

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN  
Lehrstuhl für  
Werkzeugmaschinen und Fertigungstechnik

**Prognosefähigkeit dynamischer Simulationen von  
Werkzeugmaschinenstrukturen**

**Stefan Andreas Schwarz**

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Udo Lindemann

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Michael Zäh
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Christian Brecher,  
RWTH Aachen

Die Dissertation wurde am 02.04.2015 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 31.07.2015 angenommen.



## Vorwort des Verfassers

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Werkzeugmaschinen und Betriebswissenschaften (*iwb*) der Technischen Universität München. Herrn Prof. Dr.-Ing. Michael Zäh und Herrn Prof. Dr.-Ing. Gunther Reinhart, den Leitern dieses Instituts, gilt mein besonderer Dank für die wohlwollende Förderung und großzügige Unterstützung meiner Arbeit. Bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Christian Brecher, dem Leiter des Lehrstuhls für Werkzeugmaschinen am Werkzeugmaschinenlabor WZL der RWTH Aachen, möchte ich mich herzlich für die Übernahme des Korreferats und die aufmerksame Durchsicht der Arbeit bedanken. Für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Udo Lindemann, dem Leiter des Lehrstuhls für Produktentwicklung der Technischen Universität München.

Großer Dank gebührt darüber hinaus Frau Ursula Rasthofer und Frau Sonja Schäufler sowie den Herren Fabian Distel, Wolfgang Pfeiffer und Christian Rebelein, die mit ihrer kritischen Begutachtung des Manuskripts wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Zudem möchte ich an dieser Stelle den Einsatz aller Studierenden – hervorzuheben sind Christoph Köbler, Alexander Sing und Martin Zöltsch – würdigen, die mich mit ihren Studienarbeiten bei der Erstellung dieser Dissertation unterstützt haben. Außerdem bedanke ich mich bei der DECKEL MAHO Pfronten GmbH und insbesondere Herrn Dr.-Ing. Thomas Garber für die gute Zusammenarbeit und die Bereitstellung der in dieser Arbeit verwendeten CAD-Modelle. Weiteren Dank möchte ich sämtlichen Mitgliedern der DFG-Forschergruppe „Dämpfungseffekte in Werkzeugmaschinen“ – besonders auch meinem Kollegen Klemens Niehues – aussprechen, die während der Anfertigung dieser Arbeit stets ein offenes Ohr für Fragen oder Diskussionen hatten.

Besonders bedanken möchte ich mich zudem bei meiner Frau sowie bei meiner gesamten Familie, die mir mit ihrer Zuversicht und großen Geduld auch in Momenten des Zweifels stets Rückhalt gegeben haben. Vielen herzlichen Dank dafür!

Gilching, im November 2015

Stefan Schwarz





# Inhaltsverzeichnis

<b>Notation, Symbole und Abkürzungen</b>	<b>IX</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Stand der Wissenschaft und Technik</b>	<b>3</b>
2.1 Begriffsdefinitionen . . . . .	3
2.2 Dynamisches Verhalten von Werkzeugmaschinen . . . . .	6
2.2.1 Einfluss der Maschinenstruktur . . . . .	6
2.2.2 Beurteilung der dynamischen Eigenschaften . . . . .	7
2.2.3 Modellbildung und Modaltransformation . . . . .	8
2.2.4 Experimentelle Modalanalyse . . . . .	14
2.3 Dynamische Simulation von kontinuierlichen Strukturen . . . . .	15
2.3.1 Methode der finiten Elemente . . . . .	15
2.3.2 Güte der Näherungslösung . . . . .	18
2.3.3 Diskretisierungsfehler . . . . .	19
2.3.4 Fehler beim Lösen der Bewegungsgleichungen . . . . .	23
2.3.5 Parametrisierung des Modells . . . . .	26
2.4 Dynamische Modelle von Werkzeugmaschinenstrukturen . . . . .	29
2.4.1 Strukturbauteile . . . . .	30
2.4.2 Aufstellelemente . . . . .	31
2.4.3 Verschraubte Fugen . . . . .	31
2.4.4 Profilschienenführungen . . . . .	34
2.4.5 Kugelgewindetriebe inkl. Lagerung . . . . .	37
2.4.6 Gesamtmodell . . . . .	40
2.5 Verifikation, Validierung und Vergleich dynamischer Modelle . . . . .	41
2.5.1 Modellverifikation und -validierung . . . . .	41
2.5.2 Verfahren des Model Updating . . . . .	42
2.5.3 Vergleichsmaße . . . . .	44
2.6 Unsicherheiten in strukturdynamischen Modellen . . . . .	46
2.6.1 Probabilistische Ansätze . . . . .	46
2.6.2 Nicht-probabilistische Ansätze . . . . .	47
2.7 Zusammenfassung und Handlungsbedarf . . . . .	50
<b>3 Zielsetzung und Vorgehen</b>	<b>53</b>
<b>4 Erstellung prognosefähiger Modelle</b>	<b>55</b>
4.1 Wie entsteht Prognosefähigkeit? . . . . .	55
4.1.1 Prognosefähigkeit, Verifikation und Validierung . . . . .	55
4.1.2 Konsequenzen für den Modellierungsprozess . . . . .	57

4.1.3	Quantifizierung der Prognosefähigkeit . . . . .	59
4.2	Methode zur Erstellung prognosefähiger Modelle . . . . .	62
4.3	Formalisierte Beschreibung des Modellierungsprozesses . . . . .	63
4.4	Charakterisierung der Modellannahmen . . . . .	66
4.5	Quantifizierung aleatorischer Unsicherheiten . . . . .	67
4.5.1	Dynamisch relevante Bereiche in Kontinua . . . . .	68
4.5.2	Quantifizierung von Modellparametern . . . . .	69
4.6	Begrenzung epistemischer Unsicherheiten . . . . .	71
4.6.1	Vereinfachungen während der Modellierung . . . . .	71
4.6.2	Begrenzung des Diskretisierungsfehlers . . . . .	73
4.7	Recheneffiziente Integration von Unsicherheiten in Modelle . . . . .	75
4.7.1	Randbedingungen und Auswahl des Verfahrens . . . . .	75
4.7.2	Bestimmung des Intervall-Eigenwertproblems . . . . .	78
4.7.3	Ungedämpfte intervallbasierte Frequenzgänge . . . . .	81
4.7.4	Lokal gedämpfte intervallbasierte Frequenzgänge . . . . .	84
4.8	Anmerkungen zur Anwendung der Methode . . . . .	93
<b>5</b>	<b>Prognosefähige Modellierung von Werkzeugmaschinenstrukturen</b>	<b>95</b>
5.1	Zielsetzung der Modellierung . . . . .	95
5.2	Strukturbauteile . . . . .	96
5.2.1	Diskussion vorhandener Ansätze . . . . .	97
5.2.2	Ableitung einer prognosefähigen Modellierung . . . . .	100
5.2.3	Anwendung am betrachteten Maschinenständer . . . . .	103
5.3	Aufstellelemente . . . . .	106
5.3.1	Experimentelle Charakterisierung . . . . .	107
5.3.2	Ableitung einer prognosefähigen Modellierung . . . . .	110
5.3.3	Anwendung am betrachteten Aufstellelement . . . . .	113
5.4	Verschraubte Fugen . . . . .	116
5.4.1	Diskussion vorhandener Ansätze . . . . .	117
5.4.2	Ableitung einer prognosefähigen Modellierung . . . . .	117
5.4.3	Anwendung an einer einfachen Balkenstruktur . . . . .	123
5.5	Profilschienenführungen . . . . .	126
5.5.1	Ableitung einer prognosefähigen Modellierung . . . . .	127
5.5.2	Anwendung an einer teilmontierten Maschinenstruktur . . . . .	129
5.6	Kugelgewindetriebe inkl. Lagerung . . . . .	132
5.6.1	Diskussion vorhandener Ansätze . . . . .	133
5.6.2	Ableitung einer prognosefähigen Modellierung . . . . .	137
5.6.3	Anwendung an einer teilmontierten Maschinenstruktur . . . . .	144
5.7	Systematik der auftretenden Unsicherheiten . . . . .	148
<b>6</b>	<b>Anwendung an einem Bearbeitungszentrum</b>	<b>149</b>
6.1	Betrachteter Versuchsträger . . . . .	149
6.2	Größe der Streuungen und Einfluss der Unsicherheiten . . . . .	150
6.2.1	Strukturbauteile . . . . .	150

---

6.2.2	Aufstellelemente . . . . .	154
6.2.3	Verschraubte Fugen . . . . .	156
6.2.4	Profilschienenführungen . . . . .	157
6.2.5	Kugelgewindetriebe inkl. Lagerung . . . . .	160
6.3	Relevanz der Unsicherheiten für den Modellaufbau . . . . .	162
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>165</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>167</b>
A.1	Berechnung des äquivalenten Durchmessers von Spindelwellen	167
A.2	Berechnung der Steifigkeitsmatrix von Kugelgewindetriebe . .	168
A.3	Numerischer Vergleich der Kugelgewindetrieb-Modelle . . . . .	171
A.4	Berechnung der Fugen des Versuchsträgers . . . . .	172
A.5	Parameterdateien zur Ansteuerung von MSC.Nastran . . . . .	177
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>181</b>
	<b>Verzeichnis betreuter Studienarbeiten</b>	<b>209</b>



# Notation, Symbole und Abkürzungen<sup>1</sup>

## Notation und Indices

$a$	Skalar
$\{a\}$	Spaltenvektor
$[a]$	Matrix
$\mathbf{a}, \{\mathbf{a}\}, [\mathbf{a}]$	Intervallskalar, -vektor oder -matrix
$\langle a \rangle$	Set möglicherweise diskontinuierlicher Intervalle
$\langle\langle a \rangle\rangle$	konservative Schätzung eines Intervallsets
$\llbracket [\mathbf{a}] \rrbracket$	konservative Schätzung einer Intervallmatrix
$\underline{a}$	untere Intervallgrenze oder Tensor erster Stufe
$\bar{a}$	obere Intervallgrenze
$\bar{a}$	arithmetisches Mittel
$\underline{a}$	Tensor zweiter Stufe
$a_i$	Element einer Matrix oder eines Vektors
$a_{ij}, a_{ijkl}$	Element eines Tensors erster bzw. zweiter Stufe
$\det [a]$	Determinante einer Matrix
$\text{diag} [a]$	Hauptdiagonale einer Matrix bzw. Diagonalmatrix
$[a]^{-1}$	Inverse einer Matrix
$[a]_{b \times b}$	Matrix der Dimension $b \times b$
$\frac{\partial}{\partial a}$	partielle Differentiation
$\dot{a}$	Differentiation nach der Zeit ( $= \frac{\partial a}{\partial t}$ )
$\{a\}', [a]'$	Projektion eines Vektors oder einer Matrix
$\{a\}^T, [a]^T$	Transponierte eines Vektors oder einer Matrix
$\{a\}^H, [a]^H$	Adjungierte bzw. komplex konjugiert Transponierte eines Vektors oder einer Matrix
$a^*$	konjugiert Komplexe zu $a$

---

<sup>1</sup> Die Notation für Intervalle und Fuzzy-Zahlen ist konsistent zu MOENS (2002, S. 27 f., 45 f.) gewählt. Sämtliche Größen des modalen Raums sind konsistent zu LIEVEN & EWINS (1992) bezeichnet, die Symbole für die Schraubenberechnung sind der VDI 2230 BLATT 1 entlehnt.

---

$ a $	Betrag einer komplexwertigen Zahl
$\angle a$	Phase einer komplexwertigen Zahl
$\Re(a)$	Realteil einer komplexwertigen Zahl
$\Im(a)$	Imaginärteil einer komplexwertigen Zahl
$a_r$	modale Größe der r-ten Eigenfrequenz
$\{a\}_r$	Eigenvektor der r-ten Eigenfrequenz
$(a_r)_i$	i-tes Element des Eigenvektors der r-ten Eigenfrequenz
$a_A$	analytisch bzw. rechnerisch ermittelte Größe
$a_e$	auf ein finites Element bezogene Größe
$a_T$	theoretisch exakte Größe
$a_X$	experimentell ermittelte Größe
$\bar{a}$	Bedingung auf dem Gebietsrand
$a^0$	Anfangsbedingung
$a_0$	Nennwert bzw. auf den Ideal- oder Ausgangszustand bezogene Größe
$a_{\perp}$	normal zur Bezugsfläche orientierte Größe
$a_{\parallel}$	tangential zur Bezugsfläche orientierte Größe
$a_{\text{axial}}$	auf die Axialrichtung bezogene Größe
$a_{\text{KGT}}$	auf den Kugelgewindetrieb bezogene Größe
$a_{\text{obj}}$	auf eine Zielfunktion bezogene Größe
$a_{\text{PDF}}$	auf eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion bezogene Größe
$a_{\text{real}}$	auf das reale System bezogene Größe
$a_{\text{TCP}}$	auf die Wirkstelle bezogene Größe
$a_{\text{Stör}}$	Störgröße
$a_{\text{Stell}}$	Stellgröße
$a_{\text{Soll}}$	Sollgröße
$a_X/a_A$	Verhältnis aus Ist-Wert und Nennwert einer Größe

## Symbole<sup>2</sup>

$a, b$	beispielhafte Größen oder Knoten
$\mathcal{A}$	dynamische Beschleunigbarkeit in $\text{mm s}^{-2} \text{N}^{-1}$ ( $\text{rad s}^{-2} \text{N}^{-1} \text{mm}^{-1}$ )
$\hat{A}$	Fuzzy-Set
$A$	Fläche in $\text{mm}^2$
$[A_{12}]$	Drehtransformationsmatrix von System 1 in das System 2
$\hat{b}$	äußere Volumenkraft in $\text{N mm}^{-3}$
$[B]$	Koeffizientenmatrix der Zwangsbedingungen
$\underline{c}$	Cauchy-Spannungstensor in $\text{N mm}^{-2}$
$\hat{c}$	Konstante in Konvergenzbetrachtungen
$c$	Dämpfungskonstante in $\text{N s mm}^{-1}$ ( $\text{N mm s rad}^{-1}$ )
$[C]$	Dämpfungskonstantenmatrix in $\text{N s mm}^{-1}$ ( $\text{N mm s rad}^{-1}$ )
$d$	hysteretischer Dämpfungskoeffizient in $\text{N mm}^{-1}$ ( $\text{N mm rad}^{-1}$ )
$[D]$	hysteretische Dämpfungsmatrix in $\text{N mm}^{-1}$ ( $\text{N mm rad}^{-1}$ )
$d_2$	Flankendurchmesser des Schraubengewindes in mm
$\bar{D}_a$	äquivalenter Spindeldurchmesser in mm
$D'_A$	Ersatz-Außendurchmesser des Grundkörpers in mm
$D_{A,Gr}$	Grenzdurchmesser in mm
$D_{Ki}$	Innendurchmesser der ebenen Kopfauflagefläche der Schraube in mm
$D_n$	Nennendurchmesser des Kugelgewindetriebs in mm
$d_w$	Außendurchmesser der ebenen Kopfauflagefläche der Schraube in mm
$\mathcal{D}$	Nennerfunktion zur Berechnung des ungedämpften intervallbasierten Frequenzgangs
$\mathcal{D}^{\Re}$ bzw. $\mathcal{D}^{\Im}$	reell- bzw. imaginärwertige Nennerfunktion zur Berechnung des lokal gedämpften intervallbasierten Frequenzgangs
$e$	Eulersche Zahl
$\{e\}$	kanonischer Einheitsvektor
$E$	Elastizitätsmodul in MPa

<sup>2</sup> Einheiten in Klammern stellen jeweils korrespondierende modale oder rotatorische Größen dar.

$[E]$	Elastizitätsmatrix in MPa
$\mathcal{F}$	Funktionsausdruck
$f$	Kraft in N (N mm)
$F$	Amplitude einer Kraft in N (N mm)
$F_M$	Montagevorspannkraft in N
$g, h, i, j, k, l$	Laufvariablen
$g(t)$	Zeitsignal
$G(\omega)$	Fourier-Transformierte
$\check{h}$	Höhe in mm
$\hat{h}$	Netzparameter bzw. Elementseitenlänge
$H$	Frequenzgang
$i_r$	engl. <i>Model Incompleteness Ratio</i> , Maßzahl für den Vergleich von analytischen und experimentellen Modellen
$[I]$	Einheitsmatrix
$\bar{I}$	mittleres Flächenträgheitsmoment in mm <sup>4</sup>
$[J]$	Jacobi-Matrix
$k$	Steifigkeit in N mm <sup>-1</sup> (N mm rad <sup>-1</sup> ) bzw. in N mm <sup>-3</sup> bei Kontaktsteifigkeiten
$k_n$	Kugelkontaktsteifigkeit in N mm <sup>-1</sup>
$[K]$	Steifigkeitsmatrix in N mm <sup>-1</sup> (N mm rad <sup>-1</sup> )
$l$	Länge in mm
$l_k$	Klemmlänge in mm
$m$	Masse in t (t mm <sup>2</sup> )
$\check{m}$	Anzahl der berücksichtigten Moden
$[M]$	Massenmatrix in t (t mm <sup>2</sup> )
$M_A$	Anziehdrehmoment in N mm
$n$	Anzahl gemessener Freiheitsgrade
$\{n\}$	Normalenvektor
$n_{sd}$	Anzahl der Raumrichtungen
$N$	Anzahl der Freiheitsgrade, Schraubenanzahl oder Stichprobengröße
$\hat{p}$	Polynomordnung
$P$	Spindel- bzw. Gewindesteigung in mm
$\hat{p}$	Wahrscheinlichkeit



---

$q$	modale Verschiebung in $\text{mm t}^{0,5}$ ( $\text{rad mm t}^{0,5}$ )
$Q$	Amplitude einer modalen Verschiebung in $\text{mm t}^{0,5}$ ( $\text{rad mm t}^{0,5}$ )
$r$	Index der aktuellen Mode
$\{\hat{r}\}$	Positionsvektor der Helixfunktion in $\text{mm}$
$R$	Radius in $\text{mm}$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\bar{R}_a$	äquivalenter Radius in $\text{mm}$
$R_I$	Innenradius in $\text{mm}$
$R_{jk}$	Residuen der nicht berücksichtigten Moden im Frequenzgang $j - k$
$[R]$	Residuenmatrix der nicht berücksichtigten Moden
$[S]$	Sensitivitätsmatrix
$t$	Zeit in $\text{s}$
$T$	kinetische Energie in $\text{N mm (s}^{-2}\text{)}$
$[\hat{T}]$	Projektionsmatrix
$u$	Formänderungsenergie-dichte in $\text{N mm mm}^{-3} (\text{s}^{-2} \text{mm}^{-3})$
$U$	Formänderungsenergie in $\text{N mm (s}^{-2}\text{)}$
$\ \Delta U\ $	Differenz der Energie-Normen für die Verzerrungen
$\ U_T\ $	Energie-Norm der theoretisch exakten Lösung
$V$	Volumen in $\text{mm}^3$
$w$	Wichtungsfunktion
$\hat{w}$	Biegelinie in $\text{mm}$
$W$	Dissipationsenergie in $\text{N mm (s}^{-2}\text{)}$
$\hat{W}$	Wichtungsfaktor
$x, y, z$	Position oder Verschiebung in $\text{mm (rad)}$
$\ \hat{x}_T\ _g$	Sobolev-Norm der $g$ -ten Ordnung für die theoretisch exakte Lösung
$X$	Amplitude einer Verschiebung in $\text{mm (rad)}$
$\hat{y}$	Wert einer Zwangsbedingung
$Y$	dynamische Beweglichkeit in $\text{mm s}^{-1} \text{N}^{-1}$ ( $\text{rad s}^{-1} \text{N}^{-1} \text{mm}^{-1}$ )
$\alpha$	dynamische Nachgiebigkeit in $\text{mm N}^{-1}$ ( $\text{rad N}^{-1} \text{mm}^{-1}$ )
$\alpha_{\hat{m}}$	modal superponierte dynamische Nachgiebigkeit unter Berücksichtigung von $\hat{m}$ Moden in $\text{mm N}^{-1}$ ( $\text{rad N}^{-1} \text{mm}^{-1}$ )

$[\alpha]$	dynamische Nachgiebigkeitsmatrix in $\text{mm N}^{-1}$ ( $\text{rad N}^{-1} \text{mm}^{-1}$ )
$\check{\alpha}_1, \check{\alpha}_2$	Proportionalitätsfaktoren
$\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$	$\alpha$ -Levels
$\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\chi}$	Winkel in rad
$\beta$	Parameter für Biegelinien von Balken
$\Gamma$	Rand des betrachteten Gebiets
$\Gamma_D, \Gamma_N$	Rand des betrachteten Gebiets mit Dirichlet- bzw. von-Neumann-Randbedingungen
$\delta_{ij}$	Kronecker-Delta
$\delta$	Relativbewegung von zwei Kontaktflächen in mm
$\underline{\epsilon}$	Verzerrungstensor
$\zeta$	Dämpfungsgrad
$\eta$	Verlustfaktor
$\bar{\eta}$	äquivalenter Verlustfaktor
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	Winkel oder Verdrehung in rad
$i$	imaginäre Einheit ( $= \sqrt{-1}$ )
$\kappa$	Oberflächenfaktor
$\lambda$	Eigenwert
$\mu$	Reibzahl
$\mu_{\hat{A}}$	Zugehörigkeitsfunktion des Fuzzy-Sets $\hat{A}$
$\nu$	Poisson- bzw. Querkontraktionszahl
$\xi$	Elementkoordinaten in mm (rad)
$\pi$	Kreiszahl
$\rho$	Dichte in $\text{t mm}^{-3}$
$\bar{\rho}$	angepasste Dichte in $\text{t mm}^{-3}$
$\hat{\rho}$	größtmögliche(r) Kugel bzw. Durchmesser im Elementgebiet
$\sigma$	Spannung bzw. Flächenlast in $\text{N mm}^{-2}$ oder Standardabweichung einer Normalverteilung in deren Einheit
$\underline{\sigma}$	Spannungstensor in $\text{N mm}^{-2}$
$\hat{\sigma}$	Aspektverhältnis
$\tau$	Formfunktion
$\varphi$	Öffnungswinkel des Verformungskegels in $^\circ$
$\{\phi\}$	massenormierter Eigenvektor in $\text{t}^{-0,5}$ ( $\text{t}^{-0,5} \text{mm}^{-1}$ )

---

$[\phi]$	massenormierte Eigenvektormatrix in $t^{-0,5}$ ( $t^{-0,5} \text{ mm}^{-1}$ )
$\chi$	Anteil der nominellen Kontaktfläche
$\{\psi\}$	Eigenvektor
$[\Psi]$	Eigenvektormatrix
$\omega$	Kreisfrequenz bzw. Eigenkreisfrequenz in $\text{rad s}^{-1}$
$\Omega$	betrachtetes Gebiet

## Abkürzungen

Abb.	Abbildung/-en
altgr.	altgriechisch
bspw.	beispielsweise
bzgl.	bezüglich
bzw.	beziehungsweise
CAD	engl. <i>Computer Aided Design</i> , rechnerunterstütztes Konstruieren
d. h.	das heißt
f. bzw. ff.	folgende bzw. fortfolgende
DOF	engl. <i>Degree of Freedom</i> , Freiheitsgrad
EF	Eigenfrequenz
engl.	englisch
FEM	Finite-Elemente-Methode
FRAC	engl. <i>Frequency Response Assurance Criterion</i> , Vergleichsmaß für Frequenzgänge
FRF	engl. <i>Frequency Response Function</i> , Frequenzgangfunktion
ggf.	gegebenenfalls
ggü.	gegenüber
Gl.	Gleichung/-en
IESM	engl. <i>Inverse Eigensensitivity Method</i> , modalgrößenbasiertes Model-Updating-Verfahren
inkl.	inklusive
Kap.	Kapitel
KGT	Kugelgewindetrieb
lat.	lateinisch

MAC	engl. <i>Modal Assurance Criterion</i> , Vergleichsmaß für Eigenvektoren
max	Maximum
MCS	Monte-Carlo-Simulation
MIMO	engl. <i>Multiple Input Multiple Output</i> , System mit mehreren Eingängen und mehreren Ausgängen
min	Minimum
NFD	engl. <i>Natural Frequency Difference</i> , Maß für die Abweichung von Eigenfrequenzen in %
PDF	engl. <i>Probability Density Function</i> , Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion
PSF	Profilschienenführung
rel.	relativ/-e
RFM	engl. <i>Response Function Method</i> , frequenzgangbasiertes Model-Updating-Verfahren
S.	Seite/-n
SISO	engl. <i>Single Input Single Output</i> , System mit einem Eingang und einem Ausgang
sog.	sogenannte/-en
sym	symmetrische Matrix
Tab.	Tabelle/-n
TCP	engl. <i>Tool Center Point</i> , Wirkstelle
u.	und
usw.	und so weiter
z. B.	zum Beispiel

# 1 Einleitung

*Essentially, all models are wrong, but some are useful. However, the approximate nature of the model must always be borne in mind.*

— George Box<sup>3</sup>

**Fokus der Arbeit.** Dynamische Simulationsmodelle von Werkzeugmaschinenstrukturen werden hauptsächlich als sog. *virtuelle Prototypen* eingesetzt, um das dynamische Verhalten der Maschine – wie in Abb. 1.1 skizziert – bereits während des Entwicklungsprozesses beurteilen und verbessern zu können (KEHL & ALTSTÄDTER 2003).

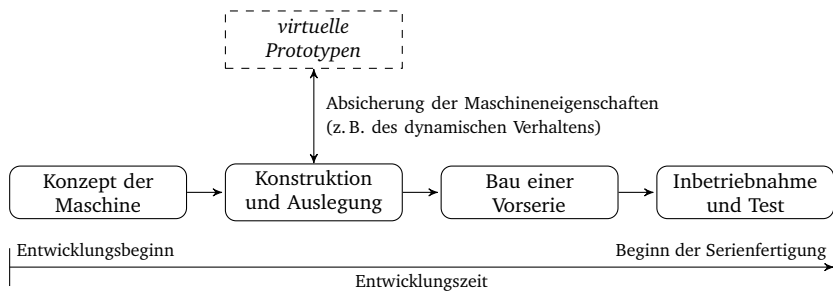


Abb. 1.1: Einsatz von virtuellen Prototypen im Entwicklungsprozess von Werkzeugmaschinen in Anlehnung an ALTINTAS ET AL. (2005)

Dies ist erforderlich, da das dynamische Verhalten der Maschine einen wesentlichen Einfluss auf die Stabilität des Zerspanprozesses und somit auf die Leistungsfähigkeit der Werkzeugmaschine im Allgemeinen besitzt (SCHMITZ & SMITH 2009, S. 2). Da das dynamische Verhalten mechanischer Strukturen wie Werkzeugmaschinen jedoch eine globale Systemeigenschaft darstellt, die durch das Zusammenwirken sämtlicher Bauteile bestimmt wird (FINKE 1977, S. 3), ist eine vollständige Auslegung der dynamischen Eigenschaften bspw. durch Konstruktionsrichtlinien im Allgemeinen nicht möglich. Um die dynamische Güte verschiedener Konstruktionsalternativen mit geringem Aufwand beurteilen und kostengünstig vergleichen zu können, werden stattdessen die genannten Simulationsmodelle – meist auf Basis der Methode der finiten Elemente – eingesetzt (SCHNEIDER 2000, S. 74). Die Verwendung derartiger

<sup>3</sup> BOX & DRAPER (1987, S. 424).

Modelle bringt jedoch nur dann einen wirklichen Mehrwert, wenn sie zur „Vorhersage des realen Verhaltens“ genutzt werden können (VERL & BRECHER 2012). Diese Anforderung lässt sich auch unter dem Begriff der *Prognosefähigkeit* zusammenfassen. Gleichzeitig ist der Modellaufbau jedoch mit zahlreichen Ungenauigkeiten behaftet, welche die Prognosefähigkeit beeinträchtigen und einerseits auf die Wechselwirkung der verschiedenen Modellteile sowie andererseits auf die Unkenntnis der Eigenschaften von Füge- und Koppelstellen zurückzuführen sind (WECK & BRECHER 2006b, S. 195). Das daraus entstehende Spannungsfeld stellt den Betrachtungsrahmen der vorliegenden Arbeit dar.

**Intention und Aufbau.** Die behandelte Themenstellung besitzt aus Sicht des Autors – neben der Leserschaft aus Wissenschaft und Forschung – auch für einige Anwender aus der Industriepraxis unmittelbare Relevanz. Deshalb wurde in dieser Arbeit versucht, beide Interessengruppen gleichermaßen zu berücksichtigen. Dies äußert sich zum einen darin, dass im Stand der Wissenschaft und Technik die für das Verständnis wesentlichen Zusammenhänge und Gleichungen aufgeführt sind, anstatt lediglich auf die entsprechenden Literaturquellen zu verweisen. Zum anderen werden bei der Vorstellung von Methoden, Verfahren und Modellierungsprozessen an mehreren Stellen Beispiele bemüht, um eine gewisse Anschaulichkeit zu gewährleisten. Darüber hinaus sind sämtliche relevanten Parameter der verwendeten Modelle oder entsprechende Querverweise angegeben, was eine Übertragung des hier Gezeigten auf verwandte Problemstellungen vereinfachen soll. Einige für die behandelte Themenstellung essentielle Begrifflichkeiten sind jedoch in der Literatur mit teilweise nicht eindeutigen oder widersprüchlichen Bedeutungen belegt. Um angesichts dessen zunächst eine konsistente und eindeutige Basis für die Arbeit zu schaffen, werden zu Beginn des nun folgenden Kapitels die erforderlichen Begriffe definiert, bevor anschließend der Stand der Wissenschaft und Technik präsentiert wird. Daraus resultiert der Handlungsbedarf, welcher sich im Anschluss in der Zielsetzung und dem Vorgehen widerspiegelt. Das Vorgehen leitet insgesamt drei aufeinander aufbauende Hauptkapitel mit steigendem Anwendungsbezug ein, die am Ende der Arbeit zusammengefasst werden und schließlich in einem Ausblick auf weiterführende Untersuchungsgebiete münden.

## 2 Stand der Wissenschaft und Technik

### 2.1 Begriffsdefinitionen

**Modell, Modellierung und Simulation (NEELAMKAVIL 1987, S. 6, 30 ff.).** Ein Modell ist eine vereinfachte Darstellung eines Systems, eines Prozesses oder einer Theorie. Es ist dazu gedacht, unsere Fähigkeit zu steigern, das Systemverhalten zu verstehen, zu prognostizieren und – sofern möglich – zu kontrollieren. Dabei ist die Modellierung jener Vorgang, in welchem Zusammenhänge zwischen wichtigen Elementen des Systems hergestellt werden, während Modelle in Form von Zielen, Leistungskriterien und Randbedingungen beschrieben werden. Die Simulation ist der Vorgang, in dem durch den Aufbau des Modells und anschließende Versuche wichtige Aspekte des Systemverhaltens in Echtzeit oder in verkürzter bzw. gestreckter Zeitskala nachgestellt werden.

**Verifikation, Validierung und Prognosefähigkeit (NEELAMKAVIL 1987, S. 76).** Eine Verifikation stellt sicher, dass ein Modell den Spezifikationen entspricht und dass weder Fehler in der Modellstruktur noch in den -algorithmen oder in der Implementierung vorliegen. Die Validierung ist der Prozess, in dem nachgewiesen wird, dass ein Modell innerhalb seines Anwendungsgebiets hinreichend genau für die beabsichtigte Anwendung ist. Es kann dabei zwischen rückwirkender, prädiktiver und struktureller Validität unterschieden werden. Rückwirkend valide ist ein Modell, das bestehende, bekannte Daten hinreichend genau wiedergibt. Prädiktive Validität ist gegeben, wenn dieselbe Eigenschaft für zukünftige, unbekannte Daten vorliegt. Von struktureller Validität wird gesprochen, wenn das Modell das innere Verhalten des realen Systems glaubwürdig abbildet. Als prognosefähig werden in dieser Arbeit Modelle bezeichnet, die verifiziert sind und alle drei Validitätseigenschaften erfüllen.

**Aleatorische Unsicherheit (OBERKAMPF & ROY 2010, S. 51 f.).** Eine aleatorische<sup>4</sup> Unsicherheit ist eine nicht reduzierbare Unsicherheit während der Modellierung oder der Simulation, die aufgrund system- oder umgebungsinhärenter Variationen auftritt. Derartige Unsicherheiten verändern sich von Exemplar zu Exemplar oder von Zeitpunkt zu Zeitpunkt innerhalb bekannter Streubereiche. Aleatorische Unsicherheiten können deshalb mit Wahrscheinlichkeits- oder Frequenzverteilungen beschrieben werden, sofern dazu hinreichend Informationen vorhanden sind.

---

<sup>4</sup> Lat. *alea*, „Würfel“.

**Epistemische Unsicherheit (OBERKAMPF & ROY 2010, S. 53 f.).** Eine epistemische<sup>5</sup> Unsicherheit ist eine Unsicherheit während der Modellierung oder der Simulation, die aufgrund von Kenntnismangel auftritt und sich durch Wissenszugewinn reduzieren lässt. Der Kenntnismangel selbst hat seinen Ursprung entweder in Unklarheiten, in ungenügender Genauigkeit oder in Widersprüchen. Epistemische Unsicherheiten können in zwei Typen unterschieden werden: Im Falle einer **erkannten** epistemischen Unsicherheit wurde eine bewusste Entscheidung getroffen, um diese zu charakterisieren, mit ihr in irgendeiner Weise umzugehen oder sie aufgrund praktischer Einschränkungen – wie hinsichtlich Zeit oder Kosten – zu ignorieren. Im Gegensatz dazu wird im Fall einer **verdeckten** – also unbewussten – epistemischen Unsicherheit nicht erkannt, dass das Wissen über das modellierte System unvollständig und diese Wissenslücke relevant für den Modellierungsprozess ist.

**Fehler (OBERKAMPF & ROY 2010, S. 57 f.).** Ein Fehler ist eine Abweichung einer Größe von ihrem wahren Wert. Im Vergleich zur Betrachtung von Unsicherheiten ist der Grund der Abweichung nicht relevant. Der wahre Wert ist zuvor zu definieren. Er ist in numerischen Simulationen selten, in experimentellen Untersuchungen dagegen nie bekannt. Der Nutzen einer Fehlerbetrachtung hängt daher von der Definition des wahren Werts und von dessen Genauigkeit im Vergleich zur Abweichung ab.

**Maschinenstruktur.** Die vorliegende Arbeit beschränkt sich auf die Betrachtung der Maschinenstruktur von spanenden Werkzeugmaschinen. Da in der einschlägigen Literatur unterschiedliche Auffassungen darüber zu finden sind, welche Komponenten einer derartigen Maschine damit gemeint sind, folgt eine kurze Definition des Begriffs und eine Übersicht der enthaltenen Komponenten. Spanende Werkzeugmaschinen lassen sich nach NEUGEBAUER (2012, S. 290) grundsätzlich in die in Tab. 2.1 aufgeführten Baugruppen gliedern. Der Begriff Maschinenstruktur umfasst in der vorliegenden Arbeit die mechanischen Komponenten der Baugruppen 3 bis 6, wobei Motoren, Kupplungen und Klemmeinrichtungen ausgenommen sind. Sämtliche Gestellbauteile (Baugruppe 3) werden fortan als **Strukturbauteile** bezeichnet, die mit Hilfe von **verschraubten Fugen** verbunden sind. Als Führungen (Baugruppe 4) kommen bei modernen Werkzeugmaschinen vorwiegend Kompaktwälzführungssysteme mit umlaufenden Wälzkörpern zum Einsatz, die in dieser Arbeit **Profilschienenführungen** genannt werden. Bei Verwendung konventioneller Antriebsmotoren (Baugruppe 5) wird die Umsetzung von Rotation in Translation hauptsächlich über **Kugelgewindetribe** realisiert, die ihrerseits geeignet gelagert sind. Die Maschinenaufstellung auf dem Fundament (Baugruppe 6) erfolgt typischerweise mit **Aufstellelementen** in verschiedenen Bauformen. Eine Maschinenstruktur setzt sich somit aus den in Abb. 2.1 dargestellten Komponenten zusammen.

---

<sup>5</sup> Altgr. *epistími*, „Wissenschaft“.



1. Werkzeug- und Werkstückaufnahme
2. Hauptspindelbaugruppe
3. Gestellbauteile wie Betten, Ständer, Schlitten, Traversen, Tische usw.
4. Führungen zum Ermöglichen von Bewegungen zwischen Gestellbauteilen
5. Antriebsbaugruppen zum Erzeugen notwendiger Bewegungen
6. Maschinenaufstellung und Fundament
7. Automatisierungsbaugruppen für den Wechsel und die Speicherung von Werkzeugen und Werkstücken
8. Maschinensteuerung einschließlich Bedienteile und Sicherheitseinrichtungen
9. Ver- und Entsorgungseinrichtungen z. B. für Dämpfe, Kühlschmierstoff, Späne
10. Maschinenverkleidung und -einhausung

Tab. 2.1: Baugruppen spanender Werkzeugmaschinen nach NEUGEBAUER (2012, S. 290)

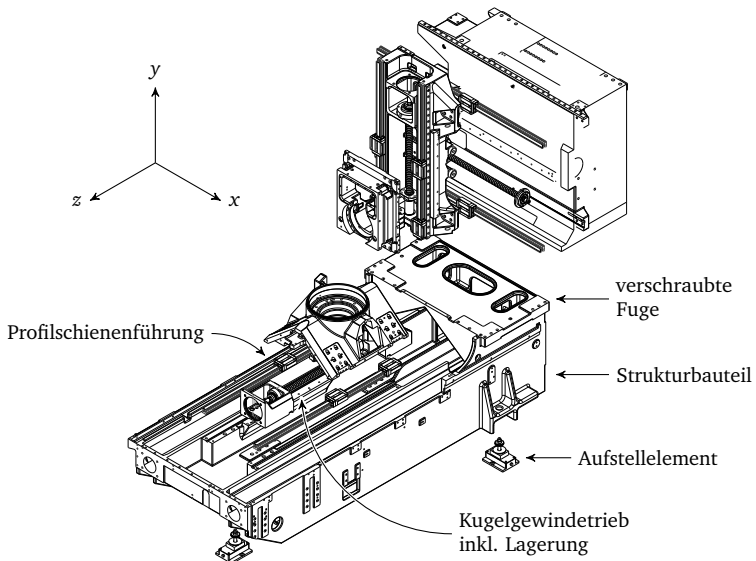


Abb. 2.1: Typische Komponenten der Maschinenstruktur einer spanenden Werkzeugmaschine mit zugehörigem Maschinenkoordinatensystem

## 2.2 Dynamisches Verhalten von Werkzeugmaschinen

Die Genauigkeit und Leistungsfähigkeit spanender Werkzeugmaschinen wird unter anderem durch die dynamischen Eigenschaften begrenzt. Unausgewogene dynamische Eigenschaften der Maschine können einerseits eine mangelnde Oberflächen-genauigkeit des Werkstücks, andererseits aber auch erhöhten Werkzeugverschleiß oder im schlimmsten Fall Werkzeugbruch oder Schäden an Werkstück und Maschine zur Folge haben (WECK & BRECHER 2006b, S. 195). Ursache hierfür sind durch Störkräfte  $\{f_{\text{Stör}}\}$  verursachte zyklische Schwankungen der gerichteten Relativkräfte  $\{f_{\text{TCP}}\}$  und -verlagerungen  $\{x_{\text{TCP}}\}$  an der Wirkstelle<sup>6</sup> innerhalb des geschlossenen Systems aus Maschine und Zerspanprozess, was mit Hilfe des in Abb. 2.2 illustrierten Blockschaltbilds beschrieben werden kann. Der maschinenseitige Beitrag zu dieser Wechselwirkung wird unter Annahme eines linearen Systemverhaltens mit der dynamischen Nachgiebigkeit an der Wirkstelle

$$\{\alpha_{\text{TCP}}\} = \frac{\{x_{\text{TCP}}\}}{\{f_{\text{TCP}}\}} \quad (2.1)$$

charakterisiert.

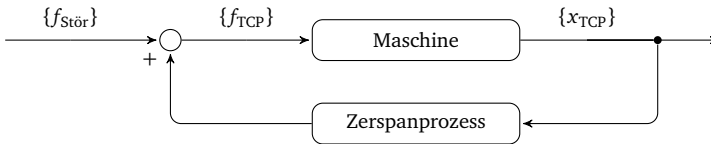


Abb. 2.2: Regelungstechnische Beschreibung der Wechselwirkung zwischen Maschine und Zerspanprozess in Anlehnung an MILBERG (1995, S. 80)

### 2.2.1 Einfluss der Maschinenstruktur

Die dynamische Nachgiebigkeit  $\{\alpha_{\text{TCP}}\}$  an der Wirkstelle setzt sich aus den dynamischen Eigenschaften der mechanischen Maschinenstruktur und jenen der kaskadierten Lageregelkreise der Vorschubantriebe zusammen (WECK ET AL. 1999). Dabei bringen die Regelkreise unter Berücksichtigung der Soll-Positionen  $\{x_{\text{Soll}}\}$  und der Verlagerungen  $\{x_{\text{TCP}}\}$  mit Hilfe der Aktoren die Stellkräfte  $\{f_{\text{Stell}}\}$  auf die Maschinenstruktur auf. Der gesamte Wirkzusammenhang wird erkennbar, indem das Übertragungsverhalten der Maschine aus Abb. 2.2 in die entsprechenden Zweige der Maschinenstruktur und der Lageregelkreise – wie in Abb. 2.3 zu sehen – aufgeteilt wird. Auf diese Weise wird

<sup>6</sup> Engl. *Tool Center Point*, kurz TCP

anschaulich die zentrale Bedeutung des Übertragungsverhaltens der mechanischen Maschinenstruktur für das dynamische Verhalten der Gesamtmaschine deutlich.

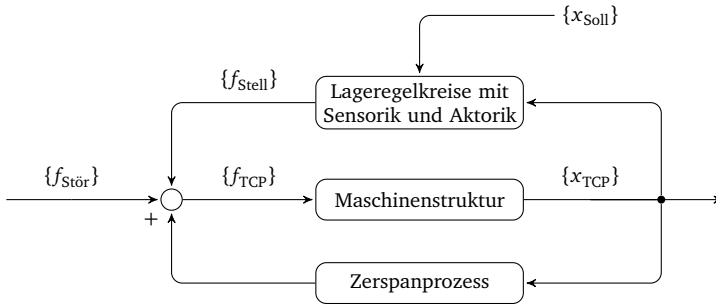


Abb. 2.3: Wirkzusammenhang zwischen Lageregelkreisen, Maschinenstruktur und Zerspanprozess in Anlehnung an DRESIG & HOLZWEISSIG (2009, S. 504)

### 2.2.2 Beurteilung der dynamischen Eigenschaften

Das dynamische Verhalten von spanenden Werkzeugmaschinen im Allgemeinen und von Maschinenstrukturen im Speziellen wird üblicherweise im Frequenzbereich beschrieben und beurteilt (WECK & BRECHER 2006b, S. 215). Die wichtigste Kenngröße hierfür ist der **Frequenzgang**<sup>7</sup>  $H$ , welcher – wie in Abb. 2.4 zu erkennen – den Systemeingang  $G_1$  frequenzabhängig mit dem Systemausgang  $G_2$  korreliert.

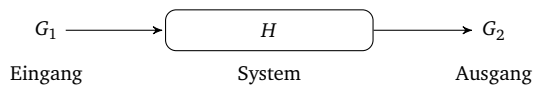


Abb. 2.4: Verhalten eines Frequenzgangs (RANDALL 1987, S. 239)

Unter Annahme von stabilem, linearem und zeitinvariantem Systemverhalten kann der Frequenzgang mit

$$H = \frac{G_2}{G_1} \quad (2.2)$$

definiert werden (RANDALL 1987, S. 239).

<sup>7</sup> Engl. *Frequency Response Function*, kurz FRE

Eine messtechnische Erfassung dieser Größe wird möglich, indem an der zu vermessenden Maschine Zeitsignale  $g(t)$  aufgenommen werden, welche anschließend mittels einer Fourier-Transformation

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.3)$$

in den Frequenzbereich überführt werden (RANDALL 1987, S. 59). Als Eingangszeitsignal dient dabei eine Kraft  $f(t)$ , als Ausgangszeitsignal je nach verwendetem Messprinzip eine Verschiebung  $x(t)$ , Geschwindigkeit  $\dot{x}(t)$  oder Beschleunigung  $\ddot{x}(t)$ . Damit ergeben sich im Frequenzbereich für spanende Werkzeugmaschinen folgende dynamischen Kenngrößen, welche unter Verwendung der Kreisfrequenz  $\omega$  und der imaginären Einheit  $i$  ineinander überführt werden können (MAIA & SILVA 1997, S. 38):

$$\text{Nachgiebigkeit} \quad \alpha(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} \quad (2.4)$$

$$\text{Beweglichkeit} \quad Y(\omega) = \frac{\dot{X}(\omega)}{F(\omega)} \quad \left( = i\omega \cdot \frac{X(\omega)}{F(\omega)} = i\omega \cdot \alpha \right) \quad (2.5)$$

$$\text{Beschleunigbarkeit} \quad \mathcal{A}(\omega) = \frac{\ddot{X}(\omega)}{F(\omega)} \quad \left( = -\omega^2 \cdot \frac{X(\omega)}{F(\omega)} = -\omega^2 \cdot \alpha \right) \quad (2.6)$$

Alle drei Kenngrößen haben komplexwertigen Charakter, weshalb die Darstellung entweder mit Hilfe von Amplituden- und Phasengang (Abb. 2.5a) oder Ortskurve (Abb. 2.5b) erfolgt. Der Amplitudengang kann dabei in der Hochachse je nach Verwendungszweck entweder linear oder logarithmisch skaliert angetragen werden. Die Maxima des Frequenzgangs mit einem Phasenabfall von  $-180^\circ$  heißen **Resonanzen**, die Minima entsprechend **Antiresonanzen**, welche einen Phasenanstieg von  $180^\circ$  zur Folge haben.

### 2.2.3 Modellbildung und Modaltransformation

Sofern nicht abweichend gekennzeichnet, sind die Ausführungen in diesem Abschnitt EWINS (1984, S. 38 ff.) und MAIA & SILVA (1997, S. 49 ff.) entnommen.

**Modellbildung.** Mechanische Strukturen wie Werkzeugmaschinen können – wie in Abb. 2.6 verdeutlicht – durch **Mehrmassenschwinger** beschrieben werden, in welchen die äußeren Lasten  $f$  mit den beschleunigungsproportionalen Trägheitskräften der Massen  $m$  und den auslenkungsproportionalen elastischen Kräften der Steifigkeiten  $k$  im Gleichgewicht stehen.

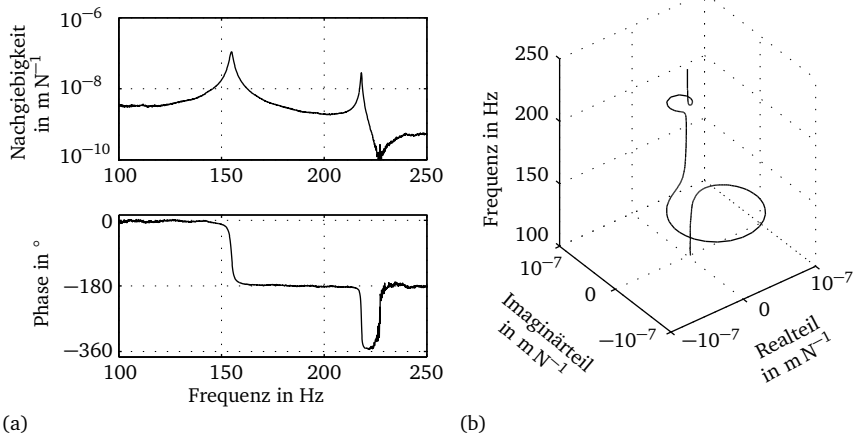


Abb. 2.5: Ausschnitt aus dem Amplituden- und dem Phasengang (a) sowie der entsprechenden Ortskurve (b) eines experimentell ermittelten Nachgiebigkeitsfrequenzgangs

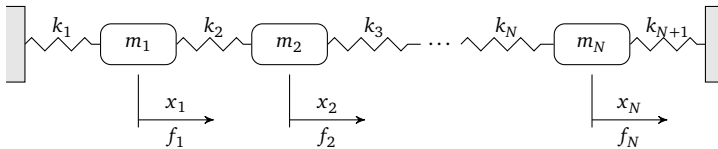


Abb. 2.6: Mehrmassenschwinger in Anlehnung an MAIA & SILVA (1997, S. 49)

Jeder der  $N$  Freiheitsgrade<sup>8</sup> verursacht eine zugehörige Resonanz, während die gegenseitige Auslöschung zweier oder mehrerer Freiheitsgrade zur Entstehung von Antiresonanzen führen kann. Die mathematische Beschreibung eines solchen Systems führt auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche in Matrixschreibweise folgende Form annimmt:

$$\underbrace{[M]}_{\text{Massenmatrix}} \{\ddot{x}\} + \underbrace{[K]}_{\text{Steifigkeitsmatrix}} \{x\} = \underbrace{\{f\}}_{\text{Lastvektor}} \quad (2.7)$$

Die Freiheitsgrade dieser Gleichung sind gekoppelt, sodass die Analyse des Gesamtsystems erschwert wird. Aus diesem Grund wird eine Transformation durchgeführt, die weitere Betrachtungen erleichtert.

<sup>8</sup> Engl. *Degree of Freedom*, kurz DOF.

**Modaltransformation.** Die Differentialgleichung 2.7 (S. 9) wird zunächst für den Fall einer freien Schwingung mit

$$\{f\} := \{0\} \quad (2.8)$$

betrachtet. Außerdem wird angenommen, dass die Bewegungen der zeitabhängigen Systemkoordinaten  $\{x\}$  und  $\{\ddot{x}\}$  synchron – sprich mit derselben Kreisfrequenz  $\omega$  – ablaufen, sodass die Lösung der Gleichung unter Verwendung der zeitunabhängigen Amplituden  $\{X\}$  auch mit dem **harmonischen Ansatz**

$$\{x\} = \{X\} e^{i\omega t} \quad (2.9)$$

$$\{\ddot{x}\} = -\omega^2 \{X\} e^{i\omega t} \quad (2.10)$$

beschrieben werden kann. Durch Einsetzen von Gl. 2.8, 2.9 und 2.10 in Gl. 2.7 (S. 9) und unter der Annahme  $e^{i\omega t} \neq 0$  im gesamten Zeitraum  $[0, t_1]$  ergibt sich das Eigenwertproblem

$$([K] - \omega^2[M])\{X\} = \{0\}, \quad (2.11)$$

dessen nicht-triviale Lösungen mit Hilfe der Determinanten

$$\det([K] - \omega^2[M]) \quad (2.12)$$

bestimmt werden können. Die Lösung des gesamten frei schwingenden Systems – auch **modales Modell** genannt – kann anschließend über die Matrix der Eigenkreisfrequenzen

$$\text{diag}(\omega_r^2) = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_N^2 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

und die Matrix der zugehörigen, linear unabhängigen und reellwertigen Eigenvektoren

$$[\Psi] = [\{\psi_1\} \{\psi_2\} \cdots \{\psi_N\}] \quad (2.14)$$

beschrieben werden. Die Kombination aus Eigenwert und zugehörigem Eigenvektor wird als **Eigenmode** des Systems bezeichnet. Die Eigenvektoren  $\{\psi_r\}$  – auch *Schwingungsform* oder *Eigenform* genannt – werden im Bereich der Strukturdynamik üblicherweise mit

$$\{\phi_r\} = \frac{1}{\sqrt{m_r}} \{\psi_r\} = \frac{1}{\sqrt{\{\psi_r\}^T [M] \{\psi_r\}}} \{\psi_r\} \quad (2.15)$$

massenormiert, was die Orthogonalitätseigenschaften

$$[\phi]^T [M] [\phi] = [I] \quad (2.16)$$

$$[\phi]^T [K] [\phi] = \text{diag}(\omega_r^2) \quad (2.17)$$

mit der Einheitsmatrix  $[I]$  zur Folge hat. Anschließend können die nodalen Koordinaten  $\{x\}$  mit

$$\{x\} = [\phi] \{q\} \quad (2.18)$$

in die modalen Koordinaten  $\{q\}$  transformiert werden, sodass die ursprünglich gekoppelte Differentialgleichung 2.7 (S. 9) in die Form

$$[I] \{\ddot{q}\} + \text{diag}(\omega_r^2) \{q\} = [\phi]^T \{f\} \quad (2.19)$$

übergeht, in welcher die Gleichungen entkoppelt vorliegen. Im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit wird stets von massenormierten Eigenvektoren ausgegangen.

**Modale Frequenzgänge.** Die Anregungskraft des Systems im eingeschwungenen Zustand kann unter nochmaliger Verwendung des harmonischen Ansatzes und mit den zeitunabhängigen Anregungsamplituden  $\{F\}$  mit

$$\{f\} = \{F\} e^{i\omega t} \quad (2.20)$$

ausgedrückt werden. Dies führt analog zur Herleitung von Gl. 2.11 auf

$$([K] - \omega^2[M]) \{X\} = \{F\}, \quad (2.21)$$

was durch Invertierung zu

$$\frac{\{X\}}{\{F\}} = ([K] - \omega^2[M])^{-1} := [\alpha(\omega)] \quad (2.22)$$

umgeformt werden kann.  $[\alpha(\omega)]$  wird hierbei als Nachgiebigkeitsmatrix in nodaler Formulierung bezeichnet. Unter Berücksichtigung der Orthogonalitätseigenschaften 2.16 und 2.17 kann diese Matrix gleichbedeutend im modalen Raum als

$$[\alpha(\omega)] = [\phi] (\text{diag}(\omega_r^2) - \omega^2[I])^{-1} [\phi]^T \quad (2.23)$$

formuliert werden. Aus Gl. 2.23 ist ersichtlich, dass  $[\alpha(\omega)]$  symmetrisch ist, was für einen Frequenzgang aus der Matrix zwischen den Freiheitsgraden  $j$  und  $k$  Reziprozität zur Folge hat:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{X_j}{F_k} = \alpha_{kj}(\omega) = \frac{X_k}{F_j} \quad (2.24)$$

Zudem wird aus Gl. 2.23 deutlich, dass sich ein einzelner Frequenzgang  $\alpha_{jk}(\omega)$  der Nachgiebigkeitsmatrix aus der **modalen Superposition** aller Eigenkreisfrequenzen

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{(\phi_r)_j (\phi_r)_k}{\omega_r^2 - \omega^2} \quad (2.25)$$

zusammensetzt.

**Berücksichtigung von Dämpfung.** Neben den bisher betrachteten konservativen Kräften der Trägheit und Elastizität wirken in realen mechanischen Systemen nicht-konservative Kräfte, welche einen Teil der systemimmanenten Schwingungsenergie in andere Energieformen, hauptsächlich thermische Energie, umwandeln (VDI 3830 BLATT 1, S. 4). Diese Kräfte werden unter der Bezeichnung *Dämpfung* oder *Dissipation* zusammengefasst. Für eine Abbildung der Dämpfung im Frequenzbereich eignen sich insbesondere die folgenden beiden linearen Ansätze: Der **Dämpfungskonstantenansatz**, welcher eine geschwindigkeitsproportionale bzw. viskose Dämpfungskraft

$$F = c \cdot \dot{X} = \iota \omega c \cdot X \quad (2.26)$$

postuliert, sowie der **Verlustfaktorenansatz**, der eine wegproportionale, hysteretische Dämpfungskraft

$$F = \iota d \cdot X \quad (2.27)$$

mit dem steifigkeitsproportionalen Verlustfaktor

$$\eta = \frac{d}{k} \quad (2.28)$$

beschreibt. Anhand der Gl. 2.26 und 2.27 wird deutlich, dass die beiden Ansätze – wie in Abb. 2.7 illustriert – eine verschiedenartige Wirkung besitzen, die durch die (Un-)Abhängigkeit der Dämpfungskraft von der Kreisfrequenz  $\omega$  zustande kommt.

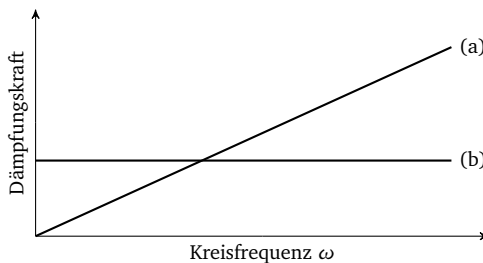


Abb. 2.7: Frequenzabhängigkeit von (a) Dämpfungskonstanten- und (b) Verlustfaktorenansatz

Unter Berücksichtigung der beiden Ansätze erweitert sich die Matrixform des Mehrmassenschwingers (Gl. 2.7, S. 9) im Frequenzbereich zu

$$[M] \{\ddot{X}\} + [C] \{\dot{X}\} + ([K] + \iota \cdot [D]) \{X\} = \{F\} \quad (2.29)$$

Für beliebig besetzte Matrizen  $[C]$  und  $[D]$  wird die Eigenvektormatrix  $[\phi]$  des modalen Raums (Gl. 2.14, S. 10) komplexwertig, was deutlich umfangreichere Formulierungen der modalen Superposition (Gl. 2.25, S. 11) nach sich zieht. Lediglich



für den speziellen Fall, dass nur einer der beiden Dämpfungsansätze im Modell vorhanden ist und die entsprechende Matrix  $[C]$  bzw.  $[D]$  mit einer Linearkombination aus Steifigkeits- und Massenmatrix diagonalisierbar ist, bleibt eine rein reellwertige Eigenvektormatrix  $[\phi]$  bestehen. Für diesen speziellen Fall der **proportionalen Dämpfung** bleiben die Gleichungen der modalen Superposition mit

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{(\phi_r)_j (\phi_r)_k}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2\iota \omega \omega_r \zeta_r} \quad (2.30)$$

für den Dämpfungskonstantenansatz und

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{(\phi_r)_j (\phi_r)_k}{\omega_r^2 - \omega^2 + \iota \eta_r \omega_r^2} \quad (2.31)$$

für den Verlustfaktorenansatz weitgehend in ihrer einfachen Form erhalten.  $\zeta_r$  ist hierbei der modale Dämpfungsgrad, der sich für den modalen Einmassenschwinger zu

$$\zeta_r = \frac{c_r}{2 \sqrt{k_r m_r}} \quad (2.32)$$

bestimmt. Neben den beiden genannten Ansätzen sind durch die Formulierung entsprechender Integrale auch beliebige Zwischenformen aus beiden Ansätzen möglich (MAIA ET AL. 1998), diese sind jedoch derzeit in kommerziellen Softwareumgebungen nicht implementiert.

**Energetische Deutung.** Über Gl. 2.17 (S. 10) ist für massennormierte Eigenvektoren auch eine energetische Deutung des modalen Modells möglich. Dazu wird die Formänderungsenergie des Mehrmassenschwingers (FREYMANN 2011, S. 49)

$$U = \frac{1}{2} \{x\}^T [K] \{x\} \quad (2.33)$$

in den modalen Raum überführt. Da die Verschiebungen  $\{x\}$  im harmonischen Fall den Eigenvektoren  $\{\phi\}_r$  entsprechen, kann die maximale **modale Formänderungsenergie** jedes Eigenvektors durch

$$U_r = \frac{1}{2} \{\phi\}_r^T [K] \{\phi\}_r = \frac{1}{2} \omega_r^2 \quad (2.34)$$

bestimmt werden (NASHIF ET AL. 1985, S. 168 ff.; JOHNSON & KIENHOLZ 1981; SNYDER & VENKAYYA 1989). Eine analoge Beziehung lässt sich auch für die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{x}\}^T [M] \{\dot{x}\} \quad (2.35)$$

formulieren (FREYMANN 2011, S. 59), wobei die Geschwindigkeit  $\{\dot{x}\}$  nach Differentiation des Eigenvektors im Frequenzbereich dem Ausdruck  $\iota \omega_r \cdot \{\phi\}_r$  entspricht.

Unter Verwendung von Gl. 2.16 (S. 10) ergibt sich die maximale **modale kinetische Energie** jedes Eigenvektors zu

$$T_r = -\frac{1}{2} \omega_r^2 \{\phi\}_r^T [M] \{\phi\}_r = -\frac{1}{2} \omega_r^2 \cdot 1, \quad (2.36)$$

was einerseits die Energieerhaltung und andererseits die Phasenverschiebung von  $180^\circ$  zwischen beiden Energieformen verdeutlicht.

### 2.2.4 Experimentelle Modalanalyse

Da reale Strukturen – wie in Abschnitt 2.2.2 (S. 7) beschrieben – messtechnisch lediglich mit Hilfe von Zeitsignalen oder Frequenzgängen dynamisch charakterisiert werden können, wird anhand der Messdaten eine Systemidentifikation durchgeführt, um ein modales Modell der Struktur zu erhalten. Eine derartige Identifikation – **experimentelle Modalanalyse** genannt – hat das Ziel, unter Verwendung von Gl. 2.30 oder 2.31 (S. 13) ein *experimentelles Modell* zu finden, welches das Antwortverhalten der gemessenen Struktur hinreichend genau abbildet. In Abb. 2.8 ist dies beispielhaft für eine Identifikation mittels Ausgleichskreis im Frequenzbereich dargestellt.

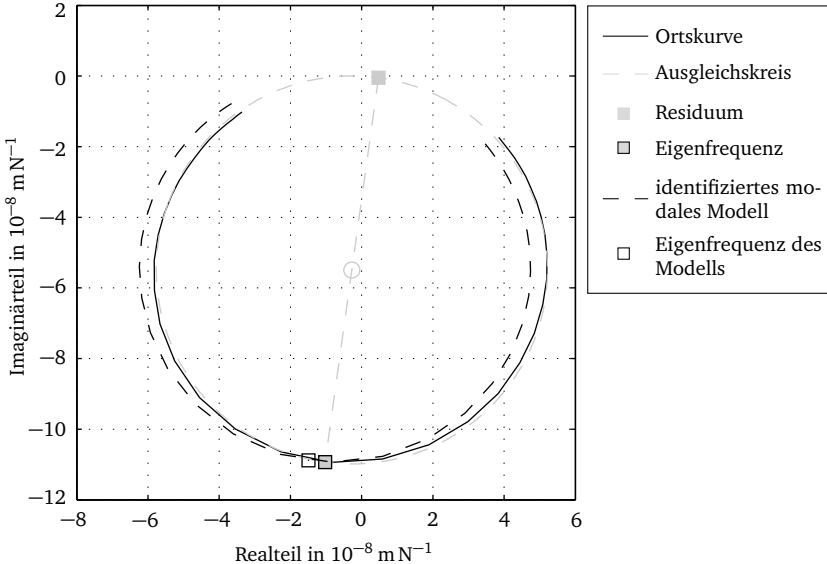


Abb. 2.8: Systemidentifikation mittels Ausgleichskreis am Beispiel der Ortskurve aus Abb. 2.5b (S. 9) im Frequenzbereich von 150 Hz bis 160 Hz

Als Ergebnis liefert die Identifikation die Größen des modalen Raums  $\omega_r$ ,  $\{\psi_r\}$  sowie  $\zeta_r$  bzw.  $\eta_r$ . Daneben gibt es sowohl für die SISO<sup>9</sup>- als auch für die MIMO<sup>10</sup>-Identifikation eine Vielzahl weiterer Verfahren im Zeit- und Frequenzbereich, die jeweils spezifische Vor- und Nachteile aufweisen. Eine umfassende Übersicht findet sich in MAIA & SILVA (1997, S. 185 ff.). In dieser Arbeit wird für die SISO-Identifikation das Ortskurvenverfahren mittels Ausgleichskreis eingesetzt (MAIA & SILVA 1997, S. 219 ff.), für die MIMO-Identifikation die sog. *Polyreference Least-Squares Complex Frequency-Domain Method* (PEETERS ET AL. 2004).

## 2.3 Dynamische Simulation von kontinuierlichen Strukturen

Neben der zuvor betrachteten experimentell gestützten Modellbildung kann das dynamische Verhalten von Werkzeugmaschinen ebenso mit Hilfe von Simulationsmodellen – auch *analytische Modelle* genannt – beschrieben werden. Eine einfach zu handhabende Modellbildung unter der Annahme ideal starrer Körper ist für diese Strukturen jedoch nur für die Reglerauslegung anwendbar (ZIRN & WEIKERT 2006, S. 2, 183). Bei der Analyse von Instabilitäten aus der Wechselwirkung von Lageregelkreisen, Maschinenstruktur und Zerspanprozess (siehe auch Abb. 2.3, S. 7) ist dies aufgrund der Elastizität der Maschinenstruktur nicht mehr zulässig. Stattdessen ist eine Modellierung der Maschinenstruktur als elastischer Körper erforderlich, was mit der Methode der finiten Elemente (FEM) möglich ist. Da es sich hierbei um ein numerisches Näherungsverfahren handelt, ist bei dessen Anwendung die Kenntnis der mathematischen Grundlagen und der daraus resultierenden Lösungsfehler sowie eine umsichtige Wahl der verschiedenen Modellparameter erforderlich. Die dafür relevanten Zusammenhänge sind im folgenden Abschnitt dargestellt.

### 2.3.1 Methode der finiten Elemente

Die folgende Herleitung ist an HUGHES (1987, S. 75 ff., 423 ff.) angelehnt. Für den gesamten Abschnitt seien die Raumrichtungen  $n_{sd}$  mit den Laufvariablen  $1 \leq g, h, i, j, k, l \leq n_{sd}$  indiziert. Außerdem gilt die Einstein'sche Summenkonvention.

**Starke Form.** Unter Verwendung des Verzerrungstensors

$$\epsilon_{ij}(x_i) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_i}{\partial j} + \frac{\partial x_j}{\partial i} \right) \quad (2.37)$$

<sup>9</sup> Engl. *Single Input Single Output*, kurz SISO.

<sup>10</sup> Engl. *Multiple Input Multiple Output*, kurz MIMO.

und des verallgemeinerten Hooke'schen Gesetzes mit dem Cauchy-Spannungstensor  $\underline{c}$  für die elastischen Eigenschaften

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl}(x_i) \quad (2.38)$$

gilt im Gebiet  $\Omega$  mit Rand<sup>11</sup>  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  im Zeitraum  $[0, t_1]$  für den ungedämpften Fall die (Bewegungs-)Differentialgleichung

$$\underbrace{\rho \ddot{x}_i}_{\text{Trägheitskräfte}} = \underbrace{\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j}}_{\text{elastische Kräfte}} + \underbrace{\hat{b}_i}_{\text{äußere Volumenkräfte}} \quad (2.39)$$

mit den folgenden Rand- und Anfangsbedingungen, wobei  $n_j$  ein Eintrag des Normalenvektors  $\{n\}$  auf  $\Gamma$  ist:

$$x_i = \tilde{x}_i \quad \text{auf } \Gamma_D \text{ für } ]0, t_1[ \quad (2.40)$$

$$\sigma_{ij} n_j = \tilde{\sigma}_i \quad \text{auf } \Gamma_N \text{ für } ]0, t_1[ \quad (2.41)$$

$$x_i(0) = x_i^0 \quad \forall x_i \in \Omega \quad (2.42)$$

$$\dot{x}_i(0) = \dot{x}_i^0 \quad \forall x_i \in \Omega \quad (2.43)$$

Die zweite Anfangsbedingung (Gl. 2.43) ist aufgrund der zweiten Zeitableitung in der Differentialgleichung 2.39 erforderlich. Die Gl. 2.39 bis 2.43 stellen die sog. *starke Form* des Rand- bzw. Anfangswertproblems dar.

**Schwache Form.** Unter Verwendung der Methode der gewichteten Residuen (und der noch nicht näher spezifizierten Wichtungsfunktionen  $w_i$  kann Gl. 2.39 in die sog. *schwache Form* überführt werden, die statt einer lokalen Erfüllung der Gleichungen an jedem Punkt in  $\Omega$  eine globale, integrale Erfüllung über das gesamte Gebiet  $\Omega$  fordert:

$$\int_{\Omega} w_i \rho \ddot{x}_i d\Omega = \int_{\Omega} w_i \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} + \hat{b}_i \right) d\Omega \quad (2.44)$$

Dabei sind bei Verwendung ausreichend glatter Funktionen für  $w_i$  die starke und die schwache Form äquivalent und führen zur selben Lösung. Mittels Anwendung des in Gl. 2.37 (S. 15) definierten Verzerrungstensors  $\epsilon_{ij}(w_i)$  auf die Wichtungsfunktionen und partieller Integration kann dies zu

$$\int_{\Omega} w_i \rho \ddot{x}_i d\Omega + \int_{\Omega} \epsilon_{ij}(w_i) \sigma_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} w_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma + \int_{\Omega} w_i \hat{b}_i d\Omega \quad (2.45)$$

<sup>11</sup>  $\Gamma_D$ : Rand mit Dirichlet-Randbedingung;  $\Gamma_N$ : Rand mit von-Neumann-Randbedingung.

und unter Verwendung von Gl. 2.41 schließlich zu

$$\int_{\Omega} w_i \rho \ddot{x}_i d\Omega + \int_{\Omega} \epsilon_{ij}(w_i) \sigma_{ij} d\Omega = \sum_{i=1}^{n_{sd}} \left( \int_{\Gamma_N} w_i \tilde{\sigma}_i d\Gamma \right) + \int_{\Omega} w_i \hat{b}_i d\Omega \quad (2.46)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\int_{\Omega} w_i \rho x_i(0) d\Omega = \int_{\Omega} w_i \rho x_i^0 d\Omega \quad \forall x_i \in \Omega \quad (2.47)$$

$$\int_{\Omega} w_i \rho \dot{x}_i(0) d\Omega = \int_{\Omega} w_i \rho \dot{x}_i^0 d\Omega \quad \forall x_i \in \Omega \quad (2.48)$$

umgeformt werden.

**Galerkin-Ansatz.** Für Gl. 2.46 kann eine semidiskrete<sup>12</sup> Näherungslösung gefunden werden, indem sowohl die Wichtungsfunktionen  $w_i$  als auch die Verschiebungen  $x_i$  an diskreten Punkten  $a, b \in \Omega$  – den **Knoten** – bestimmt werden und die Verschiebungen dazwischen – in den **finiten Elementen** – mit Hilfe sog. *Formfunktionen*  $\tau$  interpoliert werden:

$$w_i = \begin{cases} \sum_{a \notin \Gamma_D} \tau_a w_{i,a} & \forall w_i \notin \Gamma_D \\ 0 & \forall w_i \in \Gamma_D \end{cases} \quad (2.49)$$

$$x_i = \begin{cases} \sum_{b \notin \Gamma_D} \tau_b x_{i,b} & \forall x_i \notin \Gamma_D \\ \sum_{b \in \Gamma_D} \tau_b \tilde{x}_{i,b} & \forall x_i \in \Gamma_D \end{cases} \quad (2.50)$$

Die Verwendung derselben Formfunktionen  $\tau$  für Wichtungsfunktionen und Verschiebungen wird als Galerkin-Ansatz bezeichnet. Unter Verwendung von Gl. 2.38, der kanonischen Einheitsvektoren  $\{e\}$  und des Kronecker-Deltas  $\delta_{ij}$  sowie durch Ausklammern und Kürzen von  $w_{i,a}$  lautet die semidiskrete Differentialgleichung

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n_{sd}} \left( \sum_{b \notin \Gamma_D} \delta_{ij} \int_{\Omega} \tau_a \rho \tau_b d\Omega \ddot{x}_{j,b} + \int_{\Omega} \epsilon_{gh}(\tau_a e_i) c_{ghkl} \epsilon_{kl}(\tau_b e_j) d\Omega x_{j,b} \right) = \\ & = \int_{\Gamma_N} \tau_a \tilde{\sigma}_i d\Gamma + \int_{\Omega} \tau_a \hat{b}_i d\Omega - \sum_{j=1}^{n_{sd}} \left( \sum_{b \in \Gamma_D} \delta_{ij} \int_{\Omega} \tau_a \rho \tau_b d\Omega \ddot{x}_{j,b} + \right. \end{aligned}$$

<sup>12</sup> Semidiskret, da die Zeit nach wie vor kontinuierlich ist.

$$+ \int_{\Omega} \epsilon_{gh}(\tau_a e_i) c_{ghkl} \epsilon_{kl}(\tau_b e_j) d\Omega \tilde{x}_{j,b} \Big) \quad \text{mit } a \notin \Gamma_D \text{ und } 1 \leq i \leq n_{sd} \quad (2.51)$$

Die Anfangsbedingungen ergeben sich analog aus den Gl. 2.47 und 2.48 (S. 17). Die semidiskrete Differentialgleichung 2.51 (S. 18) stellt damit ein System linearer Differentialgleichungen dar, welches auch in der folgenden, deutlich übersichtlicheren **Matrixform** dargestellt werden kann und mit Gl. 2.7 (S. 9) identisch ist:

$$\underbrace{[M]}_{\text{Massenmatrix}} \{\ddot{x}\} + \underbrace{[K]}_{\text{Steifigkeitsmatrix}} \{x\} = \underbrace{\{f\}}_{\text{Lastvektor}} \quad (2.52)$$

Entsprechend gelten alle in Abschnitt 2.2.3 (S. 8) anhand des Mehrmassenschwingers beschriebenen Beziehungen ebenso für das Finite-Elemente-Problem.

**Elementtypen.** In kommerziellen Finite-Elemente-Umgebungen werden für die Element-Formfunktionen  $\tau$  zumeist Polynome ersten und zweiten Grades eingesetzt, welche in den Elementkoordinaten  $\xi_i$  die in Abb. 2.9 dargestellte Form annehmen.

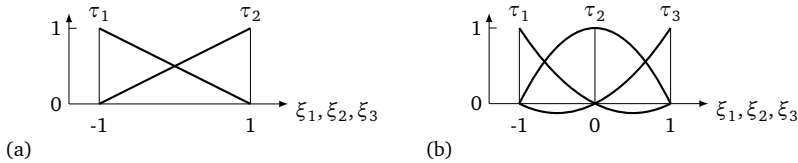


Abb. 2.9: Lineare (a) und quadratische (b) Formfunktionen nach HUGHES (1987, S. 128)

Diese Formfunktionen sind zwischen den Knoten der finiten Elemente definiert und interpolieren dort die Gestalt oder die Verformung der Elemente. Werden Gestalt und Verformung der Elemente zwischen den Elementknoten mit denselben Formfunktionen interpoliert, spricht man von **isoparametrischen** Elementen, welche in kommerziellen Finite-Elemente-Umgebungen ebenfalls breite Anwendung finden.

### 2.3.2 Güte der Näherungslösung

Die Abweichung der Näherungslösung der Methode der finiten Elemente von der theoretisch exakten Lösung wird nach BATHE (1996, S. 266) für den Fall der linearen Strukturmechanik durch die in Tab. 2.2 aufgeführten Lösungsfehler bestimmt. In kommerziellen Finite-Elemente-Umgebungen sind die Integrationspunkte der Elementtypen, die Berechnungsgenauigkeit der Gleichungslöser sowie die iterativen

Algorithmen insbesondere bei Standardproblemen wie der linearen Strukturdynamik seit mehreren Jahrzehnten Gegenstand kontinuierlicher Verbesserung durch die Hersteller. Die Lösungsfehler durch Integration (b), Rundung (e) und iterative Verfahren (d) sind daher für diese Art von Problemen im Allgemeinen vernachlässigbar und können vom Anwender nur in stark begrenztem Umfang beeinflusst werden. Dies gilt nicht für den Diskretisierungsfehler (a) und den Fehler beim Lösen der Bewegungsgleichungen (c), welche hauptsächlich durch die Eingaben des Anwenders bestimmt werden. Im Folgenden wird deshalb näher auf diese beiden Fehlerarten eingegangen.

Fehlertyp	Schritt in der Lösungssequenz
(a) Diskretisierungsfehler	Finite-Elemente-Interpolation von Geometrie und Lösungsvariablen
(b) Integrationsfehler	Auswertung von Finite-Elemente-Matrizen durch numerische Integration
(c) Fehler beim Lösen von Bewegungsgleichungen	direkte Zeitintegration oder modale Superposition
(d) Fehler durch iterative Lösungsverfahren	Zeitintegrationsverfahren oder Eigenwertberechnung
(e) Rundungsfehler	Aufstellen der Gleichungen und Berechnung ihrer Lösung

Tab. 2.2: Lösungsfehler in der Methode der finiten Elemente für den Fall der linearen Strukturdynamik (BATHE 1996, S. 266)

### 2.3.3 Diskretisierungsfehler

Der Diskretisierungsfehler in Finite-Elemente-Problemen lässt sich aus Konvergenzbetrachtungen ableiten. Dabei wird untersucht, ob und wie schnell die approximierte Lösung bei zunehmend feiner Diskretisierung gegen die theoretisch exakte, gesuchte Lösung des Problems konvergiert.

**Grundbedingungen für Konvergenz.** Damit ein Finite-Elemente-Problem monoton gegen die theoretisch exakte Lösung konvergiert, müssen nach HUGHES (1987, S. 115) die Elementformfunktionen

1. innerhalb des Elementgebiets glatt,
2. über die Elementgrenzen kontinuierlich und
3. vollständig sein.

Glatte Funktionsverläufe (Bedingung 1) sind in isoparametrischen Elementen gewährleistet, wenn die Zuordnung zwischen den globalen Verschiebungen und den Formfunktionen  $\tau$  eindeutig ist. Diese Funktionen sind in den lokalen, natürlichen Elementkoordinaten  $\{\xi\}$  definiert. Sie werden deshalb für die Berechnung der Verzerrungen  $\underline{\epsilon}$  (siehe Gl. 2.37, S. 15 und 2.51, S. 18) mit Hilfe der Jacobi-Matrix

$$[J] = \frac{\partial \{x\}}{\partial \{\xi\}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

über deren Inverse

$$\frac{\partial}{\partial \{x\}} = [J]^{-1} \frac{\partial}{\partial \{\xi\}} \quad (2.54)$$

in die globalen Koordinaten  $\{x\}$  des zu berechnenden Problems umgerechnet. Am Beispiel eines linearen Tetraeder-Elements ist dies in Abb. 2.10 veranschaulicht.

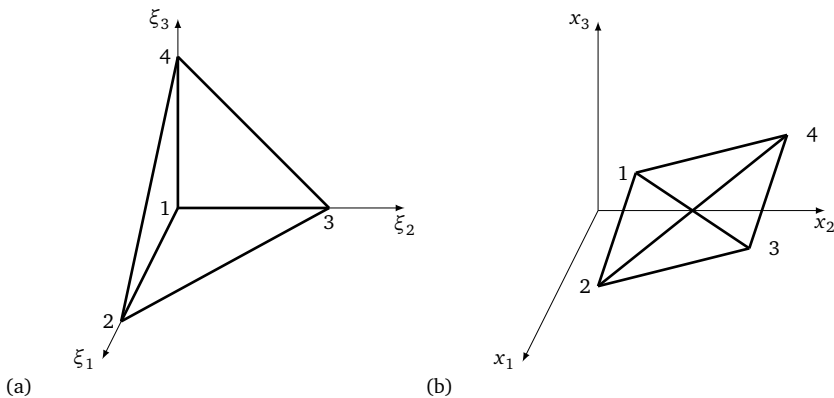


Abb. 2.10: Lokale (a) und globale (b) Elementkoordinaten eines linearen Tetraeders

Diese Zuordnung ist eindeutig und Glattheit ist sichergestellt, wenn für das Element

$$\det [J] > 0 \quad (2.55)$$

gilt (HUGHES 1987, S. 119). Die Forderung nach Glattheit hängt somit von der Elementgestalt ab und muss bei der Vernetzung durch den Anwender berücksichtigt werden. Die Forderung nach Kontinuität über die Elementgrenzen (Bedingung 2) und Vollständigkeit (Bedingung 3) wird bei Verwendung gleichartiger, isoparametrischer Elemente per Definition sichergestellt, da die Summe der Formfunktionen in den Elementen und an deren Rändern stets 1 ergibt (siehe Abb. 2.9, S. 18).



**Konvergenzrate.** Ist die Konvergenz sichergestellt, so kann die Konvergenzrate des Finite-Elemente-Problems gegen die theoretisch exakte Lösung unter Verwendung der Differenz der Energie-Normen für die Verzerrungen (ZIENKIEWICZ ET AL. 2005, S. 457)

$$\|\Delta U\| = \left( \int_{\Omega} (\epsilon_{ij,T} - \epsilon_{ij,A})(\sigma_{ij,T} - \sigma_{ij,A}) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.56)$$

und der Sobolev-Norm der  $g$ -ten Ordnung für die theoretisch exakte Lösung

$$\|\hat{x}_T\|_g = \left( \int_{\Omega} x_i x_i + \frac{\partial x_i}{\partial j} \frac{\partial x_i}{\partial j} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial j \partial k} \frac{\partial^2 x_i}{\partial j \partial k} + \dots + \underbrace{\frac{\partial^g x_i}{\partial j \partial k \dots \partial l}}_{g \text{ Indices}} \underbrace{\frac{\partial^g x_i}{\partial j \partial k \dots \partial l}}_{g \text{ Indices}} d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.57)$$

bestimmt werden (HUGHES 1987, S. 267). Hier seien wiederum die Raumrichtungen  $n_{sd}$  mit den Laufvariablen  $1 \leq i, j, k, l \leq n_{sd}$  indiziert, außerdem gilt die Einstein'sche Summenkonvention.  $\|\Delta U\|$  charakterisiert die Abweichung der analytischen (Finite-Elemente-)Lösung von der theoretisch exakten Lösung. Die Norm  $\|\hat{x}_T\|_g$  ist ein Maß dafür, wie glatt die theoretisch exakte Lösung bzgl. des Polynomgrads  $g$  ist, d. h. je größer die Norm ist, um so höher sind die Gradienten der theoretisch exakten Lösung. Mit diesen beiden Maßen kann für eine gleichförmige Diskretisierung die Konvergenzrate mit

$$\|\Delta U\| \leq \hat{c} \hat{h}^{\hat{p}} \|\hat{x}_T\|_{\hat{p}+1} \quad (2.58)$$

abgeschätzt werden (BATHE 1996, S. 288).  $\hat{c}$  ist hierbei eine materialabhängige Konstante,  $\hat{h}$  der Netzparameter, welcher die Netzverfeinerung charakterisiert, und  $\hat{p}$  die Polynomordnung der Elementformfunktionen. Aus Gl. 2.56 ist darüber hinaus ersichtlich, dass die Finite-Elemente-Methode die theoretisch exakte Verzerrungsenergie des Problems von unten annähert, d. h. die Steifigkeit des Problems wird stets überschätzt (BATHE 1996, S. 284). In praktischen Problemen würde eine gleichförmige Diskretisierung jedoch zu äußerst schlechten Konvergenzraten führen, da die theoretisch exakte Lösung bezogen auf die Polynomordnung  $\hat{p}$  der Elementformfunktionen – z. B. aufgrund von sprunghaften Dickenänderungen in der Geometrie – im Allgemeinen nicht glatt ist (BATHE 1996, S. 292). Unter Verzicht auf die Forderung nach gleichförmiger Diskretisierung lautet die Konvergenzrate nach HUGHES (1987, S. 269)

$$\|\Delta U\| \leq \hat{c} \frac{\hat{h}^{\hat{p}+1}}{\hat{\rho}} \|\hat{x}_T\|_{\hat{p}+1} = \hat{c} \hat{\sigma} \hat{h}^{\hat{p}} \|\hat{x}_T\|_{\hat{p}+1}, \quad (2.59)$$

wobei  $\hat{\sigma}$  das sog. *Aspektverhältnis* (engl. *aspect ratio*) kennzeichnet:

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{h}}{\hat{\rho}} \quad (2.60)$$

Das Aspektverhältnis  $\hat{\sigma}$  beschreibt – wie in Abb. 2.11 illustriert – das Verhältnis aus der größten Seitenlänge  $\hat{h}$  und dem größtmöglichen Kreis bzw. der größtmöglichen Kugel mit Durchmesser  $\hat{\rho}$ , der bzw. die im Elementgebiet Platz findet.

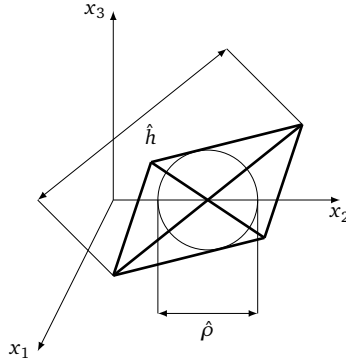


Abb. 2.11: Aspektverhältnis  $\hat{\sigma}$  für ein verzerrtes Tetraeder-Element

Große Aspektverhältnisse  $\hat{\sigma}$  wirken sich somit unmittelbar negativ auf den Diskretisierungsfehler  $\|\Delta U\|$  aus und sind deshalb zu vermeiden. Die Ursache für dieses Verhalten liegt darin, dass Elemente mit großen Innenwinkeln  $\hat{\beta} \rightarrow \pi$  ihr Interpolationsvermögen verlieren (BABUŠKA & AZIZ 1976; KRÍŽEK 1992; SHEWCHUK 2002). Dabei ist ein niedriges Aspektverhältnis eine hinreichende, jedoch nicht notwendige Bedingung für genügend kleine Innenwinkel. Zu beachten ist in diesem Zusammenhang, dass der maximale Innenwinkel  $\hat{\beta}$  den Gesamtfehler bestimmt und deshalb auch einzelne stark verzerrte Elemente die Konvergenzrate des gesamten Problems beeinträchtigen können (ODEN & REDDY 1976, S. 283). Ist das Interpolationsvermögen der Elemente sichergestellt, müssen diese außerdem in der Lage sein, die nicht-glatte Lösung abzubilden. Dies kann über eine Betrachtung der Konvergenzrate unter dem Einfluss der Elemente im Gebiet  $\Omega$  mit unterschiedlicher Seitenlänge  $\hat{h}$  bewertet werden, die sich nach BATHE (1996, S. 445) zu

$$\|\Delta U\|^2 \leq \hat{c} \sum_i (\hat{h}_i^{\hat{\beta}} \|\hat{x}_T\|_{\hat{p}+1,i})^2 \quad (2.61)$$

ergibt. Der Diskretisierungsfehler  $\|\Delta U\|$  setzt sich somit aus der Summe der Produkte aus Seitenlänge und dem Maß für die Glattheit der Lösung im Elementgebiet zusammen. Je höher der Gradient der Lösung im Elementgebiet ist, desto kleiner muss

die Seitenlänge gewählt werden, um einen gleichbleibend niedrigen Beitrag zum Diskretisierungsfehler liefern zu können. In diesem Zusammenhang wird auch davon gesprochen, eine **konstante Fehlerdichte** für alle Elemente anzustreben (BATHE 1996, S. 446). Im Fall der linearen Sturkturdynamik ist darüber hinaus zu berücksichtigen, dass der Diskretisierungsfehler  $\|\Delta U\|$  mit steigenden Eigenwerten  $\lambda_r$  ebenfalls steigt (HUGHES 1987, S. 434):

$$\|\Delta U\|_r \leq \hat{c} \hat{h}^{\hat{p}} (\lambda_r)^{\frac{\hat{p}+1}{2}} \quad (2.62)$$

Die Gl. 2.58 (S. 21) bis 2.62 werden als *A-Priori*-Fehlerschätzer bezeichnet, mit welchen die Konvergenzrate ohne Kenntnis des Problems angegeben werden kann. Da die Kenntnis der Konvergenzrate ohne Angabe konkreter Fehlerwerte in der Anwendung jedoch nur von eingeschränktem praktischem Nutzen ist, wird in AINSWORTH & ODEN (1997, 2000) mit den *A-Posteriori*-Methoden eine weitere Klasse von Fehlerschätzern beschrieben. Diese berechnen unter Ausnutzung spezieller Konvergenzeigenschaften oder mittels zusätzlicher Terme in der Problemformulierung den tatsächlich vorliegenden Diskretisierungsfehler. In praktischen Problemstellungen mit komplexen, dreidimensionalen Geometrien und unregelmäßigen Netzen sind die *A-Posteriori*-Methoden derzeit jedoch nicht sinnvoll einsetzbar (GRÄTSCH & BATHE 2005).

### 2.3.4 Fehler beim Lösen der Bewegungsgleichungen

Fehler beim Lösen der Bewegungsgleichungen entstehen bei der Simulation des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen im Frequenzbereich überwiegend bei der Berechnung von Frequenzgängen.

**Direkte Berechnung.** Prinzipiell besteht die Möglichkeit, Gl. 2.29 (S. 12) nach der gesuchten Frequenzganggröße – z. B. der Nachgiebigkeit, siehe Gl. 2.22 (S. 11) – umzustellen und diese mit Hilfe komplexer Arithmetik direkt für jede Frequenzlinie zu bestimmen (MSC 2011, S. 141):

$$[\alpha(\omega)] = \frac{\{X\}}{\{F\}} = \left( -\omega^2[M] + \iota\omega[C] + ([K] + \iota \cdot [D]) \right)^{-1} \quad (2.63)$$

Das Ergebnis der Operation ist im Rahmen der Rechengenauigkeit für beliebig besetzte Dämpfungsmatrizen  $[C]$  und  $[D]$  exakt. Nachteil dieser Herangehensweise ist jedoch, dass eine komplexwertige Matrix der Dimension  $N \times N$  für jede Frequenzlinie invertiert werden muss, was bei Werkzeugmaschinenmodellen mit  $N \geq 10^6$  bei der derzeit verfügbaren Rechenkapazität auf Einzelplatzrechnern oder kleinen Simulationsservern in der Regel zu inakzeptabel hohen Rechenzeiten führt. Aus diesem Grund werden Frequenzgänge derartiger Modelle überwiegend auf Basis ordnungsreduzierter Modelle bestimmt, die zwangsläufig fehlerbehaftet sind.

**Modale Reduktion.** Eine Möglichkeit der Ordnungsreduktion besteht darin, die Orthogonalitätseigenschaften der entkoppelten Differentialgleichung 2.19 (S. 11) auszunutzen und lediglich diejenigen Eigenmoden in der Nähe des interessanten Frequenzbereichs für die Frequenzgangberechnung zu berücksichtigen. Im ungedämpften Fall geht Gl. 2.23 (S. 11) unter Verwendung der ersten  $\check{m}$  Moden mit  $\check{m} \ll N$  in

$$[\alpha_{\check{m}}(\omega)]_{N \times N} = [\phi]_{N \times \check{m}} \left( \text{diag}(\omega_r^2) - \omega^2 [I] \right)_{\check{m} \times \check{m}}^{-1} [\phi]_{\check{m} \times N}^T \quad (2.64)$$

über (MAIA & SILVA 1997, S. 85). Hierbei kann der Einfluss der höherfrequenten Moden nicht gänzlich vernachlässigt werden, da diese zwar keinen frequenzabhängigen, stattdessen jedoch einen statischen Anteil zum Frequenzgang beitragen. Dieser Anteil des Frequenzgangs wird mit Hilfe der sog. **Residuenkorrektur** über

$$\alpha_{jk}(\omega) = (\alpha_{\check{m}})_{jk}(\omega) + R_{jk} = \sum_{r=1}^{\check{m}} \frac{(\phi_r)_j (\phi_r)_k}{\omega_r^2 - \omega^2} + R_{jk} \quad (2.65)$$

berücksichtigt, wobei  $R_{jk}$  auf Basis des statischen Falls bestimmt wird (BESSELINK ET AL. 2013). In der Praxis hat es sich bewährt,  $\check{m}$  so zu wählen, dass neben den Residuen alle Moden innerhalb der doppelten Bandbreite der Anregungsfrequenz berücksichtigt werden, um eine gute Approximation des gewünschten Frequenzgangs zu erhalten (MSC 2011, S. 150). Dieser Ansatz der Modellreduktion ist auch für gedämpfte Systeme gültig, sofern eine zur Massen- und Steifigkeitsmatrix proportionale Dämpfungsmatrix vorliegt. Die ursprüngliche Formulierung

$$[C] = \check{\alpha}_1 [M] + \check{\alpha}_2 [K] \quad (2.66)$$

geht auf RAYLEIGH (1877, § 97) zurück, welche nach CAUGHEY & O'KELLY (1965) einen Spezialfall der allgemeineren Bedingung

$$([M]^{-1}[C])([M]^{-1}[K]) = ([M]^{-1}[K])([M]^{-1}[C]) \quad (2.67)$$

darstellt. Die Dämpfungsmatrizen von Werkzeugmaschinenstrukturen erfüllen diese Proportionalitätsbedingung – vor allem aufgrund lokal wirkender Dissipationsquellen – im Allgemeinen nicht. Die Eigenwerte  $\lambda_r$  und Eigenvektoren  $\{\phi_r\}$  treten dann in konjugiert komplexen Paaren auf, sodass sich der modal reduzierte Frequenzgang – bspw. für ein nicht-proportional viskos gedämpftes System – über

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{\check{m}} \left( \frac{(\phi_r)_j (\phi_r)_k}{i\omega - \lambda_r} + \frac{(\phi_r^*)_j (\phi_r^*)_k}{i\omega - \lambda_r^*} \right) + R_{jk} \quad (2.68)$$

zusammensetzt (MAIA & SILVA 1997, S. 69). Da das komplexe Eigenwertproblem die Dimension  $2N \times 2N$  besitzt, führt dessen Lösung mit derzeitiger Rechenkapazität allerdings ebenfalls zu hohen Rechenzeiten, was den Zeitvorteil der Reduktion wieder zunichte macht. Für Systeme mit nahezu reellwertigen Eigenvektoren haben sich daher zwei Näherungen etabliert, die auch im Fall beliebig besetzter Dämpfungs-

matrizen hinreichend genaue Lösungen liefern. Die erste derartige Näherung ist die sog. **Hauptdämpfungshypothese** (SHAHRUZ 1990; SHAHRUZ & MA 1988), welche die generalisierten Dämpfungsmatrizen unter Vernachlässigung der nicht-diagonalen Terme zwangsdiagonalisiert:

$$[\alpha(\omega)]_{N \times N} = [\phi]_{N \times \tilde{m}} \left( \text{diag}(\omega_r^2) - \omega^2 [I] + \iota \cdot \text{diag} \left( [\phi]_{\tilde{m} \times N}^T [D] [\phi]_{N \times \tilde{m}} + \omega [\phi]_{\tilde{m} \times N}^T [C] [\phi]_{N \times \tilde{m}} \right) \right)^{-1} [\phi]_{\tilde{m} \times N}^T + [R]_{N \times N} \quad (2.69)$$

Die Gleichungen liegen bei dieser Näherung entkoppelt vor, sodass das Dämpfungsverhalten der gekoppelten Lösung durch modale Dämpfungsgrade bzw. Verlustfaktoren angenähert wird:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{\tilde{m}} \frac{(\phi_r)_j (\phi_r)_k}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\omega\omega_r\zeta_r + \iota\eta_r\omega_r^2} + R_{jk} \quad (2.70)$$

Die genauere zweite Näherung besteht darin, das **gekoppelte Differentialgleichungssystem** in den modalen Raum zu überführen und dort **zu reduzieren**. Die Lösung wird jedoch ohne Vernachlässigung der Diagonalterme der Dämpfungsmatrizen direkt durch die Invertierung

$$[\alpha(\omega)]_{N \times N} = [\phi]_{N \times \tilde{m}} \left( \text{diag}(\omega_r^2) - \omega^2 [I] + \iota \cdot \left( [\phi]_{\tilde{m} \times N}^T [D] [\phi]_{N \times \tilde{m}} + \omega [\phi]_{\tilde{m} \times N}^T [C] [\phi]_{N \times \tilde{m}} \right) \right)^{-1} [\phi]_{\tilde{m} \times N}^T + [R]_{N \times N} \quad (2.71)$$

des gekoppelten Systems berechnet (MSC 2011, S. 146). Die frequenzlinienweise Matrixinvertierung der Dimension  $\tilde{m} \times \tilde{m}$  erfordert weniger Rechenzeit als im Falle von Gl. 2.63 (S. 23), weshalb diese Näherung einen Kompromiss zwischen Genauigkeit und Recheneffizienz darstellt.

**Weitere Reduktionsverfahren.** Neben der modalen Reduktion eignen sich auch die Krylov-Unterraum-Reduktion aus der Kontrolltheorie sowie das balancierte Abschneiden aus der numerischen Mathematik zur Reduktion strukturdynamischer Modelle (SOPPA 2012). Im für Werkzeugmaschinen relevanten Frequenzbereich und für annähernd reellwertige Eigenvektoren kommen die spezifischen Vorteile dieser Verfahren jedoch nur eingeschränkt zum Tragen (BESSELINK ET AL. 2013), weshalb sie in der vorliegenden Arbeit nicht betrachtet werden.

### 2.3.5 Parametrisierung des Modells

Neben der Beachtung der mathematischen Aspekte der Finite-Elemente-Methode ist für die dynamische Simulation von Werkzeugmaschinenstrukturen eine Parametrisierung des Modells erforderlich, um das mathematische Modell mit den Eigenschaften des realen Systems zu korrelieren. Diese Parametrisierung wird im Folgenden erläutert.

**Materialmodell.** Die Festlegung des **Elastizitätsverhaltens** erfolgt durch den Cauchy-Spannungstensor  $\underline{\underline{c}}$  (Gl. 2.38, S. 16), der sich durch die Symmetrie zum Verzerrungstensor  $\underline{\underline{\epsilon}}$  als Elastizitätsmatrix  $[E]$  der Dimension  $6 \times 6$  ausdrücken lässt. In Modellen von Werkzeugmaschinenstrukturen wird das Materialverhalten in den meisten Fällen als isotrop angenommen, wodurch  $[E]$  unter Verwendung des Elastizitätsmoduls  $E$  und der Querkontraktionszahl  $\nu$  die Form

$$[E] = \frac{E}{1 + \nu} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & \frac{1}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

annimmt (ALTENBACH 2012, S. 334). Für einige Werkstoffe oder bestimmte Modelle von Fugen ist diese Annahme jedoch nicht zulässig, weshalb stattdessen von orthotropem Materialverhalten

$$[E] = \begin{bmatrix} E_1 & E_{12} & E_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & E_2 & E_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & E_3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & E_4 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & E_5 & 0 \\ & & & & & E_6 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

mit den Elastizitätskonstanten  $E_1$  bis  $E_6$  sowie  $E_{12}$ ,  $E_{13}$  und  $E_{23}$  ausgegangen wird (ALTENBACH 2012, S. 330). Neben dem Elastizitätsverhalten können dem Material auch **Dissipationseigenschaften** zugewiesen werden, indem die Konstitutivgleichung (Gl. 2.38, S. 16) im Frequenzbereich um einen Verlustfaktor

$$\{\sigma\}(\omega) = (1 + i\eta)[E]\{\epsilon\}(\omega) \quad (2.74)$$

erweitert wird, der sich als komplexer Anteil in den Elementsteifigkeitsmatrizen äußert (BRAUN 2002, S. 323 f.). Schließlich werden zur Vervollständigung des Materialmodells die **Masseneigenschaften** unter Verwendung der Dichte  $\rho$  über die entsprechenden Integrale in Gl. 2.51 (S. 18) bestimmt. Die auf diese Weise entstehen-

de – als konsistent bezeichnete – Massenmatrix  $[M]$  ist dünn besetzt, jedoch nicht diagonal, was für die Lösung des Eigenwertproblems aus numerischer Sicht nachteilig ist (MEIROVITCH 1980, S. 366). Deshalb werden in kommerziellen Softwareumgebungen oft sog. *inkonsistente* oder *konzentrierte* Massenmatrizen verwendet, welche die Integrationsterme für die Masse aus Gl. 2.51 (S. 18) über die Vereinfachung

$$\delta_{ij} \int_{\Omega_e} \tau_a \rho \tau_b d\Omega \approx \text{diag}(\delta_{ij} \rho [J] \hat{W}) \quad (2.75)$$

diagonalisieren (HINTON ET AL. 1976; HUGHES 1987, S. 436). Hierbei ist  $\hat{W}$  ein durch die numerische Integration bestimmter Wichtungsfaktor. Bzgl. der Lösungsgenauigkeit neigen konsistente Massenmatrizen im Vergleich zur theoretisch exakten Lösung zur Überschätzung, eine konzentrierte Formulierung dagegen zur Unterschätzung der Eigenfrequenzen (HUGHES 1987, S. 439). Um dem entgegenzuwirken, kann nach BUTLER (1987, 1988) der sog. *gekoppelte Massenansatz* – eine Mittelung aus konsistenter und konzentrierter Formulierung – für erhöhte Genauigkeit verwendet werden.

**Einheitensystem.** Die Finite-Elemente-Methode ist vor der Parametrisierung nicht einheitenbehaftet, vom Anwender kann deshalb ein beliebiges Einheitensystem gewählt werden. Um die Berechnung von fehlerhaften und unphysikalischen Ergebnissen zu vermeiden, ist es nach BLEVINS (1979, S. 9) zweckmäßig, für die Modellparameter ein konsistentes Einheitensystem zu wählen. Auf diese Weise ist eine korrekte Umrechnung zwischen den physikalischen Größen des zweiten Newton'schen Gesetzes

$$\{f\} = m \cdot \{\ddot{x}\} \quad (2.76)$$

sichergestellt. Da im Werkzeugmaschinenbau die Bemaßung von technischen Zeichnungen und CAD<sup>13</sup>-Modellen in mm üblich ist, bietet sich eine Parametrisierung im SI-mm-System (siehe Tab. 2.3) an, um vorhandene CAD-Geometrien ohne zusätzliche Skalierung für den Modellaufbau verwenden zu können.

Größe	Weg	Kraft	Zeit	Masse	Winkel
Einheit	mm	N	s	t	rad

Tab. 2.3: SI-mm-System (MSC 2013, S. 1874)

<sup>13</sup> Engl. *Computer Aided Design*, kurz CAD.

**Zwangsbedingungen und Skalarverbindungen.** Zusätzlich zu den bisher betrachteten, geometrisch ausgedehnten Elementtypen können auch einzelne Freiheitsgrade direkt in den Systemmatrizen auf verschiedene Weise verknüpft werden. Eine Möglichkeit hierfür ist die Definition von Zwangsbedingungen zwischen mehreren Freiheitsgraden  $\{x\}$  über Gleichungen der Form

$$[B]\{x\} = \{\hat{y}\}, \quad (2.77)$$

wobei  $[B]$  die Koeffizienten und  $\{\hat{y}\}$  die Werte der Bedingung enthält (AINSWORTH 2001). Für die dynamische Simulation von Werkzeugmaschinenstrukturen sind dabei insbesondere sog. **Starrkörperelemente**<sup>14</sup> relevant. Ausgehend von einem Referenzknoten  $a$  mit den Freiheitsgraden  $\{x_a\}$  und beliebig vielen, abhängigen Knoten  $b$  mit den entsprechenden Freiheitsgraden  $\{x_b\}$  werden zwei Varianten dieser Elemente verwendet, die durch die beiden Gleichungen

$$\{x_b\} = [B]\{x_a\} \quad (2.78)$$

$$\{x_a\} = [B] \sum_{i=1}^b [B_i][\hat{W}_i]\{x_i\} \quad (2.79)$$

mit den Koeffizientenmatrizen  $[B]$  und den Wichtungsmatrizen  $[\hat{W}]$  definiert sind (NASA 1981, S. 3.5–14; MSC 2009). Das Element in Gl. 2.78 – auch als *RBE2* oder *verschiebungsbasiert* bezeichnet – projiziert die Verschiebung des Referenzknotens  $a$  auf die abhängigen Knoten  $b$ , wodurch eine ideal steife Kopplung der abhängigen Freiheitsgrade entsteht. Im Gegensatz dazu basiert die Definition des Elements in Gl. 2.79 – auch *RBE3* oder *kraftbasiert* genannt – auf einem Kräftegleichgewicht, sodass eine auf den Referenzknoten  $a$  wirkende Verschiebung entsprechend den Faktoren der Matrix  $[\hat{W}]$ , den Reaktionskräften und dem Abstand vom Referenzknoten auf die abhängigen Knoten  $b$  verteilt wird. Die abhängigen Knoten verbleiben jedoch untereinander entkoppelt. In Abb. 2.12 ist die Wirkung dieser beiden Starrkörperelemente auf einen diskretisierten Biegebalken vergleichend dargestellt.

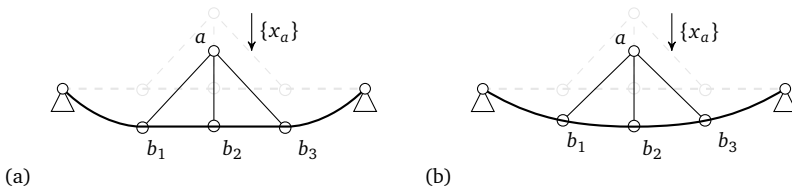


Abb. 2.12: Wirkung der Starrkörperelemente RBE2 (a) und RBE3 (b) auf einen diskretisierten Biegebalken in Anlehnung an OERTLI (2008, S. 50)

<sup>14</sup> Engl. *Rigid Body Element*, kurz RBE.



Eine weitere Möglichkeit der direkten Verknüpfung einzelner Freiheitsgrade sind **Skalarverbindungen**. Besondere Bedeutung für die dynamische Simulation von Werkzeugmaschinenstrukturen haben hierbei sog. *Feder-* oder *Dämpferelemente*, die einzelne Freiheitsgrade mit Hilfe skalarer Einträge in den entsprechenden Systemmatrizen elastisch bzw. dissipativ koppeln. Für zwei derart gekoppelte Freiheitsgrade nimmt das Kräftegleichgewicht im Frequenzbereich die Form

$$\underbrace{\begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}}_{\text{viskoses Element}} \{\dot{X}\} + \left( \underbrace{\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}}_{\text{elastisches Element}} + \iota \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} d & -d \\ -d & d \end{bmatrix}}_{\text{hysteretisches Element}} \right) \{X\} = \{F\} \quad (2.80)$$

an, wenn gleichzeitig eine elastische, eine geschwindigkeits- und eine wegproportional gedämpfte Skalarverbindung vorliegt.

## 2.4 Dynamische Modelle von Werkzeugmaschinenstrukturen

Die im vorigen Abschnitt 2.3 (S. 15) beschriebene Methode der finiten Elemente kann nun verwendet werden, um das dynamische Verhalten von Werkzeugmaschinenstrukturen abzubilden. Der Aufbau der dafür notwendigen Modelle erfolgt – wie in Abb. 2.13 illustriert – ausgehend von der Vereinfachung der CAD-Geometrie der Maschinenstruktur, die anschließend vernetzt, mittels Skalarverbindungen verknüpft und schließlich mit Last- und Randbedingungen beaufschlagt wird (ALTINTAS ET AL. 2005).

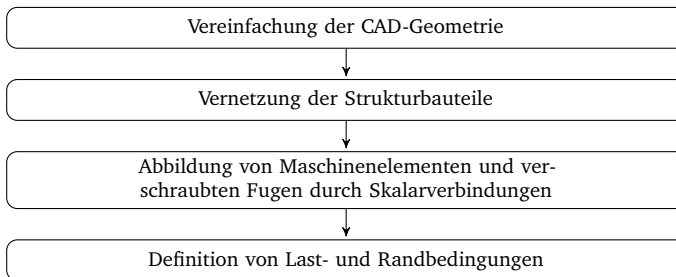


Abb. 2.13: Vorgehen zur Erstellung von Finite-Elemente-Modellen von Werkzeugmaschinenstrukturen nach ALTINTAS ET AL. (2005)

Jedes vernetzte Bauteil und jede Skalarverbindung repräsentiert hierbei eine der in Abb. 2.1 (S. 5) aufgeführten Komponenten der Maschinenstruktur. Das Gesamtmodell setzt sich somit aus Komponentenmodellen zusammen. Komponenten in

Werkzeugmaschinenstrukturen werden in der industriellen Praxis in verschiedenartigen Bauweisen mit entsprechend variierenden Eigenschaften eingesetzt, außerdem finden sich in der Literatur für eine Modellierung in der Methode der finiten Elemente jeweils Ansätze mit unterschiedlicher Detailtiefe und Genauigkeit. In den folgenden Abschnitten wird deshalb für jede Komponente näher auf beide Aspekte und abschließend auf die Eigenschaften und die Struktur des Gesamtmodells eingegangen.

### 2.4.1 Strukturbauteile

**Bauweisen und Eigenschaften.** Strukturbauteile werden bei Werkzeugmaschinen als Stahl-Schweiß-Konstruktionen, als Gussbauteile oder in Mineralguss ausgeführt (WECK & BRECHER 2006a, S. 12 ff.). Dementsprechend groß und abhängig von den Betriebslasten ist auch die Vielfalt der auftretenden Geometrien, welche von kompakten Blöcken bis hin zu dünnwandigen, verrippten Kasten- und Rahmenstrukturen reicht. Für die Materialmodellierung hat sich sowohl für Guss- und Stahlwerkstoffe (DIN EN 1561; DIN EN 1563; GROTE & FELDHUSEN 2007, S. E99) als auch für Mineralguss (MESCHKE 1995, S. 115) lineares, isotropes Elastizitätsverhalten mit entsprechenden Werkstoffkennwerten als geeignete Annahme erwiesen. Die Materialdämpfung kann bei Guss und Stahl (BOGRAD ET AL. 2007; GAUL 2008; ZÄH ET AL. 2011) ebenso wie bei Mineralguss (KUNC 2013, S. 42) als weitgehend frequenzunabhängig betrachtet werden, sodass eine Modellierung mittels Verlustfaktorenansatz eine hinreichend genaue Abbildung des realen Verhaltens ermöglicht.

**Modellansätze.** Da massive Bauweisen aus Mineralguss erst in jüngerer Zeit an Bedeutung gewonnen haben, beschäftigen sich die meisten Arbeiten zur Gestellmodellierung mit dünnwandigen, verrippten Kasten- und Rahmenstrukturen aus Guss- oder Stahlwerkstoffen. Analog zur Entwicklung der verfügbaren Rechenkapazität wurden für deren Abbildung mit der Methode der finiten Elemente zunächst sehr stark abstrahierte Balkenelemente (GROSSMANN 1976, S. 53 ff.), dann Schalenelemente grober (HEIMANN 1977, S. 30) und anschließend feiner (ALBERTZ 1995, S. 47 ff.) Diskretisierung eingesetzt, was für derartige Strukturen bis heute die bevorzugte Modellierungsmethode darstellt (HOFFMANN 2008, S. 9; KOLAR ET AL. 2012). Massive Bauteile werden hingegen mit Volumenelementen vernetzt (ALTINTAS ET AL. 2005). Je nach angestrebter Diskretisierung ist die CAD-Geometrie vor der Vernetzung geeignet zu vereinfachen, indem „geometrische Details wie Fasen, kleine Bohrungen und Rundungen, die auf das Strukturverhalten nur einen lokalen Einfluss haben, (...) vernachlässigt werden“ (WECK & BRECHER 2006a, S. 125). Da bei einer zu groben Diskretisierung von Strukturbauteilen Abweichungen von bis zu 25 % in der Nachgiebigkeit und bis zu 15 % in der Eigenfrequenz auftreten können (ALBERTZ 1995, S. 88), sollten Elemente geeigneter Größe und möglichst mit quadratischen Formfunktionen verwendet werden (WITT 2007, S. 43 ff.).

### 2.4.2 Aufstellelemente

**Bauweisen und Eigenschaften.** Aufstellelemente in Werkzeugmaschinenstrukturen dienen der definierten Höheneinstellung und wirken als Feder bzw. Dämpfer gegenüber dem Fundament (WECK & BRECHER 2006a, S. 173), was bei korrekter Auslegung eine isolierende Wirkung hat. Die Isolationswirkung kann dabei auf Basis vielfältiger physikalischer Prinzipien erzielt werden (DEBRA 1992). Im Werkzeugmaschinenbau haben sich jedoch aufgrund der erforderlichen Robustheit überwiegend Federelemente aus Stahl und Elastomeren oder hydraulische Elemente als Dämpfer durchgesetzt, Höhenverstellungen werden mit Keil- oder Gewindekinematik realisiert (WECK & BRECHER 2006a, S. 174). Für das dynamische Verhalten der Werkzeugmaschinenstruktur ist jedoch nicht nur das Aufstellelement selbst, sondern auch das umliegende Fundament von Bedeutung. Deshalb ist neben der Auswahl des Aufstellelements eine entsprechende Fundamentaulegung ebenso zu berücksichtigen (BRECHER & MEIDLINGER 2007) wie eine eventuell notwendige, messtechnische Überprüfung der spezifizierten Fundamenteigenschaften (MYERS ET AL. 2005).

**Modellansätze.** Die Abbildung von Aufstellelementen in der Methode der finiten Elemente erfolgt mit elastisch-dissipativen Skalarverbindungen (STIEFENHOFER 1977, S. 34), welche über Starrkörperelemente an die Werkzeugmaschinenstruktur angebunden werden. Aufstellelemente mit Elastomerbaugruppen zeigen dabei frequenz- und teilweise lastabhängiges Verhalten, sodass Modelle erster Ordnung keine hinreichend genaue Abbildung des gemessenen Verhaltens liefern (STIEFENHOFER 1977, S. 34; MEIDLINGER 2008, S. 60 ff.). Aufstellelemente ohne Elastomere können hingegen mit linearen Feder-Dämpfer-Elementen hinreichend genau approximiert werden (MEIDLINGER 2008, S. 46 ff.), sofern die Einflüsse der Kontakte, des Fundaments und des eingesetzten Materials bei der Modellbildung beachtet werden (KONO ET AL. 2012, 2013). Die Bestimmung geeigneter Modellparameter erfolgt dabei entweder direkt aus Messungen an der Maschine (GAO & ROCKHAUSEN 2001) oder an geeigneten Prüfständen (MEIDLINGER 2008, S. 38 ff.), wobei aufgrund der Steifigkeitsverhältnisse die Verformung des Prüfstands berücksichtigt werden muss.

### 2.4.3 Verschraubte Fugen

**Bauweisen und Eigenschaften.** Schraubenverbindungen in Werkzeugmaschinenstrukturen werden einerseits nach Festigkeitsgesichtspunkten und unter Verwendung einschlägiger Normen wie der VDI 2230 BLATT 1 ausgelegt, um die Betriebslasten sicher übertragen zu können. Andererseits ist für eine geringe statische und dynamische Nachgiebigkeit eine möglichst hohe Steifigkeit und Dämpfung der Fügstellen erforderlich (WECK & BRECHER 2006a, S. 40, 52 f.). In Werkzeugmaschinenstrukturen finden deshalb – trotz der geringen Dämpfung – vorwiegend stark vorgespannte Schraubenverbindungen Verwendung. Bei der dynamischen Beanspruchung von

verschraubten Fugen können in Abhängigkeit der Anregungsamplitude zwei verschiedene Gleiteffekte – **Mikroschlupf** und **Makroschlupf** – beobachtet werden, die das Steifigkeits- und Dämpfungsverhalten der Fuge bestimmen (IBRAHIM & PETTIT 2005). Mikroschlupf bezeichnet die Interaktion einzelner Rauheitsspitzen in Bereichen fern der Schraube bei im Verhältnis zur Montagevorspannkraft niedrigen Anregungskräften, während bei hohen Anregungskräften Makroschlupf in Form von Gleiten über die gesamte Kontaktfläche auftritt. In experimentell orientierten Arbeiten zum Einfluss von verschraubten Fugen auf die Maschinenstruktur konnte anhand von linearem Steifigkeits- (SCHAIBLE 1976, S. 82) und weitgehend linearem Dämpfungsverhalten (GROTH 1972, S. 87 ff.) nachgewiesen werden, dass durch die hohe Vorspannung bei den im Normalbetrieb auftretenden Lasten lediglich Mikroschlupf auftritt. Die Steifigkeit und die Dämpfung der Fuge werden dabei von der Flächenlast und deren Verteilung, der Oberflächenbeschaffenheit und etwaigen Medien in der Fuge bestimmt (SCHAIBLE 1976, S. 135 f.). Die **Flächenlast** in der Fuge ist dabei einerseits von der Montagevorspannkraft und der Anordnung der Schrauben und andererseits von der Geometrie der verschraubten Körper abhängig. Wie in Abb. 2.14a am Beispiel einer Einschraubverbindung illustriert, bildet sich ausgehend von der Auflagefläche des Schraubenkopfes ein Verformungskörper in der geklemmten Platte aus (VDI 2230 BLATT 1, S. 30 ff.).

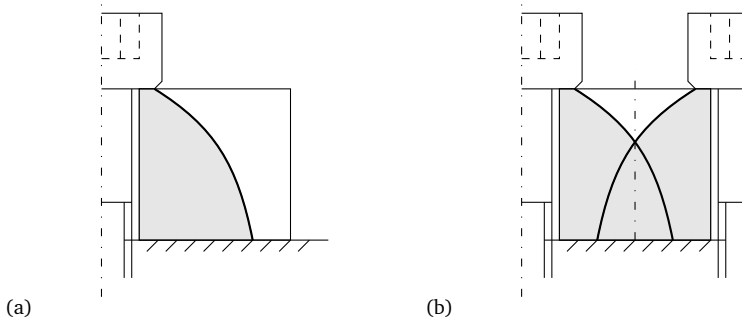


Abb. 2.14: Schematische Darstellung der Verformungskörper (grau) einer einzelnen (a) und mehrerer (b) Einschraubverbindungen in Anlehnung an VDI 2230 BLATT 1 (S. 31, 49)

Innerhalb dieses Verformungskörpers wird die Montagevorspannkraft der Schraube übertragen, sodass sich die Flächenlast in der Fuge über die entsprechende Schnittfläche dieses Körpers bestimmt. Bei Einschraubverbindungen mit mehreren Schrauben können sich die Verformungskörper – wie in Abb. 2.14b zu sehen – überlappen. In diesem Fall stellt sich in der Fuge eine annähernd konstante Flächenlast ein. Ist die Flächenlast bekannt, kann anschließend die **Fugensteifigkeit** bestimmt werden: LEVINA (1967) schlägt hierfür eine empirisch ermittelte Gleichung vor, welche die Relativbewegung  $\delta_{\perp}$  zweier normal mit der Flächenlast  $\sigma_0$  vorgespannter Kontakt-

flächen aufgrund der Last  $\sigma_{\perp}$  beschreibt. Somit kann für jede Vorspannung  $\sigma_0$  eine linearisierte flächenbezogene Kontaktnormalsteifigkeit

$$k_{\perp} = \frac{\sigma_{\perp}}{\delta_{\perp}} \quad (2.81)$$

der Fuge in  $\text{N mm}^{-3}$  definiert werden. Mit Hilfe eines ultraschallbasierten Versuchsaufbaus zeigen SHIMIZU ET AL. (2010), dass sich dieser Ansatz zu einem linearen Zusammenhang abhängig vom Elastizitätsmodul der Kontaktpartner vereinfachen lässt, wenn die Flächenlasten statt auf die nominelle Kontaktfläche  $A_0$  des CAD-Modells auf die wesentlich kleinere, reale Kontaktfläche  $A_{\text{real}}$  der Oberflächenrauheiten bezogen werden. Unter der Annahme, dass in der Fuge nur Mikroschlupf auftritt, kann nach GÖRKE (2010, S. 31 f.) analog zu Gl. 2.81 eine linearisierte, tangentielle Kontaktsteifigkeit

$$k_{\parallel} = \frac{\sigma_{\parallel}}{\delta_{\parallel}} \quad (2.82)$$

definiert werden, welche die tangentielle Flächenlast  $\sigma_{\parallel}$  mit der entsprechenden Relativbewegung  $\delta_{\parallel}$  verknüpft. Diese Steifigkeit unterliegt bei der messtechnischen Erfassung jedoch großen Streuungen (GÖRKE 2010, S. 107). Mit entsprechenden Versuchsaufbauten kann stattdessen das Verhältnis  $k_{\parallel}/k_{\perp}$  für Kontakte rauer, metallischer Oberflächen experimentell ermittelt werden, welches – wie in Tab. 2.4 ersichtlich – allerdings vom eingesetzten Messprinzip abhängig ist.

Quelle	Steifigkeitsverhältnis $k_{\parallel}/k_{\perp}$	eingesetztes Messprinzip
SHERIF & KOSSA (1991)	0,7 bis 0,9	dynamisch
CAMPAÑA ET AL. (2011)	0,26 bis 0,45	Ultraschall
KONO ET AL. (2012)	0,1 bis 0,2	statisch

Tab. 2.4: Steifigkeitsverhältnis  $k_{\parallel}/k_{\perp}$  in Literaturquellen mit unterschiedlichem Messprinzip

Ebenso wie die Steifigkeit kann auch die Dämpfung der Fuge unter der Annahme von Mikroschlupf linearisiert abgebildet werden. EHRLICH ET AL. (2014) verwenden hierfür einen Verlustfaktorenansatz, der innerhalb des als linear definierten Amplitudenbereichs eine hinreichend genaue Approximation des Dämpfungsverhaltens der untersuchten Fuge liefert. Experimentelle Untersuchungen von Kontakten rauer metallischer Oberflächen liefern dabei Verlustfaktoren gleicher Größenordnung in Normal- und Querrichtung (EHRLICH ET AL. 2014; SHI & POLYCARPOU 2005).

**Modellansätze** zur Abbildung von Fugen im Finite-Elemente-Modell lassen sich in drei Kategorien einteilen (BOGRAD ET AL. 2011). Die einfachste und bei Werkzeugmaschinenstrukturen vorwiegend angewandte Modellierung ist die **Skalarverbindung**

der Knoten in der Fuge mit linearen Feder-Dämpfer-Elementen (FINKE 1977; KONO ET AL. 2012; PETUELLI 1983). Hierbei wird eine in der Fuge homogene Flächenlast sowie Mikroschlupf angenommen. Tritt in der Fuge stattdessen Makroschlupf auf, können mittels Skalarverbindungen auch nichtlineare Kontaktgesetze integriert werden, deren Antwort im Frequenzbereich mit der sog. *Harmonic-Balance-Methode* bestimmt wird (BÖSWALD 2005; JAUMOUILLE ET AL. 2010; MEYER 2003). Die Parameter von Skalarverbindungen sind jedoch nur für die jeweilige Diskretisierung gültig und daher nicht auf andere Modelle übertragbar. Abhilfe hierfür schaffen sog. **Zero-Thickness-Kontaktelemente**, die mit Hilfe von Formfunktionen selbstständig die vorliegende Flächenlast ermitteln und auf die integrierten linearen oder nichtlinearen Kontaktgesetze anwenden (GEISLER 2010; MAYER 2007). Eine weitere Möglichkeit der linearen Fugenmodellierung mit übertragbaren Parametern bieten sog. **Dünnschichtelemente**. Hierbei bildet unter Annahme von Mikroschlupf eine dünne Schicht aus Hexa- oder Pentaederelementen die Fuge ab (BOGRAD ET AL. 2007, 2008; GAUL 2008), die auch inhomogene Pressungsverteilungen approximieren kann (BOGRAD ET AL. 2011). Um die normale und tangential Kontaktsteifigkeit zu berücksichtigen, wird orthotropes Elastizitätsverhalten hinterlegt und die Elastizitätskonstanten werden unter Verwendung der Dünnschichthöhe  $\check{h}$  folgendermaßen gewählt:

$$E_{\perp} = k_{\perp} \cdot \check{h} \quad (2.83)$$

$$E_{\parallel} = k_{\parallel} \cdot \check{h} \quad (2.84)$$

Die Elastizitätsmatrix nimmt für eine normal zur z-Richtung orientierte Dünnschicht die Form

$$[E] = \begin{bmatrix} \neq 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \neq 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & E_{\perp} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \neq 0 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & E_{\parallel} & 0 \\ & & & & & E_{\parallel} \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

an. Da die Diagonaleinträge aus numerischen Gründen nicht 0 sein dürfen, werden hier vernachlässigbar kleine, von 0 verschiedene Werte eingetragen. Die Dämpfungswirkung der Fuge wird über einen Verlustfaktorenansatz im Dünnschichtmaterial approximiert.

#### 2.4.4 Profilschienenführungen

**Bauweisen und Eigenschaften.** Profilschienenführungen an Werkzeugmaschinen können anhand des verwendeten Wälzkörpertyps, der Anzahl und Anordnung der Wälzkörperreihen sowie der Berührungsart zwischen Wälzkörpern und Laufbahnen klassifiziert werden (WECK & BRECHER 2006a, S. 358). Übliche Wälzkörpertypen sind Kugeln oder Rollen, die ein- oder mehrreihig zwischen Schiene und Wagen laufen.

Um Spielfreiheit zu gewährleisten, werden – wie in Abb. 2.15 veranschaulicht – **vor-gespannte Konfigurationen** entweder mit 2-Punkt-Kontakt in X- bzw. O-Anordnung (Rollen bzw. Kugeln) oder mit 4-Punkt-Kontakt (Kugeln) eingesetzt.

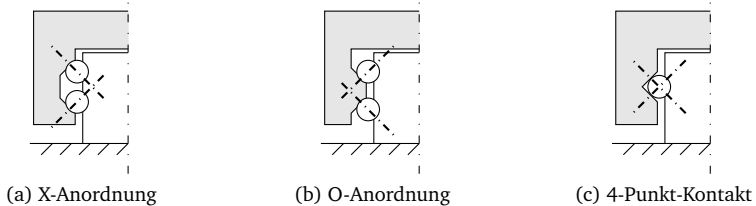


Abb. 2.15: Mögliche Kontaktkonfigurationen zwischen Schiene (weiß) und Wagen (grau) einer Profilschienenführung in Anlehnung an WECK & BRECHER (2006a, S. 364)

Der auf diese Weise entstehende, vorgespannte Wälzkontakt bestimmt maßgeblich das Steifigkeitsverhalten des Systems und kann mit der Hertz'schen Theorie beschrieben werden. Profilschienenführungen besitzen deshalb bei niedriger Belastung progressive Federkennlinien, die bei höheren Lasten in lineare übergehen, sobald sich die Anschmiegeverhältnisse der Wälzkörper ausgeglichen haben (SCHNEIDER 1991, S. 51 ff., 108 f.). Da der Wälzkontakt nur in Richtung der Verbindungslinie zwischen den Berührungspunkten Kräfte übertragen kann, ist das Steifigkeitsverhältnis zwischen Normal- und Querrichtung der Führung vom sog. *Lastwinkel*  $\hat{\beta}$  abhängig, der zwischen jener Verbindungslinie und der Horizontalen definiert ist. Der Lastwinkel  $\hat{\beta}$  ist – wie in Abb. 2.16 ersichtlich – wiederum von der Vorspannung abhängig, sodass auch diese das genannte Verhältnis beeinflusst (ISPAYLAR 1997, S. 28).

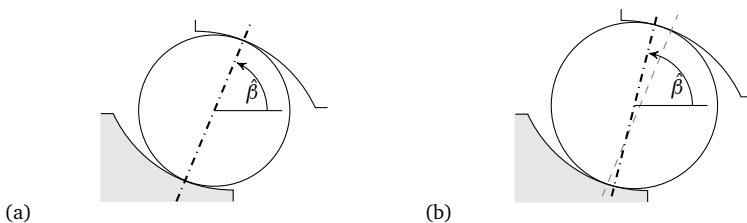


Abb. 2.16: Veränderung des Lastwinkels  $\hat{\beta}$  vom kraftfreien (a) zum vorgespannten (b) Zustand in Anlehnung an ISPAYLAR (1997, S. 28). Die Vorspannung des Systems erfolgt durch den Einsatz von Kugeln mit Übermaß.

Zusätzlich zum Wälzkontakt verformen sich auch die Schiene und vor allem der Wagen unter Last, wodurch abhängig von der Anbindung an die umliegende Struktur (Schraubenanzahl, -anordnung und -anziehdrehmoment) weitere Nichtlinearitäten in

die Federkennlinie des Systems eingebracht werden (ISPAYLAR 1997, S. 31). Aufgrund der genannten Effekte ist das Steifigkeitsverhalten von Profilschienenführungen in Normal- und Querrichtung einerseits von der Bauweise abhängig sowie andererseits bzgl. der Lastamplitude nichtlinear, was sich im dynamischen Verhalten von Werkzeugmaschinenstrukturen auch messtechnisch nachweisen lässt (SCHMIDT 1995, S. 95 ff.). Um dem Anwender dennoch eine Maschinenauslegung unter Steifigkeitsaspekten zu ermöglichen, werden von den Herstellern der Profilschienenführungen – z. B. in BOSCH (2006a) – experimentell ermittelte, lastabhängige Federkennlinien zur Verfügung gestellt. Die Dämpfungseigenschaften von Profilschienenführungen werden im Stillstand vor allem durch tangenciales Gleiten der Wälzkörper in ihren Bahnen verursacht, bei Verfahrbewegung kommen Verdrängungsvorgänge des Schmiermittels hinzu (SCHELENZ 1995, S. 124, 128). Im Stillstand weisen derartige Elemente bei dynamischer Beanspruchung in Normal- und Querrichtung dementsprechend „sehr geringe Dämpfungswerte auf“ (ISPAYLAR 1997, S. 84). In Verfahrrichtung wirkt mit Ausnahme von Verformungen der Abstreifer keine Steifigkeit, sodass das Kraft-Verformungs-Verhalten maßgeblich durch Reibung mit Haft-Gleit-Übergängen in der Charakteristik einer Stribeck-Kurve (STRIBECK 1903) bestimmt wird. Bei Mikroauslenkung bis etwa 300  $\mu\text{m}$  ist die entsprechende Reibkraft deshalb wegproportional, darüber dominieren bei Makroauslenkung geschwindigkeitsproportionale Anteile (KUNC 2013, S. 60). Die Amplitude der Reibkraft hängt im konkreten Fall von Schmierstoff, Temperatur, Verschleißzustand, Normalbelastung und Vorspannung sowie dem eingesetzten Abstreifer ab. KUNC (2013, S. 69 ff.) verwendet für die Abbildung dieses Verhaltens ein erweitertes LuGre-Reibmodell<sup>15</sup>, welches für den gesamten Geschwindigkeitsbereich eine hinreichend genaue Approximation des gemessenen Verhaltens liefert.

**Modellansätze** für Profilschienenführungen in der Methode der finiten Elemente lassen sich anhand des Modellzwecks differenzieren. **Komponentenorientierte** Ansätze haben die exakte Abbildung der Profilschienenführung selbst zum Ziel. Diese wird dabei inkl. aller Bauteilgeometrien und Wälzkörper mit finiten Elementen detailliert abgebildet. DADALAU ET AL. (2012) zeigen für eine Profilschienenführung mit Kugeln als Wälzkörpern, dass derartige Modellansätze – bei entsprechendem Rechenaufwand – die nichtlineare Federkennlinie hinreichend genau zu approximieren vermögen. Im Gegensatz dazu haben **maschinenorientierte** Ansätze die Abbildung des Einflusses der Profilschienenführung auf die Gesamtmaschine zum Ziel. Dabei werden die schlitten- und bettseitigen Freiheitsgrade der Strukturkomponenten an den Anschraubflächen durch die Steifigkeits- und Dämpfungseigenschaften der Profilschienenführung miteinander verknüpft. Bei koinzidenten Netzen kann dies über mehrere parallele Federn realisiert werden (SCHNEIDER 2000, S. 106), was jedoch Restriktionen und Zusatzaufwände bei der Vernetzung nach sich zieht. ZATARAIN

<sup>15</sup> LuGre: Akronym aus Lund und Grenoble, Entstehungsorte des Modells (CANUDAS DE WIT ET AL. 1995).



ET AL. (1998) und WEISSENBERGER (2001, S. 57 f.) schlagen deshalb eine netzunabhängige Modellierung mit Starrkörperelementen vor, welche – wie in Abb. 2.17 zu sehen – jeweils die Knoten der Anschraubflächen auf einen Punkt zusammenfasst und zwischen diesen Punkten entsprechende skalare Feder- und Dämpferelemente definiert.

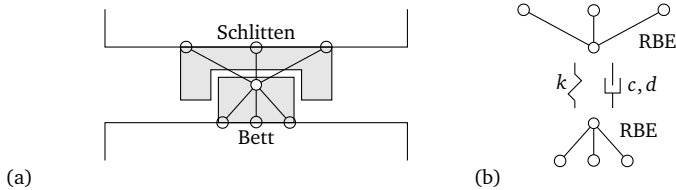


Abb. 2.17: Maschinenorientierte Modellierung von Profilschienenführungen in Zusammenbau- (a) und Explosionsansicht (b) in Anlehnung an ZATARAIN ET AL. (1998)

Derartige Verknüpfungen lassen sich auch automatisiert erstellen, was den Modellierungsaufwand weiter senkt (DADALAU & VERL 2012; ZAEH & OERTLI 2005). Die Parametrisierung der Feder- und Dämpferelemente kann entweder aufgrund von theoretischen Überlegungen oder auf Basis experimenteller Ergebnisse erfolgen. HUNG ET AL. (2011) integrieren die Hertz'sche Theorie in ihr Modell, um den Einfluss der Vorspannung auf die Steifigkeit abzubilden. GROCHE & HOFMANN (2005) verwenden stattdessen einen Prüfstand mit Einmassenschwinger-Verhalten, um Steifigkeits- und Dämpfungswerte für Profilschienenführungen in Normalrichtung zu erhalten. BRECHER ET AL. (2012b, 2013, 2014b) erweitern diese Methode, indem durch eine gezielte Prüfstandsauslegung einerseits eine Aufspaltung in die Normal- und Querrichtung sowie die Rotationsrichtungen erfolgt und andererseits die Dämpfung der Prüfkörper mit Hilfe sog. *Referenzdummies* zuverlässig von der Prüfstandsämpfung getrennt werden kann. Auf diese Weise können für verschiedene Vorspannklassen Parameter angegeben werden, die das gemessene Verhalten unter Verwendung eines Dämpfungskonstantenansatzes hinreichend genau abbilden. Für eine linearisierte Modellierung der Dämpfung in Verfahrrichtung gibt KUNC (2013, S. 95 ff.) Werte für einen zustandsabhängigen Dämpfungskonstantenansatz an, der ebenfalls eine hinreichend genaue Abbildung des gemessenen Verhaltens ermöglicht.

#### 2.4.5 Kugelgewindetriebe inkl. Lagerung

**Bauweisen und Eigenschaften.** Kugelgewindetriebe dienen zur Umwandlung von rotatorischen in translatorische Bewegungen und werden in Werkzeugmaschinen ebenso wie Profilschienenführungen in spielfreier, **vorgespannter Konfiguration** eingesetzt (WECK & BRECHER 2006a, S. 476 ff.). Dementsprechend werden auch hier

– wie in Abb. 2.18 zu erkennen – Doppelmuttervarianten mit 2-Punkt-Kontakt in X- und O-Anordnung oder Einzelmuttern mit 4-Punkt-Kontakt eingesetzt.

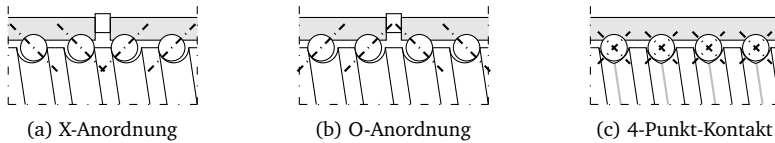


Abb. 2.18: Mögliche Kontaktkonfigurationen eines Kugelgewindetriebs in Anlehnung an WECK & BRECHER (2006a, S. 478)

Die Kugeln können dabei entweder über die gesamte Länge der Mutter(n) tragen und mit einer Umlenkung rückgeführt werden oder jeweils nur über ein oder zwei Gewindegänge tragen und mit mehreren Umlenkungen rückgeführt werden. Die axiale Steifigkeit von Kugelgewindetrieben im Einbauzustand ist somit einerseits von diesem Wälzkontakt abhängig. Andererseits tragen auch die Welle und deren Lagerkonfiguration zur Gesamtsteifigkeit bei, die entweder in Fest-Los- oder vorgespannter Anordnung – auch *gereckt* genannt – ausgeführt wird (ALTINTAS ET AL. 2011). Da es sich sowohl bei der Kugelgewindemutter als auch bei der Lagerung der Spindelwelle um vorgespannte Wälzkontakte handelt, gelten hier dieselben Gesetzmäßigkeiten und Abhängigkeiten, welche bereits im vorhergehenden Abschnitt 2.4.4 (S. 34) diskutiert wurden. Zusätzlich ist zu beachten, dass hier die Vorspannung von der Verfahrensgeschwindigkeit abhängt (VERL & FREY 2010) und sowohl die Normalkraft als auch der Kontaktwinkel von Kugel zu Kugel variieren (CHEN & TANG 2014). Bei der experimentellen Untersuchung des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinenstrukturen mit Kugelgewindetrieben ist ein signifikanter Einfluss dieser Elemente auf das Gesamtsystem messbar, welcher sich vorwiegend in Axial- und Torsionsmoden äußert (VARANASI & NAYFEH 2004). Die Axialmode hat dabei einen dominanten Anteil an bei Positioniervorgängen gemessenen Verlagerungen (CHEN ET AL. 2004). In mehreren Arbeiten werden deshalb Regelstrategien zur Kompensation dieser Moden beschrieben (ERKORKMAZ & KAMALZADEH 2006; KAMALZADEH & ERKORKMAZ 2007). Im Vergleich zu Profilschienenführungen besitzen Kugelgewindetriebe ein ausgeprägtes Verschleißverhalten, was sich einerseits in streuenden und mit der Einsatzdauer steigenden Reibkräften (REUSS ET AL. 2012) und andererseits – abhängig vom eingesetzten Schmierstoff – in Steifigkeitsverlusten von 10 % bis 25 % über die Lebensdauer äußert (BRECHER ET AL. 2009; YAGMUR 2014, S. 48).

**Modellansätze** für Kugelgewindetriebe in der Methode der finiten Elemente lassen sich anhand des Abstraktionsgrads gliedern. **Diskrete Modelle** berücksichtigen die Kopplung des Rotationsfreiheitsgrads der Welle mit dem Translationsfreiheitsgrad der Mutter (FREY ET AL. 2012; PRITSCHOW ET AL. 2003). Dabei wird lediglich die Axial-

und die Torsionsdynamik des Systems abgebildet, sämtliche weiteren Effekte wie die Dynamik der Spindelwelle werden vernachlässigt. Im Gegensatz dazu bestehen **hybride Modelle** aus einem diskreten Teil für die Mutter und den Wälzkontakt und einem kontinuierlichen Teil für die Abbildung der Welle. Hiermit lassen sich zusätzliche Eigenschaften der Systemdynamik wie die Kopplung der Axial- und Torsionsmoden durch die Spindelsteigung darstellen und untersuchen (VICENTE ET AL. 2012). Die Trägheits- und Steifigkeitseigenschaften der Welle werden dabei entweder mit gemittelten Durchmessern (OKWUDIRE & ALTINTAS 2009) oder für erhöhte Genauigkeitsansprüche unter Berücksichtigung der einzelnen Gewindegänge (DADALAU ET AL. 2010) ermittelt. Für die mathematische Repräsentation der Welle werden sowohl analytische Formulierungen auf Basis der Balkentheorie (WHALLEY ET AL. 2008) als auch Approximationen mit finiten Balkenelementen (OKWUDIRE & ALTINTAS 2009) eingesetzt. Für die diskrete Abbildung des Wälzkontakts wird unter Vernachlässigung der Reibung von einer Kraftübertragung zwischen den Berührungspunkten der Kugeln ausgegangen, es existieren jedoch Ansätze unterschiedlicher Detaillierung: ZAEH ET AL. (2004) und OERTLI (2008, S. 65 ff.) verteilen die gemessene Axialsteifigkeit des Mutter-Kugel-Welle-Kontakts  $k_{\text{axial}}$  auf eine Zylinderfläche zwischen Mutter und Welle, wodurch sie nach Integration und Projektion in den Mittelpunkt der Mutter eine Steifigkeitsmatrix der Form

$$[K_{\text{KGT}}] = k_{\text{axial}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -R \tan \hat{\alpha} & 0 & 0 \\ & a_{yy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & a_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ & & & R^2 \tan^2 \hat{\alpha} & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & a_{\theta_y \theta_y} & 0 \\ & & & & & a_{\theta_z \theta_z} \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

erhalten. Die Matrix ist invariant ggü. Drehungen um die Wellenachse, wobei  $R$  der Radius der Welle und  $\hat{\alpha}$  der Steigungswinkel der Gewindespindel ist. Die  $a$ -Terme sind längere, auf die Axialsteifigkeit normierte trigonometrische Ausdrücke, die sich nicht weiter vereinfachen lassen und hier nicht dargestellt sind. Im Gegensatz dazu bestimmen OKWUDIRE (2005, S. 23 ff.; 2009, S. 21 ff.) und OKWUDIRE & ALTINTAS (2009) den Steifigkeitsanteil jeder tragenden Kugel an der gemessenen Axialsteifigkeit  $k_{\text{axial}}$  und integrieren mit der Helixfunktion als Zwangsbedingung über den Wellenwinkel. Nach Summation über jede Kugel und Projektion in den Mittelpunkt der Mutter ergibt sich eine Steifigkeitsmatrix der Form

$$[K_{\text{KGT}}] = k_{\text{axial}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{xz} & -R \tan \hat{\alpha} & 0 & a_{x\theta_z} \\ & a_{yy} & 0 & 0 & a_{y\theta_y} & 0 \\ & & a_{zz} & a_{z\theta_x} & 0 & a_{z\theta_z} \\ & & & R^2 \tan^2 \hat{\alpha} & 0 & a_{\theta_x \theta_x} \\ \text{sym} & & & & a_{\theta_y \theta_y} & 0 \\ & & & & & a_{\theta_z \theta_z} \end{bmatrix}, \quad (2.87)$$

welche im Vergleich zu Gl. 2.86 zusätzliche, nicht-diagonale Koppelterme und je nach Kugelkonfiguration keine Rotationssymmetrie um die Wellenachse besitzt. Beide Modelle geben die im Experiment gemessene Dynamik von Kugelgewindetrieben in Axial- und Torsionsrichtung mit hinreichender Genauigkeit wieder, die Lateralmoden werden jedoch durch das Modell in Gl. 2.87 besser approximiert (OKWUDIRE & AL-TINTAS 2009). Bei beiden bisher vorgestellten Modellen wird angenommen, dass die Nachgiebigkeit des Wälzkontakts das System dominiert und somit sowohl die Mutter als auch der Wellenteil in der Mutter Starrkörperverhalten aufweisen. Die betreffenden Freiheitsgrade werden dafür auf Wellen- und Mutterseite mit Starrkörperelementen zusammengefasst und die Steifigkeitsmatrix  $[K_{\text{KGT}}]$  zwischen den Referenzknoten definiert. Eine weitere Verbesserung der Approximationsgenauigkeit der Lateralmoden – insbesondere bei im Verhältnis zum Wellendurchmesser langen Müttern – lässt sich deshalb erreichen, indem mit linearen Formfunktionen die Steifigkeitsänderung aufgrund der Wellenverformung mit berücksichtigt wird (OKWUDIRE 2011). Dies zieht jedoch eine elementweise Definition von Steifigkeiten mit entsprechendem Modellierungsaufwand nach sich. Die Abbildungsgenauigkeit lässt sich nochmals steigern, indem die von Kugel zu Kugel variierenden Kontaktwinkel und Normalkräfte mit Hilfe der Hertz'schen Theorie berücksichtigt werden (CHEN & TANG 2014). Parameter für die Modelle können entweder aus statischen (DIN ISO 3408 Blatt 4) oder aus dynamischen Versuchen (BRECHER ET AL. 2013) gewonnen werden. Die Wälzlager der Spindelwelle lassen sich – unter Berücksichtigung von Vorspannung, Belastung und Kontaktkonfiguration – ebenfalls mit skalaren Feder-Dämpfer-Modellen beschreiben (OPHEY 1986, S. 64 ff.), wobei die entsprechenden Parameter auf Basis theoretischer Überlegungen (DIETL 1997, S. 33 ff.) oder experimenteller Untersuchungen (BRECHER ET AL. 2012a, d, 2013, 2014a) gewonnen werden können.

### 2.4.6 Gesamtmodell

**Eigenschaften.** Das vielschichtige Zusammen- und Wechselwirken der Komponentenmodelle in dynamischen Modellen von Werkzeugmaschinenstrukturen wird deutlich, wenn mittels Änderungen einzelner, lokaler Parameter die Modelleigenschaften bzgl. bestimmter Kennwerte optimiert oder an experimentell ermittelte Daten angepasst werden sollen. NEBELING (1999, S. 78) gibt hierzu einen qualitativen Überblick über den Einfluss einzelner Parameter auf das dynamische Verhalten, ohne jedoch konkrete Schlussfolgerungen zu ziehen. Mit den in der Zwischenzeit verfügbaren numerischen Methoden und Rechenkapazitäten kann die Sensitivität der dynamischen Eigenschaften von Werkzeugmaschinenmodellen gegenüber einzelnen, lokalen Steifigkeits- und Dämpfungsparametern ermittelt werden (BROOS ET AL. 2006; WBK 2006, S. 95 ff.). Hierbei ergeben sich Hinweise auf die Einstellbarkeit von Eigenfrequenzen und Nachgiebigkeiten hinsichtlich einzelner Parameter, die jedoch nur für das jeweilige Modell Gültigkeit besitzen. Beim numerischen Abgleich eines Werkzeugmaschinenmodells mit einer großen Anzahl an Steifigkeits- und Trägheitsparametern verwendet

KOLOUCH (2013, S. 186 ff.) ein schrittweises Vorgehen, um die Wechselwirkung zwischen den einzelnen Parametergruppen und die Streubereiche der Parameter selbst zu minimieren. Er führt weiter aus, dass eine eindeutige Identifikation nur durch Demontage der Maschine und Vermessung der Einzelteile möglich ist. Der Einfluss lokaler Dissipationsquellen auf das Dämpfungsverhalten der Gesamtmaschine kann nach NIEHUES & ZÄH (2012) unter Verwendung der Hauptdämpfungshypothese (Gl. 2.70, S. 25) mit

$$\zeta_r = \frac{1}{4\pi U_r} \sum_{j=1}^k (W_r)_j = \sum_{j=1}^k (\zeta_r)_j \quad (2.88)$$

beschrieben werden. Der Dämpfungsgrad  $\zeta_r$  der Gesamtmaschine ergibt sich somit durch Superposition der Dämpfungsgrade  $(\zeta_r)_j$  von  $k$  im System vorhandenen lokalen Dissipationsquellen.

**Modellstruktur.** Dynamische Finite-Elemente-Modelle von Werkzeugmaschinen setzen sich nach FINKE (1977, S. 19) aus mechanischen Kontinua für die Beschreibung der geschlossenen Bauteile und aus Skalarverbindungen für die Beschreibung von Anbauteilen und Fügeverbindungen zusammen. SCHNEIDER (2000, S. 105 ff.) abstrahiert diese Betrachtungsweise, indem er die Komponenten der Maschine jeweils als Modellbausteine abbildet. Die Anordnung der Modellbausteine zueinander kann anschließend z. B. über Topologiegraphen, wie sie in der Mehrkörpersimulation üblich sind, beschrieben werden (WEISSENBERGER 2001, S. 55). Um den Modellierungsaufwand weiter zu senken, setzt OERTLI (2008, S. 45 ff.) parametrisierte Modellbausteine ein, die eine Stellungsflexibilität des Modells erlauben. Nach der Sammlung derartiger, modularer Modellbausteine in Modellbibliotheken kann der Anwender anschließend über einfaches Zusammensetzen das benötigte Simulationsmodell aufbauen (KIPFMÜLLER 2009, S. 51 ff.; SIEDL 2008, S. 117).

## 2.5 Verifikation, Validierung und Vergleich dynamischer Modelle

Dynamische Modelle von Werkzeugmaschinenstrukturen – unabhängig davon, ob auf analytischen oder experimentellen Daten basierend – werden auf Grundlage von Vereinfachungen gebildet, sodass ihr Verhalten zwangsläufig von jenem des realen Objekts abweicht. Deshalb ist es notwendig, geeignete Verfahren zur Verifikation und Validierung sowie Kriterien zum Vergleich von Modellen zur Verfügung zu haben.

### 2.5.1 Modellverifikation und -validierung

**Verifikation.** In der Modellverifikation wird sichergestellt, dass das Modell den Spezifikationen entspricht und dass keine Fehler in der Modellstruktur, in den -algorithmen und in der Implementierung vorliegen (NEELAMKAVIL 1987, S. 76). Die Verifikation

betrachtet damit den implementierten, numerischen Teil des Modells, wohingegen der Fokus der im folgenden Abschnitt betrachteten Validierung auf dem konzeptionellen Modellteil liegt (DOEBLING 2002). Die grundsätzliche Vorgehensweise der Verifikation ist die Identifikation, Quantifizierung und Reduktion von Fehlern – wie z. B. der in Abschnitt 2.3.2 (S. 18) beschriebenen Lösungsfehler – im numerischen Modell und dessen Lösungen. Um numerische Modelle zu verifizieren, werden daher die Modellergebnisse entweder mit bekanntermaßen genaueren numerischen Verfahren oder theoretisch exakten Lösungen verglichen, wobei diese nicht unbedingt physikalische Relevanz besitzen müssen (OBERKAMPF & TRUCANO 2002).

**Validierung.** Die Modellvalidierung ist der Nachweis, dass das Modell wahr ist oder die Realität exakt wiedergibt (NEELAMKAVIL 1987, S. 67). Da dieser Nachweis für Modelle hoher Komplexität – insbesondere in der Strukturdynamik – nicht einfach zu führen ist, wurden Vorgehensweisen zur Durchführung der Validierung definiert (MAYES 2009a; URBINA ET AL. 2005). Diese teilen sich in die Schritte **Kalibrierung** und Überprüfung der **rückwirkenden** und **prädiktiven Validität** auf. Im Rahmen der Kalibrierung wird das Modell zunächst – innerhalb physikalisch sinnvoller Grenzen – an das Verhalten des gemessenen Objekts angepasst (siehe Abschnitt 2.5.2). Hierbei ist sicherzustellen, dass eine Parameteranpassung erst nach dem systematischen Eliminieren aller anderen Unsicherheits- und Fehlerquellen durchgeführt wird (HEMEZ & STULL 2012). Anschließend wird die rückwirkende Validität über den Vergleich von Modell und Messung anhand entsprechender Maße (siehe Abschnitt 2.5.3, S. 44) bestimmt. Problematisch in der Strukturdynamik ist die Tatsache, dass die Validierung analytischer Modelle mangels Alternativen überwiegend durch den Vergleich von analytischem und experimentellem Modell (siehe Abschnitte 2.2.4, S. 14 bzw. 2.3, S. 15) erfolgt. Bei korrekter Durchführung der experimentellen Modellbildung kann davon ausgegangen werden, dass das experimentelle Modell eine bessere Abbildung der dynamischen Eigenschaften des realen Objekts liefert (MAIA & SILVA 1997, S. 341), auch dies ist jedoch eine Annahme. Deshalb sollten stets direkte Messdaten – z. B. Frequenzgänge – zusätzlich zur Validierung verwendet werden. Abschließend wird die prädiktive Validität des Modells überprüft, indem ein in der Modellbildung nicht verwendeter Zustand des realen Objekts simuliert und mit Messdaten verglichen wird. Die strukturelle Validität kann bei dieser Überprüfung als zusätzliche Randbedingung gelten, wenn z. B. eine Übertragbarkeit auf andere Systeme gefordert wird.

### 2.5.2 Verfahren des Model Updating

Verfahren zur Anpassung des dynamischen Verhaltens von analytischen Modellen an das gemessener Modelle – in der Literatur unter dem Begriff *Model Updating* bekannt – haben ihren Ursprung in den 1990er Jahren (MOTTERSHEAD & FRISWELL 1993) und sich seitdem auch in der Anwendung etabliert (AVITABLE 2000). Das

Prinzip derartiger Verfahren besteht – wie in Abb. 2.19 illustriert – darin, einen vorgegebenen Satz aleatorisch-unsicherer Modellparameter  $\{a\}$  des analytischen Modells so zu modifizieren, dass die dynamischen Eigenschaften anschließend eine höhere Korrelation mit jenen des experimentellen Modells aufweisen. Die Verfahren lassen sich grundsätzlich in direkte, iterative und sonstige Methoden unterscheiden.

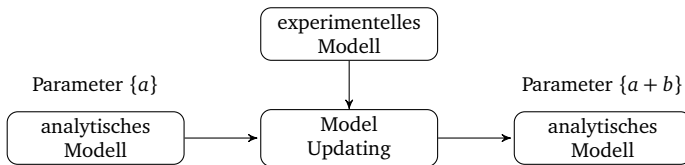


Abb. 2.19: Prinzip des Model Updating

**Direkte Verfahren** bestimmen – dem Namen entsprechend – die modifizierten Parameter direkt unter Verwendung von Matrixoperationen und der beteiligten Modelle. Der Nachteil dieser Herangehensweise ist jedoch, dass dabei die strukturelle Validität des analytischen Modells verloren geht (FRISWELL & MOTTERSHEAD 1995, S. 126 f.). Derartige Methoden haben sich deshalb nicht durchgesetzt und werden hier nicht detaillierter betrachtet.

**Iterative Methoden** hingegen ermitteln zunächst mittels numerischer Differentiation die Sensitivität  $[S]$  der Parameter  $\{a\}$  bzgl. der Zielfunktion  $\{\mathcal{F}_{\text{obj}}\}$  und berechnen die Parameteränderung  $\{b\}$  anschließend über das lineare Gleichungssystem

$$[S]\{b\} = \{\mathcal{F}_{\text{obj}}\} \quad (2.89)$$

Da zwischen der Zielfunktion  $\{\mathcal{F}_{\text{obj}}\}$  und den Parametern  $\{a\}$  über das Eigenwertproblem 2.11 (S. 10) ein nichtlinearer Zusammenhang besteht, muss die Berechnung von Gl. 2.89 solange iterativ wiederholt werden, bis die Zielfunktion hinreichend genau erfüllt ist. Innerhalb der iterativen Methoden kann anhand der Größen in der Zielfunktion  $\{\mathcal{F}_{\text{obj}}\}$  wiederum in zwei Gruppen unterschieden werden. Die erste Gruppe bilden die frequenzgangbasierten Verfahren. Deren bekanntester Vertreter ist die *Response Function Method* – kurz RFM – (LIN & EWINS 1990; LIN & ZHU 2006), welche die Abweichung zwischen experimentellen und analytischen Frequenzgängen  $\{\alpha_x\} - \{\alpha_A\}$  minimiert. Zur zweiten Gruppe werden diejenigen Verfahren gezählt, die modale Größen – Eigenfrequenzen  $\omega_r$  und Eigenvektoren  $\{\phi\}_r$  – hinsichtlich geringstmöglicher Abweichung optimieren. Die Verfahren dieser Gruppe werden unter dem Begriff *Inverse Eigensensitivity Method* – kurz IESM – (BONISOLI ET AL. 2012; MOTTERSHEAD ET AL. 2011) zusammengefasst und können auf Basis verschiedener

Zielfunktionen formuliert werden. Werden nur die Abweichungen der Eigenfrequenzen betrachtet, kann mittels *Mode-Tracking* (KIM & KIM 2000) sichergestellt werden, dass kein Modentausch während des Updating-Prozesses stattfindet. Im Vergleich haben beide Verfahrensgruppen spezifische Vor- und Nachteile (MODAK ET AL. 2002), die im konkreten Fall abgewogen werden müssen. Darüber hinaus ist bei der Anwendung zu beachten, dass Diskretisierungsfehler des analytischen Modells die ermittelten Parameter signifikant beeinflussen können (MOTTERSHEAD ET AL. 1995). Obwohl ursprünglich nur für lineare Modelle vorgesehen und als geeignet betrachtet, können derartige Verfahren innerhalb bestimmter Grenzen (HEMEZ & DOEBLING 2001) auch in der nichtlinearen Strukturodynamik eingesetzt werden (BÖSWALD 2005).

**Sonstige Verfahren.** Neben den konventionellen Verfahren des Model Updating gibt es in jüngerer Vergangenheit vermehrt Anstrengungen, Methoden der künstlichen Intelligenz für diesen Zweck einzusetzen. Dazu zählen Verfahren der genetischen Algorithmen (SADEGHI ET AL. 2012) und der künstlichen neuronalen Netze (MARWALA 2010), welche vor allem im Bereich der nichtlinearen Parameteridentifikation und für Modelle hoher Komplexität Anwendung finden.

**Anwendung an Werkzeugmaschinen.** Da für die Beurteilung und das Verständnis des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen mit der Realität abgeglichenen, analytische Modelle von großer Bedeutung sind, wurden und werden Verfahren des Model Updating dort in großem Umfang eingesetzt. Dabei reicht die Bandbreite der Einsatzgebiete vom Abgleich vergleichsweise einfacher Gestellstrukturen (WAS-MANN 1996, S. 85 ff.; LIU 1998, S. 72 ff.; NEBELING 1999, S. 89 ff.) über die gezielte Parameterbestimmung einzelner Maschinenelemente (WITT 2007, S. 51 ff.; GARITANO-ANDIA ET AL. 2008; HOFFMANN 2008, S. 56 ff.) bis hin zur Identifikation sämtlicher Parameter in Gesamtmaschinenmodellen (RICHTER 2012, S. 151 ff.; NEUGEBAUER ET AL. 2012; KOLOUCH 2013, S. 188 ff.). Ein weiteres Anwendungsgebiet liegt zudem in der simulationsgestützten Optimierung des dynamischen Verhaltens von Maschinenstrukturen (FLEISCHER & BROOS 2004; BROOS ET AL. 2006; WBK 2006, S. 75 ff.), wo mit Hilfe von derartigen Verfahren signifikante Verbesserungen erreicht werden können.

### 2.5.3 Vergleichsmaße

Beim Vergleich von analytischen und experimentellen Modellen besteht das grundsätzliche Problem, dass das experimentelle Modell in der Regel weniger Freiheitsgrade  $n$  im Vergleich zum analytischen Modell mit  $N$  Freiheitsgraden besitzt. Nach GRAFE (1998, S. 23) kann dies mit dem sog. *Model Incompleteness Ratio*

$$i_r = \frac{n}{N} \quad (2.90)$$



ausgedrückt werden, die für detaillierte analytische Modelle von Werkzeugmaschinenstrukturen Werte von  $i_r \leq 10^{-4}$  annehmen kann. Das analytische Modell muss deshalb reduziert werden, was für gewöhnlich im modalen Raum geschieht (siehe Abschnitt 2.3.4, S. 23). Da das experimentelle Modell ebenfalls im modalen Raum definiert ist, bieten sich Vergleichsmaße auf Basis der modalen Größen an. **Eigenvektoren** werden in der Strukturtechnik üblicherweise mit Hilfe des MAC<sup>16</sup>-Wertes

$$\text{MAC}_r = \frac{\left| \{\phi\}_{r,X}^T \{\phi\}_{r,A}^* \right|^2}{\{\phi\}_{r,X}^T \{\phi\}_{r,X}^* \{\phi\}_{r,A}^T \{\phi\}_{r,A}^*} \quad (2.91)$$

verglichen (ALLEMANG & BROWN 1982). Das Kriterium nimmt Werte von 0 bis 1 an und schätzt die Orthogonalität der Eigenvektoren ab, wobei  $\{\phi\}_{A,N \times 1}$  auf die Größe von  $\{\phi\}_{X,n \times 1}$  reduziert werden muss. Dies ist jedoch nur dann zulässig, wenn die Anzahl der verbleibenden Einträge  $n$  groß genug ist, um die betrachteten Vektoren hinreichend genau unterscheiden zu können (MAIA & SILVA 1997, S. 350). Für einen Vergleich der **Eigenfrequenzen** wurde von IMAMOVIC (1998, S. 77) das NFD-Kriterium<sup>17</sup> beschrieben, das über

$$\text{NFD}_r = \frac{|\omega_{r,X} - \omega_{r,A}|}{\min(\omega_{r,X}, \omega_{r,A})} \cdot 100\% \quad (2.92)$$

die auf 100 % normierte Abweichung der Eigenfrequenz berechnet. Eine weitere Möglichkeit des Modellvergleichs ist der – insbesondere für den Amplitudenvergleich geeignete – direkte Vergleich von gemessenen und berechneten **Frequenzgängen**, welcher über den FRAC<sup>18</sup>-Wert

$$\text{FRAC}_{jk} = \frac{|H_{jk,A} (H_{jk,X})^H|^2}{(H_{jk,A} (H_{jk,A})^H) (H_{jk,X} (H_{jk,X})^H)} \quad (2.93)$$

berechnet werden kann (HEYLEN ET AL. 1997, S. A.6.14). Auch dieses Kriterium nimmt Werte von 0 bis 1 an. Eine einfache Möglichkeit, die **Qualität der Massenmatrix** des Modells zu überprüfen, besteht im Vergleich der Gesamtmassen

$$m_X/m_A = \frac{m_X}{m_A} \quad (2.94)$$

von experimentellem (bzw. realem) und analytischem System (HEYLEN ET AL. 1997, S. A.6.16). Daneben findet sich in der Literatur eine Vielzahl weiterer Vergleichsmaße mit unterschiedlichen Zielstellungen (ALLEMANG 2003), die in der vorliegenden Arbeit jedoch nicht relevant sind.

<sup>16</sup> Engl. *Modal Assurance Criterion*, kurz MAC.

<sup>17</sup> Engl. *Natural Frequency Difference*, kurz NFD.

<sup>18</sup> Engl. *Frequency Response Assurance Criterion*, kurz FRAC.

## 2.6 Unsicherheiten in strukturdynamischen Modellen

In den bisherigen Ausführungen zur Strukturodynamik wurde in dieser Arbeit – wie auch in der einschlägigen Literatur bis in die 1990er Jahre (OBERKAMPF & ROY 2010, S. 96 f.) – davon ausgegangen, dass ein deterministisches, analytisches Modell in der Lage ist, das reale Objekt abzubilden. Dies ist jedoch nur korrekt, sofern ein gemessenes Exemplar zur Verfügung steht und hinreichend kleine epistemische Unsicherheiten<sup>19</sup> in der Modellbildung vorliegen. Da diese Voraussetzungen – z. B. im Falle der Prognose mit Hilfe von virtuellen Prototypen – jedoch nicht immer erfüllt sind, wurden in der Zwischenzeit theoretische Ansätze zur Entstehung und Identifikation von aleatorischen und epistemischen Unsicherheiten entlang des Modellierungsprozesses erarbeitet (ALVIN ET AL. 1998; OBERKAMPF & ROY 2010; OBERKAMPF ET AL. 2002; ROY & OBERKAMPF 2011), die in Kapitel 4 (S. 55) der vorliegenden Arbeit detaillierter betrachtet werden. Um die auf diese Weise identifizierten Unsicherheiten berücksichtigen zu können, ist eine Erweiterung der bisher deterministischen Modelle und Berechnungsverfahren erforderlich. Hierbei wird zwischen probabilistischen und nicht-probabilistischen Lösungsansätzen unterschieden, die jeweils spezifische Vor- und Nachteile aufweisen (DE LIMA & EBECKEN 2000).

### 2.6.1 Probabilistische Ansätze

Probabilistische Ansätze sind dadurch gekennzeichnet, dass mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen<sup>20</sup>  $\mathcal{F}_{\text{PDF}}$  die Wahrscheinlichkeit der im Modell berücksichtigten Unsicherheiten beschrieben wird. Damit ist die Wahrscheinlichkeit  $\hat{P}$ , dass eine Unsicherheit  $a$  innerhalb des Intervalls  $[j, k]$  liegt, mit

$$\hat{P}(j \leq a \leq k) = \int_j^k \mathcal{F}_{\text{PDF}}(a) da \quad (2.95)$$

definiert (MOENS 2002, S. 14). Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen werden auf Basis experimenteller Daten bestimmt, bei fehlender oder geringer experimenteller Absicherung können über theoretische Ansätze geeignete Funktionen gewonnen werden (ARENDE ET AL. 2012a; SOIZE 2013). Die Verfahren zur anschließenden Berechnung der dynamischen Strukturantwort lassen sich nach STEFANO (2009) in Monte-Carlo-Simulationen, Störmatrixansätze und spektrale stochastische FEM gliedern. Da die beiden letzteren Ansätze modifizierte Elementformulierungen bzw. -matrizen erfordern, werden sie bisher nur für akademische Beispiele eingesetzt. Im

<sup>19</sup> Begriffsdefinitionen siehe Abschnitt 2.1, S. 3.

<sup>20</sup> Engl. *Probability Density Function*, kurz PDF

Gegensatz dazu basiert die **Monte-Carlo-Simulation** (VDI 4008 BLATT 6) auf der Berechnung der Systemantwort von deterministischen Finite-Elemente-Modellen, welche wiederholt zufallsbasiert verändert werden und so das Integral in Gl. 2.95 durch eine endliche Summe approximieren. Da zur Erzeugung statistisch gesicherter Ergebnisse inakzeptabel hohe Rechenzeiten erforderlich wären, ist eine direkte Anwendung für große strukturdynamische Modelle nicht attraktiv (SCHUËLLER 2001). Deshalb werden für derartige Problemstellungen erfolgreich **Samplingverfahren** (PRADLWARTER ET AL. 2005) oder **Metamodelle** auf Basis künstlicher neuronaler Netze verwendet (GOLLER ET AL. 2011; PATELLI ET AL. 2012; PICHLER ET AL. 2009), um die Rechenzeiten zu begrenzen. Über diese Methoden eröffnen sich auch Möglichkeiten der Optimierung (SCHUËLLER & JENSEN 2008), die für das Zuverlässigkeitsdesign und ähnliche Anwendungen vorteilhaft sind.

**Anwendung an Werkzeugmaschinen.** Probabilistische Ansätze wurden von WILL (2007) bereits erfolgreich an Werkzeugmaschinen erprobt, indem mit Hilfe von Samplingverfahren die für die Systemdämpfung relevanten lokalen Dissipationsquellen an einer Drehmaschine identifiziert wurden.

### 2.6.2 Nicht-probabilistische Ansätze

Im Gegensatz dazu umfassen nicht-probabilistische Ansätze sämtliche weiteren Methoden, die für die Beschreibung unsicherheitsbehafteter Modelle geeignet sind. Nach MOENS & HANS (2011) sind dies einerseits Intervall- und andererseits Fuzzy-Set-Ansätze, wobei beide Verfahren über entsprechende Theoreme ineinander überführbar sind.

**Intervalle.** Eine einfache und recheneffiziente Möglichkeit für die Beschreibung von Unsicherheiten bieten geschlossene Intervalle (MOENS & VANDEPITTE 2005b), die für einen Skalar mit

$$\mathbf{a} = \{a \mid (a \in \mathbb{R}) (\underline{a} \leq a \leq \bar{a})\} = [\underline{a}, \bar{a}] \quad (2.96)$$

definiert sind. Das Ziel von intervallbasierten Finite-Elemente-Methoden (IFEM) ist es, für einen Vektor an Eingangsparametern  $\{\mathbf{a}\}$  mit Hilfe von Intervall-Arithmetik (MOORE 1979) das Lösungsset

$$\langle \{b\} \rangle = \bigcup_{i=1}^j \{\mathbf{b}\}_i \quad (2.97)$$

aus möglicherweise diskontinuierlichen Intervallen  $\{\mathbf{b}\}_i$  zu bestimmen, das durch

$$\langle \{b\} \rangle = \left\{ \{b\} \mid \left( \{a\} \in \{\mathbf{a}\} \right) \left( \{b\} = \mathcal{F}(\{a\}) \right) \right\} \quad (2.98)$$

beschrieben wird. Da die Eingangsparameter  $\{\mathbf{a}\}$  in der Intervall-Arithmetik – trotz möglicherweise vorhandener Abhängigkeiten – als voneinander unabhängig betrachtet werden, wird im Fall der Strukturodynamik das Lösungsset  $\langle\langle b \rangle\rangle$  durch eine konservative Näherung

$$\langle\langle b \rangle\rangle = \mathcal{F}(\llbracket \mathbf{M} \rrbracket_{\{\mathbf{a}\}}, \llbracket \mathbf{C} \rrbracket_{\{\mathbf{a}\}}, \llbracket \mathbf{K} \rrbracket_{\{\mathbf{a}\}}, \llbracket \mathbf{D} \rrbracket_{\{\mathbf{a}\}}) \quad (2.99)$$

beschrieben, die das exakte Lösungsset überschätzt (MOENS 2002, S. 81). Die Notation  $\llbracket \mathbf{A} \rrbracket_{\{\mathbf{a}\}}$  kennzeichnet hier die Intervall-Systemmatrizen, welche aufgrund der Intervalle der Eingangsparameter  $\{\mathbf{a}\}$  ebenfalls konservativ überschätzt werden. Die Problemstellung besteht somit darin, ein konservatives Lösungsset  $\langle\langle b \rangle\rangle$  zu bestimmen, welches das exakte Lösungsset  $\langle\langle b \rangle\rangle$  – wie in Abb. 2.20 (S. 48) verdeutlicht – bestmöglich approximiert, ohne es zu unterschätzen. Um dies zu erreichen,

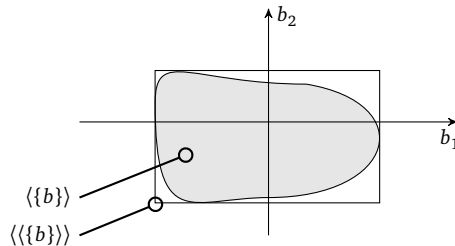


Abb. 2.20: Bestmögliche konservative Schätzung  $\langle\langle b \rangle\rangle$  eines exakten Lösungssets  $\langle\langle b \rangle\rangle$  in Anlehnung an MOENS (2002, S. 35)

sind sämtliche Schritte der Lösungssequenz bzgl. der kleinstmöglichen Überschätzungen zu optimieren. Im Falle der Berechnung von Frequenzgängen bestehen diese Schritte aus Eigenwertproblem und modaler Superposition. Für **intervallbasierte Eigenwertprobleme** gibt es mehrere Verfahren, die je nach Rechenaufwand unterschiedlich große Überschätzungen verursachen (MODARES ET AL. 2006; QIU & WANG 2005; QIU ET AL. 2005). Dabei ist es unabhängig vom eingesetzten Verfahren nach MOENS (2002, S. 92 ff.) von großer Bedeutung, den Tausch von Moden im Intervall sicher detektieren zu können. Anschließend kann das **Frequenzgangintervall** auf Basis modaler Superposition bestimmt werden, wofür MOENS & VANDEPITTE (2004) zunächst ein Verfahren für ungedämpfte Systeme und anschließend ein erweitertes Verfahren für proportional gedämpfte Systeme vorgestellt haben (MOENS & VANDEPITTE 2005a). Das beschriebene Verfahren zeigt durch eine weitgehende Rückführung auf analytische Zusammenhänge nur geringe Überschätzungen und wurde auch an größeren strukturdynamischen Modellen erfolgreich angewandt (DE GERSEM ET AL. 2005).

**Fuzzy-Sets.** Eine zweite, nicht-probabilistische Möglichkeit der Darstellung von Unsicherheiten in strukturdynamischen Modellen bieten die Fuzzy-Sets (ELISHAKOFF 2000, S. 63 ff.; HANSS 2005, S. 15), die unter Verwendung der Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_{\hat{A}}(a)$  die Form

$$\hat{A} = \left\{ (a, \mu_{\hat{A}}(a)) \mid a \in b, \mu_{\hat{A}}(a) \in [0, 1], b \in [0, 1] \right\} \quad (2.100)$$

annehmen. Charakteristisch für diesen Ansatz ist, dass keine scharfe, diskrete Trennung zwischen dem Set zugehörigen und nicht-zugehörigen Elementen vorhanden ist, sondern die Mitgliedschaft eines Elements im Set stattdessen unscharf mit Werten von 0 bis 1 bestimmt wird. Für die Berechnung der Systemantwort von Fuzzy-Set-Problemen werden diese über die sog.  $\alpha$ -Level-Strategie in mehrere Intervallprobleme überführt. Dabei wird die Zugehörigkeitsfunktion – wie in Abb. 2.21 illustriert – in mehrere Ebenen unterteilt, welche jeweils ein Intervallproblem darstellen.

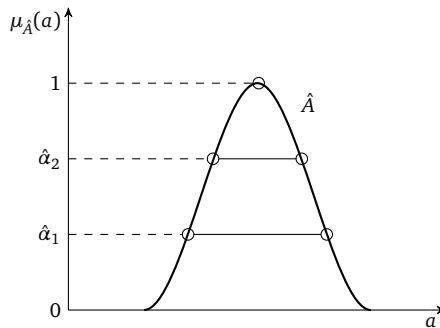


Abb. 2.21:  $\alpha$ -Level-Strategie für ein Fuzzy-Set in Anlehnung an HANSS (2005, S. 20)

Für die Transformation in die Intervalldomäne und die Rücktransformation in die Fuzzy-Domäne wurde von HANSS (2002, 2003) die sog. *Transformation Method* vorgestellt, mit welcher für beliebige Fuzzy-Probleme die entsprechend erforderliche Intervallberechnung und daraus anschließend die Fuzzy-wertige Systemantwort bestimmt werden kann. Sämtliche Berechnungsverfahren der Intervallansätze sind damit für diese Probleme ebenso nutzbar (DE MUNCK ET AL. 2004). Für große Modelle in der Strukturdynamik kann dieser Ansatz mit dynamischen Reduktionsverfahren verbunden werden (GIANNINIA & HANSS 2008), was zusätzliche Vorteile in der Recheneffizienz bietet. Durch die Möglichkeit der Definition von unscharfen Unsicherheiten ist es mit diesem Ansatz außerdem möglich, neben den Auswirkungen aleatorischer Unsicherheiten auch diejenigen epistemischer auf strukturdynamische Systeme abzubilden (HANSS & TURRIN 2010).

## 2.7 Zusammenfassung und Handlungsbedarf

Das dynamische Verhalten von Werkzeugmaschinenstrukturen kann mit der Theorie der Mehrmassenschwinger beschrieben werden. Eine Modellbildung mit erhöhten Genauigkeitsansprüchen erfordert dabei die Berücksichtigung der Strukturelastizitäten, was einerseits versuchsgestützt mit der experimentellen Modalanalyse und andererseits simulationsgestützt mit der Methode der finiten Elemente möglich ist. Im Regelfall stehen allerdings während des Entwicklungsprozesses von Werkzeugmaschinenstrukturen keine Prototypen zur versuchsgestützten Modellbildung zur Verfügung. Eine simulationsgestützte Modellbildung muss deshalb in der Lage sein, das dynamische Verhalten der Maschinenstruktur hinreichend genau zu prognostizieren. Diese Prognosefähigkeit wird jedoch durch mehrere Faktoren eingeschränkt. Erstens ist die Methode der finiten Elemente ein numerisches Näherungsverfahren, dessen Einsatz zwangsläufig Diskretisierungsfehler und damit Abweichungen gegenüber der theoretisch exakten Lösung nach sich zieht. In der Literatur finden sich deshalb sowohl für Gesamt- als auch für Komponentenmodelle von Werkzeugmaschinenstrukturen qualitative Aussagen zur Fehlerbegrenzung. Es werden jedoch keine Gütekriterien oder Fehlergrenzwerte zur Sicherstellung der Abbildungsgenauigkeit genannt. Zweitens setzen sich Finite-Elemente-Modelle von Werkzeugmaschinenstrukturen aus Komponentenmodellen zusammen, für welche in der Literatur jeweils mehrere Ansätze mit unterschiedlich hoher Abbildungsgenauigkeit zu finden sind. Die erforderliche Abbildungsgenauigkeit der Komponentenmodelle zur Erreichung einer Prognosefähigkeit des Gesamtmodells ist jedoch unbekannt. Dies ist vor allem der Tatsache geschuldet, dass die Komponentenmodelle im Gesamtmodell wechselwirken und die Einflüsse einzelner Parameter nur punktuell bestimmt werden können. Eine messtechnische Lokalisierung von Modell- und Parameterabweichungen der Komponentenmodelle an montierten Werkzeugmaschinenstrukturen ist deshalb nicht bzw. nur sehr eingeschränkt möglich. Die Modelle und Parameter bisheriger, hinreichend genauer und auf Basis von Messdaten abgeglicher Gesamtmodelle von Werkzeugmaschinenstrukturen sind daher nicht auf andere Konfigurationen übertragbar. Drittens setzt sich im Fachbereich der Strukturodynamik zunehmend die Erkenntnis durch, dass eine deterministische Modellierung zur Prognose des dynamischen Verhaltens von physisch nicht vorhandenen Systemen ungeeignet ist, da aleatorische und epistemische Unsicherheiten nicht berücksichtigt werden können. Neben entsprechenden mathematischen Methoden setzt eine Berücksichtigung jedoch zunächst eine vollständige Identifikation dieser Unsicherheiten in der Modellbildung voraus. Für beide Problemstellungen finden sich in der Literatur entsprechende Ansätze, die jedoch bisher im Rahmen der dynamischen Modellierung von Werkzeugmaschinenstrukturen keine Berücksichtigung gefunden haben. Aussagen zur Prognosefähigkeit derzeit in der Literatur beschriebener Gesamtmodelle für das dynamische Verhalten von Werkzeugmaschinenstrukturen lassen sich somit nicht treffen. Daraus ergibt sich der folgende Handlungsbedarf:

1. Die fehlende Transparenz von Unsicherheiten im Modellierungsprozess von Werkzeugmaschinenstrukturen verhindert eine prognosefähige Modellierung. Der Modellierungsprozess für Komponenten- und Gesamtmodelle muss deshalb beschrieben und die auftretenden aleatorischen und epistemischen Unsicherheiten müssen identifiziert, – soweit möglich – reduziert und anschließend quantifiziert werden. Dazu ist die Auswahl und Definition geeigneter Methoden erforderlich. Im Rahmen dessen ist auch die Definition von Gütekriterien und Fehlergrenzen notwendig, die den Diskretisierungsfehler der Methode der finiten Elemente für dynamische Modelle von Werkzeugmaschinenstrukturen beschränken.
2. Die Prognosefähigkeit der in der Literatur beschriebenen Komponentenmodelle konnte am Gesamtmodell bisher experimentell nicht nachgewiesen werden, da die Untersuchungen entweder an Versuchsständen oder an montierten Strukturen durchgeführt wurden. Es ist deshalb die experimentelle Untersuchung der Komponentenmodelle an geeigneten Strukturen erforderlich, um deren Prognosefähigkeit überprüfen und Unsicherheiten quantifizieren zu können.
3. Nach der Quantifizierung der auftretenden Unsicherheiten sind diese geeignet im Gesamtmodell zu berücksichtigen. In der Literatur finden sich hierfür sowohl probabilistische als auch nicht-probabilistische Ansätze, die sich jedoch bzgl. Zielsetzung, Rechenzeitbedarf und Umfang der Eingangsdaten deutlich unterscheiden. Für die Prognose des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinenstrukturen ist deshalb ein geeigneter Ansatz auszuwählen, ggf. anzupassen und die Funktionsfähigkeit nachzuweisen.





### 3 Zielsetzung und Vorgehen

**Ziel dieser Arbeit** ist die Erarbeitung und experimentelle Überprüfung einer Methode zur Erstellung prognosefähiger Modelle des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinenstrukturen. Der Umfang der Arbeit beschränkt sich dabei auf die Betrachtung des Gesamtmodells sowie sämtlicher Komponenten, die in Abschnitt 2.1 (S. 3) als Bestandteil der Maschinenstruktur definiert sind. Die Methode soll Transparenz bzgl. der während der Modellierung entstehenden aleatorischen und epistemischen Unsicherheiten schaffen und deren Berücksichtigung im Modell erlauben. Dafür soll eine formalisierte Beschreibung von Modellierungsprozessen erarbeitet werden, die eine Identifikation und Charakterisierung der Unsicherheiten im Modellierungsprozess ermöglicht. Außerdem ist die Definition entsprechender Verfahren für die Quantifizierung von aleatorischen und die Begrenzung von epistemischen Unsicherheiten erforderlich. Die daraus resultierenden Unsicherheiten können für eine nicht-deterministische Modellierung genutzt werden, wobei hierfür ein für den Einsatzzweck geeigneter Ansatz auszuwählen und ggf. anzupassen ist. Die erarbeitete Methode soll anschließend auf die Komponentenmodelle von Werkzeugmaschinenstrukturen angewandt werden, um die bei der Modellierung auftretenden Unsicherheiten aufzeigen zu können. Abschließend soll die Funktionstüchtigkeit dieser Herangehensweise an einer realen Maschinenstruktur überprüft werden. Hierbei sollen auch die zuvor identifizierten Unsicherheiten quantifiziert und deren Einfluss auf das Gesamtmodell aufgezeigt werden, um deren Relevanz bei der Modellierung von Werkzeugmaschinenstrukturen bestimmen zu können.

**Vorgehensweise.** Der weitere Aufbau der Arbeit gliedert sich in drei Hauptkapitel, die nach der *Einleitung* (Kapitel 1), den Ausführungen zum *Stand der Wissenschaft und Technik* (Kapitel 2) und der Beschreibung von *Zielsetzung und Vorgehen* (Kapitel 3) wie folgt angeordnet sind: Zunächst wird die Entstehung von Prognosefähigkeit unter dem Einfluss von Unsicherheiten beleuchtet, woraus im Anschluss die Methode zur *Erstellung prognosefähiger Modelle* (Kapitel 4) abgeleitet wird. Außerdem werden geeignete Kriterien und Verfahren beschrieben, die eine Begrenzung der epistemischen und eine Quantifizierung der aleatorischen Unsicherheiten in strukturdynamischen Finite-Elemente-Modellen erlauben. Abschließend erfolgt die Auswahl und Detaillierung eines Berechnungsverfahrens, welches durch die Integration der quantifizierten Unsicherheiten in das Modell die Prognose von Frequenzgängen ermöglicht. Im darauf folgenden Kapitel wird die Anwendung der zuvor erarbeiteten Methode auf Werkzeugmaschinenstrukturen und deren Komponenten beschrieben. Hierbei wird aufbauend auf den aus der Literatur bekannten Komponentenmodellen schrittweise eine *prognosefähige Modellierung von Werkzeugmaschinenstrukturen* (Kapitel 5) ausgearbeitet, wodurch sämtliche während des Modellierungsprozesses entstehenden

aleatorischen und epistemischen Unsicherheiten transparent werden. Diese Transparenz wird dazu verwendet, die epistemischen Unsicherheiten – soweit möglich – zu reduzieren, Möglichkeiten zur Quantifizierung der aleatorischen Unsicherheiten aufzuzeigen und eine Systematik der auftretenden Unsicherheiten zu erstellen. Anhand der *Anwendung an einem Bearbeitungszentrum* wird in Kapitel 6 mit Hilfe der Erkenntnisse aus den beiden vorhergehenden Kapiteln die Größe und der Einfluss der auftretenden Unsicherheiten bestimmt. Die hierbei quantifizierten Unsicherheiten geben Aufschluss darüber, wie groß die in realen Maschinenstrukturen auftretenden Streuungen tatsächlich sind. Nach einer Berücksichtigung im Gesamtmodell wird anschließend das dynamische Verhalten prognostiziert, wobei der Einfluss der zuvor quantifizierten Unsicherheiten gezielt untersucht werden kann. Nach diesem Hauptteil wird im abschließenden Kapitel 7 die gesamte Arbeit *zusammengefasst* und ein *Ausblick* auf weiterführende Arbeiten gegeben.

## 4 Erstellung prognosefähiger Modelle

### 4.1 Wie entsteht Prognosefähigkeit?

In Abschnitt 2.1 (S. 3) dieser Arbeit wird ein Modell als prognosefähig definiert, wenn es verifiziert sowie rückwirkend, prädiktiv und strukturell valide ist. Bisher wurde jedoch nur stark verkürzt darauf eingegangen, weshalb dieser Zustand so definiert wurde, wodurch er beeinflusst wird und wie er im konkreten Fall quantifiziert werden kann. In den folgenden Ausführungen werden deshalb die Zusammenhänge zwischen Prognosefähigkeit, Verifikation und Validierung diskutiert und die Konsequenzen für den Modellierungsprozess aufgezeigt. Außerdem werden Kriterien und deren graphische Darstellung vorgestellt, die für die Quantifizierung der Prognosefähigkeit von Modellen des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinenstrukturen geeignet sind und im weiteren Verlauf der Arbeit Anwendung finden.

#### 4.1.1 Prognosefähigkeit, Verifikation und Validierung

Unstrittig ist, dass ein Modell als prognosefähig bezeichnet werden kann, wenn es die Antwort eines Systems mit hinreichender Genauigkeit vorhersagt, obwohl das modellierte System bis dahin experimentell nicht getestet wurde. Als Konsequenz daraus kann ebenfalls festgehalten werden, dass ein mittels Parametervariation an einen gemessenen Zustand angepasstes Modell nicht zwangsläufig besser oder prognosefähiger ist (HASSELMAN 2001). In vielen Fällen wird bei geringer Übereinstimmung zwischen prognostizierter und gemessener Systemantwort mit zu großen Modellvereinfachungen und einer mangelhaften Diskretisierung argumentiert, um Abweichungen zu erklären. Angesichts der Tatsache, dass die zur Verfügung stehende Rechenleistung in den letzten Jahrzehnten stark gewachsen ist, eine generelle Erhöhung der Genauigkeit von Prognosen hingegen nicht festzustellen ist (ALVIN ET AL. 1998), scheint diese Sichtweise jedoch nicht umfassend genug. Stattdessen muss in die Betrachtung ebenso einbezogen werden, inwieweit die im Modell hinterlegten physikalischen Zusammenhänge für das simulierte System gültig sind (HANSON 1999). Auch Eingabefehler oder Inkonsistenzen im Programmcode können Abweichungen verursachen, obwohl das Modell selbst für das modellierte System geeignet ist. Schließlich ist die Prognosefähigkeit eines Modells auch davon abhängig, welchen Gültigkeitsbereich das Modell abdecken soll und bzgl. welcher Vergleichsmaße und Grenzwerte eine „hinreichend genaue“ Prognose definiert ist (DOEBLING 2002). Hinter dem Begriff *Prognosefähigkeit* verbergen sich somit – wie in Abb. 4.1 (S. 56) zu sehen – eine Vielzahl sehr verschiedenartiger Einflussfaktoren mit teils gegenläufiger Wirkung.

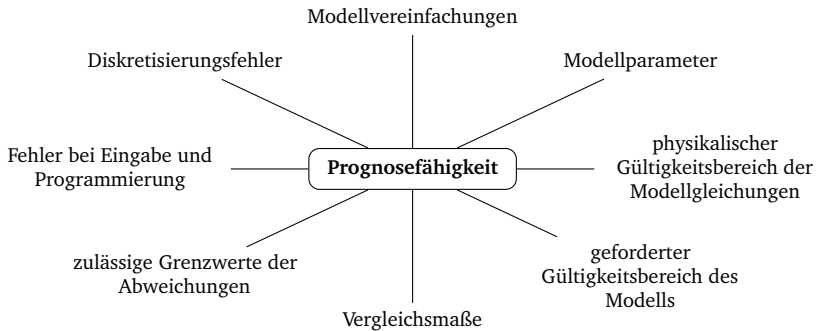


Abb. 4.1: Einflussfaktoren auf die Prognosefähigkeit

Sämtliche aufgeführten Faktoren können dabei entweder dem Prozess der Verifikation – wie Diskretisierungs-, Eingabe- und Programmierfehler – oder dem der Validierung zugeordnet werden. Der Bezug der Verifikation zur Prognosefähigkeit ist naheliegend, da nur ein fehlerfreies bzw. fehlerbegrenztes Modell dazu geeignet sein kann, einen unbekanntem Zustand des modellierten Systems hinreichend genau abzubilden. Im Fall der Validierung liegen die Dinge etwas komplizierter, da es aus philosophischer Sicht – mit Ausnahme mathematischer Beweise – keine wissenschaftliche Theorie gibt, die im absoluten Sinn valide ist (BABUŠKA & ODEN 2004). Eine Theorie kann nur durch Beobachtungen bekräftigt oder widerlegt werden, wobei übereinstimmende Beobachtungen keinen Nachweis für die Validität darstellen. Wird eine Theorie jedoch seit längerer Zeit erfolgreich und ohne Widersprüche angewandt, so kann davon ausgegangen werden, dass sie bekräftigt, stichhaltig und somit relativ zu ihrem Anwendungsgebiet valide ist<sup>21</sup> (BABUŠKA & ODEN 2004). Beim Aufbau eines Modells unter Verwendung einer derartigen Theorie mit dem Ziel der Prognose steht deshalb das Bestreben im Vordergrund, dass deren Einsatz fehlerfrei und in ihrem vorgesehenen Anwendungsgebiet erfolgt. Dies kann nach erfolgter Verifikation anhand von drei Validitätskriterien beurteilt werden (NEELAMKAVIL 1987, S. 76):

1. **Rückwirkend:** Das Modell steht in Übereinstimmung mit den bekannten, als valide erachteten Theorien und weist keine Widersprüche zu bekannten Beobachtungen auf bzw. bildet diese mit hinreichender Genauigkeit ab.
2. **Strukturell:** Das Modell gibt den inneren Aufbau des modellierten Systems glaubwürdig wieder. Auf diese Weise werden beobachtete Effekte jeweils an der richtigen Stelle von der zugehörigen Theorie wiedergegeben, sodass beim Aufbau eines anders angeordneten Systems ein entsprechender Effekt ebenfalls

<sup>21</sup> Der Begriff der Validität ist in dieser Arbeit dementsprechend im Sinne dieser Bedeutung zu verstehen.

abgebildet wird. Die im Modell abgebildete Struktur der physikalischen Effekte entspricht damit der des modellierten Systems.

3. **Prädiktiv:** Das Modell ist in der Lage, zum Zeitpunkt der Modellbildung nicht bekannte Systemantworten mit hinreichender Genauigkeit wiederzugeben. Dies gilt sowohl für unbekannte Antworten des gleichen Systems als auch für entsprechende Antworten anderer Systeme.

Es ist damit z. B. direkt ersichtlich, warum ein proportionaler Dämpfungsansatz wie in Gl. 2.30 (S. 13) für Modelle von Werkzeugmaschinenstrukturen nicht prognosefähig sein kann: Er ist bzgl. des realen Systems mit lokal wirkenden Dissipationsquellen nicht strukturell valide. Die rückwirkende und prädiktive Validität für eine bestimmte Maschine lässt sich in vielen Fällen jedoch durchaus nachweisen. Wird ein mit Hilfe der zuvor aufgeführten Kriterien erstelltes Modell innerhalb seines Anwendungsgebiets eingesetzt, so kann davon ausgegangen werden, dass es für diesen Fall prognosefähig ist. Die strikte Bindung der Prognosefähigkeit an diese Kriterien erfordert jedoch einen entsprechend angepassten Modellierungsprozess, der deren Erfüllung sicherstellt.

#### 4.1.2 Konsequenzen für den Modellierungsprozess

Die Beurteilung der Prognosefähigkeit eines Modells kann somit auch als eine Beurteilung der *Inferenz*<sup>22</sup> – also der logischen Konsistenz – zwischen Modell und realem System aufgefasst werden. Im Fall von numerischen Modellen, wie sie in der vorliegenden Arbeit betrachtet werden, ist im Vergleich zur klassischen Wissenschaftstheorie von einer deutlich geringeren Inferenz zum realen System auszugehen. Dies liegt darin begründet, dass numerische Modelle neben der klassischen Wissenschaftstheorie zusätzlich auf vielen weiteren theoretischen und praktischen Aspekten wie Diskretisierungsalgorithmen und Netzqualität, Programmqualität sowie Anwendererfahrung beruhen, die in klassischen Theorien nicht auftreten (OBERKAMPF & TRUCANO 2002; OBERKAMPF & ROY 2010, S. 40). Somit besteht ein numerisches Modell – wie in Abb. 4.2 (S. 58) dargestellt – nicht nur aus einer einzelnen beschreibenden Gleichung, sondern aus einer mehrgliedrigen Kette an Gleichungen und Prozessen, die allesamt korrekt funktionieren müssen. Aufgrund der Vielzahl verschiedenartiger Einflussfaktoren auf die Inferenz ist es deshalb naheliegend, statt einer **anforderungsorientierten** Perspektive („Wie modelliere ich möglichst genau und prognosefähig?“) eine **problemorientierte** Sichtweise („Was beeinträchtigt die Prognosefähigkeit?“) auf den Modellierungsprozess einzunehmen. Dabei treten zwei Klassen von Unsicherheiten auf, die die Inferenz zwischen Modell und realem System schmälern: aleatorische und epistemische Unsicherheiten. Den Definitionen eingangs

---

<sup>22</sup> Engl. *inference* (MERRIAM-WEBSTER.COM 2014): „The act of passing from one proposition, statement, or judgment considered as true to another whose truth is believed to follow from that of the former.“ Zu Deutsch: Der Übergang von einer als wahr betrachteten Behauptung, Aussage oder Beurteilung zu einer zweiten, deren Wahrheit als aus der ersten ableitbar angesehen wird.

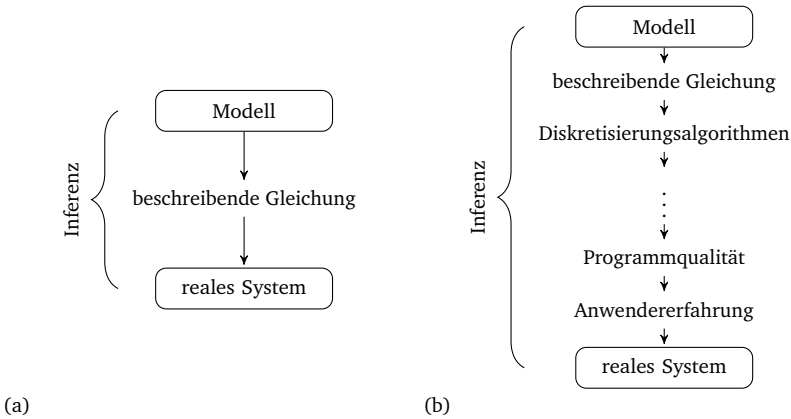


Abb. 4.2: Inferenz klassischer Theorien (a) und numerischer Modelle (b)

dieser Arbeit (siehe Abschnitt 2.1, S. 3) entsprechend treten diese entweder durch systeminhärente Variationen oder durch Kenntnismangel auf, wobei der Kenntnismangel erkannt werden oder verdeckt bleiben kann. Durch Überlagerung sämtlicher im Modell vorhandener Unsicherheiten ergibt sich schließlich die Inferenz zwischen Modell und realem System. Die Inferenz eines numerischen Modells kann somit ermittelt werden, indem eine Identifikation aller entlang des Modellierungsprozesses vorhandenen Unsicherheiten durchgeführt wird (ROY & OBERKAMPF 2011). Besteht ein Modell aus mehreren Teilmodellen, so kann diese Vorgehensweise auf alle Teilmodelle angewandt werden, um die Inferenz des Gesamtmodells zu beurteilen (GARCÍA 2008, S. 15). Die auf diese Weise ermittelte Inferenz eines numerischen, deterministischen Modells wird – wie in Abb. 4.3a skizziert – im Allgemeinen für eine Prognosefähigkeit nicht ausreichen. Um diesen Mangel an Inferenz zu beheben, kann von einer **deterministischen** zu einer **nicht-deterministischen** Modellierung übergegangen

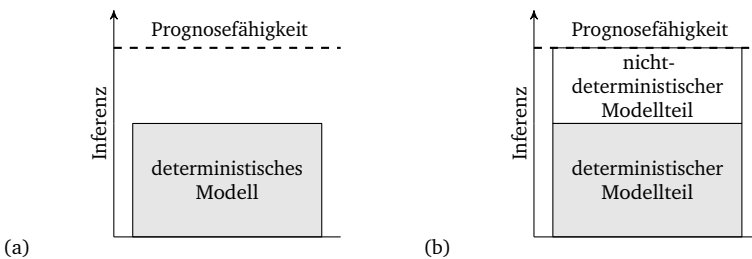


Abb. 4.3: Schematischer Vergleich der Inferenz von deterministischer (a) und nicht-deterministischer Modellierung (b)

werden, welche die identifizierten Unsicherheiten berücksichtigt. Die Unsicherheiten werden dabei in die Eingangsparameter, in das Modell und in die Systemantworten integriert, sodass eine Interpretation des Systemverhaltens unter dem Einfluss der Unsicherheiten möglich wird (OBERKAMPF & ROY 2010, S. 70). Auf diese Weise wird – wie in Abb. 4.3b illustriert – die zu geringe Inferenz des deterministischen Modellteils durch den nicht-deterministischen Modellteil ausgeglichen und auf diese Weise die Prognosefähigkeit hergestellt. Welche Unsicherheiten vernachlässigbar und welche zu berücksichtigen sind, hängt von der Wirkung der Unsicherheit, den Anforderungen an die Genauigkeit der Prognose und den eingesetzten Vergleichsmaßen ab.

### 4.1.3 Quantifizierung der Prognosefähigkeit

Um in der Lage zu sein, die Prognosefähigkeit eines Modells quantifizieren zu können, ist deshalb – wie ebenfalls in Abb. 4.1 (S. 56) angedeutet – die Definition geeigneter Vergleichsmaße und Grenzwerte erforderlich. MAYES (2009b) verwendet hierfür den Begriff des **Adäquanzkriteriums**, dessen Eignung über eine konsequente Orientierung am Zweck des Modells sichergestellt wird. Nach Definition der Modellanforderungen sind dafür zunächst entsprechende Messgrößen, daraus berechnete Kenngrößen und passende Vergleichsmaße festzulegen, bevor mit dem Adäquanzkriterium schließlich ein Grenzwert für die zulässige Abweichung des Vergleichsmaßes definiert wird. Die angeführten Aspekte werden im Folgenden für den Fall der prognosefähigen Modellierung des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinenstrukturen diskutiert.

**Modellzweck und -anforderungen.** Die in der vorliegenden Arbeit betrachteten Finite-Elemente-Modelle haben den Zweck, dynamische Nachgiebigkeiten von Werkzeugmaschinenstrukturen in einem begrenzten Frequenzbereich abzubilden. Dabei steht insbesondere die für die Stabilität des Zerspanprozesses relevante dynamische Nachgiebigkeit an der Zerspanstelle (siehe Gl. 2.1, S. 6) im Fokus. Außerdem soll das Modell den Anwender in die Lage versetzen, die Wirksamkeit von konstruktiven Maßnahmen zu überprüfen und Sensitivitätsanalysen durchzuführen, weshalb ebenso die dynamischen Nachgiebigkeiten aller anderen Punkte der Maschinenstruktur abzubilden sind. Um den Aufwand zur Modellerstellung zu begrenzen, wird das System linearisiert betrachtet und Nichtlinearitäten werden mit Hilfe von Parameterbereichen approximiert.

**Mess- und Kenngrößen.** Als Messgrößen für das dynamische Verhalten von Werkzeugmaschinenstrukturen dienen – wie in Abschnitt 2.2 (S. 6) ausgeführt – Eingangs- und Ausgangszeitensignale, aus welchen der **Frequenzgang** als bestimmende Kenngröße berechnet wird. Da bei der Berechnung von Frequenzgängen numerischer Modelle aufgrund der Recheneffizienz im Allgemeinen modal reduzierte Modelle

zum Einsatz kommen (siehe Abschnitt 2.3.4, S. 23), kann die Äquivalenz der Gestalt der Frequenzgänge über den Vergleich der Kenngrößen **Eigenfrequenz** und **Eigenvektor** von experimentellem und analytischem Modell sichergestellt werden. Die Übereinstimmung der durch die Dämpfung beeinflussten Resonanzamplituden erfordert entweder den Vergleich von Dämpfungskenngrößen (siehe Gl. 2.28, S. 12 bzw. Gl. 2.32, S. 13) oder – wie in der vorliegenden Arbeit – die Gegenüberstellung experimentell und analytisch ermittelter Frequenzgänge. Um zusätzlich die Qualität der Massenmatrix sicherzustellen, wird die **Gesamtmasse** als Mess- und Kenngröße aufgenommen.

**Vergleichsmaße und deren grafische Darstellung.** Auf die festgelegten Kenngrößen können die in Abschnitt 2.5.3 (S. 44) vorgestellten Vergleichsmaße angewandt werden. Für einen Vergleich der Eigenfrequenzen wird deshalb das **NFD-Kriterium** herangezogen, welches die Abweichung zwischen korrespondierender analytischer und experimenteller Eigenfrequenz quantifiziert. Abb. 4.4 zeigt beispielhaft die in der vorliegenden Arbeit verwendete Darstellung des NFD-Vergleichsmaßes.

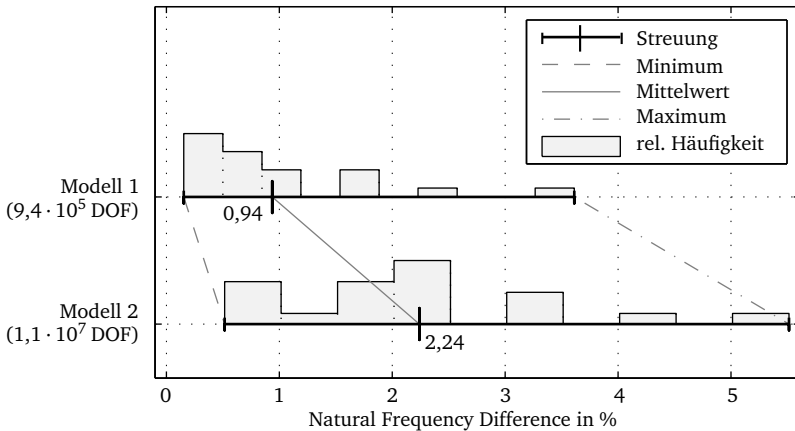


Abb. 4.4: Grafische Darstellung des NFD-Vergleichsmaßes

Hierfür werden sämtliche NFD-Werte im relevanten Frequenzbereich berechnet und als Streubalken mit Minimum und Maximum über der Rechtsachse angetragen. Beim Vergleich mehrerer Modelle werden diese in der Hochachse angetragen, sodass die NFD-Werte einander gegenübergestellt werden können. Als zentrales Vergleichsmaß dient der Mittelwert dieser Streuung, welcher deshalb zusätzlich als Zahl angegeben wird. In einigen Fällen ist es außerdem von Interesse, wie sich die relative Häufigkeit der NFD-Werte im Streubalken zusammensetzt, die als grau eingefärbte Fläche über



dem Streubalken eingezeichnet wird. Auf die Verwendung einer Hochachse wird hierbei verzichtet, da es sich bei der relativen Häufigkeit um eine normierte Größe handelt, die kumuliert jeweils 1 ergibt. Als Vergleichsmaß der Eigenvektoren dient der **MAC-Wert**, welcher – wie in der Literatur (ALLEMANG 2003) üblich und in Abb. 4.5 beispielhaft anhand des Vergleichs eines analytischen und eines experimentellen Modells zu sehen – in der vorliegenden Arbeit mit Hilfe eingefärbter Schachbrettmuster dargestellt wird.

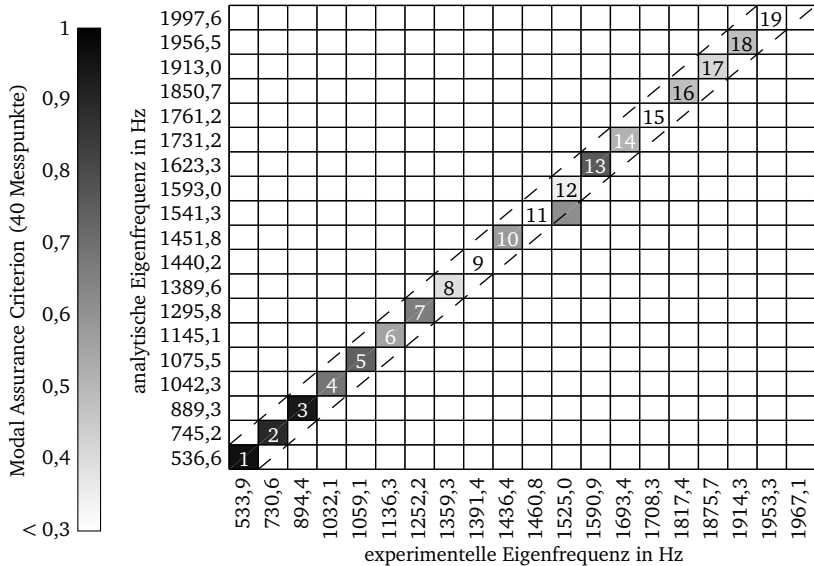


Abb. 4.5: Grafische Darstellung des MAC-Vergleichsmaßes

Entlang von Rechts- und Hochachse werden jeweils die Eigenfrequenzen der betrachteten Modelle angetragen. Hohe MAC-Werte entsprechen dunklen Feldern, niedrige hellen, wobei die Farbskala für eine bessere Unterscheidbarkeit höherer Werte zwischen MAC-Werten von 1 bis 0,3 definiert ist. An der Farbskala ist zudem die Anzahl der dem Vergleich zugrunde liegenden Messpunkte eingetragen. Die für den Modellvergleich besonders relevante Diagonale ist mit gestrichelten Linien hervorgehoben, außerdem wird in den Diagonalfeldern die von 0 Hz aus gezählte Nummer der Eigenmode eingetragen. Dunkle Felder auf der Diagonale implizieren eine hohe Übereinstimmung und korrekte Zuordnung der Eigenmoden der betrachteten Modelle (siehe bspw. Abb. 4.5, Moden 1 bis 8), dunkle Felder daneben (Abb. 4.5, Moden 11 bis 12) eine Vertauschung der Reihenfolge. Helle Zeilen oder Spalten (Abb. 4.5, Mode 15) deuten auf eine geringe Übereinstimmung der Modelle hin. Als Vergleichsmaß für Frequenzgänge wird in Abschnitt 2.5.3 (S. 44) der FRAC-Wert genannt. Aufgrund der

großen Unterschiede in Amplitude und Phase innerhalb eines Frequenzgangs führen jedoch schon geringfügige Abweichungen zwischen gemessenem und berechnetem Frequenzgang – z. B. durch Messrauschen – zu sehr kleinen FRAC-Werten (HEYLEN & AVITABILE 1998), was die Eignung als Vergleichsmaß erheblich schmälert. In der vorliegenden Arbeit wird deshalb auf eine Verwendung des FRAC-Wertes verzichtet und stattdessen – zusätzlich zu den bisher angeführten Vergleichsmaßen – die Übereinstimmung von Frequenzgängen anhand von Amplituden- und Phasengängen (siehe Abb. 2.5a, S. 9) beurteilt. Als weiteres Vergleichsmaß, welches jedoch keiner grafischen Darstellung bedarf, wird zudem das Verhältnis von analytischer und realer Gesamtmasse herangezogen.

**Adäquanzkriterien.** Um eine Quantifizierung der Abbildungsgenauigkeit zu ermöglichen, werden Grenzwerte für die diskutierten Vergleichsmaße festgesetzt. Dazu ist zunächst die Einschränkung auf einen definierten Frequenzbereich erforderlich, der sich zunächst anhand des geforderten Abbildungsbereichs bestimmt. Je nachdem, welche Effekte berücksichtigt werden sollen, kann jedoch auch die Betrachtung höherfrequenter Bereiche erforderlich sein. Innerhalb dieses Frequenzbereichs werden die in Tab. 4.1 angegebenen Grenzwerte als Adäquanzkriterien verwendet.

Größe	Vergleichsmaß	Adäquanzkriterium
Eigenfrequenz	NFD-Mittelwert	$< 2\% \{ \forall \omega_r \mid (r_X = r_A) \}$
Eigenvektor	MAC-Wert	$> 0,7 \{ \forall \{ \phi \}_r \mid (r_X = r_A) \}$ $< 0,5 \{ \forall \{ \phi \}_r \mid (r_X \neq r_A) \}$
Masse	Massenverhältnis $m_X/m_A$	0,95 bis 1,05
Nachgiebigkeit	Resonanzamplitude $ \alpha_{jk}(\omega_r) $	gleiche Dimension

Tab. 4.1: Verwendete Adäquanzkriterien

Erfüllt ein Modell diese Grenzwerte, wird es in der vorliegenden Arbeit als „hinreichend genau“ bezeichnet. Die Werte sind dabei derart gewählt, dass ein beliebiger, analytisch berechneter Nachgiebigkeitsfrequenzgang eines Modells, das mit diesen Grenzwerten qualifiziert wurde, das entsprechende gemessene Pendant optisch gleichwertig wiedergibt.

## 4.2 Methode zur Erstellung prognosefähiger Modelle

Die Erstellung prognosefähiger Modelle erfordert – wie im vorigen Abschnitt 4.1 (S. 55) beschrieben – mehrere aufeinander aufbauende Tätigkeiten, die sich vom bisher bei Werkzeugmaschinenstrukturen eingesetzten Modellierungsvorgehen (siehe

Abb. 2.13, S. 29) signifikant unterscheiden und somit zusätzlich anfallen. Aus diesem Grund ist es zweckmäßig, basierend auf den Erkenntnissen aus der Literatur eine entsprechend angepasste Methode zur Erstellung prognosefähiger Modelle zu definieren, die diese Tätigkeiten in den Modellierungsprozess einbindet. Wie in Abschnitt 4.1.2 (S. 57) ausgeführt, ist für eine prognosefähige Modellierung zunächst die Identifikation aller im Modellierungsprozess auftretenden Unsicherheiten notwendig. Nach OBERKAMPF & ROY (2010, S. 117) kann dies realisiert werden, indem durch eine formalisierte Beschreibung des Modellierungsprozesses zunächst alle Modellannahmen erfasst und anschließend als gültig oder unsicher charakterisiert werden. Abhängig davon, ob die identifizierten Unsicherheiten aleatorischen oder epistemischen Charakter besitzen, sind diese entweder zu quantifizieren oder in irgendeiner Art zu begrenzen. Auf diese Weise werden sie einer nicht-deterministischen Modellierung zugänglich und können im Modell berücksichtigt werden, wodurch das Modell prognosefähig wird. Insgesamt ergibt sich somit das in Abb. 4.6 zusammengefasste Vorgehen. In den folgenden Abschnitten 4.3 bis 4.7 wird jeder der hier angeführten Schritte vorgestellt und diskutiert, wobei auf die für den Fall der dynamischen Modellierung von Werkzeugmaschinenstrukturen relevanten Aspekte eingegangen wird.

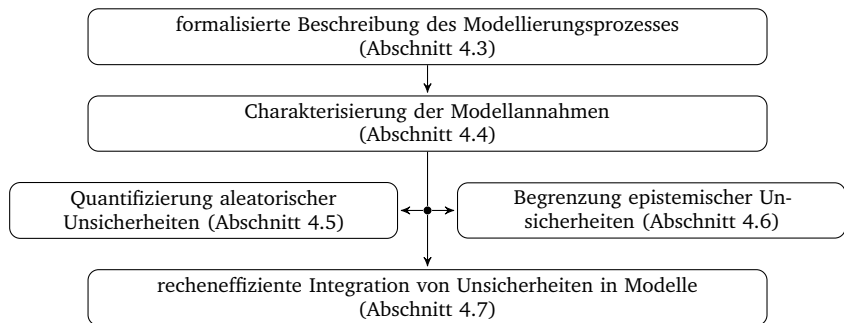


Abb. 4.6: Methode zur Erstellung prognosefähiger Modelle

### 4.3 Formalisierte Beschreibung des Modellierungsprozesses

Wie in den Abschnitten 2.2 (S. 6) und 2.3 (S. 15) ausgeführt, wird das dynamische Verhalten von Werkzeugmaschinenstrukturen mit einer partiellen Differentialgleichung beschrieben, welche mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode numerisch gelöst werden kann. Es ist dementsprechend ein Ansatz erforderlich, der für den Umgang mit derartigen Problemen geeignet ist.

**Die sechs Phasen der Modellierung.** Aufbauend auf Erkenntnissen aus den Fachbereichen des Operations Research und der computergestützten Mechanik haben ALVIN ET AL. (1998) und OBERKAMPF ET AL. (2002) eine formalisierte Beschreibung von Modellierungsprozessen beliebiger Systeme erarbeitet, die mit numerisch zu lösenden, partiellen Differentialgleichungssystemen abgebildet werden. Der Modellierungsprozess eines derartigen Systems gliedert sich demnach in die in Tab. 4.2 aufgeführten Phasen, welche im Folgenden jeweils kurz erläutert werden.

- 
1. Konzeptionelle Modellierung des physikalischen Systems
  2. Mathematische Modellierung des konzeptionellen Modells
  3. Diskretisierung und Algorithmusauswahl des mathematischen Modells
  4. Implementierung des diskretisierten Modells
  5. Numerische Lösung des implementierten Modells
  6. Darstellung der numerischen Lösung
- 

Tab. 4.2: Die sechs Phasen der Modellierung für numerisch gelöste Probleme partieller Differentialgleichungen nach ALVIN ET AL. (1998) und OBERKAMPF ET AL. (2002)

Zunächst wird in der *konzeptionellen Modellierung des physikalischen Systems* festgelegt, welche physikalischen Vorgänge oder Abfolgen und welche Wechselwirkungen berücksichtigt werden. Dabei werden keine mathematischen Gleichungen verwendet, sondern lediglich sämtliche Effekte aufgelistet, die Einfluss auf das Ergebnis haben können. In der *mathematischen Modellierung des konzeptionellen Modells* werden die aufgelisteten Effekte in eine mathematische Problemstellung – z. B. Differentialgleichungen – überführt. Das entstehende Modell kann dabei aus Teilmodellen aufgebaut sein, außerdem werden sämtliche erforderlichen Anfangs- und Randbedingungen festgelegt. Die *Diskretisierung und Algorithmusauswahl des mathematischen Modells* überführt diese Gleichungen anschließend in ein diskretes, numerisches Modell. Dafür werden Algorithmen für die Diskretisierung aller räumlichen und zeitlichen Variablen ebenso wie für die Umsetzung der Anfangs- und Randbedingungen festgelegt, ohne jedoch konkrete Zahlenwerte zu hinterlegen. Somit wird in dieser Phase auch entschieden, ob Singularitäten in der Lösung auftreten können und auf welche Weise etwaige nicht-deterministische Variablen im Modell berücksichtigt werden. In der nächsten Phase findet die *Implementierung des diskretisierten Modells* in Form eines Programmcodes statt, der die zuvor festgelegten Algorithmen und Prozeduren in einem maschinenlesbaren Format repräsentiert. Daraufhin wird die *numerische Lösung des implementierten Modells* berechnet, wobei sämtliche bisher undefinierten Größen und Parameter mit konkreten Zahlenwerten hinterlegt werden. Im Falle einer nicht-deterministischen Modellierung werden hier mehrere Lösungen benötigt. Abschließend erfolgt die *Darstellung der numerischen Lösung*, wodurch die Ergebnisse der Berechnungen einer Interpretation zugänglich werden.

**Besonderheiten bei der Modellierung von Werkzeugmaschinenstrukturen.** Die beschriebenen sechs Modellierungsphasen wurden mit dem Anspruch hoher Allgemeingültigkeit formuliert, sodass diese bspw. auch für prototypisch betriebene, gekoppelte Simulationsumgebungen in Rechenzentren oder in verteilter Architektur mit entsprechendem Implementierungsaufwand einsetzbar sind (OBERKAMPF ET AL. 2002). Im Gegensatz dazu werden dynamische Modelle von Werkzeugmaschinenstrukturen in der industriellen Anwendung im Allgemeinen auf Einzelplatzrechnern oder kleinen Simulationsservern mit Hilfe kommerzieller Software aufgebaut (KEHL & ALTSTÄDTER 2003), sodass hier nicht in jeder der beschriebenen Phasen mit Unsicherheiten zu rechnen ist. Dies betrifft die Phasen der *Implementierung des diskretisierten Modells* und die *Darstellung der numerischen Lösung*. In beiden Fällen kommen kompilierte, geschlossene Softwareumgebungen zum Einsatz, die erstens fortlaufender Qualitätsüberwachung und -verbesserung durch die Hersteller unterliegen und zweitens dem Anwender meist keine Eingriffsmöglichkeit zur Modifikation bieten. Deshalb ist es zweckmäßig, die Betrachtung auf jene Phasen der Modellierung zu beschränken, in welchen der Anwender maßgeblichen Einfluss auf die in das Modell eingebrachten Unsicherheiten hat. Somit verbleiben für die Modellierung des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinenstrukturen die in Abb. 4.7 dargestellten vier relevanten Phasen.

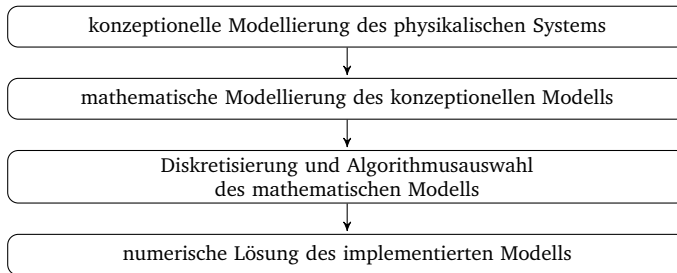


Abb. 4.7: Für das dynamische Verhalten von Werkzeugmaschinenstrukturen relevante Modellierungsphasen

Diese können – wie im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit in Kapitel 5 (S. 95) an Modellen für Werkzeugmaschinenstrukturen demonstriert – schrittweise auf Gesamt- und Teilmodelle projiziert werden, um die in der Modellierung getroffenen Annahmen strukturiert zu erfassen. Die Anwendung dieses Vorgehens impliziert jedoch keine lückenlose Erfassung aller getroffenen Annahmen. Sie unterstützt den Anwender stattdessen dabei, den Modellierungsprozess in strukturierter Form nachzuvollziehen und erhöht somit die Wahrscheinlichkeit einer vollständigen Erfassung aller Annahmen. Die Vollständigkeit der Annahmen muss jedoch nach wie vor durch den Anwender selbst sichergestellt werden.

#### 4.4 Charakterisierung der Modellannahmen

Sobald die während der Modellierung getroffenen Annahmen bekannt sind, können diese bzgl. etwaiger Unsicherheiten charakterisiert werden. Grundsätzlich lassen sich Unsicherheiten in die in Abschnitt 2.1 (S. 3) definierten und in Abb. 4.8 aufgeführten Klassen unterscheiden.

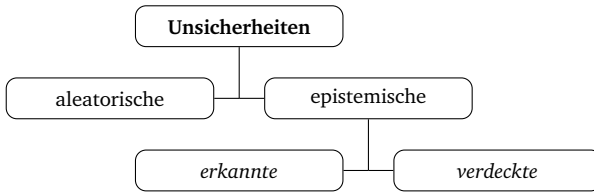


Abb. 4.8: Klassifikation von Unsicherheiten in Anlehnung an OBERKAMPF & ROY (2010, S. 54)

Für jede erfasste Modellannahme ist somit festzulegen, ob und mit welcher Klasse von Unsicherheit diese behaftet ist. Im Zuge dessen ist zu bedenken, dass es sich sowohl bei der formalisierten Beschreibung des Modellierungsprozesses als auch bei der Charakterisierung der resultierenden Modellannahmen um einen bewussten Prozess handelt. Dementsprechend können auf diese Weise prinzipiell keine verdeckten epistemischen Unsicherheiten erfasst werden. Können einer Modellannahme hingegen entweder keine Unsicherheiten zugeordnet werden oder sind diese in Bezug auf die festgelegten Adäquanzkriterien (siehe Tab. 4.1, S. 62) vernachlässigbar, ist sie als gültig anzusehen. Jede erfasste Modellannahme ist somit – wie in Abb. 4.9 illustriert – entweder als gültig, als aleatorisch oder als epistemisch unsicher einzustufen, wobei es sich aus den genannten Gründen zwangsläufig um erkannte epistemische Unsicherheiten handeln muss.

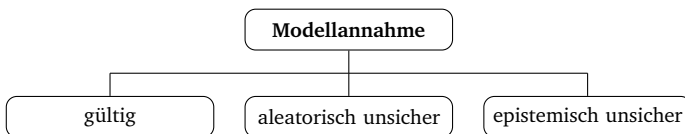


Abb. 4.9: Möglichkeiten der Charakterisierung für Modellannahmen

Um die konkrete Einstufung in diese bisher abstrakt beschriebenen Begriffe zu erleichtern, wird im Folgenden jeder Begriff exemplarisch anhand dreier Modellannahmen für die Strukturkomponenten einer Werkzeugmaschine erläutert.

**Beispiel einer gültigen Modellannahme.** Die mathematische Modellierung des konzeptionellen Modells erfolgt mit einer Differentialgleichung des dreidimensionalen Kontinuums (siehe Gl. 2.39, S. 16). Da es sich bei dem realen System um einen dreidimensionalen Körper handelt, ist diese Modellannahme mit keinerlei Vereinfachung oder Unsicherheit behaftet, sie ist somit uneingeschränkt gültig.

**Beispiel einer aleatorisch unsicheren Modellannahme.** In der konzeptionellen Modellierung des physikalischen Systems wird angenommen, dass die Geometrie des realen Systems mit der CAD-Geometrie, auf welcher das Modell basiert, übereinstimmt. Auch unter der Voraussetzung, dass die Geometrie eines Exemplars des realen Systems vollständig bekannt ist, ergeben sich dennoch Abweichungen zwischen der realen und der virtuellen Geometrie. Diese sind den Schwankungen des auf verlorenen Formen basierenden Gießprozesses geschuldet, die durch Toleranzen spezifiziert sind. Da diese Schwankungen von Exemplar zu Exemplar variieren und bei Untersuchung hinreichend vieler Exemplare mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen beschreibbar sind, handelt es sich hierbei um eine aleatorische Unsicherheit.

**Beispiel einer epistemisch unsicheren Modellannahme.** In der numerischen Lösung des implementierten Modells ergibt sich durch die Vernetzung der Modellgeometrie mit finiten Elementen einer bestimmten Ordnung und Größe ein Diskretisierungsfehler. Obwohl dieser Fehler nach den Gleichungen in Abschnitt 2.3.3 (S. 19) begrenzt ist, ist in vielen Fällen die theoretisch exakte Lösung des betrachteten Problems und damit der wahre Wert weder bekannt noch ermittelbar. In diesen Fällen ist der Begriff des „Fehlers“ irreführend, da es an Kenntnis der theoretisch exakten Lösung mangelt und somit laut Definition in Abschnitt 2.1 (S. 3) kein Fehler bestimmt werden kann. Stattdessen liegt eine erkannte epistemische Unsicherheit vor. Da der „Diskretisierungsfehler“ jedoch einen eingeführten, allgemein verständlichen Begriff darstellt, wird er im Bewusstsein dieses Mangels in der vorliegenden Arbeit trotzdem verwendet.

## 4.5 Quantifizierung aleatorischer Unsicherheiten

Im Anschluss an die Charakterisierung der Modellannahmen sind die als unsicher charakterisierten Modellannahmen auch als solche im Modell zu berücksichtigen. Da aleatorische Unsicherheiten – wie in Abschnitt 2.1 (S. 3) ausgeführt – nicht reduzierbar sind, verbleibt keine andere Möglichkeit, als diese an einer hinreichend großen Anzahl von Exemplaren statistisch zu quantifizieren und sie auf geeignete Weise in das Modell zu integrieren. Im folgenden Abschnitt werden deshalb Verfahren vorgestellt, die bei der Quantifizierung aleatorischer Unsicherheiten in dynamischen Finite-Elemente-Modellen unterstützen.

#### 4.5.1 Dynamisch relevante Bereiche in Kontinua

Wie für das zuvor genannte Beispiel der Schwankungen der Gussgeometrien beschrieben, treten bei der Modellierung von Kontinua aleatorische Unsicherheiten auf, die nicht durch einen Parameter des Finite-Elemente-Modells beschrieben werden. Hier ist stattdessen die Geometrie des Kontinuums, welche durch die Bemaßung des CAD-Modells festgelegt wird, mit Unsicherheiten behaftet. Die Quantifizierung der Unsicherheit kann deshalb nur über eine Messung am realen System erfolgen. Im Regelfall ist eine Erfassung aller vorhandenen Maße jedoch zu aufwendig, weshalb ein Kriterium benötigt wird, mit welchem die bzgl. Unsicherheiten zu erfassenden Geometriemerkmale ausgewählt werden können.

**Kriterium.** Bei der Modellierung von strukturdynamischen Kontinua belegt GARCÍA (2008, S. 48), dass die Modellierung steifigkeitssensitiver Bereiche mit größeren Unsicherheiten behaftet ist als die massesensitiver Bereiche. Da die Masse außerdem als Adäquanzkriterium dient (siehe Abschnitt 4.1.3, S. 59) und deshalb geringerer Unsicherheit unterliegt, ist ein Kriterium erforderlich, mit welchem steifigkeitssensitive Bereiche in Kontinua ermittelt werden können. In den Anwendungsgebieten der Schadenslokalisierung (LIM & KASHANGAKI 1994; SHI ET AL. 1998) sowie lokal sensitiver Korrelationskriterien (BREHM 2011, S. 69 ff.) und beim Model Updating an Systemen mit lokalen Schäden (JAISHI & REN 2007) hat sich zur Bestimmung lokaler Steifigkeitseinflüsse die Betrachtung der modalen Formänderungsenergie (Gl. 2.34, S. 13) als geeignet erwiesen. Der Energiebegriff wird zu diesem Zweck nicht global definiert, sondern unter Verwendung der Elementsteifigkeitsmatrizen  $[K_e]$  und der entsprechenden Einträge in den Eigenvektoren  $\{\phi_e\}_r$  auf Elementebene berechnet:

$$U_{e,r} = \frac{1}{2} \{\phi_e\}_r^T [K_e] \{\phi_e\}_r \quad (4.1)$$

Unter der Annahme, dass die Finite-Elemente-Lösung konvergiert und somit der Diskretisierungsfehler vernachlässigbar ist, können durch den Vergleich von  $U_{e,r}$  die für die Mode  $r$  besonders relevanten Elemente bestimmt werden. Da zur fehlerfreien Approximation der nicht-glaten Lösung Elemente unterschiedlicher Größe eingesetzt werden, kann ein aussagekräftiger elementweiser Vergleich nur nach Normierung auf das Elementvolumen  $V_e$  erfolgen. Die auf diese Weise entstehende **modale Formänderungsenergiegedichte** eines Elements (LAM & SANTHIKUMAR 2003)

$$u_{e,r} = \frac{U_{e,r}}{V_e} \quad (4.2)$$

dient somit als Kriterium dafür, welche Bereiche der Geometrie welchen Einfluss auf eine Mode haben. Zeigt eine Mode aufgrund geometrischer Unsicherheiten im Kontinuum bzgl. Eigenfrequenz oder Eigenform Abweichungen, so ist die Unsicherheit in Bereichen mit hoher Formänderungsenergiegedichte zu suchen. Auch eine gleichzeitige



Betrachtung der sensitiven Bereiche mehrerer Moden ist möglich, indem die modalen Formänderungsenergiedichten der Elemente  $u_{e,r}$  unter Verwendung von Gl. 2.34 (S. 13)

$$\frac{u_{e,r}}{U_r} = \frac{U_{e,r}}{V_e \cdot U_r} = \frac{2 U_{e,r}}{V_e \cdot \omega_r^2} \quad (4.3)$$

auf die jeweilige Formänderungsenergie  $U_r$  normiert werden.

**Beispiel: Einfache Struktur.** Das Kriterium wird im Folgenden an einer einfachen Struktur veranschaulicht, die ebenfalls in SCHWARZ ET AL. (2014) dargestellt ist. In Abb. 4.10 ist die erste Biegeeigenform eines Winkels und deren Verteilung der modalen Formänderungsenergiedichte zu sehen.

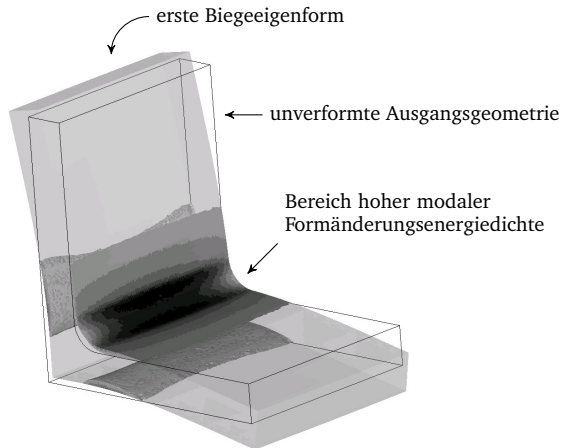


Abb. 4.10: Verteilung der modalen Formänderungsenergiedichte am Beispiel der ersten Biegeeigenmode eines einfachen Winkels in Anlehnung an SCHWARZ ET AL. (2014)

Die modale Formänderungsenergiedichte ist hierbei innerhalb des Radius besonders hoch, somit wirken sich auch kleine Geometrieabweichungen in diesem Bereich stark auf die Eigenfrequenz und Eigenform der Biegeeigenmode aus.

#### 4.5.2 Quantifizierung von Modellparametern

Neben der Geometrie können auch Parameter des Finite-Elemente-Modells mit aleatorischen Unsicherheiten behaftet sein. Bei der Identifikation von Modellparametern anhand dynamischer Kennwerte handelt es sich um typische Model-Updating-Probleme, die bereits in Abschnitt 2.5.2 (S. 42) diskutiert wurden. Im Folgenden wird deshalb

ein für den Fall der Modellierung des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinenstrukturen zweckmäßiges Verfahren ausgewählt und geeignete Zielfunktionen und Randbedingungen werden diskutiert.

**Verfahren.** Für Model-Updating-Probleme sind nach HANSON (1999) gradientenbasierte Verfahren vorteilhaft, insbesondere bei der gleichzeitigen Anpassung mehrerer Parameter. Gültige Modellparameter sind mit derartigen Verfahren jedoch nur dann identifizierbar, wenn das Modell die Realität eindeutig abbildet. Große Streubreiche der identifizierten Unsicherheiten und Parameter sind ein Indiz dafür, dass kein gültiger Parameter identifizierbar ist (ARENDE ET AL. 2012a). Deshalb ist vor dem Updating sicherzustellen, dass Diskretisierungs- und Modellierungsunsicherheiten vernachlässigbar sind (HEMEZ & STULL 2012). Ebenso lässt sich festhalten, dass ein Problem umso besser gestellt ist und die Qualität der identifizierten Parameter steigt, je mehr Messdaten in die Identifikation einfließen (ARENDE ET AL. 2012b). In der vorliegenden Arbeit wird deshalb ein iterativer gradientenbasierter Optimierungsalgorithmus verwendet, der im kommerziellen Finite-Elemente-Solver MSC.Nastran<sup>®</sup> integriert ist (MSC 2012). Das eingesetzte Verfahren ermittelt die Parameter-Sensitivität  $[S]$  mittels zentraler finiter Differenzen und stellt die globale Optimalität der Lösung nach der Bedingung von KUHN & TUCKER (1951) sicher. Als Zielfunktion dienen in Anlehnung an BLAKELY (1991) die mittleren Fehlerquadrate der analytischen und experimentellen Eigenfrequenzen  $\omega_r$ , wobei die Abweichungen der Massen  $m$  schwach gewichtet zusätzlich berücksichtigt werden:

$$\mathcal{F}_{\text{obj}} = \frac{1}{k} \left[ \sum_{r=1}^k \left( \frac{\omega_{r,X} - \omega_{r,A}}{\omega_{r,X}} \right)^2 \right] + 0,02 \left( \frac{m_X - m_A}{m_X} \right)^2 \quad (4.4)$$

Auf diese Weise wird eine eindeutige Lösung auch bei gleichzeitiger Identifikation von Elastizitätsmodul und Dichte gewährleistet. Vor Einsatz des Verfahrens ist die korrekte Zuordnung von analytischen und experimentellen Eigenmoden mit Hilfe von MAC-Werten zu prüfen. Damit aufgrund der Parameteränderungen während des Verfahrens kein Tausch von Moden stattfindet, wird als Randbedingung mit der aus der Orthogonalitätseigenschaft 2.16 (S. 10) abgeleiteten Ungleichung

$$[\phi]_i^T [M] [\phi]_{i-1} \geq \text{diag}(0,9) \quad (4.5)$$

ein Mode-Tracking für die Eigenmoden der Iterationsschritte  $i$  und  $i-1$  realisiert (MSC 2012, S. 45). Ist Ungleichung 4.5 nicht erfüllt, bricht das Verfahren ab. In Anhang A.5 (S. 177) findet sich eine beispielhafte Parameterdatei für die Durchführung einer derartigen Berechnung.

## 4.6 Begrenzung epistemischer Unsicherheiten

Im Gegensatz zu aleatorischen Unsicherheiten werden epistemische Unsicherheiten – wie in Abschnitt 2.1 (S. 3) ausgeführt – durch Kenntnismangel verursacht und sind durch Wissenszugewinn reduzierbar. Derartige Unsicherheiten sind deshalb eine Eigenschaft des Modellierenden bzw. des Beobachters und nicht des modellierten Systems (OBERKAMPF & ROY 2010, S. 53). Wird eine solche Unsicherheit erkannt, ist es somit nicht möglich, diese analog zum vorigen Abschnitt 4.5 (S. 67) zu quantifizieren und in das Modell zu integrieren, da kein wahrer Wert und kein Fehler bestimmbar ist. Stattdessen muss versucht werden, die Unsicherheit hinreichend zu begrenzen, um die geforderte Abbildungsgenauigkeit einzuhalten. Im folgenden Abschnitt werden deshalb Verfahren zur Begrenzung epistemischer Unsicherheiten in dynamischen Finite-Elemente-Modellen vorgestellt.

### 4.6.1 Vereinfachungen während der Modellierung

Eine typische epistemische Unsicherheit während der Modellierung – insbesondere bei aus mehreren Teilen bestehenden Systemen – sind Vereinfachungen, die zur Begrenzung von Modellgröße oder -komplexität getroffen werden. Die Auswirkungen derartiger Vereinfachungen sind jedoch schwer abzuschätzen, was ein Verfahren zur Begrenzung dieser Unsicherheit erforderlich macht.

**Verfahren.** Ausreichend Rechenkapazität vorausgesetzt, können die Auswirkungen von Vereinfachungen in Teilmodellen des betrachteten Systems mit Hilfe sog. **Supermodelle** beurteilt werden (FOTSCH 2001, S. 13 ff.). Für die Erstellung eines Supermodells wird das Teilsystem ohne Vereinfachungen und mit feinstmöglicher Vernetzung in der Finite-Elemente-Methode abgebildet, sodass dieses Modell als Referenzzustand bzw. wahrer Wert herangezogen werden kann (ZANG ET AL. 2008). Aufgrund der hohen resultierenden Anzahl an Freiheitsgraden ist das Supermodell jedoch nicht dazu geeignet, im Gesamtsystem verwendet zu werden. Stattdessen wird – wie in Abb. 4.11 (S. 72) illustriert – das endgültige, vereinfachte Modell des Teilsystems aufgebaut, welches einerseits hinreichend kleine, begrenzte Abweichungen gegenüber dem Supermodell aufweist und andererseits eine geeignete Größe besitzt, um in das Gesamtmodell integriert werden zu können.

**Beispiel: Einfache Struktur.** Im Folgenden wird das Verfahren an der bereits aus Abb. 4.10 (S. 69) bekannten Winkelstruktur demonstriert, die SCHWARZ ET AL. (2014) entnommen ist. In Abb. 4.12a (S. 72) ist die Eigenfrequenz und der Verlauf der modalen Formänderungsenergiegedichte der ersten Bieegeigenmode des Supermodells zu sehen.

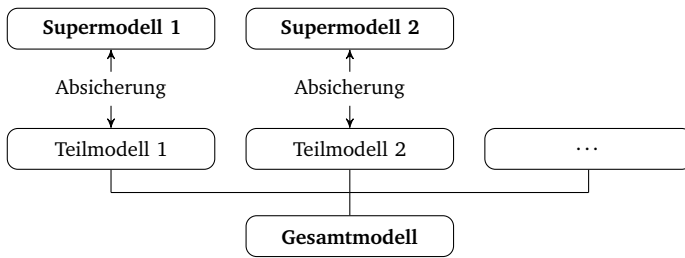


Abb. 4.11: Absicherung von Vereinfachungen durch Supermodelle

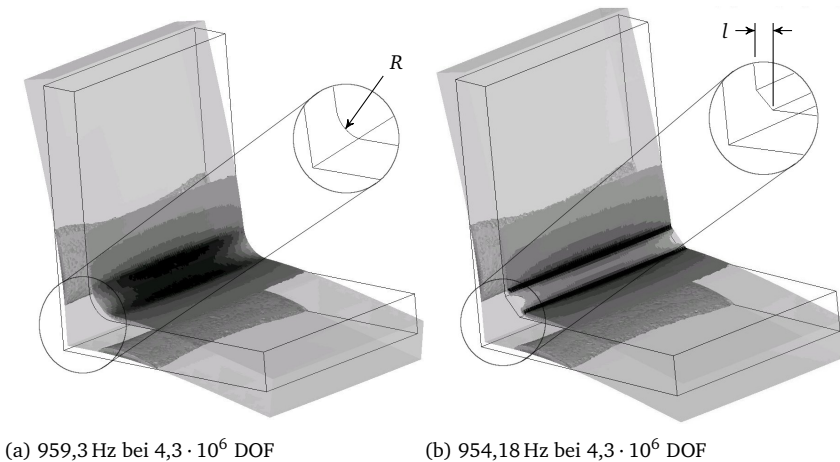
(a) 959,3 Hz bei  $4,3 \cdot 10^6$  DOF(b) 954,18 Hz bei  $4,3 \cdot 10^6$  DOF

Abb. 4.12: Eigenfrequenzen der ersten Biegeeigenmode von Supermodell (a) und vereinfachtem Modell (b) eines einfachen Winkels in Anlehnung an SCHWARZ ET AL. (2014)

Mit Hilfe des in Abschnitt 4.5.1 (S. 68) vorgestellten Kriteriums wird anhand des dunkel eingefärbten Bereichs deutlich, dass der konkave<sup>23</sup> Radius für die betrachtete Mode eine hohe Relevanz besitzt und daher nicht vernachlässigt werden kann. Dies lässt sich auch numerisch belegen, da eine Entfernung des Radius und dessen Ersatz durch einen  $90^\circ$ -Winkel zu einer Verschiebung der Eigenfrequenz um 9,7 % führt. Der Radius kann jedoch ebenso wenig unverändert in der Geometrie verbleiben, da in diesem Fall der Vernetzungsalgorithmus bei der angestrebten Verwendung größerer Elemente entweder verzerrte Elemente oder gar kein Netz ausgibt. Es ist deshalb eine

<sup>23</sup> Radian werden in der vorliegenden Arbeit durch die Krümmung in Bezug auf das Körperinnere beschrieben. Der in Abb. 4.12a vorliegende Radius ist nach innen gekrümmt und somit konkav.

Ersatzgeometrie bzw. Vereinfachung zu bestimmen, die die Steifigkeitswirkung des Radius bei der Verwendung größerer Elemente abbildet. Eine derartige Ersatzgeometrie ist eine 45°-Schräge, die auch mit nur einem Element in der Querschnittsfläche korrekt dargestellt werden kann. Dabei zeigt sich, dass eine zum konkaven Radius  $R$  flächenäquivalente 45°-Schräge mit einer Seitenlänge

$$l = R \sqrt{2 - \frac{1}{2}\pi} \quad (4.6)$$

dieselbe Masse und Steifigkeitswirkung auf die umliegende Struktur besitzt. Wie in Abb. 4.12b zu erkennen ist, bleiben deshalb Eigenfrequenz und Verlauf der modalen Formänderungsenergiedichte in der umliegenden Geometrie bei gleichbleibender Diskretisierung nahezu unverändert.

#### 4.6.2 Begrenzung des Diskretisierungsfehlers

Eine weitere epistemische Unsicherheit bei der Finite-Elemente-Modellierung von theoretisch nicht exakt lösbaren Kontinuumsproblemen ist – wie bereits in Abschnitt 4.4 (S. 66) ausgeführt – der Diskretisierungsfehler. Diese Unsicherheit ist entsprechend den Gleichungen in Abschnitt 2.3.3 (S. 19) begrenzt. Ihre genaue Größe ist für die in der vorliegenden Arbeit betrachteten Geometrien jedoch nur mittels Konvergenzstudien ermittelbar. Die genaue Größe der Unsicherheit ist für den Anwender jedoch nicht relevant, sondern vielmehr, ob bei einer vorliegenden Vernetzung mit einem im Sinne der Adäquanzkriterien (Tab. 4.1, S. 62) relevanten Diskretisierungsfehler zu rechnen ist. Im Folgenden wird deshalb ein Kriterium vorgestellt, das diese Aussage zu treffen vermag.

**Kriterium.** Bei der dynamischen Finite-Elemente-Berechnung von Kontinua sind sowohl die kinetische als auch die potentielle Energie mit Diskretisierungsfehlern behaftet. Der Fehler der kinetischen Energie ist nach MAUTE (2001, S. 112 f., 130) jedoch ggü. dem der potentiellen Energie vernachlässigbar, da die kinetischen Terme im Gegensatz zur ihren potentiellen Pendanten nicht mit Hilfe von räumlichen Ableitungen bestimmt werden (siehe Gl. 2.37, S. 15). Das nachfolgende Kriterium betrachtet deshalb ausschließlich die potentiellen Terme. Bei unverzerrten Elementen unterschiedlicher Seitenlänge ist der Gesamtfehler nach Gl. 2.61 (S. 22) beschränkt, wobei dieser durch Summation der Interpolationsfehler der einzelnen Elemente entsteht. Für die Definition des Kriteriums wird ausgenutzt, dass die Energie-Norm  $\|U\|$  (Gl. 2.56, S. 21) nach HUGHES (1987, S. 273 f.) mit Ausnahme von Koeffizienten äquivalent zur Sobolev-Norm  $g$ -ter Ordnung  $\|\dot{x}_T\|_g$  (Gl. 2.57, S. 21) ist. Gl. 2.61 (S. 22) geht damit in

$$\|\Delta U\|^2 \leq \hat{c} \sum_i (\hat{h}_i^p \|U_T\|_i)^2 \quad (4.7)$$

$$\text{mit } \|U_T\|_i = \left( \int_{\Omega_{e,i}} \epsilon_{ij,T} \sigma_{ij,T} d\Omega_e \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.8)$$

über. Der Diskretisierungsfehler ist somit von der Formänderungsenergie der theoretisch exakten Lösung in jedem Element  $\|U_T\|_i$  und der Elementgröße  $\hat{h}$  abhängig. Ist das Produkt aus beiden hinreichend klein, ist auch der Beitrag dieses Elements zum Diskretisierungsfehler klein. Außerdem wird angenommen, dass

$$\|U_A\|_i \approx \|U_T\|_i \quad (4.9)$$

und somit Größenordnung und Verlauf der theoretisch exakten Formänderungsenergie  $\|U_T\|_i$  durch die Energieverteilung der betrachteten Vernetzung  $\|U_A\|_i$  angenähert werden. Anschließend kann nach SCHWARZ ET AL. (2014) der Beitrag jedes Elements zum Diskretisierungsfehler abgeschätzt werden, indem die **Elementanteile an der modalen Formänderungsenergie**

$$\frac{U_{e,r}}{U_r} = \frac{\{\phi_e\}_r^T [K_e] \{\phi_e\}_r}{\{\phi\}_r^T [K] \{\phi\}_r} \quad (4.10)$$

für alle relevanten Moden  $r$  betrachtet werden. Trägt ein Element einen zu großen Anteil bei, ist dessen Elementgröße für die im Elementgebiet abzubildende Formänderungsenergie zu groß gewählt und der Beitrag zum Diskretisierungsfehler ebenfalls groß. Der maximal erträgliche Energieanteil für eine gewünschte Abbildungsgenauigkeit ist spezifisch für jeden Elementtyp und jeweils anhand von Konvergenzstudien zu ermitteln. Für die in der vorliegenden Arbeit eingesetzten Tetraeder-Elemente zweiter Ordnung hat sich eine Grenze von 0,1 %  $U_r$  als zweckmäßig erwiesen, um die epistemische Unsicherheit der Eigenfrequenz aufgrund des Diskretisierungsfehlers auf < 1 % zu begrenzen.

**Beispiel: Einfache Struktur.** Das Kriterium für die Begrenzung des Diskretisierungsfehlers wird im Folgenden wiederum an der aus SCHWARZ ET AL. (2014) entlehnten Winkelstruktur (siehe Abb. 4.10, S. 69) verdeutlicht. In Abb. 4.13 ist die Veränderung der Eigenfrequenz der ersten Biegeeigenmode jener Winkelstruktur bei Variation der Elementgröße von 1 mm bis 30 mm bezogen auf die feinste Diskretisierung illustriert. Hierbei weist die Eigenfrequenz bei feiner werdender Diskretisierung das in Gl. 4.7 (S. 73) beschriebene, asymptotische Konvergenzverhalten auf. In Abb. 4.14 (S. 76) sind für die angeführten Elementgrößen die zugehörigen Verteilungen der Elementanteile an der modalen Formänderungsenergie nach Gl. 4.10 zu sehen. Dabei ist zu erkennen, dass die Elementanteile an der modalen Formänderungsenergie mit steigender Elementgröße zunehmen. Unter der Voraussetzung, dass die epistemische Unsicherheit des Diskretisierungsfehlers auf < 1 % bzgl. der Eigenfrequenz begrenzt werden soll, sind dafür nach Abb. 4.13 Elementgrößen von bis zu 10 mm geeignet.

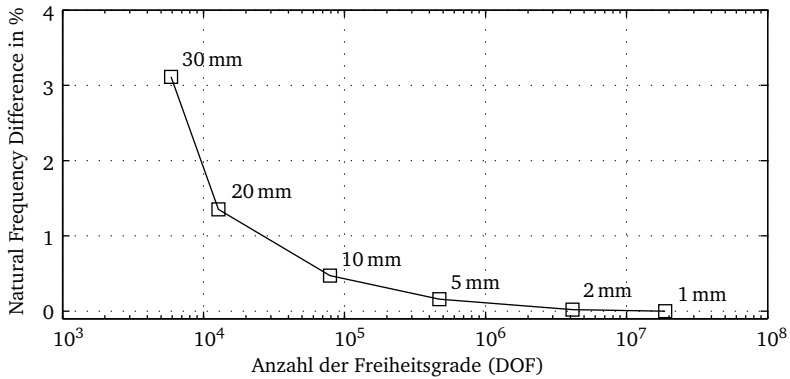


Abb. 4.13: Veränderung der ersten Biegeeigenfrequenz der Winkelstruktur bei Variation der Elementgröße, bezogen auf die feinste Diskretisierung

Abb. 4.14c (S. 76) verdeutlicht, dass sich bei 10 mm Elementgröße sämtliche Elementanteile unter 0,1 % der Gesamtenergie befinden, bei 5 mm (Abb. 4.14d, S. 76) werden die meisten Elemente mit weniger als 0,01 % beansprucht. Im Umkehrschluss kann durch die Überprüfung, dass ein Großteil der Elemente weniger als 0,01 % und sämtliche Elemente weniger als 0,1 % Anteil zur Gesamtenergie beitragen, eine Begrenzung der epistemischen Unsicherheit des Diskretisierungsfehlers auf unter 1 % sichergestellt werden.

## 4.7 Recheneffiziente Integration von Unsicherheiten in Modelle

Nach der Begrenzung der als epistemisch eingestuften und der Quantifizierung der als aleatorisch erachteten Unsicherheiten sind die quantifizierten Unsicherheiten geeignet in das Modell zu integrieren. Da es hierfür jedoch – wie in Abschnitt 2.6 (S. 46) beschrieben – mehrere Ansätze gibt, wird im Folgenden anhand der Randbedingungen bei der dynamischen Modellierung von Werkzeugmaschinenstrukturen ein geeignetes Verfahren ausgewählt und anschließend an die hierbei auftretenden Besonderheiten angepasst.

### 4.7.1 Randbedingungen und Auswahl des Verfahrens

Bei der dynamischen Modellierung von Werkzeugmaschinenstrukturen gelten im Vergleich zu anderen Einsatzgebieten der Strukturmechanik wie der Luft- und Raumfahrt- oder der Kraftfahrzeugtechnik abweichende Randbedingungen, die Einfluss auf die

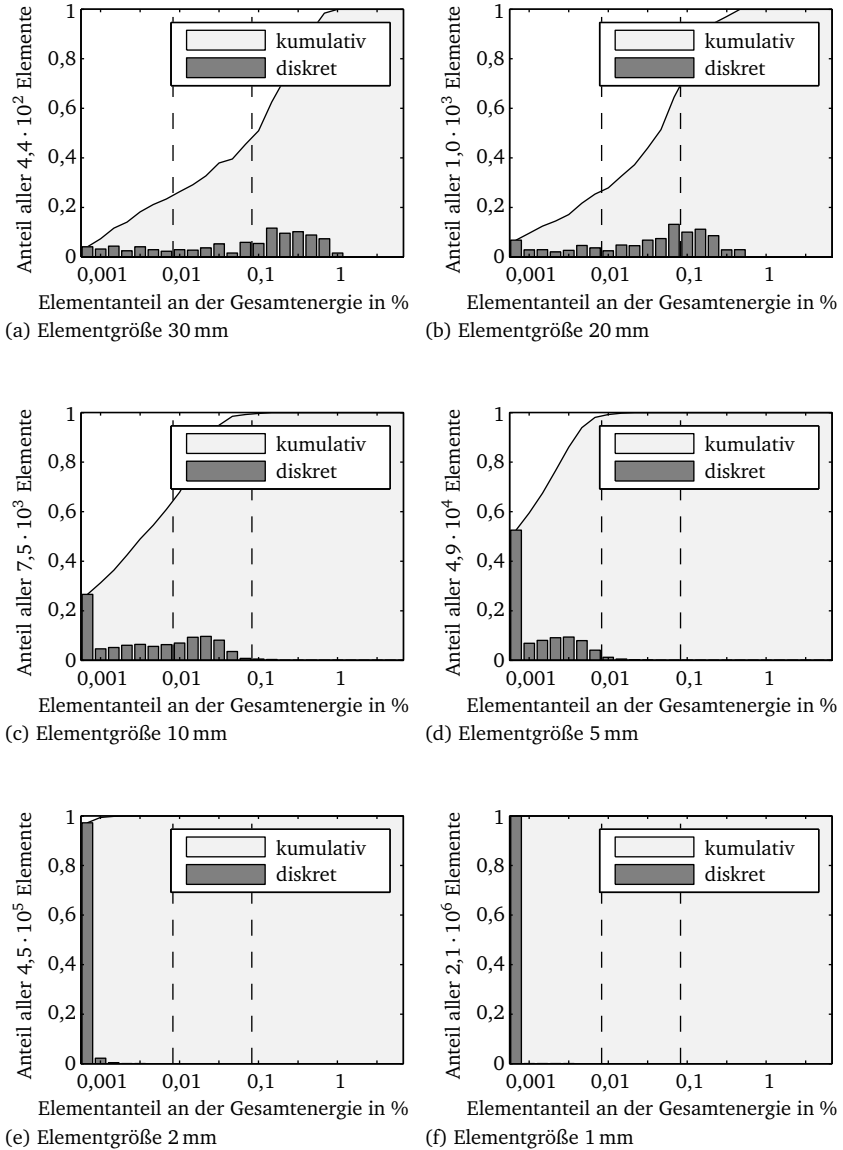


Abb. 4.14: Verteilung der Elementanteile an der modalen Formänderungsenergie der ersten Biegeeigenmode der Winkelstruktur bei Vernetzung mit Tetraedern zweiter Ordnung und Elementgrößen von 1 mm bis 30 mm



Auswahl des eingesetzten Verfahrens haben. Dies betrifft vor allem den Stichprobenumfang, die Rechenzeit und -kapazität sowie den Einsatzzweck.

**Stichprobenumfang.** Stückzahlen für Werkzeugmaschinenbaureihen bewegen sich im Allgemeinen in einem Bereich von 10 bis 1000 Stück über den gesamten Produktlebenszyklus. Diese geringen Stückzahlen führen dazu, dass für eine Quantifizierung von Unsicherheiten nur Messreihen mit kleinen Stichprobenumfängen (z. B.  $i < 100$ ) zur Verfügung stehen (MAYMON 2008, S. 289 ff.). Für eine probabilistische Modellierung der quantifizierten Unsicherheiten hat dies zweierlei Konsequenzen: Einerseits kann der Typ der Dichtefunktion  $\mathcal{F}_{PDF}$  nicht mittels entsprechender Methoden, sondern lediglich auf Basis von Annahmen ausgewählt werden (CRAMER & KAMPS 2014, S. 273 ff.), andererseits leidet auch die Genauigkeit der Parameterbestimmung für die ausgewählte Dichtefunktion – meist der Gauß-Verteilung – bei kleinen Stichprobenumfängen in hohem Maße (SIEBERTZ ET AL. 2010, S. 90 ff.; CRAMER & KAMPS 2014, S. 263). Es liegen somit aleatorische Unsicherheiten mit epistemischem Charakter vor, da aufgrund der geringen Stichprobenumfänge die tatsächlichen Verteilungen nicht eindeutig identifiziert werden können. Im Gegensatz dazu erlauben nicht-probabilistische Methoden eine Abbildung der auftretenden Streuungen auch bei beliebig kleinen Stichprobenumfängen ohne Einschränkung der Genauigkeit.

**Rechenzeit und -kapazität.** Probabilistische strukturdynamische Modelle benötigen nach WILL (2007) auch beim Einsatz effizienter Samplingmethoden für grundlegende Aussagen etwa 100 bis 200 Rechnungen. Mittels Parallelisierung in Rechenzentren kann die dabei anfallende Rechenzeit auf Stunden oder Tage begrenzt werden (PELLISSETTI ET AL. 2008), derartige Systeme stehen jedoch in der Werkzeugmaschinenentwicklung selten zur Verfügung. Stattdessen werden – wie in Abschnitt 4.3 (S. 63) erwähnt – dynamische Modelle von Werkzeugmaschinenstrukturen vorwiegend auf Einzelplatzrechnern oder kleinen Simulationsservern aufgebaut und berechnet. Die Ergebnisse der Modelle werden jedoch kurzfristig benötigt, um Konstruktionsvarianten vergleichen und die betrachtete Maschine schrittweise verbessern zu können. Nicht-probabilistische Methoden hingegen benötigen für den einfachsten Fall einer Intervallrechnung nur zwei Rechnungen, um eine Aussage treffen zu können.

**Einsatzzweck.** Probabilistische Methoden werden hauptsächlich im Bereich der Absicherung von sicherheits- oder systemrelevanten Eigenschaften eingesetzt, in welchen der Nachweis von Eintrittswahrscheinlichkeiten eine zentrale Rolle spielt. Nicht-probabilistische Methoden sind dafür nicht oder nur eingeschränkt geeignet. Im Entwicklungsprozess von Werkzeugmaschinenstrukturen dienen Modelle des dynamischen Verhaltens jedoch dem Aufbau von Systemverständnis, um ein im dynamischen Sinn optimales Design ableiten zu können. Der Nachweis bestimmter Eintrittswahrscheinlichkeiten ist dabei von eher untergeordneter Bedeutung, sofern

die Bezugsgröße der im Modell berücksichtigten Streuungen bekannt ist und eine Einschätzung des Einflusses der Streuungen ermöglicht.

**Auswahl eines Ansatzes.** Die aufgeführten Randbedingungen legen für die prognosefähige Modellierung des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinenstrukturen den Einsatz nicht-probabilistischer Verfahren nahe. Im Folgenden wird deshalb basierend auf Ansätzen aus der Literatur schrittweise ein geeignetes **intervallbasiertes Verfahren** zur Berechnung unsicherheitsbehafteter Frequenzgänge von Werkzeugmaschinenstrukturen erarbeitet.

#### 4.7.2 Bestimmung des Intervall-Eigenwertproblems

Die modale Superposition des Nachgiebigkeitsfrequenzgangs zwischen den Freiheitsgraden  $j$  und  $k$  wird nach Gl. 2.25 (S. 11) durch die Eigenwerte  $\lambda_r$  und die Produkte  $(\phi_r)_j(\phi_r)_k$  der berücksichtigten Moden bestimmt. Unter der Annahme, dass beide Größen Intervallstreuungen unterliegen, kann das vorzeichenunabhängige Intervall der Eigenwerte

$$\lambda_r = \left[ \underline{\lambda}_r, \overline{\lambda}_r \right] = \left[ \min(\omega_r^2), \max(\omega_r^2) \right] \quad (4.11)$$

und das evtl. mit Vorzeichenwechsel behaftete Intervall der zugehörigen Eigenvektoreinträge

$$(\phi_r)_j(\phi_r)_k = \left[ \min((\phi_r)_j(\phi_r)_k), \max((\phi_r)_j(\phi_r)_k) \right] \quad (4.12)$$

definiert werden. Da Nulleinträge bei Invertierung zu Singularitäten führen, müssen Vorzeichenwechsel im Intervall entsprechend berücksichtigt werden. In den weiteren Ausführungen werden deshalb die in Tab. 4.3 aufgeführten Bezeichnungen für die im Intervall  $(\phi_r)_j(\phi_r)_k$  möglichen Vorzeichenkombinationen verwendet.

Vorzeichenkombination	Bezeichnung
$(\phi_r)_j(\phi_r)_k > 0$	positive Mode
$(\phi_r)_j(\phi_r)_k < 0$	negative Mode
$0 \in (\phi_r)_j(\phi_r)_k$	wechselnde Mode

Tab. 4.3: Bezeichnung der im Intervall  $(\phi_r)_j(\phi_r)_k$  möglichen Vorzeichenkombinationen

**Berechnungsansatz.** Wie in Abschnitt 2.6.2 (S. 47) ausgeführt, sind für die Berechnung intervallbasierter Eigenwertprobleme mehrere Ansätze bekannt, die sich vor

allem hinsichtlich Genauigkeit und Rechenzeitbedarf unterscheiden. In der vorliegenden Arbeit wird für die Berechnung des intervallbasierten Eigenwertproblems das *Eigenvalue Inclusion Principle* nach QIU ET AL. (2005) eingesetzt. Dieses besagt, dass die vom Eingangsparameterintervall  $\{\mathbf{a}\} = [\underline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{a}}]$  abhängigen, positiv semi-definiten Intervallmatrizen

$$\llbracket [\mathbf{M}] \rrbracket_{\{\mathbf{a}\}} = [\underline{[\mathbf{M}]}, \overline{[\mathbf{M}]}] = \left[ \sum_{i=1}^j \underline{a}_i [M_i], \sum_{i=1}^j \overline{a}_i [M_i] \right] \quad (4.13)$$

$$\llbracket [\mathbf{K}] \rrbracket_{\{\mathbf{a}\}} = [\underline{[\mathbf{K}]}, \overline{[\mathbf{K}]}] = \left[ \sum_{i=1}^j \underline{a}_i [K_i], \sum_{i=1}^j \overline{a}_i [K_i] \right] \quad (4.14)$$

das Eigenwertintervall

$$\langle \langle \lambda_r \rangle \rangle = \left[ \underline{\lambda}_r, \overline{\lambda}_r \right] \quad (4.15)$$

mit den zugehörigen Eigenwertproblemen

$$\left( [\mathbf{K}] - \underline{\lambda}_r \overline{[\mathbf{M}]} \right) \{X\} = 0 \quad (4.16)$$

$$\left( \overline{[\mathbf{K}]} - \overline{\lambda}_r \underline{[\mathbf{M}]} \right) \{X\} = 0 \quad (4.17)$$

nach oben und unten konservativ beschränken. Anschaulich gesprochen kann somit durch Verwendung der jeweils höchst- und niedrigstmöglichen Matrixeinträge in  $[\mathbf{K}]$  und  $[\mathbf{M}]$  die Ober- und Untergrenze der Eigenwerte berechnet werden. Folglich werden nur zwei Rechnungen benötigt, die Genauigkeit ist dementsprechend geringer als bei rechenintensiveren Verfahren (QIU & WANG 2005; QIU ET AL. 2005). Bei der Anwendung des Verfahrens sind zwei Aspekte zu beachten: Einerseits kann sich über die Intervallbreite die Reihenfolge der Eigenwerte ändern (MOENS 2002, S. 92 ff.), dem durch eine Überprüfung mittels MAC-Wert (Gl. 2.91, S. 45) zu begegnen ist. Andererseits beschränkt das zu den Eigenwertproblemen 4.16 und 4.17 zugehörige Eigenvektorintervall

$$[\boldsymbol{\phi}] = \left[ \underline{[\boldsymbol{\phi}]}, \overline{[\boldsymbol{\phi}]} \right] \quad (4.18)$$

das tatsächliche Intervall nicht konservativ, liefert jedoch – wie im Folgenden an einem Beispiel gezeigt – eine hinreichend genaue Abschätzung.

**Beispiel: Einfache Struktur.** In Abb. 4.15 (S. 80) ist das Finite-Elemente-Modell einer Lagerbockstruktur zu sehen, deren Geometriemerkmale und Materialparameter mit den ebenfalls in dieser Abbildung beschriebenen Intervallstreuungen behaftet sind. Die Modellgröße ist mit  $5,8 \cdot 10^4$  DOF klein gewählt, um neben dem Intervall-Eigenwertproblem eine probabilistische Simulation als Referenzdatensatz bei hinreichend kleiner Rechenzeit durchführen zu können. Die Größenordnung der Streuungen ist an Messungen angelehnt, allerdings bewusst groß gewählt, um die

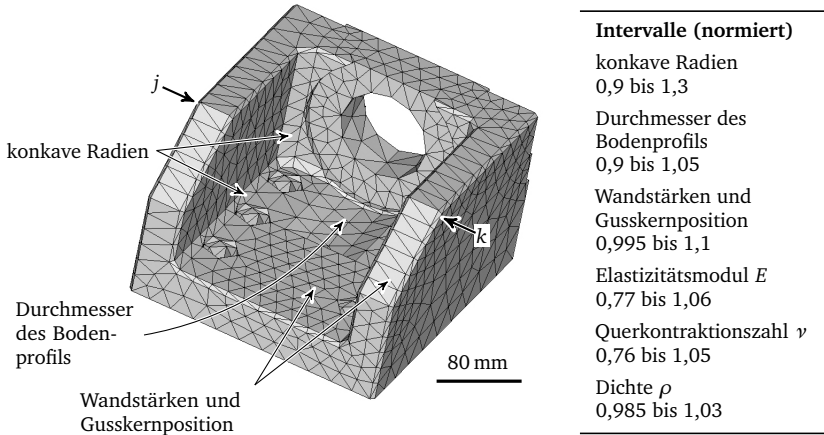


Abb. 4.15: Finite-Elemente-Modell einer Lagerbockstruktur mit variabler Geometrie und veränderlichen Materialparametern sowie den betrachteten Freiheitsgraden  $j$  und  $k$

Eigenschaften des Berechnungsansatzes für das Intervall-Eigenwertproblem überprüfen zu können. Zur Erzeugung eines Referenzdatensatzes wurde eine Monte-Carlo-Simulation mit 100 Ziehungen durchgeführt, wobei sämtliche in Abb. 4.15 beschriebenen Streuungen als unabhängig und gleichverteilt modelliert wurden. Daneben wurde das intervallbasierte Eigenwertproblem nach dem *Eigenvalue Inclusion Principle* berechnet, indem das Eigenwertproblem für die vier in Tab. 4.4 angegebenen Parametersätze gelöst wurde. Die Parametersätze ergeben sich aus der Überlegung, dass entsprechend dem Rayleigh-Quotienten (DRESIG & HOLZWEISSIG 2009, S. 392)

$$\omega_r^2 = \frac{U_r}{T_r} = \frac{\{\phi\}_r^T [K] \{\phi\}_r}{\{\phi\}_r^T [M] \{\phi\}_r} \quad (4.19)$$

Merkmal	Satz 1	Satz 2	Satz 3	Satz 4
konkave Radien	0,9	0,9	1,3	1,3
Durchmesser des Bodenprofils	1,05	1,05	0,9	0,9
Wandstärken und Gusskernposition	0,995	0,995	1,1	1,1
Elastizitätsmodul $E$	0,77	0,77	1,06	1,06
Querkontraktionszahl $\nu$	0,76	1,05	0,76	1,05
Dichte $\rho$	1,03	1,03	0,985	0,985

Tab. 4.4: Parametersätze zur Berechnung des Intervall-Eigenwertproblems

und den Gl. 4.16 und 4.17 (S. 79) Konfigurationen maximaler Steifigkeit und minimaler Masse sowie minimaler Steifigkeit und maximaler Masse benötigt werden. Elastizitätsmodul  $E$  und Dichte  $\rho$  gehen – wie in SCHWARZ ET AL. (2014) ausgeführt – nach Gl. 2.51 (S. 18) jeweils direkt proportional in den Zähler und den Nenner des Quotienten 4.19 ein. Ebenso ist ersichtlich, dass eine Vergrößerung von Wandstärken und Radien neben einem geringen Massenzuwachs vor allem zu einer erheblichen Aussteifung führt. Der Einfluss der Querkontraktionszahl  $\nu$  ist nach Gl. 2.72 (S. 26) jedoch nicht eindeutig bestimmbar, weshalb diese Größe vollfaktoriell im Intervallproblem berücksichtigt werden muss und die Anzahl der notwendigen Rechnungen von zwei auf vier ansteigt. In Abb. 4.16 (S. 82) sind die Streuungen der Eigenfrequenzen und Eigenvektorprodukte der Lagerbockstruktur für die betrachteten Freiheitsgrade  $j$  und  $k$  (siehe Abb. 4.15) jeweils für das intervallbasierte Eigenwertproblem und die Monte-Carlo-Simulation für die ersten sechs Strukturmoden dargestellt. Dabei ist zu erkennen, dass die Streuungen der Eigenfrequenzen der Monte-Carlo-Simulation – wie in Gl. 4.15 (S. 79) beschrieben – durch das intervallbasierte Eigenwertproblem konservativ approximiert werden. Eine Überschätzung des Intervalls ist vorhanden, diese beeinträchtigt die Genauigkeit jedoch nicht wesentlich. Die Eigenvektorprodukte für die betrachteten Freiheitsgrade  $j$  und  $k$  werden im Gegensatz dazu nicht konservativ approximiert (SEIF ET AL. 1992), die Werte der Monte-Carlo-Simulation liegen zum Teil außerhalb des Intervallbereichs. Die Streuungen der Monte-Carlo-Simulation werden jedoch – mit Ausnahme des Übergangsphänomens am Kreuzungspunkt der Moden 11 und 12 (siehe hierzu MOENS 2002, S. 105 ff.) – durch das intervallbasierte Eigenwertproblem angenähert. In der vorliegenden Arbeit wird deshalb das Eigenvektorintervall des intervallbasierten Eigenwertproblems nach Gl. 4.18 (S. 79) im Bewusstsein der möglichen Abweichungen für die Frequenzgangberechnung verwendet, da es eine für den Einsatzzweck (siehe Abschnitt 4.7.1, S. 75) hinreichend genaue Abschätzung der tatsächlichen Verteilung darstellt.

### 4.7.3 Ungedämpfte intervallbasierte Frequenzgänge

Die Berechnung ungedämpfter intervallbasierter Frequenzgänge wird von MOENS & VANDEPITTE (2004) beschrieben. Dabei ist die *Enhanced Modal Rectangle Method* aufgrund ihres ausgewogenen Verhältnisses von Genauigkeit und Recheneffizienz hervorzuheben, welche deshalb im Folgenden vorgestellt wird. Um zu einer intervallbasierten Berechnung des Frequenzgangs zu gelangen, wird Gl. 2.25 (S. 11) zu

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{1}{k_r - \omega^2 m_r} \quad (4.20)$$

umgeformt, wobei  $k_r$  und  $m_r$  die modale Steifigkeit und Masse

$$k_r = \frac{\omega_r^2}{(\phi_r)_j(\phi_r)_k} \quad (4.21)$$

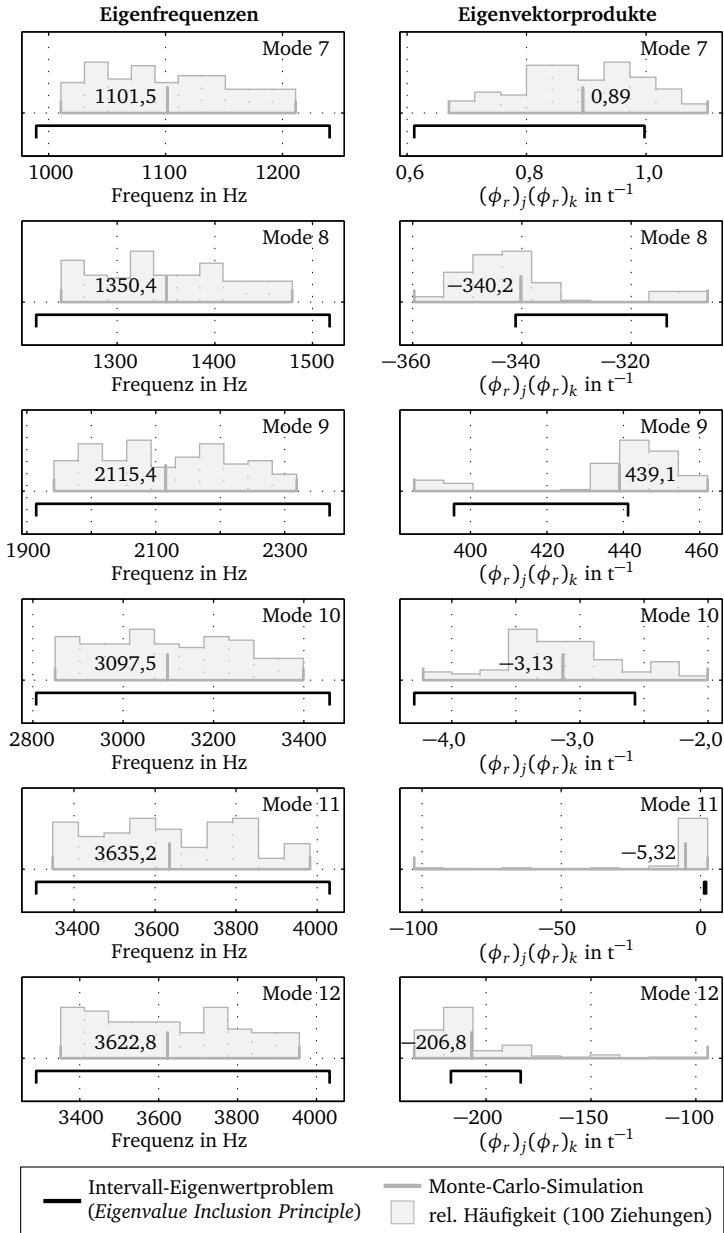


Abb. 4.16: Streuungen von Eigenfrequenz und Eigenvektorprodukt der Freiheitsgrade  $j$  und  $k$  für die ersten sechs Strukturmoden der Lagerbockstruktur

$$m_r = \frac{1}{(\phi_r)_j(\phi_r)_k} \quad (4.22)$$

eines modalen Einmassenschwingers darstellen. Um bei der Definition das Problem der Singularitäten zu vermeiden, werden mit Hilfe der Intervalle aus den Gl. 4.11 und 4.12 (S. 78) zunächst die Inversen der Größen 4.21 (S. 81) und 4.22 mit

$$\mathbf{k}_r^{-1} = \left[ \underline{k}_r^{-1}, \overline{k}_r^{-1} \right] = \left[ \min \left( \frac{(\phi_r)_j(\phi_r)_k}{\omega_r^2} \right), \max \left( \frac{(\phi_r)_j(\phi_r)_k}{\omega_r^2} \right) \right] \quad (4.23)$$

$$\mathbf{m}_r^{-1} = \left[ \underline{m}_r^{-1}, \overline{m}_r^{-1} \right] = \left[ \min((\phi_r)_j(\phi_r)_k), \max((\phi_r)_j(\phi_r)_k) \right] \quad (4.24)$$

definiert. Die Bestimmung der gesuchten Größen erfolgt mit Hilfe der Kahan-Inversion (LAVEUVE 1975), die abhängig von vorhandenen Vorzeichenwechseln die – teilweise diskontinuierlichen – Intervalle

$$\langle k_r \rangle = \left[ \frac{1}{\underline{k}_r^{-1}}, \frac{1}{\overline{k}_r^{-1}} \right] \quad \text{und} \quad \langle m_r \rangle = \left[ \frac{1}{\underline{m}_r^{-1}}, \frac{1}{\overline{m}_r^{-1}} \right] \quad (4.25)$$

für positive und negative Moden und

$$\langle k_r \rangle = \left[ -\infty, \frac{1}{\underline{k}_r^{-1}} \right] \cup \left[ \frac{1}{\overline{k}_r^{-1}}, +\infty \right] \quad \text{und} \quad \langle m_r \rangle = \left[ -\infty, \frac{1}{\underline{m}_r^{-1}} \right] \cup \left[ \frac{1}{\overline{m}_r^{-1}}, +\infty \right] \quad (4.26)$$

für wechselnde Moden bestimmt. Für die Berechnung des Frequenzgangs wird anschließend – in Abhängigkeit der Vorzeichen und der Lage der Anregungsfrequenz  $\omega$  zum Eigenwertintervall  $\lambda_r$  (Gl. 4.11, S. 78) – die Nennerfunktion  $\mathcal{D}_r(\omega)$  definiert. Die Nennerfunktion nimmt für positive Moden die Form

$$\langle \mathcal{D}_r(\omega) \rangle = \begin{cases} \left[ \underline{k}_r \left( 1 - \frac{\omega^2}{\lambda_r} \right), \overline{k}_r \left( 1 - \frac{\omega^2}{\lambda_r} \right) \right] & \forall \omega^2 \leq \underline{\lambda}_r \\ \left[ \overline{m}_r (\lambda_r - \omega^2), \underline{k}_r \left( 1 - \frac{\omega^2}{\lambda_r} \right) \right] & \forall \underline{\lambda}_r < \omega^2 < \overline{\lambda}_r, \\ \left[ \overline{m}_r (\lambda_r - \omega^2), \underline{m}_r (\overline{\lambda}_r - \omega^2) \right] & \forall \overline{\lambda}_r \leq \omega^2 \end{cases} \quad (4.27)$$

für negative Moden die Form

$$\langle \mathcal{D}_r(\omega) \rangle = \begin{cases} \left[ \underline{k}_r \left( 1 - \frac{\omega^2}{\lambda_r} \right), \overline{k}_r \left( 1 - \frac{\omega^2}{\lambda_r} \right) \right] & \forall \omega^2 \leq \underline{\lambda}_r \\ \left[ \underline{k}_r \left( 1 - \frac{\omega^2}{\lambda_r} \right), \underline{m}_r (\lambda_r - \omega^2) \right] & \forall \underline{\lambda}_r < \omega^2 < \overline{\lambda}_r \\ \left[ \overline{m}_r (\overline{\lambda}_r - \omega^2), \underline{m}_r (\lambda_r - \omega^2) \right] & \forall \overline{\lambda}_r \leq \omega^2 \end{cases} \quad (4.28)$$

und für wechselnde Moden die Form<sup>24</sup>

$$\langle \mathcal{D}_r(\omega) \rangle = \begin{cases} \left[ -\infty, \overline{k_r^-} \left( 1 - \frac{\omega^2}{\underline{\lambda_r^-}} \right) \right] \cup \left[ \underline{k_r^+} \left( 1 - \frac{\omega^2}{\underline{\lambda_r^+}} \right), +\infty \right] & \forall \omega^2 \leq \underline{\lambda_r} \\ [-\infty, +\infty] & \forall \underline{\lambda_r} < \omega^2 < \overline{\lambda_r} \\ \left[ -\infty, \underline{m_r^+} (\overline{\lambda_r^+} - \omega^2) \right] \cup \left[ \overline{m_r^-} (\overline{\lambda_r^-} - \omega^2), +\infty \right] & \forall \overline{\lambda_r} \leq \omega^2 \end{cases} \quad (4.29)$$

an<sup>25</sup>. Der Beitrag jeder Mode zum Frequenzgang wird anschließend über

$$\langle \alpha_{jk,r}(\omega) \rangle = \begin{cases} \left[ \frac{1}{\overline{\mathcal{D}_r(\omega)}}, \frac{1}{\underline{\mathcal{D}_r(\omega)}} \right] & \forall \omega^2 \notin \underline{\lambda_r} \\ \left[ -\infty, \frac{1}{\underline{\mathcal{D}_r(\omega)}} \right] \cup \left[ \frac{1}{\overline{\mathcal{D}_r(\omega)}}, +\infty \right] & \forall \omega^2 \in \underline{\lambda_r} \end{cases} \quad (4.30)$$

bestimmt, was durch modale Superposition

$$\langle \langle \alpha_{jk}(\omega) \rangle \rangle = \sum_{r=1}^N \langle \alpha_{jk,r}(\omega) \rangle \quad (4.31)$$

zum endgültigen intervallbasierten Frequenzgang führt.  $\langle \langle \alpha_{jk}(\omega) \rangle \rangle$  stellt eine konservative Schätzung der gesuchten Einhüllenden des Frequenzgangs dar, da die Intervallformulierung beliebige Kombinationen der modalen Parameter  $k_r$  und  $m_r$  postuliert, obwohl diese voneinander abhängig sind. Dem wird durch die Verwendung des Eigenwertintervalls  $\underline{\lambda_r}$  als zusätzliche Randbedingung entgegengewirkt, was die Überschätzungen hinreichend beschränkt (MOENS & VANDEPITTE 2004). Für die Verwendung bei der dynamischen Modellierung von Werkzeugmaschinenstrukturen ist der Ansatz in dieser Form jedoch nicht geeignet, da er lediglich die Berechnung ungedämpfter Frequenzgänge ermöglicht.

#### 4.7.4 Lokal gedämpfte intervallbasierte Frequenzgänge

In MOENS & VANDEPITTE (2005a) findet sich eine Variante des in Abschnitt 4.7.3 (S. 81) beschriebenen Verfahrens für proportional gedämpfte Systeme. Eine derartige Modellierung ist jedoch für Werkzeugmaschinenstrukturen – wie in Abschnitt 4.1.1 (S. 55) ausgeführt – nicht geeignet. Im Folgenden wird deshalb angelehnt an den bereits beschriebenen, ungedämpften Ansatz ein modal gedämpftes Intervallverfahren

<sup>24</sup> Die Indices – und + verdeutlichen jeweils den positiven bzw. negativen Intervallteil.

<sup>25</sup> Da sich  $k_r$ ,  $m_r$  und  $\lambda_r$  über Gl. 4.33 (S. 85) ineinander überführen lassen, ist hier stets diejenige Notation dargestellt, welche mit der geringsten Anzahl an Symbolen auskommt.



formuliert und darauf aufbauend eine Approximation für lokal gedämpfte Systeme vorgestellt.

**Real- und Imaginärteil des Intervall-Frequenzgangs.** Unter der Annahme modaler Dämpfung wird Gl. 4.20 (S. 81) mit einem Verlustfaktorenansatz (Gl. 2.31, S. 13) zu

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{1}{k_r - \omega^2 m_r + \iota \eta_r k_r} \quad (4.32)$$

erweitert, wodurch  $\alpha_{jk}(\omega)$  komplexwertig wird. Für eine Behandlung als Intervallproblem ist diese Gleichung einerseits unter Verwendung des Zusammenhangs

$$\lambda_r = \frac{k_r}{m_r} \quad (4.33)$$

wie in Abschnitt 4.7.3 (S. 81) in zwei Nennerfunktionen  $\mathcal{D}_r(\omega)$  zu überführen, die ausschließlich von  $k_r$  oder von  $m_r$  abhängig sind. Andererseits ist die Aufteilung von  $\mathcal{D}_r(\omega)$  in einen reellwertigen Anteil  $\mathcal{D}_r^{\Re}$  und einen imaginärwertigen Anteil  $\mathcal{D}_r^{\Im}$  erforderlich, da diese in der Intervallrechnung getrennt zu behandeln sind. Nach einigen Umformungen von Gl. 4.32 führt dies auf

$$\mathcal{D}_r^{\Re}(\omega, k_r, \lambda_r) = k_r \left( 1 - \frac{\omega^2}{\lambda_r} + \frac{\eta_r^2}{1 - \frac{\omega^2}{\lambda_r}} \right) \quad (4.34)$$

$$\mathcal{D}_r^{\Im}(\omega, k_r, \lambda_r) = k_r \left( \frac{1}{\eta_r} \left( 1 - \frac{\omega^2}{\lambda_r} \right)^2 + \eta_r \right) \quad (4.35)$$

für die von  $k_r$  abhängige Form und auf

$$\mathcal{D}_r^{\Re}(\omega, m_r, \lambda_r) = m_r \left( \lambda_r - \omega^2 + \frac{\eta_r^2 \lambda_r^2}{\lambda_r - \omega^2} \right) \quad (4.36)$$

$$\mathcal{D}_r^{\Im}(\omega, m_r, \lambda_r) = m_r \left( \frac{1}{\eta_r \lambda_r} (\lambda_r - \omega^2)^2 + \eta_r \lambda_r \right) \quad (4.37)$$

für das von  $m_r$  abhängige Pendant. Der Frequenzgang setzt sich entsprechend über

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \left( \frac{1}{\mathcal{D}_r^{\Re}} + \iota \frac{1}{\mathcal{D}_r^{\Im}} \right) \quad (4.38)$$

zusammen, wobei die von  $k_r$  und  $m_r$  abhängigen Varianten für ein deterministisches Problem äquivalent sind<sup>26</sup>. Anschließend kann das gesamte Problem bei zunächst

<sup>26</sup> Für eine verbesserte Lesbarkeit werden die Gl. 4.34 bis 4.37 im Folgenden lediglich als Funktionsausdruck dargestellt.

konstanten Verlustfaktoren  $\eta_r$  intervallbasiert formuliert werden. Der **reellwertige Anteil der Nennerfunktion**  $\mathcal{D}_r^{\Re}$  nimmt für positive Moden analog zu den Gl. 4.27 bis 4.29 (S. 84) die Form

$$\langle \mathcal{D}_r^{\Re}(\omega) \rangle = \begin{cases} \left[ \mathcal{D}_r^{\Re}(\omega, \underline{k}_r, \underline{\lambda}_r), \mathcal{D}_r^{\Re}(\omega, \overline{k}_r, \overline{\lambda}_r) \right] & \forall \omega^2 \leq \underline{\lambda}_r \\ \left[ \mathcal{D}_r^{\Re}(\omega, \overline{m}_r, \underline{\lambda}_r), \mathcal{D}_r^{\Re}(\omega, \overline{k}_r, \overline{\lambda}_r) \right] & \forall \underline{\lambda}_r < \omega^2 < \overline{\lambda}_r, \\ \left[ \mathcal{D}_r^{\Re}(\omega, \overline{m}_r, \underline{\lambda}_r), \mathcal{D}_r^{\Re}(\omega, \underline{m}_r, \overline{\lambda}_r) \right] & \forall \overline{\lambda}_r \leq \omega^2 \end{cases} \quad (4.39)$$

für negative Moden die Form

$$\langle \mathcal{D}_r^{\Re}(\omega) \rangle = \begin{cases} \left[ \mathcal{D}_r^{\Re}(\omega, \underline{k}_r, \overline{\lambda}_r), \mathcal{D}_r^{\Re}(\omega, \overline{k}_r, \underline{\lambda}_r) \right] & \forall \omega^2 \leq \underline{\lambda}_r \\ \left[ \mathcal{D}_r^{\Re}(\omega, \underline{k}_r, \overline{\lambda}_r), \mathcal{D}_r^{\Re}(\omega, \underline{m}_r, \underline{\lambda}_r) \right] & \forall \underline{\lambda}_r < \omega^2 < \overline{\lambda}_r \\ \left[ \mathcal{D}_r^{\Re}(\omega, \overline{m}_r, \overline{\lambda}_r), \mathcal{D}_r^{\Re}(\omega, \underline{m}_r, \underline{\lambda}_r) \right] & \forall \overline{\lambda}_r \leq \omega^2 \end{cases} \quad (4.40)$$

und für wechselnde Moden die Form

$$\langle \mathcal{D}_r^{\Re}(\omega) \rangle = \begin{cases} \left[ -\infty, \mathcal{D}_r^{\Re}(\omega, \overline{k}_r^-, \underline{\lambda}_r^-) \right] \cup \left[ \mathcal{D}_r^{\Re}(\omega, \underline{k}_r^+, \underline{\lambda}_r^+), +\infty \right] & \forall \omega^2 \leq \underline{\lambda}_r \\ [-\infty, +\infty] & \forall \underline{\lambda}_r < \omega^2 < \overline{\lambda}_r \\ \left[ -\infty, \mathcal{D}_r^{\Re}(\omega, \underline{m}_r^+, \overline{\lambda}_r^+) \right] \cup \left[ \mathcal{D}_r^{\Re}(\omega, \overline{m}_r^-, \overline{\lambda}_r^-), +\infty \right] & \forall \overline{\lambda}_r \leq \omega^2 \end{cases} \quad (4.41)$$

an. Für die Beschreibung des imaginärwertigen Anteils der Nennerfunktion  $\mathcal{D}_r^{\Im}$  ist zu berücksichtigen, dass der Realteil des Nachgiebigkeitsfrequenzgangs eines Einmassenschwingers beim Überschreiten der Resonanzfrequenz – wie in Abb. 2.5b (S. 9) zu erkennen – das Vorzeichen wechselt, der Imaginärteil hingegen nicht. Um das für reellwertige Probleme formulierte Intervallverfahren aus Abschnitt 4.7.3 (S. 81) auf den Imaginärteil anwenden zu können, ist deshalb das Eigenwertintervall  $\lambda_r$  mittels einer noch zu bestimmenden Frequenz  $\omega_3^2 \in \lambda_r$  zu unterteilen und die Intervallgrenzen einer Seite sind konsistent zu vertauschen. Im Folgenden wird diese Vertauschung für alle Frequenzen  $\omega < \omega_3$  durchgeführt. Der **imaginärwertige Anteil der Nennerfunktion**  $\mathcal{D}_r^{\Im}$  nimmt damit für positive Moden die Form

$$\langle \mathcal{D}_r^{\Im}(\omega) \rangle = \begin{cases} \left[ \mathcal{D}_r^{\Im}(\omega, \overline{k}_r, \overline{\lambda}_r), \mathcal{D}_r^{\Im}(\omega, \underline{k}_r, \underline{\lambda}_r) \right] & \forall \omega^2 \leq \underline{\lambda}_r \\ \left[ \mathcal{D}_r^{\Im}(\omega, \overline{k}_r, \overline{\lambda}_r), \mathcal{D}_r^{\Im}(\omega, \overline{m}_r, \underline{\lambda}_r) \right] & \forall \underline{\lambda}_r < \omega^2 < \omega_3^2 \\ \left[ \mathcal{D}_r^{\Im}(\omega, \overline{m}_r, \underline{\lambda}_r), \mathcal{D}_r^{\Im}(\omega, \overline{k}_r, \overline{\lambda}_r) \right] & \forall \omega_3^2 \leq \omega^2 < \overline{\lambda}_r \\ \left[ \mathcal{D}_r^{\Im}(\omega, \overline{m}_r, \underline{\lambda}_r), \mathcal{D}_r^{\Im}(\omega, \underline{m}_r, \overline{\lambda}_r) \right] & \forall \overline{\lambda}_r \leq \omega^2 \end{cases} \quad (4.42)$$

und für negative Moden die Form

$$\langle \mathcal{D}_r^{\mathfrak{J}}(\omega) \rangle = \begin{cases} \left[ \mathcal{D}_r^{\mathfrak{J}}(\omega, \overline{k_r}, \underline{\lambda_r}), \mathcal{D}_r^{\mathfrak{J}}(\omega, \underline{k_r}, \overline{\lambda_r}) \right] & \forall \omega^2 \leq \underline{\lambda_r} \\ \left[ \mathcal{D}_r^{\mathfrak{J}}(\omega, \underline{m_r}, \underline{\lambda_r}), \mathcal{D}_r^{\mathfrak{J}}(\omega, \underline{k_r}, \overline{\lambda_r}) \right] & \forall \underline{\lambda_r} < \omega^2 < \omega_{\mathfrak{J}}^2 \\ \left[ \mathcal{D}_r^{\mathfrak{J}}(\omega, \underline{k_r}, \overline{\lambda_r}), \mathcal{D}_r^{\mathfrak{J}}(\omega, \underline{m_r}, \underline{\lambda_r}) \right] & \forall \omega_{\mathfrak{J}}^2 \leq \omega^2 < \overline{\lambda_r} \\ \left[ \mathcal{D}_r^{\mathfrak{J}}(\omega, \overline{m_r}, \overline{\lambda_r}), \mathcal{D}_r^{\mathfrak{J}}(\omega, \underline{m_r}, \underline{\lambda_r}) \right] & \forall \overline{\lambda_r} \leq \omega^2 \end{cases} \quad (4.43)$$

an. Für wechselnde Moden ist ein Tausch der Intervallgrenzen nicht notwendig, da diese bereits durch das Vorzeichen eindeutig festgelegt sind. Der imaginärwertige Anteil der Nennerfunktion  $\mathcal{D}_r^{\mathfrak{J}}$  stellt sich für wechselnde Moden deshalb in der Form

$$\langle \mathcal{D}_r^{\mathfrak{J}}(\omega) \rangle = \begin{cases} \left[ -\infty, \mathcal{D}_r^{\mathfrak{J}}(\omega, \overline{k_r}, \underline{\lambda_r}) \right] \cup \left[ \mathcal{D}_r^{\mathfrak{J}}(\omega, \underline{k_r}, \overline{\lambda_r}), +\infty \right] & \forall \omega^2 \leq \underline{\lambda_r} \\ \left[ -\infty, \min\left(\mathcal{D}_r^{\mathfrak{J}}(\omega, \overline{k_r}, \overline{\lambda_r}), \mathcal{D}_r^{\mathfrak{J}}(\omega, \overline{m_r}, \underline{\lambda_r})\right) \right] \cup \\ \left[ \max\left(\mathcal{D}_r^{\mathfrak{J}}(\omega, \underline{k_r}, \overline{\lambda_r}), \mathcal{D}_r^{\mathfrak{J}}(\omega, \underline{m_r}, \underline{\lambda_r})\right), +\infty \right] & \forall \underline{\lambda_r} < \omega^2 < \overline{\lambda_r} \\ \left[ -\infty, \mathcal{D}_r^{\mathfrak{J}}(\omega, \underline{m_r}, \overline{\lambda_r}) \right] \cup \left[ \mathcal{D}_r^{\mathfrak{J}}(\omega, \overline{m_r}, \overline{\lambda_r}), +\infty \right] & \forall \overline{\lambda_r} \leq \omega^2 \end{cases} \quad (4.44)$$

dar, wobei die Ausdrücke innerhalb des Eigenwertintervalls  $\lambda_r$  die Stetigkeit der Nennerfunktion gewährleisten. Realteil  $\Re(\alpha_{jk})$  und Imaginärteil  $\Im(\alpha_{jk})$  des Intervall-Frequenzgangs ergeben sich anschließend analog zu Abschnitt 4.7.3 (S. 81) jeweils über die Inversion der Nennerfunktionen (Gl. 4.30, S. 84) und die modale Superposition (Gl. 4.31, S. 84).

**Amplituden- und Phasengang des Intervall-Frequenzgangs.** Für den Anwender sind meist die Umhüllenden des Amplituden- und des Phasengangs interessant. Diese können nach MOENS (2002, S. 181) aus dem Vektor aller möglichen Kombinationen der Real- und Imaginärteile

$$\langle \{\alpha_{jk}\} \rangle = \left\{ \underline{\Re(\alpha_{jk})} + \iota \underline{\Im(\alpha_{jk})}, \overline{\Re(\alpha_{jk})} + \iota \overline{\Im(\alpha_{jk})}, \right. \\ \left. \overline{\Re(\alpha_{jk})} + \iota \underline{\Im(\alpha_{jk})}, \underline{\Re(\alpha_{jk})} + \iota \overline{\Im(\alpha_{jk})} \right\} \quad (4.45)$$

mit

$$\langle |\alpha_{jk}(\omega)| \rangle = \left[ \min |\langle \{\alpha_{jk}\} \rangle|, \max |\langle \{\alpha_{jk}\} \rangle| \right] \quad (4.46)$$

$$\langle \angle \alpha_{jk}(\omega) \rangle = \left[ \min \angle \langle \{\alpha_{jk}\} \rangle, \max \angle \langle \{\alpha_{jk}\} \rangle \right] \quad (4.47)$$

berechnet werden. Innerhalb der Eigenwertintervalle  $\lambda_r$  sind die untere und die obere Grenze des Amplitudengangs  $\langle |\alpha_{jk}(\omega)| \rangle$  anschließend wie folgt zu korrigieren:

Die untere Grenze von  $\langle |\alpha_{jk}(\omega)| \rangle$  ist – wie in Abb. 4.17 skizziert – von  $\omega$  abhängig, weshalb nicht für alle möglichen  $\omega_{\mathcal{J}}$  Stetigkeit sichergestellt ist.

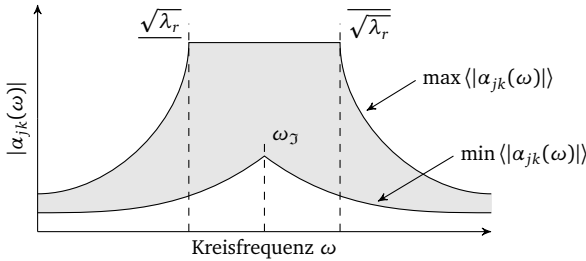


Abb. 4.17: Sicherstellung der Stetigkeit der unteren Grenze von  $|\alpha_{jk}(\omega)|$  durch  $\omega_{\mathcal{J}}$

Dementsprechend wird  $\omega_{\mathcal{J}}$  so gewählt, dass der Verlauf der unteren Grenze von  $\langle |\alpha_{jk}(\omega)| \rangle$  stetig ist, was unter Berücksichtigung der Untergrenze der Residuen der übrigen Moden  $\underline{R}_{jk}$  mit der Bedingung

$$\left| \mathcal{J} \left( \underline{R}_{jk} \right) - \frac{1}{\mathcal{D}_r^{\mathcal{J}}(\omega_{\mathcal{J}})} \right| = \left| \mathcal{J} \left( \underline{R}_{jk} \right) - \frac{1}{\mathcal{D}_r^{\mathcal{J}}(\omega_{\mathcal{J}})} \right| \quad (4.48)$$

realisiert werden kann. Die obere Grenze von  $\langle |\alpha_{jk}(\omega)| \rangle$  im Eigenwertintervall  $\lambda_r$  wird nur in den Resonanzen  $\omega_r = \sqrt{\lambda_r}$  exakt berechnet. Im gesamten Intervall eines Eigenwerts  $\lambda_r$  ist deshalb der größere Eintrag der resultierenden beiden Amplituden

$$\langle |\alpha_{jk}(\omega)| \rangle = \max \left[ \langle |\alpha_{jk}(\underline{\omega}_r)| \rangle, \langle |\alpha_{jk}(\overline{\omega}_r)| \rangle \right] \quad \forall \underline{\lambda}_r < \omega^2 < \overline{\lambda}_r \quad (4.49)$$

zu verwenden.

**Berücksichtigung lokaler Dämpfung.** In den bisherigen Ausführungen zu gedämpften intervallbasierte Frequenzgängen wurde ein modaler Verlustfaktorenansatz zugrunde gelegt. Dieser kann bei Systemen mit nahezu reellwertigen Eigenvektoren – wie bspw. Werkzeugmaschinenstrukturen – dazu verwendet werden, die lokalen hysteretischen und viskosen Dämpfungseffekte mit Hilfe der Hauptdämpfungshypothese (Gl. 2.69, S. 25) näherungsweise abzubilden. Dabei nimmt die modale Lösung (Gl. 2.19, S. 11) bei beliebig besetzten Dämpfungsmatrizen im Frequenzbereich folgende Form an:

$$\begin{aligned} & [I] \{\ddot{Q}\} + \text{diag}([\phi]^T [C] [\phi]) \{\dot{Q}\} + \\ & \left( \text{diag}(\omega_r^2) + \iota \cdot \text{diag}([\phi]^T [D] [\phi]) \right) \{Q\} = [\phi]^T \{F\} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Durch die Zwangsdiagonalisierung von  $[C]$  und  $[D]$  liegt das Differentialgleichungssystem weiterhin entkoppelt vor, sodass jede Zeile als modaler Einmassenschwinger betrachtet werden kann. Die Dissipationsenergie eines Einmassenschwingers pro Schwingungszyklus ergibt sich nach (MAIA & SILVA 1997, S. 30 f) für einen Verlustfaktorenansatz zu

$$W_d = \pi d X^2 = \pi \eta k X^2 \quad (4.51)$$

und für einen Dämpfungsconstantenansatz zu

$$W_c = \pi \omega c X^2 \quad (4.52)$$

Die Verschiebungen  $X$  entsprechen bei modaler Betrachtungsweise von Gl. 4.50 – analog zur Betrachtung der potentiellen und kinetischen Energie in den Gl. 2.34 und 2.36 (S. 14) – den Eigenvektoren  $\{\phi\}_r$ , sodass sich die gesamte modale Dissipationsenergie durch

$$W_r(\omega) = W_{d,r} + W_{c,r} = \pi \{\phi\}_r^T [D] \{\phi\}_r + \pi \omega \{\phi\}_r^T [C] \{\phi\}_r \quad (4.53)$$

ausdrücken lässt. Für eine Abbildung im intervallbasierten Frequenzgang ist diese Arbeit in einen modalen Verlustfaktor umzurechnen, der nach (MARKERT 2013, S. 40) durch das Energieverhältnis

$$\eta_r = \frac{W_r}{2\pi U_r} \quad (4.54)$$

charakterisiert wird. Im betrachteten Differentialgleichungssystem 4.50 wird deshalb der äquivalente Verlustfaktor  $\bar{\eta}_r(\omega)$  gesucht, der  $W_r(\omega)$  bestmöglich abbildet. Dies wird durch Einsetzen von Gl. 4.53 in Gl. 4.54 erreicht, wodurch die Wirkung des nun frequenzabhängigen Verlustfaktors – wie in Abb. 4.18 illustriert – äquivalent zur tatsächlichen Dämpfungswirkung wird.

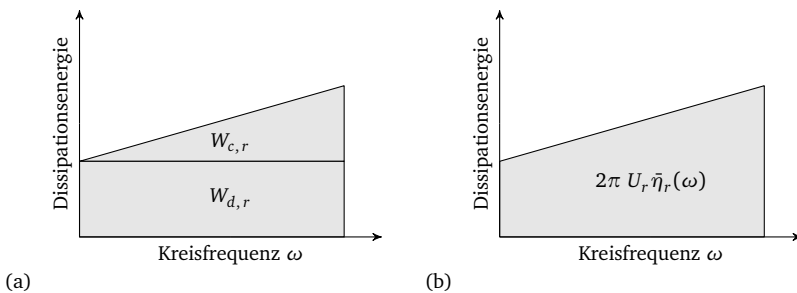


Abb. 4.18: Schematische Darstellung der Dissipationsenergie des lokal gedämpften Originalsystems (a) im Vergleich zu jener des äquivalenten Verlustfaktors (b)

Damit definiert sich der **äquivalente Verlustfaktor** unter Verwendung der Gl. 4.53, 4.54 und 2.34 (S. 13) zu

$$\bar{\eta}_r(\omega) = \frac{\{\phi\}_r^T [D] \{\phi\}_r + \omega \{\phi\}_r^T [C] \{\phi\}_r}{\omega_r^2} \quad (4.55)$$

Anschließend können die bisher deterministischen Dämpfungsmatrizen  $[C]$  und  $[D]$  analog zu Abschnitt 4.7.2 (S. 78) mit

$$\llbracket [C] \rrbracket_{\{a\}} = \llbracket [C], \overline{[C]} \rrbracket = \left[ \sum_{i=1}^j a_i [C_i], \sum_{i=1}^j \bar{a}_i [C_i] \right] \quad (4.56)$$

$$\llbracket [D] \rrbracket_{\{a\}} = \llbracket [D], \overline{[D]} \rrbracket = \left[ \sum_{i=1}^j a_i [D_i], \sum_{i=1}^j \bar{a}_i [D_i] \right] \quad (4.57)$$

ebenfalls als intervallbehaftet betrachtet werden. Der äquivalente Verlustfaktor besitzt in diesem Fall ebenfalls Intervallcharakter:

$$\bar{\eta}_r(\omega) = \left[ \bar{\eta}_r(\omega), \overline{\bar{\eta}_r(\omega)} \right] = \left[ \bar{\eta}_r(\omega, [C], [D]), \bar{\eta}_r(\omega, \overline{[C]}, \overline{[D]}) \right] \quad (4.58)$$

Die Berechnung der Umhüllenden von Amplituden- und Phasengang erfolgt in diesem Fall jeweils einmal für die untere und obere Grenze des äquivalenten Verlustfaktors. Der endgültige lokal gedämpfte intervallbasierte Frequenzgang wird anschließend durch Vereinigung dieser beiden Kurven bestimmt. Die Berücksichtigung variierender Dämpfungsparameter verdoppelt somit den Rechenaufwand des zugrunde liegenden Intervall-Frequenzgangs.

**Beispiel: Einfache Struktur.** Die in Abschnitt 4.7.2 (S. 78) im Rahmen des Intervall-Eigenwertproblems gezeigte Lagerbockstruktur wird im Folgenden auch als Beispiel für den Intervall-Frequenzgang verwendet. In Abb. 4.19 ist der Amplituden- und Phasengang des Intervall-Frequenzgangs dieser Struktur für die in Abb. 4.15 (S. 80) dargestellte Konfiguration mit **variierender Steifigkeit und Masse** und den Parametersätzen aus Tab. 4.4 (S. 80) zu sehen. Im Vergleich dazu ist das Resultat der ebenfalls bereits bekannten Monte-Carlo-Simulation des Problems mit 100 Ziehungen als Referenz eingezeichnet. Dabei ist zu erkennen, dass die Kurven der probabilistischen Simulation durch die Intervallformulierung sowohl bzgl. der Amplitude als auch der Phase hinreichend genau eingeschlossen werden, obwohl die in Abschnitt 4.7.2 (S. 78) thematisierten Abweichungen der Intervalle der Eigenvektorprodukte vorliegen. Gleichzeitig ist anzumerken, dass die Berechnung der Phase Abweichungen zeigt, sobald sich überlappende Antiresonanzbereiche auftreten. In Bezug auf die Recheneffizienz ist für die Berechnung der gezeigten Kurven insgesamt viermal die Lösung des Eigenwertproblems (siehe Tab. 4.4, S. 80) und einmal die anschließende Umrechnung in den Intervall-Frequenzgang erforderlich. Da die Umrechnung lediglich auf arithmetischen Operationen beruht, kann diese für die gezeigten Kurven auf

einem handelsüblichen Einzelplatzrechner in weniger als einer Minute durchgeführt werden.

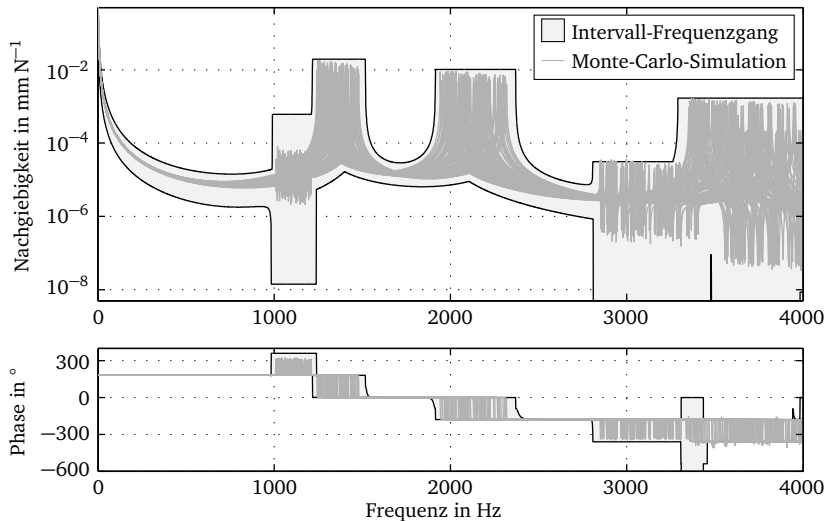


Abb. 4.19: Vergleich von Amplituden- und Phasengang des Intervall-Frequenzgangs und einer Monte-Carlo-Simulation mit 100 Ziehungen für die Freiheitsgrade  $j$  und  $k$  der Lagerbockstruktur bei variierender Masse und Steifigkeit und konstanter Dämpfung

Um den Algorithmus auch für die Berücksichtigung **variierender lokaler Dämpfung** zu verifizieren, wurde das Modell der Lagerbockstruktur modifiziert und – wie in Abb. 4.20 (S. 92) illustriert – mit einer gedämpften Skalarverbindung mit variierendem Dämpfungsparameter und -ansatz versehen. Anschließend wurde die Lösung von drei Parametersätzen bestimmt, die sich – wie ebenfalls in Abb. 4.20 (S. 92) ersichtlich – ohne Veränderung von Steifigkeits- oder Masseeigenschaften aus einem Modell mit geringer hysteretischer Dämpfung, einem mit hoher hysteretischer Dämpfung und einem Modell mit hoher viskoser Dämpfung zusammensetzen. Abb. 4.21 (S. 92) zeigt den Amplituden- und den Phasengang dieser drei deterministischen Modelle im Vergleich zu einem Intervall-Frequenzgang, der mit Hilfe des äquivalenten Verlustfaktors berechnet wurde. Als Eingangsdaten für den Intervall-Frequenzgang wurden die modalen Modelle der drei genannten Parametersätze übergeben. Dabei ist abhängig vom Parametersatz eine starke lokale Wirkung der Dämpfung auf einzelne Moden zu beobachten. Trotz der Vernachlässigung der nicht-diagonalen Anteile der Dämpfungsmatrizen approximiert der Intervall-Frequenzgang jedoch die deterministischen Modelle sowohl bzgl. der Amplitude als auch der Phase mit hinreichender Genauigkeit. Die abweichende Phase des deterministischen Modells

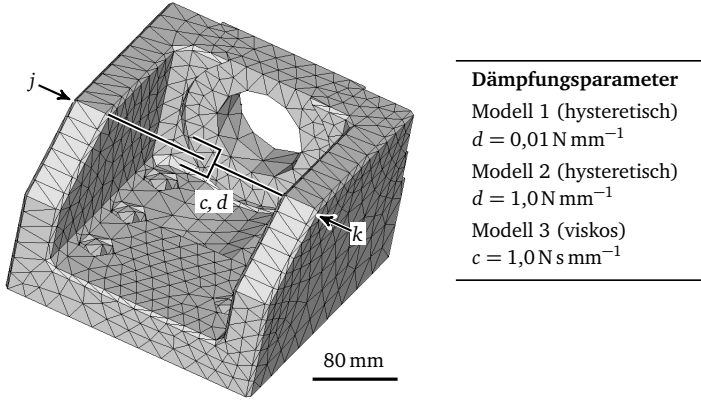


Abb. 4.20: Finite-Elemente-Modell einer Lagerbockstruktur mit variabler gedämpfter Skalarverbindung und den betrachteten Freiheitsgraden  $j$  und  $k$

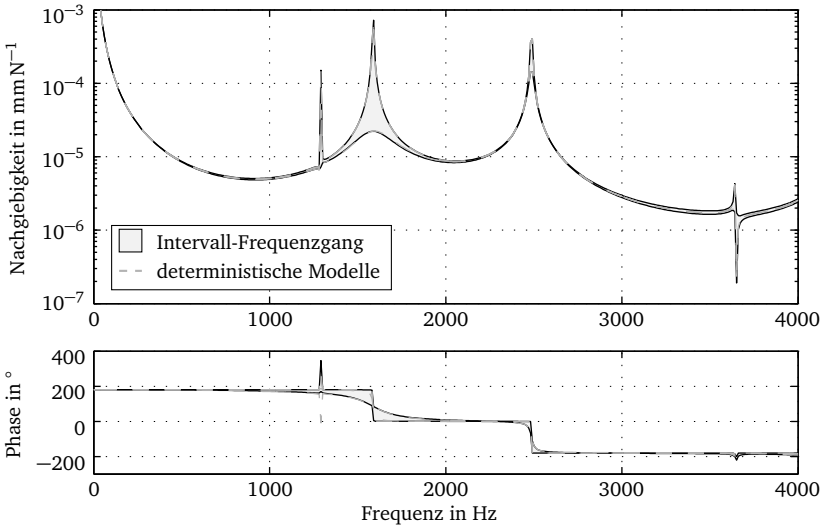


Abb. 4.21: Vergleich von Amplituden- und Phasengang des Intervall-Frequenzgangs und dreier deterministischer Modelle für die Freiheitsgrade  $j$  und  $k$  der Lagerbockstruktur mit variierender gedämpfter Skalarverbindung und konstanter Masse und Steifigkeit



bei etwa 1300 Hz ist dabei auf die Glättung von Phasensprüngen  $> 360^\circ$  zur besseren graphischen Darstellung zurückzuführen. Das in diesem Abschnitt beschriebene Intervallverfahren ist somit zur recheneffizienten Approximation von Frequenzgängen von Modellen sowohl mit unsicheren Steifigkeits- und Masseneigenschaften als auch mit unsicheren lokalen Dämpfungseigenschaften geeignet. Es kann deshalb auch für vergleichsweise große dynamische Modelle von Werkzeugmaschinenstrukturen mit vertretbarem Rechenzeitaufwand eingesetzt werden.

## 4.8 Anmerkungen zur Anwendung der Methode

In diesem Kapitel wurde ausgehend von theoretischen Erwägungen zur Prognosefähigkeit eine Methode ausgearbeitet, mit welcher prognosefähige Modelle erstellt werden können. Der Fokus lag dabei auf der Anwendbarkeit der präsentierten Verfahren und Kriterien für dynamische Modelle von Werkzeugmaschinenstrukturen. Neben geeigneten Adäquanzkriterien und deren Darstellung, der formalisierten Beschreibung des Modellierungsprozesses und der Charakterisierung der Modellannahmen wurden Möglichkeiten zur Quantifizierung aleatorischer und zur Begrenzung epistemischer Unsicherheiten aufgezeigt. Außerdem wurde eine Möglichkeit der recheneffizienten Integration von Unsicherheiten in Modelle vorgestellt. In Bezug auf die Begrenzung der epistemischen Unsicherheiten wurde jedoch ausgeführt, dass mit den erörterten Verfahren nur erkannte epistemische Unsicherheiten behandelt werden können. Es stellt sich deshalb die Frage, inwieweit die bisher noch nicht betrachteten **verdeckten epistemischen Unsicherheiten** (siehe Abb. 4.8, S. 66) begrenzt werden können, um die zuvor erarbeitete Prognosefähigkeit nicht zu beeinträchtigen. Hierfür ist einerseits die Zahl der Fehlerquellen zu minimieren und damit die Modellierungskette von der CAD-Geometrie bis zur Erstellung des Finite-Elemente-Modells so kurz wie möglich zu halten. Andererseits sind wiederholt anfallende Tätigkeiten bestmöglich zu automatisieren, um Fehler durch manuelle Eingaben prinzipiell zu verhindern. Im Verlauf der Erstellung der vorliegenden Arbeit haben sich dabei die in Tab. 4.5 (S. 94) aufgeführten Maßnahmen als hilfreich erwiesen und liegen sämtlichen hier vorgestellten Berechnungsergebnissen zugrunde. Die angesprochenen Vorlagen für Parametersätze, mit welchen die Definition der Lastfälle und der Solvereinstellungen vorgenommen wird, sind für den in der vorliegenden Arbeit verwendeten Finite-Elemente-Solver MSC.Nastran<sup>®</sup> beispielhaft in Anhang A.5 (S. 177) zu finden.

1. Definition von Positionen – z. B. für Frequenzgänge – durch Koordinaten anstatt durch Knotennummern, geeignete Knoten werden automatisch bestimmt.
  2. Automatischer Bezug und Zuweisung von Materialdaten aus Datenbanken.
  3. Vermeidung von Austauschformaten wie STEP beim Geometrieimport, da hierbei oftmals nicht geschlossene Konturen oder sehr kleine Kanten entstehen; stattdessen Vereinfachung der parametrischen Volumengeometrie im CAD, direkter Import und anschließende Vernetzung.
  4. Automatisierte Vernetzung mit festen Qualitätskriterien (minimale und maximale Elementgröße, maximales Aspektverhältnis und maximaler Innenwinkel).
  5. Generierung von Lastfällen und Solvereinstellungen – bspw. für Frequenzgangberechnungen oder Modalanalysen – mit Hilfe von Vorlagen, um bei jeder Berechnung denselben Parametersatz zu verwenden.
  6. Einsatz einer Residuenkorrektur und Berücksichtigung der doppelten Bandbreite des gewünschten Frequenzbereichs bei der modalen Superposition von Frequenzgängen.
  7. Plausibilitätsüberprüfung von Modellmasse und Aufstell- bzw. Starrkörpermoden.
  8. Minimierung der Wechsel zwischen Softwareumgebungen oder Dateiformaten. Verwendung direkt lesbarer oder mit Drittsoftware kontrollierbarer Schnittstellenformate (ASCII-Format), um Probleme beim Datenaustausch zu erkennen.
- 

Tab. 4.5: Maßnahmen zur Begrenzung verdeckter epistemischer Unsicherheiten

## 5 Prognosefähige Modellierung von Werkzeugmaschinenstrukturen

### 5.1 Zielsetzung der Modellierung

Nachdem im vorhergehenden Kapitel 4 (S. 55) die für die Erstellung von prognosefähigen Modellen notwendigen Verfahren und Kriterien diskutiert wurden, können diese nun auf die in Werkzeugmaschinenstrukturen vorhandenen Komponenten angewandt werden. Die entstehenden Modelle sollen dabei – wie bereits in Abschnitt 4.1.3 (S. 59) erwähnt – linearen Charakter besitzen und das reale System im Sinne der in Tab. 4.1 (S. 62) aufgeführten Adäquanzkriterien abbilden. Die Beschränkung auf lineare Modelle dient dazu, einerseits die Komplexität und damit die Fehleranfälligkeit des Gesamtmodells zu verringern und andererseits den Aufwand zur Modellerstellung zu begrenzen. Darüber hinaus setzt die bei Werkzeugmaschinen übliche Beschreibung des dynamischen Verhaltens im Frequenzbereich (siehe Abschnitt 2.2.2, S. 7) lineares Systemverhalten voraus, sodass eine nichtlineare Modellierung in den meisten Fällen ohnehin von eingeschränktem Nutzen für den Anwender wäre. In der vorliegenden Arbeit wird deshalb die Annahme getroffen, dass die im realen System vorliegenden Effekte sowohl bekannt als auch mit hinreichender Genauigkeit **linearisierbar** sind, was angesichts der in der Literatur vorhandenen Untersuchungen und Modellansätze (siehe Abschnitt 2.4, S. 29) als gerechtfertigt angesehen werden kann. Ferner wird bei sämtlichen betrachteten Komponenten davon ausgegangen, dass es sich um Gutteile handelt, deren Eigenschaften sich innerhalb der vorgegebenen Spezifikationen bewegen und die daher lediglich mit **zulässigen Fertigungs- und Montagetoleranzen** behaftet sind. Zudem sollen die erarbeiteten Modelle als virtuelle Prototypen einsetzbar sein. Das bedeutet, dass sie in einem Entwicklungsstadium der Maschine angewandt werden können, in welchem kein Prototyp und dementsprechend **keine experimentellen Daten** verfügbar sind. Um auf Basis des vorhandenen Wissens zu prognosefähigen Komponentenmodellen zu gelangen, wird bzw. werden im Folgenden für jede Komponente die Ausgangssituation für die Modellierung und – sofern erforderlich – vorhandene Ansätze bzw. messtechnische Erkenntnisse diskutiert, bevor darauf aufbauend mit Hilfe der in Kapitel 4 (S. 55) vorgestellten Methode eine prognosefähige Modellierung abgeleitet wird. Hierbei kann sämtlichen als gültig charakterisierten Modellannahmen entweder – wie in Abschnitt 4.4 (S. 66) beschrieben – keine Unsicherheit zugeordnet werden oder die betreffende Annahme hat sich in der Literatur (siehe Kapitel 2, S. 3) als hinreichend genau erwiesen, um in Bezug auf die Adäquanzkriterien (siehe Tab. 4.1, S. 62) allenfalls vernachlässigbare Ungenauigkeiten in das Modell einzubringen. Darüber hinaus finden bei Unsicherheiten, die sowohl aleatorische als auch epistemische Anteile

besitzen, nur die bzgl. der Adäquanzkriterien relevanten Anteile Eingang in die Charakterisierung. Die resultierenden Modelle können aufgrund der Betrachtung von jeweils einer Bauweise oder Konfiguration naheliegenderweise nicht den Anspruch auf Allgemeingültigkeit erheben. Durch die Tatsache, dass sämtliche Modellannahmen und die damit verbundenen Unsicherheiten transparent dargestellt werden, dürfte jedoch eine Adaption der hier vorgestellten Ansätze an weitere Bauweisen oder Konfigurationen mit geringem Aufwand möglich sein.

## 5.2 Strukturbauteile

Im Folgenden wird ein prognosefähiger Modellierungsansatz für Strukturbauteile vorgestellt, der ebenfalls in SCHWARZ ET AL. (2014) zu finden ist.

**Ausgangssituation für die Modellierung.** Strukturbauteile von Werkzeugmaschinenstrukturen – wie der in Abb. 5.1a dargestellte Maschinenständer aus Guss – werden ausgehend von der Geometrie der Komponente modelliert.

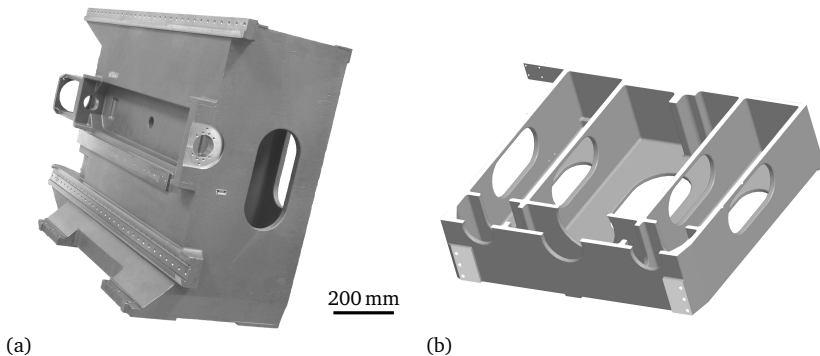


Abb. 5.1: Maschinenständer aus Guss (a) und Querschnitt des zugehörigen CAD-Modells (b)

Diese liegt gewöhnlich in Form eines parametrischen, dreidimensionalen CAD-Modells (siehe Abb. 5.1b) vor, in welchem sämtliche Maße und die funktionsrelevanten Toleranzen hinterlegt sind. Die Bemaßungen definieren sowohl alle unbearbeiteten und spanend bearbeiteten Flächen als auch Geometrielemente wie etwa Bohrungen und Gewinde. Zusätzlich sind die für die Herstellung eingesetzten Fertigungsverfahren (Gießen, Schweißen, Fräsen usw.) sowie ein entsprechend geeigneter Werkstoff und dessen dynamisch relevante Kennwerte bekannt. Für die Modellierung stehen somit die in Tab. 5.1 aufgeführten Informationen zur Verfügung.

- 
1. CAD-Modell mit Geometriemerkmalen, Maßen und funktionsrelevanten Toleranzen
  2. Eingesetzte Fertigungsverfahren
  3. Werkstoff sowie zugehörige dynamisch relevante Kennwerte
- 

Tab. 5.1: Für die Modellierung vorhandene Informationen

Im Fall des in Abb. 5.1a gezeigten Maschinenständers handelt es sich bei dem Werkstoff um den Sphäroguss EN-GJS-600, der nach DIN EN 1563 genormt ist und dessen dynamisch relevante Kennwerte in Tab. 5.2 zusammengefasst sind. Zudem ist bekannt, dass der Werkstoff ein frequenzunabhängiges Dämpfungsverhalten zeigt.

---

Elastizitätsmodul	$E$	$1,74 \cdot 10^5 \text{ N mm}^{-2}$
Querkontraktionszahl	$\nu$	0,275
Dichte	$\rho$	$7,2 \cdot 10^{-9} \text{ t mm}^{-3}$

---

Tab. 5.2: Dynamisch relevante Kennwerte von EN-GJS-600 nach DIN EN 1563

### 5.2.1 Diskussion vorhandener Ansätze

In Abschnitt 2.4.1 (S. 30) werden zwei Ansätze genannt, die bei der Modellierung von Strukturbauteilen Verwendung finden: die Abbildung der Geometrie mittels zweidimensionaler Schalenelemente einerseits und mittels dreidimensionaler Volumenelemente andererseits. Da die verrippte Geometrie des im vorigen Abschnitt gezeigten Maschinenständers eine Verwendung beider Ansätze zulässt, können beide im Folgenden hinsichtlich ihrer Prognosefähigkeit überprüft werden. Für den Modell-aufbau werden – wie ebenfalls in Abschnitt 2.4.1 (S. 30) erläutert – zunächst sämtliche in der CAD-Geometrie vorhandenen Details wie Fasen, Bohrungen und Rundungen unterdrückt. Im Fall der Vernetzung mit Schalenelementen werden anschließend sämtliche Wandstärken der vereinfachten Geometrie durch einen Algorithmus bestimmt und in der jeweiligen Mittelebene mit drei- und viereckigen Schalenelementen zweiter Ordnung vernetzt. Das Ergebnis für eine Elementgröße von 30 mm ist in Abb. 5.2a (S. 98) zu sehen. Im Fall der Verwendung von Volumenelementen wird die vereinfachte Geometrie direkt mit Tetraedern zweiter Ordnung vernetzt, was für eine Elementgröße zwischen 10 mm und 30 mm zu dem in Abb. 5.2b (S. 98) dargestellten Finite-Elemente-Modell führt. Naheliegenderweise sind dabei für die Modellierung mittels Schalenelementen umfangreichere Geometrievereinfachungen als beim Einsatz von Volumenelementen erforderlich. Um die Interpolationsfähigkeit sicherzustellen, besitzen die Elemente beider Modelle ein maximales Aspektverhältnis von  $\hat{\sigma} = 6$ . Für die Beurteilung der Prognosefähigkeit wurde für beide Modelle ein

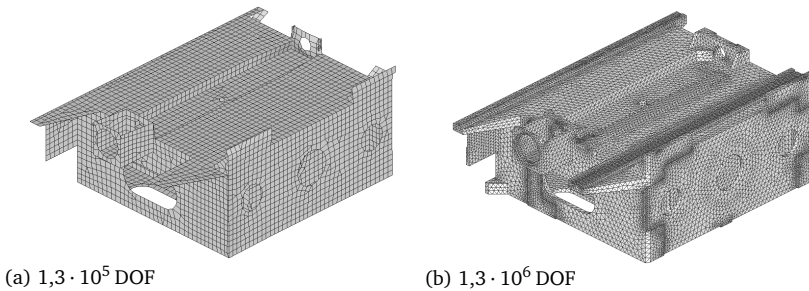


Abb. 5.2: Modellierung des Maschinenständers mittels (a) Schalen- und (b) Volumenelementen

isotropes Materialmodell sowie ein gekoppelter Massenansatz mit den in Tab. 5.2 (S. 97) aufgeführten Parametern hinterlegt und anschließend das Eigenwertproblem gelöst. Um eine entsprechende experimentelle Datenbasis zur Verfügung zu haben, wurde einerseits die Masse der realen Struktur  $m_x$  mittels Kranwaage zu 1,2525 t bestimmt und andererseits eine experimentelle Modalanalyse der aufgehängten Struktur mit 26 über die Außenkontur verteilten Messpunkten durchgeführt. Die daraus resultierenden Massenverhältnisse  $m_x/m_A$  (siehe Gl. 2.94, S. 45) sind für die betrachteten Modelle in Tab. 5.3 angegeben.

Modell mit Schalenelementen	$m_x/m_A$	1,05
Modell mit Volumenelementen	$m_x/m_A$	1,08

Tab. 5.3: Massenverhältnis der betrachteten Modelle

Die Vergleiche von experimentellen und analytischen Eigenvektoren mittels MAC-Wert für die Sturkturmoden 1 bis 16 im Frequenzbereich von 0 Hz bis 800 Hz sind in den Abb. 5.3a und 5.3b illustriert. Bei Betrachtung von Tab. 5.3 und Abb. 5.3 ist zu erkennen, dass beide Modelle nicht den in Abschnitt 4.1.3 (S. 59) definierten Adäquanzkriterien genügen und somit im vorliegenden Zustand nicht als prognosefähig bezeichnet werden können. Insbesondere die Eigenvektoren weisen signifikante Abweichungen zwischen analytischem und experimentellem Modell auf, wobei das Modell mit Volumenelementen eine geringfügig höhere Übereinstimmung als das Modell mit Schalenelementen erreicht. Auf eine Betrachtung von Eigenfrequenzen oder Frequenzgängen wird hier verzichtet, da in Anbetracht der gezeigten MAC-Vergleichsmaße nur bei einzelnen Eigenfrequenzen eine eindeutige Zuordnung möglich wäre und daher auch die Frequenzgänge nur eine geringe Vergleichbarkeit aufweisen würden.

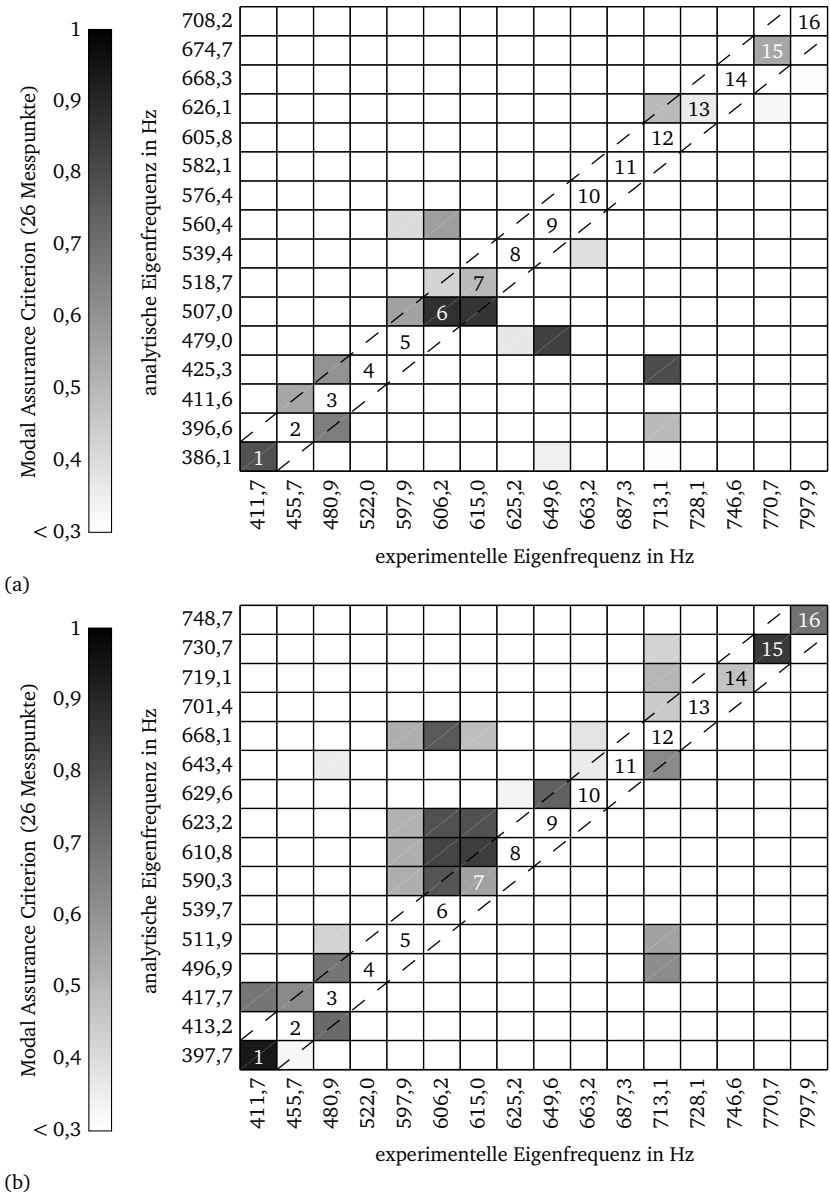


Abb. 5.3: MAC-Vergleichsmaß der Modelle mit (a) Schalen- und (b) Volumenelementen für die Strukturmoden 1 bis 16 des betrachteten Maschinenständers

### 5.2.2 Ableitung einer prognosefähigen Modellierung

Da sich die in der Literatur beschriebenen Modellierungsansätze für Strukturbauteile in der bisher betrachteten Form als nicht prognosefähig erwiesen haben, sind die Ursachen für die beschriebenen Abweichungen zu suchen und zu beheben. Dafür wird im Folgenden die in Abschnitt 4.2 (S. 62) beschriebene Methode eingesetzt. Aufgrund der Tatsache, dass der Modellierungsansatz mit Volumenelementen im Vergleich zu demjenigen mit Schalenelementen sowohl eine höhere Übereinstimmung für den betrachteten Maschinenständer liefert als auch eine höhere Allgemeingültigkeit für beliebig geformte Strukturbauteile besitzt, wird dieser für die folgenden Erwägungen herangezogen. Unter Verwendung der in Abschnitt 4.3 (S. 63) vorgestellten Beschreibungsform lässt sich der Modellierungsprozess für Strukturbauteile mit Volumenelementen durch die in Tab. 5.4 aufgeführten Annahmen ausdrücken. Da hiermit sämtliche Modellannahmen des gewählten Ansatzes bekannt sind, können diese im Folgenden am Beispiel des betrachteten Maschinenständers hinsichtlich etwaiger Unsicherheiten charakterisiert werden.

- 
1. *Konzeptionelle Modellierung des physikalischen Systems*
    - a) Quasi-harmonisches, schwingendes Kontinuum mit elastischen und dissipativen Eigenschaften sowie Trägheitseigenschaften.
    - b) Das System ist linear, isotrop und homogen.
    - c) Es herrschen keine Randbedingungen.
    - d) Die Geometrie der Komponente entspricht der Geometrie des CAD-Modells.
  2. *Mathematische Modellierung des konzeptionellen Modells*
    - a) Dreidimensionale Formulierung des Problems.
    - b) Hooke'sches Gesetz für das elastische Verhalten, gekoppelter Massenansatz für die Trägheitseigenschaften und Verlustfaktorenansatz für die Dissipationseigenschaften.
  3. *Diskretisierung und Algorithmus-Auswahl für das mathematische Modell*
    - a) Vereinfachung der Geometrie, um eine unverzerrte Vernetzung zu erlauben.
    - b) Vernetzung mit isoparametrischen Tetraederelementen zweiter Ordnung mit vorgegebener Größe, die auf ein niedriges Aspektverhältnis und nicht-negative Jacobi-Matrix hin überprüft wurden.
  4. *Numerische Lösung des implementierten Modells*
    - a) Parametrisierung mit den Kennwerten des Materials laut jeweiliger Normung oder Datenblatt.
    - b) Lösung des Eigenwertproblems im relevanten Frequenzbereich (z. B. 0 Hz bis 800 Hz) sowie evtl. modale Superposition des Frequenzgangs.
- 

Tab. 5.4: Modellierungsprozess von Strukturbauteilen mit Volumenelementen



**Charakterisierung der Modellannahmen aus Tab. 5.4 (S. 100).** Kontinuierliche strukturdynamische Systeme besitzen sowohl elastische als auch dissipative als auch Trägheitseigenschaften und können deshalb auch derart modelliert werden (Annahme 1a). Unter der Voraussetzung, dass der Gießprozess des Maschinenständers innerhalb der Spezifikation erfolgt ist und somit weder Lunker noch Variationen der Materialzusammensetzung vorliegen, ist eine Abbildung der Materialeigenschaften mittels linearem, isotropem und homogenem Verhalten für Belastungen im elastischen Bereich ebenfalls gerechtfertigt (Annahme 1b). Da die Struktur in aufgehängtem Zustand vermessen wurde, sind bei der Modellierung keinerlei Randbedingungen zu berücksichtigen, das Modell schwebt frei im Raum (Annahme 1c). Die Geometrie der realen Struktur muss hingegen nicht zwangsläufig dem CAD-Modell entsprechen (Annahme 1d), da der Gießprozess mit aleatorischen Unsicherheiten behaftet ist (VDG K200). Erstens werden vom Gießer Ausformschragen und Radien bestimmter Größe festgelegt, welche im CAD-Modell meist nicht vollständig berücksichtigt werden. Zweitens handelt es sich bei den für den Abguss verwendeten Sandkernen um verlorene Formen, die für jedes Exemplar mit entsprechenden Toleranzen neu aufgebaut werden, und drittens tritt während der Abkühlung Schwindung auf, sodass sich die betroffenen Bereiche im Bauteil verformen. Eine dreidimensionale Formulierung des Problems (Annahme 2a) sowie das Hooke'sche Gesetz für die Elastizität, der gekoppelte Massenansatz für die Trägheiten und der Verlustfaktorenansatz für die Dissipationseigenschaften (Annahme 2b) stellen hingegen eine hinreichend genaue Abbildung des realen Systems dar. Für eine unverzerrte Vernetzung sind Teile der Geometrie zu vereinfachen (Annahme 3a), wodurch – wie in Abschnitt 4.6.1 (S. 71) ausgeführt – epistemische Unsicherheiten entstehen. Dies gilt ebenso für die Diskretisierung der Geometrie mit unverzerrten und somit interpolationsfähigen Tetraederelementen zweiter Ordnung (Annahme 3b), die einen Diskretisierungsfehler unbekannter Größe induzieren. Vor der Bestimmung der numerischen Lösung ist zudem die Parametrisierung mit den Kennwerten des Materials erforderlich (Annahme 4a), welche bei dem betrachteten Werkstoff EN-GJS-600 ebenfalls mit aleatorischen Unsicherheiten behaftet sind. Der sphärolitisch vorliegende Graphit wird durch Impfung der Schmelze mit Magnesium erzeugt, die Wirkung des Effekts ist allerdings zeitlich begrenzt. So verbleibt nur ein enges Zeitfenster für den Abguss, bevor sich der Graphit schrittweise zur ursprünglichen, lamellaren Form zurückbildet (BERNS & THEISEN 2008, S. 150). Die Form der Graphitbildung im erstarrten Gefüge hat dabei einen wesentlichen Einfluss auf die resultierenden Materialparameter, insbesondere auf den Elastizitätsmodul (FANG ET AL. 1998). Abschließend wird – wie bei sämtlichen betrachteten Komponentenmodellen – das Eigenwertproblem numerisch gelöst und bei Bedarf werden Frequenzgänge modal superponiert (Annahme 4b). Bei korrektem Einsatz der Reduktionsverfahren (siehe Abschnitt 2.3.4, S. 23) ist dies mit vernachlässigbaren Ungenauigkeiten verbunden, weshalb dieser Schritt in den folgenden Abschnitten nicht mehr gesondert aufgeführt wird. Insgesamt ergibt sich somit die in Tab. 5.5 (S. 102) gezeigte Charakterisierung der Modellannahmen für Strukturbauteile.

Modellannahme	1a	1b	1c	1d	2a	2b	3a	3b	4a	4b
gültig	○	○	○		○	○				○
aleatorisch unsicher				○					○	
epistemisch unsicher							○	○		

Tab. 5.5: Charakterisierung der Modellannahmen für Sturkturbauteile (Tab. 5.4, S. 100)

**Quantifizierung und Begrenzung der Unsicherheiten.** Bei der Modellierung von Strukturbauteilen mit Volumenelementen beeinträchtigen somit jeweils zwei aleatorische und zwei epistemische Unsicherheiten die Inferenz zwischen Modell und realem System. Da die beiden Materialparameter  $E$  und  $\rho$  systematisch auf sämtliche Eigenfrequenzen wirken (siehe Abschnitt 4.7.2, S. 78), können unter der Annahme, dass der Einfluss der Querkontraktionszahl  $\nu$  auf  $[K]$  vernachlässigbar ist, die Unsicherheiten durch Verwendung der in Tab. 5.6 definierten fünf Modellzustände quantifiziert bzw. begrenzt werden (SCHWARZ ET AL. 2014).

Modellzustand	1	2	3	4	5
Geometrie	unverändert	angepasst	angepasst	vereinfacht	vereinfacht
Materialparameter	Nennwert	Nennwert	identifiziert	identifiziert	identifiziert
Diskretisierung	fein	fein	fein	fein	grob

Tab. 5.6: Definition der fünf Modellzustände nach SCHWARZ ET AL. (2014)

Dabei werden – wie in Abb. 5.4a ersichtlich – zunächst mit Hilfe des in Abschnitt 4.5.1 (S. 68) vorgestellten Kriteriums die Geometrieabweichungen in dynamisch relevanten Bereichen der Struktur quantifiziert, bis lediglich systematische Abweichungen der Eigenfrequenzen verbleiben. Die Geometrie ist dabei fein vernetzt und nicht vereinfacht, sodass keine epistemischen Unsicherheiten vorliegen (siehe Abb. 5.4b, Zustand 2). Anschließend können mittels dem in Abschnitt 4.5.2 (S. 69) beschriebenen Verfahren die Materialparameter identifiziert werden, um auch die zweite aleatorische Unsicherheit zu quantifizieren. Schließlich werden die epistemischen Unsicherheiten durch Geometrievereinfachungen und den Diskretisierungsfehler – begrenzt durch die entsprechenden Kriterien aus Abschnitt 4.6 (S. 71) – schrittweise eingebracht, um bei Einhaltung der zulässigen Ungenauigkeit die für einen Einbau im Gesamtmodell erforderliche Modellgröße zu erzielen (siehe Abb. 5.4b, Zustand 5).

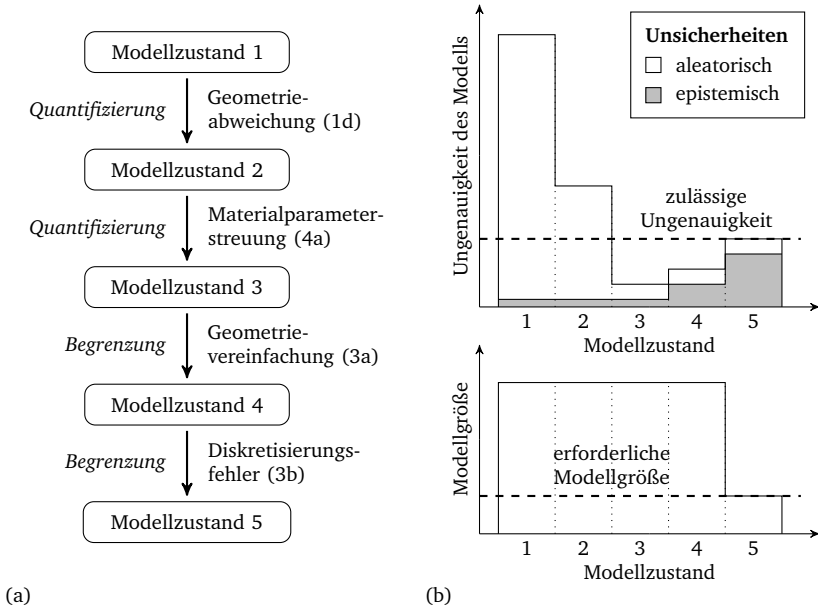


Abb. 5.4: Anordnung der fünf Modellzustände zur Quantifizierung und Begrenzung von Unsicherheiten in Modellen von Strukturbauteilen (a) sowie Verlauf von Ungenauigkeit und Modellgröße (b) in Anlehnung an SCHWARZ ET AL. (2014)

### 5.2.3 Anwendung am betrachteten Maschinenständer

In Anlehnung an SCHWARZ ET AL. (2014) wird der beschriebene Ansatz im Folgenden am betrachteten Maschinenständer veranschaulicht: Der Modellzustand 1 wurde ausgehend von der unveränderten CAD-Geometrie erzeugt, indem die enthaltenen Gewindegeometrien, Bohrungen kleiner  $\varnothing 6$  mm sowie Absätze und Fasen kleiner 1 mm unterdrückt wurden und die Vernetzung mit Tetraederelementen zweiter Ordnung und adaptiver Größe von 5 mm bis 30 mm erfolgte. Mit Hilfe der modalen Formänderungsenergiedichte wurden anschließend – wie in Abb. 5.5a (S. 104) beispielhaft für die Strukturmoden 1 bis 5 zu sehen – die dynamisch relevanten Geometriemerkmale im Bereich zwischen 0 Hz und 800 Hz identifiziert, an der realen Struktur quantifiziert und im Modell angepasst. Der auf diese Weise entstandene Modellzustand 2 weist – wie Abb. 5.6a (S. 105) belegt – im Vergleich zum vorherigen Zustand 1 signifikant geringere Abweichungen zwischen Experiment und Modell in Bezug auf die Eigenfrequenzen auf, was den Einfluss der Geometrieabweichungen durch den Gießprozess unterstreicht. In Tab. 5.7a (S. 104) sind die resultierenden Geometrieabweichungen zusammengefasst. Dabei wird deutlich, dass im ursprünglichen CAD-Modell insbe-

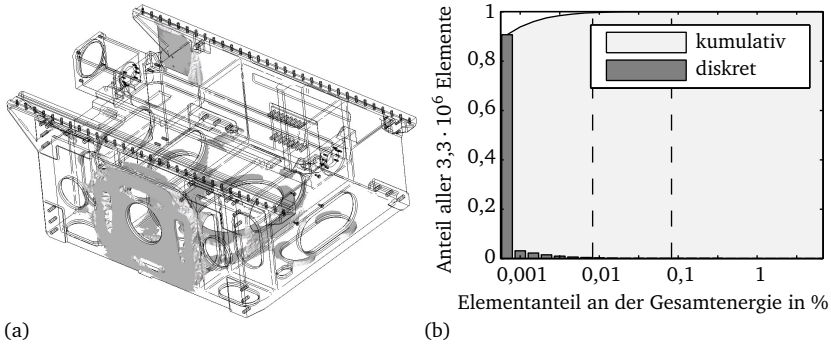


Abb. 5.5: Verteilung der modalen Formänderungsenergiedichte (a) der Strukturmoden 1 bis 5 im Modellzustand 1 sowie Verteilung der Elementanteile an der modalen Formänderungsenergie (b) für die Strukturmoden 1 bis 16 im Modellzustand 5

sondere die Wandstärken und die konkaven Radien zu klein bemast waren. Mittels Model Updating wurden im Anschluss die in Tab. 5.7b beschriebenen Materialparameter identifiziert, die nur in geringem Maße von den Nennwerten abweichen. Der daraus entstandene Modellzustand 3 weist dementsprechend – wie in Abb. 5.6a zu erkennen – nur unwesentlich geringere Abweichungen bzgl. der Eigenfrequenzen auf. Die Materialparameter stellen somit für das betrachtete Exemplar eine vernachlässigbare Unsicherheit dar. Der folgende Modellzustand 4 wurde durch weitere Vereinfachung der Geometrie erzeugt, indem sämtliche Bohrungen vernachlässigt und alle relevanten Radien durch flächenäquivalente Schrägen ersetzt wurden. Beim Vergleich mit dem Modellzustand 3 – dem Supermodell – zeigt sich trotz der Vereinfachungen eine weitere Verbesserung der Abweichungen bzgl. der Eigenfrequenzen (siehe Abb. 5.6a), da der Vernetzungsalgorithmus bei gleicher Elementgröße in der vereinfachten Geometrie ein Netz geringerer Verzerrung erzeugen konnte. Im letzten

Wandstärken	+5 mm	$E$	$1,76 \cdot 10^5 \text{ N mm}^{-2}$
Kerndurchbrüche	-6 mm	$\nu$	0,271
konkave Radien	+5 mm	$\rho$	$7,35 \cdot 10^{-9} \text{ t mm}^{-3}$
(a) Geometrieabweichungen (Mittelwerte)		(b) Materialparameter	
$m_X/m_A$		1,00	
(c) Massenverhältnis im Modellzustand 5			

Tab. 5.7: Exemplarparameter des betrachteten Maschinenständers nach der Quantifizierung



Schritt wurde der Modellzustand 5 durch die Vernetzung mit Elementen adaptiver Größe zwischen 10 mm und 30 mm aufgebaut. Durch die Begrenzung der Elementanteile an der modalen Formänderungsenergie auf maximal 0,1 % (siehe Abb. 5.5b, S. 104) treten durch den Diskretisierungsfehler der größeren Elemente im Vergleich zum Modellzustand 4 – wie in Abb. 5.6a (S. 105) erkennbar – bei deutlicher Reduktion der Freiheitsgrade nur geringe zusätzliche Abweichungen bzgl. der Eigenfrequenzen auf. In Bezug auf die Adäquanzkriterien zeigt der finale Modellzustand 5 neben der Erfüllung des Kriteriums für die Eigenfrequenzen und einer aus dem Model Updating zwangsläufig resultierenden Erfüllung des Massekriteriums (siehe Tab. 5.7c, S. 104) eine höhere Übereinstimmung der Eigenvektoren: Wie in Abb. 5.6b (S. 105) zu sehen, weist die MAC-Matrix im Gegensatz zu Abb. 5.3 (S. 99) Diagonalgestalt auf. Ein großer Anteil der Moden erfüllt zudem den geforderten MAC-Wert  $> 0,7$ . Gleichzeitig werden hier auch Grenzen des beschriebenen Modellierungsansatzes sichtbar, da einige Moden (4, 8, 11 und 13) nach wie vor nicht abgebildet werden können. Auf einen Vergleich von Resonanzamplituden wird hier verzichtet, da der hier verwendete Versuchsaufbau nicht für eine reproduzierbare Vermessung der Materialdämpfung optimiert wurde und daher die Messdaten durch Fremddämpfung beeinflusst sind (siehe hierzu auch ZÄH ET AL. 2011).

### 5.3 Aufstellelemente

**Ausgangssituation für die Modellierung.** Die Modellierung von Aufstellelementen erfolgt ausgehend von der vom Hersteller des Elements zur Verfügung gestellten Dokumentation und den Merkmalen der Maschinenstruktur, für welche das Element als Auflager dienen soll. In der vorliegenden Arbeit wird das in Abb. 5.7a enthaltene Element betrachtet, in welchem – wie in Abb. 5.7b zu sehen – die Höhenverstellung durch zwei gegenläufige, über eine Stellschraube betätigte Keile realisiert wird. Das Element wird über eine Gewindestange mit der Maschinenstruktur verspannt, wobei die maschinenseitige Auflagefläche für den Ausgleich von Winkelfehlern (unter Vernachlässigung der Reibung) momentenfrei gestaltet ist. Vom Hersteller wird für das Aufstellelement im vorgespannten Zustand die in Tab. 5.8 aufgeführte Steifigkeit in vertikaler Richtung angegeben.

Steifigkeit (vertikal)	$k$	$6000 \text{ N} \cdot \mu\text{m}^{-1}$
------------------------	-----	---

Tab. 5.8: Dynamisch relevante Eigenschaften des betrachteten Aufstellelements im vorgespannten Zustand nach NIVELL (2014)

Zudem ist eine Möglichkeit zur Verschraubung des Elements mit dem darunterliegenden Fundament vorgesehen, welche bei der in der vorliegenden Arbeit betrachteten Maschinenstruktur (siehe Abb. 2.1, S. 5) laut Montagevorschrift allerdings nicht

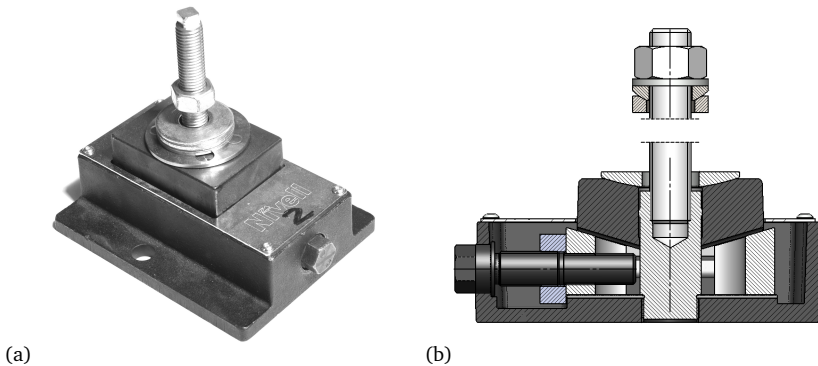


Abb. 5.7: Betrachtetes Aufstellelement (a) sowie Querschnitt des zugehörigen CAD-Modells (b) mit Keilkinematik und momentenfreier Auflage (beide weiß) nach NIVELL (2010)

genutzt wird. Die Elemente stehen stattdessen lediglich auf dem Boden, ein Anziehdrehmoment für die Gewindestange ist nicht vorgegeben. Das Bett der betrachteten Maschinenstruktur ist auf drei derartigen Elementen und damit statisch bestimmt gelagert. Aus dem CAD-Modell lässt sich unter Berücksichtigung von Masse und Schwerpunkt der jeweilige auf die drei Elemente wirkende Anteil der Gewichtskraft der Maschine bestimmen, die für die betrachtete Maschinenstruktur je Element zwischen 14 kN und 23 kN beträgt. Als Ausgangspunkt für die Modellierung dienen somit die in Tab. 5.9 beschriebenen Informationen.

- 
1. Kinematik des verwendeten Elements
  2. Steifigkeit in Vertikalrichtung im vorgespannten Zustand
  3. Statische (Un-)Bestimmtheit des Maschinenbetts
  4. Gewichtskraft der Maschine an den Aufstellpunkten
  5. Montagevorschriften
- 

Tab. 5.9: Für die Modellierung vorhandene Informationen

### 5.3.1 Experimentelle Charakterisierung

Aufstellelemente wie das hier betrachtete können nach MEIDLINGER (2008, S. 43 ff.) mit linearen, elastisch-dissipativen Skalarverbindungen abgebildet werden. Dabei sind Abhängigkeiten von den Einbaubedingungen des betrachteten Systems zu berücksichtigen, darunter der **Verspannungszustand des Elements** in vertikaler Richtung.

Da hierzu für das betrachtete Aufstellelement keinerlei Informationen vorlagen, wurde auf einem geeigneten Prüfstand die Verlagerung in mehreren Ausfahrzuständen bei ansteigender statischer Druckbelastung zwischen 0 kN und 20 kN gemessen. Die resultierenden Federkennlinien sind in Abb. 5.8a ersichtlich.

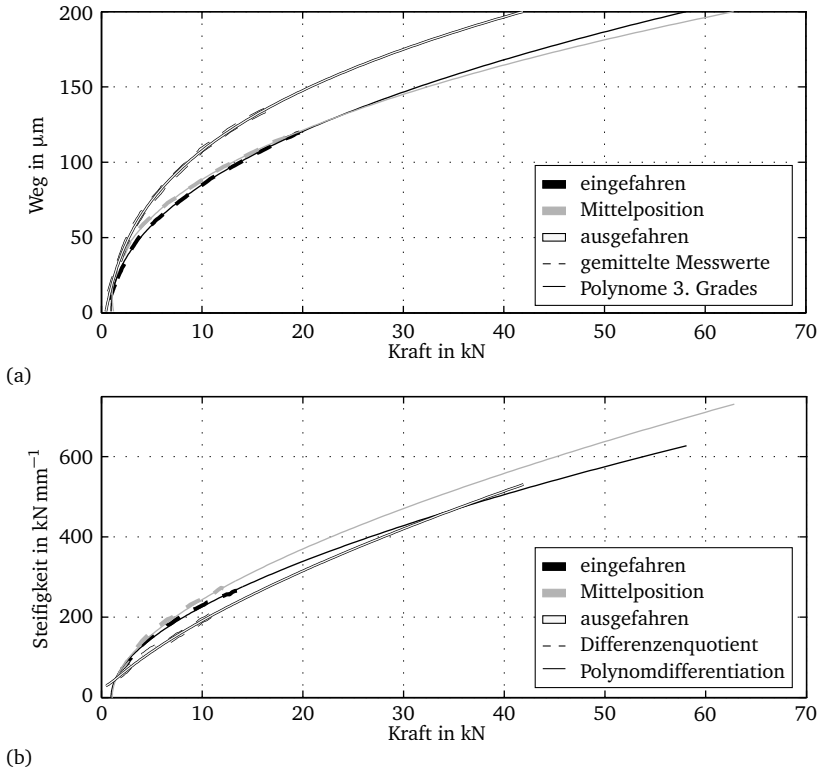


Abb. 5.8: Experimentell ermittelte Federkennlinien des Aufstellelements in vertikaler Richtung in Abhängigkeit des Ausfahrzustands (a) und zugehörige Steifigkeitskennlinien (b)

Hierbei ist zu erkennen, dass die Kennlinien einerseits nichtlinear bzgl. der Kraft sind und zusätzlich vom Ausfahrzustand des Aufstellelements abhängen. Um die während des Versuchs unvermeidliche Verkippung des Elements kompensieren zu können, wurden Wegaufnehmer jeweils diagonal versetzt an zwei Ecken des Keilelements angebracht, beide Wege aufgenommen und der Versuch anschließend mit den beiden übrigen Ecken wiederholt. Die dargestellten Messkurven ergeben sich somit aus dem Mittelwert von jeweils vier Datenreihen. Zusätzlich wurden die gemittelten Messwerte in einer Ausgleichsrechnung mit Polynomen dritten Grades approximiert. In



Abb. 5.8b sind die auf Basis der Federkennlinien bestimmten Steifigkeitskennlinien zu sehen. Die Berechnung erfolgte einerseits numerisch mit Hilfe der vorhandenen Messdaten und eines zentralen Differenzenquotienten sowie andererseits analytisch durch Differentiation der Polynome aus der Ausgleichsrechnung. Beide Berechnungsverfahren liefern übereinstimmende Werte, sodass damit innerhalb und bei Extrapolation auch außerhalb des gemessenen Bereichs das Steifigkeitsverhalten der Aufstellelemente unter Vorlast als bekannt angesehen werden kann. Im Rahmen einer weiteren experimentellen Untersuchung wurde der Einfluss der **Montagesteuerungen** der Aufstellelemente auf das dynamische Verhalten der betrachteten Maschinenstruktur erfasst. Dazu wurden jeweils Modalanalysen des Maschinenbetts auf den Aufstellelementen durchgeführt und die Eigenfrequenzen bei Messwiederholung, bei Auf- und wieder Absetzen des Maschinenständers, bei einer Vertauschung der Elemente und bei einem Anheben und erneuten Montieren des Maschinenbetts bestimmt. Die Versuche fanden auf dem Betonboden in der Versuchshalle des Instituts für Werkzeugmaschinen und Betriebswissenschaften der TU München statt, die Elemente waren in mittlerem Ausfahrzustand handfest verschraubt. In Abb. 5.9 sind die jeweiligen relativen Abweichungen über den Mittelwerten der gemessenen Eigenfrequenzen angetragen.

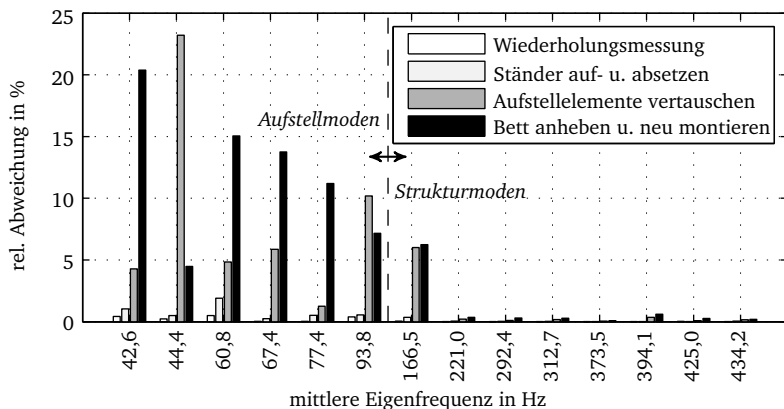


Abb. 5.9: Relative Abweichungen der Eigenfrequenzen 1 bis 14 des Maschinenbetts auf den betrachteten Aufstellelementen bei verschiedenen Montageschritten (Einzelversuche)

Neben den Eigenfrequenzen verändern sich auch die Eigenvektoren bzw. deren Reihenfolge, sodass die gezeigten Streuungen nicht bzgl. der Schwingungsform sortiert sind. Dabei kann festgehalten werden, dass bei den betrachteten Aufstellelementen weder Setzeffekte noch Veränderungen durch Lastschwankungen nennenswerten Einfluss auf das dynamische Verhalten haben. Eine erneute Montage – die auch beim Vertauschen der Aufstellelemente erforderlich ist – verändert Eigenfrequenz und

-form der Aufstellmoden sowie einzelner niederfrequenter Strukturmoden hingegen erheblich. Erklärungsansätze für die beobachteten Streuungen stellen einerseits mögliche Streuungen beim Anziehdrehmoment und andererseits die nicht eindeutig festgelegte Lage der Keile zum Grundkörper des Aufstellelements dar (siehe auch Abb. 5.7b, S. 107). Der bewegliche obere Teil des Elements kann deshalb beim Aufsetzen des Betts verkippen, wodurch sich der Kraftfluss im Element ebenfalls verändert.

### 5.3.2 Ableitung einer prognosefähigen Modellierung

Die in der messtechnischen Charakterisierung der betrachteten Aufstellelemente beobachteten Nichtlinearitäten und Streuungen legen nahe, dass einer linearen, deterministischen Modellierung in diesem Fall Grenzen gesetzt sind. Eine prognosefähige Modellierung wird dementsprechend nur in einem linearisierten Arbeitspunkt gültig sein und nicht-deterministische Anteile enthalten müssen, um die gemessenen Streuungen abzudecken. Aufbauend auf dem Ansatz von MEIDLINGER (2008, S. 43 ff.) ist in der Tab. 5.10 der Modellierungsprozess für Aufstellelemente mit Hilfe der Beschreibungsform aus Abschnitt 4.3 (S. 63) zusammengefasst. Für den Einsatz dieses Modells ist jedoch die Kenntnis der Vorspannkraft durch die Gewindestange erforderlich.

**Vorspannkraft der Gewindestange.** Eine Möglichkeit zur Berechnung der durch die verschraubte Gewindestange aufgebrachten Montagevorspannkraft  $F_M$  ist nach VDI 2230 BLATT 1 (S. 67) über den Zusammenhang

$$F_M = \frac{M_A}{0,16 P + 0,58 \mu d_2 + 0,25 \mu (d_w + D_{Ki})} \quad (5.1)$$

gegeben.  $M_A$  ist hierbei das Anziehdrehmoment,  $P$  die Gewindesteigung,  $\mu$  die Reibzahl für Schraubenkopf und -gewinde,  $d_2$  der Flankendurchmesser des Schraubengewindes und  $d_w$  der Außen- bzw.  $D_{Ki}$  der Innendurchmesser der ebenen Kopfauflagefläche der Schraube. Die Reibzahlen für Schraubenkopf und -gewinde werden in der vorliegenden Arbeit vereinfachend als gleich groß angenommen. Für das betrachtete Aufstellelement mit einer M20-Gewindestange ergibt sich bspw. bei einem Anziehdrehmoment von 50 N m – dies entspricht in etwa dem handfesten Anziehen mit einem passenden Gabelschlüssel – für eine Reibzahl von 0,12 eine Montagevorspannkraft von 15,6 kN.

**Charakterisierung der Modellannahmen aus Tab. 5.10 (S. 111).** Das Aufstellelement verbindet die Maschinenstruktur mit dem Fundament, eine Vernachlässigung der dynamisch relevanten Masse des Elements gegenüber der übrigen Struktur ist hierbei gerechtfertigt (Annahme 1a). Die elastischen und dissipativen Eigenschaften

- 
1. *Konzeptionelle Modellierung des physikalischen Systems*
    - a) Abbildung des Aufstellelements als masseloses Übertragungsglied zwischen Fundament und Maschine.
    - b) Elastische und dissipative Eigenschaften werden im Arbeitspunkt linearisiert, die dynamischen Kräfte sind im Vergleich zu den statischen vernachlässigbar.
    - c) Die elastischen und dissipativen Kräfte des Elements wirken in die translatorischen Richtungen des Übertragungsglieds.
    - d) Das Fundament ist nicht nachgiebig.
    - e) Die Positionen von Maschine und Aufstellelementen entsprechen dem CAD-Modell.
  2. *Mathematische Modellierung des konzeptionellen Modells*
    - a) Hooke'sches Gesetz für das elastische Verhalten, Verlustfaktorenansatz für die vertikale und Dämpfungskonstantenansatz für die horizontale Dissipation.
  3. *Diskretisierung und Algorithmus-Auswahl für das mathematische Modell*
    - a) Elastisch-dissipative Skalarverbindung in den drei translatorischen Richtungen, beide Enden der Skalarverbindung liegen aufeinander.
    - b) Die maschinenseitige Auflagefläche des Aufstellelements wird mittels RBE2-Starrkörperelement auf einen Knoten zentriert, der sich in der geometrischen Mitte der Fläche befindet. Hier ist die Skalarverbindung angebunden.
    - c) Die Verschiebungen am fundamentseitigen Ende der Skalarverbindung sind gleich Null.
  4. *Numerische Lösung des implementierten Modells*
    - a) Parametrisierung der Steifigkeiten, Verlustfaktoren und Dämpfungskonstanten entsprechend dem Vorspann- und Ausfahrzustand in vertikaler Richtung.
- 

Tab. 5.10: Modellierungsprozess für Aufstellelemente (ohne Elastomerplatten)

des Elements besitzen nichtlinearen Charakter (siehe Abb. 5.8b, S. 108), wobei Abhängigkeiten von der Vorlast und dem Ausfahrzustand bestehen. Da das Element durch die Gewichtskraft und die Verschraubung auf mehr als 30 kN statisch vorgespannt wird, die dynamischen Kräfte aus Zerspanprozess und Trägheit hingegen geringer sind, kann das Verhalten in einem Arbeitspunkt linearisiert betrachtet werden (Annahme 1b). Um die Anzahl der Modellparameter gering zu halten, werden die rotatorischen Freiheitsgrade des Elements vernachlässigt, wodurch elastische bzw. dissipative Kräfte nur in den translatorischen Freiheitsgraden wirken (Annahme 1c). Zudem wird angenommen, dass das Fundament unter dem Element nicht nachgiebig ist (Annahme 1d). Bei den beiden letztgenannten Annahmen handelt es sich um Vereinfachungen, die deshalb epistemische Unsicherheiten in das Modell einbringen. Die Position des Aufstellelements relativ zur Maschine kann während der Montage ausgerichtet werden, die damit einhergehende Unsicherheit ist somit vernachlässigbar (Annahme 1e). Das elastische und dissipative Verhalten des Elements wird mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes sowie einem Verlustfaktorenansatz für die vertikale und einem Dämpfungskonstantenansatz für die horizontalen Richtungen

modelliert (Annahme 2a). Die Dissipationsansätze wurden anhand experimentell beobachteter Frequenzabhängigkeiten – analog zu NIEHUES & ZÄH (2012) – ausgewählt und bilden zusammen mit dem Elastizitätsgesetz eine gültige Annahme, sofern die bereits diskutierte Linearität erfüllt ist. Sämtliche Ansätze werden durch eine elastisch-dissipative Skalarverbindung im Modell berücksichtigt (Annahme 3a). Um die Unabhängigkeit von Translations- und Rotationsanteilen zu erhalten, liegen beide Knoten der Verbindung aufeinander. Maschinenseitig wird die Skalarverbindung über ein Starrkörperelement (RBE2) an die Maschinenstruktur angebunden (Annahme 3b). Die durch das verschiebungsbasierte Starrkörperelement verursachte Versteifung der Maschinenstruktur kann aufgrund des kleinen Durchmessers der Fläche von 80 mm vernachlässigt werden. Fundamentseitig werden die Verschiebungen der Skalarverbindung zu Null gesetzt (Annahme 3c), was eine gültige Umsetzung der zuvor genannten Annahme 1d darstellt. Abschließend werden – abhängig vom Spannungs- und Ausfahrzustand in vertikaler Richtung – die translatorischen Einträge der Skalarverbindung mit Zahlenwerten für die Steifigkeiten, die Verlustfaktoren und die Dämpfungskonstanten parametrisiert (Annahme 4a). Diese sind mit aleatorischen Unsicherheiten behaftet, die durch die Exemplarstreuungen der Elemente einerseits und die Montagestreungen andererseits entstehen. Insgesamt ergibt sich somit die in Tab. 5.11 aufgeführte Charakterisierung der Modellannahmen für Aufstellelemente.

Modellannahme	1a	1b	1c	1d	1e	2a	3a	3b	3c	4a
gültig	○	○			○	○	○	○	○	
aleatorisch unsicher										○
epistemisch unsicher			○	○						

Tab. 5.11: Charakterisierung der Modellannahmen für Aufstellelemente (Tab. 5.10, S. 111)

**Quantifizierung und Begrenzung der Unsicherheiten.** Bei der Modellierung von Aufstellelementen ergibt sich die Problematik, dass die in Tab. 5.11 beschriebenen Unsicherheiten wechselwirken. So hat sowohl die Beschränkung des Modells auf die translatorischen Freiheitsgrade (Annahme 1c) als auch die Annahme 1d des nicht nachgiebigen Fundaments direkten Einfluss auf die identifizierten Parameter für die elastischen und dissipativen Eigenschaften (Annahme 4a), die zusätzlich mit den genannten aleatorischen Unsicherheiten behaftet sind. Anhand der in der vorliegenden Arbeit betrachteten Maschinenstruktur besteht jedoch keine Möglichkeit, die epistemischen von den aleatorischen Unsicherheiten zu trennen: Einerseits liefert die messtechnische Untersuchung der Struktur nur sechs Aufstellmoden für die Identifikation von Steifigkeits- und Dämpfungsparametern. Somit ist schon die Bestimmung der neun translatorischen Freiheitsgrade nur mit Hilfe von Randbedingungen eindeutig lösbar, bei der Berücksichtigung von weiteren neun rotatorischen

Unbekannten verschärft sich diese Problematik erheblich. Andererseits sind bzgl. des Maschinenbetts die Steifigkeiten der Aufstellelemente und des Fundaments in Reihe geschaltet, eine getrennte messtechnische Erfassung ist am betrachteten System nicht möglich. Für die Trennung und Untersuchung der epistemischen und aleatorischen Unsicherheiten wäre ein geeigneter Prüfstand – wie jener in MEIDLINGER (2008, S. 37 f.) – erforderlich. Mangels Alternativen werden in der vorliegenden Arbeit stattdessen mit Hilfe des in Abschnitt 4.5.2 (S. 69) beschriebenen Verfahrens Parameter identifiziert, die eine unbekannte Kombination der genannten Unsicherheiten enthalten. Eine Prognosefähigkeit kann deshalb nur hergestellt werden, indem für diese Parameter entsprechend große Streubereiche hinterlegt werden, die die möglichen Kombinationen der diskutierten Unsicherheiten abdecken.

### 5.3.3 Anwendung am betrachteten Aufstellelement

Die beschriebene Modellierung wird im Folgenden am Bett der betrachteten Maschinenstruktur veranschaulicht. In Abb. 5.10a ist das entsprechende Finite-Elemente-Modell sowie in Abb. 5.10b das Modell eines Aufstellelements im Detail zu sehen.

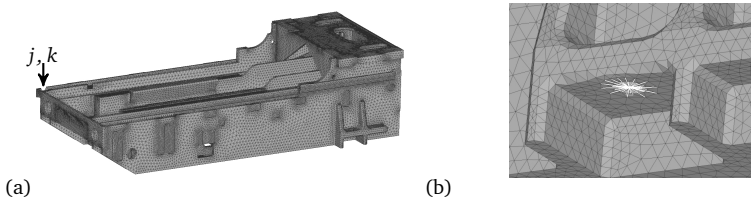


Abb. 5.10: Modell des Maschinenbetts auf Aufstellelementen mit den betrachteten Freiheitsgraden  $j$  und  $k$  (a) sowie Detailaufnahme der Modellierung des Aufstellelements (b)

Das Modell des Maschinenbetts wurde zuvor mittels der in Abschnitt 5.2 (S. 96) vorgestellten Methode aufgebaut und erfüllt die definierten Adäquanzkriterien. Zudem wurde als experimentelle Grundlage für die folgenden Schritte eine Modalanalyse der realen Struktur mit 26 Messpunkten durchgeführt. Für die Parameteridentifikation wurde zunächst manuell ein Parametersatz für die Steifigkeiten gesucht, der die Eigenmoden in der korrekten Reihenfolge abbildet, und anschließend wurde mit einem Mode-Tracking als Randbedingung das bekannte Model Updating durchgeführt. Die resultierenden Steifigkeitsparameter sind in Tab. 5.12 (S. 114) aufgelistet und genügen – wie in Abb. 5.11 und 5.12a (S. 115) zu erkennen – sowohl bzgl. der Eigenfrequenzen als auch bzgl. der Eigenvektoren den Adäquanzkriterien. Die aufgeführten Dämpfungsparameter für die Aufstellelemente und das Material wurden – basierend auf dem modalen Modell dieses Zustands – mit Hilfe des Ansatzes von NIEHUES & ZÄH (2012) identifiziert und ebenfalls im Finite-Elemente-Modell hinterlegt.

$E$	$1,77 \cdot 10^5 \text{ N mm}^{-2}$	$\rho$	$7,23 \cdot 10^{-9} \text{ t mm}^{-3}$
$\nu$	0,272	$\eta$	$5 \cdot 10^{-4}$

(a) Materialparameter

Element	Parameter	x-Richtung	y-Richtung	z-Richtung
vorne	$k$	$9,50 \cdot 10^4 \text{ N mm}^{-1}$	$3,04 \cdot 10^5 \text{ N mm}^{-1}$	$6,12 \cdot 10^4 \text{ N mm}^{-1}$
	$c, d$	$1,03 \text{ N s mm}^{-1}$	$5,14 \cdot 10^4 \text{ N mm}^{-1}$	$1,03 \text{ N s mm}^{-1}$
hinten (+x)	$k$	$1,84 \cdot 10^5 \text{ N mm}^{-1}$	$2,34 \cdot 10^5 \text{ N mm}^{-1}$	$9,50 \cdot 10^4 \text{ N mm}^{-1}$
	$c, d$	$1,03 \text{ N s mm}^{-1}$	$1,40 \cdot 10^4 \text{ N mm}^{-1}$	$1,03 \text{ N s mm}^{-1}$
hinten (-x)	$k$	$1,85 \cdot 10^4 \text{ N mm}^{-1}$	$4,47 \cdot 10^5 \text{ N mm}^{-1}$	$9,50 \cdot 10^4 \text{ N mm}^{-1}$
	$c, d$	$1,03 \text{ N s mm}^{-1}$	$5,36 \cdot 10^4 \text{ N mm}^{-1}$	$1,03 \text{ N s mm}^{-1}$

(b) Parameter der Aufstellung im Maschinenkoordinatensystem (siehe Abb. 2.1, S. 5)

Tab. 5.12: Exemplarparameter des betrachteten Maschinenbetts auf Aufstellelementen

Abb. 5.12b zeigt den Vergleich des im Anschluss berechneten, analytischen Frequenzgangs mit seinem experimentellen Pendant zwischen den – in Abb. 5.10a (S. 113) definierten – Freiheitsgraden  $j$  und  $k$ . Da auch die analytischen und experimentellen Resonanzamplituden der betrachteten Eigenmoden dieselbe Dimension aufweisen, erfüllt das Modell der Aufstellelemente sämtliche Adäquanzkriterien. Die Parameter der drei Aufstellelemente zeigen dabei untereinander signifikante Schwankungen, die mit keiner der diskutierten Abhängigkeiten korrelieren. Hierin äußert sich die Wechselwirkung der genannten Unsicherheiten.

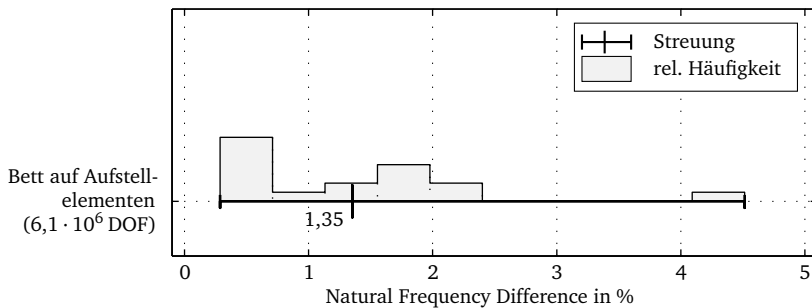


Abb. 5.11: NFD-Vergleichsmaß für das Maschinenbett auf Aufstellelementen im Frequenzbereich von 0 Hz bis 500 Hz

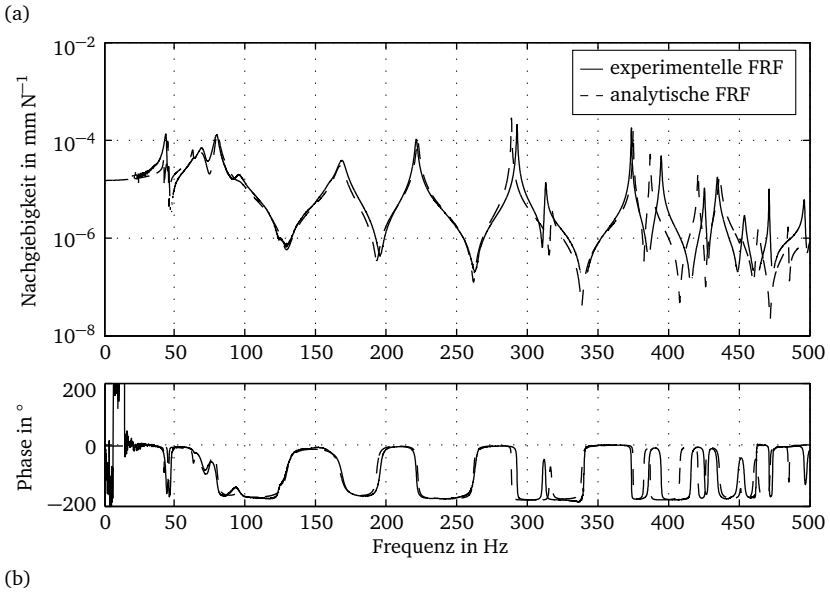
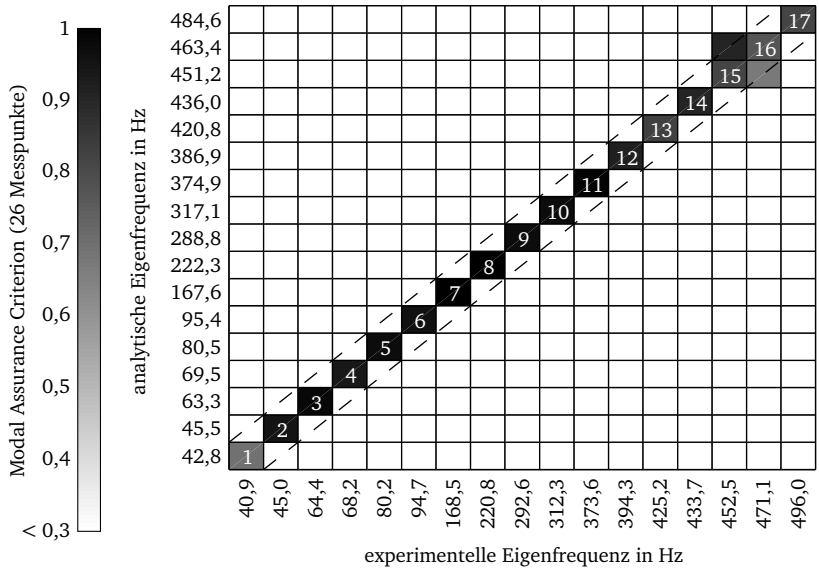


Abb. 5.12: MAC-Vergleichsmaß (a) sowie Amplitude und Phase des experimentellen und des analytischen Frequenzgangs der Freiheitsgrade  $j$  und  $k$  (b) für das Maschinenbett aufstellelemente im Frequenzbereich von 0 Hz bis 500 Hz

## 5.4 Verschraubte Fugen

**Ausgangssituation für die Modellierung.** Die Modellierung von verschraubten Fugen an Werkzeugmaschinenstrukturen erfolgt ähnlich wie bei den Strukturbauteilen ausgehend von der Geometrie. In Abb. 5.13 sind beispielhaft die bettseitigen Kontaktflächen und Bohrungen der verschraubten Fuge zwischen Bett und Ständer der betrachteten Maschinenstruktur zu sehen.

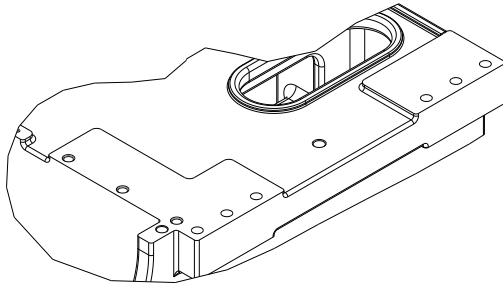


Abb. 5.13: Bettseitige Kontaktflächen und Bohrungen der verschraubten Fuge zwischen Bett und Ständer der betrachteten Maschinenstruktur

Für die Modellierung sind daher sowohl Baugröße, Anzahl und Anordnung der verwendeten Schrauben als auch Form und Größe der Kontaktflächen der Fuge bekannt. Um die geforderten Toleranzen bzgl. Maß, Form und Lage einhalten zu können, werden die Kontaktflächen in der Regel spanend bearbeitet. Dies zieht je nach eingesetztem Verfahren eine entsprechende Oberflächenrauheit nach sich, die damit ebenfalls bekannt ist. Darüber hinaus wird bei der Konstruktion der Maschine der Montageprozess für die Fugen festgelegt. Je nach verwendetem Anzugverfahren sind deshalb entweder das Anziehdrehmoment oder die Vorspannkraft der Schrauben in der meist trocken montierten Fuge bekannt. Insgesamt stehen für die Modellierung somit die in Tab. 5.13 aufgeführten Informationen zur Verfügung.

- 
1. Baugröße, Anordnung und Anzahl der Schrauben
  2. Form und Größe der Kontaktflächen
  3. Oberflächenrauheit der Kontaktflächen sowie etwaige Medien in der Fuge
  4. Anziehdrehmoment oder Vorspannkraft der Schrauben
- 

Tab. 5.13: Für die Modellierung vorhandene Informationen



### 5.4.1 Diskussion vorhandener Ansätze

Für die Modellierung von verschraubten Fugen in der Finite-Elemente-Methode stehen – wie in Abschnitt 2.4.3 (S. 31) ausgeführt – drei Möglichkeiten zur Verfügung: Skalarverbindungen, Kontaktelemente und Dünnschichtelemente. Bei in Werkzeugmaschinenstrukturen relevanten Fugenverbindungen herrscht durch die hohen Anziehdrehmomente lediglich Mikroschlupf, die Homogenität der sich einstellenden Flächenlast wird durch Anordnung und Anzahl der Schrauben bestimmt. Für derartige Fugen wurde von BRECHER ET AL. (2012c) an einer einfachen Balkenstruktur sowohl für homogene als auch für inhomogene Verteilungen der Flächenlast nachgewiesen, dass prinzipiell alle genannten Ansätze dazu geeignet sind, den Einfluss der verschraubten Fuge auf das reale System hinsichtlich Steifigkeit und Dämpfung mit hinreichender Genauigkeit abzubilden. Die drei diskutierten Fugenmodelle wurden jedoch anhand experimentell ermittelter Daten der betrachteten Balkenstruktur parametrisiert und sind somit in diesem Zustand nicht prognosefähig.

### 5.4.2 Ableitung einer prognosefähigen Modellierung

In der vorliegenden Arbeit werden in Anlehnung an BOGRAD ET AL. (2008) für die prognosefähige Modellierung von verschraubten Fugen Dünnschichtelemente verwendet, da diese auch in großen Modellen von Maschinenstrukturen aufwands- und fehlerarm einsetzbar sind. In Tab. 5.14 (S. 118) ist der Modellierungsprozess in der bereits bekannten Beschreibungsform angegeben. Um die zugehörigen Modellparameter bestimmen zu können, ist die Kenntnis der dort genannten Zusammenhänge und Gleichungen erforderlich. Diese werden deshalb im Folgenden vorgestellt, bevor im Anschluss die Modellannahmen charakterisiert werden.

**Montagevorspannkraft, Verformungskörper und Flächenlast.** Wie bereits in Abschnitt 5.3 (S. 106) ausgeführt, ergibt sich die Montagevorspannkraft nach Gl. 5.1 (S. 110). Sie wird daher an dieser Stelle nicht erneut wiedergegeben. Der Verformungskörper unter dem Schraubenkopf kann – wie in Abb. 5.14 (S. 119) illustriert – nach VDI 2230 BLATT 1 mit Hilfe eines Verformungskegels mit dem Öffnungswinkel  $\varphi$  approximiert werden. Unter Verwendung des Außendurchmessers der ebenen Kopfauflagefläche der Schraube  $d_w$ , der Klemmlänge  $l_k$  sowie des Ersatz-Außendurchmessers des Grundkörpers  $D'_A$  ergibt sich der Öffnungswinkel für eine Einschraubverbindung zu

$$\varphi = \arctan \left( 0,348 + 0,013 \ln \left( \frac{l_k}{d_w} \right) + 0,193 \ln \left( \frac{D'_A}{d_w} \right) \right) \quad (5.2)$$

Der Ersatz-Außendurchmessers des Grundkörpers  $D'_A$  ist dabei das Doppelte des mittleren Abstands von der Schraubenachse zum Rand der verschraubten Platte und

- 
1. *Konzeptionelle Modellierung des physikalischen Systems*
    - a) Abbildung der Fuge als masseloses Übertragungsglied zwischen den verschraubten Komponenten.
    - b) Linearisierbarkeit des elastischen und dissipativen Verhaltens, da in der Fuge Mikroschlupf herrscht.
    - c) Übertragung der gesamten Montagevorspannkraft innerhalb der Verformungskörper um die Schrauben, außerhalb ist die Flächenlast vernachlässigbar.
    - d) Unterschiedliches Elastizitätsverhalten in Normal- und Tangentialrichtung, die Steifigkeiten stehen in einem festen Verhältnis von  $k_{\parallel}/k_{\perp} = 0,3$  zueinander.
    - e) Frequenzunabhängiges Dissipationsverhalten der trockenen Fuge.
  2. *Mathematische Modellierung des konzeptionellen Modells*
    - a) Ermittlung des Verformungskörpers nach VDI 2230 BLATT 1.
    - b) Bestimmung der Flächenlast innerhalb der Verformungskörper aus der Querschnittsfläche und der Montagevorspannkraft nach VDI 2230 BLATT 1.
    - c) Berechnung der äquivalenten Elastizitätsmoduln durch einen empirischen Zusammenhang nach SHIMIZU ET AL. (2010) in Abhängigkeit von der Flächenlast und dem Elastizitätsmodul der Kontaktpaarung.
    - d) Orthotropes Hooke'sches Gesetz für das elastische Verhalten, Verlustfaktorenansatz für die Dissipationseigenschaften.
  3. *Diskretisierung und Algorithmus-Auswahl für das mathematische Modell*
    - a) Unterteilung der Kontaktfläche auf Basis von Größe bzw. Lage der Verformungskörper in einen Bereich hoher und einen vernachlässigbarer Flächenlast.
    - b) Vernetzung der beiden Fugenbereiche mit isoparametrischen Pentaederelementen zweiter Ordnung mit geringer Höhe, nicht-negativer Jacobi-Matrix und nahtlosem Anschluss an die darüber- und darunterliegenden Tetraederelemente der Strukturbauteile.
  4. *Numerische Lösung des implementierten Modells*
    - a) Parametrisierung des Fugenbereichs innerhalb der Verformungskörper mit den äquivalenten Elastizitätsmoduln und außerhalb mit vernachlässigbar kleinen Werten sowie beider Bereiche mit geeigneten Verlustfaktoren.
- 

Tab. 5.14: Modellierungsprozess für trockene, verschraubte Fugen

nähert die Stützwirkung des Plattenmaterials an. Zur Ermittlung des Bereichs mit hoher Flächenlast wird anschließend der Grenzdurchmesser  $D_{A,Gr}$  herangezogen, der sich für eine Einschraubverbindung zu

$$D_{A,Gr} = d_w + 2 l_k \tan \varphi \quad (5.3)$$

bestimmt. Ist  $D'_A < D_{A,Gr}$ , so beschränkt die Geometrie den Verformungskörper, es bildet sich eine sog. *Verformungshülse* aus. Das aufgeführte Berechnungsmodell der VDI 2230 BLATT 1 hat lediglich Näherungscharakter, welcher auf zwei Annahmen beruht: Erstens liege die Fuge exakt in der Mitte zwischen Schraubenkopfaufgabe und dem Schraubenende und zweitens herrsche um die Schraubenachse symmetrische

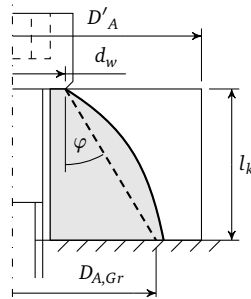


Abb. 5.14: Verformungskörper einer Einschraubverbindung (grau) sowie berechneter Verformungskegel mit Öffnungswinkel  $\varphi$  in Anlehnung an VDI 2230 BLATT 1 (S. 31)

Umgebungsbedingungen. Dies ist in realen Fugen selten der Fall, dennoch stellt das Modell eine hinreichend genaue Abschätzung der tatsächlichen Verhältnisse dar. Zudem ist anzumerken, dass der Verformungskörper nicht exakt den Druckbereich der Flächenlast in der Fuge begrenzt, sondern dieser etwas größer ist. Es empfiehlt sich deshalb, den berechneten Durchmesser  $D_{A,Gr}$  großzügig aufzurunden. Die Flächenlast  $\sigma_0$  innerhalb des Bereichs hoher Flächenlast ergibt sich – sofern sämtliche Schrauben gleich montiert wurden – mit

$$\sigma_0 = \frac{N F_M}{A_0}, \quad (5.4)$$

wobei  $N$  die Schraubenanzahl und  $A_0$  die Gesamtfläche des Bereichs hoher Flächenlast der Fuge ist.

**Kontaktsteifigkeiten und äquivalente Elastizitätsmoduln.** Bei vorgespannten Kontakten rauer metallischer Oberflächen berühren sich diese nicht auf der gesamten nominellen Kontaktfläche  $A_0$ , sondern abhängig von der Flächenlast  $\sigma_0$  auf einer kleineren, realen Kontaktfläche  $A_{\text{real}}$ . Das Verhältnis beider Flächen

$$\chi = \frac{A_{\text{real}}}{A_0} \quad (5.5)$$

lässt sich durch einen linearen Zusammenhang beschreiben, der zusätzlich von der Oberflächenbeschaffenheit abhängt (GÖRKE 2010, S. 81). Für geschliffene, nahezu ideal ebene und mit  $\sigma_0$  vorgespannte Kontakte verschiedener Metallwerkstoffe wurde von SHIMIZU ET AL. (2010) mit Hilfe eines ultraschallbasierten Messprinzips der empirische Zusammenhang

$$\chi(\sigma_0) = 0,02 \text{ mm}^2 \text{ N}^{-1} \sigma_0 + 0,02 \quad (5.6)$$

für dieses Verhältnis ermittelt ( $\sigma_0$  in  $\text{N mm}^{-2}$ ).

Darauf aufbauend konnten SHIMIZU ET AL. (2010) die auf die reale Kontaktfläche  $A_{\text{real}}$  bezogene Normalsteifigkeit jeder Kontaktseite bestimmen, welche sich abhängig vom Elastizitätsmodul  $E$  in  $\text{N mm}^{-2}$  durch die ebenfalls empirisch ermittelte Gleichung

$$k_{\perp, \text{real}}(E) = 5,34 \text{ mm}^{-1} E + 3,89 \cdot 10^3 \text{ N mm}^{-3} \quad (5.7)$$

beschreiben lässt. Unter der Annahme, dass die Kontaktpaarung aus einem einzigen Material besteht, kann durch die Serienschaltung zweier identischer Steifigkeiten die Normalsteifigkeit der Nennkontaktfläche  $A_0$  bei ideal ebener Oberfläche mit

$$k_{\perp, 0} = 0,5 k_{\perp, \text{real}} \chi \quad (5.8)$$

berechnet werden. Bei hinreichend hoher Flächenlast – nach Gl. 5.6 etwa  $50 \text{ N mm}^{-2}$  – entspricht die reale der Nennkontaktfläche ( $\chi = 1$ ), darüber hinaus bleibt die Steifigkeit unabhängig von der Vorspannung konstant. Da die Annahme einer ideal ebenen Oberfläche für reale Fugen meist nicht gerechtfertigt ist, wird Gl. 5.8 um einen Oberflächenfaktor  $\kappa \in ]0, 1]$  erweitert, welcher den maximal erreichbaren Kontaktflächenanteil beschränkt und anhand der Beschaffenheit der Kontaktflächen zu wählen ist. Die Kontaktnormalsteifigkeit einer nicht ideal ebenen Kontaktfläche  $A_0$  kann somit durch

$$k_{\perp} = 0,5 k_{\perp, \text{real}} \chi \kappa \quad (5.9)$$

bestimmt werden. Die Relativbewegung  $\delta_{\perp}$  aufgrund dieser Steifigkeit wird nach Einsetzen in Gl. 2.81 (S. 33), Umstellen und Integration über der Vorspannung für Werte  $\chi < 1$  durch einen natürlichen Logarithmus beschrieben, für Werte  $\chi \geq 1$  hingegen durch eine lineare Funktion. In Abb. 5.15 sind für eine Kontaktpaarung mit einem Elastizitätsmodul von  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N mm}^{-2}$  die Steifigkeits- und Verlagerungskennlinien des Fugenkontaktmodells für verschiedene Oberflächenfaktoren  $\kappa$  dargestellt. Die Verlagerungskennlinien besitzen dieselbe Gestalt und Amplitude wie entsprechende experimentell ermittelte Kennlinien in der Literatur (THORNLEY ET AL. 1965; GÖRKE 2010, S. 57, 63) und sie zeigen dieselben Abhängigkeiten. Dabei sei angemerkt, dass das beschriebene Modell lediglich eine Näherung des tatsächlichen Verhaltens darstellt, welche in der vorliegenden Arbeit jedoch als hinreichend genau erachtet wird. Ist die Kontaktnormalsteifigkeit innerhalb des Bereichs hoher Presung bestimmt, wird zusätzlich die Tangentialsteifigkeit benötigt. Diese wird in der vorliegenden Arbeit durch das feste Verhältnis

$$\frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}} = 0,3 \quad (5.10)$$

gekennzeichnet, welches sich auf die ebenfalls per Ultraschall ermittelten Werte nach CAMPAÑA ET AL. (2011) stützt. Die äquivalenten Elastizitätsmoduln können anschließend unter Verwendung der Dünnschichthöhe  $\check{h}$  mit den bereits aus Abschnitt 2.4.3 (S. 31) bekannten Gleichungen

$$E_{\perp} = k_{\perp} \cdot \check{h} \quad (5.11)$$

$$E_{\parallel} = k_{\parallel} \cdot \check{h} \quad (5.12)$$

bestimmt und in der orthotropen Elastizitätsmatrix 2.85 (S. 34) hinterlegt werden.

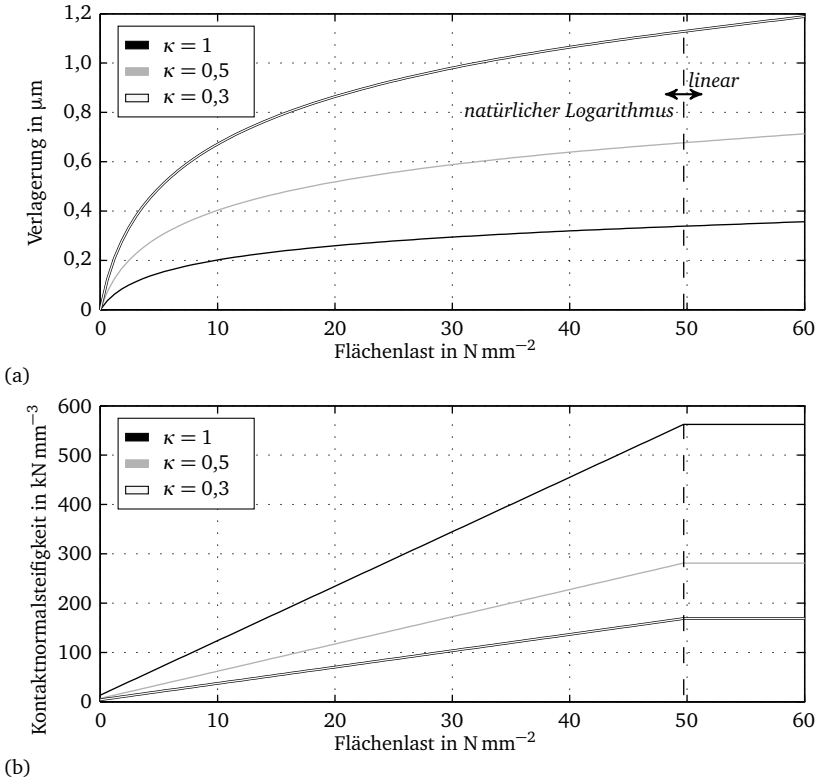


Abb. 5.15: Relativbewegung  $\delta_{\perp}$  (a) und zugehörige Kennlinien der Kontaktnormalsteifigkeit  $k_{\perp}$  (b) des Fugenkontaktmodells für eine Kontaktpaarung mit  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N mm}^{-2}$  und verschiedene Oberflächenfaktoren  $\kappa$

**Charakterisierung der Modellannahmen aus Tab. 5.14 (S. 118).** Eine Betrachtung der Fuge als masseloses Übertragungselement (Annahme 1a) kann als gerechtfertigt angesehen werden. Aufgrund der hohen Vorspannung in Fugen von Werkzeugmaschinen gilt dies ebenso für die Annahme 1b von Mikroschlupf und der damit verbundenen Linearisierbarkeit, sofern die Bereiche hoher Flächenlast nicht zu weit voneinander entfernt liegen und somit dazwischen kein Makroschlupf auftritt. Auch eine

Übertragung der gesamten Montagevorspannkraft innerhalb der Verformungskörper (Annahme 1c) ist zu vertreten, sofern diese – wie bereits erwähnt – eher zu groß als zu klein angesetzt werden. Die Annahmen der Normal- bzw. Tangentialsteifigkeit (Annahme 1d) und der frequenzabhängigen Dissipationswirkung (Annahme 1e) basieren auf experimentellen Beobachtungen und können somit gleichfalls als gültig betrachtet werden. Eine Berechnung der Verformungskörper mittels VDI 2230 BLATT 1 (Annahme 2a) stellt wie angesprochen eine Approximation dar, die jedoch für die vorliegende Arbeit eine hinreichende Genauigkeit aufweist. Im Gegensatz dazu ist die Berechnung der Montagevorspannkraft nach VDI 2230 BLATT 1 mit aleatorischen Unsicherheiten durch die Reibung in Schraubenkopf und -gewinde behaftet, was sich direkt in der Flächenlast äußert (Annahme 2b). Eine epistemische Unsicherheit wird durch die Berechnung der Kontaktnormalsteifigkeit nach SHIMIZU ET AL. (2010) verursacht (Annahme 2c), da der Oberflächenfaktor  $\kappa$  für die in Werkzeugmaschinen eingesetzten Kontaktoberflächen meist nicht bekannt ist. Die gewählten Ansätze zur Modellierung der elastischen und dissipativen Eigenschaften (Annahme 2d) sowie die Unterteilung der Fuge in Bereiche hoher und vernachlässigbarer Flächenlast (Annahme 3a) setzen die zuvor getroffenen Annahmen im Modell um und sind deshalb als gültig anzusehen. Die Vernetzung der Fuge mit dünnen Pentaederelementen zweiter Ordnung bringt lediglich eine vernachlässigbare epistemische Unsicherheit in das Modell ein (Annahme 3b), weil das Konvergenzverhalten der Pentaeder dem der Tetraeder in den angrenzenden Strukturbauteilen überlegen ist. Somit bestimmen die Tetraeder den Diskretisierungsfehler des Gesamtmodells. Die Pentaeder können hierbei mit Aspektverhältnissen  $\hat{\sigma}$  von 100 bis 1000 ohne Einbußen in der Interpolationsfähigkeit eingesetzt werden (GAUL 2008), da deren Innenwinkel auch bei geringen Elementhöhen unverändert bleiben. Die Parametrisierung des Fugenmodells (Annahme 4a) wird neben den bereits erwähnten Unsicherheiten durch aleatorische Unsicherheiten in den Dissipationseigenschaften beeinflusst, was insgesamt zu der in Tab. 5.15 angegebenen Charakterisierung der Modellannahmen für verschraubte Fugen führt.

Modellannahme	1a	1b	1c	1d	1e	2a	2b	2c	2d	3a	3b	4a
gültig	○	○	○	○	○	○			○	○	○	
aleatorisch unsicher							○					○
epistemisch unsicher								○				

Tab. 5.15: Charakterisierung der Modellannahmen für verschraubte Fugen (Tab. 5.14, S. 118)

**Quantifizierung und Begrenzung der Unsicherheiten.** Die Prognosefähigkeit verschraubter Fugen wird somit durch Unsicherheiten in der Montagevorspannkraft (Annahme 2b), der Oberflächengüte (Annahme 2c) und der Dissipationswirkung (Annahme 4a) beeinträchtigt. Bei allen drei genannten Unsicherheiten handelt es

sich um messtechnische Problemstellungen, die nur mit Hilfe geeigneter Verfahren oder Prüfstände eindeutig erfasst werden können. Eine Identifikation auf Basis der dynamischen Eigenschaften der Maschinenstruktur ist deshalb nicht zweckmäßig. Da die angesprochenen Unsicherheiten jedoch – wie in Kapitel 6 (S. 149) ausgeführt werden wird – nur geringen Einfluss auf das Gesamtmodell haben, können sie toleriert und im nicht-deterministischen Modellteil berücksichtigt werden.

### 5.4.3 Anwendung an einer einfachen Balkenstruktur

Die Eigenschaften der Fuge sind an der Maschinenstruktur aufgrund des Einflusses der Aufstellung messtechnisch nur mit hohem Aufwand hinreichend genau erfassbar. Deshalb wird die vorgestellte Fugenmodellierung im Folgenden stattdessen in der Anwendung an einer einfachen Balkenstruktur erläutert. Diese besteht – wie in Abb. 5.16a ersichtlich – aus einem quaderförmigen Stahlbalken des Werkstoffs C45/1.1730 mit 1006 mm Länge, auf welchen mit insgesamt 22 M8-Schrauben der Festigkeitsklasse 8.8 eine Profilschiene der Baugröße 35 geschraubt werden kann.

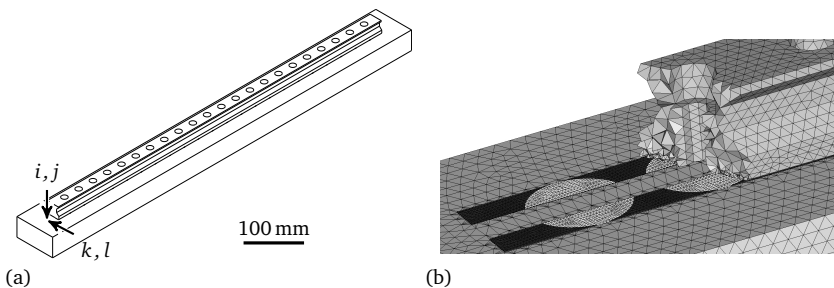


Abb. 5.16: Einfache Balkenstruktur mit verschraubter Führungsschiene und den betrachteten Freiheitsgraden  $i, j, k$  und  $l$  (a) sowie Detailaufnahme der Dünnschichtmodellierung (b)

Die Anschraubfläche des Balkens ist geschliffen und weist eine Oberflächengüte von  $R_z 10$  bei einer Ebenheit von  $0,02 \text{ mm}/100 \text{ mm}$  auf. Die Anschraubfläche der Schiene entspricht dem Lieferzustand und ist ebenfalls feinbearbeitet. Das zugehörige Finite-Elemente-Modell der Fuge – bestehend aus Dünnschichtelementen mit einer Höhe von  $0,3 \text{ mm}$  – ist in Abb. 5.16b zu sehen, wobei die Bereiche hoher Flächenlast hell und diejenigen niedriger dunkel eingezeichnet sind. Da die Schiene nur auf zwei Bahnen entlang der Schrauben Kontakt hat, wurde dies auch im Modell entsprechend berücksichtigt. Für die betrachtete Schienengeometrie ergeben sich mit den in Abschnitt 5.4.2 (S. 117) beschriebenen Gleichungen die in Tab. 5.16 (S. 124) aufgeführten Modellparameter. Das Anziehdrehmoment von  $23 \text{ N m}$  entspricht dem Nennmoment der verwendeten Schrauben. Es liegt jedoch unter dem für

$M_A$	$23 \cdot 10^3 \text{ N mm}$	$\sigma_0$	$38,7 \text{ N mm}^{-2}$
$\mu$	0,12	$E$	$2,10 \cdot 10^5 \text{ N mm}^{-2}$
$F_M$	17,1 kN	$\kappa$	1,0
$\varphi$	$27,71^\circ$	$k_\perp$	$4,47 \cdot 10^5 \text{ N mm}^{-3}$
$D_{A,Gr}$	32,29 mm	$E_\perp$	$1,34 \cdot 10^5 \text{ N mm}^{-2}$
$A_0$	$9720 \text{ mm}^2$	$E_\parallel$	$4,02 \cdot 10^4 \text{ N mm}^{-2}$
(a) Verschraubung		(b) Kontaktmodell	
$\eta$		$3 \cdot 10^{-4}$	
(c) Dissipationseigenschaften (Strukturbauteile und Fuge)			

Tab. 5.16: Modellparameter für die Fugenverbindung der Balkenstruktur mit 22 Schrauben

die Schiene spezifizierten Anziehdrehmoment, welches aufgrund des unvergüteten Balkenwerkstoffs zur plastischen Verformung der dortigen Gewinde geführt hätte. Der angegebene Oberflächenfaktor  $\kappa = 1,0$  wurde wegen der hohen Oberflächengüte und Ebenheit der Kontaktfläche gewählt. Im Rahmen einer experimentellen Untersuchung wurden Frequenzgänge zwischen den in Abb. 5.16a (S. 123) definierten Freiheitsgraden  $i$  und  $j$  sowie  $k$  und  $l$  an der einfachen Balkenstruktur aufgenommen. Zur Minimierung der Umgebungseinflüsse wurde diese an der gegenüberliegenden Stirnseite mittels einer Klaviersaite aufgehängt. Dabei wurden drei Konfigurationen der Struktur vermessen: eine ohne Schiene, eine mit Schiene unter Verwendung aller 22 Schrauben und eine mit Schiene unter Verwendung von fünf gleichmäßig verteilten Schrauben. Im Modell der Konfiguration mit fünf Schrauben wurden in den entsprechenden Bereichen ohne Schrauben die Parameter für eine niedrige Flächenlast hinterlegt. In Abb. 5.17 sind die resultierenden Amplitudengänge ihren analytischen Pendanten aus dem beschriebenen Modell gegenübergestellt. Hierbei ist zu erkennen, dass sowohl die Balkenstruktur ohne Schiene (Abb. 5.17a) als auch die Konfiguration mit Schiene und sämtlichen Schrauben (Abb. 5.17b) im Frequenzbereich bis 1000 Hz im Sinne der Adäquanzkriterien hinreichend genau abgebildet werden kann. An dieser Stelle sei angemerkt, dass die Fuge in diesem Fall – wie der in Tab. 5.16c genannte Verlustfaktor zeigt – nur eine geringe, mit der Materialdämpfung vergleichbare Dissipationswirkung besitzt. Im Fall mit nur fünf verwendeten Schrauben (Abb. 5.17c) ist die Übereinstimmung der hochfrequenten Mode hingegen nicht so hoch wie zuvor. Erklären lässt sich diese Abweichung damit, dass es bei der genannten Biegemode zweiter Ordnung durch die Krümmung der Biegelinie einerseits und die Abstände zwischen den Verformungskörpern andererseits zu nicht-linearem Klaffen der Fuge und Makroschlupf kommt. Dies äußert sich sowohl in einer Frequenzverschiebung als auch in einer deutlich erhöhten Dämpfungswirkung. Die beschriebene Modellierung ist somit für diese Konfiguration und Mode nicht gültig



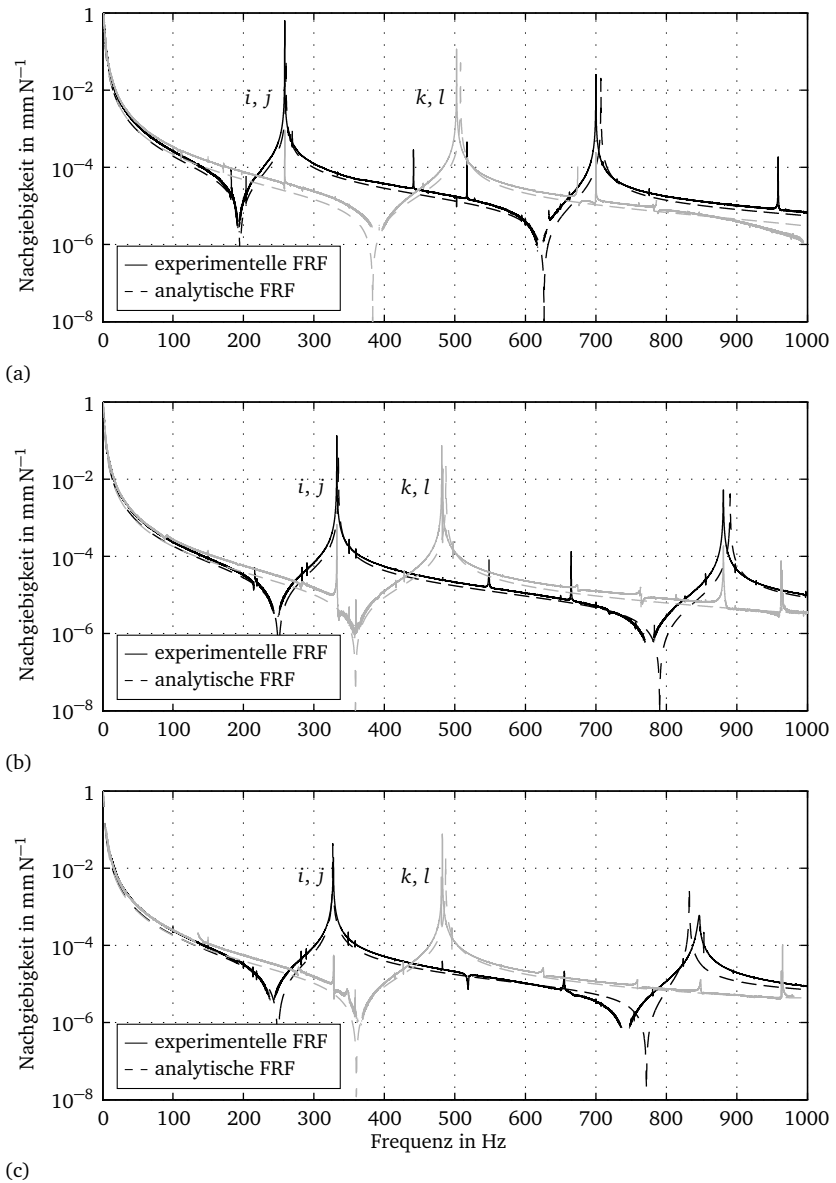


Abb. 5.17: Amplitudengang der experimentellen und analytischen Frequenzgänge der Freiheitsgrade  $i$  und  $j$  sowie  $k$  und  $l$  für die einfache Balkenstruktur ohne Schiene (a), mit Schiene und sämtlichen Schrauben (b) und mit Schiene und nur fünf Schrauben (c)

und stößt hier an ihre Grenzen. Sofern die Annahme des Mikroschlupfs jedoch gültig ist, kann die vorgestellte Fugenmodellierung als prognosefähig bezeichnet werden.

## 5.5 Profilschienenführungen

**Ausgangssituation für die Modellierung.** Profilschienenführungen sind Maschinenelemente, die als typisches Zukaufteil in Werkzeugmaschinen verbaut werden. Sie bestehen – wie in Abb. 5.18 illustriert – aus Führungswagen und -schiene und werden bei Konstruktion der Maschine anhand von Baugröße, Bauform, Vorspannklasse und Tragfähigkeit ausgewählt.

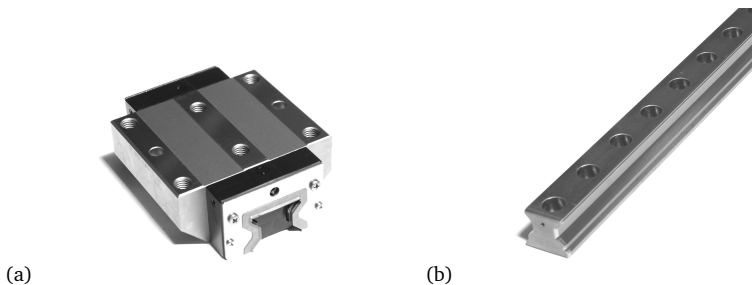


Abb. 5.18: Führungswagen (a) und -schiene (b) einer Profilschienenführung

Daneben stehen verschiedene Abstreifer- und Schmierungsprinzipien zur Verfügung, die auf die vorliegenden Einsatzbedingungen abgestimmt werden können. Herstellerseitig gelten für diese Systeme umfangreiche Montagevorschriften und Einbaubedingungen (siehe z. B. BOSCH 2006b), die somit neben den in Abschnitt 2.4.4 (S. 34) erwähnten Eigenschaften wie Wälzkörpertyp, Kontaktkonfiguration, Lastwinkel und Federkennlinien in verschiedenen Richtungen ebenfalls bekannt sind. Zudem liegen durch die Arbeiten von BRECHER ET AL. (2012b, 2013, 2014b) systematische Untersuchungen zum Dissipationsverhalten dieser Elemente im Stillstand sowie zugehörige Parameterwerte vor. Insgesamt sind damit die in Tab. 5.17 angegebenen Informationen vorhanden.

- 
1. Baugröße, Bauform, Vorspannklasse und Tragfähigkeit
  2. Abstreifer und Schmierungszustand
  3. Lastwinkel und Federkennlinien in verschiedenen Richtungen
  4. Dissipationsverhalten im Stillstand nach BRECHER ET AL. (2012b, 2013, 2014b)
- 

Tab. 5.17: Für die Modellierung vorhandene Informationen

### 5.5.1 Ableitung einer prognosefähigen Modellierung

Wie schon in Abschnitt 2.4.4 (S. 34) und anhand der Informationen in Tab. 5.17 ersichtlich, handelt es sich bei Profilschienenführungen um ein bereits systematisch untersuchtes Maschinenelement. Dementsprechend ausgereift sind auch die in der Literatur beschriebenen Modellansätze hierzu. Da in der vorliegenden Arbeit Maschinenstrukturen im Stillstand betrachtet werden, sind hier die Arbeiten im Bereich der maschinenorientierten Ansätze relevant. Im Folgenden wird deshalb, gestützt auf die jeweils aktuellsten Arbeiten, eine prognosefähige Modellierung für Profilschienenführungen sowie die resultierenden Unsicherheiten abgeleitet. Für die Verfahrensrichtung der Führung sind dies die Erkenntnisse von KUNC (2013), die übrigen Richtungen werden von BRECHER ET AL. (2014b) abgedeckt. In Tab. 5.18 (S. 128) ist der resultierende Modellierungsprozess in der aus Abschnitt 4.3 (S. 63) bekannten Beschreibungsform zusammengefasst. Um dem Leser das Verständnis des Vorgestellten zu erleichtern, wird im Folgenden die Symmetrieebene der Wälzkörperreihen kurz erläutert, bevor im Anschluss mit der Charakterisierung der Modellannahmen fortgefahren wird.

**Symmetrieebene der Wälzkörperreihen.** Die Symmetrieebene der Wälzkörper ergibt sich unabhängig von der Wälzkörperanordnung unter der Annahme, dass die obere und untere Wälzkörperreihe gleich große Wälzkörper besitzen und jeweils in demselben Abstand symmetrisch zur Mittenebene der Schiene angeordnet sind. In diesem Fall kann durch Verbinden der Laufflächen der Führungsschiene – wie in Abb. 5.19a skizziert – eine Ebene bestimmt werden, die symmetrisch zu beiden Wälzkörperreihen liegt und in welcher sich auch die Verbindungslinien der Wälzkontakte schneiden. Für die hier betrachteten Profilschienenführungen der Baugröße 45 beträgt der Abstand  $h$  dieser Ebene von der Schienenunterseite 23,5 mm. Sämtliche in der vorliegenden Arbeit und in BRECHER ET AL. (2012b, 2013, 2014b) angegebenen Parameter für Profilschienenführungen sind in Bezug auf den Schnittpunkt dieser Ebene mit den beiden anderen Symmetrieebenen des Wagens angegeben (siehe Abb. 5.19b).

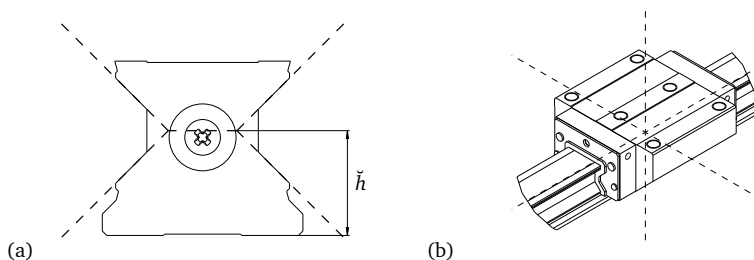


Abb. 5.19: Symmetrieebene der Wälzkörperreihen an der Führungsschiene (a) und daraus resultierender Schnittpunkt im Führungswagen (b)

1. *Konzeptionelle Modellierung des physikalischen Systems*
    - a) Abbildung von Führungswagen und -schiene mit vereinfachten Körpern, um die Elastizitäts- und die Trägheitswirkung beider Komponenten auf die angrenzenden Strukturbauteile zu berücksichtigen.
    - b) Abbildung der Eigenschaften des Wälzkontakts als masseloses Übertragungsglied zwischen den angrenzenden Strukturbauteilen.
    - c) Mikroauslenkung in Verfahrrichtung der Führung, linearisierte Abbildung der wegproportionalen Reibkraft als elastisch-dissipatives Element.
    - d) Linearisierung der elastischen und dissipativen Eigenschaften aller verbleibenden Richtungen des Wälzkontakts im Arbeitspunkt.
  2. *Mathematische Modellierung des konzeptionellen Modells*
    - a) Hooke'sches Gesetz für das elastische Verhalten, Verlustfaktorenansatz für die Dissipation in Verfahrrichtung und Dämpfungskonstantenansatz für die übrigen Dissipationsrichtungen.
  3. *Diskretisierung und Algorithmus-Auswahl für das mathematische Modell*
    - a) Elastisch-dissipative Skalarverbindung in den translatorischen und rotatorischen Richtungen, beide Enden der Skalarverbindung liegen aufeinander.
    - b) Die Kontaktflächen des Führungswagens und des verdeckten Teils der Schiene werden mit zwei kraftbasierten RBE3-Starrkörperelementen auf einen Knoten zentriert, der sich in den Symmetrieebenen des Wagens und auf Höhe der Symmetrieebene der Wälzkörperreihen befindet. Hier ist die Skalarverbindung angebunden.
  4. *Numerische Lösung des implementierten Modells*
    - a) Parametrisierung von Steifigkeit und Verlustfaktor der Verfahrrichtung anhand des gewählten Arbeitspunkts.
    - b) Parametrisierung der verbleibenden Steifigkeiten und Dämpfungskonstanten entsprechend dem Wälzkörpertyp, der Vorspannklasse, dem Schmierungszustand und der Richtung.
- 

Tab. 5.18: Modellierungsprozess für Profilschienenführungen im Stillstand

**Charakterisierung der Modellannahmen aus Tab. 5.18 (S. 128).** Die Abbildung von Schiene und Wagen mit vereinfachten Körpern (Annahme 1a) ist eine gültige Annahme, da die Strukturmechanik beider Bauteile im Frequenzbereich der Maschinenstruktur vernachlässigbar ist. Die Massen der Bauteile sind damit berücksichtigt, die verbleibenden Eigenschaften des Wälzkontakts können deshalb als masseloses Übertragungsglied betrachtet werden (Annahme 1b). Die Annahme 1c einer Linearisierbarkeit der Reibkraft in Verfahrrichtung als elastisch-dissipatives Element ist als gültig anzusehen, sofern nur Mikrobewegungen stattfinden. Dies gilt ebenso für die linearisierte Beschreibung der übrigen Richtungen als elastisch-dissipative Elemente (Annahme 1d) mit der Annahme 2a des Hooke'schen Gesetzes und des Verlustfaktor- bzw. Dämpfungskonstantenansatzes, deren Gültigkeit messtechnisch in der Literatur mehrfach nachgewiesen wurde. Im Modell wird dies durch eine entsprechende Skalarverbindung in allen sechs Raumrichtungen (Annahme 3a) umgesetzt, die durch

die aufeinanderliegenden Knoten nicht wechselwirken. Deren Anbindung wird durch zwei nachgiebige Starrkörperelemente realisiert, welche die umgebende Struktur nicht zusätzlich versteifen (Annahme 3b). Abschließend erfolgt die Parametrisierung der Verfahrrichtung und der übrigen Richtungen mit entsprechenden Parametern (Annahme 4a und 4b). Die Parameter der Verfahrrichtung sind hierbei epistemisch unsicher, da die Linearisierung der Reibkraft eine vereinfachte Näherung des tatsächlichen, nichtlinearen Verhaltens darstellt. Die Parameter der übrigen Richtungen sind hingegen mit aleatorischen Unsicherheiten behaftet, die aus der Streuung der Exemplare und der Montage herrühren. Die Charakterisierung der Modellannahmen für Profilschienenführungen hat somit die in Tab. 5.19 zusammengefassten Unsicherheiten zur Folge.

Modellannahme	1a	1b	1c	1d	2a	3a	3b	4a	4b
gültig	○	○	○	○	○	○	○		
aleatorisch unsicher									○
epistemisch unsicher								○	

Tab. 5.19: Charakterisierung der Modellannahmen für Profilschienenführungen (Tab. 5.18, S. 128)

**Quantifizierung und Begrenzung der Unsicherheiten.** Die Exemplar- und Montagestreuungen der Profilschienenführung sind mittels Identifikation an der Maschinenstruktur zwar erfassbar, ein angepasster Prüfstand – wie der in BRECHER ET AL. (2012b) beschriebene – ist aufgrund der geringeren Umgebungseinflüsse hierfür jedoch besser geeignet. Die epistemisch unsicheren Parameter der Reibkraft können hingegen an der Maschinenstruktur anhand der dynamischen Eigenschaften für einzelne Betriebspunkte identifiziert werden. Zur Sicherstellung der Prognosefähigkeit des Modells ist die Nichtlinearität jedoch durch ein entsprechend breites Parameterband zu berücksichtigen.

### 5.5.2 Anwendung an einer teilmontierten Maschinenstruktur

Die vorgestellte Modellierung für Profilschienenführungen wird im Folgenden am Beispiel einer teilmontierten Maschinenstruktur beschrieben, die zur Minimierung der Umgebungseinflüsse auf weichen Federn aufgestellt ist. Abb. 5.20a (S. 130) zeigt das Finite-Elemente-Modell der Struktur, das zugehörige Modell der Profilschienenführung ist im Detail in den Abb. 5.20b und 5.20c (S. 130) ersichtlich. Die Modelle der beiden verwendeten Strukturkomponenten entsprechen den Adäquanzkriterien und wurden mit dem bereits bekannten, in Tab. 5.12a (S. 114) aufgeführten Verlustfaktor für das Material beaufschlagt. Die Parametrisierung der Federaufstellung und

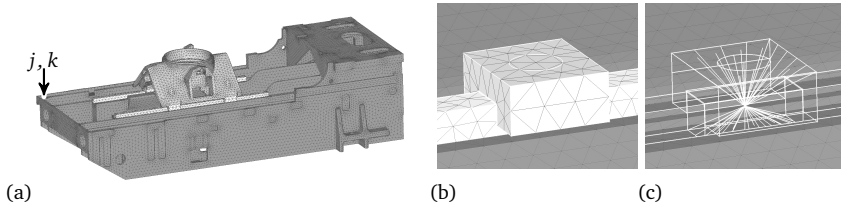


Abb. 5.20: Modell der teilmontierten Maschinenstruktur mit den betrachteten Freiheitsgraden  $j$  und  $k$  (a) sowie Detailaufnahme der Profilschienenführung mit (b) und ohne (c) Ersatzgeometrien

der Profilschienenführung erfolgte entsprechend den Werten aus Tab. 5.20 (S. 130), wobei die Rotationsfreiheitsgrade der Federn vernachlässigt wurden. Die elastischen und dissipativen Parameter der Federn sowie der Verfahrriichtung der Profilschienenführung wurden unter Verwendung der Methode von NIEHUES & ZÄH (2012) an der betrachteten Maschinenstruktur bestimmt. Die übrigen Werte stammen hingegen vom Werkzeugmaschinenlabor WZL der RWTH Aachen und wurden mit Hilfe des in BRECHER ET AL. (2012b) beschriebenen Prüfstands an einer baugleichen Profilschienenführung identifiziert. Hierbei zeigt sich eine weitgehende Übereinstimmung der ermittelten Steifigkeitswerte der Profilschienenführungen mit den in BOSCH (2006a, S. 31) aufgeführten Werten. Um die Genauigkeit der vorgestellten Modellierung im Sinne der Adäquanzkriterien beurteilen zu können, wurde mit insgesamt 31 über der Struktur verteilten Messpunkten eine experimentelle Modalanalyse durchgeführt.

Parameter	Zug/Druck	quer
$k$	$1,61 \cdot 10^3 \text{ N mm}^{-1}$	$7,52 \cdot 10^2 \text{ N mm}^{-1}$
$c$	$1,16 \cdot 10^{-2} \text{ N s mm}^{-1}$	$3,9 \cdot 10^{-2} \text{ N s mm}^{-1}$

(a) Federn

Parameter	Zug/Druck	quer	Verfahrriichtung
$k$	$2,2 \cdot 10^6 \text{ N mm}^{-1}$	$1,5 \cdot 10^6 \text{ N mm}^{-1}$	$1,7 \cdot 10^4 \text{ N mm}^{-1}$
$c, d$	$1,22 \text{ N s mm}^{-1}$	$1,05 \text{ N s mm}^{-1}$	$6,97 \cdot 10^3 \text{ N mm}^{-1}$

Parameter	Gieren	Nicken	Rollen
$k$	$1,6 \cdot 10^9 \text{ N mm rad}^{-1}$	$1,9 \cdot 10^9 \text{ N mm rad}^{-1}$	$9,5 \cdot 10^8 \text{ N mm rad}^{-1}$
$c$	$6,47 \cdot 10^3 \text{ N mm s rad}^{-1}$	$4,53 \cdot 10^3 \text{ N mm s rad}^{-1}$	$1,54 \cdot 10^3 \text{ N mm s rad}^{-1}$

(b) Profilschienenführung (Rollen, Baugröße 45, Vorspannklasse 3, Lieferzustand)

Tab. 5.20: Modellparameter der teilmontierten Maschinenstruktur mit Profilschienenführung

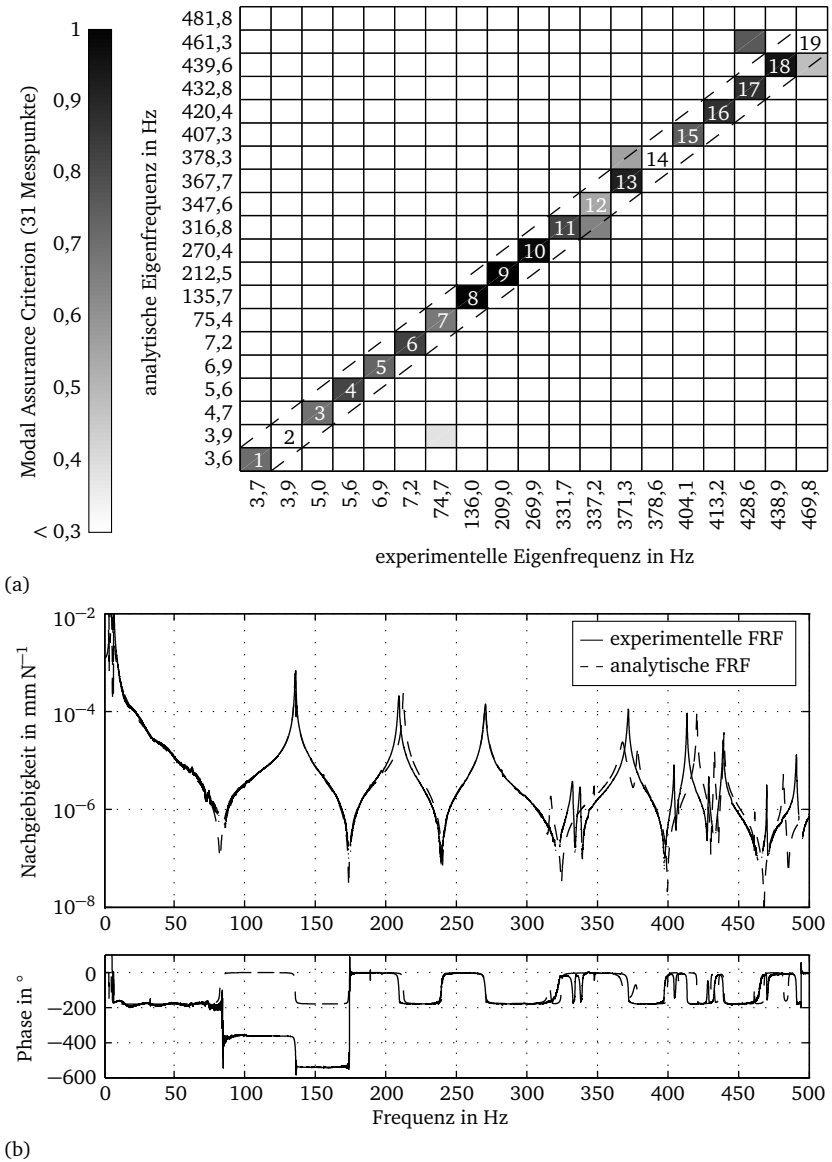


Abb. 5.21: MAC-Vergleichsmaß (a) sowie Amplitude und Phase des experimentellen und des analytischen Frequenzgangs der Freiheitsgrade  $j$  und  $k$  (b) für die teilmontierte Maschinenstruktur mit Profilschienenführung im Frequenzbereich von 0 Hz bis 500 Hz

In Abb. 5.21a (S. 131) ist das resultierende MAC-Vergleichsmaß im Frequenzbereich bis 500 Hz für das Finite-Elemente-Modell der teilmontierten Maschinenstruktur zu sehen. In den Abb. 5.21b (S. 131) und 5.22 ist zudem der Vergleich von experimentellem und analytischem Frequenzgang zwischen den betrachteten Freiheitsgraden  $j$  und  $k$  (siehe Abb. 5.20a, S. 130) sowie das NFD-Vergleichsmaß illustriert. Dabei ist zu erkennen, dass die vorgestellte Modellierung mit Ausnahme der Moden 2, 14 und 19 den Adäquanzkriterien genügt und somit als prognosefähig bezeichnet werden kann.

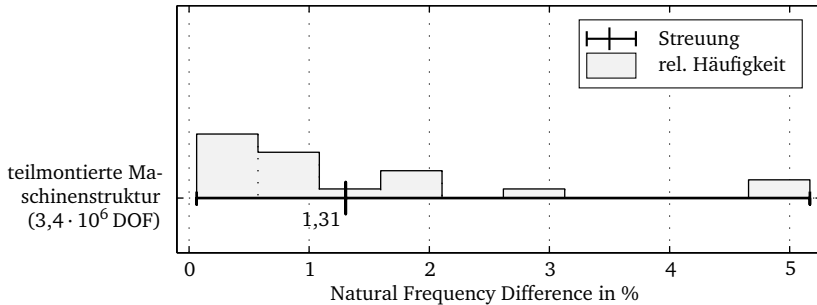


Abb. 5.22: NFD-Vergleichsmaß für die teilmontierte Maschinenstruktur mit Profilschienenführung im Frequenzbereich von 0 Hz bis 500 Hz

## 5.6 Kugelgewindetriebe inkl. Lagerung

**Ausgangssituation für die Modellierung.** Kugelgewindetriebe sind ebenfalls typische Zukaufteile und bestehen – wie in Abb. 5.23 ersichtlich – aus Kugelgewindemutter, Spindelwelle sowie einer entsprechenden Lagerung für die Welle.

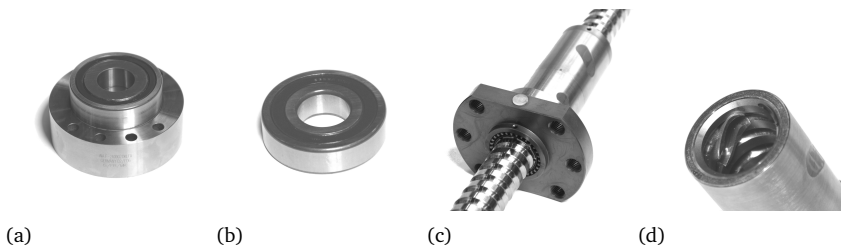


Abb. 5.23: Festlager (a), Loslager (b), montierte Kugelgewindeeinheit (c) sowie Umlenkeinheit der Kugelgewindemutter (d)



Diese ist bei der betrachteten Maschinenstruktur als Fest-Los-Anordnung ausgeführt. Für die Lager werden dabei herstellerseitig entsprechende Steifigkeiten angegeben. Die Ergebnisse systematischer Untersuchungen zum Dissipationsverhalten von Kugel- und Rollenlagern im Stillstand können BRECHER ET AL. (2012a, d, 2013, 2014a) entnommen werden. Für den Kugelgewindetrieb sind die Steigung, die Gangzahl, der Außen- bzw. der Kerndurchmesser und das Material der Spindelwelle bekannt. Außerdem wird meist die Vorspannkonfiguration, der Lastwinkel und die Anzahl bzw. die Winkellage der Umlenkeinheiten in der Mutter angegeben. Darüber hinaus erfolgt in vielen Fällen die messtechnische Erfassung der axialen Steifigkeit der montierten Einheit nach DIN ISO 3408 Blatt 4. Für die Modellierung des Kugelgewindetriebs inkl. Lagerung stehen somit die in Tab. 5.21 aufgeführten Informationen zur Verfügung.

- 
1. Steifigkeiten der Lagerung in verschiedenen Richtungen
  2. Dissipationsverhalten der Lager im Stillstand (BRECHER ET AL. 2012a, d, 2013, 2014a)
  3. Steigung, Gangzahl, Außen- und Kerndurchmesser sowie Material der Spindelwelle
  4. Vorspannkonfiguration, Lastwinkel und Anzahl bzw. Winkellage der Umlenkeinheiten
  5. Axiale Steifigkeit der Kugelgewindeeinheit nach DIN ISO 3408 Blatt 4
- 

Tab. 5.21: Für die Modellierung vorhandene Informationen

### 5.6.1 Diskussion vorhandener Ansätze

Wie in Abschnitt 2.4.5 (S. 37) beschrieben, sind bei der Modellierung des Kugelgewindetriebs inkl. Lagerung für die Abbildung der Spindelwelle, der Wälzkontaktsteifigkeit und der Kugelgewindeeinheit sowie für die Modellierung der Lagerung bereits Ansätze vorhanden. Diese weisen jedoch eine unterschiedlich hohe Genauigkeit und praktische Anwendbarkeit auf. Aus diesem Grund wird im Folgenden anhand der für die Modellierung zur Verfügung stehenden Informationen aus Tab. 5.21 jeweils kurz die Prognosefähigkeit der Ansätze aus der Literatur diskutiert.

**Steifigkeits- und Trägheitseigenschaften der Spindelwelle.** Spindelwellen von Kugelgewindetrieben werden nach OKWUDIRE & ALTINTAS (2009) üblicherweise mit Hilfe von Balkenelementen modelliert, deren Steifigkeitseigenschaften dem Kernquerschnitt der Welle entsprechen. Der daraus resultierende Massenverlust durch Vernachlässigung der Gewindegänge wird anschließend durch eine entsprechend höhere Dichte des hinterlegten Materials wieder kompensiert. Die in der vorliegenden Arbeit betrachtete Spindelwelle besitzt – wie in Abb. 5.24 (S. 134) zu sehen – einen Außendurchmesser von 40 mm und einen Kerndurchmesser von 33,3 mm. Um die Prognosefähigkeit des beschriebenen Ansatzes zu überprüfen, wurden die

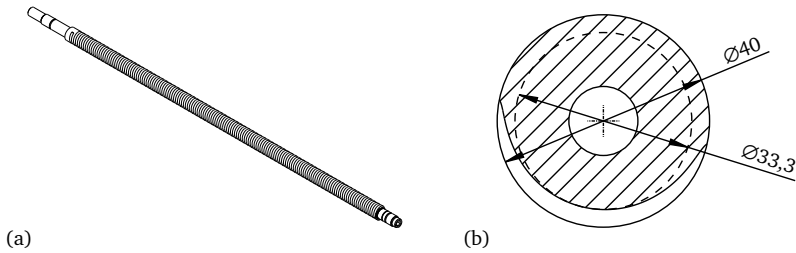


Abb. 5.24: Betrachtete Spindelwelle mit 1404,5 mm Länge (a) sowie zugehöriger Querschnitt des Spindelteils mit Außen- und Kerndurchmesser (b)

Eigenfrequenzen der Spindelwelle im aufgehängten Zustand mittels Laservibrometrie experimentell bestimmt und anschließend mit analytisch ermittelten Werten verglichen. Dabei wurden zwei Modelle betrachtet: ein Volumenmodell der Spindelwelle, bestehend aus Tetraeder-Elementen auf Basis der CAD-Geometrie, sowie ein Modell mit Balkenelementen des (Kern-)Durchmessers 33,3 mm und entsprechend korrigierter Dichte im Spindelteil. In Abb. 5.25 sind die NFD-Vergleichsmaße von beiden Modellen unter Verwendung der Kennwerte des Wellenstahls Cf53/1.1213 (siehe Tab. 5.22) illustriert.

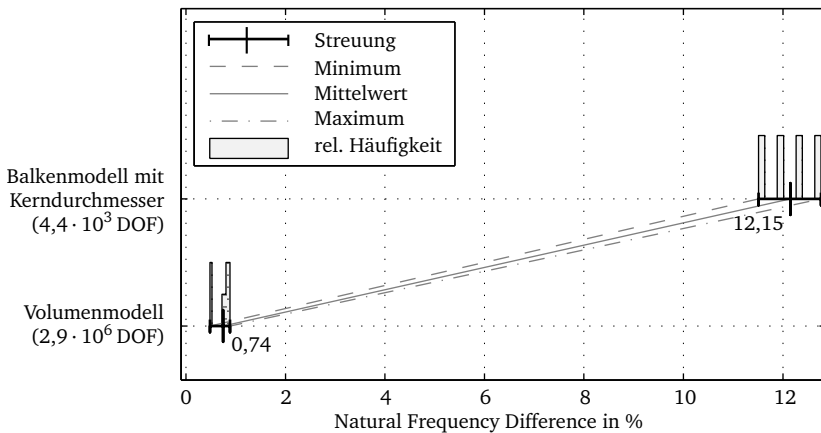


Abb. 5.25: NFD-Vergleichsmaß der Spindelwelle für ein Balkenmodell auf Basis des Kerndurchmessers und ein Volumenmodell im Frequenzbereich von 0 Hz bis 800 Hz

Hier ist zu erkennen, dass das Volumenmodell bei dieser Parametrisierung das gemessene Verhalten im Sinne der Adäquanzkriterien mit hinreichend hoher Genauigkeit abbildet, der Modellierungsansatz mit Balkenelementen nach OKWUDIRE & ALTINTAS

Elastizitätsmodul	$E$	$2,1 \cdot 10^5 \text{ N mm}^{-2}$
Querkontraktionszahl	$\nu$	0,3
Dichte	$\rho$	$7,69 \cdot 10^{-9} \text{ t mm}^{-3}$

Tab. 5.22: Dynamisch relevante Eigenschaften von Cf53/1.1213 (DEUTSCHE EDELSTAHLWERKE 2011)

(2009) zeigt hingegen deutliche Abweichungen. Im Gegensatz zu einer Modellierung mittels Volumenelementen ist somit eine Modellierung mit Balkenelementen nach OKWUDIRE & ALTINTAS (2009) als nicht prognosefähig zu bezeichnen.

**Lagerung der Spindelwelle.** Nach BRECHER ET AL. (2012a, d, 2013, 2014a) können Wälzlager in Finite-Elemente-Modellen mit Hilfe von skalaren Feder-Dämpfer-Elementen abgebildet werden, die in der Mitte des Lagers angeordnet werden. Die hierbei verwendeten Modellparameter wurden in Abhängigkeit von der Vorspannung und weiterer Faktoren am Prüfstand ermittelt und konnten anhand von Spindelbaugruppen erfolgreich auf ihre Prognosefähigkeit überprüft werden.

**Berechnung der Wälzkontaktsteifigkeit der Kugelgewindeeinheit.** Für die Berechnung der Steifigkeitsmatrix des Wälzkontakts in hybriden, linearen Modellen von Kugelgewindetrieben stehen nach Abschnitt 2.4.5 (S. 37) die Ansätze von OERTLI (2008, S. 65 ff.) und OKWUDIRE (2009, S. 21 ff.) zur Verfügung. Die Parametrisierung beider Modelle erfordert die Kenntnis des Steigungswinkels  $\hat{\alpha}$ , der sich aus dem Radius  $R$  des Nenndurchmessers  $D_n$  und der Spindelsteigung  $P$  über die Gleichung

$$\hat{\alpha} = \arctan \frac{P}{D_n \pi} = \arctan \frac{P}{2 R \pi} \quad (5.13)$$

ergibt. Die Bahn der Kugeln im Wälzkontakt wird über die Helixfunktion

$$\{\hat{r}\} = R \cdot \begin{Bmatrix} \tan \hat{\alpha} \cdot \hat{\gamma} \\ \cos \hat{\gamma} \\ \sin \hat{\gamma} \end{Bmatrix} \quad (5.14)$$

beschrieben, wobei  $\hat{\gamma}$  die absolute Winkellage um die Wellenachse im gewählten Koordinatensystem kennzeichnet. In der vorliegenden Arbeit wird dieses Koordinatensystem – wie in Abb. 5.26 (S. 136) ersichtlich – in die Mitte der Kugelgewindemutter gelegt, sodass die Bereiche mit Wälzkontakt symmetrisch um den Koordinatenursprung angeordnet sind. Davon ausgehend können – abhängig von der Vorspannungskonfiguration – die Winkelintervalle der Bereiche mit Wälzkontakt

$$\{\hat{\gamma}\} = \left[ \{\underline{\hat{\gamma}}\}, \{\bar{\hat{\gamma}}\} \right] \quad (5.15)$$

zusammen mit dem jeweiligen Lastwinkel  $\pm\hat{\beta}$  angegeben werden. Dem in der Praxis einfach anwendbaren Ansatz von OERTLI (2008, S. 65 ff.) liegt die Annahme zugrunde, dass auf beiden Vorspannungsseiten ununterbrochener Wälzkontakt herrscht und nur jeweils eine Umlenkeinheit vorhanden ist. Zusätzlich wird durch die Homogenisierung des Wälzkontakts Rotationsymmetrie um die Wellenachse postuliert. In Abb. 5.26 ist die Helixfunktion der in der vorliegenden Arbeit betrachteten Kugelgewindeeinheit mit dem gewählten 1-Koordinatensystem und den Bereichen des Wälzkontakts skizziert.

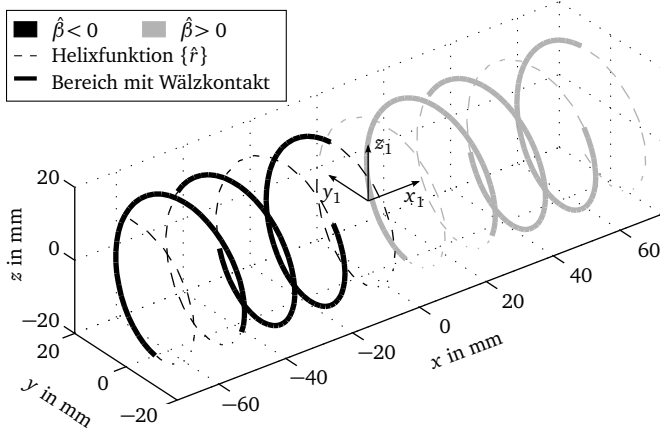


Abb. 5.26: Helixfunktion  $\{\hat{r}\}$  der betrachteten Kugelgewindeeinheit mit den Winkelintervallen  $\{\hat{\beta}\}$  der Bereiche mit Wälzkontakt, dem Verlauf des Lastwinkels  $\hat{\beta}$  und dem gewählten 1-Koordinatensystem

Eine Modellierung mit dem Ansatz nach OERTLI (2008, S. 65 ff.) ist für diese Einheit somit nicht möglich, da einerseits insgesamt sechs Umlenkeinheiten mit entsprechend unterbrochenem Wälzkontakt vorhanden sind und andererseits die Rotationssymmetrie um die Wellenachse nicht gegeben ist. Im Gegensatz dazu kann diese Konfiguration mit dem Modellierungsansatz von OKWUDIRE (2009, S. 21 ff.) abgebildet werden. Allerdings ist hierbei zusätzlich die Kenntnis der Anzahl und Lage der im Kontakt befindlichen Wälzkörper notwendig, über die anschließend einzeln numerisch integriert wird. Dies ist rechenintensiv und erfordert zudem für den Anwender schwer zugängliche Informationen, was die praktische Anwendbarkeit dieses Modellierungsansatzes einschränkt. Für eine prognosefähige Modellierung der Wälzkontaktsteifigkeit der Kugelgewindeeinheit ist deshalb ein Ansatz notwendig, der die Allgemeingültigkeit der Modellierung von OKWUDIRE (2009, S. 21 ff.) mit der praktischen Anwendbarkeit des Ansatzes von OERTLI (2008, S. 65 ff.) verbindet.

### 5.6.2 Ableitung einer prognosefähigen Modellierung

Wie in Abschnitt 5.6.1 (S. 133) beschrieben, ist nur ein Teil der in der Literatur vorhandenen Ansätze bei der Modellierung von Kugelgewindetrieben und deren Lagerung prognosefähig. Im Folgenden werden deshalb prognosefähige Komponentenmodelle abgeleitet, wobei die bereits prognosefähigen Ansätze verwendet und die Defizite der übrigen behoben werden. Dementsprechend wird der Modellierungsansatz für die Lagerung nach BRECHER ET AL. (2012a, d, 2013, 2014a) übernommen, für die Spindelwelle und die Steifigkeit des Wälzkontakts in der Kugelgewindeeinheit werden angepasste Ansätze verwendet. In Tab. 5.23 (S. 138) sind die resultierenden Modellannahmen in der aus Abschnitt 4.3 (S. 63) bekannten Form aufgelistet. Für die Bestimmung des äquivalenten Spindeldurchmessers und die direkte Berechnung der Wälzkontaktsteifigkeit der Kugelgewindeeinheit ist die Kenntnis zusätzlicher Gleichungen erforderlich. Diese werden im Folgenden vorgestellt, bevor anschließend mit der Charakterisierung der Modellannahmen fortgefahren wird.

**Äquivalenter Durchmesser der Spindelwelle.** Eine Modellierung der Spindelwelle unter Verwendung des Kerndurchmessers ist – wie in Abschnitt 5.6.1 (S. 133) ausgeführt – nicht prognosefähig. Aus diesem Grund ist die Herleitung eines äquivalenten Durchmessers  $\bar{D}_a$  erforderlich, der den Spindelteil der Welle prognosefähig abbildet. Da der Flächenschwerpunkt dieses Wellenteils – wie in Abb. 5.24b (S. 134) ersichtlich – jedoch exzentrisch um die Wellenachse rotiert, bildet sich hierdurch eine rotierende schiefe Biegung aus, die analytisch schwer zu beschreiben ist. In der vorliegenden Arbeit wird deshalb auf eine analytische Beschreibungsform des Spindelteils verzichtet und stattdessen der Umstand genutzt, dass ein Volumenmodell auf Basis der CAD-Geometrie in der Lage ist, die Biegeschwingung der Spindelwelle mit hinreichender Genauigkeit prognosefähig abzubilden (siehe Abb. 5.25, S. 134). Das Volumenmodell dient hierbei als Supermodell für die Balkenmodellierung. Für die Bestimmung des äquivalenten Durchmessers  $\bar{D}_a$  ist deshalb zunächst – wie in Abb. 5.27 illustriert – ein Volumenmodell mit ausschließlich der Geometrie des Spindelteils der Welle und einer exemplarischen Länge  $l$  zu erstellen.

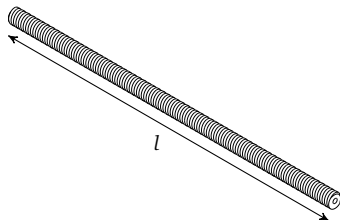


Abb. 5.27: Ausschnitt des Spindelteils der betrachteten Spindelwelle mit der Länge  $l$  zur Bestimmung des äquivalenten Durchmessers  $\bar{D}_a$

1. *Konzeptionelle Modellierung des physikalischen Systems*
    - a) Abbildung der Kugelgewindemutter mit einem vereinfachten Körper, um die Elastizitäts- und Trägheitswirkung auf das angrenzende Strukturbauteil zu berücksichtigen.
    - b) Vernachlässigung der Masse der Wellenlager.
    - c) Abbildung der Eigenschaften der Wälzkontakte in der Kugelgewindeeinheit und den Wellenlagern als masselose, linearisierte Übertragungsglieder entsprechend der Vorspannung.
    - d) Vernachlässigung des elastischen Verhaltens der Spindelwelle bei der Berechnung der Wälzkontaktsteifigkeit der Kugelgewindeeinheit.
    - e) Vernachlässigung der Reibung in den Wellenlagern und der Kugelgewindeeinheit.
  2. *Mathematische Modellierung des konzeptionellen Modells*
    - a) Hooke'sches Gesetz für das elastische Verhalten, gekoppelter Massenansatz für die Trägheit der Spindelwelle sowie Verlustfaktorenansatz für die Dissipation in der Kugelgewindeeinheit, im Wellenmaterial und in den Wellenlagern.
    - b) Direkte Berechnung der Wälzkontaktsteifigkeit der Kugelgewindeeinheit unter Vernachlässigung der räumlichen Ausdehnung der Kugeln.
    - c) Homogenisierung der Spindelwelle mittels eines äquivalenten Spindeldurchmessers mit isotropem Elastizitätsverhalten und angepasster Dichte.
  3. *Diskretisierung und Algorithmus-Auswahl für das mathematische Modell*
    - a) Diskretisierung der Spindelwelle mit isoparametrischen Bernoulli-Balkenelementen zweiter Ordnung und der Elementgröße der Strukturbauteile.
    - b) Elastisch-dissipative Skalarverbindungen für den Wälzkontakt in den Wellenlagern, die Enden der Skalarverbindungen liegen jeweils aufeinander.
    - c) Elastisch-dissipative Skalarverbindungen zur Abbildung der Steifigkeitsmatrix des Wälzkontakts in der Kugelgewindeeinheit, die Enden der Skalarverbindungen liegen jeweils aufeinander.
    - d) Die Kontaktflächen der Wellenlager und der Kugelgewindeeinheit an den Strukturbauteilen und der Welle werden jeweils mit zwei kraftbasierten RBE3-Starrkörperelementen auf einen Knoten zentriert, der sich auf der Wellenachse in der Mitte des Maschinenelements befindet. Hier sind die Skalarverbindungen angebunden.
  4. *Numerische Lösung des implementierten Modells*
    - a) Parametrisierung der Wellenlager mit Steifigkeitswerten des Lagerherstellers und Dissipationswerten nach BRECHER ET AL. (2012a, d, 2013, 2014a).
    - b) Parametrisierung der Wälzkontaktsteifigkeit der Kugelgewindeeinheit mit den technischen Daten des Herstellers und einem Verlustfaktor nach BRECHER ET AL. (2013).
    - c) Parametrisierung der Spindelwelle in den Wellenabschnitten mit dem Nenn-durchmesser bzw. dem äquivalenten Durchmesser sowie den Kennwerten des Materials.
- 

Tab. 5.23: Modellierungsprozess für Kugelgewindetribe inkl. Lagerung

Nach der Parametrisierung des Supermodells mit dem Wellenmaterial (siehe Tab. 5.22, S. 135) kann die Masse  $m$  sowie die erste Biegeeigenfrequenz  $\omega_1$  bei freier Lagerung berechnet werden. Diese wird anschließend mit dem Rayleigh-Quotienten für die Biegeeigenfrequenz eines Bernoulli-Balkens (GASCH & KNOTHE 1989, S. 122)

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^l E \bar{I} \left( \frac{\partial^2 \hat{w}_1}{\partial x^2} \right)^2 dx}{\int_0^l \frac{m}{l} \hat{w}_1^2 dx} \quad (5.16)$$

gleichgesetzt und zu

$$\bar{I} = \frac{\omega_1^2 \frac{m}{l} \int_0^l \hat{w}_1^2 dx}{E \int_0^l \left( \frac{\partial^2 \hat{w}_1}{\partial x^2} \right)^2 dx} \quad (5.17)$$

umgestellt.  $\bar{I}$  ist hierbei das gesuchte, mittlere Flächenträgheitsmoment und  $\hat{w}_1$  die Biegelinie eines frei gelagerten Bernoulli-Balkens, die nach BLEVINS (1979, S. 108 f.) durch

$$\hat{w}_1 = \cosh\left(\frac{x}{l} \beta\right) + \cos\left(\frac{x}{l} \beta\right) - \frac{\cosh \beta - \cos \beta}{\sinh \beta - \sin \beta} \cdot \left( \sinh\left(\frac{x}{l} \beta\right) + \sin\left(\frac{x}{l} \beta\right) \right) \quad (5.18)$$

mit  $\beta = 4,73004$  für die erste Biegeeigenfrequenz  $\omega_1$  gegeben ist. Da somit sämtliche Größen in Gl. 5.17 bekannt sind, kann  $\bar{I}$  berechnet werden. Die an dieser Stelle erforderliche Integration von Gl. 5.18 und deren zweiter Ableitung ist manuell aufwendig, kann jedoch – wie in Anhang A.1 (S. 167) ersichtlich – mittels Computeralgebra bewerkstelligt werden. Für einen hohlen Kreisquerschnitt mit Innenradius  $R_I$  kann daraus der äquivalente Radius

$$\bar{R}_a = \sqrt[4]{\frac{4}{\pi} \bar{I} + R_I^4} \quad (5.19)$$

bestimmt werden, woraus sich wiederum der gesuchte, äquivalente Durchmesser

$$\bar{D}_a = 2 \bar{R}_a \quad (5.20)$$

ergibt. Die Bestimmung der außerdem erforderlichen angepassten Dichte  $\bar{\rho}$  zur Abbildung der Masse erfolgt über das zylindrische Volumen der Welle zu

$$\bar{\rho} = \frac{1}{\bar{R}_a^2 - R_I^2} \cdot \frac{m}{\pi l} \quad (5.21)$$

Für die in der vorliegenden Arbeit betrachtete Spindelwelle aus Cf53/1.1213 mit einem Nenndurchmesser von 40 mm ergibt sich damit ein äquivalenter Durchmes-





beschrieben werden, wobei die räumliche Ausdehnung der Kugel vernachlässigt wird. Für die Transformation des lokalen Steifigkeitstensors  $[K_4]$  in das 1-Koordinatensystem der Mutter ist eine Drehung um die Winkellage bzgl. der Wellenachse  $\hat{\gamma}$ , um den Steigungswinkel  $\hat{\alpha}$  und schließlich um den Lastwinkel  $\hat{\beta}$  erforderlich. Dies kann unter Verwendung der Drehtransformationen

$$[A_{12}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \hat{\gamma} & -\sin \hat{\gamma} \\ 0 & \sin \hat{\gamma} & \cos \hat{\gamma} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

$$[A_{23}] = \begin{bmatrix} \cos \hat{\alpha} & 0 & \sin \hat{\alpha} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \hat{\alpha} & 0 & \cos \hat{\alpha} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

$$[A_{34}] = \begin{bmatrix} \cos \hat{\beta} & -\sin \hat{\beta} & 0 \\ \sin \hat{\beta} & \cos \hat{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

und deren Verkettung in der Matrix

$$[A_{14}] = [A_{12}] [A_{23}] [A_{34}] \quad (5.26)$$

bewerkstelligt werden (OERTLI 2008, S. 66). Der Steifigkeitstensor des Wälzkontakts im 1-Koordinatensystem berechnet sich damit über

$$[K_1] = [A_{14}] [K_4] [A_{14}]^T \quad (5.27)$$

Zuletzt ist die Projektion des Steifigkeitstensors  $[K_1]$  in den Mittelpunkt der Kugelgewindemutter notwendig, wo die resultierende Steifigkeitsmatrix im Finite-Elemente-Modell platziert werden soll. Dafür sind die Momente zu berücksichtigen, die durch die jeweilige Position auf der Helixfunktion  $\{\hat{r}\}$  (Gl. 5.14, S. 135) entstehen. Dies kann unter Verwendung der Einträge  $\hat{r}_i$  mit Hilfe der Projektionsmatrix

$$[\hat{T}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\hat{r}_{z_1} & \hat{r}_{y_1} \\ 0 & 1 & 0 & \hat{r}_{z_1} & 0 & -\hat{r}_{x_1} \\ 0 & 0 & 1 & -\hat{r}_{y_1} & \hat{r}_{x_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

geschehen, was im Anschluss auf den Steifigkeitstensor des Wälzkontakts im Mittelpunkt der Mutter

$$[K_1]' = [\hat{T}]^T [K_1] [\hat{T}] \quad (5.29)$$

im 1-Koordinatensystem führt. Um schließlich die endgültige Steifigkeitsmatrix  $[K_{\text{KGT},1}]$  zu erhalten, ist dieser Steifigkeitstensor jeweils über die besetzten Win-

kelintervalle  $\{\gamma\}$  (Gl. 5.15, S. 135) entsprechend der Vorspannkonfiguration  $\pm\hat{\beta}$  nach  $\hat{\gamma}$  zu integrieren und über alle  $n$  Winkelintervalle zu summieren:

$$[K_{\text{KGT},1}] = \sum_{i=1}^n \left( \int_{\underline{\gamma}_i}^{\bar{\gamma}_i} [K_1]' d\hat{\gamma} \right) \quad (5.30)$$

Nach Normierung auf die Axialsteifigkeit  $k_{\text{axial}}$  nimmt die Steifigkeitsmatrix in Übereinstimmung mit OKWUDIRE (2009, S. 21 ff.) die folgende Form an:

$$[K_{\text{KGT},1}] = k_{\text{axial}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{xz} & -R \tan \hat{\alpha} & 0 & a_{x\theta_z} \\ & a_{yy} & 0 & 0 & a_{y\theta_y} & 0 \\ & & a_{zz} & a_{z\theta_x} & 0 & a_{z\theta_z} \\ & & & R^2 \tan^2 \hat{\alpha} & 0 & a_{\theta_x\theta_z} \\ \text{sym} & & & & a_{\theta_y\theta_y} & 0 \\ & & & & & a_{\theta_z\theta_z} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Die  $a$ -Terme sind längere, auf die Axialsteifigkeit normierte Ausdrücke, die sich nicht weiter vereinfachen lassen und daher nicht dargestellt sind. Die hier beschriebene Integration führt – insbesondere auf den Nebendiagonalen der Steifigkeitsmatrix – zu langen Ausdrücken, deren Bestimmung manuell aufwendig ist. In Anhang A.2 (S. 168) findet sich deshalb eine entsprechende Matlab<sup>®</sup>-Funktion zur Durchführung der Berechnung mit Methoden der Computeralgebra, die auf einem handelsüblichen Einzelplatzrechner weniger als eine Minute benötigt. Darüber hinaus enthält Anhang A.3 (S. 171) einen numerischen Vergleich dieses Berechnungsansatzes mit den Ansätzen von OERTLI (2008, S. 65 ff.) und OKWUDIRE (2009, S. 21 ff.), der anhand von Daten eines Kugelgewindetribs aus OKWUDIRE (2005, S. 43) die Äquivalenz der Ansätze bzgl. der jeweils berücksichtigten Terme nachweist. Die Ungenauigkeit durch die Vernachlässigung der räumlichen Ausdehnung der Kugeln muss deshalb nicht in Betracht gezogen werden. Da das 1-Koordinatensystem der Kugelgewindeeinheit in manchen Fällen ggü. dem globalen 0-System der Maschine verdreht ist, kann abschließend eine Drehtransformation um die Spindelachse mit

$$[A_{01}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \hat{\chi} & -\sin \hat{\chi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \hat{\chi} & \cos \hat{\chi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \hat{\chi} & -\sin \hat{\chi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \hat{\chi} & \cos \hat{\chi} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

$$[K_{\text{KGT},0}] = [A_{01}] [K_{\text{KGT},1}] [A_{01}]^T \quad (5.33)$$

erforderlich sein. Die berechnete Steifigkeitsmatrix wird entweder direkt in der Finite-Elemente-Umgebung hinterlegt oder – wie von OERTLI (2008, S. 74 ff.) vorgeschlagen – durch die Addition von positiven und negativen elastisch-dissipativen

Skalarverbindungen abgebildet. Die vorgestellte Modellierung ist für sämtliche denkbaren Konfigurationen anwendbar und daher als prognosefähig zu bezeichnen. Im Gegensatz zur Modellierung nach OKWUDIRE (2009, S. 21 ff.) sind jedoch keine detaillierten Informationen über Kugelanzahl und -lage notwendig, die Kenntnis der Winkelbereiche mit Wälzkontakt reicht für die Modellierung aus.

**Charakterisierung der Modellannahmen aus Tab. 5.23 (S. 138).** Die Abbildung der Kugelgewindemutter als vereinfachtes Bauteil stellt eine gültige Modellannahme dar, da das dynamische Verhalten der Mutter im betrachteten Frequenzbereich keine Rolle spielt (Annahme 1a). Dies trifft auch auf die Vernachlässigung der Masse der Wellenlager zu, sofern diese im Vergleich zu den übrigen Massen des Systems hinreichend klein ist (Annahme 1b). Eine Linearisierung der elastischen und dissipativen Eigenschaften der Wälzkontakte ist – wie bereits bei den Profilschienenführungen – ebenfalls als gültig anzusehen (Annahme 1c). Sofern das Verhältnis aus Mutterlänge und Nenndurchmesser der Spindel hinreichend klein ist – beim hier betrachteten Kugelgewindetrieb beträgt es 4,5 und erfüllt diese Forderung – kann nach OKWUDIRE (2011) das elastische Verhalten der Welle bei der Berechnung des Wälzkontakts vernachlässigt werden (Annahme 1d). Ist dies nicht der Fall, sollte – verbunden mit entsprechendem Implementierungsaufwand – der Modellierungsansatz nach OKWUDIRE (2011) verwendet werden. Eine Vernachlässigung der Reibung in den Wellenlagern und im Kugelgewindetrieb bringt eine epistemische Unsicherheit in das Modell ein (Annahme 1e), da der Effekt im realen System vorhanden ist. Im Gegensatz dazu ist die Modellierung des elastischen und dissipativen Verhaltens mit dem Hooke'schen Gesetz und dem Verlustfaktorenansatz eine gültige mathematische Formulierung (Annahme 2a) der zuvor getroffenen Annahmen. Dies gilt ebenso für die zuvor vorgestellte, direkte Berechnung der Wälzkontaktsteifigkeit der Kugelgewindeeinheit (Annahme 2b) sowie für die Homogenisierung der Spindelwelle mit einem äquivalenten Durchmesser (Annahme 2c). Die Vernetzung der Spindelwelle mit Bernoulli-Balkenelementen zweiter Ordnung verursacht – wie im Fall der Pentaederelemente in der Fuge (siehe Tab. 5.15, S. 122) – eine vernachlässigbare epistemische Unsicherheit (Annahme 3a), da das Konvergenzverhalten der Balkenelemente dem der Tetraeder in den Strukturbauteilen überlegen ist. Somit bestimmen bei gleicher Elementgröße die Tetraeder den Diskretisierungsfehler des Gesamtmodells. Die Abbildung des Wälzkontakts in den Wellenlagern und der Kugelgewindeeinheit mittels elastisch-dissipativer Skalarverbindungen ist gültig (Annahmen 3b und 3c), sofern die Enden wie beschrieben aufeinander liegen und die Freiheitsgrade daher nicht wechselwirken. Dies ist ebenso zutreffend für die Anbindung der Skalarverbindungen an die Welle und die Strukturbauteile mit Hilfe kraftbasierter Starrkörperelemente (Annahme 3d), da diese die angebondenen Bereiche nicht zusätzlich versteifen. Die Modellparameter des Wälzkontakts der Wellenlager (Annahme 4a) und der Kugelgewindeeinheit (Annahme 4b) sowie des Wellenmodells (Annahme 4c) sind durchweg mit aleatorischen Unsicherheiten behaftet, die aus der Exemplar- und Montagestreue herrühren. Insgesamt ergibt sich somit die in Tab. 5.24 (S. 144)

zusammengefasste Charakterisierung der Modellannahmen für Kugelgewindetriebe inkl. Lagerung.

Modellannahme	1a	1b	1c	1d	1e	2a	2b	2c	3a	3b	3c	3d	4a	4b	4c
gültig	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>		<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>			
aleatorisch unsicher													<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
epistemisch unsicher					<input type="radio"/>										

Tab. 5.24: Charakterisierung der Modellannahmen für Kugelgewindetriebe inkl. Lagerung (Tab. 5.23, S. 138)

**Quantifizierung und Begrenzung der Unsicherheiten.** Die Modellierung von Kugelgewindetriebe und ihrer Lagerung ist somit – ähnlich wie bei den Profilschienenführungen – durch aleatorische Unsicherheiten der Bauteile und deren Montage sowie durch eine epistemische Unsicherheit in Bezug auf die Reibung geprägt. Die aleatorischen Unsicherheiten der Wellenlager lassen sich an geeigneten Prüfständen quantifizieren (siehe z. B. BRECHER ET AL. 2014a), die Streuungen der Spindelwelle mittels Modalanalyse im hängenden Zustand (siehe auch Abschnitt 5.6.1, S. 133). Bei der Streuung der Kugelgewindeeinheit ist anzumerken, dass die axiale Steifigkeit nach DIN ISO 3408 Blatt 4 oftmals ein Prüfmaß mit bekannter Streuung ist, womit sich die Quantifizierung der dort vorhandenen Unsicherheiten auf die Dissipationseigenschaften beschränkt. Problematisch ist die Begrenzung der epistemischen Unsicherheit durch die Reibung in der Kugelgewindeeinheit und den Wellenlagern, da diese im Modell der montierten Maschinenstruktur mit den Parametern der Profilschienenführung in der Verfahrrichtung wechselwirkt. Somit ist in diesem Aufbau nicht identifizierbar, welcher Reibungsanteil welchem Komponentenmodell zuzuordnen ist. In der vorliegenden Arbeit wird deshalb im Bewusstsein dieses Mangels die gesamte in der Vorschubachse vorhandene Reibung der Profilschienenführung zugeordnet und die Kugelgewindeeinheit sowie die Lager werden als reibungsfrei angenommen. Um eine prognosefähige Modellierung zu erhalten, ist deshalb ein entsprechend breiter Streubereich für die Parameter der Verfahrrichtung zu wählen.

### 5.6.3 Anwendung an einer teilmontierten Maschinenstruktur

Die Modellierung des Kugelgewindetriebs inkl. Lagerung wird im Folgenden am Beispiel der bereits bekannten Maschinenstruktur erläutert. Zusätzlich zu der in Abschnitt 5.5.2 (S. 129) beschriebenen Konfiguration wurden an der Struktur zwei Lagerböcke, die Spindelwelle mit zugehörigem Fest- und Loslager und die Kugelgewindeeinheit montiert. Das resultierende Finite-Elemente-Modell sowie die Modellierung der Kugelgewindeeinheit im Detail ist in Abb. 5.30 (S. 145) ersichtlich.

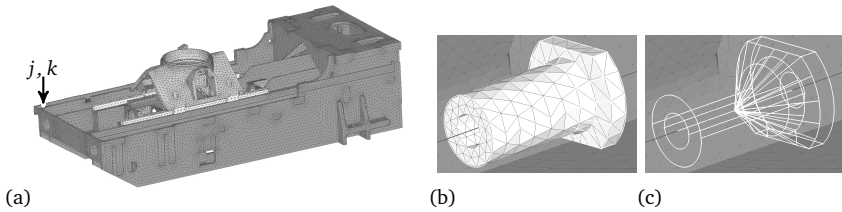


Abb. 5.30: Modell der teilmontierten Maschinenstruktur mit den betrachteten Freiheitsgraden  $j$  und  $k$  (a) sowie Detailaufnahme der Kugelgewindeeinheit mit (b) und ohne (c) Ersatzgeometrie der Kugelgewindemutter

Die Struktur war dazu nach wie vor auf Federn aufgestellt und der Werkstückschlitten auf den Profilschienenführungen gelagert, sodass die Parameter aus Tab. 5.20 (S. 130) mit Ausnahme der Verfahrrichtung ihre Gültigkeit behalten. Das Modell der Verfahrrichtung der Profilschienenführung bildet hier – wie bereits angesprochen – sowohl die Reibung der Führung als auch die der Wellenlager und der Kugelgewindeeinheit ab, weshalb mit der Methode von NIEHUES & ZÄH (2012) ein neuer Parametersatz identifiziert wurde. In Tab. 5.25 (S. 146) sind die neu hinzugekommenen oder veränderten Parameter aufgeführt. Die elastischen und dissipativen Parameter der Wellenlagerung sowie der Verlustfaktor der Kugelgewindeeinheit wurden wiederum am Werkzeugmaschinenlabor WZL der RWTH Aachen mit Hilfe des in BRECHER ET AL. (2012b) beschriebenen Prüfstands an baugleichen Komponenten bestimmt. Die hierbei ermittelten Steifigkeitsparameter der Wellenlagerung entsprechen weitgehend den vom Hersteller (SCHAEFFLER 2014) angegebenen Werten. Die Modellparameter der Kugelgewindeeinheit basieren – mit Ausnahme des Verlustfaktors – auf Angaben des Herstellers (AUGUST STEINMEYER 2014, S. 132 f.), wobei die axiale Steifigkeit nach DIN ISO 3408 Blatt 4 ein Prüfmaß ist. Der Verlustfaktor für die Materialdissipation wurde für die Strukturbauteile und deren Fugen aus Tab. 5.12a (S. 114) sowie für das Wellenmaterial aus Tab. 5.16c (S. 124) entnommen. Zur Erstellung einer messtechnischen Vergleichsbasis wurde eine experimentelle Modalanalyse mit 32 Messpunkten durchgeführt, einer der Messpunkte befand sich hierbei auf der Spindelwelle. Das resultierende NFD-Vergleichsmaß für das Finite-Elemente-Modell der teilmontierten Maschinenstruktur im Frequenzbereich bis 500 Hz ist in Abb. 5.31 (S. 146) zu sehen. Das korrespondierende MAC-Vergleichsmaß sowie der Vergleich von analytischem und experimentellem Frequenzgang für die Freiheitsgrade  $j$  und  $k$  (siehe Abb. 5.30) ist in den Abb. 5.32a und 5.32b (S. 147) illustriert. Dabei ist zu erkennen, dass das Modell mit Ausnahme der Eigenvektoren der Moden 20 und 21 den Adäquanzkriterien genügt. Da es sich bei beiden Moden um Biegeschwingungen der nahezu rotationssymmetrischen Spindelwelle handelt, ist diese Abweichung auf eine Verdrehung des analytischen ggü. dem experimentellen Koordinatensystem zurückzuführen (siehe auch FOTSCH 2001, S. 143 ff.). Somit kann die Modellierung des Kugelgewindetriebs inkl. Lagerung als prognosefähig bezeichnet werden.

Parameter	Verfahrriichtung	Parameter	radial
$k$	$4,42 \cdot 10^4 \text{ N mm}^{-1}$	$k$	$2,85 \cdot 10^5 \text{ N mm}^{-1}$
$d$	$1,02 \cdot 10^4 \text{ N mm}^{-1}$	$d$	$1,25 \cdot 10^4 \text{ N mm}^{-1}$

(a) Profilschienenführung

(b) Loslager

Parameter	axial	radial	Kippen
$k$	$1,32 \cdot 10^6 \text{ N mm}^{-1}$	$1,84 \cdot 10^5 \text{ N mm}^{-1}$	$7,09 \cdot 10^8 \text{ N mm rad}^{-1}$
$d$	$7,0 \cdot 10^4 \text{ N mm}^{-1}$	$8,1 \cdot 10^3 \text{ N mm}^{-1}$	$1,21 \cdot 10^7 \text{ N mm rad}^{-1}$

(c) Festlager

$k_{\text{axial}}$	$6,3 \cdot 10^5 \text{ N mm}^{-1}$	$R$	20 mm
$\hat{\alpha}$	$6,807^\circ$	$\hat{\chi}$	$-30^\circ$
$\eta$	0,02		

Winkelintervall	1	2	3	4	5	6
$\bar{\hat{\gamma}}$	$-1230^\circ$	$-750^\circ$	$-270^\circ$	$+570^\circ$	$+1050^\circ$	$+1530^\circ$
$\hat{\gamma}$	$-1530^\circ$	$-1050^\circ$	$-570^\circ$	$+270^\circ$	$+750^\circ$	$+1230^\circ$
$\hat{\beta}$	$+50^\circ$	$+50^\circ$	$+50^\circ$	$-50^\circ$	$-50^\circ$	$-50^\circ$

(d) Kugelgewindeeinheit

$\bar{D}_a$	35,3 mm	$\bar{\rho}$	$8,92 \cdot 10^{-9} \text{ t mm}^{-3}$
-------------	---------	--------------	--

(e) Spindelwelle

Tab. 5.25: Modellparameter der teilmontierten Maschinenstruktur mit Kugelgewindtrieb

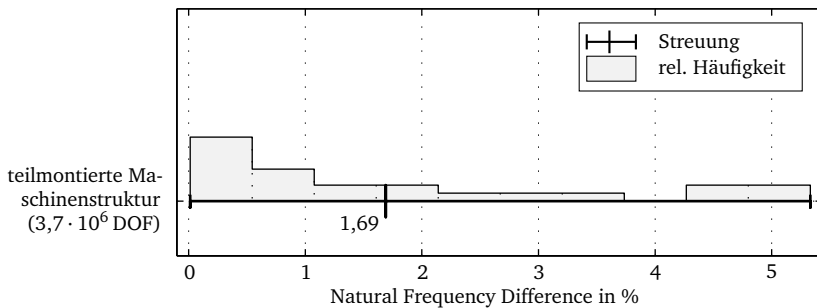
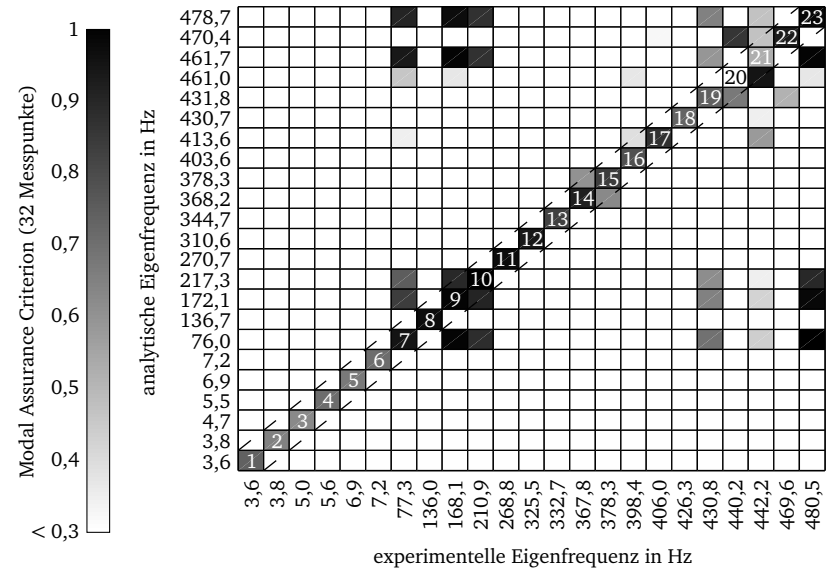
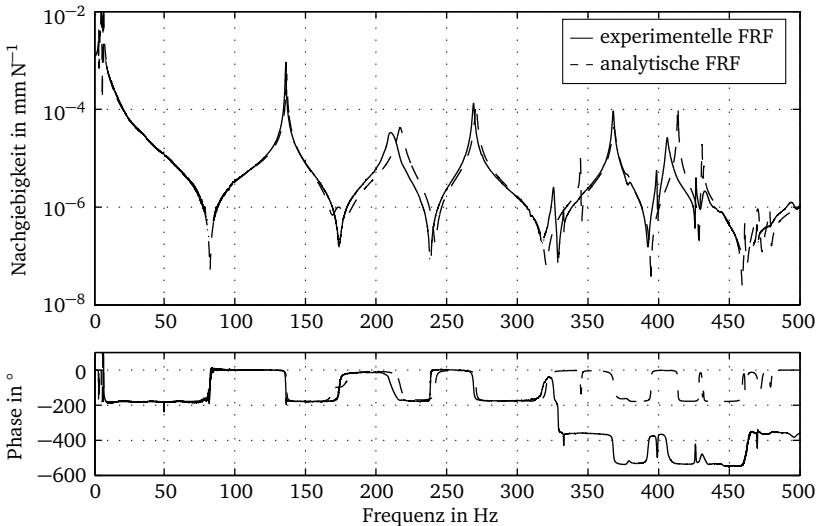


Abb. 5.31: NFD-Vergleichsmaß für die teilmontierte Maschinenstruktur mit Kugelgewindtrieb im Frequenzbereich von 0 Hz bis 500 Hz



(a)



(b)

Abb. 5.32: MAC-Vergleichsmaß (a) sowie Amplitude und Phase des experimentellen und des analytischen Frequenzgangs der Freiheitsgrade  $j$  und  $k$  (b) für die teilmontierte Maschinenstruktur mit Kugelgewindetrieb im Frequenzbereich von 0 Hz bis 500 Hz

## 5.7 Systematik der auftretenden Unsicherheiten

Unter Anwendung der in Kapitel 4 (S. 55) erarbeiteten Methode wurden in diesem Kapitel für die in einer Werkzeugmaschinenstruktur vorhandenen Komponenten prognosefähige Komponentenmodelle erarbeitet. Jedes Komponentenmodell ist sowohl mit aleatorischen als auch mit epistemischen Unsicherheiten behaftet, die bei der Modellierung entsprechend zu berücksichtigen sind. In Tab. 5.26 sind die Unsicherheiten der in der vorliegenden Arbeit betrachteten Komponentenmodelle zusammengefasst. Hierbei wird deutlich, dass sämtliche aleatorischen Unsicherheiten ihre Ursache im Betriebszustand, im Fertigungs- oder im Montageprozess haben, während den epistemischen Unsicherheiten in allen Fällen Vereinfachungen in der Modellierung zugrunde liegen.

<b>Komponente</b>	<b>Ursachen für aleatorische Unsicherheiten</b>	<b>Ursachen für epistemische Unsicherheiten</b>
Strukturbauteile	Fertigungsprozess (Material und Abmessungen)	Diskretisierung, Geometrievereinfachung
Aufstellelemente	Fertigungs- und Montageprozess	Beschränkung der Freiheitsgrade, Idealisierung des Fundaments
verschraubte Fugen	Fertigungs- und Montageprozess	Modell der Kontaktsteifigkeit
Profilschienenführungen	Fertigungs- und Montageprozess, Betriebszustand (Schmierung)	Linearisierung der Reibung
Kugelgewindetriebe inkl. Lagerung	Fertigungs- und Montageprozess, Betriebszustand (Schmierung)	Vernachlässigung der Reibung

Tab. 5.26: Zusammenfassung der Unsicherheiten der betrachteten Komponentenmodelle



## 6 Anwendung an einem Bearbeitungszentrum

### 6.1 Betrachteter Versuchsträger

Nachdem im vorigen Kapitel 5 (S. 95) Modellierungsansätze für sämtliche Komponenten einer Werkzeugmaschinenstruktur abgeleitet wurden und deren Prognosefähigkeit nachgewiesen werden konnte, wird im Folgenden deren Nutzung an einem Bearbeitungszentrum beschrieben. Bei dem in der vorliegenden Arbeit betrachteten Versuchsträger handelt es sich – wie in Abb. 6.1 illustriert – um die Maschinenstruktur eines Vier-Achs-Bearbeitungszentrums.

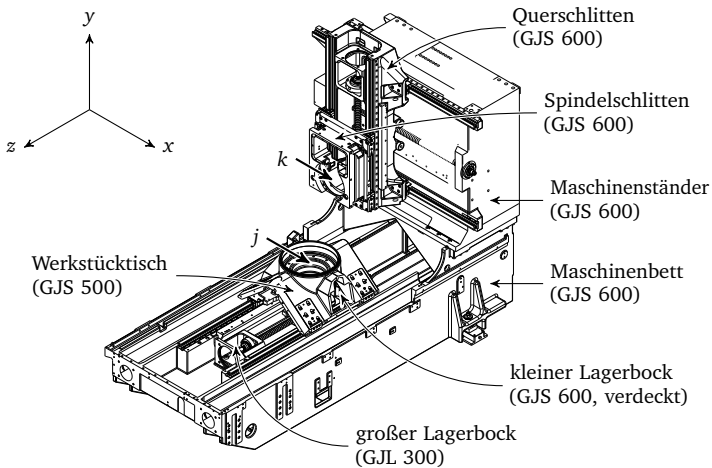


Abb. 6.1: Versuchsträger mit dem Maschinenkoordinatensystem, den betrachteten Freiheitsgraden  $j$  und  $k$  sowie den Strukturbauteilen und deren Werkstoff

Diese besteht aus insgesamt sieben Strukturbauteilen unterschiedlicher Gusswerkstoffe und realisiert in montiertem Zustand eine Kinematik mit drei translatorischen Freiheitsgraden. Die Lagerung der Struktur erfolgt auf den bereits in Abschnitt 5.3 (S. 106) vorgestellten Aufstellelementen. Zudem sind alle drei Achsen mit denselben Profilschienenführungen, Kugelgewindetrieben und Wellenlagerungen ausgeführt, welche in den Abschnitten 5.5 (S. 126) und 5.6 (S. 132) im Rahmen der Anwendungsbeispiele diskutiert wurden. Der Versuchsträger ist eine Serienmaschine, deren Bauteile direkt aus dem Produktionsprozess des Herstellers stammen und an welchen

keinerlei zusätzliche Vermessung oder Selektion durchgeführt wurde. Da für die Prozessstabilität insbesondere das dynamische Verhalten an der Wirkstelle relevant ist (siehe auch Abschnitt 2.2, S. 6), wird in den folgenden Untersuchungen stets der Einfluss der Unsicherheiten auf den Frequenzgang zwischen den in Abb. 6.1 (S. 149) ersichtlichen Freiheitsgraden  $j$  und  $k$  betrachtet.

## 6.2 Größe der Streuungen und Einfluss der Unsicherheiten

Durch Anwendung der in Kapitel 5 (S. 95) beschriebenen, prognosefähigen Modellierungsansätze wurden – sofern messtechnisch erfassbar – für jede Komponente des Versuchsträgers Exemplarparameter quantifiziert, die von den Nennwerten des Modells abweichen. Über mehrere Bauteile betrachtet ergeben sich aus diesen Parametersätzen Streuungen, in welchen sich die in realen Werkzeugmaschinenstrukturen auftretenden Unsicherheiten widerspiegeln. Die resultierenden Streuungen umfassen dabei lediglich das im Rahmen der vorliegenden Arbeit betrachtete Exemplar des Versuchsträgers bzw. dessen Bauteile und sind somit als kleine, statistisch nicht repräsentative Stichprobe zu betrachten. Die Größenordnung der auftretenden Unsicherheiten wird jedoch auch bei diesen kleinen Stichprobenumfängen deutlich, sodass Aussagen zur Relevanz einer derartigen Unsicherheit im Gesamtsystem möglich sind. Dafür ist es erforderlich, auf Basis der auftretenden Streuungen Unsicherheiten abzuleiten, die anschließend im nicht-deterministischen Teil des Modells berücksichtigt werden. Dies wird im Folgenden anhand der bisher diskutierten Komponentenmodelle beschrieben, wobei sämtliche Streuungen und Unsicherheiten in Form des Verhältnisses

$$a_{x/A} = \frac{a_{\text{Ist-Wert}}}{a_{\text{Nennwert}}} \quad (6.1)$$

angegeben werden. Bei der Berechnung der entstehenden Intervall-Frequenzgänge werden die Eigenmoden mit Hilfe des MAC-Kriteriums zugeordnet.

### 6.2.1 Strukturbauteile

Aus der in Abschnitt 5.2 (S. 96) erläuterten Modellierung für Strukturbauteile ergeben sich zwei epistemische und zwei aleatorische Unsicherheiten. Die epistemischen Unsicherheiten durch den Diskretisierungsfehler und die Geometrievereinfachungen werden an dieser Stelle als vernachlässigbar angesehen, da diese mit Hilfe der in Abschnitt 4.6 (S. 71) angeführten Kriterien hinreichend genau begrenzt werden können. Somit sind im nicht-deterministischen Teil der Modellierung für Strukturbauteile die aleatorischen Unsicherheiten der Material- und Geometriestreuungen zu berücksichtigen, um eine prognosefähige Modellierung zu erhalten.

**Größe der Streuungen.** Die Exemplarabweichungen der Materialparameter sämtlicher Strukturbauteile sind zusammen mit den Massenverhältnissen der zugehörigen CAD-Modelle in Tab. 6.1 ersichtlich.

Strukturbauteil	$m_X/m_A$	$E_X/E_A$	$\nu_X/\nu_A$	$\rho_X/\rho_A$
großer Lagerbock	0,97	1,07	1,00	1,00
kleiner Lagerbock	0,98	0,79	1,01	0,99
Maschinenbett	1,03	1,02	0,99	1,00
Maschinenständer	1,08	1,01	0,99	1,02
Querschlitzen	1,01	0,99	1,00	1,01
Spindelschlitten	1,00	1,00	1,01	0,99
Werkstücktisch	1,04	1,05	1,01	1,02

Tab. 6.1: Massenverhältnisse der CAD-Modelle sowie Exemplarabweichungen der Materialparameter (Nennwerte nach DIN EN 1561 bzw. DIN EN 1563) für die Strukturbauteile des betrachteten Versuchsträgers

Dabei ist zu erkennen, dass die CAD-Modelle – mit Ausnahme des Maschinenständers – dem Adäquanzkriterium des Massenverhältnisses (siehe Tab. 4.1, S. 62) genügen und sowohl die Querkontraktionszahl  $\nu$  als auch die Dichte  $\rho$  Streuungen von 0,99 bis 1,02 aufweisen. Der Elastizitätsmodul ist mit einer Streuung von 0,99 bis 1,07 behaftet, wobei der kleine Lagerbock mit 0,79 deutlich stärker abweicht. Der Abguss des verwendeten Werkstoffs GJS 600 erfolgte hier mutmaßlich zu spät, sodass die Eigenschaften eher einem Gusswerkstoff mit lamellarem Graphit entsprechen (siehe S. 100 f.). In der vorliegenden Arbeit wird diese Abweichung nicht berücksichtigt, da das Bauteil nicht den Spezifikationen entspricht und es somit nicht als Gutteil angesehen werden kann. Die Geometriestreuungen wurden durch die Vermessung dynamisch relevanter Geometriemerkmale erfasst und sind – zusammen mit der jeweiligen Stichprobengröße  $N$  – in Abb. 6.2 (S. 152) zu sehen. Dabei wird zwischen konkaven Radien  $\leq R15$  und  $> R15$  sowie Wandstärken unterschieden. Die Unterscheidung der Radien erfolgt, da die kleinen Radien aufgrund des Gießprozesses erforderlich sind und dort festgelegt bzw. angepasst werden, während die großen Radien design- oder funktionsbedingt während der Konstruktion der Maschine bestimmt werden. Die kleinen Radien weisen hierbei Streuungen zwischen 1,0 und 2,25 mit einzelnen Ausreißern darüber und darunter auf, während diejenigen der großen Radien – bei vergleichsweise kleiner Stichprobengröße – zwischen 0,5 und 1,25 rangieren. Die Wandstärken streuen zwischen 0,625 und 1,375, wobei auch hier die größeren Werte überwiegen. Die Verlustfaktoren der Gussbauteile wurden nach NIEHUES & ZÄH (2012) identifiziert und weisen Streuungen zwischen  $5 \cdot 10^{-4}$  und  $5,4 \cdot 10^{-4}$  auf.

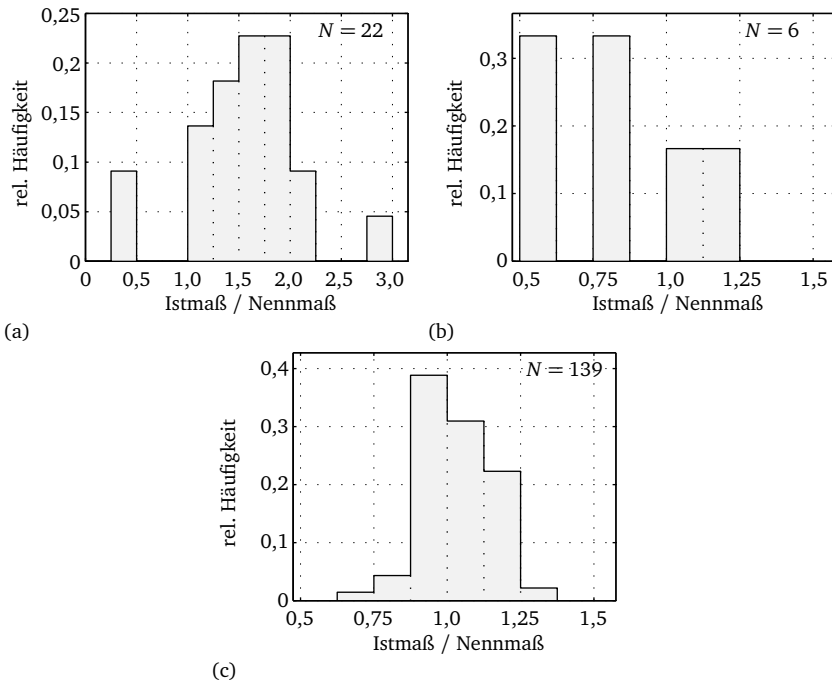


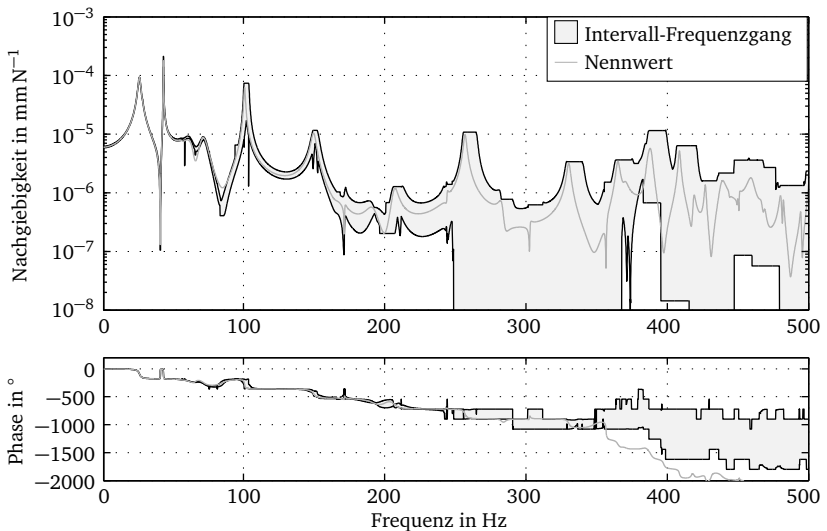
Abb. 6.2: Geometriestreuungen der konkaven Radien  $\leq R15$  (a), der konkaven Radien  $> R15$  (b) sowie der Wandstärken (c) für die Strukturbauteile des betrachteten Versuchsträgers bei Stichprobengröße  $N$

**Einfluss der Unsicherheiten.** In Bezug auf die Materialstreuung kann festgehalten werden, dass die Querkontraktionszahl und die Dichte kleine Streuungen aufweisen. Da für eine derartige Unsicherheit zudem keine werkstofftechnischen Anhaltspunkte vorliegen, werden beide Kennwerte als hinreichend gesichert angenommen. Der Elastizitätsmodul von Gusswerkstoffen ist hingegen – wie bereits in Abschnitt 5.2.2 (S. 100) ausgeführt – mit verfahrenstechnischen Unsicherheiten behaftet, die sich auch in den Streuungen äußern. Die Unsicherheit des Elastizitätsmoduls wird deshalb – wie in Tab. 6.2 ersichtlich – mit 0,99 bis 1,07 angenommen. Für den Verlustfaktor des Gussmaterials wird die gemessene Streuung direkt in eine Unsicherheit überführt und mit 1,0 bis 1,08 berücksichtigt. Die Unsicherheiten der Geometrie werden hier – angelehnt an die gemessenen Streuungen – für die konkaven Radien  $\leq R15$  zu 0,9 bis 2,0 und für die konkaven Radien  $> R15$  zu 0,9 bis 1,2 festgelegt. Die gewählte Untergrenze der größeren Radien liegt höher als jene der gemessenen Streuung, bei Werten  $< 0,9$  treten jedoch Fehler in der parametrischen Generierung der CAD-

Elastizitätsmodul $E$	0,99 bis 1,07	konkave Radien $\leq R15$	0,9 bis 2,0
Verlustfaktor $\eta$	1,0 bis 1,08	konkave Radien $> R15$	0,9 bis 1,2
Wandstärken	0,8 bis 1,2		

Tab. 6.2: Unsicherheiten der Strukturbauteile

Geometrie auf. Die Unsicherheit der Wandstärken wird – unter Vernachlässigung der Randbereiche – mit 0,8 bis 1,2 angenommen. In den Abb. 6.3 und 6.4 (S. 154) ist unter Verwendung des Berechnungsverfahrens aus Abschnitt 4.7 (S. 75) der Einfluss dieser Unsicherheiten auf den Frequenzgang der Freiheitsgrade  $j$  und  $k$  des betrachteten Versuchsträgers dargestellt.

Abb. 6.3: Einfluss der Unsicherheiten aus dem Material auf den Frequenzgang der Freiheitsgrade  $j$  und  $k$  des betrachteten Versuchsträgers

Hierbei ist zu erkennen, dass sowohl die Unsicherheiten des Materials als auch jene der Geometrie einen deutlich sichtbaren Einfluss auf die Eigenfrequenzen des betrachteten Frequenzgangs besitzen, der mit zunehmender Frequenz stärker wird. Der Einfluss des Materials ist dabei ggü. dem der Geometrie schwächer ausgeprägt. Zudem werden anhand der betrachteten Unsicherheiten die Grenzen des eingesetzten Berechnungsverfahrens deutlich: Sobald sich überlappende Antiresonanzbereiche vorliegen, kann weder die minimale Amplitude noch die Phase hinreichend genau

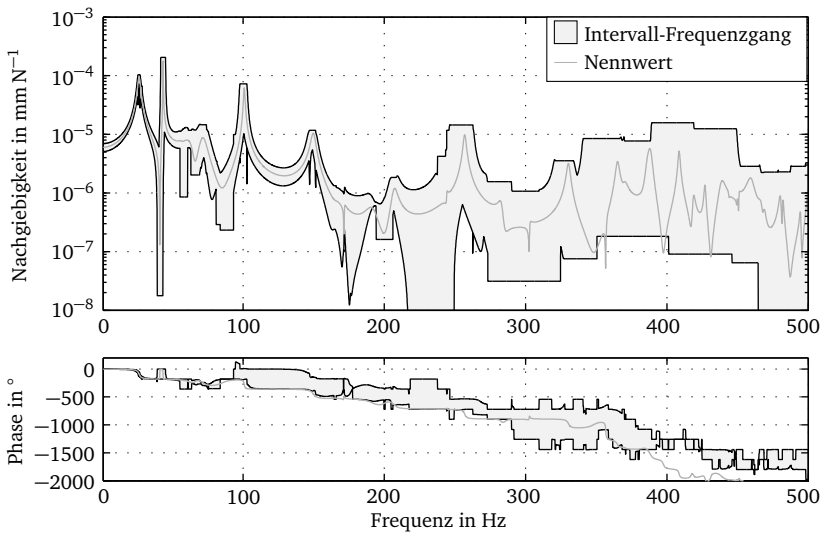


Abb. 6.4: Einfluss der Unsicherheiten aus der Geometrie auf den Frequenzgang der Freiheitsgrade  $j$  und  $k$  des betrachteten Versuchsträgers

bestimmt werden. Die für die Stabilität des Zerspanprozesses relevante maximale Amplitude wird hingegen in jedem Fall mathematisch exakt berechnet.

## 6.2.2 Aufstellelemente

Die Modellierung der Aufstellelemente ist – wie in Abschnitt 5.3 (S. 106) ausgeführt – mit zwei epistemischen Unsicherheiten und einer aleatorischen Unsicherheit behaftet, welche miteinander wechselwirken. Mit den in der vorliegenden Arbeit betrachteten Aufbauten können diese Unsicherheiten nicht voneinander getrennt werden. Die im Folgenden aufgeführten Streuungen sind daher als Überlagerung dieser drei Unsicherheiten zu verstehen.

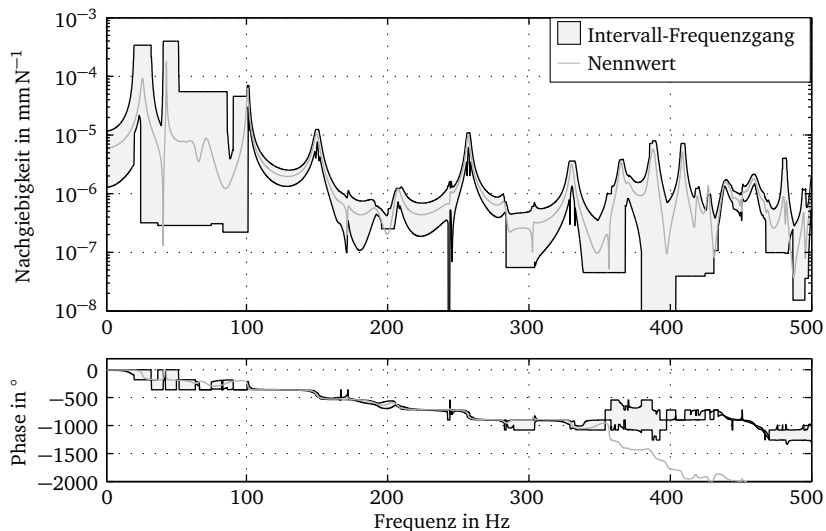
**Größe der Streuungen.** Für die Ermittlung der Streuungen wurde einmal das Maschinenbett des Versuchsträgers alleine und einmal das Maschinenbett mit verschraubtem Ständer auf den Aufstellelementen montiert und anschließend wurden für jedes der drei Elemente Parameter identifiziert. Somit ergeben sich insgesamt sechs Exemplarparameter, deren Streuungen in Tab. 6.3 zusammengefasst sind. Für die Dämpfung in Längs- und Querrichtung konnten mit der eingesetzten Identifikationsmethode nach

Parameter		längs	quer	vertikal
$k$	Nennwert	$1,4 \cdot 10^5 \text{ N mm}^{-1}$	$9,5 \cdot 10^4 \text{ N mm}^{-1}$	$3,3 \cdot 10^5 \text{ N mm}^{-1}$
	Streuung	0,4 bis 1,8	0,9 bis 1,5	0,7 bis 1,7
$c, d$	Nennwert	$1,0 \text{ N s mm}^{-1}$	$1,0 \text{ N s mm}^{-1}$	$4,0 \cdot 10^4 \text{ N mm}^{-1}$
	Streuung	–	–	0,5 bis 1,4

Tab. 6.3: Streuungen der Aufstellelemente des Versuchsträgers (Stichprobengröße  $N = 6$ )

NIEHUES & ZÄH (2012) keine Einzelparameter für jedes Element bestimmt werden, weshalb hierfür keine Streuungen angegeben sind.

**Einfluss der Unsicherheiten.** Um den Einfluss der Unsicherheiten der Aufstellelemente auf den Versuchsträger zu untersuchen, wurden die Streuungen der Parameter aus Tab. 6.3 unverändert in Unsicherheiten überführt und in den nicht-deterministischen Modellteil integriert. In Abb. 6.5 ist der resultierende Intervall-Frequenzgang zwischen den bekannten Freiheitsgraden  $j$  und  $k$  des Versuchsträgers zu sehen.

Abb. 6.5: Einfluss der Unsicherheiten der Aufstellelemente auf den Frequenzgang der Freiheitsgrade  $j$  und  $k$  des betrachteten Versuchsträgers

Die Unsicherheiten der Aufstellelemente haben hierbei merklichen Einfluss auf das dynamische Verhalten im Frequenzbereich unter 100 Hz. Bei höheren Frequenzen ist der Einfluss hingegen geringer und äußert sich aufgrund der variierenden Dissipationsseigenschaften der Aufstellelemente vor allem in Form von Unsicherheiten in der Amplitude.

### 6.2.3 Verschraubte Fugen

Bei der Abbildung von verschraubten Fugen mit Hilfe des in Abschnitt 5.4.2 (S. 117) beschriebenen Ansatzes entstehen zwei aleatorische Unsicherheiten und eine epistemische Unsicherheit. Wie ebenfalls im genannten Abschnitt ausgeführt, können diese Unsicherheiten jedoch an dem in der vorliegenden Arbeit betrachteten Versuchsträger nicht sinnvoll ermittelt werden. Aus diesem Grund werden im Folgenden keine Streuungen der verschraubten Fugen des Versuchsträgers angegeben, sondern stattdessen wurden Unsicherheiten angenommen und deren Einfluss auf das Gesamtmodell bestimmt. Die zugrunde liegenden Nennwerte für die verschraubten Fugen des Versuchsträgers sind in Anhang A.4 (S. 172) zu finden.

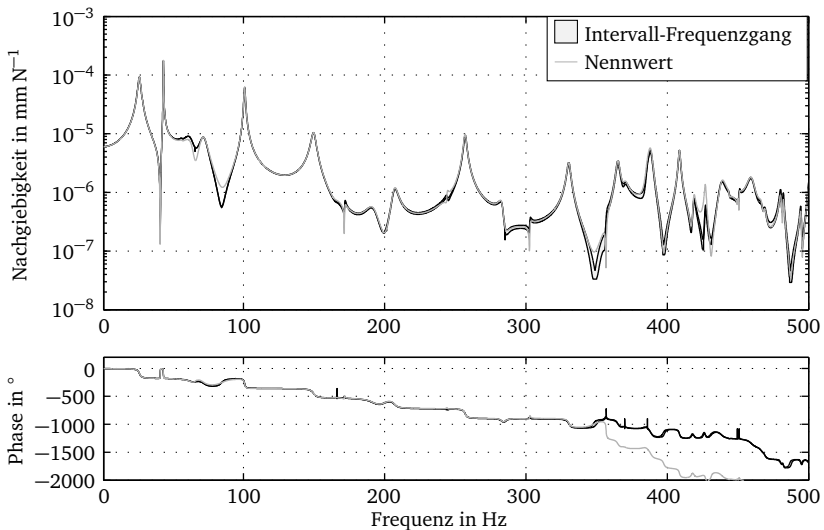
**Einfluss der Unsicherheiten.** Die Prognosefähigkeit der Modellierung von verschraubten Fugen wird nach Abschnitt 5.4.2 (S. 117) durch Unsicherheiten in der Montagevorspannkraft, in der Oberflächenbeschaffenheit und in den dissipativen Eigenschaften beeinträchtigt. Die aleatorische Unsicherheit der Montagevorspannkraft resultiert nach Gl. 5.1 (S. 110) ihrerseits aus dem Anziehdrehmoment sowie aus der Reibzahl für Schraubenkopf und -gewinde. In der vorliegenden Arbeit wird das Anziehdrehmoment mit einer Unsicherheit von 0,95 bis 1,05 angenommen, was sich mit den typischen Anzeigeabweichungen mechanischer Drehmomentschlüssel deckt. Für die Reibung wird aufgrund des Nennwerts von 0,12 die Klasse *B* nach VDI 2230 BLATT 1 (S. 113) herangezogen, was zu Reibzahlen von 0,08 bis 0,16 bzw. zu einer Unsicherheit von 0,7 bis 1,3 führt. Bei den Kontaktflächen der Fugen des Versuchsträgers handelt es sich um gefräste Oberflächen, die keiner Feinbearbeitung unterzogen wurden und somit eine entsprechende Rauheit aufweisen. Für den Oberflächenfaktor wird deshalb von Werten zwischen 0,3 und 0,7 ausgegangen, was bei einem Nennwert von 0,5 eine Unsicherheit von 0,6 bis 1,4 zur Folge hat. Der Verlustfaktor für das dissipative Verhalten der Fuge besitzt denselben Nennwert wie das umliegende Gussmaterial, wird jedoch angesichts der Unkenntnis der tatsächlichen Kontaktbedingungen mit einer Unsicherheit von 1,0 bis 5,0 beaufschlagt. Nach Berechnung der entsprechenden äquivalenten Elastizitätsmoduln ergeben sich somit die in Tab. 6.4 zusammengefassten Unsicherheiten für alle drei Fugen des betrachteten Versuchsträgers. Abb. 6.6 zeigt den resultierenden Intervall-Frequenzgang zwischen den Freiheitsgraden  $j$  und  $k$  des Versuchsträgers. Im Gegensatz zu den bisher diskutierten Komponentenmodellen haben die Parameter des Fugenmodells – trotz der großen angenommenen Unsicherheiten – einen vernachlässigbaren Einfluss auf das



Anziehdrehmoment $M_A$	0,95 bis 1,05	Reibzahl $\mu$	0,7 bis 1,3
Oberflächenfaktor $\kappa$	0,6 bis 1,4	Verlustfaktor $\eta$	1,0 bis 5,0
Elastizitätsmodul $E_{\perp}$	0,45 bis 2,06		

Tab. 6.4: Unsicherheiten der verschraubten Fugen (Nennwerte siehe Anhang A.4, S. 172)

dynamische Verhalten. Erklärt werden kann dies mit der hohen Flächenpressung aller hier betrachteten Verschraubungen (siehe Anhang A.4, S. 172), sodass Variationen in der Kontaktsteifigkeit nahezu keine Auswirkung auf die Gesamtsteifigkeit haben. Dies ist auch die Ursache für den geringen Einfluss des Dissipationsparameters, da in der Fuge durch die hohe Kontaktsteifigkeit keine Relativbewegung stattfindet und somit ein möglicherweise vorhandenes Dissipationsvermögen nicht genutzt werden kann.

Abb. 6.6: Einfluss der Unsicherheiten der verschraubten Fugen auf den Frequenzgang der Freiheitsgrade  $j$  und  $k$  des betrachteten Versuchsträgers

### 6.2.4 Profilschienenführungen

Die prognosefähige Modellierung von Profilschienenführungen wird – wie in Abschnitt 5.5 (S. 126) ersichtlich – durch jeweils eine aleatorische und eine epistemische

Unsicherheit beeinträchtigt. Wie im Fall der verschraubten Fugen ist jedoch auch hier die aleatorische Unsicherheit des Komponentenmodells nicht mit hinreichender Genauigkeit am betrachteten Versuchsträger erfassbar. Im Folgenden können deshalb keine am Versuchsträger quantifizierten Streuungen angegeben werden. Stattdessen werden für die Definition der aleatorischen Unsicherheit statistische Kennwerte verwendet, die am Werkzeugmaschinenlabor WZL der RWTH Aachen an baugleichen Profilschienenführungen auf dem in BRECHER ET AL. (2012b) beschriebenen Prüfstand ermittelt wurden. Die Größenordnung der epistemischen Unsicherheit wird hingegen anhand von am Versuchsträger gemessenen Werten abgeschätzt.

**Einfluss der aleatorischen Unsicherheit.** Die aleatorische Unsicherheit der Profilschienenführungen durch Exemplar- und Montagestreuungen umfasst – mit Ausnahme der Verfahrrichtung – sämtliche Modellparameter. Beide Streuungseinflüsse wurden am Werkzeugmaschinenlabor WZL der RWTH Aachen – jeweils für die elastischen und dissipativen Eigenschaften – für jede Beanspruchungsrichtung einzeln erfasst und unter Annahme einer Normalverteilung mit den Kennwerten Mittelwert  $\bar{a}$  und Standardverteilung  $\sigma$  abgebildet. In der vorliegenden Arbeit werden diese Verteilungen in Form einer Unsicherheit auf Basis der Nennwerte aus Tab. 5.20 (S. 130) berücksichtigt, die einen Bereich von  $\pm 2\sigma$  der kombinierten Exemplar- und Montagestreuung abdeckt und in Tab. 6.5 zusammengefasst ist.

Parameter	Zug/Druck	quer	Gieren	Nicken	Rollen
$k$	0,95 bis 1,05	0,97 bis 1,03	0,89 bis 1,12	0,87 bis 1,14	0,96 bis 1,04
$c$	0,99 bis 1,01	0,89 bis 1,11	0,21 bis 1,79	0 bis 2,04	0,75 bis 1,25

Tab. 6.5: Aleatorische Unsicherheit der Profilschienenführungen (Nennwerte siehe Tab. 5.20, S. 130)

Abb. 6.7 zeigt den Einfluss dieser aleatorischen Unsicherheit der Profilschienenführungen auf den Frequenzgang der bereits bekannten Freiheitsgrade  $j$  und  $k$  des Versuchsträgers. Die Unsicherheit hat dabei einen etwas größeren Einfluss als diejenige der verschraubten Fugen, dieser ist jedoch – trotz der teilweise großen Wertebereiche – deutlich geringer als bspw. jener der Unsicherheiten der Aufstellelemente.

**Einfluss der epistemischen Unsicherheit.** Die epistemische Unsicherheit des Komponentenmodells entsteht durch die Linearisierung der Reibung in Verfahrrichtung der Führung. Die festzulegenden Wertebereiche sollen dabei sowohl die Reibungsanteile der Profilschienenführung selbst als auch die der Kugelgewindeeinheit und der Wellenlagerung abdecken und somit sämtliche bisher genannten elastischen und dissipativen Werte für die Verfahrrichtung einschließen. Um die Größenordnung der Unsicherheit des elastischen Reibungsanteils zu ermitteln, wurde die in Abschnitt

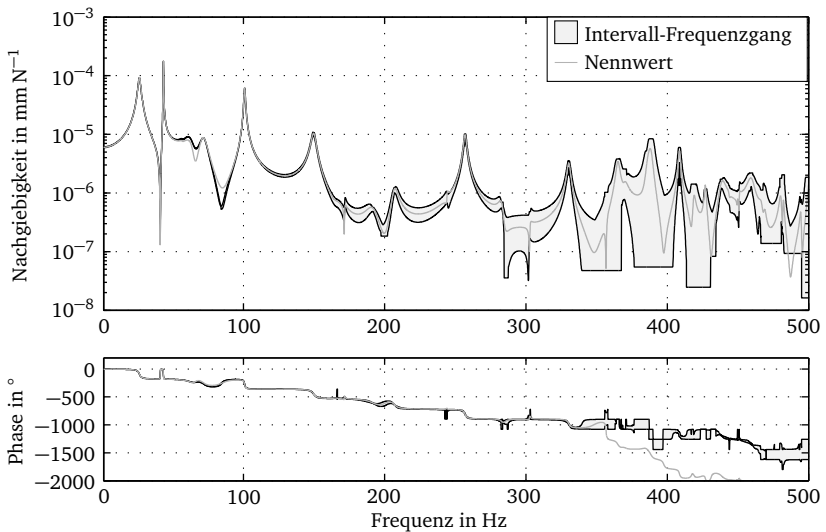


Abb. 6.7: Einfluss der aleatorischen Unsicherheit der Profilschienenführung auf den Frequenzgang der Freiheitsgrade  $j$  und  $k$  des betrachteten Versuchsträgers

5.5.2 (S. 129) beschriebene teilmontierte Maschinenstruktur mittels Impulshammer bei variierender Kraftamplitude angeregt und jeweils die Eigenfrequenz der Starrkörpermode des Werkstücktisches bestimmt. In Abhängigkeit der Amplitude konnte die Eigenfrequenz zwischen 30 Hz und 81 Hz bei einem Mittelwert von 74,7 Hz verschoben werden. Hierbei wurde der Schlitten teilweise über den als Mikroauslenkung bezeichneten Bereich von  $300\ \mu\text{m}$  hinaus bewegt und somit der gesamte Bereich der Nichtlinearität erfasst. Bezogen auf den Nennwert aus Tab. 5.20 (S. 130) ergibt sich daraus eine Unsicherheit des Steifigkeitsparameters von 0,16 bis 1,15. Um im Wertebereich den Reibungsanteil aus der Kugelgewindeeinheit und der Wellenlagerung zu berücksichtigen, wird diese Streuung – wie in Tab. 6.6 zu sehen – auf den in Tab. 5.25 (S. 146) angeführten Nennwert übertragen.

<b>Verfahrrichtung</b>	$k$	0,16 bis 1,15	$d$	0 bis 1,18
------------------------	-----	---------------	-----	------------

Tab. 6.6: Epistemische Unsicherheit der Profilschienenführungen (Nennwert siehe Tab. 5.25, S. 146)

Für eine Abschätzung der Unsicherheit des dissipativen Parameters wurde unter allen untersuchten Aufbauzuständen ein maximaler Wert von etwa  $d = 1,2 \cdot 10^4\ \text{N mm}^{-1}$  ermittelt, was bezogen auf den Nennwert aus Tab. 5.25 (S. 146) einer Obergrenze

von 1,18 entspricht. Als Untergrenze wird 0 angenommen, da bei kleinen Auslenkungen nahezu keine Energie dissipiert wurde. Die epistemische Unsicherheit der Profilschienenführung lässt sich somit durch die in Tab. 6.6 (S. 159) gezeigten Parameterbereiche ausdrücken, die sämtliche bisher erwähnten Nennwerte für die Verfahrrichtung einschließen. In Abb. 6.8 ist der Einfluss der epistemischen Unsicherheit auf den Frequenzgang der bereits bekannten Freiheitsgrade  $j$  und  $k$  des Versuchsträgers dargestellt. Die epistemische Unsicherheit durch die Linearisierung der Reibung hat dabei einen ausgeprägten Einfluss auf den betrachteten Frequenzgang. Die Wirkung ist insbesondere bzgl. der Amplitude im gesamten Frequenzbereich bis 500 Hz enorm. Es ist deshalb davon auszugehen, dass die Stabilitätsgrenze der betrachteten Maschine – sofern der Einfluss der hier nicht untersuchten Dissipationsquellen wie z. B. jener der Abdeckungen oder der Regelung begrenzt ist – zu einem Großteil durch diesen Effekt bestimmt wird.

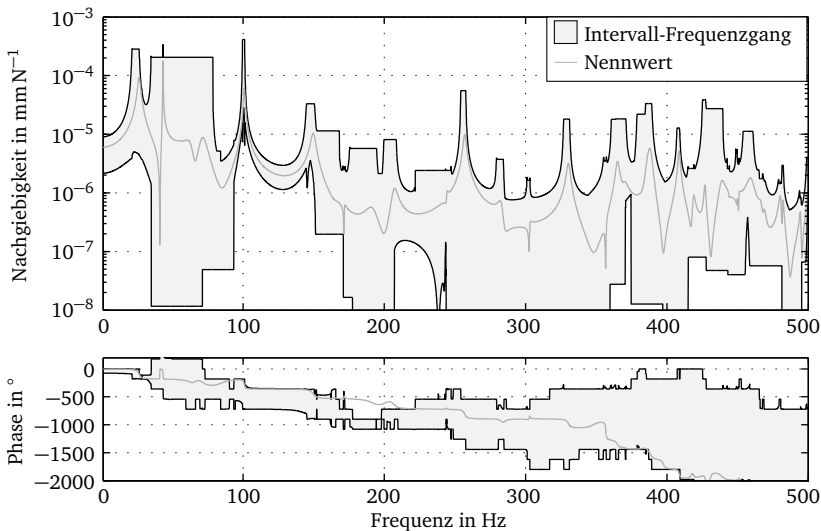


Abb. 6.8: Einfluss der epistemischen Unsicherheit der Profilschienenführung auf den Frequenzgang der Freiheitsgrade  $j$  und  $k$  des betrachteten Versuchsträgers

### 6.2.5 Kugelgewindetriebe inkl. Lagerung

Wie auch das Komponentenmodell der Profilschienenführungen ist die Modellierung der Kugelgewindetriebe und ihrer Lagerung mit einer epistemischen Unsicherheit in der Reibungsmodellierung sowie aleatorischen Unsicherheiten der übrigen Modellparameter behaftet. Die epistemische Unsicherheit der Reibung kann – wie in

Abschnitt 5.6.2 (S. 137) ausgeführt – mit den hier betrachteten Aufbauten nicht in die Effekte der Einzelkomponenten aufgeteilt werden. Ihre Untersuchung wurde deshalb bereits im vorangehenden Abschnitt 6.2.4 (S. 157) gemeinsam mit der Reibung der Profilschienenführung beschrieben. Ebenso wird im Folgenden auf die Untersuchung der Unsicherheiten der Spindelwelle verzichtet, da die Unsicherheiten spanend hergestellter Strukturbauteile aus Stahl – wie in Abb. 5.17a (S. 125) und Abb. 5.25 (S. 134) ersichtlich – im Allgemeinen vernachlässigbar sind. Zur Untersuchung verbleiben somit die aleatorischen Unsicherheiten der Kugelgewindeeinheit und der Wellenlager. Beide Unsicherheiten sind am betrachteten Versuchsträger nicht mit hinreichender Genauigkeit erfassbar, weshalb hier keine quantifizierten Streuungen angegeben werden können. Stattdessen werden – wie auch in Abschnitt 6.2.4 (S. 157) – wiederum statistische Kennwerte verwendet, die am Werkzeugmaschinenlabor WZL der RWTH Aachen an baugleichen Komponenten auf dem in BRECHER ET AL. (2012b) gezeigten Prüfstand ermittelt wurden.

**Einfluss der Unsicherheiten.** Für die Kugelgewindeeinheit und die Wellenlager wurden am Werkzeugmaschinenlabor WZL der RWTH Aachen an baugleichen Komponenten statistische Kenngrößen von Normalverteilungen bestimmt, die die Montage- und Exemplarstreuungen charakterisieren. In der vorliegenden Arbeit werden diese – analog zum Vorgehen in Abschnitt 6.2.4 (S. 157) – in Unsicherheiten mit einem Wertebereich von  $\pm 2\sigma$  der kombinierten Exemplar- und Montagestreuung überführt. Die resultierenden Unsicherheiten, bezogen auf die Nennwerte aus Tab. 5.25 (S. 146), sind in Tab. 6.7 zu sehen.

Parameter	radial	Parameter	axial	radial	Kippen
$k$	0,89 bis 1,12	$k$	0,93 bis 1,08	0,94 bis 1,06	0,93 bis 1,07
$d$	0 bis 2,09	$d$	0,59 bis 1,41	0,57 bis 1,43	0,52 bis 1,48
(a) Loslager			(b) Festlager		
$k_{\text{axial}}$	0,96 bis 1,04	$\eta$	0,21 bis 1,79		
(c) Kugelgewindeeinheit					

Tab. 6.7: Unsicherheiten der Kugelgewindeeinheit und der Wellenlager (Nennwerte siehe Tab. 5.25, S. 146)

In Abb. 6.9 (S. 162) ist der Einfluss dieser Unsicherheiten auf den Frequenzgang zwischen den bekannten Freiheitsgraden  $j$  und  $k$  des Versuchsträgers illustriert. Hierbei ist zu erkennen, dass die betrachteten Unsicherheiten nur einen geringen Einfluss auf das dynamische Verhalten des Versuchsträgers besitzen, der sich hauptsächlich

in Amplitudenschwankungen im oberen Frequenzbereich äußert. Die Größenordnung der Wirkung ist in etwa zwischen jener der verschraubten Fugen und jener der aleatorischen Unsicherheiten der Profilschienenführungen einzuordnen.

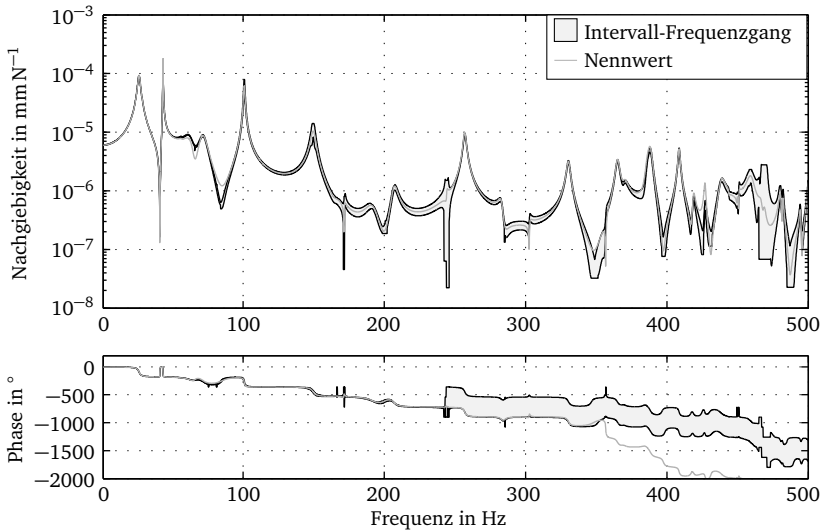


Abb. 6.9: Einfluss der aleatorischen Unsicherheiten der Kugelgewindeeinheit und der Wellenlager auf den Frequenzgang der Freiheitsgrade  $j$  und  $k$  des betrachteten Versuchsträgers

### 6.3 Relevanz der Unsicherheiten für den Modellaufbau

In diesem Kapitel wurde aufgezeigt, welche Größenordnung die anhand der prognosefähigen Modellierung aus Kapitel 5 (S. 95) ermittelten Unsicherheiten an realen Werkzeugmaschinenstrukturen besitzen und wie sich diese auf das System auswirken. Dabei ist festzustellen, dass einige Unsicherheiten einen eher geringen Einfluss auf das dynamische Verhalten an der Zerspanstelle haben, während andere dort erhebliche Frequenz- und Amplitudenschwankungen induzieren. Beim Aufbau von dynamischen Modellen von Werkzeugmaschinenstrukturen ist es daher zweckmäßig, den Aufwand bei der Parameterbestimmung an der Relevanz des Parameters zu orientieren. Diejenigen Unsicherheiten mit großem Einfluss sollten so genau wie möglich quantifiziert bzw. weitestmöglich reduziert werden. Deshalb sollten hierfür entsprechende Ressourcen investiert werden, um bei der Prognose der dynamischen Eigenschaften eine hohe Genauigkeit zu erhalten. Gleichzeitig können jene Unsicherheiten mit geringem Einfluss unter Verwendung vergleichsweise großer nicht-deterministischer Anteile bei

der Parameterwahl berücksichtigt werden, um den Aufwand für den Modellaufbau insgesamt zu begrenzen. Auf Basis der Erkenntnisse aus diesem Kapitel ist in Tab. 6.8 die Relevanz aller in der vorliegenden Arbeit betrachteten Unsicherheiten für den Modellaufbau zusammengefasst.

<b>Komponente</b>	<b>hohe Relevanz</b>	<b>niedrige Relevanz</b>
Strukturbauteile	Elastizitätsmodul, Verlustfaktor und Geometrieabmessungen von Gussbauteilen	Querkontraktionszahl und Dichte des Materials
Aufstellelemente	elastische und dissipative Modellparameter	—
verschraubte Fugen	—	elastische und dissipative Modellparameter
Profilschienenführungen	Parameter des linearisierten Reibmodells in Fahrtrichtung	Modellparameter der übrigen Richtungen
Kugelgewindetriebe inkl. Lagerung	—	elastische und dissipative Modellparameter

Tab. 6.8: Relevanz der Unsicherheiten der betrachteten Komponenten für den Modellaufbau





## 7 Zusammenfassung und Ausblick

**Zusammenfassung.** Die vorliegende Arbeit setzt sich mit der Prognosefähigkeit dynamischer Simulationen von Werkzeugmaschinenstrukturen auseinander. Derartige Simulationen sind erforderlich, weil das dynamische Verhalten von Werkzeugmaschinen im Entwicklungsprozess mit Hilfe von bspw. Konstruktionsrichtlinien nicht hinreichend genau ausgelegt werden kann. Stattdessen werden Simulationsmodelle als sog. virtuelle Prototypen – d. h. ohne die Möglichkeit einer Vermessung der realen Maschine – eingesetzt, um das dynamische Verhalten günstig hinsichtlich der Leistungsfähigkeit der Maschine zu gestalten. In der Literatur wird eine Vielzahl von Modellansätzen zur Abbildung von Werkzeugmaschinen und deren Komponenten beschrieben, um derartige Simulationen effizient durchführen zu können. Gleichzeitig finden sich jedoch nur wenige und lediglich qualitative Aussagen dazu, wodurch die Abbildungsgenauigkeit der entstehenden Modelle bestimmt wird und wie diese beschaffen sein müssen, um das modellierte System mit hinreichender Genauigkeit abbilden zu können. Der Begriff der Prognosefähigkeit adressiert diese Problemstellung und stellt den Fokus der vorliegenden Arbeit dar. Nach einer Diskussion des Stands der Wissenschaft und Technik wurde deshalb zunächst eine Methode zur Erstellung prognosefähiger Modelle vorgestellt, die an den Anforderungen in der Werkzeugmaschinenentwicklung orientiert ist. Hierbei wurde sowohl auf die theoretischen Grundlagen der Prognosefähigkeit als auch auf geeignete Kriterien und Verfahren eingegangen, mit welchen sich prognosefähige Modelle erstellen, überprüfen und berechnen lassen. Im Anschluss wurde diese Methode auf Komponenten von Werkzeugmaschinenstrukturen angewandt und es wurden so – basierend auf vorhandenen Ansätzen – prognosefähige Modellierungen für Strukturkomponenten, Aufstellelemente, verschraubte Fugen, Profilschienenführungen und Kugelgewindetriebe sowie deren Lagerung abgeleitet. Hierbei wurden jeweils die während des Modellierungsprozesses entstehenden Unsicherheiten transparent, welche die Prognosefähigkeit beeinträchtigen. Am Beispiel eines Bearbeitungszentrums wurde anschließend einerseits die Größenordnung der auftretenden Streuungen und andererseits der Einfluss der daraus entstehenden Unsicherheiten auf das System ermittelt. Auf diese Weise konnte die Relevanz der Unsicherheiten für die Modellierungsgenauigkeit aufgezeigt werden, was zukünftige Entscheidungen über eine Berücksichtigung oder eine Vernachlässigung der diskutierten Effekte erleichtert.

**Ausblick.** Der Betrachtungsrahmen der vorliegenden Arbeit beschränkt sich auf die Maschinenstruktur von Werkzeugmaschinen, wie sie in Abschnitt 2.1 (S. 3) definiert wurde. Das dynamische Verhalten von Werkzeugmaschinen wird jedoch von weitaus mehr Baugruppen beeinflusst, die aufgrund des Umfangs und der Vielfalt

hier keine Berücksichtigung finden konnten. Beispielhaft seien an dieser Stelle die gesamte Spindelbaugruppe mit Werkzeugschnittstelle und Werkzeug, die Antriebsregelung, die Achsabdeckungen sowie die Baugruppe des Werkstücktisches genannt, die durchweg erheblichen Einfluss auf die Prozessstabilität einer Werkzeugmaschine haben können. Die in der vorliegenden Arbeit begonnenen Untersuchungen sind deshalb systematisch an sämtlichen weiteren in Frage kommenden Komponenten fortzuführen, um abschließend eine Übersicht über die Unsicherheiten bei der Modellierung von Werkzeugmaschinen und deren Einfluss auf die Prognosefähigkeit zu erhalten. Bei einigen hier diskutierten Komponentenmodellen wurde zudem deutlich, dass eine Prognosefähigkeit nur unter Berücksichtigung von sehr groß gewählten Parameterbereichen hergestellt werden kann, weil epistemische Unsicherheiten oder Wechselwirkungen zwischen mehreren Unsicherheiten vorliegen. Gleichzeitig ist jedoch ein erheblicher Einfluss dieser Unsicherheiten auf das Gesamtsystem festzustellen. Dies betrifft einerseits das Komponentenmodell der Aufstellelemente und andererseits die Reibung bei Mikroauslenkung der Profilschienenführungen bzw. der Kugelgewindetriebe in Verfahrrichtung. Bei beiden Komponentenmodellen ist mit Hilfe entsprechender Prüfstände oder Versuchsanordnungen eine genauere Ermittlung der vorliegenden Wirkzusammenhänge als bisher erforderlich. Auf diese Weise können die Unsicherheiten weiter eingegrenzt oder voneinander getrennt werden, um eine Prognose mit geringeren nicht-deterministischen Anteilen zu ermöglichen.

## A Anhang

### A.1 Berechnung des äquivalenten Durchmessers von Spindelwellen

Die Berechnung des äquivalenten Durchmessers von Spindelwellen nach Abschnitt 5.6.2 (S. 137) kann in Matlab® mit der in Quelltext A.1 gezeigten Funktion durchgeführt werden.

Quelltext A.1: Funktion zur Berechnung des äquivalenten Spindeldurchmessers

```
1 function [D_a,I_avg,rho_fem] = Homogenisierung_KGT_Spindel
2 %Masse und EF aus 1000mm FEM-Modell in t und Hz
3 m_fem = 7.545e-3;
4 omega1_fem = 2*pi*162.5;
5 l_fem = 1000;
6 E_fem = 2.1e5;
7
8 %Symbolische Berechnung
9 syms I omega1 m E w_1 x l Beta
10 %Formel der ersten Eigenform des Balkens
11 w_1 = (cosh(x/l*Beta)+cos(x/l*Beta)) - ...
12       (cosh(Beta)-cos(Beta))/(sinh(Beta)-sin(Beta))*...
13       (sinh(x/l*Beta) + sin(x/l*Beta));
14
15 %Berechnung von I ueber den Rayleigh-Quotient
16 I = (omega1^2 * m / l * int(w_1^2,0,l)) / (E * int(diff((w_1),x,2)^2,0,l));
17
18 %Radius Innenbohrung
19 R_I = 13/2;
20
21 %Groessen einsetzen
22 I_avg = double(subs(I,[omega1, m, E, l, Beta],...
23   [omega1_fem, m_fem, E_fem, l_fem, 4.73004]));
24
25 %Aequivalenten Radius und Durchmesser berechnen
26 R_a = nthroot(I_avg*4/pi + R_I^4,4);
27 D_a = 2*R_a;
28
29 %Bestimmung der Dichte
30 V_fem = ((R_a)^2-R_I^2)*l_fem*pi;
31 rho_fem = m_fem/V_fem;
32
33 end
```

## A.2 Berechnung der Steifigkeitsmatrix von Kugelgewindetrieben

Die Berechnung der Steifigkeitsmatrix für Kugelgewindetriebe nach Abschnitt 5.6.2 (S. 137) kann in Matlab® mit der in Quelltext A.2 dargestellten Funktion durchgeführt werden.

Quelltext A.2: Funktion zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix für Kugelgewindetrieben

```

1 function [status, K_KGT_num] = F_KGT_Matrix(config)
2 %-----
3 %Berechnung der Steifigkeitsmatrix von Kugelgewindetrieben
4 %-----
5 % INPUT
6 % config
7 %   alpha_deg: Steigungswinkel der Spindel in Grad (double)
8 %   beta_deg: Lastwinkel der Kugeln in Grad (double)
9 %   R_mm: Nennradius der Spindel bzw. des Kugelumlaufs in mm (double)
10 %   k_ax_N_mm: gemessene axiale Steifigkeit des KGT in N/mm (double)
11 %   Phi_table: Cell-Array mit drei Spalten, fuer jeden mit Kugeln besetzten
12 %             Mutterabschnitt absoluter Startwinkel und Endwinkel vom
13 %             Muttermittelpunkt aus in Grad sowie logical, die negative
14 %             Beta-Abschnitte kennzeichnet
15 %   k_ax_dir: String mit 'x', 'y' oder 'z' fuer die Koordinatenrichtung der
16 %             Axialsteifigkeit
17 %   ax_rot_deg: Rotation der Matrix um die axiale Achse in Grad
18 % OUTPUT
19 % status:      Status der Funktion nach Fehlerbeschreibung
20 % K_KGT_num: 6x6 Steifigkeitsmatrix des Kugelgewindetriebs in N/mm mit X als
21 %             Axialrichtung und im Wellenmittelpunkt
22 %
23
24 status = 0;
25 K_KGT1 = zeros(6,6);
26 K_KGT_num = [];
27 %## — argin-Check — #####
28
29 if (nargin < 1)
30     disp(['mfilename, ': ']);
31     disp('Zu_wenige_Input_Argumente');
32     status = -1;
33     return
34 end
35
36 %## — FUNKTION — #####
37 %Winkel und Logical aus table herausziehen
38 Phi = cell2mat(config.Phi_table(:,1:2));
39 Beta_neg = cell2mat(config.Phi_table(:,3));
40
41 %Eingangsparameter
42 beta = sym('beta', 'real');
43 k_ax = sym('k_ax', 'real');
44 alpha = sym('alpha', 'real');
45 R = sym('R', 'real');
46 Phi_start = sym('Phi_start', 'real');
47 Phi_end = sym('Phi_end', 'real');
48
49 %Integrationsvariablen

```

```

50 | gamma = sym('gamma','real');
51 |
52 | %Spindelfunktion
53 | r = [R*tan(alpha)*gamma;R*cos(gamma);R*sin(gamma)];
54 |
55 | %Spez. Normalsteifigkeit direkt definieren
56 | %k_n = sym('k_n');
57 |
58 | %Tensor Normalsteifigkeit lokales Kugel-KOSY
59 | K_N = [1,0,0;0,0,0;0,0,0];
60 |
61 | %Drehtransformationen in globales KOSY
62 | A_IB = [1, 0, 0; 0, cos(gamma), -sin(gamma); 0, sin(gamma), cos(gamma)];
63 | A_BT = [cos(alpha), 0, sin(alpha); 0, 1, 0; -sin(alpha), 0, cos(alpha)];
64 | A_TN = [cos(beta), -sin(beta), 0; sin(beta), cos(beta), 0; 0, 0, 1];
65 |
66 | A_IN = A_IB*A_BT*A_TN;
67 |
68 | %Drehtransformation spez. Steifigkeit in globales Kosy
69 | K_I= A_IN*K_N*A_IN.';
70 |
71 | %Projektionsmatrix Kugel in Welle-Mutter-System
72 | S = [0,-r(3),r(2);r(3) 0 -r(1); -r(2) r(1) 0];
73 | T = [eye(3,3),-S];
74 |
75 | %Projektion in den Wellenmittelpunkt
76 | TCT = simplify(T.*K_I*T);
77 |
78 | %Stammfunktion bestimmen
79 | TCT_int = simplify(int(TCT,gamma));
80 |
81 | %Bestimmtes Integral bilden
82 | K_KGT = simplify(subs(TCT_int,{gamma},{Phi_end}) - ...
83 |     subs(TCT_int,{gamma},{Phi_start}));
84 |
85 | %Jeden Winkelabschnitt aufsummieren (numerisch), je nach Beta-Konfiguration
86 | for i = 1:length(Phi(:,1))
87 |     if Beta_neg(i)
88 |         K_KGT1 = K_KGT1 + double(subs(K_KGT,...
89 |             {R, alpha, beta, Phi_start, Phi_end}, ...
90 |             {config.R_mm, config.alpha_deg/180*pi, ...
91 |             -config.beta_deg/180*pi, Phi(i,1)/180*pi, Phi(i,2)/180*pi}));
92 |     else
93 |         K_KGT1 = K_KGT1 + double(subs(K_KGT,...
94 |             {R, alpha, beta, Phi_start, Phi_end}, ...
95 |             {config.R_mm, config.alpha_deg/180*pi, ...
96 |             config.beta_deg/180*pi, Phi(i,1)/180*pi, Phi(i,2)/180*pi}));
97 |     end
98 | end
99 |
100 | %Normierung auf k_ax
101 | K_KGT_ax = k_ax*(K_KGT1./K_KGT1(1,1));
102 | %Einsetzen von k_ax_N_mm
103 | K_KGT_num = double(subs(K_KGT_ax,{k_ax},{config.k_ax_N_mm}));
104 |
105 | %Eintraege abs(<1 vernachlaessigen
106 | K_KGT_num(abs(K_KGT_num)<1)=0;
107 |
108 | %Rotation um axiale Achse

```

```

109 T_ax_rot = [
110     1,0,0,0,0,0;
111     0,cosd(config.ax_rot_deg),-sind(config.ax_rot_deg),0,0,0;
112     0,sind(config.ax_rot_deg),cosd(config.ax_rot_deg),0,0,0;
113     0,0,0,1,0,0;
114     0,0,0,0,cosd(config.ax_rot_deg),-sind(config.ax_rot_deg);
115     0,0,0,0,sind(config.ax_rot_deg),cosd(config.ax_rot_deg);
116 ];
117
118 K_KGT_num = T_ax_rot*K_KGT_num*T_ax_rot.';
119
120 %Transformation von k_ax in die entsprechende Koordinatenrichtung
121 switch config.k_ax_dir
122     case 'x'
123         T2 = [
124             1,0,0,0,0,0;
125             0,1,0,0,0,0;
126             0,0,1,0,0,0;
127             0,0,0,1,0,0;
128             0,0,0,0,1,0;
129             0,0,0,0,0,1;
130         ];
131     case 'y'
132         T2 = [
133             0,0,1,0,0,0;
134             1,0,0,0,0,0;
135             0,1,0,0,0,0;
136             0,0,0,0,0,1;
137             0,0,0,1,0,0;
138             0,0,0,0,1,0;
139         ];
140     case 'z'
141         T2 = [
142             0,1,0,0,0,0;
143             0,0,1,0,0,0;
144             1,0,0,0,0,0;
145             0,0,0,0,1,0;
146             0,0,0,0,0,1;
147             0,0,0,1,0,0;
148         ];
149     otherwise
150         return
151 end
152 %Transformation in gewuenshtes Koordinatensystem
153 K_KGT_num = T2*K_KGT_num*T2.';
154
155 status = 1;
156 end

```

### A.3 Numerischer Vergleich der Kugelgewindetrieb-Modelle

In OKWUDIRE (2005, S. 42) ist ein Kugelgewindetrieb mit den in Tab. A.1 aufgeführten Kenndaten beschrieben. In derselben Arbeit wird mit diesen Daten die Steifigkeitsmatrix

$$[K_{\text{KGT},1}] = \begin{bmatrix} 1,70 \cdot 10^6 & 0 & 0 & -2,69 \cdot 10^6 & 0 & -2,15 \cdot 10^5 \\ 0 & 1,22 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 2,30 \cdot 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 1,22 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 3,89 \cdot 10^5 \\ -2,69 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 4,31 \cdot 10^6 & 0 & 3,42 \cdot 10^5 \\ 0 & 2,30 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 1,35 \cdot 10^9 & 0 \\ -2,15 \cdot 10^5 & 0 & 3,89 \cdot 10^5 & 3,42 \cdot 10^5 & 0 & 1,36 \cdot 10^9 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

berechnet (OKWUDIRE 2005, S. 43). Da es sich bei dem betrachteten Kugelgewindetrieb um eine 4-Punkt-Konfiguration mit einer Umlenkung handelt, ist die Annahme des ununterbrochenen Wälzkontakts nach OERTLI (2008, S. 65 ff.) gültig. Für denselben Kugelgewindetrieb ergibt sich die Steifigkeitsmatrix

$$[K_{\text{KGT},1}] = \begin{bmatrix} 1,70 \cdot 10^6 & 0 & 0 & -2,70 \cdot 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 1,22 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,22 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 0 \\ -2,70 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 4,31 \cdot 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,36 \cdot 10^9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,36 \cdot 10^9 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

nach dem Ansatz von OERTLI (2008, S. 65 ff.), in welcher die Wirkung der Annahme einer Rotationssymmetrie um die Wellenachse erkennbar ist. Als dritter betrachtet Ansatz wird die in Abschnitt 5.6 (S. 132) beschriebene, direkte Berechnung der Steifigkeitsmatrix des Wälzkontakts der Mutter mit der in Anhang A.2 (S. 168) aufge-

<b>Kontaktkonfiguration</b>		4-Punkt-Kontakt
<b>Axialsteifigkeit</b>	$k_{\text{axial}}$	$1,70 \cdot 10^6 \text{ N mm}^{-1}$
<b>Steigungswinkel</b>	$\hat{\alpha}$	$4,55^\circ$
<b>Lastwinkel</b>	$\hat{\beta}$	$\pm 50^\circ$
<b>Länge der Mutter</b>	$l$	100 mm

Tab. A.1: Daten des Kugelgewindetriebs nach OKWUDIRE (2005, S. 43)

fürten Funktion für denselben Kugelgewindetrieb durchgeführt. Die resultierende Matrix

$$[K_{\text{KGT},1}] = \begin{bmatrix} 1,70 \cdot 10^6 & 0 & 0 & -2,70 \cdot 10^6 & 0 & -2,15 \cdot 10^5 \\ 0 & 1,22 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 2,31 \cdot 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 1,22 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 3,90 \cdot 10^5 \\ -2,70 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 4,31 \cdot 10^6 & 0 & 3,43 \cdot 10^5 \\ 0 & 2,31 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 1,35 \cdot 10^9 & 0 \\ -2,15 \cdot 10^5 & 0 & 3,90 \cdot 10^5 & 3,43 \cdot 10^5 & 0 & 1,36 \cdot 10^9 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

ist bis auf die zweite gültige Ziffer äquivalent zum Berechnungsansatz nach OKWUDIRE (2005, S. 43). Die Abweichung ist durch die Vernachlässigung der räumlichen Ausdehnung der Kugeln zu erklären, die beim Ansatz von OKWUDIRE (2005, S. 43) Berücksichtigung findet. Sämtliche hier angeführten Steifigkeitsmatrizen sind im folgenden Einheitensystem angegeben:

$$[K_{\text{KGT},1}] = \begin{bmatrix} [\text{N mm}^{-1}]_{3 \times 3} & [\text{N mm mm}^{-1}]_{3 \times 3} \\ [\text{N rad}^{-1}]_{3 \times 3} & [\text{N mm rad}^{-1}]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

#### A.4 Berechnung der Fugen des Versuchsträgers

Im vorliegenden Abschnitt finden sich die Berechnungen der Fugen des Versuchsträgers, deren Parameter in Kapitel 6 (S. 149) verwendet werden. Die Kontaktflächen im Bereich hoher Pressung wurden dabei unter Vernachlässigung der Bohrungen zu mehreren rechteckigen Abschnitten in der Fuge vereinfacht. Aus diesem Grund sind die resultierenden Flächen  $A_0$  teilweise größer als die Summe der Verformungskörper.

#### Fuge zwischen Maschinenbett und den beiden Lagerböcken (Abb. A.1, S. 174)

---

##### Berechnung des Verformungskörpers

Schraubenkopfauflage	$d_w$	28,87 mm
Klemmlänge	$l_k$	35,00 mm
Ersatz-Außendurchmesser	$D'_A$	80,00 mm
Verformungshülse		nein
Grenzdurchmesser	$D_{A,Gr}$	67,17 mm
Öffnungswinkel des Verformungskegels	$\varphi$	28,69 °

---



---

<b>Berechnung der Montagevorspannkraft</b>		
Gewindesteigung	$P$	2,50 mm
Schraubenkopfauflage	$d_w$	28,87 mm
Flankendurchmesser	$d_2$	18,38 mm
Innendurchmesser der Schraubenkopfauflage	$D_{Ki}$	22,40 mm
Anziehdrehmoment	$M_A$	$600 \cdot 10^3 \text{ N mm}$
Reibzahl	$\mu$	0,12
Montagevorspannkraft	$F_M$	186 489,00 N

---

<b>Berechnung der Fugensteifigkeit (großer Lagerbock)</b>		
Montagevorspannkraft	$F_M$	186 490,00 N
Anzahl der Schrauben	$N$	6,00
Kontaktfläche im Bereich hoher Flächenpressung	$A_0$	$34\,780,00 \text{ mm}^2$
Elastizitätsmodul der Kontaktpartner	$E$	$176\,000,00 \text{ N mm}^{-2}$
Oberflächenfaktor	$\kappa$	0,50
Dünnschichthöhe	$\check{h}$	2,00 mm
Flächenlast im Bereich hoher Flächenpressung	$\sigma_0$	$32,17 \text{ N mm}^{-2}$
Kontaktnormalsteifigkeit	$k_{\perp}$	$156\,526,76 \text{ N mm}^{-3}$
äquivalenter Elastizitätsmodul	$E_{\perp}$	$313\,053,53 \text{ N mm}^{-2}$

---

<b>Berechnung der Fugensteifigkeit (kleiner Lagerbock)</b>		
Montagevorspannkraft	$F_M$	186 490,00 N
Anzahl der Schrauben	$N$	6,00
Kontaktfläche im Bereich hoher Flächenpressung	$A_0$	$27\,830,00 \text{ mm}^2$
Elastizitätsmodul der Kontaktpartner	$E$	$176\,000,00 \text{ N mm}^{-2}$
Oberflächenfaktor	$\kappa$	0,50
Dünnschichthöhe	$\check{h}$	2,00 mm
Flächenlast im Bereich hoher Flächenpressung	$\sigma_0$	$40,21 \text{ N mm}^{-2}$
Kontaktnormalsteifigkeit	$k_{\perp}$	$194\,437,88 \text{ N mm}^{-3}$
äquivalenter Elastizitätsmodul	$E_{\perp}$	$388\,875,76 \text{ N mm}^{-2}$

---

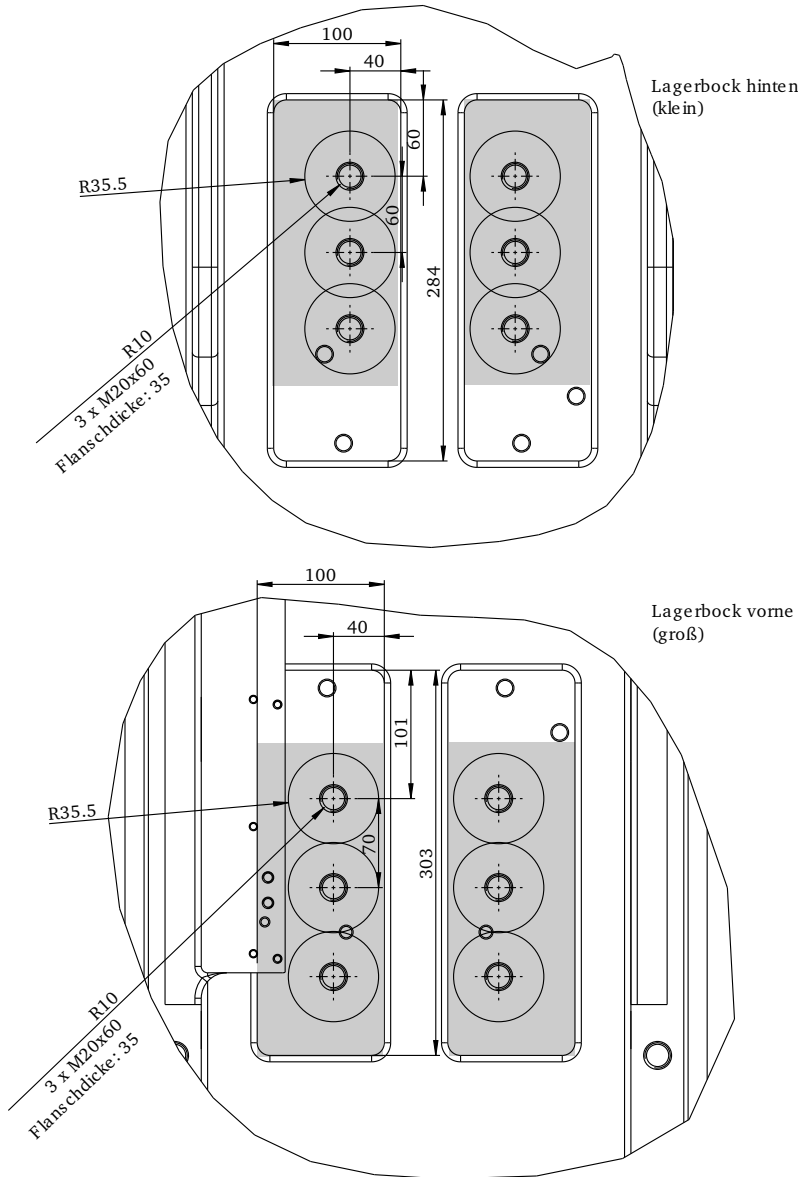


Abb. A.1: Schraubenanordnung, berechnete Verformungskörper sowie der angenommene Bereich hoher Flächenpressung (grau) in den Fugen zwischen dem Maschinenbett und den Lagerböcken des Versuchsträgers. Die Lage der Fugen ist in Abb. 2.1 (S. 5) ersichtlich.

**Fuge zwischen Maschinenbett und -ständer (Abb. A.2, S. 176)**


---

<b>Berechnung des Verformungskörpers</b>		
Schraubenkopfauflage	$d_w$	23,17 mm
Klemmlänge	$l_k$	70,00 mm
Ersatz-Außendurchmesser	$D'_A$	38,00 mm
Verformungshülse		ja
Grenzdurchmesser	$D_{A,Gr}$	87,27 mm
Öffnungswinkel des Verformungskegels	$\varphi$	24,60 °

---

<b>Berechnung der Montagevorspannkraft</b>		
Gewindesteigung	$P$	2,00 mm
Schraubenkopfauflage	$d_w$	23,17 mm
Flankendurchmesser	$d_2$	14,70 mm
Innendurchmesser der Schraubenkopfauflage	$D_{Ki}$	17,70 mm
Anziehdrehmoment	$M_A$	$200 \cdot 10^3$ N mm
Reibzahl	$\mu$	0,12
Montagevorspannkraft	$F_M$	77 844,64 N

---

<b>Berechnung der Fugensteifigkeit</b>		
Montagevorspannkraft	$F_M$	77 845,00 N
Anzahl der Schrauben	$N$	9,00
Kontaktfläche im Bereich hoher Flächenpressung	$A_0$	30 620,80 mm <sup>2</sup>
Elastizitätsmodul der Kontaktpartner	$E$	176 000,00 N mm <sup>-2</sup>
Oberflächenfaktor	$\kappa$	0,50
Dünnschichthöhe	$\check{h}$	2,00 mm
Flächenlast im Bereich hoher Flächenpressung	$\sigma_0$	22,88 N mm <sup>-2</sup>
Kontaktnormalsteifigkeit	$k_{\perp}$	112 681,53 N mm <sup>-3</sup>
äquivalenter Elastizitätsmodul	$E_{\perp}$	225 363,06 N mm <sup>-2</sup>

---

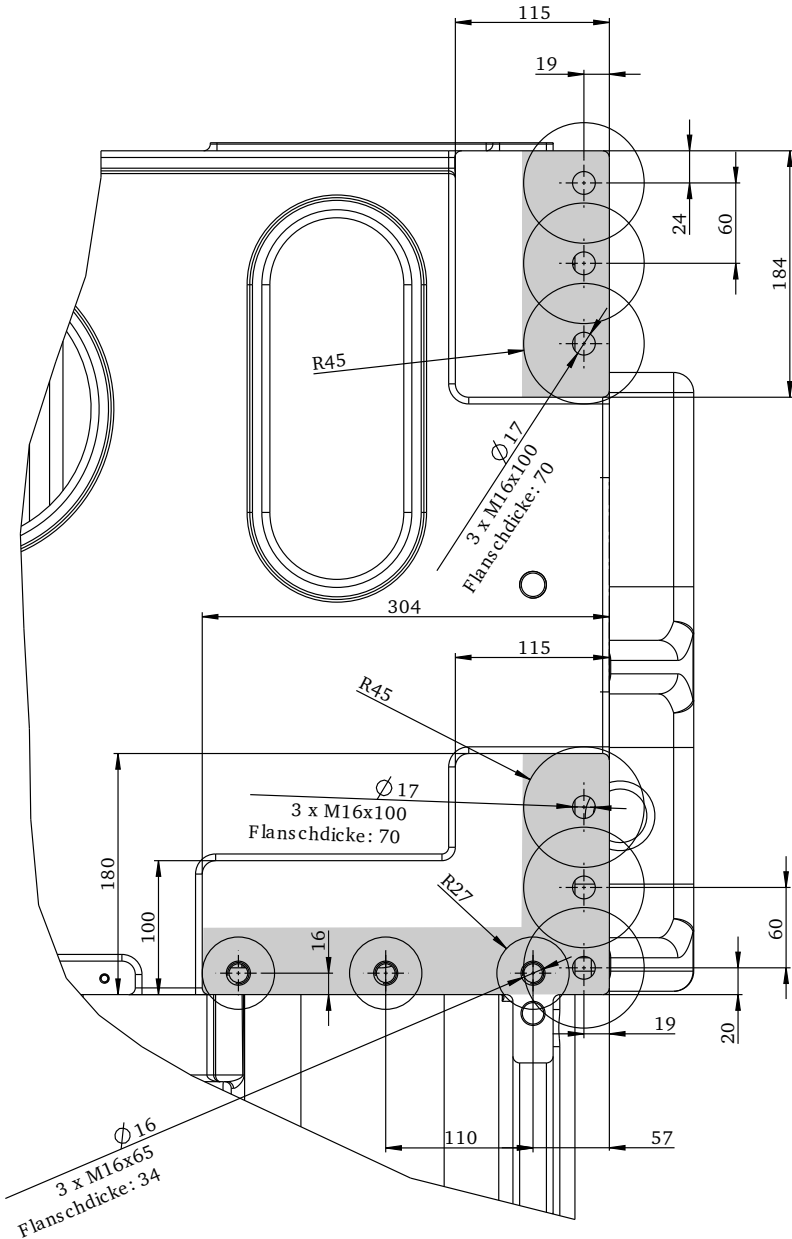


Abb. A.2: Schraubenanordnung, berechnete Verformungskörper sowie der angenommene Bereich hoher Flächenpressung (grau) in der Fuge zwischen Maschinenbett und -ständer des Versuchsträgers. Die Lage der Fuge ist in Abb. 2.1 (S. 5) ersichtlich.

## A.5 Parameterdateien zur Ansteuerung von MSC.Nastran

Für die Ansteuerung von MSC.Nastran<sup>®</sup> wurden in der vorliegenden Arbeit drei verschiedene Typen von Parameterdateien verwendet. Diese sind im Folgenden am Beispiel des Maschinenständers aufgeführt und decken einen betrachteten Frequenzbereich von 0 Hz bis 1000 Hz ab.

### Berechnung von Frequenzgängen

Die in Quelltext A.3 ersichtliche Datei dient zur Berechnung von Frequenzgängen auf Basis von Gl. 2.71 (S. 25) sowie der Ausgabe der beteiligten Modalmatrizen für die Verwendung in Intervall-Frequenzgängen.

Quelltext A.3: Parameterdatei zur Berechnung von Frequenzgängen

```

1 SOL 111
2 malter 'IF ( POSTEXT=\`YES\` AND.*) OUTPUT2 FRL,OPHSA,BHH,KHH//0/OUNIT'
3 OUTPUT2 BHH,KHH,,//0/OUNIT2//OMAXR $
4 malter 'IF ( POSTEXT=\`YES\` AND.*) OUTPUT2 OGPWG,,//0/OUNIT2//OMAXR'
5 OUTPUT2 OGPWG,,//0/OUNIT2//OMAXR $
6 CEND
7 Title = Modal Frequenzgangberechnung mit Ausgabe Moden
8 ECHO = NONE
9 AUTOSPC (NOZERO)
10 GROUNDCHECK (SET=ALL) = YES
11 METHOD = 1
12 $ Antwortknoten
13 SET 110 = 367390,45179,102064,102137
14 $ Anregungsknoten
15 $ Subcase 1
16 SUBCASE=1
17 FREQUENCY = 1
18 DLOAD = 4
19 SET 221 = 367380
20 OLOAD(SORT2,REAL) = 221
21 DISPLACEMENT(SORT2,REAL) = 110
22 $
23 $ Subcase 2
24 SUBCASE=2
25 FREQUENCY = 1
26 DLOAD = 7
27 SET 222 = 53332
28 OLOAD(SORT2,REAL) = 222
29 DISPLACEMENT(SORT2,REAL) = 110
30 $
31 $ Subcase 3
32 SUBCASE=3
33 FREQUENCY = 1
34 DLOAD = 10
35 SET 223 = 151019
36 OLOAD(SORT2,REAL) = 223
37 DISPLACEMENT(SORT2,REAL) = 110
38 $
39 $ Subcase 4

```

```
40 SUBCASE=4
41 FREQUENCY = 1
42 DLOAD = 13
43 SET 224 = 102058
44 OLOAD(SORT2,REAL) = 224
45 DISPLACEMENT(SORT2,REAL) = 110
46 $
47 $ Subcase 5
48 SUBCASE=5
49 FREQUENCY = 1
50 DLOAD = 16
51 SET 225 = 101890
52 OLOAD(SORT2,REAL) = 225
53 DISPLACEMENT(SORT2,REAL) = 110
54 $
55 $ Subcase 6
56 SUBCASE=6
57 ANALYSIS=MODES
58 $ Anregungs- und Antwortknoten
59 SET 226 = 367390,45179,102064,102137,367380,53332,151019,102058,101890
60 VECTOR(SORT1,REAL) = 226
61 $
62 BEGIN BULK
63 EIGRL, 1, 0.0, 2000.0
64 PARAM, DFREQ, 1.0E-6
65 PARAM, POST, -2
66 PARAM, PRTMAXIM, YES
67 PARAM, COUPMASS, 1
68 PARAM, GRDPNT, 0
69 FREQ1, 1, 1.0, 0.100000, 9990
70 TABLED1, 3
71 , 1.0, 1.0, 1000.0, 1.0, ENDT
72 $ Subcase 1
73 DLOAD, 4, 1.0, 1.0, 5
74 RLOAD1, 5, 6, , , 3
75 DAREA, 6, 367380, 3, 1.0
76 $
77 $ Subcase 2
78 DLOAD, 7, 1.0, 1.0, 8
79 RLOAD1, 8, 9, , , 3
80 DAREA, 9, 53332, 3, 1.0
81 $
82 $ Subcase 3
83 DLOAD, 10, 1.0, 1.0, 11
84 RLOAD1, 11, 12, , , 3
85 DAREA, 12, 151019, 2, 1.0
86 $
87 $ Subcase 4
88 DLOAD, 13, 1.0, 1.0, 14
89 RLOAD1, 14, 15, , , 3
90 DAREA, 15, 102058, 3, 1.0
91 $
92 $ Subcase 5
93 DLOAD, 16, 1.0, 1.0, 17
94 RLOAD1, 17, 18, , , 3
95 DAREA, 18, 101890, 3, 1.0
96 $
97 INCLUDE 'Modell.bdf'
98 ENDDATA
```

## Berechnung des Eigenwertproblems und der Elementformänderungsenergien

Die in Quelltext A.4 gezeigte Datei dient zur Berechnung des Eigenwertproblems und der zugehörigen Elementformänderungsenergien.

Quelltext A.4: Parameterdatei zur Berechnung des Eigenwertproblems und der Elementformänderungsenergien

```

1 SOL 103
2 malter 'IF ( POSTEXT=\ 'YES\ ' AND.*) OUTPUT2 OGPWG, , , //0/OUNIT2//OMAXR'
3 OUTPUT2 OGPWG, , , //0/OUNIT2//OMAXR $
4 CEND
5 Title = ESE Berechnung
6 ECHO = NONE
7 AUTOSPC (NOZERO)
8 GROUNDCHECK (SET=ALL) = YES
9 METHOD = 1
10 VECTOR(SORT1,REAL) = ALL
11 ESE (THRESH=0)=ALL
12 $MEFFMASS (ALL)=YES
13 BEGIN BULK
14 EIGRL, 1, 0.0, 1000.0
15 PARAM, POST, -2
16 PARAM, PRTMAXIM, YES
17 PARAM, COUPMASS, 1
18 PARAM, GRDPNT, 0
19 INCLUDE 'Modell.bdf'
20 ENDDATA

```

## Model Updating der Materialparameter mit Mode-Tracking

Die Datei in Quelltext A.5 führt ein Model Updating der Materialparameter hinsichtlich der gemessenen Eigenfrequenzen unter der Randbedingung eines Mode-Trackings durch.

Quelltext A.5: Parameterdatei zum Model Updating der Materialparameter

```

1 ASSIGN USERFILE='MATUP.CSV', STATUS=NEW, FORM=FORMATTED, UNIT=52
2 SOL 200
3 CEND
4 Title = Modal Frequency Optimization
5 ECHO = NONE
6 AUTOSPC (NOZERO)
7 METHOD = 1
8 ANALYSIS = MODES
9 MODTRAK = 99
10 DESOBJ (MIN) = 2
11 DSAPRT (START=1,END=LAST)=ALL
12 BEGIN BULK
13 MODTRAK,99,7,20,0.9
14 EIGRL,1, , ,21
15 PARAM, CDIF, YES
16 PARAM, DESPCH, 1
17 PARAM, DESPCH1, 7

```

```

18 PARAM, NASPRT, -1
19 PARAM, POST, -2
20 PARAM, PRTMAXIM, YES
21 PARAM, COUPMASS, 1
22 PARAM, GRDPNT, 0
23 PARAM, XYUNIT, 52
24 $DOPTPRM, DESMAX, 10
25 DESVAR,101,1_E,1.0,0.10,5.00
26 DVMREL1,151,MAT1,1,E,1.740E+04,8.700E+05
27 ,101,1.740E+05
28 DESVAR,102,1_NU,1.0,0.10,5.00
29 DVMREL1,152,MAT1,1,NU,2.750E-02,1.375E+
30 ,102,2.750E-01
31 DESVAR,103,1_RHO,1.0,0.10,5.00
32 DVMREL1,153,MAT1,1,RHO,7.200E-10,3.600E-08
33 ,103,7.200E-09
34 DRESP2,2,FMatch,3
35 ,DTABLE,Mass1,Mode7,Mode8,Mode9,Mode10,Mode11,Mode12
36 , ,Mode13,Mode15,Mode16,Mode17,Mode18,Mode19,Mode20
37 ,DRESP1,200,201,202,203,204,205,206
38 , ,207,208,209,210,211,212,213
39 DEQATN 3 FUNC(MA,M1,M2,M3,M4,M5,M6,M7,M8,M9,M10,M11,M12,M13,
40 WT,S1,S2,S3,S4,S5,S6,S7,S8,S9,S10,S11,S12,S13) =
41 0.02*((MA-WT)/MA)**2+ (1.0/13.0)*
42 ((M1-S1)/M1)**2+
43 ((M2-S2)/M2)**2+
44 ((M3-S3)/M3)**2+
45 ((M4-S4)/M4)**2+
46 ((M5-S5)/M5)**2+
47 ((M6-S6)/M6)**2+
48 ((M7-S7)/M7)**2+
49 ((M8-S8)/M8)**2+
50 ((M9-S9)/M9)**2+
51 ((M10-S10)/M10)**2+
52 ((M11-S11)/M11)**2+
53 ((M12-S12)/M12)**2+
54 ((M13-S13)/M13)**2)
55 DRESP1,200,Weight1,WEIGHT
56 DRESP1,201,Eig7,FREQ, , ,7
57 DRESP1,202,Eig8,FREQ, , ,8
58 DRESP1,203,Eig9,FREQ, , ,9
59 DRESP1,204,Eig10,FREQ, , ,10
60 DRESP1,205,Eig11,FREQ, , ,11
61 DRESP1,206,Eig12,FREQ, , ,12
62 DRESP1,207,Eig13,FREQ, , ,13
63 DRESP1,208,Eig15,FREQ, , ,15
64 DRESP1,209,Eig16,FREQ, , ,16
65 DRESP1,210,Eig17,FREQ, , ,17
66 DRESP1,211,Eig18,FREQ, , ,18
67 DRESP1,212,Eig19,FREQ, , ,19
68 DRESP1,213,Eig20,FREQ, , ,20
69 DTABLE,Mass1,1.252E+,Mode7,4.117E+02,Mode8,4.557E+02,Mode9,4.809E+02
70 ,Mode10,5.220E+02,Mode11,5.979E+02,Mode12,6.062E+02,Mode13,6.150E+02
71 ,Mode15,6.496E+02,Mode16,6.632E+02,Mode17,6.873E+02,Mode18,7.131E+02
72 ,Mode19,7.281E+02,Mode20,7.466E+02
73 INCLUDE 'Modell.bdf'
74 ENDDATA

```



## Literaturverzeichnis

Die Literaturangaben sind alphabetisch nach den Namen der Erstautoren sortiert. Wo Jahrgang oder Nummer nicht angegeben sind, existieren diese nicht oder liegen dem Verfasser nicht vor.

### AINSWORTH 2001

Ainsworth, M.: Essential boundary conditions and multi-point constraints in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190 (2001), S. 6323–6339.

### AINSWORTH & ODEN 1997

Ainsworth, M.; Oden, J. T.: A posteriori error estimation in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 142 (1997) 1, S. 1–88.

### AINSWORTH & ODEN 2000

Ainsworth, M.; Oden, J. T.: A posteriori error estimation in finite element analysis. New York: John Wiley & Sons 2000.

### ALBERTZ 1995

Albertz, F.: Dynamikgerechter Entwurf von Werkzeugmaschinen-Gestellstrukturen. Nr. 93 in *iwb Forschungsberichte*. Berlin: Springer 1995.

### ALLEMANG 2003

Allemang, R. J.: The Modal Assurance Criterion – Twenty years of use and abuse. *Sound and Vibration* (2003) August, S. 14–21.

### ALLEMANG & BROWN 1982

Allemang, R. J.; Brown, D. L.: A correlation coefficient for modal vector analysis. In: *Proceedings of the first IMAC*, Schenectady 1982, S. 110–116.

### ALTENBACH 2012

Altenbach, H.: *Kontinuumsmechanik*. 2. Auflage. Berlin: Springer 2012.

### ALTINTAS ET AL. 2005

Altintas, Y.; Brecher, C.; Weck, M.; Witt, S.: Virtual machine tool. *CIRP Annals – Manufacturing Technology* 54 (2005) 2, S. 115–138.

### ALTINTAS ET AL. 2011

Altintas, Y.; Verl, A.; Brecher, C.; Uriarte, L.; Pritschow, G.: Machine tool feed drives. *CIRP Annals – Manufacturing Technology* 60 (2011) 2, S. 779–796.

ALVIN ET AL. 1998

Alvin, K. F.; Oberkampf, W. L.; Diegert, K. V.; Rutherford, B. M.: Uncertainty quantification in computational structural dynamics: A new paradigm for model validation. In: Proceedings of the XVIth IMAC, Santa Barbara 1998.

ARENDE ET AL. 2012a

Arendt, P. D.; Apley, D. W.; Chen, W.: Quantification of model uncertainty: Calibration, model discrepancy, and identifiability. ASME Journal of Mechanical Design 134 (2012) 100908.

ARENDE ET AL. 2012b

Arendt, P. D.; Apley, D. W.; Chen, W.; Lamb, D.; Gorsich, D.: Improving identifiability in model calibration using multiple responses. ASME Journal of Mechanical Design 134 (2012) 100909.

AUGUST STEINMEYER GMBH & CO. KG 2014

August Steinmeyer GmbH & Co. KG: Präzisionskugelgewindetriebe 16 – 125 mm. Riedstr. 7, D-72458 Albstadt, 2014, [http://www2.steinmeyer.com/data/media/ca\\_9544.pdf](http://www2.steinmeyer.com/data/media/ca_9544.pdf), Download am 9.10.2014.

AVITABLE 2000

Avitable, P.: Model updating – Endless possibilities. Sound and Vibration (2000) September, S. 20–29.

BABUŠKA & AZIZ 1976

Babuška, I.; Aziz, K.: On the angle condition in the finite element method. SIAM Journal on Numerical Analysis 13 (1976) 2, S. 214–226.

BABUŠKA & ODEN 2004

Babuška, I.; Oden, J. T.: Verification and validation in computational engineering and science: Basic concepts. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 193 (2004), S. 4057–4066.

BATHE 1996

Bathe, K.-J.: Finite-Elemente-Methoden. New Jersey: Prentice-Hall 1996.

BERNS & THEISEN 2008

Berns, H.; Theisen, W.: Eisenwerkstoffe – Stahl und Gusseisen. 4. Auflage. Berlin: Springer 2008.

## BESSELINK ET AL. 2013

Besselink, B.; Tabak, U.; Lutowska, A.; van de Wouw, N.; Nijmeijer, H.; Rixen, D. J.; Hochstenbach, M. E.; Schilders, W. H. A.: A comparison of model reduction techniques from structural dynamics, numerical mathematics and systems and control. *Journal of Sound and Vibration* 332 (2013), S. 4403–4422.

## BLAKELY 1991

Blakely, K.: Updating MSC/NASTRAN models to match test data. In: *MSC 1991 World Users' Conference Proceedings*, 1991, Nr. 5091.

## BLEVINS 1979

Blevins, R. D.: *Formulas for natural frequency and mode shape*. 10. Auflage. Malabar: Krieger Publishing Company 1979.

## BOGRAD ET AL. 2007

Bograd, S.; Schmidt, A.; Gaul, L.: Modeling of damping in bolted structures, Düsseldorf: VDI-Verlag 2007. Nr. 2003 in *VDI-Berichte*, S. 97–110.

## BOGRAD ET AL. 2008

Bograd, S.; Schmidt, A.; Gaul, L.: Joint damping prediction by thin layer elements. In: *Proceedings of the IMAC – XXVI, Orlando 2008*.

## BOGRAD ET AL. 2011

Bograd, S.; Schmidt, A.; Reuss, P.; Gaul, L.; Mayer, M.: Modeling the dynamics of mechanical joints. *Mechanical Systems and Signal Processing* 25 (2011), S. 2801–2826.

## BONISOLI ET AL. 2012

Bonisoli, E.; Rosso, C.; Delprete, C.; Stratta, F.: Inverse eigensensitivity approach in model updating of avionic components. In: *Topics in model validation and uncertainty quantification*. Berlin: Springer 2012, *Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series, Band 4, Kapitel 16*, S. 149–165.

## BOSCH REXROTH AG 2006a

Bosch Rexroth AG: *Rollenschienenführungen*. Ernst-Sachs-Str. 100, D-97424 Schweinfurt, 2006, R310DE 2302 (2006.04).

## BOSCH REXROTH AG 2006b

Bosch Rexroth AG: *Handbuch Lineartechnik*. Ernst-Sachs-Str. 100, D-97424 Schweinfurt, 2006, R310DE 17 (2006.07).

**BÖSWALD 2005**

Böswald, M.: Updating of local non-linear stiffness and damping parameters in large order finite element models by using vibration test data. Nr. 2005-25 in DLR-Forschungsberichte. Köln: Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e. V. 2005.

**BOX & DRAPER 1987**

Box, G. E. P.; Draper, N. R.: Empirical model-building and response surfaces. New York: John Wiley & Sons 1987.

**BRAUN 2002**

Braun, S. (Hrsg.): Encyclopedia of vibration. 2. Auflage. London: Academic Press 2002.

**BRECHER & MEIDLINGER 2007**

Brecher, C.; Meidlinger, R.: Geschossdecken und Fundamente. wt Werkstattstechnik online 97 (2007) 7/8, S. 504–509.

**BRECHER ET AL. 2009**

Brecher, C.; Witt, S.; Yagmur, T.: Influences of oil additives on the wear behavior of ball screws. Production Engineering 3 (2009), S. 323–327.

**BRECHER ET AL. 2012a**

Brecher, C.; Bäumlner, S.; Habermann, R.: Damping behaviour of spindle bearings. MM Science Journal (2012) MATAR2012-12027.

**BRECHER ET AL. 2012b**

Brecher, C.; Fey, M.; Bäumlner, S.: Identification method for damping parameters of roller linear guides. Production Engineering 6 (2012), S. 505–512.

**BRECHER ET AL. 2012c**

Brecher, C.; Großmann, K.; Zäh, M. F.; Fey, M.; Niehues, K.; Rudolph, H.; Schwarz, S.: Lineare Dynamikmodelle für verschraubte Fugen. wt Werkstattstechnik online 102 (2012) 5, S. 276–281.

**BRECHER ET AL. 2012d**

Brecher, C.; Habermann, R.; Fey, M.: Ermitteln der Dämpfung eines Spindella-gerpakets. wt Werkstattstechnik online 102 (2012) 5, S. 282–287.

**BRECHER ET AL. 2013**

Brecher, C.; Fey, M.; Bäumlner, S.: Damping models for machine tool components of linear axes. CIRP Annals – Manufacturing Technology 62 (2013) 1, S. 399–402.

## BRECHER ET AL. 2014a

Brecher, C.; Fey, M.; Habermann, R.: Comparison of damping properties of spindle bearings. In: Proceedings of the 16th International Conference on Machine Design and Production, Izmir 2014, S. 427–442.

## BRECHER ET AL. 2014b

Brecher, C.; Wagner, M.; Fey, M.: Dämpfung in Profilschienenführungen. *wt Werkstattstechnik online* 104 (2014) 5, S. 295–300.

## BREHM 2011

Brehm, M.: Vibration-based model updating: Reduction and quantification of uncertainties. Dissertation, Bauhaus-Universität Weimar, 2011.

## BROOS ET AL. 2006

Broos, A.; Kehl, G.; Melchinger, A.; Röck, S.; Will, J.: OptiSLang in der Entwicklung von Werkzeugmaschinen. In: 3. Weimarer Optimierungs- und Stochastiktag, Weimar 2006.

## BUTLER 1987

Butler, T. G.: Mass modeling for bars. In: 15th NASTRAN User's Colloquium, Kansas City 1987, Nr. 2481 in NASA Conference Publication, S. 136–165.

## BUTLER 1988

Butler, T. G.: Coupled mass for prismatical bars. In: 16th NASTRAN User's Colloquium, Arlington 1988, Nr. 2505 in NASA Conference Publication, S. 44–57.

## CAMPAÑA ET AL. 2011

Campaña, C.; Persson, B. N. J.; Müser, M. H.: Transverse and normal interfacial stiffness of solids with randomly rough surfaces. *Journal of Physics: Condensed Matter* 23 (2011) 085001.

## CANUDAS DE WIT ET AL. 1995

Canudas de Wit, C.; Olsson, H.; Aström, K. J.; Lischinsky, P.: A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on automatic control* 40 (1995) 3, S. 419–425.

## CAUGHEY &amp; O'KELLY 1965

Caughey, T. K.; O'Kelly, M. E. J.: Classical normal modes in damped linear dynamic systems. *ASME Journal of Applied Mechanics* 32 (1965) 3, S. 583–588.

## CHEN ET AL. 2004

Chen, J.-S.; Huang, Y.-K.; Cheng, C.-C.: Mechanical model and contouring analysis of high-speed ball-screw drive systems with compliance effect. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 24 (2004), S. 241–250.

## CHEN &amp; TANG 2014

Chen, Y.; Tang, W.: Determination of contact stiffness in ball screws considering variable contact angles. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 228 (2014) 12, S. 2193–2203.

## CRAMER &amp; KAMPS 2014

Cramer, E.; Kamps, U.: *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*. 3. Auflage. Berlin: Springer 2014.

## DADALAU &amp; VERL 2012

Dadalau, A.; Verl, A.: Bottom-up component oriented FE-modelling of machine tools. In: *Enabling manufacturing competitiveness and economic sustainability*. Springer 2012, S. 227–233.

## DADALAU ET AL. 2010

Dadalau, A.; Mottahedi, M.; Groh, K.; Verl, A.: Parametric modeling of ball screw spindles. *Production Engineering* 4 (2010), S. 625–631.

## DADALAU ET AL. 2012

Dadalau, A.; Groh, K.; Reuß, M.; Verl, A.: Modeling linear guide systems with CoFEM: Equivalent models for rolling contact. *Production Engineering* 6 (2012), S. 39–46.

## DE GERSEM ET AL. 2005

De Gersem, H.; Moens, D.; Desmet, W.; Vandepitte, D.: A fuzzy finite element procedure for the calculation of uncertain frequency-response functions of damped structures: Part 2 – Numerical case studies. *Journal of Sound and Vibration* 288 (2005), S. 463–486.

## DE LIMA &amp; EBECKEN 2000

de Lima, B.; Ebecken, N.: A comparison of models for uncertainty analysis by the finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design* 34 (2000), S. 211–232.

## DE MUNCK ET AL. 2004

De Munck, M.; Moens, D.; Desmet, W.; Vandepitte, D.: An automated procedure for interval and fuzzy finite element analysis. In: *Proceedings of ISMA, Leuven 2004*, Band 9, S. 3023–3033.

## DEBRA 1992

DeBra, D. B.: Vibration isolation of precision machine tools and instruments. CIRP Annals – Manufacturing Technology 41 (1992) 2, S. 711–718.

## DEUTSCHE EDELSTAHLWERKE GMBH 2011

Deutsche Edelstahlwerke GmbH: Unlegierter Vergütungsstahl 1.1213 (Cf53). Austr. 4, D-58452 Witten, 2011, [http://www.dew-stahl.com/fileadmin/files/dew-stahl.com/documents/Publikationen/Werkstoffdatenblaetter/Baustahl/1.1213\\_de.pdf](http://www.dew-stahl.com/fileadmin/files/dew-stahl.com/documents/Publikationen/Werkstoffdatenblaetter/Baustahl/1.1213_de.pdf), Download am 29.9.2014.

## DIETL 1997

Dietl, P.: Damping and stiffness characteristics of rolling element bearings. Dissertation, TU Wien, 1997.

## DIN EN 1561 2010

DIN EN 1561: Gießereiwesen – Gusseisen mit Lamellengraphit. Berlin: Beuth 2010.

## DIN EN 1563 2010

DIN EN 1563: Gießereiwesen – Gusseisen mit Kugelgraphit. Berlin: Beuth 2010.

## DIN ISO 3408 Blatt 4 2011

DIN ISO 3408 Blatt 4: Kugelgewindetriebe – Statische axiale Steifigkeit. Berlin: Beuth 2011.

## DOEBLING 2002

Doebling, S. W.: Structural dynamics model validation: Pushing the envelope. In: International Conference on Structural Dynamics Modeling: Test, Analysis, Correlation and Validation, 2002, S. 3–5.

## DRESIG &amp; HOLZWEISSIG 2009

Dresig, H.; Holzweißig, F.: Maschinendynamik. 9. Auflage. Berlin: Springer 2009.

## EHRlich ET AL. 2014

Ehrlich, C.; Schmidt, A.; Gaul, L.: Microslip joint damping prediction using thin-layer elements. In: Proceedings of the IMAC – XXXII, Orlando 2014.

## ELISHAKOFF 2000

Elishakoff, I. (Hrsg.): Whys and hows in uncertainty modelling. Wien: Springer 2000.

## ERKORKMAZ &amp; KAMALZADEH 2006

Erkorkmaz, K.; Kamalzadeh, A.: High bandwidth control of ball screw drives. CIRP Annals – Manufacturing Technology 55 (2006) 1, S. 393–398.

## EWINS 1984

Ewins, D. J.: Modal testing: Theory and practice. Taunton: Research Studies Press 1984.

## FANG ET AL. 1998

Fang, L.-Y.; Metzloff, K.; Voigt, R.; Loper, C.: Der Elastizitätsmodul von graphitischen Gusseisen. Konstruieren und Giessen 23 (1998), S. 8–13.

## FINKE 1977

Finke, R.: Berechnung des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen. Dissertation, RWTH Aachen, 1977.

## FLEISCHER &amp; BROOS 2004

Fleischer, J.; Broos, A.: Parameteroptimierung bei Werkzeugmaschinen – Anwendungsmöglichkeiten und Potentiale. In: 1. Weimarer Optimierungs- und Stochastiktage, Weimar 2004.

## FOTSCH 2001

Fotsch, D. W.: Development of valid FE models for structural dynamic design. PhD Thesis, Imperial College, University of London, 2001.

## FREY ET AL. 2012

Frey, S.; Dadalau, A.; Verl, A.: Expedient modeling of ball screw feed drives. Production Engineering 6 (2012), S. 205–211.

## FREYMANN 2011

Freymann, R.: Strukturdynamik. Berlin: Springer 2011.

## FRISWELL &amp; MOTTERSHEAD 1995

Friskwell, M. I.; Mottershead, J. E.: Finite element model updating in structural dynamics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers 1995.

## GAO &amp; ROCKHAUSEN 2001

Gao, X.; Rockhausen, L.: Eigenfrequenzen und -formen von Maschinengestellen bei geänderten Aufstellbedingungen auf der Basis gemessener Modaldaten, Düsseldorf: VDI-Verlag 2001. Nr. 1606 in VDI-Berichte, S. 1–12.

## GARCÍA 2008

García, J. V.: Development of valid models for structural dynamic analysis. PhD Thesis, Imperial College, University of London, 2008.



## GARITAONANDIA ET AL. 2008

Garitaonandia, I.; Fernandes, M. H.; Albizuri, J.: Dynamic model of a centerless grinding machine based on an updated FE model. *International Journal of Machine Tools & Manufacture* 48 (2008), S. 832–840.

## GASCH &amp; KNOTHE 1989

Gasch, R.; Knothe, K.: *Kontinua und ihre Diskretisierung, Strukturodynamik, Band 2*. Berlin: Springer 1989.

## GAUL 2008

Gaul, L.: Abschlussbericht über das Vorhaben Nr. 877 – Experimentelle Ermittlung von Kennwerten zur Werkstoff- und Fügestellendämpfung sowie deren Berücksichtigung in Finite-Elemente-Berechnungen. In: *Forschungsberichte. Forschungsvereinigung Verbrennungskraftmaschinen e. V.* 2008, R 541.

## GEISLER 2010

Geisler, J.: *Numerische und experimentelle Untersuchungen zum dynamischen Verhalten von Strukturen mit Fügestellen*. Dissertation, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg (FAU), 2010.

## GIANNINIA &amp; HANSS 2008

Gianninia, O.; Hanss, M.: The component mode transformation method: A fast implementation of fuzzy arithmetic for uncertainty management in structural dynamics. *Journal of Sound and Vibration* 311 (2008), S. 1340–1357.

## GOLLER ET AL. 2011

Goller, B.; Pradlwarter, H. J.; Schuëller, G. I.: An interpolation scheme for the approximation of dynamical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200 (2011), S. 414–423.

## GÖRKE 2010

Görke, D.: *Experimentelle und numerische Untersuchung des Normal- und Tangentialkontaktverhaltens rauher metallischer Oberflächen*. Dissertation, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg (FAU), 2010.

## GRAFE 1998

Grafe, H.: *Model updating of large structural dynamics models using measured response functions*. PhD Thesis, Imperial College, University of London, 1998.

## GRÄTSCH &amp; BATHE 2005

Grätsch, T.; Bathe, K.-J.: A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis. *Computers and Structures* 83 (2005), S. 235–265.

## GROCHE &amp; HOFMANN 2005

Groche, P.; Hofmann, T.: A new method to determine the dynamic properties of profiled guideways and guide slide bearings. *Production Engineering* 12 (2005) 2, S. 187–190.

## GROSSMANN 1976

Grossmann, K.: Ein Beitrag zur Modellfindung und -berechnung für die dynamische Analyse von Werkzeugmaschinen-Strukturen. Dissertation, TU Dresden, 1976.

## GROTE &amp; FELDHUSEN 2007

Grote, K.-H.; Feldhusen, J.: *Dubbel – Taschenbuch für den Maschinenbau*. 22. Auflage. Berlin: Springer 2007.

## GROTH 1972

Groth, W. H.: Die Dämpfung in verspannten Fugen und Arbeitsführungen von Werkzeugmaschinen. Dissertation, RWTH Aachen, 1972.

## HANSON 1999

Hanson, K. M.: A framework for assessing uncertainties in simulation predictions. *Physica D* 133 (1999), S. 179–188.

## HANSS 2002

Hanss, M.: The transformation method for the simulation and analysis of systems with uncertain parameters. *Fuzzy Sets and Systems* 130 (2002), S. 277–289.

## HANSS 2003

Hanss, M.: The extended transformation method for the simulation and analysis of fuzzy-parameterized Models. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* 11 (2003) 6, S. 711–727.

## HANSS 2005

Hanss, M.: *Applied fuzzy arithmetic*. Berlin: Springer 2005.

## HANSS &amp; TURRIN 2010

Hanss, M.; Turrin, S.: A fuzzy-based approach to comprehensive modeling and analysis of systems with epistemic uncertainties. *Structural Safety* 32 (2010), S. 433–441.

## HASSELMAN 2001

Hasselmann, T.: Quantification of uncertainty in structural dynamic models. *Journal of Aerospace Engineering* (2001) Oktober, S. 158–165.

## HEIMANN 1977

Heimann, A.: Anwendung der Methode finiter Elemente bei Berechnung und Auslegung von Gestellbauteilen. Dissertation, RWTH Aachen, 1977.

## HEMEZ &amp; DOEBLING 2001

Hemez, F. M.; Doebling, S. W.: Review and assessment of model updating for non-linear, transient dynamics. *Mechanical Systems and Signal Processing* 15 (2001) 1, S. 45–74.

## HEMEZ &amp; STULL 2012

Hemez, F. M.; Stull, C. J.: On the legitimacy of model calibration in structural dynamics. In: *Topics in model validation and uncertainty quantification*. Berlin: Springer 2012, Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series, Band 4, Kapitel 10, S. 95–108.

## HEYLEN &amp; AVITABILE 1998

Heylen, W.; Avitabile, P.: Correlation considerations – Part 5. In: *Proceedings of the XVth IMAC, Santa Barbara* 1998.

## HEYLEN ET AL. 1997

Heylen, W.; Lammens, S.; Sas, P.: *Modal analysis theory and testing*. Heverlee: Katholieke Universiteit Leuven Department Werktuigkunde 1997.

## HINTON ET AL. 1976

Hinton, E.; Rock, T.; Zienkiewicz, C.: Note on mass lumping and related processes in the finite element method. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 4 (1976), S. 245–249.

## HOFFMANN 2008

Hoffmann, F.: Optimierung der dynamischen Bahngenauigkeit von Werkzeugmaschinen mit der Mehrkörpersimulation. Nr. 8/2008 in *Ergebnisse aus der Produktionstechnik*. Aachen: Apprimus 2008.

## HUGHES 1987

Hughes, T. J. R.: *The finite element method – Linear static and dynamic finite element analysis*. 10. Auflage. New Jersey: Prentice-Hall 1987.

## HUNG ET AL. 2011

Hung, J.-P.; Lai, Y.-L.; Lin, C.-Y.; Lo, T.-L.: Modeling the machining stability of a vertical milling machine under the influence of the preloaded linear guide. *International Journal of Machine Tools & Manufacture* 51 (2011), S. 731–739.

**IBRAHIM & PETTIT 2005**

Ibrahim, R. A.; Pettit, C. L.: Uncertainties and dynamic problems of bolted joints and other fasteners. *Journal of Sound and Vibration* 279 (2005), S. 857–936.

**IMAMOVIC 1998**

Imamovic, N.: Validation of large structural dynamics models using modal test data. PhD Thesis, Imperial College, University of London, 1998.

**ISPAYLAR 1997**

Ispaylar, M. H.: Betriebseigenschaften von Profilschienen-Wälzführungen. Würzburg: compuTEAM 1997.

**JAISHI & REN 2007**

Jaishi, B.; Ren, W.-X.: Finite element model updating based on eigenvalue and strain energy residuals using multiobjective optimisation technique. *Mechanical Systems and Signal Processing* 21 (2007), S. 2295–2317.

**JAUMOUILLE ET AL. 2010**

Jaumouille, V.; Sinou, J.-J.; Petitjean, B.: An adaptive harmonic balance method for predicting the nonlinear dynamic responses of mechanical systems – Application to bolted structures. *Journal of Sound and Vibration* 329 (2010), S. 4048–4067.

**JOHNSON & KIENHOLZ 1981**

Johnson, C. D.; Kienholz, D. A.: Finite element prediction of damping in structures with constrained viscoelastic layers. *AIAA Journal* 20 (1981) 9, S. 1284–1290.

**KAMALZADEH & ERKORKMAZ 2007**

Kamalzadeh, A.; Erkorkmaz, K.: Compensation of axial vibrations in ball screw drives. *CIRP Annals – Manufacturing Technology* 56 (2007) 1, S. 373–378.

**KEHL & ALTSTÄDTER 2003**

Kehl, G.; Altstädter, H.: Simulation von Werkzeugmaschinen – Ein Bericht aus der Praxis. *Simulation* (2003) 1, S. 32–34.

**KIM & KIM 2000**

Kim, T. S.; Kim, Y. Y.: Mac-based mode-tracking in structural topology optimization. *Computers and Structures* 74 (2000), S. 375–383.

**KIPFMÜLLER 2009**

Kipfmüller, M.: Aufwandsoptimierte Simulation von Werkzeugmaschinen. Nr. 153 in *Forschungsberichte aus dem wbk, Institut für Produktionstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT)*. Karlsruhe: wbk, Inst. für Produktionstechnik 2009.

## KOLAR ET AL. 2012

Kolar, P.; Smolik, J.; Sulitka, M.; Šindler, J.; Hovorka, J.: An integrated approach to the development of machine tool structural parts. *MM Science Journal* (2012) MATAR2012-12082.

## KOLOUCH 2013

Kolouch, M.: Simulation des Einflusses der Gelenke auf das statische und dynamische Verhalten von parallelkinematischen Werkzeugmaschinen. Auerbach: Verlag Wissenschaftliche Scripten 2013.

## KONO ET AL. 2012

Kono, D.; Inagaki, T.; Matsubara, A.; Yamaji, I.: Measurement of contact stiffness for stiffness estimation of machine tool supports. *Key Engineering Materials* 523–524 (2012), S. 457–462.

## KONO ET AL. 2013

Kono, D.; Inagaki, T.; Matsubara, A.; Yamaji, I.: Stiffness model of machine tool supports using contact stiffness. *Precision Engineering* 37 (2013) 3, S. 650–657.

## KUHN &amp; TUCKER 1951

Kuhn, H. W.; Tucker, A. W.: Nonlinear programming. In: *Proceedings of the second Berkeley symposium on mathematical statistics and probability*. Berkeley: University of California Press 1951, S. 481–492.

## KUNC 2013

Kunc, M.: Identifikation und Modellierung von nichtlinearen Dämpfungseffekten in Vorschubachsen für Werkzeugmaschinen. Nr. 11/2013 in *Ergebnisse aus der Produktionstechnik*. Aachen: Apprimus 2013.

## KŘÍŽEK 1992

Křížek, M.: On the maximum angle condition for linear tetrahedral elements. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 29 (1992) 2, S. 513–520.

## LAM &amp; SANTHIKUMAR 2003

Lam, Y. C.; Santhikumar, S.: Automated rib location and optimization for plate structures. *Structural and multidisciplinary optimization* 25 (2003), S. 35–45.

## LAVEUVE 1975

Laveuve, S.: Definition einer Kahan-Arithmetik und ihre Implementierung. In: Nickel, K. (Hrsg.): *Interval mathematics*. Berlin: Springer 1975, *Lecture notes in computer science*, Band 29, S. 236–245.

## LEVINA 1967

Levina, Z. M.: Research on the static stiffness of joint in machine tools. In: Proceedings of the 8th Int. MTDR Conference, 1967, Band 2, S. 737–758.

## LIEVEN &amp; EWINS 1992

Lieven, N. A. J.; Ewins, D. J.: A proposal for standard notation and terminology in modal analysis. In: Proceedings of the Xth IMAC, San Diego 1992.

## LIM &amp; KASHANGAKI 1994

Lim, T. W.; Kashangaki, T. A. L.: Structural damage detection of space truss structures using best achievable eigenvectors. AIAA journal 32 (1994) 5, S. 1049–1057.

## LIN &amp; EWINS 1990

Lin, R. M.; Ewins, D. J.: Model updating using FRF data. In: Proceedings of the 15th International Seminar on Modal Analysis, Leuven 1990, S. 141–163.

## LIN &amp; ZHU 2006

Lin, R. M.; Zhu, J.: Model updating of damped structures using FRF data. Mechanical Systems and Signal Processing 20 (2006), S. 2200–2218.

## LIU 1998

Liu, Z.: Bildung und Korrektur eines schwingungstechnischen Modells von Werkzeugmaschinen. Nr. 300 in Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 1. Düsseldorf: VDI-Verlag 1998.

## MAIA &amp; SILVA 1997

Maia, N.; Silva, J.: Theoretical and experimental modal analysis. Taunton: Research Studies Press 1997.

## MAIA ET AL. 1998

Maia, N.; Silva, J.; Ribeiro, A.: On a general model for damping. Journal of Sound and Vibration 218 (1998) 5, S. 749–767.

## MARKERT 2013

Markert, R.: Strukturdynamik. Aachen: Shaker 2013.

## MARWALA 2010

Marwala, T.: Finite-element-model updating using computational intelligence techniques. London: Springer 2010.

## MAUTE 2001

Maute, A.: Fehlerkontrolle bei Finite-Element-Methoden in der linearen Strukturndynamik. Nr. 33 in Berichte aus dem Institut für Baustatik. Stuttgart: Institut für Baustatik 2001.

## MAYER 2007

Mayer, M.: Zum Einfluss von Fügstellen auf das dynamische Verhalten zusammengesetzter Strukturen. Nr. 1/2007 in Bericht aus dem Institut für Angewandte und Experimentelle Mechanik. Tönning: Der Andere Verlag 2007.

## MAYES 2009a

Mayes, R. L.: Model correlation and calibration. In: Proceedings of the IMAC – XXVII, Orlando 2009.

## MAYES 2009b

Mayes, R. L.: Developing adequacy criterion for model validation based on requirements. In: Proceedings of the IMAC – XXVII, Orlando 2009.

## MAYMON 2008

Maymon, G.: Structural dynamics and probabilistic analysis for engineers. Burlington: Butterworth-Heinemann 2008.

## MEIDLINGER 2008

Meidlinger, R.: Einfluss der Aufstellung auf das dynamische Verhalten von Werkzeugmaschinen. Nr. 7/2008 in Berichte aus der Produktionstechnik. Aachen: Shaker 2008.

## MEIROVITCH 1980

Meirovitch, L.: Computational methods in structural dynamics. Alphen aan den Rijn: Sijthoff & Noordhoff 1980.

## MERRIAM-WEBSTER.COM 2014

Merriam-Webster.com: Inference. 2014, <http://www.merriam-webster.com/dictionary/inference>, aufgerufen am 20.11.2014.

## MESCHKE 1995

Meschke, J.: Verbesserung des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen durch Erhöhung der Systemdämpfung. Schriftenreihe des IWF. Essen: Vulkan-Verlag 1995.

## MEYER 2003

Meyer, S.: Modellbildung und Identifikation von lokalen nichtlinearen Steifigkeits- und Dämpfungseigenschaften in komplexen strukturndynamischen Finite-Elemente-Modellen. Kassel: Kassel Univ. Press 2003.

## MILBERG 1995

Milberg, J.: Werkzeugmaschinen – Grundlagen. 2. Auflage. Berlin: Springer 1995.

## MODAK ET AL. 2002

Modak, S. V.; Kundra, T. K.; Nakra, B. C.: Comparative study of model updating methods using simulated experimental data. *Computers and Structures* 80 (2002), S. 437–447.

## MODARES ET AL. 2006

Modares, M.; Mullen, R. L.; Muhanna, R. L.: Natural frequencies of a structure with bounded uncertainty. *ASCE Journal of Engineering Mechanics* 132 (2006), S. 1363–1371.

## MOENS 2002

Moens, D.: A non-probabilistic finite element approach for structural dynamic analysis with uncertain parameters. Dissertation, K. U. Leuven – Faculteit Toegepaste Wetenschappen, Leuven, 2002.

## MOENS &amp; HANSS 2011

Moens, D.; Hanss, M.: Non-probabilistic finite element analysis for parametric uncertainty treatment in applied mechanics: Recent advances. *Finite Elements in Analysis and Design* 47 (2011), S. 4–16.

## MOENS &amp; VANDEPITTE 2004

Moens, D.; Vandepitte, D.: An interval finite element approach for the calculation of envelope frequency response functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 61 (2004), S. 2480–2507.

## MOENS &amp; VANDEPITTE 2005a

Moens, D.; Vandepitte, D.: A fuzzy finite element procedure for the calculation of uncertain frequency-response functions of damped structures: Part 1 – Procedure. *Journal of Sound and Vibration* 288 (2005), S. 431–462.

## MOENS &amp; VANDEPITTE 2005b

Moens, D.; Vandepitte, D.: A survey of non-probabilistic uncertainty treatment in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194 (2005), S. 1527–1555.

## MOORE 1979

Moore, R. E.: *Methods and applications of interval analysis*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics 1979.



## MOTTERSHEAD &amp; FRISWELL 1993

Mottershead, J. E.; Friswell, M. I.: Model updating in structural dynamics: A survey. *Journal of Sound and Vibration* 167 (1993) 2, S. 347–375.

## MOTTERSHEAD ET AL. 1995

Mottershead, J. E.; Goh, E. L.; Shao, W.: On the treatment of discretisation errors in finite element model updating. *Mechanical Systems and Signal Processing* 9 (1995) 1, S. 101–112.

## MOTTERSHEAD ET AL. 2011

Mottershead, J. E.; Link, M.; Friswell, M. I.: The sensitivity method in finite element model updating: A tutorial. *Mechanical Systems and Signal Processing* 25 (2011), S. 2275–2296.

## MSC.SOFTWARE CORPORATION 2009

MSC.Software Corporation: Mathematical specification of the modern RBE3 element. 2 Mac Arthur Place, Santa Ana, CA 92707, 2009, KB8011933.

## MSC.SOFTWARE CORPORATION 2011

MSC.Software Corporation: MD Nastran 2011 & MSC Nastran 2011 Dynamic Analysis User's Guide. 2 Mac Arthur Place, Santa Ana, CA 92707, 2011.

## MSC.SOFTWARE CORPORATION 2012

MSC.Software Corporation: MSC Nastran 2012 Design Sensitivity and Optimization User's Guide. 2 Mac Arthur Place, Santa Ana, CA 92707, 2012.

## MSC.SOFTWARE CORPORATION 2013

MSC.Software Corporation: MSC Marc 2013 Volume C: Program Input. 2 Mac Arthur Place, Santa Ana, CA 92707, 2013.

## MYERS ET AL. 2005

Myers, A.; Barrans, S. M.; Ford, D. G.: Measurement techniques for determining the static stiffness of foundations for machine tools. In: 7th International Symposium on Measurement Technology and Intelligent Instruments. IOP Publishing 2005, *Journal of Physics: Conference Series*, Band 13, S. 410–413.

## NASHIF ET AL. 1985

Nashif, A. D.; Jones, D. I. G.; Henderson, J. P.: *Vibration damping*. 10. Auflage. New York: Wiley 1985.

## NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION 1981

National Aeronautics and Space Administration: *The Nastran theoretical manual*. Washington, D.C., 1981, SP-221(06).

## NEBELING 1999

Nebeling, P. H.: Abgleich der dynamischen Eigenschaften numerischer Modelle mit realen mechanischen Strukturen. Nr. 5/99 in Berichte aus der Produktionstechnik. Aachen: Shaker 1999.

## NEELAMKAVIL 1987

Neelamkavil, F.: Computer simulation and modelling. New York: Wiley 1987.

## NEUGEBAUER 2012

Neugebauer, R. (Hrsg.): Werkzeugmaschinen. Berlin: Springer 2012.

## NEUGEBAUER ET AL. 2012

Neugebauer, R.; Kolouch, M.; Richter, M.; Wittstock, V.; Saha, S. N.: Model updating of machine tools. MM Science Journal (2012) MATAR2012-12013.

## NIEHUES &amp; ZÄH 2012

Niehues, K.; Zäh, M. F.: Lokale Dämpfungsmodellierung an Werkzeugmaschinenstrukturen. Zeitschrift für wirtschaftlichen Fabrikbetrieb 107 (2012) 7/8, S. 513–517.

## NIVELL AG 2010

Nivell AG: Technische Zeichnung des Schwerlastankers DK-3. Wohlerstr. 41, CH-5620 Bremgarten, 2010, [http://www.nivell.com/fileadmin/media/Zeichnungen/keile\\_durchschraubbar/3634-02\\_\\_\\_\\_\\_A0d.PDF](http://www.nivell.com/fileadmin/media/Zeichnungen/keile_durchschraubbar/3634-02_____A0d.PDF), Download am 15.3.2013.

## NIVELL AG 2014

Nivell AG: Montageanleitung für die Aufstellung von Maschinen auf Nivell Schwerlastanker DK zum Untergiessen. Wohlerstr. 41, CH-5620 Bremgarten, 2014, [http://www.nivell.com/fileadmin/media/pdf/Montageanleitungen/Montageanleitung\\_D.pdf](http://www.nivell.com/fileadmin/media/pdf/Montageanleitungen/Montageanleitung_D.pdf), Download am 4.9.2014.

## OBERKAMPF &amp; ROY 2010

Oberkampf, W. L.; Roy, C. J.: Verification and validation in scientific computing. Cambridge: Cambridge University Press 2010.

## OBERKAMPF &amp; TRUCANO 2002

Oberkampf, W. L.; Trucano, T. G.: Verification and validation in computational fluid dynamics. Progress in Aerospace Sciences 38 (2002), S. 209–272.

## OBERKAMPF ET AL. 2002

Oberkampf, W. L.; DeLand, S. M.; Rutherford, B. M.; Diegert, K. V.; Alvin, K. F.: Error and uncertainty in modeling and simulation. Reliability Engineering & System Safety 75 (2002), S. 333–357.

## ODEN &amp; REDDY 1976

Oden, J. T.; Reddy, J. N.: An introduction to the mathematical theory of finite elements. 10. Auflage. New York: Wiley 1976.

## OERTLI 2008

Oertli, T.: Strukturmechanische Berechnung und Regelungssimulation von Werkzeugmaschinen mit elektromechanischen Vorschubantrieben. Nr. 216 in iwv Forschungsberichte. München: Herbert Utz 2008.

## OKWUDIRE 2005

Okwudire, C. E.: Finite element modeling of ballscrew feed drive systems for control purposes. Master's Thesis, The University of British Columbia, Vancouver, 2005.

## OKWUDIRE 2009

Okwudire, C. E.: Modeling and control of high speed machine tool feed drives. PhD Thesis, The University of British Columbia, Vancouver, 2009.

## OKWUDIRE 2011

Okwudire, C. E.: Improved screw-nut interface model for high-performance ball screw drives. ASME Journal of Mechanical Design 133 (2011) 041009.

## OKWUDIRE &amp; ALTINTAS 2009

Okwudire, C. E.; Altintas, Y.: Hybrid modeling of ball screw drives with coupled axial, torsional, and lateral dynamics. ASME Journal of Mechanical Design 131 (2009) 071002.

## OPHEY 1986

Ophey, L.: Dämpfungs- und Steifigkeitseigenschaften vorgespannter Schrägkugellager. Nr. 138 in Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 1. Düsseldorf: VDI-Verlag 1986.

## PATELLI ET AL. 2012

Patelli, E.; Panayirci, H. M.; Broggi, M.; Goller, B.; Beaurepaire, P.; Pradlwarter, H. J.; Schuëller, G. I.: General purpose software for efficient uncertainty management of large finite element models. Finite Elements in Analysis and Design 51 (2012), S. 31–48.

## PEETERS ET AL. 2004

Peeters, B.; Van der Auweraer, H.; Guillaume, P.; Leuridan, J.: The PolyMAX frequency-domain method: A new standard for modal parameter estimation? Shock and Vibration 11 (2004), S. 395–409.

## PELLISSETTI ET AL. 2008

Pellissetti, M. F.; Capiiez-Lernout, E.; Pradlwarter, H. J.; Soize, C.; Schuëller, G. I.: Reliability analysis of a satellite structure with a parametric and a non-parametric probabilistic model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198 (2008), S. 344–357.

## PETUELLI 1983

Petueli, G.: Theoretische und experimentelle Bestimmung der Steifigkeits- und Dämpfungseigenschaften normalbelasteter Fügstellen. Dissertation, RWTH Aachen, 1983.

## PICHLER ET AL. 2009

Pichler, L.; Pradlwarter, H. J.; Schuëller, G. I.: A mode-based meta-model for the frequency response functions of uncertain structural systems. *Computers and Structures* 87 (2009), S. 332–341.

## PRADLWARTER ET AL. 2005

Pradlwarter, H. J.; Pellissetti, M. F.; Schenk, C. A.; Schuëller, G. I.; Kreis, A.; Fransen, S.; Calvi, A.; Klein, M.: Realistic and efficient reliability estimation for aerospace structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194 (2005), S. 1597–1617.

## PRITSCHOW ET AL. 2003

Pritschow, G.; Lehner, W.-D.; Eppler, C.: Dynamisches Verhalten von Kugelgewindetrieben. *wt Werkstattstechnik online* 93 (2003) 7/8, S. 511–516.

## QIU &amp; WANG 2005

Qiu, Z.; Wang, X.: Solution theorems for the standard eigenvalue problem of structures with uncertain-but-bounded parameters. *Journal of Sound and Vibration* 282 (2005), S. 381–399.

## QIU ET AL. 2005

Qiu, Z.; Wang, X.; Friswell, M.: Eigenvalue bounds of structures with uncertain-but-bounded parameters. *Journal of Sound and Vibration* 282 (2005), S. 297–312.

## RANDALL 1987

Randall, B.: *Frequency analysis*. 3. Auflage. Naerum: Bruel & Kjaer 1987.

## RAYLEIGH 1877

Rayleigh, J. W. S. B.: *The theory of sound*, Band 1. London: Macmillan and Co. 1877.

## REUSS ET AL. 2012

Reuss, M.; Dadalau, A.; Verl, A.: Friction variances of linear machine tool axes. *Procedia CIRP* 4 (2012), S. 115–119.

## RICHTER 2012

Richter, M.: Virtual Reality-unterstützte Optimierung des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen. Auerbach: Verlag Wissenschaftliche Scripten 2012.

## ROY &amp; OBERKAMPF 2011

Roy, C. J.; Oberkampf, W. L.: A comprehensive framework for verification, validation, and uncertainty quantification in scientific computing. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200 (2011), S. 2131–2144.

## SADEGHI ET AL. 2012

Sadeghi, M. H.; Soleimanian, P.; Samandari, H.: Model updating of complex assembly structures based on substructures – Joint parameters. In: *Topics in model validation and uncertainty quantification*. Berlin: Springer 2012, Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series, Band 4, Kapitel 18, S. 175–190.

## SCHAEFFLER TECHNOLOGIES GMBH &amp; CO. KG 2014

Schaeffler Technologies GmbH & Co. KG: Schrägkugellager-Einheiten DKLFA 301110-2RS. Industriestr. 1-3, D-91074 Herzogenaurach, 2014, <http://medias.schaeffler.de/medias/de!hp.ec.br.dat/DKLFA...-2RS%2aDKLFA301110-2RS>, Download am 9.10.2014.

## SCHAIBLE 1976

Schaible, B.: Ermittlung des statischen und dynamischen Verhaltens insbesondere der Dämpfung von verschraubten Fugenverbindungen für Werkzeugmaschinen. Dissertation, TU München, 1976.

## SCHELENZ 1995

Schelenz, R.: Führungseigenschaften von Profilschienenführungen in Abhängigkeit verschiedener Konstruktionsparameter. Aachen: Verlag Mainz 1995.

## SCHMIDT 1995

Schmidt, M.: Einflüsse auf das Schwingungsverhalten von Maschinenstrukturen durch Rollenlaufschuh-Führungen. Nr. 220 in *Fortschritt-Berichte VDI*, Reihe 11. Düsseldorf: VDI-Verlag 1995.

## SCHMITZ &amp; SMITH 2009

Schmitz, T.; Smith, K.: *Machining dynamics*. New York: Springer 2009.

## SCHNEIDER 2000

Schneider, C.: Strukturmechanische Berechnungen in der Werkzeugmaschinenkonstruktion. Nr. 144 in iwv Forschungsberichte. München: Herbert Utz 2000.

## SCHNEIDER 1991

Schneider, M.: Statisches und dynamisches Verhalten beim Einsatz linearer Schienenführungen auf Wälzlagerbasis im Werkzeugmaschinenbau. Nr. D 17 in Darmstädter Forschungsberichte für Konstruktion und Fertigung. Wien: Hanser 1991.

## SCHUËLLER 2001

Schuëller, G. I.: Computational stochastic mechanics – Recent advances. *Computers and structures* 79 (2001), S. 2225–2234.

## SCHUËLLER &amp; JENSEN 2008

Schuëller, G. I.; Jensen, H. A.: Computational methods in optimization considering uncertainties – An overview. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198 (2008), S. 2–13.

## SCHWARZ ET AL. 2014

Schwarz, S.; Sing, A.; Zaeh, M. F.: Identification and evaluation of uncertainties and errors in dynamic models of casted machine tool components. *Production Engineering* 8 (2014), S. 175–185.

## SEIF ET AL. 1992

Seif, N. P.; Hashem, S.; Deif, A. S.: Bounding the eigenvectors for symmetric interval matrices. *ZAMM – Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 72 (1992) 3, S. 233–236.

## SHAHRUZ 1990

Shahruz, S. M.: Approximate decoupling of the equations of motion of damped linear systems. *Journal of Sound and Vibration* 136 (1990) 1, S. 51–64.

## SHAHRUZ &amp; MA 1988

Shahruz, S. M.; Ma, F.: Approximate decoupling of the equations of motion of linear underdamped systems. *ASME Journal of Applied Mechanics* 55 (1988) September, S. 716–720.

## SHERIF &amp; KOSSA 1991

Sherif, H. A.; Kossa, S. S.: Relationship between normal and tangential contact stiffness of nominally flat surfaces. *Wear* 151 (1991), S. 49–62.

## SHEWCHUK 2002

Shewchuk, J. R.: What is a good linear element? Interpolation, conditioning, and quality measures. In: Proceedings of the 11th International Meshing Roundtable, Ithaca 2002, S. 115–126.

## SHI &amp; POLYCARPOU 2005

Shi, X.; Polycarpou, A. A.: Measurement and modeling of normal contact stiffness and contact damping at the meso scale. ASME Journal of Vibration and Acoustics 127 (2005) Februar, S. 52–60.

## SHI ET AL. 1998

Shi, Z. Y.; Law, S. S.; Zhang, L. M.: Structural damage localization from modal strain energy change. Journal of Sound and Vibration 218 (1998) 5, S. 825–844.

## SHIMIZU ET AL. 2010

Shimizu, S.; Nakamura, K.; Sakamoto, H.: Quantitative measurement method of contact stiffness of the joint with different material combination. Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing 4 (2010) 5, S. 1044–1053.

## SIEBERTZ ET AL. 2010

Siebertz, K.; Hochkirchen, T.; van Bebber, D.: Statistische Versuchsplanung. Berlin: Springer 2010.

## SIEDL 2008

Siedl, D.: Simulation des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen während Verfahrbewegungen. Nr. 213 in iwv Forschungsberichte. München: Herbert Utz 2008.

## SNYDER &amp; VENKAYYA 1989

Snyder, B. D.; Venkayya, V. B.: Modal strain energies in Cosmic Nastran. In: 17th NASTRAN User's Colloquium, San Antonio 1989, Nr. 3029 in NASA Conference Publication.

## SOIZE 2013

Soize, C.: Stochastic modeling of uncertainties in computational structural dynamics – Recent theoretical advances. Journal of Sound and Vibration 332 (2013), S. 2379–2395.

## SOPPA 2012

Soppa, A.: Krylov-Unterraum basierte Modellreduktion zur Simulation von Werkzeugmaschinen. Dissertation, TU Carolo Wilhelmina Braunschweig, 2012.

## STEFANOU 2009

Stefanou, G.: The stochastic finite element method: Past, present and future. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198 (2009), S. 1031–1051.

## STIEFENHOFER 1977

Stiefenhofer, R.: Beitrag zur Berechnung des Einflusses der Aufstellung auf das dynamische Verhalten von Werkzeugmaschinen. Dissertation, TU München, 1977.

## STRIBECK 1903

Stribeck, R.: Die wesentlichen Eigenschaften der Gleit- und Rollenlager. In: Verein deutscher Ingenieure (Hrsg.): *Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*. Berlin: Springer 1903, Band 7, S. 1–47.

## THORNLEY ET AL. 1965

Thornley, R. H.; Connolly, R.; Barash, M. M.; Koenigsbergers, F.: The effect of surface topography upon the static stiffness of machine tools joints. *International Journal of Machine Tool Design and Research* 5 (1965), S. 57–74.

## URBINA ET AL. 2005

Urbina, A.; Paez, T. L.; Rutherford, B.; O’Gorman, C.; Hinnerichs, T.; Hunter, P.: Validation of mathematical models: An overview of the process. In: *Proceedings of the 2005 SEM Conference and Exposition on Experimental and Applied Mechanics*, 2005, Nr. 210.

## VARANASI &amp; NAYFEH 2004

Varanasi, K.; Nayfeh, S.: The dynamics of lead-screw drives: Low-order modeling and experiments. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 126 (2004) Juni, S. 388–396.

## VDG K200 2005

VDG K200: Gussteile für den Maschinenbau – Leitfaden für die Konstruktion und Bestellung von Gussteilen aus Gusseisen für den Maschinenbau. Nr. K200 in VDG-Merkblatt. Düsseldorf: Verein deutscher Giessereifachleute 2005.

## VDI 2230 BLATT 1 2003

VDI 2230 Blatt 1: Systematische Berechnung hochbeanspruchter Schraubenverbindungen – Zylindrische Einschraubenverbindungen. Berlin: Beuth 2003.

## VDI 3830 BLATT 1 2004

VDI 3830 Blatt 1: Werkstoff- und Bauteildämpfung: Einteilung und Übersicht. Berlin: Beuth 2004.



VDI 4008 BLATT 6 1999

VDI 4008 Blatt 6: Monte-Carlo-Simulation. Berlin: Beuth 1999.

VERL & BRECHER 2012

Verl, A.; Brecher, C.: Modell und Realität – Wann ist ein Modell gut genug, wann bringt es Mehrwert? wt Werkstattstechnik online 102 (2012) 5, S. 260–261.

VERL & FREY 2010

Verl, A.; Frey, S.: Correlation between feed velocity and preloading in ball screw drives. CIRP Annals – Manufacturing Technology 59 (2010) 1, S. 429–432.

VICENTE ET AL. 2012

Vicente, D. A.; Hecker, R. L.; Villegas, F. J.; Flores, G. M.: Modeling and vibration mode analysis of a ball screw drive. International Journal of Advanced Manufacturing Technology 58 (2012), S. 257–265.

WASMANN 1996

Wasmann, U.: Versuchsgestützte Modellierung von Werkzeugmaschinen auf der Grundlage statischer Nachgiebigkeiten. Nr. 263 in Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 1. Düsseldorf: VDI-Verlag 1996.

WBK INSTITUT FÜR PRODUKTIONSTECHNIK 2006

wbk Institut für Produktionstechnik: Abschlussbericht des Verbundforschungsprojekts SimCAT. Abschlussbericht, Universität Karlsruhe (TH), Karlsruhe, 2006.

WECK & BRECHER 2006a

Weck, M.; Brecher, C.: Berechnung und Konstruktion, Berlin: Springer 2006, Werkzeugmaschinen, Band 2.

WECK & BRECHER 2006b

Weck, M.; Brecher, C.: Messtechnische Untersuchung und Beurteilung, dynamische Stabilität, Berlin: Springer 2006, Werkzeugmaschinen, Band 5.

WECK ET AL. 1999

Weck, M.; Krüger, P.; Brecher, C.: Grenzen für die Reglereinstellung bei elektrischen Lineardirektantrieben. Antriebstechnik 38 (1999) 3, S. 71–76.

WEISSENBERGER 2001

Weißsenberger, M.: Optimierung der Bewegungsdynamik von Werkzeugmaschinen im rechnergestützten Entwicklungsprozess. Nr. 166 in iwv Forschungsberichte. München: Herbert Utz 2001.

## WHALLEY ET AL. 2008

Whalley, R.; Abdul-Ameer, A. A.; Ebrahimi, M.: Machine tool modelling and profile following performance. *Applied mathematical modelling* 32 (2008), S. 2290–2311.

## WILL 2007

Will, J.: Variationsanalyse als Beitrag zur Sicherung zuverlässiger Prognosen in der virtuellen Produktentwicklung. In: *NAFEMS Seminar: Reliable Use of Numerical Methods in Upfront Simulations*, Wiesbaden 2007.

## WITT 2007

Witt, S. T.: Integrierte Simulation von Maschine, Werkstück und spanendem Fertigungsprozess. Nr. 31/2007 in *Berichte aus der Produktionstechnik*. Aachen: Shaker 2007.

## YAGMUR 2014

Yagmur, T.: Analyse, Verbesserung und Beschreibung des Verschleißverhaltens von Kugelgewindetrieben für Werkzeugmaschinen. Nr. 9/2014 in *Ergebnisse aus der Produktionstechnik*. Aachen: Apprimus 2014.

## ZAEH &amp; OERTLI 2005

Zaeh, M. F.; Oertli, T.: Parametric finite element modelling of machine tool structures. *Production Engineering* 12 (2005) 1, S. 129–132.

## ZAEH ET AL. 2004

Zaeh, M. F.; Oertli, T.; Milberg, J.: Finite element modelling of ball screw feed drive systems. *CIRP Annals – Manufacturing Technology* 53 (2004) 1, S. 289–292.

## ZÄH ET AL. 2011

Zäh, M. F.; Niehues, K.; Schwarz, S.: Struktur- und Fügestellendämpfung in Werkzeugmaschinenstrukturen, Düsseldorf: VDI-Verlag 2011. Nr. 2164 in *VDI-Berichte*, S. 21–34.

## ZANG ET AL. 2008

Zang, C.; Schwingshackl, C. W.; Ewins, D. J.: Model validation for structural dynamic analysis: An approach to the sandia structural dynamics challenge. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197 (2008), S. 2645–2659.

## ZATARAIN ET AL. 1998

Zatarain, M.; Lejardi, E.; Egaña, F.; Bueno, R.: Modular synthesis of machine tools. *CIRP Annals – Manufacturing Technology* 47 (1998) 1, S. 333–336.

## ZIENKIEWICZ ET AL. 2005

Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.; Zhu, J. Z.: Finite element method – Its basis and fundamentals. 6. Auflage. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann 2005.

## ZIRN &amp; WEIKERT 2006

Zirn, O.; Weikert, S.: Modellbildung und Simulation hochdynamischer Fertigungssysteme. Berlin: Springer 2006.



## Verzeichnis betreuter Studienarbeiten

Im Rahmen der Erstellung dieser Dissertation entstanden am Institut für Werkzeugmaschinen und Betriebswissenschaften (*iwb*) der Technischen Universität München (TUM) in den Jahren von 2010 bis 2014 unter wesentlicher wissenschaftlicher, fachlicher und inhaltlicher Anleitung des Autors die im Folgenden aufgeführten studentischen Arbeiten. In diesen wurden unter anderem Fragestellungen zur Prognosefähigkeit dynamischer Simulationen von Werkzeugmaschinenstrukturen untersucht. Entstandene Ergebnisse sind teilweise in das vorliegende Dokument eingeflossen. Der Autor dankt allen Studierenden für ihr Engagement bei der Unterstützung dieser wissenschaftlichen Arbeit.

---

<b>Studierender</b>	<b>Titel der Studienarbeit</b>
Harraßer, Johann	Vergleich von Rechenverfahren zur Simulation von Dämpfungseffekten (Abgabe im Februar 2011)
Karl, David	Modellierung und experimenteller Abgleich von Strukturbauteilen einer Werkzeugmaschine mit der Methode der finiten Elemente (Abgabe im Juni 2011)
Kersch, Kurthan	Entwicklung eines effizienten Verfahrens zur Berücksichtigung von Unsicherheiten in strukturdynamischen Finite-Elemente-Modellen (Abgabe im September 2013)
Köbler, Christoph	Modellierungsstrategie für die dynamische Simulation von unsicherheitsbehafteten Werkzeugmaschinenstrukturen (Abgabe im Juli 2014)
Sing, Alexander	Quantifizierung von Unsicherheiten und Fehlern bei der dynamischen Simulation von Werkzeugmaschinenstrukturen (Abgabe im November 2012)
Spengler, Sebastian	Simulation von verschraubten Fügstellen mit der Methode der finiten Elemente (Abgabe im März 2012)
Zöltsch, Martin	Entwicklung eines Verfahrens zum automatisierten Abgleich von gedämpften Finite-Elemente-Modellen mit gemessenen Frequenzgängen (Abgabe im Dezember 2011)
Zöltsch, Martin	Quantifizierung von Unsicherheiten und Fehlern bei der dynamischen Simulation von verschraubten Fügstellen (Abgabe im Januar 2014)

---