

Die Stegimpedanz der Geige und ihr Einfluß auf die Saitenschwingung

K. PFAFFELHUBER

(Lehrstuhl für Elektroakustik der Technischen Universität München)

Das dynamische Verhalten der Saite an der Anregungsstelle spielt für die Qualität des Signals, das durch einen dort angekoppelten Anregungsmechanismus entsteht, eine Schlüsselrolle [1]. Im vorliegenden Beitrag soll die Abhängigkeit des Schwingungsverhaltens einer Geigensaite an der Anstreichstelle vom Schwingungsverhalten des angekoppelten Steges dargestellt werden. Die Grundlage hierzu bildet ein mathematisches Stegimpedanzmodell, welches gestattet, durch geeignete Parameterwahl gemessene Stegimpedanzverläufe zu approximieren.

1. Die Saitenschwingung an der Anstreichstelle.

Die Saiteneingangsimpedanz ist nach [1] durch den Ausdruck

$$Z_1(s) = Z_s \frac{W_C \cosh(\gamma l_1) + Z_s \sinh(\gamma l_1)}{W_C \sinh(\gamma l_1) + Z_s \cosh(\gamma l_1)} + Z_s \frac{W_T \cosh(\gamma l_2) + Z_s \sinh(\gamma l_2)}{W_T \sinh(\gamma l_2) + Z_s \cosh(\gamma l_2)}; \quad (1)$$

gegeben.

$W_C(s)$ bzw. $W_T(s)$ sind die Impedanzen der Auflager, über welche die Saite gespannt ist (bei der Geige Steg und Sattel), Z_s ist der Wellenwiderstand der Saite, l_1 und l_2 stehen für die Längen der beiden Saitenäste und $\gamma(s) = \alpha + s/c$ ist schließlich der komplexe Ausbreitungskoeffizient mit Dämpfungskonstante α , Ausbreitungsgeschwindigkeit c und der komplexen Frequenz $s = \sigma + j\omega$. Abb. 1 zeigt einen Pol-Nullstellen-Plan¹ von $Z_1(s)$, den man erhält, wenn in (1) $W_C(s)$ und $W_T(s) \gg Z_s$ gesetzt wird. Die übrigen Parameter wurden zu $Z_s = 0,322 \text{ kg/s}$, $l_1/l_2 = 0,17$, $f = c/2l = 196 \text{ Hz}$, $\alpha = 0,1 \text{ /m}$ und $l = l_1 + l_2 = 0,33 \text{ m}$ gewählt und entsprechen den Werten einer G-Saite auf der Geige. Diese Impedanz soll im Folgenden mit $Z_{100}(s)$ bezeichnet werden. Die Polstellen ergeben sich in diesem speziellen Fall zu [1]:

$$s_\mu = -\alpha c + j\mu\pi c/l_1; \quad \mu = \pm 0, 1, 2, 3, \dots; \quad \text{stehende Kreuze}$$

$$s_\nu = -\alpha c + j\nu\pi c/l_2; \quad \nu = \pm 0, 1, 2, 3, \dots; \quad \text{diagonale Kreuze}$$

die Nullstellen zu:

$$s_n = -\alpha c + jn\pi c/l; \quad n = \pm 0, 1, 2, 3, \dots; \quad \text{Quadrate.}$$

s_μ und s_ν sind die komplexen Eigenschwingungsfrequenzen der durch den Anregungsmechanismus getrennten Saitenäste, s_n die Eigenfrequenzen der frei schwingenden Saite.

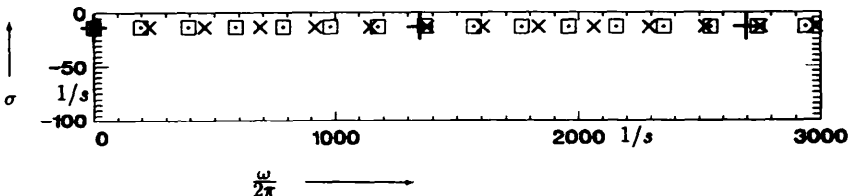


Abb. 1: Pol-Nullstellen-Plan der Saiteneingangsimpedanz $Z_{100}(s)$ bei unbeweglichen Saitenauflagern. Parameter (Geigen G-Saite): Kennimpedanz Z_s : $0,322 \text{ kg/s}$; Saitenteilungsverhältnis: $l_1/l_2 = 0,17$; Grundfrequenz der freischwingenden Saite: $c/2l = 196 \text{ Hz}$; Dämpfungsfaktor $\alpha = 0,1 \text{ /m}$; Saitenlänge: $l_1 + l_2 = 0,33 \text{ m}$,

¹Hier, wie auch in den folgenden PN-Plänen wird nur der positive Frequenzbereich dargestellt. Da die hier behandelten Systeme reelle Impulsantworten liefern, liegen im negativen Frequenzbereich grundsätzlich die konjugiert-komplexen Pol- und Nullstellen.

Die Schnelleantwort eines Saitenpunktes auf einen Kraftimpuls $y_1(t)$ erhält man durch Rücktransformation von $Y_1(s) = 1/Z_1(s)$. $y_1(t)$ läßt sich bei Kenntnis der komplexen Pol- und Nullstellen s_M, s_N ²allgemein durch

$$y_1(t) = \sum_{N=-\infty}^{\infty} A_N e^{s_N t} \quad A_N, s_N \text{ komplex, } t > 0, \quad (2)$$

mit den komplexen Faktoren (Residuen)

$$A_N = \text{Res}(Y_1(s_N)) = (s - s_N) C \frac{\prod_{M=-\infty}^{\infty} (s - s_M)}{\prod_{N'=-\infty}^{\infty} (s - s_{N'})} \text{ an der Stelle } (s = s_N) \quad (3)$$

beschreiben.

Durch Zusammenfassen der konjugiert-komplexen Nullstellenpaare wird aus (2) eine Summe exponentiell abklingender Cosinusschwingungen

$$y_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2|A_N| e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi_{A_N}) \quad t > 0 \quad (4)$$

Pro konjugiert-komplexem Nullstellenpaar von $Z_1(s)$ ergibt sich in $y_1(t)$ somit einen Teilton, dessen Frequenz und exponentielles Abklingen durch s_N und dessen Betrag und Phase durch A_N festgelegt sind.

2. Das Modell der Stegeingangsimpedanz

Frequenzgänge der Stegeingangsimpedanz bzw. -admittanz von Streichinstrumenten wurden in [2] gemessen. Darin dargestellte Verläufe lassen sich mit einem Produktansatz der Form

$$W_C(s) = K \frac{\prod_{i=-I}^J (s - s_{0i})}{\prod_{j=-J}^I (s - s_{\infty j})}; \quad (5)$$

durch geeignete Wahl der Pol- und Nullstellen $s_{\infty j}$ und s_{0i} approximieren.

Für die folgenden Betrachtungen wurde eine mit diesem Ansatz modellierte Stegimpedanz verwendet, deren PN-Plan in Abb.2a dargestellt ist. Den zugehörigen Betragsfrequenzgang $|W_C(f)|$ zeigt Abb. 2.b.

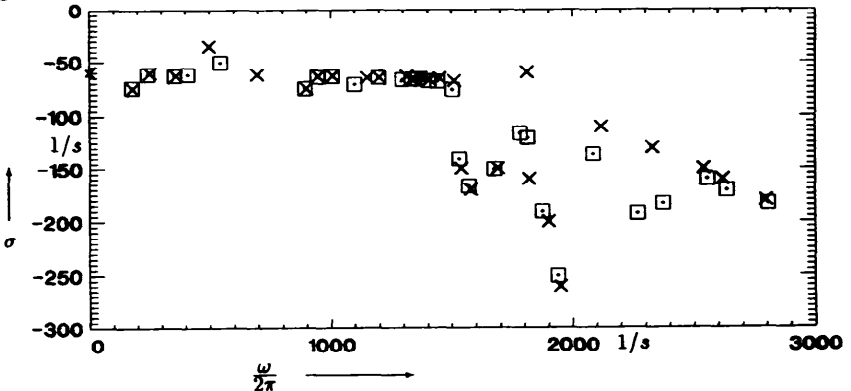


Abb.2a: PN-Plan der modellierten Stegimpedanz $W_C(s)$. Der Faktor K besitzt den Wert $K = 231331 \text{ kg/s}$.

²Es werden hier grundsätzlich einfache Pole und Nullstellen vorausgesetzt.

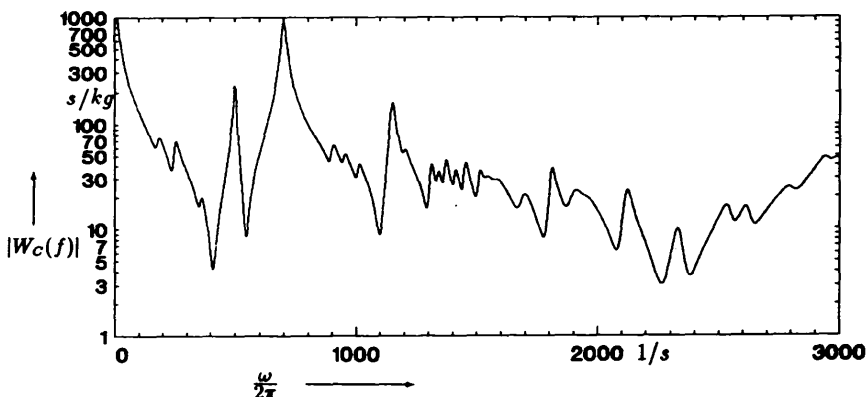


Abb. 2b: Betrag der Stegimpedanz auf der $j\omega$ -Achse. Die PN-Verteilung von $W_C(s)$ wurde so gewählt, daß der Verlauf von Betrag und Phase (hier nicht dargestellt) auf der $j\omega$ -Achse dem typischen Verhalten gemessener Frequenzgänge entspricht.

Bei der Modellierung wurde darauf geachtet, daß in $|W_C(f)|$ sowohl die Helmholtz-Resonanz ($f = 241 \text{ Hz}$) als auch die Hauptkorpusresonanzen des unteren Frequenzbereiches entsprechend den in [2] dargestellten Verläufen in Erscheinung treten. Im oberen Frequenzbereich hingegen sind Pole und Nullstellen so gewählt, daß der grobe Verlauf dem der gemessenen Vorbilder entspricht.

3. Die Eigenschwingungen der mit einer Modellimpedanz abgeschlossenen Saite

Abb. 3 zeigt den Pol-Nullstellenplan der Saiteneingangsimpedanz $Z_{1W_C}(s)$, die sich aus $Z_1(s)$ ergibt, wenn $W_C(s)$ aus Kap. 2 in Gleichung 1 eingesetzt wird. Die übrigen Parameter entsprechen den Werten von $Z_{1\infty}(s)$.

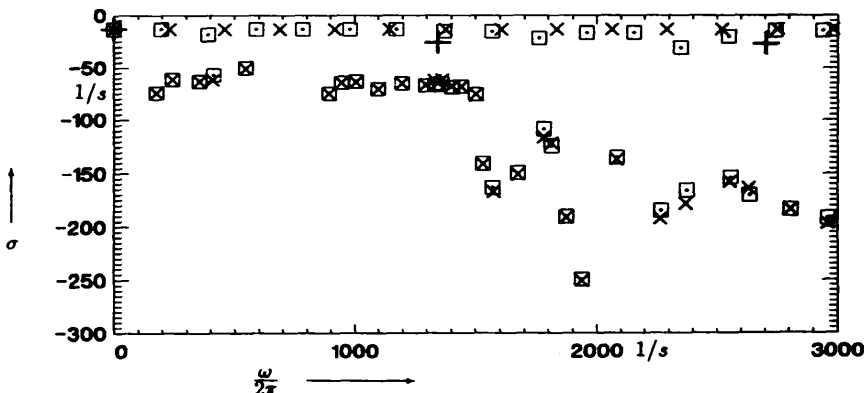


Abb. 3: PN-Plan der Saiteneingangsimpedanz $Z_{1W_C}(s)$ unter Verwendung des Stegimpedanzmodells. Parameter: wie in Abb. 1

Der Vergleich des PN-Planes von $Z_{1W_C}(s)$ Abb. 3 mit dem von $Z_{1\infty}(s)$ Abb. 1 zeigt, daß sich $Z_{1W_C}(s)$ zusammensetzt aus den Pol- und Nullstellen s_p , s_v und s_n von $Z_{1\infty}(s)$ und, meist eng benachbarten PN-Paaren, die neu entstanden sind. Die Nullstellen s_n von $Z_{1\infty}(s)$ verschieben sich in $Z_{1W_C}(s)$ hin zu kleinerem σ , und zwar vor allem in den $j\omega$ -Bereichen, wo PN-Paare der Stegimpedanz $W_C(s)$ einen relativ großen Abstand zueinander besitzen. Ein Blick auf den Betragsfrequenzgang von $W_C(s)$ Abb. 2b zeigt, daß diese Zunahme der Teiltondämpfung in den Frequenzbereichen am größten ist, wo $|W_C(j\omega)|$ starken Schwankungen unterworfen ist.

Tab.1 zeigt im Vergleich die Nullstellen s_n von $Z_{1\infty}(s)$ und $Z_{1W_C}(s)$ Darin zeigt sich, daß sich neben der Verschiebung des Dämpfungsfaktors σ_n auch die Frequenzen der Teiltöne bis zu etwa zwei Hertz verändert haben.

Teilton-Nr	unbeweglicher Steg		Modellsteg	
	f_n Hz	σ_n 1/s	f_n Hz	σ_n 1/s
1	196	-12,9	195,72	-13,26
2	392	-12,9	389,88	-18,17
3	588	-12,9	588,50	-13,49
4	784	-12,9	783,83	-13,00
5	980	-12,9	979,49	-13,36
6	1176	-12,9	1175,75	-13,36
7	1372	-12,9	1371,75	-14,81
8	1568	-12,9	1567,40	-15,07
9	1764	-12,9	1762,16	-21,28
10	1960	-12,9	1959,15	-16,23
11	2156	-12,9	2154,70	-16,40
12	2352	-12,9	2350,63	-31,02
13	2548	-12,9	2548,80	-20,40
14	2744	-12,9	2744,98	-14,47
15	2940	-12,9	2940,35	-14,31

Tab.1: Komplexe Frequenzen der Saiteneigenschwingungen s_n mit unbeweglichem Steg und mit Modellsteg.

Von den Polstellen von $Z_{1\infty}(s)$ haben nur die Pole s_μ (Eigenschwingungen des kurzen Saitenabschnittes) in $Z_{1W_C}(s)$ ihre Position verändert.

Vergleicht man den PN-Plan von $Z_{1W_C}(s)$ Abb.3 mit dem von $W_C(s)$ Abb.2a so sieht man daß die neu entstandenen PN-Paare von $Z_{1W_C}(s)$ jeweils im Bereich der Nullstellen von $W_C(s)$ liegen. Das Vorhandensein der neuen Nullstellen in $Z_{1W_C}(s)$ bringt nach Gleichung 2 das Vorhandensein neuer Teiltöne mit sich.

Die Amplitude $|A_N|$ der Teiltöne von $y_1(t)$ ist nach Formel 3 direkt bzw. indirekt proportional den Abständen von s_N zu den Polen bzw. zu den restlichen Nullstellen. Von einer betrachteten Nullstelle weit entfernte PN-Paare bzw. PN-Paare, die nahe beieinander liegen, wie beispielsweise die meisten in $Z_{1W_C}(s)$ neu hinzugekommenen, tragen somit unwesentlich zu einem $|A_N|$ bei, weil sich ihre Beträge in Zähler und Nenner von (3) weitgehend kompensieren.

Das Verschieben einer Saitennullstelle s_n in Abb.3 hin zu kleinerem σ bei nahezu konstantem Imaginärteil ω führt jedoch zu einer geringfügigen Zunahme der zugehörigen Teiltonamplitude, da, läßt man die neu hinzugekommenen PN-Paare aus den oben genannten Gründen außer acht, das Produkt der Abstände zu den Polen s_μ und s_ν immer einen größeren Zuwachs genießt, als das Produkt der Abstände zu den restlichen Nullstellen s_n .

Die Amplituden der neu hinzugekommenen Teiltöne sind demgegenüber wesentlich kleiner, da der dominierende Faktor, nämlich der Abstand zum benachbarten Pol relativ klein ist.

Literaturangaben.

[1] Terhardt, E.

A Systems Theory Approach to Musical Stringed Instruments: Dynamic Behaviour of a String at Point of Excitation; *Acustica* 70: 179-188, (1990).

[2] Beldie, J.P.,

Darstellung des Geigenkörpers als ein Schwingungssystem mit vier Freiheitsgraden im tiefen Frequenzbereich; Dissertation Berlin 1975.