

SPRUNGANTWORTEN DER SAITE UND ANSTREICHVORGANG

E. Terhardt

Lehrstuhl für Elektroakustik der Technischen Universität München

Die Schwingung einer angestrichenen Saite ist durch die fortgesetzte, nahezu abrupte Abwechslung von Haft- und Gleitphasen gekennzeichnet. Wie schon Helmholtz [1] aufgrund experimenteller Beobachtungen beschrieben hat, stehen die Dauern der Haft- und Gleitphasen im selben Verhältnis zueinander wie die Längen der Saitenstücke beiderseits des Anstreichpunktes, und die Summe von Haftphase T_H und Gleitphase T_G stimmt weitgehend mit der Grundperiode T der frei ausschlagenden Saite überein. Die Saitenschnelle v_s am Anstreichpunkt hat angenähert den in Bild 1 schematisch dargestellten Zeitverlauf.

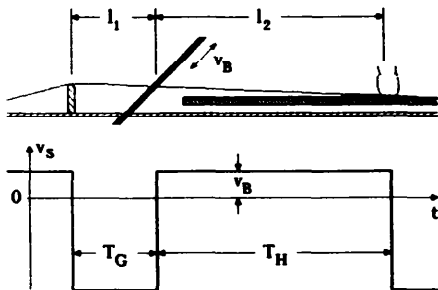


Bild 1

Diese Tatsachen weisen darauf hin, daß trotz der intensiven Einwirkung der nichtlinearen Reibungsvorgänge die resultierende Schwingung weitestgehend durch die dynamischen Charakteristika der Saite als solcher bestimmt ist, und zwar ausschließlich insofern, wie dieselben sich im Anstreichpunkt bemerkbar machen. Da die Saite näherungsweise als linearer Schwinger angesehen werden kann, ist es letztlich allein ihre komplexe Impedanz im Anstreichpunkt - bzw. die ihr

mathematisch äquivalente Impuls- oder Sprungantwort - welche den Anstreichvorgang beherrscht.

Unter der komplexen Impedanz $Z_1(s)$ wird hier das Verhältnis der Laplace-Transformierten der Kraft-Zeitfunktion zu derjenigen der Schnelle-Zeitfunktion im Anstreichpunkt verstanden. Aus ihr lassen sich durch inverse L-Transformation zwei Sprungantworten ermitteln, nämlich 1) die Kraft, welche durch einen Einheitsprung der Schnelle hervorgerufen wird, welcher im Zeitpunkt $t=0$ stattfindet; und 2) die Schnelle, welche durch einen entsprechenden Einheitsprung der Kraft hervorgerufen wird. Die erstere der beiden Sprungantworten sei mit $z_1(t)$ bezeichnet, die letztere mit $y_1(t)$. Dann gilt

$$z_1(t) \circ \rightarrow \frac{1}{s} Z_1(s); \tag{1}$$

$$y_1(t) \circ \rightarrow \frac{1}{s Z_1(s)}. \tag{2}$$

Aufgrund der Tatsache, daß man die Energieverluste auf der Saite als sehr gering voraussetzen kann, ergeben sich für die Kennimpedanz Z_s der Saite sowie die komplexe Wellenfunktion $\gamma(s)$ folgende einfache Ausdrücke (vgl. [2]):

$$Z_s = \sqrt{MF} \quad (3)$$

(M = Massenbelag; F = Spannkraft); und

$$\gamma(s) = \alpha + s/c, \quad (4)$$

wobei c die Phasengeschwindigkeit

$$c = \sqrt{F/M} \quad (5)$$

für Transversalwellen auf der Saite bedeutet. Zur Beschreibung der grundlegenden Aspekte der Saitendynamik ist es zweckmäßig und zulässig, Dispersion zu ignorieren, das heißt, c als frequenz- und amplitudenunabhängig anzunehmen. Die Energieverluste auf der Saite werden in Gl.(4) durch eine frequenzunabhängige Dämpfungskonstante α berücksichtigt. Dieser Ansatz entspricht zwar streng genommen nicht genau den physikalischen Tatsachen; er ist für den vorliegenden Zweck trotzdem zulässig, weil voraussetzungsgemäß jene Verluste so klein sind, daß ihre Frequenzabhängigkeit als Effekt zweiter Ordnung ignoriert werden kann.

Für die komplexe Impedanz im Anstreichpunkt gilt damit bei unendlich großen Abschlußimpedanzen an beiden Enden der Saite

$$Z_1(s) = Z_s [\coth(\alpha + s/c)l_1 + \coth(\alpha + s/c)l_2], \quad (6)$$

wobei mit l_1 und l_2 die Längen der Saitenstücke beiderseits des Anstreichpunktes bezeichnet werden. Setzt man in Gl.(6) $s = j\omega$, so erhält man die komplexe Impedanz als Funktion der Frequenz, vgl. [2].

Um die gesuchten Sprungantworten zu erhalten, ist Gl.(6) in Gl.(1) bzw. (2) einzusetzen und die inverse L-Transformation durchzuführen (vgl. z.B. [3]). Für die Kraft-Sprungantwort ergibt sich

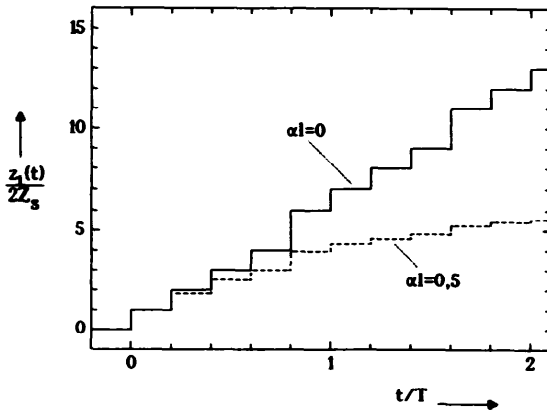
$$\begin{aligned} z_1(t) &= 0 \quad \text{für } t < 0; \\ z_1(t) &= Z_s [1 + e^{2\alpha l_1} - 2e^{-2\alpha l_1 \text{Int}(t/T_1)}] / (e^{2\alpha l_1} - 1) \\ &\quad + Z_s [1 + e^{2\alpha l_2} - 2e^{-2\alpha l_2 \text{Int}(t/T_2)}] / (e^{2\alpha l_2} - 1) \quad \text{für } t > 0. \end{aligned} \quad (7)$$

In Gl.(7) bedeuten T_1 und T_2 diejenigen Periodendauern, welche zu den Saitenlängen l_1 bzw. l_2 gehören. Sie betragen

$$T_1 = 2l_1/c; \quad (8)$$

$$T_2 = 2l_2/c. \quad (9)$$

Die Funktion $\text{Int}(x)$ in Gl.(7) bedeutet "Ganzzahliger Teil des Dezimalbruchs x ". Bild 2 zeigt als Beispiel die normierte Kraft-Sprungantwort für ein willkürlich angenommenes Längenverhältnis $l_1/l_2 = 5$ und die beiden Dämpfungswerte $\alpha = 0$ und $\alpha = 0,5/l_1$, wobei $l = l_1 + l_2$.



Die Sprungantwort der Schnelle $y_1(t)$ gewinnt man durch Einsetzen von (6) in (2), passende Umformung und Aufsuchen der inversen Transformaten in einer LT-Tabelle. Die Funktion $y_1(t)$ wird zweckmäßigerweise als Summe dreier Anteile ausgedrückt, das heißt, $y_1(t) = y_{11}(t) + y_{12}(t) + y_{13}(t)$, wobei

Bild 2. Normierte Sprungantwort der Kraft (Ordinate) als Funktion der normierten Zeit. Längenverhältnis der Saitenstücke $l/l_1 = 5$. Berechnet mit Gl.(7).

$$y_{11}(t) = 0 \quad \text{für } t < 0;$$

$$y_{11}(t) = [e^{2\alpha l} + 1 - 2e^{-2\alpha l \ln t(t/T)}] / [2Z_s(e^{2\alpha l} - 1)] \quad \text{für } t \geq 0; \quad (10)$$

$$y_{12}(t) = 0 \quad \text{für } t < T_1;$$

$$y_{12}(t) = -e^{-2\alpha l_1} [e^{2\alpha l} - e^{-2\alpha l \ln[(t-T_1)/T]}] / [2Z_s(e^{2\alpha l} - 1)] \quad \text{für } t \geq T_1; \quad (11)$$

$$y_{13}(t) = 0 \quad \text{für } t < T_2;$$

$$y_{13}(t) = -e^{-2\alpha l_2} [e^{2\alpha l} - e^{-2\alpha l \ln[(t-T_2)/T]}] / [2Z_s(e^{2\alpha l} - 1)] \quad \text{für } t \geq T_2. \quad (12)$$

In Gl.(10-12) bedeutet T die Grundperiode, das heißt

$$T = 2l/c. \quad (13)$$

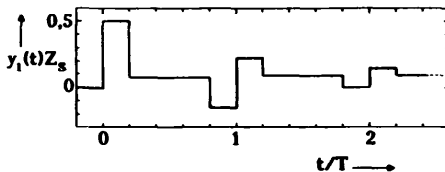


Bild 3. Normierte Sprungantwort der Schnelle der Saite am Anstreichpunkt als Funktion der normierten Zeit; $l/l_1 = 5$; $\alpha l = 0,5$.

Bild 3 zeigt als Beispiel die normierte Sprungantwort der Schnelle für ein willkürlich angenommenes Verhältnis der Saitenstücke von $l/l_1 = 5$.

Die eingangs geschilderten Gesetzmäßigkeiten der gestrichenen Saitenschwingung kann man damit folgendermaßen erklären. Angenommen, der Vorgang beginne damit, daß die Saite ruckartig auf die konstante Bogengeschwindigkeit beschleunigt wird (Haftphase). Dann ergibt sich der Zeitverlauf der Tangentialkraft zwischen Saite und Bogenhaaren aus der Kraft-Sprungantwort. Wie Bild 2 zeigt, steigt die Kraft stufenartig solange an, bis die maximal mögliche Haftreibungskraft erreicht wird. Letztere ist durch die konstante Normalkraft des Bogens auf die Saite, den sogenannten Bogen-
druck, festgelegt. Wird derselbe passend gewählt, so erfolgt der Übergang in die Gleitphase in demjenigen Augenblick, in welchem die Tangentialkraft den in Bild 2 erkennbaren größeren Sprung ausführt, also im Zeitpunkt $T_2 = T_1/1$. In der darauffolgenden Gleitphase führt die Saite im wesentlichen die Schnelle-Sprungantwort (Bild 3) mit negativem Vorzeichen aus, weil beim Abriß die Kraft auf nahezu null springt. Wie Bild 3 zeigt, kehrt die Schnelle des unter den Bogenhaaren liegenden Saitenpunktes nach der Zeit $T_1 = T_1/1$ auf einen Wert nahe bei null zurück, so daß die Saite wieder von den Bogenhaaren mitgenommen wird, und der Vorgang sich wiederholt. Die Dauern von Haft- und Gleitphase müssen sich also in der Tat wie l_2/l_1 verhalten und die Gesamtperiode beträgt $T(l_2/1 + l_1/1) = T$.

Die maximale Haftreibungskraft, welche zur Erzielung des obigen Schwingungsverhaltens mit Hilfe des Bogendruckes hergestellt werden muß, ergibt sich aus Gl.(7). Sie muß zwischen den beiden Grenzwerte F_{HI} und F_{HZ} liegen; diese betragen im Falle vernachlässigbarer Dämpfung

$$F_{HZ} = 2v_B Z_S (l/l_1 + 1) \quad \text{und} \quad (14)$$

$$F_{HI} = 2v_B Z_S (l/l_1 - 1). \quad (15)$$

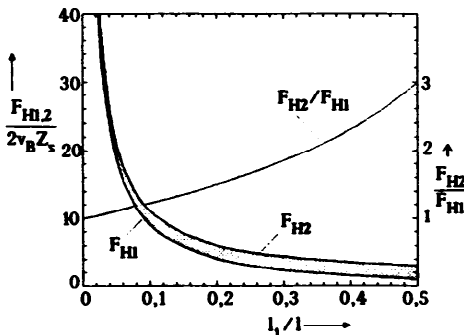


Bild 4 veranschaulicht den Spielraum, welcher sich danach für die maximale Haftreibungskraft ergibt, sowie das Verhältnis der beiden Grenzwerte. Da die maximale Haftreibungskraft näherungsweise proportional zum Bogen-
druck ist, ergibt sich der letztere aus Gl.(14, 15), falls der Reibungsfaktor bekannt ist. Vgl. hierzu [4, 5].

Bild 4. Die Grenzwerte der Haftreibungskraft und ihr Quotient, als Funktion von l_1/l .

Literaturangaben

- [1] Helmholtz, H., Die Lehre von den Tonempfindungen. 6. Aufl., S. 615-619, Vieweg, Braunschweig, 1913. [2] Terhardt, E., System theory approach to musical string instruments: Frequency characteristics and step-responses at point of excitation. Eingereicht (1988). [3] Bronstein/Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/M. (1985). [4] Schelleng, J.C., The bowed string and the player. J. Acoust. Soc. Am. 53, 26-41 (1973). [5] Meyer, J., Physikalische Aspekte des Geigenspiels. Verlag Instrumentenbau-Zeitschrift, Segburg, 1978.