisierung und schließlich eine Formalisierung.
Eine Handlungsorientierung im ursprünglichen Sinne Bruners ist bei universitären Inhalten in der Regel kaum möglich. Das bedeutet aber nicht, dass Bruners Theorie für universitäres Lernen ungeeignet ist, sondern dass die Ausgestaltung der Theorie an den Kontext Hochschule angepasst werden muss, in dem Sinne, dass die erste Ebene eine *Ebene der konkreten Beispiele* wird, die zweite Ebene *Visualisierungen* zur Förderung des *concept images* (siehe Kapitel 2.3) fokussiert und in der symbolischen Ebene Bezug auf die *formale, mathematische Fachsprache* hergestellt wird, weniger auf Umgangssprache (siehe Kapitel 4.4.5). Diese Idee soll anhand zweier Beispiele aus der linearen Algebra veranschaulicht werden: Betrachtet werden die beiden linearen Abbildungen A_a und B

$$A_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto a \cdot x \qquad \text{und} \tag{6.1}$$

$$B : \mathcal{D} \to \mathcal{D}, \qquad f \mapsto \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f, \tag{6.2}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ und $\mathcal{D}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Vektoraddition und Skalarmultiplikation und $z \in \mathbb{R}$ sind.

Ebene der konkreten Beispiele

Im Falle der Einführung von linearen Abbildungen im Rahmen einer mathematischen Fachvorlesung im ersten Semester an der Universität, kann eine lineare Abbildung zwar nicht mit Händen erfasst werden, jedoch kann eine Konkretisierung des Begriffs auf Beispielebene erfolgen.

Beispiel 1

Ein Beispiel zur linearen Abbildung A_a für $a = 2$ ist etwa $A_2(x) = 2 \cdot x$, wobei $x \in \mathbb{R}$. Die beiden Linearitätsbedingungen können konkret überprüft werden:

$$\begin{aligned} A_2(x_1 + x_2) &= 2 \cdot (x_1 + x_2) = 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = A_2(x_1) + A_2(x_2), \\ A_2(\lambda \cdot x_1) &= 2 \cdot (\lambda \cdot x_1) = \lambda \cdot (2 \cdot x_1) = \lambda \cdot A_2(x_1), \end{aligned}$$

wobei $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Umformungen sind aufgrund der Kommutativität und Assoziativität in $\mathbb{R}$ für alle Elemente aus $\mathbb{R}$ möglich.

Eine noch konkretere Ausführung ergibt sich, wenn anstatt x_1, x_2 und λ spezielle Werte aus $\mathbb{R}$ eingesetzt werden, wie etwa $x_1 = 4$, $x_2 = -3$ und $\lambda = \frac{1}{2}$:

$$A_2(4 + (-3)) = A_2(1) = 2 \cdot 1 = 2, \tag{6.3}$$

$$A_2(4) + A_2(-3) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) = 8 + (-6) = 2 \tag{6.4}$$

$$\Rightarrow A_2(4 + (-3)) = A_2(4) + A_2(-3);$$

Die zweite Linearitätsbedingung kann man ebenso rechnerisch anhand des konkreten Beispiels überprüfen:

$$\begin{aligned} A_2\left(\frac{1}{2} \cdot 4\right) &= A(2) = 2 \cdot (2) = 4, \\ \frac{1}{2} \cdot A_2(4) &= \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 4) = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_2\left(\frac{1}{2} \cdot 4\right) = \frac{1}{2} \cdot A_2(4).$$

Lernende können also ganz konkret nachrechnen, ob die Abbildung in diesem speziellen Fall linear ist.

Beispiel 2

Bei dem zweiten Beispiel, das sich auf die lineare Abbildung B (siehe Definition in Term 6.2) bezieht, können die Linearitätsbedingungen wie eben auf eine konkrete Art überprüft werden, wenn zwei beliebig oft differenzierbare Funktionen, wie etwa $g_1 = \sin(z)$ und $g_2 = \cos(z)$, eingesetzt werden:

$$B(\sin(z)+\cos(z)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\sin(z)+\cos(z)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sin(z) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\cos(z) = B(\sin(z)) + B(\cos(z)),$$
$$B(\lambda \cdot \sin(z)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\lambda \cdot \sin(z)) = \lambda \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sin(z) = \lambda \cdot B(\sin(z)),$$

wobei $z \in \mathbb{R}$, $\sin(z), \cos(z) \in \mathcal{D}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und die Umformungen aufgrund der Eigenschaften der Differenzierbarkeit reeller Funktionen möglich sind.

Eine noch konkretere Herangehensweise wäre das tatsächliche Berechnen der ersten Ableitungen der Funktionen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sin(z) = \cos(z)$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\cos(z) = \sin(z)$:

$$B(\sin(z)+\cos(z)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\sin(z)+\cos(z)) = \cos(z)+\sin(z),$$
$$B(\sin(z)) + B(\cos(z)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sin(z) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\cos(z) = \cos(z)+\sin(z)$$

$$\Rightarrow B(\sin(z)+\cos(z)) = B(\sin(z)) + B(\cos(z)).$$

Die Berechnung der zweiten Linearitätsbedingung ist dann:

$$B(2 \cdot \sin(z)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(2 \cdot \sin(z)) = 2 \cdot \cos(z), \tag{6.5}$$
$$2 \cdot B(\sin(z)) = 2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sin(z) = 2 \cdot \cos(z) \tag{6.6}$$

$$\Rightarrow B(2 \cdot \sin(z)) = 2 \cdot B(\sin(z)).$$

Auch in diesem Beispiel können Studierende selbstständig nachrechnen, ob die Linearitätsbedingungen für spezielle Abbildungen erfüllt sind. Auf diese Weise ist es möglich, durch die Betrachtung von Beispielen und das tatsächliche Ausführen von Rechenprozeduren den Lernenden ein erstes „Gefühl“ für den Begriff einer linearen Abbildung zu geben. Dieser kann dabei noch auf die konkreten Beispiele beschränkt sein, wird aber mit dem Erreichen der im Folgenden beschriebenen Ebenen weiter ausgebildet und erweitert.

Visuelle Ebene

Nach der Betrachtung von Beispielen des im Begriff gefassten mathematischen Konzepts und der konkreten Überprüfung der Linearitätsbedingungen durch Nachrechnen ist eine Visualisierung wichtig, die dazu beiträgt, das *concept image* (siehe Kapitel 2.3) auszubauen. Zur Veranschaulichung der beiden Beispiele von linearen Abbildungen, die in den Termen 6.1 und 6.2 definiert wurden, werden ihre Funktionsgraphen gezeichnet.

Beispiel 1

Beim ersten Beispiel zur linearen Abbildung A_a werden zunächst konkrete Abbildungen mit $a \in \{-3; -\frac{3}{4}; 1; 2\}$ dargestellt (siehe Abbildung 6.1), damit die Lernenden einen ersten Überblick dieser Funktionenschar erhalten.

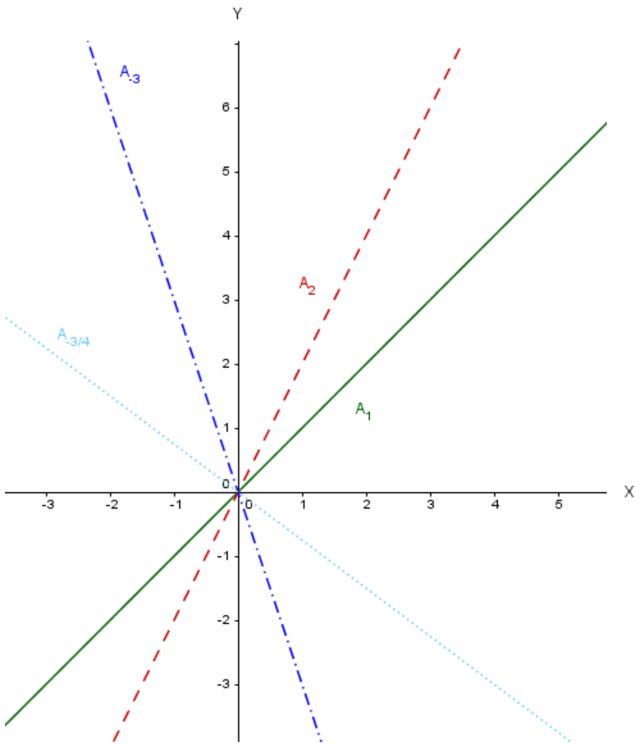


Abbildung 6.1: Darstellung ausgewählter Funktionsgraphen von A_a

Die Funktionenschar besteht aus Geraden unterschiedlicher Steigung, die alle durch den Ursprung des Koordinatensystems verlaufen. Der gestrichelt gezeichnete Funktionsgraph gehört zur Abbildung $A_2(x) = 2 \cdot x$ mit $x \in \mathbb{R}$, die vorher bereits betrachtet wurde. Mögliche Visualisierungen der Linearitätsbedingungen werden anhand des Graphen der Funktion A_2 veranschaulicht (siehe Abbildungen 6.2 und 6.3).

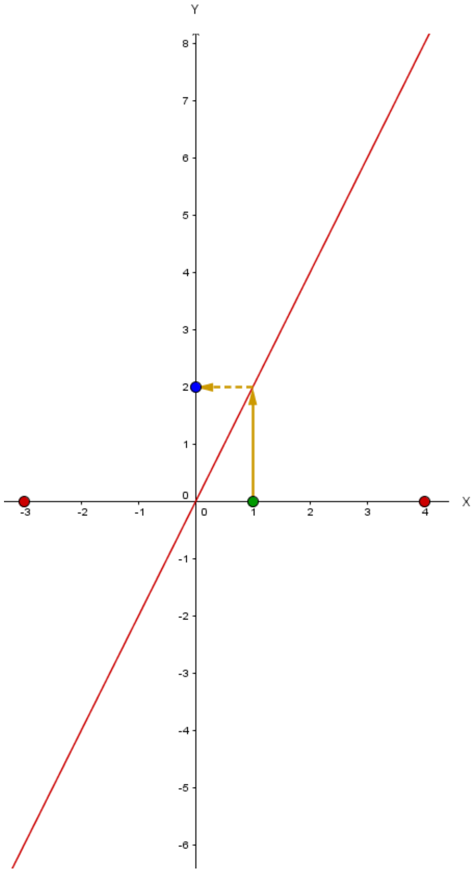


Abbildung 6.2: Visuelle Darstellung des Terms 6.3

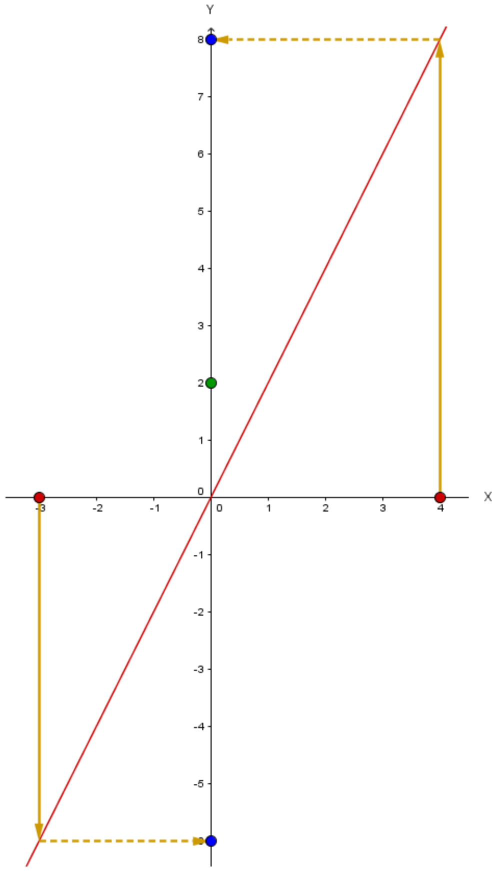


Abbildung 6.3: Visuelle Darstellung des Terms 6.4

Der erste Teil der ersten Linaritätsbedingung

$$A_2(4 + (-3)) = A_2(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

ist in Abbildung 6.2 dargestellt. Es wird dabei zuerst das Funktionsargument durch die Addition der beiden x-Werte $4 + (-3)$ bestimmt. Die beiden Werte 4 und -3 sind in der Abbildung auf der x-Achse bei -3 und 4 markiert. Das Ergebnis der Addition ist das Funktionsargument 1, das in der Abbildung auf der x-Achse bei 1 eingezeichnet wurde. Schließlich kann daraus der Funktionswert 2 bestimmt werden, der auf der y-Achse bei 2 gekennzeichnet wurde. Das Bestimmen des Funktionswertes ist in der Zeichnung durch die beiden Pfeile angedeutet.
In Abbildung 6.3 ist der zweite Teil der ersten Linearitätsbedingung

$$A_2(4) + A_2(-3) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) = 8 + (-6) = 2$$

veranschaulicht. In diesem Fall werden zuerst die Funktionswerte zu den Argumenten 4 und -3 bestimmt. Die Argumente sind auf der x-Achse bei 4 und -3 visualisiert und die beiden Funktionswerte bei 8 und bei -6 auf der y-Achse. Der Vorgang des Bestimmens der Funktionswerte ist wieder durch Pfeile in der Abbildung veranschaulicht. Abschließend werden die beiden Funktionswerte 8 und -6 addiert, um zum resultierenden Funktionswert 2 zu gelangen. Das Ergebnis der Addition ist auf der y-Achse markiert. Die zweite Linearitätsbedingung kann analog visualisiert werden.

Beispiel 2

Zum zweiten Beispiel der linearen Abbildung B wird diesmal die zweite Linearitätsbedingung, die in den Berechnungen 6.5 und 6.6 konkret bestimmt wurde, betrachtet. Die erste erfolgt analog.

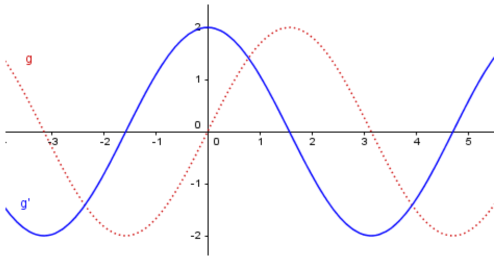


Abbildung 6.4: Visuelle Darstellung der Linearitätsbedingung in 6.5

Abbildung 6.4 zeigt die Bedingung

$$B(2 \cdot \sin(z)) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(2 \cdot \sin(z)) = 2 \cdot \cos(z),$$

wobei der Graph zur Funktion $g(z) := 2 \cdot \sin(z)$ gepunktet und der zu $g'(z) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} g(z)$ durchgezogen dargestellt ist. Der durchgezogene, resultierende Funktionsgraph ergibt sich also durch die Bestimmung der ersten Ableitung von $g(z) := 2 \cdot \sin(z)$.

Der zweite Teil der zweiten Linearitätsbedingung

$$2 \cdot B(\sin(z)) = 2 \cdot \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sin(z) = 2 \cdot \cos(z)$$

wird in den Abbildungen 6.5 und 6.6 dargestellt. Abbildung 6.5 zeigt den Funktionsgraphen $h(z) := \sin(z)$, der durchgezogen eingezeichnet wurde, sowie den Graphen seiner ersten Ableitung $h'(z) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} h(z)$, dessen Graph gestrichelt dargestellt ist. Um die Linearitätsbedingung zu visualisieren, muss h' mit dem Faktor 2 multipliziert werden. Dies ist in Abbildung 6.5 dargestellt. Die gepunkteten Pfeile deuten dabei die Multiplikation der Funktionswerte von h' mit dem Faktor 2 an.

Der resultierende, durchgezogen gezeichnete Funktionsgraph entspricht dem aus Abbildung 6.4, also letztlich dem Graphen von g'. Betrachten die Lernenden alle drei Abbildungen, so können sie auf visuelle Weise nachvollziehen, dass die zweite Linearitätsbedingung des Beispiels zu B gilt.

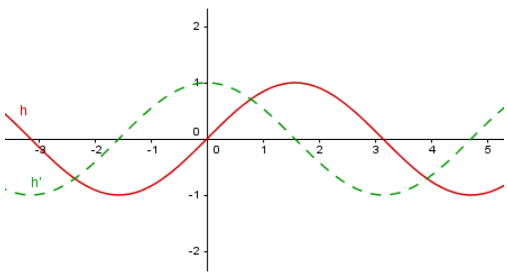


Abbildung 6.5: Darstellung 1 zu Berechnung 6.6

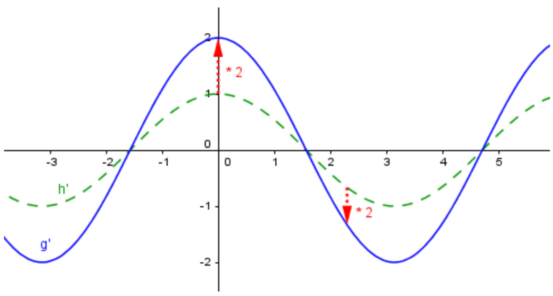


Abbildung 6.6: Darstellung 2 zu Berechnung 6.6

Das Erreichen der visuellen Ebene befähigt die Studierenden, die vorher generierten Beispiele zu veranschaulichen und in eine anderen Repräsentation überzuführen. Die Fähigkeit, Begriffe durch verschiedene Repräsentationen darzustellen, fördert das begriffliche Wissen (siehe Kapitel 4.4), da dabei der mathematische Begriff vertieft wird und mehr Vernetzungen zwischen Informationseinheiten ausgebildet werden.

Formale Ebene

Schließlich kann der Übergang zur formalen Ebene erfolgen: Dabei wird die Linearität mathematisch-formal definiert.

Beispiel 1

Es ergibt sich für das erste Beispiel der linearen Abbildung A_a:

$$\begin{aligned}
&A_a(x_1 + x_2) = a \cdot (x_1 + x_2) = a \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = A_a(x_1) + A_a(x_2),\\
&A_a(\lambda \cdot x_1) = a \cdot (\lambda \cdot x_1) = \lambda \cdot (a \cdot x_1) = \lambda \cdot A_a(x),
\end{aligned}$$

$\forall z \in \mathbb{R}$, wobei $a, \lambda \in \mathbb{R}$ und $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Beispiel 2

Für das zweite Beispiel erhält man:

$$\begin{aligned}
&B(g_1 + g_2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(g_1 + g_2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} g_1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} g_2 = B(g_1) + B(g_2),\\
&B(\lambda \cdot g_1) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\lambda \cdot g_1) = \lambda \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} g_1 = \lambda \cdot B(g_1),
\end{aligned}$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $g_1, g_2 \in \mathcal{D}$.

Mithilfe der Distanzierung von den konkreten Beispielen entsteht eine allgemeine Definition einer linearen Abbildung. Diese kann etwa auf die folgende Weise formuliert werden:

> Gegeben seien die $\mathbb{K}$-Vektorräume $(A, +, \cdot)$ und $(B, \oplus, \circ)$ sowie eine Abbildung $F : A \to B$. Gilt $\forall v, w \in A \wedge \forall \alpha \in \mathbb{K}$: $F(v + w) = F(v) \oplus F(w) \wedge F(\alpha \cdot v) = \alpha \circ F(v)$, so heißt F $\mathbb{K}$-linear.

Eine allgemeine und formale Definition der Linearität erleichtert es den Lernenden, ihr begriffliches Wissen auf weitere Beispiele und Spezialfälle zu übertragen. Zudem ist die Kenntnis einer formalen Definition Grundlage zum Entwickeln eines formal-deduktiven Beweises (siehe Kapitel 5.3).

6.2 Identifikation und Auswahl geeigneter Begriffskomponenten

Im Folgenden werden zwei Theorien, die sich mit Komponenten mathematischer Begriffe beschäftigen, kurz dargestellt und schließlich in einem Modell miteinander verbunden. Dabei werden auch die im vorhergehenden Abschnitt dargestellten Ebenen mit den Komponenten in Verbindung gebracht.

Begriffskomponenten von Sfard

Die Unterscheidung in eine konkrete, eine visuelle sowie eine symbolische Ebene, findet sich in einer ähnlichen Weise bei den Begriffskomponenten von Sfard (1991) wieder: Sie unterscheidet bei Begriffen eine operationale und eine strukturelle Komponente (siehe Kapitel 4.2).

Die **operationale Komponente** beinhaltet konkrete Handlungen, wie es ebenso innerhalb der Ebene der konkreten Beispiele, die im vorhergehenden Abschnitt erläutert wurde, zutreffend ist. Im Sinne der Hochschulmathematik kann man gleicherweise das Generieren von Beispielen sowie das Durchführen von Berechnungen dazu zählen. Die operationale Komponente basiert auf dem Prozesscharakter der Mathematik. Betrachtet man wieder die beiden Beispiele zu linearen Abbildungen aus dem vorhergehenden Abschnitt, so wird deutlich, dass die operationale Komponente einer linearen Abbildung sich durch das Ausführen von Berechnungen oder dem Erstellen von Visualisierungen charakterisieren lässt.
Die operationale Komponente wird zum Beispiel bei der linearen Abbildung $A_2(x) = 2 \cdot x$ durch die konkreten Berechnungen zur Überprüfung der Linearität gefördert, da Lernende dabei den Umgang mit dem Begriff der Linearität erfahren können. Durch algebraische Umformungen und dem anschließenden Vergleich stellen sie fest, dass $A_2\left(\frac{1}{2} \cdot 4\right) = \frac{1}{2} \cdot A_2(4)$ gilt. Dabei wird zusätzlich die wichtige Bedeutung des Generierens von konkreten Beispielen ersichtlich, welches es Lernenden erleichtert, grundsätzlich Operationen mit linearen Abbildungen auszuführen. Aufgrund der Betonung von Prozessen bekommt der mathematische Begriff der linearen Abbildung einen dynamischen Charakter, mit dem Lernende auf konkrete Weise operieren können.

Die **strukturelle Komponente** (Sfard, 1991) legt den Fokus auf die innere Struktur des Begriffs sowie auf Relationen zu anderen mathematischen Objekten. Wendet man sich wieder den beiden Beispielen linearer Abbildungen zu, so können Lernende erkennen, dass die Beispiele sich zwar voneinander unterscheiden und auch die Visualisierungen entsprechend verschieden sind, jedoch die Linearitätsbedingungen im Wesentlichen gleich sind.
Bei dem Erkennen der inneren Struktur werden Verbindungen zwischen den einzelnen Beispielen linearer Abbildungen hergestellt, die sich zwar in ihrer konkreten Ausführung unterscheiden, mit der grundsätzlichen Vorgehensweise allerdings identisch sind. Im Idealfall können Lernende selbstständig die allgemeinen Linearitätsbedingungen formulieren, die für alle linearen Abbildungen gelten müssen.
Es entsteht dabei ein semantisches Netz, welches die dem Begriff zugehörigen Wissenselemente strukturiert. Lernende sind in diesem Stadium in der Lage, den grundsätzlichen Aufbau des Begriffsnetzes zu erkennen. Dabei werden Details unwichtiger und der Begriff kann aus einer

gewissen Distanz betrachtet werden. Deshalb bekommt er einen eher statischen Charakter. Die strukturelle Komponente eines Begriffs basiert dementsprechend eher auf dem Produktcharakter von Mathematik.

Concept image und concept definition

Betrachtet man zusätzlich die Theorie von Tall und Vinner (1981) über Begriffskomponenten (siehe Kapitel 2.3), so gibt es Ähnlichkeiten zu denen, die Sfard definiert. Tall und Vinner unterscheiden zwischen *concept image* und *concept definition* (Vinner, 1991, 1983; Tall & Vinner, 1981). Dabei beschreibt die *concept definition* die formale Definition eines Begriffs; das *concept image* hingegen beinhaltet alle mentalen Bilder, welche sich auf den Begriff beziehen. Details zur Theorie von Tall und Vinner (1981) können in Kapitel 4.4.3 nachgelesen werden.

Kombination der Theorien

Bezüglich der drei Ebenen, die im vorhergehenden Abschnitt anhand zweier Beispiele aus der linearen Algebra ausführlich erläutert wurden, lässt sich erkennen, dass das *concept image*, welches die Visualisierungen eines Begriffs enthält, aktiviert wird, wenn eine Lernende oder ein Lernender von der Ebene der konkreten Beispiele in die visuelle Ebene wechselt. Auf der visuellen Ebene werden Begriffe mithilfe von adäquaten Darstellungen veranschaulicht. Im *concept image* werden unter anderem solche Visualisierungen generiert und gespeichert. Die beiden Aspekte – visuelle Ebene und *concept image* – stehen demnach in Beziehung zueinander. Das Erreichen der visuellen Ebene kann sogar als Voraussetzung für das *concept image* angesehen werden, das erst entstehen kann, wenn Lernende in der Lage sind, Visualisierungen zu erstellen. In einer ähnlichen Weise kann die formale Ebene mit dem *concept image* verknüpft werden: Das *concept image* beinhaltet neben visuellen, ganz generell, mentale Vorstellungen zu Begriffen, die zum Beispiel auch symbolischer Art sein können. Bei der Übersetzung von der visuellen zur formalen Ebene werden geeignete Symbole für den Begriff ausgebildet, die wieder Grundlage des *concept images* sind. Mithilfe dieser Symbole können weitere Vorstellungen erstellt werden.
Die *concept definition* enthält die formale Definition eines mathematischen Begriffs (siehe Kapitel 2.3). Insbesondere in der universitären Mathematik werden Definitionen in mathematischer Fachsprache und nicht in Alltagssprache verfasst. Bei der Formulierung einer mathematischen Definition auf Universitätsniveau werden teilweise auch spezielle mathematische Symbole verwendet. Zudem liegt ein hoher Grad an Formalismus bei hochschulmathematischen Definitionen vor, was zum Beispiel bei der Betrachtung der im vorherigen Abschnitt aufgeführten Definition einer linearen Abbildung deutlich wird. In solchen Definitionen sind beispielsweise mathematische Symbole enthalten, die zu einer Verdichtung einer mathematischen Aussage beitragen. Dies kann dazu führen, dass Lernende Schwierigkeiten haben, eine formal dargestellte Definition zu lesen und verstehen.
Daneben lassen sich Verbindungen zwischen der Theorie von Sfard (1991) und der von Tall und Vinner (1981) herstellen: Die operationale Komponente eines Begriffs wird vor allem durch konkrete Operationen mit dem Begriff, wie etwa durch Berechnungen, Konstruktionen oder andere

sehr konkrete Herangehensweisen, gefördert. Eine handlungsorientierte Perspektive auf einen mathematischen Begriff steht daher in enger Verbindung mit der Repräsentationsebene der konkreten Beispiele. Generieren Studierende beispielsweise verschiedene Spezialfälle einer linearen Abbildung, so fördern sie beim Prozess des Generierens die Weiterentwicklung der operationalen Komponente bzgl. linearer Abbildungen. Wurden verschiedene lineare Abbildungen entwickelt, so können diese nicht nur in algebraischer, sondern auch in geometrischer Form vorhanden sein. Es werden demnach unter Umständen zusätzlich Visualisierungen des Begriffs erstellt, die ihrerseits der Ausbildung und Förderung des *concept image* dienen. Die Weiterentwicklung der operationalen Komponente kann somit einen positiven Einfluss auf die Ausbildung des *concept images* haben.

Beispiel

Wird zum Beispiel die bereits bekannte lineare Abbildung A_a, die im Abschnitt 6.1 durch den Ausdruck (6.1) definiert wurde, generiert, so liegt es nahe, sich auch den Abbildungen $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ und $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 1$ zu widmen. Während L die Linearitätsbedingungen erfüllt, handelt es sich bei K nicht um eine lineare Abbildung. Lernende können bei der Betrachtung von Beispielen und Gegenbeispielen bestimmte Vorstellungen über den Begriff ausbilden und erkennen evtl. bereits allgemeingültige Eigenschaften, ohne sie jedoch konkret zu formulieren.
Bilden sich mentale Vorstellungen eines mathematischen Begriffs aus, kann das dazu führen, dass Lernende beginnen, neue Beispiele zu erstellen, um die ausgebildeten Vorstellungen zu überprüfen. Entsteht bei Studierenden zum Beispiel die fehlerhafte Vorstellung, dass Abbildungen der Art $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann linear sind, falls ihr Graph eine Ursprungsgerade ist, kann dies zur Bildung weiterer Beispiele führen, um diese erste Hypothese auf empirische Weise zu überprüfen. Dabei wird die operationale Komponente aktiviert, wodurch wieder neue Visualisierungen im Koordinatensystem entstehen können, die ihrerseits im *concept image* gespeichert werden.

Die operationale Komponente sowie das *concept image* beeinflussen sich demnach gegenseitig und tragen wechselseitig dazu bei, dass die jeweils andere Komponente weiter ausgebildet wird. Dieser gegenseitige Einfluss von operationaler Komponente und *concept image* ist in Abbildung 6.7 dargestellt.

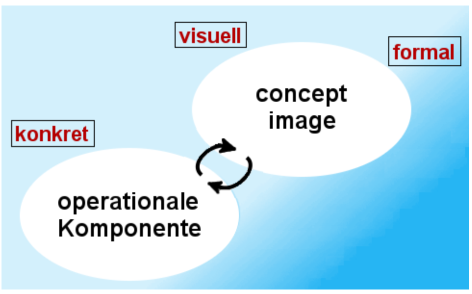


Abbildung 6.7: Zusammenhang zwischen operationaler Komponente und *concept image*

Die Ausbildung mentaler Vorstellungen im *concept image* und die Aktivierung der operationalen Komponente tragen mit dazu bei, dass mindestens die Ebene der konkreten Beispiele und die visuelle Ebene erreicht werden. Vor allem bei der Beschäftigung mit Hochschulmathematik kann davon ausgegangen werden, dass Lernende relativ schnell auf das Niveau der formalen Ebene gelangen, da Vorlesungsinhalte in der Regel mit Fachbegriffen dargestellt werden. Es wird explizit darauf hingewiesen, dass das Arbeiten mit Mathematik auf der formalen Ebene sich im Moment lediglich auf das Kennen und Anwenden mathematischer Fachsprache und Symbole bezieht. Es folgt daraus zwangsläufig noch nicht die Fähigkeit, selbstständig formale oder deduktive Argumente zu formulieren.

Das stetige Erzeugen von Vorstellungen im *concept image* lässt bei weiterer Beschäftigung mit dem Begriff Cluster entstehen. Diese trennen Beispiele von Gegenbeispielen ab und grenzen etwa lineare Abbildungen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ von linearen Abbildungen, die Elemente aus $\mathbb{R}$ in den $\mathbb{R}^2$ abbilden, voneinander ab.
Dieses Zusammenfassen und Abgrenzen bildet eine Strukturierung zwischen den verschiedenen Vorstellungen aus. Neu generierte Vorstellungen können dann in die bestehende Struktur eingeordnet und in Beziehung zu bereits bestehenden Repräsentationen gesetzt werden. Dieser Vorgang ist Teil der Begriffsbildung, die im Kapitel 4.4 ausführlich dargestellt wurde. Diese Ausbildung einer mentalen Struktur fördert die Entwicklung der strukturellen Komponente. Abbildung 6.8 veranschaulicht den Einfluss von *concept image* auf die strukturelle Komponente.

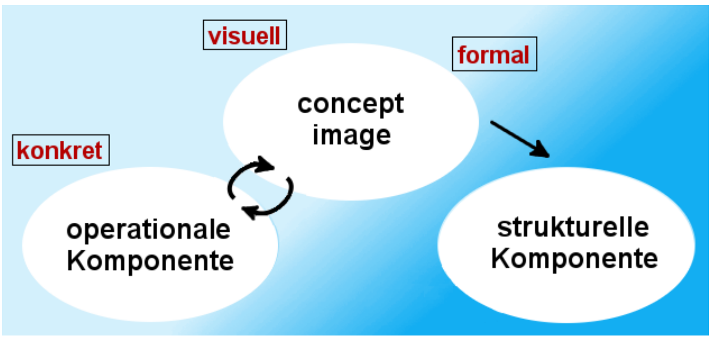


Abbildung 6.8: Zusammenhang zwischen operationaler Komponente, *concept image* und struktureller Komponente

Die strukturelle Komponente offenbart die innere Struktur eines Objekts und lässt Verbindungen zu anderen Begriffen erkennen: Weist ein Begriff eine ähnliche innere Struktur auf, kann dieser seinerseits mit dem ursprünglichen Begriff verknüpft werden. Es entsteht also ein Netz aus Informationen, die in spezieller Weise miteinander verknüpft werden.

Diese systematische Anordnung von Informationen führt zu einem **Abstraktionsprozess** (siehe Kapitel 4.2). Dabei können Lernende anhand der inneren Struktur und der daraus resultierenden Ordnung bereits wesentliche Eigenschaften des Begriffs identifizieren. Daraus kann schließlich eine adäquate Definition des Begriffs formuliert werden. In der Hochschulmathematik werden Begriffe eher durch ihre charakteristischen Eigenschaften definiert, also mittels einer charakte-

ristischen Definition (siehe Kapitel 4.1.3). Durch die Annäherung an eine Definition des Begriffs mithilfe der Identifikation von Eigenschaften wird die *concept definition* ausgebildet, wenn Lernende bereits vorwiegend auf der formalen Ebene denken.
Auch die strukturelle Komponente und die *concept definition* beeinflussen sich gegenseitig. Es ist nicht festgelegt, mittels welcher Eigenschaften ein mathematischer Begriff definiert wird. Meist können Begriffe mithilfe verschiedener Eigenschaften definiert werden und dabei dennoch denselben Begriff beschreiben. Im Fall der linearen Abbildung könnte man diese ebenso mithilfe eines Isomorphismus definieren. Durch die wechselseitige Betrachtung möglicher, definierender Eigenschaften und der Definition an sich, interagieren die strukturelle Komponente und die Komponente der *concept definition* miteinander. Diese Verbindung ist in Abbildung 6.9 dargestellt.

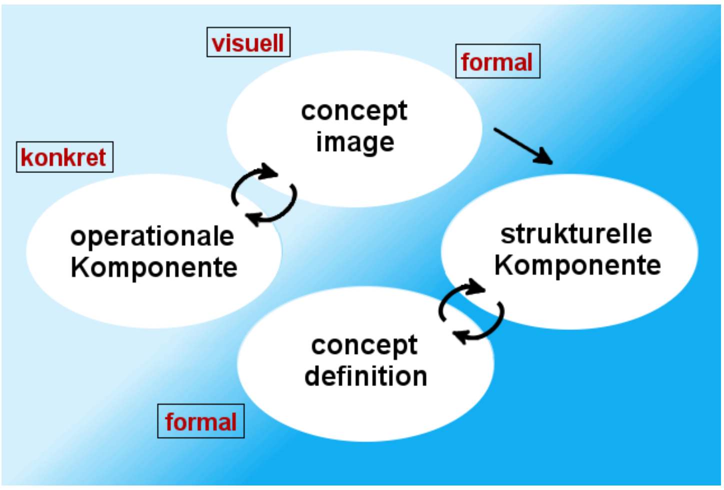


Abbildung 6.9: Zusammenhang zwischen operationaler Komponente, *concept image*, struktureller Komponente und *concept definition*

Durch den eben beschriebenen Abstraktionsprozess, der zur formalen Definition des Begriffs und damit zum Aufbau der *concept definition* beiträgt, kann ein mathematischer Begriff aus verschiedenen Perspektiven betrachtet und in verschiedenen Kontexten angewendet werden. Einerseits ist es möglich, eine formale Sichtweise auf den Begriff einzunehmen, bei welcher die strukturelle Komponente und *concept definition* aktiviert werden; andererseits kann eine anschauliche Sichtweise eingenommen werden, bei welcher die operationale Komponente sowie das *concept image* essentiell sind. Müssen zur Lösung eines mathematischen Problems Beispiele erstellt oder lineare Abbildungen visualisiert werden, sind die ausgebildete operationale Komponente sowie das *concept image* wichtig. Muss hingegen ein axiomatisch-deduktiver Beweis auf Hochschulniveau geführt werden, müssen die strukturelle Komponente und die *concept definition* in geeigneter Weise fortentwickelt sein, um zur Lösung beitragen zu können.

Nach Durchlaufen des beschriebenen Prozesses ist es möglich, Operationen auf höherem mathematischen Niveau durchzuführen. In diesem Stadium ist zum einen die Struktur des Begriffs ausgebildet, die Verbindungen zu anderen Begriffen aufzeigen kann. Zum anderen kann der Begriff bereits formal dargestellt werden, was zum Verständnis weiterer mathematischer Aussagen, welche den Begriff beinhalten, beitragen kann.

Beispiel

Zum Beispiel ist zum Verständnis der mathematischen Aussage

> Eine lineare Abbildung $F : A \to B$ mit $\mathrm{Ker}(F) = \{\mathbf{0}\}$ ist injektiv.

eine Voraussetzung zu wissen, was eine lineare Abbildung ist. Daher können nach einer basalen Ausbildung der vier Komponenten weitere Operationen angewendet werden, zu deren Lesen und Verstehen Fähigkeiten zur Strukturierung und Formalisierung notwendig sind. Im Fall der linearen Abbildung ist es nun beispielsweise möglich, mehrere lineare Abbildungen durch Komposition miteinander zu verknüpfen.

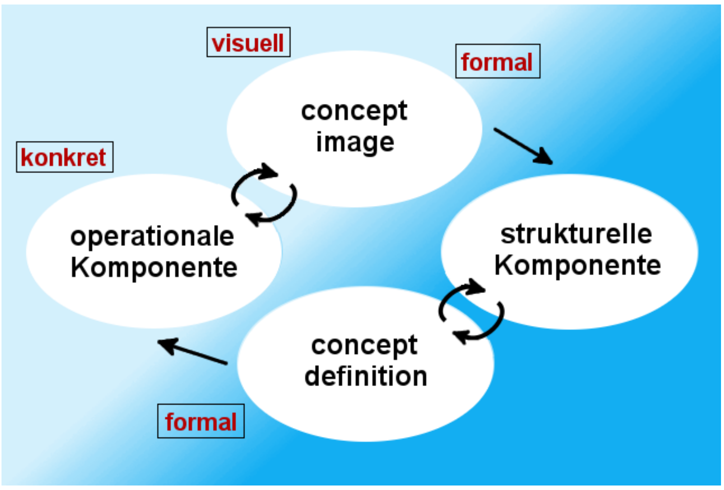


Abbildung 6.10: Zusammenhang zwischen den vier Komponenten beim Begriffsbildungsprozess

Der beschriebene Zusammenhang ist in Abbildung 6.10 veranschaulicht. Durchläuft man den dargestellten Prozess, werden unterschiedliche Facetten eines mathematischen Begriffs aufgebaut. Durch entsprechende Adaption kann die Betonung der einen oder anderen Komponente zur Lösung bestimmter mathematischer Probleme beitragen. Der Prozess verläuft spiralförmig, was bedeutet, dass bei intensiver Beschäftigung mit einem Begriff, ein Arbeiten auf immer höherem mathematischen Niveau ermöglicht wird. Das begriffliche Wissen wird dabei stetig vertieft. Ein spiralförmiger Begriffsaufbau ist auch für das Lernen von Inhalten im Sinne des Spiralcurriculums (Bruner, 1970) vorteilhaft.

Der in Abbildung 6.10 dargestellte Prozess ist speziell für den Übergang von der Schule an die Universität interessant, denn genau in dieser Phase findet ein Wechsel von eher konkretem zu eher abstraktem Inhalt statt: In der Schule – insbesondere bis zur Mitte der Sekundarstufe II – werden mathematische Themen typischerweise mithilfe handlungsorientierter Verfahren erarbeitet. Es werden Beispiele oder Visualisierungen eingesetzt, um den Begriffserwerb zu unterstützen. Im Gegensatz dazu wird an der Universität großer Wert auf innermathematische Strukturen gelegt und die Einführung von Fachbegriffen erfolgt in der Regel durch formale Definitionen (siehe Kapitel 2.3).

Bezieht man die Rolle des Kontextes beim Lernen von Mathematik mit ein (siehe Kapitel 2.5), ist die Aufbereitung eines Lösungsweges im schulischen Mathematikunterricht zum Beispiel ausreichend, wenn mit der operationalen Komponente oder dem *concept image* gearbeitet wird. In der universitären Mathematik ist es dagegen angemessen, Lösungswege mithilfe der strukturellen Komponente und der *concept definition* aufzubereiten.

Zwischenfazit

Auf Schulniveau findet eher die Förderung der operationalen Komponente eines Begriffs sowie die Ausbildung des *concept image* statt, wohingegen auf universitärem Niveau meist die strukturelle Komponente und die *concept definition* im Vordergrund stehen. Die **operationale Komponente** und das ***concept image*** zeigen also für den **Kontext Schule** eine höhere Relevanz auf, die **strukturelle Komponente** und die ***concept definition*** hingegen für den **Kontext Hochschule**.

Der Zusammenhang der vier Komponenten ist in Abbildung 6.11 veranschaulicht. Sie zeigt sowohl auf, wie die Komponenten von Sfard (1991) mit denen von Tall und Vinner (1981) kohärieren als auch, welche Bereiche dem Schul- bzw. dem Hochschulkontext zuzuordnen sind. Daneben deuten die Repräsentationsebenen – konkret, visuell und formal – an, in welcher Reihenfolge die Entwicklung begrifflichen Wissens idealerweise stattfinden sollte.

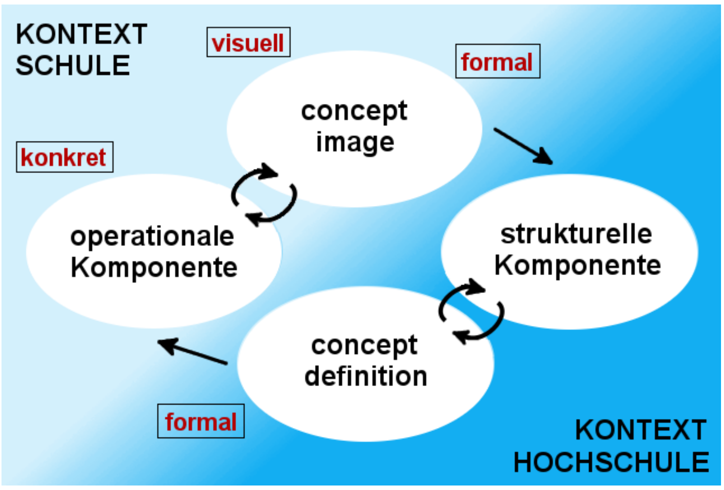


Abbildung 6.11: Modell zur Entwicklung begrifflichen Wissens am Übergang Schule-Hochschule

Voraussetzung der *concept definition* ist, dass Lernende sich bereits auf der formalen Ebene befinden. Sind sie jedoch noch nicht mit speziellen mathematischen Symbolen, die zum Verstehen der formalen Definition notwendig sind, vertraut, ist es für die Begriffsentwicklung dieses Fachbegriffs ungünstig und es können Lücken im begrifflichen Wissen entstehen.
Zu Beginn des Hochschulstudiums kennen Lernende in der Regel noch nicht (ausreichend) die Bedeutung und Verwendung mathematischer Symbole, da sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Aus diesem Grund treten häufig Schwierigkeiten beim Verstehen formal dargestellter Inhalte auf, was dazu führen kann, dass Lücken im begrifflichen Wissen entstehen.

Der Hintergrund in Abbildung 6.11 deutet den Übergang vom Schulkontext in den Hochschulkontext an. Der Übergang von einem hellen in einen dunkler gefärbten Hintergrund symbolisiert die beiden Kontexte, zwischen denen sich Studienanfängerinnen und -anfänger am Ende der Schulzeit und zu Beginn der Studienzeit bewegen.
Er kann nicht scharf gezogen werden, da bereits am Ende der Sekundarstufe II sowie im ersten Studienjahr Überschneidungen der Kontexte möglich sind. Gegen Ende der Sekundarstufe II kann begonnen werden, mathematische Begriffe formal zu definieren, und im ersten Studienjahr können Beispiele in Fachvorlesungen betrachtet werden, womit Begriffe veranschaulicht werden. Auch in späteren Lehrveranstaltungen werden üblicherweise Beispiele betrachtet, wenn neue Begriffe eingeführt werden. Eine exklusive Kategorisierung der vier Komponenten kann daher nicht vorgenommen werden. Die Zuteilung der Komponenten zu den beiden Kontexten deutet lediglich an, dass typischerweise und vorrangig die jeweils beiden Komponenten in einem bestimmten Kontext gefördert werden.

Weiterhin ist anzumerken, dass vor allem in den letzten Jahren viele Anstrengungen an deutschen Hochschulen und Universitäten unternommen wurden, um formale Hochschulinhalte zu visualisieren. Das hier vorgestellte Modell bildet jedoch eine Grundlage, die bisherigen Innovationen theoretisch einzubetten. Das Modell, das im Diagramm 6.11 dargestellt ist, wurde in einer ähnlichen Weise von Nagel und Reiss (2016) vorgestellt. Das dort beschriebene Modell wurde weiterentwickelt und in der vorliegenden Arbeit in seiner aktuellen Form ausgeführt.

6.3 Erklärungsansätze für Schwierigkeiten beim Erwerb und bei der Anwendung begrifflichen Wissens

Das Modell in Abbildung 6.11 zeigt die ideale Entwicklung begrifflichen Wissens für die Schnittstelle Schule - Hochschule auf. Zusätzlich können Erklärungsansätze abgeleitet werden, warum bestimmte Begriffe eher Schwierigkeiten bei der Anwendung in bestimmten Aufgaben hervorrufen als andere Begriffe.

6.3.1 Schwierigkeiten beim Arbeiten mit abstrakten Begriffen

Bei abstrakten Begriffen dominiert die strukturelle Komponente, die operationale Komponente hingegen spielt eine untergeordnete Rolle (siehe Kapitel 4.2). Dadurch ist es möglich, dass das *concept image* nur unzureichend ausgebildet ist und dementsprechend weniger Vorstellungen und Beispiele über den Fachbegriff existieren. Es fehlt dem Begriff eine anschauliche Perspektive, mithilfe derer in konkreten Kontexten Probleme gelöst werden können.

Beispiel

Formale Einführungen von mathematischen Inhalten, wie zum Beispiel eine zu linearen Abbildungen, können dazu führen, dass vor allem die *concept definition* bzgl. dieser Begriffe ausgebildet wird, wodurch Schwierigkeiten entstehen können zu erkennen, wie die Linearitätsbedingungen anschaulich zu deuten sind und wie man sie rechnerisch überprüfen kann. Problematisch beim Begriff der linearen Abbildung ist zudem, dass er bereits in der Schule mittels einer von der universitären Definition abweichenden Beschreibung eingeführt wird. In der Schulmathematik sind lineare Funktionen typischerweise Abbildungen der Art $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto m \cdot x + t$, für alle $x \in \mathbb{R}$ und $m, t \in \mathbb{R}$. Eine lineare Abbildung, welche die Linearitätsbedingungen erfüllt, liegt bei der Schuldefinition nur beim Spezialfall mit $t = 0$ vor.

Durch das Fehlen geeigneter Vorstellungen oder Berechnungen ist ein eigenständiges Generieren der operationalen Komponente sowie des *concept image* notwendig, wenn Aufgaben auf anschauliche Weise gelöst werden sollen. Der Usus an Universitäten ist jedoch häufig ein sehr formaler und abstrakter Umgang mit mathematischen Inhalten (siehe Kapitel 2.3). Dies kann dazu führen, dass hauptsächlich die strukturelle Komponente und das *concept image* gefördert werden, die anderen beiden Komponenten jedoch kaum.

6.3.2 Schwierigkeiten beim Arbeiten mit anschaulichen Begriffen

Auch bei anschaulichen Begriffen können Probleme bei der Anwendung entstehen. Bei anschaulichen Begriffen dominiert die operationale Komponente (siehe Kapitel 4.2), d. h. Lernende können Beispiele generieren und in prozessbezogenen Anwendungen mit diesem adäquat arbeiten. Aufgrund dessen, dass die operationale Komponente eng mit dem *concept image* verknüpft ist, sind entsprechend ausgebildete mentale Repräsentationen über den Begriff wahrscheinlich.
Im Gegensatz dazu gehen eine entsprechend ausgebildete operationale Komponente und *concept image* beim Übergang Schule - Hochschule oft mit einer wenig entwickelten strukturellen Komponente und *concept definition* einher, da der Fokus bisher hauptsächlich auf den beiden anderen Begriffskomponenten lag. Somit können Schwierigkeiten beim Lösen mathematischer Probleme entstehen, die dem Kontext Hochschule zuzuordnen sind. Ein Ungleichgewicht zwischen den anschaulich-konkreten Komponenten auf der einen Seite und den abstrakt-formalen auf der anderen lässt Schwierigkeiten beim Lösen von Aufgaben aus verschiedenen Kontexten entstehen. Müssen etwa Aufgaben bearbeitet werden, die aus dem Kontext Schule stammen, wie zum Beispiel die Durchführung konkreter Berechnungen oder die Visualisierung von Inhalten, sind die operationale Komponente sowie das *concept image* notwendig. Aufgaben aus dem Kontext Hochschule erfordern im Gegensatz dazu vor allem die Aktivierung der strukturellen Komponente sowie der *concept definition*. Dies ist der Fall, wenn zum Beispiel Strukturen innerhalb eines Begriffs oder strukturelle Gemeinsamkeiten verschiedenen Begriffen zu finden sind oder mathematische Beweise durchgeführt werden sollen.

6.4 Zusammenfassung

Die Facetten begrifflichen Wissens – *concept image* und *concept definiton* (siehe Kapitel 2.3), strukturelle Komponente und operationale Komponente (siehe Kapitel 4.2) – spiegeln die vielseitige Entwicklung mathematischer Begriffe wider. Sie können einerseits anschaulich-konkret, andererseits formal-abstrakt wahrgenommen werden. Je nach Kontext ist eine andere Betrachtungsweise erforderlich. Um diese vier Komponenten beim Begriffsbildungsprozess sukzessive auszubilden, sind sowohl formale als auch nicht formale Arbeitsweisen notwendig (siehe Kapitel 4.4). Die Abwechslung beider Arbeitsweisen vertieft das Verständnis und die Ausbildung der einzelnen Komponenten (siehe Kapitel 4.3). Eine daraus resultierende, angemessene Grundvorstellung von mathematischen Begriffen gilt als Voraussetzung für flexibles Anwenden dieser Begriffe (Borneleit et al., 2001). Weiterhin dient die Entwicklung begrifflichen Wissens nach dem hier dargestellten Prozess der Ausbildung der Grundvorstellungen (Winter, 1995) (siehe Kapitel 3.3). Zusätzlich wird ebenfalls der Verstehensprozess von mathematischen Begriffen unterstützt (siehe Kapitel 4.3).

Mit einem Begriffsaufbau, der sich an der Abfolge der Repräsentationsstufen von Bruner (1966) (siehe Kapitel 4.4.4) bzw. an den in Kapitel 6.1 beschriebenen Ebenen orientiert, kann durch die Ausführung konkreter Operationen die anschaulich-konkrete und durch eine schrittweise Formalisierung die formal-strukturelle Perspektive auf einen mathematischen Begriff gefördert werden. Auch das Modell zur Entwicklung geometrischen Denkens von van Hiele (1984) (siehe Kapitel 5.3.1) beinhaltet visuelle und formale Ebenen. Erst später erreichen Lernende Niveaustufen, die zum Beispiel Abstraktionsprozesse (siehe Kapitel 4.2) oder Formalisierung ermöglichen. Eine Orientierung an einer Abfolge dieser Art ist in dem beschriebenen Modell durch entsprechende Pfeile repräsentiert, die vom Kontext Schule in den Kontext Hochschule weisen. Die Fortführung der Begriffsentwicklung auf immer höheren Niveaustufen auf eine immer stärker fokussierte Art besitzt Ähnlichkeiten mit dem Spiralcurriculum von Bruner (1970).

7 Forschungsfragen und -hypothesen

Ziel dieser Arbeit ist es, einen Beitrag zum Verbessern der Einstiegsbedingungen in ein mathematisches Studium zu leisten. Insbesondere wird die Entwicklung begrifflichen Wissens, das eine Voraussetzung der – vor allem für Mathematikstudierende – wichtigen Kompetenz des mathematischen Argumentierens ist, fokussiert. Zahlreiche Studien, welche die Argumentationskompetenz von Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe analysieren (z. B. Mejia-Ramos et al., 2012; Heinze & Reiss, 2004; Reiss, 2002; Reiss, Hellmich & Reiss, 2002; Healy & Hoyles, 2000; Harel & Sowder, 1998; Usiskin, 1982) legen offen, dass Lernende deutliche Schwierigkeiten mit dem mathematischen Argumentieren haben. Insbesondere ist es für sie eine Herausforderung, eigene Argumentationen zu entwickeln. Jedoch gibt es nur wenige empirische Untersuchungen (Nagel & Reiss, 2016; Segal, 1999; Moore, 1994), die mathematische Argumentationsfähigkeit im ersten Studienjahr erforschen und Schwierigkeiten dabei identifizieren.
Das in der vorliegenden Arbeit entwickelte Modell (siehe Kapitel 6) zeigt die Struktur begrifflichen Wissens für die Schnittstelle Schule - Hochschule auf. Daraus kann abgeleitet werden, welche Unterschiede es zwischen anschaulichen und abstrakten Begriffen in Bezug auf die Bearbeitung von Aufgaben aus dem Schul- und Hochschulkontext, der Aufgaben zum mathematischen Argumentieren beinhaltet, gibt.
Es ist ein erstes Ziel dieser Arbeit, das theoretische Modell zum begrifflichen Wissen empirisch zu überprüfen. Eine Voraussetzung dafür ist die Konstruktion eines Leistungstests für Studienanfängerinnen und -anfänger, der geeignete Charakteristika aufweist.
Weitere Ziele sind es, einen Einblick in den Entwicklungsstand des begrifflichen Wissens sowie der Argumentationsfähigkeit von Studienanfängerinnen und -anfängern zu erlangen.

7.1 Überprüfung des Modells zur Entwicklung begrifflichen Wissens an der Schnittstelle Schule - Hochschule

Begriffliches Wissen ist eine zentrale Voraussetzung für die Entwicklung mathematischer Argumente (Chinnappan et al., 2012; Reiss & Ufer, 2009; Ufer et al., 2008; Heinze et al., 2008; Reiss, 2002; Healy & Hoyles, 2000, 1998; Moore, 1994) (siehe auch Kapitel 4). Zudem ist mathematisches Argumentieren eine große Herausforderung für Studienanfängerinnen und -anfänger (Nagel & Reiss, 2016; Engelbrecht, 2010). Um zu bestimmen, was im Detail Schwierigkeiten bei der Entwicklung von Argumentationen verursacht, ist die Untersuchung der Teilfähigkeiten mathematischer Argumentation sinnvoll. Die vorliegende Arbeit fokussiert sich dabei auf die Analyse begrifflichen Wissens, dessen Komponenten im Kapitel 6 aufgezeigt werden.

Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit lässt sich somit folgendermaßen formulieren:

Forschungsziel 1
Das theoretisch konstruierte Modell zum begrifflichen Wissen und seine Anwendung in Aufgaben aus dem Schul- bzw. dem Hochschulkontext soll im ersten Forschungsziel empirisch überprüft werden.

Zur empirischen Untersuchung des theoretisch hergeleiteten Modells, das die Struktur begrifflichen Wissens für den Übergang Schule-Hochschule beschreibt, wurde ein dafür geeigneter Test konstruiert. Dieser soll die Anwendung begrifflichen Wissens im Lösungsprozess mathematischer Aufgaben des Schul- und Hochschulkontextes analysieren. Zudem sollen mögliche Unterschiede in der relativen Häufigkeit korrekt bearbeiteter Aufgaben zwischen Items, welche anschauliche Begriffe beinhalten, und Items, welche sich auf abstrakte Begriffe beziehen, ermittelt werden. Ein Teilschritt zum Erreichen des ersten Forschungsziels der vorliegenden Arbeit ist daher eine

Testkonstruktion
Konstruktion eines Leistungstests für die Studieneingangsphase im Fach Mathematik, mithilfe dessen eine empirische Überprüfung des theoretisch konstruierten Modells zum begrifflichen Wissen ermöglicht wird.

Ein weiterer Schritt zum Erreichen des ersten Forschungsziels ist eine detaillierte Analyse von anschaulichen und abstrakten Inhalten in Aufgaben des Schul- und Hochschulkontextes. Eine Übersicht über mögliche Untersuchungen findet sich in Tabelle 7.1.

Tabelle 7.1: Übersicht über mögliche Analysen der Zusammenhänge von begrifflichen Wissen und Aufgabenkontext

		Begriffe	
		anschaulich	abstrakt
Aufgaben	Schulkontext		
	Hochschulkontext		

Die Tabelle verdeutlicht, dass sich aus dem im Kapitel 6 hergeleiteten Modell vier mögliche Forschungsfragen ableiten lassen, welche den Zusammenhang zwischen anschaulichen und abstrakten Begriffen bei der Bearbeitung von Aufgaben aus dem Schul- und Hochschulkontext aufzeigen können:

Forschungsfrage 1.1
Wie hoch ist der Prozentsatz von Studierenden, die Aufgaben mit anschaulichem Inhalt aus dem Schulkontext korrekt lösen?

Forschungsfrage 1.2
Wie groß ist ist der Prozentsatz von Studierenden, die Aufgaben mit abstraktem Inhalt aus dem Schulkontext korrekt lösen?

Im Test werden Aufgaben unter anderem aus dem Schulkontext gestellt. Diese beinhalten die Angabe von Beispielen, die Abgrenzung eines Begriffs von anderen sowie die Angabe von Eigenschaften eines mathematischen Inhalts (siehe Kapitel 8.3). Die Aufgaben enthalten sowohl Teilaufgaben, die anschaulichen Begriffen zuzuordnen sind, als auch Teil-aufgaben, die sich auf abstrakte Begriffe beziehen.
Im Schulunterricht werden Begriffe und Arbeitsweisen oft prozessbetont behandelt (Reiss & Hammer, 2013; Borneleit et al., 2001; Kaiser, 1999). Das bedeutet, dass die operationale Komponente beim Arbeiten mit Begriffen vorrangig gefördert wird, weswegen sie einen anschaulichen Charakter erhalten (siehe Kapitel 4.2). Aufgrund der im Modell postulierten engen Verknüpfung von operationaler Komponente und *concept image*, sind diese beiden nach dem beschriebenen Modell weiter entwickelt als die strukturelle Komponente und die *concept definition*.
Aufgaben aus dem Schulkontext erfordern zur korrekten Lösung hauptsächlich die beiden Komponenten *concept image* und operationale Komponente (siehe Kapitel 4.4.3 und 4.2). Daher wird vermutet, dass Aufgaben aus dem Schulkontext für anschauliche Begriffe im Prinzip gut gelöst werden.
Bei abstrakten Begriffen sind hingegen hauptsächlich die strukturelle Komponente sowie das *concept definition* ausgebildet (siehe Kapitel 4.2). Da auch Aufgaben aus dem Schulkontext eher *concept definition* und strukturelle Komponente benötigen, um korrekt gelöst zu werden (siehe Kapitel 4.4.3 und 4.2), liegt die Vermutung nahe, dass solche Aufgaben für abstrakte Begriffe weniger gut gelöst werden.

Daneben wurden für den Test Aufgaben entwickelt, die dem Kontext Hochschule zuzuordnen sind und argumentative Fähigkeiten der Studierenden erfordern. Studien aus der Sekundarstufe zeigen, dass begriffliches Wissen ein notwendiges Kriterium für die Entwicklung mathematischer Argumente ist (z. B. Reiss, 2002; Healy & Hoyles, 2000; Moore, 1994). Aus diesem Grund wird untersucht, ob dieser Befund auch auf die Studieneingangsphase übertragbar ist und ob es Unterschiede hinsichtlich der relativen Häufigkeiten korrekter Lösungen zwischen anschaulichen und abstrakten Begriffen gibt.
Es stellen sich die folgenden Forschungsfragen:

> **Forschungsfrage 1.3**
> Wie groß ist der Prozentsatz von Studierenden, die Aufgaben mit anschaulichem Inhalt aus dem Hochschulkontext korrekt lösen?

> **Forschungsfrage 1.4**
> Wie groß ist der Prozentsatz von Studierenden, die Aufgaben mit abstraktem Inhalt aus dem Hochschulkontext korrekt lösen?

Diese beiden Forschungsfragen beschäftigen sich mit Aufgaben aus dem Hochschulkontext. Solche Aufgaben erfordern zur Lösung hauptsächlich eine in geeigneter Weise ausgebildete strukturelle Komponente und concept definition (Sfard, 1991; Vinner, 1991). Bei anschaulichen Begriffen können diese beiden Komponenten jedoch weniger gut ausgebildet sein und eher die operationale Komponente und das *concept image* eine adäquate Entwicklung aufzeigen.

Aufgaben aus dem Hochschulkontext erfordern die Kenntnis der formalen Definition sowie der mathematischen Strukturen (A. Fischer et al., 2009; Heinze & Reiss, 2007; Lengnink & Prediger, 2000). Daher wird vermutet, dass Aufgaben aus dem Hochschulkontext, die anschauliche Begriffe enthalten, für die Studierenden schwer zu lösen sind. Anders kann es sich mit abstrakten Begriffen verhalten: Da bei diesen die strukturelle Komponente und die *concept definition* entsprechend gefördert wurden, wird vermutet, dass Aufgaben aus dem Hochschulkontext mit abstrakten Begriffen besser gelöst werden und die relative Häufigkeit an korrekten Beantwortungen höher ist.

Tabelle 7.2 gibt einen Überblick über die vier Forschungsfragen, die dem Erreichen des ersten Forschungsziels der vorliegenden Arbeit dienen. Zudem werden die Hypothesen der Forschungsfragen durch einen Haken bzw. ein Kreuz schematisch dargestellt. Der Haken symbolisiert, dass Studierende beim Lösen von Aufgaben, bei denen die jeweiligen Kategorien zutreffen, erfolgreich sind. Das Kreuz hingegen deutet die Hypothese an, dass das Lösen von Aufgaben der entsprechenden Kategorien für Studienanfängerinnen und -anfänger schwieriger sein könnten.

Tabelle 7.2: Übersicht über die Forschungsfragen mit zugehörigen Hypothesen

		Begriffe	
		anschaulich	abstrakt
Aufgaben	Schulkontext	✓	✗
	Hochschulkontext	✗	✓

7.2 Untersuchung begrifflichen Wissens von Studienanfängerinnen und -anfängern

Neben der empirischen Überprüfung des Modells aus Kapitel 6 wird in der vorliegenden Arbeit auch das Ziel verfolgt, das begriffliche Wissen von Studienanfängerinnen und -anfängern zu analysieren.
Das zweite Ziel dieser Arbeit ist im Folgenden dargestellt:

> **Forschungsziel 2**
> Im Rahmen des zweiten Forschungsziels wird das begriffliche Wissen von Studienanfängerinnen und -anfängern für die geometrischen Begriffe Mittelsenkrechte, gleichschenkliges Dreieck, Vektor und lineare Abhängigkeit analysiert.

Um den Stand zu ermitteln, auf dem sich Studienanfängerinnen und -anfänger bzgl. der Entwicklung des begrifflichen Wissens befinden, sollte das semantische Netz, das den Begriff charakterisiert, untersucht werden. Daher wird zum Erreichen des zweiten Forschungsziels folgende Forschungsfragen formuliert.

Forschungsfrage 2.1
Über welches begriffliche Wissen verfügen Studienanfängerinnen und -anfängern bzgl. der vier geometrischen Begriffe?

Zu Beginn des universitären Mathematikstudiums verfügen Studierende über ein von der Schule geprägtes begriffliches Wissen. Dort wurden die meisten Begriffe vor dem Hintergrund des Prozesscharakters von Schulmathematik dargestellt (Borneleit et al., 2001; Kaiser, 1999) (siehe Kapitel 2). Aus diesem Grund wurden insbesondere die operationale Komponente sowie das *concept image* gefördert (siehe Kapitel 4.2). Die Aufgaben, die begriffliches Wissen abfragen, lassen sich von ihrer Aufgabenstellung her eher dem Kontext Schule zuordnen, da etwa die Angabe eines Beispiels erforderlich war. Es ist zu vermuten, dass die Aufgaben folglich für anschauliche Begriffe besser gelöst werden als für abstrakte Begriffe.

Im Kapitel 4.3 wird Begriffsverständnis und Verständnis über mathematische Sachverhalte thematisiert. Analysiert man begriffliches Wissen im ersten Studienjahr, so ist zudem von Interesse, ob die Kriterien zum Begriffsverständnis von Vollrath (2001) bei Studierenden erfüllt sind, man also davon sprechen kann, dass die Studierenden die abgefragten Begriffe verstanden haben. Daher wird weiterhin untersucht:

Forschungsfrage 2.2
Welche Begriffe haben die Studienanfängerinnen und -anfänger im Sinne von Vollrath (2001) verstanden?

a) Zu welchen Begriffen können die Studienanfängerinnen und -anfänger Beispiele angeben?
b) Welche Begriffe können sie von anderen, ähnlichen Begriffen abgrenzen?
c) Zu welchen Begriffen kennen sie die einschlägigen Eigenschaften?

Zum Begriffsverständnis gehört nach Vollrath (2001), dass eine Person die Begriffsbezeichnung kennt, Beispiele angeben kann, den Begriff abgrenzen kann, Eigenschaften kennt sowie den Begriff in Relation zu anderen Begriffen setzen kann (siehe Kapitel 4.3). Die Studie bezieht sich dabei auf drei der dargestellten Kriterien: die Angabe von Beispielen, die Abgrenzung des Begriffs und die Kenntnis wichtiger Eigenschaften. Die Aufgabenstellungen lassen sich daher vorwiegend dem Kontext Schule zuordnen, weswegen vermutet wird, dass ein entsprechendes Begriffsverständnis eher bei den anschaulichen Begriffen Mittelsenkrechte und gleichschenkliges Dreieck vorliegt und kaum bei den abstrakten Begriffen Vektor und lineare Abhängigkeit.

7.3 Analyse mathematischer Argumentationskompetenz im ersten Studienjahr

Ein drittes Forschungsziel der vorliegenden Arbeit ist die Analyse der Qualität der Argumentation von Studienanfängerinnen und -anfängern. In Studien, die mit Schülerinnen und Schülern der Primar- und Sekundarstufe durchgeführt wurden, zeigen die Ergebnisse stets, dass diese Qualität gering ist und vor allem das Entwickeln eigener Argumentationen eine große Schwierigkeit darstellt – selbst wenn es sich um Schülerinnen und Schüler mit sehr guten Mathematikleistungen handelt (z. B. Heinze & Reiss, 2004; Reiss, 2002; Reiss et al., 2002; Healy & Hoyles, 2000). Dass Studienanfängerinnen und -anfänger offenbar Probleme haben, mathematische Argumentationen zu entwickeln, deutet sich in verschiedenen Studien an (Nagel & Reiss, 2016; Engelbrecht, 2010; Moore, 1994). Jedoch wurden in der Studie von Nagel und Reiss (2016) Studienanfängerinnen und -anfänger der Ingenieurswissenschaften befragt und nicht Mathematikstudierende. Bei Mathematikstudierenden könnte das Ergebnis ein anderes sein, da sie sich explizit für ein Mathematikstudium entschieden haben. Das Interesse an Mathematik und mathematischen Arbeitsweisen kann demnach als höher eingeschätzt werden als bei den Ingenieurstudierenden, was sich unter Umständen in einer erfolgreichen Performanz zeigen kann.

Forschungsziel 3
Die Argumentationskompetenz von Studienanfängerinnen und -anfängern soll im dritten Forschungsziel analysiert werden.

Aus diesem Forschungsziel lässt sich die folgende Forschungsfrage ableiten:

Forschungsfrage 3.1
Wie hoch ist die Argumentationsqualität von Studienanfängerinnen und -anfänger beim Beweisen mathematischer Sätze?

Neben dem begrifflichen Wissen ist eine weitere Voraussetzung für das mathematische Argumentieren Metawissen über den Beweisprozess (Reiss & Ufer, 2009), d. h. Wissen darüber, wie eine mathematische Argumentation aufgebaut ist. In einer qualitativen Studie konnten Harel und Sowder (1998) verschiedene Beweisprinzipien identifizieren. Diese Prinzipien geben Aufschluss darüber, wie argumentiert wird, also auch, ob empirische Argumente verwendet werden oder axiomatisch-deduktiv begründet wird.

Forschungsfrage 3.2
Verwenden die Studienanfängerinnen und -anfänger beim mathematischen Beweisen empirische Argumente?

Studien von Healy und Hoyles (2000) und Reiss (2002) verdeutlichen, dass Schülerinnen und Schüler die Tendenz zeigen, empirische Argumente zum Begründen mathematischen Aussagen zu verwenden (siehe auch Lin, 2005; Heinze, Reiss & Rudolph, 2005; Heinze et al., 2008). Dies wird im Kapitel 5.3.3 beschrieben. Folglich liegt die Vermutung nahe, dass Studienanfängerinnen und -anfänger ebenfalls empirisch argumentieren.

Teil II

Empirischer Teil

8 Methode

Im ersten Forschungsziel wird das theoretisch hergeleitete Entwicklungsmodell überprüft. Dazu wird zunächst ein querschnittliches Messinstrument für Studienanfängerinnen und -anfänger des Fachs Mathematik konstruiert. In diesem Kapitel werden die Konstruktion und die Evaluation des Instruments beschrieben.

8.1 Konstruktion des Messinstruments

In der vorliegenden Arbeit werden drei Forschungsziele verfolgt (siehe Kapitel 7): Das hier beschriebene Messinstrument soll das in Kapitel 6 beschriebene Entwicklungsmodell überprüfen sowie begriffliches Wissen und die Qualität mathematischer Argumentationen von Studienanfängerinnen und -anfängern erfassen. Es werden daher die Ausprägungen von theoretischen Konstrukten, wie zum Beispiel begriffliches Wissen, bestimmt. Bei der Messung von Konstrukten besteht eine Schwierigkeit darin, dass sie nicht direkt beobachtbar sind und damit nicht direkt erfasst werden können (siehe Kapitel 3). Um die Ausprägung eines Konstruktes dennoch zu messen, werden beobachtbare Indikatoren definiert, mit deren Hilfe Rückschlüsse auf die zu untersuchenden Konstrukte gezogen werden können. Ein Indikator eines Konstruktes ist „ein Item, das beispielsweise Verhalten, Einstellungen oder Eigenschaften messen kann“ (Bühner, 2011, S. 85).

In der vorliegenden Arbeit müssen Indikatoren für begriffliches Wissen sowie für Argumentationsfähigkeit gefunden werden. Die Indikatoren für die Messung von Begriffsverständnis im Sinne von Vollrath (2001) orientieren sich an den von ihm bestimmten Aspekten zum Begriffsverständnis und an der Definition begrifflichen Wissens von Hiebert und Lefevre (1986), die Relationen innerhalb oder zu anderen Begriffen betont (vgl. Kapitel 4.1.4). Daraus lassen sich folgende Indikatoren für das Begriffsverständnis festhalten:

1. Angabe bzw. Selektion eines Beispiels für den Begriff
2. Abgrenzung des Begriffs von anderen ähnlichen Begriffen
3. Angabe bzw. Selektion von Eigenschaften des Begriffs

Zur Bestimmung der Argumentationskompetenz werden zum einen die Qualität der Argumentation erfasst und zum anderen die Art der Argumente kategorisiert, welche die Studentinnen und Studenten in ihren Antworten nutzen.

Die Argumentationsart wird mithilfe der Kategorien der proof schemes eingeteilt, die von Harel und Sowder (1998) explorativ identifiziert wurden (siehe Kapitel 5.3.5):

1. Externe Überzeugung
2. Empirische Argumentation
3. Analytische Argumentation

Um diese Kategorisierung durchzuführen, sind die Items so zu formulieren, dass sie die Entwicklung eigener Argumentationen ermöglichen. Die Qualität der Argumentationen wird mithilfe von offenen Items bestimmt. Um sicherzustellen, dass mangelhafte Argumentationen nicht auf fehlendes, grundlegendes inhaltliches Verständnis des mathematischen Satzes zurückzuführen sind, werden die Studierenden darüber hinaus aufgefordert, ein Beispiel für den zu beweisenden Satz anzugeben.

8.1.1 Anpassung an die Zielgruppe

Die Konstruktion geeigneter Items erfordert die Berücksichtigung der betreffenden Zielgruppe, an denen das Messinstrument durchgeführt wird. Dabei sind Faktoren wie zum Beispiel das Alter, der Bildungsweg oder das Vorwissen der Teilnehmerinnen und Teilnehmer entscheidend. Das Vorwissen bestimmt etwa die Itemschwierigkeiten. Dabei versteht man unter Itemschwierigkeit Folgendes:

> „Unter hoher Itemschwierigkeit versteht man, wenn [...] [das Item] viele Personen richtig lösen [...]. Eine hohe Itemschwierigkeit drückt sich also in einem hohen Prozentsatz an Richtiglösungen oder einem hohen Itemmittelwert aus.“
> (Bühner, 2011, S. 87)

Die Itemschwierigkeiten sollen vorab so abgeschätzt werden, dass sie die Fähigkeiten der Probanden gut beschreiben können; im Idealfall sollte jedes Item zur Bestimmung der Personenfähigkeiten beitragen. Der mittlere Fähigkeitsbereich sollte dabei differenziert abgebildet werden, da in der Regel von einer Normalverteilung der Fähigkeiten ausgegangen wird. Werden viele einfache Items konstruiert, treten zum Beispiel Bodeneffekte auf (Bortz & Döring, 2006). Die Personenfähigkeiten von Teilnehmenden des unteren und mittleren Bereichs können in einem solchen Fall nicht mehr unterschieden werden. Für eine aussagekräftige Interpretation der Messergebnisse sowie für valide Rückschlüsse auf das zu messende Konstrukt sollten die oben genannten Aspekte bei der Itemkonstruktion berücksichtigt werden (Bortz & Döring, 2006). Bei den Teilnehmenden der in dieser Arbeit vorgestellten Studie handelt es sich um Mathematik(-lehramts-)studierende im ersten Studiensemester. Daraus lassen sich die folgenden Annahmen ableiten:

Bildungsweg und Alter

Die Studienanfängerinnen und -anfänger erlangten eine Hochschulzugangsberechtigung. Es kann also davon ausgegangen werden, dass sie Abitur respektive Fachabitur oder einen ähnlichen Schulabschluss besitzen, der ihnen den Zugang zu einem Studium ermöglicht.

Die meisten Schülerinnen und Schüler beginnen ihr Studium direkt nach dem Abschluss der Schule oder wenige Jahre danach. Vereinzelt studieren Personen, deren Schulabschluss mehr als zehn Jahre zurückliegt. Das mittlere Alter der Probanden wird sich demnach auf etwa 19 bis 20 Jahre belaufen.

Vorwissen

Die nationalen Bildungsstandards für die Sekundarstufe I und II (KMK, 2004b, 2012) dienen bei der Frage nach dem Vorwissen der Studienanfängerinnen und -anfänger als Orientierung, da sie deutschlandweit verpflichtend sind (vgl. Kapitel 3.3). Zudem wurden die vier zugelassenen bayerischen Schulbücher für Gymnasien sowie die Lehrpläne für bayerische Gymnasien berücksichtigt, aus denen Informationen über das Vorwissen der Studierenden – wenn auch relativ oberflächlich – abgeleitet werden können.

8.1.2 Auswahl mathematischer Begriffe und Sachverhalte

Um geeignete Inhalte für die Items der Studie zu finden, werden die nationalen Bildungsstandards für die Sekundarstufen I und II, Lehrpläne, Schul- und Hochschulbücher analysiert. Zu Beginn der Testkonstruktion wird eine systematische Recherche nach geeigneten Begriffen und mathematischen Sachverhalten durchgeführt. Diese sollen sowohl in der Schule als auch in der Hochschule eine hohe Relevanz aufzeigen. Dazu werden als Erstes die bundesweiten Bildungsstandards für die Sekundarstufe I und II betrachtet. Als Zweites wird der bayerische Lehrplan für Gymnasien hinzugezogen, um die reale Behandlung im schulischen Unterricht und somit auch die Kenntnis der Begriffe sicherzustellen (Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München, o. J.-a). Als Drittes werden die in Bayern zugelassenen Schulbücher für Gymnasien, also die Schulbücher *Lambacher Schweizer* (H. Götz et al., 2009, 2010; Dorn et al., 2010), *delta* (Schätz et al., 2005; Schätz & Eisentraut, 2013; Eisentraut & Schätz, 2009), *Fokus* (Brunnermeier et al., 2005; T. Jahnke & Scholz, 2009; Scholz & Jahnke, 2010) und *bsv* (Feuerlein et al., 2005; Distel & Feuerlein, 2012, 2010) in die Recherche mit aufgenommen. Als Viertes werden schließlich Hochschulbücher, die im ersten Fachsemester verwendet werden, hinzugezogen (z. B. Deiser et al., 2016; Deiser, 2013; Arens et al., 2012; G. Fischer, 2012).
Es werden zunächst alle Jahrgangsstufen der Sekundarstufen I und II, also die Jahrgangsstufen 5 bis 12 miteinbezogen. Die Inhalte des Leistungstests stammen aus der Geometrie (siehe Kapitel 8.1).

Bei Sätzen aus dem Bereich der Analysis liegt das Problem vor, dass Stetigkeit von Funktionen meist implizit vorausgesetzt wird, damit ein Satz Gültigkeit besitzt. Diese ist jedoch nicht im Lehrplan enthalten oder in den Bildungsstandards verankert. Daher kann nicht vorausgesetzt werden, dass Schülerinnen und Schüler wissen, was Stetigkeit von Funktionen ist.
Die bayerischen Schulbücher umgehen dieses Problem oft damit, dass sie voraussetzen, dass zum Beispiel „der Graph G_f keine Sprungstellen besitzt, sondern durchgehend ist“ (Distel & Feuerlein, 2010, S. 16) oder, dass sie Stetigkeit in einer sehr einfachen und anschaulichen Form in Zusatzkapiteln oder -aufgaben einführen. Im Schulbuch *Lambacher Schweizer 11* (Dorn et al.,

2010) werden beispielsweise in einem Zusatzkapitel „Exoten unter den Funktionen“ (edb. 2010, S. 146) betrachtet. Dabei wird zunächst die Definition der Stetigkeit und Differenzierbarkeit eingeführt und anschließend verschiedene Beispiele betrachtet, um die Definitionen zu veranschaulichen.

Die Einführung der Stetigkeit ist zum Beispiel (Dorn et al., 2010, S. 146):

> „Für eine Funktion f, die auf einem Intervall I definiert ist, gilt:
> Eine Funktion f heißt an der Stelle $x_0 \in I$ **stetig**, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert und mit $f(x_0)$ übereinstimmt. Anschaulich bedeutet dies für alle ‚nicht exotischen‘ Funktionen, dass sie dann stetig sind, wenn ihr Graph keinen Sprung aufweist bzw. wenn man den Graphen ‚mit einem Bleistift durchzeichnen‘ kann“

Eine Möglichkeit, wie man mit diesem Umstand in der Studie hätte umgehen können, wäre, die Stetigkeit ebenso zu umschreiben wie es in Schulbüchern der Fall ist. Man könnte etwa von einer Funktion sprechen, die keine Sprünge aufweist, wie es im Schulbuch *bsv* (Distel & Feuerlein, 2010) zu finden ist. Eine weitere Möglichkeit wäre es, auf den Testbögen zu vermerken, dass alle hier behandelten Funktionen keine Sprünge aufweisen, wobei dann nicht exakt definiert wird, was die Lernenden unter Sprüngen verstehen sollen. Alle diese Möglichkeiten sind aus fachlicher Sicht schwierige Kompromisse, weswegen im Test auf Sätze aus der Analysis verzichtet wird.
Der Fokus der vorliegenden Untersuchung liegt auf der empirischen Überprüfung des konstruierten Modells, in dem zwischen anschaulichen und abstrakten Begriffen unterschieden wird. Die in der Studie verwendeten Sätze sollen beim Beweisen einen ähnlichen Schwierigkeitsgrad aufweisen, damit der Einfluss der Inhalte deutlich interpretiert werden kann. Mathematische Sätze aus dem Schulkontext zu finden, die mit Mitteln der Schulmathematik begründet werden können und nicht nur algebraische Termumformungen, sondern auch eine kreative Herangehensweise erfordern, gibt es vor allem im Bereich der Geometrie. Aus diesem Grund werden Sätze – und damit auch Begriffe – aus der Geometrie ausgewählt. Andere mathematische Bereiche, wie die Stochastik oder Zahlentheorie, weisen eine geringere Relevanz im Schulcurriculum auf, weswegen nur geometrische Inhalte für den Leistungstest ausgewählt werden.

8.1.3 Konstruktion und Formulierung der Items

Neben der Berücksichtigung der Relevanz für Schule und Universität werden die Inhalte auf praktische Eignung für die Testkonstruktion untersucht. Dafür werden die Begriffe analysiert und sie in Relations- und Eigenschaftsbegriffe eingeteilt (siehe Kapitel 4.1.2). Diese Einteilung hat Auswirkungen auf die Itemformulierung, da Eigenschaftsbegriffe andere Charakteristika aufweisen als Relationsbegiffe. Eines der Items zur Bestimmung des begrifflichen Wissens fragt die Eigenschaften der Begriffe ab (siehe erster Abschnitt des Kapitels 8.1). Dieses Item stellt sich als wesentliches Ausschlusskriterium dar, da nicht für alle geometrischen Begriffe, die eine inhaltliche Relevanz aufweisen, explizit deren Eigenschaften im schulischen Unterricht thematisiert wurden. Ein Beispiel hierfür ist der Flächeninhalt, dessen Eigenschaften nicht explizit in der Schule formuliert werden.

Unter Berücksichtigung der genannten Bedingungen werden die folgenden vier geometrischen Begriffe in die Studie mit aufgenommen:

1. Mittelsenkrechte eines Dreiecks (MS)
2. Gleichschenkliges Dreieck (GD)
3. Vektor und seine Repräsentanten (VR)
4. Lineare Abhängigkeit (LA)

Zu jedem Begriff wird ein mathematischer Satz ausgewählt, welcher den Begriff enthält oder bei dem der Begriff für seinen Beweis zentral ist. Somit enthält die Studie Items, die sich auf einen der vier mathematischen Begriffe beziehen und Items, welche vier mathematische Sätze enthalten, die eng mit diesen Begriffen verbunden sind. Mithilfe dieser Methode kann der Zusammenhang zwischen dem begrifflichen Wissen und der Argumentationsfähigkeit für einen Begriff bestimmt werden.

Mittelsenkrechte eines Dreiecks

Die Mittelsenkrechte eines Dreiecks ist ein wichtiger Begriff der gymnasialen Mittelstufe, sie wird in der 7. Jahrgangsstufe eingeführt. Die Leitidee L3 *Raum und Form* der Bildungsstandards für die Sekundarstufe I (KMK, 2004b) thematisiert den Umgang mit geometrischen Figuren und die Analyse geometrischer Objekte der Ebene (siehe Kapitel 3.3). Zudem spielt die Konstruktion geometrischer Objekte eine wesentliche Rolle. Die Mittelsenkrechte ist dabei eine der Grundkonstruktionen, mithilfe derer die Schülerinnen und Schüler weitere Objekte konstruieren. Die Mittelsenkrechte ist demnach nicht nur Bestandteil der gymnasialen Mittelstufe, sondern ist für Konstruktionen anderer mathematischer Objekte wichtig.
Zudem wird die Mittelsenkrechte explizit im bayerischen Lehrplan der 7. Jahrgangsstufe in den Themenblöcken „Achsen- und punktsymmetrische Figuren“ sowie „Konstruktionen“, die jeweils zwölf Stunden behandelt werden, erwähnt (Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München, o. J.-b). Auch die Analyse der in Bayern zugelassenen Schulbücher für das Gymnasium unterstreicht die Relevanz der Mittelsenkrechten in der Mittelstufengeometrie, aber auch in anderen Themenbereichen, wie etwa bei Argumentationen oder Konstruktionen.

Gleichschenkliges Dreieck

Auch das gleichschenklige Dreieck ist Teil der Mittelstufengeometrie und wird ebenfalls in der 7. Jahrgangsstufe thematisiert. Die Leitidee L3 *Raum und Form* der Bildungsstandards für die Sekundarstufe I (KMK, 2004b) beinhaltet geometrische Figuren, wie zum Beispiel Dreiecke (siehe Kapitel 3.3). Beim Analysieren von Eigenschaften, insbesondere symmetrischer Eigenschaften, spielt das gleichschenklige Dreieck eine bedeutende Rolle. Außerdem sind die Eigenschaften gleichschenkliger Dreiecke bei Argumentationen oder Winkelbetrachtungen sowie Konstruktionen wesentlich.

Im bayerischen Lehrplan für Gymnasien der Jahrgangsstufe 7 (Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München, o. J.-b) wird im Themenkomplex „Besondere Dreiecke“ unter anderem das gleichschenklige Dreieck ausführlich behandelt. Der Block ist für 14 Stunden angedacht. Auch in den gymnasialen Schulbüchern ist das gleichschenklige Dreieck ein wichtiger Bestandteil, da seine Eigenschaften in verschiedenen Bereichen Anwendung finden, wie etwa bei Argumentationen, Winkelbetrachtungen oder Symmetriebetrachtungen. Insbesondere in der 7. Jahrgangsstufe, aber auch in höheren Jahrgangsstufen, wie bei der Thematisierung von Kreisen in Jahrgangsstufe 8.

Vektor und seine Repräsentanten

Der Vektorbegriff ist in den Bildungsstandards für die Sekundarstufe II (KMK, 2012) verankert. Die Leitidee L3 *Raum und Form* nimmt explizit Bezug auf ihn und geht im Allgemeinen auf den Umgang mit Objekten im Raum ein (siehe Kapitel 3.3). Zudem werden verwandte Operationen mit dem Vektorbegriff beschrieben. Neben der Verankerung in den nationalen Bildungsstandards wird der Vektorbegriff im bayerischen Lehrplan aufgegriffen. Er wird in der Sekundarstufe II, insbesondere in den Jahrgangsstufen 11 und 12, thematisiert. Im Bereich „Koordinatengeometrie im Raum“ der 11. Jahrgangsstufe nehmen Vektoren einen wesentlichen Bestandteil der Inhalte ein und sind Grundlage für Betrachtungen der analytischen Geometrie (Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München, o. J.-c). Der Themenblock zu Vektoren umfasst 22 Schulstunden. Auch die Schulbuchrecherche zeigt thematische Schwerpunkte, die den Vektorbegriff behandeln, insbesondere in der Jahrgangsstufe 11. Daneben ist der Vektorbegriff ein zentraler Bestandteil der linearen Algebra, die typischerweise im ersten Studienjahr an Universitäten gelehrt wird. Vektorräume sind wichtige Bausteine, mithilfe derer Abbildungen generiert werden, die grundlegend für die Mathematik im ersten Studienjahr sind.

Lineare Abhängigkeit

Bei dem Konzept der linearen Abhängigkeit handelt es sich ebenfalls um einen wesentlichen Inhalt der Schul- und Hochschulmathematik. In der Leitidee L3 *Raum und Form* der Bildungsstandards für die Sekundarstufe II (KMK, 2012) wird beschrieben, dass Operationen mit Vektoren und auch die analytische Beschreibung der Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen im Unterricht behandelt werden sollen. Dazu gehört maßgeblich die Kenntnis der linearen Abhängigkeit, mithilfe derer verschiedene Vektoren erst in Relation zueinander gesetzt werden können. Die Untersuchung, ob Vektoren linear abhängig sind, ist die Grundlage für die anschließende Betrachtung von Lagebeziehungen zwischen Geraden und Geraden bzw. Ebenen im $\mathbb{R}^3$. Auch im bayerischen Lehrplan für Gymnasien in der 12. Jahrgangsstufe wird die Bedeutung der linearen Abhängigkeit für den schulischen Unterricht deutlich. Der Block „Geraden und Ebenen im Raum“ befasst sich intensiv mit der linearen Abhängigkeit. Der Themenkomplex umfasst 22 Schulstunden und ist damit einer der größten Inhaltsgebiete im Unterricht (Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München, o. J.-c). Zudem wird bei der Betrachtung der Schulbücher deutlich, dass das Konzept der linearen Abhängigkeit eine wesentliche Rolle im Schulunterricht spielt. Vor allem ab der Jahrgangsstufe 12 wird die lineare Abhängigkeit von Vektoren intensiv behandelt.

Auch für die Lehrveranstaltung Lineare Algebra, die im ersten Studienjahr gelesen wird, ist die lineare Abhängigkeit ein zentrales Konzept. Hier wird sie etwa zum vorteilhaften Lösen von Gleichungssystemen eingesetzt.
Um die Items an das Vorwissen der Studierenden anzupassen, werden die in den Schulbüchern angeführten Definitionen betrachtet, die als Basis bei der Bewertung der Aufgaben dienen.

Drei der vier untersuchten Schulbücher verwenden eine sehr anschauliche Definition, wie etwa:

> „Die Menge aller zueinander paralleler, gleich langer und gleich gerichteter Pfeile bezeichnet man als Vektor.“
> (H. Götz et al., 2010, S. 93)

Das Schulbuch *Fokus* setzt eine formale Definition ein:

> „Unter einem Vektor versteht man ein Tripel (a_1, a_2, a_3) reeller Zahlen. a_1, a_2, a_3 heißen Koordinaten des Vektors.“
> (T. Jahnke & Scholz, 2009, S. 200)

Drei der vier Schulbücher definieren zusätzlich den Begriff des Repräsentanten eines Vektors:

> „Jeder einzelne Pfeil heißt Repräsentant des Vektors“ (H. Götz et al., 2010, S. 93)

> „Jeder Pfeil ist ein Repräsentant des Vektors“ (Distel & Feuerlein, 2012, S. 174)

> „Jede solche Pfeilklasse ist ein Vektor; ein einzelner Pfeil aus der Klasse heißt Repräsentant des Vektors.“ (Schätz & Eisentraut, 2013, S. 91)

Die Definitionen, die sich bezüglich der vier Fachbegriffe in bayerischen Schulbüchern finden, werden vollständig in Kapitel 4.1.3 dargestellt. Bei einer Unterscheidung von *Vektor* und *Repräsentant des Vektors* muss berücksichtigt werden, dass beide Begriffe im Schulalltag in der Regel synonym verwendet werden (Tietze, Klika & Wolpers, 2000b).

8.1.4 Itemformate

Grundsätzlich wird bei Leistungstests zwischen geschlossenen und offenen Aufgabenformaten unterschieden. Die Wahl der Formate ist abhängig vom zu messenden Konstrukt.

Geschlossene Itemformate

Für eine möglichst objektive Auswertung sind geschlossene Itemformate das Mittel der Wahl. Die Bewertung der Antworten werden nicht durch beurteilende Personen beeinflusst. Zusätzlich sind geschlossene Aufgaben ökonomischer auszuwerten als offene, da lediglich beurteilt wird, welche Antwortmöglichkeiten die Testpersonen angekreuzt haben. Ein weiterer Vorteil von geschlossenen Formaten ist, dass sich die Teilnehmerinnen und Teilnehmer bei vorgegebenen Antworten genau mit den speziellen Antwortoptionen auseinandersetzen müssen, was einer reinen Reproduktion von Faktenwissen ohne Verständnis vorbeugt (Bühner, 2011). Aus diesen Gründen ist es sinnvoll, möglichst viele Items eines Tests geschlossen zu formulieren.

Ein Problem bei geschlossenen Antwortmöglichkeiten ist eine relativ hohe Ratewahrscheinlichkeit, also die Wahrscheinlichkeit, mit der Testpersonen eine korrekte Antwort zufällig korrekt ankreuzen. Im Sinne aussagekräftiger Ergebnisse muss die Ratewahrscheinlichkeit minimiert werden: Eine Möglichkeit besteht darin, Mehrfachantworten zuzulassen. Das bedeutet, dass bei einer vorgegebenen Menge an möglichen Antwortoptionen mehrere Varianten korrekt sein können. Ein weiterer Nachteil von geschlossenen Formaten ist, dass lediglich die Wiedererkennung von Inhalten geprüft wird und keine eigene Produktion von Inhalten erforderlich ist. Weiterhin können Reihenfolgeeffekte oder negativ gepolte Items zu Problemen bei der Interpretation der Ergebnisse geschlossener Aufgaben führen (Bühner, 2011).
Aus diesen Gründen ist es wichtig, bei der Verwendung geschlossener Items, die Antwortmöglichkeiten sorgfältig zu konstruieren und formulieren. Distraktoren sollen dabei keine Hinweise auf richtige Antworten geben (Bühner, 2011, S. 119):

> „Unter Distraktoren versteht man die falschen Antwortmöglichkeiten, die eine Person von der richtigen Lösung der Aufgabe gleichsam ablenken sollen.“

Logische Abhängigkeiten bei den Antwortoptionen sind ebenso zu vermeiden. Außerdem ist es sinnvoll, typische Fehler einzubauen, die Lernende im Umgang mit den gegebenen Inhalten begehen. Aufgrund möglicher Verständnisschwierigkeiten sollen ferner doppelt negierte Aussagen vermieden werden (Bühner, 2011).
Bei einer sorgfältigen Konstruktion und Formulierung der Distraktoren bzw. Antwortmöglichkeiten überwiegen in der Regel die Vorteile von geschlossenen Itemformaten. Daher werden die Items zur Identifikation von Beispielen und Eigenschaften geschlossen formuliert. Um geeignete Distraktoren für die Items zu finden, wird eine Pilotstudie durchgeführt, deren Items ein offenes Format besitzen. Mithilfe der Antworten der Studentinnen und Studenten der Pilotstudie werden geeignete Distraktoren für die Items der Studie konstruiert. Dabei werden ebenso typische Fehler von Studierenden eingebaut.

Offene Itemformate

In der hier beschriebenen Studie sollen die Studierenden eigene Argumentationen entwickeln (siehe Kapitel 8.1), weswegen in diesen Fällen offene Items vorteilhaft sind. Auch Items, die Begriffe von ähnlichen Begriffen abgrenzen sollen, werden offen formuliert, um die Antworten der Teilnehmerinnen und Teilnehmer nicht in bestimmte Richtungen zu lenken. Dabei erfolgt die Abgrenzung eines Beispiels zu dem gegebenen Begriff in der Regel durch das Benennen von Eigenschaften des Begriffs und dem Erklären, dass mindestens eine Eigenschaft bei dem Beispiel nicht erfüllt ist. In der darauffolgenden Aufgabe des Tests werden die Eigenschaften des Begriffs abgefragt (siehe Kapitel 8.1). De Auswertung offener Aufgaben ist zeitaufwändiger und erfordert das Erstellen eines ausführlichen Kodierleitfadens (siehe Kapitel 9).

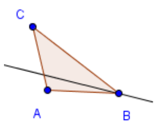
8.2 Teilnehmerinnen und Teilnehmer

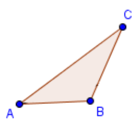
Die Studie richtet sich an Studienanfängerinnen und -anfänger mit dem Studienfach Mathematik oder Lehramt Mathematik für Gymnasien. Die Module der ersten Semester sind in diesen beiden Studiengängen an den meisten Universitäten sehr ähnlich. Es werden insgesamt $N = 200$ Studierende zweier Universitäten befragt, davon sind 76 weiblich. Das durchschnittliche Alter beträgt 19,7 Jahre ($SD = 2,46$), was mit dem vorab geschätzten mittleren Alter in etwa übereinstimmt (siehe Kapitel 8.1.1). Die mittlere Abiturdurchschnittsnote liegt mit einem Schnitt von 2,0 ($SD = 0,62$) über dem deutschen Durchschnitt, der im Jahr 2013 bei 2,35 lag (Spiegel, o. J.).

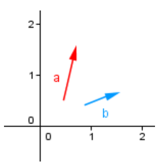
8.3 Design der Studie

Die Studie, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit konstruiert wird, enthält Items zur Überprüfung begrifflichen Wissens und mathematischer Argumentationsfähigkeit. Der Leistungstest gliedert sich demnach in zwei Teile. In diesem Kapitel werden exemplarisch die Arten der Items vorgestellt. Die vollständige Studie befindet sich in Anhang C. In Anlehnung an die Kriterien zum Begriffsverständnis von Vollrath (2001), die ausführlich in Kapitel 4.1.4 beschrieben sind (siehe auch Kapitel 8.1), werden die folgenden drei Items zum begrifflichen Wissen erstellt:

1. Welche der folgenden Darstellungen sind Beispiele für...
   a) eine **Mittelsenkrechte** eines Dreiecks?
   b) ein **gleichschenkliges** Dreieck?
   c) einen **Vektor** im $\mathbb{R}^2$ oder seinen Repräsentanten?
   d) zwei **linear abhängige** Vektoren im $\mathbb{R}^2$?

2. Begründen Sie, warum ...
   a) 

   die eingezeichnete Gerade *nicht* die **Mittelsenkrechte** auf [AC] ist.
   b) 

   das skizzierte Dreieck *nicht* **gleichschenklig** ist.
   c) 

   a und b *nicht* den gleichen **Vektor** im $\mathbb{R}^2$ repräsentieren.
   d) die Vektoren $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^2$ *nicht* **linear abhängig** sind.

3. Kreuzen Sie jeweils an, welche Aussagen zutreffen auf ...
   a) **Mittelsenkrechten** eines Dreiecks.
   b) **gleichschenklige** Dreiecke.
   c) zwei verschiedene Repräsentanten desselben **Vektors** im $\mathbb{R}^2$.
   d) zwei **linear abhängige** Vektoren im $\mathbb{R}^2$.

Der Teil der Studie, der sich auf mathematisches Argumentieren bezieht, beinhaltet die beiden Aufgaben:

4. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Beispiele den gegebenen Sachverhalt darstellen:
   a) Sachverhalt 1:
   In jedem Dreieck schneiden sich die drei Mittelsenkrechten in einem Punkt.
   b) Sachverhalt 2:
   Ein Dreieck ABC hat bei C einen rechten Winkel, wenn die Ecke C auf dem Halbkreis über der Strecke [AB] liegt.
   c) Sachverhalt 3:
   Die Addition von Vektoren im $\mathbb{R}^2$ ist kommutativ.
   d) Sachverhalt 4:
   Drei beliebige Vektoren im $\mathbb{R}^2$ sind immer linear abhängig.
5. Begründen Sie stichpunktartig, warum folgende Sachverhalte gelten:
   a) Sachverhalt 1:
   In jedem Dreieck schneiden sich die drei Mittelsenkrechten in einem Punkt.
   b) Sachverhalt 2:
   Ein Dreieck ABC hat bei C einen rechten Winkel, wenn die Ecke C auf dem Halbkreis über der Strecke [AB] liegt.
   c) Sachverhalt 3:
   Die Addition von Vektoren im $\mathbb{R}^2$ ist kommutativ.
   d) Sachverhalt 4:
   Drei beliebige Vektoren im $\mathbb{R}^2$ sind immer linear abhängig.

Die Aufgaben 1, 3 und 4 sind geschlossen, während die Aufgaben 2 und 5 offen sind (siehe Kapitel 8.1.4). Da die Aufgaben teilweise aufeinander aufbauen, sollen die Teilnehmerinnen und Teilnehmerin bei der Bearbeitung nicht zurückzublättern und die Aufgaben nacheinander in der vorgegebenen Reihenfolge beantworten. Dies wird sowohl von der Testleitung mündlich ausgesprochen als auch schriftlich auf den Testbögen vermerkt. Zusätzlich sind mindestens zwei Aufsichtspersonen während der Durchführung des Tests anwesend, sodass man davon ausgehen kann, dass sich die Teilnehmenden an die Anweisungen halten.

Aus den vier ausgewählten Begriffen sind zwei der Sekundarstufe I zuzuordnen, die dem Kontext Schule entstammen und anschaulich sind (Mittelsenkrechte und gleichschenkliges Dreieck), und zwei der Sekundarstufe II, die dem Hochschulkontext zugeordnet werden können und abstrakt sind (Vektor und lineare Abhängigkeit). Jeweils eine Teilaufgabe bezieht sich auf denselben Begriff. Damit kann überprüft werden, ob die Studentinnen und Studenten entsprechendes Vorwissen zur Durchführung einer Argumentation in Aufgabe 5 besitzen.
Um eine durchgängig hohe Konzentrationsfähigkeit der Teilnehmerinnen und Teilnehmer zu gewährleisten, ist die Bearbeitungszeit auf 30 Minuten begrenzt. Für eine Bearbeitung aller konstruierten Items wäre eine längere Zeitdauer notwendig gewesen, was die Ergebnisse der Pilotstudien zeigen (siehe Kapitel 8.4.2). Um dennoch vier Begriffe in fünf Aufgaben abfragen zu können, die für die Überprüfung des Modells aus Kapitel 6 notwendig sind, wird für die Durchführung der Studie ein Rotationsdesign gewählt. Das bedeutet, dass nicht alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer alle Aufgaben und alle Teilaufgaben bearbeiten. Der Test wurde demnach in vier Gruppen aufgeteilt. Jede Gruppe enthält alle fünf Aufgaben, jedoch nur drei anstatt vier Teilaufgaben pro Aufgabe. Die Items, die sich auf denselben mathematischen Fachbegriff beziehen, sind vollständig in einer Gruppe vorhanden. Die Studierenden müssen also zu jeweils drei Begriffen (drei Teilaufgaben) fünf Aufgaben bearbeiten. Die Zuteilung der Bögen für jede Testperson erfolgte rein zufällig.

8.4 Evaluation des Messinstruments

Um den konstruierten Test zu optimieren, werden verschiedene Pilotstudien durchgeführt. Diese dienen dazu, Itemformulierungen, welche die Ergebnisse der Teilnehmenden beeinflussen, herauszufiltern. Daneben kann auf diese Weise die Zeit abgeschätzt werden, welche die Probanden zur Bearbeitung des Tests benötigen. Damit wird sichergestellt, dass genug Zeit vorhanden ist, um alle Aufgaben zu bearbeiten. Neben schriftlichen Befragungen werden Expertenbefragungen sowie ein kognitives Interview mit einem Studierenden durchgeführt.

8.4.1 Kognitives Interview und Pilotstudien

Um die Qualität eines Fragebogens zu sichern, werden verschiedene Expertinnen und Experten aus der Mathematikdidaktik, Mathematik und empirischen Bildungsforschung befragt. Die Rückmeldungen dieser erfolgen sowohl mündlich als auch schriftlich. Die Formulierung der Items und verschiedene Inhalte werden daraufhin angepasst.

Kognitives Interview

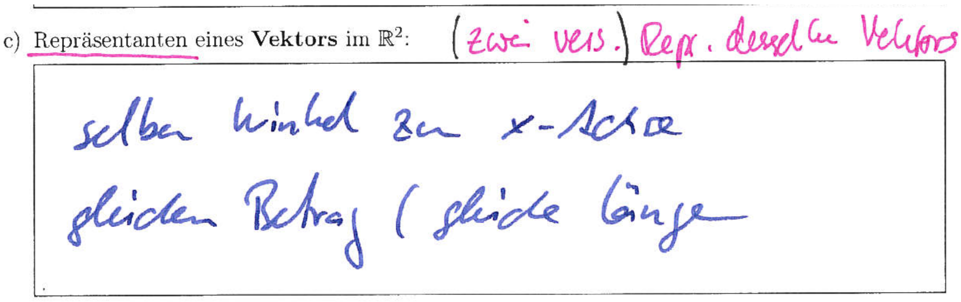
Zur Überprüfung, ob die Ziele, welche mit der Durchführung eines Testinstruments intendiert werden, auch tatsächlich erreicht werden, ist die Durchführung kognitiver Interviews mit einzelnen Testpersonen sinnvoll (Collins, 2003; Desimone & Le Floch, 2004). Die Methode der kognitiven Interviews trägt zur Verbesserung der Reliabilität und Validität des Tests bei (Desimone & Le Floch, 2004).

Bei kognitiven Interviews wird einer Person der Test vorgelegt, den sie bearbeiten muss. Dabei richtet sie ihre Aufmerksamkeit neben der Bearbeitung der Testitems auf das Design der Studie, auf die Itemformulierung, auf die eigene Aufmerksamkeitsspanne sowie auf die Reihenfolge der Aufgaben und vermerkt entsprechende Hinweise auf dem Testbogen (Kurz, Prüfer & Rexroth, 1999). Zusätzlich wird die Zeit bestimmt, welche die Testperson zum Beantworten aller Items benötigt. Im Anschluss wird die Person interviewt und der kommentierte Testbogen mit der Interviewerin oder dem Interviewer besprochen. Ziel dieses Verfahrens ist es, Iteminhalte oder -formate zu identifizieren, die das Antwortverhalten der Testpersonen so beeinflussen, dass kaum Rückschlüsse auf das Konstrukt möglich sind.

Für das kognitive Interview wird in diesem Fall ein Studierender des Lehramts für Gymnasien mit der Fächerkombination Mathematik-Physik befragt, der sich am Ende seines Studiums im 9. Semester befindet. Der Studierende arbeitet seit vielen Semestern am Heinz Nixdorf-Stiftungslehrstuhl für Didaktik der Mathematik der Technischen Universität München als studentische Hilfskraft und besitzt daher ein vertieftes mathematikdidaktisches Wissen.

Die Ergebnisse des kognitiven Interviews deuten darauf hin, dass die Aufgabenstellungen der Studie im Allgemeinen gut verständlich sind und nur zwei der Testitems sprachlich präziser formuliert werden sollen. Ein Beispiel ist in Abbildung 8.1 dargestellt.

Die Abbildung zeigt die Beantwortung des Items durch die Testperson und die Markierung des Wortes *Repräsentant.* Bei der anschließenden Besprechung weist die Testperson darauf hin, dass das Item unklar formuliert ist und eine Präzisierung sinnvoll erscheint. In diesem konkreten Fall


c) Repräsentanten eines **Vektors** im $\mathbb{R}^2$: (zwei vers.) Repr. derselben Vektors

selben Winkel zur x-Achse
gleichen Betrag (gleiche Länge

Abbildung 8.1: Bearbeitungsbogen der Testperson beim kognitiven Interview mit Markierung des Wortes *Repräsentant*

ist die Angabe zweier Beispiele von Repräsentanten eines Vektors im $\mathbb{R}^2$ gefordert, es ist jedoch noch nicht deutlich, dass hier Repräsentanten desselben Vektors anzugeben sind und dass es verschiedene Repräsentanten sein sollen. Diese unklare Aufgabenstellung wurde nach dem Interview umformuliert und präzisiert.
Nach der Änderung bestimmter Testitems aufgrund der Ergebnisse des kognitiven Interviews werden wiederum Expertinnen und Experten aus der Fachmathematik, Fachdidaktik sowie Bildungsforschung hinzugezogen und die abschließenden Formulierungen der Items sowie der zeitliche Rahmen der Studie festgelegt.

8.4.2 Pilotstudien

Der überarbeitete Test wird außerdem mithilfe zweier Pilotstudien überprüft, bevor er mit den Testpersonen durchgeführt wird. Es werden im Folgenden die beiden Pilotstudien beschrieben sowie kurz erläutert, was aufgrund dieser Ergebnisse am ursprünglichen Design verändert wurde. Eine ausführliche Beschreibung der ersten Pilotstudie kann in Nagel und Reiss (2016) nachgelesen werden.

Pilotstudie 1

Die erste Pilotstudie wurde im Rahmen eines mathematischen Vorkurses für Ingenieursstudierende durchgeführt, der vor dem Beginn der Vorlesungszeit des ersten Semesters stattfand. Die Teilnahme am Vorkurs war freiwillig und es gab keine Anwesenheitspflicht. Insgesamt partizipierten $N = 428$ an der Pilotstudie, davon waren $N = 353$ männlich. Das arithmetische Mittel ihrer Abiturdurchschnittsnoten liegt mit $M = 1,68$ ($SD = 0,41$) weit über den bundesdeutschen Durchschnitt, der im Jahre 2013 bei 2,35 lag (Spiegel, o. J.). Die Bearbeitungszeit betrug 30 Minuten.
Inhaltlich befasste sich die Pilotstudie mit den Begriffen der Mittelsenkrechte in einem Dreieck, dem gleichschenklige Dreieck, den Vektor und seinen Repräsentanten sowie dem Begriff der linearen *Un*abhängigkeit. Die Ergebnisse der Studie zeigten, dass die Negationen in Aussagen von zwei Items Schwierigkeiten bei der Bearbeitung hervorriefen. Generell können unklar oder umständlich formulierte Aussagen bei Tests zu einer fehlerhaften Messung des Konstrukts führen (siehe Kapitel 8.4.3), da die Probanden erst die Aussage verstehen müssen (Bühner, 2011). Aus diesem Grund sind zum Beispiel Negationen oder doppelte Negationen bei der Testkon-

struktionen zu vermeiden. Eine Aufgabe der Studie verlangte etwa die Begründung, warum ein gegebenes Beispiel nicht dem Begriff zuzuordnen ist (siehe Anhang C). Dies würde bei dem Begriff der linearen Unabhängigkeit zu einer doppelten Verneinung führen und die Verständlichkeit des Items daher erschweren. Daher wurde in der Hauptstudie der Begriff der linearen Unabhängigkeit mit dem Begriff der linearen Abhängigkeit ersetzt und die Items entsprechend umformuliert, um Verständnisschwierigkeiten vorzubeugen.

Pilotstudie 2

Der durch die erste Pilotstudie verbesserte Test wurde anschließend im Rahmen der mathematikdidaktischen Veranstaltung „Didaktik der Geometrie und Stochastik“ für Lehramtsstudierende an Gymnasien des dritten bzw. fünften Semesters durchgeführt. Es nahmen $N = 16$ Studierende teil, die aufgefordert wurden, die Items zu lösen und zusätzlich auf dem Testbogen schriftlich zu dokumentieren, welche Formulierungen oder Items ihrer Ansicht nach ungeeignet oder undeutlich dargestellt sind.
Die Ergebnisse dieser Pilotstudie führten zu einer Präzisierung der Aufgabenstellungen sowie zu der Einschätzung, dass die Bearbeitungszeit von 30 Minuten ausreicht, damit aller Teilnehmenden alle Aufgaben theoretisch bearbeiten können. Zudem ließ sich daraufhin einschätzen, dass die Itemschwierigkeiten der Aufgaben variieren und damit eine Spannbreite an Personenfähigkeiten abdecken.

8.4.3 Überprüfung der Gütekriterien

Bei Testkonstruktionen ist die Überprüfung der Gütekriterien essentiell, damit die Aussagekraft der Ergebnisse des Tests erhöht wird und Rückschlüsse auf das untersuchte Konstrukt zugelassen werden. Im Folgenden werden die drei Hauptgütekriterien Objektivität, Reliabilität und Validität des Tests überprüft.

8.4.3.1 Objektivität

Das Gütekriterium der Objektivität besagt, dass die Ergebnisse unabhängig von externen Einflüssen, wie den Personen sind, die den Test durchführen oder später auswerten (Sedlmeier & Renkewitz, 2013). Die Objektivität gewährleistet, dass ein Test so durchgeführt und ausgewertet wird, dass er für alle Teilnehmerinnen und Teilnehmern die gleichen Bedingungen aufweist. Bei der Objektivität wird daher im Wesentlichen zwischen der Durchführungsobjektivität und der Auswertungsobjektivität unterschieden (Sedlmeier & Renkewitz, 2013). Wird ein standardisierter Test durchgeführt, zu dem bereits empirische Daten vorhanden sind, so ist es möglich, Teilnehmerinnen und Teilnehmer anhand der Normen einzuordnen, die bereits Informationen über die durchschnittliche Leistung bestimmter Personengruppen enthalten (Sedlmeier & Renkewitz, 2013). Daraus kann abgeleitet werden, ob ein Proband ein über- oder unterdurchschnittliches Ergebnis erzielt hat.

Da die im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelte Studie individuell erstellt und keine Items aus bereits bestehenden Untersuchungen verwendet wurden, war eine Einordnung der Ergebnisse der Teilnehmerinnen und Teilnehmer nicht möglich. Daher werden im Folgenden die Durchführungs- und Auswertungsobjektivität der Studie überprüft.

Durchführungsobjektivität

Um die Durchführung des Tests für alle Probanden einheitlich zu gestalten, ist es üblich, vorgefertigte und klar verständliche Instruktionen an die Testleiterinnen und Testleiter auszugeben. Dabei soll sichergestellt werden, dass die Leiterinnen und Leiter mit den Instruktionen vertraut sind. Auf diese Weise erhalten alle Probanden dieselben Informationen bei der Durchführung des Tests, was eine einheitliche Durchführung gewährleistet.
In der vorliegenden Arbeit wird die Pilotstudie 1 in *einer* Veranstaltung für Ingenieure durchgeführt, d. h. die Durchführungsobjektivität war gewährleistet. Für die Hauptstudie werden drei Gruppen von Studierenden in jeweils verschiedenen Veranstaltungen befragt. Es handelt sich um eine mathematische Fachveranstaltung für Lehramtsstudierende an Gymnasien, um eine Fachveranstaltung für Mathematikstudierende und um eine mathematische Fachveranstaltung für Lehramts- und Mathematikstudierende. Details zu den Testpersonen der Pilotstudien finden sich in den Kapiteln 8.4.2 und 8.4.2, Informationen über die Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Hauptstudie sind in Kapitel 8.2 zusammengefasst.
Da verschiedene Testleiterinnen und -leiter bei der Durchführung der Zielstudie zum Einsatz kommen, werden diese vorab geschult und Instruktionen verteilt, die sie den Probanden vorlesen, bevor die Testzeit beginnt. Die Instruktion für die Pilotstudien und für die Studie befindet sich im Anhang B. Bei beiden Pilotstudien sowie bei der Hauptstudie ist daher Durchführungsobjektivität gewährleistet.

Auswertungsobjektivität

Liegen geschlossene Items vor, so ist die Auswertungsobjektivität meist automatisch erfüllt. Besondere Vorsicht ist bei offenen Formaten erforderlich: Es muss vorab ein eindeutiges Bewertungsschema erstellt werden, an dem sich die Beurteilerinnen und Beurteiler orientieren. Verfassen Studierende dieselben Antworten bei denselben Aufgaben, so sollten diese auch auf dieselbe Weise beurteilt werden.
In der vorliegenden Studie werden sowohl offene als auch geschlossene Itemformate verwendet. Für die offenen Items werden Kodierschemata erstellt. Zwei unabhängige Kodierer bewerten die Antworten der Studierenden. Dazu fanden mehrere Schulungen und Besprechungen zu den Schemata statt. Genauere Informationen sind im Kapitel 9.2 beschrieben. Mithilfe des κ-Koeffizienten zur Messung von Übereinstimmungen von Cohen (1960) wird eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den beiden Kodierern festgestellt, was in Tabellen 9.1 dargestellt ist. Es kann daher sowohl die Ausführungsobjektivität der geschlossenen Items als auch die der offenen Items gewährleistet werden.

8.4.3.2 Reliabilität

Die Reliabilität eines Tests oder eines Teils des Tests misst die Zuverlässigkeit der Daten, also „wie genau der Test das misst, was er misst“ (Rost, 2004, S. 33). Döring und Bortz (2016, S. 465) definieren:

> „Die Reliabilität ... eines Tests kennzeichnet den Grad der Genauigkeit bzw. Messfehlerfreiheit, mit dem das geprüfte Merkmal gemessen wird. Ein reliabler psychologischer Test liefert Messwerte die wenig von Messfehlern belastet sind.“

Um die Reliabilität eines Tests zu schätzen, gibt es verschiedene Methoden, wie zum Beispiel die Paralleltestmethode, die Retest-Methode oder die der internen Konsistenz, die im Folgenden verwendet wird. Dabei wird der Test oder ein Teil eines Tests in mehrere kleine Testteile zerlegt, sodass jedes Item als Einzeltest angesehen wird (Rost, 2004). Ist ein Test reliabel, so sollten die Ergebnisse bei wiederholter Messung derselben Personen nach den Axiomen der klassischen Testtheorie gleich sein. Ist ein Test nicht reliabel, so treten dabei Messfehler auf und die verglichenen Werte unterscheiden sich.

In der klassischen Testtheorie wird die Reliabilitätsschätzung im Allgemeinen aus dem Quotient aus wahrer Varianz ($Var(T_X)$) und beobachtbarer Varianz ($Var(X)$) gebildet (Everitt & Howell, 2005), wobei die wahre Varianz dabei die Varianz der nicht beobachtbaren, wahren Ergebnisse sind und die beobachtbare Varianz die der tatsächlich gemessenen Werte, die fehlerbehaftet sind (Rost, 2004):

$$Rel(X) = \frac{Var(T_X)}{Var(X)} = \frac{Var(T_X)}{Var(T_X) + Var(E)}.$$

Die beobachtbare Varianz setzt sich nach der klassischen Testtheorie aus der wahren Varianz und der Varianz des Messfehlers $Var(E)$ zusammen: $Var(X) = Var(T_X) + Var(E)$.
Je größer also die wahre Varianz wird, desto größer wird die Reliabilität des Tests. Die Reliabilität wird also 0, falls die Messwerte „nicht stärker variieren als ihr Fehleranteil“ (Rost, 2004, S. 376), die wahre Varianz also 0 wird.
Jedem Messwert wird dabei jedoch die gleiche Fehlervarianz zugeordnet, weswegen die Interpretation einer statistischen Reliabilitätsüberprüfung vorsichtig formuliert werden sollte (Rost, 2004). Zudem muss berücksichtigt werden, dass die Daten der Reliabilitätsschätzungen stets von der betrachteten Population abhängig sind (Rost, 2004).

Weit verbreitet für die inhaltliche Reliabilitätsanalyse ist der Konsistenzkoeffizient Cronbach Alpha (Cronbach, 1951), der voraussetzt, dass die Testitems dasselbe Konstrukt mit derselben Skala messen, jeodoch nicht genau gleich sein müssen (Bühner, 2011). Items, die diesen Voraussetzungen genügen, entsprechen einem essenziell Tau-äquivalenten Modell (Bühner, 2011).

Bei der Berechnung von Cronbach α werden die allgemeinen Kovarianzen zwischen den Items einer Skala mit der Gesamtvarianz verglichen (Everitt & Howell, 2005):

$$\alpha = \frac{k}{k-1} \cdot \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{k} Var(x_i)}{Var(X)} \right), \tag{8.1}$$

wobei k die Anzahl der Items eines Testteils ist, die untersucht wird. Bei dichotomen Items berechnet man Cronbachs α mithilfe der Kuder-Richardson-Formel 20 (Kuder & Richardson, 1937), die sich aus der Berechnung von Cronbachs α ergibt, wenn man zwei Fälle annimmt (Feldt, 1969).
Bevor ein Wert für die interne Konsistenz der Items berechnet wird, müssen Skalen von Items gebildet werden, die diejenigen Items enthalten, die dasselbe Konstrukt messen. Diese Skalen sollten in erster Linie inhaltlich begründet werden, aber auch statistisch sollten die Items in jeder Skala miteinander korrelieren.

Die Bestimmung des Cronbach α wurde für die Pilotstudie 1 vorgenommen. Da der Wert die interne Konsistenz der Items misst, wurden die Items auf inhaltlicher Ebene in vier Skalen eingeteilt. Jede Skala bezieht sich auf je einen der vier geometrischen Begriffe, die für die Studie ausgewählt wurden. Jede Skala enthält daher drei Items (siehe Tabelle 8.1).

Tabelle 8.1: Skalenbildung der Items hinsichtlich des Inhalts

Skala 1: MS Mittelsenkrechte	Skala 2: GD Gleichschenkliges Dreieck	Skala 3: VR Vektor/Repräsentant	Skala 4: LA Lin. Abh.
Item 1a	Item 1b	Item 1c	Item 1d
Item 2a	Item 2b	Item 2c	Item 2d
Item 3a	Item 3b	Item 3c	Item 3d

Die in Tabelle 8.1 vorgenommene Skaleneinteilung ist hinsichtlich des Inhalts der Aufgaben die einzig mögliche Variante. Die Aufgaben 1 bis 3 beziehen sich auf das begriffliche Wissen der vier Begriffe und die Aufgaben 4 und 5 beziehen sich auf den Umgang mit mathematischen Sätzen. Skalen über alle Aufgaben des Tests zu bilden, ist demnach inhaltlich nicht zu begründen. Da die Items sich auf verschiedene Begriffe beziehen, muss zudem zwischen den einzelnen Begriffen unterschieden werden.

Aufgrund des Rotationsdesigns, das sowohl bei der Pilotstudie 1 als auch bei der finalen Studie (siehe Kapitel 8.3) vorgenommen wurde, haben nicht alle Probanden alle Items bearbeitet. Während bei der Studie zur Auswertung die multiple Imputation angewendet wurde (siehe Kapitel 9.3.2), war dies bei den Reliabilitätsberechnungen, die mit der Pilotstudie durchgeführt wurden, nicht notwendig. Dies ist damit zu begründen, dass für die Reliabilitätsberechnungen nur Items innerhalb einer Skala (siehe Tabelle 8.1) bei den Berechnungen benötigt werden. Das Rotationsdesign war so gewählt, dass die Probanden alle Items hinsichtlich eines Begriffs bearbeitet haben (siehe Kapitel 8.3). Das bedeutet, dass es keine fehlenden Werte aufgrund des Studiendesigns innerhalb einer der vier Skalen gab. Wie mit den übrigen fehlenden Werten bei den Berechnungen der Pilotstudie 1 umgegangen wurde, kann im Kapitel 9.3.1 nachgelesen werden, da für diese Fälle so vorgegangen wurde wie bei der Auswertung der Studie.

Jede Skala enthält lediglich drei Items. Eine weitere Skala zum Umgang mit mathematischen Sätzen zu bilden, wäre zwar potentiell vorstellbar, jedoch hätte dann der Wert des Cronbachs α sehr wenig Aussagekraft, da jede Skala nur zwei Items enthalten würde. Es werden daher nur die Reliabilitäten der Skalen aus Tabelle 8.1 berechnet, wobei bereits hier auf der geringen Itemanzahl die Werte des Cronbach α mit Vorsicht zu interpretieren sind.
Der Wert des Cronbach α wird bekanntermaßen kleiner, wenn die Anzahl der Testitems sinkt und die Items nicht miteinander positiv korrelieren (Döring & Bortz, 2016). Dies ist auf die Berechnung der Gesamtvarianz zurückzuführen, die den Nenner in (8.1) mit steigender Itemanzahl größer werden lässt, was letztlich α größer werden lässt – trotz des Korrekturfaktors $\frac{k}{k-1}$, der mit steigender Itemanzahl wächst. Aufgrund der jeweils geringen Anzahl an Items bei jeder Skala wird vorab angenommen, dass α klein ausfallen wird.

Um statistisch zu überprüfen, ob die inhaltlich ausgewählten Items zusammenhängen, werden zunächst die paarweisen Korrelationen der Items bestimmt, siehe Tabelle 8.2. Zur Berechnung der Korrelationen zwischen den einzelnen Items jeder Skala wurde Yules Q verwendet (Yule, 1900, 1912). Dies ist ein Koeffizient, der den Zusammenhang zweier dichotom kodierten Variablen bestimmt. Neben dem Yules Q gibt es den ϕ-Koeffizienten, der eher verwendet wird, falls die Werte natürlicherweise dichotom sind.
Im vorliegenden Fall handelt es sich um eine Kategorisierung der Daten in ein dichotomes Schema. Bei den vorliegenden Daten kann es auch mehr Abstufungen geben, die in den Kategorien „0 = falsch“ und „1 = korrekt“ eingeteilt werden können. Aus diesem Grund wird in diesem Fall die Korrelationen mit Yules Q berechnet. Überträgt man die dichotomen Daten in eine Kontingenztafel, so lässt sich die Formel von Yules Q wie folgt darstellen:

$$Q = \frac{n_{11} \cdot n_{22} - n_{12} \cdot n_{21}}{n_{11} \cdot n_{22} + n_{12} \cdot n_{21}} = \frac{n_K - n_D}{n_K + n_D},$$

wobei n_{ij} die Anzahl der Werte in der ij-ten Zelle der Kontingenztafel ist ($i, j \in [1, 2]$), n_K die Anzahl der Konkordanzen und n_D die Anzahl der Diskordanzen angibt (Eid, Gollwitzer & Schmitt, 2010). Die Tabelle 8.2 stellt die Korrelationskoeffizienten dar.

Die Korrelationen innerhalb der einzelnen Skalen variieren deutlich. In der ersten Skala, die sich auf die Items bezieht, die begriffliches Wissen zur Mittelsenkrechte abfragen, gibt es eine schwache positive Korrelation zwischen den Items 1a, in der die Studierenden treffende Beispiele einer Mittelsenkrechten identifizieren sollten, und 2a, in welcher der Begriff der Mittelsenkrechten gegenüber eines gegebenen Beispiels abgegrenzt werden sollte. Im Gegensatz dazu korrelieren die Items 1a und 3a, in der die Probanden korrekte Eigenschaften identifizieren mussten, hoch

Tabelle 8.2: Yules Q-Koeffizient der Items einer Skala

Skala	Items		Q
Skala 1: MS	1a	2a	0,278
	1a	3a	0,760
	2a	3a	0,598
Skala 2: GD	1b	2b	0,573
	1b	3b	-0,132
	2b	3b	0,692
Skala 3: VR	1c	2c	-0,076
	1c	3c	0,045
	2c	3c	0,618
Skala 4: LA	1d	2d	0,296
	1d	3d	0,304
	2d	3d	0,562

positiv. Ein Grund dafür könnte im gleichen, geschlossenen Itemformat liegen. Eine Begründung anzugeben, warum ein gegebenes Beispiel keine Mittelsenkrechte ist, wie es in Aufgabe 2a der Fall war, erfordert anscheinend ein wenig andere Aspekte begrifflichen Wissens bezogen auf die Mittelsenkrechte.

Die zweite Skala beinhaltet die Items, die sich auf das Konzept des gleichschenkligen Dreiecks beziehen. Hier zeigt sich eine hoch positive Korrelation zwischen den Items 1b und 2b sowie zwischen den Items 2b und 3b. Die Inhalte der einzelnen Aufgaben hängen demnach stark miteinander zusammen. Jedoch liegt zwischen den Items 1b und 3b keine Korrelation vor.

In der dritten Skala befinden sich die drei Items, welche begriffliches Wissen zum Konzept des Vektors und seiner Repräsentanten abfragen. Es findet sich zwischen den Items 1c und 2c sowie zwischen den Items 1c und 3c kaum eine Korrelation. Zwischen den Items 2c und 3c war hingegen eine hohe Korrelation von 0,618 zu verzeichnen.

Die vierte Skala fasst die Items zusammen, die begriffliches Wissens der linearen Abhängigkeit messen. Die Korrelationen zwischen den Items 1d und 2d sowie 1d und 3d liegen im mittleren Bereich. Zwischen den Items 2d und 3d liegt dagegen eine hoch positive Korrelation vor.

Die Korrelationen innerhalb der vier Skalen bewegen sich zwischen einem niedrigen bis hohen Bereich. Die Skalen 1, 2 und 4, die sich auf die Begriff Mittelsenkrechte und lineare Abhängigkeit beziehen, weisen hauptsächlich hohe Korrelationen zwischen den einzelnen Items auf. In Skala 3 hingegen ist nur die Korrelation zwischen den Items 2c und 3c hoch positiv.

Interne Reliabilität der Pilotstudie

Es werden zudem die Werte für die Reliabilität des begrifflichen Wissens mithilfe des Cronbach Alpha bestimmt, siehe Tabelle 8.3.

Tabelle 8.3: Cronbachs α als Maß für die interne Reliabilität pro Skala der Pilotstudie

	Skala 1: MS	Skala 2: GD	Skala 3: VR	Skala 4: LA
α	0,501	0,393	0,255	0,353

Albers (2009) nehmen als Mindestvoraussetzung noch ein Cronbach α von 0,7 an. Für die vorliegenden Daten bedeutet dies, dass keine der Skalen als reliabel bezeichnet werden kann.

Interne Reliabilität der Studie

Für die Studie werden ebenfalls Skalen gebildet, die jeweils drei Items zusammenfassen. Inhaltlich lassen sich die Items 1a, 2a und 3a zusammenfügen, die jeweils einen anderen Aspekt des begrifflichen Wissens der Mittelsenkrechte in einem Dreieck abfragen. Die zweite Skala wird durch die Items 1b, 2b und 3b gebildet, da diese sich jeweils auf den Begriff des gleichschenkligen Dreiecks beziehen und ebenfalls begriffliches Wissen erfordern. Die dritte Skala besteht aus den Items 1c, 2c und 3c, die jeweils den Begriffs des Vektors fokussieren und ebenfalls dem begrifflichen Wissens zuzuordnen sind. Schließlich bildet sich die vierte Skala aus den Items 1d, 2d und 3d, die begriffliches Wissens der linearen Abhängigkeit erfordern. Tabelle 8.4 zeigt die drei Skalen und gibt für jede das Cronbachs Alpha an.

Tabelle 8.4: Cronbachs α als Maß für die interne Reliabilität pro Skala der Pilotstudie

	Skala 1: MS	Skala 2: GD	Skala 3: VR	Skala 4: LA
α	0,607	0,513	0,386	0,107

Aufgrund der vorher bereits genannten Einschränkungen und der geringen Anzahl an Items sollte eine geeignete Interpretation der Ergebnisse erfolgen.

Erklärungsansätze für die geringen internen Reliabilitäten

Cronbachs α ist ein empirischer Wert, der direkt aus den Daten der Pilotstudie berechnet wird. Aufgrund der Theorie über Begriffsverständnis und -bildung sowie der Befragungen von Expertinnen und Experten kann gefolgert werden, dass die Items Inhalte abfragen, die für begriffliches Wissen des jeweiligen Begriffs wichtig sind. Es werden essentielle Eigenschaften der Begriffe thematisiert, welche grundlegend für das begriffliche Wissens der vier Begriffe sind. Inhaltlich betrachtet kann also keine der Aufgaben weggelassen oder ersetzt werden. Theoretisch kann also davon ausgegangen werden, dass die Items Fähigkeiten abprüfen, die für das begriffliche Wissen der jeweiligen Begriffe mindestens notwendig sind.

Die Begriffe des Vektors mit seinen Repräsentanten sowie der Begriff der linearen Abhängigkeit können als für die Studienanfängerinnen und -anfänger abstrakt angesehen werden (siehe Kapitel 4.2). Auf die Theorie bezugnehmend kann demnach davon ausgegangen werden, dass das begriffliche Wissen – so wie es in der vorliegenden Arbeit definiert wird – über diese Begriffe geringer ist als über die beiden anschaulichen Begriffe Mittelsenkrechte und gleichschenkliges Dreieck. Die geringere interne Konsistenz der Skalen der abstrakten Begriffe kann ein Hinweis darauf sein, dass die Expertinnen und Experten ein begriffliches Wissen der Begriffe erwarten, das vorwiegend von einer hochschulmathematischen Perspektive geprägt ist als den realen Kenntnisstand der Studienanfängerinnen und -anfänger abzubilden, der stark vom schulischen Unterricht beeinflusst ist. Daher stimmt die experimentell interne Konsistenz der Items, welche die Studierenden bearbeiteten, nicht mit der der Testentwicklerinnen und -entwickler überein, was die niedrigeren Cronbachs Alpha Werte erklären kann.
Außerdem ist Cronbachs Alpha von der Anzahl der Items innerhalb einer Skala abhängig (siehe oben). In dem vorliegenden Fall sind in jeder der vier Skalen nur jeweils drei Items enthalten, weswegen aus mathematischer Sicht kaum hohe α-Koeffizienten zu erreichen sind – außer die Items unterscheiden sich inhaltlich nur minimal. Im vorliegenden Fall wird begriffliches Wissen gemessen, was sich aus vielen Facetten zusammensetzt, siehe zum Beispiel Kapitel 6. Die drei Items der jeweiligen Skala tragen zur Messung des Konstrukts des begrifflichen Wissens bei, fokussieren sich dabei jedoch jeweils auf eine andere Facette, wie zum Beispiel das Prüfen der Eigenschaften eines Begriffs oder das Identifizieren von Beispielen. Aufgrund der inhaltlichen Relevanz und der für die geringe Anzahl an Items verhältnismäßig guten Werte, wurden die Aufgaben der Pilotstudie nicht verändert.

8.4.3.3 Validität

Ein weiteres, wichtiges Gütekriterium ist die Validität. Sie kann als das „Ausmaß, in dem der Test das misst, was er messen soll[,]" (Rost, 2004, S. 34) definiert werden. Shadish, Cook und Campbell (zit. n. Döring & Bortz, 2016, S. 93) definieren konkreter:

> „We use the term *validity* to refer to the appropriate truth of an inference. When we say something is valid we make a judgement about the extent to which relevant evidence supports that inference as being true or correct."

Die Validität trägt also entscheidend dazu bei, die Ergebnisse eines Tests korrekt zu interpretieren und ist daher bei neu entwickelten Studien zentral. Im Allgemeinen wird zwischen vier verschiedenen Typen der Validität unterschieden (*Experimental and quasi-experimental designs for research*, 1963; Campbell, 1957): Konstruktvalidität, interne Validität, externe Validität und statistische Validität. Alle vier Kriterien erfordern ein sauberes, wissenschaftliches Vorgehen bei der Konstruktion einer Studie.

Konstruktvalidität

Eine hohe Konstruktvalidität liegt vor, wenn die Testitems Kausalzusammenhänge auf das theoretische Konstrukt zulassen (Döring & Bortz, 2016). In diesem Fall wird begriffliches Wissen von Studienanfängerinnen und -anfängern bezüglich der von Vollrath (2001) formulierten Kriterien erfasst. Diese Konkretisierung des begrifflichen Wissens in mehreren Items trägt zu einer hohen Konstruktvalidität bei, da die definierten Kriterien jeweils den Fragestellungen der Testitems zugrunde liegen.
Außerdem soll der Test die Qualität der Argumentationen sowie die Art der verwendeten Argumente untersuchen. Dies wird durch die Analyse von Beweisaufgaben untersucht. Dabei zeigten die Ergebnisse mehrerer Pilotstudien und Interviews, dass die Items das Messen von korrekten mathematischen Argumentationen zulassen (siehe Kapitel 8.4.2).

Interne und externe Validität

Die interne Validität eines Tests gibt an, ob „der vermutete Kausaleinfluss der unabhängigen Variable/n auf die abhängige Variable/n belegt werden“ kann (Döring & Bortz, 2016, S. 97). Dafür spielt das Untersuchungsdesign und seine Operationalisierung eine wichtige Rolle. In diesem Fall wurde ein querschnittlicher Leistungstest konstruiert, der eine Momentaufnahme von mathematischer Leistung zu Beginn des Studiums erfasst. Die Items und Inhalte des Leistungstests wurden von Expertinnen und Experten aus den Bereichen der Mathematik, Mathematikdidaktik sowie Erziehungswissenschaften validiert (siehe Kapitel 8.4.1). Aufgrund dessen kann von der Einhaltung der internen Validität ausgegangen werden.
Die externe Validität gewährleistet die Generalisierbarkeit der Testergebnisse (Döring & Bortz, 2016). In diesem Fall liegen keine Informationen über das Vorwissen der Testpersonen bezüglich der zu erfassenden Merkmale (begriffliches Wissen über die vier mathematischen Begriffe Mittelsenkrechte, gleichschenkliges Dreieck, Vektor und lineare Abhängigkeit sowie argumentative Fähigkeiten) vor. Die Abiturdurchschnittsnote wurde zwar bei den Probanden abgefragt, jedoch kann diese – wenn überhaupt – nur als allgemeiner Prädiktor für Studienerfolg verwendet werden (Schiefele et al., 2003; Hinneberg, 2003). Daneben liegen keine externen Informationen über die Zielpopulation vor, weswegen keine Aussagen darüber getroffen werden können, ob es sich um eine repräsentative Stichprobe handelt.

Statistische Validität

Die statistische Validität der Studie zeigt sich in korrekt ausgeführten statistischen Analysen (Döring & Bortz, 2016). Bei der Datenauswertung der beschriebenen Studie werden vor der Anwendung bestimmter Methoden stets deren Voraussetzungen an die Daten geprüft. Zudem wird mit fehlenden Werten sorgfältig umgegangen, wie in Kapitel 9.3.2 beschrieben wird. Daher kann von einer statischen Validität ausgegangen werden.

9 Kodierung

Im folgenden Kapitel wird beschrieben, wie die Antworten der Studierenden kodiert werden. Dabei wird zuerst auf die Kodierung der Aufgaben 1 bis 4 eingegangen und schließlich das Kodierschema von Aufgabe 5 erläutert, das die mathematischen Argumentationen der Studierenden kategorisiert. Zuletzt wird über den Umgang mit fehlenden Werten im Datensatz berichtet.

9.1 Kodierschema Aufgaben 1 bis 4

Zur Auswertung der Studie werden die Aufgaben 1 bis 4 dichotom kodiert, um die Lösungswahrscheinlichkeiten für jede Aufgabe berechnen zu können. Falsche Antworten werden der Kategorie „0“ und korrekt gelöste Aufgaben der „1“ zugeordnet. Fehlende Werte aufgrund des Rotationsdesigns (siehe Kapitel 8.3) erhalten den Code „77“ (siehe Kapitel 9.3).

9.2 Kodierschema Aufgabe 5: Mathematische Argumentation

Für das Forschungsziel 3, das die Untersuchung der Argumentationen von Studierenden beinhaltet, werden Einblicke in die Argumentationsprozesse von Studienanfängerinnen und -anfängern benötigt. Dazu werden die Antworten von Aufgabe 5 hinsichtlich der Qualität der Argumentation untersucht. Forschungsfrage 3.2 prüft, ob die Studierenden empirische Argumente verwenden. Des Weiteren wird untersucht, welchen Einfluss anschauliche oder abstrakte Begriffe auf den Argumentationsprozess haben.

Aufgabe 5 wurde mithilfe zweier unabhängiger Kodierer bewertet, welche intensive Schulungen zum Kodieren der Testbögen durchliefen. Die Schulungen fanden zu Beginn der Kodierung sowie in regelmäßigen Abständen nach den einzelnen Kodierprozessen statt. Außerdem wurden in zusätzlichen Besprechungen die Kategorien der Schemata weiter präzisiert und Ankerbeispiele festgelegt. Die Interraterreliabilität für die einzelnen Items wurden mithilfe von Cohens κ (Cohen, 1960) bestimmt. Die Werte der Interraterreliabilität der beiden Kodierer sind in Tabelle 9.1 dargestellt und liegen jeweils über 0,7, was einer sehr guten Übereinstimmung entspricht (Cohen, 1960).

Harel und Sowder (1998) untersuchen im Rahmen einer qualitativen Studie mit Studierenden verschiedene Argumentationsprinzipien (siehe Kapitel 5.3.5). Bei ihrer Analyse wird deutlich, dass hauptsächlich extern, empirisch oder analytisch argumentiert wird. Dabei entspricht die Verwendung empirischer Argumente einer induktiven und die Verwendung analytischer Argumente einer deduktiven Herangehensweise. Die Identifikation induktiver und deduktiver Vorgehensweisen beim Argumentieren kann auch in vergleichbaren anderen Studien festgestellt werden (siehe Kapitel 5.3.5).

Tabelle 9.1: Kodierschema für die Art der Argumente mit Interraterreliabilität für Aufgabe 5

Art der Argumente	Cohens κ			
	a) MS	b) GD	c) VR	d) LA
Keine Argumentation Externe Überzeugung Empirische Argumente Analytische Argumente	0,77	0,75	0,73	0,86

Abkürzungen: Mittelsenkrechte im Dreieck (MS), gleichschenkliges Dreieck (GD), Vektor und seine Repräsentanten (VR), lineare Abhängigkeit (LA)

An diese Ergebnisse anlehnend wird in der vorliegenden Studie die Art der für den Beweis genutzten Argumente untersucht und dabei eine Kategorisierung in keine, externe, empirische oder analytische Argumente vorgenommen. Das Kodierschema findet sich in Tabelle 9.1.

9.3 Umgang mit fehlenden Werten im Datensatz

Im Kapitel 8.3 wird das Design der im Rahmen der vorliegenden Arbeit konstruierten Studie vorgestellt: Zur Durchführung der Studie wird ein Rotationsdesign gewählt, da eine Bearbeitungszeit von maximal 30 Minuten nicht überschritten werden kann (siehe Kapitel 8.3). Es werden daher nicht allen Teilnehmerinnen und Teilnehmern alle Items vorgelegt. Jeder Testbogen enthält bei jeder der fünf Aufgaben nur drei – anstatt der vier – Teilaufgaben. In Summe können pro Teilnehmerin und Teilnehmer demnach $5 \cdot 3 = 15$ Items ausgewertet werden. Jeder Studierende beantwortet also fünf Aufgaben, die sich auf drei verschiedene geometrische Begriffe beziehen.

Bei der Kodierung der Testdaten werden zwei verschiedene fehlende Werte unterschieden: Einmal solche, die auf fehlende Bearbeitung der Aufgaben auf Seiten der Studierenden zurückzuführen sind, und ein andermal solche, die auf das Testdesign zurückzuführen sind. Wie diese kodiert werden, wird in diesem Kapitel erläutert.

9.3.1 Fehlende Werte aufgrund der Nicht-Bearbeitung von Items

Einige Studierende bearbeiteten bestimmte Aufgaben – insbesondere die Aufgaben, die eigene Argumentationen erfordern wie in Aufgabe 5 – nicht. Für die in der vorliegenden Arbeit vorgestellten Analysen werden diese fehlenden Werte mit „falsch bearbeitet“, also in diesem Fall mit „0“, kodiert. Dies hat den Grund, dass die Bearbeitungszeit ausreichte, um alle Items theoretisch lösen zu können. Bei der Durchführung der Studie war es meist so, dass die Teilnehmerinnen und Teilnehmer mit dem Lösen der Aufgaben früher als in der gegebenen Zeit fertig waren. Ein weiterer Grund für diese Kodierung hängt mit der Art der Studie zusammen: Es handelt sich um einen Leistungstest. Bei Leistungstests ist ein solches Vorgehen üblich. Auch in Leistungstests, die an der Schule oder an der Universität durchgeführt werden, werden in der Regel nicht bearbeitete Aufgaben als falsch bewertet. Darüber hinaus ist diese Vorgehensweise in der mathematikdidaktischen Forschung verbreitet und andere Autoren, die in ähnlichen Kontexten Leistungstests durchführen, folgen dieser Art der Kodierung (z. B. Hilbert et al., 2008; Kuntze, 2005; Heinze & Kwak, 2002; Healy & Hoyles, 1998).

9.3.2 Fehlende Werte aufgrund des Studiendesigns

In den Testdaten gibt es ca. 25% fehlende Werte, die sich allein auf das gewählte Studiendesign zurückführen lassen. Diese systematisch fehlenden Werte kann man nicht dadurch begründen, dass den Probanden spezielles Wissen fehlte oder mangelnde Motivation sie davon abhielt, bestimmte Aufgaben zu beantworten. Das Nicht-Bearbeiten der Aufgaben war vollkommen zufällig – je nachdem, welcher Testbogen dem Probanden vorgelegt wurde (siehe Kapitel 8.3). Daher handelt es sich bei diesen fehlenden Werten um Werte, die *missing completely at random* (MCAR) sind.

Um fehlende Werte in einem Datenset zu ergänzen, gibt es verschiedene Möglichkeiten. Man kann zum Beispiel die Werte bei Analysen listen- oder paarweise entfernen, sie durch Mittelwerte ersetzen oder sie mithilfe geeigneter Verfahren schätzen. Vor- und Nachteile der verschiedenen Methoden finden sich zum Beispiel bei Rubin (1976), Little und Rubin (2002b) oder Allison (2001).

Bei dem listen- oder paarweisen Fallausschluss gehen Informationen verloren, die Daten im Datenset verringern sich und es können Verzerrungen bei den Ergebnissen entstehen. Entfernt man Werte im vorliegenden Datenset listenweise, blieben für die vorliegende Studie keine Daten übrig, die man auswerten könnte. Im vorliegenden Fall entstehen bei jedem Probanden fehlende Werte aufgrund des Rotationsdesigns. Bei dem paarweisen Ausschluss kann es innerhalb einer Variable zu verschieden großen Anzahlen an Testwerten kommen, da Ergebniswerte bei Analysen nicht berechnet werden, falls mindestens ein Testwert fehlt. Möchte man beispielsweise Korrelationen berechnen, benötigt man jeweils zwei Testwerte. Ist mindestens einer nicht vorhanden, so wird kein Ergebniswert berechnet.

Das Ersetzen fehlender Testwerte durch Mittelwerte verzerrt weitere Analysen, wenn man neben Mittelwertsberechnungen andere statistische Untersuchungen durchführen möchte. Bei einem solchen Vorgehen wird zum Beispiel die wahre Varianz unterschätzt, weswegen es bei Gruppenvergleichen zu sehr vielen signifikanten Unterschieden kommen kann, die in Wahrheit nicht existieren.

State of the Art ist es mittlerweile, eine Schätzung der fehlenden Werte vorzunehmen (z. B. Schafer & Graham, 2002). Dabei kann der EM-Algorithmus, Maximum-Likelihood Schätzungen oder die multiple Imputation angewendet werden. Der EM-Algorithmus wird für deskriptive Statistik empfohlen, bei Interferenzstatistiken können dagegen Probleme entstehen (Lüdtke, Robitzsch, Trautwein & Köller, 2007). Die beiden anderen Methoden liefern vergleichbare Ergebnisse, falls bei der Anwendung der multiplen Imputation genug Datensätze erzeugt werden (Graham, Olchowski & Gilreath, 2007). Lüdtke et al. (2007) und Allison (2001) empfehlen explizit die Anwendung multipler Imputation bei fehlenden Daten, da diese Methode – im Vergleich zu dem Maximum-Likelihood Verfahren – für fast alle Daten und Modelle verwendet werden kann. Zudem können die statistischen Analysen mit konventioneller Software durchgeführt werden (Allison, 2001). Daher werden in der vorliegenden Arbeit die durch das Rotationsdesign verursachten fehlenden Werte mithilfe der multiplen Imputation geschätzt, die von Rubin (1976) entwickelt wurde. Voraussetzung für die multiple Imputation ist es, dass die fehlenden Werte mindestens *missing at random* (MAR) sind (Rubin, 1976), was im vorliegenden Fall erfüllt ist. Die fehlenden Werte sind sogar MCAR (siehe oben).

Multiple Imputation

Bei der multiplen Imputation werden viele „neue“ Datensätze erzeugt, die die bestehenden Werte nicht verändern, jedoch für die fehlenden Werte jeweils verschiedene *plausible* Werte einsetzt. Jedem fehlenden Wert wird ein Vektor mit verschiedenen, plausiblen Werten zugeordnet (Rubin, 1987; Little & Rubin, 2002a). Wie oft der Datensatz kopiert werden soll bzw. wie lang der Vektor ist, ist vom Anteil der fehlenden Werte abhängig. Graham et al. (2007) empfehlen, bei einem Anteil von 10% bis 30% fehlenden Werten mindestens 20 Datensätze zu erzeugen. In der vorliegenden Studie gibt es ca. 25% fehlende Werte. Aus diesem Grund wurden in der vorliegenden Arbeit 25 weitere Datensätze geschätzt, um Fehler beim Schätzen möglichst gering zu halten.

Die multiple Imputation ist ein sich wiederholender Algorithmus, der mithilfe von linearer Regression neue Werte schätzt (Graham, 2009; Graham et al., 2007; Little & Rubin, 2002b; IBM, o. J.). Da bei multipler Anwendung von linearen Regressionen fehlende Werte durch solche geschätzt werden, die auf der Regressionsgeraden liegen und keine Varianz aufweisen, wird bei der multiplen Imputation in einem zweiten Schritt eine gewisse Varianz der geschätzten Werte hergestellt. Würde dies nicht geschehen, könnte es zu überschätzten Korrelationen zwischen dem geschätzen Wert und den unabhängigen Variablen kommen (Lüdtke et al., 2007). Zudem wird die Varianz der Werte unterschätzt, da durch das Kopieren des Datensets die Anzahl der Testpersonen vergrößert wird. Dies wird bei der multiplen Imputation jedoch dadurch behoben, dass jedem geschätzten Wert ein zufälliger Fehler zugeordnet wird, der aus der empirischen Verteilung der Regressionsresiduen oder aus der den Regressionsresiduen zugrunde liegenden, angenommenen Normalverteilung ermittelt wird (Little & Rubin, 2002b). Es wird also durch multiple Imputation eine Verteilung der fehlenden Werte erzeugt.
Der multiplen Imputation liegt demnach ein mehrschrittiges Verfahren zugrunde (Rubin, 1987; Lüdtke et al., 2007): Im ersten Schritt werden die fehlenden Daten geschätzt, indem Informationen aus dem Datensatz – sogenannte Prädiktoren – verwendet werden. Im zweiten Schritt werden diese geschätzten Daten mithilfe multipler linearer Regressionen analysiert. In einem dritten Schritt werden die Datensätze wieder zusammengeführt, wobei die Unsicherheit der Imputation eingerechnet wird.

Bei der multiplen Imputation entstehen mehrere Datensätze. Möchte man Analysen durchführen, so müssen diese für jeden Datensatz einzeln ausgeführt werden. Im Anschluss sollen die Ergebnisse der einzelnen Datensets *gepoolt* werden, d. h. zu einem Ergebnis zusammengefügt und ein Standardfehler berechnet werden (Lüdtke et al., 2007; Schafer & Olsen, 1998).
Für die Schätzung der fehlenden Werte werden Variablen benötigt, die Informationen über mögliche Ausprägungen der fehlenden Werte enthalten. Im vorliegenden Fall wurden die fehlenden

Tabelle 9.2: Einordnung der Abiturnoten in vier Leistungsgruppen

Gruppe	Note		Bezeichnung
	von	bis	
1	0,5	1,4	sehr gut
2	1,5	2,4	gut
3	2,5	3,4	befriedigend
4	3,5	4,0	ausreichend

Werte der Items 1a bis 3d sowie die dichotome Kodiervariable von Aufgabe 4 und 5 geschätzt und diese auch als Prädiktoren verwendet. Zusätzlich wurden als Prädiktoren die Abiturnoten verwendet, die vorher in vier Cluster eingeteilt wurden (vgl. Tabelle 9.2).

Die fehlenden Werte der Variablen zur Art der Argumente von Aufgabe 5 wurden ebenso imputiert, wobei dabei nur die Variablen zur Art der Argumente geschätzt und als Prädiktoren verwendet wurden. Dies hatte den Grund, dass die Variablen zur Art der Argumente ein nominales Skalenniveau hatten, sodass ordinal oder metrisch skalierte Variablen zur Verzerrung bei der Imputation beitragen würden. Wieder wurden 25 Imputationen aufgrund der systematisch fehlenden Werte (ca. 25%) bestimmt. Für die fehlenden Werte von Aufgabe 5, die sich auf die Form der Antworten bezog, wurden alle in der Tabelle aufgeführten Variablen geschätzt und ebenso als Prädiktoren verwendet.

Im Statistikprogramm SPSS wird die multiple Imputation – sofern es sich nicht um monoton fehlende Werte handelt – mittels einer „vollständig konditionale[n] Spezifikation“ (IBM, o. J., S. 18) durchgeführt. Diese Methode führt iterativ einen *Markov Chain Monte Carlo* Algorithmus (MCMC) durch und basiert auf linearer Regression (IBM, o. J.; Allison, 2001). Details zu dem MCMC Algorithmus finden sich z. B. bei Rubin (1976) oder Allison (2001).

10 Ergebnisse

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Studie hinsichtlich der Forschungsziele und Forschungsfragen dargelegt. Zu Beginn wird auf das erste Forschungsziel eingegangen. Darin wird überprüft, in wie weit sich das theoretisch hergeleitete Modell zur Begriffsbildung am Übergang Schule - Hochschule empirisch bestätigt. Im Anschluss wird das zweite Forschungsziel beleuchtet. Es beschäftigt sich mit der Untersuchung des begrifflichen Wissens von Studienanfängerinnen und -anfängern. Zuletzt werden die Ergebnisse bezüglich des dritten Forschungsziels vorgestellt. Dabei steht die Analyse mathematischer Argumentationen der Lernenden im Vordergrund.

10.1 Forschungsziel 1: Überprüfung des Entwicklungsmodells

Die Studie beinhaltet fünf Aufgaben, von denen vier dem Schulkontext und eine dem Hochschulkontext entstammen. In diesem Abschnitt werden die Aufgaben 1, 2, 3 und 4 betrachtet, die dem Schulkontext zugeordnet werden können. Aufgabe 1 untersucht, ob die Studienanfängerinnen und -anfänger korrekte Beispiele zu den Begriffen Mittelsenkrechte, gleichschenkliges Dreieck, Vektor und lineare Abhängigkeit angeben können. Eine ähnliche Aufgabenstellung ist bei Aufgabe 4 zu finden. In dieser sollen die Studierenden zu den mathematischen Sätzen (Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten in einem Dreieck, Satz des Thales, Kommutativität der Vektoraddition, lineare Abhängigkeit dreier beliebiger Vektoren im $\mathbb{R}^2$) ebenso Beispiele aus möglichen Antworten identifizieren. Aufgabe 2 befasst sich mit der Abgrenzung eines Begriffs zu ähnlichen geometrischen Begriffen. Darin sollen die Teilnehmerinnen und Teilnehmer darlegen, warum ein dargestelltes Beispiel nicht zu einem der vier Begriffe gezählt werden kann. Aufgabe 3 erfordert schließlich die Kenntnis korrekter Eigenschaften der vier mathematischen Fachbegriffe Mittelsenkrechte, gleichschenkliges Dreieck, Vektor und lineare Abhängigkeit.
Die Aufgabenstellungen der im Rahmen dieser Arbeit konzipierten Studie werden in Kapitel 8.3 dargestellt. Das Messinstrument findet sich im Anhang C. In den folgenden zwei Abschnitten werden die Ergebnisse der oben genannten Aufgaben dargestellt.

10.1.1 Forschungsfrage 1.1: Analyse der Aufgaben aus dem Schulkontext für anschauliche Begriffe

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Aufgaben des Schulkontextes mit den beiden anschaulichen Begriffen Mittelsenkrechte und gleichschenkliges Dreieck aufgeführt. Die Aufgaben 1 bis 3 beziehen sich auf begriffliches Wissen, wohingegen Aufgabe 4 die Angabe eines Beispiels zu mathematischen Sätzen erfordert. Betrachtet werden die Lösungsraten der Items, die mithilfe des dichotomen Kodiersystems (siehe Kapitel 9) bestimmt wurden. Die Lösungsraten der korrekten Beantwortung der Aufgaben 1 bis 4 des anschaulichen Begriffs Mittelsenkrechte zeigt Diagramm

10.1.

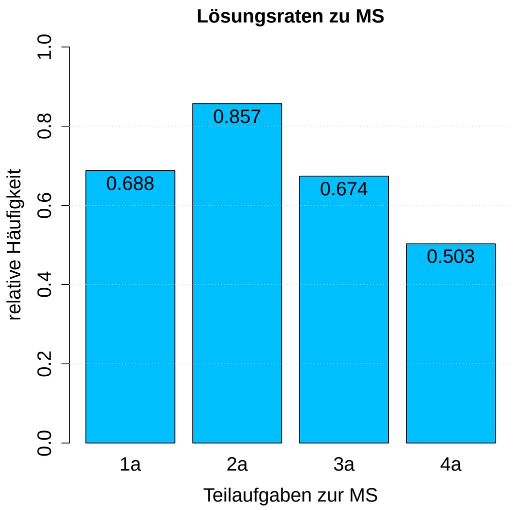


Abbildung 10.1: Lösungsraten zur Mittelsenkrechte

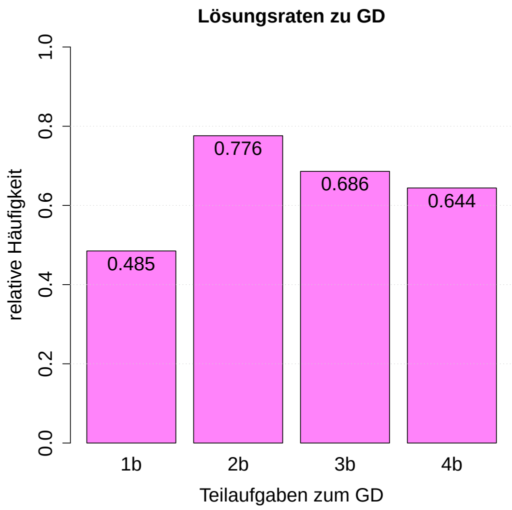


Abbildung 10.2: Lösungsraten zum gleichschenkligen Dreieck

Viele Studierende (68,8 %) können das Item, das sich auf den Begriff der Mittelsenkrechten bezieht, korrekt beantworten. Die meisten Teilnehmerinnen und Teilnehmer sind also in der Lage, aus vier möglichen Antwortoptionen geeignete Beispiele für den Begriff Mittelsenkrechte auszuwählen. Die Antwortalternativen, die den Studierenden bei dieser Aufgabe vorgelegt werden, sind stets geometrische Konstruktionen spezieller Geraden im Dreieck, wie zum Beispiel die Darstellung der Seitenhalbierenden in einem Dreieck. Demnach können die meisten Teilnehmerinnen und Teilnehmer, aus der Anschauung heraus eine Mittelsenkrechte zu identifizieren.
Nur knapp die Hälfte aller Studienanfängerinnen und -anfänger (48,5 %) wählt ein korrektes Beispiel für ein gleichschenkliges Dreieck aus (siehe Diagramm 10.2). Unter den Antwortoptionen sind rechtwinklige und gleichseitige Dreiecke zu finden. Eine qualitative Analyse deutet an, dass Studierende häufig die Antwortmöglichkeit, die ein rechtwinkliges und zugleich gleichschenkliges Dreieck zeigt, nicht auswählen, obwohl das Dreieck gleichschenklig ist. Die Eigenschaft der gleich langen Schenkel eines Dreiecks wird demnach oft nicht identifiziert, wenn das Dreieck einen rechten Winkel enthält.
Die Lösungsraten der Items 2a und 2b, welche die Abgrenzung des Begriffs erfordern, sind durchweg hoch: Es können 85,7 % der Teilnehmerinnen und Teilnehmer Teilaufgabe 2a, welche die Abgrenzung eines gegebenen Beispiels von einer Mittelsenkrechten erfordert, korrekt lösen. Das Item zeigt eine Gerade, die durch den Eckpunkt eines Dreiecks verläuft und weder senkrecht auf einer Dreiecksseite steht noch eine Dreiecksseite halbiert. Teilaufgabe 2b, welche die Abgrenzung eines beliebigen Dreiecks von einem gleichschenkligen Dreieck erfordert, kann von 77,6 % der Studierenden richtig gelöst werden.
In den Aufgaben 3a und 3b sollen die Studierenden ankreuzen, welche der gegebenen Eigenschaften einer Mittelsenkrechte in einem Dreieck und einem gleichschenkligen Dreieck zuzuordnen sind. Viele Studierende (67,4 %) können das Item 3a korrekt lösen. Ebenso bearbeiten 68,6 % Item 3b richtig und wählen nur die Eigenschaften aus, die ein gleichschenkliges Dreieck besitzt. Die Distraktoren beziehen sich auf Winkel, Symmetrie sowie Längenmaße.

Zusammenfassung

Die Aufgaben 1 bis 3 fragen Aspekte begrifflichen Wissens (Vollrath, 2001) der beiden Fachbegriffe Mittelsenkrechte und gleichschenkliges Dreieck ab. Mit Ausnahme des Items 1b können jeweils mehr als zwei Drittel der Teilnehmerinnen und Teilnehmer die Items korrekt lösen.
Die Lösungsraten von Aufgabe 4 zeigen, dass 50,3 % der Teilnehmerinnen und Teilnehmer korrekte Beispiele für den Satz zum Schnittpunkt der Mittelsenkrechten in einem Dreieck angeben. In diesem Item werden verschiedene Dreiecke mit speziellen Geraden visualisiert. Nur eine der Darstellungen stellt ein Dreieck mit den drei Mittelsenkrechten dar, die sich in einem Punkt schneiden. Die übrigen Beispiele zeigen zum Beispiel die drei Seitenhalbierenden, die sich schneiden, oder aber drei Geraden in einem Dreieck, die sich nicht schneiden.
Im Vergleich dazu wählen 64,4 % der Studierenden geeignete Darstellungen des Satzes von Thales aus, bei dem das gleichschenklige Dreieck beim Begründen eine wesentliche Rolle spielt. Die Distraktoren zeigen in diesem Item Dreiecke, die nicht durch den Mittelpunkt des Kreises verlaufen, oder Darstellungen, in denen ein Eckpunkt des Dreiecks auf dem Mittelpunkt des Kreises liegt.

10.1.2 Forschungsfrage 1.2: Analyse der Aufgaben aus dem Schulkontext für abstrakte Begriffe

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der Aufgaben aus dem Schulkontext betrachtet, die sich auf die abstrakten Begriffe Vektor und seine Repräsentanten (VR) sowie auf lineare Abhängigkeit (LA) beziehen. Die Lösungsraten der Items zum Vektor im $\mathbb{R}^2$ sind in Abbildung 10.3 veranschaulicht.

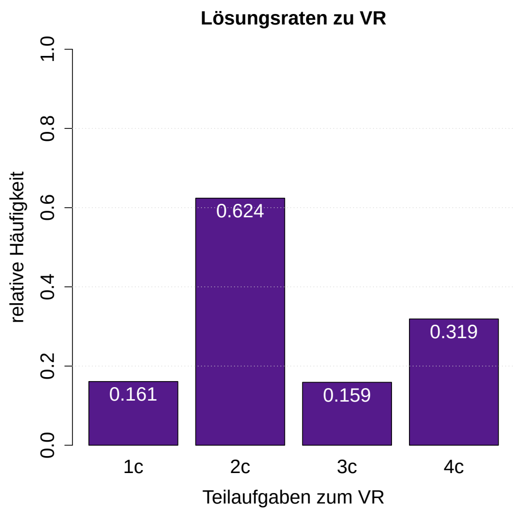


Abbildung 10.3: Lösungsraten zum Vektor

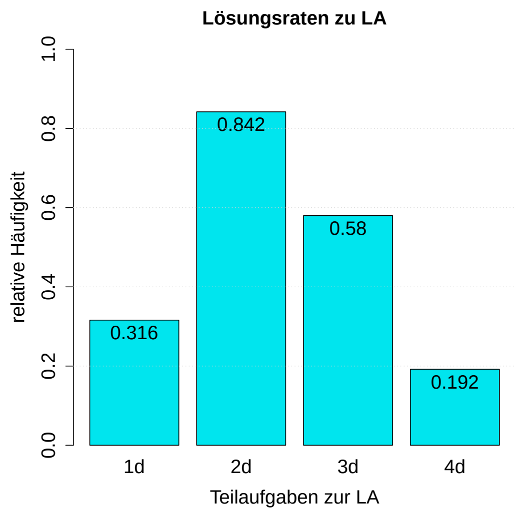


Abbildung 10.4: Lösungsraten zur linearen Abhängigkeit

Die Items zum Vektorbegriff stellen sich als schwer lösbar für die Studierenden heraus: Die beiden Items 1c sowie 3c können nur 16,1 % bzw. 15,9 % der Teilnehmerinnen und Teilnehmer korrekt beantworten. Die Distraktoren des Items 1c sind algebraischer und geometrischer Art. Sie zeigen zwei- und dreidimensionale Vektoren sowie Ursprungsgeraden. Die Distraktoren des Items 3c beziehen sich auf Winkel und Geraden. Die Lösungsrate von Aufgabe 2c ist vergleichsweise hoch und liegt bei 62,4 %. Die Studierenden sollen in dieser Teilaufgabe darlegen, warum zwei nicht parallele Pfeile in einem Koordinatensystem des $\mathbb{R}^2$ nicht denselben Vektor repräsentieren. Die Lösungsrate ist dennoch niedriger als die der Items 2a und 2b, die sich auf die anschaulichen Begriffe Mittelsenkrechte und gleichschenkliges Dreieck beziehen (siehe Kapitel 10.1.1).
Wie in Diagramm 10.4 dargestellt ist, können 84 % der Studienanfängerinnen und -anfänger Teilaufgabe 2d korrekt beantworten. Darin waren zwei Vektoren in algebraischer Form gegeben und die Studierenden sollten angeben, warum diese beiden nicht linear abhängig sind. Die Begründung liegt bei dieser Aufgabe nicht im Vordergrund und kann auch auf rechnerische Weise erfolgen.
Die Items 1d und 3d werden von 31,6 % bzw. 58,0 % der Studienanfängerinnen und -anfänger korrekt bearbeitet. Insbesondere das Identifizieren von Beispielen, die zwei linear abhängige Vektoren zeigen (Item 3c), bereitet den Studierenden offensichtlich Schwierigkeiten. Die Distraktoren sind auf algebraische und geometrische Weise dargestellt und zeigen verschiedene linear ab- und unabhängige Vektoren.

Vergleicht man die Lösungsraten der vier Begriffe, so lassen sich Gemeinsamkeiten der anschaulichen und abstrakten Begriffe feststellen (siehe Diagramme 10.5 und 10.6).

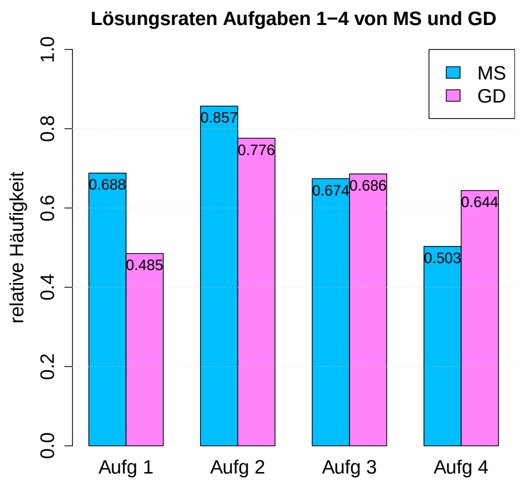


Abbildung 10.5: Lösungsraten zur Mittelsenkrechte und zum gleichschenkligen Dreieck

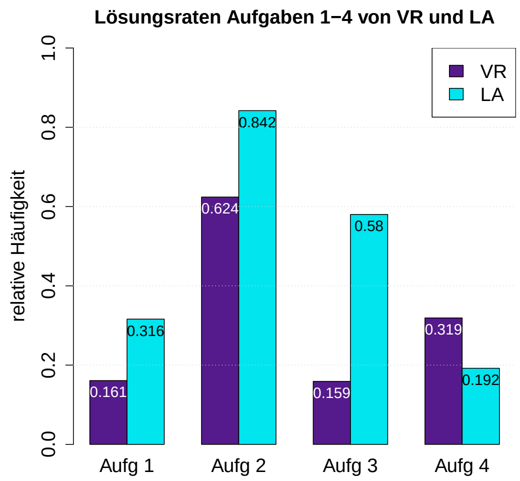


Abbildung 10.6: Lösungsraten zum Vektor und zur linearen Abhängigkeit

Auf dem ersten Blick scheinen die Lösungsraten der Items zur linearen Abhängigkeit denen zur Mittelsenkrechte und zum gleichschenkligen Dreieck zu ähneln, da die Studierenden die Teilaufgaben 2d und 3d gut lösen. Der direkte Vergleich (siehe Diagramm 10.7) zeigt, dass die Lösungsrate von Item 2c zwar denen von 2a und 2b ähnlich sind, aber Items 3c, 1c und 4c von deutlich weniger Studierenden korrekt gelöst werden als die zur Mittelsenkrechte oder zum gleichschenkligen Dreieck. Dementsprechend zeigen sie keinen ähnlichen Verlauf des begrifflichen Wissens der Studienanfängerinnen und -anfänger an.

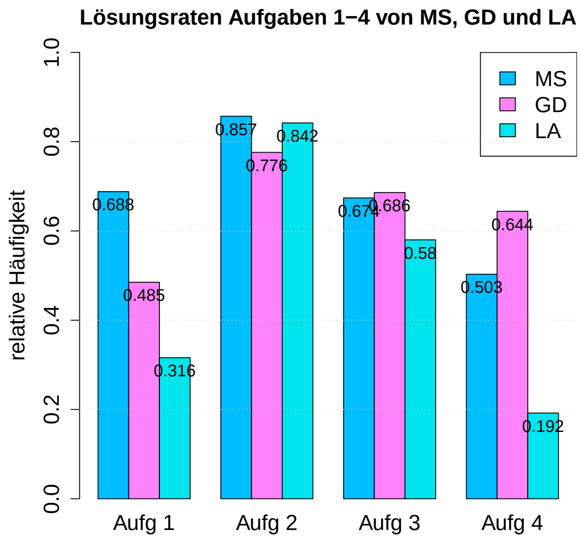


Abbildung 10.7: Lösungsraten zur Mittelsenkrechte, zum gleichschenkligen Dreieck und zur linearen Abhängigkeit

Zusammenfassung

Die Aufgaben 1 bis 4 fragen Aspekte des begrifflichen Wissens zur Mittelsenkrechte, zum gleichschenkligen Dreieck, zum Vektor und zur linearen Abhängigkeit ab. Die Lösungsraten der Items, die sich auf den Vektorbegriff beziehen, sind – mit Ausnahme des Items 2c – niedrig (16, 1 % und 15, 9 %). Das begriffliche Wissen zur linearen Abhängigkeit von Vektoren hingegen ist etwas höher: Abgesehen von Item 2d, das von einigen Studierenden korrekt bearbeitet wurde, können mehr als die Hälfte das Item 3d korrekt lösen und knapp ein Drittel das Item 1d.
31, 9 % der Probanden lösen das Item 4c korrekt und lediglich 19, 2 % können das Item 4d erfolgreich bearbeiten. In diesen beiden Items sollen die Studierenden Beispiele in Form von algebraischen und geometrischen Darstellungen identifizieren, welche die beiden Sätze zur Kommutativität der Vektoraddition und zur linearen Abhängigkeit dreier beliebiger Vektoren im $\mathbb{R}^2$ zeigen. Die Ergebnisse der beiden Teilaufgaben legen nahe, dass die Studierenden weniger Items lösen können, die sich auf die abstrakten Begriffe Vektor und seine Repräsentanten und lineare Abhängigkeit beziehen als solche, welche begriffliches Wissen zu den anschaulichen Begriffe Mittelsenkrechte und gleichschenkliges Dreieck erfordern.

10.1.3 Forschungsfrage 1.3: Analyse der Aufgaben aus dem Hochschulkontext für anschauliche Begriffe

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Items vorgestellt, die dem Hochschulkontext zuzuordnen sind. Es werden folglich die Ergebnisse von Aufgabe 5 dargestellt, die mathematische Argumentation erforderte, wobei zuerst die Ergebnisse der anschaulichen Fachbegriffe und dann die der abstrakten Begriffe beschrieben werden.

Die Items wurden dichotom kodiert und erlauben daher die Angabe von Lösungshäufigkeiten für die einzelnen Items (siehe Kapitel 9). Das Diagramm 10.8 visualisiert die Lösungsraten der korrekt beantworteten Teilaufgaben 5a, 5b, 5c und 5d, die das Beweisen der mathematischen Sätze zum Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten in einem Dreieck, des Thalessatzes, des Satzes zur Kommutativität der Vektoraddition und zur linearen Abhängigkeit dreier beliebiger Vektoren im $\mathbb{R}^2$ beinhalten.

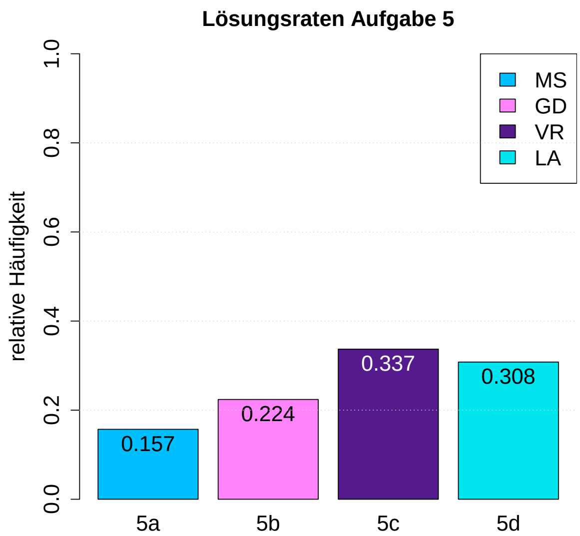


Abbildung 10.8: Lösungsraten zur Aufgabe 5

Für die vorliegende Forschungsfrage sind die Ergebnisse der beiden anschaulichen Begriffe Mittelsenkrechte und gleichschenkliges Dreieck relevant. Korrekte Beweise zum Satz über die Mittelsenkrechten (Item 5a) können 15, 7 % der Studierenden angeben. Etwas mehr, nämlich 22, 4 % der Probanden, gelingt es, den Satz des Thales zu beweisen. Für den Beweis des Satzes wurden in der Regel die Eigenschaften des gleichschenkligen Dreiecks herangezogen. Die Lösungsraten der beiden Teilaufgaben sind im Vergleich zu denen, die dem Schulkontext zugeordnet werden können, niedrig (siehe Kapitel 10.1.1).
Mithilfe der Lösungsraten bei Aufgabe 4 wird untersucht, ob eine niedrige Lösungsrate bei den Teilaufgaben 5a und 5b auf mangelndes Verständnis des gegebenen mathematischen Satzes zurückzuführen ist. Aufgabe 4 beinhaltete die Angabe eines Beispiels zu dem gegebenen Satz. Die mittleren Lösungsraten für jede der vier Teilaufgaben zeigt Diagramm 10.9.

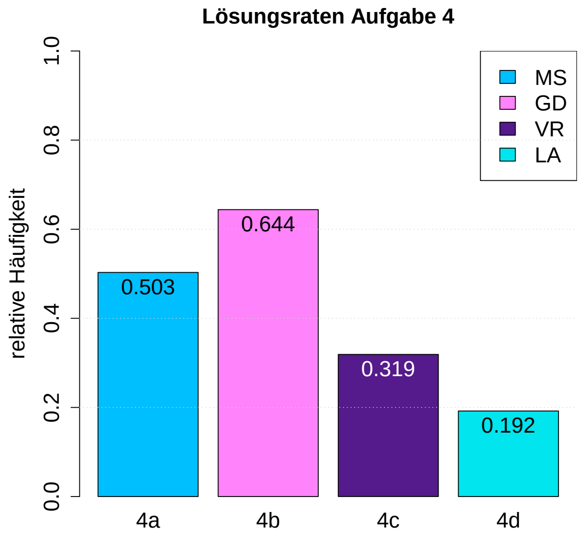


Abbildung 10.9: Lösungsraten zur Aufgabe 4

Es wird im Folgenden getestet, ob die Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die ein Beispiel für den mathematischen Satz angeben konnten (Aufgabe 4), diesen in Aufgabe 5 eher korrekt beweisen können als diejenigen, die kein Beispiel angeben konnten. Dazu werden die Probanden in zwei Gruppen eingeteilt. Diejenigen, welche die Teilaufgabe 4a bzw. 4b korrekt beantworten, befinden sich in Gruppe A und diejenigen, welche die entsprechende Teilaufgabe nicht korrekt lösten, in Gruppe B. Anschließend wird mithilfe eines t-Tests für unabhängige Stichproben untersucht, ob sich signifikante Unterschiede in der Bearbeitung der Teilaufgabe 5a bzw. 5b nachweisen lassen. Die Gruppenstatistiken sind in Tabelle 10.1 dargestellt.

Tabelle 10.1: Gruppenstatistiken der Teilaufgaben a und b

	4a/4b	N	M	SD
Teilaufgabe a	korrekt	83	0,14	0,35
	nicht korrekt	72	0,07	0,26
Teilaufgabe b	korrekt	94	0,11	0,31
	nicht korrekt	41	0,00	0,00

N ist die Gruppengröße, M der Mittelwert und SD die Standardabweichung.

Die Ergebnisse der t-Tests zeigen, dass es bei Teilaufgabe b einen signifikanten Unterschied mit einem mittleren Effekt (Cohen, 1992) zwischen den beiden Gruppen gibt (siehe Tabelle 10.2). Studierende, die bereits ein Beispiel zu dem Satz des Thales angeben konnten, können diesen signifikant öfter beweisen als die anderen Studierenden.

Tabelle 10.2: Ergebnisse des t-Tests für unabhängige Stichproben

	t	df	p	Cohens d
Teilaufgabe a	1,528	148	0,129	
Teilaufgabe b	3,327	93	0,001**	0,623

Die Effektstärke (Cohens d) wird dabei mithilfe des t-Werts durch die von Westermann (2000) vorgeschlagene Formel berechnet, wobei N_A und N_A jeweils die Gruppengrößen sind:

$$d = t \cdot \sqrt{\frac{N_A + N_B}{N_A \cdot N_B}}$$

Zusammenfassung

Die Teilaufgaben 5c und 5d, die sich auf die beiden abstrakten Begriffe Vektor und seine Repräsentanten sowie auf die lineare Abhängigkeit bezogen, wurden von mehr Teilnehmerinnen und Teilnehmern korrekt gelöst als die beiden anderen Teilaufgaben 5a und 5b. Studierende, die zum Satz des Thales ein Beispiel angaben (Item 4b), konnten signifikant öfter diesen Satz auch beweisen (Item 5b).

10.1.4 Forschungsfrage 1.4: Analyse der Aufgaben aus dem Hochschulkontext für abstrakte Begriffe

Zur Beantwortung der Forschungsfrage 1.4 sind die Ergebnisse der beiden Sätze, die sich auf die abstrakten Begriffe Vektor und lineare Abhängigkeit beziehen relevant. Diagramms 10.8 veranschaulicht, dass ein Drittel der Studienanfängerinnen und -anfänger (33,7 %) den Satz zur Kommutativität der Vektoraddition (Item 5c) korrekt beantworten kann. Knapp ein Drittel (30,8 %) können den Satz, dass drei beliebige Vektoren im $\mathbb{R}^2$ linear abhängig sind (Item 5d), korrekt begründen.

Diagramm 10.9 zeigt die Lösungsraten der Aufgabe 4 bzgl. der vier Begriffe Mittelsenkrechte, gleichschenkliges Dreieck, Vektor und lineare Abhängigkeit. 31,9 % der Studierenden können treffende geometrische und algebraische Darstellungen des Satzes zu Kommutativität der Vektoraddition (Item 4c) auswählen. Nur 19,2 % der Teilnehmerinnen und Teilnehmer kreuzen korrekte Beispiele zu algebraischen und geometrischen Darstellung des Satzes, dass drei beliebige Vektoren im $\mathbb{R}^2$ linear abhängig sind (Item 4d), an. Diese Ergebnisse (siehe auch Kapitel 10.1.3) verdeutlichen, dass Studierende eher treffende Beispiele zu den Sätzen über den Schnitt der drei Mittelsenkrechten in einem Dreieck und zum Satz des Thales (Items 4a und 4b) identifizieren können als zu den Sätzen, die sich auf die beiden abstrakten Begriffe Vektor und lineare Abhängigkeit beziehen.

Es stellt sich daher die Frage, ob der Unterschied zwischen den korrekt beantworteten Items der anschaulichen Begriffe und denen der abstrakten Begriffe signifikant ist. Dazu werden die Mittelwerte der Lösungsraten für 4a und 4b bzw. für 4c und 4d berechnet und miteinander verglichen. Ein t-Test für abhängige Stichproben zeigt, dass der Unterschied signifikant ist und einen großen Effekt hat (Cohen, 1992):

$$\begin{aligned} t(44) &= 5,655 \\ p &< 0,001 \\ d &= 0,843 \end{aligned}$$

Die Effektstärke Cohens d von gepaarten Werten wird beim t-Test für abhängige Stichproben mit *gepoolten* Werten durch die Formel von Rosenthal (1991) berechnet:

$$d = \frac{t}{\sqrt{n}},$$

wobei t der Wert des t-Tests und n die Stichprobengröße ist, die auch mithilfe der Freiheitsgrade $df = n - 1$ berechnet werden kann. Bei einem Datensatz, bei dem eine multiple Imputation durchgeführt wurde (siehe Kapitel 9.3.2), ist die Berechnung von d über die Freiheitsgrade sinnvoll, da sich bei der Imputation die *Samplesize* vergrößert. Die beim t-Test für imputierte Werte angegebenen Freiheitsgrade gleichen das Problem mit der größeren *Samplesize* aus und liefern realistische Ergebnisse der Effektstärke. Lakens (2013) stellt eine Übersicht über Berechnungen von Effektstärken bei verschiedenen Tests zusammen.
Zudem wird wie in Kapitel 10.1.3 getestet, ob die Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die ein Beispiel für den mathematischen Satz angeben konnten (Teilaufgaben 4c und 4d), diesen in Aufgabe 5 eher korrekt beweisen können als diejenigen, die kein Beispiel angeben konnten. Die Probanden werden dazu wieder in zwei Gruppen eingeteilt. Diejenigen, welche die Teilaufgabe 4c bzw. 4d korrekt beantworten befinden sich in Gruppe A, und diejenigen, welche die entsprechende Teilaufgabe nicht korrekt lösten, in Gruppe B. Ein t-Tests für unabhängige Stichproben untersucht, ob sich signifikante Unterschiede in der Bearbeitung der Teilaufgabe 5c bzw. 5d ergeben. Die Gruppenstatistiken sind in Tabelle 10.3 dargestellt.

Tabelle 10.3: Gruppenstatistiken der Teilaufgaben c und d

	4a/4b/4c/4d	N	M	SD
Teilaufgabe c	korrekt	50	0,46	0,50
	nicht korrekt	105	0,27	0,44
Teilaufgabe d	korrekt	25	0,48	0,51
	nicht korrekt	129	0,26	0,44

N ist die Gruppengröße, M der Mittelwert und SD die Standardabweichung.

Die Ergebnisse des t-Tests zeigen, dass es bei beiden Teilaufgaben c und d signifikante Unterschiede zwischen den beiden Gruppen feststellen lassen (siehe Tabelle 10.4), deren Effekte im kleinen bis mittleren Bereich liegen (Cohen, 1992):

Tabelle 10.4: Ergebnisse des t-Tests für unabhängige Stichproben

	t	df	p	Cohens d
Teilaufgabe c	2,319	86	0,023*	0,398
Teilaufgabe d	2,056	31	0,048*	0,449

Die Effektstärke Cohens d wird in diesem Fall wieder mithilfe des t-Werts durch die Formel

$$d = t \cdot \sqrt{\frac{N_A + N_B}{N_A \cdot N_B}}$$

berechnet, da es sich um einen t-Test für unabhängige Stichproben handelte (siehe Kapitel 10.1.3). Weiterhin ist anzumerken, dass dafür nicht mit dem imputierten Datensatz gerechnet wurde, da die Analysen zwischen Daten gleicher Teilaufgaben durchgeführt wurden. Es ergaben sich demnach keine fehlenden Werte bei der Berechnung der Ergebnisse, die nur dann auftreten, falls Analysen zwischen den Daten verschiedener Teilaufgaben durchgeführt werden.

Zusammenfassung

Die Ergebnisse zeigen, dass die Teilnehmerinnen und Teilnehmer signifikant öfter korrekte Beispiele zu den Sätzen mit anschaulichen Begriffen angeben konnten als zu den Sätzen mit abstrakten Begriffen (Aufgabe 4). Zudem können signifikant mehr Studierende, die ein korrektes Beispiel zu einem mathematischen Satz mit abstrakten Inhalt angeben können, diesen auch beweisen.

10.2 Forschungsziel 2: Untersuchung begrifflichen Wissens

Das zweite Forschungsziel der vorliegenden Arbeit untersucht Teile begrifflichen Wissens von Studienanfängerinnen und -anfängern für die vier mathematischen Fachbegriffe Mittelsenkrechte, gleichschenkliges Dreieck, Vektor und seine Repräsentanten sowie lineare Abhängigkeit. Im folgenden Abschnitt werden die Ergebnisse im Hinblick auf das begriffliche Wissen dargestellt.

10.2.1 Forschungsfrage 2.1: Begriffliches Wissen

Aus der Theorie von Vollrath (2001) geht hervor, dass mathematische Fachbegriffe dann als verstanden angenommen werden können, wenn Lernende Beispiele zu diesen Begriffen angeben können, die Begriffe von anderen mathematischen Begriffen abgrenzen können und charakteristische Eigenschaften kennen. Diese Aspekte begrifflichen Wissens werden von den Aufgaben 1 bis 3 des Messinstruments abgefragt. Daher werden im Folgenden die Ergebnisse dieser Aufgaben berichtet.

10.2.1.1 Deskriptive Ergebnisse zum begrifflichen Wissen

Die Diagramme 10.10 und 10.11 zeigen die Lösungsraten der anschaulichen Begriffe Mittelsenkrechte und gleichschenkliges Dreieck sowie die der abstrakten Begriffe Vektor und seine Repräsentanten und lineare Abhängigkeit.

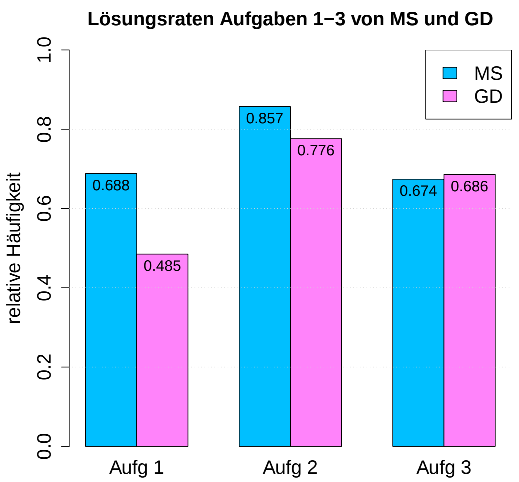


Abbildung 10.10: Lösungsraten zur Mittelsenkrechten und zum gleichschenkligen Dreieck

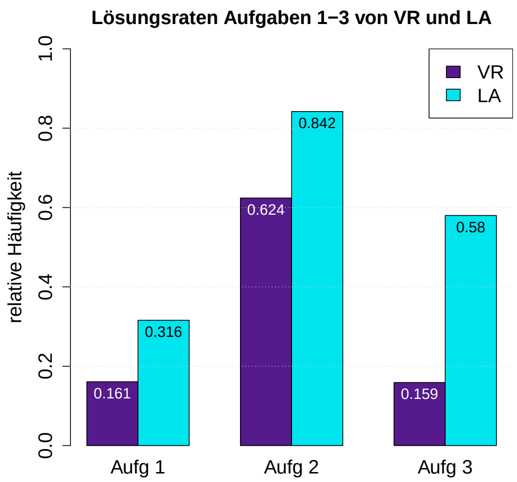


Abbildung 10.11: Lösungsraten zum Vektor und zur linearen Abhängigkeit

Die Diagramme verdeutlichen, dass die Items zu den anschaulichen Begriffen, die im Diagramm 10.10 zu sehen sind, von mehr Studierenden richtig gelöst werden als die, welche sich auf die abstrakten Begriffe Vektor und lineare Abhängigkeit beziehen, die im Diagramm 10.11 dargestellt sind. Weiterhin ist auffällig, dass Lernende die Aufgaben, die sich auf die Mittelsenkrechte

in einem Dreieck beziehen (Items 1a, 2a und 3a), meist besser lösen als die Teilaufgaben, die sich auf die übrigen Begriffe beziehen. In den Items 1a und 2a sollen die Teilnehmerinnen und Teilnehmer Beispiele einer Mittelsenkrechte identifizieren sowie die Mittelsenkrechte gegenüber einer anderen Gerade in einem Dreieck abgrenzen. Die Lösungsraten dieser beiden Items sind höher als die der anderen Begriffe. Die Aufgabe, welche das Ankreuzen korrekter Eigenschaften einer Mittelsenkrechten erfordert (Item 3a), wird von 67,4 % Probanden richtig bearbeitet. Dieser Wert ist minimal niedriger (68,6 %) als die Lösungshäufigkeit der Teilaufgabe, in der die Studentinnen und Studenten die Eigenschaften eines gleichschenkligen Dreiecks auswählen sollen (Item 3b). Insgesamt können demnach einige Studierende die Aufgaben zum begrifflichen Wissen in Bezug auf die Mittelsenkrechten in einem Dreieck korrekt lösen. Dazu kennen sie wesentliche Eigenschaften, können Beispiele identifizieren und sind in der Lage, die Mittelsenkrechte von einer beliebigen Gerade, die durch einen Eckpunkt des Dreiecks verläuft, abzugrenzen.
Ebenso können viele Studierende die Items, die das begriffliche Wissen zu einem gleichschenkligen Dreieck abfragen, richtig lösen. Den Teilnehmerinnen und Teilnehmern fällt es leicht, ein gleichschenkliges Dreieck von einem allgemeinen Dreieck zu unterscheiden (Item 1b), da 77,6 % diese Teilaufgabe korrekt bearbeiten. Auch das Item 3b, welches das Auswählen treffender Eigenschaften eines gleichschenkligen Dreiecks erfordert, wird von 68,6 % richtig beantwortet. Deutlich weniger Probanden (48,5 %) identifizieren korrekte Beispiele von gleichschenkligen Dreiecken (Item 1b). Die Studentinnen und Studenten können zwar ein gleichschenkliges Dreieck gegenüber einem allgemeinen Dreieck abgrenzen und kennen Eigenschaften des Begriffs, jedoch kann dieses Wissen im konkreten Fall zur Identifikation von Beispielen nicht immer genutzt werden.

Die Teilaufgaben, die sich auf den Vektorbegriff beziehen (Items 1c, 2c und 3c), werden durchweg von weniger Studentinnen und Studenten korrekt bearbeitet als die Teilaufgaben, welche sich auf die anderen Begriffe beziehen. Insbesondere die Auswahl korrekter Beispiele für Vektoren oder Repräsentanten im $\mathbb{R}^2$ fällt den Lernenden schwer – nur 16,1 % lösen diese Teilaufgabe richtig. Auch Teilaufgabe 3c, welche die Auswahl treffender Eigenschaften zweier Repräsentanten desselben Vektors erfordert, wird von wenigen Teilnehmenden korrekt bearbeitet (15,9 %). Leichter fällt es den Probanden darzulegen, warum zwei gegebene Repräsentanten – dargestellt als zwei nicht parallele Pfeile in einem Koordinatensystem – nicht denselben Vektor im $\mathbb{R}^2$ repräsentieren (Item 2c). Diese Teilaufgabe wird von 62,4 % der Studierenden korrekt beantwortet. Die relative Häufigkeit an richtigen Lösungen liegt dennoch unter den Lösungsraten der Teilaufgaben 2a, 2b und 2d, die den anderen drei Begriffen zugeordnet sind.
Die Lösungsraten der Teilaufgaben, die sich auf die lineare Abhängigkeit von Vektoren beziehen, variieren sehr. Während fast alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer (84,2 %) begründen können, dass zwei gegebene Vektoren nicht linear abhängig sind (Item 2d), fällt es ihnen schwer zu identifizieren, welche der gegebenen Vektoren linear abhängig sind (Item 1d). Dieses Item können nur 31,6 % der Studierenden richtig lösen. Die Auswahl an treffenden Eigenschaften zweier linear abhängiger Vektoren (Item 3d) fällt mehr als der Hälfte der Studentinnen und Studenten leicht (58,0 %).

Zusammenfassung

Die deskriptiven Ergebnisse der Studie zeigen, dass vor allem die Items, die sich auf die beiden anschaulichen Begriffe Mittelsenkrechte und gleichschenkliges Dreieck beziehen, von vielen Studierenden korrekt bearbeitet werden können. Bei diesen Items sind die Lösungsraten im Wesentlichen hoch. Im Gegensatz dazu werden die Teilaufgaben, die sich auf die beiden abstrakten Begriffe Vektor und lineare Abhängigkeit beziehen, meist von weniger Studentinnen und Studenten richtig beantwortet.

10.2.1.2 Vergleich anschaulicher und abstrakter Begriffe

Die Ergebnisse des vorherigen Abschnitts zeigen, dass die Studierenden Teilaufgaben zum Wissen über anschauliche Fachbegriffe besser lösen als die, welche sich auf die abstrakten Begriffe Vektor und lineare Abhängigkeit beziehen. Daher wird im Folgenden untersucht, ob es signifikante Unterschiede zwischen den Lösungsraten der Teilaufgaben gibt, die einem anschaulichen Kontext zuzuordnen sind und denen, die sich auf abstrakte Begriffe beziehen. Im Kapitel 10.1.4 wird berechnet, dass bei Aufgabe 4 die Lösungshäufigkeiten der Teilaufgaben zur Mittelsenkrechte und zum gleichschenkligen Dreieck signifikant höher sind als die der abstrakten Begriffe Vektor und lineare Abhängigkeit.
Es wird im Folgenden das arithmetische Mittel der korrekt gelösten Aufgaben der Items 1a, 2a, 3a, 1b, 2b und 3b (anschauliche Begriffe) mit dem arithmetischen Mittel der korrekt gelösten Aufgaben der Items 1c, 2c, 3c, 1d, 2d und 3d (abstrakte Begriffe) verglichen. Es handelt sich um Wertepaare, die jeweils denselben Personen zuzuordnen sind, weswegen eine abhängige Stichprobe vorliegt.

Voraussetzungen für die Durchführung eines t-Tests für abhängige Stichproben

Zur Durchführung eines t-Tests für abhängige Stichproben müssen folgende Voraussetzungen erfüllt sein (z. B. Sedlmeier & Renkewitz, 2013; Eid et al., 2010):

1. Werte der abhängigen Variable (hier: Mittelwerte der Lösungsraten für die drei Items, die sich auf einen Begriff beziehen) müssen Intervallskalenniveau besitzen

2. Differenzwerte zwischen den Begriffen müssen normalverteilt sein

Voraussetzung 1 ist erfüllt, da die hier betrachteten Werte den Mittelwerten der Lösungsraten für jeweils drei Items entsprechen, die intervallskaliert sind. Die Differenzvariable setzt sich aus den Einzeldifferenzen der beiden (anschaulich - abstrakt) pro Person zu vergleichenden Werte zusammen. Falls die Normalverteilungsbedingung nicht erfüllt ist, müssen nichtparametrische Tests verwendet werden. Bei nichtparamentrischen Tests sind die Parameter, wie zum Beispiel der Mittelwert der Grundgesamtheit nicht direkt Teil des statistischen Tests (Bühner & Ziegler, 2009). Vielmehr wird bei nichtparametrischen Tests untersucht, wie wahrscheinlich eine extreme Rangordnung ist, was mithilfe kombinatorischer Mittel durchgeführt wird (Bühner & Ziegler, 2009).

Überprüfung der Normalverteilung der Differenzvariable Die Pürfung von Daten auf Normalverteilung kann zum Beispiel mit dem χ^2-Test, dem Kolmogorov-Smirnov Test oder dem Shapiro-Wilk-Test erfolgen. Aufgrund dieser zahlreichen Möglichkeiten untersuchen Shapiro, Wilk und Chen (1968) insgesamt neun verschiedene Normalverteilungs-Tests hinsichtlich ihrer Teststatistiken, ihres Einflusses der Stichprobengröße sowie ihres Ansatzes, eine Verteilung auf Normalverteilung zu überprüfen. Nach ihrer Darstellung ist die W-Statistik des Shapiro-Wilk-Tests der beste Indikator für nicht-normalverteilte Daten. Dieser hat etwa die Vorteile, dass er auch bei kleinen Stichproben angewendet werden kann. Die Tests, die auf Analysen der Abstände zwischen den Messdaten basieren, wie etwa der Kolmogorov-Smirnov-Test, sind im Gegensatz zum Shapiro-Wilk-Test nicht besonders sensitiv gegenüber der Testung auf Normalverteilung (Shapiro et al., 1968).
Diesen Überlegungen folgend wird der Shapiro-Wilk-Test (Shapiro & Wilk, 1965) angewendet. In der Nullhypothese H_0 wird angenommen, dass eine Normalverteilung der Messdaten vorliegt (Bühner & Ziegler, 2009). Es wird ferner ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ angenommen. Das Ergebnis des Shapiro-Wilk-Tests ist im Folgenden dargestellt:

$$\begin{aligned} W &= 0,9823 \\ p &= 0,0128 \end{aligned}$$

Der p-Wert ist kleiner als das angenommene Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$, weswegen die Nullhypothese H_0 abgelehnt wird. Die Differenzenvariable zwischen den Mittelwerten der anschaulichen versus der abstrakten Begriffe ist demnach nicht normalverteilt, siehe dazu auch die Verteilung im Histogramm 10.12.

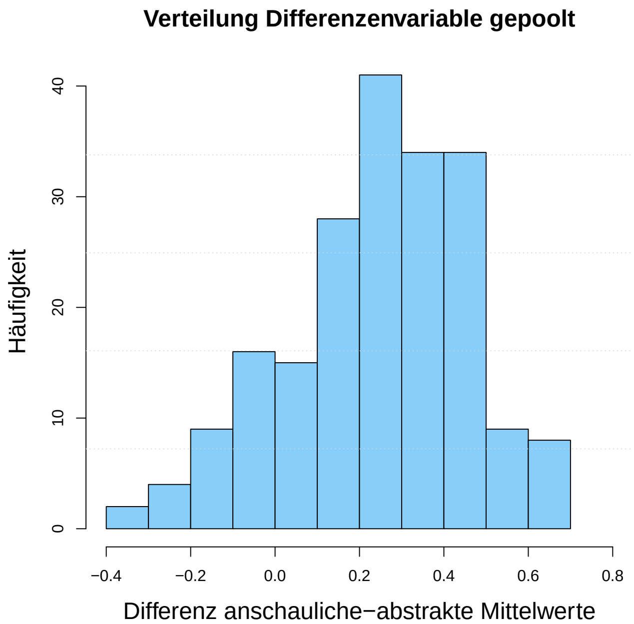


Abbildung 10.12: Differenzenvariable der Mittelwerte zwischen anschaulichen und abstrakten Begriffen

Bei größeren Stichproben ($n \geq 30$) kann aufgrund des zentralen Grenzwertsatzes davon ausgegangen werden, dass die Messwerte „approximativ normalverteilt" (Eid et al., 2010, S. 351) sind. In diesen Fällen kann ein t-Test für abhängige Stichproben angewendet werden, der gegenüber solchen Verletzungen robust ist (z. B. Eid et al., 2010). Eine Stichprobengröße von $N = 200$ Probanden, wie es bei der vorliegenden Studie der Fall ist, liegt demnach weit über dem kritischen Wert von $n \geq 30$, somit können mögliche Unterschiede der Mittelwerte dennoch mit einem t-Test überprüft werden.

t-Test für abhängige Stichproben

Es wird im Folgenden analysiert, ob die Items, welche sich auf die anschaulichen Begriffe Mittelsenkrechte und gleichschenkliges Dreieck beziehen, von den Teilnehmerinnen und Teilnehmer signifikant besser gelöst werden als die Items, die sich auf die beiden abstrakten Begriffe Vektor und lineare Abhängigkeit beziehen.
Mithilfe der dichotomen Kodierung, die bereits zur Bestimmung der Lösungsraten der Aufgaben herangezogen wurde, kann für jeden Studierenden ein Mittelwert über die Items gebildet werden, die anschaulichen (1a, 1b, 2a, 2b, 3a und 3b) bzw. abstrakten Inhalt (1c, 1d, 2c, 2d, 3c und 3d) aufweisen. Ein t-Test für Stichproben mit paarigen Werten, was einem t-Test für abhängige Stichproben entspricht, vergleicht auf dem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ für jeden Proband die beiden Mittelwerte, die sie oder er für anschauliche bzw. abstrakte Items erreicht:

$$\begin{aligned} t(55) &= 8,414 \\ p &< 0,001 \\ d &= 1,124 \end{aligned}$$

Die niedrige Anzahl der Freiheitsgrade *df* kommt durch die multiple Imputation und den dadurch berechneten gepoolten Werten zustande (siehe Kapitel 9.3.2). Es zeigt sich, dass der Unterschied bei den Teilnehmerinnen und Teilnehmern bzgl. der korrekt gelösten anschaulichen Items, die das begriffliche Wissen abfragen, im Vergleich zu den korrekt gelösten Items, die sich auf den Vektor und auf die lineare Abhängigkeit beziehen (abstrakte Begriffe) signifikant ist. Das Effektgrößenmaß des Mittelwertunterschieds wurde mit Cohens d (Cohen, 1992, 1988) bestimmt und mithilfe der Formel von Rosenthal (1991) berechnet (siehe Kapitel 10.1.4). Nach Cohen (1992, 1988) ist der Effekt $d = 1,124$ sehr groß. Das heißt, dass dieselbe Person viel erfolgreicher in der Bearbeitung der Items war, die sich auf die Mittelsenkrechte und auf das gleichschenklige Dreieck beziehen (Items 1a, 1b, 2a, 2b, 3a und 3b) als bei der Bearbeitung der Items mit abstrakten Inhalten.

10.2.1.3 Vergleich der deskriptiven Ergebnisse der vier Begriffe

Im Folgenden wird untersucht, ob es statistisch signifikante Unterschiede zwischen den Mittelwerten der Lösungsraten für jeden einzelnen Begriff gibt. Es werden dazu die *gepoolten* Mittelwerte der Items des begrifflichen Wissens (Aufgaben 1 bis 3), die sich auf die Mittelsenkrechte in einem Dreieck, auf ein gleichschenkliges Dreieck, Vektoren und lineare Abhängigkeit beziehen, miteinander verglichen.

Für einen Vergleich der Mittelwerte werden Tests für abhängige Stichproben (siehe Kapitel 10.2.1.2) durchgeführt. Es werden dabei nicht nur zwei Gruppen miteinander verglichen, sondern Unterschiede zwischen vier Gruppen (Mittelsenkrechte, gleichschenkliges Dreieck, Vektor und seine Repräsentatnen sowie lineare Abhängigkeit) untersucht. Für diese Untersuchung eignet sich eine Varianzanalyse für abhängige Stichproben, die einer Varianzanalyse mit Messwiederholung (RM-ANOVA, *repeated measures analysis of variance*) entspricht, die Gruppenvergleiche zwischen mehreren Gruppen bei abhängigen Stichproben untersuchen kann. Es handelt sich dabei um ein „within-subjects-Design“ (z. B. Sedlmeier & Renkewitz, 2013, S. 473), da Messergebnisse der gleichen Versuchspersonen miteinander verglichen werden. Die Nullhypothese H_0 nimmt an, dass die vier Gruppen aus derselben Population stammen und es keine Unterschiede zwischen den Mittelwerten gibt.
Im Gegensatz zu einer ANOVA (*analysis of variance*) für *un*abhängige Stichproben fallen bei der Berechnung des F-Wertes, aus dem sich der p-Wert zur Überprüfung der Hypothese ergibt, die Unterschiede innerhalb einer Person weg. Das hat den Grund, dass mehrere Daten einer Person zur Verfügung stehen und daher der Einfluss der Person kontrollierbar ist. Hat ein Proband zum Beispiel ein höheres fachliches Vorwissen, so beeinflusst das die Beantwortung *aller* Items, die dieser Proband bearbeitet. Betrachtet man die Lösungen von Items *einer* Person und bildet Differenzen, so fällt der Einfluss des Vorwissens weg.

Aus diesem Grund ist es möglich, Unterschiede in der Gesamtpopulation hinsichtlich der Bedingungen (was den vier Begriffen entspricht) aufzudecken. Zur Berechnung der F-Statistik werden die Quadratsummen (SS, *sum of squares*) herangezogen, welche die Effekte der Personen und der Bedingungen zum Messwert bestimmen. Bei einer ANOVA mit unabhängigen Stichproben setzt sich die gesamte Quadratsumme SS_{tot} wie folgt zusammen:

$$SS_{tot} = SS_{UV} + SS_{inn}, \tag{10.1}$$

wobei SS_{UV} die Quadratsumme der Effekte, die sich auf die unterschiedlichen Bedingungen (Mittelsenkrechte, gleichschenkliges Dreieck, Vektor / Repräsentatnen und lineare Abhängigkeit) zurückführen lassen, bezieht, also die der unabhängigen Variable. SS_{inn} bezeichnet die Unterschiede hinsichtlich der Personen (Sedlmeier & Renkewitz, 2013). Bei einem within-subjects-Design kann SS_{inn} genauer charakterisiert werden: Zum einen sind in dieser Variable Informationen über die einzelnen Personen enthalten, zum anderen Informationen über die Personen, die Aufgaben in einer bestimmten Bedingung lösen. Es handelt sich also um eine Einflussgröße, die mit den Personen und mit den Bedingungen zusammenhängt. Daher gilt:

$$SS_{inn} = SS_{Pers} + SS_{UV \times Pers} \tag{10.2}$$

Für abhängige Stichproben ergibt sich (Sedlmeier & Renkewitz, 2013, S. 480):

- für die Berechnung der **Freiheitsgrade**:

$$\begin{aligned} df_{UV} &= k-1 \\ df_{Pers} &= n-1 \\ df_{UV\times Pers} &= (n-1)\,(k-1) \\ df_{tot} &= df_{UV}+df_{Pers}+df_{UV\times Pers} \\ &= n\cdot k-1 = N-1, \end{aligned}$$

  wobei n die Anzahl der Versuchspersonen, hier $n = 200$, und die Variable k die Anzahl der Bedingungen (hier: Begriffe) ist, also $k = 4$. Mit N wird die Anzahl der gesamten Messergebnisse, also $N = n \cdot k$ bezeichnet.

- für die **Varianzschätzungen**:

$$\hat{\sigma}^2_{UV} = \frac{SS_{UV}}{df_{UV}},$$

  wobei dies die Effekte der Variation der Bedingungen beschreibt, und

$$\hat{\sigma}^2_{Fehler} = \frac{SS_{UV\times Pers}}{df_{UV\times Pers}},$$

  wobei damit die Variation innerhalb der Bedingungen berechnet wird, die sich nicht auf systematische Unterschiede der Versuchspersonen zurückführen lassen.

- für die Berechnung des **F-Wertes**:

$$F = \frac{\hat{\sigma}^2_{UV}}{\hat{\sigma}^2_{Fehler}}.$$

Voraussetzungen für die Durchführung einer RM-ANOVA

Zur Durchführung einer ANOVA für abhängige Stichproben müssen folgende Voraussetzungen erfüllt sein (Sedlmeier & Renkewitz, 2013):

1. Werte der abhängigen Variable (hier: Mittelwerte der Lösungsraten für die drei Items, die sich auf einen Begriff beziehen) müssen normalverteilt sein

2. Varianzen der Gruppen müssen homogen sein

3. Korrelationen zwischen allen Paaren der Mittelwerte der vier Bedingungen (hier: verschiedene Begriffe) müssen gleich groß sein

Überprüfung der Normalverteilung Wie bereits in Kapitel 10.2.1.2 erklärt wurde, wird zur Überprüfung, ob die Daten der abhängigen Variable normalverteilt sind, der Shapiro-Wilk-Test angewendet. Das Signifikanzniveau wird auf $\alpha = 0,05$ festgelegt, die Nullhypothese H_0 besagt, dass die Daten normalverteilt sind. Die Ergebnisse des Tests sind in Tabelle 10.5 dargestellt.

Tabelle 10.5: Ergebnisse des Shapiro-Wilk-Tests für die Mittelwerte der Aufgaben 1 bis 3

	Mittelsenkrechte	gleichschenkliges Dreieck	Vektor und seine Repräsentanten	lineare Abhängigkeit
W	0,8188	0,8994	0,8787	0,8826
p	$< 0,001$	$< 0,001$	$< 0,001$	$< 0,001$

Bei allen Begriffen sind die p-Werte wesentlich kleiner ($p < 0,001$) als das Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$, weswegen die Nullhypothese in allen vier Fällen abgelehnt wird. Die Daten sind also nicht normalverteilt. Die Histogramme in den Abbildungen 10.13, 10.14, 10.15 und 10.16 zeigen die Verteilungen der *gepoolten* Mittelwerte.

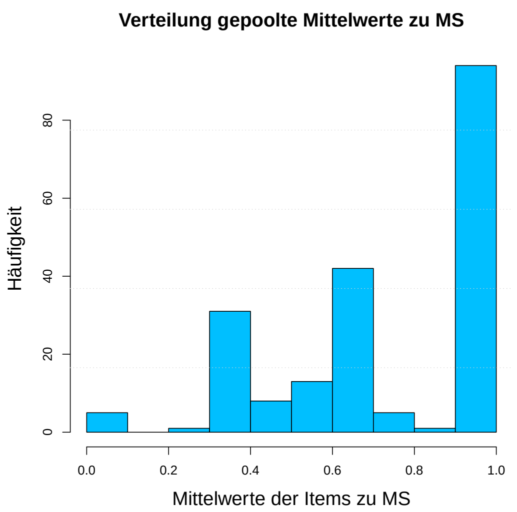


Abbildung 10.13: Verteilung Mittelsenkrechte

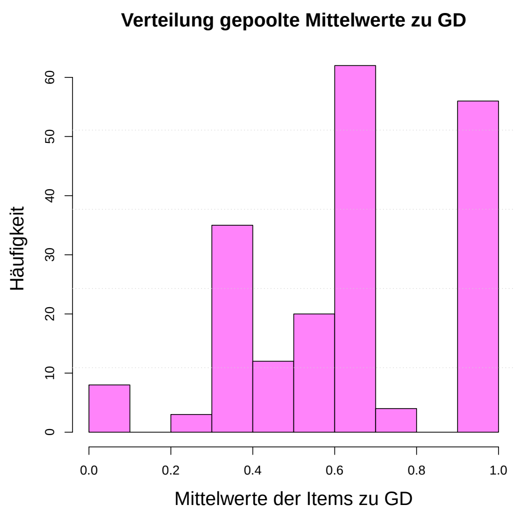


Abbildung 10.14: Verteilung gleichschenkliges Dreieck

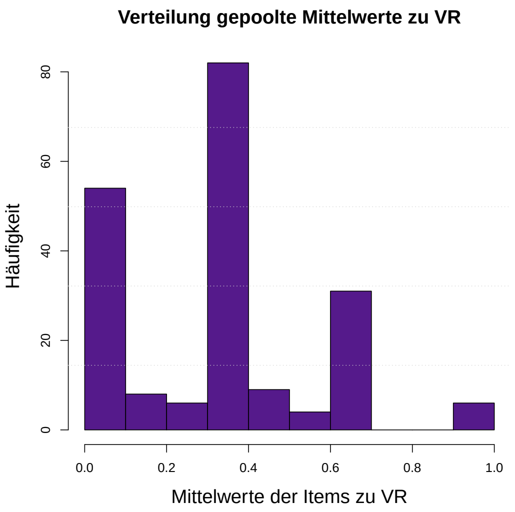


Abbildung 10.15: Verteilung Vektor und seine Repräsentanten

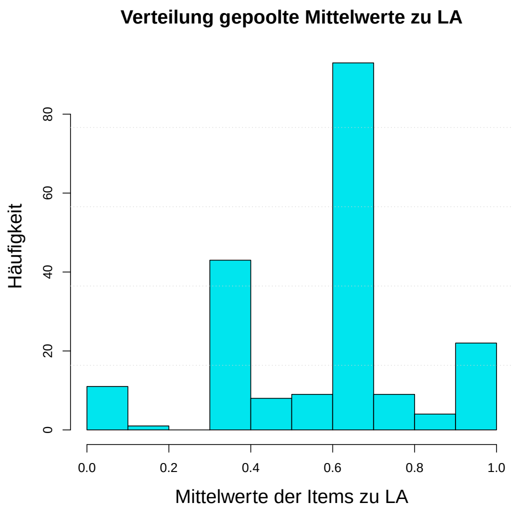


Abbildung 10.16: Verteilung lineare Abhängigkeit

Mit dem Argument, das bereits in Kapitel 10.2.1.2 vorgebracht wurde, kann bei großen Stichproben von $N = 200$ Probanden von „approximativ normalverteilt[en]" (Eid et al., 2010, S. 351) Daten ausgegangen werden. Somit kann eine ANOVA für abhängige Stichproben zur Hypothesenüberprüfung angewendet werden.

Überprüfung der Gleichheit der Varianzen und der Korrelationen Eine Verletzung der Gleichheit der Korrelationen zwischen allen Paaren der Mittelwerte für jede Gruppe hat Auswirkungen auf das Ergebnis der ANOVA: Der berechnete p-Wert wird kleiner als der reale p-Wert, weswegen häufiger statistisch signifikante Ergebnisse auftreten (Sedlmeier & Renkewitz, 2013). Die beiden Voraussetzungen für eine RM-ANOVA – Gleichheit der Varianzen der Mittelwertsverteilung und Gleichheit der Korrelationen der Differenzvariablen – können auch durch die Untersuchung von Sphärizität ersetzt werden.

> Sphärizität heißt, „dass die Varianzen aller möglichen Differenzvariablen gleich sind" (Eid et al., 2010, S. 461).

Die Annahme der Sphärizität der Kovarianzmatrix ist zwar nicht so streng wie die beiden Voraussetzungen, dass die Varianzen gleich und die Korrelationen der Differenzenvariablen gleich sein sollen, dennoch sind die Ergebnisse einer RM-ANOVA robust, wenn die Kovarianzmatrix sphärisch verteilte Daten aufweist (Huynh & Feldt, 1976).
Zur Überprüfung der Sphärizität kann beispielsweise der Mauchly-Test (Mauchly, 1940) oder die Berechnung des Greenhouse-Geisser-Epsilon (Eid et al., 2010) verwendet werden. Die Nullhypothese H_0 des Mauchly-Tests besagt, dass Sphärizität vorliegt. Das Signifikanzniveau α wird auf $0,05$ festgesetzt. Der Mauchly-Test neigt jedoch dazu, bei großen Stichproben und bei Verletzung der Normalverteilungsannahme H_0 zu oft abzulehnen.

Aus diesem Grund ist es sinnvoll, auch das Greenhouse-Geisser-Epsilon zu betrachten, das ein ϵ für die Sphärizität der Kovarianzmatrix der Differenzenwerte schätzt. Dieser Index geht auf Box (1954) zurück: Ist $\epsilon = 1$, so erfüllt die Matrix die Sphärizitätsannahme perfekt. Ist $\epsilon \geq 0,75$, so kann noch von Sphärizität ausgegangen werden (Eid et al., 2010).

Beide Verfahren wurden in der vorliegenden Arbeit angewendet. Die Ergebnisse finden sich in Tabelle A.1 im Anhang A[1]. Die Ergebnisse zeigen, dass zwar die Nullhypothese H_0 aufgrund des Mauchly-Tests verworfen werden müsste, jedoch ist das ϵ nach der Greenhouse-Geisser-Schätzung stets über $0,75$. Daher kann man im vorliegenden Fall von Sphärizität ausgehen.

RM-ANOVA für abhängige Stichproben

Zur Überprüfung, ob eine Person eine wesentlich höhere oder niedrigere Lösungsrate beim Bearbeiten der Items für die vier verschiedenen Begriffe besitzt, wird eine RM-ANOVA durchgeführt, da es um mögliche signifikante Unterschiede innerhalb einer Person geht. Die Ergebnisse der ANOVA für abhängige Stichproben sind im Anhang A in der Tabelle A.2 für die 25 Datensätze aufgeführt[2].
Für alle Datensätze liegt ein hochsignifikanter Unterschied der Lösungshäufigkeit zwischen den vier Begriffen bzgl. der Aufgaben 1 bis 3 vor. Bakeman (2005) empfiehlt als Effektstärke bei einem *repeated measures design* ausdrücklich die Verwendung des *generalized* $\hat{\eta}^2_G$, das Olejnik und Algina (2003) detailliert beschreiben. Ferner erläutert Bakeman (2005) Vorteile der Verwendung des $\hat{\eta}^2_G$ im Vergleich zu anderen Maßen. Die Höhe der Effektstärke des generalized $\hat{\eta}^2_G$ stimmt mit der Einteilung von Cohen (1992, 1988) überein (Olejnik & Algina, 2003). Demnach sind die hier berechneten Effekte klein.
Die Ergebnisse von Varianzanalysen überprüfen, ob es statistisch signifikante Unterschiede hinsichtlich der abhängigen Variable gibt, was in diesen Analysen den Mittelwerten der Aufgaben zum begrifflichen Wissen entspricht. Um zu ermitteln, zwischen welchen der vier Gruppen es die signifikanten Unterschiede gibt, werden im Folgenden paarweise t-Tests für abhängige Stichproben durchgeführt.

Es werden dabei die folgenden Kombinationen betrachtet:

- Mittelsenkrechte – gleichschenkliges Dreieck,
- Mittelsenkrechte – Vektor und seine Repräsentanten,
- Mittelsenkrechte – lineare Abhängigkeit,

[1] Da mit einem imputierten Datensatz gearbeitet wurde, sind die Tabellen, welche die Ergebnisse enthalten, sehr groß. Aus Gründen besserer Übersichtlichkeit wurden diese daher in den Anhang verschoben.

[2] Das *Poolen* der F-Werte bei der Varianzanalyse wird von SPSS bei einem imputierten Datensatz nicht automatisch vorgenommen. Das Zusammenführen der F-Werte kann nicht – wie oft angenommen – durch die Berechnung des arithmetischen Mittels erfolgen, sondern muss zum Beispiel auf die von van Ginkel und Kroonenberg (2014) vorgeschlagene Art erfolgen. In der vorliegenden Arbeit erfolgt im Anschluss eine Signifikanzprüfung mithilfe von t-Tests. Dabei gibt SPSS stets den bereits *gepoolten* Wert aus, weswegen das *Poolen* der Ergebnisse vorab nicht notwendig ist.

- gleichschenkliges Dreieck – Vektor und seine Repräsentanten,
- gleichschenkliges Dreieck – lineare Abhängigkeit und
- Vektor / Repräsentant - lineare Abhängigkeit

Die Ergebnisse der gepaarten t-Tests, also t-Tests für abhängige Stichproben, sowie die Kombination („Poolen“) sind in Tabelle 10.6 angegeben.

Tabelle 10.6: Ergebnisse der paarweisen t-Tests mit *gepooltne* Werten

Vergleich	t	df	p
MS - GD	1,620	39	0,113
MS - VR	11,51	81	$< 0,001$
MS - LA	3,819	71	$< 0,001$
GD - VR	6,866	42	$< 0,001$
GD - LA	1,292	41	0,204
VR - LA	-8,556	146	$< 0,001$

Signifikante Unterschiede in der Bearbeitung der Aufgaben 1 bis 3 können demnach für die Begriffe Mittelsenkrechte in einem Dreieck und Vektor mit seinen Repräsentanten, Mittelsenkrechte in einem Dreieck und lineare Abhängigkeit, gleichschenkliges Dreieck und Vektor mit seinen Repräsentanten sowie Vektor mit seinen Repräsentanten und lineare Abhängigkeit festgestellt werden.

10.2.2 Forschungsfrage 2.2: Begriffsverständnis nach Vollrath

Die Forschungsfrage 2.2 beschäftigt sich damit, ob die Studierenden Begriffsverständnis im Sinne von Vollrath (siehe Kapitel 4.3.1) aufgebaut haben. Dazu sind die Kriterien, die in Kapitel 4.3.1 angeführt wurden, wegweisend. Diese beziehen sich darauf, dass Beispiele für einen mathematischen Begriff aufgeführt werden können, der Begriff von anderen Begriffen abgegrenzt werden kann und seine charakteristischen Eigenschaften gewusst werden. In Bezug auf den vorliegenden Test heißt das, dass diejenigen Studierenden einen Begriff verstanden haben, wenn sie die Aufgaben 1 bis 3 bzgl. eines Begriffs korrekt gelöst haben. Im Folgenden wird daher untersucht, wie hoch die relative Häufigkeit ist, alle drei Items bzgl. eines Begriffs der Aufgaben 1 bis 3 korrekt zu lösen. Die Werte sind in Tabelle 10.7 angegeben.

Tabelle 10.7: Korrektes Lösen der Aufgaben 1 bis 3

	MS	GD	VR	LA
Relative Häufigkeit korrektes Lösen dreier Items eines Begriffs	0,52	0,34	0,04	0,15

Es zeigt sich, dass etwa die Hälfte ($52,0\,\%$) aller Studierenden die drei Items zur Mittelsenkrechte korrekt beantworten kann. Alle drei Items, die sich auf das gleichschenklige Dreieck beziehen, lösen nur $34,0\,\%$ der Studentinnen und Studenten korrekt. Die Aufgaben, die den Vektor oder die lineare Abhängigkeit thematisieren, werden von $4,0\,\%$ bzw. von $15,0\,\%$ der Probanden richtig gelöst. Das Begriffsverständnis der beiden abstrakten Begriffe Vektor und lineare Abhängigkeit ist daher im Vergleich zu den beiden anschaulichen Begriffen Mittelsenkrechte und gleichschenkliges Dreieck eher gering.

10.3 Forschungsziel 3: Analyse mathematischer Argumentationskompetenz

Die mathematische Argumentationskompetenz wird mithilfe von vier Items bestimmt, die sich jeweils auf einen der vier geometrischen Begriffe Mittelsenkrechte, gleichschenkliges Dreieck, Vektor und lineare Abhängigkeit beziehen. Im Folgenden werden die Qualität der Argumentationen der Studienanfängerinnen und -anfänger sowie im darauffolgenden Kapitel die Art der Argumente untersucht, welche die Probanden zur Begründung der mathematischen Sätze heranziehen.

10.3.1 Forschungsfrage 3.1: Korrekte mathematische Argumentationen

Aufgabe 5 der vorliegenden Studie erfordert das eigenständige Beweisen eines mathematischen Satzes (siehe Anhang C). Die nachfolgenden Analysen beziehen sich daher auf die Ergebnisse von Aufgabe 5. Die Abbildung 10.17 zeigt die relative Häufigkeit der korrekt begründeten mathematischen Sätze.

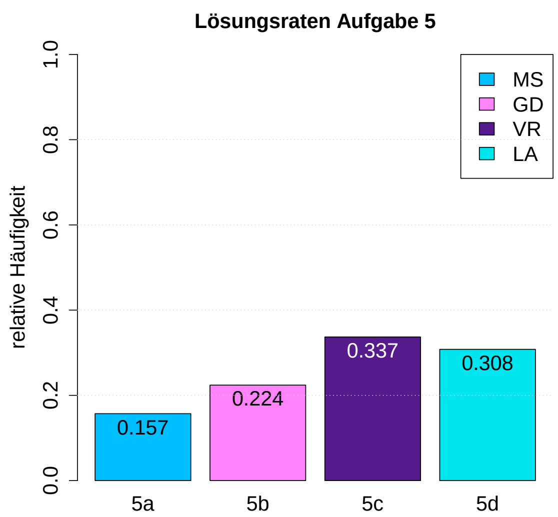


Abbildung 10.17: Korrekte mathematische Argumentationen pro Teilaufgabe

Der Abbildung lässt sich entnehmen, dass die beiden Teilaufgaben 5a und 5b, in denen die Studentinnen und Studenten den Satz des Thales (Item 5b) beweisen sowie den Satz, dass sich die drei Mittelsenkrechten in einem Dreieck schneiden (Item 5a) beweisen sollen, von weniger Studierenden korrekt gelöst werden als die Aufgaben 5c und 5d. Das Item 5c erfordert den Beweis, dass die Vektoraddition kommutativ ist.
In der Teilaufgabe 5d sollen die Studierenden beweisen, warum drei beliebige Vektoren im $\mathbb{R}^2$ linear abhängig sind. Insbesondere der Satz zum Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten in einem Dreieck (Item 5a) wird nur von $15,7\,\%$ mathematisch richtig begründet. Den Satz des

Thales (Item 5b) können 22,4 % der Studierenden beweisen. Im Vergleich dazu wird das Item 5c zur Vektoraddition von etwa doppelt so vielen Studierenden (33,7 %) richtig gelöst als Item 5a. 30,8 % der Studienanfängerinnen und -anfänger begründen den Satz zur linearen Abhängigkeit dreier beliebiger Vektoren im $\mathbb{R}^2$ (Item 5d) korrekt.

Ein Vergleich der Mittelwerte der korrekt gelösten Items zwischen den anschaulichen Items 5a und 5b, die sich auf die Mittelsenkrechte und das gleichschenklige Dreieck (Satz des Thales) beziehen, und den abstrakten Items 5c und 5d, die sich auf die Kommutativität der Vektoraddition und der linearen Abhängigkeit dreier Vektoren im $\mathbb{R}^2$ beziehen, wird mithilfe eines t-Tests für abhängige Stichproben durchgeführt. Der Unterschied zwischen den beiden Mittelwerten $M_{an} = 0,190$ und $M_{ab} = 0,323$ ist signifikant:

$$\begin{aligned} t(41) &= 2,35 \\ p &= 0,024 \end{aligned}$$

mit einem kleinen bis mittleren Effekt von $d = 0,372$ (Cohen, 1992, 1988). Die Aufgaben zu den abstrakten Begriffen werden also von signifikant mehr Studierenden korrekt gelöst als die, welche Inhalte zu den anschaulichen Begriffen Mittelsenkrechte und gleichschenkliges Dreieck abfragen.

10.3.2 Forschungsfrage 3.2: Verwendung empirischer Argumente

Es wird daneben untersucht, welche Art von Argumenten die Studierenden beim Lösen von Argumentationsaufgaben einsetzen. Insbesondere wird die Verwendung empirischer Argumente, also Argumente, die auf das Betrachten von Beispielen basieren, woraus auf allgemeingültige Aussagen geschlossen wird, untersucht. Die deskriptiven Ergebnisse der Aufgaben 5a und 5b, in denen die Studentinnen und Studenten beweisen sollen, warum sich die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks in einem Punkt schneiden (Item 5a), und den Satz des Thales (Item 5b) beweisen sollen, sind in den Diagrammen 10.18 und 10.19 dargestellt.

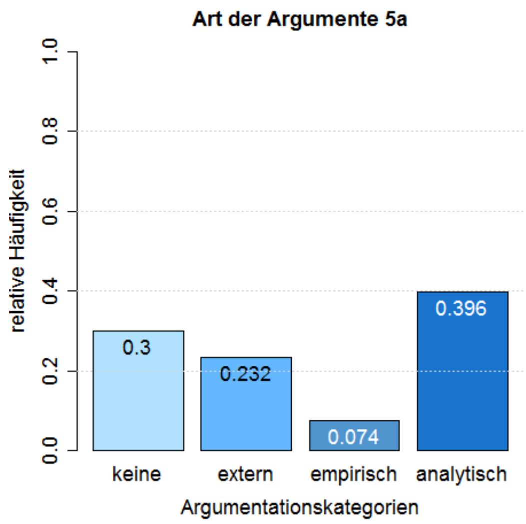


Abbildung 10.18: Art Argumente 5a

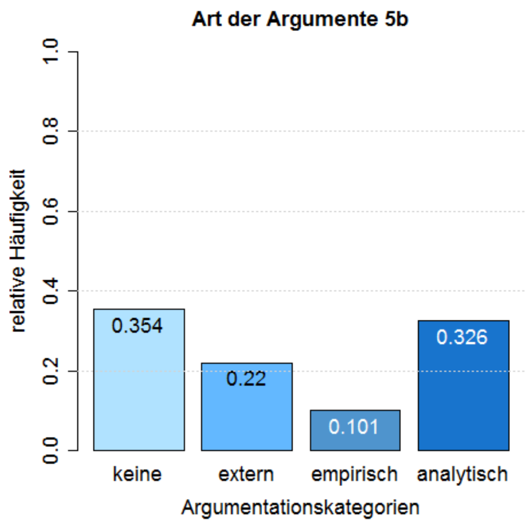


Abbildung 10.19: Art Argumente 5b

Beide Aufgaben enthalten anschaulichen Inhalt aus der Sekundarstufe I (siehe Kapitel 8). Bei Teilaufgabe 5a orientieren sich die Teilnehmerinnen und Teilnehmer hauptsächlich an einem analytischen Beweisprinzip, welches für die Hochschule angemessen ist. Ihre Argumente stützen sich auf bereits bewiesene Aussagen, die jeweils deduktiv miteinander verknüpft werden (siehe Kapitel 9.2). Bei Teilaufgabe 5b wenden 3,26 % der Studierenden analytische Argumente an. Einige (35,4 %) argumentieren gar nicht. Auffällig sind die wenigen Probanden, die empirisch argumentieren: Lediglich 7,4 % bzw. 10,1 % verwenden empirische Argumente. Etwa ein Viertel der Studentinnen und Studenten (23,2 % bzw. 22,0 %) argumentiert extern, d. h. es wird sich nicht auf begründete Aussagen, sondern auf externe Autoritäten bezogen.
Bei den Aufgaben 5c und 5d, die einen abstrakten Inhalt aufweisen, wird hauptsächlich analytisch argumentiert. 56,5 % der Studierenden wenden analytische Argumente beim Beweisen der Vektoraddition an. Über die Hälfte (54,4 %) verwenden ebenso analytische Argumente beim Begründen der Aussage, dass drei beliebige Vektoren im $\mathbb{R}^2$ linear abhängig sind. Wenig Studierende argumentieren empirisch: Bei Teilaufgabe 5c argumentieren nur 8,7 % empirisch und bei Teilaufgabe 5d sind es 8,5 %. Die Anzahl derjenigen Studierenden, die gar nicht argumentieren, liegt deutlich unter relativen Häufigkeit der Sätze, welche den Beweis des Thalessatzes (Item 5b) nicht begründen oder des Satzes, dass die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks sich in einem Punkt schneiden (Item 5b). 20,4 % der Studierenden begründen Item 5c nicht und 20,0 % beweisen Item 5d nicht.

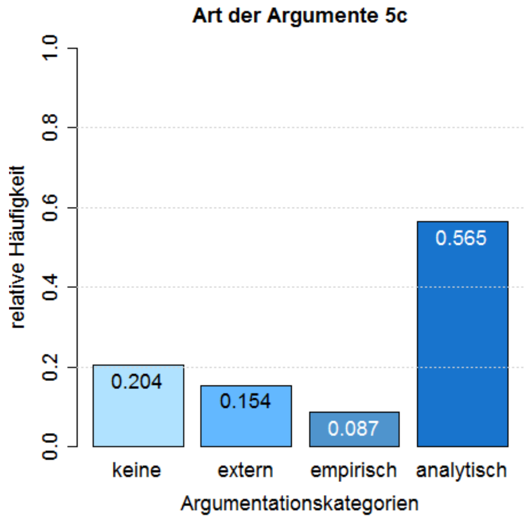


Abbildung 10.20: Art der Argumente 5c

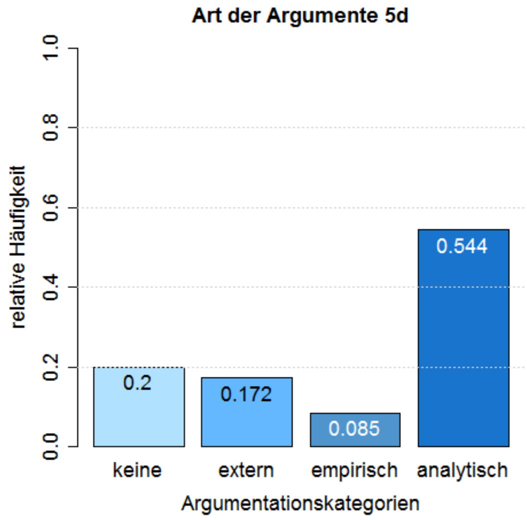


Abbildung 10.21: Art der Argumente 5d

Im Diagramm 10.22 ist die gemeinsame Verteilung der verwendeten Argumente beim Beweisen für alle vier Teilaufgaben dargestellt

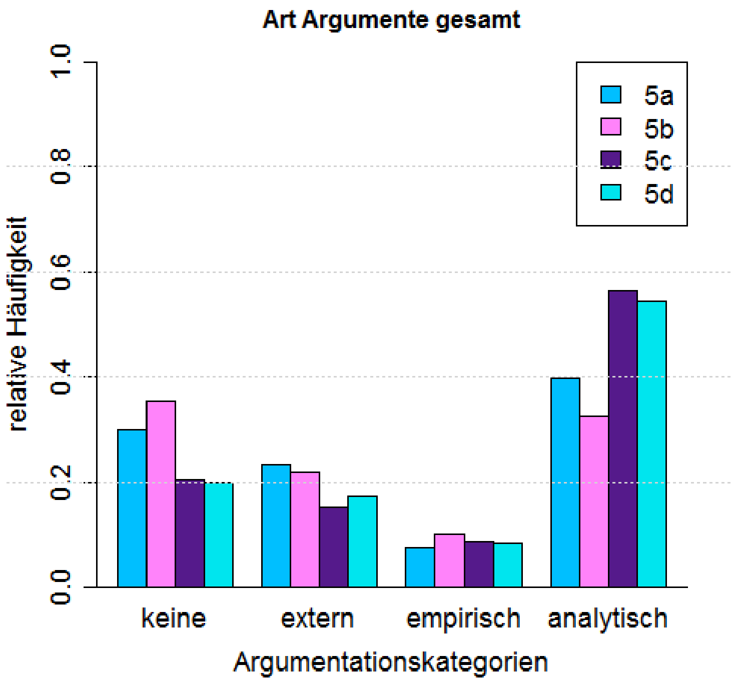


Abbildung 10.22: Art der Argumente in den vier Teilaufgaben

Analytische Argumente werden häufig angewendet. Externes Argumentieren ist am zweitstärksten vertreten und empirisch wird bei allen Aufgaben am seltensten argumentiert. Zudem fällt auf, dass insbesondere bei den Items 5a und 5b, die sich beide auf anschauliche Inhalte beziehen, wesentlich mehr Studierende gar nicht argumentieren. Daneben begründen wesentlich mehr Studierende bei den Items 5c und 5d, die sich auf abstrakte Inhalte bezogen, analytisch und somit hochschulkonform.

11 Diskussion

Die vorliegende Arbeit verfolgt drei Forschungsziele: Verifizierung des in Kapitel 6 vorgestellten Entwicklungsmodells zum Aufbau und zur Förderung begrifflichen Wissens (Forschungsziel 1), Analyse begrifflichen Wissens (Forschungsziel 2) und Untersuchung der Argumentationsfähigkeit von Studienanfängerinnen und -anfängern des Studiengangs Mathematik und Lehramt Mathematik für Gymnasien (Forschungsziel 3) (siehe Kapitel 7).

In Kapitel 2 wird die Übergangsproblematik im Fach Mathematik von der Schule an die Universität thematisiert. Das Problem des Übergangs von der Schule an die Hochschule ist bei weitem kein neues Problem, wie im Kapitel 2.2 dargestellt wird. Hohe Abbruchquoten des Studiengangs Mathematik demonstrieren, dass es Schwierigkeiten zu Beginn dieses Studiums gibt (Heublein et al., 2014, 2012). Befragungen von Studierenden zeigen, dass Überforderung mit der neuen Situation und mit dem universitären Lehrstoff die Hauptgründe dafür sind, das Studium abzubrechen (Heublein & Wolter, 2011; Heublein et al., 2010). Trotz der Verkürzung der Regelschulzeit um ein Jahr und des Wegfallens der Leistungskurse können bzgl. der Statistiken des HIS oder DZHW allerdings auch keine signifikanten Leistungseinbrüche verzeichnet werden (Heublein et al., 2010, 2012, 2014) (siehe Kapitel 2).
Beim Übergang von der Schule an die Hochschule werden die Studierenden mit verschiedenen Veränderungen konfrontiert, die unter anderem auf die neue universitäre Lernkultur oder auf das Fach Mathematik selbst zurückzuführen sind (Reichersdorfer, 2013; Gueudet, 2008; Hoyles et al., 2001) (siehe Kapitel 2.3). Insbesondere der steigende Abstraktionsgrad der Inhalte und Arbeitsweisen erschwert das Lernen neuer Fachbegriffe, die zum Lösen mathematischer Probleme benötigt werden. Mathematisches Argumentieren ist eine der wichtigsten mathematischen Tätigkeiten im Hochschulbereich. Eine wesentliche Voraussetzung dafür ist ein strukturiertes und vernetztes begriffliches Wissen (z. B. Chinnappan et al., 2012; Reiss & Ufer, 2009; Heinze et al., 2008; Healy & Hoyles, 2000). Eine weitere Schwierigkeit, begriffliches Wissen zur Lösung mathematischer Probleme einsetzen zu können, sind Kontexteinflüsse (Sfard, 2007; Stebler et al., 1994; Perkins & Salomon, 1989). Die im Kontext Schule verwendeten Strategien zum Lösen mathematischer Probleme können für den Kontext Hochschule nicht mehr adäquat und ausreichend sein (siehe Kapitel 2.5). Bisherige Ansätze auf Seiten der Hochschulen und Universitäten, die Übergangsschwierigkeiten dauerhaft zu verbessern, haben bisher oftmals nicht die gewünschten Erfolge gebracht (siehe Kapitel 2.4).

Mathematisches Argumentieren ist zentral für die Universitätsmathematik und wird insbesondere seit der Einführung der Bildungsstandards in der Schule systematisch in den Blick genommen, sodass Schülerinnen und Schüler im Durchschnitt Fähigkeiten ausbilden, mehrschrittige, eigenständige Argumentationen zu führen sowie logische Schlussfolgerungen zu ziehen (KMK,

2004b, 2012) (siehe Kapitel 3.3). Betrachtet man die Studienanfängerinnen und -anfänger, die sich bewusst für ein Mathematikstudium entschieden haben, so kann angenommen werden, dass insbesondere diese Klientel über die genannten Fähigkeiten verfügt. Ergebnisse bisheriger Studien deuten jedoch auf niedrige Argumentationsfähigkeiten von Studierenden hin (z. B. Nagel & Reiss, 2016; Moore, 1994; Martin & Harel, 1989; Bender, 1988) (siehe Kapitel 5.3).
Grundlage für die Lösung verschiedener mathematischer Probleme, wie zum Beispiel auch für das mathematische Argumentieren, ist begriffliches Wissen (Reiss, 2002; Healy & Hoyles, 2000, 1998). Jedoch kann es insbesondere beim Lernen abstrakter Begriffe zu Schwierigkeiten beim Begriffsaufbau kommen. In Kapitel 4 wird aufgezeigt, wie begriffliches Wissen im Allgemeinen entsteht und welche Unterschiede beim Aufbau begrifflichen Wissens anschaulicher und abstrakter Begriffe auftreten können. Daneben wird im Kapitel 4.3 auf Begriffsverständnis im Bereich der Mathematikdidaktik eingegangen.
Für den Begriffsbildungsprozess wird ein Modell vorgestellt, das die Komponenten *concept image* und *concept definition* (Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1991) mit der operationalen und strukturellen Begriffskomponente (Sfard, 1991) verknüpft (siehe Kapitel 6). Das Modell beschreibt damit die Entwicklung begrifflichen Wissens im Hinblick auf anschauliche und abstrakte Begriffe unter Berücksichtigung des Schul- und Hochschulkontextes (siehe Abbildung 6.11). Daraus lassen sich Erklärungsansätze ableiten, warum abstrakte Begriffe schwerer zu lernen sind als anschaulichen Begriffe. Zudem postuliert das Modell, dass die Änderung des Kontextes auf die Bearbeitung mathematischer Probleme und den Einsatz von Fachbegriffen einen wesentlichen Einfluss hat.
Die Gültigkeit des Modells, begriffliches Wissen und Argumentationsfähigkeit von Studienanfängerinnen und -anfängern wird mithilfe einer für diese Zwecke angepassten Studie untersucht (siehe Kapitel 7). Die Konstruktion und Evaluation des Messinstruments wird im Kapitel 8 beschrieben. Die Kodierung der Aufgaben erfolgt in den meisten Fällen dichotom. Da einige Studien zeigen, dass Lernende oft empirische Argumente zur Verifikation mathematischer Aussagen verwenden (siehe Kapitel 5.3.3), wurde zur Auswertung der Aufgabe, in der die Studentinnen und Studenten einen mathematischen Satz beweisen sollen (Aufgabe 5), ein spezielles Kodierschema angewendet, das sich an die von Harel und Sowder (1998) identifizierten Beweisschemata von Studierenden orientiert (siehe Kapitel 5.3.5 und 9).

Im Folgenden werden die wichtigsten Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst und deren Konsequenzen für die universitäre Lehre diskutiert. Im Besonderen werden Vorschläge für weitere Verifikationen des Modells durch die Konstruktion spezieller Aufgaben aufgezeigt und auf Implikationen für die Unterrichtskultur eingegangen. Zusätzlich werden Impulse für Implikationen in der Lehramtsausbildung sowie universitärer Mathematikveranstaltungen im Allgemeinen diskutiert. Zuletzt werden verschiedene Ansätze für weitere fachdidaktische Forschungen vorgestellt, die auf die in der vorliegenden Arbeit gewonnenen Erkenntnisse basieren.

11.1 Diskussion der Hauptergebnisse

Der folgende Abschnitt fasst die wichtigsten Ergebnisse der Arbeit zusammen und diskutiert sie im Hinblick auf die Forschungsziele und Forschungsfragen.

11.1.1 Validierung der Methode

Der in der vorliegenden Arbeit wurde ein theoretisches Modell zum Begriffsaufbau entwickelt sowie die theoretischen Konstrukte des begrifflichen Wissens und der Argumentationsqualität operationalisiert. Dazu wurde ein Leistungstest für Studienanfängerinnen und -anfängern konstruiert. Um dabei die Wissenschaftlichkeit der empirischen Erhebung zu gewährleisten und die Aussagekraft der Ergebnisse zu interpretieren, muss besonderer Wert auf die Einhaltung der „methodische[n] Strenge" (Döring & Bortz, 2016, S. 93) gelegt werden. Aus diesem Grund wird in diesem Abschnitt diskutiert, in wie weit die Gütekriterien bei dem entwickelten Test gewährleistet sind.
Die Studie wurde an zwei bayerischen Universitäten in insgesamt drei Lehrveranstaltungen durchgeführt. Bei den Lehrveranstaltungen handelte es sich bei allen um Mathematikvorlesungen des ersten Studiensemesters.

Beschreibung des Leistungstests Der im Rahmen der vorliegenden Arbeit konstruierte Test beinhaltet fünf Aufgaben mit jeweils vier Teilaufgaben. Vier dieser fünf Aufgaben beziehen sich auf Aufgabenstellungen, die dem Kontext Schule zuzuordnen sind: Die Aufgaben 1 und 4 erfordern die Angabe bzw. Identifikation von Beispielen zu den gegebenen mathematischen Fachbegriffen und Sätzen (siehe Anhang C). Zur korrekten Lösung von Aufgabe 2 bedarf es der Abgrenzung der Begriffe von gegebenen Beispielen. Aufgabe 3 gibt schließlich verschiedene Eigenschaften vor, aus denen diejenigen auszuwählen sind, die den vier Fachbegriffen Mittelsenkrechte, gleichschenkliges Dreieck, Vektor und lineare Abhängigkeit zugeordnet werden können.
Aufgabe 5 erfordert die mathematische Begründung mathematischer Sätze und kann dementsprechend dem Kontext Hochschule zugeordnet werden. Zwei der Teilaufgaben beziehen sich auf Sätze, welche mit den beiden anschaulichen Begriffen Mittelsenkrechte und gleichschenkliges Dreieck verknüpft sind. Die anderen beiden Teilaufgaben inkludieren Sätze, welche die abstrakten Begriffe Vektor und seine Repräsentanten und lineare Abhängigkeit beinhalten. Daraus ergibt sich ein mehrdimensionales Design, dass die Analyse von Aufgaben aus dem Schul- und Hochschulkontext in Verbindung mit anschaulichen und abstrakten Inhalten zulässt.

Objektivität

Die Testbedingungen waren für alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Studie gleich. Vorab angefertigte Instruktionen sowie die Schulung der durchführenden Personen sicherten eine einheitliche Durchführung des Tests. Die Bearbeitungszeit sowie die erlaubten Hilfsmittel waren bei allen Erhebungen identisch. Der Test wurde in allen drei Lehrveranstaltungen nicht angesagt und erfolgte in der Mitte des ersten Semesters.

Die Studie beinhaltet offene und geschlossene Items. Die Auswertung der geschlossenen Items kann als objektiv angesehen werden. Die Auswertung der offenen Items erfolgte mithilfe eines vorab angefertigten Kodiermanuals. Die Testbögen wurden von zwei unabhängigen Ratern kodiert, deren Interraterreliabilität hoch war (siehe Kapitel 8.4.3). Diese beiden Rater kodierten bereits die offenen Items der Pilotstudien und durchliefen vorab intensive Schulungen. Folglich kann die Objektivität in der Durchführung und Auswertung der Studie angenommen werden.

Reliabilität

Um sicherzustellen, dass der Test die gewünschten Konstrukte zuverlässig misst, müssen die Reliabilitäten der jeweiligen Skalen überprüft werden. In der vorliegenden Arbeit wurde ein Leistungstest entwickelt, der mehrere Konstrukte misst. Zum einen wird begriffliches Wissen zu Mittelsenkrechten in einem Dreieck, zum gleichschenkligen Dreieck, zu Vektoren und zur linearen Abhängigkeit gemessen. Zum anderen wird die Argumentationsqualität von Studentinnen und Studenten im ersten Semester des Mathematikstudiums erfasst. Zur Analyse der Reliabilität der Testitems können vier Skalen gebildet werden, die das begriffliche Wissen bzgl. eines der vier genannten Begriffe messen. Die restlichen Items messen jeweils andere Konstrukte und können daher nicht zusammengefasst werden.
Wie bereits in Kapitel 8.4.3 beschrieben wurde, sollte eine Skala üblicherweise eine Reliabilität von mindestens $\alpha = 0,7$ aufweisen (Albers, 2009). Die Ergebnisse der Berechnungen des Cronbach Alpha-Wertes, das üblicherweise zur Bestimmung der internen Reliabilität angewendet wird, liegen sowohl bei der Pilotstudie als auch bei der Studie unter diesem kritischen Wert. Die höchsten Werte werden für die Skalen bezüglich der Mittelsenkrechten (Items 1a, 2a und 3a) bei beiden Studien ($\alpha = 0,607$ und $\alpha = 0,501$) sowie bezüglich des gleichschenkligen Dreiecks (Items 1b, 2b und 3b) der Studie erreicht ($\alpha = 0,513$).
Problematisch ist in beiden Studien, dass die vier Skalen nur aus jeweils drei Items bestehen. Aufgrund der Abhängigkeit des α von der Itemanzahl können von vornherein keine hohen Werte erreicht werden. Weiterhin gibt es keine vergleichbaren Tests, welche die entsprechenden Konstrukte messen, weswegen ein neuer Test konzipiert werden musste. Unter diesen Bedingungen können daher diese Skalen als reliabel akzeptiert werden.
Die Unterschiede des errechneten α-Wertes zwischen den vier Skalen sind beachtlich. Während die erste Skala der Studie einen Wert von 0,607 aufweist, ist dieser bei der vierten Skala mit $\alpha = 0,107$ sehr gering. Insbesondere die Alpha-Werte, die sich auf begriffliches Wissen von abstrakten Begriffen beziehen, sind niedrig. Dies deutet an, dass die Kriterien, dass ein Lernender einen Begriff verstanden hat (vgl. dazu Vollrath, 2001), für abstrakte Begriffe möglicherweise nicht ausreichen, um das Konstrukt des begrifflichen Wissens vollständig zu beschreiben. Demnach wäre eine Erweiterung der Kriterien von Vollrath (2001) insbesondere für abstrakte Begriffe erforderlich.

Die Items wurden inhaltlich intensiv mit Expertinnen und Experten aus der Mathematik, Mathematikdidaktik und Bildungsforschung abgestimmt, sodass davon ausgegangen werden kann, dass die genannten Skalen das latente Konstrukt des begrifflichen Wissens abfragen, sie jedoch von einer hochschulmathematischen Perspektive geprägt sein können. Dies würde mit dem obigen Erklärungsansatz übereinstimmen, dass die α-Werte insbesondere bei den abstrakten Begriffen niedrig sind.

Das in der vorliegenden Arbeit beschriebene Modell zum begrifflichen Wissen postuliert, dass bei abstrakten Begriffen vordergründig die strukturelle Komponente und die *concept definition* aktiviert sind (siehe Kapitel 6). Die von Vollrath (2001) angegebenen Kriterien zum Verstehen eines mathematischen Begriffs, welche die Indikatoren zur Erfassung des begrifflichen Wissens der vorliegenden Studie sind, werden dem Schulkontext zugeordnet (siehe Kapitel 8). Es ist daher plausibel, dass die Testitems bzgl. der abstrakten Begriffe nicht die Kenntnisse abfragen, die bei abstrakten Begriffen nach der hier dargelegten Theorie dominieren.

Validität

Die Grundlage der Itementwicklung bildete die Theorie über begriffliches Wissen sowie über Argumentationsfähigkeiten von Lernenden. Zudem wurden sie mithilfe von systematischen Schulbuchrecherchen optimiert und mit den Bildungsstandards sowie dem bayerischen Lehrplan für Gymnasien verglichen und dementsprechend angepasst. Das zu messende Konstrukt wurde von Kriterien zum Verstehen mathematischer Begriffe (Vollrath, 2001; Weigand et al., 2009) abgeleitet und dementsprechend definiert. Somit beziehen sich die Items der Studie auf das in der vorliegenden Arbeit definierte Verständnis von begrifflichen Wissen. Aus diesem Grund liegt eine relativ hohe Konstruktvalidität vor, die sich an manchen Stellen jedoch noch optimieren lässt (siehe Kapitel 11.2).
Zudem wurden die Testitems mithilfe von Expertinnen und Experten aus der Mathematik, der Mathematikdidaktik sowie der Bildungsforschung adaptiert. Daher ist anzunehmen, dass die konstruierten Items das Konstrukt abbilden. Ebenso ist an manchen Stellen eine Erhöhung der Konstruktvalidität erforderlich, wie die Ergebnisse – insbesondere die inhaltlichen Analysen – zeigten (siehe Kapitel 11.2).

Zusammenfassung

Die Gütekriterien sind mit Einschränkungen bei der vorliegenden Studie gewährleistet. Die relativ enge Definition von begrifflichen Wissen führt jedoch dazu, dass abstrakte Begriffe nicht angemessen berücksichtigt werden, da vorrangig die operationale Komponente und das *concept image* zur Beantwortung dieser Items erforderlich sind, obwohl bei abstrakten Begriffen eher die strukturelle Komponente und die *concept definition* dominieren (siehe Kapitel 6). Die Reliabilität dieser Skalen erweisen sich daher als niedrig. In weiteren Studien müsste demnach der Frage nachgegangen werden, welche Art an Items generiert werden müssen, um das begriffliche Wissen von abstrakten Begriffen hinreichend abzubilden.

11.1.2 Verifikation des Entwicklungsmodells zum begrifflichen Wissen

Die Ergebnisse der Studie, die im Folgenden diskutiert werden, können mithilfe des im Rahmen der vorliegenden Arbeit konstruierten Prozesses in Abbildung 6.11 erklärt werden: Wie in den Kapiteln 4.2 und 6 aufgezeigt wird, besteht ein mathematischer Fachbegriff aus den vier Komponenten *concept image* und *concept definition* (Vinner, 1991; Tall & Vinner, 1981) sowie der operationalen und strukturellen Komponente (Sfard, 1991). Dabei sind die operationale Komponente und das *concept image* dem Schulkontext zuzuordnen, da beide in der Regel den Prozesscharakter der Mathematik betonen (Reiss & Hammer, 2013; Borneleit et al., 2001; Kaiser, 1999). Gerade diese beiden werden hauptsächlich im schulischen Unterricht gefördert, wobei nicht ausgeschlossen wird, dass im schulischen Mathematikunterricht ebenso die strukturelle Komponente oder die *concept definition* angesprochen werden. Auch für den universitären Kontext ist anzumerken, dass es – vor allem in den letzten Jahren – Bestrebungen gibt, mehr Visualisierung und Anschauung in die universitäre Lehre zu integrieren (z. B. Bausch et al., 2014; Hoppenbrock et al., 2016). Die Zuteilung der vier Komponenten zu den beiden Kontexten erfolgt daher nicht exklusiv. Vielmehr werden dabei reguläre Tendenzen – zum Beispiel die Betonung des Prozess- oder Produktcharakters der Mathematik – berücksichtigt, um die Einteilung vorzunehmen. Die strukturelle Komponente und die *concept definition* werden demnach mit dem Hochschulkontext verknüpft.

Die Lösungsraten der Aufgaben der vorliegenden Studie zeigen, dass es den Studierenden leichter fällt, Aufgaben richtig zu bearbeiten, die dem Schulkontext zuzuordnen sind und sich auf die anschaulichen Begriffe Mittelsenkrechte und gleichschenkliges Dreieck beziehen. Das arithmetische Mittel der relativen Häufigkeiten der korrekt bearbeiteten Aufgaben, die begriffliches Wissen abfragen (Aufgaben 1 bis 3), ist für die beiden anschaulichen Begriffe signifikant höher als für die abstrakten Begriffe: $t(55) = 8{,}414$; $p < 0{,}001$ mit einem sehr großen Effekt $d = 1{,}124$ (Cohen, 1992, 1988) (siehe Kapitel 10.2.1.2). Auch ein Vergleich der korrekten relativen Lösungshäufigkeiten der Items, welche eine korrekte Zuteilung von Beispielen zu einem gegebenen mathematischen Satz erfordern (Aufgabe 4) und ebenfalls dem Kontext Schule zuzuordnen sind, zeigt einen signifikanten Unterschied zugunsten der anschaulichen Begriffe Mittelsenkrechte und gleichschenkliges Dreieck: $t(44) = 5{,}655$, $p < 0{,}001$ mit einem großen Effekt $d = 0{,}843$ (Cohen, 1992, 1988) (siehe Kapitel 10.1.4).
Die korrekte Bearbeitung von Aufgaben, die aus dem Schulkontext stammen, fällt den Studentinnen und Studenten signifikant leichter, wenn sich diese auf anschauliche Inhalten beziehen. *Anschaulich* bedeutet im Rahmen dieser Arbeit, dass bei einem mathematischen Fachbegriff die operationale Komponente (Sfard, 1991) dominiert (siehe Kapitel 4.2). Dadurch, dass die operationale Komponente stark mit dem *concept image* verbunden ist (siehe Kapitel 6), können Lernende nicht nur mithilfe der operationalen Komponente mit dem Fachbegriff arbeiten, sondern verfügen auch über gewisse Vorstellungen bzgl. des Begriffs. In beiden ist die Fähigkeit, konkrete Arbeitsweisen durchzuführen sowie Beispiele zu generieren, enthalten. Daneben können Studierende mithilfe dieser Komponenten Begriffe visualisieren. Genau diese Fähigkeiten erleichtern die korrekte Beantwortung der Aufgaben 1 bis 4, die dem Schulkontext zugeordnet werden können (siehe Kapitel 8.3). Daraus ableitend werden die Items, die sich auf die bei-

den anschaulichen Begriffe Mittelsenkrechte und gleichschenkliges Dreieck beziehen, signifikant besser bearbeitet als die, welche mit den abstrakten Begriffen Vektor und lineare Abhängigkeit verknüpft sind.
Bei der Beantwortung dieser Aufgaben ist zudem kein Kontextwechsel notwendig: Sowohl Aufgabenstellungen als auch Art der Inhalte stammen aus demselben Kontext. Studierende sind demnach erfolgreicher, wenn Aufgaben vorliegen, zu deren Lösung kein Kontextwechsel durchgeführt werden muss (Sfard, 2007; DeVries, 2000; van Oers, 1998), wie im Kapitel 6 beschrieben wird. Einige Autoren (Sfard, 2007; Stebler et al., 1994; Perkins & Salomon, 1989) berichten davon, dass Transitionen von einem Kontext in einen anderen Lernenden generell schwer fallen (siehe Kapitel 2.5). Dies wird von den dargelegten Ergebnissen bestätigt (siehe Kapitel 10).

Bei der Aufgabe, die mathematische Argumentation erfordert (Aufgabe 5) und welche dem Hochschulkontext zuzuordnen ist, legen die Ergebnisse einen umgekehrten Trend nahe: Die Lösungshäufigkeiten sind höher, wenn es sich um abstrakte Inhalte handelt. In Kapitel 10.3 wird gezeigt, dass signifikant mehr Studierende Sätze korrekt begründen können, die einen abstrakten Inhalt aufweisen, als solche, die mit anschaulichen Inhalten verbunden sind: $t(41) = 2,35$; $p < 0,024$ mit einem kleinen bis mittleren Effekt $d = 0,372$ (Cohen, 1992, 1988). Bei abstrakten Begriffen dominiert die strukturelle Komponente, der Begriff wird also vorwiegend aus einer formaleren Perspektive betrachtet (siehe Kapitel 4.2). Aufgrund des engen Zusammenhangs der strukturellen Komponente mit der *concept definition* wird eine korrekte Lösung von Aufgaben aus dem Hochschulkontext, für die diese Komponenten essentiell sind, begünstigt. Damit ist zu erklären, warum mehr Studierende diese Aufgaben lösen können.
Auch der Einfluss des Kontextes spielt dabei eine Rolle: Müssen Aufgaben aus dem Hochschulkontext, die abstrakte Begriffe beinhalten, gelöst werden, findet kein Kontextwechsel statt, was sich offensichtlich positiv auf die Lösungsrate auswirkt (siehe Kapitel 2.5). Da die Hochschulmathematik den Fokus auf das Vermitteln formaler Definitionen und das Erkennen mathematischer Strukturen legt, werden an der Universität im Wesentlichen abstrakte Begriffe thematisiert (A. Fischer et al., 2009; Heinze & Reiss, 2007; Lengnink & Prediger, 2000). Dabei werden insbesondere die strukturelle Komponente und die *concept definition* gefördert (siehe Kapitel 4.2).
Die dargestellten Ergebnisse verifizieren das Modell, das im Rahmen dieser Arbeit entwickelt wurde, und verdeutlichen, dass es entscheidend ist, in welchem Kontext Aufgaben gelöst werden und ob die Inhalte abstrakt oder anschaulich sind.

Zudem können die Testpersonen einen mathematischen Satz dann eher beweisen, wenn sie bereits ein Beispiel zu diesem Satz angeben konnten. Für die Begriffe gleichschenkliges Dreieck, Vektor und lineare Abhängigkeit konnte ein signifikanter Unterschied zwischen den Lösungsraten der Studierenden festgestellt werden, die ein Beispiel zum gegebenen Satz angeben konnten, und denen, die das nicht konnten. Die Ergebnisse der t-Tests für das gleichschenklige Dreieck zeigten einen hochsignifikanten Unterschied mit einem mittleren Effekt: $t(93) = 3,327; p = 0,001; d = 0,623$. Bei den beiden abstrakten Begriffen konnten signifikante Ergebnisse nachgewiesen werden: $t(86) = 2,319; p = 0,023; d = 0,398$ beim Vektor und $t(31) = 2,956; p = 0,048; d = 0,449$

bei der linearen Abhängigkeit. Die unterschiedlichen Freiheitsgrade kommen daher zustande, dass jeweils eine unterschiedliche Anzahl an Probanden die jeweiligen Teilaufgaben aufgrund des Rotationsdesigns bearbeiteten und die Aufgaben von verschiedenen vielen Teilnehmerinnen und Teilnehmern korrekt beantwortet wurden.
Zur Förderung argumentativer Fähigkeiten von Lernenden kann folglich die Betrachtung eines Beispiels, das den zu beweisenden Satz darstellt, helfen. Dies deckt sich mit den am Übergang eingesetzten Maßnahmen, um den Studieneintritt zu erleichtern. Viele dieser Maßnahmen zielen auf eine Veranschaulichung hochschulmathematischer Inhalte ab (siehe z. B. Hoppenbrock et al., 2016; Bausch et al., 2014). Die hier vorgestellten Ergebnisse untermauern damit die bereits eingeführten Maßnahmen empirisch.
Eine theoretische Interpretation dieser Ergebnisse verdeutlicht ebenso die Notwendigkeit, die vier Komponenten begrifflichen Wissens (siehe Kapitel 6) zu verbinden. D. h., nicht nur zum Bearbeiten von Aufgaben aus dem Schulkontext sind die operationale Komponente und das *concept image* wichtig, sondern deren Aktivierung erleichtert auch das Bearbeiten hochschulmathematischer Aufgaben. Schlussfolgernd ist demnach ein möglichst vollständiges (in dem Sinne, dass alle vier Komponenten begrifflichen Wissens ausgebildet und miteinander verknüpft sind) begriffliches Wissen zu mathematischen Konzepten zum Lösen verschiedener Probleme notwendig bzw. hilfreich. Das Ergebnis unterstreicht damit die Behauptung, dass zum flexiblen Umgang mit mathematischen Begriffen, das Kontextwechsel beinhaltet, alle Komponenten wesentlich sind.

Im vorhergehenden Abschnitt wurde erläutert, dass es Studierenden leichter fällt, Aufgaben des Hochschulkontextes erfolgreich zu lösen, sofern es sich um einen abstrakten Inhalt handelt. Bemerkenswert ist jedoch die Gruppe an Studierenden, welche die Aufgaben aus dem Schulkontext mit abstrakten Begriffen fehlerfrei bearbeiten: Sie vermögen bei den abstrakten Begriffen, die operationale Komponente und das *concept image* zu aktivieren, um entsprechende Aufgaben lösen zu können. Sie können damit einen Kontextwechsel vornehmen. Interessant wäre es bei dieser Gruppe zu erforschen, ob die strukturelle Komponente bei den dargebotenen Begriffen dominiert oder ob sie bereits über ein beachtliches begriffliches Wissen verfügen, in dem alle vier Komponenten fundiert ausgebildet sind, was einen flexiblen Umgang dieser Begriffe zulässt und auch vermeintlich abstrakte Begriffe weniger abstrakt erscheinen lässt.
Diese Erkenntnis unterstreicht die Forderung nach einer adäquaten Verbindung der vier Komponenten des Modells aus Kapitel 6, wodurch Lernende dazu befähigt werden, mathematische Fachbegriffe erfolgreich und zur Lösung mathematischer Probleme einzusetzen. Ein umfangreiches begriffliches Wissen stellt sich als Voraussetzung zum Lösen verschiedenartiger mathematischer Probleme heraus.

11.1.3 Analyse begrifflichen Wissens

Im Rahmen des zweiten Forschungsziels wurde das begriffliche Wissen von Studienanfängerinnen und -anfängern analysiert. Dabei werden zwei Forschungsfragen untersucht: Forschungsfrage 2.1 beschäftigt sich mit der Untersuchung des begrifflichen Wissens und Forschungsfrage 2.2 geht der Frage nach, welche Begriffe die Kriterien des Begriffsverständnis nach Vollrath (2001), das im Kapitel 4.3.1 beschrieben wird, erfüllen.

Zur Beantwortung der Forschungsfrage 2.1 wird das begriffliche Wissen der vier Fachbegriffe – Mittelsenkrechte, gleichschenkliges Dreieck, Vektor und seine Repräsentanten sowie lineare Abhängigkeit – mithilfe der Aufgaben 1 bis 3 erhoben (siehe Kapitel 8). Es wird erwartet, dass das begriffliche Wissen der anschaulichen Inhalte von Studienanfängerinnen und -anfängern von der Schule geprägt ist (Reiss & Hammer, 2013; Borneleit et al., 2001; Kaiser, 1999) (siehe Kapitel 7.2). Daraus ist abzuleiten, dass bei Begriffen aus dem Schulkontext hauptsächlich die operationale Komponente (Sfard, 1991) und das *concept image* (Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1991) dominieren. Im Gegensatz dazu wird erwartet, dass eine Dominanz der strukturellen Komponente und der *concept definition* bei Begriffen festzustellen ist, die dem Hochschulkontext zugeordnet werden können, in welchem eine strukturell-abstrakte Sichtweise betont wird (siehe Kapitel 7.2). Die Lösungsraten der 2. Aufgabe, in der die Probanden begründen, warum ein gegebenes Beispiel nicht den vier gegebenen Begriffen zuzuordnen ist, sind bemerkenswert: Viele Studentinnen und Studenten können diese Aufgabe für alle Fachbegriffe – also in allen Teilaufgaben – korrekt lösen. Die Lösungsraten liegen bei $85,7\,\%$ und $77,6\,\%$ bei den beiden anschaulichen Begriffen und bei $62,4\,\%$ und $84,3\,\%$ bei den abstrakten Begriffen Vektor und lineare Abhängigkeit. Dieser Befund ist zunächst überraschend, da man annehmen würde, dass diese Aufgabe für abstrakte Begriffe schwieriger zu lösen ist.
Eine Erklärung der hohen Lösungsraten der Items zu Aufgabe 2 kann sein, dass es zur korrekten Antwort ausreicht, *einen* Grund anzugeben, warum ein gegebenes Beispiel nicht dem genannten Begriff zuzuordnen ist. Bei dem Item der Mittelsenkrechte ist zum Beispiel eine Gerade in einem Dreieck angegeben, die durch eine Ecke diese Dreiecks verläuft, jedoch ansonsten keine Charakteristika aufweist. Bei diesem Item haben die Studierenden mindestens zwei verschiedene Möglichkeiten, wie sie die Aufgaben korrekt bearbeiten können. Sie können etwa argumentieren, dass alle Punkte auf dieser gegebenen Gerade nicht denselben Abstand zu den beiden andere Ecken des Dreiecks aufweisen, oder mit dem fehlenden rechten Winkel, den die Gerade mit einer der Dreiecksseiten bilden müsste. Typischerweise wird also Bezug auf eine charakteristische Eigenschaft des abgefragten Begriffs genommen und gezeigt, dass diese bei dem gegebenen Beispiel nicht vorliegt. Zudem können auch spezielle Beispiele einer Mittelsenkrechten in einem Dreieck mit dem vorliegenden Beispiel verglichen werden. Daraus könnte dann abgeleitet werden, dass es sich in diesem Fall nicht um eine Mittelsenkrechte handelt.

Die Aufgaben sind so gestellt, dass mehrere Eigenschaften nicht auf das Beispiel zutreffen, weswegen die Probanden entweder eine handlungsorientiert-visuelle Eigenschaft angeben können, wie etwa: „Die Gerade geht nicht durch die Mitte der Dreiecksseite“ oder aber eine strukturell-abstrakte Eigenschaft, wie etwa: „Alle Punkte auf der Geraden besitzen nicht denselben Abstand zu zwei Ecken des Dreiecks“. Eine detaillierte, qualitative Untersuchung, die aufzeigt, ob die Studierenden tendenziell mit Argumenten des Schul- oder Hochschulkontextes das Beispiel von den Begriffen abgrenzen, wäre dazu interessant.

Die Aufgaben, die begriffliches Wissen abfragen (Aufgaben 1 und 3), werden erwartungsgemäß besser beantwortet, wenn sie sich auf die anschaulichen Begriffe Mittelsenkrechte und gleichschenkliges Dreieck beziehen und nicht auf die abstrakten Begriffe Vektor und lineare Abhängigkeit. Die Analyse zeigt, dass die Items 1a und 3a, die begriffliches Wissen der Mittelsenkrechten in einem Dreieck abfragen, von $68,8\,\%$ und $67,2\,\%$ der Studierenden korrekt gelöst werden. Dies verdeutlicht, dass die Probanden treffende Beispiele sowie Eigenschaften identifizieren können und demnach über ein fundiert ausgebildetes concept image und ausgebildete operationale Komponente verfügen.
Die Items zum begrifflichen Wissen des gleichschenkligen Dreiecks (Item 1b und 3b) werden ebenfalls von vielen Studierenden korrekt beantwortet. Teilaufgabe 1b, welches die Identifikation treffender Beispiele erfordert, wird dabei von knapp der Hälfte der Teilnehmerinnen und Teilnehmer korrekt bearbeitet und Teilaufgabe 3b von $68,6\,\%$. Einige Studentinnen und Studenten erkennen den Spezialfall eines gleichschenkligen *und* rechtwinkligen Dreiecks nicht als *nur* gleichschenklig an und wählen daher diese Antwortoption nicht aus. Dieser Befund weist darauf hin, dass das *concept image* und die operationale Komponente bzgl. des gleichschenkligen Dreiecks bei diesen Probanden noch nicht hinreichend entwickelt sind, was sich in einer fehlenden Identifikation treffender Spezialfälle äußert, die grundsätzlich dem gegebenen Begriff angehören. In diesem konkreten Fall wird deutlich, dass das bestehende Begriffsnetz strukturelle Defizite besitzt, was zum Beispiel eine entsprechende Verbindung vom gleichschenkligen Dreieck zu seinen Spezialfällen betrifft.
Die Teilaufgaben, die sich auf abstrakte Begriffe beziehen, werden von wesentlich weniger Studierenden korrekt beantwortet. Eine Ausnahme bildet das Item 3d, in dem die Studentinnen und Studenten Eigenschaften zweier linear abhängiger Vektoren identifizieren sollen. Dieses wird von $58,0\,\%$ der Teilnehmenden korrekt gelöst, was eine hohe Lösungshäufigkeit für abstrakte Begriffe darstellt. Die Lösungsraten der übrigen Items liegen bei $16,1\,\%$; $31,6\,\%$ und $15,9\,\%$ (die Lösungshäufigkeiten der Aufgabe 2 sind durchweg höher und wurden bereits diskutiert). Für die Probanden ist es anscheinend leichter, korrekte Eigenschaften zweier linear abhängiger Vektoren zu finden. Betrachtet man die Items zur linearen Abhängigkeit (Teilaufgaben c) näher, so stellt man fest, dass die Teilnehmerinnen und Teilnehmer bei den Aufgaben, welche die Kenntnis von Eigenschaften erfordern, eine bessere Performanz zeigen (Aufgaben 2c und 3c) als bei Aufgaben, welche die Kenntnis von Beispielen erforden (Aufgaben 1c und 4c). Die Kenntnis von Eigenschaften ist beim Begriffsentwicklungsprozess des Modells (siehe Abbilung 6.11) im Übergang vom *concept image* zur strukturellen Komponente zu finden (siehe Kapitel 6). Die Tatsache, dass die relativen Häufigkeiten der korrekt gelösten Items niedriger als die der anschaulichen Begriffe sind, aber deutlich höher als die bzgl. des Vektorbegriffs, deutet darauf hin, dass das begriffliche Wissen bzgl. der linearen Abhängigkeit ausgeprägter ist als das bzgl. des Vektorbegriffs.

Die Items zum Vektorbegriff werden von wenigen Studierenden korrekt gelöst: 16,1 % und 15,9 % können die Items 1c bzw. 3c korrekt bearbeiten, welche die Identifikation von Beispielen bzw. Eigenschaften erfordert. Dies deutet an, dass die operationale Komponente und das *concept image* noch defizitär vorliegen können, was zu Schwierigkeiten beim Lösen der gegebenen mathematischen Probleme führt.

Zur Beantwortung von Forschungsfrage 2.2. wird untersucht, inwiefern die Kriterien des Begriffsverständnisses nach Vollrath (2001) bei den vier Begriffen Mittelsenkrechte, gleichschenkliges Dreieck, Vektor und lineare Abhängigkeit erfüllt sind (siehe Kapitel 4.3.1). Die Aufgaben der Studie fragen die wichtigsten Kriterien des Begriffsverständnisses nach Vollrath ab. Die Lösungsraten, bei denen alle drei Items zu dem jeweiligen Begriff richtig bearbeitet werden, zeigen, dass etwa jeder zweite Studierende alle Aufgaben, die sich auf die Mittelsenkrechte in eine Dreieck beziehen, korrekt bearbeiten kann. Jeder dritte löst alle drei Items, die mit dem gleichschenkligen Dreieck verknüpft sind, korrekt und 4,0 % bzw. 15,0 % beantworten alle drei Items zum Vektorbegriff und zur linearen Abhängigkeit richtig. Dies zeigt, dass das Begriffsverständnis bei den beiden abstrakten Begriffen eher gering ist.
Wie aus den Ergebnissen zu den vorherigen Forschungsfragen deutlich wird, werden Aufgaben zu abstrakten Begriffen besser gelöst, wenn sie dem Hochschulkontext entstammen. Die Kriterien des Begriffsverständnisses von Vollrath (2001) zielen eher auf Aufgaben im Kontext Schule ab und prüfen, ob die operationale Komponente und das *concept image* eines Begriffs ausgebildet sind. Daher ist es im Hinblick auf das Entwicklungsmodell von Kapitel 6 einsichtig, dass Studierende Aufgaben besser lösen, wenn anschauliche Begriffe abgefragt werden.

Das Forschungsziel 2 analysiert das begriffliche Wissen von Studienanfängerinnen und -anfängern. Die Ergebnisse der empirischen Untersuchung zeigen, dass das begriffliche Wissen von anschaulichen Begriffen deutlich höher ist als das von abstrakten Begriffen. Bei abstrakten Begriffen fällt es ihnen schwer, korrekte Beispiele oder Eigenschaften zu identifizieren. Erklärungen für diesen Befund lassen sich auf das im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Modell zurückführen, was in Kapitel 11.1.2 umfangreich erläutert wird.
Mögliche Defizite beim mathematischen Argumentieren, die im folgenden Abschnitt diskutiert werden, lassen sich demnach nicht darauf zurückführen, dass der Wissenserwerb über die anschaulichen Begriffe Mittelsenkrechte und gleichschenkliges Dreieck weiter zurückliegt und es daher den Studentinnen und Studenten schwerer fällt, anschauliche Sätze aus der Sekundarstufe I zu begründen. Die Ergebnisse lassen demnach die Schlussfolgerung zu, dass der Aufbau der operationalen Komponente und des *concept images* im Begriffsbildungsprozess wesentlich ist – insbesondere bei dem Lernen von abstrakten Begriffe, bei denen ein direkter Bezug zu anschaulichen Elementen fehlt.

11.1.4 Mathematische Argumentation von Studienanfängerinnen und -anfängern

Das dritte Forschungsziel beschäftigt sich mit der Untersuchung mathematischer Argumentationsfähigkeit von Studierenden im ersten Semester an der Universität. Studien mit Schülerinnen und Schülern zeigen, dass deutliche Defizite beim eigenständigen Entwickeln mathematischer Argumentationen zu verzeichnen sind (Heinze & Reiss, 2004; Reiss, 2002; Reiss et al., 2002; Healy & Hoyles, 2000). Forschungsfrage 3.1 überpürft daher, ob sich dieser Befund bei Studienanfängerinnen und -anfängern bestätigen lässt. In den Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife im Fach Mathematik ist das Entwickeln mathematischer Argumente Teil des Anforderungsbereichs II bei der Kompetenz mathematisch Argumentieren (KMK, 2012) (siehe Kapitel 3.3). Da es sich bei den Bildungsstandards um Regelstandards handelt, sollen Lernende mit dem Erwerb der Allgemeinen Hochschulreife über diese Fähigkeit im Durchschnitt verfügen. Aktuelle Studien mit Ingenieurstudierenden deuten jedoch darauf hin, dass Probleme beim mathematischen Argumentieren vorliegen (Nagel & Reiss, 2016).
Die Ergebnisse der vorliegenden Studie zeigen ebenfalls, dass Studierende mit mathematischem Argumentieren Schwierigkeiten haben. Die Lösungsraten liegen bei Aufgabe 5, in der die Probanden mathematische Argumentationen entwickeln sollen, zwischen $15,7\,\%$ (Item 5a) und $33,7\,\%$ (Item 5c). Item 5a ist dem Begriff der Mittelsenkrechten zugeordnet und erfordert den Beweis des Satzes, dass sich die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. Item 5c erfordert eine mathematische Begründung, warum die Addition von Vektoren des $\mathbb{R}^2$ kommutativ ist. Die anderen beiden Teilaufgaben von Aufgabe 5, in denen es um das mathematische Begründen eines mathematischen Satzes geht, werden ebenso von einer eher geringen Anzahl an Studentinnen und Studenten korrekt bearbeitet. Den Satz des Thales (Item 5b) können $22,4\,\%$ der Studierenden richtig begründen und die Aussage, dass drei beliebige Vektoren im $\mathbb{R}^2$ linear abhängig sind, beweisen $30,8\,\%$ der Teilnehmenden korrekt. Aufgabe 5 zählt damit zu den für die Teilnehmerinnen und Teilnehmer schwer lösbaren Aufgaben der Studie.
Daneben können die Teilaufgabe 1d, welche das Identifizieren treffender Beispiele von zwei linear abhängigen erfordert, sowie die Teilaufgabe 4c, in welcher die Studierenden korrekte geometrische und algebraische Darstellungen der Kommutativität der Vektoraddition ankreuzen sollen, ebenfalls zu den schwer lösbaren Aufgaben gezählt werden. Diese beiden Items können etwa ein Drittel der Probanden korrekt lösen. Damit weisen sie einen ähnlichen Schwierigkeitsgrad auf wie die beiden Items 5c und 5d, die mathematische Argumentation erfordern. Folglich zählen die Items 1c, 3c, 4d, 5a und 5b zu den schwersten Items des Tests.
Die Lösungshäufigkeiten der beiden Argumentationsitems 5a und 5b, die sich auf die beiden anschaulichen Begriffe Mittelsenkrechte in einem Dreieck und gleichschenkliges Dreieck beziehen, fallen mit $15,7\,\%$ und $22,4\,\%$ wesentlich niedriger aus als die der Items 5c und 5d, die sich auf die beiden abstrakten Begriffe Vektor und lineare Abhängigkeit beziehen. Ein t-Test für abhängige Stichproben zeigt, dass die mittlere Lösungsrate der beiden Argumentationsaufgaben mit anschaulichem Inhalt (Items 5a und 5b) signifikant niedriger ist als die beiden Aufgaben mit abstrakten Inhalten (Items 5c und 5d): $t(41) = 2,35$; $p = 0,024$ mit einem kleinen bis mittleren Effekt $d = 0,327$ (Cohen, 1992, 1988) (siehe Kapitel 10.3).

Die Ergebnisse unterstreichen, dass es erhebliche Unterschiede der empirischen Itemschwierigkeit zwischen den anschaulichen und abstrakten Argumentationsaufgaben gibt. Obwohl das Item 5a, das sich auf die Mittelsenkrechte bezieht, die zu einem anschaulichen Begriff gezählt wird, handelt es sich bei diesem Item um das für die Studentinnen und Studenten am schwersten lösbare Item des Tests. Zugleich ist Item 2a, das sich ebenfalls auf die Mittelsenkrechte bezieht, das für die Probanden leichteste Item.
Zusammenfassend lässt sich sagen, dass Studierende Schwierigkeiten mit der Bearbeitung von Argumentationsaufgaben haben und nur maximal jeder Dritte in der Lage ist, mathematisch korrekte Argumentationen selbstständig zu entwickeln. Allerdings lassen sich Unterschiede zwischen den Lösungshäufigkeiten dieser Aufgaben feststellen, falls die Inhalte anschaulich oder abstrakt sind. Argumentationen auf Basis von anschaulichen Inhalten zu entwickeln, fällt den Studienanfängerinnen und -anfängern schwerer, was mithilfe des Entwicklungsmodells, das im Kapitel 6 vorgestellt wird, erklärt werden kann.

Forschungsfrage 3.2 beschäftigt sich mit der Art der studentischen Argumente. Studien belegen, dass Lernende dazu neigen, empirische Argumente zur Verifikation mathematischer Sätze zu verwenden (z. B. Reiss, 2002; Healy & Hoyles, 2000, 1998; Martin & Harel, 1989) (siehe Kapitel 5.3.3). Mithilfe der von Harel und Sowder (1998) identifizierten Beweisschemata wird analysiert, welche Art von Argumenten Studienanfängerinnen und -anfänger beim mathematischen Argumentieren einsetzen. Über alle Aufgaben hinweg argumentieren die meisten Teilnehmerinnen und Teilnehmer analytisch, was einem typisch mathematischen Vorgehen entspricht (Item 5a: 39,6 %; Item 5b: 32,6 %; Item 5c: 56,5 %; Item 5d: 54,4 %). Studien mit Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe II zeigen, dass häufig empirisch, also auf Basis von Beispielen, argumentiert wird. Aus diesem Grund kann abgeleitet werden, dass den Studierenden der vorliegenden Stichprobe das Prinzip mathematischer Argumentation, die sich aus einer axiomatisch-deduktiven Kette von Argumenten bildet, bekannt ist. Zudem haben die Teilnehmerinnen und Teilnehmer bis zu den ersten Wochen des Mathematikstudiums ein Verständnis über die Struktur eines mathematischen Beweises entwickelt.
Der Vergleich der Art der Argumente über alle Teilaufgaben 5a, 5b, 5c und 5d zeigt, dass die Studentinnen und Studenten bei den Aufgaben, die sich auf die anschaulichen Begriffe Mittelsenkrechte und gleichschenkliges Dreieck (Items 5a und 5b) beziehen, ähnliche Arten von Argumenten einsetzen. Ebenso ist die Verteilung der beiden Teilaufgaben 5c und 5d, die sich auf die beiden abstrakten Begriffe Vektor und lineare Abhängigkeit beziehen, vergleichbar. Bei den Items zur Mittelsenkrechte und zum gleichschenkligen Dreieck wird hauptsächlich analytisch argumentiert (39,6 % und 32,6 %). Zudem verwenden 30 0% und 35,4 % keine Argumente, um die gegebenen Sätze mathematisch zu begründen. Es ergibt sich ein ambivalentes Bild: Während viele Studentinnen und Studenten analytisch argumentieren können, gelingt es ebenfalls vielen nicht, mathematische Begründungen auf Basis von logischen Argumentationsketten zu bilden. Etwa jeder Vierte bis Fünfte gibt externe Argumente als Begründung an. Dies verdeutlicht die Heterogenität der Studienanfängerinnen und -anfänger bzgl. mathematischer Argumentationsfähigkeit.

Eine inhaltliche Analyse der Lösungen zu den beiden Sätzen zur Mittelsenkrechte und zum gleichschenkligen Dreieck zeigt, dass zur Lösung beider Aufgaben elementargeometrisches Wissen benötigt wird. Der Satz, dass sich die drei Mittelsenkrechten in einem Dreieck schneiden, wird in der Regel mit Argumenten begründet, die den Abstand der Punkte auf einer Mittelsenkrechten zu zwei Eckpunkten, der stets gleich sein muss, beinhalten. Für den Beweis des Thalessatzes sind zum Beispiel Winkelbetrachtungen und Eigenschaften gleichschenkliger Dreiecke zielführend. Beiden Lösungswegen ist gemeinsam, dass Kenntnisse über Dreiecke eine wesentliche Rolle spielen. Die Inhalte beider Sätze stammen daher aus einem ähnlichen inhaltlichen mathematischen Kontext. Zudem werden sie in derselben Jahrgangsstufe in der Schule behandelt. Die ähnliche Verwendung mathematischer Argumente kann daraus erklärt werden. Ebenso scheint das argumentative Niveau beim Begründen sich auf einem ähnlichen Level zu befinden. Eine Erklärung dafür, dass keine Argumente bei Begründungen zum Einsatz kommen, kann sich auf den anschaulichen Inhalt der beiden Sätze beziehen. Studierende besitzen in der Regel eine operationale Komponente und ein *concept image*, wenn Inhalte anschaulicher Art sind. Aus diesem Grund fällt es ihnen leicht, Vorstellungen zu einem Satz zu generieren und diese für den Lösungsweg zu nutzen. Betrachtet man dazu das Prozessmodell zum Beweisen von E. Brunner (2013), so ist die intrinsische Motivation, etwas mathematisch begründen zu wollen, eine grundlegende Voraussetzung für den Beginn einer mathematischen Begründung. Die Anschaulichkeit der Inhalte der beiden Sätze sowie die Fähigkeit, sich diese vorzustellen, könnte daher dazu führen, dass Lernende die Notwendigkeit, diese mathematischen Sätze zu begründen, nicht erkennen. $23,2\,\%$ und $22,0\,\%$ der Studentinnen und Studenten stützen sich beim Begründen der beiden anschaulichen Sätze auf externe Autoritäten. Dies legt nahe, dass eine Unkenntnis darüber vorliegen kann, wie eine mathematische Argumentation zu generieren ist und unterstreicht die Heterogenität der Teilnehmenden.
Zudem ist zum Beweisen der Items 5a und 5b ein Kontextwechsel notwendig, da beide Items anschauliche Inhalte aufweisen und die Aufgabenstellung aus dem Hochschulkontext stammt. Kontextwechsel vorzunehmen, erfordert kognitive Anstrengung, weshalb viele Studierenden diese Herausforderung nicht annehmen wollen oder können und stattdessen externe oder keine Argumente angeben.

Die Verteilungen der Art der Argumente unterscheiden sich bei beiden Teilaufgaben zu den abstrakten Begriffen Vektor und lineare Abhängigkeit wesentlich von den Sätzen mit anschaulichem Inhalt. Es lässt sich feststellen, dass die Lernenden bei beiden Sätzen ähnliche Argumente verwenden. Inhaltlich beziehen sich beide Sätze auf die analytische Geometrie, die in der Oberstufe der Schule eingeführt und an der Universität wieder aufgegriffen wird. In beiden Sätzen spielen Vektoren eine zentrale Rolle. Einer der Sätze erfordert die Begründung der Kommutativität der Vektoraddition, der andere Satz den Beweis, dass drei beliebige Vektoren im $\mathbb{R}^2$ linear abhängig sind. Beide Inhalte sind miteinander verbunden, woraus sich ein ähnliches Antwortverhalten erklären lässt.
Weit über die Hälfte der Studierenden argumentieren bei diesen beiden Sätzen analytisch ($56,5\,\%$ und $54,4\,\%$). Ein Grund dafür könnte in den abstrakten Inhalten liegen, bei denen die strukturelle Komponente und *concept definition* dominieren. Zur Bearbeitung der Argumentationsaufgabe

aus dem Hochschulkontext ist kein Übergang in den Schulkontext notwendig. Lernende können im Kontext Hochschule mithilfe von Strukturen, Formalismen und Definitionen eine mathematische Argumentation entwickeln. Die Begründung der Kommutativität der Vektoraddition (Item 5c) kann beispielsweise vollständig formal erfolgen.
Etwa ein Fünftel der Studentinnen und Studenten verwenden zur Begründung keine Argumente, was weniger sind als bei den beiden Items, die sich auf anschaulichen Inhalt beziehen. Die Lernenden versuchen demnach eher eine Begründung zu formulieren als bei den anschaulichen Sätzen. Dies ist ein Hinweis darauf, dass die abstrakten Inhalte dazu beitragen können, dass im Lernenden ein Beweisbedürfnis entsteht. Zudem verwenden deutlich weniger Studierende ($15,4\,\%$ und $17,2\,\%$) externe Argumente als bei den beiden anschaulichen Sätze.

11.2 Limitationen

Die in der vorliegenden Arbeit beschriebene empirische Erhebung weist auch Limitationen auf. Es werden zum Beispiel lediglich vier Begriffe aus dem Bereich der Schulgeometrie untersucht. Auch wurde die Argumentationsqualität nur anhand vier mathematischer Sätze zu diesen Begriffen analysiert. Die Ergebnisse sind daher für den in der vorliegenden Arbeit beschriebenen Inhaltsbereich relevant, die Übertragung auf andere mathematische Bereiche muss weiterhin noch empirisch überprüft werden.
Zudem können die in der Studie entwickelten Aufgaben zwar die beiden Kontexte Schule und Hochschule voneinander trennen, jedoch ist keine Trennung zwischen den vier Komponenten begrifflichen Wissens möglich (siehe dazu auch Kapitel 11.3.3). Eine solche Ausarbeitung von entsprechenden Aufgaben wäre für künftige Forschungen sinnvoll.
In dem im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelten Modell können mithilfe der empirischen Untersuchung die Kontexteinflüsse und die Einflüsse anschaulicher und abstrakter Begriffe auf die Bearbeitung mathematischer Probleme verifiziert werden. Die Richtung jedoch, in welche sich die vier Komponenten des Modells idealerweise entwickeln, wird zwar theoretisch durch die Repräsentationsformen von Bruner (1966) begründet (siehe Kapitel 6), jedoch nicht empirisch bestätigt. Daher sind weitere Studien sinnvoll, um die (ideale) Richtung des Entwicklungsprozesses zu überprüfen.
Hinsichtlich des Messinstruments weisen die Skalen der Testitems, die begriffliches Wissen von abstrakten Begriffen erfordern, eine geringe Reliabilität auf. Mögliche Erklärungen finden sich in den Kapiteln 8.4.3 und 11.1.1. Problematisch ist hierbei zum einen die geringe Itemanzahl von drei Items pro Skala und zum anderen, dass manche Items nicht eng genug auf die jeweiligen mathematischen Begriffe begrenzt werden. In Kapitel 10.2 wird beispielsweise berichtet, dass die Probanden bei Item 2b, das zum gleichschenkligen Dreieck gezählt wird, ein solches nicht erkennen, wenn das gegebene Dreieck gleichzeitig rechtwinklig ist. Zur korrekten Beantwortung ist folglich eine Verknüpfung zweier mathematischer Konzepte – eines rechtwinkligen Dreiecks und eines gleichschenkligen Dreiecks – notwendig. Fehlt diese Verbindung, kann ein Proband das Item nicht lösen. Um somit das begriffliche Wissen bzgl. des gleichschenkligen Dreiecks isoliert zu erfassen, müsste dieses Item abgeändert werden. Ebenso wird etwa beim Item 3d das mathematische Konzept der Ebene im $\mathbb{R}^2$ benötigt, um eine gegebene Eigenschaft zweier linearer

Vektoren des $\mathbb{R}^2$ auszuschließen. Da die Erfassung begrifflichen Wissens von mathematischen Konzepten nie vollständig isoliert gemessen werden kann, ist etwa bei der Überarbeitung der Studie ein Katalog anzufertigen, der angibt, welche Konzepte voraussetzt werden können. Dann wäre eine schärfere Trennung verschiedener Konzepte möglich, was die Konstruktvalidität und interne Reliabilität verbessern würde.
Ebenso können die zu messenden Konstrukte genauer gemessen werden, wenn mehr Items generiert werden, die dasselbe Konstrukt messen. In der vorliegenden Studie wurde zum Beispiel das begriffliche Wissen anhand von drei Items erfasst. Auch die Argumentationsqualität wurde von vier bzw. jeweils einem Item gemessen. Diese Maßnahmen würden ebenso die Konstruktvalidität verbessern. Aus ökonomischen Gründen bietet es sich bei einer Replikation der Studie an, begriffliches Wissen und Argumentationsfähigkeit in getrennten Studien zu erfassen, damit eine maximale Bearbeitungszeit von 30 Minuten, sie sich als günstig herausgestellt hat, nicht überschritten wird.

11.3 Praktische Implikationen und Anregungen für künftige Forschungen

Im Folgenden werden verschiedene praktische Implikationen für den Unterricht und für die Lehramtsausbildung aus den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit vorgestellt. Zudem wird dargelegt, welche weiteren Forschungen sich aus den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit ableiten lassen.

11.3.1 Konsequenzen für die Unterrichtskultur

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, dass die Verknüpfung der operationalen Komponente, des *concept images*, der strukturellen Komponente und der *concept definition* nur in gegenseitiger Interaktion Lernende dahingehend befähigen kann, begriffliches Wissen flexibel im Lösungsprozess mathematischer Probleme einzusetzen (siehe Kapitel 10). Die Ergebnisse der Studie zeigen auf, dass zur korrekten Bearbeitung von Aufgaben aus dem Schulkontext die Aktivierung der operationalen Komponente sowie des *concept images* notwendig sind. Sind diese nicht entsprechend ausgebildet oder können nur begrenzt aktiviert werden, haben Lernende eher Schwierigkeiten, entsprechende Aufgaben zu lösen. Bei der Bearbeitung von Aufgaben aus dem Hochschulkontext verhält es sich ähnlich, dabei sind jedoch die strukturelle Komponente und die *concept definition* wichtig.

Das Ziel von Lehren ist es, geeignete Lernumgebungen zu schaffen, die den Lernprozess fördern (z. B. Reiss & Hammer, 2013; Zech, 1996; Stebler et al., 1994). Bruner (1966) postuliert beim Lernen eine optimale Entwicklung, falls Inhalte zunächst enaktiv wahrgenommen werden, dann ikonisch und letztlich auf symbolischer Ebene erfahren werden. Dabei sind insbesondere Übergänge in verschiedene Repräsentationen für das Lernen wichtig. Die Theorie kann an den Übergang von der Schule an die Hochschule adaptiert werden, wenn sie entsprechend interpretiert wird. Dies wurde in Kapitel 4.4 und 6 vorgenommen und dabei die Ebene der konkreten Beispiele, die visuelle Ebene sowie die formale Ebene generiert. Im Hinblick auf den in der vor-

liegenden Arbeit konstruierten Prozess bedeutet dies, dass die Ausbildung der operationalen Komponente und des *concept images* idealerweise zuerst stattfinden sollten und dann die der strukturellen Komponente und *concept definition*, in welcher die formale Definition eines Begriffs entwickelt wird (siehe Abbildung 6.11). In Lehrveranstaltungen an der Universität, in denen Inhalte meist zunächst durch ihre formale Definition eingeführt werden, kann dieser Prozess ebenso umgekehrt verlaufen. Wichtig dabei sind die Übergänge zwischen den einzelnen Komponenten, da auf diese Weise Repräsentationswechsel stattfinden können, was für das Lernen wesentlich ist. Solche Übergänge sollten gezielt im Unterricht modelliert, heraus- und eingefordert werden. Im schulischen Unterricht wird diese Abfolge vor allem in unteren Jahrgangsstufen meist beachtet. Dort werden Inhalte in der Regel handlungsorientiert und visuell nachvollziehbar eingeführt, was aus didaktischer Perspektive sinnvoll ist (Reiss & Hammer, 2013; Zech, 1996). Werden Begriffe am Ende der Sekundarstufe II abstrakter, sollten ebenso mögliche Operationen aufgezeigt, Beispiele betrachtet oder Visualisierungen angeboten werden. Bei abstrakten Begriffen ist die strukturelle Komponente in angemessener Weise ausgebildet, wohingegen nach der Theorie von Sfard (1991) die operationale Komponente Lücken besitzt (siehe Kapitel 4.2). Die Ergebnisse sind in der Hinsicht interpretierbar (siehe Kapitel 10), dass Lernende aus diesem Grund Schwierigkeiten haben, entsprechende Beispiele oder Eigenschaften zu verifizieren. Aufgrund der engen Verknüpfung von operationaler Komponente und *concept image*, liegt das *concept image* bei fehlender operationaler Komponente ebenso defizitär vor (siehe Kapitel 6). Die Ergebnisse der in dieser Arbeit entwickelten Studie belegen diesen Befund. Aus diesem Grund sollten die operationale Komponente und das *concept image* an der Schule auch gegen Ende der Sekundarstufe II stärker gefördert werden. Bei der Einführung des Vektorbegriffs können beispielsweise vermehrt Visualisierungen – auch mit entsprechender Software – dargeboten werden, welche die Studierenden befähigen, die Eigenschaften von Repräsentanten desselben Vektors zu entdecken oder Beispiele und Gegenbeispiele zu generieren.
In der universitären Lehre sind die Inhalte abstrakter, weswegen die strukturelle Komponente beim begrifflichen Wissen dominiert (siehe Kapitel 4.2). Die Lernenden können daher Schwierigkeiten haben, Beispiele zu einem abstrakten Begriff zu generieren oder Visualisierungen herzustellen, was durch die empirische Erhebung der vorliegenden Arbeit gestützt wird (siehe Kapitel 10). Tall und Vinner (1981) betonen die Schwierigkeit, eigenständig geeignete Vorstellungen zu Begriffen aufzubauen und damit zum Beispiel das *concept image* zu fördern. Daher ist ist es sinnvoll, in der Studieneingangsphase die Förderung der operationalen Komponente und des *concept images* stärker anzuleiten und zu unterstützen. Dies erfordert einen Wechsel zwischen den Komponenten und damit zwischen verschiedenen Repräsentationen, was essentiell ist, um den Lernprozess zu optimieren. Auf diese Weise kann ein umfassendes begriffliches Wissen entstehen, dass die operationale Komponente, das *concept image*, die strukturelle Komponente und die *concept definition* miteinander verbindet (siehe Kapitel 6).

Ähnliche Ansätze finden sich in Unterstützungsmaßnahmen für Studienanfängerinnen und -anfänger wieder (siehe Kapitel 2.4), jedoch konnten bisher weder die Konsequenzen empirisch belegt noch ein theoretisches Modell entwickelt werden, das die Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischen Wissens in der Studieneingangsphase sowie deren Anwendung in mathemati-

schen Argumentationen hinreichend erklärt. Der in der vorliegenden Arbeit konstruierte Prozess bildet somit eine theoriegeleitete Basis, um konkrete Implikationen auszuarbeiten und damit die Studienanfängerinnen und -anfänger systematisch und langfristig zu unterstützen.
Im Idealfall sollten Schul- und Hochschulkontext so oft wie möglich miteinander verbunden werden. Da Kontextübergänge und Transfer von Wissen schwierig sind (Reusser & Stebler, 1997; Stebler et al., 1994; Perkins & Salomon, 1989), können geeignete Aufgaben, welche die entsprechenden Komponenten fördern, dabei Hilfestellungen geben (siehe Kapitel 2.5 und 11.3.3).
In diesem Sinne ist eine Unterrichtskultur vorteilhaft, die immer wieder Bezug auf andere Kontexte nimmt und Verknüpfungen schafft, ohne dabei die Schülerinnen und Schüler zu überfordern. Daneben stellen sich Bezüge zum Kontext Schule für den Aufbau begrifflichen Wissens an der Universität – zumindest in der Studieneingangsphase – als förderlich heraus. Dies kann durch explizite Bezüge erfolgen, wie in bestehenden Fördermaßnahmen (z. B. Nagel et al., 2016) umgesetzt wurde (siehe Kapitel 2.4).

11.3.2 Praktische Implikationen für die Lehrerausbildung

Es ist ein Ziel der vorliegenden Arbeit dazu beizutragen, die universitäre Lehre im Sinne einer gezielten Förderung begrifflichen Wissens zu verbessern (siehe Kapitel 11.3.1). Für den Hochschulkontext heißt das, dass vermehrt universitäre Inhalte veranschaulicht oder Beispiele generiert werden sollten. Auch Aufgaben aus dem Schulkontext, welche Eigenschaften, Spezialfälle oder Gegenbeispiele abfragen, können helfen, die operationale Komponente und das *concept image* auszubauen. Letztlich sollten alle vier Komponenten eines Begriffs gleichermaßen gefördert werden.
Für die Lehramtsausbildung ist dieses Ziel essentiell: Die angehenden Lehrerinnen und Lehrer sollten lernen, dass die bewusste Modellierung zwischen Schul- und Hochschulkontext wichtig für das spätere Unterrichten ist. Grundlage dazu ist, dass die Studierenden selbst über die Fähigkeit verfügen, die einzelnen Komponenten miteinander zu vereinen. Auf dieser Grundlage ist es möglich, im späteren Schulunterricht Bezüge zur Hochschulmathematik herzustellen. Auch eine gezielte Förderung der argumentativen Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler wäre dann eher möglich.
Im Schulunterricht sollte also immer der Blick nach vorne gerichtet werden, in dem Sinne, dass sich Lehrerinnen und Lehrer bewusst werden, welche weiteren mathematischen Inhalte mit dem Unterrichtsstoff verknüpft sind und auf welche Konstrukte das in der Schule behandelte Wissen hinarbeitet. Daneben ist zum adaptiven Aufbau von Wissen stets der Blick zurück, also auf das, was die Schülerinnen und Schüler bereits kennen, wichtig. Die Kenntnis fachmathematischer Inhalte korreliert positiv mit fachdidaktischem Wissen und ist daher für angehende Lehrerinnen und Lehrer notwendig (z. B. M. Brunner et al., 2006; Krauss, Baumert & Blum, 2008; Krauss, Neubrand et al., 2008; Kunter et al., 2011). Dies würde dann mit einer Schulmathematik vom höheren Standpunkte im Sinne von Klein (1908) übereinstimmen (siehe Kapitel 2.2).
Die Folgerungen aus den in der vorliegenden Arbeit dargestellten Ergebnisse fordern nicht lediglich mehr Praxisbezug in universitären Veranstaltungen, sondern verdeutlichen, dass es essentiell ist, Studierende zu befähigen, zwischen den beiden Kontexten zu wechseln und Inhalte aus ver-

schiedenen Perspektiven adressatengerecht betrachten können. Lehramtsstudierende sollten stets den Schulkontext berücksichtigen, damit sie bei der Unterrichtsplanung begriffliches Wissen so aufbauen können, dass es anschaulich erarbeitet und dennoch inhaltlich korrekt ist, damit es für die Hochschulmathematik anschlussfähig ist.
Eine weitere Folgerung ist, dass das implizite Wissen (Eraut, 2000; Polanyi, 2009) dabei an Bedeutung gewinnt, da es nicht mehr nur darauf ankommt, als Lehrperson explizit Inhalte zu thematisieren, sondern diese auf eine Art zu lehren, die Bezüge zum anderen Kontext zulassen. Die Kompetenz einer Lehrperson äußert sich demnach nicht nur in dem, was tatsächlich im Unterricht bearbeitet wird, sondern auch darin, welche Bezüge sie oder er zum jeweils anderen Kontext berücksichtigen, ohne dies explizit zu machen.
Damit wäre auch eine bessere Anpassung des Lehramtsstudiengangs an den späteren Beruf geschaffen, was derzeit von vielen Studierenden bemängelt wird (Nagel et al., 2016). Zudem könnte das – speziell im Lehramtsstudiengang – die Erwartungen der Studierenden und die realen Inhalte, die teilweise differieren (Fellenberg & Hannover, 2006), annähern.

11.3.3 Aufgabenkonstruktion zur Validierung der Einzelkomponenten

In der vorliegenden Arbeit wird ein Modell, das die Struktur und Entwicklung begrifflichen Wissens darstellt, entwickelt (siehe Kapitel 6). Aus diesem Modell wurden Hypothesen abgeleitet, die erklären können, warum Studienanfängerinnen und -anfänger mit bestimmten Begriffen oder Aufgabenstellungen Schwierigkeiten haben (siehe Kapitel 7). Die Ergebnisse der Studie bestätigen dieses Modell (siehe Kapitel 10). Im Wesentlichen werden dabei jeweils zwei Komponenten des begrifflichen Wissens zusammengefasst und diese dem Schul- oder Hochschulkontext zugeordnet. Die Studie kann zwar zwischen den beiden Kontexten unterscheiden, eine scharfe Trennung zwischen den beiden Komponenten eines Kontextes kann dabei jedoch noch nicht vorgenommen werden.
Aufgaben, die eine solche Trennung zulassen, sind sinnvoll, um Details der Interaktion zwischen den Komponenten innerhalb und außerhalb eines Kontextes zu analysieren, also zum Beispiel die Interaktion zwischen *concept image* (Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1991) und der strukturellen Komponente (Sfard, 1991) zu untersuchen. Nicht nur die Verbindung der Komponenten innerhalb des Schul- oder Hochschulkontextes kann damit analysiert werden, sondern auch die Interaktion von Komponenten verschiedener Kontexte. Beispielsweise ist es interessant, den genauen Zusammenhang von *concept image* und struktureller Komponente offenzulegen, um den Vorgang des Ordnens von Beispielen oder Eigenschaften eines Begriffs zu untersuchen. Es stellt sich dabei zum Beispiel die Frage, wie eine Ordnung und Strukturierung innerhalb des Begriffs entsteht. Wann findet also im Detail der Übergang vom *concept image* zur strukturellen Komponente statt?
Mit den Ergebnissen einer trennscharfen Messung aller vier Komponenten kann zudem die Richtung der Entwicklung begrifflichen Wissens verifiziert werden. Im Kapitel 6 wird unter anderem die Richtung des Prozesses mithilfe der Repräsentationsformen von Bruner (Bruner, 1966) erklärt. Dies ist jedoch noch nicht hinreichend empirisch belegt (siehe Kapitel 11.2). Zudem lassen trennscharfen Aufgaben es zu, den Einfluss der einzelnen Komponenten begrifflichen Wissens

auf die Bearbeitung von Aufgaben von beiden Kontexten noch gezielter zu untersuchen. Die Abhängigkeiten der beiden Komponenten innerhalb eines Kontextes sind im Modell bisher mit Doppelpfeilen gekennzeichnet, welche eine starke gegenseitige Abhängigkeit darstellen soll. Ob sich dieser Zusammenhang bei trennscharfen Items bestätigen lässt, sollte untersucht werden.
Es besteht dabei die Frage, ob die Konstruktion von Items, die alle vier Komponenten isoliert voneinander messen können, praktisch durchführbar ist. Besonders die Komponenten innerhalb eines Kontextes sind stark miteinander verbunden und daher schwer getrennt voneinander zu messen (siehe Kapitel 6). In der Mathematik ist die Aufteilung in Prozess und Produkt vielfach vorgenommen worden (z. B. auch Anderson, 1982). Da die beiden Komponenten von Sfard (1991) dieser Zuteilung in etwa entsprechen, könnte bei der Aufgabenkonstruktion mit diesen beiden Komponenten begonnen werden. Ausgehend von diesen Items können dann schrittweise weitere Items konstruieren werden, die hauptsächlich Kenntnisse aus dem *concept image* oder der *concept definition* erfordern.
Aufgaben, die in diesem Sinne konstruiert werden, weisen sowohl für den schulischen als auch universitären Unterricht diagnostisch wertvolle Eigenschaften auf. Mithilfe solcher Aufgaben kann in Lernsituationen gezielt überprüft werden, welche Komponente gefördert werden muss.

11.3.4 Beitrag zum Fachdiskurs

Die zwei Hauptgründe, ein Mathematikstudium abzubrechen, sind wahrgenommene Überforderung und Leistungsprobleme (Heublein et al., 2012). Mithilfe des in dieser Arbeit entwickelten Modells zum begrifflichen Wissen lassen sich diese inhaltlichen Übergangsschwierigkeiten von der Schul- zur Universitätsmathematik erklären. Es werden Ansätze vorgelegt, wie die beobachteten Schwierigkeiten zu Studienbeginn zustande kommen können, für die es bisher kaum theoretisch abgeleitete Erklärungen gibt. In der bisherigen Forschung zur Übergangsproblematik von der Schule an die Hochschule wird zwar oft thematisiert, dass universitäre Inhalte abstrakter werden und daher für die Studienanfängerinnen und -anfänger schwer zu lernen sind (z. B. Hilgert, 2016), was jedoch abstrakte Begriffe sind und warum daraus Schwierigkeiten beim Erwerb und Anwenden dieser resultieren, wird in der Literatur zur Übergangproblematik des Studienanfangs kaum dargestellt.
Die Forschung dieser Arbeit trägt dazu bei, dass diese Lücke gefüllt wird, und bietet ein theoretisches Modell an, das Schwierigkeiten beim Lernen mathematischer Inhalte am Übergang von der Schule an die Hochschule beschreibt. Mithilfe einer Studie mit Studienanfängerinnen und -anfängern wird dieses Modell zu Teilen empirisch belegt. Das begriffliche Wissen abstrakter Inhalte kann die beiden Komponenten begrifflichen Wissens, operationale Komponente und *concept image*, in einer nicht entsprechend ausgebildeten Form enthalten (siehe Kapitel 4.2 und 6), was zu Schwierigkeiten beim Lösen mathematischer Probleme führen kann. Auch das Arbeiten mit vermeintlich „leichten“ anschaulichen Begriffen, welche die Studienanfängerinnen und -anfänger bereits aus der Schule kennen, führt bei der Bearbeitung von Aufgaben des universitären Kontextes zu Schwierigkeiten (siehe Kapitel 6), da die entsprechend anderen beiden Komponenten begrifflichen Wissens, die strukturelle Komponente und die *concept definition*, wenig entwickelt sein können.

Weiterhin zeigt das in der vorliegenden Arbeit entwickelte Modell auf, warum Studierende Schwierigkeiten beim mathematischen Argumentieren haben. Mathematisches Argumentieren ist eine der wichtigsten mathematischen Prozesse und nimmt dementsprechend eine zentrale Rolle in universitären Lehrveranstaltungen ein. Eine der Voraussetzungen für mathematisches Argumentieren ist begriffliches Wissen der mathematischen Inhalte eines zu beweisenden Satzes (z. B. Reiss & Ufer, 2009; Reiss, 2002; Healy & Hoyles, 2000). Ein nicht entsprechend ausgebildetes begriffliches Wissen kann demnach zu einer geringen Qualität mathematischer Argumentationen führen. Dabei sind insbesondere die strukturelle Komponente als auch die *concept definition* wichtig. Sind diese Komponenten begrifflichen Wissens nicht adäquat ausgebildet, muss das begriffliche Wissen *ad hoc* erweitert werden, um Aufgaben aus dem Hochschulkontext korrekt bearbeiten zu können, was Lernenden in der Regel schwer fällt (z. B. Vinner, 1991).

Ein wichtiger Aspekt bei der Förderung argumentativen Arbeitens ist es, zu erkennen, über welche Komponenten begrifflichen Wissens Lernende bereits verfügen. Dazu ist eine Analyse der mündlichen und schriftlichen Kommunikation sinnvoll. Sfard (2007) bezeichnet Lernen als einen *commognitiven* Prozess (siehe Kapitel 2.5). In der Kommunikation in Verbindung mit Kognition wird deutlich, welche Argumente oder Denkschritte Lernende einsetzen. Diese geben Aufschluss über den Kontext, in dem sich Lernende in diesem Moment bewegen. Daraus kann abgeleitet werden, welche Komponenten begrifflichen Wissens gerade zum Einsatz kommen und bereits entsprechend entwickelt sind, und welche noch gefördert werden müssen. Dies kann beispielsweise mithilfe der Aufgaben geschehen, die in Kapitel 11.3.3 beschrieben werden.

Die Ergebnisse der vorliegenden Studie zeigen weiterhin, dass Studierende hauptsächlich analytische Argumente beim Begründen mathematischer Sätze einsetzen. Dies ist ein Hinweis darauf, dass Studierende zu Beginn ihres Studiums bereits über entsprechendes Wissen verfügen, wie mathematische Argumente formuliert und verknüpft werden sollen. Das Wissen darüber, dass Argumente deduktiv geordnet und aus bereits bewiesenen Aussagen oder Axiomen weitere Aussagen abgeleitet werden, ist den meisten Teilnehmerinnen und Teilnehmern offensichtlich bekannt. Die Qualität mathematischer Argumente variiert jedoch und ist vor allem bei Sätzen, die sich auf anschauliche Inhalte beziehen, eher gering. Die Qualität ist demnach entscheidend von der Art der Inhalte abhängig (siehe Kapitel 10). Bei der Förderung mathematischer Argumentationskompetenz sollte daher speziell eher das begriffliche Wissen fokussiert werden als etwa Wissen über den Aufbau eines mathematischen Beweises vordergründig zu thematisieren.

Fazit

In der vorliegenden Arbeit wird ein Modell entwickelt, das die Komponenten begrifflichen Wissens in Bezug auf den Schul- und Hochschulkontext aufzeigt. Das Modell wurde theoretisch hergeleitet und mithilfe eines Leistungstests teilweise empirisch bestätigt. Zudem lässt es Einblicke in spezielle Schwierigkeiten zu, die zu Beginn des Mathematikstudiums an der Hochschule auftreten, wie zum Beispiel das Lernen abstrakter Begriffe oder mathematisches Argumentieren mit anschaulichen Begriffen. Es bieten sich dabei viele Anschlussmöglichkeiten an, die sich sowohl auf die mathematikdidaktische Forschung als auch praktische Implikationen beziehen. Insbesondere für die universitäre Lehre können aus dem in der vorliegenden Arbeit beschriebenen Modell Vorschläge abgeleitet werden, die zur Förderung des begrifflichen Wissens von Studentinnen und Studenten im ersten Studienjahr beitragen. Dabei können die im Modell behandelten vier Komponenten begrifflichen Wissens hinzugezogen werden. Sie geben an, welche Wissenselemente nützlich sind, um mathematische Probleme im Schul- und im Hochschulkontext korrekt bearbeiten zu können.

Literaturverzeichnis

Aebli, H. (1980). *Denken, das Ordnen des Tuns* (1. Aufl., Bd. Kognitive Aspekte der Handlungstheorie). Stuttgart: Klett-Cotta.

Aebli, H. (1981). *Denken: das Ordnen des Tuns* (1. Aufl., Bd. Denkprozesse). Stuttgart: Klett-Cotta.

Aebli, H. (1983). *Zwölf Grundformen des Lehrens: Eine allgemeine Didaktik auf psychologischer Grundlage.* Stuttgart: Klett-Cotta.

Albers, S. (2009). *Methodik der empirischen Forschung* (3. überarb. und erw. Aufl.). Wiesbaden: Gabler.

Allison, P. D. (2001). *Missing data.* Thousands Oaks, CA: Sage Publications.

Alsina, C. (2001). Why the professor must be a stimulating teacher. In D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss & A. Schoenfeld (Hrsg.), *The teaching and learning of mathematics at university level* (Bd. 7, S. 3-12). Dodrecht Boston London: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/0-306-47231-7_1

Anderson, J. R. (1982). Acquisition of cognitive skill. *Psychological Review*, *89* (4), 369-406. doi: 10.1037/0033-295X.89.4.369

Anderson, J. R. (2001). *Kognitive Psychologie* (3. Aufl.). Heidelberg [u.a.]: Spektrum, Akad. Verl.

Arens, T., Busam, R., Hettlich, F., Karpfinger, C., Stachel, H. & Lichtenegger, K. (2012). *Grundwissen Mathematikstudium – Analysis und Lineare Algebra mit Querverbindungen.* Dordrecht: Springer.

Artelt, C., Baumert, J., Klieme, E., Neubrand, M., Prenzel, M., Schiefele, U., … Weiß, M. (2001). *PISA 2000: Zusammenfassung zentraler Befunde.* Berlin. Zugriff am 07.07.2014 auf https://www.mpib-berlin.mpg.de/Pisa/ergebnisse.pdf

Bakeman, R. (2005). Recommended effect size statistics for repeated measures designs. *Behavior Research Methods*, *37* (3), 379-384. doi: 10.3758/BF03192707

Barzel, B. (2011). *Mathematik unterrichten: Planen, durchführen, reflektieren.* Berlin: Cornelsen-Scriptor.

Bauer, T. (2013). Schnittstellen bearbeiten in Schnittstellenaufgaben. In C. Ableitinger, J. Kramer & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung: Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik* (S. 39-56). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Bauer, T. & Partheil, U. (2009). Schnittstellenmodule in der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik. *Mathematische Semesterberichte*, *56* (1), 85-103. doi: 10.1007/s00591-008-0048-0

Baumert, J., Bos, W. & Lehmann, R. (Hrsg.). (2000). *TIMSS-III: Dritte internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie - mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn: Band I: Mathematische und naturwissenschaftliche Grundbildung am Ende der Pflichtschulzeit* (Bd. 1). Opladen: Leske + Budrich.

Baumert, J. et al. (Hrsg.). (2001). *PISA 2000: Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich*. Opladen: Leske + Budrich.

Bausch, I. et al. (Hrsg.). (2014). *Mathematische Vor- und Brückenkurse: Konzepte, Probleme und Perspektiven. Konzepte und Studien zur Hochschulmathematik und Lehrerbildung Mathematik*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Beitlich, J., Moll, G., Nagel, K. & Reiss, K. (2015). Fehlvorstellungen zum Funktionsbegriff am Beginn des Mathematikstudiums. In M. Gartmeier, H. Gruber, T. Hascher & H. Heid (Hrsg.), *Fehler. Ihre Funktionen im Kontext individueller und gesellschaftlicher Entwicklung* (S. 211-223). Münster: Waxmann.

Bender, P. (Hrsg.). (1988). *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis: Festschrift für Heinrich Winter*. Bielefeld: Cornelsen.

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S. & Wickel, G. (2011). *Mathematik Neu Denken: Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Bishop, A. (1988). Mathematics, education, and culture [special issue]. *Educational Studies in Mathematics*, *19* (2), 179-191.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, *7* (9).

Borneleit, P., Danckwerts, R., Henn, H.-W. & Weigand, H.-G. (2001). Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. In M. A. Meyer, H.-E. Tenorth & H. Willenberg (Hrsg.), *Kerncurriculum Oberstufe* (Bd. [1], S. 26-53). Weinheim and Basel: Beltz.

Bortz, J. & Döring, N. (2006). *Forschungsmethoden und Evaluation: für Human- und Sozialwissenschaftler* (4. Aufl.). Heidelberg: Springer.

Bosanquet, R. G., Malcom, N., Rhees, R., Smythies, Y. & Diamond, C. (1976). *Wittgenstein's lectures on the foundations of mathematics, Cambridge, 1939: From the notes of R.G. Bosanquet, Norman Malcolm, Rush Rhees, and Yorick Smythies*. Ithaca, N.Y.: Cornell University Press.

Bosch, M., Fonseca, C. & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique des mathématiques*, *24* (2), 205-250.

Box, G. E. P. (1954). Some theorems on quadratic forms applied in the study of analysis of variance problems, II: effects of inequality of variance and of correlation between errors in the two-way classification. *The Annals of Mathematical Statistics*, *25* (3), 484-498. doi: 10.1214/aoms/1177728717

Brückner, A. (2013). Zum Abstrahieren und Konkretisieren beim Lernen von Mathematik. In I. Bausch, G. Pinkernell & O. Schmitt (Hrsg.), *Unterrichtsentwicklung und Kompetenzorientierung* (Bd. 1, S. 15-25). Münster: WTM Verlag.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction.* Cambridge, Mass.: Belknap Press of Harvard University.

Bruner, J. S. (1970). Der Prozeß der Erziehung. In W. Loch (Hrsg.), *Sprache und Lernen* (Bd. 4). Berlin and Düsseldorf: Berlin Verlag and Pädagogischer Verlag Schwann.

Bruner, J. S. (1996). *The culture of education.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Bruner, J. S., Goodnow, J. J., Austin, G. A. & Brown, R. (1956). *A study of thinking.* New York, NY [etc.]: Wiley.

Brunner, E. (2013). *Innermathematisches Beweisen und Argumentieren in der Sekundarstufe I: Mögliche Erklärungen für systematische Bearbeitungsunterschiede und leistungsförderliche Aspekte* (Bd. 16). Münster: Waxmann.

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen: Grundlagen, Befunde und Konzepte.* Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Brunner, M., Kunter, M., Krauss, S., Klusmann, U., Baumert, J., Blum, W., ... Tsai, Y.-M. (2006). Die professionelle Kompetenz von Mathematiklehrkräften: Konzeptualisierung, Erfassung und Bedeutung für den Unterricht: Eine Zwischenbilanz des COACTIV-Projekts. In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Hrsg.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule* (S. 54-82). Münster and München [u.a.]: Waxmann.

Brunnermeier, A., Freytag, C. & Wagner, I. (2005). *Fokus Mathematik 7.* Berlin: Cornelsen.

Bühner, M. (2011). *Einführung in die Test- und Fragebogenkonstruktion* (3., aktualisierte und erw. Aufl.). München and Boston [u.a.]: Pearson Studium.

Bühner, M. & Ziegler, M. (2009). *Statistik für Psychologen und Sozialwissenschaftler.* München [u.a.]: Pearson Studium.

Bundesagentur für Arbeit. (2015). *Der Arbeitsmarkt in Deutschland – Fachkräfteengpassanalyse.* Zugriff auf `https://www.statistik.arbeitsagentur.de/Statischer-Content/Arbeitsmarktberichte/Fachkraeftebedarf-Stellen/Fachkraefte/BA-FK-Engpassanalyse-2015-12.pdf`

Campbell, D. T. (1957). Factors relevant to the validity of experiments in social settings. *Psychological Bulletin*, *54* (4), 297-312.

Carraher, T. N., Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (1985). Mathematics in the streets and in schools. *British Journal of Developmental Psychology*, *3* (1), 21-29. doi: `10.1111/j.2044-835X.1985.tb00951.x`

CCSSI. (2016). *Development process.* Zugriff am 05.08.2016 auf `http://www.corestandards.org/about-the-standards/ development-process/`

Chinnappan, M., Ekanayake, M. B. & Brown, C. (2012). Knowledge use in the construction of geometry proof by Sri Lankan students. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *10* (4), 865-887. doi: `10.1007/s10763-011-9298-8`

Cohen, J. (1960). A coefficient of agreement for nominal scales. *Educational and Psychological Measurement*, *20* (1), 37-46.

Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* (2. Aufl.). Hillsdale, N.J.: L. Erlbaum Associates.

Cohen, J. (1992). A power primer. *Psychological Bulletin*, *112*, 155-159.

Collins, D. (2003). Pretesting survey instruments: An overview of cognitive methods. *Quality of Life Research*, *12* (3), 229-238. doi: 10.1023/A:1023254226592

Conradie, J. & Frith, J. (2000). Comprehension tests in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *42*, 225-235.

Cronbach, L. J. (1951). Coefficient alpha and the internal structure of tests. *Psychometrika*, *16* (3), 297-334.

Daskalogianni, K. & Simpson, A. (2002). „Cooling-off“: The phenomenon of a problematic transition from school to university. In *Proceedings of the second international conference on teaching mathematics at the undergraduate level* (S. 103-110). Hersonissos, Crete , Greece.

Davydov, V. V. (1990). *Soviet studies in mathematics education: Vol. 2. Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Deiser, O. (2013). *Analysis 1* (2., verb. und erw Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer.

Deiser, O., Lasser, C., Vogt, E. & Werner, D. (2016). *12 x 12 Schlüsselkonzepte zur Mathematik* (2. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Desimone, L. M. & Le Floch, K. C. (2004). Are we asking the right questions? Using cognitive interviews to improve surveys in education research. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, *26* (1), 1-22. doi: 10.3102/01623737026001001

Deutsches PISA-Konsortium. (2001). *PISA 2000: Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich.* Opladen: Leske + Budrich.

DeVries, R. (2000). Vygotsky, Piaget, and Education: A reciprocal assimilation of theories and educational practices. *New Ideas in Psychology*, *18* (2/3), 187-213. doi: 10.1016/S0732-118X(00)00008-8

Distel, B. & Feuerlein, R. (2010). *Mathematik 12: Ausgabe für die gymnasiale Oberstufe in Bayern.* München: Bayerischer Schulbuch Verlag.

Distel, B. & Feuerlein, R. (2012). *Mathematik 11: Unterrichtswerk für das G8* (1. Aufl.). München and Düsseldorf and Stuttgart: Bayerischer Schulbuch Verlag.

Döring, N. & Bortz, J. (2016). *Forschungsmethoden und Evaluation in den Sozial- und Humanwissenschaften* (5. vollst. überarb., aktualisierte und erw. Aufl.). Berlin: Springer.

Dorn, M., Götz, H., Herbst, M. & Kestler, C. (2010). *Lambacher Schweizer 12: Mathematik für Gymnasien.* Stuttgart and Leipzig: Klett.

Eid, M., Gollwitzer, M. & Schmitt, M. (2010). *Statistik und Forschungsmethoden* (1. Aufl.). Weinheim [u.a.]: Beltz.

Eisentraut, F. & Schätz, U. (2009). *Delta 12: Mathematik für Gymnasien.* Bamberg: Buchner.

Engelbrecht, J. (2010). Adding structure to the transition process to advanced mathematical activity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41* (2), 143-154. doi: 10.1080/00207390903391890

Ennemoser, M. & Krajewski, K. (2013). Entwicklungsorientierte Diagnostik mathematischer Basiskompetenzen in den Klassen 5 bis 9. In M. Hasselhorn, A. Heinze, W. Schneider & U. Trautwein (Hrsg.), *Diagnostik mathematischer Kompetenzen* (Bd. 11, S. 225–240). Göttingen [u.a.]: Hogrefe.

Epple, M. (1999). *Die Entstehung der Knotentheorie: Kontexte und Konstruktionen einer modernen mathematischen Theorie.* Braunschweig [u.a.]: Vieweg.

Eraut, M. (2000). Non-formal learning and tacit knowledge in professional work. *British Journal of Educational Psychology*, *70* (1), 113-136. doi: 10.1348/000709900158001

Everitt, B. S. & Howell, D. C. (2005). *Encyclopedia of statistics in behavioral science* (Bd. 4). Chichester [etc.]: Wiley.

Experimental and quasi-experimental designs for research. (1963). Chicago: Rand McNally.

Feldt, L. S. (1969). A test of the hypothesis that Cronbach's Alpha or Kuder-Richardson Coefficent Twenty is the same for two tests. *Psychometrika*, *34* (3), 363-373. doi: 10.1007/BF02289364

Fellenberg, F. & Hannover, B. (2006). Kaum begonnen, schon zerronnen? Psychologische Ursachenfaktoren für die Neigung von Studienanfängern, das Studium abzubrechen oder das Fach zu wechseln. *Empirische Pädagogik*, *20* (4), 381-399.

Feuerlein, R., Bortolazzi, S., Stauch, T., Joerchel, M. & Distel, B. (2005). *Mathematik 7: Unterrichtswerk für das G8; [Bayern].* München and Düsseldorf, Stuttgart: Bayerischer Schulbuch-Verl.

Fischer, A., Heinze, A. & Wagner, D. (2009). Mathematiklernen in der Schule – Mathematiklernen an der Hochschule: die Schwierigkeiten von Lernenden beim Übergang ins Studium. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium* (S. 245-264). Münster and New York, NY and München and Berlin: Waxmann.

Fischer, G. (2012). *Lernbuch lineare Algebra und analytische Geometrie* (2. Aufl.). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Franke, M. (2007). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule* (2. Aufl Aufl.). Heidelberg and München: Elsevier, Spektrum Akad. Verl.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe.* Stuttgart: Klett.

Gagné, R. M. (1975). *Die Bedingungen des menschlichen Lernens* (4., unveränd. Aufl. nach der 2. amerikan. Aufl.). Hannover [u.a.]: Schroedel.

Gerrig, R. J. & Zimbardo, P. G. (2015). *Psychologie* (20., aktual. Aufl.). Hallbergmoos: Pearson.

Götz, H., Herbst, M., Kestler, C., Kosuch, H.-G., Novotný, J., Sy, B. & Thiessen, T. (2009). *Lambacher-Schweizer 7: Mathematik für Gymnasien.* Stuttgart and Leipzig: Klett-Schulbuchverl.

Götz, H., Herbst, M., Kestler, C., Kosuch, H.-G., Novotný, J., Sy, B., ... Zitterbart, A. (2010). *Lambacher Schweizer 11: Mathematik für Gymnasien* (1. Aufl.). Stuttgart [u.a.]: Klett.

Götz, L., Lingel, K. & Schneider, W. (2013). Diagnostik mathematischer Kompetenzen in der Sekundarstufe I am Beispiel der Deutschen Mathematiktests für die fünften und sechsten Klassen (DEMAT 5+; DEMAT 6+). In M. Hasselhorn, A. Heinze, W. Schneider & U. Trautwein (Hrsg.), *Diagnostik mathematischer Kompetenzen* (Bd. 11, S. 241-260). Göttingen [u.a.]: Hogrefe.

Graham, J. W. (2009). Missing data analysis: making it work in the real world. *Annual review of psychology*, *60*, 549-576. doi: 10.1146/annurev.psych.58.110405.085530

Graham, J. W., Olchowski, A. E. & Gilreath, T. D. (2007). How many imputations are really needed? Some practical clarifications of multiple imputation theory. *Prevention science: the official journal of the Society for Prevention Research*, *8* (3), 206-213. doi: 10.1007/s11121-007-0070-9

Gray, E. & Tall, D. (2007). Abstraction as a natural process of mental compression. *Mathematics Education Research Journal*, *19* (2), 23-40.

Grundey, S. (2015). *Beweisvorstellungen und eigenständiges Beweisen: Entwicklung und vergleichend empirische Untersuchung eines Unterrichtskonzepts am Ende der Sekundarstufe.* Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Grünwald, N., Kossow, A., Sauerbier, G. & Klymchuk, S. (2004). Der Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik: Erfahrungen aus Internationaler und Deutscher Sicht. *Global J. of Engng. Educ.*, *8* (3), 283-294.

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, *67*, 237-254.

Hanna, G. (1991). Mathematical proof. In D. Tall (Hrsg.), *Advanced mathematical thinking* (S. 54-61). Dordrecht: Kluwer.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics*, *15* (3), 42-49.

Hanna, G. (1997). The ongoing value of proof. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *18* (2/3), 171-185.

Hanna, G. & de Villiers, M. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. *ZDM*, *40*, 329-336.

Hanna, G. & Jahnke, H. N. (1993). Proof and application. *Educational Studies in Mathematics*, *24* (4), 421-438.

Hanna, G. & Jahnke, H. N. (1997). Proof and proving. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Hrsg.), *International handbook of mathematics education* (Bd. 4, S. 877-908). Dordrecht: Springer Netherlands.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *Research in collegiate mathematics education III*, *7*, 234-282.

Hattie, J. (2009). *Visible learning: A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement.* Oxfordshire and New York: Routledge.

Healy, L. & Hoyles, C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics: Summary of the results from a survey of the proof conceptions of students in the UK* (Research Report). University of London, London.

Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31* (4), 396-428.

Hefendehl-Hebeker, L. (2013). Doppelte Diskontinuität oder die Chance der Brückenschläge. In C. Ableitinger, J. Kramer & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung: Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik* (S. 1-16). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Heinze, A., Cheng, Y.-H., Ufer, S., Lin, F.-L. & Reiss, K. (2008). Strategies to foster students competencies in constructing multi-steps geometric proofs: Teaching experiments in Taiwan and Germany. *ZDM*, *40* (3), 443-453.

Heinze, A. & Kwak, J. Y. (2002). Informal prerequisites for informal proofs. *ZDM*, *34* (1), 9-16. doi: 10.1007/BF02655688

Heinze, A. & Reiss, K. (2004). The teaching of proof at the lower secondary level – A video study. *ZDM*, *36* (3), 98-104.

Heinze, A. & Reiss, K. (2007). Reasoning and proof in the mathematics classroom. *Analysis*, *27* (2/3). doi: 10.1524/anly.2007.27.2-3.333

Heinze, A., Reiss, K. & Rudolph, F. (2005). Mathematics achievement and interest in mathematics from a differential perspective. *ZDM*, *37* (3), 212-220.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B. & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32* (2), 195. doi: 10.2307/749673

Heublein, U., Hutzsch, C., Schreiber, J., Sommer, D. & Besuch, G. (2010). *Ursachen des Studienabbruchs in Bachelor- und in herkömmlichen Studiengängen: Ergebnisse einer bundesweiten Befragung von Exmatrikulierten des Studienjahres 2007/08* (Nr. 2). Hannover.

Heublein, U., Richter, J., Schmelzer, R. & Sommer, D. (2012). Die Entwicklung der Schwund- und Studienabbruchquoten an den deutschen Hochschulen: Statistische Berechnungen auf der Basis des Absolventenjahrgangs 2010. *HIS: Forum Hochschule* (3).

Heublein, U., Richter, J., Schmelzer, R. & Sommer, D. (2014). Die Entwicklung der Studienabbruchquoten an den deutschen Hochschulen: Statistische Berechnungen auf der Basis des Absolventenjahrgangs 2012. *DZHW - Forum Hochschule*, *4*.

Heublein, U. & Wolter, A. (2011). Studienabbruch in Deutschland. Definition, Häufigkeit, Ursachen, Maßnahmen. *Zeitschrift für Pädagogik*, *57* (2), 214-236.

Heymann, H. W. (2013). *Allgemeinbildung und Mathematik* (2. Aufl.). Weinheim [u.a.]: Beltz.

Hiebert, J. (Hrsg.). (1986). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Hrsg.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (S. 1-28). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Hilbert, T. S., Renkl, A., Kessler, S. & Reiss, K. (2008). Learning to prove in geometry: Learning from heuristic examples and how it can be supported. *Learning and Instruction*, *18* (1), 54-65. doi: 10.1016/j.learninstruc.2006.10.008

Hilgert, J. (2016). Schwierigkeiten beim Übergang von Schule zu Hochschule im zeitlichen Vergleich – Ein Blick auf Defizite beim Erwerb von Schlüsselkompetenzen. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase* (S. 695-710). Springer Fachmedien Wiesbaden.

Hinneberg, H. (2003). Abiturnote und Studienerfolg. *Hochschulwesen*, *51*, 145-146.

Hoppenbrock, A., Biehler, R., Hochmuth, R. & Rück, H.-G. (Hrsg.). (2016). *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase*. Springer Fachmedien Wiesbaden.

Hourigan, M. & O'Donoghue, J. (2007). Mathematical under-preparedness: the influence of the pre-tertiary mathematics experience on students' ability to make a successfull transition to tertiary level mathematics courses in Ireland. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *38* (4), 461-476.

Hoyles, C., Newman, K. & Noss, R. (2001). Changing patterns of transition from school to university mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *32* (6), 829-845.

Huynh, H. & Feldt, L. S. (1976). Estimation of the box correction for degrees of freedom from sample data in randomized block and split-plot designs. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, *1* (1), 69-82. doi: 10.3102/10769986001001069

IBM. (o. J.). *IBM SPSS Missing Values 23.*

Jahnke, H. N. & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 331-355). Berlin: Springer Spektrum.

Jahnke, T. & Scholz, D. (2009). *Fokus Mathematik 11: Gymnasium Bayern* (1. Aufl.). Berlin: Cornelsen.

Jörissen, S. & Schmidt-Thieme, B. (2015). Darstellen und Kommunizieren. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 385-408). Berlin: Springer Spektrum.

Kaiser, G. (1999). *Unterrichtswirklichkeit in England und Deutschland: Vergleichende Untersuchungen am Beispiel des Mathematikunterrichts.* Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

Kempen, L. & Biehler, R. (2015). Pre-service teachers' perceptions of generic proofs in elementary number theory. In K. Krainer & N. Vondrov (Hrsg.), *CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 135-141). Prague, Czech Republic: CERME.

Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus: Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis.* Leipzig: B. G. Teubner.

Klieme, E. (2004). Was sind Kompetenzen und wie lassen sie sich messen? *Pädagogik* (6), 10-13.

Klieme, E., Avenarius, H., Blum, W., Döbrich, P., Gruber, H., Prenzel, M., ... Vollmer, H. (2003). *Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards: Eine Expertise.* Frankfurt (M.): DIPF.

Klieme, E., Reiss, K. & Heinze, A. (2003). Geometrical competence and understanding of proof: A study based on TIMSS items. In F.-L. Lin & J. Guo (Hrsg.), *Proceedings of the international conference on science and mathematics learning 2003* (S. 60-80). Taipei, Taiwan.

Kluwe, R. H. (1992). Kapitel 3: Gedächtnis und Wissen. In H. Spada (Hrsg.), *Lehrbuch allgemeine Psychologie* (S. 115-188). Bern and Göttingen and Toronto and Seattle: Huber.

KMK. (2004a). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss: Beschluss vom 15.10.2004.* München: Kluwer.

KMK. (2004b). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss: Beschluss vom 4.12.2003.* München: Kluwer.

KMK. (2004c). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich: Beschluss vom 15.10.2004.* München: Kluwer.

KMK. (2005). *Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz: Erläuterungen zur Konzeption und Entwicklung.* München Neuwied: Luchterhand.

KMK. (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife.* Zugriff am 07.07.2014 auf `www.kmk.org/fileadmin/Dateien`

Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33* (5), 379. doi: `10.2307/4149959`

Kollar, I., Ufer, S., Reichersdorfer, E., Vogel, F., Fischer, F. & Reiss, K. (2014). Effects of collaboration scripts and heuristic worked examples on the acquisition of mathematical argumentation skills of teacher students with different levels of prior achievement. *Learning and Instruction*, *32*, 22-36. doi: `10.1016/j.learninstruc.2014.01.003`

Konsortium Bildungsberichterstattung. (2005). *Bildungsberichterstattung: Entwurf eines Indikatorenmodells.* Bonn. Zugriff am 27.05.2016 auf `http://www.bildungsbericht.de/daten/indikatorenmodell.pdf`

Krapp, A., Prenzel, M. & Weidenmann, B. (2001). Geschichte, Gegenstandsbereich und Aufgaben der Pädagogischen Psychologie. In A. Krapp & B. Weidenmann (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie* (S. 1-29). Weinheim: Beltz.

Krapp, A. & Weidenmann, B. (Hrsg.). (2001). *Pädagogische Psychologie.* Weinheim: Beltz.

Krauss, S., Baumert, J. & Blum, W. (2008). Secondary mathematics teachers' pedagogical content knowledge and content knowledge: validation of the COACTIV constructs. *ZDM*, *40* (5), 873-892. doi: `10.1007/s11858-008-0141-9`

Krauss, S., Neubrand, M., Blum, W., Baumert, J., Brunner, M., Kunter, M. & Jordan, A. (2008). Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *29* (3/4), 223-258.

Kuder, G. F. & Richardson, M. W. (1937). The theory of the estimation of test reliability. *Psychometrika*, *2* (3), 151-160. doi: `10.1007/BF02288391`

Kunter, M., Baumert, J. & Blum, W. (2011). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV.* Münster and München [u.a.]: Waxmann.

Kuntze, S. (2005). „Wozu muss man denn das beweisen?“: Vorstellungen zu Funktionen des Beweisens in Texten von Schülerinnen und Schülern der 8. Jahrgangsstufe. *mathematica didactica*, *28* (2), 48-70.

Kurz, K., Prüfer, P. & Rexroth, M. (1999). Zur Validität von Fragen in standardisierten Erhebungen: Ergebnisse des Einsatzes eines kognitiven Pretestinterviews. *ZUMA Nachrichten*, *23* (44), 83-107.

Lakatos, I. (1979). *Beweise und Widerlegungen: Die Logik mathematischer Entdeckungen* (Bd. 14). Braunschweig: Vieweg.

Lakens, D. (2013). Calculating and reporting effect sizes to facilitate cumulative science: a practical primer for t-tests and ANOVAs. *Frontiers in psychology*, *4*, 863. doi: `10.3389/fpsyg.2013.00863`

Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation.* Cambridge [England] and New York: Cambridge University Press.

Lengnink, K. & Prediger, S. (2000). Mathematisches Denken in der Linearen Algebra. *ZDM*, *4*, 111-122.

Leuders, T. (2003). *Mathematik-Didaktik: Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Lin, F.-L. (2005). Modeling student's learning on mathematical proof and refutation. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Hrsg.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 1, S. 3-18). Melbourne: PME.

Lin, F.-L. & Wu Yu, J.-Y. (1997). False proposition – as a means for making conjectures in mathematics classrooms. *Asian Mathematical Conference.*

Little, R. J. A. & Rubin, D. B. (2002a). Estimation of imputation uncertainty. In R. J. A. Little & D. B. Rubin (Hrsg.), *Statistical analysis with missing data* (S. 75-93). Hoboken: Wiley. doi: 10.1002/9781119013563.ch5

Little, R. J. A. & Rubin, D. B. (Hrsg.). (2002b). *Statistical analysis with missing data* (2. Aufl.). Hoboken: Wiley. doi: 10.1002/9781119013563

Lüdtke, O., Robitzsch, A., Trautwein, U. & Köller, O. (2007). Umgang mit fehlenden Werten in der psychologischen Forschung. *Psychologische Rundschau*, *58* (2), 103-117. doi: 10.1026/0033-3042.58.2.103

Manin, Y. I., Koblitz, N. & Zilber, B. (2010). *A course in mathematical logic for mathematicians* (2. Aufl., Bd. 53). New York: Springer.

Martin, W. G. & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20* (1), 41-51.

Mauchly, J. W. (1940). Significance test for sphericity of a normal n-variate distribution. *The Annals of Mathematical Statistics*, *11* (2), 204-209. doi: 10.1214/aoms/1177731915

Mejia-Ramos, J. P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K. & Samkoff, A. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *79* (1), 3-18.

Meyer, H. (2004). *Was ist guter Unterricht?* Frankfurt (M.): Cornelsen Scriptor.

Mitchelmore, M. & White, P. (2007). Abstraction in mathematics learning. *Mathematics Education Research Journal*, *19* (2), 1-9.

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, *27* (3), 249-266.

Nagel, K., Quiring, F., Deiser, O. & Reiss, K. (2016). Ergänzungen zu den mathematischen Grundvorlesungen für Lehramtsstudierende im Fach Mathematik – ein Praxisbericht. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase* (S. 339-353). Springer Fachmedien Wiesbaden.

Nagel, K. & Reiss, K. (2016). Zwischen Schule und Universität: Argumentation in der Mathematik. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, *19* (2), 299-327. doi: 10.1007/s11618-016-0677-3

NCTM. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, Va.: The Council.

Nückles, M. & Wittwer, J. (2014). Lernen und Wissenserwerb. In T. Seidel & A. Krapp (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie* (S. 225-252). Weinheim: Beltz.

Obermeier, G. (2015). *Mathematische Arbeitsweisen in der gymnasialen Oberstufe: Eine Aufgabenanalyse.* Saarbrücken: AV Akademikerverlag.

Olejnik, S. & Algina, J. (2003). Generalized eta and omega squared statistics: measures of effect size for some common research designs. *Psychological methods*, *8* (4), 434-447. doi: 10.1037/1082-989X.8.4.434

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, *66* (1), 23-41. doi: 10.1007/s10649-006-9057-x

Perkins, D. N. & Salomon, G. (1989). Are cognitive skills context-bound? *Educational Researcher*, *18* (1), 16-25.

Piaget, J. (1970). *Genetic epistemology (E. Duckworth, Trans.).* New York: Columbia University Press.

Piaget, J. (1975). *Das Erwachen der Intelligenz beim Kinde* (Bd. 1). Stuttgart: Ernst Klett.

Polanyi, M. (2009). *The tacit dimension.* Chicago and London: University of Chicago Press.

Pólya, G. (1949). *Schule des Denkens: Vom Lösen mathematischer Probleme.* Bern: A. Francke AG. Verlag.

Prenzel, M., Carstensen, C. H., Schöps, K. & Maurischat, C. (2006). Die Anlange des Längsschnitts bei PISA 2003. In PISA-Konsortium Deutschland (Hrsg.), *PISA 2003* (S. 29-62). Münster: Waxmann.

Prenzel, M., Sälzer, C., Klieme, E. & Köller, O. (Hrsg.). (2013). *PISA 2012: Fortschritte und Herausforderungen in Deutschland.* Münster: Waxmann.

Rach, S. & Heinze, A. (2013). Welche Studierenden sind im ersten Semester erfolgreich? *Journal für Mathematik-Didaktik*, *34* (1), 121-147. doi: 10.1007/s13138-012-0049-3

Rach, S., Heinze, A. & Ufer, S. (2014). Welche mathematischen Anforderungen erwarten Studierende im ersten Semester des Mathematikstudiums? *Journal für Mathematik-Didaktik*, *35*, 205-228. doi: 10.1007/s13138-014-0064-7

Recio, A. M. & Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, *48*, 83-99.

Reichersdorfer, E. (2013). *Unterstützungsmaßnahmen am Beginn des Mathematikstudiums: Heuristische Lösungsbeispiele und Problemlösen in problembasierten Lernumgebungen zur Förderung mathematischer Argumentationskompetenz.* München: Universitätsbibliothek der TU München. Zugriff auf http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bvb:91-diss-20130422-1137221-0-4; http://d-nb.info/1034641956/34

Reichersdorfer, E., Ufer, S., Lindmeier, A. & Reiss, K. (2014). Der Übergang von der Schule zur Universität: Theoretische Fundierung und praktische Umsetzung einer Unterstützungsmaßnahme am Beginn des Mathematikstudiums. In I. Bausch et al. (Hrsg.), *Mathematische Vor- und Brückenkurse* (S. 37-53). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Reiss, K. (2002). *Argumentieren, Begründen, Beweisen im Mathematikunterricht: Projektserver SINUS.* Bayreuth: Universität.

Reiss, K. (2004). Bildungsstandards und die Rolle der Fachdidaktik am Beispiel der Mathematik. *Zeitschrift für Pädagogik*, *50* (5), 635-649.

Reiss, K. & Hammer, C. (2013). *Grundlagen der Mathematikdidaktik: Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe.* Basel: Springer Basel and Imprint: Birkhäuser.

Reiss, K., Heinze, A., Kuntze, S., Kessler, S., Rudolph-Albert, F. & Renkl, A. (2006). Mathematiklernen mit heuristischen Lösungsbeispielen. In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Hrsg.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule* (S. 194-208). Münster and München [u.a.]: Waxmann.

Reiss, K., Heinze, A. & Pekrun, R. (2007). Mathematische Kompetenz und ihre Entwicklung in der Grundschule. In M. Prenzel, I. Gogolin & H.-H. Krüger (Hrsg.), *Kompetenzdiagnostik* (S. 107-127). Wiesbaden: Verlag für Sozialwissenschaften.

Reiss, K., Heinze, A., Renkl, A. & Groß, C. (2008). Reasoning and proof in geometry: Effects of a learning environment based on heuristic worked-out examples. *ZDM*, *40* (3), 455-467. doi: 10.1007/s11858-008-0105-0

Reiss, K., Hellmich, F. & Reiss, M. (2002). Reasoning and proof in geometry: Prerequisites of knowledge acquisition in secondary school students. In A. Cockburn & E. Nardi (Hrsg.), *Proceedings of the 26th International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 4, S. 113-120). Norwich: PME.

Reiss, K. & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *ZDM*, *34* (1), 29-35.

Reiss, K. & Ufer, S. (2009). Was macht mathematisches Arbeiten aus? Empirische Ergebnisse zum Argumentieren, Begründen und Beweisen. *Jahresbericht der DMV* (4), 155-177.

Renkl, A. (2009). Wissenserwerb. In E. Wild & J. Möller (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie* (S. 3-26). Heidelberg: Springer.

Resnick, L. B. (1987). Learning in school and out. *Educational Researcher*, *16* (9), 13-54.

Resnick, L. B., Levine, J. M. & Teasley, S. D. (Hrsg.). (1991). *Perspectives on socially shared cognition* (1. Aufl.). Washington, DC: American Psychological Association. doi: 10.1037/10096-000

Reusser, K. & Reusser-Weyeneth, M. (Hrsg.). (1994). *Verstehen: Psychologischer Prozeß und didaktische Aufgabe* (1. Aufl.). Bern u.a.: Huber.

Reusser, K. & Stebler, R. (1997). Every word problem has a solution: The social rationality of mathematical modeling in schools. *Learning and Instruction*, *7* (4), 309-327. doi: 10.1016/S0959-4752(97)00014-5

Rosch, E. & Mervis, C. B. (1975). Family resemblances: Studies in the internal structure of categories. *Cognitive Psychology*, *7*, 573-605.

Rosenthal, R. (1991). *Meta-analytic procedures for social research* (Bd. v. 6). Newbury Park: Sage Publications.

Rost, J. (2004). *Lehrbuch Testtheorie - Testkonstruktion* (2. vollst. überarb. und erw. Aufl.). Bern [u.a.]: Hans Huber.

Rothland, M. (2011). Warum entscheiden sich Studierende für den Lehrerberuf? Interessen, Orientierungen und Berufswahlmotive angehender Lehrkräften im Spiegel der empirischen Forschung. In E. Terhart, H. Bennewitz & M. Rothland (Hrsg.), *Handbuch der Forschung zum Lehrerberuf* (S. 268-295). Münster: Waxmann.

Rubin, D. B. (1976). Inference and missing data. *Biometrika*, *63* (3), 581-592.

Rubin, D. B. (1987). *Multiple imputation for nonresponse in surveys.* New York: Wiley.

Schafer, J. L. & Graham, J. W. (2002). Missing data: Our view of the state of the art. *Psychological methods*, *7* (2), 147-177. doi: 10.1037//1082-989X.7.2.147

Schafer, J. L. & Olsen, M. K. (1998). Multiple imputation for multivariate missing-data problems: A data analyst's perspective. *Multivariate Behavioral Research*, *33* (4).

Schätz, U. & Eisentraut, F. (2013). *delta 11: Mathematik für Gymnasien* (1. Aufl.). Bamberg: C. C. Buchner.

Schätz, U., Eisentraut, F. & Brandl, J. (2005). *delta 7: Mathematik für Gymnasien* (2. Aufl.). Bamberg: Buchner.

Schiefele, U., Streblow, L., Ermgassen, U. & Moschner, B. (2003). Lernmotivation und Lernstrategien als Bedingungen der Studienleistung: Ergebnisse einer Längsschnittstudie. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*, *17* (3/4), 185-198.

Schleicher, A. & Tamassia, C. (2000). *Measuring student knowledge and skills: The PISA 2000 assessment of reading, mathematical and scientific Literacy. Education and Skills.* Zugriff auf http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED451203.pdf

Scholz, D. & Jahnke, T. (2010). *Fokus Mathematik 12.* Berlin: Cornelsen.

Schott, F. & Azizi Ghanbari, S. (2012). *Bildungsstandards, Kompetenzdiagnostik und kompetenzorientierter Unterricht zur Qualitätssicherung des Bildungswesens: Eine problemorientierte Einführung in die theoretischen Grundlagen.* Münster and München [u.a.]: Waxmann.

Sedlmeier, P. & Renkewitz, F. (2013). *Forschungsmethoden und Statistik für Psychologen und Sozialwissenschaftler* (2., aktual. u. erw. Aufl.). München: Pearson.

Segal, J. (1999). Learning about mathematical proof: conviction and validity. *The Journal of Mathematical Behavior*, *18* (2), 191-210. doi: 10.1016/S0732-3123(99)00028-0

Seidel, T. & Krapp, A. (Hrsg.). (2014). *Pädagogische Psychologie* (6. vollständig überarbeitete Aufl.). Weinheim: Beltz.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, *46*, 13-57.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The Journal of the Learning Sciences*, *16* (4), 565-613.

Shapiro, S. S. & Wilk, M. B. (1965). An analysis of variance test for normality (complete samples). *Biometrika*, *52* (3/4), 591. doi: 10.2307/2333709

Shapiro, S. S., Wilk, M. B. & Chen, H. J. (1968). A comparative study of various tests for normality. *Journal of the American Statistical Association*, *63* (324), 1343. doi: 10.2307/2285889

Solar, H. & Deulofeu, J. (2014). Tratamiento de la contingencia desde el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *27*, 317-325.

Solar, H., Giménez, C. A. & Piquet, J. D. (2012). Competencia de argumentación en la interpretación de gráficas funcionales. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *30* (3), 133-154. Zugriff auf http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/download/285687/373659 doi: 10.5565/rev/ec/v30n3.573

Spiegel. (o. J.). *Durchschnittliche Abiturnoten in Deutschland nach Bundesländern im Jahr 2013: In Statista - Das Statistik-Portal.* Zugriff am 10.07.2016 auf http://de.statista.com/statistik/daten/studie/36277/umfrage/durchschnittliche-abiturnoten-im-vergleich-der-bundeslaender/

Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München. (o. J.-a). *Lehrplan des achtjährigen Gymnasiums.* Zugriff auf http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26378

Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München. (o. J.-b). *Lehrplan für das Gymnasium in Bayern.* Zugriff auf http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26298

Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München. (o. J.-c). *Lehrplan für das Gymnasium in Bayern.* Zugriff auf http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26192

Stanat, P., Artelt, C., Klieme, E., Neubrand, M., Prenzel, M., Schiefele, U., ... Weiß, M. (2002). *PISA 2000: Die Studie im Überblick: Grundlagen, Methoden und Ergebnisse.* Berlin.

Stebler, R., Reusser, K. & Pauli, C. (1994). Inteaktive Lehr-Lern-Umgebungen: Didaktische Arrangements im Dienste des gründlichen Verstehens. In K. Reusser & M. Reusser-Weyeneth (Hrsg.), *Verstehen.* Bern u.a.: Huber.

Sweller, J. (2005). Implications of cognitive load theory for multimedia learning. In R. E. Mayer (Hrsg.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (S. 19-30). New York: Cambridge University Press.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12* (2), 151-169.

Terhart, E. (2014). Entscheiden sich die Richtigen für ein Lehramtsstudium – und wer sind die Richtigen? In B. Spinath (Hrsg.), *Empirische Bildungsforschung* (S. 143-158). Berlin, Heidelberg: Springer.

Thomas, M. O. J. & Klymchuk, S. (2012). The school-tertiary interface in mathematics: Teaching style and assessment practice. *Mathematics Education Research Journal*, *24* (3), 283-300. doi: 10.1007/s13394-012-0051-6

Tietze, U.-P., Klika, M. & Förster, F. (2000). *Fachdidaktische Grundfragen* (2. Aufl., Bd. 1). Braunschweig [u.a.]: Vieweg.

Tietze, U.-P., Klika, M. & Wolpers, H. (2000a). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II: Didaktik der Analysis: Band 1.* Braunschweig: Vieweg.

Tietze, U.-P., Klika, M. & Wolpers, H. (2000b). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II: Didaktik der Analystischen Geometrie und Linearen Algebra: Band 2.* Braunschweig: Vieweg.

Toulmin, S. E. (2003). *The uses of argument.* Cambridge, U.K. and New York: Cambridge University Press.

Ufer, S., Heinze, A. & Reiss, K. (2008). Individual predictors of geometrical proof competence. In O. Figueras (Hrsg.), *Proceedings of the joint conference PME 32 and PME-NA* (Bd. 4, S. 361-368). Mexico: Cinvestav-UMSNH.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry: CDASSG Project.* Illinios: Chicago University.

van Ginkel, J. R. & Kroonenberg, P. M. (2014). Analysis of variance of multiply imputed data. *Multivariate Behavioral Research*, *49* (1), 78-91. doi: 10.1080/00273171.2013.855890

van Hiele, P. M. (1984). The child's thought and geometry. In D. Fuys, D. Geddes & R. Tischler (Hrsg.), *Selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele* (S. 243-252). Brooklyn, NY: Brooklyn Coll. School of Education.

van Oers, B. (1998). From context to contextualizing. *Learning and Instruction*, *8* (6), 473-488. doi: 10.1016/S0959-4752(98)00031-0

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14* (3), 293-305.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Hrsg.), *Advanced mathematical thinking* (S. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

Vollmer, M. (2015). *Bestimmung von Fachkräfteengpässen und Fachkräftebedarfen in Deutschland, Fokus-Studie der deutschen nationalen Kontaktstelle für das Europäische Migrationsnetzwerk (EMN).*

Vollrath, H.-J. (1984). *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht* (1. Aufl.). Stuttgart: Klett.

Vollrath, H.-J. (2001). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe.* Heidelberg and Berlin: Spektrum, Akad. Verl.

Vygotsky, L. S. (1978). Interaction between learning and development. In *Mind in society* (S. 79-91). Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Weber, K. & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics*, *56* (3), 209-234. doi: 10.1023/B:EDUC.0000040410.57253.a1

Weigand, H.-G. (2009). Begriffslernen und Begriffslehren. In H.-G. Weigand et al. (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I.* Heidelberg: Spektrum, Akad. Verl.

Weigand, H.-G. (2015). Begriffsbildung. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 255-278). Berlin: Springer Spektrum.

Weigand, H.-G. et al. (Hrsg.). (2009). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I.* Heidelberg: Spektrum, Akad. Verl.

Weinert, F. E. (2002). Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – Eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In F. E. Weinert (Hrsg.), *Leistungsmessungen in Schulen* (S. 17-31). Weinheim and Basel: Beltz.

Westermann, R. (2000). Wissenschaftstheorie und Experimentalmethodik: Ein Lehrbuch zur psychologischen Methodenlehre.

Wild, K.-P. & Schiefele, U. (1994). Lernstrategien im Studium: Ergebnisse zur Faktorenstruktur und Reliabilität eines neuen Fragebogens. *Zeitschrift für Differentielle und Diagnostische Psychologie*, *15* (4), 185-200.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, *61*, 37-46.

Wittenberg, A. I. (1957). *Vom Denken in Begriffen: Mathematik als Experiment des reinen Denkens.* Basel and Stuttgart: Birkhauser.

Wittmann, E. C. & Müller, G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender (Hrsg.), *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis* (S. 237-257). Bielefeld: Cornelsen.

Witzke, I. (2013). Zur Übergangsproblematik im Fach Mathematik. In G. Greefrath, F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (S. 1098-1101). Münster: WTM Verlag.

Woolfolk, A. (2014). *Pädagogische Psychologie* (12. aktual. Aufl.). Hallbergmoos: Pearson Studium ein Imprint von Pearson Deutschland.

Yang, K.-L. & Lin, F.-L. (2008). A model of reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, *67* (1), 59-76. doi: 10.1007/s10649-007-9080-6

Yule, G. U. (1900). On the association of attributes in statistics: With illustrations from the material of the childhood society. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, *194*, 257-319.

Yule, G. U. (1912). On the methods of measuring association between two attributes. *Journal of the Royal Statistical Society*, *75* (6), 579. doi: 10.2307/2340126

Zech, F. (1996). *Grundkurs Mathematikdidaktik: Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik* (8. Aufl.). Weinheim: Beltz.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

A Tabellen

Tabelle A.1: Ergebnisse des Mauchly-Tests und Greenhouse-Geisser-Epsilon für alle 25 imputierten Differenzvariablen

Datensatz	Mauchly-W	df	p	Greenhouse-Geisser ϵ
1	0,727	14	<0,001	0,882
2	0,691	14	<0,001	0,873
3	0,768	14	<0,001	0,915
4	0,621	14	<0,001	0,841
5	0,759	14	<0,001	0,895
6	0,658	14	<0,001	0,850
7	0,791	14	<0,001	0,916
8	0,804	14	<0,001	0,919
9	0,743	14	<0,001	0,893
10	0,743	14	<0,001	0,896
11	0,585	14	<0,001	0,837
12	0,733	14	<0,001	0,894
13	0,671	14	<0,001	0,871
14	0,666	14	<0,001	0,871
15	0,714	14	<0,001	0,881
16	0,701	14	<0,001	0,886
17	0,684	14	<0,001	0,863
18	0,603	14	<0,001	0,822
19	0,643	14	<0,001	0,857

Datensatz	Mauchly-W	df	p	Greenhouse-Geisser ϵ
20	0,702	14	<0,001	0,885
21	0,549	14	<0,001	0,801
22	0,719	14	<0,001	0,889
23	0,729	14	<0,001	0,897
24	0,599	14	<0,001	0,847
25	0,721	14	<0,001	0,902

Tabelle A.2: Ergebnisse der Varianzanalyse für abhängige Stichproben

Datensatz	df_{UV}	df_{Fehler}	SS_{UV}	$SS_{UV \times Pers}$	F	p	$\hat{\eta}^2_G$
1	3	597	10,17	35,54	56,93	$\leq 0,001$	0,1379
2	3	597	15,09	31,07	96,63	$\leq 0,001$	0,1963
3	3	597	10,56	34,54	60,82	$\leq 0,001$	0,1316
4	3	597	13,08	31,30	83,12	$\leq 0,001$	0,1782
5	3	597	12,87	33,89	75,58	$\leq 0,001$	0,1660
6	3	597	17,51	31,34	111,2	$\leq 0,001$	0,2188
7	3	597	13,94	32,05	86,57	$\leq 0,001$	0,1895
8	3	597	11,61	35,69	64,74	$\leq 0,001$	0,1459
9	3	597	12,15	32,50	74,38	$\leq 0,001$	0,1590
10	3	597	13,52	31,33	85,90	$\leq 0,001$	0,1811
11	3	597	16,02	27,75	114,9	$\leq 0,001$	0,2118
12	3	597	11,60	34,30	67,287	$\leq 0,001$	0,1501
13	3	597	10,83	31,75	67,86	$\leq 0,001$	0,1474
14	3	597	11,02	33,45	65,54	$\leq 0,001$	0,1458
15	3	597	11,94	33,74	70,397	$\leq 0,001$	0,1523
16	3	597	14,27	30,36	93,56	$\leq 0,001$	0,1863
17	3	597	15,36	33,04	92,51	$\leq 0,001$	0,1996
18	3	597	16,39	28,63	113,9	$\leq 0,001$	0,2174
19	3	597	13,47	32,13	83,41	$\leq 0,001$	0,1751

Datensatz	df_{UV}	df_{Fehler}	SS_{UV}	$SS_{UV \times Pers}$	F	p	$\hat{\eta}^2_G$
20	3	597	11,79	31,37	74,80	$\leq 0,001$	0,1579
21	3	597	13,92	32,72	84,65	$\leq 0,001$	0,1763
22	3	597	13,67	30,31	89,72	$\leq 0,001$	0,1773
23	3	597	18,85	32,33	116,0	$\leq 0,001$	0,2265
24	3	597	12,90	31,35	81,89	$\leq 0,001$	0,1752
25	3	597	12,29	31,93	76,58	$\leq 0,001$	0,1678

B Instruktionen zur Durchführung der Studie für Testleiterinnen und Testleiter

Testleiterinnen und Testleiter: Vorbereitung

- Ausreichende Informationen über Ort und Zeit der Durchführung der Studie, ggf. bereits mit den Räumlichkeiten vorab vertraut machen.
- Entsprechende Zeit für Anfahrt einplanen ggf. ist eine Anreise mit dem Auto notwendig
- Ausreichende Anzahl ausgedruckter Testbögen mitnehmen, ggf. an Transportmöglichkeiten (z. B. Koffer) denken
- Uhr zum Zeitmessen

Instruktionen für Teilnehmerinnen und Teilnehmer

Begrüßung (ca. 3 Min.)

- Sich vorstellen: Name, Arbeit: Heinz Nixdorf-Stiftungslehrstuhl für Didaktik der Mathematik, TU München (Untersuchen des Lehrens und Lernens von Mathematik)
- Ziel der Studie: Verbesserung der Lehre, Anpassung der Vorlesungen für Studentinnen und Studenten
- Relevanz für die Teilnehmerinnen und Teilnehmer
- Vorliegende Studie unabhängig von dieser Lehrveranstaltung
- Dauer: ca. 30 Minuten
- Blätter liegen lassen, noch nicht beginnen

Austeilen der Testbögen (ca. 5-10 Min.)

Besprechung Titelseite

- Es gibt insgesamt 5 Aufgaben (je 3 Teilaufgaben).
- Der Test besteht aus zwei Teilen:
  1. Teil: mathematische Begriffe;
  2. Teil: mathematische Sachverhalte.
- Die Aufgaben beziehen sich auf geometrische Inhalte der Mittel- und Oberstufe.

- Offene Aufgaben und geschlossene Aufgaben (es kann mehr als eine Antwort richtig sein).
- Aufgaben der Reihenfolge nach bearbeiten, nicht Zurückblättern (Aufgaben bauen aufeinander auf).

Besprechung Seite 2 (ca. 3 Min, mit Ausfüllen)

- Die Ergebnisse des Tests werden nicht an Dritte weiter gegeben und dienen ausschließlich der wissenschaftlichen Forschung.
- Außerdem ist dieser Test vollkommen anonym.
- Hinweise auf Studie vorlesen.
- Während der Durchführung werden **keine inhaltlichen Fragen** beantwortet.
- **Handys ausschalten**.
- Wenn Sie vor der eingeplanten Zeit mit einer Aufgabe fertig sind, verhalten Sie sich bitte **ruhig** und warten, bis die Zeit abgelaufen ist.
- **Fragen?**

C Studie zum Verständnis mathematischer Begriffe und Sachverhalte

TUM School of Education

Technische Universität München

Studie zum Verständnis mathematischer Begriffe und Sachverhalte

Wintersemester 2014/2015

Dauer: 30 Min.

Heinz Nixdorf-Stiftungslehrstuhl für Didaktik der Mathematik

Kathrin Nagel, Prof. Dr. Kristina Reiss

Die folgenden **fünf** Aufgaben gliedern sich in zwei Teile. Der erste Teil behandelt mathematische Begriffe und der zweite Teil mathematische Sachverhalte. Die Studie fokussiert Inhalte aus der Geometrie der Mittel- und Oberstufe.

Das Format der Aufgaben 1, 3 und 4 ist **geschlossen**, d. h., Sie können aus vorgegebenen Antworten die zutreffenden Antworten ankreuzen. Beachten Sie, dass auch **mehrere Antworten korrekt** sein können. Die Teilaufgaben werden dann als richtig bewertet, wenn *alle* richtigen Antworten und *keine* falschen angekreuzt wurden.

Wenn Sie aus Versehen ein falsches Kreuz gesetzt haben, malen Sie das Kästchen bitte *vollständig* aus. Dies wird dann als „nicht angekreuzt“ gewertet.

Aufgaben 2 und 5 sind im **offenen** Format gestellt, d. h., Sie tragen Ihre Antwort in die entsprechenden Kästchen ein.

Beispiel: Wie viele Tage hat eine Woche?

Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben von vorne nach hinten und ändern Sie Ihre Antworten im Nachhinein nicht mehr ab.

Bitte erst umblättern, wenn Sie dazu aufgefordert werden.

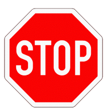
Der Test ist anonym, die Ergebnisse werden vertraulich behandelt und nicht an Dritte weitergegeben.

Alter:	____________________	
Geschlecht:	☐ männlich	
	☐ weiblich	
Bildungsweg:	☐ Gymnasium	
	☐ FOS/BOS	
	☐ ____________________	
Abiturdurchschnittsnote (z. B.: 2,5):	____________________	
Bundesland, in dem das Abitur abgelegt wurde:	☐ Bayern	
	☐ ____________________	
Studiengang:	☐ Lehramt Gymnasium:	☐ Mathematik und Physik
		☐ Mathematik und Chemie
		☐ Mathematik und Informatik
		☐ Mathematik und Sport
		☐ Mathematik und _________
	☐ Bachelor Mathematik	
	☐ ____________________	

Haben Sie vor Ihrem derzeitigen Studium bereits etwas anderes studiert?
☐ nein
☐ ja und zwar den Studiengang ____

Falls ja, haben Sie im oben genannten Studiengang einen Abschluss erworben?
☐ nein
☐ ja und zwar den Abschluss ____

Hinweis:
Das Symbol $\mathbb{R}^2$ bezeichnet die gewöhnliche zweidimensionale Ebene, die Sie bereits aus der Schule kennen.



Bitte erst umblättern, wenn Sie dazu aufgefordert werden.

Teil 1: Mathematische Begriffe

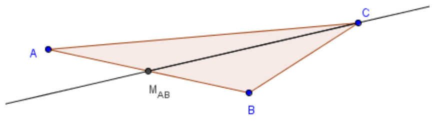
Die Aufgaben bauen teilweise aufeinander auf, **blättern** Sie daher **nicht zurück**.

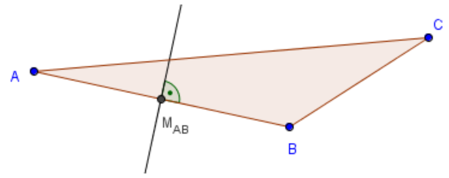
Bearbeiten Sie immer erst dann die nächste Aufgabe, wenn Sie *keine* Änderungen mehr vornehmen möchten.

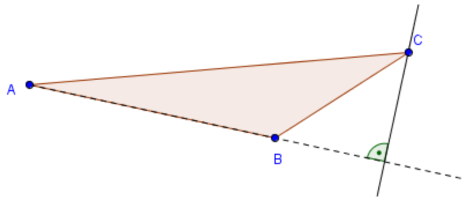
Aufgabe 1:

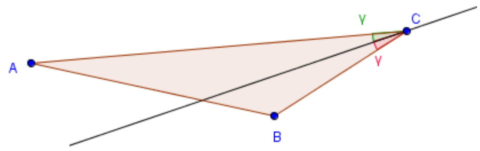
Welche der folgenden Darstellungen sind Beispiele für...

a) eine **Mittelsenkrechte** eines Dreiecks?

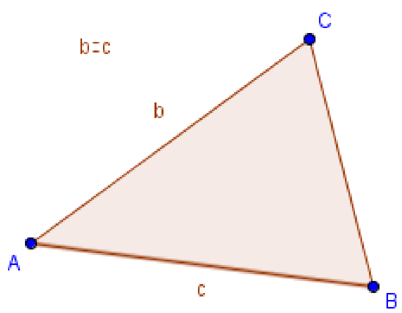
☐ 

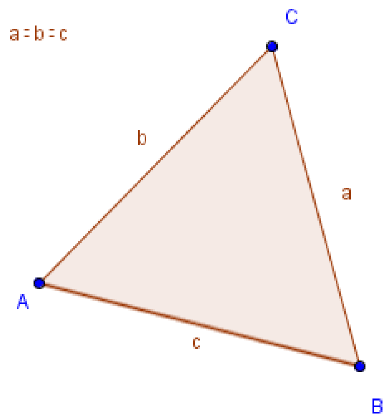
☐ 

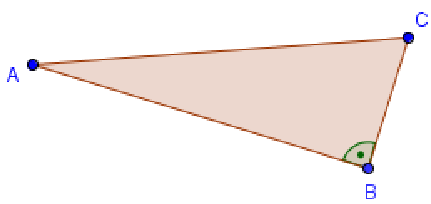
☐ 

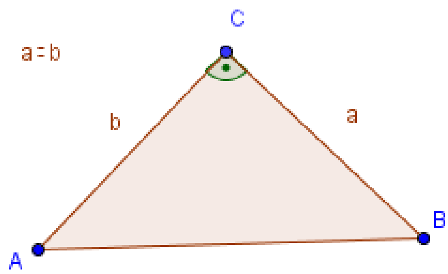
☐ 

b) ein **gleichschenkliges** Dreieck?

☐ 

☐ 

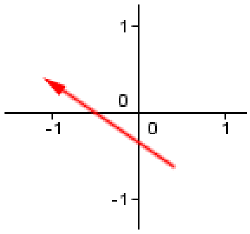
☐ 

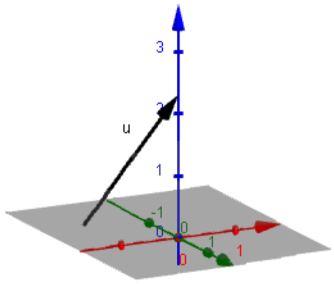
☐ 

Blättern Sie erst um, wenn Sie *keine* Änderungen mehr bei dieser Aufgabe vornehmen möchten.

Welche der folgenden Darstellungen sind Beispiele für...

c) einen **Vektor** im $\mathbb{R}^2$ oder seinen Repräsentanten?

☐ 

☐ 

☐ $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

☐ $\{\vec{u} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \mid \text{wobei } \lambda \in \mathbb{R}\}.$

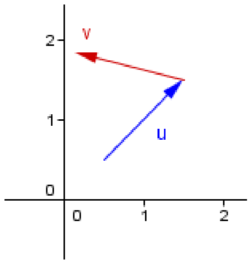
☐ $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

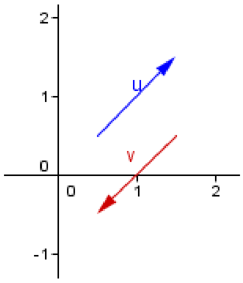
☐ $\{\vec{u} = \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix} \mid \text{wobei } \mu \in \mathbb{R}\}.$

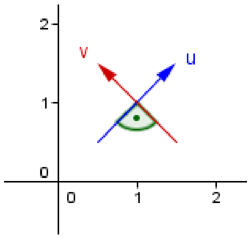
Blättern Sie erst um, wenn Sie *keine* Änderungen mehr bei dieser Aufgabe vornehmen möchten.

Welche der folgenden Darstellungen sind Beispiele für...

d) zwei **linear abhängige** Vektoren im $\mathbb{R}^2$?

☐ 

☐ 

☐ 

☐ $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

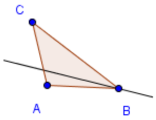
☐ $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

☐ $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Blättern Sie erst um, wenn Sie *keine* Änderungen mehr bei dieser Aufgabe vornehmen möchten.

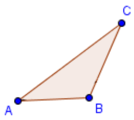
Aufgabe 2:

Begründen Sie, warum ...

a) 

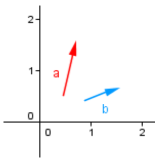
die eingezeichnete Gerade *nicht* die **Mittelsenkrechte** auf [AC] ist.

.

b) 

das skizzierte Dreieck *nicht* **gleichschenklig** ist.

.

c) 

a und b *nicht* den gleichen **Vektor** im $\mathbb{R}^2$ repräsentieren.

.

d) die Vektoren $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^2$ *nicht* **linear abhängig** sind.

.

Blättern Sie erst um, wenn Sie *keine* Änderungen mehr bei dieser Aufgabe vornehmen möchten.

Aufgabe 3:

Kreuzen Sie jeweils an, welche Aussagen zutreffen auf ...

a) **Mittelsenkrechten** eines Dreiecks:
- ☐ Sie sind stets Symmetrieachsen des Dreiecks.
- ☐ Sie teilen das Dreieck stets in zwei flächengleiche Teildreiecke.
- ☐ Sie halbieren stets die gegenüberliegenden Winkel.
- ☐ Sie stehen stets senkrecht auf einer der Dreiecksseiten.
- ☐ Sie halbieren stets eine der Dreiecksseiten.
- ☐ Sie verlaufen stets durch eine Ecke des Dreiecks.

b) **gleichschenklige** Dreiecke:
- ☐ Sie sind stets punktsymmetrisch.
- ☐ Sie besitzen stets zwei gleich große Winkel.
- ☐ Ihre Seitenhalbierenden sind stets Winkelhalbierende.
- ☐ Sie haben stets eine Symmetrieachse.
- ☐ Sie besitzen stets einen rechten Winkel.
- ☐ Ihre drei Seiten sind stets gleich lang.

c) zwei verschiedene Repräsentanten desselben **Vektors** im $\mathbb{R}^2$:
- ☐ Sie liegen stets auf derselben Geraden im $\mathbb{R}^2$.
- ☐ Sie können stets durch Parallelverschiebung aufeinander abgebildet werden.
- ☐ Sie haben stets denselben Aufpunkt.
- ☐ Sie sind stets gleich gerichtet.
- ☐ Sie haben stets dieselbe Länge.
- ☐ Sie sind stets echt parallel.

d) zwei **linear abhängige** Vektoren im $\mathbb{R}^2$:
- ☐ Sie haben stets die gleiche Länge und Richtung.
- ☐ Sie spannen stets eine Ebene im $\mathbb{R}^2$ auf.
- ☐ Sie schneiden sich stets unter einem Winkel von 90°.
- ☐ Alle Vektoren im $\mathbb{R}^2$ lassen sich stets durch diese beiden linear kombinieren.
- ☐ Sie sind stets ein Vielfaches voneinander.
- ☐ Sie haben stets die gleiche Richtung.

Blättern Sie erst um, wenn Sie *keine* Änderungen mehr bei dieser Aufgabe vornehmen möchten.

Teil 2: Mathematische Sachverhalte

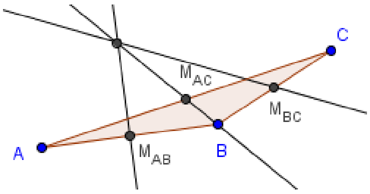
Die Aufgaben bauen teilweise aufeinander auf, **blättern** Sie daher **nicht zurück**.

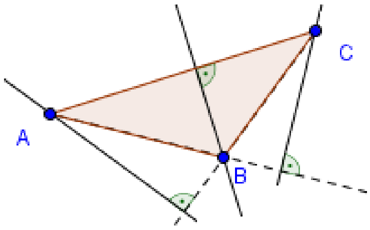
Bearbeiten Sie immer erst dann die nächste Aufgabe, wenn Sie *keine* Änderungen mehr vornehmen möchten.

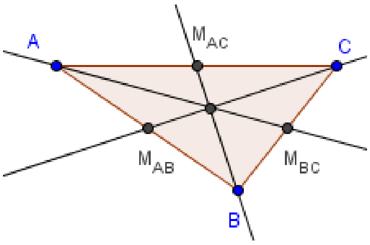
Aufgabe 4:

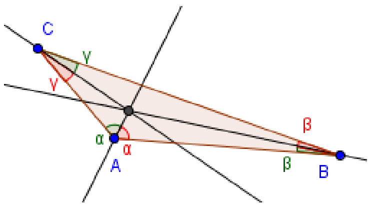
Kreuzen Sie an, welche der folgenden Beispiele den gegebenen Sachverhalt darstellen:

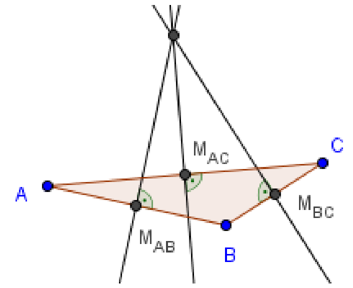
a) **In jedem Dreieck schneiden sich die drei Mittelsenkrechten in einem Punkt.**

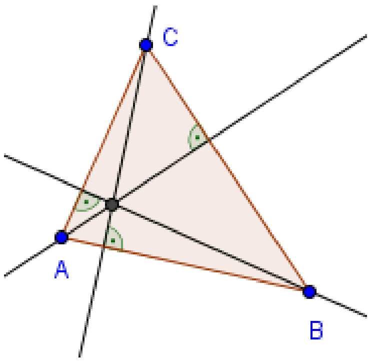
☐ 

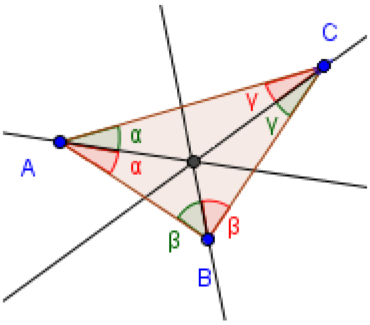
☐ 

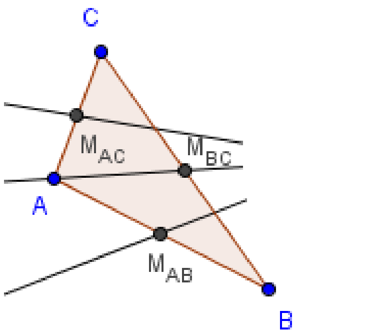
☐ 

☐ 

☐ 

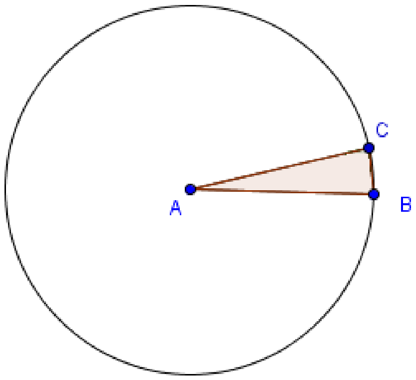
☐ 

☐ 

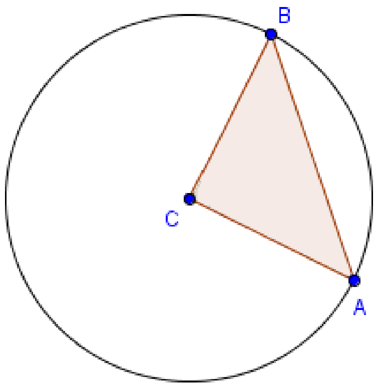
☐ 

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Beispiele den gegebenen Sachverhalt darstellen:

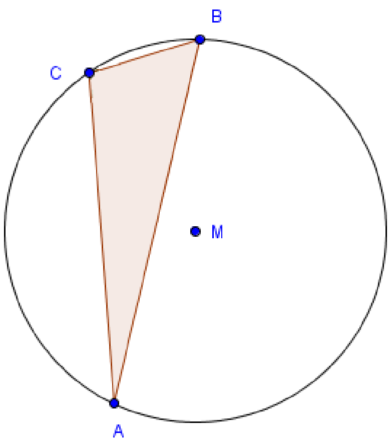
b) **Ein Dreieck ABC hat bei C einen rechten Winkel, wenn die Ecke C auf dem Halbkreis über der Strecke [AB] liegt.**



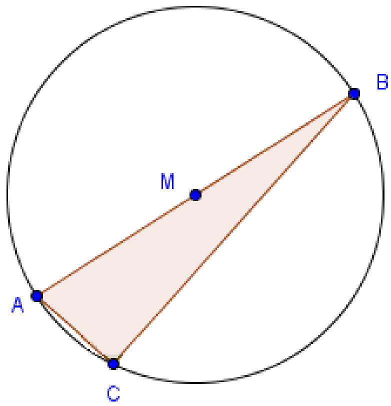
☐



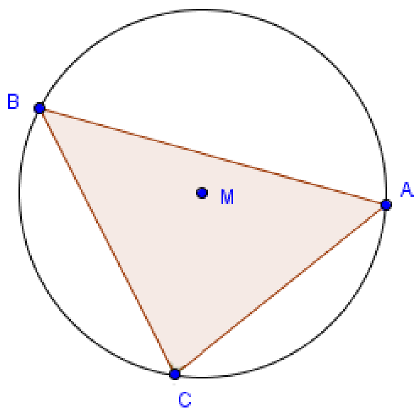
☐



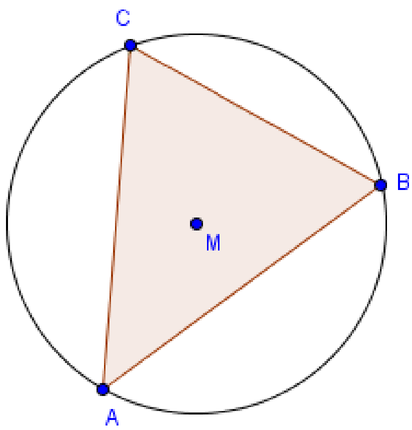
☐



☐



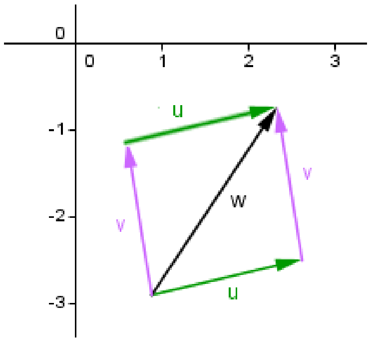
☐

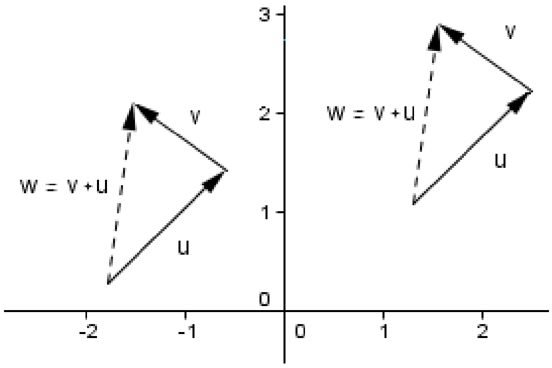


☐

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Beispiele den gegebenen Sachverhalt darstellen:

c) **Die Addition von Vektoren im $\mathbb{R}^2$ ist kommutativ.**

☐ 

☐ 

☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$

☐ $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}.$

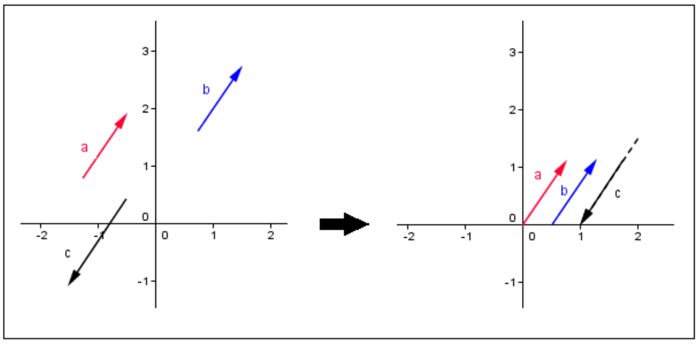
☐ $(u+v)+w = u+(v+w)$, mit $u, v, w \in \mathbb{R}^2$

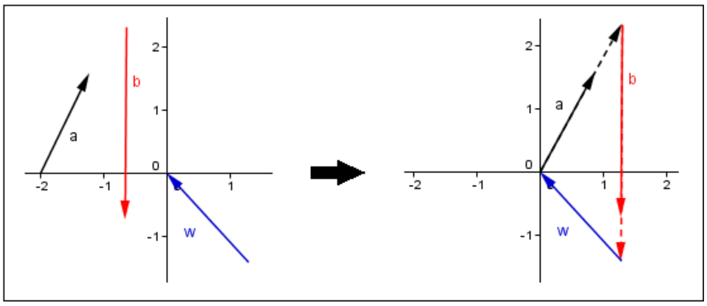
☐ $(u+v)+w = w+(u+v)$, mit $u, v, w \in \mathbb{R}^2$

Blättern Sie erst um, wenn Sie *keine* Änderungen mehr bei dieser Aufgabe vornehmen möchten.

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Beispiele den gegebenen Sachverhalt darstellen:

d) **Drei beliebige Vektoren im $\mathbb{R}^2$ sind immer linear abhängig.**

☐ 

☐ 

☐ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind Vektoren des $\mathbb{R}^2$ und linear unabhängig.
Jeden weiteren Vektor des $\mathbb{R}^2$ kann man durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear kombinieren.
So z. B. auch $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

☐ $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sind linear abhängig, da 2 ein Teiler von 4 und 1 ein Teiler von 3 ist.

☐ Man kann den Nullvektor stets durch eine Linearkombination dreier Vektoren des $\mathbb{R}^2$ darstellen, ohne dass alle Koeffizienten gleichzeitig Null sind, z. B.
$\vec{0} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix}$.

☐ Die zwei linear unabhängigen Vektoren $\vec{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ stehen senkrecht aufeinander. Ein dritter Vektor kann im $\mathbb{R}^2$ nie sowohl auf $\vec{m}$ als auch auf $\vec{n}$ senkrecht stehen.
Daher sind drei Vektoren im $\mathbb{R}^2$ immer linear abhängig.

Aufgabe 5:

Begründen Sie stichpunktartig, warum folgende Sachverhalte gelten:

a) **In jedem Dreieck schneiden sich die Mittelsenkrechten der drei Dreiecksseiten in einem Punkt.**

.

b) **Ein Dreieck ABC hat bei C einen rechten Winkel, wenn die Ecke C auf dem Halbkreis über [AB] liegt.** *(Satz des Thales)*

.

Begründen Sie stichpunktartig, warum folgende Sachverhalte gelten:

c) **Die Addition zweier Vektoren des $\mathbb{R}^2$ ist kommutativ.**

.

d) **Drei beliebige Vektoren im $\mathbb{R}^2$ sind immer linear abhängig.**

.

Vielen Dank für Ihre Teilnahme!

Bitte bleiben Sie noch so lange auf Ihrem Platz sitzen, bis alle Blätter wieder eingesammelt sind.