

# Linienpektren als Testsignale in der Akustik

G. KRUMP

Lehrstuhl für Elektroakustik, Technische Universität München  
jetzt: NOKIA Audio Electronics, Straubing

## 1. Einführung

Zur Messung des Übertragungsverhaltens von akustischen und elektrischen Systemen im Zeit- und Frequenzbereich sind Linienspektren, welche aus computergenerierten Multisinusignalen gemäß Gl. 1 zusammengesetzt sind, hervorragend geeignet, da sie eine voneinander unabhängige Wahl von Amplitude  $A_n$ , Frequenz  $f_n$  und Phase  $\varphi_n$  der Harmonischen  $n$  zulassen. Die auf der Grundfrequenz  $f_0$  basierenden periodischen Signale erlauben eine exakte Bandbegrenzung des Testsignals und eine genaue FFT-Analyse des Ausgangssignales. Linienspektren können aber auch zur Verzerrungsanalyse [6], zur Störsignalunterdrückung [4,6], zur Signal-simulation [4] sowie als Testsignale für psychoakustische Untersuchungen [1,2,3] verwendet werden.

$$s(t) = \sum_{n=1}^{n_{10}} A_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T} - \varphi_n\right) \quad \text{mit } f_0 = \frac{1}{T}; \quad n = \frac{f_n}{f_0} \quad (1)$$

Fig. 1 zeigt einige Gestaltungsmöglichkeiten der spektralen Hüllkurve. Es können je nach Amplitude  $A_n$  der Spektrallinien spektrale Lücken unterschiedlicher Tiefe sowie Überhöhungen und verschiedene Flankensteilheiten generiert werden. Besonders für die Psychoakustik ist die Möglichkeit der konstanten Linienanzahl pro Frequenzgruppe und der linearen Flankensteilheit im Tonheitsbereich durch die Berücksichtigung der nichtlinearen Transformationen interessant. Im folgenden werden sowohl statistische als auch deterministische Phasenverteilungen und ihre Auswirkungen auf Zeitfunktion und Crestfaktor diskutiert. Das harmonische Linienspektrum besteht hierbei aus Spektrallinien konstanter Amplitude  $A_n$  von 1 Hz ( $n_{10} = 1$ ) bis 16 kHz ( $n_{10} = 16000$ ), so daß Signale mit einer Periodendauer von 1 Sekunde entstehen, welche stets auf ihren Maximalwert normiert werden.

## 2. Linienspektren mit statistisch verteilten Phasenlagen

Periodisches Weißes Rauschen oder gefärbtes Rauschen kann mit Linienspektren simuliert werden, indem die Amplituden  $A_n$  der gewünschten Intensitätsdichteverteilung angepaßt werden. Die gaußförmige Amplitudenverteilung der Zeitfunktion wird durch statistisch gleichverteilte Phasen  $\varphi_n$  zwischen 0 und  $2\pi$  erreicht. In Gl. 2 ist die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_\varphi(\varphi)$  angegeben.

$$f_\varphi(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{für } |\varphi| \leq \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2)$$

Um die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_s(s)$  der Zeitfunktion des Linienspektrums zu berechnen, wird zunächst die Amplitudenverteilung  $f_y(y)$  einer einzelnen Sinusschwingung  $y = A_0 \sin(\omega t - \varphi)$  bei statistisch gleichverteilter Phase ermittelt. Die Umkehrfunktion in Gl. 3 zeigt, daß es für jeden Wert  $y$  zwei Phasenwerte  $\varphi$  gibt.

$$\varphi_{1,2} = -\arcsin\left(\frac{y}{A_0}\right) + \omega t \quad (3)$$

Aufgrund der Gesetzmäßigkeit, welche bei der Transformation einer Zufallsgröße über eine gegebene Übertragungsfunktion wirksam ist, läßt sich gemäß der Berechnungen in [3] die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_y(y)$  in folgender Gleichung angeben:

$$f_y(y) = \frac{1}{\pi \sqrt{A_0^2 - y^2}} \quad \text{für } |y| < A_0 \quad (4)$$

Eine Addition von zwei Spektrallinien entspricht der Linearkombination zweier statistisch unabhängiger Zufallsgrößen. Die resultierende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_s(s)$  berechnet sich daher im Fall  $A_0 = 1$  durch die Faltung der Dichtefunktionen der beiden Summanden, d.h. die Dichtefunktion  $f_y(y)$  muß gemäß Gl. 5 mit sich selbst gefaltet werden.

$$f_s(s) = f_y(y) * f_y(y) \quad (5)$$

Bei Addition weiterer Spektrallinien nach Gl. 1 gibt somit die Anzahl der Summanden an, wie oft  $f_y(y)$  mit sich selbst gefaltet werden muß. In Fig. 2 ist die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung  $f_s(s)$  aufgetragen, die bei einem Linienspektrum mit 4, 8, 16 bzw. 32 Spektrallinien entsteht. Bereits bei der Addition von 16 Spektrallinien liegt näherungsweise eine gaußförmige Amplitudenverteilung der resultierenden Zeitfunktion vor. Der Einfluß einer exakten Gleichverteilung der Phasen  $\varphi_n$  kommt in Fig. 3 (14000 Spektrallinien) deutlich zum Ausdruck. Dem ersten Teilbild liegt ein Zufallsgenerator mit schlechter Gleichverteilung zugrunde, so daß bestimmte Phasenwerte häufiger auftreten, was im positiven und negativen Bereich der Zeitfunktion zu ausgeprägten Maxima mit einem Crestfaktor von 16,8 führt. Teilbild b zeigt das Zeitsignal bei Verwendung einer guten Gleichverteilung. Abgesehen von der Periodizität von 1 Sekunde ist es in seinen Eigenschaften und mit einem Crestfaktor von 4,4 mit Weißem Rauschen vergleichbar. Die spektrale Lücke zwischen 3 und 5 kHz ist im Zeitverlauf beider Signale nicht erkennbar. Durch Abspeichern der Phasenwerte ist das quasi-statistische Signal jederzeit exakt reproduzierbar.

## 3. Linienspektren mit deterministischen Phasenzuordnungen

Definierte Phasenzuordnungen führen ebenfalls zu einem reproduzierbaren Zeitsignal, dessen Crestfaktor in weiten Grenzen verändert werden kann. Linienspektren mit einer zu höheren Harmonischen hin linear ansteigenden Phase gemäß Gl. 6 erzeugen einen periodischen Impuls wie in Fig. 4a, der mit der Variablen  $k$  innerhalb der Periodendauer verschoben werden kann. Die Berechnung der zugehörigen Gruppenlaufzeit  $\tau_{gn}$ , welche den Zeitpunkt angibt, zu dem die betreffende Frequenz im Kurzzeitspektrum der Zeitfunktion hauptsächlich auftritt, kann hierüber Aufschluß geben. Sie ist gemäß Gl. 7 für ein definiertes  $k$  konstant und drückt aus, daß alle Frequenzen zu einem bestimmten Zeitpunkt (hier: 200 ms) nach Beginn des Signals repräsentiert sind. Die Breite des Impulses ist umgekehrt proportional zur Anzahl der addierten Spektrallinien.

$$\varphi_n = 2\pi k n = 2\pi k \frac{\omega_n}{\omega_b} \quad \text{mit } 0 \leq k \leq 1 \quad (6)$$

$$\tau_{gn} = \frac{d\varphi_n(\omega_n)}{d\omega_n} = \frac{2\pi k}{\omega_b} = \frac{k}{f_b} = kT \quad (7)$$

Mit der in Gl. 8 vorgestellten Formel, bei der die Phase  $\varphi_n$  quadratisch mit der Frequenz ansteigt, können Impuls- bzw. Sweepfolgen mit beliebiger ganzzahliger Wiederholrate innerhalb einer Periodendauer  $T$  erzeugt werden [2,3]. Die Phasenbeziehung  $\varphi_{nSF}$  für die Sweepfolge besteht aus einem Term  $\varphi_{nIF}$ , der für sich alleine eine Impulsfolge erzeugt, und einem Term  $\varphi_{nES}$ , welcher einen Einzelsweep der Dauer  $T_e$  gemäß Gl. 10 verursacht. Die Anzahl der Ereignisse, d.h. der Impulse bzw. Sweeps, pro Periode wird durch  $A_e$  festgelegt.  $A_e$  gibt die Gesamtlinienanzahl an. Fig. 4 zeigt für  $A_e = 5$  und einem Spektrallinienabstand von 1 Hz Beispiele für die berechneten Zeitfunktionen: In Fig. 4b ist die entsprechende Impulsfolge (Crestfaktor: 128) aufgetragen. Die Amplituden sind im Gegensatz zu denen von Pulsen, welche alleine durch Variation des Spektrallinienabstandes entstehen, etwas unterschiedlich. In Fig. 4c ist ein Einzelsweep mit der Dauer  $T_e$  von 200 ms dargestellt. Beide Phasenkomponenten addiert ergeben schließlich eine Sweepfolge wie in Fig. 4d, welche aus fünf ( $A_e = 5$ ) nahezu identischen Einzelsweeps besteht. Aufgrund des Spektrallinienabstandes wiederholen sich alle Signale nach 1 Sekunde.

$$\varphi_{nSF} = \varphi_{nIF} + \varphi_{nES} = \frac{\pi n^2}{A_e} + \frac{\pi n^2}{A_e A_1} = \frac{\pi \omega_n^2}{A_e \omega_b^2} + \frac{\pi \omega_n^2}{A_e A_1 \omega_b^2} \quad (8)$$

$$\tau_{gnSF} = \tau_{gnIF} + \tau_{gnES} = \frac{2\pi \omega_n}{A_e \omega_b^2} + \frac{2\pi \omega_n}{A_e A_1 \omega_b^2} = \frac{n}{A_e f_b} + \frac{n}{A_e A_1 f_b} \quad (9)$$

$$T_e = \frac{1}{A_e f_b} \quad (10)$$

Eine explizite Betrachtung der Gruppenlaufzeiten für beide Phasenteile nach Gl. 9 gibt in Tab. 1 Aufschluß darüber, welche Frequenzen des Linienspektrums zu einem bestimmten Zeitpunkt an der Bildung der Zeitfunktion hauptsächlich beteiligt sind. Da es sich jeweils um periodische Signale handelt, können die ganzzahligen Anteile der Laufzeiten vernachlässigt werden.

$\tau_{g11F}/T = \frac{1}{5}$	$\tau_{g1ES}/T = \frac{1}{5 \cdot 16000}$	für: $n = 1$
$\tau_{g21F}/T = \frac{2}{5}$	$\tau_{g2ES}/T = \frac{2}{5 \cdot 16000}$	für: $n = 2$
$\tau_{g31F}/T = \frac{3}{5}$	$\tau_{g3ES}/T = \frac{3}{5 \cdot 16000}$	für: $n = 3$
...	...	...
$\tau_{g61F}/T = 1 + \frac{1}{5}$	$\tau_{g6ES}/T = \frac{6}{5 \cdot 16000}$	für: $n = 6$
...	...	...
$\tau_{g111F}/T = 2 + \frac{1}{5}$	$\tau_{g11ES}/T = \frac{11}{5 \cdot 16000}$	für: $n = 11$
...	...	...
$\tau_{g160001F}/T = 3200$	$\tau_{g16000ES}/T = \frac{16000}{5 \cdot 16000}$	für: $n = 16000$

Tab. 1: Gruppenlaufzeiten der Harmonischen  $n$  nach Gl. 9.

Die Gruppenlaufzeiten  $\tau_{gnF}$  für die Impulsfolge zeigen deutlich, daß sich beispielsweise der Impuls bei 200 ms in Fig. 4b aus der 1., 6., 11., ... Harmonische zusammensetzt. Für  $A_e = 5$  tragen also Harmonische im Abstand von 5 Hz zur Bildung eines einzelnen Impulses bei, wobei die Harmonischen der Nachbarimpulse jeweils um die Grundfrequenz versetzt sind, so daß insgesamt jeder Impuls innerhalb einer Periode aus anderen Harmonischen besteht. Die monoton anwachsenden Gruppenlaufzeiten  $\tau_{gnES}$  hingegen bewirken, daß die jeweiligen Frequenzanteile zu verschiedenen Zeitpunkten innerhalb der 200 ms auftreten, wodurch ein Einzelsweep entsteht. Mit einem additiven Phasenteil nach Gl. 6 könnte der Einzelsweep innerhalb einer Periodendauer verschoben werden. Bei Addition der beiden Phasenteile  $\varphi_{nIF}$  und  $\varphi_{nES}$  werden auch die Laufzeiten  $\tau_{gnIF}$  und  $\tau_{gnES}$  addiert, so daß der erste Sweep wiederum aus den Harmonischen 1, 6, 11, ... gebildet wird, die nun jedoch ähnlich wie beim Einzelsweep monoton ansteigende Laufzeiten besitzen. Benachbarte Sweeps bestehen aus um die Grundfrequenz verschobenen Harmonischen, so daß schließlich innerhalb einer Periodendauer  $T$  jede Spektrallinie einmal vertreten ist.

Falls in die Formel  $\varphi_{nES}$  des Einzelsweeps  $A_e = 1$  gesetzt wird, erhält man die sogenannte Schroeder-Phase  $\varphi_n = (\pi n^2)/A_e$ , welche einen Sweep (Crestfaktor: 1,88) über die gesamte Periodendauer hinweg erzeugt [5]. Bei positiver Phase in Gl. 1 steigt die Augenblicksfrequenz monoton an, während bei negativer Phase  $\varphi_n$  der Sweep von hohen Frequenzen zu tiefen verläuft. Fig. 3c zeigt das Zeitsignal eines Linienspektrums mit spektraler Lücke zwischen 3 und 5 kHz für eine positive Schroeder-Phase. Den Spektrallinien innerhalb der Lücke wurde jeweils eine Phase zugeordnet, ihre Amplitude jedoch gleich Null gesetzt, weshalb gemäß Gl. 9 auch im Zeitsignal zwischen 188 ms und 313 ms eine Lücke auftreten muß. Wenn hingegen den Spektrallinien in der Lücke keine Phasen zugeordnet werden und daher mit der effektiven Linienanzahl  $A_{eff}$  (im Beispiel: 14000) gerechnet wird, entsteht ein Zeitsignal nach Fig. 4d. Die spektrale Lücke drückt sich durch einen Frequenzsprung bei 214 ms aus. Ein Vergleich mit Fig. 3a bzw. 3b zeigt, daß eine spektrale Lücke bei diesen deterministischen Signalen deutlich zum Ausdruck kommt als bei statistischen Zeitfunktionen.

## Literatur

- [1] Fastl H., Zum Zwickler-Ton bei Linienspektrums mit spektralen Lücken. *Acustica* 67, 177-186 (1989).
- [2] Krump G., Zum Zwickler-Ton bei Linienspektrums unterschiedlicher Phasenlagen. In: Fortschritte der Akustik, DAGA '92, Verlag: DPG, Bad Honnef, 825-828 (1992).
- [3] Krump G., Beschreibung des akustischen Nachtones mit Hilfe von Mithraswellenformstern. Dissertation an der TU München, 1993.
- [4] Sachs J., Thomä R., Vergleichende Untersuchungen zum Einsatz: ausgewählter Testsignale in der akustischen Materialprüfung. In: Fortschritte der Akustik, DAGA '95, Hrsg. W. Arnold und S. Hirssekorn, Saarbrücken, 627-630 (1995).
- [5] Schroeder M. R., Synthesis of low-pass factor signals and binary sequences with low autocorrelation. *IEEE Trans. on Information Theory* 16, 85-89 (1970).
- [6] Thomä R., Sachs J. und Schneegast B., Entwurf von Testsignalen für die Messung akustischer und elektroakustischer Systeme. DAGA '94, Verlag: DPG, Bad Honnef, 721-724 (1994).



Fig. 1: Linienspektrum mit variabler Hüllkurve.

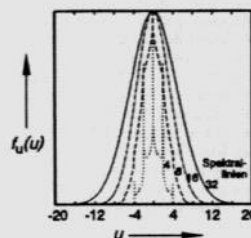


Fig. 2: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_n(u)$  bei Addition von 4, 8, 16 und 32 Spektrallinien.

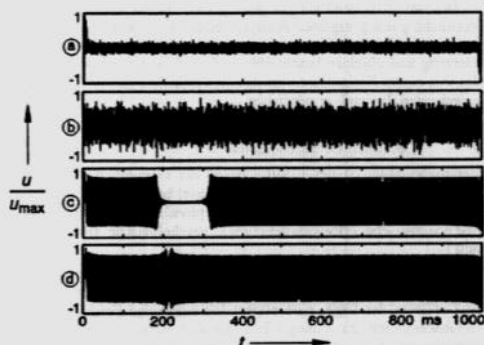


Fig. 3: Zeitfunktionen von Linienspektrums mit spektraler Lücke zwischen 3 und 5 kHz, Spektrallinienabstand: 1 Hz; a: schlechte Gleichverteilung der Phase  $\varphi_n$ ; b: gute Gleichverteilung der Phase; c: Schroeder-Phase, Gesamtlinienzahl  $A_t = 16000$ ; d: Schroeder-Phase, effektive Linienanzahl  $A_{eff} = 14000$ .

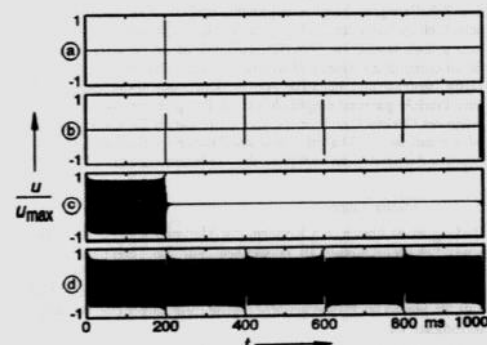


Fig. 4: Zeitfunktionen von Linienspektrums ohne Lücke, Spektrallinienabstand: 1 Hz; a: Impuls mit Phase  $\varphi_n$  nach Gl. 6,  $k = 0, 2$ ; b: Impulsfolge  $\varphi_n = \varphi_{nIF}$ ,  $A_e = 5$ ; c: Einzelsweep  $\varphi_n = \varphi_{nES}$ ,  $A_e = 5$ ; d: Sweepfolge  $\varphi_n = \varphi_{nSF}$ ,  $A_e = 5$ .

Der Autor dankt Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Fastl für zahlreiche Anregungen und Hinweise. Diese Arbeit wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft über den SFB 204 Gehör, München gefördert.