

Risikomanagement mit Sprungprozessen (Teil 5)

Die PIDE-Methode

Die bisherigen Teile dieser Serie haben uns in die Mathematik der Lévy-Prozesse eingeführt. Das auffälligste Merkmal von Lévy-Prozessen liegt in der Modellierung von Sprüngen. Teil 1 (siehe RISIKO MANAGER 15/2014) erläuterte die daraus erwachsenden Vorteile für die realistische Abbildung von Aktienkursen in mathematischen Marktmodellen. In Teil 3 (siehe RISIKO MANAGER 20/2014) haben wir die Optionspreisbewertung in solchen Modellen kennengelernt, bevor der bisher letzte Teil (siehe RISIKO MANAGER 23/2014) mit der FFT-Methode (Fast Fourier Transform) einen besonders schnellen numerischen Ansatz zur Preisfindung von europäischen Optionen in Lévy-Modellen erklärt hat, siehe auch Carr/Madan sowie Raible [vgl. Carr/Madan 1999 und Raible 2000].

In diesem Teil werden wir uns erneut mit der Optionspreisfindung in Lévy-Modellen beschäftigen und dazu eine Methode kennenlernen, die Lévy-Prozesse aus einer neuen Perspektive betrachtet. Zwei grundsätzliche Herangehensweisen lassen sich unterscheiden.

Zum einen können wir die Optionspreisbewertung von der stochastischen Seite her angehen, zum anderen von der deterministischen. Über einen Monte-Carlo-Ansatz wird im ersten Fall üblicherweise der stochastische Prozess selbst vielfach simuliert und die so erzeugten Pfade in das gewünschte Auszahlungsprofil g eingesetzt. Über einfache Mittelwertbildung gelangt man so zum Optionspreis, wie beispielsweise in Glassermann beschrieben [vgl. Glassermann 2013]. Diese Methode ist auf der einen Seite intuitiv sehr zugänglich, erfordert auf der anderen Seite allerdings einen hohen zeitlichen Aufwand für eine hinreichend repräsentative Menge an simulierten Prozessverläufen. Zudem fällt auch die Simulation selbst mitunter schwer, beispielsweise bei Prozessen mit unendlicher Sprungaktivität, also solchen mit sehr häufigen beliebigen kleinen Sprüngen, die in einer diskreten Numerik selbstverständlich von Natur aus nicht abgebildet werden können. Als Beispiel für einen solchen Lévy-Prozess wurde der Gamma-Prozess in Teil 1 dieser Serie (vgl. RISIKO MANAGER 15/2014) diskutiert. Kleine Sprünge müssen eventuell durch geeignete Approximationen aufwendig ersetzt werden. Die Fragen nach Güte und Effizienz der Verfahren sind keineswegs trivial und eröffnen so eine neue Theorie für sich.

Neben diesen stochastischen Simulationsmethoden bilden deterministische Approximationen die wichtigste Herange-

$$C(T, X, t, X_t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[g(X(T)) | X_t] \quad \blacktriangleright \text{Gleichung 01}$$

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) + \mathcal{A}u(t, x) + ru(t, x) &= 0, \\ u(0, x) &= g(x) \end{aligned} \quad \blacktriangleright \text{Gleichung 02}$$

hensweise zur Optionspreisbewertung. Hier wird nicht der Prozess selbst stochastisch modelliert und simuliert. Stattdessen gerät der mit dem risikolosen Zinssatz r abdiskontierte Erwartungswert des Auszahlungsprofils g unter dem risikoneutralen Maß \mathbb{Q} (vgl. **► Gleichung 01**) selbst in den Fokus der Überlegungen.

Ein bestimmtes numerisches Verfahren zur schnellen Berechnung von Optionspreisen, das auf dieser Herangehensweise aufsetzt, wurde im vorangegangenen Teil 4 dieser Serie (vgl. RISIKO MANAGER 23/2014) intensiv vorgestellt. Über die schnelle Auswertung bestimmter Fouriertransformierter wurden dort mit der sogenannten Fast-Fourier-Transform-Methode (FFT) Preise bestimmt. Betrachten wir die Ausgangsdarstellung der Optionspreise über die Fouriertransformation noch einmal genauer. Was führt zur schnellen Berechenbarkeit der Formel? Es lassen sich zwei Kernmerkmale feststellen: Es müssen explizit vorliegen

- die Fouriertransformierte des Auszahlungsprofils g (in log-Variablen) und
- die Fouriertransformierte der Zufallsvariablen L_t , die Eingangsgröße in die Auszahlungsfunktion.

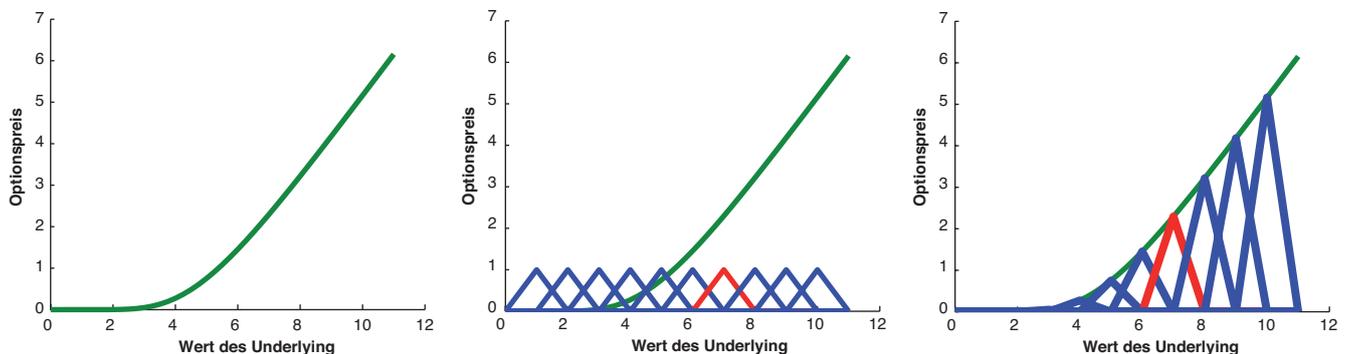
So werden die Grenzen einer effizienten Umsetzbarkeit der reinen Fouriermethoden sehr deutlich: Die effiziente Umsetzbarkeit von Fourierverfahren steht und

fällt mit den explizit gegebenen Fouriertransformierten des Payoff-Profiles und des zugrunde liegenden Prozesses. Es gelangt somit schnell an seine Grenzen, wenn beispielsweise pfadabhängige Derivate berücksichtigt werden sollen. Schon bei Barriere- und ebenso amerikanischen Put- oder Call-Optionen ergeben sich grundsätzliche Schwierigkeiten. Genauso ist die Anwendbarkeit der Methode eingeschränkt auf solche treibenden Prozesse, deren Fouriertransformierte explizit gegeben ist.

Ein deutlich weitreichenderer Zugang öffnet sich durch das Auffassen von Preisen als Lösungen $u(t, x)$ von partiellen (Integro-)Differentialgleichungen. Dies geht zurück bis auf das wegweisende historische Paper von Black und Scholes [Black, F., Scholes, M. (1973)], die ihr Modell durch die berühmte Black&Scholes PDE in Form von **► Gleichung 02** mit einem Black&Scholes-Operator \mathcal{A} repräsentierten.

Durch eine einfache Variablentransformation kann diese PDE in die Wärmeleitungsgleichung überführt und eine semi-analytische Lösung hergeleitet werden. Da das Black&Scholes Modell einem Lévy-Prozess ohne Sprünge entspricht, überrascht es nicht, dass die folgenden Differentialgleichungen zur **► Gleichung 02** große Ähnlichkeiten aufweisen werden.

► Abb. 01

Visualisierung der Finite-Elemente-Methode mit zehn Hütchen als Basisfunktionen


Die P(I)DE-Methode verfügt im Gegensatz zu anderen deterministischen Verfahren wie dem FFT-Algorithmus über hohes Verallgemeinerungspotenzial. Sie ist im Gegensatz zu FFT nicht auf explizite Kenntnis der Fouriertransformierten angewiesen und bewahrt so die Flexibilität hinsichtlich der Optionstypen sowie der Modelle. Zur Optionspreisfindung werden wir ein Verfahren vorstellen, für das ein wohl fundiertes Instrumentarium zur Fehleranalyse und Fehlerkontrolle bereitsteht. Dies macht P(I)DE-Methoden für das Risikomanagement hochattraktiv.

P(I)DEs der Form von ► **Gleichung 02** werden im Folgenden als Bewertungs-PIDE bezeichnet. Der Preis $C(T, X, t, X_t)$ in Form von ► **Gleichung 01** und der Preis $u(t, x)$ als Lösung der Bewertungs-PIDE in ► **Gleichung 02** hängen dabei über die Beziehung

$$u(t, x) = C(T, X, T - t, x)$$

zusammen. Beide Größen bezeichnen also in der Tat das gleiche, nämlich einen Optionspreis mit Auszahlungsfunktion g bei Maturität T in einem bestimmten Lévy-Modell. Der mathematische Nachweis der tatsächlichen Übereinstimmung beider Methoden wird durch ein Feynman-Kac-Theorem für Lévy-Prozesse geliefert, das in Eberlein/Glau [vgl. Eberlein/Glau 2014] bewiesen wurde.

Das Finite Elemente Verfahren

Zum Lösen der Bewertungs-PIDE kommt die aus der Mechanik bekannte Finite-Elemente-Methode (FEM) zum Einsatz, siehe auch Braess oder Seydel [vgl. Braess 2007 oder Seydel 2009]. Dazu wird der stetige Wertebereich der x -Werte zunächst diskretisiert und durch ein dichtes Gitter von sogenannten Knoten x_k ersetzt. Jedem Knoten x_k wird eine sogenannte Basisfunktion φ_k zugeordnet. Die wesentliche Idee des Verfahrens liegt nun in der Approximation des Optionspreises durch eine geeignete Linearkombination dieser Basisfunktionen φ_k , vgl. ► **Gleichung 03**.

Durch diesen Ansatz wird – mathematisch gesprochen – der unendlich dimensionale Raum möglicher Optionspreis-„Funktionen“ $u(t, x)$ für fixes t in einen endlich-dimensionalen Teilraum von beliebiger Dimension N projiziert und dort bestimmt. Die Basisfunktionen φ_k , die diesen endlich-dimensionalen Teilraum aufspannen, sind für gewöhnlich stückweise linear definiert als ► **Gleichung 04** für ein Gitter mit Gitterweite 1.

Je größer nun N , desto höher die Genauigkeit, die wir von dieser Approximation erwarten dürfen. Der Ablauf einer solchen Approximation wird in ► **Abb. 01** illustriert.

Im ersten Bild sehen wir den Preis einer europäischen Call-Option (grün) zu einem bestimmten Zeitpunkt t zusammen mit $N = 10$ Basisfunktionen φ_k (blau). Zur Verdeutlichung wurde eine willkürlich gewählte Basisfunktion rot hervorgehoben. Wegen ihrer äußeren Gestalt werden Basisfunktionen dieser Art auch als Hütchenfunktionen bezeichnet. Wie wir im Approximationsansatz (vgl. ► **Gleichung 03**) gesehen haben, wird die eigentliche Approximationsleistung durch die Koeffizienten $c_k(t)$ erbracht. In jedem Zeitpunkt t strecken oder stauchen sie die zugehörigen Hütchenfunktionen φ_k in geeigneter Weise (vgl. ► **Abb. 01** in der Mitte), sodass die entstehende Linearkombination den Preis geeignet approximiert (vgl. ► **Abb. 01** rechts). Die Aufgabe, einen Optionspreis zu bestimmen, wird so vom FEM-Ansatz übersetzt in die neue Aufgabe, zu jeder Zeit t eine endliche Anzahl von Basisfunktionen geeignet zu skalieren.

Doch wie können die Koeffizienten geeignet gewählt werden? Der Weg vom intuitiv leicht zugänglichen Ansatz aus ► **Gleichung 03** zum numerischen Verfahren, das uns den Optionspreis liefert, führt durch einige theoretische Zusammenhänge. Wir wollen diese Theorie anschaulich am Beispiel des Black&Scholes-Modells, das ja wie bereits bemerkt selbst auch ein Lévy-Modell ist, erläutern. Rufen wir uns dazu die klassische Black&Scholes-PDE in Erinnerung (vgl. ► **Gleichung 05**), also

$$(\mathcal{A}^{\text{BS}} f)(x) = -\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial}{\partial x} f(x) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x)$$

in der Schreibweise von ► **Gleichung 02**.

Wir würden nun gerne unseren approximativen Ansatz für $u(t, x)$ aus ► **Gleichung 03** in diese PDE einsetzen und dann versuchen, die Koeffizienten geeig-

► Gleichung 03

$$u(t, x) \approx \sum_{k=1}^N c_k(t) \varphi_k(x)$$

► Gleichung 04

$$\varphi_k(x) = (1 - |x - x_k|) \mathbf{1}_{|x - x_k| < 1}$$

► Gleichung 05

$$\partial_t u(t, x) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) + ru(t, x) = 0,$$

$$u(0, x) = g(x)$$

► Gleichung 06

$$a(\varphi, \psi) = - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) \psi(x) dx - \frac{\sigma^2}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x) \psi(x) dx$$

► Gleichung 07

$$a(\varphi, \psi) = - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) \psi(x) dx + \frac{\sigma^2}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) dx$$

► Gleichung 08

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_t \left(\sum_{k=1}^N c_k(t) \varphi_k(x) \right) \varphi_l(x) dx + a \left(\sum_{k=1}^N c_k(t) \varphi_k, \varphi_l \right) + r \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^N c_k(t) \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx$$

$$= 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^N \partial_t c_k(t) \int_{\mathbb{R}} \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx + \sum_{k=1}^N c_k(t) a(\varphi_k, \varphi_l) = 0$$

net zu wählen. Bei genauerer Betrachtung allerdings fällt uns auf, dass in der PDE Ableitungen zweiter Ordnung vorkommen. Unsere Hütchenfunktionen allerdings sind nur einmal stetig differenzierbar – und das auch nur abschnittsweise! Dieses fundamentale Problem findet durch die Funktionalanalysis eine elegante Lösung: Der Begriff der Ableitung – ebenso wie der der Lösung einer P(1)DE – wird geeignet abgeschwächt erweitert: Nehmen wir zwei beliebige Funktionen φ und ψ , die beide unendlich glatt sind und außerhalb eines Kompaktums den Wert 0 annehmen, $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Die Funktion φ dürfen wir in den Operator \mathcal{A}^{BS} der Black&Scholes-PDE einsetzen, da ihre zweite Ableitung per definitionem existiert. Multiplizieren wir das Ergebnis noch mit ψ und integrieren diesen Term, so definiert dies eine Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ als ► **Gleichung 06**.

Im zweiten Integral wenden wir die partielle Integration an und erreichen ► **Gleichung 07**.

Dieser Übergang gelang nur wegen der ausreichenden Glattheit der Funktionen φ und ψ , die auch Regularität genannt wird. Theoretische Resultate aus der Funktionalanalysis garantieren uns ferner, dass die Bilinearform nach der partiellen Integration auch unsere nichtglatten Hütchenfunktionen als Argumente akzeptieren kann. Die Bilinearform wird auf einen geeigneten

Funktionenraum fortgesetzt. Mit den Hütchen lösen wir nun also nicht mehr die ursprüngliche, *starke* PDE aus ► **Gleichung 02**, sondern eine sogenannte *schwache* PDE von der Gestalt gemäß ► **Gleichung 08**, $\forall l=1, \dots, N$, wobei die Anfangsbedingung ebenfalls geeignet diskretisiert wird.

Um zu ► **Gleichung 05** zu gelangen, haben wir quasi φ durch unseren diskreten Ansatz für u ersetzt und die Funktion ψ je einmal mit jeder der Hütchenfunktionen $\varphi_l, l=1, \dots, N$. So sind nun N Gleichungen entstanden. Auch wenn die Ursache für den Übergang von der starken zur schwachen Formulierung wie skizziert in Regularitätsüberlegungen bestand, liefert sie uns gleichzeitig für jeden Zeitpunkt $t \in [0, T]$ ein System von N Gleichungen, mit denen wir die N Unbekannten $c_k(t), k=1, \dots, N$ bestimmen können. Die N Gleichungen können wir in Matrixschreibweise formulieren als ► **Gleichung 09** und der zusätzlichen geeignet diskretisierten Anfangsbedingung.

Die Matrix M wird aus historischen Gründen als Massematrix bezeichnet, während A Steifigkeitsmatrix genannt wird.

► Gleichung 09

$$M\dot{c}(t) + A c(t) = 0 \text{ mit}$$

$$A_{l,k} = a(\varphi_k, \varphi_l) \text{ und}$$

$$M_{l,k} = \int_{\mathbb{R}} \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx$$

Zur weiteren Vereinfachung diskretisieren wir nun auch die Domäne der Zeitvariablen $t \in [0, T]$ in K diskrete Zeitpunkte $0=t_1, \dots, t_K=T$ nach dem sogenannten Euler-Schema und erhalten so eine Beziehung zwischen den Lösungen unseres voll diskretisierten Schemas zu den Zeitpunkten t_k und t_{k+1} wie in ► **Gleichung 10** dargestellt.

Der Payoff der betrachteten Option liefert die Werte der Koeffizienten der Basisfunktionen zum Zeitpunkt $t_1=0$, wie wir schon in der zweiten Zeile von ► **Gleichung 02** erkennen können. Die Werte von $c_k(t_1)=c_k(0), k=1, \dots, N$ sind also bekannt und setzen so das iterative Lösen der ► **Gleichung 10** über alle Zeitschritte bis $t_k=T$ in Gang: Mit den für den Zeitpunkt t_k gefundenen Werten der Koeffizienten lassen sich über das Lösen eines einfachen linearen Gleichungssystems auch die Koeffizientenwerte für den Zeitpunkt t_{k+1} bestimmen.

Theorie und Implementierung

Für allgemeine Lévy-Modelle über das einfache Black&Scholes-Modell hinaus funktioniert das Lösungsschema ganz analog. Auf theoretischer Seite ist der Ablauf des Verfahrens also bereits hinreichend genau umrissen. Vor der Umsetzung in ein numerisches lauffähiges Programm sind dennoch einige Hindernisse zu überwinden. Die größte Herausforderung stellt dabei die Gestalt des Operators \mathcal{A} dar. Im Black&Scholes-Fall ist \mathcal{A} durch die Koeffizienten, $\sigma > 0, b$ und r , also durch die Modell-Parameter Volatilität, Drift und Zins festgelegt. Mit anderen Worten, der Operator \mathcal{A} enthält die Informationen über das Modell. Genauso wird in der Preisgleichung im Lévy-Modell die Information über den Lévy-Prozess im Operator \mathcal{A} repräsentiert. Wie in den vorangegangenen

► Gleichung 10

$$M \left(\frac{c(t_{k+1}) - c(t_k)}{\Delta t} \right) + A \left(\frac{1}{2} (c(t_{k+1}) + c(t_k)) \right) = 0$$

► Gleichung 11

$$(\mathcal{A}f)(x) = -a\partial_x f(x) - \frac{1}{2}\sigma^2\partial_{xx}f(x) - \int_{\mathbb{R}} (f(x+z) - f(x) - z\partial_x f(x))\nu(dz)$$

► Gleichung 12

$$\nu^{\text{CGMY}}(dx) = \frac{C}{|x|^{1+Y}} \exp(-G|x|) 1_{\{x<0\}} + \frac{C}{|x|^{1+Y}} \exp(-M|x|) 1_{\{x>0\}}$$

► Gleichung 13

$$\nu^{\text{NIG}}(dx) = \frac{\alpha}{\pi} \exp(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta(x - \mu)) \frac{K_1\left(\alpha\delta\sqrt{1 + \left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}} dx$$

► Gleichung 14

$$A_{L,k} = - \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} (\varphi_k(x+z) - \varphi_k(x) - z\partial_x \varphi_k(x)) \frac{\alpha}{\pi} \exp(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta(z - \mu)) \frac{\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\alpha\delta\sqrt{1 + \left(\frac{z-\mu}{\delta}\right)^2}\right)\left(t + \frac{1}{t}\right)\right) dt}{\sqrt{1 + \left(\frac{z-\mu}{\delta}\right)^2}} dz \right] \varphi_l(x) dx$$

Teilen dieser Serie bereits skizziert wurde, ist jeder reellwertige Lévy-Prozess durch sein Lévy-Khintchine-Tripel (a, σ^2, ν) mit $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ und ν ein Borelmaß auf \mathbb{R} mit $\nu(\{0\}) = 0$ und $\int_{\mathbb{R}} (|x|^2 \wedge 1) \nu(dx) < \infty$ eindeutig bestimmt [siehe auch Applebaum 2004]. Umgekehrt existiert zu jedem solchen Tripel ein Lévy-Prozess. Darin bezeichnete a den Drift des Prozesses, σ die Volatilität des Brownschen Anteils und ν das Lévy-Maß, welches das Sprungverhalten des Prozesses codiert. Genau diese Charakteristiken legen den Operator \mathcal{A} , wie in ► **Gleichung 11** definiert, fest.

Wir erkennen tatsächlich alle Teile des Lévy-Tripels wieder. Der Operator \mathcal{A} in seiner allgemeinen Form enthält also tatsächlich alle Charakteristiken, die den Lévy-Prozess bestimmen. An dieser Stelle wird außerdem ersichtlich, woraus der „Integro“-Teil der Bezeichnung PIDE – ausgeschrieben: „partial integro differential equation“, zu Deutsch: Partielle Integrodifferentialgleichung – seine Rechtfertigung bezieht. Das im Operator auftretende Integral bezüglich des Lévy-Maßes ν ist zum einen für

die Modellierung der Sprünge unerlässlich, sorgt aber zum anderen für maßgebliche Herausforderungen beim numerischen Umgang mit PIDEs. Schauen wir uns zur Verdeutlichung einige Beispiele für Lévy-Operatoren genauer an. Zur Vereinfachung der Notation nehmen wir im Folgenden stets an, dass sowohl der Drift a als auch die Volatilität σ gleich Null gesetzt sind, außer wenn explizit etwas Anderes angegeben wird. Die Charakterisierung der beispielhaften Lévy-Prozesse findet also direkt über das Lévy-Maß ν statt.

Selbstverständlich kennen wir bereits das Lévy-Maß $\nu^{\text{BS}}(dx) \equiv 0 dx$ des bekannten Black-Scholes-Modells. Es fällt ebenfalls in die Klasse der Lévy-Modelle und kann damit durch ein Lévy-Tripel identifiziert werden. Da das Black-Scholes-Modell allerdings keine Sprünge kennt, ist sein Lévy-Maß Null. Ein echter Sprungprozess mit bekanntem Sprungmaß ist der CGMY-Prozess, ein Lévy-Prozess benannt nach den Initialen von Carr, Geman, Madan und Yor [die Prozessklasse wurde auch bereits unter dem Namen „KoBoL“ eingeführt, sie-

he Boyarchenko/Levendorskii 2002]. Sein Lévy-Maß $\nu^{\text{CGMY}}(dx)$ hat die Gestalt gemäß

► **Gleichung 12**.

Wir haben auch das NIG (Normal Inverse Gaussian)-Modell bereits kennengelernt. Sein Lévy-Maß ist gegeben durch

► **Gleichung 13**, worin

$$K_1(\omega) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}\omega\left(t + \frac{1}{t}\right)\right) dt$$

die Bessel-Funktion dritter Art bezeichnet.

Die komplexe Struktur dieser zentralen Größe lässt bereits erahnen, dass Lösungsverfahren für PIDEs unter Umständen mit höchst anspruchsvollen Anforderungen konfrontiert sind. Die oben vorgestellten Lévy-Maße erweisen sich in der Tat als hochgradig nichttrivial. Betrachten wir konkret die Berechnung eines Eintrags der Steifigkeitsmatrix im Falle des NIG-Modells. Zu dem Integral aus

► **Gleichung 10** käme das Integral bezüglich des Lévy-Maßes $\nu^{\text{NIG}}(dx)$ und ein weiteres aus der semianalytischen Form der Bessel-Funktion dritter Art K_1 , die in der Definition von ν^{NIG} auftritt. Es ist also das Integral gemäß ► **Gleichung 14** zu berechnen.

Glücklicherweise lassen sich die entsprechenden Integrale für einige Modelle explizit berechnen. Dies trifft etwa auf das Merton-Modell zu.

Wir stellen nun die Frage: *Wie können die Matrixeinträge für eine allgemeine Klasse von Lévy-Modellen, die die wichtigsten Modelle enthält, numerisch umgesetzt werden? Und somit: Wie können die Matrixeinträge für eine allgemeine Klasse von Lévy-Modellen – einschließlich NIG – berechnet werden? Liegen die Matrixeinträge nicht exakt vor, so müssen sie approximativ berechnet werden. Im Folgenden wollen wir einen Eindruck davon gewinnen, wie genau ein derartiges Approximationsverfahren sein muss.*

Genauigkeitsüberlegungen

Bevor wir uns mit Approximationsmethoden solcher Integrale beschäftigen, sollten

wir die Größenordnung der Genauigkeit kennen lernen, die der infrage kommende Approximationsansatz erreichen muss. Wir fragen uns also: *Wie groß darf der Fehler eines jeden Matrixeintrags sein, um eine noch akzeptable Fehlertoleranz der resultierenden FEM-Lösung erwarten zu können?*

Ein solches Herangehen ist unter dem Begriff der Störungsanalyse bekannt. Wir führen im Folgenden eine experimentelle Störungsanalyse durch, bei der wir die exakte Matrix durch eine andere Matrix ersetzen, deren Einträge wir durch Störungen der exakten erhalten. Betrachten wir näher die Art der Störung, die für unser Ansinnen relevant ist. Die Steifigkeitsmatrix besitzt eine Toeplitz-Struktur. Das heißt, dass auf der Haupt- und auf jeder der Nebendiagonalen der Matrix jeweils überall der gleiche Wert steht, wie es in der beispielhaften Toeplitz-Matrix T der Fall ist (vgl. ► **Matrix 01**).

► **Matrix 01**

$$T = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & -8 & 0 \\ 23 & 1.5 & 0 & -8 \\ 23 & 23 & 1.5 & 0 \\ -5 & 23 & 23 & 1.5 \end{pmatrix}$$

Der interessierte Leser fühle sich gerne dazu ermutigt, zu versuchen, diese Struktur zu erklären. Je weiter der Eintrag von der Hauptdiagonalen entfernt ist, desto kleiner wird er zudem dem Betrag nach. Im allgemeinen Lévy-Fall ist die Matrix wegen des Integrals bezüglich des Lévy-Maßes ν vollständig besetzt, enthält also überall Einträge ungleich Null. Im Black & Scholes-Fall enthalten dagegen nur

► **Matrix 02**

$$A = \begin{pmatrix} 1.3354 & -0.6626 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -0.6726 & 1.3354 & -0.6626 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -0.6726 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -0.6626 & 0 \\ \vdots & & & -0.6726 & 1.3354 & -0.6626 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -0.6726 & 1.3354 \end{pmatrix}$$

die Haupt- und die beiden Nebendiagonalen Einträge ungleich Null. Die Matrix ist in diesem Fall also nur dünn besetzt. Auch diese Eigenschaft lässt sich anhand der Black & Scholes-Bilinearform leicht verifizieren. Im Black & Scholes-Modell befinden wir uns zudem in der glücklichen Lage, die Einträge der Steifigkeitsmatrix explizit berechnen zu können. Wir werden diese Einträge manuell stören, die Größenordnung dieser Störung kontrollieren, und ihre Auswirkung auf Fehler im Optionspreis beobachten. Ausgehend von einer FEM-Implementierung in MATLAB mit den oben angeführten Hütchen als Basisfunktionen berechnen wir die Steifigkeitsmatrix zunächst exakt und stören diese anschließend, um Ungenauigkeiten zu imitieren, die bei zusätzlich vorhandener Integration bezüglich des Lévy-Maßes unvermeidbar auftreten würden.

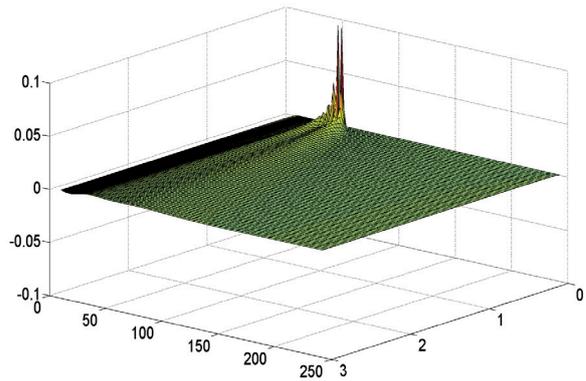
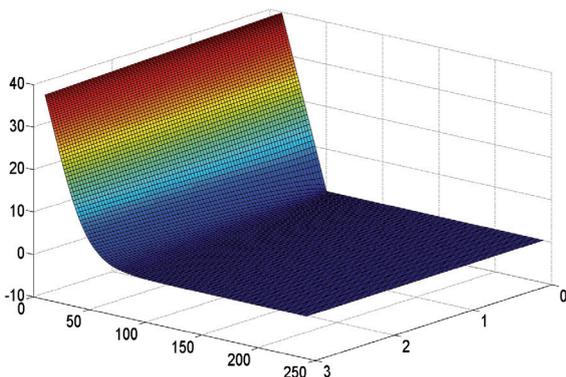
Wir nutzen diese numerische Implementierung, um eine europäische Put-Option mit Strike $K=50$ zu bewerten. Das Black & Scholes-Modell parametrisieren wir mit $\sigma=0.2$ und nehmen einen konstanten risikolosen Zins von $r=1\%$ an. Wir interessieren uns für die Optionspreise für $S_T \in [S_{\min}, S_{\max}]$ mit $S_{\min}=10$ und $S_{\max}=200$. Wir diskretisieren das entsprechende Ge-

biet mit $N=100$ Gitterpunkten $x_k, k=1, \dots, N$ mit welchen jeweils eine FEM-Hütchenfunktion φ_k assoziiert ist. Wir berechnen Optionspreise für alle Maturitäten $T \in [0,3]$ und diskretisieren diesen zeitlichen Horizont mit $m=85$ Zeitintervallen. Unter diesen Voraussetzungen hat die Steifigkeitsmatrix A die Gestalt gemäß ► **Matrix 02**.

Die numerische Routine liefert uns nun FEM-Preise für alle Ort-Zeit-Tupel $(x_k, t_l), k \in \{1, \dots, N\}, l \in \{1, \dots, m\}$ in Form einer „Optionspreisoberfläche“. Das Ergebnis eines solchen FEM-Laufs und sein absoluter Fehler sind in ► **Abb. 02** dargestellt.

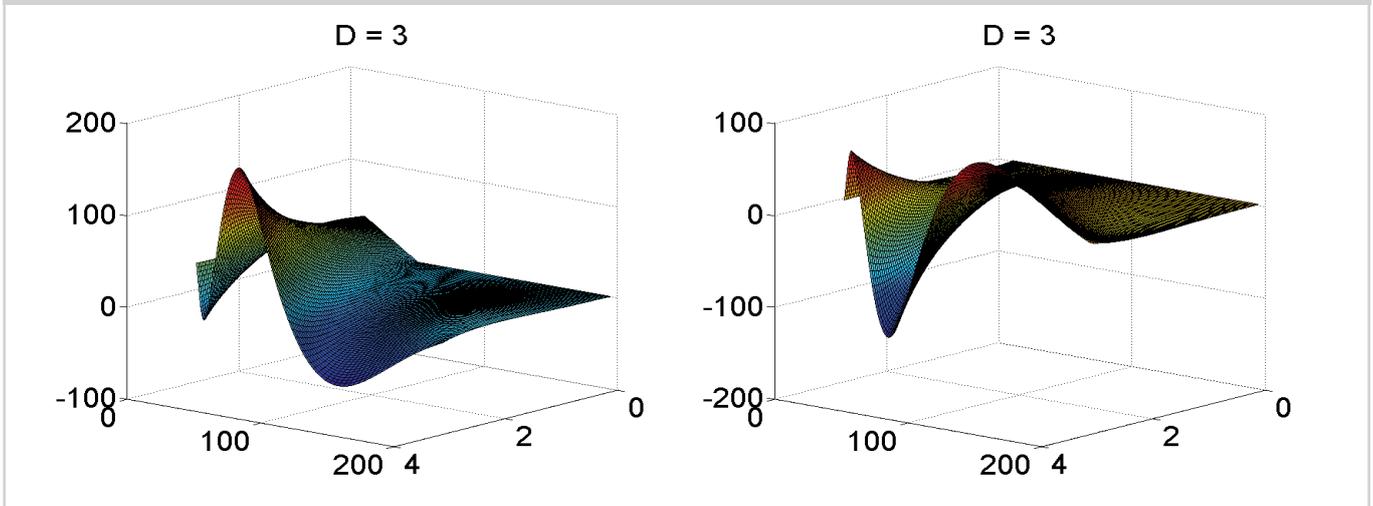
Wir sehen dort links die Preise der Put-Option in Abhängigkeit des Werts des Underlyings über die Zeit und rechts den absoluten Fehler, mit dem unser numerisches Resultat behaftet ist. Ein typisches numerisches Merkmal der FEM-Methode ist der deutliche Fehler direkt am Strike K , der anschließend ausgeglättet wird. Bei unserer recht groben Gitterdichte fällt dieser noch maßgeblich ins Gewicht, für feiner werdende Diskretisierungen in Ort und Zeit verschwindet dieser jedoch zunehmend. Er rührt direkt vom Knick der Auszahlungsfunktion am Strike K her.

Links: FEM-Preis einer europäischen Put-Option mit Strike $K=50$ im Black & Scholes-Modell als Funktion von $S \in [0,250]$ und Maturität $t \in [0,3]$. Rechts: absoluter Fehler zum tatsächlichen Preis. ► **Abb. 02**



► Abb. 03

Links: FEM-Preis zu gestörter Matrix. Rechts: Differenz zwischen FEM-Preis zu gestörter Matrix und FEM-Preis zu ungestörter. Die Matrixeinträge wurden an der Nachkommastelle $D=3$ gestört.



Wir stören nun die Steifigkeitsmatrix an der dritten Nachkommastelle indem wir gleichverteilte Zufallszahlen $z_j \in (-10^{-4}, 10^{-4})$, $j=1, \dots, 2N-1$ auf die $2N-1$ Diagonalen der Steifigkeitsmatrix aufaddieren. Wir behalten dabei bewusst die Toeplitz-Struktur der Matrix bei. Schließlich würden auch Fehler im numerischen Integrationsverfahren die Matrix zwar stören, ihre Toeplitz-Struktur aber dennoch erhalten. Die Ergebnisse dieser Störung sehen wir in ► **Abb. 03**.

Der Einfluss der Störung ist deutlich sichtbar. Obwohl die aus der Störung resultierenden relativen Fehler auf der Hauptdiagonalen der Steifigkeitsmatrix im einstelligen Prozentbereich bleiben, sind die generierten „Preise“ inakzeptabel. Die berechnete Preisoberfläche ist nicht ein-

mal strukturell einer Put-Option zuzuordnen. Interessant wird es nun sein, zu beobachten, wie stark sich ein gradueller Rückgang der Störung in einer Verbesserung der Preisqualität bemerkbar macht.

Wir stören nun an der fünften Nachkommastelle. Damit reduzieren wir die Größenordnung des Fehlers im Vergleich zu dem vorangegangenen Beispiel also um den Faktor 100.

In ► **Abb. 04** sehen wir die Resultate. Die äußere Gestalt der Preisoberfläche hat sich strukturell deutlich den tatsächlichen Preisen angenähert. Dennoch sind Integrationsergebnisse von dieser Genauigkeit nicht verwertbar. Der Fehler, im Bild rechts zu sehen, scheint sich zudem über die Zeit zu propagieren und sogar noch anzuwachsen. An den Preisen selbst ist

dieser rein optisch nicht auszumachen, dennoch würde er alle Anwendungen, ob Pricing oder Kalibrierung, spürbar beeinflussen.

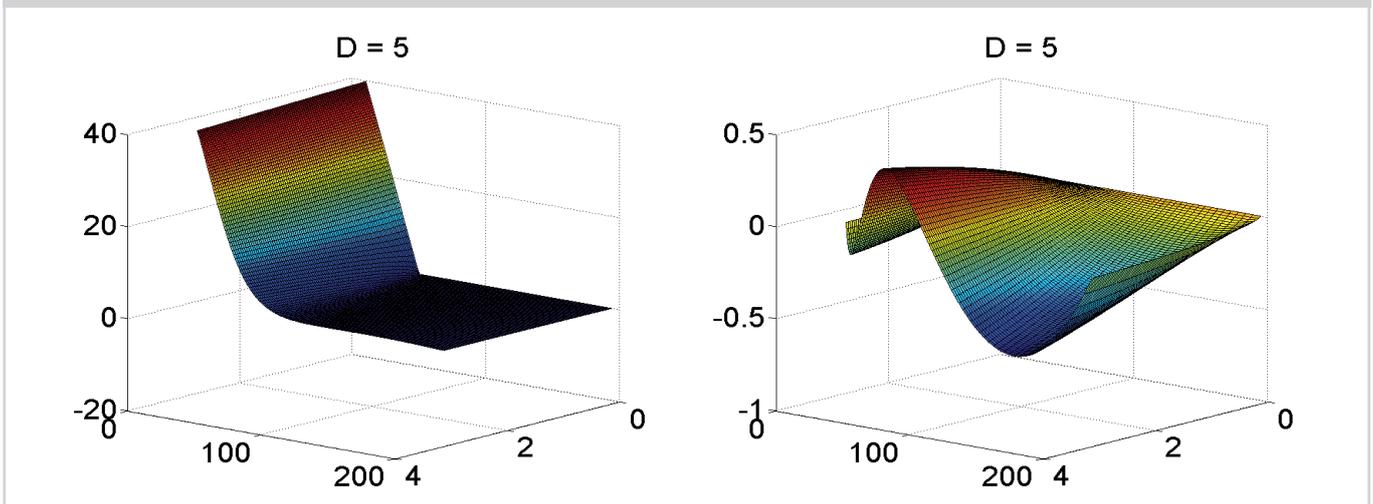
Wir stören nun an der siebten Nachkommastelle, vermindern den Einfluss der Störung also erneut um den Faktor 100.

Die Ergebnisse erreichen nun diskutabile Genauigkeit (vgl. ► **Abb. 05**). Wie schon im Schritt zuvor ist den Preisen selbst die Störung optisch kaum mehr anzumerken. Zuletzt betrachten wir die entsprechende Abbildung für eine Störung an der Nachkommastelle $D=10$. Der Fehler wirkt sich nur noch marginal aus (vgl. ► **Abb. 06**).

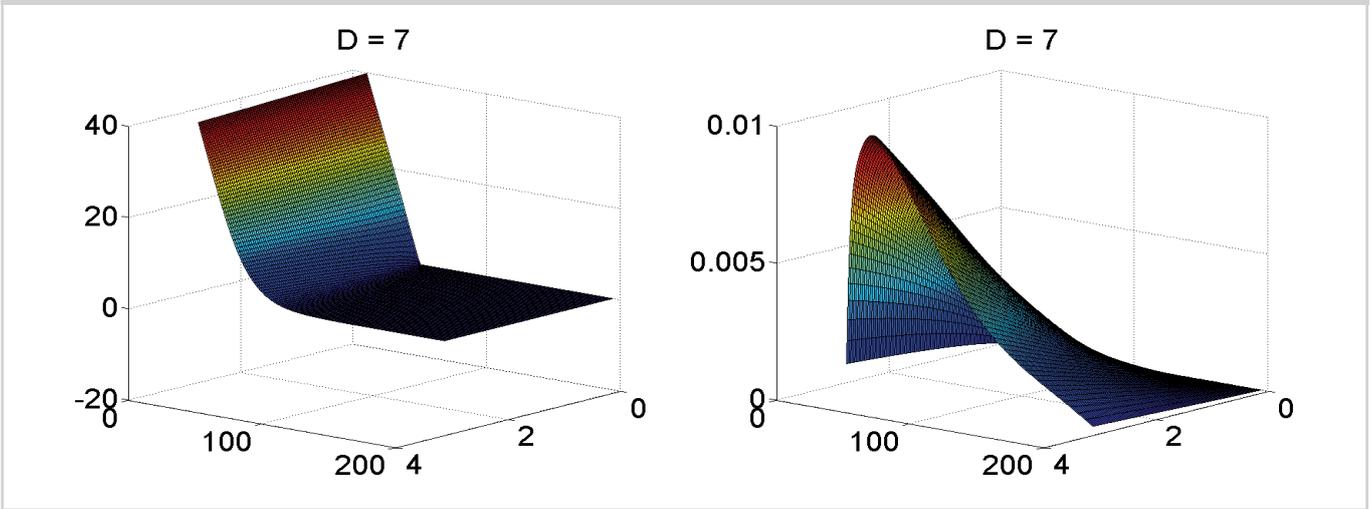
Nach dieser optischen Begutachtung einzelner Störungen wollen wir den Fehler nun analytisch etwas genauer untersuchen. Wir berechnen dazu für die „gestörten“

► Abb. 04

Links: FEM-Preis zu gestörter Matrix. Rechts: Differenz zwischen FEM-Preis zu gestörter Matrix und FEM-Preis zu ungestörter. Die Matrixeinträge wurden an der Nachkommastelle $D=5$ gestört.



Links: FEM-Preis zu gestörter Matrix. Rechts: Differenz zwischen FEM-Preis zu gestörter Matrix und FEM-Preis zu ungestörter. Die Matrixeinträge wurden an der Nachkommastelle D=7 gestört. ▶ Abb. 05



Preisoberflächen den L2-Fehler, der definiert ist gemäß **Gleichung 15**.

Darin bezeichnet $u(t_l, x_k)$ den Preis, der als FEM-Lösung zur ungestörten Steifigkeitsmatrix am Gitterpunkt (t_l, x_k) berechnet wurde, und $u^D(t_l, x_k)$ die entsprechende Größe, die unter Verwendung der an der D -ten Nachkommastelle gestörten Steifigkeitsmatrix hervorgegangen ist. In **Abb. 07** sehen wir die Ergebnisse dieser Fehlerkonvergenzanalyse für $D \in [3, \dots, 10]$ grafisch aufbereitet.

In Abhängigkeit von der Nachkommastelle D , an der die Steifigkeitsmatrix zufällig gestört wurde, um die Ungenauigkeit jedes numerischen Integrationsverfahrens zu simulieren, sehen wir in logarithmischer y -Skala den L2-Fehler $\epsilon_{L2}(D)$, den diese Störung provoziert. Wir sehen deut-

▶ Gleichung 15

$$\epsilon_{L2}(D) = \sqrt{\Delta t \cdot h \cdot \sum_{(t_l, x_k)} |u(t_l, x_k) - u^D(t_l, x_k)|^2}$$

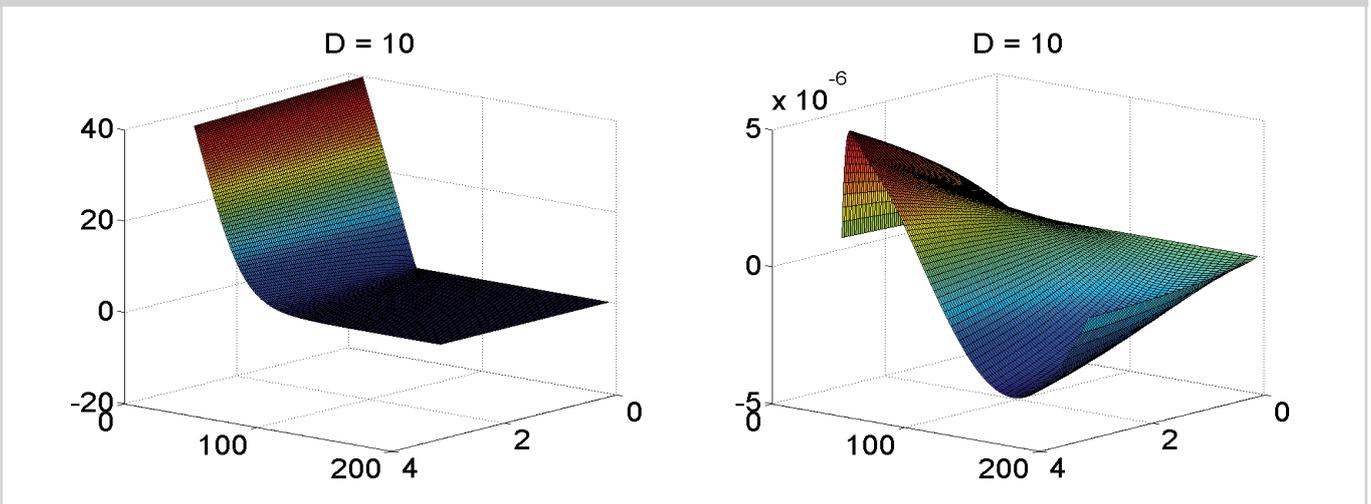
lich den Einfluss der Störung über alle Werte von D hinweg. Die gewünschte Genauigkeit jeder Approximation hängt natürlich von dem Fokus der Anwendung ab, in der die FEM-Methode zum Einsatz kommt. So ist die Fehlertoleranz bei Kalibrierungszwecken größer als beim Pricing, wo sehr exakte Preisbestimmungen verlangt werden. **Abb. 07** vermittelt einen Eindruck davon, wie genau approximative Integrationsroutinen arbeiten müssen, um akzeptable Fehlertoleranzen zu erreichen. Speziell für das CGMY-Modell wurde unter

großem Aufwand ein Approximationsverfahren entwickelt, das Preise mit nahezu Maschinengenauigkeit errechnet, siehe Kapitel 10.6.2 in Hilbert et al. [vgl. Hilbert et al. 2013]. □

Zusammenfassung und Fazit

In diesem Teil der Serie haben wir die PIDE-Methode kennengelernt, um Optionspreise in Lévy-Modellen zu berechnen. Mit der Finiten-Elemente-Methode haben wir ein in

Links: FEM-Preis zu gestörter Matrix. Rechts: Differenz zwischen FEM-Preis zu gestörter Matrix und FEM-Preis zu ungestörter. Die Matrixeinträge wurden an der Nachkommastelle D=10 gestört. ▶ Abb. 06



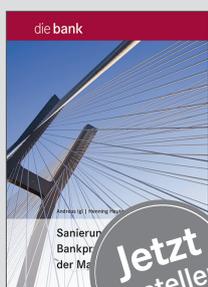
der Mechanik etabliertes Mittel zum Lösen von Differentialgleichungen kennen gelernt und auf die PIDE angewendet. Für die numerische Umsetzung ist für eine Reihe von gängigen Lévy-Modellen die approximative Berechnung der Steifigkeitsmatrix notwendig. Die Frage, wie sich ein solcher Approximationsfehler auf die Genauigkeit des Algorithmus auswirkt, ist daher essentiell. Am Beispiel des Black&Scholes-Modells haben wir den Einfluss von Störungen der Matrixeinträge kontrolliert beobachtet und konnten daraus Schlüsse auf den Grad der Genauigkeit ziehen, den jede Approximationsroutine bei der Berechnung der Steifigkeitsmatrixeinträge erreichen muss. Durch empirische Störungsanalyse konnten wir den Nachweis erbringen, dass für die numerische Umsetzung der Methode eine sehr genaue Berechnung der Steifigkeitsmatrix unerlässlich ist. Dazu nötige Integrationen bezüglich des Lévy-Maßes ν stellen allerdings eine nicht zu unterschätzende Herausforderung für Integrationsansätze dar. Diese Herausforderung bildet den Ausgangspunkt unserer aktuellen Forschung.

Quellenverzeichnis sowie weiterführende Literaturhinweise:

Applebaum, D. (2004): *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge University Press.

Anzeige

die bank



Jetzt
bestellen

Andreas Igl | Henning Heuter (Hrsg.)

Sanierungsplanung – Bankpraktische Umsetzung der MaSan

ISBN 978-3-86556-429-0

Art.-Nr. 22.512-1400

220 Seiten, gebunden

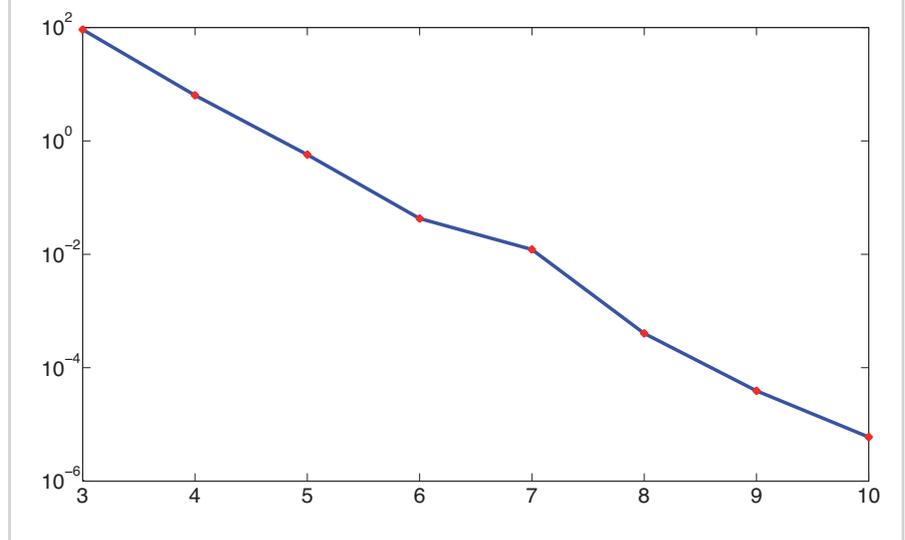
59,00 Euro

Weitere Fachmedien in unserem Webshop:

www.bank-verlag-shop.de

Abfallverhalten des L2-Fehlers $\square_{L_2}(D)$ in Abhängigkeit von der Nachkommastelle $D \in \{3, \dots, 10\}$, an der die Einträge der Steifigkeitsmatrix gestört wurden.

► Abb. 07



Black, F., Scholes, M. (1973): *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. *Journal of Political Economy* 81(3): 637–654.

Boyarchenko, S./Levendorskii, S. (2002): *Non-Gaussian Merton-Black-Scholes Theory*. World Scientific.

Braess, D. (2007): *Finite Elemente: Theorie, Schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. Springer.

Carr, P./Madan, D. B. (1999): *Option valuation using the fast Fourier transform*. *The Journal of Computational Finance* 2(4): 61–73.

Eberlein, E./Glau, K. (2014): *Variational Solutions of the Pricing PIDEs for European Options in Lévy Models*. *Applied Mathematical Finance* 21(5): 417-450.

Eberlein, E./Glau, K./Papapantoleon, A. (2010): *Analysis of Fourier transform valuation formulas and applications*. *Applied Mathematical Finance* (17): 211-240.

Glassermann, P. (2003): *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer.

Hilber, N./Reichmann, O./Schwab, C./Winter, C. (2013): *Computational methods for quantitative Finance: Finite element methods for derivative pricing*. Springer.

Raible, S. (2000): *Lévy Processes in Finance: Theory, Numerics and Empirical Facts*. PhD thesis. Universität Freiburg.

Seydel, R. (2009): *Tools for Computational Finance*. Springer.

Autoren:

Prof. Dr. Kathrin Glau ist Juniorprofessorin am Lehrstuhl für Finanzmathematik der Technischen Universität München. Sie promovierte zum Thema Feynman-Kac-Darstellungen zur Optionspreisbewertung bei Prof. Ernst Eberlein.

Maximilian Gaß ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Finanzmathematik der Technischen Universität München. Beide beschäftigen sich in ihrer Forschung mit der Optionspreisbewertung in Lévy-Modellen auf theoretischer und numerischer Seite.

Wir bedanken uns herzlich bei der KPMG AG für das Sponsoring des KPMG Center of Excellence in Risk Management an der Technischen Universität München, über welches Konferenzbesuche von Maximilian Gaß teilfinanziert werden.