

# Abschätzung des Einzugsbereichs unter Stellgrößenbeschränkung für die passivitätsbasierte Regelung mittels Takagi-Sugeno Formulierung

Sergio Delgado, Klaus J. Diepold  
Lehrstuhl für Regelungstechnik, Technische Universität München  
Boltzmannstr. 15, 85748 Garching  
E-Mail: s.delgado@tum.de, kj.diepold@mytum.de

*Abstract: In diesem Beitrag wird ein Ansatz vorgestellt, der die Takagi-Sugeno Darstellung für die Parametrierung eines nichtlinearen, passivitätsbasierten Regelungsansatzes nutzt. Der Einzugsbereich der Ruhelage – bzw. eine Abschätzung davon – kann damit auch unter Berücksichtigung von Stellgrößenbeschränkung maximiert werden.*

## 1 Einleitung

Passivitätsbasierte Ansätze ermöglichen einen systematischen Reglerentwurf auf der Grundlage einer energiebasierten Systembeschreibung. Die Methode *Interconnection and Damping Assignment Passivity Based Control* (IDA-PBC) stellt eine Möglichkeit zur Stabilisierung dynamischer Systeme dar [3]. Ziel von IDA-PBC ist es, ein (in der Regel steuerungsaffines) nichtlineares System durch Zustandsrückführung in ein port-Hamiltonsches (PH) System zu überführen. PH-Systeme sind durch eine Energiefunktion sowie eine Struktur- und Dämpfungsmatrix charakterisiert, welche den Energieaustausch, bzw. die Energiedissipation im System beschreiben. Erfüllt das resultierende PH System bestimmte Definitheitseigenschaften bezüglich der Energiefunktion und der Dissipationsmatrix, so kann gleichzeitig die Energiefunktion als Ljapunowfunktion für den Stabilitätsbeweis herangezogen werden. Trotz der systematischen Vorgehensweise des Reglerentwurfs weist die Methode Nachteile auf. Zum Einen ist die Parametrierung schwierig: Auch wenn lokal eine gewünschte lineare Dynamik zugewiesen werden kann [4], ist eine sinnvolle Wahl der übrigen freien Parameter intransparent und häufig aufwendig, wenn zusätzlich der Einzugsbereich – und eine Abschätzung dessen – optimiert werden soll [7]. Zum anderen sind Stellgrößenbeschränkungen bislang noch weitestgehend unberücksichtigt. Abhilfe soll die TS-Formulierung schaffen.

Die Formulierung eines nichtlinearen dynamischen Systems in Takagi-Sugeno (TS) Struktur resultiert in einer exakten Darstellung der Systemdynamik auf Basis einer endlichen Anzahl an linearen Systemen [1]. Dadurch kann die lineare Systemtheorie angewandt und Entwurfsergebnisse direkt auf das nichtlineare Originalsystem übertragen werden. Allerdings ist dies im Allgemeinen nicht global erlaubt, da das TS-System die nichtlineare Systemdynamik zumeist nur in einem festzulegenden Bereich (lokaler Gültigkeitssektor) wiedergibt. Besonders bei der Abschätzung eines Einzugsbereiches ist die Berücksichtigung des Gültigkeitssektors wichtig. Im Allgemeinen basiert ein dafür nötiger Stabilitätsnachweis von TS-Systemen auf quadratischen Ljapunowfunktionen, die der Lösung einer konvexen Optimierung in Form von linearen Matrixungleichungen (LMIs) entsprechen. Hierbei bleibt gegenwärtig der Gültigkeitssektor des TS-Modelles zumeist unberücksichtigt [2].

Der Beitrag gliedert sich wie folgt. Im zweiten Abschnitt wird die Methode IDA-PBC zur Stabilisierung nichtlinearer Systeme vorgestellt, sowie die Abschätzung eines möglichst großen Einzugsbereiches mittels der TS-Formulierung zusammengefasst. Darüber hinaus wird auf LMIs

zur Berücksichtigung von Stellgrößen- und Sektorbeschränkungen eingegangen. Im dritten Abschnitt werden darauf aufbauend die freien Parameter eines IDA-PBC geregelten Systems sowie die Sektorschranken der entsprechenden TS-Formulierung optimiert. Das Ziel dabei ist es, den abgeschätzten Einzugsbereich, auch unter Berücksichtigung von Stellgrößenbeschränkungen, zu maximieren. Der Beitrag schließt mit einer kurzen Zusammenfassung und einem Ausblick auf ergänzende Forschungsarbeiten.

## 2 Grundlagen

### 2.1 IDA-PBC

Wir betrachten nichtlineare, steuerungsaffine Systeme der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}. \quad (1)$$

Das Ziel der Methode IDA-PBC ist es, das System (1) durch eine nichtlineare Zustandsrückführung in ein port-Hamiltonsches (PH) System

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{J}_d(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_d(\mathbf{x}))\nabla_{\mathbf{x}}H_d(\mathbf{x}) \quad (2)$$

zu überführen. Dabei ist  $H_d(\mathbf{x})$  die gewünschte, verallgemeinerte Energiefunktion des geregelten Systems,  $\mathbf{J}_d(\mathbf{x})$  ist die schiefsymmetrische Matrix, die den Energieaustausch im System beschreibt, und  $\mathbf{R}_d(\mathbf{x})$  die symmetrische Matrix, welche die Dissipation der dem geregelten System zugewiesenen Energie  $H_d$  darstellt.

**Theorem 2.1** *Die Ruhelage  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  des PH-Systems (2) ist lokal asymptotisch stabil, falls  $H_d(\mathbf{x})$  ein striktes Minimum im Ursprung aufweist, und zusätzlich die Matrix  $\mathbf{R}_d(\mathbf{x})$  positiv definit ist. Ein sicherer Teil des Einzugsgebiets ist die offene Menge, welches von der größten geschlossenen Höhenlinie (Hyperfläche) von  $H_d(\mathbf{x})$  begrenzt wird, wo  $\mathbf{R}_d(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$ .*

Der Beweis beruht auf der direkten Ljapunow-Methode mit der Ljapunowfunktion  $H_d(\mathbf{x})$ . Aus dem Vergleich von (1) mit (2) ergibt sich die Bestimmungsgleichung

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} = (\mathbf{J}_d(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_d(\mathbf{x}))\nabla_{\mathbf{x}}H_d(\mathbf{x}). \quad (3)$$

Da die Eingangsmatrix  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$  in der Regel nicht invertierbar ist, kann das Regelgesetz nicht direkt aus (3) bestimmt werden. Stattdessen muss die Dynamik, welche nicht unmittelbar von der Stellgröße beeinflussbar ist, die Restriktionsgleichung

$$\mathbf{G}_{\perp}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}_{\perp}(\mathbf{x})(\mathbf{J}_d(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_d(\mathbf{x}))\nabla_{\mathbf{x}}H_d(\mathbf{x}) \quad (4)$$

erfüllen. Dabei ist  $\mathbf{G}_{\perp}(\mathbf{x})$  der sogenannte *Linksannihilator* der Eingangsmatrix  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ , d.h.,  $\mathbf{G}_{\perp}(\mathbf{x})$  hat vollen Rang und erfüllt  $\mathbf{G}_{\perp}(\mathbf{x})\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ .

Es existieren unterschiedliche Ansätze zur Lösung der Restriktionsgleichungen (4): Beim verbreiteten *nicht-algebraischen* Ansatz – welchen wir hier auch verwenden – sind die Matrizen  $\mathbf{J}_d(\mathbf{x})$  und  $\mathbf{R}_d(\mathbf{x})$  festzulegende Entwurfsparameter<sup>1</sup>. Die Energie des geregelten Systems kann anschließend aus dem Satz partieller Differentialgleichung (4) derart bestimmt werden, dass sich ein striktes Minimum in der gewünschten Ruhelage ergibt<sup>2</sup>:

$$\mathbf{0} = \arg \min_{\mathbf{x}} H_d(\mathbf{x}). \quad (5)$$

<sup>1</sup>Die Matrix  $\mathbf{R}_d(\mathbf{x})$  muss dabei positiv definit sein.

<sup>2</sup>Ohne Einschränkung der Allgemeinheit ist die gewünschte Ruhelage  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$

Hat man eine Energiefunktion  $H_d(\mathbf{x})$  gefunden, welche (4) löst, und (5) erfüllt, so kann man die statische Zustandsrückführung, welche das System (1) in das PH-System (2) transformiert, aus (das Argument  $\mathbf{x}$  weglassend)

$$\mathbf{u} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T ((\mathbf{J}_d - \mathbf{R}_d) \nabla H_d - \mathbf{f}) \quad (6)$$

berechnen.

## 2.2 Takagi-Sugeno basierte Abschätzung des Einzugsbereichs

Im Folgenden wird kurz auf die Grundlagen der LMI-basierten Stabilitätsanalyse eines nichtlinearen Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (7)$$

mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , dem Eingangsvektor  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  und der Gleichgewichtslage  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  (o.E.d.A.), auf Basis des TS-Formalismus und einer quadratischen Lyapunov-Funktion

$$V = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}, \quad \mathbf{P} > \mathbf{0} \quad (8)$$

eingegangen.

Kann das nichtlineare System (7) in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \mathbf{u}, \quad (9)$$

mit  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , geschrieben werden, existiert eine äquivalente Takagi-Sugeno Darstellung

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}_s) (\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i \mathbf{u}). \quad (10)$$

Es besteht aus  $r$  linearen Subsystemen  $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , die durch skalare, nichtlineare Funktionen  $h_i(\mathbf{z}_s)$  zueinander gewichtet werden. Der Prämissenvektor  $\mathbf{z}_s \in \mathbb{R}^p$  enthält in der Regel die Systemzustände sowie Systemeingänge, die nichtlinear in das mathematische Modell (7) eingehen. Das zeitliche Verhalten von (10) ist identisch zu (9) und (7), solange die Blendfunktionen die konvexe Summeneigenschaft

$$\sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}_s) = 1, \quad h_i(\mathbf{z}_s) \geq 0 \quad \forall h_i \quad (11)$$

erfüllen. Die genaue Transformation von (9) in (10) kann beispielsweise in [1] nachgelesen werden.

Für ein TS-System kann entsprechend ein TS-Regler

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}_c) (\mathbf{K}_i \mathbf{x}) \quad (12)$$

entworfen werden. In anderen Worten kann für jedes lineare Subsystem ein eigenständiger linearer Regler entwickelt werden, die mittels der Blendfunktionen  $h_i(\mathbf{z}_c)$  interpoliert werden. Auch diese müssen die konvexe Summeneigenschaft

$$\sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}_c) = 1, \quad h_i(\mathbf{z}_c) \geq 0 \quad \forall h_i \quad (13)$$

erfüllen, sind aber ansonsten jedoch frei wählbar. Häufig werden allerdings die Blendfunktionen der TS-Modellierung herangezogen  $\mathbf{z}_c = \mathbf{z}_s$ ,  $h_i(\mathbf{z}_c) = h_j(\mathbf{z}_s)$ , wodurch der entstehende TS-Regler als PDC (*parallel distributed compensation*) bezeichnet wird. Der geschlossene Regelkreis lautet

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\mathbf{z}_s) h_j(\mathbf{z}_c) (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j) \mathbf{x}. \quad (14)$$

Gemäß des folgenden Theorems kann die asymptotische Stabilität von (14) auf Basis einer quadratischen Ljapunowfunktion

$$V = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}, \quad \mathbf{P} > \mathbf{0} \quad (15)$$

analysiert werden [1]:

**Theorem 2.2** *Der Ursprung  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  eines TS-Systems (10) wird durch einen Regler (12) global asymptotisch stabilisiert, wenn eine positiv definite Matrix  $\mathbf{P} > \mathbf{0}$  existiert, sodass die linearen Matrixungleichungen (LMI)*

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{G}_{ii} &< \mathbf{0}, \quad \forall i \\ \frac{(\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji})^T}{2} \mathbf{P} + \mathbf{P} \frac{(\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji})}{2} &< \mathbf{0}, \quad \forall i < j \leq r, \end{aligned} \quad (16)$$

mit

$$\mathbf{G}_{ij} = \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j \quad (17)$$

erfüllt sind.

Sobald allerdings Stellgrößenbeschränkungen

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \begin{cases} -u_{i,max} & \text{falls } u_i \leq -u_{i,max}, \\ u_{i,max} & \text{falls } u_i \geq u_{i,max}, \\ u_i & \text{sonst,} \end{cases} \quad \forall i \in \mathbb{N}_{1:m} \quad (18)$$

eine Rolle spielen, ist ein globaler Stabilitätsnachweis nicht mehr möglich. Vielmehr ist nun eine Umgebung

$$\mathcal{E}(\mathbf{P}, \eta) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \leq \eta \}, \quad \mathbf{P} > \mathbf{0} \quad (19)$$

um den Ursprung zu finden, in der  $|u_i| \leq u_{i,max}$  geschlossen gewährleistet ist. Die Umgebung (19) wird von der Höhenlinie  $\partial \mathcal{E}(\mathbf{P}, \eta)$  mit dem zugehörigen Wert  $\eta > 0$  begrenzt. Die entsprechende LMI, die zu berücksichtigen ist, lautet [5]:

**Korollar 2.1** *Das geregelte System (7), (12) stabilisiert den Ursprung  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  asymptotisch für alle Anfangswerte  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(\mathbf{P}, \eta)$ , wenn eine positiv definite Matrix  $\mathbf{P} > \mathbf{0}$  und eine Höhenlinie  $\eta > 0$  existieren, sodass neben (16)*

$$\mathbf{k}_{i,l}^T \left( \frac{\mathbf{P}}{\eta} \right)^{-1} \mathbf{k}_{i,l} \leq u_{i,max}^2, \quad \forall u_i, \forall l \in \mathbb{N}_{1:r} \quad (20)$$

für alle Eingangsgrößen erfüllt ist. Die Vektoren  $\mathbf{k}_{i,l} \in \mathbb{R}^n$  sind jeweils durch den  $i$ -ten Zeilenvektor des  $l$ -ten linearen Reglers in (12) gegeben.

Um nun die geforderten Größen  $\mathbf{P}$  und  $\eta$  effizient zu bestimmen, bietet es sich an, das Volumen des Einzugsbereiches unter Einhaltung sämtlicher Restriktionen (Stabilität, Stellschranken) zu maximieren. Dies erfolgt über das Lösen eines sogenannten konvexen MAXDET-Problem (*determinant maximization problem*) [6] mit LMI Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{Q} > \mathbf{0}} \quad & -\log \det(\mathbf{Q}), \text{ sodass} & (21) \\ (a) \quad & \mathbf{Q}\mathbf{G}_{ii}^T + \mathbf{G}_{ii}\mathbf{Q} < \mathbf{0}, \quad \forall i \\ (b) \quad & \mathbf{Q} \frac{(\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji})^T}{2} + \frac{(\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji})}{2} \mathbf{Q} < \mathbf{0}, \quad \forall i < j \leq r, \\ (c) \quad & \mathbf{k}_{i,l}^T \mathbf{Q} \mathbf{k}_{i,l} \leq u_{i,max}^2, \quad \forall u_i, \forall l \in \mathbb{N}_{1:r} \end{aligned}$$

mit  $\mathbf{Q} = (\mathbf{P}/\eta)^{-1}$ . Die LMI-Nebenbedingungen (21) (a) und (b) sind gleichbedeutend mit (16) und sichern somit die asymptotische Stabilität. Die Bedingung (d) entspricht der LMI (20) zur Berücksichtigung von Stellschranken. Ist das konvexe Optimierungsproblem (21) gelöst, kann ein beliebiger Wert  $\eta > 0$  definiert und somit  $\mathbf{P} = (\mathbf{Q}/\eta)^{-1}$  bestimmt werden.

### 3 TS trifft IDA-PBC

Die Tatsache, dass IDA-PBC konstruktiv eine Ljapunowfunktion für den Stabilitätsbeweis liefert, ist ein großer Vorteil der Methode. Die Abschätzung des Einzugsbereichs der gewünschten Ruhelage ist jedoch – wie von der Ljapunow-Stabilitätstheorie bekannt – sehr konservativ. Zusätzlich werden keine Stellgrößenbeschränkungen berücksichtigt. Und an dieser Stelle bietet die TS-Welt einen erheblichen Vorteil, den wir im Folgenden vorstellen möchten. Das Regelgesetz (6) und das in PH-Darstellung vorliegende geregelte System (2) werden zunächst in TS-Form dargestellt

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{J}_d - \mathbf{R}_d) \nabla_{\mathbf{x}} H_d = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}_s) \mathbf{A}_i \mathbf{x}. \quad (22)$$

$$\mathbf{u} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T ((\mathbf{J}_d - \mathbf{R}_d) \nabla H_d - \mathbf{f}) = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}_c) (\mathbf{K}_i \mathbf{x}). \quad (23)$$

Diese TS-Formulierung kann für eine Optimierung gemäß Korollar 2.1 verwendet werden, um freie Parameter hinsichtlich der Größe des Einzugsbereichs zu bestimmen. Dabei können ebenfalls Stellgrößenbeschränkungen berücksichtigt werden.

#### 3.1 Stabilisierung mittels IDA-PBC

Der Ansatz soll nun anhand eines numerischen Beispiels gezeigt werden. Gegeben sei das nicht-lineare System

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad (24)$$

welches in der Ruhelage  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  stabilisiert werden soll.

### 3.1.1 Reglerentwurf

Der Einfachheit halber setzen wir für den Regelungsentwurf mittels IDA-PBC konstante Entwurfsmatrizen  $\mathbf{R}_d$  und  $\mathbf{J}_d$  an<sup>3</sup>

$$\mathbf{J}_d - \mathbf{R}_d = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ 1 & c_3 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Die gewünschte Energie des geregelten Systems bestimmt sich aus der Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial H_d}{\partial x_1} + c_3 \frac{\partial H_d}{\partial x_2} - x_1 - x_2^2 = 0, \quad (26)$$

welche die Restriktionsgleichung (4) für den vorliegenden Fall darstellt. Die Lösung

$$H_d(\mathbf{x}) = \frac{1}{3}c_3^2x_1^3 + \left(\frac{1}{2} - c_3x_2\right)x_1^2 + x_1x_2^2 + \Phi(x_2 - c_3x_1) \quad (27)$$

setzt sich aus einem partikulären und einem homogenen Anteil zusammen. Die freie Funktion  $\Phi$  ist so zu formen, dass die Energiefunktion  $H_d(\mathbf{x})$  positiv definit ist, und ein lokales Minimum im Ursprung aufweist. Geeignet ist zum Beispiel

$$\Phi(x_2 - c_3x_1) = c_4(x_2 - c_3x_1)^2, \quad (28)$$

mit freiem Parameter  $c_4$ .

Bereits bei diesem sehr einfachen Beispiel mit konstanten Entwurfsmatrizen stehen dem Entwerfer die 4 freien Parameter  $c_1, \dots, c_4$  zur Verfügung. Allgemein ist der Umgang mit der großen Entwurfsmöglichkeit ein offenes Problem bei der Parametrierung des IDA-PBC Reglers. Um diese Freiheit einzuschränken, kann die Wahl der Parameter z.B. über die Zuweisung lokal linearer Dynamik erfolgen [4]. Dabei wird dem geregelten System lokal eine gewünschte Dynamik aufgeprägt, welche in Form von Eigenwerten des linearisierten geregelten Systems erfolgt. Zunächst wird das geregelte PH-System linearisiert

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} c_1(1 + 2c_3^2c_4) - 2c_2c_3c_4 & -c_1c_3c_4 + 2c_2c_4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \quad (29)$$

Die Parameter  $c_1$  und  $c_2$  werden nun so festgelegt, dass das linearisierte geregelte System Eigenwerte bei  $\{-1, -1\}$  besitzt. Es ergibt sich für die Matrix

$$\mathbf{J}_d - \mathbf{R}_d = \begin{bmatrix} -c_3 - 2 & -2c_3 - \frac{1}{2c_4} - c_3^2 \\ 1 & c_3 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Nun stellt sich die Frage, wie die verbleibenden Parameter  $c_3$  und  $c_4$  gewählt werden sollen. Die folgende Simulation zeigt das transiente Verhalten sowohl für 2 unterschiedliche Parametersätze  $\boldsymbol{\pi} = \{c_3, c_4\}$ , als auch für das mit einem linearen Regler stabilisierte System (Eigenwerte ebenfalls bei  $\{-1, -1\}$ ).

### 3.1.2 Abschätzung des Einzugsbereichs

Neben der großen Entwurfsmöglichkeit bei der Parameterwahl stellt die Abschätzung des Einzugsbereichs eine weitere Herausforderung von IDA-PBC dar. Zwar kann mit der direkten Methode von Ljapunow eine Abschätzung des Einzugsbereichs der Ruhelage gegeben werden, diese ist jedoch meist konservativ. Für die Ljapunowfunktion (27) mit homogenem Anteil (28) lässt sich eine Abschätzung des Einzugsbereichs mit Hilfe der größten geschlossenen Höhenlinie von  $H_d(\mathbf{x})$  ermitteln (in Abbildung 2 durchgezogene, rote Linie).

<sup>3</sup>Ein Parameter der Entwurfsmatrizen ist redundant und darf ohne Einschränkung zu Eins gesetzt werden.

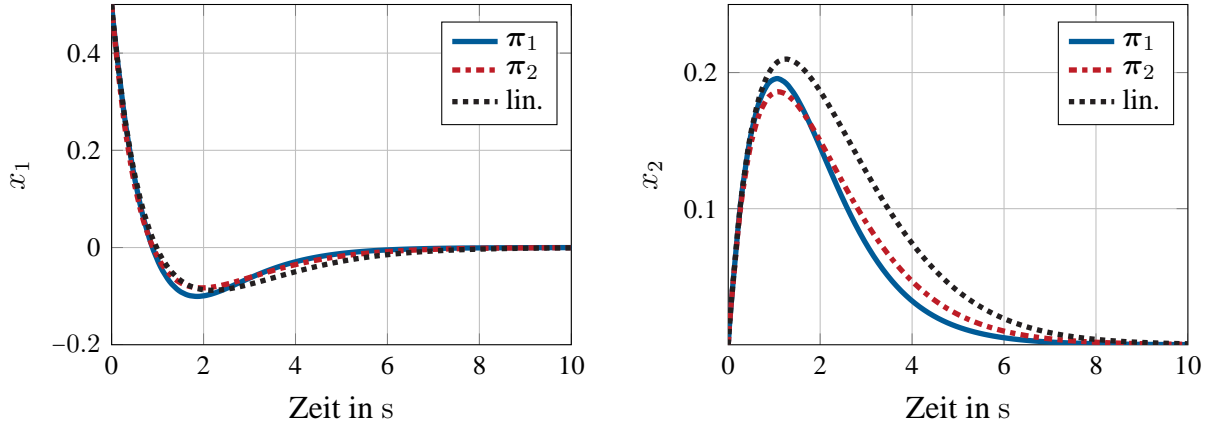


Abbildung 1: Transiente Dynamik des geregelten Systems für einen Anfangswert  $\mathbf{x}(0) = [0.5 \ 0]^T$  für 2 unterschiedliche Parametrierungen in IDA-PBC  $\pi_1 = \{-0.1, 10\}$  und  $\pi_2 = \{-1, 1\}$ , und einen linearen Regler.

### 3.2 Optimierung mittels TS

Das geregelte System kann gemäß (22) wie folgt dargestellt werden<sup>4</sup>

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 + \frac{c_3}{2c_4}x_1 - \frac{1}{c_4}x_2 & -(c_3 + 2)x_2 - 1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix}}_{A(\mathbf{x}, c_3, c_4)} \mathbf{x}. \quad (31)$$

Für konstante Parameter  $c_3$  und  $c_4$  gibt es zwei (2) Nichtlinearitäten im System,  $f_1 = x_1$ , und  $f_2 = x_2$ , und der Prämissektor ist gleich dem Zustandsvektor  $\mathbf{x}$ .

#### 3.2.1 LMI Optimierung zur Abschätzung des Einzugsbereichs

Wie in [5] erläutert, kann der Bereich, in welchem ein TS-System die konvexe Summeneigenschaft (11), (12) für das Modell sowie den Regler erfüllt, durch die Zustandsgrößen der entsprechenden Prämissektoren ( $\mathbf{z}_s$  und  $\mathbf{z}_c$ ) parametrisiert werden. Dazu werden die entsprechenden Zustandsgrößen in der Menge  $\mathcal{M}_{s,x}$  zusammengefasst und das um den Ursprung symmetrische Polytop

$$\mathcal{S}_x = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq x_{i,max}, \forall x_i \in \mathcal{M}_{s,x}\} \quad (32)$$

definiert. Die Polytopgrenzen sind durch die Größen  $x_{i,max} > 0$  gegeben. Um sicher zu gewährleisten, dass ein abgeschätzter Einzugsbereich (19) geschlossen innerhalb der Polytope (32) liegen, wurde in [5] folgende LMI-Bedingung hergeleitet:

$$\mathbf{g}_i^T \left( \frac{\mathbf{P}}{\eta} \right)^{-1} \mathbf{g}_i \leq x_{i,max}^2, \quad \forall x_i \in \mathcal{M}_{s,x}, \quad (33)$$

wobei die Vektoren  $\mathbf{g}_i \in \mathbb{R}^n$  durch

$$\mathbf{g}_i = [0, 0, \dots, \underbrace{1}_{i\text{-tes Element}}, 0, \dots, 0]^T \quad (34)$$

<sup>4</sup>Man beachte, dass diese Darstellung nicht eindeutig ist.

gegeben sind. Die Begrenzungen  $x_{i,max}$  in (32) können als zusätzliche Parameter bei der optimierten Abschätzung eines Einzugsbereichs gemäß (21) berücksichtigt werden. Das neue Optimierungsproblem ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} \min_{x_{i,max} \in \mathcal{M}_{s,x}, \mathbf{Q} > \mathbf{0}} \quad & -\log \det(\mathbf{Q}), \quad \text{sodass} & (35) \\ (a) \quad & \mathbf{Q}\mathbf{G}_{ii}^T + \mathbf{G}_{ii}\mathbf{Q} < \mathbf{0}, \quad \forall i \\ (b) \quad & \mathbf{Q} \frac{(\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji})^T}{2} + \frac{(\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji})}{2} \mathbf{Q} < \mathbf{0}, \quad \forall i < j \leq r, \\ (c) \quad & \mathbf{k}_{i,l}^T \mathbf{Q} \mathbf{k}_{i,l} \leq u_{i,max}^2, \quad \forall u_i, \forall l \in \mathbb{N}_{1:r}, \\ (d) \quad & \mathbf{g}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{g}_i \leq x_{i,max}^2. \end{aligned}$$

Dabei ist  $\mathbf{Q} = (\mathbf{P}/\eta)^{-1}$ . Die Lösung des Optimierungsproblems (35) ist nicht ohne Weiteres möglich, weil die Dynamikmatrizen  $\mathbf{A}_i$  der Teilsysteme von den Größen  $x_{i,max}$  abhängig sind. Aus diesem Grund sind die Matrizen  $\mathbf{G}_{ij}$  nicht konstant, und das Optimierungsproblem nicht konvex, da keine LMI im klassischen Sinne. Abhilfe schafft eine Verschachtlung, welche zum Teil die Konvexität der LMIs ausnutzt:

**Schritt 0:** Initialisierung mit  $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}$ ,  $J_0 = 0$ .

**Schritt 1:** Wähle  $x_{i,max} > 0$ ,  $i = 1, 2$ .

**Schritt 2:** Bestimme die Matrizen  $\mathbf{G}_{ij}$ , und  $\mathbf{K}_j$ ,  $i, j = 1, 2$  aus<sup>5</sup> (22), (23), und (17).

**Schritt 3:** Bestimme die Lösung  $\mathbf{Q}$  des *konvexen* Optimierungsproblems

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{Q} > \mathbf{0}} \quad & -\log \det(\mathbf{Q}), \quad \text{sodass} & (36) \\ & (a), (b), (c), (d), \quad \text{gemäß (35)} \end{aligned}$$

**Schritt 4:** Falls  $J = -\log \det(\mathbf{Q}) < J_0$ , setze  $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}$  und  $J_0 = J$ .

**Schritt 5:** Wiederhole **Schritt 1**, falls Abbruchkriterium nicht erfüllt.

Ein genetischer Algorithmus (GA) kann Schritt 1 und Schritt 5 unterstützen, indem automatisch sinnvolle Werte für  $x_{i,max}$  generiert werden, und entsprechend einem vom Entwerfer definierten Abbruchkriterium entscheidet, wie oft die Sequenz wiederholt werden muss. Eine Abschätzung des Einzugsbereichs der Ruhelage ist  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{x} < \eta\}$ , wobei  $\mathbf{P}_0 = \left(\frac{\mathbf{Q}_0}{\eta}\right)^{-1}$  (in Abbildung 2 begrenzt durch die blau durchgezogene Höhenlinie für das Beispielsystem mit dem Parametersatz  $\pi_2 = \{-1, 1\}$ ). Es sei außerdem  $u_{i,max} = \infty$ .

### 3.2.2 Optimierung der Parameter hinsichtlich Vergrößerung des Einzugsbereichs unter Berücksichtigung von Stellgrößenbeschränkungen

Die Verschachtlung des GA mit der LMI-Optimierung kann effizient gestaltet werden, wenn darüber hinaus zusätzliche Parameter berücksichtigt werden sollen. Wir wollen nun den Parametersatz  $\pi = \{c_3, c_4\}$  derart bestimmen, dass die Abschätzung des Einzugsbereichs maximiert wird unter Berücksichtigung von Stellgrößenbeschränkungen  $|u_i| \leq 2$ ,  $i = \{1, 2\}$ :

**Schritt 0:** Initialisierung mit  $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}$ ,  $J_0 = 0$ .

**Schritt 1:** Wähle<sup>6</sup>  $x_{i,max} > 0$ ,  $i = \{1, 2\}$ ,  $-2 < c_3 < 0$ , und  $c_4 > 0$ .

<sup>5</sup>Beachte, dass die Matrix  $\mathbf{B}$  konstant ist und sie deshalb nicht in TS-Form gebracht werden muss.

<sup>6</sup>Die Beschränkungen der Parameter ergeben sich aus der Definitheitsanforderungen an  $\mathbf{R}_d$  und  $H_d$ .



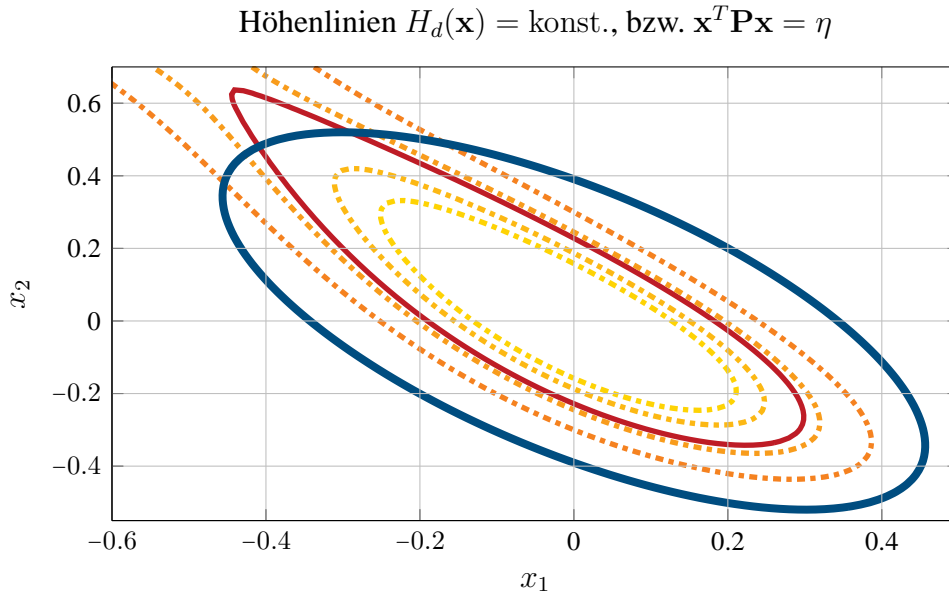


Abbildung 2: Abschätzung des Einzugsbereichs für den Parametersatz  $\pi_2 = \{-1, 1\}$  mit Hilfe der Ljapunowfunktion  $H_d$  (rot durchgezogene Höhenlinie), und mittels der LMI Formulierung (36) (blau durchgezogene Höhenlinie).

**Schritt 2:** Bestimme die Matrizen  $\mathbf{G}_{ij}$ , und  $\mathbf{K}_j$ ,  $i, j = 1, 2$  aus (22), (23), und (17).

**Schritt 3:** Bestimme die Lösung  $\mathbf{Q}$  des Optimierungsproblems

$$\min_{\mathbf{Q} > \mathbf{0}} -\log \det(\mathbf{Q}), \text{ sodass} \quad (37)$$

$$(a), (b), (c), (d), \text{ gemäß (35)}$$

**Schritt 4:** Falls  $J = -\log \det(\mathbf{Q}) < J_0$ , setze  $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}$  und  $J_0 = J$ .

**Schritt 5:** Wiederhole **Schritt 1**, falls Abbruchkriterium nicht erfüllt.

Die Abbildung 3 zeigt eine Abschätzung des Einzugsbereichs der Ruhelage.

## 4 Zusammenfassung

Der Beitrag stellt eine Möglichkeit vor, wie die TS-Formulierung bei Anwendung konventioneller Methoden der Regelung nichtlinearer Systeme vorteilhaft sein kann. Wir haben uns auf die Methode IDA-PBC beschränkt. Dieser Ansatz hat, neben seinen zahlreichen Vorteilen, 3 Nachteile, die wir mit Hilfe der TS-Formulierung beheben konnten: Zum Einen konnte die Wahl der Parameter auf ein sehr einfaches, konvexes Problem, zurückgeführt werden. Zusätzlich konnte eine Approximation des Einzugsgebiets der Ruhelage mittels einer quadratischen Ljapunowfunktion gemacht werden, was vor allem für mehrdimensionale Probleme vorteilhaft ist, denn das Finden der *größten geschlossenen Höhenlinie der Ljapunowfunktion* erweist sich als sehr schwierig. Schließlich konnten – ohne großen Aufwand – Stellgrößenbeschränkungen explizit berücksichtigt werden, indem sie in einfacher Weise im konvexen Optimierungsproblem eingebettet wurden. Für eine bessere Anwendung der TS-Darstellung bei IDA-PBC kann zukünftig eine Übersättigung der Stellgröße zugelassen werden, was in der TS-Darstellung möglich ist [8]. Weiter soll die Theorie auf ein physikalisches System angewandt werden für die experimentelle

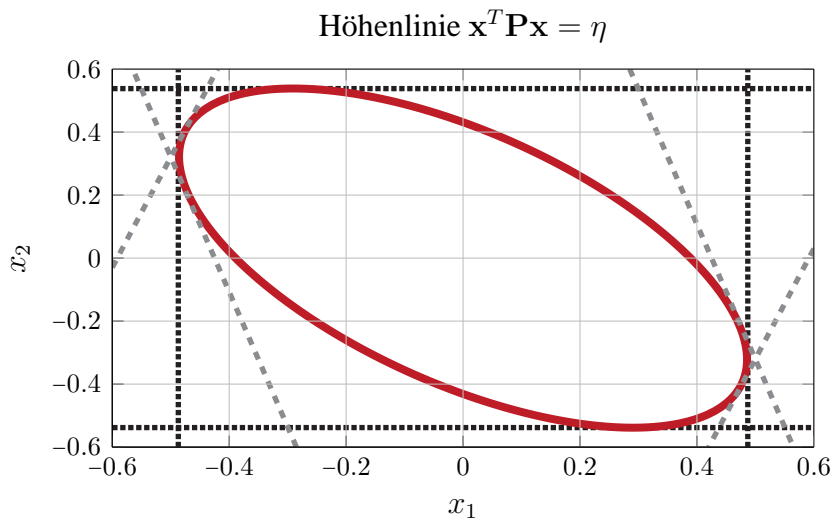


Abbildung 3: Abschätzung des Einzugsbereichs für den optimierten Parametersatz  $\pi_{opt} = \{-0.022, 0.762\}$ , und die optimierten Sektorgrenzen  $x_{1,max} = 0.487$ ,  $x_{2,max} = 0.538$ . Das Polytop  $\mathcal{S}_x$  ist begrenzt durch die gepunkteten schwarzen Linien (Sektorgrenzen). Die grau gestrichelten Linien stellen die Beschränkungen der Stellgröße dar, die sich gemäß der linearen Regler ergeben.

Validierung der Methode. Es bleibt das Problem, dass bei höheren Systemordnungen und steigender Anzahl an Nichtlinearitäten die Methode an Grenzen der Lösbarkeit der LMIs stößt.

**Danksagung:** Der Zweitautor bedankt sich bei der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) für die Förderung dieser Arbeit im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 768 (“Zyklusmanagement von Innovationsprozessen – verzahnte Entwicklung von Leistungsbündeln auf Basis technischer Produkte“).

## Literatur

- [1] K. Tanaka, H. O. Wang, *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*, John Wiley & Sons, 2001.
- [2] D. Lee, J. Park, Y. Joo, *A Fuzzy Lyapunov Function Approach to Estimating the Domain of Attraction for Continuous-Time Takagi-Sugeno Fuzzy Systems*, Inform. Sciences 185, p. 230-248, 2012.
- [3] R. Ortega, E. García-Canseco, *Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control: A Survey*, European Journal of Control 10, p. 432-450, 2004.
- [4] P. Kotyczka, *Local linear dynamics assignment in ida-pbc*, Automatica 49(4), p. 1037-1044, 2013.
- [5] K. J. Diepold, K. Albert, *Lokale Stabilitätsanalyse von Takagi-Sugeno Systemen unter Berücksichtigung ihres Gültigkeitsbereichs*, at - Automatisierungstechnik 62(12), p. 842-850, 2014.
- [6] L. Vandenberghe, S. Boyd, S.-P. Wu, *Determinant maximization with linear matrix inequality constraints*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Application 19(2), p. 499-533, 1998.
- [7] T. Kloiber, P. Kotyczka, *Estimating and enlarging the domain of attraction in IDA-PBC*, Proceedings of the Conference on Decision and Control, p. 1852-1858, 2012.
- [8] Y.-Y. Cao, Z. Lin, *Robust stability analysis and fuzzy-scheduling control for nonlinear systems subject to actuator saturation*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 11(1), p. 57-67, 2003.