

INGENIEURFAKULTÄT
BAU GEO UMWELT

**Globale kombinierte Schwerefeldmodellierung
auf Basis voller Normalgleichungssysteme**

**Dissertation
von**

Thomas Fecher



TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Technische Universität München

Lehrstuhl für Astronomische und Physikalische Geodäsie

**Globale kombinierte Schwerefeldmodellierung
auf Basis voller Normalgleichungssysteme**

Thomas Fecher

Vollständiger Abdruck der von der Ingenieurfacultät Bau Geo Umwelt der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor – Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzende: Univ.-Prof. Dr.-Ing. L. Meng

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr. techn. R. Pail
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. F. Flechtner,
Technische Universität Berlin
3. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. mult. R. Rummel (i.R.)

Die Dissertation wurde am 19.02.2015 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Ingenieurfacultät Bau Geo Umwelt am 20.05.2015 angenommen.

Zusammenfassung

Im Rahmen der Arbeit wird ein kombiniertes hochaufgelöstes globales Schwerefeldmodell bis Grad und Ordnung 720 mit zugehöriger voller Fehler-Varianz-Kovarianz Matrix berechnet. Als Datenbasis dienen Messungen der Schwerefeldsatellitenmissionen GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment) und GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer), welche hochgenau im lang- und mittelwelligen Bereich (\leq Grad/Ordnung 240) sind, sowie terrestrische und altimetrische Schwereanomalien, welche auf Grund ihres unbeschränkten Signalgehalts eine höhere Auflösung des Modells über den mittelwelligen Bereich hinaus ermöglichen.

Die Eigenschaften der verschiedenen Messgrößen werden ausführlich diskutiert und es wird gezeigt, dass eine optimale Schwerefeldlösung nur unter Einbeziehung aller möglichen Datenquellen und deren verschiedenartigen Charakteristika erzielt werden kann. Auch werden die verwendeten Daten ausführlich vorgestellt.

In die Theorie der kleinsten-Quadrate-Ausgleichung, welche im Rahmen der Schwerefeldmodellierung verwendet wird, wird eingeführt und gezeigt, wie im Rahmen dieser eine optimale relative Gewichtung der Einzeldatensätze und der einzelnen Beobachtungen erzielt werden kann. Da bei Verwendung unterschiedlicher Gewichte für die Einzelbeobachtungen starke Korrelationen unter allen Parametern entstehen, ist es zielführend, volle Normalgleichungen zu verwenden. Es wird außerdem gezeigt, wie im Rahmen der Ausgleichung Effekte wie „Aliasing“ oder „Spectral Leakage“ entstehen können, und es erfolgt eine Abschätzung der Größenordnung daraus resultierender Fehler.

In der Arbeit wird außerdem in die Verwendung von Hochleistungsrechnersystemen im Rahmen der Schwerefeldbestimmung eingeführt. Der Umgang mit vollen Normalgleichungssystemen (>2 TByte) erfordert eine große Menge an Rechenressourcen und -leistung, weswegen der Einsatz von Hochleistungsrechnersystemen unumgänglich ist. Detailliert wird der Hochleistungsrechner SuperMUC des Leibniz-Rechenzentrums (LRZ) vorgestellt, welcher im Rahmen der Arbeit verwendet wird, und es wird analysiert, wie groß die Anforderung an diesen für die Schwerefeldbestimmung bis Grad und Ordnung 720 (ca. 520.000 zu lösende Parameter) ist. Ebenso werden die wichtigsten Bibliotheken vorgestellt, welche die Lösung großer Gleichungssysteme ermöglichen, sowie die im Rahmen dieser Arbeit entstandenen Programme.

Die Arbeit enthält eine Vielzahl von numerischen Rechnungen bis Grad und Ordnung 360, von denen ein Teil auf synthetischen Daten basiert. Mit diesen Tests wird der Einfluss verschiedenartiger Fehler auf die Schwerefeldmodellierung simuliert und analysiert. Es folgt jeweils eine Quantifizierung des entsprechenden Fehlers und wenn möglich eine Strategie, wie der Fehler vermieden werden kann. Andere numerische Rechnungen bis Grad und Ordnung 360 auf Realdatenbasis zeigen den Einfluss verschiedener Gewichtungsstrategien auf die Schwerefeldmodellierung auf.

Die Berechnung des Modells bis Grad und Ordnung 720 wird beschrieben und das Ergebnis analysiert. Die Ergebnisse werden durch Vergleiche mit externen Schwerefeldmodellen und GPS-Nivellement, Bahntests, sowie durch die Berechnung einer mittleren dynamischen Meerestopographie validiert. Das Ergebnis zeigt, dass das Modell mindestens die Qualität bewährter hochaufgelöster kombinierter Schwerefeldmodelle erreicht.

Abstract

A combined high-resolution global gravity field model up to degree/order 720, including a full error variance-covariance matrix, is estimated. Measurements of the gravity field satellite missions GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment) and GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer), which are highly accurate in the low to medium wavelength range (\leq degree/order 240), as well as terrestrial and altimetric gravity anomalies, which are due to their full signal content able to enhance the spectral resolution of the model, serve as data base.

The specific features of the different measurement quantities are discussed, and it is shown that an optimal gravity field model requires the inclusion of all different data types and their various error characteristics. Additionally, all data sets used in this work are presented.

The theory of least-squares adjustment, used for the purpose of gravity field modelling, is illustrated and it is shown how an optimal relative weighting among single data sets or individual observations can be obtained. As the use of individual weights per observation generates strong correlations among all parameters, it is essential, to use full normal equations. The origin of certain effects such as aliasing or spectral leakage is investigated, followed by an assessment of the resulting errors.

This work also contains an introduction into the field of supercomputing in the context of gravity field modelling. Handling of full normal equations (>2 TByte) requires a large amount of computational resources, which makes the use of supercomputing inevitable. The supercomputer SuperMUC operated by the Leibniz Supercomputing Centre (LRZ), used in the framework of this work, is presented and the specific requirements to SuperMUC for a gravity model up to degree and order 720 (corresponding to about 520,000 unknown parameters) are analyzed. Furthermore, the most important libraries, which are applied to handle large normal equation systems, as well as the programs developed during this work are discussed.

This work contains various numerical calculations up to degree and order 360, partially based on synthetic data. By means of these tests the influence of different kinds of errors to gravity field solutions shall be simulated and analyzed. A quantification of the corresponding errors is carried out, as well as an analysis of how these errors can be avoided. Other numerical calculations up to degree and order 360 on the basis of real data demonstrate the influence of different weighting strategies on gravity field modeling.

Eventually, the computation of the final model up to degree and order 720 is described. The quality of the result is analyzed by comparisons with independent gravity field models and GPS-leveling data, orbit validation and in the frame of the computation of a mean dynamic topography. The result shows, that the final model achieves the quality at least at the level of established high resolution models.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	1
Abstract	2
Inhaltsverzeichnis	3
Abkürzungsverzeichnis	6
1 Einführung	8
1.1 Motivation und Geschichte der Schwerefeldbestimmung	8
1.2 Gliederung und Ziel dieser Arbeit	9
2 Physikalische Grundlagen der Schwerefeldbestimmung	12
2.1 Das Schwerefeld und seine Funktionale	12
2.2 Methoden der Schwerefeldbeobachtung	18
2.2.1 Schwerefeldsatellitenmissionen	18
2.2.1.1 Schwerefeldbestimmung aus Bahnstörungen	19
2.2.1.2 Satellitengradiometrie	23
2.2.2 Satellitenaltimetrie	27
2.2.3 Terrestrische Schwerefeldmessungen	31
2.3 Konsistenz der Messungen – Reduktionen und Korrekturen	33
2.3.1 Permanente Gezeiten	33
2.3.2 Atmosphäre	35
2.3.3 Richtungsableitung	36
2.3.4 Normalschweregradient höherer Ordnungen	38
2.3.5 Analytische Fortsetzung der Schwereanomalien	39
2.4 Zusammenfassung	41
3 Mathematische Grundlagen der Schwerefeldbestimmung	42
3.1 Kleinste-Quadrate-Ausgleichung	42
3.1.1 Gauß-Markoff Modell	42
3.1.2 Parameterschätzung	47
3.2 Parameterschätzung auf Basis verschiedener Beobachtungstypen	51
3.3 Spezifische Fragestellungen in der Schwerefeldbestimmung	55
3.3.1 Einfluss terrestrischer Daten auf den langwelligen Anteil der Kombinationslösung	55
3.3.2 Nicht-Orthogonalität der Basisfunktionen und „Aliasing“	57
3.3.2.1 Nicht-Orthogonalität der Basisfunktionen	58
3.3.2.2 „Spectral Leakage“	64

3.3.2.3	„Aliasing“	68
3.3.2.4	Spektrales Beschneiden der Beobachtungen	83
3.4	Zusammenfassung	88
4	Rechentechnische Grundlagen der Schwerefeldbestimmung	90
4.1	Rechenspezifische Herausforderungen.....	90
4.2	Hochleistungsrechner am Leibniz-Rechenzentrum	92
4.3	Grundlegende Software.....	93
4.4	Umsetzung in der Schwerefeldbestimmung	95
4.4.1	Aufstellen von Normalgleichungssystemen.....	95
4.4.2	Lösung und Inversion.....	97
4.4.3	Weitere Programme	98
4.5	Rechendemonstration	101
4.6	Zusammenfassung	103
5	Verwendete Realdaten	104
5.1	Satelliten-Schwerefelddaten	104
5.1.1	GRACE.....	104
5.1.2	GOCE	105
5.1.3	Übersicht Satelliten-Schwerefelddaten	105
5.2	Terrestrische und Altimetrische Schwereanomalien	106
5.2.1	Verwendete Datensätze	106
5.2.1.1	Altimetrische Schwereanomalien	107
5.2.1.2	Terrestrische Schwereanomalien	108
5.2.2	Übersicht Schwereanomalien Datensätze	113
5.3	Füll Datensätze	114
5.3.1	Ergänzende Schwereanomalien Datensätze	114
5.3.2	Topographische Schwereanomalien	115
5.3.3	Übersicht Füll Datensätze.....	117
6	Numerische Untersuchungen zur Schwerefeldbestimmung	118
6.1	Sensitivitätsanalyse hinsichtlich Korrekturen und Reduktionen auf Basis synthetischer, terrestrischer Daten	118
6.1.1	Permanente Gezeiten	119
6.1.2	Atmosphäre	120
6.1.3	Richtungsableitung / Ellipsoidische Korrektur	121
6.1.4	Normalschweregradient höherer Ordnungen	122
6.1.5	Zusammenfassung	124
6.2	Sensitivitätsanalyse hinsichtlich mathematischer Effekte auf Basis synthetischer, terrestrischer Daten	124
6.2.1	Einfluss terrestrischer Daten auf den langwelligeren Anteil der Kombinationslösung	125

6.2.2	„Spectral Leakage“ und „Aliasing“	127
6.3	Schwerefeldberechnung mit Echtdateen	131
6.3.1	Stochastische Modellierung rein auf Basis von Varianzkomponentenschätzung	132
6.3.2	Stochastische Modellierung auf Basis von empirischer Gewichtung und Varianzkomponentenschätzung	135
7	Bestimmung eines hochaufgelösten Schwerefelds	140
7.1	Berechnung des Modells	140
7.2	Interne Validierung des Modells	142
7.2.1	Relativer Anteil der Satellitendaten am Gesamtmodell	143
7.2.2	Vergleich der Kombination mit ihr zu Grunde liegenden Daten	146
7.2.3	Kovarianzfortpflanzung	147
7.3	Externe Validierung des Modells	147
7.3.1	Vergleich mit externen Schwerefeldmodellen	148
7.3.2	Bahntests	149
7.3.3	GPS-Nivellement	150
7.3.4	Validierung auf Basis einer mittleren dynamischen Topographie (MDT)	151
8	Zusammenfassung und Ausblick	154
	Dank	157
	Literaturverzeichnis	158

Abkürzungsverzeichnis

ArcGP	Arctic Gravity Project
CHAMP	CHallenging Minisatellite Payload
ESA	European Space Agency
DMA	Defense Mapping Agency
DORIS	Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite
DOT	Dynamic Ocean Topography
DTU	Danmarks Tekniske Universitet
EGM96/EGM2008	Earth Gravitation Model 96/2008
ERS-1/ERS-2	European Remote Sensing satellite
ENVISAT	ENVironmental SATellite
FFT	Fast Fourier Transform
GEOS 3	Geodynamics Experimental Ocean Satellite
GEM	Goddard Earth Model
GFZ	Deutsches GeoForschungsZentrum Potsdam
GOCE	Gravity field and steady state Ocean Circulation Explorer
GPFS	General Parallel File System
GPS	Global Positioning System
GRACE	Gravity Recovery And Climate Experiment
GRF	Gradiometer Reference Frame
GRS80	Geodetic Reference System 1980
GSFC	Goddard Space Flight Center
HLRB II	HöchstLeistungsRechner Bayern II
HPF	GOCE High-level Processing Facility
IAPG	Ingenieurinstitut für Astronomische und Physikalische Geodäsie
ICGEM	International Centre for Global Earth Models

IFE	Institut für Erdmessung (Leibniz Universität Hannover)
ITSG	Institut für Theoretische Geodäsie und Satellitengeodäsie (Graz)
KIT	Karlsruher Institut für Technologie
LNOF	Local North Oriented Frame
LRZ	Leibniz-RechenZentrum
MDT	Mean Dynamic Topography
NASA	National Aeronautics and Space Administration
NGA	National Geospatial-Intelligence Agency
NIMA	National Imagery and Mapping Agency
NRCan	Natural Resources Canada
OSU	Ohio State University
PSD	Power Spectral Density
SGT	Stinger Ghaffarian Technologies
SLR	Satellite Laser Ranging
SSH	Sea Surface Height
SST	Satellite-to-Satellite Tracking
TOPEX	Ocean TOPography EXperiment
WGS84	World Geodetic System 1984

1 Einführung

Eine Vielzahl von Entwicklungen haben dazu geführt, dass im Laufe der vergangenen Jahrzehnte im Bereich der globalen Schwerefeldmodellierung stets Fortschritte erzielt werden konnten, so dass diese Thematik durchgehend im Blickpunkt zahlreicher internationaler wissenschaftlicher Institutionen stand und bis heute steht. Die Entwicklungen sind von sehr vielschichtiger Natur und können im Wesentlichen durch drei Punkte beschrieben werden. Zum ersten fand eine breite Entwicklung im Bereich des theoretischen Formelapparats statt, dem die Schwerefeldmodellierung zu Grunde liegt. Zweitens standen im Laufe der Zeit mehr und mehr Beobachtungen des Schwerefeldes zur Verfügung, bzw. es wurde neue Verfahren zur Beobachtung des Schwerefeldes entwickelt. Drittens profitierte die Schwerefeldmodellierung sehr stark von den Entwicklungen im Bereich der Informatik, wo die wachsende Verfügbarkeit von Rechenressourcen und Software dazu geführt haben, dass komplexere und aufwendigere geodätische Problemstellungen gelöst werden können. Die globale, kombinierte und hochaufgelöste Schwerefeldmodellierung hat zum Ziel, alle drei Punkte miteinander zu verbinden, um eine bestmögliche Schwerefeldlösung zu erzielen.

1.1 Motivation und Geschichte der Schwerefeldbestimmung

Der Bedarf nach einer genauen Kenntnis des statischen Erdschwerefeldes ergibt sich daraus, dass dieses von Relevanz für viele wissenschaftliche Disziplinen wie Geodäsie, Ozeanographie und Geophysik ist. Als Beispiel für geodätische Anwendungen beschreiben Pavlis et al. (2012), dass ein hochaufgelöstes globales Schwerefeldmodell als Basis für regionale Geoidlösungen dienen kann oder dass Geoidhöhen aus einem solchen Modell für die Bestimmung von orthometrischen Höhen verwendet werden können. Des Weiteren stellen Gruber et al. (2012), Rummel (2012), Woodworth et al. (2012) oder Gatti et al. (2013) dar, wie Schwerefeldinformation genutzt werden kann, um nationale Höhensysteme, welche durch ihren Anschluss an verschiedene Pegelstationen einem Offset untereinander unterliegen, zu vereinen. Im Bereich der Ozeanographie, in dem das Geoid als wichtige physikalische Referenzfläche dient, erläutern Knudsen et al. (2011), Bingham et al. (2011), Albertella et al. (2012) oder Siegmund (2013) die Rolle des Schwerefeldes bei der Berechnung der Ozeantopographie und von geostrophischen Ozeanströmen. In der Geophysik ermöglicht laut McKenzie et al. (2014) oder Braitenberg (2015) Schwerefeldinformation einen Einblick in geophysikalische und geologische Strukturen der Erde. So hilft sie, wie Reguzzoni & Sampietro (2012), van der Meijde et al. (2013) und Sampietro et al. (2014) beschreiben, bei der Bestimmung der Moho-Tiefe, oder wie Bouman et al. (2015) und Hosse et al. (2014) zu entnehmen ist, bei der Lithosphärenmodellierung.

Die Geschichte der Schwerefeldbestimmung auf eine Tabelle reduziert erhält man, wenn man die Liste der Schwerefeldmodelle beim International Centre for Global Earth Models (ICGEM) betrachtet¹. Hier gibt es eine Übersicht der in den letzten 50 Jahren veröffentlichten Schwerefeldmodelle. Diese stehen dort ebenso zum Download bereit. Die Anordnung der Modelle nach Veröffentlichungsdatum gibt in Zusammenhang mit den in der Tabelle aufgeführten maximalen Entwicklungsgraden der Modelle und den ebenso aufgeführten Datenquellen, welche für die Modelle benutzt wurden, in etwa die Evolution der Schwerefeldmodelle wieder. Bis in die späten siebziger Jahre, einer Zeit, in der Rechenressourcen nur schwer verfügbar waren, wurden Modelle nicht höher als bis Grad und Ordnung 40 einer sphärisch-harmonischen Reihe entwickelt, wobei oftmals nicht alle Koeffizienten jeden Grades bestimmt werden konnten. Für die Berechnung dieser Modelle war die Verwendung von numerisch effektiven Methoden wichtig, wie sie in Colombo (1981) oder Pavlis (1988) beschrieben werden, auch wenn diese Methoden mitunter nicht numerisch exakt waren. Das erste

¹ <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/> (Stand: 05. Januar 2015)

Modell, welches bis Grad und Ordnung 180 entwickelt wurde, ist OSU78 (Rapp, 1978), ein Modell, welches bereits Satellitenbeobachtungen aus Bahnstörungen, altimetrische und terrestrischen Messungen enthält. Mangels einer globalen Abdeckung von Schwereanomalien war es auch üblich, an Stelle der nicht vorhandenen Messungen geophysikalisch prädierte Schwereanomalien zu verwenden, so zum Beispiel auch in zwei der weiteren Modelle der Ohio State University (OSU), OSU86E & D (Rapp, 1986), welche die ersten Modelle bis Grad und Ordnung 360 waren. Neben der Reihe der OSU-Schwerefeldmodelle existierten auch andere bekannte Reihen von Schwerefeldmodellen, so z.B. die Goddard Earth Model (GEM) Reihe, siehe beispielhaft Nerem et al. (1992) oder Lerch et al. (1994), oder die GRGS and Institute Munich (GRIM) Reihe, siehe beispielhaft Reigber et al. (1993) oder Gruber et al. (2002). Alle diese Reihen erhalten sowohl Schwerefeldmodelle rein aus Satellitendaten als auch Modelle aus der Kombination von Satellitendaten, Altimetrie und terrestrischen Messungen. Die Kombinationsmodelle der neunziger Jahre sind auf Grund der deutlich verbesserten Leistung der Rechensysteme in der Regel bis Grad und Ordnung 360 entwickelt und basieren auf kleinster Quadrate-Ausgleichung unter Verwendung von Blockdiagonaltechniken, welche z.B. in Gruber (2000) oder Pavlis et al. (2012) erläutert werden. Das bekannteste und wahrscheinlich meist genutzte Kombinationsmodell der neunziger Jahre, basierend auf der wohl damals besten Grundlage an terrestrischen Schwereanomalien, ist das Earth Gravitation Model (EGM) 96 (Lemoine et al., 1998), welches ebenfalls bis Grad und Ordnung 360 entwickelt ist. Zu Beginn des neuen Jahrtausends folgte ein Meilenstein in der Schwerefeldbestimmung durch den Start der Satellitenschwerefeldmissionen CHAMP (Reigber et al., 2002) und GRACE (Tapley et al., 2004). Mittels der beiden Missionen konnte der langwellige Schwerefeldanteil genauer als jemals zuvor bestimmt werden. Es folgte eine Reihe von CHAMP- und GRACE-Schwerefeldlösungen, siehe beispielhaft Mayer-Gürr et al. (2005) oder Mayer-Gürr et al. (2010). Ebenso wurde unter dem Einfluss der Satellitenschwerefeldmissionen die GRIM-Reihe durch die European Improved Gravity model of the Earth by New techniques (EIGEN) Reihe ersetzt (Flechtner et al., 2010; Förste et al., 2008). In dieser werden bis heute Satelliten- und Kombinationsmodelle veröffentlicht, in die stets die neuesten verfügbaren Satellitendaten, Standards und Hintergrundmodelle eingehen. Im Jahre 2008 folgte mit EGM2008 (Pavlis et al., 2012) die Veröffentlichung des bis heute meist genutzten und populärsten Kombinationsmodells. EGM2008 basiert auf GRACE-Information und einem globalen $5' \times 5'$ Gitter von Blockmittelwertschwereanomalien, so dass das Model bis Grad 2190 und Ordnung 2159 entwickelt werden konnte. Neben der hochgenauen terrestrischen Datenbasis stellte insbesondere der hohe Entwicklungsgrad einen Meilenstein dar. Doch auch mit EGM2008 war die Evolution der Schwerefeldmodelle längst nicht abgeschlossen. Mit der GOCE-Satellitenschwerefeldmission (Drinkwater et al., 2003) konnte weitere bis dato unbekannte Schwerefeldinformation gemessen werden, welche im Rahmen einer Reihe von GOCE-Schwerefeldmodellen (Pail et al., 2011a) und GRACE/GOCE-Kombinationsmodellen (z.B. Pail et al., 2011b; Brockmann et al., 2014) veröffentlicht wurden. Mit EIGEN-6C4 (Förste et al., 2011) existiert ein Kombinationsmodell bis Grad und Ordnung 2190, welches neben GRACE und terrestrischer Information GOCE-Daten enthält. Auch in Zukunft ist mit weiteren Innovationen im Bereich der Schwerefeldmessungen zu rechnen. So ist bereits die GRACE-Nachfolgemission GRACE-FO in Planung (Flechtner et al., 2015) und auch darüber hinaus gibt es zahlreiche Initiativen, die sich mit Simulation und Planung zukünftiger Schwerefeldsatellitenmissionen beschäftigen, siehe z.B. Gruber et al. (2014a).

1.2 Gliederung und Ziel dieser Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist die Berechnung eines kombinierten Schwerefeldmodells unter Verwendung von GRACE- und GOCE-Messungen sowie terrestrischen und altimetrischen Schwereanomalien. Mehrwert im Gegensatz zu den in Kapitel 1.1 vorgestellten Schwerefeldmodellen ist, dass die Berechnung des Modells auf den aktuellsten Daten und auf vollen Normalgleichungssystemen basieren soll, wohingegen für die Erstellung von EGM2008 und EIGEN-6C4 Blockdiagonaltechniken verwendet wurden. Der Einsatz voller Normalgleichungssysteme ist zielführend, da unterschiedliche Gewichte für die Einzelbeobachtungen verwendet werden, weswegen starke Korrelationen unter allen Parametern entstehen. Volle Normalgleichungssysteme benötigen den Einsatz massiver Rechenressourcen, weswegen im Rahmen dieser Arbeit Hochleistungsrechner verwendet werden. Ein Hauptaugenmerk dieser Arbeit liegt aufgrund der möglichen individuellen

Gewichtung der Einzeldatensätze und -beobachtungen auf der Verarbeitung und Gewichtung der terrestrischen und altimetrischen Schwereanomalien. Da die für diese Arbeit verwendeten Schwereanomalien-Datensätze über eine Auflösung von zumindest $15' \times 15'$ verfügen, soll das Schwerefeldmodell entsprechend der Relation zwischen räumlicher und spektraler Auflösung bis Grad und Ordnung 720 entwickelt werden, vergleiche Kapitel 2.1.

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass eine optimale Schwerefeldlösung auf Basis aller verfügbaren Beobachtungen unter Verwendung eines strengen kleinsten Quadrate Ansatzes mit Hilfe von Hochleistungsrechnensystemen erzielt werden soll. Die Arbeit auf dem Weg dorthin untergliedert sich in folgende Teile:

In Kapitel 2 werden die physikalischen Grundlagen der Schwerefeldbestimmung erörtert. Hierbei wird zunächst kurz die zu Grunde liegende Theorie erläutert, wobei die sphärisch-harmonische Reihe zu Parametrisierung des Schwerefeldes verwendet wird, und die wichtigsten Funktionale des Schwerefeldes vorgestellt werden. Es folgt eine Übersicht über die Methoden, mit denen das Schwerefeld beobachtet werden kann. Dabei werden die Konzepte der Satellitenschwerefeldmissionen erläutert, sowie die Messprinzipien der Altimetrie und der terrestrischen Schwerefeldmessungen vorgestellt. Auf Grund der zentralen Bedeutung von Schwereanomalien für diese Arbeit schließt das Kapitel mit einer Übersicht über Reduktionen und Korrekturen, welche eine Konsistenz von verschiedenen Schwereanomalien-Datensätzen gewährleisten.

In Kapitel 3 werden die mathematischen Grundlagen der Schwerefeldbestimmung in dieser Arbeit erörtert. Zunächst wird hierzu in die kleinste-Quadrate-Ausgleichung eingeführt, wozu das *Gauß-Markoff* Modell und die Parameterschätzung diskutiert werden. Ebenso wird erläutert, wie verschiedene Beobachtungsdatensätze sinnvoll zueinander gewichtet werden können. Im zweiten Teil des Kapitels werden spezifische Aspekte mit mathematischem Hintergrund vorgestellt, welche im Rahmen der Schwerefeldbestimmung zu beachten sind. Am ausführlichsten werden hierbei die Effekte besprochen, welche aus der Nicht-Orthogonalität der im Rahmen der Schwerefeldbestimmung verwendeten Basisfunktionen folgen. Das Entstehen von „Spectral Leakage“ und „Aliasing“ wird demonstriert.

In Kapitel 4 werden die rechentechnischen Grundlagen der Schwerefeldbestimmung erörtert. Zunächst wird hierzu eine Übersicht über die rechentechnischen Herausforderungen gegeben, welche im Rahmen der Schwerefeldbestimmung entstehen. Detailliert werden die Speicherplatzanforderungen dargestellt. Dann werden die Hochleistungsrechnensysteme des Leibniz-Rechenzentrums (LRZ) vorgestellt, welche im Rahmen der Arbeit verwendet werden. Es folgt die Beschreibung der wichtigsten Softwarepakete und -bibliotheken, welche eine massiv parallele Programmierung unterstützen bzw. vereinfachen. Zum Abschluss folgt die Vorstellung der in dieser Arbeit erstellten massiv parallelen Programme und eine dazugehörige Rechendemonstration.

In Kapitel 5 werden die in dieser Arbeit verwendeten Realdatensätze erörtert. Das Kapitel startet mit der Vorstellung der GRACE- und GOCE-Datensätze, es folgen die altimetrischen und die terrestrischen Schwereanomalien. Abschließend wird die Strategie beschrieben, wie mit Regionen umgegangen wird, für die im Rahmen dieser Arbeit keine terrestrischen Schwereanomalien vorliegen. Hierzu werden unter anderem topographische Schwereanomalien verwendet.

In Kapitel 6 folgen numerische Untersuchungen zur Schwerefeldbestimmung. Das Kapitel ist hierzu in drei Teile untergliedert. Zunächst wird der Einfluss der in Kapitel 2 vorgestellten Schwereanomalie-Korrekturen und -Reduktionen auf eine Schwerefeldlösung demonstriert. Es folgt eine Abschätzung darüber, wie groß der Effekt ist, wenn solche Korrekturen und Reduktionen vernachlässigt werden und ob die Korrekturen und Reduktionen zwingend notwendig sind. Dann folgen ähnliche Untersuchungen hinsichtlich der in Kapitel 3 vorgestellten mathematischen Effekte, wobei geklärt werden soll, wie groß deren Einfluss auf die Schwerefeldschätzung ist. Zum Abschluss des Kapitels folgen die ersten Schwerefeldberechnungen auf Basis von Realdaten bis Grad und Ordnung 360. Diese Berechnungen sollen dazu dienen, ein Gefühl für die Qualität der Realdatensätze zu bekommen und wichtige Informationen für die Berechnung des Modells bis Grad und Ordnung 720 zu gewinnen. An dieser Stelle werden auch die relativen Gewichte abgeleitet.

Kapitel 7 enthält die Berechnung des hochaufgelösten Modells bis Grad und Ordnung 720. Das Model wird auf verschiedene Arten visualisiert und analysiert. Das Kapitel enthält außerdem eine ausführliche Validierung des Modells, im Rahmen derer unter anderem Satelliten-Bahntests und GPS-Nivellement Vergleiche angestellt werden.

Die Arbeit schließt in Kapitel 8 mit der Diskussion der erzielten Ergebnisse und einem Ausblick auf zukünftige potentielle Arbeitsthemen, welche zu einer weiteren Verbesserung der Schwerefeldlösungen führen können.

2 Physikalische Grundlagen der Schwerefeldbestimmung

Im folgenden Kapitel sollen zunächst einige für die Thematik Schwerefeld fundamentale Grundlagen der physikalischen Geodäsie behandelt werden. Dies umfasst sowohl den Formelapparat, welcher zur Beschreibung des Schwerefelds verwendet wird, als auch dessen wichtigste Funktionale. Im Weiteren werden die Methoden beschrieben, mit denen sich das Schwerefeld der Erde beobachten lässt. Diese Beobachtungen stellen den Ausgangspunkt und die Grundlage für die Schwerefeldbestimmung dar. Zum Abschluss dieses Kapitels werden einige theoretische Gesichtspunkte diskutiert, welche für den Bereich der Schwerefeldbestimmung von Bedeutung sind. Diese beschäftigen sich mit der Konsistenz von Schwerefeldbeobachtungen, welche wichtig ist, um ein optimales Ergebnis zu erzielen. Für eine allgemeine und umfassende Darstellung der Grundlagen der physikalischen Geodäsie sei auf Heiskanen & Moritz (1967) verwiesen.

2.1 Das Schwerefeld und seine Funktionale

Das Schwerepotential W in einem beliebigen Punkt P auf oder außerhalb der Erdoberfläche setzt sich aus dem Gravitationspotential V und dem Zentrifugalpotential Z

$$\begin{aligned}W(P) &= V(P) + Z(P) \\W(x, y, z) &= V(x, y, z) + Z(x, y, z) \\W(\theta, \lambda, r) &= V(\theta, \lambda, r) + Z(\theta, \lambda, r)\end{aligned}\tag{2.1}$$

zusammen, wobei P z.B. in kartesischen (x, y, z) oder sphärischen Koordinaten (Breite, Länge und Radius (θ, λ, r)) gegeben sein kann. Befinden sich mehrere Punkte auf einer Fläche mit konstantem Schwerepotential, einer sogenannten Äquipotential- oder Niveaufläche, so befinden sich diese auf derselben physikalischen Höhe, es fließt also z.B. kein Wasser zwischen diesen Punkten, vergleiche Heiskanen & Moritz (1967). Die Niveaufläche, die mit dem mittleren Meeresspiegel zusammenfällt, wird als Geoid und deren Schwerepotential mit W_0 bezeichnet. Senkrecht auf den Niveauflächen steht der Schwere(beschleunigungs)vektor

$$\mathbf{g}(P) = \nabla W(P) = \begin{pmatrix} W_x(P) \\ W_y(P) \\ W_z(P) \end{pmatrix}.\tag{2.2}$$

Abb. 2.1 zeigt den Verlauf des Geoids entlang der Meeresoberfläche, die man sich, wie man der Abbildung entnehmen kann, global betrachtet als unter der Topographie fortlaufend vorstellen kann. Neben weiteren Niveauflächen ist auch ein Beispiel für einen Schwerebeschleunigungsvektor eingezeichnet, der senkrecht auf den Niveauflächen steht.

Während das Zentrifugalpotential relativ einfach in Abhängigkeit der Erdwinkelgeschwindigkeit ω berechnet werden kann

$$Z(P) = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta, \quad (2.3)$$

ist die Bestimmung des Gravitationspotentials komplizierter und darum Hauptziel der Schwerfeldbestimmung.

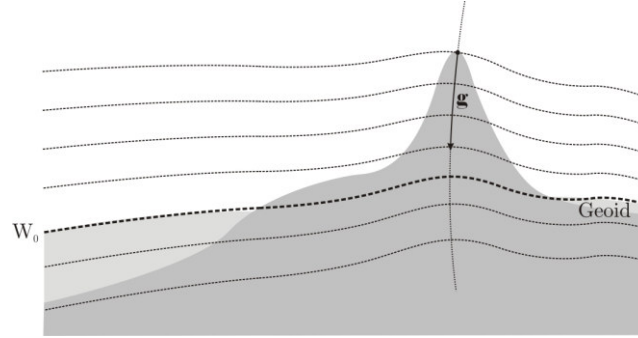


Abb. 2.1: Das Geoid, Niveaulinien und der Schwerbeschleunigungsvektor.

Im Gegensatz zum Zentrifugalpotential erfüllt das Gravitationspotential im Außenraum und auf der Erdoberfläche die *Laplace*-Gleichung (Heiskanen & Moritz, 1967)

$$\Delta V(P) = \nabla \cdot \nabla V(P) = 0 \quad (2.4)$$

und ist somit eine harmonische Funktion. Wendet man den Gradientenoperator auf das Gravitationspotential an, erhält man ein konservatives Vektorfeld. Die Konservativität wird durch Rotationsfreiheit

$$\nabla \times \nabla V = 0 \quad (2.5)$$

bewiesen. Das Gravitationspotential wird in der Regel in Form einer sphärisch-harmonischen Reihenentwicklung (Torge & Müller, 2012)

$$V(P) = \frac{GM}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{l+1} \sum_{m=0}^l \bar{P}_m(\cos \theta) [\bar{C}_{lm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{lm} \sin(m\lambda)] \quad (2.6)$$

dargestellt, wobei GM das Produkt aus Gravitationskonstante und Erdmasse und R der Erdradius ist. $(\bar{C}_{lm}, \bar{S}_{lm})$ stehen für einen Satz von vollständig normierten sphärisch-harmonischen Koeffizienten und $\bar{P}_m(\cos \theta)$ bezeichnet vollständig normierte, assoziierte Legendre-Polynome. l beschreibt den jeweiligen Grad, m die jeweilige Ordnung der Reihenentwicklung. Die Produkte $\bar{P}_m(\cos \theta) \cos(m\lambda) = Y_{lm}^C(\theta, \lambda)$ und $\bar{P}_m(\cos \theta) \sin(m\lambda) = Y_{lm}^S(\theta, \lambda)$ werden als vollständig normierte Kugelflächenfunktionen bezeichnet und dienen als Basisfunktionen, welche mit den entsprechenden sphärisch-harmonischen Koeffizienten gewichtet werden. Ausgewählte Kugelfunktionen vom Grad $l=10$ sind für verschiedene Ordnungen in Abb. 2.2 dargestellt. Mit zunehmender Entfernung von der Erdoberfläche nimmt das Signal des Gravitationspotentials ab, was durch den Dämpfungsfaktor $(R/r)^{l+1}$ ausgedrückt wird.

In Matrixschreibweise kann Gleichung (2.6) dargestellt werden als

$$V(P) = \mathbf{A}_V(P) \mathbf{x}. \quad (2.7)$$

Dabei entspricht \mathbf{x} dem Koeffizientenvektor

$$\mathbf{x} = (\bar{C}_{00}, \bar{C}_{10}, \bar{C}_{11}, \bar{S}_{11}, \bar{C}_{20}, \dots, \bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm})^T \quad (2.8)$$


 Abb. 2.2: Kugelflächenfunktionen $Y_{10,0}$ (zonal), $Y_{10,5}$ (tesseral) und $Y_{10,10}$ (sektoriell).

und die Designmatrix \mathbf{A}_v , welche die Koeffizienten mit den Beobachtungen verknüpft, wird für den einen Beobachtungspunkt P zum Vektor

$$\mathbf{A}_v(P) = \frac{GM}{R} \left(\dots \left(\frac{R}{r} \right)^2 Y_{11}^c(\theta, \lambda) \left(\frac{R}{r} \right)^2 Y_{11}^s(\theta, \lambda) \dots \left(\frac{R}{r} \right)^{l+1} Y_{lm}^s(\theta, \lambda) \right). \quad (2.9)$$

In der Realität ist die sphärisch-harmonische Synthese, wie Formel (2.6) allgemein genannt wird, auf einen maximalen Grad l_{\max} beschränkt

$$V(P) = \frac{GM}{R} \sum_{l=0}^{l_{\max}} \left(\frac{R}{r} \right)^{l+1} \sum_{m=0}^l \bar{P}_m(\cos \theta) [\bar{C}_{lm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{lm} \sin(m\lambda)], \quad (2.10)$$

da zum einen aus rechentechnischen Gründen grundsätzlich keine Bestimmung der sphärisch-harmonischen Koeffizienten bis unendlich möglich ist und im Speziellen ein Zusammenhang zwischen der räumlichen Auflösung der Beobachtungen des Schwerefelds und dem maximalen Entwicklungsgrad der Reihenentwicklung l_{\max} besteht. So ist der maximal auflösbare Grad vom Abstand der Beobachtungen auf dem Gitter Δd abhängig. Es gilt dabei (Gruber, 2000)

$$l_{\max} = \frac{180^\circ}{\Delta d} - 1, \quad (2.11)$$

wobei hier vereinfachend von einem gleichabständigen Gitter ausgegangen wird, d.h. Δd entspricht sowohl dem Beobachtungsabstand in Längen- als auch in Breitenrichtung. Die Gesamtzahl an Koeffizienten ist $(l_{\max} + 1)^2$, die Anzahl der Koeffizienten pro Grad l ist $2l + 1$.

Als Approximation des Erdschwerefelds kann ein Normal- oder Referenzschwerefeld festgelegt werden, welches den größten und bekanntesten Teil des Signals des Erdschwerefelds wiedergibt. Hierzu wird zunächst ein Näherungskörper benötigt, welcher sich bestmöglich der wahren Erdgestalt annähert. Als zweckmäßig hat sich hier ein Ellipsoid etabliert, welches so definiert ist, dass es mit der Erdfigur rotiert. Generell bedarf es vier Parameter, um dieses Rotationsellipsoid zu beschreiben. Als solche werden in der Regel die große Halbachse a und die Abplattung f festgelegt, welche die geometrische Form des Rotationsellipsoids wiedergeben, sowie die an die Erdrotation angepasste Winkelgeschwindigkeit ω und ein konstanter Normalpotentialwert U_0 auf der Ellipsoidoberfläche, der gleich W_0 angenommen wird. Für das Rotationsellipsoid ergibt sich somit das Normalschwerepotential

$$U(P) = V'(P) + Z(P), \quad (2.12)$$

wobei der Anteil des Zentrifugalpotentials dem wahren Zentrifugalpotential entspricht. Das Gravitationspotential des Normalfelds ist grundsätzlich analog zu Gleichung (2.6), kann aber auf Grund der Längenunabhängigkeit des Rotationsellipsoids, die aus dessen Rotationssymmetrie folgt, und der Äquatorsymmetrie, welche zu einer Nicht-Sensitivität des Rotationsellipsoids bezügliche asymmetrischer *Legendre*-Polynome führt (Torge & Müller, 2012), vereinfacht dargestellt werden als

$$V'(P) = \frac{GM}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \bar{P}_l(\cos\theta) \bar{c}_{l0}. \quad (2.13)$$

Hierbei sind \bar{c}_{l0} die vollständig normierten sphärisch-harmonischen Normalfeldkoeffizienten. Da diese sehr schnell klein werden, genügt es, Gleichung (2.13) bis Grad $l=10$ zu entwickeln. Bekannte Normalschwerfelder sind beispielsweise das GRS80 (Moritz, 2000) oder das WGS84 (NIMA, 2000).

Bildet man die Differenz aus Schwere- und Normalschwerpotential (dies entspricht einer Linearisierung), entsteht das Störpotential

$$T(P) = W(P) - U(P) = V(P) - V'(P), \quad (2.14)$$

eine residuale Größe, die den unbekanntem Anteil des Schwerfelds beschreibt. In der Differenzbildung entfällt das Zentrifugalpotential und somit erfüllt das Störpotential im Gegensatz zum Schwerpotential im Außenraum und auf der Erdoberfläche die *Laplace*-Gleichung und ist eine harmonische Funktion. Die Reihenentwicklung des Störpotentials lautet

$$T(P) = \frac{GM}{R} \sum_{l=0}^{l_{\max}} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=0}^l \bar{P}_m(\cos\theta) [\Delta\bar{C}_{lm} \cos(m\lambda) + \Delta\bar{S}_{lm} \sin(m\lambda)] \quad (2.15)$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta\bar{C}_{lm} &= \bar{C}_{lm} - \bar{c}_{lm}, \\ \Delta\bar{S}_{lm} &= \bar{S}_{lm} - \bar{s}_{lm}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

wobei außer den zonalen, geraden \bar{c}_{lm} bis Grad $l=10$ alle $(\bar{c}_{lm}, \bar{s}_{lm})$ null sind. In Matrixschreibweise ergibt sich entsprechend Gleichung (2.7)

$$T(P) = \mathbf{A}_T(P) \Delta\mathbf{x}, \quad (2.17)$$

mit $\mathbf{A}_T = \mathbf{A}_V$ und $\Delta\mathbf{x}$ aus Gleichung (2.16). Die Anwendung des Gradientenoperators auf Gleichung (2.14) liefert die ersten Ableitungen des Störpotentials, die vektorielle Schwerestörung

$$\delta\mathbf{g}(P) = \nabla T(P) = \nabla V(P) - \nabla V'(P) = \mathbf{g}(P) - \boldsymbol{\gamma}(P) = \begin{pmatrix} T_x(P) \\ T_y(P) \\ T_z(P) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

mit dem Normalschwerevektor $\boldsymbol{\gamma}$. In Matrixschreibweise erhält man

$$\delta\mathbf{g}(P) = \mathbf{A}_g(P) \Delta\mathbf{x}. \quad (2.19)$$

$\mathbf{A}_g(P)$ ist jetzt eine Matrix, welche die sphärisch-harmonischen Differenzkoeffizienten mit der vektoriellen Schwerestörung in Verbindung setzt.

Die zweiten Ableitungen, die Tensorelemente T_{ij} , erhält man durch erneute Anwendung des Gradientenoperators, jetzt auf die einzelnen Komponenten der vektoriellen Schwerestörung

$$\nabla \otimes \begin{pmatrix} T_x(P) \\ T_y(P) \\ T_z(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{xx}(P) & T_{xy}(P) & T_{xz}(P) \\ T_{xy}(P) & T_{yy}(P) & T_{yz}(P) \\ T_{xz}(P) & T_{yz}(P) & T_{zz}(P) \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Der Gradiententensor enthält fünf unabhängige Elemente (nicht sechs, da $\Delta T = T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} = 0$).

Die Differentialoperationen oder Ableitungsvorgänge führen dazu, dass die Ableitungen des Störpotentials weniger glatt als das Störpotential sind, d.h., der mittel- und kurzwellige Signalinhalt der entsprechenden Funktionale wird verstärkt. Die zweiten Ableitungen gehen mit einer weiteren Verstärkung dieser Signalanteile einher. Exemplarisch lässt sich dies betrachten für die radiale Komponente

$$\begin{aligned} T_{zz}(P) &= T_{rr}(P) \\ &= \frac{GM}{R^3} \sum_{n=0}^{n_{\max}} (l+1)(l+2) \left(\frac{R}{r}\right)^{l+3} \sum_{m=0}^n \bar{P}_m(\cos\theta) [\Delta \bar{C}_{lm} \cos(m\lambda) + \Delta \bar{S}_{lm} \sin(m\lambda)] . \\ &= \mathbf{A}_{V_{zz}}(P) \Delta \mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Hierbei ist $(l+1)(l+2)$ der Eigenwert der radialen Komponente, der dazu führt, dass der Signalinhalt sphärisch-harmonischer Koeffizienten mittlerer und höherer Grade relativ zu den niedrigen Graden verstärkt wird. Auf eine detaillierte formale Darstellung und Erläuterung der Eigenschaften der ersten und zweiten Ableitungen wird an dieser Stelle verzichtet, es sei auf Koop (1993) oder Rummel (1997) verwiesen.

Liegt P auf dem Geoid, so ist das Störpotential über die Normalschwere γ_0 mit der Geoidhöhe

$$\begin{aligned} N(P) &= \frac{T(P)}{\gamma_0(P)} \\ &= \frac{GM}{\gamma_0(P)R} \sum_{l=0}^{l_{\max}} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=0}^l \bar{P}_m(\cos\theta) [\Delta \bar{C}_{lm} \cos(m\lambda) + \Delta \bar{S}_{lm} \sin(m\lambda)] \\ &= \mathbf{A}_N(P) \Delta \mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.22)$$

verbunden. Diese beschreibt den Abstand zwischen Geoid und Ellipsoid entlang der Ellipsoidnormalen und eignet sich aufgrund ihrer metrischen Dimension besser als das Störpotential, um den unbekannten Anteil des Schwerefelds zu veranschaulichen.

Eine weitere fundamentale Schwerefeldgröße entsteht durch die Betrachtung des Unterschieds zwischen dem Schwerevektor in P und dem Normalschwerevektor in Q

$$\Delta \mathbf{g}(P) = \mathbf{g}(P) - \boldsymbol{\gamma}(Q). \quad (2.23)$$

Diese Größe bezeichnet man als Schwereanomalienvektor. Zum besseren Verständnis sind in Abb. 2.3 ein Schwerevektor auf dem Geoid und ein Normalschwerevektor auf dem Ellipsoid sowie die zugehörige Geoidhöhe abgebildet. In dieser Abbildung ist außerdem ein Schwerevektor auf der Erdoberfläche zu sehen, sowie ein Normalschwerevektor auf dem sogenannten Telluroid. Mit diesen kann ebenso der Schwereanomalienvektor nach Gleichung (2.23) realisiert werden. Das Telluroid ist eine Näherungsfläche an die Erdoberfläche, welche gebildet wird durch alle Punkte Q für welche in Bezug zu den Oberflächenpunkten P gilt $U(Q) = W(P)$. Im Gegensatz zu Geoid und Ellipsoid sind Erdoberfläche und Telluroid jedoch keine Äquipotentialflächen.

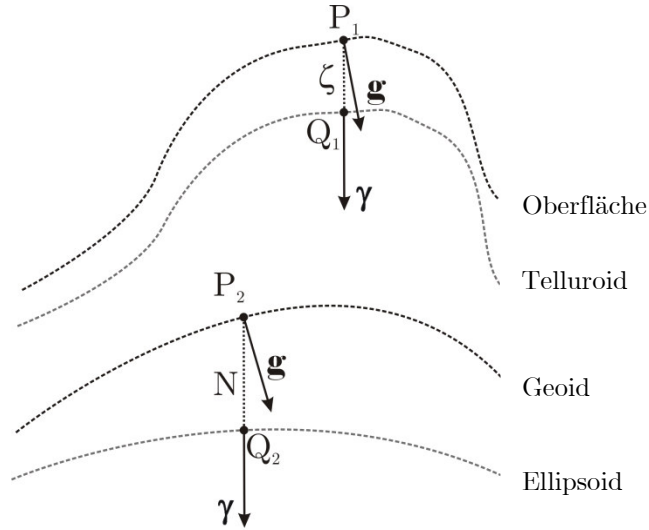


Abb. 2.3: Schwere und Normalschwere im jeweiligen Beobachtungs- und Näherungspunkt.

ζ gibt den Abstand zwischen dem Telluroid und der Erdoberfläche wieder und wird als Höhenanomalie bezeichnet. Die erste Definition entspricht der Definition nach *Stokes*, die zweite der nach *Molodenskii*. Eine ausführliche Definition des Telluroids findet sich in Heiskanen & Moritz (1967). Der Betrag des Schwereanomalienvektors, die Schwereanomalie Δg , ist über die Fundamentalgleichung der physikalischen Geodäsie (in sphärischer Approximation) definiert als

$$\begin{aligned} \Delta g(P) &= -\frac{\partial T(P)}{\partial r} - \frac{2}{R} T(P) \\ &= \frac{GM}{R^2} \sum_{l=0}^{l_{\max}} (l-1) \left(\frac{R}{r}\right)^{l+2} \sum_{m=0}^n \bar{P}_{lm}(\cos\theta) [\Delta \bar{C}_{lm} \cos(m\lambda) + \Delta \bar{S}_{lm} \sin(m\lambda)] \\ &= \mathbf{A}_{\Delta g}(P) \Delta \mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Wie man der Gleichung entnehmen kann ist auch die Schwereanomalie von einem Differentialoperator abhängig und somit weniger glatt als das Störpotential, der Eigenwert $l-1$ verdeutlicht dies. Die Schwereanomalie ist für die Schwerfeldbestimmung von sehr hoher Bedeutung, da ein Großteil der terrestrischen Schwerfeldbeobachtungen in Form von Schwereanomalien vorliegt. Oftmals werden die Punktbeobachtungen der Schwereanomalie zu sogenannten Schwereanomalie-Blockmittelwerten

$$\overline{\Delta g} = \frac{1}{\Delta S} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \Delta g(\theta, \lambda) \sin\theta \, d\lambda \, d\theta \quad (2.25)$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sin\theta \, d\lambda \, d\theta = (\lambda_2 - \lambda_1) \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta \, d\theta \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1) (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) = \Delta\lambda (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \end{aligned} \quad (2.26)$$

für den Block \bar{P} zusammengefasst. Durch Einsetzen von Gleichung (2.24) in Gleichung (2.25) erhält man die sphärisch-harmonische Synthese für Blockmittelwert-Schwereanomalien

$$\begin{aligned}
 \overline{\Delta g}(\bar{P}) &= \frac{1}{\Delta S} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{GM}{R^2} \sum_{l=0}^{l_{\max}} (l-1) \left(\frac{R}{r}\right)^{l+2} \cdot \\
 &\quad \sum_{m=0}^l \bar{P}_{lm}(\cos \theta) \left[\Delta \bar{C}_{lm} \cos(m\lambda) + \Delta \bar{S}_{lm} \sin(m\lambda) \right] \sin \theta d\lambda d\theta \\
 &= \frac{1}{\Delta S} \frac{GM}{R^2} \sum_{l=0}^{l_{\max}} (l-1) \left(\frac{R}{r}\right)^{l+2} \sum_{m=0}^l \int_{\theta_1}^{\theta_2} \bar{P}_{lm}(\cos \theta) \sin \theta d\theta \cdot \\
 &\quad \left[\Delta \bar{C}_{lm} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \cos(m\lambda) d\lambda + \Delta \bar{S}_{lm} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sin(m\lambda) d\lambda \right] \\
 &= \frac{1}{\Delta S} \frac{GM}{R^2} \sum_{l=0}^{l_{\max}} (l-1) \left(\frac{R}{r}\right)^{l+2} \sum_{m=0}^l PI_{lm}(\cos \theta) \cdot \\
 &\quad \left[\Delta \bar{C}_{lm} \frac{2}{m} \cos m \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2} \sin m \frac{\Delta \lambda}{2} + \Delta \bar{S}_{lm} \frac{2}{m} \sin m \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2} \sin m \frac{\Delta \lambda}{2} \right]
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

mit $PI_{lm}(\cos \theta)$, dem Integral über die vollständig normierten assoziierten *Legendre*-Polynome. Für die oben aufgeführten Schwerefeldgrößen (Gleichungen (2.15), (2.21) und (2.22)) lässt sich ein Ausdruck analog zu Gleichung (2.27) finden, dies soll hier allerdings nicht weiter ausgeführt werden. Gleichung (2.11) ist auch für Blockmittelwerte gültig, allerdings bezeichnet Δd im Falle von Blockmittelwerten nicht mehr den Abstand der Beobachtungen auf dem Gitter voneinander, sondern die Größe des Blocks.

2.2 Methoden der Schwerefeldbeobachtung

Die wichtigste Voraussetzung, um ein globales Schwerefeld bestimmen zu können, ist, über genügend Schwerefeldbeobachtungen zu verfügen, die möglichst die komplette Erdkugel überdecken. Überdies ist wichtig, je nachdem welchen maximalen Grad l_{\max} man bei der Schwerefeldbestimmung anstrebt, dass die Schwerefeldbeobachtungen auch in einer gewissen räumlichen Dichte vorliegen, wie Gleichung (2.11) zeigt. Durch die Entwicklung einer Vielzahl von Beobachtungsmethoden liegen Schwerefeldbeobachtungen heute global und in einer hohen Dichte vor, was die Schwerefeldbestimmung im Vergleich zu früher deutlich erleichtert. Im Folgenden sollen die verschiedenen Methoden zur Schwerefeldbeobachtung kurz dargestellt werden.

2.2.1 Schwerefeldsatellitenmissionen

Innerhalb der letzten 15 Jahre wurde der Wissenschaft im Rahmen der explizit geodätischen Schwerefeldsatellitenmissionen eine Vielzahl von hochqualitativen Schwerefeldbeobachtungen zugänglich gemacht. Den Anfang machte hier zu Beginn des neuen Jahrtausends die deutsche Satellitenmission CHAMP (Reigber et al., 2002), welche bis ins Jahr 2010 aktiv war. Mit ihr war es erstmals möglich, Schwerefelder rein auf Basis von Satellitenbeobachtungen weit über die sehr niedrigen Grade und Ordnungen hinaus bis ungefähr Grad und Ordnung 100 zu schätzen. Der nächste Schritt war der Start der deutsch-amerikanischen Mission GRACE (Tapley et al., 2004) im März 2002, welche immer noch aktiv ist. Mit GRACE konnten zeitvariable Anteile des Schwerefelds genauer als jemals zuvor mittels Satelliten bestimmt werden (Wahr et al., 2004). Außerdem konnte mit GRACE der maximale Grad von reinen Satellitenschwerefeldlösungen auf Grad und Ordnung 180 gesteigert werden. Zuletzt folgte die ESA-Mission GOCE (Drinkwater et al., 2003), welche von März 2009 bis Oktober 2013 aktiv war und mit der weitere, bislang unbekannte Schwerefeldsignale detektiert werden konnten, besonders in Gebieten, die für terrestrische Messungen schwer zugänglich sind.

GOCE Schwerefelder erreichen als maximalen Grad und Ordnung 300, vergleiche Bruinsma et al. (2013)².

2.2.1.1 Schwerefeldbestimmung aus Bahnstörungen

Die Idee, aus einer Satellitenbahn das Erdschwerefeld zu bestimmen, ist schon weit vor der Konzipierung der Schwerefeldsatellitenmissionen entstanden und erprobt worden. Erstmals wurde das Verfahren hinsichtlich des russischen Satelliten Sputnik verwendet und beschrieben in Merson & King-Hele (1958) und Buchar (1958). Generelle Grundlage ist die Bahnstörungstheorie, welche ausführlich in Montenbruck & Gill (2000) oder Beutler (2005) dargestellt wird.

Ausgangspunkt ist die *Newton*-Bewegungsgleichung, nach der sich die Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}$ eines Satelliten ergibt mit

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}), \quad (2.28)$$

wobei \mathbf{f} die auf eine Einheitsmasse bezogene Kraftfunktion beschreibt. \mathbf{f} ist nichtlinear und von verschiedenen Einflüssen abhängig, wobei das Schwerefeld der Erde der dominierende Faktor ist. Angenommen die Erde wäre kugelförmig, die Dichteverteilung im Erdinneren homogen und es würden neben dem Schwerefeld der Erde keine weiteren Einflüsse auf den Satelliten wirken, dann wäre $\bar{C}_{00} = 1$, alle weiteren \bar{C}_{lm} und $\bar{S}_{lm} = 0$ und man erhielte durch Einsetzen von Gleichung (2.6) in Gleichung (2.2) die Differentialgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r} = \mathbf{a}_g (= \mathbf{g}). \quad (2.29)$$

Wie Montenbruck & Gill (2000) zeigen, würde daraus eine elliptische Satellitenbahn folgen, wie in Abb. 2.4 (links) zu sehen.

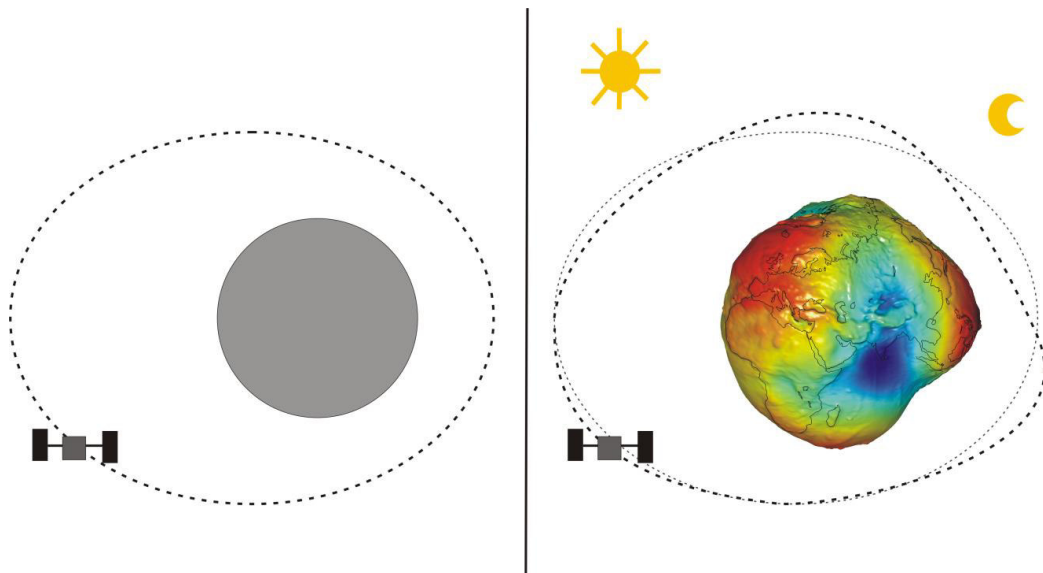


Abb. 2.4: Satellitenbahn im Falle einer kugelförmigen Erde mit homogener Dichteverteilung (links) und unter dem Einfluss von (zusätzlichen) gravitativen und nicht-gravitativen Störungen (rechts).

² Aktuellere Beschreibung unter:

https://earth.esa.int/documents/10174/1604019/GO_CONS_EGM_GCF_2_DIR_R5_DataSheet.pdf (Stand: 16. Februar 2015)

Da allerdings die Erde weder exakt kugelförmig, noch die Dichteverteilung im Inneren homogen ist, muss mit

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla V = \nabla \frac{GM}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=0}^l \bar{P}_m(\cos\theta) [\bar{C}_m \cos(m\lambda) + \bar{S}_m \sin(m\lambda)] = \mathbf{a}_g \quad (2.30)$$

vorlieb genommen werden, wobei sich der Gradient ∇ auf ein inertiales System bezieht. Die Bahn des Satelliten weicht folglich von der elliptischen Form ab. Die grundlegende Idee hinsichtlich der Schwerefeldbestimmung ist, diese Abweichungen/Störungen der Bahn zu analysieren um dadurch Rückschlüsse auf das Schwerefeld ziehen zu können. Gleichung (2.30) vernachlässigt allerdings weitere (Stör-)Beschleunigungen, wie sämtliche von Gezeiten verursachten Beschleunigungen \mathbf{a}_t (u.a. Anziehungskräfte von Sonne und Mond, Gezeiten der festen Erde, Ozeangezeiten) oder Oberflächenbeschleunigungen \mathbf{a}_o (u.a. Luftwiderstand der Atmosphäre, Strahlungsdruck)

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{a}_g + \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_o. \quad (2.31)$$

Die Anteile an \mathbf{f} , die sich hinsichtlich ihrer Eigenschaften stark unterscheiden (periodisch, nicht periodisch, stochastisch, systematisch), führen zu weiteren Störungen der Bahn und erschweren somit die Analyse der Bahnstörungen zur Bestimmung des Erdschwerefelds. Wie eine Bahn unter den Einflüssen von (2.31) aussehen könnte, ist beispielhaft in Abb. 2.4 (rechts) dargestellt.

Es empfiehlt sich aus Gründen der Übersichtlichkeit, Gleichung (2.31) zu unterteilen in

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{a}_g + \mathbf{a}_r, \quad (2.32)$$

so dass nur zwischen den vom Gravitationsfeld der Erde verursachten Beschleunigungen \mathbf{a}_g und allen weiteren (restlichen) Beschleunigungen \mathbf{a}_r unterschieden wird. Zur Bestimmung des Schwerefelds benötigt man zunächst Positionsmessungen des Satelliten. Aus den Einzelpositionen können Bahnstücke bestimmt werden, die man in Bezug zu $\ddot{\mathbf{r}}$, also der linken Seite von Gleichung (2.28), bringen kann (dies wird weiter unten dargestellt). Auf der rechten Seite werden einzelne Einflüsse mit Hilfe von Modellen nachgebildet oder direkt gemessen, um so den Einfluss der restlichen Kräfte zu reduzieren, so dass das Schwerefeld als Unbekannte verbleibt. Die Verfahren zur Positionsbestimmung haben sich mit der Zeit stark verändert und hinsichtlich ihrer Messgenauigkeit stark verbessert, worüber Gruber (2000) einen Überblick gibt. Während zunächst Richtungsbeobachtungen von astronomischen Kameras als einziges Beobachtungsverfahren zur Verfügung standen, konnten später Entfernungsmessungen mit Hilfe von Laser- oder Mikrowellen durchgeführt werden. Noch heute Verwendung findet Satellite Laser Ranging (SLR) zur Bestimmung der sehr niedrigen Schwerefeldkoeffizienten, ein Zweiwegemessverfahren, bei dem mit Hilfe von Laserpulsen der Abstand von einer Beobachtungsstation zu einem Satelliten gemessen und somit aus Messungen von mehreren Beobachtungsstationen dessen Position bestimmt werden kann (Bloßfeld et al., 2011).

Wie schon weiter oben erwähnt, wurde mit den expliziten Schwerefeldsatellitenmissionen ein neues Zeitalter hinsichtlich der Schwerefeldbestimmung aus Satellitenbahnen eingeläutet. Dies gilt vor allem hinsichtlich der Positionsbestimmung. Für diese findet das Konzept des Satellite-to-Satellite Trackings (SST) Anwendung. Dabei wird der Satellit mit einem GPS-Empfänger ausgestattet, so dass seine Position mit einer bestimmten Abtastrate gemessen werden kann. Bei CHAMP wurde dieses Verfahren eingesetzt. Neben dem GPS-Empfänger wurde der CHAMP-Satellit mit einem Dreiachsbeschleunigungsmesser ausgestattet. Da dieser sich im Zentrum des Satelliten sozusagen im freien Fall befindet, ist er nur sensitiv für nicht-gravitativ Beschleunigungen und ermöglicht somit deren Messung. Dies ermöglicht, auf eine Modellierung nicht-gravitativer Kräfte zu verzichten. Im Rahmen der GRACE-Mission werden zwei Satelliten eingesetzt, die beide jeweils mit einem GPS-Empfänger und einem Beschleunigungsmesser ausgestattet sind, so dass auf beide Satelliten das gleiche Konzept wie bei CHAMP angewendet werden kann. Beide Satelliten sind allerdings überdies

mit einem K-Band Mikrowellen-Messsystem ausgestattet, mit dem die Distanz der beiden Satelliten, die ungefähr in einem Abstand von 220 km hintereinander auf der gleichen Bahn fliegen, in μm -Genauigkeit bestimmt werden kann.

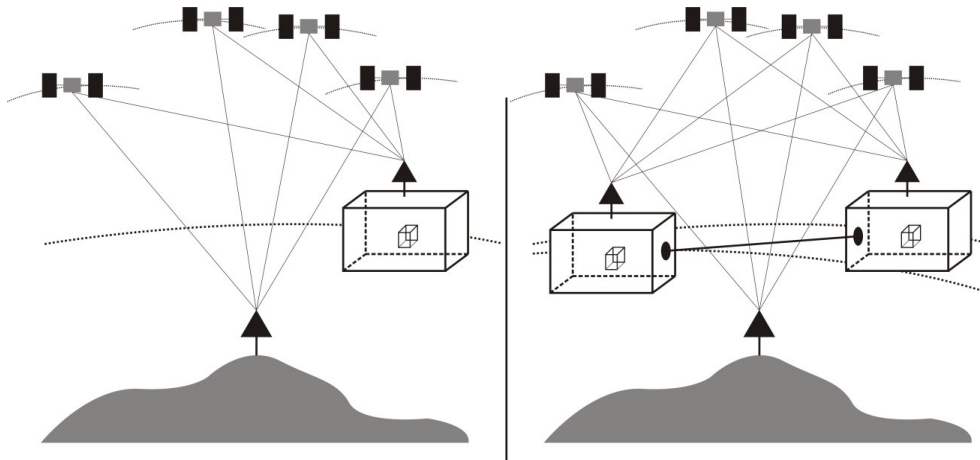


Abb. 2.5: Satellite-to-Satellite Tracking im CHAMP (links) und im GRACE (rechts) Fall.

Die Änderung der Distanz kann in Beziehung zur Beschleunigungsdifferenz zwischen beiden Satelliten gesetzt werden, welche sich aus der *Newton*-Bewegungsgleichung mit

$$\Delta \ddot{\mathbf{r}} = \Delta \mathbf{f}(t, \Delta \mathbf{r}, \Delta \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{f}_2(t, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_2) - \mathbf{f}_1(t, \mathbf{r}_1, \dot{\mathbf{r}}_1) \quad (2.33)$$

ergibt. Im GRACE-Fall spricht man zusätzlich von low-low SST, während man im CHAMP-Fall, wo nur GPS-Beobachtungen vorliegen, von high-low SST spricht. GOCE ist wie CHAMP und GRACE mit einem GPS-Empfänger ausgestattet und zählt ebenso zu einer high-low SST Anwendung. Allerdings wird zur Messung der nicht-gravitativen Beschleunigungen ein alternatives Konzept verwendet, welches in Kapitel 2.2.1.2 erläutert wird.

Nachdem die Problematik und die Konzepte zur Gewinnung von Satellitenbeobachtungen erläutert wurden, soll kurz zusammengefasst werden, wie sich diese mit $\ddot{\mathbf{r}}$ in Verbindung setzen lassen, und wie dann im Weiteren der Bezug zum Schwerefeld hergestellt werden kann. Mayer-Gürr (2006) bestimmt durch zweifache Integration als Lösung der Differentialgleichung (2.28) den Bahnbogen \mathbf{r} in einer Randwertaufgabe mit den Randbedingungen

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}(t_A); \quad \mathbf{r}_B = \mathbf{r}(t_B). \quad (2.34)$$

und erhält

$$\mathbf{r}(\tau) = \mathbf{r}_A(1-\tau) + \mathbf{r}_B\tau - T_{AB}^2 \int_0^1 K(\tau, \tau') \mathbf{f}(\tau') d\tau' \quad (2.35)$$

mit dem Integralkern

$$K(\tau, \tau') = \begin{cases} \tau'(1-\tau), & \tau' \leq \tau \\ \tau(1-\tau'), & \tau' > \tau \end{cases} \quad (2.36)$$

und der normierten Zeit

$$\tau = \frac{t-t_A}{T}, \quad \tau \in [0,1]. \quad (2.37)$$

T_{AB} ist dabei die zeitliche Länge eines Bahn Bogens, typischerweise etwa 30 Minuten. Als Beobachtungen fungieren die Satellitenpositionen $\mathbf{r}(\tau_i)$, die mit einer konstanten Abtastrate gemessen wurden, während die Kraft $\mathbf{f}(\tau_i')$ als Unbekannte fungiert. $\mathbf{r}_A(1-\tau)+\mathbf{r}_B\tau$ beschreibt eine Näherung zur Position $\mathbf{r}(\tau_i)$ auf der Verbindungslinie von Anfangs- und Endpunkt, $T_{AB}^2 \int_0^1 K(\tau, \tau') \mathbf{f}(\tau') d\tau'$ die Differenz zwischen beiden. Dieser von Mayer-Gürr (2006) erstmals umgesetzte sogenannte Integralgleichungsansatz geht zurück auf Schneider (1967). Mit Gleichung (2.32) lässt sich Gleichung (2.35) unterteilen in

$$\mathbf{r}(\tau) = \mathbf{r}_A(1-\tau) + \mathbf{r}_B\tau - T_{AB}^2 \int_0^1 K(\tau, \tau') \mathbf{a}_g(\tau') d\tau' - T_{AB}^2 \int_0^1 K(\tau, \tau') \mathbf{a}_r(\tau') d\tau' \quad (2.38)$$

und man erreicht durch Umformung

$$\mathbf{r}(\tau) - \mathbf{r}_A(1-\tau) - \mathbf{r}_B\tau + T_{AB}^2 \int_0^1 K(\tau, \tau') \mathbf{a}_r(\tau') d\tau' = -T_{AB}^2 \int_0^1 K(\tau, \tau') \mathbf{a}_g(\tau') d\tau'. \quad (2.39)$$

Anzumerken ist hierbei, dass diese Unterteilung, die eine explizite Beschreibung des Integrals erfordert, ein aufwendiger Vorgang ist, welcher in Mayer-Gürr (2006) beschrieben wird.

Zerlegt man $\mathbf{a}_g(\tau')$ in

$$\mathbf{a}_g(\tau') = \mathbf{R}^e(\tau') \mathbf{A}_g(\tau') \mathbf{x}, \quad (2.40)$$

wobei \mathbf{R}^e eine Drehmatrix vom erdfesten ins inertielle System beschreibt (in diesem Fall muss sich auch \mathbf{A}_g auf das erdfeste System beziehen), erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\tau) - \mathbf{r}_A(1-\tau) - \mathbf{r}_B\tau + T_{AB}^2 \int_0^1 K(\tau, \tau') \mathbf{a}_r(\tau') d\tau' = \\ -T_{AB}^2 \mathbf{x} \int_0^1 K(\tau, \tau') \mathbf{R}^e(\tau') \mathbf{A}_g(\tau') d\tau' \end{aligned} \quad (2.41)$$

Diese Darstellung kann als Beobachtungsgleichung für die Schwerefeldbestimmung genutzt werden. Die Bahnpositionen werden gemessen und es empfiehlt sich, bekannte Messpunkte als Anfangs- und Endpunkte eines Bahn Bogens zu definieren. Das Integral auf der linken Seite lässt sich dann berechnen mit Hilfe der Beobachtungen aus den Beschleunigungsmessern, Modellen, sowie bekannten Referenzanteilen. Es verbleibt auf der rechten Seite als Unbekannte nur der unbekannte Schwerefeldanteil. Für die Beobachtungsgleichung aus K-Band Entfernungsmessungen sei wiederum verwiesen auf Mayer-Gürr (2006).

Neben dem hier dargestellten Integralgleichungsansatz existiert eine Vielzahl von weiteren Möglichkeiten zur Bahnbestimmung aus Satellitenpositionsmessungen. Diese werden u.a. in Yi (2012) dargestellt. Darüber hinaus schlägt Schneider (2014) eine Modifikation des Integralgleichungsansatzes vor, welcher auf der Methode der unendlich vielen Variablen beruht (Hammerstein, 1930).

Mit Hilfe von Satellitenbahnen kann der langwellige Anteil von Schwerefeldern sehr gut bestimmt werden. Ursache hierfür ist, dass mit einem Satelliten in kurzer Zeit alle Gebiete der Erde überflogen werden können, sprich, es wird eine globale, konsistente Datenbasis erzeugt, was mit anderen Schwerefeldmessverfahren nicht möglich ist. Außerdem sind Satellitenmessungen im Gegensatz zu terrestrischen Messungen nicht an regionale Datumsdefinitionen gebunden. Die spektrale Auflösung von rein aus Satellitendaten bestimmten Schwerefeldern ist allerdings limitiert, da, wie der Dämpfungsfaktor in Gleichung (2.6) zeigt, das Signal des Schwerepotentials mit dem Abstand zur Erde abnimmt. Auf Grund der hochgenauen K-Band-Messungen kann im low-low SST-Fall mit GRACE eine höhere spektrale Auflösung erzielt werden als im high-low SST-Fall.

Die zur Schwerefeldbestimmung aus Bahnstörungen notwendigen Beobachtungen (Bahndaten, Akzelerometriemessungen, K-Band-Messungen) werden von den jeweiligen Missionsbetreibern der wissenschaftlichen Gemeinschaft zur freien Verfügung gestellt. So können sowohl CHAMP- als auch GRACE-Daten zum Beispiel über das „Information Service and Data Center“ des Deutschen Geo-ForschungsZentrums (GFZ) heruntergeladen werden³. Für GOCE sei auf den folgenden Abschnitt verwiesen.

2.2.1.2 Satellitengradiometrie

Die zweiten Ableitungen des Gravitationspotentials, die analog zu Gleichung (2.20) mit

$$\mathbf{V}_{ij}(P) = \nabla \otimes \begin{pmatrix} V_x(P) \\ V_y(P) \\ V_z(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{xx}(P) & V_{xy}(P) & V_{xz}(P) \\ V_{yx}(P) & V_{yy}(P) & V_{yz}(P) \\ V_{zx}(P) & V_{zy}(P) & V_{zz}(P) \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

definiert sind, stellen die Zielgrößen der Messungen in der Gravitationsgradiometrie dar. Gleichung (2.42) wird neben der in Kapitel 2.1 eingeführten Bezeichnung Gradiententensor auch *Marussi-Tensor* (Marussi, 1985) genannt und beschreibt die Krümmung des Erdschwerefelds (Rummel, 1986). Während der Ursprung der Gradiometrie in terrestrischen Messungen mit der Drehwaage liegt (Eötvös, 1906), wurde im Rahmen der GOCE-Mission erstmals ein Satellitengradiometrie-Konzept verwirklicht.

Das theoretische Prinzip der Gradiometrie wird in Rummel (1986) beschrieben und soll hier leicht abgewandelt dargestellt werden. Ausgangspunkt ist die Beschleunigung im Punkt O

$$\ddot{\mathbf{x}}(O) = \nabla V(O), \quad (2.43)$$

der hier als Nullpunkt eines lokalen Koordinatensystems definiert sei. Befindet sich O überdies im Zentrum einer Basislinie, an deren Enden sich z.B. die Punkte O_3 und O_6 befinden und die mit der z-Achse des lokalen Koordinatensystems zusammenfällt (siehe Abb. 2.6), so kann die Beschleunigung in diesen Punkten ausgedrückt werden mit

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}(O_3) &= \nabla V(O_3) \approx \ddot{\mathbf{x}}(O) + \mathbf{V}_{ij}(O) d\mathbf{O}_3 \\ \ddot{\mathbf{x}}(O_6) &= \nabla V(O_6) \approx \ddot{\mathbf{x}}(O) + \mathbf{V}_{ij}(O) d\mathbf{O}_6 \\ &\approx \ddot{\mathbf{x}}(O) - \mathbf{V}_{ij}(O) d\mathbf{O}_3 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Gleichung (2.44) drückt hierbei die Beschleunigung in den Punkten O_3 und O_6 relativ zu Punkt O aus, was mit Hilfe einer *Taylor-Reihe*, die nach dem linearen Term abgebrochen wird, geschieht. $d\mathbf{O}_3 = (0, 0, dO_3)'$ ist die Koordinatendifferenz zwischen O_3 und O , für $d\mathbf{O}_6$ gilt selbiges analog. Es kann dann die Beschleunigungsdifferenz

$$d\ddot{\mathbf{x}}(O_3O_6) = \ddot{\mathbf{x}}(O_6) - \ddot{\mathbf{x}}(O_3) = \mathbf{V}_{ij}(O)(d\mathbf{O}_6 - d\mathbf{O}_3) = \mathbf{V}_{ij}(O)(d\mathbf{O}_3O_6) \quad (2.45)$$

zwischen den Punkten O_3 und O_6 gebildet werden.

Mit $d\mathbf{O}_3O_6 = (0, 0, dO_3O_6)'$ sind die Beschleunigungsdifferenzen nur von der dritten Spalte des Tensors (2.42) abhängig, so dass folglich aus den Beschleunigungsdifferenzen, wenn man diese messen würde, auch nur die entsprechenden Tensorelemente bestimmbar wären, also in diesem Fall

³ <http://isdc.gfz-potsdam.de/index.php?module=pagesetter&func=viewpub&tid=1&pid=21> (Stand: 22. Januar 2015)

$$\begin{aligned}
 V_{xz}(O) &= \frac{d\ddot{x}(O_3O_6)}{dO_3O_6} \\
 V_{yz}(O) &= \frac{d\ddot{y}(O_3O_6)}{dO_3O_6} \\
 V_{zz}(O) &= \frac{d\ddot{z}(O_3O_6)}{dO_3O_6}
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Um die beiden anderen Spalten bestimmen zu können, müsste die Basislinie $\mathbf{dO}_3\mathbf{O}_6$ auf der x- bzw. der y-Achse liegen (siehe Abb. 2.6).

Im Falle der GOCE Mission wird ein Ensemble von drei orthogonal zueinander montierten Einachs-Gradiometern verwendet, welche jeweils aus einem Beschleunigungsmesserpaar bestehen, das sich in einem Abstand von einem halben Meter zueinander befindet. Der Schnittpunkt der Gradiometerachsen liegt im Massenzentrum des GOCE-Satelliten und definiert den Nullpunkt des sogenannten „Gradiometer Reference Frame“ (GRF), dessen Koordinatenachsen mit den Gradiometerachsen zusammenfallen (siehe Abb. 2.6). Die x-Achse des GRF zeigt näherungsweise in Flugrichtung des Satelliten, die y-Achse orthogonal zur Flugrichtung in der Bahnebene und die z-Achse ungefähr radial in Richtung Erdzentrum.

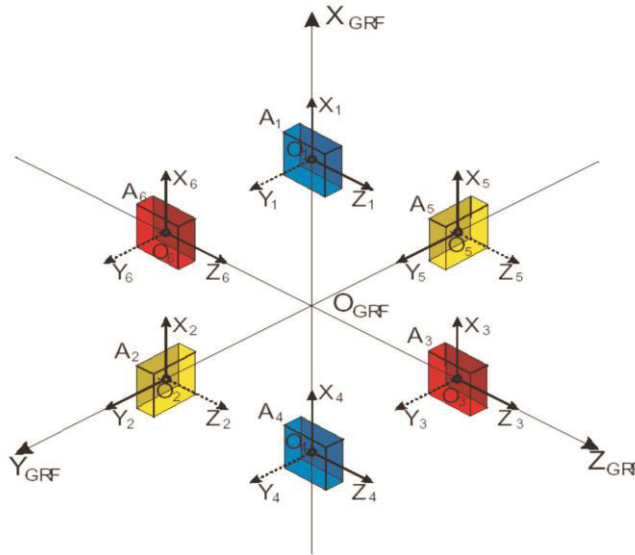


Abb. 2.6: Anordnung der drei Einachs-Gradiometer im GRF.

Durch die Anordnung der Einachs-Gradiometer ist im GRF somit gemäß (2.46) durch jedes Einachs-Gradiometer eine Spalte des *Marussi*-Tensors bestimmbar, so dass sich alle Tensorelemente bestimmen lassen. Man erhält folglich

$$\mathbf{V}_{ij}(O_{GRF}) = \begin{pmatrix} V_{xx}(O_{GRF}) & V_{xy}(O_{GRF}) & V_{xz}(O_{GRF}) \\ V_{yx}(O_{GRF}) & V_{yy}(O_{GRF}) & V_{yz}(O_{GRF}) \\ V_{zx}(O_{GRF}) & V_{zy}(O_{GRF}) & V_{zz}(O_{GRF}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\ddot{x}(O_1O_4)}{dO_1O_4} & \frac{d\ddot{x}(O_2O_5)}{dO_2O_5} & \frac{d\ddot{x}(O_3O_6)}{dO_3O_6} \\ \frac{d\ddot{y}(O_1O_4)}{dO_1O_4} & \frac{d\ddot{y}(O_2O_5)}{dO_2O_5} & \frac{d\ddot{y}(O_3O_6)}{dO_3O_6} \\ \frac{d\ddot{z}(O_1O_4)}{dO_1O_4} & \frac{d\ddot{z}(O_2O_5)}{dO_2O_5} & \frac{d\ddot{z}(O_3O_6)}{dO_3O_6} \end{pmatrix}, \tag{2.47}$$

wobei die Punktbezeichnungen den Bezeichnungen aus Abb. 2.6 entsprechen.

Die Beschleunigungsmesser erfassen neben den gravitativen Beschleunigungen noch zusätzliche Rotationsbeschleunigungen, die durch die Rotationsbewegung des Satelliten, folglich auch des Gradiometers, um die Erde entsteht. Das heisst, die gemessenen Beschleunigungen ergeben sich (hier beispielsweise für Punkt O_3) insgesamt mit

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{x}}(O_3) &= \nabla V(O_3) + \Omega\Omega d\mathbf{O}_3 + \dot{\Omega}d\mathbf{O}_3 \\ &= \ddot{\mathbf{x}}(O_{GRF}) + (\mathbf{V}_{ij}(O_{GRF}) + \Omega\Omega + \dot{\Omega})d\mathbf{O}_3.\end{aligned}\quad (2.48)$$

Dadurch, dass sich O_{GRF} im Massenzentrum des Satelliten befindet und somit für die gravitative Beschleunigung $\ddot{\mathbf{x}}(O_{GRF}) = \mathbf{0}$ gilt, wird Gleichung (2.48) zu

$$\ddot{\mathbf{x}}(O_3) = (\mathbf{V}_{ij}(O_{GRF}) + \Omega\Omega + \dot{\Omega})d\mathbf{O}_3. \quad (2.49)$$

Die Matrix Ω enthält die Winkelgeschwindigkeiten ω_x , ω_y und ω_z , die Matrix $\dot{\Omega}$ die entsprechenden Winkelbeschleunigungen. Es gilt

$$\Omega\Omega = \begin{pmatrix} -\omega_y^2 - \omega_z^2 & \omega_x\omega_y & \omega_x\omega_z \\ \omega_x\omega_y & -\omega_x^2 - \omega_z^2 & \omega_y\omega_z \\ \omega_x\omega_z & \omega_y\omega_z & -\omega_x^2 - \omega_y^2 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

und

$$\dot{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\omega}_z & -\dot{\omega}_y \\ -\dot{\omega}_z & 0 & \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y & -\dot{\omega}_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

Durch die Rotationsbeschleunigungen verkompliziert sich Gleichung (2.47) zu

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}(O_{GRF}) &= \begin{pmatrix} \frac{d\ddot{x}(O_1O_4)}{dO_1O_4} & \frac{d\ddot{x}(O_2O_5)}{dO_2O_5} & \frac{d\ddot{x}(O_3O_6)}{dO_3O_6} \\ \frac{d\ddot{y}(O_1O_4)}{dO_1O_4} & \frac{d\ddot{y}(O_2O_5)}{dO_2O_5} & \frac{d\ddot{y}(O_3O_6)}{dO_3O_6} \\ \frac{d\ddot{z}(O_1O_4)}{dO_1O_4} & \frac{d\ddot{z}(O_2O_5)}{dO_2O_5} & \frac{d\ddot{z}(O_3O_6)}{dO_3O_6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} V_{xx}(O_{GRF}) & V_{xy}(O_{GRF}) & V_{xz}(O_{GRF}) \\ V_{yx}(O_{GRF}) & V_{yy}(O_{GRF}) & V_{yz}(O_{GRF}) \\ V_{zx}(O_{GRF}) & V_{zy}(O_{GRF}) & V_{zz}(O_{GRF}) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} -\omega_y^2 - \omega_z^2 & \omega_x\omega_y & \omega_x\omega_z \\ \omega_x\omega_y & -\omega_x^2 - \omega_z^2 & \omega_y\omega_z \\ \omega_x\omega_z & \omega_y\omega_z & -\omega_x^2 - \omega_y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \dot{\omega}_z & -\dot{\omega}_y \\ -\dot{\omega}_z & 0 & \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y & -\dot{\omega}_x & 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{V}_{ij}(O_{GRF}) + \Omega\Omega + \dot{\Omega}\end{aligned}\quad (2.52)$$

Zusätzlich müssen noch die nicht-gravitativen Kräfte \mathbf{f}_{ng} berücksichtigt werden

$$\ddot{\mathbf{x}}(O_3) = (\mathbf{V}_{ij}(O_{GRF}) + \Omega\Omega + \dot{\Omega})d\mathbf{O}_3 + \mathbf{f}_{ng}(O_3), \quad (2.53)$$

welche sich allerdings bestimmen lassen durch

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_{ng}(O_{GRF}) &= \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{x}}(O_3) + \ddot{\mathbf{x}}(O_6)) \\
 &= \frac{1}{2}((\mathbf{V}_{ij}(O_{GRF}) + \Omega\Omega + \dot{\Omega})\mathbf{dO}_3 + \mathbf{f}_{ng}(O_3) + (\mathbf{V}_{ij}(O_{GRF}) + \Omega\Omega + \dot{\Omega})\mathbf{dO}_6 + \mathbf{f}_{ng}(O_6)) \\
 &= \frac{1}{2}((\mathbf{V}_{ij}(O_{GRF}) + \Omega\Omega + \dot{\Omega})\mathbf{dO}_3 + \mathbf{f}_{ng}(O_3) - (\mathbf{V}_{ij}(O_{GRF}) + \Omega\Omega + \dot{\Omega})\mathbf{dO}_3 + \mathbf{f}_{ng}(O_6)) \\
 &= \frac{1}{2}(\mathbf{f}_{ng}(O_3) + \mathbf{f}_{ng}(O_6))
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

weswegen wir mit Gleichung (2.52) fortfahren können. \mathbf{f}_{ng} aus (2.54) kann überdies für GOCE high-low SST verwendet werden, um den Einfluss der nicht-gravitativen Kräfte aus der Beobachtungsgleichung zu eliminieren. Die Symmetrieeigenschaften der Matrizen \mathbf{V}_{ij} (symmetrisch), $\Omega\Omega$ (symmetrisch) und $\dot{\Omega}$ (schiefsymmetrisch) erlauben es, die Winkelbeschleunigungen aus (2.52) zu isolieren:

$$\begin{aligned}
 \dot{\Omega} &= \frac{\Gamma_{ij}(O_{GRF}) - \Gamma_{ij}(O_{GRF})'}{2} \\
 \mathbf{V}_{ij}(O_{GRF}) + \Omega\Omega &= \frac{\Gamma_{ij}(O_{GRF}) + \Gamma_{ij}(O_{GRF})'}{2}
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

Die Winkelbeschleunigungen können folglich direkt aus den Gradiometermessungen bestimmt werden. Die Integration der Winkelbeschleunigungen liefert ausgehend von einem Anfangswert auch die Winkelgeschwindigkeit, so dass nur $\mathbf{V}_{ij}(O_{GRF})$ als Unbekannte verbleibt

$$\mathbf{V}_{ij}(O_{GRF}) = \Gamma_{ij}(O_{GRF}) - \Omega\Omega - \dot{\Omega}. \tag{2.56}$$

Auf Grund der Konstruktion der Beschleunigungsmesser, die jeweils zwei hochgenaue und eine circa 10^{-3} weniger genaue Achse besitzen, sind nicht alle Gradiometermessungen gleich gut, so dass nur V_{xx} , V_{yy} , V_{zz} , V_{xz} sowie ω_y und $\dot{\omega}_y$ hochgenau bestimmt werden können (Gruber et al., 2010). Dies führt dazu, dass man für die Bestimmung von Ω in der Praxis eine optimale Kombinationen aus Sternrichtungen und Winkelbeschleunigungen nutzt (Stummer et al., 2011).

Nachdem in Gleichung (2.56) der Gradiententensor als Zielgröße in der Gradiometrie übrig bleibt, muss dieser mit den sphärisch-harmonischen Koeffizienten in Verbindung gebracht werden (Koop, 1993; Rummel, 1997). Eine Schwierigkeit hierbei ist, dass die Tensorelemente im GRF gemessen werden, während der Formelapparat sich auf das „Local North Oriented Frame“ (LNOF) bezieht, in dem die x-Achse in Nordrichtung zeigt, die y-Achse nach Westen und die z-Achse nach oben. Dieses Problem könnte man beheben, in dem man den Tensor ins LNOF transformiert

$$\mathbf{V}_{ij}^{LNOF} = \mathbf{R}_{GOCE} \mathbf{V}_{ij}^{GRF} \mathbf{R}_{GOCE}^T. \tag{2.57}$$

Da sich hierbei allerdings die Tensorelemente im LNOF als Linearkombination der Elemente im GRF ergeben, würden die schlecht bestimmbaren Tensorelemente Einfluss auf die gut bestimmbaren erhalten, was deren Qualität schadet, vergleiche Pail et al. (2005). Daher zieht man es vor, den Formelapparat, sprich die Basisfunktionen, ins GRF zu transformieren. Die Rotationsmatrix \mathbf{R}_{GOCE} kann man aufstellen nach Gruber et al. (2010).

Eine weitere Einschränkung hinsichtlich der Qualität der Tensorelemente ergibt sich durch die Tatsache, dass die Beschleunigungsmesser nur im Messband zwischen 5×10^{-3} und 0.1 Hz hochpräzise messen (Rummel et al., 2011). Dies ist ersichtlich in Abb. 2.7 (links). Das Leistungsdichtespektrum (power spectral density, PSD), das gerechnet wurde aus den Residuen ausgewählter Tensorelemente vom 31.10.2009 zu Referenzensorelementen auf Basis des TIM3-Schwerefeldmodells (Pail et al., 2011b), zeigt ein farbiges Rauschverhalten, bei dem besonders die tiefen Frequenzen außerhalb des

Messbandes ein hohes Rauschniveau aufweisen. Um zu vermeiden, dass diese Frequenzen die komplette Schwerefeldlösung beeinträchtigen, müssen diese möglichst heruntergewichtet werden. Dies kann geschehen durch Filterung nach Schuh (1996), Krasbutter (2009) oder Stetter (2012). Abb. 2.7 (rechts) zeigt das PSD der gefilterten residualen Tensorelemente nach Stetter (2012). Das Rauschverhalten ist nun größtenteils weiß. Um die Konsistenz in der Beobachtungsgleichung zu gewährleisten, ist es erforderlich, dass auf die Basisfunktionen der selbe Filter angewendet wird wie auf die Tensorelemente (siehe Abschnitt 3.1.1).

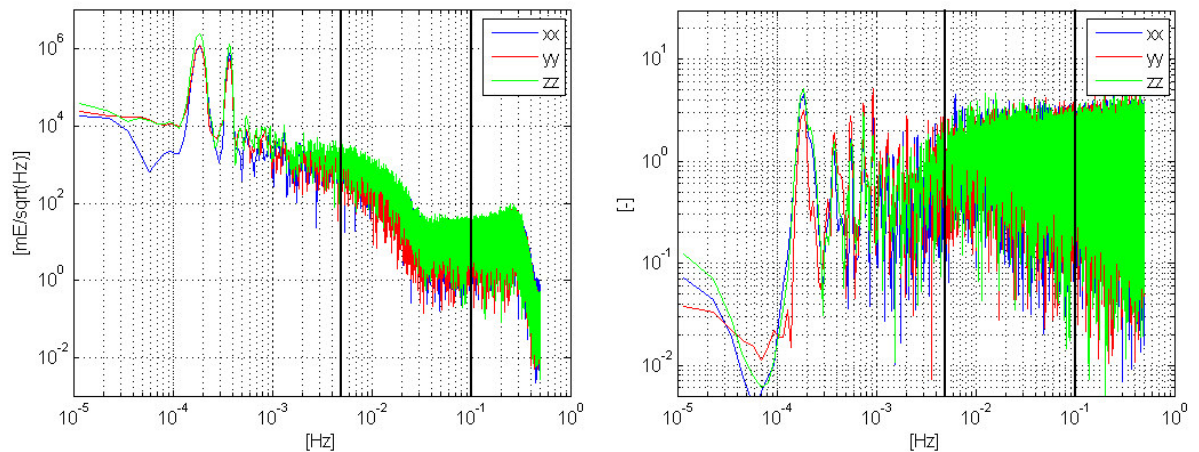


Abb. 2.7: $\text{PSD}^{1/2}$ ausgewählter, residualer Tensorelemente auf GOCE-Datenbasis vom 31.10.2009, links: ungefiltert, rechts: gefiltert. Die Meßbandbreite ist durch die senkrechten schwarzen Linien dargestellt.

Der für Abb. 2.7 (rechts) verwendete Filter bildet das Rauschverhalten invers nach und ermöglicht so im Gegensatz zu anderen Filtermethoden, welche die Information außerhalb des Messbands vollständig eliminieren, auch diese Schwerefeldinformation optimal zu nutzen. Nichtsdestotrotz können die sehr langen Wellenlängen rein auf Basis von GOCE-Gradiometrie nicht hochgenau geschätzt werden. Die Schätzung ist vielmehr gerichtet auf die sphärisch-harmonischen Koeffizienten der langen- bis mittleren Wellenlängen, sprich Grad und Ordnung 80 bis 280/300. Wie bei der Schwerefeldbestimmung aus Bahnstörungen ist ein Vorteil der Gradiometrie, dass sehr konsistente Datensätze erzeugt werden, mit denen (nahezu) die komplette Erde abgedeckt wird. Eine Einschränkung hierbei ist, dass durch die GOCE-Flugbahn mit einer Inklination von 96.5° polare Gebiete nicht abgedeckt werden. Dies führt dazu, dass (nah-)zonale Koeffizienten nur mit eingeschränkter Genauigkeit bestimmt werden können. In einer Kombinationslösung, in die verschiedene Schwerefeldbeobachtungstypen eingehen, wird dieser Malus durch die Ergänzung mit Information aus den anderen Beobachtungsverfahren wie GRACE ausgeglichen. Wenn allerdings eine reine GOCE-Gradiometrie Lösung gerechnet werden soll, muss Vorinformation eingeführt werden. Eine Möglichkeit hierzu ist der Spherical Cap Ansatz nach Metzler & Pail (2005).

Die Bahn- und Gradiometriedaten der GOCE-Mission werden von der ESA zum freien Download zur Verfügung gestellt⁴. Eine ausführliche Beschreibung der Gradiometrie im GOCE-Fall findet sich in Rummel et al. (2011).

2.2.2 Satellitenaltimetrie

Primäres Beobachtungsobjekt der Satellitenaltimetrie ist nicht das Schwerefeld sondern die geometrische Meeresoberfläche. Ziel ist die Bestimmung der Meereshöhe über dem Ellipsoid, englischsprach-

⁴ <http://eo-virtual-archive1.esa.int/Index.html> (Stand: 22. Januar 2015)

chig „Sea Surface Height“ (SSH), welche jedoch im Weiteren zur Ableitung von Schwerfeldbeobachtungen genutzt werden kann, weswegen die Satellitenaltimetrie für die Schwerfeldbestimmung eine wichtige Rolle spielt. Seit dem Start der ersten Mission GEOS-3 (Stanley, 1975) im Jahre 1975 gab es eine Vielzahl von weiteren Missionen, wie die TOPEX/Poseidon (Fu et al., 1994) und Jason-1 (Escudier et al., 2000) Missionen, oder auch die ERS-1 (Francis, 1984), ERS-2 (Francis et al., 1995) und ENVISAT (Resti et al., 1999) Missionen, welche allerdings keine reinen Altimetrie-, sondern u.a. auch Fernerkundungsmissionen waren. Heute aktive Missionen sind beispielsweise die Jason-2 (CNES/NASA; Bannoura et al., 2005), HY-2A (China; Xiaolong et al., 2004) oder die Cryosat Mission (ESA; Drinkwater et al., 2004).

Betrachten wir zunächst die Bestimmung der Meereshöhen, die nach einem im Grunde einfachen Prinzip geschieht.

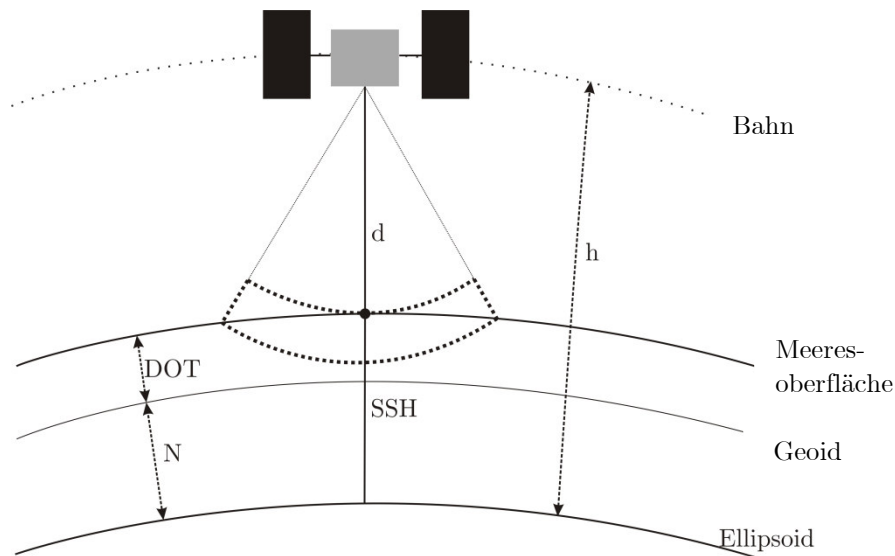


Abb. 2.8: Das Prinzip der Satellitenaltimetrie.

Der Satellit sendet Radarpulse in radialer Richtung aus, welche von der Meeresoberfläche reflektiert werden. Die reflektierten Pulse werden wiederum vom Satelliten empfangen und aus der Laufzeit der Pulse Δt und der Lichtgeschwindigkeit c lässt sich der Abstand d zwischen dem Satelliten und der Meeresoberfläche bestimmen

$$d = \frac{1}{2} c \Delta t . \quad (2.58)$$

Mit der ellipsoidischen Höhe h des Satelliten, die mit GPS oder DORIS („Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite“; siehe z.B. Seeber (2003)) gemessen wird, lässt sich die Meereshöhe bestimmen mit

$$SSH = h - d . \quad (2.59)$$

Aus der Differenz der Meereshöhe zur Geoidhöhe ergibt sich wiederum die dynamische Ozeantopographie

$$DOT = SSH - N . \quad (2.60)$$

Die Mittelung der DOT über mehrere Jahre hinweg liefert überdies die mittlere dynamische Meerestopographie (MDT), und die Differenz aus beiden

$$\xi = DOT - MDT \quad (2.61)$$

ist folglich der zeitvariable Anteil der dynamischen Ozeantopographie.

Die Bestimmung des Abstands d nach Gleichung (2.58) vernachlässigt allerdings eine Reihe von Korrekturen

$$d_c = d - c_{wtr} - c_{dtr} - c_{io} - c_{ssb} - c_t - c_{ib}, \quad (2.62)$$

die nach Mercier et al. (2010) angebracht werden müssen, um ein korrektes Ergebnis zu erhalten (folglich sollte in Gleichung (2.59) auch d_c verwendet werden und nicht d). Dies sind zum Einen Korrekturen, die sich durch Laufzeitverzögerungen des Pulses im feuchten und trockenen Anteil der Troposphäre (c_{wtr} und c_{dtr}) sowie der Ionosphäre ergeben (c_{io}), zum anderen Gezeiteneffekte c_t , die sich wiederum zusammensetzen aus Erd-, Ozean- und Polgezeiten. Außerdem zu berücksichtigen ist die Korrektur des inversen Barometereffekt (c_{ib}), einem hydrostatischen Ausgleich von Luftdruckschwankungen durch den Meeresspiegel und die Korrektur auf Grund des Sea State Bias (Seegangfehler c_{ssb}), der Verfälschung des Radarechos durch Seegang. Die Korrekturen werden teils aus Modellen bestimmt, teils werden sie direkt am Satelliten mit Hilfe von zusätzlichen Instrumenten gemessen. Im Rahmen der Cryosat-Mission werden die Korrekturen dem Nutzer in einem Produkt gemeinsam mit den Messungen zur Verfügung gestellt.

Die Bestimmung von d wird nicht nur durch die notwendigen Korrekturen erschwert, sondern vor allem dadurch, dass der Radarpuls als Wellenfront emittiert wird, die sich mit zunehmendem Abstand vom Satelliten räumlich ausdehnt (vergleiche Abb. 2.8). So trifft der Puls nicht zu einem festen Zeitpunkt an einer festen Stelle auf dem Meeresspiegel auf und wird als eine Reflektion am Satelliten detektiert, sondern er trifft innerhalb eines gewissen Zeitraums auf einer mehrere Kilometer umfassenden Fläche auf, so dass eine Vielzahl von Reflektionen entstehen, die nacheinander am Satelliten detektiert werden.

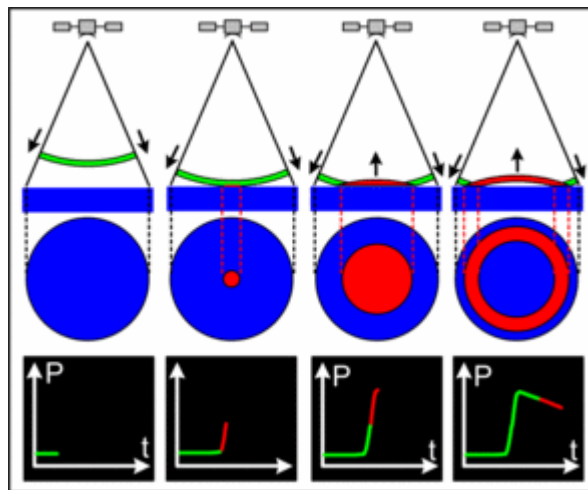


Abb. 2.9: Abdruck des Radarpulses auf der Meeresoberfläche und Entstehung der Wellenform nach Brown (Quelle: AVISO⁵).

Diese Reflektionen folgen einem bestimmten Muster, das durch ein mathematisches Modell nach Brown beschrieben (Brown, 1977) und darum Brown-Wellenform genannt wird. Abb. 2.9 stellt dar, wie der Radarpuls auf der Meeresoberfläche auftritt und wie die entsprechende Wellenform aussieht, die am Detektor aufgezeichnet wird. Eine Beschreibung, wie aus einer solchen Brown-

⁵ von: www.aviso.oceanobs.com/en/altimetry/principle/pulses-and-waveforms.html (Stand: 04. September 2012)

Wellenform die Pulslaufzeit Δt bestimmt wird, liefern Andersen et al. (2010) oder Sandwell & Smith (2009). In einem sogenannten Retracking-Schritt wird ein Modell an die detektierte Wellenform angepasst, was hier beispielhaft für einen detektierten Radarpuls der Cryosat Mission vom 21. Februar 2012 in Abb. 2.10 dargestellt ist, für welchen das zugehörige Modell von Horvath et al. (2011) berechnet wurde. Aus einem solchen Modell lassen sich direkt drei Parameter bestimmen, die im Wesentlichen die Wellenform beschreiben. Dies ist zum einen die Amplitude der Welle A_{wave} , die Ankunftszeit t_0 (=jener Zeitpunkt, zu dem die Hälfte der Amplitude erreicht ist), sowie die Anstiegszeit t_σ , die die Dauer des Anstiegs, bis t_0 erreicht ist, beschreibt (vergleiche Abb. 2.10). Aus t_0 und t_σ kann direkt die Pulslaufzeit bestimmt werden, und somit die Meereshöhe SSH.

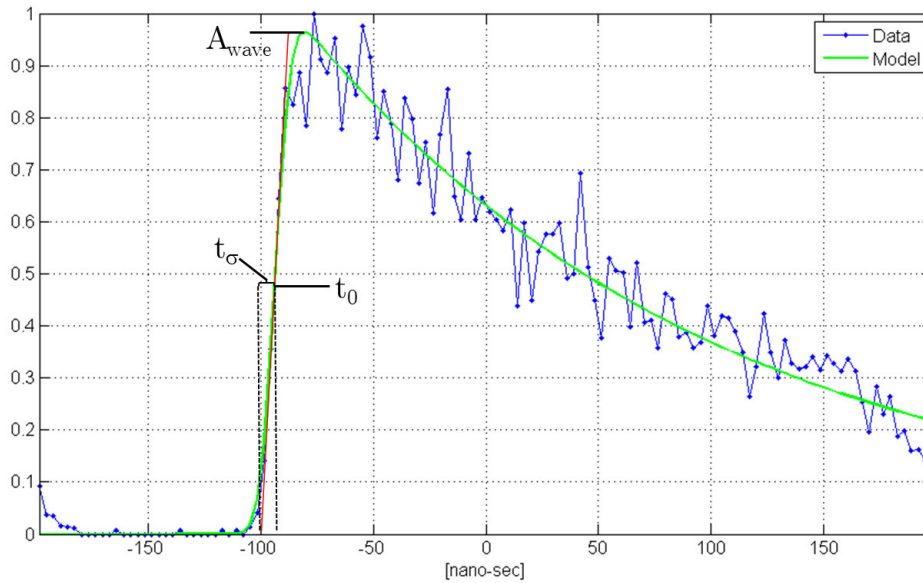


Abb. 2.10: Radarpuls der Cryosat Mission (21.02.2012) und angepasstes Wellenformmodell.

Aus der Meereshöhe SSH können Schwerefeldbeobachtungen abgeleitet werden. Dies ist ein aufwendiger Vorgang, der in Andersen et al. (2010) und Andersen & Knudsen (1998) beschrieben wird, woraus die wichtigsten Schritte hier kurz zusammengefasst sind. Aus den Gleichungen (2.60) und (2.61) erhält man

$$SSH = N + MDT + \xi = N_{\text{mod}} + \Delta N + MDT + \xi, \quad (2.63)$$

wobei die Geoidhöhe N hier aufgeteilt werden kann in einen bekannten Anteil N_{mod} und einem residualen Anteil ΔN . N_{mod} und MDT können aus Modellen entnommen werden und somit kann SSH um diese reduziert werden. Die unbekanntesten zeitvariablen Anteile ξ lassen sich (näherungsweise) eliminieren im Zuge einer Interpolation der Beobachtungen auf ein regelmäßiges Gitter, wofür Kollokationsmethoden unter Verwendung einer speziell zu diesem Zweck entwickelten Kovarianz-Funktion genutzt werden. Es verbleibt der residuale Geoidanteil, der über die Gleichungen (2.22) und (2.24) mit der Schwereanomalie verbunden ist. Dieser kann nach Schwarz et al. (1990) unter Anwendung von FFT-Techniken im Frequenzbereich u, v in Schwereanomalien umgewandelt werden

$$\delta \Delta g(u, v) = \omega_f \gamma \Delta N(u, v) F(\omega_f). \quad (2.64)$$

Bei $\Delta N(u, v)$ und $\delta \Delta g(u, v)$ handelt es sich um die *Fourier*-Transformierten der residualen Geoidhöhen ΔN und der residualen Schwereanomalien $\delta \Delta g$. Bei $F(\omega_f)$ handelt es sich um eine Wiener-Filter-Funktion, welche an dieser Stelle verwendet wird, da Gleichung (2.64) einer Differentiation

entspricht, welche verstärkend auf Rauschanteile in den Beobachtungen wirkt, und $\omega_f^2 = u^2 + v^2$. Da nur der residuale Geoidanteil transformiert wird, müssen die resultierenden residualen Schwereanomalien um einen Modellanteil Δg_{mod} ergänzt werden. Das Ergebnis sind Schwereanomalien, die über die sphärisch harmonische Reihe direkt mit sphärisch-harmonischen Koeffizienten verbunden werden können. Alternativ existieren weitere Verfahren, um Schwereanomalien aus altimetrischen Messungen zu bestimmen, welche u.a. in Sandwell & Smith (1997) beschrieben werden.

Altimetrisch abgeleitete Schwereanomalien sind für die Schwerefeldbestimmung geeignet, da sie über hervorragende Eigenschaften verfügen. So ist ihr Signalgehalt im Gegensatz zu den oben genannten Satellitenverfahren nicht auf bestimmte spektrale Bereiche beschränkt, sondern er beschreibt das volle Schwerefeldsignal. Außerdem liefert die Altimetrie einen Satz konsistenter Schwerefeldbeobachtungen, der den gesamten Ozeanbereich abdeckt, und somit ungefähr 70% der Erdoberfläche. Nachteil ist allerdings folglich, dass mit Altimetrie keine globale Abdeckung erreicht werden kann.

Die Produkte der Altimetriemissionen werden in der Regel von den Missionsbetreibern zum Download angeboten, z.B. im Falle der Cryosat Mission von der ESA⁶. Teilweise stellen Institutionen, die auf Basis solcher Daten altimetrische Schwereanomalien erstellen, diese zur freien Verfügung. Ein Beispiel für einen solchen Datensatz sind die Schwereanomalien der Danmarks Tekniske Universitet (DTU)⁷.

2.2.3 Terrestrische Schwerefeldmessungen

Eine Form der terrestrischen Schwerefeldmessung sind punktweise Messungen mit dem Gravimeter, dem ältesten und am längsten etablierten Verfahren zur Beobachtung des Schwerefelds, dessen theoretisches Konzept laut Torge (1989) gar bis ins 17./18. Jahrhundert zurückverfolgt werden kann. Es wird unterschieden zwischen Absolut- oder Relativgravimetrie, je nachdem, ob ein absoluter Schwerewert bestimmt werden kann, oder eine Schweredifferenz zwischen Messpunkten. Eine zusammenfassende Übersicht über die Vielzahl an verschiedenen Messverfahren findet sich z.B. in Torge & Müller (2012). Ein modernes, absolutes Verfahren, das sogenannte Freifallexperiment, soll hier kurz erläutert werden nach Torge (1989).

Das Freifallexperiment basiert auf der oben schon mehrfach erwähnten und angewandten Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{x}}(P) = \nabla W(P) = \mathbf{g}(P). \quad (2.65)$$

Angenommen, die Bewegung einer frei fallenden Testmasse erfolge entlang der z-Achse, so genügt die Betrachtung der Gleichung

$$\ddot{z}(P) = g(P), \quad (2.66)$$

welche nach zweifacher Integration

$$z(P) = z_0(P) + \dot{z}_0(P)t + \frac{1}{2}g(P)t^2 \quad (2.67)$$

ergibt, mit den Integrationskonstanten z_0 und \dot{z}_0 . Nimmt man an, dass sich g in der Messumgebung nicht verändert, also konstant ist, so können bereits durch die Beobachtung der Testmasse an

⁶ <https://earth.esa.int/web/guest/-/how-to-access-cryosat-data-6842> (Stand: 22. Januar 2015)

⁷ http://www.space.dtu.dk/English/Research/Scientific_data_and_models/downloaddata.aspx (Stand: 22. Januar 2015)

drei Punkten $z(P_i)$ entlang der z-Achse zum jeweiligen Zeitpunkt t_i die Integrationskonstanten eliminiert und die Schwere bestimmt werden mit

$$g = 2 \frac{(z(P_3) - z(P_1))(t_2 - t_1) - (z(P_2) - z(P_1))(t_3 - t_1)}{(t_3 - t_1)(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}. \quad (2.68)$$

Liegen Beobachtungen zu mehr als drei Zeitpunkten vor, so kann g in einem Ausgleichungsansatz bestimmt werden. Moderne Absolutgravimeter berücksichtigen natürlich zusätzlich die Veränderung von g innerhalb der Messumgebung, auch diese ist erläutert in Torge (1989). Schweremessungen sind einer Vielzahl von äußeren Einflüssen ausgesetzt, die eine Reihe von Korrekturen bzw. Reduktionen erfordern, um keine verfälschten Beobachtungen zu erhalten. So müssen sowohl Erd- und Ozeangezeiten als auch der Effekt der Polbewegung aus den Messungen eliminiert werden. Außerdem muss der Einfluss von Luftdruckschwankungen berücksichtigt werden.

Auf Grund der hohen Kosten eines Absolutgravimeters und der Tatsache, dass diese nicht einfach zu transportieren sind, finden sehr häufig Relativgravimeter Anwendung, welche deutlich günstiger, kleiner und leichter zu transportieren sind. Hier wird auf Basis des Federwaageprinzips (eine Änderung der Schwere führt zu einer Änderung der Federlänge) der Schwereunterschied zwischen zwei Beobachtungspunkten bestimmt (Torge & Müller, 2012).

Gravimetrische Messungen erfassen das volle Schwerefeldsignal am Beobachtungsort. In der Regel wird innerhalb einer Messkampagne ein Satz von Messungen in einem lokalen Gebiet bestimmt, auf dessen Basis ein lokales Schwerefeld in Form von Schwereanomalien berechnet werden kann. Dieses lokale Schwerefeld kann z.B. repräsentiert werden in Form von Blockmittelwerten, welche durch einfache Mittelung oder auch mit Hilfe von Kollokation (Moritz, 1980) bestimmt werden können.

Möchte man mit Hilfe von gravimetrischen Messungen Gebiete mit einer größeren räumlichen Ausdehnung untersuchen, oder möchte man Untersuchungen in einem Gebiet anstellen, das über den Landweg schwer zu erkunden ist, kann man gravimetrische Messungen auf einem Flugzeug (oder auch einem Schiff) ausführen. Diese Messungen auf einer sogenannten bewegten Plattform sind um ein Vielfaches komplizierter als statische Messungen. Dies liegt vor allem daran, dass die Plattform kinematische Beschleunigungen erfährt, welche im Folgenden von den gravitativen Beschleunigungen getrennt werden müssen. Für eine ausführliche Beschreibung von Messungen auf bewegten Plattformen sei verwiesen auf Schwarz (2006) oder Torge & Müller (2012). Mit der Messung der Schwere vom Flugzeug aus ist überdies eine Dämpfung des Schwerefeldsignals verbunden, da dieses mit der Entfernung von der Erdoberfläche abnimmt.

Terrestrische Schwerefeldmessungen aus gravimetrischen Verfahren sind nach wie vor eine fundamentale Art der Schwerefeldbeobachtung, da sie im Gegensatz zu den Schwerefeldsatellitenmissionen das volle Schwerefeldsignal – auch bei Messungen vom Flugzeug aus ist der Signalinhalt höher als bei Satellitenmessungen – wiedergeben. Ihr großer Nachteil ist, dass man eine Vielzahl von Einzeldatensätzen benötigt, um eine globale Abdeckung (in Kombination mit der altimetrischen Schwere) zu erreichen. Da die Einzeldatensätze zueinander sehr inkonsistent sind, können die langwelligen Schwerefeldanteile aus terrestrischen Messungen nur sehr schlecht bestimmt werden. Die Problematik der Konsistenz wird in Kapitel 2.3 ausführlich behandelt.

Im Gegensatz zu den Beobachtungen der Schwerefeldsatellitenmissionen, die der breiten wissenschaftlichen Gemeinschaft durch die jeweiligen Missionsbetreiber zur Verfügung gestellt werden, sind terrestrische Schweremessungen, bzw. die daraus abgeleiteten Schwereanomalien schwierig zu erlangen, da sie in der Regel von den jeweiligen Institutionen, welche die Messkampagnen betreiben, nicht frei zur Verfügung gestellt werden. Allerdings gibt es auch Ausnahmen. Die im Rahmen des

Arctic Gravity Project (ArcGP) erstellten Block-Schwereanomalien stehen beispielsweise frei zum Download zur Verfügung⁸.

2.3 Konsistenz der Messungen – Reduktionen und Korrekturen

Nach der Beschreibung der wichtigsten Verfahren, mit denen sich das Erdschwerefeld beobachten lässt, soll es im Folgenden um die Konsistenz der daraus erhobenen Daten gehen. Die Messungen der Schwerefeldsatellitenmissionen sind in sich selbst konsistent bzw. zumindest von sehr hoher Konsistenz, da es auch hier passieren kann, dass während einer Mission Änderungen in der Prozesskette zur Erzeugung der Daten vorgenommen werden. Für diesen Fall wird jedoch in der Regel mit einheitlichen Standards reprozediert, wie z.B. im Falle der unterschiedlichen Versionen der GRACE-Zeitreihen des GFZ (siehe z.B. Dahle et al., 2013) oder im Falle der von der ESA zur Verfügung gestellten GOCE-Daten, welche nach einer Modifikation in der Prozesskette (Stummer et al, 2012) reprozediert wurden. Anders verhält es sich mit den Beobachtungen aus terrestrischen Schweremessungen, da in sich konsistente Datensätze nur regional vorliegen und somit mehrere Datensätze kombiniert werden müssen, um eine hohe räumliche Abdeckung zu erzielen. Um Konsistenz der terrestrischen Schwerewerte zu erhalten, bedarf es grundsätzlich einiger Reduktionen und Korrekturen, die im Folgenden erläutert werden sollen. In Kapitel 6.1 folgen numerische Untersuchungen, welche klären sollen, wie groß der Einfluss dieser Korrekturen und Reduktionen auf eine kombinierte Schwerefeldlösung ist.

2.3.1 Permanente Gezeiten

Jede gravimetrische Messung wird, wie im Abschnitt 2.2.3 bereits erwähnt, von der Gezeitenkraft beeinflusst. Diese setzt sich zusammen aus einem direkten und einem indirekten Anteil, wobei Ersterer die direkt durch Mond und Sonne verursachten Beschleunigungen relativ zum Massenzentrum der Erde beschreibt. Der indirekte Anteil dahingegen ist ein Effekt, der durch die Verformung der Erdoberfläche in Folge der Anziehung durch Sonne und Mond entsteht. Da sich die relative Lage von Sonne, Mond und Erde zueinander fortlaufend verändert, setzen sich die Gezeiten zudem aus einem konstanten und einem zeitvariablen Anteil zusammen. Während sich der zeitabhängige Anteil theoretisch durch eine Vielzahl von Messungen über einen längeren Zeitraum herausmitteln würde, ist die Wirkung des konstanten Anteils permanent, weswegen dieser Anteil als permanente Gezeiten bezeichnet wird. Die permanenten Gezeiten drücken sich in einem dauerhaften direkten und indirekten Beschleunigungsanteil aus. Die permanente Verformung der Erde in Folge der Gezeiten wurde erstmals in Darwin (1899) beschrieben.

Grundsätzlich können alle Gezeitenbeschleunigungen direkt aus den gravimetrischen Messungen entfernt werden. Da allerdings die permanenten Gezeiten durch ihre konstante Wirkung einen immerwährenden Einfluss darstellen, entfernt man sich durch ihre Eliminierung von den wahren natürlichen Verhältnissen. Folglich wurden Modelle entwickelt, welche die Beschreibung der Beobachtungen in verschiedenen permanenten Gezeitemsystemen ermöglichen, siehe z.B. Ekman (1989). Man unterscheidet hier zwischen drei Modellen:

Im Mean Tide System (MT) enthält jegliche Beobachtung die direkten und indirekten permanenten Gezeiten. Dieses System ist das realitätsnahste Modell, das wirkliche Geoid entspricht dem Geoid im Mean Tide System (Hughes & Bingham, 2008). Dies ist ein wesentliches Argument für dessen Nutzung und gerade aus diesem Grund werden in der Ozeanographie in der Regel sämtliche Größen in diesem System definiert. Von Nachteil ist, dass die *Laplace*-Bedingung (2.4) in diesem System

⁸ <http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/agp/index.html> (Stand: 22. Januar 2015)

nicht erfüllt wird, da sich mit Sonne und Mond Massen im Außenraum der Erde befinden. Dadurch können Schwerewerte in diesem System theoretisch nicht ohne weiteres für Schwerefeldberechnungen genutzt werden. Eine Möglichkeit, dieses Problem zu lösen, wäre, das Normalfeld im Mean Tide System zu definieren. So würde in der Bildung der Differenz zwischen Schwere und Normalschwere der Gezeiteneinfluss eliminiert und die *Laplace*-Bedingung erfüllt werden.

Das Zero Tide System (ZT) ist so definiert, dass es nur den indirekten Anteil der permanenten Gezeiten enthält, der direkte Anteil ist eliminiert. Die Anziehung geht bei dieser Definition also rein vom Erdkörper aus, was bedeutet, dass in diesem System die *Laplace*-Bedingung erfüllt wird. Das Zero Tide System stellt somit einen Kompromiss dar, da zumindest ein Teil der permanenten Gezeiten enthalten ist und gleichzeitig die *Laplace*-Bedingung erfüllt wird.

Im Tide Free System (TF) sind die permanenten Gezeiten vollständig eliminiert. Dieses System erfüllt somit die *Laplace*-Bedingung, ist allerdings am weitesten von der Realität entfernt. Das Tide Free System kann nur näherungsweise realisiert werden, da die Verformung der Erde nicht exakt bekannt ist und nur ungefähr mit Hilfe der sogenannten *Love*-Zahlen beschrieben werden kann.

Alle drei Systeme verfügen über Vor- und Nachteile, so dass nicht eindeutig gesagt werden kann, welches System das Beste ist. Es ist mehr eine philosophische Entscheidung, ob man näher an der perfekten Theorie oder der Realität arbeiten möchte. Im Schwerefeldbereich wird meist das Zero Tide oder Tide Free Modell verwendet.

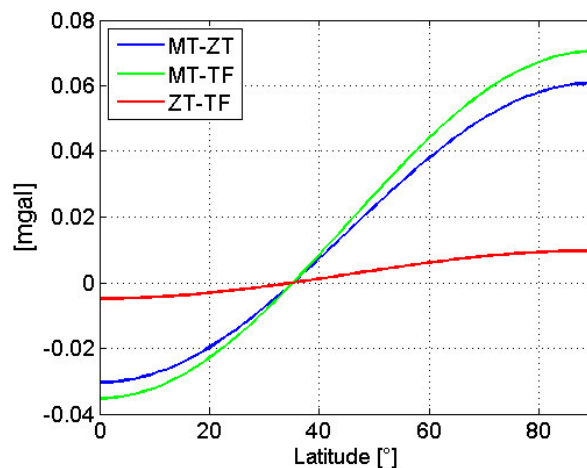


Abb. 2.11: Breitenabhängige Transformation der Schwere zwischen verschiedenen Gezeitensystemen [mgal].

Wichtig für die Schwerefeldberechnung ist, dass alle verfügbaren Schweredatensätze in dasselbe Modell transformiert werden. Ekman (1989) können Gleichungen zur direkten Transformation von Schwerewerten zwischen den Gezeitensystemen entnommen werden

$$\begin{aligned}
 g_{MT} - g_{ZT} &= (-30,4 + 91,2 \sin^2 \varphi) \cdot 10^{-3} \quad [mgal] \\
 g_{MT} - g_{TF} &= (-30,4 + 91,2 \sin^2 \varphi) \cdot 1,16 \cdot 10^{-3} \quad [mgal], \\
 g_{ZT} - g_{TF} &= (-30,4 + 91,2 \sin^2 \varphi) \cdot 0,16 \cdot 10^{-3} \quad [mgal]
 \end{aligned}
 \tag{2.69}$$

was die Angleichung verschiedener Datensätze ermöglicht. Abb. 2.11 stellt die Transformationswerte in Abhängigkeit der Breite dar. Am größten sind die Werte an den Polen, auch am Äquator werden hohe Werte erreicht. Knapp über 35° werden die Werte zu Null, sprich, für diesen Breitengrad ist keine Transformation zwischen den Gezeitensystemen notwendig. Da die Transformation rein brei-

tenabhängig ist, unterscheiden sich sphärisch-harmonische Schwerefeldmodelle in verschiedenen Gezeitensystemen nur hinsichtlich ihrer zonalen Koeffizienten. In Petit & Luzum (2010) ist ersichtlich, dass der Anteil der permanenten Gezeiten in \bar{C}_{20} enthalten ist.

Abschließend ist zu erwähnen, dass bei der Thematik der Konsistenz der Einzeldatensätze auch das Gezeitensystem der Beobachtungen von Schwerefeldsatellitenmissionen berücksichtigt werden muss. Da der langwellige Anteil des Schwerefelds durch dieses geprägt wird, empfiehlt sich eine Anpassung an dieses Gezeitensystem.

2.3.2 Atmosphäre

Beobachtungen des Erdschwerefelds werden von der Atmosphäre durch deren Anziehungskräfte beeinflusst. Dadurch ist der Außenraum der Erde nicht massenfrei und die *Laplace*-Bedingung wird nicht erfüllt. Da die Anziehung der Atmosphärenmassen verhältnismäßig klein ist, kann dieses Problem mit Hilfe eines einfachen Modells gelöst werden. Dieses Modell wird in Moritz (1980) erläutert und soll an dieser Stelle wiedergegeben werden.

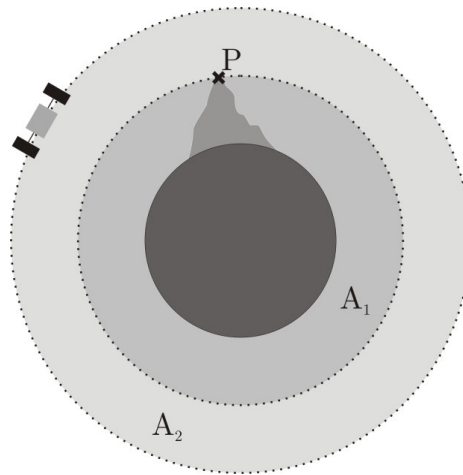


Abb. 2.12: Kugelförmiges Atmosphärenmodell.

Man vernachlässigt die Abplattung und Topographie der Erde und nimmt diese als kugelförmig an, wodurch folgt, dass die Atmosphärenschichten als symmetrische Schichten um die Erdkugel angeordnet sind. Der aus der Atmosphäre resultierende Einfluss auf einen Messpunkt P (vergleiche Abb. 2.12; P sitzt auf der Topographie, die im Modell vernachlässigt wird) setzt sich dann zusammen aus

$$g_A(P) = g_1(P) + g_2(P), \quad (2.70)$$

wobei g_1 die Schwerewirkung der Atmosphärenschicht A_1 und g_2 die der Schicht A_2 ist. Aus Heiskanen & Moritz (1967) kann entnommen werden, dass die Anziehung einer Kugelschale auf einen Punkt innerhalb der Kugelschale null ist und dass die Schwerewirkung einer Kugel im Außenraum als Punktmasse beschrieben werden kann. Folglich gilt

$$g_A(P) = g_1(P) = \frac{Gm_{A_1}}{r^2}, \quad (2.71)$$

mit der Masse m_{A_1} der Atmosphärenschicht A_1 . Alternativ könnte man Gleichung (2.71) auch ausdrücken mit

$$g_A(P) = \frac{GM_A}{r^2} - \frac{Gm_{A_2}}{r^2}, \quad (2.72)$$

wobei m_{A_2} die Masse der Atmosphärenschicht A_2 beschreibt und es gilt $M_A = m_{A_1} + m_{A_2}$. In diesem Fall wird die Anziehung g_A durch die Differenz der Gesamtanziehung der Atmosphäre und der Anziehung der äußeren Atmosphärenschicht beschrieben. Moritz (1980) schreibt weiter, dass man sich die Gesamtanziehung der Atmosphäre als ins Erdinnere hineinreduziert vorstellen kann, was der Fall ist, wenn man die Atmosphärenmasse als Teil der Masse des Normalfelds definiert, was der Regelfall ist. Des Weiteren muss sichergestellt werden, dass auf jeden Beobachtungspunkt die volle (in die Erde reduzierte) Atmosphärenmasse wirkt. Wie Abb. 2.12 zu entnehmen ist, ist dies nur für den Satelliten außerhalb der Atmosphäre der Fall. Für einen Messpunkt auf der Topographie wird der rechte Term von (2.72) als Atmosphärenkorrektur

$$\delta g_A(P) = \frac{Gm_{A_2}}{r^2} \quad (2.73)$$

eingeführt. Wird er auf eine Schwerebeobachtung addiert, so ist diese abhängig von der vollen in die Erde reduzierten Anziehung der Atmosphärenmassen.

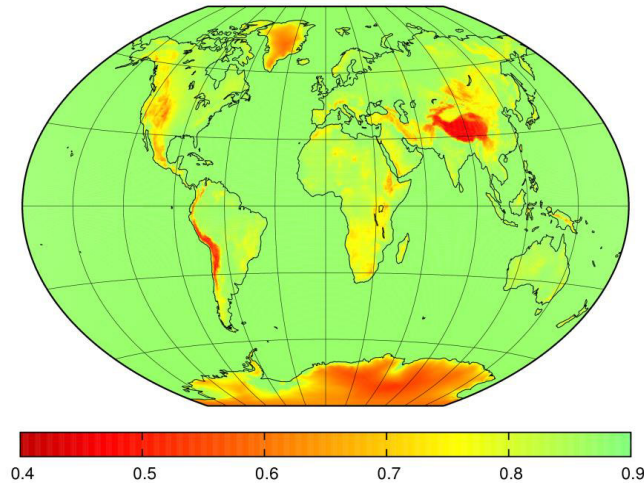


Abb. 2.13: Atmosphärenkorrektur global [mgal].

Dieser Ansatz löst das oben beschriebene Problem und führt zudem dazu, dass die Messungen vom Satelliten aus mit den terrestrischen Messungen vergleichbar sind. Wenzel (1985) liefert eine Approximationsformel, mit der die Atmosphärenkorrektur einfach berechnet werden kann mit h , der ellipsoidischen Höhe:

$$\delta g_A(P)[mgal] = 0,874 - 9,9 \cdot 10^{-5} \cdot h[m] + 3,5625 \cdot 10^{-9} \cdot h^2[m]. \quad (2.74)$$

Abb. 2.13 zeigt die Atmosphärenkorrektur, wie sie sich global ergeben würde, wenn man davon ausgeht, überall Schwerfeldbeobachtungen auf der Topographie vorliegen zu haben. Die Korrektur ist gemäß (2.74) auf Meereshöhe am höchsten. Umso weiter man sich von der Erdoberfläche entfernt, umso kleiner wird auch die Korrektur.

2.3.3 Richtungsableitung

In Kapitel 2.1 wurde der grundlegende theoretische Formelapparat für diese Arbeit dargestellt. Die Funktionale des Schwerfelds wurden an dieser Stelle zumeist in sphärischen Koordinaten wiedergegeben, wie es für die Darstellungen in Form von sphärisch-harmonischen Reihen zweckmäßig ist.

Auch die Ableitungen der Schwerefeldfunktionale erfolgte nach sphärischen Koordinaten. Dies wird z.B. deutlich in der Definition der Schwereanomalie (vgl. Gleichung (2.24))

$$\Delta g(P) = -\frac{\partial T(P)}{\partial r} - \frac{2}{R}T(P), \quad (2.75)$$

bei der die Richtungsableitung in sphärische Richtung erfolgt. Die sphärische Richtungsableitung vernachlässigt allerdings die Abplattung des Referenzellipsoids und ist folglich ungenau. Dies wird in Abb. 2.14 deutlich, in welcher der wahre Schwerevektor \mathbf{g}_{ell} dargestellt ist und ein Schwerevektor \mathbf{g}_{rad} , wie er durch radiale Richtungsableitungen entsteht.

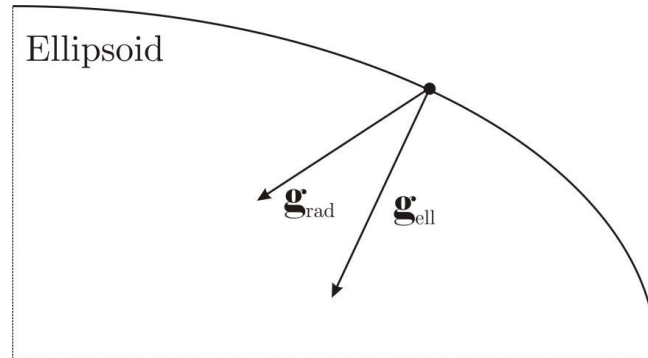


Abb. 2.14: Realer Schwerevektor und Schwerevektor aus sphärischen Richtungsableitungen.

Schwerefeldgrößen, die aus sphärischen Richtungsableitungen entstehen, sind demnach eigentlich nur Näherungsgrößen. Die strenge Definition der Schwereanomalie lautet nach Heiskanen & Moritz (1967)

$$\Delta g_e(P) = -\frac{\partial T(P)}{\partial h} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T(P). \quad (2.76)$$

Da allerdings der sphärische Formalapparat verhältnismäßig einfach ist und sich somit sehr gut zur Schwerefeldprozessierung eignet, soll dieser wie oben eingeführt weiter Verwendung finden. Aus diesem Grund wird eine ellipsoidische Reduktion notwendig, die als Korrektur an die Schwereanomalie angebracht werden kann und diese somit mit dem sphärischen Formelapparat verbindet. Moritz (1980) schlägt zu diesem Zweck vor, die ellipsoidische Größe in eine Reihe zu entwickeln mit Bezug zu einem Parameter, der die Abplattung des Ellipsoids charakterisiert. Da die Terme dieser Reihe schnell sehr klein werden, können diese ab dem quadratischen Term vernachlässigt werden und wir erhalten

$$\Delta g_e(P) = \Delta g(P) + e^2 \Delta g^1(P) \quad (2.77)$$

mit der Exzentrizität e des Ellipsoids, welche aus der großen und der kleinen Halbachse des Ellipsoids mit

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (2.78)$$

berechnet werden kann. Die ellipsoidische Korrektur wird in Gleichung (2.77) durch $e^2 \Delta g^1(P)$ beschrieben, dem linearen Reihenterm der Entwicklung.

Nach Pavlis (1988) und Rapp & Pavlis (1990) ist es zweckmäßig die ellipsoidische Korrektur als Summe aus den drei Korrekturtermen ε_h , ε_γ und ε_p darzustellen. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_h(P) &= e^2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{\partial T(P)}{r \partial \theta} \right) \\
 \varepsilon_\gamma(P) &= \left(6J_2 \frac{R^2}{r^3} P_2(\cos \theta) - \frac{3\omega^2 r^2}{GM} \sin^2 \theta \right) T \\
 \varepsilon_p(P) &= \left(\frac{3J_2 a^2}{r^2 e^2} + \frac{\omega^2 r^3}{e^2 GM} \right) \varepsilon_h(P)
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

mit dem (nicht-normierten) Normalfeldkoeffizienten J_2 und dem (ebenfalls nicht-normierten) *Legendre*-Polynom $P_2(\cos \theta)$. Wie man sehen kann sind die Gleichungen in (2.79) vom Störpotential abhängig, d.h. es muss für eine globale Bestimmung der Korrektur ein Schwerefeldmodell als Vorinformation eingeführt werden.

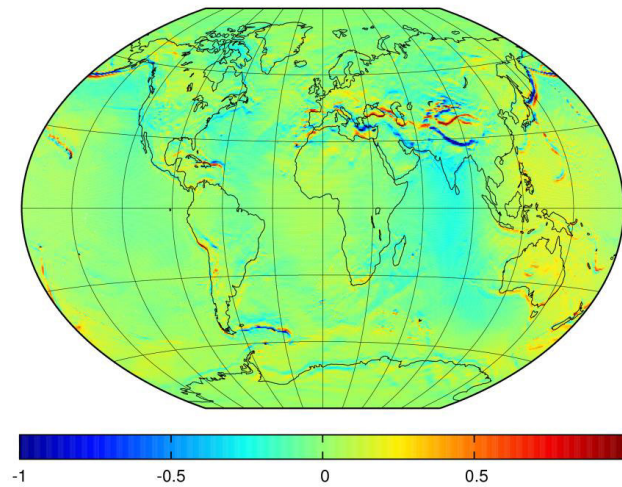


Abb. 2.15: Ellipsoidische Korrektur $\varepsilon_h + \varepsilon_\gamma + \varepsilon_p$ [mgal].

Pavlis (1988) liefert auch eine Darstellung der drei Korrekturterme in Form von sphärisch-harmonischen Reihenentwicklungen, auf deren Wiedergabe hier auf Grund ihrer Komplexität verzichtet wird. In Gruber (2000) ist das Integral über die Korrekturterme dargestellt, welches man für die Behandlung von Blockmittelwerten benötigt. In Abb. 2.15 ist die ellipsoidische Korrektur nach Gleichung (2.79) global dargestellt. Die langwelligigen Strukturen ergeben sich aus dem Term ε_γ , die dominierenden kurzwelligen Strukturen aus den beiden anderen Termen.

2.3.4 Normalschweregradient höherer Ordnungen

Gleichung (2.23) und Abb. 2.3 beschreiben die Schwereanomalie (bzw. den Schwereanomalienvektor) als Differenz der Schwere auf der Erdoberfläche (Messpunkt) und der Normalschwere am Telluroid bzw. als Differenz der Schwere auf dem Geoid und der Normalschwere auf dem Ellipsoid. Die Bildung der Schwereanomalie erfordert somit im ersten Fall die Normalschwere vom Ellipsoid auf das Telluroid zu bringen und im letzteren die Reduktion der Schwere vom Messpunkt auf das Geoid. Wir betrachten im Folgenden den Fall, dass die Normalschwere auf das Telluroid reduziert wird, wobei der andere Fall analog berechnet werden kann. Die Reduktion geschieht nach Heiskanen & Moritz (1967) in der Regel mit Hilfe des Produkts aus dem Normalschweregradienten $\partial\gamma/\partial h$ und der Höhe h durch

$$\gamma(Q) = \gamma_0(Q_0) + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial h} \right) h. \tag{2.80}$$

Bei Gleichung (2.80) handelt es sich um eine *Taylor*-Reihe, welche nach dem linearen Term abgebrochen wird, was zu einem Abbruchfehler führt. Bei Q handelt es sich in diesem Fall um einen Punkt auf dem Telluroid, bei Q_0 um einen auf dem Ellipsoid. Für aktuelle Genauigkeitsansprüche darf nach Torge & Müller (2012) die Entwicklung erst nach dem kubischen Term abgebrochen werden,

$$\gamma(Q) = \gamma_0(Q_0) + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial h}\right)h + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial h^2}\right)h^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial h^3}\right)h^3 + \dots \quad (2.81)$$

Torge & Müller (2012) leiten aus Gleichung (2.81)

$$\gamma(Q) = \gamma_0(Q_0) \left(1 - \frac{2}{a} \left(1 + f + m_e - 2f \sin^2 \varphi \right) h + \frac{3}{a^2} h^2 - \frac{4}{a^3} h^3 \right) \quad (2.82)$$

ab, mit den Ellipsoidparametern a , f und m_e .

Wurde die *Taylor*-Reihe ursprünglich nach dem linearen Term abgebrochen, so können die höheren Terme aus Gleichung (2.82) als Korrekturterm für die Normalschweregradienten höherer Ordnungen eingeführt werden.

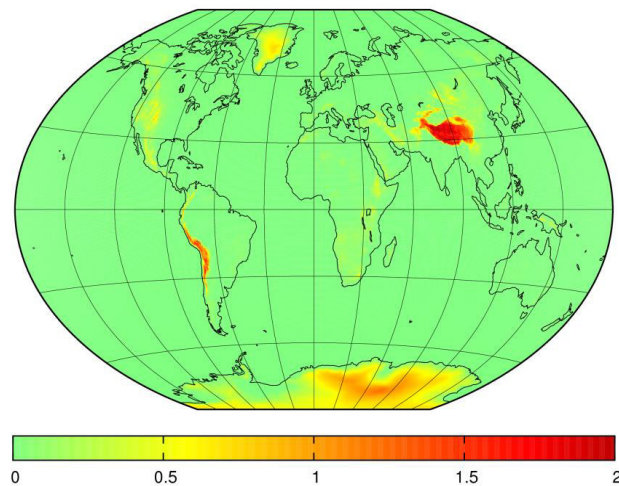


Abb. 2.16: Korrektur für Normalschweregradienten höherer Ordnung [mgal].

Abb. 2.16 stellt die Korrektur für Normalschweregradienten höherer Ordnung global dar. Die Korrektur ist auf Grund ihrer Höhenabhängigkeit logischerweise stark mit der Topographie korreliert und kann in Gebieten mit extremer Topographie Werte von über 2 mgal erreichen.

2.3.5 Analytische Fortsetzung der Schwereanomalien

Für die Berechnung eines Schwerefeldmodells unter Anwendung von Blockdiagonaltechniken ist es notwendig, dass die Schwereanomalien auf Nullhöhe vorliegen (siehe Kapitel 3.3.2.4; vergleiche Gruber (2000)). In Pavlis et al. (2012) wird ein Verfahren vorgestellt, mit welchem in einem iterativen Ansatz die analytische Fortsetzung der Schwereanomalienblockmittelwerte von der Oberfläche auf Nullniveau mittels

$$\overline{\Delta g}(\overline{P}_0) = \overline{\Delta g}(\overline{P}) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \overline{\Delta g}(\overline{P}_0)}{\partial h^k} h^k \quad (2.83)$$

erreicht wird, wobei h in diesem Fall der Blockmittelwert der ellipsoidischen Höhe ist. In dieser Arbeit, in der die Schwerefeldberechnung auf Basis von vollen Normalgleichungssystemen erfolgt, ist es nicht notwendig, die Schwereanomalien auf Nullniveau fortzusetzen, sie können direkt als Funktion der Höhe verwendet werden. Ein Schwerefeldmodell aus Oberflächen-Schwereanomalien sollte unter Verwendung von vollen Normalgleichungssystemen ein identisches Ergebnis produzieren wie ein Schwerefeldmodell, welches unter Verwendung von Blockdiagonaltechniken aus Schwereanomalien berechnet wurde, die von der Oberfläche durch die iterative Umsetzung von Gleichung (2.83) auf Nullhöhe fortgesetzt wurden. Das Ergebnis sollte jeweils ein Satz von sphärisch-harmonischen Koeffizienten sein, der kompatibel mit den Schwereanomalien auf der Erdoberfläche ist, allerdings nicht die wahren Schwereanomalien auf Nullniveau repräsentiert. Wie Pavlis et al. (2012) schreiben, zeigen jedoch Vergleiche von Schwerefeldmodellen, welche auf diese Art und Weise berechnet wurden, auffällige Residuen im Vergleich zu GRACE-Daten. In dieser Arbeit wurden Schwerefeldberechnungen angestellt, im Rahmen derer Schwereanomalien auf der Topographie verwendet wurden. Vergleicht man bandbegrenzte Schwereanomalien aus diesem Modell mit bandbegrenzten Schwereanomalien aus einer GRACE/GOCE-Kombinationslösung (Abb. 2.17 oben), so sind deutliche Residuen sichtbar, die Beobachtung aus Pavlis et al. (2012) kann also bestätigt werden.

In einem zweiten Ansatz verwenden Pavlis et al. (2012) für die analytische Fortsetzung

$$\overline{\Delta g}(\overline{P}_0) = \overline{\Delta g}(\overline{P}) + g_1, \quad (2.84)$$

was einem Abbruch von Gleichung (2.83) nach dem linearen Term entsprechen soll. Der g_1 -Term kann berechnet werden unter Verwendung der Krustendichte ρ mit

$$g_1 = -G\rho R^2 h_p \iint_{\sigma} \frac{h-h_p}{l_0^3} d\sigma. \quad (2.85)$$

Dabei ist l_0 der Abstand zwischen dem jeweiligen Berechnungs- und Integrationspunkt. In einer zweiten Schwerefeldberechnung wird dieser zweite Ansatz verwendet.

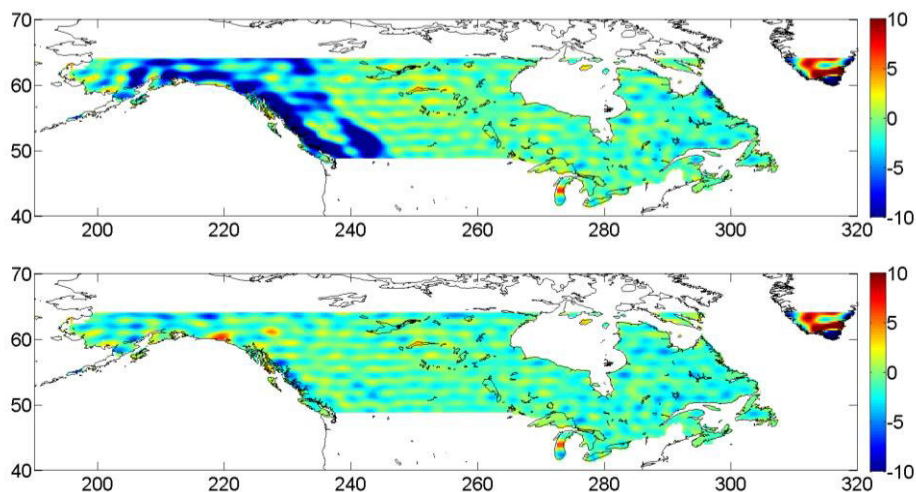


Abb. 2.17: Differenz in bandbegrenzten Schwereanomalien zwischen einer GRACE/GOCE-Kombination und Schwerefeldlösungen auf Basis terrestrischer Daten ohne (oben) und mit (unten) Verwendung von Gleichung (2.84) für das Gebiet von Kanada [mgal].

Ein erneuter Vergleich in bandbegrenzten Schwereanomalien zu einer GRACE/GOCE-Kombination (Abb. 2.17 unten) zeigt, dass die Residuen zur GRACE/GOCE-Kombination deutlich kleiner ge-

worden sind, eine Beobachtung, die sich wiederum mit Beobachtungen aus Pavlis et al. (2012) deckt.

Dieses Ergebnis ist überraschend, da dieser zweite Ansatz ungenauer sein sollte als der zu Beginn dieses Kapitels erläuterte Ansatz. Eine Erklärung könnte sein, dass Fehleranteile in den Schwereanomalien auf der Oberfläche im Rahmen einer analytischen Fortsetzung nach Gleichung (2.84) weniger stark verstärkt werden. Dieser Gedanke ist jedoch spekulativ und kann an dieser Stelle nicht belegt werden. Da der zweite Ansatz in Vergleichen mit GRACE/GOCE die besseren Ergebnisse erzielt, wird er für diese Arbeit verwendet.

Eine globale Darstellung des g_1 -Terms findet sich in Abb. 2.18. Naturgemäß ist er korreliert mit Gebieten von auffälliger Topographie.

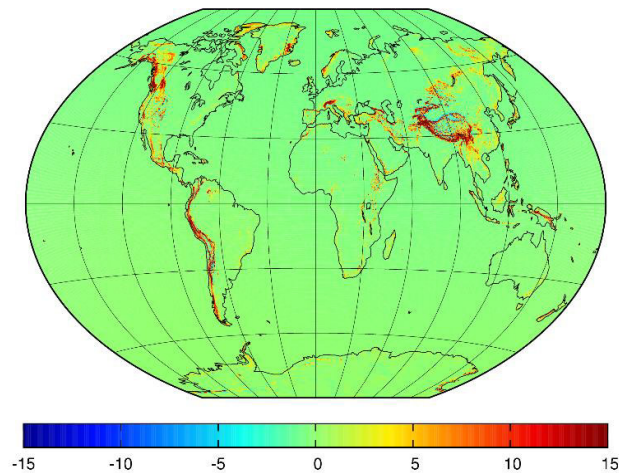


Abb. 2.18: g_1 -Term [mgal]⁹.

2.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden die wichtigsten physikalischen Grundlagen dieser Arbeit beleuchtet. Dies geschah untergliedert in die grundlegende Theorie, welche die Vorstellung der wichtigsten Schwerefeldgrößen beinhaltet, die Methoden zur Beobachtung des Schwerefelds und die Thematik der Konsistenz von terrestrischen Messungen.

Insbesondere wurde dargestellt, dass die unterschiedlichen Verfahren zur Beobachtung des Schwerefelds Messungen liefern, welche sich hinsichtlich ihrer spektralen Eigenschaften stark unterscheiden. So liefern die Messungen der Schwerefeldsatellitenmissionen hochgenaue Schwerefeldinformation im lang- bis mittelwelligen Bereich, können dafür jedoch kurzwellige Schwerefeldinformation nicht erfassen. Satellitenaltimetrie und terrestrische Verfahren detektieren das komplette Schwerefeldsignal, allerdings -zumindest im Falle der terrestrischen Verfahren- den langwelligen Anteil nur mit eingeschränkter Qualität. Um eine bestmögliche Schwerefeldlösung zu erhalten, müssen folglich verschiedenartige Beobachtungen miteinander kombiniert werden, um die Vorteile jedes Verfahrens nutzen zu können.

⁹ Quelle: Simon Holmes, persönliche Kommunikation

3 Mathematische Grundlagen der Schwerefeldbestimmung

Die Schwerefeldbestimmung stützt sich neben der physikalischen Theorie vor allem auf mathematische Methoden, welche im Fokus dieses Kapitels stehen.

Die sphärisch-harmonische Reihendarstellung (Kapitel 2.1) verknüpft den Spektral- mit dem Ortsraum, indem sie die Darstellung der Schwerefeldfunktionale aus den Schwerefeldkoeffizienten ermöglicht. In der Schwerefeldbestimmung wird dieser Vorgang umgekehrt, um die Schwerefeldkoeffizienten aus ihren Funktionalen zu bestimmen. Damit dies bei einer Vielzahl von Beobachtungen auf „bestmögliche“ Art erfolgt, werden Methoden der Ausgleichsrechnung verwendet, welche im Folgenden vorgestellt werden sollen. Hierbei wird auch die Verschiedenartigkeit der Beobachtungsverfahren berücksichtigt, so dass deren Eigenschaften optimal kombiniert werden.

Abschließend folgt die Erörterung einiger Herausforderungen, die im Rahmen der Ausgleichung auftreten, wie z.B. die Nicht-Orthogonalität der Kugelfunktionen im diskreten Fall.

3.1 Kleinste-Quadrate-Ausgleichung

Die Ausgleichsrechnung ist eine Disziplin, die traditionell in (fast) allen Gebieten der Geodäsie genutzt wird. Sie zeichnet sich durch eine Reihe von Anwendungen und Verfahren aus, welche z.B. in Koch (1997), Jäger (2005) oder Niemeier (2008) umfangreich und allgemein erörtert werden. In der Schwerefeldbestimmung ist die Ausgleichung nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate, welche auch mit L2-Ausgleichung bezeichnet wird, seit langem etabliert, um die Vielzahl von Schwerefeldmessungen optimal auf die unbekannten Parameter abzubilden. Aus diesem Grund folgt an dieser Stelle eine Hinführung zur Ausgleichsrechnung nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate mit Blick auf die Thematik Schwerefeldberechnung.

3.1.1 Gauß-Markoff Modell

Alle n Messungen eines bestimmten Schwerefeldbeobachtungstyps werden im zufallsbehafteten Beobachtungsvektor

$$\mathbf{l}_{[n \times 1]} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

zusammengefasst. Im Falle von terrestrischen Messungen (Kapitel 2.2.3) oder von Altimetrie (Kapitel 2.2.2) sind dies Schwereanomalien, im Fall von Gradiometrie die Tensorelemente nach Gleichung (2.56). Etwas komplexer gestaltet sich die Schwerefeldberechnung aus der Satellitenbahn, hier steht die komplette linke Seite von Gleichung (2.41) im Beobachtungsvektor. Auf Basis dieser Beobachtungen soll der unbekannte Vektor

$$\mathbf{x}_{[u \times 1]} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \bar{C}_{00} \\ \Delta \bar{C}_{10} \\ \vdots \\ \Delta \bar{S}_{l_{\max} l_{\max}} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

geschätzt werden, welcher im Fall der Schwerefeldbestimmung die Schwerefeldkoeffizienten $[\Delta \bar{C}_{nm}, \Delta \bar{S}_{nm}]$ enthält und in dieser Arbeit erstmals in Gleichung (2.8) aufgetreten ist, dort unter der Bezeichnung Koeffizientenvektor. Die Bestimmung wird ermöglicht durch eine funktionale Beziehung zwischen den Beobachtungen und den Unbekannten. Diese Beziehung wird beschrieben durch das funktionale Modell

$$E(l_i) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_i(\Delta \bar{C}_{00}, \Delta \bar{C}_{10}, \dots, \Delta \bar{S}_{l_{\max} l_{\max}}). \quad (3.3)$$

Das Modell sagt aus, dass sich die Erwartungswerte E der Beobachtungen \mathbf{l} über die funktionale Beziehung aus den Unbekannten \mathbf{x} abbilden lassen. Es handelt sich dabei um ein System linear unabhängiger Gleichungen, für deren Lösbarkeit es erforderlich ist, dass die Anzahl der Beobachtungen und Unbekannten $n > u$ ist. Es ist nicht ausreichend, dass die Zahl der Unbekannten derjenigen der Beobachtungen entspricht, da es sich in diesem Fall nicht um eine Ausgleichungs-, sondern eine eindeutige Abbildungsaufgabe handelt, die keine Qualitätsaussagen ermöglicht (Niemeier, 2008). Überdies trägt eine Überbestimmtheit nach Koch (1997) dazu bei, dass die Schätzung der Unbekannten durch den zufälligen Charakter der Beobachtungsfehler nur gering beeinflusst wird. Da allerdings das überbestimmte System nicht konsistent ist, werden die Fehler e_i der Beobachtungen eingeführt

$$l_i + e_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_i(\Delta \bar{C}_{00}, \Delta \bar{C}_{10}, \dots, \Delta \bar{S}_{l_{\max} l_{\max}}). \quad (3.4)$$

Gleichung (3.4) beschreibt ein konsistentes System und ist eine alternative Darstellung des funktionalen Modells (3.3). Für den Fehlervektor \mathbf{e} gilt $E(\mathbf{e}) = \mathbf{0}$. Um ein Beispiel für einen konkreten Beobachtungstyp zu geben, ist Gleichung (3.4) für Blockmittelwertschwereanomalien (vgl. Gleichung (2.27)) dargestellt:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta g}_i + e_i &= \frac{1}{\Delta S} \frac{GM}{R^2} \sum_{l=0}^{l_{\max}} (l-1) \left(\frac{R}{r_i} \right)^{l+2} \sum_{m=0}^l PI_{lm,i}(\cos \theta) \cdot \\ &\left[\Delta \bar{C}_{lm} \frac{2}{m} \cos m \frac{\lambda_{2i} + \lambda_{1i}}{2} \sin m \frac{\Delta \lambda_i}{2} + \Delta \bar{S}_{lm} \frac{2}{m} \sin m \frac{\lambda_{2i} + \lambda_{1i}}{2} \sin m \frac{\Delta \lambda_i}{2} \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Für die nächsten Schritte stellen wir Gleichung (3.4) dar als

$$l_i + e_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{iu} x_u, \quad (3.6)$$

wobei a_{ij} den partiellen Ableitungen

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (3.7)$$

entspricht. Im Falle von Blockmittelwertschwereanomalien sind diese

$$\begin{aligned} a_{ilm}^c &= \frac{\partial f_i}{\partial \Delta \bar{C}_{lm}} = \frac{1}{\Delta S} \frac{GM}{R^2} (l-1) \left(\frac{R}{r_i} \right)^{l+2} PI_{lm,i}(\cos \theta) \frac{2}{m} \cos m \frac{\lambda_{2i} + \lambda_{1i}}{2} \sin m \frac{\Delta \lambda_i}{2} \\ a_{ilm}^s &= \frac{\partial f_i}{\partial \Delta \bar{S}_{lm}} = \frac{1}{\Delta S} \frac{GM}{R^2} (l-1) \left(\frac{R}{r_i} \right)^{l+2} PI_{lm,i}(\cos \theta) \frac{2}{m} \sin m \frac{\lambda_{2i} + \lambda_{1i}}{2} \sin m \frac{\Delta \lambda_i}{2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Für alle weiteren Schwerefeldfunktionale können die partiellen Ableitungen analog hierzu gebildet werden.

Vektoriell kann Gleichung (3.6) dargestellt werden durch

$$\mathbf{l} + \mathbf{e} = \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad (3.9)$$

$\begin{matrix} [n \times 1] & [n \times 1] & [n \times u] [u \times 1] \end{matrix}$

wobei Matrix \mathbf{A} die partiellen Ableitungen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1u} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2u} \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nu} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$\begin{matrix} [n \times u] \end{matrix}$

enthält und als Designmatrix bezeichnet wird.

Betrachten wir die linearisierte, vektorielle Form des funktionalen Modells für die in Kapitel 2.2 vorgestellten Schwerefeldbeobachtungen. Für Blockmittelwertschwereanomalien, wie sie aus terrestrischen Messungen oder aus der Satellitenaltimetrie gewonnen werden, gilt

$$\mathbf{l}_{\Delta\bar{g}} + \mathbf{e} = \mathbf{A}_{\Delta\bar{g}} \mathbf{x}, \quad (3.11)$$

wobei sich die Elemente der Designmatrix nach Gleichung (3.8) ergeben. Für die Satellitengradiometrie ergibt sich, wenn man wie in Kapitel 2.2.1.2 vorgeschlagen die Basisfunktionen ins GRF rotiert,

$$\mathbf{l}_{ij}^{GRF} + \mathbf{e} = \mathbf{A}_{ij}^{GRF} \mathbf{x}, \quad (3.12)$$

mit

$$\mathbf{l}_{ij}^{GRF} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{ij1}^{GRF} \\ \mathbf{V}_{ij2}^{GRF} \\ \vdots \\ \mathbf{V}_{ijn}^{GRF} \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Des Weiteren ist

$$\mathbf{A}_{ij}^{GRF} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^T \mathbf{A}_{1,1}^{LNOF} \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_1^T \mathbf{A}_{1,2}^{LNOF} \mathbf{R}_1 & & \mathbf{R}_1^T \mathbf{A}_{1,u}^{LNOF} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2^T \mathbf{A}_{2,1}^{LNOF} \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_2^T \mathbf{A}_{2,2}^{LNOF} \mathbf{R}_2 & & \mathbf{R}_2^T \mathbf{A}_{2,u}^{LNOF} \mathbf{R}_2 \\ & & \ddots & \\ \mathbf{R}_n^T \mathbf{A}_{n,1}^{LNOF} \mathbf{R}_n & \mathbf{R}_n^T \mathbf{A}_{n,2}^{LNOF} \mathbf{R}_n & & \mathbf{R}_n^T \mathbf{A}_{n,u}^{LNOF} \mathbf{R}_n \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

mit den Rotationsmatrizen $\mathbf{R}_{1,\dots,n}$ entsprechend \mathbf{R}_{GOCE} aus Gleichung (2.57) für die jeweilige Epoche von $1, \dots, n$.

Bei der Schwerefeldbestimmung aus Bahnstörungen nach dem Integralgleichungsansatz erhält man in Analogie zu Gleichung (2.41) für jeden Bahnbogen

$$\mathbf{l}_r - \mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{e} = \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{A}_r \mathbf{x}, \quad (3.15)$$

was sich zu

$$\mathbf{l}_{SST} + \mathbf{e} = \mathbf{A}_{SST} \mathbf{x} \quad (3.16)$$

zusammenfassen lässt. Gleichung (3.15) setzt sich zusammen aus

$$\mathbf{l}_r = \mathbf{l}_{r^*} - \mathbf{B}\mathbf{b}, \quad (3.17)$$

mit

$$\mathbf{l}_{r^*} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(\tau_2) \\ \mathbf{r}(\tau_3) \\ \vdots \\ \mathbf{r}(\tau_{n-1}) \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} (1-\tau_2) & \tau_2 \\ (1-\tau_3) & \tau_3 \\ \vdots & \vdots \\ (1-\tau_{n-1}) & \tau_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

und

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_A \\ \mathbf{r}_B \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

sowie

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{ng\ 2} \\ \mathbf{a}_{ng\ 3} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{ng\ n-1} \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Die Matrix \mathbf{K} enthält die partiellen Ableitungen des Integrals nach der spezifischen Kraft (vergleiche Gleichung (2.41)). Sie entsteht dadurch, dass das Integral nur indirekt von den Unbekannten abhängig ist und so beim Ableiten die Kettenregel angewendet werden muss. Ihre Herleitung ist verhältnismäßig umfangreich, weswegen an dieser Stelle auf Mayer-Gürr (2006) verwiesen sei.

Des Weiteren gilt

$$\mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{r2} \\ \mathbf{A}_{r3} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{rn-1} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

und

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2^e & & & \\ & \mathbf{R}_3^e & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{R}_{n-1}^e \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

mit \mathbf{R}_i^e der Rotationsmatrix vom erdfesten ins inertielle System, in dem die Bahnstörungen beobachtet werden.

Für die K-Band Messungen, bei denen die Aufstellung des linearen Modells einen Linearisierungsschritt erfordert, sei erneut auf Mayer-Gürr (2006) verwiesen.

Neben dem funktionalen Modell ist der Ausgleichsprozess auf die Genauigkeitsinformation jeder einzelnen Beobachtung im Vektor \mathbf{I} angewiesen, welche im sogenannten stochastischen Modell angegeben wird. Wenn die Beobachtungen auf die Unbekannten abgebildet werden, bildet sich das stochastische Modell auf die Genauigkeit ab, mit der die Unbekannten bestimmt werden können. Das stochastische Modell für den Beobachtungsvektor \mathbf{I} wird beschrieben durch die Fehler-Kovarianzmatrix

$$\Sigma_{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & & \sigma_{2n} \\ & & \ddots & \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

mit den Varianzen $\sigma_{1,\dots,n}^2$ der Beobachtungen und den Kovarianzen σ_{ij} $\{i, j = 1, \dots, n; i \neq j\}$ zwischen den Beobachtungen. Hierbei gilt $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Sind keine absoluten Genauigkeitsinformationen bekannt, so genügt für den Ausgleichsprozess die Kenntnis relativer Genauigkeitsinformation. Die Kofaktormatrix $\mathbf{Q}_{\mathbf{I}}$, die die relative Genauigkeitsinformation enthält, ist über die Varianz σ_0^2 mit der Kovarianzmatrix verbunden

$$\Sigma_{\mathbf{I}} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{I}}. \quad (3.25)$$

Sind nur die relativen Genauigkeiten bekannt, so kann die Varianz $\hat{\sigma}_0^2$ im Ausgleichsprozess a posteriori geschätzt werden, so dass nach der Ausgleichung die Kovarianzmatrix bestimmt werden kann. Die Gewichtsmatrix \mathbf{P} ist die Inverse der Kofaktormatrix

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{\mathbf{I}}^{-1} \quad (3.26)$$

und definiert das Gewicht, welches eine Beobachtung im Ausgleichsprozess erhält. Vereinfacht kann man sagen, dass Beobachtungen mit einer hohen Varianz ein geringeres Gewicht bekommen als Beobachtungen mit einer niedrigen Varianz.

Verwendet man als Beobachtungstyp Blockmittelwertschwereanomalien, so werden die Kovarianzen der Beobachtungen als unkorreliert angenommen, was bedeutet, dass die Nebendiagonalelemente unbesetzt, also Null sind. Dies spiegelt nicht zwingend die Realität wieder, da bereits die zugrunde liegenden Punktwerte auf Grund des Messprozesses korreliert sein könnten oder, wie Gruber (2000) schreibt, während der Bildung der Blockmittelwerte Punkte im Grenzbereich zwischen den Blöcken in mehrere Blöcke eingehen könnten und diese somit korreliert wären. Dieses Vorgehen ist jedoch in der Schwerfeldbestimmung üblich, da in der Regel keine Information über die Korrelation der Blockmittelwerte vorliegt. Zudem ist dieses Vorgehen aus rechentechnischen Gründen sinnvoll, wie in Kapitel 4.1 gezeigt wird.

Im Falle der Satellitengradiometrie wird, wie z.B. Klees et al. (2003) oder Stetter (2012) zu entnehmen ist, das stochastische Modell mit Hilfe der Filtermatrix \mathbf{F} ausgedrückt

$$\Sigma_{\mathbf{I}} = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1}. \quad (3.27)$$

Wie Kapitel 2.2.1.2 zu entnehmen ist, ist das Rauschverhalten der Gradiometermessungen farbig und kann durch den Filter, der dieses Rauschverhalten invers abbildet, in ein weißes Rauschen umgewandelt werden, vergleiche Abb. 2.7. Unter Berücksichtigung des Filters lässt sich das lineare Modell (3.12) modifizieren zu

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \mathbf{I}_{ij}^{GRF} + \mathbf{F} \mathbf{e} &= \mathbf{F} \mathbf{A}_{ij}^{GRF} \mathbf{x} \\ \mathbf{I}_{ij}^{*GRF} + \mathbf{e}^* &= \mathbf{A}_{ij}^{*GRF} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.28)$$

und das modifizierte stochastische Modell ergibt sich mit

$$\Sigma_{\Pi}^* = \mathbf{F} \Sigma_{\Pi} \mathbf{F}^T = \mathbf{I}. \quad (3.29)$$

Die Einheitsmatrix beweist, dass die modifizierten Beobachtungen dekorreliert sind. Der Filter selbst ist eine Dreiecksmatrix, Σ_{Π} ist von der Struktur eine Bandmatrix, bei der die Korrelationen mit der Entfernung von der Hauptdiagonalen abnehmen. Der durch Gleichung (3.28) beschriebene Dekorrelationsprozess wird auch als Homogenisierung bezeichnet.

Bei der Schwerefeldbestimmung aus Bahnstörungen mit dem Integralgleichungsansatz ergibt sich die Kovarianzmatrix nach Mayer-Gürr (2006) zu

$$\Sigma_{\mathbf{l}_r} = \sigma^2 (\mathbf{I} + \mathbf{B}\mathbf{B}^T), \quad (3.30)$$

vorausgesetzt für die Kovarianzen der Positionen gilt

$$\Sigma_{\mathbf{l}_r} = \sigma^2 \mathbf{I}. \quad (3.31)$$

Das lineare Modell bildet zusammen mit dem zugehörigen stochastischen Modell das sogenannte *Gauß-Markoff* Modell.

3.1.2 Parameterschätzung

Mit dem funktionalen Zusammenhang zwischen Beobachtungen und Unbekannten sowie den stochastischen Eigenschaften der Beobachtungen liegen alle Bausteine bereit, die benötigt werden, um die Unbekannten zu bestimmen. Zunächst seien im Folgenden mit $\hat{\mathbf{x}}$ die Schätzungen der Unbekannten \mathbf{x} bezeichnet, so dass im Weiteren die Schätzungen $\hat{\mathbf{l}}$ für die Erwartungswerte der Beobachtungen definiert werden können mit

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} \quad (3.32)$$

und der Vektor $\hat{\mathbf{e}}$ der Residuen mit

$$\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{l}} - \mathbf{l} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}. \quad (3.33)$$

Der Vektor $\hat{\mathbf{e}}$ der Residuen, welcher die Schätzwerte für den wahren Fehlervektor \mathbf{e} enthält, wird auch als Verbesserungsvektor bezeichnet. Bei einer Ausgleichungsaufgabe nach der Methode der kleinsten Quadrate wird diejenige Lösung als optimal angesehen, bei der die Summe der gewichteten Quadrate von $\hat{\mathbf{e}}$ unter der Norm \mathbf{P} minimiert wird

$$\Omega_{\Sigma} = \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{Q}_{\Pi}^{-1} \hat{\mathbf{e}} \rightarrow \min. \quad (3.34)$$

Um diese Lösung zu finden, führen wir zunächst eine Homogenisierung durch, ähnlich wie in Gleichung (3.28). Die Kofaktormatrix und somit inverse Gewichtsmatrix lässt sich, vorausgesetzt sie ist positiv definit, mit Hilfe der Zerlegung nach *Cholesky* faktorisieren in

$$\mathbf{Q}_{\Pi} = \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{G}^T \mathbf{G}, \quad (3.35)$$

wobei \mathbf{G} eine oben besetzte Dreiecksmatrix ist. Durch Umstellen von Gleichung (3.9) und Multiplikation mit \mathbf{G}^{-1} transformiert man \mathbf{l} , \mathbf{A} und \mathbf{e} auf eine neue Basis und erhält

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^{-T} \mathbf{e} &= \mathbf{G}^{-T} \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{G}^{-T} \mathbf{l} \\ \hat{\mathbf{e}}^* &= \mathbf{A}^* \mathbf{x} - \mathbf{l}^* \end{aligned} \quad (3.36)$$

mit der zugehörigen Kofaktormatrix

$$\mathbf{Q}_{\parallel}^* = \mathbf{G}^{-T} \mathbf{Q}_{\parallel} \mathbf{G}^{-1} = \mathbf{G}^{-T} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{G}^{-1} = \mathbf{G}^{-T} (\mathbf{G}^T \mathbf{G}) \mathbf{G}^{-1} = \mathbf{I}. \quad (3.37)$$

Die Minimierungsbedingung (3.34) wird zu

$$\Omega_{\Sigma} = \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} = \mathbf{e}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}^{-T} \mathbf{e} = \mathbf{e}^{*T} \mathbf{e}^* \rightarrow \min. \quad (3.38)$$

Setzt man Gleichung (3.36) in Gleichung (3.38) ein, ergibt sich

$$\mathbf{e}^{*T} \mathbf{e}^* = (\mathbf{x}^{*T} \mathbf{A}^{*T} - \mathbf{I}^{*T}) (\mathbf{A}^* \mathbf{x} - \mathbf{I}^*) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^* \mathbf{A}^* \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{A}^* \mathbf{I}^* + \mathbf{I}^{*T} \mathbf{I}^*. \quad (3.39)$$

Um diese Gleichung zu minimieren, wird sie nach \mathbf{x} abgeleitet und zu Null gesetzt

$$\begin{aligned} d(\mathbf{e}^{*T} \mathbf{e}^*) &= d\mathbf{x}^T \mathbf{A}^* \mathbf{A}^* \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{A}^* \mathbf{A}^* d\mathbf{x} - 2d\mathbf{x}^T \mathbf{A}^* \mathbf{I}^* \\ &= 2d\mathbf{x}^T \mathbf{A}^* \mathbf{A}^* \mathbf{x} - 2d\mathbf{x}^T \mathbf{A}^* \mathbf{I}^* \\ &= 2d\mathbf{x}^T (\mathbf{A}^* \mathbf{A}^* \mathbf{x} - \mathbf{A}^* \mathbf{I}^*) := 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Diese Null-Bedingung wird erfüllt für

$$\mathbf{A}^{*T} \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{A}^* \mathbf{I}^* = 0, \quad (3.41)$$

woraus die Bestimmungsgleichung

$$\mathbf{A}^{*T} \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^* \mathbf{I}^* \quad (3.42)$$

folgt. Die Parameterschätzung nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate lautet folglich

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^{*T} \mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{A}^* \mathbf{I}^*. \quad (3.43)$$

Die Gleichungen (3.42) und (3.43) lassen sich hinsichtlich der ursprünglichen Basis ausdrücken mit

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{*T} \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^* \mathbf{I}^* \\ \mathbf{A}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}^{-T} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}^{-T} \mathbf{I} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{I} \end{aligned} \quad (3.44)$$

$\begin{matrix} [u \times n] & [n \times n] & [n \times u] & [u \times 1] & & [u \times n] & [n \times n] & [n \times 1] \end{matrix}$

und

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{[u \times 1]} &= (\mathbf{A}^{*T} \mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{A}^* \mathbf{I}^* \\ &= (\mathbf{A}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}^{-T} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}^{-T} \mathbf{I} \\ &= \left(\begin{matrix} \mathbf{A}^T & \mathbf{P} & \mathbf{A} \\ [u \times n] & [n \times n] & [n \times u] \end{matrix} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{I} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Hierbei wird

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \quad (3.46)$$

$\begin{matrix} [u \times u] & [u \times n] & [n \times n] & [n \times u] \end{matrix}$

als Normalgleichungsmatrix bezeichnet und

$$\mathbf{n} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{I} \quad (3.47)$$

$\begin{matrix} [u \times 1] & [u \times n] & [n \times n] & [n \times 1] \end{matrix}$

als rechte Seite, womit sich (3.45) auch ausdrücken lässt als

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{n}. \quad (3.48)$$

Die Anwendung des Kovarianzfortpflanzungsgesetzes auf (3.48) liefert die Kofaktormatrix der Unbekannten

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\mathbf{xx}} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{Q}_{\parallel} \mathbf{P} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \\ &= (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \quad , \\ &= (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \triangleq \mathbf{N}^{-1} \end{aligned} \quad (3.49)$$

welche der Inversen der Normalgleichungsmatrix entspricht.

Niemeier (2008) zeigt, dass die Quadratsumme der Verbesserungen Ω_{Σ} numerisch effizient berechnet werden kann mit

$$\Omega_{\Sigma} = \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{e}} = \mathbf{l}^T \mathbf{P} \mathbf{l} - \mathbf{l}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}, \quad (3.50)$$

und dass daraus eine erwartungstreue Schätzung für die Varianz $\hat{\sigma}_0^2$ abgeleitet werden kann mit

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\Omega_{\Sigma}}{r}. \quad (3.51)$$

Der Nenner $r = n - u$ beschreibt die Redundanz des Systems und zeigt überdies, dass, wie oben beschrieben, die Anzahl der Beobachtungen größer sein muss als die der Unbekannten.

Mit Gleichung (3.51) lässt sich neben der Kovarianzmatrix der Beobachtungen nach Gleichung (3.25) auch die Kovarianzmatrix der Unbekannten

$$\Sigma_{\mathbf{xx}} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{xx}} \quad (3.52)$$

berechnen.

Nachdem die zuvor unbekannte Kovarianzmatrix der Beobachtungen berechnet ist, lässt sich simulieren, wie der Ausgleichsprozess darauf reagiert, wenn anstelle der Kofaktor- die Kovarianzmatrix der Beobachtungen verwendet wird. Dann wird Gleichung (3.44) zu

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \Sigma_{\parallel}^{-1} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^T \Sigma_{\parallel}^{-1} \mathbf{l} \\ \mathbf{A}^T (\hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\parallel})^{-1} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^T (\hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\parallel})^{-1} \mathbf{l}. \\ \frac{1}{\hat{\sigma}_0^2} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} &= \frac{1}{\hat{\sigma}_0^2} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Es ist sofort ersichtlich, dass sich der Varianzfaktor aus Gleichung (3.53) herauskürzt. Dies erklärt, warum, wie in Abschnitt 3.1.1 bereits dargelegt, die Ausgleichung und folglich die Parameterschätzung nur auf relative Genauigkeitsinformationen angewiesen ist. Durch Einsetzen von

$$\Omega_{\Sigma} = \frac{1}{\hat{\sigma}_0^2} (\mathbf{l}^T \mathbf{P} \mathbf{l} - \mathbf{l}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{\hat{\sigma}_0^2} \Omega_{\Sigma} \quad (3.54)$$

in Gleichung (3.51) ergibt sich als Varianzfaktor

$$\hat{\sigma}_0^{2'} = \frac{\Omega_{\Sigma}}{n - u} = \frac{1}{\hat{\sigma}_0^2} \frac{\Omega_{\Sigma}}{n - u} = \frac{1}{\hat{\sigma}_0^2} \hat{\sigma}_0^2 = 1. \quad (3.55)$$

Dieses Ergebnis ist logisch, da durch Einführung der Kovarianzmatrix der Beobachtungen die absolute Genauigkeitsinformation bereits vorliegt. Das Beispiel zeigt, dass die Kenntnis des Varianzfaktors nicht für die Parameterschätzung benötigt wird, sondern für die korrekte Schätzung der Genauigkeit der Beobachtungen und Unbekannten in Form der entsprechenden Kovarianzmatrizen.

Exkurs: Geometrische Interpretation der kleinsten-Quadrate-Ausgleichung

In diesem Abschnitt wurde die Bestimmungsgleichung (3.48) für die Schätzung der Unbekannten hergeleitet. Diese kann nach Koch (1997) auch geometrisch interpretiert werden. Demnach wird $\hat{\mathbf{x}}$ so geschätzt, dass $\hat{\mathbf{I}}$ (Gleichung (3.32)) eine orthogonale Projektion des Beobachtungsvektors \mathbf{I} auf den Spaltenraum $R(\mathbf{A})$ ist (für die Definition des Spaltenraums siehe z.B. Strang, 2003). Dies ist in Abb. 3.1 beispielhaft dargestellt.

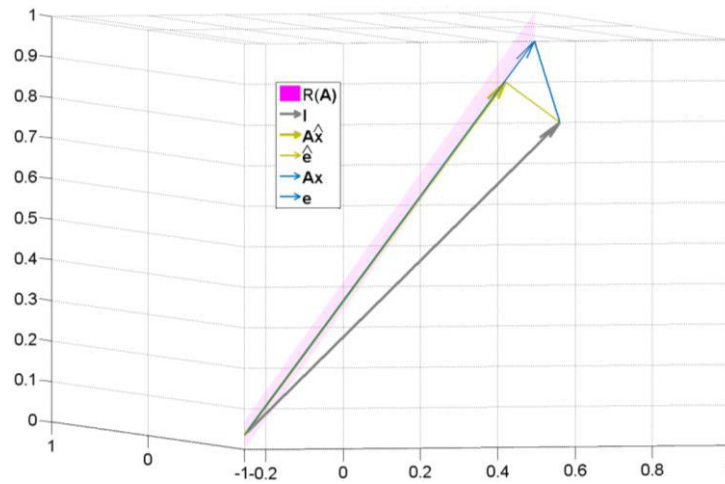


Abb. 3.1: Orthogonale Projektion des Beobachtungsvektors in den Spaltenraum.

Abb. 3.1 basiert auf der Schätzung einer ausgleichenden Gerade. Hierzu wurden zunächst 3 Punkte auf einer Geraden berechnet, wofür es zweier Parameter bedarf. Diese 2 Parameter interpretieren wir hier als „wahre“ Unbekannte, so dass die 3 Punkte auf der Geraden der in der Realität unbekanntes Realisierung von \mathbf{Ax} entsprechen. Auf die 3 Punkte wird jeweils ein Zufallsfehler addiert, welcher als Realisierung des eigentlich unbekanntes Fehlervektors \mathbf{e} fungiert. Auf diese Weise können 3 Beobachtungen \mathbf{I} simuliert werden, auf deren Basis im Anschluss die Schätzung $\hat{\mathbf{x}}$ der unbekanntes Parameter nach Gleichung (3.48) erfolgt. Auf Basis der Schätzung kann der Vektor $\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$ sowie der Vektor der Residuen $\hat{\mathbf{e}}$ berechnet werden. Die Darstellung des Spaltenraums und der entsprechenden Vektoren in Abb. 3.1 zeigt, dass die Schätzung von $\hat{\mathbf{x}}$ in der Tat so erfolgt ist, dass $\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$ die orthogonale Projektion von \mathbf{I} in den Spaltenraum $R(\mathbf{A})$ ist. Der Vektor der Residuen steht senkrecht auf dem Spaltenraum. Die Rechtwinkligkeit des Dreiecks $[\mathbf{I}, \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{e}}]$ kann überdies mit dem Satz von Pythagoras bestätigt werden. Im Weiteren lässt sich zeigen, dass aus der Orthogonalprojektion auch die Bestimmungsgleichung hergeleitet werden kann, wobei wir als Vereinfachung gleichgenaue Beobachtungen annehmen. Dann gilt nach Koch (1997)

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}\mathbf{I} \tag{3.56}$$

mit dem Projektionsoperator

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T. \tag{3.57}$$

Dies lässt sich umformen zu

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{H}\mathbf{l} \\
 \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{l} \quad | \cdot (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T \\
 \underbrace{(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{x}} &= \underbrace{(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{l} \cdot \\
 \hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{l}
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

Im weiteren kann man durch Einsetzen von Gleichung (3.9) zeigen, dass

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{l} \\
 \hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{e}) \\
 \hat{\mathbf{x}} &= \underbrace{(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}\mathbf{x} - (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{e} \cdot \\
 \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} - (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{e}
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Die Schätzung der Unbekannten lässt sich folglich darstellen als Differenz der „wahren“ Unbekannten und der Projektion des Fehlervektors in den Schätzraum. Ist der Erwartungswert des Fehlervektors 0, so entspricht die Schätzung der Unbekannten den „wahren“ unbekanntem Parametern. Für endlich viele Beobachtungen, wie sie auch für Abb. 3.1 simuliert wurden, kann jedoch nicht davon ausgegangen werden, dass der „wahre“ unbekannte Fehlervektor den Erwartungswert 0 hat. In der Simulation für Abb. 3.1 ist dies auch nicht der Fall, so dass der dieser Simulation zu Grunde liegende „wahre“ Vektor \mathbf{Ax} keine Orthogonalprojektion von \mathbf{l} ist, und der Vektor \mathbf{e} nicht senkrecht auf dem Spaltenraum steht. Letztendlich lässt sich festhalten, dass man bei realen Messungen natürlich nur den Beobachtungsvektor \mathbf{l} kennt. Für dessen Realisierung befindet sich im Spaltenraum $R(\mathbf{A})$ eine Vielzahl von Vektoren \mathbf{Ax} , von welchen die kleinste Quadrate Ausgleichung jenen liefert, für den die Quadrate der Fehler minimal sind. Der entsprechende Vektor der Residuen hat den Erwartungswert 0 und steht senkrecht auf dem Spaltenraum.

Bislang wurden in diesem Kapitel für die in dieser Arbeit behandelten Schwerefeldbeobachtungstypen funktionale und stochastische Modelle dargestellt. Dies ist die Grundlage, um für jeden dieser Typen die Unbekannten nach Gleichung (3.48), den Varianzfaktor nach Gleichung (3.51) oder die Kovarianzmatrix der Unbekannten nach Gleichung (3.52) zu berechnen. Auf diesem Weg würde für jeden Beobachtungstyp separat eine Schwerefeldlösung entstehen. Wie im vorherigen Kapitel allerdings beschrieben wurde, sollen die verschiedenen Beobachtungstypen gemeinsam ausgeglichen werden, um deren Vorteile optimal zu kombinieren. Wie hierzu die soeben abgeleiteten Gleichungen modifiziert werden müssen, ist im Folgenden dargestellt.

3.2 Parameterschätzung auf Basis verschiedener Beobachtungstypen

Um die k Beobachtungsvektoren $\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_k$ verschiedener Beobachtungstypen in einem Ansatz gemeinsam auszugleichen, dient als Ausgangspunkt weiterhin das funktionale Modell nach Gleichung (3.9), jetzt mit dem Beobachtungsvektor

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{l}_k \end{pmatrix}, \tag{3.60}$$

in dem die einzelnen Beobachtungsvektoren verschiedener Beobachtungstypen zusammengefasst sind, dem zugehörigen wahren Fehlervektor \mathbf{e} , der sich analog ergibt, der Designmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_k \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

und dem stochastische Modell

$$\Sigma_{\mathbf{II}} = \begin{bmatrix} \sigma_{01}^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{II}1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \sigma_{0k}^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{II}k} \end{bmatrix}. \quad (3.62)$$

Die Blockdiagonalität der Kovarianzmatrix der Beobachtungen ist hierbei nur gegeben, wenn die verschiedenen Beobachtungstypen untereinander unkorreliert sind, was in unserem Fall als gegeben angenommen wird. Die Blockdiagonalität erlaubt die Darstellung der Bestimmungsgleichung als Summation der einzelnen Normalgleichungssysteme

$$\left(\frac{1}{\sigma_{01}^2} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 + \dots + \frac{1}{\sigma_{0k}^2} \mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k \right) \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N} \hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{\sigma_{01}^2} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{l}_1 + \dots + \frac{1}{\sigma_{0k}^2} \mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{l}_k = \mathbf{n}, \quad (3.63)$$

was eine angenehmere Darstellung ist im Vergleich zu den immensen Matrix-Vektor Produkten, die entstehen würden, wenn die Kovarianzmatrix der Beobachtungen vollbesetzt wäre. \mathbf{N} und \mathbf{n} bezeichnen jetzt die Gesamtnormalgleichungsmatrix bzw. rechte Seite. Hierbei muss nicht jeder Datensatz für einen Beobachtungstyp stehen, vielmehr ist es gebräuchlich, Daten eines bestimmten Beobachtungstyps in mehrere Einzeldatensätze zu unterteilen. So ist es sinnvoll, mehrere Datensätze von Blockmittelwertschwereanomalien einzeln in die Ausgleichung einzuführen und diese nicht zu einem Datensatz zusammenzuführen. σ_{0j}^2 mit $j=1, \dots, k$ bezeichnet die Varianzkomponente eines jeden einzelnen Datensatzes. Die Varianzkomponenten steuern die relative Gewichtung zwischen den einzelnen Datensätzen. In dieser Arbeit sind sie stets dimensionslos (als Dimensionsträger in Gleichung (3.63) fungieren nur die Matrizen \mathbf{A}, \mathbf{P} und der Vektor \mathbf{l}). Die Varianzkomponenten treten in Gleichung (3.63) im Nenner auf. Daraus folgt, dass das Gewicht eines Datensatzes in der Kombination abgeschwächt wird, wenn seine Varianzkomponente größer als 1 ist, bzw. sein Gewicht in der Kombination erhöht wird, wenn seine Varianzkomponente kleiner als 1 ist. Es ist sofort ersichtlich, dass im Gegensatz zur Bestimmungsgleichung (3.53), aus welcher der Varianzfaktor $\hat{\sigma}_0^2$ durch einen simplen Teilvergänger eliminiert werden konnte, die Bestimmungsgleichung (3.63) von den Varianzkomponenten auf Grund ihrer Bedeutung für die relative Gewichtung abhängt. Die Kenntnis der relativen Gewichte eines jeden Einzeldatensatzes ist für die Kombination der Datensätze nicht ausreichend.

Sind die Varianzkomponenten unbekannt, so kann der Ausgleichungsprozess mit Näherungswerten für die Varianzkomponenten gestartet werden. Die Varianzkomponenten $\hat{\sigma}_{0j}^2$ können dann im Rahmen der Parameterschätzung iterativ geschätzt werden. Um ein optimales Ergebnis zu erzielen, bedarf es mehrerer Iterationen, wobei die Anzahl der notwendigen Iterationen davon abhängt, wie gut der Näherungsstartwert die wirklichen Varianzkomponenten approximiert.

Die Parameterschätzung folgt aus Gleichung (3.63) mit

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\frac{1}{\hat{\sigma}_{01}^2} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 + \dots + \frac{1}{\hat{\sigma}_{0k}^2} \mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k \right)^{-1} \left(\frac{1}{\hat{\sigma}_{01}^2} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{l}_1 + \dots + \frac{1}{\hat{\sigma}_{0k}^2} \mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{l}_k \right). \quad (3.64)$$

Die Kovarianzmatrix der Unbekannten kann analog zu (3.49) aus dem Kovarianzfortpflanzungsgesetz hergeleitet werden und entspricht wiederum der Inversen der Normalgleichungsmatrix, hier also

$$\Sigma_{\mathbf{x}\mathbf{x}} = \left(\frac{1}{\hat{\sigma}_{01}^2} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 + \dots + \frac{1}{\hat{\sigma}_{0k}^2} \mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k \right)^{-1}. \quad (3.65)$$

Viele Institutionen, welche sich mit der Prozessierung eines bestimmten Schwerfeldbeobachtungstyps beschäftigen, stellen ihre Ergebnisse anderen Institutionen für diverse Anwendungen, z.B. die Schwerfeldkombination, zur Verfügung. In der Regel ist es üblich, dass hierbei nicht die vorprozessierten Beobachtungen und die zugehörigen Genauigkeiten herausgegeben werden, sondern Normalgleichungen, sowie die zugehörige rechte Seite oder alternativ der zugehörige Unbekanntenvektor, mit dem sich die rechte Seite rückrechnen lässt. In diesem Fall wird Gleichung (3.63) zu

$$\left(\frac{1}{\hat{\sigma}_{01}^2} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 + \dots + \frac{1}{\hat{\sigma}_{0k}^2} \mathbf{N}_k \right) \hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{\hat{\sigma}_{01}^2} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{l}_1 + \dots + \frac{1}{\hat{\sigma}_{0k}^2} \mathbf{n}_k. \quad (3.66)$$

Dies ist auch für diese Arbeit relevant, da im praktischen Teil die Beobachtungen für die Schwerfeldsatellitenmissionen in Form von Normalgleichungssystemen eingeführt werden. Nachteil dieses Ansatzes ist, dass man als Anwender keinen direkten Einblick in die Beobachtungen, die Designmatrix und das stochastische Modell hat. Oft steht auch keine Information über die Anzahl der Beobachtungen n oder $\mathbf{I}^T \mathbf{P} \mathbf{l}$ zur Verfügung. Sind diese Informationen nicht gegeben, welche für weitere Anwendungen, z.B. die Varianzkomponentenschätzung, von Bedeutung sind, empfiehlt es sich, die Verwendung dieser Normalgleichungssysteme nach Koch & Kusche (2002) als Einführung von Vorinformation zu interpretieren. Das funktionale Modell bezogen rein auf die Vorinformation lautet

$$\underset{[u \times 1]}{\mathbf{x}_\mu} + \underset{[u \times 1]}{\mathbf{e}_\mu} = \underset{[u \times u]}{\mathbf{I}} \underset{[u \times 1]}{\mathbf{x}}, \quad (3.67)$$

mit

$$\mathbf{x}_\mu = \mathbf{N}_k^{-1} \mathbf{n}_k. \quad (3.68)$$

In Gleichung (3.67) dienen die Schätzwerte \mathbf{x}_μ der Unbekannten des zu \mathbf{N}_k gehörigen Gleichungssystems als Beobachtungen bzw. Vorinformation über die Unbekannten. Sie müssten grundsätzlich in Gleichung (3.68) auch als Schätzwerte gekennzeichnet sein, darauf wird jedoch verzichtet, da sie in Gleichung (3.67) als Beobachtungen fungieren. Das zugehörige stochastische Modell lautet

$$\Sigma_{\mathbf{n}\mu} = \sigma_\mu^2 \mathbf{P}_\mu^{-1} = \sigma_k^2 \mathbf{N}_k^{-1}. \quad (3.69)$$

Die ursprüngliche Normalgleichungsmatrix \mathbf{N}_k dient als Gewichtsmatrix für die Vorinformation. Aus Gleichung (3.67) folgt die Bedingungsgleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^T \mathbf{P}_\mu \mathbf{I} \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{I}^T \mathbf{P}_\mu \mathbf{x}_\mu \\ \mathbf{P}_\mu \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{P}_\mu \mathbf{x}_\mu \end{aligned} \quad (3.70)$$

Integriert in (3.66) erhält man

$$\left(\frac{1}{\hat{\sigma}_{01}^2} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 + \dots + \frac{1}{\hat{\sigma}_{0\mu}^2} \mathbf{P}_\mu \right) \hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{\hat{\sigma}_{01}^2} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{l}_1 + \dots + \frac{1}{\hat{\sigma}_{0\mu}^2} \mathbf{P}_\mu \mathbf{x}_\mu, \quad (3.71)$$

die Kovarianzmatrix der Unbekannten lautet

$$\Sigma_{\mathbf{x}\mathbf{x}} = \left(\frac{1}{\hat{\sigma}_{01}^2} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 + \dots + \frac{1}{\hat{\sigma}_{0k}^2} \mathbf{P}_\mu \right)^{-1} \quad (3.72)$$

Dass (3.64) und (3.71) ineinander überführt werden können, lässt sich zeigen durch

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\hat{\sigma}_{01}^2} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 + \dots + \frac{1}{\hat{\sigma}_{0\mu}^2} \mathbf{P}_\mu \right) \hat{\mathbf{x}} &= \frac{1}{\hat{\sigma}_{01}^2} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{l}_1 + \dots + \frac{1}{\hat{\sigma}_{0\mu}^2} \mathbf{P}_\mu \mathbf{x}_\mu \\ \left(\frac{1}{\hat{\sigma}_{01}^2} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 + \dots + \frac{1}{\hat{\sigma}_{0k}^2} \mathbf{N}_k \right) \hat{\mathbf{x}} &= \frac{1}{\hat{\sigma}_{01}^2} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{l}_1 + \dots + \frac{1}{\hat{\sigma}_{0k}^2} \mathbf{N}_k \mathbf{x}_\mu \\ \left(\frac{1}{\hat{\sigma}_{01}^2} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 + \dots + \frac{1}{\hat{\sigma}_{0k}^2} \mathbf{N}_k \right) \hat{\mathbf{x}} &= \frac{1}{\hat{\sigma}_{01}^2} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{l}_1 + \dots + \frac{1}{\hat{\sigma}_{0k}^2} \mathbf{N}_k \mathbf{N}_k^{-1} \mathbf{n}_k \\ \left(\frac{1}{\hat{\sigma}_{01}^2} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 + \dots + \frac{1}{\hat{\sigma}_{0k}^2} \mathbf{N}_k \right) \hat{\mathbf{x}} &= \frac{1}{\hat{\sigma}_{01}^2} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{l}_1 + \dots + \frac{1}{\hat{\sigma}_{0k}^2} \mathbf{n}_k \\ \left(\frac{1}{\hat{\sigma}_{01}^2} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 + \dots + \frac{1}{\hat{\sigma}_{0k}^2} \mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k \right) \hat{\mathbf{x}} &= \frac{1}{\hat{\sigma}_{01}^2} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{l}_1 + \dots + \frac{1}{\hat{\sigma}_{0k}^2} \mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{l}_k \end{aligned}$$

Der bislang dargestellte Formelapparat beschreibt die Nutzung von vollen Normalgleichungssystemen, wie sie in dieser Arbeit im Fokus stehen. Daneben gibt es iterative Verfahren, welche die Aufstellung von vollen Systemen umgehen. Da diese in dieser Arbeit nicht verwendet werden, sei auf z.B. Klees et al. (2003), Mayer-Gürr (2006) oder Brockmann (2008) verwiesen.

Die Varianzkomponenten regeln die relative Gewichtung der verschiedenen Datensätze untereinander und sind somit eine entscheidende Stellschraube für eine gelungene Kombination. Ausführliche Erörterungen der Varianzkomponentenschätzung finden sich in Koch (1997) oder Niemeier (2008). In Bezug auf Vorinformation sei besonders auf Koch & Kusche (2002) verwiesen. Die Varianzkomponente

$$\hat{\sigma}_{0j}^2 = \frac{\hat{\mathbf{e}}_j^T \mathbf{P}_j \hat{\mathbf{e}}_j}{r_j} \quad (3.73)$$

erhält man analog zum Varianzfaktor (3.51) mit

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_j^T \mathbf{P}_j \hat{\mathbf{e}}_j &= (\mathbf{A}_j \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}_j)^T \mathbf{P}_j (\mathbf{A}_j \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}_j) \\ &= \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}_j^T \mathbf{P}_j \mathbf{A}_j \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}_j^T \mathbf{P}_j \mathbf{l}_j - \mathbf{l}_j^T \mathbf{P}_j \mathbf{A}_j \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{l}_j^T \mathbf{P}_j \mathbf{l}_j \\ &= \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{N}_j \hat{\mathbf{x}} - 2 \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{n}_j + \mathbf{l}_j^T \mathbf{P}_j \mathbf{l}_j \end{aligned} \quad (3.74)$$

r_j bezeichnet die Teilredundanzen der einzelnen Datensätze, deren Summe die Gesamtredundanz r

$$\sum_{j=1}^k r_j = r. \quad (3.75)$$

Die Teilredundanzen ergeben sich nach Koch & Kusche (2002) mit

$$r_j = n_j - \text{tr} \left(\frac{1}{\hat{\sigma}_{0j}^2} \mathbf{A}_j^T \mathbf{P}_j \mathbf{A}_j \mathbf{N}^{-1} \right) = n_j - \text{tr} \left(\frac{1}{\hat{\sigma}_{0j}^2} \mathbf{N}_j \mathbf{N}^{-1} \right). \quad (3.76)$$

Für die Vorinformation \mathbf{x}_μ erhält man die Varianzkomponente

$$\hat{\sigma}_{0\mu}^2 = \frac{\hat{\mathbf{e}}_\mu^T \mathbf{P}_\mu \hat{\mathbf{e}}_\mu}{r_\mu}. \quad (3.77)$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_\mu^T \mathbf{P}_\mu \hat{\mathbf{e}}_\mu &= (\mathbf{I}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_\mu)^T \mathbf{P}_\mu (\mathbf{I}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_\mu) \\ &= (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_\mu)^T \mathbf{P}_\mu (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_\mu) \end{aligned} \quad (3.78)$$

und

$$r_\mu = u - \text{tr} \left(\frac{1}{\hat{\sigma}_{0\mu}^2} \mathbf{P}_\mu \mathbf{N}^{-1} \right). \quad (3.79)$$

Die Teilredundanzen sind grundsätzlich sehr aufwendig zu berechnen, da die Berechnung der Spur von der Inversen der Matrix \mathbf{N} abhängt. Diese entsteht jedoch als Nebenprodukt bei der strengen Lösung des Gleichungssystems (3.64) und kann für die Berechnung der Spur weitergenutzt werden. Darüber hinaus wird in Koch (1997) und Koch & Kusche (2002) beschrieben, wie die Spur alternativ stochastisch geschätzt werden kann.

Wie oben bereits beschrieben werden die Varianzkomponenten nach jeder Iteration mit dem Schätzwert aufdatiert. Der Iterationsprozess kann abgebrochen werden, wenn sich die aufdatierte Varianzkomponente nicht mehr signifikant vom vorherigen Wert unterscheidet.

Während die Berechnung der Varianzkomponenten nach Gleichung (3.73) in Tests mit Schwereanomalien-Datensätzen sehr gute Ergebnisse produziert, wurde in Fecher et al. (2013) gezeigt, dass sich die Varianzkomponentenschätzung auf Basis von Vorinformation (Gleichung (3.77)) nicht für die Gewichtung von GOCE-Normalgleichungen eignet. Grund dafür ist, dass die wegen der polaren Löcher schlecht bestimmbar (nah-)zonalen Koeffizienten durch Gleichung (3.78) einen größeren Einfluss auf die Schätzung der Varianzkomponente erhalten, als dies bei der Varianzkomponentenschätzung auf Beobachtungsbasis (Gleichung (3.74)) der Fall wäre. Dies hat eine zu negative Bewertung der GOCE-Normalgleichungen zur Folge. Eine Lösung für diese Problematik könnte sein, ein Verfahren zu entwickeln, bei dem die vom polaren Loch betroffenen Koeffizienten nicht in Gleichung (3.77) einbezogen werden.

3.3 Spezifische Fragestellungen in der Schwerefeldbestimmung

Nachdem in den Abschnitten 3.1 und 3.2 die Ausgleichsrechnung allgemein dargestellt worden ist, wenngleich auch bezogen auf konkrete Beispiele aus der Schwerefeldbestimmung, sollen im Folgenden spezifische Fragestellungen erörtert werden, die bei der Schwerefeldbestimmung auftreten und auf einem mathematischen Hintergrund basieren.

3.3.1 Einfluss terrestrischer Daten auf den langwelligen Anteil der Kombinationslösung

Wie in Kapitel 2.2 beschrieben resultieren aus den Schwerefeldsatellitenmissionen Schwerefeldmodelle, die im lang- und mittelwelligen Bereich bis circa Grad und Ordnung 220 von sehr hoher Qualität sind, wohingegen diese spektralen Bereiche aus terrestrischen Messungen und Altimetrie nur mit geringerer Genauigkeit bestimmt werden können. In der Kombination ist also darauf zu achten, dass durch die Hinzunahme der terrestrischen und altimetrischen Daten die Qualität der Schwerefeldlösung im lang- und mittelwelligen Bereich nicht beeinträchtigt wird. Grundsätzlich sollte dies durch die Varianzkomponentenschätzung erreicht werden, da mit dieser die optimale relative Gewichtung zwischen den Datensätzen gefunden wird. Da

allerdings die stochastischen Modelle (gerade im Fall von terrestrischen Daten) nicht exakt bekannt sind, bzw. terrestrische Daten oftmals nicht stochastisch modellierbare systematische Fehler beinhalten, ist es unter Umständen möglich, dass der Einfluss der terrestrischen Daten auf die Satellitenlösung zu hoch ist. Überdies ist zu berücksichtigen, dass eine Varianzkomponentenschätzung für Datensätze aus den Schwerefeldsatellitenmissionen nicht immer möglich ist, wenn z.B. n und $\mathbf{I}^T \mathbf{P} \mathbf{I}$ nicht bekannt sind. In Gruber (2000) werden diverse Möglichkeiten genannt, die angewendet werden können, um den Einfluss der terrestrischen Daten auf die Satellitenlösung zu minimieren. Eine mittlerweile nicht mehr gebräuchliche Möglichkeit ist, die sphärisch-harmonischen Koeffizienten niedriger Grade in der Kombinationslösung durch die Koeffizienten der Satellitenlösung zu ersetzen. Dieses Verfahren ist allerdings nicht empfehlenswert, da auf diese Art und Weise sphärisch-harmonische Koeffizienten verschiedener Schwerefeldlösungen miteinander vermischt und Korrelationen zwischen Koeffizienten vernachlässigt werden.

Eine weitere Möglichkeit ist, bestimmte Teile der Kombinationslösung auf Koeffizienten der Satellitenlösung zu fixieren, indem in der Kombination neben den Normalgleichungssystemen des Satelliten- und des terrestrischen Anteil die Koeffizienten der Satellitenlösung als Vorinformation eingeführt werden. Letztendlich wird die Satellitenlösung auf diese Art doppelt in die Gesamtkombination eingeführt und es wird ein Zwang auf das Gesamtsystem ausgeübt. In Gruber (2000) erzielen Schwerefeldlösungen, auf welche dieses Prozedere angewandt worden ist, bessere Ergebnisse als Lösungen, auf die es nicht angewandt wurde. Da die Ergebnisse dort allerdings aus der Zeit vor den Schwerefeldsatellitenmissionen stammen, muss überprüft werden, ob diese Aussage so auch heute noch zutrifft. Dies soll später in Kapitel 6.2.1 getestet werden. Zunächst soll jedoch beschrieben werden, wie diese Fixierung durchgeführt wird.

Das Vorgehen in Gruber (2000) ist im Grunde ähnlich dem Vorgehen in Gleichung (3.67), die Koeffizienten der Satellitenlösung werden im Kombinationsmodell als Vorinformation eingeführt. Das stochastische Modell ist im Gegensatz zu Gleichung (3.69) nur durch eine Diagonalmatrix gegeben, welche die Varianzen der Koeffizienten der Satellitenlösung enthält, welche aus der zugehörigen Kovarianzmatrix der Unbekannten entnommen werden können. Als Vorinformation werden nur jene Koeffizienten der Satellitenlösung eingeführt, deren relativer Anteil an einer *Kaula*-regulierten Vergleichslösung höher als 90% ist (vergleiche Schwintzer (1990)). Als Beispiel sind die Redundanzanteile (vergleiche Kapitel 7.2.1, Gleichung (7.1)) von GRACE/GOCE Information hinsichtlich einer *Kaula*-regulierten Satellitenlösung in Abb. 3.2 dargestellt. Die orangenen Bereiche, die einem Redundanzanteil von höher als 0.9 entsprechen, erstrecken sich für manche Ordnungen bis circa Grad 200, mindestens jedoch bis circa Grad 180. Für diese Bereiche müsste also folglich Vorinformation in die Kombinationslösung eingeführt werden und es würde somit eine Fixierung auf die GRACE/GOCE Information in diesen Bereichen erfolgen.

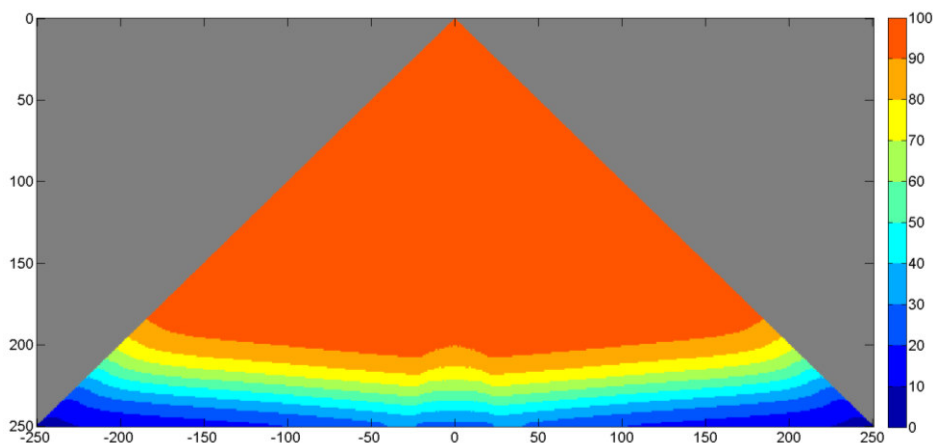


Abb. 3.2: Anteil der Satelliteninformation (GRACE und GOCE) an einer Schwerefeldlösung, die zusätzlich zur Satelliteninformation *Kaula*-reguliert ist [%].

Eine weitere Methode, mit welcher der Einfluss der terrestrischen Daten auf den langwelligen Teil der Schwerefeldlösung reduziert werden kann, ist, die entsprechenden Anteile der Normalgleichungen und der rechten Seite nicht in den Ausgleichungsprozess zu integrieren, sondern beiseite zu lassen, also abzuschneiden. Dies lässt sich formal veranschaulichen durch eine Modifikation von Gleichung (3.44) zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_a^T \mathbf{P} \mathbf{A}_a & \mathbf{A}_a^T \mathbf{P} \mathbf{A}_b \\ \mathbf{A}_b^T \mathbf{P} \mathbf{A}_a & \mathbf{A}_b^T \mathbf{P} \mathbf{A}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_a \\ \hat{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a^T \mathbf{P} \mathbf{l} \\ \mathbf{A}_b^T \mathbf{P} \mathbf{l} \end{bmatrix}, \quad (3.80)$$

wobei der Subindex a für den langwelligen und b folglich für den restlichen Schwerefeldanteil steht. Verwendet wird dann nur der Teil

$$\mathbf{A}_b^T \mathbf{P} \mathbf{A}_b \hat{\mathbf{x}}_b = \mathbf{A}_b^T \mathbf{P} \mathbf{l}, \quad (3.81)$$

so dass die langwelligen Anteile nicht berücksichtigt sind. Dieses Vorgehen liefert allerdings kein exaktes Ergebnis, da Korrelationen im Normalgleichungssystem bzw. zwischen den Koeffizienten einfach vernachlässigt werden, und ist deshalb nicht zu empfehlen. Neben dieser unsauberen Parameterelimination gibt es jedoch einen Weg, wie Parameter eliminiert und die restlichen Parameter trotzdem exakt bestimmt werden können. Dieser wird z.B. in Niemeier (2008) beschrieben. Hierzu wird Gleichung (3.80) erweitert zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{Z} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a^T \mathbf{P} \mathbf{A}_a & \mathbf{A}_a^T \mathbf{P} \mathbf{A}_b \\ \mathbf{A}_b^T \mathbf{P} \mathbf{A}_a & \mathbf{A}_b^T \mathbf{P} \mathbf{A}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_a \\ \hat{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{Z} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a^T \mathbf{P} \mathbf{l} \\ \mathbf{A}_b^T \mathbf{P} \mathbf{l} \end{bmatrix}, \quad (3.82)$$

mit $\mathbf{Z} = \mathbf{A}_b^T \mathbf{P} \mathbf{A}_a (\mathbf{A}_a^T \mathbf{P} \mathbf{A}_a)^{-1}$ und der Nullmatrix $\mathbf{0}$. Ausmultiplizieren führt zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_a^T \mathbf{P} \mathbf{A}_a & \mathbf{A}_a^T \mathbf{P} \mathbf{A}_b \\ \mathbf{0} & -\mathbf{A}_b^T \mathbf{P} \mathbf{A}_a (\mathbf{A}_a^T \mathbf{P} \mathbf{A}_a)^{-1} \mathbf{A}_a^T \mathbf{P} \mathbf{A}_b + \mathbf{A}_b^T \mathbf{P} \mathbf{A}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_a \\ \hat{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a^T \mathbf{P} \mathbf{l} \\ -\mathbf{A}_b^T \mathbf{P} \mathbf{A}_a (\mathbf{A}_a^T \mathbf{P} \mathbf{A}_a)^{-1} \mathbf{A}_a^T \mathbf{P} \mathbf{l} + \mathbf{A}_b^T \mathbf{P} \mathbf{l} \end{bmatrix}. \quad (3.83)$$

Der untere Teil dieser Gleichung

$$\begin{aligned} \left(-\mathbf{A}_b^T \mathbf{P} \mathbf{A}_a (\mathbf{A}_a^T \mathbf{P} \mathbf{A}_a)^{-1} \mathbf{A}_a^T \mathbf{P} \mathbf{A}_b + \mathbf{A}_b^T \mathbf{P} \mathbf{A}_b \right) \hat{\mathbf{x}}_b &= -\mathbf{A}_b^T \mathbf{P} \mathbf{A}_a (\mathbf{A}_a^T \mathbf{P} \mathbf{A}_a)^{-1} \mathbf{A}_a^T \mathbf{P} \mathbf{l} + \mathbf{A}_b^T \mathbf{P} \mathbf{l} \\ \mathbf{N}_b \hat{\mathbf{x}}_b &= \mathbf{n}_b \end{aligned} \quad (3.84)$$

kann separat für die nicht-langwelligen Koeffizienten $\hat{\mathbf{x}}_b$ gelöst werden und das Ergebnis für diese Koeffizienten ist identisch zur Lösung von Gleichung (3.80). Die reduzierte Normalgleichung \mathbf{N}_b und rechte Seite \mathbf{n}_b können im Weiteren für eine kombinierte Schwerefeldlösung herangezogen werden.

Für eine Untersuchung ob Parameterelimination oder Fixierung auf eine Satellitenlösung die beste Methode ist, um eine qualitativ hochwertige Lösung im langwelligen Spektralbereich zu erhalten, oder ob eine spezielle Behandlung des langwelligen Anteils überhaupt von Nöten ist, sei auf Kapitel 6.2.1 verwiesen.

3.3.2 Nicht-Orthogonalität der Basisfunktionen und „Aliasing“

Die sphärisch-harmonische Synthese dient, wie in Kapitel 2.1 dargestellt, zur Berechnung von Funktionalen des Schwerefelds aus sphärisch-harmonischen Koeffizienten. Mit Hilfe von trigonometrischen Funktionen und den vollständig normierten assoziierten Legendre-Polynomen, welche als Basisfunktionen dienen, wird der Spektralraum (sphärisch-harmonische Koeffizienten) mit dem Ortsraum (Schwerefeldfunktionale) verbunden. Die Schwerefeldbestimmung fällt somit auch in den Bereich der Signalverarbeitung und -analyse. Wie Gruber (2000) auf Basis einer Arbeit von Colombo (1981) schreibt, handelt es sich bei den Kugelfunktionen um eine Untergruppe zweidimensionaler *Fourier*-Reihen. Dies bedeutet letztendlich, dass man in der Schwerefeldbestimmungen mit klassischen Problemen der Signalanalyse konfrontiert ist. Im Folgenden

sollen darum zwei daraus resultierende Herausforderungen und ihr Einfluss auf die Schwerefeldbestimmung erläutert werden.

3.3.2.1 Nicht-Orthogonalität der Basisfunktionen

Zentrale Eigenschaft von Basisfunktionen ist ihre Orthogonalität. Diese ermöglicht es, im Umkehrschritt zur Synthese, der Analyse, jeden Koeffizienten des Spektrums einzeln aus dem Signal im Ortsraum zu bestimmen. Ohne die Orthogonalität der Basisfunktionen wäre das nicht möglich, da einzelne Koeffizienten nicht unabhängig von den anderen bestimmbar wären.

Die Orthogonalitätsbedingung für vollständig normierte Kugelfunktionen wird ausführlich in vielen Publikationen beschrieben, ein Beispiel dafür ist Heiskanen & Moritz (1967). An dieser Stelle sollen die wichtigsten Elemente wiedergegeben werden. Die Orthogonalitätsbeziehung lautet

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \bar{Y}_{lm}^C(\theta, \lambda) \cdot \bar{Y}_{ko}^S(\theta, \lambda) \sin \theta d\theta d\lambda &= 0 \\ \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \bar{Y}_{lm}^C(\theta, \lambda) \cdot \bar{Y}_{ko}^C(\theta, \lambda) \sin \theta d\theta d\lambda &= \delta_{lk} \delta_{mo}, \\ \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \bar{Y}_{lm}^S(\theta, \lambda) \cdot \bar{Y}_{ko}^S(\theta, \lambda) \sin \theta d\theta d\lambda &= \delta_{lk} \delta_{mo} \end{aligned} \quad (3.85)$$

wobei

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{lm}^C(\theta, \lambda) &= \bar{P}_{lm}(\cos \theta) \cos(m\lambda) \\ \bar{Y}_{lm}^S(\theta, \lambda) &= \bar{P}_{lm}(\cos \theta) \sin(m\lambda) \end{aligned} \quad (3.86)$$

und

$$\delta_{lk} = \begin{cases} 0, & l \neq k \\ 1, & l = k \end{cases}; \quad \delta_{mo} = \begin{cases} 0, & m \neq o \\ 1, & m = o \end{cases} \quad (3.87)$$

ist. Formel (3.85) zeigt, dass das Integral über das Produkt zweier beliebiger Kugelfunktionen über die Einheitskugel null ist, es sei denn, die beiden Kugelfunktionen sind identisch. Betrachtet man im Weiteren die sphärisch-harmonische Synthese für eine beliebige Funktion f auf der Einheitskugel

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left[\bar{Y}_{lm}^C(\theta, \lambda) \cdot \bar{C}_{lm} + \bar{Y}_{lm}^S(\theta, \lambda) \cdot \bar{S}_{lm} \right], \quad (3.88)$$

so lässt sich leicht zeigen, dass in einem Analyseschritt ein einzelner Koeffizient aus der Funktion auf der Kugel bestimmt werden kann. Zur Bestimmung des Koeffizienten \bar{C}_{ko} werden beide Seiten von Gleichung (3.88) mit der entsprechenden Kugelfunktion $\bar{Y}_{ko}^C(\theta, \lambda)$ multipliziert und es wird über die Einheitskugel integriert. Im Integral auf der rechten Seite verbleibt dann aufgrund der Orthogonalitätsbeziehung nur das Produkt von $\bar{Y}_{ko}^C(\theta, \lambda)$ mit sich selbst

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} f(\theta, \lambda) \cdot \bar{Y}_{ko}^C \sin \theta d\theta d\lambda &= \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \bar{Y}_{ko}^C(\theta, \lambda) \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left[\bar{Y}_{lm}^C(\theta, \lambda) \cdot \bar{C}_{lm} + \bar{Y}_{lm}^S(\theta, \lambda) \cdot \bar{S}_{lm} \right] \sin \theta d\theta d\lambda \\ \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} f(\theta, \lambda) \cdot \bar{Y}_{ko}^C \sin \theta d\theta d\lambda &= \bar{C}_{ko} \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \bar{Y}_{ko}^C(\theta, \lambda) \cdot \bar{Y}_{ko}^C(\theta, \lambda) \sin \theta d\theta d\lambda = \bar{C}_{ko} \end{aligned} \quad (3.89)$$

Setzt man das Ergebnis für das Integral über dieses Produkt aus Gleichung (3.85) ein, erhält man den gewünschten Koeffizienten

$$\bar{C}_{ko} = \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} f(\theta, \lambda) \cdot \bar{Y}_{ko}^C(\theta, \lambda) \sin \theta d\theta d\lambda. \quad (3.90)$$

Für die Bestimmung eines beliebigen Koeffizienten \bar{S}_{ko} lässt sich analog verfahren, man erhält

$$\bar{S}_{ko} = \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} f(\theta, \lambda) \cdot \bar{Y}_{ko}^S(\theta, \lambda) \sin \theta d\theta d\lambda. \quad (3.91)$$

Wie in Kapitel 2.1 erläutert wurde stehen die Beobachtungen des Schwerefelds global nicht als kontinuierliche Funktion zur Verfügung. Die Beobachtungen aus den Schwerefeldsatellitenmissionen liegen als Einzelpunktbeobachtungen, die Schwereanomalien aus Altimetrie und terrestrischen Messungen als Blockmittelwerte vor. Die Verwendung von Punkt- bzw. Blockmittelwerten führt dazu, dass die Gleichungen (3.85) und (3.90) in dieser Form nicht angewendet werden können, sondern diskretisiert werden müssen.

Es gibt mehrere Veröffentlichungen hinsichtlich der Diskretisierung in Bezug auf ein globales Punktwertegitter. Wir orientieren uns an der Darstellung in Sneeuw (1994) und betrachten zusätzlich den Fall von Blockmittelwerten. Sneeuw (1994) führt die Untersuchung der Kugelfunktionen getrennt für trigonometrische Funktionen und die *Legendre*-Polynome durch, wozu Gleichung (3.88) unterteilt wird in

$$\left. \begin{matrix} A_m(\theta) \\ B_m(\theta) \end{matrix} \right\} = \sum_{l=m}^{\infty} \bar{P}_{lm}(\cos \theta) \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{lm} \\ \bar{S}_{lm} \end{matrix} \right. \quad (3.92)$$

und

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m(\theta) \cos(m\lambda) + B_m(\theta) \sin(m\lambda)). \quad (3.93)$$

Die Koeffizienten $A_m(\theta)$ und $B_m(\theta)$ sind, wie in Sneeuw (2000) erläutert wird, eine Linearkombination von Potentialkoeffizienten über den Grad und werden englischsprachig als „lumped coefficients“ bezeichnet. Für Blockmittelwerte gilt entsprechend

$$\left. \begin{matrix} \bar{A}_m(\theta) \\ \bar{B}_m(\theta) \end{matrix} \right\} = \sum_{l=m}^{\infty} P_{lm}(\cos \theta) \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{lm} \\ \bar{S}_{lm} \end{matrix} \right. \quad (3.94)$$

und

$$\bar{f}(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\bar{A}_m(\theta) \frac{2}{m} \cos m \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2} \sin m \frac{\Delta\lambda}{2} + \bar{B}_m(\theta) \frac{2}{m} \sin m \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2} \sin m \frac{\Delta\lambda}{2} \right). \quad (3.95)$$

Hierzu wird implizit die in Rizos und Colombo (1981) propagierte Vertauschung der Summationsreihenfolge $\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty}$ verwendet, welche laut Sneeuw (1994) die Trennung zwischen Längen- und Breiteninformation ermöglicht und dadurch die Grundlage bildet für eine möglichst schnelle rechentechnische Umsetzung der sphärisch-harmonischen Synthese.

Wir setzen voraus, dass das zu Grunde liegende Gitter so diskretisiert ist, dass keine Unterabtastung (siehe Kapitel 3.3.2.2) vorliegt. Setzt man in Längensrichtung voraus $\lambda_i = i \Delta\lambda$, $\Delta\lambda = \pi/l_{\max}$, $i = 0, 1, \dots, 2l_{\max} - 1$, dann gilt für die trigonometrischen Funktionen

$$\begin{aligned}
 & \int_{\lambda=0}^{2\pi} \cos(m\lambda) \cos(o\lambda) d\lambda = (1 + \delta_{m0}) \pi \delta_{mo} \\
 & \quad \Downarrow \\
 & \sum_{i=0}^{2l_{\max}-1} \cos(m\lambda_i) \cos(o\lambda_i) \\
 & = (1 + \delta_{m0} + \delta_{m l_{\max}}) l_{\max} \delta_{mo} \\
 & \quad \Downarrow \\
 & \sum_{i=0}^{2l_{\max}-1} \frac{2}{m} \cos m \frac{\lambda_{i+1} + \lambda_i}{2} \sin m \frac{\Delta\lambda}{2} \\
 & \quad \cdot \frac{2}{o} \cos o \frac{\lambda_{i+1} + \lambda_i}{2} \sin o \frac{\Delta\lambda}{2} \\
 & = \begin{cases} \frac{2\pi^2}{l_{\max}} \delta_{mo}, m=0 \\ \sum_{i=0}^{2l_{\max}-1} \left(\frac{\sin(m\lambda_{i+1}) - \sin(m\lambda_i)}{m} \right)^2 \delta_{mo}, m \neq 0 \end{cases} \\
 & \int_{\lambda=0}^{2\pi} \sin(m\lambda) \sin(o\lambda) d\lambda = \pi \delta_{mo} \\
 & \quad \Downarrow \\
 & \sum_{i=0}^{2l_{\max}-1} \sin(m\lambda_i) \sin(o\lambda_i) \\
 & = (1 - \delta_{m0} - \delta_{m l_{\max}}) l_{\max} \delta_{mo} \\
 & \quad \Downarrow \\
 & \sum_{i=0}^{2l_{\max}-1} \frac{2}{m} \sin m \frac{\lambda_{i+1} + \lambda_i}{2} \sin m \frac{\Delta\lambda}{2} \\
 & \quad \cdot \frac{2}{o} \sin o \frac{\lambda_{i+1} + \lambda_i}{2} \sin o \frac{\Delta\lambda}{2} \\
 & = \begin{cases} 0, m=0 \\ \sum_{i=0}^{2l_{\max}-1} \left(\frac{\cos(m\lambda_i) - \cos(m\lambda_{i+1})}{m} \right)^2 \delta_{mo}, m \neq 0 \end{cases} \\
 & \int_{\lambda=0}^{2\pi} \cos(m\lambda) \sin(o\lambda) d\lambda = 0 \\
 & \quad \Downarrow \\
 & \sum_{i=0}^{2l_{\max}-1} \cos(m\lambda_i) \sin(o\lambda_i) \\
 & = 0 \\
 & \quad \Downarrow \\
 & \sum_{i=0}^{2l_{\max}-1} \frac{2}{m} \cos m \frac{\lambda_{i+1} + \lambda_i}{2} \sin m \frac{\Delta\lambda}{2} \\
 & \quad \cdot \frac{2}{o} \sin o \frac{\lambda_{i+1} + \lambda_i}{2} \sin o \frac{\Delta\lambda}{2} \\
 & = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.96}$$

Die Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen bleibt also auch nach der Diskretisierung erhalten, und zwar sowohl für Punktwerte als auch für Blockmittelwerte. Abb. 3.3 illustriert dies exemplarisch für den Kosinus von $m=0:5$. Die Abbildung basiert auf einer Berechnung, für die ein Punktabstand von 20° verwendet wurde. Sowohl in den Formeln als auch in der Abbildung wird ersichtlich, dass die Berechnung der Summation über die Blockmittelwerte komplizierter ist als die Berechnungen für die anderen beiden Fälle. Auffällig ist zudem, dass der Wertebereich in Abb. 3.3 im Fall von Blockmittelwerten deutlich kleiner ist als im Falle der Punktwerte und zudem die Werte für jede Ordnung unterschiedlich sind, was auch aus den Formeln (3.96) ersichtlich ist.

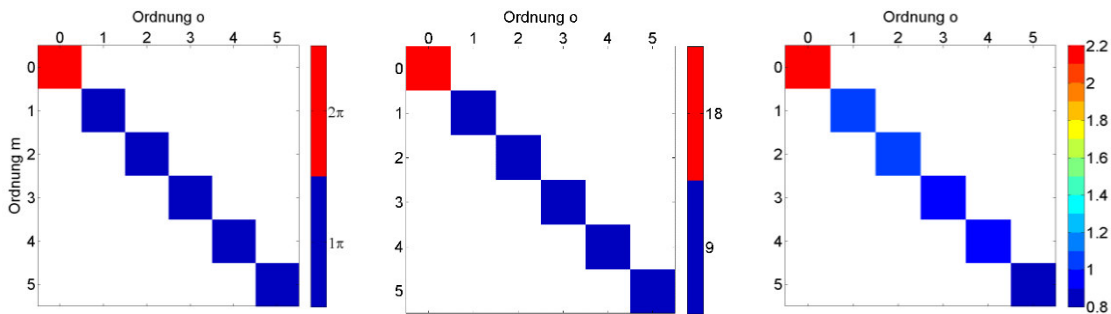


Abb. 3.3: Orthogonalität [-] der trigonometrischen Funktionen nach Gleichung (3.96) am Beispiel des Kosinus für kontinuierliche Funktionen (links), Punktwerte (Mitte) und Blockmittelwerte (rechts).

Im Gegensatz zu den trigonometrischen Funktionen bleibt für die vollständig normierten, assoziierten *Legendre*-Polynome die Orthogonalität im diskreten Fall nicht erhalten. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \bar{P}_{lm}(\cos\theta) \bar{P}_{km}(\cos\theta) \sin\theta d\theta &= 2(2-\delta_{m0})\delta_{lk} \\
 \Downarrow \\
 \sum_{i=1}^L \bar{P}_{lm}(\cos\theta_i) \bar{P}_{km}(\cos\theta_i) &\neq 2(2-\delta_{m0})\delta_{lk} \quad , \quad (3.97) \\
 \Downarrow \\
 \sum_{i=1}^{L-1} PI_{lm}(\cos\theta_i) PI_{km}(\cos\theta_i) &\neq 2(2-\delta_{m0})\delta_{lk}
 \end{aligned}$$

wobei L die Anzahl der gleichabständigen Punkte auf dem Breitenkreis wiedergibt ($\Delta\theta = \pi/(L-1)$). Diese darf beliebig gewählt werden, solange keine Unterabtastung vorliegt.

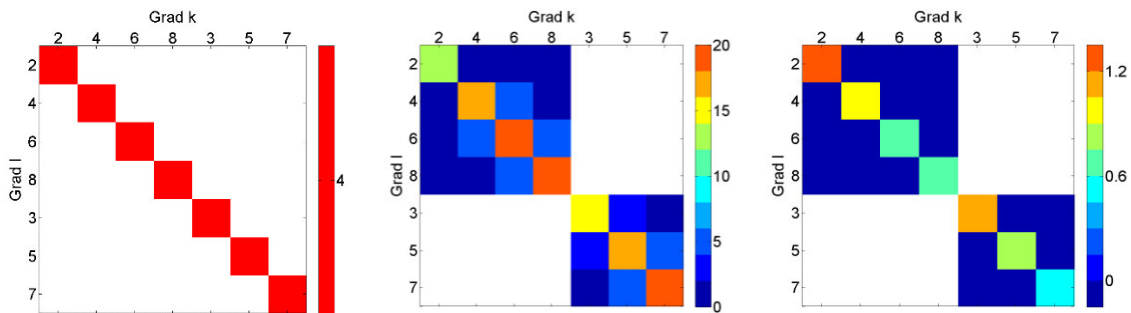


Abb. 3.4: (Nicht)-Orthogonalität [-] der voll-normierten assoziierten *Legendre*-Polynome nach Gleichung (3.97) am Beispiel der Ordnung $m=2$ für kontinuierliche Funktionen (links), Punktwerte (Mitte) und Blockmittelwerte (rechts).

Der Verlust der Orthogonalität im diskreten Fall ist beispielhaft in Abb. 3.4 graphisch dargestellt. Für dieses Beispiel wurden in der Berechnung *Legendre*-Polynome von Ordnung $m=2$ und Grad $l=2:8$ sowie ein Punktabstand von 20° verwendet. Die Nicht-Orthogonalität ist sowohl im Falle der Punkt- als auch der Blockmittelwerte klar sichtbar. Da Polynompaare, in denen jeweils ein Polynom von geradem bzw. ungeradem Grad vorhanden ist, zu Null werden, entsteht eine blockdiagonale Struktur. Im Falle der Blockmittelwerte ist erneut auffällig, dass der Wertebereich deutlich kleiner ist als bei Punktwerten. Die Nicht-Orthogonalität der vollständig-normierten assoziierten *Legendre*-Polynome führt dazu, dass im diskreten Fall keine Analyseformel entsprechend (3.90) gefunden werden kann, da im analogen Schritt zu Gleichung (3.89) nicht nur das quadratische Produkt von \bar{Y}_{ij}^C stehen bleiben würde, sondern jegliche Produkte mit Kugelfunktionen der gleichen Ordnung und je nach Fall (un-)geraden Grades. Eine Lösung für dieses Problem im Falle von Punktwerten liefert Sneeuw (1994) basierend auf der Arbeit von Neumann (1887). Indem man die Gitterpunkte auf den Breitenkreisen in die Nullstellen des *Legendre*-Polynoms vom Grad $l_{\max}+1$ setzt und spezielle, breitenabhängige Gewichte w_i einführt, kann die Orthogonalität für diskrete *Legendre*-Polynome hergestellt und eine Lösung analog zu Gleichung (3.90) gefunden werden. Im Rahmen einer kleinsten-Quadrate-Ausgleichung empfiehlt sich dieser Ansatz jedoch nicht, da neben den Gewichten w_i keine individuelle Gewichtung mehr eingeführt werden kann. Darum wird der Ansatz an dieser Stelle nicht weiter verfolgt, er wird allerdings nochmals für theoretische Betrachtungen in Kapitel 3.3.2.2 verwendet. An dieser Stelle soll weiter untersucht werden, wie sich die Nicht-Orthogonalität der Basisfunktionen in der Ausgleichung auswirkt.

Überlegt man, an welcher Stelle die Orthogonalitätsbedingungen der Kugelfunktionen im diskreten Fall in der kleinsten-Quadrate-Ausgleichung zum Tragen kommt, so sieht man schnell, dass dies in der Normalgleichungsmatrix \mathbf{N} der Fall ist. Für eine beliebige Funktion auf der Einheitskugel (vgl. Gleichung (3.88)) ergibt sich im Falle von gleichgenauen Beobachtungen das beliebige Normalgleichungselement $N_{lm,ko}$, hier am Beispiel eines Kosinus-abhängigen Elements, im Falle von Punkt- und Blockmittelwerten mit

$$\begin{aligned}
 N_{lm,ko} &= \sum_{i=1}^n \bar{P}_{lm}(\cos \theta_i) \bar{P}_{ko}(\cos \theta_i) \cos(m\lambda_i) \cos(o\lambda_i) \\
 &\quad \downarrow \\
 N_{lm,ko} &= \sum_{i=1}^n P_{lm}(\cos \theta_i) P_{ko}(\cos \theta_i) \frac{2}{m} \cos m \frac{\lambda_{i+1} + \lambda_i}{2} \sin m \frac{\Delta\lambda}{2} \frac{2}{o} \cos o \frac{\lambda_{i+1} + \lambda_i}{2} \sin o \frac{\Delta\lambda}{2}
 \end{aligned} \tag{3.98}$$

Gleichung (3.98) enthält die Orthogonalitätsbedingungen sowohl für die trigonometrischen Funktionen (3.96) als auch für die Legendre-Polynome (3.97).

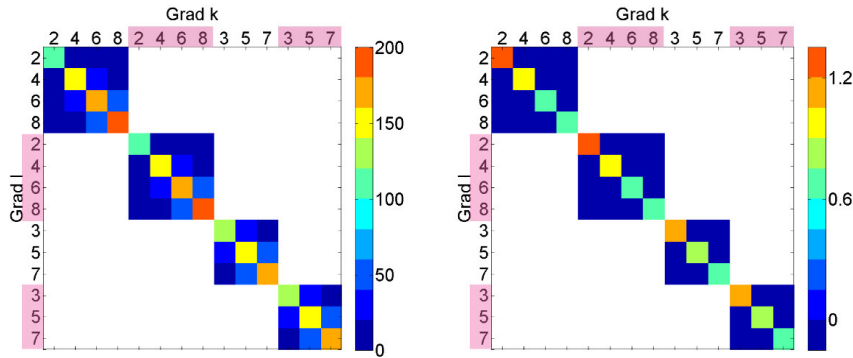


Abb. 3.5: Ausschnitt aus einer Normalgleichung gemäß (3.98) für die Elemente der Ordnung $m=2$ für Punktwerte (links) und Blockmittelwerte (rechts) (Magenta: Sinusanteile).

Im Fall von gleichgenauen Beobachtungen, die für diese Untersuchung angenommen werden, müssten bei Orthogonalität der Kugelfunktionen alle nicht-diagonalen Normalgleichungselemente Null sein, nur die Diagonalelemente wären ungleich Null. Durch die Nicht-Orthogonalität der *Legendre*-Polynome entstehen jedoch auch Nebendiagonalelemente ungleich Null, und zwar immer für Kugelfunktionspaare gleicher Ordnung und Grade mit gleicher Parität. Dies ist in Abb. 3.5 dargestellt. In dieser Abbildung ist ein Ausschnitt aus Normalgleichungsmatrizen für die Elemente der Ordnung $m=2$ dargestellt. Für die Sinus-Anteile wurden die Achsen magentafarben hinterlegt. Wie weiter oben in diesem Kapitel wurde für die Berechnung sowohl in Längen- als auch in Breitenrichtung ein Punktabstand von 20° angenommen. Die blockdiagonale Struktur, wie sie in Abb. 3.5 für die *Legendre*-Polynome dargestellt ist, bildet sich logischerweise in den Normalgleichungen ab.

Im Weiteren lässt sich untersuchen, wie sich die Nicht-Orthogonalität auf das Ausgleichungsergebnis auswirkt. Gleichung (3.59)

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{l} \\
 \hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{e}) \\
 \hat{\mathbf{x}} &= \underbrace{(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}_{\mathbf{I}} - (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{e} \\
 \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} - (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{e}
 \end{aligned}$$

zeigt, dass sich die Nicht-Orthogonalität der Kugelfunktionen im diskreten Fall nicht auf die unbekannt Parameter auswirkt, da diese mit der Einheitsmatrix in den Schätzraum projiziert werden. Jedoch zeigt sich, dass die Projektion des unbekannt Fehlervektors \mathbf{e} in den Schätzraum von der Nicht-Orthogonalität betroffen ist. Die Projektion des Fehlervektors in den Schätzraum sei im Folgenden \mathbf{x}_e genannt, so dass sich Gleichung (3.59) darstellen lässt als

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} - (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{e} \\ &= \mathbf{x} - \mathbf{x}_e\end{aligned}\quad (3.99)$$

Die Projektion \mathbf{x}_e des Fehlervektors \mathbf{e} in den Schätzraum im Rahmen der Schwerefeldberechnung und die Folgen daraus können durch folgendes Experiment simuliert werden. Hierzu wird eine Schwerefeldberechnung nach Gleichung (3.99) bis Grad und Ordnung 20 (441 Parameter) durchgeführt auf Basis eines Halbgradgitters (259.200 Punkte), welches als Geoidhöhengitter angenommen wird. Als Fehlervektor \mathbf{e} dient ein Vektor von Zufallswerten, der in Abb. 3.6 (oben links) dargestellt ist. Abb. 3.6 (unten links) zeigt das zugehörige Histogramm, welches durch die Normalverteilung den zufälligen Charakter des Fehlervektors belegt. Die Standardabweichung beträgt 10 cm, Extremwerte erreichen bis zu 40 cm. Berechnet man den Vektor \mathbf{x}_e , so lässt sich dieser mit $\mathbf{l}_e = \mathbf{A}\mathbf{x}_e$ auf Beobachtungsniveau veranschaulichen. Abb. 3.6 (oben rechts) zeigt den Vektor \mathbf{l}_e und somit den Fehler, den die Projektion von \mathbf{e} in den Schätzraum auslöst, wenn man diesen wiederum im Ortsraum veranschaulicht. Hierbei ist auffällig, dass \mathbf{l}_e mit 4 mm über eine viel geringere Standardabweichung verfügt als \mathbf{e} . Auch die Extremwerte sind mit Werten von maximal 1.5 cm deutlich geringer. Dies liegt an der hohen Redundanz ($r = n - u = 259.200 - 441 = 258.759$), die den Einfluss des zufälligen Charakters der Beobachtungen auf die Schätzungen gering hält. Interessant zu sehen sind die Auswirkungen der Nicht-Orthogonalität. Wie im Histogramm (Abb. 3.6 unten rechts) zu sehen ist, ist \mathbf{l}_e nicht mehr perfekt normalverteilt.

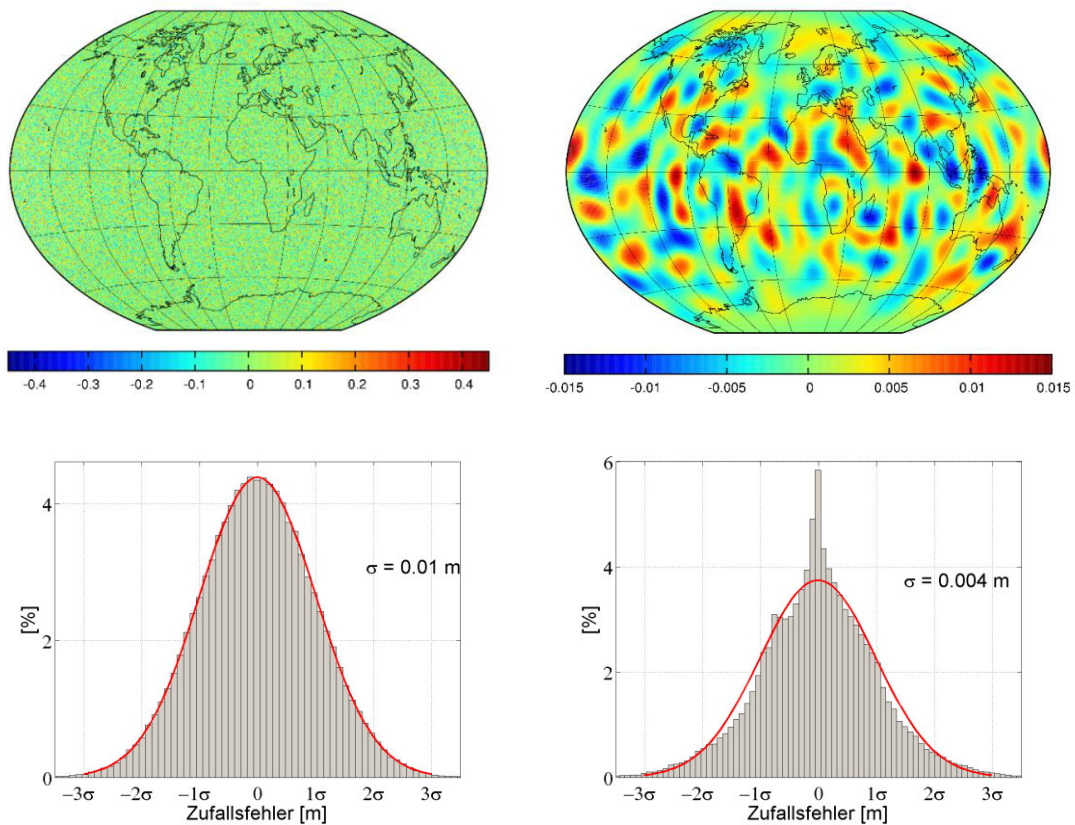


Abb. 3.6: oben links: Zufallsfehler [m]; oben rechts: Fehler im Geoid nach der Ausgleichung resultierend aus dem Zufallsfehler [m]; unten: zugehörige Histogramme (y-Achse: Anzahl der Elemente relativ zur Gesamtzahl der Elemente [%]).

Die Nicht-Orthogonalität der Basisfunktionen spielt für die Verteilung des Fehlervektors \mathbf{e} auf die Schätzungen eine Rolle. Für die Größe des Fehlers in der Schätzung ist die Überbestimmung des Systems entscheidend. Dies wird auch durch Abb. 3.7 belegt, in der die Standardabweichung von \mathbf{x}_e pro Grad

$$c_n = R \sqrt{\sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2)} \quad (3.100)$$

in Abhängigkeit von verschiedenen Gitterauflösungen dargestellt ist. Überdies ist in der Legende der Abbildung die jeweilige Standardabweichung des entsprechenden Vektors \mathbf{l}_e gegeben.

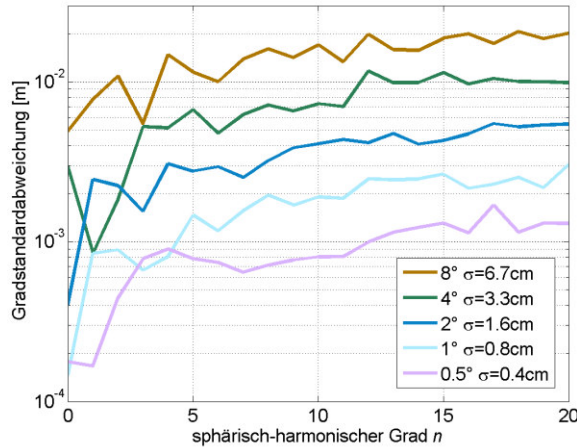


Abb. 3.7: Gradstandardabweichung [m] für \mathbf{x}_e in Abhängigkeit verschiedener Gitterauflösungen.

Festzuhalten ist, dass die Nicht-Orthogonalität die Unbekannten \mathbf{x} selbst nicht beeinflusst. Dies würde auch für verschieden genaue Beobachtungen und eine dementsprechend notwendige Einzelpunktgewichtung mit der Gewichtsmatrix \mathbf{P} gelten. Das Normalgleichungssystem wäre dann zwar voll besetzt, jedoch würde wie in Gleichung (3.59) eine Einheitsmatrix auftreten, so dass die Unbekannten selbst wieder eins zu eins projiziert werden würden. Betroffen wäre erneut nur der Fehlervektor \mathbf{e} .

3.3.2.2 „Spectral Leakage“

In der Realität verfügen Schweremessungen über einen unbeschränkten Signalinhalt. Bestimmen kann man das Schwerefeld allerdings nur bis zu einem bestimmten Grad und Ordnung. Möchte man dieses Problem sauber lösen, so würde sich hierfür der Ansatz von Gleichung (3.80) anbieten:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_a^T \mathbf{P} \mathbf{A}_a & \mathbf{A}_a^T \mathbf{P} \mathbf{A}_b \\ \mathbf{A}_b^T \mathbf{P} \mathbf{A}_a & \mathbf{A}_b^T \mathbf{P} \mathbf{A}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_a \\ \hat{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a^T \mathbf{P} \mathbf{l} \\ \mathbf{A}_b^T \mathbf{P} \mathbf{l} \end{bmatrix}.$$

Der Index a beschreibt jetzt die Schwerefeldanteile, die man bestimmen möchte, der Index b die Anteile darüber hinaus. Dementsprechend ist Gleichung (3.9) für diesen Fall

$$\mathbf{l} + \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a & \mathbf{A}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix}. \quad (3.101)$$

Führt man analog zu den Gleichungen (3.82) bis (3.84) eine Parameterelimination durch, nur diesmal so, dass nicht die Anteile b sondern die Anteile a bestimmt werden, erhält man

$$\left(-\mathbf{A}_a^T \mathbf{P} \mathbf{A}_b (\mathbf{A}_b^T \mathbf{P} \mathbf{A}_b)^{-1} \mathbf{A}_b^T \mathbf{P} \mathbf{A}_a + \mathbf{A}_a^T \mathbf{P} \mathbf{A}_a \right) \hat{\mathbf{x}}_a = -\mathbf{A}_a^T \mathbf{P} \mathbf{A}_b (\mathbf{A}_b^T \mathbf{P} \mathbf{A}_b)^{-1} \mathbf{A}_b^T \mathbf{P} \mathbf{l} + \mathbf{A}_a^T \mathbf{P} \mathbf{l}. \quad (3.102)$$

Auf diesem Weg würden sich also theoretisch Schätzwerte für die Unbekannten \mathbf{x}_a finden lassen. Praktisch ist dies jedoch nicht möglich. Dies liegt daran, dass alle Matrizen, in denen der Index b auftaucht, sehr groß werden würden. Allein $\mathbf{A}_b^T \mathbf{P} \mathbf{A}_b$ wäre im Falle von $\hat{\mathbf{x}}_a = \{\bar{C}_{0,0}, \dots, \bar{S}_{720,720}\}$ und $\hat{\mathbf{x}}_b = \{\bar{C}_{720,720}, \dots, \bar{S}_{2190,2190}\}$

133 TByte groß. Um dieses Problem zu umgehen versucht man, die Signalinhalte b aus den Beobachtungen zu eliminieren. Auf welche Art und Weise dies geschehen kann wird in Kapitel 3.3.2.4 erklärt. An dieser Stelle soll allerdings zunächst geklärt werden, was mit den Signalinhalten über dem maximal zu bestimmenden Grad geschieht, welche nicht aus den Beobachtungen eliminiert werden konnten. Für diese Untersuchung gehen wir erneut von gleichgenauen Beobachtungen aus, so dass die Schätzung der Unbekannten nach Gleichung (3.58) erfolgt. Diese Schätzung ist erwartungstreu für Beobachtungen, die nur von den Unbekannten \mathbf{x} und dem zugehörigen Fehlervektor \mathbf{e} abhängen. Wurde das Signal über dem maximal zu bestimmenden Grad nicht korrekt entfernt, so dass ein unbekannter Anteil \mathbf{x}_2 verbleibt, ergibt sich der Beobachtungsvektor mit

$$\mathbf{l} = [\mathbf{A} \quad \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} - \mathbf{e}. \quad (3.103)$$

Die Beobachtung ist jetzt also nicht nur abhängig vom stochastischen Fehleranteil \mathbf{e} , sondern auch von einem deterministischen (Fehler-)Anteil in Form von $\mathbf{B}\mathbf{x}_2$, welcher in der Ausgleichung nicht modelliert wird, wobei \mathbf{B} einer Designmatrix für den unbekanntem Anteil \mathbf{x}_2 entspricht. Auf Grund dieses nicht modellierten Anteils ist Gleichung (3.58) keine strenge Lösungsgleichung für Gleichung (3.103). Es lässt sich jedoch durch Einsetzen von Gleichung (3.103) in Gleichung (3.58) demonstrieren, wie sich die fehlerhafte Modellierung in der Schätzung auswirkt. Greene (2012) bezeichnet eine solche Schätzung als eine durch die Vernachlässigung von relevanten Variablen verzerrte Schätzung. Es folgt

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{l} \\ &= (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \left([\mathbf{A} \quad \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} - \mathbf{e} \right) \\ &= (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T [\mathbf{A} \quad \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} - (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{e} \\ &= \left[(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} - (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{e} \\ &= \left[\mathbf{I} \quad (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} - (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{e} \end{aligned} \quad (3.104)$$

Letztendlich ergibt sich die Schätzung der Unbekannten mit

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} + (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B} \mathbf{x}_2 - (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{e} \\ &= \mathbf{x} + \mathbf{x}_d - \mathbf{x}_e \end{aligned} \quad (3.105)$$

wobei \mathbf{x}_d für den deterministischen Fehleranteil in den Schätzwerten $\hat{\mathbf{x}}$ steht. Dies kann auch englischsprachig als „Spectral Leakage“-Problem bezeichnet werden (Kammeyer & Kroschel, 2012). Man versucht, eine im Spektralbereich bandbegrenzte Schätzung vorzunehmen. Dies kann als eine Rechteckfensterung des Parameterraums interpretiert werden. Ist das Rechteck falsch gewählt, verbleibt in den Beobachtungen ein unbekannter Fehleranteil \mathbf{x}_2 . Dies führt zu einem Schmiereffekt im Signalbereich, also letztendlich im Beobachtungsvektor, der auf die Schätzung der Unbekannten abgebildet wird. Neben dieser Untersuchung für gleichmäßig verteilte Daten findet sich eine Diskussion des „Spectral Leakage“-Effekts im Falle einer Datenverteilung entlang einer Satellitenbahn am Beispiel der GOCE-Gradiometrie in Schuh (2000).

Betrachtet man Gleichung (3.105), so fällt auf, dass hier erneut die Thematik Orthogonalität der Kugelfunktionen zum Tragen kommt. Würde die Orthogonalität der Kugelfunktionen im diskreten Fall erhalten bleiben, so müsste das Produkt $\mathbf{A}^T \mathbf{B}$ zu null werden, so dass man letztendlich eine erwartungstreue Schätzung nur abhängig von \mathbf{x} und \mathbf{x}_e erhalten würde, die Orthogonalität würde einen Art Filtereffekt auf das überschüssige Signal haben und dieses würde in den Nullraum des Parameterraums projiziert. Die Nicht-

Orthogonalität führt also dazu, dass \mathbf{x}_2 in den Parameterraum projiziert werden kann. Mit der Erfahrung aus Kapitel 3.3.2.1 kann man bereits erkennen, dass die überschüssigen Signalanteile auf Parameter gleicher Ordnung, gleicher Zugehörigkeit bezüglich Kosinus- und Sinus-Anteils sowie Grade gleicher Parität projiziert werden. Dies wird in Abb. 3.8 bestätigt. Dort ist für zwei Beispiele die Matrix $[(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B}]$ dargestellt, also jene Matrix, mit der $\hat{\mathbf{x}}$ multipliziert wird. Diese Matrix gibt wieder, wie auf die Schätzwerte projiziert wird. Beide Beispiele basieren auf einem Gitter mit einem Punkt- abstand von 36° , oben ist die Berechnung für Punktwerte, unten für Blockmittelwerte dargestellt. Dabei enthält \mathbf{x} jeweils die Koeffizienten $\{\bar{C}_{00}, \dots, \bar{S}_{22}\}$ und \mathbf{x}_2 die Koeffizienten $\{\bar{C}_{30}, \dots, \bar{S}_{44}\}$. Es ist ersichtlich, dass jeder Schätzwert $\hat{\mathbf{x}}$ von der Projektion von \mathbf{x}_2 in den Schätzraum betroffen ist. Für Punktwerte ist das Gewicht der Fehlprojektion höher als für Blockmittelwerte. Dies kann damit erklärt werden, dass für Punktwerte die Nicht-Orthogonalität der *Legendre*-Polynome etwas stärker ausgeprägt ist. In Kapitel 3.3.2.1 wurde gezeigt, dass die Nicht-Orthogonalität für Kugelfunktionspaare von Graden, die nahe beieinander liegen besonders ausgeprägt ist. Darum ist das Gewicht der Projektion von \bar{C}_{40} auf \hat{C}_{20} höher als das für die Projektion auf \hat{C}_{00} .

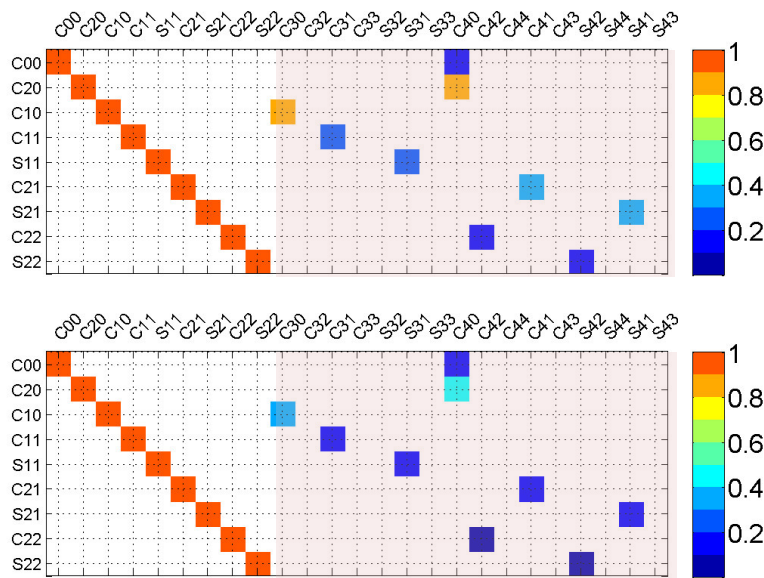


Abb. 3.8: Beispiele für die Projektionsmatrix $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B}$ im Falle von $\mathbf{x} = \{\bar{C}_{00}, \dots, \bar{S}_{22}\}$ und $\mathbf{x}_2 = \{\bar{C}_{30}, \dots, \bar{S}_{44}\}$. Oben: Punktwerte, unten: Blockmittelwerte (für Blockmittelwerte sind die Projektionen $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B}$ in diesem Beispiel negativ, werden allerdings aus Darstellungsgründen mit ihrem Betrag abgebildet).

Da es sich bei der Projektion der überschüssigen Signalanteile auf die Schätzung nicht um einen stochastischen Fehler handelt, sondern um einen deterministischen, kann der Fehler nicht durch eine Erhöhung der Beobachtungszahl, also eine Erhöhung der Überbestimmung, reduziert werden.

In Abschnitt 6.2.2, der verschiedene numerische Rechendemonstrationen enthält, finden sich einige spektral höher aufgelöste Beispiele zur Veranschaulichung der Auswirkungen des „Spectral Leakage“-Effekts.

Exkurs: „Spectral Leakage“ im Fall einer 2D-Fourier-Reihe

Eine interessante Untersuchung, wenn auch eher von theoretischer als praktischer Relevanz, ist, wie sich das „Spectral Leakage“-Verhalten im Rahmen der Schwerfeldmodellierung ändert, wenn als Basisfunktion nicht Kugelfunktionen, sondern eine 2D-Fourier-Reihe genutzt wird. Bei einer 2D-Fourier-Reihe werden sowohl in Längen- als auch in Breitenrichtung trigonometrische Funktionen als Basisfunktionen verwendet.

Dies bringt den Vorteil mit sich, dass die 2D-*Fourier*-Reihe bei gleichabständiger Abtastung auch im diskreten Fall ihre Orthogonalität nicht verliert.

Hintergrund dafür, dass eine sphärisch-harmonische Reihe in eine 2D-Fourier Reihe überführt werden kann ist, wie Sneeuw & Bun (1996) zeigen, dass sich die *Legendre*-Polynome mit

$$\bar{P}_l(\cos \theta) = \sum_{p=0}^l a_{lmp} \begin{cases} \cos p \theta \\ \sin p \theta \end{cases} \quad (3.106)$$

als Sinus-Kosinus Reihe darstellen lassen, wobei für die Berechnung von a_{lmp} auf Hofsummer & Potters (1960) verwiesen sei. Sneeuw & Bun (1996) zeigen im Weiteren, wie sich Gleichung (3.92) durch Einsetzen von Gleichung (3.106) schreiben lässt als

$$\begin{aligned} A_m(\theta) &= \sum_{l=m}^{\infty} \sum_{p=0}^l a_{lmp} \bar{C}_{lm} \begin{cases} \cos p \theta \\ \sin p \theta \end{cases} = \sum_{p=0}^l D_{mk} \begin{cases} \cos p \theta \\ \sin p \theta \end{cases} \\ B_m(\theta) &= \sum_{l=m}^{\infty} \sum_{p=0}^l a_{lmp} \bar{S}_{lm} \begin{cases} \cos p \theta \\ \sin p \theta \end{cases} = \sum_{p=0}^l E_{mk} \begin{cases} \cos p \theta \\ \sin p \theta \end{cases} \end{aligned} \quad (3.107)$$

mit

$$\begin{Bmatrix} D_{mk} \\ E_{mk} \end{Bmatrix} = \sum_{l=\max(m,p)}^{\infty} a_{lmp} \begin{Bmatrix} \bar{C}_{lm} \\ \bar{S}_{lm} \end{Bmatrix}. \quad (3.108)$$

Weiteres Einsetzen von Gleichung (3.107) in Gleichung (3.93) ergibt als Folge die 2D-*Fourier*-Reihe

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} (D_{mk} \cos(m\lambda) + E_{mk} \sin(m\lambda)) \begin{cases} \cos p \theta \\ \sin p \theta \end{cases}. \quad (3.109)$$

mit ihren Koeffizienten D_{mk} und E_{mk} , wobei für alle Gleichungen von (3.106) bis (3.109) gilt, dass sich $\cos p \theta$ auf gerade und $\sin p \theta$ auf ungerade Ordnungen m bezieht.

Wie Sneeuw & Bun (1996) erläutern, kann durch Spiegelung des Beobachtungsgitters an der Tangentialebene durch den Südpol und durch Rotation der gespiegelten Werte um 180° um die Pol-Achse ein Übergang auf eine Torus-Fläche simuliert werden. Dieser Schritt ist nicht notwendig, aber empfehlenswert, da das Gitter dann auch in Breitenrichtung periodisch ist, was aus theoretischen und praktischen Gründen von Vorteil ist. Es gilt dann für ein in Längen- und Breitenrichtung gleichabständiges Gitter die gleiche Abtastfrequenz $M = P$ und folglich $m_{Nyq} = p_{Nyq}$.

Führen wir jetzt Berechnungen auf Basis einer 2D-*Fourier*-Reihe analog zu den Berechnungen für Abb. 3.8 durch, also basierend auf einem Punktabstand von 36° , und berechnen die Matrix $[(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B}]$ für $\mathbf{x}_1 = \{D_{00}, \dots, E_{22}\}$ und $\mathbf{x}_2 = \{D_{03}, \dots, E_{44}\}$, dann sehen wir in Abb. 3.9, dass es zu keiner Projektion des überschüssigen Signals in den Schätzraum kommt. Der Grund dafür, dass das überschüssige Signal nicht in den Schätzraum projiziert wird, ist, dass wegen der Orthogonalität der Basisfunktionen die Matrix zu einer Nullmatrix wird. Die Orthogonalität führt zu einer Art Filtereffekt, so dass es im Falle von einer 2D-*Fourier*-Reihe bei einer Diskretisierung im Gegensatz zu den Kugelfunktionen zu keinem „Spectral Leakage“-Effekt kommt.

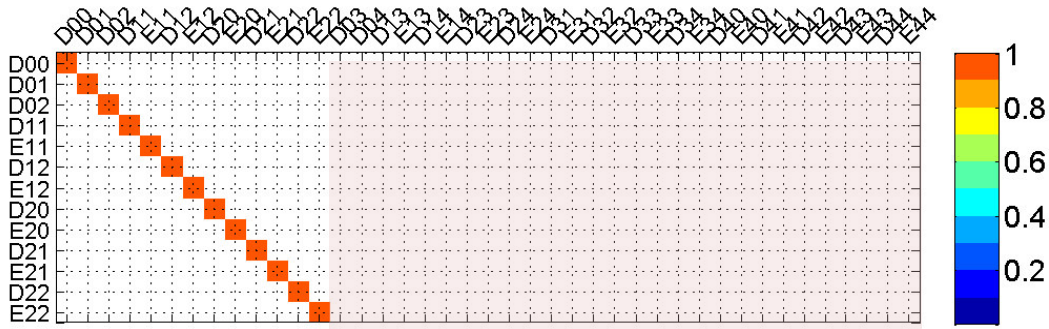


Abb. 3.9: Beispiele für die Projektionsmatrix $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B}$ auf Basis einer 2D-*Fourier*-Reihe mit $\mathbf{x} = \{D_{00}, \dots, E_{22}\}$ und $\mathbf{x}_2 = \{D_{03}, \dots, E_{44}\}$.

3.3.2.3 „Aliasing“

Durch die Diskretisierung auf Punkt- und Blockmittelwerte kann im Rahmen der Schwerefeldbestimmung neben „Spectral Leakage“ auch ein „Aliasing“-Effekt auftreten, der in zahlreichen Publikationen ausführlich beschrieben wird, z.B. in Kammeyer & Kroschel (2012). Was „Aliasing“ ist und wie es im Rahmen der Schwerefeldbestimmung entsteht bzw. sich auf diese auswirkt, soll im Folgenden beschrieben werden.

In der Signalanalyse wird der Übergang von einem kontinuierlichen Signal auf ein diskretes Signal, also die gleichabständige Abtastung des kontinuierlichen Signals, als Multiplikation des kontinuierlichen Signals mit dem *Dirac*-Kamm, einer periodischen Verteilung von *Dirac*-Stößen, interpretiert (Ohm, 2010). Dementsprechend wird das Spektrum des kontinuierlichen Signals mit einem zweiten *Dirac*-Kamm, welcher die *Fourier*-Transformierte des ersten *Dirac*-Kamms ist, gefaltet. Die Faltung mit dem *Dirac*-Kamm führt dazu, dass das Spektrum periodisch fortgesetzt wird. Nach Kammeyer & Kroschel (2012) muss die Frequenz, mit welcher ein kontinuierliches Signal abgetastet wird, mindestens doppelt so groß sein, wie die maximale Frequenz des zugehörigen Spektrums. Wird diese Bedingung nicht erfüllt, überlappen sich die periodisch fortgesetzten Spektren des abgetasteten Signals, was als „Aliasing“ bezeichnet wird. Dies hat zur Folge, dass das kontinuierliche Signal nicht mehr aus dem abgetasteten Signal rekonstruiert werden kann. Um also ein Signal korrekt abtasten zu können, darf es keine Signalanteile besitzen mit Frequenzen, die höher sind als die *Nyquist*-Frequenz, welche halb so groß wie die Abtastfrequenz ist.

„Aliasing“ lässt sich anhand eines Experiments einfach verdeutlichen. Dafür betrachten wir zunächst die diskrete Sinus-Kosinus-Reihe

$$f_i = \sum_{m=0}^{m_{\text{Nyq}}} \left[a_m \cos\left(\frac{2\pi m i}{M}\right) + b_m \sin\left(\frac{2\pi m i}{M}\right) \right], \quad (3.110)$$

mit M gleichabständigen Stützpunkten $i = 0, \dots, M-1$ entlang eines Breitenkreises, die mit $\Delta\lambda = 2\pi/M$ dargestellt werden kann als

$$f_i = \sum_{m=0}^{m_{\text{Nyq}}} \left[a_m \cos(mi\Delta\lambda) + b_m \sin(mi\Delta\lambda) \right],$$

was nochmals vereinfacht werden kann zu

$$f(\lambda_i) = \sum_{m=0}^{m_{\text{Nyq}}} \left[a_m \cos(m\lambda_i) + b_m \sin(m\lambda_i) \right]. \quad (3.111)$$

Im Falle eines Breitenkreises entspricht die Anzahl der Stützstellen M der Abtast(kreis)frequenz ($M = 2\pi/\Delta\lambda$), m gibt die einzelnen (Kreis-)frequenzen wieder und folglich gilt für die *Nyquist*-Frequenz

$$m_{Nyq} = \frac{1}{2}M . \quad (3.112)$$

Die Koeffizienten a_m und b_m können berechnet werden durch

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{N-1} f(\lambda_i), m=0 \\ \left. \begin{aligned} a_m \\ b_m \end{aligned} \right\} &= \frac{2}{M} \sum_{i=0}^{N-1} f(\lambda_i) \begin{cases} \cos(m\lambda_i) \\ \sin(m\lambda_i) \end{cases}, m \neq 0 \end{aligned} \quad (3.113)$$

und der Betrag des Amplitudenspektrums F ergibt sich mit

$$F(m) = \sqrt{a_m^2 + b_m^2} . \quad (3.114)$$

Für unser Experiment betrachten wir die Funktion $f_i = \cos(2\lambda_i) + \cos(4\lambda_i)$, die in Abbildung 3.10 (oben links) abgebildet ist. Mit $M=10$ entsprechend einem Punktabstand von $\Delta\lambda = 36^\circ$ ergibt sich $m_{Nyq} = 5$. Rein durch Betrachten der formalen Darstellung wird sofort ersichtlich, dass alle Koeffizienten Null sein müssen, außer $a_2 = a_4 = 1$. Dies wird bestätigt durch die Darstellung des theoretischen zugehörigen Amplitudenspektrums (Mitte links), in dem außer $F(|m|=2,4)=1$ alle Werte Null sind. Die höchsten Frequenzen des Signals sind also kleiner als m_{Nyq} , das Abtasttheorem ist somit erfüllt und die periodisch fortgesetzten Spektren überlappen sich nicht. Betrachtet man hingegen unter gleichen Bedingungen die Funktion $f_i = \cos(2\lambda_i) + \cos(6\lambda_i)$ (oben rechts), mit $a_2 = a_6 = 1$, so sieht man, dass das Abtasttheorem nicht erfüllt ist, die höchsten Frequenzen des Signals sind höher als m_{Nyq} . Dies führt zu einer Überlappung mit den benachbarten Spektren (Mitte rechts), die benachbarten Spektren, genauer gesagt $a_6 = 1$, bilden sich auf $F(|m|=4)$ ab, es entsteht „Aliasing“. Das Ergebnis ist, dass die Amplitudenspektren in diesem Beispiel für die korrekt und für die unterabtastete Funktion (unten links und rechts) identisch sind, was den Effekt des „Aliasing“ verdeutlicht. In diesem Fall ist die Unterabtastung bei genauerer Betrachtung bereits in den abgetasteten Signalen deutlich, da man in den Abbildungen des Signals (oben links und rechts) sehen kann, dass sich die Hüllkurven entsprechend der unterschiedlichen Funktionen unterscheiden, jedoch an den diskret abgetasteten Stellen die Werte identisch sind.

Es lässt sich auch allgemein formal ausdrücken, auf welcher Frequenz m_{Ali} sich ein bestimmter Signalinhalt einer beliebigen Frequenz m oberhalb der *Nyquist*-Frequenz m_{Nyq} abbildet:

$$m_{Ali} = \left| m - M \cdot \text{round}\left(\frac{m}{M}\right) \right|. \quad (3.115)$$

Diese Gleichung ist jeweils gültig für a_m und b_m .

Das Experiment auf Basis der diskreten Sinus-Kosinus-Reihe, welches hier zur Demonstration des „Aliasing“-Effekts gewählt wurde, ist auch von praktischer Bedeutung für die Schwerefeldbestimmung. Dies wird deutlich, wenn man Gleichung (3.111) mit Gleichung (3.93) vergleicht. Beide Gleichungen sind identisch, es handelt sich bei (3.93) um eine Sinus-Kosinus-Reihe, bei der die ‚lumped coefficients‘ $A_m(\theta)$ und $B_m(\theta)$ den *Fourier*-Koeffizienten a_m und b_m entsprechen. Die Ordnungen m entsprechen den Kreisfrequenzen. Somit kann man mit der Sinus-Kosinus-Reihe „Aliasing“ in Längenrichtung untersuchen. Hierfür ist Gleichung (3.115) von Bedeutung.

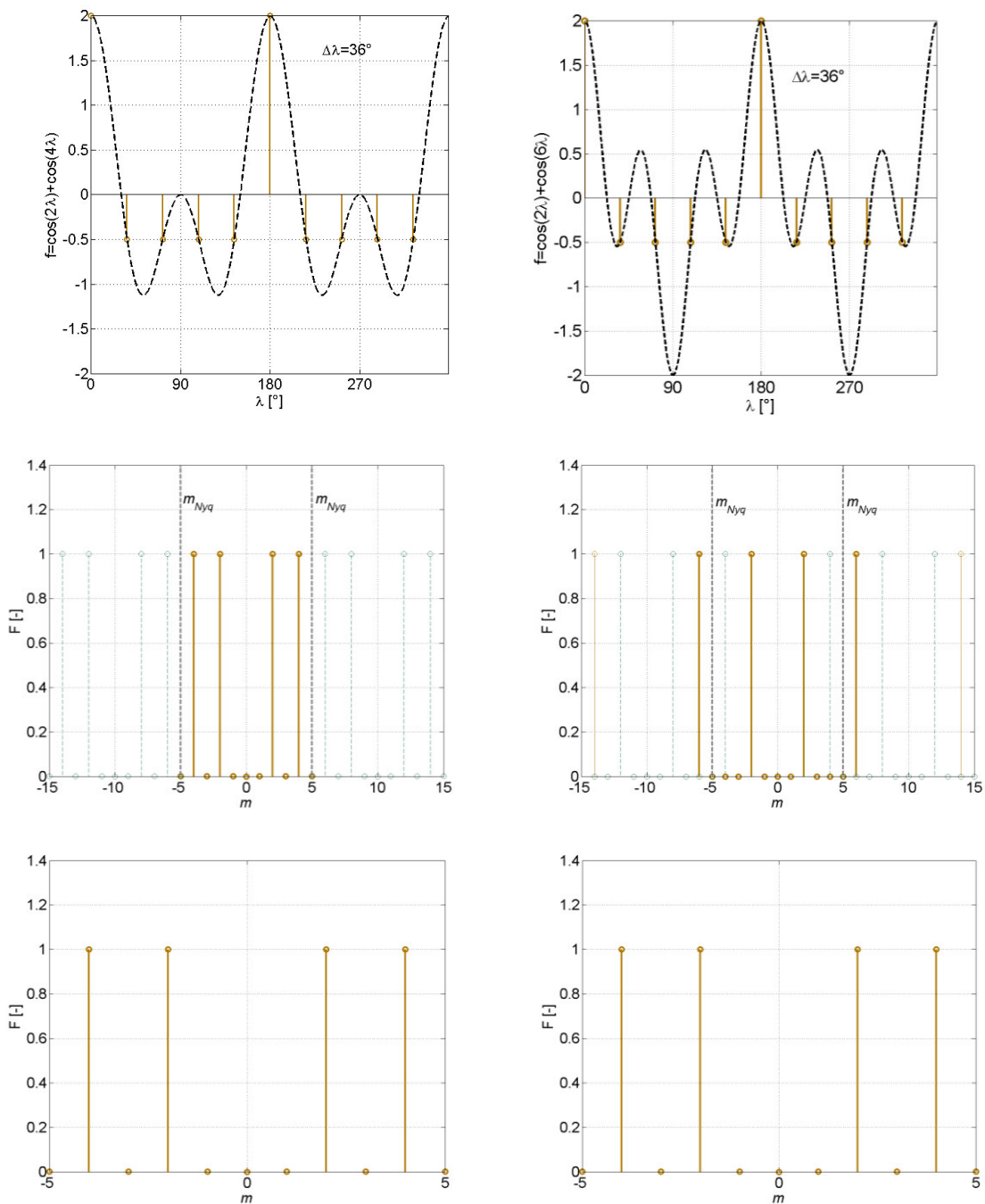


Abbildung 3.10: Darstellung des „Aliasing“-Effekts durch den Vergleich einer korrekt abgetasteten (links; kein „Aliasing“) und einer unterabgetasteten Funktion (rechts; „Aliasing“). Oben: Die diskreten Testfunktionen f entlang des Äquators (gestrichelt, die Hüllkurven von f). Mitte: Zugehörige (periodisch-fortgesetzte) theoretische Spektren F . Unten: De-facto Spektren F , wie sie aus einer numerischen Berechnung folgen.

Unterabtastung in Längenrichtung

Nach den Erfahrungen aus Kapitel 3.3.2.2, die zeigen, dass die Orthogonalitätsbeziehungen für die Transformation des deterministischen Fehleranteils in den Schätzraum verantwortlich sind, ist es naheliegend, dass auch hier die Orthogonalitätsbedingungen eine Rolle spielen. Dies wird durch Abb. 3.11 bestätigt.

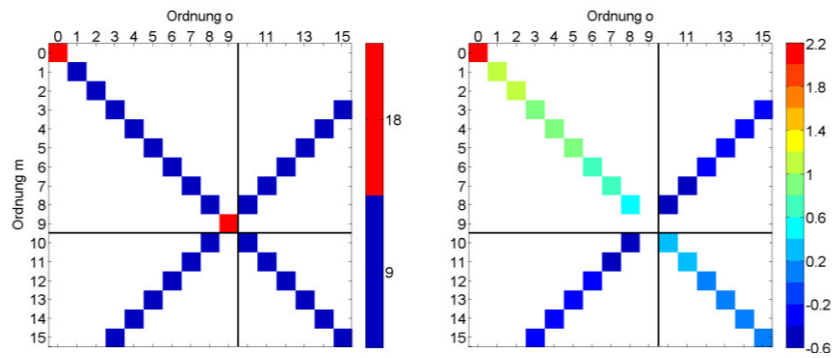


Abb. 3.11: Entstehung des „Aliasing“-Effekts in den Orthogonalitätsbeziehungen der trigonometrischen Funktionen bei Unterabtastung am Beispiel des Kosinus für Punktwerte (links) und Blockmittelwerte (rechts).

Abb. 3.11 (links) zeigt wie Abb. 3.3 (Mitte) die Orthogonalitätsbeziehung der trigonometrischen Funktionen am Beispiel des Kosinus für Paare verschiedener Ordnungen m und o auf Basis von Punktwerten mit einem Punktabstand von 20° . In dieser Abbildung sind allerdings auch Ordnungen höher als die *Nyquist*-Ordnung m_{Nyq} , die in der Graphik durch eine schwarze Linie verdeutlicht wird, abgebildet. Die Entstehung von Nebendiagonalelementen zeigt, wie sich „Aliasing“ in den Orthogonalitätsbeziehungen der trigonometrischen Funktionen oberhalb von m_{Nyq} ausdrückt. Die Nebendiagonalelemente entstehen genau dort, wo es sich durch Gleichung (3.115) vorhersagen lässt. So entsteht z.B. mit $M=18$ für $m=8$ ein Nebendiagonalelement mit $o=10$. Die Nebendiagonalelemente sind dabei genauso groß wie die entsprechenden Hauptdiagonalelemente. Ursache für die Entstehung der Nebendiagonalelemente ist, dass die Unterabtastung dazu führt, dass z.B. die Summe $\sum \cos(8\lambda)\cos(10\lambda)$ als $\sum \cos(8\lambda)\cos(8\lambda)$ interpretiert wird, vergleiche Abbildung 3.10. Würde man auf gleiche Weise die Orthogonalitätsbeziehung am Beispiel des Sinus darstellen, so wäre das Element $m=o=m_{Nyq}=0$. Dies zeigt sich in Gleichung (3.96) und ist logisch, da die Abtastpunkte sich in den Nullstellen der entsprechenden Sinus-Funktion befinden.

Betrachtet man Blockmittelwerte (Abb. 3.11 (rechts)), so finden sich die Nebendiagonalelemente ebenfalls nach Gleichung (3.115). Es ist jedoch ersichtlich, dass die Nebendiagonalelemente nicht die gleichen Werte aufweisen wie das entsprechende Hauptdiagonalelement, sondern vom Betrag kleiner sind und teilweise auch negativ. Am auffälligsten ist jedoch, dass das Hauptdiagonalelement für m_{Nyq} Null ist. Der Grund für den Nullwert ist, dass die Blockgrenzen genau in den Maxima und Minima der Funktion $\cos(m_{Nyq}\lambda)$ liegen, wie Abb. 3.12 zeigt, und dementsprechend (auf Grund der Symmetrie der Funktion) das Integral über einen Block immer Null ergibt. Im Gegensatz dazu ist das Hauptdiagonalelement für m_{Nyq} im Falle von Sinus-Blockmittelwerten ungleich Null. Die Blockgrenzen liegen dann nämlich in den Nullstellen der Funktion, so dass das Integral über einen Block nicht Null ist.

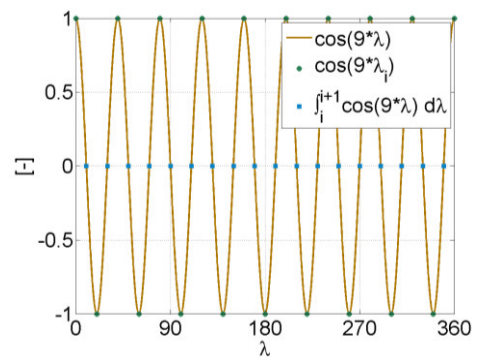


Abb. 3.12: Hüllkurve $\cos(m_{Nyq}\lambda)$, Punktwerte $\cos(m_{Nyq}\lambda_i)$ und Integralwerte $\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \cos(m_{Nyq}\lambda) d\lambda$ für $m_{Nyq}=9$.

Nachdem man mit Gleichung (3.115) bestimmen kann, wie sich Unterabtastung in Längenrichtung auf die trigonometrischen Funktionen auswirkt und dies auch in Abb. 3.11 anhand der Orthogonalitätsbeziehungen dargestellt ist, ist es interessant zu sehen, wie sich Unterabtastung in Längenrichtung in einem Normalgleichungssystem analog zu Gleichung (3.98) abbildet. Hierfür nehme man ein Gitter mit einem Punktabstand von 36° in Breitenrichtung und 60° in Längenrichtung an, woraus folgt $m_{Nyq} = 3$ bzw. $M = 6$. Des Weiteren nimmt man an, die entsprechende Funktion $f(\theta, \lambda)$ enthalte maximal Signal bis zu Grad und Ordnung 4. Dann liegt in Längenrichtung Unterabtastung vor und „Aliasing“ entsteht. Die entsprechenden Normalgleichungen sind in Abb. 3.13 dargestellt, links für Punktwerte und rechts für Blockmittelwerte. Die Funktion enthält mit \bar{C}_{44} und \bar{S}_{44} zwei Koeffizienten, die sich über $m_{Nyq} = 3$ befinden. Für diese beiden Koeffizienten entstehen (wie es sich auch mit Gleichung (3.115) deckt) in den Normalgleichungsmatrizen Nebendiagonalelemente mit \bar{C}_{22} und \bar{C}_{42} bzw. \bar{S}_{22} und \bar{S}_{42} , was dazu führt, dass die blockdiagonale Struktur der Normalgleichung auf Grund von „Aliasing“ zerstört wird. Für \bar{C}_{44} und \bar{S}_{44} entstehen keine Nebendiagonalelemente mit \bar{C}_{32} bzw. \bar{S}_{32} , da auf Grund der Orthogonalitätsbedingungen der *Legendre*-Polynome Paare mit Graden von unterschiedlicher Parität Null werden (siehe Absatz 3.3.2.1). Für $m_{Nyq} = 3$ entstehen, wie oben erläutert wurde, Nullelemente auf der Hauptdiagonalen, im Falle von Punktwerten für \bar{S}_{33} und \bar{S}_{43} , im Falle von Blockmittelwerten für \bar{C}_{33} und \bar{C}_{43} .

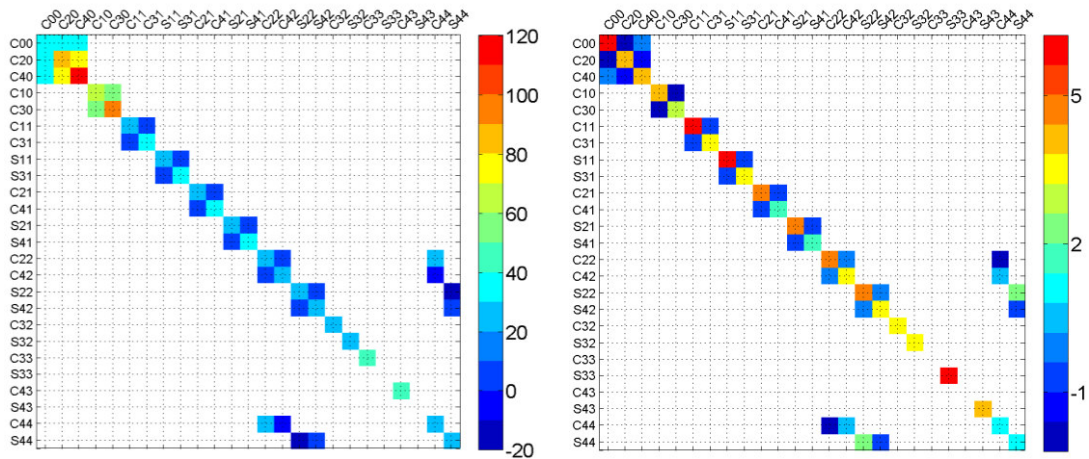


Abb. 3.13: Normalgleichungen bis Grad und Ordnung 4 im Falle von Unterabtastung in Längenrichtung für Punktwerte (links) und Blockmittelwerte (rechts).

Diese Nullelemente auf der Hauptdiagonalen führen dazu, dass das Gleichungssystem nicht invertierbar und infolgedessen auch nicht lösbar ist. Folglich empfiehlt sich, dieses nur für Koeffizienten kleiner als m_{Nyq} aufzustellen. Der Einfluss von „Aliasing“ auf eine solche Schwerefeldlösung, die nur bis Grad und Ordnung $< m_{Nyq}$ aufgestellt ist, kann als weiterer deterministischer Fehleranteil interpretiert werden und kann darum mit den Formeln aus Kapitel 3.3.2.2 analysiert werden. Gleichung (3.103)

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} - \mathbf{e}$$

drückt, wie in Kapitel 3.3.2.2 erläutert, den Beobachtungsvektor aus. Die Unterabtastung in Längenrichtung wirkt sich auf die Designmatrix \mathbf{B} des unbekanntem Anteils \mathbf{x}_2 aus. Gleichung (3.105)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} + (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B} \mathbf{x}_2 - (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{e} \\ &= \mathbf{x} + \mathbf{x}_d - \mathbf{x}_e \end{aligned}$$

liefert Schätzwerte für die Unbekannten, der deterministische Fehleranteil \mathbf{x}_d in den Schätzwerten ist von „Aliasing“ betroffen.

Berechnet man die Matrix $[(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B}]$, die zeigt, wie die Unbekannten $[\mathbf{x} \ \mathbf{x}_2]^T$ auf die Schätzwerte $\hat{\mathbf{x}}$ projiziert werden - vergleiche Gleichung (3.104) -, so lässt sich das Auftreten von „Aliasing“ im Ausgleichsprozess demonstrieren. Möchte man Schätzwerte bis Grad und Ordnung 2 auf Basis des eben erwähnten Gitters lösen - Punktabstand von 36° in Breiten- und 60° in Längenrichtung; Beobachtungen mit Signalinhalt bis Grad und Ordnung 4, welche folglich in Längenrichtung unterabtastet sind - so ergibt sich die Projektionsmatrix wie in Abb. 3.14 (oben) dargestellt. Zum Vergleich zeigt Abb. 3.14 (unten) wie die Projektionsmatrix aussieht, wenn in Längenrichtung keine Unterabtastung vorliegt, wofür wie in Breitenrichtung ein Punktabstand von 36° angenommen wird.

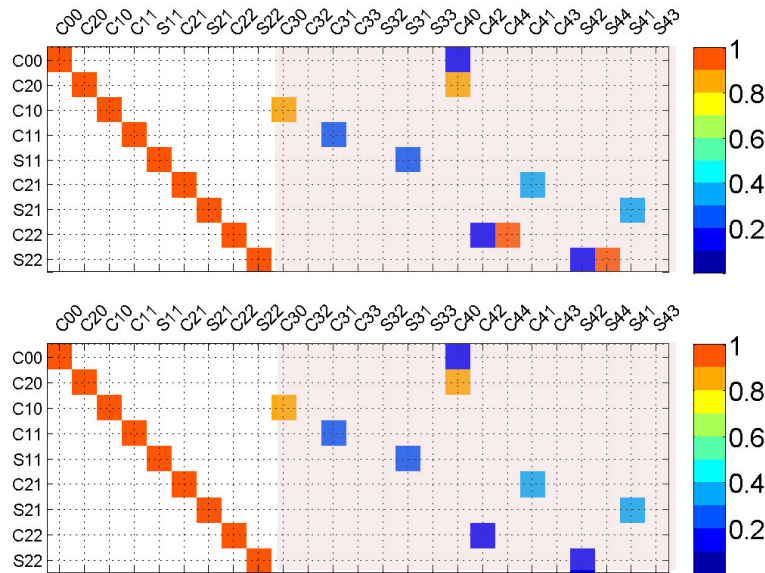


Abb. 3.14: Beispiele für die Projektionsmatrix $[(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B}]$, oben im Fall von Unterabtastung in Längenrichtung, unten zum Vergleich bei korrekter Abtastung, dies entspricht dem aus Kapitel 3.3.2.2 bekannten „Spectral Leakage“-Fall (Abb. 3.8 oben).

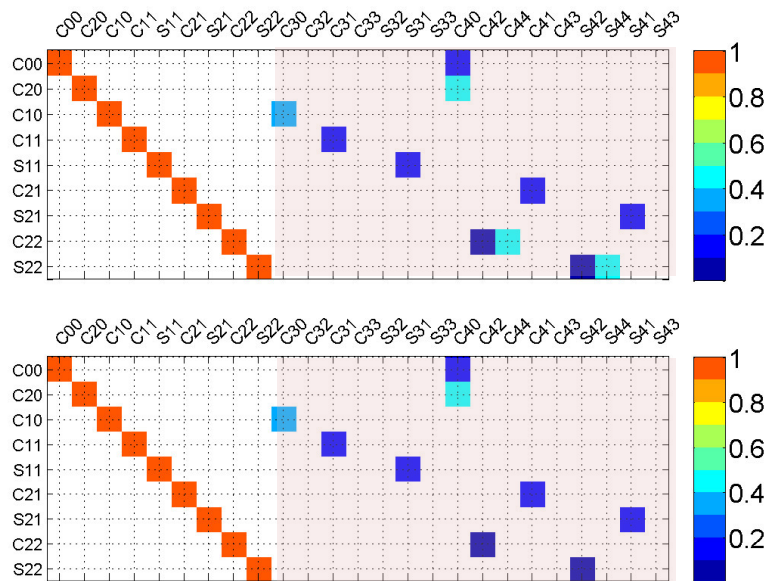


Abb. 3.15: Beispiele für die Projektionsmatrix $[(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B}]$ analog zu Abb. 3.14 im Falle von Blockmittelwerten.

In den Teilmatrizen $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B}$ sind ein Großteil der Projektionen der überschüssigen Anteile \mathbf{x}_2 identisch für beide Abbildungen. Diese sind auf das „Spectral Leakage“-Problem zurückzuführen. Im Falle der Unterabtastung, also des „Aliasing“-Falls, entstehen jedoch zwei zusätzlich Projektionen. Diese drücken die Projektion von \bar{C}_{44} auf \bar{C}_{22} sowie von \bar{S}_{44} auf \bar{S}_{22} aus (Anmerkung: Die Projektion von \bar{S}_{44} ist negativ, ist aber aus Darstellungsgründen hier mit ihrem Betrag dargestellt). Während sich Abb. 3.14 auf Punktwerte bezieht, stellt Abb. 3.15 den analogen Sachverhalt für Blockmittelwerte dar (auch hier sind negative Projektionen mit ihrem Betrag dargestellt).

Eine weitere Möglichkeit, „Aliasing“ bzw. allgemein Fehlprojektionen in den Schätzraum zu visualisieren, ist, die Matrix $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B}$ in ein Koeffizientendreieck umzusortieren. Diese Darstellung hat den Vorteil, dass man schnell sehen kann, welche Elemente von \mathbf{x} am stärksten von Fehlprojektionen betroffen sind. Nachteil ist, dass nicht mehr direkt sichtbar ist, in Zusammenhang mit welchem Element \mathbf{x}_2 diese Fehlprojektion entsteht. Während Grafiken wie Abb. 3.14 und Abb. 3.15 nur zur Visualisierung von Beispielen mit einer geringen Parameteranzahl geeignet sind, eignet sich die Darstellung von $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B}$ in Form einer Dreiecksmatrix auch für größere Problemstellungen. Dies wird demonstriert durch Abb. 3.16, für deren Berechnung ein Gitter mit Punktabstand von 2° in Breitenrichtung und 3° in Längsrichtung zugrunde liegt. Das überschüssige Signal enthält für dieses Beispiel alle Koeffizienten von Grad 80 und ist somit in Längsrichtung unterabtastet. Geschätzt werden alle Koeffizienten bis Grad und Ordnung 59.

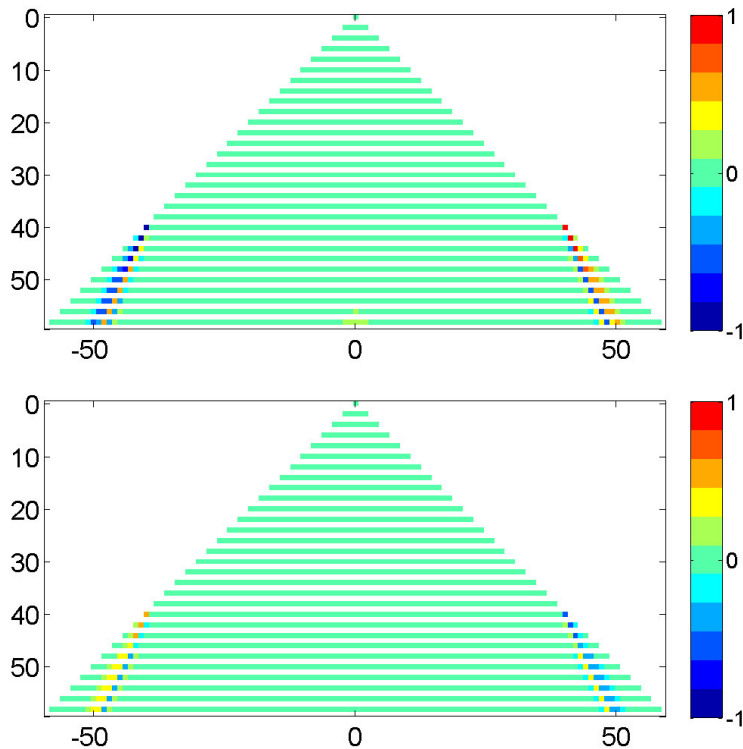


Abb. 3.16: Umsortierung der Matrix $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B}$ in ein Koeffizientendreieck für den Fall einer Unterabtastung in Längsrichtung ($\mathbf{x} = \{\bar{C}_{00}, \dots, \bar{S}_{5959}\}$; $\mathbf{x}_2 = \{\bar{C}_{800}, \dots, \bar{S}_{8080}\}$). Oben: Punktwerte, unten: Blockmittelwerte.

Da das überschüssige Signal von geradem Grad ist, sind alle geschätzten Parameter von ebenfalls geradem Grad von „Spectral Leakage“ betroffen, während die Schätzwerte der ungeraden Grade dies nicht sind. Am auffälligsten jedoch sind Bänder in den Dreiecken, welche in Folge der Unterabtastung in Längsrichtung entstehen. Mit der höchsten Ordnung $m=80$ ergibt sich nach Gleichung (3.115) $m_{Ali} = 40$. Und in der Tat sind die ersten betroffenen Elemente \bar{C}_{4040} und \bar{S}_{4040} . Vom Gesichtspunkt der trigonometrischen Funktionen sind alle Koeffizienten mit $m > 40$ von „Aliasing“ betroffenen. Da jedoch die Koeffizienten auch von

den Orthogonalitätsbedingungen der *Legendre*-Polynome abhängig sind, entstehen die Bandstrukturen und nicht alle Koeffizienten sind betroffen. Das erste betroffene Element ist allerdings immer $\bar{C}_{m_{Ali} m_{Ali}}$ bzw. $\bar{S}_{m_{Ali} m_{Ali}}$. Im Falle von Blockmittelwerten haben die von „Aliasing“ betroffenen Projektionen im Gegensatz zum Fall der Punktwerte ein anderes Vorzeichen. Auch ist die Größe der Projektionen in der Regel nur halb so groß.

Unterabtastung in Breitenrichtung

Während die Untersuchungen in Längenrichtung durch die trigonometrischen Funktionen geprägt sind (Gleichung (3.93)), muss für die Untersuchung des „Aliasing“-Effekts in Breitenrichtung Gleichung (3.92) herangezogen werden, welche im diskreten Fall zu

$$\begin{Bmatrix} A_m(\theta_i) \\ B_m(\theta_i) \end{Bmatrix} = \sum_{l=m}^L \bar{P}_l(\cos \theta_i) \begin{Bmatrix} \bar{C}_{lm} \\ \bar{S}_{lm} \end{Bmatrix} \quad (3.116)$$

mit $L+1$ gleichabständigen Stützstellen $i=0, \dots, L$ und einem Punktabstand von $\Delta\theta = \pi/L$ wird. Die zentrale Rolle kommt hier den vollständig normierten assoziierten *Legendre*-Polynomen zu. Dies erschwert die Untersuchung des „Aliasing“-Effekts in Breitenrichtung. Grund hierfür ist, dass den Graden l und damit jeder einzelnen Basisfunktion $\bar{P}_l(\cos \theta_i)$ nicht direkt eine spezifische Frequenz zugeordnet werden kann, im Gegensatz zu den trigonometrischen Funktionen, bei denen die Ordnungen m und damit auch jede einzelne Basisfunktion mit den Kreisfrequenzen zusammenfallen. Vielmehr ist, wie Gleichung (3.106) zeigt, jedes assoziierte *Legendre*-Polynom eine Reihe von trigonometrischen Funktionen $\cos p\theta$ bzw. $\sin p\theta$, und somit eine Kombination von mehreren (Kreis-)Frequenzen p . Grundsätzlich geht die Summation über p in Gleichung (3.106) von 0 bis l , so dass im Grunde jedes assoziierte *Legendre*-Polynom als maximale Frequenz $p=l$ enthält, jedoch ist der Anteil der einzelnen Frequenzen, welche durch die Koeffizienten a_{lmp} gewichtet werden, teilweise so schwach, dass diese de-facto vernachlässigbar sind, also das entsprechende *Legendre*-Polynom einen weniger hochfrequenten Charakter aufweist. Dies wird deutlich, wenn man die a_{lmp} für verschiedene vollständig normierte assoziierte *Legendre*-Polynome vergleicht.

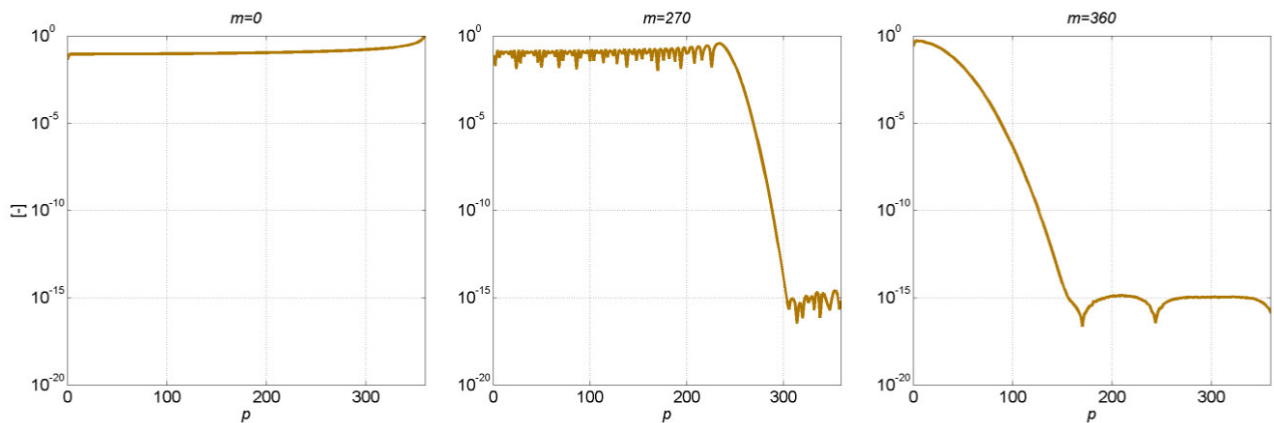


Abb. 3.17: Koeffizienten a_{lmp} für $l=360$ und verschiedene Ordnungen m (negative Werte sind mit Absolutwert dargestellt; ist $l-p$ ungerade, ist das entsprechende a_{lmp} gleich 0 und hier vernachlässigt).

Abb. 3.17 stellt die Koeffizienten a_{lmp} für Grad $l=360$ und die Ordnungen $m=0, 270, 360$ dar. Für das zonale *Legendre*-Polynom $\bar{P}_{360 0}(\cos \theta)$ (links) sind alle a_{lmp} signifikant, sie werden sogar mit steigendem p größer. Die höchste Frequenz $p=360$ hat also einen deutlichen Einfluss auf das Polynom. Folglich weist dieses Polynom einen hochfrequenten Charakter auf. Die a_{lmp} für das Polynom $\bar{P}_{360 270}(\cos \theta)$ (Mitte) fallen ab circa $p=250$ gegen Null ab, weswegen dessen Charakter weniger hochfrequent ist. Nochmals deutlich früher gehen die a_{lmp} gegen Null für das Polynom $\bar{P}_{360 360}(\cos \theta)$ (rechts), weswegen dieses von den drei dargestellten Polynomen das langwelligste ist. Diese Beobachtung lässt sich auch verallgemeinern. Die

Legendre-Polynome eines Grades sind am hochfrequentesten wenn sie zonal sind und werden mit steigender Ordnung immer langwelliger. Am langwelligsten ist das sektorielle Polynom.

Dass *Legendre*-Polynome eines bestimmten Grades mit steigender Ordnung von ihrem Charakter langwelliger werden kann im Grunde auch schon am Polynom selbst gesehen werden. Nach der Formel von *Rodrigues* (Rodrigues, 1816) ist die Definitionsgleichung der zugeordneten *Legendre*-Polynome

$$P_{lm}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} P_l^{(m)}(x), \quad (3.117)$$

wobei $P_l^{(m)}(x)$ die m -te Ableitung von $P_l(x)$ ist und $x = \cos(\theta)$. Die assoziierten *Legendre*-Polynome sind eine Kombination aus den Ableitungen von $P_n(x)$ und der Funktion $(1-x^2)^{m/2}$, welche auch als Formfunktion bezeichnet wird, da sie mit steigender Ordnung Polynomanteile umso stärker unterdrückt, je polnäher sie sind. Die Anzahl der Nullstellen eines assoziierten *Legendre*-Polynoms ist $l-m$, so dass mit steigender Ordnung die Anzahl der Nulldurchgänge weniger und die Funktion langwelliger wird. Beispielsweise ist für $l=m$, also die l -te Ableitung des Polynoms $P_l(x)$, diese ein konstanter Wert, so dass $P_{ll}(x)$ nur noch von der Formfunktion geprägt ist. Die Eigenschaften der assoziierten *Legendre*-Polynome lassen sich eins zu eins auf die vollständig normierten assoziierten *Legendre*-Polynome übertragen, und Abb. 3.18 bestätigt, dass der hochfrequente Charakter der Polynome mit steigender Ordnung abnimmt.

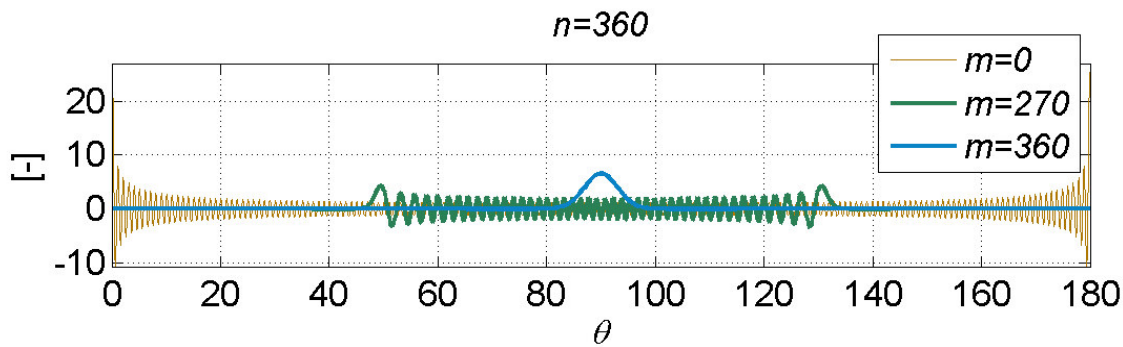


Abb. 3.18: Vollständig-normierte assoziierte *Legendre*-Polynome $\bar{P}_{360\ 0}(\theta)$, $\bar{P}_{360\ 270}(\theta)$ und $\bar{P}_{360\ 360}(\theta)$.

Aus der Tatsache, dass sich vollständig-normierte assoziierte *Legendre*-Polynome desselben Grades l in Abhängigkeit ihrer Ordnung m vom Frequenzgehalt unterscheiden, lässt sich folgern, dass sich für einen bestimmten Grad l kein einheitliches „Aliasing“-Verhalten bestimmen lässt. Da aber die zonalen Polynome immer den hochfrequentesten Charakter aufweisen, mit der maximalen Frequenz $p=l$, so dass sich eine Unterabtastung in Breitenrichtung immer zuerst auf den zonalen Koeffizienten niederschlägt, kann aus der Untersuchung der zonalen Polynome eine allgemeine Aussage getroffen werden, ab welchem Grad l eine Schwerefeldlösung von „Aliasing“ betroffen ist.

Auf dem Torus gilt in Breitenrichtung für die *Nyquist*-Frequenz

$$p_{Nyq} = \frac{1}{2}P, \quad (3.118)$$

wobei diese Formel das Pendant zu Gleichung (3.112) in Längenrichtung ist. Betrachtet man den Übergang von Kugel auf Torus, wie er in Kapitel 3.3.2.2 beschrieben wird, so wird ersichtlich, dass auf der Kugel für die *Nyquist*-Frequenz gelten muss

$$p_{Nyq} = L. \quad (3.119)$$

Dies bedeutet, dass ein Schwerefeldfunktional mit einem Signal bis maximal Grad $l = p_{Nyq}$ in Breitenrichtung an mindestens $L+1$ Stellen abgetastet werden muss, damit keine Unterabtastung vorliegt.

Ähnlich wie für die trigonometrischen Funktionen (Abbildung 3.10) kann für *Legendre*-Polynome mit Hilfe eines Beispiels leicht aufgezeigt werden, was im Falle einer Unterabtastung geschieht. Auf Basis der bisherigen Erkenntnisse aus diesem Kapitel wird ein Beispiel mit $m=0$ gewählt. Das Resultat ist in Abb. 3.19 dargestellt. Oben links ist die Funktion $A_0(\theta_i) = \bar{P}_{40}(\theta_i) \cdot \bar{C}_{40}$ mit $\bar{C}_{40} = 1$ dargestellt. Mit 6 Stützstellen folgt $p_{Nyq} = L = 5$, so dass die Funktion korrekt abgetastet ist. Dies zeigt sich auch im entsprechenden Spektrum (unten links), welches mit einem kleinsten-Quadrate-Ansatz berechnet wurde. Dort sind alle $\bar{C}_{l0} = 0$ außer \bar{C}_{40} , welches mit 1 korrekt geschätzt wurde.

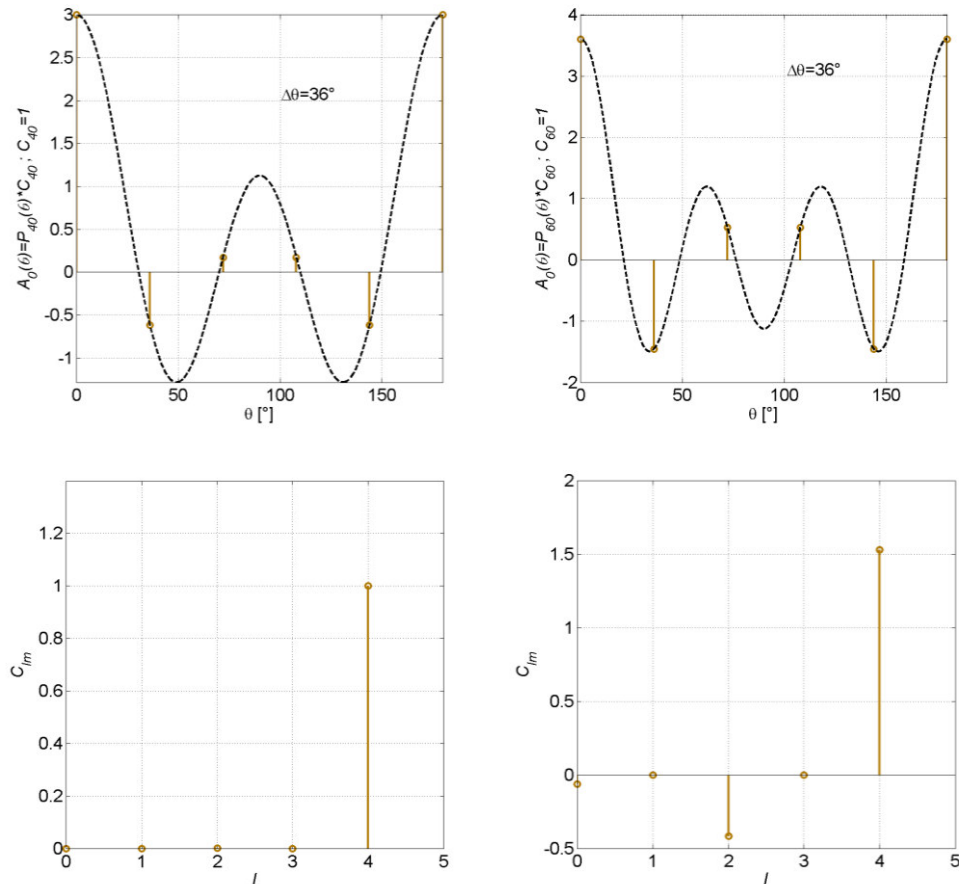


Abb. 3.19: Darstellung des „Aliasing“-Effekts am Beispiel diskreter assoziierter vollständig-normierter *Legendre*-Polynome durch den Vergleich einer korrekt abgetasteten (links; kein „Aliasing“) und einer unterabgetasteten Funktion (rechts; „Aliasing“). Oben: Die diskreten Funktionen A_0 entlang eines Meridians (gestrichelt, die Hüllkurven von A_0). Unten: Schätzwerte für \bar{C}_{lm} . Der „Aliasing“-Effekt ist überlagert von einem „Spectral Leakage“-Effekt, der aus der Nicht-Orthogonalität der *Legendre*-Polynome im diskreten Fall folgt.

Oben rechts ist im Gegensatz dazu die Funktion $A_0(\theta_i) = \bar{P}_{60}(\theta_i) \cdot \bar{C}_{60}$ mit $\bar{C}_{60} = 1$ dargestellt, welche bei derselben Anzahl von Stützstellen unterabgetastet ist. Im zugehörigen Spektrum (unten rechts) wird ersichtlich, dass mehrere Koeffizienten falsch geschätzt werden. Dass mehrere Koeffizienten ungleich Null sind und nicht nur ein Alias existiert, ist der Nicht-Orthogonalität der *Legendre*-Polynome geschuldet, welche in einem Ausgleichungsansatz, wie er hier gewählt worden ist, dazu führt, dass überschüssiges Signal in den Schätzraum projiziert wird (vergleiche Gleichung (3.105)). Der größte Schätzwert \bar{C}_{40} ist jedoch vermutlich „Aliasing“ zuzuordnen. Hier führt die Nicht-Orthogonalität der Basisfunktion dazu, dass \bar{C}_{40} nicht mit exakt 1, sondern einem Wert darüber hinaus geschätzt wird. Dies würde bedeuten, dass entsprechend Formel (3.115) in Breitenrichtung gilt

$$l_{Ali} = \left\lfloor l - 2L \cdot \text{round}\left(\frac{l}{2L}\right) \right\rfloor. \quad (3.120)$$

Zu Bedenken ist, dass sich diese Gleichung auf zonale Koeffizienten bezieht. Für höhere Ordnungen und dementsprechend langwelligere Signalanteile ist sie nicht gültig.

Anhand des Beispiels wird eine weitere Problematik bei der Untersuchung von „Aliasing“ in Breitenrichtung ersichtlich. Es kann nicht sauber zwischen Nicht-Orthogonalität und „Aliasing“ unterschieden werden, da beide Effekte, auch wenn sie total unterschiedliche Ursachen haben, zusammen in Gleichung (3.105) im Produkt $\mathbf{A}^T \mathbf{B}$ auftreten. In einem Versuch, „Aliasing“ und Nicht-Orthogonalität zu trennen, greifen wir auf den bereits in Kapitel 3.3.2.1 erwähnten Ansatz von Neumann (1887) und Sneeuw (1994) zurück, mit dem sich für die *Legendre*-Polynome Orthogonalität herstellen lässt. Wie Krylov & Stroud (2005) zu entnehmen ist können alle Integrale über *Legendre*-Polynome $P_l(\cos\theta)$ für alle Grade $l \leq 2L-1$ exakt dargestellt durch

$$\int_0^\pi P_l(\cos\theta) d\theta = \sum_{i=1}^L w_i P_l(\cos\theta_i), \quad (3.121)$$

wenn die Abtastpunkte in den Nullstellen des *Legendre*-Polynoms vom Grad L

$$P_L(\cos\theta_i) = 0 \quad (3.122)$$

liegen. Dies führt dazu, dass die Abtastpunkte nicht mehr gleichabständig sind und sich deren Anzahl auf L ($i=1, \dots, L$) reduziert. Wie weiter oben bereits erwähnt handelt es sich bei w_i um breitenabhängige Gewichte, welche auch als *Gauss*-Gewichte bezeichnet werden. Die Berechnung der Nullstellen der *Legendre*-Polynome und der *Gauss*-Gewichte ist in Krylov & Stroud (2005) dargestellt. Sneeuw (2000) zeigt, dass Gleichung (3.121) auch gültig ist für die Produkte assoziierter vollständig normierter *Legendre*-Polynome

$$\int_0^\pi \bar{P}_{lm}(\cos\theta) \bar{P}_{km}(\cos\theta) d\theta = \sum_{i=1}^L w_i \bar{P}_{lm}(\cos\theta_i) \bar{P}_{km}(\cos\theta_i) = 2(2 - \delta_{m0}) \delta_{lk}. \quad (3.123)$$

Dies ist gleichbedeutend mit der Herstellung deren gewichteter Orthogonalität, wobei zu berücksichtigen ist, dass die Bedingung $l+k \leq 2L-1$ erfüllt sein muss. Da $L+L = p_{Nyq} + p_{Nyq} = 2L$ gilt, sind im Rahmen einer Schätzung die Orthogonalitätsbedingungen nur erfüllt, wenn der höchste Grad der Schätzung $< p_{Nyq}$ ist.

In Abb. 3.20 ist die Orthogonalitätsbedingung nach Gleichung (3.123) für Paare der Grade l und k und für verschiedene Ordnungen dargestellt. Die Berechnung basiert auf einem Meridian mit 20 gleichabständigen Stützstellen, es ist also $p_{Nyq} = L = 20$. Man sieht, dass für alle Paare, welche die Bedingung $l+k \leq 2L-1 = 39$ erfüllen auch die Orthogonalitätsbedingung erfüllt ist. Für die anderen Paare ist dies nicht der Fall und es entstehen Nebendiagonalelemente. Für $m=0$ (oben links) findet sich eine stark ausgeprägte diagonale Struktur für die Elemente $l+k = 2L = 40$. Die Elemente dieser diagonalen Struktur lassen sich exakt mit Gleichung (3.120) finden. Dies bestätigt, dass sich mit dieser Gleichung berechnen lässt, ab welchem Grad eine Schwerefeldlösung bei Unterabtastung in Breitenrichtung von „Aliasing“ betroffen ist. Für höhere Ordnungen, bei denen die *Legendre*-Polynome wie erläutert einen weniger hochfrequenten Charakter aufweisen, verschiebt sich die diagonale Struktur auf einen Wert $l+k > 40$. Hier lässt sich Gleichung (3.120) nicht anwenden.

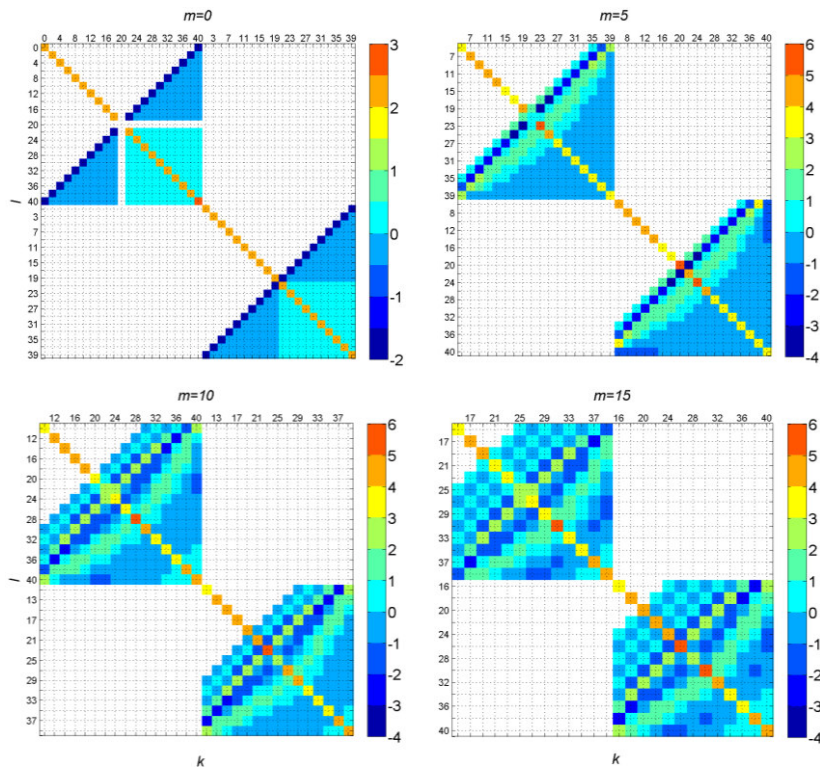


Abb. 3.20: (Nicht-)Orthogonalität der vollständig normierten assoziierten *Legendre*-Polynome nach Gleichung (3.123) für verschiedene Ordnungen m und $p_{Nyq} = L = 20$ [-].

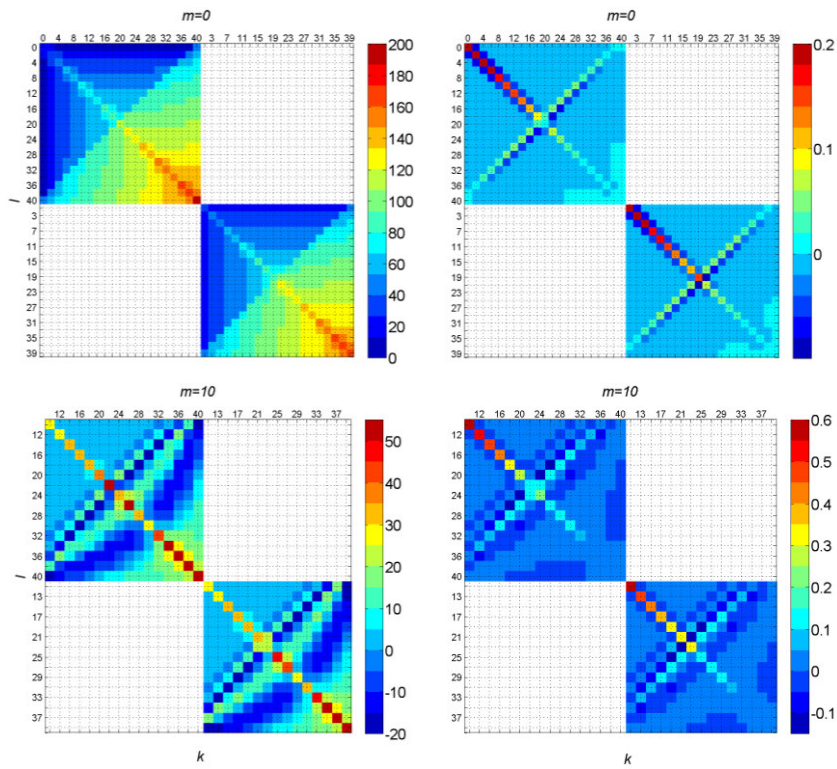


Abb. 3.21: Nicht-Orthogonalität der vollständig normierten assoziierten *Legendre*-Polynome nach Gleichung (3.97) für verschiedene Ordnungen m und $L = 20$, links Punkt-, rechts Blockmittelwerte [-].

Generell bleibt festzuhalten, dass auch mit dem Ansatz von Neumann (1887) und Sneeuw (1994) nur bedingt das Auftreten von „Aliasing“ von der Nicht-Orthogonalität getrennt werden kann, da nur für die Elemente $l+k \leq 2L+1$ Orthogonalität hergestellt werden kann. Führt man dieselbe Berechnung wie für Abb. 3.20 für Punktwerte und Integrale auf Basis eines gleichabständigen Gitters durch, ergibt sich dieses Problem wieder über alle Grade hinweg. Dies ist in Abb. 3.21 dargestellt. Für die Ordnung $m=0$ zeichnet sich allerdings erneut für die Elemente $l+k=2L=40$ eine deutliche Struktur ab. Diese Struktur lässt sich auch mit Gleichung (3.120) finden, was belegt, dass diese Gleichung auch bei einem gleichabständigen Gitter zur Bestimmung des Einflussbereichs von „Aliasing“ verwendet werden kann, auch wenn die Nicht-Orthogonalität nicht sauber abgetrennt werden kann. Für höhere Ordnungen zeigt sich erneut, dass sich die Struktur auf die Elemente $l+k > 2L$ verschiebt.

Als nächstes soll dargestellt werden, wie eine Unterabtastung in Breitenrichtung in einem System von Normalgleichungen sichtbar wird, ähnlich wie dies für die Unterabtastung in Längenrichtung analysiert worden ist (vgl. Abb. 3.13). Hierfür wird das zugrunde liegende Gitter diesmal mit einem Punktabstand von 60° in Breitenrichtung und 36° in Längenrichtung gewählt. Die Abtastung in Breitenrichtung entspricht $L = p_{Nyq} = 3$. Es wird erneut angenommen, die entsprechende Funktion $f(\theta, \lambda)$ enthalte maximal Signale bis zu Grad und Ordnung 4, was letztendlich bedeutet, dass in Breitenrichtung Unterabtastung vorliegt. Die entsprechenden Normalgleichungssysteme für Punkt- und Blockmittelwerte sind in Abb. 3.22 dargestellt.

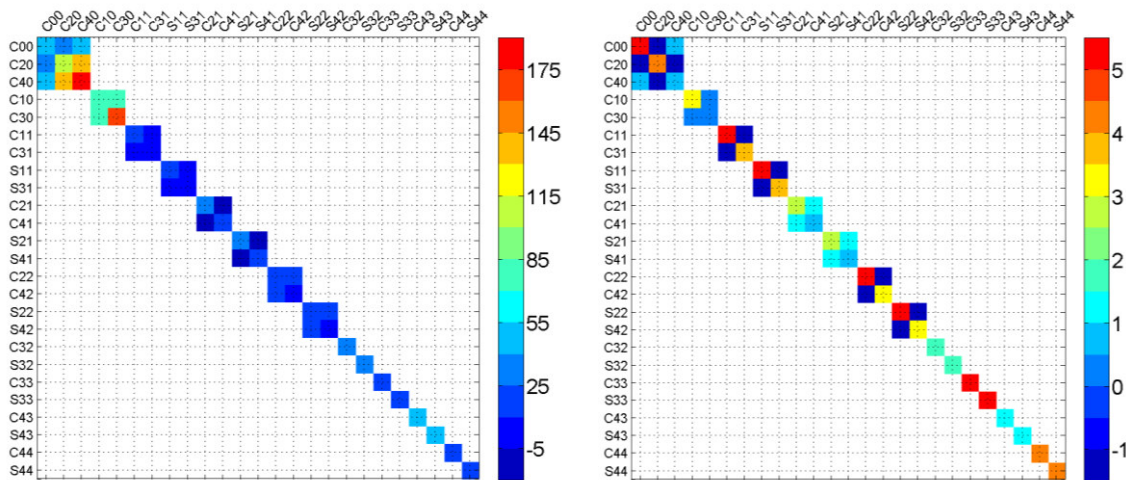


Abb. 3.22: Normalgleichungen bis Grad und Ordnung 4 im Falle von Unterabtastung in Breitenrichtung für Punktwerte (links) und Blockmittelwerte (rechts).

Die Normalgleichungssysteme in Abb. 3.22 weisen auf den ersten Blick keine Auffälligkeiten auf. „Aliasing“ schlägt sich in den einzelnen Blöcken des blockdiagonalen Systems nieder, welche auf Grund der Nicht-Orthogonalität der *Legendre*-Polynome entstehen, so dass der „Aliasing“-Hintergrund in diesen Abbildungen schwer sichtbar ist.

Der Einfluss von Unterabtastung in Breitenrichtung auf eine Schätzung kann mit den Gleichungen (3.104) und (3.105) als deterministischer Fehleranteil interpretiert werden. Wir berechnen also erneut die Projektionsmatrix $[(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B}]$. Die Rahmenbedingungen für die Berechnung werden so gewählt wie für Abb. 3.14 und Abb. 3.15, nur dass an dieser Stelle die Abtastung in Längenrichtung 36° und in Breitenrichtung 60° entspricht, also eine Unterabtastung in Breitenrichtung vorliegt. Das Resultat ist in Abb. 3.23 und Abb. 3.24 abgebildet.

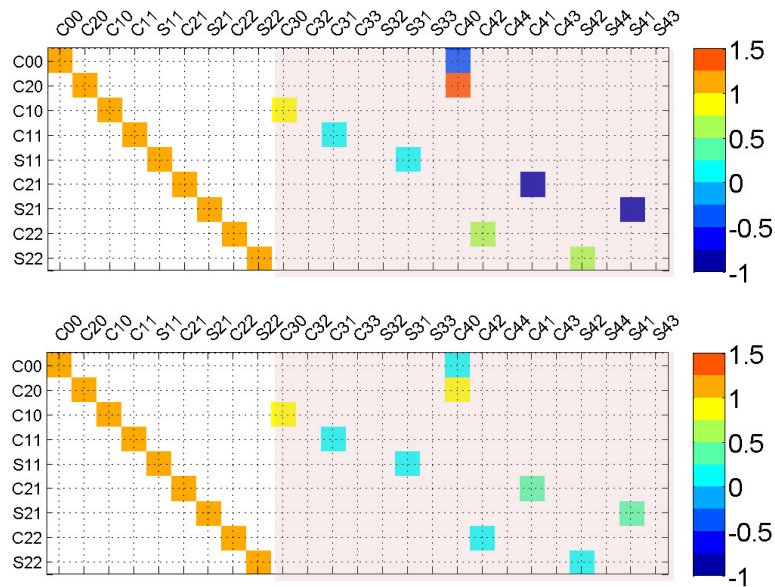


Abb. 3.23: Beispiele für die Projektionsmatrix $[(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B}]$, oben im Fall von Unterabtastung in Breitenrichtung, unten zum Vergleich bei korrekter Abtastung, dies entspricht dem aus Kapitel 3.3.2.2 bekannten „Spectral Leakage“-Fall (Abb. 3.8 oben).

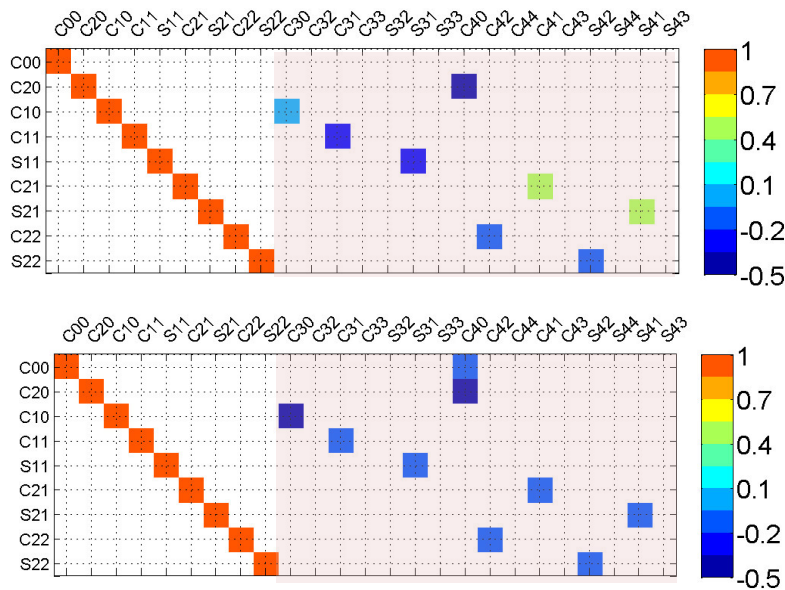


Abb. 3.24: Beispiele für die Projektionsmatrix $[(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B}]$ analog zu Abb. 3.23 im Falle von Blockmittelwerten.

Wie aus den bisherigen Darstellungen der Unterabtastung in Breitenrichtung zu erwarten sind dieselben Matrizenelemente vom „Aliasing“-Effekt betroffen, welche auch von „Spectral Leakage“ betroffen waren, es entstehen also im Unterschied zur Unterabtastung in Längenrichtung keine zusätzlichen Elemente. Die Unterabtastung führt dazu, dass ein Großteil der Projektionselemente größer wird als im reinen „Spectral Leakage“-Fall. Im Falle von Punktwerten wird der Koeffizient \bar{C}_{40} beispielsweise mit einem Gewicht von 1.5, also deutlich über 1, auf \bar{C}_{20} projiziert. Auch ist auffällig, dass viele der Projektionselemente ihr Vorzeichen wechseln.

Hervorragend zur Darstellung des „Aliasing“-Effekts in Breitenrichtung eignen sich Koeffizientendreiecke, welche man, wie oben erläutert, durch eine Umsortierung von $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B}$ erhält. Die Rahmenbedingungen werden analog zu den Berechnungen für Abb. 3.16 gewählt, nur dass der Punktabstand in Längen- und Breitenrichtung vertauscht wird, so dass eine Unterabtastung in Breitenrichtung vorliegt. Man erhält Abb. 3.25.

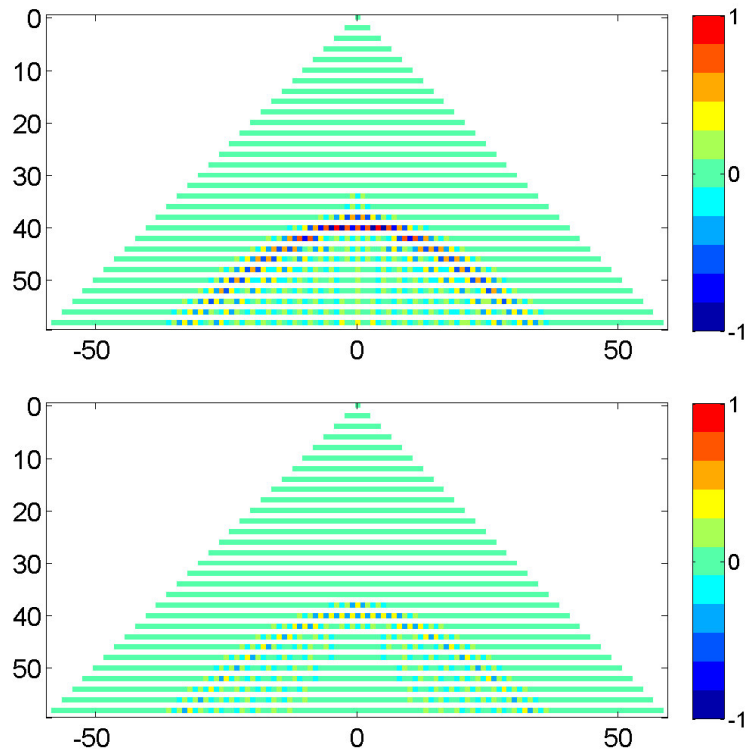


Abb. 3.25: Umsortierung der Matrix $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B}$ in ein Koeffizientendreieck für den Fall einer Unterabtastung in Breitenrichtung ($\mathbf{x}_1 = \{\bar{C}_{0,0}, \dots, \bar{S}_{59,59}\}$; $\mathbf{x}_2 = \{\bar{C}_{80,0}, \dots, \bar{S}_{80,80}\}$). Oben: Punktwerte, unten: Blockmittelwerte.

Durch die Nicht-Orthogonalität der *Legendre*-Polynome werden die Koeffizienten von Grad 80 auf alle Schwerfeldkoeffizienten von ebenfalls geradem Grad projiziert. Die „Aliasing“-Strukturen, die auf Grund der Unterabtastung entstehen, sind jedoch trotzdem problemlos identifizierbar. Sie zeichnen sich durch eine bogenförmige Struktur ab. Mit Gleichung (3.120) kann berechnet werden, dass sich das zonale Element von Grad 80 auf Grad 40 niederschlägt. Dies wird durch die Abbildung bestätigt. Dadurch, dass der Charakter der assoziierten *Legendre*-Polynome eines Grades mit steigender Ordnung langwelliger wird, bilden sich die entsprechenden Koeffizienten auf Grade höher als 40 ab und es entsteht die bogenförmige Struktur.

Auf eine Darstellung einer Kombination von Unterabtastung in Längen- und Breitenrichtung wird an dieser Stelle verzichtet. Es sei jedoch auf die numerischen Untersuchungen im Kapitel 6.2.2 verwiesen, welche die Thematik der Unterabtastung an Hand von Beispielen mit einer höheren räumlichen und spektralen Auflösung demonstriert.

Implizit wurde in diesem Kapitel gezeigt, dass die in Kapitel 2.1 erstmals aufgetretene Gleichung (2.11)

$$l_{\max} = \frac{180^\circ}{\Delta d} - 1$$

daraus resultiert, dass eine Abtastung von Δd notwendig ist, um ein Signal mit Signalinhalten bis Grad und Ordnung $l_{\max} + 1$ korrekt abtasten bzw. abbilden zu können. Dies folgt aus den Gleichungen (3.112) und (3.119). Da sich aber aufgrund der Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen, je nachdem ob es sich um Punkt- oder Blockmittelwerte handelt, der sphärisch-harmonische Sinus- bzw. Kosinus-Koeffizient von Grad und Ordnung $l_{\max} + 1$ nicht bestimmen lässt (vergleiche Abb. 3.13) muss l_{\max} kleiner sein als die Beziehung $180^\circ/\Delta d$, was in Gleichung (2.11) der Fall ist.

Es bleibt festzuhalten, dass es sich wie bei „Spectral Leakage“ bei „Aliasing“ um einen deterministischen Fehleranteil handelt. Eine Strategie, wie deterministische Fehleranteile vermieden werden sollen, ist im nächsten Kapitel 3.3.2.4 dargestellt.

Exkurs: „Aliasing“ im Fall einer 2D-Fourier-Reihe

Als Abschluss dieses Kapitels soll kurz demonstriert werden, wie sich das „Aliasing“-Verhalten ändert, wenn an Stelle von Kugelfunktionen eine 2D-Fourier-Reihe (Gleichung (3.109)) verwendet wird. Hierzu wird ein Gitter mit einem Punktabstand von 60° sowohl in Längen- als auch Breitenrichtung angenommen, so dass für die Abtastfrequenz gilt $M = P = 6$ und somit $m_{\text{Nyq}} = p_{\text{Nyq}} = 3$. Erneut wird die Matrix $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B}$ für $\mathbf{x} = \{D_{00}, \dots, E_{22}\}$ und $\mathbf{x}_2 = \{D_{03}, \dots, E_{44}\}$ berechnet. Das Ergebnis ist in Abb. 3.26 dargestellt.

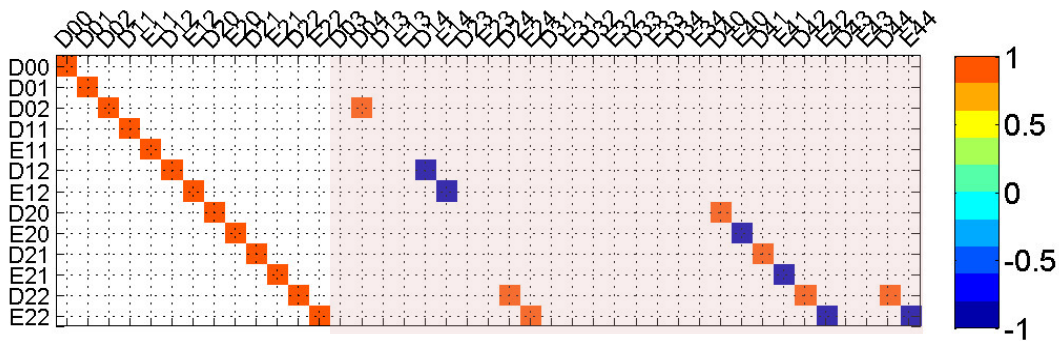


Abb. 3.26: Beispiel für die Projektionsmatrix $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B}$ auf Basis einer 2D-Fourier-Reihe im Falle von Unterabtastung in Längen- und Breitenrichtung.

Es treten für $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B}$ mehrere Elemente auf, die die Projektion des unterabgetasteten Signals beschreiben. Diese Projektionen werden exakt durch Gleichung (3.115) beschrieben, welche für eine in Längen- und Breitenrichtung gleichabständig abgetastete Funktion auf dem Torus ebenso in Breitenrichtung gilt. Der Absolutwert aller Projektionen ist 1. Bei den Kugelfunktionen waren auf Grund der Nicht-Orthogonalität der *Legendre*-Polynome die Projektionen nicht absolut exakt 1 und es sind überdies Projektionen auf Grund von „Spectral Leakage“ aufgetreten. In diesem Beispiel werden also alle Koeffizienten mit $m = 2$ oder $k = 2$ auf Grund von „Aliasing“ falsch geschätzt.

3.3.2.4 Spektrales Beschneiden der Beobachtungen

In den Kapiteln 3.3.2.2 und 3.3.2.3 wurde das Auftreten von „Spectral Leakage“ und „Aliasing“ im Rahmen der Schwerefeldschätzung analysiert. Ausgangspunkt war Gleichung (3.103)

$$\mathbf{l} = [\mathbf{A} \quad \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} - \mathbf{e},$$

welche den Beobachtungsvektor als Funktion der Parameter \mathbf{x} und \mathbf{x}_2 beschreibt und Gleichung (3.105)

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} + (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B} \mathbf{x}_2 - (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{e} \\ &= \mathbf{x} + \mathbf{x}_d - \mathbf{x}_e\end{aligned}$$

die zeigt, wie durch ein *Gauß-Markov* Modell, in dessen Modellierung die Parameter \mathbf{x}_2 nicht berücksichtigt sind, diese in den Schätzraum projiziert werden und zu einem deterministischen Fehleranteil führen, der, wie Kapitel 6.2.2 zeigt, erhebliche Auswirkungen auf die Güte der Schätzung hat.

Um den deterministischen Fehleranteil in der Schätzung zu reduzieren, kann \mathbf{l} mit Hilfe der Vorinformation $\mathbf{x}_2^{a\,priori}$ minimiert werden

$$\begin{aligned}\mathbf{l} &= [\mathbf{A} \quad \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} - \mathbf{B} \mathbf{x}_2^{a\,priori} - \mathbf{e} \\ &= [\mathbf{A} \quad \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} - \mathbf{e}\end{aligned}\tag{3.124}$$

Dies wird auch als spektrales Beschneiden der Beobachtungen bezeichnet. Durch das spektrale Beschneiden gehen nur die residualen Parameter $\Delta \mathbf{x}_2$ in die Parameterschätzung ein

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} + (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B} \Delta \mathbf{x}_2 - (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{e} \\ &= \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}_d - \mathbf{x}_e\end{aligned}\tag{3.125}$$

Dies führt zu einer Verkleinerung des deterministischen Fehleranteils und somit zu einer Verbesserung der Güte der Schätzung.

Die Vorinformation $\mathbf{x}_2^{a\,priori}$ kann mit Hilfe verschiedener Verfahren gewonnen werden. Die erste Möglichkeit ist, $\mathbf{x}_2^{a\,priori}$ im Rahmen einer kleinste-Quadrate-Ausgleichung unter Verwendung von Blockdiagonaltechniken zu bestimmen. Unter Einhaltung gewisser Restriktionen sind Normalgleichungssysteme nicht voll besetzt, sondern blockdiagonal. Gesehen haben wir dies in Kapitel 3.3.2.1 am Beispiel eines Ausschnitts aus einer blockdiagonalen Matrix in Abb. 3.5. Diese blockdiagonalen Systeme, die Blöcke mit Normalgleichungselementen von Koeffizienten gleicher Ordnung, gleicher Parität und gleicher Zugehörigkeit zu Sinus- oder Kosinus-Anteil beinhalten, verfügen über den Vorteil, dass bei der Bestimmung der Schätzparameter nicht das gesamte Gleichungssystem auf einmal gelöst werden muss, sondern dass jeder der Blöcke einzeln gelöst werden kann. Dadurch reduziert sich der Speicherplatzbedarf sowie auch die Rechenzeit enorm. Die Verwendung von blockdiagonalen Systemen geht zurück auf die Zeit, in der die Rechenleistung von Rechensystemen noch relativ eingeschränkt war, so dass es nicht möglich war, volle Normalgleichungssysteme streng zu lösen. Sie wird ausführlich beschrieben in Colombo (1981), Sneeuw (1994), Gruber (2000), Pavlis et al. (2012) oder Reguzzoni & Sansò (2012). Auch heute noch ist es in der Geodäsie üblich, bei der Berechnung von Schwerefeldmodellen volle Systeme nur bis circa Grad und Ordnung 360 zu verwenden und darüber hinaus blockdiagonale Techniken zu nutzen. Blockdiagonaltechniken eignen sich zur Bestimmung der Vorinformation. Die Restriktionen, die erfüllt werden müssen, um ein blockdiagonales System zu erhalten, sind nach Gruber (2000): (i) Beobachtungs-datensatz auf einem gleichmäßigen Gitter mit gleichen Längenintervallen und Äquatorsymmetrie, (ii) Konsistenz und Vollständigkeit des Beobachtungsdatensatzes, (iii) längenunabhängige Gewichtung der Einzelbeobachtungen, und (iv) äquatorsymmetrische Gewichtung der Einzelbeobachtungen. Natürlich müssen zudem die Koeffizienten so angeordnet werden, dass Koeffizienten gleicher Ordnung, gleicher Parität und gleicher Sinus- oder Kosinus-Zugehörigkeit nebeneinander liegen, vergleiche Abb. 3.5. Die größte Einschränkung, die bei der Verwendung von Blockdiagonaltechniken in Kauf genommen werden muss, ist der Verzicht auf eine individuelle Einzelpunktgewichtung der zu Grunde liegenden Beobachtungen. Dies entspricht einer Vereinfachung des stochastischen Modells. Im Umkehrschluss bedeutet dies aber auch, dass, wenn man über einen vollständigen Datensatz mit gleichgenauen Beobachtungen verfügen würde, die Schätzwerte $\hat{\mathbf{x}}$ durch ein blockdiagonales System streng bestimmt werden könnten.

Im Falle von Unterabtastung ist das Gleichungssystem zur Bestimmung von $\mathbf{x}_2^{a \text{ priori}}$ bei Verwendung der blockdiagonalen Technik allerdings instabil und kann infolgedessen nicht gelöst werden. Dieser Fall tritt beispielsweise ein, wenn der maximale sphärisch-harmonische Grad der strengen Schwerefeldlösung \mathbf{x} dem maximal bestimmbaren Grad entsprechend der räumlichen Auflösung der Beobachtungen entspricht.

Ein weiteres Verfahren zur Bestimmung der Vorinformation ist die numerische Quadratur. Zur Bestimmung der Formel der numerischen Quadratur starten wir mit Gleichung (3.88), welche im Falle von Blockmittelwerten zu

$$\bar{f}_{ij} = \frac{1}{\Delta S_i} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left[\overline{IY}_{lm,ij}^C \bar{C}_{lm} + \overline{IY}_{lm,ij}^S \bar{S}_{lm} \right] \quad (3.126)$$

wird, wobei

$$\overline{IY}_{lm,ij}^{C/S} = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \overline{Y}_{lm}^{C/S}(\theta, \lambda) \sin \theta d\lambda d\theta \quad (3.127)$$

ist. Zur Bestimmung eines einzelnen Koeffizienten \bar{C}_{ko} kann man analog vorgehen wie im Falle einer kontinuierlichen Funktion, siehe die Gleichungen (3.88) bis (3.90) bzw. (3.91). Durch Multiplikation beider Seiten mit $\overline{IY}_{ko,ij}^C$ und Summation über alle Flächenelemente erhält man

$$\sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=1}^{2L-1} \bar{f}_{ij} \overline{IY}_{ko,ij}^C = \sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=1}^{2L-1} \frac{1}{\Delta S_i} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left[\overline{IY}_{lm,ij}^C \bar{C}_{lm} + \overline{IY}_{lm,ij}^S \bar{S}_{lm} \right] \overline{IY}_{ko,ij}^C. \quad (3.128)$$

Unter der Annahme

$$\sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=1}^{2L-1} \overline{IY}_{lm,ij}^{\alpha} \overline{IY}_{ko,ij}^{\beta} = 0, \quad \alpha \neq \beta \vee l \neq k \vee m \neq o, \quad (3.129)$$

wobei α und β ausdrücken, dass $\overline{IY}_{ko,ij}$ einen Kosinus- oder Sinus-Bezug haben kann, vereinfacht sich dies zu

$$\sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=1}^{2L-1} \bar{f}_{ij} \overline{IY}_{ko,ij}^C = \bar{C}_{ko} \sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=1}^{2L-1} \frac{1}{\Delta S_i} \left(\overline{IY}_{ko,ij}^C \right)^2 \quad (3.130)$$

und man erhält durch Umstellen den Koeffizienten

$$\bar{C}_{ko} = \left(\sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=1}^{2L-1} \frac{1}{\Delta S_i} \left(\overline{IY}_{ko,ij}^C \right)^2 \right)^{-1} \sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=1}^{2L-1} \bar{f}_{ij} \overline{IY}_{ko,ij}^C. \quad (3.131)$$

Die Bestimmung der \bar{S}_{lm} Koeffizienten erfolgt analog mit

$$\bar{S}_{ko} = \left(\sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=1}^{2L-1} \frac{1}{\Delta S_i} \left(\overline{IY}_{ko,ij}^S \right)^2 \right)^{-1} \sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=1}^{2L-1} \bar{f}_{ij} \overline{IY}_{ko,ij}^S. \quad (3.132)$$

Mit den Formeln (3.131) und (3.132) können Schwerefeldkoeffizienten nicht exakt berechnet werden, es handelt sich nur um eine näherungsweise Bestimmung. Grund hierfür ist, dass die Annahme in Gleichung (3.129) für den Fall $l \neq k$ nicht streng erfüllt wird, wenn sowohl l als auch k entweder beide gerade oder ungerade sind. Dies ist begründet im Verlust der Orthogonalität der *Legendre*-Polynome im diskreten Fall, siehe Kapitel 3.3.2.1. Die Bedingung führt also letztendlich implizit dazu, dass die Nebendiagonalelemente eines eigentlich blockdiagonalen Systems zu Null gesetzt werden. Pavlis (1988) führt überdies die Bedingung

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=1}^{2L-1} \frac{1}{\Delta S_i} \left(\overline{Y}_{ko,ij}^S \right)^2 = 1 \quad (3.133)$$

ein, welche zusammen mit Gleichung (3.129) eine Art Orthonormalitätsbedingung bildet, d.h. die Elemente auf der Hauptdiagonalen des Normalgleichungssystems werden alle auf einen festen Wert gesetzt. Dadurch vereinfachen sich die Gleichungen (3.131) und (3.132) weiter zu

$$\left. \begin{array}{l} \overline{C}_{ko} \\ \overline{S}_{ko} \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=1}^{2L-1} \overline{f}_{ij} \overline{Y}_{ko,ij}^{CIS}, \quad (3.134)$$

der numerischen Quadraturformel. Da Bedingung (3.133) in der Realität nicht erfüllt wird entsteht bei der Bestimmung der Koeffizienten nach Gleichung (3.134) noch ein weiterer zusätzlicher Fehlereinfluss. Dieser kann gut veranschaulicht werden, indem man die linke Seite von Gleichung (3.133) für verschiedene Kugelfunktionen berechnet und veranschaulicht, wie stark das Resultat von 1 (rechte Seite) abweicht. Wie Abb. 3.27 zu entnehmen ist weicht die globale Summe über die Kugelfunktionen mit steigendem Grad stärker von 1 ab. Das bedeutet, je höher der sphärisch harmonische Grad, desto ungenauer ist die Bestimmung der entsprechenden sphärisch-harmonischen Koeffizienten.

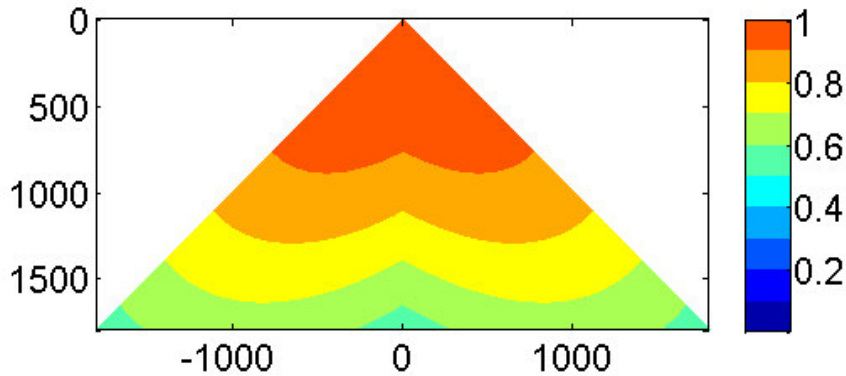


Abb. 3.27: Globalsumme über Kugelfunktionen nach Gleichung (3.133) (linke Seite).

Nichtsdestotrotz eignet sich die numerische Quadraturformel für eine näherungsweise Bestimmung der Schwerefeldkoeffizienten, wie wir sie für die Berechnung von $\Delta \mathbf{x}_2$ benötigen. Besonderer Vorteil ist hierbei, dass die numerische Quadratur sehr schnell und mit wenig Speicherbedarf berechnet werden kann. Dies ist auch der Grund dafür, dass früher, als noch keine starken Rechenmaschinen zur Verfügung standen, die numerische Quadratur zur Schwerefeldbestimmung herangezogen wurde, also noch bevor Blockdiagonalausgleich üblich wurde. Da früher der maximale Grad der sphärisch-harmonischen Reihe in der Regel nicht sehr hoch gewählt wurde, konnte Gleichung (3.134) auch angewendet werden, ohne zu große Abweichungen auf Grund von Gleichung (3.133) zu riskieren. Für eine Bestimmung von Koeffizienten hoher Grade empfiehlt sich dahingegen eher die Quadraturformel nach Gleichung (3.131) und Gleichung (3.132). Die numerische Quadratur verfügt im Gegensatz zur Blockdiagonalausgleich über den Vorteil, dass sie auch dann verwendet werden kann, wenn Unterabtastung vorliegt, sie ist also robuster. Dies bezieht sich jedoch nur auf das Verfahren, es ändert nichts daran, dass bei Unterabtastung das Ergebnis wie unter Kapitel 3.3.2.3 erläutert auf Grund von „Aliasing“ qualitativ mangelhaft wird.

Gleichung (3.134) kann nach Colombo (1981) noch um den Quadraturfaktor q_k zu

$$\left. \begin{array}{l} \overline{C}_{ko} \\ \overline{S}_{ko} \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi q_k} \sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=1}^{2L-1} \overline{f}_{ij} \overline{Y}_{ko,ij}^{CIS} \quad (3.135)$$

erweitert werden. Dies führt dazu, dass die Fehlereinflüsse, welche aus Bedingung (3.133) folgen, fast kompensiert werden können. Hier empfiehlt es sich allerdings, direkt Gleichung (3.131) bzw. (3.132) anstelle von Gleichung (3.135) zu verwenden, da diese exakter aber nicht wesentlich komplizierter zu berechnen ist. Für die Berechnung des Quadraturfaktors q_k sei verwiesen auf Colombo (1981).

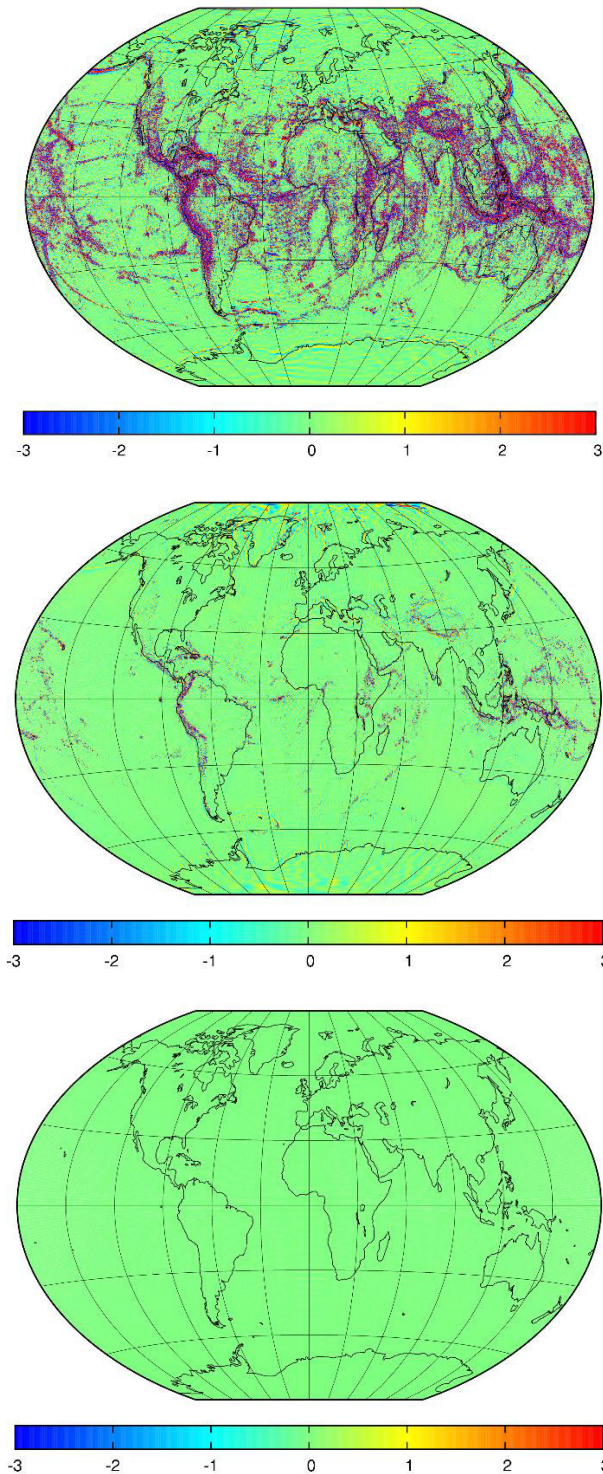


Abb. 3.28: Differenz zwischen ursprünglichen und reproduzierten Schwereanomalien [mgal] (oben: Quadratur nach Gleichung (3.134), Mitte: Quadratur nach Gleichung (3.131), unten: Blockdiagonalausgleichung).

Um die Genauigkeit der drei Ansätze zu vergleichen, die Blockdiagonalausgleichung und die Quadraturformeln (3.131) und (3.134), führen wir einen Test durch, der zeigen soll, wie gut die verschiedenen Ansätze in der Lage sind, einen Satz synthetischer Schwereanomalien zu reproduzieren. Ausgangspunkt sind 15' Blockmittelwerte von bandbegrenzten Schwereanomalien mit Signalgehalt bis Grad und Ordnung 719, die aus EGM2008 (Pavlis et al., 2012) berechnet werden. Diese werden mit den drei verschiedenen Ansätzen analysiert. Aus den jeweiligen Koeffizienten können wiederum Schwereanomalien gerechnet werden. Die Differenz zu den ursprünglichen Anomalien gibt dann ein Maß für die Güte der Reproduktion. Die Differenz kann auch auf Basis von Geoidhöhen betrachtet werden, wenn man aus den originalen und aus den reproduzierten Koeffizienten Geoidhöhen berechnet. Das Resultat ist in Tab. 3-1 und Abb. 3.28 zu sehen.

	Quadratur (3.134)	Quadratur (3.131)	Blockdiagonalausgleichung
Schwereanomalien [mgal]	2,70	0,58	0,00
Geoidhöhen [cm]	5,55	3,63	0,00

Tab. 3-1: RMS-Differenz zwischen Funktionalen der ursprünglichen und der reproduzierten Schwerefeldkoeffizienten.

Während die Blockdiagonal-Ausgleichung die bandbegrenzten (gleichgenauen) Beobachtungen im Rahmen der Rechengenauigkeit (verwendete Anzahl der Nachkommastellen) erwartungsgemäß perfekt reproduzieren kann, ist mit der Quadratur ein Genauigkeitsverlust verbunden. Ebenso erwartungsgemäß schneidet die Quadratur nach Formel (3.134) am schlechtesten ab, da zwei Bedingungen (3.129) und (3.133) eingeführt worden sind, die in der Realität nicht erfüllt werden, während für die Quadratur nach Formel (3.131) nur die erste der beiden Bedingungen eingeführt worden ist. Interessant zu sehen ist, dass in Abb. 3.28 (oben) besonders dort Differenzen auftreten, wo große topographische Variationen und damit Signalvariationen auftreten. Dies bestätigt zusätzlich, dass die Abweichung der Realität von Bedingung (3.133) mit höheren Graden größer wird.

Eine weitere Möglichkeit, terrestrische Datensätze spektral zu beschneiden, ist, $\mathbf{x}_2^{a\ priori}$ nicht mit einem der oben beschriebenen Ansätze zu berechnen, sondern die a priori Koeffizienten aus einem externen Schwerefeldmodell zu entnehmen. Hierzu eignen sich von der spektralen Auflösung EGM2008 und EIGEN-6C4. Dieser Ansatz ist grundsätzlich der ‚unsauberste‘, da man Informationen aus einem externen Modell benötigt, und so letztendlich auch das eigene Schwerefeldmodell nicht mehr vollständig unabhängig ist. Allerdings kann es passieren, dass dies das einzig real anwendbare Verfahren ist, wenn z.B. die Schwerefeldbeobachtungen räumlich so schlecht aufgelöst sind, dass $\mathbf{x}_2^{a\ priori}$ wegen Unterabtastung der Beobachtungen nicht mit Quadratur bestimmt werden sollte.

3.4 Zusammenfassung

Im Kapitel „Mathematische Grundlagen der Schwerefeldbestimmung“ wurde zunächst gezeigt, wie im Rahmen einer kleinsten-Quadrate-Ausgleichung Schwerefeldkoeffizienten geschätzt werden können (Kapitel 3.1). Hierbei wurde auch dargestellt, wie mit Hilfe einer Varianzkomponentenschätzung verschiedene Beobachtungsdatensätze gemeinsam für die Schwerefeldbestimmung herangezogen werden können (Kapitel 3.2).

Ebenso wurde untersucht, wie der Einfluss einer Beobachtungsgruppe auf bestimmte spektrale Anteile der Gesamtlösung unterdrückt werden kann. Dies kann durch die Fixierung der Gesamtlösung auf eine bestimmte Beobachtungsgruppe geschehen, oder mit Hilfe von Parameterelimination (Kapitel 3.3.1).

Als weiterer großer thematischer Block wurde die Orthogonalität von Basisfunktionen, an dieser Stelle natürlich in erster Linie der Kugelfunktionen, behandelt (Kapitel 3.3.2.1). Der Verlust der Orthogonalität der Kugelfunktionen im diskreten Fall ist Ursache für das Entstehen von Kovarianzen zwischen verschiedenen Koeffizienten, welche folglich nicht mehr unabhängig voneinander bestimmbar sind. Außerdem wurde

gezeigt, dass ein perfekt normalverteilter Beobachtungs(zufalls)fehler so in den Schätzraum projiziert wird, dass der Fehler in den Schätzwerten nicht mehr perfekt normalverteilt ist. Des Weiteren wurde gezeigt, dass erst durch die Nicht-Orthogonalität der Kugelfunktionen im diskreten Fall „Spectral Leakage“ ermöglicht wird (Kapitel 3.3.2.2), ein deterministischer Fehleranteil, welcher die Projektion von nicht-modellierten Signalanteilen in den Schätzraum beschreibt. Mit Hilfe der Orthogonalitätsbedingungen konnte auch die Entstehung von „Aliasing“ demonstriert werden, einem weiteren deterministischen Fehleranteil, der bei Unterabtastung der Beobachtungen entsteht und dazu führt.

„Spectral Leakage“ und „Aliasing“ müssen bei der Schwerefeldbestimmung vermieden werden, um ein bestmögliches Ergebnis zu erzielen. In Kapitel 6.2.2 folgen detailliertere numerische Untersuchungen zu dieser Thematik.

Zunächst wird allerdings im nächsten Kapitel dargestellt, wie die theoretischen Ansätze aus dem vorigen und diesem Kapitel rechentechnisch umgesetzt werden können.

4 Rechentechische Grundlagen der Schwerefeldbestimmung

Die rechentechische Umsetzung der physikalischen Grundlagen und der mathematischen Methoden aus den Kapiteln 2 und 3 ist die dritte Säule der Schwerefeldbestimmung.

Die Entwicklungen im Bereich der modernen Rechensysteme und der Rechenressourcen begünstigen eine unkomplizierte, verhältnismäßig schnelle und vor allem genaue Berechnung von Schwerefeldmodellen. Während, wie in Kapitel 1.1 beschrieben, früher numerisch effektive, jedoch nicht strenge Verfahren in der Schwerefeldmodellierung herangezogen wurden, können heute Schwerefeldmodelle auf Basis von strengen kleinste-Quadrate-Verfahren berechnet werden. Hierbei ist es auch nicht mehr zwingend notwendig, auf stark ressourcenschonende Blockdiagonaltechniken zurückzugreifen, welche, wie in Kapitel 3.3.2.4 dargestellt, mit erheblichen Einschränkungen hinsichtlich der Stochastik des Ausgleichungssystems einhergehen, sondern es können - zumindest für bestimmte Problemstellungen - vollbesetzte Normalgleichungssysteme genutzt werden.

In der Schwerefeldbestimmung werden volle Normalgleichungssysteme bislang nur für relativ kleine Problemstellungen verwendet. Im Falle von EIGEN-6C4 (Förste et al., 2011¹⁰) wurde ein voll besetztes Normalgleichungssystem bis Grad und Ordnung 370 mit einem blockdiagonalen für die Koeffizienten darüber hinaus kombiniert, für EGM2008 wurden, wie Pavlis et al. (2012) zu entnehmen ist, Blockdiagonaltechniken verwendet. Auch wenn bei der Berechnung beider Modelle, welche bis Grad und Ordnung 2190 aufgelöst sind, nur die Kombination eines voll besetzten mit einem blockdiagonalen Normalgleichungssystem realistisch umsetzbar ist - die Größe eines voll besetzten Normalgleichungssystem für ein Modell bis Grad und Ordnung 2190 entspräche 168 TByte - so wäre zumindest eine deutlich höhere Aufstellung des voll besetzten Anteils als bis Grad und Ordnung 370 technisch möglich.

Wie bereits in Kapitel 1 beschrieben ist das Ziel dieser Arbeit die Berechnung eines hochaufgelösten kombinierten globalen Schwerefeldmodells bis Grad und Ordnung 720 auf Basis von vollen Normalgleichungssystemen. Im Folgenden sollen die rechenspezifischen Herausforderungen erläutert werden, die hierbei entstehen, sowie das Rechensystem und die rechentechische Umsetzung beschrieben werden.

4.1 Rechenspezifische Herausforderungen

Die Verwendung von vollbesetzten Normalgleichungssystemen für die Bestimmung von hochaufgelösten Schwerefeldmodellen erfordert aufgrund der hohen Speicheranforderungen den Einsatz von Hochleistungsrechensystemen. Dabei handelt es sich um leistungsstarke Parallelrechensysteme, welche, wie der Name schon impliziert, über eine parallele Architektur verfügen. Almasi & Gottlieb (1989) beschreiben einen Parallelrechner als Ansammlung von miteinander kommunizierenden Prozessoreinheiten, welche gemeinschaftlich rechenintensive Aufgaben lösen. Ein solches Rechensystem stellt so beispielsweise über den Zusammenschluss vieler einzelner Prozessoren große Arbeitsspeichermengen zur Verfügung, so dass auch große Gleichungssysteme im Speicher gehalten werden können. Um ein solches Rechensystem optimal zu nutzen, müssen die Anwender-Programme parallel implementiert werden. Für große Problemstellungen ist die

¹⁰ Aktuellere Beschreibung unter: <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/documents/Foerste-et-al-EIGEN-6C4.pdf> (Stand: 26. Januar 2015)

massiv parallele Programmierung der Regelfall. Jeder Prozessor verfügt hierbei über seinen eigenen Speicher und arbeitet für sich unabhängig. Das Anwender-Programm muss also so implementiert werden, dass jedem Prozessor ein Teil der zu lösenden Aufgabe zugewiesen wird, welchen dieser parallel zu allen anderen Prozessoren bearbeitet.

Der Einsatz von massiv paralleler Programmierung in der kombinierten Schwerefeldbestimmung wird grundlegend in Wittwer (2006) beschrieben. Fecher et al. (2011) und Fecher et al. (2015) demonstrieren, wie mit Hilfe von massiv-paralleler Programmierung Schwerefeldmodelle bis Grad und Ordnung 720 auf Basis voller Normalgleichungssysteme berechnet werden können. Brockmann (2014) zeigt darüber hinaus, wie mit massiv-paralleler Programmierung Schwerefeldmodelle bis Grad und Ordnung 1400 auf Basis des iterativen PCGMA-Algorithmus (Schuh, 1996) berechnet werden können. Daneben existieren auch noch Publikationen, welche sich mit paralleler Programmierung speziell im Falle der GOCE-Mission beschäftigen, so z.B. Klees et al. (2002) oder Plank (2004).

Die Anforderung an Rechensysteme bei der Lösung von vollen Gleichungssystemen kann ausgedrückt werden mit Hilfe der Anzahl der unbekannt Parameter und der entsprechenden Anzahl von Normalgleichungsmatrixelementen, vergleiche Gleichung (3.48). Abb. 4.1 zeigt die Anzahl der Unbekannten und die Anzahl der Normalgleichungselemente bei der Lösung von Schwerefeldmodellen bis Grad 720 und kleiner. Ergänzend dazu findet sich in Tab. 4-1 die Anzahl der Unbekannten und die Normalgleichungsgröße für verschiedene Schwerefeldmodelle. Dargestellt werden die Anforderung neben dem bereits beschriebenen Kombinationsmodell EIGEN-6C4 für IAPGc, das Kombinationsmodell, welches in dieser Arbeit bestimmt werden soll (siehe Kapitel 7.1), ITSG-Grace2014s (Mayer-Gürr et al., 2014) und TIM5 (Brockmann et al., 2014), welche ausführlich in Kapitel 5.1 beschrieben werden, sowie das Satellitenschwefelfeldmodell DIR5 (Bruinsma et al., 2013).

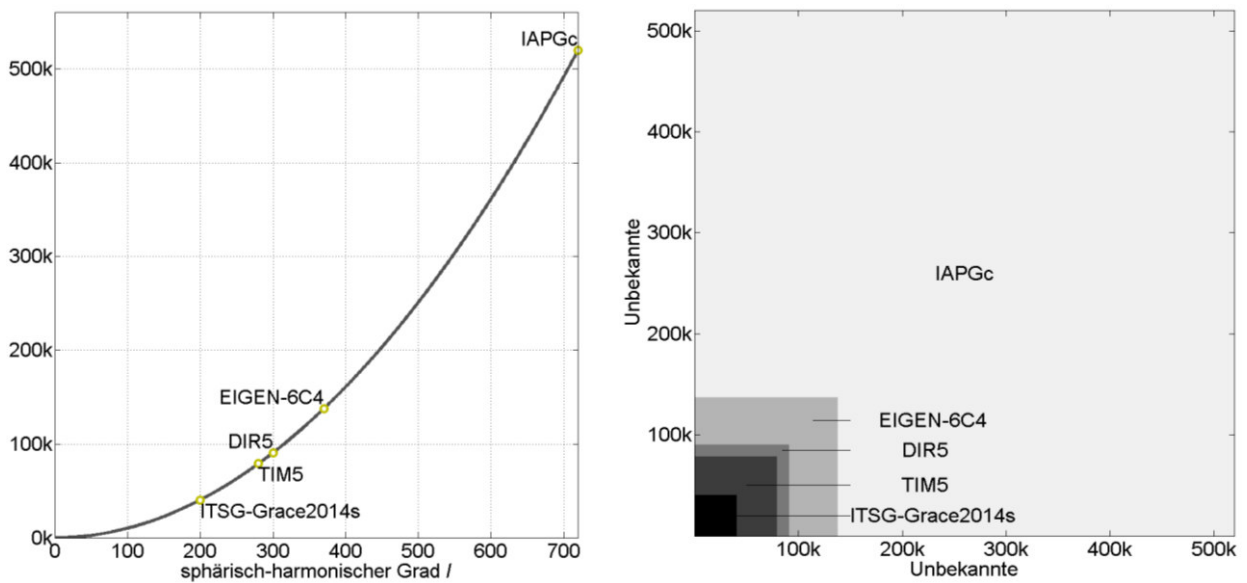


Abb. 4.1: Anzahl der Unbekannten (links) und Normalgleichungselemente (rechts) im Rahmen einer Schwerefeldbestimmung auf Basis von vollen Normalgleichungssystemen ($k=1000$)¹¹.

Die Anzahl der unbekannt Parameter kann in Abhängigkeit vom maximalen Entwicklungsgrad des Schwerefeldmodells mit

$$u = (l_{\max} + 1)^2 \quad (4.1)$$

¹¹ Die Angaben für EIGEN-6C4 beziehen sich hier auf den Teil von EIGEN-6C4, der auf vollen Normalgleichungen basiert, nicht auf die Gesamtauflösung des Modells.

berechnet werden. Sie beschreibt als Funktion des maximalen Grades die Form einer stark ansteigenden Parabel, siehe Abb. 4.1 (links). Während für die anderen Modelle die Anzahl der Unbekannten deutlich kleiner als 200.000 ist, ist sie im Falle von IAPGc größer als 500.000. Die Anzahl der Normalgleichungselemente ist das Quadrat der Parameteranzahl

$$\kappa = u^2. \quad (4.2)$$

Folglich nimmt die Anzahl der Normalgleichungselemente mit steigendem sphärisch-harmonischen Grad zur 4. Potenz zu. Dies bestätigt Abb. 4.1 (rechts), welche die Größe des IAPGc-Normalgleichungssystems relativ zu anderen Normalgleichungssystemen zeigt. Tab. 4-1 zeigt, dass die Normalgleichungsmatrix von IAPGc 14 mal größer ist als die (vollbesetzte) Normalgleichungsmatrix von EIGEN-6C4.

	ITSG-Grace2014s	TIM5	DIR5	EIGEN-6C4 ¹¹	IAPGc
Unbekannte Parameter	40.401	78.961	90.601	137.641	519.841
Normalgleichungsgröße (GByte)	12	46	61	141	2013

Tab. 4-1: Unbekannte Parameter und Normalgleichungsgröße für verschiedene Schwerefeldmodelle.

Die Schwerefeldmodellierung bis Grad und Ordnung 720 erfordert massiv parallele Programme, welche mit mehr als 500.000 Unbekannten und einer Normalgleichungsmatrix von mehr als 2 TByte umgehen können. Hierbei werden einzelne Programme für die Aufstellung der Normalgleichungssysteme (Gleichung (3.46)) und das Lösen sowie die Inversion des Normalgleichungssystems (Gleichung (3.48)) benötigt. Speicherintensiv ist die Kombination der Normalgleichungen, welche am effektivsten erfolgt, wenn die Normalgleichungen zunächst komplett in den Speicher geladen werden, was bei zwei Normalgleichungen mehr als 4 TByte Speicher erfordert. Auch die Varianzkomponentenschätzung (Gleichung (3.73)) und die Kovarianzfortpflanzung (Kapitel 7.2.3, sowie Gleichung (7.4) in Kapitel 7.2.1) müssen massiv parallel umgesetzt werden. Die Umsetzung der Programme wird in Kapitel 4.4 erläutert.

4.2 Hochleistungsrechenysteme am Leibniz-Rechenzentrum

Die Berechnungen für diese Arbeit wurden auf den Hochleistungsrechenystemen des Leibniz-Rechenzentrums (LRZ) durchgeführt. Das LRZ ist der Bayerischen Akademie der Wissenschaften zugeordnet und dient als Rechenzentrum der Münchner Universitäten sowie weiterer Lehrinrichtungen in Bayern. Eine ausführliche Beschreibung der Geschichte und Dienste des LRZ findet sich in Hegering (2012). Die Hochleistungsrechenysteme des LRZ stehen Lehrinrichtungen, vornehmlich im Freistaat Bayern, aber auch darüber hinaus, für wissenschaftliche Zwecke zur Verfügung. Chronologisch betrachtet wurden die ersten Programme, welche im Rahmen dieser Arbeit verwendet werden, auf dem Linux-Cluster des LRZ entwickelt, auf welchem das Ingenieurinstitut für Astronomische und Physikalische Geodäsie (IAPG) mehrere Rechenknoten unterhält. Nach ersten Schwerefeld-, Closed Loop Simulationen bis Grad und Ordnung 180 wurde ein Projektantrag für Rechenzeit auf dem Höchstleistungsrechner Bayern II (HLRB II) beantragt, da zum einen die Rechenknoten des IAPG am Linux Cluster nur auf seriellen Betrieb ausgerichtet und zum anderen die allgemeinen parallelen Ressourcen limitiert waren. HLRB II war ein Rechenystem mit 9720 Prozessorkernen und einer Höchstleistung von 62.3 TFLOPS¹². Eine ausführliche Dokumentation der Systemarchitektur von HLRB II sowie der auf ihm erzielten wissenschaftlichen Ergebnisse findet sich in Wagner et al. (2012). Auf HLRB II konnte erstmals ein Schwerefeldmodell bis Grad und Ordnung 600 auf Basis von vollen Normalgleichungen berechnet werden (Fecher et al., 2010), basierend auf mehr als 350.000 Unbekannten und einer Normalgleichungsgröße von fast 1 TByte. Nach dem Ende des Rechenbetriebs auf HLRB II im Jahr 2011 wurde das Projekt auf SuperMIG fortgeführt. SuperMIG, bestehend aus einer sogenannten ‚Fat Node Island‘ mit insgesamt 8200 Kernen und einer Höchstleistung von 76.8 TFLOPS, war ein sogenanntes Migrationssystem, mit welchem der Übergang von HLRB II auf den aktuellen Höchstleistungs-

¹² FLOPS=Floating Point Operations Per Second; T=Tera=10¹²

rechner des LRZ, SuperMUC, erfolgte. SuperMIG wurde 2012 in SuperMUC, welcher mit 18 sogenannten ‚Thin Node Islands‘ und einer Gesamtzahl von 147.456 Kernen in Betrieb genommen wurde, integriert. Die Kerne der ‚Fat Node‘- und ‚Thin Node Islands‘ unterscheiden sich unter anderem im Arbeitsspeicher pro Knoten, welcher bei ersterem mit 6.4 GByte höher ist als bei zweitem mit 2 GByte. 2013 erfolgte mit der Erweiterung um eine ‚Many Core Island‘ mit 4352 Kernen ein weiterer Ausbauschritt von SuperMUC, mit welchem die Ausbauphase 1 des Systems abgeschlossen war. Die aktuelle Höchstleistung des Systems beträgt 3 PFLOP¹³. 2015 soll im Rahmen von Phase zwei ein weiterer Ausbau erfolgen. SuperMUC wird in Hoffmann (2012) ausführlich vorgestellt. Die wichtigsten Kennzahlen finden sich außerdem tabellarisch unter ¹⁴. Aus Nutzersicht besonders hervorzuheben ist überdies das ‚General Parallel File System‘ (GPFS) von SuperMUC. Dieses erlaubt mit einer Lese-/Schreibegeschwindigkeit von bis zu 200 GByte/s einen ultraschnellen Zugriff auf dort abgelegte Dateien. Dies ist im Rahmen dieser Arbeit von Bedeutung, da 2 TByte große Normalgleichungs- und Varianz-Kovarianz-Matrizen gelesen und geschrieben werden müssen. Auf SuperMUC konnte 2012 erstmals ein Schwerefeldmodell auf Basis von vollen Normalgleichungen bis Grad und Ordnung 720 gelöst werden (Fecher et al., 2012). Wie in Kapitel 5 beschrieben wird entspricht Grad 720 dem maximal bestimmbaren Grad entsprechend der räumlichen Auflösung, welche mit dem verfügbaren Datenmaterial bestimmt werden kann. Grundsätzlich könnte mit SuperMUC auch ein deutlich höher aufgelöstes Schwerefeldmodell auf Basis voller Normalgleichungen bestimmt werden. Ein Job der allgemeinen Spezifikation ‚general‘ kann auf SuperMUC mit maximal ungefähr 8000 Kernen (Thin Node) für bis zu 48h laufen. Das Aufstellen des Normalgleichungssystems für Grad und Ordnung 720 auf Basis eines globalen 15’x15’ Minuten Gitter benötigt mit etwas weniger als 4000 Kernen gerade einmal 3h. Es könnten hier also sowohl die Rechenzeit als auch die Anzahl der verwendeten Kerne noch deutlich erhöht werden. Die Job-Klassifizierung ‚large‘ erlaubt gar die Nutzung von bis zu ungefähr 30.000 Kernen. Für den praktischen Rechenbetrieb muss man allerdings einschränkend feststellen, dass, je höher die Anzahl der verwendeten Kerne oder je länger die benötigte Rechenzeit ist, umso länger ist auch die Wartezeit, bis man vom sogenannten ‚Batchsystem‘ die Rechenressourcen zugewiesen bekommt. Diese Wartezeit kann mehrere Tage oder gar Wochen betragen.

4.3 Grundlegende Software

Auf SuperMUC werden durch das LRZ eine Reihe von Software und Bibliotheken zur Verfügung gestellt und laufend gewartet, welche eine Umsetzung von massiv paralleler Programmierung erlauben. Die wichtigsten Programme und Bibliotheken für diese Arbeit werden im Folgenden kurz vorgestellt. Hierbei wird nur kurz die Funktionalität der Programme und Bibliotheken erklärt, ihre Verwendung im Rahmen dieser Arbeit wird in Kapitel 4.4 erläutert. Allgemein sind die Programme für diese Arbeit im Fortran90 Code erstellt (Ellis et al., 1995; Chivers & Sleightholme, 2012). Als Compiler wird der Intel Compiler¹⁵ verwendet. Es stehen auf SuperMUC zwar grundsätzlich eine Reihe von weiteren Compilern zur Verfügung, allerdings wird der Intel Compiler vom LRZ empfohlen, da die Prozessoren auf Intel-Technologie basieren und der Compiler für diese Hardware optimiert wurde. Dieser erzielt so eine sehr gute Performance auf SuperMUC, ebenso wie die Intel Performance Libraries.

MKL

Eine der Intel Performance Libraries ist die mathematische Bibliothek Intel Math Kernel Library (MKL)¹⁶. MKL enthält neben weiteren Anwendungen optimierte Implementierungen von BLAS (Basic Linear Algebra Subprograms; Lawson et al., 1979) und LAPACK (Linear Algebra PACKage; Anderson et al., 1999). BLAS ist in drei Level unterteilt. Level 1 enthält Programme für Skalar-, Vektor- und Vektor-Vektor-Operationen, Level 2 für Matrix-Vektor-Operationen und Level 3 für Matrix-Matrix-Operationen. LAPACK ist eine

¹³ P = Peta = 10¹⁵

¹⁴ <http://www.lrz.de/services/compute/supermuc/systemdescription/> (Stand: 27. Januar 2015)

¹⁵ <https://software.intel.com/en-us/fortran-compilers> (Stand: 27. Januar 2015)

¹⁶ <https://software.intel.com/en-us/intel-mkl> (Stand: 27. Januar 2015)

Gleichungslöser-Bibliothek. In den Fortran90-Programmen, welche in Kapitel 4.4 beschrieben werden, können so bequem Routinen aus der MKL-Bibliothek aufgerufen werden, um z.B. Matrizenmultiplikationen durchzuführen.

MPI

Beim Ablauf eines parallelen Programms wird ein Problem in gemeinschaftlicher Arbeit durch mehrere Prozesse, welche auf mehrere Rechenkerne aufgeteilt sind, bearbeitet. MPI (Message Passing Interface; Gropp et al., 2007)¹⁷ ist ein Standard, der die Kommunikation zwischen den Prozessen festlegt. Hierzu fasst MPI Prozesse zu Gruppen zusammen und teilt jedem Prozess der Gruppe einen Rang, eine Art ID, zu, über welche der Prozess identifiziert werden kann. Angenommen einer Gruppe sind p Prozesse zugeordnet, so sind die Ränge der Prozesse $0:p-1$. In einer Gruppe kann unter anderem eine Punkt-zu-Punkt-Kommunikation zwischen einzelnen Prozessen stattfinden oder ein Prozess kann Daten/Information an alle Prozesse der Gruppe senden. Für diese Arbeit ist MPI besonders wichtig, da es Standards zum parallelen Lesen und Schreiben von Dateien enthält, was in Kombination mit dem in Kapitel 4.2 erwähnten GPFS sehr effizient ist. Im Rahmen der Arbeit auf SuperMUC wird die voreingestellte MPI-Implementierung von IBM verwendet¹⁸.

BLACS

Bei BLACS (Basic Linear Algebra Communications Subprograms; Dongarra & Whaley, 1997)¹⁹ handelt es sich um Programme für die Kommunikation zwischen Prozessen, welche bei der Ausführung eines parallelen Programms ablaufen. BLACS, welches somit Möglichkeiten bietet, die sich mit MPI überschneiden, baut auf diesem auf und zielt auf Anwendungen der linearen Algebra. Auf SuperMUC ist BLACS in der MKL Bibliothek integriert. Zum Zweck der Kommunikation weist BLACS die p Prozesse $0:p-1$ einem zweidimensionalen Prozessgitter mit r Reihen und c Spalten zu. Ein Beispiel für ein solches Prozessgitter mit $p = 12$ Prozessen ist in Abb. 4.2 dargestellt.

		c			
		0	1	2	3
r	0	0	1	2	3
	1	4	5	6	7
	2	8	9	10	11

Abb. 4.2: Zweidimensionales Prozessgitter $r \times c = 3 \times 4$ für die $p = 12$ Prozesse $0 : p - 1 = 0 : 11$.

Jeder Prozess kann mit BLACS durch seine Gitterkoordinaten angesprochen werden. In BLACS sind verschiedene Routinen verfügbar, die den Austausch von Information bzw. Werten zwischen einzelnen Prozessen des Prozessgitters, allen Prozessen, oder auch Prozessen einer Reihe oder Spalte des Gitters ermöglichen. BLACS ist für diese Arbeit besonders wichtig, da die im Folgenden beschriebene Bibliothek SCALAPACK auf das BLACS Prozessgitter zurückgreift und die BLACS-Routinen für die Kommunikation zwi-

¹⁷ <http://www.netlib.org/mpi/> (Stand: 27. Januar 2015)

¹⁸ <http://www-03.ibm.com/systems/de/platformcomputing/products/mpi/> (Stand: 27. Januar 2015)

¹⁹ <http://www.netlib.org/blacs/> (Stand: 27. Januar 2015)

sehen den Prozessen nutzt. Außerdem verwenden mehrere der in Kapitel 4.4 beschriebenen Programme BLACS zur Kommunikation.

SCALAPACK

SCALAPACK (Scalable LAPACK; Blackford et al., 1997)²⁰ ist eine Bibliothek, welche Programme zum Lösen von Aufgaben der linearen Algebra im Falle einer verteilten Datenhaltung zur Verfügung stellt. Verteilte Datenhaltung bedeutet, dass im Rahmen der Ausführung eines parallelen Programms die Daten, z.B. eine Matrix, auf verschiedene Rechenkerne verteilt werden, die Daten befinden sich also nicht in einem zusammengehörigen Speicher. Die Funktionalität ist im Grunde ähnlich der von BLAS und LAPACK, nur auf parallele Anwendungen erweitert. SCALAPACK kann beispielsweise zum Lösen großer Gleichungssysteme oder zur Inversion von Matrizen genutzt werden, weswegen es in dieser Arbeit verwendet wird. Wie erwähnt nutzt SCALAPACK BLACS zur Kommunikation. Auf SuperMUC wird SCALAPACK in einem Modul mit MKL geladen.

4.4 Umsetzung in der Schwerefeldbestimmung

Im Folgenden werden Programme vorgestellt, die in den vergangenen Jahren zur Bestimmung von kombinierten hochaufgelösten Schwerefeldmodellen auf Basis voller Normalgleichungssysteme erstellt worden sind. Diese Programme werden für die Berechnung der Schwerefeldlösungen in den Kapiteln 6 und 7 verwendet. Für die Programme ist die in Kapitel 4.3 vorgestellte Software von essentieller Bedeutung.

4.4.1 Aufstellen von Normalgleichungssystemen

Die erste fundamentale Aufgabe in der Schwerefeldbestimmung ist das Aufstellen des Normalgleichungssystems. Dies geschieht durch ein Programm, welches die Gleichungen (3.46) und (3.47) umsetzt. Die Umsetzung dieser Gleichungen erfordert das Aufstellen der Designmatrix. Da diese sehr groß werden kann – für ein Schwerefeldmodell bis Grad und Ordnung 720 auf Basis eines 15'x15' Schwereanomalien-Gitters ist sie fast 4 TByte groß – wird die Normalgleichungsmatrix mit Hilfe von dyadischen Produkten berechnet, vergleiche Abb. 4.3.

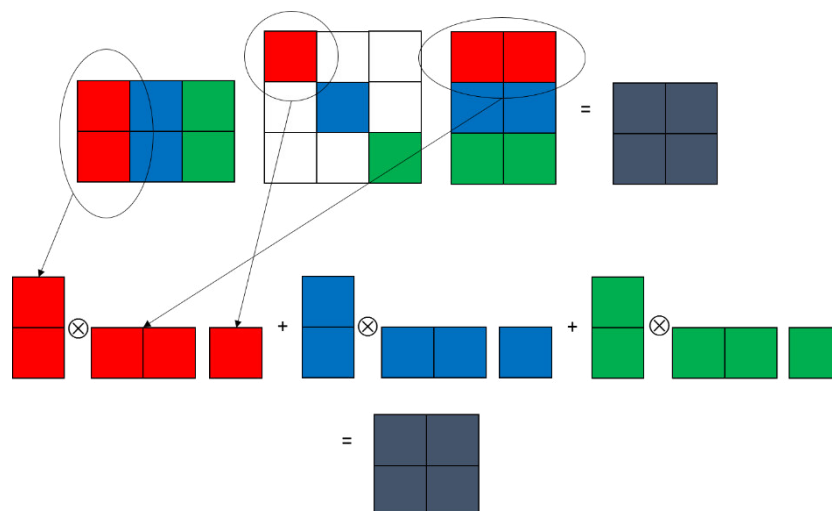


Abb. 4.3: Schema der Berechnung der Normalgleichungsmatrix (Gleichung (3.46)) als dyadisches Produkt.

²⁰ <http://www.netlib.org/scalapack/> (Stand: 27. Januar 2015)

Dabei werden sukzessive die Zeilen der Designmatrix berechnet und nach der Bildung des dyadischen Produkts wieder gelöscht, so dass man nie die komplette Designmatrix im Speicher halten muss und die Normalgleichungsmatrix fortlaufend aufsummiert wird. Die Berechnung der rechten Seite erfolgt analog.

Im Programm wird zu Beginn festgelegt, welcher Prozess welchen Teil der Normalgleichungsmatrix berechnet. Da die SCALAPACK-Routinen, welche in den Folgeprogrammen genutzt werden, mit Dreiecksmatrizen arbeiten - Normalgleichungen sind positiv definit und symmetrisch - muss nur der untere oder obere Teil der Normalgleichungsmatrix berechnet werden. Abb. 4.4 zeigt beispielhaft, wie eine Normalgleichungsmatrix für ein Schwerefeldmodell bis Grad und Ordnung 100 auf 6 Prozesse aufgeteilt wird. Alle Matrizen-elemente bilden die globale Matrix, während die 6 farblich hinterlegten Einzelblöcke als lokale Matrizen bezeichnet werden.

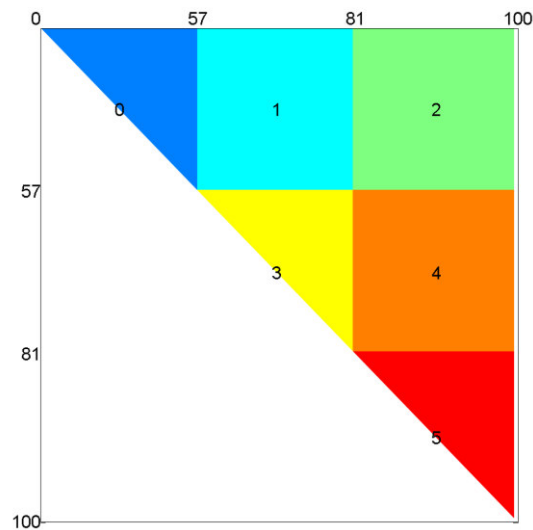


Abb. 4.4: Verteilung einer Normalgleichungsmatrix für ein Schwerefeldmodell bis Grad und Ordnung 100 auf die 6 Prozesse 0:5 (x-Achse und y-Achse zeigen den sphärisch-harmonischen Grad an).

Da bei der Aufteilung der Normalgleichungsmatrix darauf geachtet wird, dass die Normalgleichungselemente eines Grades immer einem Prozess zugeordnet sind, sind die Anzahl der zu berechneten Normalgleichungselemente pro Prozess leicht unterschiedlich. Überdies ist für Normalgleichungsblöcke, welche auf der Diagonalen liegen, auf Grund der Symmetrie der Rechenaufwand reduziert. Dies führt zu einem Lastungleichgewicht zwischen den Prozessen, was aber auf Grund der einfacheren Programmierung in Kauf genommen wird. Der Programmablauf zum Aufstellen des Normalgleichungssystems ist in Abb. 4.5 dargestellt.

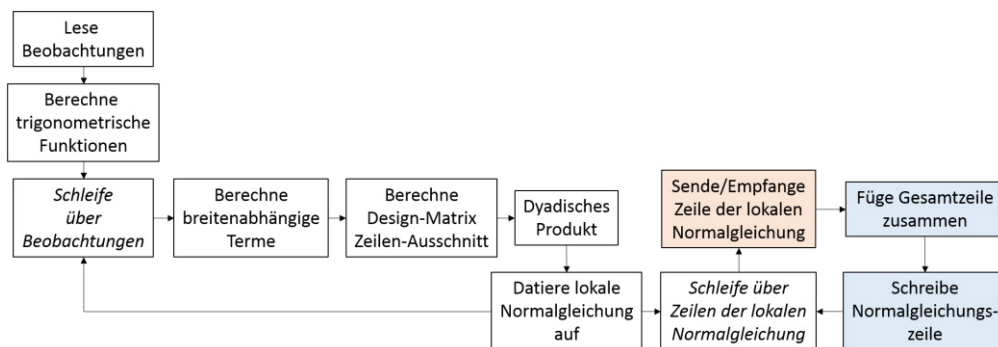


Abb. 4.5: Ablauf für das Aufstellen des Normalgleichungssystems (weiß: Prozesse laufen unabhängig voneinander ab; rot: Prozessablauf erfordert Kommunikation mit anderen Prozessen; blau: Arbeitsschritt erfolgt nur durch ausgewählte Prozesse).

Generell gilt, dass jeder Prozess alle Beobachtungen verarbeitet. Der Unterschied in der Arbeit jedes Prozesses liegt darin, welche Teile der Zeile der Designmatrix der Prozess berechnet, je nachdem, welchen Teil der Normalgleichungsmatrix er berechnen soll. Dies ist beispielhaft in Abb. 4.6 dargestellt. In diesem Beispiel ist eine 5x5 Elemente große Normalgleichungsmatrix auf 3 Prozesse aufgeteilt. Jeder der 3 Prozesse benötigt bestimmte Elemente aus einer Zeile der entsprechenden Designmatrix um ein dyadisches Produkt zum Update seines Normalgleichungsanteils zu berechnen.

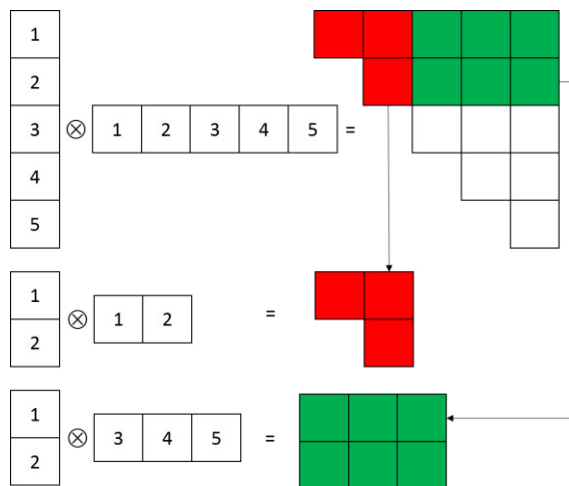


Abb. 4.6: Schema über die Berechnung der Aufdatierung einer 5x5 Elemente großen Normalgleichungsmatrix aus der Zeile einer Designmatrix mit 5 Elementen unter Verwendung von 3 Prozessen.

Abb. 4.5 vernachlässigt die Berechnung der rechten Seite, welche analog erfolgt. Für eine verbesserte Leistung wird immer ein dyadisches Produkt auf Basis von mehreren Beobachtungen, d.h. mehreren Zeilen der Designmatrix auf einmal berechnet. Die Berechnungen der Designmatrix-Elemente und der dyadischen Produkte findet lokal für jeden Prozess statt. Es bedarf, bis das Aufstellen der lokalen Normalgleichungsmatrizen beendet ist, keiner Kommunikation zwischen den Prozessen. Das dyadische Produkt wird für einen Normalgleichungsblock auf der Diagonalen mit DSYRK berechnet, für die anderen Blöcke mit DGEMM. DSYRK und DGEMM sind beide Teil der MKL-Bibliothek.

Eine Kommunikation zwischen den Prozessen findet erst beim Schreiben der Normalgleichungsmatrix statt. Das Prozessgitter ist über BLACS so organisiert, wie in Abb. 4.4 dargestellt. Die Zeilen der globalen Normalgleichungsmatrix, also der Gesamtmatrix, wie sie über alle Prozesse verteilt sind, fallen immer mit Zeilen des Prozessgitters zusammen. So sendet am Ende des Programms jeder Prozess in einer Schleife über die Zeilen der lokalen Matrix die jeweilige lokale Zeile an den Prozess mit der Reihencoordinate 0. Dieser Prozess empfängt die lokalen Zeilen und fügt sie zu einer globalen Zeile zusammen, welche er dann auf das Dateisystem schreibt.

Ein typischer Programmablauf für die Aufstellung eines Normalgleichungssystems bis Grad und Ordnung 720 auf Basis eines 15'x15' Gitters unter Verwendung von 3800 Rechenkernen dauert circa 3 h.

4.4.2 Lösung und Inversion

Das zweite fundamentale Programm ist eines zum Lösen und Invertieren des Normalgleichungssystems nach Gleichung (3.48). Der Programmablauf hierfür ist in Abb. 4.7 dargestellt. Die Normalgleichungsmatrix kann sehr effektiv parallel gelesen werden mit der MPI-Routine `MPI_FILE_READ_AT_ALL`. Überdies kann mit den Routinen `MPI_TYPE_CREATE_DARRAY` und `MPI_FILE_SET_VIEW` festgelegt werden, auf welche Art und Weise die Normalgleichungsmatrix beim Lesen auf die Prozesse verteilt wird.



Abb. 4.7: Ablauf für das Lösen und Invertieren des Normalgleichungssystems.

Für das Lösen und Invertieren des Normalgleichungssystems wird, wie in Blackford et al. (1997)²¹ empfohlen, eine blockzyklische Verteilung der Normalgleichungsmatrix gewählt, da diese Art der Verteilung auf Grund einer ausgeglichenen Last-Balance eine sehr gute Leistung zeigt. Bei einer blockzyklischen Verteilung wird die Gesamtmatrix im Gegensatz zu Abb. 4.4 nicht in zusammenhängende Blöcke zerlegt, sondern sie wird in Subblöcke einer vorher festgelegten Größe unterteilt, welche zyklisch auf die Kerne verteilt werden. Ein Beispiel hierfür ist in Abb. 4.8 dargestellt.

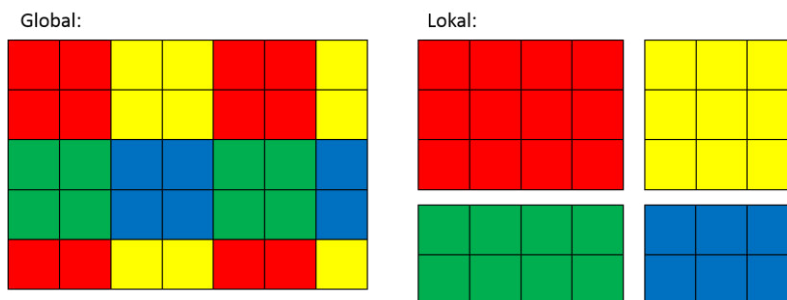


Abb. 4.8: Darstellung einer zweidimensionalen blockzyklischen Verteilung einer 5x7 Matrix auf 4 Prozesse. Das Prozessgitter ist folglich ein 2x2 Gitter (rot: Prozess 0, gelb: 1, grün: 2, blau: 3).

Hierbei wird eine globale Matrix mit 5x7 Elementen auf 4 Prozesse aufgeteilt, welche in einem 2x2 Prozessgitter angeordnet sind. Lokal, also in den einzelnen Kernen, liegt im ersten Kern (Prozess 0) eine 3x4 Matrix vor, im zweiten (Prozess 1) eine 3x3 Matrix, im dritten (Prozess 2) eine 2x4 Matrix und im vierten (Prozess 3) eine 2x3 Matrix.

Nachdem das Normalgleichungssystem gelesen ist kann es mit der SCALAPACK Routine PDPOSV zerlegt und gelöst werden. Im nächsten Schritt vervollständigt die Routine DPOTRI die Inversion. Die Inverse wird, analog zum Lesen mit `MPI_FILE_READ_AT_ALL`, mit `MPI_FILE_WRITE_AT_ALL` geschrieben. Die Unbekannten und ihre Standardabweichungen, die Diagonalelemente der Inversen, werden mit BLACS-Kommunikation zu Prozess 0 geschickt, wo sie im ICGEM-Format²² herausgeschrieben werden. Bis auf diesen letzten Schritt, in welchem nur Prozess 0 aktiv ist, ist für alle wesentlichen Schritte Kommunikation zwischen den Prozessen erforderlich.

Ein typischer Programmablauf mit einem 2 TByte Normalgleichungssystem benötigt mit etwas mehr als 2000 Kernen knapp 2h.

4.4.3 Weitere Programme

Neben den beiden wichtigsten Programmen, dem Aufstellen des Normalgleichungssystems, sowie dem Lösen und Invertieren des Normalgleichungssystems existieren noch einige weitere grundlegende Programme.

Kombination von Normalgleichungssystemen

Der Programmablauf für die Kombination zweier Normalgleichungen findet sich in Abb. 4.9.

²¹ <http://www.netlib.org/utk/papers/factor/node3.html> (Stand: 28. Januar 2015)

²² <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/documents/ICGEM-Format-2011.pdf> (Stand: 02. Februar 2015)

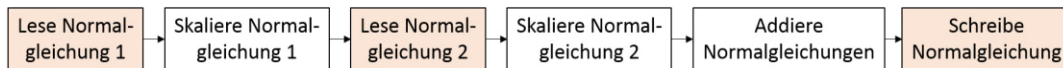


Abb. 4.9: Ablauf für die Kombination zweier Normalgleichungsmatrizen.

Zunächst wird die erste Normalgleichungsmatrix gelesen, wofür wieder `MPI_FILE_READ_AT_ALL` verwendet wird. Im Gegensatz zum Programm, in dem das Gleichungssystem gelöst wurde, welches bei blockzyklischer Datenverteilung die beste Leistung erzielt, ist die mathematische Hauptaufgabe in diesem Programm eine simple Addition. Diese selbst erfordert keine Kommunikation zwischen den Prozessen, so dass für das Kombinationsprogramm die Lese- und Schreibvorgänge selbst die aufwändigsten Programmteile sind. Aus diesem Grund liest jeder Prozess einen großen zusammenhängenden Block, wie es für eine 5x7 Matrix, welche auf 3 Kerne verteilt wird, in Abb. 4.10 dargestellt ist.

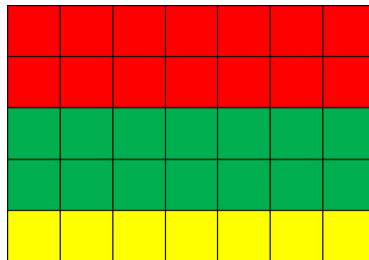


Abb. 4.10: Darstellung einer eindimensionalen Block-Verteilung einer 5x7 Matrix auf 3 Prozesse. Das Prozessgitter ist folglich ein 1x3 Gitter.

Das Prozessgitter ist hierbei ein 1x3 Gitter. Nach dem Lesen wird die Matrix in jedem Prozess mit der Varianzkomponente skaliert. Nach diesem Schritt wird analog die zweite Matrix gelesen und skaliert. Danach werden die beiden Matrizen addiert, dies erfolgt unabhängig voneinander lokal in jedem Prozess. Ist die zweite Matrix kleiner als die erste Matrix findet für die entsprechenden Elemente keine Addition statt. Nach der Addition kann die resultierende Normalgleichungsmatrix wieder mit `MPI_WRITE_AT_ALL` geschrieben werden.

Alle Vorgänge finden analog für die rechte Seite statt. Die Kombination zweier 2 TByte großer Normalgleichungssysteme benötigt bei Verwendung von knapp 2900 Kernen in der Regel weniger als 2 Minuten, manchmal sogar weniger als eine Minute.

Varianzkomponentenschätzung

Das Programm für die Varianzkomponentenschätzung ist eine Umsetzung von Gleichung (3.73). Der Programmablauf ist in Abb. 4.11 dargestellt. Jeder Prozess liest zunächst die Schwerefeldkoeffizienten der Kombination ein. Dann lesen alle Prozesse ihren Teil der Normalgleichungsmatrix und der rechten Seite ein. Dies geschieht in diesem Fall nicht mit `MPI_READ`, sondern ohne Kommunikation zwischen den Prozessen auf Basis von simplem Fortran90 Binärdatenlesen („direct access“). Das Prozessgitter ist eindimensional ausgerichtet, die Aufteilung der Normalgleichungsmatrix ist ähnlich wie in Abb. 4.10. Auf diese Weise enthält die lokale Matrix jedes Prozesses vollständige Zeilen der globalen Matrix. Die Normalgleichungen und die rechte Seite werden mit Information aus der vorherigen Varianzkomponentenschätzung skaliert. Mit Hilfe der SCALAPACK-Routine `PDTRAN`, welche die Transponierte der globalen Matrix berechnet, kann der unbesetzte Teil der Normalgleichungsmatrix aufgefüllt werden. Im nächsten Schritt wird analog die Inverse gelesen und ebenfalls aufgefüllt. Die Auffüllung ist jeweils erfolgt, da so in jedem Prozess einzeln die Spur, welche als Teil von Gleichung (3.76) berechnet werden muss, für die lokale Matrix berechnet werden kann, da die lokale Matrix ganze Zeilen der globalen Matrix enthält. Nach der Berechnung der lokalen Spur senden alle Prozesse ihre Ergebnisse an Prozess 0, der die Gesamtspur bildet. Dann werden verschiedene Anteile aus Gleichung (3.74)

$$\hat{\mathbf{e}}_j^T \mathbf{P}_j \hat{\mathbf{e}}_j = \underbrace{\hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{N}_j \hat{\mathbf{x}}}_{z_1} - 2 \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{n}_j + \mathbf{l}_j^T \mathbf{P}_j \mathbf{l}_j \quad z_2$$

berechnet. Mit der SCALAPACK-Routine PDSYMV wird global das Matrix-Vektor-Produkt \mathbf{y} aus Normalgleichungsmatrix und Koeffizientenvektor gebildet. Aus dem Ergebnis daraus wird jeweils lokal ein Skalarprodukt \mathbf{z}_1 mit dem Koeffizientenvektor gebildet, ebenso wird ein Skalarprodukt \mathbf{z}_2 aus Koeffizientenvektor und rechter Seite berechnet. Die Ergebnisse werden wieder zu Prozess 0 geschickt, der aus den lokalen Skalaren das Gesamtskalar bildet. Im letzten Schritt berechnet Prozess 0 aus allen bis dahin berechneten bzw. am Anfang des Programms eingelesenen Werten die Varianzkomponenten.

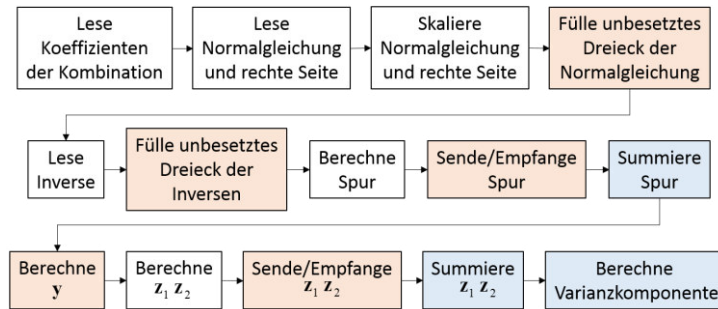


Abb. 4.11: Ablauf der Varianzkomponentenschätzung.

Kovarianzfortpflanzung

Neben den bisher erwähnten Programmen, welche alle essentiell für die Berechnung des Schwerefeldmodells sind, soll an dieser Stelle noch ein weiteres Programm vorgestellt werden, welches wichtig ist für die Evaluierung des berechneten Modells. Dies ist die Kovarianzfortpflanzung auf Geoidhöhen, welche in dieser Arbeit in Kapitel 7.2.3 durchgeführt wird. Rechentechnisch umgesetzt werden muss hierzu Gleichung (7.4). Der Programmablauf ist in Abb. 4.12 dargestellt. Das Programm besteht im Grund aus zwei Teilen, die hier mit einer gestrichelten Linie angedeutet sind. Der erste Programtteil verwendet ein eindimensionales Prozessgitter. Alle Prozesse berechnen zunächst jegliche trigonometrische Funktionen. Jeder Prozess hält einen Koordinatenvektor und berechnet in einer Schleife über diesen erst die entsprechenden *Legendre*-Funktionen und dann die lokalen Designmatrixzeilen. Das eindimensionale Prozessgitter ist wieder so angelegt, dass die lokalen Designmatrix-Zeilen ganzen Zeilen der globalen Matrix entsprechen. Die Berechnung der Designmatrix-Zeilen ist so verhältnismäßig unkompliziert. Ist die lokale Designmatrix komplett schreibt der jeweilige Prozess diese auf das Filesystem. Dies geschieht erneut ohne Kommunikation zwischen den Prozessen mit ‚direct access‘. Danach wird das eindimensionale Prozessgitter aufgelöst.

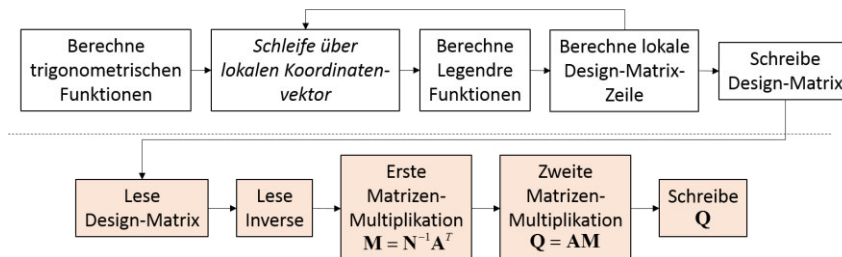


Abb. 4.12: Ablauf der Kovarianzfortpflanzung.

Es wird ein zweites, diesmal ein zweidimensionales Prozessgitter, angelegt. Mit MPI_READ_AT_ALL werden die Designmatrix und die Inverse gelesen und blockzyklisch auf die Prozesse verteilt. Für die erste Matrizenmultiplikation wird die SCALAPACK-Routine PDSYMM verwendet, für die zweite PDGEMM. Die erstere Routine ist speziell für den Fall optimiert, dass eine der beiden zu multiplizierenden Matrizen

symmetrisch ist, wie es bei der Inversen der Fall ist. Am Ende des Programms wird das Resultat mit `MPI_WRITE_AT_ALL` geschrieben.

Das Programm hält die Designmatrix und später die volle Varianz-Kovarianz-Matrix der Fortpflanzungsergebnisse komplett im Speicher, weswegen die Anzahl der Punkte, auf welche fortgepflanzt werden soll, nicht zu hoch gewählt werden sollte.

Die Fortpflanzung der kompletten Varianz-Kovarianz-Matrix auf ein globales $1^\circ \times 1^\circ$ Geoidhöhengitter benötigt mit 2400 Kernen knapp 30 Minuten. Neben der Fortpflanzung auf Geoidhöhen erlaubt das Programm auch eine Fortpflanzung auf Schwereanomalien, T_{rr} oder geostrophe Geschwindigkeiten.

4.5 Rechendemonstration

In diesem Abschnitt werden die in Kapitel 4.4 vorgestellten Programme für die Schwerefeldmodellierung an Hand zweier Testrechnungen auf ihre Plausibilität überprüft.

Test 1

Im ersten Test berechnen wir zunächst ein globales $15^\circ \times 15^\circ$ Gitter von Blockmittelwert-Schwereanomalien aus EGM2008 mit einem Signalgehalt bis Grad und Ordnung 719. Auf die Schwereanomalien wird ein Rauschen von 1 mgal angebracht. Aus den Schwereanomalien wird ein Normalgleichungssystem bis Grad und Ordnung 719 entwickelt. Das Normalgleichungssystem wird gelöst und die Varianz-Kovarianz-Matrix der Unbekannten berechnet. Das Ergebnis wird mit T1 (Test 1) bezeichnet und in Abb. 4.13 in Form von Gradvarianzen mit dem EGM2008-Modell verglichen.

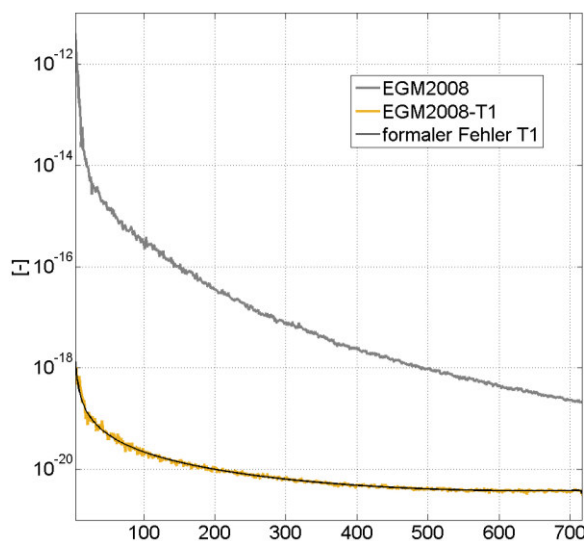


Abb. 4.13: Dimensionslose Gradvarianzen des Testmodells T1 im Vergleich zu EGM2008.

Die Differenz zwischen EGM2008 und T1, die den absoluten Fehler auf Grund des simulierten Rauschens ausdrückt, wird über alle Grade hinweg perfekt von der Kurve des relativen Fehlers des T1 Modells überlagert, was beweist, dass die Testrechnung gelungen ist.

Test 2

In einem zweiten Test beschränken wir uns auf bandbegrenzte Schwereanomalien aus EGM2008 mit einem Signalgehalt bis Grad und Ordnung 360. Auf die Schwereanomalien über den Ozeanen wird ein Rauschen von 2 mgal angebracht, auf die über Land ein Rauschen von 3 mgal. Für Land und Ozean wird jeweils ein Normalgleichungssystem aufgestellt. Für das stochastische Modell der Landdaten wird eine Standardabwei-

chung von 6 mgal angenommen, für das der Ozeandaten eine von 1mgal. Die Normalgleichungssysteme werden kombiniert und das Gesamtsystem gelöst. Das Ergebnis ist T2i0 (Test2, Iteration 0). Danach wird eine Varianzkomponentenschätzung berechnet. Schon nach einer Iteration wird die Varianzkomponente für die Ozeangebiete mit 1,999 mgal geschätzt. Datiert man den Ausgangswert von 1 mgal damit auf, ist der korrekte Wert von 2 mgal nahezu erreicht. Für Land wir nach der ersten Iteration eine Varianzkomponente von 0,501 geschätzt. Bringt man dies auf den Ausgangswert von 6 mgal an, ist der korrekte Wert von 3 mgal nahezu erreicht. Mit den Varianzkomponenten wird ein neues Modell T2i1 berechnet. Auch dieses wird in Form von Gradvarianzen mit dem EGM2008-Modell verglichen.

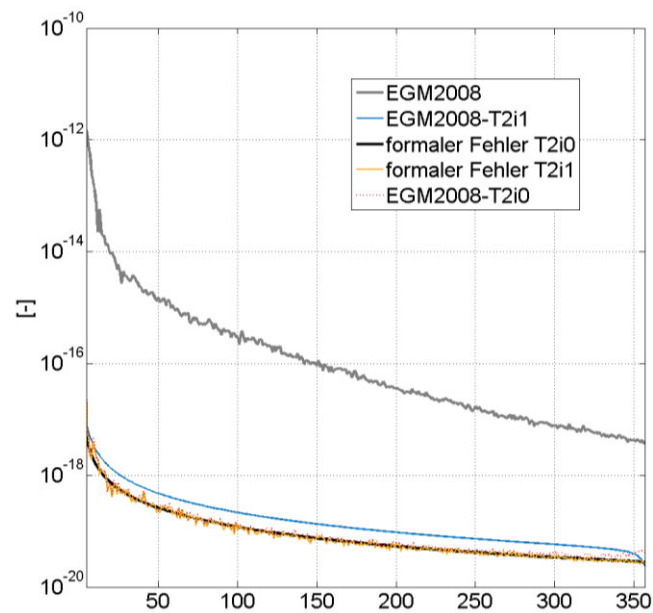


Abb. 4.14: Dimensionslose Gradvarianzen der Testmodelle T2i0 und T2i1 im Vergleich zu EGM2008.

Es ist schön zu erkennen, wie nach der Varianzkomponentenschätzung die formalen und absoluten Fehler zusammenpassen. Überdies wird die Varianz-Kovarianz-Matrix von T2i1 auf Geoidhöhen fortgepflanzt (Abb. 4.15).

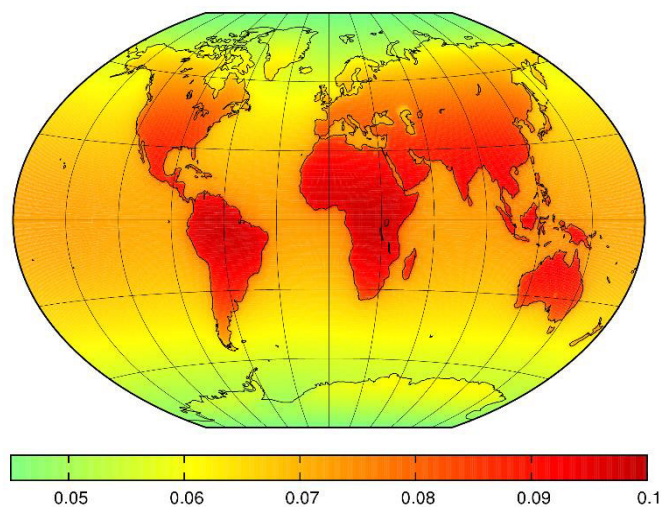


Abb. 4.15: Kovarianzfortpflanzung von T2i1 auf Geoidhöhen [m].

Es ist gut der Unterschied zwischen den Land- und Ozeangebieten auf Grund des unterschiedlich stark aufgetragenen Rauschens zu sehen. Überdies ist eine Breitenabhängigkeit des Ergebnisses zu erkennen,

welche daraus resultiert, dass die Fläche der Zellen des zu Grunde liegenden Beobachtungsgitters mit steigendem Abstand vom Äquator kleiner wird. Es kann festgehalten werden, dass alle Programme korrekt arbeiten.

4.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde zunächst demonstriert, warum Hochleistungsrechner in der Schwerefeldmodellierung auf Basis voller Normalgleichungssysteme benötigt werden. Die Anzahl der Unbekannten steigt mit dem sphärisch-harmonischen Grad quadratisch, die Anzahl der Normalgleichungselemente zur 4. Potenz. Für ein Schwerefeldmodell bis Grad und Ordnung 720 sind so über 500.000 Unbekannte aus einem über 2TByte großen Normalgleichungssystem zu bestimmen.

Des Weiteren wurde ein Überblick über die Rechner des LRZ und speziell SuperMUC gegeben. Die grundlegende Software, welche eine massiv parallele Programmierung ermöglicht, wurde vorgestellt. Ausführlich wurden auch die Programmabläufe der wichtigsten Programme, die für diese Arbeit erstellt worden sind, erläutert. Die Abläufe und beigefügten Abbildungen und Erläuterungen können, auch wenn sie einen komplexen Vorgang stark vereinfacht beschreiben, als Vorlage für ähnliche Probleme verwendet werden.

5 Verwendete Realdaten

In Kapitel 2 wurden verschiedene Funktionale des Schwerefeldes sowie die zugehörigen Beobachtungsverfahren vorgestellt. Es wurde aufgezeigt, dass die Beobachtungen des Schwerefeldes sehr verschiedenartig sind. Während die Satellitenverfahren zwar nicht das volle Spektrum des Schwerefeldes erfassen können, dafür jedoch den langwelligen Anteil höchst präzise, beinhalten terrestrische Beobachtungen zwar das volle Spektrum, allerdings ist mit ihnen keine hochgenaue Bestimmung der langwelligen Anteile möglich. Die Schlussfolgerung daraus ist, dass die verschiedenartigen Beobachtungen in der Schwerefeldmodellierung kombiniert werden müssen, um die Vorteile der verschiedenen Beobachtungen miteinander zu verbinden.

Im Rahmen dieser Arbeit werden verschiedene Beobachtungsdatensätze verwendet, welche in diesem Kapitel beschrieben werden sollen. Zunächst werden in Kapitel 5.1 die Satellitendaten aus den Schwerefeldsatellitenmissionen beschrieben, dann in Kapitel 5.2 die Daten aus terrestrischen und altimetrischen Messungen.

5.1 Satelliten-Schwerefelddaten

Die Satellitendaten, die in dieser Arbeit verwendet werden, stammen von den Schwerefeldmissionen GRACE (Tapley et al., 2004) und GOCE (Drinkwater et al., 2003). Es werden an dieser Stelle jedoch nicht die ursprünglichen Beobachtungen verwendet, die wie in Kapitel 2.2.1 beschrieben, verarbeitet werden können, sondern Normalgleichungssysteme eingeführt, welche von externen Institutionen zur Verfügung gestellt wurden. Aus diesem Grund ist das sehr komplexe Prozedere der Vorprozessierung, Filterung und Verarbeitung der Originaldaten an dieser Stelle nicht mehr notwendig.

5.1.1 GRACE

Im Falle von GRACE werden Normalgleichungen des Schwerefeldmodells ITSG-Grace2014s (Mayer-Gürr et al., 2014) verwendet. Die zugehörigen Koeffizienten und die Varianz-Kovarianz-Matrix stellt das Institut für Theoretische Geodäsie und Satellitengeodäsie (ITSG) der TU Graz neben zeitlichen Schwerefeldlösungen online zur Verfügung²³. Die Prozessierung von ITSG-Grace2014s entspricht grob dem in Kapitel 2.2.1.1 erläuterten Verfahren und ist ausführlich beschrieben in Mayer-Gürr (2006) oder Mayer-Gürr et al. (2010). Der dem Modell zu Grunde liegende Beobachtungszeitraum erstreckt sich von Februar 2003 bis Dezember 2013. Auf Grund einer Inklination von 89° der GRACE-Bahn wird mit den Beobachtungen nahezu die gesamte Erde abgedeckt. Für das Modell wurden Koeffizienten bis Grad und Ordnung 200 geschätzt, was 40397 Parametern entspricht (Koeffizienten der Grade 0 und 1 wurden nicht mitgeschätzt). Die zugehörige Varianz-Kovarianz-Matrix (und somit auch die Normalgleichungsmatrix) ist voll besetzt, so dass sie jeweils einen Speicherplatz von knapp über 12 GByte benötigt.

Betrachtet man Abb. 5.1, in welcher die formalen Fehler mehrerer Satellitenschwerefeldmodelle als Gradmedian miteinander verglichen werden - der Gradmedian ist hierbei definiert nach Siemes (2008) mit

$$s_n = \text{median}_m \left\{ \sigma_{\bar{c}_m}; \sigma_{\bar{s}_m} \right\}, \quad (5.1)$$

²³

http://portal.tugraz.at/portal/page/portal/TU_Graz/Einrichtungen/Institute/Homepages/i5210/research/ITSG-Grace2014 (Stand: 10. Dezember 2014)

so wird, wie in Kapitel 2.2.1.1 beschrieben deutlich, dass GRACE im sehr langwelligen Bereich ($< \text{Grad}/\text{Ordnung } 100$) von allen Schwerfeldmessverfahren am sensitivsten ist. In diesem Bereich dominiert ITSG-GRACE2014s eine kombinierte Lösung mit einem GOCE-Schwerefeld (TIM5, siehe Kapitel 5.1.2) deutlich. Der Schnittpunkt der roten mit der grauen Linie bei ungefähr Grad 176 zeigt an, wo das Signal-zu-Rausch-Verhältnis von ITSG-GRACE2014s gleich 1 ist.

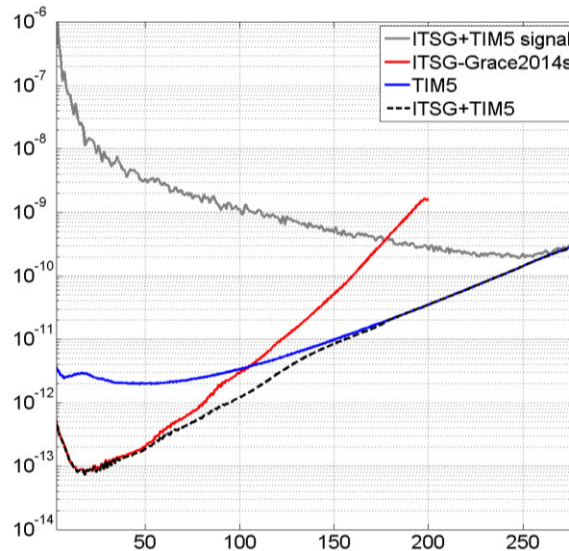


Abb. 5.1: Formaler Fehler in Gradmedian von ITSG-GRACE2014s und TIM5 (nicht regularisiert) im Vergleich zu einem aus beiden Modellen kombinierten Modell.

5.1.2 GOCE

Die GOCE-Mission wird eingeführt unter Verwendung der TIM5 (ausführlich: GO_CONS_GCF_2_TIM_R5) Normalgleichungen (Brockmann et al., 2014). TIM5 wurde im Rahmen des ESA Projekts „GOCE High-level Processing Facility (HPF)“ berechnet. Das Schwerfeldmodell und die zugehörige Varianz-Kovarianz-Matrix werden von der ESA zum Download zur Verfügung gestellt²⁴. TIM5 besteht im Wesentlichen aus zwei Anteilen, Schwerfeldbestimmung aus Bahnstörungen und Satellitengradiometrie. Ersteres ist in Kapitel 2.2.1.1 grob beschrieben, letzteres unter 2.2.1.2. Eine ausführliche Beschreibung speziell zu TIM5 findet sich in Brockmann et al. (2014), eine allgemeinere zu den Verfahren in Pail et al. (2011a). Die Beobachtungsperiode für das Modell reicht von November 2009 bis Oktober 2013. Auf Grund der Inklination der GOCE-Bahn von 96.6° sind durch GOCE-Beobachtungen polare Gebiete nicht abgedeckt, eine Problematik, welche in Kapitel 2.2.1.2 beschrieben wird. TIM5 wurde bis Grad und Ordnung 280 geschätzt (78961 Parameter), und die zugehörige volle Normalgleichungsmatrix ist in etwa 46 GByte groß. Im Rahmen diese Arbeit wird die unregularisierte TIM5-Lösung verwendet.

Abb. 5.1 zeigt, dass, wie zu erwarten, GOCE im sehr langwelligen Bereich nicht so sensitiv ist wie GRACE. Jedoch ist der Mehrwert der Satellitengradiometrie in den höheren Graden ($> \text{Grad}/\text{Ordnung } 100$) deutlich sichtbar.

5.1.3 Übersicht Satelliten-Schwerefelddaten

An dieser Stelle seien noch einmal kurz die wichtigsten Informationen zu den verwendeten Normalgleichungssystemen aus Schwerfeldsatellitenmissionen zusammengefasst.

²⁴ <https://earth.esa.int/web/guest/missions/esa-operational-co-missions/goce> (Stand: 11. Dezember 2014)

	Quelle	Beobachtungsverfahren	Beobachtungszeitraum	Min/Max Grad
ITSG-Grace2014s	TU Graz ^a	low-low SST	02.2003-12.2013	2-200
TIM5	HPF ^b	high-low SST; Gradiometrie	09.2009-10.2013	2-280

Tab. 5-1: Verwendete Satelliten-Schwerefelddaten der GRACE und GOCE Mission (^aMayer-Gürr et al., 2014; ^bBrockmann et al., 2014).

Im Falle der GRACE- und GOCE-Normalgleichungen gehen wir im Folgenden davon aus, dass diesen realistische stochastische Modelle zu Grunde liegen, d.h. es wird angenommen, dass die stochastischen Modelle die wahren Fehler gut beschreiben. Dies wird für die GOCE-Normalgleichungen gezeigt in Pail et al. (2011a) und Brockmann et al. (2014) und für die GRACE-Normalgleichungen in Pail et al. (2011b).

5.2 Terrestrische und Altimetrische Schwereanomalien

Wie in Kapitel 2 beschrieben, sind terrestrische Schwereanomalien der klassische Beobachtungstyp, der für die Berechnung von Schwerefeldmodellen herangezogen wird. Auch heute in der Zeit der Satellitenschwerefeldmissionen haben terrestrische Schwereanomalien eine große Bedeutung. Mit ihnen kann zwar der langwellige Schwerefeldanteil nicht so genau bestimmt werden wie mit Satellitenmessungen, dafür erfassen sie im Gegensatz zu den Satellitenmessungen das volle Schwerefeldspektrum (siehe Kapitel 2.2).

Im Folgenden soll eine Übersicht gegeben werden, welche Schwereanomalien Datensätze im Rahmen dieser Arbeit verwendet, in Normalgleichungssysteme verarbeitet und später mit den Satellitendaten-Normalgleichungen kombiniert werden. In diesem Absatz beschränken wir uns zunächst auf Gebiete, in denen qualitativ hochwertige Schwereanomalien Datensätze vorliegen.

5.2.1 Verwendete Datensätze

Ziel ist es, mit Blockmittelwerten von Schwereanomalien eine möglichst globale Abdeckung zu erreichen. Da die für diese Arbeit zur Verfügung stehenden Datensätze über eine Blockgröße von mindestens 15'x15' verfügen, wird ein globales 15'x15' Datengitter angestrebt, mit welchem nach Gleichung (2.11) ein Schwerefeldmodell bis Grad und Ordnung 720 bestimmbar ist.

Die im Folgenden verwendeten Datensätze liegen Großteils ohne Genauigkeitsinformation vor. Eine Ausnahme bilden zwei Datensätze, deren Genauigkeitsinformationen sich allerdings im Rahmen verschiedener Testrechnungen wie z.B. in Form von Schwerefeldvergleichen als nicht besonders plausibel erwiesen haben. Diese Genauigkeitsinformationen werden folglich nicht für die Schwerefeldberechnung genutzt. Da die Schwerefeldberechnung im Rahmen der stochastischen Modellierung jedoch auf Genauigkeitsinformationen angewiesen ist, vergleiche Kapitel 3.1.1, wird in Kapitel 6.3 versucht, eine empirische Genauigkeitsinformation abzuleiten.

Eine weitere Problematik besteht darin, dass zu den Datensätzen in der Regel wenig Hintergrundinformationen vorliegt. Die Datensätze enthalten in der Regel keine Informationen darüber, auf welches Gezeitsystem sie sich beziehen, bzw. welche Korrekturen und Reduktionen in den Daten enthalten sind. Oftmals können auch die Hersteller der Datensätze keine Auskunft darüber erteilen, da viele Datensätze wiederum eine Kombination aus einer Vielzahl (teils sehr alter) und wenig dokumentierter Datensätze sind. Um dieser Problematik gerecht zu werden, finden sich in Kapitel 6.1 numerische Untersuchungen zum Einfluss dieser Korrekturen. Dabei wird auch abgeschätzt, wie groß der Fehler ist, der durch die Missachtung dieser Korrekturen entsteht.

5.2.1.1 Altimetrische Schwereanomalien

Altimetrische Schwereanomalien, deren Berechnung in Kapitel 2.2.2 grob erläutert wird, stellen auf Grund der Tatsache, dass die Erde zu knapp zwei Dritteln von Wasser bedeckt ist, den größten Anteil der Anomalien für die Schwerefeldbestimmung. Sie spielen für diese folglich eine bedeutende Rolle. Auch wenn ein Datensatz altimetrischer Schwereanomalien in der Regel aus Daten einer Vielzahl von verschiedenen Altimetrie-Missionen erzeugt worden ist, so ist ein solcher Datensatz im Vergleich zu den terrestrischen Anomalien für gewöhnlich in sich konsistent.

Im Rahmen dieser Arbeit werden die Blockmittelwert-Schwereanomalien des DTU2013 Datensatzes verwendet (Andersen et al., 2013), welche von der DTU frei zum Download zur Verfügung stehen²⁵. Eine ausführlichere Beschreibung der Berechnung der Schwereanomalien findet sich für eines der Vorgängermodelle des DTU13 in Andersen et al. (2010). DTU13 besteht aus einem globalen Datensatz von 1°x1° Blockmittelwerten. Auch über Land liegen Schwereanomalien vor, welche allerdings aus EGM2008 (Pavlis et al., 2012) abgeleitet werden und nicht aus unabhängiger Schwereinformation bestehen. Folglich werden für diese Arbeit nur die Schwereanomalien über den Ozeanen verwendet, welche mit Hilfe einer Mittelwertbildung, in der die Flächengröße als Gewichtung eingeht, zu 15°x15° Blöcken verarbeitet werden. Die Differenz dieser Schwereanomalien zu EGM2008 ist in Abb. 5.2 dargestellt.

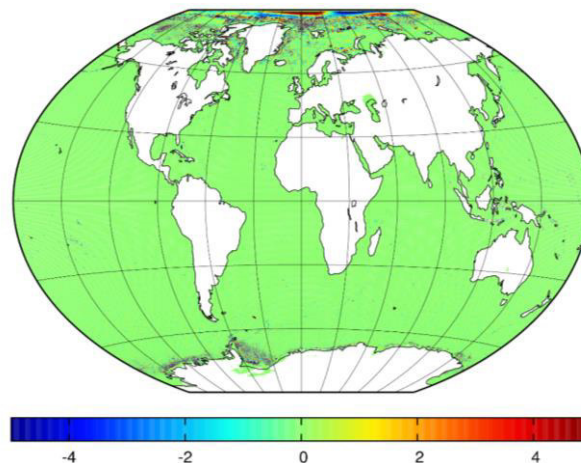


Abb. 5.2: Differenz zwischen DTU13 und EGM2008 (entwickelt bis Grad 2190) in 15°x15° Blockmittelwert-schwereanomalien [mgal].

Für alle offenen Ozean- oder auch Meeresflächen können keine signifikanten Unterschiede festgestellt werden. Zum einen war die Qualität der Altimetriedaten über offenen Ozeanflächen schon zu der Zeit, als EGM2008 hergestellt wurde, sehr gut, und zum anderen ist die Datenbasis von EGM2008 für Bereiche über offenen Ozeanen DNSC07, ein Vorgängermodell von DTU13 (siehe Pavlis et al. (2012)). In den Küstenbereichen, wo für EGM2008 altimetrische Schwereanomalien des SSV18.1 Modells verwendet wurden (Sandwell & Smith, 2009), sind Differenzen sichtbar, ebenso in arktischen Gewässern. Dies liegt zum einen daran, dass die Verfahren zur Bestimmung von Schwereanomalien mit Altimetrie in Küstengebieten im Laufe der letzten Jahre stetig verfeinert wurden (siehe z.B. Idris et al. (2014)), und zum anderen daran, dass in arktischen Gebieten durch die Satellitenmissionen Cryosat-2 und Jason-1 deutlich mehr Altimetriedaten zur Verfügung stehen. Daraus lässt sich folgern, dass mit DTU13 ein sehr aktueller und moderner Datensatz zur Verfügung steht, der sich qualitativ sehr gut für die Schwerefeldbestimmung eignet.

²⁵ <ftp://ftp.space.dtu.dk/pub/DTU13/> (Stand: 15. Dezember 2014)

5.2.1.2 Terrestrische Schwereanomalien

Im Gegensatz zu den altimetrischen Schwereanomalien, mit denen alle Meeresflächen abgedeckt werden können, ist es schwierig, alle Landflächen mit terrestrischen Schwereanomalien zu überdecken. Dies liegt daran, dass, wie bereits in Kapitel 2.2.3 erläutert, in manchen Gegenden nie terrestrische Messungen durchgeführt wurden, noch nicht einmal im Rahmen von Fluggravimetrie, oder dass Daten gewissen Restriktionen unterliegen, seien diese militärisch oder kommerziell, und diese Daten somit nicht frei zugänglich sind.

Im Folgenden werden die terrestrischen Datensätze vorgestellt, auf welche im Rahmen dieser Arbeit zurückgegriffen werden kann. Um die Güte der Datensätze grob zu veranschaulichen, werden diese jeweils mit EGM2008 und einer GRACE/GOCE-Kombinationslösung verglichen. Der Vergleich mit EGM2008 erfolgt, da die NGA, welche die Datengrundlage für EGM2008 zur Verfügung gestellt und zur Erstellung von EGM2008 beigetragen hat, über die wohl beste Datensammlung von Schwereanomalien verfügt, weswegen EGM2008 als sehr gute Referenz für terrestrische Schwereanomalien betrachtet werden kann. Der Vergleich mit einer GRACE/GOCE-Kombination erfolgt, da GRACE/GOCE-Modelle in den spektralen Bereichen, für die GRACE und GOCE sensitiv sind, den wahren Schwerewerten am nächsten kommen und somit GRACE und GOCE eine gute externe Validierungsmöglichkeit für terrestrische Daten darstellen.

Arktis

Für die Landmassen mit einer nördlichen Breite von höher als 64° wird (mit Ausnahme von Skandinavien) der ArcGP Datensatz verwendet (Forsberg & Kenyon, 2004).

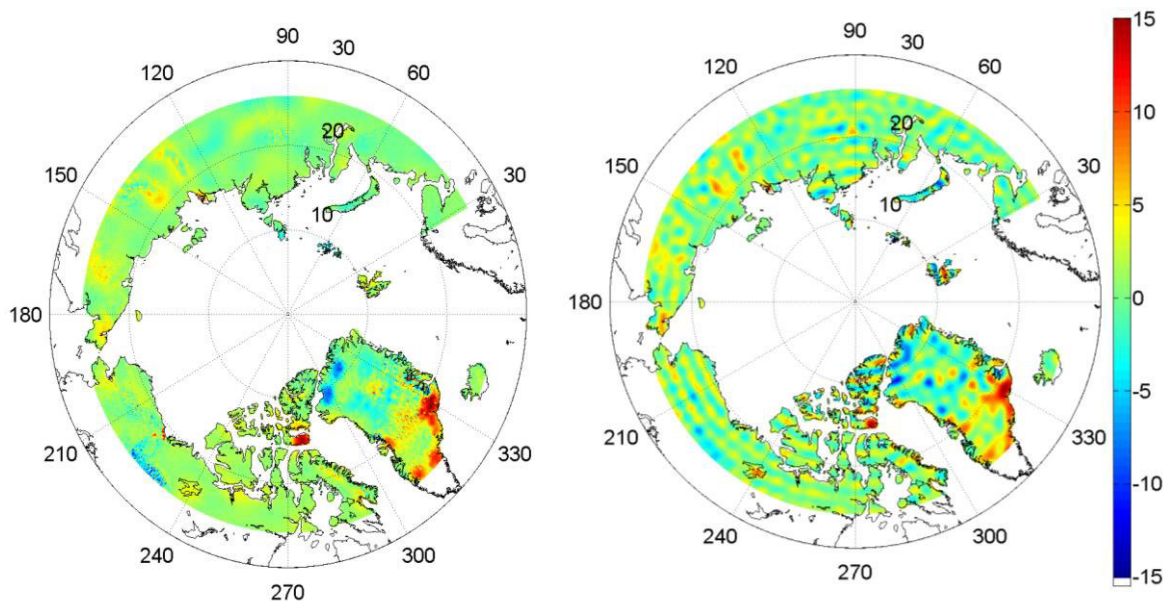


Abb. 5.3: Differenz zwischen ArcGP und EGM2008 (entwickelt bis Grad 2190; RMS: 2.26mgal) (links) und zwischen bandbegrenzten ArcGP-Anomalien und einer GRACE/GOCE-Kombination (jeweils entwickelt bis Grad 200; RMS: 2.93mgal), jeweils in $15' \times 15'$ Blockmittelwertschwereanomalien [mgal].

Der Datensatz wird von der ArcGP Gruppe online zur freien Verfügung gestellt²⁶. Im Rahmen des Projekts ArcGP wurden $5' \times 5'$ Schwereanomalien erstellt mit dem Ziel, das nördliche Polarloch von GOCE zu füllen. Da die Polarregionen schwer zugänglich sind, stammt ein Großteil der hierfür verwendeten Daten aus Fluggravimetrie. Der Datensatz liegt auch für Meeresbereiche vor, wo für diese Arbeit der neuere DTU13 Datensatz genutzt wird. Die Schwereanomalien über Land liegen im originalen Datensatz auf der Topographie, müssen also auf das Geoid gebracht werden (vergleiche Kapitel 2.3.5). Erneut wird eine Mittelwertbil-

²⁶ <http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/agp/index.html> (Stand: 15. Dezember 2014)

dung mit Flächengewichtung durchgeführt - wie auch im Folgenden für alle weiteren Datensätze, falls diese in einer höheren Auflösung als $15' \times 15'$ vorliegen - um die ArcGP-Schweranomalien in $15' \times 15'$ Blockmittelwerte zu überführen. Vergleicht man diese mit EGM2008 (Abb. 5.3 links), so sind besonders im Bereich von Grönland Differenzen sichtbar. Auch in Kanada und in Sibirien sind Unterschiede zu erkennen, allerdings sind diese deutlich kleiner. Vergleicht man außerdem ArcGP bei Grad und Ordnung 200 mit einer GRACE/GOCE Kombination (Abb. 5.3 rechts) - hierzu wird ein globaler Satz von Blockmittelwert-schwereanomalien, in den der ArcGP Datensatz eingebettet ist, in sphärisch-harmonische Koeffizienten entwickelt und die Koeffizienten dann wieder bis Grad und Ordnung 200 in Schwereanomalien gelöst - so sind ebenso die Differenzen in Grönland sichtbar, was zeigt, dass ArcGP in Grönland wohl einige Anomalien von schlechterer Qualität enthält. Auch die kleineren Unterschiede in Kanada und Sibirien sind zu erkennen. Generell treten auch einige blasenähnliche Strukturen auf, allerdings entstehen diese durch den Abbruch des GRACE/GOCE-Modells bei Grad und Ordnung 200, da die Koeffizienten dieses Modells stark miteinander korreliert sind. Die blasenähnlichen Strukturen gehen in die Berechnung der RMS-Differenz ein, so dass diese, wie auch im Folgenden für ähnliche Vergleiche, nicht voll repräsentativ ist für die Differenz zwischen den Schwereanomalien und einer GRACE/GOCE-Kombination.

Australien

Im Rahmen der Erstellung der australischen Geoidlösung AUSGeoid09 (Featherstone et al., 2011) wurde ein Datensatz von $1' \times 1'$ Blockmittelwert-Schwereanomalien erstellt, der von Christian Hirt und Will Featherstone (Curtin University) zur Verfügung gestellt wurde. Die Anomalien des Datensatzes liegen auf dem Geoid.

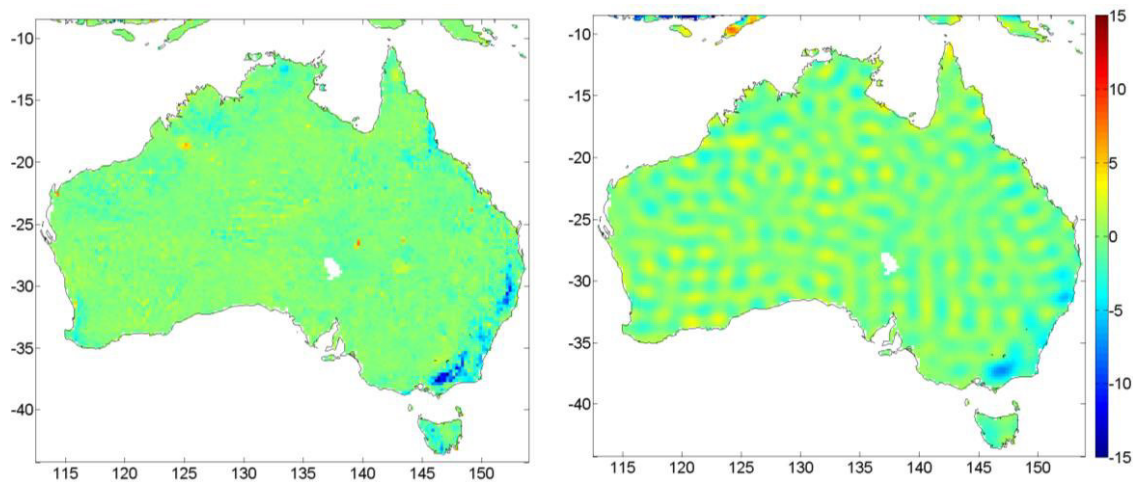


Abb. 5.4: Differenz zwischen AUSGeoid09 und EGM2008 (entwickelt bis Grad 2190; RMS: 1.09mgal) (links) und zwischen bandbegrenzten AUSGeoid09-Anomalien und einer GRACE/GOCE-Kombination (jeweils entwickelt bis Grad 200; RMS: 1.28mgal), jeweils in $15' \times 15'$ Blockmittelwert-schwereanomalien [mgal].

Der Vergleich des AUSGeoid09-Datensatzes mit EGM2008 (Abb. 5.4 links) zeigt ebenso wie der Vergleich mit einer GRACE/GOCE-Kombination (Abb. 5.4 rechts; Vorgehensweise wie auch im weiteren für solche Vergleiche analog zur Vorgehensweise beim ArcGP-Datensatz) wenige größere Auffälligkeiten, was zeigt, dass der AUSGeoid09-Datensatz von sehr guter Qualität ist. Einzige größere Unterschiede finden sich in Gebieten an der Ostküste. Dort befinden sich die Gebiete mit der rauesten Topographie Australiens. Der AUSGeoid09-Datensatz enthält auch Schwereanomalien für die Südspitzen von Papua Neu-Guinea und Malaysia. Der Vergleich mit GRACE/GOCE legt nahe, dass die Anomalien in Malaysia nicht über jene hohe Genauigkeit verfügen wie die Anomalien über Australien.

Kanada

Für das Gebiet von Kanada sowie einige zusätzliche Gebiete wie die Südspitze Grönlands wurde ein Datensatz von 2'x2' Blockmittelwerten von Marc Veronneau and Jianliang Huang von National Resources Canada (NRCan) zur Verfügung gestellt. Der Datensatz wird im Rahmen dieser Arbeit nur für Gebiete mit einer nördlichen Breite von kleiner 64° verwendet, nördlicher wird ArcGP genutzt. Der originale Datensatz umfasst auch das Staatsgebiet der USA, wo allerdings ein von der NGA zur Verfügung gestellter Datensatz verwendet wird. Die Anomalien des Datensatzes befinden sich ursprünglich auf der Topographie.

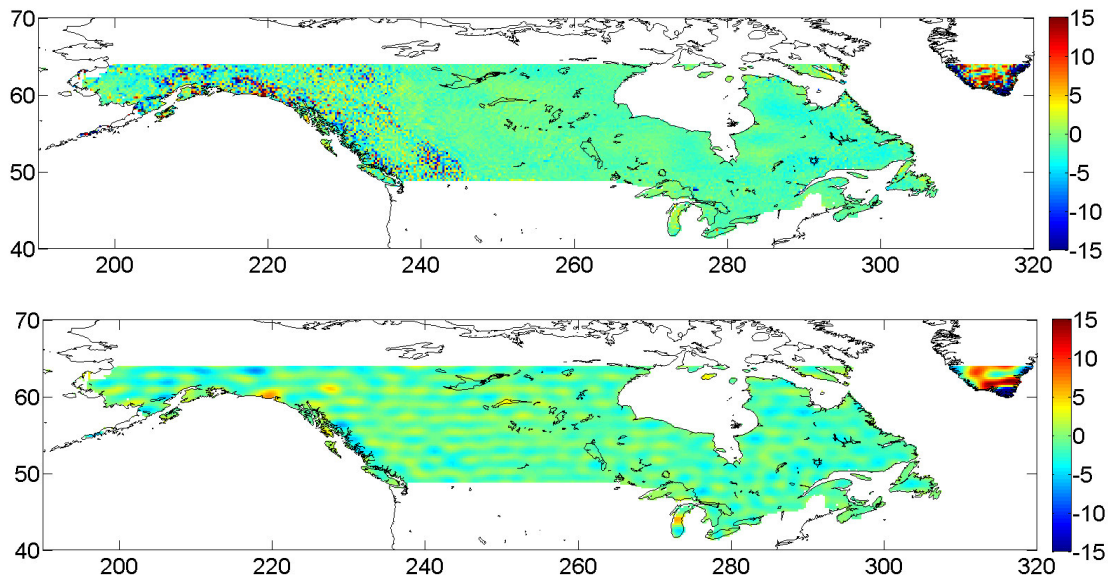


Abb. 5.5: Differenz zwischen dem Kanada-Datensatz und EGM2008 (entwickelt bis Grad 2190; RMS: 4.21 mgal) (links) und zwischen bandbegrenzten Kanada-Anomalien und einer GRACE/GOCE-Kombination (jeweils entwickelt bis Grad 200; RMS: 2.14mgal), jeweils in 15'x15' Blockmittelwertschwereanomalien [mgal].

Der Vergleich des Kanada-Datensatzes mit EGM2008 (Abb. 5.5 oben) zeigt zwei auffällige Gebiete. Zum einen sind deutliche Unterschiede sichtbar für die Südspitze Grönlands, und zum anderen für den Bereich an der Westküste Kanadas, ein Gebiet mit stark ausgeprägter Topographie. Die Differenzen im Westen Kanadas sind im Gegensatz zu jenen in Südgrönland allerdings sehr kleinräumig und nicht langwellig. Vergleichen wir den Kanada-Datensatz bei Grad und Ordnung 200 mit einer GRACE/GOCE Kombination (Abb. 5.5 unten), so fällt auf, dass für die Gebiete an der Westküste keine auffälligen Differenzen mehr sichtbar sind. Die langwelligeren Unterschiede in Südgrönland bleiben jedoch bestehen. Folglich scheint der Kanada-Datensatz über dem kanadischen Festland von sehr guter Qualität zu sein. Für Vergleiche bezüglich Grönlands könnte es empfehlenswert sein, zeitvariable Trends wie die Eisschmelze zu berücksichtigen, welche mit GRACE nachweisbar sind. Dies ist an dieser Stelle nicht geschehen, kann aber auch nicht die Differenzen von bis zu 15 mgal erklären.

Europa

Im Rahmen dieser Arbeit wird für Europa ein Datensatz von 15'x15' Blockmittelwertschwereanomalien verwendet, der von Heiner Denker vom Institut für Erdmessung (IFE) in Hannover zur Verfügung gestellt und im Rahmen der Erstellung der europäischen Quasigeoidlösung EGG08 (Denker et al., 2008) verwendet wurde. Der Datensatz vereinigt in sich eine Vielzahl von regionalen Datensätzen, die Anomalien des Datensatzes liegen zunächst auf der Topographie. Die Differenz zwischen EGG08 und EGM08 in Blockmittelwertschwereanomalien ist in Abb. 5.6 (oben) abgebildet. Unterschiede sind sichtbar in den Alpen, Südfinnland, in Griechenland und der Türkei. Betrachtet man zum Vergleich eine GRACE/GOCE Kombination bei Grad und Ordnung 200, so sieht man ähnliche Unterschiede für Griechenland und die Türkei. Dort scheint

EGG08 kleinere Ungenauigkeiten aufzuweisen. In den Alpen sind keine signifikanten Unterschiede sichtbar. Interessant ist, dass in Nordafrika deutliche Differenzen zu GRACE/GOCE zu sehen sind, welche im Gegensatz bei EGM08 nicht sichtbar waren. Dies deutet daraufhin, dass EGG08 und EGM08 dort eine ähnliche Datenbasis verwenden, welche wohl einige Ungenauigkeiten enthält. Generell handelt es sich jedoch bei EGG08 um eine sehr gute Datenbasis.

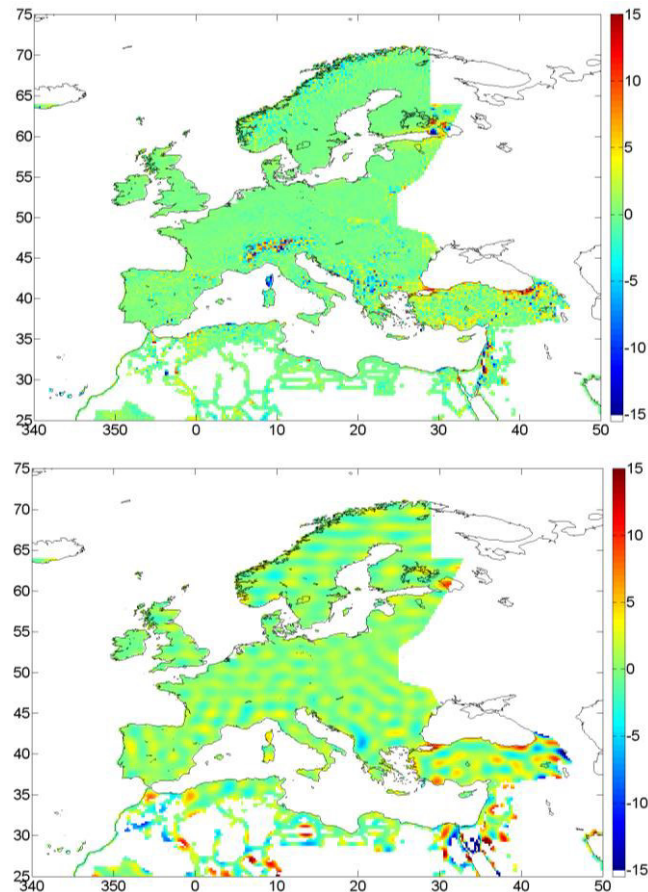


Abb. 5.6: Differenz zwischen EGG08 und EGM2008 (entwickelt bis Grad 2190) (links) und zwischen bandbegrenzten EGG08 Anomalien und einer GRACE/GOCE-Kombination (jeweils entwickelt bis Grad 200), jeweils in $15' \times 15'$ Blockmittlerwertschwereanomalien [mgal].

Südamerika

Südamerika ist neben Afrika und weiten Teilen Asiens eine jener Gegenden auf der Welt, wo es nur eine begrenzte Anzahl von sehr genauen Schwereanomalie-Messungen gibt. Dies liegt unter anderem auch daran, dass viele Gegenden in Südamerika nur schwer zugänglich sind, wie das Amazonasgebiet oder auch die Anden. Über einen der genauesten Südamerika-Datensätze verfügt die National Geospatial-intelligence Agency (NGA), welche einen $15' \times 15'$ Minuten Auszug daraus zur Verfügung gestellt hat. Allerdings muss auch hier davon ausgegangen werden, dass dieser Auszug in manchen Gegenden hohe Ungenauigkeiten aufweist. Auch für diesen Datensatz liegen die Anomalien ursprünglich auf der Topographie. Der Vergleich mit EGM2008 (Abb. 5.7 links) ist hinsichtlich der Qualität des Südamerika-Datensatzes nicht wirklich aussagekräftig, da in Südamerika in EGM2008 nicht viel Schwerefeldsignal enthalten ist, was erst mit Hilfe von GOCE detektiert worden ist (vergleiche Pail et al. (2011a)). Interessanter ist folglich der Vergleich mit der GRACE/GOCE Kombination (Abb. 5.7 rechts), der die aus Pail et al. (2011a) bekannten Unterschiede durch das neu detektierte Schwerefeldsignal, besonders im Amazonas, deutlich macht. Von guter Qualität scheint der Südamerikadatensatz im Südosten zu sein, also in Argentinien und den Gebieten Brasiliens, die nicht im Amazonas liegen.

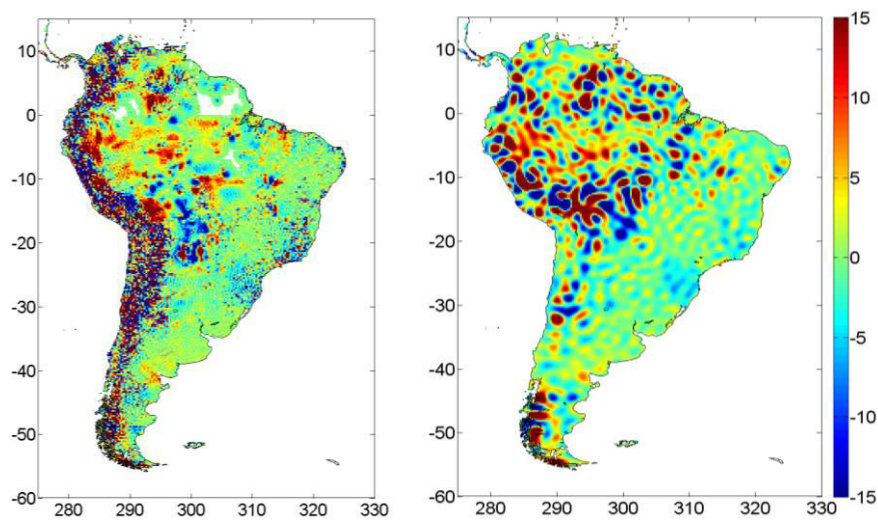


Abb. 5.7: Differenz zwischen dem NGA-Südamerika-Datensatz und EGM2008 (entwickelt bis Grad 2190; RMS: 11.80mgal) (links) und zwischen bandbegrenzten Südamerika-Anomalien und einer GRACE/GOCE-Kombination (jeweils entwickelt bis Grad 200; RMS: 8.11 mgal), jeweils in 15'x15' Blockmittelwertschwereanomalien [mgal].

USA

Neben dem Südamerika-Datensatz wurde von der NGA noch ein zweiter Datensatz zur Verfügung gestellt.

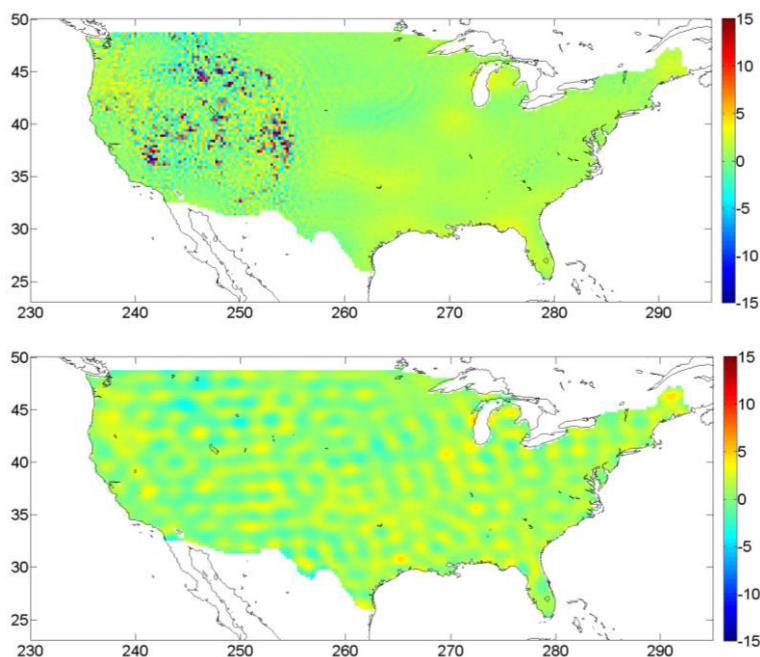


Abb. 5.8: Differenz zwischen dem NGA-USA-Datensatz und EGM2008 (entwickelt bis Grad 2190; RMS: 2.11 mgal) (links) und zwischen bandbegrenzten USA-Anomalien und einer GRACE/GOCE-Kombination (jeweils entwickelt bis Grad 200; RMS: 1.11 mgal), jeweils in 15'x15' Blockmittelwertschwereanomalien [mgal].

Dabei handelt es sich um einen 15'x15' Satz von Blockmittelwert-Schwereanomalien für das Gebiet der USA, der ebenfalls Anomalien auf der Topographie enthält. Die Differenz zu EGM2008 (Abb. 5.8 links) zeigt einige kleinere Unterschiede im Westen von Amerika, wo die Topographie etwas rauer ist als im

Osten. Der Vergleich mit der GRACE/GOCE-Kombination (Abb. 5.8 rechts) zeigt keine signifikanten Unterschiede, lediglich die blasenähnlichen Strukturen auf Grund des Abbruchs der GRACE/GOCE-Reihe bei Grad 200 und der damit verbundenen Vernachlässigung bestimmter Korrelationen sind sichtbar. Man kann also davon ausgehen, dass es sich bei dem USA-Datensatz um einen Datensatz von sehr hoher Genauigkeit und Qualität handelt.

5.2.2 Übersicht Schwereanomalien Datensätze

Die in dieser Arbeit verwendeten Schwereanomalien Datensätze sind in Tab. 5-2 zusammengefasst.

	Datensatzname	Quelle	Ursprüngliche Auflösung	Min/Max Grad	Verwendete Datenblöcke ²⁷
Arktis	ArcGP	ArcGP Group	5' × 5'	2-720	44522 (4.3%)
Australien	AUSGeoid09	Curtin University	1' × 1'	2-720	11170 (1.1%)
Kanada	-	NRCan	2' × 2'	2-720	19259 (1.9%)
Europa	EGG08	IfE Hannover	15' × 15'	2-720	15625 (1.5%)
Ozeane	DTU13	DTU Space	1' × 1'	2-720	691818 (66.7%)
Südamerika	-	NGA	15' × 15'	2-720	24818 (2.4%)
USA	-	NGA	15' × 15'	2-720	12895 (1.2%)
Gesamt Ozean					691818 (66.7%)
Gesamt Land					128289 (12.4%)
Gesamt					820107 (79.1%)

Tab. 5-2: Verwendete Schwereanomalien Datensätze.

Es werden mit den altimetrischen Anomalien zwei Drittel der Erdoberfläche abgedeckt, mit den terrestrischen in etwa 13 Prozent. Insgesamt wird mit den verfügbaren Datensätzen also eine Abdeckung von circa 80 % erreicht. Abb. 5.9 stellt die globale Abdeckung graphisch dar. Jene Gebiete, für die keine Daten vorliegen, werden durch weiße Flächen repräsentiert.

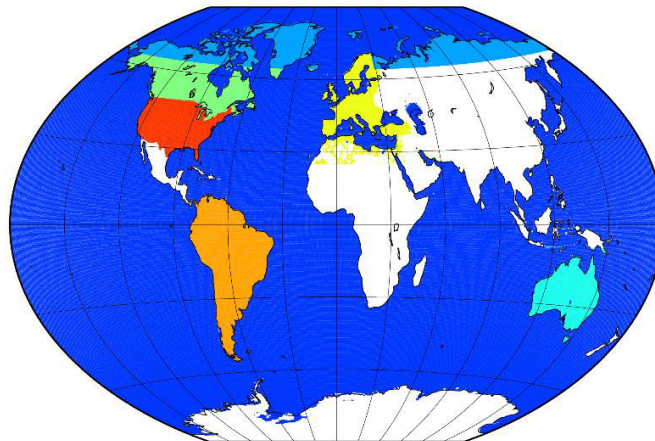


Abb. 5.9: Verwendete Einzeldatensätze eines globalen 15'x15' Schwereanomalien-Blockgitters (siehe Tab. 5-2; Weiß: keine Daten (20.9%)).

²⁷ Die erste Zahl ist die Anzahl der aus dem jeweiligen Datensatz abgeleiteten 15'x15' Blöcke, welche für die Schwerefeldmodellierung verwendet werden; die zweite Zahl gibt in % an, wie viele Blöcke eines globalen 15'x15' Blockgitters mit dem jeweiligen Datensatz abgedeckt werden.

5.3 Fülldatensätze

Wie in Kapitel 5.2 erläutert wurde, soll in dieser Arbeit ein Schwerefeldmodell bis Grad und Ordnung 720 auf Basis eines globalen $15' \times 15'$ Gitters von Blockmittelwert-Schwereanomalien berechnet werden. In diesem Kapitel wurde auch gezeigt, dass mit den zur Verfügung stehenden qualitativ hochwertigen Schwereanomalie-Datensätzen eine globale Abdeckung von circa 80% der Blockmittelwertzellen erreicht wird, so dass 20% verbleiben, für die keine terrestrischen oder altimetrischen Daten vorliegen. In diesem Kapitel soll dargestellt werden, wie die verbleibenden 20% aufgefüllt werden.

5.3.1 Ergänzende Schwereanomalien Datensätze

Eine grundsätzliche Überlegung für die Zellen, für die keine Daten vorliegen, könnte sein, diese einfach freizulassen, so dass diese später nach der Kombination mit den GRACE- und GOCE-Normalgleichungen letztendlich nur durch GRACE und GOCE repräsentiert werden. Dies ist jedoch schon auf Grund der Stabilität des Ausgleichungssystems nicht möglich, da, wie in Kapitel 3.3.2.3 gezeigt wurde, das Beobachtungsgitter global ohne Lücken vorliegen muss. Lücken würden zu einer instabilen Schätzung führen.

Da ein Auffüllen der Datenlücken notwendig ist, wird der NIMA96 $30' \times 30'$ Schwereanomalien-Datensatz (Kenyon & Pavlis, 1996) der Defense Mapping Agency (DMA) und des Goddard Space Flight Center (GSFC) herangezogen, auch wenn er im Vergleich zu den oben vorgestellten Datensätzen etwas veraltet und von schlechterer Qualität ist. Die NIMA96 Schwereanomalien, die die Grundlage für das beste Schwerefeldmodell EGM96 der Zeit vor den Schwerefeldsatellitenmissionen waren, sind auf der Topographie gegeben. Neben der teilweise mangelnden Qualität der Daten ist das Hauptproblem des Datensatzes, dass er nur in $30' \times 30'$ Auflösung gegeben ist. Aus diesem Grund wird der Datensatz künstlich zu einem $15' \times 15'$ Datensatz verdichtet, indem der Wert jeder $30' \times 30'$ Zelle auf die vier enthaltenen $15' \times 15'$ Zellen übertragen wird, was jedoch nichts daran ändert, dass der Datensatz durch seine ursprüngliche räumliche Auflösung mit einer spektralen Auflösung von maximal Grad und Ordnung 360 verbunden ist, ein Problem welches später in diesem Kapitel behandelt wird. Ein weiteres Problem ist, dass auch mit NIMA96 nicht alle Datenlücken geschlossen werden können, da auch NIMA96 Datenlücken enthält. Außerdem soll NIMA96 an dieser Stelle nicht in der Antarktis genutzt werden, da, wie Vergleiche mit Schwerefeldmodellen gezeigt haben, die Daten hier sehr fragwürdig sind.

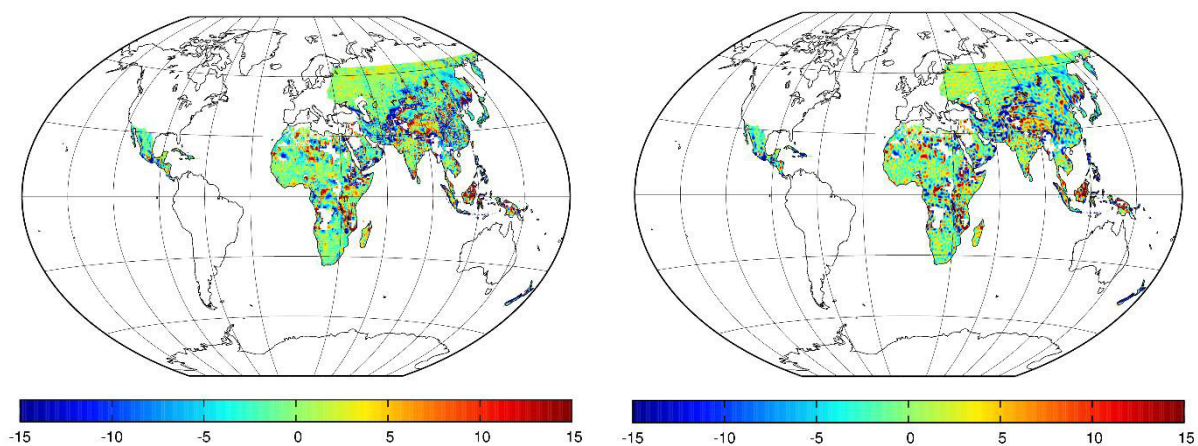


Abb. 5.10: Differenz zwischen dem NIMA96 und EGM2008 (entwickelt bis Grad 2190; RMS: 10.08mgal) (links) und zwischen bandbegrenzten NIMA96 Anomalien und einer GRACE/GOCE-Kombination (jeweils entwickelt bis Grad 200; RMS: 8.42mgal), jeweils in $15' \times 15'$ Blockmittelwertschwereanomalien [mgal].

Vergleicht man den NIMA96-Datensatz, wie er für die Arbeit verwendet wird, mit EGM2008 und einer GRACE/GOCE-Kombination (Abb. 5.10) - Berechnung analog zu jener der Vergleiche in Kapitel 5.2.1 -, so

fällt auf, dass für weite Teile Afrikas, Zentralasiens oder die Inselgruppen um Indonesien herum sehr große Differenzen auftreten. Diese gehen teilweise auch deutlich über den Bereich der hier dargestellten Farbskala hinaus. Auf der anderen Seite gibt es allerdings auch Regionen, wo eine hohe Übereinstimmung vorliegt. Hierbei handelt es sich um die Gebiete der ehemaligen Sowjetunion, Südafrika und Gebiete an der Westküste Afrikas. Generell bestätigt sich, dass der NIMA96-Datensatz nicht die hohe Qualität der oben beschriebenen Datensätze erreicht, jedoch existieren durchaus auch Gebiete, wo der NIMA96-Datensatz als Bereicherung gesehen werden kann.

Die NIMA96-Daten werden für ungefähr 10 Prozent des globalen 15'x15' Gitters verwendet, so dass noch circa weitere 10 Prozent verbleiben. Diese werden mit bandbegrenzten Schwereanomalien aus einer GRACE/GOCE-Kombination aufgefüllt. Der GRACE/GOCE-Kombination liegen die in Kapitel 5.1 beschriebenen Datensätze zu Grunde, so dass die synthetischen Schwereanomalien konsistent zu der Satelliteninformation sind, mit der die terrestrischen Schwereanomalien später kombiniert werden. Für die synthetischen Schwereanomalien im Antarktis-Bereich wird die GRACE/GOCE Kombination zusätzlich *Kaula*-regularisiert (siehe z.B. Brockmann (2008)), da sonst der Einfluss des polaren Lochs zu groß wäre. Generell werden die synthetischen Schwereanomalien bis Grad und Ordnung 220 entwickelt.

In Abb. 5.11 sind die Fülldatensätze dargestellt, welche die Datensätze aus Abb. 5.9 ergänzen.

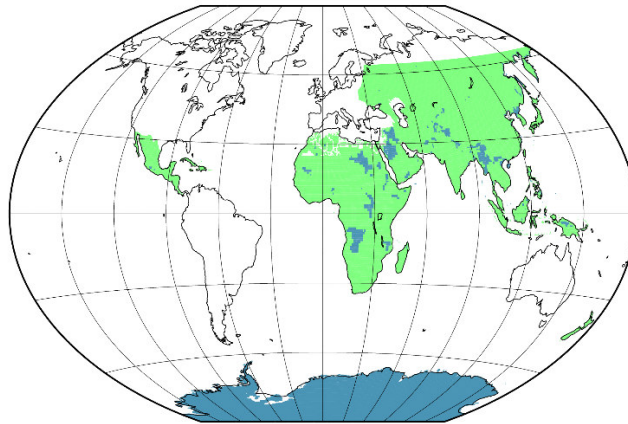


Abb. 5.11: Globale Darstellung der verwendeten Fülldatensätze (grün: NIMA96 (10.7%), blau: synthetische GRACE/GOCE-Anomalien (10.2%)).

5.3.2 Topographische Schwereanomalien

Die NIMA96-Schwereanomalien sind auf Grund ihrer ursprünglichen räumlichen Auflösung von 30'x30' in ihrer spektralen Auflösung auf Grad und Ordnung 360 limitiert. Da letztendlich ein Schwerefeldmodell bis Grad und Ordnung 720 berechnet werden soll, ergibt sich eine Lücke im Spektralbereich, welche nicht durch NIMA96 abgedeckt wird. Ebenso sind natürlich die nur bis Grad und Ordnung 220 entwickelten synthetischen Schwereanomalien in ihrer spektralen Auflösung limitiert. Aus diesem Grund werden topographische Anomalien verwendet, mit dem Ziel, die spektrale Lücke bis Grad und Ordnung 720 zu überbrücken. Dieses Verfahren wird auch für die Schwerefeldmodellierung in Pavlis et al. (2012) genutzt.

Topographische Anomalien werden nicht aus terrestrischen oder Satellitenschwerefeldmessungen abgeleitet, sondern strikt aus der Topographie. Hierfür gibt es verschiedene Ansätze, welche ausführlich beschrieben werden z.B. in Rummel et al. (1988), Pavlis et al. (2012), Claessens & Hirt (2013) oder Hirt & Kuhn (2014). Topographische Anomalien geben nicht die gesamte Schwerefeldinformation wieder, da nur ein Teil der Schwerefeldinformation durch die Topographie verursacht wird. Besonders die langwelligen Schwerefeldanteile können nicht aus der Topographie abgeleitet werden. Wie aber in Hirt & Kuhn (2014) dargestellt

ist, korreliert der hochfrequente Schwerefeldanteil sehr stark mit der Topographie, so dass dieser hervorragend durch topographische Anomalien angenähert werden kann.

Die topographischen Anomalien, die in dieser Arbeit verwendet werden, werden berechnet aus dem globalen topographischen Model RWI_TOIS2012 (Grombein et al., 2013) des Karlsruher Institut für Technologie (KIT), welches in Kugelfunktionen bis Grad und Ordnung 1800 entwickelt ist. Um einen harten Übergang bei Grad und Ordnung 360 bzw. 220 zu vermeiden, werden die topographischen Anomalien von Grad und Ordnung 150 bis Grad und Ordnung 720 entwickelt. Für jede Zelle der in Abb. 5.11 dargestellten Füll Datensätze, außer den Gebieten, die in der Antarktis liegen, wird ein topographischer Anomalienwert berechnet.

Abschließend für dieses Kapitel vergleichen wir für ein Gebiet, in dem EGM2008 als hochgenau angenommen werden kann, Schwereanomalien hieraus mit RWI_TOIS2012. Hierdurch erhält man einen Eindruck, wie gut mit topographischen Anomalien Schwereanomalien approximiert werden können. Die topographischen und Schwereanomalien werden beide für den Spektralbereich von Grad 150 bis 720 berechnet. Das Ergebnis ist in Abb. 5.12 dargestellt.

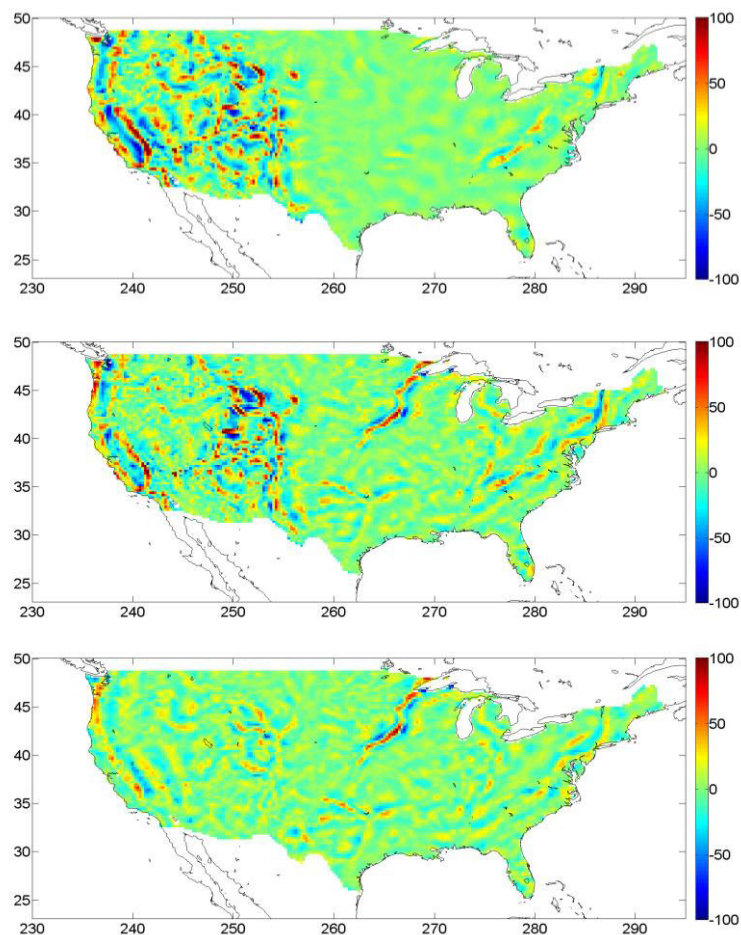


Abb. 5.12: Topographische RWI_TOIS2012 Schwereanomalien und EGM2008 Schwereanomalien des Spektralbereichs Grad 150 bis 720 im Vergleich [mgal] (oben: RWI_TOIS2012, Mitte: EGM2008, unten: Differenz EGM2008-RWI_TOIS2012).

Der Vergleich bestätigt die Annahmen, die weiter oben getroffen wurden. Die topographischen Anomalien approximieren die wahren Schwerewerte in Gebieten mit rauer Topographie, wie hier im Westen der USA, gut. Allerdings wird auch sichtbar, dass es Schwerefeldstrukturen gibt, besonders im Zentrum der USA, welche durch die topographischen Anomalien überhaupt nicht erklärt werden können. Die Ergebnisse wer-

den auch durch Statistik bestätigt. Beträgt der Mittelwert der EGM2008-Schwereanomalien 0.32 mgal und der RMS-Wert 20.53 mgal, so reduziert sich der Mittelwert nach Abzug der topographischen Anomalien auf 0.07 mgal und der RMS auf 13.55 mgal.

5.3.3 Übersicht Fülldatensätze

Die in dieser Arbeit verwendeten Fülldatensätze sind abschließend in Tab. 5-3 zusammengefasst.

Datensatzname	Quelle	Ursprüngliche Auflösung	Min/Max Grad	Verwendete Datenblöcke ²⁸
NIMA96	DMA/GSFC	30' × 30'	2-360	110594 (10.7%)
ITSG-Grace2014s/TIM5	ITSG/HPF ²⁹	15' × 15' ³⁰	2-720	106099 (10.2%)
RWI_TOIS2012	KIT	15' × 15' ³⁰	150-720	117737 (11.4%)

Tab. 5-3: Verwendete Fülldatensätze.

²⁸ Die erste Zahl ist die Anzahl der aus dem jeweiligen Datensatz abgeleiteten 15'x15' Blöcke, welche für die Schwerefeldmodellierung verwendet werden; die zweite Zahl gibt in % an, wie viele Blöcke eines globalen 15'x15' Blockgitters mit dem jeweiligen Datensatz abgedeckt werden.

²⁹ Siehe auch Kapitel 5.1.

³⁰ Daten in entsprechender Auflösung aus sphärisch-harmonischem Modell entwickelt.

6 Numerische Untersuchungen zur Schwerefeldbestimmung

In diesem Kapitel werden verschiedene numerische Untersuchungen durchgeführt, bevor im folgenden Kapitel 7 die kombinierte Schwerefeldberechnung bis Grad und Ordnung 720 durchgeführt wird. Diese Untersuchungen basieren teilweise auf synthetischen Daten mit dem Zweck, Ausführungen aus den Kapiteln 2 und 3 durch numerische Demonstrationen zu unterstreichen oder weiter zu analysieren. Außerdem enthält dieses Kapitel die ersten Schwerefeldberechnungen bis Grad und Ordnung 360 auf Basis von Realdaten.

6.1 Sensitivitätsanalyse hinsichtlich Korrekturen und Reduktionen auf Basis synthetischer, terrestrischer Daten

Im Kapitel 2.3 wurden verschiedene Aspekte diskutiert, die berücksichtigt werden müssen, um die Konsistenz von verschiedenen terrestrischen Datensätzen zueinander zu gewährleisten. In der Realität gestaltet sich dies schwierig, da oftmals zu terrestrischen Datensätzen nur wenig oder gar keine Hintergrundinformation vorliegt, vergleiche Kapitel 5.2. So kann man beispielsweise manchmal einen Datensatz nicht fest einem Gezeitemsystem zuweisen, da bereits in der Erstellung des Datensatzes das Gezeitemsystem der ursprünglichen Beobachtungen nicht bekannt war, oder bei der Erstellung des Datensatzes Ursprungsbeobachtungen mit verschiedenen Gezeitemsystemen vermischt wurden. Auch die Information über bereits angebrachte Korrekturen ist teilweise widersprüchlich oder fehlt mitunter komplett. Aus diesem Grund muss untersucht werden, wie groß der Fehler ist, der bei Nichtbeachtung der Konsistenzfragen entsteht.

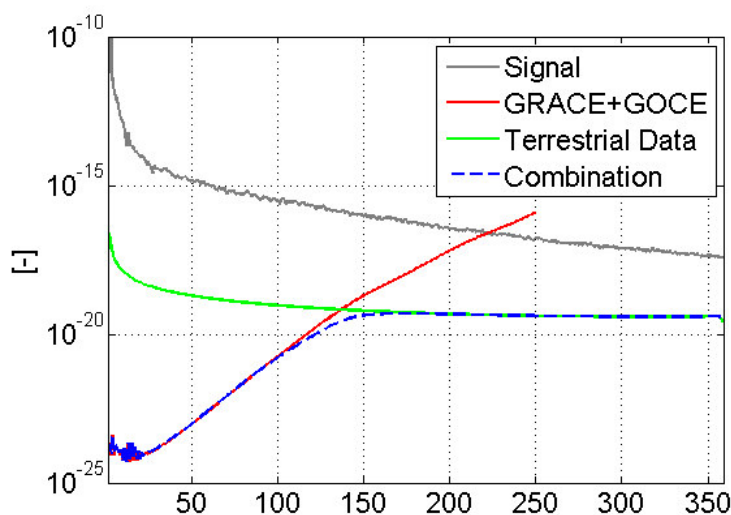


Abb. 6.1: Formaler Fehler in Gradvarianzen einer kombinierten Lösung bis d/o 359 im Vergleich zu den Einzeldatensätzen.

Abb. 6.1 zeigt den formalen Fehler einer Kombinationslösung im Vergleich zu seinen Eingangsdatensätzen, einer GRACE/GOCE Kombination und einem terrestrischen Datensatz, der bandbegrenzt aus EGM2008 erstellt wurde. Für den synthetischen Datensatz wurde eine Standardabweichung von 1mgal angenommen,

was im Verhältnis zur durchschnittlichen Qualität terrestrischer Realdaten sehr optimistisch ist. Trotzdem wird die Kombinationslösung im langwelligen Bereich erwartungsgemäß deutlich von der Satellitenlösung dominiert. Da sich die Korrekturen und Reduktionen an die terrestrischen Datensätze (vor allem hinsichtlich der permanenten Gezeiten) besonders im langwelligen Schwerefeldanteil spiegeln, eröffnet dies die Möglichkeit, dass durch die Kombination mit einer Satellitenlösung die Fehler, die durch Nichtbeachtung der terrestrischen Korrekturen und Reduktionen entstehen, deutlich reduziert werden. Darum soll im Folgenden für jede der im Abschnitt 2.3 vorgestellten Korrekturen und Reduktionen zunächst deren Einfluss auf eine Schwerefeldlösung rein aus terrestrischen Daten bestimmt werden, um dann im nächsten Schritt zu untersuchen, wie sich der Einfluss durch die Kombination mit einer Satellitenlösung verringert.

Als Ausgangspunkt dienen synthetische Beobachtungen in Form von Blockschwereanomalien auf der Topographie aus EGM2008 mit einer Blockgröße von $30'$, wobei der Signalinhalt der Schwereanomalien auf die Grade und Ordnungen bis 359 beschränkt ist. Akkumuliert man daraus Normalgleichungen und löst diese, entsteht daraus eine Referenzlösung. Möchte man den Einfluss der Korrektur bestimmen, muss man diese von den Schwereanomalien abziehen, um zu simulieren, dass diese nicht angebracht worden ist. Hieraus lässt sich dann eine Lösung bestimmen, deren Vergleich zur Referenzlösung den Einfluss der Korrektur zeigt. Wiederholt man das komplette Procedere und kombiniert jeweils die Normalgleichungen einer GRACE/GOCE Lösung hinzu, so kann man nachvollziehen, inwiefern der Einfluss der Korrektur durch die Satellitenlösung reduziert wird.

6.1.1 Permanente Gezeiten

Im Falle der permanenten Gezeiten wurden die synthetischen terrestrischen Beobachtungen so präpariert, dass simuliert wurde, über den Ozeangebieten lägen die Schwereanomalien im Mean-Tide System vor und über den kontinentalen Gebieten im Zero-Tide System. Eigentliches Zielsystem in dieser Simulation und auch Gezeitensystem der GRACE/GOCE Beobachtungen ist jedoch das Tide-Free System.

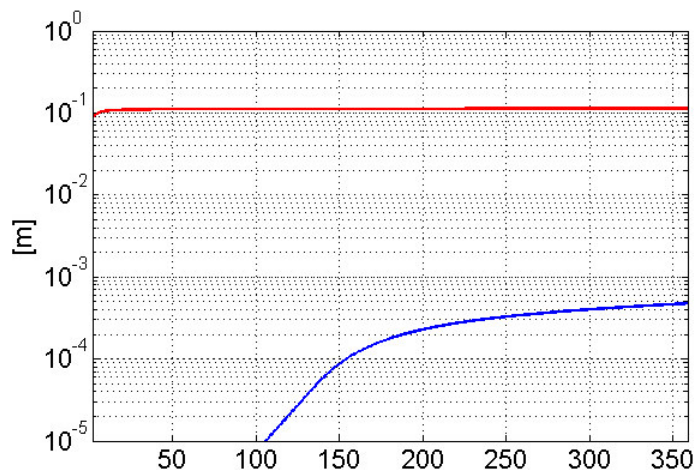


Abb. 6.2: Fehler bei Missachtung der Gezeitensysteme in Form von kumulativen Gradvarianzen in Geoidhöhen [m] vor (rot) und nach (blau) Kombination mit einer Satellitenlösung.

Abb. 6.2 zeigt in Form von kumulativen Gradvarianzen den Unterschied zur jeweiligen Referenzlösung, in Rot die Lösung rein aus terrestrischen Daten und in Blau die kombinierte Lösung. Die Missachtung der Gezeitensysteme führt hierbei bis zum Grad 359 zu einem Fehler von 11 cm, welcher allerdings nach der Kombination mit der Satellitenlösung im sub-mm liegt. Die rote Kurve zeigt mit ihrem nahezu konstanten Verlauf, dass die permanenten Gezeiten sich im sehr langwelligen Schwerefeldanteil widerspiegeln, weswegen deren Einfluss durch die Kombination unterdrückt werden kann.

Dies wird auch durch Abb. 6.3 bestätigt, in der dieses Ergebnis in Form von Geoidhöhen dargestellt ist. Ohne die Kombination (links) ergeben sich stark zonale Strukturen. Nach der Kombination (rechts) sind im Grunde außer den vernachlässigbar kleinen Differenzen in den Übergangsbereichen der terrestrischen Daten zwischen Mean- und Zero-Tide System keine Unterschiede mehr zu erkennen. Dies zeigt, dass eine Kombinationslösung im Wesentlichen vom Gezeitemsystem der Satellitenlösung abhängt. Dies wird umso deutlicher, wenn man bedenkt, dass hier eine maximale Abweichung der Gezeitemsysteme simuliert wurde und zudem die terrestrische Komponente in der Kombinationslösung unrealistisch hoch gewichtet wurde.

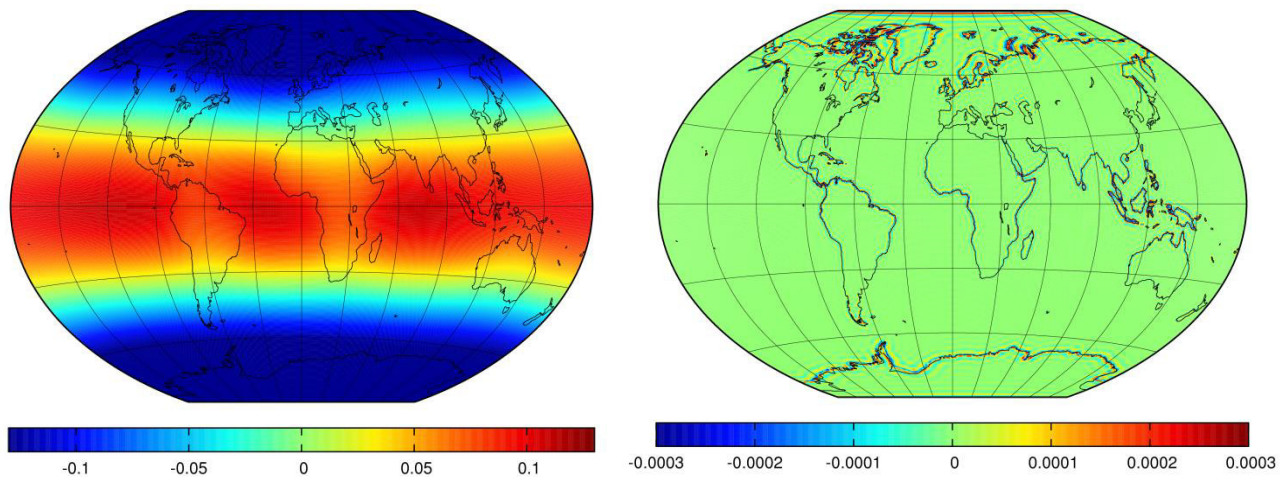


Abb. 6.3: Fehler bei Missachtung der Gezeitemsysteme in Form von Geoidhöhen [m] vor (links) und nach (rechts) Kombination mit einer Satellitenlösung.

6.1.2 Atmosphäre

Um den Einfluss der Atmosphärenkorrektur auf die Schwerefeldlösung zu untersuchen, wurde diese von den synthetischen Schwereanomalien abgezogen, um einen Datensatz zu simulieren, an dem diese Korrektur noch nicht angebracht worden ist. Die Korrektur wurde global auf der Topographie mit Gleichung (2.74) berechnet und ergibt sich analog zu Abb. 2.13.

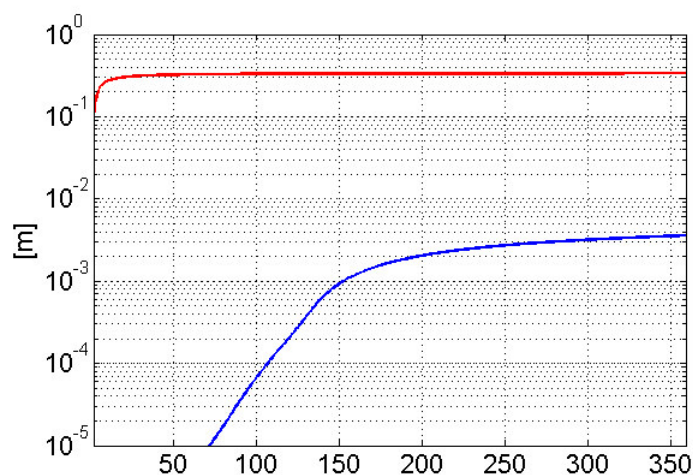


Abb. 6.4: Fehler bei Missachtung der Atmosphärenkorrektur in Form von kumulativen Gradvarianzen in Geoidhöhen [m] vor (rot) und nach (blau) Kombination mit einer Satellitenlösung.

In Abb. 6.4 wird ersichtlich, dass das Weglassen der Atmosphärenkorrektur in Form von kumulativen Gradvarianzen einen Fehler von mehr als 33 cm erzeugt (rote Kurve). Auch hier ist der Verlauf der Kurve nahezu konstant. Durch die Kombination mit der Satellitenlösung (blaue Kurve) wird erneut der Einfluss der Korrektur massiv gesenkt, er beträgt bei Grad 359 weniger als 4mm. Es lässt sich bereits hieraus erahnen, dass die Kombination die Korrektur vernachlässigbar macht.

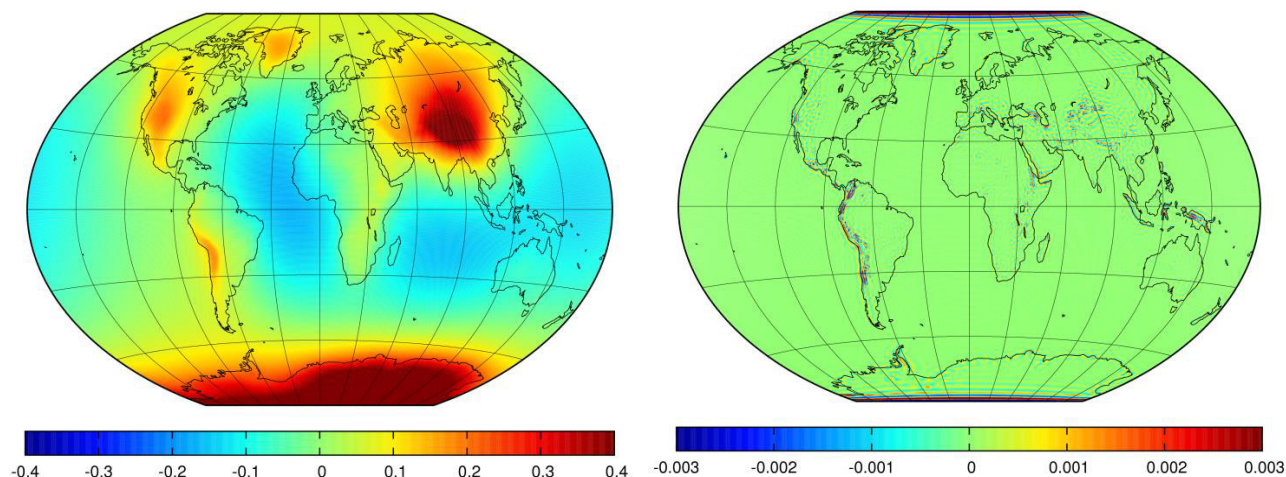


Abb. 6.5: Fehler bei Missachtung der Atmosphärenkorrektur in Form von Geoidhöhen [m] vor (links) und nach (rechts) Kombination mit einer Satellitenlösung.

In Form von Geoidhöhen beträgt der Fehler bei Vernachlässigung der Atmosphärenkorrektur bis zu einem halben Meter (Abb. 6.5 links). Nach der Kombination verbleiben allerdings auch hier nur geringe Differenzen in einer Größenordnung von ungefähr 3 mm (rechts). Diese finden sich hauptsächlich dort, wo markante Topographie zu finden ist. Es wird hierbei bestätigt, dass die Atmosphärenkorrektur bei Hinzunahme von GRACE und GOCE Daten vernachlässigbar klein wird.

6.1.3 Richtungsableitung / Ellipsoidische Korrektur

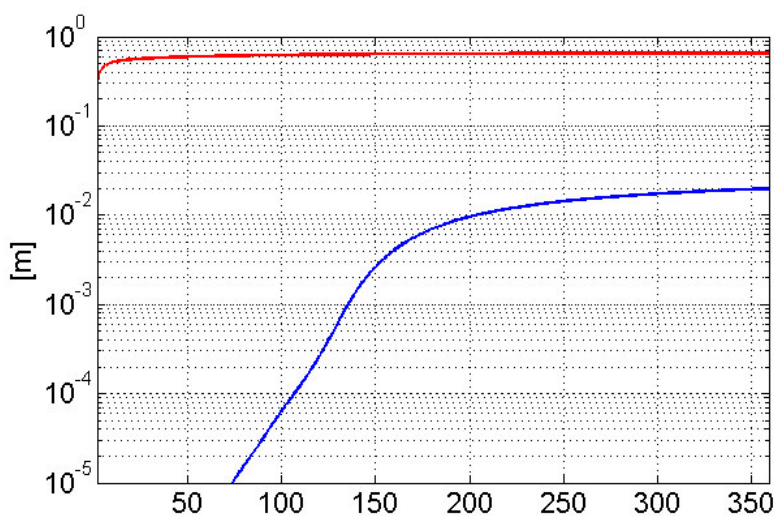


Abb. 6.6: Fehler bei Missachtung der ellipsoidischen Korrektur in Form von kumulativen Gradvarianzen in Geoidhöhen [m] vor (rot) und nach (blau) Kombination mit einer Satellitenlösung.

Analog zu obigem Procedere wurde die auf Grund von approximierenden, sphärischen Richtungsableitungen notwendige ellipsoidische Korrektur von den synthetischen Schwereanomalien abgezogen. Die Korrektur, die in Abb. 2.15 dargestellt ist, wurde hierzu auf der Topographie berechnet. Abb. 6.6 zeigt, dass die Missachtung der ellipsoidischen Korrektur in Form von kumulativen Gradvarianzen zu einem Fehler von ungefähr 65cm führt. Durch die Kombination mit einer Satellitenlösung kann der Fehlereinfluss durch deren Dominanz erneut massiv reduziert werden, es verbleiben Abweichungen von maximal 2 cm.

In Abb. 6.7 (links) ist zu erkennen, dass die Vernachlässigung der ellipsoidischen Korrektur grundsätzlich zu massiven Ungenauigkeiten führt, die durch eine sehr langwellige Struktur mit einer Amplitude von mehr als einem halben Meter deutlich werden. Nach der Kombination allerdings verbleiben im Wesentlichen nur lokale Störungen mit einer Amplitude von kleiner als 2 cm.

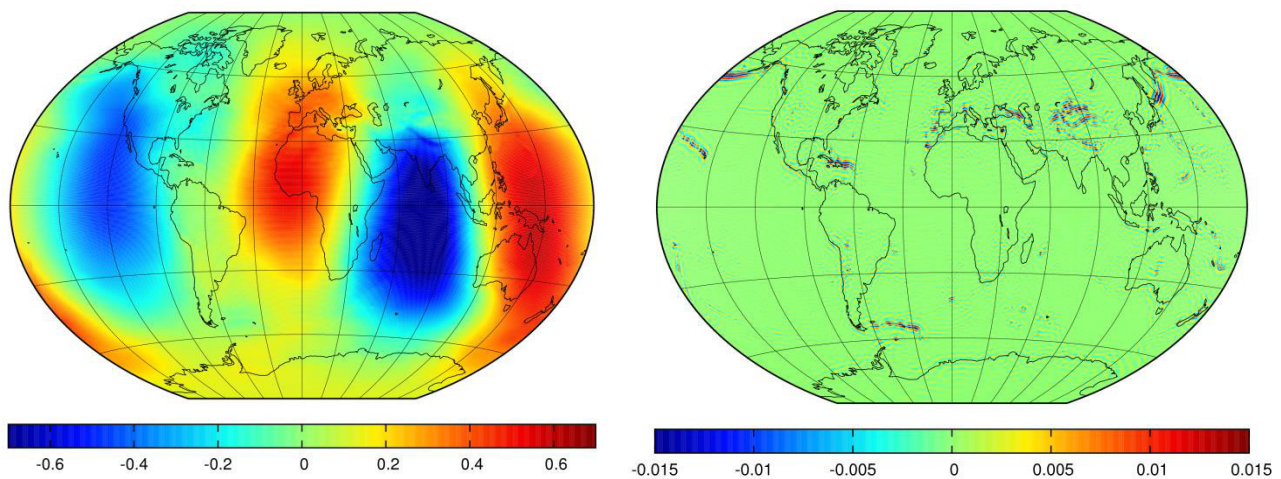


Abb. 6.7: Fehler bei Missachtung der Atmosphärenkorrektur in Form von Geoidhöhen [m] vor (links) und nach (rechts) Kombination mit einer Satellitenlösung.

Nichtsdestotrotz ist der Fehlereinfluss der ellipsoidischen Korrektur nach der Kombination mit Werten im (sehr) niedrigen Zentimeterbereich etwas größer als bei den vorherigen Korrekturen. Auch wenn der Fehler durch Hinzunahme der GRACE- und GOCE-Daten somit massiv reduziert werden konnte und überdies die lokalen Störungen großteils in Gebieten liegen, in denen keine qualitativ hochwertige Schwereinformation verfügbar ist, empfiehlt es sich die Reduktion nach Möglichkeit zu berücksichtigen.

6.1.4 Normalschweregradient höherer Ordnungen

Legt man zu Grunde, dass der Normalschweregradient höherer Ordnungen (Abb. 2.16) global vernachlässigt worden ist, führt dies in kumulativen Gradvarianzen bis Grad und Ordnung 359 zu einem Fehler von 86 cm. Dies ist in Abb. 2.16 ersichtlich. Damit ist der Fehler sogar noch höher, als bei der Nicht-Beachtung der ellipsoidischen Korrektur. Nach der Kombination mit der Satellitenlösung verbleibt allerdings nur noch eine Abweichung von etwas weniger als 1cm. Dies ist wiederum weniger als bei der ellipsoidischen Korrektur, was damit begründet werden kann, dass die Korrektur auf Grund des Normalschweregradienten höherer Ordnungen von ihrer Struktur etwas langwelliger ist als die ellipsoidische Korrektur.

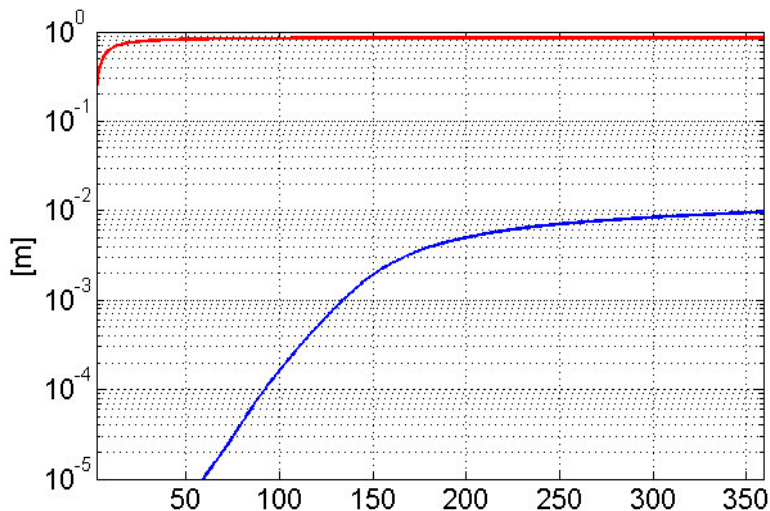


Abb. 6.8: Fehler bei Vernachlässigung der Korrektur für den Normalschweregradient höherer Ordnungen in Form von kumulativen Gradvarianzen in Geoidhöhen [m] vor (rot) und nach (blau) Kombination mit einer Satellitenlösung.

In Geoidhöhen wird ersichtlich, dass die Vernachlässigung der Korrektur vor der Kombination mit einer Satellitenlösung (Abb. 6.9 (links)) zu einer sehr langwelligen Fehlerstruktur führt, die allerdings nichtsdestotrotz Korrelationen mit der Topographie zeigt. Die Abweichung erreicht lokal bis zu 1.5 m und ist somit beträchtlich. Nach der Kombination verbleiben lediglich lokale Maxima mit einem Wert von ungefähr 1cm. Diese bleiben sehr stark mit der Topographie korreliert. In Abb. 6.9 (rechts) sind dies besonders Abweichungen in den Anden und im Himalaya-Gebiet, also in Gegenden, wo auf Grund verhältnismäßig schlechter Datenqualität in der Realität generell keine hochqualitativen Lösungen möglich sind.

Auch hier lässt sich schlussfolgern, dass für den Fall, dass die Korrektur vernachlässigt wurde, die Kombination mit einer Satellitenlösung massive Fehler vermeidet. Selbst unter den Testbedingungen, im Rahmen derer die terrestrische Komponente unrealistisch hoch gewichtet wurde, ist nur ein verhältnismäßig kleiner Fehler entstanden.

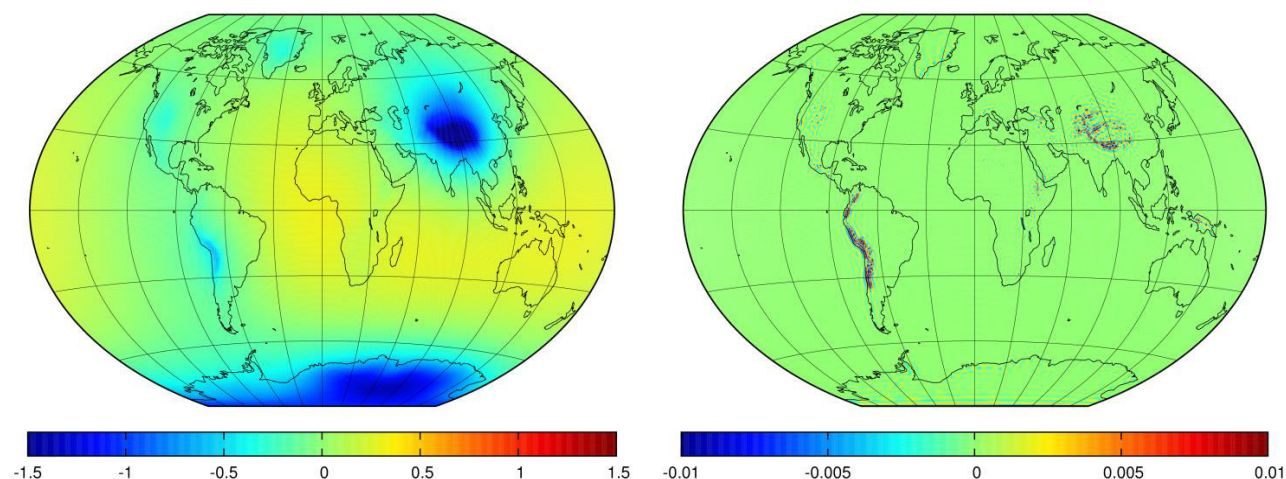


Abb. 6.9: Fehler bei Vernachlässigung der Korrektur für den Normalschweregradient höherer Ordnungen in Form von Geoidhöhen [m] vor (links) und nach (rechts) Kombination mit einer Satellitenlösung.

6.1.5 Zusammenfassung

An dieser Stelle sollen die Ergebnisse aus Kapitel 6.1 abschließend zusammengefasst werden. Tab. 6-1 enthält für jede Korrektur/Reduktion den Geoidhöhenfehler in Form von Standardabweichungen. Zusätzlich ist angegeben, wie hoch der Fehler ist, wenn alle Korrekturen vernachlässigt werden.

Korrektur / Reduktion	Terrestrische Lösung	Kombinierte Lösung
Permanente Gezeiten	10.00	0.01
Atmosphäre	15.43	0.12
Ellipsoidische Korrektur	26.16	0.13
Quadratische Normalschwerekorrektur	34.88	0.08
Gesamt	36.35	0.21

Tab. 6-1: Geoidhöhenfehler in Form von Standardabweichungen [cm] bei Vernachlässigung entsprechender Korrekturen und Reduktionen

Global ergibt sich hierbei eine Standardabweichung von über 36 cm, welche durch die Kombination mit der Satellitenlösung auf 2 mm reduziert werden kann. Dies belegt nochmals, dass die Kombination mit Satellitendaten dazu führt, dass der Fehler der durch die Nichtberücksichtigung von Korrekturen bzw. Reduktionen entsteht massiv verkleinert werden kann. Dies ist auch graphisch in Form von Geoidhöhen in Abb. 6.10 dargestellt. Nichtsdestotrotz sollten Korrekturen und Reduktionen möglichst - wenn also entsprechende Informationen vorhanden sind - berücksichtigt werden, da Fehler, auch wenn sie klein sind, immer vermieden werden sollten. Lokale Maxima können schließlich wie Abb. 6.10 (rechts) zeigt Werte von bis zu 2 cm erreichen.

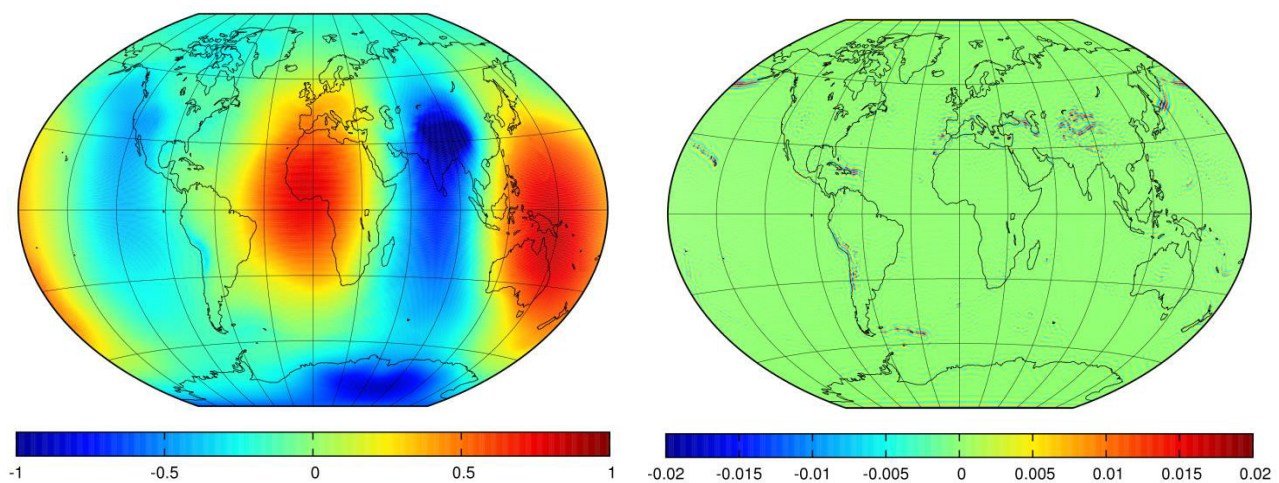


Abb. 6.10: Fehler bei Vernachlässigung sämtlicher in Abschnitt 6.1 vorgestellter Korrekturen und Reduktionen in Form von Geoidhöhen [m] vor (links) und nach (rechts) Kombination mit einer Satellitenlösung.

6.2 Sensitivitätsanalyse hinsichtlich mathematischer Effekte auf Basis synthetischer, terrestrischer Daten

In Abschnitt 3.3 wurde beschrieben, dass ein optimales Ergebnis für eine Schwerfeldkombinationslösung nur erzielt werden kann, wenn verschiedene Effekte, welche auf einem mathematischem Hintergrund basieren, im Rahmen der Ausgleichung berücksichtigt werden. Im Folgenden soll dies numerisch untersucht werden, um zum einen eine Quantifizierung des jeweiligen Effekts vornehmen zu können, aber auch um zu beschreiben, wie mit dem jeweiligen Effekt sinnvoll umgegangen werden kann.

6.2.1 Einfluss terrestrischer Daten auf den langwelligen Anteil der Kombinationslösung

Abschnitt 3.3.1 beschreibt mehrere Möglichkeiten, wie der Einfluss terrestrischer Daten auf den langwelligen Anteil einer Schwerefeldkombinationslösung reduziert werden kann, um zu vermeiden, dass die hohe Qualität der Satelliteninformation durch die Kombination beeinträchtigt wird. Wirklich sinnvoll erscheinen hierbei nur zwei Möglichkeiten: die Fixierung der Kombinationslösung auf die Satellitenlösung mit Hilfe einer zusätzlichen Einführung der Satelliteninformation als Vorinformation oder die Parameterelimination. Da beide Lösungsansätze aus einer Zeit vor den Schwerefeldsatellitenmissionen und im speziellen GOCE stammen, und somit aus einer Zeit, in der Satellitenlösungen nicht annähernd die Genauigkeit der heutigen Satellitenlösungen aufweisen konnten, geschweige denn deren spektrale Auflösung, stellt sich die Frage, ob heute überhaupt noch eine spezielle Behandlung der langen Wellenlängen von Nöten ist. Im Folgenden soll darum erläutert werden, welches Verfahren am sinnvollsten erscheint bzw. ob überhaupt eines der beiden Verfahren herangezogen werden muss, um ein gutes Ergebnis zu erzielen.

Hierzu werden erneut aus den in Kapitel 6.1 beschriebenen synthetischen Schwereanomalien Normalgleichungen berechnet. Im Gegensatz zu den Untersuchungen hinsichtlich der Korrekturen und Reduktionen, wo bewusst mit 1mgal ein zu optimistischer Fehler für die terrestrischen Beobachtungen angenommen wurde, um den terrestrischen Daten in der Kombination ein hohes Gewicht zu geben, wird hier ein realistischer Fehler von 4mgal angenommen. Dann werden drei Kombinationslösungen berechnet, deren Ergebnisse verglichen werden können. Die erste (Lösung a) ist eine reguläre Kombinationslösung, in der die GRACE/GOCE Normalgleichungen zu den terrestrischen Normalgleichungen addiert werden. Die zweite (Lösung b) basiert auf (Lösung a), wurde aber im Gegensatz zu dieser zusätzlich wie in Kapitel 3.3.1 beschrieben durch Einführen der Satelliteninformation als Vorinformation auf die Satellitenlösung fixiert. Bei der dritten (Lösung c) wurden die langwelligen Parameter der terrestrischen Normalgleichungen vor der Kombination mit den Satellitennormalgleichungen nach Gleichung (3.84) eliminiert. Analog zu der kombinierten Schwerefeldlösung des GFZ, EIGEN-6C2 (Förste et al., 2011), für welche die langwelligen Schwerefeldanteile auf diese Weise aus den terrestrischen Normalgleichungen eliminiert wurden, wurden die langwelligen Parameter bis Grad/Ordnung 150 eliminiert.

Analysiert man die drei Lösungen in Form von Koeffizientendifferenzen (Abb. 6.11) zur ursprünglichen GRACE/GOCE-Lösung, sind einige interessante Merkmale festzustellen. Zunächst kann für Lösung a, die reguläre Kombinationslösung, allgemein festgestellt werden, dass die Koeffizientendifferenzen zur GRACE/GOCE-Lösung mit steigendem Grad zunehmen. Dies ist natürlich zu erwarten, da der Signalinhalt der Satellitenlösung für höhere Grade abnimmt und somit die Kombinationslösung für diese Grade zunehmend von den terrestrischen Daten dominiert wird. Lösung b, in der die Satellitenlösung nochmals als Vorinformation eingeführt worden ist, ist im Gegensatz zur Lösung a stärker auf die Satellitenlösung fixiert. Dies wird besonders in den Koeffizienten bis Grad 150 sichtbar, ist aber auch darüber hinaus zu erkennen. Am interessantesten ist jedoch Lösung c, in welcher die langwelligen Parameter der terrestrischen Normalgleichungen eliminiert worden sind. Bei Grad 150, der Grad, unter dem die Parameter eliminiert wurden, ist zwar eindeutig eine Kante zu erkennen, die belegt, dass der Einfluss der terrestrischen Daten auf die Satelliteninformation für die darunter liegenden Grade reduziert worden ist, jedoch sind mehrere Bänder sichtbar, besonders um Ordnung 15 herum, die zeigen, dass terrestrische Information auch in den Graden unter 100 vorliegt. Dies belegt, dass, wenn die Parameterelimination im Rahmen der Kombination verwendet wird, ein bestimmter Parameteranteil nicht vollständig eliminiert werden kann. Dies ist logisch, denn Gleichung (3.84) zeigt zwar, dass die langwelligen Koeffizienten aus einer reinen terrestrischen Schwerefeldlösung eliminiert werden können, kombiniert man jedoch die zu Grunde liegende reduzierte Matrix mit den GRACE/GOCE-Normalgleichungen, so gelangt im Rahmen der zur Lösung notwendigen Matrizeninversion terrestrische Information in den Bereich, aus dem eigentlich die terrestrische Information ferngehalten werden sollte. Die sehr niedrigen Grade, besonders im zonalen Bereich, zeigen für Lösung c ähnliche Differenzen zur GRACE/GOCE-Lösung wie Lösung a. Beide sind also nicht wie Lösung b in diesem Bereich auf GRACE/GOCE fixiert. Deutlich kleiner als für die Lösungen a und b ist die Differenz von Lösung c zu GRACE/GOCE jedoch in Richtung der sektoriellen Koeffizienten im Bereich zwischen Grad 100 und 150.

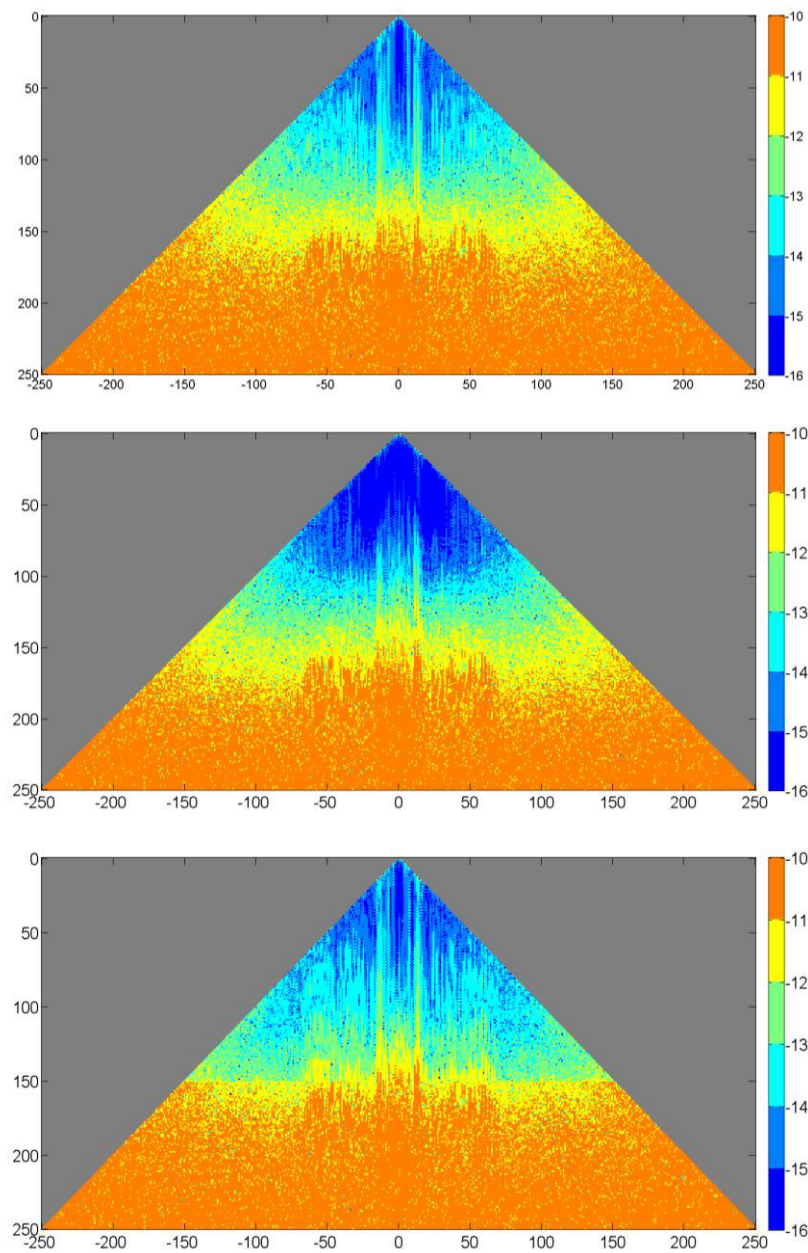


Abb. 6.11: Koeffizientendifferenz (logarithmisch) [-] zwischen Lösung a (oben), Lösung b (Mitte) und Lösung c (unten) und der der Kombination zugrunde liegenden GRACE/GOCE-Lösung.

Möchte man allerdings schlüssig bewerten, ob die Satelliteninformation in der Kombinationslösung durch die terrestrischen Daten degradiert wird, genügt es nicht, Koeffizientendifferenzen zu betrachten. Eine absolute Aussage darüber lässt sich am besten mit Hilfe von Bahntests machen, welche sehr sensitiv auf langwellige Schwerefeldinformation reagieren. Hierzu betrachtet man den RMS zwischen mit SLR bestimmten kinematischen Positionen eines Satelliten und dazu angepassten Bahnen, in die die Schwerefeldmodelle als Information eingehen. An dieser Stelle werden SLR-Messungen zum GOCE-Satelliten aus dem ersten Quartal 2013 verwendet. Bahnen wurden auf Basis der Lösungen a, b und c sowie als Referenz auf der zugrunde liegenden GRACE/GOCE-Lösung gerechnet. Für alle Bahnen wurde Schwerefeldinformation bis Grad/Ordnung 200 verwendet. Die Ergebnisse sind in Tab. 6-1 zusammengestellt. Die Tabelle enthält sowohl den RMS für die ersten fünf Tage des Jahres 2013, den Gesamt-RMS für jeden Monat des ersten

Quartals, als auch für das gesamte Quartal. Zu erwähnen ist noch, dass alle Tage aus der Berechnung eliminiert wurden, für die der RMS höher als 30 cm ist. Als Gradmesser, aus wie vielen Werten der RMS jeweils gebildet wurde, kann die Anzahl der verwendeten Positionen dienen.

Datum	Verwendete Positionen	Lösung a	Lösung b	Lösung c	GRACE/GOCE Lösung
01 Jan 2013	103286	14.05	14.06	14.06	14.10
02 Jan 2013	101294	10.92	10.94	10.95	10.99
03 Jan 2013	101114	12.82	12.85	12.81	12.84
04 Jan 2013	100738	14.55	14.54	14.52	14.53
05 Jan 2013	102287	19.96	19.97	19.98	20.03
Jan 2013	2424773	15.57	15.56	15.57	15.60
Feb 2013	1245380	14.28	14.28	14.27	14.31
Mär 2013	2724706	16.73	16.72	16.72	16.74
Apr 2013	2257752	14.79	14.80	14.80	14.85
Jan – Apr 2013	8652611	15.55	15.55	15.55	15.59

Tab. 6-2: RMS [cm] von Bahnanpassungen an kinematisch bestimmte GOCE-Positionen basierend auf verschiedenen Schwerefeldlösungen.

Es wird sofort ersichtlich, dass die Lösungen a, b und c bei den Bahntest sehr ähnliche Ergebnisse erzielen, und zwar sowohl für die Einzeltage als auch für längere Zeiträume. Signifikante Unterschiede können bis in den sub-mm Bereich nicht festgestellt werden. Im sub-mm Bereich sind alle drei Lösungen sogar minimal besser als die reine GRACE/GOCE-Lösung.

Die Bahntests zeigen, dass die reguläre kombinierte Schwerefeldlösung (Lösung a) nicht schlechter abschneidet als die beiden Lösungen, für die speziell versucht wurde, den Einfluss der terrestrischen Daten auf den langwelligen Anteil der Schwerefeldlösung zu minimieren. Die hochqualitative Satelliteninformation wurde im Rahmen der Kombination nicht degradiert. Dies beweist, dass durch die hohe Genauigkeit und Qualität von GRACE und GOCE der langwellige Anteil einer Kombinationslösung derart durch GRACE und GOCE dominiert wird, dass eine weitere Behandlung des langwelligen Anteils heutzutage nicht mehr notwendig ist. Dies ist eine wertvolle Information, da so vermieden werden kann, die reguläre Kombination durch Fixierung oder Parameterelimination zu manipulieren. Dies ist auch positiv, wenn man bedenkt, dass, wie Abb. 6.11 zeigt, bei der Parameterelimination nicht wirklich kontrolliert werden kann, welche Signalinhalte letztendlich doch in den langwelligen Anteil der Kombinationslösung gelangen.

6.2.2 „Spectral Leakage“ und „Aliasing“

In Kapitel 3.3.2 wurde grundlegend das Auftreten von „Spectral Leakage“ und „Aliasing“ im Rahmen der Schwerefeldmodellierung erörtert. Da sich dieses Kapitel mit numerischen Untersuchungen zur Schwerefeldbestimmung beschäftigt, sollen an dieser Stelle diese beiden Phänomene an Hand von spektral höher aufgelösten Beispielen nochmals veranschaulicht werden. Ähnliche Untersuchungen finden sich beispielsweise in Gruber (2000).

Im Rahmen der Schwerefeldschätzung entsteht „Spectral Leakage“, wenn zwar korrekt abgetastetes, aber nicht-modelliertes Schwerefeldsignal im Rahmen der Schätzung in den Schätzraum gelangt, siehe Gleichung (3.105). Dies lässt sich einfach demonstrieren. Hierzu schätzen wir streng nach der Methode der kleinsten Quadrate aus 15° Blockmittelwert-Schwereanomalien mit einem Signalgehalt von Grad 360-450 Schwerefeldkoeffizienten bis Grad und Ordnung 359. Wären die Basisfunktionen im diskreten Fall orthogonal, würde die Matrix $\mathbf{A}^T\mathbf{B}$ in Gleichung (3.105) zu null werden und wir würden, da es sich um fehlerfreie Beobachtungen handelt, als Schätzergebnis für $\hat{\mathbf{x}}$ den Nullvektor erhalten. Aufgrund von „Spectral Leakage“ ergibt sich allerdings der deterministische Fehleranteil \mathbf{x}_d , der die Projektion des Signals von Grad und

Ordnung 360-450 in den Schätzraum beschreibt. Dieser ist in Abb. 6.12 für dieses Beispiel in Form eines Koeffizientendreiecks dargestellt.

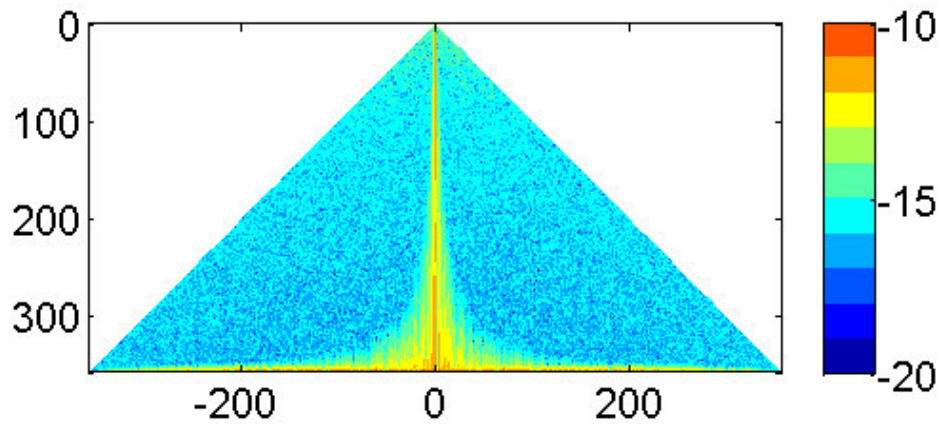


Abb. 6.12: Deterministischer Fehleranteil \mathbf{x}_d auf Grund von „Spectral Leakage“.

Im Koeffizientendreieck sind besonders zwei Bereiche auffällig. Zum einen ist zu sehen, dass die zonalen Koeffizienten von „Spectral Leakage“ betroffen sind, zum anderen alle Koeffizienten von den höchsten geschätzten Graden (ab circa Grad 350). Letzteres ist logisch, da in der Matrix $\mathbf{A}^T\mathbf{B}$ besonders die Elemente groß werden, bei denen der sphärisch harmonische Grad nicht sehr unterschiedlich ist. Das heißt, dass beispielsweise ein Element, das den Zusammenhang von Grad 358 und Grad 360 beschreibt, größer ist als ein Element das den Zusammenhang von Grad 200 und Grad 360 beschreibt. Dies wird durch die Eigenschaft der Nicht-Orthogonalität der Basisfunktionen verursacht und wurde bereits in Kapitel 3.3.2.1 beschrieben, siehe auch Sneeuw (1994). Der Fehleranteil \mathbf{x}_d lässt sich mit Hilfe einer sphärisch-harmonischen Synthese auch in Form von Schwereanomalien ausdrücken. Das Ergebnis ist in Abb. 6.13 dargestellt.

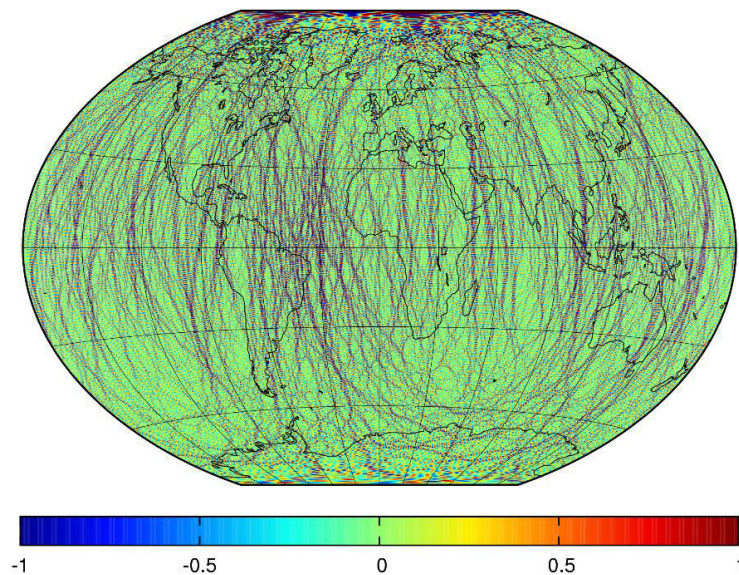


Abb. 6.13: Deterministischer Fehleranteil \mathbf{x}_d in Form von Schwereanomalien [mgal].

Es ist deutlich zu sehen, dass durch „Spectral Leakage“-Fehler entstehen, die mehr als 2 mgal groß sind. Diese äußern sich insbesondere durch streifige Spurmuster, die über die gesamte Erde verteilt sind. Global beträgt die Standardabweichung 0.45 mgal.

Da, wie Abb. 6.12 zeigt, besonders die hohen Grade schlecht geschätzt werden, führen wir ein zweites identisches Experiment durch, für das wir Schwereanomalien mit einem Signalgehalt ab Grad 364 anstelle von Grad 360 verwenden. Damit existieren in der Matrix $\mathbf{A}^T\mathbf{B}$ weniger Elemente, die den Zusammenhang zwischen direkt benachbarten Graden beschreiben, d.h. die Anzahl an sehr großen Elementen in dieser Matrix sollte geringer sein. Das Ergebnis ist in Abb. 6.14 zu sehen.

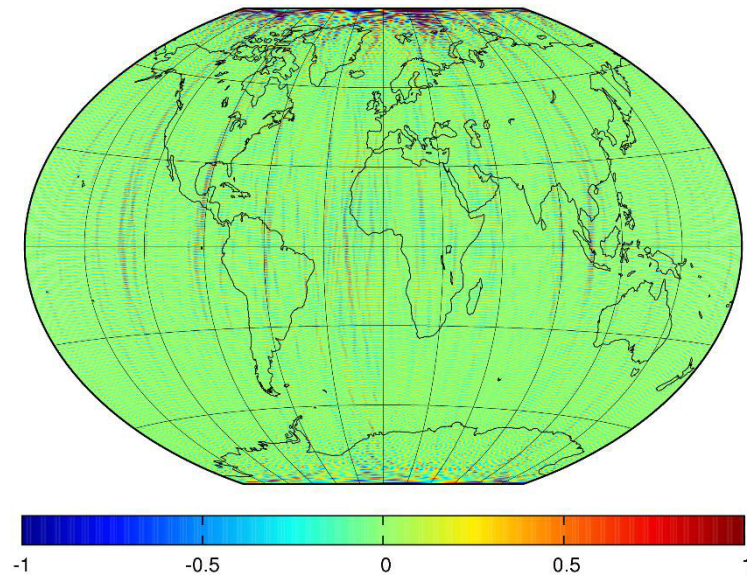


Abb. 6.14: Deterministischer Fehleranteil \mathbf{x}_d in Form von Schwereanomalien [mgal].

Die Streifenstrukturen sind deutlich zurück gegangen. Was deutlich verbleibt, sind die Fehler in polaren Regionen, welche durch Probleme der Schätzung der zonalen Koeffizienten entstehen. Die Standardabweichung ist mit 0.28 mgal deutlich kleiner. Auf Grund der Tatsache, dass sich „Spectral Leakage“ besonders auf die allerhöchsten Grade der Schätzung niederschlägt, ist eine Möglichkeit, bei einem Schwerefeldmodell die höchsten Grade der Schätzung zu vernachlässigen. Grundsätzlich ist dies allerdings nicht empfehlenswert, da nur ein vollständiger Koeffizientensatz alle Korrelationen und Zusammenhänge zwischen den Schwerefeldkoeffizienten vollständig beschreibt.

In Kapitel 3.3.2.4 wurde beschrieben, wie durch spektrales Beschneiden der Beobachtungen der deterministische Fehleranteil reduziert werden kann. Dies soll an Hand des obigen Beispiels in diesem Abschnitt demonstriert werden. Wir verzichten hierbei auf den Ansatz der Blockdiagonalausgleichung, da die Schwereanomalien an dieser Stelle als fehlerfrei und gleich genau angenommen werden und einen vollständigen Datensatz bilden. Damit würde das Signal von Grad und Ordnung 360 bis 450 mit der Blockdiagonalausgleichung perfekt analysiert werden können, was für diese Demonstration keinen Sinn macht. Wir beschränken uns also auf die Quadraturansätze nach den Gleichungen (3.131) und (3.134) und berechnen nach diesen die Vorinformation $\mathbf{x}_2^{a\text{ priori}}$ für Gleichung (3.124). Ansonsten verfahren wir wie oben und schätzen Schwerefeldkoeffizienten bis Grad und Ordnung 359. Das Resultat, welches in Abb. 6.15 dargestellt ist, zeigt, dass mit Hilfe des spektralen Beschneidens der deterministische Fehleranteil deutlich reduziert werden kann. Die maximalen Fehler betragen nur noch circa 0.3 mgal. Mit der Quadratur nach Gleichung (3.134) beträgt die Standardabweichung 0.063 mgal. Es sind aber weiter Fehler in Form von Streifenstrukturen sichtbar. Mit der Quadratur nach Gleichung (3.131) kann die Standardabweichung gar auf ein Zehntel des ursprünglichen Wertes, nämlich 0.045 mgal reduziert werden. In diesem Fall sind auch keine Streifenstrukturen mehr sichtbar.

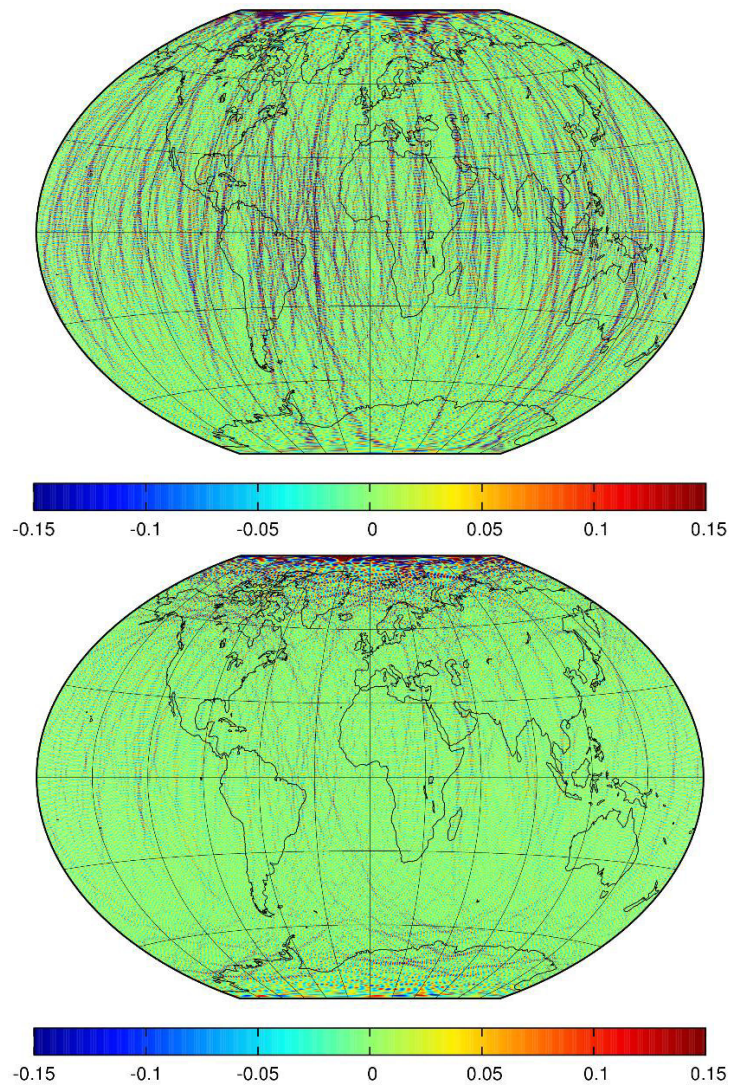


Abb. 6.15: Deterministischer Fehleranteil in Form von Schwereanomalien [mgal] nach dem spektralen Beschneiden der Beobachtungen. Oben nach Gleichung (3.134), unten nach Gleichung (3.131).

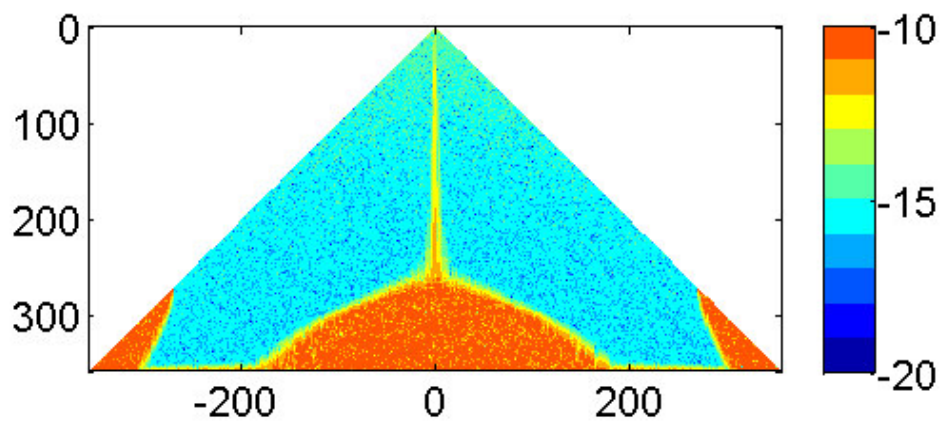


Abb. 6.16: Deterministischer Fehleranteil x_d pro Grad und Ordnung auf Grund von „Aliasing“ [-].

Abschließend verbleibt, den Effekt des „Aliasing“ zu demonstrieren. Hierbei ist das Vorgehen identisch wie für das erste Beispiel, nur dass diesmal die Schwereanomalien-Blockmittelwerte mit einer Auflösung von $30'$

angenommen werden. Dies bedeutet, dass das komplette Schwerefeldsignal von Grad und Ordnung 360 bis 450 unterabgetastet ist und bei der Schätzung der Schwerefeldkoeffizienten bis Grad und Ordnung 359 der „Aliasing“-Effekt auftritt. Dies wird in den geschätzten Koeffizienten sofort deutlich, wie Abb. 6.16 demonstriert. Der „Aliasing“-Effekt schlägt sich exakt auf die in Abschnitt 3.3.2.3 beschriebenen Koeffizienten nieder. Die Gleichungen (3.115) und (3.120) lassen sich verwenden, um die betroffenen Koeffizienten zu berechnen. Wegen Unterabtastung in Längenrichtung sind somit maximal die Koeffizienten bis $\bar{C}/\bar{S}_{270,270}$ betroffen, während wegen Unterabtastung in Breitenrichtung die Koeffizienten bis $\bar{C}/\bar{S}_{270,0}$ von „Aliasing“ betroffen sind. Wieder lässt sich mit Hilfe einer sphärisch-harmonischen Synthese der Fehler auf Schwereanomalien übertragen. Dies ist in Abb. 6.17 dargestellt. Auf Grund des „Aliasing“-Effekts entstehen Fehler, die größer als 20 mgal sind. Diese sind global weitläufig verteilt und äußern sich durch massive Amplituden. Global beträgt die Standardabweichung 2,2 mgal.

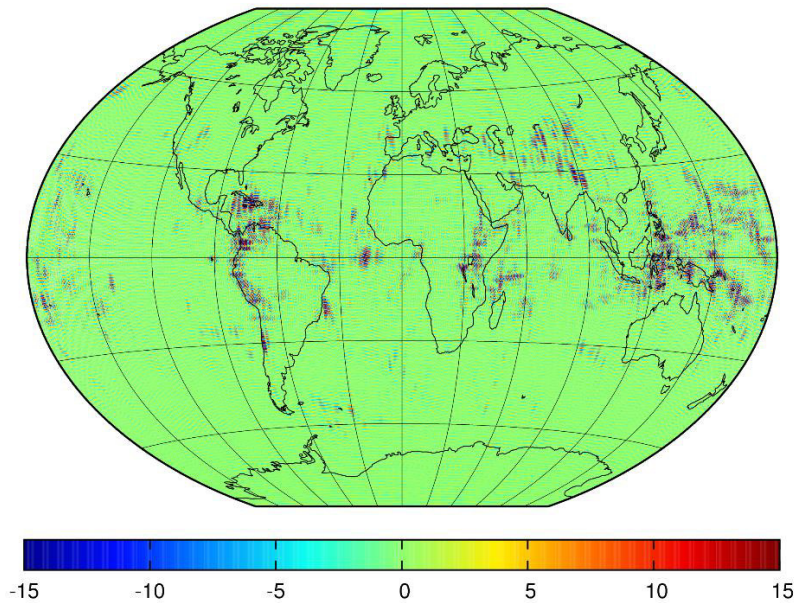


Abb. 6.17: Fehlereinfluss auf Grund von „Aliasing“ in Form von Schwereanomalien [mgal].

Allgemein verdeutlicht dieser Abschnitt, dass „Spectral Leakage“ und „Aliasing“ nicht vernachlässigt werden dürfen, wenn man eine hoch-qualitative Schwerefeldschätzung erzielen möchte. Besonders der „Aliasing“-Effekt verursacht massive Fehlereinflüsse.

6.3 Schwerefeldberechnung mit Echtdate

Nach verschiedenen Analysen auf Basis von synthetischen Schwereanomalien in den vorherigen Teilen dieses Kapitels sollen an dieser Stelle die ersten Berechnungen auf Basis der in Kapitel 5 beschriebenen Realdaten erfolgen. Ziel dieser Berechnungen, in deren Rahmen Schwerefeldmodelle bis Grad und Ordnung 360 gelöst werden, ist es, vorbereitende Informationen für die Bestimmung des hochaufgelösten Modells bis Grad und Ordnung 720 in Kapitel 7 zu gewinnen. Hierzu soll unter anderem eine geeignete Genauigkeitsinformation für die Schwereanomalien gewonnen werden, da diese, wie in Kapitel 5.2 beschrieben, nicht vorliegt. Da die Modelle in diesem Kapitel nur bis Grad und Ordnung 360 berechnet werden, kommen die topographischen Anomalien an dieser Stelle noch nicht zum Einsatz.

6.3.1 Stochastische Modellierung rein auf Basis von Varianzkomponentenschätzung

In einer ersten Schwerefeldberechnung wird auf Grund der Unkenntnis der Genauigkeiten für jegliche Schwereanomalien aller Datensätze eine Genauigkeit von 1 mgal als Startwert angenommen. Mit Hilfe der Varianzkomponentenschätzung werden für die Datensätze relative Gewichte bestimmt, welche eine allgemeine Qualitätsaussage über deren Genauigkeit erlauben. Diese Aussage ergänzt die Beobachtungen, welche in den Kapiteln 5.2 und 5.3 durch Vergleiche der Datensätze mit EGM2008, sowie GRACE und GOCE gemacht wurden. Es gilt allerdings zu bedenken, dass auf diese Weise nur ein Wert pro Datensatz geschätzt wird, der nicht zwingend alle Regionen des Datensatzes gut repräsentiert. Wenn z.B. ein Datensatz in einer Region von sehr guter Qualität ist und in einer anderen Region von minderer Qualität, so führt dieses Verfahren dazu, dass die geschätzte Varianzkomponente für die erste Region zu negativ und für die zweite Region zu positiv ist. Ein relativ genaues Ergebnis sollte erzielt werden für Datensätze, deren Datenqualität einheitlich ist.

Für alle sieben in Abb. 5.9 dargestellten Regionen sowie die Gebiete, in denen der NIMA96-Datensatz verwendet wurde, werden Varianzkomponenten geschätzt. Dies geschieht, wie am Anfang des Kapitels erläutert, im Rahmen einer Schwerefeldschätzung bis Grad und Ordnung 360. Der NIMA96-Datensatz wird hierbei noch einmal unterteilt in Mittelamerika und Afrika/Asien, so dass für jedes dieser beiden Teile ein Wert geschätzt wird. Die Iteration läuft so lange, bis für jeden Datensatz die zugehörige Varianzkomponente aus der entsprechenden Iteration auf die ersten beiden Nachkommastellen gerundet den Wert 1.00 erreicht hat. Es werden acht Iterationen benötigt, bis dies der Fall ist. Die Varianzkomponenten für jede Iteration sind in Abb. 6.18 dargestellt. Für die Werte in der Abbildung wurde bereits die Wurzel gezogen, so dass die Werte Standardabweichungen entsprechen.

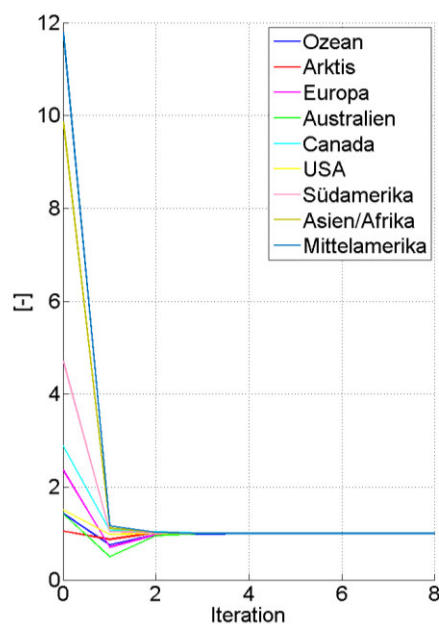


Abb. 6.18: Varianzkomponenten der einzelnen Datensätze für jede Iteration [-].

Abb. 6.18 zeigt, dass die Varianzkomponenten schnell gegen 1 konvergieren. Die größten Veränderungen treten während der ersten zwei Iterationen auf, danach verändern sich die Varianzkomponenten für jede Schätzung nur noch im Nachkommabereich. Die Gesamtvarianzkomponente nach allen Iterationen ist für jeden Datensatz in Tab. 6-3 als Standardabweichungen dargestellt. Für die Füll Datensätze ist der Hintergrund farblich hinterlegt. Wie zu erwarten, werden die Füll Datensätze von der Varianzkomponentenschätzung am stärksten herunter gewichtet. Auch Südamerika oder Kanada, wo bereits in Kapitel 5.2.1.2 auffällige Differenzen zu EGM2008 und der GRACE/GOCE-Kombination festgestellt werden konnten, werden

herabgewichtet. Im Gegensatz dazu wird z.B. Australien, wo kaum Auffälligkeiten beobachtet werden konnten, höher gewichtet.

	Afrika /Asien	Arktis	Australien	Kanada	Europa	Mittel- amerika	Ozean	Süd- amerika	USA
$\hat{\sigma}_{0j}$	11.22	0.93	0.67	3.17	1.60	13.97	0.99	4.93	1.47

Tab. 6-3: Gesamtvarianzkomponente (Standardabweichung) nach allen Iterationen pro Datensatz.

Global sind die ursprünglich mit 1mgal Genauigkeit angenommenen Datensätze, aufdatiert durch die Varianzkomponenten, in Abb. 6.19 abgebildet. Diese Abbildung gibt das stochastische Modell für die Schwereanomalien wieder, welches für die letztendliche Ausgleichung verwendet wird. Das stochastische Modell führt dazu, dass in der Kombination mit den GRACE/GOCE-Normalgleichungen die Füll Datensätze im Gegensatz zu GRACE und GOCE ein sehr niedriges Gewicht bekommen. So findet der spektrale Übergang zwischen GOCE und den Füll Daten erst ab circa Grad 220 statt, was in Kapitel 7.2 für das finale Schwerefeldmodell demonstriert wird. Der spektrale Übergang in einer Region mit hochqualitativer terrestrischer Schwereinformation wie z.B. Australien, findet schon unter Grad 200 statt.

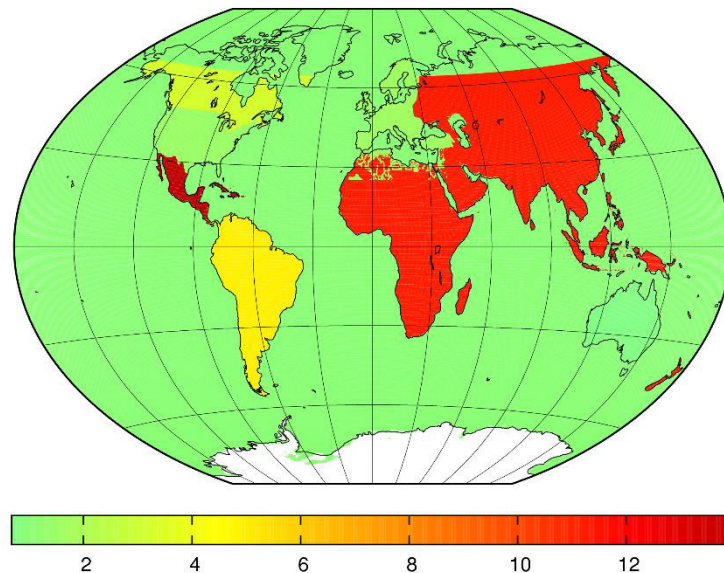


Abb. 6.19: Stochastisches Modell der Datensätze nach der Varianzkomponentenschätzung [mgal].

Die Herabgewichtung der Füll Daten lässt sich sehr gut durch Vergleiche mit externen Schwerefeldmodellen demonstrieren. Hierzu wird jeweils ein kombiniertes Schwerefeldmodell bis Grad und Ordnung 360 vor der ersten und nach der finalen Varianzkomponentenschätzung geschätzt. Für beide Modelle werden die Differenzen zu EGM2008 in Schwereanomalien berechnet. Das Ergebnis ist in Abb. 6.20 für die Region um Malaysia, Indonesien und Papua Neu-Guinea dargestellt. Im oberen Bild, welches das Kombinationsmodell vor der Varianzkomponentenschätzung mit EGM2008 vergleicht, sind neben den Differenzen, die auf Grund der schlechten Qualität der Füll Daten in den Landgebieten entstehen, noch deutliche Fehlerstrukturen in den Küsten- und Ozeanbereichen zu sehen, die vom Land aus in Richtung Ozeane streuen. Die schlechten Daten beeinflussen also in diesem Beispiel Regionen negativ, in denen eigentlich gute Daten vorliegen. Grund dafür ist, dass die Ausgleichung, welche beide Datensätze auf Grund der angenommenen Fehler von 1mgal als gleich genau ansieht, im Modell einen Übergang zwischen den beiden eigentlich inkonsistenten Datensätzen erzwingt, das Modell sich aber auf Grund der hohen Fehler des einen Datensatzes nur schwer anpassen lässt. Es entstehen Strukturen, die englischsprachig als ‚Ringing‘ bezeichnet werden, welche sich vom eigentlichen Fehlerzentrum wie Wellen ausbreiten. Optisch ähnelt dies den Strukturen, die entstehen, wenn man einem Stein auf eine Wasseroberfläche wirft. Im unteren Bild hingegen, welches das Kombinati-

onsmodell nach der finalen Varianzkomponentenschätzung mit EGM2008 vergleicht, sind die Fehlerstrukturen in den Küsten- und Ozeangebieten deutlich reduziert da durch die Varianzkomponentenschätzung der fehlerhafte Datensatz deutlich herabgewichtet wird. Die Ausgleichung hat weniger Probleme, im Modell einen Übergang zwischen den beiden Datensätzen zu schaffen, da sie im Übergangsbereich den besseren Ozeandatensatz vertraut. Durch den Vergleich zeichnet sich ab, dass bereits durch die reine Varianzkomponentenschätzung und ohne Kenntnis individueller Genauigkeiten von Einzelblöcken für Datensätze von schlechter Qualität ein deutlich verbessertes Resultat erzielt werden kann.

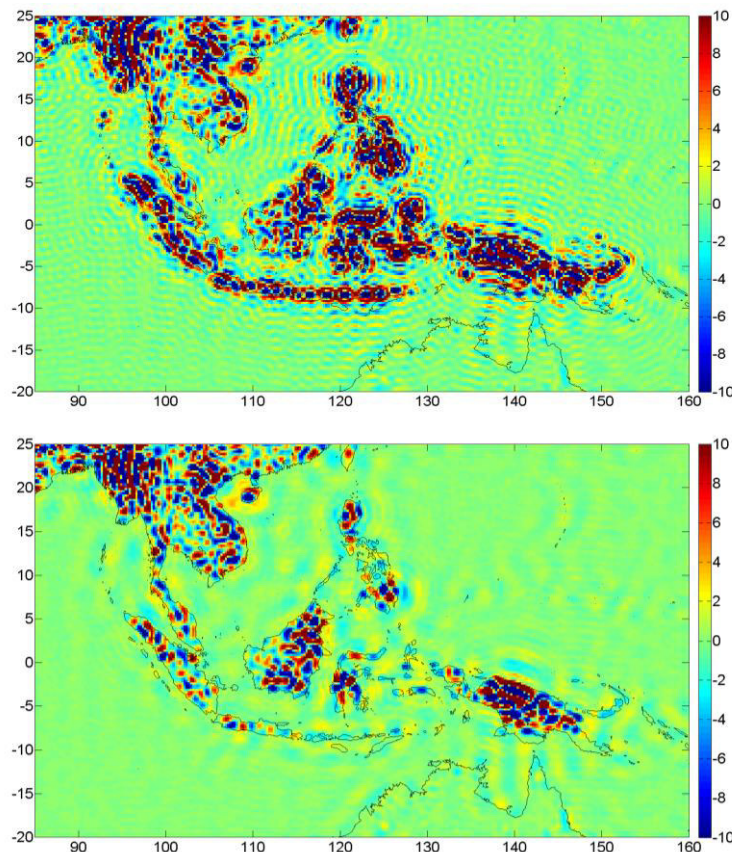


Abb. 6.20: Schwereanomalie-Differenz zu EGM2008 bei Grad und Ordnung 360 vor (oben) und nach (unten) der Varianzkomponentenschätzung [mgal].

Um den Einfluss der Varianzkomponentenschätzung auf Gebiete zu untersuchen, in denen qualitativ gute Datensätze vorliegen, werden Vergleiche zu GPS-Nivellement angestellt. Jene Vergleiche wären zwar auch sehr interessant für Regionen, in denen die Datenqualität schlecht ist, üblicherweise sind allerdings nur dort GPS-Nivellement Daten vorhanden, wo auch eine gute terrestrische Datenbasis vorliegt. Bei den Vergleichen werden Geoidhöhen aus den Modellen vor der ersten und nach der letzten Varianzkomponentenschätzung berechnet und mit von Schwerefeldmodellen unabhängigen Geoidhöhen verglichen, welche mit GPS und Nivellement bestimmt wurden. Da die Modelle nur bis Grad und Ordnung 360 entwickelt sind, wird, um einen Abbruchfehler zu vermeiden, wie in Gruber et al. (2011) vorgeschlagen das Signal über Grad und Ordnung 360 mit EGM2008 aufgefüllt. Die resultierenden RMS-Werte der Differenzen sind in Tab. 6-4 dargestellt. Es wird ersichtlich, dass der Einfluss der Varianzkomponentenschätzung auf die qualitativ hochwertigen Datensätze klein ist. Für die Datensätze in Europa und die USA sind keine Differenzen erkennbar. Dies ist auch logisch, da die Varianzkomponentenschätzung hier kleine Werte (1.47 und 1.60) erzielt hat und sich somit an der Gesamtkonstitution wenig ändert. Für Australien und Kanada sind geringe Verbesserungen im Millimeterbereich sichtbar. Auffällig ist, dass in Brasilien sogar ein um wenige Millimeter schlechteres Ergebnis erzielt wird. Dies kann allerdings mit der Beschaffenheit des Südamerikadaten-

satzes erklärt werden. Im Gegensatz zu den Nordamerika- oder dem Australiendatensatz, deren Werte, wie in Kapitel 5.2.1.2 dargestellt wurde, jeweils ein ähnliches Genauigkeitsniveau haben, liegen im Südamerika-Datensatz, wie Abb. 5.7 zeigt, sehr große Qualitätsschwankungen vor. Das Amazonasebiet und die Andengebiete sind von deutlich schlechterer Qualität als die Flachlandgebiete in Brasilien und dem Amazonas. Die Qualitätseinschätzung nur auf Basis der Varianzkomponente liefert, wie weiter oben erläutert wurde, nur die Schätzung eines ‚mittleren‘ Wertes für den kompletten Datensatz und beurteilt so die Daten in den Flachlandgebieten zu negativ, während die Amazonas- und Andengebiete zu positiv beurteilt werden. Der Brasilien GPS-Nivellement-Datensatz beinhaltet nur Punkte in den Flachlandgebieten, weswegen sich die zu negative Beurteilung der Schwereanomalien in diesem Gebiet schlecht auf das Ergebnis der GPS-Nivellement-Vergleiche auswirkt.

	Australien	Kanada	Europa	Deutschland	USA	UK	Brasilien
Iteration 0	23.5	12.9	20.8	3.7	24.9	5.9	30.7
Iteration 8	23.2	12.7	20.8	3.7	24.9	5.9	31.1

Tab. 6-4: RMS von Geoidhöhendifferenzen³¹ zwischen Schwerefeldmodellen und GPS-Nivellement-Beobachtungen in ausgewählten Regionen (cm).

Generell bleibt festzuhalten, dass eine stochastische Modellierung der Schwereanomalien-Datensätze rein auf Basis der Varianzkomponentenschätzung nur funktioniert, wenn die Genauigkeit eines Datensatzes regional nicht stark variiert. Es wurde gezeigt, dass im Falle eines durchwegs eher ungenauen Datensatzes, wie dem NIMA96-Datensatz, das Ergebnis der Schwerefeldmodellierung verbessert wird. Für Datensätze, deren Genauigkeiten allerdings sehr unterschiedlich pro Region sind, liefert sie kein zufriedenstellendes Ergebnis. Neben einer individuellen Gewichtung könnte hier auch eine Lösung sein, größere Datensätze nach Genauigkeitszonen aufzuteilen.

6.3.2 Stochastische Modellierung auf Basis von empirischer Gewichtung und Varianzkomponentenschätzung

Wie sich in Kapitel 6.3.1 gezeigt hat, kann für Datensätze, deren Genauigkeiten regional sehr stark schwanken, allein mit Hilfe der Varianzkomponentenschätzung keine zufriedenstellende Genauigkeitsinformation hergeleitet werden. Für diese Datensätze muss eine Genauigkeitsinformation für jeden einzelnen Schwereanomalienblock bestimmt werden. Auf diese Weise wird versucht, ein stochastisches Modell zu erhalten, welches dem wahren, aber unbekanntem stochastischen Modell ähnlich ist.

Am einfachsten würde man eine Genauigkeitsinformation pro Zelle erhalten, wenn man die Schwereanomalien-Blockmittelwerte mit den wahren Schwereanomalien vergleichen könnte. Da diese unbekannt sind, stellt sich die Frage, welche verfügbare Information den unbekanntem wahren Schwerewerten am ähnlichsten ist. Dies sollten die Messungen von GRACE und GOCE sein, welche das Schwerefeld konsistent und hochgenau beobachten, jedoch spektral limitiert sind. In den spektralen Bereichen allerdings, in denen beide Satelliten für das Schwerefeld sensitiv sind, sollten ihre Messungen dem wahren Schwerefeld entsprechen. Da die Schwereanomalien-Datensätze jedoch mehr spektrale Information als GRACE- und GOCE-Messungen enthalten, kann nicht einfach die Differenz zwischen einer GRACE/GOCE-Schwerefeldlösung und den Schwereanomalien gebildet werden, da sonst in den Differenzen großteils nur das Signal sichtbar wäre, für das GRACE und GOCE nicht sensitiv sind. Aus diesem Grund wird ein Schwerefeldmodell rein aus den altimetrischen und terrestrischen Schwereanomalien berechnet. Dieses Modell wird dann bis Grad und Ordnung 200 in bandbegrenzte Schwereanomalien entwickelt. Diese lassen sich mit ebenso bis Grad und Ordnung 200 entwickelten, bandbegrenzten GRACE/GOCE-Schwereanomalien vergleichen, welche aus einem GRACE/GOCE-Modell entsprechend Kapitel 5.1 stammen. Dieses Vorgehen wurde bereits im Rahmen der Beschreibung der altimetrischen und terrestrischen Datensätze in Kapitel 5.2 angewandt. Stellt

³¹ Im Falle des Deutschland- und Europa-Datensatzes handelt es sich um Höhenanomaliedifferenzen und nicht um Geoidhöhendifferenzen; dies gilt auch im Folgenden und wird nicht mehr gesondert erwähnt.

man die Differenzen als Absolutwerte dar, so kann man diese als eine Art Genauigkeitsinformation der terrestrischen Daten interpretieren.

Der Südamerikadatensatz eignet sich sehr gut für die Erprobung dieses Verfahrens, da, wie in Kapitel 6.3.1 erläutert, die Genauigkeiten dieses Datensatzes regional stark variieren. Interessant ist auch, dieses Verfahren für den Europadatensatz anzuwenden, da in diesem Qualitätsunterschiede von Nord- und Mitteleuropa zu Südeuropa beobachtet werden können, auch wenn diese Unterschiede deutlich kleiner sind als die Schwankungen im Südamerika-Datensatz.

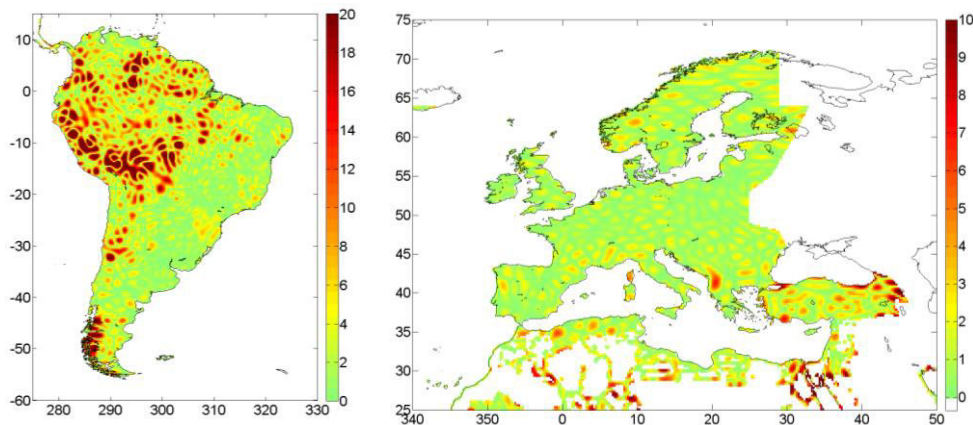


Abb. 6.21: Absolute Differenzen zwischen bandbegrenzten Südamerika- (links) und Europaschwereanomalien (rechts) zu einer GRACE/GOCE-Kombination (jeweils entwickelt bis Grad 200 und in 15'x15' Blockmittelwertschwereanomalien [mgal]).

In Abb. 6.21 sind die absoluten Differenzen für diese beiden Datensätze dargestellt. Man erkennt zwar, dass dieses Verfahren grundsätzlich funktioniert, jedoch sind auch die bereits in Kapitel 5.2.1 beschriebenen blasenähnlichen Strukturen sichtbar. Da es sich bei diesen nicht um wahre Unterschiede in den Daten handelt, sondern primär um Abbruchfehler aus dem stark korrelierten GRACE/GOCE-Modell, dürfen diese Differenzen nicht streng als Genauigkeitsinformation interpretiert werden.

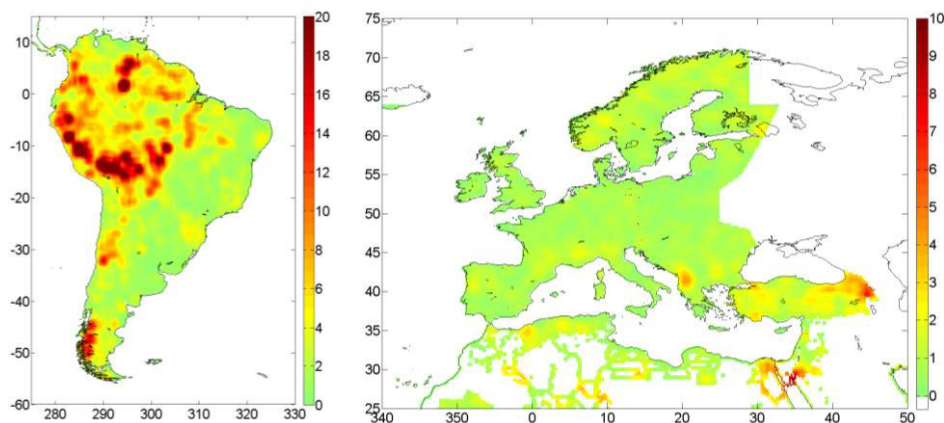


Abb. 6.22: Absolute Differenzen entsprechend Abb. 6.21 [mgal], welche zusätzlich mit einem 2D-Boxfilter tiefpassgefiltert wurden.

Die blasenähnlichen Strukturen sind eher kleinräumig, also von kurzweiliger Natur. Aus diesem Grund wird versucht, diese mit einem Tiefpassfilter zu eliminieren, so dass nur der langwellige Anteil übrigbleibt, welcher möglichst realistisch die wahren Differenzen beschreiben sollte. Die Filterung wird umgesetzt durch eine einfache Faltung mit einem 2D-Boxfilter. Das Ergebnis ist in Abb. 6.22 dargestellt. Wie erhofft, wur-

den die blasenähnlichen Strukturen eliminiert. Die Struktur der gefilterten Differenzen ist langwellig und die größte Amplitude tritt regional dort auf, wo zu vermuten ist, dass die Qualität der Datensätze schlecht ist. Auf Grund der Tiefpassfilterung, welche mit einer Art Schmiereffekt verbunden ist, kann das Ergebnis zwar nicht exakt der unbekanntenen Genauigkeitsinformation entsprechen. So wird z.B. eine gute Zelle, welche neben schlechten Zellen liegt, mit diesen vermischt, und somit zu negativ bewertet, oder auch umgekehrt die Amplitude einer sehr schlechten Zelle durch die benachbarten guten Zellen etwas herabgesetzt. Es wird jedoch davon ausgegangen, dass Abb. 6.22 realistische Genauigkeitsinformationen darstellt, welche für unsere Anwendung im Rahmen der stochastischen Modellierung verwendbar ist und zu einem verbesserten Ergebnis führt.

Für eine Schwerefeldberechnung bis Grad und Ordnung 360 wird für die anderen Datensätze analog wie für den Europa- und den Südamerika-Datensatz eine individuelle Genauigkeitsinformation pro Zelle hergeleitet. Die Genauigkeitsinformationen werden dann für die stochastische Modellierung verwendet. Für eine Lösung, im folgenden IG1 (für Individuelle Gewichtung 1) genannt, wird zunächst die Gewichtung aus Kapitel 6.3.1 übernommen, wie sie in Abb. 6.19 sichtbar ist, also die Gewichtung rein auf Basis der Varianzkomponentenschätzung. Dann wird die individuelle Genauigkeitsinformation pro Zelle dazu addiert. Deren Maximalwerte wurden zuvor auf 10 mgal festgesetzt (im Falle von NIMA96 15 mgal). Auf Grund des Gewichtungsanteils aus der individuellen Gewichtung werden Regionen von minderer Genauigkeit somit deutlich herabgewichtet. Da die Genauigkeit der Zellen aber bestenfalls den Werten der Varianzkomponenten aus Kapitel 6.3.1 entsprechen kann, wird der gesamte Datensatz grundsätzlich zu negativ bewertet, da diese Varianzkomponenten, wie in Kapitel 6.3.1 erläutert wurde, einer Art Mittelwert-Genauigkeit für den gesamten Datensatz entsprechen. Die Idee bei diesem Ansatz ist, dass die zu negative Bewertung dazu führt, dass zunächst durch die Kombination mit GRACE und GOCE ein Schwerefeldmodell entsteht, in welchem der Einfluss von GRACE und GOCE etwas erhöht ist, und nach einer erneuten Varianzkomponentenschätzung ein zweites, bei dem die Datensätze aufgrund der Varianzkomponentenschätzung auf ein realistisches Niveau heraufgewichtet sein sollten. Für eine zweite Lösung IG2 (für Individuelle Gewichtung 2) wird die individuelle Genauigkeitsinformation eins zu eins so verwendet, wie sie durch die Differenzbildung und Filterung abgeleitet worden ist. Auch hier kann ein Kombinationsmodell vor und nach der Varianzkomponentenschätzung berechnet werden. Wie in Kapitel 6.3.1 erläutert, läuft die Iteration so lange, bis für jeden Datensatz die zugehörige Varianzkomponente aus der entsprechenden Iteration auf die ersten beiden Nachkommastellen gerundet den Wert 1.00 erreicht hat. Es werden sowohl im Falle von IG1 als auch IG2 9 Iterationen benötigt, bis dies der Fall ist. Im Falle von IG1 werden die Datensätze in der Tat durchwegs durch die Varianzkomponentenschätzung aufgewertet. Beide Gewichtungsansätze mit jeweils zwei Lösungen, einmal vor und einmal nach der Varianzkomponentenschätzung, können dann durch GPS-Nivellment-Vergleiche, analog zu jenen in Kapitel 6.3.1, evaluiert werden. Das Ergebnis ist in Tab. 6-5 zusammengefasst. Die Tabelle enthält zum Vergleich auch die Ergebnisse aus Kapitel 6.3.1, an dieser Stelle GG (für Generelle Gewichtung) genannt. Es werden nur die GPS-Nivellment-Datensätze dargestellt, für die Veränderungen sichtbar sind.

Modell	Iteration	Australien	Kanada	Europa	USA	Brasilien
GG	0	23.5	12.9	20.8	24.9	30.7
GG	8	23.2	12.7	20.8	24.9	31.1
IG1	0	23.2	12.7	20.7	24.9	33.3
IG1	9	23.3	12.7	20.7	25.0	33.1
IG2	0	23.3	12.9	20.7	24.8	30.4
IG2	9	23.3	12.8	20.7	24.9	30.5

Tab. 6-5: RMS von Geoidhöhendifferenzen zwischen Schwerefeldmodellen und GPS-Nivellment-Beobachtungen in ausgewählten Regionen (cm).

Für den Australien-Datensatz, der generell keine Gebiete von sehr schlechter Qualität enthält, kann durch dieses Verfahren keine weitere Verbesserung erzielt werden. Für den Kanada-Datensatz fällt auf, dass alle Modelle, in denen GRACE und GOCE einen erhöhten Einfluss haben, also GG nach acht Iterationen und

beide IG1-Modelle, ein minimal besseres Ergebnis erzielen. Wichtig scheint hier in erster Linie der GRACE/GOCE-Einfluss zu sein, da auch der Kanada-Datensatz keine großen Genauigkeitsschwankungen enthält. Im Europa-Datensatz wirkt sich die Herabgewichtung der schlechten Regionen grundlegend positiv aus, wenn auch nur geringfügig. Der USA-Datensatz, der ebenfalls nur wenige Genauigkeitsschwankungen beinhaltet, erreicht mit der eins zu eins aus den gefilterten Differenzen abgeleiteten Gewichtung das beste Ergebnis. Interessanter ist das Resultat für Brasilien. Mit der zu pessimistischen Gewichtung der terrestrischen Daten (IG1) im Südamerika-Datensatz wird das Ergebnis im Verhältnis zur allgemeinen Gewichtung verschlechtert, was konsistent zu den Ergebnissen aus Kapitel 6.3.1 ist. Mit der Gewichtung nach IG2 kann das Ergebnis jedoch noch einmal deutlich verbessert werden.

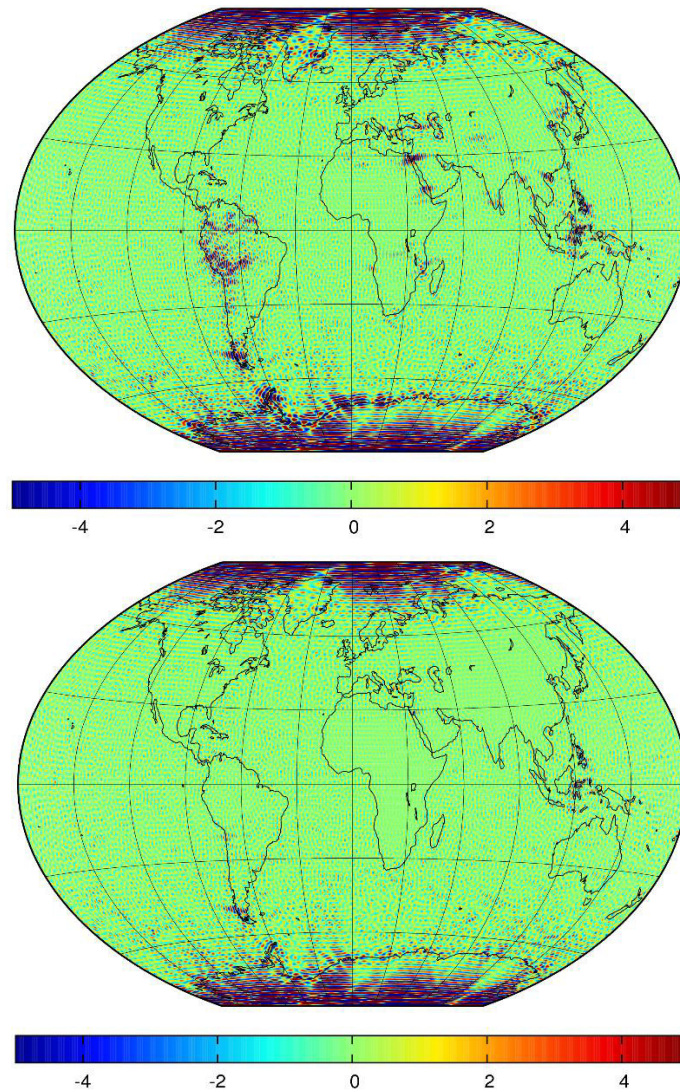


Abb. 6.23: Differenzen in Schwereanomalien von GG nach 8 Iterationen (oben) und IG2 nach 9 Iterationen (unten) zur GRACE/GOCE-Kombinationslösung bei Grad und Ordnung 200 [mgal].

Interessant wären GPS-Nivellement-Vergleiche besonders für Datensätze von sehr schlechter Qualität, allerdings liegen hier keine GPS-Nivellement-Daten vor. Aus diesem Grund muss auf andere Weise dargestellt werden, dass die individuelle Gewichtung hier einen positiven Einfluss auf das Gesamtergebnis hat. Wir betrachten dazu die Differenzen des GG-Modells und des IG2-Modells nach der letzten Iteration, jeweils kombiniert mit GRACE und GOCE, zu der reinen GRACE/GOCE Lösung. Das Ergebnis ist in Abb. 6.23 in Schwereanomalien, berechnet bis Grad und Ordnung 200, dargestellt. Neben dem polaren Loch sind für die GG-Lösung noch einige Differenzen sichtbar, besonders in Südamerika, Asien und den Inselge-

bieten um Malaysia, Indonesien und Papua-Neuguinea. Im Falle der IG2-Lösung verschwinden diese Differenzen. Diese Gebiete haben im Rahmen der generellen Gewichtung nur auf Basis der Varianzkomponentenschätzung ein zu positives Gewicht erhalten. Die individuelle Gewichtung, welche eine bessere Nachbildung der realen Genauigkeitsverhältnisse erlaubt, behebt diesen Fehler.

Grundsätzlich zeigt sich, dass mit einer individuellen Gewichtung die Ergebnisse der Schwerefeldkombination verbessert werden können. Auf Datensätze, welche generell von sehr guter Qualität sind und wenige Schwankungen hinsichtlich der Genauigkeit beinhalten, hat die individuelle Gewichtung keinen signifikanten Einfluss. Generell kann, wie die Ergebnisse des GPS-Nivellements gezeigt haben, auch nicht allgemein eine Aussage getroffen werden, welche Art der individuellen Gewichtung besser ist. Dies hängt von den speziellen Eigenschaften des terrestrischen Datensatzes ab. Die Erkenntnisse aus diesem Kapitel sollten allerdings auf jeden Fall dazu beitragen, im Rahmen von Kapitel 7 eine möglichst gute Schwerefeldlösung zu erzielen.

7 Bestimmung eines hochaufgelösten Schwerefelds

In diesem Kapitel wird ein kombiniertes globales und hochaufgelöstes Schwerefeldmodell auf Basis von vollen Normalgleichungen bis Grad und Ordnung 720 berechnet, wie es in Kapitel 1.2 als Ziel der Arbeit definiert wurde. Hierzu werden die in allen vorherigen Kapiteln erläuterten Methoden, gewonnenen Erkenntnisse und beschriebenen Datensätze genutzt.

7.1 Berechnung des Modells

Im Rahmen der Berechnung werden die physikalischen und mathematischen Grundlagen verwendet, die in den Kapiteln 2 und 3 vorgestellt wurden. Die rechentechnische Umsetzung erfolgt, wie in Kapitel 4 erläutert, auf dem Hochleistungsrechner SuperMUC. Als Datenbasis dienen die in Kapitel 5 vorgestellten GOCE- und GRACE-Normalgleichungssysteme, sowie ein globaler Datensatz von 15'x15' Blockmittelwert-Schwereanomalien. In einigen Regionen werden, wie in Kapitel 5.3 dargestellt, zusätzlich topographische Schwereanomalien verwendet³².

Die Gewichtung der terrestrischen Schwereanomalien erfolgt auf Basis der in den Kapiteln 6.3.1 und 6.3.2 gewonnenen Erkenntnisse. Für jeden Datensatz, der mit Hilfe von GPS-Nivellement-Vergleichen evaluiert werden kann, wird jene Gewichtung gewählt, mit der in diesen Vergleichen das beste Ergebnis erzielt wurde (siehe Tab. 6-5).

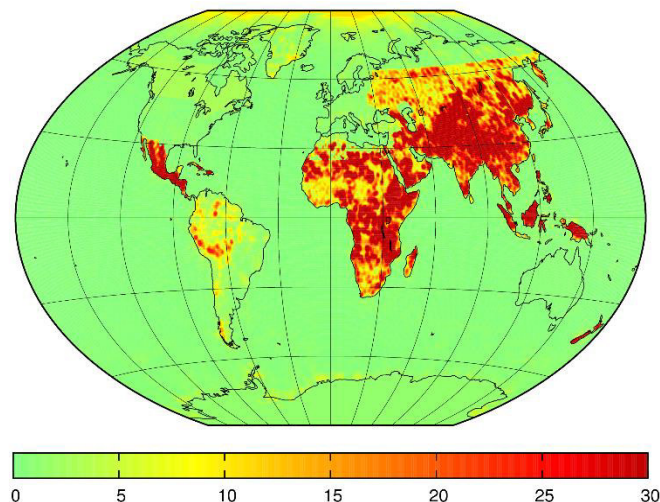


Abb. 7.1: Stochastisches Modell der 15'x15' Blockmittelwert-Schwereanomalien für die finale Schwerefeldlösung [mgal].

³² Detaillierte Übersicht über die verwendeten Daten: Schwerefeldsatellitenmissionen: Kapitel 5.1, Tab. 5-1; Schwereanomalien Datensätze: Kapitel 5.2, Tab. 5-2; Füll Datensätze: Kapitel 5.3, Tab. 5-3.

Für die anderen Regionen, in welchen größtenteils Daten von minderer Qualität vorliegen, wird eine Gewichtung entsprechend des IG2-Modells gewählt, da mit dieser Gewichtung, wie ebenfalls in Kapitel 6.3.2 gezeigt wurde, für diese Regionen ein Ergebnis erzielt wurde, welches sich sehr gut mit den GRACE- und GOCE-Messungen deckt. Die topographischen Schwereanomalien werden, basierend auf Erfahrungswerten aus in den letzten Jahren durchgeführten Schwerefeldberechnungen, mit einer Standardabweichung von 20mgal eingeführt. Das stochastische Modell in Form von Standardabweichungen, welches letztendlich für die Schwerefeldberechnung bis Grad und Ordnung 720 genutzt wird, ist in Abb. 7.1 dargestellt. Wie zu erwarten, sind die Standardabweichungen in jenen Gebieten, wo die NIMA96-Datensätze verwendet werden, am höchsten. Für Australien, Europa, Kanada, die USA, sowie große Teile des Ozean und ArcGP-Datensatzes ist die Standardabweichung kleiner als 5mgal. Die stochastische Gewichtung gibt im Grunde die Unterteilung der Schwereanomalien gemäß den Kapiteln 5.2.1 und 5.3.1 in hochgenaue und ergänzende Datensätze wieder.

Für die Berechnung des Schwerefeldmodells wird separat für die qualitativ hochwertigen Datensätze ein Normalgleichungssystem bis Grad und Ordnung 720 aufgestellt, sowie ein Normalgleichungssystem bis Grad und Ordnung 360 für die Füll Datensätze, da diese spektral auf Grad und Ordnung 360 limitiert sind, und ein Aufstellen der Normalgleichungen bis Grad und Ordnung 720 hier den Effekt einer Regularisierung mit Null-Information jenseits Grad 360 hätte. Ebenfalls ein eigenes Normalgleichungssystem bis Grad und Ordnung 720 wird für die topographischen Anomalien berechnet. Alle Normalgleichungen werden, inklusive der GRACE- und GOCE-Normalgleichungen, zu einem Gesamtnormalgleichungssystem kombiniert. Bevor das Gesamtsystem gelöst werden kann, wird das Normalgleichungselement $N\{\bar{C}_{720,720}; \bar{C}_{720,720}\}$ und das entsprechende Element der rechten Seite $n\{\bar{C}_{720,720}\}$ mit Hilfe von Vorinformation aus EGM2008 regulariert entsprechend Koch & Kusche (2002), da der resultierende Koeffizient, wie in Kapitel 3.3.2 erläutert wurde, auf Basis eines 15'x15' Gitters von Blockmittelwerten nicht bestimmt werden kann. Im finalen Modell wird dies der einzige Koeffizient sein, in den Information aus einem externen Schwerefeldmodell eingeflossen ist, während das restliche Modell unabhängig von externer Information ist. Nach diesem letzten Schritt kann das Normalgleichungssystem nach den unbekanntenen Schwerefeldkoeffizienten gelöst und die zugehörige Varianz-Kovarianz-Information mittels Invertierung der Normalgleichungsmatrix berechnet werden. Das resultierende Schwerefeldmodell wird im folgenden IAPGc genannt. Das Signal und der formale Fehler des Modells ist in Form von Gradvarianzen in Abb. 7.2 dargestellt.

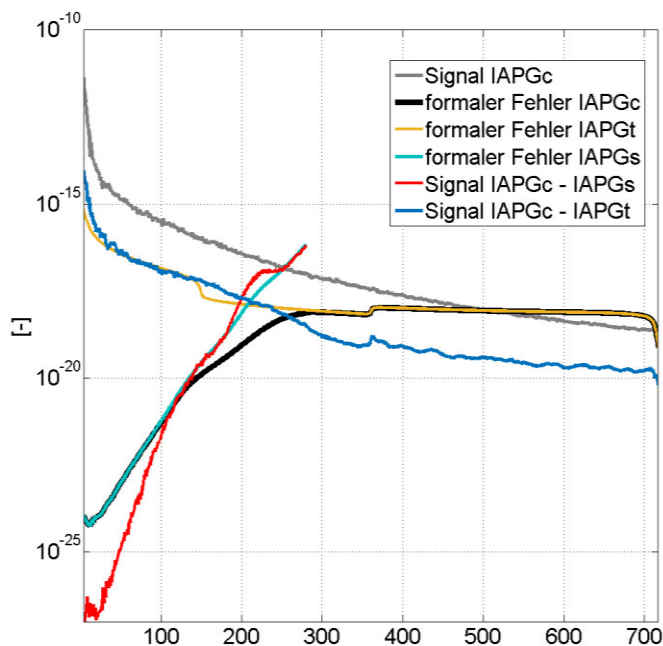


Abb. 7.2: Gradvarianzen des IAPGc Modells, dimensionslos.

Neben dem kombinierten Modell IAPGc sind auch Modelle nur auf Basis von Satelliten- oder terrestrischer Schwerefeldinformation, an dieser Stelle IAPGs³³ und IAPGt³⁴ genannt, dargestellt. Die formalen Fehler zeigen, dass, wie gewünscht, das kombinierte Modell im langwelligen Bereich der Satellitenlösung entspricht und im kurzwelligen Bereich, für den die Schwerefeldsatelliten nicht sensitiv sind, der terrestrischen Lösung. Im Bereich von circa Grad 120 bis 260 findet der Übergang zwischen beiden Modellen statt. Bei Grad 360 findet sich ein kleiner Knick in der Fehlerkurve von IAPGc, der entsteht, weil nur bis zu diesem Grad Information aus dem NIMA96-Datensatz vorliegt. Die formalen Fehler von IAPGt weisen noch einen zweiten Knick bei Grad 150 auf, welcher aus der Zunahme der topographischen Anomalien ab diesem Grad resultiert (siehe Kapitel 5.3.2). Dieser Knick ist im Kombinationsmodell nicht zu sehen, da dieses in diesen Bereichen von der Satellitenlösung dominiert wird. Der formale Fehler des Kombinationsmodells schneidet bei circa Grad 500 die Signalkurve. Dies ist die Folge aus den hohen Standardabweichungen der ungenauen NIMA96-Daten, vergleiche Abb. 7.1, sowie der hohen Standardabweichung, welche für die topographischen Anomalien gewählt wurde. Ein weiteres Indiz dafür, dass die Kombination gelungen ist, liefern die Differenzen der Signalkurven. So passt sich die Differenz von IAPGc und IAPGs in den Bereichen, ab denen der Satellitenanteil an Einfluss verliert, dem formalen Fehler der Satellitenlösung an. Es ist lediglich ab circa Grad 180 ein Unterschied in den beiden Kurven zu erkennen. Dieser beruht auf der Problematik des polaren Lochs, da IAPGs ab ungefähr Grad 180 fast keine GRACE-Information mehr enthält, das Modell also nur von GOCE-Information abhängt, welche in den polaren Löchern nicht vorhanden ist. Die Differenz von IAPGc und IAPGt passt sich im langwelligen Bereich, also dort, wo die terrestrische Lösung kaum Einfluss auf die Kombinationslösung hat, sehr gut an die formalen Fehler der terrestrischen Lösung an.

Zusätzlich zur Darstellung der Gradvarianzen ist das Kombinationsmodell IAPGc in Form von Geoidhöhen und Schwereanomalien, beides entwickelt bis Grad und Ordnung 720, in Abb. 7.3 dargestellt.

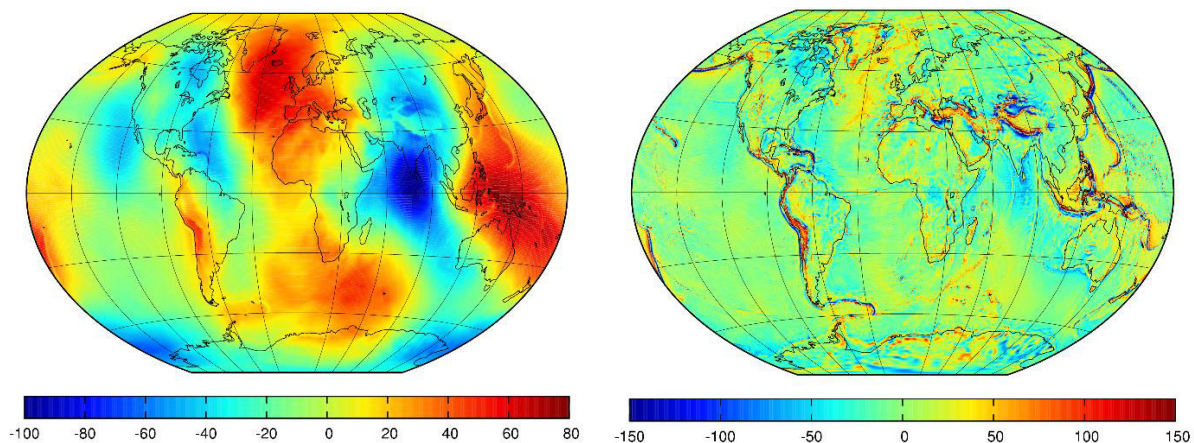


Abb. 7.3: IAPGc-Geoidhöhen [m] (links) und -Schwereanomalien [mgal] (rechts) entwickelt bis Grad und Ordnung 720.

7.2 Interne Validierung des Modells

Für eine Bewertung der Qualität des Schwerefeldmodells wird dieses mit Hilfe verschiedener Verfahren untersucht. Zunächst folgt die interne Validierung, was bedeutet, dass die folgenden Analysen nur auf Information aus dem Modell selbst basieren. Hierbei werden keine externen Vergleichsdaten herangezogen. Die formalen Fehler, wie sie in Abb. 7.2 dargestellt wurden, sind im Grunde bereits ein Teil der internen Validierung. Sie zeigen, welche Teile der Schwerefeldlösung von der Satelliteninformation und welche von

³³ Eine Kombination aus ITSG-Grace2014s und TIM5 entsprechend Kapitel 5.1

³⁴ Lösung aus den Anomalien der Kapitel 5.2 und 5.3

der terrestrischen Information dominiert werden. Auch die in Abb. 7.2 dargestellten Signaldifferenzen machen dies sichtbar.

7.2.1 Relativer Anteil der Satellitendaten am Gesamtmodell

In diesem Abschnitt soll an Hand von weiteren Darstellungen der Anteil der Satelliteninformation am Gesamtmodell visualisiert werden. Ein Beispiel hierfür ist Abb. 7.4. Diese Abbildung zeigt in Form eines Koeffizientendreiecks für jeden einzelnen Koeffizienten den relativen Anteil der Satellitenlösung an der Kombinationslösung. Die relativen Anteile $R_{C/S}^{lm}$ wurden berechnet aus der Multiplikation der Normalgleichungsmatrix von IAPGs mit der Varianz-Kovarianz-Matrix von IAPGc

$$\mathbf{R}_{IAPGs} = \mathbf{N}_{IAPGs} \mathbf{N}_{IAPGc}^{-1}, \quad (7.1)$$

vergleiche Sneeuw (2000). Die resultierende Matrix \mathbf{R}_{IAPGs} enthält auf der Diagonalen die Anteile der Satellitenlösung an der Kombinationslösung $R_{C/S}^{lm}$ in Form von Werten zwischen 0 und 1, wobei 0 bedeutet, dass die Satellitenlösung an dem entsprechenden Koeffizienten keinen Anteil hat, und 1, dass der Koeffizient zu hundert Prozent von der Satellitenlösung bestimmt wird. Abb. 7.4 zeigt, dass ab ungefähr Grad und Ordnung 120 der Anteil der Satellitenlösung an den jeweiligen Koeffizienten geringer wird. Der Anteil der Satellitenlösung in den Koeffizienten von höherem Grad als 240 beträgt weniger als zehn Prozent. Grundsätzlich unterscheidet sich der Übergang leicht ordnungsweise, was eine Folge der unterschiedlichen Gewichtung der terrestrischen Daten ist.

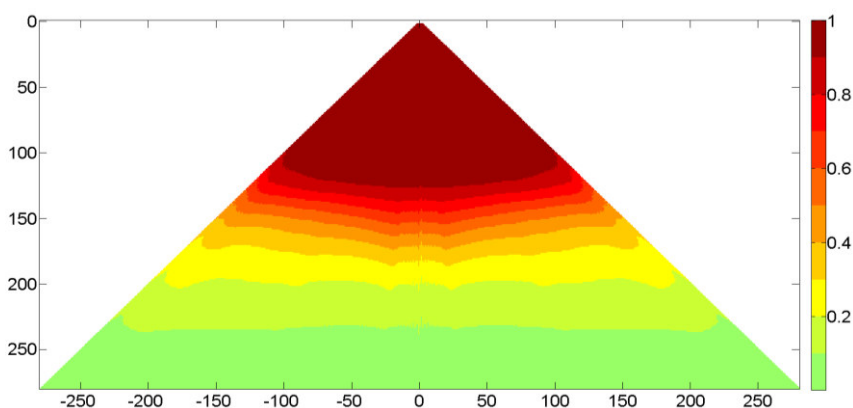


Abb. 7.4: Relativer Anteil der Satellitenlösung an der Kombinationslösung für jeden Koeffizienten: 0: die Satellitenlösung hat keinen Anteil, 1: die Satellitenlösung hat 100% Anteil.

Summiert man die relativen Anteile für alle Koeffizienten eines Grades, wobei diese vorher jeweils mit dem absoluten Signal gewichtet werden, und teilt durch die Summe der Gewichte, erhält man für diesen Grad den relativen Anteil des Satellitenmodells am Gesamtsignal des Kombinationsmodells

$$R^l = \frac{\sum_{j=0}^l R_C^{lj} \bar{C}_{lj} + \sum_{j=1}^l R_S^{lj} \bar{S}_{lj}}{\sum_{j=0}^l \bar{C}_{lj} + \sum_{j=1}^l \bar{S}_{lj}}. \quad (7.2)$$

Die Gewichtung durch die Koeffizienten erfolgt, um einen Bezug zum wirklichen Signal zu schaffen. Theoretisch wäre es auch möglich, die Koeffizienten aus Gleichung (7.2) zu entfernen - im Nenner stünde dann die Anzahl der Koeffizienten pro Grad $2l+1$ -, um so den relativen Anteil des Satellitenmodells am Gesamtmodell pro Grad auszudrücken. Durch die Gewichtung mit den Koeffizienten wird allerdings der Anteil am wirklichen Signal ausgedrückt, da ansonsten nur die relativen Anteile $R_{C/S}^{lm}$ in die Berechnung eingehen würden, unabhängig davon, wie groß das Signal des zugehörigen Koeffizienten wirklich ist.

Im Weiteren kann man jeweils die relativen Anteile des Satellitenmodells am Kombinationsmodell von Grad 0 bis zum entsprechenden Grad kumulieren, wobei die relativen Anteile mit dem Gesamtsignal pro Grad gewichtet werden. Dies liefert, wenn man durch die Summe der Gewichte teilt, den relativen Anteil des Satellitenmodells am Gesamtsignal des Kombinationsmodells bis zum jeweiligen Grad

$$R_{cum}^l = \frac{\sum_{i=0}^l R^i \left(\sum_{j=0}^i \bar{C}_{ij} + \sum_{j=1}^i \bar{S}_{ij} \right)}{\sum_{i=0}^l \left(\sum_{j=0}^i \bar{C}_{ij} + \sum_{j=1}^i \bar{S}_{ij} \right)}. \quad (7.3)$$

Der relative Anteil R^l des Satellitenmodells am Gesamtsignal des Kombinationsmodells für jeden Grad l und der relative Anteil R_{cum}^l von Grad 0 bis zum jeweiligen Grad l kumuliert sind in Abb. 7.5 dargestellt.

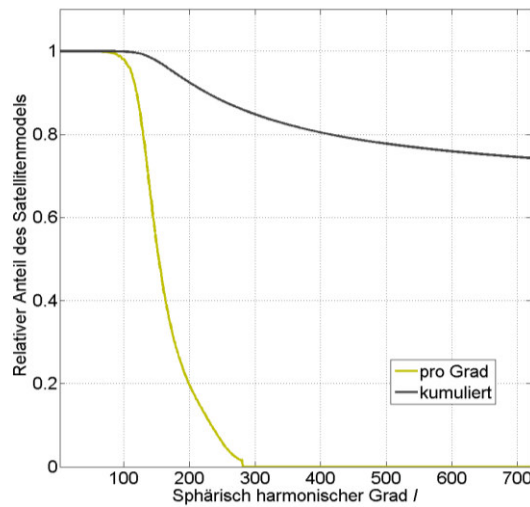


Abb. 7.5: Relativer Anteil des Satellitenmodells am Gesamtsignal des Gesamtmodells für jeden Grad und kumuliert bis zum entsprechenden Grad.

Hinsichtlich der relativen Anteile für jeden Grad führt die Abbildung zu denselben Schlussfolgerungen wie Abb. 7.4. Interessant ist die Kurve der kumulierten relativen Anteile. Diese zeigt, dass bis zu Grad und Ordnung 280, dem maximalen Entwicklungsgrad des Satellitenmodells, der Anteil des Satellitenmodells am Gesamtsignal höher als 85% Prozent ist. Für das volle Modell beträgt der Anteil des Satellitenmodells am Gesamtsignal immer noch mehr als 70% Prozent. Dies kann damit begründet werden, dass, wie auch Abb. 7.2 zeigt, die Signalstärke mit steigendem Grad abnimmt.

Um einen Einblick zu bekommen, wo der Einfluss des Satellitenmodells auf die Kombination regional besonders hoch ist, wird die Varianz-Kovarianz-Matrix separat für IAPGc und IAPGs auf Geoidhöhen fortgepflanzt

$$\mathbf{Q}_{NN} = \mathbf{A}_N \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}_N^T. \quad (7.4)$$

Der Quotient

$$R_{NN}^{ii} = \frac{Q_{NN;IAPGs}^{ii}}{Q_{NN;IAPGc}^{ii}} \quad (7.5)$$

aus den Diagonalelementen Q_{NN}^{ii} der beiden Fortpflanzungsergebnisse entspricht Redundanzfaktoren, welche eine räumliche Darstellung des relativen Anteils des Satellitenmodells am Gesamtmodell erlauben. Die Redundanzfaktoren drücken die relativen Anteile des Satellitenmodells am Gesamtmodell bis zum maxima-

len Grad aus, welcher für die Kovarianzfortpflanzung gewählt wurde. Abb. 7.6 zeigt eine globale Darstellung des relativen Beitrags des Satellitenmodells für verschiedene maximale Entwicklungsgrade. Wichtig ist zu bedenken, dass Abb. 7.6 nicht als ergänzende globale Darstellung von Abb. 7.4 oder dem relativen Anteil pro Grad in Abb. 7.5 zu sehen ist. Es handelt sich bei diesen Abbildungen um verschiedene Dinge. Der relative Anteil an jedem Koeffizient oder pro Grad gibt den Anteil des Satellitenmodells nur für diesen spezifischen Koeffizienten bzw. Grad wieder. Gleichung (7.5) hingegen gibt den Anteil des Fehlers des Satellitenmodells am Fehler des Gesamtmodells über alle Grade hinweg bis zum Abbruchgrad der Entwicklung/ Fortpflanzung wieder. Es können folglich keine Schlüsse durch Vergleiche der verschiedenartigen Abbildungen bei bestimmten Graden gezogen werden.

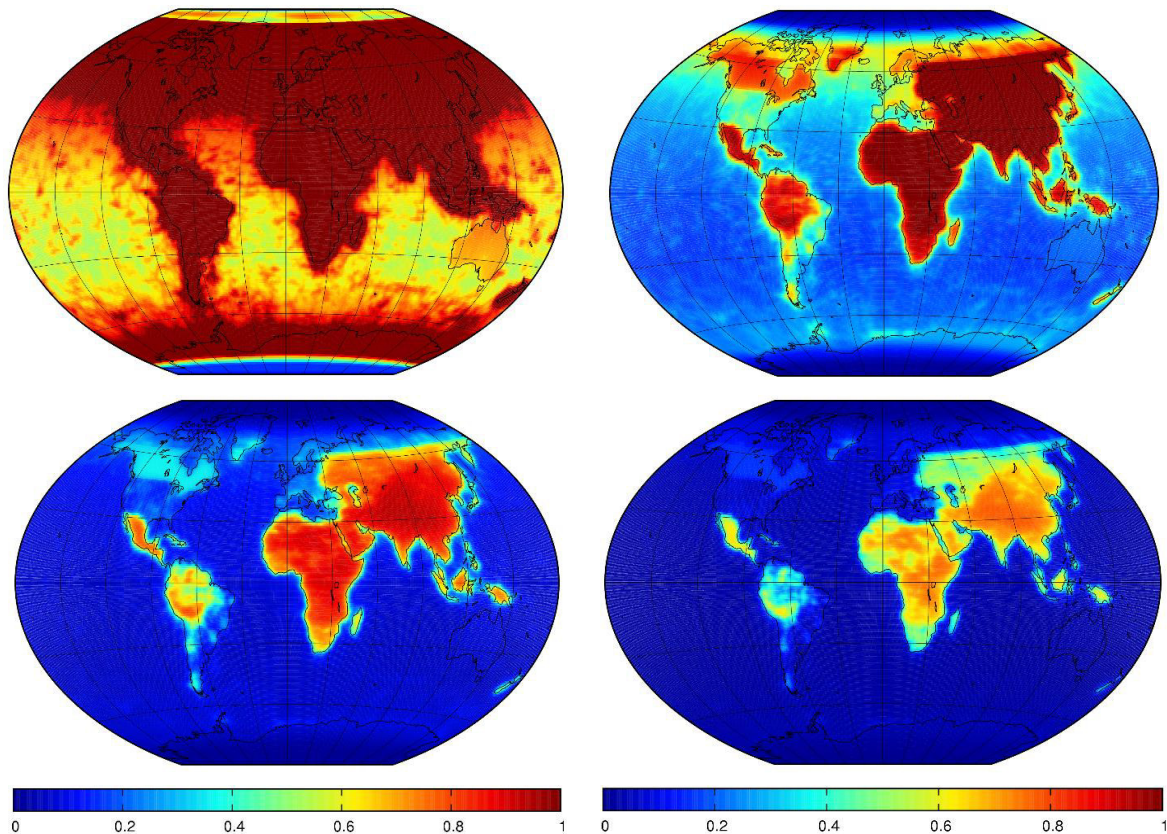


Abb. 7.6: Relativer Anteil der Satellitenlösung an der Kombinationslösung bei Grad 180 (links oben), 200 (rechts oben), 220 (links unten) und 240 (rechts unten), global dargestellt: 0: die Satellitenlösung hat keinen Anteil, 1: die Satellitenlösung hat 100% Anteil.

Abb. 7.6 zeigt, dass bis zu Grad 180 die Kombinationslösung in vielen Regionen zu fast hundert Prozent von der Satellitenlösung dominiert wird. Eine Ausnahme bilden nur die polaren Gebiete, wo die Satellitenlösung aufgrund der polaren Löcher schwach ist, sowie Ozeangebiete in der südlichen Hemisphäre, wo der Einfluss der Satellitenlösung aber noch immer bei circa 60% liegt. In den entsprechenden Breiten auf der Südhalbkugel zeigt die Kovarianzfortpflanzung von GOCE-Schwerefeldern die höchsten Werte, was eine Folge aus der leicht exzentrischen GOCE-Bahn ist, deren Apogäum auf der südlichen Hemisphäre liegt. Folglich sieht man hier bereits einen Einfluss der altimetrischen Daten, der aber noch unter vierzig Prozent liegt. Bei Grad 200 werden die meisten Ozeangebiete, sowie der sehr genaue Australien-Datensatz schon sehr deutlich durch die Schwereanomalien geprägt. In den NIMA96-Regionen jedoch beträgt der Anteil der Satellitenlösung noch immer fast hundert Prozent. In den restlichen Landgebieten schwankt der Einfluss der Satellitendaten zwischen 40 und 80%, generell ist er damit noch sehr hoch. Bei Grad 220 beträgt der Einfluss der Satellitenlösung auf die Landgebiete mit hochgenauen Schwereanomalien noch zwischen zwanzig und vierzig Prozent, mit Ausnahme der Amazonasgebiete, wo höhere Werte erreicht werden.

In den NIMA96-Gebieten liegt der Einfluss der Satellitenlösung immer noch bei etwa achtzig Prozent. Bei Grad 240 ist in den NIMA96-Gebieten und im Amazonas noch ein deutlicher Anteil der Satellitenlösung von sechzig Prozent sichtbar, während die Satellitenlösung auf die übrigen Regionen nur noch wenig Einfluss hat.

7.2.2 Vergleich der Kombination mit ihr zu Grunde liegenden Daten

Neben der Berechnung von relativen Anteilen (Kapitel 7.2.2) oder der Darstellung der verschiedenen Komponenten in Gradvarianzen (Abb. 7.2) können als Teil der internen Validierung auch die Differenzen zwischen der kombinierten Lösung und ihren Komponenten in Form von Schwerefeldgrößen untersucht werden. Abb. 7.7 zeigt die Differenz zwischen der Kombinationslösung IAPGc und dem Satellitenanteil IAPGs in Geoidhöhen und Schwereanomalien bei Grad und Ordnung 200. Auch dieser Vergleich dient zur Feststellung des Einflusses des Satellitenanteils auf die Gesamtlösung.

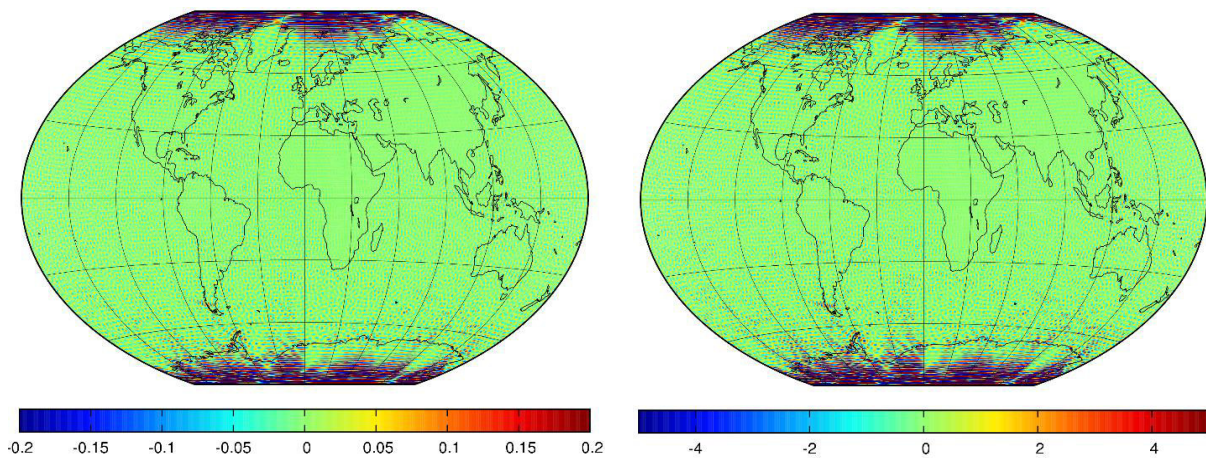


Abb. 7.7: Differenz von IAPGc zu IAPGs bei Grad 200 in Geoidhöhen [m] (links) und in Schwereanomalien [mgal] (rechts).

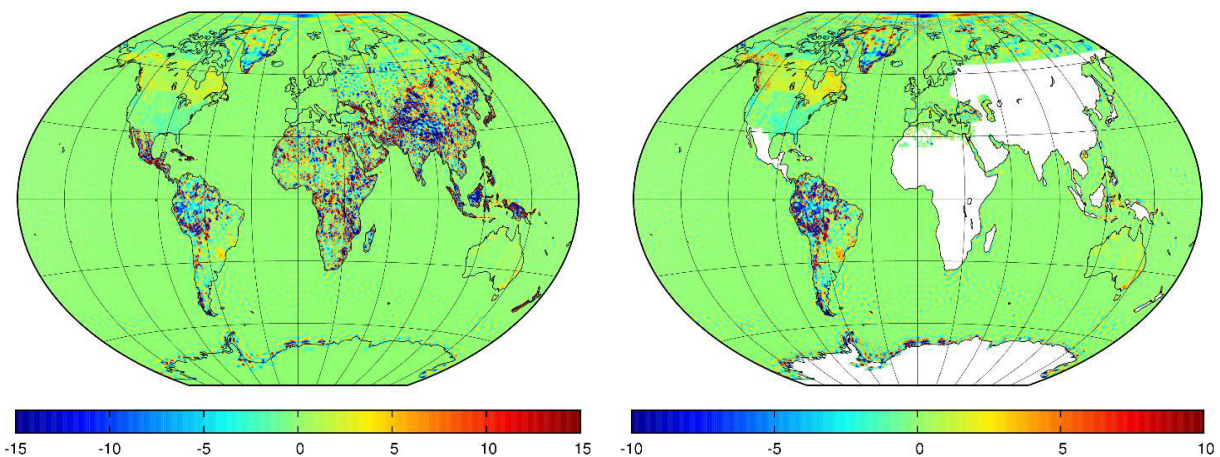


Abb. 7.8: Differenz von IAPGc zu IAPGt bei Grad 720 in Schwereanomalien [mgal] (links) und zu den IAPGt zu Grunde liegenden terrestrischen Schwereanomalien.

Wie Abb. 7.7 zeigt, sind, trotz der jeweils sehr eng gewählten Skala, weder im Falle von Geoidhöhen noch im Falle von Schwereanomalien größere Unterschiede sichtbar, abgesehen von denen, die durch die Problematik der polaren Löcher auftreten. Das bedeutet je nach Region, dass das kombinierte Modell entweder mit dem Satellitenmodell übereinstimmt oder die verwendeten terrestrischen Daten sehr gut zu den Satelliten-

tendaten passen. Dies ist ein weiterer Beweis für die gute Übereinstimmung des kombinierten Modells mit seiner Satellitenbasis im lang- und mittelwelligen Bereich.

Abb. 7.8 (links) zeigt die Differenz von IAPGc zu IAPGt bei Grad 720 in Schwereanomalien. Deutlich sichtbar sind die Differenzen in den NIMA96-Gebieten und im Amazonas, wo in der kombinierten Lösung der starke Einfluss der Satellitendaten sichtbar ist und in der terrestrischen Lösung nur Daten von schlechter Qualität vorliegen. Außerdem ist z.B. in Nordamerika die mangelnde Konsistenz der terrestrischen Datensätze sichtbar, die sich durch langwellige Offsets äußert. Dieses Problem wird in der Kombination durch die Dominanz des Satellitenanteils gelöst. Abb. 7.8 (rechts) zeigt die Residuen von IAPGc zu den originalen Schwereanomaliendatensätzen. Die Residuen sind nur dargestellt für Regionen, wo neben den Schwereanomalien keine zusätzlichen topographischen Anomalien verwendet wurden. Das Ergebnis ähnelt naturgemäß sehr stark Abb. 7.8 (links), wobei zusätzlich noch sehr kleinräumige Strukturen z.B. in den Gebirgsregionen in Kanada sichtbar sind.

7.2.3 Kovarianzfortpflanzung

Als finaler Punkt der internen Validierung wird die volle Varianz-Kovarianz-Matrix bis Grad und Ordnung 720 in Geoidhöhen fortgepflanzt.

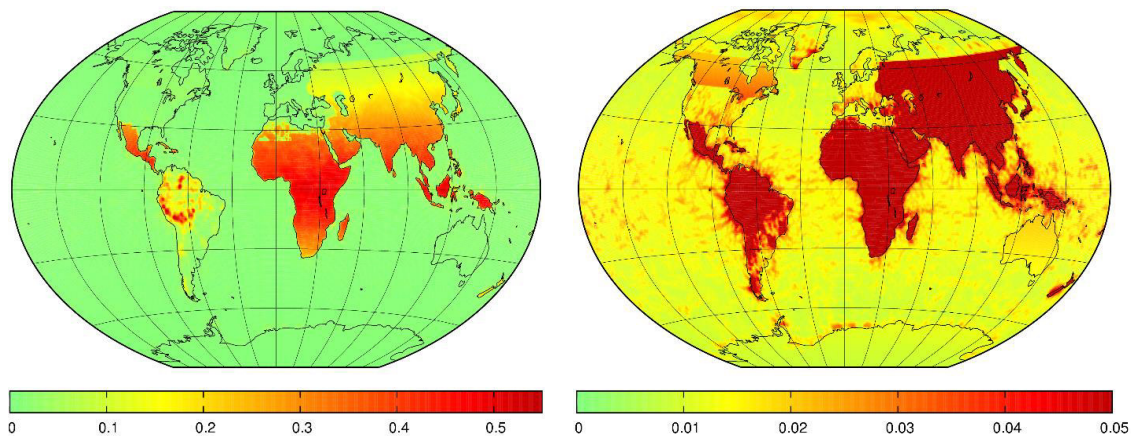


Abb. 7.9: Kovarianzfortpflanzung der vollen Varianz-Kovarianz-Matrix von IAPGc in Geoidhöhen bis Grad und Ordnung 720 [m] (links: unbeschränkte Farbskala, rechts: eingeschränkte Farbskala).

Das Ergebnis, welches letztendlich eine Folge des stochastischen Modells (siehe u.a. Abb. 7.1) ist, bestätigt die Schlüsse, welche in Kapitel 7.1 hinsichtlich der formalen Fehler in Abb. 7.2 gezogen wurden. Dort wurde der frühe Schnittpunkt der formalen Fehler von IAPGc mit der Signalkurve mit der Ungenauigkeit der NIMA96-Daten begründet. Für diese Datensätze, sowie das Amazonas-Gebiet, folgt in der Kovarianzfortpflanzung ein Geoidfehler von etwa einem halben Meter. In den restlichen Gebieten ist der Geoidfehler kleiner als 5 cm, in circa fünfundsiebzig Prozent der Fläche beträgt er ungefähr 1.5 cm. Bis auf die Gebiete der Antarktis, wo bandbegrenzte Schwereanomalien der GRACE/GOCE-Lösung auf Grund der Problematik des polaren Lochs regularisiert und mit hohem Gewicht eingeführt worden sind, scheint das Fortpflanzungsergebnis realistisch zu sein.

7.3 Externe Validierung des Modells

Im zweiten Teil der Validierung des Schwerfeldmodell IAPGc wird dieses mit Hilfe von externen Daten analysiert. Diese Daten können z.B. Schwerfeldlösungen von externen Institutionen oder GPS-Nivellement-Daten sein.

7.3.1 Vergleich mit externen Schwerefeldmodellen

Für die Vergleiche von IAPGc mit externen Schwerefeldmodellen werden EGM2008, wie in Kapitel 1.1 erläutert das meistgenutzte und bekannteste Schwerefeldmodell mit der wohl besten terrestrischen Datenbasis, sowie EIGEN-6C4, wie in Kapitel 1.1 beschrieben das hochaufgelöteste Schwerefeldmodell, welches GOCE-Daten beinhaltet, verwendet. Zunächst wird das Signal der verschiedenen Schwerefeldlösungen in Form von Gradvarianzen miteinander verglichen. Dies ist in Abb. 7.10 dargestellt.

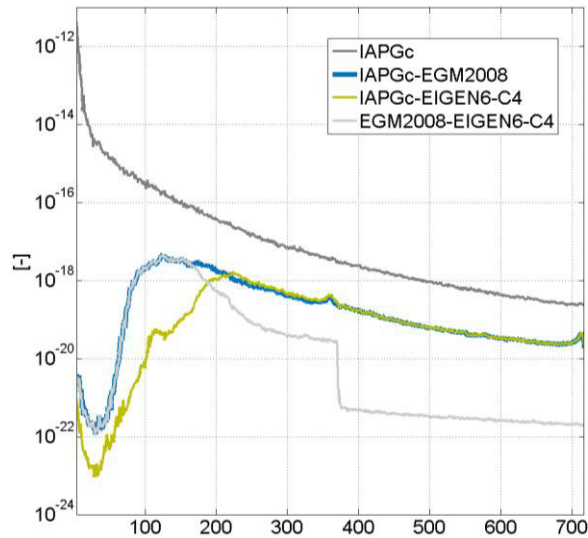


Abb. 7.10: Gradvarianzen von IAPGc im Vergleich zu externen Schwerefeldmodellen [-].

Im langwelligen Bereich sind die dimensionslosen Differenzen von IAPGc zu EIGEN-6C4 deutlich kleiner als die Differenzen zu EGM2008. Dies liegt daran, dass EGM2008 keine GOCE-Information enthält und deswegen die jeweiligen Grundlagen an Satellitendaten sehr unterschiedlich sind. Für die Grade ab ungefähr 200 verlaufen die Differenzkurven zu EGM2008 und EIGEN-6C4 in konstantem Abstand zum IAPGc-Signal. Auffällig ist, dass die beiden Differenzkurven übereinander liegen. Grund dafür ist, dass im EIGEN-6C4-Modell auch für Landbereiche das DTU-Modell verwendet wird, welches an Land mit EGM2008-Schwereanomalien aufgefüllt wurde. Beide externen Modelle enthalten so fast das identische terrestrische Signal. Dies bestätigt auch die Differenzkurve zwischen EGM2008 und EIGEN-6C4. Besonders für die Grade höher als Grad 370, welche in EIGEN-6C4 mit Hilfe eines separaten Blockdiagonalsystems berechnet wurden und in welche nur Daten aus dem DTU-Modell eingehen, sind die Differenzen sehr klein.

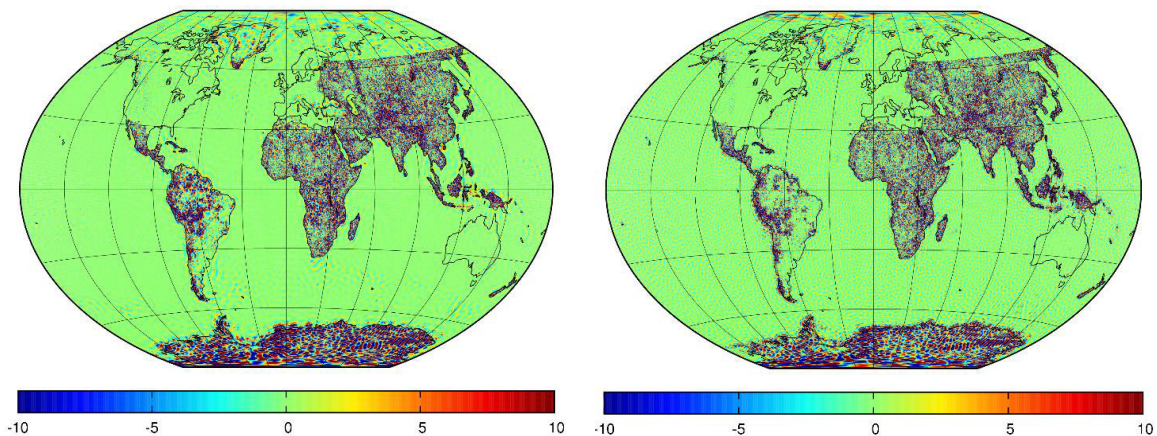


Abb. 7.11: Differenz von IAPGc zu EGM2008 (links) und EIGEN-6C4 (rechts) bei Grad 720 in Form von Schwereanomalien [mgal].

Abb. 7.11 zeigt die Differenz von IAPGc zu EGM2008 und EIGEN-6C4 in Form von Schwereanomalien. Am auffälligsten sind jene Gebiete, in denen für IAPGc die NIMA96-Daten verwendet wurden (Afrika, Asien). Hier sind sehr viele kleinräumige Strukturen zu sehen, welche auf Unterschiede im kurzwelligen Bereich deuten. Diese resultieren wohl größtenteils daraus, dass für IAPGc in diesen Gebieten über Grad 360 nur Information aus topographischen Anomalien verwendet werden konnte. Im Vergleich mit EGM2008 sind zusätzlich noch die typischen Strukturen zu sehen, welche den Mehrwert der GOCE-Information demonstrieren, vergleiche Pail et al. (2011a). In den übrigen Gebieten sind besonders in Regionen mit rauer Topographie kleine Differenzen sichtbar.

Abb. 7.12 zeigt analog zu Abb. 7.11 die Differenzen in Geoidhöhen. Im Vergleich zu EGM2008 sind hier wiederum die aus Pail et al. (2011a) bekannten Strukturen sichtbar, welche von der zusätzlichen GOCE-Information stammen. Im Verhältnis zu EIGEN-6C4 sind kleine Differenzen sichtbar, welche auf eine unterschiedlich stark gewichtete Hinzunahme der Satellitendaten deuten.

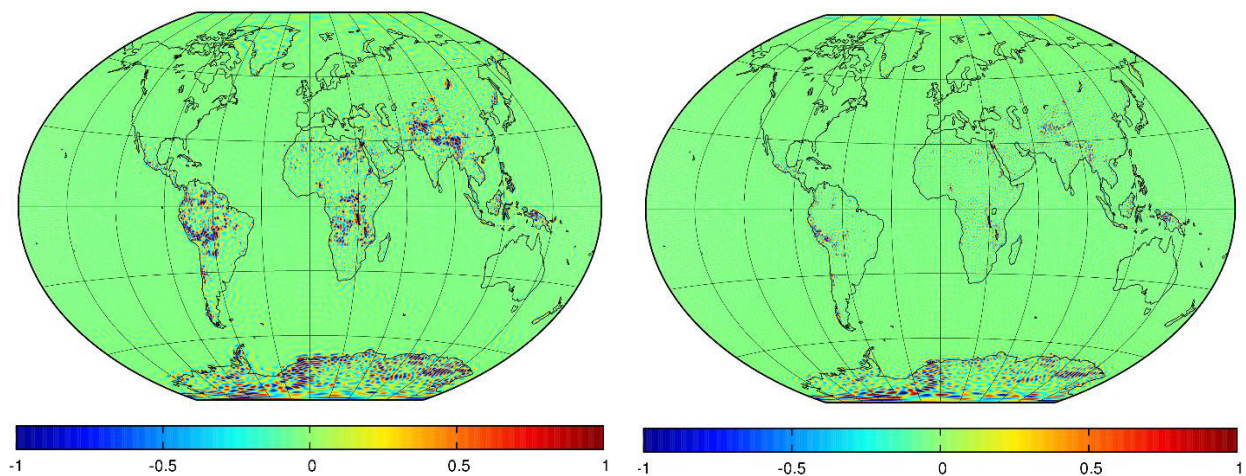


Abb. 7.12: Differenz von IAPGc zu EGM2008 (links) und EIGEN-6C4 (rechts) bei Grad 720 in Form von Geoidhöhen [m].

7.3.2 Bahntests

Wie mehrfach in dieser Arbeit beschrieben, können mit Hilfe der Satellitenschwerefeldmissionen jene Teile des Schwerefeldes, für welche die Satelliten sensitiv sind, genauer bestimmt werden als je zuvor. Umgekehrt können durch Verwendung der resultierenden Schwerefeldmodelle in der präzisen Bahnbestimmung tieffliegender Satelliten (mit Flughöhen von bis zu 1000km) Bahnfehler signifikant reduziert werden, vergleiche Visser (2005). Nutzt man verschiedene Schwerefeldmodelle für die Bahnbestimmung, lässt sich feststellen, mit welchem Schwerefeldmodell das beste Bahnergebnis erzielt werden kann. Diese sogenannten Bahntests sind folglich ein geeignetes Verfahren zur Schwerefeldvalidierung. Sie ermöglichen zum einen die Beurteilung der Qualität des langwelligen Schwerefeldanteils und zum anderen die Kontrolle, ob die Genauigkeit der Satellitenlösung durch die Kombination mit terrestrischen Daten beeinträchtigt wird.

Bei den folgenden Bahntests werden 12h-GOCE-Bahnbögen berechnet, welche mit kinematische Positionen aus SLR-Messungen verglichen werden. In die Berechnung geht Schwerefeldinformation bis Grad und Ordnung 200 ein. Die RMS-Werte zwischen den Bahnbögen und den kinematischen Positionen sind in Tab. 7-1 für verschiedene Zeiträume aus dem ersten Quartal des Jahres 2013 dargestellt. Neben EGM2008 und EIGEN-6C4 werden noch die reinen Satelliten-Schwerefeldlösungen ITSG-GRACE2014s und IAPGs in den Vergleich mit einbezogen. Aus der Berechnung wurden alle Tage eliminiert, für die der RMS höher als 30cm ist.

In der Bahnvalidierung erzielt IAPGc ein deutlich besseres Ergebnis als ITSG-GRACE2014s und EGM2008, was den Mehrwert der GOCE-Daten belegt.

Datum	Positionen	ITSG-Grace2014s	IAPGs	EGM2008	EIGEN-6C4	IAPGc
01 Jan 2013	103286	14.56	14.16	17.83	14.33	14.18
02 Jan 2013	101294	11.27	10.97	11.21	11.07	11.00
03 Jan 2013	101114	12.02	12.52	12.68	12.69	12.55
04 Jan 2013	100738	15.32	14.81	15.18	14.70	14.79
05 Jan 2013	102287	20.17	19.90	20.69	20.01	19.91
Jan 2013	2819545	16.90	16.76	17.77	16.88	16.75
Feb 2013	1827681	17.34	17.25	18.41	17.27	17.23
Mär 2013	2425221	13.91	13.70	15.56	13.88	13.67
Apr 2013	2821369	15.80	15.74	16.56	15.88	15.71
Jan – Apr 2013	9893816	15.99	15.87	17.03	15.98	15.84

Tab. 7-1: RMS [cm] von Bahnanpassungen an GOCE-Positionen basierend auf verschiedenen Schwerefeldlösungen.

Ebenso wird deutlich, dass die Kombination mit den terrestrischen Daten nicht zu einer Verschlechterung der Bahnqualität im Vergleich zum IAPGs-Modell führt, was die Ergebnisse aus Kapitel 6.2.1 bestätigt. Im Vergleich zu EIGEN-6C4 kann festgehalten werden, dass mindestens gleich gute Ergebnisse erzielt werden. Zumeist sind die Werte von IAPGc sogar leicht besser.

7.3.3 GPS-Nivellement

Vergleiche mit GPS-Nivellement als Validierungsmethode für Schwerefeldlösungen wurden bereits erstmals in Kapitel 6.3.1 beschrieben und angewandt. Im Gegensatz zu den dort durchgeführten Tests werden die Geoidhöhen im Folgenden bis Grad und Ordnung 720 entwickelt. Tab. 7-2 zeigt Ergebnisse von IAPGc im Vergleich zu EGM2008 und EIGEN-6C4.

	Australien	Kanada	Europa	Deutschland	USA	UK	Brasilien
IAPGc	23.3	12.8	20.8	03.7	59.1	06.0	30.4
EGM2008	23.7	13.2	21.1	03.4	58.9	06.0	36.7
EIGEN-6C4	23.1	12.8	21.4	03.7	58.1	06.1	30.9

Tab. 7-2: RMS von Geoidhöhendifferenzen zwischen Schwerefeldmodellen und GPS-Nivellement-Beobachtungen in ausgewählten Regionen [cm].

Im Allgemeinen ist zu erkennen, dass, mit Ausnahme des Deutschland-Datensatzes, die Schwerefeldmodelle, die GOCE-Information beinhalten, ein besseres Ergebnis erzielen. Am deutlichsten wirkt sich die Mehrinformation von GOCE auf die Ergebnisse der GPS-Nivellement-Vergleiche in Brasilien aus. Im Vergleich mit EIGEN-6C4 ist zu erkennen, dass IAPGc das mindestens gleiche Genauigkeitsniveau erreicht.

Um einen Eindruck davon zu erhalten, wie sich das Ergebnis verändert, wenn die Geoidhöhen bis zu niedrigeren Graden als Grad 720 entwickelt werden, sind in Abb. 7.13 die RMS-Werte von Geoidhöhendifferenzen bei verschiedenen sphärisch-harmonischen Entwicklungsgraden für die Regionen Australien, Brasilien, Deutschland und USA dargestellt. Im Falle von EGM2008 sind die RMS-Werte der Geoidhöhendifferenzen über alle Grade hinweg konstant, da, wie in Kapitel 6.3.1 beschrieben, der Abbruchfehler immer aus EGM2008 berechnet wird, also im Falle von EGM2008 immer das volle Modell verwendet wird, vergleiche Gruber et al. (2011). Generell bestätigen die Abbildungen auch für niedrigere Grade die Schlüsse aus Tab. 7-2. In den Entwicklungen bis Grad 200 zeigt sich, dass mit Ausnahme des Deutschland-Datensatzes durch

die GRACE/GOCE-Information die RMS-Werte kleiner werden. Im Einflussbereich der terrestrischen Daten verlaufen die Kurven von IAPGc und EIGEN-6C4 zumeist konstant.

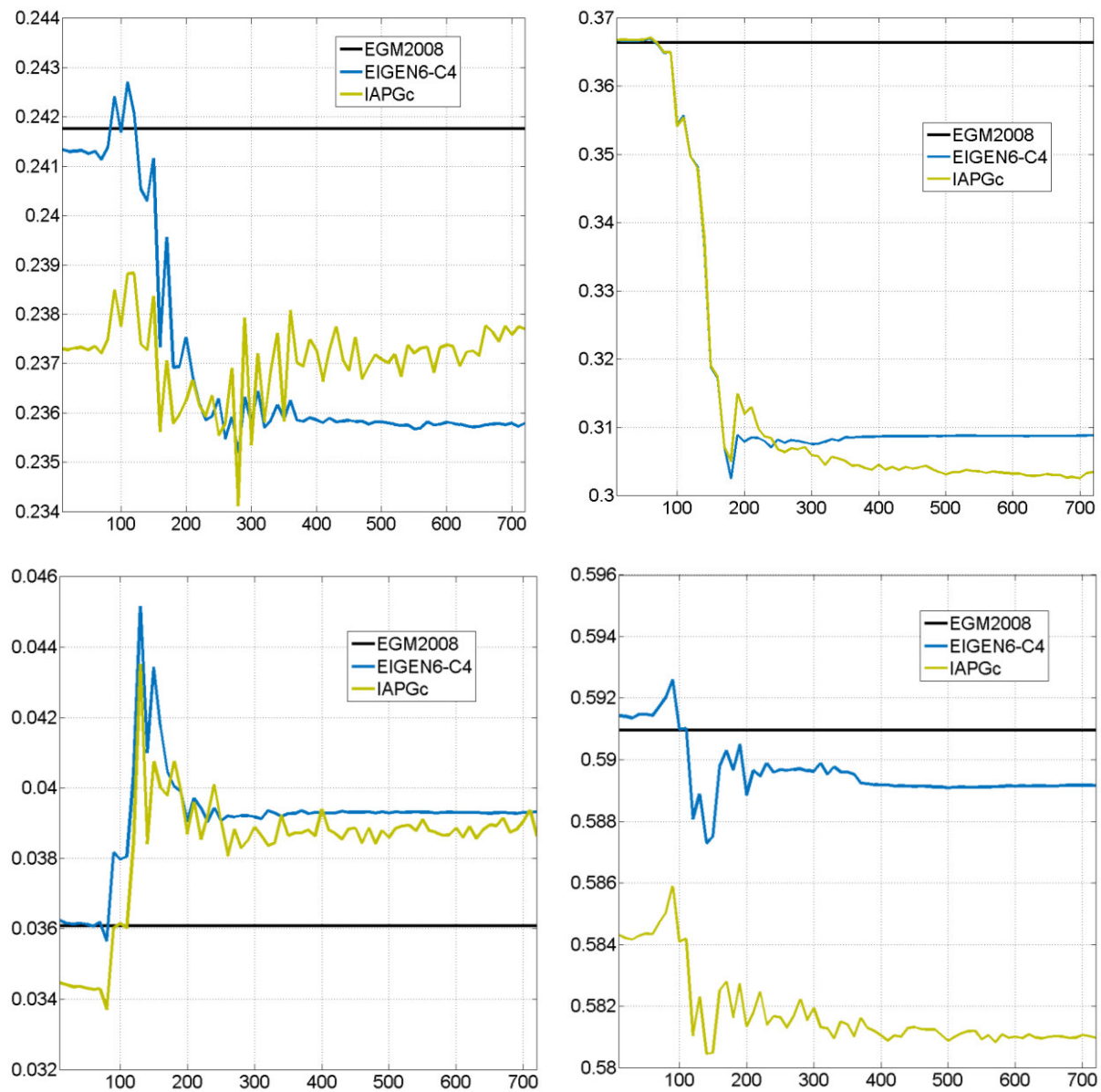


Abb. 7.13: RMS von Geoidhöhendifferenzen zwischen Schwerefeldmodellen und GPS-Nivellement-Beobachtungen in Australien (oben links), Brasilien (oben rechts), Deutschland (unten links) und USA (unten rechts) bei verschiedenen sphärisch-harmonischen Graden (x-Achse: sphärisch-harmonischer Grad; y-Achse: RMS [cm]).

7.3.4 Validierung auf Basis einer mittleren dynamischen Topographie (MDT)

Ein abschließender Test zur Validierung des IAPGc-Modells ist die Berechnung einer mittleren dynamischen Topographie (MDT), was ebenfalls für EIGEN-6C4 und EGM2008 durchgeführt wird. Die mittlere dynamische Topographie ist die Differenz zwischen der mittleren Meeresoberfläche und der Geoidhöhe, vergleiche Bingham et al. (2008). Als mittlere Meeresoberfläche wird GSFC00.2 (Wang, 2001) verwendet. Die Ergebnisse, welche alle bis Grad und Ordnung 720 entwickelt wurden, sind in Abb. 7.14 dargestellt.

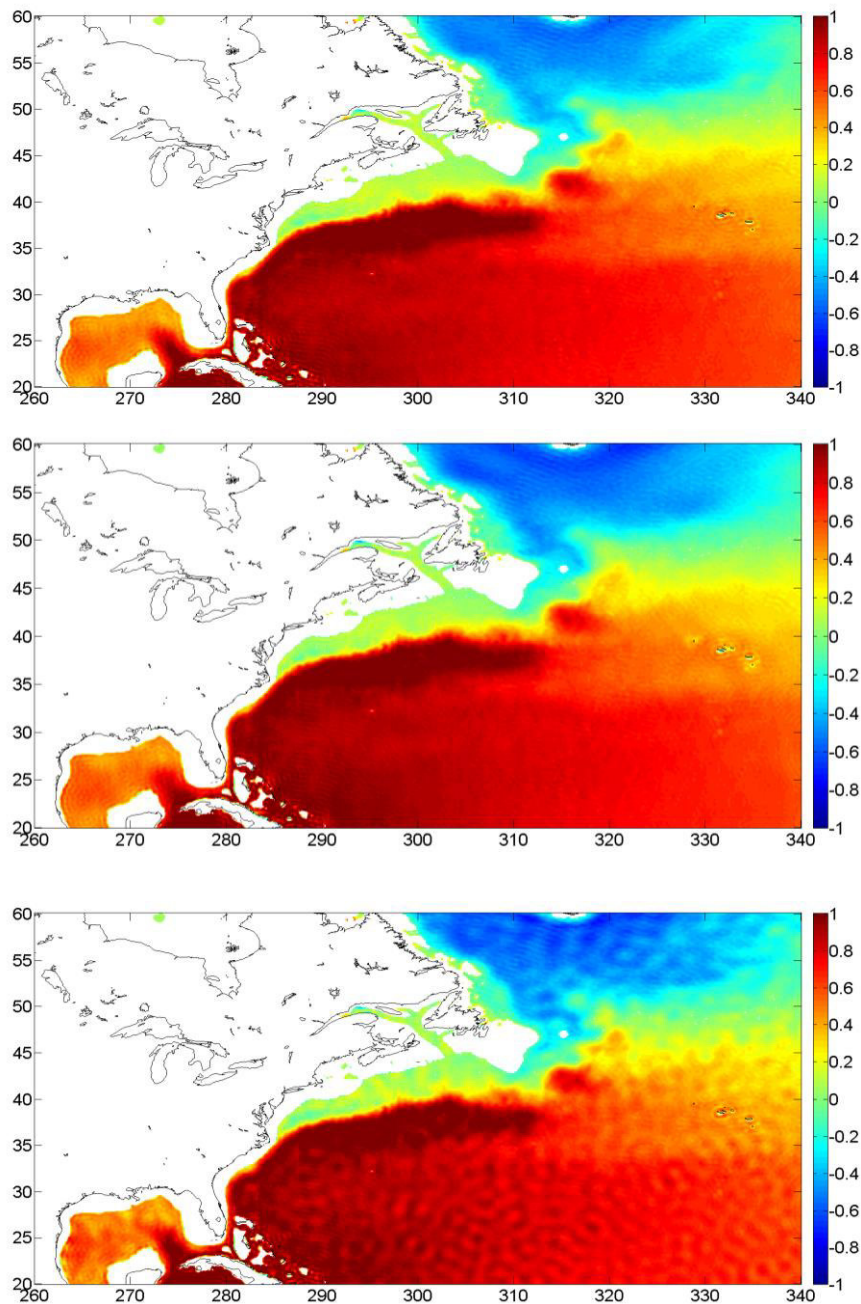


Abb. 7.14: Mittlere dynamische Topographie [m] abgeleitet aus der Differenz von GSFC00.2 zu IAPGc (oben), EGM2008 (Mitte) und EIGEN-6C4 (unten).

Der Vergleich zeigt, dass aus IAPGc eine sinnvolle mittlere dynamische Topographie abgeleitet werden kann, welche sehr gut zu dem Ergebnis von EGM2008 passt.

Im Rahmen des ESA-Projekts ‚STSE-GOCE+ Height System Unification with GOCE‘ (Gruber et al., 2014b) wurden überdies mittlere dynamische Topographien aus Schwerefeldmodellen an 113 Pegelstationen mit mittleren dynamischen Topographien aus ozeanographischen Modellen verglichen. Eines der verwendeten Schwerefeldmodelle dabei ist TUM2013x (Fecher et al., 2015), ein Vorgängermodell von IAPGc, welches weniger GRACE- und GOCE-Daten im Vergleich zu IAPGc enthält und welches, um einen Abbruchfehler zu vermeiden, jenseits von Grad 720 mit EGM2008 aufgefüllt wurde. Abb. 7.15 zeigt das Ergebnis des Vergleichs in RMS-Werten, wobei die fünf schlechtesten Übereinstimmungen an Pegelstationen aus der

Berechnung eliminiert wurden. Die Graphik enthält neben TUM2013x Ergebnisse für unter anderen EGM2008 (x am Ende des Namen des Schwerefeldmodells bedeutet jeweils, dass das Model über seinen maximalen Grad hinaus mit EGM2008 fortgesetzt wurde).

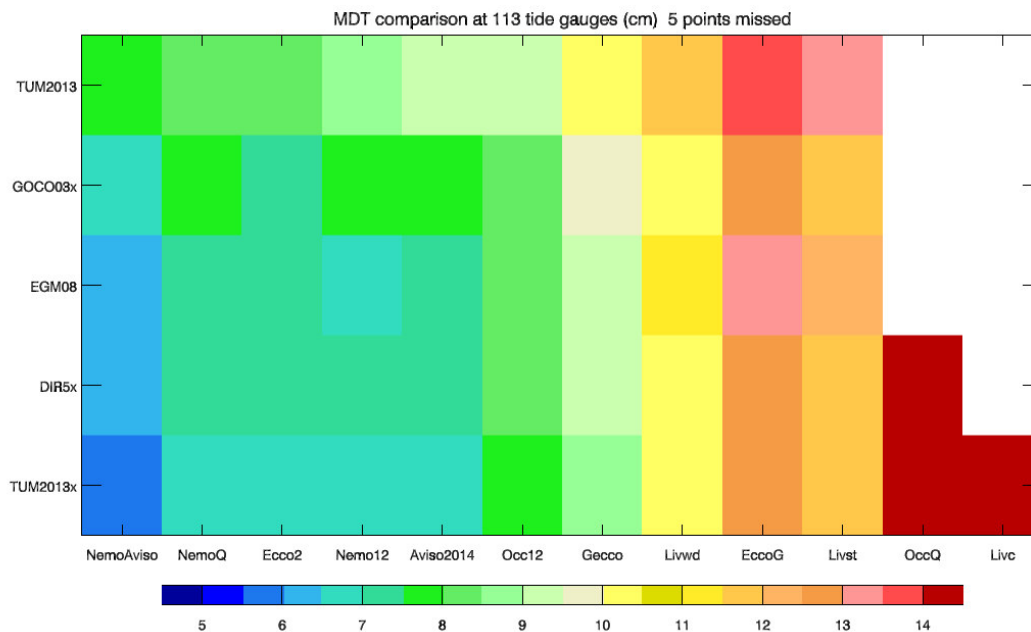


Abb. 7.15: RMS-Werte zwischen mittleren dynamischen Topographien berechnet aus Schwerefeldmodellen und ozeanographischen Modellen [cm]³⁵ (y-Achse: Schwerefeldmodelle, x-Achse: ozeanographische Modelle).

Die Abbildung zeigt, dass, im Rahmen dieser Studie, mit TUM2013x die beste Übereinstimmung mit den ozeanographischen Modellen erzielt werden konnte. Es kann davon ausgegangen werden, dass mit IAPGc ein Ergebnis erzielt werden kann, welches mindestens die Genauigkeit von TUM2013x erreicht. Natürlich müsste allerdings auch IAPGc jenseits von Grad 720 mit EGM2008-Information aufgefüllt werden, um einen Abbruchfehler zu vermeiden.

³⁵ Graphik erstellt von Chris Hughes im Rahmen von (Gruber et al., 2014b).

8 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde ein hochaufgelöstes Schwerefeldmodell bis Grad und Ordnung 720 inklusive zugehöriger Fehlerinformation in Form einer vollen Varianz-Kovarianz-Matrix bestimmt. Bei dem Modell IAPGc handelt es sich um ein Kombinationsmodell, welches Beobachtungen der Satellitenmissionen GRACE und GOCE, sowie Schwereanomalien aus terrestrischen Messungen und Satellitenaltimetrie beinhaltet. Die Berechnung des Modells erfolgte nach einem strengen kleinsten-Quadrate-Ansatz, mit dem eine möglichst realitätsnahe Gewichtung der einzelnen Beobachtungen und Datensätze umgesetzt werden konnte. Aufgrund der individuellen Gewichtung der Beobachtungen waren die Parameter stark miteinander korreliert, was zu Folge hatte, dass die resultierenden Normalgleichungssysteme voll besetzt waren. Die rechentechnischen Herausforderungen, die durch die 2 TByte große Normalgleichungsmatrix auftraten, konnten durch massiv-parallele Programmierung und die Nutzung des Hochleistungsrechnensystems SuperMUC des Leibniz-Rechenzentrums (LRZ) bewältigt werden.

Die Validierung von IAPGc in Kapitel 7 hat gezeigt, dass die verschiedenen Datenquellen konsistent in das Modell integriert werden konnten und der Übergang zwischen den verschiedenen Datenquellen im spektralen Bereich erfolgreich modelliert wurde. Wie gewünscht wird das Modell im langwelligen Bereich vom hochgenauen Satellitenanteil dominiert und im Weiteren spektral durch die Information aus den terrestrischen und altimetrischen Daten vervollständigt. Es wurde gezeigt, dass bei Grad und Ordnung 200 mit Ausnahme der polaren Bereiche keine größeren Differenzen zwischen dem Kombinationsmodell und seiner Satellitenbasis auftreten, was global betrachtet bedeutet, dass das Kombinationsmodell entweder bis zu diesem Grad vom Satellitenanteil dominiert wird oder dass die terrestrischen Daten sehr gut mit der Satelliteninformation übereinstimmen. Da angenommen werden kann, dass GRACE- und GOCE-Messungen in jenen spektralen Bereichen, in denen sie für das Schwerefeld sensitiv sind, dem unbekanntem wahren Schwerefeld am ähnlichsten sind, ist dies ein wünschenswertes Resultat. Überdies bestätigen Bahntests die gute Qualität des Kombinationsmodells im langwelligen Schwerefeldbereich. Das Kombinationsmodell erzielt mindestens genauso gute Ergebnisse wie die externen Vergleichsmodelle und es wird auch verdeutlicht, dass die hohe Genauigkeit der Satelliteninformation im langwelligen Bereich nicht im Rahmen der Kombination negativ beeinträchtigt wird. Weitere Analysen zeigen, dass Regionen, in denen kein hochgenaues terrestrisches Datenmaterial zur Verfügung steht, besonders stark von der Kombination mit den Satellitendaten profitieren. Die schlechte Datenbasis in diesen Gebieten wurde stark in der Kombinationslösung herabgewichtet, so dass sie erst bei möglichst hohem Grad in diese eingeht. Auf Grund der spektralen Limitierung der Füll Datensätze (Kapitel 5.3) ist in den Geoid- und Schwereanomalievergleichen bis Grad und Ordnung 720 ein Unterschied in IAPGc zu den Vergleichslösungen zu sehen. Diese Regionen sind, wenn man das Modell spektral vollständig betrachtet, die Schwachstelle der Kombinationslösung, was aber eine logische Folge der limitierten verfügbaren terrestrischen Datenbasis ist und im Weiteren nicht vermieden werden konnte. In jenen Regionen, in denen qualitativ hochwertige terrestrische Daten vorliegen, zeigen GPS-Nivellement-Vergleiche, dass das Kombinationsmodell im Vergleich zu den externen Modellen gut abschneidet und dass deren Qualität erreicht wird. Auch die Validierungen auf Basis einer mittleren dynamischen Meerestopographie bestätigen die gute Qualität des Kombinationsmodells.

Mit Blick auf das in Kapitel 1.2 gefasste Ziel, dass im Rahmen dieser Arbeit ‚eine optimale Schwerefeldlösung auf Basis aller verfügbaren Beobachtungen unter Verwendung eines strengen kleinsten Quadrate Ansatzes mit Hilfe von Hochleistungsrechnensystemen erzielt werden soll‘, lässt sich zusammenfassen, dass das Ziel dieser Arbeit zufriedenstellend erreicht wurde und eine qualitativ hochwertige Schwerefeldlösung berechnet werden konnte.

Die Validierung des Modells zeigt, dass das Kombinationsmodell für die verschiedenen in Kapitel 1.1 aufgeführten Anwendungen herangezogen werden kann. In Regionen mit einer guten Datenbasis zeigen die GPS-Nivellement-Vergleiche, dass durchaus Geoidhöhen aus dem Modell im Rahmen einer Bestimmung von orthometrischen Höhen verwendet werden können. Die Übereinstimmung der aus dem Modell berechneten mittleren dynamischen Topographie mit Werten aus ozeanographischen Modellen an Gezeitenstationen zeigen, dass sich das Modell auch generell zur Verwendung in Höhenprojekten eignet und das Modell in der Ozeanographie sinnvoll genutzt werden kann.

Neben dem praktischen Teil mit der Berechnung der Schwerefeldlösung bietet diese Arbeit durch die Darstellung der physikalischen (Kapitel 2), mathematischen (Kapitel 3) und rechentechnischen Grundlagen (Kapitel 4) einen allgemeinen Einblick in die kombinierte Schwerefeldbestimmung und kann als Leitfaden im Rahmen einer solchen dienen. Besonders sind verschiedene Untersuchungen hervorzuheben, welche gezeigt haben, wie stark in einer kombinierten Schwerefeldlösung der langwellige Anteil von der Satelliteninformation dominiert wird, was einerseits hilft, mangelnde Detailinformation über die altimetrischen und terrestrischen Datensätze auszugleichen (Kapitel 2.3 & 6.1) und andererseits eine spezielle Behandlung des langwelligen Schwerefeldanteils, wie er früher notwendig war, überflüssig macht (Kapitel 3.3.1 & 6.2.1). Einzelne Teile dieser Arbeit liefern auch interessante Aspekte, die über die Schwerefeldbestimmung hinausgehen. So gibt die Arbeit interessante Einblicke in die Thematiken Nicht-Orthogonalität der Kugelfunktionen, „Spectral Leakage“ und „Aliasing“ (Kapitel 3.3.2 & 6.2.2). Die Darstellung der rechentechnischen Umsetzung der Schwerefeldbestimmung (Kapitel 4.3 & 4.4) ist auch auf andere Problemstellungen übertragbar und kann für diese als Hilfestellung und Anleitung dienen.

Trotz des guten Ergebnisses, welches im Rahmen der Schwerefeldmodellierung erzielt werden konnte, gibt es noch eine Reihe von potentiellen Arbeitsfeldern, welche in Zukunft zu einer weiteren Verbesserung der Ergebnisse führen könnten. Außerdem ist, wie in Kapitel 1.1 erwähnt, auch in Zukunft mit einer Vielzahl von neuen Schwerefeldbeobachtungen zu rechnen, welche generell die Qualität von Schwerefeldmodellen nochmals deutlich erhöhen sollten. Beide Punkte werden im Folgenden erläutert.

Die Schwerefeldsatellitenmission GRACE-FO (Flechtner et al., 2015) wird eine längere Zeitreihe von neuen Schwerefeldbeobachtungen liefern, mit welchen die Genauigkeit des langwelligen Schwerefeldanteils noch einmal deutlich verbessert werden können sollte. Aufgrund der laufenden CryoSat-2-Mission (ESA), dem für 2015 geplanten Start der Sentinel-3-Mission (ESA) und der für 2017 geplanten ICESat-Mission (NASA) werden in der Altimetrie neue Daten gewonnen, was wiederum zu weiteren Verbesserungen in den altimetrischen Schwereanomalien führen sollte, insbesondere in Polgebieten. Darüber hinaus gibt es Initiativen, welche eine Verbesserung der Arktis-Schweredaten mit Hilfe von Fluggravimetrie zum Ziel haben, sowie ähnliche Initiativen für die Antarktis. Eine Verbesserung der Schweredatenbasis in den polaren Gebieten wäre sehr begrüßenswert, da hiermit auch die Problematik des polaren Lochs reduziert werden könnte. Speziell für diese Arbeit wäre es wünschenswert, Zugang zu terrestrischen hochaufgelösten Datensätzen in Regionen zu bekommen, für die im Moment noch Füll Datensätze verwendet werden müssen. Damit hätte man im Gegensatz zu der momentanen Situation Zugang zu spektral nicht eingeschränkten Daten, was auf das resultierende Schwerefeldmodell einen deutlichen Einfluss haben sollte. Der Zugang zu terrestrischen Schweredaten ist auf Grund mangelnder Verfügbarkeit oder wirtschaftlicher und politischer Restriktionen generell ein heikles Thema. Selbst für Regionen, für die im Rahmen dieser Arbeit der Zugriff auf terrestrische Daten möglich war, wäre es wünschenswert, die Daten in höherer Auflösung, bzw. optimalerweise Zugang zu verfügbaren Punktdaten zu bekommen. Damit könnte generell auf Grund einer einheitlichen Weiterverarbeitung der terrestrischen Daten zu Blockmittelwerten die Konsistenz erhöht werden. Überdies wären Korrektur- und Reduktionsschritte nachvollziehbar, denn auch wenn in dieser Arbeit gezeigt wurde, dass die Satelliteninformation viele Probleme, die hieraus entstehen, löst, so wirken sich auch kleine Verbesserungen auf die Qualität der Gesamtlösung aus. Überdies würden diese räumlich höher aufgelösten Daten auch dazu führen, dass man Schwerefeldmodelle mit einer höheren spektralen Auflösung berechnen könnte. Mit SuperMUC steht ein Rechensystem zur Verfügung, dessen Leistungsgrenze mit einem Schwerefeldmodell bis Grad und Ordnung 720 längst nicht ausgereizt ist. So wurden im Rahmen dieser Arbeit gerade einmal die Hälfte der grundsätzlich verfügbaren Knoten verwendet, welche für einen als ‚general‘-

klassifizierten Job zur Verfügung stehen. Die Jobklasse ‚large‘ würde eine noch größere Anzahl an Knoten zur Verfügung stellen.

Für die Zukunft wäre auch eine verfeinerte Datenanalyse der Schwereanomalien auf Basis von stochastischen Methoden wie einer Ausreißer-Detektion erstrebenswert. Im Rahmen dieser Arbeit wurden sehr schlechte Datenpunkte nur stark herabgewichtet, es wurden jedoch keine Punkte als Ausreißer ausgeschlossen. Dies wäre aber grundsätzlich ein vielversprechendes Vorgehen, da beim Versuch des Modells, sich Ausreißern anzupassen, ‚Ringing‘-Strukturen entstehen, also auch gute Messpunkte in Mitleidenschaft gezogen werden. Die resultierenden Datenlöcher könnten mit Hilfe der Schwerefeldsatellitenmessungen und der benachbarten Daten unter Verwendung von Kollokationstechniken gefüllt werden, siehe Krarup (1969) oder Moritz (1980).

Generell ist die Gewichtung ein Aspekt, wo noch viele Dinge analysiert werden können. In Kapitel 6.3.1 wurde gezeigt, dass eine Gewichtung nur auf Basis einer Varianzkomponentenschätzung, also ohne individuelle Gewichtung, ein sehr gutes Ergebnis erzielen kann, wenn die Genauigkeiten der Beobachtungen des zugehörigen Datensatzes keine größeren Schwankungen aufweisen. Auf Basis dieser Erkenntnis könnte man ausprobieren, welches Ergebnis erzielt werden kann, wenn die vorhandenen Datensätze weiter in Genauigkeitsregionen unterteilt würden, und eine Schätzung ohne individuelle Gewichtung vorgenommen wird. Der Südamerika-Datensatz könnte zum Beispiel in drei Teile zerlegt werden. Man könnte unterteilen in die ungenaue Amazonas/Anden-Region, die genauen Flachlandgebiete in Brasilien und Argentinien, sowie die verbleibenden Gebiete. Weitere Verbesserungen könnten zum Beispiel bei der Hinzunahme der GRACE- und GOCE-Daten erfolgen. Die Varianzkomponentenschätzung auf Basis von Vorinformation eignet sich nicht für eine Gewichtung der GOCE-Normalgleichungen, da die Problematik des polaren Lochs, die sich in den entsprechenden Unbekannten abzeichnet, zu einer viel zu negativen Bewertung der GOCE-Information führt. Hier kann versucht werden, ein Verfahren zu entwickeln, bei dem die vom polaren Loch betroffenen Koeffizienten nicht in die Bewertung einbezogen werden, so dass man eine realistischere Bewertung des Datensatzes erhält.

In Zukunft ist eine generelle Aufgabe der wissenschaftlichen Gemeinschaft, die Methoden und Datengrundlage für die Validierung der Schwerefeldmodelle zu verbessern. Dies gilt z.B. für GPS-Nivellement-Vergleiche. Aufgrund der Satellitenschwerefeldmissionen sind Geoidhöhen aus Schwerefeldmodellen mittlerweile sehr genau und es gibt sicherlich viele Regionen, für die anzunehmen ist, dass bei Vergleichen eher die Geoidhöhen aus GPS und Nivellement der limitierende Faktor sind. Es gibt wahrscheinlich auch jetzt schon mehrere Regionen auf der Erde, wo sich GPS-Nivellement-Datensätze nur noch bedingt zur Validierung von Schwerefeldmodellen eignen.

Abschließend kann festgehalten werden, dass in den folgenden Jahrzehnten mit einer Vielzahl an neuen Schwerefeldbeobachtungen zu rechnen ist, welche wiederum eine Vielzahl an Entwicklungen in den Verarbeitungsmethoden, dem methodischen Formelapparat sowie in der Rechentechnik nach sich ziehen werden.

Dank

Zuallererst möchte ich mich bei Roland Pail für die Betreuung dieser Arbeit bedanken. Trotz zahlreicher Verpflichtungen und Termine hat er immer Zeit für Diskussionen gefunden. Ich bin dankbar für seine wertvollen Kommentare, seine nie endende Geduld, seine Ruhe und seine motivierende Worte.

Reiner Rummel danke ich, dass er in all den Jahren, von meiner Teilnahme in den Lehrveranstaltungen Bezugssysteme und Potentialtheorie bis heute, für Fragen und Diskussionen zur Verfügung stand. Ich danke ihm, dass er als dritter Prüfer dieser Arbeit zur Verfügung steht und für die wertvollen Kommentare.

Vielen Dank an Frank Flechtner, dass er trotz vollen Terminkalenders als zweiter Prüfer zur Verfügung steht und für die wertvollen Kommentare und Anmerkungen.

Thomas Gruber danke ich für die Unterstützung in den zurückliegenden Jahren, die vielen Diskussionen und positiven Ratschläge. Danke auch für die Bereitstellung der GPS-Nivellement Software.

Mein Dank gilt Markus Heinze für die Berechnung der Bahntests, sowie für Rat und Tat bei vielen rechner-spezifischen Problemen. Ich danke Peter Steigenberger für seine Hilfe bei diversen Fragen und Problemen. Ebenso danke ich Christian Ackermann für viele Windows und Linux Tipps und Tricks.

Dem Leibniz-Rechenzentrum danke ich für die Bereitstellung der Rechenressourcen auf SuperMUC, welche fundamental für diese Arbeit waren. Vielen Dank für die Hilfestellung bei zahlreichen Fragen an das LRZ Team, besonders an Reinhold Bader.

Die Berechnungen in dieser Arbeit wären nicht möglich ohne die tollen Ergebnisse der GOCO Gruppe. Ich danke allen Mitgliedern dieser Gruppe, besonders Eduard Höck und Jan-Martin Brockmann für die Bereitstellung von SGG Normalgleichungen, sowie Torten Mayer-Gürr, dem Verantwortlichen von ITSG-Grace2014s.

Ebenso unmöglich gewesen wäre diese Arbeit ohne die terrestrischen und altimetrischen Daten. Danke hierfür an Steve Kenyon und Nikki Markiel, Ole Anderson, Marc Veronneau und Jianliang Huang, Heiner Denker, Thomas Grombein, Christian Hirt und Will Featherstone und die ArcGP Gruppe.

Ich danke Simon Holmes für wertvolle Tipps und Diskussionen.

Danke an alle meine Kollegen für viele abwechslungsreiche und witzige Stunden. Besonderen Dank an Moni, Alex, Michael, Sia und meine Zimmerkollegen Nadja, Weiyong und Xinxing.

Ein besonderer Dank für nie endende Unterstützung an meine Familie. Danke an meine Freunde.

Literaturverzeichnis

Albertella A, R Savcenko, T Janjić, R Rummel, W Bosch, J Schröter (2012): High resolution dynamic ocean topography in the Southern Ocean from GOCE. *Geophysical Journal International*, 190 (2), pp. 922–930, doi:10.1111/j.1365-246X.2012.05531.x.

Almasi G S; A Gottlieb (1989): Highly parallel computing. Benjamin/Cummings, The Benjamin/Cummings series in computer science and engineering, Redwood City, Calif., ISBN:0-8053-0177-1.

Andersen O B, P Knudsen (1998): Global marine gravity field from the ERS-1 and Geosat geodetic mission altimetry. *Journal of Geophysical Research*, 103 (C4), pp. 8129–8137, doi:10.1029/97JC02198.

Andersen O B, P Knudsen, P A M Berry (2010): The DNSC08GRA global marine gravity field from double retracked satellite altimetry. *Journal of Geodesy*, 84 (3), pp. 191–199, doi:10.1007/s00190-009-0355-9.

Andersen O B, P Knudsen, S C Kenyon, J K Factor, S Holmes (2013): The DTU13 Global marine gravity field - first evaluation. OSTST Meeting, Boulder, CO, 2013.

Anderson E, Z Bai, C Bischof, S Blackford, J Demmel, J Dongarra et al. (1999): LAPACK users' guide. 3rd ed. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104), Software, environments, tools, 9, Philadelphia, Pa., ISBN:0-89871-447-8.

Bannoura W J, A Wade, D N Srinivas (2005): NOAA Ocean Surface Topography Mission Jason-2 project overview. In: OCEANS. Proceedings of MTS/IEEE, doi: 10.1109/OCEANS.2005.1640083.

Beutler G (2005): Methods of celestial mechanics. Springer, Berlin, Heidelberg, ISBN:978-3-540-40749-2.

Bingham R J, K Haines, C W Hughes (2008): Calculating the Ocean's Mean Dynamic Topography from a Mean Sea Surface and a Geoid. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 25 (10), pp. 1808–1822, doi:10.1175/2008JTECHO568.1.

Bingham R J, P Knudsen, O Andersen, R Pail (2011): An initial estimate of the North Atlantic steady-state geostrophic circulation from GOCE. *Geophysical Research Letters*, 38 (1), doi:10.1029/2010GL045633.

Blackford L S; J Choi; A Cleary; E D'Azevedo; J Demmel; I Dhillon et al. (1997): ScaLAPACK user's guide. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM 3600 Market Street Floor 6 Philadelphia PA 19104), Software, environments, tools, 4. Online verfügbar unter http://epubs.siam.org/ebooks/siam/software_environments_and_tools/se04, Philadelphia, Pa, ISBN:0-89871-397-8.

Bloßfeld M, H Müller, D Angermann (2011): Adjustment of EOP and gravity field parameters from SLR observations. In: Proceedings of the 17th ILRS Workshop.

Bouman J, J Ebbing, S Meeke, F R Abdul, M Fuchs, S Gradmann, R Haagmans, V Lieb, M Schmidt, D Dettmering, W Bosch (2015): GOCE gravity gradient data for lithospheric modeling. *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*, 35, pp. 16–30, doi:10.1016/j.jag.2013.11.001.

Braitenberg C (2015): Exploration of tectonic structures with GOCE in Africa and across-continent. *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*, 35, pp. 88–95, doi: 10.1016/j.jag.2014.01.013.

Brockmann J M (2008): Effiziente Varianzkomponentenschätzung über iterative Techniken in der GOCE-Daten Prozessierung. Institut für Geodäsie und Geoinformation. Diplomarbeit. Uni Bonn, Bonn.

Brockmann J M (2014): On High Performance Computing in Geodesy. Applications in Global Gravity Field Determination. Institut für Geodäsie und und Geoinformation. Dissertation. Universität Bonn, Bonn.

- Brockmann J M, N Zehentner, E Höck, R Pail, I Loth, T Mayer-Gürr, W-D Schuh (2014): EGM_TIM_RL05: An independent geoid with centimeter accuracy purely based on the GOCE mission. *Geophysical Research Letters*, 41, pp. 8089–8099, doi:10.1002/2014GL061904.
- Brown G S (1977): The Average Impulse Response of a Rough Surface and Its Applications. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. AP-25, NO. 1, pp. 67–74.
- Bruinsma S, C Förste, O Abrikosov, J-C Marty, M-H Rio, S Mulet, S Bonvalot (2013): The new ESA satellite-only gravity field model via the direct approach. *Geophysical Research Letters*, 40 (14), pp. 3607–3612, doi:10.1002/grl.50716.
- Buchar E (1958): Motion of the Nodal Line of the Second Russian Earth Satellite (1957 β) and Flattening of the Earth. *Nature*, 182 (4629), pp. 198–199, doi:10.1038/182198b0.
- Chivers I; J Sleightholme (2012): Introduction to Programming with Fortran. 2nd ed. 2012. Springer London Ltd, England, ISBN:978-0-85729-232-2.
- Claessens S J, C Hirt (2013): Ellipsoidal topographic potential: New solutions for spectral forward gravity modeling of topography with respect to a reference ellipsoid. *Journal of Geophysical Research Solid Earth*, 118 (11), pp. 5991–6002, doi:10.1002/2013JB010457.
- Colombo O (1981): Numerical Methods for Harmonic Analysis on the Sphere. Department of Geodetic Science. Report No. 310. The Ohio State University, Columbus, Ohio.
- Dahle, C., Flechtner, F., Gruber, C., König, D., König, R., Michalak, G., Neumayer, K.-H. (2013): GFZ GRACE Level-2 Processing Standards Document for Level-2 Product Release 0005: revised edition, Scientific Technical Report – Data, Deutsches GeoForschungsZentrum GFZ, Potsdam, doi:10.2312/GFZ.b103-1202-25.
- Darwin G H (1899): The Theory of the Figure of the Earth. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (Vol. 60), p. 82–82.
- Denker H, J P Barriot, R Barzaghi, D Fairhead, R Forsberg, J Ihde, A Kenyeres, U Marti, M Sarraillh, I Tziavos (2008): A new European Gravimetric Quasigeoid EGG2008. International Symposium on 'Gravity, Geoid and Earth Observation 2008', Chania, Griechenland, 2008.
- Dongarra J, R C Whaley (1997): A User's Guide to the BLACS v1.1. Technical Report CS-95-281. University of Tennessee, Knoxville.
- Drinkwater M R, R Floborghagen, R Haagmans, D Muzi, A Popescu (2003): GOCE: ESA's first Earth Explorer Core mission. In: Beutler G et al. (Eds.): Earth Gravity Field from Space - from Sensors to Earth Science. In the Space Sciences Series of ISSI (Vol. 18). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, pp. 419–432, ISBN:1-4020-1408-2.
- Drinkwater M R, R Francis, G Ratier, D J Wingham: The European Space Agency's Earth Explorer Mission CryoSat: measuring variability in the cryosphere. *Annals of Glaciology*, 39 (1), pp. 313-320, doi:10.3189/172756404781814663.
- Dong X, K Xu, H Liu, J Jiang (2004): The radar altimeter and scatterometer of China's HY-2 satellite. In: Proceedings of IGARSS 2004, Anchorage, AK, USA, doi:10.1109/IGARSS.2004.1370659.
- Ekman M (1989): Impacts of geodynamic phenomena on systems for height and gravity. *Bulletin Géodésique*, 63 (3), pp. 281–296, doi:10.1007/BF02520477.
- Ellis T M R; I R Philips; T M Lahey (1995): Fortran 90 programming. Addison-Wesley, International computer science series, Wokingham, England, Reading, Mass., ISBN:0-201-54446-6.
- Eötvös R (1906): Bestimmung der Gradienten der Schwerkraft und ihrer Niveaulächen mit Hilfe der Drehwaage. Verhandlungen der 15. allgemeinen Konferenz der Internationalen Erdmessung, Budapest.
- Escudier P, Kunstmann G, Parisot F (2000): Jason System Overview and Status. *CNES/AVISO Newsletter*, 7, pp. 9-15.

- Featherstone W E, J F Kirby, C Hirt, M S Filmer, S J Claessens, N J Brown, G Hu, G M Johnston (2011): The AUSGeoid09 model of the Australian Height Datum. *Journal of Geodesy*, 85 (3), pp. 133–150, doi:10.1007/s00190-010-0422-2.
- Fecher T, T Gruber, R Pail (2011): The gravity field - an important parameter for Earth observation. *inSiDE*, 9 (2), pp. 26–31. Online verfügbar unter http://inside.hlrs.de/htm/Edition_02_11/article_07.html.
- Fecher T, R Pail, T Gruber (2010): Globale Schwerefeldbestimmung aus terrestrischen Daten. Geodätische Woche, Köln.
- Fecher T, R Pail, T Gruber (2012): The combination of terrestrial and satellite gravity data in the context of global gravity field determination. International Symposium on Gravity, Geoid and Height Systems GGHS, Venedig.
- Fecher T, R Pail, T Gruber (2013): A Global Gravity Field Model to Degree/Order 720 Combining GOCE and Complementary Terrestrial and Satellite Data. ESA Living Planet Symposium, Edinburgh.
- Fecher T, R Pail, T Gruber (2015): Global gravity field modeling based on GOCE and complementary gravity data. *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*, 35, pp. 120–127, doi:10.1016/j.jag.2013.10.005.
- Flechtner F, C Dahle, K H Neumayer, R König, C Förste (2010): The Release 04 CHAMP and GRACE EIGEN Gravity Field Models. In: Flechtner F M et al. (Eds.): System Earth via Geodetic-Geophysical Space Techniques (Advanced Technologies in Earth Sciences). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pp. 41–58, ISBN:978-3-642-10227-1, doi:10.1007/978-3-642-10228-8_4.
- Flechtner F, P Morton, M Watkins, F Webb (2015): Status of the GRACE Follow-on Mission. In: Gravity, Geoid and Height Systems: Proceedings of the IAG Symposium GGHS2012.
- Forsberg R, S C Kenyon (2004): Gravity and Geoid in the Arctic Region - The Northern Polar Gap now filled. In: GOCE, The Geoid and Oceanography. Proceedings of the second international GOCE User Workshop. Frascati: ESA/ESRIN.
- Förste C, S Bruinsma, R Shako, J-C Marty, F Flechtner, O Abrikosov, C Dahle, J-M Lemoine, K Neumayer, R Biancale, F Barthelmes, R König, G Balmino (2011): EIGEN-6 - a new combined global gravity field model including GOCE data from the collaboration of GFZ-Potsdam and GRGS-Toulouse. EGU General Assembly (Geophysical Research Abstracts 13, EGU2011-3242-2).
- Förste C, R Schmidt, R Stubenvoll, F Flechtner, U Meyer, R König, H Neumayer, R Biancale, J-M Lemoine, S Bruinsma, S Loyer, F Barthelmes, S Esselborn (2008): The GeoForschungsZentrum Potsdam/Groupe de Recherche de Géodésie Spatiale satellite-only and combined gravity field models: EIGEN-GL04S1 and EIGEN-GL04C. *Journal of Geodesy*, 82 (6), pp. 331–346, doi:10.1007/s00190-007-0183-8.
- Francis C R (1984): The ERS-I altimeter-an overview. In: Proceedings of ERS-I Radar Altimeter Data Products Workshop, ESA SP-221.
- Francis C R, G Graf, P G Edwards, M McCraig, C McCarthy, A Lefebvre, B Pieper, P Y Pouvreau, R Wall, F Weschler (1995): The ERS-2 spacecraft and its payload. *ESA Bulletin*, 83, pp.13 -31.
- Fu, L-L, E J Christensen, C A Yamarone Jr, M Lefebvre, Y Ménard, M Dorrer, P Escudier (1994): TOPEX/POSEIDON mission overview. *Journal of Geophysical Research*, 99(C12), pp. 24369–24381, doi:10.1029/94JC01761.
- Gatti A, M Reguzzoni, G Venuti (2013): The height datum problem and the role of satellite gravity models. *Journal of Geodesy*, 87 (1), pp. 15–22, doi:10.1007/s00190-012-0574-3.
- Greene W H (2012): Econometric analysis. 7th ed. Prentice Hall, Boston, ISBN:978-0131395381.
- Grombein T, K Seitz, B Heck (2013): Topographic-isostatic reduction of GOCE gravity gradients. In: Proceedings of the XXV General Assembly of the International Union of Geodesy and Geophysics. Melbourne, Australien.
- Gropp W; E Lusk; A Skjellum (2007): MPI. Eine Einführung ; portable parallele Programmierung mit dem Message-passing-Interface. Oldenbourg, München, Wien, ISBN:978-3-486-58068-6.

- Gruber T (2000): Hochauflösende Schwerefeldbestimmung aus Kombination von terrestrischen Messungen und Satellitendaten über Kugelfunktionen. Scientific Technical Report STR 00/16. GeoForschungsZentrum Potsdam.
- Gruber T, A Bode, C Reigber, P Schwintzer, G Balmino, R Biancale, J-M Lemoine (2002): GRIM5-C1: Combination solution of the global gravity field to degree and order 120. In: Sansò F and M G Sideris (Eds.): Gravity, Geoid and Geodynamics 2000 (International Association of Geodesy Symposia), Bd. 123. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, p. 149–149, ISBN:978-3-642-07634-3, doi:10.1007/978-3-662-04827-6_24.
- Gruber T, C Gerlach, R Haagmans (2012): Intercontinental height datum connection with GOCE and GPS-levelling data. *Journal of Geodetic Science*, 2 (4), doi:10.2478/v10156-012-0001-y.
- Gruber T, M Murböck, T NGGM-D (2014a): e2.motion - Earth System Mass Transport Mission (Square) - Concept for a Next Generation Gravity Field Mission. Final Report of Project "Satellite Gravimetry of the Next Generation (NGGM-D). C.H. Beck (318). Online verfügbar unter <http://dgk.badw.de/fileadmin/docs/b-318.pdf>.
- Gruber T, R Rummel, O Abrikosov, R van Hees (2010): GOCE Level 2 product data handbook. GO-MA-HPF--GS-0110, Issue 4.3. The European GOCE Gravity Consortium EGG-C.
- Gruber T, R Rummel, J Ihde, G Liebsch, A Rülke, M G Sideris, E Rangelova, P L Woodworth, C W Hughes (2014b): STSE-GOCE+ Height System Unification with GOCE. Summary and Final Report (GO-HSU-RP-0021). 1.0. Aufl. ESA Study Contract Report.
- Gruber T, Visser, P. N. A. M., C Ackermann, M Hosse (2011): Validation of GOCE gravity field models by means of orbit residuals and geoid comparisons. *Journal of Geodesy*, 85 (11), pp. 845–860, doi:10.1007/s00190-011-0486-7.
- Hammerstein A (1930): Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen. *Acta mathematica*, 54.
- Hegering H-G (2012): 50 Jahre LRZ. 1962 – 2012, das Leibniz-Rechenzentrum der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Leibniz-Rechenzentrum, Garching, ISBN:978-3-00-038333-5.
- Heiskanen W A; H Moritz (1967): Physical Geodesy. First Edition. W.H.Freeman & Co Ltd, San Francisco, ISBN:0716702339.
- Hirt C, M Kuhn (2014): Band-limited topographic mass distribution generates full-spectrum gravity field: Gravity forward modeling in the spectral and spatial domains revisited. *Journal of Geophysical Research Solid Earth*, 119 (4), pp. 3646–3661, doi:10.1002/2013JB010900.
- Hoffmann K-H (2012): Akademie Aktuell - Zeitschrift der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, ISSN 1436-753X. Online verfügbar unter http://www.badw.de/aktuell/akademie_aktuell/2012/heft2/00_aa_2012_02_gesamt.pdf, München.
- Hofsommer D, M Potters (1960): Table of Fourier Coefficients of Associated Legendre Functions. In: Proceedings of the KNAW (series A, Mathematical Sciences, vol 63, no 5). Amsterdam, pp. 460–466.
- Horvath A, S Dinardo, J Benveniste (2011): CryoSat-2 Low Rate and SAR Mode in the Coastal Zone – Limits and Possibilities with an Outlook to Sentinel-3. 5th Coastal Altimetry Workshop, San Diego, USA, 2011.
- Hosse M, R Pail, M Horvath, N Holzrichter, B D Gutknecht (2014): Combined Regional Gravity Model of the Andean Convergent Subduction Zone and Its Application to Crustal Density Modelling in Active Plate Margins. *Surveys of Geophysics*, 35 (6), pp. 1393–1415, doi:10.1007/s10712-014-9307-x.
- Hughes C W, R J Bingham (2008): An Oceanographer's Guide to GOCE and the Geoid. *Ocean Science* (Vol. 4, Issue 1), p. 15–15, doi:10.5194/os-4-15-2008.
- Idris N H, X Deng, O B Andersen (2014): The importance of coastal altimetry retracking and detiding: a case study around the Great Barrier Reef, Australia. *International Journal of Remote Sensing*, 35 (5), pp. 1729–1740, doi:10.1080/01431161.2014.882032.
- Jäger R (2005): Klassische und robuste Ausgleichungsverfahren. Ein Leitfaden für Ausbildung und Praxis von Geodäten und Geoinformatikern. Wichmann, Heidelberg, ISBN:978-3879073702.

- Kammeyer K-D; K Kroschel (2012): Digitale Signalverarbeitung. 8., korr. Aufl. Springer Vieweg, Wiesbaden, ISBN:9783834816443.
- Kenyon S C, N K Pavlis (1996): The development of a global surface gravity data base to be used in the joint DMA/GSFC geopotential model. In: Proceedings of IAG Symposium No. 116, Global Gravity Field and its Temporal Variations: Springer.
- Klees R, P Ditmar, P Broersen (2003): How to handle colored observation noise in large least-squares problems. *Journal of Geodesy* (11-12), pp. 629–640, doi:10.1007/s00190-002-0291-4.
- Klees R, R Koop, R van Geemert, Visser, P. N. A. M. (2002): GOCE Gravity Field Recovery Using Massive Parallel Computing. In: Sansò F and M G Sideris (Eds.): Gravity, Geoid and Geodynamics 2000 (International Association of Geodesy Symposia), Bd. 123. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pp. 109–116, ISBN:978-3-642-07634-3, doi:10.1007/978-3-662-04827-6_18.
- Knudsen P, R Bingham, O Andersen, M-H Rio (2011): A global mean dynamic topography and ocean circulation estimation using a preliminary GOCE gravity model. *Journal of Geodesy*, 85 (11), pp. 861–879, doi:10.1007/s00190-011-0485-8.
- Koch K-R (1997): Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen. 3. Aufl. Dümmler, Bonn, ISBN:978-3427789239.
- Koch K-R, J Kusche (2002): Regularization of geopotential determination from satellite data by variance components. *Journal of Geodesy*, 76 (5), pp. 259–268, doi:10.1007/s00190-002-0245-x.
- Koop R (1993): Global gravity field modelling using satellite gravity gradiometry. Nederlandse Commissie voor Geodesie, New Series, 38, Delft, ISBN:978 90 6132 246 7.
- Krarup T (1969): A Contribution to the Mathematical Foundation of Physical Geodesy. Geodætisk Institut. Meddelelse no. 44, København.
- Krasbutter I (2009): Dekorrelation und Daten TÜV der GOCE-Residuen. Institut für Geodäsie und Geoinformation. Diplomarbeit. Universität Bonn, Bonn.
- Krylov V I; A H Stroud (2005): Approximate calculation of integrals. Dover ed. Dover Publications, Dover books on mathematics, Mineola, N.Y, ISBN:048615467X.
- Lawson C L, R J Hanson, D R Kincaid, F T Krogh (1979): Basic Linear Algebra Subprograms for Fortran Usage. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 5 (3), pp. 308–323, doi:10.1145/355841.355847.
- Lemoine F G; S C Kenyon; J K Factor; R G Trimmer; N K Pavlis; D S Chinn et al. (1998): The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96, Greenbelt, MD, USA.
- Lerch F J, R S Nerem, B H Putney, T L Felsentreger, B V Sanchez, J A Marshall, S M Klosko, G B Patel, R G Williamson, D S Chinn, J C Chan, K E Rachlin, N L Chandler, J J McCarthy, S B Luthcke, N K Pavlis, D E Pavlis, J W Robbins, S Kapoor, E C Pavlis (1994): A geopotential model from satellite tracking, altimeter, and surface gravity data: GEM-T3. *Journal of Geophysical Research*, 99 (B2), p. 2815–2815, doi:10.1029/93JB02759.
- Marussi A (1985): Intrinsic Geodesy. Springer, Berlin, ISBN:978-3-642-70245-7.
- Mayer-Gürr T (2006): Gravitationsfeldbestimmung aus der Analyse kurzer Bahnbögen am Beispiel der Satellitenmissionen CHAMP und GRACE. Institut für Theoretische Geodäsie. Dissertation. Universität Bonn, Bonn.
- Mayer-Gürr T, A Eicker, E Kurtenbach, K-H Ilk (2010): ITG-GRACE: Global Static and Temporal Gravity Field Models from GRACE Data. In: Flechtner F et al. (Eds.): System Earth via Geodetic-Geophysical Space Techniques (Advanced Technologies in Earth Sciences). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pp. 159–168, ISBN:978-3-642-10227-1, doi:10.1007/978-3-642-10228-8_13.
- Mayer-Gürr T, K H Ilk, A Eicker, M Feuchtinger (2005): ITG-CHAMP01: a CHAMP gravity field model from short kinematic arcs over a one-year observation period. *Journal of Geodesy*, 78 (7-8), pp. 462–480, doi:10.1007/s00190-004-0413-2.

- Mayer-Gürr T, N Zehentner, B Klinger, A Kvas (2014): ITSG-Grace2014: a new GRACE gravity field release computed in Graz. GRACE Science Team Meeting (GSTM), Potsdam, 2014.
- McKenzie D, W Yi, R Rummel (2014): Estimates of T_e from GOCE data. *Earth and Planetary Science Letters*, 399, pp. 116–127, doi:10.1016/j.epsl.2014.05.003.
- Mercier F, V Rosmorduc, L Carrere, P Thibaut (2010): Coastal and Hydrology Altimetry product (PIS-TACH) handbook. CLS-DOS-NT-10-246. AVISO.
- Merson R H, D G King-Hele (1958): Use of Artificial Satellites to Explore the Earth's Gravitational Field: Results from Sputnik 2. *Nature*, 182 (4636), pp. 640–641, doi:10.1038/182640a0.
- Metzler B, R Pail (2005): GOCE Data Processing: The Spherical Cap Regularization Approach. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 49 (4), pp. 441–462, doi:10.1007/s11200-005-0021-5.
- Montenbruck O; E Gill (2000): Satellite orbits. Models, methods, and applications. Springer, Berlin, ISBN:978-3-540-67280-7.
- Moritz H (1980): Advanced physical geodesy. Wichmann, Karlsruhe, ISBN:3879071063.
- Moritz H (2000): Geodetic Reference System 1980. *Journal of Geodesy*, 74 (1), pp. 128–162, doi:10.1007/s001900050278.
- Nerem R S, F J Lerch, B H Putney, S M Klosko, G B Patel, R G Williamson, E C Pavlis (1992): An Improved Model of the Earth's Gravity Field: GEM-T3. In: Mueller I I and O L Colombo (Eds.): From Mars to Greenland: Charting Gravity With Space and Airborne Instruments (International Association of Geodesy Symposia), Bd. 110. New York, NY: Springer New York, pp. 29–44, ISBN:978-0-387-97857-4, doi:10.1007/978-1-4613-9255-2_3.
- Neumann F (1887): Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. Teubner, Leipzig.
- Niemeier W (2008): Ausgleichsrechnung. Statistische Auswertemethoden. 2. Aufl. De Gruyter, Berlin, ISBN:978-3110190557.
- NIMA (2000): DOD World Geodetic System 1984. Technical Report 8350.2. Third Edition.
- Ohm J (2010): Signalübertragung. Grundlagen der digitalen und analogen Nachrichtenübertragungssysteme. Springer, ISBN:9783642101991.
- Pail R, S Bruinsma, F Migliaccio, C Förste, H Goiginger, W-D Schuh, E Höck, M Reguzzoni, J M Brockmann, O Abrikosov, M Veicherts, T Fecher, R Mayrhofer, I Krasbutter, F Sanso, C C Tscherning (2011a): First GOCE gravity field models derived by three different approaches. *Journal of Geodesy*, 85 (11), pp. 819–843, doi:10.1007/s00190-011-0467-x.
- Pail R, H Goiginger, W-D Schuh, E Höck, J M Brockmann, T Fecher, T Mayer-Gürr, J Kusche, A Jäggi, L Prange, D Rieser, W Hausleitner, A Maier, S Krauss, O Baur, I Krasbutter, T Gruber (2011b): Combination of GOCE data with complementary gravity field information. In: Ouwehand L (Ed.): Proceedings of the 4th International GOCE User Workshop, ESA Publication SP-696: ESA/ESTEC.
- Pail R, W-D Schuh, M Wermuth (2005): GOCE Gravity Field Processing. In: Jekeli C et al. (Eds.): Gravity, Geoid and Space Missions (GGSM 2004). IAG Symposia (Vol. 129). Berlin: Springer, pp. 36–41, ISBN:3-540-26930-4, doi:10.1007/3-540-26932-0_7.
- Pavlis N K (1988): Modeling and estimation of a low degree geopotential model from terrestrial gravity data. Department of Geodetic Science. Report No. 386. The Ohio State University, Columbus, Ohio.
- Pavlis N K, S A Holmes, S C Kenyon, J K Factor (2012): The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008). *Journal of Geophysical Research*, 117 (B4), doi:10.1029/2011JB008916.
- Petit G; B Luzum (2010): IERS Conventions (2010). IERS Technical Note No. 36. Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main.
- Plank G (2004): Numerical solution strategies for the GOCE mission by using cluster technologies. Institut für Geodäsie. Dissertation. TU Graz, Graz.

- Rapp R H (1978): A Global 1 deg. x 1 deg. Anomaly Field Combining Satellite Geos-3 Altimeter and Terrestrial Data. Department of Geodetic Science. Report Nr. 278. The Ohio State University, Columbus, Ohio.
- Rapp R H (1986): Spherical Harmonic Expansions of the Earth's Gravitational Potential To Degree 360 Using 30' Mean Anomalies. Department of Geodetic Science. Report No. 376. The Ohio State University, Columbus, Ohio.
- Rapp R H, N K Pavlis (1990): The Development and Analysis of Geopotential Coefficient Models to Spherical Harmonic Degree 360. *Journal of Geophysical Research*, 95 (B13), pp. 21885–21911, doi:10.1029/JB095iB13p21885.
- Reguzzoni M, D Sampietro (2012): Moho Estimation Using GOCE Data: A Numerical Simulation. In: Kenyon S et al. (Eds.): *Geodesy for Planet Earth (International Association of Geodesy Symposia)*, Bd. 136. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pp. 205–214, ISBN:978-3-642-20337-4, doi:10.1007/978-3-642-20338-1_25.
- Reguzzoni M, F Sansò (2012): On the combination of high-resolution and satellite-only global gravity models. *Journal of Geodesy*, 86 (6), pp. 393–408, doi:10.1007/s00190-011-0526-3.
- Reigber C, G Balmino, P Schwintzer, R Biancale, A Bode, J M Lemoine, R Koenig, S Loyer, H Neumayer, J C Marty, F Barthelmes, F Perosanz (2002): A high-quality global gravity field model from CHAMP GPS tracking data and accelerometry (EIGEN-1S). *Geophysical Research Letters*, 29 (14), doi:10.1029/2002GL015064.
- Reigber C, P Schwintzer, W Barth, F H Massmann, J C Raimondo, A Bode, H Li, G Balmino, R Biancale, B Moynot, J M Lemoine, J C Marty, F Barlier, Y Boudon (1993): Grim4-C1, -C2p: combination solutions of the global earth gravity field. *Surveys of Geophysics*, 14 (4-5), pp. 381–393, doi:10.1007/BF00690566.
- Resti A, J Benveniste, M Roca, G Levrini (1999): The ENVISAT Radar Altimeter System (RA-2). *ESA Bulletin*, 98, pp.94 - 101.
- Rizos C: An Efficient Computer Technique for the Evaluation of Geopotential from Spherical Harmonic Models. *Australian Journal of Geodesy Photogrammetry and Surveying*, 31.
- Rodrigues O (1816): De l'attraction des sphéroïdes. Correspondence sur l'École Impériale Polytechnique, 3 (3), pp. 361–385.
- Rummel R (1986): Satellite gradiometry. In: Sünkel H (Ed.): *Mathematical and Numerical Techniques in Physical Geodesy. Lecture Notes in Earth Sciences (Vol. 7)*. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, pp. 317–363, ISBN:3-540-16809-5, doi:10.1007/BFb0010135.
- Rummel R (1997): Spherical spectral properties of the earth's gravitational potential and its first and second derivatives. In: Sanso F and R Rummel (Eds.): *Geodetic Boundary Value Problems in View of the One Centimeter Geoid. Lecture Notes in Earth Sciences (Vol. 65)*: Springer, pp. 359–404, ISBN:978-3-540-62636-7, doi:10.1007/BFb0011710.
- Rummel R (2012): Height unification using GOCE. *Journal of Geodetic Science*, 2 (4), doi:10.2478/v10156-011-0047-2.
- Rummel R, R H Rapp, H Sünkel, C C Tscherning (1988): Comparisons of Global Topographic/ Isostatic Models To the Earth's Observed Gravity Field. Department of Geodetic Science. Report No. 388. The Ohio State University, Columbus, Ohio.
- Rummel R, W Yi, C Stummer (2011): GOCE gravitational gradiometry. *Journal of Geodesy*, 85 (11), pp. 777–790, doi:10.1007/s00190-011-0500-0.
- Sampietro D, M Reguzzoni, C Braitenberg (2014): The GOCE Estimated Moho Beneath the Tibetan Plateau and Himalaya. In: Rizos C and P Willis (Eds.): *Earth on the Edge: Science for a Sustainable Planet (International Association of Geodesy Symposia)*, Bd. 139. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pp. 391–397, ISBN:978-3-642-37221-6, doi:10.1007/978-3-642-37222-3_52.
- Sandwell D T, W H F Smith (1997): Marine gravity anomaly from Geosat and ERS 1 satellite altimetry. *Journal of Geophysical Research*, 102 (B5), p. 10039–10039, doi:10.1029/96JB03223.

- Sandwell D T, W H F Smith (2009): Global marine gravity from retracked Geosat and ERS-1 altimetry: Ridge segmentation versus spreading rate. *Journal of Geophysical Research*, 114 (B1), doi:10.1029/2008JB006008.
- Schneider M (1967): Lösungsvorschlag zum Bahnbestimmungsproblem. Forschungsbericht FB W 67-35. Deutsche Gesellschaft für Flugwissenschaften.
- Schneider M (2014): Gravitationsfeldbestimmung nach der Integralgleichungsmethode. Centrum für Geodätische Erdsystemforschung. CGE Reports, 7, München, ISBN 978-3-934205-38-3.
- Seeber G (2003): Satellite geodesy. 2. Auflage. Walter de Gruyter, Berlin, New York, ISBN:978-3110175493.
- Schuh W-D (1996): Tailored numerical solution strategies for the global determination of the earth's gravity field. Mitteilungen der geodätischen Institute der Universität Graz, Folge 81. Universität Graz, Graz.
- Schuh W-D (2000): WP 2: Improved modeling of SGG-data sets by advanced filter strategies. In: Sünkel H (Ed.): From Eötvös to Milligal + (Contract No. 14287/00/NL/DC).
- Schwarz K P (2006): Simultaneous Determination of Position and Gravity from INS/DGPS. In: Festschrift zu Ehren Prof.Dr. G Seeber. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Geodäsie und Geoinformatik Nr. 258. Universität Hannover, Hannover.
- Schwarz K P, M G Sideris, R Forsberg (1990): The use of FFT techniques in physical geodesy. *Geophysical Journal International*, 100 (3), pp. 485–514, doi:10.1111/j.1365-246X.1990.tb00701.x.
- Schwintzer P (1990): Sensitivity Analysis in Least Squares Gravity Field Modelling by Means of Redundancy Decomposition of Stochastic A-Priori Information. Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut Abt. I, München (Interner Bericht, PS/51/90/DGFI).
- Siegismund F (2013): Assessment of optimally filtered recent geodetic mean dynamic topographies. *Journal of Geophysical Research Oceans*, 118 (1), pp. 108–117, doi:10.1029/2012JC008149.
- Siemes C (2008): Digital Filtering Algorithms for Decorrelation Within Large Least Squares Problems. Institut für Geodäsie und Geoinformation. Dissertation. Universität Bonn, Bonn.
- Sneeuw N (1994): Global spherical harmonic analysis by least-squares and numerical quadrature methods in historical perspective. *Geophysical Journal International*, 118 (3), pp. 707–716, doi:10.1111/j.1365-246X.1994.tb03995.x.
- Sneeuw N (2000): A semi-analytical approach to gravity field analysis from satellite observations. Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften : Reihe C, Dissertationen, 527. Verl. der Bayer. Akad. der Wissenschaften, München, ISBN:3-7696-9566-6.
- Sneeuw N, R Bun (1996): Global spherical harmonic computation by two-dimensional Fourier methods. *Journal of Geodesy*, 70 (4), pp. 224–232, doi:10.1007/s001900050011.
- Stanley H R (1979): The GEOS 3 Project. *Journal of Geophysical Research*, 84 (B8), pp. 3779–3783, doi:10.1029/JB084iB08p03779.
- Stetter M (2012): Stochastische Modellierung von GOCE-Gradiometriebeobachtungen mittels digitaler Filter. Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie. Masterarbeit. TU München, München.
- Strang G (2003): Lineare Algebra. Springer, Berlin, ISBN:3540439498.
- Stummer C, T Fecher, R Pail (2011): Alternative method for angular rate determination within the GOCE gradiometer processing. *Journal of Geodesy*, 85 (9), pp. 585–596, doi:10.1007/s00190-011-0461-3.
- Stummer C, C Siemes, R Pail, B Frommknecht, R Floborghagen (2012): Upgrade of the GOCE Level 1b gradiometer processor. *Advances in Space Research*, 49 (4), pp. 739–752, doi:10.1016/j.asr.2011.11.027.
- Tapley B D, S Bettadpur, M Watkins, C Reigber (2004): The gravity recovery and climate experiment: Mission overview and early results. *Geophysical Research Letters*, 31 (9), doi:10.1029/2004GL019920.
- Torge W (1989): Gravimetry. De Gruyter, Berlin, New York, ISBN:3110107023.
- Torge W; J Müller (2012): Geodesy. 4. Aufl. De Gruyter, Berlin, ISBN:978-3-11-025000-8.

- van der Meijde M, J Julià, M Assumpção (2013): Gravity derived Moho for South America. *Tectonophysics*, 609, pp. 456–467, doi:10.1016/j.tecto.2013.03.023.
- Visser P (2005): ERS-2 orbit computations using CHAMP- or GRACE-based gravity field models. *Advances in Space Research*, 36 (3), pp. 454–459, doi:10.1016/j.asr.2005.04.054.
- Wagner S; A Bode; H Satzger; M Brehm (2012): High Performance Computing in Science and Engineering. Online verfügbar unter https://www.lrz.de/services/compute/supermuc/magazinesbooks/HLRBII_2012_Science_and_Engineering.pdf, Garching, München.
- Wahr J, S Swenson, V Zlotnicki, I Velicogna (2004): Time-variable gravity from GRACE: First results. *Geophysical Research Letters*, 31 (11), doi:10.1029/2004GL019779.
- Wang Y M (2001): GSFC00 mean sea surface, gravity anomaly, and vertical gravity gradient from satellite altimeter data. *Journal of Geophysical Research*, 106 (C12), p. 31167–31167, doi:10.1029/2000JC000470.
- Wenzel H-G (1985): Hochauflösende Kugelfunktionsmodelle für das Gravitationspotential der Erde. Institut für Erdmessung. Habilitation. Universität Hannover, Hannover.
- Wittwer T (2006): Introduction to Parallel Programming. VSSD, ISBN:978-90-71301-78-0.
- Woodworth P L, C W Hughes, R J Bingham, T Gruber (2012): Towards worldwide height system unification using ocean information. *Journal of Geodetic Science*, 2 (4), doi:10.2478/v10156-012-0004-8.
- Yi W (2012): The Earth's gravity field from GOCE. Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie. Dissertation. TU München, München.