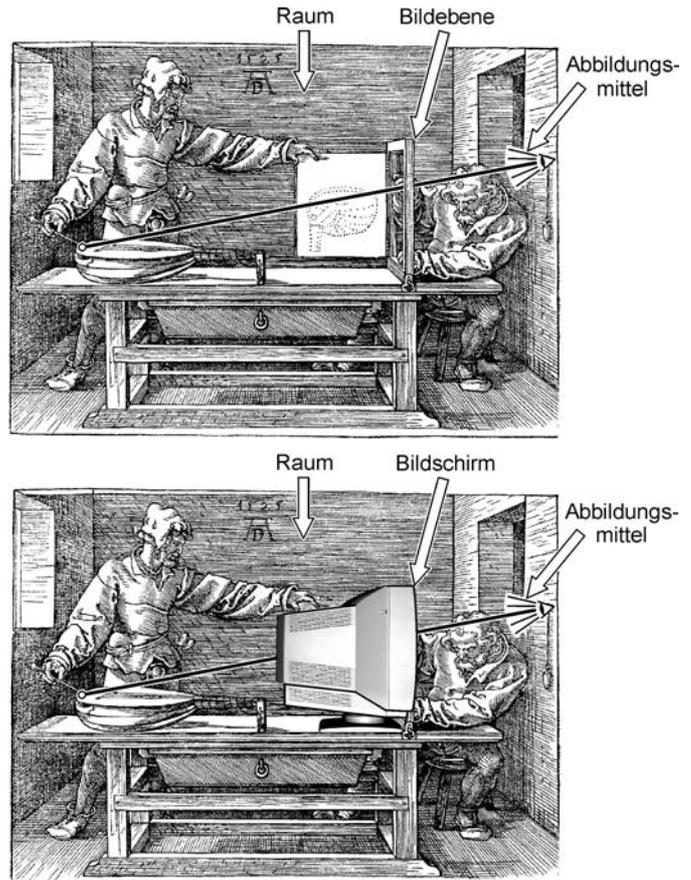


Visualisierung und klassische Geometrie von Oswald Giering



Abbildungen 1 und 2

Wenn man bedenkt, dass Armbanduhren die Zeit visualisieren, dass Seifenhäute Minimalflächen und Verbotschilder Verbote visualisieren, dass Fraktale gewisse Algorithmen visualisieren, die Limesbilder liefern, und dass Götterbilder Visualisierungen sind, deren Original selbst die Hersteller kaum kennen, dann wird offenbar, dass man dem Thema „Visualisierung und klassische Geometrie“ eine Breite einräumen kann, die sich hier nicht abdecken lässt.

Wir beginnen mit der Frage: „Was heißt visualisieren?“ und wir antworten: „Visualisieren heißt sichtbar machen“, etwas spezieller „ein Bild machen von . . .“. Für klassische Geometer heißt dies konkret: „Ein (zwei- oder dreidimensionales) Bild erzeugen mit Hilfe geeigneter gesetzmäßiger Verfahren“. Zur Beschreibung dieser Verfahren benötigt die klassische Geometrie dreierlei:

1. einen *Raum*, meist einen Anschauungsraum \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, mit passender Struktur und eventuell passend erweitert,
2. eine *Abbildungsvorschrift*, meist realisiert durch ein *Abbildungsmittel*, das häufig aus *projizierenden Geraden* besteht, die im einfachsten Fall ein Geradenbündel bilden, wie dies schon Albrecht Dürer in Abb. 1 praktizierte, und
3. einen *Bildraum*, meist den \mathbb{R}^3 , wenn dreidimensionale Bilder, etwa mathematische oder andere Modelle, entstehen sollen, oder eine *Bildfläche*, meist eine begrenzte Bildebene (Abb. 1) oder einen Bildschirm (Abb. 2).

Der so gegebene Rahmen bietet noch immer so viele Freiheiten, dass sich weder Systematik noch Vollständigkeit erreichen lassen. Auch die ausgewählten „Einzelthemen“, denen wir uns sogleich zuwenden, lassen sich keineswegs erschöpfend behandeln. Wir werden aus dem breiten Spektrum von Visualisierungsthemen lediglich neun „Spektrallinien“ („Einzelthemen“) herausgreifen, sozusagen neun „Fenster“ öffnen, kurz hindurchschauen und andeuten, was die klassische Geometrie bieten kann und was vielleicht noch wenig genutzt wird, ohne uns in Details zu verlieren. Dabei können sich die Ausblicke naturgemäß überschneiden.

1 Zentral- und Parallelprojektion

Große Teile des Visualisierungsbedarfs werden abgedeckt durch Perspektiven und Axonometrien, also durch Zentral- und Parallelprojektionen von Objekten des Anschauungsraums auf eine Bildebene. Als *Abbildungsmittel* dient, wie schon bei und vor Dürer, ein Geradenbündel.



Abbildungen 3, 4 und 5

Hier lässt sich ein hochinteressantes „Seitenfenster“ öffnen, wenn man das Geradenbündel, bevor es eine Bildebene trifft, durch ein optisches Spiegel- und Linsensystem schickt. Man denke an Photoapparate, Mikroskope, astronomische Instrumente, Röntgensatelliten usw., also an Geräte, die *eigens zur Visualisierung* mit Hilfe der geometrischen Optik und der mit ihr eng verknüpften Liniengeometrie entwickelt und gebaut werden. Hinter den optischen Instrumenten steht die Hintereinanderschaltung von Abbildungen und damit die Umformung von Visualisierungen. Im Vergleich dazu bewirken Zentral- und Parallelprojektion nur eine *triviale*, aber doch hocheffiziente Visualisierung.

Auf diesem Feld bietet die klassische Geometrie, wenn sie mit Zirkel und Lineal arbeitet, eine Fülle ausgefeilter Konstruktionen, darunter solche, die sich in sehr brauchbare Visualisierungsprogramme übersetzen lassen.

Als Beispiel nenne ich zunächst die *Stechzirkelaxonometrie*, die eine sehr ökonomische Herstellung normalaxonomischer Bilder ohne störende Hilfsmittel ermöglicht, und die sich zu einer *Stechzirkelperspektive*, also zum ökonomischen Zeichnen allgemeiner Perspektiven, erweitern lässt. Daraus lassen sich angenehme Formeln zur Bildpunktberechnung ableiten und in Programme umsetzen.

Auch die *axonometrische Aufbaumethode*, das Standardverfahren zur Anfertigung von Axonometrien, lässt sich leicht auf den Rechner übertragen. Man verschafft sich dabei – etwa zur Darstellung einer Stadt – ein axonometrisches Bild ihres Grundrisses und errichtet auf diesem (eventuell überhöht) die Gebäude. Die *perspektive Aufbaumethode* wird entsprechend gehandhabt. Insgesamt bietet die klassische Geometrie der Visualisierung am Bildschirm viele Hilfsmittel, Anregungen und Tricks, die im Laufe ihrer Entwicklung erdacht wurden (und die heutzutage von Seiteneinsteigern oft nicht beherrscht oder neu erfunden werden). Wir betrachten dazu drei Bilder:

Abb. 3 zeigt eine Perspektive über einem Fußboden, der als Quadratnetz ausgebildet ist, ein oft angewandter Trick zur Verstärkung der Raumbtiefe. Der-

selbe Trick steckt hinter einer Folge vertikal eingebauter Rechtecke und Kreisbögen.

Abb. 4 ist vermutlich eine Axonometrie; sie zeigt Frankfurt am Main aus der Vogelschau, angeblich angefertigt mit ca. 500 000 Koordinaten. (Bei Abb. 3 steht sogar die Zahl 800 000, allerdings Dollar – der letzte Auktionspreis).

Abb. 5, ein Bild gleichen Typs wie Abb. 4, zeigt Venedig aus der Vogelschau, aufgebaut über dem Grundriss der Stadt und mit künstlerischer Ausschmückung (zum Beispiel windblasenden Köpfen) versehen.

Viele Visualisierungen sind – wie das Bild Venedigs – nur partiell Zentral- oder Parallelprojektionen, weil sie mit anderen Ideen gekoppelt werden. Oft wird (wie bei Karikaturen) Wesentliches hervorgehoben und Unwesentliches oder Unschönes weggelassen, oder es wird (wie in Visualisierungen von Weltraumsituationen) mit verschiedenen Maßstäben gearbeitet, oder es werden (wie bei Explosionsdarstellungen) wichtige Details in verschiedenen Richtungen auseinandergezogen. Auch werden Schraffuren eingesetzt oder zusätzlich instruktive Schnitte geführt.

Wir verbleiben noch ein wenig bei dem reichhaltigen Arsenal zur geometrisch richtigen Ausgestaltung einer Zentral- oder Parallelprojektion. Wer damit Informationen oder Desinformationen, Impressionen oder Illusionen vermitteln will oder einfach die räumliche Wirkung erhöhen will, arbeitet gern mit ergänzenden, geometrisch untermauerten Visualisierungstechniken, wie etwa *Licht* und *Schatten*. Hierher gehören Begriffe wie *Eigenschatten* und *Eigenschaftengrenze* eines Objekts, ebenso *Schlagschatten* und *Schlagschattengrenze* eines Objekts auf einem anderen Objekt. Man nimmt dabei im allgemeinen punktförmige Lichtquellen an. Die zugehörigen geometrischen Konstruktionen (vorwiegend Schnittkonstruktionen) sind allerdings auch bei ökonomischer Durchführung meist aufwendig. Deutlich schneller – aber nicht immer wirklichkeitsnäher – arbeitet das *Renderring*, also das Schattieren mit CAD-Programmen bei gesetzten Lichtquellen und sogar bei Beachtung der Materialeigenschaften der Objekte. Man findet auch nur auf Effekt bedachte Einfärbungen eines Bildes,

sogar in allen Regenbogenfarben und ohne erkennbaren geometrischen Hintergrund wie bei der rechts wiedergegebenen Bézierfläche (Abb. 6).

Die geometrisch richtige Ausgestaltung einer Visualisierung beachtet auch *Spiegelungen* an spiegelnden Flächen (etwa an Wasseroberflächen oder an gekrümmten Spiegelverglasungen) sowie *Glanzkurven* an reflektierenden Objekten (wie Turmhelmen und Karosseriefächen); die korrekte Ausführung verlangt stets nach klassischer Geometrie. Dies gilt auch für die photorealistische Darstellung von Szenen. Dazu ein Beispiel: Vor etwa einem Jahr sah ich einen Dinosaurierfilm (eine Computeranimation). Die Saurier durften über einen topfebenen, feinen Sandstrand hüpfen. Aber sie hinterließen auf dem feinen Sand trotz ihres hohen Gewichts keine Fußspuren; ein echter Mangel der Animation, den jeder Geometer mit den Grundrissen der Füße leicht beheben kann.

Eine gewisse Sonderstellung nimmt die *Anschaulichkeit* einer Zentral- oder Parallelprojektion ein. Darüber ist viel geschrieben worden. Bei Axonometrien testet man gern das Bild eines mit dem abzubildenden Objekt geschickt verknüpften Einheitswürfels. Ist das Würfelbild befriedigend, dann vermittelt die Axonometrie meist einen anschaulichen Eindruck des Objekts. Allerdings ist oft nur der *Informationsgehalt*, der *Erkenntnisgewinn*, nicht die Anschaulichkeit einer Visualisierung gefragt. Dies gilt für nahezu alle Konstruktionszeichnungen.

Insgesamt ist die Bedeutung der Anschaulichkeit deutlich zurückgegangen, seit man Objekte am Bildschirm in allen anschaulichen und unanschaulichen Lagen, vergrößert, verkleinert, gezoomt und nicht gezoomt betrachten kann und dabei z. B. *Umriss*e in Echtzeit mitführen kann. Viele Visualisierungen leben allerdings nicht nur von der *Änderung des Blicks*, sondern auch (etwa zur Steigerung des Erkenntnisgewinns) von der *Veränderlichkeit der Objekte* selbst, die sich einstellt, wenn man ihre kennzeichnenden Parameter variiert. Dazu zählen einige hübsche Bildschirmschoner.

Wir schließen das erste „Fenster“ mit dem Hinweis, dass auch Zentralprojektionen auf *krumme Bildflächen* genutzt werden. Man projiziert in der Gewölbemalerei und besonders effektiv in Planetarien auf eine Bildsphäre, in deren Mittelpunkt das Projektionszentrum liegt. So ist z. B. das neue Hayden-Planetarium in New York in einer fünf Stockwerke hohen Kugel untergebracht. Es wurde von Carl Zeiss (Oberkochen) ausgerüstet und im Februar 2000 eröffnet. Ersetzt man die Bildebene einer Zentralprojektion durch einen vertikalen Bild Drehzylinder, auf dessen Achse das Projektionszentrum liegt, dann entsteht ein *Panoramabild* (gern verwendet bei

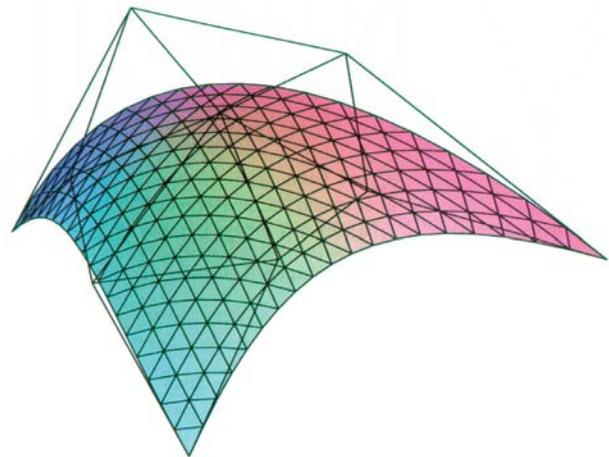


Abbildung 6

Schlachtendarstellungen mit dem Feldherrnhügel unweit des Projektionszentrums). Auch auf der Expo 2000 fand man Projektionen auf krumme Bildflächen: Es sind wandernde Info-Kapseln, auf die von der Decke des Ausstellungsraumes projiziert wurde. Vermutlich erkannten nur wenige Besucher das geometrische Fundament dieser visuellen Sprache.

2 Allgemeinere Projektionen

Ein zur Zentral- oder Parallelprojektion verwendetes Geradenbündel schickt durch jeden Raumpunkt (das Zentrum ausgenommen) genau eine projizierende Gerade. Dies ist für Projektionen eine besonders angenehme Eigenschaft, die (bis auf Ausnahmepunkte) alle Geradenkongruenzen vom Bündelgrad 1 besitzen. Wir betrachten sogleich zwei dieser Kongruenzen, die ebenfalls als Abbildungsmittel dienen, die allerdings den natürlichen Sehvorgang nicht nachbilden. Wir betreten damit ein bemerkenswertes Feld der klassischen Geometrie, denn niemand zwingt uns, zur Visualisierung den natürlichen Sehvorgang nachzuahmen. Wir können auch andere Methoden erfinden, um etwas sichtbar zu machen und um daraus Informationen zu gewinnen.

Bei der einen projizierenden Kongruenz vom Bündelgrad 1 handelt es sich um die Sehnen einer nichtzerfallenden Raumkurve 3. Ordnung k (der *Zentralkubik*, Abb. 7). Man arbeitet zweckmässig im projektiv erweiterten Anschauungsraum P^3 . Jede Treffgerade der Zentralkubik k , die k in zwei reellen oder konjugiert komplexen Punkten trifft (die zusammenfallen

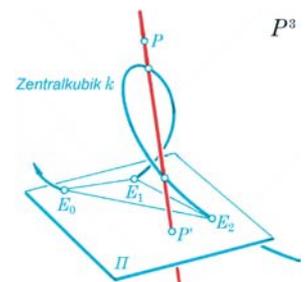


Abbildung 7

können), heißt eine *Sehne* von k . Diese *Sehnenprojektion* des P^3 auf eine Bildebene Π ist insofern interessant als die Sehnenkongruenz einer Raumkubik $k \subset P^3$ ein Modell der reellen hyperbolischen Ebene ist mit der Zentralkubik als Absolutfigur und ihren Sehnen als Punkten. Die Sehnenprojektion ist z. B. das passende Hilfsmittel zur Visualisierung und zum Studium der nichtsingulären linearen Geradenkomplexe (der *Gewinde*). Dies leuchtet ein, wenn man bedenkt, dass jede Raumkubik eine Gewindekurve ist (also ihre Tangenten in einem Gewinde liegen).

Bei der anderen projizierenden Kongruenz vom Bündelgrad 1 handelt es sich um die Treffgeraden von zwei windschiefen Geraden f und g (Abb. 8). Man nennt sie die *Achsen* oder *Brennlinien* der als *Geradenetz* bezeichneten Kongruenz. Ein Geradenetz schickt (wie ein Geradenbündel und wie die Sehnenkongruenz einer Raumkubik) i. a. durch jeden Raumpunkt P genau eine Gerade p , die Treffgerade von f und g durch P . Bei der mit einem Geradenetz ausgeführten Projektion (der *Netzprojektion*) erklärt man den Schnittpunkt P' der Geraden p mit der Bildebene Π als das Netzbild von P . Als das Netzbild einer Ebene erklärt man den Schnittpunkt des in ihr liegenden Projektionsstrahls mit der Bildebene Π . Die Netzprojektion ist eine quadratische Abbildung, das Netzbild einer Geraden k ist daher ein Kegelschnitt k' . Verwendet man ein Geradenetz als Abbildungsmittel, dann entstehen bei geeigneter Lage der Brennlinien f und g zur Bildebene Π als Bilder der Raumgeraden euklidische, pseudoeuklidische bzw. isotrope Kreise.

Ein berühmtes Ergebnis, das man mit Netzprojektion (aber auch anders) finden kann, zeigt Abb. 9: Die 4 Ecken, 6 Kanten und 4 Ebenen eines Tetraeders besitzen als *Netzbilder* die 8 Punkte und die 6 Kreise einer Miquelschen Kreisfigur. Entsprechend findet man pseudoeuklidische und isotrope Miquelsche Kreisfiguren.

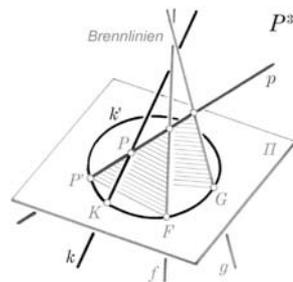


Abbildung 8

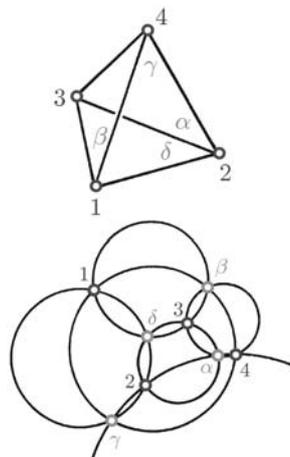


Abbildung 9

Die Netzprojektion eines Tetraeders ist übrigens ein Beispiel für Beweise von Sätzen, die mit Hilfe geeigneter Visualisierungen erbracht werden können.

Wir schließen das zweite „Fenster“ mit zwei Bemerkungen: 1. Die Frage liegt nahe, ob außer Geradenkongruenzen auch allgemeinere Kurvenkongruenzen zur Visualisierung dienen können. Die Antwort lautet „ja“. So realisieren die Elektronenbahnen eines Elektronenmikroskops (die die Elektronen beim Durchgang durch elektrische und magnetische Felder beschreiben) eine solche *Kurvenprojektion*. Auch exotische Projektionen sind gelegentlich hilfreich. 2. Niemand zwingt uns, Visualisierung so zu betreiben, dass *einem Originalpunkt ein Bildpunkt* zugeordnet wird. Wählt man als Abbildungsmittel z. B. einen *Geradenkomplex*, dann werden die Punkte des Raumes auf Kurven der Bildebene abgebildet, indem jedem Raumpunkt der Schnitt des von ihm ausstrahlenden Komplexkegels mit der Bildebene zugeordnet wird. Besonders naheliegend sind Geradenkomplexe (z. B. die zirkularen quadratischen Komplexe), die eine Abbildung der Punkte auf die Kreise der Bildebene vermitteln. Hier dient die Visualisierung zugleich der Untersuchung des Abbildungsmittels.

3 Bijektive Projektionen

Die bisher vorgestellten Abbildungen (Zentral- und Parallelprojektion, Sehnen- und Netzprojektion) ordnen zwar i. a. jedem Raumpunkt eindeutig einen Bildpunkt zu, sind aber nicht bijektiv und arbeiten daher mit einem *Informationsverlust*.

Wer Gleichnisse liebt – wir schweifen kurz etwas ab – kann dies schon Platons Höhlengleichnis (im 7. Buch von Platons „Staat“) entnehmen. Platon denkt sich in einer von der Außenwelt abgeschlossenen Höhle gefesselte Menschen, die auf einer Wand die Projektionen (Schatten, scheinbare Umrisse) von Gegenständen sehen, die das von draußen einfallende Licht erzeugt. Er diskutiert die Schwierigkeiten der Höhlenmenschen, die „Wahrheit“ (die Herkunft der Projektionen) zu erkennen, denn die Gefesselten sehen die Projektionen als Realität. Wir können sagen: wenn zu den Projektionen eine bijektive Abbildung gehört, dann sind sie fast schon die Realität. Man hat daher den Wunsch, Visualisierungen mit bijektiven Abbildungen zu erzeugen. Wir befassen uns mit zwei Projektionen, die so eingerichtet werden, dass sie bijektiv abbilden.

Wir beginnen mit der *kotierten Projektion*. Es handelt sich um eine Normalprojektion i. a. von Geländeflächen auf eine horizontale Ebene. Die Bijektivität wird (zumindest längs ausgewählter Höhenlinien) durch Kotierung hergestellt. Abbildung 10 zeigt ein Geländemodell des Kilimandscharo, 2-fach überhöht mit



Abbildung 10

äquidistanten Höhenlinien. Der kotierte Grundriss ist seine kotierte Projektion. Die kotierte Projektion dient auch zur Herstellung von Höhenkarten spezieller Funktionen. Abbildung 11 zeigt eine Höhenkarte der reziproken Gammafunktion.

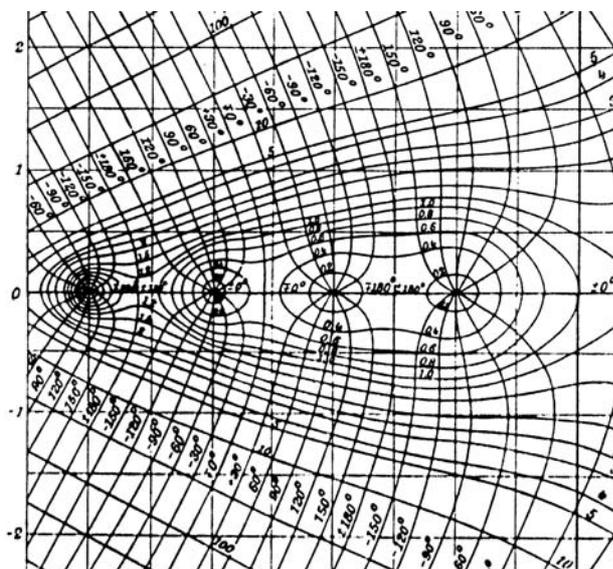


Abbildung 11

Ein Haupteinsatzgebiet der kotierten Projektion sind Straßentrassierungen. Allerdings lassen sich die Sichtverhältnisse, die beim Befahren der gebauten Straße vorliegen werden, aus einer kotierten Projektion nur unvollkommen entnehmen. Daher werden für problematische Straßenabschnitte vor Planungsabschluss Zentralrisse aus der Fahrerperspektive angefertigt. Sie werden auf die zu erwartende Fahrsicherheit begutachtet und wenn nötig wird die Trasse korrigiert. Diese Visualisierungen dienen der Qualitätsanalyse im Straßenbau.

Dieselbe Methode dient zur Begutachtung der Innen- und Außenwirkung von in Planung befindlichen Gebäuden: Man erstellt beim Durchwandern der Innenräume und wie in Abbildung 12 beim Umfahren der geplanten Gebäude Zentralrisse. Die Weiterentwicklung dieser Technik führt zum virtuellen Film mit seinen „erfundnen Realitäten“.

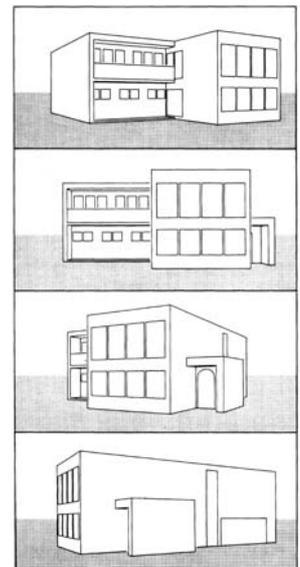
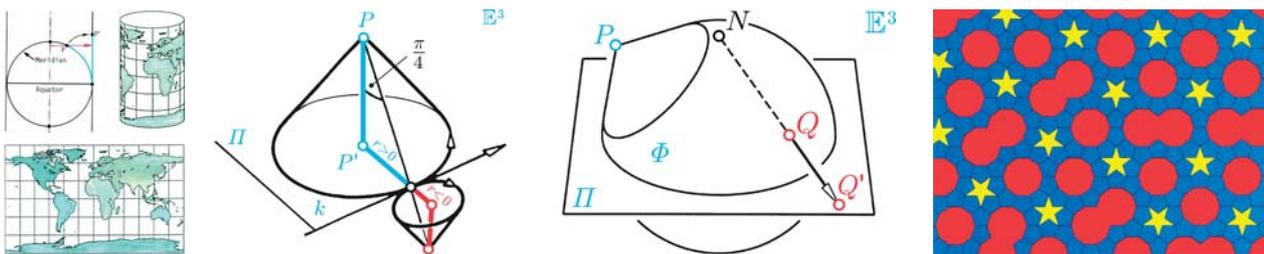


Abbildung 12

Die kotierte Projektion verwendet Ebenen eines Parallelebenbüschels. Eine Variante davon ist die im Schiffbau übliche (ebenfalls kotierte) *Zirkularprojektion*. Dort verwendet man Ebenen eines Ebenenbüschels um eine eigentliche Gerade. Man schneidet das abzubildende Objekt mit Büschelebenen, verwendet eine dieser Ebenen als Bildebene und dreht die anderen in diese hinein.

Eine zweite Variante dient zur Visualisierung der Geoidform der Erde. Die Geoidhöhen werden dabei auf das Nullniveau des Geoids (nicht auf eine Ebene!) bezogen und sie werden extrem überhöht, um Undeutliches deutlich zu machen. Die Erde zeigt dann Dellen und Beulen.

Wir erwähnen als zweite bijektive Projektion die zur Landkartenherstellung oft herangezogene (kreis- und winkeltreue) *stereographische Projektion* der Erd-Sphäre aus ihrem Nordpol auf ihre konform abgeschlossene Äquatorebene oder ihre Tangentialebene im Südpol (Abb. 26). Abbildungsmittel ist ein Geradenbündel. Man erreicht so eine ebene Visualisierung der Erd-Sphäre und befindet sich nun mitten in der an klassischer Geometrie reichen *mathematischen Geographie*. Wir nennen aus diesem geometrisch hochinteressanten Gebiet, in dem das *theore-*



Abbildungen 13, 14, 15 und 16

ma egregium von Gauß eine längentreue Abbildung der Erd-Sphäre auf eine Bildebene verbietet, lediglich den *abstandstreuen Zylinderentwurf mit längentreuem Äquator* (Abb. 13). Dieser Kartenentwurf versucht möglichst viel an Längentreue zu retten und verwendet als Abbildungsmittel *keine* Projektionen, sondern das seitenrichtige Abrollen jedes Halbmeridians auf seiner Tangente im Äquatorpunkt. Die (bi-jektive) ebene Visualisierung der Erd-Sphäre – ohne Nord- und Südpol – erfolgt durch anschließende Abwicklung ihres Berührzylinders längs des Äquators.

Wir schließen das dritte „Fenster“ mit der Bemerkung: Projiziert man die Punkte der Erd-Sphäre mit den orientierten Breitenkreisradien (Abb. 13) als Abbildungsmittel auf ihren Berührzylinder längs des Äquators, so erhält man den flächentreuen Lambertschen (oder Archimedischen) Zylinderentwurf. Bei dieser Projektion handelt es sich um eine Art Netzprojektion auf den Berührzylinder mit der Zylinderachse und der Ferngerade der Äquatorebene als Brennlinsen eines Geradenetzes.

4 Visualisierung von Objekten des E^4

Wir erwähnen vier Methoden zur Visualisierung von Objekten (Punktmenge) des vierdimensionalen euklidischen Raumes E^4 .

1. Man überträgt aus dem E^3 in den E^4 die Idee der *kotierten Projektion*. Dazu schneidet man das abzubildende Objekt des E^4 mit einer Serie paralleler Hyperebenen. Die Schnittobjekte sind kotierte Figuren (etwa Flächen) in parallelen 3-Räumen. Dann projiziere man jedes Schnittobjekt normal in den 3-Raum mit der Kote 0. Dort entsteht als Visualisierung des Ausgangsobjekts eine diskrete Folge kotierter Figuren.

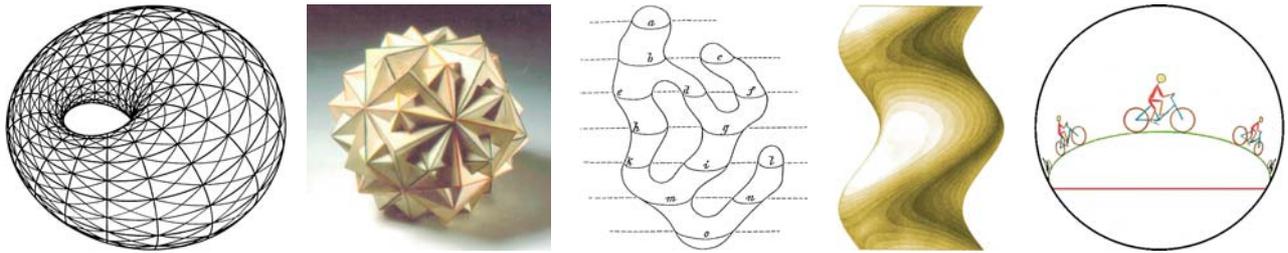
2. Man überträgt aus dem E^3 in den E^4 die Idee der *normalen (bzw. schiefen) Axonometrie*. Dazu verknüpft man mit dem abzubildenden Objekt des E^4 ein kartesisches Koordinatensystem und ermittelt dessen Normalriss in einer Bildhyperebene $\Pi \subset E^4$. Dort findet man den Bildpunkt eines Objektpunkts $P \in E^4$ durch koordinatenweises „Aufbauen“. Man

benötigt dabei die zu den Koordinatenrichtungen gehörenden Verkürzungsfaktoren, die bei normaler Axonometrie vorweg zu ermitteln sind. Werden das Bild des Koordinatensystems und die Verkürzungen *beliebig* gewählt, so entsteht ein schiefaxonometrisches Bild, das zu einer *gewissen Parallelprojektion* des Objekts *affin* ist. Ein Analogon zum klassischen Satz von Pohlke des E^3 , wonach das schiefaxonometrische Bild sogar *ähnlich* zu einer bestimmten Parallelprojektion ist, gilt im E^4 nicht. Das normal- oder schiefaxonometrische Bild eines abzubildenden Objekts des E^4 ist in der Bildhyperebene Π als dreidimensionales Modell zu denken, das man z. B. in Grund- und Aufriss darstellen kann.

3. Man überträgt aus dem E^3 in den E^4 die (bi-jektive) *zyklographische Abbildung*. Im E^3 wird die zyklographische Abbildung wie folgt erklärt: Jedem Punkt $P \in E^3$ wird in einer Bildebene $\Pi \subset E^3$ jener Kreis k zugeordnet, der die Normalprojektion P' von P als Mittelpunkt und die Strecke $\overline{PP'}$ als Radius r besitzt (Abb. 14). Der Kreis k wird positiv oder negativ orientiert, je nachdem P „über“ ($r > 0$) oder „unter“ ($r < 0$) P' liegt; für $P = P'$ ist $r = 0$. Der Kreis k ist zugleich der Schnitt der Bildebene Π mit dem Drehkegel, der P als Spitze, die Gerade PP' als Drehachse und $\frac{\pi}{4}$ als Öffnungswinkel besitzt. Als Abbildungsmittel fungieren hier translationsgleiche Drehkegel (die als Komplexkegel interpretiert werden können, siehe „Fenster“ 2, Bemerkung 2). Das zyklographische Bild einer Raumkurve des E^3 ist dann eine einparametrische Schar orientierter Kreise in Π . Bei den orientierten Kreisen der Bildebene Π handelt es sich um einen Schauplatz der Laguerre-Geometrie, in deren Rahmen die zyklographische Abbildung ausführlich untersucht wird.

Entsprechend werden die Punkte des E^4 bijektiv auf die *orientierten 2-Sphären* eines dreidimensionalen Bildraumes $\Pi \subset E^4$ abgebildet. Damit lässt sich eine Kurve des E^4 im E^3 als einparametrische Schar orientierter Sphären visualisieren (als *Kanalfläche*, wenn die Sphärenschar eine Hüllfläche besitzt).

4. Man überträgt aus dem E^3 in den E^4 auch die folgende Abbildung: Im E^3 lege man das abzubildende Objekt ins Außengebiet (jedenfalls nicht ins In-



Abbildungen 17, 18, 19, 20 und 21

nengebiet) einer festen 2-Sphäre $\Phi \subset E^3$ (Abb. 15). Dann wird zunächst jedem Objektpunkt P der Berührungskreis des Berührdrehkegels von Φ mit der Spitze P zugeordnet. Anschließend wird die 2-Sphäre Φ von einem Nordpol N auf die Äquatorebene Π stereographisch projiziert. Diese Abbildung wird im Rahmen der Möbius-Geometrie ausführlich untersucht. Abbildungsmittel ist die Polarität an Φ und das zur stereographischen Projektion verwendete Geradenbündel.

Wir schließen das vierte „Fenster“ mit der Bemerkung: Die Visualisierung von Objekten des E^n ($n \geq 4$), bei der es darum geht, möglichst viele Informationen solcher Objekte (etwa von Singularitäten aus hochdimensionalen Räumen) in einer zweidimensionalen Bildebene, oder in einem dreidimensionalen Bildraum, oder in einem Film leicht erfassbar unterzubringen, ist bis heute nicht ideal gelöst. Leider sind die meisten Methoden für viele Anwender noch immer sehr gewöhnungsbedürftig.

5 Visualisierte Mathematik

Eine große Fülle visualisierter Mathematik, zugeschnitten auf den mathematisch interessierten Museumsbesucher, findet sich im „Mathematischen Kabinett“ des Deutschen Museums in München und im „Begleitbuch“ zu dieser Ausstellung. Vor knapp zwei Jahren hat F. L. Bauer beides in neuer Gestaltung zu neuem Leben erweckt. Die Ausstellung zeigt u. a. bei den *Parkettierungen* eine eindrucksvolle Verknüpfung von Visualisierung und Geometrie. Die in Abbildung 16 visualisierte Kepler-Parkettierung möge Sie neugierig machen!

Insgesamt bietet die Visualisierung von Mathematik ein unerschöpfliches Thema; wir lassen es im Rahmen der Geometrie kurz anklingen.

Visualisierte Geometrie findet sich in großem Umfang bei allen Arten von *Kurven* (speziell solchen, die als Visualisierungshilfen für andere Objekte auftreten), bei allen Arten von *Flächen* (mit ihren vielen Besonderheiten wie Singularitäten, Selbstdurchdringungen, Extrema, interessanten Schnitten), bei

allen Arten von *Körpern*, *Stabwerken*, *Konfigurationen* (wie der Miquelschen Kreisfigur in Abb. 9), ebenso in *Illustrationen zu kunstvollen Beweisen* usw.

Ziemlich willkürliche Beispiele zu dieser (unvollständigen) Aufzählung zeigen die Abbildungen 17 bis 21. In Abbildung 17 erkennt man eine Dupinsche Ringzyklide mit ihren Krümmungslinien und deren Diagonalkurven, in Abbildung 18 ein aus Würfeln aufgebautes Polyeder (gefertigt unter S. Finsterwalder) aus der Modellsammlung der Fakultät für Mathematik der TU München.

Als Illustration zum Beweis eines Satzes zeigt Abbildung 19 eine Figur, die F. A. Möbius verwendet (der in Schulpforta geborene sächsische Mathematiker). Diese Figur führt zu dem Satz, der besagt, dass *zwei zusammenhängende geschlossene Flächen des \mathbb{R}^3 genau dann zueinander homöomorph sind, wenn sie gleiches Geschlecht besitzen.*

Abb. 20 zeigt eine Schraubfläche mit Isophoten, ein handgefertigtes Werk des am Königlichen Polytechnikum zu Dresden über viele Jahre tätigen L. Burmester, des großen Förderers der Beleuchtungsgeometrie.

Abb. 21 gehört zum Entwickeln und Testen von Software (auch im Rahmen von Praktika und Diplomarbeiten) die zur *Visualisierung ein und derselben Situation* in verschiedenen Modellen der hyperbolischen Ebene dient. Wir beschränken uns in Abb. 21 auf das (projektive) Cayley/Klein-Modell; die hyperbolischen Punkte seien die Innenpunkte eines Kreises. Visualisiert wird die *hyperbolische Metrik* durch einige kongruente hyperbolische Radler, die in konstantem hyperbolischen Abstand auf einer Abstandslinie hintereinander herfahren.

Blickt man (wie wir das jetzt tun) auf *visualisierte Geometrie*, dann sollte folgendes nicht unerwähnt bleiben: Die Visualisierung eines Objekts (eines Vorgangs, einer Idee, ...) kann „statisch“ erfolgen, in *einem* diskreten Bild, oder „halbdynamisch“ in *mehrerer* diskreten Bildern (wie bei der stetigen Verbiegung von Flächen, etwa eines längs eines Meridians aufgeschnittenen Katenoids in eine Wendelfläche, Abb. 22), oder „voll-dynamisch“ in *vielen* diskreten Bildern, etwa als Film.

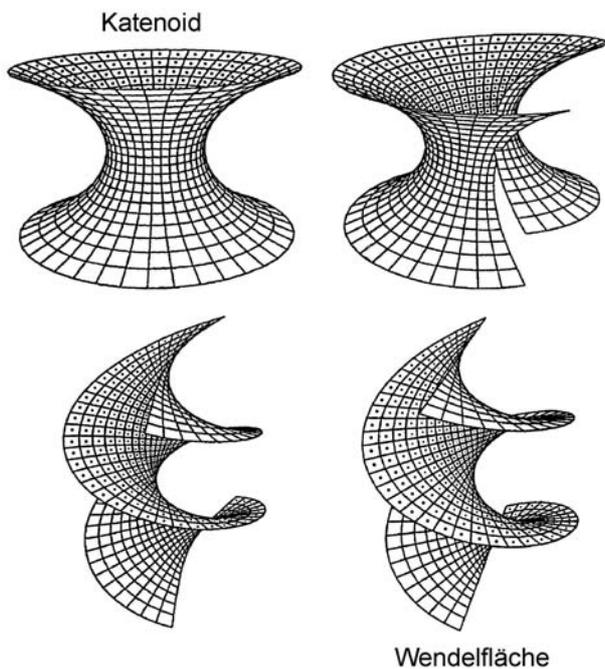


Abbildung 22

6 Visualisierungsmethoden im Kurven- und Flächendesign

Eine umfangreiche Literatur behandelt das Problem des Computer Aided Geometric Design (CAGD), eine glatte und *optisch gefällige* Kurve oder Fläche durch endlich viele Punkte zu legen und dabei unerwünschte Stellen bereits beim Entwurf zu entdecken und zu korrigieren. Was optisch gefällt, entscheidet das Auge. Man nutzt dabei weithin klassische Geometrie. Wir zeigen dies an zwei einfachen Beispielen. Wir nehmen an, Kurven und Flächen seien in Bézierdarstellung (und damit in rationaler Darstellung) gegeben.

Beispiel 1:¹ Im *Dualitätssprinzip der projektiven Geometrie* entspricht *in der Ebene* einer Punkt-Kurve eine Tangenten-Kurve und *im Raum* einer (doppelt gekrümmten) Punkt-Fläche eine (doppelt gekrümmte) Tangentenebenen-Fläche. Man kann nun das Dualitätssprinzip *in der Ebene* realisieren durch eine Polarität an der komplexen Einheitskugel. Die duale Darstellung einer rationalen ebenen Kurve bzw. Fläche ist dann ebenfalls rational und kann daher wieder in Bézierform geschrieben werden.

Einem Wendepunkt einer ebenen Punkt-Kurve entspricht bei der ihr zugeordneten Tangenten-Kurve eine Tangenten-Singularität (i. a. eine Spitze). Man

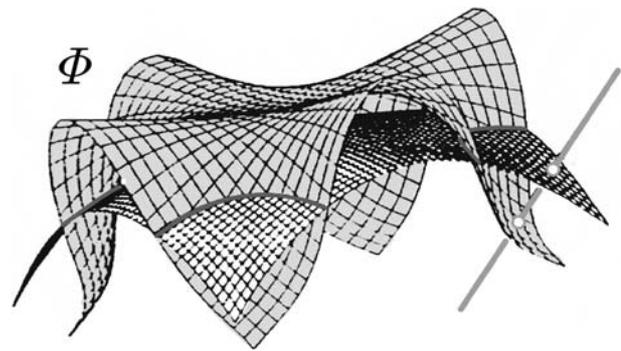


Abbildung 23

kann daher bei einer ebenen Punkt-Kurve unerwünschte Wendepunkte visuell entdecken, indem man ihr polares Bild auf Singularitäten absucht. Entsprechend kann man bei einer Fläche unerwünschte Vorzeichenwechsel der Gauß-Krümmung (und damit unerwünschte Übergänge von konvexen zu nichtkonvexen Flächenstücken) über die Singularitäten ihres polaren Bildes finden.

Beispiel 2:² Eine andere Methode zur visuellen Beurteilung von Flächen besteht darin, auf den Flächennormalen, ausgehend von den Flächenpunkten, gewisse geometrische Größen der Fläche (meist Krümmungsgrößen, z. B. die Gauß-Krümmung K) abzutragen und so der zu beurteilenden Fläche eine Begleitfläche Φ zuzuordnen (Abb. 23).

Wird die zur Gauß-Krümmung K gehörende Begleitfläche Φ mit der Ausgangsfläche geschnitten, dann sind die Schnittkurven die parabolischen Kurven ($K \equiv 0$) der Ausgangsfläche, die positiv und negativ gekrümmte Flächenteile trennen, also die konvexen Flächenteile ($K > 0$) abgrenzen: Man hat einen *visuellen Konvexitätstest*.

Altbekannt und damit eng verknüpft sind die von Felix Klein im Gesicht des Apoll von Belvedere eingetragenen parabolischen Kurven (Abb. 24). Für einen visuellen Schönheitstest sind sie allerdings kaum geeignet.

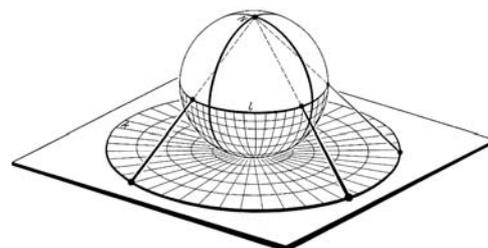
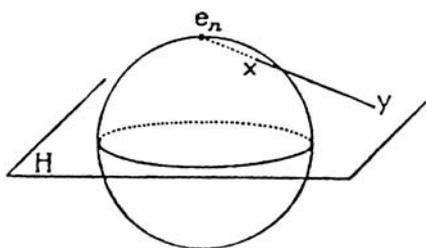


Abbildung 24

Zur visuellen Beurteilung der Qualität einer Fläche nach vorgegebenen Gesichtspunkten werden viele Flächenkurven herangezogen. Es tauchen immer wieder neue Vorschläge auf, deren Vor- und Nachteile diskutiert werden.

1 J. Hoschek: Anwendungen des Dualitätssprinzips im Computer Aided Geometric Design. Grazer Berichte (1983), Bericht Nr. 216. Detecting regions with undesirable curvature. CAGD 1 (1984), 183–192.

2 S. Hahmann: Stabilitäts- und Qualitätsanalyse von Freiformflächen (Diss. Univ. Kaiserslautern 1994).



Abbildungen 25 und 26

7 Qualitätsunterschiede in Visualisierungen

Wieviel Qualität (Informationsgehalt, Anschaulichkeit, Detailtreue, leichte Lesbarkeit, ...) eine Visualisierung bietet, hängt von ihrer Zweckbestimmung ab, aber auch von ihrem Hersteller und dessen Qualitäten und dem Aufwand, den er betreibt. Eines ist unbestritten: Je weniger Geometrie er beherrscht, um so weniger kann er zur Visualisierung einsetzen.

Viele Visualisierungen vermitteln nur eine *ungefähre Vorstellung*, eine mehr oder weniger gelungene *Illustration* dessen, was ein erklärender Text aussagt; sie bieten keinen *Erkenntnisgewinn*. Wir greifen aus der großen Vielfalt dieser Visualisierungen zwei Beispiele heraus.

Beispiel 1: Wir beginnen mit der berühmten Figur zur stereographischen Projektion, die N. Bourbaki in „Livre III. – Topologie générale, Chapitre VI“ (Paris 1955) verwendet (Abb. 25).

Diese oft kritisierte Figur³ soll die Einführung der stereographischen Projektion illustrieren, vielleicht sogar unterstützen. Oft genannte Kritikpunkte sind:

1. e_n (der Nordpol der Kugel) darf nicht auf dem Kugelumriss liegen.
2. Die Punkte x und y sind einander falsch zugeordnet.
3. Wenn der unsichtbare Äquatorteil gestrichelt wird, dann ist auch der unsichtbare (unter der Äquatorebene H liegende) Kugelumriss zu stricheln.
4. Die Äquatorellipse passt nicht zu der mit den Abrisskanten von H angedeuteten Abbildung.

Das Stichwort „angedeutete Abbildung“ ist der Pferdefuß der Kritik. Bourbaki verrät nämlich nicht, *welche Abbildung der Figur zugrundeliegt*. Man kann daher die Kritik nicht auf Sätze der Zentral- oder Parallelprojektion stützen. Bourbaki kann sich folglich der Kritik weitgehend entziehen.

Andererseits zieht diese Figur Kritik auf sich, da es Figuren gibt, die (etwa bei Hilbert/Cohn-Vossen⁴,

Abb. 26) die stereographische Projektion insofern korrekt wiedergeben, als sie die gängigen Tests (wie die Zuordnung von Punkt und Bildpunkt) bestehen und keine Widersprüche – eventuell sogar Vermutungen über neue Sätze (eine Vorstufe des Erkenntnisgewinns) – liefern. Übrigens verjüngen sich in Abbildung 26 zur Verbesserung der Bildqualität die Linien nach hinten, damit die hinteren Teile vom Betrachter *entfernter* eingeschätzt werden. Dieser graphische Trick wird in der Bildschirmvisualisierung bisher kaum genutzt. Im Vergleich mit Abbildung 26 ist Abbildung 25 nur eine *flüchtige Skizze*; sie vermittelt nur eine *ungefähre Vorstellung* von stereographischer Projektion.

Bourbakis Figur stammt aus der Mitte des 20. Jahrhunderts, aus einer Zeit, in der im „mainstream“ der Mathematik Visualisierung verpönt war. Inzwischen herrscht, seit sie in unterschiedlicher Qualität am Bildschirm erfolgen kann, ein wahrer Visualisierungsrausch, auch mit Akteuren, die kaum Geometrie investieren. Man beobachtet eine Situation wie bei den Akteuren im Straßenverkehr, den Verkehrsteilnehmern: Sie fahren völlig unbekümmert ohne jemals den Nachweis erbracht zu haben, dass sie zur Vermeidung von Verkehrsunfällen in Raumschauung sattelfest sind. So steht die Visualisierung nach Bourbaki weiterhin in hoher Blüte. Statt auf Papier werden die flüchtigen Skizzen nun am Bildschirm erzeugt: Bildschirmskizzen ersetzen Handskizzen.

Beispiel 2: Abbildung 27 zeigt oben ein Bild mit dem Untertitel *The surface $z = xy$* . Es handelt sich um eine moderne Visualisierung eines hyperbolischen Paraboloids. Wer geübt ist, erkennt einen kleinen Ausschnitt dieser Fläche, der in der mittleren Darstellung etwa dem gelb gefärbten Teil entspricht. Die im oberen Bild eingetragenen Kurvenstücke gehören vielleicht zu den gleichseitigen Hyperbeln $z = xy = \text{const}$. Diese Visualisierung vermittelt kaum die kennzeichnenden Eigenschaften des hyperbolischen Paraboloids $z = xy$.

³ z. B. bei G. Ewald: Probleme der geometrischen Analysis. B.I. Wissenschaftsverlag Mannheim/Wien/Zürich 1982, S. 6.

⁴ D. Hilbert/S. Cohn-Vossen: Anschauliche Geometrie. Verlag von J. Springer Berlin 1932, S. 222.

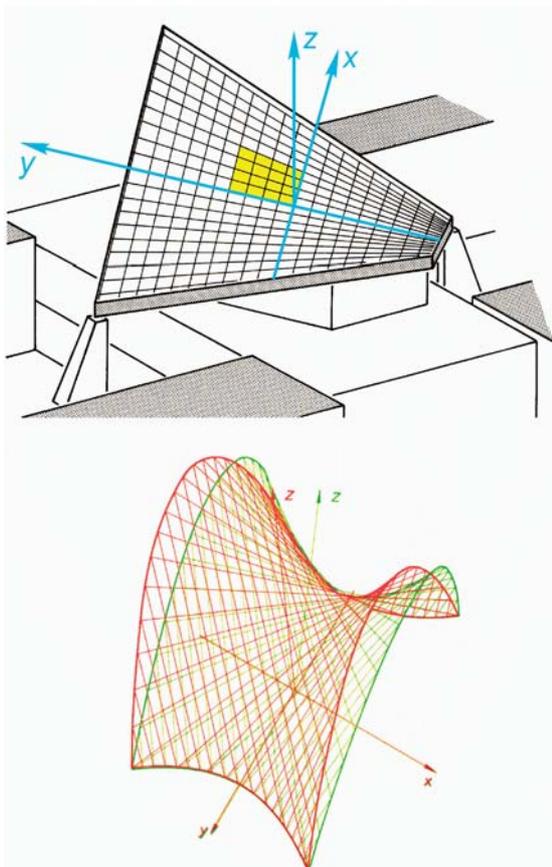
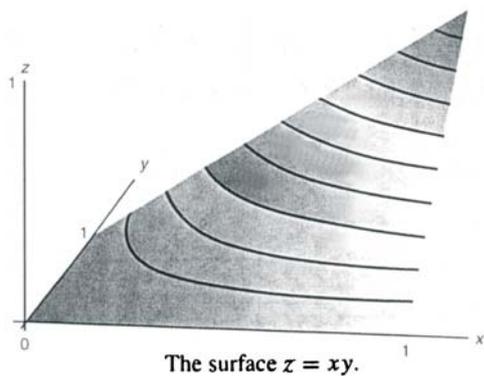


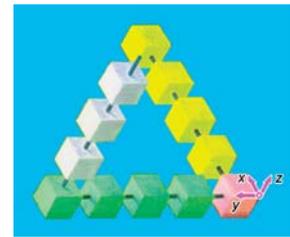
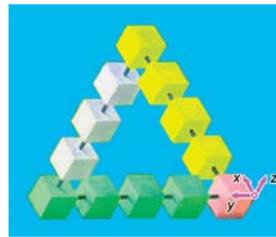
Abbildung 27

Einen besonders plastischen Eindruck liefern die mit einer Rotgrünbrille zu betrachtenden *Anaglyphenbilder* eines Objekts: Abb. 27 zeigt unten ein hyperbolisches Paraboloid mit seinen geradlinigen Erzeugenden.

Das nächste „Fenster“ gewährt einen Ausblick auf visuelle Konfliktsituationen.

8 Visuelle Konfliktsituationen

Wir betrachten ein Beispiel jener Visualisierungen, in denen besonders provokativ „Fehler“ suggeriert werden und denen „unmögliche Objekte“ zugrundeliegen. Wir untersuchen eine solche Visuali-



Abbildungen 28 und 29

sierung (Abb. 28): Wir nehmen an, Abb. 28 zeige u. a. 12 *Würfel* in *Normalprojektion*, von denen je zwei Würfel durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen; sie sind *translationsgleich*. Alle Würfel gehören zu einer „unmöglichen Drei-Balken-Konstruktion“. Die „Unmöglichkeit“ ergibt sich aus Abb. 28 wie folgt:

Wir verknüpfen mit dem roten Würfel ein kartesisches xyz -Koordinatensystem. Dann gilt: die vier gelben Würfel entstehen aus dem roten durch Translation in x -Richtung, die vier grünen Würfel entstehen aus dem roten durch Translation in y -Richtung.

Wir verschieben den letzten grünen Würfel in z -Richtung. Dann läuft er im Raum (auf der yz -Ebene) vor den gelben Würfeln vorbei, muss also im Bild gelbe Würfel verdecken. Im Bild trifft er aber den obersten gelben Würfel! Dies ist ein Widerspruch unter den gemachten Voraussetzungen (*Normalprojektion von 12 translationsgleichen Würfeln*). Also haben wir unter den gemachten (vom Bild suggerierten) Voraussetzungen ein „unmögliches Objekt“.

Wir beseitigen nun den Widerspruch auf zwei Arten:

1. dadurch, dass wir an der Stelle, die den Widerspruch auslöst, die Sichtbarkeit ändern (Abb. 29; das Objekt ist dann nicht mehr geschlossen),
2. dadurch, dass wir das Bild belassen, aber die durch das Bild suggerierten Voraussetzungen ändern. Sie lauteten: *Normalprojektion von 12 translationsgleichen Würfeln*.

Nun sagen wir z. B.: *Normalprojektion von 9 translationsgleichen Würfeln* (dem roten, den 4 grünen und den 4 gelben) *und von drei weißen Körpern, deren Normalprojektionen wie Würfelprojektionen aussehen*. Dann zeigt Abb. 28 kein „unmögliches Objekt“ – und das lehrt die klassische Geometrie.

Wir schließen dieses „Fenster“ mit der Bemerkung: Bilder von „unmöglichen Objekten“ erscheinen zwar lokal richtig, signalisieren aber (unter den vom Bild suggerierten Voraussetzungen) global einen Widerspruch. Die „Drei-Balken-Konstruktion“ suggeriert, dass die Originale der Würfel-Bilder Würfel sind. Sie ist ein typisches Beispiel dafür, dass ein Photo eines räumlichen Objekts das Objekt nicht eindeutig bestimmt.

9 Computer-Vision

Wir sagten am Anfang: „Visualisieren heißt sichtbar machen“, heißt „ein Bild machen von ...“. Sogleich entsteht die Frage: „Wovon ist das Bild?“ Diese Frage trifft mitten in die Rekonstruktionsthematik. Sie lenkt uns zum *Computer-Vision*, zu einem Begriff, der wenigstens anklingen soll, etwa beim Problem, eine Fläche zu rekonstruieren aus einer Folge von Aufnahmen der Fläche, wenn eine Kamera die Fläche umfährt. Genauer: eine Fläche zu rekonstruieren aus *scheinbaren Umrissen dieser Fläche und deren besonderen Eigenschaften wie Entartungen oder Singularitäten*. Das Problem wird deutlich schwieriger, wenn zusätzlich die Bewegung der Aufnahmekamera zu ermitteln ist. Dieses Forschungsgebiet verlangt ein enges Zusammenwirken von klassischer projektiver Geometrie, Differentialgeometrie, Singularitätentheorie, Kinematik und Photogrammetrie mit Teilen der Informatik. Es gibt bereits brauchbare Rekonstruktionsalgorithmen (nicht nur für den einfachen Fall, in dem das Objekt auf einer rotierenden Scheibe liegt)⁵. Wir beenden diesen flüchtigen Ausblick und schließen nun alle „Fenster“.

Schlussbemerkungen

In den zurückliegenden Jahren ist (gestützt auf das reichhaltige Arsenal an klassischer Geometrie) eine durchaus leistungsfähige *Visualisierungs-Software* entstanden, die man vielseitig einsetzen kann, z. B. zur Erzeugung geometrisch hochqualitativer Bilder (für Publikationen, für Unterrichts- und Werbezwecke usw.), zur Überprüfung geometrischer Vermutungen am Bildschirm, zur Visualisierung und zum Austesten von Formeln auch in Spezialfällen, zur Veränderung von Objekten durch geometrische Transformationen (Projektionen, Bewegungen, Inversionen usw.).

Bisher als zu aufwendig angesehene Visualisierungen sind dadurch erst möglich geworden. Allerdings hat solche Software ihren intellektuellen Preis. Wir wollen das präzisieren: In den DMV-Mitteilungen 2-2000 hat B. Buchberger den Begriff „*trivialiserte Mathematik*“ geprägt. Wenden wir diesen Begriff auf die für Visualisierungszwecke eingesetzte Geometrie an, dann kann man sagen: *Was heute in der leistungsfähigen Visualisierungs-Software zur Verfügung steht, ist nicht triviale Geometrie, sondern durch höchst nicht-triviale Geometrie „trivialiserte Geometrie“* (für Visualisierungszwecke aufbereitete Geometrie). Nur wer diese höchst nicht-triviale Geometrie beherrscht, kann solche Softwa-

re entwickeln und weiterentwickeln. Eine Informatik-Ausbildung allein genügt nicht.

Zweifellos bietet das Feld der Visualisierung große Narrenfreiheit. Wer aber hochwertige Visualisierung machen will, Visualisierung, die nicht nur flüchtige Skizzen liefert, *die auch zu wissenschaftlicher Erkenntnis taugt, der bediene sich der Geometrie*. Platon schrieb über seine Akademie in Athen den berühmten Satz: „*Kein der Geometrie Unkundiger möge hier eintreten!*“ Wir schließen mit der Variante: „*Kein der Geometrie Unkundiger möge in die Visualisierung eintreten!*“

Abbildungsnachweise

Die Abbildungen 5–9, 13–15, 17, 18, 21, 22, 28, 29 sind dem Archiv des Autors entnommen.

Abb. 1 und 2 sind Bearbeitungen des Holzschnitts „Der Zeichner der Laute“ von Albrecht Dürer (1525) aus *Underweysung der messung/mit dem zirckel vn richtscheyt/in Linien ebenen und gantzen corporen ...* (Faksimile-Ausgabe Zürich 1966).

Abb. 3 stammt aus einem Katalog der Galerie Silvano Lodi jr. aus Mailand. Es handelt sich um Hans Vredeman de Vries: Die Heiligen Peter und Paul am schönen Tor des Tempels.

Abb. 4 wurde von der Grafikagentur Daily Art in Frankfurt/Main erstellt.

Abb. 5 zeigt Venedig im Jahr 1500 nach einem von Jacopo de Barbari angefertigten Holzschnitt.

Abb. 10 stammt aus G. Sammet: *Der vermessene Planet* (Hamburg 1990),

Abb. 11 aus Jahnke-Emde-Lösch: *Tafeln höherer Funktionen*, 6. Aufl. (Stuttgart 1960),

Abb. 12 und Abb. 27 (Mitte) aus Giering-Seybold: *Konstruktive Ingenieurgeometrie*, 3. Aufl. (München 1987).

Abb. 16 (nach einem Stich in den *Harmonices mundi* von Johannes Kepler (1619)) stammt aus F. L. Bauer: *Einladung zur Mathematik*, Deutsches Museum (München 1999).

Abb. 19 stammt aus „*Ein Jahrhundert Mathematik 1890–1990*“, Festschrift zum Jubiläum der DMV (Braunschweig 1990),

Abb. 20 aus L. Burmester: *Atlas zur Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmäßig gestalteter Flächen* (Leipzig 1875).

Abb. 23 ist eine Bearbeitung einer Abbildung aus S. Hahmann: *Stabilitäts- und Qualitätsanalyse von Freiformflächen* (Diss. Univ. Kaiserslautern 1994).

Abb. 24 stammt aus G. Fischer: *Mathematische Modelle* (Braunschweig 1986),

Abb. 26 aus Hilbert-Cohn-Vossen: *Anschauliche Geometrie* (Berlin 1932),

Abb. 27 (oben) aus McLeod-Baart: *Geometry and Interpolation of Curves and Surfaces* (Cambridge 1998),

Abb. 27 (unten) aus I. Pál: *Raumgeometrie in der technischen Praxis* (Budapest 1974).

Adresse des Autors

Prof. Dr. Oswald Giering

TU München

Zentrum Mathematik

80290 München

giering@mathematik.tu-muenchen.de

⁵ Siehe etwa R. Cipolla/P. Giblin: *Visual Motion of Curves and Surfaces*. Cambridge Univ. Press Cambridge 2000.