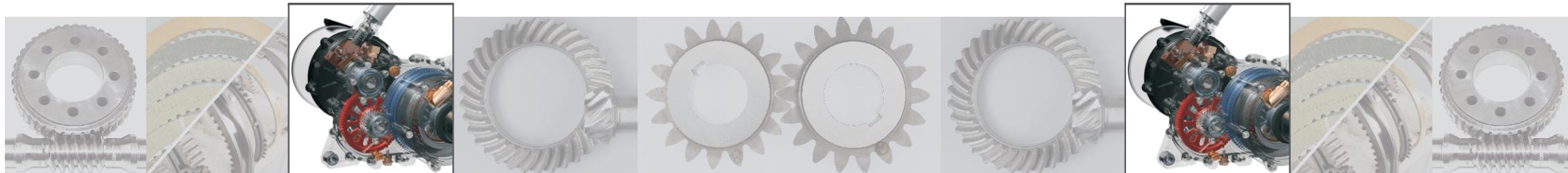


## Lastverteilung und Anregungsverhalten in Planetengetriebesystemen

**Benedikt Neubauer**



Lehrstuhl für Maschinenelemente  
Forschungsstelle für Zahnräder  
und Getriebebau



# **Lastverteilung und Anregungsverhalten in Planetengetriebesystemen**

Bestimmung des Lastaufteilungsverhaltens, Berechnung und Optimierung der  
Lastverteilung und des Anregungsverhaltens in den Zahneingriffen von  
Planetengetrieben in Wechselwirkung mit dem komplexen Getriebeumfeld

**Benedikt Neubauer**

Vollständiger Abdruck der von der  
Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Universität München  
zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doktor-Ingenieurs**

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Georg Wachtmeister  
Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Karsten Stahl  
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Berthold Schlecht,  
Technische Universität Dresden

Die Dissertation wurde am 02.10.2015 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch  
die Fakultät für Maschinenwesen am 29.02.2016 angenommen.



## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit an der FZG im Rahmen zweier Forschungsvorhaben, die von der Forschungsvereinigung für Antriebstechnik e.V. (FVA) aus Eigenmitteln finanziert und gefördert wurden.

Ein herzliches Dankeschön ergeht an alle, die Ihren Teil zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Prof. Dr.-Ing. Karsten Stahl für die Betreuung der Arbeit und die Diskussionsbereitschaft während dieser Zeit, Herrn Prof. Dr.-Ing. Bernd-Robert Höhn für die Chance, meinen Weg an der FZG zu gehen, Herrn Prof. Dr.-Ing. Berthold Schlecht für die Übernahme des Korreferats und die Bereitschaft zur Durchsicht der Arbeit sowie Herrn Prof. Dr.-Ing. Georg Wachtmeister für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes und die gute Prüfungsatmosphäre.

Ohne den stetigen Rückhalt sowie das Schaffen geeigneter Randbedingungen durch meinen Forschungsgruppenleiter Dr.-Ing. Michael Otto und sein anhaltendes Vertrauen wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen. Für deine Expertise und persönliche Unterstützung sowie die erfolgreiche Zusammenarbeit in vielen Projekten, von der ich im beruflichen Alltag ständig profitiere, danke ich dir.

Herrn Dr.-Ing. Peter Oster gilt besonderer Dank dafür, dass er seine Erfahrung und seinen Weitblick mit uns jungen Ingenieuren teilt. Vielen Dank für das entgegengebrachte Vertrauen in gemeinsamen Projekten sowie die angenehm geistreichen und lehrreichen Gespräche.

Ein riesengroßer Dank ergeht an die allerbesten Bürokollegen aller Zeiten, namentlich und nicht zugleich Michael Heider, Jens Bahr, Max Fromberger, Bernhard Kohn, Uwe Weinberger und Thanak Utakapan alias Kong. Ihr tragt großen Anteil am Zustandekommen dieser Arbeit durch stetigen fachlichen Diskurs und herausragende Zusammenarbeit. Vielen Dank für eure Freundschaft, die schöne Zeit und die vielen gemeinsamen Erlebnisse!

Nichtfachliche Initiativen wie die Kafferunde, der FZG-Chor, FZG-Skifahren und die FZG-Band - bei deren Mitstreitern Bernhard Kohn, Max Fromberger, Stefan Schurer und Max Zimmer ich mich für das geniale musikalische Zusammenwirken bedanke - sowie die soziale Kompetenz unserer lieben Konny Güth gehören unbedingt zum erfolgreichen Miteinander. Ich danke allen Kolleginnen und Kollegen, insbesondere Falko Thoma für die Einführung in die RIKOR- und FORTRAN-Welt sowie Markus Daffner, Thomas Jurkschat, Thomas Schleich und Christoph Nitsch für die gemeinsame erfolgreiche Arbeit und den freundschaftlichen Umgang.

Durch das Zutun von Franz Kurth wurde mein Interesse für Zahnräder und Getriebe geweckt und der Weg an die FZG aufgezeigt, so dass wir auch heute wieder gemeinsam an Planetenradsätzen und Differentialen arbeiten. Vielen Dank für dein Vertrauen und deine Freundschaft.

Ich danke allen Studierenden, die im Rahmen ihrer Studienarbeiten oder als wissenschaftliche Hilfskräfte zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben. Besonderer Dank geht an Markus Hofer.

Allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern an der FZG aus den Bereichen Sekretariat/Verwaltung, Werkstatt, Prüffeld und E-Labor gilt ein herzlicher Dank für die stete Unterstützung.

Meiner Frau Annett gebührt größter Dank für die liebevolle Bereitschaft, oft auf meine Anwesenheit zu verzichten und die Erziehung der Kinder neben der eigenen Berufstätigkeit meist alleine zu stemmen. In der meist knapp bemessenen Freizeit stellt ihr, Jakob und Lorenz, Ausgleich und Gegenpol zum Arbeitsalltag dar. Vielen Dank für eure tägliche Portion Liebe und Geborgenheit.

Herzogenaurach, im April 2016

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	1
1.1	Problemstellung und Ziel der Arbeit	1
1.2	Lösungsweg	2
<b>2</b>	<b>Stand des Wissens</b>	5
2.1	Wichtige Begriffsdefinitionen	5
2.2	Berechnung der Lastverteilung in Stirnradgetrieben	9
2.3	Berechnung des Anregungs- und Schwingungsverhalten von Stirnradstufen	13
2.4	Berechnung von Lastaufteilung, Anregungs- und Schwingungsverhalten in Planetenstufen	16
2.5	Räumliche Last- und Verformungsanalyse in Planetengetriebesystemen	27
2.6	Berechnung der Phasenverschiebung in Planetengetrieben	32
2.7	Diskussion zum Stand des Wissens	35
<b>3</b>	<b>Statische Last- und Verformungsanalyse in Planetengetriebesystemen</b>	39
3.1	Vorgehensweise zur Beschreibung von Gesamtgetriebesystemen mit Planetenradstufen	39
3.2	Beschreibung eines linear-elastischen Gesamtgetriebemodells	40
3.2.1	Mathematische Formulierung der linear-elastischen Systembeschreibung	41
3.2.2	Abbildung von Wellen	44
3.2.3	Abbildung von Lagerstellen	47
3.2.4	Abbildung einzelner Zahnpaare mit eingriffsstellungsabhängiger Steifigkeit	50
3.2.5	Erfassung von Zahneingriffen mit mittlerer Eingriffssteifigkeit	57
3.2.6	Erfassung des Steifigkeitsverhaltens von Strukturauteilen	59
3.2.7	Zusammenbau der Steifigkeitsmatrix des Gesamtgetriebes	63
3.2.8	Lösen des linear-elastischen Gesamtgetriebemodells	63
3.3	Erfassung des Steifigkeitsverhaltens von Wälzlagern	65
3.3.1	Zusammenhang zwischen Verschiebungs- und Belastungszustand am Wälzlager	67
3.3.2	Iteratives Verfahren zur Beschreibung des Steifigkeitsverhaltens von Wälzlagern in linearen Gleichungssystemen	68
3.3.3	Bestimmung des Verformungszustands eines Lagers im linear-elastischen Getriebesystem	73
3.3.4	Abgleich der Belastungszustände der Lager im linear-elastischen System	74
3.3.5	Konvergenzprüfung bei Bestimmung des Lagerverhaltens	75
3.3.6	Steuerungsmechanismus des Iterationsverfahrens	77

3.4	Erfassung nichtlinearer Anteile im Steifigkeitsverhalten von Zahneingriffen ..	78
3.5	Zusammenfassende Beschreibung der statischen Last- und Verformungsanalyse im Gesamtgetriebesystem .....	81
<b>4</b>	<b>Untersuchungen zum Last- und Verformungsverhalten in Planetengetriebesystemen .....</b>	<b>83</b>
4.1	Lastaufteilung und Lastverteilung im Planetengetriebe .....	84
4.2	Zusammenhänge zwischen Verformungs- und Lastverhalten von Planetengetrieben bei einstellbaren Zentralwellen .....	88
4.2.1	Einfluss des elastischen Getriebeumfelds auf das Lastverhalten .....	89
4.2.2	Einfluss der Planetenzahl auf das Lastverhalten .....	90
4.2.3	Einfluss einstellbarer Zentralwellen auf das Lastverhalten .....	91
4.3	Einfluss des Verformungsverhaltens des gekoppelten Systems Planetenträger-Bolzen-Lagerung-Planet auf die Korrekturauslegung .....	94
4.4	Last- und Verformungsverhalten bei spielbehafteter Planetenradlagerung ...	98
4.5	Anwendung von flexiblen Planetenbolzen .....	100
4.6	Zusammenfassung der Ergebnisse .....	105
<b>5</b>	<b>Untersuchungen zum Anregungsverhalten von Planetengetriebesystemen .....</b>	<b>107</b>
5.1	Abwälzsimulation im Gesamtgetriebesystem unter Einfluss der Eingriffsfolge	108
5.2	Studie zum Anregungsverhalten an untersuchten Getriebvarianten .....	111
5.3	Wegbasierte Untersuchung der Anregung im statischen Gesamtgetriebesystem .....	112
5.3.1	Grundgedanken zur Drehwegabweichung einer einzelnen Stirnradstufe ...	112
5.3.2	Betrachtung der Drehwegabweichung in den Zahneingriffen einer Planetenstufe .....	114
5.4	Bestimmung der Gesamtdrehwinkeldifferenz von Planetengetrieben .....	121
5.4.1	Gesamtdrehwinkeldifferenz bei Geradverzahnung .....	121
5.4.2	Gesamtdrehwinkeldifferenz bei Schrägverzahnung .....	125
5.5	Verzahnungskorrekturen bei wechselseitiger Beeinflussung im Getriebesystem .....	128
5.6	Zusammenfassung der Ergebnisse .....	132
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick .....</b>	<b>133</b>
<b>Literatur .....</b>		<b>139</b>

## Formelzeichen und Definitionen

Zeichen	Einheit	Benennung
$F_{N\ i\ max}$	N	höchste zu übertragende Zahnnormalkraft in der Planetenradstufe
$F_{N\ i}$	N	Zahnnormalkraft eines Zahneingriffes i der Planetenradstufe
$F_{N\ mittel}$	N	mittlere übertragene Zahnnormalkraft
$\underline{\underline{a}}_{K,ZE\ i\ j}$	—	Transformationsmatrix für einen Knoten der Elementsteifigkeitsmatrix
$\underline{\underline{b}}_{=i\ j}$	—	Transformationsmatrix Elementsteifigkeitsmatrix im Zahneingriff
$ZE\ \underline{\underline{c}}_{i\ j}$	$\frac{N}{mm}$	Räumliche Koppelung der Verformung eines Zahnpaars am Punkt j der Berührlinie bei Belastung an Punkt i
$B\underline{f}_i$		Belastung des Strukturauteils am Punkt i
$B\underline{f}$		Belastungsvektor des Strukturauteils
$I\underline{f}$		Lastvektor des Systems
$ZE\underline{f}_i$	N	Belastungsvektor des Zahneingriffs am Punkt i
$B\underline{u}_j$		Verformung des Strukturauteils am Punkt j
$B\underline{u}$		Verformungsvektor des Strukturauteils
$A_S$	$mm^2$	Querschnittsfläche Schub des Wellenabsatzes
$A_1 E_1$	mm	Eingriffsstrecke des Sonnenradeingriffs
$A_2 E_2$	mm	Eingriffsstrecke des Hohlradeingriffs
$A$	$mm^2$	Querschnittsfläche des Wellenabsatzes
$E$	$N/mm^2$	Elastizitätsmodul der Welle
$F_{L,i}$	N	Lagerlast im aktuellen oder vorhergehenden Schritt
$F_{L,k-1}$	N	Lagerkraft im vorherigen Schritt
$F_{Steuer,i}$	N	Steuerlast im Schritt i
$F_{Steuer}$	N	vom Regler bestimmte Steuerlast
$F_{x1}$	N	Kraftwirkung auf die Welle
$G$	$N/mm^2$	Schubmodul der Welle
$I_p$	$mm^4$	polares Flächenträgheitsmoment des Wellenabschnitts
$I$	$mm^4$	Flächenträgheitsmoment des Wellenabschnitts
$K_P$	—	Proportionalbeiwert
$Z_{Z/H}$	—	Zähnezahl von Sonnen- bzw. Hohlrad
$\Delta P\nu_{eZ/H}$	mm	Phasenverschiebung auf der Eingriffsstrecke
$\Delta P\nu_{ep}$	mm	Phasenversatz am Planetenrad
$\Delta\varphi(i)$	rad	Abweichungswinkel von einer symmetrischen Stegteilung
$\Psi_{ij}$	rad	Winkel zwischen den Planeten i und j
$\alpha_{wt}$	°	Betriebseingriffswinkel eines Stirnradpaars
$\beta$	°	Schrägungswinkel
$\kappa$	—	Schubeinflusszahl
$\nu$	—	Querkontraktionszahl
$\pi$	—	Kreiszahl
$\psi$	—	Schubparameter
$F_{\beta\ y}$	$\mu m$	maximale wirksame Flankenlinienabweichung im Eingriff

wird fortgesetzt

Zeichen	Einheit	Benennung
$F_{m,min,max}$	$\frac{N}{mm}$	Breitenlast (Indizes: Mittelwert, Minimum und Maximum)
$K_\gamma$	—	Lastaufteilungsfaktor einer Planetenradstufe
$B\underline{\underline{C}}$		Elementsteifigkeitsmatrix Balkenelement i B-System
$F_\varphi \underline{\underline{C}}$	$\frac{Nm}{rad}$	Steifigkeitsmatrix der Dreheder
$F \underline{\underline{C}}$	$\frac{N}{mm}$	Steifigkeitsmatrix der Feder
$I \underline{\underline{C}}$		Systemsteifigkeitsmatrix
$SB \underline{\underline{C}}$		reduzierte Steifigkeitsmatrix des Strukturauteils
$I \underline{\underline{D}}$		Systemdämpfungsmaatrix
$I \underline{\underline{M}}$		Systemmassenmatrix
$B \underline{\underline{c}}_{ij}$		Steifigkeit des Strukturauteils verknüpft Belastung am Punkt i mit Verformung am Punkt j
$Lag \underline{e}_{ITS}$	—	Vektor der Regelabweichungen
$B \underline{f}$		Belastungsvektor im B-System
$F \underline{f}_{Steuer}$	$F$	Steuerlastvektor der Feder
$F \underline{f}$	$F$	Lastvektor der Feder
$I \underline{f}$		Lastvektor des Systems
$Lag \underline{f}_L$		Vektor der Lagerlasten aus der LAGER2-Berechnung
$Lag \underline{f}_{Steuer}$		Vektor der Steuerlasten des letzten Iterationsschrittes
$Lag \underline{f}_W$		Vektor der Lagerlasten aus der Systemberechnung
$F_\varphi \underline{m}$	Nmm	Lastvektor der Drehfeder
$I \underline{r}_{Rad1}$	mm	Ortsvektor des Kontaktpunktes auf Zahnflanke Rad 1
$I \underline{r}_{Rad2}$	mm	Ortsvektor des Kontaktpunktes auf Zahnflanke Rad 2
$B \underline{u}$		Verschiebungsvektor im B-System
$F_\varphi \underline{u}$	rad	Verschiebungsvektor der Drehfeder
$F \underline{u}$	mm	Verschiebungsvektor der Feder
$I \underline{u}$		Systemverschiebungsvektor
$Lag \underline{u}_{ARLos}$		Durch Iterationssteuerung vorgegebene Verschiebung des Außenrings
$Lag \underline{u}_{IR}$		Verschiebungsvektor des Lagerinnenrings
$Lag \underline{u}_{Lager}$		Verschiebungsvektor des Lagers im linear-elastischen System
$ZE \underline{u}_j$	mm	Verformungsvektor des Zahneingriffs am Punkt j
$c_\gamma$	$\frac{N}{\mu m mm}$	auf die Verzahnungsbreite bezogene mittlere Verzahnungssteifigkeit
$f_m$	$\mu m$	mittlere Verformung der Verzahnung unter Last
$n_{pl}$	—	Anzahl der Planeten
$\varepsilon_{ITS}$	$N$	Schranke für die Iteration
$\varphi_{ji}$	rad	Verdrehung des Elements i um Richtung j
$\varphi_{ji}$	rad	Verschiebung des Knotens i in Richtung j
$\xi, v, \zeta$		Koordinaten des B-Systems
$c_\varphi$	$\frac{Nm}{rad}$	Drehfedersteifigkeit
$c$	$\frac{N}{mm}$	Steifigkeit der Feder
$d_b$	mm	Grundkreisdurchmesser eines Zahnrades
$d_a$	mm	Außendurchmesser des Wellenabsatzes
$d_i$	mm	Innendurchmesser des Wellenabsatzes

wird fortgesetzt

Zeichen	Einheit	Benennung
$e_{ITS,k}$	–	Regelabweichung im Schritt $k$
$e_{ITS}$	$N$	Regelabweichung
$g_{f1}$	mm	Kopfeingriffsstrecke des Planetenrades im Sonnenradeingriff
$g_{f2}$	mm	Kopfeingriffsstrecke des Hohlrades
$h_1, h_2$	mm	Berechnete Strecken auf der Eingriffslinie, siehe <b>Bild 6a</b> und <b>Bild 6b</b>
$i, \hat{i}$		Index des Starrkörpers an Anschlus 1 und 2
$i, j$		Indizes der benachbarten Planetenräder
$l_2$	mm	halbe Verformung der Feder
$m_{ji}$	Nmm	Moment um Achse $j$ am Knoten $i$
$n_{i,j}$	$\frac{mm}{N}$	Nachgiebigkeit eines Zahnpaares - koppelt Verschiebung am Punkt $j$ mit Last am Punkt $i$
$p_e$	mm	Eingriffsteilung
$p$	–	Anzahl der Planeten
$s_F$	–	Faktor zur Berechnung der Schranke
$u_i$	mm	Verformung des Zahneingriffs am Punkt $i$
$u_{ji}$	mm	Verschiebung des Elements $i$ in Richtung $j$

Hinweis: Für Vektoren und Matrizen, die gleichzeitig translatorische und rotatorische Freiheitsgrade beschreiben, werden in der Übersicht keine Einheiten angegeben. Diese sind aus den formelmäßigen Zusammenhängen abzuleiten.



# 1 Einleitung

Getriebe sind zentrale Elemente in Antriebssystemen und im Maschinenbau. Eingesetzt werden Getriebe zur Leistungsübertragung bei gleichzeitiger Drehmoment- und Drehzahlwandlung in unterschiedlichen Baugrößen und Leistungsklassen. Zuverlässiger Lauf über lange Betriebszeiten bei gleichzeitig hoher Leistungsdichte und optimalem Wirkungsgrad sind für den wirtschaftlichen Einsatz von Getriebesystemen von großer Bedeutung. Bei der Auslegung und Berechnung von Getriebesystemen gilt es daher, die Ziele möglichst hoher Tragfähigkeit bei voller Ausnutzung des Werkstoffpotentials zu erreichen und gleichzeitig Schwingungsanregung sowie Verlustleistung im System möglichst gering zu halten.

Müssen hohe mechanische Leistungen auf stark begrenztem Raum übertragen werden, kommen neben einfachen Stirnradgetrieben auch Planetengetriebesysteme zum Einsatz. Dort wird die übertragene Leistung im Getriebe auf mehrere Planeten verzweigt und die Leistungsdichte des Systems gesteigert. Häufig werden Planetenradstufen mit weiteren Planetenradsätzen oder Stirnradstufen gekoppelt, um hohe Übersetzungsverhältnisse bei kompakter Bauweise zu realisieren. Aufgrund dieser Koppelung und durch die Leistungsverzweigung in den einzelnen Planetenradstufen weisen diese Getriebe eine erhöhte Komplexität bei der Auslegung, Simulation sowie dem Tragfähigkeitsnachweis auf. Verfahren zur Auslegung geeigneter Verzahnungskorrekturen in Getriebesystemen mit Planetenradstufen müssen komplexe Zusammenhänge bei Last- und Verformungsverhalten gesamter Getriebesysteme hinreichend beschreiben. Gleichmäßige Belastung der Verzahnung und anregungssarmer Lauf können durch Korrekturen der Verzahnungsgeometrie verbessert werden.

## 1.1 Problemstellung und Ziel der Arbeit

Die Lastverteilung in den Zahneingriffen von Planetenradstufen wird durch die radiale Verlagerung der Zentralwellen bestimmt. Die Verlagerungen der Zentralwellen sind über die Planetenradeingriffe miteinander gekoppelt. Die Verlagerung der Planetenräder ist oft von der Verformung des Planetenträgers, der Planetenbolzen sowie der Lage rung zwischen Planetenbolzen und Planetenwelle abhängig. Die Betrachtung einzelner Stirnradstufen und Welle-Lager-Systeme bildet in Planetengetriebesystemen auftretende Verlagerungseinflüsse nicht ausreichend ab. Drehschwingungen von Zentralwellen werden vom Drehwegverhalten aller Zahneingriffe im Planetengetriebe und deren Kop pelung über innere, kinematische Zusammenhänge angeregt. Erst durch die Bestim mung des Drehwegverhaltens in gekoppelten Getriebesystemen können die Auswir

kungen von Eingriffsfolge und Stegteilung sowie Herstellungsabweichungen auf das Anregungsverhalten untersucht werden. Die Berechnung der Lastverteilung und die Bestimmung des Anregungsverhaltens in den Zahneingriffen von Planetenstufen muss unter direkter Erfassung des Verformungsverhaltens des gesamten Getriebesystems erfolgen. Ein solches Verfahren zur Abbildung eines Gesamtgetriebesystems als gekoppeltes System aus Welle, Lagern und Zahneingriffen ist für die Berechnung der Lastverteilung in den Zahneingriffen von Planetenstufen unerlässlich.

Zur detaillierten Auslegung einzelner Stirnradstufen ist umfangreiches Wissen und vielfach Praxiserfahrung verfügbar. Für Konstruktion und Auslegung von Planetengetriebesystemen sind computergestützte Berechnungswerzeuge erforderlich, die das komplexe Zusammenspiel aus Lastaufteilung und Zentralwellenverlagerung erfassen und gleichzeitig eine zeiteffiziente, schnelle und zuverlässige Berechnung von Last- und Verformungszuständen im gesamten Getriebesystem ermöglichen.

In der Literatur beschriebene und für den Anwender verfügbare Ansätze zur schnellen Last- und Verformungsanalyse in Planetengetrieben weisen oft Einschränkungen bei Modellierung und Erfassung von Verformungs- und Verlagerungseinflüssen aus dem Getriebeumfeld auf. Bestehende Verfahren zur Beschreibung des Verformungsverhaltens zusammenhängender Getriebesysteme auf Basis von FE-Ansätzen benötigen häufig hohe Rechenzeiten und weisen Nachteile bei der Parametrierbarkeit des Rechenmodells und der Erfassung der Verformung einzelner Getriebekomponenten (Lager) auf.

Ziel dieser Arbeit ist es, ein Verfahren zur Last- und Verformungsanalyse in Getriebesystemen mit Planetenradstufen zu beschreiben und in einem Berechnungswerzeug für die Anwendung in frühen, iterativen Auslegungsprozessen von Getrieben zugänglich zu machen. Bewährte analytische Berechnungsansätze zur Beschreibung von Wälzlagern und Verzahnungen kombiniert mit Ansätzen zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens gekoppelter Systeme ermöglichen dabei die effiziente und schnelle Berechnung des statischen Last-, Verformungs- und Anregungsverhaltens unter Erfassung der Einflüsse im gesamten Getriebesystem. Einsatzbereich einer solchen Berechnungsmethode ist die unterstützende Untersuchung des Last- und Anregungsverhaltens im Auslegungsprozess von Getriebesystemen zur Bestimmung geeigneter Korrekturen.

## 1.2 Lösungsweg

Um das Last- und Verformungsverhalten von Planetengetriebesystemen beschreiben zu können, wird ein Verfahren entwickelt, welches das statische Verformungsverhalten

aller relevanten Getriebeelemente gekoppelt erfasst. Die Beschreibung einer Gesamtgetriebesystematik wird aus dem zusammenhängenden System aller Wellen, Lager und Zahneingriffe abgeleitet. Die Beschreibung des Gesamtgetriebes erfolgt auf der Basis eines linear-elastischen Steifigkeitssystems. Zur Erfassung des Verformungsverhaltens von Planetenträgern kann das Nachgiebigkeitsverhalten von Bauteilen mit komplexer Geometrie über eine Schnittstelle in das Gesamtgetriebesystem eingebunden werden.

Das oft mehrdimensionale, nichtlineare Verhalten von Wälzlagern wird über einen iterativen Abgleich des Last- und Verformungszustandes von Wellen und Lagern abgebildet. Das Lastverhalten von Wälzlagern kann mit dem FVA-Programm LAGER2 unter Vorgabe bekannter Verformungszustände unter Einfluss der inneren mechanischen und kinematischen Bedingungen im Lager bestimmt werden. Bei entsprechender Verformung muss der Lastzustand an den Lagerstellen im linear-elastischen Getriebesystem mit den zuvor bestimmten Lagerbelastungen des Wälzlagers übereinstimmen.

Eine ähnliche Vorgehensweise zur Betrachtung nichtlinearer Effekte im Zahnkontakt wird gezeigt.

Für die Berechnung der Breitenlastverteilung und die Auslegung von Breitenkorrekturen wird die mittlere Verzahnungssteifigkeit zur Beschreibung der Verzahnungsnachgiebigkeit verwendet. Mit dieser Methode kann die Breitenlastverteilung in allen Zahneingriffen eines Getriebesystems konform zur ISO 6336 [75] unter Erfassung wechselseitiger Verformungseinflüsse bei kurzen Rechenzeiten bestimmt werden.

Die Lastaufteilung in Planetengetrieben ist stark von der Verlagerung der Zentralwellen abhängig. Zusammenhänge zwischen Lastaufteilung, Zentralwellenverlagerung und Lastverteilung in den Zahneingriffen von Planetengetrieben werden diskutiert. Dabei wird der Einfluss von Herstellungsabweichungen und Planetenanordnungen erläutert und bei der Berechnung erfasst. Last- und Verformungsanalyse im Gesamtgetriebesystem ermöglichen eine genaue Bestimmung der Lastverteilung in den Zahneingriffen von Planetengetrieben. Die wechselseitige Beeinflussung des Verformungsverhaltens des Planetenbolzens und der Planetenradlagerung mit dem Planetenrad unter dem Einfluss der Planetenträgersteifigkeit wird dargestellt.

Zur Bestimmung des Anregungsverhaltens von Planetengetriebesystemen anhand des Drehwegverhaltens wird das nichtlineare Steifigkeitsverhalten einzelner Zahnpaare in Abhängigkeit der betrachteten Eingriffsstellung in das Getriebesystem integriert. Durch sequentielles Berechnen des Getriebesystems in verschiedenen Eingriffsstellungen unter Erfassung der Eingriffsfolge von Planetengetrieben kann die Drehwegabweichung

in den einzelnen Zahneingriffen sowie die Drehschwingungsanregung von Planetengetrieben anhand der Drehwinkeldifferenz zwischen An- und Abtrieb beurteilt werden.

Der Einfluss von Eingriffsfolge und Anordnung der Planeten auf das Anregungsverhalten in Planetengetrieben wird dargestellt. Der Einfluss der auftretenden Kreuzeinflüsse bei der Bestimmung des Drehwegverhaltens in Planetengetrieben aufgrund der Eingriffsfolge und dessen Auswirkung auf Anregungsverhalten und Korrekturauslegung zur Verbesserung des Drehwegverhaltens werden diskutiert.

Dabei können veränderliche Eingriffssteifigkeiten von Stirnradstufen erfasst und bei der Zahnkontaktanalyse berücksichtigt werden. Wälzlager und deren häufig mehrdimensionales, nichtlineares Verformungsverhalten werden bei der Last- und Verformungsanalyse in Getriebesystemen berücksichtigt. Das Verformungsverhalten von Planetenträgern und der Einfluss von Herstellungsabweichungen werden dabei erfasst.

## 2 Stand des Wissens

Zur effizienten und schnellen Berechnung des statischen Last-, Verformungs- und Anregungsverhaltens wird in dieser Arbeit ein Verfahren zur Last- und Verformungsanalyse in Getriebesystemen mit Planetenradstufen zur Anwendung in frühen Auslegungsphasen von Getrieben beschrieben. Bewährte analytische Berechnungsansätze zur Beschreibung von Wellen, Wälzlagern und Verzahnungen werden dabei mit Ansätzen zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens gekoppelter Getriebesysteme kombiniert, um Lastverteilung und Anregungsverhalten unter Erfassung von auftretenden Wechselwirkungen bei Belastung und Verformung der Getriebeelemente berechnen zu können.

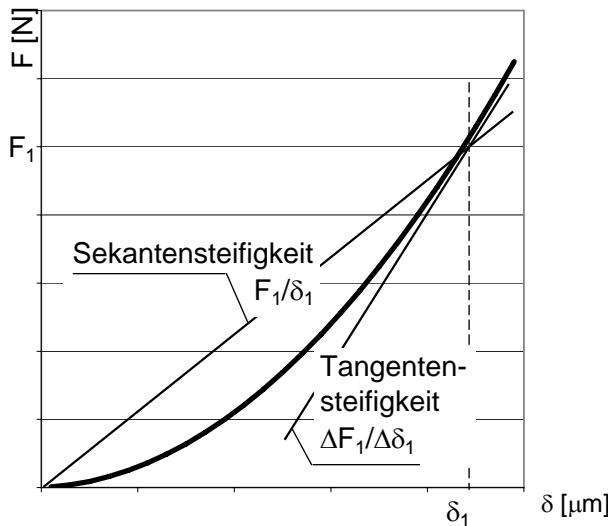
Im Folgenden wird ein Überblick über bestehende Ansätze zur Berechnung des Last- und Verformungsverhaltens einzelner Getriebeelemente sowie deren Kombination zur Beschreibung der Lastverteilung und des Anregungsverhaltens einzelner Stirnradstufen gegeben. Vorliegende Arbeiten zu den Themen Last-, Verformungs- und Anregungsverhalten in Stirnrad- und Planetengetrieben werden vorgestellt. Bestehende Methoden zur Beschreibung zusammenhängender Getriebesysteme werden aufgezeigt.

### 2.1 Wichtige Begriffsdefinitionen

Der interessierte Leser wird beim Studium der vorliegenden Arbeit mit häufiger Regelmäßigkeit auf Begriffe stoßen, die für das Verständnis der dargelegten Zusammenhänge von Bedeutung sind und als bekannt vorausgesetzt werden. In diesem Teilkapitel soll ein kurzer Überblick über diese Begriffe und eine knappe Definition der Bedeutung gegeben werden. Otto [113], Thoma [148] und Heider [60] haben in Ihren Arbeiten wesentliche Beiträge zur treffenden Beschreibung der aufgeführten Begriffe geleistet.

#### Steifigkeit

Otto [113] beschreibt Steifigkeit als Quotient aus Belastung und Verschiebung des Lastangriffspunktes in Lastrichtung. Es wird zwischen der Sekantensteifigkeit und der Tangentensteifigkeit unterschieden (s. **Bild 1**). Die Sekantensteifigkeit ergibt sich aus dem Verhältnis von gesamter angreifender Last und der sich einstellenden gesamten Verschiebung. Die Tangentensteifigkeit ist der Wert, der sich aus dem Quotienten einer differentiellen Lasterhöhung und der sich einstellenden Änderung der Verschiebung im Betriebspunkt ergibt. Bei linearem Steifigkeitsverhalten in einem definierten Lastbereich haben die Sekantensteifigkeit und die Tangentensteifigkeit den gleichen Wert.



**Bild 1:** Zum Begriff der Steifigkeit: Die schwarze Linie stellt Kraft und Verformung dar, eingezeichnet sind zusätzlich die Sekantensteifigkeit und die Tangentensteifigkeit im Punkt  $(F_1, \delta_1)$ ; Bild nach Otto [113]

## Nachgiebigkeit

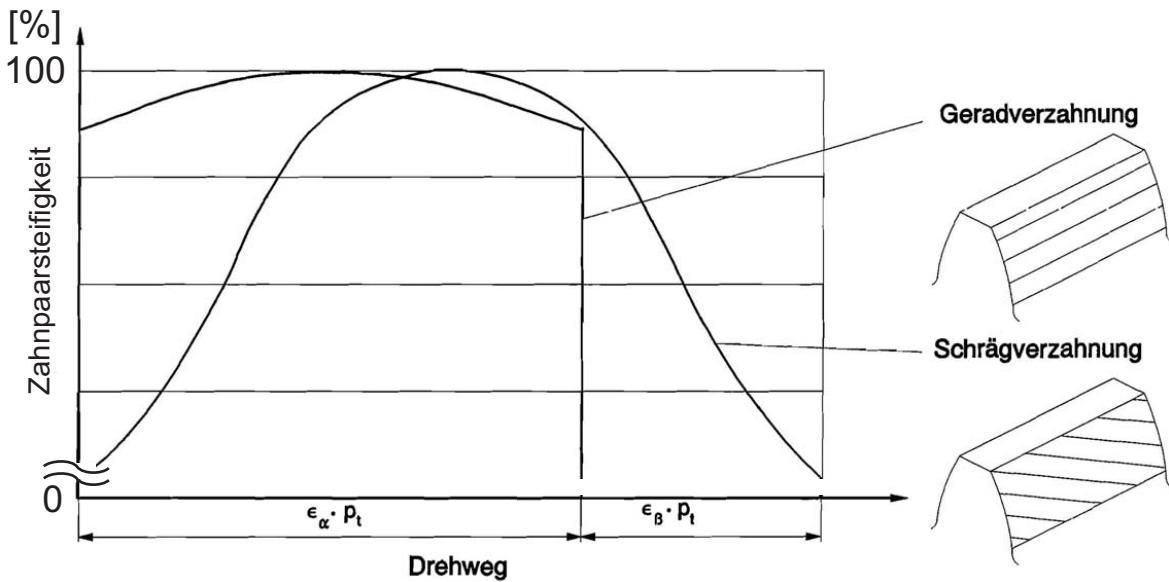
Nachgiebigkeit ist der Kehrwert der Steifigkeit, bei dem auch zwischen dem Wert der Sekantennachgiebigkeit und dem Wert der Tangentennachgiebigkeit unterschieden werden kann.

## Zahnfedersteifigkeit

Nach Niemann und Winter [108] wird bei Otto die Zahnfedersteifigkeit als die Steifigkeit eines einzelnen Zahnes im Stirnschnitt unter Belastung senkrecht zur Evolente beschrieben. Die Form der Lastzone entspricht in guter Übereinstimmung einer Hertz'schen Druckverteilung. Enthalten sind die Kontaktverformung, die Verformung des Zahnes sowie die Verformung des angrenzenden Bereichs des zylindrischen Radkörpers. Die Kontaktverformung und daher auch die Zahnfedersteifigkeit sind über der Last nichtlinear. Der Wert der Zahnfedersteifigkeit ändert sich mit dem Ort des Lastangriffspunkts auf der Evolente. Die Zahnfedersteifigkeit ist auf die Zahnbreite bezogen, damit ist der Wert nur noch von der Zahnform abhängig.

## Zahnpaarsteifigkeit $c$

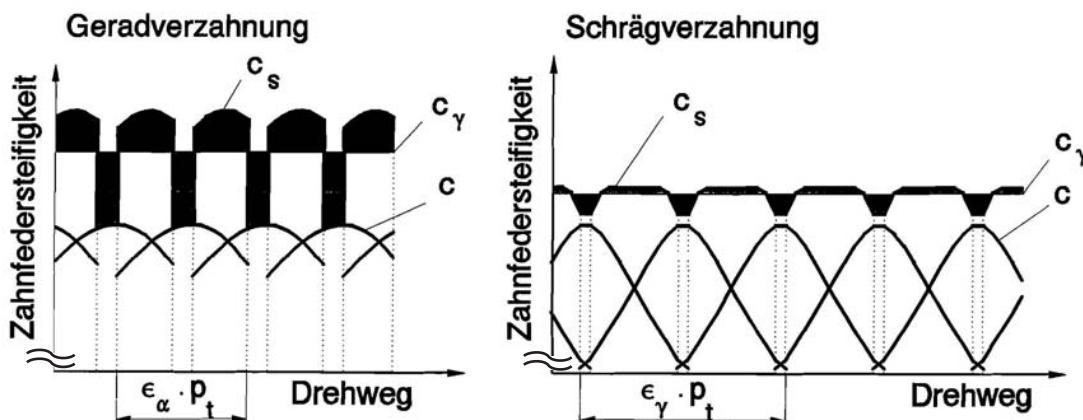
In Anlehnung an Niemann und Winter [108] verwendet Otto den Begriff der Zahnpaarsteifigkeit als die Federsteifigkeit eines Zahnpaares. Sie ergibt sich aus der Superposition der einzelnen Zahnfedersteifigkeiten. Der Wert ist nichtlinear über der Last und ändert sich mit der Position des Kontaktspunktes auf der Evolente (s. **Bild 2**). Dieser Begriff ist gleichbedeutend zur Einzel-Zahnfedersteifigkeit nach [108].



**Bild 2:** Federsteifigkeit eines gerad- und eines schrägverzahnten Zahnpaars beim Durchlaufen des Kontakts (s. Wikidal [160] in Anlehnung an [108])

### Verzahnungssteifigkeit $c_s$

Bei Niemann und Winter [108] wird die Gesamt-Zahnfedersteifigkeit als die Zahnfedersteifigkeit zweier Zahnräder im Eingriff beschrieben. Der Begriff der Verzahnungssteifigkeit bei Otto [113] ist gleichbedeutend. Die Lastaufteilung auf mehrere gleichzeitig im Eingriff befindliche Zähne ist berücksichtigt. Der Wert ist nichtlinear über der Last sowie veränderlich beim Durchlauf des Eingriffs (s. **Bild 3**). Der zeitliche Mittelwert der veränderlichen Verzahnungssteifigkeit wird mit  $c_\gamma$  bezeichnet.



**Bild 3:** Gesamt-Zahnfedersteifigkeit einer Gerad- und einer Schrägverzahnung beim Durchlaufen des Eingriffs (s. Wikidal [160] in Anlehnung an [108])

Ausgehend vom Steifigkeitsverhalten von Stirnradstufen können auf Basis verschiedener Berechnungsmodelle Aussagen zur Lastverteilung in Stirnradstufen abgeleitet werden. Zweidimensionale Modelle stellen eine vereinfachte Möglichkeit zur Betrachtung der Verhältnisse im Zahneingriff dar, die die Lastverteilung im Zahneingriff als ebenes, über dem Profil gemittelten Problem erfassen. Die dafür benötigte mittlere Verzahnungssteifigkeit kann nach Niemann und Winter [107] wie auch DIN 3990 [25] nach dem Ansatz von Schäfer [130] auf der Grundlage der Zahnpaarsteifigkeit berechnet werden. Die aus der Breitenlastverteilung abgeleiteten entsprechenden Breitenfaktoren  $K_{H\beta}$ ,  $K_{F\beta}$  können ermittelt werden. In ISO 6336 [75] wird die Zahnpaarsteifigkeit wie in DIN 3990 berechnet. Die mittlere Verzahnungssteifigkeit wird entsprechend DIN 3990 ermittelt. Die Breitenfaktoren  $K_{H\beta}$ ,  $K_{F\beta}$  und die zugehörige Breitenlastverteilung werden mit einem reduzierten Wert von 85% der mittleren Verzahnungssteifigkeit bestimmt [75].

Zur Berechnung der Lastverteilung in Stirnradstufen entlang der Berührlinien der Verzahnung ist die Bestimmung der örtlichen Verzahnungssteifigkeit  $c_s$  erforderlich. Auf Basis der analytischen Ansätze von Weber/Banaschek [157] und Schmidt [134] kann die Steifigkeit eines im Eingriff befindlichen Zahnpaars bestimmt werden. Die Zähne werden als einseitig im Radkörper eingespannte Platten modelliert und in Abhängigkeit der Kontaktverhältnisse belastet. Die Kontaktverformung wird entsprechend der Hertzschenschen Theorie [62] unter Berücksichtigung der Krümmungsradien im Kontaktspunkt berechnet.

### Abweichungen

Als Abweichungen im Eingriff werden nach [108] Wege bezeichnet, die ein gleichmäßiges Anliegen der Flanken entlang der Kontaktlinie im nahezu unbelasteten Zustand verhindern. Sie sind nicht von der Höhe der Last im Zahnkontakt abhängig. Je nach Ursache der Abweichung im Eingriff können diese von der Lastrichtung beeinflusst werden.

### Fertigungsabweichungen

Aus dem Herstellprozess resultierende Unterschiede zwischen der vorgegebenen Flankenform und der tatsächlich gefertigten Flankenform werden bei [113] und [108] als Fertigungsabweichungen bezeichnet. Diese stellen einen Anteil der im Eingriff wirksamen Abweichungen dar.

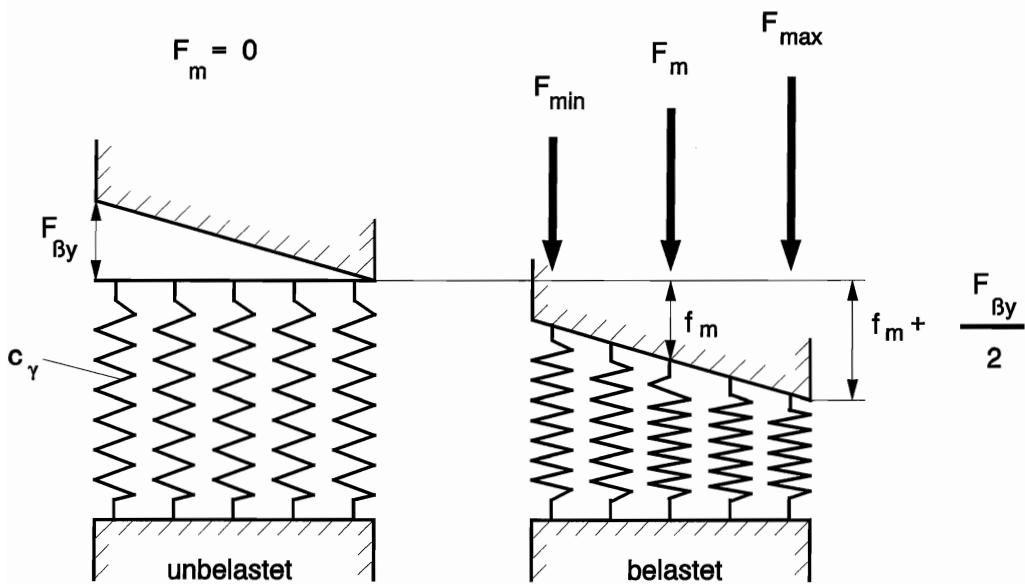
## Verzahnungskorrekturen

Vorgegebene Abweichungen von der evolventischen Flankenform in Profilrichtung sowie der Flankenlinie in Breitenrichtung werden nach [108] als Verzahnungskorrekturen bezeichnet. Diese stellen eine Möglichkeit dar, die im Eingriff wirksamen Abweichungen zu beeinflussen. Die Begriffe Flankenmodifikationen und Flankenkorrekturen sind gleichbedeutend.

## 2.2 Berechnung der Lastverteilung in Stirnradgetrieben

Aufgrund der komplexen Geometrie der Verzahnung besteht eine der Hauptaufgaben bei der Berechnung der Lastverteilung (und des Anregungsverhaltens) in der möglichst genauen und dabei schnellen Berechnung der lokalen Eingriffssteifigkeit einer Stirnradverzahnung. Zur Berechnung der Lastverteilung im Zahneingriff existieren zahlreiche Ansätze. Bei der Berechnung der Lastverteilung im Zahnkontakt einer Stirnradstufe wird zwischen zweidimensionalen und dreidimensionalen Berechnungsansätzen unterschieden.

Otto [113] beschreibt die Unterteilung der Berechnungsansätze zur Lastverteilung in Stirnradstufen in zweidimensionale und dreidimensionale Ansätze. Er beschreibt die Verwendung zweidimensionaler Methoden zur Bestimmung der Lastverteilung über der Zahnbreite bzw. in Profilrichtung unter entsprechender Vereinfachung der Verhältnisse im Zahnkontakt. Genormte Berechnungsverfahren zur Zahnradtragfähigkeitsberechnung basieren auf zweidimensionalen Verfahren. Er fasst die Verfahren nach Niemann/Winter [107] und nach DIN 3990 [25] und ISO 6336 [75] zusammen, bei denen die örtlich höchste Last in Zahnbreitenrichtung unter Annahme einer gemittelten Verzahnungssteifigkeit in Eingriffsrichtung bestimmt wird. Nach Otto [113] wird die Breitenlastverteilung nicht ausgewiesen, in den Berechnungsmethoden sind die Grundlagen der Lastverteilungsberechnung aber vereinfacht enthalten. Abweichungen im Zahnkontakt in Breitenrichtung können berücksichtigt werden. Der Einfluss der Wellentorsion und der Wellenbiegung ist für einige grundlegende Konstruktionen mit den enthaltenen Formelsätzen näherungsweise erfassbar. Verformungen der Lagerung und des weiteren Umfeldes sowie Lageabweichungen der Wellen können, wenn sie bekannt sind, als Flankenlinienabweichung in der Berechnung berücksichtigt werden. Alle Flankenabweichungen im Zahnkontakt werden in ISO 6336 als linear über die Breite verlaufend angenommen (s. **Bild 4**). Die errechnete Höchstlast wird in Bezug zur gleichmäßigen Lastverteilung durch die Faktoren  $K_{H\beta}$  und  $K_{F\beta}$  beschrieben, die in die Zahnradtragfähigkeitsberechnung eingehen [113].



**Bild 4:** Federmodell der DIN 3990 und ISO 6336 zur Breitenlastverteilung (Bild aus Wikidal [160])

Die in **Bild 4** verwendeten Formelzeichen werden nach Wikidal [160] folgendermaßen bezeichnet:

$c_\gamma$	$\frac{N}{mm \cdot \mu m}$	auf die Verzahnungsbreite bezogene mittlere Verzahnungssteifigkeit	$F_{m,min,max}$	Breitenlast (Indizes: Mittelwert, Minimum und Maximum)
$f_m$	$\mu m$	mittlere Verformung der Verzahnung unter Last	$F_{\beta y}$	maximale wirksame Flankenlinienabweichung im Eingriff

Die Qualität der Ergebnisse bei der Berechnung der Lastverteilung in Zahneingriffen moderner Getriebesysteme hängt neben dem Steifigkeitsverhalten und den Abweichungen der beteiligten Zahnkontakte stark von der Erfassung der Verformungseinflüsse im Getriebeumfeld bestehend aus Wellen, Lagern und weiteren Getriebeelementen ab.

Oster und Liebhardt [111] entwickeln das Berechnungsprogramm „Ritzelkorrektur“ (RIKOR) zur Bestimmung von Breitenlastverteilung und Breitenkorrekturen in Stirnradverzahnungen. Nach Thoma [148] werden dabei bereits die Biege- und Torsionsverformungen eines vereinfachten Welle-Lager-Systems verwendet. Wellen- und Verzahnungsrechnung werden auf Basis des Verfahrens nach Dudley und Winter [29] miteinander kombiniert. Dabei können Flankenlinienkorrekturen erfasst werden.

In der Programmversion RIKOR D [71] wird der Berechnungsumfang hinsichtlich des Verformungsverhaltens von Welle-Lager-Systemen von Hösel erweitert. Das Programm „Welle2“ wird als Unterprogramm zur Bestimmung der radialen Verformung von statisch

bestimmt und unbestimmt gelagerten Getriebewellen angeschlossen. Biege- und Senksteifigkeiten entsprechender Lagerstellen können erfasst werden. Nach Thoma [148] ist dabei die Berücksichtigung einer Verschiebung der Lagereinspannstelle bzw. von Lagerspiel nur durch anwenderseitige Berechnung einer Ersatzsteifigkeit des Lagers möglich.

Schmidt [134] berechnet die Verformung von Gerad- und Schrägverzahnungen auf Basis der Plattenmechanik. Die Plattensteifigkeit wird mit der Methode von Weber/Banaschek aus der Zahngeometrie berechnet. Die räumliche Behandlung des Zahnes ergibt die Zahnverformung für beliebige Belastungen entlang einer auf der Flanke verlaufenden Berührlinie.

Zur Berechnung der lokalen Last- und Pressungsverteilung im Zahnkontakt führt Placzek [118] in der Programmversion RIKOR E ein dreidimensionales Berechnungsmodell ein, welches die örtlichen Steifigkeiten der im Eingriff befindlichen Zahnpaare nach Schmidt [134] erfasst. Die Berechnung der Last- und Pressungsverteilung entlang einzelner Berührlinien im gesamten Eingriffsfeld wird dadurch ermöglicht. Flankenkorrekturen in Breiten- und Profilrichtung werden erfasst, die Berechnung eines Korrekturvorschlages ist möglich. Einflüsse aus dem Welle-Lager-System werden durch Einflusszahlenmodelle erfasst. Placzek weitet die Vorgehensweise zur Erfassung der Verformung im Getriebeumfeld auf die zweidimensionale Methode zur Bestimmung der Breitenlastverteilung aus.

Wikidal [160] erweitert die Berechnung des Welle-Lager-Systems in der Programmversion RIKOR F, indem er die Berechnung der Wälzlagersteifigkeit im Getriebe aus Angaben zur Lagergeometrie im Programm LAGER [15] mit der Wellenberechnung in RIKOR koppelt. Er führt die Berücksichtigung der Wellenverformung aus Querkraftschub nach einem Vorschlag von Fuhrke [37] in RIKOR ein und erweitert die Verzahnungsberechnung um die Möglichkeiten, unterschiedlich breite Zähne sowie aufgeschnittene Verzahnungen zu berücksichtigen.

Schinagl [131] führt die Entwicklungen von Wikidal fort und integriert einen Ansatz zur Bestimmung der Exzentrizität vollumschlossener Gleitlager in der Programmversion RIKOR G. Zudem wird die Möglichkeit zur Berechnung der Zahnußspannungsverteilung über der Zahnbreite aus der dreidimensionalen Linienlastverteilung eingeführt.

Hertter [61] entwickelt das Programm „LAGER2“ zur Berechnung der Wälzlagersteifigkeit und -lebensdauer. Der Programmteil zur Berechnung der Wälzlagersteifigkeit basiert auf dem Programm „LAGER“ von Breuer [15]. Die Koppelung von LAGER2 mit der Wellenberechnung in RIKOR G ermöglicht die direkte Berechnung der Lagerle-

bensdauern unter Erfassung der aus den belasteten Zahneingriffen resultierenden Lagerbelastungen. Weitl [159] erweitert die Berechnungsmöglichkeiten des Programms um weitere praxisrelevante Wälzlagerbauformen.

Otto [112] integriert in der Programmversion RIKOR H erweiterte Berechnungsverfahren zur Graufleckentragfähigkeit nach FVA-Nr. 259I, zur Grübchentragfähigkeit nach FVA-Nr. 284I/II und zur Zahnfußtragfähigkeit nach FVA-Nr. 257II. Weiterhin ist die programminterne Erfassung von Verzahnungskräften aus Kegelrad-, Hypoid- und Schneckenstufen bei der Berechnung der Wellenverformung umgesetzt worden.

Thoma [148] erweitert die Berechnungsfunktionalität in der Programmversion RIKOR I bezüglich der Berechnung von Welle-Lager-Systemen. Thoma koppelt die Bestimmung des mehrdimensionalen und nichtlinearen Verformungsverhaltens von Wälz- und Gleitlagern mit der Berechnung der Wellenverformung in einem gedämpften Iterationsverfahren. Radial-, Kipp- und Axialsteifigkeitsverhalten statisch mehrfach unbestimmter Lagerungskonzepte können abgebildet und berechnet werden. Das Verformungsverhalten einer beliebig im Getriebegehäuse gelagerten Welle kann so bei der Berechnung der Lastverhältnisse im Zahnkontakt erfasst werden. Weiterhin integriert Thoma einen Ansatz zur Erfassung geänderter Überdeckungsverhältnisse bei der Lastverteilungsberechnung im Zahnkontakt zur Erfassung der Effekte des vor- und nachzeitigen Zahneingriffs.

Neupert [106] beschreibt das Programm STIRAK zur dreidimensionalen Lastverteilungsberechnung eines Stirnradeingriffs. Das Steifigkeitsverhalten der Stirnradeingriffe wird auf Basis eines Einflusszahlenmodells erfasst. Das Verformungsverhalten der im Eingriff befindlichen Zahnpaare wird anhand eines Finite Elemente Ansatzes bestimmt, der das Verformungsverhalten einzelner Zähne bestimmt. Lage und Länge von Berührlinien werden anhand der idealen evolventischen Zahnkontur ermittelt. Mit dem Verformungsverhalten der im Eingriff befindlichen Zahnpaare kann unter Erfassung der Wellenverformung die Lastverteilung entlang einzelner Berührlinien bestimmt werden. Durch die Berechnung mehrerer Eingriffsstellungen lässt sich die Belastung der Flanke beim Durchlaufen des Eingriffs ermitteln. Aus den Lastverteilungen können Pressungsverteilungen sowie die Verteilung der Zahnfußspannungen abgeleitet werden. Flankenkorrekturen können verarbeitet werden. Cao [18] erweitert das Programm, so dass die Wellenverformung mit dem Reduktionsverfahren nach Falk [34] berechnet wird und dabei bis zu fünf über lineare Radial- und Kippsteifigkeiten abgebildete Lagerstellen berücksichtigt werden können. Schäfer [128] erweitert das Programm um die Behandlung weiterer Stirnradeingriffe.

Das an der Ohio State University entwickelte Programm LDP (Load Distribution Program) [54] berechnet Lastverteilung, Drehwegfehler, Flankenpressung und Zahnußspannung von evolventischen Verzahnungen. Die Biege- und Schubverformung der Zähne werden mit einem analytischen Ansatz nach [20] ermittelt. Die Spannung im Zahnuß basiert auf der Lastverteilung und wird mit Hilfe der Boundary-Element-Methode bestimmt. Die Wellenverformung wird nach der linearen Biegebalkentheorie berechnet. Die Wellen werden statisch bestimmt gelagert berechnet, für jede Welle können zwei Lager mit radialer Steifigkeit angegeben werden.

Mit dem Programm LVR [97], [16] können Last-, Pressungs-, Kontakttemperatur- und Fußspannungsverteilung für Stirnradeingriffe berechnet werden. Hohrein und Senf [70] beschreiben einen analytischen Ansatz zur Bestimmung des Last- und Verformungsverhalten von Stirnradeingriffen. Sie verwenden die FEM zur Bestimmung einer allgemeinen Einflussfunktion für die Zahnverformung von Stirnradverzahnungen unter Einzellast. Der Einfluss der Kontaktverformung nach Linke [96] und Kunert [88] fließt in die Berechnung der Lastverteilung ein. Die Verlängerung der Eingriffsstrecke unter Last sowie die Verformung der beteiligten Wellen und von Lagern vorgegebener Steifigkeit können berücksichtigt werden. Die Flankenform kann mit beliebigen Korrekturen beaufschlagt werden. Aus der Lastverteilung können die Pressungsverteilung auf der Flanke sowie die Zahnußspannungsverteilung berechnet werden.

## 2.3 Berechnung des Anregungs- und Schwingungsverhalten von Stirnradstufen

Bei Heider [60] wird beschrieben, dass das Geräuschverhalten von Zahnradgetrieben im Wesentlichen von der Anregung der Laufverzahnung geprägt wird. Die Schwingungsanregung im Zahneingriff wird dort und bei Geiser [40], Gerber [41], Griggel [46], Linke [96], Müller [100], Radev [123], Rettig [124] und Sattelberger [126] als maßgeblich durch folgende Punkte verursacht beschrieben:

- die veränderliche Verzahnungssteifigkeit aufgrund der zu unterschiedlichen Eingriffsstellungen unterschiedlichen Anzahl im Eingriff befindlicher Zahnpaare
- Abweichungen der Verzahnungskontur von der exakten Evolventengeometrie
- Verformungen und Verlagerungen der Zahnräder verursacht durch lastbedingte Verformungen des elastischen Getriebeumfeldes
- die Überdeckungsvergrößerung unter Last und dem hieraus resultierenden Ein- und Austrittsstoß

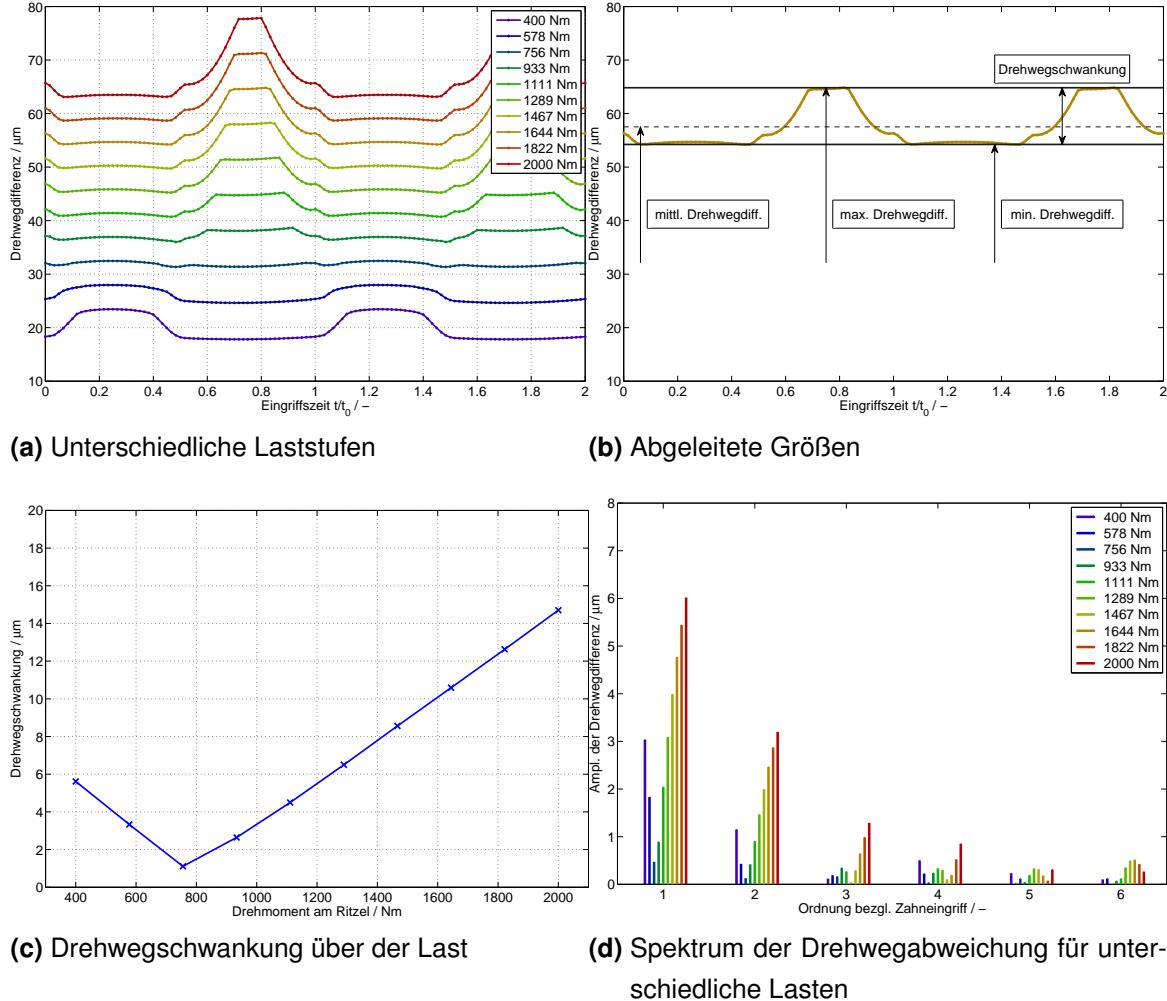
Die Verbesserung der Verzahnungsanregung wird in praxisrelevanten Ansätzen häufig zur Geräuschminderung von Getrieben eingesetzt. Die in dieser Arbeit durchgeführten Betrachtungen zum Anregungsverhalten von Getriebesystemen mit Planetenstufen beschränken sich auf die rechnerische Bewertung des Anregungsverhaltens von Stirnradstufen durch die Beurteilung des statischen Drehwegverhaltens unter Last bei niedrigen Drehzahlen  $n \rightarrow 0$ . Diese Betrachtung beschreibt den Ausgleich zeitlich veränderlicher Eingriffssteifigkeit durch rotatorische und translatorische Bewegungen im Eingriff befindlicher Zahnräder und daran gekoppelter Getriebeelemente. Dynamisches Schwingungsverhalten, die Wirkung von Trägheits-, Zentripetal- und Kreiseleffekten wird dabei nicht erfasst.

Nach Heider [60] wird zur Berechnung des Drehwegverhaltens die Verformung der Verzahnungen für unterschiedliche diskrete Wälzstellungen unter Last berechnet und an den unterschiedlichen resultierenden Winkelstellungen der ungleichförmige Anteil der Bewegungsübertragung bewertet. Dieser wird bei Heider [60] als Drehwegabweichung unter Last oder Loaded Transmission Error (LTE) bezeichnet.

Heider [60] fasst zusammen, dass die Drehwegabweichung als Maß für das Anregungsverhalten von Gregory et al. [45] und Baethge [5] vorgeschlagen wird. Walker [156], Rettig [124], Harris [57] und Baetge [5] empfehlen Verzahnungskorrekturen für anregungsarme Verzahnungen. Für Geradverzahnungen wird hier meist die lange Korrektur [108, 150] vorgeschlagen. Weiterhin verweist er darauf, dass die Drehwegabweichung als Beurteilungsgröße zur Korrekturoptimierung auch in den Vorschlägen für optimale topologische Korrekturen von Placzek [118], Radev [123] oder Schäfer [129] verwendet wird.

Nach Heider [60] wird zur Beurteilung des Anregungsverhaltens häufig die Schwankungsbreite der Drehwegabweichung [36, 48, 103, 103, 105, 146] herangezogen. Er beschreibt die Schwankungsbreite der Drehwegdifferenz, Drehwegabweichung oder Peak-to-Peak Transmission Error (P2P TE) [23, 145, 150] (siehe **Bild 5b**) als Differenz des maximalen und des minimalen Wertes des Verlaufs der Drehwegabweichung, wie sie beispielhaft in **Bild 5a** dargestellt sind. Auf diese Weise kann das Drehwegverhalten bei einzelnen Laststufen auf einen Wert reduziert werden und die Veränderung über der Last bewertet werden (**Bild 5c**) [55].

Heider [60] fasst zusammen, dass für detaillierte Betrachtungen der Verlauf der Drehwegdifferenz mithilfe einer Fourier Transformation in die entsprechenden spektralen Anteile zerlegt werden kann. Die Spektren der Drehwegabweichung sind in **Bild 5d** dargestellt. Er beschreibt, dass in diesen spektralen Darstellungen die jeweiligen



**Bild 5:** Verläufe der Drehwegabweichung einer korrigierten Geradverzahnung und hieraus abgeleitete Größen nach Heider [60].

harmonischen Anteile der Schwingungsanregung enthalten [98] sind. Hieraus sind die für die Schwingungsanregung maßgeblichen frequenzabhängigen Amplituden erkennbar und weiteren Analysen zugänglich [99]. Er beschreibt abschließend die Drehwegabweichung sowie davon abgeleitete Größen als häufig zur Anregungsbeurteilung von Zahnradern verwendete Kenngrößen, die auch in weiteren Untersuchungen bei Baethge [5], Harris [57], Gregory et al. [45], Munro [103], Mark [98,99], Kubo [87], Smith [145], He [58], Davoli et al. [23], Harianto/Houser [55], Kissling [83] verwendet werden.

Gold [43] stellt räumliche Gesamtgetriebemodelle zur Bestimmung des statischen und dynamischen Systemverhalten mehrstufiger Getriebe auf. Zur Beschreibung des Getriebemodells werden Elementmatrizen zur Abbildung des Schwingungsverhaltens einzelner Getriebekomponenten wie Wellen, Lager und Zahneingriffe zu Gesamtsystemmatrizen zusammengeführt. Das Verformungsverhalten der Wellen wird durch elastische

sche Balkenelemente erfasst, Lager und Zahneingriffe über Feder- bzw. Stabelemente abgebildet. Das erstellte Rechenprogramm erlaubt unter Anderem die Bestimmung von Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen vollständig gekoppelter, mehrstufigen Stirnradgetriebe. Das Steifigkeitsverhalten der Zahneingriffe wird vereinfacht linear erfasst, die Parametererregung aus den Zahneingriffen kann nicht abgebildet werden. Durch die Koppelung einzelner Wellen über Zahneingriffe ist das Biege-, Axial- und Torsionsverformungsverhalten sowie das Schwingungsverhalten im gesamten Getriebesystem miteinander gekoppelt.

Birr [10] beschreibt die im Programm RIKOR2dyn umgesetzte vollautomatische Erstellung von Schwingungsmodellen für mehrstufige Stirnradgetriebe, die das Schwingungsverhalten von Welle-Lager-Systemen beinhalten. Mit Hilfe eines Näherungsansatzes können dynamische Verzahnungskräfte bestimmt werden. Zur detaillierten Berücksichtigung des parametererregten Schwingungsverhaltens von Stirnradgetrieben können die Schwingungsmodelle betriebspunktabhängig reduziert und mit Hilfe von DZP numerisch gelöst werden. Im Rahmen seiner Arbeiten beschreibt Birr die Erstellung von Schwingungsmodellen für mehrstufige Stirnradgetriebe auf Basis standardisierter diskreter Elemente zur Abbildung von Getriebeelementen. Das Verformungsverhalten der Wellen wird abschnittsweise über zylindrische Balkenelemente nach der um Schubeinflüsse erweiterten Balkentheorie (Timoshenko-Balken) [149] abgebildet. Zahneingriffe und Lagerstellen werden über lineare Federn erfasst. Die Steifigkeit der Federn im Zahneingriff wird mit dem Programm DZP nach Weber, Banaschek [157] und Schmidt [134] bestimmt. Lagersteifigkeiten werden in einer vorgesetzten RIKOR-Berechnung mit dem Programm WELLAG/LAGER2 [148] lastabhängig bestimmt und linear vorgegeben. Ähnlich zur Vorgehensweise bei Gold [43] werden die Elementmatrizen der einzelnen Getriebeelemente Wellen, Lager und Zahneingriffe zu Gesamtsystemmatrizen zur Beschreibung der Gesamtgetriebesteifigkeit, -trägheit und -dämpfung zusammengefasst. Das dynamische Systemverhalten der gesamten Getriebestruktur mehrstufiger Stirnradgetriebe kann somit erfasst werden.

## 2.4 Berechnung von Lastaufteilung, Anregungs- und Schwingungsverhalten in Planetenstufen

Hidaka, Terauchi, et al. führen eine Reihe von Messungen an geradverzahnten Planetengetrieben mit drei Planeten durch, um deren statisches und dynamisches Verhalten bezüglich Lastaufteilung und Zentralwellenverlagerung zu untersuchen. Die Ergebnisse ihrer Arbeiten veröffentlichen Sie in einer Reihe von Berichten [64] [66] [65] [69] [68]. Parallel zu den experimentellen Studien an geradverzahnten Planetengetrieben be-

schreiben Hidaka, Terauchi und Dohi [65] ein Berechnungsmodell zur Beschreibung der Beziehungen zwischen Laufabweichungen und der Bewegungsbahn der Sonne in einem geradverzahnten Planetengetriebe mit drei Planeten. Für die Berechnung der Bewegungsbahnen der Sonne fassen die Autoren die Eingriffssteifigkeiten der Eingriffe Sonne-Planet und Planet-Hohlrad sowie die Laufabweichungen in den Zahnkontakten in Gesamtsteifigkeitsfunktionen in Abhängigkeit des Drehwinkels zusammen. Ihre analytischen Ergebnisse vergleichen sie mit denen aus Versuchen.

Experimentelle Untersuchungen zeigen, dass die dynamische Lastverteilung bei niedrigen Drehzahlen, solange Resonanzgebiete vermieden werden, in guter Näherung der statischen Lastaufteilung entspricht. Im Hochdrehzahlbereich und bei niedrigen Drehmomenten rückt das dynamische Systemverhalten in den Vordergrund, dynamische Schwankungen im Lastzustand nehmen zu [64]. Sobald sich die Eigenfrequenz des Planetengetriebes mit der Zahneingriffsfrequenz beliebiger Ordnung deckt, nehmen schwankende Zahnlasten stark zu [67].

Weitere experimentelle Studien von Hidaka et al. [66] analysieren das Verlagerungsverhalten der Zentralwellen. Sie beschreiben den starken Zusammenhang zwischen Lastaufteilung und Zentralwellenverlagerung. Untersuchungen belegen, dass das Sonnenrad im Niederdrehzahlbereich einer festen Bewegungsbahn folgt, die durch verschiedene Abweichungen und die elastische Verformung des Hohlrades beeinflusst wird. Mit zunehmender Drehzahl steigt der Einfluss des dynamischen Systemverhaltens und diese Bewegungsbahn beginnt zu zirkulieren. Sie stellen fest, dass sich die Einflüsse von Exzentrizität der An- und Abtriebswelle durch eine einstellbewegliche Sonne eliminieren lassen [67]. Untersuchungen zum Einfluss unterschiedlicher Eingriffsfolgen im Planetengetriebe [69] zeigen, dass die Schwankungen der Last pro Eingriff, die durch Herstellungsabweichungen verursacht wird, im Fall von symmetrischen Zahneingriff kleiner und die Drehmomentschwankungen größer sind als bei nicht gleichzeitigem Eingriff.

Vonderschmidt [153] entwickelt das Programm SIMPLEX zur Bestimmung des statischen und dynamischen Lastaufteilungsverhalten von geradverzahnten Planetenstufen. Kern des Programms ist ein zweidimensionales Starrkörper-Mehrmasse-Modell eines einfachen Planetengetriebes [153]. Zur Berechnung der Lastaufteilung und der Zentralwellenverlagerung können Einflüsse wie einstellbewegliche Glieder, zeitlich veränderliche Eingriffssteifigkeiten, Lagersteifigkeiten, Lager- und Verzahnungsdämpfung, sowie Lager- und Zahnflankenspiel erfasst werden. Ein Verfahren zur Bestimmung der zeitlich veränderlichen Steifigkeitsverläufe in den Zahnkontakten wird vorgestellt. Im

Modell können Verzahnungsabweichungen und ausgewählte Herstellungsabweichungen des Planetenträgers berücksichtigt werden. Einflüsse des elastischen Getriebeumfeldes müssen durch den Anwender auf die mittlere Stirnschnittebene reduziert werden und können nur in Form von Steifigkeitsanpassungen der Lagerfedern im Modell erfasst werden. Die Erfassung von Biegesteifigkeitseinflüssen, wie sie zur Erfassung des Verformungsverhaltens von Welle-Lager-Systemen mit Längsausdehnung erforderlich sind, sind im zweidimensionalen Modell mit zwei translatorischen und einem rotatorischen Freiheitsgrad nicht möglich.

Vonderschmidt [153] berechnet Lastüberhöhungsfaktoren bei verschiedenen Lasten und Drehzahlen für unterschiedliche Varianten eines Prüfstandgetriebes mit Planetenstufe und gleicht diese mit experimentell gemessenen Werten ab. Er stellt fest, dass einstellbewegliche Stege aufgrund ihrer hohen Trägheit nur bei niedrigen Drehzahlen zum Lastausgleich geeignet sind, während sich einstellbare Sonnenwellen bei hohen Drehzahlen günstig auswirken. Untersuchungen zur Lastaufteilung ergeben, dass bei Planetengetrieben mit großen Hohlraddurchmessern und günstiger Fertigungsgenauigkeit Herstellungsfehler durch Einstellbewegungen in den Planetenradlagern ausgeglichen werden können. Er hält den Einsatz von fünf anstelle von drei Planeten nur bei niedrigen Drehzahlen und unter kombinierter Einstellbewegung von Sonne und Steg für lohnenswert.

Um das Steifigkeitsverhalten der Zahneingriffe in Planetengetrieben vollständig erfassen zu können, beschreibt Vonderschmidt eine Berechnungsmethode zur Bestimmung der zeitlichen Abfolge der Zahneingriffe in den einzelnen Zahneingriffen Sonne-Planet und Planet-Hohlrad. Das Berechnungsmodell nach Vonderschmidt [153] wird in Grundzügen von Gradu [44] und Küçükay [85] verwendet.

Wagner [155] führt Prüfstandversuche zur Ermittlung der dynamischen Lastüberhöhungsfaktoren durch und vergleicht die Werte mit den theoretischen Ergebnissen von Vonderschmidt [153] bei guter Übereinstimmung. Insbesondere Getriebevarianten mit einstellbeweglichen Gliedern weisen beim Lastaufteilungsverhalten eine niedrigere Drehzahlabhängigkeit auf. Die Lastüberhöhungsfaktoren nehmen mit zunehmender Belastung ab, steigen mit zunehmender Drehzahl jedoch nur gering bis gar nicht an. Weiterhin wird eine beidseitige Lagerung der Sonnenwelle zur Verbesserung der Breitentlastverteilung in den Zahneingriffen zwischen Sonne und Planeten beschrieben. Wagner beschreibt Grenzen in der Anwendung weniger steifer Planetenträger, die das Lastaufteilungsverhalten verbessern, gleichzeitig das Breitentragen in den Verzahnungen jedoch ungünstig beeinflussen [155].

Winkelmann [161, 162] erweitert das von Vonderschmidt [153] entwickelte ebene, zweidimensionale Modell im Programm „SIMPLEX“ zu einem dreidimensionalen Berechnungsmodell für eine Planetenstufe. Durch Abbildung aller sechs Freiheitsgrade der als Starrkörper angenommenen Getriebeelemente wird die Möglichkeit zur Simulation des statischen und dynamischen Schwingungsverhaltens einer Planetenstufe mit Schrägverzahnung umgesetzt. Im Unterschied zum ebenen Modell werden Zahneingriffe im räumlichen Modell durch zwei Feder-Dämpfer-Paare abgebildet. Benachbarte Getriebeelemente werden im Modell als reine Drehschwinger erfasst.

Das so entstandene Modell liefert nach [161] die zeitlichen Verläufe der Verzahnungs- und Lagerkräfte. Daraus abgeleitete Lastfaktoren bezüglich Lastaufteilung  $K_\gamma$ , Dynamischer Last  $K_V$  und Breitenlastverteilung  $K_{H\beta}$  können direkt in der Tragfähigkeitsberechnung nach DIN 3990 [25] verwendet werden. Winkelmann führt Parameterstudien zur Untersuchung der Einflüsse von Drehzahlen, Drehmomenten, Herstellungsabweichungen, Spielen, Planetenradanzahl, einstellbeweglichen Gliedern, Schrägungswinkel und Baugröße auf das Lastverhalten von Planetengetrieben durch. Dabei stellen sich insbesondere niedrige statische Drehmomente, große Stegteilungsabweichungen und die Anzahl der Planetenanzahlen bei ausschließlich gelagerten Gliedern als schädlich für die Lastverteilung heraus. Zur Absicherung der theoretischen Ergebnisse werden Prüfstandversuche durchgeführt.

Naendorf [104] führt mit dem zuvor beschriebenen Programm SIMPLEX eine umfassende Parameterstudie an Industrioplanetengetrieben durch. Anhand seiner Ergebnisse leitet er unter Zuhilfenahme der Regressionsanalyse Näherungsgleichungen für eine einfache Vorausberechnung der Lastüberhöhungsfaktoren der Verzahnung her. In einer weiteren Parameterstudie bestimmt er die kritischen Eigenfrequenzen, bei deren Anregung die höchsten Lastüberhöhungen auftreten, und leitet daraus ebenfalls Näherungsgleichungen für die Bestimmung kritischer Drehzahlbereiche her. Lamparski [89] ermöglicht die Berücksichtigung ausgewählter Breitenkorrekturen und erweitert SIMPLEX um Näherungsgleichungen zur Bestimmung der Verzahnungssteifigkeiten in Leichtbauplanetengetrieben.

Wittor [163] leitet Näherungsgleichungen zur Berechnung des zu erwartenden Schallleistungspegels von Planetengetrieben her. Anhand einer Parameterstudie an Planetengetrieben mit gehäusefestem Hohlrad werden mit Hilfe der Regressionsanalyse Näherungsgleichungen abgeleitet. Zu beachten ist jedoch, dass bei den untersuchten Betriebszuständen keine Resonanzeffekte auftraten, wodurch bei Anwendung der Gleichung eine zusätzliche Betrachtung des dynamischen Systemverhaltens durchzufüh-

ren ist.

Eine Vergrößerung der Belastung führt nach Wittor zu einer Zunahme der dynamischen Kräfte und damit trotz gleichmäßigerer Lastaufteilung zu einem degressiv erhöhten Schallleistungspegel. Eine erhöhte Drehzahl ruft ebenfalls eine Pegelerhöhung hervor.

Wittor stellt fest, dass eine symmetrische Eingriffsfolge, bei der die jeweiligen Eingriffe an den Zentralrädern einen zeitlich gleichen Verlauf der Eingriffssteifigkeiten aufweisen, in Planetengetrieben zu einer verringerten Zentralwellenbewegung führt und deshalb vorteilhaft ist. Betrachtete Getriebe verfügen jedoch über ein gehäusefestes Hohlrad, wodurch die erhöhten Zahnkräfte direkte Körperschallanregung im Gehäuse verursachen. Finden zusätzlich die Sonnen- und Hohlradeingriffe gleichzeitig statt, ergibt sich eine zusätzliche Schwingungsanregung. Bezuglich der Überdeckung kann er feststellen, dass ganzzahlige Werte für die Gesamtüberdeckung von Vorteil sind, besonders bei den Eingriffen zwischen Planet und Sonnenrad. Weiterhin berechnet er eine erhöhte Geräuschanregung für Getriebe mit ungleichmäßiger Breitenlastverteilung. Die Profilverschiebungssumme zeigt jedoch nur geringen Einfluss auf die Geräuschanregung.

Die positive Wirkung einstellbeweglicher Zentralelemente verringert sich nach Wittor mit steigender Massenträgheit dieser Komponenten und steigender Drehzahl, die die dynamische Wirkung dieser Trägheit beeinflusst. Auch für eine Steigerung der Anzahl der Planetenräder kann Wittor eine Erhöhung der Geräuschanregung feststellen. Für Verzahnungsqualitäten, Achsneigungen beziehungsweise -schränkungen und Achsabstandsabweichungen kann er feststellen, dass diese jeweils erst ab gewissen Beträgen signifikanten Einfluss auf das Geräuschverhalten nehmen.

Rüschoff [125] untersucht den Einfluss des Anregungsverhaltens bei Mehrfacheingriffen in Planetengetrieben auf Geräuschemission und Schwingungsverhalten der Gehäuseoberfläche. Die Ergebnisse der theoretischen und experimentellen Untersuchungen zeigen gute Übereinstimmung für geradverzahnte Planetengetriebe. Zur Untersuchung des Anregungsverhaltens bei Mehrfacheingriff verwendet Rüschoff eine Einteilung der Eingriffsfolgen in einer einfachen Planetenradstufe in fünf verschiedene Klassen. Er beschreibt eine Einteilung in symmetrische, halbsymmetrische, sequentielle, sternförmige und unsymmetrische Eingriffsfolgen. Die unterschiedlichen Eingriffsfolgen unterscheiden sich in ihrer zeitlichen Überlagerung der Steifigkeitseinflüsse der Einzeleingriffe und haben dadurch maßgeblichen Einfluss auf das Anregungsverhalten von Planetengetrieben.

Es zeigt sich, dass Testgetriebe mit symmetrischer Zahneingriffsabfolge geringere Geräuschanregungspegel als vergleichbare Konfigurationen mit sequentiellen Zahneingriffen aufweisen. Dieses Verhalten fällt besonders bei geradverzahnten Getrieben auf. Das Drehschwingungsverhalten der Antriebswelle verhält sich gegensätzlich. Diese wird bei gleichzeitigen Eingriff deutlich stärker angeregt. Die Verlagerungsbahnen der Zentralelemente weisen dabei eine geringere Bewegung auf als bei sequentiellem Zahneingriff. Er zeigt, dass der Einfluss der Eingriffsfolge auf das Anregungsverhalten mit zunehmender Planetenzahl geringer wird.

Polifke [119] erweitert SIMPLEX zur Berechnung von bis zu drei gekoppelten Planetenstufen. Er untersucht die gegenseitige Beeinflussung der gekoppelten Planetenstufen im Lastverhalten bei unterschiedlichen Kopplungsbedingungen. Zusätzlich kann die Biegesteifigkeit der Koppelwelle berücksichtigt werden. Vor allem in Bereichen niedriger Drehzahlen und Lasten führt die negative gegenseitige Beeinflussung der einzelnen Planetenstufen zu stärkeren Lastüberhöhungen im Vergleich zur Berechnung von einzelnen Planetenstufen. Blümm [11] erweitert das Programm SIMPLEX zur Betrachtung von Ravigneaux-Sätzen. Er schafft außerdem die Möglichkeit, mehrstufige Planetensätze mit unterschiedlicher Stegteilung und beliebiger Kopplung für die Bestimmung der Lastüberhöhungsfaktoren sowie der Verzahnungs- und Lagerkräfte zu simulieren.

Vriesen [154] entwickelt das Berechnungsprogramm „PLANKORR“ auf Basis des Programms SIMPLEX [119, 153, 161]. Es dient zur Berechnung der statischen und dynamischen Lastverteilung in Planetengetrieben. Die Bestimmung der Lastverteilung in den Zahneingriffen basiert auf Einflusszahlenmodellen zur Beschreibung der Eingriffssteifigkeit. Dafür notwendige Steifigkeiten der Einzelzähne werden durch empirische Näherungsgleichungen ausgedrückt, die mittels Regressionsanalyse aus einer Vielzahl von FEM-Berechnungen abgeleitet wurden. Das Verformungsverhalten des Planetenträgers kann näherungsweise erfasst werden. Korrekturvorgaben durch den Anwender können erfasst werden. Die Berechnung eines Korrekturvorschlags ist möglich.

Bube [17] implementiert das Programmmodul LAGER2 [61] in PLANKORR zur besseren Erfassung des Verformungsverhaltens von Wälzlagern bei der statischen und dynamischen Analyse von Planetengetrieben. Die Berechnung der Lagerlebensdauern ist möglich. Zusätzlich entwickelt er Näherungsgleichungen zur Erfassung der Gehäuseverformung. Poullos [120] erweitert PLANKORR um einen Ansatz zur Erfassung des Einflusses der Planetenradlagerung und der Planetenradverformung bei der Lastverteilungsberechnung und Korrekturauslegung. Bei seinen Untersuchungen erkennt er, dass die Verkippung des Planetenrades bei Schrägzverzahnung vom Verformungsver-

halten der Lagerung abhängt. Sfar [137] erweitert PLANKORR um die Berücksichtigung von Lastkollektiven bei der Verzahnungskorrektur- und Lagerkräfteberechnung. Weiterhin implementiert er eine FEM-Schnittstelle zur genaueren Erfassung der Gehäuseverformung. Er sichert die Ergebnisse über experimentelle Untersuchungen ab.

Balasubramanian stellt in seiner Dissertation ein Modell zur Berechnung der dynamischen Lastverteilung in Planetensätzen vor [8]. Er untersucht mit diesem Simulationsmodell den Einfluss verschiedener Parameter auf die Lastaufteilung. Er erkennt, dass bei Systemen mit drei gleichmäßig verteilten Planeten die Einstellbeweglichkeit der Sonne oder des Trägers ausreicht, um eine gleichmäßig Lastaufteilung zu erreichen. Mit steigender Planetenzahl sinkt die Wirkung der Einstellbewegung und hauptsächlich die elastische Verformung des Hohlrades gewinnt an Bedeutung für eine gleichmäßige Lastaufteilung. Er erkennt, dass die Verdopplung der Planetenzahl nicht zu einer Verdopplung der Tragfähigkeit führt. Außerdem verschlechtert sich die Lastaufteilung mit zunehmender Lagersteifigkeiten und verbessert sich mit zunehmender Belastung.

Kahraman [77] beschreibt ein zweidimensionales Starrkörper-Mehrmassen-Modell zur statischen und dynamischen Analyse der Lastaufteilung in einer Planetenstufe, das für viele nachfolgend genannten Arbeiten als Grundlage bzw. Orientierungshilfe dient. Zahnräder werden als starre Scheiben mit auf den Mittelpunkt konzentrierter Masse und Trägheitsmoment beschrieben, Zahneingriffe und Lagerungen als lineare Federn dargestellt. Zur Erfassung zeitvarianter Zahneingriffssteifigkeiten werden Steifigkeitsverläufe hinterlegt. Das Modell bietet die Möglichkeit, Exzentrizitäten von Planeten, Laufabweichungen einzelner Zahnräder und eine fixierte oder einstellbewegliche Sonne zu betrachten. Kahraman demonstriert den Funktionsumfang anhand einer Berechnung zur Lastverteilung in einem Planetengetriebe mit vier Planeten. Er erkennt, dass die Lastaufteilung ein primär quasi-statisches Phänomen ist [91] [14] [13].

Kahraman [79] erweitert sein Modell nach [77] zu einem dreidimensionalen Starrkörper-Mehrmassen-Modell, um das dynamische Verhalten von Planetengetrieben mit Schrägzverzahnung studieren zu können.

Kahraman und Inalpolat [73] [72] erweitern das Modell von Kahraman et al. [77], um die Einflüsse von verschiedenen Zahnrad- und Planetenträgerabweichungen untersuchen zu können. Das Modell ermöglicht die dynamische Analyse von Planetengetrieben mit einer beliebigen Anzahl an Planeten, die in beliebigen Winkeln auf dem Planetenträger angeordnet sind. Es werden formelmäßige Zusammenhänge zur Bestimmung des Einflusses von Herstellungsabweichungen auf das Anregungsverhalten von Planeten-

getrieben in Abhängigkeit der Anzahl der Planeten und deren Eingriffsfolgen abgeleitet [74]. Auf Basis rechnerischer und experimenteller Studien werden Parametervariationen anhand eines Beispielgetriebes durchgeführt. Der Einfluss der Planetenzahl, deren Position am Umfang des Trägers sowie der Hauptgeometrie der Verzahnungen und der daraus resultierende Eingriffsfolgen werden untersucht. Sie stellen fest, dass bei sequentiellem Zahneingriff entstehende Seitenbänder um die Eingriffsordnungszahlen verteilt sind, ein Maximum der Eingriffsamplitude nur bei gleichzeitig eingreifenden Planeten erreicht werden kann und symmetrische Seitenbänder sowohl bei den Frequenzen als auch Amplituden nur bei gleichmäßig verteilten und gleichzeitig eingreifenden Planeten möglich sind.

In zahlreichen Berichten [3, 6, 21, 22, 30–32, 51–53] beschreiben Parker, Lin et al. das Eigenschwingungsverhalten einer geradverzahnten Planetenstufe mit beliebiger Planetenzahl unter Einfluss verschiedener Herstellungsabweichungen, Verzahnungs- und Lagerspiel. Weiterhin führen sie Berechnungen zum Stabilitätsverhalten von Planetengetrieben durch. Dabei erfassen Sie den Einfluss nichtlinearen Steifigkeitsverhaltens in den Zahneingriffen und den Einfluss von Herstellungsabweichungen auf die Eingriffsfolge in Planetengetrieben. Für die rechnerischen Untersuchungen erweitern Lin, Parker und Ambarisha das von Kahraman [77] beschriebene Modell zur Betrachtung der Lastaufteilung in Planetenstufen um die durch die Trägerrotation induzierten Kreiselefekte [94] [4].

Auf Basis dieses Modells werden Untersuchungen zum Eigenschwingungsverhalten einer geradverzahnten Planetenstufe unter Annahme vier gleichmäßig am Umfang verteilter Planeten und symmetrischer Eingriffsfolge durchgeführt [4, 94, 95]. Als Ergebnis ihrer analytischen Untersuchungen klassifizieren Lin und Parker [94] die Schwingungseigenformen in sechs Rotationseigenformen, sechs Paaren von orthonormalen Translationseigenformen und drei Gruppen von Planetenschwingungsformen. Rotationseigenformen werden charakterisiert durch die reine Rotation der Sonne, des Planetenträgers und der Hohlrades sowie die identische Bewegungsweise der Planeten. Analog sind die Translationseigenformen definiert. Die Planeteneigenformen weisen keine Bewegung von Sonne, Träger oder Hohlrad auf und die Bewegung des n-ten Planeten ist ein skalares Vielfaches des ersten Planeten.

Ambarisha und Parker [4] untersuchen den Einfluss der Eingriffsfolge auf das Eigenschwingungsverhalten der Planetenstufe. Sie zeigen, dass sich bestimmte Planeteneigenformen durch geeignete Kombination von Eingriffsfolgen unterdrücken lassen.

Parker und Bahk [7] implementieren einen Ansatz zur Erfassung von Zahnprofilmodi-

fikationen in das Berechnungsmodell von Lin, Parker und Ambarisha [4, 94]. Damit bestimmen sie Größe und Länge einer optimalen Zahnprofilkorrektur zur Minimierung des dynamischen Drehwegverhaltens in den Zahneingriffen. Der Vergleich statisch und dynamisch berechneter Drehwegfehler in den Zahneingriffen zeigt, dass eine Korrekturauslegung zur Anregungsminimierung anhand des statischen Drehwegfehlers nicht für jeden Drehzahlbereich des Getriebes die optimale Profilkorrektur ergibt. Weiterhin wird gezeigt, dass die Auslegung von Profilkorrekturen bei Betrachtung einzelner Zahneingriffe das Drehwegverhalten gekoppelter Zahneingriffe im Planetengetriebe nicht vollständig erfasst.

Chaari [19] et al. untersuchen rechnerisch den Einfluss von Fertigungsabweichungen auf das dynamische Systemverhalten eines einfachen Planetengetriebes. Ihr Berechnungsmodell basiert auf dem von Lin und Parker [94]. Die Autoren erkennen, dass ideal ausgelegte und zusammengebaute Getriebe ein niedriges Schwingungsniveau aufweisen, Stegteilungsabweichungen und Abweichungen auf der Zahnflanke hingegen zur Verschlechterung des dynamischen Verhaltens des Getriebes führen.

Gu [49] und Velex [50] stellen ein ebenes Starrkörper-Mehrmassen-Modell zur Bestimmung des statischen und dynamischen Systemverhaltens einer Planetenstufe vor. Die Planetenradlagerungen werden durch zwei senkrecht aufeinander stehende Federn, Zahneingriffe als einzelne Feder modelliert, Exzentrizitäten und Positionsabweichungen einzelner Getriebeelemente können erfasst werden. Die Eingriffs- und Lagersteifigkeiten werden jeweils als nichtlineare zeitlich veränderliche Steifigkeitsmatrix berücksichtigt. Statische Lastaufteilung und Schwingungsverhalten unter dem Einfluss von Montage- und Herstellungsabweichungen der Planeten wird untersucht.

Eritenel und Parker [33] präsentieren ein dreidimensionales Starrkörper-Mehrmassen-Modell zur Eingenschwingungsanalyse in schrägverzahnten Planetengetrieben.

Abousleiman und Velex [1, 2] zeigen den Einfluss elastischer Hohlräder und Planetenträger auf das statische und dynamische Systemverhalten einer Planetenstufe. Das Steifigkeits- und Trägheitsverhalten von Hohlrad- und Planetenträger werden in einem räumlichen Starrkörper-Mehrmassenmodell zur Analyse des statischen und dynamischen Systemverhaltens erfasst. Der Planetenbolzen wird als Teil des Planetenträgers behandelt. Die Steifigkeit der Planetenlagerung wird über lineare Federn näherungsweise erfasst. Zeitlich veränderliche Verzahnungssteifigkeiten werden nach dem Ansatz von Weber und Banaschek [157] erfasst. Die Berechnung der statischen Lastverteilung in den Zahneingriffen wird für ein Beispielgetriebe durchgeführt. Der Einfluss von Hohlrad und Planetenträger auf das dynamische Lastverhalten wird dargestellt.

Ligata et al. [90, 92, 93] beschreiben einen Näherungsansatz zur Berechnung der statischen Lastaufteilung in einfachen Planetengetrieben. Das Modell besteht aus einer Platte, auf die die insgesamt zu übertragende Kraft wirkt und die durch eine der Planetenzahl entsprechende Anzahl an Federn abgestützt wird. In den einzelnen Federn wird sowohl die tangentiale Positionsabweichung als auch die Eingriffssteifigkeit der im Eingriff befindlichen Zahnpaare jeder Stirnradstufe berücksichtigt. Die sich einstellende Position der Platte entspricht dem Lastaufteilungsverhalten des Getriebes. Mit diesem Modell können Planetengetriebe betrachtet werden, die mindestens drei Planeten und ein einstellbewegliches Element enthalten. Es wird beschrieben, dass sich mit steigendem Drehmoment die Lastaufteilung unter den Planeten angleicht. Die Lastaufteilung eines Systems mit drei Planeten und einstellbeweglicher Zentralwelle ist komplett unempfindlich gegenüber Fertigungsabweichungen. Zusätzlich zeigt sich, dass die Lastaufteilung nur auf Systemebene verbessert werden kann und nicht durch Betrachtung von Abweichungen, die mit einem einzelnen Planeten assoziiert werden. Weiterhin wird bei Ligata [90] das Verformungsverhalten dünner Hohlrakräne und dessen Einfluss auf Lastaufteilung und Zahnfußtragfähigkeit am Hohlrad untersucht.

Nach Heider [60] entwickelt Geiser [39] eine Berechnungsmethode zum Einfluss von Flankenkorrekturen bei Planetengetrieben, basierend auf den Methoden für Stirnräder, die zur Beurteilung und Optimierung des Anregungsverhaltens verwendet werden kann. Diese Methode liegt dem FVA-Programm „ANPLA“ zugrunde. Hierbei überlagert er die Einzelanregungen der Stufen entsprechend der Kinematik des Planetengetriebes. Heider beschreibt die von Geiser aus den Kraftanregungen der Einzelverzahnungen eines Planetengetriebes abgeleiteten Größen zur Bewertung des Anregungsverhaltens von Planetengetrieben. „Zur Beurteilung der translatorischen Anregung an Planetengetrieben werden die Kraftanregungen aller zu einem Zeitpunkt im Eingriff befindlichen Verzahnungen vektoriell addiert. Die Addition, die für jedes Bauteil (Sonne, Steg und Hohlrad) durchgeführt wird, ergibt die Lagerkraftanregung, deren Zeitverlauf für die translatorische Anregungsbeurteilung ausgewertet werden kann.“ [60] „Die rotatorische Anregung kann durch die Berechnung des aus den einzelnen Kraftanregungen an den Bauteilen angreifenden, resultierenden Drehmoments ermittelt werden. Die resultierende Größe wird nach Geiser [39] als Momentenanregung bezeichnet. Der Verlauf der Momentenanregung schwankt jeweils um den Wert des anliegenden statischen Moments am betreffenden Bauteil (Sonne, Steg und Hohlrad).“ [60]

Heider [59, 60] erweitert das von Geiser [39] beschriebene Programm ANPLA zur Berechnung des Anregungsverhaltens von Planetenradstufen um die Möglichkeit, die statische Gesamtdrehwegabweichung einer Planetenstufe unter Last zu bestimmen.

Hierfür stellt er ein ebenes Gleichungssystem zur Erfassung des statischen Verformungsverhaltens aller im Planetengetriebe enthaltenen Stirnradstufen auf. Zeitlich veränderliche Verzahnungssteifigkeiten werden erfasst. Durch iteratives Lösen können Lastaufteilung und Verlagerung der Sonnenwelle in der Planetenstufe bestimmt werden. Planetenträger- und Hohlradverformung können als einfache Steifigkeitseinflüsse erfasst werden. Heider beschreibt die gleichzeitige Optimierung translatorischer und rotatorischer Anregungskomponenten durch Änderung der Planetenanordnung oder der Eingriffsfolge als sehr schwierig. Zur Korrekturauslegung in Planetenstufen empfiehlt er die Auslegung anregungsarmer Stirnradstufen unter Anwendung der für einzelne Stirnradstufen üblichen Berechnungsverfahren. Zur Beurteilung des dynamischen Systemverhaltens stellt Heider [60] ein parametrisches Modell eines Mehrmassenschwingers einer Planetenstufe auf und integriert dieses in das Programm ANPLA. Die Bestimmung relevanter Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen einer Planetenstufe sind damit möglich.

Papies [114] führt unter Erfassung der Eingriffsfolge und des dynamischen Verhaltens experimentelle und rechnerische Untersuchungen zur Schwingungsanregung von Planetengetrieben durch. Auf Basis dieser Ergebnisse werden Empfehlungen für die konstruktive Gestaltung von Planetengetrieben mit günstigem Anregungsverhalten abgeleitet. Sie stellt einen Optimierungsansatz für den Steifigkeitsverlauf in Planetengetrieben durch Variation der Geometrie und somit auch der Phasenverschiebung zwischen Sonnen und Hohlrad eingriff vor. Dabei werden die einzelnen Eingriffe am Planetenrad so zueinander ausgerichtet, dass sich das Steifigkeitsverhalten des einen Eingriffs im Doppelengriffsgebiet mit dem des im Einzelenringriff befindlichen optimal ausgleicht. Ein gleichmäßiger zeitlicher Verlauf des Steifigkeitsverhaltens des Getriebes kann erreicht werden und die Schwingungsanregung positiv beeinflussen. Der Optimierung des Steifigkeitsverhaltens von Planetengetrieben durch Abstimmung der Eingriffsfolge aller im Getriebe enthaltenen Zahneingriffe wird Potential zur Verbesserung des Anregungsverhaltens unterstellt, weiterführende rechnerische oder experimentelle Untersuchungen werden nicht durchgeführt.

Neben dem Steifigkeitsverlauf, der Zentralwellenbewegung, der Zahnnormalkraft und der Teilungsabweichung werden Einflüsse der Trägheitskräfte auf die Lagerlebensdauer der Planetenlagerung untersucht. Weiterhin wird der Einfluss unterschiedlicher Eingriffsfolgen auf das Anregungsverhalten von Planetengetrieben betrachtet. Dabei wird auf die von Rüschoff [125] beschriebenen Eingriffsfolgen verwiesen. Der Einfluss von Zahnflankenmodifikationen wird beschrieben. Es wird eine Bewertung verschiedener Eingriffsfolgen hinsichtlich der Drehschwingungs- und der Kraftanregung vorgenom-

men.

## 2.5 Räumliche Last- und Verformungsanalyse in Planetengetriebesystemen

Oda et al. [110] untersuchen auf Basis eines zweidimensionalen Finite-Elemente Modells die auftretenden Zahnfußspannungen am Hohlrad eines Planetengetriebes mit drei Planeten. Dabei wird der Einfluss unterschiedlicher Einspannungsbedingungen für das Hohlrad auf die Zahnfußspannung geprüft.

„Calyx“ ist ein von der Firma „Ansot“ vertriebenes Programm zur Kontaktanalyse für Getriebesysteme mit Leistungsverzweigung. Die Entwicklung des Kontaktmodells geht auf die Arbeit von Vijayakar [151] zurück und kombiniert einen finite-Elemente-Ansatz zur Abbildung einzelner im Eingriff befindlicher Zahnpaare mit einem auf der Randelemente-Methode basierenden Kontaktmodell zur Abbildung der Kontaktbereiche einzelner Zahnpaare. Die Kombination beider Methoden erlaubt die Erfassung kleinster Abweichungen im Zahnkontakt bei schnellen Rechenzeiten, was die Erfassung von Verzahnungskorrekturen ermöglicht. Die Zahnkontaktanalyse kann für ebene und räumliche Modelle verwendet werden.

Auf Basis eines ebenen FE-Modells einer Planetenstufe in Kombination mit dem Zahnkontaktmodell nach [151] untersucht Vijayakar [115] neben dem dynamischen Systemverhalten auch das statische Drehwegverhalten einzelner Zahneingriffe.

Weiterhin untersuchen Vijayakar und Kahraman [82] unter Verwendung des beschriebenen Zahnkontaktmodells das statische Systemverhalten einer Planetenstufe mit elastischem Hohlrad. Dabei werden Herstellungsabweichungen des Planetenträgers und Teilungsfehler der Planetenräder erfasst.

„Planetary2D“ ist ein Programm der Firma „Ansot“ zur Berechnung des statischen und dynamischen Verhaltens einfacher Planetengetriebe. Planetary2D verbindet das Zahnkontaktmodell „Calyx“ [151] mit einem zweidimensionalen FE-Modell zur Abbildung einfacher, geradverzahnter Planetengetriebe [152]. Kahraman und Vijayakar [82] untersuchen anhand dieses Programms die Auswirkungen der Hohlradelastizität auf das statische Lastaufteilungsverhalten von Planetengetrieben. Sie stellen fest, dass die Hohlradverformung bei ausreichender Elastizität den Einfluss von Herstellungsabweichungen der Zahnräder auf die Lastaufteilung ausgleichen kann. Herstellungsabweichungen des Planetenträgers können durch einstellbare Zentralwellen besser ausgeglichen werden. Kahraman et al. [80] zeigen den signifikanten Einfluss dünner Hohlradkränze auf das Eigenschwingungsverhalten von Planetengetrieben.

Cheon und Parker [42] untersuchen den Einfluss der Lagersteifigkeit auf das statische Lastaufteilungsverhalten eines Planetengetriebes unter dem Einfluss von Fertigungsabweichungen mit Planetary2D. Sie beschreiben, dass erst durch ungleiche Belastung einzelner Planeten durch Herstellungsabweichungen der Einfluss der Lagersteifigkeit auf das Lastverhalten zunimmt.

Cheon und Parker [38] betrachten mit Planetary2D die Einflüsse von Fertigungsabweichungen auf das dynamische Lastverhalten.

Bodas und Kahraman [12] untersuchen mit Planetary2D die Auswirkung von Fertigungsabweichungen auf das statische Lastaufteilungsverhalten von Planetengetrieben mit einstellbeweglicher Sonne. Sie bestätigen, dass Systeme mit drei Planeten unabhängig von den Abweichungen eine gleichmäßige Lastaufteilung aufweisen, bei Systemen mit vier Planeten diametral gegenüberliegende Planeten gleich belastet sind.

Parker et al. [115] verwenden Planetary2D zur Berechnung der dynamischen Antwort eines Planetengetriebes und vergleichen ihre Ergebnisse mit denen aus dem analytischen Modell nach Lin und Parker [94].

Mit dem Berechnungsprogramm „Transmission3D“ [152] hat die Firma „Ansol“ ein Werkzeug zur Analyse des statischen Last- und Verformungsverhalten von Gesamtgetriebesystemen geschaffen. Die Getriebestruktur von Planetengetriebesystemen inklusive der Zahnräder, Gehäuse, Hohlräder, Planetenträger, Wellen und Lager werden als räumliche FE-Strukturen in einem Modell erfasst. Auf Basis des von Vijayakar [151] gezeigten Modells zur räumlichen Kontaktanalyse können Verzahnungs- und Wälzlagerkontakte abgebildet werden. Prueter et al. [121] verwenden Transmission3D zur Berechnung des Last- und Verformungsverhaltens in einem geradverzahnten Windkraftgetriebe mit acht Planeten und elastischen Planetenbolzen („Flex Pins“) nach Hicks [63]. Die Verbesserung des Lastverteilungsverhaltens durch die Verwendung elastischer Planetenbolzen wird beschrieben. Zur Validierung werden berechnete Werte für Zahnfußspannungen an den Hohlrädern mit gemessenen Werten verglichen.

Singh [138] beschreibt das Softwarepaket „GSAM“ der Firma GeneralMotors zur Last- und Verformungsanalyse ausgewählter Planetengetriebekomponenten in einem Gesamtgetriebemodell. Die Abbildung des Getriebesystems erfolgt als räumliche FE-Struktur ausgewählter Komponenten wie Wellen, Zahnräder, Planetenträger und Hohlräder in einem Modell. Zur Kontaktanalyse wird der von Vijayakar [151] beschriebene Ansatz verwendet. Darauf aufbauend untersucht Singh [138–140] den Einfluss unterschiedlicher Herstellungsabweichungen auf das Lastaufteilungsverhalten eines Planetengetriebes bei unterschiedlichen Getriebeausführungen. Er zeigt, dass die Möglichkeit zur

Steigerung der Leistungsdichte durch Einbau zusätzlicher Planeten durch die Vorgabe der Fertigungstoleranzen begrenzt wird. Weiterhin wird der Einfluss der Lagerverformung auf die Lastaufteilung im Getriebe und das Tragbild einzelner Zahnkontakte beschrieben.

Baumann [9] untersucht das Lastaufteilungsverhalten von Planetengetrieben und die Lastverteilung in deren Zahneingriffen. Dabei erfasst er die Einflüsse der Eingriffssteifigkeit, der Planetenträger- und Hohlradnachgiebigkeit und leitet Aussagen zur Hohlradtragfähigkeit ab. Doppelschrägverzahnte Planetengetriebe können abgebildet werden, Herstellungsabweichungen und Verzahnungskorrekturen werden erfasst. Die Berechnung von Lastaufteilung wird in einem ebenen Starrkörpermodell durchgeführt. Die Lastverteilung in den Zahneingriffen wird mit LVR [27] bestimmt. Einflüsse wie Hohlrad- und Planetenträgerverformung werden über FE-Ansätze in eigenen Teilprogrammen bestimmt und entsprechend vorgegeben. Es findet ein iterativer Abgleich einzelner Berechnungsergebnisse statt.

Er zeigt, dass das Verformungsverhalten des Hohlrades abhängig von der Anschlusskonstruktion die Lastaufteilung und das Lastverhalten einzelner Eingriffe beeinflusst. Es wird beschrieben, dass zweiwangige Planetenträger um den Faktor 4-5 kleinere Verformungen aufweisen als entsprechende einwangige Träger. Baumann beschreibt die Torsionsverformung zweiwangiger Planetenträger als untergeordneten Verformungseinfluss im Bezug auf die Lastverteilung in den Zahneingriffen, deren Werte meist deutlich unter den Werten der Flankenlinienwinkelabweichung bei Qualität 5 nach DIN 3990 [25] liegen. Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit (s. **Abschnitt 4**) bestätigen diese Aussage nicht.

Baumann bestätigt die starke Beeinflussung der Lastaufteilung durch Teilungs-, Zahndicken- und tangentiale Planetenpositionsabweichungen im Vergleich zum untergeordneten Einfluss radialer Positionsabweichungen der Planeten.

Das Programm LVRPlanet [28] basiert auf dem von Börner, Senf und Hohrein [16, 70, 97] entwickelten Programm LVR zur Berechnung der Lastverteilung in Stirnradgetrieben. Durch Erweiterung um ein iteratives Verfahren zur Erfassung der im Planetengetriebe auftretenden Verformungseinflüsse können Last- und Verformungsverhalten in den Zahneingriffen einer Planetenstufe bestimmt werden. Die entsprechenden Verformungsanteile aus Planetenträger, Hohlrad und weiterer Radkörper werden durch FE-Rechnungen bestimmt. Schlecht et al. [132, 133, 135, 136] zeigen die Bestimmung der Lastverteilung in einer Planetenradstufe eines Windkraftgetriebes mit LVRPlanet.

Mit den Produkten „Gear AT“ und „Bearing AT“ hat die Firma „MSC Software“ Ausle-

gungswerzeuge für Verzahnungen und Lager in einer Gesamtgetriebeumgebung auf Basis elastischer Mehrkörpersimulationsansätze geschaffen [122]. Das dynamische Systemverhalten unter dem Einfluss von Verlagerungen, Wellen und Zahneingriffsnachgiebigkeiten kann berechnet werden.

Neben dem Bericht über den Empfang bei der Queen beschreibt „Dontyne Systems“ [26] den „GearboxDesigner“ als Programm zur Berechnung des statischen Drehwegfehlers von Stirn- und Planetenradgetrieben unter Berücksichtigung des Verformungsverhaltens von Wellen, Lagern und Gehäuseteilen in einer vollständig gekoppelten Systemmatrix.

Die Firma „SMT“ stellt mit dem Softwarepaket „MASTA/DRIVA“ [141–143] umfangreiche Werkzeuge zur Berechnung des statischen und dynamischen Systemverhaltens von Getriebesystemen mit Planetenstufen in verschiedenen Anwendungsbereichen basierend auf elastischen Mehrkörpersimulations-Modellen zur Verfügung. Die Auslegung einzelner Getriebekomponenten wie Wellen, Lager, Zahneingriffe und Kupplungen sowie die Beurteilung des Systemverhaltens des Gesamtgetriebes hinsichtlich des Geräusch- und Wirkungsgradverhaltens ist möglich. Die Berechnungsmethoden sind nicht näher erläutert.

Ein sehr ähnliches Softwarepaket mit ähnlichen Leistungsumfängen stellt die Firma „Romax Technologies“ kostenpflichtig zur Verfügung. Pears, James, Smith, Harris et al. [56, 76, 116, 117, 144] entwickeln das Berechnungsprogramm „ROMAX Designer“ zur Bestimmung des statischen Last- und Drehwegverhalten gesamter Getriebesysteme. Neben der Darstellung beispielhafter Berechnungsergebnisse weisen ihre Berichte ansatzweise Beschreibungen des Berechnungsverfahrens auf. Es wird erläutert, dass die statische Last- und Drehweganalyse auf einem vollständig gekoppelten, nicht-linearen Algorithmus zur Beschreibung des Systems Wellen/Lager/Zahnräder/Gehäuse basiert [56, 116, 144]. Das Verformungsverhalten der Wellen wird über Balkenelemente erfasst, das der Lager über analytische Expertentools zur Abbildung des nichtlinearen Lagerverhaltens [76]. Elastische Hohlräder und Planetenträger können über die Erfassung reduzierter Steifigkeitsmatrizen abgebildet werden [144]. Zahneingriffe werden über ein „thin slice model“ [116], ein Modell, bei dem Stirnradverzahnungen entlang der Breite in dünne Scheibchen unterteilt werden, erfasst. Die Steifigkeit jedes Scheibchens wird in Abhängigkeit der Profilkordinate des Kontaktpunktes ermittelt. Die Beschreibung der Zahnsteifigkeit ist nicht enthalten. Das Verformungsverhalten der Scheibchen ist untereinander nicht gekoppelt [116]. Zur Kontaktanalyse in den Zahneingriffen wird keine Aussage gemacht. Pears et al. verweisen in ihren Berichten auf die Erfassung

von Wechselwirkungen zwischen Belastung der Zahnkontakte und den auftretenden Verschiebungen im Zahneingriff. Um Wechselwirkungen zu erfassen, beschreiben sie ein Verfahren zur gleichzeitigen Berechnung der Welle-Lager-Verformungen und des Verformungsverhalten der Zahneingriffe [116]. Nach Harris [56] wird aus den Steifigkeitsmatrizen der Getriebekomponenten eine Systemsteifigkeitsmatrix aufgestellt. Nach Smith [144] werden Verschiebungen im Zahnkontakt mit dem voll gekoppelten Algorithmus zur Berechnung des Systems Welle/Lager/Zahnräder/Gehäuse bestimmt, um anschließend als Randbedingung in die Berechnung des Drehwegfehlers einzugehen.

In [116] verwenden Pears et al. das Programm RomaxDesigner, um aus Gründen der Geräuschminimierung den Drehwegfehler eines Planetengetriebes bereits in einer frühen Entwicklungsphase berechnen zu können. Die Autoren führen Berechnungen an einstufigen Planetengetrieben durch. Es werden Getriebe mit gleichmäßig und ungleichmäßig verteilten Planeten untersucht. Bei gleichmäßiger Verteilung und symmetrischer Anordnung der Zahneingriffe kann eine hohe Drehweganregung nachgewiesen werden. Bei ungleichmäßig am Umfang verteilten Planeten sinkt das Niveau der Drehweganregung, es stellt sich jedoch eine resultierende Kraft auf die Sonne ein, deren Richtung mit der Planetenträgerdrehzahl rotiert. Das Programm ermöglicht die Untersuchung verschiedener Planetenaufteilungen, verschiedener Planeten- und Zähnezahlen und der Auswirkungen von verschiedenen Verzahnungsfeingeometrien.

Montestruc [101] zeigt in seiner Arbeit ein Modell zur Bestimmung der statischen Lastaufteilung in einer Planetenradstufe zur Bestimmung des Lastaufteilungsfaktors  $K_{\gamma}$  für den Tragfähigkeitsnachweis nach Norm. Der Einfluss einstellbeweglicher Zentralelemente wird vernachlässigt, die Eingriffssteifigkeiten werden als zeitlicher Mittelwert erfasst. Er beschreibt die Lastaufteilung als Funktion der Planetenzahl und dem Verhältnis zwischen durchschnittlichen Verformung eines Planeten und dem maximalen Toleranzwert der Positionsschwankung des Mittelpunktes des unbelasteten Planeten. Die Nachgiebigkeit des Planetenträgers kann erfasst werden und wird in einer vorschalteten FE-Analyse bestimmt.

Mit dem beschriebenen Modell untersucht Montestruc [102] die Einflüsse der Elastizität der Planetenbolzen bei Einwangen- und Zweiwangenträger. Er untersucht das Lastaufteilungsverhalten bei Planetengetrieben mit elastischen Planetenbolzen („Flex Pins“) nach Hicks [63] und beschreibt das Potential dieser Anordnungen zur Steigerung der Leistungsdichte durch den Einbau mehrerer Planeten bei gleichzeitig günstigem Lastaufteilungsverhalten. Er beschreibt weiterhin die Robustheit des Lastaufteilungs-

verhaltens solcher Konstruktionen gegenüber Herstellungsabweichungen im Zahnkontakt. Er schildert den Einfluss flexibler Planetenbolzen auf das Breitenlastverteilungsverhalten, zeigt jedoch kein Berechnungsmodell zur Bestimmung des Breitentrags. Weiterhin wird auf die Besonderheiten der Anordnung im dynamischen Systemverhalten aufgrund der niedrigeren Steifigkeiten im Vergleich zu konventionellen Planetenträgern und -bolzen hingewiesen.

## 2.6 Berechnung der Phasenverschiebung in Planetengetrieben

Die Phasenverschiebung einzelner Zahneingriffe in Planetengetrieben beschreibt die aufgrund der Verzahnungshauptgeometrie und der Anordnung der Planeten am Umfang des Planetenträgers bestehende Winkel- oder Längendifferenz zwischen den einzelnen Eingriffsstellungen der jeweiligen Stirnradstufen.

Dabei wird zwischen dem Phasenversatz zwischen den Zahneingriffen eines Planetenrades sowie der Phasenverschiebung zwischen den einzelnen Eingriffen an den Zentralrädern unterschieden. Der Phasenversatz am Planeten  $\Delta P\nu_{ep}$  nach **Gleichung (1)** und **Gleichung (2)** beschreibt den Abstand zwischen den Eingriffen innerhalb eines Teilleistungszweiges, die Phasenverschiebung  $\Delta P\nu_{eZ/H}$  hingegen die Verschiebung der Eingriffsstellungen an einem Zentralrad, also zwischen den einzelnen Teilleistungszweigen nach **Gleichung (3)**. Aus beiden Überlegungen kann die Phasenverschiebung zwischen einzelnen Zahneingriffen im Planetengetriebe bestimmt werden.

Nach Kückükay [84] kann die Phasenverschiebung einzelner Eingriffe untereinander entweder durch einen Winkel oder durch eine Längeneinheit ausgedrückt werden, die die unterschiedlichen Positionen der Eingriffe bezüglich der jeweiligen Eingriffslinien charakterisiert.

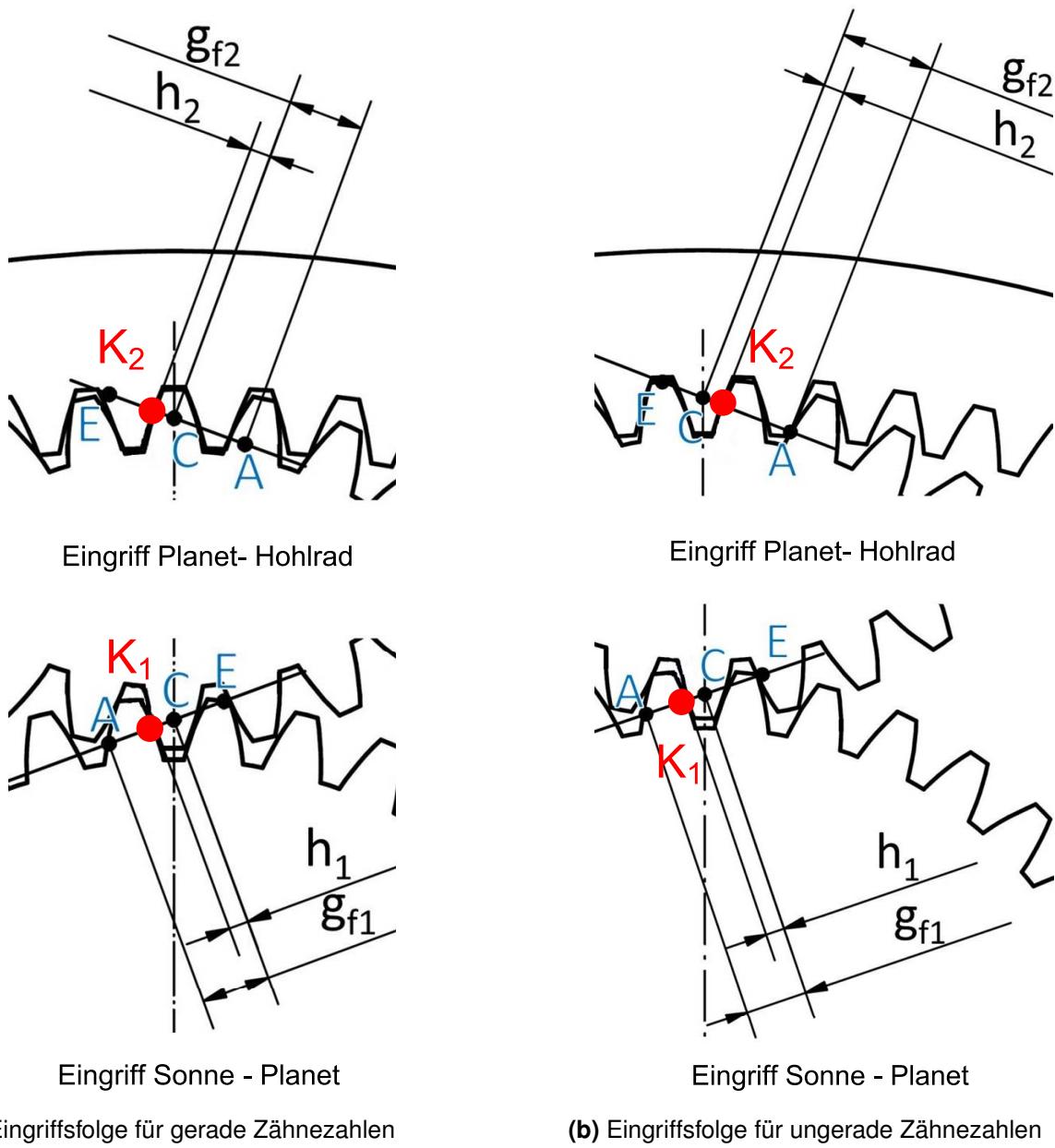
$$\Delta P\nu_{ep} = \pm (g_{f2} - g_{f1} + h_2 + h_1) + (A_2 E_2 - A_1 E_1) \cdot \left( \frac{1 \mp 1}{2} \right) \quad (1)$$

$$\Delta P\nu_{ep} = \pm (g_{f2} - g_{f1} - h_2 + h_1) + (A_2 E_2 - A_1 E_1) \cdot \left( \frac{1 \mp 1}{2} \right) \quad (2)$$

---

$\Delta P\nu_{ep}$	mm	Phasenversatz am Planetenrad	$g_{f1}$	mm	Kopfeingriffsstrecke des Planetenrades im Sonnenradeingriff
$g_{f2}$	mm	Kopfeingriffsstrecke des Hohlrades	$h_1, h_2$	mm	Berechnete Strecken auf der Eingriffslinie, siehe <b>Bild 6a</b> und <b>Bild 6b</b>
$A_1 E_1$	mm	Eingriffsstrecke des Sonnenradeingriffs	$A_2 E_2$	mm	Eingriffsstrecke des Hohlradeingriffs

---



**Bild 6:** Geometriegrößen in den Eingriffen zur Berechnung der Eingriffsfolge der Planeten in Anlehnung an [153]

Nach Vonderschmidt [153] ergeben sich für den Phasenversatz zwischen den Zahneingriffen am Planetenrad die nachfolgend aufgeführten Gleichungen. **Gleichung (1)** gilt dabei für Planetenräder mit geraden und **Gleichung (2)** für Planetenräder mit ungeraden Zähnezahlen. Die Wahl des Vorzeichensatzes entfällt nach Vonderschmidt auf die Treibrichtung im Getriebe. Bei treibendem Sonnenrad gilt die obere Vorzeichenreihe, bei getriebenem Sonnenrad entsprechend die untere Reihe. Die Gleichungen gelten nur für einfache Minusgetriebe mit Hohlrad ohne gestufte Planeten. Die aus der Hauptgeometrie der Zahneingriffe am Planeten resultierende Phasenverschiebung

$\Delta P\nu_{ep}$  zwischen den Eingriffsstellungen Sonne-Planet und Planet-Hohlrad bleibt während des Abwälzens konstant.

**Bild 6a** und **Bild 6b** veranschaulichen die zu berechnenden Geometriegrößen zur Bestimmung der Phasenverschiebung der Eingriffsstellungen zwischen beiden Eingriffen am Planetenrad. Die Eingriffsstellungen im Kontakt Sonne-Planet und Planet-Hohlrad werden durch die Berührpunkte  $K_1$  und  $K_2$  repräsentiert.

Das Verfahren zur Bestimmung der Abstände  $h_1$  und  $h_2$  der Berührpunkte von Ritzel und Rad in der entsprechenden Eingriffsstellung  $K_1$  und  $K_2$  auf der Eingriffsstrecke bezogen auf den Eingriffsbeginn  $A$  des jeweiligen Eingriffs Sonne-Planet bzw. Planet-Hohlrad ist ausführlich bei Vonderschmidt [153] beschrieben.

Nach Gradu [44] wird die Phasenverschiebung zwischen den einzelnen Eingriffen an den Zentralrädern bestimmt. Gradu führt als Erweiterung der Überlegungen von Vonderschmidt einen Winkel  $\Delta\varphi(i)$  ein. Dadurch ist es möglich, die Formeln von Vonderschmidt auch auf Planetengetriebe mit beliebig am Umfang verteilten Planeten anzuwenden. Damit ergibt sich für die Berechnung des Phasenversatzes folgender Zusammenhang [44]:

$$\Delta P\nu_{eZ/H} = \text{frac}\left(\frac{Z_{Z/H}}{p} - [\Delta\varphi(i) - \Delta\varphi(j)] \cdot \frac{Z_{Z/H}}{2\pi}\right) \cdot p_e \quad (3)$$

$\Delta P\nu_{eZ/H}$	mm	Phasenverschiebung auf der Eingriffsstrecke	$Z_{Z/H}$	–	Zähnezahl von Sonnen- bzw. Hohlrad
$p$	–	Anzahl der Planeten	$\Delta\varphi(i)$	rad	Abweichungswinkel von einer symmetrischen Stegteilung
$p_e$	mm	Eingriffsteilung	$i, j$		Indizes der benachbarten Planetenräder

Die Funktion  $\text{frac}(x)$  berechnet hierbei den nicht ganzzahligen Teil von  $x$ .

Die Winkel  $\Delta\varphi(i)$  beschreiben die Winkel zwischen den gegebenen Planetenpositionen und den Positionen der Planetenräder bei gleichmäßiger Anordnung über den Umfang des Planetenträgers. Für gleichmäßig am Umfang verteilte Planetenräder ergibt sich der Winkel  $\Delta\varphi(i)$  zu Null.

Der Winkel  $\Delta\varphi(i)$  zwischen zwei benachbarten Planeten  $i$  und  $j$  berechnet sich mit nachfolgender Formel [44]:

$$\Delta\varphi(i) = \sum \Psi_{ij} - \frac{2\pi}{p} \cdot i \quad (4)$$

$\Delta\varphi(i)$	rad	Abweichungswinkel von einer symmetrischen Stegteilung	$\Psi_{ij}$	rad	Winkel zwischen den Planeten i und j
$p$	–	Anzahl der Planeten	$i, j$		Indizes der benachbarten Planetenräder

## 2.7 Diskussion zum Stand des Wissens

Die im Stand des Wissens erläuterten Vorgehensweisen zur Bestimmung des Last- und Anregungsverhaltens von Getrieben lassen sich anhand der verwendeten Methoden zur Abbildung des mechanischen Verhaltens von Getriebesystemen zusammenfassen. Einzelne Verfahren können nach den zugrunde gelegten mechanischen Ansätzen zusammengefasst und deren spezielle Eignung sowie Einschränkungen im Auslegungsprozess von Getriebesystemen zusammengestellt werden.

Bestehende analytische Verfahren zur Beschreibung des Last- und Verformungsverhaltens von Stirnradgetrieben eignen sich zur aufgrund kurzer Rechenzeiten zur Auslegungsrechnung, sind jedoch bei der Erfassung von Verformungseinflüssen im Getriebeumfeld eingeschränkt leistungsfähig. So können mit dem FVA-FZG-Berechnungsprogramm „Ritzelkorrektur“ [147] statische Lastverteilung und daraus ableitbare Belastungsgrößen für Stirnradstufen entlang der Berührlinien im Eingriff befindlicher Zahnpaare im gesamten Eingriffsfeld ermittelt und Verzahnungskorrekturen in Breiten- und Profilrichtung ausgelegt werden. Dabei werden lastbedingte Verformungseinflüsse des Getriebeumfeldes nur begrenzt erfasst. Komplexe Getriebesysteme können nur in Teilsysteme zerlegt betrachtet werden, zwischen denen Wechselwirkung bei Last und Verformung nur bedingt oder gar nicht erfasst werden. Für viele konstruktive Anordnungen wie Welle-in-Welle-Lagerungen oder drehbar gelagerte Planeten sind wenig aussagekräftige Ersatzmodelle notwendig. Die Berechnung einzelner, nicht zusammenhängender Welle-Lager-Systeme findet unter der Vorgabe gleichmäßiger Breitenlastverteilung in den Verzahnungen statt. Wechselwirkungen zwischen Lastverteilung und Wellen- bzw. Lagerverformung können nicht abgebildet werden. Die Berechnung gekoppelter Welle-Lager-Systeme ist nicht vorgesehen.

Mit dem Berechnungswerkzeug DZP [47] können mit einem zu RIKOR [147] sehr ähnlichen Berechnungsverfahren die Drehwegabweichung und das Anregungsverhalten einzelner Stirnradstufen berechnet werden. Es gelten vergleichbare Einschränkungen bei der Abbildung des Getriebeumfeldes. Eine wechselseitige Beeinflussung des Drehwegverhaltens einzelner Stirnradstufen in Getriebesystemen ist im Berechnungsmodell nicht erfasst. Die Bestimmung des Drehweg- und Anregungsverhaltens einzelner Zahneingriffe eines Planetengetriebes in getrennten Teilsystemen schließt Wechsel-

wirkungen zwischen Zahneingriffen und Koppelungen über Kinematik aus. Das Anregungsverhalten von Zentralwellen in Planetengetrieben kann durch Überlagerung der Berechnungsergebnisse einzelner Stirnradstufen im Programmsystem ANPLA beurteilt werden. Kreuzeinflüsse im Drehweg- und Verformungsverhalten der Stirnradstufen sowie die kinematische Koppelung der Zentralwellen in Planetengetrieben können nicht erfasst werden.

Bestehende Verfahren zur Bestimmung der statischen und dynamischen Lastaufteilung und des Anregungsverhaltens in Planetengetrieben basieren häufig auf ebenen oder räumlichen Starrkörper-Mehrmassen-Modellen im Stirnschnitt einzelner Planetenradstufen. Solche Verfahren sind in den Programmsystemen SIMPLEX und PLANKORR nach Vonderschmidt [153], Winkelmann [161] und Vriesen [154] und weiteren Autoren enthalten. Auch die Programmsysteme von Kahraman, Balasubramanian und Inapolat [8, 73, 77–82] basieren auf ähnlichen Modellen. Zahneingriffe und deren Steifigkeitsverhalten werden im Stirnschnitt erfasst. Verformungseinflüsse aus dem Umfeld der Verzahnung können vereinfacht abgebildet werden, eine geschlossene Lösung zur Berechnung der lokalen Lastverteilung in Stirnradstufen und des Verformungsverhaltens des gesamten Getriebesystems ist nicht enthalten. Die Auslegung von Verzahnungsbreitenkorrekturen ist nur bedingt und durch den Einsatz zusätzlicher Berechnungsmodelle möglich. Für bestehende Verfahren zur Bestimmung der Lastaufteilung in Planetengetriebesystem auf Basis ebener FE-Ansätze nach Parker und Lin [95, 115], bei denen auch einzelne Planetenradstufen in der Stirnschnittebene erfasst werden, gelten ähnliche Einschränkungen.

Ansätze mit räumlichen FE-Modellen zur Berechnung des statischen Last- und Verformungsverhaltens in ausgewählten Planetengetriebebauarten (GSAM, Ansol Transmission3D, Kahraman, Singh) [12, 121, 139, 140, 151] bieten die Möglichkeit, detaillierte Analysen der Last- und Verformungsverhältnisse in den Zahnkontakte durchzuführen. Dabei werden Zahn- und Wälzlagerkontakte durch teilanalytische Methoden (BEM, Verformung in der Halbebene) erfasst und mit einer vollständigen Abbildung des Getriebesystems inklusive Gehäuse und Planetenträger als FE-Modell gekoppelt. Diese Art der Gesamtgetriebeanalyse bietet die Möglichkeit, Lastaufteilung, Lastverteilungs- und Drehwegverhalten in Planetengetrieben sehr detailliert unter Erfassung wechselseitiger Beeinflussung einzelner Zahneingriffe zu bestimmen und Zentralwellenverlagerungen zu erfassen. Aufgrund hoher Rechenzeiten solcher FE-Modelle sind diese Werkzeuge sehr gut für die Nachrechnung bestehender Getriebesysteme, weniger für Berechnungen im Auslegungsprozess geeignet.

Neben den bisher beschriebenen Modellen schaffen Pears, James, Smith, Harris et al. [56, 76, 116, 117, 144] mit dem Berechnungsprogramm „ROMAX Designer“ eine Vorgehensweise zur Bestimmung des statischen Last- und Drehwegverhalten gesamter Getriebesysteme auf Basis analytischer Berechnungsverfahren für Wellen, Lager und Zahneingriffe. Neben der Darstellung beispielhafter Berechnungsergebnisse werden in einer Vielzahl von Berichten die verwendeten Berechnungsverfahren nur ansatzweise und rudimentär beschrieben. Die für eine belastbare und aussagekräftige Auslegung von Getriebekomponenten und Zahnradern notwendige Dokumentation der verwendeten Methoden ist nicht verfügbar. Die vollständig gekoppelte Beschreibung von Zahneingriffen entlang der Berührlinien ist nicht enthalten. Zur Kontaktanalyse in den Zahneingriffen wird keine Aussage gemacht. Nach Smith [144] werden Verschiebungen im Zahnkontakt mit einem voll gekoppelten Algorithmus zur Berechnung des Systems Welle/Lager/Zahnräder/Gehäuse bestimmt, die Berechnung der Lastverteilung und Drehwegabweichung der Stirnradstufen erfolgt wiederum nachgeschaltet und getrennt von der vorher durchgeführten Getriebesystemanalyse.

Im folgenden Kapitel (**Abschnitt 3**) dieser Arbeit wird eine Methode zu Analyse von Planetengetriebesystemen beschrieben, die schnelle analytische Verfahren zur treffenden Beschreibung einzelner Getriebeelemente mit Ansätzen zur Erfassung des mechanischen Verhaltens gekoppelter Getriebesysteme vereint. Die effiziente und schnelle Berechnung des statischen Last-, Verformungs- und Anregungsverhaltens von Planetengetriebesystemen in einem geschlossenen Gleichungssystem wird dadurch ermöglicht.

Die Bestimmung des Last- und Verformungsverhaltens im Zahnkontakt in Wechselwirkung mit dem komplexen Getriebeumfeld ermöglicht dabei die Berechnung und Optimierung von Lastverteilung und Anregungsverhalten in Planetengetriebesystemen. Dabei können veränderliche Eingriffssteifigkeiten von Stirnradstufen erfasst und bei der Zahnkontaktanalyse berücksichtigt werden. Wälzlager und deren häufig mehrdimensionales, nichtlineares Verformungsverhalten werden bei der Last- und Verformungsanalyse in Getriebesystemen berücksichtigt.



### 3 Statische Last- und Verformungsanalyse in Planetengetriebesystemen

In Planetengetriebesystemen treten unter Last Verformungen der entsprechenden Getriebeelemente auf. Durch die starke mechanische Koppelung der Getriebeelemente ist das Verformungs- und Verlagerungsverhalten einzelner Wellen, Lager oder Zahneingriffe stark vom Verformungsverhalten des gesamten Getriebesystems abhängig. Ein Ziel dieser Arbeit ist die Beschreibung eines Verfahrens zur Last- und Verformungsanalyse in Getriebesystemen mit Planetenradstufen, welches in einem Berechnungswerkzeug für die Anwendung in frühen, iterativen Auslegungsprozessen von Getrieben zusammengetragen wird. Durch Kenntnis des Last- und Verformungszustandes eines Getriebesystems lassen sich Aussagen zu Lastaufteilung, Zentralwellenverlagerung und Anregungsverhalten des Getriebes ableiten. Lastverteilungs- und Drehwegverhalten einzelner Stirnradstufen unter Einfluss des Gesamtsystems können bestimmt werden.

#### 3.1 Vorgehensweise zur Beschreibung von Gesamtgetriebesystemen mit Planetenradstufen

Es wird ein System zur Last- und Verformungsanalyse für Getriebesysteme mit Planetenradstufen entwickelt, welches das Verformungsverhalten einzelner Getriebeelemente auf Basis bewährter analytischer Berechnungsmethoden erfasst und in geeigneter Weise durch Verwendung von Ansätzen zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens zusammenhängender Systeme koppelt. Somit wird das Verformungsverhalten im Gesamtgetriebe unter Erfassung aller Wechselwirkungen zwischen den Getriebeelementen und dem komplexen Getriebeumfeld beschrieben.

Ein Verfahren zur automatisierten Modellerstellung für beliebige Stirnrad- und Planetengetriebesysteme auf Basis einer parametrischen Eingabedatei, die einzelne Getriebeelemente und deren Koppelung beschreibt, wird entwickelt und vorgestellt.

Getriebesysteme können so als zusammenhängendes, elastisches System aus gekoppelten Wellen, Lagern, Zahneingriffen und weiteren elastischen Getriebeelementen wie Planetenträgern und Gehäusen beschrieben werden.

Starke Nichtlinearitäten im Verformungsverhalten von Wälzlagern und Zahneingriffen werden dabei durch geeignetes iteratives Lösen des Getriebesystems erfasst. Nach Berechnung der Verformung im Getriebesystem können Lastzustände im Gesamtgetriebe und an einzelnen Getriebeelementen wie Wellen, Lagern und Zahneingriffen abgeleitet werden.

Einsatzbereich einer solchen Berechnungsmethode ist die Optimierung des Last- und Anregungsverhaltens durch Auslegung geeigneter Korrekturen in Gesamtgetriebesystemen. Wechselwirkungen im Last- und Verformungsverhalten von Getriebesystemen und deren Getriebeelementen werden dabei erfasst.

Vorteile der beschriebenen Methode zur Analyse von Gesamtgetriebesystemen:

- einfach zu parametrieren
- hohe Rechengeschwindigkeit, effizientes Berechnungswerkzeug
- Eignung für Mehrfachrechnungen im Auslegungsprozess
- basiert auf analytischen Ansätzen zur schnellen und abgesicherten Berechnung von Maschinenelementen
- Analytische Ansätze gekoppelt mit Methoden zur Simulation großer mechanischer Systeme ermöglichen Abbildung des Last- und Verformungsverhaltens des gesamten Getriebesystems bei gleichzeitiger genauer Analyse des Verhaltens einzelner Komponenten

### **3.2 Beschreibung eines linear-elastischen Gesamtgetriebemodells**

Die mathematische Vorgehensweise zur Erstellung eines linear-elastischen Getriebemodells baut auf den mathematischen Beschreibungen zur Analyse mehrstufiger Stirnradgetriebe nach Gold [43] und Bihr [10] auf. An dieser Stelle sei auch die Diplomarbeit Kohn [86] lobenswert erwähnt, die nicht nur für die Arbeiten von Bihr, sondern auch für diese Arbeit das mathematische Werkzeug zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Wellenabsätzen, Federn und deren Zusammenführung in Systemmatrizen aus entsprechender Fachliteratur zusammengezogen und beschrieben hat.

Die in vorausgegangenen Arbeiten beschriebenen Methoden zur Analyse von mehrstufigen Stirnradgetrieben werden um die Möglichkeiten zur Abbildung von Getriebeelementen mit komplexer Geometrie wie Planetenträger oder Getriebegehäuse erweitert.

Die Vorgehensweise zur Abbildung von Zahneingriffen wird auf unterschiedliche Weise umgesetzt und erweitert. Untersuchungen zum statischen Last- und Verformungsverhalten in Planetengetrieben basieren auf vereinfachten Ansätzen, die die Lastverteilung in den Zahnkontakten als ebenes und über dem Profil gemitteltem Phänomen nach DIN 3990 [25] oder ISO 6336 [75] beschreiben. Aussagen zur statischen Lastaufteilung auf

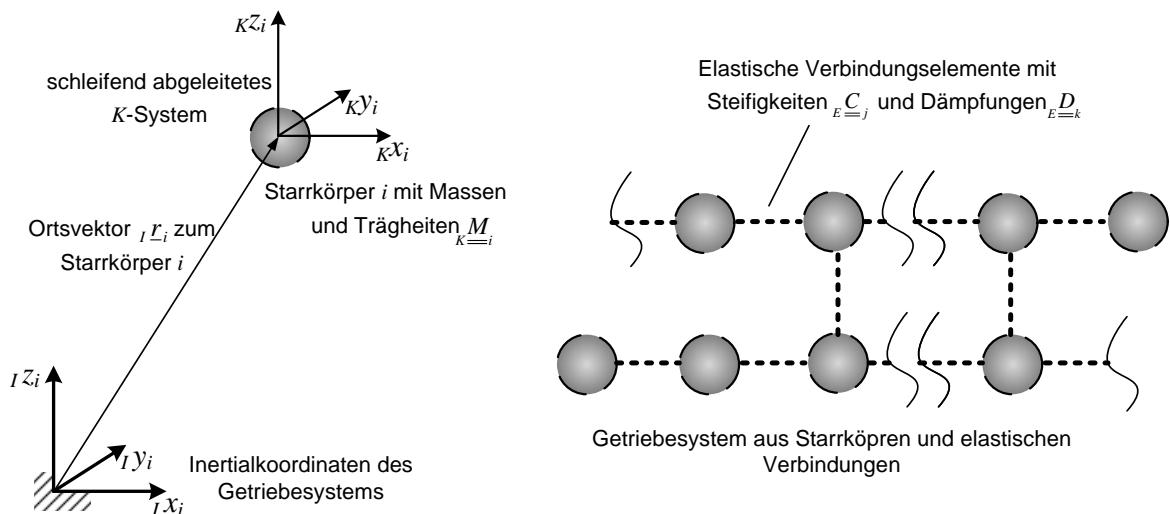
einzelne Leistungsstränge von Getriebesystemen sowie zur Breitenlastverteilung und Breitenkorrekturauslegung unter Einfluss des Verformungs- und Verlagerungsverhaltens des abgebildeten Getriebeumfeldes können mit diesem vereinfachten Modell abgeleitet werden.

Zur Bestimmung des Anregungsverhaltens von Planetengetriebesystemen auf Basis des statischen Drehwegverhaltens in den Zahneingriffen und der statischen Übersetzungsfehler gesamter Getriebestränge wird das örtlich und zeitlich veränderliche Steifigkeitsverhalten der in Eingriff befindlichen Zahnpaare im gesamten Getriebesystem nach Weber, Banaschek [157] und Schmidt [134] bei der Erstellung der Systemsteifigkeitsmatrizen erfasst.

Lagerstellen werden im linear-elastischen Modell über Federelemente abgebildet. Das nichtlineare und mehrdimensional gekoppelte Verformungsverhalten von Wälzlagern wird über ein neu entwickeltes, iteratives Verfahren am Lastpunkt linearisiert und in die lineare Systembetrachtung eingebracht. Die Masterarbeit Weinberger [158] hat hierzu einen höchst wertvollen Beitrag geleistet und ein stabiles und zuverlässiges Iterationsverfahren beigesteuert.

### 3.2.1 Mathematische Formulierung der linear-elastischen Systembeschreibung

Die Last- und Verformungsanalyse in Planetengetriebesystemen basiert auf dem von Kohn [86] beschriebenen Vorgehen namens Elastische Strukturanalysemethode. Bei diesem Verfahren werden die einzelnen Getriebeelemente durch Starrkörper abgebildet und elastisch gekoppelt. Dabei werden die elastischen Elemente durch ihre Steifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{C}}_j$  und Dämpfungsmatrix  $\underline{\underline{D}}_j$  beschrieben. Massen und Trägheiten der Getriebeelemente werden geeignet auf Starrkörper und deren zugehörige Massenmatrix  $\underline{\underline{M}}_i$  verteilt (**Bild 7**).



**Bild 7:** Schematische Darstellung eines Wellenabsatzes mit Balkenelement und Starrkörpern

Das Systemverhalten wird durch den Zusammenbau der Systemsteifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{C}}$ , der Systemdämpfungsmatrix  $\underline{\underline{D}}$  und der Systemmassenmatrix  $\underline{\underline{M}}$  aus den einzelnen Element- und Starrkörpermatrizen  $\underline{\underline{C}}_j$ ,  $\underline{\underline{D}}_j$  und  $\underline{\underline{M}}_i$  in einem geeigneten verfahren beschrieben. Die Aufstellung der Systemsteifigkeitsmatrizen erfolgt im Inertialkoordinatensystem nach **Bild 7**. Die körperfesten Koordinatensysteme der einzelnen Starrkörper werden schleifend aus dem Inertialsystem abgeleitet. Die Achsen bleiben dabei immer parallel, es findet nur eine translatorische Ursprungsverschiebung statt, die durch den Ortsvektor eines jeden Starrkörpers beschrieben wird.

Die Starrkörper werden im Gleichungssystem durch ihren Verschiebungsvektor  $\underline{u}_i$  abgebildet:

$$\underline{u}_i = ( u_{xi} \ u_{yi} \ u_{zi} \ \varphi_{xi} \ \varphi_{yi} \ \varphi_{zi} )^T \quad (5)$$

$u_{ji}$	mm	Verschiebung des Starrkörpers $i$ in Richtung $j$	$\varphi_{ji}$	rad	Verdrehung des Starrkörpers $i$ um Richtung $j$
$\underline{u}_i$		Verschiebungsvektor des Starrkörpers $i$			

Durch die Definition des Systemverschiebungsvektors  $\underline{u}$  zu

$$\underline{u} = ( u_{x1} \ u_{y1} \ u_{z1} \ \varphi_{x1} \ \varphi_{y1} \ \varphi_{z1} \cdots u_{xn} \ u_{yn} \ u_{zn} \ \varphi_{xn} \ \varphi_{yn} \ \varphi_{zn} )^T \quad (6)$$

$u_{ji}$	mm	Verschiebung des Elements $i$ in Richtung $j$	$\varphi_{ji}$	rad	Verdrehung des Elements $i$ um Richtung $j$
$\underline{u}$		Systemverschiebungsvektor			

wird die Formulierung eines Gesamtgleichungssystems ermöglicht.

Dieses kann mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen und durch Aufsummieren der entsprechenden Einträge der Elementmatrizen zu den Systemmatrizen hergeleitet werden:

$${}_{\text{I}} \underline{\underline{M}} \cdot {}_{\text{I}} \ddot{\underline{u}} + {}_{\text{I}} \underline{\underline{D}} \cdot {}_{\text{I}} \dot{\underline{u}} + {}_{\text{I}} \underline{\underline{C}} \cdot {}_{\text{I}} \underline{u} = {}_{\text{I}} \underline{f} \quad (7)$$

---

${}_{\text{I}} \underline{\underline{M}}$	Systemmassenmatrix	${}_{\text{I}} \underline{\underline{D}}$	Systemdämpfungsmatrix
${}_{\text{I}} \underline{\underline{C}}$	Systemsteifigkeitsmatrix	${}_{\text{I}} \underline{\underline{f}}$	Lastvektor des Systems
${}_{\text{I}} \underline{u}$	Systemverschiebungsvektor		

---

Ziel des in dieser Arbeit beschriebenen Verfahrens ist die statische Last- und Verformungsanalyse in Planetengetriebesystemen. Das dynamische Systemverhalten wird nicht weiter betrachtet. Trägheits- und Dämpfungseffekte sind von den Systembeschleunigungen und -geschwindigkeiten abhängig. Diese werden nicht erfasst und deshalb hier nicht weiter vertieft. Damit reduziert sich die Gesamtsystemgleichung zu:

$${}_{\text{I}} \underline{\underline{C}} \cdot {}_{\text{I}} \underline{u} = {}_{\text{I}} \underline{f} \quad (8)$$

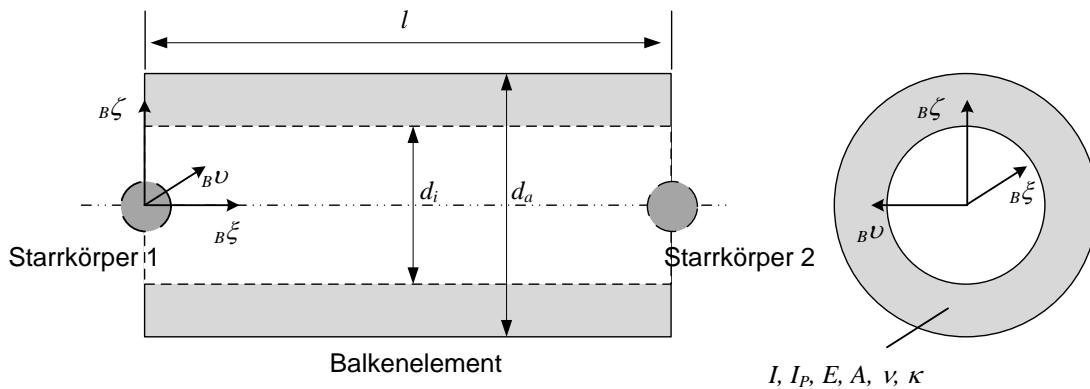
---

${}_{\text{I}} \underline{\underline{C}}$	Systemsteifigkeitsmatrix	${}_{\text{I}} \underline{f}$	Lastvektor des Systems
${}_{\text{I}} \underline{u}$	Systemverschiebungsvektor		

---

### 3.2.2 Abbildung von Wellen

Die Verformung einzelner Wellensysteme trägt einen wesentlichen Anteil zur Verformung des Gesamtgetriebesystems bei. Die Wellenverformung wird über einen analytischen Ansatz auf Basis der mechanischen Balkentheorie nach Timoshenko [149] abgebildet. Zur Erfassung des entsprechenden Verformungsanteils werden die im Getriebesystem enthaltenen Wellen in Wellenabschnitte unterteilt behandelt. Die Vorgabe zur Unterteilung in Wellenabschnitte ist prinzipiell beliebig, zur statischen Last- und Verformungsanalyse ist es sinnvoll, die Welle den geometrischen Wellenabsätzen entsprechend zu diskretisieren.



**Bild 8:** Schematische Darstellung eines Wellenabsatzes mit Balkenelement und Starrkörpern

Jeder Wellenabschnitt besteht aus zwei Starrkörpern, die über ein Balkenelement mit Kreisringquerschnitt verbunden sind. Die Starrkörper befinden sich an den angrenzenden Wellenabsätzen eines Wellenabschnitts. **Bild 8** zeigt die Anordnung einer Welle/eines Wellenabsatzes bestehend aus zwei Starrkörpern mit den zugehörigen lokalen Koordinatensystemen der Starrkörper.

Die Beschreibung des Steifigkeitsverhaltens der Balkenelemente erfolgt nach der von Timoshenko [149] um Schubeinflüsse erweiterten Balkentheorie. Diese Balkenelemente bilden das Biege-, Torsions-, Axial- und Querschubverhalten der Wellenabschnitte ab. Außendurchmesser  $d_a$ , Innendurchmesser  $d_i$  sowie Länge  $l$  des Wellenabsatzes bestimmen zusammen mit der Schubeinflusszahl  $\kappa$  und den Werkstoffkennwerten Elastizitätsmodul  $E$  und Querkontraktionszahl  $\nu$  das Steifigkeitsverhalten der Balkenelemente.

Die Vorgehensweise zum Aufstellen der Elementsteifigkeitsmatrix wird für jeden Wellenabsatz im Getriebesystem durchgeführt. Nach entsprechenden Transformationsoperationen können die Elementsteifigkeitsmatrizen in die Gesamtsteifigkeitsmatrix des

Getriebesystems eingetragen werden.

Die Beschreibung des Verformungsverhaltens von Wellen als gekoppelte Systeme einzelner Balkenelemente auf Basis der Balkentheorie wird neben weiteren Arbeiten auch bei Thoma [148] und Pears [116] verwendet. Die zutreffende Beschreibung des Verformungsverhaltens der Wellen mittels Balkentheorie wurde durch messtechnische Untersuchungen bestätigt.

Für Wellenabschnitte mit Kreisringquerschnitt wird das Flächenträgheitsmoment  $I$ , das ein Maß für den Widerstand eines Körpers gegen Biegung darstellt, zu

$$I = \frac{\pi (d_a^4 - d_i^4)}{64} \quad (9)$$

berechnet. Das polare Flächenträgheitsmoment  $I_p$ , das ein Maß für den Widerstand eines Körpers gegen Torsion darstellt, wird nach

$$I_p = \frac{\pi (d_a^4 - d_i^4)}{32} \quad (10)$$

bestimmt. Die Längsdehnung wird von der Querschnittsfläche  $A$  des Balkenelements beeinflusst. Die Querschnittsfläche ergibt sich zu

$$A = \frac{\pi (d_a^2 - d_i^2)}{4} \quad (11)$$

Der Einfluss der Verformung durch Querschub wird durch den Schubparameter  $\psi$

$$\psi = \frac{1}{1 + \frac{12EI}{l^2 GA_S}} \quad (12)$$

erfasst. Die für Querschub relevante Querschnittsfläche  $A_S$  ergibt sich nach [35] und [148] aus

$$A_S = \frac{A}{\kappa} \quad (13)$$

Die Schubeinflusszahl  $\kappa$  ist in Abhängigkeit vom Querschnitt des Balkenelements zu bestimmen. Für Vollwellen ergibt sich  $\kappa$  zu

$$\kappa = \frac{7 + 6\nu}{6(1 + \nu)} \quad (14)$$

Bei Hohlwellen wird  $\kappa$  folgendermaßen bestimmt:

$$\kappa = \frac{4 + 3\nu}{2(1 + \nu)} \quad (15)$$

Die Elementsteifigkeitsmatrix des Timoshenko-Balkenelements in einem an der Längsachse des Balkenelements ausgerichteten Koordinatensystems ergibt sich in der  $\xi v$ -Ebene des Koordinatensystems des Balkenelements zu

$${}_{B\underline{\underline{C}}} = \left( \begin{array}{cccc|cccc} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{12\Psi_\zeta EI_\zeta}{l^3} & 0 & \frac{6\Psi_\zeta EI_\zeta}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{12\Psi_\zeta EI_\zeta}{l^3} & 0 & \frac{6\Psi_\zeta EI_\zeta}{l^2} \\ \frac{GI_t}{l} & 0 & 0 & \frac{(1+3\Psi_\zeta)EI_\zeta}{l} & 0 & 0 & -\frac{GI_t}{l} & 0 \\ 0 & \frac{(1+3\Psi_\zeta)EI_\zeta}{l} & 0 & -\frac{6\Psi_\zeta EI_\zeta}{l^2} & 0 & \frac{-6\Psi_\zeta EI_\zeta}{l^2} & 0 & \frac{(-1+3\Psi_\zeta)EI_\zeta}{l} \\ \hline & & & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12\Psi_\zeta EI_\zeta}{l^3} & 0 & \frac{-6\Psi_\zeta EI_\zeta}{l^2} & 0 \\ & & & & \frac{GI_t}{l} & 0 & 0 & \frac{(1+3\Psi_\zeta)EI_\zeta}{l} \\ & & & & 0 & \frac{(1+3\Psi_\zeta)EI_\zeta}{l} & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (16)$$

*sym.*

mit den zugehörigen Verschiebungs- und Belastungsvektoren

$${}_{B\underline{u}}^T = \left( u_{\xi i} \ u_{v i} \ \varphi_{\xi i} \ \varphi_{\zeta i} \mid u_{\xi i} \ u_{v,i} \ \varphi_{\xi,i} \ \varphi_{\zeta,i} \right) \quad (17)$$

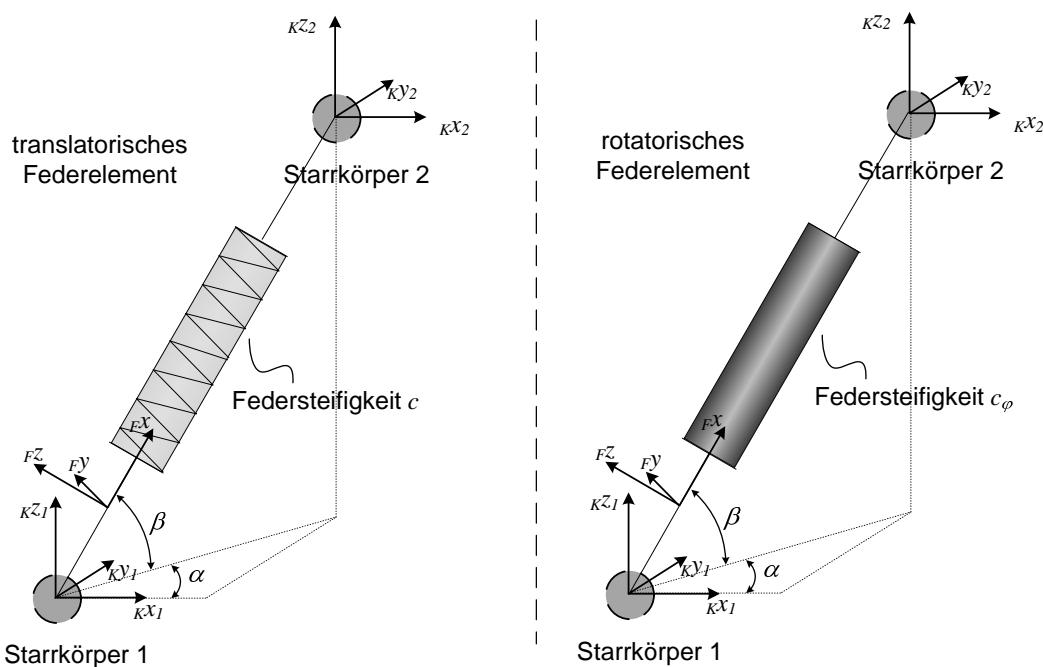
$${}_{B\underline{f}}^T = \left( F_{\xi i} \ F_{v i} \ M_{\xi i} \ M_{\zeta i} \mid F_{\xi i} \ F_{v,i} \ M_{\xi,i} \ M_{\zeta,i} \right) \quad (18)$$

${}_{B\underline{\underline{C}}}$		Elementsteifigkeitsmatrix Balkenelement i B-System	${}_{B\underline{u}}$	Verschiebungsvektor im B-System
${}_{B\underline{f}}$		Belastungsvektor im B-System		
$\xi, v, \zeta$		Koordinaten des B-Systems	$i, \hat{i}$	Index des Starrkörpers an Anschluss 1 und 2
$E$	$N/mm^2$	Elastizitätsmodul der Welle	$G$	Schubmodul der Welle
$I$	$mm^4$	Flächenträgheitsmoment des Wellenabschnitts	$I_p$	polares Flächenträgheitsmoment des Wellenabschnitts
$d_a$	$mm$	Außendurchmesser des Wellenabsatzes	$d_i$	Innendurchmesser des Wellenabsatzes
$A$	$mm^2$	Querschnittsfläche des Wellenabsatzes	$\pi$	Kreiszahl
$A_s$	$mm^2$	Querschnittsfläche Schub des Wellenabsatzes	$\psi$	Schubparameter
$\kappa$	—	Schubeinflusszahl	$\nu$	Querkontraktionszahl

Die Herleitung der Elementsteifigkeitsmatrix ist vollständig in der Diplomarbeit Kohn [86] beschrieben.

### 3.2.3 Abbildung von Lagerstellen

Lagerstellen werden im linearen Getriebesystem vereinfacht punktförmig über translatorische und rotatorische Federelemente abgebildet. Die translatorischen Federelemente bilden das Senk- und Axialsteifigkeitsverhalten, die rotatorischen Federelemente das Kipp- und Torsionssteifigkeitsverhalten der Lagerstellen ab. In der Regel lassen Wälzlagungen eine rotatorische Bewegung der Wellen zu. Die torsionssteife Kopplung zweier Wellensysteme im Gesamtgetriebesystem zur Abbildung von Wellenkupplungen o. ä. kann die Vorgabe einer Torsionssteifigkeit erforderlich machen. Die Abbildung eines translatorischen und eines rotatorischen Federelements ist in **Bild 9** dargestellt.



**Bild 9:** Schematische Darstellung der Federelemente zur Abbildung von Lagerstellen

Translatorische Federn nehmen Kräfte nur in  $F^x$ -Richtung auf. Die aus einer Verschiebung resultierenden Kräfte einer translatorischen Feder im lokalen Koordinatensystem der Feder ergeben sich durch Multiplikation der zugehörigen Steifigkeitsmatrix mit dem Verschiebungsvektor zu:

$${}_{F\underline{\underline{C}}} \underline{\underline{f}} = {}_{F\underline{\underline{C}}} \cdot {}_F \underline{u} \quad (19)$$

$$\begin{pmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{z1} \\ \dots \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{z2} \end{pmatrix}_F = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -c & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_F \cdot \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{z1} \\ \dots \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{z2} \end{pmatrix}_F \quad (20)$$

${}_F \underline{\underline{C}}$	$\frac{N}{mm}$	Steifigkeitsmatrix der Feder	${}_F \underline{\underline{f}}$	$N$	Lastvektor der Feder
${}_F \underline{u}$	$mm$	Verschiebungsvektor der Feder	$f_{ji}$	$N$	Federkraft in Richtung $j$ am Knoten $i$
$u_{ji}$	$mm$	Verschiebung des Knotens $i$ in Richtung $j$	$c$	$\frac{N}{mm}$	Federsteifigkeit

Rotatorische Federn nehmen Momente nur um die  ${}_{F\varphi}x$ -Achse auf. Die Beschreibung der Steifigkeitsmatrix der Drehfeder ist analog zu der der translatorischen Feder in **Gleichung (20)**. Die aus Verdrehung resultierenden Momente ergeben sich zu

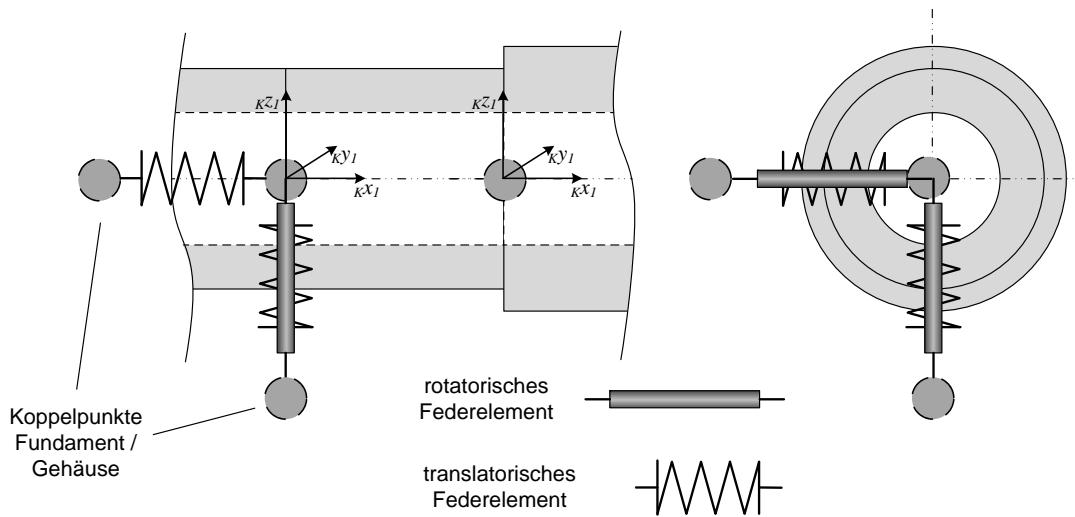
$${}_{F\varphi} \underline{\underline{m}} = {}_{F\varphi} \underline{\underline{C}} \cdot {}_{F\varphi} \underline{u} \quad (21)$$

$$\begin{pmatrix} m_{x1} \\ m_{y1} \\ m_{z1} \\ \dots \\ m_{x2} \\ m_{y2} \\ m_{z2} \end{pmatrix}_{F\varphi} = \begin{pmatrix} c_\varphi & 0 & 0 & -c_\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -c_\varphi & 0 & 0 & c_\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{F\varphi} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \\ \varphi_{z1} \\ \dots \\ \varphi_{x2} \\ \varphi_{y2} \\ \varphi_{z2} \end{pmatrix}_{F\varphi} \quad (22)$$

${}_{F\varphi} \underline{\underline{C}}$	$\frac{Nmm}{rad}$	Steifigkeitsmatrix der Dreheder	${}_{F\varphi} \underline{\underline{m}}$	$Nmm$	Lastvektor der Drehfeder
${}_{F\varphi} \underline{u}$	$rad$	Verschiebungsvektor der Drehfeder	$m_{ji}$	$Nmm$	Moment um Achse $j$ am Knoten $i$
$\varphi_{ji}$	$mm$	Verschiebung des Knotens $i$ in Richtung $j$	$c_\varphi$	$\frac{Nmm}{rad}$	Drehfedersteifigkeit

Die Federelemente zur Darstellung von Lagerstellen koppeln das Verschiebungsverhalten zweier Starrkörper miteinander. Mindestens ein Starrkörper repräsentiert dabei einen Wellenabsatz. Wird mit der Lagerung eine Welle mit einer weiteren Welle verbunden, stellt auch der zweite Starrkörper einen Wellenabsatz dar. Lagerstellen, die

die Welle im Gehäuse abstützen, verbinden den Starrkörper eines Wellenabsatzes mit einem Knoten des Getriebefundamentes oder des Getriebegehäuses (**Bild 10**).



**Bild 10:** Schematische Darstellung zur Abbildung einer Lagerstelle zwischen Welle und Gehäuse im linear-elastischen Getriebesystem

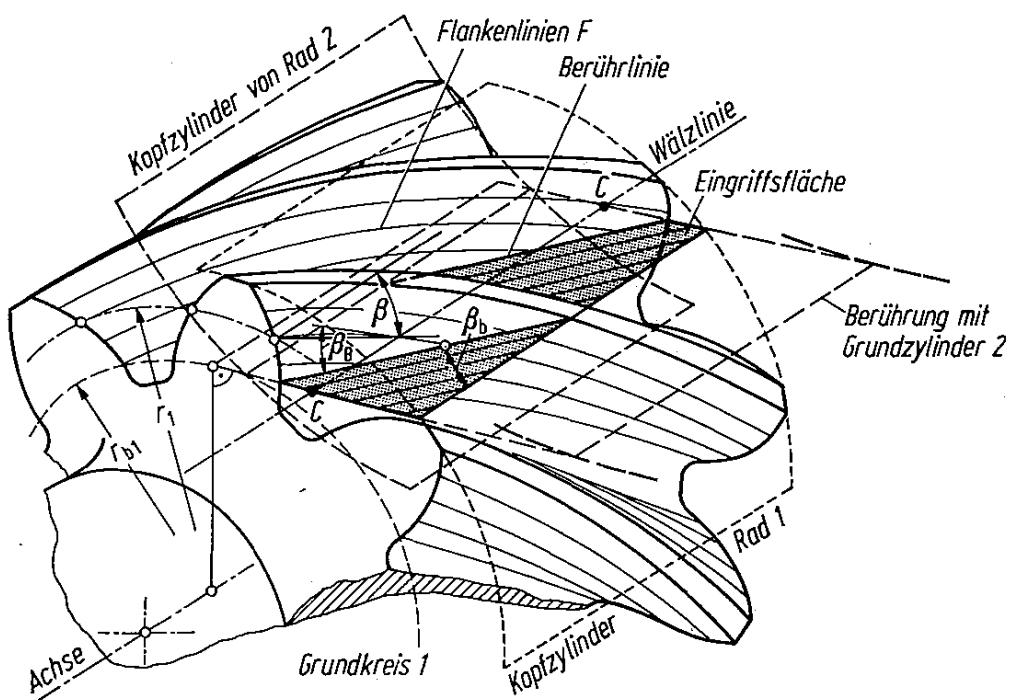
Das Erfassen von Lagerversätzen funktioniert analog zur Erfassung von Verzahnungskorrekturen entlang der Berührlinien einzelner Zahnpaare und ist in **Abschnitt 3.2.4** entsprechend beschrieben.

### 3.2.4 Abbildung einzelner Zahnpaare mit eingriffsstellungsabhängiger Steifigkeit

Zur Bestimmung des Anregungsverhaltens von Planetengetriebesystemen auf Basis des statischen Drehwegverhaltens in den Zahneingriffen und der statischen Übersetzungsfehler gesamter Getriebestränge wird das örtlich und zeitlich veränderliche Steifigkeitsverhalten der im Eingriff befindlichen Zahnpaare im gesamten Getriebesystem nach Weber, Banaschek [157] und Schmidt [134] bei der Erstellung der Systemsteifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{C}}$  erfasst.

Das Getriebesystem wird sequentiell für aufeinanderfolgende Wälzstellungen des Getriebesystems (Lösungsschritte) gelöst (**Abschnitt 5.1**). Umlaufende Getriebeteilsysteme (Planetenträger) werden dabei erfasst. Durch die Vorgabe diskreter Winkelstellungen am Antrieb und über geometrische / kinematische Beziehungen im Getriebe (Übersetzung, Eingriffsfolge, Phasenversatz) werden die Eingriffsstellungen der einzelnen Stirnradstufen im System bestimmt.

Für einen Lösungsschritt sind die Elementsteifigkeitsmatrizen der einzelnen im Eingriff befindlichen Zahnpaare in entsprechender Eingriffsstellung zu bestimmen und in die Systemsteifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{C}}$  einzutragen.

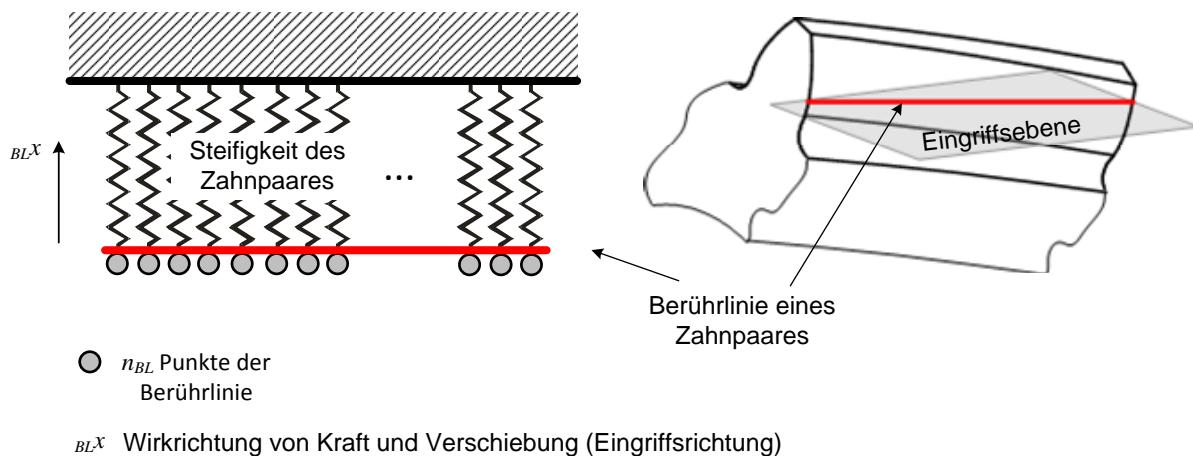


**Bild 11:** Kontaktverhältnisse bei Schrägverzahnung nach Niemann/Winter [107]

## Bestimmen der Zahnpaarsteifigkeiten

In jeder Eingriffsstellung befinden sich - abhängig von der Verzahnungshauptgeometrie und den Einflüssen aus vor- und nachzeitigem Zahneingriff - ein oder mehrere Zahnpaare einer Stirnradstufe im Eingriff (s. **Bild 11**). Die Bestimmung der im Eingriff befindlichen Zahnpaare und des zugehörigen Steifigkeitsverhaltens einzelner Zahnpaare in Abhängigkeit von der Eingriffsstellung ist bei Placzek [118], Otto [113] und Thoma [148] beschrieben und braucht an dieser Stelle nicht näher ausgeführt werden.

**Bild 11** zeigt die Zusammenhänge zur Lage der Berührlinien einzelner im Eingriff befindlicher Zahnpaare bei Schrägverzahnung. Die Bestimmung der Zahnpaarsteifigkeit nach Weber und Banaschek beinhaltet den Einfluss der Zahnverformung, der Verformung im Zahnkontakt nach Hertz [62] sowie die Nachgiebigkeit der Einspannstelle des Zahns am Radkörper. Die veränderliche Steifigkeit über der Zahnbreite bei schräg über die Flanke laufenden Berührlinien nach **Bild 11** wird nach dem Modell von Schmidt [134] erfasst.



**Bild 12:** Vereinfachte Darstellung des Modells Feder gegen starre Wand zur Abbildung der Zahnpaarsteifigkeit nach Placzek [118]

Als Ergebnis wird eine Einflusszahlenmatrix  $_{BL}\underline{N}$  entlang der Berührlinie eines Zahnpaars ausgegeben, die das Nachgiebigkeitsverhalten  $_{BL}u$  des Zahnpaars in Eingriffsrichtung in Abhängigkeit der auf  $n_{pl}$  Stützpunkte verteilten Linienlast  $_{BL}f$  gegen eine starre Wand gedrückt beschreibt. Dabei können Kräfte und Verformungen ausschließlich in Eingriffsrichtung, die der  $_{BL}x$ -Richtung des Modells in **Bild 12** entspricht, erfasst werden.

Es besteht folgender Zusammenhang:

$${}_{BL}\underline{\underline{u}} = {}_{BL}\underline{\underline{N}} \cdot {}_{BL}\underline{\underline{f}} \quad (23)$$

oder ausführlich angeschrieben

$${}_{BL} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \end{pmatrix} = {}_{BL} \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & \dots & n_{1j} \\ n_{21} & n_{22} & \dots & n_{2j} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n_{i1} & n_{i2} & \dots & n_{ij} \end{pmatrix} \cdot {}_{BL} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_j \end{pmatrix} \quad (24)$$

---

$n_{i,j}$	$\frac{mm}{N}$	Nachgiebigkeit eines Zahnpaares - koppelt Verschiebung am Punkt j mit Last am Punkt i	$u_i$	$mm$	Verformung des Zahneingriffs am Punkt i
$f_j$	$N$	Linienlast des Zahneingriffs am Punkt i			

---

Durch Inversion der Nachgiebigkeitsmatrix  ${}_{BL}\underline{\underline{N}}$  ergibt sich die Steifigkeitsmatrix  ${}_{BL}\underline{\underline{C}}$  eines Zahneingriffs entlang der Berührlinie mit  $n_{BL}$  Punkten zu

$${}_{BL}\underline{\underline{C}} = {}_{BL}\underline{\underline{N}}^{-1} \quad (25)$$

mit der zugehörigen Verknüpfung von Belastung und Verformung zu

$${}_{BL}\underline{\underline{f}} = {}_{BL}\underline{\underline{C}} \cdot {}_{BL}\underline{\underline{u}} \quad (26)$$

oder in Matrix-Vektor Schreibweise

$${}_{BL} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \end{pmatrix} = {}_{BL} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} \end{pmatrix} \cdot {}_{BL} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_j \end{pmatrix} \quad (27)$$

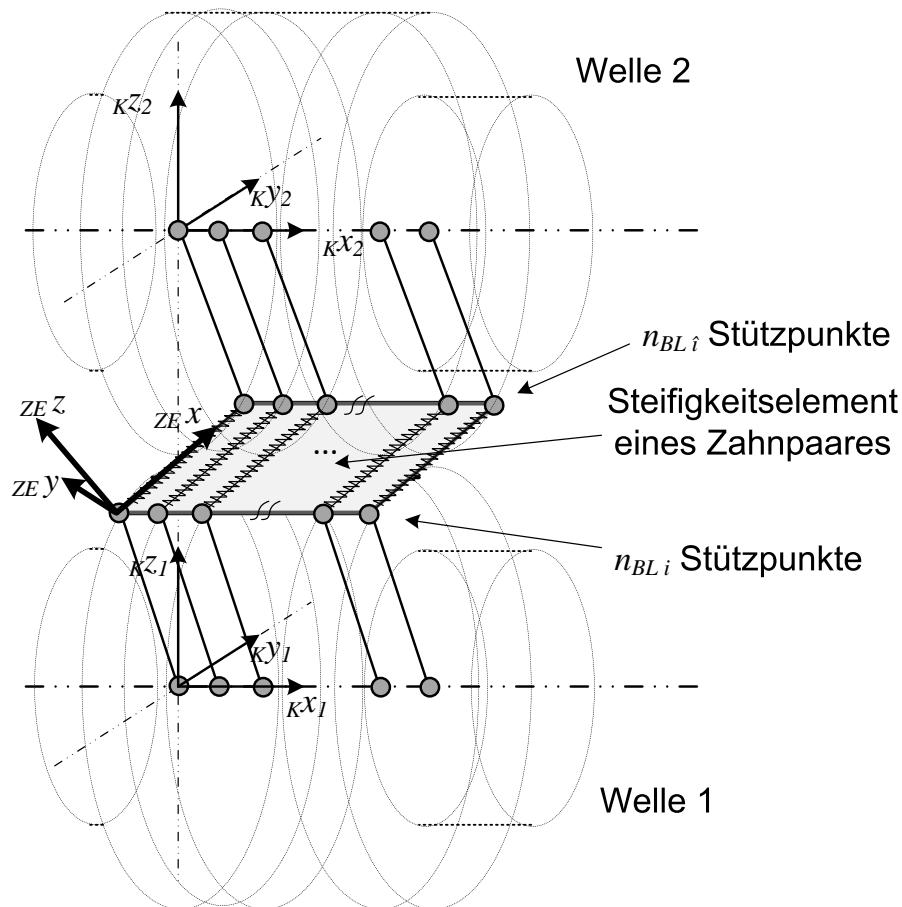
---

$c_{i,j}$	$\frac{N}{mm}$	Steifigkeit eines Zahnpaares - koppelt Verschiebung am Punkt i mit Last am Punkt j	$u_i$	$mm$	Verformung des Zahneingriffs am Punkt i
$f_i$	$N$	Belastung des Zahneingriffs am Punkt j			

---

### Ableiten der Elementsteifigkeitsmatrix für ein Zahnpaar

Aus der Beschreibung des Steifigkeitsverhaltens eines Zahnpaares entlang der Berührlinie in Eingriffsrichtung mit der Steifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{C}}_{BL}^{\widehat{C}}$  kann die Elementsteifigkeitsmatrix für ein Zahnpaar  $\underline{\underline{C}}_{BL}$  entlang der Berührlinie abgeleitet werden. Dazu muss die Beschreibung des Steifigkeitsverhaltens eines Zahnpaares  $\underline{\underline{C}}_{BL}^{\widehat{C}}$  aus der Eingriffsebene in das räumliche Koordinatensystem des Gesamtgetriebesystems überführt werden.



**Bild 13:** Schematische Darstellung eines Steifigkeitselementes zur Abbildung der Zahnpaarsteifigkeit als Koppelement zwischen zwei Wellensystemen

Aus der ebenen Beziehung zwischen Verschiebung  $u_i$  und Belastung  $f_j$  in der Eingriffsebene an jedem Punkt  $n_{BL}$  der Berührlinie eines Zahnpaares nach **Gleichung (27)** in abgekürzter Schreibweise

$$f_i = \sum_{j=1}^n c_{i,j} \cdot u_j \quad (28)$$

wird eine räumliche Beschreibung im lokalen  $ZE$ -Koordinatensystem des Zahnein-

griffselements zu

$${}_{ZE}\underline{\underline{f}}_i = \sum_{j=1}^n {}_{ZE}\underline{\underline{c}}_{i,j} \cdot {}_{ZE}\underline{u}_j \quad (29)$$

oder ausgeschrieben als

$${}_{ZE} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}_i = \sum_{j=1}^n {}_{ZE} \begin{pmatrix} c_{i,j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij} \cdot {}_{ZE} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}_j \quad (30)$$

hergeleitet. Die Kraftübertragung im Zahneingriff findet dabei nur in Eingriffsrichtung oder der  ${}_{ZE}x$ -Richtung des Zahnpaares statt.

Die Beschreibung des Steifigkeitsverhaltens eines Zahnpaares erfolgt als Koppelement zwischen zwei Wellen zur Abbildung im Gesamtgetriebesystem nach **Bild 13**. Die um die entsprechenden Anschlusspunkte erweiterte Elementsteifigkeitsmatrix eines Zahnpaares  ${}_{ZE}\widetilde{\underline{\underline{C}}}$  ergibt sich zu

$${}_{ZE}\widetilde{\underline{\underline{C}}} = \left( \begin{array}{cccc|cccc} \underline{\underline{c}}_{11} & \underline{\underline{c}}_{12} & \cdots & \underline{\underline{c}}_{1j} & -\underline{\underline{c}}_{11} & -\underline{\underline{c}}_{12} & \cdots & -\underline{\underline{c}}_{1j} \\ \underline{\underline{c}}_{21} & \underline{\underline{c}}_{22} & \cdots & \underline{\underline{c}}_{2j} & -\underline{\underline{c}}_{21} & -\underline{\underline{c}}_{22} & \cdots & -\underline{\underline{c}}_{2j} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \hline \underline{\underline{c}}_{i1} & \underline{\underline{c}}_{i2} & \cdots & \underline{\underline{c}}_{ij} & -\underline{\underline{c}}_{i1} & -\underline{\underline{c}}_{i2} & \cdots & -\underline{\underline{c}}_{ij} \\ -\underline{\underline{c}}_{11} & -\underline{\underline{c}}_{21} & \cdots & -\underline{\underline{c}}_{i1} & \underline{\underline{c}}_{11} & \underline{\underline{c}}_{12} & \cdots & \underline{\underline{c}}_{1j} \\ -\underline{\underline{c}}_{12} & -\underline{\underline{c}}_{22} & \cdots & -\underline{\underline{c}}_{i2} & \underline{\underline{c}}_{21} & \underline{\underline{c}}_{22} & \cdots & \underline{\underline{c}}_{2j} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \hline {}_{ZE} & -\underline{\underline{c}}_{1j} & -\underline{\underline{c}}_{2j} & \cdots & -\underline{\underline{c}}_{ij} & \underline{\underline{c}}_{i1} & \underline{\underline{c}}_{i2} & \cdots & \underline{\underline{c}}_{ij} \end{array} \right) \quad (31)$$

in Abhängigkeit der zugehörigen Elementverschiebungs- und -belastungsvektoren

$${}_{ZE}\underline{\underline{f}} = {}_{ZE} \left( \begin{array}{cccc|cccc} \underline{f}_1 & \underline{f}_2 & \cdots & \underline{f}_i & \underline{f}_{\hat{1}} & \underline{f}_{\hat{2}} & \cdots & \underline{f}_{\hat{i}} \end{array} \right)^T \quad (32)$$

$${}_{ZE}\underline{u} = {}_{ZE} \left( \begin{array}{cccc|cccc} \underline{u}_1 & \underline{u}_2 & \cdots & \underline{u}_j & \underline{u}_{\hat{1}} & \underline{u}_{\hat{2}} & \cdots & \underline{u}_{\hat{j}} \end{array} \right)^T \quad (33)$$

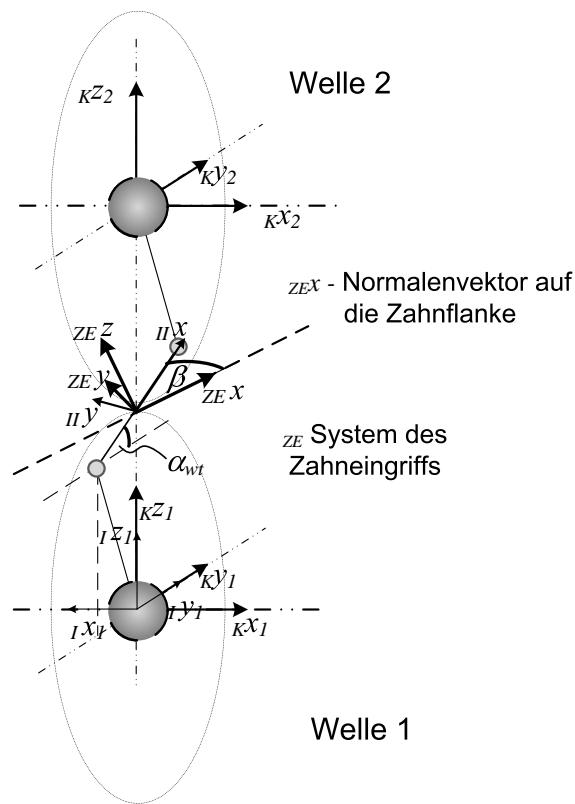
${}_{ZE}\underline{\underline{c}}_{i,j}$	$\frac{N}{mm}$	Räumliche Koppelung der Verformung eines Zahnpaares am Punkt j der Berührlinie bei Belastung an Punkt i	${}_{ZE}\underline{u}_j$	$mm$	Verformungsvektor des Zahneingriffs am Punkt j
${}_{ZE}\underline{f}_i$	$N$	Belastungsvektor des Zahneingriffs am Punkt i			

## Aufbereiten der Wellen

Durch Erfassung der Elementsteifigkeitsmatrix eines Zahnpaares werden zwei Wellen des Getriebes an den  $n_{BL}$  Stützstellen des Zahnpaares über der anteiligen Verzahnungsbreite in Zahneingriffsrichtung miteinander verbunden. Dazu müssen an den beiden Wellen jeweils  $n_{BL}$  zusätzliche gleichmäßig über der anteiligen Verzahnungsbreite verteilte Wellenstützpunkte mit den zugehörigen Starrkörpern eingefügt werden. Die Vorgehensweise ist in **Bild 13** schematisch dargestellt.

## Transformation und Ausrichtung der Elementsteifigkeitsmatrix eines Zahnpaares

Die Elementsteifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{C}}_{ZE}$  des Zahnpaares verbindet die beiden Wellen der Stirnradstufe und ist tangential an den Grundkreisen der Verzahnung ausgerichtet (s. **Bild 14**). Bei Schrägverzahnung ist die Ausrichtung der Steifigkeitsmatrix zusätzlich vom Schrägungswinkel  $\beta$  abhängig. Die Ausrichtung erfolgt entsprechend der Wirkrichtung der Zahnnormalkraft auf die Flanke (s. **Bild 14**).



**Bild 14:** Koordinatensystem des Steifigkeitselementes eines Zahnpaares, tangential an den Grundkreisen  $d_{b1/2}$  ausgerichtete Anordnung der exzentrischen Koppelung von Wellen über die Steifigkeitselemente von Zahnpaaren

Zum Einbau in die Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{C}}$  muss die Elementsteifigkeitsmatrix des

Zahnpaars  $_{ZE}\underline{\underline{C}}$  aus dem zahneingriffsbezogenen  $ZE$ -Koordinatensystem in ein Koordinatensystem parallel zu den körperfesten Bezugssystemen der angeschlossenen Starrkörper transformiert werden. Die Koordinatentransformation kann aus **Bild 14** abgeleitet werden und erfolgt nach

$$_K\underline{\underline{\tilde{C}}} = \underline{\underline{A}}_{K,ZE} \ _ZE\underline{\underline{\tilde{C}}} \ \underline{\underline{A}}_{K,ZE}^T \quad (34)$$

mit der Elementtransformationsmatrix  $\underline{\underline{A}}_{K,ZE}$ .

Analog zum Aufbau der Elementsteifigkeitsmatrix  $_{ZE}\underline{\underline{\tilde{C}}}$  nach **Gleichung (31)** wird die Elementtransformationsmatrix aus den einzelnen Transformationsmatrizen für die Freiheitsgrade an den einzelnen Knoten  $\underline{\underline{a}}_{K,ZE\ i\ j}$  nach

$$\underline{\underline{a}}_{K,ZE\ i\ j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha_{wt}) & 0 & -\sin(\alpha_{wt}) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha_{wt}) & 0 & \cos(\alpha_{wt}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (35)$$

zusammengesetzt.

$\underline{\underline{a}}_{K,ZE\ i\ j}$	–	Transformationsmatrix für einen Knoten der Elementsteifigkeitsmatrix	$\alpha_{wt}$	◦	Betriebeingriffswinkel eines Stirnradpaars
$\beta$	◦	Schrägungswinkel			

In der Systemsteifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{C}}$  werden Starrkörper nur an ihren Schwerpunkten erfasst. Die Koppelung einzelner Wellen durch Steifigkeitselemente ist demnach nur an den Schwerpunkten der Starrkörper, also auf den Rotationsachsen der Wellen möglich. Durch die tangentiale Anordnung der Steifigkeitselemente von Zahnpaaren nach **Bild 13** exzentrisch zu den Rotationsachsen der gekoppelten Wellen rufen translatorische Verschiebungen im Zahneingriff eine zusätzliche Verdrehung der gekoppelten Starrkörper hervor. Analog dazu ruft Kraftübertragung im Zahnkontakt eine Drehmomentwirkung an den Wellen hervor.

Aus der Geometrie der exzentrischen Angriffspunkte der Verzahnung muss eine Transformation der Elementsteifigkeitsmatrix  $_{K}\underline{\underline{\tilde{C}}}$  vorgenommen werden, um bei Koppelung der beiden Wellen an den vorhandenen Starrkörpern des Systems die zusätzlichen Verdrehungen und damit die Drehmomentübertragung im Zahnkontakt abzubilden (s.**Bild 14**). Die zum Einbau in das Gesamtgetriebesystem auf die Koppelung der beiden Wellen an den Starrkörperschwerpunkten transformierte Elementsteifigkeitsmatrix  $_{K}\underline{\underline{C}}$  ergibt sich zu

$$_K\underline{\underline{C}} = _K\underline{\underline{B}}^T \ _K\underline{\underline{\tilde{C}}} \ _K\underline{\underline{B}} \quad (36)$$

mit der Transformationsmatrix  $\underline{\underline{B}}_K$ .

Aus den in **Bild 14** gezeigten geometrischen Beziehungen zwischen Kraftangriffspunkt einer Verzahnung und Wellenmittelpunkt bzw. Schwerpunkt der Starrkörper kann eine entsprechende Transformationsvorschrift für kleine Verschiebungsbeträge abgeleitet werden. Analog zum Aufbau der Elementtransformationsmatrix  $\underline{\underline{A}}_{K,ZE}$  wird die Matrix  $\underline{\underline{B}}_K$  mit den Teilmatrizen  $\underline{\underline{b}}_{i,j}$  an jedem Knoten der Elementsteifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{C}}_K$  eines Zahneingriffs beschrieben:

$$\begin{pmatrix} u_{x,J} \\ u_{y,J} \\ u_{z,J} \end{pmatrix}_K = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta z & -\Delta y \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta y & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{K \underline{\underline{b}}_{i,j}} \begin{pmatrix} u_{x,i} \\ u_{y,i} \\ u_{z,i} \\ \varphi_{x,i} \\ \varphi_{y,i} \\ \varphi_{z,i} \end{pmatrix}_K \quad (37)$$

mit

$$\Delta y = d_b/2 * \sin(\alpha_{wt}) \quad \Delta z = d_b/2 * \cos(\alpha_{wt}) \quad (38)$$

$\underline{\underline{b}}_{i,j}$	-	Transformationsmatrix für einen Knoten der Elementsteifigkeitsmatrix	$\alpha_{wt}$	◦	Betriebseingriffswinkel eines Stirnradpaars
$d_b$	mm	Grundkreisdurchmesser eines Zahnrades			

### Erfassung von Verzahnungskorrekturen

Verzahnungskorrekturen können als Verschiebungsrandbedingung im Zahnkontakt gesehen werden. In einem verschiebungsbasierten Gleichungssystem nach **Abschnitt 3.2** können Verschiebungsrandbedingungen nur als äußere Kräfte angetragen werden. Die Überführung von Verzahnungskorrekturenbeträgen entlang der Berührlinien einzelner Zahnpaare in an diesen Knoten angreifende Lasten erfolgt durch Multiplikation der Elementsteifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{C}}_K$  mit dem Vektor der Korrekturenbeträge entlang der Berührlinie  $\underline{\underline{\delta}}_K$ . Der entsprechende Lastvektor  $\underline{\underline{f}}_{\underline{\delta}}$  wird nach entsprechender Transformation des Koordinatensystems dem globalen Lastvektor  $\underline{\underline{f}}_I$  zugeschlagen.

### 3.2.5 Erfassung von Zahneingriffen mit mittlerer Eingriffssteifigkeit

Untersuchungen zum statischen Last- und Verformungsverhalten in Planetengetrieben basieren auf vereinfachten Ansätzen, die die Lastverteilung in den Zahnkontakten als

ebenes und über dem Profil gemitteltem Phänomen nach DIN 3990 [25] oder ISO 6336 [75] beschreiben. Das Steifigkeitsverhalten von Stirnradkontakte wird dazu mit der mittleren Eingriffssteifigkeit  $c_\gamma$  nach ISO 6336 [75] abgebildet. Der Zahneingriff wird dabei über der Verzahnungsbreite in eine diskrete Anzahl  $n$  Stützstellen unterteilt. Die Vorgehensweise entspricht der Methode des Federmodells zur Abbildung von Verzahnungen nach ISO 6336 [75].

Die Vorgehensweise zur Erfassung von Zahneingriffen mit der zeitlich mittleren Verzahnungssteifigkeit unterscheidet sich geringfügig zu der in **Abschnitt 3.2.4** beschriebenen Vorgehensweise. Die Bestimmung des Steifigkeitsverhaltens einzelner Zahnpaare nach **Gleichung (27)** mit der Matrix  $_{BL}\underline{\underline{C}}$  auf Basis der von Weber, Banaschek [157] und Schmidt [134] beschriebenen Vorgehensweise wird durch die Vorgabe einer Steifigkeitsmatrix  $_{BL}\underline{\underline{C}}_\gamma$ , die das mittlere Steifigkeitsverhalten eines gesamten Zahneingriffs über der Verzahnungsbreite erfasst, ersetzt.

Die mittlere Steifigkeitsmatrix  $_{BL}\underline{\underline{C}}_\gamma$  des Zahneingriffs und die zugehörige Verknüpfung von Belastung und Verschiebung ergibt sich zu

$$_{BL} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \end{pmatrix} = \underbrace{_{BL} \begin{pmatrix} c_{\gamma 11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{\gamma 22} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{\gamma ij} \end{pmatrix}}_{\widehat{\underline{\underline{C}}}_\gamma} \cdot _{BL} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_j \\ \end{pmatrix} \quad (39)$$

---

$c_{\gamma ij}$	$\frac{N}{mm}$	Anteil der mittleren Zahnsteifigkeit nach ISO 6336 [75]	$u_j$	$mm$	Verformung des Zahneingriffs am Punkt j
$f_i$	$N$	Belastung des Zahneingriffs am Punkt j			

---

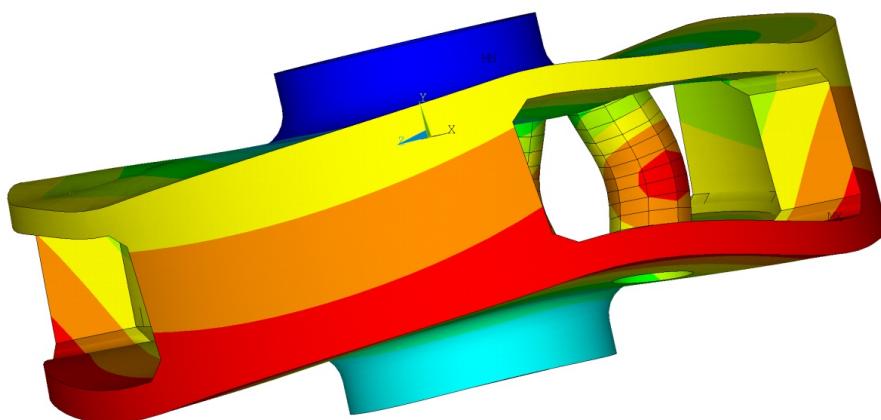
Nach dieser Definition hat die Belastung an einem Punkt  $i$  der  $n$  Stützpunkte der Verzahnung auch nur eine Verformung des Punktes  $i$  zur Folge. Die Koppelung des Verformungsverhaltens der einzelnen Verzahnungsstützpunkte wie bei Weber, Banaschek und Schmidt nach **Gleichung (27)** entfällt. Dadurch entfallende Einträge in die Systemsteifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{C}}$  verkürzen die Berechnungszeit des Systems.

Die zur Erfassung des mittleren Steifigkeitsverhaltens eines Zahneingriffs in der Systemsteifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{C}}$  notwendige Elementsteifigkeitsmatrix  $_{K}\underline{\underline{C}}_\gamma$  des Zahneingriffs kann analog zur Vorgehensweise bei der Bestimmung der Elementsteifigkeitsmatrizen für Zahnpaare nach **Gleichung (28)** bis **Gleichung (36)** hergeleitet werden.

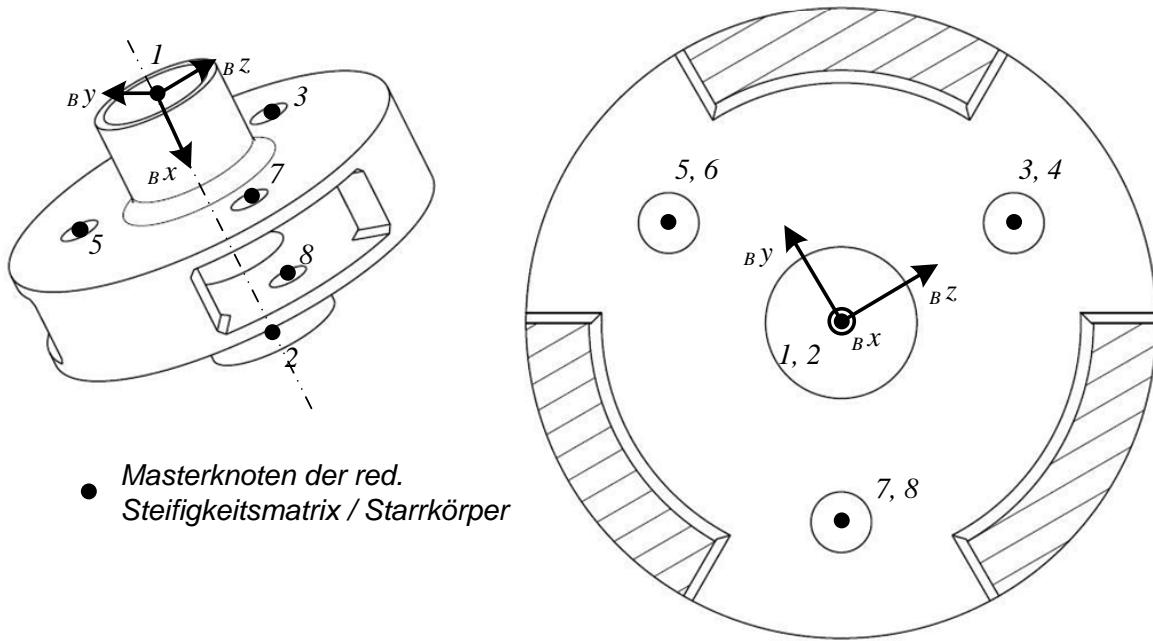
### 3.2.6 Erfassung des Steifigkeitsverhaltens von Strukturbaueteilen

Die Verformung von Strukturbaueteilen mit komplexer Geometrie hat maßgeblichen Einfluss auf das Last- und Verformungsverhalten des gesamten Getriebesystems. In Planetengetrieben ist der Einfluss des Planetenträgers besonders hervorzuheben. Insbesondere die Torsionsverformung hat eine Schrägstellung der Planetenbolzen und damit der Planetenräder (Achsschränkung) in den Zahneingriffen zur Folge. Bei der Analyse des Last- und Verformungsverhaltens von Getriebesystemen kann die Verformung von Strukturbaueteilen mit komplexer Bauteilgeometrie ohne vertretbaren Aufwand nicht hinreichend auf Basis analytischer Berechnungsansätze erfasst werden. Das Steifigkeitsverhalten von Getriebeelementen mit komplexer Geometrie wird über die Integration von reduzierten Steifigkeitsmatrizen dieser Strukturbauenteile als Superelemente in die Steifigkeitsmatrix  $\underline{C}$  des Gesamtgetriebesystems erfasst. Dabei wird, wie in **Bild 16** am Beispiel eines Planetenträgers gezeigt, das Steifigkeitsverhalten des gesamten Bauteils auf wenige Masterknoten reduziert bei der Analyse des Getriebesystems erfasst.

Das Steifigkeitsverhalten von Planetenträgern und deren komplexer Geometrie kann grundsätzlich in geeigneten FEA-Systemen beschrieben werden. **Bild 15** zeigt das Verformungsverhalten des FE-Modells eines Planetenträgers. Bei der Last- und Verformungsanalyse im Getriebesystem steht nicht die Berechnung der lokalen Verformungs- und Lastzustände des Planetenträgers im Fokus, sondern deren Einfluss auf das Verformungsverhalten aller angeschlossenen Getriebeelemente. Zur Einbindung in die Verformungsanalyse ist deshalb die Reduktion der Steifigkeitsmatrix solcher Bauteile auf eine notwendige Anzahl Masterknoten notwendig (**Bild 16**), die mit den entsprechenden Starrkörpern die Anschlussstellen für die Verbindung mit weiteren Ge-



**Bild 15:** FE-Modell eines Planetenträgers im belasteten und verformten Zustand



**Bild 16:** Koordinatensystem und Bezeichnung der Masterknoten einer reduzierten Steifigkeitsmatrix am Beispiel eines Planetenträgers

triebelementen sicherstellen können. So wird das Verformungsverhalten komplexer Bauteile an diesen Knoten exakt beschrieben und der Einfluss auf das Getriebeumfeld vollständig erfasst, ohne lokale Verformungszustände des Bauteils selbst zeitaufwändig zu berechnen.

Die reduzierte Steifigkeitsmatrix eines Strukturbauenteils  ${}_{\underline{B}}\underline{\underline{C}}$  im lokalen  $B$ -Koordinatensystem des Bauteils lässt sich in quadratische und vollbesetzte  $6 \times 6$  Blöcke  ${}_{\underline{B}}\underline{\underline{c}}_{ij}$  zu

$${}_{\underline{B}}\underline{f}_i = {}_{\underline{B}}\underline{\underline{c}}_{ij} \cdot {}_{\underline{B}}\underline{u}_j \quad (40)$$

mit den zugehörigen Last- und Verschiebungsvektoren

$${}_{\underline{B}}\underline{f}_i = {}_{\underline{B}}\left( \begin{array}{ccc|cc} f_x & f_y & f_z & m_x & m_y & m_z \end{array} \right)_i^T \quad (41)$$

$${}_{\underline{B}}\underline{u}_j = {}_{\underline{B}}\left( \begin{array}{ccc|ccc} u_x & u_y & u_z & \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{array} \right)_j^T \quad (42)$$

zerlegen, die jede für sich das Verformungsverhalten des Bauteils an einem der  $n_B$  Knoten  $j$  bei Belastung am Knoten  $i$  beschreiben.

$B\underline{c}_{i,j}$	Steifigkeit des Strukturauteils verknüpft Belastung am Punkt i mit Verformung am Punkt j	$B\underline{u}_j$	Verformung des Strukturauteils am Punkt j
$B\underline{f}_i$	Belastung des Strukturauteils am Punkt i		

Zusammengesetzt ergibt sich die reduzierte Steifigkeitsmatrix eines Bauteils  $B\underline{\underline{C}}$  zu

$$B\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} B\underline{c}_{1,1} & B\underline{c}_{1,j} & \cdots & B\underline{c}_{1,n_B} \\ B\underline{c}_{i,1} & B\underline{c}_{i,j} & \cdots & B\underline{c}_{i,n_B} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ B\underline{c}_{n_B,1} & B\underline{c}_{n_B,j} & \cdots & B\underline{c}_{n_B,n_B} \end{pmatrix} \quad (43)$$

mit den zugehörigen Last- und Verschiebungsvektoren

$$B\underline{\underline{f}} = B \left( \begin{array}{cccc} B\underline{f}_1 & B\underline{f}_i & \cdots & B\underline{f}_{n_B} \end{array} \right) \quad (44)$$

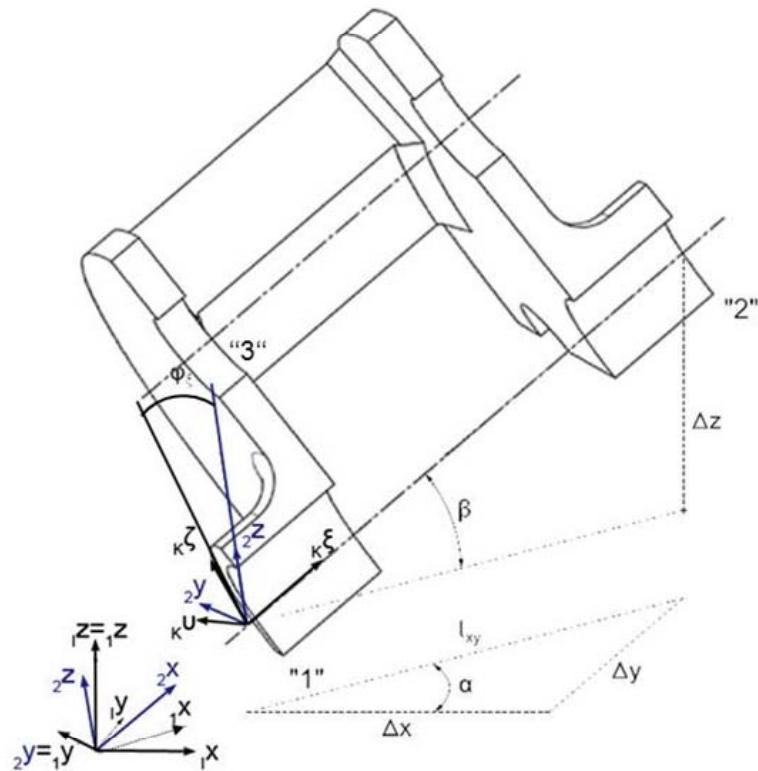
$$B\underline{\underline{u}} = B \left( \begin{array}{cccc} B\underline{u}_1 & B\underline{u}_j & \cdots & B\underline{u}_{n_B} \end{array} \right) \quad (45)$$

an allen Masterknoten des Superelements eines Strukturauteils des Getriebesystems.

$B\underline{\underline{C}}$	reduzierte Steifigkeitsmatrix des Strukturauteils	$B\underline{u}$	Verformungsvektor des Strukturauteils
$B\underline{f}$	Belastungsvektor des Bauteils		

Das  $B$ -Koordinatensystem der reduzierten Steifigkeitsmatrix des Bauteils  $B\underline{\underline{C}}$  wird durch die Lage der Masterknoten festgelegt. Die  $Bx$ -Achse zeigt von Knoten 1 zu Knoten 2. Die Punkte 1, 2 und 3 spannen die  $Bxz$ -Ebene auf, mit der Nebenbedingung, nicht auf einer Geraden zu liegen. Anhand dieser Festlegung des  $B$ -Systems und der Anordnung der zugehörigen Starrkörper im Inertialsystem kann die reduzierte Steifigkeitsmatrix eines Strukturauteils  $B\underline{\underline{C}}$  in das Inertialsystem transformiert und in die Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{C}}$  eingetragen werden. **Bild 17** zeigt die räumliche Lage des  $B$ -Systems relativ zum Inertialsystem des Gesamtgetriebesystems. Aus den geometrischen Lagevektoren der Starrkörper, die sich an jedem Masterknoten des Superelements befinden, kann eine Vorschrift für die Transformation der reduzierten Steifigkeitsmatrix vom elementfesten  $B$ -System des Bauteils in das Inertialsystem des Gesamtgetriebes abgeleitet werden.

Die Transformationsmatrix  $\underline{\underline{A}}_{IB}$  vom  $B$ -System ins Inertialsystem an einem der  $n_B$  Knoten des Superelements besteht aus zwei  $3 \times 3$  Blöcken  $\underline{\underline{a}}_{IB,i,j}$  für translatorische und



**Bild 17:** Koordinatensystem und Bezeichnung der Masterknoten einer reduzierten Steifigkeitsmatrix am Beispiel eines Planetenträgers

rotatorische Freiheitsgrade, die sich aus drei Elementardrehungen um die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\varphi$  nach **Bild 17** mit

$$\underline{\underline{a}}_{IB} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ 0 & -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \quad (46)$$

zusammensetzt. Mit

$$\underline{\underline{A}}_{IB} = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{\underline{a}}_{IB} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{a}}_{IB} \end{pmatrix}}_{[6 \times 6]} \quad (47)$$

lässt sich die Steifigkeitsmatrix des Superelements in Inertialkoordinaten des Getriebe-

systems  $\underline{\underline{C}}$  zu

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{A}}_{IB} \underline{\underline{c}}_{11} \underline{\underline{A}}_{IB}^T & \underline{\underline{A}}_{IB} \underline{\underline{c}}_{1j} \underline{\underline{A}}_{IB}^T & \cdots & \underline{\underline{A}}_{IB} \underline{\underline{c}}_{1n_B} \underline{\underline{A}}_{IB}^T \\ \underline{\underline{A}}_{IB} \underline{\underline{c}}_{i1} \underline{\underline{A}}_{IB}^T & \underline{\underline{A}}_{IB} \underline{\underline{c}}_{ij} \underline{\underline{A}}_{IB}^T & \cdots & \underline{\underline{A}}_{IB} \underline{\underline{c}}_{in_B} \underline{\underline{A}}_{IB}^T \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \underline{\underline{A}}_{IB} \underline{\underline{c}}_{n_B 1} \underline{\underline{A}}_{IB}^T & \underline{\underline{A}}_{IB} \underline{\underline{c}}_{n_B j} \underline{\underline{A}}_{IB}^T & \cdots & \underline{\underline{A}}_{IB} \underline{\underline{c}}_{n_B n_B} \underline{\underline{A}}_{IB}^T \end{pmatrix} \quad (48)$$

mit den zugehörigen Last- und Verschiebungsvektoren

$$\underline{\underline{f}} = \underline{\underline{f}}_1 \quad \underline{\underline{f}}_i \quad \cdots \quad \underline{\underline{f}}_{n_B} \quad (49)$$

$$\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}}_1 \quad \underline{\underline{u}}_j \quad \cdots \quad \underline{\underline{u}}_{n_B} \quad (50)$$

beschreiben.

### 3.2.7 Zusammenbau der Steifigkeitsmatrix des Gesamtgetriebes

Der Zusammenbau der Steifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{C}}$  des gesamten Getriebesystems erfolgt nach dem von Kohn [86] beschriebenen mathematischen Vorgehen.

Grundsätzlich wird das Steifigkeitsverhalten aller Getriebeelemente mit den in **Ab schnitt 3** genannten Ansätzen abgebildet, entsprechende Elementsteifigkeitsmatrizen abgeleitet und additiv in die Systemmatrix eingetragen. Vor dem Eintragen in die Systemsteifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{C}}$  werden alle Elementsteifigkeitsmatrizen wie beschrieben in das Inertialsystem der Steifigkeitsmatrix transformiert.

### 3.2.8 Lösen des linear-elastischen Gesamtgetriebemodells

Das linear-elastische Gleichungssystem zur Lösung des statischen Last- und Verformungsverhalten von Gesamtgetriebesystemen wird mit gängigen Gleichungssystemlösern gelöst.

Vor dem Lösungsschritt ist der Lastvektor  $\underline{\underline{f}}$  des Getriebes zu bestimmen. Dieser beinhaltet alle von außen auf das System einwirkenden Belastungen in Form von Kräften und Momenten sowie Gewichtskräfte. Außerdem werden Verzahnungskorrekturen und weitere Verformungsrandbedingungen durch geeignetes Umformen unter Zuhilfenahme der Elementsteifigkeitsmatrizen nach **Abschnitt 3.2.4** in äußere Lasten des Getriebesystems überführt und können so im verschiebungsbasierten Gleichungssystem erfasst werden.

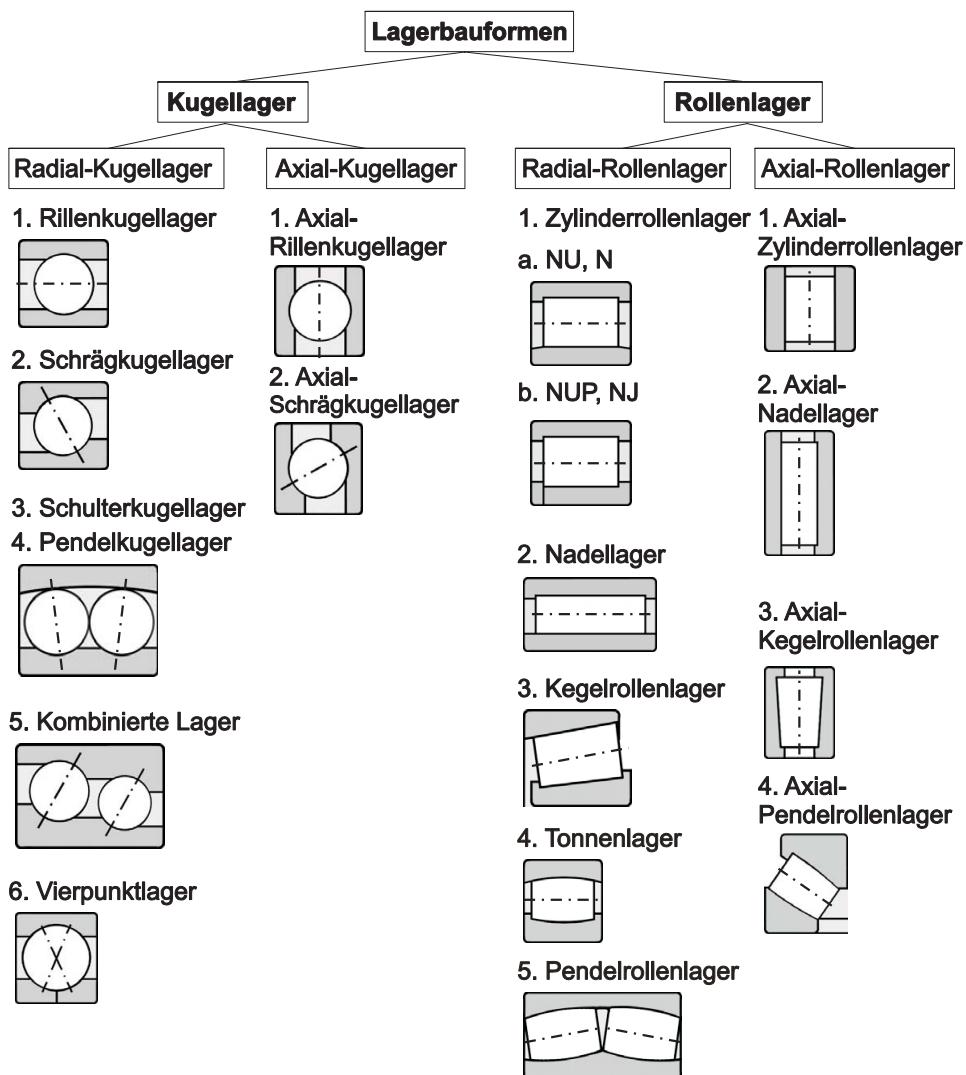
Nach dem Lösen ist der globale Verformungszustand des Getriebesystems an allen Starrkörperknoten der Steifigkeitsmatrix bekannt. Durch entsprechendes Postprocessing können an allen Knoten des Systems Schnittlasten durch Multiplikation der Elementsteifigkeitsmatrizen mit den entsprechenden Verformungszuständen an den Starrkörpern abgeleitet werden.

Das Lösen des linearen Gleichungssystems eines Getriebesystems ist zur Erfassung nichtlinearer Verformungs- und Lasteinflüsse von Verzahnungen oder Wälzlagern in entsprechende iterative Lösungssysteme nach **Abschnitt 3.3** und **Abschnitt 3.4** eingebunden.

Aus den Ergebnissen der Last- und Verformungsanalyse können verzahnungsspezifische Ergebnisse abgeleitet werden. Die Darstellung solcher Ergebnisse wird in **Abschnitt 4** sowie **Abschnitt 5** zur Beschreibung des Verhaltens von Planetengetriebesystemen verwendet und ist dort detailliert erläutert.

### 3.3 Erfassung des Steifigkeitsverhaltens von Wälzlagern

Das in **Abschnitt 3.2** beschriebene Vorgehen zur Last- und Verformungsanalyse basiert auf linear-elastischen Ansätzen zur Abbildung des Steifigkeitsverhaltens einzelner Getriebeelemente. Das Verformungsverhalten von Getriebewellen und Strukturbau Teilen kann ausreichend erfasst werden. Das mehrdimensional zusammenhängende und nichtlineare Verformungsverhalten von Wälzlagern sowie nichtlineare Steifigkeitseinflüsse in den Zahnkontakte müssen im Rahmen eines geeigneten Verfahrens zum iterativen Lösen des Gesamtgetriebesystems erfasst werden.



**Bild 18:** Übersicht der in LAGER2 berücksichtigten Bauformen nach [148]

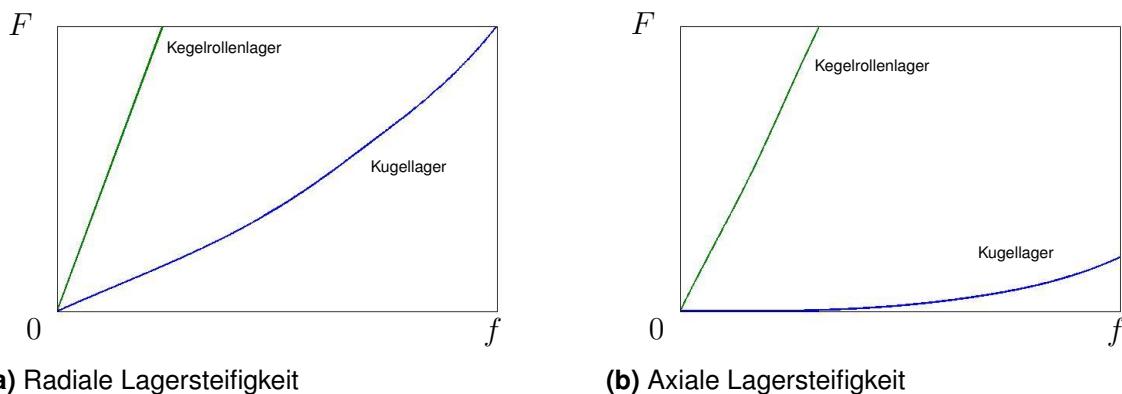
Die in den folgenden Kapiteln beschriebenen Verfahren zur Erfassung des Verformungs- und Lastverhaltens von Wälzlagern wurden zum Teil im Rahmen der Masterarbeit Weinberger [158] erarbeitet.

Die Bestimmung der Wechselwirkungen von Belastung und Verformung von Wälzlagern erfolgt dabei unter Verwendung des Unterprogramms LAGER2 [159]. Die Berechnungsmöglichkeiten von LAGER2 decken alle in der industriellen Praxis üblichen Wälzlagerbauformen ab. In **Bild 18** ist eine Übersicht der im Programm LAGER2 berücksichtigten Lagerbauformen gezeigt. Zweireihige Lager können mit den inneren Anordnungen X-Anordnung, O-Anordnung und Tandem-Anordnung berechnet werden.

Für die Angabe und Definition der zu berechnenden Lager stehen nach [148] in LAGER2 verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung.

- Direkte Angabe von Wälzlager-Katalogdaten, wobei die Wälzlagerinnengeometrie aus den äußeren Abmessungen des Wälzlers, den Normabmessungen der Wälzkörper und den Tragzahlen des Wälzlers näherungsweise bestimmt wird.
- Direkte Angabe der Innengeometrie und Bestückungsdaten.
- Auswahl eines Kataloglagers aus den angeschlossenen digitalen Katalogen von INA/FAG und SKF. Die entsprechenden Innengeometrieeinformationen sind nicht im digitalen Lagerkatalog enthalten und werden näherungsweise ermittelt.
- Angabe einer Lagerdefinitionsdatei im XML-Format. Diese XML-Datei enthält sowohl die Katalogdaten als auch die Lagerinnengeometriedaten und muss vom Lagerhersteller bereitgestellt werden.

Zur Erfassung des komplexen Steifigkeitsverhaltens von Wälzlagern im Gesamtgetriebesystem ist die Bestimmung des Lastzustandes eines Wälzlers bei Vorgabe eines

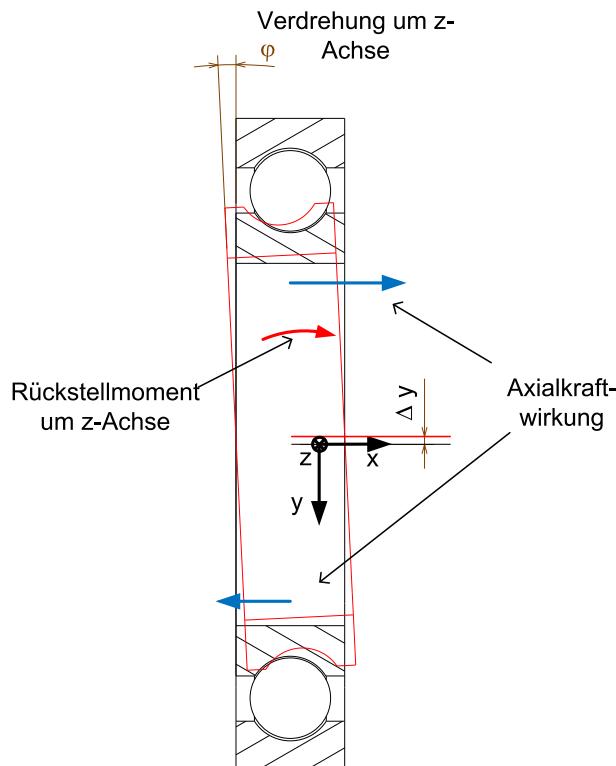


**Bild 19:** Schematische Darstellung der radialen und axialen Steifigkeit eines Wälzlers für unterschiedliche Wälzlagerbauarten (für axiale und radiale Steifigkeit wurde dieselbe Skalierung verwendet); angelehnt an [109]

aus der Last- und Verformungsanalyse im Gesamtgetriebe bekannten Verformungszustandes am Lager erforderlich. Dieser wird im Programm LAGER2 unter Vorgabe von Lagerinnengeometrie und Erfassung weiterer Einbau- und Betriebsbedingungen (Vorspannung, Betriebslagerspiel) eines Wälzlagers bestimmt. Die Wechselwirkungen zwischen Verformung und Belastung werden von den auftretenden elastischen Verformungen in den Kontakten Wälzkörper-Innenring und Außenring-Wälzkörper, dem Spiel zwischen den beiden Wälzlagerringen und den Wälzkörpern sowie den aus den geometrischen Randbedingungen bestimmten kinematischen Verhältnisse im Wälzlagerring bestimmt.

### 3.3.1 Zusammenhang zwischen Verschiebungs- und Belastungszustand am Wälzlagerring

**Bild 19** zeigt schematisch das Steifigkeitsverhalten verschiedener Wälzlagerringe mit Punkt- und Linienkontakt zwischen Wälzkörper und Lagerringen. Das deutlich steifere Verhalten von Lagern mit Linienkontakt im Vergleich zu denen mit Punktkontakt wird am Beispiel von Kegelrollenlagern (Linienkontakt) und Kugellagern (Punktkontakt) dargestellt.



**Bild 20:** Darstellung eines Kugellagers mit äußerer Axialkraftwirkung durch radiale Verformung und Verkipfung des Innenrings nach [158]

Die starke Nichtlinearität insbesondere bei niedrigen Lasten wird aufgezeigt.

Neben den Nichtlinearitäten im Steifigkeitsverhalten im Wälzkörperkontakt stellen innere kinematische Zusammenhänge oft die Ursache für mehrdimensionale wechselseitige Beeinflussungen zwischen Belastungen in einer Raumrichtung auf die Verformungen der anderen Raumrichtungen dar. Ebenso können Belastungen in einer Raumrichtung ohne direkte entsprechende Verschiebung oder Verdrehung der Lagerringe entstehen. Am Beispiel des Verformungsverhaltes eines Kugellagers wird ein solcher Kreuzeinfluss in **Bild 20** schematisch dargestellt. Durch die Verschiebung des Lagerinnenrings in y-Richtung sind die oberen Wälzkörper gestaucht und verhalten sich dadurch steifer. Die zusätzlich überlagerte Verkipfung  $\varphi$  um die x-Achse ruft im Bereich der durch die radiale Verschiebung vorbelasteten Wälzkörper eine größere axiale Rückstellkraft hervor als im Bereich der durch die Radialkraft entlasteten Wälzkörper. Es stellt sich eine äußere Axialkraftwirkung des Lagers auf die Welle ohne eine äußere axiale Verschiebung des Lagerinnenrings durch die Welle ein.

### 3.3.2 Iteratives Verfahren zur Beschreibung des Steifigkeitsverhalts von Wälzlagern in linearen Gleichungssystemen

Im linear-elastischen Getriebemodell werden die Lagerstellen analog zu **Abschnitt 3.2.3** durch lineare Federn in Translations- und Rotationsrichtungen abgebildet. Diese Federn koppeln das Verformungsverhalten einzelner Wellen untereinander oder mit dem Getriebegehäuse. Der aufgrund lastabhängiger Steifigkeiten im Wälzkörperkontakt nichtlineare und durch innere kinematische Beziehungen mehrdimensionale Zusammenhang zwischen Verschiebung und Belastung eines Wälzlagers kann im linearen Gesamtgleichungssystem durch Abbildung einzelner Federelemente nicht direkt berücksichtigt werden. Es ist ein geeignetes Verfahren zur Linearisierung des Wälzlagerverhaltens im linear-elastischen Getriebesystem notwendig, welches auf dem iterativen Abgleich des Verformungszustands des gesamten Getriebesystems und der daraus resultierenden Belastungszustände an jedem einzelnen Lager im System aufbaut und dabei die Konvergenz zwischen Lagerverformung und Verformung einzelner Lagerstellen im Gesamtgetriebesystem sicherstellt.

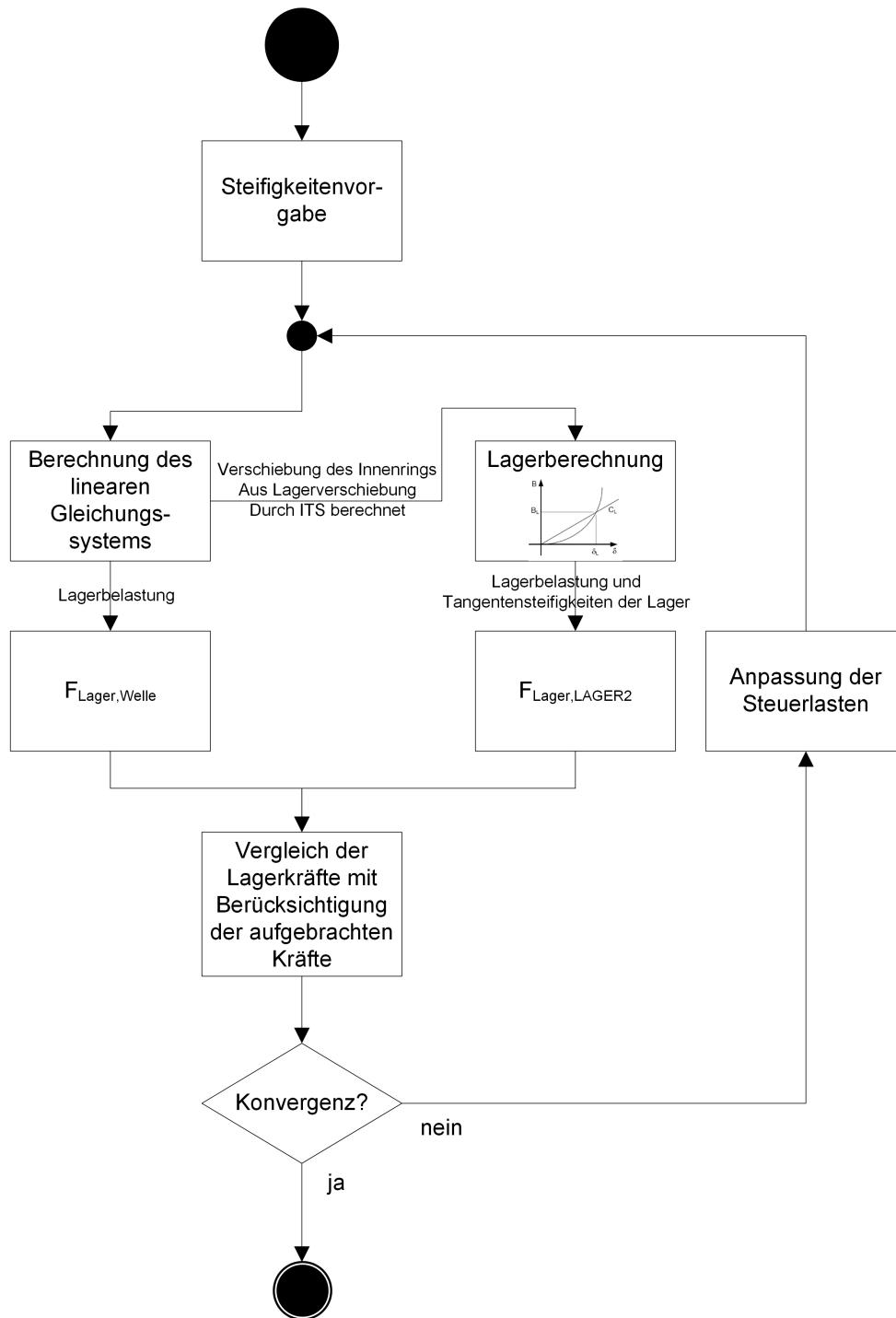
Der Ablauf des gewählten iterativen Verfahrens ist in **Bild 21** dargestellt. Nach einer initialen Vorgabe der Sekantensteifigkeiten der Wälzlager als Federkonstanten der jeweiligen translatorischen und rotatorischen Federelemente nach **Abschnitt 3.2.3** wird zuerst die linear-elastische Berechnung mit Hilfe des aufgestellten Gesamtgleichungssystems nach **Abschnitt 3.2** durchgeführt. Die Werte zur Vorgabe der Sekantensteifigkeiten wurden dabei an den Werten nach der Vorgehensweise aus WELLAG nach

Thoma [148] angelehnt. Ist der Last- und Verformungszustand des Getriebesystems im linear-elastischen Modell mit den vorgegebenen Steifigkeitswerten der Wälzlager bestimmt, werden räumliche Verformungszustände  $\underline{\underline{Lag}}\underline{\underline{u}}_{Lager}$  im jeweiligen Lagerkoordinatensystem nach **Gleichung (55)** aller Lagerstellen aus den Verschiebungen des Gesamtsystems berechnet und als Eingangsgrößen an das Programm LAGER2 übergeben. Aus den gegebenen Verformungsrandbedingungen und weiteren geometrischen Randbedingungen des Lagers (siehe **Abschnitt 3.3**) wird mit LAGER2 der Belastungszustand und die Tangentensteifigkeiten jedes Wälzlagers im Getriebesystem bestimmt.

Ist das komplexe Zusammenspiel zwischen Lagerverformung und -belastung der Wälzlager im linear-elastischen Gesamtgetriebesystem vollständig abgebildet, stimmt der Belastungszustand jeder Lagerstelle aus der Lagerberechnung mit LAGER2 mit dem Belastungszustand der Lagerstellen im linearen Getriebesystem überein. Die Vorgehensweise zum Abgleich der berechneten Belastungszustände im System mit denen der Lagerberechnung ist in **Abschnitt 3.3.5** beschrieben.

Nach den ersten Berechnungsschritten des iterativen Verfahrens ist eine hinreichende Übereinstimmung beider Belastungszustände unwahrscheinlich. Stimmen die Belastungen aus den beiden Rechnungen nicht überein, so muss das Steifigkeitsverhalten der Lagerstelle im linearen Gesamtgleichungssystem an den entsprechenden Federelementen so beeinflusst werden, dass bei entsprechendem Verformungszustand im Gesamtsystem der Belastungszustand der Lagerberechnung nach LAGER2 hinreichend abgebildet wird. Ob Belastungen aus der Lagerberechnung mit denen aus der Systemberechnung übereinstimmen, wird mit Hilfe eines Konvergenztests bestimmt. Die verwendete Methode wird in **Abschnitt 3.3.5** beschrieben.

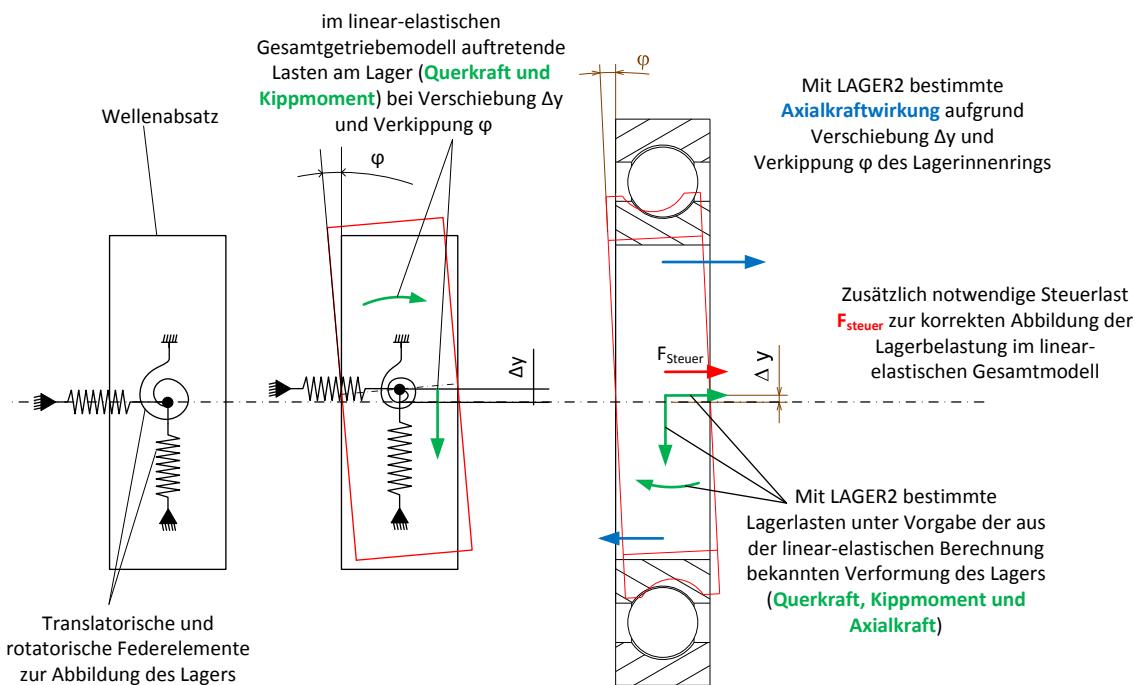
Die notwendige Beeinflussung des Steifigkeitsverhaltens der Wälzlager im verschiebungsbasierten linear-elastischen Getriebesystem nach **Abschnitt 3.2** kann durch Anpassung des Steifigkeitsverhaltens der Lagerstellen oder durch zusätzliche Vorgaben geeigneter Kraftrandbedingungen erfolgen. Nach **Gleichung (8)** kann das Verformungsverhalten  $\underline{\underline{I}}\underline{\underline{u}}$  des Getriebesystems durch Anpassen des Lastvektors  $\underline{\underline{I}}\underline{\underline{f}}$  beeinflusst werden. Die Änderung des Steifigkeitsverhaltens  $\underline{\underline{I}}\underline{\underline{C}}$  des Getriebesystems an den Lagerstellen wäre denkbar, die Veränderung einzelner Einträge in der Steifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{I}}\underline{\underline{C}}$  ist bei der programmtechnischen Umsetzung jedoch aufwändiger und mit höheren Berechnungszeiten verbunden. Durch zusätzlich aufgebrachte Belastungen an den Lagerstellen, die fortan als Steuerlasten  $\underline{\underline{F}}_{Steuer}$  im Koordinatensystem der entsprechenden Lagerfeder bezeichnet werden, kann das Verformungsverhalten entsprechend angepasst werden. Eine Veränderung der eingetragenen Federkonstan-



**Bild 21:** Flussdiagramm zum Ablauf des iterativen Verfahrens zur Erfassung der Wälzlagerrigideit bei der Last- und Verformungsanalyse im Gesamtgetriebesystem

ten  $c$  der Federelemente zur Abbildung der Lagerstellen nach **Gleichung (20)** ist nicht notwendig. Auch die in **Abschnitt 3.3.1** beschriebenen Kreuzeinflüsse im mehrdimensional gekoppelten Belastungs-Verformungs-Zustand von Wälzlagern aufgrund der inneren Lagerkinematik können durch die Vorgabe von Steuerlasten  $F_{\text{Steuer}}$  an den

entsprechenden Federelementen zur Abbildung einer Lagerstelle erfasst werden. Analog zu dem in **Abschnitt 3.3.1** beschriebenen Beispiel führen die in **Bild 22** gezeigte Verschiebung und Verkippung des Lagerinnenringes des schematisch abgebildeten Wälzlers neben den direkten Rückstellreaktionen des Lagers zusätzlich zu einer äußeren Axialkraftwirkung, die allein durch die Vorgabe der Lagersteifigkeiten in Form von Federelementen nach **Abschnitt 3.2.3** nicht erfasst werden kann. Dementsprechend muss eine Steuerlast in axialer Richtung aufgebracht werden, um so das reale Wälzlagerverhalten abzubilden.



**Bild 22:** Erfassung des mehrdimensional gekoppelten Verformungsverhaltens von Wälzlagern, Erfassung im linear-elastischen Gesamtgetriebesystem durch Steuerlasten

Die zusätzliche Belastung einzelner Federelemente zur Abbildung von Lagerstellen durch Steuerlasten  $F_{\text{steuer}}$  wird für jede Lagerstelle im Getriebesystem nach **Gleichung (56)** in **Abschnitt 3.3.4** geprüft. Der Betrag der aufzubringenden Steuerlasten  $F_{\text{steuer}}$  wird mit Hilfe des Iterationssteuerungsmechanismus nach **Abschnitt 3.3.6** berechnet.

Ist die Anpassung des Steifigkeitsverhaltens einzelner Federelemente zur Abbildung von Wälzlagern notwendig, werden die vom Iterationssteuerungsmechanismus bestimmten Steuerlasten  $F_{\text{steuer}}$  auf beide am entsprechenden Federelement angeschlossenen Starrkörper aufgebracht. Folgende Gleichung zeigt am Beispiel einer trans-

latorischen Feder im Federkoordinatensystem, wie die Kräfte auf die Starrkörperelemente aufgebracht werden. **Gleichung (20)** wird dabei um den Vektor der Steuerlasten

$${}_F \underline{\underline{f}}_{Steuer} = {}_F \begin{pmatrix} f_x & 0 & 0 \\ -f_x & 0 & 0 \end{pmatrix}_{Steuer}^T \quad (51)$$

zur folgenden Gleichung

$${}_F \underline{\underline{f}} + {}_F \underline{\underline{f}}_{Steuer} = {}_F \underline{\underline{C}} \cdot {}_F \underline{u} \quad (52)$$

erweitert.

---

${}_F \underline{\underline{C}}$	$\frac{N}{mm}$	Steifigkeitsmatrix der Feder	${}_F \underline{\underline{f}}$	$N$	Lastvektor der Feder
${}_F \underline{u}$	$mm$	Verschiebungsvektor der Feder	${}_F \underline{\underline{f}}_{Steuer}$	$N$	Steuerlastvektor der Feder

---

**Bild 23** zeigt die Vorgehensweise schematisch. Im belasteten Zustand der Feder stellt sich eine bestimmte Verformung  $2 \cdot l_1$  der Feder ein. Im linear-elastischen Getriebesystem kann die Verformung der Feder über  $l = \frac{F}{c}$  berechnet werden. Ist das Steifigkeitsverhalten der Feder im linear-elastischen Gleichungssystem im Vergleich zum Verhalten des Wälzlagers bestimmt mit LAGER2 zu weich, werden die Steuerkräfte wie in **Bild 23** aufgebracht. Dadurch verringert sich die Verformung der Feder auf  $2 \cdot l_2 < 2 \cdot l_1$ . Die Reaktionskraft der Feder verändert sich durch die vorgegebene Steuerlast. Die Kraftwirkung des Lagers auf die Welle bleibt identisch, da die Federlast verrechnet mit der Steuerlast identisch zur Last ohne Steuerlasten ist:

$$F_{x1} = 2 \cdot l_2 \cdot c + F_{Steuer}. \quad (53)$$

---

$F_{x1}$	$N$	Kraftwirkung auf die Welle	$l_2$	$mm$	halbe Verformung der Feder
$c$	$\frac{N}{mm}$	Steifigkeit der Feder	$F_{Steuer}$	$N$	vom Regler bestimmte Steuerlast

---

Durch unveränderte Kraftwirkung des Lagers auf die Welle wirkt die Feder bei geringerer Verformung steifer:

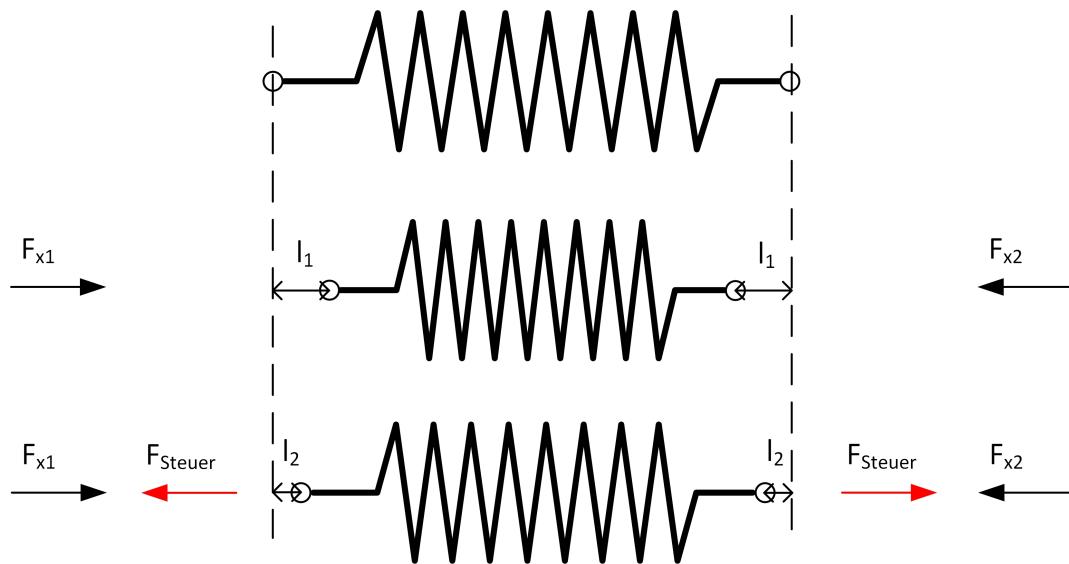
$$\frac{F_{x1}}{2 \cdot l_1} = c < c_{neu} = \frac{F_{x1}}{2 \cdot l_2}, \text{ da } l_1 > l_2. \quad (54)$$

---

$F_{x1}$	$N$	Kraftwirkung auf die Welle	$l_2$	$mm$	halbe Verformung der Feder
$c$	$\frac{N}{mm}$	tatsächliche Steifigkeit der Feder	$F_{Steuer}$	$N$	vom Regler bestimmte Steuerlast
$c_{neu}$	$\frac{N}{mm}$	durch Steuerkraft veränderte Steifigkeit			

---

Da sich die Last der Feder jedoch zu  $2 \cdot l_2 \cdot c$  ändert, muss die vorgegebene Steuerlast bei der Berechnung des Lastzustands der Lagerstelle des Gesamtgleichungssystems berücksichtigt werden, wie in **Gleichung (56)** dargestellt.



**Bild 23:** Veränderung des Steifigkeitsverhaltens durch Aufbringen von Steuerlasten [158]

Für Federn die am Inertialsystem angekoppelt sind, ist es nicht notwendig und auch nicht möglich an beiden Knoten die Steuerlast aufzubringen, da der Knoten, der am Inertialsystem hängt, nicht im Gleichungssystem auftaucht. Nachfolgende Abschnitte beschreiben die einzelnen Elemente des Algorithmus näher.

### 3.3.3 Bestimmung des Verformungszustands eines Lagers im linear-elastischen Getriebesystem

Im Berechnungsprogramm LAGER2 werden Verschiebungen des Lagerinnenrings auf den festen Außenring bezogen. Eine mögliche Verschiebung des Lageraußenrings im linear-elastischen Gesamtgetriebesystem muss für die Bestimmung der Lagerbelastungszustände mit LAGER2 in eine Verschiebung des Innenrings transformiert werden. Ebenso müssen mögliche Vorspannwege, die am Außenring angegeben werden, auf den Innenring umgerechnet werden. Der Vorspannweg wird am entsprechenden Lager über  $\text{Lag } \underline{u}_{\text{Vorspannung}}$  in **Gleichung (55)** erfasst.

Zusätzlich können Lager, die in einer bestimmten Koordinatenrichtung keine Kraft aufnehmen, über eine zusätzliche Verschiebungsvariable  $\text{Lag } \underline{u}_{\text{ARLos}}$ , die von der Iterationssteuerung bestimmt werden kann, bei der Bestimmung des mehrdimensionalen Last- und Verformungsverhaltens mit LAGER2 berücksichtigt werden.

Die Gleichung zur Berechnung der vorzugebenden Verformung ergibt sich zu:

$$\underline{Lag} \underline{u}_{Lager} = \underline{Lag} \underline{u}_{IR} - \underline{Lag} \underline{u}_{AR} - \underline{Lag} \underline{u}_{Vorspannung} (- \underline{Lag} \underline{u}_{ARLos}). \quad (55)$$

---

$\underline{Lag} \underline{u}_{Lager}$	Verschiebungsvektor des Lagers im linear-elastischen System	$\underline{Lag} \underline{u}_{IR}$	Verschiebungsvektor des Lagerinnenrings
$\underline{Lag} \underline{u}_{AR}$	Verschiebungsvektor des Lageraußenrings	$\underline{Lag} \underline{u}_{Vorspannung}$	Vektor der Vorspannung des Lagers
$\underline{Lag} \underline{u}_{ARLos}$	Durch Iterationssteuerung vorgegebene Verschiebung des Außenrings		

---

Wird ein Loslager abgebildet, muss eine Axialkraftaufnahme der Lagerstelle unterbunden werden. Die Iterationssteuerung trägt dazu bei, eine bei der LAGER2-Berechnung auftretende Axiallast mit Hilfe einer entsprechenden Verschiebung der Lagerstelle im linear-elastischen Getriebesystem auszugleichen. Die hierfür notwendige Steuerlast wird vom Iterationssteuerungsmechanismus in **Abschnitt 3.3.6** bestimmt.

### 3.3.4 Abgleich der Belastungszustände der Lager im linear-elastischen System

Die Abweichung der Belastungszustände der Wälzlager zwischen der Berechnung im linear-elastischen Gesamtgetriebesystem und der Bestimmung mit LAGER2 unter Vorgabe des Verformungszustandes des Wälzlagers aus der linear-elastischen Betrachtung wird im Folgenden als Regelabweichung bezeichnet und wird in den folgenden Gleichungen beschrieben. Die im Laufe des Iterationsverfahrens von der Iterationssteuerung aufgebrachten Steuerlasten nach **Abschnitt 3.3.2** zur Anpassung des Last- und Verformungsverhalten der Wälzlager müssen dabei erfasst werden.

Der Vektor der Regelabweichungen  $\underline{Lag} \underline{e}_{ITS}$  zu:

$$\underline{Lag} \underline{e}_{ITS} = \underline{Lag} \underline{f}_W - \underline{Lag} \underline{f}_{Steuer} - \underline{Lag} \underline{f}_L. \quad (56)$$

---

$\underline{Lag} \underline{e}_{ITS}$	-	Vektor der Regelabweichungen	$\underline{Lag} \underline{f}_W$	Vektor der Lagerlasten aus der Systemberechnung
$\underline{Lag} \underline{f}_{Steuer}$		Vektor der Steuerlasten des letzten Iterationsschrittes	$\underline{Lag} \underline{f}_L$	Vektor der Lagerlasten aus der LAGER2-Berechnung

---

Der Iterationssteuerungsmechanismus berechnet mit Hilfe der Regelabweichung jedes Freiheitsgrades inwieweit eine Anpassung der zusätzlich aufgebrachten Kräfte vorgenommen werden muss. Das Verfahren zur Berechnung der Anpassung der Steuerlasten wird in **Abschnitt 3.3.6** beschrieben.

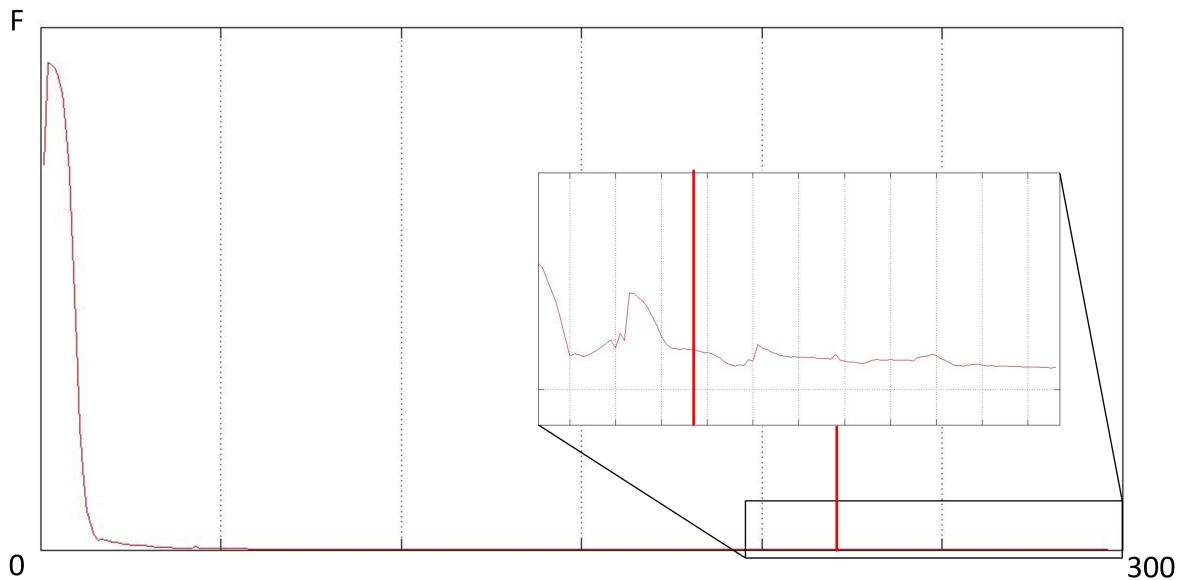
### 3.3.5 Konvergenzprüfung bei Bestimmung des Lagerverhaltens

Das komplexe Zusammenspiel aus Wälzlagerverformung und -belastung ist im linear-elastischen Gesamtgetriebesystem erfasst, wenn der Belastungszustand der Federelemente zur Abbildung der Lagerstellen im Gesamtsystem mit dem Belastungszustand aus der Lagerberechnung nach LAGER2 unter Vorgabe der Verschiebungsrandsbedingungen aus dem Gesamtsystem übereinstimmt. Um die Konvergenz beider Belastungszustände zu prüfen, wird ein entsprechendes Fehlerkriterium nach **Gleichung (57)** eingeführt.

Im ersten Berechnungsschritt wird auf Basis des Ergebnis der linearen Last- und Verformungsanalyse im Gesamtsystem mit Hilfe der Lasten auf ein entsprechendes Wälzlager je eine absolute Schranke für jede Lagerreaktionskraft bzw. -moment berechnet. Liegt der Fehler nach **Gleichung (57)** für eine Belastungskomponente an einem Federelement eines Wälzlagers unter 5%, wird zur Bewertung dieser entsprechenden Belastungskomponenten auf ein relatives Kriterium nach **Gleichung (59)** umgestellt. Die durch die mehrdimensionale Koppelung von Belastung und Verschiebung in Wälzlagern auftretenden Kreuzeinflüsse nach **Abschnitt 3.3** können in frühen Berechnungsschritten schwach oder nicht belastete Federelemente durch fortschreitende Erfassung während des Iterationsverlaufs stark beladen, wodurch absolute Fehlerkriterien zu klein werden und ein Erreichen des Iterationsziels nur durch Einführung relativer Fehlerkriterien möglich ist.

**Bild 24** zeigt dabei den Verlauf der aufsummierten Regelabweichungen aller Lagerstellen in translatorischer Richtung mit Kennzeichnung der 5% Grenze.

Die absolute Schranke für die Lasten wird mithilfe der entsprechenden Last an der Lagerstelle durch Multiplikation mit einem Faktor berechnet. Ergibt sich für eine Richtung keine Last, so wird für diese Richtung die Summe der Lasten mit dem Faktor multipliziert. Handelt es sich um eine Kraft, so wird die Summe der Kräfte verwendet. Ergibt sich die Schranke trotzdem zu Null, so wird sie gleich dem Faktor gesetzt. Dieses Vorgehen wird für die Momente analog durchgeführt. Der Faktor kann frei gewählt werden und wurde für das Verfahren auf  $s_F = 5 \cdot 10^{-3}$  gesetzt.



**Bild 24:** Verlauf der aufsummierten Regelabweichungen aller Lagerstellen in translatorischer Richtung mit Kennzeichnung der 5% Grenze (rote Linie) [158]

Das Fehlerkriterium wird in dem hier beschriebenen Verfahren auf die Regelabweichung (siehe **Abschnitt 3.3.4**) angewendet, da damit ebenfalls eine Beschreibung des Fehlers möglich ist und somit dieselbe Schranke für beide Kriterien verwendet werden kann. Das Fehlerkriterium ergibt sich zu:

$$e_{ITS} \leq \varepsilon_{ITS}. \quad (57)$$

---

$e_{ITS}$	$N$	Regelabweichung	$\mid \varepsilon_{ITS}$
-----------	-----	-----------------	--------------------------

---

Das Residuumskriterium wird mit Hilfe der Last des aktuellen Schritts und des vorhergehenden Schritts aus der LAGER2-Berechnung ermittelt. Die zugehörige Gleichung ergibt sich somit zu:

$$|F_{L,k} - F_{L,k-1}| \leq \varepsilon_{ITS}. \quad (58)$$

---

$F_{L,i}$	$N$	Lagerlast im aktuellen oder vorhergehenden Schritt	$\mid \varepsilon_{ITS}$
-----------	-----	----------------------------------------------------	--------------------------

---

Die Kriterien sind hier für die Kräfte angegeben, ergeben sich jedoch für die Momente mit Ausnahme der Einheit identisch.

Wurde die 5 % Grenze unterschritten, so wird die Schranke in eine relative Schranke geändert. Ab diesem Punkt ergibt sich das Fehlerkriterium zu:

$$\varepsilon_{ITS} = s_F \cdot F_{L,k-1}. \quad (59)$$

---

$\varepsilon_{ITS}$	$N$	Schranke für die Iteration	$s_F$	-	Faktor zur Berechnung der Schranke
$F_{L,k-1}$	$N$	Lagerkraft im vorherigen Schritt			

---

### 3.3.6 Steuerungsmechanismus des Iterationsverfahrens

In diesem Abschnitt wird die Umsetzung des Steuerungsmechanismus für das iterative Verfahren zur Bestimmung der Wälzlagerverformungsverhaltens beschrieben. Die Gleichungen werden nur allgemein ohne konkrete Zahlenwerte für die Reglerkoeffizienten angegeben, da diese während des Ablaufs des Iterationsverfahrens als Steuergrößen von Schritt zu Schritt angepasst werden. Dabei werden die Koeffizienten erhöht, wenn sich die Regelabweichung nur geringfügig von Schritt zu Schritt ändert und verringert, wenn sich das Vorzeichen der Regelabweichung von Schritt zu Schritt ändert.

Für die Umsetzung der Iterationssteuerung wird ein Verfahren basierend auf einem P-Regler an das hier zu regelnde System angepasst. Dazu wird die Regelabweichung mit dem Proportionalbeiwert  $K_P$  multipliziert und zur bisherigen vorgegebenen Kraft addiert. Somit ergibt sich die Gleichung zur Steuerung der Iteration zu

$$F_{Steuer,k+1} = F_{Steuer,k} + K_P \cdot e_{ITS,k}. \quad (60)$$

---

$F_{Steuer,i}$	$N$	Steuerlast im Schritt $i$	$e_{ITS,k}$	$N$	Regelabweichung im Schritt $k$
$K_P$	-	Proportionalbeiwert			

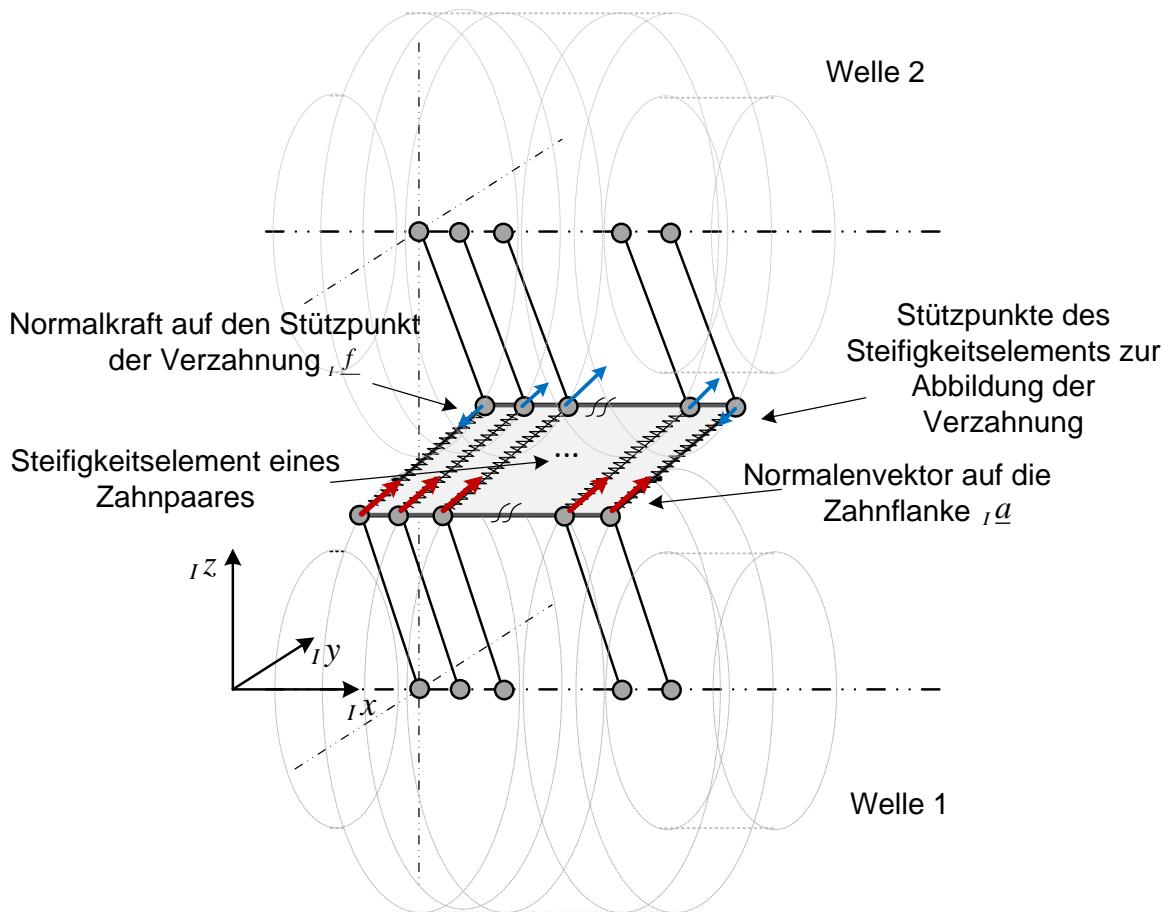
---

Es ist nachvollziehbar, dass der P-Regler nicht direkt zur Berechnung der vorzugebenden Steuerlast verwendet wird, sondern zur Berechnung der notwendigen Änderung der Steuerlast. Der Grund dafür ist, dass ein P-Regler nur bei vorhandener Regelabweichung eine Stellgröße liefert. Die hier zu steuernde Iteration hat aber nicht das Ziel die Stellgröße auf Null zu regeln. Deswegen wurde der P-Regler zur Berechnung der notwendigen Änderung der vorzugebenden Steuerlast verwendet, um diesen Nachteil zu umgehen.

### 3.4 Erfassung nichtlinearer Anteile im Steifigkeitsverhalten von Zahneingriffen

Das in **Abschnitt 3.2** beschriebene Vorgehen zur Last- und Verformungsanalyse basiert auf linear-elastischen Ansätzen zur Abbildung des Steifigkeitsverhaltens einzelner Getriebeelemente. Nichtlineare Steifigkeitseinflüsse in den Zahnkontakte müssen im Rahmen eines geeigneten Verfahrens zum iterativen Lösen des Gesamtgetriebesystems erfasst werden.

Stirnradstufen, die nicht über der vollen Verzahnungsbreite Last übertragen, führen zu nichtlinearen Effekten im Gesamtgetriebesystem. Ein Auseinanderklaffen nichttragender Flankenbereiche durch Verformungseinflüsse oder Verzahnungskorrekturen führt im linearen Modell zur Zugkraftübertragung im Zahnkontakt. Die korrekte Abbildung nichttragender Flankenbereiche in linearen, verschiebungsbasierten Modellen erfordert ein von den Lastverhältnissen im Zahneingriff abhängiges Verändern der Steifigkeitsmatrix des Gesamtgetriebesystems. Die Koppelung entsprechender klaffender



**Bild 25:** Zahneingriffsanalyse im linear-elastischen Getriebemodell; auf Zug und Druck belastete Verzahnungsstützpunkte

Eingriffsbereiche durch entsprechende Steifigkeitselemente nach **Abschnitt 3.2.4** und **Abschnitt 3.2.5** muss aus dem System eliminiert werden.

**Bild 25** zeigt die Lage des Normalenvektors  $\underline{Ia}$  auf die Zahnflanke des Rades auf der Welle 1 eines Zahnpaares eines beliebigen Stirnradeingriffs im Inertialsystem des linear-elastischen Getriebesystems. Zusätzlich sind die entsprechenden Normalkräfte auf die Verzahnung  $\underline{If}$  an den jeweiligen Stützpunkten des Steifigkeitselements der Verzahnung abgebildet.

Die Zahnnormalkräfte  $\underline{If}$  wirken stets normal zur Zahnflanke, repräsentiert durch den Normalenvektor  $\underline{Ia}$  auf die Zahnflanke. Sind die Vektoren  $\underline{Ia}$  und  $\underline{If}$  im Inertialsystem parallel und entgegengerichtet (Druckkraft auf die Flanke), dann gilt

$$\underline{Ia} \cdot \underline{If} = -(|\underline{Ia}| \cdot |\underline{If}|) \quad (61)$$

und der Kontakt bleibt geschlossen.

Sind die Vektoren  $\underline{Ia}$  und  $\underline{If}$  im Inertialsystem parallel und gleichgerichtet (Zugkraft an der Flanke), dann gilt

$$\underline{Ia} \cdot \underline{If} = (|\underline{Ia}| \cdot |\underline{If}|) \quad (62)$$

und der Kontakt muss gelöst werden.

---

$\underline{Ia}$	–	Normalenvektor auf die Zahnflanke		$\underline{If}$	N	Zahnnormalkraft auf die Zahnflanke
------------------	---	-----------------------------------	--	------------------	---	------------------------------------

---

Das Verfahren zum Eliminieren negativ belasteter Bereiche der Steifigkeitselemente bei der Abbildung von Zahneingriffen steuert ein mehrmalig hintereinander durchgeföhrtes Lösen des linear-elastischen Gesamtgetriebesystem nach **Abschnitt 3.2**. In Abhängigkeit der genannten Kriterien wird für jeden Stützpunkt zur Abbildung von Zahneingriffen geprüft, ob Zug- oder Druckkräfte übertragen werden. Die Bereiche der Elementsteifigkeitsmatrix zur Abbildung von Zahneingriffen nach **Gleichung (31)** entsprechender auf Zug belasteter Verzahnungsstützpunkte werden aus der Matrix durch Streichen entsprechender Zeilen- und Spalteneinträge entfernt. Für weitere Berechnungsschritte ist an diesen Stützpunkten eine Kraftübertragung nicht mehr möglich. Zugleich müssen mögliche Einträge aus dem Lastvektor des Systems zur Erfassung von Verzahnungskorrekturen nach **Abschnitt 3.2.4** analog zu den Einträgen in die Steifigkeitsmatrix gestrichen werden.

Während des Verfahrens zur Zahnkontaktanalyse ändern sich Verformungs- und Lastzustand bei der Berechnung des linear-elastischen Gesamtgetriebesystems. Änderun-

gen im Verformungszustand können zu erneutem Kontakt bereits getrennter Zahneingriffsbereiche und deren Stützpunkten im linear-elastischen Getriebesystem führen. Eine entsprechende Prüfung vergleicht die Ortsvektoren entsprechender Kontaktpunktpaare miteinander und stellt den Kontakt bereits getrennter Eingriffsbereiche bei erneutem Kontakt durch Eintragen zuvor entfernter Steifigkeitseinträge der entsprechenden Elementsteifigkeitsmatrix des jeweiligen Zahneingriffs wieder her. Analog dazu müssen Einträge in den Lastvektor des Systems zur Erfassung von Verzahnungskorrekturen wieder eingetragen werden.

Der Differenzvektor  ${}_I\delta$  von Kontaktpunkt auf Rad 1  ${}_I\mathbf{r}_{Rad1}$  zum Kontaktpunkt auf Rad 2  ${}_I\mathbf{r}_{Rad2}$  lautet

$${}_I\delta = {}_I\mathbf{r}_{Rad2} - {}_I\mathbf{r}_{Rad1}. \quad (63)$$

Die Projektion  ${}_I\delta_a$  des Differenzvektors auf den Normalenvektor  ${}_Ia$  der Zahnflanke von Rad 1 lautet

$${}_I\delta_a = \frac{{}_I\delta \cdot {}_Ia}{|{}_Ia|^2} \cdot {}_Ia. \quad (64)$$

${}_I\mathbf{r}_{Rad1} \quad mm$	Ortsvektor des Kontaktpunktes auf Zahnflanke Rad 1	${}_I\mathbf{r}_{Rad2} \quad mm$	Ortsvektor des Kontaktpunktes auf Zahnflanke Rad 2
----------------------------------	-------------------------------------------------------	----------------------------------	-------------------------------------------------------

Wenn gilt:

$${}_Ia \cdot {}_I\delta_a = -(|{}_Ia| \cdot |{}_I\delta_a|) \quad (65)$$

dann ist  ${}_I\delta_a$  dem Normalenvektor  ${}_Ia$  parallel entgegengerichtet. Die Kontaktpartner durchdringen sich erneut und der Kontakt muss wieder hergestellt werden.

Wenn gilt:

$${}_Ia \cdot {}_I\delta_a = (|{}_Ia| \cdot |{}_I\delta_a|) \quad (66)$$

dann ist  ${}_I\delta_a$  und der Normalenvektor  ${}_Ia$  parallel gleichgerichtet. Die Kontaktpartner durchdringen sich nicht und der Kontakt bleibt geöffnet.

Das iterative Verfahren zur Erfassung klaffender Flankenbereiche bei Stirnradstufen ist abgeschlossen, wenn sich von vorausgehenden zum aktuellen Berechnungsschritt keine Änderungen im Kontaktverhalten der im Getriebesystem enthaltenen Stirnradstufen ergeben. Die Steuerung dieses Verfahrens erfolgt analog zur Vorgehensweise

des in **Abschnitt 3.3** beschriebenen Verfahrens zur Erfassung des Steifigkeitsverhaltens von Wälzlagern. Da sich das Verformungsverhalten der im Getriebesystem enthaltenen Wälzlager und das Verformungsverhalten der Zahneingriffe bei der Lösung des Gleichungssystems gegenseitig beeinflussen, kombiniert die programmtechnische Umsetzung beide Verfahren in einem iterativen Prozess zur Bestimmung nichtlinearer Belastungs- und Verformungsanteile im Getriebesystem.

### **3.5 Zusammenfassende Beschreibung der statischen Last- und Verformungsanalyse im Gesamtgetriebesystem**

Zur Beschreibung des Last- und Verformungsverhaltens von Planetengetriebesystemen wird ein Verfahren beschrieben, welches das statische Verformungsverhalten aller relevanten Getriebeelemente gekoppelt erfasst. Die Beschreibung einer Gesamtgetriebesystematik wird aus dem zusammenhängenden System aller Wellen, Lager und Zahneingriffe abgeleitet. Die Beschreibung des Gesamtgetriebes erfolgt auf der Basis eines linear-elastischen Steifigkeitssystems. Zur Erfassung des Verformungsverhaltens von Planetenträgern kann das Nachgiebigkeitsverhalten von Bauteilen mit komplexer Geometrie über eine Schnittstelle in das Gesamtgetriebesystem eingebunden werden.

Das oft mehrdimensionale, nichtlineare Verhalten von Wälzlagern wird dabei über einen iterativen Abgleich des Last- und Verformungszustandes von Wellen und Lagern abgebildet. Das Lastverhalten von Wälzlagern kann mit dem FVA-Programm LAGER2 [159] unter Vorgabe bekannter Verformungszustände unter Einfluss der inneren mechanischen und kinematischen Bedingungen im Lager bestimmt werden.

Für die Berechnung der Breitenlastverteilung und die Auslegung von Breitenkorrekturen wird die mittlere Verzahnungssteifigkeit zur Beschreibung der Verzahnungsnachgiebigkeit im Gesamtgetriebesystem verwendet. Mit dieser Methode kann die Breitenlastverteilung in allen Zahneingriffen eines Getriebesystems konform zur ISO 6336 unter Erfassung wechselseitiger Verformungseinflüsse bei kurzen Rechenzeiten berechnet werden.

Zur Bestimmung des Anregungsverhaltens von Planetengetriebesystemen anhand des Drehwegverhaltens wird das nichtlineare Steifigkeitsverhalten einzelner Zahnpaare in Abhängigkeit der betrachteten Eingriffsstellung in das Getriebesystem integriert. Durch sequentielles Berechnen des Getriebesystems in verschiedenen Eingriffsstellungen unter Erfassung der Eingriffsfolge von Planetengetrieben kann die Drehwegabweichung in den einzelnen Zahneingriffen sowie die Drehschwingungsanregung von Planetengetrieben anhand der Drehwinkeldifferenz zwischen An- und Abtrieb beurteilt werden.



## 4 Untersuchungen zum Last- und Verformungsverhalten in Planetengetriebesystemen

Das Last- und Verformungsverhalten von Planetengetrieben kann mit dem in **Abschnitt 3** beschriebenen Modell zur Last- und Verformungsanalyse bestimmt werden. Die Lastverteilung in den Zahneingriffen von Planetenradstufen wird durch die radiale Verlagerung der Zentralwellen bestimmt. Die Verlagerungen der Zentralwellen sind über die Planetenradeingriffe miteinander gekoppelt. Die Verlagerung der Planetenräder ist oft von der Verformung des Planetenträgers, der Planetenbolzen sowie der Lagerung zwischen Planetenbolzen und Planetenwelle abhängig. Innere kinematische Koppelungen in Planetengetrieben beeinflussen zusätzlich das Lastaufteilungsverhalten auf einzelne Leistungszweige in Getriebesystemen mit Planetenradstufen.

Im Folgenden werden Zusammenhänge zwischen Lastaufteilung, Zentralwellenverlagerung und Lastverteilung in den Zahneingriffen von Planetengetrieben sowie dem Verformungsverhalten aller Getriebeelemente im Gesamtgetriebe diskutiert. Dabei wird der Einfluss von Herstellungsabweichungen und Planetenanordnungen erläutert und bei der Berechnung erfasst. Die Last- und Verformungsanalyse im Gesamtgetriebesystem ermöglicht außerdem eine genaue Bestimmung der Lastverhältnisse in der Planetenradlagerung. Die wechselseitige Beeinflussung des Verformungsverhaltens des Planetenbolzens und der Planetenradlager unter dem Einfluss der Planetenträgersteifigkeit wird dargestellt.

Zusätzlich werden unterschiedliche konstruktive Maßnahmen zur Verbesserung des Lastanpassungsverhaltens von Planetengetrieben erläutert. Dabei steht die Robustheit einer Konstruktion hinsichtlich gleichmäßiger Lastaufteilung, Lastverteilung in den Zahneingriffen sowie günstiger und gleichmäßiger Belastung von Getriebeelementen wie Lagern und deren Einfluss auf die erreichbare Leistungsdichte von Planetengetrieben im Vordergrund.

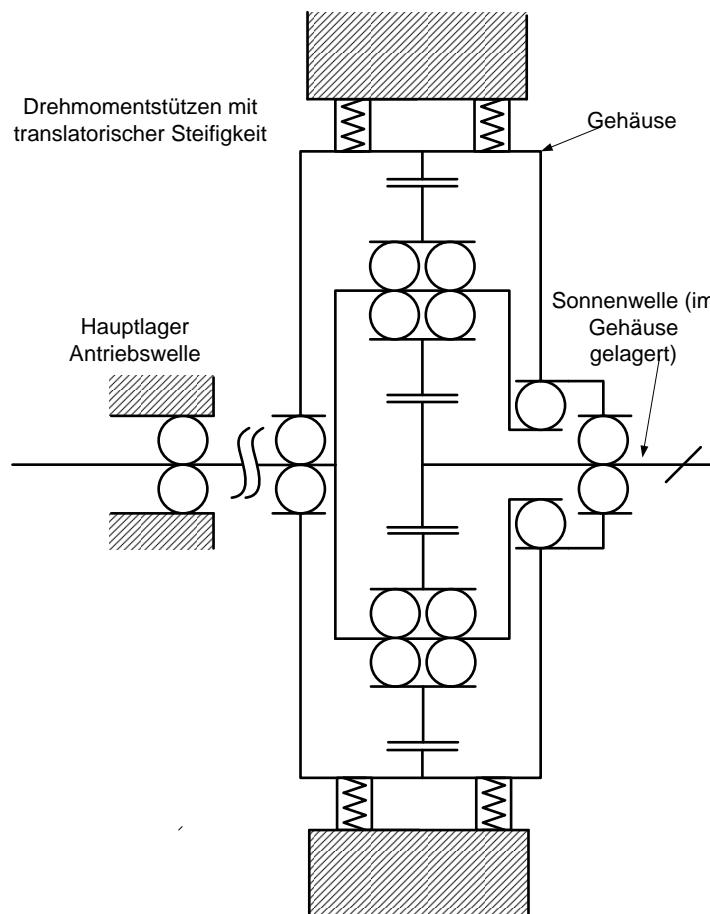
Die Beschreibung von Planetengetriebesystemen mit starken Wechselwirkungen im Verformungsverhalten des Gesamtsystems und dessen Einfluss auf die Belastung einzelner Getriebeelemente wird am Beispiel reitender Planetengetriebe dargestellt. Die Betrachtung von Getriebesystemen mit mehreren gekoppelten Planetenradstufen und den dabei auftretenden Wechselwirkungen im Last- und Verformungsverhalten runden die Untersuchungen ab.

## 4.1 Lastaufteilung und Lastverteilung im Planetengetriebe

In den folgenden Kapiteln wird der Einfluss des Last- und Verformungsverhaltens der gesamten Getriebestruktur auf die Lastaufteilung im Planetengetriebesystem und die Breitenlastverteilung in den jeweiligen Zahneingriffen an Beispielberechnungen genauer erläutert.

Das dafür notwendige Berechnungsbeispiel bildet ein einstufiges Planetengetriebesystem ab. **Bild 26** zeigt eine schematische Abbildung des Getriebesystems. Es entspricht der Bauart eines Windkraftgetriebes in reitender Getriebeanordnung, bei dem das Getriebegehäuse auf der Antriebswelle (Stegwelle) gelagert ist und das Gehäusemoment über Drehmomentstützen in das Fundament eingeleitet wird.

Das Hohlrad der Planetenstufe ist im Getriebegehäuse starr und drehfest gelagert. Die Antriebswelle (Stegwelle) wird über das Hauptlager im Fundament gelagert. Die Sonnenwelle stützt sich über eine drehweiche Lagerstelle mit vorgegebener Senksteifigkeit im Gehäuse ab. Über die Eingriffe mit den Planetenrädern wird die Sonne den Stei-

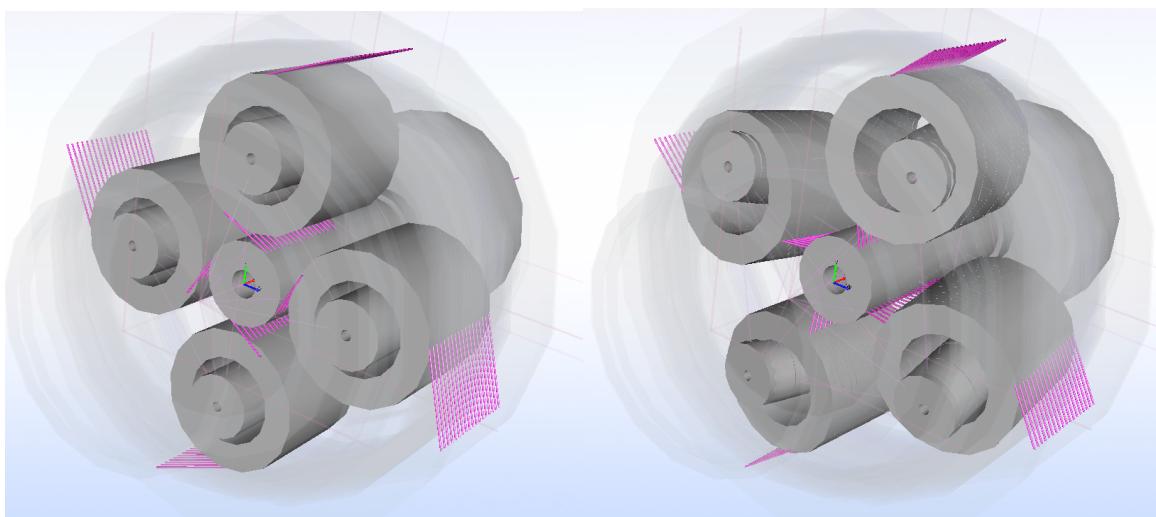


**Bild 26:** Schematische Darstellung des Beispielgetriebesystems mit einer Planetenradstufe

figkeitsverhältnissen in den Zahneingriffen entsprechend gehalten. Eine Einstellbewegung der Sonne ist möglich. Die Lagerung der Planeten erfolgt wie abgebildet durch direkte Lagerung auf dem Planetenbolzen. Die Bolzen sind über Presssitze mit den Planetenträgern verbunden. Die Presssitze werden als gleichwertige, senkstarre Lagerstellen im Modell erfasst.

**Bild 27** zeigt die Darstellung des Beispielgetriebesystems mit vier Planeten als Gesamtgetriebemodell nach der in **Abschnitt 3** beschriebenen Vorgehensweise. Aus den Ergebnissen zur Last- und Verformungsanalyse in **Bild 27b** können Aussagen zur Lastaufteilung auf die einzelnen Teilleistungsstränge des Getriebesystems abgeleitet werden. Auch die Breitenlastverteilung in den einzelnen Zahneingriffen kann untersucht und einzelne Verformungseinflüsse, die zur Verschiebung und Verformung der Zahnräder im Kontakt beitragen, identifiziert werden.

Die Lastaufteilung in Getriebesystemen mit Planetenradstufen ist stark vom Nachgiebigkeitsverhalten der Getriebestruktur und dem Verlagerungsverhalten der Getriebeelemente, insbesondere der Zentral- und Planetenräder abhängig. Die Verwendung des in **Abschnitt 3** beschriebenen Berechnungsmodells ermöglicht die Berechnung der Lastaufteilung auf einzelne Planeten durch Abbildung beliebig leistungsverzweigender und- summierender Getriebesysteme. Dabei wird das Verlagerungsverhalten einstellbarer Zentralwellen erfasst. Die Verlagerungsbewegungen der Zentralwellen können



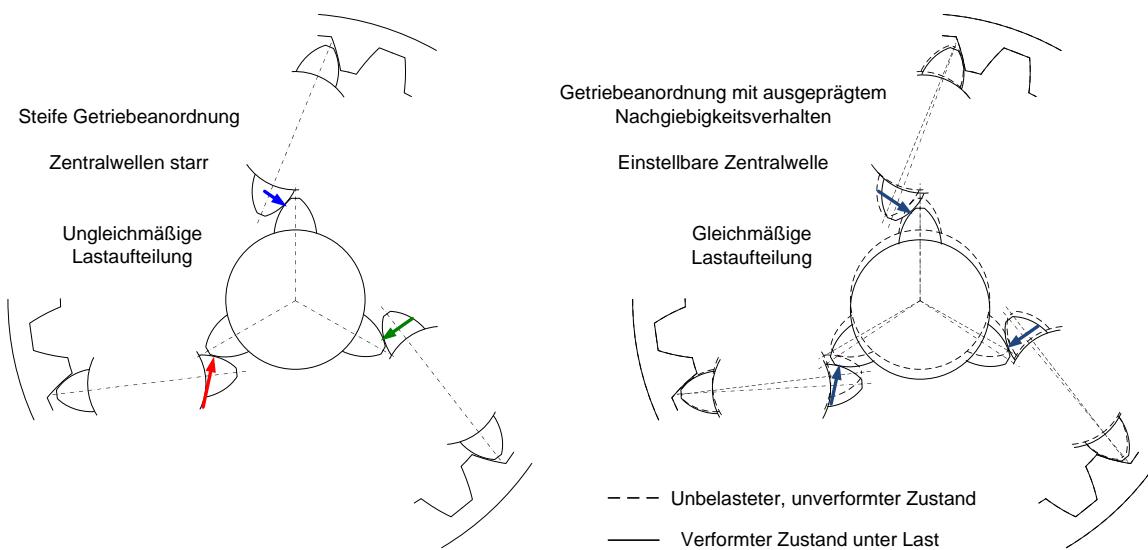
(a) unverformter Zustand ohne Last

(b) verformter und belasteter Zustand

**Bild 27:** Visualisierung des Gesamtgetriebesystems einer Planetenradstufe nach dem in **Abschnitt 3** beschriebenen Berechnungsmodell  
grau: Balkenelemente der Wellen; violett: Steifigkeitselemente der Zahneingriffe  
Planetenträger und Gehäuse transparent dargestellt

ermittelt werden.

**Bild 28** zeigt schematisch und stark vereinfacht das Zusammenspiel von Verformungs- und Verlagerungsverhalten mit dem Lastaufteilungsverhalten einer Planetenradstufe. Der Einfluss des Verformungsverhaltens eines Planetengetriebes auf die Lastaufteilung zwischen einzelnen Teilleistungssträngen wird für unterschiedlich steife und einstellbewegliche Getriebebeanordnungen dargestellt.



**Bild 28:** Einfluss des Verformungsverhaltens eines Planetengetriebes auf die Lastaufteilung zwischen einzelnen Teilleistungssträngen

Sehr steife Getriebebeanordnungen ohne einstellbare Getriebeelemente reagieren bei Herstellungsabweichungen oder äußeren Lasteinflüssen mit einem ungleichmäßigen Lastaufteilungsverhalten. Die sehr steife Anordnung, in **Bild 28** links schematisch dargestellt, lässt kaum Verformung und damit kaum Möglichkeit zum Lastausgleich zu. Elastische Getriebebeanordnungen mit einstellbeweglichen Getriebeelementen ermöglichen einen Lastausgleich durch elastische Verformungen im Getriebesystem wie der Planetenträgerverformung oder der Nachgiebigkeit der Planetenwellen und -lagerungen. Eine Verbesserung des Lastaufteilungsverhaltens und damit der Leistungsdichte eines Planetengetriebes ist möglich.

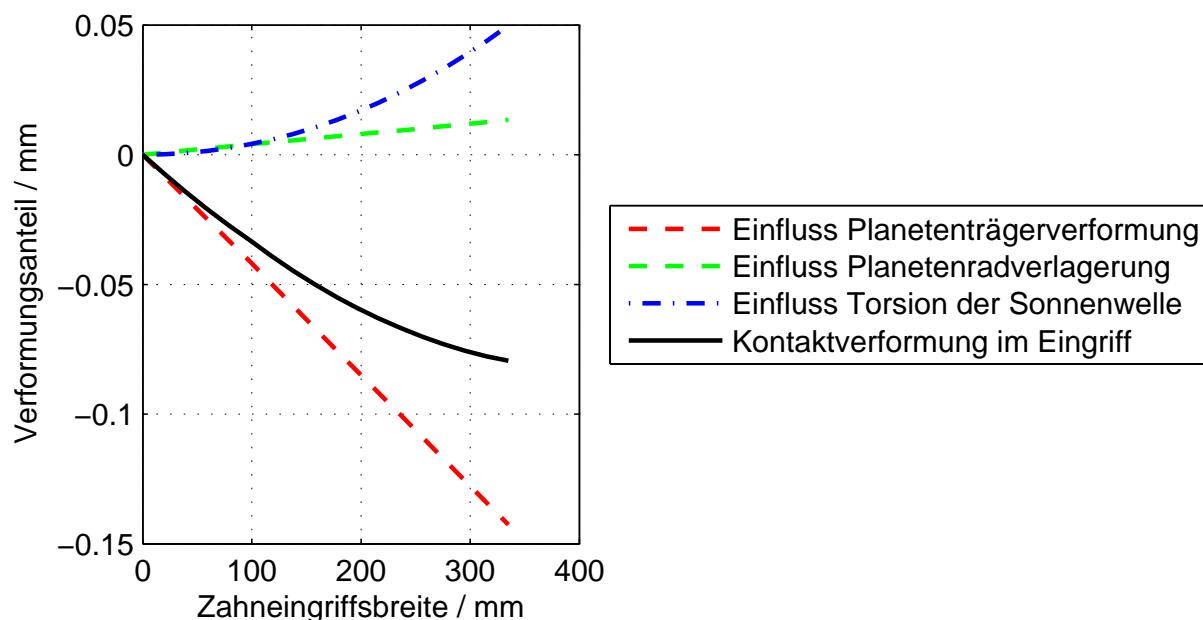
Die Lastverteilung in den Zahneingriffen von Planetengetrieben ist direkt vom Verformungszustand in Planetengetrieben abhängig. **Bild 27b** zeigt den Verformungszustand einer Planetenradstufe, aus dem direkt Aussagen zu den einzelnen in den jeweiligen Zahneingriffen wirksamen Verformungsanteilen abgeleitet werden können.

Die einzelnen im Zahnkontakt von Planetengetrieben wirksamen Verformungseinflüs-

se setzen sich im Wesentlichen aus der Verlagerung einzelner Zentralwellen, der Torsionsverformung insbesondere des Sonnenrades sowie dem Verlagerungs- und Verformungsverhalten des gekoppelten Teilsystems Planetenträger-Bolzen-Lagerung-Planetenrad zusammen. Im untersuchten Beispielgetriebe ist das Hohlrad gehäusefest angebunden und weist dadurch keine nennenswerte Verformung auf.

**Bild 29** zeigt exemplarisch die Anteile einzelner Verlagerungseinflüsse der daraus resultierende Zahnkontaktgesamtverformung eines Eingriffs eines Planetengetriebes, die aus dem Gesamtverformungszustand eines Getriebesystems abgeleitet werden können.

Die Lastverteilung in den Zahneingriffen von unkorrigierten Verzahnungen wird im Wesentlichen von den wirksamen Verformungsanteilen im Zahnkontakt beeinflusst. Bei der Darstellung nach **Bild 29** werden die einzelnen Verformungsanteile im Zahnkontakt relativ zum Verformungszustand am linken Verzahnungsrand betrachtet. Positive Verformungsanteile beschreiben eine im Zahneingriff hervorstehende Zahnflanke, negative Anteile entsprechend zurückweichende Bereiche der Zahnflanke. Die in den Eingriff hineinragenden Flankenbereiche können durch Verzahnungskorrekturen zurückgenommen werden.



**Bild 29:** Einfluss unterschiedlicher Verformungsanteile auf die Kontaktverformung eines Zahneingriffes einer Planetenradstufe

## 4.2 Zusammenhänge zwischen Verformungs- und Lastverhalten von Planetengetrieben bei einstellbaren Zentralwellen

Der Zusammenhang zwischen dem Verformungsverhalten eines einfachen Planetengeriebes unter Last, dem daraus resultierenden Lastaufteilungsverhalten und der Breitenlastverteilung in den Zahneingriffen in Abhängigkeit der Belastung des Getriebesystems wird anhand einer Berechnungsstudie auf Basis eines praxisrelevanten Beispielgetriebedatensatzes erläutert und für unterschiedliche konstruktive Bedingungen und Lastrandbedingungen bestimmt.

Das Lastaufteilungsverhalten von Planetenradstufen wird anhand der von den einzelnen Zahneingriffen übertragenen Zahnnormalkräfte bewertet. Die Bestimmung des Lastaufteilungsfaktors  $K_\gamma$  nach Norm ergibt sich zu:

$$K_\gamma = \frac{F_{N\ i\ max}}{F_{N\ mittel}} \quad (67)$$

Die mittlere übertragene Zahnnormalkraft wird zu

$$F_{N\ mittel} = \frac{1}{n_{pl}} \sum_{i=1}^{n_{pl}} F_{N\ i} \quad (68)$$

gebildet. Die einzelnen Zahnnormalkräfte  $F_{N\ i}$  der jeweiligen Eingriffe werden aus dem Ergebnis der Last- und Verformungsanalyse im Gesamtgetriebesystem abgeleitet.

$K_\gamma$	–	Lastaufteilungsfaktor einer Planetenradstufe	$F_{N\ i\ max}$	$N$	höchste zu übertragende Zahnnormalkraft in der Planetenradstufe
$F_{N\ mittel}$	$N$	mittlere übertragene Zahnnormalkraft			
$n_{pl}$	–	Anzahl der Planeten	$F_{N\ i}$	$N$	Zahnnormalkraft eines Zahneingriffes i der Planetenradstufe

Zusätzlich wird die Lastverteilung in den Zahneingriffen von Planetenradstufen unter verschiedenen konstruktiven und Belastungsrandbedingungen untersucht. Hierfür wird der Breitenlastverteilungsfaktor  $K_{H\beta}$  nach Norm als Maß für die ungleichmäßige Verteilung der Last über der Verzahnungsbreite herangezogen.

Für die rechnerischen Untersuchungen zur Lastauf- und -verteilung wird das in **Abschnitt 4.1** beschriebene Getriebesystem mit einer einfachen Planetenradstufe in verschiedenen Getriebekonfigurationen unterteilt betrachtet. Der Einfluss unterschiedlicher konstruktiver Gegebenheiten auf das Lastverhalten des Getriebes wird untersucht.

Variationsbereiche der Berechnungsstudie umfassen Untersuchungen zu:

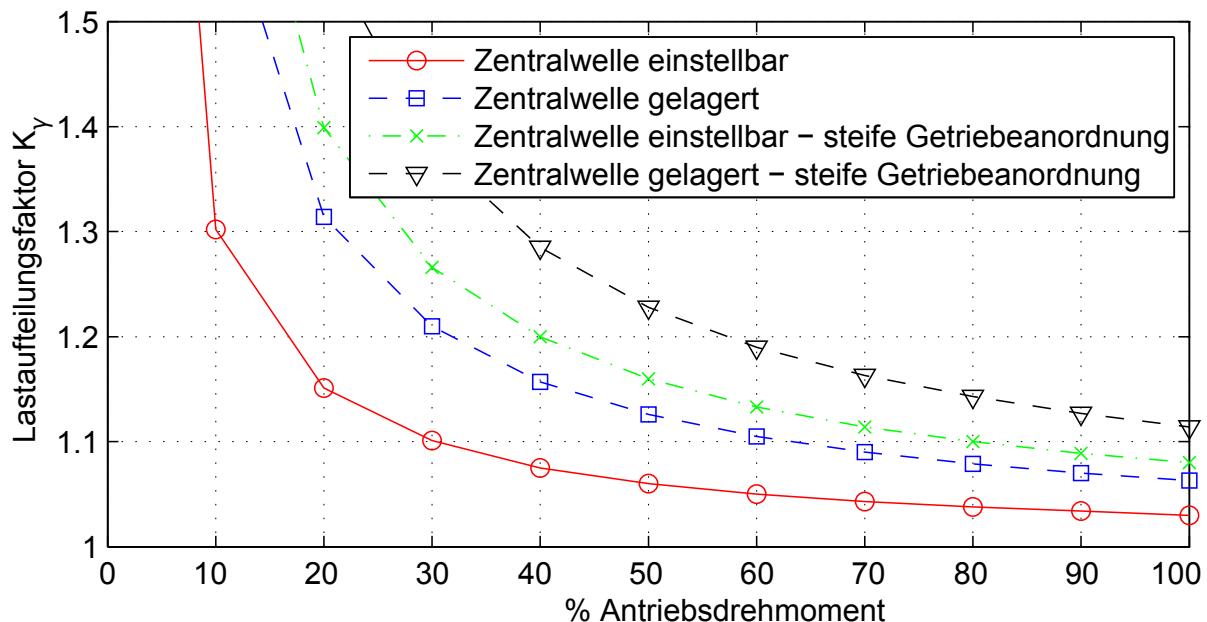
- Getriebekonfiguration mit drei, vier oder fünf Planeten

- gelagerten und einstellbaren Zentralwellen
- einer doppelt gelenkig gelagerten Sonnenwelle
- einstellbaren Planeten (Flexpins [63])
- Lagerspielen in der Planetenradlagerung

Dabei wird der Einfluss von Herstellungsabweichungen (Stegteilungsabweichung) auf die Planetenradstufe erfasst.

#### 4.2.1 Einfluss des elastischen Getriebeumfelds auf das Lastverhalten

In **Bild 30** sind grundlegende Zusammenhänge zwischen dem Verformungs- und Verlagerungsverhalten und dem Lastaufteilungsverhalten des Beispielgetriebes aus **Abschnitt 4.2** mit vier Planeten gezeigt. Die Lastaufteilung auf die einzelnen Teilleistungsstränge bei vorgegebener Herstellungsabweichung wird dort für unterschiedlich steife und einstellbewegliche Getriebeanordnungen dargestellt. Sehr steife Getriebeanordnungen ohne einstellbare Getriebeelemente weisen beim Lastaufteilungsverhalten eine stark ausgeprägte Empfindlichkeit im Bezug auf vorhandene Herstellungsabweichungen auf. Das Hinzufügen einstellbeweglicher Getriebeelemente verbessert



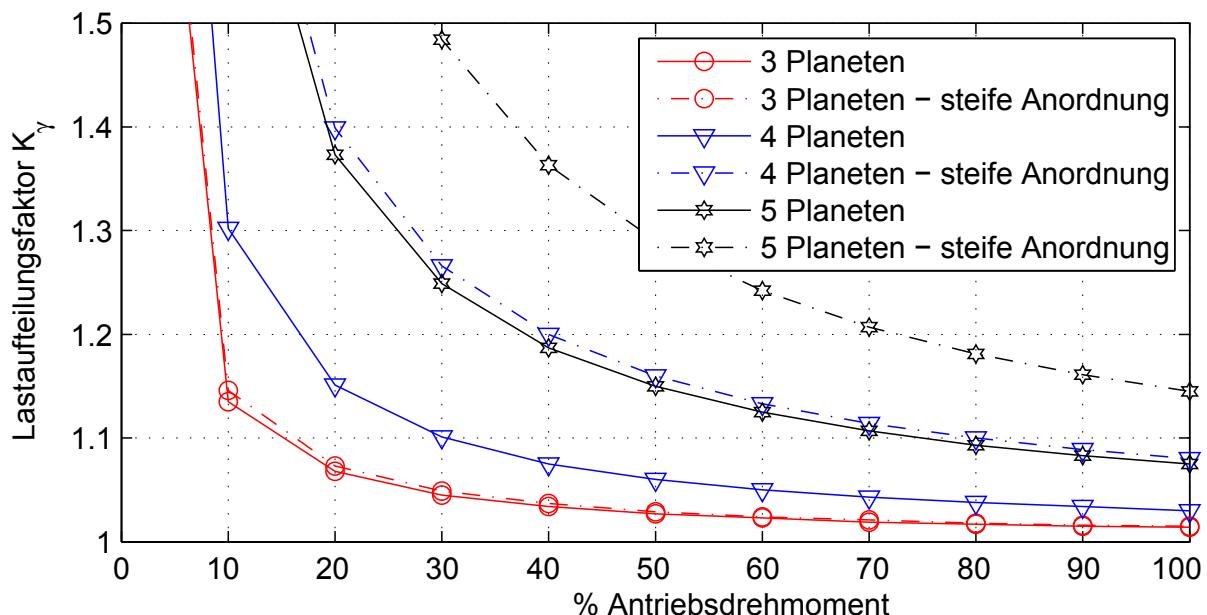
**Bild 30:** Wechselwirkungen zwischen Lastaufteilungs- und Verformungsverhalten des Beispielgetriebes mit vier Planeten über verschiedenen Lasten unter Vorgabe von Herstellungsabweichungen

das Lastaufteilungsverhalten von Planetengetrieben über den gesamten Lastbereich. Diese Tendenz wird durch das Einbeziehen von im Getriebeumfeld vorhandenen Steifigkeitseinflüssen wie dem Planetenträger und den Planetenradlagerungen weiter verstärkt. Aus den Berechnungsergebnissen wird auch der Einfluss des Lastniveaus auf die Lastaufteilung in Planetengetrieben deutlich. Prinzipiell gilt für alle gezeigten Anordnungen eine mehr oder weniger stark ausgeprägte Lastabhängigkeit der Ergebnisse. Bei niedrigen Antriebsmomenten und damit niedrigen Zahneingriffslasten wirken sich Herstellungsabweichungen deutlich stärker aus als bei höheren Antriebsmomenten. Durch weiche Getriebeelemente können diese Abweichungen ausgeglichen werden.

#### 4.2.2 Einfluss der Planetenzahl auf das Lastverhalten

Wird die vorher durchgeführte Betrachtung auf Getriebevarianten mit drei und fünf Planeten erweitert, wird erkennbar, dass auch die Anzahl der Planeten und damit der Teilleistungsstränge im Getriebesystem einen starken Einfluss auf das Lastaufteilungsverhalten hat. Die Zusammenhänge zeigt **Bild 31**.

Die Getriebevariante mit drei Teilleistungssträngen und einem einstellbaren Zentralelement zeigt aufgrund der statischen Bestimmtheit gleichmäßige Lastaufteilung über einen weiten Lastbereich. Die einfach einstellbare Sonnenwelle des Getriebesystems ist in der Lage, unabhängig vom Steifigkeitsverhalten weiterer Getriebeelemente die Last gleichmäßig auf drei symmetrisch angeordnete Planeten aufzuteilen. Das Lastauf-



**Bild 31:** Einfluss des Verformungsverhalens des Beispielgetriebesystems auf die Lastaufteilung bei unterschiedlicher Planetenzahl

teilungsverhalten der steifen und der verformten Anordnung mit drei Planeten in **Bild 31** sind nahezu identisch. Es kann in jedem Fall eine Position der Sonnenwelle gefunden werden, die den Einfluss des Stegteilungsfehlers ausgleicht. Die vorhandenen Gewichtskrafteinflüsse der Getriebeelemente können durch eine Einstellbewegung nicht ausgeglichen werden. Die dadurch verursachte geringe Ungleichmäßigkeit in der Lastaufteilung wächst mit sinkender Nennlast des Getriebes. Die Ergebnisse von Vonderschmidt und Winkelmann [153, 161] können in ihrer Tendenz bestätigt werden.

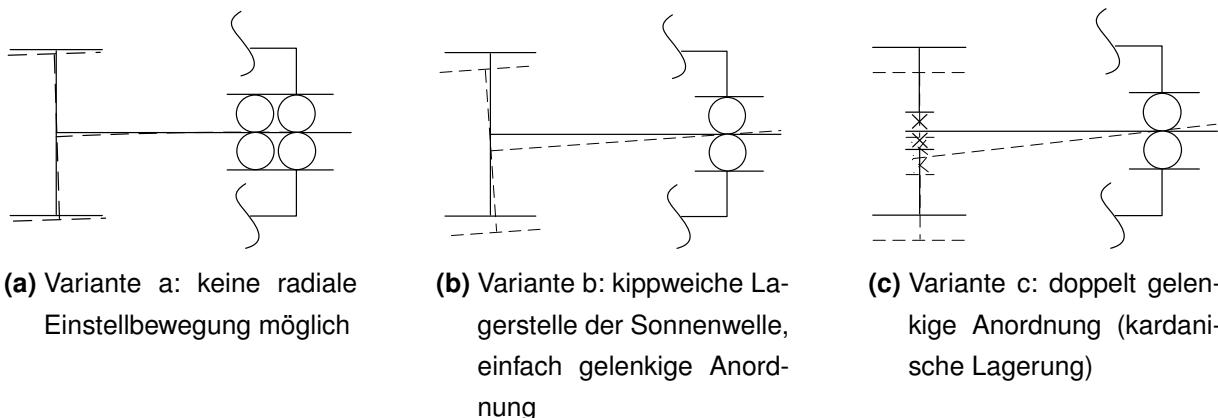
Die Varianten mit vier und fünf Planeten weisen statische Überbestimmtheit auf, so dass die einstellbare Sonnenwelle nicht in der Lage ist, eine ideale Position einzunehmen, in der der Stegteilungsfehler, der einer Verschiebung eines Planetenrades in Umfangsrichtung des Planetenträgers entspricht, vollständig ausgeglichen werden kann. Durch die statische Überbestimmtheit bei der Festlegung der Position der einstellbaren Zentralelemente tritt das Steifigkeitsverhalten des gesamten Getriebesystems bei vier und mehr Planeten stark mit der Lastaufteilung auf die einzelnen Leistungsstränge in Wechselwirkung. Die Anordnungen mit verformbaren Getriebeelementen gleichen Lastüberhöhungen durch Verformung aus während die steifen Getriebeanordnungen diesen Effekt nicht aufzeigen.

Weiterhin kann aus **Bild 31** abgeleitet werden, dass steifere Getriebesysteme zu stärkerer Lastaufteilungsungleichheit bei niedrigen Lasten führt. Zusätzlich ist ersichtlich, dass unter der Annahme vergleichbarer Herstellungsabweichungen Planetengetriebe mit höherer Planetenzahl zu stärker ausgeprägter Lastaufteilungsungleichheit und stärker ausgeprägter Lastabhängigkeit der Lastaufteilung tendieren.

Die Leistungsdichte von Planetengetrieben kann durch den Einbau mehrerer Planeten und damit die Verteilung des Antriebsmomentes auf mehrere parallele Leistungszweige erhöht werden, dabei ist jedoch die erhöhte Empfindlichkeit im Bezug auf Herstellungsabweichungen, insbesondere bei den Lageabweichungen einzelner Planeten zu beachten. Diese Aussage deckt sich mit den Ergebnissen verschiedener Untersuchungen zum Lastaufteilungsverhalten in Planetengetrieben nach Kahraman [12], Prueter [121], Singh [138–140] und Vonderschmidt [153].

#### 4.2.3 Einfluss einstellbarer Zentralwellen auf das Lastverhalten

Der Zusammenhang zwischen der Lastaufteilung und einer von der Getriebekonstruktion und der Anordnung der einzelnen Elemente abhängigen Zentralwellenverlagerung wurde bereits in **Bild 30** gezeigt und in früheren Arbeiten nach Kahraman [77] und Vonderschmidt [153] beschrieben. Je nach Ausführung beeinflussen radial einstellbar



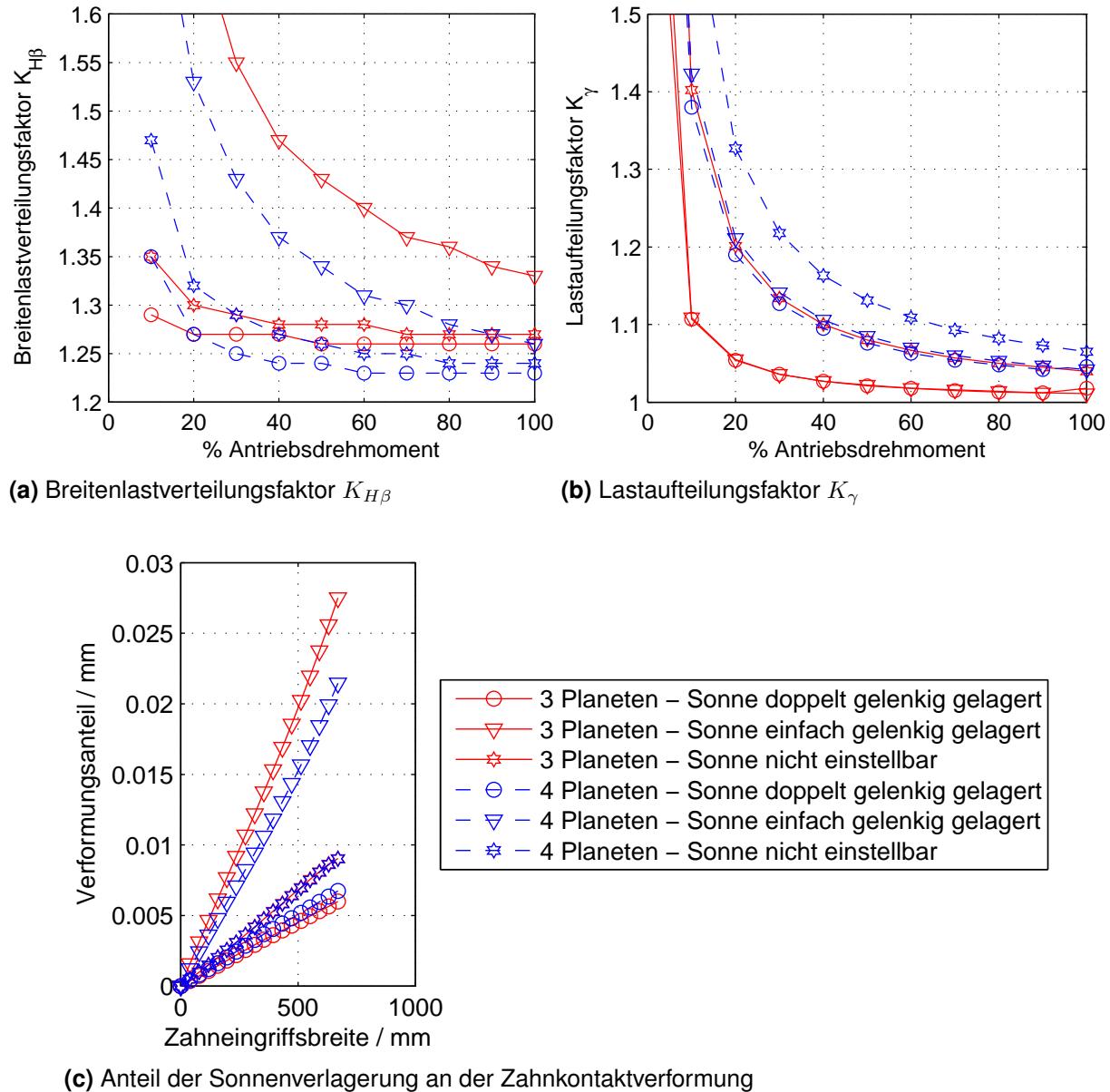
**Bild 32:** verschiedene konstruktive Ausführungen der Sonnenwelle des Getriebesystems nach **Bild 26** zur unterschiedlichen radialen Einstellbarkeit

angeordnete Sonnenwellen jedoch zusätzlich zur Lastaufteilung die Breitenlastverteilung in den Zahneingriffen zwischen Sonnen- und Planetenrädern.

In **Bild 33** wird die Lastaufteilung im Beispielgetriebesystem nach **Abschnitt 4.1** bei unterschiedlichen konstruktiven Ausführungen der Sonnenwellenlagerung bestimmt. Zusätzlich werden Zusammenhänge zwischen der Zentralwellenverlagerung und der Breitenlastverteilung in den Zahneingriffen erfasst und anhand des Breitenlastverteilungsfaktors  $K_{H\beta}$  bewertet.

Für die rechnerischen Untersuchungen werden die in **Bild 32** gezeigten drei Anordnungen zur radialen Einstellbarkeit der Sonnenwelle untersucht. In Variante a nach **Bild 32a** wird die Sonnenwelle aufgrund der steifen Lageranordnung radial festgehalten. Ein Verkippen der Sonnenwelle ist nicht möglich, eine radiale Einstellbewegung nur aufgrund der Wellenbiegung möglich. Variante b nach **Bild 32b** zeigt eine einfach einstellbare Sonnenwelle, die um die entsprechenden Achsen einer kippweichen Lagerstelle verkippen kann. Dadurch ist eine radiale Einstellbewegung mit gekoppelter Kippbewegung des Sonnenrades möglich. Variante c nach **Bild 32c** zeigt eine doppelt gelenkig ausgeführte Anordnung, bei der das Sonnenrad im Bezug zum Getriebegehäuse kardanisch gelagert ist. Durch die Anordnung ist ein radiales Verschieben des Sonnenrades ohne zusätzliche Verkipfung des Sonnenrades möglich.

Nach **Bild 33b** zeigen die Getriebeanordnungen mit drei und vier Planeten in den Varianten b und c (**Bild 32**) sehr ähnliches Lastaufteilungsverhalten. Für den Lastausgleich auf einzelne Leistungszweige ist demnach die Verkipfung des Sonnenrades aufgrund der radialen Verlagerung bei Variante b unerheblich und bringt ähnliche Ergebnisse wie Variante c. Wird hingegen die Breitenlastverteilung anhand des Faktors  $K_{H\beta}$  be-



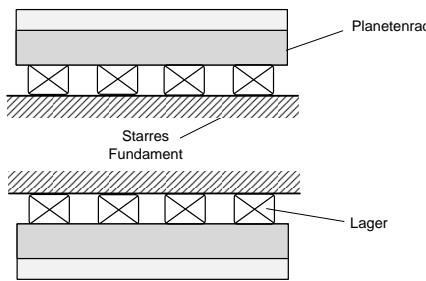
**Bild 33:** Zusammenhängende Betrachtung des Lastaufteilungs- und Breitenlastverteilungsverhaltens einer Planetenradstufe bei verschiedenen Anordnungen der Sonnenwelle

trachtet, so zeigen sich signifikante Unterschiede zwischen den Varianten b und c für die Sonnenwellenanordnung. Die einfach gelenkig ausgeführte Sonnenlagerung führt durch die kinematische Anbindung bei radialen Einstellbewegungen zusätzliche Kippbewegungen aus. Diese Kippbewegung wirkt direkt als Verformungsanteil der Zahnkontaktverformung nach **Bild 33c** und verursacht ungünstiges Breitenträgen der Zahneingriffe zwischen Sonne und Planeten. Variante c zeigt ein ähnlich gutes Breitenträgen wie Variante a, bei der keine Einstellbewegung möglich ist und dementsprechend die Lastaufteilung auf die Planeten deutlich ungünstig beeinflusst wird.

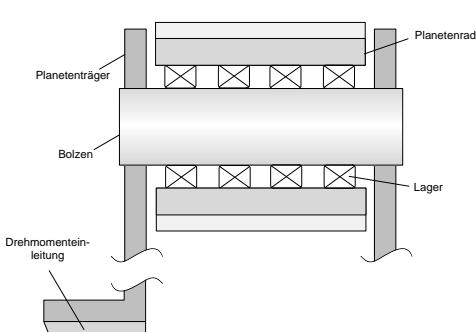
### 4.3 Einfluss des Verformungsverhaltens des gekoppelten Systems Planetenträger-Bolzen-Lagerung-Planet auf die Korrekturauslegung

Die Lastverteilung in den Zahnkontakte eines Planetengetriebes ist für Planetengetriebe mit hoher Leistungsdichte ein kritisches Auslegungskriterium. Der Last- und Verformungszustand des gekoppelten Systems aus Planetenträger, Planetenbolzen, Planetenradlagerung und Planetenrad hat starken Einfluss auf das Breitenlastverhalten in den Zahneingriffen eines Planetengetriebes und die Korrekturauslegung in Planetengetrieben.

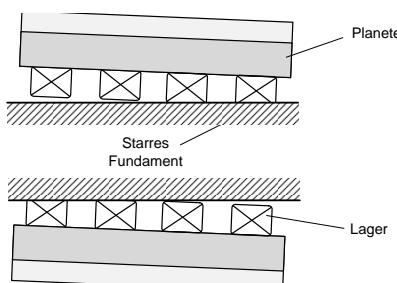
Die praxisübliche Herangehensweise zur Erfassung der Planetenträgerverformung bei der Schrägstellung des Planetenrades in den Zahnkontakten als Vorgabe einer linearen Flankenlinienwinkelabweichung, die aus der Schrägstellung der Planetenbolzen abgeleitet wird, erfasst nicht die Einflüsse der Planetenlagersteifigkeit bei der gekoppelten



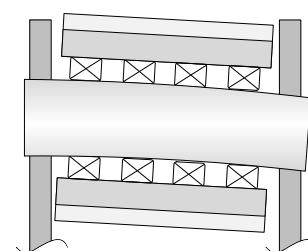
(a) stark vereinfachtes Ersatzmodell, praxisüblicher Ansatz



(b) vollständige Erfassung im Gesamtgetriebesystem



(c) stark vereinfachtes Ersatzmodell, verformte Darstellung



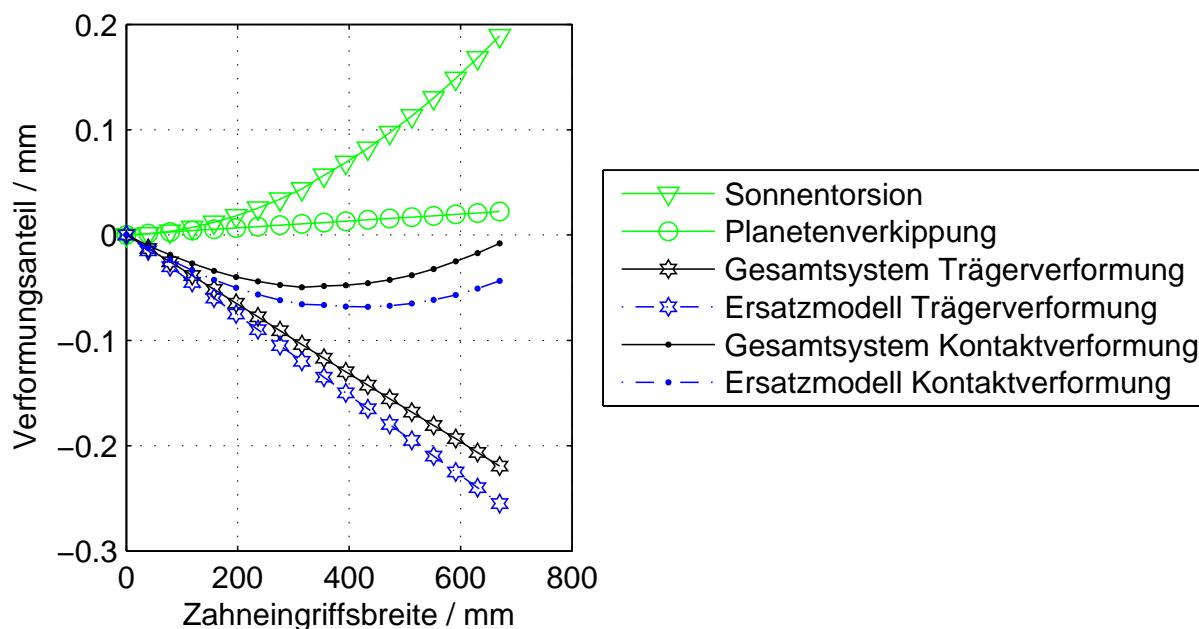
(d) vollständige Erfassung im Gesamtgetriebesystem, verformte Darstellung

**Bild 34:** Unterschiedliche Modelle zur Erfassung der Planetenradverlagerung bei der Korrekturauslegung im Planetengetriebe

Systembetrachtung auf das Verformungsverhalten in den Zahneingriffen. Dort wird im Allgemeinen die Planetenträgerverformung unter Erfassung der verstifenden Wirkung der Planetenbolzen meist unter Verwendung eines FEM-Ansatzes getrennt von der Bestimmung des Last- und Verformungsverhalten im umgebenden Getriebesystem bestimmt.

Bei der Bestimmung der Breitenlastverteilung wird dann ein Ersatzmodell nach **Bild 34a** zur Beschreibung der Planetenradlagerung auf dem Planetenbolzen verwendet. Das Verformungsverhalten des Systems Planetenträger-Bolzen wird nicht direkt erfasst. Die Planetenradlager werden starr mit dem Getriebefundament verbunden. Der verstifende Einfluss des Planetenrades, der über die Lagerstellen mit dem Planetenbolzen verbunden ist, wird dabei meist vernachlässigt. **Bild 35** zeigt die im Zahnkontakt Sonne-Planet des Beispielgetriebes wirksamen Kontaktverformungen aus den einzelnen auftretenden Verformungsanteilen im Getriebe.

Durch die Erfassung der Planetenträgernachgiebigkeit als Elementsteifigkeitsmatrix direkt im Gesamtgleichungssystem des betrachteten Getriebes nach **Ab-**



**Bild 35:** Unterschiedliche Verformungsanteile im Eingriff Sonne-Planet durch unterschiedliche Erfassung der Planetenträgernachgiebigkeit:

Ersatzmodell: praxisübliche Vorgehensweise, Erfassung der Trägerverformung über Vorgabe der Bolzenverlagerung aus externer FEM-Rechnung als Flankenlinienwinkelabweichung

Gesamtsystem: Erfassung der Nachgiebigkeit des Planetenträgers bei der geschlossenen Lösung des Getriebesystems

**schnitt 3.2.6** kann das Verformungsverhalten des zusammenhängenden Teilsystems Planetenträger-Bolzen-Lagerung-Planetenrad geschlossen bei der Lösung des Last- und Verformungszustands im Gesamtgetriebesystem erfasst werden.

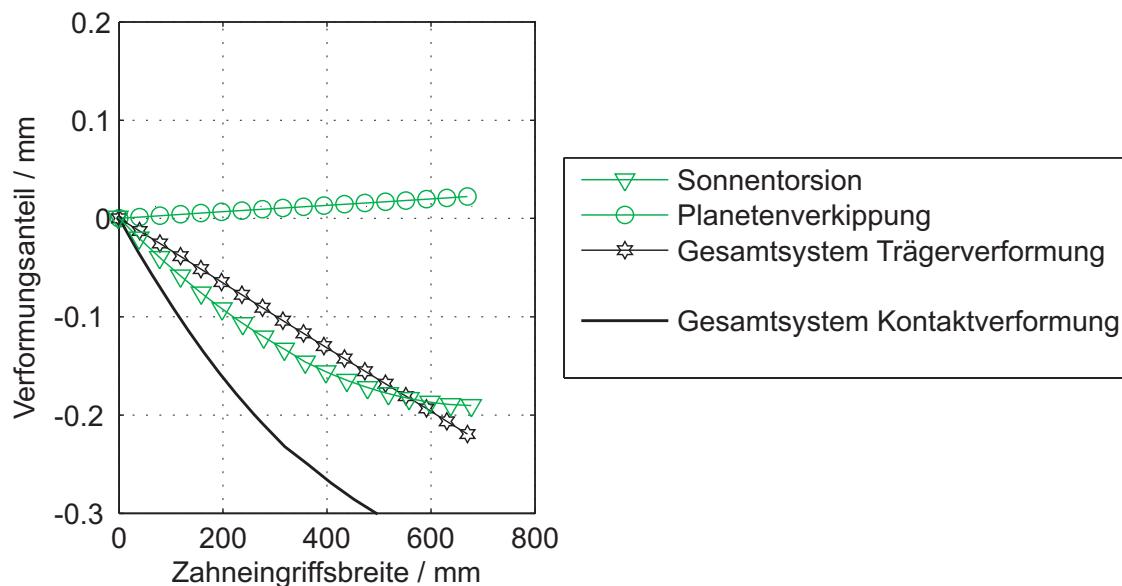
**Bild 35** zeigt, dass die Planetenradlagerung mit dem Planetenrad maßgeblichen Einfluss auf das Verformungsverhalten des Planetenbolzens sowie des Planetenträgers und damit auf die Verformung im Zahneingriff der Zahneingriffe am Planeten hat. Die verstifende Wirkung des Planetenrades über die Lagerung auf den Bolzen und damit auch auf den Planetenträger wird erfasst.

**Bild 35** zeigt für das Beispielgetriebe also einen deutlichen Einfluss der umfassenden Erfassung des gekoppelten Systems Träger-Bolzen-Lagerung-Planet auf die Korrekturauslegung. Die günstigeren Verformungsanteile im Zahneingriff durch die geringere Schrägstellung des Planetenrades hat eine geringere Gesamtverformung im Zahneingriff zur Folge.

**Bild 35** zeigt außerdem, dass durch geschickte Abstimmung des Verformungsverhaltens des gekoppelten Systems Planetenträger-Bolzen-Lagerung-Planetenrad auf das Torsionsverhalten der Sonnenwelle der Korrekturbedarf in den Eingriffen zwischen Sonne und Planeten in Breitenrichtung deutlich gesenkt werden kann. Die Anpassung des Steifigkeitsverhaltens der Sonnenwelle und des gekoppelten Systems aus Träger, Bolzen und Planetenrädern mit entsprechender Lagerung wirkt im Gegensatz zu einer lastabhängigen Korrekturauslegung im gesamten Lastbereich des Getriebes, da die Verformung beider Teilsysteme von der Last abhängt und sich dadurch unabhängig vom Lastpunkt aufeinander einstellt. Voraussetzung dafür ist eine geeignete, lastangepassungsgünstig gewählte Konstruktion.

Im gewählten Beispielgetriebe nach **Abschnitt 4.1** liegt die Drehmomenteinleitung über den Planetenträger der Drehmomentausleitung der Sonnenwelle gegenüber. Dadurch ist eine lastangepassungsgünstige Torsionsverformung von Planetenträger und Sonnenwelle möglich. In **Bild 35** wird mit Blick auf die resultierende Gesamtverformung im Zahneingriff deutlich, dass der ungünstige Einfluss der zurückstehenden aktiven Flanken des Planetenrades aufgrund Trägerverformung auf der rechten Seite des Verzahnungsrandes durch den Effekt der aufgrund der Torsionsverformung hervorstellenden aktiven Flanken des Sonnenrades zum Teil ausgeglichen wird.

Liegen im Gegensatz zum Beispielgetriebe Drehmomentein- und -ausleitung des Getriebesystems auf der selben Getriebeseite - führt also die Sonnenwelle das Drehmoment auf der Seite der Lasteinleitung in das Getriebesystem wieder nach außen - ist ein derartig beschriebenes Lastanpassungsverhalten im Eingriff Sonne-Planet nicht denk-



**Bild 36:** Verformungsanteile im Eingriff Sonne-Planet bei ungünstiger Lastausleitung, Drehmomentein- und -ausleitung des Getriebesystems auf der selben Getriebeseite

bar. Im Gegensatz zum gezeigten Verformungsverhalten nach **Bild 35** würden sich dann die Verformungseinflüsse von Sonne und Planetenträger gegenseitig verstärken und wie in **Bild 36** gezeigt zu einer signifikanten Verschlechterung des Breitentragens beitragen. Zum Ausgleich ungünstigen Breitentragens sind dann entsprechende Schrägwinkelkorrekturen möglich. Diese sind jedoch nur für einen Auslegungslastpunkt optimal und führen zu hoher, ungünstiger Lastabhängigkeit des Breitentragens.

Weiterhin wird dargestellt, dass die Planetenträgerverformung einen maßgeblichen Einfluss auf das Last- und Verformungsverhalten in Planetengetriebesystemen hat. Gegensätzlich dazu zeigt sich die Aussage von Baumann [9]. Dort wird gezeigt, dass die Planetenträgerverformung einen untergeordneten Verformungseinfluss in Planetengetrieben darstellt. Nach Baumann [9] ist der Einfluss der Trägerverformung geringer als die Flankenlinienwinkelabweichung nach DIN 3961 [24], Qualität 5. Im Beispielgetriebe aus einer Anwendung in der Windkraft ergibt sich nach DIN 3961 [24] bei Qualität 5 und einem Normalmodul der Verzahnung  $m_n > 20.0$  ein Betrag für die Flankenlinienwinkelabweichung von  $f_{H\beta} = 12 \mu m$ . Nach **Bild 35** stellt sich eine Verlagerung des Planetenrades bezogen auf die Eingriffsrichtung von  $\Delta_{H\beta}$  ca.  $200 \mu m$  ein. Die Aussage zum untergeordneten Einfluss der Planetenträgerverformung nach [9] kann nicht bestätigt werden.

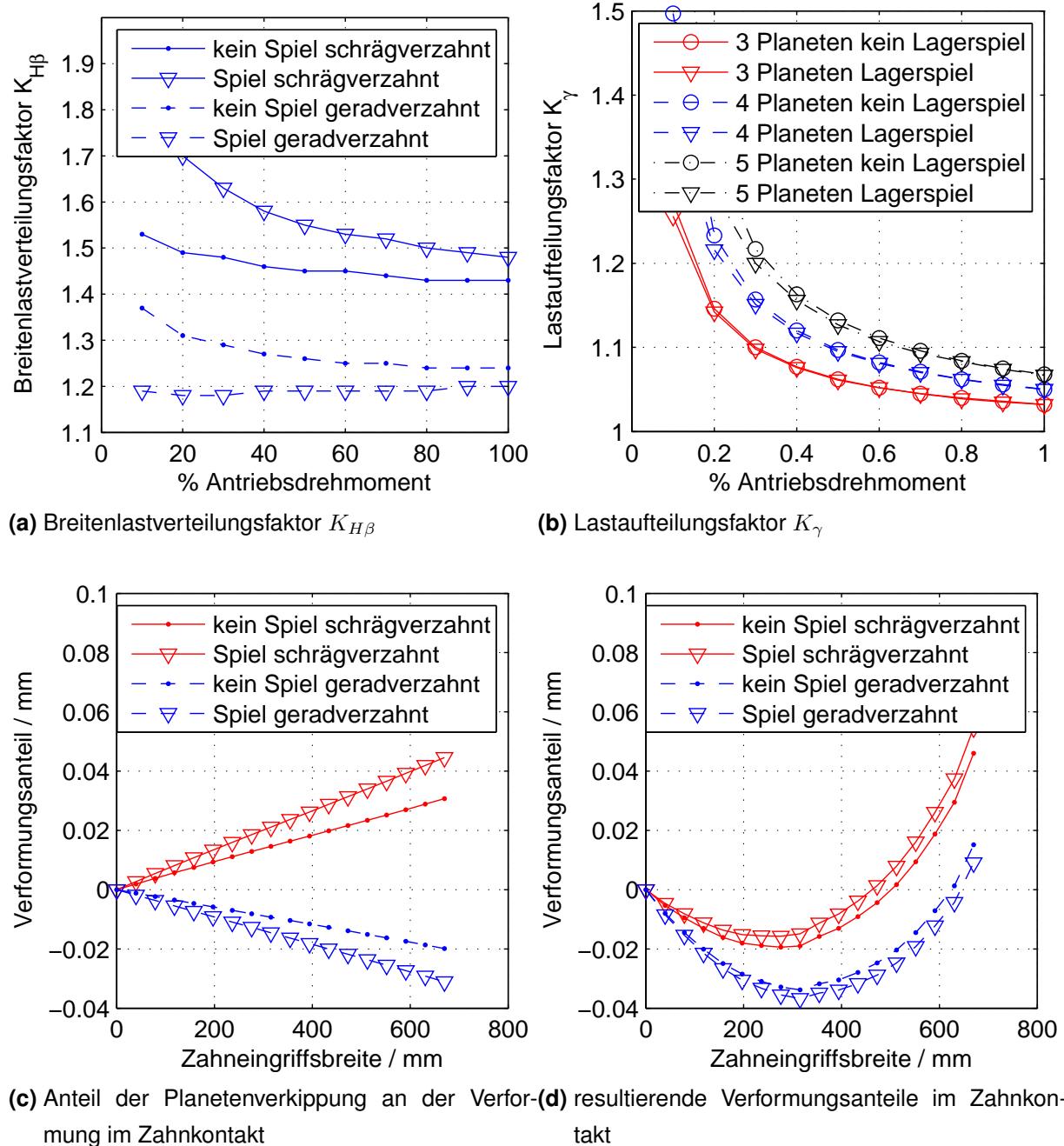
#### 4.4 Last- und Verformungsverhalten bei spielbehafteter Planetenradlagerung

Die Last- und Verformungsanalyse im Beispielgetriebesystem nach **Abschnitt 4.1** kann den Einfluss von Lagerspiel in den Planetenradlagern erfassen. Zur Untersuchung des Einflusses von Lagerspiel in der Planetenradlagerung wird eine Fest-Los-Lagerung mit Zylinderrollenlagern modelliert, die konstruktiv bedingt Lagerspiel aufweisen. Hierfür wird die Lagerinnengeometrie zur Berechnung des Verformungsverhaltens der Zylinderrollenlager vorgegeben. Die Untersuchung wird für unterschiedliche Getriebekonfigurationen mit gerad- und schrägverzahnten Stirnradstufen und unterschiedlichen Planetenzahlen durchgeführt.

**Bild 37b** zeigt deutlich, dass das radiale Lagerspiel in der Planetenradlagerung keinen nennenswerten Einfluss auf die Lastaufteilung zwischen den Planeten hat und dadurch Herstellungsabweichungen des Planetenträgers nicht ausgeglichen werden können. Aufgrund der symmetrischen Anordnung der Planeten werden durch die Belastung mit dem Antriebsdrehmoment alle Spiele gleichmäßig überschoben. Ein Ausgleich von Stegteilungsabweichungen ist dadurch nicht möglich.

Im Gegensatz zur Lastaufteilung wird das Breitenlastverteilungsverhalten der Zahneingriffe durch das Spiel in der Planetenlagerung deutlich beeinflusst. Bei der betrachteten Getriebekonfiguration mit Geradverzahnung trägt das Lagerspiel zu ausgeglichinem Breitentragen der Zahneingriffe bei. Durch das Spiel ist ein Verkippen des Planetenrades bei ungleichmäßiger Lastverteilung möglich. Durch das aus der ungleichmäßigen Lastverteilung im unkorrigierten Zahneingriff resultierende Moment verkippt das Planetenrad im Rahmen des Lagerspiels und trägt zum Abbau der Lastverteilungsungleichheit auf den Zahnflanken bei. **Bild 37c** zeigt den positiven Einfluss des Lagerspiels auf das Verlagerungsverhalten des Planeten bei Geradverzahnung. Negative Werte des Verformungsanteils beschreiben eine aus dem Zahneingriff herausgeschobene Zahnflanke. Diese Bereiche der Zahnflanke werden dadurch entlastet. Das Lagerspiel und die daraus resultierende Verkippung des geradverzahnten Planeten tragen zu einer stärkeren Entlastung des rechten Verzahnungsrandes im Eingriff Sonne-Planet bei. Günstigeres Breitentragen in den Zahneingriffen ist die Folge. **Bild 37a** zeigt dies am Verlauf des Breitenlastverteilungsfaktors  $K_{H\beta}$  bei Getriebeanordnungen mit und ohne Spiel in der Planetenradlagerung über unterschiedlichen Lastpunkten des Getriebes.

Bei der schrägverzahnten Getriebekonfiguration wird aufgrund der Axialkraftwirkung am Planeten ein Verkippen der Planetenräder hervorgerufen, welches nicht zwingend der ungleichmäßigen Lastverteilung in den Zahnkontakte des Planeten entgegenwirkt.



**Bild 37:** Einfluss des Spiels in der Planetenlagerung auf das Lastaufteilungs- und Breitenlastverteilungsverhaltens einer Planetenradstufe bei Gerad- und Schrägverzahnung

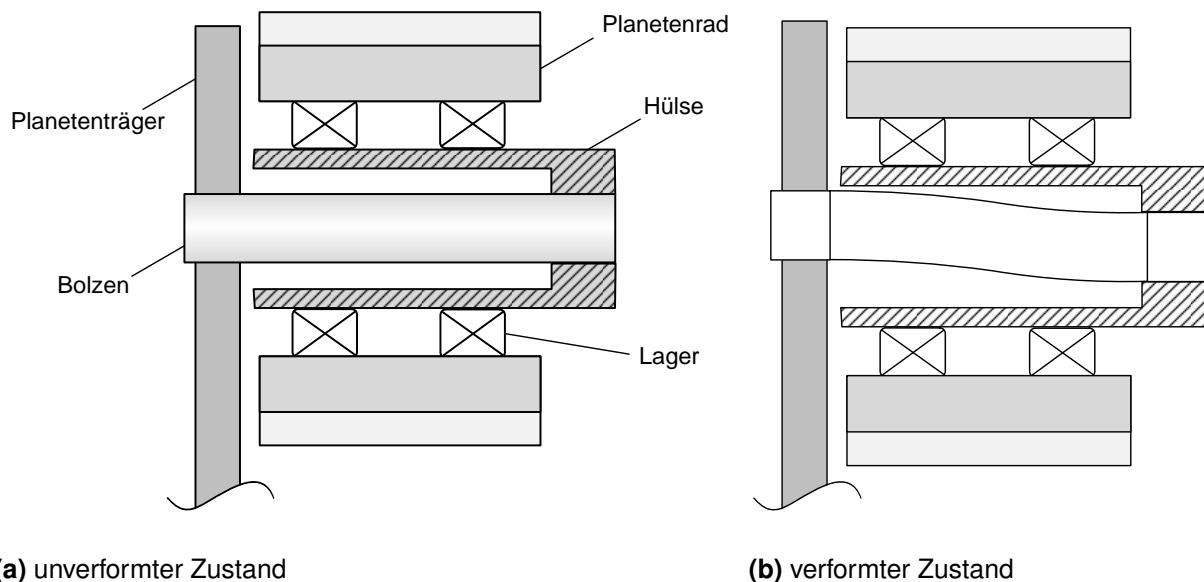
Durch das Spiel in der Planetenlagerung wird dieser Effekt ähnlich wie bei der geradverzahnten Variante noch verstärkt, trägt jedoch nicht zu einem Ausgleich der Breitenlastverteilung, sondern zu einer noch stärker ungleich verteilten Last im Zahneingriff bei. In Bild 37c wird der negative Einfluss der Planetenradverkippung bei Schrägverzahnung verdeutlicht. Positive Werte des Verformungsanteils beschreiben eine in den Zahneingriff hineinragende Zahnflanke. Diese Bereiche der Zahnflanke werden

dadurch stärker belastet. Die Kippmomentenwirkung aufgrund der ungleichen Breitenlastverteilung stellt bei Schrägverzahnung im Vergleich zu der aus den angreifenden Axialkräften einen untergeordneten Einfluss auf die Verformungsanteile im Zahnkontakt dar. **Bild 37a** zeigt die aufgrund der Axialkraftwirkung am Planeten deutlich ungünstigere Breitenlastverteilung im Eingriff Sonne-Planet bei Schrägverzahnung anhand des Breitenlastverteilungsfaktors  $K_{H\beta}$  über unterschiedlichen Lastpunkten des Getriebes.

Die vorgestellten Ergebnisse zur Lastaufteilung und zum Breitenlastverhalten in Planetengetriebesystemen können anhand der durch rechnerische und experimentelle Untersuchungen hergeleiteten Aussagen nach Vonderschmidt [153], Winkelmann [161] und Kahraman [77] zum Verhalten der Lastaufteilung und zum Breitenträgen in Zahneingriffen von Planetengerieben bestätigt werden und unterstreichen die Aussagekraft des in **Abschnitt 3** vorgestellten Berechnungsverfahrens.

#### 4.5 Anwendung von flexiblen Planetenbolzen

Elastische Planetenbolzen („Flex Pins“) nach Hicks [63] reduzieren durch den Einbau einer einseitig auf den Bolzen aufgepressten Hülse zwischen Planetenbolzen und Planetenlagerung die Steifigkeit des Systems Planetenträger/Bolzen/Lager/Planetenrad. Durch die einseitige Festlegung der Hülse auf dem Bolzen ist eine zusätzliche Einstellbewegung des Planetenrades mitsamt Lagerung gegenüber dem Bolzen und dem damit verbundenen Planetenträger möglich. Das Prinzip dieser Anordnung ist in **Bild 38** dargestellt. Durch die insgesamt weichere Anbindung der Planetenräder an den Träger



**Bild 38:** schematische Darstellung des Beispielgetriebesystems mit „Flex Pins“ nach Hicks [63]

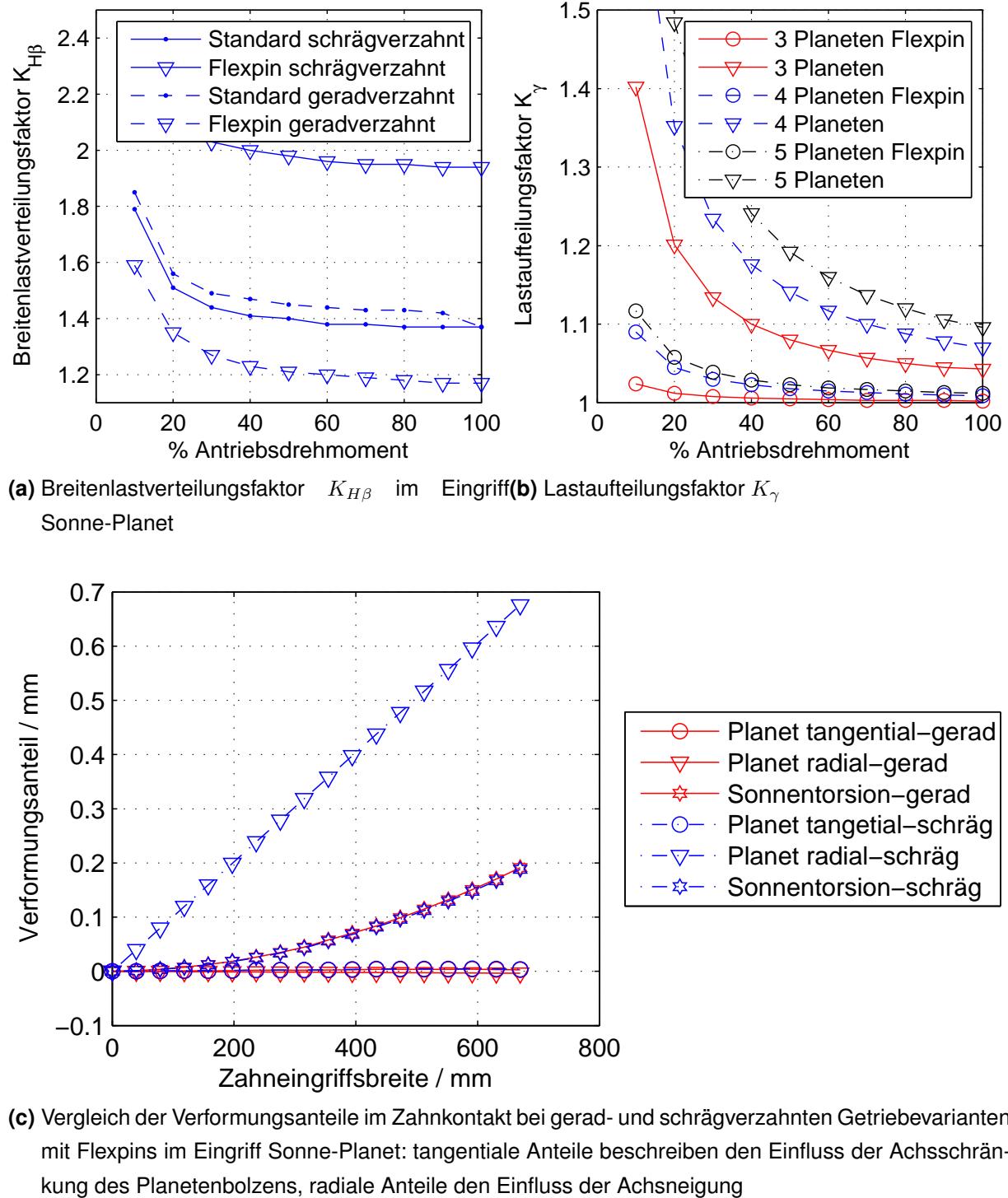
ist eine Verbesserung des Lastaufteilungsverhaltens zu erwarten. Außerdem wird durch die Möglichkeit der zusätzlichen Einstellbewegung ein Ausgleich der Planetenträgerverformung durch eine Gegenbewegung des Planetenrades mitsamt Hülse ermöglicht, wie in **Bild 38** gezeigt wird. Dadurch kann ein besseres Lastanpassungsverhalten des Getriebesystems erreicht werden und der Korrekturbedarf in den Zahneingriffen reduziert werden. **Bild 39** zeigt ausgewählte Ergebnisse der Last- und Verformungsanalyse des Beispielgetriebesystems nach **Bild 26** mit der flexiblen Anordnung der Planetenräder nach **Bild 38**.

In **Bild 39b** wird das verbesserte Lastaufteilungsverhalten durch die insgesamt weichere Anbindung der Planetenräder an den Träger gezeigt. Für die Getriebekonfigurationen mit drei, vier und fünf Planeten können signifikante Verbesserungen des Lastaufteilungsfaktors  $K_{\gamma}$  über dem gesamten Lastbereich erzielt werden. Das Lastaufteilungsverhalten für die gerad- und schrägverzahnten Varianten ist nahezu gleich. Die Leistungsdichte solcher Getriebesysteme kann durch Erhöhen der Planetenzahl gesteigert werden. Die in **Abschnitt 4.2** beschriebene Tendenz zur ungleichmäßigeren Lastaufteilung bei höheren Planetenzahlen wird durch die erhöhte Nachgiebigkeit des Systems Planetenbolzen/Lager/Planetenrad ausgeglichen.

**Bild 39a** zeigt das Lastverteilungsverhalten im Zahneingriff Sonne-Planet bei unterschiedlichen Getriebevarianten. Anhand der Breitenlastfaktoren  $K_{H\beta}$  über verschiedenen Laststufen wird deutlich, dass die elastische Anbindung der Planeten einen starken Einfluss auf das Breitentragen der Zahneingriffe aufweist.

In **Bild 39c** sind die Verformungsanteile der untersuchten Getriebevarianten mit den elastisch angebundenen Planeten dargestellt. Bei gerad- und schrägverzahnten Varianten wird die tangential zum Zahneingriff wirkende Planetenträgerverformung durch die in **Bild 38** dargestellte einstellbare Planetenanordnung über die Verformung des elastischen Planetenbolzens kompensiert. Bei den geradverzahnten Varianten des Getriebesystems führt dies zu einem deutlich günstigeren Breitentragen in den Zahneingriffen, wie es in **Bild 39a** anschaulich für einen Eingriff Sonne-Planet gezeigt wird.

Bei den untersuchten Getriebeanordnungen mit Schrägverzahnung stellt sich bei den Varianten mit Flex Pins ein deutlich schlechteres Lastverteilungsverhalten ein als bei einer konventionellen steifen Planetenlagerung im Planetenträger. Das aufgrund der Axialkraftwirkung in den schrägverzahnten Eingriffen auftretende Kippmoment an den Planeten muss durch entsprechend steife Lagerungen aufgenommen werden. Bei weichen Flex Pins kippt der schrägverzahnte Planet und führt zu einer starken radialen Verschiebung der Flanken des Planetenrades in den jeweiligen Zahneingriffen, wie es



**Bild 39:** Ausgewählte Ergebnisse der Last- und Verformungsanalyse einer Planetenradstufe mit Flex Pins nach [63] bei Gerad- und Schrägverzahnung

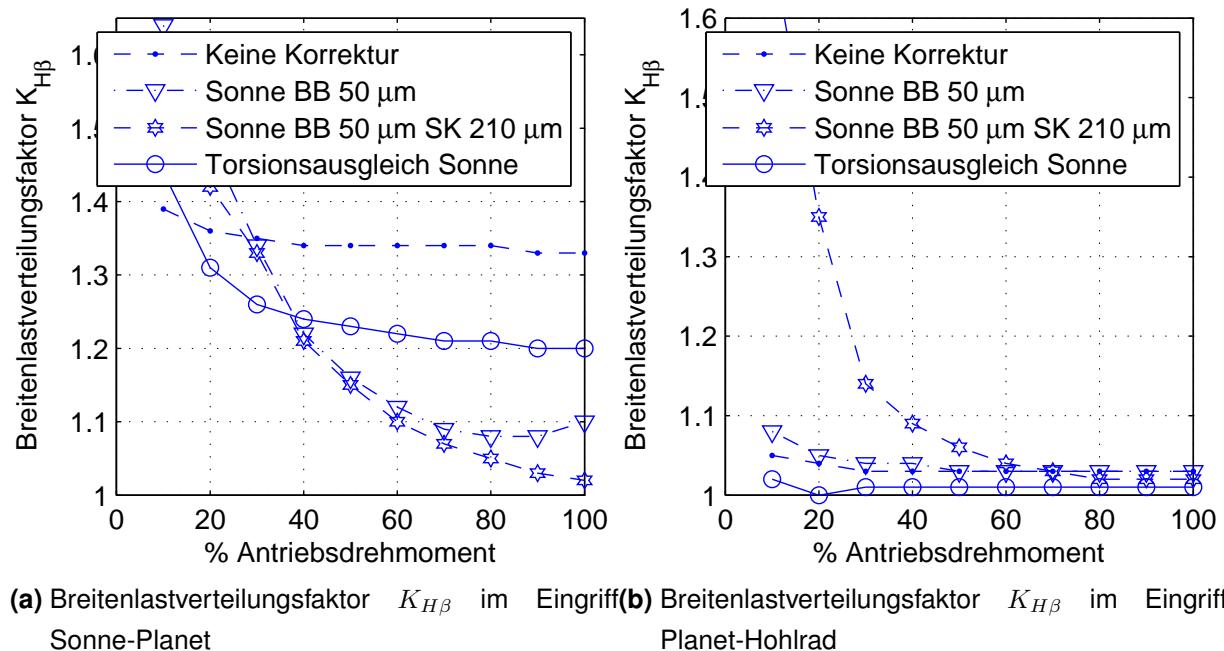
in **Bild 39c** dargestellt ist.

**Bild 39c** zeigt neben der Verschiebung des Planetenrades im jeweiligen Zahneingriff Sonne-Planet auch einen Anteil der Verschiebungen im Zahneingriff aus der Torsions-

verformung des Sonnenrades. Dieser Verformungseinfluss kann durch die Verlagerung der flexiblen Planetenbolzen nicht kompensiert werden. Die Torsionsverformung der Sonne muss vollständig durch Korrekturen oder andere konstruktive Maßnahmen ausgeglichen werden.

Den Verlauf der Breitenlastfaktoren  $K_{H\beta}$  über verschiedenen Lastpunkten der geradverzahnten Flex Pin-Getriebeanordnung für die Eingriffe Sonne-Planet und Planet-Hohlrad bei unterschiedlichen Korrekturvorgaben am Sonnenrad zeigt **Bild 40**. Der Anteil der Sonnentorsion an der Zahneingriffsverformung kann durch unterschiedliche Breitenkorrekturen ausgeglichen werden. Weiterhin wird die Änderung des Nachgiebigkeitsverhaltens der Sonnenwelle in Torsionsrichtung und deren Auswirkung auf das Breitenträgen in den Zahnkontakte des Getriebesystems untersucht. So kann beispielsweise durch die Verbindung des Sonnenrades mit der Sonnenwelle über eine Zahnkupplung mit ballig geschliffenen Zahnflanken die Torsionssteifigkeit unter dem Sonnenrad so angepasst werden, dass die Drehmomentausleitung vom Sonnenrad in die Sonnenwelle überwiegend in Verzahnungsmitte stattfindet und die Zahnflanken des Sonnenrades an den Randbereichen entlastet werden.

**Bild 40a** zeigt, dass im Eingriff Sonne-Planet bei hohen Lasten der vollständige Ausgleich des Einflusses der Sonnentorsion auf die Verformung im Zahnkontakt durch die



**Bild 40:** Einfluss unterschiedlicher Korrekturvorgaben am Sonnenrad auf das Breitenlastverhalten in den Zahneingriffen der geradverzahnten Getriebevariante mit Flex Pins

Vorgabe einer Breitenballigkeit (BB) in Kombination mit einer Schräglungswinkelkorrektur (SK) zu einem ausgeglichenen Breitentragen führt. Gleichzeitig stellt sich durch die in Verzahnungsbreitenrichtung asymmetrisch wirkende Schräglungswinkelkorrektur eine starke Querbeeinflussung der Breitenlastverteilung vor allem bei niedrigen Lasten im Eingriff Planet-Hohlrad ein. Aufgrund der weichen Anbindung des Planetenrades sind hohe Schräglungswinkelkorrekturbeträge notwendig, um den Einfluss der Sonnentorsion im Eingriff Sonne-Planet zu kompensieren. Die Flex Pins reagieren auf die Schräglungswinkelkorrektur im Rahmen ihres Nachgiebigkeitsverhaltens mit entsprechender Verlagerung des Planetenrades, die dann im Eingriff Planet-Hohlrad zu einer Beeinträchtigung der Lastverteilung führt.

Wird auf die Vorgabe der Schräglungswinkelkorrektur an der Sonne verzichtet und nur der Einfluss der Breitenballigkeit betrachtet, so zeigt **Bild 40a** bei höheren Lasten ein weniger ausgeglichenes Breitentragen an, in **Bild 40b** ist jedoch aufgrund der Symmetrie der vorgegebenen Korrektur kein nennenswerter Kreuzeinfluss aufgrund der Korrekturvorgabe am Sonnenrad festzustellen. Auch hier reagieren die flexiblen Planetenbolzen mit Verlagerung, aufgrund der Symmetrie der Breitenballigkeit findet jedoch eine Parallelverschiebung der Planeten statt. Der Einfluss auf die Zahneingriffe zum Hohlrad ist untergeordnet.

Bei der Getriebevariante mit Torsionsausgleich unter dem Sonnenrad fällt auf, dass das veränderte Torsionssteifigkeitsverhalten der Sonnenwelle über einen weiten Lastbereich ein optimiertes Breitentragen begünstigt (s. **Bild 40a**). Bei höheren Lasten ist das Breitentragen weniger ausgeglichen als bei Vorgabe entsprechender Breitenkorrekturen, da die Verzahnungsränder aufgrund der fehlenden Unterstützung zu hohen Verformungen tendieren und dadurch wenig Last übernehmen. Anders als bei den Varianten mit Verzahnungskorrekturen findet keine asymmetrische Verschiebung des Planetenrades statt und durch die Symmetrie der Lastverteilung im Eingriff Sonne-Planet liegt keine Querbeeinflussung zwischen den Zahneingriffen am Planeten vor.

Weiterhin wird deutlich, dass durch die Einstellbewegung der flexiblen Planetenbolzen im Eingriff Planet-Hohlrad nahezu immer, außer bei ungünstiger Querbeeinflussung durch Schräglungswinkelkorrektur an der Sonne, gleichmäßiges Breitentragen vorliegt. Aufgrund der Geometrie und der Festlegung im Gehäuse weist das Hohlrad im Gegensatz zum Sonnenrad nahezu keine Verformung, insbesondere keine Torsionsverformung auf.

Bei geradverzahnten Planetengetrieben kann das Verformungsverhalten der Flex Pins zu einem deutlich günstigeren Lastaufteilungsverhalten und durch die spezielle Kine-

matik der Planetenradverlagerung zu einem optimalen Breitenträgen über weite Lastbereiche beitragen. Durch die zusätzliche Elastizität wird das Lastanpassungsverhalten des Getriebes unter Berücksichtigung von Herstellungsabweichungen deutlich verbessert. Die Leistungsdichte solcher Getriebesysteme kann durch große Planetenradzahlen gesteigert werden.

Bei schrägverzahnten Getriebevarianten führt das auftretende Kippmoment am Planeten durch nachgiebige Lagerung zu großen Verformungen der Zahneingriffe. Aufgrund des daraus resultierendes ungünstigen Breitentrags sind Flex Pin Anordnungen für schrägverzahnte Planetengetriebe eine ungeeignete Maßnahme zum Lastausgleich. Bei Montestruc [101, 102] werden vergleichbare Effekte beschrieben, jedoch nicht rechnerisch erfasst.

Aufgrund der deutlich weicheren Anordnung ist das Eigenschwingungsverhalten solcher Getriebe mit besonderem Augenmerk zu prüfen.

## 4.6 Zusammenfassung der Ergebnisse

Im Rahmen der Last- und Verformungsanalyse im Planetengetriebe wurden Zusammenhänge zwischen Lastaufteilung, Zentralwellenverlagerung und Lastverteilung in den Zahneingriffen von Planetengetrieben diskutiert (s. **Abschnitt 4**). Es wurde gezeigt, dass unterschiedliche konstruktive Maßnahmen das Lastverhalten von Planetengetrieben verbessern können. Einfach einstellbare Zentralwellen zeigen eine Verbesserung des Lastaufteilungsverhaltens, beeinflussen jedoch die Breitenlastverteilung in den Zahneingriffen negativ. Besser geeignet sind kardanisch gelagerte Sonnenwellen, die eine radiale Verschiebung ohne gleichzeitiges Verkippen des Sonnenrades ermöglichen. Der Einfluss der Umfeldsteifigkeit auf das Lastaufteilungsverhalten von Getriebesystemen wurde gezeigt. Bei allen Untersuchungen wurde die Abhängigkeit der Lastauf- und -verteilung in Abhängigkeit der Anzahl der Planeten in einem Getriebesystem erfasst. Durch größere Planetenzahlen kann die Leistungsdichte von Planetengetrieben gesteigert werden. Dabei ist jedoch die wachsende Empfindlichkeit von Systemen mit Planetenzahlen größer drei hinsichtlich Herstellungsabweichungen und Fertigungsqualität zu beachten. Ein weniger steifes Getriebeumfeld kann diese Tendenz zum Teil kompensieren.

Praxisübliche Verfahren zur Korrekturauslegung in Planetengetrieben erfassen die Verformung des Planetenträgers als Vorgabe einer Flankenlinienwinkelabweichung in den Zahnkontakten am Planeten. Die direkte Erfassung des Steifigkeitsverhaltens des Planetenträgers ist im Rahmen der Gesamtgetriebeanalyse möglich. Der Einfluss der

Wechselwirkung der Planetenträgerverformung mit dem weiteren Getriebeumfeld auf die Korrekturauslegung und die geschickte Abstimmung des Verformungsverhaltens von Sonnenwelle und Planetenträger zur Vermeidung von Korrekturbedarf wurde in **Abschnitt 4.3** diskutiert. Im Gegensatz zu den Ausführungen in der Literatur wurde die Planetenträgerverformung als wesentlicher Einfluss auf die Zahnkontaktverformung beschrieben.

Die flexible Koppelung von Planetenrad/-lagerung und Planetenträger (Flex Pins) nach Hicks [63] und deren Einfluss auf das Lastaufteilungsverhalten und Breitentragen in Planetengetrieben wurde in **Abschnitt 4.5** diskutiert. Ähnlich zur Betrachtung des Einflusses spielbehafteter Planetenlagerung auf die Breitenlastverteilung in **Abschnitt 4.4** wurde auch für die Flex Pin-Anordnung eine begrenzte Eignung bei schrägverzahnten Getrieben aufgrund der geringen Kippsteifigkeiten zur Abstützung des aus Axialkräften resultierenden Kippmoments gezeigt. Bei geradverzahnten Getrieben tragen beide Varianten zu ausgeglichenem Breitentragen bei. Flex-Pins leisten zusätzlich einen Beitrag zur gleichmäßigen Lastaufteilung in Planetengetrieben.

Anhand der weichen Planetenradanordnung der Flex-Pin-Getriebvariante wurde die wechselseitige Beeinflussung einzelner Zahneingriffe am Planetenrad bei der Korrekturauslegung dargestellt.

## 5 Untersuchungen zum Anregungsverhalten von Planetengetriebesystemen

Das zeitlich veränderliche Steifigkeitsverhalten von Stirnradstufen trägt wesentlich zur Schwingungsanregung in Antriebssystemen bei. So ist das Anregungsverhalten in Planetengetrieben stark vom Verhalten der einzelnen Zahneingriffe im Planetengetriebesystem geprägt. Zur Bewertung des Anregungsverhaltens einzelner Stirnrad eingriffe kann deren Drehwegverhalten betrachtet werden.

Durch die Aufteilung der Last auf mehrere Teilleistungszweige ist das Drehwegverhalten einzelner Stufen im Planetengetriebesystem voneinander abhängig. Die Koppelung der Zahneingriffe über die Zentralwellen beeinflusst das Drehwegverhalten der Stirnradstufen, die im Gesamtgetriebesystem miteinander in Wechselwirkung treten. Die Betrachtung einzelner Stirnradstufen ist aufgrund starker Wechselwirkungen im Verformungsverhalten solcher Getriebesysteme nur bedingt zielführend. Die Bewertung des Anregungsverhaltens von Planetengetrieben erfordert dementsprechend die Bestimmung des Drehwegverhaltens der einzelnen Zahneingriffe im Rahmen der Last- und Verformungsanalyse von Gesamtgetriebesystemen. Dadurch sind Erfassung wechselseitiger Beeinflussung einzelner Zahneingriffe untereinander sowie Berücksichtigung des Verformungsverhaltens weiterer Getriebeelemente sichergestellt.

Bei der Betrachtung des Drehwegverhaltens von Stirnradstufen in einem zusammenhängenden Planetengetriebesystem ist zur korrekten Abbildung des Steifigkeitsverhaltens eine Methode zur Beschreibung der Eingriffsfolgen, also der zeitlichen Verschiebung der momentanen Eingriffsstellung einzelner Zahneingriffe untereinander, erforderlich. Erst dann ist die Betrachtung wechselseitiger Beeinflussung des Last- und Verformungsverhaltens im Gesamtgetriebesystem möglich.

Zur Auslegung anregungsarmer Getriebesysteme ist die Berechenbarkeit der Drehschwingungsanregung des gesamten Antriebsstranges bereits in frühen Produktentwicklungsphasen von entscheidender Bedeutung. Durch die Betrachtung von Planetengetriebesystemen im Rahmen der Gesamtgetriebesystematik nach **Abschnitt 3** ist es möglich, die Anregung von Drehschwingungen im Antriebsstrang durch das Planetengetriebesystem schnell und effizient zu beurteilen. Die Bewertung der Drehwinkel differenz zwischen An- und Abtriebswelle kann als Bewertungskriterium für die Drehschwingungsanregung von Planetengetrieben herangezogen werden.

Durch gezielte Veränderung der Eingriffsfolge in Planetengetrieben durch Anpassen der Verzahnungshauptgeometrie oder die Verwendung von Verzahnungskorrekturen

kann das Anregungsverhalten von Planetengetrieben gezielt beeinflusst werden.

Die Bestimmung des zeitlichen Verlaufs der Torsionssteifigkeit des Gesamtgetriebesystems ist möglich. Diese ergibt sich aus dem Zusammenspiel überlagerter und sich wechselseitig beeinflussender Drehwegabweichungen einzelner Zahneingriffe.

## 5.1 Abwälzsimulation im Gesamtgetriebesystem unter Einfluss der Eingriffsfolge

Bei der statischen Abwälzsimulation im Gesamtgetriebesystem wird das Steifigkeitsverhalten des Planetengetriebesystems nach **Abschnitt 3** mit eingriffsstellungsabhängigen Eingriffssteifigkeiten nach **Abschnitt 3.2.4** für diskrete Winkelstellungen des Stegs mehrmals hintereinander gelöst. Dabei wälzen einzelne Zahneingriffe entlang der Eingriffsstrecke ab.

Die kinematischen Abhängigkeiten im Getriebe werden beim Weiterdrehen des Stegs in die nächste Winkelstellung erfasst. Den Übersetzungsverhältnissen und kinematischen Randbedingungen wie Drehzahlvorgaben entsprechend lassen sich die jeweiligen Winkelstellungen der Stirnräder bestimmen. Das rechnerische Vorgehen zur Beschreibung der kinematischen Zusammenhänge in Getriebesystemen mit umlaufenden Getriebeelementen gleicht in weiten Teilen der von Stangl [127] beschriebenen Methode.

In Abhängigkeit der Verzahnungshauptgeometrie, der Anzahl und Anordnung der Planeten am Umfang des Planetenträgers sowie der Winkelstellungen der Stirnräder in den einzelnen Eingriffen lassen sich die Eingriffsstellungen einzelner Stirnradstufen und damit der Phasenversatz zwischen den einzelnen Zahneingriffsstellungen im Bezug auf eine Referenzstufe im Getriebesystem als Eingriffsfolge bestimmen.

Auf Basis des von Vonderschmidt [153] und Gradu [44] beschriebenen Berechnungsverfahrens nach **Abschnitt 2.6** können zunächst die Phasenverschiebungen zwischen den Eingriffen im Getriebe bestimmt werden.

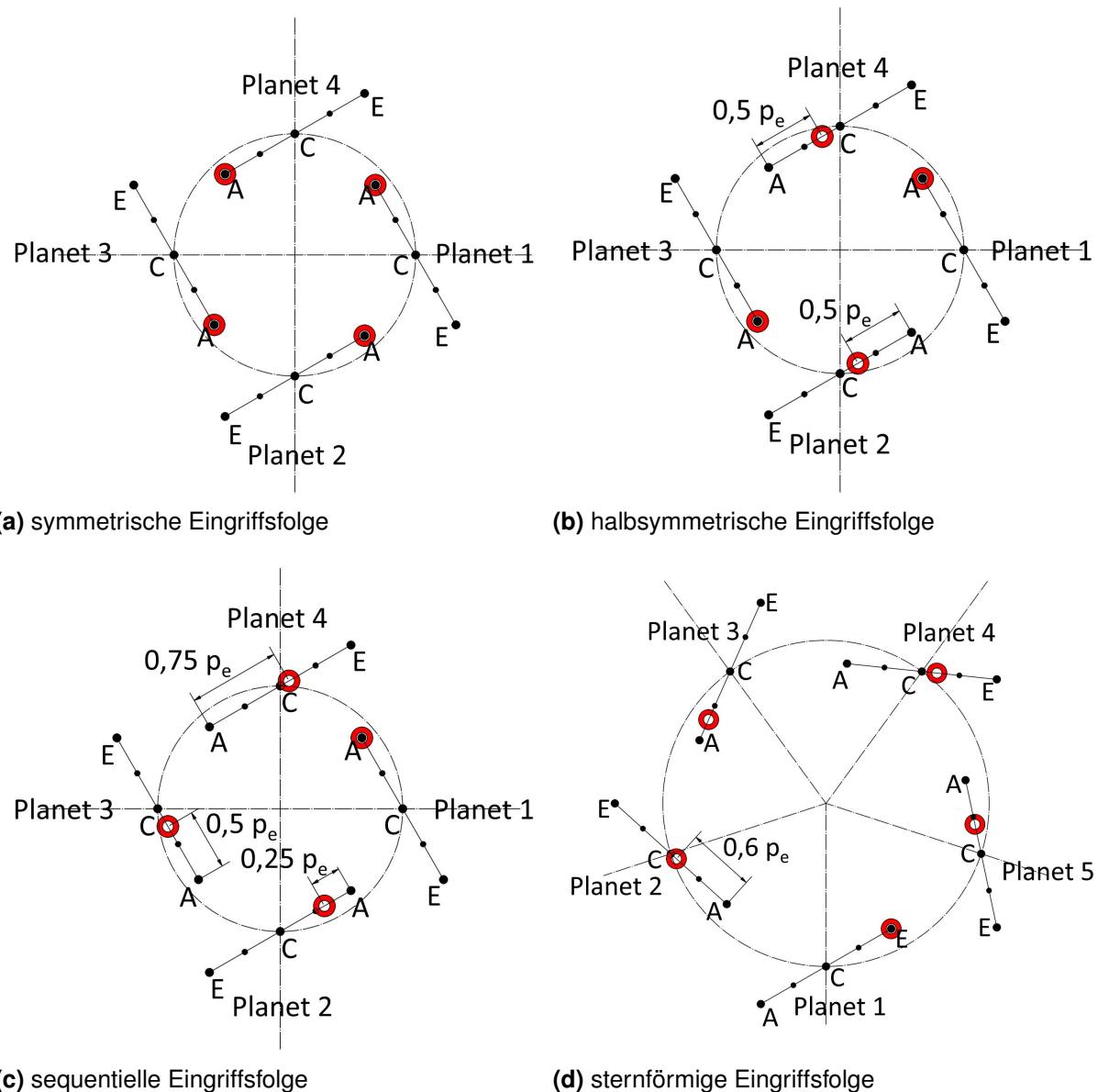
Durch Ableiten aller Eingriffsstellungen im Getriebesystem aus den nach Vonderschmidt und Gradu bestimmten Phasenverschiebungen kann durch Bezug auf eine festgelegte Referenzstufe im Getriebesystem die Eingriffsfolge der einzelnen Zahneingriffe im Planetengetriebe beschrieben werden.

Mit Kenntnis der Eingriffsfolge ist die Eingriffsstellung jeder Stirnradstufe im Getriebesystem in Abhängigkeit einer vorgegebenen Referenzstellung einer ausgewählten Referenzstufe bestimmt. Mit dem im **Abschnitt 3.2.4** beschriebenen Vorgehen lässt sich das Steifigkeitsverhalten aller im Getriebesystem enthaltenen Stirnradeingriffe in der

entsprechenden Eingriffsstellung bestimmen.

Analog zur Beschreibung bei Rüschoff [125] wird die Phasenverschiebung zwischen den Eingriffsstellungen der einzelnen Eingriffe auf eine Referenzstufe bezogen. So stellt sich eine zeitliche Abfolge der Stufeneingriffe ein. Diese Eingriffsfolge lässt sich nach [125] in Klassen einteilen. Dabei wird in symmetrische, halbsymmetrische, sequentielle, sternförmige und unsymmetrische Eingriffsfolge unterteilt.

In **Bild 41** sind die Eingriffsfolgen schematisch dargestellt. Zur Veranschaulichung der Eingriffsfolgen sind die einzelnen Eingriffsstrecken an einer Zentralwelle des Plane-



**Bild 41:** Schematische Darstellung typischer Eingriffsfolgen eines Planetengetriebes

tengetriebes mit den Punkten A-E dargestellt. Der rote Kreisring in den Darstellungen symbolisiert die momentane Eingriffsstellung des jeweiligen Eingriffs bezogen auf die Eingriffsstrecke. Die Eingriffsfolgen sind größtenteils an einem Getriebe mit vier Planeten erläutert. Symmetrische und sequentielle Eingriffsfolgen treten auch bei Getrieben mit drei Planeten auf. In allen Eingriffsfolgen sind die Planeten gleichmäßig am Umfang verteilt.

Bei der symmetrischen Eingriffsfolge finden alle Eingriffe am Sonnen- und am Hohlrad gleichzeitig statt, wie in **Bild 41a** skizziert. **Bild 41b** zeigt die halbsymmetrische Eingriffsfolge, bei der die Zähne der gegenüberliegenden Zahneingriffe paarweise gleichzeitig in Eingriff kommen und für das betrachtete Getriebe um  $0,5 \cdot p_e$  gegenüber dem anderen Eingriffspaar phasenverschoben sind. Voraussetzung für eine entsprechende Konstellation sind eine gerade Anzahl von Planetenrädern und mehr als zwei Planetenräder im Getriebe.

Bei sequentieller Eingriffsfolge finden alle Eingriffe am Umfang eines entsprechenden Zentralrades zeitlich nacheinander innerhalb einer Eingriffsteilung statt. Die Phasenverschiebung zwischen den benachbarten Planeten ist jeweils gleich, wodurch sich ein Phasenversatz in Abhängigkeit von der Planetenzahl  $p$  ergibt. Dieser beträgt  $1/p \cdot p_e$ . Das Schema dieser Eingriffsfolge zeigt **Bild 41c**.

In **Bild 41d** ist die sternförmige Eingriffsfolge an einem Getriebe mit fünf Planetenrädern veranschaulicht. Werden die Planetenräder entlang des Umfanges wie in **Bild 41d** der Reihe nach nummeriert, lässt sich die Abfolge der Einzeleingriffe durch eine Einteilung in Planetenräder mit gerader und ungerader Nummer beschreiben. Eine sternförmige Eingriffsfolge liegt vor, wenn zuerst die ungeraden Planetenräder zeitlich nacheinander in Eingriff kommen und dann die geraden. Die einzelnen Eingriffe weisen dabei zum jeweils übernächsten Planeten äquidistante Verschiebungen untereinander entlang der Eingriffsstrecke auf. Benachbarte Planetenräder weisen im Beispielgetriebe eine Phasenverschiebung von  $0,6 \cdot p_e$  auf. Die sternförmige Eingriffsfolge kann für Planetengetriebe mit einer ungeraden Planetenzahl größer drei realisiert werden.

Nach Rüschoff [125] gelten alle Eingriffsfolgen, die nicht den in **Bild 41** gezeigten Zuordnungen entsprechen und damit keinem speziellen Muster folgen, als unsymmetrische Eingriffsfolgen. Unsymmetrische Abfolgen der Eingriffe treten bei unregelmäßiger Anordnung der Planeten am Umfang des Planetenträgers auf.

## 5.2 Studie zum Anregungsverhalten an untersuchten Getriebevarianten

Für die Untersuchungen zum Anregungsverhalten von Planetengetrieben im Gesamtgetriebesystem wird das in **Abschnitt 4.1** beschriebene beispielhafte Getriebesystem verwendet.

Für das Getriebe wird bei unterschiedlichen Varianten mit unterschiedlichen Eingriffsfolgen eine Abwälzsimulation nach **Abschnitt 5.1** für unterschiedliche Winkelbereiche des Planetenträgers durchgeführt. Alle Kombinationen werden als gerad- und schrägverzahnte Varianten berechnet.

Bezeichnung	Planetenanzahl	Eingriffsfolge	$\beta$	$\varepsilon_{\alpha S}$	$\varepsilon_{\alpha H}$	$\varepsilon_\beta$
3LSsym	3	symmetrisch	0°	1.521	1.540	0.0
3LSsyms	3	symmetrisch	5.5°	1.525	1.536	0.889
3LSseq	3	sequentiell	0°	1.519	1.541	0.0
3LSseqs	3	sequentiell	5.5°	1.523	1.539	0.889
4LSsym	4	symmetrisch	0°	1.521	1.540	0.0
4LSsyms	4	symmetrisch	5.5°	1.525	1.536	0.889
4LShsym	4	halbsymmetrisch	0°	1.519	1.541	0.0
4LShsyms	4	halbsymmetrisch	5.5°	1.523	1.539	0.889
5LSstern	5	sternförmig	0°	1.519	1.541	0.0
5LSsterns	5	sternförmig	5.5°	1.523	1.539	0.889

**Tabelle 2:** Untersuchte Getriebevarianten, zugehörige Parameter

Um die Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu wahren, wurde bei der Variation der Schräglungswinkel auf ein gleichbleibendes Bezugsprofil im Normalschnitt geachtet. Waren Änderungen der Hauptgeometrie zur Erzeugung unterschiedlicher Eingriffsfolgen notwendig, wurden Sprung- und Profilüberdeckungen sowie Zahngometrie konstant gehalten, um Vergleichbarkeit bei der Eingriffs- und Zahnpaarsteifigkeit sicherzustellen. Es werden unkorrigierte Verzahnungen betrachtet.

**Tabelle 2** zeigt eine Übersicht über die einzelnen Getriebevarianten zur Untersuchung des Anregungsverhaltens und deren Geometrie (Schräglungswinkel  $\beta$ , Überdeckungsverhältnisse in den Eingriffen Sonne-Planet und Planet-Hohlrad). Die jeweils eingeführte Bezeichnung beinhaltet die Anzahl der Leistungszweige (LS) oder Planeten der Variante, die entsprechende Eingriffsfolge nach **Abschnitt 5.1** und ein angehängtes „s“ für schrägverzahnte Varianten.

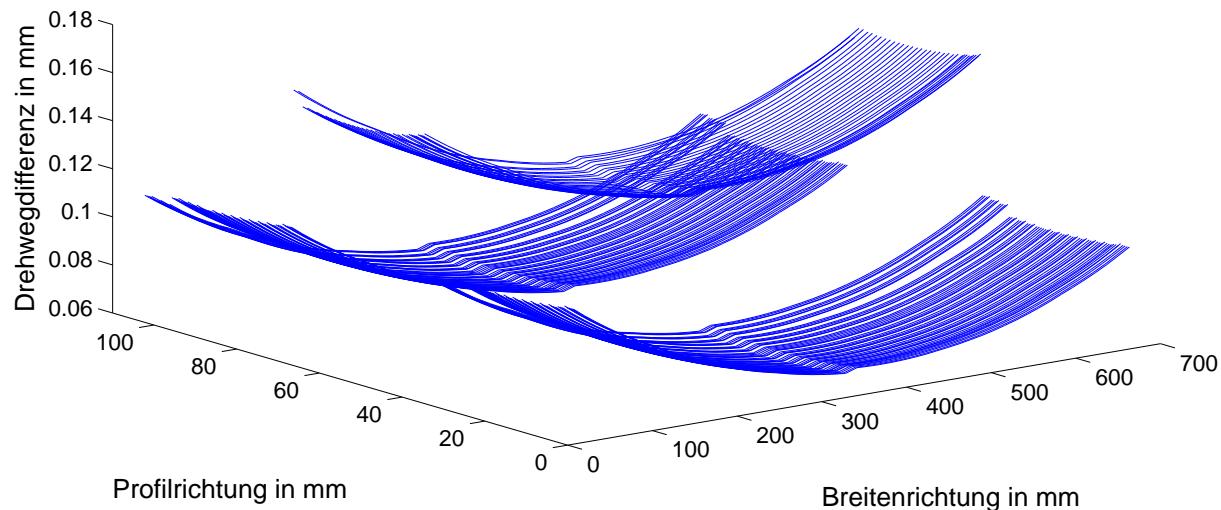
### 5.3 Wegbasierte Untersuchung der Anregung im statischen Gesamtgetriebesystem

In statischen Berechnungswerkzeugen für Getriebesysteme kann die Änderung der Verzahnungssteifigkeit unter Last über dem Durchwälzen des Zahneingriffs erfasst werden. Bei der Vorgabe eines zeitlich unveränderlichen Antriebsmoments reagiert ein statisches, verschiebungsbasiertes Elementmodell eines Getriebesystems mit einem konstanten Moment am Abtrieb. Zeitlich veränderliche Steifigkeitseinflüsse aus der Verzahnung können durch sequentielles Berechnen des Gesamtgetriebesystems in verschiedenen Eingriffsstellungen der jeweiligen Stirnradstufen quasistatisch betrachtet werden. Die Erfassung zeitlich veränderlicher Steifigkeitsverhältnisse in den Zahneingriffen führt zu zeitlich veränderlicher Torsionsverformung der Welle am Antrieb. In den Zahneingriffen des Getriebesystems stellt sich ein zeitlich veränderlicher Verlauf der Drehwegabweichung aufgrund der zeitlich veränderlichen Zahneingriffssteifigkeiten ein.

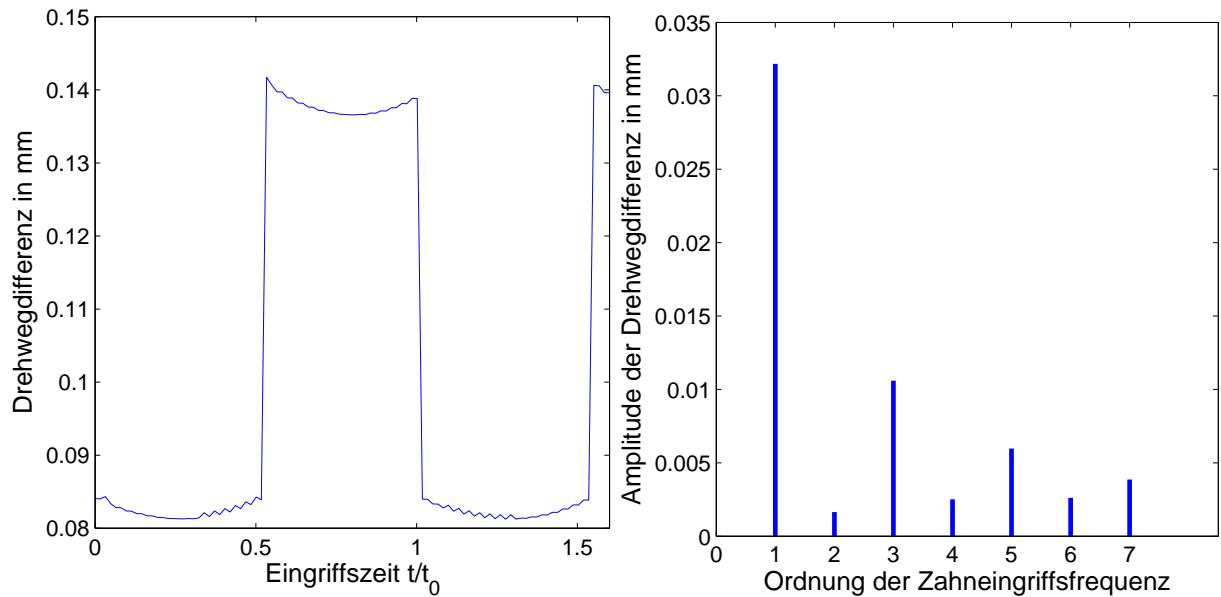
#### 5.3.1 Grundgedanken zur Drehwegabweichung einer einzelnen Stirnradstufe

Bei der rechnerischen Untersuchung einer Stirnradstufe im statischen Getriebesystem wird das vorgegebene konstante Antriebsmoment vollständig vom Zahneingriff der Stirnradstufe übertragen. Die einzelnen im Kontakt befindlichen Zahnpaare werden im Getriebesystem nach **Abschnitt 3.2.4** als parallel angeordnete Steifigkeitselemente abgebildet. Die über die Eingriffsstellungen hinweg veränderliche Zahneingriffssteifigkeit wird vollständig in Drehwegabweichung im Zahneingriff überführt. Wird der Verlauf der Drehwegdifferenz nach **Bild 42b** mit dem Verlauf der Eingriffssteifigkeit nach **Bild 3** verglichen, wird dieser Zusammenhang deutlich. In den Bereichen mit hoher Durchsenkung im Zahnkontakt befindet sich nur ein Zahnpaar im Eingriff, die Steifigkeit ist entsprechend niedrig, im Doppeleingriffsgebiet teilt sich die zu übertragende Last auf zwei Zahnpaare auf, die Drehwegabweichung sinkt, die Steifigkeit ist entsprechend hoch.

Die Lastübernahme durch einzelne Zahnpaare ist von deren jeweiliger Zahnpaarsteifigkeit abhängig. Es stellt sich eine über dem Durchwälzen des Zahneingriffs veränderliche Lastaufteilung auf die im Eingriff befindlichen Zahnpaare ein. Abgängig von der übernommenen Belastung und der von der Eingriffsstellung abhängigen Steifigkeit wird jedes Zahnpaar unterschiedlich stark verformt. Die Verformung einzelner Zahnpaare entlang deren Berührlinie stellt ein Maß für die Drehwegabweichung im Zahnkontakt dar und ist in **Bild 42a** für eine geradverzahnte Stirnradstufe dargestellt. Durch eine entsprechende Mittelung des Verlaufs über der Eingriffsbreite kann die Drehweg-



(a) Drehwegabweichung im mm über der Eingriffsbreite und der Profilrichtung



(b) über der Breite gemittelte Drehwegdifferenz

(c) Spektrum der Drehwegdifferenz

**Bild 42:** Drehwegabweichung einer Stirnradstufe im Gesamtgetriebesystem

differenz bezogen auf den Durchlauf des Zahneingriffs in **Bild 42b** nach Heider [60] als Maß für das Anregungsverhalten der Stirnradstufe herangezogen werden. Analog zu den Ausführungen bei Heider kann der Verlauf der Drehwegdifferenz durch Fourier Transformation in spektrale Anteile zerlegt werden (**Bild 42c**), die dann zur weiteren Beurteilung des Schwingungsanregungsverhaltens herangezogen werden können. Das Zeitsignal der Drehwegdifferenz ist geprägt vom Zahneingriffsverhalten. Zur übersichtlichen Darstellung der Anregungsfrequenzen werden nur die spektralen Anteile der

Drehwegdifferenz dargestellt, die der Zahneingriffs frequenz oder einer harmonischen Vielfachen davon entsprechen. Das Diagramm wird entsprechend in eine Ordnungsdarstellung überführt. Die erste Ordnung entspricht dabei der Zahneingriffs frequenz, die weiteren Ordnungen den entsprechenden Vielfachen.

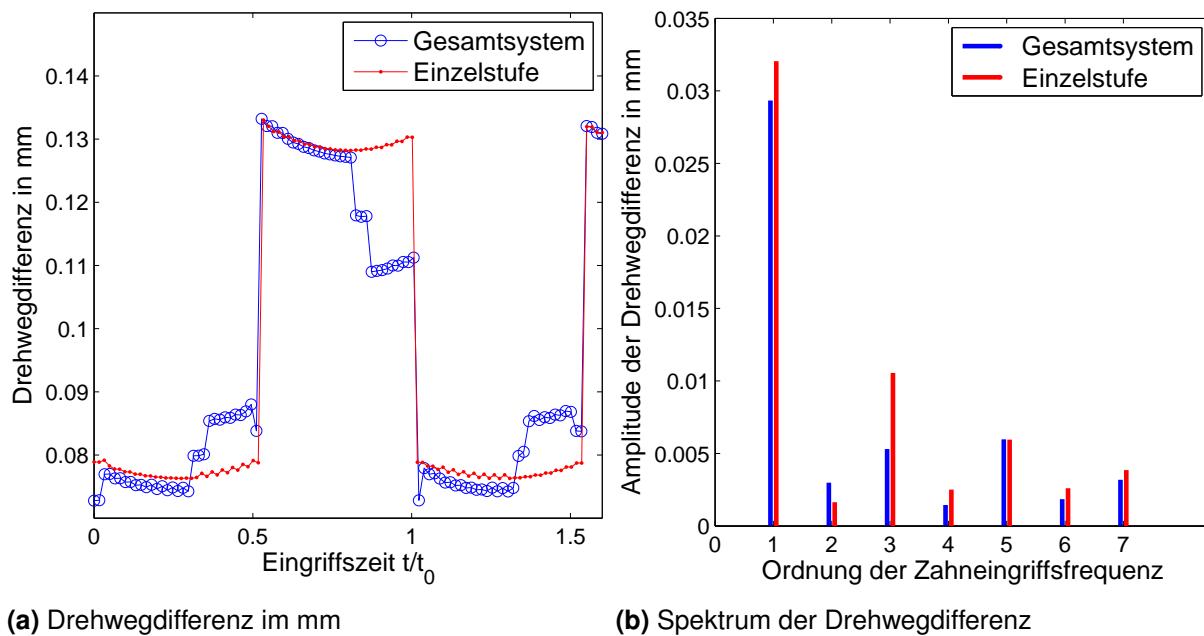
### 5.3.2 Betrachtung der Drehwegabweichung in den Zahneingriffen einer Planetenstufe

Die rechnerische Untersuchung einer Planetenstufe im Gesamtgetriebesystem ermöglicht die Betrachtung der Drehwegabweichung in den jeweiligen Zahneingriffen.

Ähnlich dem Verhalten von Stirnradstufen wird im Planetengetriebe die von einem Zahneingriff übertragene Last auf die einzelnen im Eingriff befindlichen Zahnpaare aufgeteilt. Die berechnete Drehwegabweichung je Eingriffsstellung entspricht den Verformungen einzelner Zahnpaare entlang deren Berührlinien. Durch die Leistungsverzweigung und -summierung wird die zu übertragende Gesamtlast im Planetengetriebe an den Zentralrädern auf mehrere im Eingriff befindliche Stirnradstufen aufgeteilt. Analog zum Verhalten einzelner Zahnpaare eines Zahneingriffs übernehmen alle Stirnradstufen im Planetengetriebe einen Teil der Gesamtlast in Abhängigkeit der vorliegenden Eingriffssteifigkeiten. Anders als bei der Betrachtung der Drehwegabweichung einer einzelnen Stirnradstufe übernehmen die in parallel angeordneten Teilleistungszweigen eingebundenen Zahneingriffe eines Planetengetriebes in Abhängigkeit von der jeweiligen Eingriffsstellung der einzelnen Verzahnungen und damit in Abhängigkeit der vorliegenden Steifigkeitsverhältnisse in den Zahneingriffen unterschiedliche Belastungen bei Betrachtung verschiedener Eingriffsstellungen.

Durch die Anordnung mehrerer Zahneingriffe an den Zentralrädern ist über die rotatorische und in Abhängigkeit von der Konstruktion auch über die translatorische Einstellbarkeit der Zentralelemente ein Belastungsausgleich zwischen den einzelnen Zahneingriffen teilweise möglich. Die daraus resultierenden Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Stirnradstufen sind im Drehwegverhalten der Zahneingriffe sichtbar. Anders als bei der Betrachtung einzelner Stirnradstufen können in einem Gesamtgetriebemodell nach **Abschnitt 3** durch die Erfassung des zeitlich veränderlichen Steifigkeitsverhaltens der Stirnradeingriffe nach **Abschnitt 3.2.4** Wechselwirkungen im Verformungsverhalten einzelner Zahneingriffe untereinander erfasst und quantifiziert werden.

In **Bild 43** ist die Drehwegdifferenz in einem Eingriff Sonne-Planet der 4LShsym-Variante nach **Abschnitt 5.2** dargestellt. Zusätzlich zur Abbildung des Zeitsignals wird die spektrale Zerlegung des Zeitsignals dargestellt. Dabei wird das Drehwegverhalten



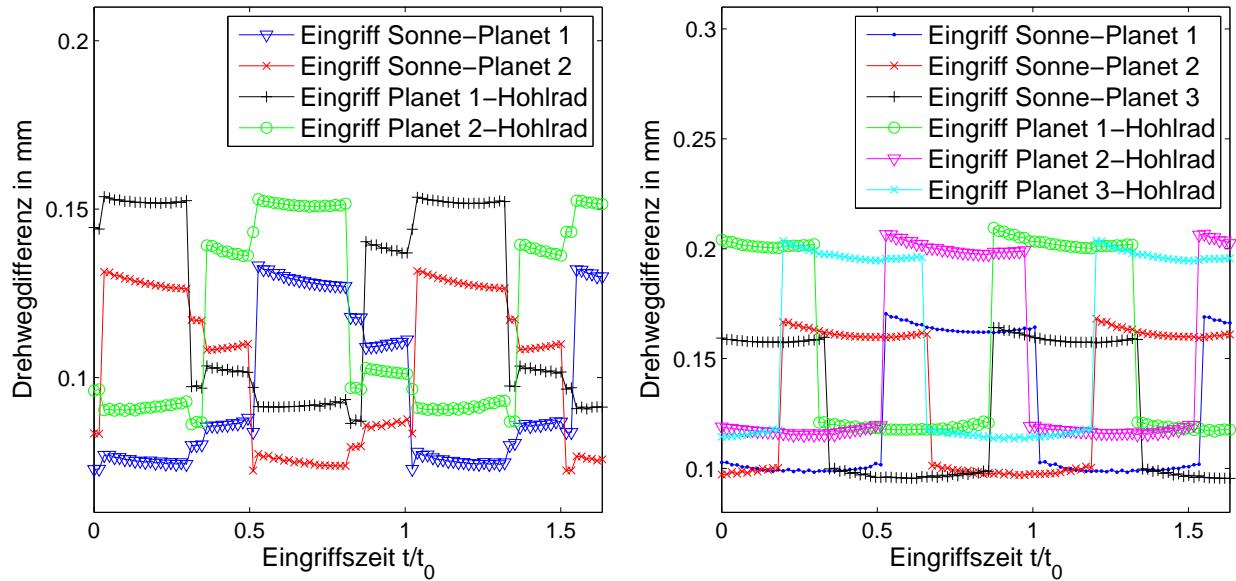
**Bild 43:** Drehwegdifferenz eines Sonnenradeingriffes des 4LShsym Getriebes bei Nennlast bei Berechnung eines Einzeleingriffes und bei Berechnung im Gesamtgetriebesystem

des Eingriffs bei Berechnung als einzelne Stirnradstufe dem Ergebnis bei Betrachtung im Gesamtgetriebesystem gegenübergestellt. Hier zeigt sich der Einfluss von Wechselwirkungen im Getriebesystem auf das Drehwegverhalten einzelner Stirnradstufen in Abhängigkeit der Eingriffsfolge und der Getriebeanordnung.

Die Mechanismen hinter der wechselseitigen Beeinflussung des Drehwegverhaltens können beim direkten Vergleich der Zeitsignale der Drehwegdifferenz in **Bild 44a** für die Eingriffe Sonne-Planet und Planet-Hohlrad zweier benachbarter Planeten des 4LShsym Getriebes dargestellt werden. Die Position der Planeten entspricht denen in **Bild 41b**.

Aufgrund der Eingriffsfolge herrschen in gegenüberliegenden Leistungszweigen („1“ und „3“) eines halbsymmetrischen Getriebes gleiche, in den direkt benachbarten hingegen unterschiedliche, um eine halbe Eingriffsteilung verschobene Steifigkeitsverhältnisse (vgl. **Bild 41b**). Die Ausführungen zur gegenseitigen Beeinflussung der Einzeleingriffe können deshalb anhand der beiden benachbarten Leistungszweige Planet 1 und Planet 2 erläutert und gelten für die Zweige „3“ und „4“ analog.

Durch die zeitliche Verschiebung der beiden Eingriffe am Planeten 1 ist im Eingriff zum Hohlrad zu Beginn der Abwälzsimulation nur ein Zahnpaar im Eingriff, im Eingriff zur Sonne hingegen zwei. Mit dem Wechsel des Eingriffes Planet 1-Hohlrad in das Doppel-



(a) Kreuzeinfluss bei Drehwegdifferenz, halbsymmetrische Eingriffssfolge, 4 Planeten      (b) kein Kreuzeinfluss bei Drehwegdifferenz, sequentielle Eingriffssfolge, 3 Planeten

**Bild 44:** Beeinflussung des Drehwegverhaltens einzelner Stirnradstufen durch Wechselwirkungen im Getriebesystem bei unterschiedlichen Getriebevarianten

eingriffsgebiet erhöht sich die Steifigkeit dieses Eingriffs, die Verformung im Zahnkontakt in **Bild 44a** sinkt entsprechend. Die erhöhte Steifigkeit im Leistungszweig bedeutet eine momentan höhere Lastübernahme durch den Planeten 1, was bei momentan unveränderter Eingriffssteifigkeit im Kontakt Sonne–Planet 1 zu einer stärkeren Verformung führt (**Bild 44a** und **Bild 43a**). Die Abweichungen zur Berechnung des Eingriffs Sonne–Planet 1 als Einzeleingriff zeigt **Bild 43a**.

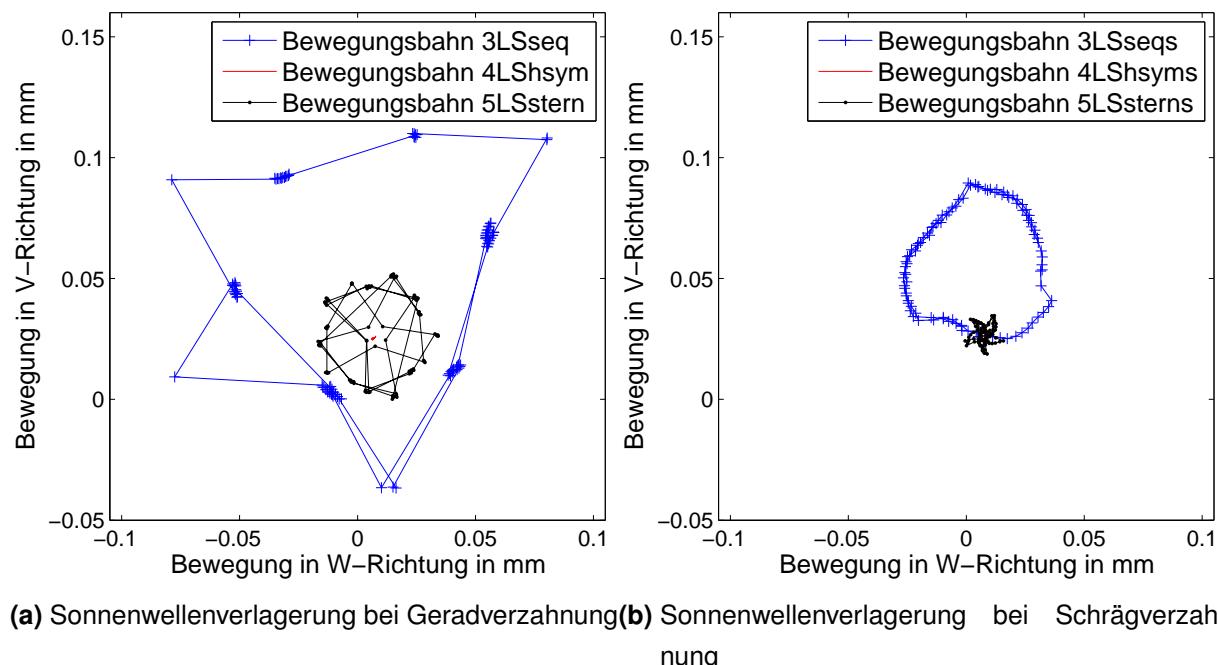
Mit dem Wechsel des Eingriffes Planet 2–Hohlrad in das Einzeleingriffsgebiet sinkt die Steifigkeit dieses Leistungszweiges. Im Kontakt Sonne–Planet 2 wird dadurch weniger Last übernommen, der Eingriff zum Planeten 1 dadurch noch stärker belastet, die Drehwegabweichung steigt (**Bild 44a** und **Bild 43a**).

Durch den Übergang des Eingriffes Sonne–Planet 1 in das Doppeleingriffsgebiet geht die Lastübernahme der verschiedenen Leistungsstränge wieder auf das Ausgangsniveau zurück. Das statische System unterliegt einer zeitlich veränderlichen Lastaufteilung aus den Steifigkeitsänderungen, die zur Schwingungsanregung im Getriebe beiträgt.

Durch die wechselseitige Beeinflussung der Zahneingriffe bei der 4LShsym-Variante wirkt sich die halbsymmetrische Eingriffssfolge günstig auf das Drehwegverhalten der

Einzelstufen aus. Die Berechnung im Gesamtgetriebesystem ermöglicht die Erfassung dieser Kreuzeinflüsse. Die beschriebenen Steifigkeitsänderungen im System und deren Einfluss auf das Drehwegverhalten glättet den sehr sprunghaften Verlauf des Zeit-signalen im Vergleich zur Betrachtung der Einzelstufen in **Bild 43a**. **Bild 43b** zeigt die Unterschiede in den spektralen Frequenzanteilen der Drehwegdifferenz auf. Am deutlichsten tritt der Einfluss der Steifigkeitsänderung beim Übergang der betrachteten Eingriffs vom Einzel- ins Doppelingriffsgebiet mit der ersten Ordnung der Zahneingriffsfrequenz auf. Durch den günstigeren Drehwegverlauf aufgrund der Wechselwirkungen im Getriebesystem wirkt die erste Ordnung dadurch gesenkt. Alle weiteren Amplituden mit Ausnahme der Schwingungsanteile zweiter Ordnung sinken. Der Anteil der zweiten Ordnung steigt aufgrund der Eingriffsfolge, bei der gegenüberliegende Zahneingriffe mit dem Abstand einer halben Eingriffsteilung und daher zweimal pro Eingriffsperiode eines einzelnen Eingriffs den Übergang vom Doppel- ins Einzeleingriffsgebiet durchlaufen.

Bei der Analyse des Drehwegverhaltens der 3LSseq-Variante nach **Abschnitt 5.2** fällt aufgrund der statischen Bestimmtheit der Sonnenwellenabstützung im Getriebesystem über die Zahneingriffe die ausgleichende Wirkung der einstellbeweglichen Sonne auf. In allen drei Leistungszweigen wird mit je einem Drittel der Eingriffsteilung  $p_e$  verschoben.

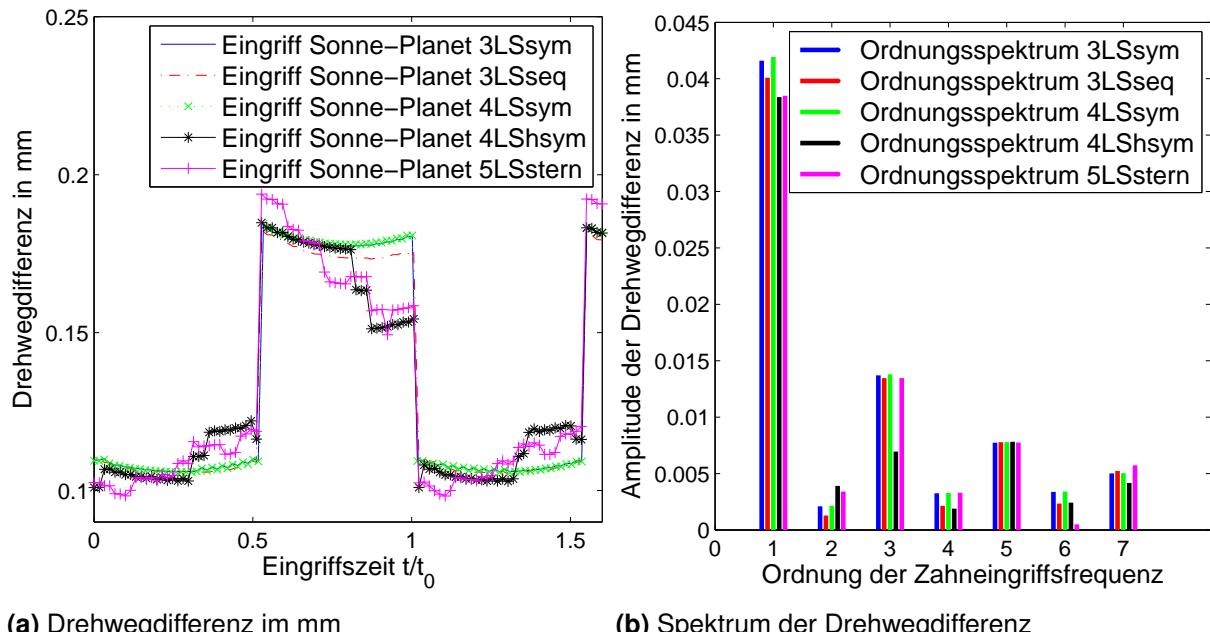


**Bild 45:** Verlagerung der Sonnenwelle in Verzahnungsmitte in verschiedenen Getriebekonfigurationen

ben durch die Änderung der Steifigkeitsverhältnisse in den Eingriffen zwischen Hohlrad und Planeten die Steifigkeiten der einzelnen Leistungszweige verändert, wie in **Bild 44b** dargestellt ist. Der Kreuzeinfluss auf die Drehwegdifferenz in den Eingriffen zur Sonne bleibt jedoch aus. Durch eine radiale Einstellbewegung kann das Sonnenrad die Veränderung im Drehwegverhalten der Eingriffe Planet-Hohlrad über die dadurch verursachte Verdrehung des Planeten ausgleichen. Eine Lastüberhöhung im momentan steiferen Leistungszweig und dadurch eine stärkere Verformung im entsprechenden Eingriff Sonne-Planet findet - unter Vernachlässigung von Masseneffekten im Modell der statischen Drehwegabweichung - nicht statt.

Die entsprechende Verlagerung des Sonnenrades der 3LSseq-Variante im Vergleich zur 4LShsym-Variante zeigt **Bild 45a**. Die statische Überbestimmtheit der Sonnenwellenanordnung durch die vier Zahneingriffe und die gegenüberliegend gleichen Steifigkeitsverhältnisse in den Eingriffen zu den Planeten mit den daraus resultierenden paarweise gleichen Eingriffskräften verhindern eine Ausgleichsbewegung der Sonne nahezu vollständig.

**Bild 46** zeigt den Einfluss der Eingriffsfolge sowie der Planetenanzahl und den daraus resultierenden Kreuzeinfluss bei der Bestimmung des Drehwegverhaltens in unterschiedlichen Getriebevarianten nach **Abschnitt 5.2**. Die Drehwegdifferenz und die



**Bild 46:** Kreuzeinflüsse bei der Drehwegdifferenz eines Eingriffs Sonne-Planet in verschiedenen Getriebekonfigurationen

entsprechenden spektralen Anteile werden abgebildet. Die an den Varianten 4LShsym und 3LSseq bereits erläuterten Zusammenhänge für die Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Zahneingriffen, deren Steifigkeitsverhalten und den Einflüssen der Zentralwellenverlagerung gelten grundsätzlich auch für alle weiteren Varianten in **Bild 46**.

In Abhängigkeit der Planetenanordnung und der Eingriffsfolge im Planetengetriebe sind die auftretenden Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Zahneingriffen unterschiedlich stark ausgeprägt. Insbesondere die Phasenlage der Eingriffsstellungen einzelner Zahneingriffe zueinander hat maßgeblichen Einfluss.

Bei den Varianten 3LSsym und 4LSsym in **Bild 46** mit jeweils symmetrischer Eingriffsfolge treten ähnlich zur Variante 3LSseq kaum Wechselwirkungen im Drehwegverhalten der einzelnen Zahneingriffe auf. Bei symmetrischen Getrieben treten die Wechsel zwischen Einzel- und Doppeleingriffsgebiet der Eingriffe Planet-Hohlrad beziehungsweise Eingriffe Sonne-Planet gleichzeitig auf. Zu jeder Zeit liegen in den einzelnen Teilleistungszweigen gleiche Steifigkeitsverhältnisse vor. Eine Querbeeinflussung im Drehwegverhalten der Eingriffe untereinander ist ausgeschlossen.

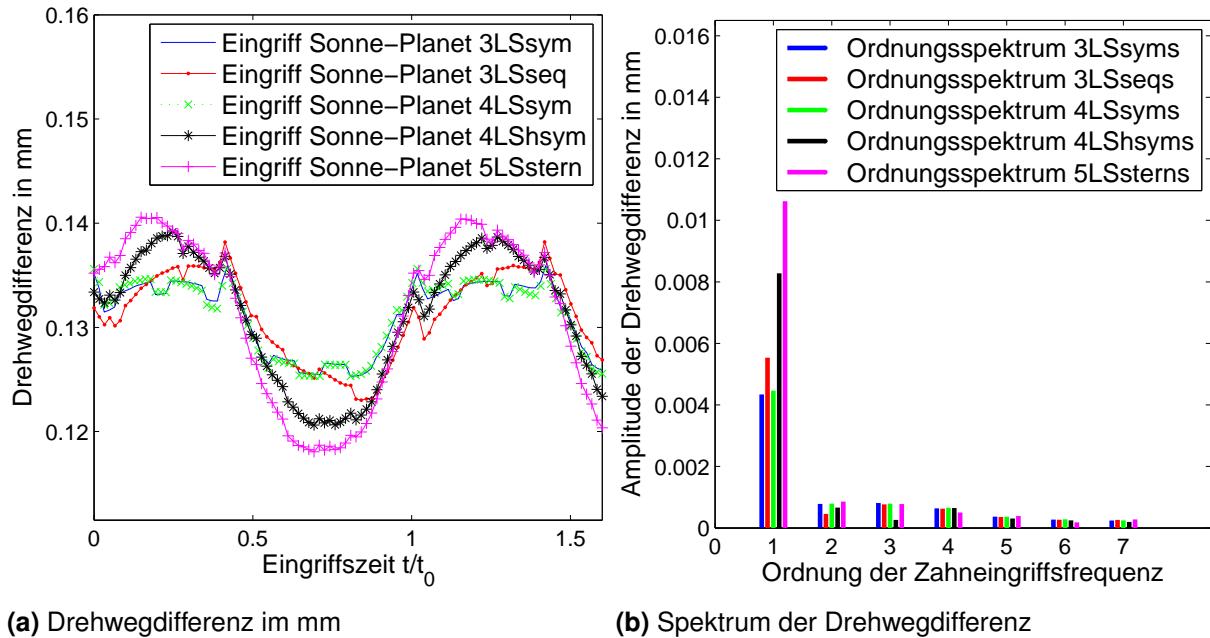
Im Bezug auf den Übersetzungsfehler des Gesamtgetriebes wirken sich die ständig gleichmäßigen Steifigkeitsverhältnisse in den Zahnkontakten der jeweiligen Zentralräder negativ aus. Dieses Verhalten der Drehwinkelabweichung zwischen An- und Abtrieb wird in **Abschnitt 5.4** näher beleuchtet.

Der in **Bild 46** dargestellte Verlauf der Drehwegdifferenz für die 5LSstern-Variante weist starke Ähnlichkeit mit dem der halbsymmetrischen 4LShsym-Variante auf. Die stärkere Leistungsverzweigung und die damit einhergehenden, zeitlich näher beieinander liegenden Eingriffsstellungen der Einzeleingriffe wirken hier deutlich auf den Verlauf der Drehwinkeldifferenz ein. Eine noch feinere Abstufung des zeitlichen Verlaufs und ein deutlich ausgeprägter Anteil der höherharmonischen Anteile der Zahneingriffsfrequenz am Gesamtsignal verdeutlichen dies.

Die mehrfache statische Überbestimmtheit der Sonnenwellenanordnung erschwert einen Ausgleich der Steifigkeitsschwankungen, wie er bei der 3LSseq-Variante festzustellen ist. Die im Vergleich dazu schwach ausgeprägte Verlagerungsbewegung der Sonne der 5LSstern-Variante zeigt **Bild 45a**.

Die Zusammenhänge für die in **Bild 46** gezeigten Zusammenhänge gelten uneingeschränkt auch für die Eingriffe zwischen Planet und Hohlrad.

**Bild 47** zeigt die zeitlichen Verläufe der Drehwegdifferenz in den Eingriffen zwischen Sonne und Planet für die schrägverzahnten Varianten sowie das zugehörige Ordnungs-



**Bild 47:** Kreuzeinflüsse bei der Drehwegdifferenz eines Eingriffs Sonne-Planet in verschiedenen Getriebekonfigurationen bei Schrägverzahnung

diagramm der spektralen Anteile. Die bei Schrägverzahnung aufgrund der Sprungüberdeckung auftretende, im zeitlichen Verlauf deutlich glattere Eingriffssteifigkeit lässt die Kreuzeinflüsse im Getriebesystem bei der Betrachtung der Drehwegdifferenz in den Zahnkontakten insbesondere bei stark phasenverschobener Eingriffsfolge und höheren Planetenradzahlen nicht mit der selben Deutlichkeit erkennen wie bei den geradverzahnten Varianten. Insbesondere die aufgrund der Sprungüberdeckung andere Schwingform der Drehwegdifferenz lässt die Zusammenhänge der Überlagerungseffekte im Ordnungsdiagramm unscharf werden. Die Einflüsse treten jedoch in ihrer Wirkungsweise gleich auf. Die Verlagerungsbahnen der Sonnenwelle bei Schrägverzahnung in **Bild 45b** zeigen aufgrund der kontinuierlichen Steifigkeitsänderung in den einzelnen Eingriffen ein ebenfalls kontinuierlich geglättetes Verlagerungsverhalten des Sonnenrades.

Im direkten Vergleich zwischen gerad- und schrägverzahnten Getriebvarianten wird besonders die um eine Größenordnung geringere Amplitude der Drehwegdifferenz bei Schrägverzahnung deutlich und bestätigt die bekannten Vorteile der höheren Gesamtüberdeckung bei Schrägverzahnung im Bezug auf Steifigkeitsschwankungen im Zahnengriff und sich daraus ergebende günstigere Geräuschanregung.

## 5.4 Bestimmung der Gesamtdrehwinkeldifferenz von Planetengetrieben

Im Rahmen der statischen Last- und Verformungsanalyse von Planetengetrieben im Gesamtgetriebesystem nach **Abschnitt 3** kann neben der Bestimmung des Drehwegverhaltens einzelner im System enthaltener Stirnradstufen auch die Drehwinkeldifferenz zwischen An- und Abtrieb und damit der Gesamtübersetzungsfehler solcher Getriebe untersucht werden.

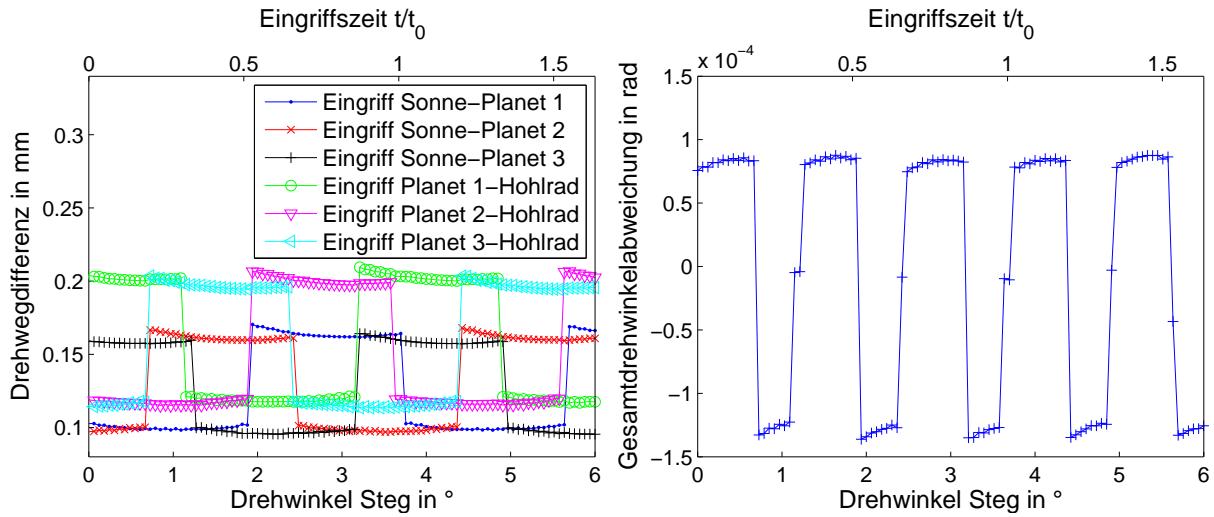
Die Drehwinkeldifferenz zwischen An- und Abtrieb eines Planetengetriebes beschreibt das Torsionsverformungsverhalten des gesamten Getriebesystems unter Erfassung der über dem Durchwälzen veränderlichen Verzahnungssteifigkeiten der einzelnen Zahneingriffe und deren Eingriffsfolge. Bei konstant vorgegebenem Drehmoment stellt sich eine Torsionsverformung an der Sonnenwelle in Abhängigkeit der über dem Durchwälzen des Getriebesystems veränderlichen Steifigkeitsverhältnisse im System ein.

Die Änderung dieser Drehwinkeldifferenz über der Zeit kann als Maß für die Drehschwingungsanregung einer Planetenradstufe auf den gesamten Antriebsstrang herangezogen werden.

Zur Untersuchung der Drehwinkeldifferenz werden die in **Abschnitt 5.2** gezeigten Getriebekonzepte mit den unterschiedlichen Eingriffsfolgen für Gerad- und Schrägverzahnung über unterschiedliche Winkelbereiche des Planetenträgers berechnet. Die Eingriffsstellungen aller im Getriebesystem enthaltenen Stirnradstufen werden dabei in Abhängigkeit der kinematischen Verhältnisse in der Planetenradstufe zu jeder berechneten Winkelstellung des Planetenträgers bestimmt. Das Durchwälzen des Getriebesystems wird durch ein sequentielles Lösen des statischen Gleichungssystems für einzelne diskrete Winkelstellungen des Planetenträgers umgesetzt. Dynamische Einflüsse wie Massenträgheit oder gyrokopische Effekte werden dabei nicht erfasst. Jede Steifigkeitsänderung wird direkt in eine Wegänderung im System umgesetzt.

### 5.4.1 Gesamtdrehwinkeldifferenz bei Geradverzahnung

**Bild 48b** zeigt den Verlauf der Drehwinkeldifferenz für die 3LSseq-Variante des Beispielgetriebes nach **Abschnitt 5.2**. Die Schwingungsform weist Ähnlichkeit mit dem Verlauf der Drehwegdifferenz in den einzelnen Zahneingriffen dieses Getriebes in **Bild 48a** auf. Durch die direkte Koppelung der Zahneingriffe und deren Steifigkeitsverhalten mit dem Verformungsverhalten der Wellen führen Änderungen der Steifigkeit in den einzelnen Zahneingriffen zu einer Drehschwingungsanregung der Zentralwellen. Die Drehwegabweichungen in den einzelnen Zahnkontakten wirken unter Einfluss der Ein-



(a) Drehwegdifferenz aller Eingriffe der Variante 3LS-seq (b) Drehwinkeldifferenz der Variante 3LSseq

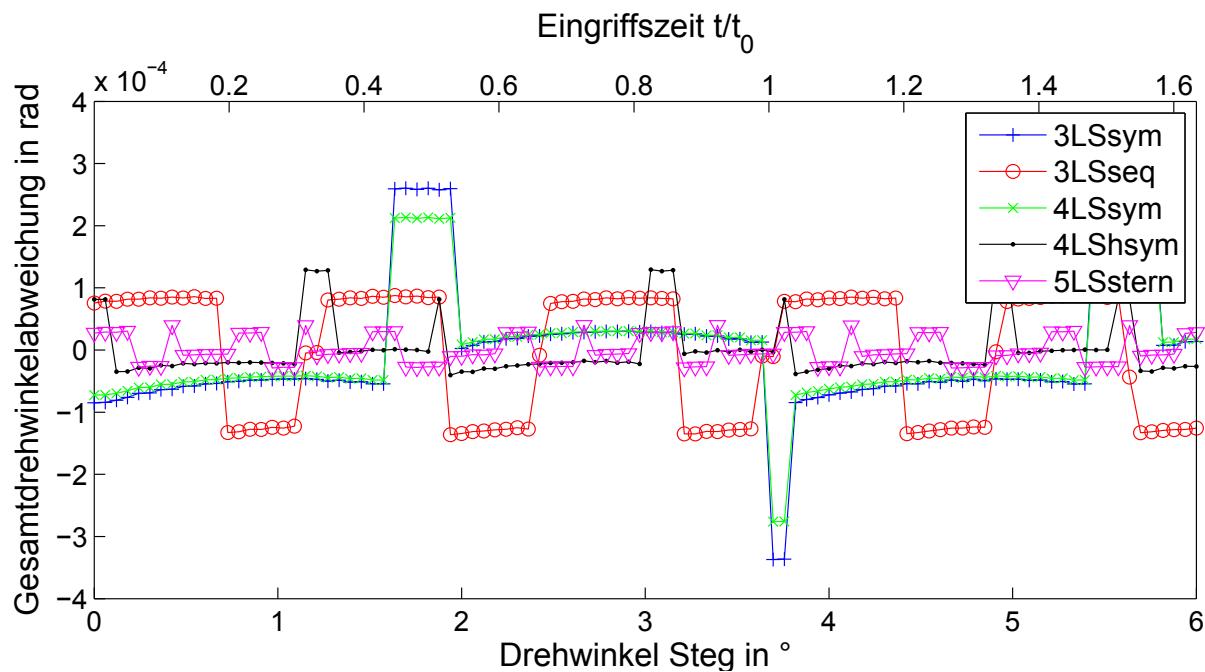
**Bild 48:** Zusammenhang zwischen Eingriffsfolge und Drehwinkelabweichung eines Planetengetriebes

griffsfolge zusammen und tragen zu einer Drehungleichförmigkeit im Getriebesystem bei.

Aus der überlagerten Darstellung aller im 3LSseq-System gleichzeitig im Eingriff befindlichen Zahneingriffe in **Bild 48a** lassen sich die Tendenzen im Verlauf der Drehwinkeldifferenz des Getriebesystems ableiten. Es zeigt sich, dass zu Zeitpunkten, bei denen eine erhöhte Drehwinkelabweichung in **Bild 48b** auftritt, jeweils vier der sechs Zahneingriffe im Einzeleingriffsgebiet, dem Bereich mit vergleichsweise niedrigen Eingriffssteifigkeiten, befinden. Im Falle geringer Amplituden der Drehwinkelabweichungskurve stehen vier der sechs Eingriffe im Doppeleingriffsgebiet.

Bei Getrieben mit sequentieller Eingriffsfolge wird dementsprechend die Periodendauer im Zeitsignal der Drehwinkeldifferenz direkt durch die Phasenverschiebung der Eingriffsstellungen am Planetenrad festgelegt. Durch gezieltes Anpassen der Profilüberdeckung in beiden Eingriffen am Planeten kann diese Phasenverschiebung so gewählt werden, dass zu jedem Zeitpunkt jeweils drei der sechs Zahneingriffe im Einzeleingriffsgebiet und drei im Doppeleingriffsgebiet stehen. Nach Papies [114] kann dadurch eine entsprechende Verbesserung im Drehwinkelverhalten erreicht werden. Weiterführende Untersuchungen werden dort beschrieben und sollen hier nicht weiter ausgeführt werden.

**Bild 49** zeigt die Gesamtdrehwinkeldifferenz im Getriebesystem zwischen An- und Ab-



**Bild 49:** Drehwinkeldifferenz zwischen An- und Abtrieb für geradverzahnte Getriebevarianten bei Nennlast

trieb für die geradverzahnten Getriebevarianten nach **Abschnitt 5.2**.

Im direkten Vergleich zwischen den einzelnen Getriebevariante wird der Einfluss der Anzahl der Planeten auf das Drehwinkelverhalten von Planetengetrieben sichtbar. Mit steigender Anzahl nimmt die Gesamtdrehwinkelabweichung über dem Stegumlauf deutlich ab. Auch die Art der Eingriffsfolge zeigt einen deutlichen Einfluss auf die Drehwinkelabweichung im Getriebesystem. Ähnlich zu den anhand der 3LSseq-Variante beschriebenen Zusammenhänge im Verformungsverhalten einzelner Zahneingriffe und der daraus resultierenden Drehwinkelabweichung zwischen An- und Abtrieb kann die Abhängigkeit des Drehwinkelverlaufs vom Verformungsverhalten der Einzeleingriffe für die halbsymmetrische 4LS Variante in **Bild 49** erkannt werden. Durch die steigende Anzahl der Planeten wird das Steifigkeitsverhalten einzelner Zahneingriffe stärker und mit kürzeren Phasenverschiebungen überlagert und die Sprünge zwischen Einzel- und Doppeleingriffsgebiet haben weniger ausgeprägten Einfluss auf den Übersetzungsfehler und damit das Gesamtdrehwinkelverhalten der Getriebe.

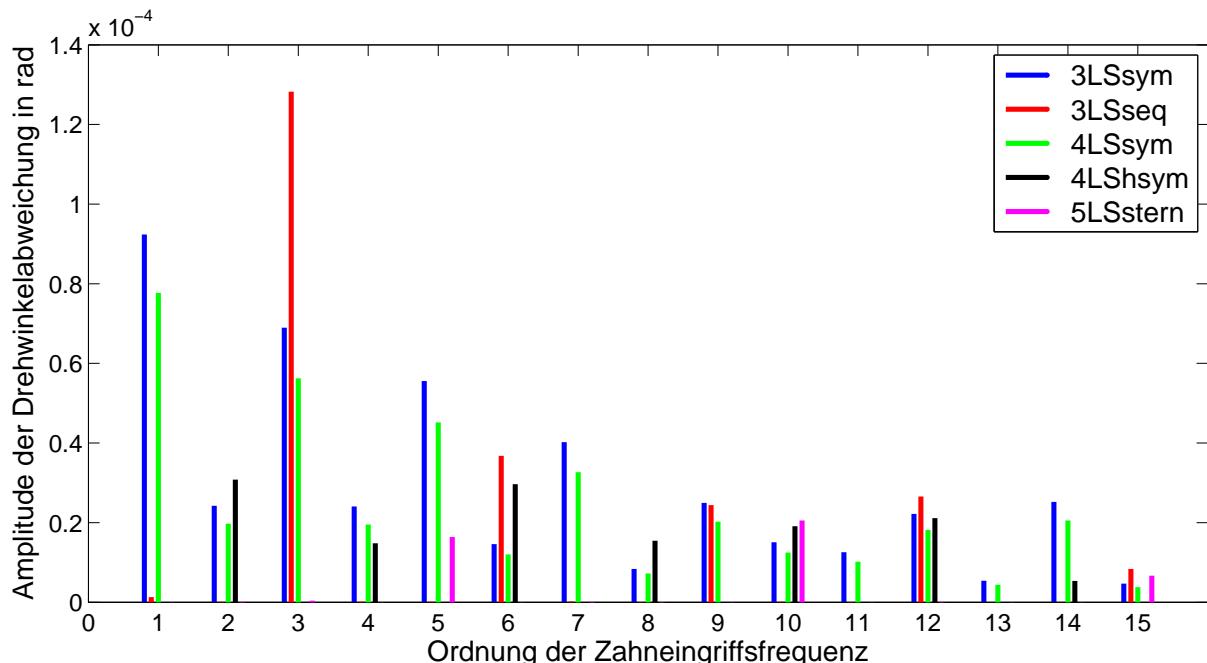
Auch der Einfluss der symmetrischen Eingriffsfolge auf die Form des Zeitsignals der Drehwinkeldifferenz ist für die 3LS- und 4LS-Varianten in **Bild 49** zu erkennen. Die auftretenden Sprünge im Verformungsverhalten sind bei beiden Varianten aufgrund identischer Eingriffsfolge von der Phasenverschiebung zwischen den Eingriffen Sonne-

Planet und Planet-Hohlrad am Planeten abhängig. Aufgrund der gleichen Eingriffsstellung aller Zahneingriffe an einem Zentralrad sind die Steifigkeitsschwankungen bei den symmetrischen Anordnungen am stärksten ausgeprägt, die Drehschwingungsanregung der Abtriebswelle fällt am höchsten aus.

Die deutlich geringsten Werte für den Drehwinkelfehler zeigt die Variante 5LSstern in **Bild 49** aufgrund der hohen Anzahl an Einzeleingriffen, die miteinander in Wechselwirkung treten in Kombination mit der sternförmigen Eingriffsfolge. Die auftretenden Überlagerungseffekte ähneln denen der 3LSseq-Variante mit sequentieller Eingriffsfolge.

**Bild 50** zeigt die Ergebnisse der Spektralanalyse des Drehwinkelverlaufs für die geradverzahnten Getriebevarianten nach **Abschnitt 5.2** als Ordnungsdiagramm analog zur Vorgehensweise für das Drehwegverhalten der Einzeleingriffe nach **Abschnitt 5.3.1**.

Die Getriebevarianten mit symmetrischer Eingriffsfolge 3LSsym und 4LSsym zeigen in **Bild 50** die maximale Amplitude des Drehwinkelverhaltens bei der Zahneingriffsfrequenz. Alle Eingriffe an den Zentralrädern treten gleichzeitig auf. Die Maxima und Minima der Drehwinkelabweichung zwischen An- und Abtrieb erscheinen folglich mit der Frequenz des Durchlaufens einer Eingriffsteilung auf der Eingriffsstrecke. Alle weiteren Ordnungen der Zahneingriffsfrequenz weisen erhöhte Werte für die Amplitude der



**Bild 50:** Ordnungsspektrum der Drehwinkelabweichung zwischen An- und Abtrieb für geradverzahnte Getriebevarianten

Drehwinkelabweichung auf, wobei deren Beträge mit steigender Ordnungszahl sinken und die ungeradzahligen Ordnungen höhere Beträge aufweisen als die geradzahligen.

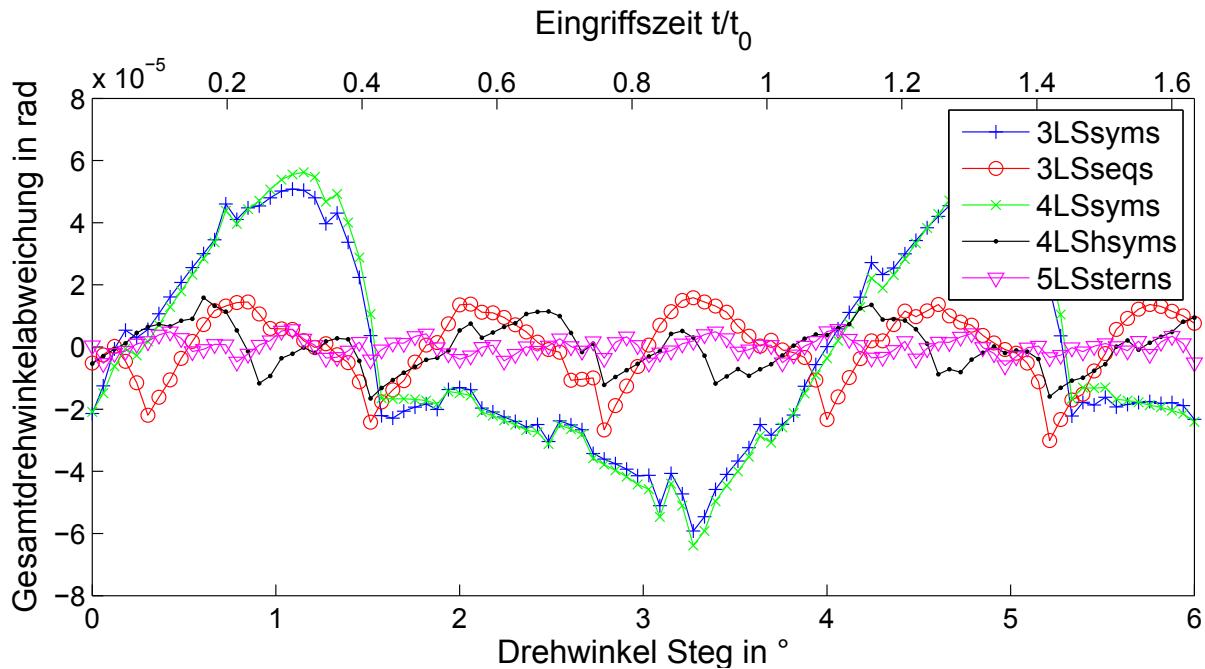
Der bei sequentieller Eingriffsfolge der 3LSseq-Variante anhand **Bild 48** beschriebene Effekt der Abhängigkeit der Periodendauer im Signal der Drehwinkelabweichung von der Phasenverschiebung der einzelnen Zahneingriffe an den jeweiligen Planeten ist auch im Ordnungsdiagramm **Bild 50** erkennbar. Die Zahneingriffe an den Zentralräder durchlaufen jeweils den ihnen eigenen Steifigkeitsverlauf mit dem sprunghafte Übergang zwischen Einzel- und Doppieleingriff mit entsprechendem Phasenversatz nach **Bild 41c**. Demnach tritt die maximale Amplitude mit der dreifachen Zahneingriffsfrequenz, also der Anzahl der Planeten, auf.

Bei halbsymmetrischer Eingriffsfolge der 4LShsym- Variante treten Überhöhungen der Drehwegabweichung in den paarweise gleichphasig abwälzenden Einzeleingriffen um eine halbe Eingriffsteilung verschoben auf. Daraus folgt, dass jeweils für die Eingriffe Sonne-Planet und Planet-Hohlrad, während ein Eingriff eine Eingriffsteilung auf der Eingriffsstrecke durchläuft, aufgrund der in **Abschnitt 5.3.2** beschriebenen Wechselwirkungen zwei Maxima in der Verformung auftreten, die sich direkt auf das Drehwinkelverhalten des Getriebes auswirken. Bei der Betrachtung der 4LShsym-Variante ist das Drehschwingungsverhalten demnach von der doppelten Zahneingriffsfrequenz und deren Vielfachen stark geprägt. Analog zu den beschriebenen Mechanismen weist die 5LStern-Variante die Hauptschwingungsanteile der Drehwinkelabweichung bei der fünffachen Zahneingriffsfrequenz und deren Vielfachen auf.

Abschließend lässt sich aus den in **Bild 50** dargestellten Zusammenhängen ableiten, dass die Schwingungsform der Gesamtdrehwinkelabweichung stark von der Eingriffsfolge und der Anzahl der Planeten abhängig ist. Mit Kenntnis der Eingriffsfolge und der Planetenanzahl kann eine erste Abschätzung zum Drehwinkelverhalten eines einfachen Planetengetriebes getroffen werden.

#### 5.4.2 Gesamtdrehwinkeldifferenz bei Schrägverzahnung

Das Drehwinkelverhalten der schrägverzahnten Getriebe nach **Abschnitt 5.2** ist in **Bild 51** zusammengefasst. Für Schrägverzahnungen gelten analog zu den Ausführungen zur Drehwegabweichung in den einzelnen Stirnradstufen der Planetengetriebe in **Abschnitt 5.3.2** auch bei Betrachtung der Gesamtdrehwinkeldifferenz eines Getriebesystems die gleichen Mechanismen zur Überlagerung des Steifigkeitsverhaltens einzelner Eingriffe entsprechend der Eingriffsfolge und Planetenanzahl wie bei den geradverzahnten Getriebvarianten.

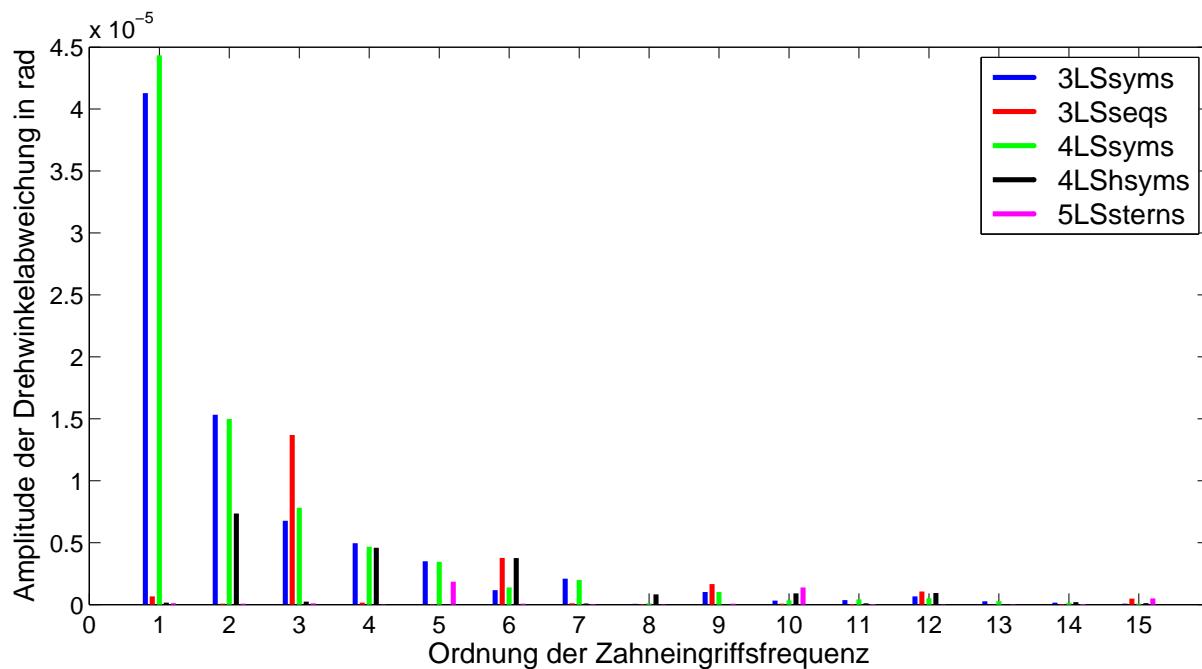


**Bild 51:** Drehwinkeldifferenz zwischen An- und Abtrieb für schrägverzahnte Getriebevarianten bei Nennlast

Der günstige Einfluss der Sprungüberdeckung auf das Steifigkeitsverhalten der Einzelzahneingriffe zeigt sich auch bei der Betrachtung der Gesamtdrehwinkeldifferenz im Getriebesystem. Weniger sprunghafte Steifigkeitsverläufe tragen in Summe bezogen auf die Ergebnisse bei Geradverzahnung zu einer um eine Größenordnung geringere Drehschwingungsanregung in den schrägverzahnten Getriebevarianten bei.

**Bild 52** zeigt die spektralen Anteile des Drehwinkelverhaltens der schrägverzahnten Getriebevarianten im Ordnungsdiagramm. Die Betrachtungen der schrägverzahnten Getriebe bestätigen die an den geradverzahnten Varianten aufgezeigten Zusammenhänge. Mit steigender Planetenzahl und einer für das Anregungsverhalten günstigen Eingriffsfolge im Planetengetriebe kann ein Abnehmen der Anregung von Drehschwingungen beobachtet werden. Die um eine Größenordnung geringere Drehschwingungsanregung kann auch im Vergleich der spektralen Zerlegung der Signale der Drehwinkeldifferenz für gerad- und schrägverzahnte Varianten festgestellt werden.

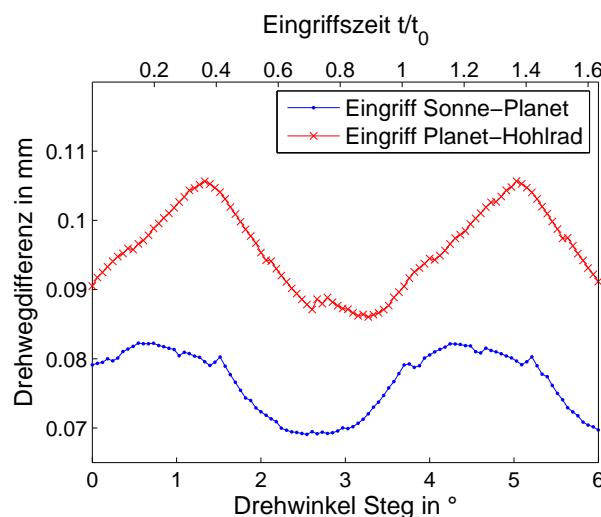
In **Abschnitt 5.4.1** wird bei der Herleitung der Drehwinkeldifferenz aus dem Verformungsverhalten der Einzelzahneingriffe über dem Abwälzen des Getriebesystems der 3LSseq-Variante beschrieben, dass nach Papies [114] durch geeignete Wahl der Verzahnungshauptgeometrie die Phasenverschiebung zwischen den Eingriffen am Planeten so eingestellt werden kann, dass eine Drehschwingungsanregung aufgrund



**Bild 52:** Ordnungsspektrum der Drehwinkelabweichung zwischen An- und Abtrieb für schrägverzahnte Getriebevarianten

von Kompensationseffekten im Steifigkeitsverhalten der Eingriffe Planet-Hohlrad und Sonne-Planeten minimiert wird.

Bei geradverzahnten Getrieben weisen die Kurven der Drehwegdifferenz in diesen Eingriffen bis auf einen Phasenversatz qualitativ gleiche Schwingungsform auf



**Bild 53:** Unterschiedliche Schwingungsform des Zeitsignals Drehwegdifferenz in den Eingriffen Sonne-Planet und Planet-Hohlrad, 5LSsterns-Variante

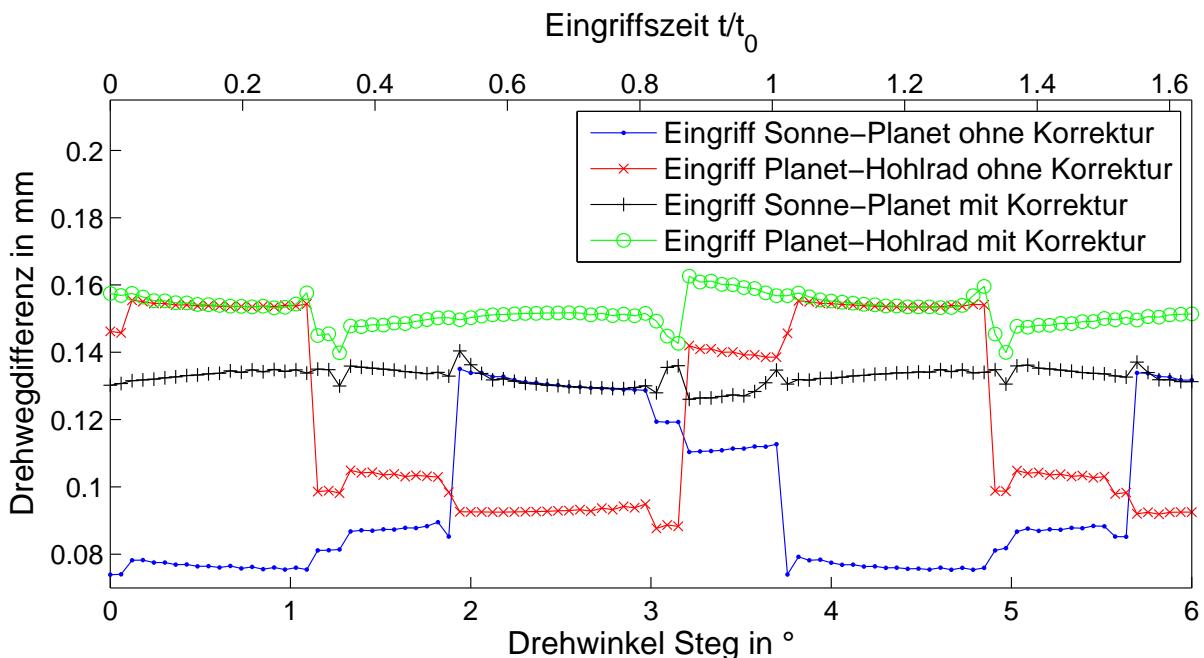
(s. **Bild 44a**). Sattelberger [126] beschreibt dies als Voraussetzung zur Ausnutzung möglicher Kompensationseffekte zwischen zwei Stirnradeingriffen eines Getriebesystems.

**Bild 53** zeigt qualitative Unterschiede in der Schwingungsform des Verlaufs der Drehwegdifferenz in den Eingriffen Sonne-Planet und Planet-Hohlrad eines schrägverzahnten Planetengetriebes.

Die von Papies [114] vorgeschlagene Methode zur Optimierung des Anregungsverhaltens von Planetengetrieben durch Anpassung der Phasenverschiebung der Eingriffe eines Planeten ist demnach bei Schrägverzahnung nur bedingt geeignet, da ein Anpassen des Phasenversatzes nicht zur vollständigen Kompensation der Drehwegabweichungen in beiden Eingriffen aufgrund der unterschiedlichen Schwingungsform führen kann.

## 5.5 Verzahnungskorrekturen bei wechselseitiger Beeinflussung im Getriebesystem

Die in **Abschnitt 5.3** und **Abschnitt 5.4** beschriebenen Kreuzeinflüsse im Drehwegverhalten einzelner Eingriffe in Planetengetriebesystemen hängen stark von der Anzahl der Planeten und der aufgrund der Planetenanordnung und der Verzahnungshauptgeo-



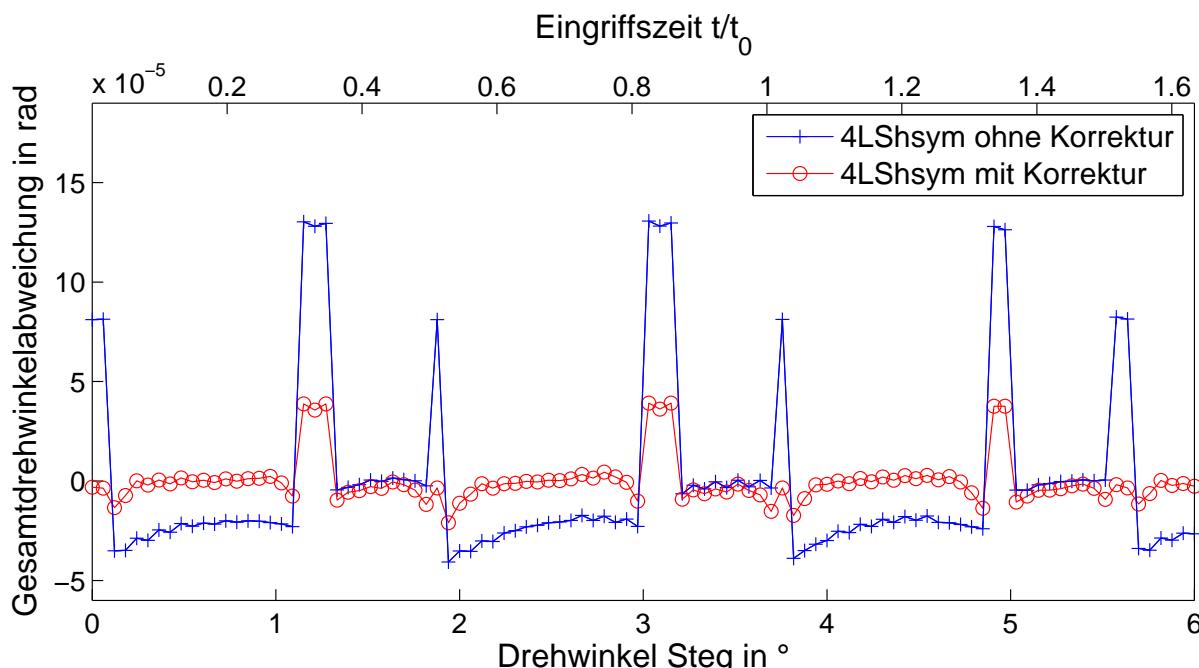
**Bild 54:** Drehwegverhalten in den Zahneingriffen der 4LShsym-Variante unkorrigiert und korrigiert (lange Kopfrücknahme) bei Nennlast

metrie festgelegten Eingriffsfolge ab. Die wechselseitige Beeinflussung des Drehwegverhaltens ist auf komplexe Zusammenhänge der phasenverschoben wirkenden Eingriffssteifigkeiten im Gesamtgetriebesystem zurückzuführen und hat unterschiedliche Auswirkungen auf das Anregungsverhalten von Planetengetrieben. Die Untersuchungen in **Abschnitt 5.3** und **Abschnitt 5.4** wurden bei unkorrigierten Verzahnungen durchgeführt.

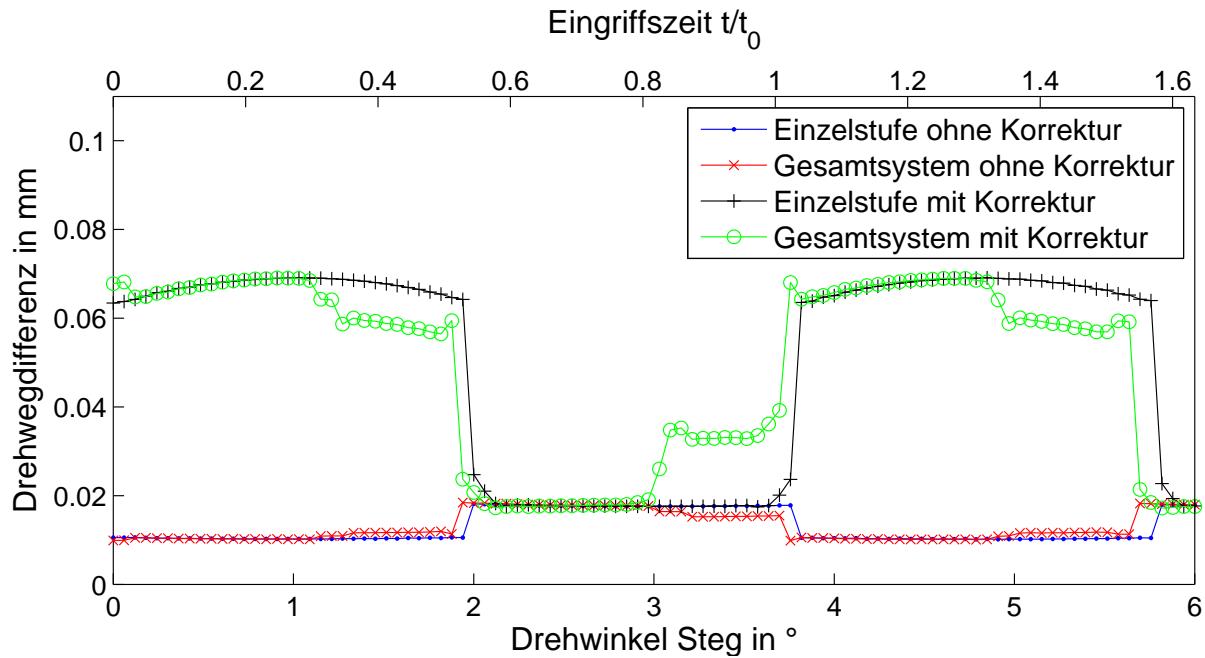
Um mögliche Auswirkungen der Kreuzeinflüsse im Drehwegverhalten des Gesamtgetriebesystems auf die praxisnahe Korrekturauslegung in Planetengetrieben zu beschreiben, wird die Abwälzsimulation nach **Abschnitt 5.1** exemplarisch für die Getriebekonfiguration 4LShsym unter Vorgabe einer in Profilrichtung wirksamen Korrektur in jedem Zahneingriff durchgeführt.

**Bild 54** zeigt das Ergebnis der statischen Abwälzsimulation unter dem Einfluss der vorgegebenen Profilkorrekturen bei Nennlast bezüglich der Drehwegdifferenz in einem Eingriff Sonne-Planet bzw. Planet-Hohlrad.

Das Drehwegverhalten wird durch die Vorgabe der Profilkorrekturen bei Nennlast in beiden Eingriffen deutlich gleichmäßiger. Eine geringere Drehweganregung ist zu erwarten. Insbesondere ist aber die abnehmende Dominanz der Querbeeinflussung im Drehwegverhalten der einzelnen Eingriffe zu erkennen. **Bild 55** zeigt den zugehörigen



**Bild 55:** Gesamtdrehwinkeldifferenz der 4LShsym-Variante unkorrigiert und korrigiert (Kopfrücknahme, lang) bei Nennlast

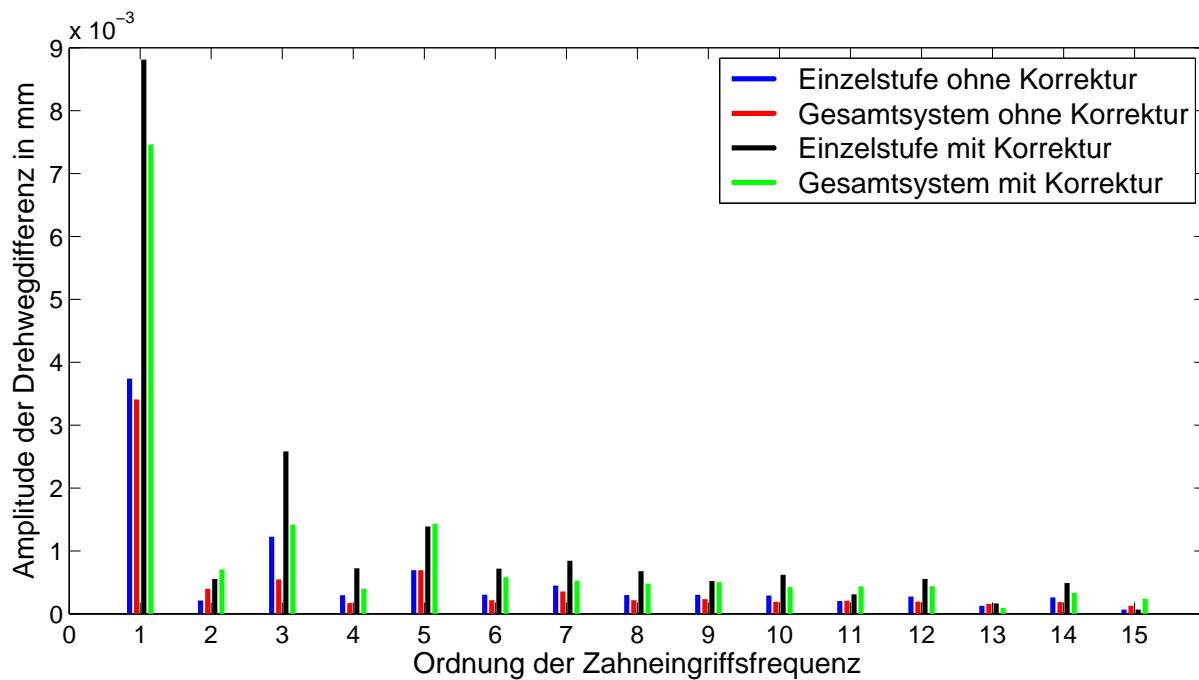


**Bild 56:** Drehwegdifferenz im Eingriff Sonne-Planet der 4LShsym-Variante bei Berechnung als Einzelstufe und bei Berechnung im Gesamtgetriebesystem unter Erfassung von Kreuzeinflüssen:  
 bei Teillast ohne Korrektur; schwach ausgeprägte Kreuzeinflüsse  
 bei Teillast mit der bei Nennlast idealen Profilkorrektur; stark ausgeprägte Kreuzeinflüsse

Verlauf der Gesamtdrehwinkelabweichung der 4LShsym-Getriebevariante mit und ohne Korrekturereinfluss.

Der Drehwegverlauf im Eingriff Planet-Hohlrad lässt aufgrund seines für diesen Lastpunkt nicht vollständig ausreichenden Korrekturbetrags die Verformungsunterschiede zwischen Doppel- und Einzeleingriffsgebiet noch erkennen. Bei vergleichender Betrachtung wird deutlich, dass der von Kreuzeinflüssen geprägte, stufenweise Übergang zwischen Doppel- und Einzeleingriff der unkorrigierten Variante bei der Betrachtung des Getriebesystems mit vorgegebenen Korrekturen nahezu vollständig verschwindet.

Durch die optimale Korrektur der Zahneingriffe wird die Drehwegdifferenz für einen Lastpunkt des Getriebesystems in allen Eingriffen nahezu ausgeglichen. Nach den in **Abschnitt 5.3.2** beschriebenen Mechanismen treten die Kreuzeinflüsse zwischen den Einzeleingriffen aufgrund unterschiedlichen Steifigkeitsverhaltens der phasenverschoben abwälzenden Einzeleingriffe auf. Werden diese Unterschiede im Steifigkeitsverhalten durch entsprechenden Wegkorrekturen nahezu ausgeglichen, geht auch der Einfluss der gegenseitigen Wechselwirkung gegen Null.



**Bild 57:** Spektrum der Drehwegdifferenz im Eingriff Sonne-Planet der 4LShsym-Variante bei Berechnung als Einzelstufe und bei Berechnung im Gesamtgetriebesystem unter Erfassung von Kreuzeinflüssen

Wird nun die Berechnung des Drehwegverhaltens für niedrigere Laststufen unter Vorgabe der für Nennlast ausgelegten Profilkorrekturen wiederholt, zeigt sich ein deutlicher Anstieg des Einflusses der Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Zahneingriffen. Die für Nennlast vorgegebenen Korrekturen weisen zum Ausgleich der Drehwegdifferenz bei niedrigen Lasten deutlich zu hohe Beträge auf und tragen zu einem schlechteren Drehwegverhalten als bei unkorrigierten Verzahnungen bei. Die dadurch in den Einzeleingriffen erhöhte Drehwegdifferenz hat wiederum einen verstärkten Kreuzeinfluss im Drehwegverhalten zwischen den einzelnen Stufen zur Folge. **Bild 56** zeigt den zeitlichen Verlauf der Drehwegabweichung der für Nennlast optimal korrigierten Verzahnung bei Teillast. **Bild 57** zeigt die spektrale Darstellung der entsprechenden Zeitsignale der Drehwegabweichung. Es ist erkennbar, dass die Amplituden der Drehwegabweichung durch die Korrektur bei Betrachtung des Eingriffs Sonne-Planet als Einzelstufe genau wie bei der Betrachtung im Gesamtsystem aufgrund des Korrekturbetrags höher ausfallen. Die Wirkung der Kreuzeinflüsse auf das Drehwegverhalten wird bei Berechnung im Gesamtsystem sichtbar. Die Amplituden der einzelnen Ordnungen des Zeitsignals werden durch die Korrektur anders als bei der Einzelstufenbetrachtung nicht gleichmäßig proportional größer als die unkorrigierte Variante. Die Änderung der Schwingungscharakteristik des Zeitsignals durch die starke Querbeein-

flussung der Stufen untereinander zeigt sich in einer Verstärkung bzw. Abschwächung einzelner Ordnungen der korrigierten im Vergleich zur unkorrigierten Verzahnung.

Bei der Auslegung von Verzahnungskorrekturen zur Verbesserung des Drehwegverhaltens in Getriebesystemen muss demnach der Einfluss der Wechselwirkungen zwischen einzelnen Zahneingriffe bei Laststufen, die von der Auslegungslast abweichen, besonders berücksichtigt werden. Diese können sich insbesondere dann ungünstig auf das Anregungsverhalten auswirken.

## 5.6 Zusammenfassung der Ergebnisse

Das zeitlich veränderliche Steifigkeitsverhalten von Stirnradstufen trägt wesentlich zur Schwingungsanregung in Antriebssystemen bei. Zur Bewertung des Anregungsverhaltens einzelner Stirnradeingriffe kann deren Drehwegverhalten betrachtet werden.

In **Abschnitt 5.3** wird die Drehwegdifferenz einzelner Eingriffe eines Planetengetriebes unter Erfassung von Wechselwirkungen im Getriebesystem betrachtet und der Einfluss der wechselseitigen Beeinflussung quantifiziert. In Abhängigkeit der Eingriffsfolge und der Anordnung der Planeten trägt die gegenseitige Beeinflussung der gekoppelten Stirnradstufen wesentlich zur Schwingungsform der Drehwinkeldifferenz in den einzelnen Zahneingriffen und damit zur Charakteristik des Anregungsverhaltens von Planetengetriebesystemen bei. Wirkungsmechanismen hinter der gegenseitigen Beeinflussung der Zahneingriffe wurden beschrieben, Anregungsfrequenzen und deren Beeinflussung durch Kreuzeinflüsse erläutert.

In **Abschnitt 5.4** wird das Drehschwingungsverhalten von Planetengetrieben mit unterschiedlichen Eingriffsfolgen aus der Last- und Verformungsanalyse im Gesamtgetriebesystem abgeleitet. Der Einfluss der Eingriffsfolge und der Planetenanordnung und der daraus resultierende Kreuzeinfluss zwischen den Zahneingriffen auf die Anregung von Drehschwingungen im Planetengetriebe wurde dargestellt. Die Zusammensetzung der Schwingungsform der zeitlichen Signale der Drehwinkeldifferenz eines Gesamtgetriebes in Abhängigkeit der Eingriffsfolge und der Planetenanordnung wurde anhand der Betrachtung im Frequenzraum erklärt.

Der Einfluss von Wechselwirkungen im Drehwegverhalten einzelner Zahneingriffe im Planetengetriebe auf die Korrekturauslegung wurde in **Abschnitt 5.5** dargestellt. Die Auswirkungen der wechselseitigen Beeinflussung einzelner Zahneingriffe treten verstärkt bei Abweichung der Betriebslast von der Auslegungslast der Korrekturen auf. Insbesondere in diesen Betriebsbereichen ist der wechselseitigen Beeinflussung aufgrund Eingriffsfolge und Planetenanordnung erhöhte Aufmerksamkeit geschuldet.

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Zur Beschreibung des komplexen Zusammenspiels aus Last- und Verformungsverhalten in Getriebesystemen sind zeiteffiziente, schnelle und zuverlässige Berechnungswerkzeuge notwendig, die das Verformungsverhalten einzelner Getriebekomponenten miteinander koppeln. Dadurch ist die Bestimmung der Lastverteilung in Zahneingriffen, der Lastaufteilung auf einzelne Teilleistungszweige sowie die Betrachtung der Schwingungsanregung in Planetengetriebesystemen möglich.

In der Literatur beschriebene und für den Anwender verfügbare Ansätze zur schnellen Last- und Verformungsanalyse in Planetengetrieben weisen oft Einschränkungen bei Modellierung und Erfassung von Verformungs- und Verlagerungseinflüssen aus dem Getriebeumfeld auf. Bestehende Verfahren zur Beschreibung des Verformungsverhaltens zusammenhängender Getriebesysteme auf Basis von FE-Ansätzen benötigen häufig hohe Rechenzeiten und weisen Nachteile bei der Parametrierbarkeit des Rechenmodells und der Erfassung der Verformung einzelner Getriebekomponenten auf.

Zur Beschreibung des Last- und Verformungsverhaltens von Planetengetriebesystemen wird ein Verfahren beschrieben, welches das statische Verformungsverhalten aller relevanten Getriebekomponenten gekoppelt erfasst. Die Beschreibung einer Gesamtgetriebesystematik wird aus dem zusammenhängenden System aller Wellen, Lager und Zahneingriffe abgeleitet. Die Beschreibung des Gesamtgetriebes erfolgt auf der Basis eines linear-elastischen Steifigkeitssystems. Zur Erfassung des Verformungsverhaltens von Planetenträgern kann das Nachgiebigkeitsverhalten von Strukturauteilen mit komplexer Geometrie über eine Schnittstelle in das Gesamtgetriebesystem eingebunden werden.

Das oft mehrdimensionale, nichtlineare Verhalten von Wälzlagern wird dabei über einen iterativen Abgleich des Last- und Verformungszustandes von Wellen und Lagern abgebildet. Das Lastverhalten von Wälzlagern kann mit dem FVA-Programm LAGER2 [159] unter Vorgabe bekannter Verformungszustände unter Einfluss der inneren mechanischen und kinematischen Bedingungen im Lager bestimmt werden.

Für die Berechnung der Breitenlastverteilung und die Auslegung von Breitenkorrekturen wird die mittlere Verzahnungssteifigkeit zur Beschreibung der Verzahnungsnachgiebigkeit im Gesamtgetriebesystem verwendet. Mit dieser Methode kann die Breitenlastverteilung in allen Zahneingriffen eines Getriebesystems konform zur ISO 6336 [75] unter Erfassung wechselseitiger Verformungseinflüsse bei kurzen Rechenzeiten berechnet werden.

Zur Bestimmung des Anregungsverhaltens von Planetengetriebesystemen anhand des Drehwegverhaltens wird das nichtlineare Steifigkeitsverhalten einzelner Zahnpaare in Abhängigkeit der betrachteten Eingriffsstellung in das Getriebesystem integriert. Durch sequentielles Berechnen des Getriebesystems in verschiedenen Eingriffsstellungen unter Erfassung der Eingriffsfolge von Planetengetrieben kann die Drehwegabweichung in den einzelnen Zahneingriffen sowie die Drehschwingungsanregung von Planetengetrieben anhand der Drehwinkeldifferenz zwischen An- und Abtrieb beurteilt werden.

Im Rahmen der Last- und Verformungsanalyse im Planetengetriebe wurden Zusammenhänge zwischen Lastaufteilung, Zentralwellenverlagerung und Lastverteilung in den Zahneingriffen von Planetengetrieben diskutiert (s. **Abschnitt 4**). Es wurde gezeigt, dass unterschiedliche konstruktive Maßnahmen das Lastverhalten von Planetengetrieben verbessern können. Einfach einstellbare Zentralwellen zeigen eine Verbesserung des Lastaufteilungsverhaltens, beeinflussen jedoch die Breitenlastverteilung in den Zahneingriffen negativ. Besser geeignet sind kardanisch gelagerte Sonnenwellen, die eine radiale Verschiebung ohne gleichzeitiges Verkippen des Sonnenrades ermöglichen. Der Einfluss der Umfeldsteifigkeit auf das Lastaufteilungsverhalten von Getriebesystemen wurde gezeigt. Bei allen Untersuchungen wurde die Abhängigkeit der Lastauf- und -verteilung in Abhängigkeit der Anzahl der Planeten in einem Getriebesystem erfasst. Durch größere Planetenzahlen kann die Leistungsdichte von Planetengetrieben gesteigert werden. Dabei ist jedoch die wachsende Empfindlichkeit von Systemen mit Planetenzahlen größer drei hinsichtlich Herstellungsabweichungen und Fertigungsqualität zu beachten. Ein weniger steifes Getriebeumfeld kann diese Tendenz zum Teil kompensieren.

Praxisübliche Verfahren zur Korrekturauslegung in Planetengetrieben erfassen die Verformung des Planetenträgers als Vorgabe einer Flankenlinienwinkelabweichung in den Zahnkontakte am Planeten. Die direkte Erfassung des Steifigkeitsverhaltens des Planetenträgers ist im Rahmen der Gesamtgetriebeanalyse möglich. Der Einfluss der Wechselwirkung der Planetenträgerverformung mit dem weiteren Getriebeumfeld auf die Korrekturauslegung und die geschickte Abstimmung des Verformungsverhaltens von Sonnenwelle und Planetenträger zur Vermeidung von Korrekturbedarf wurde in **Abschnitt 4.3** diskutiert. Im Gegensatz zu den Ausführungen in der Literatur wurde die Planetenträgerverformung als wesentlicher Einfluss auf die Zahnkontaktverformung beschrieben.

Die flexible Koppelung von Planetenrad-/lagerung und Planetenträger (Flex Pins) nach Hicks [63] und deren Einfluss auf das Lastaufteilungsverhalten und Breitentragen in

Planetengetrieben wurde in **Abschnitt 4.5** diskutiert. Ähnlich zur Betrachtung des Einflusses spielbehafteter Planetenlagerung auf die Breitenlastverteilung in **Abschnitt 4.4** wurde auch für die Flex Pin-Anordnung eine begrenzte Eignung bei schrägverzahnten Getrieben aufgrund der geringen Kippsteifigkeiten zur Abstützung des aus Axialkräften resultierenden Kippmoments gezeigt. Bei geradverzahnten Getrieben tragen beide Varianten zu ausgeglichenem Breitentragen bei. Flex-Pins leisten zusätzlich einen Beitrag zur gleichmäßigen Lastaufteilung in Planetengetrieben.

Anhand der weichen Planetenradanordnung der Flex-Pin-Getriebevariante wurde die wechselseitige Beeinflussung einzelner Zahneingriffe am Planetenrad bei der Korrekturauslegung dargestellt.

Das zeitlich veränderliche Steifigkeitsverhalten von Stirnradstufen trägt wesentlich zur Schwingungsanregung in Antriebssystemen bei. So ist das Anregungsverhalten in Planetengetrieben stark vom Verhalten der einzelnen Zahneingriffe im Planetengetriebesystem geprägt. Zur Bewertung des Anregungsverhaltens einzelner Stirnradeingriffe kann deren Drehwegverhalten betrachtet werden. In **Abschnitt 5.3** wird die Drehwegdifferenz einzelner Eingriffe eines Planetengetriebes unter Erfassung von Wechselwirkungen im Getriebesystem betrachtet und der Einfluss der wechselseitigen Beeinflussung quantifiziert. In Abhängigkeit der Eingriffsfolge und der Anordnung der Planeten trägt die gegenseitige Beeinflussung der gekoppelten Stirnradstufen wesentlich zur Schwingungsform der Drehwinkeldifferenz in den einzelnen Zahneingriffen und damit zur Charakteristik des Anregungsverhaltens von Planetengetriebesystemen bei. Wirkungsmechanismen hinter der gegenseitigen Beeinflussung der Zahneingriffe wurden beschrieben, Anregungsfrequenzen und deren Beeinflussung durch Kreuzeinflüsse erläutert.

In **Abschnitt 5.4** wird das Drehschwingungsverhalten von Planetengetrieben mit unterschiedlichen Eingriffsfolgen aus der Last- und Verformungsanalyse im Gesamtgetriebesystem abgeleitet. Der Einfluss der Eingriffsfolge und der Planetenanordnung und der daraus resultierende Kreuzeinfluss zwischen den Zahneingriffen auf die Anregung von Drehschwingungen im Planetengetriebe wurde dargestellt. Die Zusammensetzung der Schwingungsform der zeitlichen Signale der Drehwinkeldifferenz eines Gesamtgetriebes in Abhängigkeit der Eingriffsfolge und der Planetenanordnung wurde anhand der Betrachtung im Frequenzraum erklärt.

Der Einfluss von Wechselwirkungen im Drehwegverhalten einzelner Zahneingriffe im Planetengetriebe auf die Korrekturauslegung wurde in **Abschnitt 5.5** dargestellt. Die Auswirkungen der wechselseitigen Beeinflussung einzelner Zahneingriffe treten ver-

stärkt bei Abweichung der Betriebslast von der Auslegungslast der Korrekturen auf. Insbesondere in diesen Betriebsbereichen ist der wechselseitigen Beeinflussung aufgrund Eingriffsfolge und Planetenanordnung erhöhte Aufmerksamkeit geschuldet.

## Ausblick

Die in der vorliegenden Arbeit gezeigte Methode ist ein kleiner Beitrag zur Weiterentwicklung von Berechnungswerkzeugen für die effiziente und treffende Auslegung von Getriebesystemen in der Getriebeentwicklung. Die gezeigte Parameterstudie beschreibt Zusammenhänge zwischen dem Last- und Verformungsverhalten von Planetengetrieben und schließt die Beschreibung des Einflusses von Eingriffsfolge, Hauptgeometrie sowie Verzahnungskorrekturen auf das Anregungsverhalten von Planetengetrieben ein.

Die beschriebene Methode zur Analyse von Gesamtgetriebesystemen ist zur Beschreibung des Last- und Verformungsverhaltens beliebiger Stirnradgetriebesysteme sowie von Umlaufgetriebesystemen mit einem oder mehreren zusammenhängenden Umlaufteilgetrieben geeignet. Die Anwendung der Analysemethode zur Diskussion der Eigenschaften von Planetengetriebesystemen beschränkt sich in dieser Arbeit auf einfache, also einstufige Planetengetriebe, um grundlegende Zusammenhänge zwischen Lastaufteilung und Zentralwellenverlagerung, dem Verformungsverhalten des Getriebes und dem Last- bzw. Anregungsverhalten solcher Systeme verständlich und nachvollziehbar aufzeigen zu können. Dieses Verhalten einstufiger Planetengetriebe bildet die Grundlage zum Verständnis komplexer Getriebesysteme.

Die Untersuchung der gegenseitigen Beeinflussung einzelner, gekoppelter Planetenstufen untereinander oder des Anregungsverhaltens reduzierter Koppelgetriebe, wie sie beispielsweise in modernen Getriebesystemen im Automobilbereich sowie in innovativen Getriebelösungen für die Windkraft Anwendung finden, ist möglich und interessant, würde den Rahmen dieser Arbeit jedoch vollständig sprengen und bietet somit genügend Potential für weitere Forschungsaktivitäten.

Zum besseren Verständnis des dynamischen Systemverhaltens von Getriebesystemen kann eine rechnerische Eigenschwingungsanalyse im Gesamtgetriebesystem beitragen. Zusätzlich zur Bestimmung des Anregungsverhaltens auf Basis des statischen Drehwegverhaltens kann das Resonanzverhalten von Getriebesystemen unter Erfassung aller betrachteten Wechselwirkungen im Gesamtgetriebesystem bestimmt werden.

Die Erfassung elastischer Radkörper und weiterer elastischer Getriebeelemente kann

zu einer leistungsfähigeren Beschreibung des Last- und Verformungsverhalten sowie der Drehweganregung von Getriebesystemen beitragen. Eine genauere Korrekturauslegung durch Erfassung der Radkörpernachgiebigkeit sowie die Beschreibung des Einflusses der Hohlradelastizität auf das Lastaufteilungs- und Anregungsverhalten von Planetengetriebesystemen wäre möglich.

Weiterhin ist die Durchführung experimenteller Untersuchungen zur Absicherung der berechneten Ergebnisse in Planetengetriebesystemen hinsichtlich Last- und Verformungsverhalten sowie zur Bestätigung der theoretischen Modelle bezüglich des Anregungsverhaltens wünschenswert.



## Literatur

- [1] ABOUSLEIMAN, V. ; VELEX, P.: A hybrid 3D finite element/lumped parameter model for quasi-static and dynamic analyses of planetary/epicyclic gear sets. In: *Mechanism and Machine Theory* 41 (2006), S. 725–748
- [2] ABOUSLEIMAN, V. ; VELEX, P. ; BECQUERELLE, S.: Modeling of Spur and Helical Gear Planetary Drives With Flexible Ring Gears and Planet Carriers. In: *Journal of Mechanical Design* 129 (2007), S. 95–106
- [3] AMBARISHA, V. ; PARKER, R. G.: Nonlinear dynamics of planetary gears using analytical and finite element models. In: *Journal of Sound and Vibration* 302 (2007), Nr. 3, S. 577–595
- [4] AMBARISHA, V. K. ; PARKER, R. G.: Suppression of Planet Mode Response in Planetary Gear Dynamics Through Mesh Phasing. In: *Journal of Vibration and Acoustics* 128 (2006), Nr. 2, S. 133–142
- [5] BAETHGE, J.: *Drehwegfehler, Zahnfederhärte und Geräusch bei Stirnrädern*, TH München, Diss., 1969
- [6] BAHK, C.-J. ; PARKER, R. G.: Analytical Solution for the Nonlinear Dynamics of Planetary Gears. In: *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 6 (2011)
- [7] BAHK, C.-J. ; PARKER, R. G.: A study on planetary gear dynamics with tooth profil modification. In: *ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, American Society of Mechanical Engineers*, 2011
- [8] BALASUBRAMANIAN, B.: *Dynamische Lastverteilung in Planetensätzen*, Universität Karlsruhe (TH), Diss., 1983
- [9] BAUMANN, F.: *Theoretische Untersuchungen zur Lastaufteilung und Lastverteilung in Planetengetrieben*. Düsseldorf: VDI Verlag, Düsseldorf: VDI Verlag, Diss., 2013
- [10] BIHR, J.: FVA-Heft im Druck: FVA-Forschungsvorhaben 565 II, Drehzahleinfluss Getriebedynamik, Untersuchung des Drehzahleinflusses auf das Geräusch- und Schwingungsverhalten von mehrstufigen Getrieben unter Berücksichtigung der Kopplung der Getriebestufen / Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 2015. – Abschlussbericht

- [11] BLÜMM, A.: FVA-Heft 766: FVA-Forschungsvorhaben 51 V, Simplex V - Erweiterung eines Programms zur dynamischen Analyse von Planetengetrieben / Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 2005. – Abschlussbericht
- [12] BODAS, A. ; KAHRAMAN, A.: Influence of Carrier and Gear Manufacturing Errors on the Static Load Sharing Behavior of Planetary Gear Sets. In: *JSME International Journal Series C* 47 (2004), S. 908–915
- [13] BOGUSKI, B. ; KAHRAMAN, A. ; NISHINO, T.: A New Method to Measure Planet Load Sharing and Sun Gear Radial Orbit of Planetary Gear Sets. In: *Proceedings of the ASME 2011 - 11th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Washington DC - DETC2011-47196*, 2011
- [14] BOGUSKI, B. ; KAHRAMAN, A. ; NISHINO, T.: A NEW METHOD TO MEASURE PLANET LOAD SHARING AND SUN GEAR RADIAL ORBIT OF PLANETARY GEAR SETS. In: *Journal of Mechanical Design* 134 (2012), Nr. 7
- [15] BREUER, M.: *EDV-Programm zur Berechnung der Lagersteifigkeit*. Frankfurt am Main : Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA) Infoblatt Nr. 184/1, 1993
- [16] BÖRNER, J. ; KURZ, N. ; JOACHIM, F.: *Effective Analysis of Gears with the Program LVR*. International Conference on Gears : VDI-Berichte Nr. 1665, S.721-735, 2002
- [17] BUBE, C.: Bestimmung von Verzahnungskorrekturen bei Planetenradgetrieben unter Berücksichtigung von Gehäuseverformungen und äußeren Kräften / FVA. Bochum, 2009. – Abschlussbericht
- [18] CAO, J.: *Anforderungs- und fertigungsgerechte Auslegung von Stirnradverzahnungen durch Zahnkontaktanalyse mit Hilfe der FEM*, RWTH Aachen, Diss., 2002
- [19] CHAARI, F. ; FAKHFAKH, T. ; HBAIEB, R. ; LOUATI, J. ; HADDAR, M.: Influence of manufacturing errors on the dynamic behavior of planetary gears. In: *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 27 (2006), S. 738–746
- [20] CONRY, T.F. ; SEIREG, A.: A Mathematical Programming Technique for the Evaluation of Load Distribution and Optimal Modifications for Gear System / ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 94. 1972. – Forschungsbericht

- [21] COOLEY, C. G. ; PARKER, R. G.: Unusual gyroscopic system eigenvalue behavior in high-speed planetary gears. In: *Journal of Sound and Vibration* 332 (2013), S. 1820–1828
- [22] D. R. KIRACOFER, D. R. ; PARKER, R. G.: Structured Vibration Modes of General Compound Planetary Gear Systems. In: *Journal of Vibration and Acoustics* 129 (2007)
- [23] DAVOLI, P. ; GORLA, C. ; ROSSA , F, F Rossi ; BONI, G.: Transmission error and noise excitation of spur gears. In: *Proceedings of the ASME 2007 10th ASME International Power Transmision and Gearing Conference, Las Vegas - DETC2007-34099*, 2007
- [24] DIN (Hrsg.): *DIN 3961: Toleranzen für Stirnradverzahnungen - Grundlagen*. DIN, 1978
- [25] DIN (Hrsg.): *DIN 3990: Trägfähigkeitsberechnung von Stirnrädern, Einführung und allgemeine Einflussfaktoren*. DIN, 1987
- [26] DONTYNE SYSTEMS LIMITED (Hrsg.): *Dontyne Systems - Gear Design Solutions*. Newcastle: Dontyne Systems Limited, 2014
- [27] DRIVECONCEPTS GMBH (Hrsg.): *MDesign LVR 2010, Software for load distribution of multi stage spur- and helical gears*. DriveConcepts GmbH, 2010. – Programmdokumentation
- [28] DRIVECONCEPTS GMBH (Hrsg.): *MDesign LVRplanet 2010, Software for load distribution of planetary gear stages*. DriveConcepts GmbH, 2010. – Programmdokumentation
- [29] DUDLEY, D.W. ; WINTER, H.: *Zahnräder: Berechnung, Entwurf und Herstellung nach amerikanischen Erfahrungen*. Berlin - Heidelberg - New York : Springer Verlag, 1961
- [30] ERICSON, T. M. ; PARKER, R. G.: Planetary gear modal properties and dynamic response: experiments and analytical simulation. In: *ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference* Bd. 8, 2011, S. 331–343
- [31] ERICSON, T. M. ; PARKER, R. G.: Natural Frequency Cluster in Planetary Gear Vibration. In: *Journal of Vibration and Acoustics* 135 (2013), Nr. 6

- [32] ERICSON, T. M. ; PARKER, R. G.: Planetary gear modal properties and dynamic response: experiments and analytical simulation. In: *Journal of Sound and Vibration* 332 (2013), S. 2350–2375
- [33] ERITENENL, T. ; PARKER, R. G.: Modal properties of three-dimensional helical planetary gears. In: *Journal of Sound and Vibration* 325 (2009), S. 397–420
- [34] FALK, S.: Die Berechnung des beliebig gestützten Durchlaufträgers nach dem Reduktionsverfahren. In: *Ingenieur-Archiv* 24, S. 216-232, Ingenieur-Archiv, 1955
- [35] FOEPPL, A.: *Vorlesungen über technische Mechanik*. Teubner, 1910
- [36] FUENTES, A. ; GONZALEZ-PEREZ, I. ; NAGAMOTO, H. ; HAYASAKA, K.: Gear Whine Noise Spectra Caused by Transmission Errors. In: *Proceedings of the ASME 2011 - 11th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Washington DC - DETC2011-48126*, 2011
- [37] FUHRKE, H.: Bestimmung von Balkenschwingungen mit Hilfe des Matrizenkalküls. In: *Ingenieur Archiv* 23, S.329-348, 1955
- [38] G.-J., Cheon ; PARKER, R. G.: Influence of Manufacturing Errors on the Dynamic Characteristics of Planetary Gear Systems. In: *KSME International Journal* 18 (2004), Nr. 4, S. 606–621
- [39] GEISER, H.: FVA-Heft 620: FVA-Forschungsvorhaben 292, Anregung Planetenradsatz, Berechnung der Anregung bei Planetenradstufen - Erstellung eines EDV-Programms auf der Basis des FVA-Programms DZP / Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 2001. – Abschlussbericht
- [40] GEISER, H.: *Grundlagen zur Beurteilung des Schwingungsverhaltens von Stirnrädern*, TU München, Diss., 2002
- [41] GERBER, H.: *Innere dynamische Zusatzkräfte bei Stirnradgetrieben*, TU München, Diss., 1984
- [42] GILL-JEONG, C. ; PARKER, R. G.: Influence of Bearing Stiffness on the Static Properties of a Planetary Gear System with Manufacturing Errors. In: *KSME International Journal* 18 (2004), Nr. 11, S. 1978–1988
- [43] GOLD, P.W.: *Statisches und dynamisches Verhalten mehrstufiger Zahnradgetriebe*, RWTH Aachen, Diss., 1979

- [44] GRADU, M.: *Planetengetriebe mit ungleichmäßig auf dem Umfang angeordneten Planetenrädern*, U Stuttgart, Diss., 1996
- [45] GREGORY, R. ; HARRIS, S. ; MUNRO, R.: Dynamic behaviour of spur gears. In: *Proc. Inst. Mech. Eng.*, Vol. 178 Pt I No 8, S. 207-226, Inst. Mech. Eng, 1963-64
- [46] GRIGGEL, T.: *Einfluss von Korrekturen und Fertigungsabweichungen auf die Schwingungsanregung von Stirnrädern*, TU München, Diss., 2010
- [47] GRIGGEL, T. ; HEIDER, M. ; BIHR, J.: FVA-Heft 937: FVA-Forschungsvorhaben 338 V, DZP / DZPopt, DZP Version 5.0 und DZPopt Version 2.0 / Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 2010. – Abschlussbericht
- [48] GRIGGEL, T. ; HEIDER, M. ; GACKA, A. ; RÖTHLINGSHÖFER, T. ; INGELI, J.: FVA-Heft 936: FVA-Forschungsvorhaben 487 II, Kennwerte Anregungsverhalten, Analyse der Berechnungsprogramme DZP4, RIKOR H und FE-Stirnradkette 3.1 / Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 2010. – Abschlussbericht
- [49] GU, X.: *Influence of planet position errors and eccentricities on planetary gear dynamics*, INSA de Lyon, Diss., 2012
- [50] GU, X. ; VELEX, P.: A dynamic model to study the influence of planet position errors. In: *Journal of Sound and Vibration* 331 (2012), S. 4554–4574
- [51] GUO, Y. ; PARKER, R. G.: Dynamic modeling and analysis of a spur planetary gear involving tooth wedging and bearing clearance nonlinearity. In: *European Journal of Mechanics A/Solids* 29 (2010), Nr. 6, S. 1022–1033
- [52] GUO, Y. ; PARKER, R. G.: Sensitivity of General Compound Planetary Gear Natural Frequencies and Vibration Modes to Model Parameters. In: *Journal of Vibration and Acoustics* 132 (2010)
- [53] GUO, Y. ; PARKER, R. G.: Dynamic Analysis of Planetary Gears With Bearing Clearance. In: *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 7 (2012)
- [54] HARIANTO, J.: *Information about Load Distribution Program (WindowsLDP)*. The Ohio State University, Columbus, OH 43210, USA : Department of Mechanical Engineering, 2006

- [55] HARIANTO, J. ; Houser, A.: A methodology for obtaining optimum gear tooth microtopographies for noise and stress minimization over a broad operating torque range. In: *Proceedings of the ASME 2007 10th ASME International Power Transmision and Gearing Conference, Las Vegas - DETC2007-34655*, 2007
- [56] HARRIS, O. ; DOUGLAS, M. ; JAMES, B. ; WOOLLEY, A. ; LACK, L.: Predicting the effects of transmission housing flexibility and bearing stiffness on gear mesh misalignment and transmission noise using a fully coupled nonlinear hyperstatic analysis. In: *Institution of Mechanical Engineers C577/005/2000*, 2000
- [57] HARRIS, S.: Dynamic loads on the teeth of spur gears. In: *Proc. Inst. Mech. Eng., Vol. 172, S. 87-112*, Inst. Mech. Eng, 1958
- [58] HE, S. ; SINGH, R.: Dynamic interactions between sliding friction and tip relief in spur gears. In: *Proceedings of the ASME 2007 10th ASME International Power Transmision and Gearing Conference, Las Vegas - DETC2007-34077*, 2007
- [59] HEIDER, M.: FVA-Heft 968: FVA-Forschungsvorhaben 292 II, Anregungsoptimaler Planetenradsatz: Software zur Optimierung des Anregungsverhaltens eines Planetenradsatzes / Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 2011. – Abschlussbericht
- [60] HEIDER, M. K.: *Schwingungsverhalten von Zahnradgetrieben*, Technische Universität München, Diss., 2012
- [61] HERTTER, T.: *Erweiterung der FVA-Programme RIKOR und LAGER2 zur Bestimmung der Lebensdauer von Wälzlagern in Industriegetrieben*. Frankfurt am Main : Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA) Infoblatt Nr. 364/1, 2002
- [62] HERTZ, H.: Über die Berührung fester elastischer Körper. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik, Jg. 92, S. 156 - 171*, 1882
- [63] HICKS, R. J.: Load Equalizing Means for Planetary Pinions. 1967. – U.S. Patent No. 3.303.713
- [64] HIDAKA, T. ; TERAUCHI, Y.: Dynamic Behavior of Planetary Gear (1st Report: Load Distribution in Planetary Gear). In: *Bulletin of JSME* 19 (1976), Nr. 132, S. 690–698
- [65] HIDAKA, T. ; TERAUCHI, Y. ; DOHI, K.: On the Relation between the Run-Out Errors and the Motion of the Center of Sun Gear in a Stoeckicht Planetary Gear. In: *Bulletin of the JSME* 22 (1979), Nr. 167, S. 748–754

- [66] HIDAKA, T. ; TERAUCHI, Y. ; ISHIOKA, K.: Dynamic behavior of planetary gear (2nd Report: Displacement of sungear and ring gear). In: *Bulletin of JSME* 19 (1976), Nr. 138, S. 1563–1570
- [67] HIDAKA, T. ; TERAUCHI, Y. ; ISHIOKA, K.: Dynamic behavior of planetary gear (4th Report: Influence of Transmitted Tooth Load). In: *Bulletin of JSME* 22 (1979), Nr. 167, S. 877–884
- [68] HIDAKA, T. ; TERAUCHI, Y. ; K., Nagamura: Dynamic Behavior of Planetary Gear (7th Report: Influence of the Thickness of the Ring Gear). In: *Bulletin of JSME* 22 (1979), Nr. 170, S. 1142–1149
- [69] HIDAKA, T. ; TERAUCHI, Y. ; NAGAMURA, K.: Dynamic Behavior of Planetary Gear (6th Report: Influence of Meshing-Phasing). In: *Bulletin of JSME* 22 (1979), Nr. 169, S. 1026–1033
- [70] HOHREIN, A. ; SENF, M.: *Untersuchungen zur Last- und Spannungsverteilung an schrägverzahnten Stirnrädern*, TU Dresden, Diss., 1977
- [71] HÖSEL, T.: FVA-Heft Nr. 100: Ritzelkorrektur (RIKOR), Version D / Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 1982. – Forschungsbericht. – Programmdokumentation
- [72] INALPOLAT, M.: *A theoretical and experimental investigation of modulation sidebands of planetary gear sets*, The Ohio State University, Diss., 2009
- [73] INALPOLAT, M. ; KAHRAMAN, A.: A theoretical and experimental investigation of modulation sidebands of planetary gear sets. In: *Journal of Sound and Vibration* 323 (2009), S. 677–696
- [74] INALPOLAT, M. ; KAHRAMAN, A.: A dynamic model to predict modulation sidebands of a planetary gear set having manufacturing errors. In: *Journal of Sound and Vibration* 329 (2010), S. 371–393
- [75] ISO (Hrsg.): *ISO 6336: Calculation of load capacity of spur and helical gears*. : ISO, 2006
- [76] JAMES, B. ; HARRIS, O.: Predicting Unequal Planetary Load Sharing Due to Manufacturing Errors and System Deflections, with Validation Against Test Data. In: *SAE Technical Paper 2002-01-0699*, 2002

- [77] KAHRAMAN, A.: Load Sharing Characteristics of Planetary Transmissions. In: *Mechanism and Machine Theory* 29 (1994), Nr. 8, S. 1151–1165
- [78] KAHRAMAN, A.: Natural Modes of Planetary Gear Trains. In: *Journal of Sound and Vibration* 173 (1994), S. 125–130
- [79] KAHRAMAN, A.: Planetary Gear Train Dynamics. In: *Journal of Mechanical Design, Sep. 94, Vol. 116, pp. 713 - 720*, 1994
- [80] KAHRAMAN, A. ; KHARAZI, A. ; UMRANI, M.: A deformable body dynamic analysis of planetary gears with thin rims. In: *Journal of Sound and Vibration* 262 (2003), S. 752–768
- [81] KAHRAMAN, A. ; NISHINO, T. ; BOGUSKI, B.: A New Method to Measure Planet Load Sharing and Sun Gear Radial Orbit of Planetary Gear Sets. In: *Journal of Mechanical Design* 134 (2012)
- [82] KAHRAMAN, A. ; VIJAYAKAR, S.: Effect of Internal Gear Flexibility on the quasi-Static Behavior of a Planetary Gear Set. In: *Journal of Mechanical Design* 123 (2001), S. 408–415
- [83] KISSLING, U.: Effects of Profile Corrections on Peak-to-Peak Transmission Error. In: *GearTechnology, July 2010, pp. 52 - 61*, 2010
- [84] KÜÇÜKAY, F.: *Über das dynamische Verhalten von einstufigen Zahnradgetrieben*, TU München, Diss., 1981
- [85] KÜÇÜKAY, F.: *Dynamik der Zahnradgetriebe*, TU München, Diss., 1985. – Habilitationsschrift
- [86] KOHN, B.: *Entwicklung einer Systematik zur dynamischen Gesamtsystemanalyse von Getrieben*, TU München, Diplomarbeit, 2012
- [87] KUBO, A. ; KIYONO, S.: Vibrational Excitation of Cylindrical Involute Gears Due To Tooth Form Error. In: *Bulletin of the JSME, Vol. 23, No. 183, September 1980, pp. 1536 - 1543*, 1980
- [88] KUNERT, J.: *Experimentell gestützte Untersuchungen zum Verformungs- und Spannungsverhalten an außenverzahnten Stirnrädern für eine verbesserte Beanspruchungsanalyse*, TU Dresden, Diss., 1999

- [89] LAMPARSKI, C.: Einfache Berechnungsgleichungen für die Lastüberhöhungen in Leichtbau-Planetengebrieben / Ruhr-Universität Bochum. Bochum, 1995. – Forschungsbericht
- [90] LIGATA, H.: *Impact of System-Level Factors on Planetary Gear Set Behaviour*, The Ohio State University, Diss., 2007
- [91] LIGATA, H. ; KAHRAMAN, A. ; SINGH, A.: An Experimental Study on the Influence of Manufacturing Errors. In: *Journal of Mechanical Design* 130 (2008), Nr. 4
- [92] LIGATA, H. ; KAHRAMAN, A. ; SINGH, A.: A Closed-Form Planet Load Sharing Formulation for Planetary Gear Sets Using a Translational Analogy. In: *Journal of Mechanical Design* (2009)
- [93] LIGATA, H. ; KAHRAMAN, A. ; SINGH, A.: Influence of Ring Gear Rim Thickness on Planetary Gear Set Behavior. In: *Journal of Mechanical Design* 132 (2010)
- [94] LIN, J. ; PARKER, R. G.: Analytical Characterization of the Unique Properties of Planetary Gear Free Vibration. In: *Journal of Vibrations and Acoustics* 21 (1999), Nr. 3, S. 316–321
- [95] LIN, J. ; PARKER, R. G.: Mesh Phasing Relationships in Planetary and Epicyclic Gears. In: *Journal of Mechanical Design* 126 (2004), S. 365–370
- [96] LINKE, H.: *Stirnradverzahnung*. Leipzig : Hanser Verlag, 1996
- [97] LVR: *LVR - Verteilung von Last, Temperatur und Spannung an evolventischen Außenverzahnungen*. Mommsenstr. 13, 01062 Dresden: Institut für Maschinenelemente und Maschinenkonstruktion, TU Dresden, 1999
- [98] MARK, W.: Analysis of the vibratory excitation of gear systems: Basic theory. In: *J. Acoust. Soc. Am.* 63(5), May 1978, pp. 1409 - 1430, 1978
- [99] MARK, W.: Analysis of the vibratory excitation of gear systems. II: Tooth error representations, approximations, and application. In: *J. Acoust. Soc. Am.* 66(6), Dec 1979, pp. 1758 - 1787, 1979
- [100] MÜLLER, R.: *Schwingungs- und Geräuschanregung bei Stirnradgetrieben*, TU München, Diss., 1991
- [101] MONTESTRUC, A. N.: A Numerical Approach to Calculation of Load Sharing in Planetary Gear Drives. In: *Journal of Mechanical Design* 132 (2010)

- [102] MONTESTRUC, A. N.: Influence of Planet Pin Stiffness on Load Sharing in Planetary Gear Drives. In: *Journal of Mechanical Design* 133 (2011)
- [103] MUNRO, R.: Effect of geometrical errors on the transmission of motion between gears. In: *Proc. Conference on Gearing in 1970, Cambridge*, pp. 79 - 84, 1970
- [104] NAENDORF, B.: *Näherungsgleichungen für Tragfähigkeitsnachweise von Industrieplanetengetrieben*. Bochum, Ruhr-Universität Bochum, Diss., 1992
- [105] NAESCHER, J.: *Die rechnerische Simulation und Messung der Einflanken-Wälzabweichung geradverzahnter Stirnräder*, Universität Bochum, Diss., 1977
- [106] NEUPERT, B.: *Berechnung der Zahnkräfte, Pressungen und Spannungen von Stirn- und Kegelradgetrieben*, RWTH Aachen, Diss., 1983
- [107] NIEMANN, G. ; WINTER, H.: *Maschinenelemente*. Bd. 2. 2. Berlin Heidelberg New York Tokyo : Springer Verlag, 1983
- [108] NIEMANN, G. ; WINTER, H.: *Maschinenelemente*. Bd. 2. 2. Berlin Heidelberg New York Tokyo : Springer Verlag, 1989
- [109] NIEMANN, G. ; WINTER, H. ; HÖHN, B.-R.: *Maschinenelemente*. Bd. 1. 3. Berlin Heidelberg New York : Springer Verlag, 2001
- [110] ODA, S. ; MIYACHIKA, K.: Root Stress of Thin-Rimmed Internal Spur Gear Supported with Pins. In: *JSME International Journal* 30 (1987), S. 646–652
- [111] OSTER, P. ; LIEBHARDT, W.: *EDV-Programm zur Ermittlung der Zahnflankenkorrekturen am Ritzel*. Frankfurt am Main, 1979
- [112] OTTO, M.: FVA-Heft Nr. 481: Ritzelkorrektur (RIKOR), Version H. Frankfurt/Main, 2005. – Forschungsbericht. – Programmdokumentation
- [113] OTTO, M.: *Lastverteilung und Zahnrädrtragfähigkeit von schrägverzahnten Stirnrädern*, Technische Universität München, Diss., 2009
- [114] PAPIES, J.: *Methodik zur systematischen Analyse und Optimierung dynamischer Kraft- und Weganregungen in Planetengetrieben*. Bochum : Ruhr-Universität Bochum, 2014. – ISBN 3–89194–213–3
- [115] PARKER, R. G. ; AGASHE, V. ; VIJAYAKER, S.: Dynamic Response of a Planetary Gear System using a Finite Element/Contact Mechanics Model. In: *Journal of Mechanical Design* 122 (2000), S. 304–310

- [116] PEARS, J. ; CURTIS, S. ; POON, A. ; SMITH, A. ; POON, D. ; PALMER, D.: Investigation of Methods to Predict Parallel and Epicyclic Gear Transmission Error. In: *SAE Technical Paper 2005-01-1818*, 2005
- [117] PEARS, J. ; SMITH, A. ; PLATTEN, M. ; ABE, T. et al.: Predicting Variation in the NVH Characteristics of an Automatic Transmission using a Detailed Parametric Modelling Approach. In: *SAE Technical Paper 2007-01-2234*, 2007
- [118] PLACZEK, T.: *Lastverteilung und Flankenkorrektur*, TU München, Diss., 1988
- [119] POLIFKE, G.: *Dynamisches Verhalten von mehrstufigen Planetenradgetrieben*. Bochum, Ruhr-Universität Bochum, Diss., 1997
- [120] POULIOS, K.: Einfluss der Planetenradverformungen auf die Lagerbelastung, Verzahnungskorrekturen und das dynamische Verhalten von Planetenradgetrieben / FVA. Bochum, 2010. – Abschlussbericht
- [121] PRUETER, P. ; PARKER, R. ; CUNLIFFE, F.: A study of gear root strains in a multi-stage planetary wind turbine gear train using a three dimensional finite element/contact mechanics model and experiments. In: *Proceedings of the ASME 2011 - 11th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Washington DC - DETC2011-47451*, 2011
- [122] RACHOR, C.: Transient Dynamic Simulation for Drivetrains. In: *Proceedings of the International Conference on Gears*, VDI Wissensforum GmbH, 2013, S. 1547–1550
- [123] RADEV, S.: *Einfluss von Flankenkorrekturen auf das Anregungsverhalten gerad- und schrägverzahnter Stirnradpaarungen*, TU München, Diss., 2007
- [124] RETTIG, H.: *Dynamische Zahnkraft*, TH München, Diss., 1957
- [125] RÜSCHOFF, R.: *Analyse der Wechselwirkungen von Mehrfacheingriffen am Beispiel Planetengetriebe*. Bochum, Ruhr-Universität Bochum, Diss., 2004
- [126] SATTELBERGER, K.: *Schwingungs- und Geräuschanregung bei ein- und mehrstufigen Stirnradgetrieben*, TU München, Diss., 1997
- [127] SATTELBERGER, K.: *Methodik zur kinematischen und kinetischen Berechnung mehrwelliger Planeten- Koppelgetriebe*, TU München, Diss., 2007

- [128] SCHÄFER, J.: *FVA-Forschungsvorhaben 377, Kontaktmodell mehrfacher Zahn-eingriff.* Frankfurt am Main : Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA) Heft Nr. 723, 2003
- [129] SCHÄFER, J.: *Erweiterung des Linienelementmodells für die Finite-Elemente-basierte Zahnkontaktanalyse von Stirnradverzahnungen,* RWTH Aachen, Diss., 2008
- [130] SCHÄFER, W.F.: *Ein Beitrag zur Ermittlung des wirksamen Flankenrichtungs-fehlers bei Stirnradgetrieben und der Lastverteilung bei Geradverzahnung,* TU Darmstadt, Diss., 1971
- [131] SCHINAGL, S.: *Ritzelkorrekturprogramm RIKOR G.* Frankfurt am Main : Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA) Heft Nr. 481, 1999
- [132] SCHLECHT, B. ; SENF, M. ; SCHULZE, T.: Detaillierte Beanspruchungsanalyse in Getrieben / DriveConcepts GmbH. Dresden, 2012. – Forschungsbericht
- [133] SCHLECHT, B. ; T., Schulze ; HARTMANN-GERLACH, C.: Auslegung und Opti-mierung von mehrstufigen Getrieben / DriveConcepts GmbH. Dresden, 2014. – Forschungsbericht
- [134] SCHMIDT, G.: *Berechnung der Wälzpressung schrägverzahnter Stirnräder unter Berücksichtigung der Lastverteilung,* TU München, Diss., 1973
- [135] SCHULZE, B.: Design and optimization of planetary gears under consideration of all relevant influences. In: *GEAR TECHNOLOGY* (2013), S. 96–102
- [136] SCHULZE, T. ; HARTMANN-GERLACH, C. ; SCHLECHT, B.: Calculation of Load Distribution in Planetary Gears for an Effective Gear Design Process / AGMA. 2010. – AGMA Technical Paper
- [137] SFAR, M.: *Bestimmung von Verzahnungskorrekturen und Lagerkräften in Plane-tengetrieben für Lastkollektive.* Bochum, Ruhr-Universität Bochum, Diss., 2011
- [138] SINGH, A.: Application of a System Level Model to Study the Planetary Load Sharing Behavior. In: *Journal of Mechanical Design* 127 (2005), S. 469–476
- [139] SINGH, A.: Influence of Planetary Needle Bearings on the Performance of Single and Double Pinion Planetary Systems. In: *Journal of Mechanical Design* 129 (2007), S. 85–94

- [140] SINGH, A. ; KAHRAMAN, A. ; LIGATA, H.: Internal Gear Strains and Load Sharing in Planetary Transmissions: Model and Experiments. In: *Journal of Mechanical Design* 130 (2008)
- [141] SMART MANUFACTURING TECHNOLOGY LIMITED (Hrsg.): *Advanced CAE tools and engineering expertise for Automotive Drivelines*. Nottingham: Smart Manufacturing Technology Limited, 2015
- [142] SMART MANUFACTURING TECHNOLOGY LIMITED (Hrsg.): *Advanced CAE tools and engineering expertise for Wind Turbine Transmissions*. Nottingham: Smart Manufacturing Technology Limited, 2015
- [143] SMART MANUFACTURING TECHNOLOGY LIMITED (Hrsg.): *DRIVA for Wind flexible multibody dynamic simulation of transient torque changes in wind turbines*. Nottingham: Smart Manufacturing Technology Limited, 2015
- [144] SMITH, A. ; PEARS, J. ; PLATTEN, M. ; PALMER, D. ; HIRABAYASHI, Y.: Epicyclic Gear Transmission Error - The Importance of Controlling Tolerances. In: *SAE Technical Paper 2007-01-2241*, 2007
- [145] SMITH, J. ; SMITH, D.: *Gear Noise and Vibration*. Marcel Dekker Inc, 1999
- [146] TESCH, T.: *Der fehlerhafte Zahneingriff und seine Auswirkungen auf die Geräuschabstrahlung*, RWTH Aachen, Diss., 1969
- [147] THOMA, F.: FVA-Heft Nr. 914: Ritzelkorrektur (RIKOR), Version I. RIKOR I. Frankfurt/Main, 2009. – Forschungsbericht. – Programmdokumentation
- [148] THOMA, F.: *Lastübertragung im verformten System Lager-Welle-Zahnrad, Berechnung der Lastverteilung im Zahnkontakt unter Berücksichtigung des Welle-Lagersystems als Teil der Zahnradstufe*, TU München, Diss., 2011
- [149] TIMOSHENKO, S.: *Theory of Elasticity*. New York : McGraw-Hill Book Company, 1934
- [150] TOWNSEND, D.: *Dudley's Gear Handbook: The Design, Manufacture and Application of Gears*. 2. McGraw-Hill Inc., US, 1991
- [151] VIJAYAKAR, S.: A Combined Surface Integral and Finite Element Solution for a three-dimensional contact problem. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 31 (1991), S. 525–545

- [152] VIJAYAKAR, S. ; ABAD, S. ; R., Gunda: Multi-body Dynamic Contact Analysis Tool for Transmission Design / Ansol. Hilliard, 2003. – Forschungsbericht
- [153] VONDERSCHMIDT, R.: *Zahnkräfte in geradverzahnten Planetenradgetrieben*, Ruhr-Universität Bochum, Diss., 1982
- [154] VRIESEN, J. W.: *Berechnung der Verzahnungskorrekturen von Planetenradgetrieben unter Berücksichtigung der Steg- und Hohlradverformungen*. Bochum, Ruhr-Universität Bochum, Diss., 2001
- [155] WAGNER, H. T.: *Versuche zur Lastaufteilung und zum Breitentragen in geradverzahnten Planetenradgetrieben*. Bochum: Ruhr-Universität Bochum, 1984
- [156] WALKER, H.: Gear Tooth Deflection and Profile Modification. In: *The Engineer*, S. 102-104, Office for Publ. and Advertisements, 1940
- [157] WEBER, C. ; BANASCHEK, K.: *Formänderung und Profilrücknahme bei gerad- und schrägverzahnten Rädern*. Bd. 11. Schriftenreihe Antriebstechnik. Braunschweig : Vieweg-Verlag, 1955
- [158] WEINBERGER, U.: *Berechnung der Lastverhältnisse in Planetenradlagerungen unter Berücksichtigung der Planetenradverformung im komplexen Getriebeumfeld*, TU München, Diplomarbeit, 2014
- [159] WEITL, R.: *Erweiterung der FVA-Programme RIKOR und LAGER2 zur Bestimmung der Lebensdauer von Wälzlagern in Industriegetrieben*. Frankfurt am Main : FVA Informationsblatt Nr. 364/2, 2007
- [160] WIKIDAL, F.: *Berechnung der Flankenpressung gerad- und schrägverzahnter Stirnräder unter Berücksichtigung last- und fertigungsbedingter Abweichungen*, TU München, Diss., 1996
- [161] WINCKELMANN, L.: *Lastverteilung an Planetenradgetrieben; Schriftenreihe des Instituts für Konstruktionstechnik, Heft Nr. 87.3*, Ruhr-Universität Bochum, Diss., 1987
- [162] WINCKELMANN, L.: FVA-Heft 267: FVA-Forschungsvorhaben 51 II, Planetengetriebe - Lastverteilung in schrägverzahnten Planetenradgetrieben / Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 1988. – Abschlussbericht

[163] WITTOR, R.: FVA-Heft 519: FVA-Forschungsvorhaben 254, Planetengetriebe - Geräusche, Berechnungsgleichungen für den Schallleistungspegel von Industrie-Planetengetrieben mit gehäusefesten Hohlrädern / Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 1997. – Abschlussbericht

*Folgende Studienarbeiten, deren Bearbeitung, Auswertung, Interpretation und Darstellung von Ergebnissen unter wesentlicher wissenschaftlicher Anleitung des Autors entstanden sind, wurden im Rahmen der vorliegenden Arbeit am Lehrstuhl für Maschinenelemente, Forschungsstelle für Zahnräder und Getriebebau angefertigt. Ergebnisse flossen zum Teil mit in die Arbeit ein.*

1. Deist, J. Methode zur Erfassung der Planetenträgerverformung und deren Einfluss auf die Lastverteilung in Planetengetrieben, Bachelorarbeit, TU München 2013
2. Gerl, B. Analyse und Bewertung drehzahlabhängiger Massen- und Kreiseleffekte bei der Zentralwellenverlagerung in Planetengetriebesystemen, Bachelorarbeit, TU München 2015
3. Hofer, M. Bestimmung der Schwingungsanregung von Planetengetrieben anhand des statischen Drehwegverhaltens im Gesamtgetriebesystem, Semesterarbeit, TU München 2015
4. Krenmayr, M. Analyse des Last- und Verformungsverhaltens in Getriebesystemen unter Verwendung eines FEM-Ansatzes, Semesterarbeit, TU München 2014
5. Stadler, F. Berechnung des Last- und Verformungsverhaltens von Planetenradstufen im komplexen Getriebeumfeld, Bachelorarbeit, TU München 2014
6. Weinberger, U. Methode zur Berechnung der Lastverteilung in den Zahneingriffen von Planetengetrieben im komplexen Getriebeumfeld, Bachelorarbeit, TU München 2012
7. Weinberger, U. Berechnung der Lastverhältnisse in Planetenradlagerungen unter Berücksichtigung der Planetenradverformung im komplexen Getriebeumfeld, Masterarbeit, TU München 2014

*Zudem sind folgende Arbeiten, die in den Jahren 2009 bis 2015 unter Beteiligung von Mitarbeitern des Lehrstuhls für Maschinenelemente, Forschungsstelle für Zahnräder und Getriebebau entstanden sind, zum Teil mit in diese Arbeit eingeflossen.*

1. Kohn, B. Entwicklung einer Systematik zur dynamischen Gesamtsystemanalyse von Getrieben, Diplomarbeit, TU München 2012

---

*Vorveröffentlichungen des Autors*

1. Neubauer, B. LAPLAS - LAstverteilung PLAnetenStufe FVA-Forschungsvorhaben Nr. 571 I, FVA-Infotagung, Würzburg, 2011
2. Neubauer, B. Berechnung der Lastauf und -verteilung in Getriebesystemen mit mehreren PLAnetenStufen FVA-Forschungsvorhaben Nr. 571 II, FVA-Infotagung, Würzburg, 2014
3. Neubauer, B. Korrekturauslegung in Planetengetrieben, Kongress für Simulation im Produktentstehungsprozess, Würzburg, 2011
4. Neubauer, B. Effiziente Lastverteilungsberechnung und Korrekturauslegung in Planetengetriebesystemen, SIMPEP-Kongress, Koblenz, 2014
5. Neubauer, B. Efficient Calculation of Load Distribution and design of tooth flank modifications in planetary gear systems, International Conference on Gears 2015
6. Neubauer, B. Lastverteilung Planetenstufe FVA-Forschungsvorhaben 571 I LAPLAS, Abschlussbericht 2011
7. Neubauer, B. Lastverteilung in Getriebesystemen mit Planetenstufen FVA-Forschungsvorhaben 571/II LAPLASn, Abschlussbericht 2015



## Dissertationen der FZG

1. PERRET, H. Übertragung konstanter Leistung durch stufenlos mechanische Regeltriebe. TH Braunschweig 1935.
2. BELLMANN, H. Beiträge zur Prüfung von Bremsbelägen. TH Braunschweig 1939.
3. HIERSIG, H.M. Der Zusammenhang von Gestaltung und Beanspruchung bei Schneckengetrieben mit Evolventenverzahnung. TH Braunschweig 1943.
4. HELBIG, F. Walzenfestigkeit und Grübchenbildung von Zahnrad- und Wälzlagерwerkstoffen. TH Braunschweig 1943.
5. ARF, D. Pendelrollenlager mit symmetrischen und unsymmetrischen Rollen. TH Braunschweig 1944.
6. OESMANN, W. Entwicklung einer Stahlsand-Schalt- und Regelkupplung. TH Braunschweig 1945.
7. RUBO, E. Ermittlung der Achsfehler-Empfindlichkeit verschiedener Zylinder-Schneckengetriebe mit Hilfe des Einlauf-Abschliffvolumens. TH Braunschweig 1948.
8. GLAUBNITZ, H. Drehmomentmessungen zum Wendevorgang bei Raupenfahrwerken. TH Braunschweig 1948.
9. TALKE, H. Beiträge zur hydrodynamischen Schmiertheorie des ebenen Gleitschuhes auf ebener Fläche. TH Braunschweig 1948.
10. CRAMER, H. Über die Reibung und Schmierung feinmechanischer Geräte. TH Braunschweig 1949.
11. THOMAS, W. Reibscheiben-Regelgetriebe mit Linienberührungen. TH Braunschweig 1949.
12. MAUSHAKE, W. Theoretische Untersuchung von Schneckengetrieben mit Globoidschnecke und Stirnrad. TH Braunschweig 1950.
13. KRAUPNER, K.W. Das plastische Verhalten umlaufender Stahlrollen bei Punktberührungen. TH Braunschweig 1951.
14. BANASCHEK, K. Die Gleitreibung geschmierter Flächen kleiner Schmiegeung. Einfluß von Werkstoffpaarung, Krümmung, Oberfläche und Schmierstoff. TH Braunschweig 1951.
15. HEYER, E. Versuche mit Zylinderschneckentrieben. Einfluß von Zahnform, Modul, Durchmesser und Schmierstoff auf Verlustleistung und Tragfähigkeit. TH München 1952.
16. HENTSCHEL, G. Der Hochleistungswälztrieb. Entwicklungsstand und Entwicklungsmöglichkeiten. TH München 1952.
17. WINTER, H. Tragfähigste Evolventengeradverzahnung. TH München 1954.
18. ROY, A.K. Spannungsoptische Untersuchung eines schrägverzahnten Stirnrades. TH München 1957.
19. RETTIG, H. Dynamische Zahnkraft. TH München 1957.
20. OHLENDORF, H. Verlustleistung und Erwärmung von Stirnrädern. TH München 1958.
21. UNTERBERGER, M. Geräuschuntersuchungen an geradverzahnten Zahnrädern. TH München 1958.
22. LOOMAN, J. Das Abrichten von profilierten Schleifscheiben zum Schleifen von schrägverzahnten Stirnrädern. TH München 1959.
23. JARCHOW, F. Versuche an Stirnrad-Globoidschneckentrieben. TH München 1960.
24. POPOVIC, L. Einfluß von Zahnform und Bearbeitung auf die Zahnußfestigkeit. TH München 1960.
25. EHRLENSPIEL, K. Die Festkörperreibung von geschmierten und ungeschmierten Metallpaarungen mit Linienberührungen. TH München 1962.
26. PITTRUFF, H. Riffelbildung infolge Stillstandsschüttungen bei Wälzlagern. TH München 1962.
27. SCHREIBER, H. Zur Auswertung von Lebensdauerversuchen an Wälzlagern. TH München 1962.
28. ROTH, K. Untersuchungen über die Eignung der Evolventenzahnform für eine allgemein verwendbare feinwerktechnische Normverzahnung. TH München 1963.

29. NARUSE, Ch. Verschleiß, Tragfähigkeit und Verlustleistung bei Schraubenradgetrieben. TH München 1964.
30. GARTNER, F. Die Mischreibung bei Linienberührungen. TH München 1964.
31. ASSMANN, H. Vergleichende Untersuchung von Getriebeölen im FZG-Stirnrad- und Eso-Hypoidprüfstand. TH München 1965.
32. REISTER, D. Einseitiges Breitentragen bei Stirnrädern. TH München 1965.
33. KORRENN, H. Gleitreibung in den Kontaktstellen zwischen den Wälzkörpern und den Laufbahnen der Ringe von Wälzlagern. TH München 1965.
34. HÖSEL, Th. Geräuschuntersuchungen an schrägverzahnten Stirnrädern mit Evolventenverzahnung. TH München 1965.
35. LANGENBECK, K. Die Verschleiß- und Freßgrenzlast der Hypoidgetriebe. TH München 1966.
36. MEMMEL, M. Untersuchungen über die Tragfähigkeit und Gebrauchsduer von Gelenklagern. TH München 1966.
37. BÖTSCH, H. Der Einfluß der Oberflächenbearbeitung und -behandlung auf die Flankenfestigkeit von Stirnrädern aus Vergütungsstahl. TH München 1966.
38. LECHNER, G. Die Freßlastgrenze bei Stirnrädern aus Stahl. TH München 1966.
39. LANGE, S. Untersuchungen von Helicon- und Spiroidgetrieben mit abwickelbaren Schneckenflanken nach der hydrodynamischen und nach der Hertzschene Theorie. TH München 1967.
40. SCHWÄGERL, D. Untersuchung von Helicon- und Spiroidgetrieben mit trapezförmigem Schneckenprofil nach der Hertzschene und nach der hydrodynamischen Theorie. TH München 1967.
41. MICHELS, K. Schneckengetriebe mit Werkstoffpaarung Stahl/Grauguß. TH München 1968.
42. GACKSTETTER, G. Verlustarme Verzahnung. TH München 1968.
43. GEUPEL, H. Flüssigkeitsreibung bei Punktberührungen. TH München 1969.
44. GREKOSSIS, R. Vergleichende Untersuchungen zur Freßtragfähigkeit von Hypoid- und Stirnrädern. TH München 1969.
45. BAETHGE, J. Zahnfederhärte, Drehwegfehler und Geräusch bei Stirnrädern. TH München 1969.
46. SCHULZ, H.D. Untersuchung über Tragfähigkeiten und Verlustleistung von Schneckengetrieben mit trapezförmigem Schneckenprofil und kegeliger Schnecke. TH München 1969.
47. STÖLZLE, K. Leistungsübertragung in Planetengetrieben bei statischem und dynamischem Betrieb. Berechnung, Optimierung und Versuchsergebnisse. TH München 1970.
48. SEITZINGER, K. Die Erwärmung einsatzgehärteter Zahnräder als Kennwert für ihre Freßtragfähigkeit. TU München 1971.
49. STÖSSEL, K. Reibungszahlen unter elasto-hydrodynamischen Bedingungen. TU München 1971.
50. SCHMIDT, G. Berechnung der Wälzpressung schrägverzahnter Stirnräder unter Berücksichtigung der Lastverteilung. TU München 1972.
51. HIRT, M. Einfluß der Zahnfußausrundung auf Spannung und Festigkeit von Geradstirnrädern. TU München 1974.
52. WILKESMANN, H. Berechnung von Schneckengetrieben mit unterschiedlichen Zahnprofilformen (Tragfähigkeits- und Verlustleistung für Hohlkreis-, Evolventen- und Geradlinienprofil). TU München 1974.
53. RICHTER, M. Der Verzahnungswirkungsgrad und die Freßtragfähigkeit von Hypoid- und Schraubenradgetrieben - Versuchsergebnisse und Berechnungsmethoden. TU München 1976.
54. RÖSCH, H. Untersuchungen zur Wälzfestigkeit von Rollen - Einfluß von Werkstoff, Wärmebehandlung und Schlupf. TU München 1976.
55. GAGGERMEIER, H. Untersuchungen zur Reibkraftübertragung in Regel-Reibradgetrieben im Bereich elasto-hydrodynamischer Schmierung. TU München 1977.
56. KÄSER, W. Beitrag zur Grübchenbildung an gehärteten Zahnrädern. Einfluß von Härtetiefe und Schmierstoff auf die Flankentragfähigkeit. TU München 1977.

57. KNABEL, W. Geräusche und Schwingungen an Stirnradgetrieben. Untersuchungen geometrischer Einflüsse bei hohen Drehzahlen und Belastungen. TU München 1977.
58. WIRTH, X. Über den Einfluß von Schleifkerben auf die Zahndrucktragfähigkeit und das Schädigungsverhalten oberflächengehärteter Zahnräder. TU München 1977.
59. HUBER, G. Zylinderschneckengetriebe, ein Beitrag zur Berechnung von Grübchen- und Gleitverschleiß und Angaben zum Wirkungsgradverhalten aus Versuchen. TU München 1978.
60. BROSSMANN, U. Über den Einfluß der Zahndruckausrundung und des Schrägungswinkels auf Beanspruchung und Festigkeit schrägverzahnter Stirnräder. TU München 1979.
61. PLEWE, H.-J. Untersuchungen über den Abriebverschleiß von geschmierten, langsam laufenden Zahnräder. TU München 1980.
62. FRESEN, G. Untersuchungen über die Tragfähigkeit von Hypoid- und Kegelradgetrieben (Grübchen, Ridging, Rippling, Graufleckigkeit und Zahnbruch). TU München 1981.
63. OSTER, P. Beanspruchung der Zahndruckflanken unter Bedingungen der Elastohydrodynamik. TU München 1982.
64. HORNUNG, K. Zahnräder aus Bainitischem Gusseisen mit Kugelgraphit. TU München 1983.
65. WEISS, T. Zum Festigkeits- und Verzugsverhalten von randschichtgehärteten Zahnräder. TU München 1983.
66. VOJACEK, H. Das Reibungsverhalten von Fluiden unter elastohydrodynamischen Bedingungen. Einfluß der chem. Struktur des Fluides, der Werkstoffe und der Makro- und Mikrogeometrie der Gleit/Wälzkörper. TU München 1984.
67. SCHÖNNENBECK, G. Einfluß der Schmierstoffe auf die Zahndruckflankenermüdung (Graufleckigkeit und Grübchenbildung) hauptsächlich im Umfangsgeschwindigkeitsbereich 1...9 m/s. TU München 1984.
68. WIENER, H. Untersuchung der Rollenkinematik im Axial-Pendelrollenlager. TU München 1984.
69. MATHIAK, D. Untersuchungen über Flankentragfähigkeit, Zahndrucktragfähigkeit und Wirkungsgrad von Zylinderschneckengetrieben. TU München 1984.
70. STRASSER, H. Einflüsse von Verzahnungsgeometrie, Werkstoff und Wärmebehandlung auf die Zahndrucktragfähigkeit. TU München 1984.
71. JOACHIM, F.-J. Untersuchungen zur Grübchenbildung an vergüteten und normalisierten Zahnräder (Einfluß von Werkstoffpaarung, Oberflächen- und Eigenspannungszustand). TU München 1984.
72. GERBER, H. Innere dynamische Zusatzkräfte bei Stirnradgetrieben - Modellbildung, innere Anregung und Dämpfung. TU München 1984.
73. SIMON, M. Messung von elasto-hydrodynamischen Parametern und ihre Auswirkung auf die Grübchenenttragfähigkeit vergüteter Scheiben und Zahnräder. TU München 1984.
74. SCHMIDT, W. Untersuchungen zur Grübchen- und zur Zahndrucktragfähigkeit geradverzahnter evolventischer Innenstirnräder. TU München 1984.
75. FUNCK, G. Wärmeabführung bei Getrieben unter quasistationären Betriebsbedingungen. TU München 1985.
76. PAUL, M. Einfluß von Balligkeit und Lageabweichungen auf die Zahndruckbeanspruchung spiralverzahnter Kegelräder. TU München 1986.
77. HOPPE, F. Das Abschalt- und Betriebsverhalten von mechanischen Sicherheitskupplungen. TU München 1986.
78. MICHAELIS, K. Die Integraltemperatur zur Beurteilung der Freibtragfähigkeit von Stirnradgetrieben. TU München 1987.
79. WECH, L. Untersuchungen zum Wirkungsgrad von Kegelrad- und Hypoidgetrieben. TU München 1987.

80. KNAUER, G. Zur Grübchentragfähigkeit einsatzgehärteter Zahnräder - Einfluß von Werkstoff, Schmierstoff und Betriebstemperatur. TU München 1988.
81. PLACZEK, T. Lastverteilung und Flankenkorrektur in gerad- und schrägverzahnten Stirnradstufen. TU München 1988.
82. PFLAUM, H. Das Reibungsverhalten ölgeschmierter Kegelreibkupplungen in Synchronisationseinrichtungen von Kraftfahrzeug-Schaltgetrieben. TU München 1988.
83. BRINCK, P. Zahnfußtragfähigkeit oberflächengehärteter Stirnräder bei Lastrichtungsumkehr. TU München 1989.
84. entfallen
85. NEUPERT, K. Verschleißtragfähigkeit und Wirkungsgrad von Zylinder-Schneckengetrieben. TU München 1990.
86. PREXLER, F. Einfluß der Wälzflächenrauheit auf die Grübchenbildung vergüteter Scheiben im EHD-Kontakt. TU München 1990.
87. SCHALLER, K.-V. Betriebsfestigkeitsuntersuchungen zur Grübchenbildung an einsatzgehärteten Stirnradflanken. TU München 1990.
88. COLLENBERG, H.-F. Untersuchungen zur Freßtragfähigkeit schnellaufender Stirnradgetriebe. TU München 1991.
89. MÜLLER, R. Schwingungs- und Geräuschanregung bei Stirnradgetrieben. TU München 1991.
90. ANZINGER, M. Werkstoff- und Fertigungseinflüsse auf die Zahnfußtragfähigkeit, insbesondere im hohen Zeitfestigkeitsgebiet. TU München 1991.
91. KAGERER, E. Messung von elastohydrodynamischen Parametern im hochbelasteten Scheiben- und Zahnkontakt. TU München 1991.
92. HASLINGER, K. Untersuchungen zur Grübchentragfähigkeit profilkorrigierter Zahnräder. TU München 1991.
93. VOLLHÜTER, F. Einfluß der Achsversetzung auf die Grübchen- und Zahnfußtragfähigkeit von spiralf verzahnten Kegelrädern. TU München 1992.
94. PINNEKAMP, B. Das Schaltverhalten von PKW-Getriebesynchronisierungen. TU München 1992.
95. SCHUBERT, M. Einfluß der Befestigungsart und Radkranzdicke auf die Zahntragfähigkeit von Innenstirnräder. TU München 1993.
96. STEINGRÖVER, K. Untersuchung zu Verschleiß, Verlustgrad und Fressen bei Zylinder-Schneckengetrieben. TU München 1993.
97. ELSTORPFF, M.-G. Einflüsse auf die Grübchentragfähigkeit einsatzgehärteter Zahnräder bis in das höchste Zeitfestigkeitsgebiet. TU München 1993.
98. EMMERT, S. Untersuchungen zur Zahnflankenermüdung (Graufleckigkeit, Grübchenbildung) schnellaufender Stirnradgetriebe. TU München 1994.
99. SUCHANDT, Th. Betriebsfestigkeitsuntersuchungen zur Zahnfußtragfähigkeit einsatzgehärteter Zahnräder und zur Bruchfestigkeit vergüteter Laschenketten. TU München 1994.
100. HÄMMERL, B. Lebensdauer- und Temperaturverhalten ölgekühlter Lamellenkupplungen bei Lastkollektivebeanspruchung. TU München 1994.
101. WEISS, R. Einfluß der Ölalterung auf die Zahnflankentragfähigkeit. TU München 1994.
102. SCHLENK, L. Untersuchungen zur Freßtragfähigkeit von Großzahnrädern. TU München 1995.
103. MANN, U. Schmierfilmbildung in elastohydrodynamischen Kontakten, Einfluß verschiedener Grundöle und Viskositäts-Index-Verbesserer. TU München 1995.
104. RUDZEWSKI, S. Systemtechnische Verknüpfung eingeführter Getriebeberechnungsprogramme. TU München 1995.
105. RANK, R. Untersuchungen zur Lebensdauerprüfung von Synchronisierungen. TU München 1995.
106. EBERSPÄCHER, C. Reihenfolgeeffekte bei der Grübchen-Betriebsfestigkeit einsatzgehärteter Zahnräder. TU München 1995.

107. RANK, B. Untersuchungen zur Grübchenbildung bei Zylinder-Schneckengetrieben. TU München 1996.
108. SATTELBERGER, K. Schwingungs- und Geräuschanregung bei ein- und mehrstufigen Stirnradgetrieben. TU München 1997.
109. HIRSCHMANN, V. Tragfähigkeitsuntersuchungen an stufenlosen Umschlingungsgetrieben. TU München 1997.
110. THOMAS, J. Flankentragfähigkeit und Laufverhalten von hartfeinbearbeiteten Kegelrädern. TU München 1998.
111. WIKIDAL, F. Berechnung der Flankenpressung gerad- und schrägverzahnter Stirnräder für last- und fertigungsbedingte Abweichungen. TU München 1998.
112. PERPONCHER, V., CH. Einflüsse von Reibflächentopographie und Beanspruchungen auf das Reibungs- und Verschleißverhalten von Synchronisierungen. TU München 1998.
113. SCHEDL, U. Einfluß des Schmierstoffs auf die Grübchenlebensdauer einsatzgehärteter Zahnräder. TU München 1998.
114. VOLLMER, T. Methodik zur Entwicklung einer Fahrstrategie für Fahrzeuge, ausgeführt am Beispiel des Autarken Hybrids. TU München 1998.
115. HEITMANN, A. Entwicklung des  $i^2$ -Getriebes für den Autarken Hybrid-Antriebsstrang. TU München 1998.
116. PFLEGER, F. Schalt- und Lebensdauerverhalten von Lamellenkupplungen. TU München 1998.
117. KERSCHL, S. Der Autarke Hybrid - Optimierung des Antriebsstrangs hinsichtlich Energieverbrauch und Bestimmung des Einsparpotentials, TU München 1998.
118. DÖBEREINER, R. Tragfähigkeit von Hochverzahnungen geringer Schwingungsanregung, TU München 1998.
119. WEIGAND, U. Werkstoff- und Wärmebehandlungseinflüsse auf die Zahnfußtragfähigkeit, TU München 1999.
120. SCHRADE, U. Einfluß von Verzahnungsgeometrie und Betriebsbedingungen auf die Graufleckentragfähigkeit von Stirnradgetrieben, TU München 2000.
121. KÖLL, J. Konstruktion des Getriebes für ein Pkw-Hybridantriebssystem, TU München 2000.
122. FÖRSTER, W. Der Lastschaltvorgang beim stufenlosen  $i^2$ -Getriebe des Autarken Hybrid-Antriebsstrangs, TU München 1999.
123. LANGE, N. Hochfresstragfähige Schneckengetriebe mit Rädern aus Sphaeroguß, TU München 2000.
124. LUTZ, M. Methoden zur rechnerischen Ermittlung und Optimierung von Tragbildern an Schneckengetrieben, TU München 2000.
125. KOPATSCH, F. Wirksamkeit von Viskositätsindex-Verbesserern im EHD-Zahnradkontakt, TU München 2000.
126. BAYERDÖRFER, I. Einfluß von betriebsbedingten Schmierstoffveränderungen auf die Flankentragfähigkeit einsatzgehärteter Stirnräder, TU München 2000.
127. TOBIE, T. Zur Grübchen- und Zahnfußtragfähigkeit einsatzgehärteter Zahnräder, TU München 2001.
128. STAHL, K. Grübchentragfähigkeit einsatzgehärteter Gerad- und Schrägverzahnungen unter besonderer Berücksichtigung der Pressungsverteilung, TU München 2001.
129. NEUMÜLLER, M. Einfluß der Ölalterung auf Reibungs- und Verschleißverhalten von Synchronisierungen, TU München 2001.
130. MOSBACH, C. Das Reibungs- und Reibschwung-Verhalten nasslaufender Lamellenkupplungen, TU München 2002.
131. DYLA, A. Modell einer durchgängig rechnerbasierten Produktentwicklung, TU München 2002.
132. GRASWALD, C. Reibung im elastohydrodynamischen Kontakt von Reibradgetrieben, TU München 2002.

133. GEISER, H.. Grundlagen zur Beurteilung des Schwingungsverhaltens von Stirnrädern, TU München 2002.
134. SCHINAGL, S. Zahndrucktragfähigkeit schrägverzahnter Stirnräder unter Berücksichtigung der Lastverteilung, TU München 2002.
135. DOLESCHEL, A. Wirkungsgradberechnung von Zahnradgetrieben in Abhängigkeit vom Schmierstoff, TU München 2003.
136. ANNAST, R. Kegelrad-Flankenbruch, TU München 2003
137. SÜSSMUTH, J.-F. Eignungsbeurteilung von Schmierstoffen für stufenlose Umschaltungsgetriebe, TU München 2003.
138. MATTEN, D. Methode zur Entwicklung ingenieurwissenschaftlicher Berechnungsprogramme, TU München 2003.
139. GEIER, N. Untersuchung des Reibungs- und Verschleißverhaltens nasslaufender Kupplungen in Abhängigkeit ihrer Reibflächentopographie, TU München 2003
140. HERTTER, T. Rechnerischer Festigkeitsnachweis der Ermüdungstragfähigkeit vergüteter und einsatzgehärteter Stirnräder, TU München 2003.
141. KRIEGER, H. Alterung von Schmierstoffen im Zahnradprüfstand und in Praxisgetrieben, TU München 2004.
142. STEUTZGER, M. Einfluß der Baugröße auf die Zahndrucktragfähigkeit einsatzgehärteter Stirnräder, TU München 2004.
143. SCHMIDBAUER, T. Aufbau und Erprobung des Autarken Hybrid-Antriebsstrangs im Versuchsfahrzeug, TU München 2004.
144. LIU, W. Einfluss verschiedener Fertigungsverfahren auf die Graufleckentragfähigkeit von Zahnradgetrieben, TU München 2004.
145. FEHLING, R. Höhere Tragfähigkeit bei Zahnradflanken durch eine nichtevolventische Profilmodifikation, TU München 2004.
146. GUTTENBERG, P. Der autarke Hybrid am Prüfstand - Funktion, Kraftstoffverbrauch und energetische Analyse, TU München 2004
147. WIMMER, T. Einflüsse auf das Lastübernahmeverhalten von nasslaufenden Lamellenkupplungen, TU München 2004.
148. RADEV, T. Einfluss des Schmierstoffes auf die Grübchentragfähigkeit einsatzgehärteter Zahnräder - Entwicklung des Praxisnahen Pittingtests, TU München 2005
149. KRASTEV, I. Optimierung des Lastschaltvorgangs im  $i^2$ -Getriebe, TU München 2005
150. HEILEMANN, J. Tragfähigkeit und Wirkungsgrad bei unterschiedlichen Schnecken-Zahnflankenformen unter Berücksichtigung der Oberflächenhärte und Härtetiefe, TU München 2005.
151. HEIZENRÖTHER, M. Das Stirnraddifferenzial mit Innenverzahnung im Vergleich zum Kegelraddifferenzial inklusive einer Sperrwertanalyse, TU München 2005.
152. WIMMER, A. Lastverluste von Stirnradverzahnungen - Konstruktive Einflüsse, Wirkungsgradmaximierung, Tribologie, TU München 2006.
153. BRUCKMEIER, S. Flankenbruch bei Stirnradgetrieben, TU München 2006.
154. HAUSER, C. Einfluss der Ölalterung auf Reibcharakteristik und Reibschrägverhalten von Lamellenkupplungen, TU München 2007.
155. GROSSL, A. Einfluss von PVD-Beschichtungen auf die Flanken- und Fußtragfähigkeit einsatzgehärteter Stirnräder, TU München 2007.
156. STEINBERGER, G. Optimale Grübchentragfähigkeit von Schrägverzahnungen, TU München 2007.
157. JAROS, M. Integration des STEP-Produktmodells in den Getriebeentwicklungsprozess, TU München 2007.
158. RADEV, S. Einfluss von Flankenkorrekturen auf das Anregungsverhalten gerad- und schrägverzahnter Stirnradpaarungen, TU München 2007.
159. BRAYKOFF, C. Tragfähigkeit kleinmoduliger Zahnräder, TU München 2007.

160. STANGL, M. Methodik zur kinematischen und kinetischen Berechnung mehrwelliger Planeten-Koppelgetriebe. TU München 2007.
161. STENICO, A. Werkstoffmechanische Untersuchungen zur Zahnußtragfähigkeit einsatzgehärteter Zahnräder. TU München 2007.
162. SCHWIENBACHER, S. Einfluss von Schleifbrand auf die Flankentragfähigkeit einsatzgehärteter Zahnräder. TU München 2008.
163. WINKLER, J. Tribologischer Schichtaufbau bei Synchronisierungen und sein Einfluss auf Reibung und Verschleiß. TU München 2008.
164. WIRTH, C. Zur Tragfähigkeit von Kegelrad- und Hypoidgetrieben. TU München 2008.
165. KREIL, O. Einfluss der Oberflächenstruktur auf Druckverteilung und Schmierfilmdicke im EHD-Kontakt. TU München 2009.
166. OTTO, H.-P. Flank load carrying capacity and power loss reduction by minimised lubrication. TU München 2009.
167. OTTO, M. Lastverteilung und Zahnradtragfähigkeit von schrägverzahnten Stirnrädern. TU München 2009.
168. TOMIC, D. Zum Verschleiß von Kegelreibkupplungen - Einflüsse von Belastung und Schmierstoff auf Reibschiechteigenschaften. TU München 2009.
169. WEISEL, C. Schneckengetriebe mit lokal begrenztem Tragbild. TU München 2009.
170. WEITL, R. Zur Tragfähigkeitsberechnung von Wälzlagern und Stirnrädern. TU München 2010.
171. MULZER, F. Systematik hochübersetzender koaxialer Getriebe. TU München 2010.
172. SCHUDY, J. Untersuchungen zur Flankentragfähigkeit von Außen- und Innenverzahnungen. TU München 2010.
173. BRETL, N. Einflüsse auf die Zahnußtragfähigkeit einsatzgehärteter Zahnräder im Bereich hoher Lastspielzahlen. TU München 2010.
174. GRIGGEL, T. Einfluss von Korrekturen und Fertigungsabweichungen auf die Schwingungsanregung von Stirnrädern. TU München 2010.
175. LAYHER, M. Einfluss der Schmierstoffadditivierung auf das Reibungsverhalten nasslaufender Reibscheallemente. TU München 2011.
176. HOCHMANN, M. Zahnradtragfähigkeit bei Schmierung mit Getriebefließfetten. TU München 2011.
177. DETZEL, J. Tribologische Untersuchungen an Achsgetrieben zur Verbesserung des Wirkungsgrads. TU München 2011.
178. ZIEGLER, A. Zur verkürzten Systemlebensdauerprüfung von Zahnradgetrieben. TU München 2011.
179. THOMA, F. Lastübertragung im verformten System Lager-Welle-Zahnrad. TU München 2012.
180. FRÜHE, T. Berechnung und Minimierung der Zahnußspannung von Standard- und LowLos-Verzahnungen. TU München 2012.
181. WITZIG, J. Flankenbruch - Eine Grenze der Zahnradtragfähigkeit in der Werkstofftiefe. TU München 2012.
182. KLEIN, M. Zur Fresstragfähigkeit von Kegelrad- und Hypoidgetrieben. TU München 2012.
183. KURTH, F. Efficiency Determination and Synthesis of Complex-Compound Planetary Gear Transmissions. TU München 2012.
184. WOHLLEBER, F. Thermischer Haushalt nasslaufender Lamellenkupplungen. TU München 2012.
185. HEIDER, M. Schwingungsverhalten von Zahnradgetrieben - Beurteilung und Optimierung des Schwingungsverhaltens von Stirnrad- und Planetengetrieben. TU München 2012.
186. MONZ, A. Tragfähigkeit und Wirkungsgrad von Schneckengetrieben bei Schmierung mit konsistenten Getriebefetten. TU München 2012.
187. WIRTH, M. Schleppmomente in Synchronisierungen von Fahrzeuggetrieben. TU München 2012.
188. BANSEMIR, G. Konstruktionsleitsystem für den durchgängig rechnerbasierten Zahnradgetriebeentwurf. TU München 2012.

189. HERGESELL, M. Grauflecken- und Grübchenbildung an Einsatzgehärteten Zahnrädern mittlerer und kleiner Baugröße. TU München 2013.
190. KOLLER, P. Steigerung der Zahnflankentragfähigkeit durch Optimierung von Eigenspannungs- und Oberflächenzustand. TU München 2013.
191. SCHLEICH, T. Temperatur- und Verlustleistungsverhalten von Wälzlagern in Getrieben. TU München 2013.
192. STEAMPLINGER, J.-P. Tragfähigkeit und Wirkungsgrad von Stirnradgetrieben bei Schmierung mit hochviskosen Fluiden und Fetten NLGI 0,1 und 2. TU München 2013.
193. FÜRSTENBERGER, M. Betriebsverhalten verlustoptimierter Kunststoffzahnräder. TU München 2013.
194. HOMBAUER, M. Grauflecken an Kegelrad- und Hypoidverzahnungen und deren Einfluss auf die Grübchentragfähigkeit. TU München 2013.
195. MAYER, J. Einfluss der Oberfläche und des Schmierstoffs auf das Reibungsverhalten im EHD-Kontakt. TU München 2013.
196. BAUHOFFER, H. Kontakt- und Laufverhalten von Kronenrädern unter Montageabweichungen. TU München 2014.
197. LECHNER, C. Energiebilanzierung des CVT-Hybrid. TU München 2014.
198. HINTERSTOISSE, M. Zur Optimierung des Wirkungsgrades von Stirnradgetrieben TU München 2014.
199. LOMBARDO, S. Einfluss von verschiedenen Carbonitrierverfahren auf die Zahnfuß- sowie Zahnflankentragfähigkeit von Stirnräder. TU München 2014.
200. IDLER, S. Die Fresstragfähigkeit stufenloser Umschaltungsgetriebe. TU München 2014.
201. LANGHEINRICH, A. Geometrie, Beanspruchung und Verformung asymmetrischer Stirnradverzahnungen. TU München 2014.
202. MATT, P. Einfluss der Stirnkanten auf die Tragfähigkeit von Verzahnungen. TU München 2014.
203. HENSEL, M. Thermische Beanspruchbarkeit und Lebensdauerverhalten von nasslaufenden Lamellenkupplungen. TU München 2014.
204. GEIGER, J. Wirkungsgrad und Wärmeaushalt von Zahnradgetrieben bei instationären Betriebszuständen. TU München 2014.
205. SIGMUND, W. Untersuchung und Simulation des Verschleißverhaltens von Schneckengetrieben mit unvollständigem Tragbild. TU München 2015.
206. PARLOW, J. Erweiterter Verzahnungsentwurf im Anforderungs- und Gesamtsystemkontext. TU München 2016.
207. NEUBAUER, B. Lastverteilung und Anregungsverhalten in Planetengetriebesystemen. TU München 2016.