

Technische Universität München  
Lehrstuhl für Informatik mit Schwerpunkt  
Wissenschaftliches Rechnen

**Verifikation von  
Parameter-Identifikationsverfahren  
nichtlinearer Systeme am Beispiel eines  
physikalischen Reifenmodells**

Lars Kaden

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Informatik der Technischen Universität München zur Erlangung des Akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. B. Brügge, Ph.D.

Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr. H.-J. Bungartz  
2. Univ.-Prof. Dr. M. Althoff

Die Dissertation wurde am 18.12.2014 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Informatik am 25.02.2015 angenommen.



# Danksagung

Besonders bedanken möchte ich mich bei Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz für die freundliche Betreuungsübernahme des individuellen, gebietsübergreifenden Themas. Dabei sind mir v.A. die Anleitung zur Herausarbeitung der wesentlichen Inhalte und zum systematischen Aufbau der Arbeit sowie die ungezwungenen Umgangsformen in guter Erinnerung.

Ohne die praktische Arbeit in der Forschungsabteilung zur Fahrzeugsystemdynamik der Daimler AG wären die Ideen zu dieser Arbeit nicht entstanden. Daher gilt mein Dank auch Dr. Jochen Rauh und Prof. Dr. Dieter Ammon für meine Aufnahme in das Team zur Fahrdynamik- und Komfortsimulation sowie die Übertragung interessanter Aufgaben, obwohl mein damals frisch absolviertes Informatikstudium hier nicht automatisch alle relevanten Methoden abgedeckt hat. V.A. die geduldige Vermittlung von Themen der Reifenmodellierung durch Prof. Dr. Dieter Ammon war eine große Hilfe dabei, die Zusammenhänge zu verstehen und damit zu arbeiten.

Ebenso möchte ich mich bei Prof. Dr. Matthias Althoff für die Bereitschaft, das Zweitgutachten zu erstellen, bedanken, wodurch auch die Perspektive aus dem Gebiet der Regelungstechnik und Systemverifikation eingebracht wurde. Positiven Einfluss auf die Arbeit nahm insbesondere seine Motivation, die Inhalte und Ergebnisse in einen möglichst umfassenden Bezug zur Literatur zu setzen.

Für die Stuttgarter Nahbetreuung und Auseinandersetzung mit dem eigenständigen Thema bedanke ich mich bei Dr. Stefan Zimmer. Von seiner Anregung, die Vorgehensweise zur Verifikation der Reifenparameter-Identifikation zu verallgemeinern und vom Modell abstrahiert zu beschreiben, hat die Arbeit wesentlich profitiert. Viel Unterstützung bei der Einarbeitung in Fragestellungen von Fahrdynamik, Reifen- und Fahrwerktechnik, Simulation, Optimierung und Statistik habe ich während der Beschäftigung als Doktorand in der Daimler-Forschung von meinen Kollegen erfahren. Unter den zahlreichen Namen bin ich v.A. Dr. Sven Dronka, Monika Mössner-Beigel, Thomas Schirle, Prof. Dr. Zoltan Zomotor und ganz besonders Dr. Klaus-Dieter Hilf gegenüber zu Dank verpflichtet.

Nun möchte ich noch die beiden Personen erwähnen, die alles Übrige abfedern mussten, meinen Vater Helmut und meine Schwester Svenja. Mit großem Einfühlungsvermögen und gutem Rat haben sie mich bei den vielen Schwierigkeiten einer externen Promotion begleitet und damit den wichtigsten Beitrag geleistet.

---



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen und Methoden der Parameter-Identifikation</b>	<b>15</b>
<b>3</b>	<b>Prinzip der Sequentiellen Parameteridentifikation</b>	<b>33</b>
3.1	Problemstellung und Ziele . . . . .	34
3.2	Lösungsansatz . . . . .	44
3.3	Formale Definition und Detailbeschreibung . . . . .	52
3.4	Vergleich mit anderen Methoden . . . . .	66
3.5	Unterstützende Softwaremethoden . . . . .	81
<b>4</b>	<b>Entwicklung und Verifikation einer Sequentiellen Parameteridentifikation für ein physikalisches Reifenmodell</b>	<b>87</b>
4.1	Modellbeschreibung . . . . .	88
4.1.1	Reifenmodelle . . . . .	88
4.1.2	Normierte Größen . . . . .	92
4.1.3	Modell-Schnittstellen . . . . .	100
4.1.4	Modellkomponenten . . . . .	103
4.1.5	Modellgleichungen . . . . .	108
4.1.6	Prüfstandsmodell . . . . .	132
4.1.7	Stationärzustände . . . . .	136
4.1.8	Auswahl zu identifizierender Parameter . . . . .	143
4.2	Modellanalyse zur Sequentiellen Identifikation der Reifenmodell-Parameter	146
4.2.1	Parametergruppe $c_{GF\ rad}, c_{r\ lin}, c_{r\ quad}$ . . . . .	149
4.2.2	Parametergruppe $R_{quer}, c_{scher} \cdot f_{L\ mat}^2$ . . . . .	157
4.2.3	Parameter $c_{GF\ rot\ rad}$ . . . . .	165
4.2.4	Parameter $f_{L\ mat}$ . . . . .	173
4.2.5	Parameter $n_{LKt}$ . . . . .	178
4.2.6	Parameter $n_{LKy}$ . . . . .	180
4.2.7	Parametergruppe $\mu_{gleit\ 0bar}, \mu_{gleit\ \Delta p}$ . . . . .	182
4.2.8	Parametergruppe $n_{LKx}, \mu_{haft\ 0bar}, \mu_{haft\ \Delta p}$ . . . . .	188
4.2.9	Parameter $c_{GF\ quer}$ . . . . .	214
4.2.10	Beispielablauf einer Gesamtidentifikation . . . . .	231

<b>5</b>	<b>Bewertung und Ausblick</b>	<b>249</b>
<b>A</b>	<b>Anhang zu Kapitel 2</b>	<b>251</b>
A.1	NP-Schwere der näherungsweisen Minimierung arithmetischer Funktionen	251
A.2	NP-Schwere der näherungsweisen Lösung eindeutiger wurzel-arithmetischer Ausgleichsprobleme . . . . .	252
A.3	Reduktion auf näherungsweise Inversion injektiver arithmetischer Funktionen . . . . .	253
A.4	Komplexitätstheoretische Konsequenzen der effizienten näherungsweisen Inversion injektiver arithmetischer Funktionen . . . . .	255
<b>B</b>	<b>Anhang zu Kapitel 3</b>	<b>257</b>
B.1	Beispielproblem mit beliebig hohem Suchaufwand . . . . .	257
B.2	Ursachen für ausbleibende Konvergenz gegen die Lösung von Gradienten- und Newtonverfahren . . . . .	257
B.3	Sattelpunkt . . . . .	259
B.4	Beispiel einer komplett Sequentiellen Parameteridentifikation ohne global konvergierendes Gradientenverfahren . . . . .	260
B.5	Invertierbarkeit der Zielgrößen einer komplett Sequentiellen Parameteridentifikation mit dem Newtonverfahren . . . . .	261
B.6	Eindeutige Einzelzusammenhänge mit mehrdeutigem Gesamtzusammenhang . . . . .	263
B.7	Eindeutiger Zusammenhang mit ausschließlich mehrdeutigen Einzelbeziehungen . . . . .	264
B.8	Zweielementige Parametergruppe mit unterbrochenem Lösungsintervall zur ersten Beziehung . . . . .	265
B.9	Beispiel eines eindeutigen 2D-Zusammenhangs mit monotonen Einzelbeziehungen, für den das Newtonverfahren nicht global konvergiert . . . . .	266
B.10	Gradientenverfahren konvergiert global für vollständig monotone, eindeutige 2D-Zusammenhänge . . . . .	267
B.11	Beispiel eines eindeutigen 3D-Zusammenhangs mit streng monotonen Einzelbeziehungen, für den das Gradientenverfahren nicht global konvergiert	269
B.12	Eindeutigkeit zweidimensionaler Zusammenhänge mit streng monotonen Einzelbeziehungen und positiver Funktionaldeterminante . . . . .	270
B.13	Parameteränderung zum Ziel einstellbarer Zielgrößen über das Gradientenverfahren . . . . .	272
B.14	Reduktion von 3-SAT auf Nicht-0-Konstanz endlich oft differenzierbarer Funktionen in mehreren Variablen . . . . .	278
B.15	Reduktion von SAT auf die Nicht-Injektivität arithmetischer Abbildungen	278
B.16	Nachweis zur Injektivität bei Abbildung von Hyperquadranten in Halbräume	279

<b>C</b>	<b>Anhang zu Kapitel 4</b>	<b>281</b>
C.1	Linearisierte Drehung . . . . .	281
C.2	Linearisiertes Latsch-Längsmodell um $\lambda = 0$ . . . . .	282
C.3	Vertikalkraftabhängige relative Zunahme der Umfangskraftsteigung für wachsendes $R_{quer}$ . . . . .	287
C.4	Latschlängskraft für gedrehten Reifengürtel . . . . .	291
C.5	Fehler bei Bestimmung von $c_{GF\ rot\ rad}$ mit $\lambda = 0$ . . . . .	293
C.6	Lösungen der Schlupfbedingung mit bzw. ohne Gürtelschlupf 0 . . . . .	294
C.7	Stetige Umgebung stabiler Stationärzustände . . . . .	300
C.8	Linearisiertes Latsch-Quermodell um $\alpha = \varepsilon_W = 0$ . . . . .	302
C.9	Sturzurückstellung um stabilen Stationärzustand . . . . .	310
C.10	$\left. \frac{\partial F_{LGK_y}}{\partial \alpha_K} \right _{\alpha_K = \lambda_K = 0}$ und $\left. \frac{\partial M_{LGK_z}}{\partial \alpha_K} \right _{\alpha_K = \lambda_K = 0}$ für $\varphi_{F0x} = 0$ . . . . .	317
C.11	Latsch-Horizontalkräfte unter $F_{FHy} = \lambda = 0$ und $\varphi_{G0x}$ für $(F_{LGK})_{1..2} = 0$ , $v_B \rightarrow 0$ . . . . .	319
C.12	Rückstellmoment-Änderung unter $F_{FHy} = 0$ , $v_B \rightarrow 0$ . . . . .	323
C.13	Rückstellmoment-Änderung in $\alpha$ abhängig von $n_{LKt}$ . . . . .	326
C.14	Seitenkraftänderung in $\alpha$ abhängig von $n_{LK_y}$ . . . . .	328
C.15	Eindeutigkeit von $\varphi_{G0x}$ und $\varphi_{G0z} = 0$ für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . . . . .	332
C.16	Längskraftänderung eines Laufstreifens durch Änderung des Kraftpotenzials	341
C.17	Abschätzung des zweiten Summanden der Längskraftänderung . . . . .	345
C.18	Abschätzung des ersten Summanden der Längskraftänderung . . . . .	351
C.19	Abschätzung der Latsch-Gesamtlängskraft . . . . .	360
C.20	Abschätzung der rückkopplungsfreien Längskraftänderung des Latschs . .	370
C.21	Änderung der Latsch-Längskraft $F_{LGK_x}$ bei Rückkopplung . . . . .	375
C.22	Abschätzung der Voraussetzungen zur Invertierbarkeit von $Z_{\tau 8}$ . . . . .	376
C.23	Verfahren zur Abschätzung der konvergenzrelevanten Eigenschaften von $Z_{\tau 8}$ . . . . .	380
C.24	Abschätzungen zu $p_{d\partial 0}$ und den Haftabrisspunkten . . . . .	385
C.25	Eindeutiger Einfluss von $n_{LK_x}$ auf $ F_{LGK_x} $ . . . . .	386
C.26	Zielgrößenänderung abhängig von $p_{d\partial 0}$ . . . . .	390
C.27	Verschwindende Zeitableitungen bei Felgenvertikalbewegung nach $B_9$ . .	391
C.28	Höhere Zeitableitungen von Lage und Orientierung des Reifengürtels . .	399
C.29	Zusatzeffekte der Reifengürtelbewegung abhängig von Reifendrehung . .	401



# 1 Einleitung

Die rechnerbasierte Simulation ist inzwischen eine etablierte Methode in Wissenschaft und Industrie. Grundlage hierfür sind zunächst Modelle, die eine mathematische Beschreibung des interessierenden Systemverhaltens ermöglichen. Sobald konkrete, real existierende Komponenten in einem Simulationsprojekt abgebildet und integriert werden sollen, deren Aufbau nicht vollständig bekannt oder zu aufwändig im Detail zu berechnen ist, müssen Parameter allgemeiner Modellansätze identifiziert werden. Rückschlüsse auf die korrekte Wahl der Parameterwerte ermöglichen dabei meist Messergebnisse ausgewählter Anregungen des realen Systems. Auch die Identifikation von Modellparametern ist ein intensiv erforschtes und erprobtes Gebiet, das getrieben durch regelungstechnische Anforderungen in den 1960er Jahren die ersten größeren Fortschritte machte, bis heute jedoch zahlreiche wesentliche Beiträge auch aus Statistik, Mathematik, Mechanik, Informatik und weiteren Fachrichtungen erfahren hat. Umfassende Resultate existieren in jedem Fall zur Behandlung linearer Systeme in Kombination mit verrauschten Messsignalen, die die berechnungseffiziente und robuste Schätzung von Koeffizienten inklusive sicherer Konvergenzaussagen ermöglichen. Bestimmte dieser wirksamen Methoden lassen sich auch auf nichtlineare Einzelfälle übertragen, womit jedoch selten zu rechnen ist.

Für die Identifikation allgemeiner nichtlinearer Systeme gibt es ebenso viele Beiträge zur optimalen Definition von Messanregungen und robusten, effizienten Parameterschätzung. Wesentliches Teilproblem ist dabei grundsätzlich die Optimierung einer über den Parametern definierten nichtlinearen Gütefunktion. Die Lösung solcher Aufgabenstellungen geht über das Themenfeld der Identifikation hinaus, und Literatur zu Parameterschätzung verweist hier auf andere Gebiete, behandelt diesen wichtigen Beitrag also nicht. Aus der darauf abzielenden Richtung der Optimierungsalgorithmen sind auch keine generellen effizienten Lösungsverfahren bekannt. Überraschend ist das nicht, schließlich zählen allgemeine nichtlineare Optimierungs- und Identifikationsaufgaben je nach Ausprägung zu den schwierigsten Problemen der Komplexitätsklassen NP bzw. UP, für die bis heute keine effizienten Lösungsmethoden bekannt sind. Um trotzdem Parameter komplexer nichtlinearer Systeme mit akzeptablem Aufwand identifizieren zu können, wird auf heuristische Suchverfahren wie lokale Optimierung oder genetische Algorithmen ausgewichen. Kann die in Frage kommende Parametermenge nicht auf einen hinreichend kleinen Raum eingeschränkt werden, so dass mehrere lokale Extremstellen ausgeschlossen werden können, muss dabei allerdings mit fehlerhaft bestimmten Scheinresultaten gerechnet werden.

Neben nicht zugleich effizient und sichergestellt invertierbaren Zusammenhängen bringt die Identifikation nichtlinearer Systeme zwei weitere Probleme mit sich. Bei ein und derselben Anregung können eventuell verschiedene statische oder dynamische Zustände mit unterschiedlichem Antwortverhalten angenommen und Anteile der Messergebnisse daher, ohne es überprüfen zu können, auf die jeweils falsche Situation angewandt werden. Fehlgeleitete Schlüsse auf zugrunde liegende Parameter sind dabei die Folge. Zusätzlich besteht sogar bei großen Messreihen noch die Frage, ob durch das damit bekannte Übertragungsverhalten die Parameter überhaupt eindeutig festgelegt sind, und möglicherweise eine falsche Belegung der Parameterwerte bestimmt wird, unter der sich nicht explizit gemessenes Verhalten der Komponente dann doch unterscheidet. Auch zur Klärung dieser Fragestellungen bieten die Gebiete der Identifikation oder Systemtheorie keine zugleich allgemeinen, sicheren und effizienten Methoden. Und wieder kann mit Hilfe der Komplexitätstheorie erkannt werden, dass solche Problemstellungen NP-schwierig sind, und es wird nachvollziehbar, warum bisher keine entsprechenden Verfahren bekannt sind. Ohne größere Analyseanstrengungen im Einzelfall sind Aussagen über die Eindeutigkeit einer Identifikation mit festgelegter Messreihe nur heuristisch, testweise möglich und damit nicht sicher zu treffen. Als Folge der verschiedenen Unsicherheiten bei der Parameterschätzung nichtlinearer Systeme muss bei darauf aufbauenden Arbeitsergebnissen mit Qualitätseinbußen gerechnet werden. Die suboptimale Abbildung oder eine unbemerkt fehlerhafte Extrapolation des gemessenen Verhaltens können im Entwicklungsprozess falsche Designentscheidungen oder irreführende Ergebnisse von Problemanalysen bewirken.

Sicher auszuschließen sind solche Risiken letztlich nur, wenn es gelingt, eindeutige Messergebnisse, Eindeutigkeit der Parameter in den gemessenen Größen und einen sicher konvergierenden Lösungsalgorithmus zu garantieren. Eine solche funktionale Verifikation von Identifikations-Verfahren mit formalen Methoden ist genau Inhalt dieser Arbeit. Etablierte Verifikations-Prinzipien wie beispielsweise das Hoare-Kalkül sind auf sicherheitskritische, diskrete Algorithmen zugeschnitten und bieten keine zielführenden Hilfsmittel für den Nachweis von Eigenschaften, die auf mehrdimensionalen kontinuierlichen Zusammenhängen beruhen. Methoden zur Qualifikation von konkreten geregelten dynamischen Systemen schließen definierte kritische oder instabile Zustände aus, und eignen sich damit auch nicht dazu, abhängig von beliebigen Parametrierungen das Finden exakter Lösungen durch ein effizientes numerisches Suchverfahren zu garantieren. Daher wird hier eine alternative Vorgehensweise vorgeschlagen, die den schwierig zu analysierenden analytischen Abhängigkeiten bereits dadurch Rechnung trägt, dass das zu verifizierende Verfahren schon selbst beeinflusst wird. Es soll also nicht der Funktionsnachweis für beliebige bereits existierende Identifikationsprozesse erbracht werden, sondern ein solches modellabhängiges Verfahren zunächst in verifizierbarer Form konzipiert und anschließend der formale Beweis seiner Korrektheit erbracht werden. Schwerpunkte der Betrachtung sind die genannten Eigenschaften zur Eindeutigkeit und sichergestellten Konvergenz des

---

Lösungsalgorithmus unter Annahme hinreichender Modellierungsgüte. In Bezug auf die Robustheit eines Schätzverfahrens gegenüber Messrauschen und Mängeln des Modells, also Themen, die die Grundlagenliteratur zur Parameteridentifikation intensiv behandelt, macht die hier vorgestellte Methode keine Vorgaben, verhindert diese wichtigen Designaspekte aber auch nicht.

Neben dem allgemeinen Ansatz bestimmt der Entwurf eines Parameter-Identifikationsprozesses für ein konkretes physikalisches Reifenmodell einen wesentlichen Teil des Inhalts der folgenden Kapitel. Das betrachtete Modell befindet sich im praktischen Einsatz der Fahrzeugsimulation in der Fahrzeugsystemdynamik-Forschung der Daimler AG. V.A. die analytischen Begründungen zur Funktion des Schätzverfahrens auf Basis der Modellgleichungen machen dabei den Hauptanteil aus. Daran lässt sich die Grundidee der Design- und Verifikationsmethode besonders gut nachvollziehen. Diese besteht darin, eine Folge von Modellstimulationen zu definieren, unter denen bestimmte Antwortgrößen des Systems jeweils in einem einfachen, eindeutigen Zusammenhang zu einzelnen noch unbekanntem Parametern stehen und unabhängig von den übrigen noch zu bestimmenden Parametern sind. So ist es formal möglich, logische Rückschlüsse der Identifikations-Software aus einer einzelnen Modellstimulation mit zugehöriger Antwort auf die entsprechenden Parameter als korrekt nachzuweisen. Die aufeinanderfolgende Betrachtung der einzelnen Messungen erlaubt dabei, schrittweise immer weitere Parameter zu bestimmen bzw. als bereits bekannt vorauszusetzen. Mit der Bezeichnung als Sequentielle Parameteridentifikation für dieses Vorgehen wird genau hierauf Bezug genommen. Dass zu einem gegebenen Identifikationsproblem die Definition einfach abgeleiteter aufeinanderfolgender Messgrößen gelingt, von denen jeweils nur wenige noch unbekannt Parameter abhängen, ist nicht notwendigerweise der Fall. Ob und wie dies für ein konkretes Modell möglich ist, kann systematisch überprüft werden. Dabei können automatisierte Softwarelösungen unterstützen, die ergänzend zum prinzipiellen Vorgehen entwickelt und vorgestellt werden.

Nachdem damit die inhaltlichen Ziele der Arbeit beschrieben sind, wird nun geklärt, in welcher Folge und Struktur sie behandelt werden. Kapitel 2 geht dabei zunächst auf den Stand der Technik ein, und stellt verschiedene etablierte oder vorgeschlagene Verfahren zur Lösung allgemeiner und spezifischer Problemstellungen der Parameter-Identifikation vor. Auch die bereits angesprochene Einordnung des allgemeinen Parameter-Identifikationsproblems in Komplexitätsklassen, die von möglichen Vorbedingungen abhängt, soll dabei inklusive formalen Beweisen behandelt werden.

Die in dieser Arbeit vorgeschlagene Vorgehensweise der Sequentiellen Parameteridentifikation zum Entwurf verifizierbarer Identifikationsprozesse ist Gegenstand von Kapitel 3. Zunächst müssen dort die grundlegenden Größen eingeführt werden, die eine formale Definition der Methode überhaupt erst ermöglichen. Beginnend mit dem hier zugrunde gelegten Zweck eines Identifikationsprozesses, die Parameter mit einer minimalen Zahl von Messgrößen zu schätzen, können so die wesentlichen Eigenschaften einer Sequentiel-

len Parameteridentifikation mit den Begriffen Funktional-Bedingung, Auswertungsfunktional und Zielgröße beschrieben werden. Neben der Erläuterung dieser Ausdrücke und Eigenschaften in Textform gelingt ihre Definition v.A. durch die verwendete formale Logik in eindeutiger und unmissverständlicher Weise. Davon profitiert v.A. die Klärung der grundlegenden Voraussetzungen einer Sequentiellen Parameteridentifikation: Wohldefiniertheit, Unabhängigkeit und Eindeutigkeit der Zusammenhänge zwischen Zielgrößen und Parametern. Basierend auf den eingeführten Zielgrößen, die in komprimierter Form das gesamte Systemverhalten festlegen, zeigen dann kleine theoretische Beispiele, dass und aus welchen Gründen selbst damit klassische numerische Lösungsverfahren nicht notwendigerweise die passenden Parameterwerte finden. Neben der Wahl einer minimalen Zahl von Zielgrößen und der Voraussetzung, deren Eindeutigkeit in den Parametern einfach verifizieren zu können, wird so auch die dritte Zielsetzung einer Sequentiellen Parameteridentifikation klar, ein effizientes, sicher gegen die Lösung konvergierendes Suchverfahren für die Parameterwerte zu definieren.

Im Anschluss daran wird unter Verwendung der elementaren Begriffe der gesamte Ablauf der Sequentiellen Parameteridentifikation formal beschrieben und gezeigt, wie damit im einfachen Fall direkter Beziehungen zwischen je einer Zielgröße und einem Parameter der Nachweis von Eindeutigkeit und Konvergenz gelingt. Außerdem ist es an dieser Stelle sinnvoll zu analysieren, wie mit Hilfe von Funktional-Bedingungen und Auswertungsfunktionalen gezielt Zielgrößen definiert werden können, die die zur Verifikation notwendige Einteilung in jeweils abhängige und unabhängige Gruppen von Parametern ermöglichen. Dazu gehört auch der Versuch, erforderliche Eigenschaften von Systemen zu nennen, die sich überhaupt für eine solche Art der Parameterbestimmung eignen.

Schafft eine definierte Sequentielle Parameteridentifikation nicht allein Einzelbeziehungen zwischen Zielgrößen und Parametern, verbleiben auch mehrdimensionale Zusammenhänge. Für den Nachweis von Eindeutigkeit und die Definition sicher konvergierender Lösungsverfahren sind in diesen Fällen aufwändigere Maßnahmen nötig. Auch auf diese wird eingegangen, wobei abhängig davon, wie viele zusätzlich nachweisbare Eigenschaften die mehrdimensionalen Zusammenhänge besitzen, bessere und effizientere Methoden vorgeschlagen werden. Zur Demonstration der Notwendigkeit verschiedener geforderter Voraussetzungen dienen auch etliche Beispielfälle, die ohne diese Eigenschaften Probleme bei der Parameterbestimmung mit sich bringen. Sämtliche für die Funktion einer modellabhängigen Sequentiellen Parameteridentifikation relevanten Ergebnisse werden darauf in einem schrittweisen Ablauf zusammengefasst, der damit eine generelle Vorgehensweise zum Entwurf eines solchen Prozesses empfiehlt. Dazu gehört auch ein übergeordneter damit funktionsverifizierter Lösungsalgorithmus, der die verschiedenen Ansätze zur Behandlung von Teilproblemen in einem Verfahren integriert.

Nach der komplettierten Vorstellung der auf den Funktionsnachweis zugeschnittenen Sequentiellen Parameteridentifikation wird diese anschließend mit anderen Methoden aus den Gebieten der Parameterschätzung und Verifikation verglichen, von denen einige in



---

Kapitel 2 schon genauer beschrieben sind. Dabei wird neben den Aspekten, die das hier entwickelte Verfahren nicht abdeckt, auch klar, dass es sich in der Auslegung auf einen möglichst einfachen Nachweis von Eindeutigkeit und Konvergenz des numerischen Lösungsverfahrens von allen vorhandenen Ansätzen unterscheidet. Den Schluss von Kapitel 3 bilden noch die bereits angeführten Software-Lösungen zur Unterstützung beim Entwurf einer Sequentiellen Parameteridentifikation für ein gegebenes Identifikationsproblem.

In seiner abstrakten Form beweist das vorgestellte Prinzip nicht, dass damit ein funktionsverifizierter Prozess zur Parameteridentifikation komplexer, nichtlinearer und praxisrelevanter Modelle erstellt werden kann. Kapitel 4 soll genau diesen Beitrag liefern, indem dort eine Sequentielle Parameteridentifikation zum schon erwähnten Fahrdynamik-Reifenmodell entworfen, und die vorausgesetzten Eigenschaften vollständig formal bewiesen werden. Um Rahmenbedingungen wie geeignete Messgrößen, die Bedeutung des speziellen Modelltyps für die Simulation oder die Übertragbarkeit von Resultaten auf andere Modelle verstehen zu können, wird zunächst ein Überblick zum Stand der Reifensimulation insgesamt gegeben, und das hier verwendete Modell darin eingeordnet. Da die Arbeit keine Vorkenntnisse des Lesers in Reifentechnik- und -simulation voraussetzt, folgt darauf eine ausführliche, illustrierte Begriffseinführung in die hier relevanten Begriffe des Gebiets. Der Nachweis vorausgesetzter Eigenschaften gelingt nur mit umfassendem Wissen über das benutzte Modell, das daher selbst durch die Beschreibung seiner Grundbegriffe, einem strukturellen Überblick, dem Bezug zwischen Simulations- und realen Komponenten und natürlich den formalen Gleichungen erklärt wird. Aus der Kategorisierung als Modelltyp zwischen einfachen Kennlinienansätzen und einer Beschreibung durch Finite Elemente wird klar, dass die Abbildung nur eingeschränkt auf fahrdynamikrelevantes Verhalten realitätsgetreu ist, und daher auch exakt dieses gemessen werden muss. Diesen Fokus schaffen genau die dafür eingesetzten Reifenprüfstände, die es daher Sinn macht, mit all den für die Qualität der Messdaten verbundenen Problemen zu betrachten und zusätzlich in die Modellierung zu integrieren. Grund dafür, dass das Schätzverfahren für die Reifenparameter keine statistischen Methoden zur Behandlung von Rauschen durch Mess- und Modellierungsdefizite einbezieht, ist die fast ausschließliche Analyse von Stationärverhalten, für das über hinreichend lange Zeit beobachtet sich diese Effekte ausmitteln. Das zum Verständnis der hier relevanten Zusammenhänge damit wesentliche Stationärverhalten des Reifens wird daher mit seinen zentralen Eigenschaften in einem separaten Abschnitt behandelt.

Nach Klärung der Frage, welche Parameter aus Messungen geschätzt werden müssen und welche übrigen besser auf anderem Weg zu ermitteln sind, können die 15 zu identifizierenden Parameter in 9 separate Gruppen einer Sequentiellen Parameteridentifikation eingeteilt werden. Die hierauf folgenden Abschnitte dienen anschließend dazu, die formalen, analytischen Beweise für die in Kapitel 3 vorausgesetzten Eigenschaften zur Verifikation des Identifikationsprozesses getrennt für die einzelnen Parametergruppen zu

führen. Dabei verwendete Techniken sind beispielsweise vereinfachte Ersatzmodelle, die die eingeschränkte Situation einer Einzelmessung aber vollständig beschreiben, Linearisierungen um weniger komplizierte Betriebszustände und gut formal zu beschreibende Gleichgewichtslagen von Stationärzuständen. Bei der Übertragung von bekannten Eigenschaften zweier Situationen auf eine dazwischenliegende helfen Stetigkeitsargumente. Häufig lässt die Parametrierung die Abbildung eines unrealistischen Modellverhaltens zu, das auch notwendige Eigenschaften unterbindet und nur unter schwer abzugrenzenden Wertkombinationen auftritt. Solche Fälle können oft durch einen situationsabhängig als dynamisch stabil vorausgesetzten abzubildenden realen Reifen ausgeschlossen werden. In reduzierten Zusammenhängen ermöglicht die zusammengefasste Beschreibung von Größen in Termen durch eine kleinere Zahl von Variablen eine Reduktion der Problemdimension und macht damit eine erschöpfende numerische Analyse möglich. Sämtliche dieser Resultate sind aus der Arbeit direkt nachvollziehbar, die sich nicht darauf beschränkt, lediglich vom positiven Ergebnis einer nicht im Detail nachvollziehbaren verifizierenden numerischen Berechnung zu berichten. Im Ausnahmefall einer Parametergruppe müssen, um möglichst robuste Zielgrößen zuzulassen, die notwendigen Eigenschaften auch bei jeder Anwendung des Identifikationsprozesses durch ein numerisches Abschätzungsverfahren garantiert werden.

Am Ende von Kapitel 4 zeigt eine Beispielanwendung den Ablauf der Sequentiellen Parameteridentifikation für das Reifenmodell. Um die in dieser Arbeit auf das Funktionieren des Lösungsalgorithmus fokussierten Aussagen nicht aufwändig von Schwachpunkten des Modells bei der Abbildung realer Reifen trennen zu müssen, erfolgt die Demonstration auf Grundlage simulierter statt gemessener Daten und nicht für den gesamten Prozess einer Parameterbestimmung.

Kapitel 5 interpretiert die Ergebnisse der Arbeit insgesamt und trägt dabei Vorzüge und Probleme einer Sequentiellen Parameteridentifikation zusammen. Darauf basierend soll zum Abschluss der Arbeit noch auf mögliche weiterführende Überlegungen und Anwendungen aufmerksam gemacht werden.

## 2 Grundlagen und Methoden der Parameter-Identifikation

Bevor in Kapitel 3 die hier erarbeitete *funktionale Verifikations-Methode* für Identifikationsverfahren vorgestellt wird, soll dieses Kapitel auf die grundlegenden Techniken der Parameteridentifikation selbst und einige spezielle Herangehensweisen eingehen. Natürlich wird hier nur ein Überblick zu den verschiedenen Verfahren gegeben, von denen ein paar wenige auch detaillierter betrachtet werden können. Für ein gründliches Verständnis muss auf entsprechende Literatur verwiesen werden. Auch die Formalisierung von Modellen, Messdaten, Simulationsdaten, vom Übertragungsverhalten des realen und des modellierten Systems wird hier nur rudimentär und erst in Kapitel 3 vollständig ausgeführt.

Auf jeden Fall ist allen Identifikationsmethoden gemeinsam, dass aus Messungen endlich viele Kenngrößen, hier zu einem Vektor  $Z_0$  von Zahlenwerten zusammengefasst, extrahiert werden. Oft sind dies nur Komponentenwerte  $(u)_{i_k}$  und  $(y)_{j_k}$  der Systemanregung und -antwort zu verschiedenen Zeitpunkten  $t_k$ . Möglich sind aber auch komplexere Auswertungen der Messung. Die Messungen werden experimentell an einem realen System entweder durch aktive Stimulation mit zeitlichen Anregungen  $u$  oder durch einfache Beobachtung eines Systems mit natürlicher Anregung erhoben. Ein mathematisches Modell, hier als Übertragungsoperator  $\tau$  zwischen Anregung  $u$  und Systemantwort  $y$  formalisiert, bildet das Verhalten für eine ganze *Klasse* von Systemen ab, von denen das beobachtete eine einzelne Ausprägung ist. Die verschiedenen möglichen Varianten resultieren aus den unterschiedlichen Belegungen der endlich vielen Parameterwerte  $P^V$ . Aufgabe eines Identifikationsverfahrens ist es, die Belegung  $P_0^V$  der Parameterwerte aus den gemessenen Kennwerten  $Z_0$  zu bestimmen, die genau das betrachtete reale System beschreiben. Voraussetzung hierfür ist, dass  $Z_0$  so viele Systemeigenschaften charakterisiert wie zur Bestimmung von  $P_0^V$  erforderlich sind.

In vielen Fällen können Fehlerquellen bei der Erhebung der Messdaten weder ausgeschlossen noch ignoriert werden. Ursache für die Abweichungen vom Idealzustand können dabei sowohl beschränkte Modellierungstiefe als auch Toleranzen in der Messtechnik sein. Um vor allem bei geringer Redundanz der Messungen Aussagen über die Verlässlichkeit der Parameterschätzung zu erhalten, wird der Messvorgang unter Verwendung statistischer Methoden mitmodelliert. Ein möglichst allgemeiner Ansatz ist dabei, die Fehler als li-

near überlagerte *multivariate Normalverteilung* mit Erwartungswert 0 und unbekannter *Kovarianzmatrix*  $\Sigma$  darzustellen.

$$\tilde{y} = y + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \Sigma) \quad \text{mit Dichte } f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^m \sqrt{|\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^T \Sigma^{-1} \varepsilon}, \quad m = \dim(y) \quad (2.1)$$

Formal ist eine Parameterbestimmung gemäß diesem Ansatz lediglich eine *Parameterschätzung*, da so keine sichere Schlussfolgerung mehr möglich ist.

In Spezialfällen kann die Parameterschätzung mit einfachen und direkten Berechnungen erfolgen. Dies ist bspw. so, wenn die Messauswertung  $Z$  in den zu bestimmenden Parameterwerten  $P^V$  lineare Zusammenhänge aufweist. Stimmen die Kennwerte  $Z$  mit den Messsignalen der Systemein- und -ausgänge unter Berücksichtigung der Messfehler  $u$  und  $\tilde{y}$ , also für  $Z^T = [u_1^T, \dots, u_N^T, \tilde{y}_1^T, \dots, \tilde{y}_N^T]$ , überein, liegt ein lineares Modell zwischen Ein- und Ausgängen vor

$$y = A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ u \end{bmatrix}, \quad (A)_{ij} \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n+1, \quad n = \dim(u), \quad (2.2)$$

$$P^V = ((A)_{11}, \dots, (A)_{m, n+1})^T$$

Die Parameterwerte, hier Elemente der Matrix  $A$ , lassen sich *erwartungstreu* und *wirksamst*, also im Mittel korrekt und mit minimaler Abweichung schätzen zu

$$\hat{A}^T = (UU^T)^{-1} U\tilde{Y}^T, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ u_1 & \dots & u_N \end{bmatrix}, \quad \tilde{Y} = [\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N] \quad (2.3)$$

Es kann so nicht mit Sicherheit auf die Werte geschlossen werden, dafür sind statistische Aussagen zu den Parametern möglich. Zwar ist zur Berechnung der *Parameterschätzung*  $\hat{A}$  die Kenntnis der *Kovarianzmatrix*  $\Sigma$  nicht erforderlich, auf die Verlässlichkeit der Parameterbestimmung hat sie jedoch einen großen Einfluss. Kann man für die *Kovarianzmatrix* wie in [85] von der einfachen Gestalt  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_m^2)$  ausgehen, lässt sich für jede Zeile  $i$  von  $A$  der *Hyperellipsoid*

$$\left\{ (A^T)_{1..n+1 i} \mid \left( (A^T)_{1..n+1 i} - (\hat{A}^T)_{1..n+1 i} \right)^T U_0 U_0^T \left( (A^T)_{1..n+1 i} - (\hat{A}^T)_{1..n+1 i} \right) \leq (n+1) s^2 F_{n+1, N-n-1}^{p_r} \right\}$$

$$\text{mit } s^2 = \frac{\|(\tilde{Y}_0^T)_{1..n+1 i} - U_0^T (\hat{A}^T)_{1..n+1 i}\|^2}{N-n-1} \quad (2.4)$$

angeben, der die tatsächliche Parameterbelegung  $(A_0^T)_{1..n+1 i}$  mit einer Mindestwahrscheinlichkeit von  $1 - p_r$  enthält.  $F_{n+1, N-n-1}^{p_r}$  steht dabei für den Wert der *Verteilungs-*

---

funktion der Fisher-Verteilung mit  $n + 1$  bzw.  $N - n - 1$  Freiheitsgraden zur Wahrscheinlichkeit  $p_r$ . Die so definierte Menge von Parameterbelegungen wird als *Konfidenzbereich* zum *Signifikanzniveau*  $1 - p_r$  bezeichnet. Eine genauere Beschreibung inklusive Herleitung kann man [85] und [84] entnehmen.

Auch wenn keinerlei Einschränkungen für die *Kovarianzmatrix* möglich sind, können *Konfidenzbereiche* angegeben werden. Allerdings erhält man keine so anschaulichen Gebiete mehr wie in 2.4. Statt nur die  $\sigma_i^2$  durch  $s^2$  zu schätzen, muss hier die gesamte *Kovarianzmatrix*  $\Sigma$  sowohl für die geschätzte als auch die geprüfte Parameterbelegung geschätzt werden. Der Quotient ihrer *Determinanten*, das *Likelihood-Verhältnis* entscheidet über die Zugehörigkeit zum *Konfidenzbereich* des *Signifikanzniveaus*  $p_r$ :

$$\left\{ A \left| \frac{1}{2} (n + m - 2N + 3) \ln \frac{\left| (\tilde{Y}_0 - \hat{A}U_0) (\tilde{Y}_0 - \hat{A}U_0)^T \right|}{\left| (\tilde{Y}_0 - AU_0) (\tilde{Y}_0 - AU_0)^T \right|} \leq X_{mn}^{2p_r} \right. \right\} \quad (2.5)$$

$X_{mn}^{2p_r}$  ist der Wert der *Verteilungsfunktion* der *Chi-Quadrat-Verteilung*  $\chi^2$  mit  $mn$  *Freiheitsgraden* zur Wahrscheinlichkeit  $p_r$ . Sinnvoll ist die Bestimmung des *Konfidenzbereichs* mit dieser Methode nur für große  $N$ , da die  $\chi^2$ -Verteilung nur so die eigentlich vorliegende *Wilks-Verteilung* gut approximiert. Genaueres findet sich hierzu in [58] oder [25].

Neben der Analyse statischer Zusammenhänge ist ein klassischer Anwendungsfall *linearer Regression* die Koeffizientenbestimmung rekursiver linearer Prozesse, die diskret über einzelnen Zeitschritten oder kontinuierlich gemäß linearer Differenzialgleichungen ablaufen können. Damit modellieren sie das Verhalten bspw. *digitaler Filter* oder elektronischer Schaltungen aus *linearen Elementen* wie Spule, Kondensator und Widerstand. Als abstrakte Modellierung erhält man für den diskreten Prozess konstanter Zeitschrittweite  $\Delta t$  in einer Ausgangsgröße

$$y_t = a_{d0} + a_{d1}y_{t-1} + \dots + a_{dm}y_{t-m} + b_{d0}u_t + b_{d1}u_{t-1} + \dots + b_{dm}u_{t-m} \quad (2.6)$$

wobei die  $y_{t-1}, \dots, y_{t-m}$  eine Modellierung innerer Systemzustände ersetzen, und für den kontinuierlichen Prozess

$$y = a_{k0} + a_{k1} \frac{\partial}{\partial t} y + \dots + a_{km} \frac{\partial^m}{\partial t^m} y + b_{k0} u + b_{k1} \frac{\partial}{\partial t} u + \dots + b_{km} \frac{\partial^m}{\partial t^m} u \quad (2.7)$$

Der Parameterbestimmung solcher Systeme widmet sich die Grundlagenliteratur *Identifikation dynamischer Systeme* ([49], [50]) hauptsächlich. Zur Berechnung der Parameter im diskreten Fall 2.6 wird in [50] *lineare Regression* vorgeschlagen. Die Systemvariablen

werden dabei zyklisch in den *Regressions*-Matrizen angeordnet:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ y'_{t-1} & y'_t & \dots & y'_{t-2+N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y'_{t-m} & y'_{t-m+1} & \dots & y'_{t-m-1+N} \\ u_t & u_{t+1} & \dots & u_{t-1+N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{t-m} & u_{t-m+1} & \dots & u_{t-m-1+N} \end{pmatrix}, \quad \tilde{Y} = (y'_t, \dots, y'_{t-1+N}) \quad (2.8)$$

Verwendet man für die  $y'_t$  direkt die gemessenen, also gemäß 2.1 fehlerbehafteten Systemausgangswerte  $\tilde{y}_t$ , weist [50] darauf hin, dass die *Regression* nach 2.3 anders als für 2.2 nicht auf exakt vorliegenden Modellanregungen beruht. Man erhält so einen *offsetbehafteten* Schätzer für die Parameterwerte, der auch für beliebig große  $N$  im Mittel deutlich von den realen Parameterwerten abweichende Schätzwerte liefert. Für einen *erwartungstreuen* Schätzer müssen nach [50] die inneren Zustände als unbekannte Größen eines dann nichtlinearen Problems mitbestimmt werden. Definiert kann die Lösung bspw. durch das *Maximum-Likelihood-Prinzip* (s.u.) sein. Im Vergleich zur *linearen Regression* ist dieses Vorgehen jedoch unattraktiv. Eine einfachere Alternative bietet die Methode der *Instrumentellen Variablen*, deren Anwendung für die Identifikation *linearer Mehrkörpersysteme* bspw. in [83] ausführlich oder die *hydraulischer Kupplungen* in [10] kurz beschrieben wird. Dabei bildet eine erste Schätzung  $\hat{p} = \hat{A}$  von  $p = (a_{d0}, \dots, a_{dm}, b_{d0}, \dots, b_{dm})$  durch *lineare Regression* 2.3 mit  $y'_t = \tilde{y}_t$  die Grundlage für geschätzte innere Zustände  $\hat{y}_t$  nach 2.6 mit  $\hat{p}$  statt  $p$  auf Basis der Werte  $\hat{y}_t = \tilde{y}_t$  für  $0 \leq t \leq m-1$ . Mit  $y'_t = \hat{y}_t$  kann daraus nach 2.8 eine präzisere Schätzung  $U_2$  der Zustands- und Anregungsmatrix  $U$  angegeben werden. Schon die Lösung der *linearen* Gleichung

$$(\hat{p}_2 \cdot U - \tilde{Y}) \cdot U_2^T = 0$$

die unter den gesuchten Parametern  $\hat{p}_2$  ausbleibende Korrelation zwischen den geschätzten inneren Zuständen  $U_2$  und einer geschätzten Linearkombination  $\hat{p}_2 \cdot U - \tilde{Y}$  der Messfehler  $\tilde{Y} - Y$  definiert, liefert wie in [83] genau erläutert den *asymptotisch erwartungstreuen Schätzer*

$$\hat{p}_2 = (UU_2^T)^{-1} \tilde{Y}U_2^T$$

für  $p$ . *Asymptotisch erwartungstreu* beschreibt dabei das Verschwinden des *Offsets* unter beliebig wachsendem  $N$ , wobei Voraussetzung ist, dass die erste Parameter-Schätzung  $\hat{p}$  einen *stabilen* Prozess definiert, dessen Zustand  $y_t$  also ab einer bleibenden *Nullanregung*  $u_t = 0, t \geq t_0$  gegen 0 konvergiert. Um die *Varianz* des Schätzers immer weiter zu verringern, kann auf Basis von  $\hat{p}_i, i \geq 2$  an Stelle von  $\hat{p}$  *iterativ* eine jeweils verbesserte Schätzung  $\hat{p}_{i+1}$  analog zu  $\hat{p}_2$  wie in [83] und [10] umfassend beschrieben gebildet werden.

---

Praktisch besteht auch das Problem, dass die Anregung  $u_t$  nicht exakt eingestellt bzw. gemessen ist. Dazu verweist [50] auf zusätzliche Literatur wie [87]. Zur Parameteridentifikation von 2.6 werden auch *rekursive Verfahren* vorgestellt, die ausgehend von vorläufigen Schätzwerten für die Parameter auf Basis neuer Messungen aktualisierte Schätzwerte mit möglichst geringem Aufwand berechnen. So ist es dann auch möglich, in Systemen mit trägem nichtlinearem und dynamischem linearem Verhalten zeitlich veränderliche Parameter des linearisierten Modells über sog. *Vergessensfaktoren* aktuell anzupassen. Im Fall des kontinuierlichen Systems 2.7 bewirken schon kleinste Abweichungen der gemessenen Signale große Fehler in den differenzierten Größen. Abhilfe schaffen nach [50] bspw. geeignete *Tiefpassfilter*, die allerdings kontinuierliche Signalverläufe voraussetzen, und daher zwischen den gemessenen diskreten Werten z.B. durch Polynome interpoliert werden soll. Eine interessante alternative Methode ist die, an Stelle des *kontinuierlichen* Systems 2.7 ein 'äquivalentes' *diskretes* System 2.6 mit o.g. Methoden zu identifizieren und in die entsprechende Form 2.7 zu transformieren. So lässt sich die problematische Schätzung der Zeitableitungen umgehen. Äquivalent sind das *kontinuierliche* und das *diskrete* System allerdings nur für Anregungen  $u$  einer bestimmten Form, im Fall der in [50] vorgeschlagenen Transformation, wenn  $u$  'treppenförmig', also zwischen den Abtastzeitpunkten des *diskreten* Systems konstant ist. Die Beziehung wird zwar zwischen den Zustandsdarstellungen

$$\dot{x} = Ax + Bu \text{ (kontinuierlich)} \quad \text{und} \quad x_{t+1} = Fx_t + Gu_t \text{ (diskret)} \quad (2.9)$$

über

$$A = \frac{1}{\Delta t} \ln F \quad B = (F - I)^{-1} AG$$

mit Hilfe des *Matrixlogarithmus* hergestellt, es lässt sich aber schematisch sowohl Darstellung 2.6 in die äquivalente *diskrete* Form von 2.9 als auch die *kontinuierliche* Form von 2.9 in die äquivalente Darstellung 2.7 überführen. Basis der Transformation von 2.6 in die *diskrete* Form von 2.9 ist eine Matrix analog der *Regelungs-Normalform* und für die Transformation von der *kontinuierlichen* Form von 2.9 in 2.7 die *Beobachtbarkeits-Matrix*, die als invertierbar vorausgesetzt wird. Beide Begriffe sind in [49] genauer definiert.

Ein weiterer *robuster* Ansatz zur Identifikation linearer Systeme ergibt sich nach [50] aus der *Laplace-transformierten* Darstellung von 2.7:

$$\mathcal{L}y(s) = a_{k0} \frac{1}{s} + a_{k1} s \mathcal{L}y(s) + \dots + a_{km} s^m \mathcal{L}y(s) + b_{k0} \mathcal{L}u(s) + b_{k1} s \mathcal{L}u(s) + \dots + b_{km} s^m \mathcal{L}u(s) \quad (2.10)$$

Ausführliche Herleitungen zu den Eigenschaften der *Laplace-Transformation* von Funktionen und Differenzialgleichungen findet man bspw. in [9]. Für eine geeignete Anregung  $u$  und Werten von  $\mathcal{L}y(s)$  und  $\mathcal{L}u(s)$  für  $s_j = k + i\omega_j$ ,  $k \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq j \leq N$ ,  $N \geq 2m + 2$  lässt sich aus 2.10 ein lineares Gleichungssystem ableiten, aus dem mit *linearer Regression* (2.3) die Parameter identifiziert werden können.

Muss man von allgemeinen *nichtlinearen* Zusammenhängen zwischen den gemessenen Kennwerten  $Z$  und den Parametern  $P^V$  ausgehen, die sich implizit aus einem *nichtlinearen differenzial-algebraischen Gleichungssystem*

$$F(x, \dot{x}, u, P^V) = 0, \quad y = G(x, u, P^V) \quad (2.11)$$

oder explizit aus einem *nichtlinearen Gleichungssystem*

$$H(Z, P^V) = 0 \quad (2.12)$$

ergeben, können keine sicheren effizienten Lösungsverfahren mehr angegeben werden. Mit Hilfe der *Komplexitätstheorie* lässt sich die Schwierigkeit solcher Lösungsverfahren quantitativ kategorisieren. Eine gute Einführung in dieses Gebiet erhält man bspw. in [96].

Nahe verwandt ist dem Lösen allgemeiner *nichtlinearer Gleichungssysteme* das Problem der *Nichtlinearen Optimierung*

$$\min_{P^V \in P^*} f(P^V), \quad P^* = \prod_{i=1}^{\dim(P^V)} [g_u(P_i), g_o(P_i)] \quad (2.13)$$

das hier für eine *analytische* Funktion  $f$  über Produktintervallen als Definitionsmenge formuliert ist. Letzteres ist ausführlich analysiert und das Problem, für die Teilmenge der *arithmetischen* Funktionen eine hinreichend gute Lösung zu finden, lässt sich einfach als *NP-schwer* nachweisen. Das bedeutet praktisch so viel wie, dass mit einem *effizienten (polynomialzeitbeschränkten)* Lösungsalgorithmus für dieses Problem viele andere Probleme, für die bisher kein effizienter Lösungsalgorithmus gefunden werden konnte, effizient lösbar wären. Unter A.1 ist dazu ein Beweis angegeben. Reduziert man die Möglichkeit, mit der ein Lösungsalgorithmus das Problem analysieren kann, auf einzelne Auswertungen von  $f$ , wie es bei impliziten Optimierungsproblemen z.B. über den Parametern von 2.11 meist realisiert ist, kann durchaus gezeigt werden, dass der Suchaufwand exponentiell in der Problemgröße steigt. Genauer erhöhen die Dimension des Problems und eine kleine Fehlertoleranz den Suchaufwand, wohingegen Beschränkungen der Ableitungen von  $f$  diesen reduzieren. Analysiert findet man solche Abschätzungen des *worst case*-Aufwands z.B. in [68].

Anders als allgemeine Optimierungsprobleme setzt eine konkrete *Parameteridentifikation* einen *eindeutigen* Zusammenhang voraus. Berücksichtigt die Modellierung des Zusammenhangs fehlerbehaftete Messgrößen, muss das Gleichungssystem zur Festlegung der Parameter *überbestimmt* sein. Die resultierenden Probleme, Lösungen mit möglichst kleinem Gleichungsfehler zu finden, werden als *Ausgleichsprobleme* bezeichnet. Auch die Lösung von *Ausgleichsproblemen* ist schon allein von *wurzel-arithmetischen injektiven* Zusammenhängen *NP-schwer*, was in A.2 nachgewiesen wird. Auch wenn man im Voraus die Eindeutigkeit der betrachteten Zusammenhänge garantieren und durch geeignet



---

aufbereitete Kennwerte auf überbestimmte Systeme verzichten kann, bleibt für jedes nichtlineare Identifikationsproblem beim Rückschließen auf die Parameterwerte das Problem, die *injektive* Funktion des eindeutigen Zusammenhangs zu *invertieren*, also 2.12 in der Form

$$H(Z, P^V) = K(P^V) - Z = 0 \quad (2.14)$$

Die Eindeutigkeit der Funktionen ist ein Hindernis, wenn es um *NP-Schwere* geht, da kein *NP-schweres* Problem bekannt ist, das nur eindeutige Lösungen besitzt. Um auch für die *Inversion injektiver* Funktionen zu zeigen, dass sie zu einer *Komplexitätsklasse* gehören, für die keine effizienten Lösungsalgorithmen bekannt sind, muss auf die weniger präzise Klasse *UP* zurückgegriffen werden (s. z.B. [78]). Ein Vertreter der Klasse *UP* ohne bekannten effizienten Lösungsalgorithmus ist das Problem der *Primfaktorzerlegung*. Wäre dazu ein *Polynomialzeitalgorithmus* bekannt, könnte das verbreitete *Verschlüsselungsverfahren RSA* nicht mehr als sicher bezeichnet werden (s. hierzu bspw. [79]). Ungeklärt ist auch die Frage, ob  $UP = P$ , wobei das Gegenteil vermutet wird. Man kann nun zeigen, dass aus der Existenz eines *polynomialzeitbeschränkten* Lösungsverfahrens für die näherungsweise *Inversion injektiver arithmetischer* Funktionen  $P = UP$  folgt. Dementsprechend schwer oder unmöglich ist es, tatsächlich einen solchen Lösungsalgorithmus zu finden. In den Anhangsabschnitten A.3 und A.4 kann ein Beweis dazu nachgelesen werden.

Sind die Zusammenhänge noch implizit durch das Verhalten *zustandsbehafteter dynamischer* Systeme wie in 2.11 definiert, erhöht sich die Schwierigkeit einer Lösungsfindung nochmal. So müssen schon zur Bestimmung einzelner Werte des zugehörigen Parameter-Kenngrößen-Zusammenhangs 2.12 oft aufwändige Simulationen ablaufen, deren Aufwand sich mit dem Suchaufwand der Lösung von 2.12 multipliziert. Für bestimmte *nichtlineare differenzial-algebraische* Systeme gelingt es in [105], diese Aufwandsmultiplikation von Gleichungslösung und Modellsimulation zu vermeiden. Das sind in Darstellung 2.11 ausgedrückt Systeme mit

$$G(x, u, P^V) = G(x, u) \quad \text{und } G \text{ injektiv in } x \quad (2.15)$$

Hier liefert eine *Ausgleichsrechnung*

$$\hat{x}(t) \quad \text{mit} \quad \|G(\hat{x}(t), u(t)) - y(t)\| = \min_x \|G(x, u(t)) - y(t)\|, \quad 0 \leq t \leq t_{max} \quad (2.16)$$

für jeden Zeitpunkt insgesamt eine Schätzung  $\hat{x}$  der *inneren Modellzustände* und eine zusätzliche Ausgleichsrechnung

$$\hat{P}^V \quad \text{mit} \quad \int_0^{t_{max}} \|F(\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u(t), \hat{P}^V)\| dt = \min_{P^V \in P^*} \int_0^{t_{max}} \|F(\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u(t), P^V)\| dt \quad (2.17)$$

die Schätzwerte  $\hat{P}^V$  der Parameter, ohne die mehrfache aufwändige Integration

$$x(t) = \int_0^t F^{-1}(x(\tau), u(\tau), P^V) d\tau + x(0) \quad (2.18)$$

mit  $F(x(\tau), F^{-1}(x(\tau), u(\tau), P^V), u(\tau), P^V) = 0$

der *inneren Modellzustände* nötig zu machen. Leider sind die Voraussetzungen 2.15 für diese Methode nur realistisch, wenn die *inneren Modellzustände* mehr oder weniger direkt gemessen werden, wie es für die Beispiele in [105] auch zutrifft. Dann werden die Zustände eindeutig und ohne Einfluss der Systemeigenschaften abgebildet. Bei der Lösung vieler Identifikationsprobleme kann jedoch nicht auf Messungen der *inneren Modellzustände* zurückgegriffen werden, da eine solche Messung zu aufwändig oder technisch gar nicht realisierbar ist, entsprechende Sensoren das Systemverhalten verfälschen würden, die Modellzustände keine direkte physikalische Entsprechung haben, oder das System nur in Form bestimmter Messgrößen zugänglich ist. Dann ist die Systemsimulation ein notwendiger Bestandteil der Parameteridentifikation, und 2.18 muss mit Methoden der *numerischen Integration*, wie sie bspw. in [17] auf eingängig nachvollziehbare Weise beschrieben sind, gelöst werden.

Da wie oben analysiert allein die Lösung der allgemeinen *nichtlinearen Gleichungssysteme* 2.12 schon sehr komplex ist, müssen für effiziente Verfahren *heuristische* Methoden zum Einsatz kommen. Diese lösen oft praxisbezogene Teilmengen *nichtlinearer Gleichungssysteme* sicher, können dies aber nicht für den allgemeinen Fall garantieren. Auch für einzelne Gleichungssysteme ist ihre sichere Funktion, wenn sie besteht, meist nur schwer nachzuweisen. Letztlich bieten sie aber bisher den einzigen pragmatischen Ansatz zur Lösung von Gleichungssystemen und werden verbreitet eingesetzt. Man kann die Methoden jeweils unterscheiden in *lokale* und *globale*, *deterministische* und *nichtdeterministische*, *ableitungsfreie* und *gradientenbasierte* Verfahren. Zu den *lokalen*, *deterministischen* und *gradientenbasierten* Methoden gehören das *Newton-* und das *Gradientenverfahren*. Beim *Newtonverfahren* wird das Gleichungssystem 2.14 im Punkt  $P_i^V$ , der Zwischenlösung des  $i$ . Iterationsschritts, in den Parametervariablen *linearisiert* und die Zwischenlösung  $P_{i+1}^V$  des folgenden Iterationsschritts als Lösung dieser einfacheren Gleichung festgelegt. Ausgehend von einem anzugebenden *Startwert*  $P_0^V$  *konvergiert* die Folge der Zwischenlösungen unter geeigneten Umständen gegen die gesuchte Lösung. Eine *Schrittweitensteuerung* verkleinert die Änderungen linear zwischen den einzelnen Zwischenlösungen, damit trotz nichtlinearer Abweichungen von der *Linearisierung* in jedem Iterationsschritt eine Verbesserung erzielt wird. Im optimalen Fall wird dazu mit einem *eindimensionalen Suchverfahren* entlang der *Suchrichtung* nach dem minimalen Abstand zum Zielwert  $Z$  gesucht. Als *eindimensionales Suchverfahren* kann bspw. eine *Fibonacci-Suche* oder ein *Intervallhalbierungs-Verfahren*, wie sie in [74] beschrieben sind, eingesetzt werden. Die Definitionsmenge der als *stetig differenzierbar* vorausge-

---

setzen Gleichungsfunktion  $K$ , hier  $P^* = \prod_{i=1}^{\dim(P^V)} [g_u(P_i), g_o(P_i)]$ , schränkt den Raum gültiger Zwischenlösungen ein. Realisiert wird dies durch den *Schnitt* von *Suchrichtungen*, die aus der Definitionsmenge hinausweisen, mit der Berandung  $\partial P^*$  des Suchraums bzw. bei Zwischenlösungen auf dem Rand ( $P_{i+1}^V \in \partial P^*$ ) durch die *Projektion* der *Suchrichtungen* auf den Rand, hier das Nullsetzen von Komponenten der *Suchrichtung*. Man erhält so genauer das *schrittweitengesteuerte Newtonverfahren mit Projektion der Suchrichtungen*:

1. **Wähle**  $P_0^V \in P^*$
2.  $d_{N\ i+1} = \left( \frac{\partial K}{\partial P^V} \Big|_{P^V=P_i^V} \right)^{-1} \cdot (Z - K(P_i^V))$
3.  $t_1 = \min \left( \left\{ \{1\} \cup \left\{ s \mid \begin{array}{l} s = \frac{g_{u/o}(P_j) - (P_i^V)_j}{(d_{N\ i+1})_j}, (d_{N\ i+1})_j \neq 0, s > 0, \\ 1 \leq j \leq \dim(P^V) \end{array} \right\} \right\} \right)$
4. **for**  $j = 1$  **to**  $\dim(P^V)$ 
  - if**  $\left( \left( (P_i^V)_j = g_u(P_j) \right) \wedge \left( (d_{N\ i+1})_j < 0 \right) \right) \vee \left( \left( (P_i^V)_j = g_o(P_j) \right) \wedge \left( (d_{N\ i+1})_j > 0 \right) \right)$
  - then**  $(d_{N\ i+1}^P)_j = 0$
  - else**  $(d_{N\ i+1}^P)_j = (d_{N\ i+1})_j$
5. **Suche (1-dimensional)**  $t_{min}$ 
  - mit**  $\|K(P_i^V + t_{min} \cdot d_{N\ i+1}^P) - Z\| = \min_{0 < t \leq t_1} (\|K(P_i^V + t \cdot d_{N\ i+1}^P) - Z\|)$
6.  $P_{i+1}^V = P_i^V + t_{min} \cdot d_{N\ i+1}^P$
7. **goto** 2.

Alternativ kann auch die Eigenschaft

$$K(\hat{P}^V) = Z, \hat{P}^V \in P^* \Leftrightarrow \|K(\hat{P}^V) - Z\|^2 = \min_{P^V \in P^*} \|K(P^V) - Z\|^2 = 0$$

der Lösung  $\hat{P}^V$  genutzt und 2.14 mit Hilfe des *Gradientenverfahrens* gelöst werden. Anders als beim *Newtonverfahren* wird hier an Stelle der Gleichung die zu minimierende Funktion *linearisiert*, und als *Suchrichtung* die Richtung des linearisiert *steilsten Abstiegs* gewählt. Der übrige Algorithmus ergibt sich analog zum *schrittweitengesteuerten Gradientenverfahren mit Projektion der Suchrichtungen*:

1. **Wähle**  $P_0^V \in P^*$
2.  $d_{G^{i+1}}^T = -(K(P_i^V) - Z)^T \cdot \frac{\partial K}{\partial P^V} \Big|_{P^V=P_i^V}$
3.  $t_1 = \min \left( \{1\} \cup \left\{ s \mid \begin{array}{l} s = \frac{g_{u/o}(P_j) - (P_i^V)_j}{(d_{G^{i+1}})_j}, (d_{G^{i+1}})_j \neq 0, s > 0, \\ 1 \leq j \leq \dim(P^V) \end{array} \right\} \right)$
4. **for**  $j = 1$  **to**  $\dim(P^V)$ 
  - if**  $\left( ((P_i^V)_j = g_u(P_j)) \wedge ((d_{G^{i+1}})_j < 0) \right)$   
 $\vee \left( ((P_i^V)_j = g_o(P_j)) \wedge ((d_{G^{i+1}})_j > 0) \right)$ 
    - then**  $(d_{G^{i+1}}^P)_j = 0$
    - else**  $(d_{G^{i+1}}^P)_j = (d_{G^{i+1}})_j$
5. **Suche (1-dimensional)**  $t_{min}$ 
  - mit**  $\|K(P_i^V + t_{min} \cdot d_{G^{i+1}}^P) - Z\| = \min_{0 < t \leq t_1} (\|K(P_i^V + t \cdot d_{G^{i+1}}^P) - Z\|)$
6.  $P_{i+1}^V = P_i^V + t_{min} \cdot d_{G^{i+1}}^P$
7. **goto** 2.

Wie schon erwähnt ist die *Konvergenz* beider Verfahren gegen die gesuchte Lösung für den allgemeinen Fall nicht garantiert. Zur Funktionsoptimierung 2.13 kann jedoch eine große, einfach zu beschreibende Menge von Funktionen angegeben werden, für die die Verfahren garantiert die Lösung finden. Es handelt sich dabei um die Menge der *konvexen* Funktionen:

$$f : P^* \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \forall P_1^V, P_2^V \in P^*, t \in [0, 1] \quad (2.19)$$

$$f((1-t)P_1^V + t \cdot P_2^V) \leq (1-t)f(P_1^V) + t \cdot f(P_2^V)$$

*Konvexe* Funktionen sind genau die, die sich über jeder Linie ihrer *konvexen Definitionsmenge* durch die *lineare Interpolation* der Linienendpunkte abschätzen lassen.

Bei der Optimierung *konvexer* Funktionen lässt sich die *Konvergenzgeschwindigkeit lokaler, deterministischer, gradientenbasierter* Verfahren erhöhen, indem statt nur durch *Linearisierung* die Funktion bis zur *zweiten Ordnung* in jeder Zwischenlösung  $P_i^V$  approximiert wird. Als *Suchrichtung* erhält man so

$$d_{QN} = -\frac{1}{2}H^{-1} \frac{\partial f}{\partial P^V} \Big|_{P^V=P_i^V} \quad \text{mit} \quad H = \frac{\partial^2 f}{\partial P^{V2}} \Big|_{P^V=P_i^V}$$

---

Solche Verfahren, die auf Approximationen *zweiter Ordnung* basieren, werden als *SQP*-Verfahren (*SQP*= *Sequentielle Quadratische Programmierung*) bezeichnet. Um die aufwändige Berechnung der *Hessematrix*  $H$  zu vermeiden und das Verfahren ohne garantierte *Konvergenz* auch für *nichtkonvexe* Funktionen anwendbar zu machen, wurde das *BFGS*-Verfahren entwickelt. Dieses approximiert neben  $f$  auch  $H$  mit  $H^*$ , indem in jedem *Iterationsschritt*  $H^*$  nur in der letzten *Suchrichtung* auf  $H$  angepasst wird, und das unter der Nebenbedingung, dass  $H^*$  wie bei *konvexem*  $f$  *positiv definit* bleibt. Die erwähnten Verfahren werden in der Literatur wie bspw. [2], [12] und [89] genau beschrieben und analysiert. Auch die Technik der *Straf-Funktionen* zur Einhaltung zusätzlicher *nichtlinearer Gleichungs- und Ungleichungs-Nebenbedingungen* wird dort ausführlich vorgestellt, spielt jedoch für die *Parameteridentifikation* eine weniger große Rolle als im Anwendungsfall der *Optimierung*.

Nach den *gradientenbezogenen* Verfahren soll nun auf die *ableitungsfreien* Methoden eingegangen werden. Von diesen ist das *Nelder-Mead*-Verfahren ein *deterministischer* Vertreter, der sowohl Aspekte der *globalen* als auch der *lokalen* Suche aufweist. Das *Nelder-Mead*-Minimierungsverfahren geht für  $n = \dim(P^V)$  aus von einer Menge *linear unabhängiger* Werte  $P_1^V, \dots, P_{n+1}^V$ , dem *Simplex*, von denen in jedem *Iterationsschritt* einer durch eine optimierte *Linearkombination* ersetzt werden soll. Ausgewählt wird hierzu immer der Wert  $P_{i_{max}}^V$  mit dem größten Funktionswert

$$f(P_{i_{max}}^V) = \max \{ f(P_1^V), \dots, f(P_{n+1}^V) \}$$

Ersetzt werden soll er durch einen Punkt auf der Gerade durch  $P_{i_{max}}^V$  und den *Schwerpunkt*  $s = \frac{1}{n} \sum_{i=1, i \neq i_{max}}^{n+1} P_i^V$  der übrigen Punkte des aktuellen *Simplex*. Hierbei werden abhängig von Konstanten des Verfahrens verschiedene Geradenpunkte betrachtet und der mit dem kleinsten Funktionswert ausgewählt. Ist so keine Verkleinerung des Maximalwerts unter den Punkten des *Simplex* möglich, werden alle übrigen Punkte durch konstantenabhängige Punkte auf ihrer Verbindungsstrecke zu  $P_{i_{max}}^V$  ersetzt. Wählt man die Punkte des *Anfangs-Simplex* so, dass dessen Innenvolumen einen Großteil des Suchraums überdeckt, kommt der *globale* Aspekt des Verfahrens zum Tragen. *Konvergiert* das Verfahren, schrumpft das *Simplex* auf ein immer kleiner umgrenztes Gebiet, und die Optimierung wird mehr und mehr *lokal*. Eine genaue Beschreibung des *Nelder-Mead*-Verfahrens findet man bspw. in [2].

Unter den *nichtdeterministischen* Optimierungsmethoden sind die *evolutionären* Verfahren die interessantesten Vertreter. Diese sind grundsätzlich *ableitungsfrei* und meistens *global*. Vorbild der *evolutionären* Verfahren sind die Mechanismen, die die *Evolutionstheorie* für die Entwicklung biologischer Organismen und deren optimale Anpassung an die Umgebungsbedingungen verantwortlich macht. Eine Gruppe dieser Verfahren bilden die *Evolutionstrategien*, die die *evolutionären* Begriffe der *Population*, *Generation*, *Mutation* und *Selektion* modellieren und zur näherungsweise Lösung von Problemen der

Form 2.13 mit  $f > 0$  simulieren. Während die *Population* in der *Evolutionstheorie* für eine Menge biologischer *Individuen* steht, repräsentiert sie bei einer *Evolutionstrategie* eine Menge von Zwischenlösungen  $P_1^V, \dots, P_m^V$ . In beiden Fällen beschreiben *Generations* die *Population* zu verschiedenen Zeitpunkten. Unter der *Mutation* versteht die *Evolutionstheorie* die zufällige Veränderung von Organismen, die fester Bestandteil von *Individuen* späterer *Generations* werden kann. Modelliert wird die *Mutation* in einer *Evolutionstrategie* durch eine berechnete Zufallsvariable  $X$ , die zur Bildung eines neuen *Individuums* auf ein existierendes *Individuum* addiert wird:

$$\begin{aligned} \text{Mut} : P^* &\rightarrow P^* \text{ mit } \text{Mut}(P_1^V) = P_2^V, \\ (P_2^V)_i &= \min(g_o(P_i), \max(g_u(P_i), (P_1^V)_i + (X)_i)), \\ X &\sim \mathcal{N}(0, \sigma I_{\dim(P^V)}) \end{aligned}$$

Dabei lässt sich die Intensität der *Mutation* durch die Wahl von  $\sigma$  steuern. Die *Selektion* ist verantwortlich für die Auswahl der *Individuen*, die auch in der *Folgegeneration* noch existieren. Während im Fall der *biologischen Evolution* die Anpassung an die *natürlichen Umgebungsbedingungen* hierüber entscheidet, ist es bei einer *Evolutionstrategie* der Wert der zu optimierenden Funktion  $f$  unter Auswertung des betreffenden *Individuums*, hier am Beispiel einer *fitnessproportionalen Selektion*:

$$\begin{aligned} \text{Sel} : P^{*m+1} &\rightarrow P^{*m} \\ \text{mit } \text{Sel}(P_1^V, \dots, P_{m+1}^V) &= (P_{i_1}^V, \dots, P_{i_m}^V), \\ \{1, \dots, m+1\} &= \{i_1, \dots, i_{m+1}\}, \\ i_{m+1} = j \text{ zufällig mit Wahrscheinlichkeit } p(j) &= \frac{f(P_j^V)}{\sum_{k=1}^{m+1} f(P_k^V)}, \quad 1 \leq j \leq m+1 \end{aligned}$$

Ziel einer *Evolutionstrategie* ist es, ausgehend von einer *Anfangspopulation*  $P_{10}^V, \dots, P_{m0}^V$  durch mehrere abwechselnd und nacheinander ausgeführte *Mutationen* und *Selektionen* ein *Individuum* zu finden, unter dem  $f$  einen möglichst kleinen Wert annimmt.

Eine weitere Gruppe der *evolutionären Verfahren* bilden die *genetischen Algorithmen*. Vorbild ist hier neben der *Evolutionstheorie* die biologische *Genetik*. Damit erhalten die Individuen neben ihrem *Phänotyp*, hier  $P^V$ , einen *Gencode*  $P_G^V$ , den *Genotyp*, der sie eindeutig, aber abstrahiert beschreibt. Meist wird hierfür eine *Binärcodierung* einheitlicher Länge  $l$  verwendet. Die biologischen Vorbild-*Populationen* enthalten nun ausschließlich Vertreter einer biologischen *Art*, deren *Individuen* dann auch paarweise gemeinsame *Kind-Individuen* haben können. Dies erlaubt die Bildung neuer *Individuen* durch *Rekombination*, d.h. die Erzeugung von *Genotypen*, die durch Vermischung zweier vorhandener

---

*Genotypen* entstehen, hier als spezielle *Ein-Punkt-Crossover-Rekombination* definiert:

$$\begin{aligned} \text{Rek} : P_G^* \times P_G^* &\rightarrow P_G^* \text{ mit } P_{G3}^V = \text{Rek}(P_{G1}^V, P_{G2}^V), k \text{ zufällig mit } 2 \leq k \leq l, \\ (P_{G3}^V)_i &= (P_{G1}^V)_i, 1 \leq i \leq k-1, \\ (P_{G3}^V)_j &= (P_{G2}^V)_j, k \leq j \leq l \end{aligned}$$

Der *genetische Algorithmus* hat genauso wie die *Evolutionstrategie* das Ziel,  $f$  zu minimieren, versucht dies jedoch durch die Wiederholung von *Rekombination*, der anschließenden *Mutation* der *Kind-Individuen* und *Selektion*. Beide Gruppen von Verfahren werden z.B. in [98] ausführlich und in zahlreichen Varianten beschrieben. Diese sind nach [98] insbesondere für die Art der Codierung von *Phäno-* in *Genotypen* im Zusammenspiel mit *Mutation* und *Rekombination* auch erforderlich, da davon der Erfolg des *genetischen Algorithmus* maßgeblich abhängt.

Man findet in der Literatur auch Analysen der Funktionsmechanismen *evolutionärer* Verfahren insgesamt und speziell in Bezug auf *Mutation*, *Selektion* und *Rekombination*. Qualitativ lässt sich die Wirkweise der *Mutation* als gleichmäßige Erkundung des Suchraums beschreiben, die zwar vorwiegend von den besten bisherigen Ergebnissen ausgeht, aber über entsprechende *Selektion* auch zwischenzeitliche Verschlechterungen zulässt. Nach [98] muss die zwischenzeitliche Verschlechterung einzelner *Individuen* toleriert werden, um *lokale Minima* überwinden zu können. Dort wird außerdem experimentell gezeigt, dass in vielen Fällen auch ohne *Rekombination* die Suche mit mehrelementigen *Populationen* einer insgesamt gleich aufwändigen Suche basierend auf nur einem *Individuum* überlegen ist. Qualitativ analysiert kommt die Wirkweise der *Rekombination* bei Problemen zum Tragen, in denen sich positive Effekte auf Teileigenschaften der *Individuen* zurückführen lassen, die sich positiv überlagern können. Es sind auch quantitative Aussagen zu den Wirkmechanismen von *Rekombination*, *Mutation* und *Selektion* möglich, die z.B. unter den Begriffen *Schema-* und *'Fehlendes'-Schema-Theorem* bekannt sind. Auch hierauf geht [98] ein, in [88] stehen diese Analysen sogar im Vordergrund der Betrachtung.

Neben den *heuristischen* Ansätzen gibt es für Minimierungsprobleme der Form 2.13 aber durchaus auch Lösungsverfahren, die garantiert das *globale Minimum* finden. Und das trotz der prinzipiellen *NP-Schwere* von 2.13, auch wenn  $f$  nicht-*konvex* (s. 2.19) ist. Natürlich muss hierbei mit deutlich erhöhtem Suchaufwand gerechnet werden. Wird dieser jedoch akzeptiert, kann bspw. mit einer *globalen, deterministischen* und *gradientenfreien branch-and-bound*-Methode versucht werden, abhängig von der Form von  $f$  trotz der vollständigen Suche, so viel wie möglich an unnötigen Suchschritten zu vermeiden. Die *branch-and-bound*-Strategie setzt allerdings voraus, dass  $f$  eine *Lipschitz-Konstante*  $L > 0$  besitzt, und diese bekannt ist. Für  $L$  gilt

$$\forall P_1^V, P_2^V \in P^* \quad |f(P_1^V) - f(P_2^V)| \leq L \|P_1^V - P_2^V\|$$

Damit kann für jeden Quader  $P_0^* = \prod_{i=1}^{\dim(P^V)} [(a_0)_i, (b_0)_i]$  des Suchraums der minimale Funktionswert nach unten abgeschätzt werden zu  $\min_{P^V \in P_0^*} f(P^V) \geq \beta(P_0^*) = a_0 - L \|b_0 - a_0\|$ . Das Suchverfahren arbeitet nun mit einer Menge  $M_Q$  solcher Quader  $P_i \subseteq P^*$  ( $P_i \cap P_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ ) beginnend mit  $M_{Q0} = \{P^*\}$ , deren Vereinigung  $P_{M_Q} = \bigcup_{P_i \in M_Q} P_i$  den Wert  $P_{min}^V$  mit  $f(P_{min}^V) = \min_{P^V \in P^*} f(P^V)$  enthält.  $P_{M_Q}$  wird dabei immer weiter ausgedünnt, bis  $P_{min}^V$  hierdurch ausreichend gut angenähert ist. Grundsätzlich kann das Minimum von  $f$  nach oben abgeschätzt werden zu  $\min_{P^V \in P^*} f(P^V) \leq \alpha(M_Q) = \min \{a_i | P_i \in M_Q\}$ . Damit können aus einer Menge  $M_Q$  Quader aussortiert werden, die das Minimum nicht enthalten. Man erhält so eine neue Restmenge

$$M'_Q = \{P_i | \beta(P_i) \leq \alpha(M_Q)\}$$

Die Chance, den  $\alpha$ -Wert zu verkleinern und damit  $P_{M_Q}$  weiter auszudünnen, eröffnet die Aufteilung von  $P_i \in M_Q$  mit  $\beta(P_i) = \min_{P_j \in M_Q} \beta(P_j)$  in zwei Quader  $P_{i1}$  und  $P_{i2}$  entlang der längsten Kante von  $P_i$ . Um ein möglichst kleines  $\alpha$  zu erzielen, empfiehlt es sich,  $P_i$  im Punkt  $c = \frac{1}{2}(a_i + b_i) + \frac{f(a_i) - f(b_i)}{2L \|b_i - a_i\|} (b_i - a_i)$  aufzuteilen. Man erhält so aus  $M_Q$  die neue Restmenge  $M'_Q = (M_Q \setminus \{P_i\}) \cup \{P_{i1}, P_{i2}\}$ . Mehrere abwechselnd nacheinander ausgeführte Ausdünnungen von  $P_{M_Q}$  und Aufteilungen von Quadern  $P_i \in M_Q$  bewirken letztlich die Approximation von  $P_{min}^V$ . Eine ausführliche Beschreibung der *branch-and-bound*-Methode auf Basis von *Lipschitz*-Konstanten inklusive Konvergenzanalyse findet man in [47]. Dort werden noch weitere Methoden zur *deterministisch globalen* Optimierung vorgestellt wie bspw. die *innere* und die *äußere Approximation* oder die *konvexe* und die *konkave Abschätzung*. Diese Verfahren fordern allerdings sehr spezifische Voraussetzungen für die Funktion  $f$  wie *Konvexität*, *Konkavität*, oder die explizite Zerlegung in eine Summe aus *konvexen* und *konkaven* Funktionen.

Nach der Vorstellung verschiedener Herangehensweisen an die Optimierung von Funktionen der Form 2.13 sollte noch genauer betrachtet werden, wie sich Optimierungsprobleme aus äquivalenten Problemen der *Parameteridentifikation* ableiten. Den formalen Hintergrund bildet im Fall des *nichtlinearen Identifikationsproblems* 2.11 analog zum *linearen* Problem 2.2 die *lineare Überlagerung stochastisch modellierter Messfehler* 2.1. Die Komponenten des Fehlervektors  $\varepsilon$  werden hier als *stochastisch unabhängig* angenommen. Sind zusätzlich die Werte ihrer *Streuungen* bekannt, kann die *Kovarianzmatrix* mit  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_m^2)$  angegeben werden. Für die *Parameterschätzung* ist es dann möglich, analog zum *linearen* Fall 2.3 auch für den *nichtlinearen* Fall eine *asymptotisch*



---

erwartungstreue und wirksamste Schätzung anzugeben:

$$\begin{aligned} \hat{P}^V \in P^* : & \int_0^{t_0} (\tilde{y}^T - y^T(\hat{P}^V, u_0)) \Sigma^{-1} (\tilde{y} - y(\hat{P}^V, u_0)) dt \\ & = \min_{P^V \in P^*} \int_0^{t_0} (\tilde{y}^T - y^T(P^V, u_0)) \Sigma^{-1} (\tilde{y} - y(P^V, u_0)) dt \end{aligned} \quad (2.20)$$

*Asymptotisch erwartungstreu* und *wirksamst* bedeutet, dass für beliebig große Messungen ( $t_0 \rightarrow \infty$ ) bei gleichbleibender Diskretisierung die Schätzung beliebig genau wird und mit minimal möglicher Abweichung erfolgt. Das verwendete *Maximum-Likelihood*-Schätzprinzip sucht nach der Parameterbelegung  $\hat{P}$ , für die die Wahrscheinlichkeit der Messung  $\tilde{y}$  unter dem zu Grunde liegenden *System*- und *Fehlermodell* maximal wird, woraus automatisch ein Optimierungsproblem folgt. Mit dieser Methode lässt sich auch eine *asymptotisch erwartungstreue* und *wirksamste* Schätzung bei unbekanntem Streuungen  $\sigma_i$  als Optimierungsproblem formulieren:

$$\hat{P}^V \in P^* : \prod_{i=1}^m \int_0^{t_0} ((\tilde{y})_i - (y(\hat{P}^V, u_0))_i)^2 dt = \min_{P^V \in P^*} \prod_{i=1}^m \int_0^{t_0} ((\tilde{y})_i - (y(P^V, u_0))_i)^2 dt \quad (2.21)$$

Eine Herleitung und Analyse der *Maximum-Likelihood*-Schätzer wird bspw. in [91] vorgestellt. Dort und an vielen weiteren Stellen wird auch darauf hingewiesen, dass die *Maximum-Likelihood*-Schätzung bei nichtlinearem Zusammenhang zwischen  $y$  und  $P^V$  nur für  $t_0 \rightarrow \infty$  aber nicht im Fall einer endlichen Menge an Messdaten *erwartungstreu* ist. Ein Verfahren, den resultierenden *Offset* zu reduzieren, ist beispielsweise die *Bootstrap-Methode*. Diese schätzt den *Offset* parallel zu den *offsetbehafteten* Parameterwerten. Dazu wird basierend auf den korrigierten Schätzwerten der Parameter die Fehlervarianz und damit überlagert eine große Zahl berechneter Experimentauswertungen  $\tilde{y}'_j$  bestimmt. Über die Mittelung der *Maximum-Likelihood*-Schätzungen für jedes der  $\tilde{y}'_j$  kann der *Offset* kalkuliert werden. Mehrere Iterationen sind dabei erforderlich. Genauer beschrieben wird die Methode beispielsweise in [28].

Die Schätzverfahren und das zugehörige Mess-Experiment gehen von einer fest vorgegebenen Systemanregung  $u_0$  aus. Oft kann  $u_0$  zum Zweck der *Parameteridentifikation* aber frei gewählt werden. Dann stellt sich konsequenterweise die Frage, welche Systemanregung die optimalen Voraussetzungen für die *Parameteridentifikation* bietet und daher ausgewählt werden sollte. Antworten darauf liefert die *Statistische Versuchsplanung* oder *Design of Experiments (DOE)*. Als optimal wird dabei eine Anregung  $u_0$  betrachtet, unter der eine *Parameterschätzung* eine möglichst kleine *Streuung* aufweist. Da die *Streuung*  $\Sigma_{\hat{P}^V}$  mehrerer zu schätzender Parameter eine mehrdimensionale Größe ist, ist diese Beschreibung nicht eindeutig und muss genauer definiert werden. Häufige Festlegungen hierfür sind die *Spur*  $\text{sp}(\Sigma_{\hat{P}^V})$  oder die *Determinante*  $|\Sigma_{\hat{P}^V}|$  der Schätz-*Streuung*. Eine Schätzung mit 2.20 beschreibt bei *nichtlinearem* Zusammenhang zwischen  $y$  und

$P^V$  trotz des *linearen Fehlermodells* 2.1 eine *Zufallsvariable*  $\hat{P}^V$ , die nicht *normalverteilt* ist. Um komplizierte und aufwändige Berechnungen von  $\hat{P}^V$  zu vermeiden, kann der Zusammenhang  $(P^V, u) \rightarrow y$  für jeweils festes  $(P_0^V, u_0)$  in  $P^V$  linearisiert werden:

$$y_{P_0^V, u_0}(\Delta P^V, t) = A_{P_0^V, u_0}(t) \Delta P^V + y(P_0^V, u_0, t) \quad \text{mit } A_{P_0^V, u_0}(t) = \left. \frac{\partial y(t)}{\partial P^V} \right|_{P^V=P_0^V, u=u_0}$$

Ist die *Nichtlinearität* der Beziehung  $(P^V, u) \rightarrow y$  nicht zu stark in  $P^V$  ausgeprägt, und liegt bereits eine gute Näherung  $P_0^V$  von  $\hat{P}^V$  vor, kann die Verteilung von  $\hat{P}^V$  lokal ausreichend gut durch die Verteilung von  $P_0^V + \Delta \hat{P}$  unter 2.20 für  $y = y_{P_0^V, u_0}$  angenähert werden. Da die *Streuung* von  $P_0^V + \Delta \hat{P}$  der von  $\Delta \hat{P}$  entspricht, und 2.20 für  $\Delta \hat{P}$  zum *linearen Schätzer* (s. 2.2) wird, können zur Näherung von  $\Sigma_{\hat{P}^V}$  Zusammenhänge der *linearen Regression* benutzt werden.

$$S_{\Delta \hat{P}^V}(P_0^V, u_0) = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} A_{P_0^V, u_0}^T(t) \Sigma^{-1} A_{P_0^V, u_0}(t) dt \quad (2.22)$$

ist die hierbei verwendete Größe, die zwar nicht direkt die *Kovarianzmatrix* von  $\Delta \hat{P}$  bzw. der Näherung von  $\hat{P}^V$  beschreibt, deren *Spur* bzw. *Determinante* sich aber abhängig von der Variation von  $A_{P_0^V, u_0}(t)$  in genau die entgegengesetzte Richtung verändert. Also ergibt sich zur Bestimmung der *optimalen Systemanregung*  $u_0 \in D_u$  (= Menge zulässiger Systemanregungen) auf Basis der *Spur*

$$u_0 \in D_u : \quad \text{sp} \left( S_{\Delta \hat{P}^V}(P_0^V, u_0) \right) = \max_{u \in D_u} \text{sp} \left( S_{\Delta \hat{P}^V}(P_0^V, u) \right) \quad (2.23)$$

bzw. auf Basis der *Determinante*

$$u_0 \in D_u : \quad \left| S_{\Delta \hat{P}^V}(P_0^V, u_0) \right| = \max_{u \in D_u} \left| S_{\Delta \hat{P}^V}(P_0^V, u) \right| \quad (2.24)$$

Kann kein hinreichend guter Näherungswert  $P_0^V$  für  $\hat{P}^V$  vorausgesetzt werden, müssen die komplizierten Optimierungsprobleme

$$u_0 \in D_u : \quad \min_{P^V \in P^*} \text{sp} \left( S_{\Delta \hat{P}^V}(P^V, u_0) \right) = \max_{u \in D_u} \min_{P^V \in P^*} \text{sp} \left( S_{\Delta \hat{P}^V}(P^V, u) \right) \quad (2.25)$$

bzw. auf Basis der *Determinante*

$$u_0 \in D_u : \quad \min_{P^V \in P^*} \left| S_{\Delta \hat{P}^V}(P^V, u_0) \right| = \max_{u \in D_u} \min_{P^V \in P^*} \left| S_{\Delta \hat{P}^V}(P^V, u) \right| \quad (2.26)$$

gelöst werden.

Generell sind zur Berechnung der optimalen *Systemanregung* mindestens so aufwändige

---

Berechnungen erforderlich wie für die anschließende *Parameteridentifikation* selbst. Alle Methoden,  $u_0$  optimal zu bestimmen, setzen die Kenntnis zumindest der Verhältnisse der *Fehlerstreuungen*  $\sigma_i$  (2.1) untereinander voraus. Würde man auch diese in der Betrachtung unbestimmt belassen, wären keine Voraussagen mehr zur relativen Eignung verschiedener Systemanregungen möglich. Die beiden Optimalitätskriterien der *Spur* bzw. der *Determinante* können anschaulich gedeutet werden. Während das *Spur*-Kriterium die mittlere Abweichung des Schätzwerts vom realen Wert minimiert, wird beim *Determinanten*-Kriterium das Volumen der *Konfidenz*-Gebiete (s. 2.4) minimiert. Weitere Optimalitätskriterien, *Sequentielle Designs*, und eine ausführliche Herleitung der Methoden findet man in Literatur wie [85], [91] oder [66].

Eine häufig auftretende Form von *DOE* ist der sog. *Faktorplan* bzw. das *Factorial Design*. Die *Parameter* beschreiben hierbei kein detailliert und analytisch an das reale System angepasstes Modell, sondern sind die *Faktoren* einer abbrechenden *Taylor-Entwicklung* zum Zusammenhang zwischen gemessenen *Antwortgrößen*  $y$  und *Anregungsgrößen*  $u$ . Ein Beispiel mit zweidimensionaler *Anregung*, eindimensionaler *Antwort* und einer Modellierung bis zur *zweiten Ordnung* ist

$$y = (P^v)_1 + (P^v)_2 (u)_1 + (P^v)_3 (u)_2 + (P^v)_4 (u)_1^2 + (P^v)_5 (u)_2^2 + (P^v)_6 (u)_1 (u)_2$$

Der Zusammenhang zwischen *Parametern* und *Antwortgrößen* ist hier *linear*. Daher ergeben sich optimale *Anregungen* für *Extremwerte* in  $u$ . Außerdem steigt die Zahl der Parameter exponentiell in der modellierten *Ordnung* und damit auch die Zahl notwendiger *Anregungspunkte*. Insgesamt erhält man so die typischen *Faktorpläne* für  $D_u = \prod_{j=1}^{\dim(u)} [(u)_j \min, (u)_j \max]$

$$(u_i)_j = \begin{cases} (u)_j \min & \text{für (Bit } j \text{ in Binärdarstellung von } i) = 0 \\ (u)_j \max & \text{für (Bit } j \text{ in Binärdarstellung von } i) = 1 \end{cases}, \quad 0 \leq i \leq 2^{\dim(u)} - 1$$

Anwendung finden diese einfach aufgesetzten *Versuchspläne* neben dem Fall eines fehlenden *Systemmodells* auch, wenn durchaus ein vollständiges Modell vorliegt, der hohe Aufwand bei der Berechnung von 2.23, 2.24 oder sogar 2.25, 2.26 jedoch umgangen werden soll. Da sich letztlich jede *analytische* Systemmodellierung auch als *Taylor-Entwicklung* repräsentieren lässt, ist dies zwar nicht der perfekte aber ein häufig ausreichender Ansatz. Literatur zur Methode der *Faktorpläne* findet man bspw. unter den Titeln [93] und [24].



# 3 Prinzip der Sequentiellen Parameteridentifikation

Die in Kapitel 2 vorgestellten Techniken der Parameter-Identifikation sind verbreitet im Einsatz, bieten jedoch keine systematische Vorgehensweise für eine Minimierung des Mess- und Rechenaufwands kombiniert mit sicher gestellter Identifizierbarkeit der Modellparameter und Konvergenz des Identifikationsprozesses. Während die Optimierung einer Gütefunktion mit lokalen Lösungsverfahren wie der Gradientenmethode oder Verfahren höherer Ordnung das Finden der Lösung nicht garantiert, führen globale Ansätze wie z.B. die genetischen Verfahren zu hohem Rechenaufwand, der in diesem Fall auch lediglich die Wahrscheinlichkeit des Sucherfolgs erhöht. Kompromisse zwischen lokalem und globalem Ansatz wie das Nelder-Mead-Verfahren bieten zwar einen reduzierten Rechenaufwand, der globale Anteil ist aber nur erfolgreich, wenn die Gütefunktion im Sinne etlicher Heuristiken 'gutartig' geformt ist. Integriert man statt einer minimalen charakterisierenden Menge des Modellverhaltens eine große, zwingenderweise auch redundante Menge in den Identifikations- bzw. Optimierungsprozess, erhöht sich die Wahrscheinlichkeit von Eindeutigkeit und Konvergenz, aber damit eben auch wieder der Rechen- und Messaufwand. Alle Methoden ermöglichen letztlich keinen Nachweis der Eindeutigkeit in den Parametern und weisen damit auch nicht die Identifizierbarkeit des Modells nach. Mit den Identifikationsproblemen, die zu konvexen Gütefunktionen führen, existiert eine große Menge auch nichtlinearer Probleme, für die damit die Identifizierbarkeit und Konvergenz allein durch diese gängige Kategorisierung nachgewiesen ist. Doch ist zum einen der Nachweis von Konvexität für praktische Anwendungsfälle schwierig, und zum anderen Konvexität dort oft nur in kleinen Parameterumgebungen vorhanden, was dann den globalen Nachweis von Eindeutigkeit und Konvergenz wieder verhindert. Letztlich liegen keine Methoden vor, die den Mess- und Rechenaufwand bei gleichzeitig sicher gestellter Identifizierbarkeit und garantierter Konvergenz minimieren. Dabei bieten die hier betrachteten Identifikationsprobleme über einer endlichen Parametermenge zu Modellen mit zeitabhängigen Anregungs- und Antwortvektoren durchaus die Möglichkeit dazu: Beliebige viele verschiedene Modellanregungen und mehrdimensionale Antwortgrößen sorgen für eine weit überbestimmte Festlegung der Modellparameter durch das Modellverhalten. Es können also gezielt aus einer großen Menge einzelne Anregungen und Teile der Antwort ausgewählt werden, die oft mit akzeptablem Aufwand eine nachvollziehbar ein-

deutige Herleitung der Parameterwerte erlauben. Genau hierauf zielt der methodische Inhalt dieser Arbeit ab: Es wird eine Strategie zum Entwurf eines systemindividuellen nichtlinearen Identifikationsprozesses entwickelt, dessen globale Funktion durch Aufteilung in kleine, analysierbare Teilprobleme vollständig nachgewiesen werden kann. Der zugrunde liegende Ansatz sieht dabei vor, die Parameterwerte möglichst nacheinander und aufeinander aufbauend zu identifizieren. Die Auswahl geeigneter Modellanregungen und die Betrachtung bestimmter Anteile der Modellantwort soll dabei bewirken, dass im Besten Fall nur der aktuell zu bestimmender Parameter von den noch unbekanntem Parametern einen Einfluss besitzt, und dieser Einfluss auf einen einfachen eindeutigen Zusammenhang zurückzuführen ist. Dann gelingt die nachvollziehbar eindeutige, sukzessive Bestimmung der Parameter bei gleichzeitig minimal erforderlicher Menge von Messpunkten und Anzahl von Modellauswertungen, nämlich der Zahl der zu bestimmenden Parameter. Auch wenn zur Verifikation der globalen Konvergenz eines solchen Identifikationsverfahrens die sequentielle Bestimmung der Parameter notwendig ist, müssen die Parameter nachher nicht notwendigerweise sequentiell berechnet werden, sondern können situationsabhängig auch parallel bestimmt werden. Eine sequentielle oder teilsequentielle Berechnung von Parametern ist nur in den Fällen nötig, in denen deterministische, klassische Methoden wie das Newton- oder Gradientenverfahren nicht in der Lage sind, generell die Lösung zu finden.

In diesem Kapitel wird nun die hier kurz umrissene Methode der *Sequentiellen Parameteridentifikation* formal definiert, die Zielsetzung genauer beschrieben, und das Verfahren in Hinblick darauf analytisch mit den etablierten Methoden verglichen. Eine solche *Sequentielle Parameteridentifikation* muss, wenn sie zur Identifikation einzelner Parametersätze auch softwarebasiert abläuft, dennoch für ein Modell zunächst 'von Hand' und mit nicht unerheblichem Analyseaufwand entworfen werden. Um diesen Prozess zu vereinfachen, werden zum Abschluss des Kapitels noch Verfahren zur softwarebasierten Unterstützung des Entwicklers vorgestellt. Der konkrete Entwurf eines Identifikationsprozesses nach der in diesem Kapitel vorgestellten Methode erfolgt erst später in Kapitel 4 für ein physikalisches Reifenmodell.

## 3.1 Problemstellung und Ziele

Die Problemstellung, die in dieser Arbeit behandelt wird, lässt sich einkreisen auf die Identifikation endlich vieler Parameter von Modellen, die endlich dimensionierte zeitabhängige Anregungen (nichtlinear) in endlich dimensionierte zeitabhängige Antworten übertragen. In Hinblick auf mechanische Modellierung können die zeitabhängigen Anregungen und Antworten als stetige Funktionen über der Zeit  $t$  dargestellt werden. Bezeichnet man mit  $P$  die Menge der Modellparameter, lassen sich die relevanten Modelle

durch parameterabhängige Übertragungsfunktionen der Form

$$\tau : F_P \times (C^0(\mathbb{R}))^{n_u} \rightarrow (C^0(\mathbb{R}))^{n_y}$$

mit  $F_P = \{f_P | f_P : P \rightarrow \mathbb{R}, g_u(p) \leq f_P(p) \leq g_o(p)\}$  (Menge der Parametrierungen)

$n_u =$  Dimension der Anregung,  $n_y =$  Dimension der Antwort

$g_u(p), g_o(p) \in \mathbb{R} =$  Beschränkungen von Parameter  $p$

(3.1)

charakterisieren. An dieser Stelle soll auch gleich die Schreibweise sich ergänzender Teilparametrierungen eingeführt werden als

$$\tau(f_{P_1}, \dots, f_{P_{n_{TP}}}, u) = \tau(f_P, u)$$

mit  $f_{P_i} \in F_{P_i}$ ,  $P_i \cap P_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ ,  $\bigcup_{i=1}^{n_{TP}} P_i = P$ ,  $f_{P_i}(p) = f_P(p)$  für  $p \in P_i$

$n_{TP} =$  Anzahl der Teilparametrierungen

Beschränkt man sich nun bei der Identifikation auf eine Teilmenge  $P_{id}$  und setzt die Parameter  $P_{const}$  jeweils als bekannt voraus, erhält man als Aufgabe der Parameteridentifikation die Berechnung der Funktion

$$\tau_{id}^{-1} : F_{P_{const}} \times T_0^* \rightarrow F_{P_{id}}, \quad \tau_{id}^{-1}(f_{P_{const}}, \tau_0) = f_{P_{id}}$$

$$\Leftrightarrow \forall u \in (C^0(\mathbb{R}))^{n_u} : \tau(f_{P_{const}}, f_{P_{id}}, u) = \tau_0(u)$$

mit  $T_0^* \subseteq T_0 = \{\tau_0 | \tau_0 : (C^0(\mathbb{R}))^{n_u} \rightarrow (C^0(\mathbb{R}))^{n_y}\}$

(Menge der parameterunabhängigen Übertragungsfunktionen)

$$P_{id} \cap P_{const} = \emptyset, \quad P = P_{id} \cup P_{const}$$

(3.2)

In dem Fall, dass  $\tau$  ein vorgegebenes Übertragungsverhalten  $\tau_0$  durch keine Parametrierung  $f_{P_{id}}$  darstellen kann, und dem, dass mindestens zwei Parametrierungen  $f_{P_{id}1}$ ,  $f_{P_{id}2}$  durch  $\tau$  dasselbe Übertragungsverhalten  $\tau_0$  zugeordnet bekommen, ist  $\tau_{id}^{-1}$  nicht definiert. Der gängige Einsatzzweck der Identifikation von Modellparametern ist die Abbildung des Verhaltens eines realen Systems, das bis auf die konkreten Parameterwerte mathematisch hinreichend genau modelliert ist, durch eben dieses Berechnungsmodell. Die Lösung einer solchen Aufgabe mit Hilfe einer Funktion  $\tau_{id}^{-1}$  ist allerdings praktisch nie möglich, da  $\tau_{id}^{-1}$  die Kenntnis des gesamten Systemverhaltens  $\tau_0$  voraussetzt. Man müsste reale abzubildende Systeme wie Autoreifen, Gesamtfahrzeuge, sonstige Maschinen oder Objekte anderer Bereiche wie Physik, Chemie, Ökonomie sämtlichen zeitlichen Einflüssen, also unendlich vielen Situationen aussetzen und ihre Reaktionen messen, um auf die Modellparametrierung schließen zu können. Dabei folgen die Parameterwerte im Regelfall bereits aus dem Systemverhalten zu einzelnen Zeitpunkten von einer Anzahl wenig

mehr als der Zahl der zu bestimmenden Parameter. Im besten Fall gleicht die Anzahl der erforderlichen Messzeitpunkte der Zahl der Parameter. Geht man nämlich von einem stetigen Zusammenhang zwischen den gemessenen Kennwerten und den Parametern aus, muss für eine eindeutige, also injektive Abbildung der Kennwerte auf die Parameter die Dimension des Bildraums mindestens so groß sein wie die des Urbildraums, was eine mindestens so große Zahl der gemessenen Kennwerte wie die der Parameter bedeutet. Dies folgt aus einem topologischen Lemma zur Homöomorphie von Mannigfaltigkeiten ausschließlich derselben Dimension, das 1911 von L.E.J. Brouwer noch mit elementaren topologischen Mitteln bewiesen wurde (s. [16]), und inzwischen mit Methoden der Algebraischen Topologie deutlich einfacher hergeleitet werden kann (s. z.B. [51] oder [62]). Umgekehrt ist es theoretisch aber durchaus möglich, dass ein Identifikationsproblem für die Bestimmung einer beschränkten Zahl von Parametern einen beliebig großen Messaufwand erfordert. Dies zeigt das Beispiel in B.1.

Um auch ausschnittweises Übertragungsverhalten formal beschreiben zu können, ist zunächst ein formaler Weg zur gezielten Festlegung des Verhaltensausschnitts erforderlich. Eine solche Einschränkung kann in der allgemeinsten Form als *Funktional-Bedingung*

$$b : (C^0(\mathbb{R}))^{n_u+n_y} \times \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\} \quad (3.3)$$

über der Anregung  $u \in (C^0(\mathbb{R}))^{n_u}$ , dem Antwortverhalten  $y \in (C^0(\mathbb{R}))^{n_y}$  und einzelnen Zeitpunkten formalisiert werden. *Funktionale* in beliebiger Form werden bspw. in [36] mitsamt den grundlegenden Eigenschaften und Zusammenhängen vorgestellt. Durch einen Vektor  $B$  solcher *Funktional-Bedingungen* kann formal spezifiziert werden, durch welche Ausschnitte des Gesamtübertragungsverhaltens  $\tau_0$  bereits eindeutig auf die Parametrierung  $f_{P_{id}}$  geschlossen werden kann. Um die Menge der vorausgesetzten Teile des Übertragungsverhaltens bis auf die minimal erforderliche Zahl  $|P_{id}|$  an Kennwerten zu reduzieren, muss  $\dim(B) = |P_{id}|$  gelten. Ein Bedingungsvektor  $B$  schränkt damit das Gesamtverhalten  $\tau_0$  in Bezug auf die Übertragungsfunktion  $\tau$  dann auf ein Teilverhalten ein, aus dem  $f_{P_{id}}$  eindeutig bestimmt werden kann, wenn

$$\begin{aligned} &\forall f_{P_{id}1} \neq f_{P_{id}2} \in F_{P_{id}}, f_{P_{const}} \in F_{P_{const}} \\ &\exists 1 \leq i \leq |P_{id}| : \\ &\quad \forall u_{i f_{P_{id}1}}, u_{i f_{P_{id}2}} \in (C^0(\mathbb{R}))^{n_u}, y_{i f_{P_{id}1}}, y_{i f_{P_{id}2}} \in (C^0(\mathbb{R}))^{n_y}, t_{i f_{P_{id}1}}, t_{i f_{P_{id}2}} \in \mathbb{R} \\ &\quad \text{mit } y_{i f_{P_{id}1}} = \tau(f_{P_{const}}, f_{P_{id}1}, u_{i f_{P_{id}1}}), y_{i f_{P_{id}2}} = \tau(f_{P_{const}}, f_{P_{id}2}, u_{i f_{P_{id}2}}), \\ &\quad b_i(u_{i f_{P_{id}1}}, y_{i f_{P_{id}1}}, t_{i f_{P_{id}1}}) = b_i(u_{i f_{P_{id}2}}, y_{i f_{P_{id}2}}, t_{i f_{P_{id}2}}) = 1, b_i = (B)_i : \\ &\quad y_{i f_{P_{id}1}}(t_{i f_{P_{id}1}}) \neq y_{i f_{P_{id}2}}(t_{i f_{P_{id}2}}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

gilt. Diese komplizierte Voraussetzung an  $B$  stellt lediglich die Unterscheidbarkeit der Parameter an Hand von Teilen des Übertragungsverhaltens sicher, die  $B$  als ausreichend



charakterisiert. Gibt es nun für die parameterabhängige Übertragungsfunktion  $\tau$  einen Bedingungsvektor  $B$  gemäß 3.4 mit erfüllbaren Komponenten, also mit

$$\begin{aligned} \forall 1 \leq i \leq |P_{id}|, f_{P_{id}} \in F_{P_{id}}, f_{P_{const}} \in F_{P_{const}} \\ \exists u_i, t_i : b_i(u_i, \tau(f_{P_{const}}, f_{P_{id}}, u_i, t_i)) = 1 \text{ mit } b_i = (B)_i \end{aligned} \quad (3.5)$$

dann können die Parameter  $P_{id}$  mit dem eingeschränkten Anteil

$$u_i, t_i, y_i = \tau(f_{P_{const}}, f_{P_{id}}, u_i) \text{ für } 1 \leq i \leq |P_{id}|$$

an bekanntem Übertragungsverhalten identifiziert werden. Das Finden der  $u_i$  und  $t_i$  für  $1 \leq i \leq |P_{id}|$  ist aber keines Falls allein durch bekanntes  $B$  gemäß 3.4 und 3.5 automatisch mit geringem Aufwand möglich. Für die bereits erwähnte Übertragungsfunktion in B.1 lässt sich beispielsweise ein einfacher Bedingungsvektor  $B$  angeben. Die Suche nach  $u_i$  und  $t_i$ , die die Komponenten von  $B$  erfüllen, gerät allerdings beliebig aufwändig. Wie für Beispiel B.1 ist der schwieriger zu erfüllende Teil der Bedingungen der über den Modellantworten  $y_i$ , da sie sich ausschließlich über das nur unvollständig bekannte, parameterabhängige Modellverhalten aus den Anregungen  $u_i$  ergeben, wohingegen Bedingungsanteile allein über den Anregungen  $u_i$  meist direkt einstellbar sind. Anders als für die Übertragungsfunktion in B.1 hängen die durch die Bedingungen festgelegten Anteile der Modellantworten  $u_i$  in den meisten praktischen Anwendungsfällen jedoch monoton von den nicht durch die Bedingungen festgelegten Anteilen der Anregungen  $u_i$  ab und werden dadurch mit akzeptablem Aufwand über die  $u_i$  'einstellbar'. Genügt der Bedingungsvektor  $B$  nun Voraussetzung 3.4, und sind die Bedingungen einfach zu erfüllen, kann als Identifikationsaufgabe statt 3.2 die Berechnung der Funktion

$$\begin{aligned} \tau_{id B}^{-1} : F_{P_{const}} \times T_{0 B}^* &\rightarrow F_{P_{id}}, \tau_{id B}^{-1}(f_{P_{const}}, \tau_{0 B}) = f_{P_{id}} \\ \Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq |P_{id}| \exists u_i, y_i, t_i \\ \text{mit } T_{0 B}^* \subseteq T_{0 B} &= \{ \tau_{0 B} \mid (\tau_{0 B})_i = (u_i, y_i), \exists t_i : b_i(u_i, y_i, t_i) = 1, b_i = (B)_i \}, \\ b_i(u_i, y_i, t_i) &= 1, (\tau_{0 B})_i = (u_i, y_i), \tau(f_{P_{const}}, f_{P_{id}}, u_i) = y_i \end{aligned} \quad (3.6)$$

mit einfacher realisierbaren Voraussetzungen definiert werden. Eine solche Einschränkung des betrachteten Modellübertragungsverhaltens bringt neben reduziertem Mess- und Rechenaufwand außerdem noch einen Ansatz mit sich, die Eindeutigkeit des Gesamtübertragungsverhaltens in den Parametern  $P_{id}$  nachzuweisen. Es kann die Eindeutigkeit des viel kleineren und überschaubareren Übertragungsverhaltens, das  $B$  erfüllt, in den Parametern nachgewiesen werden, woraus die Eindeutigkeit des Gesamtübertragungsverhaltens in den Parametern folgt, denn Unterschiede in Ausschnitten des Modellverhaltens sind auch Unterschiede im Gesamtverhalten. Wie schon erwähnt erfordert die Identifizierbarkeit der Parameter  $P_{id}$  im Besten Fall lediglich  $|P_{id}|$  skalare Kennwerte, die Beschränkung durch den Bedingungsvektor  $B$  liefert jeweils  $|P_{id}|$  evt. mehrdimensionale

Zeitfunktionen. Die zur Parameteridentifikation aus dem Gesamtübertragungsverhalten  $\tau_0$  extrahierten Eigenschaften können also noch weiter eingeschränkt werden. In der allgemeinsten Form leisten dies die *Auswertungsfunktionale*

$$z_E : (C^0(\mathbb{R}))^{n_u+n_y} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

analog zu 3.3 über der Anregung  $u \in (C^0(\mathbb{R}))^{n_u}$ , dem Antwortverhalten  $y \in (C^0(\mathbb{R}))^{n_y}$  und einzelnen Zeitpunkten. Bringt man mit jeder *Funktional-Bedingung*  $b_i$  ein *Auswertungsfunktional*  $z_{E_i}$  in Verbindung, lässt sich das Problem der Parameteridentifikation endgültig auf die Umkehrung einer  $|P_{id}|$ -dimensionalen Abbildung zurückführen. Dies setzt allerdings voraus, dass die *Auswertungsfunktionale* unter den jeweiligen *Funktional-Bedingungen* denselben Wert annehmen:

$$\begin{aligned} \forall f_P, u_{i1}, u_{i2}, y_{i1}, y_{i2}, t_1, t_2, 1 \leq i \leq |P_{id}| \text{ mit } b_i(u_{i1}, y_{i1}, t_1) = b_i(u_{i2}, y_{i2}, t_2) = 1, \\ \tau(f_P, u_{i1}) = y_{i1}, \tau(f_P, u_{i2}) = y_{i2} : z_{E_i}(u_{i1}, y_{i1}, t_1) = z_{E_i}(u_{i2}, y_{i2}, t_2) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Mit 3.7 sind dann die resultierenden Zusammenhänge zwischen den Parameterwerten und den extrahierten *Zielgrößen* wohldefiniert:

$$z_{\tau i}(f_{P_1}, \dots, f_{P_{n_{TP}}}) = z_{E_i}(u_i, y_i, t) \text{ mit } b_i(u_i, y_i, t) = 1, \tau(f_{P_1}, \dots, f_{P_{n_{TP}}}, u_i) = y_i \quad (3.8)$$

Es muss aber zur Identifizierbarkeit der Parameter  $P_{id}$  aus den  $z_{\tau i}$  die Voraussetzung 3.4 für die *Funktional-Bedingungen*  $b_i$  analog für die *Auswertungsfunktionale*  $z_{\tau i}$  gefordert werden, da dies nicht automatisch aus 3.4 folgt:

$$\forall f_{P_{const}}, f_{P_{id1}} \neq f_{P_{id2}} : Z_{\tau}(f_{P_{const}}, f_{P_{id1}}) \neq Z_{\tau}(f_{P_{const}}, f_{P_{id2}}) \text{ mit } (Z_{\tau})_i = z_{\tau i} \quad (3.9)$$

Mit 3.9 kann dann allerdings die Voraussetzung 3.4 entfallen, da 3.4 aus 3.9 folgt. Unter Voraussetzung von 3.5, 3.7 und 3.9 ist es nun möglich, die Identifikationsaufgabe auf die Berechnung der Funktion

$$\begin{aligned} Z_{\tau}^{-1} : F_{P_{const}} \times Z_{\tau}^* \rightarrow F_{P_{id}}, Z_{\tau}^{-1}(f_{P_{const}}, Z_{\tau}) = f_{P_{id}} \\ \text{mit } Z_{\tau}^* \subseteq \mathbb{R}^{|P_{id}|}, Z_{\tau} = Z_{\tau}(f_{P_{const}}, f_{P_{id}}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

zu reduzieren. Mit dieser Formalisierung kann die erste Zielsetzung der in dieser Arbeit betrachteten *Sequentiellen Parameteridentifikation* angegeben werden als, ein Problem 3.2 auf ein Problem der Form 3.10 zu reduzieren und nachzuweisen, dass die Voraussetzungen 3.5, 3.7 und 3.9 erfüllt sind. Auch, wenn hieraus bereits ein Nachweis der Eindeutigkeit des reduzierten Problems  $Z_{\tau}$  resultiert (3.9), folgt dadurch noch nicht die generelle Konvergenz eines bestimmten Suchverfahrens gegen die Lösung. Soll diese nachgewiesen werden, muss das Suchverfahren zunächst einmal deterministisch sein, sonst sind keine sicheren Konvergenz-Aussagen möglich. Für den hier betrachteten nichtlinearen Fall

verbleiben dann von den in Abschnitt 2 aufgeführten Methoden lediglich die lokalen Verfahren oder solche mit heuristischen Suchmethoden wie das Nelder-Mead-Verfahren. Die heuristischen Verfahren erweisen sich zwar als robuster gegenüber numerischen Problemen und analytischen Voraussetzungen, sind aber für Konvergenzaussagen wegen des komplizierten Ablaufs generell ungeeignet. Nach [2] sind für das Nelder-Mead-Verfahren bspw. keine allgemeinen Konvergenzaussagen bekannt. Zu analysierbarer und damit evt. garantierter Konvergenz muss also auf die lokalen Verfahren zurückgegriffen werden, die den nichtlinearen Zusammenhang durch vereinfachte Funktionen approximieren und sich darüber iterativ der Lösung nähern. Zur Approximierbarkeit des Zusammenhangs in lokalen Umgebungen muss im Fall hier die durch  $Z_\tau$  in den zu bestimmenden Größen  $P_{id}^V$  definierte Funktion  $Z_{\tau f_{P_{const}}}$  stetig differenzierbar sein

$$\begin{aligned}
 & Z_{\tau f_{P_{const}}} \in (C^1(P_{id}^*))^{|P_{id}|} : P_{id}^* \rightarrow \mathbb{R}^{|P_{id}|}, Z_{\tau f_{P_{const}}}(P_{id}^V) = Z_\tau(f_{P_{const}}, f_{p_{id}}) \\
 & \text{mit } P_{id}^* = \prod_{i=1}^{|P_{id}|} [g_u(p_i), g_o(p_i)], f_{p_{id}}(p_i) = (P_{id}^V)_i, \bigcup_{i=1}^{|P_{id}|} \{p_i\} = P_{id}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Da Verfahren, die die lokale Umgebung in höherer Ordnung approximieren, wie das *SQP*- oder das *BFGS*-Verfahren zwar die lokale Konvergenzgeschwindigkeit erhöhen, nicht aber das globale Konvergenzgebiet vergrößern, können für die Analyse der globalen Konvergenz stellvertretend die lokalen Verfahren 1. Ordnung betrachtet werden. Für das originale Identifikationsproblem  $P_{id}^V \in P_{id}^* : Z_{\tau f_{P_{const}}}(P_{id}^V) = Z_{\tau 0}$  ist das das *Newtonverfahren* und für das äquivalente Optimierungsproblem  $\min_{P_{id}^V \in P_{id}^*} \|Z_{\tau f_{P_{const}}}(P_{id}^V) - Z_{\tau 0}\|^2$  das *Gradientenverfahren*. Beide Verfahren können angewandt auf die jeweiligen Probleme unter Voraussetzung von 3.5, 3.7, 3.9 und 3.11 ausschließlich durch Sattelpunkte (Def. s. B.3) oder lokal optimale 'Scheinlösungen', die die Berandung des Suchraums verursacht, an der Konvergenz gegen die globale Lösung gehindert werden. Dies liegt darin begründet, dass diese Verfahren allgemein über kompakten Suchräumen nur gegen lokal optimale Randwerte oder Werte konvergieren können, für die die *Funktionaldeterminante* (*Newtonverfahren*) bzw. der *Gradient* (*Gradientenverfahren*) verschwindet. Hierzu zählen auch verschiedene Alternativlösungen  $P_1^V, \dots, P_m^V$  des Suchproblems (mit  $Z_{\tau f_{P_{const}}}(P_1^V) = \dots = Z_{\tau f_{P_{const}}}(P_m^V) = Z_{\tau 0}$ ). Zum tieferen Verständnis findet sich in B.2 eine Beweisskizze mit Verweis auf weiterführende Literatur. Mehrere Lösungen für Problem 3.10 können durch die vorausgesetzte Eindeutigkeit (3.9) direkt ausgeschlossen werden. Konvergiert nun alternativ eines der beiden Verfahren gegen einen *inneren Wert*  $P_1^V$  des Suchraums  $P_{id}^*$  ungleich der gesuchten Lösung  $P_{id 0}^V$ , also für  $Z_{\tau f_{P_{const}}}(P_1^V) \neq Z_{\tau 0}$ , muss dort für das *Newtonverfahren* die *Funktionaldeterminante*  $\left| \frac{\partial Z_{\tau f_{P_{const}}}}{\partial P_{id}^V} \right|$  bzw. für das *Gradientenverfahren* der Gradient  $2 \cdot (Z_{\tau f_{P_{const}}} - Z_{\tau 0})^T \cdot \frac{\partial Z_{\tau f_{P_{const}}}}{\partial P_{id}^V}$  des äquivalenten Op-

### 3 Prinzip der Sequentiellen Parameteridentifikation

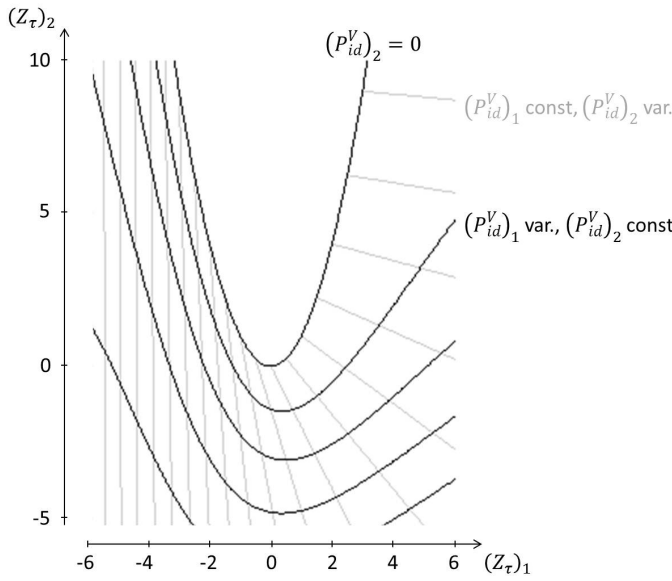


Abbildung 3.1: Bildkurven von 3.12 unter separater Var. von  $(P_{id}^V)_1$  und  $(P_{id}^V)_2$

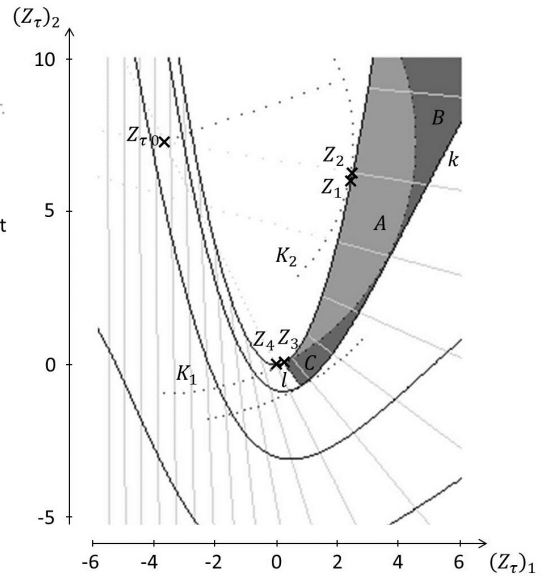


Abbildung 3.2: Einfach nachweisbare Konvergenzgebiete und Fixpunkte

timierungsproblems verschwinden, woraus in beiden Fällen  $\left| \frac{\partial Z_\tau f_{P_{const}}}{\partial P_{id}^V} \right|_{P_{id}^V = P_1^V} = 0$  folgt.

Wiederum wegen der Eindeutigkeit von  $Z_\tau f_{P_{const}}$  (3.9) muss  $P_{id1}^V$  ein Sattelpunkt sein (vgl. B.3). Während die Konvergenz eines der beiden iterativen Verfahren gegen einen Sattelpunkt eher unwahrscheinlich ist, kann die Konvergenz gegen Randwerte ungleich der Lösung für ein großes Gebiet an Startwerten unvermeidbar sein. Ein Beispiel dafür ist folgende Funktion im  $\mathbb{R}^2$

$$Z_\tau : P_{id}^* \rightarrow \mathbb{R}^2, Z_\tau(P_{id}^V) = \begin{pmatrix} (P_{id}^V)_1 \\ (P_{id}^V)_2 \end{pmatrix} + (P_{id}^V)_2 \cdot e^{0,7(P_{id}^V)_1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2e^{-(P_{id}^V)_1} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

mit  $P_{id}^* = [-10, 10] \times [0, 10]$

3.12 ist injektiv. Andernfalls müssten die grauen Linien zu verschiedenen je konstant gehaltenen Werten  $(P_{id}^V)_1$  und variiertem  $(P_{id}^V)_2$  aus der Funktionsdarstellung 3.1 sich überschneiden. Alle grauen Linien zusammen beschreiben nämlich die vollständige Abbildung, und bei zwei verschiedenen Urbildpunkten mit dem gleichen Bildpunkt ergäbe sich dann ein Schnitt zweier dieser Linien. Für konstantes  $(P_{id}^V)_1$  und variiertes  $(P_{id}^V)_2$  erhält man je eine gerade Strecke. Die grauen Strecken liegen alle auf einer Seite der durch die Parabel für  $(P_{id}^V)_2 = 0$  und variiertes  $(P_{id}^V)_1$  erzeugten Parabel. Dies folgt aus dem Vergleich der Parabelsteigung für  $(P_{id}^V)_1$  mit der Steigung der grauen Strecken in diesem

Punkt (Steigung hier  $\frac{\partial(Z_\tau)_2}{\partial(Z_\tau)_1}$ ). Man erhält als Parabelsteigung  $2(P_{id}^V)_1$  und als Streckensteigung den grundsätzlich kleineren Wert  $-2e^{-(P_{id}^V)_1}$ . Mit  $-2e^{-(P_{id}^V)_1}$  wird außerdem klar, dass die für steigendes  $(P_{id}^V)_1$  von links nach rechts um die Parabel entspringenden Strecken wachsende Steigungen besitzen, und sich damit nicht überschneiden können.

Trotz der vorliegenden Eindeutigkeit, konvergieren sowohl das *Gradienten-* als auch das *Newtonverfahren* für Funktion 3.12 bei vielen Kombinationen von Startwerten und gesuchten Lösungen nicht gegen diese Lösungen. Abbildung 3.2 zeigt für einen ausgewählten Zielwert  $Z_{\tau_0}$  die Teilgebiete  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , für deren Werte als Startbildpunkte beide Verfahren leicht einsehbar nicht gegen die gesuchte Lösung konvergieren. Teilgebiet  $A$  befindet sich innerhalb des Kreises  $K_1$  um  $Z_{\tau_0}$ . Die Schrittweitensteuerung beider Verfahren erlaubt ausschließlich Suchschritte, die den Abstand zum Zielwert  $Z_{\tau_0}$  verkleinern und verhindert damit, dass der Kreis  $K_1$  verlassen wird. Um von  $A$  aus  $Z_{\tau_0}$  zu erreichen, muss entweder  $P_{id}^*$  oder die Kreisfläche von  $K_1$  verlassen werden, was somit beides nicht möglich ist. Ausgehend von Punkten des Teilgebiets  $B$  weist die Suchrichtung beider Verfahren in negative  $(P_{id}^V)_2$ -Richtung, weshalb von hier aus in einem Suchschritt nur Punkte oberhalb von Kurve  $k$  (für konstantes  $(P_{id}^V)_2$ ) erreicht werden können. Suchschritte von  $B$  aus ergeben also entweder wieder Werte in  $B$  oder als Zwischenwerte der 1D-Suche Punkte in Teilgebiet  $A$ , das wie schon nachgewiesen nicht mehr verlassen werden kann. Für Werte aus  $C$  zeigen die linearisierten Bildrichtungen bei Veränderung von  $(P_{id}^V)_1$  und  $(P_{id}^V)_2$ , dass die Suchrichtung beider Verfahren in positive  $(P_{id}^V)_1$ - und negative  $(P_{id}^V)_2$ -Richtung weist. Denn die direkte Verbindungsrichtung zu  $Z_{\tau_0}$  erfordert einerseits linearisiert die entsprechende Bewegung im Urbildraum, und beide Richtungen im Bildraum (Vergrößerung von  $(P_{id}^V)_1$  bzw. Verkleinerung von  $(P_{id}^V)_2$ ) bewirken im Bildraum eine Reduzierung des Abstands zu  $Z_{\tau_0}$ . Diese Suchrichtungen verbieten das Überschreiten der Begrenzungslinien  $l$  und  $k$ , weshalb wiederum keine Konvergenz gegen  $Z_{\tau_0}$  möglich ist. Die eingezeichneten Punkte  $Z_1$  bis  $Z_4$  sind Werte, gegen die das *Newton-* oder *Gradientenverfahren* statt gegen  $Z_{\tau_0}$  konvergieren können.  $Z_1$  ist, was der von außen tangierende Kreis  $K_2$  um  $Z_{\tau_0}$  zeigt, der lokal nächste Punkte zu  $Z_{\tau_0}$ , weshalb  $Z_1$  sowohl für das *Gradienten-* als auch das *schrittweitengesteuerte Newtonverfahren* ein Fixpunkt ist. In  $Z_2$  liegt die Suchrichtung des *Newtonverfahrens* direkt in Bildrichtung zur negativen  $(P_{id}^V)_2$ -Urbildrichtung, weshalb  $Z_2$  ein weiterer *Fixpunkt* für das *Newtonverfahren* ist. Da  $K_1$  die Bildraumbegrenzung in  $Z_3$  tangiert, verschwindet hier der *projizierte Gradient* und das *Gradientenverfahren* hat in  $Z_3$  einen zusätzlichen *Fixpunkt*. Anders als  $Z_1$  ist  $Z_3$  aber nicht *attraktiv* und kleine Veränderungen im Suchwert können dazu führen, dass das Verfahren gegen einen anderen Wert konvergiert.  $Z_4$  ist wie  $Z_2$  ein Wert, zu dem  $Z_{\tau_0}$  in Bildrichtung zur negativen  $(P_{id}^V)_2$ -Urbildrichtung liegt, und damit ausschließlich *Fixpunkt* des *Newtonverfahrens*.

Insgesamt konvergieren sowohl das *Newton-* als auch das *Gradientenverfahren* für deutlich mehr Startwerte im Bildpunkt nicht gegen die Lösung  $Z_{\tau_0}$ . Diese Konvergenzgebiete

### 3 Prinzip der Sequentiellen Parameteridentifikation

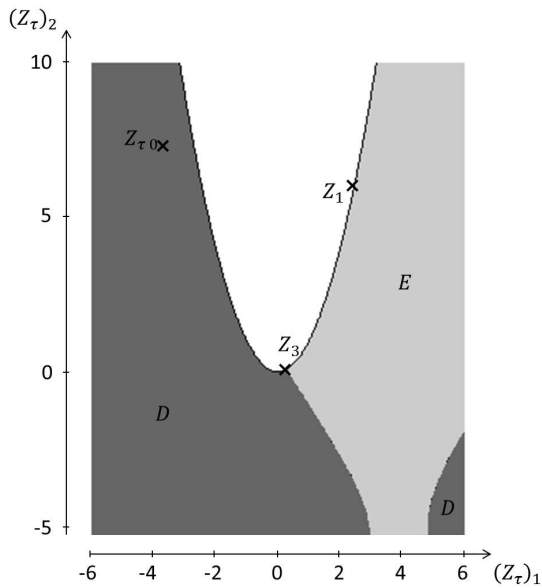


Abbildung 3.3: Konvergenzgebiete beim Gradientenverfahren

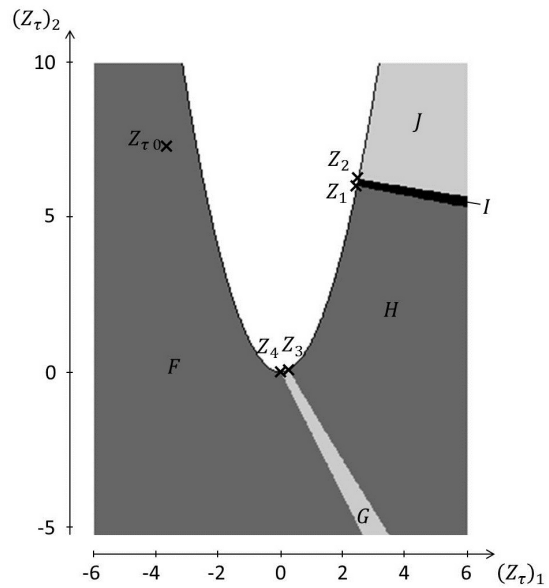


Abbildung 3.4: Konvergenzgebiete beim Newtonverfahren

können jedoch nicht mehr wie die in Bild 3.2 eingezeichneten mit einfachen qualitativen Methoden analysiert werden, sondern erfordern direkt die numerische Berechnung. Der Grund für das komplizierte Verhalten der Verfahren ist die 1-dimensionale Suche entlang der jeweiligen Suchrichtung. Würden bspw. die Zwischenlösungen des *Gradientenverfahrens* eine kontinuierliche Kurve bilden, die immer in Richtung des *Gradienten* verläuft, könnte man die Konvergenzgebiete verschiedener *Fixpunkte* einfach durch eben solche Kurven trennen, die in nicht in alle Richtungen *attraktiven Fixpunkten* enden. Für praktische Realisierungen der Suchverfahren mit diskreten einzelnen Suchschritten ist dies jedoch so nicht einfach möglich. Ohne *Schrittweitenkontrolle* würden sich sogar *chaotische, fraktale* Konvergenzgebiete für die einzelnen *Fixpunkte* ergeben (s. hierzu bspw. [43] und [45]). Bei den hier betrachteten Verfahren mit *Schrittweitenkontrolle* sind die Konvergenzgebiete jedoch von glatter Form, wie die Abbildungen 3.3 und 3.4 zeigen. 3.3 stellt die Gebiete von *Startwerten* dar, für die das *schrittweitengesteuerte Gradientenverfahren mit Projektion der Suchrichtung* gegen verschiedene Zielwerte konvergiert. Das sind in diesem Fall die zwei *Konvergenzgebiete* *D* und *E*. Für *Startwerte* aus *D* konvergiert das *Gradientenverfahren* im Bildpunkt gegen die gesuchte Lösung  $Z_{\tau 0}$ , für *Startwerte* aus *E* gegen die 'Scheinlösung'  $Z_1$ . Vereinzelt sieht man auf der Grenzlinie zwischen den Gebieten *D* und *E* schwarze Punkte, für die das *Gradientenverfahren* gegen den *nicht attraktiven Fixpunkt*  $Z_3$  konvergiert. Komplizierter ist die Aufteilung in Abbildung 3.4 der Bildpunktebene in die *Konvergenzgebiete* des *schrittweitengesteuerten Newtonverfahrens mit Projektion der Suchrichtung*. Hier existieren 5 verschiedene

Gebiete. Für *Startwerte* aus  $F$  konvergiert das *Newtonverfahren* im Bildpunkt gegen die gesuchte Lösung  $Z_{\tau_0}$ . Bei *Startwerten* aus  $G$  gegen je einen Punkt auf der Randkurve zwischen  $Z_3$  und  $Z_4$ , wo sich in *projizierter Suchrichtung* der Abstand zu  $Z_{\tau_0}$  vergrößert. *Startwerte* aus  $H$  führen zur Konvergenz gegen  $Z_1$  und aus  $J$  gegen  $Z_2$ . Für *Startwerte* aus  $I$  konvergiert das Verfahren wieder gegen Punkte auf der Randkurve zwischen zwei Punkten ( $Z_1$  und  $Z_2$ ), da sich dort in *projizierter Suchrichtung* der Abstand zu  $Z_{\tau_0}$  vergrößert.

Verallgemeinerte Ursache dafür, dass beide Verfahren für Funktion 3.12 nicht *global* konvergieren, ist, dass die Zielwertabstands-Funktion  $\|Z_\tau - Z_{\tau_0}\|$  nicht *konvex* (s. z.B. [2], [53] und Kap. 2) ist. Darauf basierend kann nun als zweite Zielsetzung der *Sequentiellen Parameteridentifikation* angegeben werden, ein *effizientes* Lösungsverfahren zu bieten, das ohne die Voraussetzung eines *konvexen Problems* nachweislich *global* gegen die Lösung *konvergiert*. Das bedeutet nicht, dass mit dem Prinzip der *Sequentiellen Parameteridentifikation* für sämtliche Identifikationsprobleme ein effizientes, nachweisbar *global* konvergentes Lösungsverfahren existiert. Da die *globale* Konvergenz bei den benutzten Verfahren jedoch nicht automatisch aus der Eindeutigkeit des Identifikationsproblems folgt, muss sie zusätzlich gefordert werden. Auch eine *Sequentielle Parameteridentifikation* setzt hierzu bestimmte Problemeigenschaften voraus, aber eben andere als klassische lokale Lösungsverfahren wie die *schrittweitengesteuerten* Varianten von *Gradienten-* und *Newtonverfahren mit Projektion der Suchrichtung*. D.h., dass die für das Identifikationsproblem definierte Abbildung  $Z_\tau$  der Parameterwerte  $P_{id}^V$  auf Zielgrößen  $Z_\tau$  beispielsweise als Abstandsfunktion zum Zielwert  $Z_{\tau_0}$  nicht *konvex* sein muss. In diesem Abschnitt wurden die Eigenschaften eines vollständig konzipierten Identifikationsverfahrens detailliert beschrieben. Der Zweck einer *Sequentiellen Parameteridentifikation* besteht genau darin. Damit lässt sich die Zielstellung der *Sequentiellen Parameteridentifikation* wie folgt zusammenfassen:

1. Zu einem Identifikationsproblem der allgemeinen Form 3.2 soll ein minimales Identifikationsproblem der Form 3.10 definiert werden. Die minimale Zahl von *Zielgrößen*  $Z_\tau$  ermöglicht einen kleinen Messaufwand am realen System und einen geringen Simulationsaufwand während der Identifikationsberechnung.
2. Eine dabei geeignete Wahl von *Zielgrößen*  $Z_\tau$  soll es erlauben, mit der Kenntnis des Modellverhaltens  $\tau$  einen analytischen Nachweis zu führen, dass  $Z_\tau$  für alle Wertbelegungen  $f_{p_{const}}$  der nicht identifizierten Parameter  $P_{const}$  eindeutig ist in den Wertbelegungen  $f_{P_{id}}$  der zu bestimmenden Parameter  $P_{id}$  (3.9).
3. Zur Lösung von  $Z_\tau^{-1}$  soll ein Verfahren geliefert werden, das nachweislich in jedem Fall gegen die eindeutige Lösung konvergiert (*konstruktive* Beschreibung von Funktion 3.10).

Wie mit dem Prinzip der *Sequentiellen Parameteridentifikation* diese Forderungen realisiert werden, ist Inhalt der folgenden Abschnitte.

## 3.2 Lösungsansatz

Grundvoraussetzung einer *Sequentiellen Parameteridentifikation* ist zunächst einmal, dass die zu identifizierenden Parameter  $P_{id}$  anders als bei der Formalisierung in Abschnitt 3.1 in einer Reihenfolge  $p_{id\ i}$  mit  $P_{id} = \{p_{id\ i} | 1 \leq i \leq |P_{id}|\}$  angeordnet werden. Wie in Abschnitt 3.1 wird das allgemeine Identifikationsproblem 3.2 ersetzt durch ein minimales Identifikationsproblem der Form 3.10. Die *Sequentielle Parameteridentifikation* stellt jedoch eine direkte Beziehung zwischen jeweils einer *Zielgröße* und einem zu identifizierenden Parameter her, die sich durch den gemeinsamen Index ausdrückt:

$$z_{\tau\ i} = (Z_{\tau})_i \leftrightarrow p_{id\ i} \quad (3.13)$$

Mit der nun festgelegten Anordnung der Parameter kann der Parameter-*Zielgrößen*-Zusammenhang statt über Funktionen zur Wertbelegung von Parametern wie in Abschnitt 3.1 einfacher direkt über Parameterwerten formalisiert werden. Auch hier soll es analog zu 3.8 flexibel möglich sein, einzelne Parameter in *Gruppen*  $P_i$  mit den Wertvektoren  $P_i^V$  zusammenzufassen. Folgende Beziehung legt eine solche Aufteilung der Parameter und ihrer Werte in eine Folge von *Gruppen* fest

$$\begin{aligned} P_{const}^{VT} &= [f_{P_{const}}(p_{const\ 1}), \dots, f_{P_{const}}(p_{const\ |P_{const}|})] \\ P_{id}^{VT} = [P_1^{VT}, \dots, P_{n_{PG}}^{VT}] &= [f_{P_{id}}(p_{id\ 1}), \dots, f_{P_{id}}(p_{id\ |P_{id}|})] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Der wertabhängige Parameter-*Zielgrößen*-Zusammenhang kann nun mit 3.14 aus der bisherigen Darstellung abgeleitet werden als

$$Z_{\tau}(P_{const}^V, P_1^V, \dots, P_{n_{PG}}^V) = Z_{\tau}(f_{P_{const}}, f_{P_{id}}) \quad (3.15)$$

Damit erhält man analog zu 3.10 ebenso unter der Voraussetzung von 3.5, 3.7 und 3.9 die Darstellung der *Identifikationsfunktion* in den Parameterwerten:

$$\begin{aligned} Z_{\tau}^{-1} : P_{const}^* \times Z_{\tau}^* &\rightarrow P_{id}^*, \quad Z_{\tau}^{-1}(P_{const}^V, Z_{\tau}) = P_{id}^V \\ \text{mit } Z_{\tau}^* &\subseteq \mathbb{R}^{|P_{id}|}, \quad Z_{\tau} = Z_{\tau}(P_{const}^V, P_{id}^V), \\ P_{id}^* &= \prod_{i=1}^{|P_{id}|} [g_u(p_{id\ i}), g_o(p_{id\ i})], \quad P_{const}^* = \prod_{i=1}^{|P_{const}|} [g_u(p_{const\ i}), g_o(p_{const\ i})] \end{aligned} \quad (3.16)$$



Bei einer *Sequentiellen Parameteridentifikation* bringt diese festgelegte Anordnung der Parameter bestimmte Eigenschaften mit sich: Der angeordnete Parameter-Zielgrößen-Zusammenhang 3.15 ermöglicht grob zusammengefasst, dass sich die einzelnen *Parametergruppen*  $P_i$  sequentiell, also nacheinander, aber aufeinander aufbauend, aus zugehörigen *Gruppen* von *Zielgrößen*  $Z_{\tau i}$  identifizieren lassen. Die *Gruppen* von *Zielgrößen* müssen dazu gleich groß sein wie ihre entsprechenden *Parametergruppen*:

$$\dim(Z_{\tau i}) = |P_i| \quad (3.17)$$

Außerdem soll die Aufteilung von  $Z_{\tau}$  in die  $Z_{\tau i}$  der von  $P_{id}^V$  in die  $P_i^V$  entsprechen:

$$Z_{\tau}^T = [Z_{\tau 1}^T, \dots, Z_{\tau n_{PG}}^T] \quad (3.18)$$

Ausgehend von 3.17 und 3.18 müssen die relevanten Parameter-Zielgrößen-Zusammenhänge also wie folgt aussehen:

$$Z_{\tau i} \leftrightarrow P_i^V$$

Im besten Fall bestehen alle diese *Parameter-* bzw. *Zielgrößengruppen* jeweils aus genau einem Parameter ( $P_i^V = f_{P_{id}}(p_{id i})$ ,  $Z_{\tau i} = z_{\tau i}$ ). Dann wäre die Parameteridentifikation komplett *sequentiell* möglich. Voraussetzung dafür ist, dass die erste *Zielgröße*  $z_{\tau 1}$  nur von den Werten  $P_{const}^V$  der konstant gehaltenen Parameter und eindeutig vom Wert  $P_1^V$  des Parameters  $p_1$  abhängt. Der Zusammenhang zwischen  $z_{\tau 1}$  und  $P_1^V$  ist damit bekannt und *wohldefiniert* als

$$\begin{aligned} z_{\tau 1} \Big|_{P_{const}^V = P_{const 0}^V} : P_{id 1}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ \text{mit } z_{\tau 1} \Big|_{P_{const}^V = P_{const 0}^V} (P_1^V) &= z_{\tau 1} (P_{const 0}^V, P_1^V, P_2^V, \dots, P_{|P_{id}|}^V), \\ P_2^V \in P_{id 2}^*, \dots, P_{|P_{id}|}^V &\in P_{id |P_{id}|}^* \text{ beliebig} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Da  $z_{\tau 1} \Big|_{P_{const}^V = P_{const 0}^V}$  eine eindeutige Abhängigkeit beschreibt, kann  $P_{10}^V$  einfach über einen eindimensionalen Zusammenhang aus dem *Zielgrößenwert*  $z_{\tau 10}$  identifiziert werden (s. Abb. 3.5), ohne die unbekanntene Werte  $P_2^V, \dots, P_{|P_{id}|}^V$  der übrigen Parameter berücksichtigen zu müssen. Aufbauend auf dem nun bekannten Wert  $P_{10}^V$  muss sich mit

$$z_{\tau 2} \Big|_{P_{const}^V = P_{const 0}^V, P_1^V = P_{10}^V} \quad (3.20)$$

ein ebenso eindeutiger, eindimensionaler Zusammenhang zwischen  $z_{\tau 2}$  und  $P_2^V$  ergeben. Über den vorgegebenen *Zielgrößenwert*  $z_{\tau 20}$  kann dann  $P_{20}^V$  bestimmt werden, ohne  $P_3^V, \dots, P_{|P_{id}|}^V$  berücksichtigen zu müssen (s. Abb. 3.5). Wie in Abbildung 3.5 angedeutet muss es für eine komplett *Sequentielle Parameteridentifikation* nun möglich sein, mit immer einem weiteren bekannten Parameterwert über die jeweils nächste *Zielgröße* den Wert

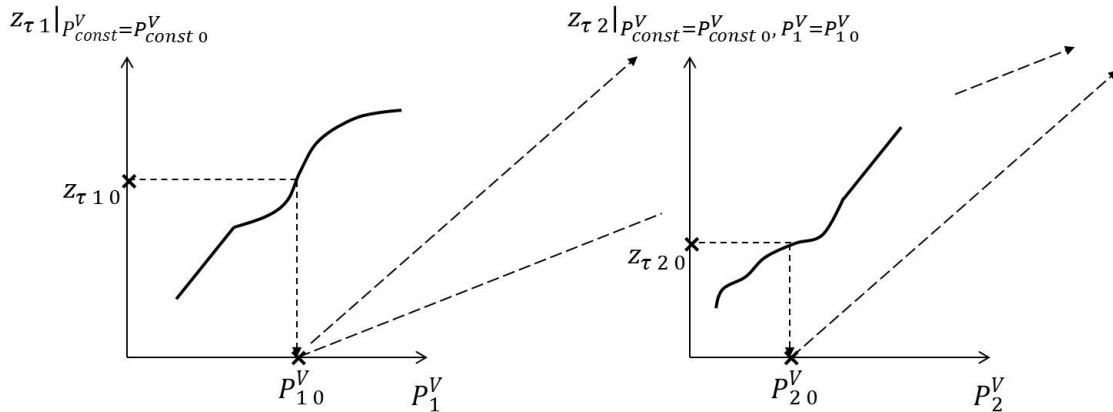


Abbildung 3.5: Eindeutige, eindimensionale Parameter-Zielgrößen-Zusammenhänge

des nächsten noch unbekanntem Parameters aus einem eindeutigen, eindimensionalen Zusammenhang zu bestimmen. Bis zum letzten zu identifizierenden Parameter wiederholt erhält man so die Werte aller Parameter.

Interessant ist an dieser Stelle, dass eine solche komplett *sequentielle Parameteridentifikation* immer existiert, wenn für ein Identifikationsproblem (3.2)

ein minimaler, eindeutiger Parameter-Zielgrößen-Zusammenhang  $Z_{\tau} \leftrightarrow (f_{P_{const}}, f_{P_{id}})$  der Form 3.10 existiert,

und die *Funktional-Bedingungen* (3.8) aller *Zielgrößen* übereinstimmen ( $b_i = b_j, 1 \leq i, j \leq |P_{id}|$ ).

Die Forderung identischer *Funktional-Bedingungen* für die verschiedenen *Zielgrößen* heißt, dass alle *Zielgrößen*  $z_{\tau i}$  aus verschiedenen Auswertungen  $z_{E i}$  ein und derselben *Anregung*  $u$  und *Antwort*  $y$  hervorgehen müssen. Diese Einschränkung ist letztlich kleiner als man vermuten könnte, da die meisten Systeme mit endlich vielen Parametern sich vollständig aus einer einzigen zeitkontinuierlichen Messung identifizieren lassen. Ist die Systemanalyse mit verschiedenen separaten Anregungen  $u_i$  konzipiert, kann in den meisten Fällen daraus eine einzige Anregung  $u$  erzeugt werden, die die Einzelanregungen  $u_i$  zeitlich nacheinander abbildet und damit die gleichen Informationen gewinnen kann (s. Abb. 3.6). Evt. müssen zwischen den Teilanregungen noch Abschnitte eingefügt werden, die die Ausgangsbedingungen der folgenden Teilanregung sicherstellen. Hierin liegt auch begründet, warum dieses Prinzip nicht in allen Fällen funktioniert: Lässt sich nach einer Teilanregung der Ausgangszustand nicht mehr herstellen, kann keine funktionierende Gesamtanregung konstruiert werden. Dies ist sogar für praktische Anwendungsfälle denkbar, wenn sich reale Systeme beispielsweise durch Verschleiß während mehrerer Teilmessungen unumkehrbar verändern. Eine Parameteridentifikation ist dann nur mit

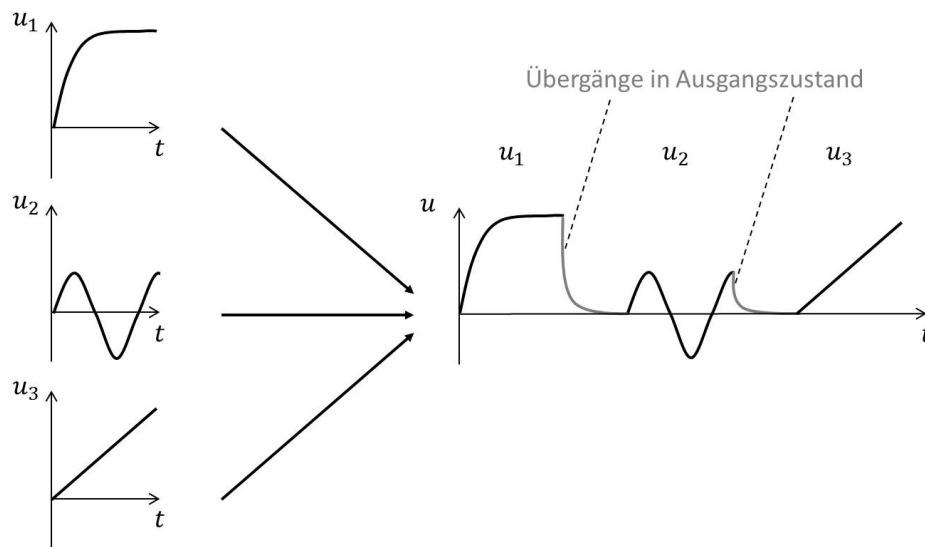


Abbildung 3.6: 1D-Gesamtanregung aus mehreren 1D-Einzelanregungen

mehreren identischen Exemplaren möglich, die bei der Messung 'zerstört' werden dürfen. Sind allerdings beide obigen Forderungen erfüllt, können als alternative *Zielgrößen*  $\hat{Z}_\tau$  aus  $Z_\tau$  und der existierenden *Identifikationsfunktion* 3.16

$$\hat{Z}_\tau = Z_\tau^{-1}(P_{const}^V, Z_\tau)$$

definiert werden. Die *Zielgrößen*  $z_{\tau i}$  besitzen alle dieselbe *Funktional-Bedingung*  $b$ . Damit basieren auch die einzelnen *Zielgrößen*  $\hat{z}_{\tau i}$  als Funktionen in den  $z_{\tau i}$  jeweils auf der einen *Funktional-Bedingung*  $b$  und sind gemäß 3.8 *wohldefiniert*. Es ergibt sich als alternativer *Parameter-Zielgrößen-Zusammenhang*

$$\hat{Z}_\tau = Z_\tau^{-1}(P_{const}^V, Z_\tau(P_{const}^V, P_{id}^V)) \stackrel{3.16}{=} P_{id}^V$$

Jede der einzelnen *Zielgrößen*  $\hat{z}_{\tau i}$  hängt nun von mehreren Punkten der ausgewerteten Anregung  $u$  und Antwort  $y$  ab oder erfordert die Information des Systemverhaltens über ein ganzes Zeitintervall. Aus den *Zielgrößen*  $\hat{Z}_\tau$  können die Parameterwerte  $P_{id}^V$  direkt abgelesen werden. Wertet man nacheinander  $\hat{z}_{\tau 1}$  bis  $\hat{z}_{\tau |P_{id}|}$  aus, entspricht dies genau dem Vorgehen einer komplett *Sequentiellen Parameteridentifikation*, wobei hier zur Bestimmung der Parameter die jeweils schon bekannten Parameter nicht einmal vorausgesetzt werden.

Außer, dass bei Identifizierbarkeit mit einer einzelnen Anregung immer *Zielgrößen* existieren, die eine komplett *Sequentielle Parameteridentifikation* ermöglichen, lässt sich mit den definierten *Zielgrößen*  $\hat{Z}_\tau$  nichts anfangen. Denn die Bildung der *Zielgrößen* nach dem vorgestellten Verfahren setzt ja schon die nachgewiesene Lösung des Gesamtproblems voraus, was den zusätzlichen Einsatz der *Sequentiellen Parameteridentifika-*

tion überflüssig macht. Versucht man, die *Zielgrößen*  $\hat{Z}_\tau$  auf Grundlage eines beliebigen eindeutigen, aber noch nicht als eindeutig nachgewiesenen Parameter-*Zielgrößen*-Zusammenhangs  $Z_\tau \leftrightarrow (f_{P_{const}}, f_{P_{id}})$  zu bilden, muss man damit rechnen, dass sich sehr komplizierte Zusammenhänge ergeben. Schon solche *Auswertungsfunktionale* oder *Funktional-Bedingungen* sind meist nicht elementar darstellbar, was mindestens so auf die Zusammenhänge zwischen *Zielgrößen* und Parametern zutrifft. Außerdem ist nicht damit zu rechnen, dass sich die Zusammenhänge oder Auswertungen sogar mit Modellwissen nachvollziehen lassen. Damit geht auch die wesentliche Grundlage für die Möglichkeit verloren, die Eindeutigkeit der *Zielgrößen* in den zugehörigen Parametern nachzuweisen. Um genau das zu ermöglichen müssen die *Auswertungsfunktionale* und *Funktional-Bedingungen* anders als in den  $\hat{Z}_\tau$  möglichst einfach konstruiert sein. Damit die *Zielgrößen* dennoch die notwendige Eigenschaft der Eindeutigkeit in den zugehörigen und Unabhängigkeit von den später bestimmten Parametern erfüllen können, ist es allerdings nötig, nicht wie für die  $\hat{Z}_\tau$  beliebige verschiedene *Zielgrößen* zu definieren, sondern solche, die diese Eigenschaft schon mit sich bringen. Die Entwicklung solcher *Zielgrößen* ist in den meisten Fällen nicht einfach, gelingt aber oft auf Basis von ausreichendem Modellwissen oder gründlicher Modellanalyse. Dabei helfen die vielen Freiheitsgrade, die die Definition der *Zielgrößen* zulässt. V.A. das Mittel der *Funktional-Bedingung* ermöglicht es, nur solche Modellanregungen zuzulassen, in denen die später zu bestimmenden Parameter gar keinen Einfluss besitzen, oder einen Einfluss, der über die *Auswertungsfunktionale* wieder herausgerechnet werden kann. Eine passende Verrechnung einer oder verschiedener Größen der Modellantwort durch die *Auswertungsfunktionale* lässt bei geeigneter *Funktional-Bedingung* schließlich die *Zielgröße* eindeutig in den zu bestimmenden Parametern werden.

Nachvollziehbare, eindeutige Parameter-*Zielgrößen*-Zusammenhänge können häufig nicht für Einzelparameter entwickelt werden. Es lassen sich dann zwar *Funktional-Bedingungen* finden, unter deren Modellteilverhalten etliche Parameter keinen Einfluss auf naheliegende *Auswertungsfunktionale* haben, die übrigen noch unbekannt Parameter sind aber mehr als nur einer. Dieser Kompromiss ist in einer *Sequentiellen Parameteridentifikation* möglich, solange der Parameter-*Zielgrößen*-Zusammenhang für die ganze *Parametergruppe* noch den Nachweis der Eindeutigkeit ermöglicht. Ein solcher Nachweis ist für Parameter-*Zielgrößen*-Zusammenhänge zu einem einzelnen Parameter aber meist einfacher zu realisieren. In Abschnitt 3.3 wird eine Methode vorgestellt, die unter weiteren aber häufig zutreffenden Voraussetzungen den Nachweis der Eindeutigkeit für mehrelementige *Parametergruppen* auf das Vorgehen bei einelementigen *Parametergruppen* reduziert. Außerdem bringt der später vorgestellte Ansatz eine funktionsverifizierte Lösung für die Berechnung der Werte mehrelementiger *Parametergruppen* mit sich. Anders als für die *Zielgrößen* einer komplett *Sequentiellen Parameteridentifikation* lässt sich die *Identifikationsfunktion* 3.11, existieren mehrelementige *Parametergruppen*, nicht notwendigerweise mit einem der klassischen deterministischen Verfahren wie dem *Newton-* oder

*Gradientenverfahren* lösen (s. auch Abschnitt 3.1).

Bei der Untersuchung der Lösbarkeit von 3.11 mit klassischen deterministischen Verfahren zeigt sich im Fall von *Zielgrößen*  $Z_{\tau f_{P_{const}}}$ , die eine komplett *Sequentielle Parameteridentifikation* bilden, eine interessante Situation: Sind die eindimensionalen Parameter-*Zielgrößen-Zusammenhänge* frei von *Sattelpunkten* und schränkt man die *Schrittweitenkorrektur* für Randpunkte, deren projizierte Gradientensuchrichtung verschwindet, ein, konvergiert das *schrittweitengesteuerte Newtonverfahren mit Projektion auf  $P_{id}^*$*  für das mehrdimensionale Problem 3.11 global und bietet damit eine verifizierte Berechnung der *Identifikationsfunktion*. Ein Nachweis hierzu findet sich in B.5. Überraschenderweise gibt es umgekehrt Fälle, in denen auch für eine komplett *Sequentielle Parameteridentifikation* mit *sattelpunktfreien* eindimensionalen Zusammenhängen das *schrittweitengesteuerte Gradientenverfahren mit Projektion auf  $P_{id}^*$*  nicht für beliebige *Startwerte* aus  $P_{id}^*$  und damit nicht global konvergiert. Unter B.4 wird ein Beispiel solcher *Zielgrößen* vorgestellt. Folglich liefert das *Gradientenverfahren* keine verifizierte Berechnung der *Identifikationsfunktion* 3.11 für *Zielgrößen* einer komplett *Sequentiellen Parameteridentifikation*.

Ist es nun für ein System aber nicht möglich, ausschließlich *Parametergruppen* der Größe 1 zu bilden, sind zwangsläufig mehrelementige *Parametergruppen* Teil der *Sequentiellen Parameteridentifikation*. Anstelle einer Folge von Identifikationsschritten einzelner Parameter ist in solchen Fällen eine Folge von Identifikationsschritten jeweils mehrerer Parameter über den zugehörigen *Zielgrößenvektor* gleicher Dimension möglich (s. 3.17, 3.18). Analog 3.19 und 3.20 müssen auch die mehrdimensionalen *Zielgrößen*  $Z_{\tau 1}$ ,  $Z_{\tau 2}$ , ... für konstante bereits identifizierte Parameterwerte  $P_{const}^V$ ,  $P_1^V$ , ... von den Parameterwerten  $P_1^V$ ,  $P_2^V$ , ... der zugehörigen *Parametergruppe* eindeutig abhängen und dürfen von keinem der erst später identifizierten Parameter beeinflusst werden. Abbildung 3.7 zeigt den Ablauf einer *Sequentiellen Parameteridentifikation* auf Basis der inversen mehrelementigen *Zielgrößen*. Zusätzlich können die Abhängigkeiten und Unabhängigkeiten zwischen *Zielgrößen* und Parametern in Form einer Tabelle mit den Ziffern 1 und 0 veranschaulicht werden. Es ergibt sich die Form einer *unteren Block-Dreiecksmatrix* (s. 3.21) und für den Spezialfall einer komplett *Sequentiellen Parameteridentifikation* die einer *unteren Dreiecksmatrix* (s. 3.22), wobei berücksichtigt werden muss, dass diese Darstellung weder die notwendige Eindeutigkeit in den Diagonalblöcken repräsentiert, noch dass außerhalb der Diagonalblöcke liegende Einträge nicht notwendigerweise 1 sein

### 3 Prinzip der Sequentiellen Parameteridentifikation

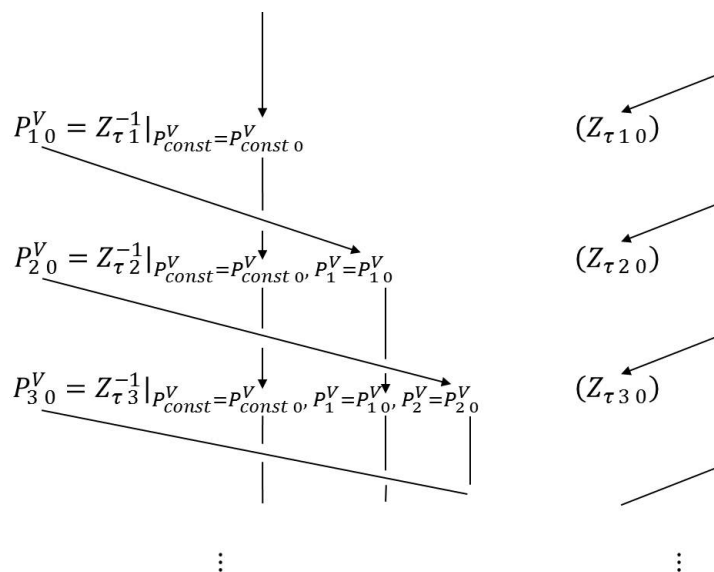


Abbildung 3.7: Ablauf einer *Sequentiellen Parameteridentifikation* mit mehrelementigen *Parametergruppen*

müssen, auch wenn sie hier so notiert sind.

		$P_1^V$	$P_2^V$			$P_3^V$	
			$(P_2^V)_1$	$(P_2^V)_2$	$(P_2^V)_3$	$(P_3^V)_1$	$(P_3^V)_2$
	$Z_{\tau 1}$	1	0	0	0	0	0
$Z_{\tau 2}$	$(Z_{\tau 2})_1$	1	1	1	1	0	0
	$(Z_{\tau 2})_2$	1	1	1	1	0	0
	$(Z_{\tau 2})_3$	1	1	1	1	0	0
$Z_{\tau 3}$	$(Z_{\tau 3})_1$	1	1	1	1	1	1
	$(Z_{\tau 3})_2$	1	1	1	1	1	1

(3.21)

	$P_1^V$	$P_2^V$	$P_3^V$	$P_4^V$	$P_5^V$	$P_6^V$
$Z_{\tau 1}$	1	0	0	0	0	0
$Z_{\tau 2}$	1	1	0	0	0	0
$Z_{\tau 3}$	1	1	1	0	0	0
$Z_{\tau 4}$	1	1	1	1	0	0
$Z_{\tau 5}$	1	1	1	1	1	0
$Z_{\tau 6}$	1	1	1	1	1	1

(3.22)

Gelingt nun der Nachweis der beschriebenen Abhängigkeiten und Unabhängigkeiten zwischen den ein- oder mehrelementigen *Zielgrößen*  $Z_{\tau i}$  und *Parametergruppen*  $P_{const}^V, P_i^V$ , ist dadurch automatisch auch der Nachweis für die Eindeutigkeit der *Zielgrößen*  $Z_{\tau}$  des Gesamtproblems in den insgesamt zu identifizierenden Parameterwerten  $P_{id}^V$  erbracht. Denn wäre die Gesamtbeziehung zwischen *Zielgrößen* und Parametern nicht wie in 3.9 gefordert eindeutig, könnte auch aus den einzelnen Zusammenhängen nicht eindeutig auf die Parameter geschlossen werden. In dieser Schlussfolgerung liegt die Hauptleistung der *Sequentiellen Parameteridentifikation*: Der Nachweis für die Eindeutigkeit des komplexen, hochdimensionalen Zusammenhangs für das Gesamtproblem  $Z_{\tau} \Leftrightarrow P_{id}^V$  wird ersetzt durch den Nachweis der Eindeutigkeit mehrerer einfacher Zusammenhänge  $Z_{\tau i} \Leftrightarrow P_i^V$  von kleiner Dimension. Zu beachten ist allerdings, dass die kleineren, einfacheren Zusammenhänge mit größer werdendem Index  $i$  für die Kombination einer immer größer werdenden Menge konstant gehaltener Parameter  $P_{const}^V = P_{const 0}^V, P_1^V = P_{10}^V, P_2^V = P_{20}^V, \dots$  untersucht werden müssen (s. Abb. 3.7, Tab. 3.21). Trotzdem ist ein solches Problem bei Weitem einfacher zu überblicken als das, in dem die entsprechenden Parameter als Variable auftreten. Genau umgekehrt steigt mit kleiner werdendem *Zielgrößen*-Index die Zahl an Parametern, für die zusätzlich nachgewiesen werden muss, dass sie keinen Einfluss besitzen (s. Tab. 3.21). An dieser Stelle sind wie bereits erwähnt die *Funktional-Bedingungen*  $B_i$  und *Auswertungsfunktionale*  $Z_{E i}$  gefordert. Diese müssen das analysierte System in einen Zustand versetzen, für den mit entsprechendem Modellwissen möglichst einfach einzusehen ist, dass entsprechende Parameter keinen Einfluss auf das ausgewertete Systemverhalten haben. Gelingt beides, ist klar, dass mit dem Prinzip der *Sequentiellen Parameteridentifikation* die ersten beiden Zielsetzungen aus Abschnitt 3.1 erfüllt sind.

Bei den komplizierten Voraussetzungen an Abhängigkeiten und Unabhängigkeiten, die gefordert sind, wenn eine Aufteilung in mehrere kleinere Probleme möglich sein soll, stellt sich die Frage, ob nicht auch einfachere Bedingungen an die Zusammenhänge ausreichen: Man könnte sich beispielsweise fragen, ob es nicht viel einfacher genügt, nachzuweisen, dass die *Zielgrößen* insgesamt oder jede einzelne davon in jedem einzelnen zu identifizierenden Parameter eindeutig sind, wenn alle übrigen Modellparameter festgehalten werden. Leider sind simplere Ansätze wie dieser nicht zielführend, und es muss zum Nachweis der Eindeutigkeit auf Basis kleinerer Teilprobleme durchaus auf kompliziertere wie die *Sequentielle Parameteridentifikation* zurückgegriffen werden. Zum beschriebenen Alternativeinsatz gibt es einfache Gegenbeispiele, die alle Anforderungen erfüllen, aber letztlich gar nicht eindeutig sind. In B.6 ist eines davon beschrieben.

Neben den schon erwähnten ersten beiden Zielsetzungen aus Abschnitt 3.1 muss noch auf den Beitrag der *Sequentiellen Parameteridentifikation* zum 3. Ziel, dem sicher global konvergierenden Lösungsverfahren für die *Identifikationsfunktion* eingegangen werden. Wie beim Nachweis der Eindeutigkeit wird das genaue Vorgehen im Fall mehrelementiger *Parametergruppen* in Abschnitt 3.3 beschrieben. Eine zusammenhängende Folge ein-

elementiger *Parametergruppen* kann mit einer Modifikation der *Schrittweitensteuerung* grundsätzlich mit dem *Newtonverfahren* gelöst werden. Die grundsätzliche Idee für ein Lösungsverfahren des allgemeinen Gesamtproblems ist es, dafür eine effiziente klassische Methode wie das *Newton-* oder *Gradientenverfahren* einzusetzen und ausschließlich auf eine Alternative auszuweichen, wenn die Lösung so nicht gefunden werden kann. Für die Alternativmethoden ist es unumgänglich, den Identifikationsprozess stufenweise auszuführen. Damit geht einerseits eine Verschlechterung des Laufzeitverhaltens einher, andererseits wird die Funktion des Identifikationsprozesses dadurch garantiert und verifiziert. Eine schrittweise Identifikation der Parameter nutzt die Voraussetzungen einer *Sequentiellen Parameteridentifikation* und kann im einfachsten Anwendungsfall wie oben und in Abbildung 3.7 beschrieben ablaufen, sofern die getrennte Lösung einer mehrelementigen *Parametergruppe* geklärt ist. In jedem Fall bietet die *Sequentielle Parameteridentifikation* wie für den Eindeutigkeitsnachweis die Möglichkeit, auch Konvergenzprobleme an Stelle für das komplexe, hochdimensionale Gesamtproblem, für mehrere kleinere Probleme zu lösen. Auch die Frage, wie ein möglichst effizienter und dennoch verifizierter Parameteridentifikationsprozess aus den verschiedenen Möglichkeiten konstruiert werden kann, ist Inhalt von Abschnitt 3.3.

## 3.3 Formale Definition und Detailbeschreibung

Nachdem in Abschnitt 3.2 die prinzipielle Vorgehensweise und die wesentlichen Eigenschaften einer *Sequentiellen Parameteridentifikation* vorgestellt wurden, sollen nun einmal die allgemeinen Voraussetzungen an eine *Sequentielle Parameteridentifikation* formalisiert werden und darüber hinaus das Vorgehen zum Nachweis von Eindeutigkeit und funktionsverifizierter Lösung im Fall mehrelementiger Parametergruppen genau beschrieben werden. Basierend auf den verschiedenen Möglichkeiten für die Lösung speziell aufgebauter Teilprobleme soll weiter ein Verfahren angegeben werden, das die funktionsgarantierte Berechnung der gesamten *Identifikationsfunktion* ermöglicht.

Der Entwurf eines *Zielgrößenvektors*  $Z_\tau$  mit gleich vielen Komponenten wie die Zahl  $|P_{id}|$  der zu identifizierenden Parameter ist bereits in Abschnitt 3.1 ausreichend formalisiert:  $Z_\tau$  ergibt sich zu einer Systemübertragungsfunktion  $\tau$  aus der Definition zugehöriger *Funktional-Bedingungen*  $b_i$  und *Auswertungsfunktionale*  $z_{E_i}$ . Dazu müssen sie die Voraussetzungen 3.5 (erfüllbare Bedingungen), 3.7 (wohldefinierte *Zielgrößen*) und 3.9 (Eindeutigkeit) erfüllen. Auch die sortierte Einteilung von *Zielgrößen* und zu identifizierenden Parameterwerten in aufeinanderfolgende *Parametergruppen*  $P_i^V$  und Gruppen  $Z_{\tau_i}$  von *Zielgrößen* wird mit 3.14, 3.17 und 3.18 schon in Abschnitt 3.2 beschrieben. Die dort ebenfalls angesprochenen notwendigen Eigenschaften der *Zielgrößengruppen* sollten hier aber noch formalisiert zusammengetragen werden. Eine *Zielgrößengruppe*  $Z_{\tau_i}$  hängt



nicht von den Werten der nachfolgenden *Parametergruppen* ab:

$$\begin{aligned} \forall P_{const}^V \in P_{const}^*, P_j^V \in P_j^*, P_{k1}^V, P_{k2}^V \in P_k^*, 1 \leq j \leq i < k \leq n_{PG} \\ Z_{\tau i} (P_{const}^V, P_1^V, \dots, P_i^V) &= Z_{\tau i} (P_{const}^V, P_1^V, \dots, P_i^V, P_{i+1 1}^V, \dots, P_{n_{PG} 1}^V) \\ &= Z_{\tau i} (P_{const}^V, P_1^V, \dots, P_i^V, P_{i+1 2}^V, \dots, P_{n_{PG} 2}^V) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Sind die übrigen Parameterwerte konstant, ist die Abbildung der Werte der zugehörigen *Parametergruppe*  $P_i$  auf die *Zielgrößengruppe*  $Z_{\tau i}$  *injektiv*:

$$\begin{aligned} \forall P_{const}^V \in P_{const}^*, P_j^V \in P_j^*, P_{i1}^V, P_{i2}^V \in P_i^*, 1 \leq j < i \leq n_{PG} \\ (Z_{\tau i} (P_{const}^V, P_1^V, \dots, P_{i-1}^V, P_{i1}^V) = Z_{\tau i} (P_{const}^V, P_1^V, \dots, P_{i-1}^V, P_{i2}^V)) \Rightarrow (P_{i1}^V = P_{i2}^V) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Sind die Bedingungen 3.23 und 3.24 für mehrere *Parametergruppen*  $P_i$  erfüllt, ist das gesamte Identifikationsproblem 3.10 dadurch in mehrere kleinere Probleme zerlegt, für die der Nachweis der Eindeutigkeit (3.9) einfacher gelingen sollte als für das Gesamtproblem. Für die Verfahren zur Berechnung der *Identifikationsfunktion* 3.16 muss allerdings noch die Differenzierbarkeit oder zumindest die Stetigkeit der *Zielgrößen* in den zu identifizierenden Parameterwerten gefordert werden:

$$\begin{aligned} Z_{\tau} |_{P_{const}^V = P_{const 0}^V} \in (C^{0/1} (P_{id}^*))^{|P_{id}|} : P_{id}^* \rightarrow \mathbb{R}^{|P_{id}|}, \\ Z_{\tau} |_{P_{const}^V = P_{const 0}^V} (P_{id}^V) = Z_{\tau} (P_{const 0}^V, P_{id}^V) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Bei einelementigen *Parametergruppen* ist der Weg, 3.24 nachzuweisen, genau vorgegeben: Es muss ein streng monotoner eindimensionaler Zusammenhang zwischen

$$Z_{\tau i} |_{P_{const}^V = P_{const 0}^V, P_1^V = P_{10}^V, \dots, P_{i-1}^V = P_{i-1 0}^V} \text{ und } P_i^V \quad (3.26)$$

nachgewiesen werden. Für mehrelementige *Parametergruppen* und damit mehrdimensionale Zusammenhänge ist die Vorgehensweise hierbei nicht unmittelbar anschaulich klar. In dieser Arbeit wird dazu eine generelle Methode verwendet, die eine Eigenschaft der Zusammenhänge zu einer *Parametergruppe* voraussetzt: Hält man zusätzlich zu den ohnehin vorausgesetzten Parametern die ersten  $j$  Parameter einer *Parametergruppe*  $P_i$  konstant, muss auch die verbleibende *Zielgrößengruppe*  $(Z_{\tau i})_{j+1..|P_i|}$  in den übrigen Parameterwerten  $(P_i^V)_{j+1..|P_i|}$  eindeutig sein. Formal ausgedrückt lautet diese Eigenschaft

$$\begin{aligned} \forall P_{const}^V \in P_{const}^*, P_k^V \in P_k^*, (P_i^V)_l \in P_{il}^*, (P_i^V)_{m 1}, (P_i^V)_{m 2} \in P_{im}^*, \\ 1 \leq i \leq n_{PG}, 1 \leq k < i, 1 \leq l \leq j < m \leq |P_i| : \\ (Z_{\tau i})_{j+1..|P_i|} (P_{const}^V, P_1^V, \dots, P_{i-1}^V, (P_i^V)_{1..j}, (P_i^V)_{j+1..|P_i| 1}) \\ = (Z_{\tau i})_{j+1..|P_i|} (P_{const}^V, P_1^V, \dots, P_{i-1}^V, (P_i^V)_{1..j}, (P_i^V)_{j+1..|P_i| 2}) \\ \Rightarrow (P_i^V)_{j+1..|P_i| 1} = (P_i^V)_{j+1..|P_i| 2} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Diese Eigenschaft tritt häufig auf, wenn auch 3.24 vorliegt, folgt aber nicht aus 3.24 und muss daher zusätzlich gefordert werden. In B.7 wird ein einfacher Zusammenhang zwischen Parametern und *Zielgrößen* vorgestellt, der zwar 3.24, aber nicht 3.27 erfüllt.

Ist für eine *Parametergruppe*  $P_i$  Voraussetzung 3.27 erfüllt, macht es Sinn, für jeden Parameter  $(P_i)_j$  der Gruppe folgende Abbildung zu betrachten

$$(P_i^V)_j \rightarrow (Z_{\tau i})_j \Big|_{P_{const 0}^V, P_{1 0}^V, \dots, P_{i-1 0}^V, (P_i^V)_{1..j-1 0}, (Z_{\tau i})_{j+1..|P_i| 0}} \left( (P_i^V)_j \right) \quad (3.28)$$

In dieser Abbildung sind die Parameter aller Gruppen vor Gruppe  $i$  sowie alle Parameter der Gruppe  $i$  vor Parameter  $j$  konstant. Eine weitere Nebenbedingung ist, dass sämtliche *Zielgrößen* der Gruppe  $i$  nach  $j$  konstant sind. Allein der  $j$ . Parameter der  $i$ . *Parametergruppe* ist variabel. Damit unter Veränderung von  $(P_i)_j$  die  $(Z_{\tau i})_{j+1..|P_i|}$  ihren Wert konstant halten, müssen sich natürlich implizit die Werte  $(P_{\tau i})_{j+1..|P_i|}$  entsprechend anpassen. Genau die Abbildungen 3.28 sind unter Voraussetzung 3.27 eindeutig und die in 3.28 definierte Funktion erst mit 3.27 *wohldefiniert*. Mit den Abbildungen 3.28 ist auch die Technik verbunden, die hier vorgeschlagen wird, um die Eindeutigkeit 3.24 mehrelementiger *Zielgrößengruppen*  $Z_{\tau i}$  in den Werten  $P_i^V$  der zugehörigen *Parametergruppe* nachzuweisen: Zunächst muss Abbildung 3.28 für den letzten Parameter der *Parametergruppe* als variable Größe betrachtet werden

$$(P_i^V)_{|P_i|} \rightarrow (Z_{\tau i})_{|P_i|} \Big|_{P_{const 0}^V, P_{1 0}^V, \dots, P_{i-1 0}^V, (P_i^V)_{1..|P_i|-1 0}} \left( (P_i^V)_{|P_i|} \right)$$

Kann die Abbildung für sämtliche Kombinationen der konstant gehaltenen Parameter als eindeutig nachgewiesen werden, ist die Abbildung

$$(P_i^V)_{|P_i|-1} \rightarrow (Z_{\tau i})_{|P_i|-1} \Big|_{P_{const 0}^V, P_{1 0}^V, \dots, P_{i-1 0}^V, (P_i^V)_{1..|P_i|-2 0}, (Z_{\tau i})_{|P_i| 0}} \left( (P_i^V)_{|P_i|-1} \right)$$

*wohldefiniert*. Gelingt auch für diese unter sämtlichen Kombinationen der konstant gehaltenen Parameter und der *Zielgröße* der Nachweis der Eindeutigkeit, ist auch

$$(P_i^V)_{|P_i|-2} \rightarrow (Z_{\tau i})_{|P_i|-2} \Big|_{P_{const 0}^V, P_{1 0}^V, \dots, P_{i-1 0}^V, (P_i^V)_{1..|P_i|-3 0}, (Z_{\tau i})_{|P_i|-1..|P_i| 0}} \left( (P_i^V)_{|P_i|-2} \right)$$

*wohldefiniert* u.s.w.. Wiederholt bis zum ersten Parameter der  $i$ . *Parametergruppe* folgt schließlich die *Wohldefiniert*- und Eindeutigkeit von

$$(P_i^V)_1 \rightarrow (Z_{\tau i})_1 \Big|_{P_{const 0}^V, P_{1 0}^V, \dots, P_{i-1 0}^V, (Z_{\tau i})_{2..|P_i| 0}} \left( (P_i^V)_1 \right)$$

und damit direkt 3.24 für die  $i$ . *Parametergruppe*.

Die vorgestellte Technik zum Nachweis von 3.24 für eine mehrelementige *Parametergruppe* erlaubt es, statt eines großen Problems mit vielen Veränderlichen auch hier mehrere

kleinere Probleme mit jeweils nur einer veränderlichen Größe zu analysieren. Damit wird die Analyse des Gesamtzusammenhangs einfacher beherrschbar und vielleicht erst überhaupt möglich. Allerdings liefert die Technik zwar eine Möglichkeit zum sukzessiven Nachweis einfacherer Zusammenhänge, man darf die implizite Veränderung der Parameter, die durch die konstanten *Zielgrößenwerte* festgelegt sind, und ihre Rückwirkung auf den untersuchten Zusammenhang jedoch nicht unterschätzen. Genau das ist auch der Grund, warum trotz der vorgestellten Vorgehensweise für mehrelementige *Parametergruppen* kleinere Gruppen bis hin zu einelementigen immer größeren vorzuziehen sind, was letztlich auch die stärkere Zerlegung des Gesamtproblems in echte Teilprobleme bedeutet.

Kann man alle Abbildungen der Form 3.28 zu einer *Parametergruppe* als eindeutig nachweisen, ist damit zwar die Eindeutigkeit für den Parameter-*Zielgrößen*-Zusammenhang der gesamten *Parametergruppe* gezeigt, es bleibt aber noch die Frage nach einem nachweisbar global konvergenten Lösungsverfahren für die Parameterwerte der Gruppe. Denn beispielsweise der in Abschnitt 3.1 vorgestellte Zusammenhang 3.12 erfüllt zwar auch Eigenschaft 3.27, aber weder das *Newton*- noch das *Gradientenverfahren* konvergieren bei dessen Lösung global. Als generelles Lösungsverfahren für Zusammenhänge mit Eigenschaft 3.27 wird hier die *rekursive Invertierung* der Abbildungen 3.28 vorgeschlagen. Die Abbildungen 3.28 sind invertierbar, also lassen sich die Funktionen

$$(P_i^V)_j = (P_i^V)_j \Big|_{P_{const\ 0}^V \cdot P_{1\ 0}^V \cdots P_{i-1\ 0}^V \cdot (P_i^V)_{1..j-1\ 0} \cdot (Z_{\tau\ i})_{j+1..|P_i|_0}} \left( (Z_{\tau\ i})_j \right) \quad (3.29)$$

definieren. In diesen Funktionen sind die Parameter aller Gruppen vor Gruppe  $i$  und die der Gruppe  $i$  vor Parameter  $j$  sowie sämtliche *Zielgrößen* der Gruppe  $i$  nach  $j$  konstant. Der Wert der  $j$ . *Zielgröße* der  $i$ . Gruppe wird gezielt verändert, und die Parameter  $j+1..|P_{id}|$  variieren ihren Wert so, dass die  $(Z_{\tau\ i})_{j+1..|P_i|}$  ihren Wert behalten. Funktionsergebnis ist der Wert  $(P_i^V)_j$ , für den unter dieser Konstellation die *Zielgröße*  $(Z_{\tau\ i})_j$  den vorgegebenen Wert annimmt. Aus dem eindimensionalen Zusammenhang 3.28 für gegebenes  $(Z_{\tau\ i})_j$  den passenden Wert von  $(P_i^V)_j$  zu bestimmen, ist das kleinere Problem. Das größere, wie für jeweils verändertes  $(P_i^V)_j$  die Parameter  $(Z_{\tau\ i})_{j+1..|P_i|}$  angepasst werden müssen, um  $(Z_{\tau\ i})_{j+1..|P_i|}$  konstant zu halten. Erst dann ist auch der jeweils veränderte Wert  $(Z_{\tau\ i})_j$  festgelegt und eine Auswertung von 3.28 überhaupt möglich. Zur Bestimmung der Werte von  $(Z_{\tau\ i})_{j+1..|P_i|}$  kann bei der Berechnung von 3.28 rekursiv auf 3.29 für  $j-1, \dots, |P_{id}|$  zurückgegriffen werden. Jede der aufeinanderfolgenden Funktionsauswertungen benötigt den zusätzlich festgelegten Parameterwert, den die vorige Funktionsauswertung liefert. Man erhält so folgende Funktions-Algorithmen zur Auswertung von 3.29

$$\mathbf{Funktion} \quad (P_i^V)_j \Big|_{P_{const\ 0}^V \cdot P_{1\ 0}^V \cdots P_{i-1\ 0}^V \cdot (P_i^V)_{1..j-1\ 0} \cdot (Z_{\tau\ i})_{j+1..|P_i|_0}} \left( (Z_{\tau\ i})_j \right) \quad (3.30)$$

**Suche (1-dimensional)**  $(P_i^V)_{j0}$

$$\text{mit } (Z_{\tau i})_{j0} = (Z_{\tau i})_j \Big|_{P_{const 0}^V, P_{10}^V, \dots, P_{i-10}^V, (P_i^V)_{1..j-10}, (Z_{\tau i})_{j+1..|P_i|0}} \left( (P_i^V)_{j0} \right)$$

**return**  $(P_i^V)_{j0}$

$$\textbf{Funktion } (Z_{\tau i})_j \Big|_{P_{const 0}^V, P_{10}^V, \dots, P_{i-10}^V, (P_i^V)_{1..j-10}, (Z_{\tau i})_{j+1..|P_i|0}} \left( (P_i^V)_{j0} \right) \quad (3.31)$$

$$(P_i^V)_{j+10} = (P_i^V)_{j+1} \Big|_{P_{const 0}^V, P_{10}^V, \dots, P_{i-10}^V, (P_i^V)_{1..j0}, (Z_{\tau i})_{j+2..|P_i|0}} \left( (Z_{\tau i})_{j+10} \right)$$

$$(P_i^V)_{j+20} = (P_i^V)_{j+2} \Big|_{P_{const 0}^V, P_{10}^V, \dots, P_{i-10}^V, (P_i^V)_{1..j+10}, (Z_{\tau i})_{j+3..|P_i|0}} \left( (Z_{\tau i})_{j+20} \right)$$

⋮

$$(P_i^V)_{|P_i|0} = (P_i^V)_{|P_i|} \Big|_{P_{const 0}^V, P_{10}^V, \dots, P_{i-10}^V, (P_i^V)_{1..|P_i|-10}} \left( (Z_{\tau i})_{|P_i|0} \right)$$

$$(Z_{\tau i})_{j0} = (Z_{\tau i})_j \left( P_{const 0}^V, P_{10}^V, \dots, P_{i-10}^V, P_{i0}^V \right)$$

**return**  $(Z_{\tau i})_{j0}$

Bei gegebenem  $Z_{\tau i0}$  kann 3.30 aufeinander aufbauend für  $1 \leq j \leq |P_i|$  berechnet, damit nacheinander  $(P_i^V)_{10}, \dots, (P_i^V)_{|P_i|0}$ , letztlich also  $P_{i0}^V$  insgesamt bestimmt werden.

Ohne weitere Voraussetzungen jedoch gelingt die Berechnung der eindimensionalen Suche in 3.30 nur schwer, da nicht sichergestellt ist, dass für die Wahl eines Parameterwerts  $(P_i^V)_{j0}$  überhaupt Parameter  $(P_i^V)_{j+1..|P_i|} \in P_{ij+1..|P_i|}^*$  existieren, mit denen sich die Zielgrößen  $(Z_{\tau i})_{j+1..|P_i|0}$  noch einstellen lassen. Die Menge von Parameterwerten  $(P_i^V)_j$ , für die dies noch möglich ist, muss so nicht zusammenhängend sein. Wie in der linken Hälfte von Abbildung 3.8 gezeigt, können die resultierenden *Zielgrößenwerte*  $(Z_{\tau i})_j$ , auch wenn die *Zielgrößen* Voraussetzung 3.25 erfüllen, Sprünge zwischen einzelnen Intervallen wählbarer Parameterwerte machen. Eine Suche gelingt über einer solchen Abbildung nur schwer, v.A., da die Suchintervalle erst gefunden werden müssen, und auch für ihre Lage evt. keine Anhaltspunkte bestehen. In B.8 kann man für einen Beispielzusammenhang nachvollziehen, wie es zum unterbrochenen Suchintervall für eine Funktionsberechnung von 3.30 kommt. Eine eindimensionale Suche in einem Zusammenhang, wie ihn die rechte Hälfte von Abbildung 3.8 zeigt, ist dafür einfach realisierbar. Das Suchintervall ist zusammenhängend, die Funktion als Folge der Stetigkeit streng monoton. Ist außerdem für die Werte  $(P_i^V)_j$ , für die  $(Z_{\tau i})_j$  unter den gegebenen Bedingungen nicht definiert ist, zusätzlich klar, in welcher Richtung von  $(P_i^V)_j$  aus das definierte Intervall liegt, kann eine solche Suche bspw. mit einem *Intervallhalbierungsverfahren* umgesetzt werden. Um zu solchen Eigenschaften zu kommen, muss der Parameter-Zielgrößen-Zusammenhang

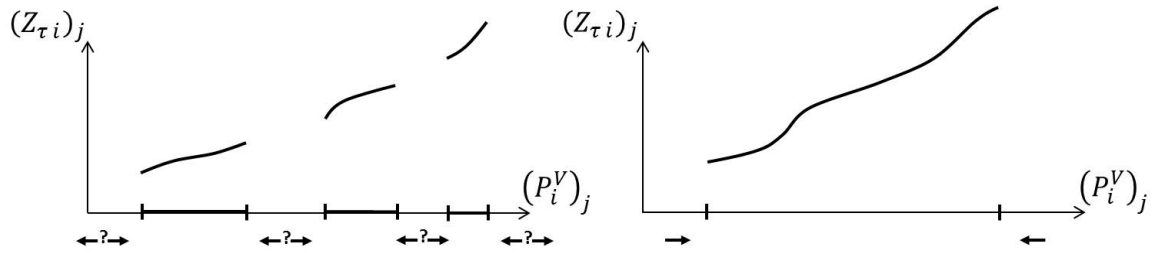


Abbildung 3.8: Unterbrochener und durchgehender Parameter-Zielgrößen-Zusammenhang für zusätzlich festgelegte Zielgrößenwerte

einer Parametergruppe die zusätzliche Voraussetzung

$$\forall 1 \leq i \leq n_{PG}, 1 \leq m < i, 1 \leq k \leq j < l, r \leq |P_i| \quad \exists s_{P_{ijr}} \in \{-1, 1\}$$

$$\forall P_{const 0}^V \in P_{const}^*, P_{m 0}^V \in P_m^*, (P_i^V)_{k 0} \in P_{ik}^*, (P_i^V)_{j 1} < (P_i^V)_{j 2} \in P_{ij}^*, (P_i^V)_{l 1}, (P_i^V)_{l 2} \in P_{il}^*$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad & (Z_{\tau i})_{j+1..|P_i| 0} \\ &= (Z_{\tau i})_{j+1..|P_i|} \left( P_{const 0}^V, P_{1 0}^V, \dots, P_{i-1 0}^V, (P_i^V)_{1..j-1 0}, (P_i^V)_{j 1}, (P_i^V)_{j+1..|P_i| 1} \right) \\ &= (Z_{\tau i})_{j+1..|P_i|} \left( P_{const 0}^V, P_{1 0}^V, \dots, P_{i-1 0}^V, (P_i^V)_{1..j-1 0}, (P_i^V)_{j 2}, (P_i^V)_{j+1..|P_i| 2} \right): \end{aligned}$$

$$i) \quad s_{P_{ijr}} \cdot (P_i^V)_{r 1} > s_{P_{ijr}} \cdot (P_i^V)_{r 2}$$

$$\begin{aligned} ii) \quad & (Z_{\tau i})_j \Big|_{P_{const 0}^V, P_{1 0}^V, \dots, P_{i-1 0}^V, (P_i^V)_{1..j-1 0}, (Z_{\tau i})_{j+1..|P_i| 0}} \left( (P_i^V)_{j 1} \right) \\ & < (Z_{\tau i})_j \Big|_{P_{const 0}^V, P_{1 0}^V, \dots, P_{i-1 0}^V, (P_i^V)_{1..j-1 0}, (Z_{\tau i})_{j+1..|P_i| 0}} \left( (P_i^V)_{j 2} \right) \end{aligned}$$

(3.32)

erfüllen. D.h., werden die Parameter aller Gruppen vor Gruppe  $i$  und von Gruppe  $i$  die Parameter  $1..j-1$  sowie sämtliche Zielgrößen der Gruppe  $i$  nach  $j$  konstant gehalten, ändern sich die implizit festgelegten Werte  $(P_i^V)_{j+1..|P_i|}$  streng monoton im Parameterwert  $(P_i^V)_j$ . Umgekehrt steigen dabei die Werte der Zielgröße  $(Z_{\tau i})_j$ . Dass nun unter Voraussetzungen 3.25, 3.27 und 3.32 die Abbildungen 3.28 einen zusammenhängenden Definitionsbereich besitzen, ist leicht nachzuvollziehen. Denn so sind die Definitionsbereiche  $D_l \subseteq P_{ij}^*$  der Funktionen aus 3.32

$$D_l \rightarrow P_{il}^* : (P_i^V)_l \Big|_{P_{const 0}^V, P_{1 0}^V, \dots, P_{i-1 0}^V, (P_i^V)_{1..j-1 0}, (Z_{\tau i})_{j+1..|P_i| 0}} \left( (P_i^V)_j \right)$$

zusammenhängende Intervalle, und der Definitionsbereich  $D$  von 3.28 ergibt sich als

Schnitt der Definitionsbereiche  $D_l$  zu

$$\begin{aligned} D &= \bigcap_{l=j+1}^{|P_i|} D_l = \bigcap_{l=j+1}^{|P_i|} [\min(D_l), \max(D_l)] \\ &= [\max(\{\min(D_l) \mid j < l \leq |P_i|\}), \min(\{\max(D_l) \mid j < l \leq |P_i|\})] \end{aligned}$$

Die strenge Monotonie der Abbildungen 3.28 würde allein mit dem zusammenhängenden Definitionsbereich (3.32 *i*) aus der Eindeutigkeit (3.27) und der Stetigkeit (3.25) des Zusammenhangs zur *i*. Parametergruppe folgen. Mit 3.32 *ii*) wird aber, was nicht von selbst folgt, die streng monotone Steigung des Zusammenhangs gefordert. Bei der Suche im Funktionsalgorithmus 3.30 macht sich die Wahl eines Werts  $(P_i^V)_{j_0} \notin D$  dadurch bemerkbar, dass die rekursiv ausgelösten Suchen auf keinen einzigen Parameterwert im Definitionsbereich stoßen. Trotzdem gelingt in jedem Fall die Auswertung der Intervallgrenzen bei maximaler Rekursionstiefe, also die Auswertung von Funktion

$$(Z_{\tau i})_{|P_i|} \Big|_{P_{const 0}^V, P_{10}^V, \dots, P_{i-10}^V, (P_i^V)_{1..|P_i|-10}} \left( (P_i^V)_{|P_i|} \right)$$

für die Werte  $(P_i^V)_{|P_i| min} = \min(P_{i|P_i}^*)$  und  $(P_i^V)_{|P_i| max} = \max(P_{i|P_i}^*)$ . Kann der Zielwert  $(Z_{\tau i})_{|P_i|0}$  für die festgelegten konstant zu haltenden Parameter nicht mehr über  $(P_i^V)_{|P_i|}$  eingestellt werden, erhält man

$$(Z_{\tau i})_{|P_i|} \Big|_{P_{const 0}^V, P_{10}^V, \dots, P_{i-10}^V, (P_i^V)_{1..|P_i|-10}} \left( (P_i^V)_{|P_i| min} \right) > (Z_{\tau i})_{|P_i|0} \quad (3.33)$$

oder

$$(Z_{\tau i})_{|P_i|} \Big|_{P_{const 0}^V, P_{10}^V, \dots, P_{i-10}^V, (P_i^V)_{1..|P_i|-10}} \left( (P_i^V)_{|P_i| max} \right) < (Z_{\tau i})_{|P_i|0} \quad (3.34)$$

Ursache hierfür ist, dass einer der konstanten Parameterwerte  $(P_i^V)_j$ ,  $1 \leq j < |P_i|$  außerhalb des Definitionsbereichs von 3.31 gewählt wurde. Mit 3.32 folgt genauer, dass im Fall 3.33 ein Parameter  $P_{ij}$ ,  $j < |P_i|$ , mit  $s_{ij|P_i|} = 1$  zu groß oder einer mit  $s_{ij|P_i|} = -1$  zu klein und im Fall 3.34, dass ein Parameter  $P_{ij}$ ,  $j < |P_i|$ , mit  $s_{ij|P_i|} = 1$  zu klein oder einer mit  $s_{ij|P_i|} = -1$  zu groß ist. Gibt die Funktionsauswertung 3.30 im ersten Fall den hinzudefinierten Wert  $\infty$  und im zweiten Fall  $-\infty$  zurück, veranlasst dies die Suche in einer der aufrufenden Auswertungen von 3.30 entweder den entscheidenden Parameter in die richtige Richtung zu verändern, oder, ist das nicht möglich, selbst zum gleichen Wert  $\infty$  oder  $-\infty$  auszuwerten und damit den entsprechenden Parameter mit noch kleinerem Index in die korrekte Richtung zu lenken. Eine solche Parametersuche lässt mit dem erweiterten Bildraum

$$\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

durch Modifikation der Funktions-Algorithmen 3.30 und 3.31 bspw. auf Basis einer *Intervallhalbierung* ausführen, die hier unter der vereinfachenden Annahme von  $s_{Pijl} = 1$

in 3.32 beschrieben ist

$$\mathbf{Funktion} \left( \overset{\leftrightarrow}{P}_i^V \right) \Big|_{P_{const\ 0}^V, P_{10}^V, \dots, P_{i-10}^V, (P_i^V)_{1..j-10}, (Z_{\tau i})_{j+1..|P_i|0}} \left( (Z_{\tau i})_{j0} \right) \quad (3.35)$$

$$P_{ij\ u}^V = \min(P_{ij}^*), \quad P_{ij\ o}^V = \max(P_{ij}^*)$$

$$\overset{\leftrightarrow}{Z}_{\tau ij\ u} = \left( \overset{\leftrightarrow}{Z}_{\tau i} \right) \Big|_{P_{const\ 0}^V, P_{10}^V, \dots, P_{i-10}^V, (P_i^V)_{1..j-10}, (Z_{\tau i})_{j+1..|P_i|0}} \left( P_{ij\ u}^V \right)$$

$$\overset{\leftrightarrow}{Z}_{\tau ij\ o} = \left( \overset{\leftrightarrow}{Z}_{\tau i} \right) \Big|_{P_{const\ 0}^V, P_{10}^V, \dots, P_{i-10}^V, (P_i^V)_{1..j-10}, (Z_{\tau i})_{j+1..|P_i|0}} \left( P_{ij\ o}^V \right)$$

$$\mathbf{if} \ \overset{\leftrightarrow}{Z}_{\tau ij\ u} > (Z_{\tau i})_{j0} \ \mathbf{return} \ \infty$$

$$\mathbf{if} \ \overset{\leftrightarrow}{Z}_{\tau ij\ o} < (Z_{\tau i})_{j0} \ \mathbf{return} \ -\infty$$

$$\mathbf{while} \ \left| \overset{\leftrightarrow}{Z}_{\tau ij\ u} - (Z_{\tau i})_{j0} \right| > \varepsilon$$

$$P_{ij\ m}^V = 0.5 \left( P_{ij\ o}^V + P_{ij\ u}^V \right)$$

$$\overset{\leftrightarrow}{Z}_{\tau ij\ m} = \left( \overset{\leftrightarrow}{Z}_{\tau i} \right) \Big|_{P_{const\ 0}^V, P_{10}^V, \dots, P_{i-10}^V, (P_i^V)_{1..j-10}, (Z_{\tau i})_{j+1..|P_i|0}} \left( P_{ij\ m}^V \right)$$

$$\mathbf{if} \ \overset{\leftrightarrow}{Z}_{\tau ij\ m} < (Z_{\tau i})_{j0} \quad P_{ij\ u}^V = P_{ij\ m}^V, \quad \overset{\leftrightarrow}{Z}_{\tau ij\ u} = \overset{\leftrightarrow}{Z}_{\tau ij\ m}$$

$$\mathbf{else} \quad P_{ij\ o}^V = P_{ij\ m}^V, \quad \overset{\leftrightarrow}{Z}_{\tau ij\ o} = \overset{\leftrightarrow}{Z}_{\tau ij\ m}$$

$$\mathbf{return} \ P_{ij\ u}^V$$

$$\mathbf{Funktion} \left( \overset{\leftrightarrow}{Z}_{\tau i} \right) \Big|_{P_{const\ 0}^V, P_{10}^V, \dots, P_{i-10}^V, (P_i^V)_{1..j-10}, (Z_{\tau i})_{j+1..|P_i|0}} \left( (P_i^V)_{j0} \right) \ \text{für } j < |P_i| \quad (3.36)$$

$$\left( \overset{\leftrightarrow}{P}_i^V \right)_{j+10} = \left( \overset{\leftrightarrow}{P}_i^V \right)_{j+1} \Big|_{P_{const\ 0}^V, P_{10}^V, \dots, P_{i-10}^V, (P_i^V)_{1..j0}, (Z_{\tau i})_{j+2..|P_i|0}} \left( (Z_{\tau i})_{j+10} \right)$$

$$\mathbf{if} \ \left( \overset{\leftrightarrow}{P}_i^V \right)_{j+10} \in \{-\infty, \infty\} \ \mathbf{return} \ \left( \overset{\leftrightarrow}{P}_i^V \right)_{j+10}$$

$$(P_i^V)_{j+10} = \left( \overset{\leftrightarrow}{P}_i^V \right)_{j+10}$$

$$(P_i^V)_{j+20} = (P_i^V)_{j+2} \Big|_{P_{const\ 0}^V, P_{10}^V, \dots, P_{i-10}^V, (P_i^V)_{1..j+10}, (Z_{\tau i})_{j+3..|P_i|0}} \left( (Z_{\tau i})_{j+20} \right)$$

⋮

$$(P_i^V)_{|P_i|0} = (P_i^V)_{|P_i|} \Big|_{P_{const 0}^V, P_{10}^V, \dots, P_{i-10}^V, (P_i^V)_{1..|P_i|-10}} \left( (Z_{\tau i})_{|P_i|0} \right)$$

$$(Z_{\tau i})_{j0} = (Z_{\tau i})_j \left( P_{const 0}^V, P_{10}^V, \dots, P_{i-10}^V, P_{i0}^V \right)$$

**return**  $(Z_{\tau i})_{j0}$

**Funktion**  $\left( \overset{\leftrightarrow}{Z_{\tau i}} \right)_{|P_i|} \Big|_{P_{const 0}^V, P_{10}^V, \dots, P_{i-10}^V, (P_i^V)_{1..|P_i|-10}} \left( (P_i^V)_{|P_i|0} \right)$

**return**  $(Z_{\tau i})_{|P_i|} \Big|_{P_{const 0}^V, P_{10}^V, \dots, P_{i-10}^V, P_{i0}^V}$

Zur Funktion der Algorithmen 3.35 und 3.36 muss also zusätzlich 3.32 nachgewiesen werden. Dies sieht nach einer starken Zusatzanforderung aus. Zum Nachweis der Eindeutigkeit sollten aber ohnehin die Funktionen 3.28 analysiert werden, was auch das Verständnis der Auswirkung einer Änderung von  $(P_i^V)_j$  auf die nachfolgenden Parameterwerte nötig macht (s.o.). Nur wenn diese wie in 3.28 gefordert beherrschbar sind, ist dies mit samt Rückschluss auf das Verhalten von  $(Z_{\tau i})_j$  überhaupt möglich. Also bringen die zur kontrollierten Berechnung zusätzlich nachzuweisenden Voraussetzungen keine wesentliche Einschränkung mit sich. Ein Beispiel für einen Zusammenhang, der die Eigenschaften 3.27 und 3.28 erfüllt, ist Funktion 3.12 in Abschnitt 3.1. Wie dort gezeigt wird, ist die Funktion weder mit der *schrittweitengesteuerten* und *suchrichtungsprojizierten* Variante des *Newton-* noch der des *Gradientenverfahrens* global lösbar. Erst wenn man für den Beispielzusammenhang 3.12 die Indizes der Parameter und *Zielgrößen* vertauscht, also den durch  $Z'_\tau = ((Z_\tau)_2 (Z_\tau)_1)^T$ ,  $P^{V'} = ((P^V)_2 (P^V)_1)^T$  transformierten Zusammenhang betrachtet, erfüllt dieser neben 3.27 und 3.28 auch zusätzlich noch Eigenschaft 3.32. Unbeeinflusst von der Transformation lösen das *Gradienten-* und *Newtonverfahren* die Inversion des Zusammenhangs  $P^{V'} \leftrightarrow Z'_\tau$  nicht global, durchaus aber die Funktionen 3.35 und 3.36.

Ein offensichtliches Problem bringt die Lösung von Parameter-*Zielgrößen*-Zusammenhängen mit Algorithmus 3.35 allerdings mit sich: Der Suchaufwand steigt durch die rekursive Problemlösung exponentiell in der Zahl zu bestimmender Parameter. Unterscheidet man zwischen der vom Algorithmus gefundenen Lösung  $(\tilde{P}_{i0}^V)$  und der tatsächlichen Lösung  $(P_{i0}^V)$  kann man in den einzelnen Komponenten den maximalen relativen Fehler  $\varepsilon_{rel}$  festlegen

$$\frac{\left| (\tilde{P}_{i0}^V)_j - (P_{i0}^V)_j \right|}{\max(P_{ij}^*) - \min(P_{ij}^*)} < \varepsilon_{rel}$$

Mit dieser Forderung an die Qualität der bestimmten Parameterwerte erhält man die



maximale Zahl

$$(-\text{Id } \varepsilon_{rel})^{|P_i|} \quad (3.37)$$

von *Zielgrößen*-Auswertungen. Eine Suche nach den Parameterwerten einer *Parametergruppe* mit dem Verfahren 3.35 erlaubt dieses Vorgehen abhängig vom Aufwand der *Zielgrößen*-Auswertung damit nur bis zu einer maximalen Größe der Gruppen. Da der Suchaufwand schnell zunimmt, sollte, lassen sich größere *Parametergruppen* nicht vermeiden, auch versucht werden, zumindest kleinere Restprobleme mit geringerem Aufwand zu lösen. Die rekursive Struktur von 3.35 und 3.36 erlaubt es bspw., die Suchergebnisse und Zielgrößenauswertungen der unteren Rekursionsebenen mit einem separaten Verfahren zu lösen. Dann erfolgt die Berechnung der Funktionen 3.29 bis zu einem Index  $j_0$ , also für  $j = 1..j_0$  nach den Algorithmen 3.35 und 3.36, und die Berechnung von 3.29 mit Index  $j = j_0 + 1$  ist über ein separates integriertes Verfahren gelöst. Ein solches, effizienter berechenbares Verfahren kann z.B. aus einer einfachen, direkten analytischen Berechnung der Lösung bestehen, wenn es das restliche Teilproblem, nicht aber das Gesamtproblem der *Parametergruppe* zulässt. Damit wäre bereits eine deutliche Verbesserung des Gesamtaufwands erreicht.

Ist diese Möglichkeit nicht gegeben, kann unter einer alternativen einfachen Voraussetzung ein differenzierbares zweidimensionales Restproblem mit einem klassischen Verfahren gelöst werden. Für das Restproblem

$$(Z_{\tau i})_{|P_i|-1..|P_i|} \Big|_{P_{const 0}^V, P_{1 0}^V, \dots, P_{i-1 0}^V, (P_i^V)_{1..|P_i|-2 0}} \left( (P_i^V)_{|P_i|-1..|P_i|} \right) \quad (3.38)$$

soll an Stelle von Eigenschaft 3.32 vorausgesetzt werden, dass beide Komponenten von  $(Z_{\tau i})_{|P_i|-1..|P_i|}$  sich vergrößern, wenn eine der Komponenten von  $(P_i^V)_{|P_i|-1..|P_i|}$  zunimmt, während die zweite ihren Wert behält. Man erhält so die alternative Voraussetzung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial (P_i^V)_k} (Z_{\tau i})_j \Big|_{P_{const 0}^V, P_{1 0}^V, \dots, P_{i-1 0}^V, (P_i^V)_{1..|P_i|-2 0}, (P_i^V)_{l 0}} &> 0, \\ \text{für } |P_i| - 1 \leq j, k, l \leq |P_i|, \quad k \neq l \end{aligned} \quad (3.39)$$

Lässt sich für das zweidimensionale Restproblem 3.38 Eigenschaft 3.39 nachweisen, hat dies zwei positive Effekte. Zum einen folgt Eigenschaft 3.27 für  $j = |P_i| - 2$  dann, indem zusätzlich nur ein *konstantes* Vorzeichen  $s_D$  der *Funktionaldeterminante* von 3.38

$$s_D \cdot \left| \frac{\partial}{\partial (P_i^V)_{|P_i|-1..|P_i|}} (Z_{\tau i})_{|P_i|-1..|P_i|} \Big|_{P_{const 0}^V, P_{1 0}^V, \dots, P_{i-1 0}^V, (P_i^V)_{1..|P_i|-2 0}} \right| > 0, \quad s_D \in \{-1, 1\} \quad (3.40)$$

nachgewiesen wird. Zum andern konvergiert unter Voraussetzung 3.40 das *schrittweisen-gesteuerte Gradientenverfahren mit Randprojektion* nachgewiesen global für die Lösung

des Restproblems 3.38. Dass die Eindeutigkeit (3.27) von 3.38 aus dem konstanten Vorzeichen der *Funktionaldeterminante* (3.40) folgt, ist nicht ohne die zusätzliche Voraussetzung 3.39 möglich. Hierfür gibt es zahlreiche Beispiele, die schon in Grundlagenliteratur zur Analysis wie [42] vorgestellt werden. Die Lösung des Teilproblems 3.38 mit dem *Gradientenverfahren* reduziert den Suchaufwand zur Lösung des Gesamtproblems  $P_{i0}^V = P_i^V(Z_{\tau i 0})$  um eine Iterationsebene, also den Exponent in 3.37 um 1. In B.10 wird die globale Konvergenz des *Gradientenverfahrens* für die beschriebenen 2-dimensionalen Restprobleme nachgewiesen. Da für zweidimensionale Zusammenhänge nicht unmittelbar klar ist, dass 3.27 für  $j = |P_i| - 2$  mit den Voraussetzungen 3.39 und 3.40 folgt, wird auch dafür in B.12 ein Nachweis angegeben. Wie das *Gradientenverfahren* wurde auch das *Newtonverfahren* in Bezug auf diese Probleme untersucht. Interessanterweise lassen sich Beispiel-Zusammenhänge finden, die 3.39 und 3.40 erfüllen, und für die das *Newtonverfahren* nicht global konvergiert. Ein solches Beispiel wird in B.9 gezeigt. Man muss sich also zur Lösung der betrachteten zweidimensionalen Restprobleme auf das *Gradientenverfahren* beschränken. Noch offen ist die Frage, ob das *Gradientenverfahren* dann nicht unter analog erweiterten Voraussetzungen auch für höherdimensionale Suchprobleme global konvergiert, und auch dort auf Eigenschaft 3.32 für mehr als die letzten zwei Rekursionsebenen verzichtet werden kann. Leider ist dem nicht so, und es lässt sich ein eindeutiger (3.24) dreidimensionaler Zusammenhang angeben, bei dem alle *Zielgrößenkomponenten* streng monoton in sämtlichen Parameterwerten wachsen (analog 3.39), für den das *schrittweitengesteuerte Gradientenverfahren mit Randprojektion* jedoch nicht global konvergiert. Der Beispielzusammenhang ist unter B.11 genauer beschrieben.

Wird das Restproblem 3.38 nun über das *schrittweitengesteuerte Gradientenverfahren mit Randprojektion* gelöst, ist jedoch die bei Lösung über das Verfahren 3.35 bereits geklärte Frage, in welche Richtung  $(P_i^V)_{1..|P_i|-2}$  verändert werden muss, wenn sich 3.38 für den Parameterwert  $(P_i^V)_{1..|P_i|-2 0}$  nicht lösen lässt, wieder offen. Das beschriebene Vorgehen lässt sich auch nur bei vorhandenen Teilergebnissen der vergeblichen rekursiven Lösung von 3.38 anwenden, die sich bei einer *Gradientensuche* jedoch nicht ergeben. Die Frage zur notwendigen Änderungsrichtung von  $(P_i^V)_{1..|P_i|-2}$  bei nicht lösbarem Restproblem 3.38 kann jedoch auch aus dem Ergebnis des *schrittweitengesteuerten Gradientenverfahrens mit Randprojektion* beantwortet werden. Verwendet wird hier der Bildwert  $(\tilde{Z}_{\tau i})_{|P_i|-1..|P_i|} \Big|_{(P_i^V)_{|P_i|-2 0}}$  der *Näherungs-* oder 'Scheinlösung' des Verfahrens. Dass die

Suche auch bei nicht lösbarem Restproblem 3.38 *konvergiert* wird in Abschnitt B.13 nachgewiesen. Dort wird auch analysiert, wie abhängig von  $(\tilde{Z}_{\tau i})_{|P_i|-1..|P_i|} \Big|_{(P_i^V)_{|P_i|-2 0}}$

und dem *Zielwert*  $(Z_{\tau i})_{|P_i|-1..|P_i| 0}$  auf die notwendige Änderungsrichtung von  $(P_i^V)_{|P_i|-2 0}$  geschlossen werden kann. Vorausgesetzt wird allerdings zusätzlich, dass sich die letzten beiden *Zielgrößen-Komponenten* *streng monoton* entgegengesetzt zueinander verändern,

wenn sich  $(P_i^V)_{1..|P_i|-2,0}$  vergrößert, und die übrigen Parameterwerte *konstant* bleiben

$$\begin{aligned}
 & \exists s_z \in \{-1, 1\} \quad \forall P_{const\ 0}^V \in P_{const}^*, P_{10}^V \in P_1^*, \dots, P_{i-10}^V \in P_{i-1}^*, (P_i^V)_{1..|P_i|-3,0} \in P_{i(1..|P_i|-3)}^*, \\
 & (P_i^V)_{|P_i|-2,1} < (P_i^V)_{|P_i|-2,2} \in P_{i(|P_i|-2)}^*, (P_i^V)_{|P_i|-1..|P_i|,0} \in P_{|P_i|-1..|P_i|}^* \\
 & \quad s_Z \cdot (Z_{\tau i})_{|P_i|-1} \Big|_{P_{const\ 0}^V, P_{10}^V, \dots, P_{i-10}^V, (P_i^V)_{1..|P_i|-3,0}, (P_i^V)_{|P_i|-2,1}, (P_i^V)_{|P_i|-1..|P_i|,0}} \\
 & < \quad s_Z \cdot (Z_{\tau i})_{|P_i|-1} \Big|_{P_{const\ 0}^V, P_{10}^V, \dots, P_{i-10}^V, (P_i^V)_{1..|P_i|-3,0}, (P_i^V)_{|P_i|-2,2}, (P_i^V)_{|P_i|-1..|P_i|,0}} \\
 & \quad s_Z \cdot (Z_{\tau i})_{|P_i|} \Big|_{P_{const\ 0}^V, P_{10}^V, \dots, P_{i-10}^V, (P_i^V)_{1..|P_i|-3,0}, (P_i^V)_{|P_i|-2,1}, (P_i^V)_{|P_i|-1..|P_i|,0}} \\
 & > \quad s_Z \cdot (Z_{\tau i})_{|P_i|} \Big|_{P_{const\ 0}^V, P_{10}^V, \dots, P_{i-10}^V, (P_i^V)_{1..|P_i|-3,0}, (P_i^V)_{|P_i|-2,2}, (P_i^V)_{|P_i|-1..|P_i|,0}}
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Auch bei gleichläufiger statt gegenläufiger Änderung der *Zielgrößen*-Komponenten kann auf Basis der 'Scheinlösung' die notwendige Änderungsrichtung für  $(P_i^V)_{|P_i|-2}$  bestimmt werden. Ein solcher Fall tritt jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht auf, und macht deutlich kompliziertere Fallunterscheidungen nötig, die zusätzlich von  $s_{P\ i(|P_i|-2)(|P_i|-1)}$  und  $s_{P\ i(|P_i|-2)|P_i|}$  in Eigenschaft 3.32 abhängen. Damit wird er nicht weiter betrachtet. Um unter Eigenschaft 3.41 die Wahl der Änderungsrichtung in die Suche nach  $(P_i^V)_{|P_i|-2}$  mit 3.35 integrieren zu können, wird sie über die resultierenden Werte  $+\infty$  und  $-\infty$  ausgedrückt. Man erhält so mit B.14 für die algorithmische Lösung des Restproblems 3.38 auf Basis des *schrittweitengesteuerten Gradientenverfahrens mit Randprojektion*

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{Funktion} \left( \overset{\leftrightarrow}{P_i^V} \right)_{|P_i|-1} \Big|_{P_{const\ 0}^V, P_{10}^V, \dots, P_{i-10}^V, (P_i^V)_{1..|P_i|-2,0}, (Z_{\tau i})_{|P_i|,0}} \left( (Z_{\tau i})_{|P_i|-1,0} \right) \tag{3.42} \\
 & \mathbf{if} \quad \left( \tilde{Z}_{\tau i} \right)_{|P_i|-1..|P_i|} = (Z_{\tau i})_{|P_i|-1..|P_i|,0} \\
 & \quad \mathbf{return} \quad \left( (P_i^V)_{|P_i|-1..|P_i|,G} \right)_1 \\
 & \mathbf{else\ if} \quad s_Z \cdot \left( (Z_{\tau i})_{|P_i|-1..|P_i|,0} - \left( \tilde{Z}_{\tau i} \right)_{|P_i|-1..|P_i|} \right)^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} < 0 \\
 & \quad \mathbf{return} \quad +\infty \\
 & \quad \mathbf{else\ return} \quad -\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{Funktion} \left( \overset{\leftrightarrow}{P_i^V} \right)_{|P_i|} \Big|_{P_{const\ 0}^V, P_{10}^V, \dots, P_{i-10}^V, (P_i^V)_{1..|P_i|-1,0}} \left( (Z_{\tau i})_{|P_i|,0} \right) \\
 & \mathbf{return} \quad \left( (P_i^V)_{|P_i|-1..|P_i|,G} \right)_2
 \end{aligned}$$

wobei  $(P_i^V)_{|P_i|-1..|P_i|G}$  die Lösung des *schrittweitengesteuerten Gradientenverfahrens mit Randprojektion* zur Gleichung

$$(Z_{\tau i})_{|P_i|-1..|P_i|} \Big|_{P_{const 0}^V, P_{10}^V, \dots, P_{i-10}^V, (P_i^V)_{1..|P_i|-20}} \left( (P_i^V)_{|P_i|-1..|P_i|} \right) = (Z_{\tau i})_{|P_i|-1..|P_i|0}$$

und

$$\left( \tilde{Z}_{\tau i} \right)_{|P_i|-1..|P_i|} = (Z_{\tau i})_{|P_i|-1..|P_i|} \Big|_{P_{const 0}^V, P_{10}^V, \dots, P_{i-10}^V, (P_i^V)_{1..|P_i|-20}} \left( (P_i^V)_{|P_i|-1..|P_i|G} \right)$$

den *Zielwert* in dieser Lösung bezeichnet.

Die mittlerweile verwirrend vielen Ansätze der Abschnitte 3.2 und 3.3 zum Nachweis der Eindeutigkeit von Parameter-*Zielgrößen*-Zusammenhängen sowie zur nachweislich globalen Konvergenz von Lösungsverfahren sollen nun im Folgenden zu einer Gesamt-vorgehensweise zusammengefasst werden. Im ersten Teil der Zusammenfassung stehen die Aufteilung des Gesamt-Identifikationsproblems in eine *Sequentielle Parameteridentifikation* und der damit verbundene Nachweis der Problemeindeutigkeit (2. Ziel Abschn. 3.1) im Vordergrund, der zweite Teil wird dann auf ein Gesamtlösungsverfahren mit nachweislich globaler Konvergenz (3. Ziel Abschn. 3.1) eingehen. Nun zur Bildung einer *Sequentiellen Parameteridentifikation* und zum Nachweis der Problemeindeutigkeit:

- Zu einem allgemeinen identifizierbaren Problem  $\tau_{id}^{-1}$  der Form 3.2 wird eine Folge von *Zielgrößen*  $Z_{\tau}$  und der zu identifizierenden Parameter  $P_{id}$  erstellt. Die *Zielgrößen*  $z_{\tau i}$  sind Resultat der definierten *Auswertungsfunktionale*  $z_{E i}$  und *Funktional-Bedingungen*  $b_i$ , die den Bedingungen 3.5 (Erfüllbarkeit), 3.7 (Wohldefiniertheit) und 3.9 (Identifizierbarkeit) genügen. Außerdem werden die *Zielgrößen*  $Z_{\tau}$  als stetig differenzierbar in den Parametern  $P_{id}^V$  vorausgesetzt (3.25).
- Für die Parameter- und *Zielgrößen*-Vektoren  $P_{id}^V$  und  $Z_{\tau}$  wird eine Untergliederung in Folgen von Vektoren, den *Parameter*- und *Zielgrößen*gruppen  $P_1^V, \dots, P_{n_{PG}}^V$  bzw.  $Z_{\tau 1}, \dots, Z_{\tau n_{PG}}$  gemäß 3.17 und 3.18 vorgenommen. Dabei erfüllen die Zusammenhänge der einzelnen *Zielgrößen*gruppen die Voraussetzungen 3.23 (Unabhängigkeit von den Parametern der folgenden Gruppen) und 3.24 (Eindeutigkeit in den Parametern der eigenen Gruppe). Unter den bisherigen Voraussetzungen ist 3.23 für jede der *Parameter*gruppen nachzuweisen, wobei eine geeignete Wahl von  $z_{E i}$  und  $b_i$  hierfür unbedingt notwendig ist. Weiter muss es bereits durch die genannten Eigenschaften möglich sein, 3.24 für einelementige *Parameter*gruppen nachzuweisen (vgl. Abschn. 3.2).
- Zum Nachweis von 3.24 für mehrelementige *Zielgrößen*- und *Parameter*gruppen setzt die hier vorgeschlagene Technik die weitere Eigenschaft 3.27 (Eindeutigkeit der 'Restprobleme' einer Gruppe) der mehrelementigen Gruppen voraus. Die Eigenschaft 3.27 muss zwar vorliegen, wird aber selbst nicht direkt nachgewiesen. Stattdessen werden die Abbildungen 3.28 einer Gruppe beginnend mit  $j = |P_{id}|$  und endend mit  $j = 1$  als

eindeutig verifiziert. Damit folgt auch automatisch deren *Wohldefiniertheit* und insgesamt 3.24. Um für die Möglichkeit einer einfachen Berechnung zusammenhängende Definitionsbereiche der Abbildungen 3.28 zu garantieren und diese auch lokalisieren zu können, muss für den Parameter-*Zielgrößen*-Zusammenhang der Gruppe zusätzlich Eigenschaft 3.32 vorliegen. Außerdem bietet Eigenschaft 3.32 auch zusätzliche Möglichkeiten, streng monotone Zusammenhänge nachzuweisen.

- Es ist auch immer möglich, die Eindeutigkeit des Zusammenhangs zu einer *Parametergruppe* mit anderen Mitteln nachzuweisen, sowohl für den Gesamtzusammenhang als auch für einen Teil der Abbildungen 3.28. Ein hier verfolgter genereller Ansatz nutzt diese Möglichkeit für eine vereinfachte Analyse des Restproblems 3.38, also für das zweidimensionale Restproblem. Um auch hier den verbleibenden Abbildungen 3.28 einen zusammenhängenden Definitionsbereich zu sichern, muss Voraussetzung 3.32 erfüllt sein, aber nur für  $1 \leq j \leq |P_{id}| - 2$ . Dafür erfüllt 3.38 die Voraussetzungen 3.39 (strenge Monotonie beider Restzielgrößen in beiden Restparametern) und 3.40 (konstantes positives oder negatives Vorzeichen der Funktionaldeterminante des Restproblems). Damit folgt die Eindeutigkeit des zweidimensionalen Restproblems, dessen Definitionsbereich aber erst bei zusätzlich nachgewiesener Eigenschaft 3.41 allgemein gesichert lokalisiert werden kann.

Liegt eine *Sequentielle Parameteridentifikation* vor, kann dazu ein nachweisbar global konvergierendes Lösungsverfahren angegeben werden. Da einige Maßnahmen zur Sicherstellung der globalen Konvergenz die Effizienz stark beeinträchtigen können, wird im Folgenden ein Verfahren vorgeschlagen, das nur dann auf solche Maßnahmen ausweicht, wenn sie nicht umgehbar sind:

1. Index der zuletzt gelösten *Parametergruppe* festlegen auf  $i = 0$
2. Kann das Restproblem  $P_{i+1..n_{PG} id}^V = P_{i+1..n_{PG}}^V \Big|_{P_{const 0, P_{1..i} id}^V} (Z_{\tau i+1..n_{PG} 0})$  mit einem klassischen Verfahren gelöst werden? Wenn ja  $\rightarrow$  STOP
3. Löse für die  $j$  nächsten *Parametergruppen* der Größe 1 ab  $i + 1$  das Teilproblem  $P_{i+1..i+j id}^V = P_{i+1..i+j}^V \Big|_{P_{const 0, P_{1..i} id}^V} (Z_{\tau i+1..i+j 0})$  mit dem *Newtonverfahren mit Randprojektion und innerer Schrittweitensteuerung* (s. hierzu Abschn. 3.2)
4. Setze  $i = i + j$
5. Falls  $i = n_{PG} \rightarrow$  STOP
6. Lassen sich die Funktionen 3.29 für  $i + 1$  und  $j_0 \leq j \leq |P_{i+1}|$  direkt, z.B. durch analytische Inversion effizient lösen, sollen sie auf diese Weise berechnet werden. Existiert kein  $j_0$ , und erfüllt der Parameter-*Zielgrößen*-Zusammenhang der zwei letzten

*Zielgrößen* 3.38 die Eigenschaften 3.39, 3.40 und 3.41, wird zur Berechnung von

$$\left( P_{i+1}^V \right)_{|P_{i+1}|-1..|P_{i+1}|} \Big|_{P_{const}^V, P_{10}^V, \dots, P_{i0}^V, (P_{i+1}^V)_{1..|P_{i+1}|-20}} \left( (Z_{\tau}^{i+1})_{|P_{i+1}|-1..|P_{i+1}|} \right)$$

statt der Funktionsalgorithmen 3.35 und 3.36 für  $i+1$  bzw.  $|P_{i+1}|-1 \leq j \leq |P_{i+1}|$  das *Gradientenverfahren* in Form der Funktionsalgorithmen 3.42 eingesetzt. In letzterem Fall erhält  $j_0$  den Wert  $|P_{i+1}|-1$ .  $P_{i+1}^V$  wird nun bis auf die (evt.) ausgetauschten letzten Indizes mit den Funktionsalgorithmen 3.35 und 3.36 bestimmt.

7. Setze  $i = i + 1$

8. Falls  $i < n_{PG} \rightarrow$  gehe zu 2., sonst  $\rightarrow$  STOP

## 3.4 Vergleich mit anderen Methoden

Um das Funktionsprinzip und die auf *funktionale Verifikation* ausgelegten Eigenschaften der in den letzten Abschnitten vorgestellten *Sequentiellen Parameteridentifikation* besser einordnen zu können, soll diese nun mit den in Kapitel 2 beschriebenen und weiteren Methoden aus der Literatur verglichen werden. Eine Abgrenzung gegenüber den speziellen Verfahren zur Identifikation von Systemen, die einen *linearen* Zusammenhang zwischen einfach abzuleitenden *Zielgrößen* und den Parametern zeigen, ergibt sich unmittelbar. Denn die *Sequentielle Parameteridentifikation* ist in der Anwendbarkeit anders als diese Methoden nicht auf *lineare* Zusammenhänge zwischen sich direkt ergebenden *Zielgrößen* wie der *Systemanregung* oder *-antwort* und den Parametern angewiesen. Umgekehrt sind *lineare* Zusammenhänge durch die in Kapitel 2 vorgestellten Methoden einfach lösbar oder ihre *Mehrdeutigkeit* analysierbar, was eine Anwendung der *Sequentiellen Parameteridentifikation* überflüssig macht.

Die Spezialform der Parameteridentifikation, wenn *Systemanregungs-* und *-antwortgrößen* *linear* über die Parameter zusammenhängen, kann jedoch schon über eine Ausprägung verfügen, die die *Sequentielle Parameteridentifikation* nicht mehr leistet: Durch die direkte Auflösung des Gleichungssystems  $Z_{\tau}(P_{const}^V, P_{id}^V)$  (3.16) nach  $P_{id}^V$  ohne eine *Ausgleichsfunktion* zu bilden, bleibt die Berücksichtigung *statistischer Messfehler* nach einem Modell wie 2.1 aus. Soll die *Sequentielle Parameteridentifikation* über den Nachweis der *Eindeutigkeit* hinaus auch zur sichergestellten Inversion des *Parameter-Zielgrößen-Zusammenhangs* eingesetzt werden, eignen sich daher für die *Zielgrößen*  $Z_{\tau}$  v.A. *Auswertungsfunktionale*, die die *Modellantwort*  $y$  von *Stationärzuständen* (s. Abschn. 4.1.7) über der Zeit mitteln. Formal bewirken hierbei die *Funktional-Bedingungen*  $B$  die Einschränkung auf *Stationärzustände*. Bei hinreichender Dauer der Messung werden auf Grund der konstanten *Modellantwort* dadurch auch die *statistischen Fehler* 'ausgemittelt'. Da diese einfache Behandlung der *Messfehler* nur für *Stationärzustände* anwendbar

ist, sich aber nicht alle *Parameterwerte* unter solchen Bedingungen identifizieren lassen, sollten für *Zielgrößen* mit *dynamischem* Systemverhalten die Messung mehrmals unter gleichen Bedingungen wiederholt und die mehrfachen *Modellantworten* bei der *Zielgrößen-Auswertung* gemittelt werden. Unbedingt ist hierbei erforderlich, die Mittelung für die Antwortgrößen auszuführen, und nicht für verschiedene Werte der *Zielgrößen* der *Sequentiellen Parameteridentifikation* aus einzelnen Systemantworten bzw. der über die *Zielgrößen* bestimmten Parameterwerte  $P_{id}^V$ , da der Zusammenhang zwischen *Zielgrößen* und Systemantwort bzw. Parametern und Systemantwort nichtlinear ist, das Fehlermodell aber nur linear in der Systemantwort ist, und eine entsprechende Schätzung *offset-behaftet* wäre. Durch die betrachteten *Stationärzustände* über längere Zeit oder einfach häufig reproduzierten dynamischen Anregungen kann von einer großen Messgrundlage ausgegangen werden, und es ist möglich, auch ein nichtlineares System ohne Verfahren der Offset-Reduktion wie die *Bootstrap-Methode* zu identifizieren.

Wird die *Sequentielle Parameteridentifikation* zwar zur Garantie einer sicheren Inversion des Gleichungssystems  $Z_\tau(P_{const}^V, P_{id}^V)$  über gemittelten *stationären* oder mehrfachen Antworten  $\hat{y}$  genutzt, es soll aber trotzdem die Lösung einer *statistischen Maximum-Likelihood*-Schätzung bestimmt werden, kann über die *Sequentielle Parameteridentifikation* die Lösung  $\hat{P}_{id}^V$  bestimmt werden, die dann als *Startwert* einer *Gradientenoptimierung* von 2.21 oder 2.20 über den originalen Systemantworten  $\tilde{y}$  dient. Auf diese Weise wird so eine garantiert gute Näherungslösung  $\hat{P}_{id}^V$  der *Maximum-Likelihood*-Optimierung gefunden mit anschließender erhöhter Chance, die exakte Lösung  $\hat{P}_{id}^V_{ML}$  zu finden, und dies für ein Optimierungsproblem 2.21 bzw. 2.20, für das kein allgemeines effizientes Lösungsverfahren bekannt ist (s. Kap. 2). Dieses kombinierte Verfahren lässt dann auch im Anschluss eine zusätzliche Analyse von *Konfidenzgebieten* der identifizierten Parameter bspw. mit einem linearisierten Ansatz gemäß 2.4 oder 2.5 zu. Beim Bezug zwischen *Sequentieller Parameteridentifikation* und *statistischer Versuchsplanung* verhält es sich ähnlich. Die *Sequentielle Parameteridentifikation* schließt keine *statistische Versuchsplanung* im eigentlichen Sinne, also gemäß 2.23 bis 2.26 ein. Statt der formalen Berechnung optimaler Systemanregungen muss die hohe *Sensitivität* der *Zielgrößengruppen*  $Z_{\tau i}$  gegenüber Veränderungen der *Parametergruppen*-Werte  $P_i^V$  bei der Entwicklung der *Zielgrößen* zusätzlich berücksichtigt werden, wobei die Bedingung, dass einzelne *Zielgrößen* von nur bestimmten Parametern abhängen, schon von selbst diese Eigenschaft fördert. Methoden der *statistischen Versuchsplanung* können bei der Wahl geeigneter *Zielgrößen* hilfreich sein, werden aber nicht vorausgesetzt und führen auch nicht gezielt zu Anregungen und Auswertungen der Antworten, die die übrigen Voraussetzungen einer *Sequentiellen Parameteridentifikation* (s. Abschn. 3.3) erfüllen. *Funktional-Bedingungen*  $B$  einer *Sequentiellen Parameteridentifikation* können selbst, und im Rahmen dieser Arbeit ist dies immer der Fall, abhängig von eigens dafür definierten Parametern  $P_B$  beschrieben werden. Hält man an gewählten *Zielgrößen*  $Z_\tau$  und konkreten Parameterwerten  $P_{B0}^V$  fest, lassen die zugehörigen *Funktional-Bedingungen*  $B|_{P_{B0}^V}$  oft noch zusätzlich verschie-

dene Anregungen zu, die unter konstanter Parametrierung  $P_{i0}^V$  die gleichen Werte  $Z_{\tau 0}$  bewirken. Diese Voraussetzungen ermöglichen zur Wahl von  $P_B^V$  und der genauen Anregungen durchaus eine zusätzliche *statistische Versuchsplanung*. Deren Berechnungen 2.23 bis 2.26 maximieren allerdings direkt den Informationsgehalt der Systemantwort  $y$  (die verschiedenen Systemanregungen und -antworten zu den einzelnen Komponenten von  $Z_\tau$  werden analog Abb. 3.6 zu je einer zusammengefasst). Um die Streuung der  $P_i^V$  auf Basis einer Schätzung durch die *Zielgrößen*  $Z_\tau$  zu minimieren, muss aber das Fehlermodell auf die *Zielgrößen* übertragen und die Streuung der geschätzten Parameterwerte in Zusammenhang mit der der *Zielgrößen* gebracht werden. Damit für die *Zielgrößen*, die nichtlinear mit der Systemantwort  $y$  zusammenhängen, wie vorausgesetzt ein lineares Fehlermodell betrachtet werden kann, muss zusätzlich zur in Kapitel 2 beschriebenen Linearisierung in  $P^V$  auch noch der *Zielgrößen*-Fehler im Fehler  $\varepsilon$  der Systemantwort  $y$  linearisiert werden. Daraus abgeleitete Aussagen sind dann jedoch nur für kleine Streuungen von  $\varepsilon$  repräsentativ, die man bspw. wie oben beschrieben durch Mittelung der Systemantwort  $y$  mehrerer wiederholter identischer Anregungen erhält. So ergibt sich für die *statistische Versuchsplanung* einer *Sequentiellen Parameteridentifikation* die zu 2.22 alternativ betrachtete Matrix

$$S_{\Delta P^V}(P_0^V, P_{B0}^V, u_0) = A_{P_0^V, P_{B0}^V, u_0}^T \cdot \Sigma_{Z_\tau}^{-1}(P_0^V, P_{B0}^V, u_0) \cdot A_{P_0^V, P_{B0}^V, u_0}$$

mit  $A_{P_0^V, P_{B0}^V, u_0} = \left. \frac{\partial Z_\tau}{\partial P^V} \right|_{P^V = P_0^V, P_B^V = P_{B0}^V, u = u_0}$ ,

$\Sigma_{Z_\tau}(P_0^V, P_{B0}^V, u_0) =$  Streuung des linearisierten Fehlers in  $Z_\tau$  abhängig von System-, Funktional-Bedingungs-Parametrierung und Anregung

Eine Optimierung nach 2.23 bis 2.26 erfolgt dann mit  $P_B^V$  als zusätzlicher Variationsgröße, von der  $D_u$  damit jedoch abhängt. Diese Überlegungen sind allerdings nur zur Vollständigkeit erwähnt und werden im Folgenden nicht weiter genutzt.

Die Hauptgrundlage des Vergleichs bilden nicht die *linearen* Methoden oder *statistische* Erweiterungen, sondern die Lösungsverfahren für allgemeine *nichtlineare* Probleme. Als wesentlicher Unterschied fällt dabei auf, dass die *Sequentielle Parameteridentifikation* im Gegensatz zu den in Kap. 2 beschriebenen Verfahren eine vom modellierten Übertragungsverhalten  $\tau$  abhängige aufwändige Analyse und Vorbereitung erfordert, die nicht automatisiert abläuft und von einem Entwickler entworfen werden muss. Dabei handelt es sich um die in den Abschnitten 3.2 und 3.3 beschriebenen *Zielgrößen*  $Z_\tau$  basierend auf deren *Auswertungsfunktionalen*  $Z_E$  und *Funktional-Bedingungen*  $B$ . Im Gegensatz dazu erfordern das *Newton*-, das *Gradienten*-, *SQP*-, das *BFGS*- genauso wie das *Nelder-Mead*-Verfahren keinerlei problemspezifische Vorbereitung. Bei den *evolutionären* Verfahren muss im Fall der *Evolutionstrategien* die *Mutation* und im Fall der *genetischen Algorithmen* hinzukommend die Abbildung zwischen *Geno*- und *Phänotyp* sowie die



*Rekombination* problemangepasst entworfen werden. Hiervon hängt wie in Kap. 2 erwähnt der Erfolg der Methoden wesentlich ab, wobei diese Vorbereitungsmaßnahmen nicht automatisiert ablaufen. Auch der *branch-and-bound*-Ansatz zur *globalen Optimierung* aus Kap. 2 setzt die außerhalb des Verfahrens zu bestimmende Abschätzung der *Lipschitz-Konstante* voraus, was effizient kaum automatisiert gelingt. Dennoch sticht die *Sequentielle Parameteridentifikation*, was den Aufwand an Vorbereitung betrifft, deutlich hervor. Ein wesentliches Vergleichskriterium ist neben dem Initialaufwand auch die Sicherstellung der eindeutigen Lösbar- und damit Identifizierbarkeit sowie die Garantie, die eindeutige Lösung zu finden. Dies leisten sowohl der Ansatz der *Sequentiellen Parameteridentifikation* als auch der der *globalen Optimierung*, nicht aber die *lokalen, gradientenbasierten* Verfahren, das *Nelder-Mead*- oder die *evolutionären* Verfahren. *Sequentielle Parameteridentifikation* und *globale Optimierung* unterscheiden sich dabei im zu erwartenden Berechnungsaufwand bei der einzelnen Parameteridentifikation. Der fällt bei der der *globalen Optimierung* im Allgemeinen deutlich größer aus, da hier für jede Parameterbestimmung das *globale* Problem von Neuem gelöst wird. Anders ist bei der *Sequentiellen Parameteridentifikation* zwar ein hoher nichtautomatisierter Vorbereitungsaufwand nötig, die Parameterbestimmung für ein konkretes System erfolgt aber mit kleinem Rechenaufwand. Dieser reduzierte Aufwand überträgt sich auch auf den Vergleich mit den *evolutionären* Verfahren. Ein Alleinstellungsmerkmal der *Sequentiellen Parameteridentifikation* ist, dass die kleinstmögliche Menge gewählter *Zielgrößen*  $Z_\tau$  das betrachtete System immer eindeutig festlegt. Auch bei einer *globalen Optimierung* kann die Messung eines konkreten Systems als eindeutige Festlegung nachgewiesen werden, aber eben erst nach erfolgter Messung und nicht pauschal unabhängig vom Ausgang der Messung. Nur so ist aber im Voraus sichergestellt, dass ein minimales Messprogramm in jedem Fall alle Systemeigenschaften erfasst.

Zieht man über die konkrete Identifikation eines Einzelsystems noch den Erstellungsprozess einer *Sequentiellen Parameteridentifikation* in Betracht, kann man insgesamt von einem *deterministischen, globalen* Verfahren sprechen, das abhängig von der Integration bestimmter Suchverfahren (*Newton*-, *Gradienten*-, *Intervallhalbierungs*-Verfahren) für die reduzierten Teilprobleme *gradientenbasiert* oder *ableitungsfrei* ausfällt. In dieser Kategorisierung garantieren auch Vertreter der *deterministischen, lokalen, gradientenbasierten* Methoden unter bestimmten Voraussetzungen die Eindeutigkeit und das sichere Auffinden der Lösung. Das sind nach Kap. 2 das *Newton*-, *Gradienten*- und die *SQP*-Verfahren unter der Voraussetzung einer *konvexen* zu minimierenden Funktion (s. 2.19). Um hiermit dieselben Ziele zu erreichen wie mit der *Sequentiellen Parameteridentifikation* müsste man *Zielgrößen*  $Z_\tau$  definieren, für die die Ausgleichsfunktion  $\|Z_\tau(P_{const}^V, P_{id}^V) - Z_\tau(P_{const}^V, P_{id0}^V)\|$  für alle  $P_{const}^V \in P_{const}^*$  und  $P_{id0}^V \in P_{id}^*$  in  $P_{id}^V \in P_{id}^*$  *konvex* ist. Dieser Nachweis dürfte allerdings i.A. sehr schwierig zu erbringen sein. Einmal, da sich das Gesamtproblem nicht einfach in Teilprobleme zerlegen lässt, bei denen bspw. nur ein Teil der Parameter variiert wird. Denn wie die Funktion  $(P^V)_1^2 + (P^V)_2^2 -$

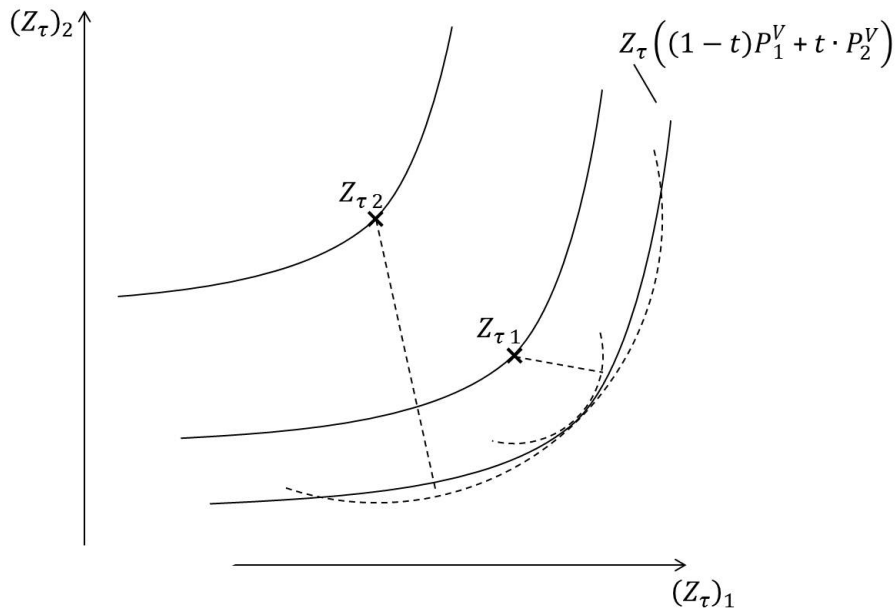


Abbildung 3.9: *Konvexität* abhängig vom Abstand zum *Zielwert*

$3 (P^V)_1 (P^V)_2$  zeigt, lässt sich aus der *Konvexität* unter Variation einzelner Parameter nicht auf *Konvexität* insgesamt schließen. Ist die Bedeutung der Parameter in der Systemmodellierung weitgehend homogen, beschreiben die Parameter also einen ähnlichen Einfluss auf ausgewählte *Zielgrößen*, ist der Nachweis von *Konvexität* auch bei paralleler Parametervariation möglicherweise zu leisten. In Fällen heterogener Parametereinflüsse jedoch dürfte dies spätestens sehr schwierig werden. Bei Ausgleichsfunktionen kommt außerdem erschwerend hinzu, dass die *Konvexität* zwar nahe der gesuchten Lösung vorliegt, oft aber nur bis zu einem Maximalabstand von der Lösung besteht. Ist die Bildkurve der Urbildkurve unter Interpolation zwischen  $P_1^V$  und  $P_2^V$  wie in Abbildung 3.9 gekrümmt, erhält man in der Abstandsberechnung zum *Zielwert*  $Z_{\tau 1}$  *konvexe*, aber zum weiter entfernt liegenden *Zielwert*  $Z_{\tau 2}$  keine *konvexen* Eigenschaften mehr. Dies wird klar, wenn man die Kreise um die verschiedenen *Zielwerte* betrachtet. Kreise um  $Z_{\tau 1}$  schneiden die Bildkurve an maximal zwei, Kreise um  $Z_{\tau 2}$  an bis zu 4 Punkten. Solche Fälle treten immer auf, wenn Mittelpunkte von Berührungskreisen an stärker gekrümmte Bildkurven von Urbildstrecken innerhalb des Bildraums liegen. Damit ist *Konvexität* in vielen Fällen lokal beschränkt und kann oft nicht zur Begründung *globaler* Eigenschaften verwendet werden.

Mit einem weiteren Verfahren aus Kap. 2 kann die *Sequentielle Parameteridentifikation* noch verglichen werden: Der Bestimmung der zeitabhängigen Modellzustände (2.15) ohne Modellintegration mit nachgelagerter Schätzung der Modellparameter (2.17). Anders

als bei dieser Methode kann bei der *Sequentiellen Parameteridentifikation* die Integration der Systemzustände nicht entfallen, es wird aber auch nicht vorausgesetzt, dass die Zahl der gemessenen Systemausgangsgrößen mindestens so groß ist wie die der Systemzustände. Beim Vergleich mit den Methoden aus Kap. 2 muss aber auch grundsätzlich noch erwähnt werden, dass die *Sequentielle Parameteridentifikation* nicht generell sinnvoll einsetzbar ist, da sie innerhalb der je verbleibenden Parameter den ausschließlichen Einfluss einzelner Parameter auf bestimmte *Zielgrößen* voraussetzt, und da dazu eine weitgehend freie Wahlmöglichkeit der Systemanregung erforderlich ist.

Die Zahl der Methoden und Beiträge zu Themen der Identifikation ist groß, weshalb Kapitel 2 hiervon nur kleine Ausschnitte direkt vorstellt. Um einen möglichst umfassenden Bezug zwischen der *Sequentiellen Parameteridentifikation* und anderen Vorgehensweisen herstellen zu können, ist der Vergleich mit weiterer Literatur nötig. Grundlegende Verfahren lassen sich dabei aus dem Standardwerk [61] entnehmen, wobei [67] die Behandlung nichtlinearer Systeme noch hervorhebt. [61] beschreibt zunächst Eigenschaften und Darstellungsformen linearer Systeme, für die die Zustandsänderung also jeweils linear von den Parametern und den Zuständen selbst abhängt, und die hier somit keinen wesentlichen Beitrag leisten. Darüber hinaus werden im Anschluss *Wiener- und Hammersteinmodelle*, *nichtlineare Black-Box-Modelle* sowie *Volterra-Reihen*, *Multi-Layer Networks*, *Recurrent Networks* und *Neuronale Netze* beschrieben. Während für die Zielsetzung in dieser Arbeit *Wiener- und Hammersteinmodelle* als Hintereinanderschaltung nur eines dynamisch linearen und eines statisch nichtlinearen Teilmodells eine zu große Einschränkung darstellen, decken die *nichtlinearen Black-Box-Modelle* die interessierenden physikalisch abgeleiteten Systembeschreibungen mit einer möglichst kleinen Zahl von Parametern nicht ab. Bei *Volterra-Reihen* hängen die neuen Zustandswerte bei festliegenden alten Werten außerdem linear von den Parametern ab, eine Bedingung, die hier nicht vorausgesetzt werden soll. Die in [61] vorgestellten *nichtparametrischen Methoden* ermöglichen die Identifikation linearer Systeme mit Hilfe von *Fourier- und Laplacetransformation*, sind also letztlich keine Parameter-Identifikationsverfahren und für nichtlineare Systeme auch nicht anwendbar.

Behandelt werden auch Lösungen zum Problem offsetbehafteter Regressionsschätzer bei der Identifikation linearer Systeme, deren Zustandsübergänge statistisch fehlerüberlagert sind. Ein Verfahren hierzu ist die bereits in Kapitel 2 beschriebene *Instrumentelle Variablenmethode*, die [61] allerdings auf Systeme mit linear von den Parametern aber evt. nichtlinear von früheren Zustandswerten abhängigen Folgezuständen ausweitet. Als weiterer Ansatz wird die *Subspace-Methode* erklärt. Beide Vorgehensweisen sind auf lineare Systeme ausgelegt, und ermöglichen eine effiziente, erwartungstreue Schätzung der Parameter. Damit unterscheiden sie sich auch von Methoden, die mit Hilfe numerischer Verfahren eine Gütefunktion minimieren, bei der selbst im Fall linearer Systeme lokale Minima die Konsistenz der Schätzung verhindern können. Die beschriebenen Probleme einer offsetbehafteten Schätzung treten dann auf, wenn wie bei der linearen Regression

gemessene Zustandsinformationen des Systems bei der Parameteridentifikation wieder in die Modellberechnung eingehen, um darauf basierend Folgezustände zu schätzen. In dieser Arbeit erfolgt die in die Identifikation integrierte Schätzung gemessener Eigenschaften aber ohne Rückkopplung von fehlerbehafteten Messwerten. Aus diesem Grund werden hier auch keine Varianten der *Subspace*- oder *Instrumentelle Variablen*-Methode eingebunden.

In Kap. 8 trifft [61] Aussagen zur *Konvergenz* und *Konsistenz* von Parameterschätzungen linearer und nichtlinearer Systeme, die als Minimum beliebiger Normen über der Abweichung zwischen gemessenem Verhalten und Modellverhalten oder ähnlicher Kriterien definiert sind. Kap. 9 und Abschnitt 7.4 analysieren die Varianz dieser Schätzer und weisen mit Hilfe der *Cramer-Rao-Schranke* die *Maximum-Likelihood*-Methode auch für nichtlineare Systeme als *asymptotisch wirksamst* aus. An anderen Stellen wird auch das algorithmische Finden des Parameterwerts zum Minimum des Schätzkriteriums thematisiert. Aus Abschnitt 10.5 geht hervor, dass das Kriterium des mittleren Fehlerquadrats für beliebig große Messreihen bei einigen linear von den Parametern abhängigen Formen von Modellen mit Wahrscheinlichkeit 1 nur ein lokales, das globale Minimum definiert, auch wenn die geschätzten Zustände ohne rückgekoppelte Messwerte bestimmt werden. Zur Identifikation allgemeiner nichtlinearer Systeme, für die i.A. nur die Minimierung von Gütefunktionen in Frage kommt, bezeichnet [61] in Abschnitt 10.2 den Einsatz *iterativer numerischer* Verfahren als erforderlich und stellt einige davon mit ihren spezifischen Eigenschaften vor. Für spezielle Modelltypen wie *bilineare Systeme* werden noch optimierte Lösungsmethoden beschrieben, doch weist [61] in Abschnitt 10.5 schließlich darauf hin, dass die beschriebenen Verfahren im allgemeinen Fall nur die Konvergenz gegen ein lokales Minimum garantieren, und somit das Finden der eigentlich definierten Lösung nicht sicher ist. An gleicher Stelle wird die Zahl an Forschungsergebnissen zur Untersuchung lokaler Minima in Gütefunktionen als gering bezeichnet. Zum Umgang mit dem Problem der lokalen Minima kann in Abschnitt 8.1 aus [61] einmal entnommen werden, dass ein entwickeltes Identifikationsverfahren unter bekannten Parametrierungen und berechneten Messdaten darauf geprüft werden soll, ob es die Parameterwerte findet. Dieses Vorgehen kann als *Validierung* bezeichnet werden, leistet damit aber den in dieser Arbeit verfolgten Ansatz der *Verifikation* nicht. Außerdem schlägt [61] in Abschnitt 10.5 vor, bei physikalisch modellierten Systemen mit der Kenntnis der Zusammenhänge vorab möglichst gute Startwerte zu bestimmen, die nicht weit vom globalen Minimum der Gütefunktion liegen. Letztlich kann der in dieser Arbeit verfolgte Ansatz als eine solche Vorgehensweise inklusive formaler Verifikation ihrer Funktion interpretiert werden. In Abschnitt 1.4 weist [61] neben dem Versagen der numerischen Suchfunktion noch auf die weiteren Probleme einer Parameterbestimmung hin, dass die definierten Messungen möglicherweise keinen eindeutigen Schluss auf die Parameterwerte zulassen. Für lineare Systeme werden dazu Kriterien aus der *Versuchsplanung* abgeleitet. Im nichtlinearen Fall gibt [61] hierzu jedoch keine konkreten Entscheidungsmerkmale an. [61] beschreibt

noch *rekursive Schätzmethoden* zur *Online-Identifikation* veränderlicher Parameter, gibt damit aber insgesamt keine Methode an, die die Inhalte dieser Arbeit abdeckt, fordert jedoch im spezifischen Fall zur Garantie verlässlicher Ergebnisse, ohne es näher zu erklären, ein Vorgehen, das die Methode dieser Arbeit leistet.

Anders als bei [61] fokussiert sich [67] auf nichtlineare Systeme, beschränkt sich dabei aber auf eine qualitative Bewertung der Methoden ohne mathematisch formale Aussagen und Beweise. Dies ist nicht untypisch für die Behandlung nichtlinearer Identifikationsprobleme, da formale Aussagen mit größerem Geltungsbereich hier nur schwer möglich sind. Neben einer Vielzahl unterschiedlicher Modellierungsansätze werden auch etliche Lern- und Optimierungsverfahren vorgestellt. Pragmatisch ausgerichtet wird die Parametersuche in [67] mit heuristischen Methoden wie lokaler Suche, genetischen Verfahren oder *Simulated Annealing* empfohlen, wobei ein *Branch-and-Bound*-Verfahren, wie es in Kapitel 2 dieser Arbeit beschrieben ist, auch erwähnt wird. Das Ziel einer *Sequentiellen Parameteridentifikation*, ein verifiziertes, effizientes Lösungsverfahren zu entwickeln, ist damit aber auch nicht zu erreichen.

Einen alternativen Ansatz zur Parameterschätzung in linearen und nichtlinearen Systemen schlägt [86] vor. Dabei ist es grundsätzlich möglich, die Parameter als symbolische Quotienten der Summen von Integralen zu schreiben, die über messbaren Systemausgängen gebildet werden. Die Integralformen sorgen dabei für eine Ausmittelung statistischer Störeinflüsse. Voraussetzung dafür ist, dass die Zustandsänderung für festgelegten Systemzustand linear von den Parametern abhängt, und sich die Modellzustände unabhängig von den Parametern symbolisch durch Ableitungen der Systemausgänge ausdrücken lassen. Auch eine parallele Schätzung von Parametern und Zuständen soll in dieser Form möglich sein. Dies erfolgt grundsätzlich so, dass sich die Parameter auf die beschriebene Weise ermitteln lassen, und unter bekannten Parametern dann die gleiche Darstellungsform für die Zustände möglich wird. Durch die großen Einschränkungen an den Modelltyp wird auch diese Methode den hier gesetzten Anforderungen nicht gerecht.

Wie eine zusätzliche Technik der Parameteridentifikation klingt auch [21]. Die *fraktionale Ableitung* ist jedoch eine weitere Modellierungsmethode für lineare Systeme und daher ebenso nicht geeignet für die Lösung der hier definierten Problemstellung. Da bei dieser Verifikation eine wesentliche Rolle spielt, kann über den Bezug zu den Verfahren des *Model Checking* und der *abstrakten Interpretation* nachgedacht werden. *Model Checking* ermöglicht es, Eigenschaften der Ausführung zustandsmodellierter Prozesse automatisiert zu beweisen (s. z.B. [18]). *Abstrakte Interpretation* schließt durch die schrittweise Veränderung von Mengen zur Abschätzung der Wertkombinationen von Variablen die Erreichbarkeit kritischer Zustände einer Software aus (s. z.B. [32]). Die Verifikation in dieser Arbeit ist jedoch einmal funktional und nicht auf das Ausbleiben bestimmter Zustände ausgerichtet. Zwar kann man alle Zustände außer dem funktional korrekten ausschließen. Anders als bei der Anwendung der *abstrakten Interpretation* sind diese Zustände jedoch nicht einfach definierbar. Genau die Definition, das globale Optimum in

einem Zustand zu erreichen, lässt sich auch in der elementaren Logik des *Model Checking* nicht beschreiben. Beide Verifikationsansätze sind auch nicht auf die Analyse komplexer analytischer Zusammenhänge zugeschnitten, und es muss hier eine alternative Vorgehensweise verwendet werden.

Durchaus verfolgen aber die Methoden der *globalen Optimierung* in der deterministischen Ausprägung erschöpfender Suchen ähnliche Ziele wie die *Sequentielle Parameteridentifikation*. Um den bereits oben ausgeführten Vergleich zwischen der *Branch-and-Bound*-Strategie mit bekannter *Lipschitz-Konstante* auf ein repräsentatives Spektrum erschöpfender Suchverfahren ausweiten zu können, müssen hiervon noch weitere betrachtet werden. Bevor auf Anwendungen zur Parameteridentifikation eingegangen wird, sollen zunächst die allgemeinen Ansätze vollständiger globaler Optimierungsverfahren betrachtet werden. Einen Überblick zu verschiedenen Vorgehensweisen gibt [31]. Dieser zählt zunächst eine Liste vorhandener Implementierungen zu vollständigen und heuristischen globalen Optimierungsmethoden auf und stellt anschließend die grundlegenden Strategien mit Bezug zu den vorhandenen Softwarelösungen vor. Dazu zählen Begriffe wie *Branch-Strategie*, *Intervallarithmetik*, *Box Reduction* und *Convex* oder *Semilinear Relaxation*. [31] empfiehlt im Wesentlichen zur Suche den gleichen Grundalgorithmus wie das in Kapitel 2 beschriebene *Branch-and-Bound*-Verfahren, wobei in diesem Fall nicht die schwierig zu ermittelnde *Lipschitz-Konstante*  $L$  vorausgesetzt werden soll, und zur optimierten Ausdünnung des Suchraums lokale Suchverfahren obere Schranken des Minimum ermitteln. Um auch ohne bekanntes  $L$  untere Schranken berechnen zu können, kommen die *Intervallarithmetik* (s.u.) ohne globale Zusatzinformationen oder *Relaxation* mit minimaler zusätzlich einzubringender globaler Information zum Einsatz. Bei der *Convex Relaxation* werden die zu optimierende Funktion und die Nebenbedingungen abhängig von den Grenzen des Teilsuchraums durch konvexe, also einfach in Teilräumen abzuschätzende Funktionen in mehreren Variablen ersetzt, die für kleine Suchräume beliebig genau sind. Die konvexen Ansatzfunktionen werden manuell ausgewählt, für Funktionen in einer vorgegebenen Darstellung ist dies auch automatisiert möglich. Einsatzgebiet der *Semilinear Relaxation* sind Abschätzungsprobleme in Funktionen, die sich aus den geschachtelten Verknüpfungen  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$ ,  $/$ ,  $\wedge$  über beliebigen eindimensionalen Funktionen ergeben. Dabei werden die eindimensionalen Funktionen manuell durch stückweise lineare untere und obere Schranken ersetzt und unter Verwendung zusätzlicher Variablen Verknüpfungen in eindimensionale Größen aufgelöst. Das approximierte Problem kann einfach als *Mixed Integer Linear Program* ausgedrückt werden, einem *Linearen Programm* mit zusätzlichen ganzzahligen Variablen, die abhängig vom Ort im Suchraum die einzuhaltenden linearen Schranken aktivieren oder deaktivieren können.

Einblick in die Methoden der *konvexen Optimierung* selbst, in die auf nichtlineare Fälle erweiterte Variante *Mixed Integer Nonlinear Programming* des *Mixed Integer Linear Programming* und weitere Verfahren der erschöpfenden Suche erhält man in [30]. Dies allerdings mit dem Ziel, die Methoden über die Grundlagen hinaus weiterzuentwickeln.

Eine eingesetzte Methode ist die *konvexe Optimierung*, bei der auch die Nebenbedingungen konvex sind, die damit maximal ein lokales Minimum besitzt und so mit lokalen Optimierungstechniken gelöst werden kann. Weiter bauen die Verfahren in [30] auf der Methode der *monotonen Optimierung* auf, bei der sich konsequenterweise sowohl die zu minimierende Funktion als auch die Nebenbedingungen monoton in den Variablen verändern. Wie die *konvexe Optimierung* benötigt die *monotone Optimierung* keine weiteren globalen Informationen. Klassisches Lösungsverfahren der *monotonen Optimierung* ist der *Polyblock-Algorithmus*, der beispielsweise in [3] beschrieben wird. Dieser umschließt mit einer Menge von *Boxen* (Hyperquadern), von denen jeweils der ursprungsseitige Eckpunkt an derselben Stelle liegt, die unter den Nebenbedingungen zulässige Menge. Aus den *Boxen* werden Teil-*Boxen* ausgeschnitten, die komplett außerhalb der zulässigen Menge liegen, und es entstehen mehrere neue *Boxen*. Durch die monotonen Funktionen liegt der Optimalwert der *Boxen*-Menge im Eckpunkt einer *Box* und der Algorithmus kann halten, wenn zusätzlich bei der Aufteilung bestimmte Punkte auf dem Rand der zulässigen Menge ähnlich optimale Werte wie die Eckpunkte besitzen. In [100] wird eine Methode vorgestellt, die es mit zusätzlichen Variablen und Nebenbedingungen einfach ermöglicht, ein Problem mit Differenzen monotoner Funktionen als Optimalkriterium und Nebenbedingungen in ein Problem der *monotonen Optimierung* zu überführen. Berücksichtigt man, dass Polynome in mehreren Veränderlichen durch Trennung der Summanden mit positiven und negativen Koeffizienten für positive Variablenwerte als eine solche Form interpretiert werden können, wird klar, dass die *monotone Optimierung* breit eingesetzt werden kann.

Eine Methode, die auf Basis beliebiger arithmetischer Ausdrücke ohne Zusatzinformationen Optimierungen und Abschätzungen ermöglicht, ist die *Intervall-Arithmetik*. In [39] werden dazu die wesentlichen Techniken beschrieben. Hauptidee ist dabei, arithmetische Ausdrücke nicht mit konkreten Zahlen zu berechnen sondern mit Intervallen und dabei in jeder Verknüpfung ein neues Abschätzungs-Intervall zu bilden. Funktionen, die sich nicht arithmetisch darstellen lassen, werden dabei beispielsweise durch eingrenzende Polynome ersetzt. [39] nennt als generelles Phänomen, dass die Qualität einer Abschätzung stark von der Darstellung der Funktion abhängt, und dies darauf zurückzuführen ist, dass gleiche Variablen als unabhängig betrachtet werden. Grundprinzip zur Verfeinerung berechneter Intervalle ist die Aufteilung der Definitionsboxen der Variablen und die Bildung des einhüllenden Schätzintervalls. Wichtig ist dabei, dass sämtliche definierte Abschätzungen, auch wenn sie nicht exakt sind, für verschwindenden Boxendurchmesser beliebig genau werden. In Hinblick auf möglichst exakt berechnete Boxen zur Abschätzung der unter Nebenbedingungen zulässigen Mengen von Variablenwerten stellt [39] die Methoden *Box Consistency* und *Hull Consistency* vor. Die Verkleinerung einer Box entlang der Dimension einer Variable findet im Fall der *Box Consistency* auf Basis der abgeschätzten Änderung der Nebenbedingung in dieser Variable statt. Abgeschätzt wird die Änderung in der gesamten abzutrennenden Box mit Hilfe der symbolischen Ablei-

tung der Nebenbedingung. Da die Größe der abgetrennten Box diese Abschätzung selbst beeinflusst, müssen beginnend bei kleinen Strecken mehrere Iterationen ausgeführt werden. Alternativ kann für Nebenbedingungen, die als Differenz eines leicht invertierbaren und eines weiteren Terms formuliert sind, eine Verkleinerung durch *Hull Consistency* ermöglicht werden. Die Intervall-Abschätzung des einen Terms als Bildmenge des leicht invertierbaren Terms ergibt durch die zusätzliche Abschätzung dieser Umkehrung in vielen Fällen eine verkleinerte Box. Mit Hilfe solcher Methoden sind in [39] Optimierungsverfahren nach dem *Branch-and-Bound*-Ansatz formuliert, wobei hier zum Aussortieren von Boxen untere und obere Schranken durch *Intervall-Arithmetik* gebildet werden, und bevorzugt gegenüber der Aufteilung von Boxen Verkleinerungen durch *Box Consistency* und *Hull Consistency* über dem Optimalkriterium der *Karush-Kuhn-Tucker*- bzw. Gradienten-Bedingungen vorgenommen werden.

An anderen Stellen findet man in der Literatur auch Beiträge zum Einsatz erschöpfender Suchverfahren in der Parameteridentifikation. So wird in [52] zu diesem Zweck speziell *Intervall-Arithmetik* verwendet. Einmal wird zur Parameter-Identifikation von Systemen mit expliziter Darstellung der Zeitfunktionen ein Algorithmus aus der ersten Ausgabe von [39] angewandt. Akzeptable Rechenzeiten sind unter dem *Least-Squares*-Kriterium mit 16 Messwerten jedoch erst nach einer Aufteilung des Problems in abstrahierte Parameter und deren anschließende Umrechnung auf die Originalparameter mit einem separaten globalen Gleichungslöser möglich. Auch mit Hilfe von *Intervall-Arithmetik* werden in [52] die Problemstellungen der *Bounding Approaches* angegangen. Dabei handelt es sich um einen alternativen Ansatz zu statistischen Methoden, dessen Aussagen greifbarer sind. Anstelle der Beschreibung und Berechnung von Fehlern in Messwerten, geschätzten Parametern und Zuständen durch stochastische Dichtefunktionen werden hier exakt eingegrenzte Mengen benutzt. Das entsprechende Verfahren zur Bestimmung der möglichen Parametermenge unter gegebener Messwertmenge wird mit *Parameter Bounding*, das zur Berechnung der möglichen Systemzustände unter gegebener Messwert- und Parametermenge als *State Bounding* bezeichnet. Basistechnik zum *Parameter Bounding* ist die *Mengen-Inversion*, die mit Hilfe *intervall-arithmetischer* Abschätzungen zu den berechneten Messgrößen die mögliche Parametermenge nach etlichen Auswertungen als Menge von Boxen möglichst genau einhüllen kann. Für das *State Bounding* ist die grundlegende Berechnungsmethode die *Mengen-Simulation*, die im diskreten Fall ausgehend von einer einhüllenden Menge des Systemzustands und der Parameter durch eine Abschätzung der Modellgleichung den jeweiligen Folgezustand des Systems abschätzt. Um auch die Nebenbedingungen der Messwertmenge nutzen zu können, wird die berechnete Menge zusätzlich noch mit einer Mengeninversion der Messwertmenge über der Gleichung der Systemausgänge geschnitten und so die Zustandsmenge genauer abgeschätzt. Auch weitere Verbesserungen zur Abschätzung und Berechnungseffizienz werden in [52] zusätzlich erklärt. Ähnliche und alternative Herangehensweisen an *Bounding Approaches* wie heuristische, stochastische Methoden findet man noch in [65].



Eine weitere Anwendung erschöpfender Suchverfahren beschreibt [90], wobei Abschätzungen des verwendeten *Branch-and-Bound*-Verfahrens hier durch Box-abhängig konvexe Ansatzfunktionen umgesetzt werden (*Convex Relaxation*, s.o.), die wiederum durch *konvexe Optimierung* abgeschätzt werden. Optimiert wird das Least-Squares-Kriterium über den Modellierungsfehlern zu einem diskreten linearen *SISO*-System mit beliebig autokorreliertem Fehlerterm. Es ergibt sich durch das Produkt aus Parametern und unbekanntem geschätzten Ausgangsgrößen eine nichtlineare, nichtkonvexe Gütefunktion. Nach [90] bietet die Minimierung dieser Gütefunktion gegenüber Methoden der linearen Approximation Vorteile bei der Konvergenz und den Bedingungen an die Systemstimulation. In Beispielläufen wird ein akzeptabler Rechenaufwand festgestellt. Die Methoden der erschöpfenden Suche sind theoretisch auch für die in der Arbeit hier betrachteten Identifikationsprobleme einsetzbar. Im Vergleich zu den einfachen Beispielen aus der aufgeführten Literatur sind allerdings viele nichtlineare Modelle, besonders das hier betrachtete Reifenmodell sehr viel komplexer, und es steht bei ihrem direkten Einsatz kein akzeptabler Berechnungsaufwand in Aussicht. Dies nicht für die konkrete Modellidentifikation auf Basis einer Messreihe, geschweige denn für die generelle Verifikation eines Identifikationsprozesses unabhängig von einer konkreten Parametrierung, wie es hier beabsichtigt ist. Möglicherweise kann die Auswahl ausschließlich von Stationärmessungen die Nachbildung und Abschätzung der Zusammenhänge zwischen gemessenem Verhalten und Parametern vereinfachen. Dazu müssen aber komplizierte Gleichungen zu den Gleichgewichtszuständen aufgestellt werden, die wiederum die erschöpfende Abschätzung erschweren. Eine wesentliche Zielsetzung der *Sequentiellen Parameteridentifikation* ist außerdem, ein effizientes, verifiziertes Lösungsverfahren zu ermöglichen, das eine garantiert maximale Laufzeit aufweist. In der Literatur zu Methoden der erschöpfenden Suche findet man keine formalen Kriterien, die in bestimmten Anwendungsfällen effiziente Laufzeitschranken garantieren. Aus diesen Gründen wurden die Methoden der erschöpfenden Suche bzw. globalen Optimierung in dieser Arbeit nicht zur Lösung des Gesamtproblems eingesetzt. Durchaus kommt aber ein der *Intervall-Arithmetik* verwandtes Verfahren zur Abschätzung von Eigenschaften für ein Teilproblem zum Einsatz, und wird in den Abschnitten C.16 bis C.23 beschrieben.

Ein Vergleich der Methode der *Sequentiellen Parameteridentifikation* sollte auf jeden Fall auch noch mit themenverwandten Beiträgen aus internationalen Fachzeitschriften erfolgen. Um sich bei der großen Zahl von Veröffentlichungen aus dem Gebiet der Parameteridentifikation auf die für diese Arbeit relevanten Resultate konzentrieren zu können, müssen Kriterien zum Aussortieren von Inhalten, die einen geringen Bezug zur wesentlichen Fragestellung hier in Aussicht stellen, benutzt werden. Durch die Beschränkung auf Modelle festgelegter Struktur mit einer endlichen Zahl von Parametern verschiedenartiger Bedeutung können Ergebnisse zur *Strukturidentifikation*, zu Systemen mit *Verteilten Parametern* oder *nichtparametrischen Modellen* ausgeschlossen werden. In dieser Arbeit werden allgemeine nichtlineare Systeme betrachtet, weshalb Aussagen zu rein linearen

Systemen oder Modellen, in denen die Zustandsänderung unter sonst konstanten Größen linear von den Parametern abhängt, *bilinearen Systemen*, einfachen *Hammerstein-* oder *Wiener-Modellen* nicht näher berücksichtigt werden. Auch aus diesem Grund, und da in dieser Arbeit besonders die physikalische Modellierung im Vordergrund steht, sind Beiträge zu *Blackbox-Modellen* weniger relevant. Sehr viele Ergebnisse gibt es zur Identifikation spezifischer einzelner Modelle, die hier, wenn sie nicht den Verifikationsaspekt direkt miteinbeziehen oder Reifenmodelle betreffen, nicht berücksichtigt werden können. Die Fragestellung hier ist auf die verifizierte globale Konsistenz der Parameterberechnung unabhängig von statistischen Einflüssen ausgerichtet, womit auch rein statistische Analysen, Aussagen zur Konvergenz gegen lokale Extremstellen, lokal optimierte *statistische Versuchsplanung* und rein experimentelle Untersuchungen keinen wesentlichen Bezug aufweisen. Außerdem ist Identifikation hier als einmalige Bestimmung konstanter Parameter interpretiert, weshalb auch Resultate zu *Closed Loop-* oder *Beschädigungsidentifikation* nicht näher betrachtet werden. Nun sollen einige passende bzw. nicht unmittelbar auszuschließende Artikel kurz vorgestellt und in Bezug zum hier behandelten Stoff gesetzt werden. Aus Titel und Abstract geht in [8] noch nicht hervor, dass hier kein Thema der nichtlinearen sondern der linearen Regression und dies auch losgelöst von einem dynamischen System behandelt wird. Ziel ist es dort, die Robustheit linearer Regressionsschätzungen gegenüber Ausreißern in Messdaten zu verbessern. Ein vorhandener Ansatz, der große aber nicht kleine Ausreißer optimal kompensiert, wird erweitert zu einem, der sich für beide Fälle eignet. Der alternative Schätzer ist als *Convex Quadratic Mixed Integer Program* definiert. Ein Bezug zur verifizierten Parametersuche in nichtlinearen Systemen unabhängig von statistischen Einflüssen lässt sich hier schwer herstellen.

Wie bei sehr vielen weiteren Beiträgen verrät auch der Titel von [63] noch nicht, dass die identifizierten *State-Space-Systeme* auf lineare Fälle beschränkt sind. Bei diesem Beitrag handelt es sich um eine alternative Methode zur Bestimmung kanonischer Formen der Zustandsdarstellung bei der Identifikation linearer Systeme, die auf einer speziellen Variante der Subspace-Methode basiert. Die Festlegung der Zustandsdarstellung wird in der Arbeit hier anders als im Artikel als durch das Modell definiert vorausgesetzt, weshalb auch in diesem Fall insgesamt kein direkter Bezug zu sehen ist.

In [60] erweisen sich die zur Identifikation betrachteten nichtlinearen Systeme als solche, deren zeitdiskrete Ausgangsgröße bei festliegenden vorigen Ausgangs- und Anregungswerten linear von den Parametern abhängen. Die in den veränderlichen Größen nichtlineare Modellgleichung ist also eine Linearkombination aus einer großen Menge von Ansatzfunktionen, aus denen der *Orthogonal Forward Search*-Algorithmus unter einer tolerierten Grenze der Abweichung zwischen modellierter Einzelschritt-Schätzung und Messung eine möglichst kleine Auswahl trifft. Ergänzt wird zum bereits vorhandenen Algorithmus die Möglichkeit, auch zeitlich unterbrochene Messreihen bestmöglich nutzen zu können. Auch in diesem Fall passt die generische *Blackbox*-Modellstruktur

inklusive der Einschränkung auf linear wirksame Parameter nicht zum hier betrachteten Umfang allgemeiner nichtlinearer Modelle mit festgelegter Struktur.

Genauso wird in [103] nicht die Konvergenz eines Suchverfahrens bei der Identifikation nichtlinearer Systeme gegen das globale unter evt. weiteren lokalen Minima untersucht, sondern ohne Betrachtung einer algorithmischen Berechnung die Konvergenz des globalen Minimum einer Fehlernorm in der Größe der Messreihe zu einem linearen System. Als Erweiterung der Resultate von [61] hierzu werden Fälle analysiert, in denen im Grenzübergang mehrere globale Minima existieren, wie es bei suboptimalen Messungen möglich ist. Da hier Aussagen zur Konvergenz einer Folge (ungeordneter) Mengen getroffen werden sollen, wird statt der euklidischen Norm die *Hausdorff-Metrik* benutzt. Als Ergebnis zeigt [103], dass bei mehreren Parameterwerten für eine beliebig große Messreihe mit minimalem Fehlerwert möglicherweise keine Konvergenz der geschätzten Parametermenge oder Konvergenz gegen nur eine Teilmenge eintritt. Leider lässt sich daraus ohne eine Aussage zur Konvergenz konkreter Lösungsverfahren statt der ausschließlich definierter Folgen kein Kriterium für die hier interessierende eindeutige Lösbarkeit im nichtlinearen Fall ableiten.

Unter dem Begriff Parameteranalyse von Mehrkörpersystemen versteht [56] nicht die Identifikation der Parameter aus Messungen sondern *Sensitivitätsanalysen*, die Anhaltspunkte zur Verbesserung von Konstruktionen liefern sollen. Beitrag hierzu ist die Einführung normalisierter, transformierter Parameter, die u.A. die gemeinsame Bewertung von Parametern unterschiedlicher physikalischer Einheit ermöglichen. Keinesfalls sind daraus aber verifiziert konsistente Parameteridentifikationsmethoden zu gewinnen.

Die Parameteridentifikation von Mehrkörpersystemen selbst wird in [102] behandelt. Anstelle allerdings die Gütefunktion über den Modellausgängen einer Integration der Zustandsraumdarstellung mit Hilfe numerischer Gradientenbestimmung zu minimieren, wird eine approximierte, explizite und parameterabhängige Zeitfunktion der Ausgänge inklusive der symbolischen Gradienten zum Gütekriterium bestimmt. Dies ermöglicht einmal Software zur Formelmanipulation und die abbrechende *Lie-Reihen-Entwicklung* eines gewöhnlichen Differenzialgleichungssystems, eine Methode, die Taylorreihen der Systemzustände in der Zeit aus Ableitungen der Modellfunktionen im Anfangszustand zu definieren. Eine hierauf basierende Parameteridentifikation kann zwar zügig und numerisch sehr exakt berechnet werden, ein Mittel zur global verifizierten Konsistenz der Identifikation entsteht hierdurch jedoch auch nicht.

Der Identifikation nichtlinearer Systeme nähert man sich in [81] mit dem Anspruch der Maximum-Likelihood-Schätzung eines Zustandsraummodells mit beliebigen parameter- und zustandsabhängigen Dichtefunktionen der Fehlerterme. Löst man dieses Problem direkt, ist für die Bestimmung der Dichtefunktionen zu den Zuständen und Ausgangsgrößen zum Zeitpunkt  $t$  die Berechnung eines  $t$ -fach geschachtelten Volumenintegrals jeweils über dem gesamten Zustandsraum nötig. Um den extremen Rechenaufwand zu umge-

hen, kommt der *Expectation-Maximization-Algorithmus* zum Einsatz, der näherungsweise den Erwartungswert der parameterabhängigen Likelihood-Funktion über sämtlichen (konkreten) Zustandsfolgen berechnet. Die Lösung dieses nicht geschachtelten Integrals über dem  $t$ -fachen Zustandsraum wird, um weiter den Rechenaufwand in Griff zu bekommen, mit Hilfe zufallsbasierter Methoden bestimmt. Da außer eine Verschlechterung der Schätzung über die Iteration hinweg auszuschließen, bisher keine Aussagen zur Konvergenz existieren, geschweige denn die Likelihood-Optimierung das Finden des globalen Extremwerts überhaupt garantieren würde, verfolgt auch dieser Ansatz eine ganz andere Zielrichtung als die Arbeit hier.

Durchaus verfolgt wird das Ziel einer verifizierten Konsistenz der Parameterschätzung in [71]. Über einfache *Hammerstein*- oder *Wiener*-Modelle hinaus ist dort die beliebige Verbindung von linear dynamischen und nichtlinear statischen Teilmodellen möglich. Eine Einschränkung bilden aber die Voraussetzungen, dass die Eingänge der nichtlinearen Modelle messbar über ein lineares System mit den Ein- und Ausgängen des Gesamtmodells zusammenhängen, und dass die Parameter der linearen Modelle bekannt sind. In [71] gelingt es nun, die Parameter der nichtlinearen statischen Komponenten über eine konvexe Gütefunktion gesichert konsistent zu schätzen. Ähnliche Resultate findet man auch in [29], wo zusätzlich beschrieben wird, dass die einzelnen linearen und nichtlinearen Teilmodelle sich nicht als Komponenten realer Systeme deuten lassen, sondern bei einer Modellparametrierung eine abstrakte Abbildung erfolgt. Da in der Arbeit hier genau die unmittelbar physikalisch modellierten Fälle mit einer minimalen Zahl von Parametern im Vordergrund stehen, und auch unklar ist, wie groß die Einschränkungen durch diesen Modelltyp und weitere Voraussetzung zur konsistenten Schätzung sind, wird hier ein separater Ansatz verfolgt.

Ein weiterer Beitrag beschäftigt sich ebenso mit dem Finden globaler Optimalstellen der Gütefunktion bei der Identifikation von Mehrkörpersystemen. Dabei soll in [101] die *Homotopie*-Verformung helfen, die über den *Morphing-Parameter* ein einfaches Ersatzmodell kontinuierlich in das zu identifizierende Modell übergehen lässt. Am einfachsten ist dies durch eine gewichtete Summe in den Modellgleichungen möglich. Über dem konstruierten Ersatzmodell besitzt die Gütefunktion nur ein lokales Minimum. Bei Veränderung des *Morphing-Parameters* beginnt die Suche nach dem neuen Wert für das Minimum beim alten. Nach [101] besteht so eine deutlich erhöhte Chance, den globalen Optimalwert in einem kontinuierlichen Pfad vom Ersatzmodell zum Originalmodell zu bestimmen. Natürlich ist die Funktion dieser Methode nicht garantiert, da sich bei kontinuierlicher Anpassung des *Morphing-Parameters* die Position des globalen Minimum auch sprunghaft verändern kann. Diese Methode kann wie lokale Optimierung oder Genetische Algorithmen als heuristisch bezeichnet werden, und eignet sich daher auch nicht für die in der Arbeit hier aufgestellte Zielsetzung.

## 3.5 Unterstützende Softwaremethoden

Wie schon mehrfach ausgeführt erfordert die Entwicklung einer *Sequentiellen Parameteridentifikation* eine umfangreiche Analyse der Parametereinflüsse auf das Systemübertragungsverhalten  $\tau$ . Nur so kann eine Folge von *Zielgrößengruppen*  $Z_{\tau i}$  mit den Eigenschaften 3.23, 3.24, 3.27 und 3.32 entwickelt werden. Um den Analyse- und Konstruktionsaufwand zu reduzieren, liegt es daher nahe, über die Automatisierung von Anteilen nachzudenken. Die hier vorgestellten Methoden beschränken sich auf die Unterstützung bei der Erstellung von Folgen von *Zielgrößengruppen*  $Z_{\tau i}$ , die die Eigenschaften 3.23 (Unabhängigkeit von nachfolgenden *Parametergruppen*) und 3.24 (*Injektivität* in zugehöriger *Parametergruppe*) erfüllen. Eine Erfüllung der Eigenschaften 3.27 (*Injektivität* der *Teilzielgruppen*) und 3.32 (*Monotonieeigenschaften* bei *partieller* Festlegung einer *Zielgrößengruppe*) wird nicht gezielt verfolgt. Dies, um zum einen das Themenfeld überschaubar zu halten, und zum anderen da diese Eigenschaften in vielen praktischen Fällen von selbst folgen. Es sollen außerdem nur Automatisierungslösungen vorgeschlagen werden, deren Eignung und Funktion sich aus allgemeinen Überlegungen erschließen lässt. Für weitergehende Automatisierungslösungen müsste zum Zweck eines vertretbaren Rechenaufwands der Suchraum möglicher Alternativen bei der Bildung von *Zielgrößen* eingeschränkt werden, wodurch die praxisrelevanten Anwendungsmöglichkeiten entsprechender Verfahren im Rahmen dieser Arbeit unklar blieben. Von den Automatisierungslösungen, die nicht auf solchen *heuristischen* Kriterien basieren, ist die naheliegendste der einfache Test einer feststehenden *Parameter-* und *Zielgrößengruppe*  $P_i$  bzw.  $Z_{\tau i}$  auf Erfüllung der grundlegenden Eigenschaften 3.23 und 3.24. Formal ist dieser Test eine als Software realisierbare Funktion

$$s_1 : C^{1*} \times I_{inj}^* \times I_{ind}^* \rightarrow \{0, 1\}$$

mit  $C^{1*} = \bigcup_{d=1}^{|P|} (C^1(P^*))^d$ ,

$$I_{inj}^* = I_{ind}^* = \mathcal{P}(\{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq |P|\}), \mathcal{P} = \text{Potenzmenge}$$

Das Beispielresultat  $s_1(Z_{\tau 0}, \{3, 4\}, \{5, 6, 7\}) = 1$  bedeutet dann, dass ein Test der vorgegebenen *Zielgrößen*  $Z_{\tau 0}$  auf *Injektivität* in den *Argumenten* 3 und 4, also in der *Parametergruppe*  $[P_3, P_4]$ , und ein Test auf Unabhängigkeit von den *Argumenten* 5, 6 und 7, also von den Parametern  $P_5$ ,  $P_6$  und  $P_7$  zu einem positiven Ergebnis führt. Umgekehrt bedeutet das Resultat  $s_1(Z_{\tau 0}, \{3, 4\}, \{5, 6, 7\}) = 0$ , dass einer der entsprechenden Tests zu einem negativen Ergebnis führt. Aus der Bezeichnung *Test* geht bereits hervor, dass es sich nicht um ein vollwertiges *Entscheidungsverfahren* handelt. Dies liegt in der Schwierigkeit der Probleme begründet, die sich allein durch den Nachweis von *Unabhängigkeit* oder *Injektivität* in allen existierenden Parametern ergeben. In B.14 wird eine *Polynomialzeitreduktion* von 3-SAT auf die *Entscheidung* einer *endlich oft differenzierbaren* Funktion in mehreren Variablen als *konstant 0 reduziert*. Damit folgt auch

die *NP-Vollständigkeit* der *Entscheidung* von 3.23. Die *Entscheidung* der *Injektivität* einer Abbildung ist sogar für rein *arithmetische* und damit beliebig oft *differenzierbare* Funktionen *NP-vollständig*. Zum Nachweis kann man unter B.15 dazu eine *Polynomialzeitreduktion* von *SAT* auf dieses Problem finden. Vor diesem Hintergrund wird klar, dass  $s_1$  lediglich einen *Test* und kein *Entscheidungsverfahren* realisiert. Der Test auf *Unabhängigkeit* (3.23) kann unter *zufallsbasierter* Wahl  $m_1$  verschiedener Wertbelegungen für die Parameter, deren ausbleibender Einfluss untersucht werden soll, getestet werden, wenn die übrigen Parameter festgehalten werden. Führt man diesen Test noch für  $m_2$  verschiedene *zufallsbasiert* gewählte Wertbelegungen der übrigen Parameter durch, ergibt sich ein vollwertiger Test  $s_{1\text{ ind}}$  auf 3.23. Formal erhält man

$$s_{1\text{ ind}} : C^{1*} \times I_{\text{ind}}^* \rightarrow \{0, 1\}$$

mit  $s_{1\text{ ind}}(Z_\tau, I_{\text{ind}}) = 1$

$$\Leftrightarrow \forall 1 \leq k \leq m_2, 1 \leq l \leq m_1 : Z_\tau(P_{\text{dep } k}, P_{\text{ind } l 1}) = Z_\tau(P_{\text{dep } k}, P_{\text{ind } l 2}),$$

$$(P_{\text{dep } 1})_i, \dots, (P_{\text{dep } m_2})_i \text{ zufällig } \in P_i^*, 1 \leq i \leq |P|, i \notin I_{\text{ind}},$$

$$(P_{\text{ind } 1 1})_j, \dots, (P_{\text{ind } m_1 1})_j, (P_{\text{ind } 1 2})_j, \dots, (P_{\text{ind } m_1 2})_j \text{ zufällig } \in P_j^*, j \in I_{\text{ind}}$$

$s_{1\text{ ind}}$  kann keine sichere Überprüfung der *Unabhängigkeits*-Eigenschaft 3.23 ausführen. Für *analytische*, also beliebig oft *differenzierbare* Funktionen  $Z_\tau$ , jedoch wird die Wahrscheinlichkeit abhängig von der *numerischen Berechnungsgenauigkeit* allerdings beliebig hoch. Dies liegt daran, dass bei *analytischen* Funktionen, die nicht *konstant* 0 sind, das Volumen der *Urbildmenge*, die auf 0 abgebildet wird, 0 ist. Man kann das einfach aus dem *Identitätssatz für holomorphe Funktionen* folgern (s. z.B. [42]). Die Wahrscheinlichkeit, nun *zufällig* nur solche Punkte zu wählen, ist 0. Viele Parameter-*Zielgrößen*-Zusammenhänge *dynamisch* modellierter Systeme sind *analytisch* oder aus wenigen *analytischen* Teilfunktionen über verschiedenen Bereichen der *Definitionsmenge* zusammengesetzt. Also kann der Test  $s_{1\text{ ind}}$  durchaus als zielführend angesehen werden.

Anders als eine Überprüfung der *Unabhängigkeit* von Parametern ist die Überprüfung der *Injektivität* einer Parameter-*Zielgrößen*-Abbildung nicht durch einfachen paarweisen Vergleich einzelner *Bildwerte* möglich. Denn zwei identische *Bildwerte* für verschiedene *Urbildwerte* zu treffen, ist i.A. sehr unwahrscheinlich. Außerdem ist die *Injektivität* eine *globale* Eigenschaft, die sich nicht auf gleichwertige *lokale* Eigenschaften *reduzieren* lässt. So genügt bspw. für den Fall *differenzierbarer* Abbildungen ein *konstantes Vorzeichen* der *Funktionaldeterminante* zwar zur *lokalen Injektivität* über der ganzen Definitionsmenge, aber nicht zur *globalen Injektivität*. Dieser Unterscheidung widmet sich schon Grundlagenliteratur zur *Analysis* wie [42]. Um den *Bildraum* nicht mit aufwändigen geometrischen Methoden auf *Selbstdurchdringung* überprüfen zu müssen, soll eine alternative Eigenschaft benutzt werden, die *lokal* definiert ist, und aus der die *globale Injektivität* folgt. Dies ist nicht ohne Einschränkung auf eine Untermenge *differenzierbarer injektiver* Abbildungen möglich, die zusätzlich diese Eigenschaft besitzen. Dabei

soll die Eigenschaft natürlich eine möglichst große Menge praxisrelevanter *injektiver* Abbildungen abdecken, und vorwiegend Zusammenhänge ausschließen, mit denen bei der Modellierung von Parameter-*Zielgrößen*-Zusammenhängen weniger zu rechnen ist. Das alternative Kriterium nutzt aus, dass Funktionen, die *Urbildrichtungen* entlang der Koordinatenachsen eines *Urbild-Hyperquadranten* in *Bildrichtungen* innerhalb eines *Bild-Halbraums* abbilden, *injektiv* sind, wenn sie über einer *konvexen Menge* definiert sind. Formal erhält man (mit  $\dim(Z_\tau) = |I_{inj}|$  wegen 3.17, 3.24)

$$\begin{aligned} \forall (P_0^V)_{I_{const}} \in P_{I_{const}}^*, r \in \{-1, 1\}^{|I_{inj}|} \exists a \in \mathbb{R}^{|I_{inj}|} \\ \forall 1 \leq i \leq |I_{inj}|, (P_0^V)_{I_{inj}} \in P_{I_{inj}}^* : a^T \cdot \left. \frac{\partial Z_\tau}{\partial P_{(I_{inj})_i}^V} \right|_{(P_0^V)_{I_{const} \cup I_{inj}}} \cdot (r)_i > 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

mit  $I_{const} = \{i \mid 1 \leq i \leq |P| \wedge i \notin (I_{inj} \cup I_{ind})\}$ ,  $\{(I_{inj})_i \mid 1 \leq i \leq |I_{inj}|\} = I_{inj}$

Die *Injektivität* folgt anschaulich daraus, dass die Bildkurve der Verbindungsstrecke zweier Urbildpunkte immer in die zugehörige Richtungskomponente  $a$  und nie entgegengesetzt verläuft, also nicht zum Startpunkt zurückführen kann. Unter B.16 ist dazu ein analytischer Beweis aufgeführt. Dass umgekehrt Eigenschaft 3.43 nicht aus der *Injektivität* eines Zusammenhangs (3.24) folgt, zeigt Zusammenhang B.7 in B.7, der einerseits *injektiv* ist, bei dem andererseits aber die Bewegung entlang einer Koordinatenrichtung sogar schon sämtliche mögliche Bildrichtungen aufweist. Ein Test auf *Injektivität* kann nun analog zum Test auf *Unabhängigkeit* realisiert werden durch Überprüfung von Eigenschaft 3.43 für  $m_3$  zufällig gewählte Belegungen der Parameter, die auf *injektive* Abbildung zu prüfen sind. Um auch den Einfluss der übrigen Parameter zu berücksichtigen, muss der Test der  $m_3$  Belegungen für  $m_4$  Belegungen der übrigen Parameter wiederholt werden, wobei in einem solchen Test die übrigen Parameter *konstant* bleiben, während die auf *injektive* Abbildung zu prüfenden Parameter variieren. Da auch eine Überprüfung sämtlicher *Hyperquadranten* über  $|P_{inj}|$  *exponentiell* wachsenden Aufwand bedeutet, müssen auch aus diesen zufallsbasiert  $m_5$  Vertreter ausgewählt werden. So

ergibt sich Test  $s_{1\ inj}$  als

$$\begin{aligned}
 & s_{1\ inj} : C^{1*} \times I_{inj}^* \rightarrow \{0, 1\} \\
 & \text{mit } s_{1\ inj}(Z_\tau, I_{inj}) = 1 \\
 & \Leftrightarrow \forall 1 \leq k \leq m_4, 1 \leq l \leq m_5 \exists a_{kl} \in \mathbb{R}^{\dim(Z_\tau)} : -R_{kl} \cdot a_{kl} \leq -(\varepsilon \dots \varepsilon)^T, \\
 & \quad (R_{kl})_{(q-1)|I_{inj}|+1..q|I_{inj}| \dots \dim(Z_\tau)} \\
 & = \text{diag} \left( (r_l)_1, \dots, (r_l)_{|I_{inj}|} \right) \cdot \left( \frac{\partial Z_\tau}{\partial P_{I_{inj}}^V} \Big|_{P_{nin\ k}^V, P_{inj\ q}^V} \right)^T, \quad 1 \leq q \leq m_3, \\
 & \quad (P_{nin\ 1}^V)_i, \dots, (P_{nin\ m_4}^V)_i \text{ zufällig } \in P_i^*, \quad 1 \leq i \leq |P|, \quad i \notin I_{inj}, \\
 & \quad (P_{inj\ 1}^V)_j, \dots, (P_{inj\ m_3}^V)_j \text{ zufällig } \in P_j^*, \quad j \in I_{inj}, \\
 & \quad r_1, \dots, r_{m_5} \text{ zufällig } \in \{-1, 1\}^{|I_{inj}|}, \quad r_{l_1} \neq r_{l_2}, \quad 1 \leq l_1, l_2 \leq m_5, \quad l_1 \neq l_2
 \end{aligned}$$

Dabei wird die Formel  $\exists a_{kl} \in \mathbb{R}^{\dim(Z_\tau)} : -R_{kl} \cdot a_{kl} \leq -(\varepsilon \dots \varepsilon)^T$  als *Lineares Programm* interpretiert, und kann durch einen der gängigen *Algorithmen* wie das *Simplex-Verfahren* von *Dantzig* (s. [45]) oder das garantiert mit *polynomiell* beschränktem Aufwand arbeitende *Innere-Punkte-Verfahren* von *Karmarkar* (s. [15]) gelöst werden. Da Implementierungen zur Lösung von *Linearen Programmen* bei mehreren möglichen Lösungen eine von diesen als Ergebnis liefern, aber möglicherweise nicht zwischen unerfüllbaren *Ungleichungsbedingungen* und *unbeschränktem Gütewert* über der *zulässigen Menge* unterscheiden, sollte eine *konstante Gütefunktion* wie  $c^T \cdot a_{kl}$  mit  $c = 0$  ergänzt werden. Mit  $(\varepsilon \dots \varepsilon)^T$  wird über einen möglichst kleinen Wert  $\varepsilon > 0$  die eigentlich in 3.43 verwendete *>-Ungleichung* durch eine *≥-Ungleichung* angenähert. Die *Ungleichung* ist hier außerdem *komponentenweise* zu verstehen. Während die Überprüfung auf *Unabhängigkeit* bei *analytischen* Funktionen nahezu mit Sicherheit zu einer korrekten Einschätzung führt, ist beim Test auf *Injektivität* durchaus mit Fehlresultaten zu rechnen und dabei sowohl mit *injektiven* Abbildungen, die den Test nicht, und mit *nichtinjektiven* Abbildungen, die den Test bestehen. Da Eigenschaft 3.43 einen Großteil der relevanten *injektiven* Abbildungen abdeckt, stellen *nichtinjektive* Abbildungen, die den Test bestehen, das größere Problem dar. Letztlich kann hier nur eine analytische Untersuchung durch den Entwickler einer *Sequentiellen Parameteridentifikation* Klarheit schaffen, wobei die automatisierten Testmethoden als sinnvolle Hilfsmittel dienen. Werden beide Testverfahren kombiniert, erhält man den folgenden Gesamttest

$$\begin{aligned}
 & s_1 : C^{1*} \times I_{inj}^* \times I_{ind}^* \rightarrow \{0, 1\} \\
 & \text{mit } s_1(Z_\tau, I_{inj}, I_{ind}) = s_{1\ inj}(Z_\tau, I_{inj}) \wedge s_{1\ ind}(Z_\tau, I_{ind})
 \end{aligned}$$

Eine naheliegende Erweiterung des Automatisierungsansatzes ist die selbstständige Aufteilung verbleibender Parameter, in eine Gruppe, die auf vorgegebene *Zielgrößen*  $Z_\tau$



*injektiv* abgebildet wird, und die übrigen Parameter, von denen die *Zielgrößen unabhängig* sind. Da es dafür nicht immer eine Lösung gibt, muss auch dieser Fall als gültiges Berechnungsergebnis definiert werden, was über die Indexmenge  $\{0\}$  ausgedrückt werden soll. Außerdem lässt diese erste Beschreibung der Erweiterung nur die Bewertung von *Zielgrößen* für die erste *Parametergruppe* einer *Sequentiellen Parameteridentifikation* zu. Alle weiteren Schritte setzen i.A. voraus, dass bestimmte Parameter bereits bekannt sind. Also sollen, um die Weiterentwicklung einer von vorne zum Teil schon aufgestellten *Sequentiellen Parameteridentifikation* zu unterstützen, neben bestimmten *Zielgrößen* auch die als bekannt vorauszusetzenden Parameter vorgegeben werden. Lässt sich eine Aufteilung der Parameter als Lösung finden, kann ein Parameter entweder nur zur Gruppe ohne Einfluss oder zur Gruppe der *injektiv* abgebildeten Parameter zählen. Beide Eigenschaften schließen sich nämlich gegenseitig aus. Die Eigenschaft der *Unabhängigkeit* von einem Parameter hängt außerdem ausschließlich vom Parameter selbst und nicht von den übrigen Parametern ab, die in die Gruppe der Parameter ohne Einfluss auf die *Zielgrößen* aufgenommen werden. Nutzt man diesen Sachverhalt aus, kann eine weit *effizientere* Methode angewandt werden als die, für sämtliche Parameterkombinationen der Größe  $\dim(Z_\tau)$  als potenzielle Gruppe der *injektiv* abgebildeten Parameter Test  $s_1$  anzuwenden. Anstelle für Kombinationen kann der Test auf ausbleibenden Einfluss für jeden Parameter separat als einzigen Parameter der Gruppe ohne Einfluss mit Hilfe von Test  $s_{1\ ind}$  überprüft werden. Beim Test aller nicht als *konstant* festgelegter Parameter muss dieser für genau die Zahl von  $\dim(Z_\tau)$  Parametern *negativ* und für die übrigen *positiv* ausfallen, um insgesamt Eigenschaften 3.23 (*Unabhängigkeit*) und 3.24 (*Injektivität*) aufzuweisen. Nur dann wird anschließend noch der Gesamttest auf Eigenschaften 3.23 und 3.24 mit  $s_1$  durchgeführt, der endgültig entscheiden soll, ob überhaupt eine und damit die vorliegende Aufteilung sämtliche notwendigen Voraussetzungen erfüllt. Die Suche nach einer möglichen nächsten *Parametergruppe* ist so mit *linearer* Zahl von Tests  $s_{1\ ind}$  und  $s_1$  möglich. Formal ergibt sich folgendes Verfahren

$$\begin{aligned}
 s_2 &: C^{1*} \times I_{const}^* \rightarrow I_{inj}^* \cup \{0\} \\
 \text{mit } I_{const}^* &= \mathcal{P}(\{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq |P|\}), \quad s_2(Z_\tau, I_{const}) = \hat{I}_{inj}, \\
 \hat{I}_{inj} &= \begin{cases} I_{inj} & \text{für } s_1(Z_\tau, I_{inj}, I_{ind}) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
 I_{inj} &= \{i \mid s_{1\ ind}(Z_\tau, \{i\}) = 0, 1 \leq i \leq |P|, i \notin I_{const}\} \\
 I_{ind} &= \{i \mid 1 \leq i \leq |P|, i \notin (I_{const} \cup I_{inj})\}
 \end{aligned}$$

Eine direkte Anwendung dieser Methode ist beispielsweise zu untersuchen, welche unbekannt Parameter sich als nächste aus bestimmten ausgewählten Messpunkten des Gesamtverhaltens bestimmen lassen.



# 4 Entwicklung und Verifikation einer Sequentiellen Parameteridentifikation für ein physikalisches Reifenmodell

Ziel dieses Kapitels ist nach der Vorstellung der Methode der *Sequentiellen Parameteridentifikation* nun, diese bei der Erstellung eines *funktionsverifizierten Identifikationsverfahrens* für ein Systemmodell anzuwenden. Dabei sollen alle drei in Abschnitt 3.1 genannten Ziele erreicht werden, also eine minimale Zahl von *Zielgrößen* und dafür notwendiger Messpunkte, der analytische Nachweis der *Eindeutigkeit* der Parameter in den *Zielgrößen* und damit die *Identifizierbarkeit* der Parameter sowie ein Verfahren zur *Inversion* des Parameter-*Zielgrößen*-Zusammenhangs mit *verifizierter Konvergenz* gegen die Lösung. Analysiert wird ein Reifenmodell, das das mechanische Verhalten eines Fahrzeug-Reifens unter *Anregung* der räumlichen Bewegung einer montierten Reifenfelge beschreibt. Eingesetzt wird das Reifenmodell zur Simulation der *Fahrdynamik* eines Gesamtfahrzeugs, in dessen Modell dazu mehrere *Instanzen* des Reifenmodells integriert werden. Etliche Parameter definieren die mechanischen Eigenschaften einzelner Komponenten des Reifens. Im Reifenmodell wird das Verhalten dieser Komponenten einzeln mit physikalischem Hintergrund oder auch abstrahiert in zusammengefassten Eigenschaften von Teilsystemen berechnet. Aus den Parametern wird eine sinnvolle Auswahl getroffen, die berücksichtigt, ob diese ohnehin offensichtlich oder entscheidend für das Systemverhalten sind. Nur diese Auswahl von Parametern soll durch ein entsprechendes Verfahren *identifiziert* werden. Um die notwendigen Voraussetzungen für eine spätere Analyse zu schaffen, muss das Modell zunächst mit samt seinen Gleichungen und den fachspezifischen Begriffen vorgestellt werden. Dabei soll es auch im Kontext anderer gängiger Reifenmodelle klassifiziert werden, um die Übertragbarkeit von Resultaten beurteilen zu können. Messungen an realen Reifen, die die Grundlage einer *Parameteridentifikation* bilden, finden üblicherweise an *Reifenprüfständen* statt, deren Ergebnisse am besten einfließen können, wenn sie mitmodelliert werden. Daher werden auch *Reifenprüfstände* inklusive ihrer Abbildung im Modell behandelt. Der wesentliche Anteil dieses Kapitels basiert nun auf diesen Grundlagen und leitet in Unterabschnitten jeweils die Eigenschaf-

ten der einzelnen *Parametergruppen* einer *Sequentiellen Parameteridentifikation* her. Für diese *Parametergruppen* lassen sich damit bereits *verifiziert* gegen die *eindeutige* Lösung konvergierende Lösungsverfahren aufstellen, die allerdings voraussetzen, dass die Werte der davor angeordneten *Parametergruppen* feststehen. Steht die Aufteilung aller Parameter in *Gruppen* und ihre Anordnung fest, kann auf Basis der Einzelverfahren das Gesamtverfahren zusammengestellt werden. Um den Ablauf des Gesamtverfahrens besser zu veranschaulichen, soll im Anschluss ein beispielhafter Gesamtlauf der *Sequentiellen Parameteridentifikation* illustriert werden, der als konkrete simulationsbasierte Berechnung abschließend auch die praktische Funktion der verifizierten Identifikationsmethode aufzeigt.

### 4.1 Modellbeschreibung

Das in diesem Kapitel analysierte Reifenmodell ist in der Fahrzeugsystemdynamik-Forschung der Daimler AG als Komponente der Gesamtfahrzeug-Simulationsumgebung *CASCaDE* im Einsatz und wurde dort von Dr. Michael Gipser im Jahr 1990 entwickelt. Die spätere Modellbeschreibung deckt nicht den gesamten Modellumfang ab, und beschränkt sich stattdessen auf die parametergesteuert auswählbaren Modellanteile, die sich in der Praxis der Fahrdynamiksimulation in erster Linie bewährt haben. Zur Simulation von Reifenverhalten sind bis heute viele Modelle mit unterschiedlichen Ansätzen und Zielfokussierungen erstellt worden. Daher lässt sich ein Reifenmodell am besten vor dem Hintergrund einer Zusammenstellung der verschiedenen Modelltypen und -kategorien charakterisieren.

#### 4.1.1 Reifenmodelle

Eine umfassende und ausführliche Einteilung der Vielzahl vorhandener Reifenmodelle nach Modellierungsprinzipien und Simulationszielen bietet [73]. Für einen Überblick und die Kategorisierung des hier verwendeten Reifenmodells genügt jedoch die gröbere Einteilung nach [64]. [64] unterscheidet die 4 Modellkategorien *Kennlinien*-Modelle, *Bürsten- und Ring*-Modelle, *Lumped Mass*-Modelle sowie *Finite-Elemente*-Modelle. Neben unterschiedlichen Modellierungsprinzipien werden diesen Modelltypen in [64] auch verschiedene Modellierungsziele zugeordnet: Den *Kennlinien*-Modellen die *Fahrdynamik*, also die Gesamtfahrzeugbewegung des *Normalfahrbereichs*, den *Bürsten- und Ring*-Modellen die *Fahrdynamik* bis über die Grenze der *Fahrstabilität*, den *Lumped Mass*-Modellen die *Betriebsfestigkeitsanalyse* und den *Finite-Elemente*-Modellen die *Komfort- und Schwingungsanalyse*. Die Reihenfolge der genannten Modellkategorien gibt auch den steigenden

Modellierungs- und Berechnungsaufwand wieder. So teilen die unterschiedlichen Modellierungsansätze bspw. den Gesamtreifen in immer mehr Einzelteile bzw. Wechselwirkungen zwischen den Teilen auf. Damit werden mit steigender Komplexität immer mehr mit kleiner Amplitude und hoher Frequenz gegeneinander schwingende Komponenten dargestellt, die in einfacheren Beschreibungen als starr verbunden angenommen werden, und es wird klar, warum die Modelltypen in [64] auch immer höhere Frequenzbereiche abdecken, und die damit verbundenen Zielsetzungen erfüllen können. Komplexere Modelle erreichen auch die Modellierungsziele der einfacheren Modelle, werden laut [64] aber sinnvollerweise nicht dazu eingesetzt, da der deutlich erhöhte Rechenaufwand einen erheblichen Nachteil darstellt.

Nach [64] kann der Aufbau bei den verschiedenen Modellkonzepten wie folgt dargestellt werden: *Kennlinien*-Modelle beschreiben den Zusammenhang zwischen *Anregungs-* und *Antwortgrößen* durch parameterabhängige mathematische Terme. Der bekannteste Vertreter dieser Reifenmodelle ist das *Pacejka*-Modell, das auch unter dem Namen *Magic-Formula* bekannt ist. *Bürsten-* und *Ring*-Modelle bilden die Vorgänge in der Kontaktzone des Reifens mit der Fahrbahn durch einzelne *Reibkontakt-Elemente* ab, die wie *Borsten* einer *Bürste* im *Latsch* aufgehängt sind, und bei Relativbewegung zwischen *Latsch* und Fahrbahn geschert werden. Die Reifenanteile ohne Bodenkontakt sind als ringförmiger *Starrkörper* modelliert und mit *Latsch* und *Felge* über elastische Koppellemente verbunden. Es lassen sich ein- und zweidimensionale Varianten unterscheiden, bei denen die *Reibkontakt-Elemente* entweder vereinfacht eindimensional in einer Linie oder zweidimensional als vollständige Kontaktfläche dargestellt werden. Genau in die Kategorie der *zweidimensionalen Bürsten- und Ring*-Modelle fällt das Reifenmodell, zu dem hier die *Sequentielle Parameteridentifikation* entworfen werden soll. *Lumped Mass*-Modelle beschreiben die Bodenkontaktzone genauso mit einem zweidimensionalen Feld aus *Reibkontakt-Elementen*. Die Reifenanteile ohne Bodenkontakt werden jedoch nicht als *Starrkörper*, sondern als Fläche aus Massepunkten dargestellt, die über translatorische und rotatorische Federelemente zu einem Netzwerk untereinander und mit der Felge verbunden sind. Ein Vertreter dieser Gruppe ist das Reifenmodell *FTire*, das u. A. nichtlineare Feder-Dämpfer-Reibelemente zur Verbindung der Massepunkte, die zusätzliche Berücksichtigung des Innendrucks und des Temperaturverhaltens bietet. *Finite-Elemente*-Modelle beschreiben den Reifenaufbau detailliert über ein dreidimensionales System von *kontinuumsmechanischen Spannungselementen*, die in der Bodenkontaktzone um Reibeigenschaften ergänzt werden. Nur solche Modelle kommen ohne eine teilweise Abstraktion von exakten physikalischen Vorgängen aus und sind auch als Hilfsmittel zur Konstruktion von Reifen einsetzbar. Beispiel für ein Modell dieser Kategorie ist *RMOD-K FEM*. [64] erwähnt wie [73] allerdings auch das Reifenmodell *MF-Swift*, das sich in keine dieser 4 Modelltypen einordnen lässt, und Eigenschaften aus mehreren Gruppen aufweist. Das Modell verbindet einen *ringförmigen Starrkörper* elastisch mit der Felge und mehreren versetzten Ellipsenformen zur Abtastung der Bodentopographie. Bodenab-

tastung und Starrkörperbewegung als Anregung liefern über ein *Magic Formula*-Modell Kräfte und Momente auf den Starrkörper. Dieser Modellierungsansatz soll die Reaktion auf feine Bodenstrukturen wie bei *Lumped Mass*-Modellen mit dem Schwingungsbereich von *Bürsten- und Ring*-Modellen sowie der schnellen Berechnung der übrigen Effekte nach Art der *Kennlinien*-Modelle verbinden und damit der abgekürzten Bezeichnung '*Magic Formula - Short Wave Intermediate Frequency Tire*' gerecht werden.

Für tiefere Einblicke in die *Bürsten- und Ring*-Modelle, der Modellfamilie des hier verwendeten Reifenmodells, empfiehlt sich spezifische Literatur. So geben [97] und [82] einen Überblick zur Entwicklung dieses Modelltyps inklusive weiterer Untervarianten aus mehreren aufeinander aufbauenden wissenschaftlichen Arbeiten. Besonders hervorgehoben werden der Beitrag [27] zur Integration von *Stollen- und Karkassendeformation* sowie die Arbeit [13] zur Verwendung des elastisch angebundenen *ringförmigen Starrkörpers*. [82] beschreibt ein Modell der *Bürsten- und Ring*-Technik im *MKS*-Formalismus, das so allerdings nicht die Modellierungstiefe des hier verwendeten Reifenmodells erreicht. Einmal passt sich die Form der Bodenkontaktzone nicht für *gestürzten* (gekippten) *Starrkörperring* an, der Ring ist auch keine *Ringschale*. Und dann wird in der Kontaktzone die Längsverteilung der Vertikalkräfte nicht in Abhängigkeit der Verschiebungen von *Starrkörperring* und *Latsch* inklusive der Auswirkung auf die Kontaktreibung berücksichtigt. Bei den übrigen Modellkomponenten wie bspw. der Anbindung des *Starrkörperrings* an die Felge, der *Ansatzfunktion* für die Bodendruckverteilung und der *Latsch*-Verschiebung bzw. -Krümmung sind sich die Modelle ähnlich. [97] stellt ein Modell vor, das den *Starrkörperring* in der Form durch eine *Ringschale* ersetzt und berücksichtigt den Einfluss einer *gestürzten Ringschale* auf den Umriss der Bodenkontaktzone. Viele weitere Modellkomponenten stimmen weitgehend mit denen des hier verwendeten Reifenmodells überein, es gibt jedoch auch Abweichungen. Auch bei [97] wird die Längsverteilung der Vertikalkräfte nicht abhängig von den Verschiebungen von *Starrkörperring* und *Latsch* beschrieben. Da sich die Analyse in [97] auf die *Querdynamik* des Reifens konzentriert, ist dies nicht so ausschlaggebend und erlaubt weiter, die ursprüngliche Starrkörpermasse der *Ringschale* in *Längs- und Vertikalrichtung* auf eine Punktmasse zu vereinfachen. Um die *Querdynamik* bis in den hohen Frequenzbereich darstellen zu können, wird im Gegenzug über die Modellierungstiefe von *Bürsten- und Ring*-Modellen hinausgehend der *Reifenumfang* in mehrere Segmente unterteilt, von denen in *Querichtung* benachbarte Segmente translatorisch und rotatorisch elastisch und zusätzlich translatorisch elastisch an die Felge gekoppelt sind. Interessant sind auch die in [14] entworfenen Modelle, die alle auf der *Bürsten- und Ring*-Technik basieren. In dieser Arbeit interessiert vorwiegend die Auswirkung von *Ungleichförmigkeiten* des Reifenaufbaus oder kleinen Hindernissen auf das Schwingverhalten, was eine Einschränkung auf konstante Felgenhöhe, glatte Fahrbahn, ausbleibende Brems- und Antriebsmomente sowie konstante Querbewegung erlaubt. Damit spielt der *Brush*-Anteil kaum eine Rolle, die korrekte Berechnung im höheren Frequenzbereich macht jedoch Erweiterungen nötig. Dazu wird die Bodenkon-

taktzone in mehrere starre Längsstreifen eingeteilt, die drehelastisch untereinander und mit den Seitenwänden gekoppelt sind. Eine zusätzliche Modellerweiterung beschreibt die Reifen-Seitenwände als kreisförmig angeordnete, massebehaftete radiale Membransegmente, die in Normalenrichtung schwingen. Beide Modellerweiterungen beschreiben so den Übergang vom *Bürsten- und Ring-Ansatz* zur eindimensionalen *Lumped Mass-Modellierung*.

Eine Vorstufe zum zweidimensionalen *Lumped Mass-Modell FTire* wird in [34] unter dem Namen *DNS-Tire* vorgestellt. Dabei ergeben sich bereits *Latschverschiebung*, *Latschkrümmung* und *Bodendruckverteilung* aus elastischen Kräften und Momenten des Federnetzwerks. In [23] wird ein weiteres Modell der *Lumped Mass-Technik* beschrieben, das bei der Modellierung des Reifenumfangs sogar auf ein dreidimensionales Netzwerk aus Massepunkten zurückgreift. Dort ist auch ein hilfreiches Kriterium zu finden, wann der Übergang von einem *Bürsten- und Ring-* auf ein *Lumped Mass-Modell* sinnvoll ist. Wenn der Einfluss von Bodenunebenheiten einer Wellenlänge kleiner der Kontaktzonenlänge berücksichtigt werden soll, gelingt dies nur noch mit der feineren Auflösung der gesamten Reifenstruktur.

Die Reifenmodelle der Arbeiten [26] und [99] sind *Finite-Elemente-Modelle* zur detaillierten mehrschichtigen Abbildung des Reifenaufbaus, die sich so auch zur Auslegung für Hersteller eignen. Beide Modelle können jedoch nicht zur Fahrsimulation verwendet werden, da sie bspw. kein Reibmodell für den Kontakt zwischen Reifen und Fahrbahn enthalten. Die Berechnung muss sich auf Verformungszustände unter vorgegebenen äußeren Kräften beschränken. Es werden jeweils verschiedene Modellierungsansätze der Kontinuumsmechanik abgewogen. [26] vergleicht zur Beschreibung der kordverstärkten Gummischichten Kombinationen aus *isotropen* Elementen und *Stabelementen* mit *anisotropen* Elementen, und geht genauer auf die Modellierung dünner Schichten mit *Schalenelementen* ein. Während sich [26] noch auf *linearelastisches* Materialverhalten beschränkt, benutzt [99] auch *nichtlineare* Theorien zur Materialelastizität wie das *Mooney-Rivlin-Modell* für *inkompressible* Stoffe wie Gummi, und kann so Zusammenhänge zwischen größeren Kräften und Verformungen nachbilden. Ein *Finite-Elemente-Modell*, das durch die integrierte Reibmodellierung in der Kontaktzone auch Fahrsituationen simuliert, wird in stark zusammengefasster Form in [19] vorgestellt. Allerdings kann der Reifen dort noch nicht *gestürzt* werden.

Zum Abschluss des Überblicks zu Reifenmodellen soll noch die Frage behandelt werden, warum die Modelltypen von mittlerer Komplexität, also *Bürsten- und Ring-* sowie *Lumped Mass-Modelle*, wenn sie durch die Festlegung ihrer physikalischen Parameter nicht den sicheren Schluss auf das Reifenverhalten zulassen wie die *Finite-Elemente-Modelle*, überhaupt physikalische Zusammenhänge versuchen abzubilden. Man könnte doch auch, da ohnehin die Identifikation der Parameter solcher Modelle aus Messungen realer Reifen nötig ist, einfacher die Terme eines *Kennlinien-Modells* inklusive neuer Parameter erweitern. Der Vorteil der Integration physikalischer Beschreibungen liegt darin, dass

so deutlich weniger Parameter zur Festlegung eines bestimmten Reifenverhaltens erforderlich sind. Die stärkere Beschränkung des Modells auf die Abbildung nur mechanisch realisierbarer Systeme führt zu einer kleineren Zahl von Konfigurationsparametern und erlaubt die Extrapolation auf Basis wenig gemessener Eigenschaften.

### 4.1.2 Normierte Größen

In der Reifen- und Fahrzeugkonstruktion und -berechnung haben sich etliche Begriffe etabliert, mit denen Fahrzustände und Eigenschaften von Reifen einheitlich beschrieben werden können. Ihre Definition ist in den meisten Einführungstexten zur Kraftfahrzeugdynamik zu finden wie bspw. in [54], [40] und [57]. Die offizielle und verbindliche Begriffsbildung ist Teil der Normdokumente DIN 70000 ([69]) bzw. ISO 8855 ([48]) und SAE J2047 ([44]). Für die Reifensimulation sind einige dieser Größen eine modellübergreifend unverzichtbare Grundlage. Daher soll auch hier eine Auswahl der Norm-Begriffe detailliert eingeführt werden. Alle folgenden Größen stimmen in ihrer Bedeutung exakt mit der Norm-Festlegung überein, allerdings sind die Definitionen neu formuliert:

**Definition 1 (Ortsfestes Koordinatensystem, gem. DIN 70000)** *Zu jedem Punkt  $P$  einer realen oder modellierten Straßenoberfläche ist ein ortsfestes Koordinatensystem  $(X_E, Y_E, Z_E)$  definiert. Die Koordinatenachsen  $X_E$ ,  $Y_E$  und  $Z_E$  bilden ein rechtwinkliges Rechtssystem, wobei die  $X_E$ - $Y_E$ -Ebene die Tangentialebene der Straßenoberfläche in  $P$  ist, und  $Z_E$  nach oben zeigt (Abbildung 4.1).*

Hierdurch wird die genaue Richtung von  $X_E$  und  $Y_E$  nicht festgelegt. Für die Anwendung in Reifenmodellen mit grober Auflösung des Straßenprofils wie hier mit ungefähr dem halben Reifendurchmesser muss eine hinreichend glatte Fahrbahnoberfläche vorausgesetzt werden, damit diese Definition sinnvoll eingesetzt werden kann.

Der zentrale Begriff des *Rads* wird nicht einheitlich benutzt. Die Normen ISO 8855 und SAE J2047 definieren ihn zwar als die Radfelge ohne montierten Reifen, wogegen er innerhalb der DIN 70000 als Kombination von Reifen und Felge gebraucht, dort selbst aber gar nicht offiziell definiert wird.

**Definition 2 (Raddrehachse, gem. ISO 8855 - wheel-spin axis)** *Die Raddrehachse ist die Mittelachse und Hauptdrehrichtung der Radfelge (Abbildung 4.3).*

**Definition 3 (Radmittelebene, gem. DIN 70000)** *Mit Radmittelebene wird die Symmetrieebene der Radfelge senkrecht zur Raddrehachse bezeichnet (Abb. 4.3).*



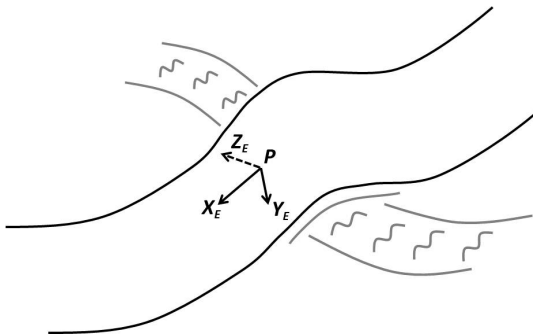


Abbildung 4.1: Ortsfestes Koordinatensystem

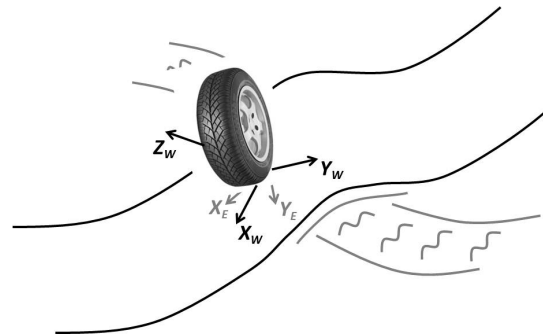


Abbildung 4.2: Radfestes Koordinatensystem

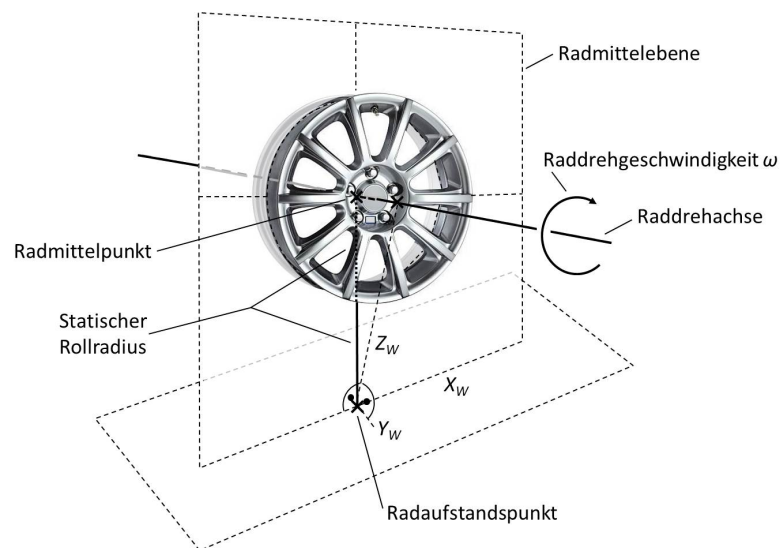


Abbildung 4.3: Raddrehachse, Radaufstandspunkt

**Definition 4 (Radmittelpunkt, gem. DIN 70000)** *Der Radmittelpunkt ist der Schnittpunkt der Raddrehachse mit der Radmittelebene (Abb. 4.3).*

**Definition 5 (Radaufstandspunkt, gem. DIN 70000)** *Radaufstandspunkt heißt der Schnittpunkt von Radmittelebene und der Projektion der Raddrehachse entlang Richtung  $Z_E$  auf die  $X_E$ - $Y_E$ -Ebene (Abb. 4.3).*

Damit dieser eindeutig definiert ist, muss eine hinreichend glatte Fahrbahnoberfläche vorausgesetzt werden.

**Definition 6 (Bahngeschwindigkeit, gem. SAE J2047 - Trajectory Velocity)** *Als Bahngeschwindigkeit wird der Betrag der inertialen Geschwindigkeit des Radaufstandspunkts bezeichnet ( $|\vec{v}_{\text{Radaufstandspunkt}}|$  in Abb. 4.4).*

**Definition 7 (Radfestes Koordinatensystem, gem. DIN 70000)** *Zu einem Rad an einem bestimmten Ort auf der Fahrbahnfläche ist ein radfestes Koordinatensystem ( $X_W, Y_W, Z_W$ ) definiert (Abb. 4.2 und 4.3). Sein Ursprung ist der Radaufstandspunkt. Die  $X_W$ -Achse ist die Schnittlinie der Radmittelebene mit der  $X_E$ - $Y_E$ -Ebene des ortsfesten Koordinatensystems im Radaufstandspunkt. Als Teil eines Gesamtfahrzeugs zeigt die  $X_W$ -Achse im System des Fahrzeugs nach 'vorn', als separat betrachtetes Rad kann die Richtung festgelegt werden. Auch die  $Y_W$ -Achse liegt in der  $X_E$ - $Y_E$ -Ebene. Durch die Forderung, dass das radfeste Koordinatensystem ein rechtwinkliges Rechtssystem ist, ist es schließlich vollständig definiert.*

**Definition 8 (Radlenkwinkel, gem. DIN 70000)** *Mit Radlenkwinkel bezeichnet wird der Winkel  $\delta$  zwischen  $X_V$ - und  $X_W$ -Achse in Drehrichtung der  $Z_W$ -Achse (Abb. 4.4). Die  $X_V$ -Achse ist eine festzulegende Achse in der  $X_E$ - $Y_E$ -Ebene.*

In der kombinierten Betrachtung von Rad und Fahrzeug wird für  $X_V$  die Längsausrichtung des Fahrzeugs gewählt. Ist das Rad statt an ein Fahrzeug mit einem stationären Prüfstand verbunden, kann  $X_V$  als zeitkonstante Richtung innerhalb der  $X_E$ - $Y_E$ -Ebene, beispielsweise parallel zu  $X_E$  definiert werden.

**Definition 9 (Schräglaufwinkel, gem. DIN 70000)** *Der Schräglaufwinkel ist der Winkel  $\alpha$  in Drehrichtung der  $Z_W$ -Achse zwischen  $X_W$ -Achse und der Tangente an die Bahnkurve des Radaufstandspunkts im Radaufstandspunkt (Abbildung 4.4).*

**Definition 10 (Radsturzwinkel, gem. DIN 70000)** *Mit Radsturzwinkel wird der Winkel  $\varepsilon_W$  zwischen  $Z_W$ -Achse und Radmittelebene in Drehrichtung der  $X_W$ -Achse bezeichnet (Abbildung 4.4).*

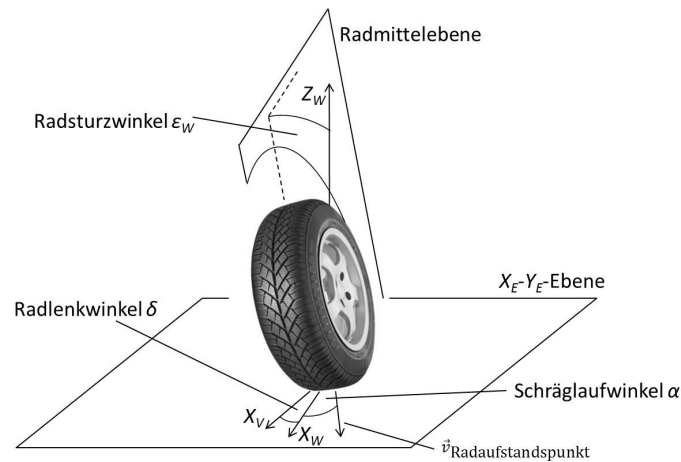


Abbildung 4.4: Radwinkel

**Definition 11 (Statischer Rollradius, gem. DIN 70000)** Der statische Rollradius  $r_{stat}$  ist als Abstand zwischen Radmittelpunkt und Radaufstandspunkt während einer zusätzlich zu spezifizierenden Stationärsituation (s. Abschn. 4.1.7) definiert (Abbildung 4.3).

**Definition 12 (Einfederung, gem. SAE J2047, Static Tire Deflection)** Unter der Größe Einfederung wird die Differenz zwischen dem maximalen Radradius  $R_{max}$ , also dem größten der Umfangsradien um die Raddrehachse in den Radlängsschnitten (Abb. 4.5), und dem statischen Rollradius verstanden:  $R_{max} - r_{stat}$ .

**Definition 13 (Raddrehgeschwindigkeit, gem. DIN 70000)** Die Drehgeschwin-



Abbildung 4.5: maximaler Radradius

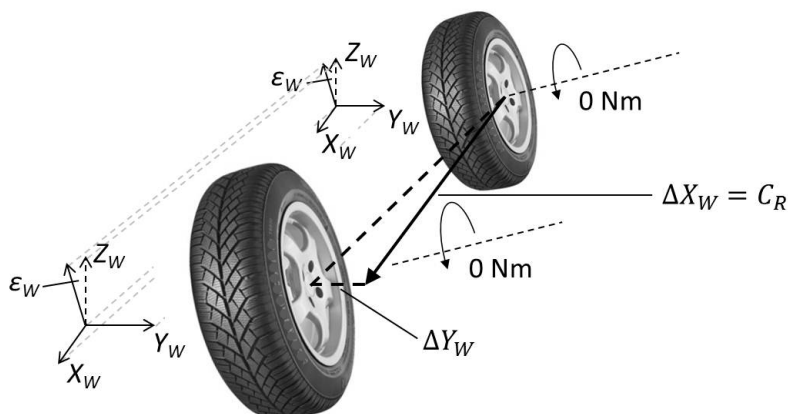


Abbildung 4.6: Abrollumfang

digkeit der Radfelge als Winkelgeschwindigkeit um die Raddrehachse wird mit Raddrehgeschwindigkeit  $\omega$  bezeichnet (Abbildung 4.3). Ihre Drehorientierung stimmt unter Radsturzwinkel  $0$  mit der Orientierung von  $Y_W$  überein.

**Definition 14 (Dynamischer Abrollumfang, gem. DIN 70000)** Als *dynamischer Abrollumfang*  $C_R$  wird die Länge der Komponente in  $X_W$ -Richtung der Strecke bezeichnet, die die Radmitte bei einer momentenfreien Umdrehung um die Raddrehachse unter konstantem Radlenkwinkel  $\delta$ , Schräglaufwinkel  $\alpha$ , Radsturzwinkel  $\varepsilon_W$ , statischem Rollradius  $r_{stat}$  und konstanten Umgebungsbedingungen wie Reifendruck, Temperatur u.s.w. zurücklegt (Abbildung 4.6).

Der *dynamische Abrollumfang* ist abhängig von den konstant zu haltenden Zustandsgrößen  $\alpha$ ,  $\varepsilon_W$ ,  $r_{stat}$ , Reifendruck, Temperatur u.s.w., wovon sich auch die Bezeichnung ableitet. Unterschiedliche Werte dieser Zustandsgrößen verformen die Gummischicht des Reifens in der Fahrbahnkontaktfläche unterschiedlich. Somit ergeben sich auch jeweils verschieden ausgeprägte Komprimierungen und Dehnungen der abrollenden Gummischicht in  $X_W$ -Richtung, was zu je anderen Abrollstrecken unter einer Radumdrehung führt. Jeder Abrollumfang ergibt sich unter einem 0-Moment um die *Raddrehachse*, also ohne Brems- und Antriebsmomente, die auf die Felge einwirken. Um auch solche Zustände genau festlegen zu können, muss aufbauend auf der Definition des *dynamischen Abrollumfangs* noch der *Umfangsschlupf* eingeführt werden.

**Definition 15 (Dynamischer Rollradius, gem. DIN 70000)** Der *zustandsabhängige dynamische Rollradius*  $r_{dyn}$  ist eine Umrechnung des entsprechenden zustandsab-

hängigen dynamischen Abrollumfangs auf den Radius eines Kreises mit diesem Umfang:

$$r_{dyn} = \frac{C_r}{2\pi}$$

Ein starres Rad mit dem *dynamischen Rollradius* als Radradius legt bei einer Umdrehung um die Raddrehachse die gleiche Längsstrecke zurück wie ein Reifen in einem Zustand entsprechend dem *dynamischen Rollradius*.

**Definition 16 (Umfangsschlupf, gem. DIN 70000)** Bezeichnet man mit  $v_{X_W}$  die inertielle Geschwindigkeitskomponente der Radmitte in Richtung  $X_W$ , kann der Umfangsschlupf  $S_{X,W}$  definiert werden:

$$S_{X,W} = \frac{\omega r_{dyn} - v_{X_W}}{v_{X_W}}$$

Generell vervollständigt der Umfangsschlupf  $S_{X,W}$  bei bekannten Zustandsgrößen  $\delta$ ,  $\alpha$ ,  $\varepsilon_W$ ,  $r_{stat}$ ,  $\omega$  die Beschreibung der inertialen Radbewegung und -orientierung durch die implizite Festlegung der Radlängsgeschwindigkeit  $v_{X_W}$ . Dass hierzu der kompliziertere *Umfangsschlupf* verwendet wird, liegt daran, dass dieser die Auswirkungen der Radbewegung auf den Reifen und damit die resultierenden Kräfte besser beschreibt. Ohne die inneren mechanischen Vorgänge im Reifen zu betrachten, machen sich verschiedene Werte von  $S_{X,W}$  bei gleichbleibenden  $\delta$ ,  $\alpha$ ,  $\varepsilon_W$ ,  $r_{stat}$  und v.A.  $\omega$  durch verschieden lange in  $X_W$ -Richtung abgefahrne Strecken nach einer Radumdrehung bemerkbar. Abbildung 4.7 illustriert diese Eigenschaft und liefert damit für den Zähler  $\omega r_{dyn} - v_{X_W}$  der Schlupfdefinition eine zeitabhängige Deutung als Streckendifferenz gegenüber dem vom schlupffrei rollenden Rad zurückgelegten Weg. Die Relativgeschwindigkeit  $\omega r_{dyn} - v_{X_W}$  kann für ein starres Rad, wie es Abbildung 4.8 zeigt, direkt gedeutet werden. Hier schleift der in Fahrbahnkontakt stehende Radpunkt mit genau dieser inertialen Längsgeschwindigkeit über die Straßenoberfläche. Im Fall eines Reifens ist diese Deutung so direkt nicht möglich, da hier ein Teil der Gummifläche mit Bodenkontakt auch beim bewegten Rad an der Straßenoberfläche haftet. Für kleine Schlüpfte schleift evt. gar kein Punkt des Rads über die Fahrbahnfläche. Gleiten Punkte über die Bodenfläche, haben sie nicht immer alle die gleiche Geschwindigkeit.

Gerade für den haftenden Teil der Boden-Kontaktzone eines Reifens jedoch kann die Gesamtgröße des *Umfangsschlupfs* sinnvoll gedeutet werden (Abbildung 4.9). Dazu wird einmal  $\Delta X_W$  als der Abstand eines Punkts der Reifen-Gummischicht mit Straßenkontakt in  $X_W$ -Richtung zum Anfang der Bodenkontaktzone eingeführt. Weiter bezeichnet  $a_x$  die Versatzstrecke des Punkts gegenüber der Position, an der er sich befinden würde, würde er nicht am Boden haften, sondern auf einer reibfreien Fläche über den Boden gleiten. Oder anders ausgedrückt gegenüber der Position, an der sich der Punkt befinden würde, würde die äußere Gummischicht des Reifens wie beim starren Rad in Abbildung

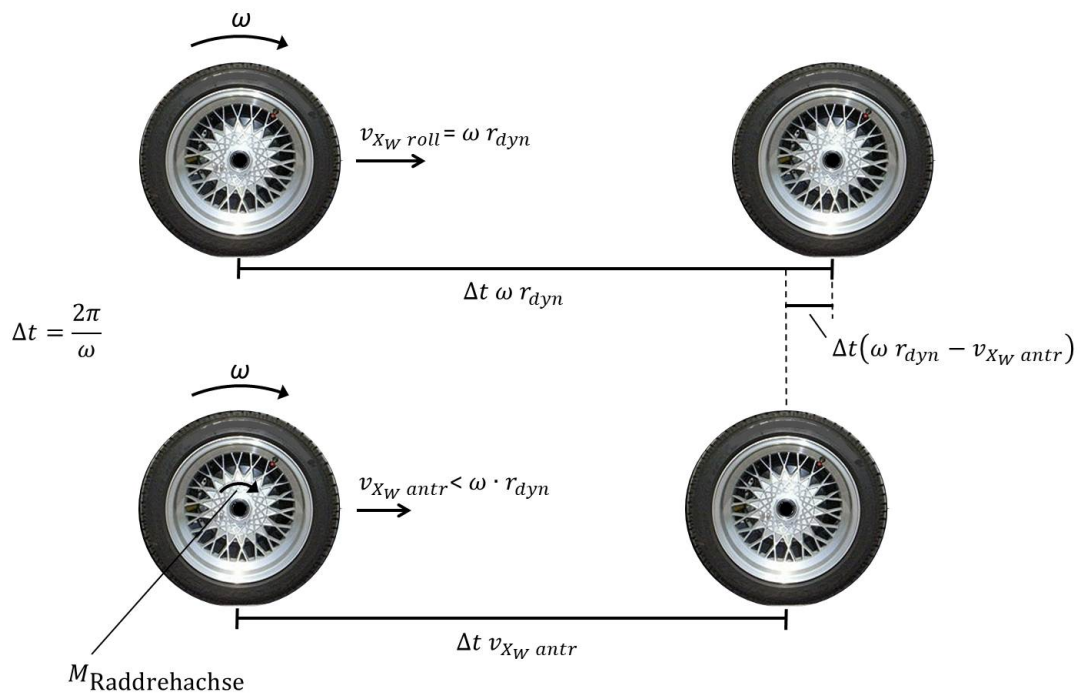


Abbildung 4.7: umfangsschlupfabhängiger Weg

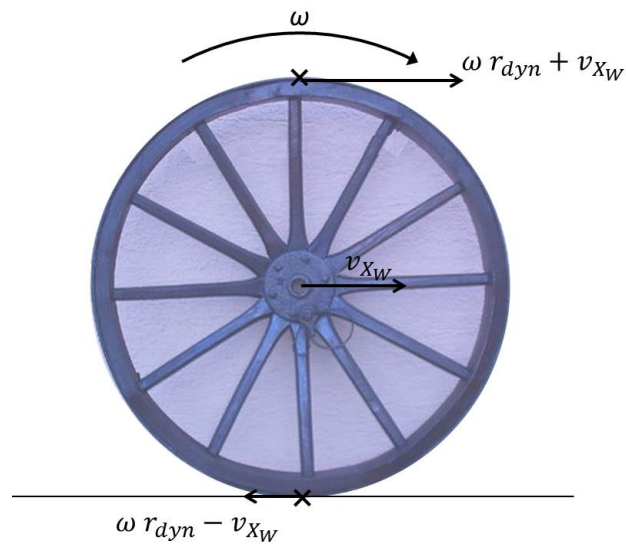


Abbildung 4.8: Schlupfgeschwindigkeit beim starren Rad

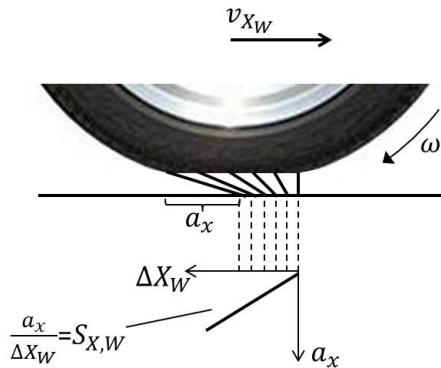


Abbildung 4.9: Auslenkungsprofil unter Umfangeschlupf



Abbildung 4.10: Federwirkung der gedehnten Gummischicht

4.8 starr über die Straße schleifen mit der Bewegung, die allein von  $v_{X_W}$  und  $\omega$  festgelegt wird. Da sich der vom Reifen überdeckte Straßenabschnitt mit Geschwindigkeit  $v_{X_W}$  über den Boden bewegt, entfernt sich auch ein straßenfester Punkt mit Geschwindigkeit  $v_{X_W}$  vom Beginn der Straßenkontaktzone. Es gilt also für einen Punkt mit Abstand  $\Delta X_W$  zum Beginn der Kontaktzone, der sich seit Zeit  $\Delta t$  in der Kontaktzone befindet:  $\Delta X_W = v_{X_W} \Delta t$ . Der Streckenversatz  $a_x$  kann aus Fahrbahnperspektive berechnet werden und ist als Abstand eines an der Straße haftenden und eines sich von diesem mit der Geschwindigkeit des Straßenkontaktpunkts beim starren Rad (Abbildung 4.8) wegbewegenden Punkts  $a_x = \Delta t (\omega r_{dyn} - v_{X_W})$ . Insgesamt folgt

$$\frac{a_x}{\Delta X_W} = \frac{\omega r_{dyn} - v_{X_W}}{v_{X_W}} = S_{X,W}$$

Also beschreibt der Umfangeschlupf  $S_{X,W}$  genau die Ausprägung des Längsversatzes haftender Reifenpunkte gegenüber ihrer reifenseitigen Position bei einer starren Radbewegung ohne reifeninnere Materialverschiebung bzw. bei einer Radbewegung ohne Horizontalkräfte auf die Gummischicht in der Kontaktzone. Genau diese Unterschiede in der reifenseitigen Auslenkung der Gummischicht in der Fahrbahnkontaktzone gegenüber der Situation bei horizontalkraftfreiem Abrollen sind für die Entstehung von Antriebs- und Bremskräften verantwortlich, wie Abbildung 4.10 durch die Längsfederwirkung der ausgelenkten Positionen veranschaulicht. Also stellt die Zustandsgröße  $S_{X,W}$  anders als die elementaren Größen  $\omega$  und  $v_{X_W}$  bereits einen direkten Bezug zu den resultierenden Antriebs- und Bremskräften her.

Auch die gewählte Zustandsgröße  $\alpha$  liefert einen solchen direkten Bezug zu resultierenden Größen, der aus den Größen  $v_{X_W}$  und  $v_{Y_W}$ , die als Geschwindigkeiten des Radmittelpunkts

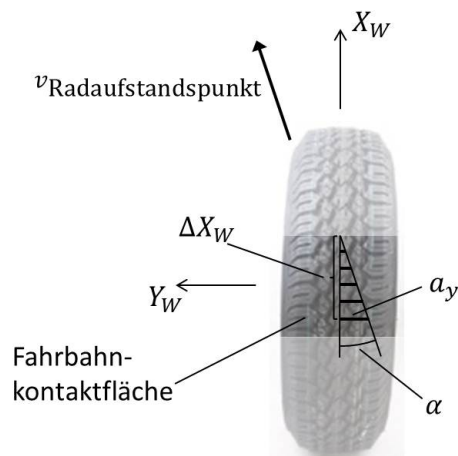


Abbildung 4.11: Auslenkungsprofil unter *Schräglauf*

oder auch des *Radaufstandspunkts* in  $X_W$ - bzw.  $Y_W$ -Richtung definiert werden können, nicht direkt hervorgeht. Abbildung 4.11 zeigt, dass es sich hierbei um Auslenkungen der haftenden Gummischicht in  $Y_W$ -Richtung gegenüber den Positionen handelt, die sie aus Reifenperspektive einnehmen würden, würde die Gummischicht horizontalkraftfrei quer über die Fahrbahn gleiten.  $a_y$  bezeichnet für eine Position eine solche Auslenkung. Den Verlauf der Auslenkungen  $a_y$  abhängig vom Längsabstand  $\Delta X_W$  (s.o.) bestimmt direkt der *Schräglaufwinkel*  $\alpha$  gemäß dem Zusammenhang  $a_y = \Delta X_W \cdot \tan \alpha$ . Die Auslenkungen  $a_y$  der haftenden Gummischicht bewirken Federkräfte in  $Y_W$ -Richtung. Somit stellt  $\alpha$  zumindest für sturzfrei ( $\varepsilon_W = 0$ ) bewegte Räder einen direkten Bezug zur resultierenden Kraft in  $Y_W$ -Richtung her. Auf die Kräfte in  $X_W$ - und  $Y_W$ -Richtung haben natürlich auch andere Faktoren wie die Form der Fahrbahnkontaktzone und der Übergang der Gummischicht von Haft- in Gleitreibung einen Einfluss, so dass die Größen nicht allein aus  $S_{X,W}$  und  $\alpha$  folgen.  $S_{X,W}$  und  $\alpha$  sind lediglich einfache Zustandsbeschreibungen mit größtmöglichem Einfluss auf die resultierenden Horizontalkräfte bei sonst gleichbleibenden Zustands-Bedingungen.

### 4.1.3 Modell-Schnittstellen

Als Umgebungs-Schnittstellen haben Reifenmodelle zur Fahrzeugdynamiksimulation meist einmal die *Felgenanbindung* des Reifens und zusätzlich die Fahrbahntopographie. Die Felgenanbindung bildet bei Kopplung der Reifensimulation mit einer Gesamtfahrzeugsimulation die Schnittstelle zwischen Reifen und Restfahrzeug. Nur über diese Schnittstelle wirkt die berechnete Antwort des Reifenmodells auf äußere Anregungen. Dies ist auch der Fall, wenn das Modell in alternative Simulationsumgebungen eingebet-



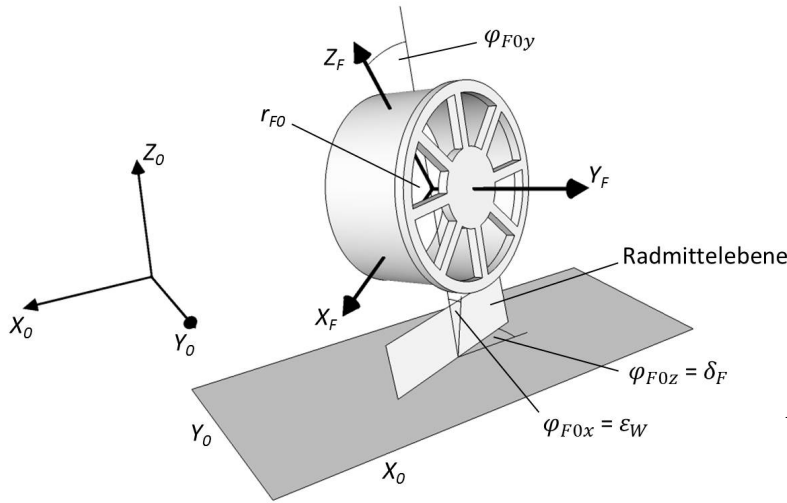


Abbildung 4.12: felgenfestes Koordinatensystem

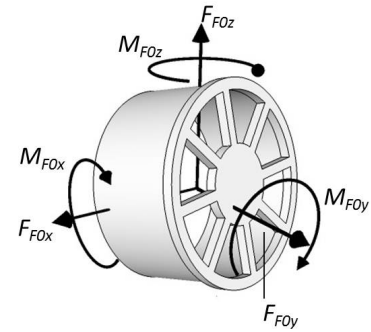


Abbildung 4.13: Antwort des Reifenmodells

tet wird wie etwa das Modell eines Prüfstands. Modellanregung über die Schnittstelle der *Felgenanbindung* ist die räumliche Bewegung des als starr betrachteten Felgenkörpers. Bei der Simulation eines Gesamtfahrzeugs steht diese Anregung nicht von vornherein fest, sondern ergibt sich aus der Wechselwirkung zwischen dem Verhalten der einzelnen Reifen und dem des Restfahrzeugs über mehrere Simulationsschritte hinweg. In einem einzelnen Zeitschritt der Simulation erfolgt die weitere Modellanregung durch die aktuelle Position des *Radmittelpunkts*  $r_{F0}$  und der Felgenorientierung im globalen Inertialsystem  $(X_0, Y_0, Z_0)$ . Zur Beschreibung der Felgenorientierung im Inertialsystem werden die 3 Winkel  $\varphi_{F0x}$ ,  $\varphi_{F0y}$ ,  $\varphi_{F0z}$  angegeben (Abbildung 4.12). Diese definieren eine Transformation vom fest an die Felge gekoppelten Koordinatensystem  $(X_F, Y_F, Z_F)$  in das Inertialsystem. Ausgehend von einer parallelen Orientierung von  $X_0$  und  $X_F$ ,  $Y_0$  und  $Y_F$  bzw.  $Z_0$  und  $Z_F$  geht die tatsächliche Orientierung des Felgensystems aus einer Drehung zuerst um  $Y_0$  mit Winkel  $\varphi_{F0y}$ , dann um  $X_0$  mit Winkel  $\varphi_{F0x}$  und zuletzt um  $Z_0$  mit Winkel  $\varphi_{F0z}$  hervor. Das entspricht einer Beschreibung der Orientierung in Kardanwinkeln der Drehreihenfolge  $\varphi_{F0y}$ ,  $\varphi_{F0x}$ ,  $\varphi_{F0z}$ .  $\varphi_{F0x}$  entspricht bei ebener Fahrbahn der Norm-Größe des *Radsturzwinkels*  $\varepsilon_W$ ,  $\varphi_{F0z}$  dem *Radlenkwinkel*  $\delta$  mit  $X_0$  als globaler  $X_V$ -Achse, und  $\varphi_{F0y}$  kann einfach als inertialer Drehwinkel der Felge um die *Raddrehachse* interpretiert werden. Formal ergibt sich:

**Definition 17 (Felgensystem)** Ein Punkt  $p$  mit Koordinaten  $p_F$  im felgenfesten System  $F$  besitzt bei Lage  $r_{F0}$  des Radmittelpunkts und Felgenorientierung  $\varphi_{F0} = \begin{pmatrix} \varphi_{F0x} \\ \varphi_{F0y} \\ \varphi_{F0z} \end{pmatrix}$

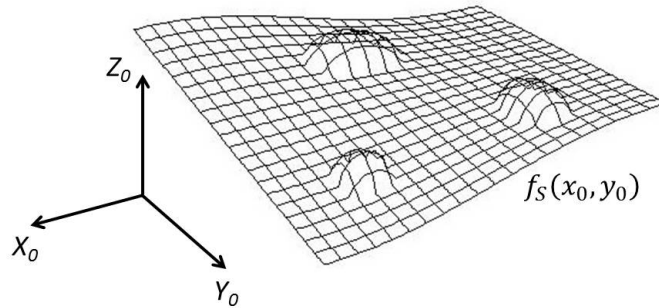


Abbildung 4.14: *Straßentopographie* als Funktion im Inertialsystem

im Inertialsystem die Koordinaten

$$p_0 = A_{F0} \cdot p_F + r_{F0}$$

mit der Drehmatrix vom System  $F$  ins Inertialsystem

$$A_{F0} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{F0z} & -\sin \varphi_{F0z} & 0 \\ \sin \varphi_{F0z} & \cos \varphi_{F0z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{F0x} & -\sin \varphi_{F0x} \\ 0 & \sin \varphi_{F0x} & \cos \varphi_{F0x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_{F0y} & 0 & \sin \varphi_{F0y} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_{F0y} & 0 & \cos \varphi_{F0y} \end{pmatrix}$$

$\varphi_{F0x}$  wird auch als Felgensturzwinkel bezeichnet.

Neben der Felgenbewegung erfolgt die Modellanregung noch über die Schnittstelle zur *Straßentopographie* (Abbildung 4.14).

Beschrieben wird die *Straßentopographie* im Inertialsystem als Funktion  $f_S$  der  $Z_0$ -Koordinate über  $X_0$ - und  $Y_0$ -Koordinate:

$$z_0 = f_S(x_0, y_0) \quad (4.1)$$

Aufgabe des Reifenmodells ist die Berechnung der Systemantwort in Form von Kräften und Momenten auf die Felge auf Grund der Anregung durch die Felgenbewegung und die *Straßentopographie*. Somit bilden die resultierende *Felgenkraft*  $F_{F0} = \begin{pmatrix} F_{F0x} \\ F_{F0y} \\ F_{F0z} \end{pmatrix}$

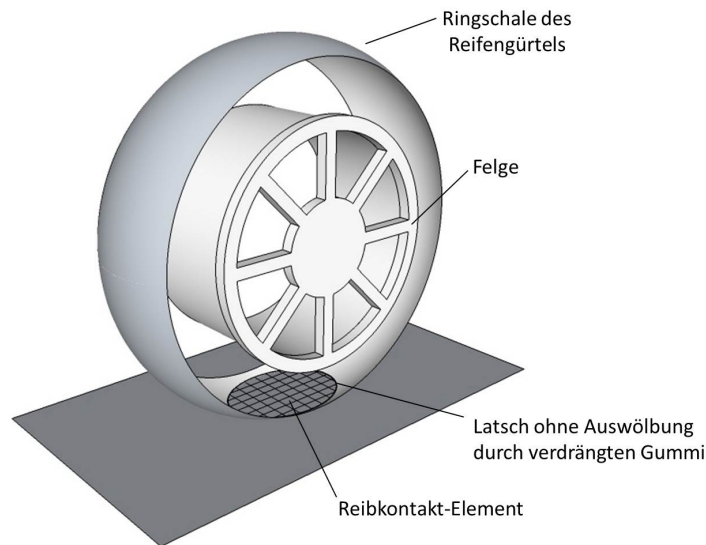


Abbildung 4.15: räumlich angeordnete zustandsbehaftete Modellkomponenten

und das resultierende *Felgenmoment*  $M_{F0} = \begin{pmatrix} M_{F0x} \\ M_{F0y} \\ M_{F0z} \end{pmatrix}$  im Punkt  $r_{F0}$  dargestellt im Inertialsystem die Ausgangsschnittstelle des Modells (Abbildung 4.13).

#### 4.1.4 Modellkomponenten

Das betrachtete Reifenmodell baut sich aus drei verschiedenen zustandsbehafteten Komponententypen auf: Den *Reibkontakt-Elementen*, dem *Latsch* und dem *Reifengürtel*. Die Kopplung dieser Elementarbausteine bestimmt den Gesamtaufbau des Modells (Abbildung 4.15). Ihre räumliche und dynamische Interaktion untereinander und mit den Modellschnittstellen Straße und Felge basiert neben klassischen zwei- und dreidimensionalen Feder-Dämpfer-Bindungen, Reibanbindungen und Tiefpassfiltern auf den spezifischen Kopplungs-Modellen zur *Bodendurchdringung* und zur *Bodendruckverteilung*. Abbildung 4.16 zeigt mit Ausnahme der Anbindung der *Straßentopographie* das Zusammenwirken der verschiedenen Modellanteile und soll beim Verständnis sowohl der Modellbeschreibung (Abschnitte 4.1.4, 4.1.5) als auch der abgeleiteten Eigenschaften (Abschnitte 4.1.7, 4.2) unterstützen.

Von den *Reibkontakt-Elementen* wird die in einzelne rechteckförmige Zellen unterteilte Gummischicht des Reifenumfangs mit Kontakt zur Straßenoberfläche modelliert. Alle Zellen grenzen nahtlos aneinander, es erfolgt also keine Modellierung eines Reifenpro-

4 Entwicklung und Verifikation einer Sequentiellen Parameteridentifikation für ein physikalisches Reifenmodell

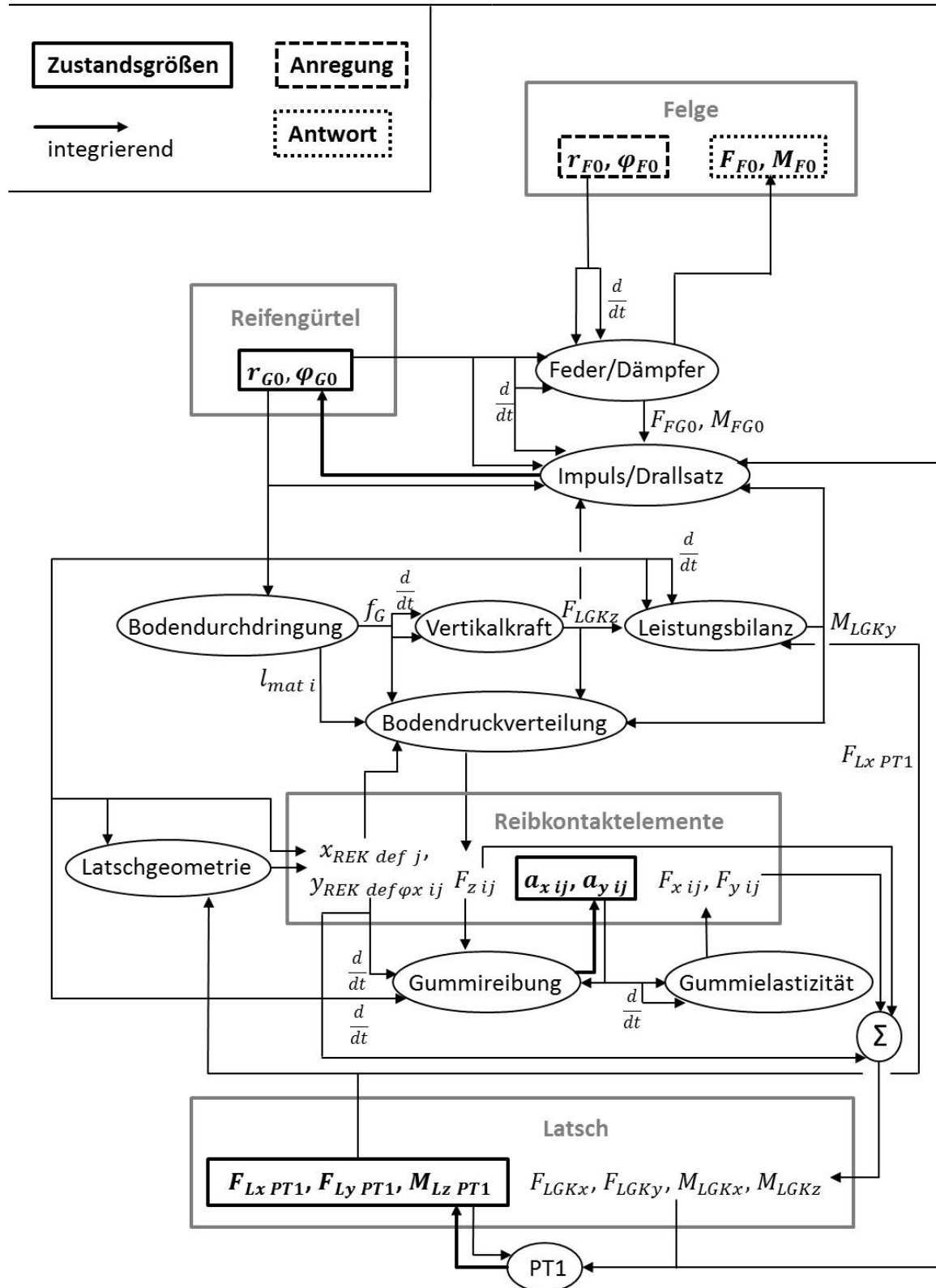


Abbildung 4.16: Topologie des Reifenmodells ohne Straßentopographie

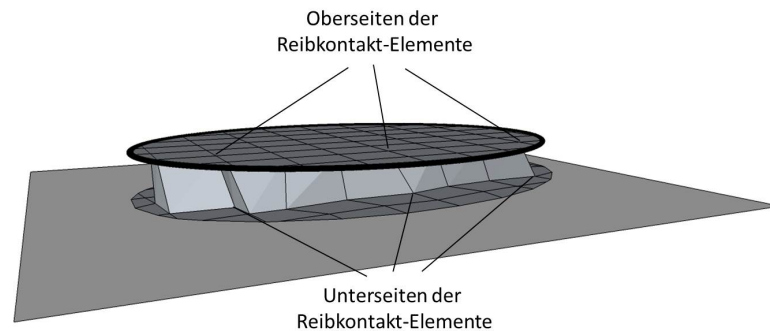


Abbildung 4.17: räumlich getrennt dargestellte Unter-/ Oberseiten der *Reibkontakt-Elemente*

files. Da nur der jeweils aktuelle Ausschnitt des Reifenumfangs mit Straßenkontakt im Modell berücksichtigt wird, müssen beim rollenden Reifen immer wieder 'ausrollende' *Reibkontakt-Elemente* entfernt und neue 'einrollende' Elemente generiert werden. Während die Unterseite der *Reibkontakt-Elemente* in Kontakt ist mit der Straße, ist ihre Oberseite fest mit dem *Latsch* verbunden (Abbildung 4.17). Durch horizontale Verschiebungen der Unter- und Oberseiten gegeneinander entstehen in jedem *Reibkontakt-Element* horizontale Kräfte, die sich auf den *Latsch* übertragen. Unter- und Oberseiten der *Reibkontakt-Elemente* liegen jedoch ohne vertikalen Abstand zueinander, bilden also keine vollständigen Volumenelemente der Gummischicht ab.

Der *Latsch* modelliert die Gummischicht mit Fahrbahnkontakt als Ganzes. Außerdem bildet er die verformbaren Anteile von Stahlgürtel und Reifenkarkasse ab, also den Schichten aus Stahldraht, Textil- und Kunstfasergeweben des Reifenumfangs. Angebunden ist der *Latsch* an den *Reifengürtel*, der modelliert als Starrkörper die nicht verformbaren Anteile von Stahlgürtel, Reifenkarkasse und den Seitenwänden abbildet. Im sturz- und horizontalkraftfreien Zustand befindet sich die Latschmitte im Schnittpunkt der Hochachse des *Reifengürtels* mit der Fahrbene. Um die verformbaren Reifenanteile abbilden zu können, muss sich die im sturz- und horizontalkraftfreien Zustand unverformte Latschfläche verbiegen und gegenüber dem Reifengürtel verschieben und verdrehen können. Bestimmt wird der Zustand des *Latschs* von den horizontalen Reifenkräften in der Fahrbahn-Kontaktzone und der Form der Kontaktfläche selbst. Während die horizontalkraftfreie Form der Kontaktzone von der Lage des Reifens gegenüber der Fahrbahnfläche abhängt, legen die horizontalen Kräfte der Kontaktzone die zusätzliche Verschiebung, Verdrehung und Verbiegung des *Latschs* gegenüber dem *Reifengürtel* fest (Abbildungen 4.18, 4.19, 4.20). Ohne Kräfte und Momente in der Fahrbene resul-

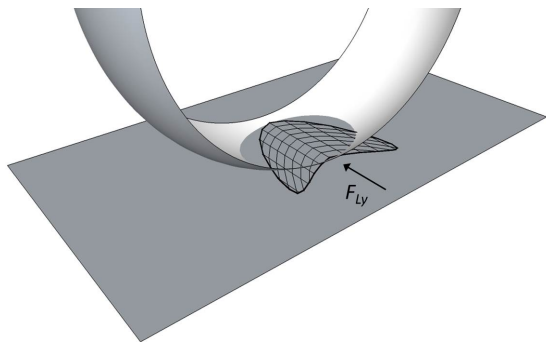


Abbildung 4.18: *Latsch-Verbiegung* durch *Latsch-Querkräfte*

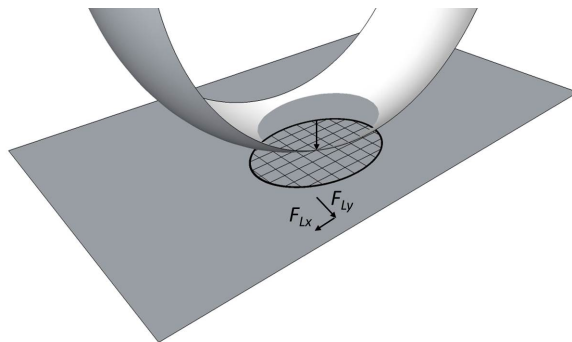


Abbildung 4.19: *Latsch-Verschiebung* durch *Latsch-Horizontalkräfte*

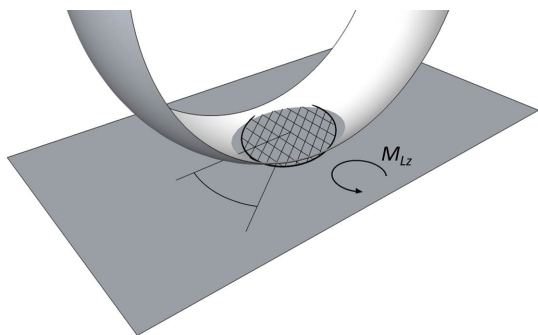


Abbildung 4.20: *Latsch-Verdrehung* durch *Latsch-Vertikalmomente*

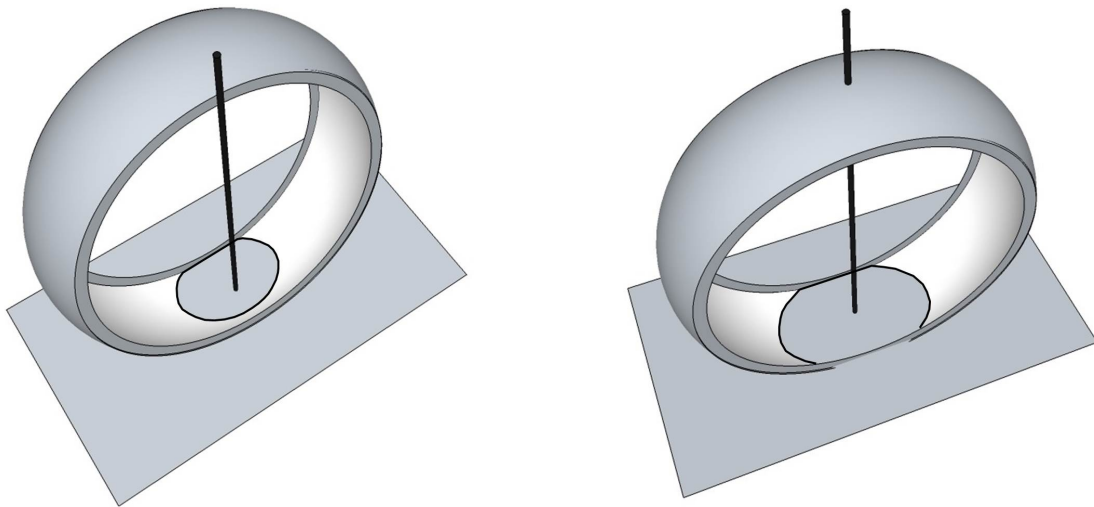


Abbildung 4.21: *Latsch*-Formen ohne Auswölbung durch verdrängten Gummi abhängig von der Lage des *Reifengürtels* zur Bodenfläche

tiert die Latschform aus dem *Bodendurchdringungs*-Modell. Diesem liegt die Geometrie einer fest an den Starrkörper des *Reifengürtels* gekoppelten *Gürtelringschale* zu Grunde. Die *Gürtelringschale* ist zylinderförmig mit zusätzlich gewölbter Außenringfläche. So beschreibt die Form der *Gürtelringschale* die einhüllende Fläche eines unbelasteten Reifens, von dem auch die Krümmung des Umfangs im Querschnitt berücksichtigt wird. Ausgangsform und -lage des *Latschs* liefert dann die von der *Gürtelringschale* aus der Fahrbahnebene geschnittene Fläche (Abbildung 4.21), die unter Kräften und Momenten in der Fahrbahnebene zusätzlich verformt und verlagert wird. Anders als die horizontalen Kräfte resultiert die Kraft senkrecht zur Fahrbahn nicht aus dem Zustand der einzelnen *Reibkontakt-Elemente*, sondern ergibt sich als zusätzliche aus der *Bodendurchdringung* abgeleitete Größe. Die tiefste Durchdringung der Fahrbahn durch die *Gürtelringschale* bestimmt die Anregung einer Feder-Dämpfer-Kombination, aus der die Latschvertikalkraft resultiert (Abbildung 4.22). Auch das Moment um die Latschquerachse ist nicht Folge des Zustands der *Reibkontakt-Elemente*, sondern ergibt sich aus einer Momenten- und Energiebilanz des Gesamtreifens um die Felgendrehachse.

Für das Reibverhalten zwischen Fahrbahn und *Reibkontakt-Elementen* ist aber letztlich ausschlaggebend, welcher Kraft diese jeweils vertikal zur Fahrbahn ausgesetzt sind. Bilanziert über alle *Reibkontakt-Elemente* sind dies zwar die Latschvertikalkraft und das Latschquermoment, die Aufteilung in Vertikalkraftkomponenten der einzelnen *Reibkontakt-Elemente* muss jedoch noch durch das Modell der *Bodendruckverteilung* erfolgen (4.23). Dazu werden die Koeffizienten einer von der Latschform und -vertikalkraft abhängigen Ansatzfunktion mit zwei Freiheitsgraden so gewählt, dass sich die vorgegebene Latschvertikalkraft und das vorgegebene Latschquermoment einstellen. Während die ver-

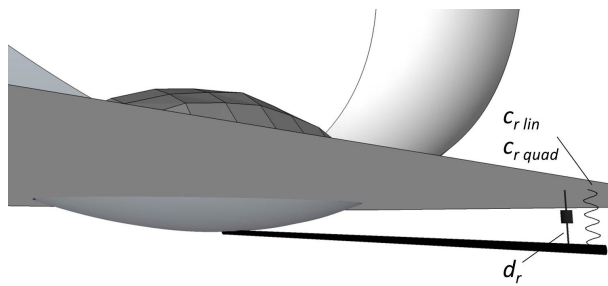


Abbildung 4.22: Anregung Vertikalfederung/-dämpfung durch Bodendurchdringung der Gürtelringschale

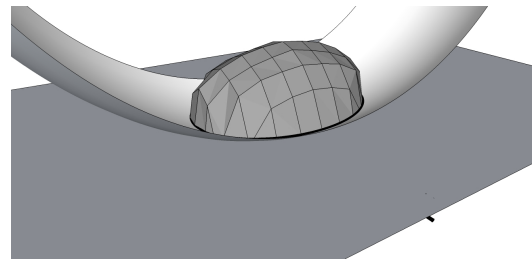


Abbildung 4.23: Vertikalkraftabhängige Bodendruckverteilung als Höhenwerte über der Latsch-Fläche

tikale Latschkraft und das Latschquermoment aus dem Zustand von Felge und *Reifengürtel* abgeleitet werden, resultieren die horizontale Latschkraft und das Latschmoment in Vertikal- und Längsrichtung aus dem Zustand der *Reibkontakt-Elemente*. Diese Komponenten von Latschkraft und -moment wirken unmittelbar auf den *Reifengürtel*, aber lediglich tiefpassgefiltert auf die Verlagerung und Verformung des *Latschs*. Als dynamische Kopplung des *Reifengürtels* an die Modell-Schnittstelle *Felge* kommt ein dreidimensionales Feder-Dämpfer-Modell zum Einsatz (Abbildungen 4.24 bis 4.27).

### 4.1.5 Modellgleichungen

In diesem Abschnitt sollen nun die formalen Gleichungen zur Berechnung der Modellantwort ( $F_{F0}(\cdot), M_{F0}(\cdot)$ ) auf die Modellanregung ( $\varphi_{F0}(\cdot), r_{F0}(\cdot), f_S$ ) vorgestellt werden. Grundlage hierfür ist die Einführung der modellinternen Zustandsgrößen:

$r_{G0}$  Vektor mit der räumlichen Lage des Gürtelmittelpunkts bzw. des Ursprungs des *Gürtelsystems* im Inertialsystem. Analog zum felgenfesten Koordinatensystem (Def. 17) ist das *Gürtelsystem* definiert, das die Lage und Orientierung des *Reifengürtels* im Inertialsystem beschreibt (Abbildung 4.28).

$\dot{r}_{G0}$  Zeitliche Änderung von  $r_{G0}$



$\varphi_{G0}$ 

Vektor der Kardanwinkel zur Beschreibung der räumlichen Orientierung des *Reifengürtels* bzw. des *Gürtelsystems*. Die räumliche Orientierung des *Reifengürtels* wird analog zu der der Felge (Abschn. 4.1.3) über die drei Kardanwinkel  $\varphi_{G0x}$ ,  $\varphi_{G0y}$ ,  $\varphi_{G0z}$  in der Drehreihenfolge  $\varphi_{G0y}$ ,  $\varphi_{G0x}$ ,  $\varphi_{G0z}$  beschrieben. Formal ergibt sich

**Definition 18 (Gürtelsystem)** Ein Punkt  $p$  mit Koordinaten  $p_G$  im gürtelfesten System  $G$  besitzt bei Lage  $r_{G0}$  des Gürtelmittelpunkts und Gürtelorientierung

$$\varphi_{G0} = \begin{pmatrix} \varphi_{G0x} \\ \varphi_{G0y} \\ \varphi_{G0z} \end{pmatrix} \text{ im Inertialsystem die inertialen Koordinaten}$$

$$p_0 = A_{G0} \cdot p_G + r_{G0}$$

mit der Drehmatrix vom System  $G$  ins Inertialsystem

$$A_{G0} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{G0z} & -\sin \varphi_{G0z} & 0 \\ \sin \varphi_{G0z} & \cos \varphi_{G0z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{G0x} & -\sin \varphi_{G0x} \\ 0 & \sin \varphi_{G0x} & \cos \varphi_{G0x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_{G0y} & 0 & \sin \varphi_{G0y} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_{G0y} & 0 & \cos \varphi_{G0y} \end{pmatrix}$$

$\varphi_{G0x}$  wird auch als Gürtelsturzwinkel bezeichnet.

 $\dot{\varphi}_{G0}$ 

Zeitliche Änderung von  $\varphi_{G0}$

 $F_{Lx PT1}$ 

PT1-verzögerte Latschlängskraft zur Latschlängsauslenkung (Abbildung 4.19)

 $F_{Ly PT1}$ 

PT1-verzögerte Latschquerkraft zur Latsch-Querauslenkung und -Biegung (Abbildungen 4.19, 4.18)

 $M_{Lz PT1}$ 

PT1-verzögertes Latschmoment um die Hochachse zur Latsch-Verdrehung (Abbildung 4.20)

#### 4 Entwicklung und Verifikation einer Sequentiellen Parameteridentifikation für ein physikalisches Reifenmodell

---

$a_{x ij}$	$1 \leq i \leq n_{LS}$ $1 \leq j \leq n_{RES}$	Längsauslenkung des $j$ . <i>Reibkontakt-Elements</i> im $i$ . Latschlängsstreifen (Abbildung 4.17) dargestellt im <i>Kontaktsystem</i> (Def. 20). $n_{LS}$ und $n_{RES}$ parametrieren die Latschdiskretisierung in einzelne Elemente.
$a_{y ij}$	$1 \leq i \leq n_{LS}$ $1 \leq j \leq n_{RES}$	Querauslenkung des $j$ . <i>Reibkontakt-Elements</i> im $i$ . Latschlängsstreifen (Abbildung 4.17) dargestellt im <i>Kontaktsystem</i> (Def. 20)

Das Schnittstellenelement *Felge* ist mit dem Reifenmodell ausschließlich über das räumliche *Feder-Dämpfer-Koppelement* verbunden, das die dynamische Wechselwirkung zwischen *Felge* und *Reifengürtel* festlegt (Abbildungen 4.24 bis 4.27). Aus den Modellparametern  $c_{GF rad}$ ,  $d_{GF rad}$ ,  $c_{GF quer}$ ,  $d_{GF quer}$  geht die Feder- bzw. Dämpfer-Kraft auf den *Reifengürtel* durch Verschiebung der Felgenmitte  $r_{F0}$  gegenüber der Gürtelmitte  $r_{G0}$  in Radial- bzw. Querrichtung hervor.  $c_{GF rot ax}$ ,  $d_{GF rot ax}$ ,  $c_{GF rot rad}$ ,  $d_{GF rot rad}$  bestimmen das Feder- bzw. Dämpfer-Moment auf den *Reifengürtel* durch Verdrehung der Felgenorientierung  $\varphi_{F0}$  gegenüber der Gürtelorientierung  $\varphi_{G0}$  um eine Radial- bzw. Querrichtung. Unter dem Begriff der *Radialrichtung* sind die Richtungen senkrecht zur Querrichtung, also auch Längs- und Vertikal-Richtung, zusammengefasst, die hier mechanisch identische Koppeleigenschaften besitzen. Als Referenzkoordinatensystem zur Bewertung von Relativ-Verschiebung und -Verdrehung der *Felge* gegenüber dem *Reifengürtel* gilt das *Gürtelsystem* (Def. 18). Die Zerlegung der Relativ-Verdrehung in einzelne Drehkomponenten hängt vom Drehsystem, also auch von der Drehreihenfolge ab. Um eine Zerlegung in drei Drehrichtungen mit systemunabhängiger Bedeutung zu erhalten, wird daher die linearisierte Relativ-Drehung betrachtet (s. Abschn. C.1).

So resultieren insgesamt folgende Gleichungen für

die Lage  $r_{FG}$  der *Felgenmitte* im *Gürtelsystem* (Def. 18)

$$r_{FG} = A_{G0}^T \cdot (r_{F0} - r_{G0}) \quad (4.2)$$

die Drehmatrix  $A_{FG}$  vom *Felgen-* ins *Gürtelsystem* (Def. 17, 18)

$$A_{FG} = A_{G0}^T A_{F0} \quad (4.3)$$

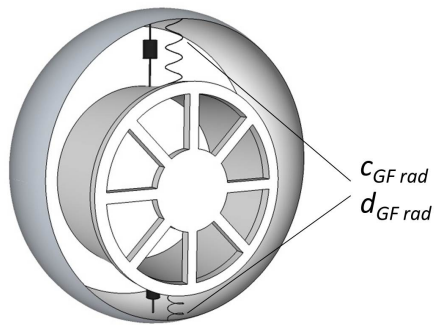


Abbildung 4.24: Translatorische Gürtel-Felgen-Anbindung in Vertikal-(/ Längs-)Richtung

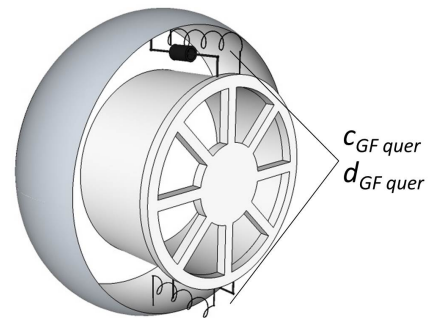


Abbildung 4.25: Translatorische Gürtel-Felgen-Anbindung in Querrichtung

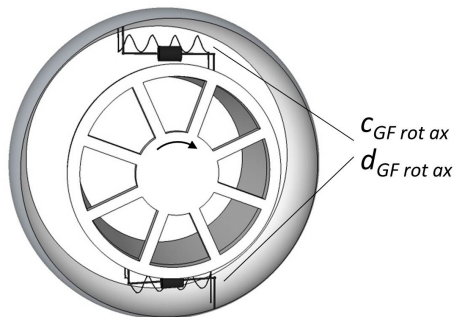


Abbildung 4.26: Rotatorische Gürtel-Felgen-Anbindung in Querrichtung

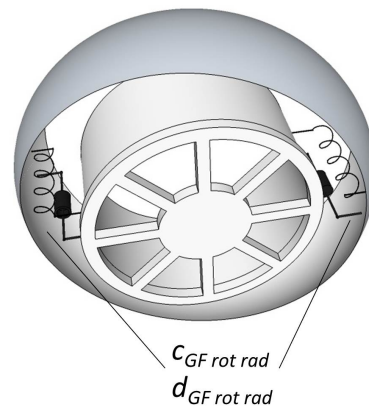


Abbildung 4.27: Rotatorische Gürtel-Felgen-Anbindung in Vertikal-(/ Längs-)Richtung

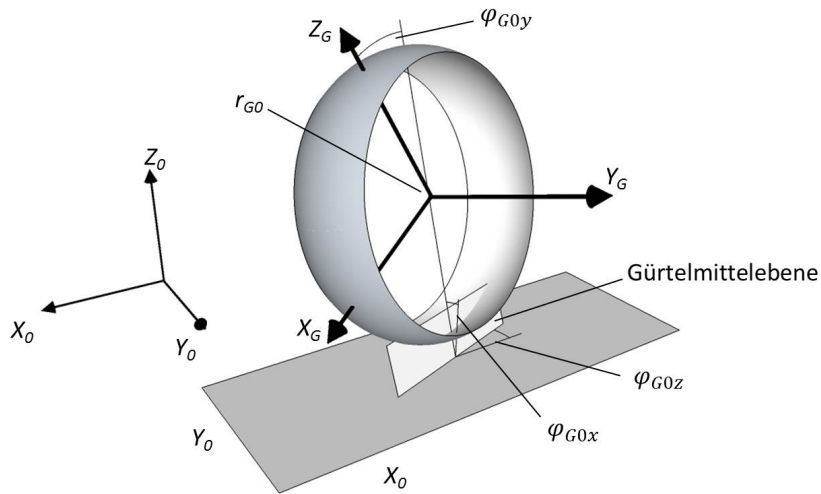


Abbildung 4.28: gürtelfestes Koordinatensystem

die linearisierte Drehlage  $\varphi_{FG lin}$  der *Felge* im *Gürtelsystem* (s. C.1)

$$\varphi_{FG lin} = \begin{pmatrix} A_{FG (3,2)} \\ A_{FG (1,3)} \\ A_{FG (2,1)} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

die linearisierte Drehgeschwindigkeit  $\omega_{FG lin}$  der *Felge* im *Gürtelsystem* (wobei die Drehgeschwindigkeit in der Originalfassung nicht linearisiert mit  $A_{G0}^T(\Omega_{F0} \dot{\varphi}_{F0} - \Omega_{G0} \dot{\varphi}_{G0})$  bestimmt wird (zu  $\Omega_{F/G0}$  s. 4.11), jedoch hier die gleich kleinen Winkel wie für die Drehlage auftreten, und die Modellanalyse durch die linearisierte Betrachtung vereinheitlicht wird)

$$\omega_{FG lin} = \dot{\varphi}_{FG lin} \quad (4.5)$$

die resultierende Koppelkraft auf den *Reifengürtel* im *Gürtelsystem*

$$F_{FGG} = C_{TFG} \cdot r_{FG} + D_{TFG} \cdot \dot{r}_{FG}$$

$$C_{TFG} = \begin{pmatrix} c_{GF rad} & 0 & 0 \\ 0 & c_{GF quer} & 0 \\ 0 & 0 & c_{GF rad} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

$$D_{TFG} = \begin{pmatrix} d_{GF rad} & 0 & 0 \\ 0 & d_{GF quer} & 0 \\ 0 & 0 & d_{GF rad} \end{pmatrix}$$

das resultierende Koppelmoment auf den *Reifengürtel* im *Gürtelsystem*

$$\begin{aligned}
 M_{FGG} &= C_{RFG} \cdot \varphi_{FG\ lin} + D_{RFG} \cdot \omega_{FG\ lin} \\
 C_{RFG} &= \begin{pmatrix} c_{GF\ rot\ rad} & 0 & 0 \\ 0 & c_{GF\ rot\ ax} & 0 \\ 0 & 0 & c_{GF\ rot\ rad} \end{pmatrix} \\
 D_{RFG} &= \begin{pmatrix} d_{GF\ rot\ rad} & 0 & 0 \\ 0 & d_{GF\ rot\ ax} & 0 \\ 0 & 0 & d_{GF\ rot\ rad} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

die Koppelkraft und das Koppelmoment auf den *Reifengürtel* im *Inertialsystem*

$$F_{FG0} = A_{G0} F_{FGG} \quad M_{FG0} = A_{G0} M_{FGG} \tag{4.8}$$

Da das Feder-Dämpfer-Koppelement zwischen *Reifengürtel* und *Felge* selbst masselos ist, müssen sich die von *Reifengürtel* und *Felge* eingprägten Kräfte und Momente aufheben. Man erhält im Punkt der *Felgenmitte* die Bilanz

$$\begin{aligned}
 F_{F0} + F_{FG0} &= 0 \\
 M_{F0} + M_{FG0} + (r_{G0} - r_{F0}) \times F_{FG0} &= 0
 \end{aligned}$$

und kann daraus die Modell-Schnittstellengrößen der Kraft und des Moments auf die *Felgenmitte* im *Inertialsystem* berechnen:

$$\begin{aligned}
 F_{F0} &= -F_{FG0} \\
 M_{F0} &= -M_{FG0} - (r_{G0} - r_{F0}) \times F_{FG0}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Auf den *Reifengürtel* wirkt neben  $F_{FG0}$  und  $M_{FG0}$  aus der Anbindung an die *Felge* noch die Kraft  $F_{LG0}$ , das Moment  $M_{LG0}$  im *Inertialsystem* (4.35) aus der Kopplung des *Reifengürtels* an den *Latsch* und die Gewichtskraft entsprechend der Erdbeschleunigung  $g$  und der Masse  $m_G$  des *Reifengürtels*. Insgesamt resultieren daraus die dynamisch wirksame Kraft  $F_{G0}$  und das dynamisch wirksame Moment  $M_{G0}$  auf den *Reifengürtel* im *Inertialsystem*

$$F_{G0} = F_{FG0} + F_{LG0} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_G \cdot g \end{pmatrix} \quad M_{G0} = M_{FG0} + M_{LG0} \tag{4.10}$$

Auf die eingprägten Kräfte und Momente reagiert der *Reifengürtel* als Starrkörper mit der Masse  $m_G$ , dem Trägheitstensor  $J_{GG}$  im *Gürtelsystem* und dem Schwerpunkt am Ort

#### 4 Entwicklung und Verifikation einer Sequentiellen Parameteridentifikation für ein physikalisches Reifenmodell

---

der inertialen *Gürtelmitte*  $r_{G0}$ . Die Bewegungsgleichungen des *Reifengürtels* ergeben sich damit aus dem Impuls- und Drallsatz für Starrkörper:

$$\ddot{r}_{G0} m_G = F_{G0} \quad \frac{\partial}{\partial t} (A_{G0} J_{GG} A_{G0}^T \Omega_{G0} \dot{\varphi}_{G0}) = M_{G0}$$

Als explizite Form erhält man

$$\begin{aligned} \ddot{r}_{G0} &= \frac{1}{m_G} F_{G0} \\ \ddot{\varphi}_{G0} &= \Omega_{G0}^{-1} A_{G0} J_{GG}^{-1} A_{G0}^T \cdot \left( M_{G0} - \left( \frac{\partial}{\partial t} (A_{G0} J_{GG} A_{G0}^T \Omega_{G0}) \right) \dot{\varphi}_{G0} \right) \\ \text{mit } J_{GG} &= \begin{pmatrix} J_{G \text{ rad}} & 0 & 0 \\ 0 & J_{G \text{ quer}} & 0 \\ 0 & 0 & J_{G \text{ rad}} \end{pmatrix} \\ \text{und } \Omega_{F/G0} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + A_{F/G0} \Big|_{\varphi'_{F/G0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi_{F/G0z} \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + A_{F/G0} \Big|_{\varphi'_{F/G0} = \begin{pmatrix} \varphi_{F/G0x} \\ 0 \\ \varphi_{F/G0z} \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_{F/G0z} & -\sin \varphi_{F/G0z} \cdot \cos \varphi_{F/G0x} & 0 \\ \sin \varphi_{F/G0z} & \cos \varphi_{F/G0z} \cdot \cos \varphi_{F/G0x} & 0 \\ 0 & \sin \varphi_{F/G0x} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.11)$$

zur Umrechnung von  $\dot{\varphi}_{F/G0}$  in inertielle Drehrichtungen

Den Trägheitstensor  $J_{GG}$  bestimmen die beiden Parameter  $J_{G \text{ rad}}$  und  $J_{G \text{ quer}}$ , wobei die Hauptachsen und Symmetrien aus der Form der *Gürtelringschale* (Abbildung 4.15) abgeleitet sind.

Hauptleistung eines physikalischen Reifenmodells ist die Modellierung der Kraftentstehung in der Fahrbahn-Kontaktzone. Als Grundlage hierfür wird das *Kontaktsystem* (Abbildung 4.29) als weiteres Koordinatensystem eingeführt. Das *Kontaktsystem* entspricht dem genormten *Radfesten Koordinatensystem* (Def. 7) bis darauf, dass es nicht vom *Felgen-* sondern vom *Gürtelsystem* aus projiziert wird. Der Koordinatenursprung des *Kontaktsystems* liegt im *Kontaktpunkt*. Auch der *Kontaktpunkt* entspricht dann dem

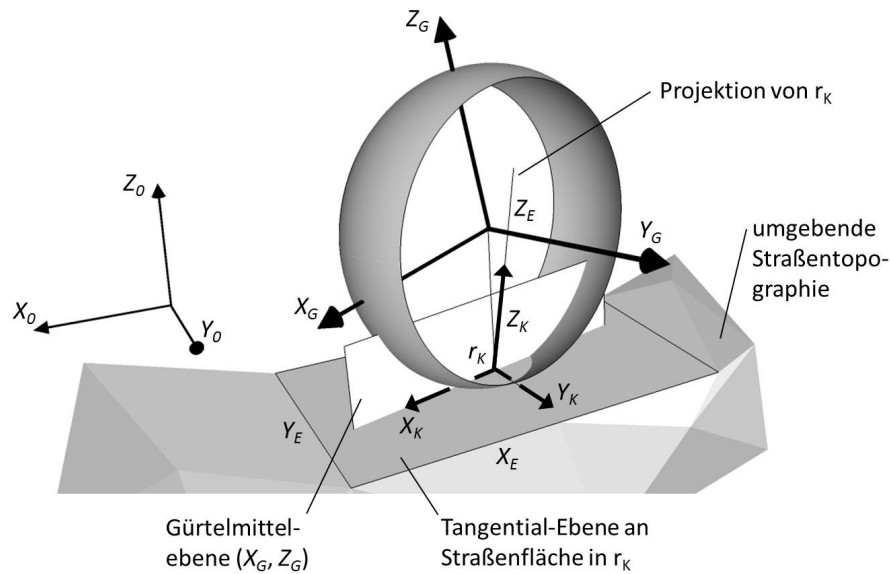


Abbildung 4.29: Kontaktsystem

genormten *Radaufstandspunkt* (Def. 5) bis auf die Projektion vom *Gürtel-* statt vom *Felgensystem* aus:

**Definition 19 (Kontaktpunkt)** Der Kontaktpunkt  $r_K$  ist der Schnittpunkt der  $X$ - $Y$ -Ebene des Gürtelsystems mit der Projektion der  $Y$ -Achse des Gürtelsystems entlang der  $Z_E$ -Richtung auf die  $X_E$ - $Y_E$ -Ebene.  $(X_E, Y_E, Z_E)$  ist das Ortsfeste Koordinatensystem zum inertialen Punkt  $r_{K0}$  (Def. 1).

Aus Definition 19 geht keine explizite Berechnungsvorschrift für den *Kontaktpunkt* hervor, da  $r_{K0}$  selbst Teil der ihn spezifizierenden Bedingungen ist. Die Fahrbahntopographie kann an verschiedenen Punkten verschiedene Tangentialebenen besitzen. In Form von Gleichungen ergeben die Bedingungen an  $r_{K0}$  folgendes nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 r_{K0z} &= f_S(r_{K0x}, r_{K0y}) && (r_{K0} \text{ liegt auf Straßenfläche}) \\
 y_{G0}^T \cdot (r_{G0} - r_{K0}) &= 0 && (r_{K0} \text{ liegt in Gürtelmittlebene}) \\
 x_{K0}^T \cdot (r_{G0} - r_{K0}) &= 0 && (Y_K \text{ ist eine Projektion von } Y_G \text{ entlang } Z_K) \\
 \text{mit } y_{G0} &= A_{G0} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} && (4.12) \\
 x_{K0} &= y_{G0} \times z_{K0} \\
 z_{K0} &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x} f_S \Big|_{r_{K0}}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} f_S \Big|_{r_{K0}}\right)^2 + 1}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} f_S \Big|_{r_{K0}} \\ -\frac{\partial}{\partial y} f_S \Big|_{r_{K0}} \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

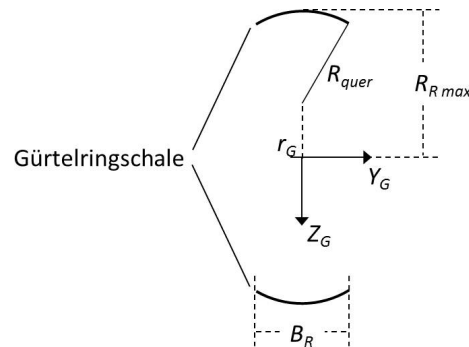
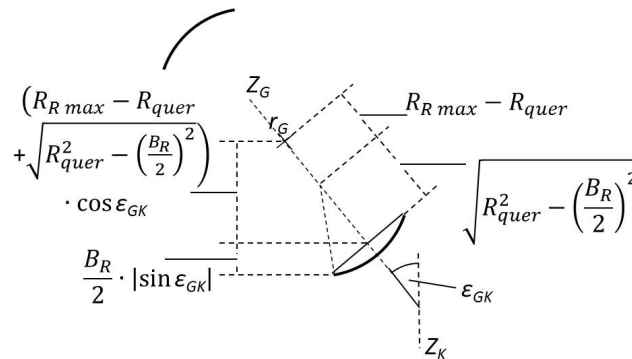
Das Gleichungssystem 4.12 kann separat gelöst werden, was bspw. mit einer nach kurzer Zahl von Näherungsschritten abbrechenden Newton-Iteration möglich ist. Letztlich ist die Suche nach  $r_{K0}$  nur die Suche nach dem Berührungspunkt des Kreises in der *Gürtelmittlebene* um die *Gürtelmitte* an die Fahrbahnfläche  $\{(x_S, y_S, z_S) \mid z_S = f_S(x_S, y_S)\}$ . Ergänzt man nun zum *Kontaktpunkt* noch die Transformationsmatrix, erhält man die folgende formale Definition

**Definition 20 (Kontaktsystem)** Ein Punkt  $p$  mit Koordinaten  $p_K$  im Kontaktsystem  $K$  besitzt die inertialen Koordinaten

$$\begin{aligned}
 p_0 &= A_{K0} \cdot p_K + r_{K0} \\
 \text{mit } A_{K0} &= \begin{bmatrix} x_{K0} & (z_{K0} \times x_{K0}) & z_{K0} \end{bmatrix} \\
 \text{und } r_{K0}, x_{K0}, z_{K0} &\text{ siehe (4.12)}
 \end{aligned}$$

Die von der Straßenfläche vertikal, also in  $z_K$ -Richtung eingeprägte Kraft ist die Reaktion auf die *Bodendurchdringung* des *Reifengürtels*. Ausschlaggebend ist hierfür genauer die *maximale Bodendurchdringung* des *Reifengürtels* oder *Gürteleinfederung*  $f_G$ , die als Betrag der kleinsten  $z_K$ -Koordinate der *Gürtelringschale* im *Kontaktsystem* definiert ist (Abbildung 4.22). Abbildung 4.30 ist ein Mittelquerschnitt durch die gesamte *Gürtelringschale*, während Abbildung 4.21 eine Gesamtansicht zeigt. Aus dem Querschnitt entsteht



Abbildung 4.30: Querschnitt durch die *Gürtelringschale*Abbildung 4.31: *Maximale Bodendurchdringung* für großes  $|\varphi_{GKx}|$ 

die gesamte Fläche der *Gürtelringschale* durch Rotation um die  $y_G$ -Achse. Die Querwölbung der *Gürtelringschale* ist ein Kreisabschnitt mit Radius  $R_{quer}$  symmetrisch zur  $z_G$ -Achse, die Breite des Kreisabschnitts entspricht der *Reifenbreite*  $B_R$ . Der Abstand der *Gürtelringschale* in  $z_G$ -Richtung von  $r_G$  entspricht dem Reifenradius  $R_{Rmax}$ . Aus den Querschnittsmaßen der *Gürtelringschale* lässt sich zunächst der Abstand  $d_{GBKz}$  der *Gürtelmitte*  $r_G$  vom Punkt der *maximalen Bodendurchdringung* in  $z_K$ -Richtung bestimmen. Hierbei müssen die beiden Fälle unterschieden werden, ob der Punkt der *maximalen Bodendurchdringung* auf dem Rand (Abb. 4.31) der *Gürtelringschale* oder in der Schalenfläche (Abb. 4.32) liegt. Dies hängt ab vom *Gürtelsturzwinkel*  $\varepsilon_{GK}$  im *Kontaktsystem*. Der Übergang erfolgt, wenn im Querschnitt die Verbindungslinie vom Mittelpunkt des

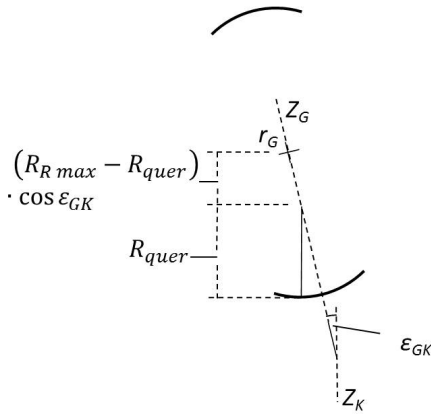


Abbildung 4.32: *Maximale Bodendurchdringung* für kleines  $|\varphi_{GKx}|$

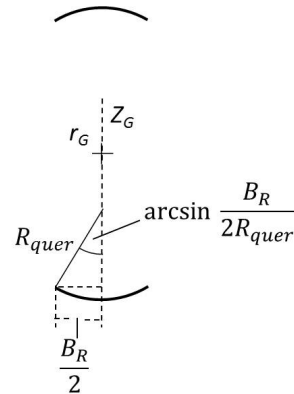


Abbildung 4.33: Grenzwinkel zur Berechnung von  $d_{GBKz}$

Schalenkreises zum Randpunkt der Schale in  $z_K$ -Richtung liegt (Abb. 4.33).

$$d_{GBKz} = \begin{cases} (R_{Rmax} - R_{quer}) \cos \varepsilon_{GK} + R_{quer} & \text{falls } |\sin \varepsilon_{GK}| \leq \frac{B_R}{2R_{quer}} \\ \left( R_{Rmax} - R_{quer} + \sqrt{R_{quer}^2 - \left( \frac{B_R}{2R_{quer}} \right)^2} \right) \cos \varepsilon_{GK} & \text{sonst} \\ + \frac{B_R}{2} |\sin \varepsilon_{GK}| \end{cases}$$

$$\text{mit } \varepsilon_{GK} = \frac{\pi}{2} - \arccos \left( A_{K0} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^T \cdot \left( A_{G0} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

(4.13)

Die *Gürteleinfederung*  $f_G$  folgt nun einfach als

$$f_G = \max(0, d_{GBKz} - r_{GKz}) \quad \text{mit } r_{GKz} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A_{K0}^T (r_{G0} - r_{K0}) \quad (4.14)$$

Dann kann auch die in den *Latsch* in  $z_K$ -Richtung eingeprägte Reaktionskraft  $F_{LGKz}$  der Straßenfläche auf die Bodeneindrückung definiert werden. Die Vertikalanbindung des *Latschs* an die Straße ist ein Koppellement aus einer Feder mit linear-quadratischer Kennlinie und einem linearen Dämpfer (Abb. 4.22), das über die Parameter  $c_{r\ lin}$ ,  $c_{r\ quad}$  und  $d_r$  definiert ist:

$$F_{LGKz} = \max(0, c_{r\ lin} f_G + c_{r\ quad} f_G^2 + d_r \dot{f}_G) \quad (4.15)$$

Um den Einfluss der Vertikalkraft  $F_{LGKz}$  auf den Zustand der einzelnen *Reibkontakt-Elemente* im *Latsch* beschreiben zu können, muss zunächst der modellierte Aufbau der Boden-Kontaktzone eingeführt werden. Horizontalkraftfrei, also ohne zus. Latschverformung liegen die an den *Latsch* gekoppelten Oberseiten der einzelnen *Reibkontakt-Elemente* nahtlos aneinander in der  $x_K - y_K$ -Ebene des *Kontaktsystems* mit ihren Längsseiten parallel zur  $x_K$ - und ihren Querseiten parallel zur  $y_K$ -Richtung. Alle in  $x_K$ -Richtung aneinandergrenzenden *Reibkontakt-Elemente* werden jeweils als *Latschlängsstreifen* oder *Laufstreifen* bezeichnet. Die *Latschlängsstreifen* sind durchnummeriert von 1 bis zum parametrisierten Wert  $n_{LS}$ . Genauso sind die einzelnen *Reibkontakt-Elemente* jedes *Latschlängsstreifens* nummeriert von 1 bis zum parametrisierten Wert  $n_{RES}$ , und es kann mit dem Index  $ij$  das  $j$ . *Reibkontakt-Elemente* im  $i$ . *Latschlängsstreifen* bezeichnet werden. Zur Modellierung der Oberseiten der *Reibkontakt-Elemente* erhält jede Oberseite eine Koordinatenangabe  $(x_{REK}, y_{REK})$  zu ihrer Position im *Kontaktsystem*. Im horizontalkraftfreien *Latsch* besitzen die *Reibkontakt-Elemente* des  $i$ . *Latschlängsstreifens* die gleiche Koordinate  $y_{REK i}$ . Die *Latschlängsstreifen* sind in  $y_K$ -Richtung gleichmäßig innerhalb der Gürtelbreite symmetrisch zu  $r_K$  verteilt. Man erhält

$$y_{REK i} = b_{RKE} \cdot \left( \frac{n_{LS}+1}{2} - i \right), \quad 1 \leq i \leq n_{LS} \quad (4.16)$$

mit der Laufstreifenbreite  $b_{RKE} = \frac{3B_R}{3n_{LS}-1}$

Bei den  $x_{REK}$ -Koordinaten sind keine konstanten Werte möglich. Denn die *Reibkontakt-Elemente* modellieren die äußere Gummischicht des Reifens, die sich mit der Reifendrehung auch durch das *Kontaktsystem* bewegt. Trotzdem fokussiert der *Latsch* immer auf einen Ausschnitt um den *Kontaktpunkt*  $r_K$ , den die Rotation des *Gürtels* um  $y_G$  nicht beeinflusst. Als Lösung hierfür besitzen die *Reibkontakt-Elemente* zwar einen konstanten Abstand in  $x_K$ -Richtung zueinander, ihre absolute Position im *Kontaktsystem* wandert jedoch mit der Gürteldrehung aus der Perspektive des *Kontaktsystems*. Sobald die Verschiebung der  $x_K$ -Koordinaten der *Reibkontakt-Elemente* über den betrachteten Längsabschnitt im *Kontaktsystem* hinauswandert, werden diese Elemente am betreffenden Ende entfernt und am gegenüberliegenden Ende des Abschnitts wieder eingebunden (Abb. 4.34). Dies erfolgt formal über einen Wertesprung der Koordinaten und die Neuinitialisierung der später beschriebenen Zustandsgrößen  $a_{x ij}$ ,  $a_{y ij}$  der *Reibkontakt-Elemente* (4.30). Die *Reibkontakt-Elemente* besitzen zum Zeitpunkt ihrer jeweiligen Verschiebung keinen Einfluss auf die übrigen Modellkomponenten, weshalb die Koordinatenverschiebung und die Neuinitialisierung dann auch keine un stetigen Modellanregungen verursachen oder nicht differenzierbare Einflussgrößen liefern. Man erhält also für die  $x_{REK j}$ -Koordinaten und die später beschriebenen *Auslenkungen*  $a_{x ij}$ ,  $a_{y ij}$  (4.30) der

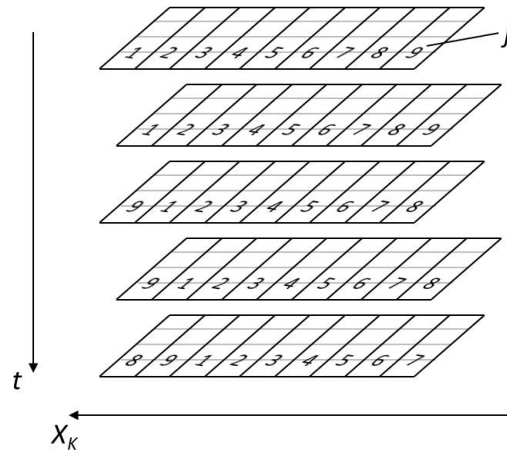


Abbildung 4.34: Längswanderung der *Reibkontakt-Elemente* unter Gürteldrehung im *Kontaktsystem*

*Reibkontakt-Elemente*

$$\begin{aligned}
 x_{REK j} &= (-j \cdot l_{RKE} - R_{dyn} \varphi_{G0y}) \bmod (n_{RES} \cdot l_{RKE}) - \frac{n_{RES}}{2} l_{RKE} \\
 a_{x ij} = a_{y ij} &= 0 \text{ für } |x_{REK j}| = \frac{n_{RES}}{2} l_{RKE} \\
 \text{mit } a \bmod b &= a - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor \cdot b \\
 \varphi_{G0y} &\in (-\infty, \infty) \\
 1 \leq i \leq n_{LS}, \quad 1 \leq j \leq n_{RES}
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Für die Länge eines *Reibkontakt-Elements*  $l_{RKE}$  wird ein Wert so gewählt, dass sich mit der parametrisierten Zahl der Elemente eines *Latschlängsstreifens*  $n_{RES}$  eine Gesamtlänge ergibt, die auch große Einfederungen des *Reifengürtels* überdeckt, also z.B.

$$l_{RKE} = \frac{2\pi R_{dyn}}{5n_{RES}} \tag{4.18}$$

Die Vertikalkraft im *Kontaktsystem*  $F_{LGKz}$  verteilt sich im *Latsch* auf die einzelnen *Reibkontakt-Elemente*. Beeinflusst wird die resultierende *Bodendruckverteilung* dabei noch von der horizontalkraftfreien *Latsch-Form*, also von der Form, die die *Reibkontakt-Elemente* mit Bodenkontakt bilden (Abb. 4.15). Für die horizontalkraftfreie *Latschform* sind die Längen  $l_i$  der einzelnen *Latschlängsstreifen* ausschlaggebend. Um der beim Bodenkontakt verdrängten Gummimasse Rechnung zu tragen, bestimmt sich die Länge

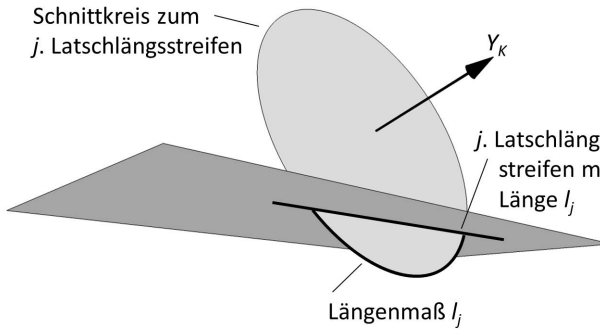


Abbildung 4.35: Längsstreifenlänge aus Parallelkreisbogen

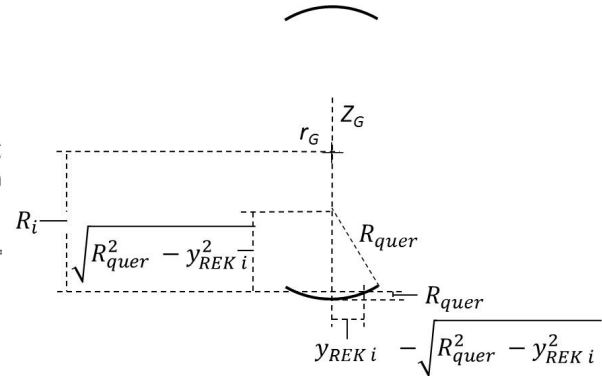


Abbildung 4.36: Parallelkreisradius  $R_i$  zum  $i$ -ten Latschlängsstreifen

$l_i$  des *Latschlängsstreifens*  $i$  nicht aus der Schnittlänge des Parallelkreises im Abstand  $y_{REK i}$  zur Gürtelmittlebene mit der Straßenfläche, sondern aus der Länge des Kreis-ausschnitts unterhalb der Straßenfläche (Abb. 4.35). In den Abbildungen 4.36, 4.37 und 4.38 werden die geometrischen Berechnungen zur Bestimmung der  $l_i$  genau erläutert.

Man erhält die Gleichung

$$l_i = \begin{cases} 2R_i \arccos \frac{s_i}{R_i} & \text{für } s_i < R_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{mit } R_i = R_{Rmax} + \sqrt{R_{quer}^2 - y_{REK i}^2} - R_{quer} \quad (4.19)$$

$$s_i = \|r_{G0} - r_{K0}\| + y_{REK i} \cdot \tan \varepsilon_{GK}$$

$$1 \leq i \leq n_{LS}$$

Bei realen Reifen entspricht die Längsausdehnung der Fahrbahn-Kontaktzone nicht genau dem Umfang der verdrängten Gummischicht, da der Reifengummi als *Mooney-Rivlin*-Material unter vertikaler Eindrückung auch seine horizontale Form verändert (siehe z.B. [92]). Das genaue Verhalten ist materialabhängig und kann im Modell durch den linearen *Latsch-Längenfaktor*  $f_{Lmat}$  parametrisiert werden, der nicht die Form oder Lage der einzelnen *Reibkontakt-Elemente*, sondern lediglich die Länge der *Latschlängsstreifen* neu definiert (Abb. 4.39):

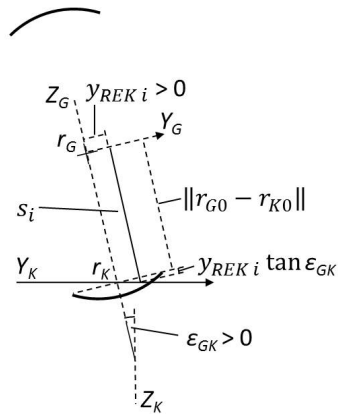


Abbildung 4.37: Parallelkreis-Abstand  $s_i$  zum  $i$ . Latschlängsstreifen

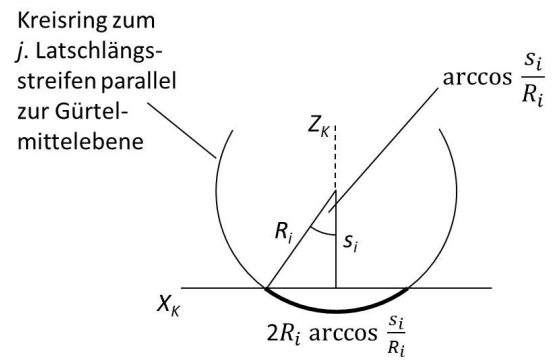


Abbildung 4.38: (Kreisbogen-)Länge des  $i$ . Latschlängsstreifens

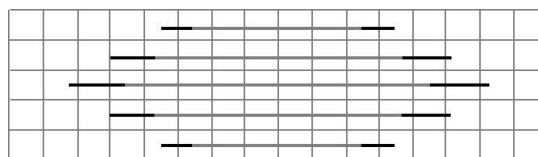


Abbildung 4.39: Neue Längen  $l_{mat\ i}$  der Latschlängsstreifen im gleichen Raster der Reibkontakt-Elemente

$$l_{mat\ i} = f_{L\ mat} \cdot l_i, \quad 1 \leq i \leq n_{LS} \quad (4.20)$$

Auf Basis von  $F_{LGKz}$  und den Laufstreifenlängen  $l_{mat\ i}$  kann nun die Ansatzfunktion der *Bodendruckverteilung* definiert werden:

$$p_{ij} = \begin{cases} (a + b x_{REK\ j}) \left(1 - \left|\frac{2x_{REK\ j}}{l_{mat\ i}}\right|^{e_l}\right) \left(1 - \left|\frac{2y_{REK\ i}}{B_R}\right|^{e_q}\right) l_{mat\ i} & \text{für } |x_{REK\ j}| \leq \frac{l_{mat\ i}}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$p_{ij}$  ist der Vertikaldruck, dem das *Reibkontakt-Element*  $ij$  ausgesetzt ist. Für ungestürzten *Reifengürtel* und  $b = 0$  gibt Abbildung 4.23 einen Eindruck von der *Bodendruckverteilung*. Das Produkt der Monome in der Längs- bzw. Querkoordinate  $x_K$ ,  $y_K$  im *Kontaktsystem* bewirkt die Wölbung mit dem Maximum in der Latschmitte bis zum Verschwinden des Vertikaldrucks am Rand des *Latschs*. Diese Form der Druckverteilung ist durch Messungen an realen Reifen motiviert und wird u. A. in [77] für Radialreifen vorgestellt. In [4] findet sich der Vorschlag, die Form über Monom-Ansätze zu modellieren. [46] beschreibt Grenzen des Monomansatzes und schlägt entsprechende Anpassungen vor. Auch der hier betrachtete Monomansatz ist nicht konstant, da sich die Exponenten  $e_l$  und  $e_q$  mit zunehmender *Gürteleinfederung* so ändern, dass die Wölbung an den Seiten steiler und in der Mitte flacher wird. Hierzu dienen zwei Funktionen, die in der *Gürteleinfederung*  $f_G$  monoton steigen:

$$\begin{aligned} e_l &= g_l(f_G) & 1 < e_{min} \leq g_l, g_q \leq e_{max}, \\ e_q &= g_q(f_G) & g_l, g_q \text{ monoton steigend in } f_G \end{aligned} \quad (4.21)$$

Der zusätzliche Faktor  $l_i$  verschafft Positionen in längeren *Latschlängsstreifen* größere Druckwerte und berücksichtigt damit den Einfluss der asymmetrischen Eindrückung bei gestürztem *Reifengürtel*. Die noch unbestimmten Parameter  $a$  und  $b$  der Ansatzfunktion sorgen für die Erfüllung von Schnittstellenbedingungen zu den Koppelkräften und -momenten zwischen *Reifengürtel* und *Latsch*. Während die vertikale Koppelkraft  $F_{LGKz}$  bereits durch die *Bodendurchdringung* des *Reifengürtels* bestimmt ist, muss zur Festlegung des Koppelmoments  $M_{LGKy}$  um die  $y_K$ -Achse des *Kontaktsystems* eine zusätzliche Bedingung eingeführt werden, da im *Latsch Reibkontakt-Elemente* in der vorderen Hälfte größere oder kleinere Vertikaldruck-Werte als die der hinteren Hälfte annehmen können und damit beliebige Momente um die  $y_K$ -Achse erzielt werden können. Als zusätzliche Bedingung muss auf jeden Fall eine Energiebilanzierung eingeführt werden, da die gewählte dynamische Kopplung zwischen *Latsch* und *Reifengürtel* sonst abhängig von ihrer translatorischen Relativ-Auslenkung zur beliebigen Energiequelle oder -senke wird. In [4] findet sich eine ausführliche Analyse hierzu. Bei einer reinen Feder-Dämpfer-Kopplung wie im Fall der Gürtelanbindung an die *Felge* (4.9) genügt dazu eine kräfteabhängige

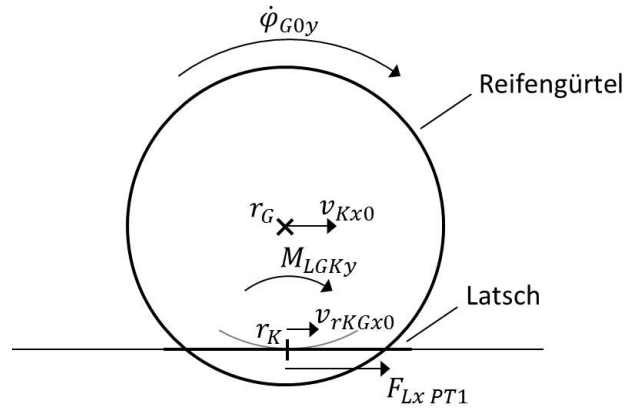


Abbildung 4.40: Leistungsbilanz *Latsch*  $\rightarrow$  *Reifengürtel*

Momentenkorrektur. Die *Latsch-Gürtel*-Kopplung entspricht jedoch keinem solchen Modell, da der *Latsch* zwangsweise mit der Gürtelrotation im *Gürtelsystem* rotiert. Eine Ausblendung der Gürtelrotation bei der Betrachtung des Koppellements ist jedoch gerade wegen des Energietransports nicht möglich. Also ist die Momentenkorrektur in der *Latsch-Gürtel*-Anbindung zusätzlich geschwindigkeitsabhängig. Um keine linearisierten Zeitintervalle betrachten zu müssen, wird die in Abbildung 4.40 illustrierte Bilanz der am *Fahrbahnkontaktpunkt*  $r_K$  vom *Latsch* in den *Reifengürtel* eingepprägten Leistungsterme erstellt, die, um den Modellansatz einfach zu halten, von einem *stationären* Zustand (s. Abschn. 4.1.7) und  $\varepsilon_{GK} = 0$  ausgeht.  $v_{rKGx0}$  ist die inertielle Geschwindigkeit des gürtelfesten Punkts am Ort  $r_K$  in  $x_K$ -Richtung,  $v_{Kx0}$  die inertielle Geschwindigkeit des *Reifengürtels* in  $x_K$ -Richtung und  $F_{Lx PT1}$  die hier vorweggenommene vom *Latsch* in den *Reifengürtel* eingepprägte gefilterte Kraft in  $x_K$ -Richtung (4.27).

$$\begin{aligned} v_{rKGx0} &= v_{Kx0} - \|r_{G0} - r_{K0}\| \dot{\varphi}_{G0y} \\ v_{Kx0} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot A_{K0}^T \dot{r}_{K0} \end{aligned}$$

Zur Modellierung der Vorgänge im *Latsch* selbst muss noch die *Schlupfgeschwindigkeit*

$$v_S = v_{Kx0} - \dot{\varphi}_{G0y} R_{dyn}$$

der *Reibkontakt-Elemente* gegenüber der Fahrbahn (s. Def. 16) eingeführt werden. Da  $F_{Lx PT1}$  aus dem Kontakt zwischen *Latsch* und Straße entsteht, fließt bei nichtrotierendem Reifen ( $\dot{\varphi}_{G0y} = 0$ ) und einem negativen Leistungsterm  $F_{Lx PT1} \cdot v_{Kx0}$  Energie aus dem *Latsch* in die Straße, die diese nicht wieder in den *Latsch* zurückfließen lassen kann. Umgekehrt fließt bei einem positiven Leistungsterm  $F_{Lx PT1} \cdot v_{Kx0}$  (möglich, wenn sich die Straße bspw. eines *Reifenprüfstands* (s. Abschn. 4.1.6) schneller bewegt als der Reifen) und  $\dot{\varphi}_{G0y} = 0$  Energie aus der Straße in den Reifen, die dieser nicht wieder in die



Straße zurückfließen lassen kann. Um auch für  $\dot{\varphi}_{G0y} \neq 0$  die Auswirkungen der genauen Gleiteffekte zwischen den *Reibkontakt-Elementen* und der Fahrbahn auf die Verlustleistung zu berücksichtigen, wird  $v_S$  einbezogen. Außerdem wird festgelegt, dass ebenso der Rollwiderstand, also der einfederungs- und geschwindigkeitsabhängige Energieverbrauch beim Abrollen als Verlustleistung in der Kontaktzone auftritt. Zum Verlustmoment in der Kontaktzone existiert das über den Parameter  $k_{roll}$  spezifizierte Modell

$$-k_{roll} F_{LGKz} \max(-1, \min(R_{dyn} \dot{\varphi}_{G0y}, 1))$$

das auch den für kleine Rollgeschwindigkeiten verschwindenden Effekt abbilden soll. So erhält man insgesamt die Leistungsbilanz

$$F_{Lx PT1} v_{rKGx0} + M_{LGKy} \dot{\varphi}_{G0y} = -k_{roll} F_{LGKz} \max(-1, \min(R_{dyn} \dot{\varphi}_{G0y}, 1)) \dot{\varphi}_{G0y} + F_{Lx PT1} v_S$$

mit den vom *Latsch* in den *Reifengürtel* fließenden Leistungsanteilen links und denen von der Straße bzw. Umgebungsstruktur in den *Latsch* rechts. Damit ist  $M_{LGKy}$  festgelegt, und es ergibt sich

$$M_{LGKy} = -k_{roll} F_{LGKz} \max(-1, \min(R_{dyn} \dot{\varphi}_{G0y}, 1)) - F_{Lx PT1} (R_{dyn} - \|r_{G0} - r_{K0}\|) \quad (4.22)$$

Da der *Latsch* selbst masselos modelliert ist, entspricht die Summe der Kräfte und Momente der einzelnen *Reibkontakt-Elemente* der *Latsch*-Vertikalkraft und dem *Latsch*-Moment um die  $y_K$ -Achse. Zur Definition von  $a$  und  $b$  muss allerdings schon an dieser Stelle die längskraftabhängige Verschiebung  $\Delta x_{LGK}$  des gesamten *Latschs* gegenüber dem *Reifengürtel* in  $x_K$ -Richtung (Abb. 4.19, Gl. 4.28) eingeführt werden, die den Zusammenhang zwischen den Vertikal-Druckwerten der einzelnen *Reibkontakt-Elemente* und  $M_{LGKy}$  erheblich beeinflusst. Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} l_{RKE} b_{RKE} \cdot \sum_{i,j} p_{ij} &= F_{LGKz} \\ l_{RKE} b_{RKE} \cdot \sum_{i,j} (x_{REKj} + \Delta x_{LGK}) p_{ij} &= -M_{LGKy} \end{aligned} \quad (4.23)$$

folgt dann die endgültige Berechnung der *Bodendruckverteilung* als

$$\begin{aligned}
 p_{ij} &= (a + bx_{REKj}) p_{ansij} \\
 \text{mit } p_{ansij} &= \begin{cases} \left(1 - \left|\frac{2x_{REKj}}{l_{mati}}\right|^{e_l}\right) \left(1 - \left|\frac{2y_{REKi}}{B_R}\right|^{e_q}\right) l_{mati} & \text{für } |x_{REKj}| \leq \frac{l_{mati}}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
 a &= \frac{1}{l_{RKE} b_{RKE}} \cdot \frac{(M_{LGKy} + \Delta x_{LGK} F_{LGKz}) \sum_{i,j} x_{REKj} p_{ansij} + F_{LGKz} \sum_{i,j} x_{REKj}^2 p_{ansij}}{\left(\sum_{i,j} p_{ansij}\right) \left(\sum_{i,j} x_{REKj}^2 p_{ansij}\right) - \left(\sum_{i,j} x_{REKj} p_{ansij}\right)^2} \\
 b &= \frac{1}{l_{RKE} b_{RKE}} \cdot \frac{(M_{LGKy} + \Delta x_{LGK} F_{LGKz}) \sum_{i,j} p_{ansij} + F_{LGKz} \sum_{i,j} x_{REKj} p_{ansij}}{\left(\sum_{i,j} x_{REKj} p_{ansij}\right)^2 - \left(\sum_{i,j} p_{ansij}\right) \left(\sum_{i,j} x_{REKj}^2 p_{ansij}\right)} \quad (4.24)
 \end{aligned}$$

und daraus einfach abgeleitet die jeweils auf das einzelne *Reibkontakt-Element* wirkende Vertikalkraft

$$F_{zij} = l_{RKE} b_{RKE} p_{ij} \quad (4.25)$$

Abbildung 4.41 zeigt die Form einer unter Latschquermoment resultierenden *Bodendruckverteilung*.

Unter den horizontalen Kräften in der Fahrbahnkontaktzone verformen und verschieben sich beim realen Reifen die dort liegenden Anteile von Gürtel und Gummischicht. Im Modell werden die Reifenanteile in der Kontaktzone durch den *Latsch* abgebildet, der sich abhängig von der Latschlängskraft  $F_{LGKx}$ , der Latschquerkraft  $F_{LGKy}$  und dem Latschvertikalmoment  $M_{LGKz}$  entsprechend der parametrisierten Latschlängsnachgiebigkeit  $n_{LKx}$ , Latschquernachgiebigkeit  $n_{LKy}$  und Latschtorsionsnachgiebigkeit  $n_{LKt}$  im *Kontaktsystem* gegenüber dem *Reifengürtel* verschiebt, verdreht und verbiegt. Nun besitzen die durch den *Latsch* abgebildeten Anteile eines realen Reifens, und von diesen v.A. die Gummischicht, ein komplexes dynamisches Verformungsverhalten, bei dem neben innerer Reibung und Dämpfung auch viskoelastische Effekte, d.h. zeitweise plastische Formveränderungen ohne resultierende elastische Kräfte, auftreten. Eine genauere Analyse v.A. der 'Fading Memory'-Eigenschaften findet man bspw. in [92], während die zusätzlichen Effekte im Modell durch einfache PT1-Verzögerungsglieder abgebildet werden. Die Zeitkonstanten  $\tau_{LKx}$ ,  $\tau_{LKy}$  und  $\tau_{LKt}$  der PT1-Glieder sind keine zusätzlichen Modellparameter, sondern folgen aus anderen Modellparametern. Diese Abhängigkeit beschreiben hier nicht weiter detaillierte Funktionen, die auf jeden Fall streng monoton

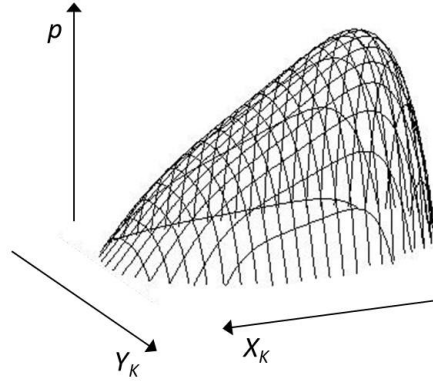


Abbildung 4.41: Bodendruckverteilung unter Latschquermoment

in den Latschnachgiebigkeiten steigen:

$$\begin{aligned}
 \tau_{LKx} &= g_x(P, n_{LKx}) && n_{LKx} \\
 0 < \tau_{LKy} &= g_y(P, n_{LKy}) \text{ monoton steigend in } && n_{LKy} \\
 \tau_{LKt} &= g_t(P, n_{LKt}) && n_{LKt}
 \end{aligned}$$

mit  $P$  weitere Parameter  $\neq n_{LKx}, n_{LKy}, n_{LKt}, c_{GF\ rad}, c_{GF\ quer}, c_{GF\ rot\ ax}, c_{GF\ rot\ rad}$  (4.26)

Abweichend von der originalen Modellvariante wird hier der Einfluss der Federsteifen der Anbindung von *Reifengürtel* und Felge auf die PT1-Glieder ausgeschlossen. Die vorhandene Dämpfung dieser Anbindung ersetzt nämlich eine weitere darauf angepasste Filterung von Anregungen. Außerdem passt die übergreifende Wirkung von Parametern nicht zum komponentenbasierten Modellansatz, und der mechanisch interpretierbare komponentenbeschränkte Einfluss von  $c_{GF\ quer}$  vereinfacht die Bildung einer *Sequentiellen Parameteridentifikation* erheblich. Nimmt man die resultierenden Latschkräfte  $F_{LGKx}$  in  $x_K$ -,  $F_{LGKy}$  in  $y_K$ -Richtung und das resultierende Moment  $M_{LGKz}$  um die  $z_K$ -Richtung (4.34) vorweg, erhält man für die PT1-verzögerten Kräfte und Momente im Latsch

$$\begin{aligned}
 \dot{F}_{Lx\ PT1} &= \frac{1}{\tau_{LKx}} (F_{LGKx} - F_{Lx\ PT1}) \\
 \dot{F}_{Ly\ PT1} &= \frac{1}{\tau_{LKy}} (F_{LGKy} - F_{Ly\ PT1}) \\
 \dot{M}_{Lz\ PT1} &= \frac{1}{\tau_{LKt}} (M_{LGKz} - M_{Lz\ PT1})
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

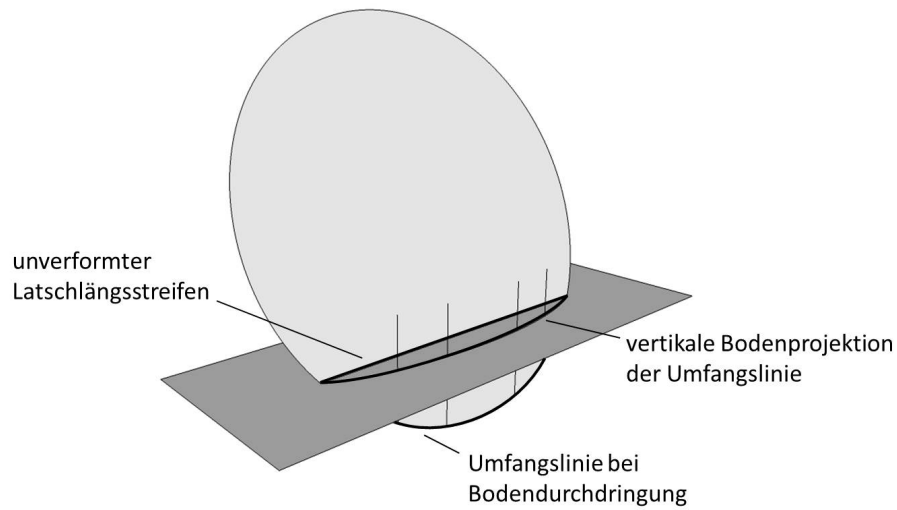


Abbildung 4.42: Gekrümmter *Latschlängsstreifen* unter Gürtelsturz

und damit die unter *Latsch*-Deformation modifizierten Koordinaten der *Reibkontakt-Elemente* im *Kontaktsystem*

$$\begin{aligned}
 x_{REK\ def\ j} &= x_{REK\ j} + \Delta x_{LGK} \\
 y_{REK\ def\ ij} &= y_{REK\ i} + \Delta y_{LGK} + p x_{REK\ j} - q x_{REK\ j}^2 \\
 \text{mit } \Delta x_{LGK} &= n_{LKx} F_{Lx\ PT1} & \Delta y_{LGK} &= n_{LKy} F_{Ly\ PT1} \\
 p &= n_{LKt} M_{Lz\ PT1} & q &= n_{LKb} F_{Ly\ PT1} \\
 n_{LKb} &= \frac{n_{LKy}}{R_{R\ max}^2}
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Eine lineare Versetzung der  $y_K$ -Koordinaten beschreibt also die Latschverdrehung, eine quadratische die Latschverbiegung, wobei die Latschbiegenachgiebigkeit  $n_{LKb}$  aus der Latschquernachgiebigkeit  $n_{LKy}$  hervorgeht. Da auch für größere Reifen unter Latschquerkraft an den beiden Latschenden keine Verschiebung in entgegengesetzte Richtung auftreten soll, muss  $n_{LKb}$  bspw. auch von  $R_{R\ max}$  abhängen.

Neben den kräftebedingten Veränderungen der Latschgeometrie muss auch noch der Einfluss eines unter Sturz  $\varphi_{G0x}$  abrollenden *Reifengürtels* berücksichtigt werden. Abbildung 4.42 zeigt die gekippte Kreisscheibe eines *Latschlängsstreifens* und die Projektion des Kreischnitts unterhalb der Fahrbahn auf den Boden. Entlang dieser gekrümmten Linie müssen die Oberseiten der *Reibkontakt-Elemente* eines *Latschlängsstreifens* verlaufen, da die Fahrbahn diese lediglich an der vertikalen Bodendurchdringung hindert. Auf einer reibungsfreien Fläche würden sich auch die Unterseiten der *Reibkontakt-Elemente*

auf dieser Linie befinden, und dabei keine horizontalen Kräfte entstehen. Werden durch Haftreibung die Unterseiten der *Reibkontakt-Elemente* auf der abgebildeten geraden Linie gehalten erzeugt deren Querverschiebung gegenüber den auf der gekrümmten Linie liegenden Oberseiten die Seitenkraft unter Gürtelsturz. Modelliert wird dieser gekrümmte Verlauf der *Latschlängsstreifen* als Querverschiebung der Oberseiten in Form einer Parabel mit gleicher Krümmung wie eine vertikalprojizierte Kreisscheibe vom Radius  $R_{dyn}$ :

$$y_{REK def \varphi x ij} = y_{REK def ij} + \sin \varepsilon_{GK} \left( R_{dyn} - \|r_{G0} - r_{K0}\| - \frac{x_{REK j}^2}{2R_{dyn}} \right) \quad (4.29)$$

Während das beschriebene Verhalten der Oberseiten der *Reibkontakt-Elemente* deren Verbindung mit dem Reifen definiert, erklärt das Reibverhalten der Unterseiten deren Anbindung an die Straße. Die Unterseite des *Reibkontakt-Elements*  $ij$  verschiebt sich in  $x$ - und  $y$ -Richtung des *Kontaktsystems* gegenüber der Oberseite um die Strecken  $a_{x ij}$  bzw.  $a_{y ij}$  (Abb. 4.17). In der  $z_K$ -Komponente unterscheiden sich Ober- und Unterseite nicht und besitzen beide den Wert 0. Auf die horizontale Relativauslenkung zwischen Ober- und Unterseite reagiert das *Reibkontakt-Element* mit einer elastischen Scherkraft gemäß der parametrisierten Schersteife  $c_{scher}$ , auf die Änderungsgeschwindigkeit der Relativauslenkung mit einer Dämpfungskraft entsprechend dem parametrisierten Dämpfungskoeffizient  $d_{scher}$ .  $c_{scher}$  und  $d_{scher}$  sind hier vereinfachend als Konstanten modelliert, wogegen sie sich am realen Reifen gemäß Gummieigenschaften mit zunehmender Scherkraft und Vertikallast vergrößern (s. [6]). Während die Verformungskraft des masselos modellierten *Reibkontakt-Elements* an der Oberseite durch den Latsch abgestützt wird, erfolgt die Abstützung der Kraft an der Unterseite durch die Reibung mit der Straße. Bewegt sich die Unterseite inertial, also gegenüber der Straßenfläche nicht, gleicht die Haftreibung die Verformungskraft bis zu einem bodendruckabhängigen Maximalbetrag exakt aus. Bei inertial gleitender Unterseite wird die Verformungskraft durch die bodendruck- und gleitgeschwindigkeitsabhängige Gleitreibungskraft in Bewegungsrichtung abgestützt. Formal beschreibt das parametrisierte *Reibbeiwertkennfeld*  $\mu(v, p)$  die bodendruck- und gleitgeschwindigkeitsabhängigen Reibungskoeffizienten. Den Haftreibungskoeffizient erhält man für die Gleitgeschwindigkeit  $v = 0$ . Dieses Reibmodell geht über das der einfachen Coulombreibung hinaus, wird aber schon in einführender Literatur zum Reifenverhalten wie [77] benutzt. Man erhält für die Auslenkungen  $a_{x ij}$ ,  $a_{y ij}$  der *Reibkontakt-Elemente* die

Differenzial(un)gleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} (d_{scher}\dot{a}_{xij} + c_{scher}a_{xij})^2 + (d_{scher}\dot{a}_{yij} + c_{scher}a_{yij})^2 \leq F_{reibij}^2 \quad \text{für } u_{ij} = 0 \\ \left. \begin{array}{l} \frac{u_{xij}}{u_{ij}} F_{reibij} + d_{scher}\dot{a}_{xij} + c_{scher}a_{xij} = 0 \\ \frac{u_{yij}}{u_{ij}} F_{reibij} + d_{scher}\dot{a}_{yij} + c_{scher}a_{yij} = 0 \end{array} \right\} \quad \text{sonst} \end{array} \right.$$

mit  $u_{xij} = \dot{a}_{xij} + v_{0Kxij}$      $u_{yij} = \dot{a}_{yij} + v_{0Kyij}$

$$u_{ij} = \sqrt{u_{xij}^2 + u_{yij}^2} \quad F_{reibij} = \mu(u_{ij}, p_{ij}) \cdot F_{zij}$$

$$\begin{pmatrix} v_{0Kxij} \\ v_{0Kyij} \end{pmatrix} = ((A_{K0})_{1..3,1..2})^T \frac{d}{dt} \left( (A_{K0})_{1..3,1..2} \begin{pmatrix} x_{REK def j} \\ y_{REK def \varphi x ij} \end{pmatrix} + r_{K0} \right) \quad (4.30)$$

Eine zusätzliche Definition der Übergänge zwischen *haftendem* ( $u_{ij} = 0$ ) und *gleitendem Zustand* ( $u_{ij} \neq 0$ ) eines *Reibkontakt-Elements* ist, sofern sich die Reibkraft geschwindigkeitsabhängig für  $u_{ij} = 0$  ändert und das *stetig*, nicht erforderlich, da  $u_{ij}$  eine sich *stetig* mit der Zeit ändernde Größe ist, und sich damit Zustandswechsel nur einstellen können, wenn sie mechanisch auch vorgesehen sind. Das *Reibbeiwertkennfeld*  $\mu(v, p)$  ist mit physikalischem Hintergrund nicht beliebig, sondern unterliegt bestimmten Gesetzmäßigkeiten, die ausgiebig analysiert wurden und in der Literatur wiederzufinden sind. Basis für diese Zusammenhänge ist die grundsätzliche Kombination von Reibung durch Adhäsion resultierend aus elektrischen Kräften zwischen glatten Oberflächen und Reibung durch elastische Deformation bei der Berührung rauer Oberflächen. Beide Effekte werden bspw. in [20] für allgemeine Materialpaarungen ausführlich analysiert und u. A. in [22] als verantwortlich für die Reibung der Materialpaarung Gummi - Asphalt beschrieben. In [37] wird ein allgemeines Modell vorgestellt für den Einfluss der Gleitgeschwindigkeit und Temperatur auf den Reibbeiwert, das allein über das materialpaarabhängige Maximum der Kurve parametrisiert wird. Dabei ist sogar das Ansteigen des Reibbeiwerts für kleine wachsende Gleitgeschwindigkeiten berücksichtigt. Modelle, die einen Bezug zwischen der detaillierten Beschaffenheit der Straßenoberfläche und dem Reibbeiwert herstellen finden sich in [104] und [22]. Während in [104] so der über der Vertikallast degressiv wachsende Reibbeiwert durch Dämpfungseffekte erklärt werden kann, wird in [22] ein Modell identifiziert, das zum Zweck der Erkennung im Fahrzeug aus gemessenen Kennwerten der Fahrbahntextur auf den Reibbeiwert schließen lässt. In [6] wird einmal der Einfluss der genauen Gleitgeschwindigkeit als gering für das Reifenverhalten beschrieben und auf die Möglichkeit hingewiesen, den schwach exponentiell über dem Bodendruck fallenden Reibwertkoeffizienten linear anzunähern. Dadurch motiviert wird

hier das allgemeine Reibbeiwertkennfeld  $\mu(v, p)$  angenähert durch die 4 Parameter

$$\begin{aligned} \mu_{haft\ 0bar} & \quad \mu_{haft\ \Delta p} \\ \mu_{gleit\ 0bar} & \quad \mu_{gleit\ \Delta p} \end{aligned} \quad (4.31)$$

verwendet mit den Stützstellen  $v = (0, \Delta v)$ ,  $\Delta v$  sehr klein, so dass praktisch nur zwischen Haften und Gleiten unterschieden wird, und  $p = (0, \Delta p)$ ,  $\Delta p = 2bar$

$$\mu(v, p) = \begin{cases} \frac{\Delta p - p}{\Delta p} \mu_{haft\ 0bar} + \frac{p}{\Delta p} \mu_{haft\ \Delta p} & \text{für } v = 0 \\ \frac{\Delta p - p}{\Delta p} \mu_{gleit\ 0bar} + \frac{p}{\Delta p} \mu_{gleit\ \Delta p} & \text{für } v \geq \Delta v \\ \frac{\Delta v - v}{\Delta v} \mu(0, p) + \frac{v}{\Delta v} \mu(\Delta v, p) & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.32)$$

Aus den ermittelten Auslenkungen eines *Reibkontakt-Elements* lässt sich nun die Kraft im *Kontaktsystem* bestimmen, die dieses an der Stelle seiner Oberseite in den *Latsch* einprägt:

$$F_{x\ ij} = d_{scher} \dot{a}_{x\ ij} + c_{scher} a_{x\ ij} \quad F_{y\ ij} = d_{scher} \dot{a}_{y\ ij} + c_{scher} a_{y\ ij} \quad (4.33)$$

Neben dem schon bekannten Latschquermoment  $M_{LGK_y}$  und der bekannten Latschvertikalkraft  $F_{LGK_z}$  können nun die übrigen Latschkraft- und -momente aus den jeweiligen Größen der einzelnen *Reibkontakt-Elemente* aufsummiert werden:

$$\begin{aligned} F_{LGK_x} &= \sum_{i,j} F_{x\ ij} \\ F_{LGK_y} &= \sum_{i,j} F_{y\ ij} \\ M_{LGK_x} &= \sum_{i,j} y_{REK\ def\ ij} F_{z\ ij} \\ M_{LGK_z} &= \sum_{i,j} (x_{REK\ def\ j} F_{y\ ij} - y_{REK\ def\ ij} F_{x\ ij}) \end{aligned} \quad (4.34)$$

An dieser Stelle wurde für die hier verwendete Modellvariante eine Anpassung gegenüber der Originalfassung vorgenommen. Ursprünglich wurden als Positionen der *Reibkontakt-Elemente* in der Summierung von *Latsch*-Kräften und -Momenten die Größen  $y_{REK\ def\ \varphi x\ ij}$  verwendet. In diese geht jedoch mit 4.29 auch die durch den *Sturzwinkel* des *Reifengürtels* verursachte *virtuelle* Verschiebung der *Reibkontakt-Elemente* ein, die nicht die physikalische Position der Oberseiten, sondern die Berücksichtigung des Queranteils der Eindrückung in 4.33 ermöglicht. Der Ort, an dem sich die Oberseiten inkl. der Einprägung ihrer Kräfte befinden, bleibt dadurch unbeeinflusst. So ist die hier verwendete Berechnung einmal näher am realen Vorgang und erweist sich bei der Herleitung von *Zielgrößen*-Eigenschaften als hilfreich.

Die nun definierten Größen des Latschmoments  $M_{LGK}$  und der Latschkraft  $F_{LGK}$  im



Abbildung 4.43: Flachbahnprüfstand FAST am KIT



Abbildung 4.44: Innentrommelprüfstand BAST (Foto: U. Freier)

*Kontaktsystem* wirken ungefiltert im *Kontaktpunkt* auf den *Reifengürtel*. Umgerechnet auf die Gürtelmitte  $r_{G0}$  als Angriffspunkt ergibt sich das inertielle Moment  $M_{LG0}$  und die inertielle Kraft  $F_{LG0}$  auf den *Reifengürtel*

$$F_{LG0} = A_{K0} F_{LGK} \quad M_{LG0} = -(r_{G0} - r_{K0}) \times A_{K0} F_{LGK} + A_{K0} M_{LGK} \quad (4.35)$$

#### 4.1.6 Prüfstandsmodell

Für eine gezielte Analyse des Verhaltens realer Reifen ist die isolierte Betrachtung des Reifens außerhalb des Fahrzeugs unverzichtbar. Auch im verbauten Zustand kann das Reifenverhalten getrennt vom Fahrzeugverhalten gemessen werden. In [72] bspw. wird ein Verfahren vorgestellt, bei dem der Schräglaufwinkel über fest mit dem Radträger verbundene optische Geschwindigkeits- und einen Gierratensoren und der Sturzwinkel durch zwei getrennt angebrachte ebenfalls optische Abstandssensoren gemessen wird. Eine Kraftmessfelge bestimmt alle zwischen Fahrzeug und Reifen wirkenden Kräfte und Momente. Damit kann lückenlos auf das Übertragungsverhalten speziell des Reifens zurückgeschlossen werden. Allerdings ist das Einstellen und Reproduzieren vorgegebener fester Betriebspunkte nur schwer möglich. V.A. die Ermittlung vollständiger Kennfelder gelingt nur mit der Vermessung des isolierten Reifens im *Reifenprüfstand*. Im Unterschied zur Messung im Fahrzeug werden hier die Winkel- und die vertikale Lage der Felge durch Hydraulikzylinder wahlfrei eingestellt. An Stelle der horizontalen Bewegung des Reifens über die Fahrbahn, bewegt sich im Prüfstand die Ersatzfahrbahn unter dem in ebener Richtung stehenden Reifen. Die bewegte Fahrbahn ist je nach Prüfstandstyp realisiert durch ein Band auf Rollen, eine kleinere Trommel unterhalb oder eine große Trommel um den Reifen (s. Abb. 4.43, 4.44). Jedes der Prüfstandskonzepte weißt eigene Vor- und Nachteile auf: Während die Rollbandtechnik mit einer teilweise nachgiebigen Fahrbahn



kämpft, ergibt sich beim Innentrommel-Prüfstand eine unrealistisch in Längsrichtung nach unten und beim Außentrommelprüfstand nach oben gekrümmte Fahrbahn. In allen Prüfstandstypen werden Querbewegungen des Reifens durch einen um die Vertikalachse gedrehten Reifen imitiert. Trotzdem können nicht alle Bewegungsabläufe eines in der Ebene bewegten Reifens abgebildet werden. So kann bspw. ein rein längsrollender Reifen, der anhält und anschließend ohne zu Rollen in Querrichtung bewegt wird, nicht dargestellt werden. Außerdem besitzen die Winkelsteller ein begrenztes Intervall justierbarer Winkel, und alle Stellglieder arbeiten mit einer maximalen Stellgeschwindigkeit. In jedem Fall können aber die meisten Stationärzustände und die zur Identifikation eines Modells relevanten Situationen abgebildet werden. Antriebs- und Bremsmomente werden meist über elektrische Komponenten in die Felge eingepreßt. Die Messeinrichtung wird üblicherweise wie im Fall der Messung im Fahrzeug durch die Verwendung einer Messfelge realisiert, die das räumliche Felgenmoment und die räumliche Felgenkraft erfasst.

In verschiedenen Einrichtungen von Forschung und Industrie wurden *Reifenprüfstände* mit unterschiedlichen Steuer- und Messtechniken realisiert, über die einige Veröffentlichungen informieren: [80] und [94] beschreiben Aufbau und Funktion eines *Flachbahn*-Prüfstands. Während in [80] wie weiter unten ausgeführt der Prüfstandsbetrieb und die Messdatenverarbeitung erklärt werden, informiert [94] im Detail über die Konstruktion, die mechanischen Eigenschaften und Regelung des *Flachbahn*-Prüfstands. [35] stellt einen *Innentrommel*-Prüfstand vor, dessen Rollfläche zusätzlich mit kompaktem Kunstschnee beschichtet werden kann, wobei auch genauer auf die servohydraulischen Winkel- und Positions-Steller eingegangen wird. In [55] erhält man Einblick in die Technik eines *Außentrommel*-Prüfstands mit in der Rollfläche integrierten 3D-Kraft- und 2D-Geschwindigkeitssensoren zur Messung der genauen Vorgänge in der Kontaktzone. [7] stellt noch einen Prüfstand vor, der ergänzend die Messung der Temperaturverteilung über den Reifen und von dessen Verformungen ermöglicht. Außerdem ist dieser Prüfstand in der Lage, sehr schnelle Positionsveränderungen der Stellglieder und Schräglaufwinkel bis  $90^\circ$  zu realisieren.

Die Zeitschriebe der im Prüfstandsversuch gemessenen Kräfte und Momente sind nicht ohne weitere Verarbeitungsschritte direkt verwendbar: Sie sind bspw. stark verrauscht, einzelne Zeitabschnitte von Stationärmessungen werden nicht stationär, da die Betriebspunkte instabil sind, Stationärzustände werden spät erreicht, Temperatur-, Verschleißeffekte führen zu inkonsistenten Daten. Ein Software-Tool zur Aufbereitung der Daten beschreibt z.B. [80]. Dabei wird jede Einzelmessung gefiltert, untersucht und auf den gültigen und zu den übrigen Messungen konsistenten Zeitbereich eingeschränkt oder sogar komplett verworfen. Zusätzlich erfolgt eine vertikallastabhängige Verschiebung der Schlupfwerte, so dass  $0\text{Nm}$  in Reifenlängsrichtung immer mit  $0$  Schlupf zusammenfallen, um in der Darstellung der Messergebnisse der lastabhängigen Veränderung des *dynamischen Rollradius* Rechnung zu tragen. Sämtliche Veränderungen durch die Software müs-

sen vom Anwender erst bestätigt oder ggf. angepasst werden, bis die Datenaufbereitung als valide betrachtet werden kann. Zur Integration der verschiedenen Möglichkeiten der Verhaltensmessung existierender Reifentypen in den automobilen Entwicklungsprozess gibt [59] einen geeigneten Überblick und zeigt dabei die Behandlung klassischer Probleme bei der Auswahl für die Fahrzeugauslegung relevanter Messgrößen, bei der Messung selbst, der Datenaufbereitung und der Parameteridentifikation für die Reifen- und Gesamtfahrzeugsimulation. Für die Beschreibung der Ergebnisse einer Prüfstandsmessung hat sich das TYDEX-Format (s. [95]) etabliert, das allgemein den Austausch von Messungen, Simulationsergebnissen und Modellparametrierungen von Reifen normiert. Die zeitabhängige Lage- und Bewegungssituation der Felge wird im TYDEX-Format durch die Größen *Einfederung*  $f$  und *Bahngeschwindigkeit*  $v_B$  der SAE-Norm J2047, und die Größen *Radlenkwinkel*  $\delta$ , *Radsturzwinkel*  $\varepsilon_W$ , *Umfangsschlupf*  $\lambda$  (Normgröße  $S_{X,W}$ ) und *Schräglaufwinkel*  $\alpha$  aus der DIN 70000 ausgedrückt. Eine ausführliche Motivation und Definition dieser Begriffe gibt es in Abschnitt 4.1.2. Für die Dokumentation der resultierenden Kräfte und Momente auf die Felge definiert das TYDEX-Format ein eigenes Koordinatensystem, das sich ausschließlich in der horizontalen inertialen Ebene mit der Felge mitdreht und seinen Ursprung im *Radmittelpunkt* hat. Abbildung 4.45 zeigt dieses *horizontierte Koordinatensystem* mit der formalen Beschreibung

**Definition 21 (Horizontiertes Koordinatensystem)** *Ein Punkt  $p$  mit Koordinaten  $p_H$  im horizontierten System  $H$  besitzt bei Lage  $r_{F0}$  des Radmittelpunkts und Felgenorientierung  $\varphi_{F0}$*

*entierung  $\varphi_{F0} = \begin{pmatrix} \varphi_{F0x} \\ \varphi_{F0y} \\ \varphi_{F0z} \end{pmatrix}$  im Inertialsystem die inertialen Koordinaten*

$$p_0 = A_{H0} \cdot p_H + r_{F0}$$

*mit der Drehmatrix vom System  $H$  ins Inertialsystem*

$$A_{H0} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{F0z} & -\sin \varphi_{F0z} & 0 \\ \sin \varphi_{F0z} & \cos \varphi_{F0z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Im *horizontierten Koordinatensystem* werden im ungestürzten Fall die horizontalen Reifenkräfte und -momente aus Radperspektive dargestellt. Um Prüfstandsmessungen als Grundlage für die Parameterbestimmung verwenden zu können, muss ein Gesamtmodell auch den *Reifenprüfstand* samt den vom TYDEX-Format bestimmten Schnittstellen abbilden. Anders als ein realer Prüfstand muss eine Prüfstandssimulation nicht räumlich begrenzt bleiben, kann daher auf die Abbildung der bewegten Abrollflächen verzichten und einfacher eine beliebig ausgedehnte Fahrbahn und einen beliebig über diese Fläche bewegbaren Reifen modellieren. Das Prüfstandsmodell besteht dann insgesamt

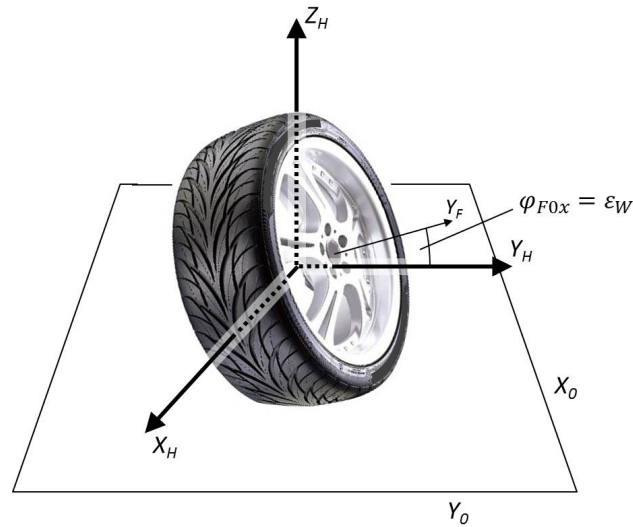


Abbildung 4.45: horizontiertes Koordinatensystem

allein aus einer Transformation der TYDEX-Bewegungsgrößen der Felge  $\delta$ ,  $f$ ,  $v_B$ ,  $\varepsilon_W$ ,  $\lambda$ ,  $\alpha$  in die Felgen-Bewegungsgrößen  $r_{F0}$ ,  $\varphi_{F0}$  des Reifenmodells und der Transformation der resultierenden Kräfte und Momente  $F_{F0}$ ,  $M_{F0}$  vom Inertialsystem ins *horizontalierte Koordinatensystem*  $F_{FH}$ ,  $M_{FH}$ . Die Prüfstandssimulation erlaubt dann genau alle Felgenbewegungen, die ein realer *Reifenprüfstand* zulässt, womit sämtliche umsetzbare Messstimulationen in der Simulation abgebildet, und alle simulierten Felgenbewegungen auch real eingestellt werden können. Als Berechnungsvorschrift für das gesamte Prüfstandsmodell erhält man

$$\begin{pmatrix} \dot{r}_{F0x} \\ \dot{r}_{F0y} \\ r_{F0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_B \cos(\delta - \alpha) \\ v_B \sin(\delta - \alpha) \\ R_{Rmax} - f \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_{F0x} \\ \dot{\varphi}_{F0y} \\ \varphi_{F0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_W \\ \frac{(\lambda + 1) v_B \cos \alpha}{R_{dyn}} \\ \delta \end{pmatrix}$$

$$F_{FH} = A_{H0}^T F_{F0} \quad M_{FH} = A_{H0}^T M_{F0} \quad (4.37)$$

### 4.1.7 Stationärzustände

In Abschnitt 4.1.6 wurden die *Stationärzustände* bereits als die vorwiegend an Prüfständen gemessenen Betriebszustände eines Reifens genannt. Schon am Verhalten unter den *Stationärzuständen* zeigen sich die wesentlichen Eigenschaften eines Reifens. Ein Reifen befindet sich zur Zeit  $t$  im *Stationärzustand*, wenn

$$\dot{F}_{FH}(t) = \dot{M}_{FH}(t) = 0 \quad \text{für } t_1 < t < t_2$$

gilt, d.h., wenn die Antwortkräfte und -momente konstant bleiben. *Stationärzustände* stellen sich nur ein, wenn im Koordinatensystem der resultierenden Größen  $F_{FH}$  und  $M_{FH}$ , also im *horizontalen System* alle Reifenkomponenten ihre Position nur gleichbleibend symmetrisch verändern, sich die 'Bewegung der Fahrbahn' aus dieser Perspektive nicht ändert, und somit dort die Komponenten mit gleichbleibenden Kräften und Momenten aufeinander wirken. Kräfte und Momente müssen die einzelnen Komponenten zusätzlich auf ihrer jeweiligen Stationärbahn halten. In dieser Arbeit werden folgende Modellanregungen, unter denen sich *Stationärzustände* einstellen können, als *Stationäranregungen* betrachtet:

**Definition 22 (Stationäranregung)** Eine Anregung  $(\delta, f, v_B, \varepsilon_W, \lambda, \alpha)$  mit  $\dot{\delta} = 0$ ,  $\dot{f} = 0$ ,  $\dot{v}_B = 0$ ,  $\dot{\varepsilon}_W = 0$ ,  $\dot{\lambda} = 0$  und  $\dot{\alpha} = 0$  wird als *Stationäranregung* bezeichnet.

Allgemeiner können sich *Stationärzustände* einstellen, wenn sich die Felge mit konstanter Geschwindigkeit um die *Raddrehachse* dreht, und sich das *horizontalisierte Koordinatensystem* des Reifens auf einer horizontalen Kreisbahn bewegt. Es müsste also lediglich  $\ddot{\delta} = 0$  statt  $\dot{\delta} = 0$  gefordert werden, was jedoch hier nicht erforderliche komplexere *Stationärzustände* erlaubt, da u.A. die Kreisbahn des rotierenden Reifens die Entstehung innerer Kreiselmomente bewirkt. Unter einer *Stationäranregung* gemäß Def. 22 bewegt sich die Felge einfacher gleichmäßig um die *Raddrehachse* rotierend unter konstantem *Radsturz- und -lenkwinkel* mit konstanter translatorischer Geschwindigkeit parallel zur Fahrbahnebene (s. Abb. 4.46). Dass hierbei immer ein *Stationärzustand* möglich ist, soll nun am Reifenmodell nachgewiesen werden.

Die Felge bewegt sich nach Gleichung 4.36 (wegen  $\dot{\delta} = 0$  ist  $\varphi_{F0z}$  und damit auch  $A_{H0}$  (Def. 21) konstant) mit den konstanten Geschwindigkeiten  $\dot{r}_{F0\text{const}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} v_{0x\text{const}} \\ v_{0y\text{const}} \\ 0 \end{pmatrix}$  und

$$\dot{\varphi}_{F0\text{const}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\varphi}_{0y\text{const}} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ im Inertialsystem.}$$

Nun soll zunächst gezeigt werden, dass unter der erzwungenen Bewegung  $\dot{r}_{G0\text{const}} = \dot{r}_{F0\text{const}}$  und  $\dot{\varphi}_{G0\text{const}} = \dot{\varphi}_{F0\text{const}}$  des *Reifengürtels* und den erzwungenen konstanten

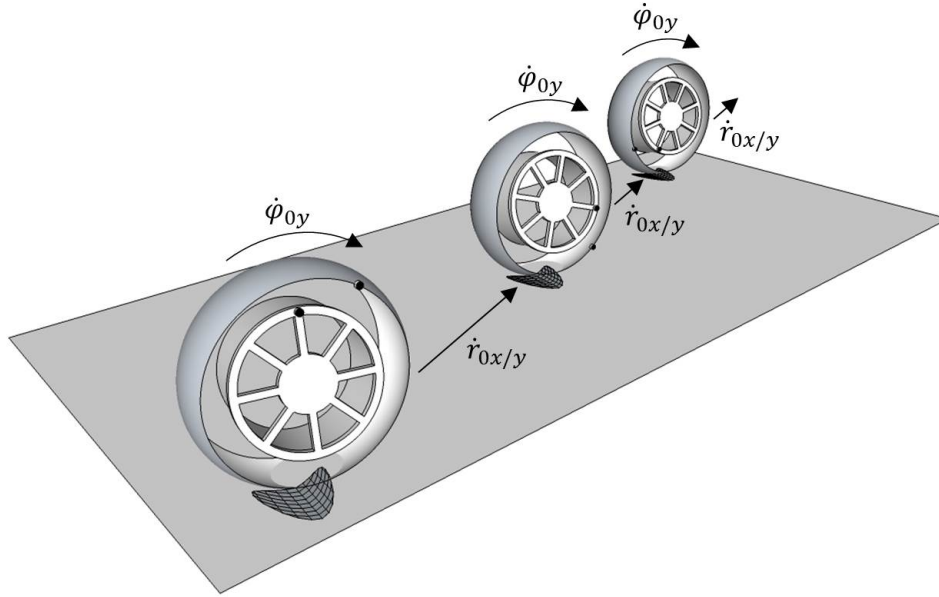


Abbildung 4.46: Stationärzustand

$PT1$ -Zustandsgrößen  $F_{Lx PT1 const}$ ,  $F_{Ly PT1 const}$ ,  $M_{Lz PT1 const}$  des *Latschs* (s. Abb. 4.46) konstante inertielle Schnittstellenkräfte und -momente  $F_{FG0 const}$  und  $M_{FG0 const}$  zwischen *Reifengürtel* und *Felge* (Gl. 4.8) sowie  $F_{LG0 const}$  und  $M_{LG0 const}$  zwischen *Latsch* und *Reifengürtel* (in Gl. 4.15, 4.22, 4.34 im *Kontaktsystem*) resultieren. Durch die erzwungenen Modellzustände müssen Gleichungen 4.11 und 4.27 natürlich vorerst ausgeblendet werden.

Die inertialen Drehlagen von *Felge* und *Reifengürtel* variieren zeitlich nur in den Komponenten  $\varphi_{F0y}$  bzw.  $\varphi_{G0y}$ , was durch die Drehreihenfolge aus Def. 17 bzw. 18 die inertielle Orientierung der *Felgen-* bzw. *Gürtelquerrichtung* konstant erhält als  $y_{F0 const}$  und

$y_{G0 const}$ . Auf ebener Fahrbahn ( $f_S = 0$ ,  $z_{K0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ) wird Gleichungssystem 4.12 also

für  $y_{G0 const}^T \cdot (r_{G0} - r_{K0})_{const} = x_{K0 const}^T \cdot (r_{G0} - r_{K0})_{const} = 0$  unter konstanter inertieller Längsausrichtung  $x_{K0 const}$  des *Kontaktsystems* und konstantem Wert  $(r_{G0} - r_{K0})_{const}$  erfüllt, d.h. die *Kontaktpunkt-*Geschwindigkeit entspricht der translatorischen Geschwindigkeit von *Felge* und *Reifengürtel*:  $\dot{r}_{K0 const} = \begin{pmatrix} v_{0x const} \\ v_{0y const} \\ 0 \end{pmatrix}$ . Damit folgt auch ein kon-

stanter Wert  $A_{K0 const}$  für die Orientierungsmatrix des *Kontaktsystems*. Und nacheinander ergeben sich konstante Werte für die *Gürtel-einfederung*  $f_G const$  (Gl. 4.13, 4.14),

die Kontaktkraft  $F_{LGKz\ const}$  (Gl. 4.15) und die Latschgrundform mit den *Laufstreifen*-Längen  $l_{mat\ i\ const}$  (Gl. 4.19, 4.20). Um weiterhin von numerisch bedingten kleineren Abweichungen von den Konstantwerten durch die Diskretisierung des *Latschs* in einzelne *Reibkontakt-Elemente* abstrahieren zu können, wird die Zahl  $n_{RES}$  der *Reibkontakt-Elemente* eines *Latschlängsstreifens* als beliebig groß betrachtet. Dann kann für die *Reibkontakt-Elemente* angenommen werden, dass sich zu verschiedenen Zeitpunkten lediglich unterschiedliche Elemente an den jeweils gleichen Positionen befinden, und es gilt für ihre  $x$ -Koordinaten:  $x_{REK\ j_0}(t) = x_{REK\ j_{\Delta t}}(t + \Delta t)$  mit  $j_{\Delta t} = \left( j_0 - \frac{R_{dyn}\dot{\varphi}_{0y\ const}\Delta t}{l_{RKE}} \right)$  mod  $n_{RES}$ . Daraus folgen nun auch konstante Werte  $\Delta x_{LGK\ const}$ ,  $\Delta y_{LGK\ const}$ ,  $p_{const}$  und  $q_{const}$  (Gl. 4.28) für die Latschdeformation, das Latschquermoment  $M_{LGKy\ const}$  (Gl. 4.22) und konstante Druck- sowie Vertikalkraftwerte  $p_{ij_{\Delta t}\ const}$  und  $F_{z\ ij_{\Delta t}\ const}$  für die zeitlich indextransformierten *Reibkontakt-Elemente* (Gl. 4.24, 4.25). Die einzelnen *Reibkontakt-Elemente* erfahren über der Zeit in periodischer Abfolge jeweils gleiche Einflussfaktoren. Dies betrifft Gleichungen 4.28, 4.29, 4.30 und 4.33, in denen sich die gleichbleibende Latschdeformation, Druck-, Reibverhältnisse und Relativgeschwindigkeiten durch konstante Werte zeigen, und man insgesamt für die periodisch indextransformierten Größen der *Reibkontakt-Elemente* zu den jeweiligen Horizontalkräften die konstanten Werte  $F_{x\ ij_{\Delta t}\ const}$  und  $F_{y\ ij_{\Delta t}\ const}$  erhält. Schließlich ergeben sich auch die resultierenden Latschkräfte und -momente  $F_{LGKx\ const}$ ,  $F_{LGKy\ const}$ ,  $M_{LGKx\ const}$ ,  $M_{LGKz\ const}$  nach Gleichung 4.34 als konstant, da die Änderung der Summen in Terme über den indextransformierten Größen zwar zu jeweils veränderten Summationsreihenfolgen aber immer zur gleichen Summe führen. Aus Gleichung 4.35 erhält man noch die als konstant nachzuweisende inertielle Schnittkraft- und das Schnittmoment  $F_{LG0\ const}$  und  $M_{LG0\ const}$  zwischen *Latsch* und *Reifengürtel*.

Zur Analyse der Schnittstellenkraft- und des Schnittstellenmoments  $F_{FG0\ const}$  und  $M_{FG0\ const}$  zwischen *Reifengürtel* und *Felge* kann keine Folge konstanter Zwischengrößen abgeleitet werden. Hierzu müssen die resultierenden Größen direkt berechnet werden. Die Modellrechnung analysiert dabei die Felgenlage und -bewegung  $r_{FG}$ ,  $\varphi_{FG\ lin}$ ,  $\dot{r}_{FG}$ ,  $\dot{\varphi}_{FG\ lin}$  aus Perspektive des *Reifengürtels*. Abbildung 4.47 illustriert diese Relativlage bzw. -bewegung für still stehenden *Reifengürtel*.

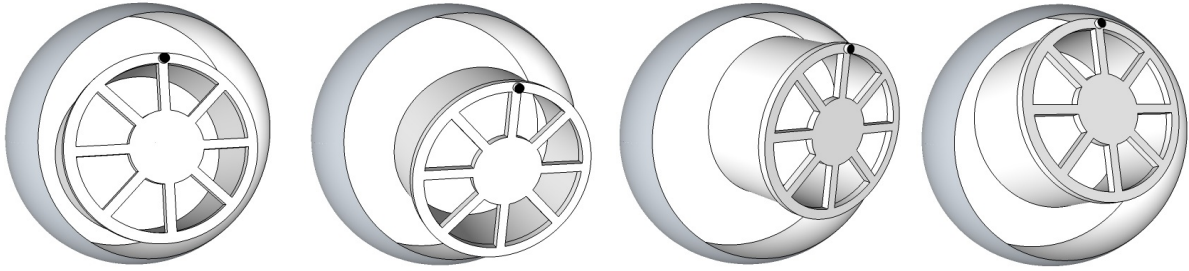


Abbildung 4.47: Felgenbewegung im stehenden *Gürtelsystem* während *Stationärzustand*

Durch Einsetzen der Gleichungen 4.8, 4.6 und 4.2 ineinander erhält man für die aus dieser Bewegung resultierende inertielle Kraft auf den *Reifengürtel*

$$F_{FG0} = A_{G0} \cdot \left( \begin{array}{c} \left( \begin{array}{ccc} c_{GF\ rad} & 0 & 0 \\ 0 & c_{GF\ quer} & 0 \\ 0 & 0 & c_{GF\ rad} \end{array} \right) A_{G0}^T (r_{F0} - r_{G0}) + \\ \left( \begin{array}{ccc} d_{GF\ rad} & 0 & 0 \\ 0 & d_{GF\ quer} & 0 \\ 0 & 0 & d_{GF\ rad} \end{array} \right) \frac{d}{dt} \left( A_{G0}^T (r_{F0} - r_{G0}) \right) \end{array} \right) \quad (4.38)$$

#### 4 Entwicklung und Verifikation einer Sequentiellen Parameteridentifikation für ein physikalisches Reifenmodell

---

Für die rot. Gürtelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}_{G0\ const} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\varphi}_{0y\ const} \\ 0 \end{pmatrix}$  ergibt sich nach Def. 18 als Dreh- und Drehgeschwindigkeitsmatrix des *Reifengürtels*

$$A_{G0} = R_{Gz} \cdot R_{Gx} \cdot R_y(t) \quad \dot{A}_{G0} = R_{Gz} \cdot R_{Gx} \cdot \dot{R}_y(t)$$

$$\text{mit } R_y(t) = \begin{pmatrix} \cos \dot{\varphi}_{0y\ const} t & 0 & \sin \dot{\varphi}_{0y\ const} t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \dot{\varphi}_{0y\ const} t & 0 & \cos \dot{\varphi}_{0y\ const} t \end{pmatrix}$$

$$\dot{R}_y(t) = \dot{\varphi}_{0y\ const} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \dot{\varphi}_{0y\ const} t & 0 & \cos \dot{\varphi}_{0y\ const} t \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos \dot{\varphi}_{0y\ const} t & 0 & -\sin \dot{\varphi}_{0y\ const} t \end{pmatrix}$$

und den Konstanten

$$R_{Gz} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{G0z\ const} & -\sin \varphi_{G0z\ const} & 0 \\ \sin \varphi_{G0z\ const} & \cos \varphi_{G0z\ const} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_{Gx} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{G0x\ const} & -\sin \varphi_{G0x\ const} \\ 0 & \sin \varphi_{G0x\ const} & \cos \varphi_{G0x\ const} \end{pmatrix}$$

Eingesetzt in 4.38 erhält man

$$F_{FG0} = \begin{pmatrix} R_{Gz} \cdot R_{Gx} \cdot R_y(t) \cdot \begin{pmatrix} c_{GF\ rad} & 0 & 0 \\ 0 & c_{GF\ quer} & 0 \\ 0 & 0 & c_{GF\ rad} \end{pmatrix} \cdot R_y^T(t) \cdot R_{Gx}^T \cdot R_{Gz}^T + \\ R_{Gz} \cdot R_{Gx} \cdot R_y(t) \cdot \begin{pmatrix} d_{GF\ rad} & 0 & 0 \\ 0 & d_{GF\ quer} & 0 \\ 0 & 0 & d_{GF\ rad} \end{pmatrix} \cdot \dot{R}_y^T(t) \cdot R_{Gx}^T \cdot R_{Gz}^T \end{pmatrix} (r_{F0} - r_{G0})_{const}$$

Ausmultipliziert heben sich die zeitabhängigen Komponenten  $R_y(t)$ ,  $R_y^T(t)$  und  $\dot{R}_y^T(t)$  gegenseitig auf, und es ergibt sich als konstante Kraft zwischen *Reifengürtel* und Felge

$$F_{FG0\ const} = R_{Gz} \cdot R_{Gx} \cdot \begin{pmatrix} c_{GF\ rad} & 0 & -d_{GF\ rad} \dot{\varphi}_{0y\ const} \\ 0 & c_{GF\ quer} & 0 \\ d_{GF\ rad} \dot{\varphi}_{0y\ const} & 0 & c_{GF\ rad} \end{pmatrix} \cdot R_{Gx}^T \cdot R_{Gz}^T \cdot (r_{F0} - r_{G0})_{const} \quad (4.39)$$

Zur Bestimmung des Schnittstellenmoments  $M_{FG0}$  zwischen *Reifengürtel* und Felge muss zunächst deren linearisierte Relativverdrehung  $\varphi_{FG\ lin}$  berechnet werden. Nach Def. 17



kann die inertielle rotatorische Orientierung der Felge dargestellt werden als

$$A_{F0} = R_{Fz} \cdot R_{Fx} \cdot R_{\Delta FGy} \cdot R_y(t)$$

mit den Konstanten

$$R_{Fz} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{F0z \text{ const}} & -\sin \varphi_{F0z \text{ const}} & 0 \\ \sin \varphi_{F0z \text{ const}} & \cos \varphi_{F0z \text{ const}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_{Fx} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{F0x \text{ const}} & -\sin \varphi_{F0x \text{ const}} \\ 0 & \sin \varphi_{F0x \text{ const}} & \cos \varphi_{F0x \text{ const}} \end{pmatrix}$$

$$R_{\Delta FGy} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{\Delta FGy \text{ const}} & 0 & \sin \varphi_{\Delta FGy \text{ const}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_{\Delta FGy \text{ const}} & 0 & \cos \varphi_{\Delta FGy \text{ const}} \end{pmatrix}$$

wobei  $\varphi_{\Delta FGy \text{ const}}$  den wegen  $\dot{\varphi}_{G0 \text{ const}} = \dot{\varphi}_{F0 \text{ const}}$  konstanten  $y$ -Verdrehwinkel zwischen *Reifengürtel* und Felge beschreibt. Dann erhält man nach Gleichung 4.3 für die Drehlage der Felge im *Gürtelsystem*

$$A_{FG} = A_{G0}^T A_{F0} = R_y^T(t) \cdot R_{\text{const}} \cdot R_y(t) \quad (4.40)$$

$$\text{mit der Konstante } R_{\text{const}} = R_{Gx}^T \cdot R_{Gz}^T \cdot R_{Fz} \cdot R_{Fx} \cdot R_{\Delta FGy}$$

Als linearisierte Drehlage der Felge für  $t = 0$  im *Gürtelsystem*, also für  $A_{FG} = R_{\text{const}}$ , ergibt Gleichung 4.4

$$\varphi_{FG \text{ lin}}(0) = \begin{pmatrix} R_{\text{const } 3,2} \\ R_{\text{const } 1,3} \\ R_{\text{const } 2,1} \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

Damit kann nach C.1 die linearisierte Drehmatrix von  $A_{FG}(0)$  als

$$A_{FG \text{ lin}}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -R_{\text{const } 2,1} & R_{\text{const } 1,3} \\ R_{\text{const } 2,1} & 0 & -R_{\text{const } 3,2} \\ -R_{\text{const } 1,3} & R_{\text{const } 3,2} & 0 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden. Nach 4.40 und da die linearisierte Drehmatrix in einem alternativen orthonormalen Koordinatensystem ihrer dortigen linearen Abbildung entspricht, erhält man für  $t \geq 0$  dann  $A_{FG \text{ lin}}(t) = R_y^T(t) \cdot A_{FG \text{ lin}}(0) \cdot R_y(t)$  und ausmultipliziert

$$A_{FG \text{ lin}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -R_{\text{const } 2,1} \cos \dot{\varphi}_{0y \text{ const}} t & R_{\text{const } 1,3} \\ R_{\text{const } 2,1} \cos \dot{\varphi}_{0y \text{ const}} t & -R_{\text{const } 3,2} \sin \dot{\varphi}_{0y \text{ const}} t & R_{\text{const } 2,1} \sin \dot{\varphi}_{0y \text{ const}} t \\ +R_{\text{const } 3,2} \sin \dot{\varphi}_{0y \text{ const}} t & 0 & -R_{\text{const } 3,2} \cos \dot{\varphi}_{0y \text{ const}} t \\ -R_{\text{const } 1,3} & -R_{\text{const } 2,1} \sin \dot{\varphi}_{0y \text{ const}} t & 0 \\ +R_{\text{const } 3,2} \cos \dot{\varphi}_{0y \text{ const}} t & & \end{pmatrix}$$

was nach C.1 und 4.4 die linearisierte Drehlage

$$\varphi_{FGlin}(t) = \begin{pmatrix} -R_{const\ 2,1} \sin \dot{\varphi}_{0y\ const} t + R_{const\ 3,2} \cos \dot{\varphi}_{0y\ const} t \\ R_{const\ 1,3} \\ R_{const\ 2,1} \cos \dot{\varphi}_{0y\ const} t + R_{const\ 3,2} \sin \dot{\varphi}_{0y\ const} t \end{pmatrix}$$

der Felge im *Gürtelsystem* bedeutet. Nach den Gleichungen 4.8, 4.7 und 4.5 erhält man schließlich das inertielle Schnittstellenmoment zwischen *Reifengürtel* und Felge

$$M_{FG0} = R_{Gz} \cdot R_{Gx} \cdot R_y(t) \cdot (C_{RFG} \cdot \varphi_{FGlin}(t) + D_{RFG} \cdot \dot{\varphi}_{FGlin}(t))$$

das ausmultipliziert den konstanten Wert

$$M_{FG0\ const} = R_{Gz} \cdot R_{Gx} \cdot \begin{pmatrix} c_{GF\ rot\ rad} \cdot R_{const\ 3,2} - d_{GF\ rot\ rad} \cdot R_{const\ 2,1} \cdot \dot{\varphi}_{0y\ const} \\ c_{GF\ rot\ ax} \cdot R_{const\ 1,3} \\ c_{GF\ rot\ rad} \cdot R_{const\ 2,1} + d_{GF\ rot\ rad} \cdot R_{const\ 3,2} \cdot \dot{\varphi}_{0y\ const} \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

ergibt.

Der bisherige Nachweis zeigt, dass unter *stationärer* Anregung, erzwungener Bewegung  $\dot{r}_{G0\ const} = \dot{r}_{F0\ const}$  und  $\dot{\varphi}_{G0\ const} = \dot{\varphi}_{F0\ const}$  des *Reifengürtels* und den erzwungenen konstanten Zustandsgrößen  $F_{Lx\ PT1\ const}$ ,  $F_{Ly\ PT1\ const}$ ,  $M_{Lz\ PT1\ const}$  des *Latschs* konstante inertielle Schnittstellenkräfte und -momente zwischen *Reifengürtel* und Felge sowie zwischen *Latsch* und *Reifengürtel* resultieren. Diese resultierenden Größen erhalten jedoch nicht notwendigerweise die erzwungenen Größen, weshalb die Modellgleichungen auch lediglich mit Ausnahme von 4.11 und 4.27 erfüllt werden. Um die Möglichkeit eines *Stationärzustands* unter beliebigen *Stationäranregungen* nachzuweisen, muss noch gezeigt werden, dass unter den verbleibenden Freiheitsgraden immer ein Zustand existiert, der zu resultierenden konstanten Größen führt, die auch Gleichungen 4.11 und 4.27 erfüllen. Frei wählbar in der bisherigen Analyse blieben die translatorische Lage  $r_{G0} - r_{F0}$  und Orientierung  $\varphi_{G0} - \varphi_{F0}$  des *Reifengürtels* relativ zur Felge sowie die *PT1*-Zustandsgrößen  $F_{Lx\ PT1\ const}$ ,  $F_{Ly\ PT1\ const}$ ,  $M_{Lz\ PT1\ const}$ . Die Einstellung dieser Größen, die neben dem *erzwungenen* auch den *freien Stationärzustand* ermöglicht, muss genauer für *Reifengürtel* und *Latsch* den Gleichgewichtszustand

$$F_{G0\ const} = 0 \quad M_{G0\ const} = 0$$

$$F_{LGKx\ const} = F_{Lx\ PT1\ const} \quad F_{LGKy\ const} = F_{Ly\ PT1\ const} \quad M_{LGKz\ const} = M_{Lz\ PT1\ const}$$

bewirken. Ein analytischer Nachweis, dass ein solcher Zustand möglich ist, erfordert u.A. aufwändige Einschränkungen der betrachteten Parameterkombinationen, die für reale Reifen selbstverständlich ist, jedoch nicht für Modelle, die die Einstellung auch kaum realisierbare Kenngrößen erlauben. Außerdem enthält das betrachtete Reifenmodell Konstrukte wie linearisierende Vereinfachungen, die in Extremsituationen physikalisch ausgeschlossene Effekte ermöglichen. Genau diese Effekte wiederum können ein

mögliches Stationärverhalten gefährden. Daher wird hier auf einen Nachweis der generellen Möglichkeit eines *Stationärzustands* unter *Stationäranregung* verzichtet, und die Analyse beschränkt sich auf die generelle Form eines *Stationärzustands*, vorausgesetzt dieser stellt sich ein. Genau diese Zusammenhänge lassen sich dann auch nutzbringend für die Herleitung von Eigenschaften, die in der *Sequentiellen Parameteridentifikation* angewandt werden, einsetzen. Softwarelösungen, die die Einstellung von *Stationärzuständen* unter *Stationäranregungen* ausnutzen sollen, müssen sich so natürlich immer erst von der tatsächlichen Einstellung des *Stationärzustands* vergewissern und gegebenenfalls Parameteranpassungen vornehmen. Das ist auch unabhängig von einem solchen Nachweis nötig, da im Fall beliebiger Parametrierungen *Stationäranregungen* existieren, die zu *instabilen Stationärzuständen* führen. Ausführlich mechanisch analysiert wird der kenngrößenabhängige Bereich an *Stationäranregungen* mit resultierenden *stabilen Stationärzuständen* z.B. in [4].

### 4.1.8 Auswahl zu identifizierender Parameter

Nicht alle Parameter des Reifenmodells sollen durch eine Parameteridentifikation bestimmt werden, da manche von vornherein bekannt sind, wenig variieren oder zu geringen Einfluss auf die betrachteten Simulationsszenarien haben. Im Fall der Parameter zur Beschreibung der äußeren Reifengeometrie, dem *Reifenradius*  $R_{Rmax}$  und der *Reifenbreite*  $B_R$ , können die Werte direkt den Herstellerangaben entnommen werden und sind sogar in der durch die europäische Norm ECE-R 30 festgelegten Darstellung in die Seitenwand jedes Serienreifens eingelassen. Ähnlich verhält es sich beim Parameter  $R_{dyn}$  zum *dynamischen Rollradius*. Für dessen Bestimmung wird der in den 'Ratgeber'-Broschüren der Hersteller angegebene *Abrollumfang* (Def. 14) wie in Definition 15 auf den *dynamischen Rollradius* umgerechnet. Bei der Herstellerangabe wird der eigentlich variable Wert unter den in der Norm DIN 70020 ([70]) festgelegten Durchschnittsbedingungen einer Geschwindigkeit von 60 km/h und eines Innendrucks von 1,8 bar bestimmt.

$c_{GF\ rot\ ax}$  ist ein Parameter, der ausschließlich instationäre Vorgänge und auch hier hauptsächlich den Aufbau der Reifenlängskraft  $F_{FHx}$  beeinflusst. Für den *Stationärzustand* zeigt dies die Herleitung in Abschnitt 4.1.7, in der zur Bestimmung von  $F_{LG0\ const}$  an keiner Stelle  $c_{GF\ rot\ ax}$  eingeht, und  $M_{FG0\ const}$  in Gleichung 4.42 zwar von  $c_{GF\ rot\ ax}$  abhängt, dies aber über das Produkt mit dem linearisierten Verdrehwinkel  $R_{const\ 1,3}$ , der ohne *stationäre* Beziehung zum Restsystem aus dem Produkt keinen Rückschluss auf  $c_{GF\ rot\ ax}$  zulässt. Da sich das Standardmessprogramm an *Reifenprüfständen* auf *Stationäranregungen* beschränkt, ist der Parameter  $c_{GF\ rot\ ax}$  nur schwierig mess- und identifizierbar. Außerdem zielt der Einsatz des Reifenmodells auf die Simulation von Querdynamik ab, und hängt daher nicht von einer exakten Abbildung instationärer Längsdynamik ab. Daher wird  $c_{GF\ rot\ ax}$  hier nicht mitidentifiziert, sollte aber, um eine stabile Simulation

zu ermöglichen, mit einem großen Wert eingestellt werden.

Weiter werden sämtliche Parameter zur Beschreibung von *Dämpfungen* vorausgesetzt und hier nicht identifiziert, um den Umfang der Arbeit zu begrenzen. Davon haben die Parameter  $d_{GF\ rad}$  und  $d_{GF\ rot\ rad}$  durchaus einen, wenn auch im realen Fall kleinen Einfluss unter *Stationäranregung* (Gl. 4.39, 4.42). Eine gezielte Identifikation kann auch für diese Parameter ergänzt werden, indem die resultierenden Felgenkräfte und -momente unter verschiedenen *Bahngeschwindigkeiten*  $v_B$  und damit resultierenden Rotationsgeschwindigkeiten  $\dot{\varphi}_{0y\ const}$  des Reifens betrachtet werden, und auf die *Dämpfungen* über die Stationäruzusammenhänge zurückgeschlossen wird. Von den nur in instationären Situationen wirkenden Parametern  $d_{GF\ quer}$ ,  $d_{GF\ rot\ ax}$  und  $d_r$  ( $d_{GF\ quer}$ ,  $d_{GF\ rot\ ax}$  sind weder Teil der Herleitung in Abschnitt 4.1.7 noch treten sie in 4.39 oder 4.42 auf; s. Abschnitt 4.2.1 zu  $d_r$ ) beeinflusst  $d_{GF\ rot\ ax}$  analog  $c_{GF\ rot\ ax}$  vorwiegend die Reifenlängsdynamik, und  $d_r$  hat auch instationär vernachlässigbaren Einfluss.  $d_r$  kann über ergänzende verschieden schnell durchgeführte *instationäre* Reifeneinfederungen  $\dot{f} > 0$  (s. Abschnitt 4.2.1) bestimmt werden. Bei der Änderung von Felgen-Querkräften wirken vorwiegend die Übergänge im *Latsch* und  $c_{GF\ quer}$ , wogegen die Querdämpfung  $d_{GF\ quer}$  das Abklingen höherfrequenter Querschwingungen bestimmt. Damit ist  $d_{GF\ quer}$  in *fahrdynamikrelevanten* Situationen von untergeordneter Bedeutung, schwer identifizierbar und soll hier nicht bestimmt werden. Im Fall der *Scherdämpfung*  $d_{scher}$  der *Reibkontakt-Elemente* besteht zwar prinzipiell sowohl ein *stationärer* als auch *instationärer* Einfluss, der jedoch gering ist. Eine Modellierung von  $d_{scher}$  erfolgt im Wesentlichen zur Stabilisierung des berechneten *Reibkontakt-Element-Verhaltens*, weshalb  $d_{scher}$  hier nicht identifiziert werden soll.

Die Gürtelmasse  $m_G$  macht sich geringfügig in der stationären Einfederkurve bemerkbar (s. Abschnitt 4.2.1), ist aber einfacher und gezielter durch eine separate Gewichtsmessung identifizierbar. Die Gürtelmassenverteilung  $J_{G\ rad}$ ,  $J_{G\ quer}$  beeinflusst wiederum ausschließlich instationäre Vorgänge (Gl. 4.11,  $\ddot{\varphi}_{G0\ const} = 0$  unabh. von  $J_{GG}$ ) und wird statt gemessen bzw. identifiziert besser abgeschätzt aus einem Anteil von bspw. 80%, der *Gürtelmasse*, die gleichmäßig über die Fläche eines Zylinders mit Radius  $R_{R\ max}$  und Höhe  $B_R$  verteilt die Form des *Reifengürtels* approximiert. Im Fall des *Rollwiderstandsbeiwerts*  $k_{roll}$  ist eine Identifikation aus Prüfstandsmessungen nur schwer exakt möglich, da hier z.T. verfälschende Korrekturen der Messungen vorgenommen werden (s. Abschnitt 4.1.6). Da nach bspw. [77] zwischen 30 und 50% des Rollwiderstands durch die Reifenseitenwand verursacht werden, diese Verluste schon durch den Parameter  $d_{GF\ rad}$  modelliert werden, und Gesamtwerte für den Rollwiderstand zwischen 0.005 und 0.015 liegen, sollten für  $k_{roll}$  Werte zwischen 0.0025 und 0.0105 vorgewählt werden.

Einen variablen Einfluss auf das Verhalten bieten neben den skalaren Parametern auch die nicht genau festgelegten Funktionen  $g_l$ ,  $g_q$ ,  $g_x$ ,  $g_y$  und  $g_t$ , deren verschiedene Ausprägungen hier jedoch als Varianten des Reifenmodells interpretiert werden und nicht zur Unterscheidung einzelner Reifen eingesetzt werden sollen. Bei den Parametern zur Festlegung der Zahl verwendeter *Latschlängsstreifen*  $n_{LS}$  und der Anzahl von *Reibkontakt-*

*Elementen* pro *Latschlängsstreifen*  $n_{RES}$  handelt es sich um Einstellungen zur Simulationengenauigkeit, die natürlich nicht identifizierbar sind und abhängig von der notwendigen Genauigkeit bzw. dem zulässigen Simulationsaufwand gewählt werden müssen. Zur Identifikation verbleiben damit die Parameter

$c_{r\ lin}$	linearer Federanteil der vertikalen <i>Reifengürtel</i> -Straßen-Anbindung
$c_{r\ quad}$	quadratischer Federanteil der vertikalen <i>Reifengürtel</i> -Straßen-Anbindung
$c_{GF\ rad}$	Federsteife der translatorisch-radialen Felgen- <i>Reifengürtel</i> -Anbindung
$c_{GF\ quer}$	Federsteife der translatorischen Quer-Anbindung von Felge und <i>Reifengürtel</i>
$c_{GF\ rot\ rad}$	Federsteife der rotatorisch-radialen Felgen- <i>Reifengürtel</i> -Anbindung
$c_{scher}$	horizontale Auslenkungssteife eines <i>Reibkontakt-Elements</i>
$n_{LKx}$	Nachgiebigkeit der Längsanbindung zwischen <i>Latsch</i> und <i>Reifengürtel</i>
$n_{LKy}$	Nachgiebigkeit der Queranbindung zwischen <i>Latsch</i> und <i>Reifengürtel</i>
$n_{LKt}$	Nachgiebigkeit der Torsionsanbindung zwischen <i>Latsch</i> und <i>Reifengürtel</i>
$R_{quer}$	Querschnittsradius des <i>Reifengürtels</i>
$f_{L\ mat}$	Korrekturfaktor der <i>Latschlängsstreifen</i> -Längen
$\mu_{haft\ 0bar}$	Haftreibbeiwert für 0 <i>bar</i> Vertikaldruck
$\mu_{haft\ \Delta p}$	Haftreibbeiwert für $\Delta p$ Vertikaldruck
$\mu_{gleit\ 0bar}$	Gleitreibbeiwert für 0 <i>bar</i> Vertikaldruck
$\mu_{gleit\ \Delta p}$	Gleitreibbeiwert für $\Delta p$ Vertikaldruck

## 4.2 Modellanalyse zur Sequentiellen Identifikation der Reifenmodell-Parameter

An dieser Stelle sind nun die notwendigen Voraussetzungen gegeben, das Reifenmodell in Hinblick auf die Eigenschaften einer *Sequentiellen Parameteridentifikation* zu analysieren. Die entwickelte *Sequentielle Parameteridentifikation* teilt die 15 zu identifizierenden Parameter aus Abschnitt 4.1.8, wie die folgende Tabelle zeigt, in 9 *Parametergruppen* ein.

$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$
$c_{GF\ rad}$	$R_{quer}$	$c_{GF\ rot\ rad}$	$f_{L\ mat}$	$n_{LKt}$	$n_{LKy}$	$\mu_{gleit\ 0bar}$	$n_{LKx}$	$c_{GF\ quer}$
$c_{r\ lin}$	$c_{scher} \cdot f_{L\ mat}^2$					$\mu_{gleit\ \Delta p}$	$\hat{\mu}_{haft\ 1}$	
$c_{r\ quad}$							$\hat{\mu}_{haft\ 2}$	

Für *Parametergruppe*  $P_2$  muss eine weitere Technik angewandt werden, die in Kapitel 3 nicht erwähnt wird. Die *Unabhängigkeit* der *Zielgrößen* von den nachfolgenden *Parametergruppen* macht eine Betrachtung einfach *transformierter* Parameter notwendig. Damit wird in  $P_2$  nicht  $c_{scher}$ , sondern  $c_{scher} \cdot f_{L\ mat}^2$  identifiziert. Nach der Festlegung von  $f_{L\ mat}$  in *Parametergruppe*  $P_4$  kann so durch einfache Division auch  $c_{scher}$  bestimmt werden. In der Formalisierung aus Kapitel 3 hängen *Auswertungsfunktionale*  $z_E$  und *Funktional-Bedingungen*  $b$  ausschließlich von den Anregungs- und Antwortfunktionen des modellierten Systems und der Zeit  $t$  ab. Zum Zeitpunkt ihrer Anwendung sind aber auch die konstanten Parameter oder die Parameter bereits identifizierter *Parametergruppen* bekannt und können prinzipiell auch verwendet werden. Bei der Anwendung von *Auswertungsfunktionalen* und *Funktional-Bedingungen* oder einer alternativen Parameter-Darstellung in der hier beschriebenen *Sequentiellen Parameteridentifikation* soll diese Möglichkeit in wenigen Fällen hinzukommend genutzt werden. *Parametergruppe*  $P_8$  ist ein solches Beispiel. Hier werden die *Haftreibbeiwerte*  $\mu_{haft\ 0bar}$  und  $\mu_{haft\ \Delta p}$  durch alternative Parameter  $\hat{\mu}_{haft\ 1}$  und  $\hat{\mu}_{haft\ 2}$  ersetzt, die abhängig von schon bekannten Teilen des Modells erst eine Rechteckdarstellung der mechanisch möglichen Wertekombinationen erlauben. Auch die durch die *Sequentielle Parameteridentifikation* geforderten Eigenschaften liegen erst nach der umkehrbaren *Transformation* vor. Im Anschluss an die Bestimmung von  $\hat{\mu}_{haft\ 1}$  und  $\hat{\mu}_{haft\ 2}$  muss natürlich die entsprechende Rücktransformation zu  $\mu_{haft\ 0bar}$  und  $\mu_{haft\ \Delta p}$  berechnet werden.

Das Übertragungsverhalten  $\tau$  ergibt sich aus der Kombination von Reifen- und Prüf-

standsmodell auf ebener Fahrbahn, so dass  $\tau$  letztlich definiert werden kann als

$$y = \tau(f_P, u)$$

$$\text{mit } u = (\delta, f, v_B, \varepsilon_W, \lambda, \alpha), y = \begin{bmatrix} F_{FH} \\ M_{FH} \end{bmatrix}, f_S = 0,$$

$$\delta, f, v_B, \varepsilon_W, \lambda, \alpha \in C^0(\mathbb{R}), F_{FH}, M_{FH} \in (C^0(\mathbb{R}))^3,$$

$P$  der Menge der Parameter aus Abschnitt 4.1.5

und den Gleichungsbedingungen aus den Abschnitten 4.1.6, 4.1.3 und 4.1.5

So sind auch die *Anregungs*-Größen des Modells die des Reifenprüfstands, der ausschließlich fahrtypische Situationen nachbildet. Längs- und Querbewegungen des Reifens sowie die axiale Verdrehung der Felge werden geschwindigkeits- und nicht strecken- bzw. winkelgesteuert. Damit sind in diese Richtungen genaue Strecken und Winkel nicht einstellbar, auch hochfrequente Schwingungen werden nicht exakt abgebildet. Durch diese Einschränkung konzentriert sich die Messung und Parameteridentifikation aber genau auf den interessierenden *fahrdynamischen* Ausschnitt des Reifenverhaltens, und die Modellparametrierung sorgt automatisch für eine möglichst korrekte Wiedergabe genau dieses Verhaltens. Generell kommen auch alternative Methoden, die mechanischen Eigenschaften eines realen Reifens zu ermitteln, in Frage. Bspw. können *Steifigkeits*- und *Dämpfungs*-Parameter durch das Beobachten resultierender Kräfte, Momente und Schwingungen nach der Verschiebung oder Verdrehung einzelner Reifenkomponenten gegeneinander bestimmt, oder der Reifen sogar in Komponenten zerlegt, und diese separat vermessen werden. Eine solche Vorgehensweise bringt zwar viel einfacher zu behandelnde Zusammenhänge zwischen Parametern und Systemverhalten mit sich als die komplexe Wechselwirkung der Komponenten im Fahrbetrieb des Reifens, ist aber nur in Modellen möglich, die zusätzlich auch das so betrachtete Verhalten im realen Bezug zum Fahrverhalten komplett abbilden. Zuverlässig und sicher leistet dies mit den *Finite-Elemente*-Modellen allerdings nur eine andere als die hier verwendete Modell-Kategorie (s. Abschn. 4.1.1), die für die Anwendung in der *Fahrdynamik*-Simulation jedoch zu berechnungsaufwändig ist.

Zu den nun festgelegten *Parametergruppen* werden *Zielgrößengruppen* ausgehend von der Prüfstands-Schnittstelle  $Z_{\tau 1}, \dots, Z_{\tau 9}$  gleicher Größe wie die zugehörigen *Parametergruppen* definiert. Für den Nachweis der *Identifizierbarkeit* der Parameter aus den *Zielgrößen* müssen die 9 Parameter-*Zielgrößen*-Zusammenhänge die Eigenschaften 3.23 (Unabhängigkeit von nachfolgenden *Parametergruppen*) und 3.24 (*Injektivität* in zugehöriger *Parametergruppe*) erfüllen und eine analytische Verifikation dieser Eigenschaften erfolgen. Während von den mehrelementigen *Parametergruppen*  $P_1$  und  $P_7$  mit Hilfe direkter analytischer Berechnungen gelöst werden können, soll bei  $P_2$  und  $P_8$  zum Nachweis der *Injektivität* Eigenschaft 3.27 (*Injektivität* der *Teilzielgruppen*) der Parameter-*Zielgrößen*-Zusammenhänge benutzt und dazu ebenso hergeleitet werden. Um auch ein Verfahren

angeben zu können, das bei vorgegebenen Werten der *Zielgrößen* nachweislich die zugehörigen Parameter ermittelt oder die Unlösbarkeit des Problems feststellt, wird für die mehrelementigen Parameter-*Zielgrößen*-Zusammenhänge von  $P_2$  und  $P_8$  zusätzlich Eigenschaft 3.32 (*Monotonieeigenschaften* bei *partieller* Festlegung einer *Zielgrößengruppe*) hergeleitet. Im Fall von  $P_8$  ist als dreielementige *Parametergruppe* für ein verifiziertes, effizientes Lösungsverfahren außerdem der Nachweis der Eigenschaften 3.39 (strenge Monotonie beider Restzielgrößen in beiden Restparametern), 3.40 (konstantes positives oder negatives Vorzeichen der Funktionaldeterminante des Restproblems) und 3.41 (weitere *Monotonieeigenschaften* des zweidimensionalen Restproblems) erforderlich und wird an entsprechender Stelle erbracht. Zu jeder der *Parametergruppen* gibt es einen separaten Abschnitt. Der Nachweis der Eigenschaften 3.23 und 3.24 erfolgt in jeweils getrennten Unterabschnitten. Eigenschaften 3.27, 3.32, 3.39, 3.40 und 3.41 werden bei mehrelementigen *Parametergruppen* ggf. parallel zu Eigenschaft 3.24 behandelt.

Mit Ausnahme von  $Z_9$  basieren alle *Zielgrößen* auf der Auswertung von *Stationärzuständen*, wie sie in Abschnitt 4.1.7 beschrieben sind. Ist die *Funktional-Bedingung* einer *Zielgröße* auch über *Antwort*-Größen des Systems formuliert, muss dieser für die Softwarelösung der *Zielgrößen*-Bestimmung über ein separates Suchverfahren eingestellt werden. Dies ist in einfachen Fällen mit einem in die Simulation integrierten *Regler* möglich, der die *Antwort*-Größen über eine *Rückkopplung* durch festgelegte *Anregungs*-Größen einstellt. Um diesen direkten Weg zu ermöglichen, muss die in der Erläuterung zur *Erfüllbarkeit* der *Funktional-Bedingungen* (3.5) geforderte einfache Einstellbarkeit der *Antwort*-Größen aus *Anregungs*-Größen vorliegen. In den Anwendungsfällen zum Reifenmodell ist diese Einstellung mit Ausnahme für die *Parametergruppe*  $P_3$  einfach möglich. Für  $P_3$  geht die Einstellung der *Funktional-Bedingung* über ein monotonen *Regel*- bzw. Suchverfahren hinaus, das eine zusätzliche Analyse erfordert. Trotzdem liegt die Ansteuerung zum Ziel erfüllter *Funktional-Bedingungen* in allen Fällen so nahe, dass in den folgenden Abschnitten nicht näher darauf eingegangen wird.

Die Herleitung der Zusammenhänge und Eigenschaften ist nach Möglichkeit so gestaltet, dass sie sich durch Lesen der entsprechenden Abschnitte vollständig in ihrer Logik erschließen lässt. Nachweise werden also nicht durch mehrdimensionale Abschätzungsverfahren auf einem Rechner und die bloße Präsentation von Rechenergebnissen erbracht, sondern durch analytische Begründungen. Mit der Zahl von 34 kontinuierlich veränderlichen skalaren Werten und zwei streng monoton wachsenden Funktionen zur Parametrierung des Reifenmodells führt eine numerische Abschätzung bei keinen zusätzlich bekannten generellen Eigenschaften der Modellgleichungen ohnehin nicht zum Erfolg, wobei auch die hier praktizierte Vorgehensweise nicht ganz auf numerisch berechnete Zusammenhänge verzichtet. Diese erfolgen allerdings erst nach einer analytischen Reduktion der Probleme auf ein möglichst niedrigdimensionales Restproblem.

Unter Anwendung sämtlicher Ergebnisse ist zu den einzelnen Parameter-*Zielgrößen*-Zusammenhängen jeweils eine MATLAB-Funktion entstanden, die dessen *Inversion* an



entsprechender Stelle der *Sequentiellen Parameteridentifikation* kombiniert mit der Simulationsumgebung *CASCaDE* in Software realisiert. Damit ist auch der praktische Einsatz der *Sequentiellen Parameteridentifikation* zur Identifikation der Parameter des Reifenmodells möglich und kann für vorgegebene Parameterwerte getestet werden. Auch dieses Gesamtverfahren wird in Form eines veranschaulichenden Gesamtablaufs, der zusätzlich zum Test der Methode dient, zum Schluss des Kapitels vorgestellt. Dabei wird die interne Fahrzeugsimulations-Plattform *CASCaDE* der Daimler-Fahrzeugsystemforschung nicht näher beschrieben. Hierzu liefern [75], [5] und [76] einige Informationen. [75] erklärt den modularen, *objektorientierten* Modellierungsansatz von *CASCaDE* und stellt die Software-Komponenten zum gesamten Simulationsprozess vor. [5] beschreibt den positiven Effekt der separaten Integration von Simulationskomponenten mit einer jeweils von der Komponenten-*Steife* abhängigen Zeitschrittweite auf den Berechnungsaufwand. Außerdem wird ein Überblick über die Modellkomponenten verschafft und dabei die Reifenmodellierung als besonders ausschlaggebender Simulationsanteil tiefergehend erläutert. [76] schließlich präsentiert die verschiedenen in *CASCaDE* integrierten Ansätze zur Modellierung von Komponenten und Gesamtfahrzeug und empfiehlt diese für jeweils unterschiedliche Ziele der *Fahrdynamik*- bzw. *Fahrkomfort*-Simulation.

### 4.2.1 Parametergruppe $c_{GF\ rad}$ , $c_{r\ lin}$ , $c_{r\ quad}$

Die Parameter  $c_{GF\ rad}$  zur Beschreibung der *translatorisch-radialen* Feder zwischen Felge und *Reifengürtel* sowie  $c_{r\ lin}$  und  $c_{r\ quad}$  zwischen *Reifengürtel* und *Latsch* haben einen starken Einfluss auf die Form des *Latschs* bei vorgegebener *Radlast*  $-(F_{FH})_3$ . Abbildung 4.48 illustriert die Auswirkung unterschiedlich steifer Vertikalfedersysteme auf die Größe des *Latschs* unter gleichen Umgebungsverhältnissen. Da alle wesentlichen *Stationärkräfte* und *-momente* über den *Latsch* in den Reifen eingepreßt werden, lassen sich kaum *Zielgrößen* definieren, die unabhängig von den Parametern zur Vertikalfederung sind. Also sollte deren Bestimmung am Anfang stattfinden und die erste *Parametergruppe* ist

$$P_1^V = \begin{pmatrix} c_{r\ lin} \\ c_{r\ quad} \\ c_{GF\ rad} \end{pmatrix}$$

Beim *stationären* Einfluss auf die *Latschform* wirken alle 3 Parameter zugleich, weshalb sie so nicht voneinander zu trennen sind. Da ihre Wirkung aber über den Zusammenhang von *Reifeneinfederung*  $f$  und *Felgenvertikalkraft*  $(F_{FH})_3$  besonders deutlich wird, sollen sie durchaus hierüber identifiziert werden. Am einfachsten gelingt dies bei stehendem Rad ohne *Horizontalkräfte* und *-momente*, was genau bei der standardmäßig durchgeführten Messung der *Einfederkurve* vorliegt (s. Abb. 4.49). Die *Zielgrößen* (Abb. 4.49) zur Festlegung der 3 Parameter sollen die Änderung von  $(F_{FH})_3$  durch  $f$  am Be-

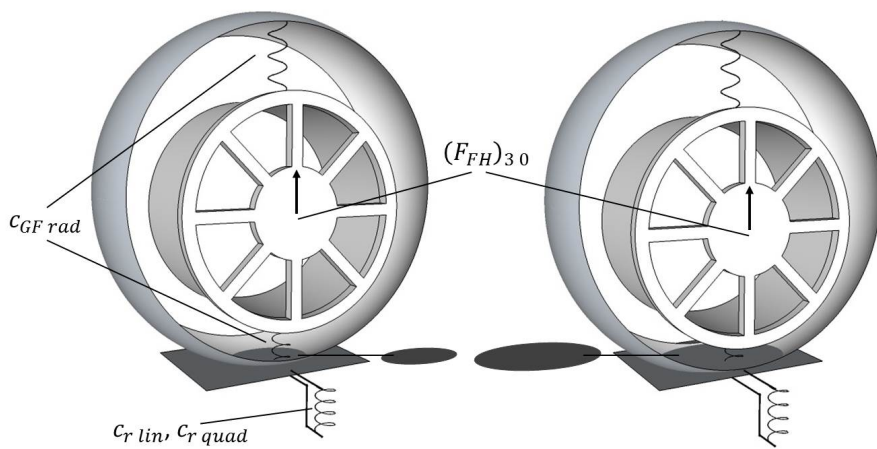


Abbildung 4.48: *Latsch-Größe bei gleicher Radlast und steifem bzw. nachgiebigem Vertikalfedersystem*

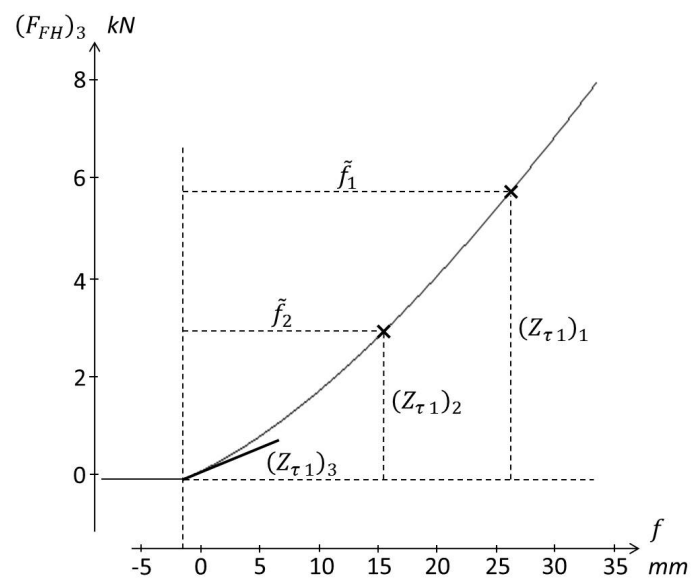


Abbildung 4.49: *Einfederkurve mit Zielgrößen der ersten Parametergruppe*

rührpunkt von *Reifengürtel* und Boden sowie die *Felgenvertikalkraft* zu zwei weiteren größeren Werten der *Reifeneinfederung* sein. Den Boden berührt der *Reifengürtel* ohne Durchdringung an dem Punkt der *Einfederkurve*, an dem die Kurve zu steigen beginnt. Wegen des Eigengewichts des *Reifengürtels* (4.10) ist  $(F_{FH})_3$  dort zunächst kleiner 0. Als *Auswertungsfunktionale* ergeben sich so

$$Z_{E1}(f(\cdot), (F_{FH})_3(\cdot), t) = \begin{pmatrix} (F_{FH})_3(t) + m_G \cdot g \\ (F_{FH})_3(t) + m_G \cdot g \\ \left. \frac{\partial (F_{FH})_3}{\partial f} \right|_{f=f(t)} \end{pmatrix}$$

Da die Einfederkurve ausschließlich *Stationärzustände* beschreibt, aber kontinuierliche Auswertungen definiert sind, soll statt der Bedingung in Def. 22 die abgeschwächte allgemeine Form

$$b_S \Leftrightarrow |\dot{\delta}|, |\dot{f}|, |\dot{v}_B|, |\dot{\varepsilon}_W|, |\dot{\lambda}|, |\dot{\alpha}| \text{ klein} \quad (4.43)$$

gefordert werden. Für alle drei *Zielgrößen* wird ausschließlich  $f$  variiert, also

$$b_{Einf} \Leftrightarrow (\delta = v_B = \varepsilon_W = \lambda = \alpha = 0) \wedge ((F_{FH}(0))_3 = -m_G \cdot g) \wedge (\dot{f} > 0)$$

Die Bedingung  $(F_{FH}(0))_3 = -m_G \cdot g$  stellt dabei sicher, dass der Reifen am Anfang den Boden unbelastet berührt, um für die gesamte Messung ausschließen zu können, dass horizontale Auslenkungen in der Kontaktzone verbleiben. Mit  $b_{ber}$  soll ein Zeitpunkt in der Messung definiert werden, zu dem die Bodendurchdringung des *Reifengürtels* beginnt

$$b_{ber}((F_{FH})_3(\cdot), t) \Leftrightarrow f(t) = \max \{f(t') | (F_{FH})_3(t') = -m_G \cdot g\}$$

Insgesamt ergibt sich der Vektor der *Funktional-Bedingungen* zu

$$B_1(f(\cdot), (F_{FH})_3(\cdot), t) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_S \wedge b_{Einf} \wedge b_{ber}((F_{FH})_3(\cdot), t_0) \wedge (f(t) = \tilde{f}_1 - f(t_0)) \\ b_S \wedge b_{Einf} \wedge b_{ber}((F_{FH})_3(\cdot), t_0) \wedge (f(t) = \tilde{f}_2 - f(t_0), \tilde{f}_2 \neq \tilde{f}_1) \\ b_S \wedge b_{Einf} \wedge b_{ber}((F_{FH})_3(\cdot), t) \end{pmatrix}$$

### Unabhängigkeit der Zielgrößen

Erfüllt  $Z_{\tau_1}$  Eigenschaft 3.23 darf es von den zu identifizierenden Parametern nur von  $c_{GF\ rad}$ ,  $c_{r\ lin}$  und  $c_{r\ quad}$  abhängen. Zum Nachweis soll der gesamte Parameter-*Zielgrößen-Zusammenhang* für  $(F_{FH})_3$  im *Stationärzustand* hergeleitet werden. Aus der Voraussetzung  $\delta = v_B = \varepsilon_W = 0$  im *horizontierten Koordinatensystem* (4.36) erhält man

#### 4 Entwicklung und Verifikation einer Sequentiellen Parameteridentifikation für ein physikalisches Reifenmodell

---

die konstante inertielle Felgenlage  $\varphi_{F0} = 0$ . Ohne Einschränkung kann die horizontal-translatorische Lage auf  $(r_{F0})_{1..2} = 0$  festgelegt werden.

Nach Abschnitt 4.1.7 müssen sich für einen *Stationärzustand*  $F_{FG0}$ ,  $M_{FG0}$  und die vom *Latsch* in den *Reifengürtel* eingeprägte Kraft  $F_{LG0}$  mitsamt Eigengewicht des *Reifengürtels* sowie das Moment  $M_{LG0}$  gegenseitig aufheben und die Zustände  $F_{Lx PT1}$ ,  $F_{Ly PT1}$ ,  $M_{Lz PT1}$ ,  $a_{x ij}$ ,  $a_{y ij}$  von *Latsch* und *Reibkontakt-Elementen* konstant bleiben. Setzt man für die bisherige Messung voraus, dass

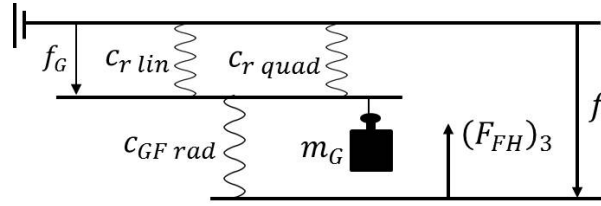
$$\varphi_{G0} = (r_{G0})_{1..2} = F_{Lx PT1} = F_{Ly PT1} = M_{Lz PT1} = a_{x ij} = a_{y ij} = 0 \quad (4.44)$$

erhält sich dieser Zustand: Da so zwischen *Reifengürtel* und Felge ein *Stationärzustand* erzwungen wird, kann mit  $\dot{\varphi}_{0y} = 0$  die Koppelkraft zwischen Felge und *Reifengürtel* aus einer Vereinfachung von 4.39 als

$$(F_{FG0})_{1..2} = 0 \quad (F_{FG0})_3 = c_{GF rad} ((r_{F0})_{30} - (r_{G0})_{30}) \quad (4.45)$$

beschrieben werden. Mit der linearisierten Relativverdrehung  $\varphi_{FG lin} = 0$  (4.4) zwischen Felge und *Reifengürtel* erhält man aus 4.41 und 4.42 auch das entsprechende Koppelmoment  $M_{FG0} = 0$ . Die Zustände  $F_{Lx PT1}$ ,  $F_{Ly PT1}$ ,  $M_{Lz PT1}$ ,  $a_{x ij}$ ,  $a_{y ij}$  und resultierende Größen  $F_{LG0}$ ,  $M_{LG0}$  von *Reibkontakt-Elementen* und *Latsch* ergeben sich wie folgt: Gleichung 4.17 liefert so einen konstanten Wert für  $x_{REK j}$ , Gleichung 4.28 ergibt mit 4.44 konstante Werte für  $x_{REK def j}$  und  $y_{REK def ij}$  und Gleichung 4.29 einen konstanten Wert für  $y_{REK def \varphi ij}$  ( $\varepsilon_{GK} = 0$  nach 4.13 auf ebenem Boden). Neben der Lage der Oberseiten der *Reibkontakt-Elemente* bleibt nach 4.12 auch  $r_{K0}$ ,  $x_{K0}$ ,  $z_{K0}$  mit  $(r_{K0})_{1..2} = (r_{G0})_{1..2}$  und damit nach Def. 20  $A_{K0}$ , also insgesamt das *Kontaktsystem* konstant. So ergeben die Differenzialgleichungen 4.30 auch für die Auslenkungen der Unterseiten der *Reibkontakt-Elemente* wieder konstante Werte  $a_{x ij} = a_{y ij} = 0$  (4.30 vorzeichenbedingt nur für  $u_{x ij} = u_{y ij} = 0$  lösbar). Über die Gleichungen 4.33 und 4.34 erhält man für die horizontalen *Latsch*-Kräfte und -Momente  $F_{LGKx} = F_{LGKy} = M_{LGKz} = 0$  und über 4.27 wieder konstante Werte  $F_{Lx PT1} = F_{Ly PT1} = M_{Lz PT1} = 0$ . Damit bewirkt Gleichung 4.22 auch ein Quermoment  $M_{LGKy} = 0$ . Auf ebenem Boden erhält man wegen  $\varphi_{G0x} = 0$  aus 4.13  $\varepsilon_{GK} = 0$  und mit 4.19 eine zur  $x_K$ -Achse (des *Kontaktsystems*) symmetrische Längenverteilung der *Laufstreifen*-Längen  $l_i$ . Diese bewirkt über die Gleichungen 4.20 und 4.24 eine zur  $x_K$ -Achse symmetrische Druckverteilung im *Latsch*. In 4.28 gilt  $\Delta y_{LGK} = p = q = 0$ , weshalb diese Symmetrie bis in Gleichung 4.34 erhalten bleibt und zu  $M_{LGKx} = 0$  führt. So folgt aus 4.35 nun insgesamt  $(F_{LG0})_{1..2} = M_{LG0} = 0$ , was sich mit  $(F_{FG0})_{1..2}$  bzw.  $M_{FG0}$  aufhebt. Es bleiben nach 4.11 also auch  $\varphi_{G0} = (r_{G0})_{1..2} = 0$  erhalten. Zum vollständigen Erhalt eines *Stationärzustands* ( $(r_{G0})_3 = (r_{G0})_{30}$ ) muss also nur noch abgeleitet von Gleichung 4.10

$$(F_{LG0})_3 + (F_{FG0})_3 - m_G \cdot g = 0 \quad (4.46)$$


 Abbildung 4.50: Ersatzmodell zur *stationären Einfederung*

gegeben sein. Ausschließlich  $(F_{LG0})_3$  muss hiervon noch auf gegebene Größen zurückgeführt werden. Bei ebenem Boden beschränkt sich nach Def. 20 die Lage-Transformation des *Kontaktsystems* mit Transformationsmatrix  $A_{K0}$  auf die Rotation in der Bodenebene. Mit Gleichung 4.35 stimmt dann die inertielle Vertikalkraft des *Latschs* mit der vertikalen *Latsch*-Kraft überein.

$$(F_{LG0})_3 = F_{LGKz}$$

Für *ungestürzten Reifengürtel* ( $\varphi_{G0} = 0$ ) auf ebenem Boden ergeben Gleichungen 4.13 und 4.14 die *Gürteleinfederung*

$$f_G = \max(0, R_{Rmax} - (r_{G0})_{30}) \quad (4.47)$$

Im Fall eines *Stationärzustands* ist  $f_G$  konstant, und Gleichung 4.15 liefert mit 4.47 indirekt einen Zusammenhang zwischen  $(F_{LG0})_3$  und  $(r_{G0})_{30}$ . 4.15, 4.45 und 4.47 eingesetzt in 4.46 erhält man die Gesamtbedingung an  $(r_{G0})_{30} \leq R_{Rmax}$  zum *Stationärzustand*

$$c_{r\ lin} (R_{Rmax} - (r_{G0})_{30}) + c_{r\ quad} (R_{Rmax} - (r_{G0})_{30})^2 + c_{GF\ rad} ((r_{F0})_3 - (r_{G0})_3) - m_G \cdot g = 0$$

Alle Bedingungen sind im Anfangszustand erfüllt und bleiben so für die gesamte Messung erhalten. Ausgedrückt in den Schnittstellengrößen (4.36, 4.45, 4.9, Def. 21)

$$f = R_{Rmax} - (r_{F0})_3 \quad (F_{FH})_3 = c_{GF\ rad} ((r_{G0})_3 - (r_{F0})_3) \quad (4.48)$$

resultiert für  $f \geq -\frac{m_G \cdot g}{c_{GF\ rad}}$  die Bedingung

$$c_{r\ lin} \left( f - \frac{(F_{FH})_3}{c_{GF\ rad}} \right) + c_{r\ quad} \left( f - \frac{(F_{FH})_3}{c_{GF\ rad}} \right)^2 - (F_{FH})_3 - m_G \cdot g = 0 \quad (4.49)$$

Man sieht nun, dass die Größen, auf denen die *Auswertungsfunktionale*  $Z_{E1}$  basieren, unabhängig von anderen *Parametergruppen* zusammenhängen, und damit auch die *Zielgrößen*  $Z_{\tau-1}$  nicht von nachfolgenden *Parametergruppen* abhängen. Das auf das *stationäre Einfederungs*-Verhalten reduzierte Modell ist in Abbildung 4.50 graphisch dargestellt.

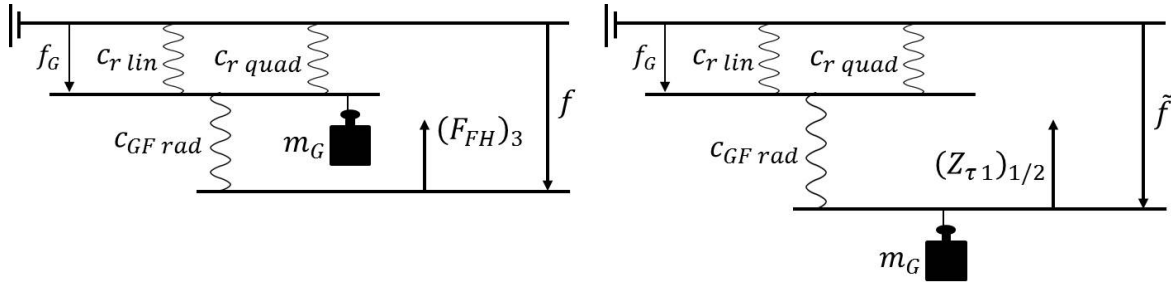


Abbildung 4.51: Vergleich der Ersatzmodelle zur *stationären* Vertikalfederung in den Größen  $f$ ,  $(F_{FH})_3$  bzw.  $\tilde{f}$ ,  $(Z_{\tau 1})_{1/2}$

### Eindeutigkeit der Zielgrößen

Zum Nachweis der Eindeutigkeit von  $Z_{\tau 1}$  in  $P_1^V$  und für das *funktionsverifizierte* Inversionsverfahren soll gleich wie im letzten Punkt der abschließenden Zusammenfassung zur *Sequentiellen Parameteridentifikation* in Abschnitt 3.3 beschrieben vorgegangen werden. Der Zusammenhang ist nämlich mit elementar darstellbaren Formeln invertierbar. Damit erübrigt sich die in Abschnitt 3.3 vorgestellte *rekursive Invertierung* über die Funktionen 3.35 und 3.36 genauso wie der dazu notwendige Nachweis von Eigenschaft 3.32 (*Monotonieeigenschaften bei partieller Festlegung einer Zielgrößengruppe*). Auch bei elementarer Auflösung des Zusammenhangs hilft aber der Nachweis von Eigenschaft 3.27 (*Injektivität der Teilzielgruppen*) dabei, die *Injektivität* des Gesamt-Zusammenhangs zu zeigen. Zunächst muss jedoch das *stationäre Einfederungsverhalten* 4.49 ausschließlich in den *Zielgrößen-Variablen* ausgedrückt werden. Bei  $(Z_{\tau 1})_{1/2}$  wurde der Einfluss des *Reifengürtel-Gewichts* bereits herausgerechnet, weshalb die *Zielgrößen* mit den Schnittstellengrößen des Modells wie folgt zusammenhängen.

$$\frac{m_G \cdot g}{c_{GF rad}} + f_{1/2} = \tilde{f}_{1/2} \quad (Z_{\tau 1})_{1/2} = (F_{FH})_{3 1/2} + m_G \cdot g \quad (4.50)$$

Die Substitution auf 4.49 angewandt resultiert ein Ersatzmodell ohne Einfluss des *Reifengürtel-Gewichts*.

$$c_{r lin} \left( \tilde{f}_{1/2} - \frac{(Z_{\tau 1})_{1/2}}{c_{GF rad}} \right) + c_{r quad} \left( \tilde{f}_{1/2} - \frac{(Z_{\tau 1})_{1/2}}{c_{GF rad}} \right)^2 - (Z_{\tau 1})_{1/2} = 0 \quad (4.51)$$

Abbildung 4.51 stellt die beiden darstellungsabhängigen Ersatzmodelle des *stationären Einfederungsverhaltens* in derselben Situation gegenüber. Bei der weiteren Analyse hilft die Auslösung von 4.51 nach  $\tilde{f}_{1/2} - \frac{(Z_{\tau 1})_{1/2}}{c_{GF rad}}$ , wofür nach Gleichungen 4.47, 4.48 und 4.50

ausgedrückt in  $\tilde{f}_{1/2}$  und  $(Z_{\tau 1})_{1/2}$  die Beziehung  $f_G = \max \left\{ 0, \tilde{f}_{1/2} - \frac{(Z_{\tau 1})_{1/2}}{c_{GF \text{ rad}}} \right\}$  gilt:

$$\tilde{f}_{1/2} - \frac{(Z_{\tau 1})_{1/2}}{c_{GF \text{ rad}}} = \pm \frac{\sqrt{c_r^2 \text{ lin} + 4c_r \text{ quad}} (Z_{\tau 1})_{1/2}}{2c_r \text{ quad}} - \frac{c_r \text{ lin}}{2c_r \text{ quad}}$$

Mit den gültigen Werten  $(Z_{\tau 1})_{1/2} > 0$  ergeben sich bei negativer Einberechnung des Wurzelterms negative Werte für  $\tilde{f}_{1/2} - \frac{(Z_{\tau 1})_{1/2}}{c_{GF \text{ rad}}}$ , was in den hier ausgewerteten Situationen mit Bodenkontakt des *Reifengürtels* ( $f_G > 0$ ) nicht möglich ist. Also muss der negative Zweig ausgeblendet werden, und man erhält

$$\tilde{f}_{1/2} = \frac{(Z_{\tau 1})_{1/2}}{c_{GF \text{ rad}}} + \frac{\sqrt{c_r^2 \text{ lin} + 4c_r \text{ quad}} (Z_{\tau 1})_{1/2}}{2c_r \text{ quad}} - \frac{c_r \text{ lin}}{2c_r \text{ quad}} \quad (4.52)$$

Eigenschaft 3.27 erfordert nun zum einen, dass der Restzusammenhang

$$(Z_{\tau 1})_3 |_{P_{const 0}^V, (P_1^V)_{1..20}} \leftrightarrow (P_1^V)_3$$

also, dass  $c_{GF \text{ rad}}$  für festgelegtes  $c_r \text{ lin}$  und  $c_r \text{ quad}$  eindeutig ist in  $(Z_{\tau 1})_3$ . Dieser Zusammenhang ergibt sich unabhängig von  $c_r \text{ quad}$  zu

$$\begin{aligned} (Z_{\tau 1})_3 &= \frac{\partial (F_{FH})_3}{\partial f} \Big|_{(F_{FH})_3 = -m_G \cdot g} = \frac{\partial (Z_{\tau 1})_{1/2}}{\partial \tilde{f}_{1/2}} \Big|_{(Z_{\tau 1})_{1/2} = 0} = 1 / \frac{\partial \tilde{f}_{1/2}}{\partial (Z_{\tau 1})_{1/2}} \Big|_{(Z_{\tau 1})_{1/2} = 0} \\ &= 1 / \left( \frac{1}{c_r \text{ lin}} + \frac{1}{c_{GF \text{ rad}}} \right) \end{aligned}$$

und es gilt die eindeutige Beziehung

$$c_{GF \text{ rad}} = 1 / \left( \frac{1}{(Z_{\tau 1})_3} - \frac{1}{c_r \text{ lin}} \right) \quad (4.53)$$

Weiter fordert Eigenschaft 3.27, dass auch der Restzusammenhang  $(Z_{\tau 1})_{2..3} |_{P_{const 0}^V, (P_1^V)_{10}} \leftrightarrow (P_1^V)_{2..3}$  also, dass  $c_{GF \text{ rad}}$  und  $c_r \text{ quad}$  für festgelegtes  $c_r \text{ lin}$  eindeutig sind in  $(Z_{\tau 1})_{2..3}$ . Mit 4.53 ist dies für  $c_{GF \text{ rad}}$  bereits gezeigt. Für  $c_r \text{ quad}$  kann dies durch Auflösung von Zusammenhang 4.52 nach  $c_r \text{ quad}$  nachgewiesen werden, der für gegebenes  $c_r \text{ lin}$ ,  $(Z_{\tau 1})_2$ ,  $\tilde{f}_2$  und mit 4.53 ebenso bekanntem  $c_{GF \text{ rad}}$  eindeutig in  $c_r \text{ quad}$  ist. Eine übersichtlichere Form erhält man, wenn die *Steifen* durch entsprechende *Nachgiebigkeiten* dargestellt werden

$$c_{GF \text{ rad}} = \frac{1}{n_{GF \text{ rad}}} \quad c_r \text{ lin} = \frac{1}{n_r \text{ lin}} \quad c_r \text{ quad} = \frac{1}{n_r \text{ quad}} \quad (Z_{\tau 1})_3 = \frac{1}{n_{ges \text{ lin}}} \quad (4.54)$$

#### 4 Entwicklung und Verifikation einer Sequentiellen Parameteridentifikation für ein physikalisches Reifenmodell

---

Dann sieht man nämlich, wie beim beidseitigen Quadrieren nach Isolation des Wurzelterms in 4.52, da sich quadratische Summanden aufheben, eine in  $n_r \text{ quad}$  lineare Gleichung entsteht. Unter zusätzlicher Verwendung von 4.53 zur Elimination von  $c_{GF \text{ rad}}$  ergibt sich

$$n_r \text{ quad} = \frac{n_r \text{ lin} \left( \tilde{f}_2 - (n_{ges \text{ lin}} - n_r \text{ lin}) (Z_{\tau 1})_2 \right)^2}{n_{ges \text{ lin}} (Z_{\tau 1})_2 - \tilde{f}_2} \quad (4.55)$$

Zum Nachweis der Eindeutigkeit des Gesamtzusammenhangs  $Z_{\tau 1} \leftrightarrow P_1^V$  muss nun noch gezeigt werden, dass  $n_r \text{ lin}$  eindeutig aus  $Z_{\tau 1}$  folgt. Die entsprechende Bedingung für  $n_r \text{ lin}$  erhält man, indem auch  $\tilde{f}_1$  und  $Z_{\tau 1}$  berücksichtigt werden. Beide *Zielgrößen* getrennt in 4.55 eingesetzt, müssen denselben Wert  $n_r \text{ quad}$  liefern, und es resultiert

$$\frac{n_r \text{ lin} \left( \tilde{f}_1 - (n_{ges \text{ lin}} - n_r \text{ lin}) (Z_{\tau 1})_1 \right)^2}{n_{ges \text{ lin}} (Z_{\tau 1})_1 - \tilde{f}_1} = \frac{n_r \text{ lin} \left( \tilde{f}_2 - (n_{ges \text{ lin}} - n_r \text{ lin}) (Z_{\tau 1})_2 \right)^2}{n_{ges \text{ lin}} (Z_{\tau 1})_2 - \tilde{f}_2} \quad (4.56)$$

Wieder mit Hilfe von 4.53 und durch *Nachgiebigkeiten* ausgedrückt, erhält man

$$\tilde{f}_{1/2} - \frac{(Z_{\tau 1})_{1/2}}{c_{GF \text{ rad}}} = \tilde{f}_{1/2} - (n_{ges \text{ lin}} - n_r \text{ lin}) (Z_{\tau 1})_{1/2}$$

was nach der Herleitung zu 4.52 immer  $\geq 0$  ist und den quadrierten Termen in 4.56 entspricht. Beim beidseitigen Ziehen der Wurzel muss also keine Lösungsvariante berücksichtigt werden, in der eine Seite mit  $-1$  multipliziert wird. Diese Lösungsvariante wäre im *Stationärfall* aus diesem Grund nicht mit gültigen Werten  $\tilde{f}_{1/2}$ ,  $(Z_{\tau 1})_{1/2}$ ,  $n_{ges \text{ lin}}$  und  $n_r \text{ lin}$  realisierbar. Da  $n_r \text{ quad}$  und  $n_r \text{ lin}$  in 4.55 positiv sind, ist es auch  $n_{ges \text{ lin}} (Z_{\tau 1})_2 - \tilde{f}_2$ , und man erhält die zu 4.56 äquivalente Bedingung

$$\frac{\sqrt{n_r \text{ lin}} \left( \tilde{f}_1 - (n_{ges \text{ lin}} - n_r \text{ lin}) (Z_{\tau 1})_1 \right)}{\sqrt{n_{ges \text{ lin}} (Z_{\tau 1})_1 - \tilde{f}_1}} = \frac{\sqrt{n_r \text{ lin}} \left( \tilde{f}_2 - (n_{ges \text{ lin}} - n_r \text{ lin}) (Z_{\tau 1})_2 \right)}{\sqrt{n_{ges \text{ lin}} (Z_{\tau 1})_2 - \tilde{f}_2}} \quad (4.57)$$

Gleichung 4.57 ist nach beidseitiger Division durch  $\sqrt{n_r \text{ lin}}$  linear in  $n_r \text{ lin}$ , weshalb  $n_r \text{ lin}$  hierdurch eindeutig festgelegt wird als

$$n_r \text{ lin} = n_{ges \text{ lin}} + \frac{\sqrt{n_{ges \text{ lin}} (Z_{\tau 1})_1 - \tilde{f}_1} \cdot \tilde{f}_2 - \sqrt{n_{ges \text{ lin}} (Z_{\tau 1})_2 - \tilde{f}_2} \cdot \tilde{f}_1}{\sqrt{n_{ges \text{ lin}} (Z_{\tau 1})_2 - \tilde{f}_2} (Z_{\tau 1})_1 - \sqrt{n_{ges \text{ lin}} (Z_{\tau 1})_1 - \tilde{f}_1} (Z_{\tau 1})_2} \quad (4.58)$$

Zusammengefasst ist  $P_1^V$  durch  $P_{const 0}$  und  $Z_{\tau 1}$  eindeutig festgelegt und kann mit Hilfe einer aufeinanderfolgenden Berechnung der Formeln 4.58, 4.55 und 4.53 unter Verwendung von 4.54 bestimmt werden. Da  $P_1^V$  im Definitionsbereich  $(0, \infty)^3$  eindeutig festgelegt ist, kann die Überprüfung auf Einhaltung eines vorgegeben Definitionsbereichs  $P_1^*$  nach der Berechnung von  $P_{10}^V$  erfolgen und muss nicht in den Lösungsvorgang integriert werden.



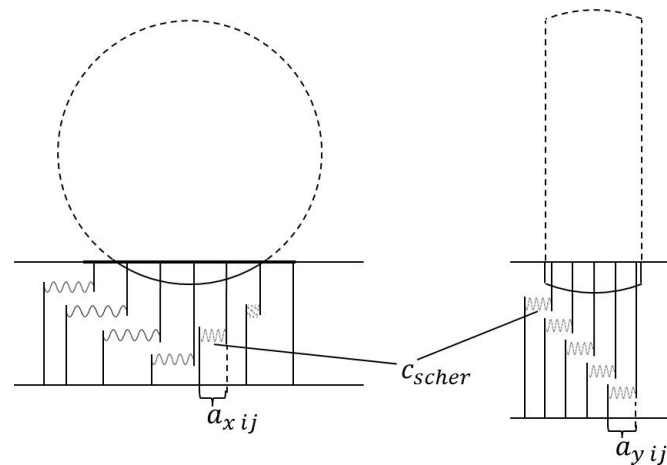


Abbildung 4.52: Wirkung der *Schersteife* bei Auslenkung der *Reibkontakt-Elemente* in Längs- bzw. Querrichtung

#### 4.2.2 Parametergruppe $R_{quer}, c_{scher} \cdot f_{L mat}^2$

Mit *Parametergruppe*  $P_1^Y$  steht bereits der Haupteinfluss auf die Vertikalkräfte und ein wesentlicher Faktor für die Horizontalkräfte des Reifens fest. Was die Horizontalkräfte betrifft, ist von den noch zu bestimmenden Parametern die *Schersteife*  $c_{scher}$  die Haupteinflussgröße. Denn von  $c_{scher}$  hängt die Größe der Kräfte ab, die die *Reibkontakt-Elemente* unter ihrer durch die *Reifengürtel*-Bewegung und Fahrbahnreibung hervorgerufenen Auslenkung ( $a_{x ij}, a_{y ij}$ ) erzeugen (s. Abb. 4.17). Abbildung 4.52 veranschaulicht die Federwirkung der *Reibkontakt-Elemente* in einem Längs- bzw. Querschnitt des Reifens mit räumlich aufgeteilter Darstellung von Ober- und Unterseiten der *Reibkontakt-Elemente*. In allen Fahrsituationen des Reifens wirken sich jedoch untrennbar noch weitere Einflussgrößen aus. Denn eine größere bzw. kleinere *Schersteife*  $c_{scher}$  kann durch kürzere oder längere *Laufstreifen* in den resultierenden Kräften wieder kompensiert werden. Auf die Längen  $l_{mat i}$  der einzelnen *Laufstreifen* wirken sich noch der *Latsch-Längenfaktor*  $f_{L mat}$  und der Querschnittsradius des *Reifengürtels*  $R_{quer}$  aus. Während  $f_{L mat}$  eine konstante Vergrößerung aller *Laufstreifen* bewirkt (s. Abb. 4.39), ergibt sich der Einfluss im Fall von  $R_{quer}$  komplizierter aus der Bodendurchdringung verschieden geformter *Gürtelringschalen*. In Abbildung 4.53 wird die Flächenberechnung der Bodendurchdringung für kleineres und sehr großes  $R_{quer}$  illustriert. Der Einfluss der Parameter  $c_{scher}, f_{L mat}$  und  $R_{quer}$  lässt sich von dem der übrigen noch zu bestimmenden Parameter trennen, wenn ausschließlich resultierende Längskräfte  $(F_{FH})_1$  für kleinen *Umfangsschlupf*  $\lambda$  bei *schräglauf-* und *sturzfreiem* Rollen ( $\alpha = \varepsilon_W = 0$ ) betrachtet werden. In solchen Situationen wirken die Parameter  $c_{scher}$  und  $f_{L mat}$  grundsätzlich als Produkt  $c_{scher} \cdot f_{L mat}^2$  und sind daher hier nicht voneinander zu unterscheiden. Also soll für die zweite *Parameter-*

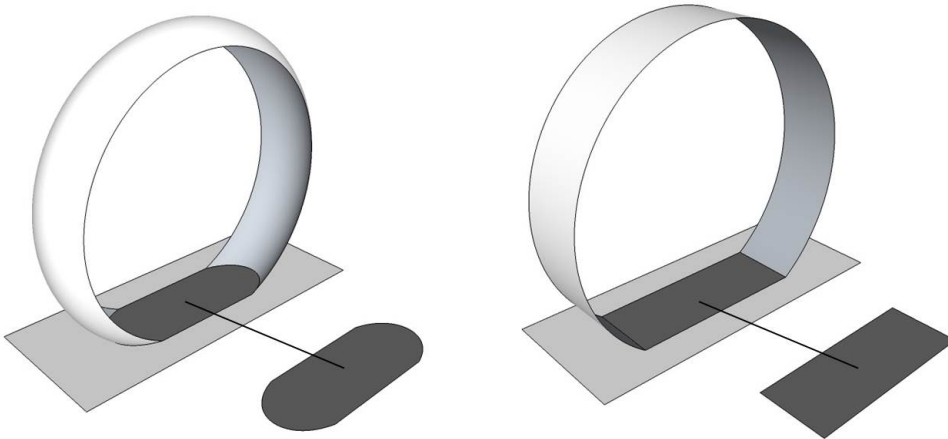


Abbildung 4.53: Schnittfläche von *Gürtelringschale* und *Boden* für kleines  $R_{quer}$  und  $R_{quer} \rightarrow \infty$

gruppe der transformierte Parameter  $c_{scher} \cdot f_{Lmat}^2$  eingeführt und hier auch identifiziert werden. Mit der Bestimmung von  $f_{Lmat}$  in Abschnitt 4.2.4 gelingt dann auch die Auflösung in separate Werte  $c_{scher}$  und  $f_{Lmat}$ . Auf die betrachteten Längskräfte wirken sich  $c_{scher} \cdot f_{Lmat}^2$  und  $R_{quer}$  durchaus verschieden aus, wenn auch  $R_{quer}$  nicht hier sondern für *gestürzten* Reifen seinen Haupteinfluss ausübt. In jedem Fall müssen zu ihrer Unterscheidung Längskräfte in unterschiedlichen Situationen betrachtet werden. Man erhält so einmal die formale *Parametergruppe*

$$P_2^V = \begin{pmatrix} R_{quer} \\ c_{scher} \cdot f_{Lmat}^2 \end{pmatrix}$$

und die *Auswertungsfunktionale*

$$Z_{E2}(\lambda(\cdot), (F_{FH})_1(\cdot)) = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial (F_{FH})_1}{\partial \lambda} \right|_{t, \lambda=0} \\ \left. \frac{\partial (F_{FH})_1}{\partial \lambda} \right|_{t, \lambda=0} \end{pmatrix}$$

Um Unabhängigkeits- und Eindeutigkeitseigenschaften zu garantieren, müssen durch *Funktional-Bedingungen* noch einige Einschränkungen der Situation vorgenommen werden. Dabei hilft die Bedingung an den Anfangszustand, den Sollzustand des *Reifengürtels* zu garantieren. Inklusive kleinen *Umfangsschlüpfen* zur Vermeidung von Einflüssen der *Reibung* und einer kleinen Geschwindigkeit  $v_B$  zur Garantie der analysierten Abschätzungen erhält man mit der Hilfsbedingung

$$b_{längs} \Leftrightarrow (\delta = \varepsilon_W = \alpha = 0) \wedge (|\lambda|, |v_{B0}| \text{ hinreichend klein}) \\ \wedge ((F_{FH}(0))_3 = -m_G \cdot g) \wedge (\dot{f} \geq 0) \wedge (v_B = v_{B0} > 0)$$

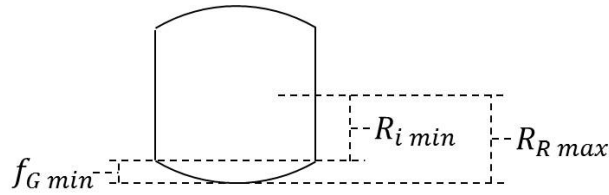


Abbildung 4.54: Mindest-Gürteleinfederung bei Bodenkontakt aller Laufstreifen

und zwei verschiedenen Vertikallast-Situationen die *Funktional-Bedingungen*

$$B_2((F_{FH})_3(\cdot), t) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_S \wedge b_{l\ddot{a}ngs} \wedge ((F_{FH})_3(t) = (F_{FH})_{31}) \wedge ((F_{FH})_{31} \geq (F_{FH})_{3min}) \\ b_S \wedge b_{l\ddot{a}ngs} \wedge ((F_{FH})_3(t) = (F_{FH})_{32}, (F_{FH})_{32} > (F_{FH})_{31}) \end{pmatrix}$$

Der hier angegebene Nachweis zur Eindeutigkeit der *Zielgrößen* in den Parametern setzt voraus, dass für beide *Zielgrößen* alle *Laufstreifen* Bodenkontakt besitzen. Damit alle *Laufstreifen* Bodenkontakt besitzen, muss eine Mindest-Gürteleinfederung  $f_{Gmin}$  vorliegen. Wie in Abbildung 4.54 illustriert gilt für diese mit 4.19

$$f_{Gmin} = R_{Rmax} - R_i|_{y_{REK} = \frac{1}{2}B_R} = R_{quer} - \sqrt{R_{quer}^2 - \frac{1}{4}B_R^2}$$

Da  $R_{quer}$  zum Zeitpunkt der Messung noch unbekannt ist, muss es ebenso abgeschätzt werden

$$R_{quer} \in P_{21}^* = [R_{quermin}, R_{quermax}]$$

Zur Festlegung von  $f_{Gmin}$  ist  $R_{quermin}$  relevant

$$f_{Gmin} = R_{quermin} - \sqrt{R_{quermin}^2 - \frac{1}{4}B_R^2} \quad (4.59)$$

Für PKW- und LKW-Reifen, dem Anwendungsgebiet des Reifenmodells, kann eine durch  $R_{quer}$  maximal 20-prozentige Verkleinerung des seitlichen gegenüber dem mittleren Reifenradius angenommen werden. Diesen Fall zeigt Abbildung 4.54. Es gilt dann

$$f_{Gmin} \leq 0.2R_{Rmax} \quad (4.60)$$

$f_G$  selbst ist jedoch noch keine Schnittstellengröße, kann jedoch mit den schon bekannten Parametern  $c_{rlin}$ ,  $c_{rquad}$  und 4.15 in eine *Latsch-Vertikalkraft*  $F_{LGKz}$  umgerechnet werden, die nach 4.10 *stationär* bis auf die Gewichtskraft des *Reifengürtels* mit der Schnittstellen-Vertikalkraft  $(F_{FH})_3$  übereinstimmt

$$(F_{FH})_{3min} = c_{rlin}f_{Gmin} + c_{rquad}f_{Gmin}^2 - m_G \cdot g \quad (4.61)$$

### Unabhängigkeit der Zielgrößen

Zum Nachweis von 3.23 für die *Zielgrößen*  $Z_{\tau_2}$  soll analog zu Abschnitt 4.2.1 wieder das Gesamtmodell auf die beschriebene Situation reduziert werden. Auch hier soll ein Zustand

$$(\varphi_{G0})_1 = (\varphi_{G0})_3 = (r_{G0})_2 = F_{Ly PT1} = M_{Lz PT1} = a_{y ij} = 0 \quad (4.62)$$

vorausgesetzt werden, dessen Erhaltung unter  $B_2$  nachgewiesen wird. Die translatorische Querlage der Felge kann ohne Einschränkung auf  $(r_{F0})_2 = 0$  festgelegt werden. Aus 4.36 folgt mit  $\varepsilon_W = 0$ , dass  $(\varphi_{F0})_1 = 0$  und mit  $\delta = 0$ , dass  $(\varphi_{F0})_3 = 0$ . Mit 4.39 erhält man so als Querkomponente der *stationären* Koppelkraft der Felge auf den *Reifengürtel*

$$(F_{FG0})_2 = 0 \quad (4.63)$$

Die Drehlage zwischen Felge und *Reifengürtel* unterscheidet sich nur in der  $y$ -Komponente, weshalb für ihre linearisierte Verdrehlage  $(\varphi_{FG lin}(0))_1 = (\varphi_{FG lin}(0))_3 = 0$  und so mit 4.41 und 4.42 für das *stationäre* Koppelmoment der Felge auf den *Reifengürtel*

$$(M_{FG0})_1 = (M_{FG0})_3 = 0 \quad (4.64)$$

folgt. Durch die Festlegung der Vertikalkraft über  $B_2$  kann die 3. Komponente der *inertialen* Koppelkraft zwischen *Reifengürtel* und Felge mit Hilfe von 4.37, Def. 21 und 4.9 direkt mit

$$(F_{FG0})_3 = -(F_{FH})_{3 1/2}$$

angegeben werden. Nach Abschnitt 4.1.7 gilt im *Stationärzustand*  $F_{G0} = 0$  und so nach 4.10 auch

$$(F_{LG0})_3 = (F_{FH})_{3 1/2} + m_G \cdot g$$

Auf ebener Fahrbahn stimmen die Vertikalkomponenten von *Kontakt-* und *Inertialsystem* überein (Def. 20), also erhält man mit 4.35

$$F_{LGKz} = (F_{FH})_{3 1/2} + m_G \cdot g$$

Dann ergeben sich *stationär* nach 4.15 für  $(F_{FH})_{3 1/2}$  auch jeweils *konstante* Werte  $f_{G 1/2}$  für die *Gürteleinfederung*, die von keinem noch zu identifizierenden Parameter abhängen. Da 4.15 im *Stationärfall* einen streng monotonen Zusammenhang zwischen  $F_{LGKz}$  und  $f_G$  bildet, gilt  $f_{G1} < f_{G2}$ . Für den ungestürzt angenommenen *Reifengürtel* ( $(\varphi_{G0})_1 = \varepsilon_{GK} = 0$ ) folgt auf ebener Fahrbahn aus 4.13 zunächst  $d_{GBKz} = R_{Rmax}$  und aus 4.14 dann

$$\|r_{G0 1/2} - r_{K0}\| = R_{Rmax} - f_{G 1/2} \text{ mit } \|r_{G0 1} - r_{K0}\| > \|r_{G0 2} - r_{K0}\| \quad (4.65)$$

Zur Vereinfachung der weiteren Analyse soll hier die Zahl  $n_{RES}$  der *Reibkontakt-Elemente* pro *Laufstreifen* als beliebig groß ( $n_{RES} \rightarrow \infty$ ) betrachtet werden. Gemäß Abschnitt 4.1.7

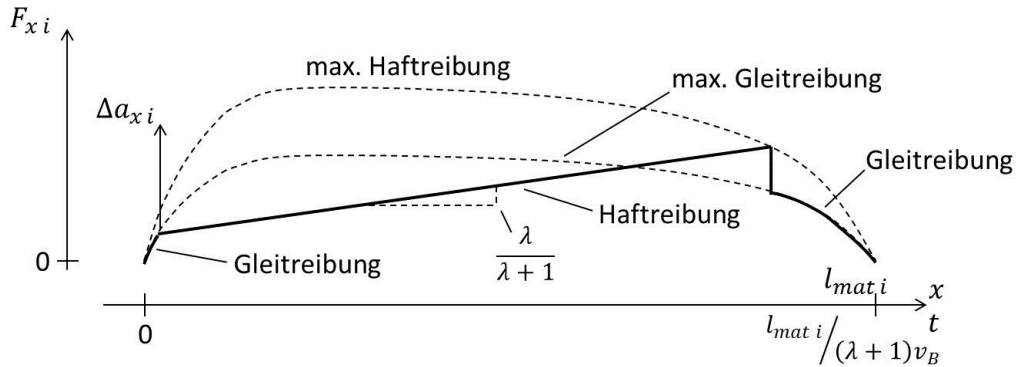


Abbildung 4.55: stationäre Längsauslenkung- und -kräfte im Laufstreifen

kann so beim *Stationärzustand* die Auslenkung der *Reibkontakt-Elemente* abhängig von ihren Positionen im *unverformten Latsch* als *konstant* betrachtet werden. An Stelle der Größen  $a_{xij}$ ,  $a_{yij}$ ,  $F_{xij}$  und  $F_{yij}$  beschreiben dann  $a_{xi}(x)$ ,  $a_{yi}(x)$ ,  $F_{xi}(x)$  und  $F_{yi}(x)$  ( $0 \leq x \leq l_i$ ) Auslenkung und *Scherkraft* der *Reibkontakt-Elemente* abhängig von ihrem Abstand zum Beginn des *Laufstreifens*  $i$ . Drückt man die *Scherkräfte* in den Parametern für endliches  $n_{RES}$  aus, ändert sich in dieser Darstellung allerdings deren Berechnung von 4.33 in

$$F_{x/yi}(x) = \frac{1}{l_{RKE}} \left( d_{scher} \dot{a}_{x/yi}(x) + c_{scher} a_{x/yi}(x) \right) \quad (4.66)$$

Nach 4.36 gilt  $(\dot{r}_{F0})_{1..2} = \begin{pmatrix} v_B \\ 0 \end{pmatrix}$ , *stationär* und mit 4.12 auch  $(\dot{r}_{G0})_{1..2} = (\dot{r}_{K0})_{1..2} = \begin{pmatrix} v_B \\ 0 \end{pmatrix}$ . Unter den Voraussetzungen sind mit 4.17 und 4.28 die Werte

$$\dot{x}_{REKj} = -R_{dyn} \dot{\varphi}_{F0y} \quad (4.67)$$

und mit 4.28 und 4.29  $y_{REK def \varphi x ij} = 0$ . Mit Def. 20 folgt nun in 4.30 und durch 4.36

$$\begin{pmatrix} v_{0Kx ij} \\ v_{0Ky ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_B - R_{dyn} \dot{\varphi}_{F0y} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_B \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.68)$$

Beim Durchwandern des *Kontaktsystems* wechseln die *Reibkontakt-Elemente* schon im *Stationärfall* zweimal zwischen *Gleit-* und *Haftreibung* (s. Abb. 4.55). Diese Vorgänge müssen gesondert im Detail analysiert werden, an dieser Stelle lässt sich aber durchaus schon das Verhalten im Abschnitt mit *Haftreibung* beschreiben. Hier erfahren die *Reibkontakt-Elemente* nach 4.30 eine gleichmäßig zunehmende *Längsauslenkung* ( $u_{ij} = 0$ ) bis ihre *elastisch* und *dämpfungsbedingte Scherkraft*  $F_{xij}$  die *druckabhängige Haftreibungsgrenze* erreicht, die *Unterseite* die Bodenhaftung verliert, und sie in reduzierte

#### 4 Entwicklung und Verifikation einer Sequentiellen Parameteridentifikation für ein physikalisches Reifenmodell

---

*druckabhängige Gleitreibung* übergehen. Abbildung 4.55 zeigt u.A. den Verlauf dieser Auslenkung für einen *Laufstreifen* in der  $x$ - $a_{x_i}$ -Darstellung. Das dargestellte positionsabhängige einmal steigende und wieder fallende *Haftreibungspotenzial* resultiert in dieser Eigenschaft aus 4.24. Die der Position Achse überlagerte Zeitachse gibt noch die Zeit wieder, seit der das *Reibkontakt-Element* an Position  $x$  sich in der Bodenkontaktzone befindet. Durch 4.17 und 4.36 lassen sich zunächst  $\dot{x}_{REK\ def\ j}$  und dann diese Zeit als

$$\dot{x}_{REK\ def\ j} = \dot{x}_{REKj} = -(\lambda + 1)v_B \quad t_i(x) = \frac{x}{(\lambda + 1)v_B} \quad (4.69)$$

angeben. Damit kann nun auch die Differenz der Längsauslenkung unter *Haftreibung* zwischen zwei Positionen beschrieben werden als (s. 4.30)

$$a_{x\ haft\ i}(x_2) - a_{x\ haft\ i}(x_1) = -(t_i(x_2) - t_i(x_1))v_{0Kx\ ij} = \frac{\lambda}{\lambda + 1}(x_2 - x_1) \quad (4.70)$$

Während die insgesamt resultierende Latschquerkraft einfach mit  $F_{LGK_y} = 0$  angegeben werden kann, ist die genaue Bestimmung von  $F_{LGK_x}$  durch die variierenden *Haft- und Gleitreibungskräfte* kompliziert. Ein sinnvoll zu handhabender Zusammenhang entsteht überhaupt erst für beliebig kleines  $\lambda$ , der jedoch auch zunächst aufwändig in der Herleitung ist. Man erhält so die Beziehung

$$\left. \frac{\partial F_{LGK_x}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = \frac{1}{l_{RKE}} \left( \frac{1}{2} c_{scher} \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat\ i}^2 + v_B d_{scher} \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat\ i} \right) \quad (4.71)$$

Eine ausführliche Herleitung des Zusammenhangs kann in Abschnitt C.2 nachgelesen werden. Einfach folgt dagegen mit 4.68, 4.30, 4.33 und 4.34, dass  $F_{LGK_y} = 0$ . Aus 4.29 ( $\varepsilon_{GK} = (\varphi_{G0})_1 = 0$ ), 4.27 und 4.28 erhält man weiter  $y_{REK\ def\ \varphi\ ij} = y_{REK\ ij}$ , mit 4.19 und 4.20  $l_{mat\ i} = l_{mat\ n_{LS}-i+1}$  und über 4.24 sowie C.2, dass die Kräfte der *Reibkontakt-Elemente* symmetrisch zur  $x_K$ -Achse des *Kontaktsystems* verteilt liegen (4.16). So ergibt sich mit 4.34 auch  $M_{LGK_x} = M_{LGK_z} = 0$ . Dann folgt mit  $(\varphi_{G0})_1 = 0$  aus 4.35 weiter  $(F_{LG0})_2 = (M_{LG0})_1 = (M_{LG0})_3 = 0$ , was nach 4.10 zusammen mit 4.63 und 4.64 den Erhalt von Zustand 4.62 bestätigt, der seit  $t = 0$  besteht. Es gilt außerdem die Stationärbedingung  $F_{G0} = 0$ , und so überträgt sich durch 4.35, 4.10, 4.9 und 4.37 die Beziehung 4.71 auf die *Zielgröße*

$$\left. \frac{\partial (F_{FH})_1}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = \frac{1}{l_{RKE}} \left( \frac{1}{2} c_{scher} \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat\ i}^2 + v_B d_{scher} \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat\ i} \right)$$

Als Ersatzmodell für die *Zielgrößen*  $Z_{\tau 2}$ , also unter  $B_2$  erhält man so mit 4.19 und 4.20

$$\begin{aligned}
 (F_{FH})_3 + m_G \cdot g &= c_r \text{lin} f_G + c_r \text{quad} f_G^2 \\
 l_{mat\ i} &= 2 f_{L\ mat} R_i \arccos \frac{s}{R_i} \\
 R_i &= R_{R\ max} + \sqrt{R_{quer}^2 - y_{REK\ i}^2} - R_{quer} \\
 s &= R_{R\ max} - f_G
 \end{aligned} \tag{4.72}$$

$$\left. \frac{\partial (F_{FH})_1}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = \frac{1}{l_{RKE}} \left( \frac{1}{2} c_{scher} \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat\ i}^2 + v_B d_{scher} \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat\ i} \right) \tag{4.73}$$

das mit 4.16 offensichtlich nicht von später zu identifizierenden Parametern abhängt.

### Eindeutigkeit der Zielgrößen

Für den Nachweis der Eindeutigkeit von  $P_2^V \leftrightarrow Z_{\tau 2}$  wird zunächst die einfachere Situation für  $v_B \rightarrow 0$  analysiert. Das Ersatzmodell 4.72 und 4.73 wird so zum vereinfachten Ersatzmodell 4.72 und

$$\left. \frac{\partial (F_{FH})_1}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = \frac{1}{2} \frac{c_{scher}}{l_{RKE}} \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat\ i}^2 \tag{4.74}$$

Formal soll wie im 3. Punkt der Zusammenfassung zur *Sequentiellen Parameteridentifikation* am Ende von Abschnitt 3.3 erwähnt vorgegangen werden, nämlich Eigenschaft 3.32 und, wo es noch erforderlich ist, Eigenschaft 3.27 nachzuweisen. Neben der Eindeutigkeit folgt so auch die Berechenbarkeit der Umkehrabbildung

$$\left. \overset{\leftrightarrow}{P}_2^V \right|_{P_{const\ 0}^V, P_{10}^V} (Z_{\tau 2})$$

nach dem am Ende von Abschnitt 3.3 beschriebenen Verfahren. Eigenschaft 3.32*i*) muss bei einer *Parametergruppe* der Größe 2 nur für

$$(P_2^V)_2 \Big|_{P_{const\ 0}^V, P_{10}^V, (Z_{\tau 2})_{20}} ((P_2^V)_1)$$

nachgewiesen werden. Dabei ist zu zeigen, dass  $(P_2^V)_2$  *streng monoton* in  $(P_2^V)_1$  fällt bzw., dass im Fall hier für festgelegte Werte  $\left. \frac{\partial (F_{FH})_1}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}$ ,  $(F_{FH})_3$  und sonst festgelegte Parameterwerte der Wert von  $c_{scher} \cdot f_{L\ mat}^2$  *streng monoton* in  $R_{quer}$  fällt. Unter  $B_2$  gilt in 4.72

$$\frac{\partial R_i}{\partial R_{quer}} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1 - y_{REK\ i}^2 / R_{quer}^2}}_{0 < < 1}} - 1 > 0 \tag{4.75}$$

#### 4 Entwicklung und Verifikation einer Sequentiellen Parameteridentifikation für ein physikalisches Reifenmodell

---

weshalb  $R_i$  *streng monoton* in  $R_{quer}$  steigt. Aus 4.72 und 4.74 folgt weiter

$$c_{scher} \cdot f_{Lmat}^2 = l_{RKE} \left( \frac{\partial (F_{FH})_1}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} \right) / \left( 2 \sum_{i=1}^{n_{LS}} \left( R_i \arccos \frac{s}{R_i} \right)^2 \right) \quad (4.76)$$

und damit, dass  $c_{scher} \cdot f_{Lmat}^2$  in  $R_i$ , also insgesamt in  $R_{quer}$  *streng monoton* fällt, was Eigenschaft 3.32i) für  $P_2^V \leftrightarrow Z_{\tau 2}$  nachweist.

Eigenschaft 3.27 muss hier ausschließlich für

$$(Z_{\tau 2})_2 \Big|_{P_{const 0}^V, P_{10}^V, (P_2^V)_{10}} ((P_2^V)_2)$$

gezeigt werden, was für sonst konstante Werte das *streng monotone* Wachstum von  $\frac{\partial (F_{FH})_1}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0}$  in  $c_{scher} \cdot f_{Lmat}^2$  bedeutet. Die einfache Umformung

$$\left( \frac{\partial (F_{FH})_1}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} \right) = \frac{c_{scher} \cdot f_{Lmat}^2}{l_{RKE}} \cdot \left( 2 \sum_{i=1}^{n_{LS}} \left( R_i \arccos \frac{s}{R_i} \right)^2 \right)$$

von 4.76 weist mit dabei konstanten Werten für  $s$  und  $R_i$  genau dies und damit Eigenschaft 3.27 für  $P_2^V \leftrightarrow Z_{\tau 2}$  nach.

Zum vollständigen Nachweis von Eindeutig- und Lösbarkeit muss noch Eigenschaft 3.32ii), jedoch nur für

$$(Z_{\tau 2})_1 \Big|_{P_{const 0}^V, P_{10}^V, (Z_{\tau 2})_{20}} ((P_2^V)_1)$$

gezeigt werden. D.h., wird bei Vergrößerung von  $R_{quer}$  Parameter  $c_{scher} \cdot f_{Lmat}^2$  so angepasst, dass  $\frac{\partial (F_{FH})_1}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0 2}$  für  $(F_{FH})_{32}$  konstant bleibt, muss sich auch  $\frac{\partial (F_{FH})_1}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0 1}$  für  $(F_{FH})_{31}$  vergrößern. Beim Nachweis hilft der Zusammenhang

$$\frac{\partial}{\partial R_{quer}} \left( \frac{L(s_2, R_{quer})}{L(s_1, R_{quer})} \right) < 0 \quad (4.77)$$

mit  $L(s_{1/2}, R_{quer}) = \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_i^2$  nach 4.72, 4.74 für  $(F_{FH})_3 = (F_{FH})_{31/2}$

der in Abschnitt C.3 ausführlich analysiert wird. Die *Zielgrößen* lassen sich im vereinfachten Ersatzmodell nach 4.72 und 4.74 mit 4.20 auch ausdrücken als

$$(Z_{\tau 2})_{1/2} = \frac{\partial (F_{FH})_1}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0 1/2} = \frac{2c_{scher} f_{Lmat}^2}{l_{RKE}} L(s_{1/2}, R_{quer})$$

Es gilt also auch

$$\frac{(Z_{\tau 2})_2}{(Z_{\tau 2})_1} = \frac{L(s_2, R_{quer})}{L(s_1, R_{quer})}$$



Mit 4.77 fällt  $\frac{L(s_2, R_{quer})}{L(s_1, R_{quer})}$  und damit auch  $g(R_{quer}) = \frac{(Z_{\tau 2})_2}{(Z_{\tau 2})_1}$  streng monoton in  $R_{quer}$ . So kann  $(Z_{\tau 2})_1$  dargestellt werden als

$$(Z_{\tau 2})_1 = \frac{(Z_{\tau 2})_2}{g(R_{quer})}$$

und es folgt, dass  $(Z_{\tau 2})_1$  für konstantes  $(Z_{\tau 2})_2$  streng monoton in  $R_{quer}$  steigt. Mit dem so komplettierten Nachweis von Eigenschaft 3.32 und dem von Eigenschaft 3.27 folgt auch Eigenschaft 3.24 zur Eindeutigkeit sowie die Lösbarkeit des Parameter-Zielgrößen-Zusammenhangs  $P_2^V \leftrightarrow Z_{\tau 2}$ , jedoch unter der Voraussetzung einer Betrachtung für  $v_B \rightarrow 0$ .

Der Nachweis der Eindeutigkeit benutzt die streng monotonen Zusammenhänge zwischen verschiedenen Größen, die sich alle stetig in Abhängigkeit von  $v_B$  ändern. Jeder Monotonie-Zusammenhang basiert auf dem positiven Vorzeichen der Ableitung der resultierenden Größe nach der veränderten Größe. Durch die stetige Abhängigkeit von  $v_B$  wird der Betrag der Ableitung zwar evt. verändert, bei hinreichend kleiner Veränderung von  $v_B$  bleibt jedoch das Vorzeichen erhalten, und die Monotonie der Abhängigkeiten ebenso. Damit folgt, dass  $P_2^V \leftrightarrow Z_{\tau 2}$  auch für hinreichend kleinen Wert von  $v_B$  eindeutig ist.

### 4.2.3 Parameter $c_{GF \text{ rot rad}}$

Die Parametergruppen  $P_1^V$  und  $P_2^V$  konnten allein durch die Betrachtung von Felgenlängs- und -vertikalkräften bestimmt werden. Nun folgen einige Parametergruppen, die sich nur unter Querkräften oder Rückstellmomenten (Momente um die Felgenvertikalachse) auswirken, oder nur so von anderen Einflüssen zu unterscheiden sind. Dies gilt auch für die rotatorisch-radiale Steife  $c_{GF \text{ rot rad}}$  zwischen Reifengürtel und Felge, die allein die dritte zu identifizierende Parametergruppe

$$P_3^V = c_{GF \text{ rot rad}}$$

bildet.  $c_{GF \text{ rot rad}}$  stellt allerdings einen schwierig zu behandelnden Parameter dar, da der Einfluss der Steife i.A. zwar einerseits zu groß ist, um ihn zu ignorieren, andererseits aber auch zu klein, als dass sich nur wenigstens in ausgewählten Situationen ein ausgeprägter monotoner Einfluss unabhängig von den später zu identifizierenden Parametern ergeben würde. Da von den noch zu identifizierenden Parametern wie schon erwähnt einige nur unter Rückstellmomenten oder Querkräften bzw. dabei entstehenden Sturzmomenten (Momente um die Felgenlängsachse) bestimmt werden können, und  $c_{GF \text{ rot rad}}$  durch Sturz- und Rückstellmomente wirksam wird (s. 4.7), beeinflusst die Steife auch deren

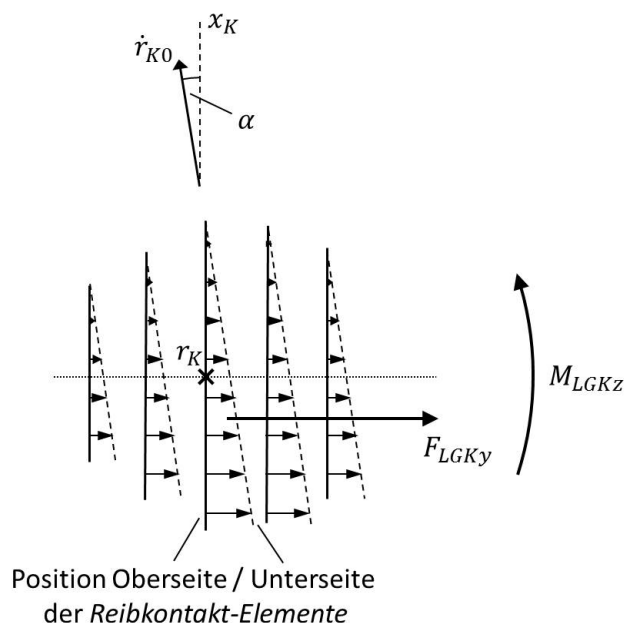


Abbildung 4.56: stationäre Querauslenkung- und -kräfte unter Schräglauf

Identifikation und muss vor diesen bestimmt werden. Das in diesem Abschnitt beschriebene Vorgehen bietet dazu zwar ein theoretisches Verfahren, sollte jedoch kaum praktisch realisierbar sein, da es zu hohe Anforderungen an die Genauigkeit von *Anregungs-* und *Messgrößen* stellt und damit unter dem Aspekt des *optimalen Versuchsdesigns* nur schwer zu rechtfertigen wäre. Trotzdem vervollständigt es die *Sequentielle Parameteridentifikation* des Reifenmodells und soll nun im Folgenden vorgestellt werden.

Bewegt sich der Reifen *sturz-* und *schlupffrei* ( $\varepsilon_W = \lambda = 0$ ) mit einem *Schräglaufwinkel*  $\alpha > 0$ , entsteht ein *Rückstellmoment*  $(M_{FH})_3 < 0$ . Wie in Abbildung 4.56 illustriert nimmt unter *stationärem Schräglauf* die Querauslenkung in der *Haftreibungszone* analog zur Längsauslenkung unter *Umfangsschlupf* (s. Abschnitt 4.2.2) in  $x_K$ -Richtung *linear* zu. Dabei sind die in der hinteren *Latsch*-Hälfte entstehenden Querkräfte größer als die der vorderen Hälfte, und es resultiert ein *Latschrückstellmoment*  $M_{LGKz}$ , das sich unter evt. zusätzlichen Einflüssen auch auf die Felge und damit auf  $(M_{FH})_3$  überträgt. Auch wenn Teile der hinteren *Latsch*-Hälfte schon in *Gleitreibung* übergegangen sind, bleibt das resultierende *Rückstellmoment* erhalten und verschwindet erst für sehr große *Schräglaufwinkel*  $\alpha$ . Unter einem *Rückstellmoment*, das vom *Latsch* als  $M_{LGKz}$  bis zum Koppelmoment  $(M_{FGG})_3$  zwischen *Reifengürtel* und Felge wirkt, verdrehen sich *Reifengürtel* und Felge gegeneinander um die Vertikalachse, also den Winkel  $(\varphi_{FGlin})_3$  (s. 4.7). Abbildung 4.57 zeigt diesen Vorgang und außerdem, wie sich dabei die resultierende *Latsch-Querkraft*  $F_{LGKy}$  gegenüber der Felgenquerrichtung  $y_F$  um den gleichen Winkel

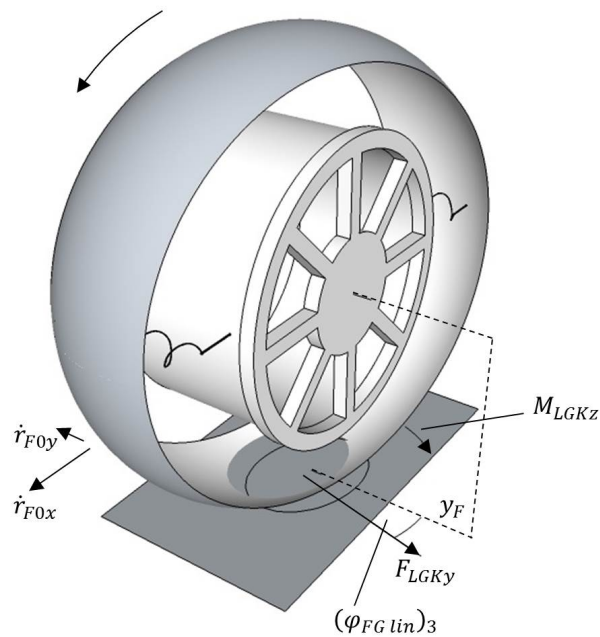


Abbildung 4.57: Richtung der Querkraft bei Rückstellmoment

verdreht. Sind *Latsch* und Felge ausschließlich in Richtung von  $F_{LGKy}$  zueinander verschoben, überträgt sich  $M_{LGKz}$  unverändert auf das Felgen-Rückstellmoment  $(M_{FH})_3$ . Entstehen im *Latsch* außerdem keine weiteren Horizontalkräfte, entspricht die Richtung der Felgenhorizontalkraft  $(F_{FH})_{1..2}$  genau der von  $F_{LGKy}$  und der messbare Winkel zwischen  $(F_{FH})_{1..2}$  und  $y_K$  entspricht  $(\varphi_{FG lin})_3$ . Sind das Vertikalmoment und der vertikale Verdrehwinkel  $(\varphi_{FG lin})_3$  zwischen *Reifengürtel* und Felge bekannt, kann auf die dabei wirksame *rotatorisch-radiale Steife*  $c_{GF rot rad}$  zwischen *Reifengürtel* und Felge geschlossen werden.

Es gibt hierbei allerdings noch mehrere störende Einflussfaktoren, die ohne zusätzliche Maßnahmen den Zusammenhang zwischen vertikaler Verdrehung und vertikalem Moment verfälschen. Eine *Latsch*-Seitenkraft  $F_{LGKy}$  versetzt den *Reifengürtel* in *Sturzlage*  $(\varphi_{G0})_1 \neq 0$ . Mit Abbildung 4.58 kann man die daraus entstehenden Verfälschungen erkennen. Einmal entspricht die *gestürzte* Vertikalachse des *Reifengürtels* weder der *inertialen* noch der der Felge. Damit ist das nach 4.7 über  $c_{GF rot rad}$  zwischen *Reifengürtel* und Felge wirkende *Rückstellmoment* nicht  $M_{LGKz}$ , sondern die Projektion  $M_P = M_{LGKz} \cos(\varphi_{FG lin})_1$ , was die Verdrehung des *Reifengürtels* mitsamt der Querkraftrichtung verändert. Mit einer *sturzbedingten* Veränderung der Ausrichtung des *Latsch*-Koordinatensystems muss jedoch nicht gerechnet werden. Nach Def. 18 erfolgt die Rotation des *Reifengürtels* aus der  $\varphi_{G0} = 0$ -Lage heraus um die  $x$ -Achse, bevor um die *inertiale*  $z$ -Achse um  $(\varphi_{FG lin})_3$  gedreht wird. Die erste Rotation belässt die  $x_K$ -Richtung in ihrer *inertialen* Ausrichtung unverändert, erst die zweite stellt deren Richtung von

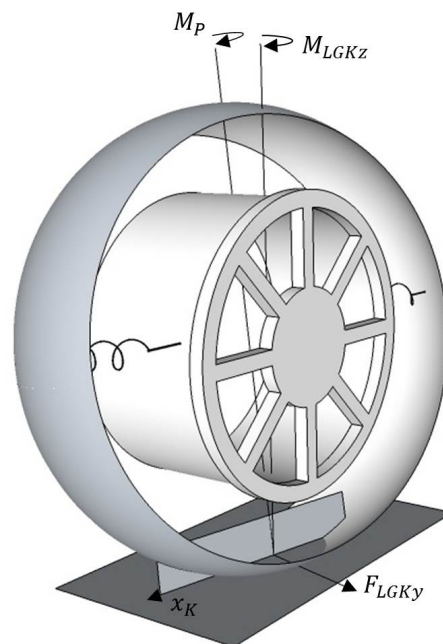


Abbildung 4.58: Verfälschung der Momente und Verdrehwinkel bei *gestürztem Reifengürtel*

der unbeeinflussten Ausgangslage ausgehend in Übereinstimmung mit  $(\varphi_{FGlin})_3$  ein. Ein weiterer *sturzbedingter* Störeinfluss ergibt sich aber durch die in Abbildung 4.47 veranschaulichte rollende Gegeneinanderbewegung von Felge und *Reifengürtel*, die im Fall von *inertialen Sturz* ein zusätzliches Moment um die Felgenvertikalachse bewirkt (s. 4.42 für  $R_{const\ 3,2} = (\varphi_{FGlin})_1$ ) und damit das Felgenvertikalmoment weiter verfälscht. Der erste der beiden Störeinflüsse wächst durch den  $\cos$ -Term nur langsam mit dem *Schräglaufwinkel*  $\alpha$  und kann daher durch eine Betrachtung mit  $\alpha \rightarrow 0$  beseitigt werden. Da der *Sturzwinkel*  $(\varphi_{FGlin})_1$  des *Reifengürtels* um  $\alpha = 0$  selbst *linear* mit  $\alpha$  wächst, bleibt der Einfluss der rotatorischen Dämpfung weiterhin bestehen und kann v.A. aufgrund des unbekanntem Vertikalkraftangriffspunkts auch nicht über das *Sturzmoment*  $(M_{FH})_1$  und eine Bestimmung von  $(\varphi_{FGlin})_1$  herausgerechnet werden. Erst die zusätzliche Betrachtung unter  $v_B \rightarrow 0$  behebt auch diesen Störeinfluss, wobei der benutzte Haupteinfluss insgesamt verbleibt.

Der Zusammenhang zwischen  $(\varphi_{FGlin})_3$  und der Richtung von  $(F_{FH})_{1..2}$  lässt allerdings auch so erst auf  $c_{GF\ rot\ rad}$  schließen, wenn die *Latsch-Längskraft*  $F_{LGKx}$  verschwindet. Andernfalls überlagert sich bspw. der Querkraft eine Längskraft, die die Richtung der Gesamthorizontalkraft verändert. Einen *Umfangsschlupf* von  $\lambda = 0$  einzustellen, genügt nicht, um  $F_{LGKx} = 0$  zu bewirken. Grund hierfür ist, dass die Längsauslenkungen  $a_{x\ ij}$  der *Reibkontakt-Elemente* für  $\lambda = 0$  nur dann konstant 0 bleiben, wenn die *horizontier-*

te Längsrichtung der Felge und des *Reifengürtels* übereinstimmen, also  $(\varphi_{F0})_3 = (\varphi_{G0})_3$  gilt. Durch die hier vorliegende Vertikalverdrehung zwischen Felge und *Reifengürtel* trifft dies nicht zu. In C.4 wird die *schlupfabhängig* für gegenüber der Felge gedrehten *Reifengürtel* entstehende *Latsch*-Längskraft  $F_{LGKx}$  genau untersucht. Man erhält dabei, dass ein *Umfangsschlupf*  $\lambda$  von

$$\lambda_0 = \frac{\cos(\alpha + \varphi_{G0z})}{\cos \alpha} - 1$$

eingestellt werden muss, um  $F_{LGKx} = 0$  zu garantieren. Unter  $F_{LGKx} = 0$  und  $\alpha > 0$  entstehen wie in Abbildung 4.56 für negatives  $\alpha$  gezeigt und in Abschnitt C.10 näher begründet die *Latsch*-Größen  $\alpha_K > 0$  (s. C.18) und  $M_{LGKz} < 0$ .  $M_{LGKz} < 0$  erlaubt mit den hier dafür gegebenen Voraussetzungen den Schluss auf  $\varphi_{G0z} < 0$  über 4.86 und 4.80. Aus  $\alpha_K > 0$  folgt mit C.18 und  $\varphi_{G0z} < 0$  zunächst  $-\alpha < \varphi_{G0z} < 0$  und damit  $\lambda_0 > 0$ .

Nun sollen für die hier verwendete *Zielgröße*  $\alpha$  und  $v_B$  mit Werten  $\rightarrow 0$  belegt werden. Daher stellt sich die Frage, ob hierdurch nicht auch die verfälschenden Effekte bei der Bestimmung von  $c_{GF \text{ rot rad}}$  verschwinden, auch wenn man einfacher  $\lambda = 0$  festlegt, und  $\lambda$  nicht abhängig von der unbekanntem Größe  $\varphi_{G0z}$  wählen muss. Abschnitt C.5 untersucht die Auswirkungen dieser Alternative, wobei sich zeigt, dass so keine fehlerfreie Identifikation von  $c_{GF \text{ rot rad}}$  möglich wäre. Eine andere Alternative zur Einstellung von  $F_{LGKx} = 0$  über  $\lambda$  könnte sein, die *Stellgröße* der Felgendrehgeschwindigkeit  $\varphi_{F0y}$  nicht festzulegen, also stattdessen ein *Stellmoment* von  $(M_{FH})_2 = 0$  vorzugeben, und damit  $F_{LGKx} = 0$  zu erzielen. *Reifenprüfstände* bieten auch diese alternative Möglichkeit der Steuerung. Die Abbildungen 4.57 und C.4 zeigen jedoch, dass die im *Latsch* entstehende Querkraft  $F_{LGKy}$  durch die Drehung von *Reifengürtel* und *Latsch* um  $\varphi_{G0z}$  immer auch eine Komponente in Felgenlängsrichtung besitzt, daher auch das resultierende Felgenmoment  $(M_{FH})_2 \neq 0$  sein muss, und diese vereinfachte Art der Ansteuerung also auch nicht zum Ziel führt.

Wie schon erwähnt setzt die Einstellung von  $F_{LGKx} = 0$  über  $\lambda_0$  voraus, dass  $\varphi_{G0z}$  bekannt ist.  $\varphi_{G0z}$  kann jedoch umgekehrt mit dem hier verfolgten Ansatz über die Drehrichtung der resultierenden Kraft  $F_{LGKy}$  bestimmt werden, wenn  $\lambda_0$  schon eingestellt ist. So bleibt nur die Möglichkeit, den geeigneten *Betriebspunkt implizit* festzulegen.  $\varphi_{G0z}$  wird dabei wie schon beschrieben durch die Richtung der resultierenden Horizontalkraft geschätzt

$$\varphi_{G0z \text{ estim}} = -\arctan\left(\frac{(F_{FH})_1}{(F_{FH})_2}\right) \quad (4.78)$$

Die geschätzte Richtung muss dann Gleichung

$$\lambda = \frac{\cos(\alpha + \varphi_{G0z \text{ estim}})}{\cos \alpha} - 1 \geq 0 \quad (4.79)$$

erfüllen. Ist für ein gewähltes  $\lambda$  und das resultierende  $\varphi_{G0z \text{ estim}}$  Gleichung 4.79 nicht erfüllt, gilt nicht  $F_{LGKx} = 0$ . Denn nach Abschnitt C.4 ist der Winkel zwischen der

#### 4 Entwicklung und Verifikation einer Sequentiellen Parameteridentifikation für ein physikalisches Reifenmodell

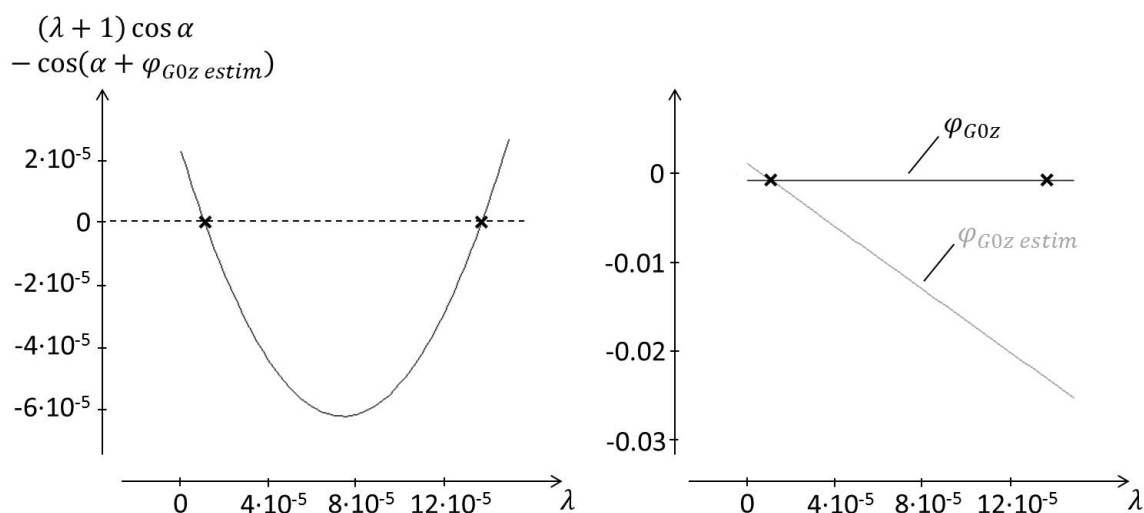


Abbildung 4.59: *Schlupf*-Bedingung bzw. realer und geschätzter Wert von  $\varphi_{G0z}$  für eine Parametrierung mit Größe 225 / 60 R 16 und  $c_{GF \text{ rot rad}} = 70000 \text{ Nm/rad}$  unter  $F_{FH_z} = 4500 \text{ N}$

Längsrichtung der Felge  $x_F$  und des *Kontaktsystems*  $x_K$  auch  $\varphi_{G0z}$ . Gilt nun  $F_{LGK_x} = 0$  stimmen die Horizontalkraft von *Latsch*  $F_{LGK_y}$  und Felge  $(F_{FH})_{1..2}$  *inertial* überein, und  $\varphi_{G0z}$  beschreibt genauso den Winkel zwischen der Felgenquerrichtung  $y_F$  und  $(F_{FH})_{1..2}$ . Es gilt somit  $\varphi_{G0z} = -\arctan\left(\frac{(F_{FH})_1}{(F_{FH})_2}\right)$ , also  $\varphi_{G0z \text{ estim}} = \varphi_{G0z}$ . Außerdem muss nach Abschnitt C.4 für den *Umfangsschlupf*  $\lambda = \lambda_0$  gelten, also ist 4.79 in diesem Fall erfüllt. Leider gilt die umgekehrte Richtung, dass aus einer erfüllten Gleichung 4.79  $F_{LGK_x} = 0$  folgt, nicht. Abbildung 4.59 zeigt links, dass die Umformung

$$(\lambda + 1) \cos \alpha - \cos(\alpha + \varphi_{G0z \text{ estim}}) = 0$$

von Gleichung 4.79 zwei Lösungen besitzen kann, wobei im rechten Bild zu sehen ist, dass nur für die kleinere Lösung von  $\lambda$  der geschätzte Wert  $\varphi_{G0z \text{ estim}}$  und der reale Wert des *Gürteldrehwinkels*  $\varphi_{G0z}$  um die Hochachse übereinstimmen. Für die größere Lösung von  $\lambda$  muss damit der Schluss auf die verschwindende *Latsch*-Längskraft  $F_{LGK_x}$  falsch sein. Kann grundsätzlich davon ausgegangen werden, dass immer die kleinste von evt. mehreren Lösungen der Gleichung die gesuchte mit  $F_{LGK_x} = 0$  ist, ist es dennoch möglich, die korrekte *Zielgröße* auf Basis messbarer Werte zu definieren, und diese damit selbst zu bestimmen. In Abschnitt C.6 wird genau untersucht, welche Lösungen von 4.79 in Kombination mit  $F_{LGK_x} = 0$  auftreten können. Dabei zeigt sich, dass eben nur die kleinste Lösung für  $\lambda$  die gewünschten Eigenschaften besitzt, und die übrigen ignoriert werden können. So lässt sich nun auch die *Zielgröße* zur dritten *Parametergruppe*

definieren. Zu dieser gehört einmal das *Auswertungsfunktional*

$$Z_{E3}(v_B(\cdot), \alpha(\cdot), (F_{FH})_{1..2}(\cdot), (M_{FH})_3(\cdot)) = \lim_{v_B, \alpha \rightarrow 0} \frac{(M_{FH})_3}{\varphi_{G0z\ estim}} \Big|_t$$

mit  $\varphi_{G0z\ estim}$  aus 4.78

und dann natürlich mit der Hilfsbedingung

$$b_{quer1} \Leftrightarrow (\delta = \varepsilon_W = 0) \wedge (0 < v_B, |\lambda|, |\alpha| \text{ hinreichend klein}) \\ \wedge ((F_{FH})_3(0) = -m_G \cdot g) \wedge (\dot{f} \geq 0) \wedge ((F_{FH})_3(t) = (F_{FH})_{30} > 0)$$

die *Funktional-Bedingung*

$$B_3(\lambda(\cdot), \alpha(\cdot), (F_{FH})_{1..2}(\cdot), t) \Leftrightarrow (b_S \wedge b_{quer1} \wedge (\lambda(t) = \min\{\lambda_l \mid \lambda_l \text{ erfüllt 4.79}\}))$$

### Unabhängigkeit der Zielgröße

Nach der Motivation zur Wahl der *Zielgröße*  $Z_{\tau 3}$  soll nun deren Unabhängigkeit von später zu identifizierenden Parametern auch formal gezeigt werden. Unter  $B_3$  ist  $\lambda$  die kleinste Lösung von 4.79. Da außerdem die Situation für  $\alpha, v_B \rightarrow 0$  betrachtet wird, kann nach Abschnitt C.6 damit für die *Latsch-Längskraft*  $F_{LGKx} = \lambda_K = 0$  gefolgert werden. Dann stimmt die Richtung  $y_K$  des *Kontaktsystems* mit der Richtung der horizontalen *Latsch-Kraft* überein. *Stationär* sind die horizontale *inertiale Kraft*  $(F_{FH})_{1..2}$  der Felge und  $(F_{LGK})_{1..2}$  gleich. Also weist  $(F_{FH})_{1..2}$  in die Richtung von  $y_K$ , und es gilt nach Abschnitt C.4 mit C.12 und 4.78

$$\varphi_{G0z\ estim} = \varphi_{G0z} \tag{4.80}$$

Für den resultierenden *Sturzwinkel*  $\varphi_{G0x}$  des *Reifengürtels* soll die um  $\alpha = 0$  *linearisierte* Darstellung

$$\varphi_{G0x} = k_1 \alpha$$

benutzt werden. Das *Rollwiderstandsmoment*  $M_{LGKy}$  aus 4.22 kann direkt angegeben werden als

$$-k_{roll} F_{LGKz} \max(-1, \min(R_{dyn} \dot{\varphi}_{G0y}, 1))$$

Mit  $\lambda_K = 0$  und  $F_{LGKx} = 0$  folgt auch  $F_{xij} = \Delta x_{LGK} = 0$  (Abschn. C.4, Gl. 4.28) und es entstehen in Bezug auf die *Gürtelmitte linearisiert* um  $\alpha_K = 0$  ausschließlich die Momente

$$A_{K0}^T M_{LG0} = \begin{pmatrix} k_2 \alpha \\ -k_{roll} F_{LGKz} \max(-1, \min(R_{dyn} \dot{\varphi}_{G0y}, 1)) \\ M_{LGKz} \end{pmatrix} \tag{4.81}$$

#### 4 Entwicklung und Verifikation einer Sequentiellen Parameteridentifikation für ein physikalisches Reifenmodell

---

die vom *Latsch* in den *Reifengürtel* eingepägt werden (s. 4.34, 4.35,  $(A_{K0}^T (r_{G0} - r_{K0}))_1 = 0$ ) und hier im *Kontaktsystem* dargestellt sind. Nach Abschnitt C.4 gilt mit C.12 in der Darstellung von Abschnitt 4.1.7 für die Lage des *Kontaktsystems*

$$A_{K0} = R_{Gz} \quad (4.82)$$

*Stationär* gilt für die felgen- bzw. *latsch*-seitig um  $\alpha = 0$  *linearisierten* in den *Reifengürtel* eingepägten Momente  $M_{FG0} = -M_{LG0}$ , also mit 4.81, 4.42, 4.41,  $\varphi_{F0z} = 0$ , damit  $\varphi_{FG\ lin}(0) = -\varphi_{G0}(0)$  und für  $|\dot{\varphi}_{G0y}| < 1$

$$\begin{pmatrix} -c_{GF\ rot\ rad} \cdot k_1\alpha + d_{GF\ rot\ rad} \cdot \varphi_{G0z} \cdot \dot{\varphi}_{G0y} \\ c_{GF\ rot\ ax} \cdot R_{const\ 1,3} \\ -c_{GF\ rot\ rad} \cdot \varphi_{G0z} - d_{GF\ rot\ rad} \cdot k_1\alpha \cdot \dot{\varphi}_{G0y} \end{pmatrix} = -R_{Gx}^T \cdot \begin{pmatrix} k_2\alpha \\ -k_{roll} F_{LGKz} R_{dyn} \dot{\varphi}_{G0y} \\ M_{LGKz} \end{pmatrix}$$

Die dritte Komponente der Vektorgleichung aufgelöst nach  $M_{LGKz}$  ergibt

$$M_{LGKz} = \frac{c_{GF\ rot\ rad} \cdot \varphi_{G0z} + d_{GF\ rot\ rad} \cdot k_1\alpha \dot{\varphi}_{G0y} - (\sin k_1\alpha) k_{roll} F_{LGKz} R_{dyn} \dot{\varphi}_{G0y}}{\cos k_1\alpha} \quad (4.83)$$

und man erhält mit 4.80 und  $\lim_{v_B \rightarrow 0} \dot{\varphi}_{G0y} = 0$  für den *Grenzübergang*

$$\begin{aligned} & \lim_{v_B, \alpha \rightarrow 0} \frac{M_{LGKz}}{\varphi_{G0z\ estim}} \\ &= \lim_{v_B, \alpha \rightarrow 0} \frac{c_{GF\ rot\ rad} \cdot \varphi_{G0z\ estim} + d_{GF\ rot\ rad} \cdot k_1\alpha \dot{\varphi}_{G0y} - (\sin k_1\alpha) k_{roll} F_{LGKz} R_{dyn} \dot{\varphi}_{G0y}}{\varphi_{G0z\ estim} (\cos k_1\alpha)} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{c_{GF\ rot\ rad} \cdot \varphi_{G0z\ estim}}{\varphi_{G0z\ estim} (\cos k_1\alpha)} = c_{GF\ rot\ rad} \end{aligned} \quad (4.84)$$

Beim *Latsch-Rückstellmoment*  $M_{LGKz}$  handelt es sich jedoch noch um keine von außen messbare Schnittstellengröße, zu der noch weitere Umrechnungen erforderlich sind. Aus 4.35, 4.82, 4.10 und  $F_{LGKx} = 0$  folgt, dass sich die *inertiale* Kraft  $F_{FG0}$  zwischen *Reifengürtel* und Felge *stationär* als

$$F_{FG0} = R_{Gz} \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

schreiben lässt. Über 4.39 erhält man so für die Verschiebung zwischen *Reifengürtel* und Felge

$$\lim_{v_B \rightarrow 0} (r_{F0} - r_{G0}) = R_{Gz} R_{Gx} \begin{pmatrix} c_{GF\ rad}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & c_{GF\ quer}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & c_{GF\ rad}^{-1} \end{pmatrix} R_{Gx}^T \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$



Da die Matrizen  $R_{Gx}$  und  $R_{Gx}^T$  Drehungen um die  $x$ -Richtung beschreiben, die  $x$ -Koordinaten nicht beeinflussen, folgt

$$\lim_{v_B \rightarrow 0} (r_{F0} - r_{G0}) = R_{Gz} \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$R_{Gz} = A_{K0}$  bildet Vektoren mit einer  $x$ -Komponente von 0 in Vektoren ab, deren horizontale Richtung unabhängig ist von  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  und  $b_2$ . Damit stimmt die Horizontalrichtung von  $(r_{F0} - r_{G0})$  und  $F_{FG0}$  für  $v_B \rightarrow 0$  überein, und es ergibt sich über 4.9, 4.10 und 4.81

$$\lim_{v_B \rightarrow 0} (M_{FH})_3 = \lim_{v_B \rightarrow 0} (M_{F0})_3 = -(M_{FG0})_3 = (M_{LG0})_3 = M_{LGKz} \quad (4.85)$$

Insgesamt folgt mit 4.84

$$\lim_{v_B, \alpha \rightarrow 0} \frac{(M_{FH})_3}{\varphi_{G0z \text{ estim}}} = \lim_{v_B, \alpha \rightarrow 0} \frac{M_{LGKz}}{\varphi_{G0z \text{ estim}}} = c_{GF \text{ rot rad}} \quad (4.86)$$

und es resultiert der direkte Parameter-*Zielgrößen*-Zusammenhang

$$Z_{\tau 3} = c_{GF \text{ rot rad}} \quad (4.87)$$

der offensichtlich nicht von später zu identifizierenden Parametern abhängt und

$$Z_{\tau 3} |_{P_{const 0}^V, P_{10}^V, \dots, P_{20}^V} \leftrightarrow P_3^V$$

damit Eigenschaft 3.23 erfüllt.

### Eindeutigkeit der Zielgröße

Mit 4.87 folgt auch Eigenschaft 3.24, also die Eindeutigkeit von  $Z_{\tau 3} |_{P_{const 0}^V, P_{10}^V, \dots, P_{20}^V}$  in  $P_3^V$  unmittelbar.

#### 4.2.4 Parameter $f_{L \text{ mat}}$

An dieser Stelle ist es nun möglich, ohne weitere unbekannte Einflüsse zu unterscheiden, welcher Anteil der *Latsch*-Kräfte durch die *Schersteife*  $c_{scher}$  und welcher durch den Längenfaktor  $f_{L \text{ mat}}$  entsteht. Damit ließe sich dann auch der in Abschnitt 4.2.2 bestimmte Ersatzparameter  $c_{scher} f_{L \text{ mat}}^2$  der *Sequentiellen Parameteridentifikation* in die Modell-Parameter  $c_{scher}$  und  $f_{L \text{ mat}}$  auflösen. Hierzu helfen die in Abbildung 4.60 gezeigten zwei voneinander unabhängigen Formen der Anregung, die beide Seitenkräfte

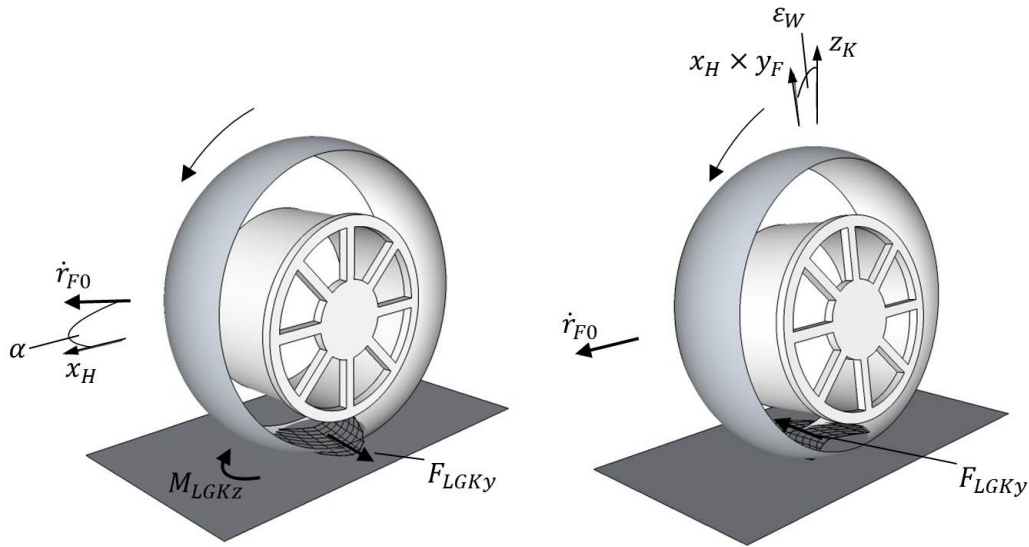


Abbildung 4.60: Seitenkraft durch Anregung aus *Schräglaufwinkel*  $\alpha$  bzw. *Radsturzwinkel*  $\varepsilon_W$

$F_{FH_y} \neq 0$  in der Systemantwort bewirken. Dabei handelt es sich um die Anregung durch einen *Schräglaufwinkel*  $\alpha$  bzw. einen *Radsturzwinkel*  $\varepsilon_W$ . Ein *Schräglaufwinkel*  $\alpha \neq 0$  bewirkt im *Latsch* unmittelbar die in Abbildung C.10 gezeigte *lineare* Auslenkung der *Reibkontakt-Elemente* entlang der *Latsch*-Längsrichtung, unter der auch ein *Rückstellmoment*  $M_{LGK_z}$  bzw.  $M_{FH_z}$  entsteht. In Folge der resultierenden *Latsch*-Seitenkraft  $F_{LGK_y}$  verbiegt sich der *Latsch* auch in Querrichtung (4.28), und es entsteht eine überlagerte Form der Auslenkung wie in Abbildung C.5 illustriert. Diese reduziert die Querkraft  $F_{LGK_y}$ , lässt das *Rückstellmoment*  $M_{LGK_z}$  jedoch weitgehend unbeeinflusst. Anders bewirkt der *Radsturzwinkel*  $\varepsilon_W \neq 0$  für hinreichend kleine Werte ausschließlich die über der *Latsch*-Länge wie in Abbildung 4.42 dargestellt bogenförmige Querauslenkung der *Reibkontakt-Elemente*. Dabei entsteht auch eine Seitenkraft  $F_{LGK_y}$  bzw.  $F_{FH_y}$ , gleichzeitig jedoch nur ein verschwindendes *Rückstellmoment*  $M_{LGK_z}$  bzw.  $M_{FH_z}$ . Beschränkt man die Anregung auf entweder  $\alpha \neq 0$  oder  $\varepsilon_W \neq 0$  wird die resultierende Kraft  $F_{FH_y}$  bzw. das resultierende *Rückstellmoment*  $M_{FH_z}$  immer auch durch die noch unbekannte *Latschtorsionsnachgiebigkeit*  $n_{LK_t}$  oder *Latschquernachgiebigkeit*  $n_{LK_y}$  (4.28) beeinflusst. Überlagert man allerdings beide Anregungen  $\alpha_0$  und  $\varepsilon_{W0}$  auf bestimmte Weise, können sich die dabei unabhängig voneinander entstehenden Seitenkraftanteile  $F_{LGK_y \alpha_0}$  und  $F_{LGK_y \varepsilon_{W0}}$  gegenseitig zu  $F_{LGK_y 0} = 0$  aufheben. Nach 4.28 besitzt dann der Wert von  $n_{LK_y}$  keinen Einfluss, und die Antwortgrößen sind unabhängig von  $n_{LK_y}$ . Als sinnvoll auswertbare *Zielgröße* verbleibt hier nur noch das *Rückstellmoment*  $M_{FH_z 0}$  bzw.  $M_{LGK_z 0}$ , das vorwiegend durch  $\alpha_0$  bestimmt ist. Um zu sehen, dass  $M_{LGK_z 0}$  auch nicht

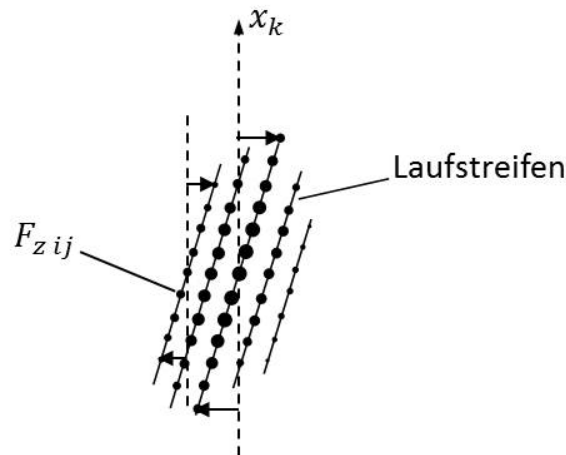


Abbildung 4.61: Sich aufhebende *Latsch*-Längsmomente unter *Latschtorsion* für zur  $y_K$ -Achse vernachlässigbar asymmetrische Vertikalkräfte

von  $n_{LKt}$  abhängt, muss die Situation tiefergehend analysiert werden.

In Abschnitt C.9 werden die verschiedenen Effekte beschrieben, die den sich einstellenden *Sturzwinkel*  $\varphi_{G0x}$  des *Reifengürtels* beeinflussen. Für die auch hier sehr kleinen Werte von *Latsch*-Längskraft  $F_{LGKx}$  und *Latsch*-Längsverschiebung  $\Delta x_{LGK}$  heben sich die durch  $n_{LKt}$  und das *Latsch*-Rückstellmoment  $M_{LGKz}$  bedingten Verlagerungen der Vertikalkräfte als Momente um die *Latsch*-Längsachse nahezu auf und können für kleine  $\alpha$  bzw.  $\varepsilon_W$  vernachlässigt werden (s. Abb. 4.61). Allerdings muss hierzu die Situation für die *Bahngeschwindigkeit*  $v_B \rightarrow 0$  betrachtet werden, um zu vermeiden, dass das *Rollwiderstandsmoment*  $M_{LGKy}$  doch eine asymmetrische *Bodendruckverteilung* bewirkt. Mit  $F_{LGKy0} = 0$  existiert auch keine *Latsch*-Biegung oder -Verschiebung, wodurch auch  $f_{Lmat}$  und mit den kleinen Anregungen letztlich keine später zu identifizierenden Parameter  $\varphi_{G0x0}$  beeinflussen. In der Darstellung der *haftreibungsbasierten* Auslenkungen im *Latsch* aus Abschnitt C.8, die die Ausprägungen der über der *Latsch*-Länge symmetrischen Auslenkungen durch  $s$  und die der asymmetrischen durch  $r$  beschreibt, hängt  $s_0$  wegen  $F_{LGKy0} = 0$  nur von  $\varphi_{G0x0}$  und damit nicht von später zu identifizierenden Parametern ab.  $r_0$  bestimmt mit den von  $f_{Lmat}$  abhängigen Laufstreifenlängen  $l_{mat i}$  den einzigen verbleibenden Einfluss auf  $F_{LGKy0}$ , der durch  $F_{LGKy0} = 0$  ausschließlich abhängig von  $s_0$  festgelegt ist und damit auch von keinem später zu identifizierenden Parameter abhängt.  $r_0$  und die Laufstreifenlängen  $l_{mat i}$  legen auch das resultierende *Latsch*-Rückstellmoment  $M_{LGKz0}$  fest, das damit aus den noch unbekanntem Parametern nur von  $f_{Lmat}$  abhängt. Für  $v_B \rightarrow 0$  lässt sich mit dem für kleine Anregungen  $\varepsilon_W$  gültigen *linearisierten* Zusammenhang C.37 und  $F_{LGKy0} = 0$  einfach sehen, dass der in  $s_0$  *linearisierte* Zusammenhang zwischen  $M_{LGKz0}$  und  $f_{Lmat}$  eindeutig ist. Man erhält

hieraus nämlich mit 4.20

$$M_{LGKz0} = \frac{1}{36} \frac{(c_{scher} f_{Lmat}^2)}{l_{RKE}} \frac{\left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_i^3 \right)^2}{\sum_{i=1}^{n_{LS}} l_i^2} s_0 \cdot f_{Lmat}^2$$

Da  $c_{scher} f_{Lmat}^2$  selbst schon ein festgelegter Parameter der *Sequentiellen Parameteridentifikation* ist (s. Abschn. 4.2.2), und  $s_0$  nur von  $\varphi_{G0x}$  und damit nicht von  $f_{Lmat}$  abhängt (s.o.), ist der Zusammenhang für  $v_B \rightarrow 0$  quadratisch und damit eindeutig. Durch die unter  $M_{LGKz0}$  resultierende Vertikal-Verdrehung  $\varphi_{G0z0}$  des *Reifengürtels* gegenüber der Felge kommt es für die eingestellten Werte  $\lambda = F_{FH_y} = 0$  dennoch zu kleinen Beträgen der *Latsch-Horizontalkraft*  $(F_{LGK0})_{1..2}$  (s. Abschn. C.4), die auch eine geringfügige gegenseitige Verschiebung von *Latsch*, *Reifengürtel* und Felge bewirkt. Hierdurch wird das von außen messbare Felgen-*Rückstellmoment*  $M_{FH_z0}$  in  $\varepsilon_{W0}$  aber nur *quadratisch* verfälscht, was das Differenzial in  $\varepsilon_{W0}$  letztlich nicht beeinflusst. Auf Basis dieser informellen Überlegungen kann bereits die *Zielgröße*  $Z_{\tau 4}$  zur Identifikation von

$$P_4^V = f_{Lmat}$$

festgelegt werden. Diese ergibt sich aus dem *Auswertungsfunktional*

$$Z_{E4}(v_B(\cdot), \varepsilon_W(\cdot), (M_{FH})_3(\cdot)) = - \lim_{v_B \rightarrow 0} \frac{\partial (M_{FH})_3}{\partial \varepsilon_W} \Big|_{t, \varepsilon_W=0}$$

und aufbauend auf der Hilfsbedingung

$$b_{quer2} \Leftrightarrow (\delta = \lambda = 0) \wedge (|\alpha|, |\varepsilon_W|, |v_B| \text{ hinreichend klein}) \\ \wedge ((F_{FH})_3(0) = -m_G \cdot g) \wedge (f \geq 0) \wedge ((F_{FH})_3(t) = (F_{FH})_{30} > 0)$$

aus der *Funktional-Bedingung*

$$B_4((F_{FH})_2(\cdot), t) \Leftrightarrow (b_S \wedge b_{quer2} \wedge ((F_{FH})_2(t) = 0))$$

### Unabhängigkeit der Zielgröße

Ein wesentliches Zwischenergebnis auf dem Weg, die Unabhängigkeit der *Zielgröße*  $Z_{\tau 4}$  nachzuweisen, ist, dass der sich unter  $\varepsilon_W$  und der zusätzlichen Voraussetzung  $F_{LGKx} = F_{LGKy} = 0$  einstellende *Sturzwinkel*  $\varphi_{G0x}$  des *Reifengürtels* unabhängig ist von  $f_{Lmat}$  und den später zu identifizierenden Parametern. Formal ausgedrückt gilt die Unabhängigkeit von  $f_{Lmat}$  und später zu identifizierenden Parametern für die Größe

$$\lim_{v_B \rightarrow 0} \frac{\partial \varphi_{G0x} |_{(F_{LGK})_{1..2}=0}}{\partial \varepsilon_W} \Big|_{\varepsilon_W=0}$$

wobei noch erwähnt werden sollte, dass sich die Unabhängigkeit von den *Reibbeiwerten* durch die beliebig kleinen Anregungen  $|\lambda|$ ,  $|\alpha|$ ,  $|\varepsilon_W|$  und die von  $n_{LKx}$  durch  $F_{LGKx} = 0$  ergibt. In Abschnitt C.11 wird diese Eigenschaft ausführlich hergeleitet. Die Voraussetzung  $F_{LGKx} = F_{LGKy} = 0$  ermöglicht darauf aufbauend, mit den Gleichungen aus den Abschnitten C.8 und C.10 die Änderung des *Latsch-* sowie des *Felgen-Rückstellmoments*  $M_{LGKz}$  bzw.  $M_{FH_z}$  darzustellen. Eine genaue Herleitung dazu findet sich in Abschnitt C.12. Da die Auswertung von  $Z_{\tau_4}$  nicht für  $F_{LGKx} = F_{LGKy} = 0$ , sondern lediglich unter  $\lambda = F_{FH_y} = 0$  erfolgt, muss auch der bisher ausgeblendete Einfluss von  $F_{LGKx}$  und  $F_{LGKy}$  auf  $M_{FH_z}$  noch berücksichtigt werden. Während in Abschnitt C.11 gezeigt wird, dass  $F_{LGKx}$  und  $F_{LGKy}$  für  $\lambda = F_{FH_y} = 0$  und kleine  $\varepsilon_W$  bzw.  $\alpha$  *quadratisch* bzw. *kubisch* in  $\varepsilon_W$  bzw.  $\alpha$  beschränkt sind, gelingt es damit in Abschnitt C.12, den Nachweis für die endgültige Darstellung der *Rückstellmoment-Änderung* herzuleiten:

$$\begin{aligned} & \lim_{v_B \rightarrow 0} \left. \frac{\partial M_{FH_z} |_{F_{FH_y}=0}}{\partial \varepsilon_W} \right|_{\varepsilon_W=0} \\ &= - \frac{(c_{scher} f_{L\ mat}^2)}{72 R_{dyn} l_{RKE}} \frac{\left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_i^3 \right)^2}{\sum_{i=1}^{n_{LS}} l_i^2} \cdot \left( \lim_{v_B \rightarrow 0} \left. \frac{\partial \varphi_{G0x} |_{(F_{LGK})_{1,2}=0}}{\partial \varepsilon_W} \right|_{\varepsilon_W=0} \right) \cdot f_{L\ mat}^2 \end{aligned} \quad (4.88)$$

Da sich neben  $\lim_{v_B \rightarrow 0} \left. \frac{\partial \varphi_{G0x} |_{(F_{LGK})_{1,2}=0}}{\partial \varepsilon_W} \right|_{\varepsilon_W=0}$  (s.o.) in Abschnitt C.12 auch  $l_i$  als unabhängig von  $f_{L\ mat}$  und später zu identifizierenden Parametern erweist, ist damit

$$Z_{\tau_4} = - \lim_{v_B \rightarrow 0} \left. \frac{\partial M_{FH_z} |_{F_{FH_y}=0}}{\partial \varepsilon_W} \right|_{\varepsilon_W=0}$$

als unabhängig von später zu identifizierenden Parametern nachgewiesen.

### Eindeutigkeit der Zielgröße

Aus den schon beim Beweis der Unabhängigkeit der *Zielgröße* aufgeführten Eigenschaften der Größen in 4.88 folgt einfach, dass sich bei bereits festgelegtem Wert für  $c_{scher} f_{L\ mat}^2$  in 4.88 abhängig von  $f_{L\ mat}$  ausschließlich der Faktor  $f_{L\ mat}^2$  am Ende des Terms ändert. Damit verändert sich  $Z_{\tau_4}$  *quadratisch* in  $f_{L\ mat}$ , ist also letztlich eindeutig in  $f_{L\ mat}$ . Zur Nebenbedingung  $(F_{FH})_2(t) = 0$  der *Zielgröße*  $Z_{\tau_4}$  bleibt abschließend noch zu bemerken, dass diese überflüssig wird, wenn das *Auswertungsfunktional*  $Z_{E_4}$  kombiniert aus  $\left. \frac{\partial (F_{FH})_2}{\partial (\varepsilon_W \ \alpha)} \right|_{\varepsilon_W=\alpha=0}$  und  $\left. \frac{\partial (M_{FH})_3}{\partial (\varepsilon_W \ \alpha)} \right|_{\varepsilon_W=\alpha=0}$  gebildet wird.

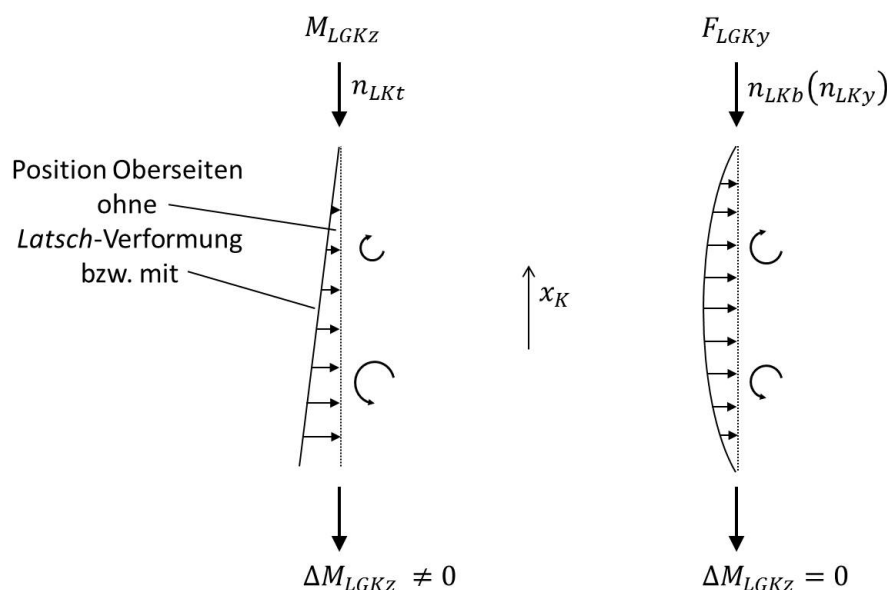


Abbildung 4.62: Resultierende *Latsch-Verformung*, *Seitenkraft* und *Rückstellmoment* durch  $n_{LKt}$  und  $n_{LKy}$

#### 4.2.5 Parameter $n_{LKt}$

Von den noch zu identifizierenden Parametern wirken sich *stationär* um den Grundzustand  $\lambda = \alpha = \varepsilon_W = 0$  nur noch die *Latschtorsions-* und die *Latschquernachgiebigkeit*  $n_{LKt}$  und  $n_{LKy}$  signifikant aus. Unter einer sich einstellenden Seitenkraft  $F_{LGKy}$  und dem resultierenden *Rückstellmoment*  $M_{LGKz}$  verändert sich mit 4.28 die Form des *Latschs* und damit wie in Abbildung C.5 gezeigt die Lage der Oberseiten der *Reibkontakt-Elemente*. Dabei sind auf die Parameter  $n_{LKt}$  und  $n_{LKy}$  zwei grundsätzlich verschiedene Arten der *Latsch-Verformung* zurückzuführen, die in Abbildung 4.62 einander gegenübergestellt werden. Bei einem *Latsch-Rückstellmoment*  $M_{LGKz} \neq 0$  stellt sich abhängig von  $n_{LKt}$  eine über der *Latsch-Länge* *lineare* zusätzliche Querauslenkung der *Reibkontakt-Elemente* ein, die selbst das resultierende *Latsch-Rückstellmoment*  $M_{LGKz}$  beeinflusst. Dieser Zusammenhang fällt letztlich trotzdem einfach aus, da der seitenkraftbedingt auftretende *Sturzwinkel*  $\varphi_{G0x}$  des *Reifengürtels* durch seine symmetrischen Veränderungen der *Latsch-Form* und das *Rückstellmoment*  $M_{LGKz}$  sich gegenseitig nicht beeinflussen. Anders verändert sich bei einer *Latsch-Seitenkraft*  $F_{LGKy} \neq 0$  durch  $n_{LKy}$  zwar die Seitenkraft  $F_{LGKy}$  selbst,  $n_{LKy}$  nimmt jedoch aufgrund der über die *Latsch-Länge* *symmetrischen* zusätzlichen Querauslenkung keinen Einfluss auf das resultierende *Latsch-Rückstellmoment*  $M_{LGKz}$ . Exakt gilt dies erst für  $v_B \rightarrow 0$ , dann aber bietet sich mit der Reaktion von  $M_{LGKz}$  auf die Änderung von  $\alpha$  um  $\lambda = \alpha = \varepsilon_W = 0$  offensichtlich die

Möglichkeit, die Wirkung von  $n_{LKt}$  ohne Einfluss noch unbekannter Parameter zu sehen. Letztlich ist von außen jedoch nur das Felgen-Rückstellmoment  $M_{FH_z}$  zugänglich, und es muss zur vollständigen Klärung der exakten Zusammenhänge zwischen den Schnittstellengrößen noch eine detaillierte Analyse erfolgen. An dieser Stelle kann jedoch bereits die zur Identifikation von

$$F_5^V = n_{LKt}$$

benutzte Zielgröße  $Z_{\tau 5}$  definiert werden. Das Auswertungsfunktional ist damit

$$Z_{E5}(v_B(\cdot), \alpha(\cdot), (M_{FH})_3(\cdot)) = \lim_{v_B \rightarrow 0} \left. \frac{\partial (M_{FH})_3}{\partial \alpha} \right|_{t, \alpha=0}$$

und mit der Hilfsbedingung

$$\begin{aligned} b_{quer3} \Leftrightarrow & (\delta = \lambda = \varepsilon_W = 0) \wedge (|\alpha|, |v_B| \text{ hinreichend klein}) \\ & \wedge ((F_{FH})_3(0) = -m_G \cdot g) \wedge (\dot{f} \geq 0) \wedge ((F_{FH})_3(t) = (F_{FH})_{30} > 0) \end{aligned}$$

ergibt sich hier die einfache *Funktional-Bedingung*

$$B_5 \Leftrightarrow (b_S \wedge b_{quer3})$$

### Unabhängigkeit der Zielgröße

Zur Bestimmung der Abhängigkeiten der Zielgröße  $Z_{\tau 5}$  von Parameterwerten ist wie schon erwähnt noch eine tiefere Analyse notwendig. Abschnitt C.13 befasst sich genau damit, wobei folgende Darstellung der Zielgröße hergeleitet wird

$$Z_{\tau 5} = \lim_{v_B \rightarrow 0} \left. \frac{\partial (M_{FH})_3}{\partial \alpha} \right|_{\lambda=\alpha=0} = - \frac{\frac{1}{12} c_{scher} \left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat i}^3 \right)}{l_{RKE} \left( 1 + \frac{1}{12} c_{scher} \left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat i}^3 \right) \left( n_{LKt} + \frac{1}{c_{GF \text{ rot rad}}} \right) \right)} \quad (4.89)$$

Da sich die Laufstreifenlängen  $l_{mat i}$  für  $\varepsilon_W = \alpha = 0$  als allein von der Form der Gürtelringschale,  $f_{Lmat}$  und  $(F_{FH})_{30}$  abhängig erweisen, hängt  $Z_{\tau 5}$  also nicht von später zu identifizierenden Parametern ab.

### Eindeutigkeit der Zielgröße

In 4.89 sind  $c_{scher}$ ,  $c_{GF \text{ rot rad}}$ ,  $l_{mat i}$  und  $l_{RKE}$  selbst unabhängig von  $n_{LKt}$ , womit  $Z_{\tau 5}$  offensichtlich *streng monoton* in  $n_{LKt}$  steigt, also eindeutig in  $n_{LKt}$  ist.

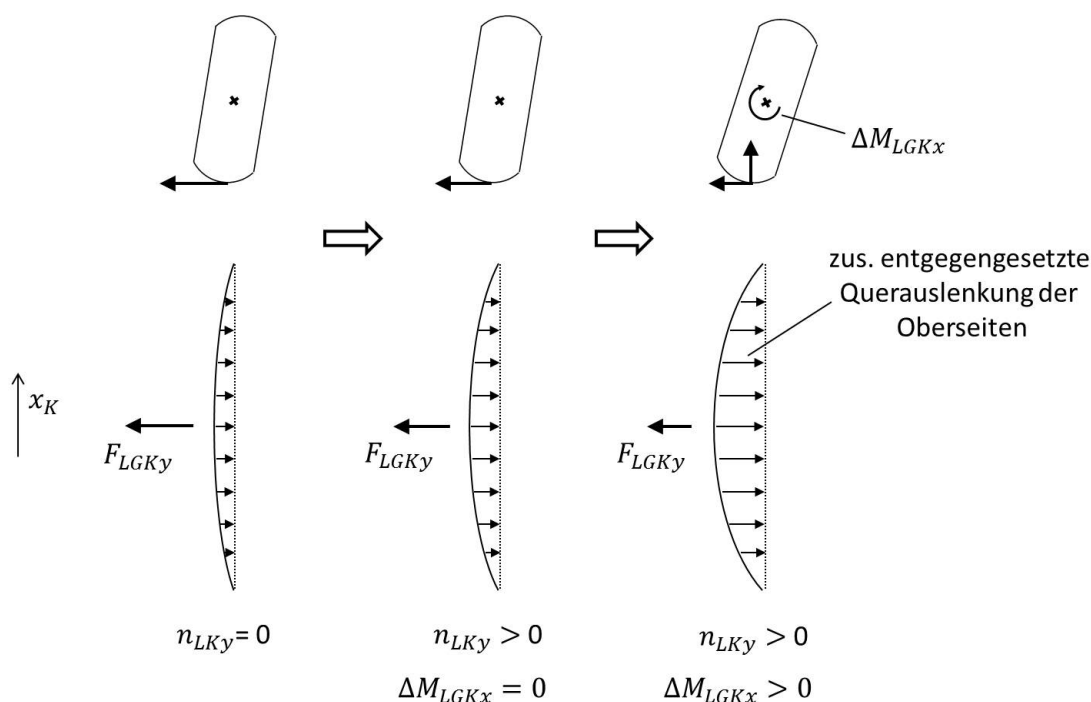


Abbildung 4.63: Effekte durch  $n_{LKy}$  auf die Latsch-Seitenkraft  $F_{LGKy}$

#### 4.2.6 Parameter $n_{LKy}$

Inzwischen kann auch der Parameterwert  $n_{LKt}$  der *Latschtorsionsnachgiebigkeit* als bekannt vorausgesetzt werden. Von den sich um den Grundzustand  $\lambda = \alpha = \varepsilon_W = 0$  signifikant auswirkenden Parametern verbleibt so nur noch die *Latschquernachgiebigkeit*  $n_{LKy}$ . Die Wirkung der *Latschquernachgiebigkeit* ist ausschließlich eine Reaktion auf die *Latsch-Seitenkraft*  $F_{LGKy}$ , von der abhängig  $n_{LKy}$  in 4.28 direkt eine Querverschiebung der *Laufstreifen* um  $\Delta y_{LGK}$  und über  $n_{LKb}$  auch eine Querbiegung verursacht. Von den Antwortgrößen des Reifenmodells beeinflusst  $n_{LKy}$  damit die resultierende *horizontierte* Seitenkraft  $F_{FH_y}$  am stärksten. Abbildung 4.63 veranschaulicht die Wirkmechanismen dieses Zusammenhangs schrittweise aufeinander aufbauend. Im linken Teil besteht durch die Einstellung von  $n_{LKy} = 0$  kein Einfluss des Parameters, und die Querbiegung der *Laufstreifen* ergibt sich bei vorhandener *Latsch-Seitenkraft*  $F_{LGKy} > 0$  ausschließlich durch den dadurch verursachten *Sturz des Reifengürtels*. Für  $n_{LKy} > 0$  zeigt der mittlere Teil die zusätzliche Querbiegung der *Laufstreifen* unter  $F_{LGKy} > 0$ . Diese bewirkt zusätzliche Querauslenkungen der *Reibkontakt-Elemente*, die zu überlagerten negativen Seitenkraftanteilen und damit zu einer Verkleinerung von  $F_{LGKy}$  führen. Eine Querverschiebung der Oberseiten der *Reibkontakt-Elemente* hat auch die Querverschiebung der Angriffspunkte der Vertikalkraft, also letztlich ein zusätzliches *Sturzmoment*



$\Delta M_{LGKx} > 0$  auf den *Reifengürtel* zur Folge, das im mittleren Teil noch ausgeblendet, aber dann im rechten Teil dargestellt ist. Konsequenz aus dem zusätzlichen *Sturzmoment* ist ein vergrößerter *Sturzwinkel* des *Reifengürtels*, der für eine noch stärkere Ausprägung der *Latsch-Biegung* sorgt und damit zusätzlich die resultierende *Latsch-Seitenkraft*  $F_{LGKy}$  reduziert. Insgesamt zeigt sich eine eindeutige Richtung, in die die Veränderung von  $n_{LKy}$  die *Latsch-Seitenkraft*  $F_{LGKy}$  und damit  $F_{FH_y}$  beeinflusst. Mit diesem Zusammenhang soll nun  $n_{LKy}$  bestimmt werden, wobei es zur Anregung der *Latsch-Seitenkraft*  $F_{LGKy}$  genügt, allein einen *Schräglaufwinkel*  $\alpha > 0$  einzustellen. Die vollständige Herleitung der verwendeten *Zielgröße* erfordert eine noch detailliertere Analyse, die beispielsweise auch eine Betrachtung für  $v_B \rightarrow 0$  voraussetzt, um die exakte Abhängigkeit von  $n_{LKy}$  beherrschbar zu halten. Zur Bestimmung von

$$P_6^V = n_{LKy}$$

wird der Zusammenhang zur *Zielgröße*  $Z_{\tau 6}$  benutzt. Deren *Auswertungsfunktional* ist

$$Z_{E6}(v_B(\cdot), \alpha(\cdot), (F_{FH})_2(\cdot)) = - \lim_{v_B \rightarrow 0} \left. \frac{\partial (F_{FH})_2}{\partial \alpha} \right|_{t, \alpha=0}$$

Mit der Hilfsbedingung  $b_{quer 3}$  aus Abschnitt 4.2.5 ergibt sich die zugehörige *Funktional-Bedingung*

$$B_6 \Leftrightarrow (b_S \wedge b_{quer 3})$$

Damit entspricht  $Z_{\tau 6}$  der normierten Größe *Tire Cornering Stiffness* aus dem ISO-Standard 8855 (s. [48]).

### Unabhängigkeit der Zielgröße

Auch wenn die Unabhängigkeit von  $Z_{\tau 6}$  von später zu identifizierenden Parametern naheliegend ist, empfiehlt sich ein Blick auf die Details, ohne den versteckte Einflüsse nie ganz ausgeschlossen werden können. In Abschnitt C.14 findet sich eine vollständige Herleitung von Ab- und Unabhängigkeiten, die letztlich nachweist, dass  $Z_{\tau 6}$  unabhängig von später zu identifizierenden Parametern ist.

### Eindeutigkeit der Zielgröße

Für den Nachweis der Eindeutigkeit von  $Z_{\tau 6}$  in  $n_{LKy}$  bei konstanten Werten für die bereits identifizierten Parameter finden sich die wesentlichen Zusammenhänge schon in Abschnitt C.10. Dort ist jedoch der Einfluss des sich einstellenden *Sturzwinkels*  $\varphi_{G0x}$  des *Reifengürtels* nur abstrakt und nicht abhängig von den elementaren Parametern angegeben. Abschnitt C.14 ergänzt diese Verbindung und gibt insgesamt einen vollständigen Nachweis dafür, dass  $Z_{\tau 6}$  *streng monoton* in  $n_{LKy}$  steigt.

### 4.2.7 Parametergruppe $\mu_{\text{gleit } 0\text{bar}}$ , $\mu_{\text{gleit } \Delta p}$

Von den noch zur Identifikation verbleibenden Parametern beeinflusst keiner mehr das Verhalten um den *stationären* Grundzustand mit  $\varepsilon_W = \lambda = \alpha = 0$ . Am einfachsten von den übrigen noch zu identifizierenden Parametern können die *Gleitreibbeiwerte*  $\mu_{\text{gleit } 0\text{bar}}$  und  $\mu_{\text{gleit } \Delta p}$  getrennt werden. Bewegt sich der Reifen nämlich ohne zu rotieren ( $\varphi_{F0y} = 0$ ) *stationär translatorisch*, befinden sich die *Reibkontakt-Elemente* jeweils kontinuierlich am selben Ort im *Latsch*. Dann unterliegen die *Reibkontakt-Elemente* mit Bodenkontakt auch dieser *translatorisch stationären* Horizontalbewegung relativ zur Fahrbahn, befinden sich also in *stationärer Gleitreibung*. Da kein *Reibkontakt-Element* mehr *haftet*, besitzen die *Haftreibbeiwerte* keinen Einfluss. Für die *translatorische* Bewegung muss noch über die Richtung entschieden werden. Wird der Reifen rotationsfrei in Längsrichtung bewegt, entsteht eine *Latsch-Längskraft*  $F_{LGKx} \neq 0$ , durch die in 4.28 der noch zu identifizierende Parameter  $n_{LKx}$  das Gesamtverhalten beeinflusst. Die dabei resultierende *Latsch-Längsverschiebung*  $\Delta x_{LGK}$  verändert über 4.24 die Längsverteilung des Bodendrucks im *Latsch*. Anders als für kombinierte *Gleit-* und *Haftreibung* unter einem *Umfangsschlupf*  $|\lambda| < 1$  bewirkt diese 'Gewichtsverlagerung' nach vorn bzw. hinten im *Latsch* keine gezielte Verkleiner- bzw. Vergrößerung der resultierenden Felgenkraft. Also kann  $n_{LKx}$  nicht in eine *Parametergruppe* mit  $\mu_{\text{gleit } 0\text{bar}}$  und  $\mu_{\text{gleit } \Delta p}$  integriert, muss also später identifiziert werden. Die betrachteten *Zielgrößen* dürfen so aber gar nicht von  $n_{LKx}$  abhängen. Dann kommt letztlich als *translatorische* Bewegung nur die Querrichtung, d.h.  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  in Frage. Abbildung 4.64 zeigt diesen *Stationärzustand*, der unter zwei verschiedenen Vertikallasten  $F_{FH z 1}$  und  $F_{FH z 2}$  mit den resultierenden Querkräften  $F_{FH y 1}$  und  $F_{FH y 2}$  die nötige Information liefert, um auf  $\mu_{\text{gleit } 0\text{bar}}$  und  $\mu_{\text{gleit } \Delta p}$  zurückschließen zu können.

Unter den zwei Vertikalbelastungen  $F_{FH z 1} \neq F_{FH z 2}$  stellen sich wie in Abbildung 4.65 dargestellt zwei unterschiedliche Verteilungen des Bodendrucks ein. Im *Latsch* liegt ausschließlich *Gleitreibung* in Querrichtung vor, weshalb sich die resultierende *Latsch-Querkräft*  $F_{LGKy}$  einfach als Summe der *Gleitreibpotenziale* der einzelnen *Reibkontakt-Elemente* ergibt. Da  $\Delta v$  aus 4.32 sehr klein gewählt wird, kann davon ausgegangen werden, dass die Quergeschwindigkeit  $\dot{r}_{F0y}$  des Reifens selbst größer ist, und das *Gleitreibpotenzial* der einzelnen *Reibkontakt-Elemente* damit nur vom lokalen Bodendruck und den *Gleitreibbeiwerten* beeinflusst wird. Abhängig von  $F_{LGKz}$  und  $F_{LGKy}$  ist bei einer Orientierung des *Reifengürtels* von  $\varphi_{G0z} = 0$  und einem eindeutigen damit verbundenen Wert  $\varphi_{G0x}$  die resultierende *Bodendruckverteilung* bekannt und damit auch, zu welchen Anteilen sich  $F_{LGKy}$  aus  $\mu_{\text{gleit } 0\text{bar}}$  und  $\mu_{\text{gleit } \Delta p}$  zusammensetzt. Kennt man diese Anteile noch für zwei verschiedene  $F_{LGKz}$  und  $F_{LGKy}$ , lässt sich über ein *lineares Gleichungssystem* auf die *Gleitreibbeiwerte* zurückschließen. Möglich ist dies natürlich nur, wenn sich das Verhältnis der Anteile an  $\mu_{\text{gleit } 0\text{bar}}$  und  $\mu_{\text{gleit } \Delta p}$  im *Latsch* für verschiedene

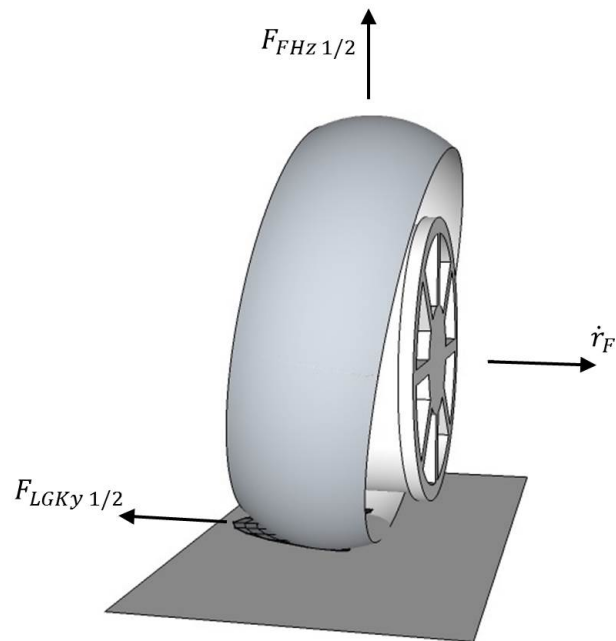


Abbildung 4.64: Nichtrotierend querbewegter Reifen unter Vertikallast

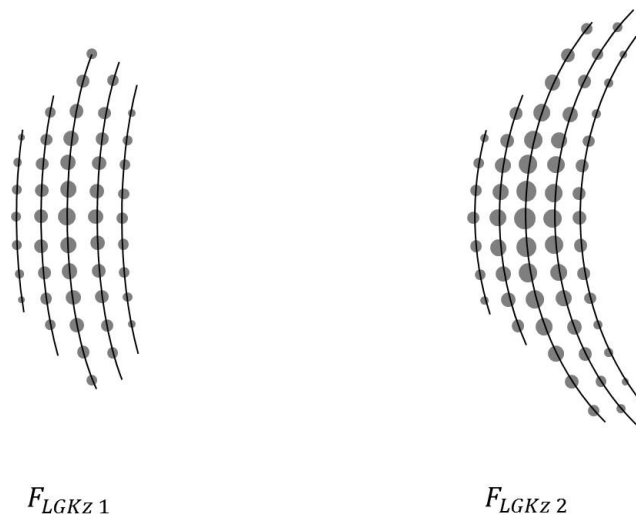


Abbildung 4.65: Bodendruck des nichtrotierend querbewegten Reifens für verschiedene Werte der Vertikallast

$F_{LGKz}$  bzw.  $F_{LGKy}$  ändert. Wie weiter unten analysiert entspricht dieses Verhältnis

$$V = \frac{\sum_{i,j} p_{ij} (\Delta p - p_{ij})}{\sum_{i,j} p_{ij}^2}$$

Die Zahl  $n_{LS}n_{RES}$  der *Reibkontakt-Elemente* bleibt konstant. Nach 4.23 gilt

$$F_{LGKz} = l_{RKE} b_{RKE} \sum_{i,j} p_{ij}$$

Für beliebig wachsendes  $F_{LGKz}$  folgt damit, dass auch  $\max\{p_{ij}\}$  beliebig wächst. Dann ist die Grenzwertbildung und -umformung

$$\begin{aligned} \lim_{F_{LGKz} \rightarrow \infty} V &= \lim_{F_{LGKz} \rightarrow \infty} \frac{\Delta p \sum_{i,j} p_{ij}}{\sum_{i,j} p_{ij}^2} - 1 \leq -1 + \Delta p \cdot \lim_{F_{LGKz} \rightarrow \infty} \frac{n_{LS} n_{RES} \max\{p_{ij}\}}{(\max\{p_{ij}\})^2} \\ &= -1 + \Delta p \cdot \lim_{F_{LGKz} \rightarrow \infty} \frac{n_{LS} n_{RES}}{\max\{p_{ij}\}} = -1 \end{aligned}$$

möglich, wobei ein negatives Verhältnis  $V$  durch den Interpolationsansatz von 4.32 bei vielen Werten  $p_{ij} > \Delta p$  auftritt. Bei einem endlichen Wert  $F_{LGKz}$  gilt

$$V = \frac{F_{LGKz} \Delta p}{\sum_{i,j} p_{ij}^2 \cdot l_{RKE} b_{RKE}} - 1 > -1$$

und es wird klar, dass  $V$  in  $F_{LGKz}$  nicht konstant ist, und als *analytische* Funktion in  $F_{LGKz}$  lassen sich für hinreichend nah beieinanderliegende  $F_{LGKz1}$  und  $F_{LGKz2}$  zwei verschiedene Werte des Verhältnisses garantieren.

Um eindeutig auf die Werte  $\mu_{gleit0bar}$  und  $\mu_{gleit\Delta p}$  schließen zu können, muss auch garantiert sein, dass sich ein eindeutiger *Sturz-* und *Lenkwinkel* des *Reifengürtels* einstellt. Dies gelingt wie später ausgeführt unter der Voraussetzung hinreichend kleiner Vertikallasten  $F_{FH_z}$ . Damit sind an dieser Stelle sämtliche Anforderungen an die *Zielgröße* bekannt. Die *Zielgröße* zur Bestimmung der *Parametergruppe*

$$P_7^V = \begin{pmatrix} \mu_{gleit0bar} \\ \mu_{gleit\Delta p} \end{pmatrix}$$

ist zunächst unabhängig vom Lösungsverfahren und basiert auf dem *Auswertungsfunktional*

$$Z_{E7}((F_{FH})_2(\cdot), t) = \begin{pmatrix} (F_{FH})_2(t) \\ (F_{FH})_2(t) \end{pmatrix}$$

sowie mit der Hilfsbedingung

$$\begin{aligned}
 b_{gleit} \Leftrightarrow & \quad b_S \wedge (v_B, F_{FH z 1} > 0) \wedge (\delta = \varepsilon_W = \lambda = 0) \wedge \left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right) \\
 & \wedge (F_{FH z 2}, |F_{FH z 2} - F_{FH z 1}| \text{ hinreichend klein}) \\
 & \wedge (F_{FH z 1} < F_{FH z 2})
 \end{aligned}$$

auf der *Funktional-Bedingung*

$$B_7((F_{FH})_3(\cdot), t) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_{gleit} \wedge ((F_{FH})_3(t) = F_{FH z 1}) \\ b_{gleit} \wedge ((F_{FH})_3(t) = F_{FH z 2}) \end{pmatrix}$$

### Unabhängigkeit der Zielgrößen

Unter  $B_7$  stellt sich wie in Abschnitt C.15 ausführlich analysiert ein Vertikalwinkel  $\varphi_{G0z}$  von 0 ein. Außerdem bewegen sich nach 4.36 sämtliche Komponenten *stationär inertial* in *negative y*-Richtung, und es gilt  $\varphi_{F0y} = \varphi_{G0y} = 0$  bzw.  $A_{K0} = I_3$ . Nach 4.17 ist  $\dot{x}_{REK j} = 0$ , die Lage zum *Kontaktpunkt* und Orientierung des *Reifengürtels* sowie die horizontalen *Latsch*-Kräfte und -Momente sind nach Abschnitt 4.1.7 *stationär* konstant ( $\dot{r}_{G0} - \dot{r}_{K0} = \dot{\varphi}_{G0x} = \dot{F}_{LGKx} = \dot{F}_{LGKy} = \dot{M}_{LGKz} = 0$ ), weshalb auch mit 4.28 und 4.29 die *Reibkontakt-Elemente* immer dieselbe Position im *Kontaktsystem* behalten ( $\dot{x}_{REK def j} = \dot{y}_{REK def \varphi x ij} = 0$ ). Dann folgen mit  $\dot{r}_{K0} = \dot{r}_{F0} = (0 \quad -v_B)^T$  und für  $\dot{\varphi}_{G0y} = 0$  *stationär* verschwindenden Werten  $\dot{a}_{x ij} = \dot{a}_{y ij} = 0$  in 4.30 konstante Werte  $u_{x ij} = 0$  und  $u_{y ij} = -v_B$ , also zusammen mit 4.33 konstante *Reibkräfte*  $F_{x ij} = 0$  und

$$F_{y ij} = F_{reib ij} = \mu(\Delta v, p_{ij}) \cdot F_{z ij} \quad (4.90)$$

Aus diesen direkt ergeben sich über 4.34 die *Latsch*-Längskraft  $F_{LGKx} = 0$  und die *Latsch*-Querkraft  $F_{LGKy}$  unabhängig von den *Haftreibbeiwerten*  $\mu_{haft 0bar}$  und  $\mu_{haft \Delta p}$ . Mit  $A_{K0} = I_3$  und 4.35 erweisen sich die horizontalen resultierenden Kraftkomponenten im *Kontaktsystem* auch als die *inertialen*  $F_{LG0x} = F_{LGKx}$  und  $F_{LG0y} = F_{LGKy}$ , die ja *stationär* mit den resultierenden Kraftkomponenten  $F_{FHx} = F_{LGKx}$  und  $F_{FHy} = F_{LGKy}$  übereinstimmen. Durch  $F_{LGKx} = 0$  hat nach 4.28 auch  $n_{LKx}$  insgesamt keinen Einfluss. Die *inertiale* Position  $r_{F0}$  beeinflusst das Restmodell ausschließlich über die *translatorisch elastische* Anbindung an den *Reifengürtel* in 4.2 und 4.6, deren Verhalten im *Stationärfall* vollständig durch 4.39 beschrieben wird. Darin wird für  $\dot{\varphi}_{0y} = 0$  der Vektor  $r_{F0} - r_{G0}$  durch eine reguläre Matrix auf  $F_{FG0}$  abgebildet, die bei identischen Werten  $F_{FG0}$ ,  $\varphi_{G0z}$ ,  $\varphi_{G0x}$ ,  $c_{GF rad}$ ,  $r_{G0}$  und verändertem Wert  $c_{GF quer}$  immer auf einen Wert  $r_{F0}$  zurückschließen lässt, der die *Gleichgewichtsbedingung* unter identischen Werten der übrigen Zustandsgrößen, also auch gleichbleibendem  $F_{FG0y}$  erfüllt. Da durch  $B_7$  zwar  $\dot{r}_{F0}$  festgelegt wird, aber keine Einschränkungen an die *Stationärgröße*  $r_{F0} - r_{G0}$

## 4 Entwicklung und Verifikation einer Sequentiellen Parameteridentifikation für ein physikalisches Reifenmodell

---

existieren, nimmt  $r_{F0}$  abhängig von  $c_{GF\text{ quer}}$  die entsprechenden Werte an, und lässt  $F_{FG0y}$  unbeeinflusst von  $c_{GF\text{ quer}}$ . Damit erweist sich  $Z_{\tau 7}$  insgesamt als unabhängig von allen später zu identifizierenden Parametern.

### Eindeutigkeit der Zielgrößen

Aus  $\varphi_{G0z} = 0$  und  $F_{LGKx} = 0$  (s.o.) ergibt sich mit 4.28 keine Längsverschiebung des *Latschs* ( $\Delta x_{LGK} = 0$ ) und mit  $M_{LGKy} = 0$  (s. Abschn. C.15) in 4.24  $b = 0$ , also eine symmetrische Bodendruckverteilung

$$p_i(j_{n_{RES-l+1}}) = p_{ij_l}$$

(basierend auf den Werten  $j_l$ , die den zeitabhängigen Index  $j$  des  $l$ . *Reibkontakt-Elements* ab dem vorderen Ende des *Latschs* aus bezeichnen). Diese bewirkt im *Latsch* nach 4.90 und 4.25 eine ebenso symmetrische Querkraftverteilung

$$F_{y i(j_{n_{RES-l+1}})} = F_{y ij_l}$$

Da mit  $\Delta x_{LGK} = 0$  die *Reibkontakt-Elemente* auch symmetrisch zur *Latsch-Mitte* liegen ( $x_{REK\text{ def } j_{n_{RES-l+1}}} = -x_{REK\text{ def } j_l}$ ), folgt mit 4.34 und  $F_{x ij} = 0$  (s.o.) für das *Latsch-Rückstellmoment*

$$M_{LGKz} = 0$$

Die *Gleitreibbeiwerte*  $\mu_{gleit\ 0bar}$  und  $\mu_{gleit\ \Delta p}$  treten in den Modellgleichungen ausschließlich in 4.30 auf, wodurch zusammen mit 4.33 von den in weiteren Gleichungen benutzten Größen nur  $F_{x ij}$  und  $F_{y ij}$  festgelegt werden.  $F_{x ij}$  und  $F_{y ij}$  bestimmen in den Modellgleichungen ausschließlich in 4.34 die Größen  $F_{LGKx}$ ,  $F_{LGKy}$  und  $M_{LGKz}$ . Liegt also die *horizontalisierte* Seitenkraft  $F_{FH_y 0}$  fest, besitzen wegen  $F_{LGKx} = M_{LGKz} = 0$  und

$$F_{LGKy} = F_{FH_y} \tag{4.91}$$

(s.o.)  $\mu_{gleit\ 0bar}$  und  $\mu_{gleit\ \Delta p}$  folglich keinen Einfluss auf das Restsystem und damit auch nicht auf den *Sturzwinkel*  $\varphi_{G0x}$  des *Reifengürtels*. Zusammen mit dem Ergebnis aus Abschnitt C.15 stellt sich damit für festgelegtes  $F_{FH_y 0}$  ein *eindeutiger*, von  $\mu_{gleit\ 0bar}$  und  $\mu_{gleit\ \Delta p}$  *unabhängiger* *Sturzwinkel*  $\varphi_{G0x 0}$  ein.

Für konstante Werte  $\mu_{gleit 0} = (\mu_{gleit\ 0bar 0} \ \mu_{gleit\ \Delta p 0})$  lässt sich auf Basis der *Zielgrößen* die Funktion

$$Z_{\tau 7 \mu_{gleit 0}} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit } Z_{\tau 7 \mu_{gleit 0}}(s) = Z_{\tau 7}(s \cdot \mu_{gleit\ 0bar 0}, s \cdot \mu_{gleit\ \Delta p 0})$$

definieren. Aus 4.30 und 4.33 sieht man, dass für  $s = 0$  keine horizontalen Kräfte mehr entstehen, also  $Z_{\tau 7 \mu_{gleit 0}}(0) = 0$  gilt. Außerdem befindet sich für konstantes  $F_{FH_z} > 0$

unabhängig von  $\varphi_{G0x}$  immer eine Mindestanzahl von *Reibkontakt-Elementen* in Bodenkontakt, weshalb die Komponenten von  $Z_{\tau 7 \mu_{gleit 0}}$  für  $\mu_{gleit 0 bar 0}, \mu_{gleit \Delta p 0} > 0$  und beliebig große Werte von  $s$  auch selbst beliebig große Werte annehmen. Also existieren durch die *Stetigkeit* von  $Z_{\tau 7 \mu_{gleit 0}}$  in  $s$  die Werte  $s_{11}, \dots, s_{22}$  mit

$$\begin{aligned} \left( Z_{\tau 7 \mu_{gleit 1}}(s_{11}) \right)_1 &= F_{FHy 1} & \left( Z_{\tau 7 \mu_{gleit 1}}(s_{12}) \right)_2 &= F_{FHy 2} \\ \left( Z_{\tau 7 \mu_{gleit 2}}(s_{21}) \right)_1 &= F_{FHy 1} & \left( Z_{\tau 7 \mu_{gleit 2}}(s_{22}) \right)_2 &= F_{FHy 2} \end{aligned} \quad (4.92)$$

und  $Z_{\tau 7} = (F_{FHy 1}, F_{FHy 2})^T$  sowie *linear unabhängigen* Vektoren

$$\mu_{gleit 1} = (\mu_{gleit 0 bar 1} \ \mu_{gleit \Delta p 1}) \text{ und } \mu_{gleit 2} = (\mu_{gleit 0 bar 2} \ \mu_{gleit \Delta p 2})$$

Wie oben beschrieben liegt allein durch den jeweils gleichen Wert von  $F_{FHy}$  und  $F_{FHx}$  unabhängig von der konkreten Belegung der *Gleitreibbeiwerte* in der Gleichgewichtssituation von  $(Z_{\tau 7})_1, (Z_{\tau 7 \mu_{gleit 1}}(s_{11}))_1$  und  $(Z_{\tau 7 \mu_{gleit 2}}(s_{21}))_1$  der gleiche *Sturzwinkel*  $\varphi_{G0x 1}$  sowie in der von  $(Z_{\tau 7})_2, (Z_{\tau 7 \mu_{gleit 1}}(s_{12}))_2$  und  $(Z_{\tau 7 \mu_{gleit 2}}(s_{22}))_2$  der gleiche Wert  $\varphi_{G0x 2}$  vor. Da auch  $F_{FHx}$  und damit  $f_G$  (s. Abschn. 4.2.1) sowie die übrigen Zustandsgrößen des *Reifengürtels* jeweils übereinstimmen, erhält man auch jeweils gleiche Werte für die Bodendruckverteilung  $p_{ij 1}$  bzw.  $p_{ij 2}$ . Mit 4.90, 4.25, 4.34 und 4.91 folgt für den Zusammenhang von Bodendruckverteilung und Seitenkraft

$$F_{FHy 1/2} = l_{RKE} b_{RKE} \sum_{i,j} \cdot \mu(\Delta v, p_{ij 1/2}) \cdot p_{ij 1/2}$$

und ausgedrückt in den *Gleitreibbeiwerten* mit 4.32

$$F_{FHy 1/2} = \frac{l_{RKE} b_{RKE}}{\Delta p} \sum_{i,j} \left( (\Delta p - p_{ij 1/2}) \mu_{gleit 0 bar} + p_{ij 1/2} \mu_{gleit \Delta p} \right) \cdot p_{ij 1/2} \quad (4.93)$$

$$F_{FHy 1/2} = \frac{l_{RKE} b_{RKE}}{\Delta p} \sum_{i,j} s_{11/2} \left( (\Delta p - p_{ij 1/2}) \mu_{gleit 0 bar 1} + p_{ij 1/2} \mu_{gleit \Delta p 1} \right) \cdot p_{ij 1/2} \quad (4.94)$$

$$F_{FHy 1/2} = \frac{l_{RKE} b_{RKE}}{\Delta p} \sum_{i,j} s_{21/2} \left( (\Delta p - p_{ij 1/2}) \mu_{gleit 0 bar 2} + p_{ij 1/2} \mu_{gleit \Delta p 2} \right) \cdot p_{ij 1/2} \quad (4.95)$$

Gleichsetzen von 4.94 und 4.95 mit 4.93 ergibt in Vektorschreibweise

$$\begin{pmatrix} F_{FHy 1} \\ F_{FHy 2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mu_{gleit 0 bar} \\ \mu_{gleit \Delta p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 \\ 0 & s_{12} \end{pmatrix} A \mu_{gleit 1}^T = \begin{pmatrix} s_{21} & 0 \\ 0 & s_{22} \end{pmatrix} A \mu_{gleit 2}^T$$

$$\text{mit } A = \frac{l_{RKE} b_{RKE}}{\Delta p} \begin{pmatrix} \sum_{i,j} p_{ij 1} (\Delta p - p_{ij 1}) & \sum_{i,j} p_{ij 1}^2 \\ \sum_{i,j} p_{ij 2} (\Delta p - p_{ij 2}) & \sum_{i,j} p_{ij 2}^2 \end{pmatrix} \quad (4.96)$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \frac{F_{FHy1}}{s_{11}} & \frac{F_{FHy1}}{s_{21}} \\ \frac{F_{FHy2}}{s_{12}} & \frac{F_{FHy2}}{s_{22}} \end{pmatrix} = A \cdot [\mu_{gleit1}^T \quad \mu_{gleit2}^T]$$

$\mu_{gleit1}$  und  $\mu_{gleit2}$  sind nach Voraussetzung *linear unabhängig*. Also gilt

$$A = \begin{pmatrix} \frac{F_{FHy1}}{s_{11}} & \frac{F_{FHy1}}{s_{21}} \\ \frac{F_{FHy2}}{s_{12}} & \frac{F_{FHy2}}{s_{22}} \end{pmatrix} \cdot [\mu_{gleit1}^T \quad \mu_{gleit2}^T]^{-1}$$

Wie oben beschrieben kann man unter  $B_7$  davon ausgehen, dass

$$\frac{\sum_{i,j} p_{ij1} (\Delta p - p_{ij1})}{\sum_{i,j} p_{ij1}^2} \neq \frac{\sum_{i,j} p_{ij2} (\Delta p - p_{ij2})}{\sum_{i,j} p_{ij2}^2}$$

Dann ist  $A$  nach 4.96 invertierbar, und es folgt mit 4.96

$$\begin{pmatrix} \mu_{gleit0bar} \\ \mu_{gleit\Delta p} \end{pmatrix} = [\mu_{gleit1}^T \quad \mu_{gleit2}^T] \cdot \begin{pmatrix} \frac{F_{FHy1}}{s_{11}} & \frac{F_{FHy1}}{s_{21}} \\ \frac{F_{FHy2}}{s_{12}} & \frac{F_{FHy2}}{s_{22}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_{FHy1} \\ F_{FHy2} \end{pmatrix} \quad (4.97)$$

Die Funktionen  $Z_{\tau 7} \mu_{gleit1/2}$  sind *stetig*. Daher lassen sich bspw. mit einem *Intervallhalbierungsverfahren* die Werte  $s_{11}, \dots, s_{22}$  einfach bestimmen, auch wenn die Funktionen evt. nicht *monoton* wachsen.  $\mu_{gleit1}$  und  $\mu_{gleit2}$  werden festgelegt, also sind sämtliche Größen der rechten Seite von 4.97 bekannt, und 4.97 beschreibt die *Inversion* von  $Z_{\tau 7}$ . Damit folgt auch die Eindeutigkeit (3.24) von

$$Z_{\tau 7} |_{P_{const 0}^V, P_{10}^V, \dots, P_{60}^V} (P_7^V)$$

Da 4.97 das Finden der Lösung bereits garantiert, ist ein zusätzlicher Nachweis der Eigenschaften 3.27 und 3.32 nicht mehr erforderlich.

#### 4.2.8 Parametergruppe $n_{LKx}$ , $\mu_{haft0bar}$ , $\mu_{haft\Delta p}$

Die Parameter zur *Latschlängsnachgiebigkeit*  $n_{LKx}$  und den *Haftreibbeiwerten*  $\mu_{haft0bar}$  und  $\mu_{haft\Delta p}$  machen sich erst bei größeren Beträgen des *Umfangsschlupfs*  $\lambda$  oder *Schräglaufwinkels*  $\alpha$  bemerkbar. Unter einem *Umfangsschlupf*-freien ( $\lambda = 0$ ) *Schräglaufwinkel*-Betrag  $0 < |\alpha| < \frac{\pi}{2}$  besitzt auch die *Latschlängsnachgiebigkeit*  $n_{LKx}$  immer einen Einfluss, da sich ein Verdrehwinkel des *Reifengürtels* um die Hochachse einstellt, und damit



aus der *Latsch*-Perspektive ein *Umfangsschlupf*  $\lambda_K \neq 0$  vorliegt, der über eine resultierende *Latsch*-Längskraft  $F_{LGKx} \neq 0$  abhängig von  $n_{LKx}$  eine *Latsch*-Längsverschiebung  $\Delta x_{LGK} \neq 0$  bewirkt (s. Abschn. 4.2.3, C.6). Auch unter einem größeren *Sturzwinkel*-Betrag  $|\varepsilon_W| \neq 0$  hätte sich dieser Effekt eingestellt, da die vordere und hintere *Latsch*-Hälfte durch den Übergang der *Reibkontakt-Elemente* von *Haft*- in *Gleitreibung* unterschiedliche Querkräfte erzeugen, und sich so auch hier eine Verdrehung des *Reifengürtels* um die Hochachse ergibt. Dann bieten Situationen mit  $\alpha \neq 0$  bzw.  $\varepsilon_W \neq 0$  keinen Vorteil, und man kann sich zur Parameterbestimmung auf die einfacher zu analysierenden Betriebspunkte für  $\lambda \neq 0$  und  $\alpha = \varepsilon_W = 0$  beschränken.

Relevant werden die *Haftreibbeiwerte* v.A. an den Stellen im *Latsch*, an denen das *Haftreibungspotenzial* erreicht wird, und die *Reibkontakt-Elemente* in *Gleitreibung* übergehen (s. Abb. 4.67). Da in Betriebspunkten mit robustem Systemverhalten mehrere *Laufstreifen* existieren, in denen der Übergang von *Haft*- in *Gleitreibung stationär* an Stellen mit unterschiedlichem Bodendruck liegt (s. Abb. 4.23, 4.67), besitzen nach Gleichung 4.32 immer beide *Haftreibbeiwerte* einen Einfluss. Ebenso gilt dies für die unter der resultierenden *Latsch*-Längskraft  $F_{LGKx} \neq 0$  wirksame *Latschlängsnachgiebigkeit*  $n_{LKx}$ . Die vollständig *nichtlinearen* Zusammenhänge machen dann letztlich eine parallele Bestimmung der drei Parameter gemäß Algorithmus 3.35 nötig, wobei für das zweidimensionale Teilproblem zur Berechnung der *Haftreibbeiwerte* u.A. aus Effizienzgründen ein alternatives Lösungsprinzip eingesetzt wird, wie es im letzten Punkt der Zusammenfassung von Abschnitt 3.3 beschrieben ist.

Doch bevor näher auf das Lösungsverfahren inklusive Konvergenzverhalten eingegangen werden kann, muss die grundlegende Frage nach einer gültigen Menge  $P_8^*$  der hier zu identifizierenden Parameter behandelt werden, die nicht sinnvoll durch ein einfaches *Intervallprodukt* angegeben werden kann. Grundsätzlich müssen, um *Konvergenzeigenschaften* überprüfen zu können und die formalen Voraussetzungen für die Identifikation hier zu schaffen, Maximalwerte  $\mu_{haft0bar\ max} > \mu_{haft\ \Delta p\ max}$  für die Parameter  $\mu_{haft0bar}$  und  $\mu_{haft\ \Delta p}$  definiert werden. Im Fall von  $n_{LKx}$  macht die Konsistenz der Modellgleichungen selbst Schranken notwendig. Denn sowohl ein zu großer als auch ein zu kleiner Wert von  $n_{LKx}$  kann ab bestimmten Beträgen von  $F_{LGKz}$  und damit  $l_{mat\ i}$  sowie  $F_{Lx\ PT1}$  über Gleichung 4.28 in 4.24 einen Wert des Teilterms  $a + bx_{REK\ j} < 0$  bewirken, so dass negative Druckwerte  $p_{ij}$  auftreten. Man könnte diesen Effekt auch über eine Modellvariante verhindern, die  $|bx_{REK\ j}|$  auf  $a$  oder  $\Delta x_{LGK}$  so beschränkt, dass  $\left| \frac{b \cdot l_{mat\ i}}{2} \right| \leq a$  für den momentan längsten *Laufstreifen*  $i$  gilt. Dieser Eingriff ließe sich jedoch mechanisch nicht begründen und würde ein generelles Modellierungsproblem willkürlich an einem Ausschnitt der Zustände kompensieren. Daher soll hier die Beschränkung von  $n_{LKx}$  gewählt werden, die ein mechanisch konsistentes Modell garantieren kann. Im Folgenden wird eine Möglichkeit beschrieben, diese Schranken zu bestimmen, wobei nur der zur Identifikation der Parameter hier relevante Fall für verschwindenden *Felgensturz*  $\varepsilon_W$

#### 4 Entwicklung und Verifikation einer Sequentiellen Parameteridentifikation für ein physikalisches Reifenmodell

---

betrachtet wird. Zur Abdeckung sämtlicher Fälle müsste auch ein maximaler *Gürtelsturzwinkel*  $\varepsilon_{GK\ max}$  betrachtet werden, der nun auf 0 festgelegt wird.  $F_{LGKz}$  muss von 0 bis zu einer festzulegenden Grenze  $F_{LGKz\ max}$  für die maximal zu berücksichtigende *Latsch-Vertikalkraft* variiert werden. Damit wird die Analyse auch insgesamt zu einer 1-dimensionalen Berechnung analog zur Simulation des Modells selbst, und lässt sich so mit akzeptablem Aufwand realisieren. Der Kraftbetrag  $|F_{LGKx}|$  und *stationär* damit auch  $|F_{Lx\ PT1}|$  kann unter Umgehung der unbekanntenen *Bodendruckverteilung* sinnvoll mit  $F_{LGKx\ ||\ os} = \mu_{haft\ 0bar\ max} \cdot F_{LGKz\ max}$  abgeschätzt werden. Als Rollgeschwindigkeit nimmt man einen Wert an, so dass die *Sättigung* für den *Rollwiderstand* in 4.22 erreicht wird. Außerdem kann unter  $v_B > 0$  und den hier betrachteten Werten für den  $\lambda$  grundsätzlich von  $\dot{\varphi}_{G0y} > 0$  ausgegangen werden. Nach 4.24, 4.28 und 4.22 ändert sich  $a + bx_{REK\ j}$  u.A. durch *lineare* Zusammenhänge *monoton* in  $x_{REK\ j}$ ,  $F_{Lx\ PT1}$  und  $\dot{\varphi}_{G0y}$ , was die ausschließliche Berücksichtigung ihrer Extremwerte zur Abschätzung erlaubt. Da der verbleibende Einfluss von den Zustandsgrößen allein durch  $F_{LGKz}$  festgelegt ist, erhält man über die Bedingung

$$a \pm b \frac{l}{2} \frac{\text{mat} \left[ \frac{n_{LS}}{2} \right]}{2} > 0 \quad (4.98)$$

mit 4.24, 4.28 und 4.22 unter Ausnutzung von  $p_{ans\ ij}(x_{REK\ j}) = p_{ans\ ij}(-x_{REK\ j})$  in *kontinuierlicher* Interpretation bei Auflösung nach  $n_{LKx}$  mehrere Ungleichungen, die sich insgesamt wieder zu

$$\begin{aligned} n_{LKx\ min} &> \max_{\substack{0 < F_{LGKz} \\ \leq F_{LGKz\ max}}} \left( - \frac{2 \sum_{i,j} x_{REK\ j}^2 p_{ans\ ij}}{l \frac{\text{mat} \left[ \frac{n_{LS}}{2} \right]}{2} F_{LGKx\ ||\ os} \sum_{i,j} p_{ans\ ij}} + \frac{k_{roll}}{F_{LGKx\ ||\ os}} + r \right) \Bigg|_{F_{LGKz}} \\ n_{LKx\ max} &< \max_{\substack{0 < F_{LGKz} \\ \leq F_{LGKz\ max}}} \left( + \frac{2 \sum_{i,j} x_{REK\ j}^2 p_{ans\ ij}}{l \frac{\text{mat} \left[ \frac{n_{LS}}{2} \right]}{2} F_{LGKx\ ||\ os} \sum_{i,j} p_{ans\ ij}} - \frac{k_{roll}}{F_{LGKx\ ||\ os}} + r \right) \Bigg|_{F_{LGKz}} \\ r &= \frac{R_{dyn} - \|r_{G0} - r_{K0}\|}{F_{LGKz}} \end{aligned} \quad (4.99)$$

zusammenfassen lassen. Diese Schranken legen allerdings nur die zusätzlichen Voraussetzungen für  $n_{LKx}$  fest. Generell und unabhängig von  $n_{LKx}$  muss auch die Ungleichung

$$\min_{\substack{0 < F_{LGKz} \\ \leq F_{LGKz\ max}}} \left( \frac{1}{\sum_{i,j} p_{ans\ ij}} - \frac{k_{roll}}{\sum_{i,j} x_{REK\ j}^2 p_{ans\ ij}} \cdot \frac{l}{2} \frac{\text{mat} \left[ \frac{n_{LS}}{2} \right]}{2} \right) \Bigg|_{F_{LGKz}} > 0$$

erfüllt sein, damit insgesamt grundsätzlich

$$a + bx_{REK_j} > 0 \quad \text{für } |x_{REK_j}| \leq l_{mat} \left[ \frac{n_{LS}}{2} \right] \Big|_{F_{LGKz_{max}}} \quad (4.100)$$

garantiert werden kann. Denn v.A. für kleine Werte  $|F_{LGKx}|$  kann  $n_{LKx}$  die Anforderungen sonst generell nicht einhalten.

Die Beschränkung der *Haftreibbeiwerte* allein durch  $\mu_{haft0bar_{max}}$  und  $\mu_{haft\Delta p_{max}}$  reicht nicht aus. Einmal ist das *Haftreibungspotenzial* physikalisch bedingt grundsätzlich größer als die *Gleitreibung* unter einer entsprechenden lokalen Vertikalkraft, so dass Werte kleiner als die der bereits bekannten Parameter  $\mu_{gleit0bar}$  bzw.  $\mu_{gleit\Delta p}$  nicht zulässig sind. Weitere physikalische Eigenschaften des *Reibverhaltens* sind die *streng monotone Steigung* von *Gleitreibungskraft* bzw. *Haftreibpotenzial* und die *Abnahme* der *Gleit-* bzw. *Haftreibkoeffizienten* über dem lokalen Bodendruck. Für gegebenes  $n_{LKx0}$  kann die Differenz der Werte  $\mu_{haft0bar0}$  und  $\mu_{haft\Delta p0}$  so groß sein, dass das lokale *Haftreibungspotenzial*  $F_{x_{haftpot_i}}$  nach C.83 nicht für alle vorkommenden Werte  $p$  des lokalen Bodendrucks *streng monoton* in  $p$  steigt. Um dies für den definierten Parameterraum ohne zu große Einschränkungen garantieren zu können, muss der maximal auftretende Bodendruck  $p_{max}$  bekannt sein. Dieser kann analog zur Bestimmung von  $n_{LKx_{min}}$  und  $n_{LKx_{max}}$  sinnvoll abgeschätzt werden, da mit der Abschätzung von  $F_{Lx_{PT1}}$  alle von den noch unbekanntem *Haftreibbeiwerten* abhängigen Größen festgelegt sind, und die Berechnung unter den *Anregungsgrößen* wieder nur von  $F_{FH_z}$  bzw.  $F_{LGK_z}$  abhängt. Mitunter durch *lineare* Zusammenhänge verändert sich nach 4.24, 4.28 und 4.22  $p_{ij}$  *monoton* in den Größen  $F_{Lx_{PT1}}$ ,  $n_{LKx}$  und  $\dot{\varphi}_{G0y}$ , was eine Abschätzung durch die Extremwerte dieser Variablen ermöglicht

$$p_{max} > \max_{\substack{0 \leq F_{LGK_z} \leq F_{LGK_z_{max}} \\ 1 \leq i \leq n_{LS} \\ 1 \leq j \leq n_{RES}}} \max_{\substack{F_{Lx_{PT1}} \in \{-F_{LGK_x||os}, F_{LGK_x||os}\} \\ n_{LKx} \in \{n_{LKx_{min}}, n_{LKx_{max}}\} \\ \dot{\varphi}_{G0y} \in \left\{ -\frac{1}{R_{dyn}}, \frac{1}{R_{dyn}} \right\}}} p_{ij} \Big|_{F_{Lx_{PT1}}, n_{LKx}, F_{LGK_z}, \dot{\varphi}_{G0y}} \quad (4.101)$$

Neben den oben beschriebenen physikalischen Randbedingungen zu den *Reibbeiwerten* erfordert die *Konvergenz* des verwendeten Lösungsverfahrens, dass u.A. der *Reibbeiwert*  $\mu(v, p)$  zu jedem Bodendruck  $p$  *streng monoton* in den *Reibbeiwert-Parametern* wächst. Dies ist anders als die physikalischen Bedingungen keine Einschränkung des gültigen Parameterraums, macht aber zur Lösung des Problems folgende alternative Darstellung der *Reibbeiwerte* zum größeren Bodendruckwert nötig

$$\mu_{haft_{p_{max}}} = \mu(0, p_{max}) \quad \mu_{gleit_{p_{max}}} = \mu(\Delta v, p_{max})$$

#### 4 Entwicklung und Verifikation einer Sequentiellen Parameteridentifikation für ein physikalisches Reifenmodell

---

Beschreibt man das *Reibverhalten* mit  $\mu_{haft p_{max}}$  und  $\mu_{gleit p_{max}}$  anstatt  $\mu_{haft \Delta p}$  und  $\mu_{gleit \Delta p}$ , erhält man die ursprüngliche Darstellung durch die Rücktransformation

$$\mu_{haft \Delta p} = \mu(0, \Delta p) \quad \mu_{gleit \Delta p} = \mu(\Delta v, \Delta p), \quad \mu \text{ mit } \Delta p' = p_{max} \quad (4.102)$$

Da kein Bodendruckwert  $p > p_{max}$  auftritt, sieht man leicht, dass  $\mu$  in 4.32 mit dem alternativen Stützstellenabstand  $\Delta p' = p_{max}$  für  $0 < p < p_{max}$  *streng monoton* in  $\mu_{haft 0bar}$  und  $\mu_{haft p_{max}}$  *steigt*. In dieser Darstellung lassen sich nun auch die generellen physikalischen Randbedingungen wie folgt formal ausdrücken

$$\begin{aligned} \mu_{haft 0bar} &> \mu_{gleit 0bar} & \mu_{haft p_{max}} &> \mu_{gleit p_{max}} \\ \mu_{haft 0bar} - \mu_{haft p_{max}} &\geq \varrho_{\mu} > 0 & \mu_{gleit 0bar} - \mu_{gleit p_{max}} &\geq \varrho_{\mu} \\ \frac{\partial (p \cdot \mu(v, p))}{\partial p} &\geq \varrho_F > 0 & & \end{aligned} \quad (4.103)$$

Mit der Forderung der Mindestdifferenz zwischen den *Reibbeiwerten* für 0 bar und  $p_{max}$  ergibt sich auch die geforderte *Abnahme* der *Gleit-* bzw. *Haftreibungskoeffizienten* über dem lokalen Bodendruck. Die Konstanten  $\varrho_{\mu}$  und  $\varrho_F$  legen für die Parameter die Bewirkung einer *Mindestabnahme* bzw. *-steigung* fest, die sich für die spezielle Anwendung von Reibung zwischen Gummi und verschieden griffigem Untergrund definieren lässt. Größere Werte von  $\varrho_{\mu}$  und  $\varrho_F$  reduzieren den Aufwand zur Abschätzung der *konvergenzrelevanten* Eigenschaften der hier verwendeten *Zielgrößen*. Das später eingesetzte Verfahren aus Abschnitt C.23 zur Abschätzung der Eigenschaften, das durch zu kleine Werte der Konstanten wie dort beschrieben ineffizient arbeitet, ist überhaupt erst mit Einführung dieser Größen möglich. Aus den Bedingungen ergeben sich *lineare* Beschränkungen für die Kombination der *Haftreibungswerte*. Mit Ausnahme der letzten Bedingung ist dies für alle offensichtlich. Über 4.32 erhält man für

$$\frac{\partial (p \cdot \mu(0, p))}{\partial p} \geq \varrho_F$$

nach Auflösung der Differenziation, da der resultierende Term wegen  $\mu_{haft 0bar} > \mu_{haft p_{max}}$  für  $p = p_{max}$  minimal wird, die Umformung

$$\mu_{haft p_{max}} \geq \frac{1}{2} (\mu_{haft 0bar} + \varrho_F) \quad (4.104)$$

Auch für die neue Darstellung werden obere Parameterschranken gebraucht, die sich analog zur Originaldarstellung ergeben

$$\mu_{haft 0bar} \leq \mu_{haft 0bar max} \quad \mu_{haft p_{max}} \leq \mu_{haft p_{max} max} = \mu_{haft \Delta p max}$$

Dabei muss, um den gesamten originalen Parameterraum zu integrieren, in der alternativen Darstellung eine Begrenzung gewählt werden, die insgesamt ein größeres Gebiet von

Parameterwerten als durch  $\mu_{haft \Delta p max}$  festgelegt zulässt. Streng genommen müssten die Lösungen aus dem zusätzlichen Gebiet verworfen werden, aber die alternative Darstellung des zulässigen Parameterraums stellt letztlich eine genauso taugliche Begrenzung dar, und  $\mu_{haft \Delta p max}$  ist nicht Teil einer der durchgeführten Größen-Abschätzungen. Im Fall der Begrenzung der *Haftreibbeiwerte* nach unten durch die bereits bekannten *Gleitreibbeiwerte*  $\mu_{gleit 0bar 0}$  und  $\mu_{gleit pmax 0}$  wird durch die Übertragung in die neue Darstellung der Parameterraum verkleinert. Auch hier ist die alternative Begrenzung durchaus sinnvoll. Die neue Darstellung der *Gleitreibbeiwerte* erfolgt u.A. als

$$\mu_{gleit pmax 0} = \mu(\Delta v, pmax) \quad \text{mit} \quad \mu(\Delta v, 0) = \mu_{gleit 0bar 0}, \quad \mu(\Delta v, \Delta p) = \mu_{gleit \Delta p 0}$$

So ergibt sich für  $\mu_{haft 0bar}$  und  $\mu_{haft pmax}$  der in Abbildung C.21 dunkelgrau dargestellte gültige Parameterraum. Als Form des Parameterraums entsteht offensichtlich kein Rechteck, wie es die hier beschriebene Ausprägung der *Sequentiellen Parameteridentifikation* jedoch voraussetzt (s. bspw. 3.1 und 3.16). Hierdurch wird eine weitere Transformation der *Haftreibbeiwerte* in die Darstellung  $0 \leq \hat{\mu}_{haft 1}, \hat{\mu}_{haft 2} \leq 1$  mit dem Zusammenhang

$$\begin{aligned} \mu_{haft 0bar} &= (1 - \hat{\mu}_{haft 1}) \mu_{gleit 0bar 0} + \hat{\mu}_{haft 1} \cdot \min(\mu_{haft 0bar max}, 2 \mu_{haft pmax max} - \varrho_F) \\ \mu_{haft pmax} &= (1 - \hat{\mu}_{haft 2}) \cdot \max\left(\mu_{gleit pmax 0}, \frac{1}{2} (\mu_{haft 0bar} + \varrho_F)\right) \\ &\quad + \hat{\mu}_{haft 2} \cdot \min(\mu_{haft pmax max}, \mu_{haft 0bar} - \varrho_\mu) \end{aligned} \quad (4.105)$$

zu den bereits definierten Parametern erforderlich.  $\hat{\mu}_{haft 1}$  spannt zwischen den Grenzen 0 und 1 sämtliche mögliche Werte von  $\mu_{haft 0bar}$  auf, die kombiniert mit mindestens einer Belegung von  $\mu_{haft pmax}$  eine gültige Parameterkombination bilden. Für den mit  $\hat{\mu}_{haft 1}$  festliegenden Wert von  $\mu_{haft 0bar}$  spannt  $\hat{\mu}_{haft 2}$  alle mit diesem in Kombination gültigen Belegungen von  $\mu_{haft pmax}$  auf.

Als *Jacobimatrix* der Parametertransformation erhält man

$$\frac{\partial (\mu_{haft 0bar} \quad \mu_{haft pmax})^T}{\partial (\hat{\mu}_{haft 1} \quad \hat{\mu}_{haft 2})} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{11}, a_{22} > 0, \quad a_{21} \geq 0 \quad (4.106)$$

wobei  $a_{21}$  und  $a_{22}$  keine Konstanten sind. Das bedeutet für die *Funktionaldeterminante* der Transformation

$$\left| \frac{\partial (\mu_{haft 0bar} \quad \mu_{haft pmax})^T}{\partial (\hat{\mu}_{haft 1} \quad \hat{\mu}_{haft 2})} \right| = a_{11} a_{22} > 0 \quad (4.107)$$

Nachdem die Struktur des geplanten Suchverfahrens und damit die Anordnung der Parameter in  $P_8$  sowie die Parametergrenzen geklärt sind, können die entsprechenden formalen Definitionen nun angegeben werden

$$P_8^V = \begin{pmatrix} n_{LKx} \\ \hat{\mu}_{haft 1} \\ \hat{\mu}_{haft 2} \end{pmatrix} \quad P_8^* = [n_{LKx min}, n_{LKx max}] \times [0, 1] \times [0, 1]$$

Um die *Konvergenz* des Suchverfahrens unter bestimmten Voraussetzungen garantieren zu können, sind noch weitere Vorüberlegungen nötig. Nach Abschnitt C.19 *steigt* die Längskraft  $F_{x\ i\ ges}$  des  $i$ . *Laufstreifens* unter ausgeblendeter erster Gleichung in 4.27 und festgelegtem Wert  $F_{Lx\ PT10}$  für hinreichend kleines  $\lambda > 0$  (die Anfangssteigung des *Haftpotenzials* über der *Latsch*-Längsrichtung muss größer als die der *Haftauslenkung* sein) *streng monoton* in den *Haftreibbeiwerten*  $\mu_{haft\ 0bar}$  und  $\mu_{haft\ pmax}$ . Ist die Voraussetzung zur Anfangssteigung des *Haftpotenzials* nicht erfüllt, ist die Änderung in  $\mu_{haft\ 0bar}$  und  $\mu_{haft\ pmax}$  trotzdem nicht *negativ*. Für  $\lambda < 0$  wechselt nach Abschnitt C.22 das Vorzeichen der Änderung, und es folgt insgesamt

$$\frac{\partial |F_{x\ i\ ges}|}{\partial \mu_{haft\ 0bar}} > 0 \qquad \frac{\partial |F_{x\ i\ ges}|}{\partial \mu_{haft\ pmax}} > 0$$

Da abhängig von  $\lambda$  die Änderung von  $F_{x\ i\ ges}$  in jedem *Laufstreifen* das gleiche Vorzeichen besitzt, summieren sich für den Gesamt-*Latsch* die Effekte der einzelnen *Laufstreifen* auf, und es gilt für festgelegtes  $F_{Lx\ PT10}$  auch

$$\frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{Lx\ PT10}}}{\partial \mu_{haft\ 0bar}} = \sum_{i=1}^{n_{LS}} \frac{\partial |F_{x\ i\ ges}|}{\partial \mu_{haft\ 0bar}} > 0 \qquad \frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{Lx\ PT10}}}{\partial \mu_{haft\ pmax}} = \sum_{i=1}^{n_{LS}} \frac{\partial |F_{x\ i\ ges}|}{\partial \mu_{haft\ pmax}} > 0$$

vorausgesetzt für mindestens einen *Laufstreifen* ist die Bedingung an die Anfangssteigung des *Haftpotenzials* erfüllt. Über Ergebnis C.119 angewandt mit C.97 bzw. C.98 ergibt sich das gleiche Vorzeichen der Änderung für festgelegtes  $F_{Lx\ PT10}$  wie für freies  $F_{Lx\ PT1}$

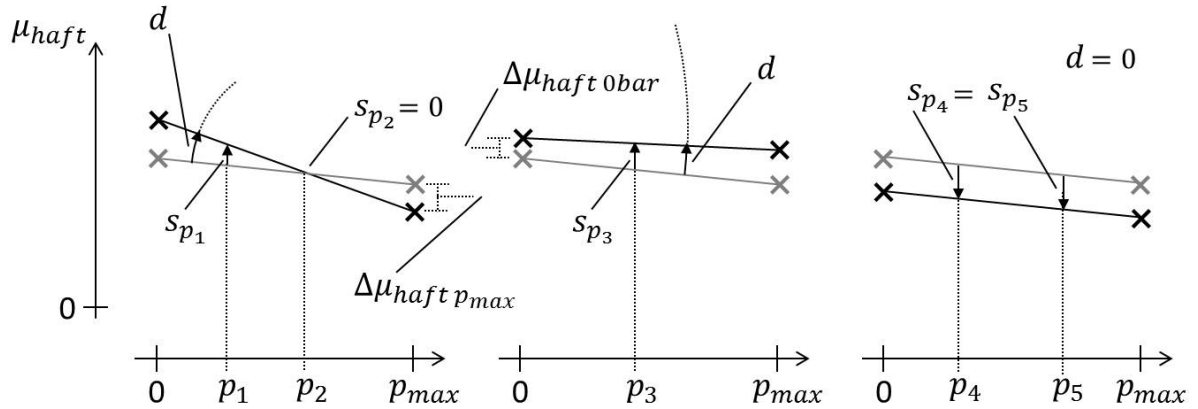
$$\frac{\partial |F_{LGKx}|}{\partial \mu_{haft\ 0bar}} > 0 \qquad \frac{\partial |F_{LGKx}|}{\partial \mu_{haft\ pmax}} > 0 \qquad (4.108)$$

Durch 4.106 kann die Eigenschaft auch auf  $\hat{\mu}_{haft\ 1}$  und  $\hat{\mu}_{haft\ 2}$  übertragen werden

$$\frac{\partial |F_{LGKx}|}{\partial \hat{\mu}_{haft\ 1}} = a_{11} \frac{\partial |F_{LGKx}|}{\partial \mu_{haft\ 0bar}} + a_{21} \frac{\partial |F_{LGKx}|}{\partial \mu_{haft\ pmax}} > 0 \qquad \frac{\partial |F_{LGKx}|}{\partial \hat{\mu}_{haft\ 2}} = a_{22} \frac{\partial |F_{LGKx}|}{\partial \mu_{haft\ pmax}} > 0 \qquad (4.109)$$

und der Längskraftbetrag steigt *streng monoton* in  $\mu_{haft\ 0bar}$ ,  $\mu_{haft\ pmax}$ ,  $\hat{\mu}_{haft\ 1}$  und  $\hat{\mu}_{haft\ 2}$ , vorausgesetzt die Anfangssteigung des *Haftpotenzials* über der *Latsch*-Längsrichtung ist in mindestens einem *Laufstreifen* größer als die des *Haftauslenkungs*-Betrags.

Besonders hilfreich bei der Untersuchung der *Konvergenz*-Eigenschaften ist die Darstellung einer *linearisierten* Änderung der *Haftreibbeiwerte*  $\mu_{haft\ 0bar}$  und  $\mu_{haft\ pmax}$  als *linearisierte* Drehung  $d$  und Verschiebung  $s_{p_0}$  der *Reibbeiwerte*  $\mu(0, p)$  in Bezug auf einen frei wählbaren Druckwert  $p_0$ . Abbildung 4.66 zeigt Beispiele für diese Darstellung bei gegenläufiger, gleichgerichteter und paralleler Änderung der *Haftreibbeiwerte*. Formal


 Abbildung 4.66: Änderung der *Haftreibungswerte* als Drehung und Verschiebung in  $p_0$ 

beschrieben erhält man

$$s_{p_0} = \frac{\partial \mu(0, p_0)}{\partial r} = \frac{1}{p_{max}} \left( (p_{max} - p_0) \frac{\partial \mu_{haft 0bar}}{\partial r} + p_0 \frac{\partial \mu_{haft p_{max}}}{\partial r} \right) \quad (4.110)$$

$$d = \frac{1}{p_{max}} \left( \frac{\partial \mu_{haft p_{max}}}{\partial r} - \frac{\partial \mu_{haft 0bar}}{\partial r} \right)$$

Interessant ist v.A. der Druckwert  $p_d$  mit  $s_{p_d} = 0$  zu einer *linearisierten Haftreibungswertänderung*, der genau dann zwischen 0 und  $p_{max}$  liegt, wenn sich  $\mu_{haft 0bar}$  und  $\mu_{haft p_{max}}$  in unterschiedlicher Richtung ändern. Dieser Fall liegt bspw. vor, wenn (für hinreichend kleines  $|\lambda| > 0$ ) eine Änderung der *Haftreibungswerte* die resultierende *Latsch-Längskraft* nicht verändert. So gilt nämlich

$$0 = \frac{\partial |F_{LGKz}|}{\partial r} = \frac{\partial |F_{LGKz}|}{\partial \mu_{haft 0bar}} \cdot \frac{\partial \mu_{haft 0bar}}{\partial r} + \frac{\partial |F_{LGKz}|}{\partial \mu_{haft p_{max}}} \cdot \frac{\partial \mu_{haft p_{max}}}{\partial r}$$

und es folgt mit 4.108

$$\frac{\partial \mu_{haft p_{max}}}{\partial r} / \frac{\partial \mu_{haft 0bar}}{\partial r} = - \frac{\partial |F_{LGKz}|}{\partial \mu_{haft 0bar}} / \frac{\partial |F_{LGKz}|}{\partial \mu_{haft p_{max}}} < 0$$

$p_d$  kann für  $d \neq 0$  auch direkt berechnet werden, ist durch  $s_{p_d} = 0$  festgelegt, und man erhält

$$p_d = -p_{max} \frac{\partial \mu_{haft 0bar}}{\partial r} / \left( \frac{\partial \mu_{haft p_{max}}}{\partial r} - \frac{\partial \mu_{haft 0bar}}{\partial r} \right) \quad (4.111)$$

Betrachtet man nun als mögliche *Zielgrößen* den Längskraftbetrag  $|F_{FHx}|$ , der *stationär* mit der *Latsch-Längskraft*  $|F_{LGKx}|$  übereinstimmt, in zwei Betriebsituationen mit

#### 4 Entwicklung und Verifikation einer Sequentiellen Parameteridentifikation für ein physikalisches Reifenmodell

---

unterschiedlichen Werten  $F_{LGKz0}$  und  $\lambda_0$  bzw.  $F_{LGKz1}$  und  $\lambda_1$ , so liegt im gesamten Parameterraum  $P_8^*$  die Eigenschaft

$$p_{d\partial 0}|_{F_{LGKz0}, \lambda_0} < p_{d\partial 0}|_{F_{LGKz1}, \lambda_1}$$

$$p_{d\partial 0} = p_d \Big|_{\frac{\partial \mu_{haft0bar}}{\partial r} = c_1 \neq 0, \frac{\partial \mu_{haftpmax}}{\partial r} = c_2} \text{ mit } \frac{\partial |F_{LGKx}|}{\partial (\mu_{haft0bar} \quad \mu_{haftpmax})} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.112)$$

genau dann vor, wenn für die *Funktionaldeterminante* in  $P_8^*$

$$\left| \frac{\partial \left( \begin{array}{c|c} |F_{LGKx}|_{F_{LGKz0}, \lambda_0} & |F_{LGKx}|_{F_{LGKz1}, \lambda_1} \\ \hline \end{array} \right)^T}{\partial (\mu_{haft0bar} \quad \mu_{haftpmax})} \right| > 0$$

gilt. Aus 4.112, 4.110 und der Definition von  $p_d$  erhält man nämlich ausgedrückt mit den zwei verschiedenen Variationsgrößen  $r_0$  und  $r_1$  zur jeweiligen Änderung der *Haftreibbeiwerte*

$$\frac{1}{p_{max}} \left( (p_{max} - p_{d\partial 0}|_{F_{LGKz0}, \lambda_0}) \frac{\partial \mu_{haft0bar}}{\partial r_0} + p_{d\partial 0}|_{F_{LGKz0}, \lambda_0} \frac{\partial \mu_{haftpmax}}{\partial r_0} \right) = 0$$

$$\frac{1}{p_{max}} \left( (p_{max} - p_{d\partial 0}|_{F_{LGKz1}, \lambda_1}) \frac{\partial \mu_{haft0bar}}{\partial r_1} + p_{d\partial 0}|_{F_{LGKz1}, \lambda_1} \frac{\partial \mu_{haftpmax}}{\partial r_1} \right) = 0$$

$$\frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{LGKz0}, \lambda_0}}{\partial \mu_{haft0bar}} \cdot \frac{\partial \mu_{haft0bar}}{\partial r_0} + \frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{LGKz0}, \lambda_0}}{\partial \mu_{haftpmax}} \cdot \frac{\partial \mu_{haftpmax}}{\partial r_0} = 0$$

$$\frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{LGKz1}, \lambda_1}}{\partial \mu_{haft0bar}} \cdot \frac{\partial \mu_{haft0bar}}{\partial r_1} + \frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{LGKz1}, \lambda_1}}{\partial \mu_{haftpmax}} \cdot \frac{\partial \mu_{haftpmax}}{\partial r_1} = 0$$

Auflösung nach  $-\frac{\partial \mu_{haft0bar}}{\partial r_{0/1}} / \frac{\partial \mu_{haftpmax}}{\partial r_{0/1}}$  und Elimination dieser Terme liefert

$$\frac{p_{d\partial 0}|_{F_{LGKz0}, \lambda_0}}{p_{max} - p_{d\partial 0}|_{F_{LGKz0}, \lambda_0}} = \frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{LGKz0}, \lambda_0}}{\partial \mu_{haftpmax}} / \frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{LGKz0}, \lambda_0}}{\partial \mu_{haft0bar}}$$

$$\frac{p_{d\partial 0}|_{F_{LGKz1}, \lambda_1}}{p_{max} - p_{d\partial 0}|_{F_{LGKz1}, \lambda_1}} = \frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{LGKz1}, \lambda_1}}{\partial \mu_{haftpmax}} / \frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{LGKz1}, \lambda_1}}{\partial \mu_{haft0bar}}$$



und die Division der ersten durch die zweite Gleichung mit Voraussetzung 4.112

$$\begin{aligned}
 1 &> \frac{p_d \partial 0|_{F_{LGKz0}, \lambda_0} \cdot (p_{max} - p_d \partial 0|_{F_{LGKz1}, \lambda_1})}{p_d \partial 0|_{F_{LGKz1}, \lambda_1} \cdot (p_{max} - p_d \partial 0|_{F_{LGKz0}, \lambda_0})} \\
 &= \frac{\frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{LGKz0}, \lambda_0}}{\partial \mu_{haft p_{max}}} \cdot \frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{LGKz1}, \lambda_1}}{\partial \mu_{haft 0bar}}}{\underbrace{\frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{LGKz0}, \lambda_0}}{\partial \mu_{haft 0bar}}}_{>0 \text{ (s. 4.108)}} \cdot \underbrace{\frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{LGKz1}, \lambda_1}}{\partial \mu_{haft p_{max}}}}_{>0}}
 \end{aligned}$$

Die positiven Faktoren ermöglichen die einfache Umformung zu

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial \left( \frac{|F_{LGKx}|_{F_{LGKz0}, \lambda_0}}{|F_{LGKx}|_{F_{LGKz1}, \lambda_1}} \right)}{\partial (\mu_{haft 0bar} \quad \mu_{haft p_{max}})} \right| &= \frac{\frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{LGKz0}, \lambda_0}}{\partial \mu_{haft 0bar}} \cdot \frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{LGKz1}, \lambda_1}}{\partial \mu_{haft p_{max}}}}{\frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{LGKz0}, \lambda_0}}{\partial \mu_{haft p_{max}}} \cdot \frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{LGKz1}, \lambda_1}}{\partial \mu_{haft 0bar}}} > 0
 \end{aligned}$$

was die Aussage beweist.

Verwendet man die Beträge der *Latsch*-Längskraft unter den zwei Betriebsituationen als *Zielgrößen*, ist die grundsätzlich *positive Funktionaldeterminante* ein wichtiger Schritt zum Nachweis von Eindeutigkeit und Lösbarkeit in den *Haftreibbeiwerten*. Nicht klar ist bisher jedoch, ob und wie die Voraussetzungen dazu geschaffen werden können. Die *Zielgrößen*-Eigenschaften sollen durch die Wahl von  $F_{FHz0}$ ,  $\lambda_0$ ,  $F_{FHz1}$  und  $\lambda_1$  gesteuert werden, wobei  $F_{FHz}$  und  $F_{LGKz}$  nach Abschnitt 4.2.1 *streng monoton* voneinander abhängen. Als Grundidee verbirgt sich dahinter, dass für kleinere Werte  $F_{FHz}$  und  $\lambda$  die *Haftreibbeiwerte* unter kleineren Werten des Bodendrucks  $p$  die resultierende Längskraft stärker beeinflussen und für größere Werte  $F_{FHz}$  und  $\lambda$  die *Haftreibbeiwerte* unter größeren Werten  $p$  einen höheren Einfluss besitzen. Soll sich  $F_{LGKx}$  bei einer Veränderung der *Haftreibbeiwerte* nicht ändern, muss nachgewiesen werden, dass dies für größere relevante Werte  $p$  mit einem größeren Wert von  $p_d \partial 0$ , dem 'Drehpunkt' der *Haftreibbeiwert*-Änderung erfolgt, was den Voraussetzungen 4.112 zur Garantie der *positiven Funktionaldeterminante* entspricht.

Zum genaueren Verständnis muss der Einfluss einer Änderung von  $\mu_{haft 0bar}$ ,  $\mu_{haft p_{max}}$  und  $n_{LKx}$  detaillierter analysiert werden. In Abschnitt C.16 und den Folgeabschnitten werden solche Änderungen abstrahiert mit  $r$  beschrieben und deren Auswirkung unter wie hier konstant gehaltenem Wert  $F_{Lx PT1}$  auf einen *Laufstreifen* untersucht. Der Effekt auf die Gesamt-Längskraft ist nach Abschnitt C.20 und Gleichung C.119 ausschließlich

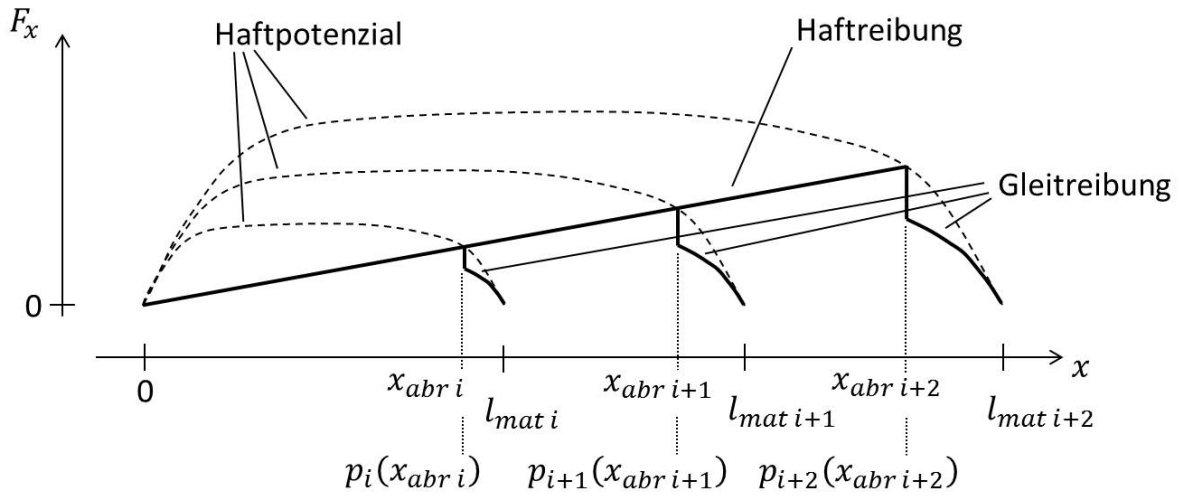


Abbildung 4.67: Haftabrissepunkte von drei Laufstreifen

durch die Vorgänge in den einzelnen *Laufstreifen* bestimmt. Damit ist aus C.80 direkt ablesbar, dass das *Haftpotenzial* (dort mit  $F_x \text{ haftpot } i$  beschrieben) bei einer entsprechenden Änderung für die betrachteten resultierenden Größen ausschließlich an den *Laufstreifen*-Positionen  $x_{abr\ i}$  der *Haftabrissepunkte* relevant ist. An den *Haftabrissepunkten*  $x_{abr\ i}$ , hier in  $x$ -Koordinatendarstellung als Abstand zum Beginn des jeweiligen *Laufstreifens* (s. Abschn. C.16), erfolgt in jedem *Laufstreifen* der Übergang von *Haft-* in *Gleitreibung*. Abbildung 4.67 zeigt die *Haftabrissepunkte* dreier *Laufstreifen* eines *Latschs*, die an der Längsposition des Schnittpunkts der *Haftauslenkungskraft* mit dem jeweiligen ortsabhängigen *Haftpotenzial* liegen. Da das *Haftpotenzial* nach C.83 neben den Parametern ausschließlich vom Bodendruck abhängt, der dort abhängig vom Ort  $x$  im *Laufstreifen* mit  $p_i(x)$  dargestellt ist, haben auf die Änderung von  $F_{LGKx}$  letztlich ausschließlich die Werte von  $\mu_{haft}(p) = \mu(0, p)$  für Umgebungen der Druckwerte  $p_i(x_{abr\ i})$  an den *Haftabrissepunkten* der *Laufstreifen* mit Bodenkontakt eine Auswirkung. Hiermit lässt sich auch begründen, dass für hinreichend kleines  $\lambda$  (s.o.)

$$\min(I_{p_{abr}}) \leq p_{d\partial 0} \leq \max(I_{p_{abr}}) \quad \text{mit } I_{p_{abr}} = \{p_i(x_{abr\ i}) \mid l_{mat\ i} > 0, 0 \leq i \leq n_{LS}\} \quad (4.113)$$

gilt. In Abschnitt C.24 ist dazu ein formaler Beweis angegeben.

Hierauf basierend kann nun eine Vorgehensweise entworfen werden, die durch die Wahl von  $F_{FH_z0}$ ,  $\lambda_0$ ,  $F_{FH_z1}$  und  $\lambda_1$  die *Zielgrößen*-Eigenschaft  $p_{d\partial 0}|_{F_{FH_z0}, \lambda_0} < p_{d\partial 0}|_{F_{FH_z1}, \lambda_1}$  garantiert. Dazu kann  $F_{FH_z1} > -m_G \cdot g$  (s. Abschn. 4.2.1) beliebig gewählt werden. Für das dazugehörig zu wählende  $\lambda_1$  muss nun, um die Voraussetzungen für Eigenschaft 4.108 zu erfüllen,  $|\lambda_1| > 0$  gelten, und jeder *Haftabrissepunkt*  $x_{abr\ i}$  in einem *Laufstreifen* mit Bodenkontakt für sämtliche Parameterkombinationen aus  $P_8^*$  größer 0 sein. In

Abschnitt C.25 wird ein solcher Wert dort unter der Bezeichnung  $\lambda_0$  für  $\lambda_1$  konstruiert. Übernimmt man diesen Wert für  $\lambda_1$  wird die Anforderung an die resultierenden *Haftabrissepunkte*  $x_{abr\ i}$  dadurch realisiert, dass für jeden *Laufstreifen* mit  $l_{mat\ i} > 0$  unter jeder Parameterbelegung aus  $P_8^*$  ein *Haftabrissepunkt* in der hinteren *Laufstreifen*-Hälfte, also mit  $\frac{l_{mat\ i}}{2} < x_{abr\ i} < l_{mat\ i}$  garantiert wird. Abschnitt C.25 liefert dazu auch eine formale Begründung. Für  $\lambda_1$  hier soll also der Wert  $\lambda_0$  aus Abschnitt C.25 verwendet werden, der dort in Abhängigkeit von  $F_{FH\ z\ 0}$  gebildet wird, wofür der hier definierte Wert  $F_{FH\ z\ 1}$  einzusetzen ist. Der Betrag der lokalen Kraft  $F_{x\ i}$  (s. Abschn. C.16) der *Reibkontakt-Elemente* durch *Haftauslenkung* wächst wie in Abbildung 4.67 zu sehen *linear* über  $x$ . Bei den relativ großen Kraftbeträgen, die zur Bestimmung der Werte von  $P_8$  auftreten, kann ohne merkbaren Genauigkeitsverlust von *Haftreibung* ab  $x = 0$  ausgegangen werden, und es muss nicht wie in den Abschnitten 4.2.2 bzw. C.2 der Effekt einer minimal ausgedehnten *Gleitreibung* am *Laufstreifen*-Beginn berücksichtigt werden. Dann gilt nach C.77 für  $0 \leq x \leq x_{abr\ i}|_{F_{FH\ z\ 1}, \lambda_1}$

$$F_{x\ i}(x) = c_{scher} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 1} \cdot x$$

und damit wegen  $\frac{l_{mat\ i}|_{F_{FH\ z\ 1}}}{2} \leq x_{abr\ i}|_{F_{FH\ z\ 1}, \lambda_1}$  für  $l_{mat\ i}|_{F_{FH\ z\ 1}} > 0$

$$\left| F_{x\ i} \left( x_{abr\ i}|_{F_{FH\ z\ 1}, \lambda_1} \right) \right| = c_{scher} \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 1} \right| x_{abr\ i}|_{F_{FH\ z\ 1}, \lambda_1} \geq c_{scher} \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 1} \right| \frac{l_{mat\ i}|_{F_{FH\ z\ 1}}}{2} > 0$$

wobei der Vergleich mit 0 durch die Voraussetzungen  $l_{mat\ i} > 0$  und  $\lambda_1 \neq 0$  gegeben ist. Nach Gleichung C.78, die unter Voraussetzung *positiver* Werte des *Umfangsschlupfs* ohne Betragsbildung formuliert ist, gilt damit auch für das *Haftpotenzial* in den *Haftabrissepunkten*

$$F_{x\ haftpot\ i} \left( x_{abr\ i} \right) |_{F_{FH\ z\ 1}, \lambda_1} \geq F_{haft\ LM\ i} = c_{scher} \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 1} \right| \frac{l_{mat\ i}|_{F_{FH\ z\ 1}}}{2} > 0$$

Nach Bedingung 4.103 *steigt* das *Haftpotenzial*  $F_{x\ haftpot\ i}$  *streng monoton* mit dem Bodendruck  $p$  und nach C.83 auch mit den *Haftreibbeiwerten* ( $p_i(x) \leq p_{max}$ ), wobei  $F_{x\ haftpot\ i}(x)|_{p(x)=0} = 0$  gilt. Man erhält also für  $\mu_{haft\ 0bar\ max}$ ,  $\mu_{haft\ p_{max}\ max}$  und  $l_{mat\ i}|_{F_{FH\ z\ 1}} > 0$  durch Auflösen der in  $p_i(x)$  *quadratischen* ersten Gleichung von C.83 nach  $p_i(x)$  eine Abschätzung der Druckwerte an den *Haftabrissepunkten* nach unten (für konstantes  $F_{x\ haftpot\ i}$  muss sich, um C.83 zu erhalten,  $p_i(x)$  verkleinern, wenn  $\mu_{haft\ 0bar}$

#### 4 Entwicklung und Verifikation einer Sequentiellen Parameteridentifikation für ein physikalisches Reifenmodell

---

oder  $\mu_{haft p_{max}}$  wachsen)

$$p_i(x_{abr i})|_{F_{FH z 1}, \lambda_1} \geq p_{abr i us} = \frac{-\mu_{haft 0bar max} + \sqrt{\mu_{haft 0bar max}^2 + 4 \cdot \frac{\mu_{haft p_{max} max} - \mu_{haft 0bar max}}{p_{max}} \cdot \frac{F_{haft LM i}}{l_{RKE} \cdot b_{RKE}}}}{2 \cdot \frac{\mu_{haft p_{max} max} - \mu_{haft 0bar max}}{p_{max}}} > 0$$

Wegen der *streng monotonen* Steigung von  $F_{x haft pot i}$  in  $p_i$  und damit auch umgekehrt sowie  $\mu_{haft p_{max} max} < \mu_{haft 0bar max}$  erweist sich der *negative* Zweig der Lösungsformel als falsch und es verbleibt nur der *positive*. So ergibt sich auch die für alle *Laufstreifen* mit  $l_{mat i}|_{F_{FH z 1}} > 0$  geltende Abschätzung

$$p_i(x_{abr i})|_{F_{FH z 1}, \lambda_1} \geq p_{abr min 1} = \min \left( \left\{ p_{abr j us} \mid (1 \leq j \leq n_{LS}) \wedge (l_{mat j}|_{F_{FH z 1}} > 0) \right\} \right) > 0$$

der *Haftabrisdruck*-Werte nach unten. Mit 4.113 folgt nun für den gesamten Parameterraum  $P_8^*$

$$p_{d \partial 0}|_{F_{FH z 1}, \lambda_1} \geq p_{abr min 1} \quad (4.114)$$

Durch Bedingung 4.100 gilt auch für  $x'_{REK j} = -x_{REK j}$

$$a + b x'_{REK j} > 0 \quad \text{und damit} \quad a - b x_{REK j} > 0 \quad \text{sowie} \quad b x_{REK j} < a$$

womit für  $x_{REK j}$

$$a + b x_{REK j} < 2a$$

folgt. Wie in den Erläuterungen zu C.83 beschrieben gilt bei *kontinuierlicher* Darstellung der *Latsch*-Längskoordinate  $x$  wie hier  $p_{ans i}(x_{REK j}) = p_{ans i}(-x_{REK j})$ , womit  $a$  in 4.24 unabhängig von  $M_{LGK y}$  sowie  $\Delta x_{LGK}$  und damit auch unter den noch variablen Größen unabhängig von  $\lambda$ ,  $n_{LK x}$ ,  $F_{Lx PT 1}$ ,  $\hat{\mu}_{haft 1}$  und  $\hat{\mu}_{haft 2}$  ist.  $p_{ans ij}$  ist durch  $F_{FH z 0}$  festgelegt, hängt von diesen Größen also nicht ab, ist beschränkt ( $p_{ans max} = \max_{i,j} (p_{ans ij})$ ), und man erhält mit 4.24 für die zu  $F_{FH z 1}$  alternative Betriebsituation unter  $F_{FH z 0}$

$$\forall \lambda, n_{LK x}, \hat{\mu}_{haft 1}, \hat{\mu}_{haft 2}: p_{ij}|_{F_{LGK z 0}} \leq (2a \cdot p_{ans max})|_{F_{LGK z 0}} \quad (4.115)$$

Bei *kontinuierlichen* *Latsch*-Längskoordinaten gilt nach 4.24

$$(2a \cdot p_{ans max})|_{F_{LGK z 0}} = 2F_{LGK z 0} \frac{p_{ans max}}{\sum_{i,j} p_{ans ij}} \Big|_{F_{LGK z 0}}$$

Da  $p_{ans\ max} \leq \sum_{i,j} p_{ans\ ij}$  ist, und damit  $\frac{p_{ans\ max}}{\sum_{i,j} p_{ans\ ij}} \leq 1$  gilt, folgt

$$(2a \cdot p_{ans\ max})|_{F_{LGKz\ 0}} \leq 2F_{LGKz\ 0}$$

Nach Abschnitt 4.2.1 fällt  $F_{LGKz}$  streng monoton bis 0 für bis zum Wert  $-m_g \cdot g$  fallendes  $F_{FH_z}$ . Dann existiert zusammen mit 4.115 ein  $F_{FH_z\ 0} > -m_g \cdot g$ , so dass

$$\forall \lambda, n_{LKx}, \hat{\mu}_{haft\ 1}, \hat{\mu}_{haft\ 2} : p_{ij}|_{F_{FH_z\ 0}} < p_{abr\ min\ 1} \quad (4.116)$$

Analog zum Vorgehen oben bei der Wahl von  $\lambda_1$  abhängig von  $F_{FH_z\ 1}$  (nach Abschnitt C.25) kann auch  $\lambda_0 \neq 0$  abhängig von  $F_{FH_z\ 0}$  so gewählt werden, dass für  $l_{mat\ i}|_{F_{FH_z\ 0}, \lambda_0} > 0$  unter jeder Parameterbelegung aus  $P_8^*$  Eigenschaft  $p_i(x_{abr\ i})|_{F_{FH_z\ 0}, \lambda_0} > 0$  vorliegt. Dann gilt insgesamt

$$0 < p_i(x_{abr\ i})|_{F_{FH_z\ 0}, \lambda_0} < p_{abr\ min\ 1}$$

und mit 4.113

$$0 < p_{d\ \partial 0}|_{F_{FH_z\ 0}, \lambda_0} < p_{abr\ min\ 1}$$

Zusammengefasst mit Ergebnis 4.114 bedeutet dies im gesamten Parameterraum  $P_8^*$

$$0 < p_{d\ \partial 0}|_{F_{FH_z\ 0}, \lambda_0} < p_{d\ \partial 0}|_{F_{FH_z\ 1}, \lambda_1} \quad (4.117)$$

Abbildung 4.68 fasst das Vorgehen bei der Wahl von  $F_{FH_z\ 0}$ ,  $\lambda_0$ ,  $F_{FH_z\ 1}$  und  $\lambda_1$  nochmal grob zusammen. Die Auswahl der Betriebspunkte  $F_{FH_z\ 0} \ll F_{FH_z\ 1}$ ,  $\lambda_0 \ll \lambda_1$  sorgt dafür dass der Druck an sämtlichen *Haftabrispunkten* zum Betriebspunkt 0 kleiner und zum Betriebspunkt 1 größer ist als  $p_{abr\ min\ 1}$ . Dann liegen auch die Werte  $p_{d\ \partial 0}$  für den Betriebspunkt 0 immer unter- und die für den Betriebspunkt 1 oberhalb von  $p_{abr\ min\ 1}$ , was diese zum Betriebspunkt 0 immer kleiner sein lässt als die zum Betriebspunkt 1.

Eigenschaft 4.117 ermöglicht in Verbindung mit 4.112 durch die *positive Funktionaldeterminante* zwar die wesentlichen Voraussetzungen zur Bestimmung der *Haftreibbeiwerte* bei bekanntem  $n_{LKx}$ , hilft aber bei der Bestimmung von  $n_{LKx}$  selbst zunächst nicht weiter. Da die Bestimmung von  $n_{LKx}$  nach der *Zielgröße*  $(Z_{\tau\ 8})_1$  bei der mehrelementigen *Parametergruppe*  $P_8$  so erfolgt, dass für jeden Wert  $n_{LKx\ 0}$  *Haftreibbeiwerte* bestimmt werden, die die übrigen *Zielgrößen*  $(Z_{\tau\ 8})_{2,3}$  erfüllen, und so insgesamt  $(Z_{\tau\ 8})_1$  bestimmt wird (s. Abschn. 3.3), muss dazu  $(Z_{\tau\ 8})_1$  für *konstantes*  $(Z_{\tau\ 8})_{2,3,0}$  *streng monoton* mit  $n_{LKx}$  zunehmen. Auch  $n_{LKx}$  soll auf Basis von Längskraftbeträgen identifiziert werden und dies unter dem mit  $\lambda_1$ ,  $F_{FH_z\ 1}$  bezeichneten Betriebspunkt. Bezeichnet man mit  $\lambda_2$ ,  $F_{FH_z\ 2}$  und  $\lambda_3$ ,  $F_{FH_z\ 3}$  noch die Betriebspunkte von  $(Z_{\tau\ 8})_{2,3}$ , lautet die Bedingung

$$\frac{\partial \left| F_{LGKx}|_{F_{FH_z\ 1}, \lambda_1}, \left| F_{LGKx}|_{F_{FH_z\ 2}, \lambda_2} \right|_{=(Z_{\tau\ 8})_{2,0}}, \left| F_{LGKx}|_{F_{FH_z\ 3}, \lambda_3} \right|_{=(Z_{\tau\ 8})_{3,0}} \right|}{\partial n_{LKx}} > 0 \quad (4.118)$$

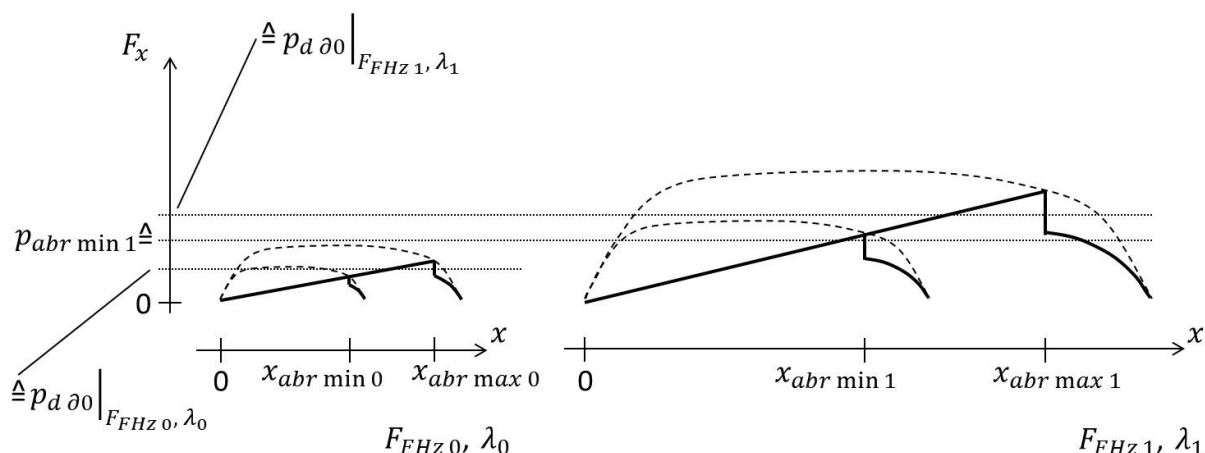


Abbildung 4.68: Lage der Werte von  $p_{d \partial 0}$  bei getrennten Druckintervallen der Haftabrissspunkte

Wichtig für Konstruktion und Nachweis dieser *Zielgrößen*-Eigenschaft ist zu sehen, dass über ein hinreichend kleines  $|\lambda_0| > 0$  einfach garantiert werden kann, dass für die freien *Zielgrößen* im gesamten Parameterraum  $P_8^*$  entweder

$$\frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{FH_z 0}, \lambda_0}}{\partial n_{LKx}} < 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{FH_z 0}, \lambda_0}}{\partial n_{LKx}} > 0 \quad (4.119)$$

aber nicht beides gilt. Bei der Wahl der Betriebssituationen  $F_{FH_z 0}, \lambda_0$  und  $F_{FH_z 1}, \lambda_1$  zur Garantie von Eigenschaft 4.117 ist die Steuerung dieser *Zielgrößen*-Eigenschaft durch das Vorgehen nach Abschnitt C.25 bereits möglich. Die Abbildungen 4.69 und 4.70 veranschaulichen die dadurch erzielte Wirkung. Mit dem abhängig von  $F_{FH_z 0}$  hinreichend kleinen Wert  $\lambda_0$  schneidet die *Haftauslenkungsgerade* für sämtliche Parameterkombinationen aus  $P_8^*$  in jedem *Laufstreifen* das *Haftpotenzial* in der hinteren *Laufstreifen*-Hälfte. Die rückgekoppelte (gefilterte) *Latsch*-Längskraft  $F_{Lx PT1}$  ist im Bremsfall ( $\lambda_0 < 0$ ) *negativ* und bewirkt wie in Abbildung 4.69 zu sehen eine von  $n_{LKx}$  abhängige Verschiebung des *Latschs* nach hinten gegenüber dem *Reifengürtel*. Im Antriebsfall ( $\lambda_0 > 0$ ) ist  $F_{Lx PT1}$  *positiv*, wodurch sich der *Latsch* abhängig von  $n_{LKx}$  nach vorn gegenüber dem *Reifengürtel* verschiebt. Der Betrag dieser Verschiebung wächst mit  $n_{LKx}$ . Durch  $F_{FH_z 0}$  und  $F_{Lx PT1}$  liegt der in Abbildung 4.69 über  $F_{LGKz}$  gekennzeichnete *Vertikalkraftschwerpunkt* gegenüber der Lage des *Reifengürtels* fest. Mit der *Latsch*-Längsverschiebung wandert er im *Latsch* aber in die jeweils entgegengesetzte Richtung, und hebt in der in dieser Richtung liegenden *Latsch*-Hälfte das *Haftpotenzial* an bzw. senkt es in der anderen ab.

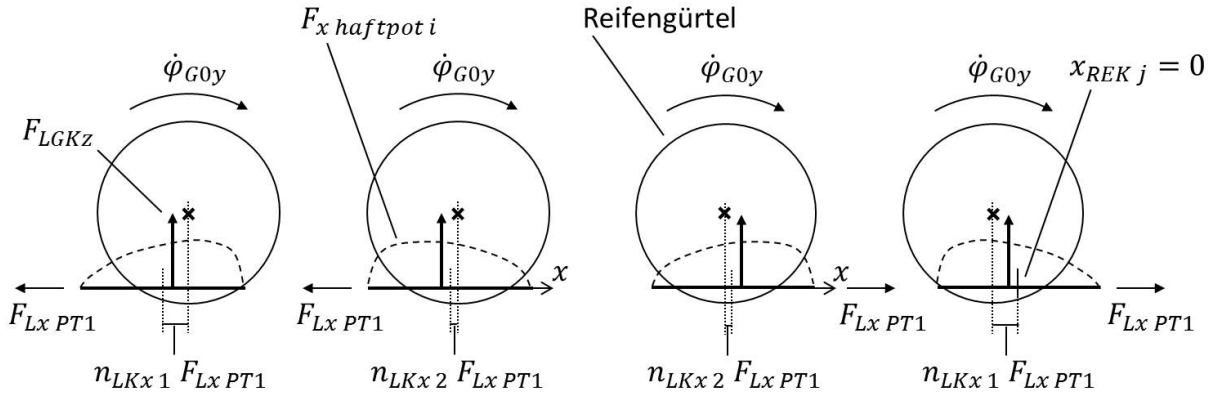


Abbildung 4.69: *Latsch-Verschiebung* und *Haftpotenzial-Änderung* abhängig von  $F_{Lx PT1}$  und  $n_{LKx}$

Damit steigt entweder oder fällt das *Haftpotenzial* in der hinteren *Latsch*-Hälfte mit  $n_{LKx}$  grundsätzlich. In Abbildung 4.70 sieht man, dass dies die *Haftkraft* in der vorderen Hälfte aller *Laufstreifen* nicht beeinflusst und die *Haft-* und *Gleitkraft* in der hinteren Hälfte entweder immer vergrößert oder verkleinert, wobei dort ausschließlich der Vergrößerungseffekt illustriert ist. Insgesamt *wächst* also für  $\lambda_0 > 0$  der Betrag  $|F_{LGKx}|$  *streng monoton* und *fällt* für  $\lambda_0 < 0$  *streng monoton* in  $n_{LKx}$ . Erschwert wird die Argumentation durch die Rückkopplung von  $F_{LGKx}$  in  $F_{Lx PT1}$ , womit die Wirkung der *Latsch-Verschiebung* ihre eigene Ursache beeinflusst. Dass die Wirkrichtung der Effekte trotzdem erhalten bleibt, wird in Abschnitt C.21 begründet. So ist nun klar, wie eine der in 4.119 aufgeführten *Zielgrößen-Eigenschaften* gewählt werden kann. Neben dem hier gegebenen Überblick zu den Wirkmechanismen wird der Zusammenhang in Abschnitt C.25 formal begründet.

Die letztlich relevante Eigenschaft ist jedoch die *Zielgrößen-Änderung* 4.118 in  $n_{LKx}$  unter zwei weiteren mit Hilfe einer Anpassung der *Haftreibbeiwerte* festgehaltenen *Zielgrößen-Werten*. Um auch diese gezielt einzustellen, kann man wie folgt vorgehen. Grundlage ist das oben beschriebene Verfahren zur Bildung von  $F_{FH z 0}$ ,  $\lambda_0$ ,  $F_{FH z 1}$  und  $\lambda_1$ .  $F_{FH z 1} > -m_G \cdot g$  kann danach beliebig, sollte jedoch, um  $F_{FH z 2}$  und  $F_{FH z 3}$  nicht unnötig klein geraten zu lassen, möglichst groß gewählt werden.  $\lambda_1$  wird dort wie hier nach dem Vorgehen aus Abschnitt C.25 bestimmt und sollte ausgedrückt in dort beschriebenen Größen nach C.128 auf einen möglichst großen Betrag mit

$$\lambda_1 > 0 \quad \text{und} \quad \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 1} \right| < m_{\leq \text{haftpot } v} |_{F_{FH z 1}} \quad (4.120)$$

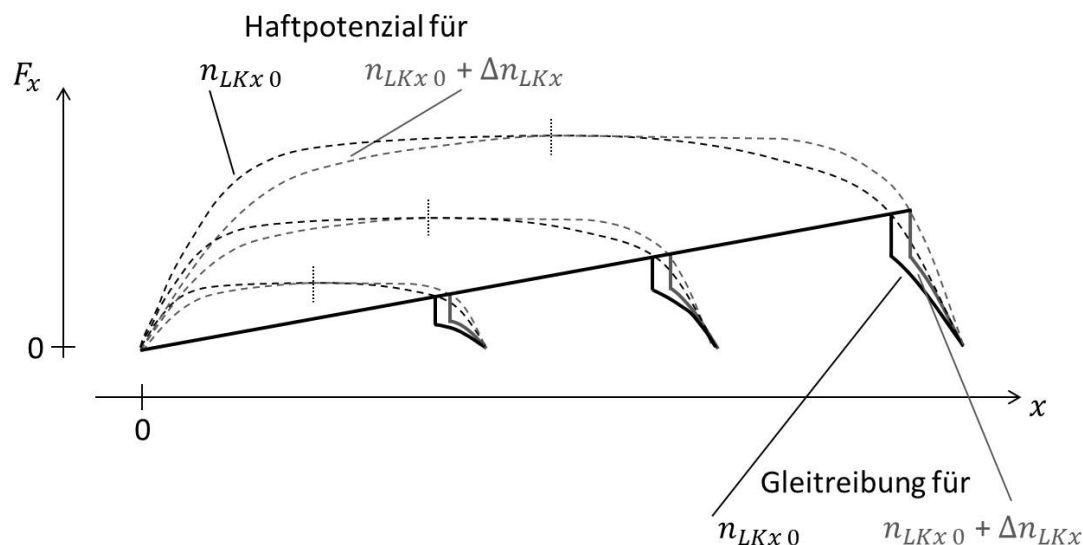


Abbildung 4.70: Gleiche Richtung der Kraftänderung in den *Laufstreifen* durch  $n_{LKx}$ -Änderung bei hinreichend kleinem  $|\lambda_0| > 0$

festgelegt werden. Zur Garantie eindeutiger resultierender Längskräfte in den sich einstellenden *Stationärzuständen* werden in Abschnitt C.19 umgekehrt hinreichend kleine Werte  $|\lambda_1|$ ,  $|\lambda_2|$  und  $|\lambda_3|$  gefordert, wobei auch die Möglichkeit erläutert wird, gegebene konkrete Werte auf diese Eigenschaft zu prüfen. Es soll hier allerdings auf diesen zusätzlichen Schritt verzichtet werden. Als Bedingung für die nächstkleinere Vertikalkraft  $F_{FH_z 2}$ , die im oben beschriebenen Verfahren mit  $F_{FH_z 0}$  bezeichnet wird und hier zur zweiten *Zielgröße* gehört, folgt ausgedrückt in den oben verwendeten Größen nach 4.116

$$p_{ij}|_{F_{FH_z 2}} < p_{abr \min 1}|_{F_{FH_z 1}, \lambda_1} \quad (4.121)$$

$F_{FH_z 2}$  sollte wieder so groß wie damit möglich gewählt werden, wobei aus der Begründung zu 4.116 eine mögliche effiziente Vorgehensweise dazu hervorgeht. Davon abhängig wird  $|\lambda_2|$  ebenso möglichst groß analog  $\lambda_1$ , jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen, also unter den Bedingungen

$$\lambda_2 < 0 \quad \text{und} \quad \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + 1} \right| < m_{\leq \text{haftpot } v}|_{F_{FH_z 2}} \quad (4.122)$$

gebildet. Für die Anregung zur dritten *Zielgröße* wiederholt sich durch die nächstkleinere Vertikalkraft das Vorgehen zur Bildung von  $F_{FH_z 2}$  und  $\lambda_2$ , jedoch nur abgeschätzt durch die mit  $F_{FH_z 2}$  und  $\lambda_2$  statt  $F_{FH_z 1}$  und  $\lambda_1$  resultierenden Größen sowie einem nun *positiven* Vorzeichen für  $\lambda_3$ . So erhält man die Bedingungen

$$p_{ij}|_{F_{FH_z 3}} < p_{abr \min 2}|_{F_{FH_z 2}, \lambda_2} \quad (4.123)$$



sowie

$$\lambda_3 > 0 \quad \text{und} \quad \left| \frac{\lambda_3}{\lambda_3 + 1} \right| < m_{\leq \text{haftpot } v} |_{F_{FH_z 3}} \quad (4.124)$$

unter denen  $F_{FH_z 3}$  und  $\lambda_3$  wieder möglichst groß gewählt werden sollten. Die so festgelegten Anregungsgrößen garantieren wie oben nachgewiesen in  $P_8^*$  die Eigenschaften

$$p_{d \partial 0} |_{F_{FH_z 1}, \lambda_1} > p_{d \partial 0} |_{F_{FH_z 2}, \lambda_2} > p_{d \partial 0} |_{F_{FH_z 3}, \lambda_3} \quad (4.125)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{FH_z 1}, \lambda_1}}{\partial \mu_{\text{haft } 0\text{bar}}}, \frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{FH_z 1}, \lambda_1}}{\partial \mu_{\text{haft } p_{\text{max}}}}, \frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{FH_z 2}, \lambda_2}}{\partial \mu_{\text{haft } 0\text{bar}}} \\ & \frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{FH_z 2}, \lambda_2}}{\partial \mu_{\text{haft } p_{\text{max}}}}, \frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{FH_z 3}, \lambda_3}}{\partial \mu_{\text{haft } 0\text{bar}}}, \frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{FH_z 3}, \lambda_3}}{\partial \mu_{\text{haft } p_{\text{max}}}} > 0 \\ & \frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{FH_z 1}, \lambda_1}}{\partial n_{LKx}}, \frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{FH_z 3}, \lambda_3}}{\partial n_{LKx}} > 0, \quad \frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{FH_z 2}, \lambda_2}}{\partial n_{LKx}} < 0 \end{aligned}$$

der Zielgrößen.

Für die Änderung von  $n_{LKx}$ ,  $\mu_{\text{haft } 0\text{bar}}$  und  $\mu_{\text{haft } p_{\text{max}}}$  bedeuten die Nebenbedingungen in 4.118

$$\frac{\partial \left( |F_{LGKx}|_{F_{FH_z 2}, \lambda_2} \quad |F_{LGKx}|_{F_{FH_z 3}, \lambda_3} \right)^T}{\partial (n_{LKx} \quad \mu_{\text{haft } 0\text{bar}} \quad \mu_{\text{haft } p_{\text{max}}})} \cdot \frac{\partial (n_{LKx} \quad \mu_{\text{haft } 0\text{bar}} \quad \mu_{\text{haft } p_{\text{max}}})^T}{\partial r} = 0 \quad (4.126)$$

Durch die Auflösung

$$\frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{FH_z 2/3}, \lambda_{2/3}}}{\partial (\mu_{\text{haft } 0\text{bar}} \quad \mu_{\text{haft } p_{\text{max}}})} \cdot \frac{\partial (\mu_{\text{haft } 0\text{bar}} \quad \mu_{\text{haft } p_{\text{max}}})^T}{\partial r} = - \frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{FH_z 2/3}, \lambda_{2/3}}}{\partial n_{LKx}} \cdot \frac{\partial n_{LKx}}{\partial r}$$

erhält man so für  $\frac{\partial n_{LKx}}{\partial r} > 0$  mit 4.125 unter den Nebenbedingungen von 4.118

$$\text{sgn} \left( \frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{FH_z 2/3}, \lambda_{2/3}}}{\partial (\mu_{\text{haft } 0\text{bar}} \quad \mu_{\text{haft } p_{\text{max}}})} \cdot \frac{\partial (\mu_{\text{haft } 0\text{bar}} \quad \mu_{\text{haft } p_{\text{max}}})^T}{\partial r} \right) = +/- 1 \quad (4.127)$$

In Abschnitt C.26 wird der Zusammenhang zwischen einer *Haftreibbeiwert*-Änderung dargestellt als Drehung  $d_0$  und Verschiebung  $s_{p_0 0}$  im *Zielgrößen*-abhängigen Druckpunkt  $p_{d \partial 0}$  und der *Zielgrößen*-Änderung hergeleitet. Dort beschreibt  $r$  ausschließlich eine Änderung der *Haftreibbeiwerte*. Dann folgt mit 4.127 und C.131 für die *Haftreibbeiwert*-Änderung in 4.118

$$s_{p_0} |_{p_0 = p_{d \partial 0} |_{F_{FH_z 2}, \lambda_2}} > 0 \quad s_{p_0} |_{p_0 = p_{d \partial 0} |_{F_{FH_z 3}, \lambda_3}} < 0 \quad (4.128)$$

#### 4 Entwicklung und Verifikation einer Sequentiellen Parameteridentifikation für ein physikalisches Reifenmodell

---

Mit Hilfe einer zweimaligen Anwendung der ersten Gleichung in 4.110 kann der Zusammenhang zwischen  $s_{p_0}|_{p_0=p_d \partial 0|_{F_{FH_z 2}, \lambda_2}}$ ,  $s_{p_0}|_{p_0=p_d \partial 0|_{F_{FH_z 3}, \lambda_3}}$  und der dadurch beschriebenen Änderung der *Haftreibbeiwerte* wieder ausgedrückt werden. Aufgelöst nach den Änderungen der *Haftreibbeiwerte* erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_{haft 0bar}}{\partial r} &= \frac{p_d \partial 0|_{F_{FH_z 3}, \lambda_3} s_{p_0}|_{p_0=p_d \partial 0|_{F_{FH_z 2}, \lambda_2}} - p_d \partial 0|_{F_{FH_z 2}, \lambda_2} s_{p_0}|_{p_0=p_d \partial 0|_{F_{FH_z 3}, \lambda_3}}}{p_d \partial 0|_{F_{FH_z 3}, \lambda_3} - p_d \partial 0|_{F_{FH_z 2}, \lambda_2}} \\ \frac{\partial \mu_{haft p_{max}}}{\partial r} &= \frac{(p_{max} - p_d \partial 0|_{F_{FH_z 2}, \lambda_2}) s_{p_0}|_{p_0=p_d \partial 0|_{F_{FH_z 3}, \lambda_3}} - (p_{max} - p_d \partial 0|_{F_{FH_z 3}, \lambda_3}) s_{p_0}|_{p_0=p_d \partial 0|_{F_{FH_z 2}, \lambda_2}}}{p_d \partial 0|_{F_{FH_z 3}, \lambda_3} - p_d \partial 0|_{F_{FH_z 2}, \lambda_2}} \end{aligned} \quad (4.129)$$

Wieder mit 4.110 folgt für die Darstellung der *Haftreibbeiwert*-Änderung von 4.118 im Punkt  $p_d \partial 0$  der ersten *Zielgröße*

$$\begin{aligned} s_{p_0}|_{p_0=p_d \partial 0|_{F_{FH_z 1}, \lambda_1}} &= \\ \frac{1}{p_d \partial 0|_{F_{FH_z 3}, \lambda_3} - p_d \partial 0|_{F_{FH_z 2}, \lambda_2}} &\cdot \left( s_{p_0}|_{p_0=p_d \partial 0|_{F_{FH_z 2}, \lambda_2}} (p_d \partial 0|_{F_{FH_z 3}, \lambda_3} - p_d \partial 0|_{F_{FH_z 1}, \lambda_1}) \right. \\ &\quad \left. + s_{p_0}|_{p_0=p_d \partial 0|_{F_{FH_z 3}, \lambda_3}} (p_d \partial 0|_{F_{FH_z 1}, \lambda_1} - p_d \partial 0|_{F_{FH_z 2}, \lambda_2}) \right) \end{aligned}$$

Die Eigenschaften 4.125 und 4.128 hierauf angewandt erhält man

$$s_{p_0}|_{p_0=p_d \partial 0|_{F_{FH_z 1}, \lambda_1}} > 0$$

was nach C.131 für die mit  $r$  beschriebene Parameteränderung in 4.118 gleichbedeutend ist mit

$$\frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{FH_z 1}, \lambda_1}}{\partial (\mu_{haft 0bar} \quad \mu_{haft p_{max}})} \cdot \frac{(\mu_{haft 0bar} \quad \mu_{haft p_{max}})^T}{\partial r} > 0$$

Damit lässt sich nun bei zusätzlicher Anwendung von 4.125 und Festlegung von  $\frac{\partial n_{LKx}}{\partial r} = 1$  für die Änderung 4.126 in  $r$  Eigenschaft 4.118 unter den gewählten Betriebsbedingungen der *Zielgrößen* begründen

$$\frac{\partial \left| F_{LGKx} \Big|_{F_{FH_z 1}, \lambda_1}, \Big|_{F_{LGKx} \Big|_{F_{FH_z 2}, \lambda_2}} = (Z_{\tau 8})_{20}, \Big|_{F_{LGKx} \Big|_{F_{FH_z 3}, \lambda_3}} = (Z_{\tau 8})_{30} \right|}{\partial n_{LKx}} \quad (4.130)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial \left| F_{LGKx} \right|_{\lambda_1, F_{FH_z 1}}}{\partial r} \\
 &= \frac{\partial \left| F_{LGKx} \right|_{F_{FH_z 1}, \lambda_1}}{\partial (\mu_{haft 0bar} \quad \mu_{haft p_{max}})} \cdot \frac{(\mu_{haft 0bar} \quad \mu_{haft p_{max}})^T}{\partial r} + \frac{\partial \left| F_{LGKx} \right|_{F_{FH_z 1}, \lambda_1}}{\partial n_{LKx}} > 0
 \end{aligned}$$

Abbildung 4.71 zeigt die Zusammenhänge, die zu Eigenschaft 4.118 führen, nochmal in anschaulicher Form. Im oberen Teil ist die Ausgangssituation der Parametrierung dargestellt mit den entsprechenden Werten der drei *Zielgrößen*. Der mittlere Streifen stellt eine Vergrößerung allein von  $n_{LKx}$  dar, wodurch sich die *Zielgrößen*-Werte  $(Z_{\tau 8})_1$  und  $(Z_{\tau 8})_3$  gemäß 4.125 vergrößern,  $(Z_{\tau 8})_2$  sich jedoch verkleinert. Um  $(Z_{\tau 8})_2$  und  $(Z_{\tau 8})_3$  wieder auf den bisherigen Wert zurückzustellen, muss sich der *Haftreibbeiwert* für den Druckwert  $p_{d \partial 0} |_{F_{FH_z 2}, \lambda_2}$  vergrößern und für  $p_{d \partial 0} |_{F_{FH_z 3}, \lambda_3}$  verkleinern. Damit steigt der *Haftreibbeiwert* wie im unteren Teil der Abbildung zu sehen für  $p_{d \partial 0} |_{F_{FH_z 1}, \lambda_1}$ , wodurch sich  $(Z_{\tau 8})_1$  nochmals und damit insgesamt vergrößert.

Das beschriebene Verfahren zur Festlegung der Anregungsgrößen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, F_{FH_z 1}, F_{FH_z 2}$  und  $F_{FH_z 3}$  für die *Zielgrößen*  $Z_{\tau 8}$  ist *konstruktiv* und kann als Algorithmus mit geringem Berechnungsaufwand realisiert werden. Hiermit lassen sich theoretisch grundsätzlich Anregungsgrößen finden, so dass die *Zielgrößen* die zur garantierten *Konvergenz* notwendigen Eigenschaften aufweisen. Schon die von  $F_{FH_z 1}$  abhängige Wahl von  $\lambda_1$  aber führt durch die Garantie allein in der hinteren *Laufstreifen*-Hälfte liegender *Haftabrispункte* zu unnötig kleinen Beträgen. Die von  $F_{FH_z 1}$  und  $\lambda_1$  abhängige obere Schranke für  $F_{FH_z 2}$  fällt genauso v.A. bei einer großen Zahl  $n_{LS}$  von *Laufstreifen* u.U. so klein aus, dass keine *robuste* Messung der *Zielgrößen* bzw. Identifikation der Parameter mehr möglich ist. Bei der von  $F_{FH_z 2}$  abhängigen oberen Schranke für den Betrag von  $\lambda_2$  und der von  $F_{FH_z 2}$  und  $\lambda_2$  abhängigen oberen Schranke für  $F_{FH_z 3}$  und letztlich für den Betrag von  $\lambda_3$  verstärkt sich dieser Effekt jeweils noch zusätzlich. Daher sollte in jedem Fall versucht werden, die Beträge von  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, F_{FH_z 2}$  und  $F_{FH_z 3}$  zu vergrößern. Um sicherzustellen, dass die Anregungsgrößen gemeinsam trotzdem die Eigenschaften 4.125 erfüllen, wurde in den Abschnitten C.16 bis C.23 ein Verfahren entwickelt, das diese Eigenschaften für gegebene Anregungsgrößen abschätzt, und damit eine *hinreichende* aber nicht *notwendig* funktionierende Überprüfung der Eigenschaften ermöglicht. Das Abschätzungsverfahren unterteilt die Gesamtabschätzung für den kompletten Parameterraum  $P_8^*$  in einzelne Abschätzungen auf kleineren Teilräumen  $P_{8 \subset i}^* \subset P_8^*$ , wobei die Zahl der Teilräume und damit der *Einzel*-Abschätzungen den Wert der wählbaren Größe  $n_{absch max}$  nicht überschreitet, also  $1 \leq i \leq n_{absch max}$  gilt. Bei einer hinreichend feinen Unterteilung gelingt die Gesamtabschätzung in jedem Fall, vorausgesetzt die Eigenschaften sind auch tatsächlich erfüllt. Eine *Einzel*-Abschätzung lässt sich grundsätzlich in *konstant* beschränkter Zeit berechnen, der Aufwand hängt hier nicht vom Teilraum  $P_{8 \subset i}^*$  ab. Unterteilungen des Parameterraums erfolgen nur bei Bedarf *rekursiv*, wodurch ein weiterer Beitrag zur *Effizienz* der Berechnung geliefert wird. Bei der Auslegung der Ab-

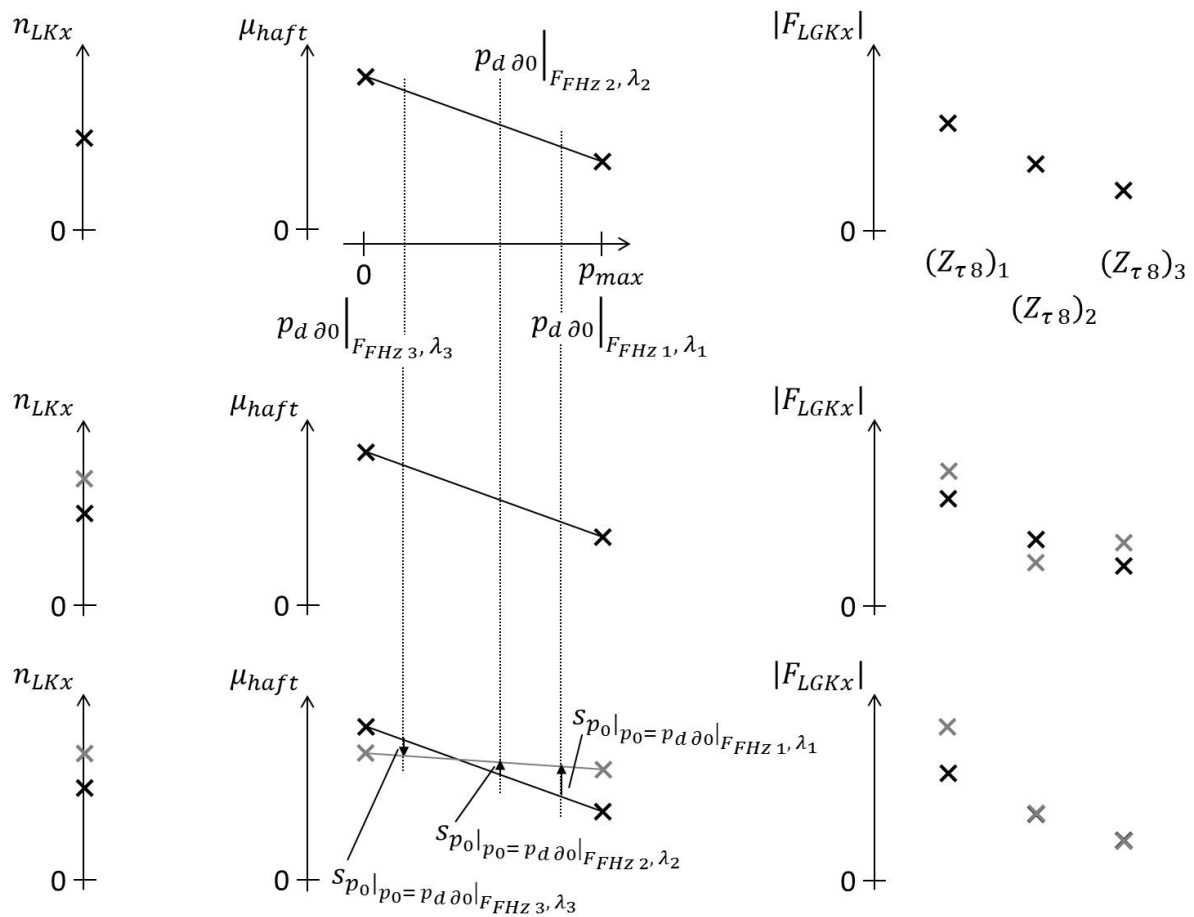


Abbildung 4.71: Änderung von  $(Z_{\tau 8})_1$  bei Variation von  $n_{LKx}$  für konstantes  $(Z_{\tau 8})_2$  und  $(Z_{\tau 8})_3$

schätzungen wird der Ansatz verfolgt, unter Ausnutzung der gegebenen speziellen Eigenschaften gleichläufig von den Parametern abhängende Einflüsse so umfassend wie möglich zusammenzufassen und lediglich gegenläufige Terme getrennt abzuschätzen, um eine einzelne Abschätzung möglichst präzise ausfallen zu lassen. Damit ist das hier entworfene, zugeschnittene Verfahren zwar komplizierter, jedoch deutlich effizienter als allgemeine Prinzipien wie bspw. die Methode der *Intervallarithmetik* (s. z.B. [1]), setzt aber auch dazu verwandte Techniken ein. Eine detaillierte Beschreibung der Eigenschaften des Abschätzungsverfahrens findet sich in Abschnitt C.23.

Systematisch kann man zur Wahl der Anregungsgrößen nun so vorgehen, dass man ausgehend von den Anregungen aus dem bisherigen Konstruktionsverfahren einzelne oder mehrere der Beträge vergrößert und die Erfüllung der Eigenschaften durch diese Wahl der Werte mit Hilfe des Abschätzungsverfahrens überprüft. Diese Verbesserung der Werte für die Anregungsgrößen kann so lange wiederholt werden, bis die Verifikation der geforderten Eigenschaften durch das Abschätzungsverfahren fehlschlägt. Das Abschätzungsverfahren kann von den in 4.125 aufgeführten Eigenschaften das Vorzeichen von  $\frac{\partial \left| F_{LGKz} \right|_{F_{FH_z j}, \lambda_j}}{\partial n_{LKx}}$  über die Funktionen  $AbschErf_{D_{2j}us} > 0$  und  $AbschErf_{D_{2j}os} < 0$  direkt verifizieren. Im Fall der Eigenschaft  $p_{d\partial 0} \left|_{F_{FH_z k}, \lambda_k} > p_{d\partial 0} \right|_{F_{FH_z j}, \lambda_j}$  muss mit der Funktion  $AbschErf_{D_{1j,k}us} > 0$  alternativ die Eigenschaft

$$\left| \frac{\partial \left( \left| F_{LGKx} \right|_{F_{LGKz j}, \lambda_j} \quad \left| F_{LGKx} \right|_{F_{LGKz k}, \lambda_k} \right)^T}{\partial (\mu_{haft 0bar} \quad \mu_{haft pmax})} \right| > 0$$

abgeschätzt werden, wobei nach 4.112 beide Eigenschaften zueinander *äquivalent* sind.

Für die verbleibenden Eigenschaften  $\frac{\partial \left| F_{LGKz} \right|_{F_{FH_z j}, \lambda_j}}{\partial \mu_{haft 0bar}} > 0$  und  $\frac{\partial \left| F_{LGKz} \right|_{F_{FH_z j}, \lambda_j}}{\partial \mu_{haft pmax}} > 0$  ist hier kein Abschätzungsverfahren beschrieben. Ein solches ist jedoch verhältnismäßig einfach realisierbar, praktisch jedoch von geringer Bedeutung, da diese Bedingungen nur bei der Wahl extrem großer Beträge für  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  oder  $\lambda_3$  und der dabei nahezu verschwindenden *Haftreibung* verletzt werden. Die Betriebspunkt-Konstruktion mit 4.120 bis 4.124 garantiert diese Eigenschaft zwar, auf eine Überprüfung dieser Bedingungen durch das Abschätzungsverfahren soll in den folgenden Formulierungen jedoch verzichtet werden. Um in der formalen Definition der *Zielgrößen*  $Z_{\tau 8}$  sowohl über das Verfahren 4.120 bis 4.124 als auch die Abschätzfunktionen aus Abschnitt C.23 gebildete Anregungen zu akzeptieren, wird folgendes *Prädikat* zur Garantie der Eigenschaften 4.125 definiert

$$\begin{aligned} & R_8(F_{FH_z 1}, F_{FH_z 2}, F_{FH_z 3}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \\ \Leftrightarrow & \left( (4.120 \wedge 4.121 \wedge 4.122 \wedge 4.123 \wedge 4.124) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \vee \left( \text{AbschErf}_{D_{1,2,1} \text{ us} > 0} \left( n_{LKx \text{ min}}, n_{LKx \text{ max}}, \mu_{\text{gleit} \text{ 0bar} \text{ 0}}, \mu_{\text{haft} \text{ 0bar} \text{ max}}, \right. \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \left. \mu_{\text{gleit} \text{ pmax} \text{ 0}}, \mu_{\text{haft} \text{ pmax} \text{ max}} \right) \right. \\ & \wedge \text{AbschErf}_{D_{1,3,2} \text{ us} > 0} \left( n_{LKx \text{ min}}, n_{LKx \text{ max}}, \mu_{\text{gleit} \text{ 0bar} \text{ 0}}, \mu_{\text{haft} \text{ 0bar} \text{ max}}, \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \mu_{\text{gleit} \text{ pmax} \text{ 0}}, \mu_{\text{haft} \text{ pmax} \text{ max}} \right) \\ & \wedge \text{AbschErf}_{D_{2,1} \text{ us} > 0} \left( n_{LKx \text{ min}}, n_{LKx \text{ max}}, \mu_{\text{gleit} \text{ 0bar} \text{ 0}}, \mu_{\text{haft} \text{ 0bar} \text{ max}}, \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \mu_{\text{gleit} \text{ pmax} \text{ 0}}, \mu_{\text{haft} \text{ pmax} \text{ max}} \right) \\ & \wedge \text{AbschErf}_{D_{2,2} \text{ os} < 0} \left( n_{LKx \text{ min}}, n_{LKx \text{ max}}, \mu_{\text{gleit} \text{ 0bar} \text{ 0}}, \mu_{\text{haft} \text{ 0bar} \text{ max}}, \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \mu_{\text{gleit} \text{ pmax} \text{ 0}}, \mu_{\text{haft} \text{ pmax} \text{ max}} \right) \\ & \left. \wedge \text{AbschErf}_{D_{2,3} \text{ us} > 0} \left( n_{LKx \text{ min}}, n_{LKx \text{ max}}, \mu_{\text{gleit} \text{ 0bar} \text{ 0}}, \mu_{\text{haft} \text{ 0bar} \text{ max}}, \right. \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \left. \mu_{\text{gleit} \text{ pmax} \text{ 0}}, \mu_{\text{haft} \text{ pmax} \text{ max}} \right) \right) \end{aligned}$$

Berücksichtigt man noch, dass bei den hier ausschließlich auftretenden *stationären Latsch-*Längskräften (s. Abschnitt 4.2.2)  $(F_{FH})_1 = F_{LGKx}$  gilt, ist es nun möglich, die *Zielgrößen* zu formulieren. Diese setzen sich wieder aus den *Auswertungsfunktionalen*

$$Z_{E8}((F_{FH})_1(\cdot), t) = \begin{pmatrix} |(F_{FH})_1(t)| \\ |(F_{FH})_1(t)| \\ |(F_{FH})_1(t)| \end{pmatrix}$$

und den auf der Hilfsbedingung

$$b_{\lambda \neq 0} \Leftrightarrow \left( b_S \wedge (v_B = v_{B0} > 0) \wedge (\delta = \alpha = \varepsilon_W = 0) \right. \\ \left. \wedge R_8(F_{FH_{z1}}, F_{FH_{z2}}, F_{FH_{z3}}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \right)$$

basierenden *Funktional-Bedingungen*

$$B_8((F_{FH})_3(\cdot), \lambda(\cdot), t) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_{\lambda \neq 0} \wedge ((F_{FH})_3(t) = F_{FH_{z1}}) \wedge (\lambda(t) = \lambda_1) \\ b_{\lambda \neq 0} \wedge ((F_{FH})_3(t) = F_{FH_{z2}}) \wedge (\lambda(t) = \lambda_2) \\ b_{\lambda \neq 0} \wedge ((F_{FH})_3(t) = F_{FH_{z3}}) \wedge (\lambda(t) = \lambda_3) \end{pmatrix}$$

zusammen.

### Unabhängigkeit der Zielgrößen

Als Teil einer *Sequentiellen Parameteridentifikation* müssen die *Zielgrößen*  $Z_{\tau 8}$  Eigenschaft 3.23 aufweisen und damit unabhängig von später zu identifizierenden Parametern

sein. Zu diesen Parametern gehört nur noch  $c_{GF\,quer}$ , das aus demselben Grund der für  $\delta = \alpha = \varepsilon_W = 0$  ausbleibenden Querkräfte auf *Latsch*, *Reifengürtel* und *Felge* wie in Abschnitt 4.2.2 auf keine Modellgröße einen Einfluss besitzt. Somit ist auch  $Z_{\tau\,8}$  unabhängig von  $c_{GF\,quer}$ , besitzt also Eigenschaft 3.23.

### Eindeutigkeit der Zielgrößen

Bevor der Parameter-*Zielgrößen*-Zusammenhang  $P_8^V \leftrightarrow Z_{\tau\,8}$  als eindeutig nachgewiesen werden kann, muss erst klar sein, dass  $Z_{\tau\,8}$  überhaupt eine *wohldefinierte* Funktion in  $P_8^V$  darstellt, also jedem Wert  $P_{8\,0}^V$  genau einen Wert  $Z_{\tau\,8\,0}$  zuordnet. Dazu wird in Abschnitt C.19 gefordert, dass die Größen  $|\lambda_1|$ ,  $|\lambda_2|$  und  $|\lambda_3|$  hinreichend klein sind (s. C.114). Weiter wird vorgeschlagen, wie auch diese Eigenschaft für konkrete *Umfangsschlupf*-Werte in Form einer zusätzlichen Variante des Verfahrens *AbschErf<sub>B<sub>D</sub></sub>* aus Abschnitt C.23 abgesichert werden kann. Es soll darauf jedoch verzichtet und davon ausgegangen werden, dass die gewählten Werte hinreichend klein sind, so dass unter  $B_8$  für konstantes  $P_{8\,0}^V$  auch  $Z_{\tau\,8}$  konstant ist.

Um nun den mehrdimensionalen Parameter-*Zielgrößen*-Zusammenhang  $P_8^V \leftrightarrow Z_{\tau\,8}$  wie für eine *Zielgrößengruppe* einer *Sequentiellen Parameteridentifikation* vorausgesetzt als eindeutig und lösbar zu erweisen, wird in den letzten beiden Punkten der Zusammenfassung zu Abschnitt 3.3 empfohlen, ersatzweise

- i) für  $j = 1$  die *streng monotone Steigung* von 3.28 in  $(P_i^V)_j$  (Eindeutigkeit von  $(Z_{\tau\,8})_1|_{(Z_{\tau\,8})_{2..3\,0}}$  in  $(P_8^V)_1$ ),
- ii) ausschließlich für  $j = 1$  Eigenschaft 3.32 (*streng monotone Änderung* von  $(P_8^V)_2|_{(Z_{\tau\,8})_{2..3\,0}}$  und  $(P_8^V)_3|_{(Z_{\tau\,8})_{2..3\,0}}$  in  $(P_8^V)_1$ ),
- iii) 3.39 (*streng monotonen Wachstum* von  $(Z_{\tau\,8})_2$  und  $(Z_{\tau\,8})_3$  in ausschließlich steigendem  $(P_8^V)_2$  oder  $(P_8^V)_3$ ),
- iv) 3.40 (*negative Funktionaldeterminante* von  $(Z_{\tau\,8})_{2..3}$  in  $(P_8^V)_{2..3}$ ) und
- v) 3.41 (gegenläufige *streng monotone Änderung* von  $(Z_{\tau\,8})_2$  und  $(Z_{\tau\,8})_3$  in  $(P_8^V)_1$ )

nachzuweisen. Die Grundlagen zum Nachweis dieser Eigenschaften finden sich im Wesentlichen schon in der Begründung zur Wahl von  $P_8^V$  und  $Z_{\tau\,8}$ , sollen hier jedoch zum Beweis der vollständigen Betrachtung zusammengetragen werden. Voraussetzung für die entsprechenden *Zielgrößen*-Eigenschaften ist die dort auch grundsätzlich ausgenutzte Eigenschaft, dass  $Z_{\tau\,8}$  die Bedingung  $R_8$  erfüllt, und damit 4.125 vorausgesetzt werden kann.

Es gilt  $(P_8^V)_1 = n_{LKx}$  und wie oben gezeigt  $(Z_{\tau\,8})_j = |F_{LGKx}|_{\lambda_j, F_{FH_z j}}$ . Dann wird mit der Herleitung von 4.130 Eigenschaft 4.118 und damit die *streng monotone Stei-*

#### 4 Entwicklung und Verifikation einer Sequentiellen Parameteridentifikation für ein physikalisches Reifenmodell

---

ung von  $(Z_{\tau 8})_1|_{(Z_{\tau 8})_{2..30}}$  in  $(P_8^V)_1$  gezeigt, was für  $i = 8$  und  $j = 1$  gleichbedeutend ist mit Eigenschaft  $i$ ). Hieraus folgt die Eindeutigkeit des Gesamtzusammenhangs  $P_8^V \leftrightarrow Z_{\tau 8}$  unter der noch nicht gesicherten Voraussetzung, dass der Restzusammenhang  $(P_8^V)_{2..3} \leftrightarrow (Z_{\tau 8})_{2..3}|_{(P_8^V)_{10}}$  eindeutig ist.

Beim Nachweis von 3.32 für  $j = 1$  ist 3.32ii) bereits mit  $i$ ) gezeigt, und es genügt, allein 3.32i) zu betrachten. In 4.129 werden die Änderungen der *Haftreibbeiwerte* beschrieben, die sich für  $\frac{\partial n_{LKx}}{\partial r} > 0$  und konstant bleibendes  $(Z_{\tau 8})_{2..30}$  ergeben. Die Voraussetzung 4.99 an  $P_8^*$  garantiert 4.100, was nach 4.24 mechanisch sinnvolle Werte  $p_{ij} \geq 0$  und kombiniert mit 4.101  $0 \leq p_{ij} < p_{max}$  sicherstellt. Zusammen mit 4.113 und 4.125 bedeutet dies

$$0 \leq p_{d \partial 0}|_{F_{FH z 3}, \lambda_3} < p_{d \partial 0}|_{F_{FH z 2}, \lambda_2} < p_{max}$$

und es folgt aus 4.129 mit 4.128

$$\frac{\partial \mu_{haft 0bar}}{\partial r} < 0 \quad \frac{\partial \mu_{haft p_{max}}}{\partial r} > 0$$

Um das Resultat auf die letztlich zur Suche verwendeten Parameter  $\hat{\mu}_{haft 1}$  und  $\hat{\mu}_{haft 2}$  zu übertragen, kann Ergebnis 4.106 zur *Jacobimatrix* der Parametertransformation benutzt werden. Damit gilt für die umgekehrte Transformation

$$\frac{\partial (\hat{\mu}_{haft 1} \quad \hat{\mu}_{haft 2})^T}{\partial (\mu_{haft 0bar} \quad \mu_{haft p_{max}})} = \left( \frac{\partial (\mu_{haft 0bar} \quad \mu_{haft p_{max}})^T}{\partial (\hat{\mu}_{haft 1} \quad \hat{\mu}_{haft 2})} \right)^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22}} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & 0 \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$a_{11}, a_{22} > 0, \quad a_{21} \geq 0$$

wobei die Größen  $a_{21}$  und  $a_{22}$  von den *Haftreibbeiwerten* abhängen. Das bedeutet für die resultierenden Änderungen von  $\hat{\mu}_{haft 1}$  und  $\hat{\mu}_{haft 2}$  insgesamt

$$\frac{\partial \hat{\mu}_{haft 1}}{\partial r} = \frac{1}{a_{11}} \cdot \frac{\partial \mu_{haft 0bar}}{\partial r} < 0 \quad \frac{\partial \hat{\mu}_{haft 2}}{\partial r} = -\frac{a_{21}}{a_{11}a_{22}} \cdot \frac{\partial \mu_{haft 0bar}}{\partial r} + \frac{1}{a_{22}} \cdot \frac{\partial \mu_{haft p_{max}}}{\partial r} > 0$$

Zusammengefasst folgt damit, dass für konstantes  $(Z_{\tau 8})_{2..30}$  der Parameterwert  $(P_8^V)_2$  *streng monoton fällt* und  $(P_8^V)_3$  *streng monoton steigt*, wenn sich  $(P_8^V)_1$  vergrößert. So erhält man mit den Konstanten  $s_{P 812} = 1$  und  $s_{P 813} = -1$  Eigenschaft 3.32i) für  $i = 8$  und  $j = 1$ , womit  $ii$ ) nachgewiesen ist. Damit besitzt die Abbildung  $(P_8^V)_1 \leftrightarrow (Z_{\tau 8})_1|_{(Z_{\tau 8})_{2..30}}$  sicher einen zusammenhängenden Definitionsbereich.

Mit 4.109 ergibt sich

$$\frac{\partial (Z_{\tau 8})_{2/3}}{\partial \hat{\mu}_{haft 1}} = \frac{\partial |F_{LGKx}|_{\lambda_{2/3}, F_{FH z 2/3}}}{\partial \hat{\mu}_{haft 1}} > 0 \quad \frac{\partial (Z_{\tau 8})_{2/3}}{\partial \hat{\mu}_{haft 2}} = \frac{\partial |F_{LGKx}|_{\lambda_{2/3}, F_{FH z 2/3}}}{\partial \hat{\mu}_{haft 2}} > 0$$



woraus 3.39 für  $i = 8$ ,  $|P_8| = 3$  und damit auch *iii*) direkt folgt. Gezeigt ist damit eine der beiden Eigenschaften, mit denen man die Eindeutigkeit und Lösbarkeit des Restzusammenhangs  $(P_8^V)_{2..3} \leftrightarrow (Z_{\tau 8})_{2..3}|_{(P_8^V)_{10}}$  erhält.

Unter  $R_8$  gilt wie oben gezeigt 4.125, was das Einsetzen von  $p_d \partial 0|_{F_{FH z 3}, \lambda_3}$  für  $p_d \partial 0|_{F_{FH z 0}, \lambda_0}$  und  $p_d \partial 0|_{F_{FH z 2}, \lambda_2}$  für  $p_d \partial 0|_{F_{FH z 1}, \lambda_1}$  in 4.112 erlaubt, und damit die Schlussfolgerung

$$\left| \frac{\partial \left( (Z_{\tau 8})_{3,2} \right)^T}{\partial (\mu_{haft 0bar} \quad \mu_{haft pmax})} \right| = \left| \frac{\partial \left( \left| F_{LGKx}|_{F_{LGKz 3}, \lambda_3} \quad \left| F_{LGKx}|_{F_{LGKz 2}, \lambda_2} \right| \right)^T}{\partial (\mu_{haft 0bar} \quad \mu_{haft pmax})} \right| > 0$$

ermöglicht. Determinanten sind *alternierend*, was u.A. bedeutet, dass das Vertauschen zweier Zeilen der Matrix bei gleichbleibendem Betrag das Vorzeichen der Determinante umkehrt. Also gilt

$$\left| \frac{\partial \left( (Z_{\tau 8})_{2..3} \right)^T}{\partial (\mu_{haft 0bar} \quad \mu_{haft pmax})} \right| = - \left| \frac{\partial \left( (Z_{\tau 8})_{3,2} \right)^T}{\partial (\mu_{haft 0bar} \quad \mu_{haft pmax})} \right| < 0$$

Mit 4.107 folgt weiter

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \left( (Z_{\tau 8})_{2..3} \right)^T}{\partial (\hat{\mu}_{haft 1} \quad \hat{\mu}_{haft 2})} \right| &= \left| \frac{\partial \left( (Z_{\tau 8})_{2..3} \right)^T}{\partial (\mu_{haft 0bar} \quad \mu_{haft pmax})} \cdot \frac{\partial (\mu_{haft 0bar} \quad \mu_{haft pmax})^T}{\partial (\hat{\mu}_{haft 1} \quad \hat{\mu}_{haft 2})} \right| \\ &= \left| \frac{\partial \left( (Z_{\tau 8})_{2..3} \right)^T}{\partial (\mu_{haft 0bar} \quad \mu_{haft pmax})} \right| \cdot \left| \frac{\partial (\mu_{haft 0bar} \quad \mu_{haft pmax})^T}{\partial (\hat{\mu}_{haft 1} \quad \hat{\mu}_{haft 2})} \right| < 0 \end{aligned}$$

was 3.40 für  $i = 8$ ,  $|P_i| = 3$  und  $s_D = -1$  entspricht, und damit *iv*) beweist. Zusammen mit *iii*) ist hierdurch nun die Eindeutigkeit und Lösbarkeit des Restzusammenhangs  $(P_8^V)_{2..3} \leftrightarrow (Z_{\tau 8})_{2..3}|_{(P_8^V)_{10}}$  nachgewiesen.

Durch Bedingung  $R_8$  besitzt der Parameter-Zielgrößen-Zusammenhang  $P_8^V \leftrightarrow Z_{\tau 8}$  Eigenschaft 4.125, und es gilt

$$\frac{\partial \left| F_{LGKx}|_{F_{FH z 2}, \lambda_2} \right|}{\partial n_{LKx}} < 0 \qquad \frac{\partial \left| F_{LGKx}|_{F_{FH z 3}, \lambda_3} \right|}{\partial n_{LKx}} > 0$$

Dies ist für  $i = 8$ ,  $|P_8| = 3$  und  $s_Z = -1$  gleichbedeutend mit Eigenschaft 3.41, womit *v*) folgt. So ist nun auch bei nicht möglicher Lösung des Restproblems  $(P_8^V)_{2..3} \leftrightarrow (Z_{\tau 8})_{2..3}|_{(P_8^V)_{10}}$  klar, in welche Richtung  $(P_8^V)_1$  verändert werden muss, und die Eindeutigkeit und Lösbarkeit des Parameter-Zielgrößen-Zusammenhangs  $P_8^V \leftrightarrow Z_{\tau 8}$  damit gemäß Abschnitt 3.3 insgesamt gezeigt.

Eindeutig ist der Zusammenhang auch, wenn die originalen Parameter  $\mu_{haft 0bar}$  und

$\mu_{haft \Delta p}$  verwendet werden, da die Parametertransformation zu  $\hat{\mu}_{haft 1}$  und  $\hat{\mu}_{haft 2}$  wie oben gezeigt insgesamt eindeutig ist. Die zur Lösbarkeit mit den Methoden aus Abschnitt 3.3 erforderlichen Eigenschaften ergeben sich aber nur mit den Alternativparametern  $\hat{\mu}_{haft 1}$  und  $\hat{\mu}_{haft 2}$ . Zur Bestimmung der Werte zu den Parametern  $n_{LKx}$ ,  $\mu_{haft 0bar}$  und  $\mu_{haft \Delta p}$  werden diese Methoden also auf den Parameter-Zielgrößen-Zusammenhang  $P_8^V \leftrightarrow Z_{\tau 8}$  angewandt und anschließend die Parameter  $\hat{\mu}_{haft 1}$  und  $\hat{\mu}_{haft 2}$  über die Transformationen 4.105 und 4.102 in die Werte der originalen Darstellung  $\mu_{haft 0bar}$  und  $\mu_{haft \Delta p}$  umgerechnet.

### 4.2.9 Parameter $c_{GF \text{ quer}}$

Die Quersteife  $c_{GF \text{ quer}}$  der Verbindung von *Reifengürtel* und Felge hat auf *fahrdynamisch* relevante Größen in *stationären* Situationen einen wesentlich größeren Einfluss als im *Stationärfall*. Beispielsweise stellen sich *stationär* bei vorgegebener Vertikalkraft  $F_{FH_z}$  auch für variiertes  $c_{GF \text{ quer}}$  die gleichen resultierenden Horizontalkräfte ein, da der damit veränderte Abstand zwischen Felge und *Reifengürtel* die Bewegung und Lage des *Reifengürtels* relativ zur Straße nicht beeinflusst. Zwar ist der *stationäre* Wert einer Seitenkraft  $F_{FH_y}$  unter diesen Bedingungen unabhängig von  $c_{GF \text{ quer}}$ , der Auf- und Abbau von  $F_{FH_y}$  bei sich ändernder Anregung fällt jedoch abhängig von  $c_{GF \text{ quer}}$  sehr unterschiedlich aus. Für eine möglichst genaue Bestimmung des Parameters sollte dieser unter der Anregung bestimmt werden, unter der er den deutlichsten Einfluss besitzt. Daher wird zur Identifikation von  $c_{GF \text{ quer}}$  anders als bei der Bestimmung der übrigen Parameter eine *dynamische* Anregung verwandt. Diese Anregung muss eine sich ändernde Seitenkraft  $F_{FGG_y}$  aus der Perspektive des *Reifengürtels* zwischen *Reifengürtel* und Felge bewirken. Prinzipiell eignen sich dafür eine Änderung des *Schräglaufwinkels*  $\alpha$ , des *Sturzwinkels*  $\varepsilon_W$  oder der *Reifeneinfederung*  $f$  unter  $\alpha \neq 0$  bzw.  $\varepsilon_W \neq 0$ . Da sich bei einer Änderung von  $F_{FH_y}$  Dämpfungseffekte aus  $d_{GF \text{ quer}}$  mit elastischen Reaktionen durch  $c_{GF \text{ quer}}$  überlagern, müssen mehrere Ordnungen von Zeitableitungen berücksichtigt werden. Variationen von  $\alpha$  oder  $\varepsilon_W$  bewirken über die wechselnde Drehbewegung des *Reifengürtels* in höheren Zeitableitungen durch Kreiseffekte eine zusätzliche Drehung oder Querverschiebung des *Latschs*. Dieser Effekt beeinflusst schon die Entstehung der Seitenkraft selbst, kann sogar entgegengesetzt zu den übrigen Abläufen wirken und ist in jedem Fall kompliziert abzuschätzen. Von den verbleibenden Möglichkeiten soll die Variante mit  $\alpha \neq 0$  aber  $\varepsilon_W = 0$  gewählt werden.

Wie in Abbildung 4.72 gezeigt berührt der *Reifengürtel* zum Zeitpunkt  $t_0$  den Boden, während er sich über die gesamte Zeit mit  $\alpha = \alpha_0 > 0$  und  $\lambda = \varepsilon_W = 0$  bewegt. Spätestens ab  $t_0$  wird die Felge mit der Geschwindigkeit  $\dot{r}_{F0z} = -\dot{f}_0 < 0$  nach unten bewegt. Damit durchdringt der *Reifengürtel* die Fahrbahn, und die *Reibkontakt-Elemente* werden entgegen der Querbewegung des Reifens ausgelenkt. So entsteht eine ansteigende

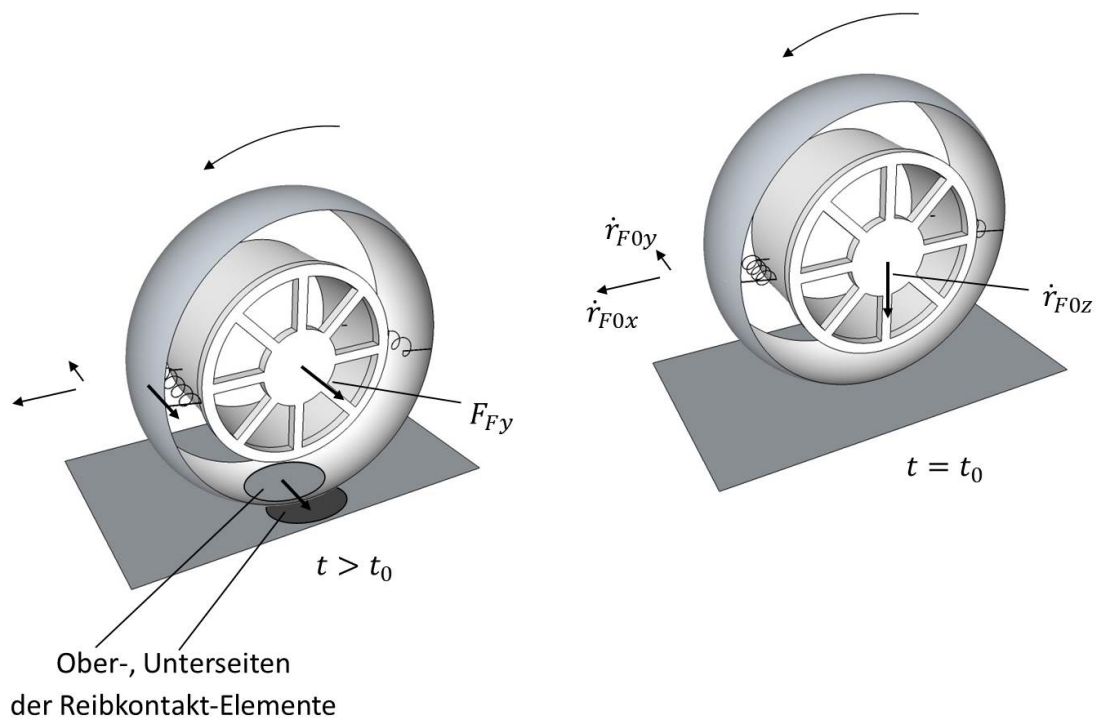


Abbildung 4.72: Anregung zur Bestimmung von  $c_{GF\text{ quer}}$

Seitenkraft, die zum Zeitpunkt  $t_0$  selbst noch 0 ist. Übertragen in den *Reifengürtel* wird dieser gegenüber der Felge in Querrichtung ausgelenkt, wobei die Größe der Auslenkung anfangs unabhängig von  $c_{GF\text{ quer}}$  ausfällt. Je nach Wert der Quersteife  $c_{GF\text{ quer}}$  führt diese Auslenkung um  $t = t_0$  zu unterschiedlichen in die Felge eingepprägten Querkräften  $F_{FH_y}$ . Damit durch die gleichzeitig mit der Querauslenkung stattfindende Kippbewegung des *Reifengürtels* in Kombination mit dem (kleinen) Höhenversatz zwischen *Reifengürtel* und Felge die aus Perspektive des *Reifengürtels* erwünschte Anregung nicht unkontrolliert verfälscht wird, soll wie später näher erläutert eine hinreichend große *Bahngeschwindigkeit*  $v_B$  den Vertikalversatz zwischen *Reifengürtel* und Felge minimieren. Dass für  $t = t_0$  noch keine Kontaktfläche zur Fahrbahn vorliegt, macht die Argumentation der um  $t = t_0$  von  $c_{GF\text{ quer}}$  unabhängigen Querverschiebung des *Reifengürtels* erst möglich. Die Systemreaktion von der Anregung  $\dot{r}_{F0z}$  bis zur Antwort  $F_{FH_y}$  für  $t > t_0$  durchläuft mehrere *träge* Vorgänge wie die Massenbeschleunigung des *Reifengürtels* zunächst in vertikaler, dann in Querrichtung oder die Querauslenkung der *Reibkontakt-Elemente*. Daher ist zum Zeitpunkt  $t_0$  formal mit einer *linearisierten* Änderung der Felgenquerkraft von  $\dot{F}_{FH_y} = 0$  zu rechnen, und erst von den Zeitableitungen höherer Ordnung werden sich bestimmte von 0 unterscheiden. Für eine robuste Analyse eignet sich am besten,  $F_{FH_y}$  zu einem definierten Zeitpunkt  $t_0 + \Delta t_0$  auszuwerten, zu dem durch ein hinreichend kleines  $\Delta t_0$  die Vergrößerung von  $F_{FH_y}$  für  $t > t_0$  noch garantiert ist. Mit den beschriebenen Größen ist es nun möglich, die *Zielgröße*  $Z_{\tau,9}$  zur Identifikation der *Parametergruppe*

$$P_9^V = c_{GF\text{ quer}}$$

zu definieren. Diese basiert auf den Konstanten

$$\alpha_0, t_1, \Delta t_0, \dot{f}_0, v_{B0} > 0, \quad t_3 > t_2 > t_1$$

besteht aus dem *Auswertungsfunktional*

$$Z_{E9}((F_{FH})_2(\cdot), t) = (F_{FH})_2(t + \Delta t_0)$$

und mit der Hilfsbedingung

$$b_{instat} \Leftrightarrow \left( \begin{array}{l} (\delta = \varepsilon_W = \lambda = 0) \wedge (t_1, t_2 - t_1, t_3 - t_2, v_{B0} \text{ hinreichend groß}) \\ \wedge (\Delta t_0 \text{ hinreichend klein}) \end{array} \right)$$

und -funktion

$$f_{ber}(f(\cdot), (F_{FH})_3(\cdot)) = \max \{f(t') \mid ((F_{FH})_3(t') = -m_G \cdot g) \wedge (t_1 \leq t' \leq t_2)\}$$

aus der *Funktional-Bedingung*

$$\begin{aligned}
 & B_9(f(\cdot), \alpha(\cdot), v_B(\cdot), (F_{FH})_3(\cdot), t) \\
 \Leftrightarrow & \left( b_{instat} \wedge ((F_{FH})_3(t_1) = -m_G \cdot g) \wedge ((F_{FH})_3(t_2) = 0) \wedge (t > t_3) \right. \\
 & \wedge \left( (0 \leq t' \leq t + \Delta t_0) \Rightarrow \left( v_B(t') = \frac{v_{B0}}{\cos(\alpha(t'))} \right) \right) \\
 & \wedge ((t_3 \leq t' \leq t) \Rightarrow (f(t') = f_{ber}(f(\cdot), (F_{FH})_3(\cdot)))) \\
 & \wedge ((0 \leq t' \leq t_3) \Rightarrow (\alpha(t') = 0)) \wedge ((0 \leq t' < t) \Rightarrow (|\dot{f}(t')|, |\dot{\alpha}(t')| \text{ klein})) \\
 & \left. \wedge ((t \leq t' \leq t + \Delta t_0) \Rightarrow ((\dot{f}(t') = \dot{f}_0) \wedge (\alpha(t') = \alpha_0))) \right)
 \end{aligned}$$

An dieser Stelle wurde in den Abschnitten zu den übrigen *Parametergruppen* die Unabhängigkeit von den nachfolgend zu identifizierenden Parametern nachgewiesen. Da es sich bei  $P_9^V$  jedoch um die letzte zu bestimmende *Parametergruppe* handelt, ist dies nicht mehr erforderlich, und Eigenschaft 3.23 unmittelbar erfüllt.

### Eindeutigkeit der Zielgröße

Zum Nachweis der Eindeutigkeit (3.24) von  $Z_{\tau_9}$  in  $P_9^V$  sollen die modellinternen Auswirkungen der Felgen-Vertikalbewegung analysiert, und dabei der Wirkpfad bis zur Antwort in der Felgen-Querkräft bestimmt werden, der die kleinste Ordnung der Zeitableitung besitzt und von  $c_{GF\text{ quer}}$  beeinflusst wird. Von diesem wird erwartet, dass er den  $c_{GF\text{ quer}}$ -abhängigen Anteil des Verhaltens von  $F_{FH_y}$  zum Zeitpunkt  $t_0 + \Delta t_0$  bestimmt.  $t_0$  wird als der Zeitpunkt definiert, zu dem die *dynamische* Anregung beginnt, d.h.

$$B_9(f(\cdot), (F_{FH})_3(\cdot), t_0)$$

gilt. Zum Zeitpunkt  $t_1$  gilt  $F_{F0z} = F_{FH_z} = -m_G \cdot g$ , und damit *stationär* nach 4.10 und 4.9  $F_{LG0z} = 0$ . Nach Definition 20 beschreibt  $A_{K0}$  auf ebener Fahrbahn eine Drehung um die inertielle Vertikalrichtung  $z_0$ , womit sich über 4.35 für die *Latsch-Vertikalkraft*  $F_{LGKz}|_{t_1} = 0$  ergibt. Aus 4.15 erhält man durch die *Stationärlage* weiter  $f_G|_{t_1} = 0$ .  $f_G$  ist als Abstand des tiefsten Punkts der *Gürtelringschale* zur Fahrbahnebene definiert, wenn dieser unterhalb der Fahrbahn liegt, andernfalls als 0. Also durchdringt die *Gürtelringschale* den Boden nicht, und es folgt  $l_{mat\ i}|_{t_1} = 0$  für die Längen sämtlicher *Laufstreifen*. Dann ergibt sich mit 4.24 auch  $p_{ij}|_{t_1} = 0$ , mit 4.25  $F_{z\ ij}|_{t_1} = 0$  und über 4.30 und 4.33  $F_{x/y\ ij}|_{t_1} = 0$ , was nach 4.34 insgesamt das Verschwinden der *Latsch-Kräfte* und mit 4.22 auch der *Latsch-Momente*  $F_{LGK}|_{t_1} = M_{LGK}|_{t_1} = 0$  bedeutet. Wieder über 4.35 und 4.10 erhält man *stationär*  $F_{FG0y} = M_{FG0} = 0$ . Das bedeutet, dass der Vektor rechts in 4.42

#### 4 Entwicklung und Verifikation einer Sequentiellen Parameteridentifikation für ein physikalisches Reifenmodell

---

verschwindet, da  $R_{Gx}$  und  $R_{Gz}$  als Transformationsmatrizen *regulär* sind. Eingeschränkt auf die erste und dritte Vektorkomponente erhält man

$$\begin{pmatrix} c_{GF \text{ rot rad}} & -d_{GF \text{ rot rad}} \cdot \dot{\varphi}_{0y \text{ const}} \\ d_{GF \text{ rot rad}} \cdot \dot{\varphi}_{0y \text{ const}} & c_{GF \text{ rot rad}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_{const \ 3,2}|_{t_1} \\ R_{const \ 2,1}|_{t_1} \end{pmatrix} = 0$$

Die Spaltenvektoren der Matrix sind *orthogonal*, die Matrix ist also *regulär*, und es folgt insgesamt  $R_{const \ 3,2}|_{t_1} = R_{const \ 2,1}|_{t_1} = R_{const \ 1,3}|_{t_1} = 0$  bzw. mit 4.41  $\varphi_{FG \ lin}|_{t_1} = 0$ . Nach 4.4 und Abschnitt C.1 heißt das  $\varphi_{G0}|_{t_1} = \varphi_{F0}|_{t_1}$ , also  $(\varphi_{G0})_{1,3}|_{t_1} = 0$ . Für die Größen aus Abschnitt 4.1.7 gilt damit weiter  $R_{Gx}|_{t_1} = R_{Gz}|_{t_1} = I_3$  und mit  $F_{FG0y} = 0$  und 4.39 erhält man  $r_{F0y}|_{t_1} - r_{G0y}|_{t_1} = 0$ . 4.39 behandelt den *stationären* Einfluss von  $c_{GF \text{ quer}}$  in 4.6, der einzigen Modellgleichung, die direkt von  $c_{GF \text{ quer}}$  abhängt. Also besitzt  $c_{GF \text{ quer}}$  wegen  $r_{F0y}|_{t_1} - r_{G0y}|_{t_1} = 0$  auf den Systemzustand für  $t = t_1$  keinen Einfluss.

Im Zeitraum  $t_1 \leq t \leq t_3$  wird in der Anregung die *Reifeneinfederung*  $f$  und damit  $r_{F0z}$  variiert. Hierdurch werden in den *Reifengürtel* von der Felge ausschließlich Vertikaleregungen  $F_{FG0z}$  eingepreßt, die dessen *Stationärbewegung* in erster Reaktion nur in Vertikalrichtung verändern. Mit der Drehlage  $(\varphi_{G0})_{1,3} = 0$  fallen die Längen der *Laufstreifen* symmetrisch aus ( $l_{mat \ i} = l_{mat \ n_{LS}-i+1}$ ), genauso wie mit 4.24 und 4.25  $F_{z \ ij} = F_{z \ (n_{LS}-i+1)j}$ , und es bleibt nach 4.34, da für  $F_{LGKy} = M_{LGKz} = 0$  nach 4.16 und 4.28  $y_{REK \ def \ ij} = -y_{REK \ def \ (n_{LS}-i+1)j}$  gilt, weiterhin  $M_{LGKx} = 0$ . Durch  $\lambda = \alpha = 0$  entstehen unter  $\varphi_{G0x} = 0$  auch weiterhin keine horizontalen *Latsch*-Kräfte (s. Abschn. 4.2.2), also ist  $F_{LGKx} = F_{LGKy} = M_{LGKz} = 0$ . So erhält sich in der Anregung des *Reifengürtels* die Eigenschaft  $F_{LGKy} = (M_{LGK})_{1,3} = F_{FG0y} = (M_{FG0})_{1,3} = 0$ , und es gilt, was die Lage des *Reifengürtels* betrifft, auch für  $t_1 \leq t \leq t_3$  die Eigenschaft  $(\varphi_{G0})_{1,3} = r_{F0y} - r_{G0y} = 0$  (s.o.).

Zum Zeitpunkt  $t_2$  kann analog zur Situation für  $t_1$  aus  $F_{FHx}|_{t_2} = 0$  gefolgert werden, dass  $f_G|_{t_2} > 0$  ist. Da  $f_G|_{t_1} = 0$  und  $f_G|_{t_2} > 0$  gilt, und im Zeitraum zwischen  $t_1$  und  $t_2$  *Stationärzustände* mit  $\varphi_{G0x} = 0$  *kontinuierlich* durchlaufen werden, folgt, dass mit  $f_{ber}$  die *Reifeneinfederung*  $f$  bestimmt wird, für die unter den Voraussetzungen bis zum Zeitpunkt  $t_3$  und  $\varphi_{G0x} = 0$  der *Reifengürtel* den Boden berührt, jedoch nicht durchdringt. Dann berührt zum Zeitpunkt  $t_3$  der *Reifengürtel* die Fahrbahn, ohne sie zu durchdringen, und es gilt wie für  $t_1$ , dass  $f_G|_{t_3} = F_{LGK}|_{t_3} = M_{LGK}|_{t_3} = (\varphi_{G0})_{1,3}|_{t_3} = r_{F0y}|_{t_3} - r_{G0y}|_{t_3} = 0$ . Während der Zeitspanne  $t_3 \leq t < t_0$  bleibt die Anregung weiterhin *stationär* und stimmt bis auf  $\alpha$  und das konform zu  $B_9$  veränderte  $v_B$  mit der zum Zeitpunkt  $t_3$  überein. Die synchrone Änderung von  $\alpha$  und  $v_B$  bedeutet nach 4.36 unter  $\delta = 0$  ausschließlich eine Änderung der Felgenquergeschwindigkeit  $\dot{r}_{F0y}$ . Auch  $\dot{r}_{F0x}$  und  $\dot{\varphi}_{F0y}$  bleiben konstant. Dann treten verursacht durch die Massenträgheit des *Reifengürtels* gegenüber dem Zeitpunkt  $t_3$  höchstens kleine Änderungen von  $r_{F0y} - r_{G0y}$  auf, die nach 4.6 und 4.8 bei gleichbleibenden Werten  $(\varphi_{G0})_{1,3} = 0$  zu einer rein translatorischen Querbeschleunigung des *Reifengürtels* führen, und damit wiederum die Orientierung  $(\varphi_{G0})_{1,3} = 0$  und Höhe  $r_{FG0z}$

des *Reifengürtels* erhalten. Mit gleichbleibendem  $r_{FG0z}$  ergeben sich auch straßenseitig keine zusätzlichen Einflüsse auf den *Reifengürtel*, da wie für  $t = t_3$  weiterhin  $f_G = 0$ ,  $l_{mat\ i} = 0$  und damit  $F_{LGK} = F_{LGK}|_{t_3}$  bzw.  $M_{LGK} = M_{LGK}|_{t_3}$  gilt. Insgesamt bleibt also die räumliche Orientierung des *Reifengürtels* auch im Zeitintervall  $t_3 \leq t < t_0$  erhalten. Da unmittelbar vor dem Zeitpunkt  $t_0$  durch die zuvor langsame Änderung von  $\alpha$  und  $v_B$  von einem *Stationärzustand* ausgegangen werden kann, lassen sich auch hier wie für  $t = t_3$  analog die Eigenschaften

$$f_G|_{t_0-\varepsilon} = l_{mat\ i}|_{t_0-\varepsilon} = F_{LGK}|_{t_0-\varepsilon} = M_{LGK}|_{t_0-\varepsilon} = (\varphi_{G0})_{1,3}|_{t_0-\varepsilon} = r_{F0y}|_{t_0-\varepsilon} - r_{G0y}|_{t_0-\varepsilon} = 0$$

( $\varepsilon$  positiv, beliebig aber hinreichend klein)

(4.131)

und, dass der *Reifengürtel* für  $t = t_0 - \varepsilon$  die Fahrbahn berührt, jedoch nicht durchdringt, begründen. Wie zum Zeitpunkt  $t_1$  ist der Systemzustand dann auch für  $t = t_0 - \varepsilon$  unabhängig von  $c_{GF\ quer}$ .

Zur Analyse der durch die *instationäre* Anregung ab  $t_0$  verursachten *dynamischen* Effekte genügt es, für die Systemzustände die Richtung ihrer Veränderung unmittelbar nach  $t_0$  zu ermitteln. Diese Änderungsrichtung wird für die über *Differenzialgleichungen* oder *differenzierbare* Beziehungen gekoppelten Zeitfunktionen der Zustände jeweils durch das Vorzeichen der Zeitableitung kleinster Ordnung zum Zeitpunkt  $t_0$  verschieden von 0 bestimmt. In Abbildung 4.73 ist die Folge der *trägen* mechanischen Effekte dargestellt, die beginnend mit der dynamischen Anregung letztlich die relevante Systemantwort bewirkt, und damit die gesamte folgende Argumentation bestimmt. Für die ab  $t_0$  einzige *instationäre* Anregungsgröße ist das Vorzeichen der Zeitableitung kleinster Ordnung zum Zeitpunkt  $t_0$  verschieden von 0  $\operatorname{sgn}\left(\dot{f}|_{t_0}\right) = \operatorname{sgn}\left(\dot{f}_0\right) = 1$ . Das bedeutet für die Felgenbewegung

$$\dot{r}_{F0z}|_{t_0} = -\dot{f}_0$$
(4.132)

jedoch auch gleichbleibende Orientierung

$$\frac{\partial^i (\varphi_{F0})_{1,3}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = 0, \quad i \geq 0$$
(4.133)

translatorisch horizontale Bewegung  $\frac{\partial^j (r_{F0})_{1,2}}{\partial t^j} \Big|_{t_0} = 0, \quad j \geq 2$  und Rollbewegung

$\frac{\partial^j \varphi_{F0y}}{\partial t^j} \Big|_{t_0} = 0 \quad (j \geq 2)$ . Mit Ausnahme der translatorisch vertikalen Bewegung stimmen die Felgengeschwindigkeiten zum Zeitpunkt  $t_0$  mit denen des *Reifengürtels* unmittelbar zuvor ( $t = t_0 - \varepsilon$ ) genauso wie die Vertikal- und Längsdrehlage bzw. die translatorische Lage in Querrichtung überein. Gemäß 4.11 gehen  $r_{G0}$ ,  $\dot{r}_{G0}$ ,  $\varphi_{G0}$  und  $\dot{\varphi}_{G0}$  aus der Integration anderer Zustandsgrößen hervor, sind also *stetig* in der Zeit. Damit gilt dann wie

#### 4 Entwicklung und Verifikation einer Sequentiellen Parameteridentifikation für ein physikalisches Reifenmodell

---

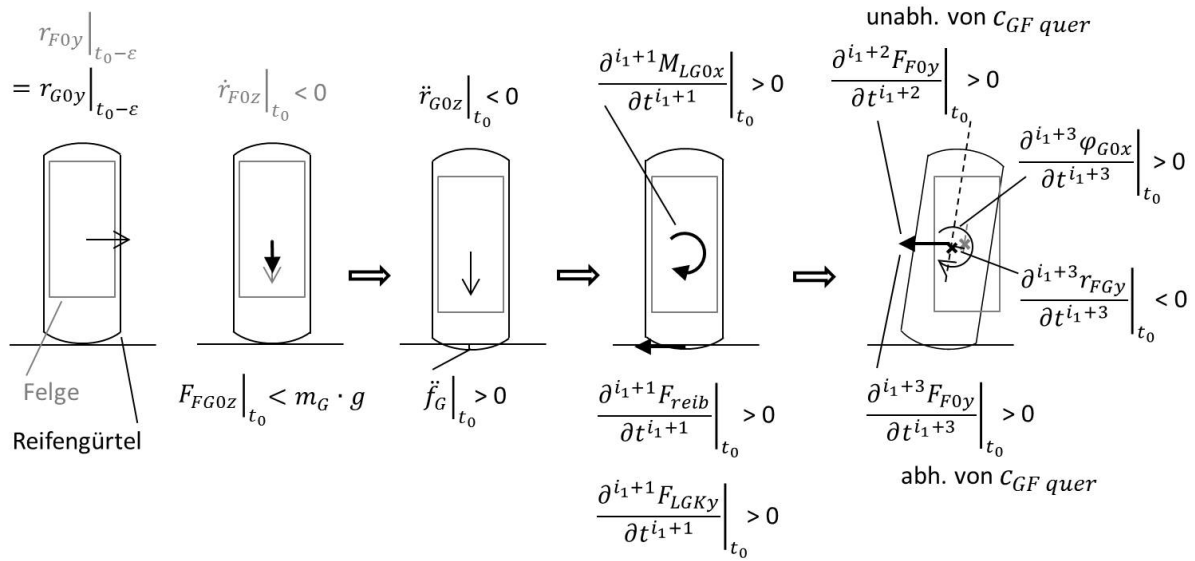


Abbildung 4.73: Trägheitsbedingter Reaktionsablauf durch die mit  $B_9$  definierte Anregung

für  $t = t_0 - \varepsilon$

$$(\dot{r}_{G0})_{1..2}|_{t_0} - (\dot{r}_{F0})_{1..2}|_{t_0} = \dot{\varphi}_{G0}|_{t_0} - \dot{\varphi}_{F0}|_{t_0} = r_{G0y}|_{t_0} - r_{F0y}|_{t_0} = (\varphi_{G0})_{1,3}|_{t_0} - (\varphi_{F0})_{1,3}|_{t_0} = 0 \quad (4.134)$$

und durch  $r_{G0z}|_{t_0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r_{G0z}|_{t_0 - \varepsilon}$  auch analog gefolgert

$$F_{LGK}|_{t_0} = M_{LGK}|_{t_0} = 0 \quad (4.135)$$

bzw.

$$\dot{r}_{G0z}|_{t_0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \dot{r}_{G0z}|_{t_0 - \varepsilon} = 0 \quad (4.136)$$

und mit 4.36

$$\dot{r}_{K0x}|_{t_0} = \dot{r}_{G0x}|_{t_0} = \dot{r}_{F0x}|_{t_0} = v_{B0} \quad (4.137)$$

sowie

$$\dot{r}_{K0y}|_{t_0} = \dot{r}_{G0y}|_{t_0} = \dot{r}_{F0y}|_{t_0} = -v_{B0} \tan \alpha_0 < 0 \quad (4.138)$$

So überträgt sich auch die Bodenberührung des *Reifengürtels* auf  $t_0$ , und man erhält

$$r_{G0z}|_{t_0} = R_{Rmax} \quad (4.139)$$



Mit dem *Stationärzustand* für  $t = t_0 - \varepsilon$  und 4.135 folgt nach 4.27 außerdem

$$F_{Lx PT1}|_{t_0-\varepsilon} = F_{Ly PT1}|_{t_0-\varepsilon} = M_{Lz PT1}|_{t_0-\varepsilon} = 0$$

und

$$\begin{aligned} \dot{F}_{Lx PT1}|_{t_0} &= F_{Lx PT1}|_{t_0} = F_{Lx PT1}|_{t_0-\varepsilon} \\ &= \dot{F}_{Ly PT1}|_{t_0} = F_{Ly PT1}|_{t_0} = F_{Ly PT1}|_{t_0-\varepsilon} = \dot{M}_{Lz PT1}|_{t_0} = M_{Lz PT1}|_{t_0} = M_{Lz PT1}|_{t_0-\varepsilon} = 0 \end{aligned} \quad (4.140)$$

was nach 4.16, 4.28 zu

$$\dot{y}_{REK def ij}|_{t_0} = 0$$

und über 4.133, 4.134 und 4.29 zu

$$\begin{aligned} \dot{y}_{REK def \varphi x ij}|_{t_0} &= (\dot{y}_{REK def ij} + \sin \varphi_{G0x} \cdot h_1 + \dot{\varphi}_{G0x} \cos \varphi_{G0x} \cdot h_2)|_{t_0} = 0 \\ h_1, h_2 &\text{ beschränkte Zeitfunktionen} \end{aligned} \quad (4.141)$$

führt.

Nimmt man zusätzlich an, dass die ersten  $i_1$  Zeitableitungen der entsprechenden *Latsch*-Kräfte und -Momente verschwinden, bleiben die relevanten Eigenschaften der Lage und Bewegung von Felge und *Reifengürtel* zueinander erhalten

$$\begin{aligned} &\left( \forall 0 \leq i \leq i_1 : \frac{\partial^i F_{LGKy}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = \frac{\partial^i (M_{LGK})_{1,3}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = 0 \right) \\ \Rightarrow &\left( \forall 0 \leq i \leq i_1 + 2 : \frac{\partial^i r_{G0y}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} - \frac{\partial^i r_{F0y}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = \frac{\partial^i (\varphi_{G0})_{1,3}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = 0 \right) \quad \text{für } i_1 \geq 0 \end{aligned} \quad (4.142)$$

Zu 4.142 gibt es in Abschnitt C.27 einen detaillierten Nachweis. Die Gleichungen 4.2, 4.6, 4.8 und 4.10 ineinander eingesetzt erhält man

$$\begin{aligned} F_{G0} &= A_{G0} \left( C_{TFGA}_{G0}^T + D_{TFGA}_{G0} \dot{A}_{G0}^T \right) \cdot (r_{F0} - r_{G0}) + A_{G0} D_{TFGA}_{G0}^T \cdot (\dot{r}_{F0} - \dot{r}_{G0}) \\ &+ F_{LG0} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_G \cdot g \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.143)$$

Für  $t = t_0 - \varepsilon$  liegt ein *Stationärzustand* vor, für den somit  $F_{G0} = 0$  gilt. Die einzige Größe in 4.143, die zum Zeitpunkt  $t_0$  nicht den Bedingungen dieses *Stationärzustands* entspricht, ist Felgenbewegung  $\dot{r}_{F0}$ . Denn dadurch unmittelbar resultierende Kräfte wirken über Gleichung 4.11 um mindestens zwei Ordnungen verzögert auf die Modellzustände, und 4.143 basiert auf höchstens einmal zeitabgeleiteten Zustandsgrößen. Damit gilt

$$\begin{aligned} (r_{F0} - r_{G0})|_{t_0} &= (r_{F0} - r_{G0})|_{t_0-\varepsilon}, & A_{G0}|_{t_0} &= A_{G0}|_{t_0-\varepsilon}, & \dot{A}_{G0}|_{t_0} &= \dot{A}_{G0}|_{t_0-\varepsilon} \\ \dot{r}_{G0}|_{t_0} &= \dot{r}_{G0}|_{t_0-\varepsilon}, & F_{LG0}|_{t_0} &= F_{LG0}|_{t_0-\varepsilon} \end{aligned} \quad (4.144)$$

#### 4 Entwicklung und Verifikation einer Sequentiellen Parameteridentifikation für ein physikalisches Reifenmodell

---

durch die *Stationärbedingung* auch  $\dot{r}_{F0}|_{t_0-\varepsilon} = \dot{r}_{G0}|_{t_0-\varepsilon} = 0$ , also insgesamt mit  $(\varphi_{G0})_{1,3}|_{t_0} = 0$  (s. 4.134)

$$\begin{aligned} F_{G0}|_{t_0} &= F_{G0}|_{t_0-\varepsilon} + \left( A_{G0} D_{T FG} A_{G0}^T \cdot (\dot{r}_{F0} - \dot{r}_{G0}) \right) \Big|_{t_0} = \left( A_{G0} D_{T FG} A_{G0}^T \cdot \dot{r}_{F0} \right) \Big|_{t_0} \\ &= D_{T FG} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{f}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{f}_0 \cdot d_{GF rad} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.145)$$

Nach 4.11 und mit 4.136 gilt also

$$\ddot{r}_{G0z}|_{t_0} < 0 \quad \dot{r}_{G0z}|_{t_0+\varepsilon} < 0 \quad (4.146)$$

Wegen 4.135 gilt nach 4.142  $\frac{\partial^i (\varphi_{G0})_{1,3}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = 0$  für  $0 \leq i \leq 2$ , und damit analog der Begründung zu C.133  $\frac{\partial^i (A_{G0})_{12,21,23,32}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = 0$  für  $0 \leq i \leq 2$ . Mit Definition 20 ergibt sich weiter (s. Begr. zu C.145)

$$A_{K0}|_{t_0} = I_3, \quad \dot{A}_{K0}|_{t_0} = \ddot{A}_{K0}|_{t_0} = 0 \quad (4.147)$$

Das bedeutet nach 4.13  $\frac{\partial^i \varepsilon_{GK}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = 0$  für  $0 \leq i \leq 2$ ,  $\dot{d}_{GBKz}|_{t_0} = \ddot{d}_{GBKz}|_{t_0} = 0$ ,  $d_{GBKz}|_{t_0} = R_{Rmax}$  und mit 4.14, 4.136, 4.146 und 4.139

$$f_G|_{t_0} = \dot{f}_G|_{t_0} = 0 \quad \ddot{f}_G|_{t_0} > 0 \quad (4.148)$$

Über 4.15 erhält man weiter

$$F_{LGKz}|_{t_0} = 0, \quad \dot{F}_{LGKz}|_{t_0} = c_{r lin} \dot{f}_G|_{t_0} + 2c_{r quad} \dot{f}_G|_{t_0} \cdot f_G|_{t_0} + d_r \ddot{f}_G|_{t_0} = d_r \ddot{f}_G|_{t_0} > 0 \quad (4.149)$$

Zur Vereinfachung der theoretischen Begründung wird hier davon ausgegangen, dass die Zahl  $n_{LS}$  der *Laufstreifen* ungerade ist, und damit ein mittlerer *Laufstreifen* existiert, der für  $r_{G0z}|_{t_0} = R_{Rmax}$  auch tatsächlich den Boden berührt. Die hier letztlich untersuchte Eigenschaft ist jedoch vom mechanischen Hintergrund ausreichend robust, um nicht von Details der numerischen Berechnung abzuhängen, weshalb sich das Resultat auch auf den Fall einer geraden Zahl  $n_{LS}$  übertragen lässt. Für ungerades  $n_{LS}$  ergibt sich  $y_{REK} \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil = 0$ ,  $s \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil \Big|_{t_0} = R_{Rmax}$ , mit 4.137, 4.138 und 4.146  $\dot{s} \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil \Big|_{t_0} < 0$  und nach 4.19, 4.20

$$l_{mat} \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil \Big|_{t_0+\varepsilon} = 2f_{Lmat} R_{Rmax} \arccos \frac{s \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil \Big|_{t_0+\varepsilon}}{R_{Rmax}} > 0 \quad (4.150)$$

Genau wie im Fall der *Laufstreifen* gelingt die Analyse bei diskreter Aufteilung des *Laufstreifens* in *Reibkontakt-Elemente* nur, wenn zum Zeitpunkt  $t_0$  von der Lage eines *Reibkontakt-Elements*  $\lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0$  in der Mitte des *Kontaktsystems*

$$x_{REK j_0} \Big|_{t_0} = 0 \quad (4.151)$$

ausgegangen wird, das dann nach 4.24 mit 4.150 für  $t_0 + \varepsilon$  auch Teil der Bodendurchdringung ist. Wieder ist hier durch die Wahl des um  $\Delta t_0$  verzögerten Auswertzeitpunkts die untersuchte Eigenschaft mechanisch so robust, dass sie auch bei Abweichung von dieser Annahme erhalten bleibt. Auch die Untersuchung mit einem *kontinuierlich* modellierten *Laufstreifen* wie bspw. in Abschnitt 4.2.2 käme zum gleichen Resultat. Alternative Modellierungsansätze führen jedoch zu unterschiedlichen kleinsten Ordnungen der Modellreaktion verschieden von 0 auf die Anregung. Um den Nachweis die verschiedenen Ansätze betreffend möglichst übergreifend zu halten, wird die kleinste Ordnung der Reaktion verschieden von 0 später über den Index  $i_1$  indirekt flexibel beschrieben. Grundsätzlich wirken sich Dämpfungen als Reaktion auf Bewegungen in kleinerer Ordnung aus als elastische Kräfte und Momente, die hier jedoch in der Regel die deutlich größeren Effekte mit sich bringen. Auch dabei hält die flexible Beschreibung der Ordnung der Systemantwort über  $i_1$  die Möglichkeit offen, irrelevante, minimale Effekte auszublenden und die Analyse auf den real messbaren Reaktionsweg zu beziehen.

Aus der ersten Gleichung von 4.23 erkennt man, da  $l_{mat \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil} \Big|_{t_0 + \varepsilon}$  beliebig klein ist, und damit nur ein *Reibkontakt-Element* Bodenkontakt besitzt, dass mit 4.149

$$p_{\lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0} = 0, \quad p_{\lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0 + \varepsilon} > 0$$

gilt. Nach 4.32 gilt so auch  $\mu \left( u_{\lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0 + \varepsilon}, p_{\lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0 + \varepsilon} \right) > 0$  und mit 4.25 in 4.30

$$F_{reib \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0} = 0, \quad F_{reib \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0 + \varepsilon} > 0 \quad (4.152)$$

Da für  $t_3 \leq t \leq t_0$  kein *Reibkontakt-Element* und für  $t_0 < t \leq t_0 + \varepsilon$  ausschließlich das *Reibkontakt-Element*  $\lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0$  Bodenkontakt besitzt, gilt zusammengefasst  $p_{ij} \Big|_{t_0 + \varepsilon} = \mu \left( u_{ij} \Big|_{t_0 + \varepsilon}, p_{ij} \Big|_{t_0 + \varepsilon} \right) = F_{reib ij} \Big|_{t_0 + \varepsilon} = 0$  für  $i \neq \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil$  oder  $j \neq j_0$ . Mit 4.30 folgt so

$$d_{scher} \dot{a}_{x/y ij} \Big|_{t_0 + \varepsilon} + c_{scher} a_{x/y ij} \Big|_{t_0 + \varepsilon} = 0 \text{ für } i \neq \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil \text{ oder } j \neq j_0$$

und damit über 4.33

$$F_{x/y ij} \Big|_{t_0 + \varepsilon} = 0 \text{ für } i \neq \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil \text{ oder } j \neq j_0 \quad (4.153)$$

Für die *Latsch*-Kräfte und -Momente bedeutet das nach 4.34

$$\begin{aligned} & \left( \forall 0 \leq i \leq i_1 : \frac{\partial^i F_{x/y} \left[ \frac{n_{LS}}{2} \right]_{j_0}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = 0 \right) \\ \Rightarrow & \left( \forall 0 \leq i \leq i_1 : \frac{\partial^i (F_{LGK})_{1..2}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = \frac{\partial^i M_{LGKz}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = 0 \right) \end{aligned}$$

Mit  $\frac{\partial^i (F_{LGK})_{1..2}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = \frac{\partial^i M_{LGKz}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = 0$  für  $0 \leq i \leq i_1$  folgt, da für  $t_3 \leq t < t_0$  außerdem *stationär*  $(F_{LGK})_{1..2} = M_{LGKz} = 0$  gilt, über 4.27  $\frac{\partial^i F_{Lx PT1}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = \frac{\partial^i F_{Ly PT1}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = \frac{\partial^i M_{Lz PT1}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = 0$  für  $0 \leq i \leq i_1 + 1$  und durch 4.28 auch

$$\left( \forall 0 \leq i \leq i_1 : \frac{\partial^i F_{x/y} \left[ \frac{n_{LS}}{2} \right]_{j_0}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = 0 \right) \Rightarrow \left( \forall 0 \leq i \leq i_1 + 1 : \frac{\partial^i y_{REK def} \left[ \frac{n_{LS}}{2} \right]_{j_0}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = 0 \right) \quad (4.154)$$

bzw. über 4.28 und 4.151

$$x_{REK def j_0} \Big|_{t_0} = 0 \quad (4.155)$$

folgt. Wieder mit 4.34 sieht man, dass so insgesamt

$$\begin{aligned} & \left( \forall 0 \leq i \leq i_1 : \frac{\partial^i F_{x/y} \left[ \frac{n_{LS}}{2} \right]_{j_0}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = 0 \right) \\ \Rightarrow & \left( \forall 0 \leq i \leq i_1 : \frac{\partial^i (F_{LGK})_{1..2}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = \frac{\partial^i (M_{LGK})_{1,3}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = 0 \right) \end{aligned} \quad (4.156)$$

gilt. Zur Relativgeschwindigkeit der Oberseiten der *Reibkontakt-Elemente* erhält man mit 4.147, 4.141 und 4.30

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_{0Kx ij} \\ v_{0Ky ij} \end{pmatrix} \Big|_{t_0} &= \left( \left( (A_{K0})_{1..3,1..2} \right)^T \left( \begin{pmatrix} \dot{A}_{K0} \end{pmatrix}_{1..3,1..2} \begin{pmatrix} x_{REK def j} \\ y_{REK def \varphi x ij} \end{pmatrix} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (A_{K0})_{1..3,1..2} \begin{pmatrix} \dot{x}_{REK def j} \\ \dot{y}_{REK def \varphi x ij} \end{pmatrix} + \dot{r}_{K0} \right) \right) \Big|_{t_0} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{x}_{REK def j} \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_{t_0} + (\dot{r}_{K0})_{1..2} \Big|_{t_0} \end{aligned} \quad (4.157)$$

und mit 4.138

$$v_{0Ky ij} \Big|_{t_0} = -v_{B0} \tan \alpha_0 < 0 \quad (4.158)$$

Mit 4.152, und da  $F_{reib \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0}$  stetig aus dem *Stationärzustand* zu  $F_{reib \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0-\varepsilon}$  hervorgeht, gilt  $F_{reib \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0-\varepsilon} = 0$  und somit nach 4.30 unabhängig von  $u_{\lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0-\varepsilon}$  und  $u_{\lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0}$

$$a_{x/y \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0} = a_{x/y \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0-\varepsilon} = \dot{a}_{x/y \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0} = \dot{a}_{x/y \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0-\varepsilon} = 0 \quad (4.159)$$

Aus der Definition von  $u_{y \ ij}$  in 4.30 erhält man so

$$u_{y \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0} = v_{0Ky \ ij} \Big|_{t_0} < 0 \quad (4.160)$$

Zur Bestimmung der entstehenden Kräfte des mittleren *Reibkontakt-Elements* mit 4.30 kann also von  $u_{\lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0+\varepsilon} \neq 0$  ausgegangen werden. Durch diese Differentialgleichung erhält man auch, dass  $u_{y \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0+\varepsilon}$  und  $d_{scher} \dot{a}_{y \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0+\varepsilon} + c_{scher} a_{y \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0+\varepsilon}$  verschiedene Vorzeichen besitzen. Da wegen 4.159 die Vorzeichen von  $\dot{a}_{y \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0+\varepsilon}$  und  $d_{scher} \dot{a}_{y \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0+\varepsilon} + c_{scher} a_{y \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0+\varepsilon}$  identisch sein müssen, gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \left( \dot{a}_{y \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0+\varepsilon} \right) &= \operatorname{sgn} \left( d_{scher} \dot{a}_{y \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0+\varepsilon} + c_{scher} a_{y \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0+\varepsilon} \right) \\ &= -\operatorname{sgn} \left( u_{y \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0+\varepsilon} \right) \end{aligned} \quad (4.161)$$

Aus der Definition von  $u_{y \ ij}$  in 4.30 erhält man mit 4.158 durch *Stetigkeit*

$$u_{y \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0+\varepsilon} - \dot{a}_{y \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0+\varepsilon} = v_{0Ky \ ij} \Big|_{t_0+\varepsilon} < 0 \quad (4.162)$$

Mit 4.161 kann Gleichung 4.162 nur für

$$u_{y \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0+\varepsilon} < 0 \quad \text{und} \quad \dot{a}_{y \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0+\varepsilon} > 0 \quad (4.163)$$

erfüllt sein, und es folgt mit 4.161 insgesamt

$$d_{scher} \dot{a}_{y \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0+\varepsilon} + c_{scher} a_{y \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0+\varepsilon} > 0$$

und mit 4.33

$$F_{y \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0+\varepsilon} > 0$$

Gleichung 4.30 hilft auch dabei, die kleinste von 0 verschiedene Ordnung der Zeitableitungen von  $F_{x \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0}$  und  $F_{y \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0}$  miteinander in Bezug zu setzen. Benutzt wird dabei die Darstellung

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} \left( \frac{u_{x/y \ ij}}{u_{ij}} F_{reib \ ij} \right) = \frac{u_{x/y \ ij}}{u_{ij}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial t^k} F_{reib \ ij} + \sum_{\substack{1 \leq p_{1l} \leq k \\ 0 \leq p_{2m} \leq k-1}} q_{lm} \frac{\partial^{p_{1l}}}{\partial t^{p_{1l}}} \frac{u_{x/y \ ij}}{u_{ij}} \cdot \frac{\partial^{p_{2m}}}{\partial t^{p_{2m}}} F_{reib \ ij}$$

#### 4 Entwicklung und Verifikation einer Sequentiellen Parameteridentifikation für ein physikalisches Reifenmodell

---

mit  $p_{1l1}, p_{2m1} \in \mathbb{N}_0$ ,  $q_{1m1} \in \mathbb{R}$ . Unter verschwindenden Zeitableitungen von  $F_{reib\ ij}|_{t_0}$  gilt also die für das mittlere *Reibkontakt-Element* vereinfachte Form

$$\begin{aligned} & \left( \forall 0 \leq i \leq i_1 : \frac{\partial^i F_{reib\ [\frac{n_{LS}}{2}]j_0}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = 0 \right) \\ \Rightarrow & \left( \forall 0 \leq i \leq i_1 + 1 : \frac{\partial^i}{\partial t^i} \left( \frac{u_{x/y\ [\frac{n_{LS}}{2}]j_0}}{u_{[\frac{n_{LS}}{2}]j_0}} F_{reib\ [\frac{n_{LS}}{2}]j_0} \right) \Big|_{t_0} = \left( \frac{u_{x/y\ [\frac{n_{LS}}{2}]j_0}}{u_{[\frac{n_{LS}}{2}]j_0}} \cdot \frac{\partial^i F_{reib\ [\frac{n_{LS}}{2}]j_0}}{\partial t^i} \right) \Big|_{t_0} \right) \end{aligned} \quad (4.164)$$

Aus den Differenzialgleichungen von 4.30 und 4.33 erhält man

$$F_{x/y\ ij} = -\frac{u_{x/y\ ij}}{u_{ij}} F_{reib\ ij}$$

Schrittweise ergibt sich mit 4.164, der Einsetzung der Gleichungen ineinander und Umformung

$$\begin{aligned} & \left( \forall 0 \leq i \leq i_1 : \frac{\partial^i F_{reib\ [\frac{n_{LS}}{2}]j_0}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = 0 \right) \\ \Rightarrow & \left( \forall 0 \leq i \leq i_1 + 1 : \frac{\partial^i F_{x/y\ [\frac{n_{LS}}{2}]j_0}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = - \left( \frac{u_{x/y\ [\frac{n_{LS}}{2}]j_0}}{u_{[\frac{n_{LS}}{2}]j_0}} \cdot \frac{\partial^i F_{reib\ [\frac{n_{LS}}{2}]j_0}}{\partial t^i} \right) \Big|_{t_0} \right) \end{aligned} \quad (4.165)$$

Wegen 4.152 gilt

$$\exists i_1 \geq 0 : \left( \left( \forall 0 \leq i \leq i_1 : \frac{\partial^i F_{reib\ [\frac{n_{LS}}{2}]j_0}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = 0 \right) \wedge \left( \frac{\partial^{i_1+1} F_{reib\ [\frac{n_{LS}}{2}]j_0}}{\partial t^{i_1+1}} \Big|_{t_0} > 0 \right) \right)$$

und man erhält mit 4.165 und 4.160

$$\exists i_1 \geq 0 : \left( \left( \forall 0 \leq i \leq i_1 : \frac{\partial^i F_{x/y\ [\frac{n_{LS}}{2}]j_0}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = 0 \right) \wedge \left( \frac{\partial^{i_1+1} F_{y\ [\frac{n_{LS}}{2}]j_0}}{\partial t^{i_1+1}} \Big|_{t_0} > 0 \right) \right) \quad (4.166)$$

Unter den zusätzlichen Schlussfolgerungen 4.156 und 4.142 bzw. 4.153 und 4.34 ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned} \exists i_1 \geq 0 : & \left( \left( \forall 0 \leq i \leq i_1 : \frac{\partial^i F_{LGKy}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = 0 \right) \wedge \left( \frac{\partial^{i_1+1} F_{LGKy}}{\partial t^{i_1+1}} \Big|_{t_0} > 0 \right) \right) \\ & \wedge \left( \forall 0 \leq i \leq i_1 + 2 : \frac{\partial^i r_{G0y}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} - \frac{\partial^i r_{F0y}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = \frac{\partial^i (\varphi_{G0})_{1,3}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = 0 \right) \end{aligned} \quad (4.167)$$

Nach Definition 18 bedeutet das auch

$$\left. \frac{\partial^i (A_{G0})_{12,21,23,32}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = 0 \text{ für } 0 \leq i \leq i_1 + 2 \quad (4.168)$$

(s. Begr. zu C.133) und damit nach Definition 20 (s. Begr. zu C.145)

$$A_{K0}|_{t_0} = I_3 \text{ und } \left. \frac{\partial^i A_{K0}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq i_1 + 2 \quad (4.169)$$

Die Zeitableitungen der vom *Latsch* in den *Reifengürtel* eingepprägten Querkraft können nach 4.35 als

$$\frac{\partial^{i_1+1} F_{LG0}}{\partial t^{i_1+1}} = A_{K0} \cdot \frac{\partial^{i_1+1} F_{LGK}}{\partial t^{i_1+1}} + \sum_{\substack{1 \leq p_{1l2} \leq i_1+1 \\ 0 \leq p_{2m2} \leq i_1}} q_{lm2} \frac{\partial^{p_{1l2}}}{\partial t^{p_{1l2}}} A_{K0} \cdot \frac{\partial^{p_{2m2}}}{\partial t^{p_{2m2}}} F_{LGK} \quad (4.170)$$

mit  $p_{1l2}, p_{2m2} \in \mathbb{N}_0$  und  $q_{lm2} \in \mathbb{R}$  dargestellt werden, und es folgt mit 4.169

$$\left. \frac{\partial^{i_1+1} F_{LG0y}}{\partial t^{i_1+1}} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial^{i_1+1} F_{LGKy}}{\partial t^{i_1+1}} \right|_{t_0} > 0 \quad (4.171)$$

Über die Darstellung

$$\frac{\partial^i r_{FG}}{\partial t^i} = \sum_{0 \leq p_{1l3}, p_{2m3} \leq i} q_{lm3} \frac{\partial^{p_{1l3}}}{\partial t^{p_{1l3}}} A_{G0}^T \cdot \frac{\partial^{p_{2m3}}}{\partial t^{p_{2m3}}} (r_{F0} - r_{G0}) \quad (4.172)$$

von 4.2 mit  $p_{1l3}, p_{2m3} \in \mathbb{N}_0$  und  $q_{lm3} \in \mathbb{R}$  ergibt sich mit 4.168 und 4.167

$$\left. \frac{\partial^i r_{FGy}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = 0 \text{ für } 0 \leq i \leq i_1 + 2 \quad (4.173)$$

So erhält man mit 4.6 direkt  $\left. \frac{\partial^i F_{FGGy}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = 0$  für  $0 \leq i \leq i_1 + 1$ , und mit 4.8 aus einer Darstellung analog 4.172 sowie 4.168 zur von der Felge in den *Reifengürtel* eingepprägten Querkraft

$$\left. \frac{\partial^{i_1+1} F_{FG0y}}{\partial t^{i_1+1}} \right|_{t_0} = 0 \quad (4.174)$$

Zusammen mit 4.171 erhält man daraus über 4.10 für die resultierende *inertiale* Querkraft auf den *Reifengürtel*

$$\left. \frac{\partial^{i_1+1} F_{G0y}}{\partial t^{i_1+1}} \right|_{t_0} > 0$$

#### 4 Entwicklung und Verifikation einer Sequentiellen Parameteridentifikation für ein physikalisches Reifenmodell

---

Nach 4.11 ergibt sich damit für die Querbewegung des *Reifengürtels*

$$\left. \frac{\partial^{i_1+3} r_{G0y}}{\partial t^{i_1+3}} \right|_{t_0} > 0 \quad (4.175)$$

Durch die Darstellung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{i_1+3} r_{FG}}{\partial t^{i_1+3}} = & A_{G0}^T \cdot \left( \frac{\partial^{i_1+3} r_{F0}}{\partial t^{i_1+3}} - \frac{\partial^{i_1+3} r_{G0}}{\partial t^{i_1+3}} \right) + \frac{\partial^{i_1+3} A_{G0}^T}{\partial t^{i_1+3}} \cdot (r_{F0} - r_{G0}) \\ & + \sum_{1 \leq p_{1l4}, p_{2m4} \leq i_1+2} q_{lm4} \frac{\partial^{p_{1l4}}}{\partial t^{p_{1l4}}} A_{G0}^T \cdot \frac{\partial^{p_{2m4}}}{\partial t^{p_{2m4}}} (r_{F0} - r_{G0}) \end{aligned}$$

der Zeitableitungen von 4.2 mit  $p_{1l4}, p_{2m4} \in \mathbb{N}_0$  und  $q_{lm4} \in \mathbb{R}$  sieht man mit 4.168 und 4.167 zunächst, dass die Reihe zum Zeitpunkt  $t_0$  keinen Einfluss auf die zweite Komponente von  $\frac{\partial^{i_1+3} r_{FG}}{\partial t^{i_1+3}}$  besitzt und damit

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^{i_1+3} r_{FGy}}{\partial t^{i_1+3}} \right|_{t_0} = & \left( A_{G0}^T \Big|_{t_0} \cdot \left( \left. \frac{\partial^{i_1+3} r_{F0}}{\partial t^{i_1+3}} \right|_{t_0} - \left. \frac{\partial^{i_1+3} r_{G0}}{\partial t^{i_1+3}} \right|_{t_0} \right) \right)_2 \\ & + \left( \left. \frac{\partial^{i_1+3} A_{G0}^T}{\partial t^{i_1+3}} \right|_{t_0} \cdot (r_{F0} - r_{G0}) \Big|_{t_0} \right)_2 \end{aligned} \quad (4.176)$$

gilt.

Um hierauf basierend letztlich einen eindeutigen Einfluss von  $c_{GF\,quer}$  auf die *Zielgröße*  $Z_{\tau,9}$  zeigen zu können, muss einmal die Unabhängigkeit der *Reifengürtel*-Bewegung für  $t = t_0$  bis zur Ordnung  $i_1 + 4$  von  $c_{GF\,quer}$  nachgewiesen werden. Diese Eigenschaft wird in Abschnitt C.28 ausführlich analysiert und hier lediglich das entsprechende Ergebnis angewandt. Außerdem muss der beliebige Einfluss durch die vertikale Verschiebung der Mitte von *Reifengürtel* und Felge minimiert werden. Mit dem seitenkraftbedingten Kippen des *Reifengürtels* parallel zur beabsichtigten seitlichen Verschiebung wird hierdurch nämlich die gezielte Anregung in unbekannter Weise gestört. Analytisch handelt es sich dabei um die unerwünschte Querbewegung  $\left( \left. \frac{\partial^{i_1+3} A_{G0}^T}{\partial t^{i_1+3}} \right|_{t_0} \cdot (r_{F0} - r_{G0}) \Big|_{t_0} \right)_2$  der Felge im *Gürtelsystem*. Deren Minimierung gelingt wie in Abschnitt C.29 beschrieben durch die Wahl einer hinreichend großen *Bahngeschwindigkeit*  $v_{B0}$ . Die Größen  $\left. \frac{\partial^i A_{G0}}{\partial t^i} \right|_{t_0}$  sind nach Definition 18 vollständig durch die Werte  $\left. \frac{\partial^i \varphi_{G0}}{\partial t^i} \right|_{t_0}$  festgelegt, und  $\left. \frac{\partial^i r_{F0}}{\partial t^i} \right|_{t_0}$  ist nach  $B_9$  als Anregungsgröße unabhängig von  $c_{GF\,quer}$ . Dann folgt mit C.158

$$\left. \frac{\partial^i A_{G0}}{\partial t^i} \right|_{t_0}, \left. \frac{\partial^i r_{G0}}{\partial t^i} \right|_{t_0} \text{ und } \left. \frac{\partial^i r_{F0}}{\partial t^i} \right|_{t_0} \text{ sind für } 0 \leq i \leq i_1 + 4 \text{ unabhängig von } c_{GF\,quer} \quad (4.177)$$



Wendet man 4.177 auf 4.172 an, erhält man unmittelbar

$$\left. \frac{\partial^i r_{FG}}{\partial t^i} \right|_{t_0} \text{ ist für } 0 \leq i \leq i_1 + 4 \text{ unabhängig von } c_{GF \text{ quer}} \quad (4.178)$$

Beim Grenzübergang in  $v_{B0}$  ergibt sich in 4.176 mit C.175 und C.179

$$\lim_{v_{B0} \rightarrow \infty} \left. \frac{\partial^{i_1+3} r_{FGy}}{\partial t^{i_1+3}} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial^{i_1+3} (r_{F0y} - r_{G0y})}{\partial t^{i_1+3}} \right|_{t_0}$$

und es folgt mit C.173 und 4.175

$$\lim_{v_{B0} \rightarrow \infty} \left. \frac{\partial^{i_1+3} r_{FGy}}{\partial t^{i_1+3}} \right|_{t_0} < 0$$

was durch die in  $B_9$  geforderte Wahl eines hinreichend großen Werts  $v_{B0}$  letztlich gleichbedeutend ist mit

$$\left. \frac{\partial^{i_1+3} r_{FGy}}{\partial t^{i_1+3}} \right|_{t_0} < 0 \quad (4.179)$$

Über die Gleichungen 4.6 und 4.173 erhält man für die Zeitableitungen der Kraft zwischen *Reifengürtel* und Felge aus Perspektive des *Reifengürtels*

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^i F_{FGGy}}{\partial t^i} \right|_{t_0} &= 0, \quad 0 \leq i \leq i_1 + 1 \\ \left. \frac{\partial^{i_1+2} F_{FGGy}}{\partial t^{i_1+2}} \right|_{t_0} &= d_{GF \text{ quer}} \left. \frac{\partial^{i_1+3} r_{FGy}}{\partial t^{i_1+3}} \right|_{t_0} \\ \left. \frac{\partial^{i_1+3} F_{FGGy}}{\partial t^{i_1+3}} \right|_{t_0} &= c_{GF \text{ quer}} \left. \frac{\partial^{i_1+3} r_{FGy}}{\partial t^{i_1+3}} \right|_{t_0} + d_{GF \text{ quer}} \left. \frac{\partial^{i_1+4} r_{FGy}}{\partial t^{i_1+4}} \right|_{t_0} \\ (F_{FGG})_{1,3} \Big|_{t_0} &= c_{GF \text{ rad}} (r_{FG})_{1,3} \Big|_{t_0} + d_{GF \text{ rad}} (\dot{r}_{FG})_{1,3} \Big|_{t_0} \end{aligned} \quad (4.180)$$

Aus der Darstellung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^i F_{FG0}}{\partial t^i} &= A_{G0} \frac{\partial^i F_{FGG}}{\partial t^i} + \sum_{\substack{1 \leq p_{1l5} \leq i \\ 0 \leq p_{2m5} \leq i-1}} q_{lm5} \frac{\partial^{p_{1l5}}}{\partial t^{p_{1l5}}} A_{G0} \cdot \frac{\partial^{p_{2m5}}}{\partial t^{p_{2m5}}} F_{FGG} \\ p_{1l5}, p_{2m5} &\in \mathbb{N}_0, q_{lm5} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

der Zeitableitungen von 4.8 ergibt sich so mit 4.168

$$\left. \frac{\partial^i F_{FG0y}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = 0 \quad \text{für } 0 \leq i \leq i_1 + 1 \quad (4.181)$$

#### 4 Entwicklung und Verifikation einer Sequentiellen Parameteridentifikation für ein physikalisches Reifenmodell

---

und unter zusätzlicher Verwendung von

$$(A_{G0})_{21,22,23} \Big|_{t_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.182)$$

durch 4.133, 4.134 und Definition 18

$$\frac{\partial^{i_1+2} F_{FG0y}}{\partial t^{i_1+2}} \Big|_{t_0} = d_{GF \text{ quer}} \frac{\partial^{i_1+3} r_{FGy}}{\partial t^{i_1+3}} \Big|_{t_0} \quad (4.183)$$

Aus der Formulierung

$$\frac{\partial^i A_{G0}}{\partial t^i} = A_{G0z} A_{G0x} \frac{\partial^i A_{G0y}}{\partial t^i} + \sum_{\substack{0 \leq p_{1k6}, p_{2l6}, p_{3m6} \leq i \\ p_{1k6} + p_{2l6} > 0}} q_{klm6} \frac{\partial^{p_{1k6}}}{\partial t^{p_{1k6}}} A_{G0z} \cdot \frac{\partial^{p_{2l6}}}{\partial t^{p_{2l6}}} A_{G0x} \cdot \frac{\partial^{p_{3m6}}}{\partial t^{p_{3m6}}} A_{G0y}$$

$p_{1k6}, p_{2l6}, p_{3m6} \in \mathbb{N}_0, q_{klm6} \in \mathbb{R}$

der Zeitableitung von  $A_{G0}$  dargestellt nach C.177 erhält man mit C.178  $\frac{\partial^i A_{G0}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = \frac{\partial^i A_{G0y}}{\partial t^i} \Big|_{t_0}$  für  $1 \leq i \leq i_1 + 2$ . Direkt in C.177 sieht man, dass  $\left( \frac{\partial^i A_{G0y}}{\partial t^i} \right)_{21,22,23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  für  $1 \leq i \leq i_1 + 2$ , womit auch

$$\left( \frac{\partial^i A_{G0}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} \right)_{21,22,23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ für } 1 \leq i \leq i_1 + 2 \quad (4.184)$$

folgt. Mit der alternativen Darstellung

$$\frac{\partial^{i_1+3} F_{FG0}}{\partial t^{i_1+3}} = A_{G0} \frac{\partial^{i_1+3} F_{FGG}}{\partial t^{i_1+3}} + \frac{\partial^{i_1+3} A_{G0}}{\partial t^{i_1+3}} F_{FGG} + \sum_{1 \leq p_{1l7}, p_{2m7} \leq i_1+2} q_{lm7} \frac{\partial^{p_{1l7}}}{\partial t^{p_{1l7}}} A_{G0} \cdot \frac{\partial^{p_{2m7}}}{\partial t^{p_{2m7}}} F_{FGG}$$

$p_{1l7}, p_{2m7} \in \mathbb{N}, q_{lm7} \in \mathbb{R}$

für die  $i_1 + 3$ . Zeitableitung von 4.8 erkennt man mit 4.184 zunächst, dass

$$\frac{\partial^{i_1+3} F_{FG0y}}{\partial t^{i_1+3}} \Big|_{t_0} = \left( A_{G0} \Big|_{t_0} \frac{\partial^{i_1+3} F_{FGG}}{\partial t^{i_1+3}} \Big|_{t_0} + \frac{\partial^{i_1+3} A_{G0}}{\partial t^{i_1+3}} \Big|_{t_0} F_{FGG} \Big|_{t_0} \right)_2$$

Mit 4.182 und 4.180 folgt weiter

$$\frac{\partial^{i_1+3} F_{FG0y}}{\partial t^{i_1+3}} \Big|_{t_0} = c_{GF \text{ quer}} \frac{\partial^{i_1+3} r_{FGy}}{\partial t^{i_1+3}} \Big|_{t_0} + d_{GF \text{ quer}} \frac{\partial^{i_1+4} r_{FGy}}{\partial t^{i_1+4}} \Big|_{t_0} + \left( \frac{\partial^{i_1+3} A_{G0}}{\partial t^{i_1+3}} \Big|_{t_0} F_{FGG} \Big|_{t_0} \right)_2$$

und über wiederholte Anwendung von 4.180 schließlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{i_1+3} F_{FG0y}}{\partial t^{i_1+3}} \Big|_{t_0} &= c_{GF\ quer} \frac{\partial^{i_1+3} r_{FGy}}{\partial t^{i_1+3}} \Big|_{t_0} + d_{GF\ quer} \frac{\partial^{i_1+4} r_{FGy}}{\partial t^{i_1+4}} \Big|_{t_0} \\ &+ \frac{\partial^{i_1+3} (A_{G0})_{21,23}}{\partial t^{i_1+3}} \Big|_{t_0} \cdot \left( c_{GF\ rad} (r_{FG})_{1,3} \Big|_{t_0} + d_{GF\ rad} (\dot{r}_{FG})_{1,3} \Big|_{t_0} \right) \end{aligned} \quad (4.185)$$

Über 4.177 und 4.178 sieht man in 4.183, dass  $\frac{\partial^{i_1+2} F_{FG0y}}{\partial t^{i_1+2}} \Big|_{t_0}$  unabhängig von  $c_{GF\ quer}$  ist, und in 4.185 kein Teilausdruck außer  $c_{GF\ quer}$  selbst von  $c_{GF\ quer}$  abhängt. Also erhält man zusammen mit 4.183 und 4.179

$$\frac{\partial^{i_1+2} F_{FG0y}}{\partial t^{i_1+2}} \Big|_{t_0} < 0 \text{ und unabhängig von } c_{GF\ quer}, \quad \frac{\partial^{i_1+3} F_{FG0y}}{\partial t^{i_1+3}} \Big|_{t_0} \text{ fällt linear in } c_{GF\ quer} \quad (4.186)$$

Für die zeitliche *Taylor-Entwicklung* von  $F_{FG0y}$  ergibt sich durch 4.181

$$\begin{aligned} F_{FG0y}(t_0 + \Delta t) &= \frac{1}{(i_1+2)!} \cdot \frac{\partial^{i_1+2} F_{FG0y}}{\partial t^{i_1+2}} \Big|_{t_0} \cdot \Delta t^{i_1+2} + \frac{1}{(i_1+3)!} \cdot \frac{\partial^{i_1+3} F_{FG0y}}{\partial t^{i_1+3}} \Big|_{t_0} \cdot \Delta t^{i_1+3} + g(\Delta t) \\ |g| &\in \mathcal{O}(\Delta t^{i_1+4}) \end{aligned}$$

Da für hinreichend kleines  $\Delta t$  die Effekte der Reihenglieder die sämtlicher Glieder von jeweils höherer Ordnung dominieren, folgt mit 4.186 für das nach  $B_9$  hinreichend kleine  $\Delta t_0$

$$F_{FG0y}(t_0 + \Delta t_0) < 0 \text{ und fällt streng monoton in } c_{GF\ quer}$$

Durch 4.9 lässt sich das Ergebnis auf die Schnittstellenkraft übertragen, und man erhält

$$F_{F0y}(t_0 + \Delta t_0) > 0 \text{ und wächst streng monoton in } c_{GF\ quer}$$

Nach  $Z_{E9}$  und 4.37 trifft diese Eigenschaft auch auf  $Z_{\tau 9}$  zu, und es ergibt sich letztlich

$$Z_{\tau 9} > 0 \text{ und wächst streng monoton in } c_{GF\ quer}$$

### 4.2.10 Beispielablauf einer Gesamtidentifikation

Die in den Abschnitten 4.2.1 bis 4.2.9 nachgewiesenen Eigenschaften ermöglichen nun, die Werte der Reifenmodell-Parameter aus Abschnitt 4.1.8 über die zu Beginn von Abschnitt 4.2 vorgestellte *Sequentielle Parameteridentifikation* zu bestimmen. Am Ende von Abschnitt 3.3 sind die Voraussetzungen zusammengefasst, unter denen der im Anschluss

daran beschriebene Lösungsalgorithmus eine *funktional verifizierte*, effiziente Parameteridentifikation implementiert. Im Fall der *Sequentiellen Parameteridentifikation* für das Reifenmodell sind sämtliche dieser Eigenschaften erfüllt, und der Lösungsalgorithmus kann in vollem Umfang eingesetzt werden. Dieses Lösungsprinzip soll nun im Folgenden am Beispiel der Identifikation einer konkreten Wertbelegung der Parameter verdeutlicht werden. Um dabei v.A. die Mechanismen zu zeigen, die die funktionale Verifikation ermöglichen, soll der zweite Schritt des Lösungsalgorithmus, der Lösungsversuch über ein klassisches numerisches Verfahren ausgelassen und statt des dritten Schritts jede einelementige *Parametergruppe* separat gelöst werden. Außerdem steht hier nicht die Tauglichkeit des Reifenmodells zur Abbildung realer Reifen im Vordergrund, sondern das *funktional verifizierte* Identifikationsverfahren, weshalb die *Zielgrößen*-Werte statt aus Reifenmessungen durch Modellsimulationen bestimmt werden. Andernfalls wäre bei Abweichungen zwischen gemessenem und simuliertem Verhalten nicht klar, ob sie durch das Modell verschuldet sind, das das entsprechende Verhalten generell nicht abbilden kann, oder ob das Lösungsverfahren nicht in der Lage ist, existierende passende Parameterwerte zu finden.

Das Systemverhalten wird neben den zu bestimmenden Parametern auch durch die gemäß Abschnitt 4.1.8 vorausgesetzten Parameter  $P_{const}$  beeinflusst. Deren Werte sind

$$\begin{array}{ll}
 d_{GF\ rad} &= 449 \frac{Ns}{m} & d_r &= 83 \frac{Ns}{m} \\
 d_{GF\ quer} &= 41.5 \frac{Ns}{m} & R_{dyn} &= 0.328\ m \\
 c_{GF\ rot\ ax} &= 4.51 \cdot 10^5 \frac{Nm}{rad} & g_l(f_G) &= \max \left\{ 1, 3.8 + \frac{90.5}{m} f_G + \frac{1450}{m^2} f_G^2 \right\} \\
 d_{GF\ rot\ ax} &= 53.1 \frac{Nms}{rad} & g_q(f_G) &= \max \left\{ 1, 6 + \frac{129}{m} f_G + \frac{2070}{m^2} f_G^2 \right\} \\
 d_{GF\ rot\ rad} &= 9.61 \frac{Nms}{rad} & k_{roll} &= 0.01\ m \\
 m_G &= 8.8\ kg & \tau_{LKx} &= 1.84 \cdot 10^{-2}\ s \\
 J_{G\ rad} &= 0.5\ kgm^2 & \tau_{LKy} &= 7.58 \cdot 10^{-2}\ s \\
 J_{G\ quer} &= 0.928\ kgm^2 & \tau_{LKt} &= 8.24 \cdot 10^{-3}\ s \\
 R_{R\ max} &= 0.338\ m & d_{scher} &= 0.65 \frac{Ns}{m} \\
 B_R &= 0.225\ m & \Delta p &= 2\ bar \\
 l_{RKE} &= 0.014\ m & \Delta v &= 10^{-4} \frac{m}{s} \\
 n_{LS} &= 6 & &
 \end{array}$$

wobei die Parameter  $\tau_{LKx}$ ,  $\tau_{LKy}$  und  $\tau_{LKt}$  nur im Kontext mit den übrigen konstant auf die angegebenen Werte festgelegt sind. Die Wertbelegung der zu identifizierenden Parameter  $P_{id}$  ähnlich ihrer Einteilung in *Parametergruppen* angeordnet ist

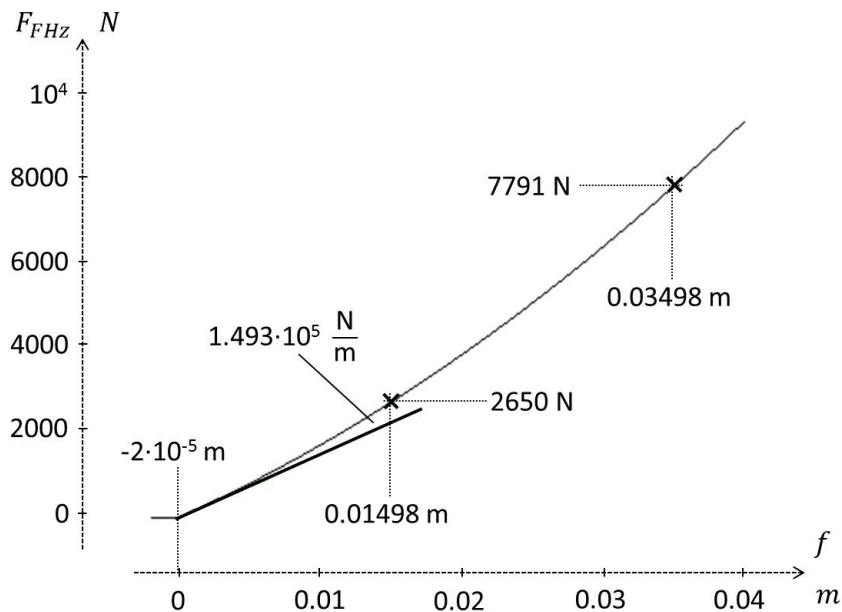
$$c_{GF\ rad} = 4.67 \cdot 10^6 \frac{N}{m} \quad c_r\ lin = 1.54 \cdot 10^5 \frac{N}{m} \quad c_r\ quad = 2.47 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2}$$

$$\begin{array}{ll}
 R_{quer} & = 0.675 \text{ m} & c_{scher} & = 4 \cdot 10^4 \frac{N}{m} \\
 c_{GF \text{ rot rad}} & = 8 \cdot 10^4 \frac{Nm}{rad} \\
 f_{L \text{ mat}} & = 0.75 \\
 n_{LKt} & = 10^{-4} \frac{rad}{Nm} \\
 n_{LKy} & = 8 \cdot 10^{-7} \frac{m}{N} \\
 \mu_{gleit \text{ 0bar}} & = 1.1 & \mu_{gleit \Delta p} & = 1.0 \\
 n_{LKx} & = 3 \cdot 10^{-6} \frac{m}{N} & \mu_{haft \text{ 0bar}} & = 1.5 & \mu_{haft \Delta p} & = 1.4 \\
 c_{GF \text{ quer}} & = 8.5 \cdot 10^4 \frac{N}{m}
 \end{array}$$

Um auf diese Parameterwerte rückschließen zu können, setzt die *Sequentielle Parameteridentifikation* 15 skalare *Zielwerte* voraus, die als Auswertung der in den Abschnitten 4.2.1 bis 4.2.9 definierten *Zielgrößen*  $Z_{\tau 1}, \dots, Z_{\tau 9}$  unter  $P_{const}$  und  $P_{id}$  den nötigen Auszug des parameterabhängigen Systemverhaltens beschreiben. Die *Zielgrößen*-Definition lässt noch einige Freiheitsgrade der konkreten Anregung zu, die zusammen mit der Auswertung der *Zielgrößen* im Folgenden beschrieben werden. Im Fall von  $Z_{\tau 1}$  sind das die zwei Einfederdifferenzen ab Bodenberührung für  $(Z_{\tau 1})_1$  und  $(Z_{\tau 1})_2$

$$P_1 : \quad \tilde{f}_1 = 0.015 \text{ m} \quad \tilde{f}_2 = 0.035 \text{ m}$$

Folgende Abbildung zeigt die gesamte Federkennlinie des sturzfrei stehenden Reifens mit hervorgehobenen für die *Zielgrößen* relevanten Eigenschaften.



Da die Koordinatenachsen weder Parameter noch direkt *Zielgrößen* beschreiben, sind sie gestrichelt wiedergegeben. Am stehenden Reifen sind sehr genaue Messungen möglich, weshalb die *Zielgrößen* hier bis auf 4 Dezimalstellen angegeben werden.

$$Z_{\tau 1} = \begin{pmatrix} 2736 & N \\ 7877 & N \\ 1.493 \cdot 10^5 & \frac{N}{m} \end{pmatrix}$$

Für die übrigen unter bewegtem Reifen bestimmten *Zielgrößen* sind die Werte zur Nachbildung der Messungenauigkeit bis auf drei Dezimalstellen genau berechnet. Im Fall der hier definierten *stationären Zielgrößen* kann bei ausreichend langer Messung von vernachlässigbarer Streuung der Ergebnisse ausgegangen werden. Um zur Bestimmung von  $P_9^V$  genauso vorgehen zu können, muss eine mehrfache Wiederholung der zugehörigen *instationären* Messung gefordert werden. Aufgrund der einfachen Messsituation ist dies auch mit geringem Aufwand reproduzierbar möglich.

Die Anregungsparameter zu  $Z_{\tau 2}$  sind abhängig vom Umfang  $P_{21}^*$  der möglichen Werte von  $(P_2)_1 = R_{quer}$ . Mit dem festgelegten Wert  $R_{quer \min} = \min(P_{21}^*) = 0.46 \text{ m}$  erhält man aus 4.59 und bereits bekannten Werten die notwendige Mindest-*Gürteleinfederung*

$$f_{G \min} = 1.40 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Unter  $B_2$  mit den Anregungsparametern

$$P_2 : (F_{FH})_{31} = 2600 \text{ N} \quad (F_{FH})_{32} = 5000 \text{ N} \quad v_{B0} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

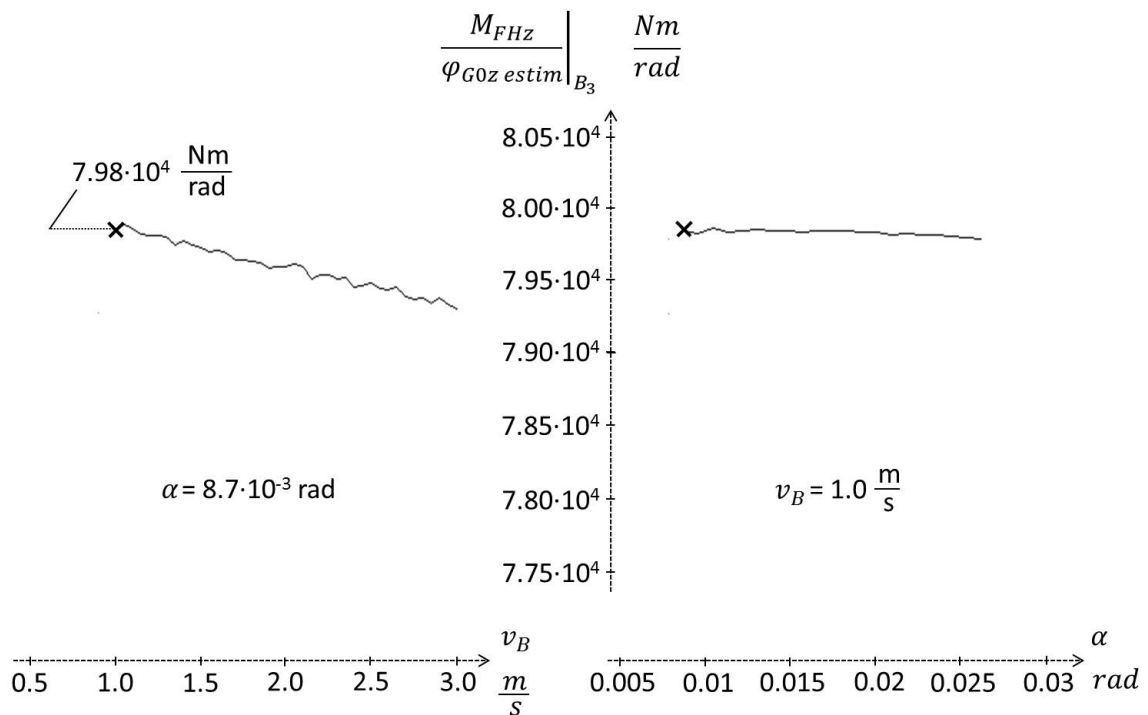
ist nach 4.61 so auch die Bedingung zu  $(F_{FH})_{31} \geq (F_{FH})_{3 \text{ min}} = 2554 \text{ N}$  erfüllt. Als *Zielgrößen*-Werte ergeben sich

$$Z_{\tau 2} = \begin{pmatrix} 1.58 \cdot 10^5 \text{ N} \\ 2.90 \cdot 10^5 \text{ N} \end{pmatrix}$$

Der Grenzübergang von  $Z_{E3}$  führt in  $v_B$  zu immer längeren Einschwingvorgängen und in  $\alpha$  zu immer kleineren Antwortgrößen, so dass er nur bis  $v_B = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  und  $\alpha = 8.73 \cdot 10^{-3}$  erfolgt. Die getrennte Darstellung der Grenzübergänge unter

$$P_3 : (F_{FH})_{30} = 5000 \text{ N}$$

zeigt, dass  $Z_{\tau 3}$  so nur noch einem vernachlässigbaren Anteil der Rotationsdämpfung unterliegt ( $v_B$ ) und die sturzbedingten Effekte kaum wahrnehmbar sind ( $\alpha$ ).



Damit ergibt sich

$$Z_{\tau 3} = 7.98 \cdot 10^4 \frac{Nm}{rad}$$

Anregungsparameter und resultierende *Zielgrößen*-Werte weiterer *Parametergruppen* sind

$$P_4 : (F_{FH})_{30} = 5000 \text{ N}$$

$$Z_{\tau 4} = 855 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$$

$$P_5 : (F_{FH})_{30} = 5000 \text{ N}$$

$$Z_{\tau 5} = -4290 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$$

$$P_6 : (F_{FH})_{30} = 5000 \text{ N}$$

$$Z_{\tau 6} = -1.19 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{rad}}$$

$$P_7 : (F_{FH})_{31} = 3000 \text{ N} \quad (F_{FH})_{32} = 5000 \text{ N}$$

$$Z_{\tau 7} = \begin{pmatrix} 3090 \text{ N} \\ 4970 \text{ N} \end{pmatrix}$$

Bei den *Zielgrößen*  $Z_{\tau 8}$  schränkt die komplizierte Teilbedingung  $R_8$  die möglichen Anregungsparameter ein. Entweder sollen sie über ein Konstruktionsverfahren gebildet werden, das der Anforderung optimaler *Sensitivität* in der Anwendung hier nicht ausreichend genügt, oder sie sind über das Abschätzverfahren *AbschErf* aus Abschnitt C.23 zu qualifizieren, dessen großer Aufwand hier jedoch vermieden werden soll. Letztlich müssen die Voraussetzungen 4.125 erfüllt sein, von denen die zweite Gruppe an Ungleichungen außer in Extremfällen grundsätzlich gilt, und die dritte Gruppe durch die Vorzeichenforderungen 4.120, 4.122 und 4.124 an  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$  einfach eingehalten werden kann. Die erste Gruppe von Ungleichungen aus 4.125 sollen absteigende Vertikallasten in

$$P_8 : \begin{array}{lll} (F_{FH})_{31} = 6000 \text{ N} & (F_{FH})_{32} = 4000 \text{ N} & (F_{FH})_{33} = 2000 \text{ N} \\ \lambda_1 = 0.03 & \lambda_2 = -0.03 & \lambda_3 = 0.03 \\ v_{B0} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{array}$$

garantieren, wobei diese Eigenschaft mit

$$\begin{aligned} p_{d\partial 0} \Big|_{P_{const}^V, P_{id}^V, F_{FH z 1}, \lambda_1} &= 1.40 \text{ bar} > p_{d\partial 0} \Big|_{P_{const}^V, P_{id}^V, F_{FH z 2}, \lambda_2} &= 1.18 \text{ bar} \\ &> p_{d\partial 0} \Big|_{P_{const}^V, P_{id}^V, F_{FH z 3}, \lambda_3} &= 0.899 \text{ bar} \end{aligned}$$



durch Berechnung zumindest in der zu identifizierenden Parametrierung bestätigt wird. Als *Zielgrößen*-Werte ergeben sich

$$Z_{\tau 8} = \begin{pmatrix} 5040 \text{ N} \\ 3400 \text{ N} \\ 1850 \text{ N} \end{pmatrix}$$

Anregungsparameter und *Zielgrößen*-Wert für  $P_9$  sind

$$P_9 : \quad \alpha_0 = 1.75 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \quad \Delta t_0 = 0.1 \text{ s} \quad v_{B0} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \dot{f}_0 = 0.08 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$Z_{\tau 9} = 479 \text{ N}$$

Nachdem nun sämtliche *Zielgrößen* vollständig definiert und ihre Werte bekannt sind, können die Parameterwerte  $P^V$  identifiziert werden. Anfangs ist noch kein Wert der Parameter  $P_{id}$  bekannt. Simulationen im Rahmen des Identifikationsprozesses setzen jedoch grundsätzlich eine vollständige Parametrierung voraus, weshalb zunächst noch Standardparameter verwendet werden müssen, die sukzessive durch identifizierte Werte ersetzt werden. Als Ausgangswerte für die zu identifizierenden Parameter wurde die Belegung

$$\begin{aligned} c_{GF \text{ rad } 0} &= 3.47 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}} & c_{r \text{ lin } 0} &= 4.0 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}} & c_{r \text{ quad } 0} &= 5.0 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \\ R_{\text{quer } 0} &= 0.225 \text{ m} & c_{\text{scher } 0} &= 2.35 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}} \\ c_{GF \text{ rot rad } 0} &= 1.0 \cdot 10^5 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \\ f_{L \text{ mat } 0} &= 0.85 \\ n_{LKt 0} &= 5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{Nm}} \\ n_{LKy 0} &= 9.97 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{N}} \\ \mu_{\text{gleit } 0 \text{ bar } 0} &= 1.5 & \mu_{\text{gleit } \Delta p 0} &= 1.45 \\ n_{LKx 0} &= 9.12 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}}{\text{N}} & \mu_{\text{haft } 0 \text{ bar } 0} &= 1.6 & \mu_{\text{haft } \Delta p 0} &= 1.55 \\ c_{GF \text{ quer } 0} &= 1.0 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \end{aligned}$$

gewählt. Nun ist es möglich, die *Parametergruppen* 1 bis 9 mit dem Lösungsalgorithmus am Ende von Abschnitt 3.3 zu identifizieren. Für  $P_1$  greift der erste Satz von Schritt 6 des Lösungsalgorithmus, da mit 4.58, 4.55, 4.53 und 4.54

$$c_{GF \text{ rad } id} = 4.62 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad c_{r \text{ lin } id} = 1.54 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad c_{r \text{ quad } id} = 2.47 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

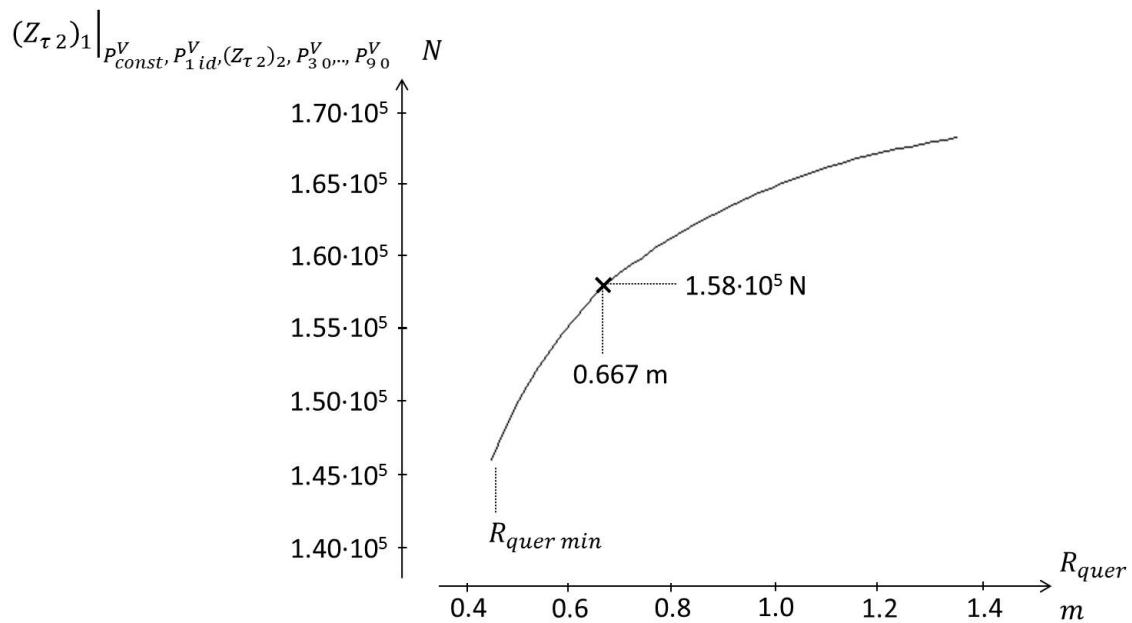
aus Anregungsgrößen und  $Z_{\tau 1}$  elementar berechnet werden können.

Auf  $P_2$  trifft der letzte Satz von Schritt 6 zu. Mit den Indizes  $i = 2$  und  $j = 1$  kann

#### 4 Entwicklung und Verifikation einer Sequentiellen Parameteridentifikation für ein physikalisches Reifenmodell

---

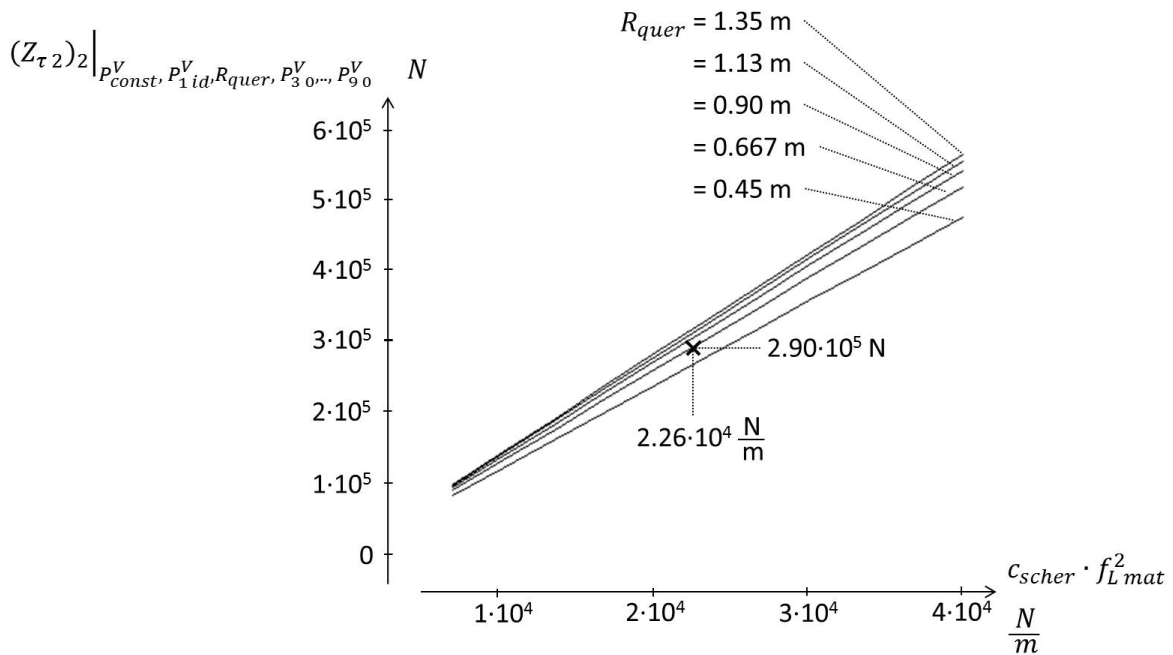
Funktion 3.35 dabei ohne Behandlung der Parametergrenzen einfach durch Auflösung der *streng monotonen*, eindimensionalen Funktion 3.36



nach

$$R_{quer id} = 0.667 \text{ m}$$

realisiert werden. Dabei basiert die Funktion  $(Z_{\tau 2})_1 |_{P_{const}^V, P_{1 id}^V, (Z_{\tau 2})_2, P_{3 0}^V, \dots, P_{9 0}^V} (R_{quer})$  nach Definition 3.36 selbst auf Funktion 3.35 für  $i = 2$  und  $j = 2$ , die aus der Auflösung der von  $R_{quer}$  abhängigen *streng monotonen*, eindimensionalen Funktion 3.36 für  $i = 2$  und  $j = 2$



nach dem Parameter  $c_{scher} \cdot f_{L mat}^2$  hervorgeht. 3.35 für  $i = 2$  und  $j = 2$ , also

$$\left( c_{scher} \cdot f_{L mat}^2 \right) \Big|_{P_{const}^V, P_{1 id}^V, R_{quer}, P_{3 0}^V, \dots, P_{9 0}^V} \left( (Z_{\tau 2})_2 \right)$$

mit  $R_{quer} = R_{quer id}$  angewandt liefert noch

$$\left( c_{scher} \cdot f_{L mat}^2 \right)_{id} = 2.26 \cdot 10^4 \frac{N}{m}$$

Da Schritt 3 des Lösungsalgorithmus nicht angewandt werden soll, trifft für  $P_3$  der erste Satz von Schritt 6 zu. Denn nach 4.87 sind  $Z_{\tau 3}$  und  $c_{GF rot rad}$  identisch, und man erhält einfach

$$c_{GF rot rad id} = Z_{\tau 3} = 7.98 \cdot 10^4 \frac{Nm}{rad}$$

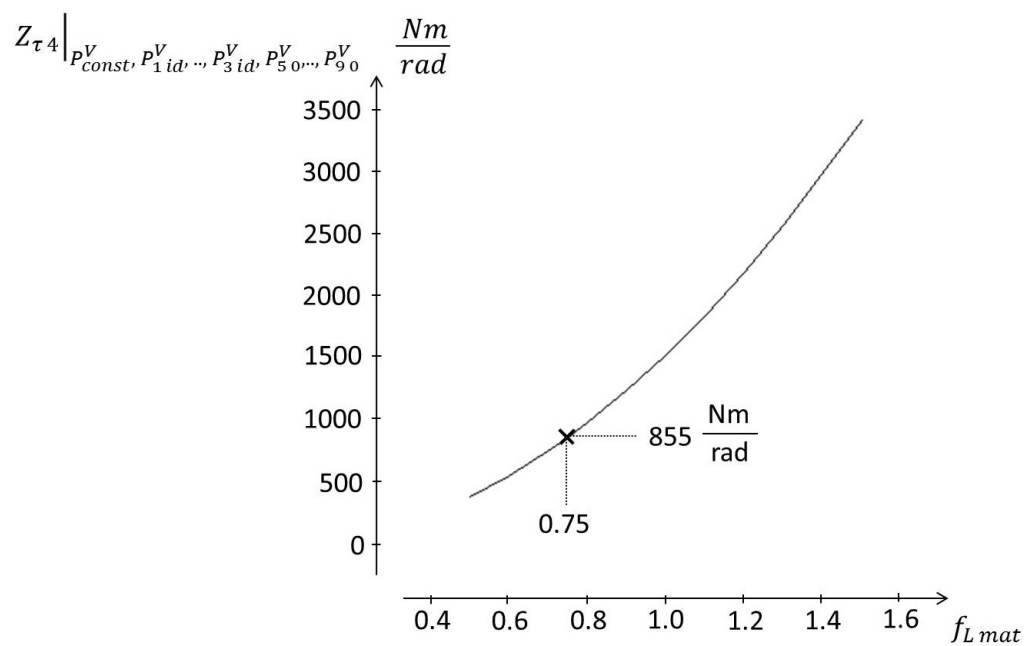
Ohne Schritt 3 greift für die *Parametergruppen*  $P_4$  bis  $P_6$  jeweils Schritt 6 des Lösungsalgorithmus, jedoch davon der letzte und nicht der erste Satz. Um bei Variation von  $f_{L mat}$  den bereits identifizierten Ersatzparameter  $c_{scher} \cdot f_{L mat}^2$  in seinem Wert zu erhalten, gilt für die Wahl von  $c_{scher}$

$$c_{scher} = \frac{\left( c_{scher} \cdot f_{L mat}^2 \right)_{id}}{f_{L mat}^2}$$

Die Inversion des resultierenden Parameter-Zielgrößen-Zusammenhangs

#### 4 Entwicklung und Verifikation einer Sequentiellen Parameteridentifikation für ein physikalisches Reifenmodell

---



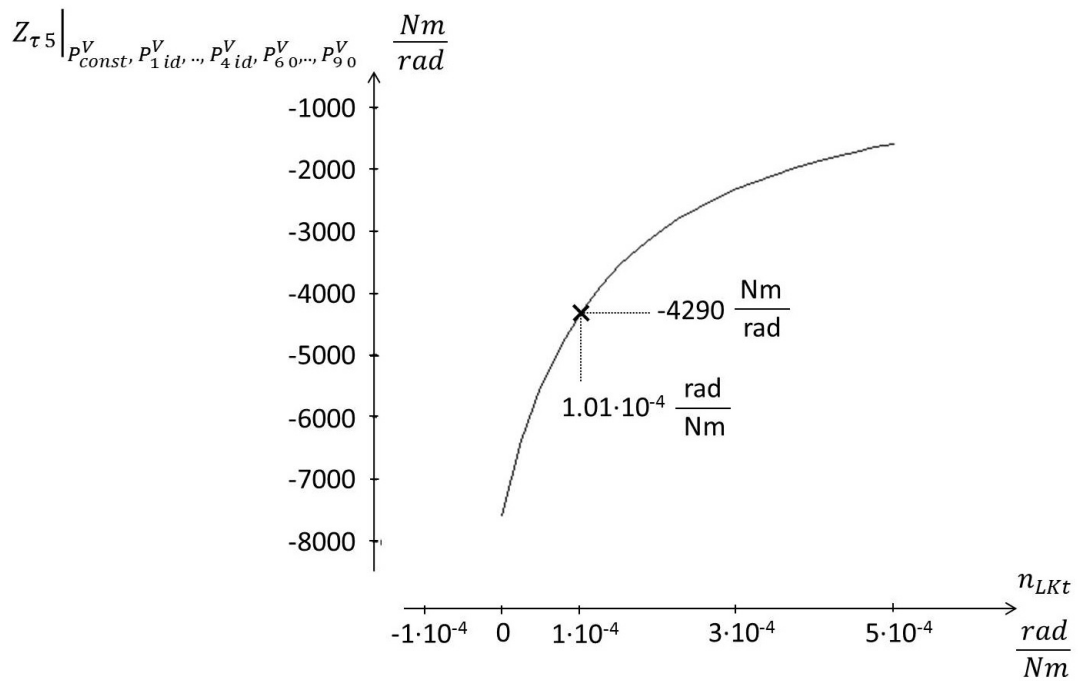
liefert

$$f_{Lmat id} = 0.75$$

Nun kann auch auf den Wert des realen Parameters  $c_{scher}$  zurückgeschlossen werden, und man erhält

$$c_{scher id} = 4.02 \cdot 10^4 \frac{N}{m}$$

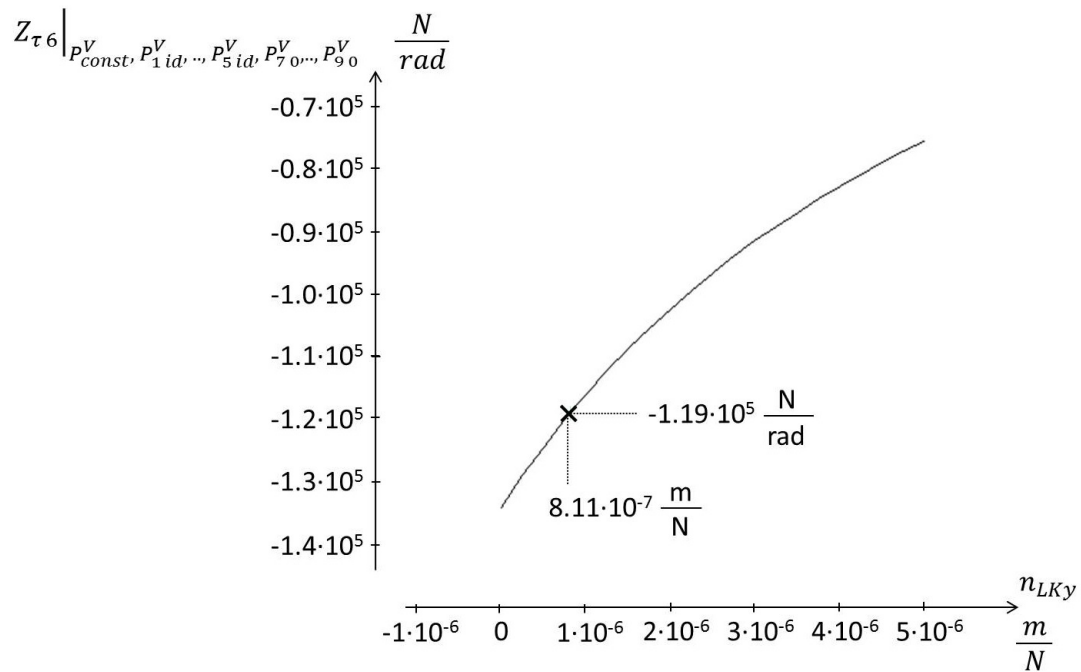
Durch Inversion des Parameter-Zielgrößen-Zusammenhangs



ergibt sich weiter

$$n_{LKtid} = 1.01 \cdot 10^{-4} \frac{rad}{Nm}$$

und mit



#### 4 Entwicklung und Verifikation einer Sequentiellen Parameteridentifikation für ein physikalisches Reifenmodell

---

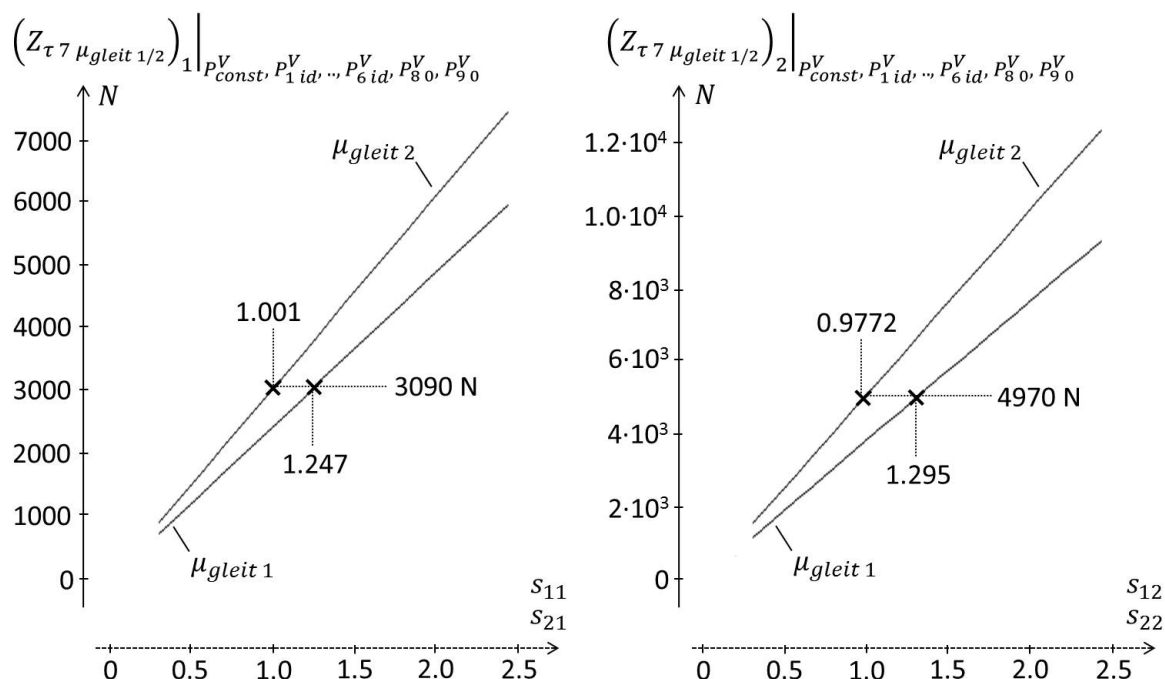
auch

$$n_{LKy id} = 8.11 \cdot 10^{-7} \frac{m}{N}$$

$P_7$  wird im Lösungsalgorithmus wieder durch den ersten Satz von Schritt 6 behandelt. Dies ist so aber erst möglich, wenn mit den hier definierten Testparametrierungen

$$\mu_{gleit 1} = (1.0 \quad 0.8) \quad \mu_{gleit 2} = (1.0 \quad 1.0)$$

die Gleichungen 4.92 durch Inversion der eindimensionalen Funktionen  $(Z_{\tau 7 \text{ gleit } 1})_1$ ,  $(Z_{\tau 7 \text{ gleit } 1})_2$ ,  $(Z_{\tau 7 \text{ gleit } 2})_1$  und  $(Z_{\tau 7 \text{ gleit } 2})_2$  gelöst werden



und damit die Werte

$$s_{11} = 1.247 \quad s_{12} = 1.295 \quad s_{21} = 1.001 \quad s_{22} = 0.9772$$

liefern. Dann sind nämlich sämtliche nichtlineare Einflüsse abgekoppelt, und die Parameter können als lineares Restproblem mit  $F_{FHy 1} = (Z_{\tau 7})_1$  und  $F_{FHy 2} = (Z_{\tau 7})_2$  direkt über 4.97 zu

$$\mu_{gleit 0bar id} = 1.10 \quad \mu_{gleit \Delta p id} = 1.00$$

bestimmt werden.

Auf  $P_8$  trifft Schritt 6 des Lösungsalgorithmus ab dem zweiten Satz komplett zu. Vor

der konkreten Bestimmung der Parameter muss nach Abschnitt 4.2.8 zunächst deren Grundmenge definiert werden. Dies erfolgt beginnend mit der Festlegung auf

$$\mu_{haft 0bar max} = \mu_{haft \Delta p max} = 2.0$$

die gleich gewählt werden können, da die *Haftreibbeiwerte* durch die ebenso hier festgelegte Mindestdifferenz ihrer Alternativdarstellung und die Mindestprogression der *Haftreibungskraft* nach 4.103

$$\varrho_{\mu} = \varrho_F = 0.1$$

u.A. abfallende Werte annehmen müssen. Auch die maximal zu berücksichtigende *Latsch-Vertikalkraft*

$$F_{LGKz max} = 8000 N$$

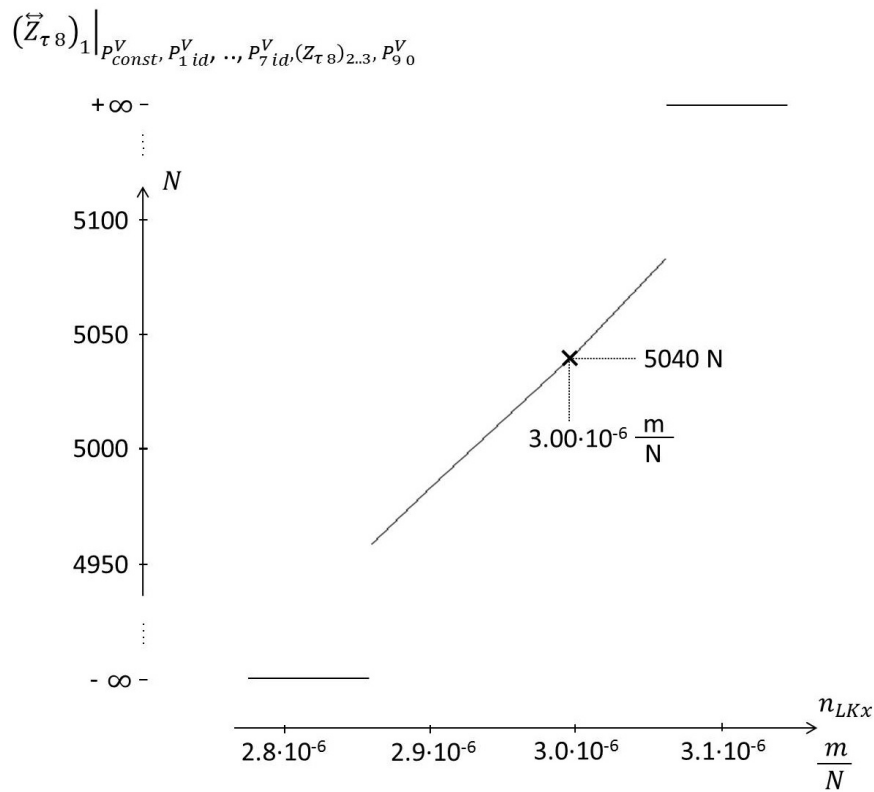
kann noch unabhängig definiert werden. Der Wertebereich für  $n_{LKx}$  muss nun innerhalb der durch die festgelegten Maximalwerte in 4.99 beschriebenen Grenzen liegen. Als geeignetes Teilintervall wird

$$n_{LKx min} = 1 \cdot 10^{-6} \frac{m}{N} \quad n_{LKx max} = 5 \cdot 10^{-6} \frac{m}{N}$$

gewählt. Der Wert für den maximalen Bodendruck wird nun wie in 4.101, jedoch vereinfacht statt auf Basis einer Längskraftabschätzung  $F_{LGKx || os}$  durch Simulation von *Umfangsschlupf*-Variationen mit  $-0.17 \leq \lambda \leq 0.17$ , sehr großen Werten für die *Reibbeiwerte*,  $n_{LKx min}$  und  $n_{LKx max}$  ausschließlich unter den drei für die Parameteridentifikation relevanten Vertikallasten  $(F_{FH})_{31}, \dots, (F_{FH})_{33}$  und  $v_{B0}$  zu

$$p_{max} = 5.23 bar$$

abgeschätzt. Dann liegt auch die Abbildung aus 4.105 und 4.102 zwischen den Modellparametern  $\mu_{haft 0bar}$  bzw.  $\mu_{haft \Delta p}$  und den Parametern  $\hat{\mu}_{haft 1}$  bzw.  $\hat{\mu}_{haft 2}$  der *Sequentiellen Parameteridentifikation* fest. Im Lösungsalgorithmus wird  $n_{LKx}$  durch die Inversion 3.35 von Funktion 3.36



mit  $i = 8$  und  $j = 1$  bestimmt. Man erhält so

$$n_{LKx id} = 3.00 \cdot 10^{-6} \frac{m}{N}$$

Funktion  $\left(\overset{\leftrightarrow}{Z}_{\tau 8}\right)_1 \Big|_{P_{const}^V, P_{1 id}^V, \dots, P_{7 id}^V, (Z_{\tau 8})_{2..3}, P_{9 0}^V}$  ( $n_{LKx}$ ) benutzt, um  $(Z_{\tau 8})_{2..3}$  konstant zu halten, nach Definition 3.36 die Funktionen

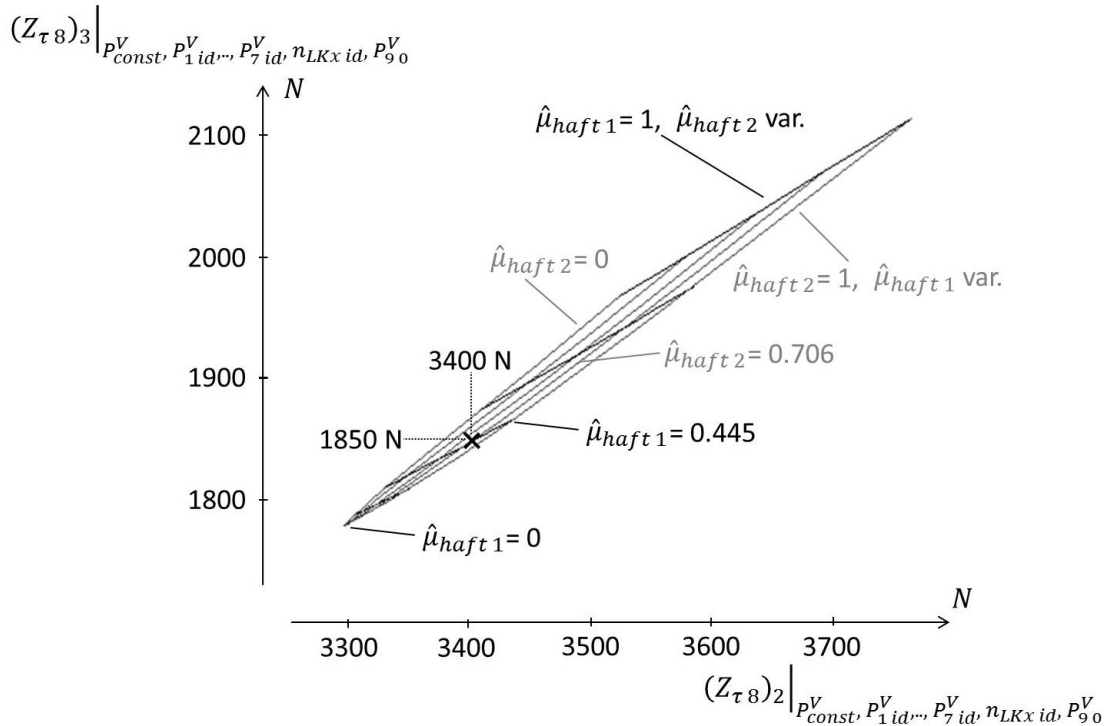
$$\begin{aligned} \overset{\leftrightarrow}{\hat{\mu}}_{haft 1} & \Big|_{P_{const}^V, P_{1 id}^V, \dots, P_{7 id}^V, n_{LKx}, (Z_{\tau 8})_3, P_{9 0}^V} \left( (Z_{\tau 3})_2 \right) \\ \overset{\leftrightarrow}{\hat{\mu}}_{haft 2} & \Big|_{P_{const}^V, P_{1 id}^V, \dots, P_{7 id}^V, n_{LKx}, \hat{\mu}_{haft 1}, P_{9 0}^V} \left( (Z_{\tau 3})_3 \right) \end{aligned} \quad (4.187)$$

Da auf  $Z_{\tau 8}$  die Eigenschaften 3.39, 3.40 und 3.41 zutreffen, sieht der Lösungsalgorithmus für die Berechnung dieser beider Funktionen die Implementierung 3.42 über das *schrittweitengesteuerte Gradientenverfahren mit Randprojektion* vor. Aufgabe des *Gradientenverfahrens* ist dabei die Inversion von Funktion

$$\left(\overset{\leftrightarrow}{Z}_{\tau 8}\right)_{2..3} \Big|_{P_{const}^V, P_{1 id}^V, \dots, P_{7 id}^V, n_{LKx}, P_{9 0}^V} \left( \begin{pmatrix} \hat{\mu}_{haft 1} \\ \hat{\mu}_{haft 2} \end{pmatrix} \right)$$



deren Bildraumkurven inklusive *Zielwert* für  $n_{LKx} = n_{LKxid}$  als



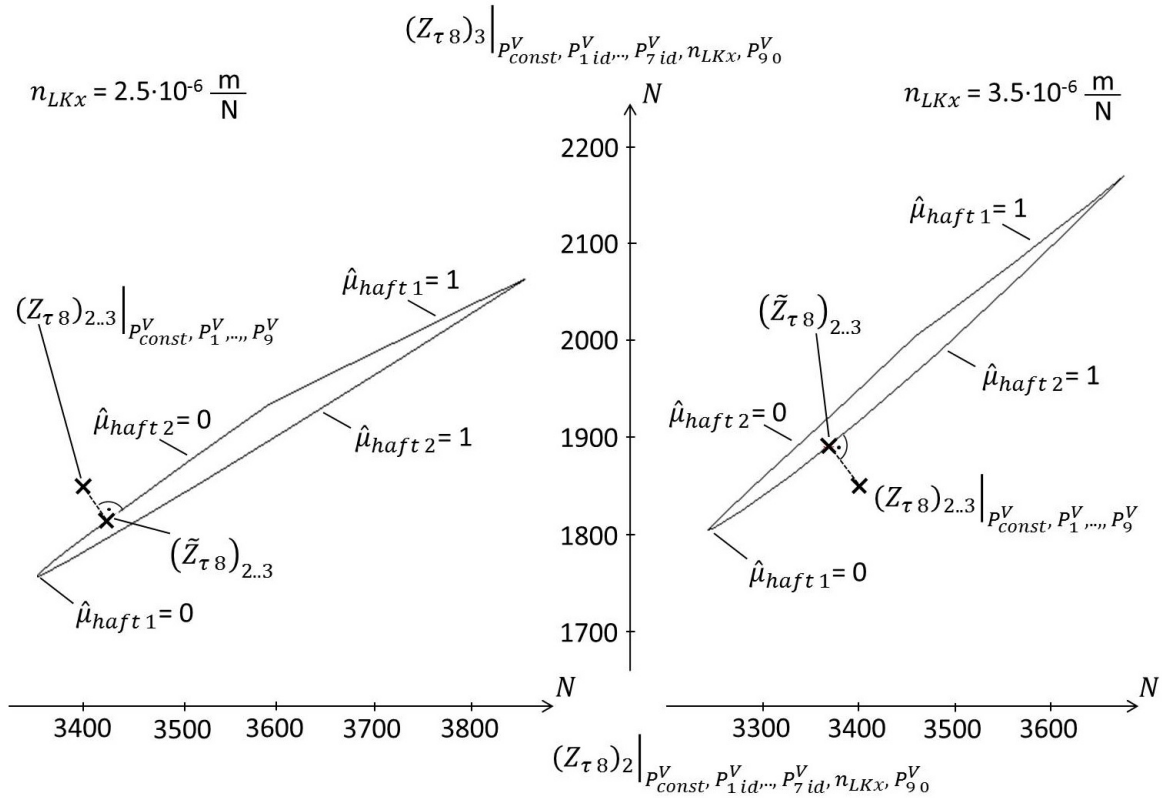
dargestellt werden können. Hieraus ergibt sich auch die Lösung für die *Haftreibbeiwerte* zunächst in der Darstellung

$$\hat{\mu}_{haft1id} = 0.47 \quad \hat{\mu}_{haft2id} = 0.631$$

und umgerechnet mit Hilfe von 4.105 und 4.102 in der Darstellung der Modellparameter

$$\mu_{haft0barid} = 1.52 \quad \mu_{haft\Delta pid} = 1.41$$

Die *Konvergenzgeschwindigkeit* des *Gradientenverfahrens* ist allerdings langsam. Eingesetzt wird es hier wegen des dadurch garantierten *globalen* Sucherfolgs, der *lokal* nicht mehr vorausgesetzt werden muss. Daher wird bei einem relativen Fehler  $< 0.01$  auf das schneller *konvergierende Newtonverfahren* umgestellt. Ist  $n_{LKx}$  bei einer Berechnung von 4.187 so gewählt, dass keine Werte für  $\hat{\mu}_{haft1}$  und  $\hat{\mu}_{haft2}$  zum festliegenden *Zielwert* von  $(Z_{\tau 8})_{2..3}$  existieren, *konvergiert* das *Gradientenverfahren* angewandt in 3.42 gegen die 'Scheinlösung'  $(\tilde{Z}_{\tau 8})_{2..3} \neq (Z_{\tau 8})_{2..3}$ . Bei einem zu kleinen Wert von  $n_{LKx}$  liegt  $(Z_{\tau 8})_{2..3}$  in der Darstellung



links oberhalb von  $(\tilde{Z}_{\tau 8})_{2.3}$ . Nach der Begründung von Punkt  $v$ ) zum Nachweis der Eindeutigkeit von  $Z_{\tau 8}$  in  $\tilde{P}_8^V$  am Ende von Abschnitt 4.2.8 gilt  $s_Z = -1$  und in diesem Fall damit

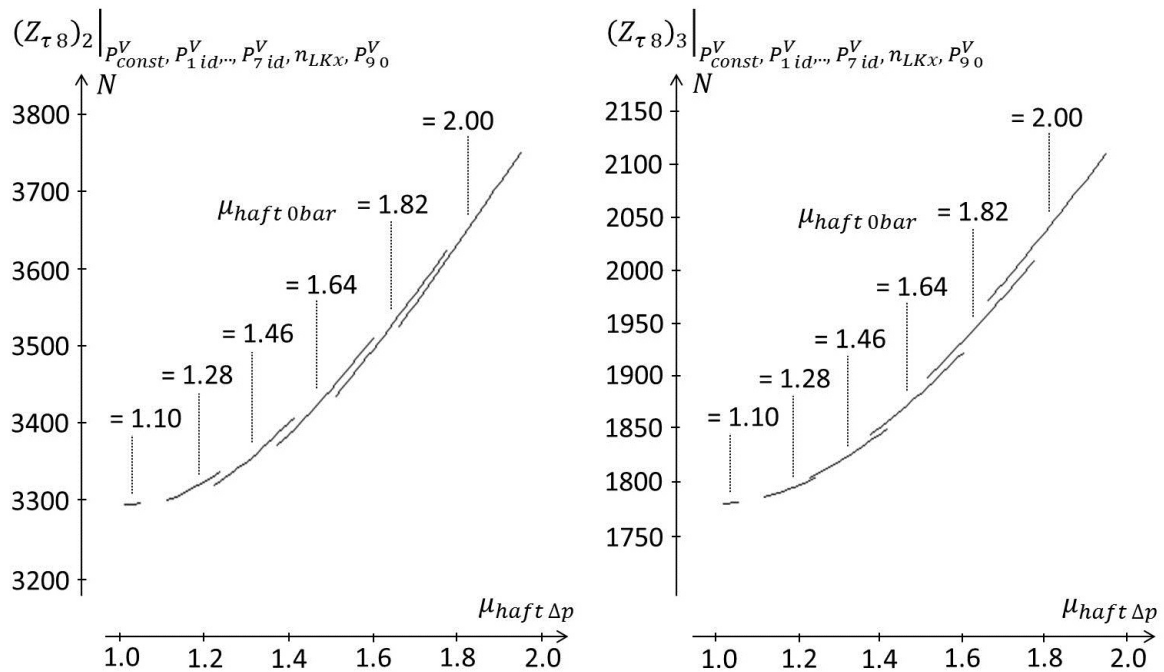
$$s_Z \cdot \left( (Z_{\tau 8})_{2.3} - (\tilde{Z}_{\tau 8})_{2.3} \right)^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} > 0$$

Dann ist nach 3.42 das Ergebnis der Berechnung von 4.187  $\hat{\mu}_{haft1} = -\infty$ , was das *Intervallhalbierungsverfahren* in 3.35 für  $i = 8$  und  $j = 1$  über 3.36 dazu bewegt, größere Werte für  $n_{LKx}$  zu wählen. Umgekehrt liegt bei einem zu großen Wert von  $n_{LKx}$  der Punkt  $(Z_{\tau 8})_{2.3}$  rechts unterhalb von  $(\tilde{Z}_{\tau 8})_{2.3}$ , es gilt

$$s_Z \cdot \left( (Z_{\tau 8})_{2.3} - (\tilde{Z}_{\tau 8})_{2.3} \right)^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} < 0$$

damit erhält man  $\hat{\mu}_{haft1} = +\infty$ , und in 3.35 werden kleinere Werte für  $n_{LKx}$  betrachtet. Das Durchreichen der Werte  $-\infty$  und  $+\infty$  über Funktion 3.36 zeigt u.A. obige Darstellung von  $\left( \tilde{Z}_{\tau 8} \right)_1 \Big|_{P_{const}^V, P_{1id}^V, \dots, P_{7id}^V} (Z_{\tau 8})_{2.3}, P_{90}^V (n_{LKx})$ . Sichtbar wird dabei auch das kleine Intervall von  $n_{LKx}$ -Werten, die überhaupt das Einstellen von  $(Z_{\tau 8})_{2.3}$  ermöglichen. Die Einschränkung auf den lokalen Ausschnitt lässt dann auch den eigentlich nichtlinearen

Zusammenhang nahezu linear erscheinen. Auch die Beziehung zwischen den *Zielgrößen* und *Haftreibbeiwerten* ist nichtlinear, was in der Modelldarstellung der *Haftreibbeiwerte* wie bspw. für

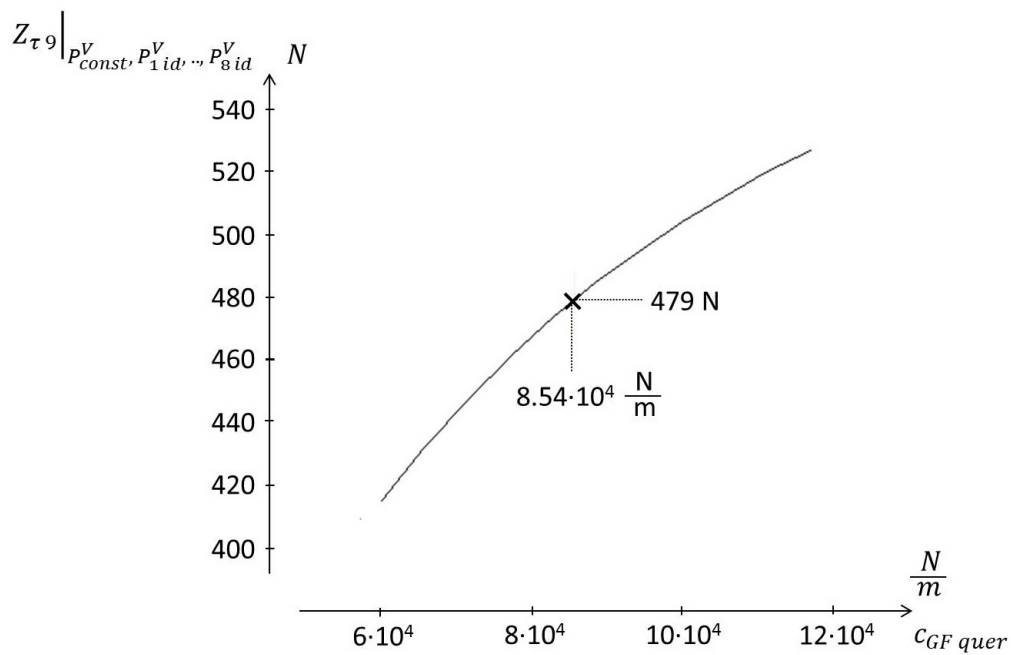


besser deutlich wird.

Zur Bestimmung von  $P_9^V$  verzweigt der Lösungsalgorithmus wieder in den letzten Satz von Schritt 6. So ergibt sich durch Inversion von

#### 4 Entwicklung und Verifikation einer Sequentiellen Parameteridentifikation für ein physikalisches Reifenmodell

---



die Lösung zu

$$c_{GF\ quer\ id} = 8.54 \cdot 10^4 \frac{N}{m}$$

und es sind damit nun sämtliche Werte der zu identifizierenden Parameter des Reifenmodells über den Lösungsalgorithmus der *Sequentiellen Parameteridentifikation* geschätzt.

## 5 Bewertung und Ausblick

In den zurückliegenden Kapiteln wurde die Vorgehensweise der Sequentiellen Parameteridentifikation vorgestellt, Parameter-Identifikationsprozesse so auszulegen, dass die generelle Funktion des numerischen Verfahrens zur Suche nach den realen Parameterwerten mit formalen, analytischen Mitteln verifiziert werden kann. Dazu werden die geschätzten Parameter in nacheinander und aufeinander aufbauend zu bestimmende separate Gruppen eingeteilt und jeweils zugehörige Messungen definiert, die die unabhängige und eindeutige Bestimmung dieser jeweils deutlich kleineren Wertekombinationen ermöglichen. Außerdem schlägt die Vorgehensweise zahlreiche Möglichkeiten vor, wie der Nachweis der vorausgesetzten Eigenschaften erbracht werden kann. Dazu zählen auch Varianten numerischer Verfahren, deren Konvergenz gegen die eindeutige Lösung unter diesen Bedingungen sichergestellt ist. Nach der vorgestellten Methode wurde ein Identifikationsprozess für ein physikalisches Reifenmodell entwickelt, das sich bei der Daimler AG im praktischen Einsatz der Fahrdynamik-Simulation zu Entwicklungs- und Analyse-zwecken befindet. Einen Großteil der Arbeit machen die formal geführten Beweise zu den vorausgesetzten Eigenschaften der Sequentiellen Parameteridentifikation aus, die jeweils von den mathematischen Gleichungen des Reifenmodells ausgehen. Aus einem Beispiela-blauf lässt sich der zusammengefasste numerische Lösungsalgorithmus noch abschließend in anschaulicher Form nachvollziehen.

In der Diskussion der Ergebnisse dieser Arbeit kann zunächst einmal herausgestellt werden, dass hierdurch ein Beitrag dazu entstand, nicht wie in der Literatur zur Parameter-Identifikation weit verbreitet, das Problem der nichtlinearen Inversion einfach auszublenken. Auch wird hier nicht entsprechend der Vorgehensweise im Gebiet der Optimierungsalgorithmen ein effizientes Lösungsverfahren heuristisch entworfen und damit die generelle Funktion der Methode im Ungewissen belassen. Die Arbeit unternimmt also in jedem Fall einen Schritt weg davon, sich darauf zu verlassen, dass im Suchalgorithmus bestimmt 'ein Wunder geschieht', und nutzt die Möglichkeit, die Identifikations-im Gegensatz zu Optimierungsproblemen bieten, den Prozess verifizierbar zu entwerfen und seine grundsätzliche Funktion wirklich zu zeigen. Dass die Messreihe zur Parameterschätzung nicht beliebig gewählt werden kann, sondern auf Analysierbarkeit ausgelegt werden muss, und dabei auch die statistische Versuchsplanung eingeschränkt wird, ist ein Nachteil der Methode. Durch eine Kombination aus der Schätzung mit verifizierter Inversion, die sich sicher im globalen Parameterraum zurechtfindet, und mit diesem

Startwert einer zweiten statistisch optimierten Suche, die die Genauigkeit der Identifikation erhöht, kann hier allerdings Abhilfe geschaffen werden. Damit das verifizierte Verfahren überhaupt eine Chance besitzt, eine Parameterbelegung zu bestimmen, die das Gesamtverhalten optimal festlegt, muss das verwendete Modell die Beziehung und Abhängigkeit zwischen verschiedenen Zuständen hinreichend gut abbilden. Es wird nämlich kein umfassendes Ausgleichsproblem gelöst, sondern eine minimale Menge von Eigenschaften des realen Systems betrachtet. Vorteil davon ist wiederum, dass bei einer entsprechend hohen Abbildungstreue des Modells eine kleinstmögliche Reihe von Messungen zur Schätzung der Parameter genügt. In gewissem Umfang kann auch für die Sequentielle Parameteridentifikation ein Ausgleichsproblem konstruiert werden. Die zur Bestimmung einer Parametergruppe definierten Messungen lassen wie beispielsweise im Fall des Reifenmodells verschiedene konkrete Messungen zu, von denen mehrere in einer Optimierung betrachtet werden können. Schwierigkeiten bei der Rechtfertigung der korrekten, eindeutigen Lösung liegen dabei dann allein im Modell begründet. Gerade im Fall von Problemen bei der Abbildung von gemessenem Verhalten durch ein Modell, zeigt die Sequentielle Parameteridentifikation, dass weder die Auswahl an betrachteten Eigenschaften noch die Berechnung der Parameterwerte dafür verantwortlich sind, und liefert eine analytische Begründung, warum eine Eigenschaft in Kombination mit zusätzlich festgelegtem Verhalten nicht durch das Modell abgebildet werden kann. Nicht zu übersehen ist im Fall des verifizierten Identifikationsverfahrens für das Reifenmodell, dass der Aufwand für den vollständigen formalen Funktionsbeweis groß ist und den für entsprechende Bemühungen bei diskreten oder steuerungstechnischen Algorithmen deutlich übertrifft. Von einer lohnenden Investition kann man nur sprechen, wenn das zugehörige Modell langlebig ist und ausschlaggebende Schlüsse aus seiner Anwendung gezogen werden. Das hier betrachtete Reifenmodell befindet sich schon mehrere Jahre in Anwendung, hat zu einigen Erkenntnissen in der Fahrdynamikanalyse bei der Daimler AG beigetragen, und wird noch weiterhin zum Einsatz kommen, teilt diese Rolle aber mit mehreren anderen Modellen verschiedener Kategorie. Resultate aus der Analyse in dieser Arbeit lassen sich aber in ähnlicher Form auf andere Typen von Reifenmodellen übertragen, um auch für diese einen verifizierten Identifikationsprozess zu erstellen. Ohne entsprechenden Anpassungsaufwand und weiterführende Überlegungen ist das jedoch nicht zu erreichen. Unabhängig davon aber ist durch die Resultate der Arbeit schon gezeigt, dass die auf komplexen analytischen Zusammenhängen basierende Funktion numerischer Lösungsalgorithmen durchaus verifizierbar ist, und damit auch für diese Anwendungsfälle effiziente Alternativen zu heuristischen Methoden existieren.

# A Anhang zu Kapitel 2

## A.1 NP-Schwere der näherungsweise Minimierung arithmetischer Funktionen

Das Problem *MIN*, zu einer *arithmetischen* Funktion  $f : P^* \rightarrow \mathbb{R}$  (aus Summen, Differenzen, Produkten, Quotienten, Variablen und Zahlenwerten) einen Wert

$$P_0^V \in P^* = \prod_{i=1}^n [g_u(P_i), g_o(P_i)] \text{ mit } f(P_0^V) - \min_{P^V \in P^*} f(P^V) < 0.5$$

zu finden, ist *NP-schwer*.

Zum Nachweis der *NP-Schwere* von *MIN* lässt sich eine *Polynomialzeitreduktion* von *3-SAT*, dem Problem der Erfüllbarkeit *aussagenlogischer* Formeln in *konjunktiver Normalform* mit *Klauseln* der Größe 3, auf *MIN* entwerfen. *3-SAT* selbst ist *NP-vollständig*, den Beweis dazu findet man z.B. in [79]. Die *3-KNF*-Formel sei in den *booleschen* Variablen  $x_1, \dots, x_n$  und Operatoren  $\neg, \vee$  und  $\wedge$  angegeben. Ein Beispiel einer solchen Formel ist

$$(x_1 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5)$$

Zur *3-KNF*-Formel  $b$  wird die *arithmetische* Funktion  $g$  definiert, die aus  $b$  hervorgeht, indem die  $x_i$  durch  $P_i^V$ ,  $\neg$  durch  $1 -$ ,  $\vee$  durch  $+$  und  $\wedge$  durch  $\cdot$  ersetzt werden. Als Begrenzung des Suchraums wird  $g_u(P_i) = 0$  und  $g_o(P_i) = 1$  festgelegt. Für jede *Verknüpfung*

$a \circ b$ ,  $\circ \in \{+, -, \cdot\}$  lassen sich aus Abschätzungen der Extremwerte von  $a$ ,  $b$ ,  $\frac{\partial a}{\partial \|P^V\|}$

und  $\frac{\partial b}{\partial \|P^V\|}$  Abschätzungen der Extremwerte von  $a \circ b$  und  $\frac{\partial (a \circ b)}{\partial \|P^V\|}$  ableiten. Damit

können rekursiv  $|g| \leq g_{os}$  und  $\left| \frac{\partial g}{\partial \|P^V\|} \right| \leq g_{\partial os}$  abgeschätzt werden, deren Binärdarstellung damit polynomiell in der Länge der Darstellung von  $g$  beschränkt bleibt. Darauf

basierend lässt sich die Funktion  $h = 4 \cdot \max(g_{\partial os}, g_{os}) \cdot \left( \sum_{i=1}^n (P_i^V - P_i^{V^2}) \right)$  definieren

mit  $h \geq g$  für  $0 \leq P_i^V \leq 1 \quad \forall 1 \leq i \leq n$ , wenn  $g = 0$  für  $P_i^V \in \{0, 1\} \quad \forall 1 \leq i \leq n$ , und mit  $h = 0$  für  $P_i^V \in \{0, 1\} \quad \forall 1 \leq i \leq n$ . *MIN* hat nun für die *arithmetische* Funktion

$f = h - g$  genau dann eine Lösung  $\hat{P}_{min}^v$  mit  $f(\hat{P}_{min}^v) < -0.5$ , wenn  $b$  erfüllbar ist. Da die Darstellung von  $f$  polynomiell längenbeschränkt in der Darstellung von  $b$  ist, beschreibt die Konstruktion von  $f$  aus  $b$  eine *Polynomialzeitreduktion*.

## A.2 NP-Schwere der näherungsweise Lösung eindeutiger wurzel-arithmetischer Ausgleichsprobleme

Das Problem *REG*, zu einer *injektiven wurzel-arithmetischen* Funktion  $F : X^* \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  (aus Summen, Differenzen, Produkten, Quotienten, Wurzeln, Variablen und Zahlenwerten) einen Wert

$$X_0 \in X^* = \prod_{i=1}^n [g_{u X_i}, g_{o X_i}] \text{ mit } \|F(X_0) - F_0\| - \min_{X \in X^*} \|F(X) - F_0\| < 0.5$$

zu finden, ist *NP-schwer*.

Zum Nachweis der *NP-Schwere* von *REG* lässt sich eine *Polynomialzeitreduktion* des *NP-schweren* Problems *MIN* (s. A.1), der näherungsweise Minimierung *arithmetischer* Funktionen, auf *REG* entwerfen. Zur *MIN*-Formel  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  wird die *REG*-Formel  $F : X^* \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  als

$$F(X) = \begin{bmatrix} 0_n \\ r \end{bmatrix} - \left(1 + \frac{f(P^v)}{r}\right) \cdot \left( \begin{bmatrix} 0_n \\ r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X \\ r - \sqrt{r^2 - \|X\|^2} \end{bmatrix} \right)$$

$$\text{mit } r = f_{os} + 0.5, \quad (P^v)_i = \frac{4\sqrt{n}(X)_i}{3r} (g_o(P_i) - g_u(P_i) + 1) + g_u(P_i) - 1$$

und mit der Abschätzung  $f_{os} \geq |f|$  analog der von  $g$  in A.1 definiert. Die Definitionsmenge wird über

$$g_{u X_i} = \frac{3r}{4\sqrt{n}(g_o(P_i) - g_u(P_i) + 1)}, \quad g_{o X_i} = \frac{3r}{4\sqrt{n}}$$

festgelegt. Wie Abbildung A.1 für  $n = 1$  zeigt, legt  $F$  die Funktion  $f$  auf der Innenseite einer Kreislinie, Kugel- bzw. Hyperkugelinnenfläche ab. So entspricht die Minimalstelle von  $f$  der Position von  $F$ , die dem Punkt  $F_0 = \begin{bmatrix} 0_n \\ r \end{bmatrix}$  am nächsten kommt. Damit ist die Lösung von  $F$  mit  $F_0$  auch Lösung von  $f$ . Die Darstellung von  $F$  und  $F_0$  ist in der Länge der Darstellung von  $f$  polynomiell längenbeschränkt. Also beschreibt die Konstruktion von  $F$  und  $F_0$  aus  $f$  eine *Polynomialzeitreduktion*.



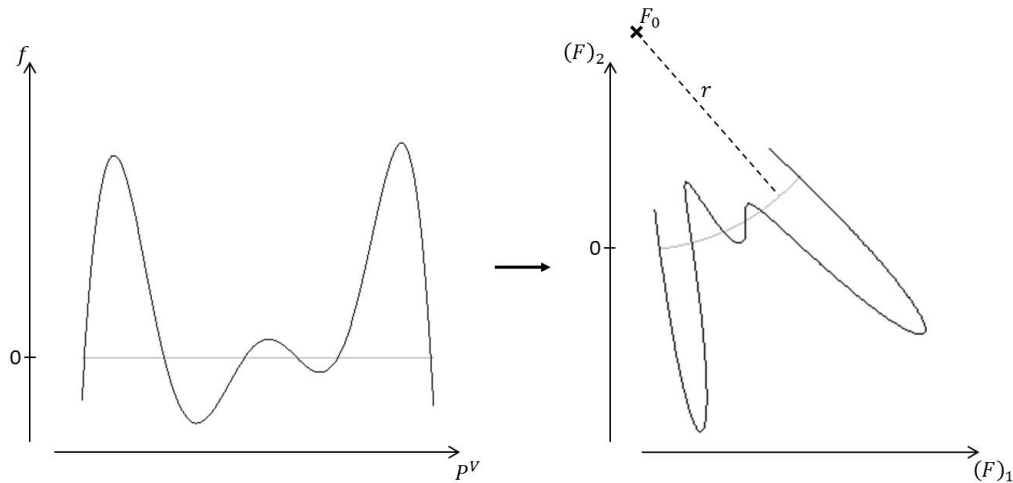


Abbildung A.1: Reduktion eines 1D-MIN-Problems auf ein 2D-REG-Problem

### A.3 Reduktion auf näherungsweise Inversion injektiver arithmetischer Funktionen

Das Erfüllbarkeitsproblem für nichtmehrdeutige *aussagenlogische* Formeln *SAT|UASAT* ist polynomialzeitreduzierbar auf das Problem *INVINF* der näherungsweise Inversion *injektiver arithmetischer* Funktionen  $F : X^* \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$X_0 \in X^* = \left( \prod_{i=1}^n [g_{u X_i}, g_{o X_i}] \right) \cup \{\emptyset\}$$

$$\text{mit } (\|F(X_0) - F_0\| < 0.5) \vee ((X_0 = \emptyset) \wedge (\nexists X \in X^* : F(X) = F_0))$$

*Aussagenlogische* Formeln sind rekursiv definiert als Verknüpfungen  $(b_1 \vee b_2)$ ,  $(b_1 \wedge b_2)$ ,  $(\neg b_1)$  über den *aussagenlogischen* Formeln  $b_1$  und  $b_2$ , die jeweils auch für eine der *booleschen* Variablen  $x_1, \dots, x_m$  stehen können.  $b$  sei nun eine *aussagenlogische* Formel aus *UASAT*, die demnach eine oder keine, aber nicht mehrere Lösungen der Gleichung  $b = 1$  besitzt. Die Verknüpfungen in  $b$  seien durchnummeriert mit  $V_1$  bis  $V_l$ , wobei die äußere Verknüpfung von  $b$  mit  $V_1$  bezeichnet ist. Jeder der Verknüpfungen in  $b$  kann genau eine der *booleschen* Variablen  $y_1, \dots, y_l$  zugeordnet werden. Weiter kann für jede Verknüpfung  $V_i$  eine *boolesche* Formel  $c_i$  eingeführt werden, die als Gleichung  $c_i = 1$  in  $y_i$

die Werte definiert, die die Verknüpfung abhängig von den Ergebniswerten der obersten Verknüpfungen bzw. Variablen ihrer Argumentformeln annimmt:

$$V_i : (A \circ B) \qquad (\neg A)$$

$$c_i : ((y_i \wedge (A_{xy} \circ B_{xy})) \vee ((\neg y_i) \wedge (\neg(A_{xy} \circ B_{xy})))) \qquad (y_i \wedge (\neg A_{xy})) \vee ((\neg y_i) \wedge A_{xy})$$

mit  $A \in \{V_{j_1}, x_{j_1}\}$ ,  $B \in \{V_{j_2}, x_{j_2}\}$ ,  $\circ \in \{\vee, \wedge\}$

$$\text{und } A_{xy} = \begin{cases} y_{j_1} & \text{für } A = V_{j_1} \\ x_{j_1} & \text{für } A = x_{j_1} \end{cases}, \quad B_{xy} = \begin{cases} y_{j_2} & \text{für } B = V_{j_2} \\ x_{j_2} & \text{für } B = x_{j_2} \end{cases}$$

Das Gleichungssystem

$$y_1 = 1 \tag{A.1}$$

$$\forall 1 \leq i \leq l : c_i = 1$$

ist in den Variablen  $x_i$  lösungsäquivalent zu  $b = 1$ . Die Definition der  $c_i$  legt für eine Belegung der  $x_j$  eine eindeutige Wertbelegung der  $y_i$  fest, weshalb auch Gleichungssystem A.1 maximal eine Lösung besitzt. Jede *aussagenlogische* Formel lässt sich in eine lösungsäquivalente *arithmetische* Funktion über der Definitions- und Lösungsmenge  $\{0, 1\}$  übertragen. Dazu ist folgende Substitution von *aussagenlogischen* durch *arithmetische* Verknüpfungen erforderlich:

<i>boolesche</i> Formel	$(A \vee B)$	$(A \wedge B)$	$(\neg A)$
<i>arithmetische</i> Formel	$((A + B) - (A \cdot B))$	$(A \cdot B)$	$(1 - A)$

Überführt man durch diese Substitutionen die Formeln  $c_i$  in die *arithmetischen* Ausdrücke  $a_i$ , kann daraus der Gesamtausdruck

$$g = (y_1 \cdot (a_1 \cdot (a_2 \cdot (\dots \cdot a_l))))$$

gebildet werden. Auch die Gleichung  $g = 1$  hat dann maximal eine Lösung für

$$(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_l) \in \{0, 1\}^{m+l}$$

Wie in A.1 beschrieben kann zu  $g$  in Polynomialzeit eine *arithmetische* Funktion  $f$  konstruiert werden, für die die Gleichung  $f = -1$  in  $[0, 1]^{m+l}$  die gleichen Lösungen besitzt wie  $g = 1$  in  $\{0, 1\}^{l+m}$ , und die  $\geq -1$  in  $[0, 1]^{l+m}$  ist. Werden in  $f$  noch die  $x_i$  und  $y_j$  durch  $(X)_k$ ,  $1 \leq k \leq l + m$  ersetzt, kann die Funktion  $F$  wie folgt gebildet werden:

$$F = \left(1 + f + (X)_{l+m+1}\right) \cdot \begin{pmatrix} ((X)_1 + 1) \\ \vdots \\ ((X)_{l+m} + 1) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } X \in [0, 1]^{l+m+1}$$

$F$  ist *injektiv*. Denn, gilt für  $X_1, X_2 \in X^*$ , dass  $F(X_1) = F(X_2)$ , folgt  $(F_{1/2})_{l+m+1} = 1 + f(X_1) + (X_1)_{l+m+1} = 1 + f(X_2) + (X_2)_{l+m+1}$ , damit für  $(F_{1/2})_{l+m+1} \neq 0$ , dass  $(X_{1/2})_i = \frac{(F_{1/2})_i}{(F_{1/2})_{l+m+1}} - 1$ ,  $1 \leq i \leq l+m$  also  $(X_1)_{1..l+m} = (X_2)_{1..l+m}$ . Da  $f$  allein von  $(X)_{1..l+m}$  abhängt, gilt  $f_1 = f_2$ , und es folgt  $(X_1)_{l+m+1} = (X_2)_{l+m+1}$ , also insgesamt  $X_1 = X_2$  für  $(F_{1/2})_{l+m+1} \neq 0$ . Da für  $X \in X^*$  einmal  $f \geq -1$  und außerdem  $(X_{1/2})_{l+m+1} \geq 0$  ist, gilt für den Fall  $(F_{1/2})_{l+m+1} = 0$ , dass  $f_{1/2} = -1$  und  $(X_{1/2})_{l+m+1} = 0$ .  $f_{1/2} = -1$  hat für  $X \in X^*$  dann genau eine Lösung für  $(X_{1/2})_{1..l+m}$ . Also gilt insgesamt  $X_1 = X_2$ . Gelöst werden soll nun das Problem *INVINF* für  $F_0 = 0$ . Ist  $b$  erfüllbar durch  $x_1, \dots, x_l$ , lässt sich aus  $(X_0)_{1..l} = (x_1, \dots, x_l)^T$  und A.1 für  $(X_0)_{l+1..l+m} = (y_1, \dots, y_m)^T$  sowie  $(X_0)_{l+m+1} = 0$  eine Lösung für  $F_0 = 0$  bilden, die bei *INVINF* bis auf Genauigkeitseinbußen gefunden wird. Ist  $b$  nicht erfüllbar, gilt für die gemäß Abschnitt A.1 bestimmte Funktion  $f$ , dass  $f((X)_{1..l+m}) \geq 0$  für  $(X)_{1..l+m} \in [0, 1]^{l+m}$ . Dann gilt  $\forall X \in X^* : \|F(X) - F_0\| \geq (F(X))_{l+m+1} = 1 + f + (X)_{l+m+1} \geq 1$ , weshalb *INVINF* zum Ergebnis  $X_0 = \emptyset$  führt. Also beschreibt die Konstruktion von  $F, F_0$  und  $X^*$  aus  $b$  eine *Polynomialzeitreduktion* von  $SAT|UASAT$  auf *INVINF*.

## A.4 Komplexitätstheoretische Konsequenzen der effizienten näherungsweisen Inversion injektiver arithmetischer Funktionen

Die effiziente Lösbarkeit des Problems *INVINF* (s. Abschn. A.3) der näherungsweisen Inversion *injektiver arithmetischer* Funktionen hat Konsequenzen für ungelöste Fragen der *Komplexitätstheorie*. Diese definiert die *Komplexitätsklasse UP* (*Unambiguous Polynomial Time*) als die Klasse von *Sprachen*, die sich von einer *nichtdeterministischen polynomialzeitbeschränkten Turingmaschine*, die maximal einen *akzeptierenden Berechnungspfad* erzeugt, entscheiden lässt. Wie für *NP* ist auch für die *Komplexitätsklasse UP* bisher nicht bekannt, ob  $P \neq UP$ , wobei letzteres vermutet wird (s. bspw. [79]). Nach [79], *Theorem 3.82*, gilt  $P \neq UP$  genau dann, wenn eine Menge  $B \in P$  von *aussagenlogischen Formeln* existiert, von denen jede maximal eine *erfüllende Belegung* besitzt, und  $B \cap SAT \notin P$  ( $SAT =$  Menge der erfüllbaren *aussagenlogischen Formeln*). Als Teilmenge aller *aussagenlogischer Formeln* mit maximal einer *erfüllenden Belegung* entscheidet das Problem  $SAT|UASAT$  (s. Abschn. A.3) auch die *Erfüllbarkeit* der Formeln aus  $B$ . Da also  $SAT|B \subseteq SAT|UASAT$  und  $SAT|UASAT$  *polynomialzeitreduzierbar* auf *INVINF* ist (s. Abschn. A.3), führt die Annahme, dass *INVINF*  $\in P$ , zum Schluss, dass  $SAT|B \in P$ . Mit  $B \in P$  folgt dann  $B \cap SAT = B \cap (SAT|B) \in P$ . Nimmt man nun zusätzlich

an, dass  $P \neq UP$ , muss  $B$  existieren und man erhält mit der hergeleiteten Beziehung  $B \cap SAT \in P$  einen Widerspruch zum *Theorem*. Also können nicht beide getroffenen Annahmen wahr sein, und es ließe sich aus  $INVINF \in P$  auf  $P = UP$  schließen.

# B Anhang zu Kapitel 3

## B.1 Beispielproblem mit beliebig hohem Suchaufwand

Die Übertragungsfunktion

$$\tau(f_{P_{id}}, u) = \begin{cases} \varepsilon - \|p - u\| & \text{für } \|p - u\| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit  $\varepsilon > 0$ ,  $(p)_i = f_{P_{id}}(p_i)$ ,  $\bigcup_{i=1}^{n_u} \{p_i\} = P_{id}$  liefert nur Antwort-Funktionswerte  $\neq 0$ , wenn die Anregungsfunktion  $u$  Werte in der  $\varepsilon$ -Umgebung des Parametervektors  $p$  annimmt. Damit wird die Suche nach dem zu Grunde liegenden Parametervektor zu einer Art Tresorschloss- oder Passwort-'Knacken' ohne jegliche verwertbare Hinweise. Denn, um den Parametervektor  $p$  zu identifizieren, muss durch Veränderung der Anregungswerte  $u$  über der Zeit entweder ein Punkt in der  $\varepsilon$ -Umgebung gefunden werden, oder der gesamte Raum außerhalb ausgeschlossen werden. Bei entsprechend kleinem Wert für  $\varepsilon$  wird diese 'Suchaufgabe' beliebig aufwändig.

## B.2 Ursachen für ausbleibende Konvergenz gegen die Lösung von Gradienten- und Newtonverfahren

**Lemma 1** Sei  $F \in (C^1(D))^n$  mit  $D \subseteq \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$  und  $F(x_0) = y_0$ . Konvergiert

das schrittweitengesteuerte Newtonverfahren mit Projektion auf  $D$  für das Problem  $x \in D : F(x) = y_0$  bzw.

das schrittweitengesteuerte Gradientenverfahren mit Projektion auf  $D$  für das Problem  $x \in D : \|F(x) - y_0\|^2 = 0$

nicht gegen  $x_0$ , existiert ein Wert  $x_1 \neq x_0$ ,

für den die Funktionaldeterminante verschwindet  $\left( \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x_1} \right) = 0$ , oder

der Randpunkt von  $D$  ist mit Suchrichtung nach außen, oder für den  $F(x_1) = F(x_0)$  gilt.

**Beweisskizze:** Das als unbegrenzt iterierend betrachtete Verfahren liefert eine unendliche Folge  $(x_i^*)$  von Zwischenwerten in  $D$  mit monoton in  $i$  fallenden Werten  $\|F(x_i^*) - y_0\|$ . Da  $D$  kompakt ist, besitzt  $(x_i^*)$  einen Häufungspunkt  $x_1 \in D$ . Angenommen  $\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x_1} \neq 0$  und  $F(x_1) \neq y_0$ . Dann existiert für das *Newtonverfahren* die Suchrichtung  $d_N(x_1) = \left( \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=x_1} \right)^{-1} \cdot (y_0 - F(x_1)) \neq 0$  bzw. für das *Gradientenverfahren* die Suchrichtung  $d_G^T(x_1) = -(F(x_1) - y_0)^T \cdot \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=x_1} \neq 0$ . Nun nimmt man weiter an, dass für das *Gradientenverfahren*  $d_G^P(x_1)$ , die von  $x_1$  aus auf  $D$  projizierte Richtung  $d_G(x_1)$ , nicht verschwindet, also  $d_G^P(x_1) \neq 0$  und für das *Newtonverfahren* zusätzlich, falls  $x_1$  *Randpunkt* ist,  $(d_N^P(x_1))^T \cdot d_G^P(x_1) > 0$  gilt. Wegen der stetigen Differenzierbarkeit von  $F$ , da  $(d_{N/G}^P(x_1))^T \cdot d_G^P(x_1) > 0$ , und der Rand  $\partial D$  linear ist, existiert dann ein  $\delta > 0$  so, dass  $\|F(x_1 + \delta d_{N/G}^P(x_1)) - y_0\| < \|F(x_1) - y_0\|$ , dass  $F(x_1 + \delta d_{N/G}^P(x_1)) \in D$ , und dass  $x_1 + \delta d_{N/G}^P(x_1)$  nur in den Komponenten Randwerte annimmt, in denen auch  $x_1$  auf derselben Intervallgrenze liegt ( $(x_1 + \delta d_{N/G}^P(x_1))_k = a_k$  bzw.  $b_k \Rightarrow (x_1)_k = a_k$  bzw.  $b_k$ ). Als Häufungspunkt von  $(x_i^*)$  kann für  $x_1$  eine Teilfolge  $(x_i^{**})$  gebildet werden, die gegen  $x_1$  konvergiert, wie  $(x_i^*)$  für  $\|F(x_i^{**}) - y_0\|$  monoton in  $i$  fällt, und für die auch jeder Iterationsschritt mit der Suchschrittweite  $\delta$  von  $x_1$  in  $D$  liegt ( $x_i^{**} + \delta d_{N/G}^P(x_i^{**}) \in D$ ). Letzteres ist möglich, da  $F$  stetig differenzierbar und damit  $d_{N/G}^P$  stetig ist, und  $x_1 + \delta d_{N/G}^P(x_1)$  gegenüber  $x_1$  nicht in zusätzlichen Komponenten auf Randwerten liegt. Also lässt sich der Grenzwert

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|F(x_i^{**} + \delta d_{N/G}^P(x_i^{**})) - y_0\| = \|F(x_1 + \delta d_{N/G}^P(x_1)) - y_0\| < \|F(x_1) - y_0\| \quad (\text{B.1})$$

abschätzen. Es gilt weiter

$$\begin{aligned} \|F(x_i^* + \delta_i^* d_{N/G}^P(x_i^*)) - y_0\| &= \|F(x_{i+1}^*) - y_0\| \geq \|F(x_j^*) - y_0\| \quad \text{für } i < j \\ \Rightarrow \|F(x_i^{**} + \delta_i^{**} d_{N/G}^P(x_i^{**})) - y_0\| &\geq \|F(x_{i+1}^{**}) - y_0\| \geq \|F(x_1) - y_0\| \end{aligned}$$

Man kann davon ausgehen, dass die Verfahren in Suchrichtung  $d_{N/G}^P$  innerhalb der hier betrachteten Umgebungen über  $\delta$  jeweils den Wert mit minimalem Abstand finden. Dann

gilt  $\|F(x_i^{**} + \delta_i^{**} d_{N/G}^P(x_i^{**})) - y_0\| \leq \|F(x_i^{**} + \delta d_{N/G}^P(x_i^{**})) - y_0\|$  und man erhält mit dem vorigen Ergebnis

$$\|F(x_i^{**} + \delta d_{N/G}^P(x_i^{**})) - y_0\| \geq \|F(x_1) - y_0\| \quad (\text{B.2})$$

Nun widersprechen sich B.1 und B.2. Folglich ist mindestens eine der getroffenen Annahmen falsch, und für  $x_1$  muss entweder die Funktionaldeterminante verschwinden ( $\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=x_1} = 0$ ), oder es gilt  $F(x_1) = y_0$ , oder, wenn beides nicht, gilt  $(d_{N/G}^P(x_1))^T \cdot d_G^P(x_1) \leq 0$ . Im Fall von  $\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=x_1} \neq 0$ ,  $F(x_1) \neq F(x_0)$  und  $(d_{N/G}^P(x_1))^T \cdot d_G^P(x_1) \leq 0$  muss  $x_1$  auf dem Rand liegen und u. A. die Suchrichtung  $d_{N/G}(x_1)$  nach außen gerichtet sein. Für das *Newtonverfahren* liegt dies darin begründet, dass sich lokal in Richtung  $d_N(x_1)$  grundsätzlich der Abstand zum Zielwert verkleinert, also  $d_N^T(x_1) \cdot d_G(x_1) > 0$  gilt, damit  $d_N^P(x_1) \neq d_N(x_1)$  oder  $d_G^P(x_1) \neq d_G(x_1)$  folgt, was nur für  $x_1 \in \partial D$  in Frage kommt.

In der Literatur zu numerischer Optimierung finden sich detaillierte Analysen des Konvergenzverhaltens von *Gradienten-* und *Newtonverfahren*. Die Beweisskizze hier ist eine Anpassung des Konvergenznachweises in [12] zum schrittweitengesteuerten Gradientenverfahren ohne Gradientenprojektion für unbeschränkte Minimierungsfunktionen aus  $(C^1(\mathbb{R}^n))^1$  auf die Voraussetzungen von Lemma 1. Leider finden sich in [12] zum Gradientenverfahren mit Randprojektion nur Konvergenzaussagen, die genau ein lokales Minimum voraussetzen. Für dieses Verfahren gibt es dafür in [89] Konvergenzanalysen ohne die Voraussetzung genau eines lokalen Minimums. Allerdings wird dort wiederum für die zu minimierende Funktion zweimalige stetige Differenzierbarkeit gefordert. Auch in [2] und [89] wird die Konvergenz für unbeschränkten Suchraum für das schrittweitengesteuerte Gradientenverfahren ohne Projektion analysiert. Anders als bei [12] werden dort aber stärkere Forderungen als die einmal stetige Differenzierbarkeit an die zu minimierende Funktion gestellt.

## B.3 Sattelpunkt

Vor dem Hintergrund verschiedener kontextbezogener Definitionen des *Sattelpunkts* in der Literatur wird auch hier eine problemangepasste Definition angegeben:

**Definition 23 (Sattelpunkt)** Für eine stetig differenzierbare Funktion  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow$

$\mathbb{R}$  ist  $x_0 \in D$  ein Sattelpunkt genau dann, wenn  $\nabla f|_{x=x_0} = 0$  und  $\forall \delta > 0 \exists x_1, x_2 : \|x_1 - x_0\| < \delta, \|x_2 - x_0\| < \delta, f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$  ( $f$  besitzt in  $x_0$  trotz verschwindendem Gradient in  $x_0$  keinen lokalen Extremwert).

Für eine stetig differenzierbare Funktion  $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist  $x_0 \in D$  ein Sattelpunkt genau dann, wenn  $\left| \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x_0} = 0$  und  $\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 \forall y_1 : \|y_1 - F(x_0)\| < \varepsilon \Rightarrow \exists x_1 : \|x_1 - x_0\| < \delta, F(x_1) = y_1$  ( $F$  bildet Umgebung von  $x_0$  trotz verschwindender Funktionaldeterminante in  $x_0$  surjektiv auf Umgebung von  $F(x_0)$  ab).

## B.4 Beispiel einer komplett Sequentiellen Parameteridentifikation ohne global konvergierendes Gradientenverfahren

Der Parameter-Zielgrößen-Zusammenhang

$$Z_\tau : P_{id}^* \rightarrow \mathbb{R}^2, Z_\tau(P_{id}^V) = \begin{pmatrix} (P_{id}^V)_1 \\ 2 \cos((P_{id}^V)_1 + (P_{id}^V)_2) \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

mit  $P_{id}^* = [0, 2\pi] \times [0, 1]$

erfüllt die Bedingungen einer komplett *Sequentiellen Parameteridentifikation*:  $z_{\tau 1}$  hängt streng monoton von  $(P_{id}^V)_1$  und  $z_{\tau 2}|_{(P_{id}^V)_1=(P_{id}^V)_1 0}$  streng monoton von  $(P_{id}^V)_2$  ab. Abbildung B.1 zeigt den Zusammenhang als schwarze Kurven, die für konstantes  $(P_{id}^V)_2$  in  $(P_{id}^V)_1$  variieren und graue Kurven, die für konstantes  $(P_{id}^V)_1$  in  $(P_{id}^V)_2$  variieren. Die Randkurven in der Abbildung zeigen auch genau den Rand von Funktion B.3 im Bildraum. Soll der eingezeichnete Zielwert  $Z_{\tau 0}$  über die Parameter  $P_{id}^V$  gesucht werden, konvergiert das *Gradientenverfahren mit Projektion auf  $P_{id}^*$*  für einige Startwerte gegen den eingezeichneten Punkt  $Z_F$  statt gegen  $Z_{\tau 0}$ . Der Kreisausschnitt um  $Z_{\tau 0}$  in Abbildung B.1 zeigt, dass von  $Z_F$  aus keine Richtung ins Innere von  $P_{id}^*$  existiert, in die sich der Abstand zu  $Z_{\tau 0}$  verkleinert. D.h. in  $Z_F$  ist das *Gradientenverfahren* nicht mehr in der Lage, einen weiteren Suchschritt der Länge  $> 0$  auszuführen. Denkt man sich den Radius des Kreisausschnitts um  $Z_{\tau 0}$  vergrößert, erkennt man, dass  $Z_F$  für das *Gradientenverfahren* ein *attraktiver Fixpunkt* ist und somit eine ganze Umgebung als *Konvergenzgebiet* besitzt.



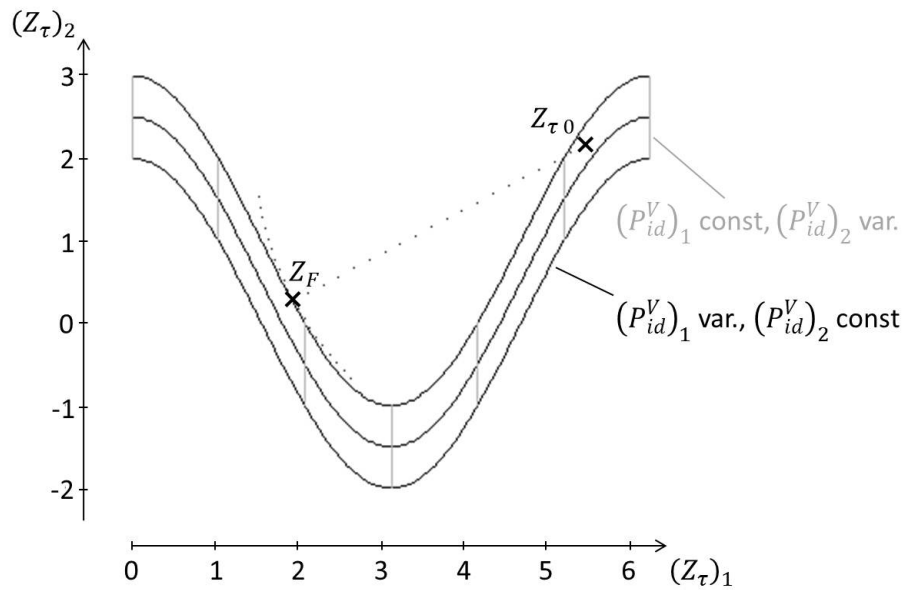


Abbildung B.1: Bildkurven von B.3 unter separater Var. von  $(P_{id}^V)_1$  und  $(P_{id}^V)_2$

## B.5 Invertierbarkeit der Zielgrößen einer komplett Sequentiellen Parameteridentifikation mit dem Newtonverfahren

Für einen Parameter-Zielgrößen-Zusammenhang einer *Sequentiellen Parameteridentifikation* können nach Abschnitt 3.1 und Beweisskizze zu Lemma 1 lediglich *Sattelpunkte* oder verschwindende projizierte Suchrichtungen das *schrittweitengesteuerte Newtonverfahren mit Projektion auf  $P_{id}^*$*  an der Konvergenz gegen die Lösung hindern. Zur Suche des Zielwerts  $Z_{\tau 0}$  ist die projektionsfreie Suchrichtung im Punkt  $P_1^V$  für das *Newtonverfahren*

$$d_N(P_1^V) = \left( \frac{\partial Z_\tau}{\partial P_{id}^V} \Big|_{P_{const}^V = P_{const 0}^V, P_{id}^V = P_1^V} \right)^{-1} \cdot (Z_{\tau 0} - Z_\tau(P_{const 0}^V, P_1^V)) \quad (\text{B.4})$$

Da es hier betrachtete Fälle gibt, in denen das *Gradientenverfahren* nicht konvergiert (s. Abschn. B.4), und das bedingt durch verschwindende projizierte Gradientensuchrichtungen  $d_G^P(P_1^V)$  von Randpunkten, kann die *Schrittweitenkontrolle* auf dem Rand auch die Konvergenz des *Newtonverfahrens* verhindern (s. Abschnitt 3.1 und der Beweisskizze zu Lemma 1). Beheben kann man dieses Problem, indem man eine Variante des *Newtonverfahrens* benutzt, die bis zu einer Maximallänge auch Suchschritte auf dem Rand

zulässt, die den Abstand zum *Zielwert* vergrößern, sofern  $(d_N^P(P_1^V))^T \cdot d_G^P(P_1^V) \leq 0$ .  
 Formt man Gleichung B.4 um in folgende Vektorgleichung

$$\frac{\partial Z_\tau}{\partial P_{id}^V} \Big|_{P_{const}^V = P_{const 0}^V, P_{id}^V = P_1^V} \cdot d_N(P_1^V) = Z_{\tau 0} - Z_\tau(P_{const 0}^V, P_1^V)$$

kann man daraus einfach die Gleichung allein für die erste Vektorkomponente extrahieren

$$\frac{\partial z_{\tau 1}}{\partial (P_{id}^V)_1} \Big|_{P_{const}^V = P_{const 0}^V, (P_{id}^V)_1 = (P_1^V)_1} \cdot (d_N(P_1^V))_1 = z_{\tau 1 0} - z_{\tau 1}(P_{const 0}^V, (P_1^V)_1) \quad (\text{B.5})$$

Da  $z_{\tau 1}$  erste Zielgröße einer komplett *Sequentiellen Parameteridentifikation* ist, hängt die Gleichung außer von  $(P_{id}^V)_1$  von keinem weiteren Parameter aus  $P_{id}$  ab. Außerdem ist  $z_{\tau 1}$  eindeutig und stetig in  $(P_{id}^V)_1$  (s. Gl. 3.11) und damit streng monoton in  $(P_{id}^V)_1$ . Im Folgenden wird angenommen, dass  $z_{\tau 1}$  streng monoton steigend ist in  $(P_{id}^V)_1$ , der umgekehrte Fall verhält sich analog. Erlaubt man für diesen Zusammenhang zusätzlich keine *Sattelpunkte*, gilt  $\frac{\partial z_{\tau 1}}{\partial (P_{id}^V)_1} \Big|_{P_{const}^V = P_{const 0}^V, (P_{id}^V)_1 = (P_1^V)_1} > 0$ . Für die Randwerte  $g_u(p_1)$  und  $g_o(p_1)$  von Parameter  $p_1$  und den *Zielwert*  $Z_{\tau 0}$  folgt aus der streng monotonen Steigung von  $z_{\tau 1}$

$$z_{\tau 1}(P_{const 0}^V, g_u(p_1)) \leq z_{\tau 1 0} \leq z_{\tau 1}(P_{const 0}^V, g_o(p_1))$$

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Es gilt  $z_{\tau 1}(P_{const 0}^V, (P_1^V)_1) \neq z_{\tau 1 0}$  :  
 Dieser Fall untergliedert sich in 3 weitere Fälle.
  - a)  $(P_1^V)_1 = g_u(p_1)$  :  
 Dann gilt  $(d_N(P_1^V))_1 > 0$  und die erste Komponente der Suchrichtung weist ins Innere des Definitionsbereichs von  $p_1$ .
  - b)  $(P_1^V)_1 = g_o(p_1)$  :  
 Dann gilt  $(d_N(P_1^V))_1 < 0$  und die erste Komponente der Suchrichtung weist auch hier ins Innere des Definitionsbereichs von  $p_1$ .
  - c)  $g_u(p_1) < (P_1^V)_1 < g_o(p_1)$  :  
 Dann weist die erste Komponente der Suchrichtung unweigerlich ins Innere des Definitionsbereichs von  $p_1$ .
2. Es gilt  $z_{\tau 1}(P_{const 0}^V, (P_1^V)_1) = z_{\tau 1 0}$  :  
 In diesem Fall ist die Voraussetzung dafür erfüllt, dass die zweite *Zielgröße*

$$z_{\tau 2} \Big|_{P_{const}^V = P_{const 0}^V, (P_{id}^V)_1 = (P_1^V)_1}$$

eindeutig ist in  $(P_{id}^V)_2$  und die Argumentation kann für die zweite Vektorkomponente  $(d_N(P_1^V))_2$  analog zu der für die erste Vektorkomponente  $(d_N(P_1^V))_1$  fortgeführt werden.

Solange ausschließlich der zweite Fall vorliegt, kann diese Argumentationskette nacheinander für immer weitere Komponenten  $(d_N(P_1^V))_i$  des Suchrichtungsvektors angewandt werden. Es sind dann nochmals insgesamt zwei Fälle zu unterscheiden.

- i) Für alle komponentenweisen Fallunterscheidungen tritt ausschließlich der 2. Fall ein. Dann gilt  $Z_\tau(P_{const\ 0}^V, P_1^V) = Z_\tau 0$ .
- ii) Es liegt für die  $j$ . Vektorkomponente ( $j$  minimal) der 1. Fall vor. Eine Randprojektion von  $d_N(P_1^V)$  setzt für einen *gültigen Bereich*, der ausschließlich durch unabhängige Intervalle von Vektorkomponenten definiert ist, nur die Komponenten auf den Wert 0, deren Komponentenrichtung aus dem Komponentenintervall hinausweist. Demnach gilt  $(d_N^P(P_1^V))_j \neq 0$  und damit  $d_N^P(P_1^V) \neq 0$ .

Folglich existieren keine verschwindenden projizierten Suchrichtungen, und das *eingeschränkt schrittweitengesteuerte Newtonverfahren mit Randprojektion* konvergiert bei der Inversion von *sattelpunktfreien Parameter-Zielgrößen-Zusammenhängen* einer komplett *Sequentiellen Parameteridentifikation*.

## B.6 Eindeutige Einzelzusammenhänge mit mehrdeutigem Gesamtzusammenhang

Beim zweidimensionalen Parameter-*Zielgrößen-Zusammenhang*

$$Z_\tau : P_{id}^* \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad Z_\tau(P^V) = \begin{pmatrix} (P^V)_1 + (P^V)_2 \\ (P^V)_1 + (P^V)_2^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

mit  $P_{id}^* = [0, 4] \times [0, 4]$

sind sämtliche Zusammenhänge zwischen eindimensionalen *Zielgrößen*  $z_{\tau i}$  und den skalaren Parameterwerten  $(P^V)_i$  eindeutig, wenn der andere Parameter konstant gehalten wird. Abbildung B.2 zeigt den Zusammenhang als schwarze Kurven, die für konstantes  $(P^V)_2$  in  $(P^V)_1$  variieren und graue Kurven, die für konstantes  $(P^V)_1$  in  $(P^V)_2$  variieren. Die Kurven steigen jeweils streng monoton in den  $z_{\tau i}$ . Trotzdem ist  $Z_\tau$  nicht eindeutig in  $P^V$ . Man erkennt dies daran, dass sich verschiedene graue Kurven kreuzen. An diesen Stellen nimmt  $Z_\tau$  für unterschiedliche Werte von  $(P^V)_1$ , also für zwei verschiedene Werte von  $P^V$  den gleichen Bildwert an.

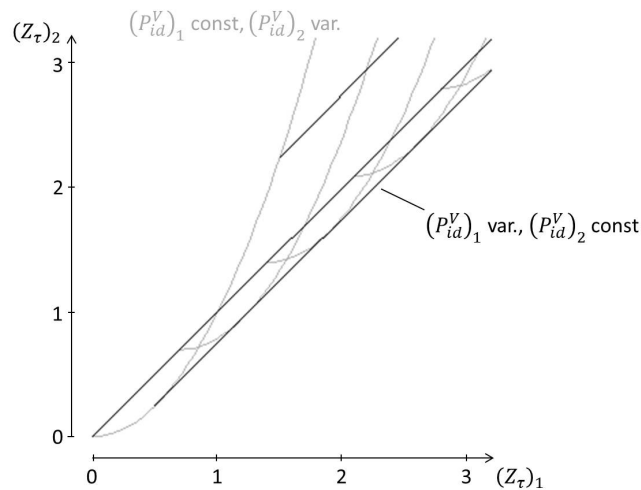


Abbildung B.2: Bildkurven von B.6 unter separater Var. von  $(P_{id}^V)_1$  und  $(P_{id}^V)_2$

## B.7 Eindeutiger Zusammenhang mit ausschließlich mehrdeutigen Einzelbeziehungen

Der Parameter-*Zielgrößen*-Zusammenhang

$$Z_{\tau i} = (P_i^V)_2 \cdot \begin{pmatrix} \cos((P_i^V)_1 + (P_i^V)_2) \\ \sin((P_i^V)_1 + (P_i^V)_2) \end{pmatrix}, \quad P_i^* = [0, 1.99\pi] \times [0.01, 5] \quad (\text{B.7})$$

ist eindeutig. Dies sieht man auch daran, dass Kreuzungen nur einmalig und auch nur für verschiedenfarbige Kurven zur separaten Variation der Parameter in Abbildung B.3 existieren. Hält man nun einen der Parameter fest und variiert den anderen, ergibt sich genau eine der in B.3 dargestellten Kurven. Jede dieser Kurven nimmt gleiche Werte  $(Z_{\tau i})_1$  und  $(Z_{\tau i})_2$  an verschiedenen Positionen an. Also ist keine der Abbildungen

$$(P_i^V)_l \rightarrow (Z_{\tau i})_j \Big|_{(P_i^V)_k = (P_i^V)_{k0}} ((P_i^V)_l), \quad k \neq l$$

eindeutig.

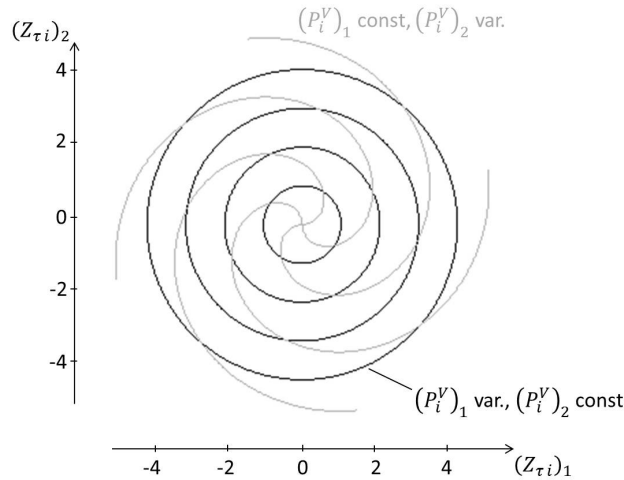


Abbildung B.3: Bildkurven von B.7 unter separater Var. von  $(P_i^V)_1$  und  $(P_i^V)_2$

## B.8 Zweielementige Parametergruppe mit unterbrochenem Lösungsintervall zur ersten Beziehung

Der Parameter-*Zielgrößen*-Zusammenhang

$$Z_{\tau i} = \begin{pmatrix} (P_i^V)_1 + 0.2 (P_i^V)_2 \\ 2 \cos (P_i^V)_1 + (P_i^V)_2 \end{pmatrix} \text{ mit } P_{id}^* = [0, 2\pi] \times [0, 1] \quad (\text{B.8})$$

ist eindeutig und erfüllt Eigenschaft 3.27. Da beide Parameter jeweils beide *Zielgrößen* beeinflussen, kann die *Parametergruppe* nicht in kleinere aufgeteilt werden. Betrachtet man die nach 3.28 eingeschränkte Abbildung

$$(P_i^V)_1 \rightarrow (Z_{\tau i})_1 |_{(Z_{\tau i})_2=0} ((P_i^V)_1)$$

zwischen  $(P_i^V)_1$  und  $(Z_{\tau i})_1$  hat diese abhängig von  $(Z_{\tau i})_2=0$  für  $(P_i^V)_1$  einen unterbrochenen Definitionsbereich. In Abbildung B.4 sieht man, dass nur für zwei verschiedene Intervalle von  $(P_i^V)_1$  über  $(P_i^V)_2$  der Wert 0 für  $(Z_{\tau i})_2=0$  einstellbar ist. Die genaue Definitionsmenge von  $(P_i^V)_1$  für  $(Z_{\tau i})_2=0$  ist

$$(P_i^*)_{1 (Z_{\tau i})_2=0} = [1.571, 2.095] \cup [4.189, 4.712]$$

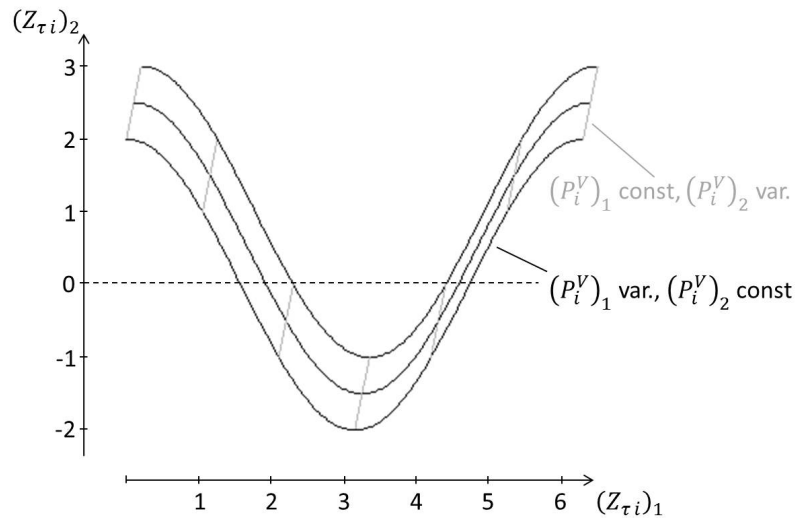


Abbildung B.4: Bildkurven von B.8 unter separater Var. von  $(P_i^V)_1$  und  $(P_i^V)_2$

## B.9 Beispiel eines eindeutigen 2D-Zusammenhangs mit monotonen Einzelbeziehungen, für den das Newtonverfahren nicht global konvergiert

Die 4 Zusammenhänge für je einen festgehaltenen Parameter sind im Fall des Parameter-Zielgrößen-Zusammenhangs

$$Z_\tau = \begin{pmatrix} (P^V)_1 + \frac{(P^V)_2}{(P^V)_1 + 0.3} \\ (P^V)_1^2 + 2(P^V)_2 \end{pmatrix} \text{ mit } P_{id}^* = [0.01, 1.3] \times [-0.5, 0] \quad (\text{B.9})$$

streng monoton im variierten Parameter:

$$\frac{\partial}{\partial (P^V)_k} z_{\tau i} \Big|_{(P^V)_j = (P^V)_{j_0}} > 0, \quad j \neq k$$

Man erkennt dies schon an den Bildkurven von  $Z_\tau$  unter separater Parametervariation in Abbildung B.5. Außerdem beschreibt B.9 einen eindeutigen Zusammenhang, und für die *Funktionaldeterminante* gilt

$$\left| \frac{\partial Z_\tau}{\partial P^{VT}} \right| > 0$$

Einen Punkt der Bildebene überdeckt nämlich maximal eine Bildkurve von einer Farbe und die grauen Kurven schneiden die schwarzen immer von unten. Für den Randpunkt

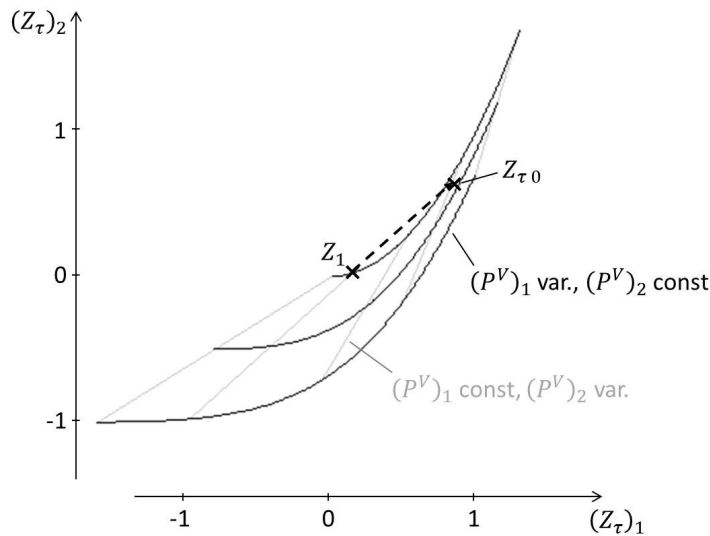


Abbildung B.5: Bildkurven von B.9 unter separater Var. von  $(P^V)_1$  und  $(P^V)_2$

$Z_1 = Z_\tau(0.15, 0)$  zeigt die Bildrichtung der Suchrichtung  $d_N$  des *Newtonverfahrens* auf den *Zielwert*  $Z_{\tau 0}$ . Damit verschwindet die Bildrichtung der projizierten Suchrichtung  $d_N^P$  in  $Z_1$ , und das *schrittweitengesteuerte Newtonverfahren mit projizierter Suchrichtung* konvergiert bei der Suche des *Zielwerts*  $Z_{\tau 0}$  gegen die 'Scheinlösung'  $Z_1$ . Bei genauerer Untersuchung erkennt man, dass  $Z_1$  bei der Suche des *Zielwerts*  $Z_{\tau 0}$  ein *Konvergenzgebiet*, das links von  $Z_1$  liegt, besitzt.

## B.10 Gradientenverfahren konvergiert global für vollständig monotone, eindeutige 2D-Zusammenhänge

Für einen zweidimensionalen eindeutigen Parameter-*Zielgrößen*-Zusammenhang

$$\begin{pmatrix} z_{\tau 1} \\ z_{\tau 2} \end{pmatrix} = Z_\tau((P^V)_1, (P^V)_2)$$

mit 4 streng monotonen Zusammenhängen

$$\frac{\partial}{\partial (P^V)_k} z_{\tau i} |_{(P^V)_j = (P^V)_{j_0}} > 0, \quad j \neq k$$

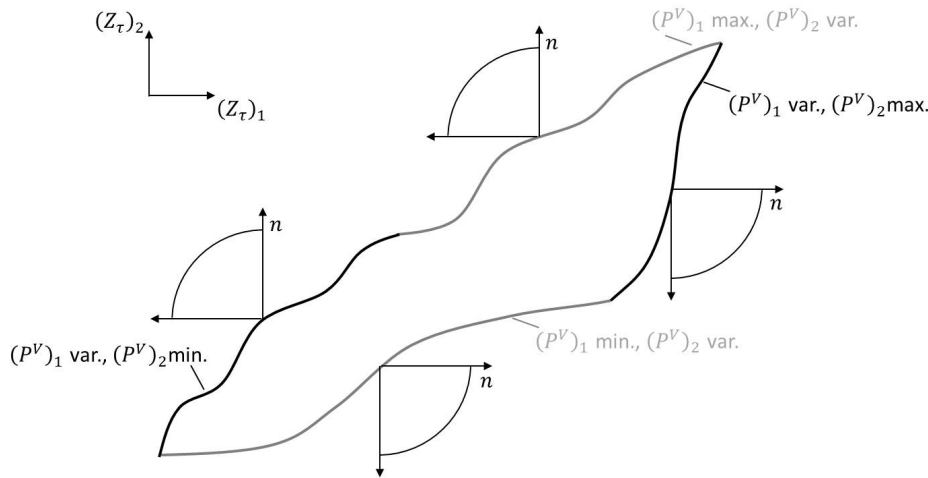


Abbildung B.6: Rand eines für sämtliche *Zielgrößen*-Parameter-Paare streng monotonen eindeutigen 2D-Zusammenhangs

und konstantem Vorzeichen  $s_D$  der *Funktionaldeterminante*

$$s_D \cdot \left| \frac{\partial Z_\tau}{\partial P^{VT}} \right| > 0$$

erscheint der Rand des Bildraums wie in Abbildung B.6 dargestellt. Die grauen Kurven sind die Randlinien für den minimalen bzw. maximalen Wert von  $(P^V)_1$ , die schwarzen die für den minimalen bzw. maximalen Wert von  $(P^V)_2$ . Außer den sichtbaren Kreuzungspunkten gibt es keine weiteren zwischen den Kurven, da sonst die Voraussetzung der Eindeutigkeit verletzt würde. Nach außen gerichtete Normalenrichtungen  $n$  auf den Rand können wegen der streng monotonen Steigung der Kurven in beiden Zielkoordinaten  $z_{\tau 1}$ ,  $z_{\tau 2}$  für die oberen Kurven nur in negative  $z_{\tau 1}$ - und positive  $z_{\tau 2}$ -Richtung, sowie für die unteren Kurven ausschließlich in positive  $z_{\tau 1}$ - und negative  $z_{\tau 2}$ -Richtung zeigen. Genau daher können die durch die Normalenrichtungen  $n$  festgelegten Halbgeraden in den Randpunkten keine der Randkurven und damit insgesamt die Bildmenge nicht schneiden. Die beschriebenen Normalenrichtungen auf den Rand entsprechen genau den Verbindungsrichtungen zwischen 'Scheinlösungen'  $\tilde{Z}_\tau$  und gesuchten *Zielwerten*  $Z_\tau$  beim *schrittweitengesteuerten Gradientenverfahren mit projizierter Suchrichtung* und zugleich den sich dabei einstellenden Bildsuchrichtungen vor der *Projektion*, wie in Abschnitt B.13 bzw. B.2 genauer analysiert wird. Denn durch das Vorzeichen  $s_D \neq 0$  der *Funktionaldeterminante* von  $Z_\tau$  in  $P^V$  kann diese an keinem Punkt verschwinden, und die Eindeutigkeit von  $Z_\tau$  in  $P^V$  bedeutet, dass keine zwei verschiedenen Parameterbelegungen mit gleichem Wert von  $Z_\tau$  existieren. Da die Halbgeraden allerdings keinen weiteren Punkt der Bildmenge überdecken können, gibt es diese nicht als von 'Scheinlösungen'  $\tilde{Z}_\tau$  ausge-



hende Bildsuchrichtungen und somit auch keine verschwindende projizierte Suchrichtung in Punkten, die nicht der gesuchten Lösung entsprechen. Nach Lemma 1 konvergiert folglich das *schrittweitengesteuerte Gradientenverfahren mit projizierter Suchrichtung* global für die beschriebenen Zusammenhänge.

## B.11 Beispiel eines eindeutigen 3D-Zusammenhangs mit streng monotonen Einzelbeziehungen, für den das Gradientenverfahren nicht global konvergiert

Für den Parameter-Zielgrößen-Zusammenhang

$$Z_\tau = \begin{pmatrix} (P^V)_1 + (P^V)_2 + (P^V)_3 \\ 0.5 (P^V)_1 + 0.7 (P^V)_2 + 0.5 (P^V)_3 \\ 0.5 (P^V)_1 + 0.5 (P^V)_2 + 2.2 (P^V)_3 + 0.04 (P^V)_2^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

mit  $P_{id}^* = [-15, 10] \times [-6.2, 10] \times [-5, 0]$

steigen im Definitionsbereich  $P_{id}^*$  sämtliche 9 Zusammenhänge der einzelnen *Zielgrößen* streng monoton in den variierten Parametern, wenn die übrigen Parameter konstant gehalten werden:

$$\frac{\partial}{\partial (P^V)_j} z_{\tau i} |_{(P^V)_k=(P^V)_{k0}, (P^V)_l=(P^V)_{l0}} > 0, \text{ für } j, k, l \text{ paarweise verschieden}$$

Der Nachweis dieser Monotonie im Definitionsbereich  $P_{id}^*$  ist jeweils einfach möglich. Dass der Gesamtzusammenhang eindeutig ist, erkennt man daran, dass die Flächen für konstantes  $(P^V)_3$  durch lineare räumliche Verschiebung auseinander hervorgehen in eine Richtung, die die Flächen in keinem Punkt tangiert. Damit ist auch klar, dass das Vorzeichen der *Funktionaldeterminante*  $\left| \frac{\partial Z_\tau}{\partial P^{VT}} \right|$  konstant ist. Abbildung B.7 zeigt die Randfläche für den konstanten Parameter  $(P^V)_3 = 0$ . Für den Bildwert  $Z_1 = Z_\tau(1, -2, 0)$  weist die Normalenrichtung  $n_{Z_1}$  an die Grenzfläche für  $(P^V)_3 = 0$  direkt auf den zu suchenden

Zielpunkt  $Z_{\tau 0} = \begin{pmatrix} -2.404 \\ 0.348 \\ 1.22 \end{pmatrix}$ . Damit verschwindet in  $Z_1$  die projizierte Gradientensuch-

richtung  $d_G^P$ , und das *Gradientenverfahren* konvergiert nicht global gegen die gesuchte Lösung. Dabei ist  $Z_1$  außerdem wie viele weitere Punkte ein *attraktiver Fixpunkt*.

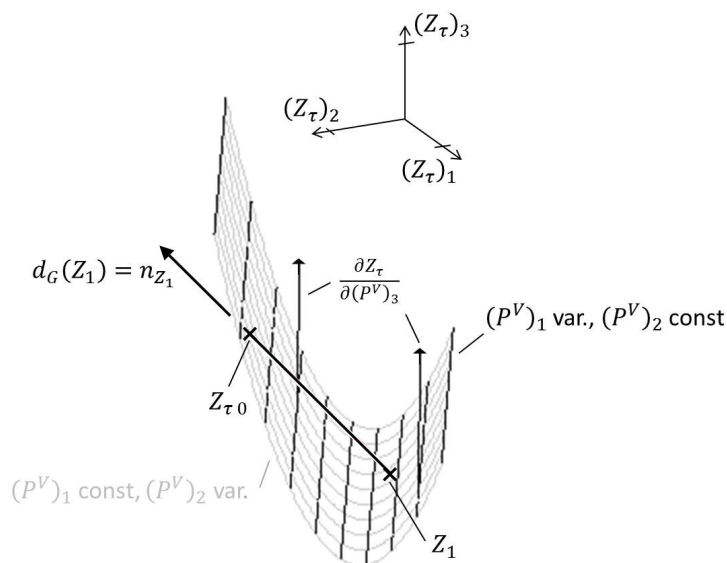


Abbildung B.7: Bildkurven von B.10 unter separater Var. von  $(P^V)_1$  und  $(P^V)_2$  für  $(P^V)_3 = 0$

## B.12 Eindeutigkeit zweidimensionaler Zusammenhänge mit streng monotonen Einzelbeziehungen und positiver Funktionaldeterminante

Der Parameter-Zielgrößen-Zusammenhang

$$\begin{pmatrix} z_{\tau 1} \\ z_{\tau 2} \end{pmatrix} = Z_{\tau}((P^V)_1, (P^V)_2)$$

sei stetig differenzierbar, besitze 4 streng monotone Einzelzusammenhänge

$$\frac{\partial}{\partial (P^V)_k} z_{\tau i} \Big|_{(P^V)_j = (P^V)_{j0}} > 0, \quad j \neq k \quad (\text{B.11})$$

und das Vorzeichen  $s_D$  der *Funktionaldeterminante* sei konstant verschieden von 0

$$s_D \cdot \left| \frac{\partial Z_{\tau}}{\partial P^{VT}} \right| > 0, \quad s_D \in \{-1, 1\} \quad (\text{B.12})$$

Für festgelegte Werte  $P_0^V$ ,  $Z_{\tau 0}$  gilt für die Linearisierung der Umkehrabbildung

$$\frac{\partial P^V}{\partial Z_{\tau}} = \left( \frac{\partial Z_{\tau}}{\partial P^V} \right)^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial Z_{\tau}}{\partial P^V} \end{vmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial z_{\tau 2}}{\partial (P^V)_2} & -\frac{\partial z_{\tau 1}}{\partial (P^V)_2} \\ -\frac{\partial z_{\tau 2}}{\partial (P^V)_1} & \frac{\partial z_{\tau 1}}{\partial (P^V)_1} \end{pmatrix} \quad (\text{B.13})$$

Die Determinante einer  $2 \times 2$ -Matrix lässt sich einfach durch ihre Komponenten ausdrücken, und man erhält mit B.12

$$s_D \cdot \left( \frac{\partial z_{\tau 1}}{\partial (P^V)_1} \cdot \frac{\partial z_{\tau 2}}{\partial (P^V)_2} - \frac{\partial z_{\tau 1}}{\partial (P^V)_2} \cdot \frac{\partial z_{\tau 2}}{\partial (P^V)_1} \right) > 0$$

Aus dieser Darstellung und B.11 folgt

$$s_D \cdot \frac{\partial z_{\tau 2}}{\partial (P^V)_1} / \frac{\partial z_{\tau 2}}{\partial (P^V)_2} < s_D \cdot \frac{\partial z_{\tau 1}}{\partial (P^V)_1} / \frac{\partial z_{\tau 1}}{\partial (P^V)_2}$$

was nach B.13 für die Steigung  $-\frac{\partial z_{\tau 1}}{\partial (P^V)_1} / \frac{\partial z_{\tau 1}}{\partial (P^V)_2}$  der Richtung  $\frac{\partial P^V}{\partial z_{\tau 2}}$  und für die Steigung  $-\frac{\partial z_{\tau 2}}{\partial (P^V)_1} / \frac{\partial z_{\tau 2}}{\partial (P^V)_2}$  der Richtung  $\frac{\partial P^V}{\partial z_{\tau 1}}$  in der  $(P^V)_1$ - $(P^V)_2$ -Ebene bedeutet, dass die von  $\frac{\partial P^V}{\partial z_{\tau 2}}$  für  $s_D = -1$  größer ist als die von  $\frac{\partial P^V}{\partial z_{\tau 1}}$  und umgekehrt für  $s_D = 1$ . Zunächst soll ausschließlich vom Fall  $s_D = -1$  ausgegangen werden. Dann liegt damit in der  $(P^V)_1$ - $(P^V)_2$ -Ebene eine Kurve zu konstantem  $z_{\tau 1}$  rechts von einem gemeinsamen Schnittpunkt  $P_0^V$ , wie ihn Abbildung B.8 zeigt, immer oberhalb der Kurve zu konstantem  $z_{\tau 2}$ . Außerdem sind nur Schnitte und keine Berührungen zwischen den Kurven möglich. Nimmt man nun an, es gibt zwei Parametrierungen  $P_0^V \neq P_1^V$  mit  $Z_{\tau}(P_0^V) = Z_{\tau}(P_1^V)$ , müssen sich die Kurven für konstantes  $z_{\tau 1} = z_{\tau 1}(P_0^V) = z_{\tau 1}(P_1^V)$  und für konstantes  $z_{\tau 2} = z_{\tau 2}(P_0^V) = z_{\tau 2}(P_1^V)$  in beiden Punkten  $P_0^V$  und  $P_1^V$  schneiden.  $Z_{\tau}$  ist *stetig* in  $P^V$ , weshalb  $P_0^V$  und  $P_1^V$  so gewählt werden können, dass sich entlang der beiden Kurven keine weiteren Schnittpunkte dazwischen befinden. Dann muss ihre Anordnung rechts vom Schnittpunkt  $P_1^V$ , wie es Abbildung B.8 zeigt, allerdings wechseln, da die oben definierte Steigung der Kurven nach B.11 in der  $(P^V)_1$ - $(P^V)_2$ -Ebene grundsätzlich negativ, und so kein Vorzeichenwechsel einer der beiden Steigungen möglich ist. Da nur eine Anordnung der Kurven rechts von einem gemeinsamen Schnittpunkt möglich ist, muss die getroffene Annahme falsch sein, und zweidimensionale Zusammenhänge mit ausschließlich streng monotonen Einzelzusammenhängen zwischen *Zielgrößen* und Parametern sowie  $s_D = -1$  sind grundsätzlich eindeutig. Im Fall  $s_D = 1$  liegt eine Kurve zu konstantem  $z_{\tau 1}$  rechts von einem gemeinsamen Schnittpunkt  $P_0^V$  immer unterhalb der Kurve zu konstantem  $z_{\tau 2}$ . Auch hier müssten sich beide Kurven in einem weiteren Punkt  $P_1^V$  mit dem gleichen *Zielgrößen*-Wert wie  $P_0^V$  in entgegengesetzter Lage zueinander schneiden, was wieder ausgeschlossen ist. Damit folgt insgesamt, dass zweidimensionale Zusammenhänge mit ausschließlich streng monotonen Einzelzusammenhängen zwischen *Zielgrößen* und Parametern sowie  $s_D \in \{-1, 1\}$  eindeutig sind.

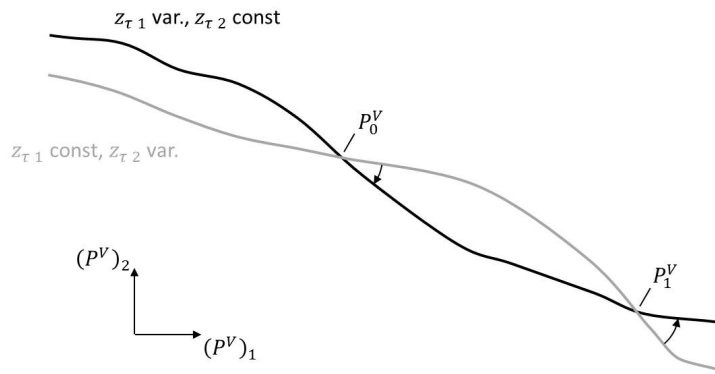


Abbildung B.8: Kurven für jeweils konstante *Zielgröße* im Fall streng monotoner Einzelbeziehungen und  $s_D = -1$

### B.13 Parameteränderung zum Ziel einstellbarer Zielgrößen über das Gradientenverfahren

Gilt für einen dreidimensionalen Parameter-*Zielgrößen*-Zusammenhang  $P_i^V \leftrightarrow Z_{\tau i}$  3.32 eingeschränkt auf  $j = 1, 3.39, 3.40$  und 3.41, kann für einen Parameterwert  $(P_i^V)_{10}$ , zu dem kein  $(P_i^V)_{2..30} \in P_{i2..3}^*$  mit  $(Z_{\tau i})_{2..3} |_{(P_i^V)_{10}, (P_i^V)_{2..30}} = (Z_{\tau i})_{2..30}$  existiert, aus dem Ergebnis  $(\tilde{P}_i^V)_{2..30}$  der *schrittweitengesteuerten Gradientensuche* von  $(P_i^V)_{2..30}$  mit *Projektion der Suchrichtungen* geschlossen werden, in welche Richtung  $(P_i^V)_1$  verändert werden muss, um  $(Z_{\tau i})_{2..30}$  einstellen zu können. Die Abbildung

$$(P_i^V)_{2..3} \rightarrow (Z_{\tau i})_{2..3} |_{(P_i^V)_{10}, (P_i^V)_{2..3}}$$

ist, da sie mit dem *Gradientenverfahren invertierbar* ist, *stetig*. Damit ist die Bildmenge  $B$  unter dieser Abbildung über der *abgeschlossenen* Definitionsmenge  $P_{i2..3}^*$  auch *abgeschlossen*, und die Menge

$$B_d = \left\{ \left\| (Z_{\tau i})_{2..3} |_{(P_i^V)_{10}, (P_i^V)_{2..3}} - (Z_{\tau i})_{2..30} \right\|^2 \mid (P_i^V)_{2..3} \in P_{i2..3}^* \right\}$$

besitzt ein Minimum. Also liegt auch in  $B$  mindestens ein lokales Minimum der Abstandsfunktion zu  $(Z_{\tau i})_{2..30}$ . Dann *konvergiert* die *schrittweitengesteuerte Gradientensuche* nach  $(P_i^V)_{2..30}$  mit *Projektion der Suchrichtungen* in  $(\tilde{P}_i^V)_{2..30}$ , wie bspw. in [2] nachgewiesen wird. In  $(\tilde{P}_i^V)_{2..30}$  ist die projizierte Gradientensuchrichtung  $d_G^P = 0$  (s. Kap. 2). Da  $(Z_{\tau i})_{2..30} \notin B$ , liegt  $(\tilde{Z}_{\tau i})_{2..30} = (Z_{\tau i})_{2..3} |_{(P_i^V)_{10}, (\tilde{P}_i^V)_{2..30}}$  auf dem Rand  $\partial B$  von  $B$ . Andernfalls lägen Punkte der Verbindungsstrecke zwischen  $(\tilde{Z}_{\tau i})_{2..30}$  und

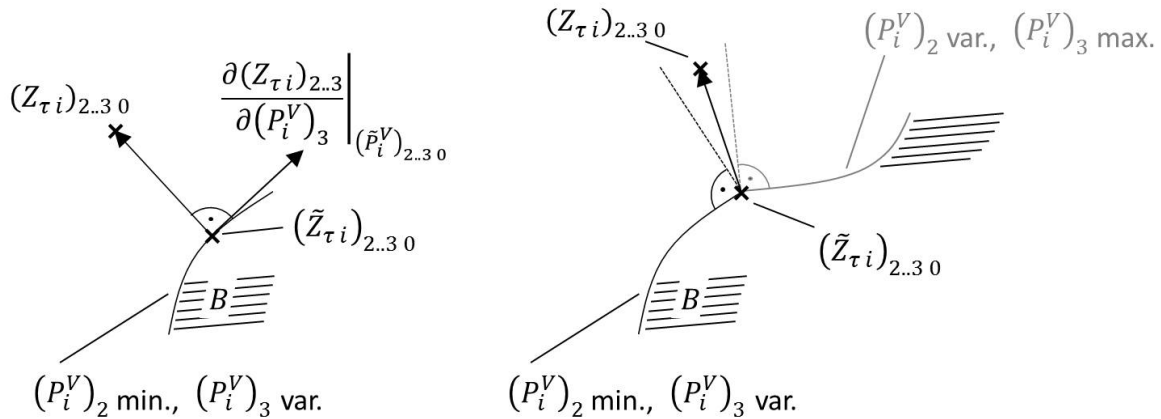


Abbildung B.9: Lage des Zielwerts  $(Z_{\tau i})_{2..30}$  gegenüber Rand  $\partial B$  und 'Scheinlösung'  $(\tilde{Z}_{\tau i})_{2..30}$

$(Z_{\tau i})_{2..30}$  in einer Umgebung von  $(\tilde{Z}_{\tau i})_{2..30}$  nämlich näher bei  $(Z_{\tau i})_{2..30}$  als  $(\tilde{Z}_{\tau i})_{2..30}$ , was im Widerspruch dazu steht, dass  $(\tilde{Z}_{\tau i})_{2..30}$  lokales Minimum der Abstandsfunktion zu  $(Z_{\tau i})_{2..30}$  in  $B$  ist. Der Verbindungsvektor  $(Z_{\tau i})_{2..30} - (\tilde{Z}_{\tau i})_{2..30}$  vom lokalen Minimum zum gesuchten Zielwert steht wie links in Abbildung B.9 gezeigt, sofern einer der zugehörigen Parameter  $(\tilde{P}_i^V)_{20}$  oder  $(\tilde{P}_i^V)_{30}$  nicht auf dem Rand  $\partial P_{i2}^*$  oder  $\partial P_{i3}^*$  der Urbildmenge liegt, senkrecht zum Rand  $\partial B$  der Bildmenge ins Außengebiet von  $B$ . Angenommen, es liegt  $(\tilde{P}_i^V)_{20}$  auf dem Rand  $\partial P_{i2}^*$ , liegt nämlich  $(\tilde{P}_i^V)_{30}$  nicht auf dem Rand  $\partial P_{i3}^*$ , und es muss die zweite Komponente der Gradientensuchrichtung  $(d_G)_2$  auch ohne Projektion den Wert 0 annehmen. Es gilt nach der Definition von  $d_G$  also

$$(d_G)_2 = \left( (Z_{\tau i})_{2..30} - (\tilde{Z}_{\tau i})_{2..30} \right)^T \cdot \underbrace{\frac{\partial (Z_{\tau i})_{2..30} |_{(P_i^V)_{10}}}{\partial (P_i^V)_3} \Big|_{(P_i^V)_{2..30} = (\tilde{P}_i^V)_{2..30}}}_{\text{Richtung des Rands in } (\tilde{Z}_{\tau i})_{2..30}} = 0$$

womit die Aussage folgt, die sich einfach für den Fall eines auf dem Rand  $\partial P_{i3}^*$  liegenden  $(\tilde{P}_i^V)_{30}$  und nicht auf dem Rand  $\partial P_{i2}^*$  liegenden  $(\tilde{P}_i^V)_{20}$  anpassen lässt. Liegen beide Parameterwerte  $(\tilde{P}_i^V)_{20}$  und  $(\tilde{P}_i^V)_{30}$  auf dem jeweiligen Rand  $\partial P_{i2}^*$  bzw.  $\partial P_{i3}^*$ , bedeutet die Ungleichung  $(d_G)_{1/2} \neq 0$ , dass  $(Z_{\tau i})_{2..30}$  wie in Abbildung B.9 rechts zu sehen zwischen den nach außen liegenden Senkrechten zu den beiden an  $(\tilde{Z}_{\tau i})_{2..30}$  angrenzenden Randkurven liegt. Außerhalb dieses Gebiets würde nämlich eine Änderung des einen oder anderen Parameters eine Näherung an  $(Z_{\tau i})_{2..30}$  ermöglichen, und die projizierte Gradi-

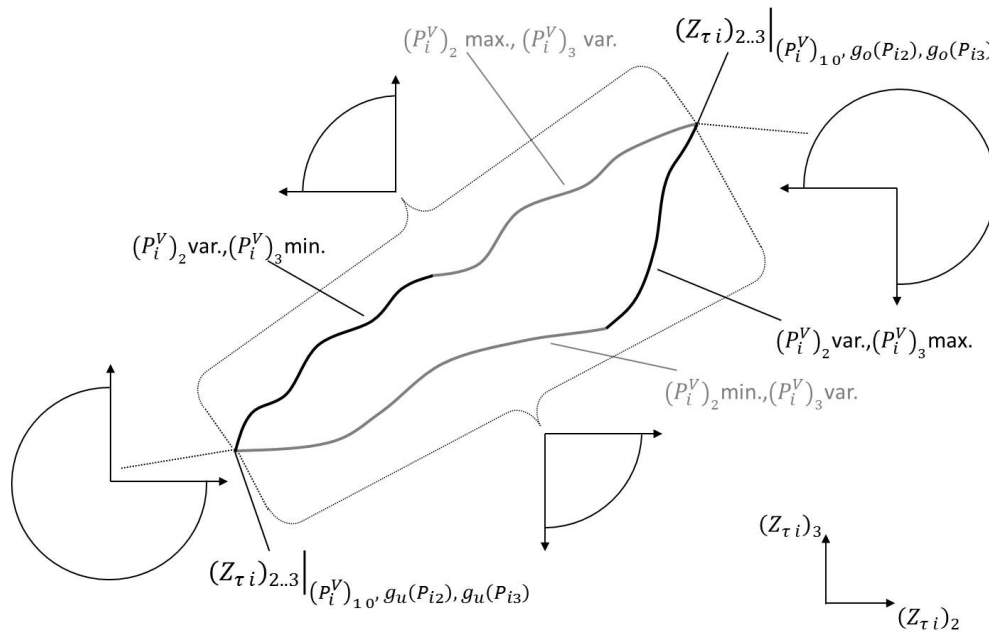


Abbildung B.10: Mögliche Richtungen von  $(Z_{\tau i})_{2..3} - (\tilde{Z}_{\tau i})_{2..30}$  an verschiedenen Stellen von  $\partial B$

entensuchrichtung  $d_G^P$  wäre nicht 0. Wie in Abschnitt B.10 analysiert steigen die  $(Z_{\tau i})_3$ -Werte der Randkurven von  $B$  mit 3.39 und 3.40 streng monoton in  $(Z_{\tau i})_2$  ohne sich zu durchdringen. So ergeben sich für die einzelnen Abschnitte des Rands  $\partial B$  von  $B$  die in Abbildung B.10 gezeigten möglichen Richtungen von  $(Z_{\tau i})_{2..3} - (\tilde{Z}_{\tau i})_{2..30}$  für 'Scheinlösungen'  $(\tilde{Z}_{\tau i})_{2..30}$  auf den entsprechenden Randsegmenten.  $(Z_{\tau i})_{2..3} - (\tilde{Z}_{\tau i})_{2..30}$  kann also nur am Eckpunkt  $(Z_{\tau i})_{2..3} | (P_i^V)_{10}, g_u(P_{i2}), g_u(P_{i3})$  links unten in eine Richtung nach links unten bzw. am Eckpunkt  $(Z_{\tau i})_{2..3} | (P_i^V)_{10}, g_o(P_{i2}), g_o(P_{i3})$  rechts oben nach rechts oben weisen.

Die  $(Z_{\tau i})_2$ - $(Z_{\tau i})_3$ -Ebene kann in 4 *kartesische* Quadranten um den Zielwert  $(Z_{\tau i})_{2..30}$  aufgeteilt werden. Es können für fest gewähltes  $(P_i^V)_{10}$  dann nicht sowohl Bildwerte  $(Z_{\tau i})_{2..3}$  im Quadrant links oben als auch rechts unten liegen. Wie in Abbildung B.11 gezeigt könnten nämlich unter der Annahme, es liegt ein Punkt  $(Z_{\tau i})_{2..3} | (P_i^V)_{10}, (P_i^V)_{2lo}, (P_i^V)_{3lo}$  im Quadrant links oben und ein Punkt

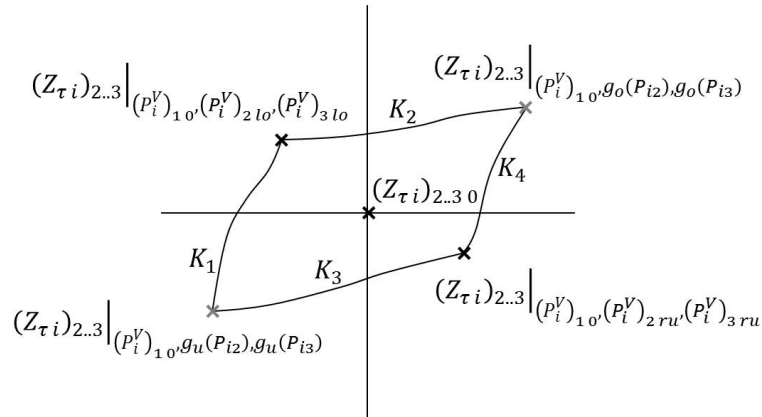


Abbildung B.11: Einschluss des Zielwerts  $(Z_{\tau i})_{2..30}$  bei Bildpunkten im Quadranten links oben und rechts unten

$(Z_{\tau i})_{2..3} | (P_i^V)_{10}, (P_i^V)_{2ru}, (P_i^V)_{3ru}$  im Quadrant rechts unten, die Kurven

$$K1 : (Z_{\tau i})_{2..3} | (P_i^V)_{10}, (P_i^V)_2 = (1-q) \cdot g_u(P_{i2}) + q \cdot (P_i^V)_{2lo}, (P_i^V)_3 = (1-q) \cdot g_u(P_{i3}) + q \cdot (P_i^V)_{3lo}$$

$$K2 : (Z_{\tau i})_{2..3} | (P_i^V)_{10}, (P_i^V)_2 = (1-q) \cdot (P_i^V)_{2lo} + q \cdot g_o(P_{i2}), (P_i^V)_3 = (1-q) \cdot (P_i^V)_{3lo} + q \cdot g_o(P_{i3})$$

$$K3 : (Z_{\tau i})_{2..3} | (P_i^V)_{10}, (P_i^V)_2 = (1-q) \cdot g_u(P_{i2}) + q \cdot (P_i^V)_{2ru}, (P_i^V)_3 = (1-q) \cdot g_u(P_{i3}) + q \cdot (P_i^V)_{3ru}$$

$$K4 : (Z_{\tau i})_{2..3} | (P_i^V)_{10}, (P_i^V)_2 = (1-q) \cdot (P_i^V)_{2ru} + q \cdot g_o(P_{i2}), (P_i^V)_3 = (1-q) \cdot (P_i^V)_{3ru} + q \cdot g_o(P_{i3})$$

für  $0 \leq q \leq 1$  gebildet werden, die in  $B$  liegen und  $(Z_{\tau i})_{2..30}$  einschließen, da ihre  $(Z_{\tau i})_2$ - bzw.  $(Z_{\tau i})_3$ -Werte jeweils streng monoton in  $q$  steigen (3.39), sich in den Endpunkten treffen, und in  $(Z_{\tau i})_2$  bzw.  $(Z_{\tau i})_3$  damit entsprechend ober- bzw. unterhalb von  $(Z_{\tau i})_{2..30}$  verlaufen. Damit würde aber  $(Z_{\tau i})_{2..30} \in B$  folgen, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Für die Quadranteneinteilung lässt sich mit der Eigenschaft, dass  $(Z_{\tau i})_{2..30}$  nur von der rechten oberen Ecke von  $B$  in Richtung nach rechts oben und von der linken unteren Ecke in Richtung nach links unten liegen kann, außerdem folgern, dass bei 'Scheinlösungen'  $(\tilde{Z}_{\tau i})_{2..30}$  in diesen Ecken kein Punkt von  $B$  im Quadrant links oben oder rechts unten liegt. Wie in Abbildung B.12 gezeigt folgt dies mit Eigenschaft 3.39 und der sich damit ergebenden Abschätzung

$$(Z_{\tau i})_{2/3} | (P_i^V)_{10}, g_u(P_{i2}), g_u(P_{i3}) \leq (Z_{\tau i})_{2/3} | (P_i^V)_{10} \leq (Z_{\tau i})_{2/3} | (P_i^V)_{10}, g_o(P_{i2}), g_o(P_{i3})$$

Das bedeutet umgekehrt, dass, liegt ein Punkt von  $B$  im Quadrant links oben oder rechts unten, wobei dies nur wie bereits gezeigt für einen der beiden zutreffen kann, so

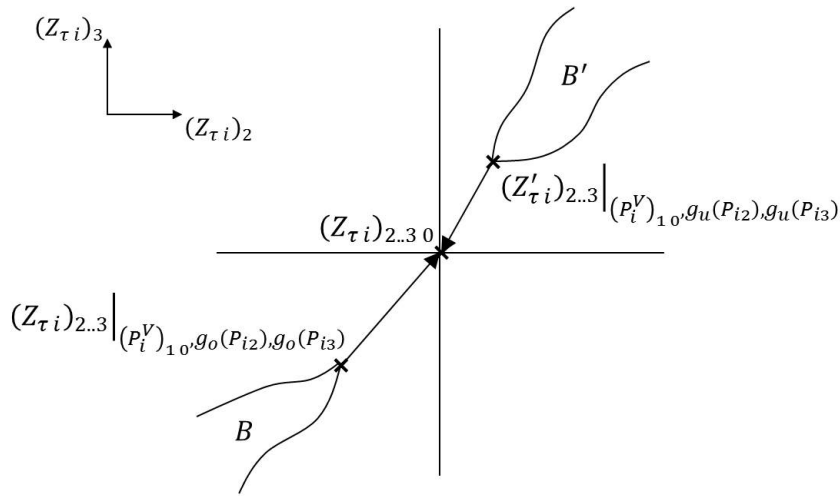


Abbildung B.12: Keine Bildpunkte im Quadrant links oben und rechts unten bei 'Scheinlösung'  $(\tilde{Z}_{\tau i})_{2..30}$  im Quadrant links unten oder rechts oben

liegt  $(\tilde{Z}_{\tau i})_{2..30}$  in diesem Quadrant. Nochmals anders ausgedrückt folgt daraus, dass, liegt  $(\tilde{Z}_{\tau i})_{2..30}$  nicht im Quadrant links oben, so liegt kein Punkt von  $B$  in diesem Quadrant, und, liegt  $(\tilde{Z}_{\tau i})_{2..30}$  nicht im Quadrant rechts unten, so liegt kein Punkt von  $B$  in diesem Quadrant.

Nach Voraussetzung 3.41 gilt für die Richtungen, in die die *Zielgrößen* unter verschiedenen Werten für  $(P_i^V)_1$  und konstanten Werten für  $(P_i^V)_{2..3}$  zueinander in der  $(Z_{\tau i})_2$ - $(Z_{\tau i})_3$ -Ebene liegen

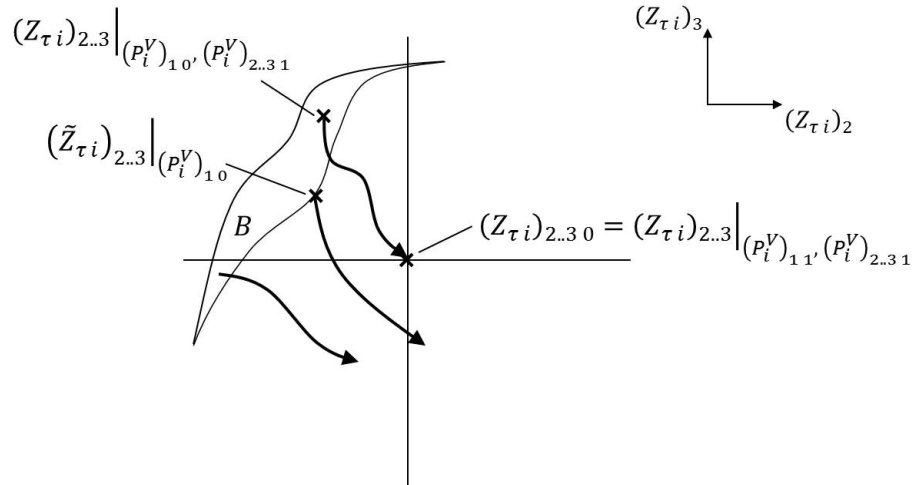
$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \left( (Z_{\tau i})_2 |_{(P_i^V)_{11}, (P_i^V)_{2..30}} - (Z_{\tau i})_2 |_{(P_i^V)_{10}, (P_i^V)_{2..30}} \right) &= s_Z \cdot \operatorname{sgn} ((P_i^V)_{11} - (P_i^V)_{10}) \\ \operatorname{sgn} \left( (Z_{\tau i})_3 |_{(P_i^V)_{11}, (P_i^V)_{2..30}} - (Z_{\tau i})_3 |_{(P_i^V)_{10}, (P_i^V)_{2..30}} \right) &= -s_Z \cdot \operatorname{sgn} ((P_i^V)_{11} - (P_i^V)_{10}) \end{aligned}$$

Wird die Lösung für die durch  $(Z_{\tau i})_{2..30} = (Z_{\tau i})_{2..3} |_{(P_i^V)_{11}, (P_i^V)_{2..31}}$  definierten Parameterwerte angenommen, gilt unter dem Parameterwert  $(P_i^V)_1 = (P_i^V)_{10}$  also

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \left( (Z_{\tau i})_{20} - (Z_{\tau i})_2 |_{(P_i^V)_{10}, (P_i^V)_{2..31}} \right) &= s_Z \cdot \operatorname{sgn} ((P_i^V)_{11} - (P_i^V)_{10}) \\ \operatorname{sgn} \left( (Z_{\tau i})_{30} - (Z_{\tau i})_3 |_{(P_i^V)_{10}, (P_i^V)_{2..31}} \right) &= -s_Z \cdot \operatorname{sgn} ((P_i^V)_{11} - (P_i^V)_{10}) \end{aligned}$$

Für  $s_Z = 1$  geht  $(Z_{\tau i})_{2..30}$  also wie in Abbildung B.13 gezeigt unter einer Vergrößerung von  $(P_i^V)_1$  aus einem Punkt von  $B$  im linken oberen Quadrant hervor. Genauso verhält es sich für  $s_Z = -1$  und eine Verkleinerung von  $(P_i^V)_1$ . Umgekehrt geht für  $s_Z = 1$




 Abbildung B.13: Bewegung der  $(Z_{\tau i})_{2..3} |_{(P_i^V)_1, (P_i^V)_{2..30}}$  bei Änderung von  $(P_i^V)_1$ 

der Punkt  $(Z_{\tau i})_{2..30}$  unter einer Verkleinerung von  $(P_i^V)_1$  aus einem Punkt von  $B$  im rechten unteren Quadrant hervor, was ebenso für  $s_Z = -1$  und eine Vergrößerung von  $(P_i^V)_1$  zutrifft. Da  $(P_i^V)_{11}$  nicht notwendigerweise existiert, kann nicht direkt gefolgert werden, dass eine entsprechende Änderung von  $(P_i^V)_1$  eine Änderung in Richtung  $(P_i^V)_{11}$  ist. Mit dem Zusammenhang, dass in dem Quadrant links oben bzw. rechts unten, in dem  $(\tilde{Z}_{\tau i})_{2..30}$  nicht liegt, auch kein Punkt von  $B$  liegt, kann aber darauf geschlossen werden, dass  $(P_i^V)_{11}$  von  $(P_i^V)_{10}$  aus nicht in der Richtung liegt, für die mit  $s_Z$  der Zielwert  $(Z_{\tau i})_{2..30}$  aus einem Punkt von  $B$  in diesem Quadrant hervorgehen müsste. Dies ist einfach einzusehen, da dort wie in Abbildung B.13 im Quadrant rechts unten kein Punkt aus  $B$  und damit auch kein Punkt  $(Z_{\tau i})_{2..3} |_{(P_i^V)_{10}, (P_i^V)_{2..31}}$  existiert. Bei der weiteren Suche nach  $(P_i^V)_{11}$  muss  $(P_i^V)_1$  also in die Richtung  $\Delta(P_i^V)_1$  verändert werden, für die

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sgn} \left( (Z_{\tau i})_{20} - (\tilde{Z}_{\tau i})_2 |_{(P_i^V)_{10}} \right) &= s_Z \cdot \operatorname{sgn} (\Delta(P_i^V)_1) \\
 \operatorname{sgn} \left( (Z_{\tau i})_{30} - (\tilde{Z}_{\tau i})_3 |_{(P_i^V)_{10}} \right) &= -s_Z \cdot \operatorname{sgn} (\Delta(P_i^V)_1)
 \end{aligned}$$

gilt. Ist dies nicht möglich, kann die Existenz von  $(P_i^V)_{11}$  ausgeschlossen werden. Da immer eine Suchrichtung zu wählen ist, an die in diesem Fall keine Anforderungen gestellt sind, kann die passende Richtung als

$$\operatorname{sgn} (\Delta(P_i^V)_1) = \operatorname{sgn} \left( s_Z \cdot \left( (Z_{\tau i})_{2..30} - (\tilde{Z}_{\tau i})_{2..3} \right)^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad (\text{B.14})$$

definiert werden.

## B.14 Reduktion von 3-SAT auf Nicht-0-Konstanz endlich oft differenzierbarer Funktionen in mehreren Variablen

Das Problem *3-SAT* lässt sich auf das Problem *NCONST-0*, eine auf *arithmetischen* Operationen und dem *Betragsoperator* basierende Funktion  $f \in C^{2m} : P^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  als nicht *konstant* 0, also

$$\exists P^V \in P^* : f(P^V) \neq 0$$

zu entscheiden, in *Polynomialzeit reduzieren*. Dabei wird zu einer *3-KNF*-Formel  $b$  wie in Abschnitt A.1 die *arithmetische* Funktion  $g$  gebildet. Ausgehend von  $g$  kann dann die Funktion

$$h = \left( \prod_{i=1}^{|P|} (2(P^V)_i - 1) \right)^{2(m+1)} \cdot g \left( \begin{pmatrix} \lfloor (P^V)_1 + 0.5 \rfloor \\ \vdots \\ \lfloor (P^V)_{|P|} + 0.5 \rfloor \end{pmatrix} \right)$$

gebildet werden. Mit  $P^* = [0, 1]^{|P|}$  ist  $h$  genau dann *konstant* 0, wenn  $b$  nicht *erfüllbar* ist. Außerdem ist die Reduktion *polynomiell* zeit- und längenbeschränkt, und es folgt, dass *NCONST-0* *NP-vollständig* ist. Jede Belegung von  $b$ , kann auch durch  $h$  ausgewertet werden. Die Übergänge zwischen den einzelnen Belegungen in der kontinuierlichen Definitionsmenge  $P^*$  von  $h$  befinden sich an Stellen mit  $(P^V)_i = 0, 5$ ,  $1 \leq i \leq |P|$ . Dort haben richtungsunabhängig die ersten  $2m$  Ableitungen den Wert 0. Damit ist  $h$   $2m$  mal *stetig differenzierbar*.

## B.15 Reduktion von SAT auf die Nicht-Injektivität arithmetischer Abbildungen

Das Problem *SAT* lässt sich auf das Problem *NINJ*, die *Nicht-Injektivität* einer *arithmetischen* Funktion  $F : X^* \rightarrow \mathbb{R}^n$  in mehreren Variablen zu entscheiden, in *Polynomialzeit reduzieren*. Dazu wird die *aussagenlogische* Formel  $a$  in den *booleschen* Variablen  $x_1, \dots, x_m$  auf eine entsprechende *arithmetische* Funktion  $F$  reduziert. Nimmt  $a$  für  $x_1 = \dots = x_m = 0$  den Wert 1 an, ist  $a$  *erfüllbar*, und es wird direkt die *nicht-injektive* Funktion  $F = 0$  mit  $X^* = [0, 1]$  und  $n = 1$  gewählt. Andernfalls kommt es zunächst zur Zwischenlösung der *aussagenlogischen* Formel  $b = (a \vee ((\neg x_1) \wedge (\dots \wedge (\neg x_m) \dots)))$ .  $b$  hat genau dann mindestens zwei *erfüllende Belegungen*, wenn  $a$  *erfüllbar* ist. Zu  $b$  kann nun wie in Abschnitt A.3 eine *arithmetische* Funktion  $F$  mit  $X^* = [0, 1]^n$  und  $n = m + l + 1$  konstruiert werden. Ist  $a$  nicht *erfüllbar*, hat  $b$  genau eine *erfüllende Belegung* und erfüllt

daher die in Abschnitt A.3 geforderten Voraussetzungen. Dann ist  $F$  nach Abschnitt A.3 *injektiv*. Wertet  $a$  unter einer Belegung  $x_1 = x_{10}, \dots, x_m = x_{m0}$  zu 1 aus, wertet  $b$  unter den Belegungen  $x_1 = x_{10}, \dots, x_m = x_{m0}$  und  $x_1 = \dots = x_m = 0$  zu 1 aus, wobei sich nach Voraussetzung dieses Falls beide Belegungen unterscheiden. Dann gilt nach Abschnitt A.3  $F(X_1) = F(X_2) = 0$  für  $X_1 = (x_{10}, \dots, x_{m0}, y_1(x_{10}, \dots, x_{m0}), \dots, y_m(x_{10}, \dots, x_{m0}), 0)^T$  bzw.  $X_2 = (0, \dots, 0, y_1(0, \dots, 0), \dots, y_m(0, \dots, 0), 0)^T$ . Es ist in diesem Fall  $F$  also nicht *injektiv*. Alle Fälle zusammengenommen ist  $F$  immer genau dann *injektiv*, wenn  $a$  nicht *erfüllbar* ist.

## B.16 Nachweis zur Injektivität bei Abbildung von Hyperquadranten in Halbräume

Ist ein Parameter-Zielgrößen-Zusammenhang  $Z_\tau(P^V)$  unabhängig von den Parametern mit Indizes  $I_{ind}$  und erfüllt Eigenschaft 3.43, ist der Zusammenhang für sämtliche Belegungen der übrigen Parameter *injektiv* in den Parametern mit Indizes  $I_{inj}$ . Der Nachweis hierzu ergibt sich durch Widerspruch: Angenommen,  $\exists P_1^V, P_2^V \in P^*$  mit  $(P_1^V)_{I_{const}} = (P_2^V)_{I_{const}}, (P_1^V)_{I_{inj}} \neq (P_2^V)_{I_{inj}}$  und  $Z_\tau(P_1^V) = Z_\tau(P_2^V)$ . Dann kann  $r_0^* = P_2^V - P_1^V$  und daraus  $r_0$  mit

$$(r_0)_j = \begin{cases} 1 & \text{für } (r_0^*)_{(I_{inj})_j} = 0 \\ \operatorname{sgn}\left((r_0^*)_{(I_{inj})_j}\right) & \text{sonst} \end{cases}$$

gebildet werden. Abhängig von  $(P_{1/2}^V)_{I_{const}}$  und  $r_0$  kann  $a$  aus 3.43 festgelegt werden. Wegen der *Konvexität* von  $P^*$  gilt  $P_1^V + t \cdot r_0^* \in P^*$  für  $0 \leq t \leq 1$  und damit

$$\begin{aligned} a^T \cdot (Z_\tau(P_2^V) - Z_\tau(P_1^V)) &= a^T \cdot \int_0^1 \frac{\partial Z_\tau}{\partial P^V} \Big|_{P^V=t \cdot r_0^*} \cdot r_0^* dt \\ &= a^T \cdot \int_0^1 \left( \sum_{j=1}^{|I_{inj}|} \frac{\partial Z_\tau}{\partial (P^V)_{(I_{inj})_j}} \Big|_{P^V=t \cdot r_0^*} \cdot (r_0)_j \cdot |(r_0^*)_j| \right) dt \\ &= \underbrace{\int_0^1 \sum_{j=1}^{|I_{inj}|} a^T \frac{\partial Z_\tau}{\partial (P^V)_{(I_{inj})_j}} \Big|_{P^V=t \cdot r_0^*} \cdot (r_0)_j \cdot |(r_0^*)_j| dt}_{> 0 \text{ nach 3.43}} > 0 \end{aligned}$$

da  $|(r_0^*)_j| > 0$ . Insgesamt folgt  $a^T \cdot (Z_\tau(P_2^V) - Z_\tau(P_1^V)) > 0$ , was der Annahme  $Z_\tau(P_1^V) = Z_\tau(P_2^V)$  widerspricht. Es muss  $Z_\tau(P^V)$  also doch *injektiv* in den Parametern mit Indizes  $I_{inj}$  sein.



# C Anhang zu Kapitel 4

## C.1 Linearisierte Drehung

Bei der *linearisierten Drehung* wird die Drehung eines Systems  $S$  um die Kardanwinkel  $\varphi_{Sx}, \varphi_{Sy}, \varphi_{Sz}$  in der Drehreihenfolge  $\varphi_{Sy}, \varphi_{Sx}, \varphi_{Sz}$  vereinfacht durch die um  $\varphi_S = 0$  linearisierte Abbildung ersetzt. Für kleine Winkel stimmt die linearisierte Drehung näherungsweise mit der originalen Drehabbildung überein:

$$D(\varphi_{Sx}, \varphi_{Sy}, \varphi_{Sz}) \cdot p \approx D_{lin}(\varphi_{Sx}, \varphi_{Sy}, \varphi_{Sz}) \cdot p$$

$$\text{mit } D(\varphi_{Sx}, \varphi_{Sy}, \varphi_{Sz}) \stackrel{\text{Def.18}}{=} \begin{pmatrix} \cos \varphi_{Sz} & -\sin \varphi_{Sz} & 0 \\ \sin \varphi_{Sz} & \cos \varphi_{Sz} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{Sx} & -\sin \varphi_{Sx} \\ 0 & \sin \varphi_{Sx} & \cos \varphi_{Sx} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_{Sy} & 0 & \sin \varphi_{Sy} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_{Sy} & 0 & \cos \varphi_{Sy} \end{pmatrix}$$

$$\text{und } D_{lin}(\varphi_{Sx}, \varphi_{Sy}, \varphi_{Sz}) = \left. \frac{\partial D(\varphi_{Sx}, \varphi_{Sy}, \varphi_{Sz})}{\partial \varphi_{Sx}} \right|_{\varphi_S=0} \cdot \varphi_{Sx} + \left. \frac{\partial D(\varphi_{Sx}, \varphi_{Sy}, \varphi_{Sz})}{\partial \varphi_{Sy}} \right|_{\varphi_S=0} \cdot \varphi_{Sy} + \left. \frac{\partial D(\varphi_{Sx}, \varphi_{Sy}, \varphi_{Sz})}{\partial \varphi_{Sz}} \right|_{\varphi_S=0} \cdot \varphi_{Sz} + I_3$$

und  $p \in \mathbb{R}^3$

Es folgt für  $D_{lin}$

$$D_{lin}(\varphi_{Sx}, \varphi_{Sy}, \varphi_{Sz}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varphi_{Sx} \\ 0 & \varphi_{Sx} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varphi_{Sy} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\varphi_{Sy} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} 0 & -\varphi_{Sz} & 0 \\ \varphi_{Sz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -\varphi_{Sz} & \varphi_{Sy} \\ \varphi_{Sz} & 1 & -\varphi_{Sx} \\ -\varphi_{Sy} & \varphi_{Sx} & 1 \end{pmatrix}$$

Interpretiert man nun die Drehmatrix  $D$  der Orientierung des Systems  $S$  als Abbildung  $D_{lin}$  der linearisierten Drehung, erhält man als Näherungen für die exakten Drehwinkel  $\varphi_S$  die Koeffizienten  $\varphi_{S\,lin}$  der *linearisierten Drehung*:

$$\varphi_S \approx \varphi_{S\,lin} = \begin{pmatrix} D_{(3,2)} \\ D_{(1,3)} \\ D_{(2,1)} \end{pmatrix}$$

## C.2 Linearisiertes Latsch-Längsmodell um $\lambda = 0$

Für kleine Werte des *Umfangsschlupfs*  $\lambda$ , genauer für  $\lambda \rightarrow 0$  wirken sich einige Parameter, die für größere  $\lambda$ -Werte durchaus einen Einfluss besitzen, nicht auf die resultierende *Latsch-Längskraft*  $F_{LGKx}$  aus. Zur genauen Untersuchung der Zusammenhänge empfiehlt es sich, schrittweise ein um  $\lambda = 0$  *linearisiertes* Ersatzmodell zu bilden. Dabei wird hier angenommen, dass im Originalmodell die Länge der *Reibkontakt-Elemente*

$$l_{RKE} = 1$$

beträgt, um die Berechnungsterme nicht unnötig zu vergrößern. Eine Übertragung auf die realen resultierenden Kraftbeträge gelingt nach 4.66 trotzdem einfach durch Multiplikation mit  $\frac{1}{l_{RKE}}$ . Abbildung C.1 stellt die Vorgänge im Original- und *linearisierten* Ersatzmodell gegenüber. Die verdickten Linien beschreiben dabei die Längsauslenkung  $a_{x\,i}$  über der Strecke  $x$  gemessen vom Beginn des *Laufstreifens*  $i$ . Beim Eintritt eines *Reibkontakt-Elements* in den *Laufstreifen* ist über eine kurze Strecke noch keine *Haftreibung* möglich. Das *Reibkontakt-Element gleitet* hier. Liegt nämlich *Haftreibung* vor, gilt nach 4.30 und Abschnitt 4.2.2  $\dot{a}_{x\,ij} = v_B \lambda$  sowie  $a_{x\,ij} \geq 0$  und damit eine resultierende Kraft  $F_{x\,ij} \geq v_B \lambda d_{scher}$  (4.33). Zum Beginn des *Laufstreifens* gilt jedoch  $F_{reib\,ij} = 0$ , weshalb hier also erst keine *Haftreibung* vorliegen kann (4.30). Der Anstieg der *Gleitreibungskraft* über der *Laufstreifen*-Strecke bewirkt nach 4.30 die auch im Bild dargestellte

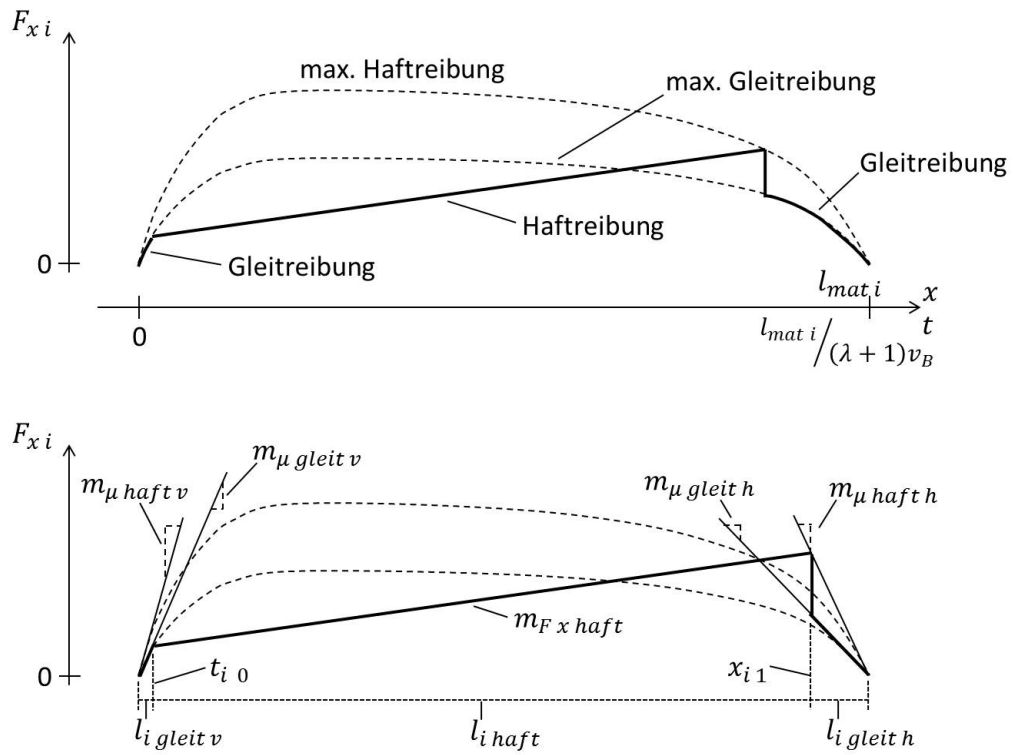


Abbildung C.1: stationäre Längskräfte im Latsch exakt und linearisiert

immer schnellere Vergrößerung der Längsauslenkung  $a_{x i}$ , die schließlich zum Verschwinden der *inertialen* Bewegung  $u_{x i j}$  der Unterseite des *Reibkontakt-Elements* führt. Nun ist der Übergang in *Haftreibung* möglich. Dann gilt  $\dot{a}_{x i j} = v_B \lambda$ , und es folgt ein *Laufstreifen*-Abschnitt mit *linear* unter der Steigung  $\frac{\lambda}{\lambda + 1}$  über  $x$  ansteigender Längsauslenkung  $a_{x i}$  (4.70). Entsprechend steigt auch die positionsabhängige Längskraft  $F_{x i}$  über  $x$  *linear* mit Steigung

$$m_{F x \text{ haft}} = c_{\text{scher}} \frac{\lambda}{\lambda + 1} \quad (\text{C.1})$$

bis zu dem Punkt, an dem sie das lokale *Haftreibungspotenzial* überschreiten würde. Im oberen Teil der Abbildung ist eine typische Form dieses Potenzials dargestellt, das durch Gleichung 4.24 festgelegt ist. Ab dem Schnittpunkt ist keine *Haftreibung* mehr möglich, die Unterseite des *Reibkontakt-Elements* beginnt sich wieder *inertial* zu bewegen, und es erfolgt zum dritten Abschnitt des *Laufstreifens* der Übergang in *Gleitreibung*. Die sich hier immer weiter reduzierende *Gleitreibungskraft* erzwingt eine Verkleinerung der Längsauslenkung  $a_{x i}$ , weshalb nach 4.30 und 4.68 im dritten Abschnitt  $u_{x i j} = \dot{a}_{x i j} - v_B \lambda < 0$  gilt, und damit kein Übergang mehr in *Haftreibung* erfolgt. In den Abschnitten mit *Gleitreibung* resultiert als Längskraft  $F_{x i}(x)$  genau die ortsabhängige *Gleitreibungskraft* abhängig von der *Bodendruckverteilung* 4.24 sowie den Parametern  $\mu_{\text{gleit } 0 \text{ bar}}$  und  $\mu_{\text{gleit } \Delta p}$ . Ein Einfluss der Gleitgeschwindigkeit der Unterseite des *Reibkontakt-Elements* besteht nicht, da nach der Erläuterung zu  $\mu(u_{ij}, p_{ij})$  in Abschnitt 4.1.5 ab einer beliebig kleinen Gleitgeschwindigkeit  $u_{ij}$  vollständige *Gleitreibung* angenommen werden soll. Die Länge  $l_{\text{mat } i}$  des *Laufstreifens* bleibt nach Abschnitt 4.1.7 im *Stationärfall* konstant.

Wird das Verhalten für  $\lambda \rightarrow 0$  betrachtet, ist in jedem Fall eine *Linearisierung* des *Haft- und Gleitreibungspotenzials* an den Enden des *Laufstreifens* möglich, da die Abschnitte mit *nichtlinearem* Verlauf der Längskräfte hierbei proportional zu  $\lambda$  beliebig klein werden. In Gleichung 4.24 erkennt man den Einfluss der mit veränderlichem  $\lambda$  variablen Größen  $M_{LGK_y}$  und  $\Delta x_{LGK}$ , die die *Bodendruckverteilung* und damit nach 4.30 auch die *Reibkräfte*  $F_{\text{reib } ij}$  beeinflussen. Für hinreichend kleinen *Umfangsschlupf*  $\lambda$  und kleine *Bahngeschwindigkeit*  $v_B$  ergibt sich eine kleine resultierende *Latschlängskraft*, damit ein kleiner Wert für  $F_{Lx \text{ PT1}}$  (4.27) und  $\dot{\varphi}_{G0y}$  und letztlich mit 4.22 auch für  $M_{LGK_y}$  bzw. mit 4.28 für  $\Delta x_{LGK}$ . Dann weicht die Steigung der *Bodendruckverteilung* an den *Laufstreifen*-Enden auch nur wenig vom symmetrischen Ansatz  $p_{\text{ans } ij}$  in 4.24 ab, die Steigungen bleiben  $\neq 0$ , was sich auf die der *Reibkraftpotenziale* überträgt, da die Abbildung des *Bodendrucks* auf das *Reibkraftpotenzial* als monoton steigend vorausgesetzt wird. In keinem Fall ist also die Steigung der *Reibkraftpotenziale* über  $x$  an einem der *Laufstreifen*-Enden 0, kann also *linearisiert* als

$$\begin{aligned} m_{\mu \text{ haft } v} &= m_{\mu \text{ haft } v 1} + \lambda m_{\mu \text{ haft } v 2} & m_{\mu \text{ haft } h} &= -m_{\mu \text{ haft } h 1} + \lambda m_{\mu \text{ haft } h 2} \\ m_{\mu \text{ gleit } v} &= m_{\mu \text{ gleit } v 1} + \lambda m_{\mu \text{ gleit } v 2} & m_{\mu \text{ gleit } h} &= -m_{\mu \text{ gleit } h 1} + \lambda m_{\mu \text{ gleit } h 2} \end{aligned}$$



mit  $m_{\mu \text{ haft } v 1}, m_{\mu \text{ haft } h 1}, m_{\mu \text{ gleit } v 1}, m_{\mu \text{ gleit } h 1} > 0$  dargestellt werden. Die drei beschriebenen Abschnitte eines *Laufstreifens* erhält man auch im *linearisierten* Ersatzmodell (s. Abb. C.1 unten). Ihre Längen werden mit  $l_{i \text{ gleit } v}, l_{i \text{ haft}}$  und  $l_{i \text{ gleit } h}$  bezeichnet. Über die Geschwindigkeit  $\dot{x}_{REK \text{ def } j}$ , mit der sich die *Reibkontakt-Elemente* durch den *Latsch* bewegen (4.69), lässt sich ihre *linearisierte Gleitreibung* im ersten Abschnitt abhängig von der Zeit  $t$ , seit der sie sich in der Kontaktzone befinden, angeben als

$$F_{x \text{ i gleit } v}(t) = (\lambda + 1) v_B (m_{\mu \text{ gleit } v 1} + \lambda m_{\mu \text{ gleit } v 2}) t$$

Für die zeitabhängige Auslenkung  $a_{x \text{ ij}}(t)$  eines *Reibkontakt-Elements* im ersten Abschnitt folgt aus 4.30 unter Voraussetzung von  $\lambda \geq 0$  ( $u_{x \text{ ij}} \leq 0$ ) das *Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} -F_{x \text{ i gleit } v}(t) + d_{scher} \dot{a}_{x \text{ ij}}(t) + c_{scher} a_{x \text{ ij}}(t) &= 0 \\ a_{x \text{ ij}}(0) &= 0 \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$a_{x \text{ ij}}(t) = \frac{(\lambda + 1) v_B (m_{\mu \text{ gleit } v 1} + \lambda m_{\mu \text{ gleit } v 2})}{c_{scher}} \left( \frac{d_{scher}}{c_{scher}} e^{-\frac{c_{scher}}{d_{scher}} \cdot t} + t - \frac{d_{scher}}{c_{scher}} \right)$$

Der Übergang in *Haftreibung* erfolgt zum Zeitpunkt  $t_{i0}$  mit  $u_{x \text{ ij}}(t_{i0}) = 0$ , also mit 4.30 und 4.68 für

$$\dot{a}_{x \text{ ij}}(t_{i0}) + v_{0Kx \text{ ij}} = \dot{a}_{x \text{ ij}}(t_{i0}) - v_B \lambda = 0$$

Aufgelöst erhält man

$$t_{i0} = -\frac{d_{scher}}{c_{scher}} \ln \left( 1 - \frac{c_{scher} \lambda}{(\lambda + 1) (m_{\mu \text{ gleit } v 1} + \lambda m_{\mu \text{ gleit } v 2})} \right)$$

als Dauer, über die sich ein *Reibkontakt-Element* im ersten Abschnitt befindet. Der Übergang in *Haftreibung* findet nur statt, wenn der Ausdruck definiert ist, und sich  $t_{i0} > 0$  ergibt. Dass  $t_{i0} > 0$  ist, ist mit  $\lambda \geq 0, m_{\mu \text{ gleit } v} > 0$  einfach zu sehen. Damit es überhaupt existiert, muss  $\frac{\lambda}{\lambda + 1} < m_{\mu \text{ gleit } v}$  gelten, was für hinreichend kleines  $\lambda$  in jedem Fall vorliegt. Aus  $t_{i0}$  resultiert mit 4.69 auch die Länge

$$l_{i \text{ gleit } v} = -(\lambda + 1) v_B \frac{d_{scher}}{c_{scher}} \ln \left( 1 - \frac{c_{scher} \lambda}{(\lambda + 1) (m_{\mu \text{ gleit } v 1} + \lambda m_{\mu \text{ gleit } v 2})} \right)$$

des ersten Abschnitts und die gemäß 4.34 *linearisiert* über dem ersten Abschnitt integrierte Längskraft

$$\begin{aligned} F_{x \text{ i gleit } v \text{ ges}} &= \int_0^{l_{i \text{ gleit } v}} m_{\mu \text{ gleit } v} x \, dx \\ &= \frac{1}{2} (m_{\mu \text{ gleit } v 1} + \lambda m_{\mu \text{ gleit } v 2}) \left( (\lambda + 1) v_B \frac{d_{scher}}{c_{scher}} \ln \left( 1 - \frac{c_{scher} \lambda}{(\lambda + 1) (m_{\mu \text{ gleit } v 1} + \lambda m_{\mu \text{ gleit } v 2})} \right) \right)^2 \end{aligned}$$

sowie deren Anfangsableitung in  $\lambda$

$$\left. \frac{\partial F_{x \text{ i gleit v ges}}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = \frac{1}{2} (m_{\mu \text{ gleit v } 2} \cdot 0 + m_{\mu \text{ gleit v } 1} \cdot 2 \cdot 0) = 0$$

Der zweite Abschnitt beginnt an Position  $l_{i \text{ gleit v}}$  mit der Längskraft  $F_{x \text{ i gleit v}}(l_{i \text{ gleit v}}) = l_{i \text{ gleit v}}(m_{\mu \text{ gleit v } 1} + \lambda m_{\mu \text{ gleit v } 2})$ , die 4.30 für den *Haft-* und *Gleitreibungsfall* erfüllt. Von dort an nimmt die resultierende positionsabhängige Längskraft *linear* mit Steigung  $m_{F_{x \text{ haft}}}$  zu, lässt sich innerhalb des Abschnitts nach C.1 also darstellen als

$$F_{x \text{ i haft}}(x) = c_{\text{scher}} \frac{\lambda}{\lambda + 1} (x - l_{i \text{ gleit v}}) + l_{i \text{ gleit v}} m_{\mu \text{ gleit v}}$$

Die Berücksichtigung der *Scherdämpfung* aus 4.33 ist hier nicht mehr erforderlich bzw. zulässig. Wird zu einer *Scherkraft* die *Federkraft* aus zusätzlicher Auslenkung hinzuaddiert, enthält der erste Kraftanteil schon den *dämpfungsbedingten* Anteil, sofern er unter der gleichen *Auslenkungsgeschwindigkeit* wie die anschließende zusätzliche Auslenkung entsteht. Genau dies am Ende des vorderen *Gleit*-Abschnitts der Fall, der genau hier in *Haftreibung* übergeht. Das Ende des zweiten Abschnitts liegt an der Position  $x_{i1}$ , an der die Längskraft dem *Haftreibungspotenzial* entspricht. In der *linearisierten* Betrachtung gilt für  $x_{i1}$  also

$$F_{x \text{ i haft}}(x_{i1}) = -(l_{\text{mat } i} - x_{i1}) m_{\mu \text{ haft h}}$$

und aufgelöst

$$x_{i1} = \frac{\left( c_{\text{scher}} \frac{\lambda}{\lambda + 1} - m_{\mu \text{ gleit v}} \right) l_{i \text{ gleit v}} - m_{\mu \text{ haft h}} \cdot l_{\text{mat } i}}{c_{\text{scher}} \frac{\lambda}{\lambda + 1} - m_{\mu \text{ haft h}}}$$

Für die integrierte Längskraft des zweiten Abschnitts erhält man zunächst

$$\begin{aligned} F_{x \text{ i haft ges}} &= \int_{l_{i \text{ gleit v}}}^{x_{i1}} F_{x \text{ i haft}}(x) dx \\ &= \frac{1}{2} c_{\text{scher}} \frac{\lambda}{\lambda + 1} x_{i1}^2 + l_{i \text{ gleit v}} \left( m_{\mu \text{ gleit v}} - c_{\text{scher}} \frac{\lambda}{\lambda + 1} \right) x_{i1} \\ &\quad + \frac{1}{2} c_{\text{scher}} \frac{\lambda}{\lambda + 1} l_{i \text{ gleit v}}^2 - l_{i \text{ gleit v}}^2 m_{\mu \text{ gleit v}} \end{aligned}$$

Über die Zwischenergebnisse

$$\begin{aligned} m_{\mu \text{ gleit v}} \Big|_{\lambda=0} &= m_{\mu \text{ gleit v } 1} & \left. \frac{\partial m_{\mu \text{ gleit v}}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} &= m_{\mu \text{ gleit v } 2} \\ m_{\mu \text{ haft h}} \Big|_{\lambda=0} &= -m_{\mu \text{ haft h } 1} & \left. \frac{\partial m_{\mu \text{ haft h}}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} &= m_{\mu \text{ haft h } 2} \\ l_{i \text{ gleit v}} \Big|_{\lambda=0} &= 0 & \left. \frac{\partial l_{i \text{ gleit v}}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} &= \frac{v_{\text{B}} d_{\text{scher}}}{m_{\mu \text{ gleit v } 1}} \\ x_{i1} \Big|_{\lambda=0} &= l_{\text{mat } i} \end{aligned}$$

lässt sich auch die Anfangsableitung

$$\left. \frac{\partial F_{x i haft ges}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = \frac{1}{2} c_{scher} l_{mat i}^2 + v_B d_{scher} l_{mat i}$$

bestimmen. Im dritten Abschnitt gilt für die positionsabhängige *Gleitkraft*

$$F_{x i gleit h} (x) = - (l_{mat i} - x) m_{\mu gleit h}$$

Die Gesamtkraft des dritten Abschnitts berechnet sich damit analog der des ersten Abschnitts als

$$F_{x i gleit h ges} = \int_{x_{i 1}}^{l_{mat i}} F_{x i gleit h} (x) dx = -\frac{1}{2} m_{\mu gleit h} (l_{mat i} - x_{i 1})^2$$

Mit den zusätzlichen Zwischenergebnissen

$$\begin{aligned} m_{\mu gleit h} \Big|_{\lambda=0} &= -m_{\mu gleit h 1} & \left. \frac{\partial m_{\mu gleit h}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} &= m_{\mu gleit h 2} \\ & & \left. \frac{\partial l_{mat i}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} &= 0 \end{aligned}$$

kann ihre Anfangsableitung einfach bestimmt werden zu

$$\left. \frac{\partial F_{x i gleit h ges}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = 0$$

Gemäß 4.34 folgt nun die Anfangsableitung der Gesamtlängskraft des *Laufstreifens*  $i$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F_{x i ges}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} &= \left. \frac{\partial F_{x i gleit v ges}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} + \left. \frac{\partial F_{x i haft ges}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} + \left. \frac{\partial F_{x i gleit h ges}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} \\ &= \frac{1}{2} c_{scher} l_{mat i}^2 + v_B d_{scher} l_{mat i} \end{aligned} \quad (C.2)$$

und damit für  $l_{RKE} = 1$  die des gesamten *Latschs*

$$\left. \frac{\partial F_{LGKx}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = \sum_{i=1}^{n_{LS}} \left. \frac{\partial F_{x i ges}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = \frac{1}{2} c_{scher} \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat i}^2 + v_B d_{scher} \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat i} \quad (C.3)$$

### C.3 Vertikalkraftabhängige relative Zunahme der Umfangskraftsteigung für wachsendes $R_{quer}$

Bei der Untersuchung der relativen Zunahme von  $L$  (4.77) für wachsendes  $R_{quer}$  hilft die Betrachtung der Zunahme der  $l_i^2$  aller *Laufstreifen* in Relation zu den übrigen *Laufstreifen*, die unter  $B_2$  alle Bodenkontakt besitzen (s. Abb. 4.54). Dazu wird für die Größen

in 4.72 zunächst die Schreibweise

$$\begin{aligned} l_i(R_i, s) &= 2R_i \arccos \frac{s}{R_i} \\ R_i(R_{quer}) &= R_{Rmax} + \sqrt{R_{quer}^2 - y_{REK i}^2} - R_{quer} \end{aligned} \quad (C.4)$$

eingeführt. Mit 4.65 und 4.72 ist  $(F_{FH})_{31} < (F_{FH})_{32}$  gleichbedeutend mit

$$s_1 > s_2$$

Weiter ist

$$\frac{\partial}{\partial R_{quer}} l_i^2(R_i(R_{quer}), s) = \left( \frac{\partial}{\partial R_i} l_i^2(R_i, s) \right) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial R_{quer}} R_i(R_{quer}) \right) \quad (C.5)$$

Der Vergleich der Zunahme von  $l_i^2$  im Verhältnis zu den Längenquadraten  $l_j^2$  anderer *Laufstreifen* für die Höhenwerte  $s_1$  und  $s_2$  des *Reifengürtels*

$$\frac{\frac{\partial}{\partial R_{quer}} l_i^2(R_i(R_{quer}), s_1)}{l_j^2(R_j(R_{quer}), s_1)} > \frac{\frac{\partial}{\partial R_{quer}} l_i^2(R_i(R_{quer}), s_2)}{l_j^2(R_j(R_{quer}), s_2)} \quad (C.6)$$

ist mit C.5 und 4.75 *äquivalent* zu

$$\frac{\frac{\partial}{\partial R_i} l_i^2(R_i, s_1)}{l_j^2(R_j, s_1)} > \frac{\frac{\partial}{\partial R_i} l_i^2(R_i, s_2)}{l_j^2(R_j, s_2)} \quad (C.7)$$

Durch Berechnung der Ableitung und Einsetzen von C.4 für  $l_{i/j}(R_{i/j}, s)$  ergeben die Terme

$$\frac{\frac{\partial}{\partial R_i} l_i^2(R_i, s)}{l_j^2(R_j, s)} = 2 \frac{R_i \cdot \left( \arccos \frac{s}{R_i} \right)}{R_j^2 \cdot \left( \arccos^2 \frac{s}{R_j} \right)} \cdot \left( \left( \arccos \frac{s}{R_i} \right) + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(s/R_i)^2} - 1}} \right) \quad (C.8)$$

Um hiermit C.7 überprüfen zu können, muss der Term für alle Wertekombinationen von  $R_i$  und  $R_j$  auf *streng monotonen Wachstum* in  $s$  überprüft werden. Diese Eigenschaft hängt jedoch nicht vom Vorfaktor  $2 \frac{R_i}{R_j^2}$  in C.8 ab, der sich selbst nicht mit  $s$  verändert.

Also kann an Stelle von C.7 die Funktion

$$h(R_i, R_j, s) = \frac{\arccos \frac{s}{R_i}}{\arccos^2 \frac{s}{R_j}} \cdot \left( \left( \arccos \frac{s}{R_i} \right) + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(s/R_i)^2} - 1}} \right) \quad (C.9)$$

auf *streng monotonen Wachstum* in  $s$  untersucht werden. Die zu betrachtenden Wertebereiche sind beschränkt. So gilt einmal  $s < R_{i/j}$  (s. C.4). Fälle mit einer *Gürteleinfederung*  $f_G > 0.3R_{Rmax}$ , also  $s < 0.7R_{Rmax}$  sollen ausgeschlossen werden. Dann gilt, da sämtliche *Laufstreifen* Bodenkontakt besitzen, auch  $R_{i/j} \geq 0.7R_{Rmax}$ . Um die Dimension des zu analysierenden Werteraums auf 2 zu reduzieren, wird die *Substitution*

$$u = \frac{s}{R_i} \quad c = \frac{R_i}{R_j}$$

für C.9 benutzt. Überträgt man die Grenzen der zu betrachtenden Größen  $R_{i/j}$  und  $s$  auf  $u$  und  $c$  und nähert  $s < R_{i/j}$  durch  $s \leq 0.98R_{i/j}$  an, erhält man

$$c \in [0.7, 1/0.7] \quad u \in [\max(0.7, 0.7/c), \min(0.98, 0.98/c)]$$

Im *substituierten* Fall müssen  $u$  und  $c$  in den beschriebenen Grenzen variiert werden, wobei der resultierende Funktionswert nun *streng monoton* in  $u$  wachsen muss. Die *Substitution* überführt Funktion  $h$  in

$$h'(u, c) = \frac{\arccos u}{\arccos^2 cu} \cdot \left( \arccos u + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{u^2} - 1}} \right)$$

$h'$  kann zwar mit rein analytischen Mitteln auf *Monotonie* in  $u$  überprüft werden, was hier jedoch zugunsten einer anschaulichen numerisch-grafischen Betrachtung vermieden wird. Abbildung C.2 zeigt im relevanten Bereich für verschiedene Werte von  $c$ , dass  $h'$  *streng monoton* in  $u$  steigt. Der linke Funktionsgraph stellt die steigenden Funktionen direkt dar, der rechte den wesentlichen Ausschnitt der Ableitung von  $h'$  nach  $u$ , um das Vorzeichen der Steigung einfacher interpretieren zu können. Insgesamt bestätigt sich so C.7 und damit C.6.

Aus C.6 kann nun wie folgt schrittweise ein Vergleich der Zunahmen in Relation zu den Quadraten der *Laufstreifen*-Längen des Gesamt-*Latschs* hergeleitet werden:

$$\frac{l_j^2(R_j(R_{quer}), s_1)}{\frac{\partial}{\partial R_{quer}} l_i^2(R_i(R_{quer}), s_1)} < \frac{l_j^2(R_j(R_{quer}), s_2)}{\frac{\partial}{\partial R_{quer}} l_i^2(R_i(R_{quer}), s_2)}$$

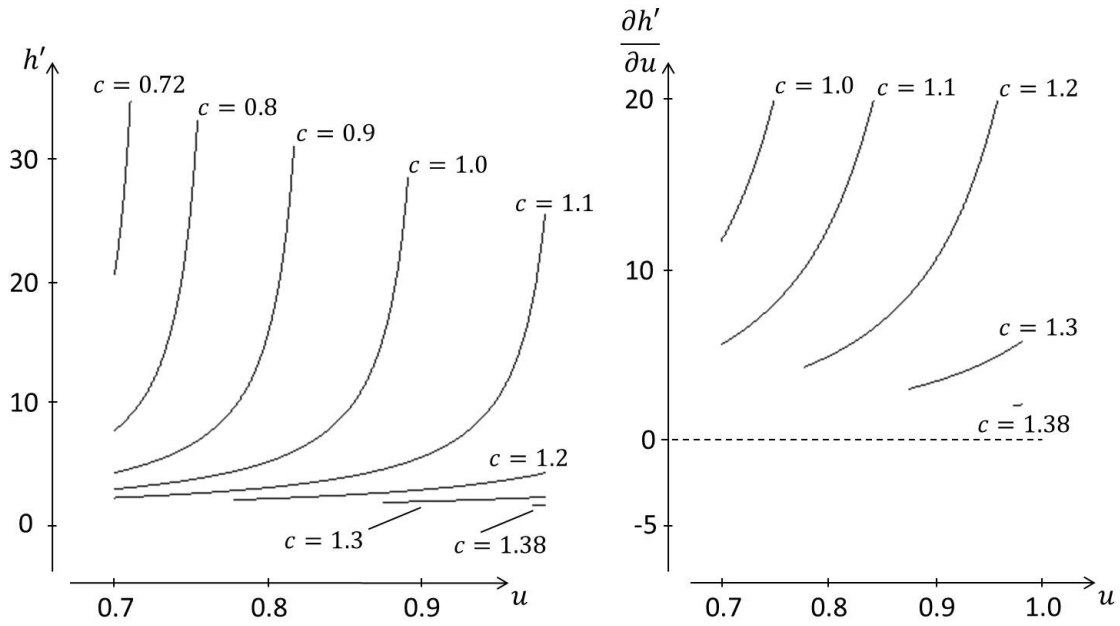


Abbildung C.2: Steigung von  $h'$  in  $u$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\sum_{j=1}^{n_{LS}} \frac{l_j^2(R_j(R_{quer}), s_1)}{\frac{\partial}{\partial R_{quer}} l_i^2(R_i(R_{quer}), s_1)}}{\frac{\partial}{\partial R_{quer}} l_i^2(R_i(R_{quer}), s_1)} &< \frac{\sum_{j=1}^{n_{LS}} \frac{l_j^2(R_j(R_{quer}), s_2)}{\frac{\partial}{\partial R_{quer}} l_i^2(R_i(R_{quer}), s_2)}}{\frac{\partial}{\partial R_{quer}} l_i^2(R_i(R_{quer}), s_2)} \\ \Rightarrow \frac{\sum_{j=1}^{n_{LS}} l_j^2(R_j(R_{quer}), s_1)}{\frac{\partial}{\partial R_{quer}} l_i^2(R_i(R_{quer}), s_1)} &< \frac{\sum_{j=1}^{n_{LS}} l_j^2(R_j(R_{quer}), s_2)}{\frac{\partial}{\partial R_{quer}} l_i^2(R_i(R_{quer}), s_2)} \\ \Rightarrow \frac{\frac{\partial}{\partial R_{quer}} l_i^2(R_i(R_{quer}), s_1)}{\sum_{j=1}^{n_{LS}} l_j^2(R_j(R_{quer}), s_1)} &> \frac{\frac{\partial}{\partial R_{quer}} l_i^2(R_i(R_{quer}), s_2)}{\sum_{j=1}^{n_{LS}} l_j^2(R_j(R_{quer}), s_2)} \end{aligned}$$

Ausgedrückt in  $L$  (4.77) ergibt sich

$$\frac{\frac{\partial}{\partial R_{quer}} l_i^2(R_i(R_{quer}), s_1)}{L(s_1, R_{quer})} > \frac{\frac{\partial}{\partial R_{quer}} l_i^2(R_i(R_{quer}), s_2)}{L(s_2, R_{quer})} \quad (C.10)$$

Dieses Ergebnis kann mit weiteren Umformungen auf die Relativzunahme der *Laufstrei-*

*fen*-Längenquadrate des Gesamt-*Latschs* übertragen werden:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_{LS}} \frac{\frac{\partial}{\partial R_{quer}} l_i^2 (R_i (R_{quer}), s_1)}{L (s_1, R_{quer})} &> \sum_{i=1}^{n_{LS}} \frac{\frac{\partial}{\partial R_{quer}} l_i^2 (R_i (R_{quer}), s_2)}{L (s_2, R_{quer})} \\ \Rightarrow \frac{\frac{\partial}{\partial R_{quer}} \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_i^2 (R_i (R_{quer}), s_1)}{L (s_1, R_{quer})} &> \frac{\frac{\partial}{\partial R_{quer}} \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_i^2 (R_i (R_{quer}), s_2)}{L (s_2, R_{quer})} \end{aligned}$$

Wieder ausgedrückt in  $L$  erhält man

$$\frac{\frac{\partial}{\partial R_{quer}} L (s_1, R_{quer})}{L (s_1, R_{quer})} > \frac{\frac{\partial}{\partial R_{quer}} L (s_2, R_{quer})}{L (s_2, R_{quer})} \quad (\text{C.11})$$

Weitere Umformungen von C.11 sollen die Änderung des Verhältnisses von  $L$  unter verschiedenen Werten  $s$  bei Vergrößerung von  $R_{quer}$  beschreiben:

$$\begin{aligned} L (s_2, R_{quer}) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial R_{quer}} L (s_1, R_{quer}) \right) &> \left( \frac{\partial}{\partial R_{quer}} L (s_2, R_{quer}) \right) \cdot L (s_1, R_{quer}) \\ \Rightarrow \frac{\left( \frac{\partial}{\partial R_{quer}} L (s_2, R_{quer}) \right) \cdot L (s_1, R_{quer}) - L (s_2, R_{quer}) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial R_{quer}} L (s_1, R_{quer}) \right)}{L^2 (s_1, R_{quer})} &< 0 \end{aligned}$$

Mit der *Quotientenregel der Ableitung* folgt

$$\frac{\partial}{\partial R_{quer}} \left( \frac{L (s_2, R_{quer})}{L (s_1, R_{quer})} \right) < 0$$

## C.4 Latschlängskraft für gedrehten Reifengürtel

Ist die *inertiale* Drehlage des *Reifengürtels*  $\varphi_{G0}$ , dann liegt der Punkt mit Koordinaten

$p_G = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{G0y} \\ 0 \\ \sin \varphi_{G0y} \end{pmatrix}$  im *Gürtelsystem* in der *Gürtelmittlebene* und nach Def. 18 mit den

*inertialen* Koordinaten  $p_0 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{G0z} \\ \sin \varphi_{G0z} \\ 0 \end{pmatrix} + r_{G0}$  auf Höhe der Gürtelmitte  $r_{G0}$ . Damit

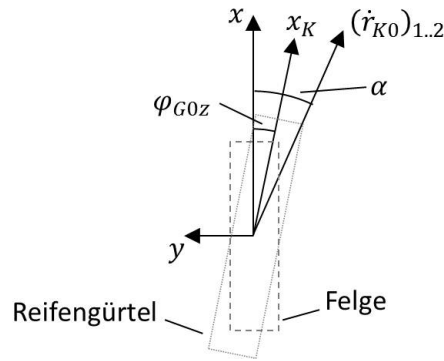


Abbildung C.3: Reifenkomponenten und -koordinatensysteme unter ausschließl. Berücksichtigung vertikaler Verdrehung

liegt die Schnittgerade von *Gürtelmittlebene* und Bodenebene sowie die  $x_K$ -Richtung des *Kontaktsystems* im Winkel  $\varphi_{G0z}$  zur *inertialen*  $x$ -Richtung. Diese und die weiteren Drehrichtungen um die *inertiale* Vertikalachse stellt Abbildung C.3 grafisch dar. Aus der Richtung von  $x_K$  und Def. 20 erhält man die Lagematrix des *Kontaktsystems*

$$A_{K0} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{G0z} & -\sin \varphi_{G0z} & 0 \\ \sin \varphi_{G0z} & \cos \varphi_{G0z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.12})$$

Nach Abschnitt 4.1.7 bewegen sich im *Stationärzustand* der *Kontaktpunkt*  $r_{K0}$  und die *Felgenmitte*  $r_{F0}$  *inertial* parallel. Dann gilt unter *Schräglaufwinkel*  $\alpha$  und *Bahngeschwindigkeit*  $v_B$  mit 4.36

$$\dot{r}_{K0} = v_B \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.13})$$

C.12 und C.13 eingesetzt in 4.30 ergibt  $v_{0Kxij} = \dot{x}_{REK def j} + v_B \cos(\alpha + \varphi_{G0z})$ . *Stationär* ist  $\Delta x_{LGK}$  *konstant* und es folgt mit 4.28 und 4.17 für die *inertiale* Längsgeschwindigkeit der Oberseiten der *Reibkontakt-Elemente* im *Kontaktsystem*  $v_{0Kxij} = -R_{dyn} \dot{\varphi}_{G0y} + v_B \cos(\alpha + \varphi_{G0z})$ . Im *Stationärzustand* gilt nach Abschnitt 4.1.7 auch  $\dot{\varphi}_{G0y} = \dot{\varphi}_{F0y}$  und es folgt mit 4.36

$$v_{0Kxij} = v_B (\cos(\alpha + \varphi_{G0z}) - (\lambda + 1) \cos \alpha) \quad (\text{C.14})$$

Dass keine *Latsch-Längskraft*  $F_{LGKx}$  entsteht, kann nach 4.30, 4.33 und 4.34 nur für  $v_{0Kxij} = 0$  garantiert werden. Dazu muss  $\lambda$  die Beziehung

$$\lambda = \frac{\cos(\alpha + \varphi_{G0z})}{\cos \alpha} - 1 \quad (\text{C.15})$$

erfüllen.



## C.5 Fehler bei Bestimmung von $c_{GF \text{ rot rad}}$ mit $\lambda = 0$

An dieser Stelle soll untersucht werden, ob die Bestimmung von  $c_{GF \text{ rot rad}}$  mit  $\lambda = 0$  an Stelle der in C.4 beschriebenen Wahl von  $\lambda$  fehlerbehaftet wäre. Damit würde keine *Latsch*-Längskraft  $F_{LGKx}$  von 0 eingestellt. Die beliebig klein gewählten Werte für  $\alpha$  und  $v_B$  könnten dieses Problem aber evt. beheben. Da diese Analyse nicht durch das Identifikationsverfahren vorausgesetzt wird, kann sie gröber ausgeführt werden als die Untersuchung von Eigenschaften der Parameter-*Zielgrößen*-Zusammenhänge. Für die hier betrachteten beliebig kleinen Werte von  $\alpha$  kann das *Rückstellmoment*  $M_{FH_z}$  als *linear fallend* und die *Latsch*-Seitenkraft  $F_{LGK_y}$  als *linear* mit den pos. *Konstanten*  $k_1$ ,  $k_2$  in  $\alpha$  steigend angenommen werden (s. Abschn. 4.2.3):

$$F_{LGK_y} = k_1 \alpha \quad M_{FH_z} = -k_2 \alpha$$

Durch den beliebig kleinen Wert von  $v_B$  und die Linearisierung in  $\alpha$  um  $\alpha = 0$  hängt der sich einstellende Drehwinkel  $\varphi_{G0z}$  von *Reifengürtel* und *Latsch* nur von  $M_{FH_z}$  und  $c_{GF \text{ rot rad}}$  ab (4.7)

$$\varphi_{G0z} = \frac{M_{FH_z}}{c_{GF \text{ rot rad}}} = -\frac{k_2 \alpha}{c_{GF \text{ rot rad}}} \quad (\text{C.16})$$

Dabei muss nicht zwischen vertikalem Moment aus Felgenperspektive  $M_{FH_z}$  und *Gürtelperspektive*  $M_{FGG}$  unterschieden werden, da die *Hebellängen* (4.9) und Verdrehwinkel ebenso *linear* in  $\alpha$  wachsen, und sich daraus ergebende Effekte damit insgesamt *quadratisch* in  $\alpha$  sind. Abbildung C.4 zeigt nun, wie bei Wahl von  $\lambda = 0$  im *Latsch* zusätzlich zur Seitenkraft  $F_{LGK_y}$  auch eine Längskraft  $F_{LGK_x}$  entsteht. Diese wächst nach C.14, 4.30 und 4.33 mit dem zus. positiven Koeffizienten  $k_3$  (s. Def. 16,  $v_B \cos \varphi_{G0z} = v_B$ )

$$F_{LGK_x} = -k_3 \frac{v_{0Kx \ ij}}{v_B} = -k_3 (\cos(\alpha + \varphi_{G0z}) - \cos \alpha)$$

C.16 eingesetzt und die cos-Terme ersetzt durch *Taylorreihen* bis zum *quadratischen* Glied erhält man

$$F_{LGK_x} = -\frac{k_2 k_3}{c_{GF \text{ rot rad}}} \left( 1 - \frac{k_2}{2c_{GF \text{ rot rad}}} \right) \alpha^2 \quad (\text{C.17})$$

Bestimmt man Parameter  $c_{GF \text{ rot rad}}$  aus der Drehrichtung der Horizontalkraft im *horizontalen* System und dem resultierenden *Rückstellmoment*, ergibt sich die Formel

$$c_{GF \text{ rot rad id}} = \frac{-M_{FH_z} F_{LGK_y}}{-\varphi_{G0z} F_{LGK_y} + F_{LGK_x}}$$

Die Werte eingesetzt und umgeformt erhält man

$$\frac{1}{c_{GF \text{ rot rad id}}} = \frac{1}{c_{GF \text{ rot rad}}} - \frac{k_3}{k_1 c_{GF \text{ rot rad}}} \left( 1 - \frac{k_2}{2c_{GF \text{ rot rad}}} \right)$$

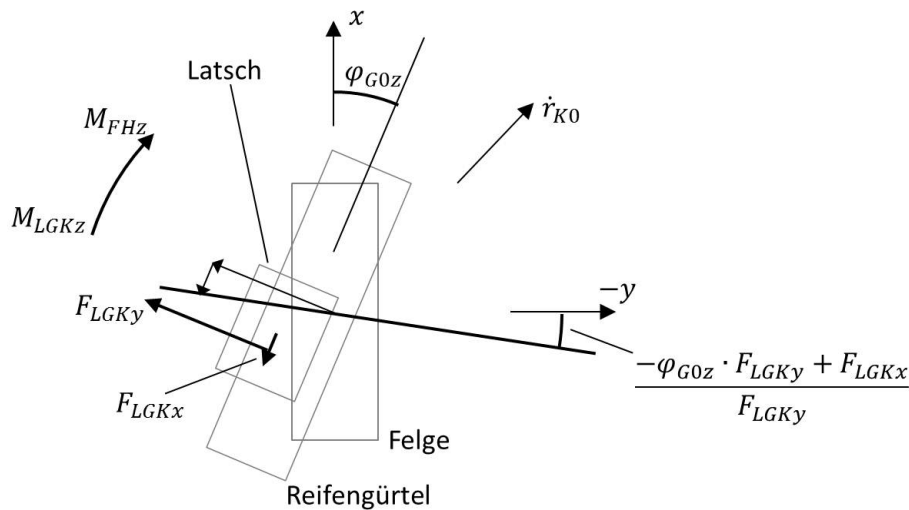


Abbildung C.4: Kräfte unter  $\alpha > 0$  und  $\lambda = 0$  in Horizontaldarstellung

Da  $k_2$  möglicherweise, aber nicht ausschließlich von  $c_{GF\ rot\ rad}$  abhängt, wird klar, dass die Bestimmung von  $c_{GF\ rot\ rad\ id}$  mit  $\lambda = 0$  trotz beliebig kleiner Werte für  $\lambda$  und  $v_B$  i.A. fehlerbehaftet ist.

## C.6 Lösungen der Schlupfbedingung mit bzw. ohne Gürtelschlupf 0

Dieser Abschnitt soll die verschiedenen Lösungen für  $\lambda$  von Gleichung 4.79 untersuchen, und zwar darauf, ob sie tatsächlich die Nullstelle zur *Latsch*-Längskraft  $F_{LGKx} = 0$  sind oder nicht. Eine wesentliche Grundlage dafür ist, die Bewegungsgrößen  $\lambda$  und  $\alpha$  der Felge auf die Perspektive des *Latschs* zu übertragen. Dann beschreiben die alternativen Größen  $\lambda_K$  und  $\alpha_K$  die *inertiale* Bewegung des *Latschs* im *Kontaktsystem* in Relation zur Rotation des *Reifengürtels* bzw. der Felge, und definieren damit auch für ein gegenüber dem *Felgensystem* ( $\varphi_{F0z} = 0$ ) um den Winkel  $\varphi_{G0z}$  gedrehtes *Kontaktsystem* (s. Abb. C.3, C.4 und Abschn. C.4) die aus Rotation, *Umfangsschlupf* und *Schräglauf* resultierende Auslenkung der *Reibkontakt-Elemente*. Aus den Winkelbetrachtungen von Abschnitt C.4 erhält man  $\alpha_K$  einfach, für  $\lambda_K$  kann in Gleichung 4.36 genutzt werden, dass die *Schlupf*-Definitionen von  $\lambda_K$  und  $\lambda$  beide auf derselben Rotationsgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}_{G0y}$  der Felge bzw. des *Reifengürtels* basieren:

$$\frac{(\lambda + 1) v_B \cos \alpha}{R_{dyn}} = \frac{(\lambda_K + 1) v_B \cos \alpha_K}{R_{dyn}}$$

Aus Gleichung 4.68 für den Fall  $\varphi_{G0z} = 0$  und der Entsprechung in Gleichung C.14 für beliebiges  $\varphi_{G0z}$  sowie den Winkelbetrachtungen aus Abschnitt C.4 folgt für die Größen

$$\alpha_K = \alpha + \varphi_{G0z} \quad \lambda_K = (\lambda + 1) \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_K} - 1 \quad (\text{C.18})$$

In dieser Darstellung ist die tatsächlich relevante Bedingung  $F_{LGKx} = 0$  genau für  $\lambda_K = \lambda_{K0} = 0$  erfüllt.

Ist die Lösung  $\lambda_0$  von Gleichung 4.79 unter  $\alpha_0$ , für die zugleich  $F_{LGKx} = \lambda_K = 0$  gilt, nicht die Lösung von 4.79 mit dem kleinsten Wert  $\lambda$ , so existiert eine weitere Lösung  $\lambda_{-1}$  von 4.79 mit  $0 \leq \lambda_{-1} < \lambda_0$ . Welcher Wert  $\lambda_{K-1}$  sich unter  $\lambda_{-1}$  und  $\alpha_0$  einstellt, überhaupt welches Vorzeichen  $\lambda_{K-1}$  annimmt, ist nicht einfach direkt zu bestimmen, da man bspw. in C.18 von einem veränderten Wert von  $\varphi_{G0z}$  ausgehen muss, der selbst kompliziert von etlichen weiteren Modellparametern abhängt. Um doch Aussagen über das Vorzeichen von  $\lambda_{K-1}$  treffen zu können, muss weiter ausgeholt werden. Setzt man für die *Grundanregung* des Reifens mit  $\dot{F}_{FH_z} = \varepsilon_W = \lambda = \alpha = 0$  und  $v_B \rightarrow 0$  voraus, dass sich ein *stabiler Stationärzustand* einstellt - diese Forderung folgt nicht einmal in einer so einfachen Situation für sämtliche Parametrierungen, trifft jedoch für alle inkl. *Luftinnendruck* 'fahrbaren' Reifen zu - so folgt für eine *Umgebung* der *Grundanregung*, dass sich *stabile Stationärzustände*, die sich *stetig* abhängig von der Anregung ändern, einstellen. Diese Folgerung ist nicht unmittelbar klar und wird daher in Abschnitt C.7 separat auf Basis von *Stetigkeitsargumenten* zum Reifenmodell hergeleitet. Für  $\alpha = \varepsilon_W = \dot{f} = 0$  liegt der in Abschnitt 4.2.2 analysierte *Stationärzustand* vor, unter dem sich  $\alpha_K = 0$  einstellt. Nach Gleichung C.18 gilt in dieser Situation  $\lambda_K = \lambda$ , also in Darstellung einer Funktion

$$\lambda_K|_{\alpha=0}(\lambda) = \lambda \quad (\text{C.19})$$

Definiert man nun darauf aufbauend die Funktion

$$\Delta\lambda_K(\alpha) = \lambda_K|_{\alpha}(\lambda_{-1}) - \lambda_K|_{\alpha}(\lambda_0) \quad (\text{C.20})$$

folgt  $\Delta\lambda_K(0) < 0$ . Da in der *Umgebung* der *Grundanregung*  $\lambda_K$  *stetig* von  $\alpha$  abhängt, und C.19 sowie C.20 *stetige* Abbildungen definieren, ist  $\Delta\lambda_K$  selbst *stetig* in  $\alpha$ , und für einen hinreichend kleinen Wert  $\alpha_0$  gilt auch  $\Delta\lambda_K(\alpha_0) < 0$ . Mit C.20 folgt zunächst  $\lambda_{K-1} - \lambda_{K0} < 0$  und wegen  $\lambda_{K0} = 0$  (s.o.)

$$\lambda_{K-1} < 0$$

Für  $\alpha_0 > 0$  und  $\lambda_{K-1} < 0$  stellen sich *Latschkkräfte* mit

$$F_{LGKx-1} < 0 \quad F_{LGKy-1} > 0 \quad (\text{C.21})$$

ein (s. Abschn. C.2 und Abb. 4.56, die den Fall für negatives  $\alpha$  illustriert). Der resultierende Wert für  $\varphi_{G0z}$  wird mit  $\varphi_{G0z-1}$  bezeichnet,  $\alpha_K$  für diesen Fall mit  $\alpha_{K-1}$ .

*Stationär* stimmen die *inertialen* Horizontalkräfte von *Latsch* und *Felge* überein, die der *Felge* erhält man also aus denen des *Latschs* durch Transformation vom *Kontakt-* ins *Felgensystem* (s. Abb. C.4). Gleiches gilt für die Richtung  $-\arctan \frac{(F_{FH})_1}{(F_{FH})_2}$  der Kraft im *Felgensystem*

$$-\arctan \frac{(F_{FH})_1}{(F_{FH})_2} = \varphi_{G0z-1} - \arctan \frac{F_{LGKx-1}}{F_{LGKy-1}} \quad (C.22)$$

Bei  $\lambda_{-1}$  handelt es sich um eine Lösung von Gleichung 4.79, es gilt also mit C.22 insgesamt

$$\begin{aligned} \varphi_{G0z\ estim-1} &= \varphi_{G0z-1} - \arctan \frac{F_{LGKx-1}}{F_{LGKy-1}} \\ \lambda_{-1} &= \frac{\cos(\alpha_0 + \varphi_{G0z\ estim-1})}{\cos \alpha_0} - 1 \end{aligned} \quad (C.23)$$

Aus C.23 und C.18 folgt zunächst

$$\begin{aligned} \alpha_{K-1} &= \alpha_0 + \varphi_{G0z-1} \\ \lambda_{K-1} &= \frac{\cos\left(\alpha_0 + \varphi_{G0z-1} - \arctan \frac{F_{LGKx-1}}{F_{LGKy-1}}\right)}{\cos \alpha_{K-1}} - 1 \end{aligned}$$

und damit

$$\lambda_{K-1} = \frac{\cos\left(\alpha_{K-1} - \arctan \frac{F_{LGKx-1}}{F_{LGKy-1}}\right)}{\cos \alpha_{K-1}} - 1 \quad (C.24)$$

Die Frage, ob  $\lambda_{-1}$  mit den gefolgerten Eigenschaften existieren kann oder nicht, soll mit Hilfe des *Gradientenverhältnisses*  $\frac{\partial F_{LGKx}}{\partial \lambda_K} / \frac{\partial F_{LGKy}}{\partial \alpha_K} \Big|_{\lambda_K=\alpha_K=0}$  von *Latsch*-Längs- und Querkraft in  $\lambda_K$  und  $\alpha_K$  geklärt werden. Da  $F_{LGKx}|_{\lambda_K=\alpha_K=0} = F_{LGKy}|_{\lambda_K=\alpha_K=0} = 0$  (s. Abschn. C.2 und C.8) und  $\frac{\partial F_{LGKx}}{\partial \lambda_K} \Big|_{\lambda_K=\alpha_K=0}, \frac{\partial F_{LGKy}}{\partial \alpha_K} \Big|_{\lambda_K=\alpha_K=0} > 0$ , gilt

$$\frac{\partial F_{LGKx}}{\partial \lambda_K} / \frac{\partial F_{LGKy}}{\partial \alpha_K} \Big|_{\lambda_K=\alpha_K=0} = \lim_{\lambda_K, \alpha_K \rightarrow 0} \frac{F_{LGKx} \cdot \alpha_K}{F_{LGKy} \cdot \lambda_K}$$

In den *Zielgrößen* von Abschnitt 4.2.3 wird die Situation für  $\alpha_0 \rightarrow 0$  betrachtet. Unter  $\alpha_0 = 0$  (und  $\varepsilon_W = 0$ ) liegt die Situation von Abschnitt 4.2.2 vor, und es gilt  $\varphi_{G0z-1} = 0$ , weshalb für  $\alpha_0 \rightarrow 0$  auch  $\varphi_{G0z-1} \rightarrow 0$  und mit C.24  $\alpha_{K-1} \rightarrow 0$  folgt. Nach Abschnitt C.10 erhält man für  $\varepsilon_W = 0$  den Wert  $\alpha_{K-1} = 0$  ausschließlich unter  $\alpha_0 = 0$ , und es gilt auch umgekehrt

$$\lim_{\alpha_{K-1} \rightarrow 0} \alpha_0 = \lim_{\alpha_{K-1} \rightarrow 0} \varphi_{G0z-1} = 0 \quad (C.25)$$

Welcher *Grenzwert* sich für  $\lambda_{K-1}$  einstellt, ist in den Gleichungen nicht so einfach zu sehen. C.24 liefert zunächst

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha_{K-1} \rightarrow 0} \lambda_{K-1} &= \lim_{\alpha_{K-1} \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\alpha_{K-1} - \arctan \frac{F_{LGKx-1}}{F_{LGKy-1}}\right)}{\cos \alpha_{K-1}} - 1 \\ &= \lim_{\alpha_{K-1} \rightarrow 0} \cos\left(\arctan \frac{F_{LGKx-1}}{F_{LGKy-1}}\right) - 1 \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

Mit der Voraussetzung  $\lambda_{-1} \geq 0$ , C.25 und C.23 erhält man außerdem

$$\cos\left(\lim_{\alpha_{K-1} \rightarrow 0} \arctan \frac{F_{LGKx-1}}{F_{LGKy-1}}\right) \geq 1$$

womit zuerst

$$\cos\left(\lim_{\alpha_{K-1} \rightarrow 0} \arctan \frac{F_{LGKx-1}}{F_{LGKy-1}}\right) = 1$$

damit

$$\lim_{\alpha_{K-1} \rightarrow 0} \arctan \frac{F_{LGKx-1}}{F_{LGKy-1}} = 0 \quad (\text{C.27})$$

und zusammen mit C.26  $\lim_{\alpha_{K-1} \rightarrow 0} \lambda_{K-1} = 0$  folgt. Also gilt

$$\lim_{\lambda_K, \alpha_K \rightarrow 0} \frac{F_{LGKx} \cdot \alpha_K}{F_{LGKy} \cdot \lambda_K} = \lim_{\alpha_{K-1} \rightarrow 0} \frac{F_{LGKx-1} \cdot \alpha_{K-1}}{F_{LGKy-1} \cdot \lambda_{K-1}}$$

und es ist zum einen korrekt und zum anderen ausreichend, ausschließlich die Situation für  $\alpha_{K-1} \rightarrow 0$  zu analysieren. Aus C.27 sieht man außerdem, dass

$$\lim_{\alpha_{K-1} \rightarrow 0} \frac{F_{LGKx-1}}{F_{LGKy-1}} = 0 \quad (\text{C.28})$$

Genauso wie C.28 ist auch nicht direkt ersichtlich, ob die Anfangsableitung

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha_{K-1}} \frac{F_{LGKx-1}}{F_{LGKy-1}} \right|_{\alpha_{K-1}=0}$$

überhaupt definiert ist. Wie in den Abschnitten C.14 und C.5 beschrieben gilt für einen *Felgenschlupf*  $\lambda_0 = 0$  analog C.17 notiert als abbrechende *Taylor-Entwicklung* von  $\lambda_{K0}$  in  $\alpha_0$  um  $\alpha_0 = 0$

$$\lambda_{K0} = -k_1 \alpha_0^2, \quad k_1 > 0 \quad (\text{C.29})$$

und analog C.16

$$\varphi_{G0z0} = -k_2 \alpha_0, \quad 0 < k_2 < 1, \quad \text{da sonst auch kein verdrehendes } M_{LGKz} \text{ entsteht}$$

Zusammen mit C.18 folgt für die abbrechende *Taylor-Entwicklung* von  $\lambda_{K0}$

$$\lambda_{K0} = -\frac{k_1}{(1-k_2)^2} \alpha_{K0}^2 \quad (\text{C.30})$$

Da im Fall hier  $\lambda_0 = 0$  und mit  $\alpha_0 > 0$  dann  $\lambda_{-1} > 0$  gilt, folgt nach der Erläuterung zu C.20 zunächst umgekehrt  $\Delta\lambda_K(0) > 0$ , für hinreichend kleines  $\alpha_0$  damit auch  $\Delta\lambda_K(\alpha_0) > 0$  und insgesamt

$$\lambda_{K-1} \geq \lambda_{K0}$$

Zusammen mit  $\lambda_{K-1} < 0$  (s.o.) und C.30 erhält man für hinreichend kleines  $\alpha_0$

$$|\lambda_{K-1}| \leq k_3 \alpha_{K0}^2, \quad k_3 > 0 \quad (\text{C.31})$$

und mit C.29 und C.30

$$\alpha_0 = \frac{1}{(1-k_2)^2} \alpha_{K0} \quad (\text{C.32})$$

als abbrechende *Taylor-Entwicklung*. Auf Basis des durch abbrechende *Taylor-Entwicklung* näherungsweise Teilmodells

$$\begin{aligned} F_{LGKx-1} &= k_4 \lambda_{K-1}, & k_4 &> 0 \\ F_{LGKy-1} &= k_5 \alpha_{K-1}, & k_5 &> 0 \\ M_{LGKz-1} &= -k_6 F_{LGKy-1} + k_7 F_{LGKx-1} F_{LGKy-1}, & k_6 &> 0, \quad k_7 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

zur Entstehung der horizontalen *Latsch*-Größen aus 4.34, 4.35, 4.28 und den *linearisierten* Ersatzmodellen aus den Abschnitten C.2 und C.10 ( $k_7 F_{LGKx-1} F_{LGKy-1}$  zur Beschreibung der Hebelwirkung von  $\Delta x_{LGK}$  und  $\Delta y_{LGK}$  kombiniert mit  $F_{LGKy-1}$  bzw.  $F_{LGKx-1}$ ) kann unter Anwendung von C.31, C.32, C.18 und der mit  $v_B, \alpha_0 \rightarrow 0$  und 4.42 proportionalen Beziehung zwischen  $\varphi_{G0z}$  und  $M_{LGKz}$  das Modell

$$\begin{aligned} F_{LGKx-1} &= -k_8 \alpha_0^2 + h_3, & k_8 &\geq 0, \quad h_3 \in \mathcal{O}(\alpha_0^3) \\ F_{LGKy-1} &= k_5 \alpha_{K-1} \\ \varphi_{G0z-1} &= -k_9 F_{LGKy-1} + k_{10} F_{LGKx-1} F_{LGKy-1}, & k_9 &> 0, \quad k_{10} \in \mathbb{R} \\ \alpha_{K-1} &= \alpha_0 + \varphi_{G0z-1} \end{aligned}$$

um  $\alpha_0 = 0$  in abbrechenden *Taylor-Reihen* gebildet werden. Aufgelöst erhält man daraus die *linearisierte* Beziehung

$$\alpha_{K-1} = \frac{1}{1+k_5 k_9} \alpha_0$$

und mit C.32 den *linearisierten* Zusammenhang

$$\alpha_{K-1} = k_{11} \alpha_{K0}, \quad k_{11} > 0$$

Zusammen mit C.31 ergibt sich für hinreichend kleines  $\alpha_{K-1} > 0$

$$|\lambda_{K-1}| \leq k_{12} \alpha_{K-1}^2, \quad k_{12} > 0$$

woraus mit den abbrechenden *Taylor-Entwicklungen* (s.o.)

$$F_{LGKx-1} = k_4 \lambda_{K-1} \quad \text{und} \quad F_{LGKy-1} = k_5 \alpha_{K-1}$$

auch

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha_{K-1}} \frac{F_{LGKx-1}}{F_{LGKy-1}} \right|_{\alpha_{K-1}=0} \in \mathbb{R}$$

folgt. Also existiert die *Taylor-Entwicklung* von  $\frac{F_{LGKx-1}}{F_{LGKy-1}}$  in  $\alpha_{K-1} = 0$  für  $\alpha_{K-1} \geq 0$ , und es gilt wegen C.21 für  $\alpha_{K-1} > 0$  sowie mit C.28

$$\frac{F_{LGKx-1}}{F_{LGKy-1}} = c \cdot \alpha_{K-1} + g \quad \text{mit } c \leq 0, g \in \mathcal{O}(\alpha_{K-1}^2)$$

Für die *Taylor-Entwicklung* von  $\lambda_{K-1}$  (C.24) erhält man so

$$\begin{aligned} \lambda_{K-1} &= \frac{1 - \frac{1}{2}(\alpha_{K-1} - c \cdot \alpha_{K-1})^2}{1 - \frac{1}{2}\alpha_{K-1}^2} - 1 + h_1 \\ &= \frac{1 - \frac{1}{2}(\alpha_{K-1} - c \cdot \alpha_{K-1})^2 - 1 + \frac{1}{2}\alpha_{K-1}^2}{1 - \frac{1}{2}\alpha_{K-1}^2} + h_1 = \frac{c \cdot \left(1 - \frac{1}{2}c\right) \alpha_{K-1}^2}{1 - \frac{1}{2}\alpha_{K-1}^2} + h_1 \\ &= c \cdot \left(1 - \frac{1}{2}c\right) \alpha_{K-1}^2 + h_2 \quad \text{mit } h_1, h_2 \in \mathcal{O}(\alpha_{K-1}^3) \end{aligned}$$

und letztlich für die des *Gradientenverhältnisses*

$$\frac{F_{LGKx-1} \cdot \alpha_{K-1}}{F_{LGKy-1} \cdot \lambda_{K-1}} = \frac{c \cdot \alpha_{K-1} \cdot \alpha_{K-1}}{c \cdot \left(1 - \frac{1}{2}c\right) \alpha_{K-1}^2} + k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}c} + k \quad \text{mit } k \in \mathcal{O}(\alpha_{K-1})$$

woraus unmittelbar  $\lim_{\alpha_{K-1} \rightarrow 0} \frac{F_{LGKx-1} \cdot \alpha_{K-1}}{F_{LGKy-1} \cdot \lambda_{K-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}c}$  und insgesamt

$$\left. \frac{\partial F_{LGKx}}{\partial \lambda_K} / \frac{\partial F_{LGKy}}{\partial \alpha_K} \right|_{\lambda_K = \alpha_K = 0} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}c} \leq 1 \quad (\text{C.33})$$

folgt.

Soll das *Gradientenverhältnis* dabei helfen, eine der Lösungen der *Schlupfbedingung* 4.79 auszuschließen, muss es noch auf eine alternative Art hergeleitet werden, die nicht auf

dem Zusammenhang der *Schlupfbedingung* selbst basiert. Für  $\alpha_K = 0$  gilt hier neben der Voraussetzung  $\varphi_{F0x} = 0$  auch  $\alpha = 0$  (C.25). Damit sind die Voraussetzungen aus Abschnitt C.2 erfüllt, es gilt mit C.18  $\lambda = \lambda_K$  und damit über C.3

$$\left. \frac{\partial F_{LGKx}}{\partial \lambda_K} \right|_{\lambda_K = \alpha_K = 0} = \frac{1}{l_{RKE}} \left( \frac{1}{2} c_{scher} \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat i}^2 + v_B d_{scher} \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat i} \right) \quad (C.34)$$

Im Fall der *schräglaufabhängigen* Seitenkraftsteigung sind sämtliche Voraussetzungen von Abschnitt C.10 erfüllt, und es lässt sich Gleichung C.48 dazu verwenden, deren Eigenschaften zu analysieren. Nach Abschnitt C.10 gilt in C.48  $k > 0$  und aus der Parametrier-Voraussetzung ohnehin  $n_{LKt}, n_{Lkb} > 0$ . Da also sämtliche Größen positiv sind, sieht man aus C.48, dass  $\left. \frac{\partial F_{LGKy}}{\partial \alpha_K} \right|_{\lambda_K = \alpha_K = 0}$  *streng monoton* sowohl in  $n_{LKt}$  als auch in  $(n_{Lkb} + k)$  *fällt*. Also ist  $\left. \frac{\partial F_{LGKy}}{\partial \alpha_K} \right|_{\lambda_K = \alpha_K = 0}$  für jede gültige Belegung von  $n_{LKt}$  und  $(n_{Lkb} + k)$  kleiner als für  $n_{LKt} = (n_{Lkb} + k) = 0$ , und es folgt

$$\left. \frac{\partial F_{LGKy}}{\partial \alpha_K} \right|_{\lambda_K = \alpha_K = 0} < \frac{1}{l_{RKE}} \left( \frac{1}{2} c_{scher} \left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat i}^2 \right) + d_{scher} v_B \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat i} \right) \quad (C.35)$$

C.34 und C.35 übertragen auf das *Gradientenverhältnis* erhält man

$$\left. \frac{\partial F_{LGKx}}{\partial \lambda_K} / \frac{\partial F_{LGKy}}{\partial \alpha_K} \right|_{\lambda_K = \alpha_K = 0} > 1 \quad (C.36)$$

Die beiden zum *Gradientenverhältnis* hergeleiteten Eigenschaften C.33 und C.36 widersprechen sich. Also muss die einzige (nicht vorausgesetzte) Annahme in den Schlussfolgerungen zu beiden Eigenschaften, nämlich dass die Lösung  $\lambda_0$  von 4.79 mit  $F_{LGKx} = \lambda_K = 0$  nicht die mit dem kleinsten Wert  $\lambda \geq 0$  ist, falsch sein. Dann aber gilt das Gegenteil der Annahme, also dass für die Lösung von 4.79 mit dem kleinsten Wert  $\lambda \geq 0$  auch  $F_{LGKx} = 0$  gilt.

## C.7 Stetige Umgebung stabiler Stationärzustände

Zur Unterscheidung *stationärer Zustände*, wie sie in Abschnitt 4.1.7 definiert sind, von *transienten Zuständen* ist eine Systemdarstellung erforderlich, in der die Zustandsgrößen genau dann zeitlich *konstant* sind, wenn der *Stationärzustand* vorliegt. Die in Abschnitt 4.1.5 verwendeten Zustandsgrößen besitzen diese Eigenschaft nicht. Verwendet man aufbauend auf der Beschreibung in Abschnitt 4.1.7 die Umkehrung von 4.17

$$j = \left\lfloor \frac{\left( \frac{1}{2} n_{RES} l_{RKE} - x_{REK j} - R_{dyn} \varphi_{G0y} \right) \bmod (n_{RES} \cdot l_{RKE})}{l_{RKE}} \right\rfloor$$



als Substitution für die Indizes  $j$  der *Reibkontakt-Elemente* innerhalb eines *Laufstreifens* in den Gleichungen aus Abschnitt 4.1.5, und bildet für sämtliche Modellgleichungen den *Grenzübergang*  $n_{RES} \rightarrow \infty$  für eine beliebig große Zahl von *Reibkontakt-Elementen* pro *Laufstreifen*, erhält man ein äquivalentes Modell in den *ortskontinuierlichen* Zuständen  $a_{x/y i}(x_{REK j})$  statt der *materialdiskreten* Zustände  $a_{x/y ij}$ . Die Zustände der *orts-* statt *elementabhängigen* Modellierung der Auslenkungen im *Latsch* sind nun *konstant*, wenn sich der Reifen im *Stationärzustand* befindet. Um numerisch lösbar zu sein, kann das Modell wieder in eine Form mit endlich vielen aber nach wie vor *ortsabhängigen* und *stationär konstanten* Zuständen  $a_{x/y i}(x_{REK j})$  überführt werden. Ersetzt man noch die translatorisch horizontale Lage des *Reifengürtels* und die Drehlage um die Querachse durch felgenbezogene Größen

$$(r_{G0})_{1,2} \rightarrow r_{GF0 1,2} = (r_{G0} - r_{F0})_{1,2} \quad \varphi_{G0y} \rightarrow \varphi_{FGy} = \varphi_{G0y} - \varphi_{F0y}$$

erhält man in den endlich vielen *stationär konstanten* Zuständen (vgl. Tabelle zu Beginn von Abschn. 4.1.5)

$$r_{GF0 1,2}, \dot{r}_{GF0 1,2}, r_{G0z}, \dot{r}_{G0z}, \varphi_{G0x}, \dot{\varphi}_{G0x}, \varphi_{FGy}, \dot{\varphi}_{FGy}, \varphi_{G0z}, \dot{\varphi}_{G0z}, \\ F_{Lx PT1}, F_{Ly PT1}, M_{Lz PT1}, a_{xi}(x_{REK j}), a_{yi}(x_{REK j})$$

ein entsprechendes Modell für den Gesamtreifen. Diese Zustandsbeschreibung lässt sich in einem endlichdimensionalen Zustandsvektor  $x$  zusammenfassen, was ebenso für die Anregung  $u = (\delta, f, v_B, \varepsilon_W, \lambda, \alpha)$  (s. Abschn. 4.1.6) möglich ist. Damit kann das Modellverhalten als *nichtlineare gewöhnliche Differenzialgleichung*

$$\dot{x} = F(x, u)$$

beschrieben werden. Nach Abschnitt 4.1.7 existieren für das Reifenmodell genau bei *konstantem*  $u$  *Gleichgewichtszustände*. Ist  $x_0$  für die *konstante* Anregung  $u_0$  ein *stabiler Stationärzustand*, lässt sich die Systemgleichung in einer *Umgebung* von  $x_0$  darstellen als

$$\dot{x} = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x_0, u=u_0} \cdot (x - x_0) + G_{u_0}(x - x_0) \quad \text{mit} \quad \|G_{u_0}(\cdot)\| \in \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

Dabei besitzen sämtliche *Eigenwerte*  $\lambda_i|_{x=x_0, u=u_0}$  von  $\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x_0, u=u_0}$  einen *negativen Realteil*. Eine ausführliche Herleitung dieser grundlegenden Eigenschaft gibt bspw. [38]. Da sich  $\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x_0, u=u_1}$  stetig in  $u$  ändert, besitzen auch alle *Eigenwerte* von  $\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x_0, u=u_1}$  für  $u_1$  aus mindestens einer *Umgebung*  $U_1$  von  $u_0$  einen *negativen Realteil*. Also ist  $F(x, u_1)$  in einer *Umgebung* von  $x_0$  in  $x$  *invertierbar*. Bei  $x_0$  in Kombination mit  $u_0$  handelt es sich um einen *Gleichgewichtszustand*, woraus  $F(x_0, u_0) = 0$  folgt. Es gilt  $u_0 \in U_1$ , und

mit der Invertierbarkeit für  $u_1 \in U_1$  folgt aus Gründen der *Stetigkeit* von  $F$ , dass für  $u_2 \in U_2 \subseteq U_1$  ein  $x_{F^{-1}}(u_2)$  existiert mit  $F(x_{F^{-1}}(u_2), u_2) = 0$ . Ebenso aus der *Stetigkeit* von  $F$  folgt, dass  $x_{F^{-1}}$  sich *stetig* in  $u_2$  ändert. Da  $F$  auch *stetig* in  $x$  ist, existiert auch eine *Umgebung*  $U_3 \subseteq U_2$  von  $u_0$ , für deren Werte  $u_3 \in U_3$  außerdem gilt, dass sämtliche *Eigenwerte* von  $\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x_{F^{-1}}(u_3), u=u_3}$  einen *negativen Realteil* besitzen. Damit ist auch der *Stationärzustand*  $x_3$  unter der Anregung  $u_3$  *stabil*, denn aus den ausschließlich *negativen Eigenwerten* folgt auch umgekehrt die *Stabilität* (s. bspw. [38]). Insgesamt existiert mit  $U_3$  also eine Umgebung von  $u_0$ , deren Anregungen  $u_3$  alle einen *stabilen Gleichgewichtszustand*  $x_3$  besitzen, wobei sich  $x_3$  *stetig* in  $u_3$  ändert.

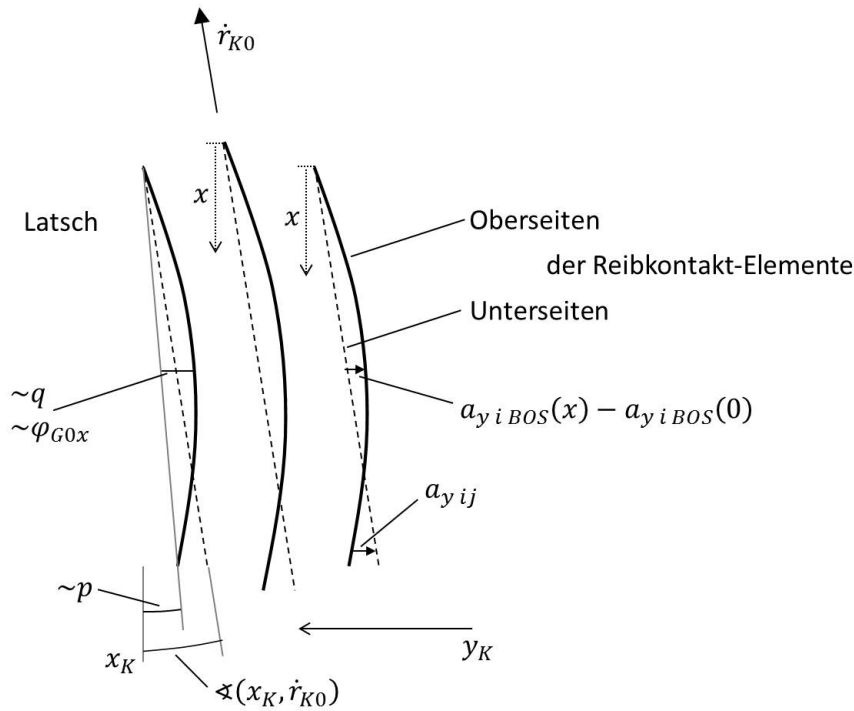
## C.8 Linearisiertes Latsch-Quermodell um $\alpha = \varepsilon_W = 0$

Analog zu Abschnitt C.2 soll hier das *linearisierte* Modell für die resultierende *Latsch-Querkraft*  $F_{LGK_y}$  und das resultierende *Latsch-Rückstellmoment*  $M_{LGK_z}$  unter kleinen *Schräglaufwinkeln*  $\alpha$  und *Sturzwinkeln*  $\varepsilon_W$  hergeleitet werden. Dabei wird auch für das Originalmodell als Länge der *Reibkontakt-Elemente*

$$l_{RKE} = 1$$

angenommen, was gemäß 4.66 im Nachgang trotzdem eine einfache Umrechnung auf die realen Kräfte und Momente ermöglicht. Anders als in Abschnitt C.2 wird der *stationäre Latschzustand* hier nicht über der Felgenzustandsgröße  $\lambda$  dargestellt, sondern durch Größen, die die Ursache sämtlicher Querauslenkungen  $a_{y_{ij}}$  der *Reibkontakt-Elemente* zusammengefasst beschreiben. Abbildung C.5 zeigt die Querauslenkung der *haftenden* Unterseiten gegenüber den Oberseiten der *Reibkontakt-Elemente*. Für kleine  $\alpha$  und  $\lambda = 0$  wächst der auf die *Latschbewegung* bezogene *Umfangschlupf*  $\lambda_K$  (s. Abschn. C.6) *quadratisch* in  $\alpha$  (s. Abschn. C.5), kann hier also vernachlässigt werden. Damit bestimmt *linearisiert* ausschließlich die *inertiale* Bewegungsrichtung  $\dot{r}_{K0}$  gegenüber der *Latsch-Längsrichtung*  $x_K$  die Lage der *haftenden* Unterseiten im *Latsch* (s. Def. 20, 4.17, 4.30). Die Querposition  $y_{REK} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_{x_{ij}}$  der Oberseiten im *Latsch* hängt von  $\varphi_{G0x}$  (4.29,  $\varepsilon_{GK} = \varphi_{G0x}$  auf ebenem Boden) und den Größen  $p$  und  $q$  aus 4.28 ab, die sich aus den *stationären Latsch-Kräften* und -Momenten  $F_{LGK_y}$  und  $M_{LGK_z}$  ergeben. Die Auslenkung der *Reibkontakt-Elemente* am vorderen *Latsch-Ende* ist bedingt durch fehlenden Vertikaldruck vor dem Eintritt in die Kontaktzone 0. Daher liegen Ober- und Unterseiten am vorderen *Latsch-Ende* übereinander. Für die Querverschiebung  $a_{y_{iBOS}}(x) - a_{y_{iBOS}}(0)$  der Oberseiten der *Reibkontakt-Elemente* im *Laufstreifen*  $i$  gegenüber den Bodenpunkten im *Kontaktsystem* kann damit der Zusammenhang

$$a_{y_{iBOS}}(x) = rx + s \left( x - \frac{1}{2} l_{mat i} \right)^2$$


 Abbildung C.5: Querauslenkung im *Latsch* ausschließlich unter *Haftreibung*

im Abstand  $x$  zum Beginn des *Laufstreifens* angegeben werden. Dabei fasst  $r$  die Anteile aus der *inertialen* Richtung von  $\dot{r}_{K0}$  aus 4.30 und der *Latschtorsion*  $p$  aus 4.28 bzw.  $s$  die Anteile von  $\varphi_{G0x}$  (4.29) und der *Latschbiegung*  $q$  aus 4.28 zusammen. Unter beliebig kleinen Werten von  $\alpha$  und  $\varphi_{G0x}$  nehmen auch  $r$  und  $s$  in *linearem* Zusammenhang beliebig kleine Werte an. Der Zustand um  $\alpha = \varepsilon_W = 0$  bzw.  $\varphi_{G0x} = 0$  kann also auch als *linearisiert* in  $r$  und  $s$  analysiert werden. Zur Bestimmung von  $F_{LGK_y}$  und  $M_{LGK_z}$  *linearisiert* in  $r$  und  $s$  kann analog zu Abschnitt C.2 vorgegangen werden. Abbildung C.6 teilt den *Laufstreifen*  $i$  in die gleichen Segmente ein wie in Abschnitt C.2, stellt jedoch Quer- statt Längskräfte dar. Im ersten Abschnitt *gleiten* die *Reibkontakt-Elemente*, bis das *Reibpotenzial* groß genug ist, die durch die *Auslenkungsgeschwindigkeit* bedingte *Dämpfung* auszugleichen. Relevant für diesen Vorgang ist die *Auslenkungsgeschwindigkeit* im ersten Abschnitt. *Linearisiert* wird dieser Abschnitt beliebig klein, und es genügt die potenzielle *Haftauslenkungs-Geschwindigkeit* am Beginn des *Laufstreifens*

$$v_{0Ky_{ij}}|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial t} a_{y_{iBOS}}(x) \Big|_{x=0} = (r - sl_{mat\ i}) \dot{x} = (r - sl_{mat\ i}) v_B$$

zu betrachten (mit  $\lambda = \alpha = 0$  gilt nach 4.36 *stationär*  $\dot{x} = R_{dyn} \dot{\varphi}_{G0y} = v_B$ ). Hier ist die *Gleitreibungskraft linearisiert* abhängig von der Zeit seit Eintritt in die *Kontaktzone* dann

$$F_{y_{i\text{gleit } v}}(t) = -\text{sgn}(r - sl_{mat\ i}) v_B m_{\mu\text{gleit } v} t$$

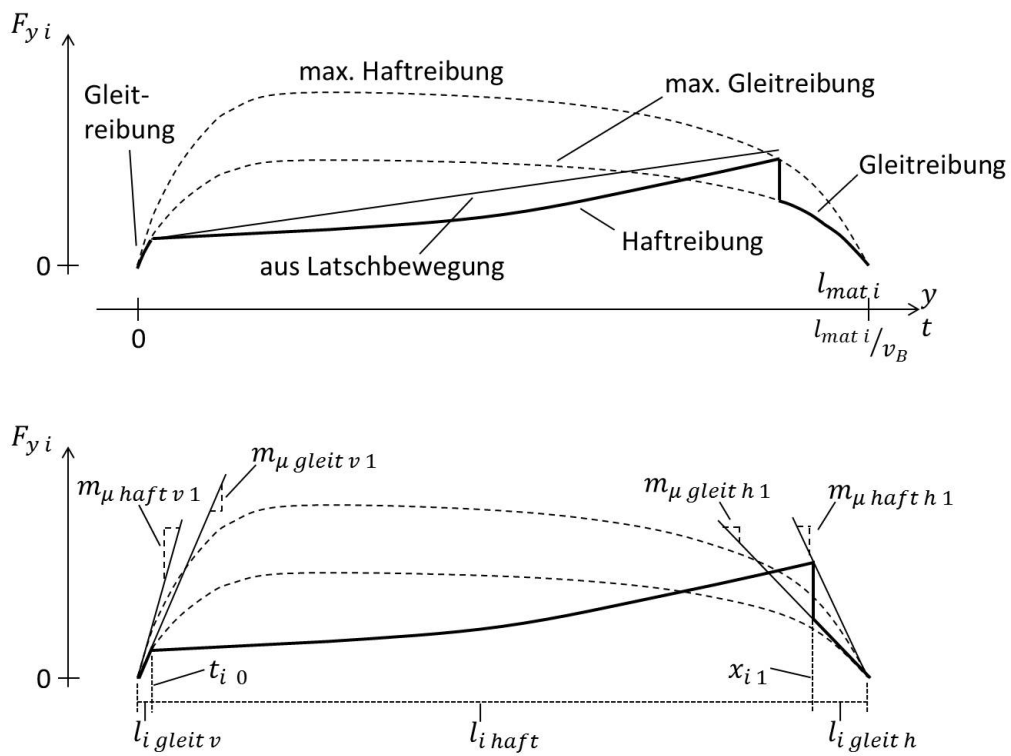


Abbildung C.6: stationäre Querkräfte im *Latsch* exakt und *linearisiert*

da von  $F_{LGKx} = 0$  ausgegangen wird, und damit keine Änderung des *Reibpotenzials* berücksichtigt werden muss. Beschrieben wird der Vorgang hier durch das *Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} -F_{y\ i\ gleit\ v}(t) + d_{scher}\dot{a}_{y\ ij}(t) + c_{scher}a_{y\ ij}(t) &= 0 \\ a_{y\ ij}(0) &= 0 \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$a_{y\ ij}(t) = -\operatorname{sgn}(r - sl_{mat\ i}) \frac{v_B m_{\mu\ gleit\ v\ 1}}{c_{scher}} \left( \frac{d_{scher}}{c_{scher}} e^{-\frac{c_{scher}}{d_{scher}} \cdot t} + t - \frac{d_{scher}}{c_{scher}} \right)$$

Hier erfolgt der Übergang in *Haftreibung* zum Zeitpunkt  $t_{i0}$  mit  $u_{y\ ij}(t_{i0}) = 0$ , also für

$$\dot{a}_{y\ ij}(t_{i0}) + v_{0Ky\ ij}|_{x=0} = \dot{a}_{y\ ij}(t_{i0}) + (r - sl_{mat\ i})v_B = 0$$

Aufgelöst erhält man

$$t_{i0} = -\frac{d_{scher}}{c_{scher}} \ln \left( 1 - \frac{c_{scher} |r - sl_{mat\ i}|}{m_{\mu\ gleit\ v\ 1}} \right)$$

als Dauer, über die sich ein *Reibkontakt-Element* im ersten Abschnitt befindet, und

$$l_{i\ gleit\ v} = -v_B \frac{d_{scher}}{c_{scher}} \ln \left( 1 - \frac{c_{scher} |r - sl_{mat\ i}|}{m_{\mu\ gleit\ v\ 1}} \right)$$

für die Länge des ersten Abschnitts. Hier erhält man für die Gesamtkraft des ersten Abschnitts

$$F_{y\ i\ gleit\ v\ ges} = \int_0^{l_{i\ gleit\ v}} -\operatorname{sgn}(r - sl_{mat\ i}) m_{\mu\ gleit\ v\ 1} x \, dx = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(r - sl_{mat\ i}) m_{\mu\ gleit\ v\ 1} l_{i\ gleit\ v}^2$$

und das Gesamtmoment

$$\begin{aligned} M_{z\ i\ gleit\ v\ ges} &= - \int_0^{l_{i\ gleit\ v}} \left( x - \frac{1}{2} l_{mat\ i} \right) F_{y\ i\ gleit\ v} dx \\ &= \operatorname{sgn}(r - sl_{mat\ i}) m_{\mu\ gleit\ v\ 1} \left( \frac{1}{3} l_{i\ gleit\ v}^3 - \frac{1}{4} l_{mat\ i} l_{i\ gleit\ v}^2 \right) \end{aligned}$$

Mit  $l_{i\ gleit\ v}|_{r=s=0} = 0$  folgt analog zu Abschnitt C.2

$$\frac{\partial}{\partial(r\ s)^T} F_{y\ i\ gleit\ v\ ges} \Big|_{r=s=0} = \frac{\partial}{\partial(r\ s)^T} M_{z\ i\ gleit\ v\ ges} \Big|_{r=s=0} = 0$$

Im zweiten Abschnitt liegt *Haftreibung* vor, und ausschließlich die Verschiebung  $a_{y\ i\ BOS}$  der Oberseiten der *Reibkontakt-Elemente* bestimmt basierend auf der Auslenkung am

Ende des ersten Abschnitts den ortsabhängigen Wert der Querkraft  $F_{y\ i\ haft}$ . Um die Ausgangssituation am Ende des ersten Abschnitts korrekt zu berücksichtigen, darf bei der Summenbildung nur der hinzukommende Anteil der Auslenkung und die lokale Auslenkungsgeschwindigkeit benutzt werden

$$F_{y\ i\ haft}(x) = c_{scher} a_{y\ ij}(t_{i0}) - c_{scher} (a_{y\ i\ BOS}(x) - a_{y\ i\ BOS}(l_{i\ gleit\ v})) - d_{scher} \frac{\partial}{\partial t} a_{y\ i\ BOS}(x)$$

Auch hier erfüllt der Punkt  $x_{i1}$ , an dem die *Haftreibung* abreißt,

$$|F_{y\ i\ haft}(x_{i1})| = (l_{mat\ i} - x_{i1}) m_{\mu\ haft\ h\ 1}$$

Unter Voraussetzung  $r = s = 0$  ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} t_{i0}|_{r=s=0} &= a_{y\ ij}(0) \\ = a_{y\ i\ BOS}(x)|_{r=s=0} &= \frac{\partial}{\partial t} a_{y\ i\ BOS}(x) \Big|_{r=s=0} = F_{y\ i\ haft}(x)|_{r=s=0} = 0 \end{aligned}$$

Damit folgt

$$x_{i1}|_{r=s=0} = l_{mat\ i}$$

Die Integration zwischen  $l_{i\ gleit\ v}$  und  $x_{i1}$  liefert die Gesamtkraft und das Gesamt-*Rückstellmoment* (4.34) des mittleren *Laufstreifen*-Abschnitts

$$F_{y\ i\ haft\ ges} = \int_{l_{i\ gleit\ v}}^{x_{i1}} F_{y\ i\ haft} dx \quad M_{z\ i\ haft\ ges} = - \int_{l_{i\ gleit\ v}}^{x_{i1}} \left(x - \frac{1}{2} l_{mat\ i}\right) F_{y\ i\ haft} dx$$

Mit den zusätzlichen Größen

$$\begin{aligned} F_{y\ i\ gleit\ v}|_{r=s=0} &= 0 \quad \frac{\partial l_{i\ gleit\ v}}{\partial (r\ s)^T} \Big|_{r=s=0} = \frac{v_B d_{scher}}{m_{\mu\ gleit\ v\ 1}} (1 - l_{mat\ i}) \\ \frac{\partial a_{y\ i\ BOS}(l_{i\ gleit\ v})}{\partial (r\ s)^T} \Big|_{r=s=0} &= \left(0 \quad \frac{1}{4} l_{mat\ i}^2\right) \quad \frac{\partial}{\partial t} a_{y\ i\ BOS}(x) = v_B (r + s(2x - l_{mat\ i})) \\ \frac{\partial a_{y\ ij}}{\partial t} &= -\text{sgn}(r - s l_{mat\ i}) \frac{v_B m_{\mu\ gleit\ v\ 1}}{c_{scher}} \left(1 - e^{-\frac{c_{scher}}{d_{scher}} t}\right) \text{ für } t \leq t_{i0} \\ \frac{\partial a_{y\ ij}(t_{i0})}{\partial (r\ s)^T} \Big|_{r=s=0} &= 0 \end{aligned}$$

können die Anfangsableitungen der Integrale über

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial F_{y i \text{ haft ges}}}{\partial r} \right|_{r=s=0} &= 0 \cdot \left. \frac{\partial x_{i1}}{\partial r} \right|_{r=s=0} - 0 \cdot \left. \frac{\partial l_{i \text{ gleit } v}}{\partial r} \right|_{r=s=0} + c_{\text{scher}} \cdot 0 \\
 &\quad - \frac{1}{2} c_{\text{scher}} l_{\text{mat } i}^2 - d_{\text{scher}} v_B l_{\text{mat } i} - 0 \\
 \left. \frac{\partial F_{y i \text{ haft ges}}}{\partial s} \right|_{r=s=0} &= 0 \cdot \left. \frac{\partial x_{i1}}{\partial s} \right|_{r=s=0} - 0 \cdot \left. \frac{\partial l_{i \text{ gleit } v}}{\partial s} \right|_{r=s=0} + c_{\text{scher}} \cdot 0 \\
 &\quad - c_{\text{scher}} \left( \frac{1}{3} l_{\text{mat } i}^3 - \frac{1}{2} l_{\text{mat } i}^3 + \frac{1}{4} l_{\text{mat } i}^3 - \frac{1}{4} l_{\text{mat } i}^3 \right) \\
 &\quad - d_{\text{scher}} (v_B l_{\text{mat } i}^2 - v_B l_{\text{mat } i}^2) - 0 \\
 \left. \frac{\partial M_{z i \text{ haft ges}}}{\partial r} \right|_{r=s=0} &= - \left( 0 \cdot \left. \frac{\partial x_{i1}}{\partial r} \right|_{r=s=0} - 0 \cdot \left. \frac{\partial l_{i \text{ gleit } v}}{\partial r} \right|_{r=s=0} + c_{\text{scher}} \cdot 0 \right. \\
 &\quad \left. - c_{\text{scher}} \left( -\frac{1}{3} l_{\text{mat } i}^3 + \frac{1}{4} l_{\text{mat } i}^3 \right) - d_{\text{scher}} \frac{1}{2} v_B \cdot \frac{1}{4} l_{\text{mat } i}^2 \right. \\
 &\quad \left. + d_{\text{scher}} \cdot \frac{1}{2} v_B \cdot \frac{1}{4} l_{\text{mat } i}^2 \right) \\
 \left. \frac{\partial M_{z i \text{ haft ges}}}{\partial s} \right|_{r=s=0} &= - \left( 0 \cdot \left. \frac{\partial x_{i1}}{\partial s} \right|_{r=s=0} - 0 \cdot \left. \frac{\partial l_{i \text{ gleit } v}}{\partial s} \right|_{r=s=0} + c_{\text{scher}} \cdot 0 \right. \\
 &\quad \left. - c_{\text{scher}} \left( \frac{1}{4} l_{\text{mat } i}^4 - \frac{1}{6} l_{\text{mat } i}^4 - \frac{1}{3} l_{\text{mat } i}^4 + \frac{1}{4} l_{\text{mat } i}^4 + \frac{1}{32} l_{\text{mat } i}^4 - \frac{1}{32} l_{\text{mat } i}^4 \right) \right. \\
 &\quad \left. - d_{\text{scher}} \left( \frac{2}{3} v_B l_{\text{mat } i}^3 - \frac{1}{2} v_B l_{\text{mat } i}^3 - \frac{1}{8} v_B l_{\text{mat } i}^3 \right) \right. \\
 &\quad \left. + c_{\text{scher}} \left( \frac{1}{32} l_{\text{mat } i}^4 - \frac{1}{32} l_{\text{mat } i}^4 \right) + d_{\text{scher}} \left( -\frac{1}{8} v_B l_{\text{mat } i}^3 \right) \right)
 \end{aligned}$$

berechnet werden als

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial F_{y i \text{ haft ges}}}{\partial (r \ s)^T} \right|_{r=s=0} &= \left( -\frac{1}{2} c_{\text{scher}} l_{\text{mat } i}^2 - d_{\text{scher}} v_B l_{\text{mat } i} \quad \frac{1}{6} c_{\text{scher}} l_{\text{mat } i}^3 \right) \\
 \left. \frac{\partial M_{z i \text{ haft ges}}}{\partial (r \ s)^T} \right|_{r=s=0} &= \left( \frac{1}{12} c_{\text{scher}} l_{\text{mat } i}^3 \quad \frac{1}{6} d_{\text{scher}} v_B l_{\text{mat } i}^3 \right)
 \end{aligned}$$

Dass die Auslenkung  $a_{y ij}(t_{i0})$  am Ende des ersten Abschnitts letztlich keinen Einfluss auf die resultierenden Größen des zweiten Abschnitts besitzt, begründet sich dadurch, dass diese für  $t_{i0} \rightarrow 0$  letztlich von der Auslenkungsgeschwindigkeit  $\dot{a}_{y ij}(0)$  am Anfang des ersten Abschnitts abhängt, die bedingt durch das *Reibpotenzial* immer 0 ist.

Auch im dritten Segment entsteht die Querkraft analog zur Längskraft aus Abschnitt C.2. Nicht so einfach lässt sich hier jedoch aus den Werten  $r$  und  $s$  auf das Vorzeichen der Querkraft schließen, da die Bewegung der Unterseite am Ende des *Laufstreifens* sowohl durch die Auslenkung als auch die Auslenkungsgeschwindigkeit des *Reibkontakt-Elements* festgelegt wird. Durchaus simpel lässt sich aber der Betrag der Querkraft angeben als

$$|F_{y i \text{ gleit } h}| = (l_{\text{mat } i} - x) m_{\mu \text{ gleit } h 1}$$

Für den Betrag der Gesamtkraft und des Gesamtmoments folgt wegen  $x_{i1} > \frac{1}{2}l_{mat\ i}$

$$\begin{aligned} |F_{y\ i\ gleit\ h\ ges}| &\leq m_{\mu\ gleit\ h\ 1} \left( \frac{1}{2}l_{mat\ i}^2 - l_{mat\ i}x_{i1} + \frac{1}{2}x_{i1}^2 \right) \\ |M_{z\ i\ gleit\ h\ ges}| &\leq m_{\mu\ gleit\ h\ 1} \left( -\frac{1}{12}l_{mat\ i}^3 + \frac{1}{2}l_{mat\ i}^2x_{i1} - \frac{3}{4}l_{mat\ i}x_{i1}^2 + \frac{1}{3}x_{i1}^3 \right) \end{aligned}$$

Durch  $|F_{y\ i\ gleit\ h\ ges}| = |M_{z\ i\ gleit\ h\ ges}| = 0$  lässt sich folgern, dass

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial F_{y\ i\ gleit\ h\ ges}}{\partial (r\ s)^T} \right|_{r=s=0} &\leq m_{\mu\ gleit\ h\ 1} (-l_{mat\ i} + l_{mat\ i}) \frac{x_{i1}}{\partial (r\ s)^T} \Big|_{r=s=0} \\ \left| \frac{\partial M_{z\ i\ gleit\ h\ ges}}{\partial (r\ s)^T} \right|_{r=s=0} &\leq m_{\mu\ gleit\ h\ 1} \left( \frac{1}{2}l_{mat\ i}^2 - \frac{3}{2}l_{mat\ i}^2 + l_{mat\ i}^2 \right) \frac{x_{i1}}{\partial (r\ s)^T} \Big|_{r=s=0} \end{aligned}$$

und man erhält die Werte

$$\frac{\partial F_{y\ i\ gleit\ h\ ges}}{\partial (r\ s)^T} \Big|_{r=s=0} = \frac{\partial M_{z\ i\ gleit\ h\ ges}}{\partial (r\ s)^T} \Big|_{r=s=0} = 0$$

Basierend auf den Resultaten zu den einzelnen Abschnitten können nun die Größen für den gesamten *Laufstreifen* bestimmt werden

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{y\ i\ ges}}{\partial (r\ s)^T} \Big|_{r=s=0} &= \frac{\partial F_{y\ i\ gleit\ v\ ges}}{\partial (r\ s)^T} \Big|_{r=s=0} + \frac{\partial F_{y\ i\ haft\ ges}}{\partial (r\ s)^T} \Big|_{r=s=0} + \frac{\partial F_{y\ i\ gleit\ h\ ges}}{\partial (r\ s)^T} \Big|_{r=s=0} \\ &= \left( -\frac{1}{2}c_{scher}l_{mat\ i}^2 - d_{scher}v_B l_{mat\ i} \quad \frac{1}{6}c_{scher}l_{mat\ i}^3 \right) \\ \frac{\partial M_{z\ i\ ges}}{\partial (r\ s)^T} \Big|_{r=s=0} &= \frac{\partial M_{z\ i\ gleit\ v\ ges}}{\partial (r\ s)^T} \Big|_{r=s=0} + \frac{\partial M_{z\ i\ haft\ ges}}{\partial (r\ s)^T} \Big|_{r=s=0} + \frac{\partial M_{z\ i\ gleit\ h\ ges}}{\partial (r\ s)^T} \Big|_{r=s=0} \\ &= \left( \frac{1}{12}c_{scher}l_{mat\ i}^3 \quad \frac{1}{6}d_{scher}v_B l_{mat\ i}^3 \right) \end{aligned}$$

und damit für  $l_{RKE} = 1$  die des gesamten *Latschs*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{LGK_y}}{\partial (r\ s)^T} \Big|_{r=s=0} &= \sum_{i=1}^{n_{LS}} \frac{\partial F_{y\ i\ ges}}{\partial (r\ s)^T} \Big|_{r=s=0} \\ &= \left( -\frac{1}{2}c_{scher} \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat\ i}^2 - d_{scher}v_B \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat\ i} \quad \frac{1}{6}c_{scher} \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat\ i}^3 \right) \\ \frac{\partial M_{LGK_z}}{\partial (r\ s)^T} \Big|_{r=s=0} &= \sum_{i=1}^{n_{LS}} \frac{\partial M_{z\ i\ ges}}{\partial (r\ s)^T} \Big|_{r=s=0} \\ &= \left( \frac{1}{12}c_{scher} \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat\ i}^3 \quad \frac{1}{6}d_{scher}v_B \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat\ i}^3 \right) \end{aligned} \tag{C.37}$$



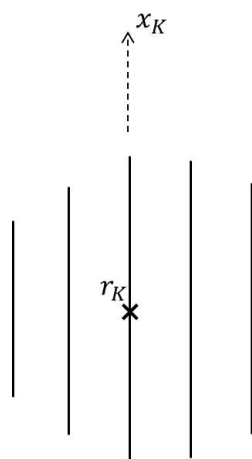


Abbildung C.7: Laufstreifenlängen bei gestürztem Reifengürtel

Streng genommen sind die in die Herleitung integrierten Ableitungen der *Signum*- und *Betragsfunktion* genau an der betrachteten Stelle nicht differenzierbar. Die Wahl *einseitiger* Ableitungen behebt dieses Problem aber. Da die Differenziation ausschließlich im Punkt  $r = s = 0$  erfolgt, ist auch keine Fallunterscheidung abhängig vom Vorzeichen der je konstant gehaltenen Größe  $r$  oder  $s$  erforderlich.

Neben den Einflussfaktoren  $r$  und  $s$  der Auslenkung der *Reibkontakt-Elemente* wirkt bei Veränderung von  $\alpha$  und  $\varepsilon_W$  noch ein weiterer Einflussfaktor auf den Zustand des *Latschs*. Entweder eine *Latsch-Seitenkraft*  $F_{LGK_y}$  (s. Abb. 4.58) oder der *Felgensturz*  $\varphi_{G0x}$  direkt (s. Abb. 4.60) bewirken einen *Sturzwinkel*  $\varphi_{G0x} \neq 0$  des *Reifengürtels*. Dieser wiederum nimmt auch Einfluss auf die Längen  $l_{mat\ i}$  der einzelnen *Laufstreifen*. Abbildung C.7 zeigt die zur Längsrichtung des *Kontaktsystems* asymmetrische Verteilung der Längen, die in Kipprichtung des *Reifengürtels* größer und in die andere Richtung kleiner als für  $\varphi_{G0x} = 0$  sind. *Linearisiert* hat dies jedoch keine Auswirkungen auf die resultierende Seitenkraft  $F_{LGK_y}$  bzw. das resultierende *Rückstellmoment*  $M_{LGK_z}$  des *Latschs*, da sich die Effekte der verkleinernden und der vergrößernden Längen gegenseitig ausgleichen. Formal kann dies einfach abstrakt hergeleitet werden: Nach 4.16 gilt  $y_{REK\ n_{LS}-i+1} = -y_{REK\ i}$ , woraus wegen  $\varepsilon_{GK} = \varphi_{G0x}$  auf ebenem Boden in 4.19  $\left. \frac{\partial s_{n_{LS}-i+1}}{\partial \varphi_{G0x}} \right|_{\varphi_{G0x}=0} = - \left. \frac{\partial s_i}{\partial \varphi_{G0x}} \right|_{\varphi_{G0x}=0}$  folgt. Denn *linearisiert* um  $\varphi_{G0x} = 0$  bewegen sich wie in Abbildung 4.36 zu erkennen  $r_{G0}$  und  $r_{K0}$  mit variiertem  $\varphi_{G0x}$  nur horizontal und halten damit  $\|r_{G0} - r_{K0}\|$  *linearisiert* konstant. Durch  $s_{n_{LS}-i+1}|_{\varphi_{G0x}=0} = s_i|_{\varphi_{G0x}=0}$  und  $R_{n_{LS}-i+1}|_{\varphi_{G0x}=0} = R_i|_{\varphi_{G0x}=0}$  ergibt sich weiter  $\left. \frac{\partial l_{n_{LS}-i+1}}{\partial \varphi_{G0x}} \right|_{\varphi_{G0x}=0} = - \left. \frac{\partial l_i}{\partial \varphi_{G0x}} \right|_{\varphi_{G0x}=0}$  bzw.

$$l_{mat\ n_{LS}-i+1}|_{\varphi_{G0x}=0} = l_{mat\ i}|_{\varphi_{G0x}=0}$$

Über 4.20 erhält man

$$\left. \frac{\partial l_{mat\ n_{LS}-i+1}}{\partial \varphi_{G0x}} \right|_{\varphi_{G0x}=0} = - \left. \frac{\partial l_{mat\ i}}{\partial \varphi_{G0x}} \right|_{\varphi_{G0x}=0}$$

was bei konstant gehaltenen Werten  $r_0$ ,  $s_0$  übertragen auf die Ableitung der längenabhängigen Funktionen für Seitenkraft und *Rückstellmoment* der einzelnen *Laufstreifen*

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F_{y\ i\ ges}}{\partial \varphi_{G0x}} \right|_{\varphi_{G0x}=0, r_0, s_0} &= \left. \frac{\partial F_{y\ i\ ges}}{\partial l_{mat\ i}} \right|_{l_{mat\ i} = l_{mat\ i}|_{\varphi_{G0x}=0}, r_0, s_0} \cdot \left. \frac{\partial l_{mat\ i}}{\partial \varphi_{G0x}} \right|_{\varphi_{G0x}=0} \\ \left. \frac{\partial M_{z\ i\ ges}}{\partial \varphi_{G0x}} \right|_{\varphi_{G0x}=0, r_0, s_0} &= \left. \frac{\partial M_{z\ i\ ges}}{\partial l_{mat\ i}} \right|_{l_{mat\ i} = l_{mat\ i}|_{\varphi_{G0x}=0}, r_0, s_0} \cdot \left. \frac{\partial l_{mat\ i}}{\partial \varphi_{G0x}} \right|_{\varphi_{G0x}=0} \end{aligned}$$

und insgesamt

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F_{y\ n_{LS}-i+1\ ges}}{\partial \varphi_{G0x}} \right|_{\varphi_{G0x}=0, r_0, s_0} &= - \left. \frac{\partial F_{y\ i\ ges}}{\partial \varphi_{G0x}} \right|_{\varphi_{G0x}=0, r_0, s_0} \\ \left. \frac{\partial M_{z\ n_{LS}-i+1\ ges}}{\partial \varphi_{G0x}} \right|_{\varphi_{G0x}=0, r_0, s_0} &= - \left. \frac{\partial M_{z\ i\ ges}}{\partial \varphi_{G0x}} \right|_{\varphi_{G0x}=0, r_0, s_0} \end{aligned}$$

bedeutet. Aufsummiert über alle *Laufstreifen* erhält man den Effekt auf die Gesamt-Seitenkraft bzw. das Gesamt-*Rückstellmoment* des *Latschs*

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F_{LGK_y}}{\partial \varphi_{G0x}} \right|_{\varphi_{G0x}=0, r_0, s_0} &= \sum_{i=1}^{n_{LS}} \left. \frac{\partial F_{y\ i\ ges}}{\partial \varphi_{G0x}} \right|_{\varphi_{G0x}=0, r_0, s_0} \\ &= \sum_{i=1}^{\frac{n_{LS}}{2}} \left( \left. \frac{\partial F_{y\ i}}{\partial \varphi_{G0x}} \right|_{\varphi_{G0x}=0, r_0, s_0} + \left. \frac{\partial F_{y\ n_{LS}-i+1\ ges}}{\partial \varphi_{G0x}} \right|_{\varphi_{G0x}=0, r_0, s_0} \right) = 0 \\ \left. \frac{\partial M_{LGK_z}}{\partial \varphi_{G0x}} \right|_{\varphi_{G0x}=0, r_0, s_0} &= \sum_{i=1}^{n_{LS}} \left. \frac{\partial M_{z\ i\ ges}}{\partial \varphi_{G0x}} \right|_{\varphi_{G0x}=0, r_0, s_0} \\ &= \sum_{i=1}^{\frac{n_{LS}}{2}} \left( \left. \frac{\partial M_{z\ i}}{\partial \varphi_{G0x}} \right|_{\varphi_{G0x}=0, r_0, s_0} + \left. \frac{\partial M_{z\ n_{LS}-i+1\ ges}}{\partial \varphi_{G0x}} \right|_{\varphi_{G0x}=0, r_0, s_0} \right) = 0 \end{aligned} \tag{C.38}$$

## C.9 Sturzurückstellung um stabilen Stationärzustand

Um allgemeine Aussagen über *Sturzmomente* und *Sturzauslenkungen* des *Reifengürtels* treffen zu können, ist es wie in Abschnitt C.6 erforderlich, realistische Voraussetzungen zu definieren, die eine sinnvolle Parametrierung garantieren. Vorausgesetzt werden

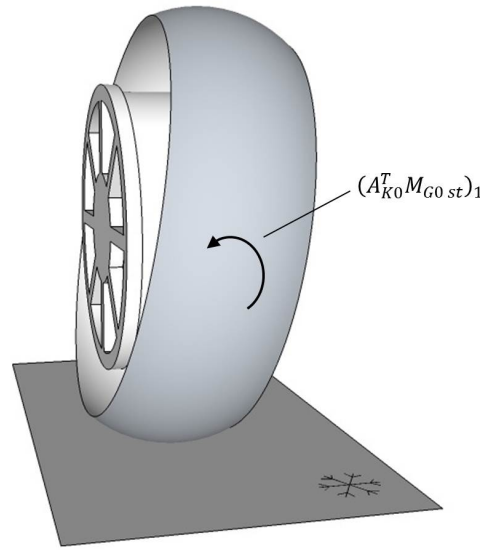


Abbildung C.8: Rückstellendes Moment beim gestürzten Reifengürtel

soll, dass der parametrisierte bzw. der reale stehende Reifen auf komplett glattem Untergrund, also für *Reibwertkoeffizienten*  $\mu = 0$  einen *stabilen* Zustand annimmt. Dabei gilt für die Felge  $(r_{F0\mu_0})_{1..2} = \varphi_{F0\mu_0} = 0$  und  $r_{F0z\mu_0}$  konstant. Ein *Stationärzustand* des Gesamtreifens ist sicher der mit dem *Grundzustand*  $(r_{G0\mu_0})_{1..2} = \varphi_{G0\mu_0} = 0$ ,  $r_{G0z\mu_0}$  konstant. Dass er in diesem Fall *stabil* ist, soll angenommen werden. Selbstverständlich ist dies jedoch nicht, da sich bspw. unter einem als *Störeinfluss* vorliegenden *Sturzwinkel*  $\varphi_{G0xst} \neq 0$  des *Reifengürtels* auch der Angriffspunkt der vertikalen *Latsch-Kraft*  $F_{LGKz}$  mit dem *Latsch* gegenüber der *Gürtelmitte*  $r_{G0\mu_0}$  verschiebt. Dadurch entsteht nämlich auch ein den *Gürtelsturz* verstärkender Anteil des *Sturzmoments*  $M_{G0xst}$ , der mit steigender Vertikallast  $F_{FH_z}$ , also fallendem  $r_{F0z\mu_0}$  beliebig groß werden kann, während für kleine Werte von  $F_{FH_z}$  dieser Anteil zwar kleiner, damit jedoch auch der entgegengesetzte Anteil des *Sturzmoments* aus der asymmetrischen *Latsch-Eindrückung* (s. 4.24 und Abb. C.7) abnimmt. Also wird die *Stabilität* für den beschriebenen Fall bis zu einer maximalen Vertikallast  $F_{FH_z}$  vorausgesetzt, was für inkl. *Luftinnendruck* 'fahrbare' reale Reifen auch immer zutrifft.

Abbildung C.8 zeigt den *Reifengürtel* unter einem *Sturzwinkel*  $\varphi_{G0xst} \neq 0$  als *Störeinfluss* des *stationären Grundzustands*. Aus Perspektive des *Reifengürtels* gilt in dieser Situation wegen  $r_{G0xst} = r_{G0x\mu_0} = r_{F0x\mu_0}$  bei  $(\varphi_{G0})_{2..3} = 0$  nach 4.2  $r_{FGxst} = 0$  und mit 4.6  $F_{FGGxst} = 0$ . Durchaus aber entsteht im System des *Reifengürtels* eine Querkomponente  $r_{FGyst} \neq 0$  der *inertialen* Vertikalverschiebung zwischen *Gürtel-* und *Felgenmitte* und bei verschiedenen Werten  $c_{GFrad}$  und  $c_{GFquer}$  damit auch eine *inertiale* Querkraft  $F_{FG0yst}$  auf den *Reifengürtel* (s. 4.2 und 4.6). Beim konstanten Wert  $r_{F0z} = r_{F0z\mu_0}$  ergibt sich durch denselben Effekt ein Wert  $r_{FGz} \neq r_{FGz\mu_0}$ , also auch eine Abweichung vom

vertikalen Kräftegleichgewicht auf den *Reifengürtel*. Treten als *Störgrößen* abweichend vom *Grundzustand* ausschließlich der *Sturzwinkel* und die *inertiale* Querlage des *Reifengürtels* auf, erhält man *linearisiert* in  $\varphi_{G0x} = \dot{\varphi}_{G0x} = r_{G0y} = \dot{r}_{G0y} = 0$  für diese Kräfte mit 4.2 zunächst

$$(r_{FG})_{2..3} = \begin{pmatrix} -r_{G0y} + \varphi_{G0x} (r_{F0z \mu_0} - r_{G0z \mu_0}) \\ r_{F0z \mu_0} - r_{G0z \mu_0} \end{pmatrix}$$

und über 4.6 bzw. 4.8 das Ersatzmodell

$$\begin{aligned} F_{FG0z} = & -c_{GF \text{ quer}} \varphi_{G0x} r_{G0y} + c_{GF \text{ quer}} (r_{F0z \mu_0} - r_{G0z \mu_0}) \varphi_{G0x}^2 \\ & -d_{GF \text{ quer}} \varphi_{G0x} r_{G0y} + d_{GF \text{ quer}} \varphi_{G0x} \dot{\varphi}_{G0x} (r_{F0z \mu_0} - r_{G0z \mu_0}) \\ & +c_{GF \text{ rad}} (r_{F0z \mu_0} - r_{G0z \mu_0}) \end{aligned}$$

in abbrechenden *Taylor-Reihen*. Da Produkte aus mehreren der veränderlichen Größen  $\varphi_{G0x}$ ,  $\dot{\varphi}_{G0x}$ ,  $r_{G0y}$  und  $\dot{r}_{G0y}$  Glieder höherer Ordnung repräsentieren, verbleibt als *linearisiertes* Ersatzmodell lediglich der konstante Zusammenhang

$$F_{FG0z} = c_{GF \text{ rad}} (r_{F0z \mu_0} - r_{G0z \mu_0}) \quad (\text{C.39})$$

Genauso wird mit den Gleichungen 4.13, 4.14 und 4.15 klar, dass das entsprechend *linearisierte* Ersatzmodell für die vom *Latsch* in den *Reifengürtel* eingeprägte Vertikalkraft

$$F_{LGKz} = c_r \text{ lin} (R_{R \text{ max}} - r_{G0z \mu_0}) + c_r \text{ quad} (R_{R \text{ max}} - r_{G0z \mu_0})^2 \quad (\text{C.40})$$

konstant ist (mit der abbrechenden *Taylor-Reihe*  $f_G = f_{G \mu_0} + q \varphi_{G0x}^2$  folgt die abbrechende *Taylor-Entwicklung*  $\dot{f}_G = 2q \dot{\varphi}_{G0x} \varphi_{G0x}$ ). Zusammen mit C.39, 4.10 und 4.11 bestätigt sich so, dass das frei bewegliche  $r_{G0z}$  im *linearisierten* Modell als konstant angenommen werden kann, da die im *Störzustand* gegebenen Anregungen die in der Formulierung von C.39 und C.40 auf der Anregungsseite schon vorweggenommene *linearisierte* Konstanz von  $r_{G0z}$  erhalten. Mit  $(\varphi_{G0 \text{ st}})_{2..3} = 0$  gilt weiter  $(\varphi_{G0 \text{ st}})_{2..3} = (\varphi_{F0 \mu_0})_{2..3}$  und es folgt über 4.7, dass die Anbindung von *Reifengürtel* und Felge im *Gürtelsystem* auch kein Quer- bzw. Vertikalmoment  $(M_{FGG \text{ st}})_{2..3}$  in den *Reifengürtel* einprägt. Auf dem Untergrund mit  $\mu = 0$  besitzen sämtliche *Reibkontakt-Elemente* eine Auslenkung  $a_{x/y \text{ ij } \mu_0}$  von 0 und es entstehen keinerlei *horizontale Latsch-Kräfte*. Außerdem gilt für den *Latsch-Zustand* mit  $\mu = 0$  dauerhaft  $F_{LGKx} = F_{LGKy} = M_{LGKz} = 0$  und damit

$$F_{Lx \text{ PT1}} = F_{Ly \text{ PT1}} = M_{Lz \text{ PT1}} = 0 \quad (\text{C.41})$$

Beim stehenden Reifen ( $\dot{\varphi}_{G0y \mu_0} = 0$ ) resultiert über 4.22 auch ein *Latsch-Quermoment*  $M_{LGKy \mu_0} = 0$ . Die Position  $r_{G0y}$  hat für  $\varphi_{G0z} = 0$  im *linearisierten* Modell wie oben gezeigt, und da sie in 4.7 nicht auftritt, ausschließlich Einfluss auf die Komponente  $F_{FG0y}$  von  $F_{FG0}$  und  $M_{FG0}$ . Auch die im *Latsch* entstehenden Kräfte und Momente sind unabhängig von  $r_{G0y}$ , da in den Gleichungen zur Interaktion von *Reifengürtel* und *Latsch*

ausschließlich relative Verschiebungen relevant sind, und beide parallel um  $r_{G0y}$  verschoben liegen. So wird nun klar, dass der Zustand  $r_{G0x} = (\varphi_{G0})_{2..3} = 0$  erhalten bleibt. Da im Gesamtmodell keine Gleichungen auftreten, in denen sich für  $f_G > 0$  Größen bei *quadratisch* beschränkter Änderung anderer Größen mehr als *quadratisch* beschränkt ändern, folgt mit dem konstanten Wert  $r_{G0x}$  im *linearisierten* Teilmodell zu C.39 und C.40, dass  $r_{G0x}$  auch im *linearisierten* Gesamt-Modell als konstant angenommen werden kann. Da  $r_{G0y}$  *linearisiert* ausschließlich  $F_{FG0y}$  beeinflusst, kann insgesamt ein *linearisiertes* Ersatzmodell gebildet werden, das den *Störzustand* ausschließlich mit den variablen Zuständen  $\varphi_{G0x}$  und  $\dot{\varphi}_{G0x}$  beschreibt. Denn mit C.41 und C.40 variieren *linearisiert* im *Latsch* keine *zeitintegrierten* oder *-differenzierten* Größen, und von diesen wirkt ausschließlich die rotatorisch-radiale Dämpfung zwischen Felge und *Reifengürtel* auf  $\varphi_{G0x}$  (s. 4.7). Man erhält so das *linearisierte* Ersatzmodell

$$\begin{aligned} J_{G \text{ rad}} \ddot{\varphi}_{G0x} &= M_{G0x} \\ M_{G0x} &= c \cdot \varphi_{G0x} - d_{GF \text{ rot rad}} \dot{\varphi}_{G0x} \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

und eingesetzt

$$J_{G \text{ rad}} \ddot{\varphi}_{G0x} + d_{GF \text{ rot rad}} \dot{\varphi}_{G0x} - c \cdot \varphi_{G0x} = 0$$

Aus der vorausgesetzten *Stabilität* des *Grundzustands* folgt, dass der *gestörte* Zustand unter bleibender Anregung ohne weitere *Störeinflüsse* über der Zeit gegen den *Grundzustand*  $(r_{G0 \mu_0})_{1..2} = \varphi_{G0 \mu_0} = 0$ ,  $r_{G0z \mu_0}$  konstant *konvergiert*. Da ein *stabiler Stationärzustand* nicht den direkten Übergang eines *gestörten* Zustands in den *Grundzustand* bedingt und mehrere Modellkomponenten  $M_{G0x}$  gegenläufig beeinflussen, folgt das Vorzeichen von  $M_{G0x}$  damit noch nicht direkt. Das *charakteristische Polynom* dieser *Differentialgleichung* (s. bspw. [11])

$$J_{G \text{ rad}} \lambda_{1/2}^2 + d_{GF \text{ rot rad}} \lambda_{1/2} - c = 0$$

liefert die *Eigenwerte*

$$\lambda_{1/2}^2 = \frac{-d_{GF \text{ rot rad}} \pm \sqrt{d_{GF \text{ rot rad}}^2 + 4J_{G \text{ rad}} \cdot c}}{2J_{G \text{ rad}}}$$

Für  $c \geq 0$  folgt  $\Re(\lambda_1) \geq 0$ , was nicht mit der *Stabilität* des *stationären Grundzustands* zu vereinbaren ist. Also muss  $c < 0$  gelten, und für  $\dot{\varphi}_{G0x \text{ st}} = 0$  folgt aus C.42 auch im *nichtlinearisierten* Fall für hinreichend kleine  $\varphi_{G0x}$

$$\text{sgn}(M_{G0x}) = -\text{sgn}(\varphi_{G0x})$$

Betrachtet man die beschriebene Situation nun *stationär* unter einem erzwungenen *Sturzwinkel*  $\varphi_{G0x \text{ st}}$  und einem von der ursprünglichen Definition abweichenden beliebig kleinen Verdrehwinkel  $\varphi_{G0z \text{ st}} \neq 0$  des *Reifengürtels*, erhält man im um  $\varphi_{G0z \text{ st}}$  gedrehten

System dasselbe resultierende Moment um die Längsrichtung  $x_G$  des *Gürtelsystems*. Dies da zum einen der gesamte *Latsch* sich mitdreht und die gleichen eben gedrehten Kräfte und Momente bewirkt, und da der *linearisierte Verdrehwinkel*  $(\varphi_{FGlin})_1$  sich durch die beliebig kleine überlagerte Drehung nicht ändert und ohnehin aus Perspektive des *Reifengürtels* wirkt (s. 4.7). Also gilt auch mit  $\mu = \varphi_{F0} = (r_{F0})_{1..2} = 0$  unter *stationär* erzwungenen Größen  $\varphi_{G0xst}$  und  $\varphi_{G0zst}$  von hinreichend kleinem Betrag für das aus dem Modellsystem auf den *Reifengürtel* wirkende resultierende Moment

$$\operatorname{sgn} \left( \left( A_{K0st}^T M_{G0st} \right)_1 \right) = -\operatorname{sgn} (\varphi_{G0xst}) \quad (\text{C.43})$$

Dieses Ergebnis soll nun dabei helfen zu zeigen, dass unter der *Stabilitäts*-Voraussetzung für  $\mu = 0$  auch für eine beliebige Situation *konstanter Reibbeiwerte* bei *ungestürzter* Felge und einer *Latsch*-Seitenkraft  $F_{LGK_y F_y} > 0$  sich im *Stationärfall* ein *Sturzwinkel*  $\varphi_{G0x F_y} > 0$  einstellt, wie es Abbildung 4.58 zeigt. Formal gilt dabei für die Felgenreißen  $\varphi_{F0x F_y} = \dot{F}_{FH_z F_y} = 0$ ,  $v_{B F_y} \rightarrow 0$  und für  $\alpha_{F_y} > 0$  sowie für die *Latsch*-Größe  $|\lambda_{K F_y}|$  (s. Abschn. C.6), dass sie hinreichend klein sind. Genauer ist die Beschränkung von  $|\lambda_{K F_y}|$  abhängig von  $\alpha_{F_y} > 0$ , und zwar muss eine quadratische Abschätzung

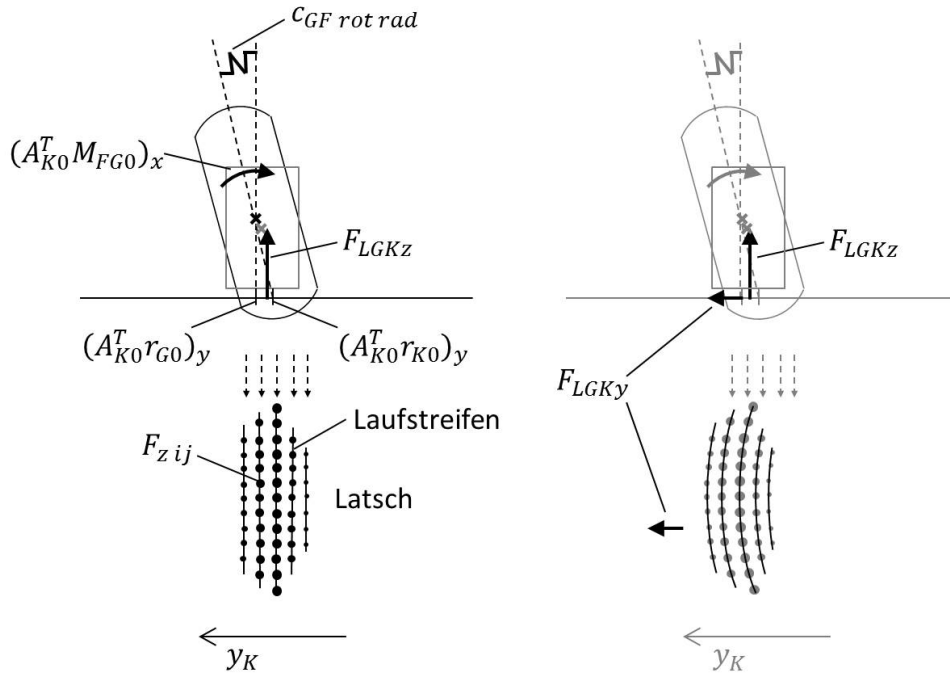
$$|\lambda_{K F_y}| \leq k_1 \alpha_{F_y}, \quad k_1 > 0$$

und damit auch von

$$|F_{LGK_x F_y}| \leq k_2 \alpha_{F_y}, \quad k_2 > 0$$

möglich sein (s. Abschn. C.6). Diese ist z.B. auch unter der Bedingung  $\lambda = 0$  an die Felgebewegung erfüllt, wie es Gleichung C.17 zeigt. Geht man nun entgegen der oben stehenden Vermutung von einem *Sturzwinkel*  $\varphi_{G0x F_y} < 0$  aus, können die Effekte, die das *Sturzmoment*  $\left( A_{K0 F_y}^T M_{G0 F_y} \right)_1$  auf den *Reifengürtel* bewirken, aus einer Überlagerung der Effekte beschrieben werden, die das *Sturzmoment*  $\left( A_{K0st}^T M_{G0st} \right)_1$  bewirken, mit zusätzlichen Effekten unter einer *Latsch*-Seitenkraft  $F_{LGK_y F_y} > 0$ .

Basierend auf den vorausgesetzten Größen bestimmen die Gleichungen 4.19, 4.12, 4.24, 4.28, 4.34 und 4.42 den Wert von  $\left( A_{K0 F_y}^T M_{G0 F_y} \right)_1$ . Abbildung C.9 stellt sämtliche Effekte auf das *Sturzmoment* dar. Im linken Teil der Abbildung wird die Situation für  $\mu = 0$  gezeigt, in der sich bereits das *elastische* Moment der Felgenanbindung  $\left( A_{K0}^T M_{FG0} \right)_1$  und der *Hebel* der Vertikalkraft aus der Querverschiebung von  $r_K$  (4.12) sowie der asymmetrischen *Bodendurchdringung* für  $\varphi_{G0xst} \neq 0$  (s. auch Abb. C.7 und 4.24) auswirken. Diese Einflüsse hängen ausschließlich von  $\varphi_{G0x}$  ab und wirken sich damit unter  $\mu > 0$  und  $F_{LGK_y} > 0$  genauso aus. Der rechte Teil der Abbildung fasst alle Effekte dieser Situation zusammen, stellt allerdings die schon für  $\mu = 0$  wirkenden Einflüsse grau dar und hebt ausschließlich zusätzliche Faktoren hervor. Da auch beim *gestürzten Reifengürtel* das *Latsch*-Quermoment  $M_{LGK_y}$  (4.22) und das *Latsch*-Vertikalmoment  $M_{LGK_z}$  senkrecht


 Abbildung C.9: Effekte auf das rückstellende Moment für  $\mu = 0$  und  $\mu > 0$ 

zur Richtung  $x_K$  des *Sturzmoments* verlaufen, besitzen diese genauso wie eine *Latsch*-Längskraft  $F_{LGKx}$  und das *Dämpfungsmoment* aus  $d_{GF \text{ rot rad}}$  in 4.42 für  $v_B \rightarrow 0$  keinen Einfluss. Als zusätzliche Faktoren bleiben nur noch die *Latsch*-Seitenkraft  $F_{LGKy}$  selbst und die zusätzliche Veränderung des Vertikalkraft-*Hebels* als Folge der seitenkraftbedingten *Latsch*-Verschiebung und -biegung. Mit  $\alpha_{F_y} > 0$  folgt für die *Latsch*-Seitenkraft  $F_{LGKy} > 0$  (s. Abb. 4.56, die den Fall für negatives  $\alpha$  illustriert) und man erhält in 4.35 ein zusätzliches *Sturzmoment*  $\Delta_1 (A_{K0}^T M_{G0} F_y)_1 > 0$  auf den *Reifengürtel*. Die seitenkraftbedingte *Latsch*-Querverschiebung und -biegung beläuft sich nach Gleichung 4.28 auf

$$\Delta y_{REK F_y 1 j} = \frac{n_{LKy}}{R_{Rmax}^2} (R_{Rmax}^2 - x_{REK j}^2) F_{LGKy} F_y \quad (C.44)$$

Beim empfohlenen Wert für die Länge  $l_{RKE}$  der *Reibkontakt-Elemente* nach 4.18 lässt sich mit 4.17 für die Längskoordinatenwerte, die bei  $n_{RES}$  *Reibkontakt-Elementen* darstellbar sind,

$$|x_{REK j}| \leq \frac{\pi R_{dyn}}{5} \approx 0.63 R_{dyn} \approx 0.63 R_{Rmax}$$

ableiten. Da hierdurch alle relevanten Fälle abgedeckt sind, und die Querverschiebung der *Reibkontakt-Elemente* so den beabsichtigten Effekt erzielt, ist es möglich, von Werten  $\Delta y_{REK F_y 1 j} > 0$  auszugehen. In 4.34 wirken sich diese zusätzlichen Querverschiebungen auf  $M_{LGKx F_y}$  aus, das sich hierdurch vergrößert und wieder über 4.35 ein zusätzliches

Sturzmoment  $\Delta_2 \left( A_{K0 F_y}^T M_{G0 F_y} \right)_1 > 0$  auf den *Reifengürtel* resultiert.

Gleichung 4.28 beschreibt mit der *Latsch*-Torsion noch eine weitere *rückstellmomentabhangige* Verformung

$$\Delta y_{REK F_y 2 j} = n_{LKt} M_{LGKz} x_{REK j}$$

des *Latschs*, die sich der Verschiebung und Biegung *linear* überlagert. Für eine hinreichend große Zahl  $n_{RES}$  an *Reibkontakt-Elementen* pro *Laufstreifen* kann man basierend auf den Werten  $j_l$ , die den zeitabhängigen Index  $j$  des  $l$ . *Reibkontakt-Elements* ab dem vorderen Ende des *Latschs* aus bezeichnen, von deren symmetrischen Langspositionen  $x_{REK j_{n_{RES}-l+1}} = -x_{REK j_l}$  ausgehen. Unter  $F_{LGKx} = 0$  folgt in 4.28  $\Delta x_{LGK} = 0$  und für  $v_B \rightarrow 0$  mit 4.22 dann auch  $M_{LGKy} = 0$ , weshalb nach 4.24 ( $b = 0$ ) und 4.25

$$F_{z i(j_{n_{RES}-l+1})} = F_{z i j_l}$$

gilt (s. Abb. 4.61). Für den in 4.34 daraus zusätzlichen Anteil des *Sturzmoments* auf den *Reifengürtel* erhält man so

$$\begin{aligned} \Delta_3 \left( A_{K0 F_y}^T M_{G0 F_y} \right)_1 &= \sum_i \sum_{j=1}^{n_{RES}} \Delta y_{REK F_y 2 j} F_{z i j} \\ &= n_{LKt} M_{LGKz} \sum_i \sum_{l=1}^{\frac{n_{RES}}{2}} \left( x_{REK j_l} F_{z i j_l} + x_{REK j_{n_{RES}-l+1}} F_{z i(j_{n_{RES}-l+1})} \right) = 0 \end{aligned}$$

Da nun nach Voraussetzung zwar nicht unbedingt  $F_{LGKx F_y} = 0$  gilt, aber  $|F_{LGKx F_y}|$  *quadratisch* in  $\alpha_{F_y}$  beschränkt bleibt, und die übrigen Anteile von  $\left( A_{K0 F_y}^T M_{G0 F_y} \right)_1$  *linear* mit  $\alpha_{F_y}$  wachsen, kann  $\Delta_3 \left( A_{K0 F_y}^T M_{G0 F_y} \right)_1$  zur Analyse des Vorzeichens vernachlässigt werden. Diese ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned} &\text{sgn} \left( \left( A_{K0 F_y}^T M_{G0 F_y} \right)_1 \right) \\ &= \text{sgn} \left( \left( A_{K0 st}^T M_{G0 st} \right)_1 + \Delta_1 \left( A_{K0 F_y}^T M_{G0 F_y} \right)_1 + \Delta_2 \left( A_{K0 F_y}^T M_{G0 F_y} \right)_1 \right) \end{aligned}$$

und mit der Voraussetzung  $\varphi_{G0x F_y} < 0$ , Gleichung C.43 und den weiteren Ergebnissen zu

$$\left( A_{K0 F_y}^T M_{G0 F_y} \right)_1 > 0$$

Da der Zustand jedoch auch als *stationär* vorausgesetzt wurde, und hierfür  $M_{G0} = 0$  gilt (s. Abschn. 4.1.7), folgt ein *Widerspruch*. Es muss also die einzige Annahme, dass sich ein *Sturzwinkel*  $\varphi_{G0x F_y} < 0$  des *Reifengürtels* einstellt, falsch sein. Für  $\alpha > 0$  und  $\varphi_{G0x F_y} = 0$  folgt das Vorzeichen von  $A_{K0 F_y}^T M_{G0 F_y}$  allein aus

$$\Delta_1 \left( A_{K0 F_y}^T M_{G0 F_y} \right)_1 + \Delta_2 \left( A_{K0 F_y}^T M_{G0 F_y} \right)_1 > 0$$



$$\text{C.10} \quad \left. \frac{\partial F_{LGK_y}}{\partial \alpha_K} \right|_{\alpha_K = \lambda_K = 0} \quad \text{und} \quad \left. \frac{\partial M_{LGK_z}}{\partial \alpha_K} \right|_{\alpha_K = \lambda_K = 0} \quad \text{für} \quad \varphi_{F0x} = 0$$

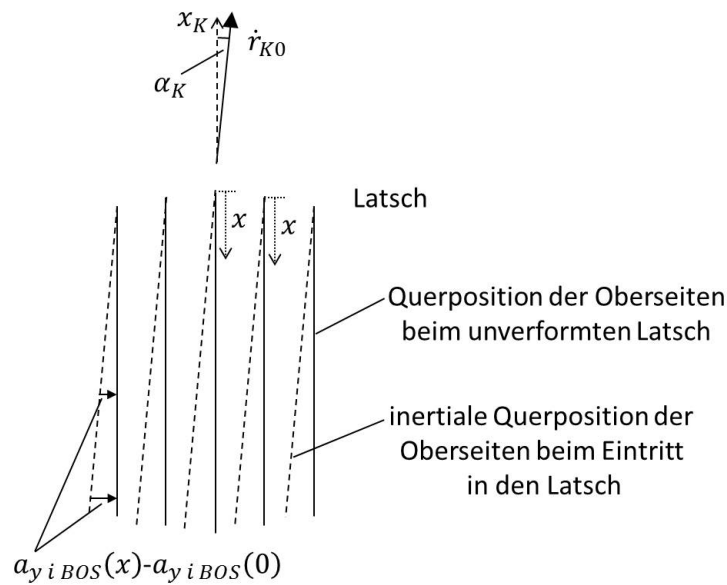


Abbildung C.10: *Inertiale* Oberseitenverschiebung für  $\alpha_K > 0$ ,  $\lambda_K = 0$

und es ist auch dieser Fall nicht möglich. Letztlich gilt damit  $\varphi_{G0x F_y} > 0$  und das, da dieser Zusammenhang aus *Stetigkeits*-Gründen auch für lediglich hinreichend kleines  $v_B$  erhalten bleibt, für  $\varphi_{F0x F_y} = \dot{F}_{FH_z F_y} = 0$ ,  $v_{B F_y}$  hinreichend klein,  $\alpha_{F_y} > 0$  hinreichend klein und  $|\lambda_{K F_y}|$  *quadratisch* beschränkt in  $\alpha_{F_y}$ .

$$\text{C.10} \quad \left. \frac{\partial F_{LGK_y}}{\partial \alpha_K} \right|_{\alpha_K = \lambda_K = 0} \quad \text{und} \quad \left. \frac{\partial M_{LGK_z}}{\partial \alpha_K} \right|_{\alpha_K = \lambda_K = 0} \quad \text{für} \quad \varphi_{F0x} = 0$$

Geht man zunächst von einem auch unter horizontalen *Latsch*-Kräften und -Momenten unverformten *Latsch*, also von  $y_{REK i} = y_{REK def ij} = y_{REK def \varphi_x ij}$  aus, ergibt sich für die Oberseiten der *Reibkontakt-Elemente* die in Abbildung C.10 zu sehende *inertiale* Verschiebung gegenüber ihrer Position zum Zeitpunkt ihres Eintritts in den *Latsch*. Diese Verschiebung ist dann auch genau die, die die Oberseiten beim Durchlaufen des *Latschs inertial* erfahren. Nach Definition von  $\alpha_K$  in C.18 bewegt sich der *Latsch inertial* genau im Winkel  $-\alpha_K$  zu seiner *inertialen* Längsrichtung  $x_K$ . Für  $\lambda_K = 0$  bewegen sich die Oberseiten *inertial* nicht in Längsrichtung  $x_K$ . Damit entspricht der Winkel zwischen den Strecken der Oberseiten-Positionen und den entsprechenden Strecken ihrer *inertialen* Positionen beim Eintritt in den *Latsch*  $-\alpha_K$ , und es gilt in der Darstellung aus Abschnitt C.8

$$a_{y i BOS \alpha_K}(x) = -(\tan \alpha_K) x$$

Lässt man die sich unter *Latsch*-Seitenkraft und *-Rückstellmoment* zusätzlich einstellenden Verschiebungen gegenüber der Eintrittsposition gemäß Gleichung 4.28 zu, erhält man die erweiterte Darstellung der Querverschiebungen

$$\begin{aligned} a_{y\ i\ BOS\ \alpha_K\ def}(x) &= -(\tan \alpha_K)x - px - q\left(x - \frac{1}{2}l_{mat\ i}\right)^2 \\ &= -(\tan \alpha_K)x - n_{LKt}M_{LGKz}x - n_{LKb}F_{LGKy}\left(x - \frac{1}{2}l_{mat\ i}\right)^2 \\ &= -(n_{LKt}M_{LGKz} + \tan \alpha_K)x - n_{LKb}F_{LGKy}\left(x - \frac{1}{2}l_{mat\ i}\right)^2 \end{aligned}$$

Mit den Ergebnissen aus Abschnitt C.9 lässt sich schließen, dass sich unter der resultierenden Seitenkraft  $F_{LGKy} > 0$  und dem eingestellten Felgen-*Sturzwinkel*  $\varphi_{F0x} = 0$  bzw.  $\lambda_K = 0$  ein *Gürtel-Sturzwinkel*  $\varphi_{G0x} > 0$  einstellt. Über 4.29 ( $\varepsilon_{GK} = \varphi_{G0x}$  auf ebenem Boden) lässt sich so mit  $k > 0$  die komplette Querverschiebung  $a_{y\ i\ BOS\ lin}(x) - a_{y\ i\ BOS\ lin}(0)$  der Oberseiten gegenüber ihren *inertialen* Positionen beim Eintritt in den *Latsch* beschreiben, die durch den *linearisierten* Zusammenhang zwischen  $F_{LGKy}$  und  $\varphi_{G0x}$  jedoch nur noch *linearisiert* um  $\alpha_K = 0$  gilt

$$a_{y\ i\ BOS\ lin} = -(n_{LKt}M_{LGKz} + \tan \alpha_K)x - F_{LGKy}(n_{LKb} + k)\left(x - \frac{1}{2}l_{mat\ i}\right)^2 \quad (C.45)$$

Die in Abschnitt C.8 verwendeten Größen zur *linearisierten* Beschreibung von  $F_{LGKy}$  und  $M_{LGKz}$  sind also

$$r = -(n_{LKt}M_{LGKz} + \tan \alpha_K) \quad s = -F_{LGKy}(n_{LKb} + k) \quad \varphi_{G0x}(\alpha_K)$$

mit den Anfangsableitungen

$$\left. \frac{\partial r}{\partial \alpha_K} \right|_{\alpha_K=0} = -n_{LKt} \left. \frac{\partial M_{LGKz}}{\partial \alpha_K} \right|_{\alpha_K=0} - 1 \left. \frac{\partial s}{\partial \alpha_K} \right|_{\alpha_K=0} = -(n_{LKb} + k) \left. \frac{\partial F_{LGKy}}{\partial \alpha_K} \right|_{\alpha_K=0} \quad (C.46)$$

Da  $\varphi_{G0x}|_{\alpha_K=0} = 0$  gilt, folgt mit C.37 und C.38 für die Änderung von  $F_{LGKy}$  und  $M_{LGKz}$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F_{LGKy}}{\partial \alpha_K} \right|_{\alpha_K=0} &= \left( -\frac{1}{2}c_{scher} \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat\ i}^2 - d_{scher}v_B \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat\ i} \right) \left. \frac{\partial r}{\partial \alpha_K} \right|_{\alpha_K=0} \\ &\quad + \frac{1}{6}c_{scher} \left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat\ i}^3 \right) \left. \frac{\partial s}{\partial \alpha_K} \right|_{\alpha_K=0} \\ \left. \frac{\partial M_{LGKz}}{\partial \alpha_K} \right|_{\alpha_K=0} &= \frac{1}{12}c_{scher} \left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat\ i}^3 \right) \left. \frac{\partial r}{\partial \alpha_K} \right|_{\alpha_K=0} + \frac{1}{6}d_{scher}v_B \left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat\ i}^3 \right) \left. \frac{\partial s}{\partial \alpha_K} \right|_{\alpha_K=0} \end{aligned} \quad (C.47)$$

C.46 und C.47 bilden ein Gleichungssystem in den Unbekannten  $\left. \frac{\partial r}{\partial \alpha_K} \right|_{\alpha_K=0}$ ,  $\left. \frac{\partial s}{\partial \alpha_K} \right|_{\alpha_K=0}$ ,  $\left. \frac{\partial F_{LGKy}}{\partial \alpha_K} \right|_{\alpha_K=0}$  und  $\left. \frac{\partial M_{LGKz}}{\partial \alpha_K} \right|_{\alpha_K=0}$ , dessen Lösung für die Änderung von  $F_{LGKy}$  und

$M_{LGKz}$  folgende komplizierte Terme für  $l_{RKE} = 1$  liefert

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F_{LGKy}}{\partial \alpha_K} \right|_{\alpha_K=0} &= 1/\left( \frac{1}{6} n_{LKt} d_{scher} v_B \left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat\ i}^3 \right) \cdot (n_{LKb} + k) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left( 1 + \frac{1}{6} C_{scher} \left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat\ i}^3 \right) (n_{LKb} + k) \right) \cdot \left( 1 + \frac{1}{12} C_{scher} \left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat\ i}^3 \right) n_{LKt} \right)}{\frac{1}{2} C_{scher} \left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat\ i}^2 \right) + d_{scher} v_B \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat\ i}} \right) \\ \left. \frac{\partial M_{LGKz}}{\partial \alpha_K} \right|_{\alpha_K=0} &= \frac{-1}{1 + \frac{1}{12} C_{scher} \left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat\ i}^3 \right) n_{LKt}} \\ &\quad \cdot \left( \frac{1}{12} C_{scher} \left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat\ i}^3 \right) \right. \\ &\quad \left. + 1/\left( n_{LKt} + \left( \frac{1}{\frac{1}{6} d_{scher} v_B \left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat\ i}^3 \right) \cdot (n_{LKb} + k)} + \frac{C_{scher}}{d_{scher} v_B} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \frac{1 + \frac{1}{12} C_{scher} \left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat\ i}^3 \right) n_{LKt}}{\frac{1}{2} C_{scher} \left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat\ i}^2 \right) + d_{scher} v_B \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat\ i}} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (C.48)$$

## C.11 Latsch-Horizontalkräfte unter $F_{FHy} = \lambda = 0$ und $\varphi_{G0x}$ für $(F_{LGK})_{1..2} = 0$ , $v_B \rightarrow 0$

Unter den Bedingungen  $B_4$  und der Auswertung für  $v_B \rightarrow 0$  in  $Z_{E4}$  zur Identifikation von  $f_{Lmat}$  gelten spezifische Zusammenhänge, die hier näher untersucht werden sollen. Ohne zusätzliche Nebenbedingungen wie die von  $B_4$  lassen sich *Stationärzustände* um  $\alpha = \varepsilon_W = \lambda = 0$  generell in der Wirkung von  $\alpha$  und  $\varepsilon_W$  auf die *Latsch-Seitenkraft*  $F_{LGKy}$ , den vertikalen Verdrehwinkel  $\varphi_{G0z}$  des *Reifengürtels* und den *Schräglaufwinkel*  $\alpha_K$  des *Kontaktsystems* (s. Abschn. C.6) mit

$$\begin{aligned} F_{LGKy} &= k_1 \alpha + k_2 \varepsilon_W + g_1(\alpha, \varepsilon_W) && \text{mit } g_1 \in \mathcal{O}(\alpha^2 + \varepsilon_W^2) \\ \varphi_{G0z} &= k_3 \alpha + k_4 \varepsilon_W + g_2(\alpha, \varepsilon_W) && \text{mit } g_2 \in \mathcal{O}(\alpha^2 + \varepsilon_W^2) \\ \alpha_K &= k_5 \alpha + k_6 \varepsilon_W + g_3(\alpha, \varepsilon_W) && \text{mit } g_3 \in \mathcal{O}(\alpha^2 + \varepsilon_W^2) \end{aligned}$$

*linearisieren*. Mit  $\lambda = 0$  erhält man nach C.18 für den *Umfangsschlupf*  $\lambda_K$  des *Kontaktsystems* (s. Abschn. C.6) und damit übertragen von C.3 auf das *Kontaktsystem* die

abbrechende *Taylorreihe*

$$F_{LGKx} = k_7\alpha^2 + k_8\varepsilon_W^2 + k_9\alpha\varepsilon_W + g_4(\alpha, \varepsilon_W) \quad g_4 \in \mathcal{O}(\alpha^3 + \varepsilon_W^3) \quad (\text{C.49})$$

*Stationär* stimmen die horizontale Felgen- und *Latsch*-Kraft überein, und es gilt nach 4.35 bzw. Abschnitt C.4 mit C.12

$$\begin{aligned} F_{FH_y} &= F_{LGKx} \sin \varphi_{G0z} + F_{LGK_y} \cos \varphi_{G0z} \\ &= (k_7\alpha^2 + k_8\varepsilon_W^2 + k_9\alpha\varepsilon_W + g_4(\alpha, \varepsilon_W)) (k_3\alpha + k_4\varepsilon_W + g_5(\alpha, \varepsilon_W)) \\ &\quad + F_{LGK_y} (1 + k_{10}\alpha^2 + k_{11}\varepsilon_W^2 + k_{12}\alpha\varepsilon_W + g_6(\alpha, \varepsilon_W)) \\ &= g_7(\alpha, \varepsilon_W) + F_{LGK_y} (1 + k_{10}\alpha^2 + k_{11}\varepsilon_W^2 + k_{12}\alpha\varepsilon_W + g_6(\alpha, \varepsilon_W)) \\ &\text{mit } g_5 \in \mathcal{O}(\alpha^2 + \varepsilon_W^2), g_6, g_7 \in \mathcal{O}(\alpha^3 + \varepsilon_W^3) \end{aligned} \quad (\text{C.50})$$

$B_4$  definiert  $F_{FH_y} = 0$ , und es folgt aufgelöst für  $F_{LGK_y}$  und mit C.49 insgesamt

$$F_{LGKx} \in \mathcal{O}(\alpha^2 + \varepsilon_W^2) \quad F_{LGK_y} \in \mathcal{O}(\alpha^3 + \varepsilon_W^3)$$

Um als Nächstes die Abhängigkeiten des *Sturzwinkels*  $\varphi_{G0x}$  des *Reifengürtels* zu klären, soll zunächst vereinfacht von

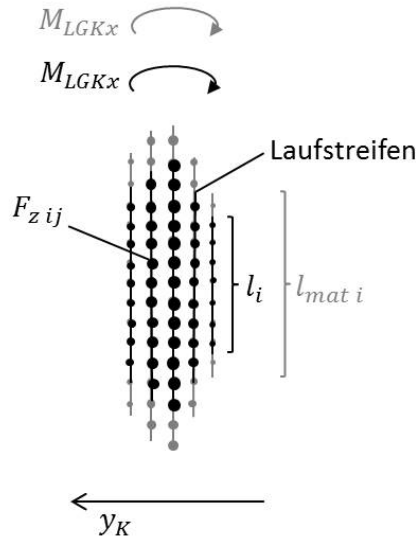
$$F_{LGKx} = F_{LGK_y} = 0$$

ausgegangen werden. Dann gilt mit 4.28  $\Delta x_{LGK} = 0$  und wegen  $v_B \rightarrow 0$  mit 4.22 für das *Latsch-Rollwiderstandsmoment*  $M_{LGK_y} = 0$ . Für eine als beliebig groß angenommene Zahl  $n_{RES}$  von *Reibkontakt-Elementen* pro *Laufstreifen* erhält man in 4.24  $b = 0$ , und es überträgt sich die zur Querachse des *Kontaktsystems* symmetrische Form von  $p_{ans\ ij}$  auf  $p_{ij}$ . Wie in Abschnitt C.9 ausführlich hergeleitet ist damit der in 4.28 und 4.34 von  $n_{LKt}$  abhängige *torsionsbedingte* Anteil  $\Delta_3(A_{K0\ F_y}^T M_{G0\ F_y})_1$  von  $M_{LGKx}$  gleich 0. Außerdem geht so die Darstellung 4.24 und 4.25 der lokalen *Latsch*-Vertikalkräfte über in die von der *Latsch*-Längskoordinate  $x_K$  abhängige Darstellung

$$F_{z\ i\ x_K} = \frac{F_{LGKz} \left(1 - \left|\frac{2x_K}{l_{mat\ i}}\right|^{e_l}\right) \left(1 - \left|\frac{2y_{REK\ i}}{B_R}\right|^{e_q}\right) l_{mat\ i}}{l_{RKE} \sum_i \int_{-\frac{1}{2}l_{mat\ i}}^{+\frac{1}{2}l_{mat\ i}} \left(1 - \left|\frac{2x_K}{l_{mat\ i}}\right|^{e_l}\right) \left(1 - \left|\frac{2y_{REK\ i}}{B_R}\right|^{e_q}\right) l_{mat\ i} dx_K}$$

Nun gilt mit 4.34, 4.28 und Abbildung 4.39 unter der Substitution

$$x_K = f_{L\ mat} \cdot x'_K$$


 Abbildung C.11: Bodendruckverteilung abhängig bzw.  $M_{LGKx}$  unabhängig von  $f_{Lmat}$ 

auch für das *Latsch*-Längsmoment

$$\begin{aligned}
 & M_{LGKx} \Big|_{(F_{LGK})_{1..2} = M_{LGKz} = 0} \\
 &= \frac{l_{RKE} f_{Lmat}^2 \sum_i \int_{-\frac{1}{2}l_i}^{+\frac{1}{2}l_i} y_{REK\ i} F_{LGKz} \left(1 - \left|\frac{2x'_K}{l_i}\right|^{e_l}\right) \left(1 - \left|\frac{2y_{REK\ i}}{B_R}\right|^{e_q}\right) l_i dx'_K}{l_{RKE} f_{Lmat}^2 \sum_i \int_{-\frac{1}{2}l_i}^{+\frac{1}{2}l_i} \left(1 - \left|\frac{2x'_K}{l_i}\right|^{e_l}\right) \left(1 - \left|\frac{2y_{REK\ i}}{B_R}\right|^{e_q}\right) l_i dx'_K} \quad (C.51) \\
 &= \frac{\sum_i \int_{-\frac{1}{2}l_i}^{+\frac{1}{2}l_i} y_{REK\ i} F_{LGKz} \left(1 - \left|\frac{2x'_K}{l_i}\right|^{e_l}\right) \left(1 - \left|\frac{2y_{REK\ i}}{B_R}\right|^{e_q}\right) l_i dx'_K}{\sum_i \int_{-\frac{1}{2}l_i}^{+\frac{1}{2}l_i} \left(1 - \left|\frac{2x'_K}{l_i}\right|^{e_l}\right) \left(1 - \left|\frac{2y_{REK\ i}}{B_R}\right|^{e_q}\right) l_i dx'_K}
 \end{aligned}$$

Da mit  $F_{LGKy} = 0$  aus 4.28 dann außer der *linear* überlagerten *Latschtorsion* kein weiterer Einfluss auf die Querpositionen der *Reibkontakt-Elemente* besteht, und der Einfluss der *Latschtorsion* wie bereits gezeigt nicht existiert, also  $M_{LGKx} \Big|_{(F_{LGK})_{1..2}} = M_{LGKx} \Big|_{(F_{LGK})_{1..2} = M_{LGKz} = 0}$  gilt, ist  $M_{LGKx}$  für  $F_{LGKx} = F_{LGKy} = 0$  und  $v_B \rightarrow 0$  wie in Abbildung C.11 gezeigt unabhängig von  $f_{Lmat}$ ,  $n_{LKy}$  und  $n_{LKt}$ . Die eingestellte Felgen-Vertikalkraft  $F_{FHz}$  bewirkt die *Latsch*-Vertikalkraft  $F_{LGKz} = F_{FHz} + m_G \cdot g$ , die mit 4.15  $f_G$  unabhängig von  $f_{Lmat}$ ,  $n_{LKy}$  und  $n_{LKt}$  festlegt (s. Abschn. 4.2.1). Wie Abbildung C.12 zeigt, stellt sich damit abhängig vom *Sturzwinkel*  $\varphi_{G0x}$  des *Reifengürtels* über 4.13 und 4.14 die Höhe  $r_{G0z}$  und der Querabstand  $\left(A_{K0}^T (r_{G0} - r_{K0})\right)_y$  von *Reifengürtel* und *Kontaktpunkt* ein. Mit  $F_{LGKy} = 0$  folgt so über 4.35 auch ein von  $\varphi_{G0x}$ , jedoch nicht zu-

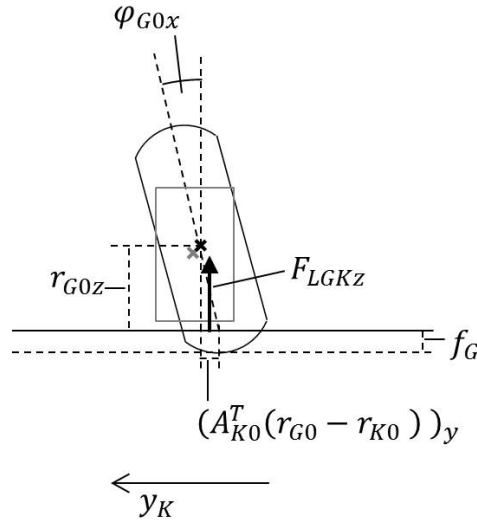


Abbildung C.12: Resultierender Abstand zwischen Mitte *Reifengürtel*  $r_G$  und *Kontaktpunkt*  $r_K$

sätzlich von  $f_{L\ mat}$ ,  $n_{LKy}$  und  $n_{LKt}$  abhängiger Wert  $(A_{K0}^T M_{LG0})_x$  des *latschseitig* in den *Reifengürtel* eingprägten *Sturzmoments*. Unter der vorliegenden Felgenlage  $\varphi_{F0z} = 0$  gelten die Voraussetzungen von Abschnitt C.4, also auch C.12 und in der Darstellung von Abschnitt 4.1.7  $R_{Gz} = A_{K0}$ . Aus 4.42 erhält man damit für  $v_B \rightarrow 0$ , also  $\dot{\varphi}_{F0y} \rightarrow 0$  zum von der Felge in den *Reifengürtel* eingprägten *Sturzmoment*

$$(A_{K0}^T M_{FG0})_x = c_{GF\ rot\ rad} R_{3,2}$$

Für beliebig kleine Anregungen  $\varepsilon_W$  und  $\alpha$  nimmt auch  $R_{3,2}$  beliebig kleine Werte an und es gilt mit 4.41, 4.3 und Abschnitt C.1

$$\left. \frac{\partial (A_{K0}^T M_{FG0})_x |_{(F_{LGK})_{1..2}=0}}{\partial \varepsilon_W} \right|_{\varepsilon_W=0} = c_{GF\ rot\ rad} \left. \frac{\partial (\varphi_{F0x} - \varphi_{G0x}) |_{(F_{LGK})_{1..2}=0}}{\partial \varepsilon_W} \right|_{\varepsilon_W=0} \quad (C.52)$$

wobei sich die Änderung von  $\alpha$  aus der Nebenbedingung  $F_{LGKx} = F_{LGKy} = 0$  ergibt. Geht man auch im Fall des *latschseitig* eingprägten *Sturzmoments* auf die differenzierte Darstellung über, ist  $\left. \frac{\partial \varphi_{G0x} |_{(F_{LGK})_{1..2}=0}}{\partial \varepsilon_W} \right|_{\varepsilon_W=0}$ , da  $\varphi_{F0x} = \varepsilon_W$  gilt, durch die *Stationärbedingung*

$$\left. \frac{\partial (A_{K0}^T M_{FG0})_x |_{(F_{LGK})_{1..2}=0}}{\partial \varepsilon_W} \right|_{\varepsilon_W=0} = - \left. \frac{\partial (A_{K0}^T M_{LG0})_x |_{(F_{LGK})_{1..2}=0}}{\partial \varepsilon_W} \right|_{\varepsilon_W=0}$$

und C.52 unabhängig von  $f_{L\ mat}, n_{LK_y}, n_{LK_t}$  und  $c_{GF\ quer}$  festgelegt. D.h.

$$\left. \frac{\partial \varphi_{G0x}|_{(FLGK)_{1..2}=0}}{\partial \varepsilon_W} \right|_{\varepsilon_W=0}$$

selbst ist für  $v_B \rightarrow 0$  unabhängig von  $f_{L\ mat}, n_{LK_y}, n_{LK_t}$  und  $c_{GF\ quer}$ .

## C.12 Rückstellmoment-Änderung unter $F_{FH_y} = 0, v_B \rightarrow 0$

Um aufbauend auf den Ergebnissen aus Abschnitt C.11 Eigenschaften der *Rückstellmoment*-Änderung  $\left. \frac{M_{FH_z}}{\varepsilon_W} \right|_{\varepsilon_W=0}$  unter  $B_4$  herzuleiten, soll auch hier noch zunächst von verschwindenden *Latsch*-Horizontalkräften

$$F_{LGK_x} = F_{LGK_y} = 0$$

ausgegangen werden. Eines der Ergebnisse ist, dass die *Sturzwinkel*-Änderung

$$\left. \frac{\partial \varphi_{G0x}|_{(FLGK)_{1..2}=0}}{\partial \varepsilon_W} \right|_{\varepsilon_W=0}$$

des *Reifengürtels* unter  $\varepsilon_W$  bei Einstellung der Nebenbedingung über  $\alpha$  unabhängig von  $f_{L\ mat}, n_{LK_y}$  und  $n_{LK_t}$  ist. Mit  $F_{LGK_y} = 0$  erhält man für die über der *Latsch*-Länge *quadratische* Querauslenkung der Oberseiten der *Reibkontakt-Elemente* ausschließlich den Anteil aus 4.29 und keinen aus 4.28. In der Darstellung aus Abschnitt C.8 gilt also

$$s|_{(FLGK)_{1..2}=0} = -\frac{\sin \varphi_{G0x}}{2R_{dyn}}$$

( $\varepsilon_{GK} = \varphi_{G0x}$  auf ebenem Boden) und differenziert

$$\left. \frac{\partial s|_{(FLGK)_{1..2}=0}}{\partial \varepsilon_W} \right|_{\varepsilon_W=0} = -\frac{1}{2R_{dyn}} \left. \frac{\partial \varphi_{G0x}|_{(FLGK)_{1..2}=0}}{\partial \varepsilon_W} \right|_{\varepsilon_W=0}$$

das also genauso unabhängig ist von  $f_{L\ mat}, n_{LK_y}$  und  $n_{LK_t}$ . Die Voraussetzung  $F_{LGK_y} = 0$  bedeutet auch

$$\left. \frac{\partial F_{LGK_y}}{\partial \varepsilon_W} \right|_{\varepsilon_W=0} = 0$$

und unter  $v_B \rightarrow 0$  angewandt auf C.37

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial F_{LGK_y}}{\partial \varepsilon_W} \right|_{\varepsilon_W=0} &= \left. \frac{\partial F_{LGK_y}}{\partial (r \ s)} \right|_{r=s=0} \cdot \left. \frac{\partial (r \ s)|_{(F_{LGK})_{1..2}=0}^T}{\partial \varepsilon_W} \right|_{\varepsilon_W=0} \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{C_{scher}}{l_{RKE}} \left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat \ i}^2 \right) \left. \frac{\partial r|_{(F_{LGK})_{1..2}=0}}{\partial \varepsilon_W} \right|_{\varepsilon_W=0} \\
 &\quad - \frac{1}{6} \frac{C_{scher}}{l_{RKE}} \left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat \ i}^3 \right) \frac{1}{2R_{dyn}} \left. \frac{\partial \varphi_{G0x}|_{(F_{LGK})_{1..2}=0}}{\partial \varepsilon_W} \right|_{\varepsilon_W=0} = 0
 \end{aligned}$$

Aufgelöst nach  $\left. \frac{\partial r|_{(F_{LGK})_{1..2}=0}}{\partial \varepsilon_W} \right|_{\varepsilon_W=0}$  und wieder eingesetzt in C.37 erhält man für  $v_B \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial M_{LGK_z}|_{(F_{LGK})_{1..2}=0}}{\partial \varepsilon_W} \right|_{\varepsilon_W=0} &= \left. \frac{\partial M_{LGK_z}}{\partial (r \ s)} \right|_{r=s=0} \cdot \left. \frac{\partial (r \ s)|_{(F_{LGK})_{1..2}=0}^T}{\partial \varepsilon_W} \right|_{\varepsilon_W=0} \\
 &= \frac{1}{12} \frac{C_{scher}}{l_{RKE}} \left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat \ i}^3 \right) \cdot \left. \frac{\partial r|_{(F_{LGK})_{1..2}=0}}{\partial \varepsilon_W} \right|_{\varepsilon_W=0} \\
 &= -\frac{C_{scher}}{72 l_{RKE} R_{dyn}} \frac{\left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat \ i}^3 \right)^2}{\sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat \ i}^2} \cdot \left. \frac{\partial \varphi_{G0x}|_{(F_{LGK})_{1..2}=0}}{\partial \varepsilon_W} \right|_{\varepsilon_W=0}
 \end{aligned} \tag{C.53}$$

Mit der Voraussetzung  $F_{LGK_x} = F_{LGK_y} = 0$  folgt über 4.35

$$\left. \frac{\partial M_{LG0_z}|_{(F_{LGK})_{1..2}=0}}{\partial \varepsilon_W} \right|_{\varepsilon_W=0} = \left. \frac{\partial M_{LGK_z}|_{(F_{LGK})_{1..2}=0}}{\partial \varepsilon_W} \right|_{\varepsilon_W=0}$$

und da *stationär* die Horizontalkräfte zwischen Felge, *Reifengürtel* und *Latsch* übereinstimmen, also  $F_{FG0_x} = F_{FG0_y} = 0$  gilt, ergibt sich mit 4.10, 4.9 und 4.37 insgesamt

$$\left. \frac{\partial M_{FH_z}|_{(F_{LGK})_{1..2}=0}}{\partial \varepsilon_W} \right|_{\varepsilon_W=0} = \left. \frac{\partial M_{LGK_z}|_{(F_{LGK})_{1..2}=0}}{\partial \varepsilon_W} \right|_{\varepsilon_W=0} \tag{C.54}$$

Nun wertet die *Zielgröße*  $Z_{\tau 4}$  allerdings keine Situation unter der Nebenbedingung  $F_{LGK_x} = F_{LGK_y} = 0$ , sondern für  $F_{FH_y} = 0$  aus. Um  $\varepsilon_W = \alpha = 0$  lässt sich auch



der zusätzliche Effekt von  $F_{LGK_x}$ ,  $F_{LGK_y} \neq 0$  auf  $M_{FH_z}$  *linearisieren*:

$$M_{FH_z} = \frac{\partial M_{FH_z}|_{(F_{LGK})_{1..2}=0}}{\partial \varepsilon_W} \Big|_{\varepsilon_W=0} \cdot \varepsilon_W + k_1 F_{LGK_x} + k_2 F_{LGK_y} + g_1(\varepsilon_W, F_{LGK_x}, F_{LGK_y})$$

$$g_1 \in \mathcal{O}(\varepsilon_W^2 + F_{LGK_x}^2 + F_{LGK_y}^2) \quad (\text{C.55})$$

Das Gleiche gilt für die Seitenkraft  $F_{FH_y}$  in Abhängigkeit von *Schräglauf*- und *Sturzwinkel*, den einzigen variierten Anregungsgrößen

$$F_{FH_y} = k_3 \alpha + k_4 \varepsilon_W + g_2(\alpha, \varepsilon_W) \quad k_3 \neq 0 \text{ (s. Abschn. 4.2.6)}, \quad g_2 \in \mathcal{O}(\alpha^2 + \varepsilon_W^2) \quad (\text{C.56})$$

Was die Auswertung von  $Z_{\tau_4}$  tatsächlich voraussetzt, ist eine verschwindende Seitenkraft

$$F_{FH_y} = 0 \quad (\text{C.57})$$

In Abschnitt C.11 werden unter dieser Voraussetzung Abschätzungen für  $F_{LGK_x}$  und  $F_{LGK_y}$  hergeleitet.

$$F_{LGK_x} = g_3(\alpha, \varepsilon_W) \in \mathcal{O}(\alpha^2 + \varepsilon_W^2) \quad F_{LGK_y} = g_4(\alpha, \varepsilon_W) \in \mathcal{O}(\alpha^3 + \varepsilon_W^3) \quad (\text{C.58})$$

Aus C.57 folgt  $\frac{\partial F_{FH_y}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\varepsilon_W=0} + \frac{\partial F_{FH_y}}{\partial \varepsilon} \Big|_{\alpha=\varepsilon_W=0} = 0$  und mit C.56

$$\alpha = k_5 \varepsilon_W + g_5(\varepsilon_W) \quad g_5 \in \mathcal{O}(\varepsilon_W^2) \quad (\text{C.59})$$

C.58 und C.59 ergeben

$$F_{LGK_x} = g_6(\varepsilon_W) \in \mathcal{O}(\varepsilon_W^2) \quad F_{LGK_y} = g_7(\varepsilon_W) \in \mathcal{O}(\varepsilon_W^3) \quad (\text{C.60})$$

sowie C.55 und C.60

$$M_{FH_z}|_{F_{FH_y}=0} = \frac{\partial M_{FH_z}|_{(F_{LGK})_{1..2}=0}}{\partial \varepsilon_W} \Big|_{\varepsilon_W=0} \cdot \varepsilon_W + k_6 \varepsilon_W^2 + g_8(\varepsilon_W) \quad g_8 \in \mathcal{O}(\varepsilon_W^3)$$

Differenziert nach  $\varepsilon_W$ , mit C.53, C.54 und 4.20 ergibt sich die Gesamt-Darstellung

$$\lim_{v_B \rightarrow 0} \frac{\partial M_{FH_z}|_{F_{FH_y}=0}}{\partial \varepsilon_W} \Big|_{\varepsilon_W=0} = \lim_{v_B \rightarrow 0} \frac{\partial M_{FH_z}|_{(F_{LGK})_{1..2}=0}}{\partial \varepsilon_W} \Big|_{\varepsilon_W=0}$$

$$= - \frac{(c_{scher} f_L^2 mat)}{72 R_{dyn} l_{RKE}} \frac{\left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_i^3 \right)^2}{\sum_{i=1}^{n_{LS}} l_i^2} \cdot \left( \lim_{v_B \rightarrow 0} \frac{\partial \varphi_{G0x}|_{(F_{LGK})_{1..2}=0}}{\partial \varepsilon_W} \Big|_{\varepsilon_W=0} \right) \cdot f_L^2 mat \quad (\text{C.61})$$

wobei  $l_i$  (für  $\varepsilon_W = \alpha = 0$  bestimmt durch die Form der *Gürtelringschale* und  $F_{FH_z}$ ) und nach Abschnitt C.11 auch  $\lim_{v_B \rightarrow 0} \frac{\partial \varphi_{G0x}|_{(F_{LGK})_{1,2}=0}}{\partial \varepsilon_W} \Big|_{\varepsilon_W=0}$  unabhängig von  $f_{Lmat}$  und später zu identifizierenden Parametern sind.

## C.13 Rückstellmoment-Änderung in $\alpha$ abhängig von

$$n_{LKt}$$

Auch unter den Bedingungen zur Auswertung von  $Z_{\tau 5}$  ergeben sich spezielle Zusammenhänge, die hier näher untersucht werden sollen. Wie in Abschnitt C.12 wird die Situation zunächst idealisiert und unter der Annahme einer verschwindenden *Latsch-Längskraft*

$$F_{LGKx} = 0$$

analysiert. Schon in Abschnitt 4.2.3 wird die Situation unter der Voraussetzung  $v_B \rightarrow 0$  (damit *stationär*  $\dot{\varphi}_{G0y} = \dot{\varphi}_{F0y} \rightarrow 0$ ) und  $\varepsilon_W = F_{LGKx} = 0$  *linearisiert* in  $\alpha$  um  $\alpha = 0$  betrachtet. Der Zusammenhang 4.83 kann also auch hier verwendet werden, und es gilt

$$\lim_{v_B \rightarrow 0} \frac{\partial M_{LGKz}|_{F_{LGKx}=0}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = c_{GF \text{ rot rad}} \lim_{v_B \rightarrow 0} \frac{\partial \varphi_{G0z}|_{F_{LGKx}=0}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \quad (\text{C.62})$$

Nach Abschnitt C.4 und C.6 ist gemäß den Gleichungen C.15 und C.18 die Annahme  $F_{LGKx} = 0$  *stationär* gleichbedeutend mit  $\lambda_K = 0$ , es sind also auch die Voraussetzungen von Abschnitt C.10 erfüllt. Dann trifft C.48 auch hier zu, und es folgt für die Änderung des *Latsch-Rückstellmoments* im *Latsch-Schräglaufwinkel*  $\alpha_K$  mit der Vereinfachung  $l_{RKE} = 1$

$$\lim_{v_B \rightarrow 0} \frac{\partial M_{LGKz}|_{F_{LGKx}=0}}{\partial \alpha_K} \Big|_{\alpha_K=0} = - \frac{\frac{1}{12} c_{scher} \left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat i}^3 \right)}{1 + \frac{1}{12} c_{scher} \left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat i}^3 \right) n_{LKt}} \quad (\text{C.63})$$

Genauso wegen  $F_{LGKx} = 0$  lässt sich auch 4.85 aus Abschnitt 4.2.3 auf die vorliegende Situation übertragen, und man erhält, dass das *Rückstellmoment* von *Latsch* und *Felge* einander entsprechen

$$\lim_{v_B \rightarrow 0} (M_{FH})_3|_{F_{LGKx}=0} = \lim_{v_B \rightarrow 0} M_{LGKz}|_{F_{LGKx}=0} \quad (\text{C.64})$$

Aus C.18 lässt sich noch der Zusammenhang

$$\frac{\partial \alpha_K}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = 1 + \lim_{v_B \rightarrow 0} \frac{\partial \varphi_{G0z}|_{F_{LGKx}=0}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \quad (\text{C.65})$$

zwischen dem *Schräglaufwinkel* der Felge und des *Kontaktsystems* sowie dem Drehwinkel des *Reifengürtels* ergänzen. Zusammen mit der Verkettung

$$\lim_{v_B \rightarrow 0} \frac{\partial M_{LGKz}|_{F_{LGKx}=0}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \lim_{v_B \rightarrow 0} \frac{\partial M_{LGKz}|_{F_{LGKx}=0}}{\partial \alpha_K} \Big|_{\alpha_K=0} \cdot \frac{\partial \alpha_K}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \quad (\text{C.66})$$

bilden C.62, C.63 und C.65 ein Gleichungssystem mit der Lösung

$$\lim_{v_B \rightarrow 0} \frac{\partial M_{LGKz}|_{F_{LGKx}=0}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = - \frac{\frac{1}{12} c_{scher} \left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat i}^3 \right)}{1 + \frac{1}{12} c_{scher} \left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat i}^3 \right) \left( n_{LKt} + \frac{1}{c_{GF \text{ rot rad}}} \right)} \quad (\text{C.67})$$

Über C.64 lässt sich der Zusammenhang auch in der Felgenreiße darstellen

$$\lim_{v_B \rightarrow 0} \frac{\partial (M_{FH})_3|_{F_{LGKx}=0}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = - \frac{\frac{1}{12} c_{scher} \left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat i}^3 \right)}{1 + \frac{1}{12} c_{scher} \left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat i}^3 \right) \left( n_{LKt} + \frac{1}{c_{GF \text{ rot rad}}} \right)} \quad (\text{C.68})$$

Hierauf basierend kann nun auch der Effekt auf das *Rückstellmoment* modelliert werden, der sich ohne die Nebenbedingung  $F_{LGKx} = 0$  einstellt. Auch hier ist wieder eine *linearisierte* Darstellung möglich

$$\begin{aligned} \lim_{v_B \rightarrow 0} (M_{FH})_3 &= \lim_{v_B \rightarrow 0} \frac{\partial (M_{FH})_3|_{F_{LGKx}=0}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \cdot \alpha + k_1 F_{LGKx} + g_1(\alpha, F_{LGKx}) \\ g_1 &\in \mathcal{O}(\alpha^2 + F_{LGKx}^2) \end{aligned}$$

Schon in Abschnitt C.11 wird das Verhalten von  $F_{LGKx}$  unter  $\lambda = 0$  abhängig von  $\alpha$  und  $\varepsilon_W$  analysiert. Mit C.49, das nicht wie später in Abschnitt C.11  $F_{FH_y} = 0$  voraussetzt, und  $\varepsilon_W = 0$  im Fall hier kann es dargestellt werden als

$$F_{LGKx}|_{\lambda=0} = k_2 \alpha^2 + g_2(\alpha) \quad g_2 \in \mathcal{O}(\alpha^3)$$

Für die Beschreibung des *Rückstellmoments* allein abhängig von  $\alpha$  und unter der Nebenbedingung  $\lambda = 0$  bedeutet dies

$$\lim_{v_B \rightarrow 0} (M_{FH})_3|_{\lambda=0} = \lim_{v_B \rightarrow 0} \frac{\partial (M_{FH})_3|_{F_{LGKx}=0}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \cdot \alpha + g_3(\alpha) \quad g_3 \in \mathcal{O}(\alpha^2)$$

was in differenzierter Form

$$\lim_{v_B \rightarrow 0} \frac{\partial (M_{FH})_3}{\partial \alpha} \Big|_{\lambda=\alpha=0} = \lim_{v_B \rightarrow 0} \frac{\partial (M_{FH})_3|_{F_{LGKx}=0}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}$$

ergibt. C.68 eingesetzt erhält man für  $l_{RKE} = 1$  letztlich den Zusammenhang zwischen der *Zielgröße*  $Z_{\tau 5}$  und  $n_{LKt}$  unabhängig von später zu identifizierenden Parametern (für  $\varepsilon_W = \alpha = 0$  ist  $l_{mat i}$  allein durch die Form der *Gürtelringschale*,  $f_{Lmat}$  und  $F_{FH z}$  festgelegt)

$$\lim_{v_B \rightarrow 0} \left. \frac{\partial (M_{FH})_3}{\partial \alpha} \right|_{\lambda=\alpha=0} = - \frac{\frac{1}{12} c_{scher} \left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat i}^3 \right)}{1 + \frac{1}{12} c_{scher} \left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat i}^3 \right) \left( n_{LKt} + \frac{1}{c_{GF \text{ rot rad}}} \right)}$$

## C.14 Seitenkraftänderung in $\alpha$ abhängig von $n_{LK y}$

Dieser Abschnitt soll die Zusammenhänge, die sich unter den Voraussetzungen der *Zielgröße*  $Z_{\tau 6}$  zur Bestimmung von  $n_{LK y}$  ergeben, im Detail analysieren. Analog zu den Abschnitten C.12 und C.13 wird dadurch, zunächst von

$$F_{LGKx} = 0$$

auszugehen, ermöglicht, dass einige bereits vorhandene Zwischenresultate genutzt werden können. In Abschnitt C.9 wird eine vollständige Bilanz des *inertialen Sturzmoments*  $(A_{K0}^T M_{G0})_1$  unter einer *Latsch-Seitenkraft*  $F_{LGK y} > 0$  für beschränktes  $F_{LGKx}$ ,  $\varepsilon_W = 0$ ,  $v_B \rightarrow 0$  und vorgegebenes  $F_{FH z 0}$  erstellt, die also auch für die hier gegebenen Voraussetzungen zutrifft:

$$(A_{K0}^T M_{G0})_1 = (A_{K0 \text{ st}}^T M_{G0 \text{ st}})_1 + \Delta_1 (A_{K0 \text{ Fy}}^T M_{G0 \text{ Fy}})_1 + \Delta_2 (A_{K0 \text{ Fy}}^T M_{G0 \text{ Fy}})_1 \quad (\text{C.69})$$

$(A_{K0 \text{ st}}^T M_{G0 \text{ st}})_1$  definiert sich aus einer Situation mit dem *Reibwertkoeffizient*  $\mu = 0$ , unter dem keine *Latsch-Seitenkraft*  $F_{LGK y}$  entsteht, dieser Anteil nach 4.28 also nicht von  $n_{LK y}$  aber durchaus vom *Sturzwinkel*  $\varphi_{G0x}$  abhängt. Dann gilt für die Beschreibung um  $\varphi_{G0x} = 0$  nach C.43

$$\left. \frac{\partial (A_{K0 \text{ st}}^T M_{G0 \text{ st}})_1}{\partial (\varphi_{G0x} \quad F_{LGK y})} \right|_{\varphi_{G0x}=0} = (k_1 \quad 0), \quad k_1 < 0 \quad (\text{C.70})$$

$\Delta_1 (A_{K0 \text{ Fy}}^T M_{G0 \text{ Fy}})_1$  beschreibt den Anteil am *Sturzmoment*, der sich aus der *Latsch-Seitenkraft*  $F_{LGK y}$  direkt ergibt und bei vorgegebenem Wert von  $F_{LGK y}$  nach 4.35 nicht von  $n_{LK y}$  abhängt. Für  $F_{LGK y} = 0$  verschwindet dieser Anteil des *Sturzmoments* grundsätzlich und damit auch die *linearisierte* Änderung bei Variation von  $\varphi_{G0x}$  mit  $F_{LGK y} = 0$  um  $\varphi_{G0x} = 0$ . Um  $\varphi_{G0x} = F_{LGK y} = 0$  modelliert gilt also

$$\left. \frac{\partial \Delta_1 (A_{K0 \text{ Fy}}^T M_{G0 \text{ Fy}})_1}{\partial (\varphi_{G0x} \quad F_{LGK y})} \right|_{\varphi_{G0x}=F_{LGK y}=0} = (0 \quad k_2), \quad k_2 > 0 \quad (\text{C.71})$$

$\Delta_2 \left( A_{K0 Fy}^T M_{G0 Fy} \right)_1$  ist letztlich der einzige Anteil am *inertialen Sturzmoment*, den  $n_{LKy}$  beeinflusst. Dabei handelt es sich um die Querverschiebung der Vertikalkraftbeträge der einzelnen *Reibkontakt-Elemente*, die so über 4.34 auch einen Beitrag zum *Sturzmoment*  $\left( A_{K0}^T M_{G0} \right)_1$ , genauer zum *latschseitigen* Anteil  $\left( A_{K0}^T M_{LG0} \right)_1$  leisten. Auf die Vertikalkraftbeträge  $F_{z ij}$  selbst bzw. die Längsposition  $x_{REK j}$  der *Reibkontakt-Elemente* besitzen  $F_{LGKy}$  und damit auch  $n_{LKy}$  für  $\varphi_{G0x} = 0$  keinen direkten Einfluss ( $F_{z ij}$  sind hier wie  $l_{mat i}$  allein durch die Form der *Gürtelringschale* und  $F_{FH z}$  festgelegt), durchaus aber auf deren Queranordnung. Mit C.44 und 4.34 erhält man

$$\Delta_2 \left( A_{K0 Fy}^T M_{G0 Fy} \right)_1 = \sum_{i,j} \frac{n_{LKy}}{R_{Rmax}^2} \left( R_{Rmax}^2 - x_{REK j}^2 \right) F_{LGKy} F_{z ij}$$

Unter  $F_{LGKy} = 0$  verschwindet dieser Ausdruck grundsätzlich wie damit auch die *linearisierte* Änderung bei Variation von  $\varphi_{G0x}$  für  $F_{LGKy} = 0$  um  $\varphi_{G0x} = 0$ . Es ergibt sich also vereinfacht um  $\varphi_{G0x} = F_{LGKy} = 0$  modelliert

$$\frac{\partial \Delta_2 \left( A_{K0 Fy}^T M_{G0 Fy} \right)_1}{\partial (\varphi_{G0x} \quad F_{LGKy})} \Bigg|_{\varphi_{G0x}=F_{LGKy}=0} = (0 \quad k_3 n_{LKy}), \quad k_3 > 0 \text{ (s. Abschn. C.9)} \quad (\text{C.72})$$

Durch die *Stationärbedingung*  $\left( A_{K0}^T M_{G0} \right)_1 = 0$  erhält man mit C.69, C.70, C.71 und C.72 in *linearisierter* Darstellung um  $F_{LGKy} = \varphi_{G0x} = 0$

$$k_1 \varphi_{G0x} + k_2 F_{LGKy} + k_3 n_{LKy} F_{LGKy} + g_1 (F_{LGKy}, \varphi_{G0x}) = 0 \quad g_1 \in \mathcal{O} \left( F_{LGKy}^2 + \varphi_{G0x}^2 \right)$$

Da mit  $F_{LGKy} = 0$  auch  $\varphi_{G0x} = 0$  gilt, folgt aufgelöst nach dem Summand  $k_1 \varphi_{G0x}$  und differenziert nach  $F_{LGKy}$  in  $F_{LGKy} = \varphi_{G0x} = 0$  auch

$$\frac{\partial \varphi_{G0x}}{\partial F_{LGKy}} \Bigg|_{F_{LGKy}=0} = -\frac{1}{k_1} (k_2 + k_3 n_{LKy})$$

$k_1$ ,  $k_2$  und  $k_3$  sind alle unabhängig von  $n_{LKy}$ . Zusammengefasst heißt dies, dass

$$\lim_{v_B \rightarrow 0} \frac{\partial \varphi_{G0x}}{\partial F_{LGKy}} \Bigg|_{F_{LGKx}=F_{LGKy}=0} \quad (\text{C.73})$$

*streng monoton* in  $n_{LKy}$  steigt. Abbildung C.13 veranschaulicht die formal hergeleitete Eigenschaft mit zwei verschieden großen Werten für  $n_{LKy}$ , die bei identischen Werten für  $F_{LGKy}$  und  $F_{LGKz}$  verschieden große Querhebel für die Vertikalkraft bewirken und sich damit die unterschiedlich ausgeprägten *Sturzwinkel*  $\varphi_{G0x}$  des *Reifengürtels* einstellen. Klärt man noch, dass bei vorgegebenem  $F_{LGKz0}$  ( $f_G$  unabh. von  $r_{G0}$  (s. 4.15, 4.39)) in der Modellierung von C.69 inklusive Gleichung 4.42 kein  $c_{GF quer}$  und mit  $F_{LGKx} = 0$

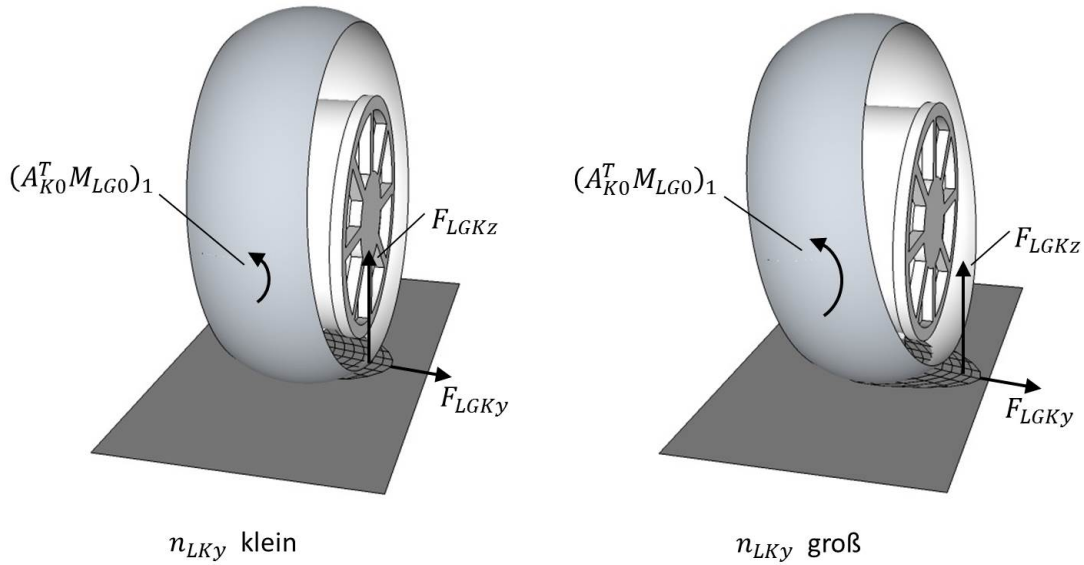


Abbildung C.13: Beeinflussung von  $\varphi_{G0x}$  durch  $n_{LKy}$  für feste Werte  $F_{LGKz}$  und  $F_{LGKy}$

auch kein  $n_{LKx}$  auftritt, wird offensichtlich, dass  $\lim_{v_B \rightarrow 0} \frac{\partial \varphi_{G0x}}{\partial F_{LGKy}} \Big|_{F_{LGKx}=F_{LGKy}=0}$  auch nicht von später zu identifizierenden Parametern abhängt.

Durch  $F_{LGKx} = 0$  ist auch die Voraussetzung für Abschnitt C.13 gegeben, es gelten also C.67, C.66 und C.63 und damit für den *Latsch-Schräglaufwinkel*, dass

$$\lim_{v_B \rightarrow 0} \frac{\partial \alpha_K}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=F_{LGKx}=0} \quad (C.74)$$

unabhängig von  $n_{LKy}$  und später zu identifizierenden Parametern ist (für  $\varepsilon_W = \alpha = 0$  ist  $l_{mat\ i}$  allein durch die Form der *Gürtelringschale*,  $f_{L\ mat}$  und  $F_{FH_z}$  festgelegt). Abschnitt C.10 setzt voraus, dass  $\varepsilon_W = 0$  und  $\lambda_K = 0$ , was nach Abschnitt C.4 und C.6 gemäß C.15 und C.18 *stationär* gleichbedeutend ist mit  $F_{LGKx} = 0$ . Es gilt also auch C.48 und damit

$$\begin{aligned} & \lim_{v_B \rightarrow 0} \frac{\partial F_{LGKy}}{\partial \alpha_K} \Big|_{\alpha_K=F_{LGKx}=0} \\ &= \frac{\frac{1}{2} c_{scher} \left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat\ i}^2 \right)}{l_{RKE} \left( 1 + \frac{1}{6} c_{scher} \left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat\ i}^3 \right) (n_{LKb} + k) \right) \cdot \left( 1 + \frac{1}{12} c_{scher} \left( \sum_{i=1}^{n_{LS}} l_{mat\ i}^3 \right) n_{LKt} \right)} \end{aligned}$$

Dabei beschreibt  $k$  mit  $k > 0$  nach C.45 den Einfluss des *Sturzwinkels*  $\varphi_{G0x}$  des *Reifengürtels* auf die Auslenkungen im *Latsch*.  $k$  wächst also *proportional* zu

$$\lim_{v_B \rightarrow 0} \frac{\partial \varphi_{G0x}}{\partial F_{LGKy}} \Big|_{F_{LGKx}=F_{LGKy}=0}$$

aus C.73, und es folgt, dass auch  $k$  *streng monoton* in  $n_{LKy}$  wächst und unabhängig ist von später zu identifizierenden Parametern. Nach 4.28 gilt direkt

$$n_{LKb} = \frac{n_{LKy}}{R_{Rmax}^2}$$

und es wird klar, dass  $\lim_{v_B \rightarrow 0} \frac{\partial F_{LGKy}}{\partial \alpha_K} \Big|_{\alpha_K = F_{LGKx} = 0}$  selbst *streng monoton* in  $n_{LKy}$  fällt und nicht von später zu identifizierenden Parametern abhängt (zu  $l_{mati}$  s.o.).

Zur Parameteridentifikation können ausschließlich Zusammenhänge zu Schnittstellengrößen ausgenutzt werden. Die Beziehung

$$\lim_{v_B \rightarrow 0} \frac{\partial F_{LGKy}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha = F_{LGKx} = 0} = \lim_{v_B \rightarrow 0} \frac{\partial F_{LGKy}}{\partial \alpha_K} \Big|_{\alpha_K = F_{LGKx} = 0} \cdot \lim_{v_B \rightarrow 0} \frac{\partial \alpha_K}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha = F_{LGKx} = 0}$$

hilft dabei, zu einer Darstellung in  $\alpha$  zu gelangen. Mit den Erläuterungen zu C.74 folgt, dass auch

$$\lim_{v_B \rightarrow 0} \frac{\partial F_{LGKy}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha = F_{LGKx} = 0}$$

*streng monoton* in  $n_{LKy}$  fällt und nicht von später zu identifizierenden Parametern abhängt. Bei der Übertragung des Ergebnisses von der *Latsch-* auf die Felgen-Seitenkraft hilft die erste Zeile von Gleichung C.50, für die die Voraussetzung  $F_{FH_y} = \lambda = 0$  von Abschnitt C.11 nicht gilt, wobei mit den hier festgelegten Nebenbedingungen alle übrigen Voraussetzungen von Abschnitt C.11 gegeben sind

$$F_{FH_y} = F_{LGKx} \sin \varphi_{G0z} + F_{LGKy} \cos \varphi_{G0z}$$

Die hier zusätzlich getroffene Bedingung  $F_{LGKx} = 0$  vereinfacht den Zusammenhang auf

$$F_{FH_y} = F_{LGKy} \cos \varphi_{G0z}$$

und es folgt

$$\begin{aligned} \lim_{v_B \rightarrow 0} \frac{\partial F_{FH_y}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha = F_{LGKx} = 0} &= \lim_{v_B \rightarrow 0} \frac{\partial F_{LGKy}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha = F_{LGKx} = 0} \cdot \cos 0 - 0 \cdot \sin 0 \\ &= \lim_{v_B \rightarrow 0} \frac{\partial F_{LGKy}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha = F_{LGKx} = 0} \end{aligned}$$

womit dann auch  $\lim_{v_B \rightarrow 0} \frac{\partial F_{FH_y}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha = F_{LGKx} = 0}$  *streng monoton* in  $n_{LKy}$  fällt und nicht von später zu identifizierenden Parametern abhängt.

Über die Schnittstellengrößen des Gesamtmodells lässt sich auch  $F_{LGKx}$  nicht direkt einstellen, weshalb in der endgültigen *Zielgröße* keine Einschränkungen mehr an  $F_{LGKx}$

auftreten dürfen. Erreicht werden kann dies analog zu Abschnitt C.13, indem der Einfluss von  $F_{LGKx} \neq 0$  zusätzlich abstrakt modelliert wird

$$\lim_{v_B \rightarrow 0} F_{FHy} = \lim_{v_B \rightarrow 0} \left. \frac{\partial F_{FHy}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=F_{LGKx}=0} \cdot \alpha + k_4 F_{LGKx} + g_2(\alpha, F_{LGKx})$$

$$g_2 \in \mathcal{O}(\alpha^2 + F_{LGKx}^2)$$

Auch hier kann C.49 aus Abschnitt C.11 mit  $\varepsilon_W = 0$  angewandt werden, und  $F_{LGKx}$  lässt sich darstellen als

$$F_{LGKx}|_{\lambda=0} = k_5 \alpha^2 + g_3(\alpha) \quad g_3 \in \mathcal{O}(\alpha^3)$$

Eingesetzt in die Beschreibung der Seitenkraft erhält man

$$\lim_{v_B \rightarrow 0} F_{FHy} = \lim_{v_B \rightarrow 0} \left. \frac{\partial F_{FHy}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=F_{LGKx}=0} \cdot \alpha + g_4(\alpha) \quad g_4 \in \mathcal{O}(\alpha^2)$$

und in differenzierter Form

$$\lim_{v_B \rightarrow 0} \left. \frac{\partial F_{FHy}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \lim_{v_B \rightarrow 0} \left. \frac{\partial F_{FHy}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=F_{LGKx}=0} \quad (\text{C.75})$$

Also fällt letztlich auch  $\lim_{v_B \rightarrow 0} \left. \frac{\partial F_{FHy}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}$  streng monoton in  $n_{LKy}$  und hängt von keinem später zu identifizierenden Parameter ab.

## C.15 Eindeutigkeit von $\varphi_{G0x}$ und $\varphi_{G0z} = 0$ für $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Betrachtet man das Modellverhalten für *Stationärzustände*, die außerhalb einer beliebig kleinen Umgebung des Grundzustands  $\lambda = \alpha = \varepsilon = 0$  liegen, kann nicht mehr einfach ausgeschlossen werden, dass *nichtlineare* Effekte unter derselben Anregung zu verschiedenen Modellantworten führen können. Hier soll nun geklärt werden, dass zumindest unter bestimmten Voraussetzungen, die eine Parameteridentifikation nicht einschränken, durchaus auf eine eindeutige Längsverdrehung  $\varphi_{G0x}$  und eine Vertikalverdrehung  $\varphi_{G0z}$  des *Reifengürtels* von 0 geschlossen werden kann. Weiter folgt über 4.36  $\dot{\varphi}_{G0y} = 0$ . Im Fall der Vertikalkraft soll ein fest eingestellter Wert  $F_{FH_z0}$  angenommen werden, der dann auch eine konstante *Gürteleinfederung*  $f_{G0}$  bewirkt (s. Abschn. 4.2.1). Außerdem lassen es die Bedingungen von Abschnitt 4.2.7 zu, dass man von einer konstanten resultierenden Seitenkraft  $F_{FHy0}$  ausgeht, unabhängig davon ob die übrigen betrachteten Zustandsgrößen auch diese *Latsch*-Seitenkraft bewirken, da nur Situationen unter



dem vorgegebenen Wert  $F_{FHy0}$  in die Ergebnisberechnung eingehen. Der Vorgang der *Latsch*-Längsverschiebung unter einer *Latsch*-Längskraft  $F_{LGKx} \neq 0$  lässt bereits kein einfaches Schließen auf ein *Latsch*-Rückstellmoment  $M_{LGKz} = 0$  und eine vertikale Verdrehung des *Reifengürtels* von  $\varphi_{G0z} = 0$  zu. Daher soll nun durch eine Abschätzung der Verdrehmomentänderungen aus verschiedenen Effekten zunächst  $M_{LGKz} = 0$  für einen konstanten, erzwungenen *Sturzwinkel*  $\varphi_{G0x0}$  hergeleitet werden. Bei konstant gehaltenem  $F_{FHy0}$  und durch  $\dot{\varphi}_{G0y} = 0$ , also durch reine *Gleitreibung* gleich zur Bewegung der Felge gerichteter horizontaler Gesamtkraft (s. 4.30, mit 4.17  $x_{REK def j}$ ,  $y_{REK def \varphi x ij}$  stationär konstant,  $(A_{K0}^T \dot{r}_{K0})_{1..2} = (v_{0Kx ij} \ v_{0Ky ij})^T$ , stationär gilt für  $\dot{\varphi}_{G0y} = 0$  auch  $\dot{a}_{x ij} = \dot{a}_{y ij} = 0$ ,  $u_{x ij} = v_{0Kx ij}$ ,  $u_{y ij} = v_{0Ky ij}$ , Richtungskomponenten von  $F_{reib ij}$  gemäß  $u_{x ij}$ ,  $u_{y ij}$ ) ist auch die *inertiale Latsch*-Kraft  $A_{K0} (0 \ F_{FHy0})^T$  konstant. Dann ergibt sich die *Latsch*-Längskraft zu  $F_{LGKx} = F_{FHy0} \sin \varphi_{G0z}$ , womit

$$\left| \frac{\partial F_{LGKx}}{\partial \varphi_{G0z}} \right| \leq |F_{FHy0}|$$

folgt. Nach 4.15, 4.19, 4.20 und 4.10 beeinflussen von den Zustandsgrößen ausschließlich  $\varphi_{G0x}$  und  $F_{FHx}$  die Mittenhöhe  $r_{G0z}$  des *Reifengürtels* bzw. die Längen  $l_{mat i}$  der *Laufstreifen* und nicht  $\varphi_{G0z}$ , weshalb sich mit 4.28 und 4.24 die Beschränktheit auf die Änderung der Bodendruckwerte überträgt. Formal ausgedrückt bedeutet dies

$$\left| \frac{\partial p_{ij}}{\partial \varphi_{G0z}} \right| \leq b_1 |F_{FHy0}|$$

für einen unter einer festliegenden Modellparametrierung konstanten Wert  $b_1$ . Unter  $\dot{\varphi}_{G0y} = 0$  befinden sich für  $\dot{r}_{K0} = \dot{r}_{F0} \neq 0$  nach 4.30 sämtliche *Reibkontakt-Elemente* in *Gleitreibung* ( $\dot{x}_{REK def j} = \dot{y}_{REK def \varphi x ij} = 0$ , s.o.). Deren *inertiale* Querkraft ist mit  $\dot{r}_{K0} = (0 \ -v_B)^T$  für  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  also

$$F_{0y ij} = \mu (\Delta v, p_{ij}) F_{z ij} = l_{RKE} b_{RKE} \mu (\Delta v, p_{ij}) p_{ij}$$

und es gilt

$$\left| \frac{\partial F_{0y ij}}{\partial \varphi_{G0z}} \right| \leq b_2 |F_{FHy0}|$$

Durch die von  $\varphi_{G0z}$  unabhängigen Längen  $l_{mat i}$  der *Laufstreifen* ändert sich an der Menge der *Reibkontakt-Elemente* mit Bodenkontakt nichts. Da  $\varphi_{G0z}$  auch  $(A_{K0}^T (r_{G0} - r_{K0}))_{1..2}$  nicht beeinflusst (4.12), folgt mit der beschränkten Änderung von  $\Delta x_{LGK}$  (s.o.) bzw.  $\Delta y_{LGK}$  und damit von  $x_{REK def j}$  bzw.  $y_{REK def \varphi x ij}$  sowie dem konstanten Wert  $F_{FHy0}$  entsprechend 4.34 und 4.35

$$\left| \frac{\partial M_{LG0z}}{\partial \varphi_{G0z}} \right| \leq b_3 |F_{FHy0}|$$

Mit  $\dot{\varphi}_{G0y} = 0$ , dem konstanten Wert  $\|r_{G0} - r_{K0}\|$  (s.o.) und der beschränkten Änderung für  $F_{LGKx}$  ergibt 4.22

$$\left| \frac{M_{LGKy}}{\varphi_{G0z}} \right| \leq b_4 |F_{FHy0}|$$

Bei zugleich *gestürztem* und vertikalgedrehtem *Reifengürtel* nimmt auch die nicht von außen erzwungene Verdrehung des *Reifengürtels* in dessen Querrichtung gegenüber der Felge Einfluss auf das felgenseitig in den *Reifengürtel* eingeprägte *inertiale* Vertikalmoment  $M_{FG0z}$ .  $\varphi_{G0y}$  ergibt sich abhängig von  $\varphi_{G0x0}$ ,  $\varphi_{G0z}$  und den vom *Latsch* in den *Reifengürtel* eingepprägten Momenten (4.7 für  $\dot{\varphi}_{G0y} = 0$  ohne Orientierungsänderung durch Reifendrehung und  $\omega_{FGlin} = 0$ , 4.35, 4.10, 4.34, wobei sich mit  $p_{ij}$  auch  $F_{zij}$  beschränkt ändert). Da sich auch in diesem Zusammenhang sämtliche Größen mit den entsprechenden Beschränkungen in  $\varphi_{G0z}$  ändern, kann die Änderung von  $\varphi_{G0y}$  in  $\varphi_{G0z}$  als

$$\left| \frac{\partial \varphi_{G0y}}{\partial \varphi_{G0z}} \right| \leq b_5 |F_{FHy0}|$$

abgeschätzt werden. Bei der für die Situation hier wählbaren Felgenorientierung  $\varphi_{F0} = 0$  gilt für hinreichend kleine Winkelkomponenten von  $\varphi_{G0}$  die Beschränkung

$$b_6 \leq \frac{\partial \varphi_{FGlinx/y/z}}{\partial \varphi_{G0x/y/z}} \leq b_7 \text{ mit } b_6, b_7 > 0$$

Dann kann der ausmultiplizierte Term der dritten Komponente von 4.42

$$M_{FG0z} = - (c_{GF \text{ rot ax}} \varphi_{FGliny} \sin \varphi_{G0x0} + c_{GF \text{ rot rad}} \varphi_{FGlinz} \cos \varphi_{G0x0})$$

differenziert nach  $\varphi_{G0x}$  mit der beschränkten Änderung von  $\varphi_{G0y}$  abgeschätzt werden als

$$\frac{\partial M_{FG0z}}{\partial \varphi_{G0z}} \leq b_8 |F_{FHy0}| - b_6 c_{GF \text{ rot rad}} \cos \varphi_{G0x0}$$

Das bedeutet für  $M_{G0z}$

$$\frac{\partial M_{G0z}}{\partial \varphi_{G0z}} = \frac{\partial M_{FG0z}}{\partial \varphi_{G0z}} + \frac{\partial M_{LG0z}}{\partial \varphi_{G0z}} \leq -b_6 c_{GF \text{ rot rad}} \cos \varphi_{G0x0} + (b_3 + b_8) |F_{FHy0}|$$

Es existiert nun ein  $F_{LGKz0}$ , so dass für alle  $F_{LGKz} \leq F_{LGKz0}$  der Wert von  $|F_{FHy0}|$  hinreichend klein ist (s.u.) und damit

$$\frac{\partial M_{G0z}}{\partial \varphi_{G0z}} < 0$$

gilt. Für  $\varphi_{G0z} = 0$  gilt wie von der *Stationärbedingung* vorausgesetzt  $M_{G0z} = 0$  ( $F_{LGKx} = 0$ , daher symmetrische Bodendruckverteilung sowie symmetrische Seitenkraftverteilung).

Also ist für festliegendes  $\varphi_{G0x}$  und hinreichend kleines  $F_{LGKz0}$  dies die eindeutige Gleichgewichtslage für  $\varphi_{G0z}$ . Denn für das integrierte *inertiale* Vertikalmoment gilt für  $\varphi_{G0z0} \neq 0$

$$M_{G0z} = \int_0^{\varphi_{G0z0}} \frac{\partial M_{G0z}}{\partial \varphi_{G0z}} d\varphi_{G0z} \neq 0$$

Unter den Voraussetzungen von Abschnitt 4.2.7 kann so  $\varphi_{G0z} = 0$  garantiert und soll im Folgenden vorausgesetzt werden.

Dann kann analog auch für  $\varphi_{G0x}$  unter den vorliegenden Bedingungen eine eindeutige Gleichgewichtslage hergeleitet werden. Aus  $\varphi_{G0z} = 0$  erhält man einmal eine *Latsch*-Seitenkraft von  $F_{LGKy0} = F_{FHy0}$ . Durch die ausbleibenden Längsauslenkungen der *Reibkontakt-Elemente* ergibt sich  $F_{xij} = F_{LGKx} = 0$  und mit  $\dot{\varphi}_{G0y} = 0$  auch  $M_{LGKy} = 0$ . So folgt außerdem auch  $\Delta x_{LGK} = 0$ , die zur Querachse des *Kontaktsystems* symmetrische *Bodendruckverteilung* (4.24), damit in 4.30 die ebenso symmetrische Verteilung der *Latsch-Querkräfte*  $F_{yij}$ , was in 4.34  $M_{LGKz} = 0$  bedeutet. Zunächst ist es hilfreich zu sehen, dass sich die Änderung aller vom *Latsch* in den *Reifengürtel* eingepprägter Kräfte und Momente in  $\varphi_{G0x}$  abhängig von  $F_{FHx0}$  abschätzen lässt. Dabei soll sich  $\varphi_{G0x}$  wieder nicht durch die Modellgleichungen einstellen, sondern erzwungen werden. Den kompliziertesten Fall ergeben die Effekte, die die sich ändernde Bodendurchdringung bei Änderung von  $\varphi_{G0x}$  unter *stationärer* Anregung mit sich bringt. Da diese sich direkt auf die Längen der *Laufstreifen* auswirkt, muss zunächst die resultierende Änderung der  $l_i$  untersucht werden. In 4.13 sieht man, dass die Änderung  $\left| \frac{\partial d_{GBKz}}{\partial \varphi_{G0x}} \right|$  des  $z$ -Abstands zwischen  $r_G$  und dem Punkt der tiefsten Bodendurchdringung für eine festliegende Parametrierung konstant beschränkt ist (auf ebenem Boden ist  $\varepsilon_{GK} = \varphi_{G0x}$ ). Mit konstantem  $f_{G0}$  (s.o.) folgt über 4.14 auch, dass  $\left| \frac{\partial r_{GKz}}{\partial \varphi_{G0x}} \right|$  und zusammen mit hinreichend kleinem  $|\varphi_{G0x}|$ , dass  $\left| \frac{\partial \|r_{G0} - r_{K0}\|}{\varphi_{G0x}} \right|$  (s. Abb. 4.37) konstant beschränkt ist. Gleichung 4.19 zeigt damit auch die Beschränktheit von  $\left| \frac{\partial s_i}{\partial \varphi_{G0x}} \right|$ . Für die Änderung  $\frac{\partial l_i}{\partial \varphi_{G0x}}$  der *Laufstreifenlängen* ergibt sich im Fall  $s_i = R_i$  nach 4.19 tatsächlich ein unbeschränkter Wert

$$\lim_{s_i \rightarrow R_i} \left| \frac{\partial l_i}{\partial \varphi_{G0x}} \right| \rightarrow \infty$$

Diese beliebig große Änderung von  $l_i$  erfolgt, wenn der Kreisring des  $i$ . *Laufstreifens* durch Variation von  $\varphi_{G0x}$ , wie es Abbildung C.14 zeigt, in den Boden eindringt bzw. wieder heraustritt. Anders zeigt sich die Änderung von  $l_i^2$  konstant beschränkt. Nach 4.19 gilt

$$\frac{\partial l_i^2}{\partial \varphi_{G0x}} = -8R_i \frac{\arccos \frac{s_i}{R_i}}{\sqrt{1 - \frac{s_i^2}{R_i^2}}} \frac{\partial s_i}{\partial \varphi_{G0x}}$$

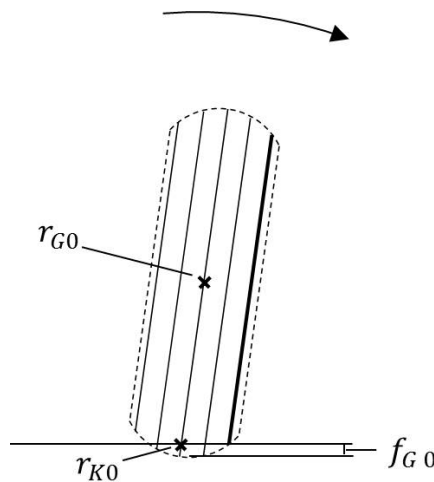


Abbildung C.14: Entstehender bzw. verschwindender *Laufstreifen* durch Änderung von  $\varphi_{G0x}$

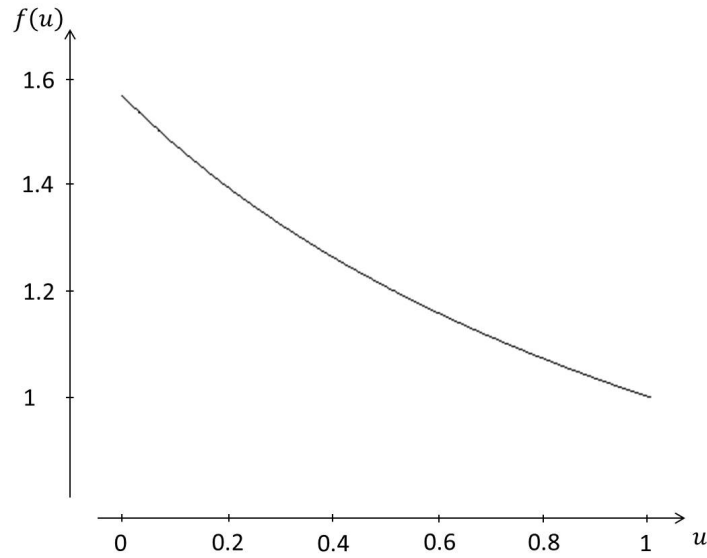
und mit der Substitution  $u = \frac{s_i}{R_i}$

$$\frac{\partial l_i^2}{\partial \varphi_{G0x}} = -8R_i \frac{\partial s_i}{\partial \varphi_{G0x}} \cdot f(u), \quad f(u) = \frac{\arccos u}{\sqrt{1-u^2}}$$

Laut 4.19 und Abbildung 4.38 ist  $0 \leq s_i < R_i$  und damit  $0 \leq u < 1$ . Da  $R_i$  eine Modellkonstante ist, muss zur Abschätzung von  $\frac{\partial l_i^2}{\partial \varphi_{G0x}}$  also nur  $f$  für  $0 \leq u < 1$  betrachtet werden. Es ist möglich,  $f$  analytisch abzuschätzen, worauf hier jedoch zu Gunsten einer einfacheren und anschaulicheren numerischen Berechnung mit dem Funktionsgraph in Abbildung C.15 verzichtet werden soll. Dort zeigt sich die Beschränktheit von  $f$ , und es folgt für hinreichend kleines  $|\varphi_{G0x}|$

$$\left| \frac{\partial l_i^2}{\partial \varphi_{G0x}} \right| \leq L_{max}$$

Von den unterschiedlich modellierten Anteilen des *Kontakt-Sturzmoments*  $M_{LGKx}$  ist die Änderung  $\frac{\partial M_{LGKx} Fz F_{LGKy=0}}{\partial \varphi_{G0x}}$  des Anteils aus den Längenänderungen der unverformten *Laufstreifen* (4.20, Moment aus 4.24, 4.25 aufsummiert in C.51) durch den nicht beschränkten Wert von  $\frac{\partial l_i}{\partial \varphi_{G0x}}$  in Situationen wie in Abbildung C.14 nicht beschränkt. In der formalen Berechnung leuchtet dieser Effekt am besten für eine Änderung von  $\varphi_{G0x}$  um  $\varphi_{G0x} = 0$  ein, wobei zwei symmetrisch liegende Parallelkreise der *Gürtelringschale* für  $\varphi_{G0x} = 0$  den Boden gerade berühren. Bei Veränderung von  $\varphi_{G0x}$  zwischen positiven und negativen Werten ändert sich der Nenner in C.51 nicht, der Zähler erfährt jedoch


 Abbildung C.15: Funktion  $f$  für  $0 \leq u < 1$ 

die differenziert unbeschränkt große Änderung. Die unbeschränkten, für kleine  $F_{FH_z}$  besonders großen Werte von  $\frac{\partial M_{LGK_x F_z F_{LGK_y=0}}}{\partial \varphi_{G0x}}$  sind dabei nichts als *numerische Artefakte* aus der Modellierung mit *diskreten Laufstreifen*. Bei *kontinuierlicher* Darstellung und Berücksichtigung der lokalen Bodendurchdringung, wie sie Abbildung C.16 zeigt, liegen beliebig viele *Laufstreifen* in Queranordnung, von denen jeder bei Bodendurchdringung einen beliebig kleinen Effekt besitzt. So sind auch die aus der Bodendurchdringung resultierenden Änderungen des *Latsch-Sturzmoments* beschränkt und dies auch durch die aus der Gesamtdurchdringung resultierende Vertikalkraft  $F_{LGK_z}$ . Eine große Zahl *diskreter Laufstreifen* ist eine Annäherung der *kontinuierlichen Modellierung*, behält jedoch das Problem der beliebig großen Werte  $\frac{\partial M_{LGK_x F_z F_{LGK_y=0}}}{\partial \varphi_{G0x}}$  bei, wodurch deren rein numerischer Hintergrund offensichtlich wird. Bei hinreichend getreuer Abbildung der physikalischen Vorgänge, wie sie hier vorausgesetzt wird, kann der Einfluss ausschließlich numerischer Effekte ignoriert und  $\frac{\partial M_{LGK_x F_z F_{LGK_y=0}}}{\partial \varphi_{G0x}}$  physikalisch als beschränkt betrachtet werden

$$\left| \frac{\partial M_{LGK_x F_z} |_{F_{LGK_y=0}}}{\partial \varphi_{G0x}} \right| \leq a_1 F_{LGK_z}$$

Unter konstanter Seitenkraft  $F_{LGK_y 0}$  ist der *Latsch* gemäß 4.28 verformt. Dies führt zwar zu einer konstanten Verlagerung der angreifenden Vertikalkraftänderungen im *Latsch*, die hierbei resultierende Änderung des *Sturzmoments* aus den lokalen Vertikalkräften (4.34)

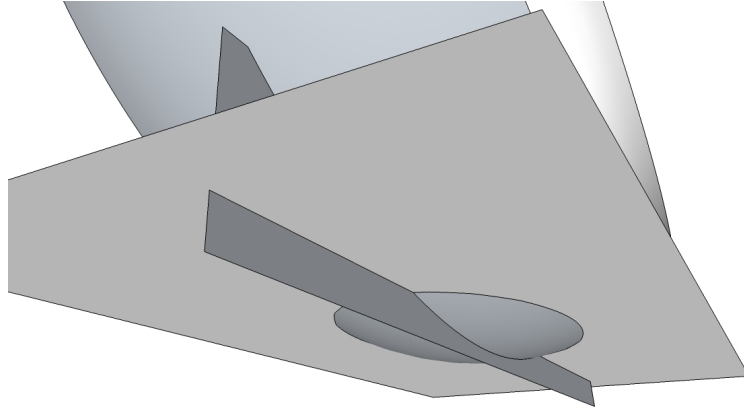


Abbildung C.16: *Kontinuierliche* Bodendurchdringung mit res. beschränkter *sturzwinkelabh.* Änderung des *Sturzmoments*

bleibt jedoch genauso beschränkt in  $F_{LGKz}$

$$\left| \frac{\partial M_{LGKx Fz} |_{F_{LGKy0}}}{\partial \varphi_{G0x}} \right| \leq a_2 F_{LGKz}$$

Mit dem Modellansatz des *kontinuierlichen* Bodendrucks aus der lokalen Bodendurchdringung wird diese Eigenschaft unmittelbar klar. Dass die zusätzlichen Anteile der Änderung aus der konstanten *Latsch*-Biegung beschränkt durch  $F_{LGKz}$  sind, gilt jedoch auch für die originalen Gleichungen des Reifenmodells. Nach den Gleichungen 4.24, 4.25, 4.28 und 4.34 kann der Anteil des *Sturzmoments* aus der *Latsch*-Biegung analog Gleichung C.51 in einem Term beschrieben ( $b = 0$  wegen  $F_{LGKx} = M_{LGKy} = 0$ ) und mit der Substitution  $u = \frac{x_K}{l_i}$  weiter vereinfacht werden

$$\begin{aligned} & M_{LGKx Fz} |_{F_{LGKy0}} \\ &= - \frac{\sum_i \int_{-\frac{1}{2}l_i}^{+\frac{1}{2}l_i} n_{LKb} F_{LGKy0} x_K^2 F_{LGKz} \left(1 - \left|\frac{2x_K}{l_i}\right|^{e_l}\right) \left(1 - \left|\frac{2y_{REK i}}{B_R}\right|^{e_q}\right) l_i dx_K}{\sum_i \int_{-\frac{1}{2}l_i}^{+\frac{1}{2}l_i} \left(1 - \left|\frac{2x_K}{l_i}\right|^{e_l}\right) \left(1 - \left|\frac{2y_{REK i}}{B_R}\right|^{e_q}\right) l_i dx_K} \\ &= - \frac{\sum_i \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} n_{LKb} u^2 \left(1 - |2u|^{e_l}\right) \left(1 - \left|\frac{2y_{REK i}}{B_R}\right|^{e_q}\right) du F_{LGKz} F_{LGKy0} l_i^4}{\sum_i \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left(1 - |2u|^{e_l}\right) \left(1 - \left|\frac{2y_{REK i}}{B_R}\right|^{e_q}\right) du l_i^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -F_{LGKz} F_{LGKy} 0 \frac{\sum_i b_i l_i^4}{\sum_i c_i l_i^2} \\
 b_i &= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} n_{LKb} u^2 (1 - |2u|^{e_l}) \left(1 - \left|\frac{2y_{REK} i}{B_R}\right|^{e_q}\right) du \\
 c_i &= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} (1 - |2u|^{e_l}) \left(1 - \left|\frac{2y_{REK} i}{B_R}\right|^{e_q}\right) du
 \end{aligned}$$

Nach 4.21 gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 (1 - |2u|^{e_{min}}) \left(1 - \left|\frac{2y_{REK} i}{B_R}\right|^{e_{min}}\right) &\leq (1 - |2u|^{e_l}) \left(1 - \left|\frac{2y_{REK} i}{B_R}\right|^{e_q}\right) \\
 &\leq (1 - |2u|^{e_{max}}) \left(1 - \left|\frac{2y_{REK} i}{B_R}\right|^{e_{max}}\right)
 \end{aligned}$$

und es existieren  $b_{min}$ ,  $b_{max}$ ,  $c_{min}$  und  $c_{max}$  mit

$$0 < b_{min} \leq b_i \leq b_{max}, \quad 0 < c_{min} \leq c_i \leq c_{max}$$

Das bedeutet für die Änderung des *Sturzmoment*-Anteils aus *Latsch*-Biegung und Bodendruckverteilung ( $e_l$ ,  $e_q$  durch konstantes  $f_{G0}$  (s.o.) unabh. von  $\varphi_{G0x}$ )

$$\begin{aligned}
 &\left| \frac{\partial}{\partial \varphi_{G0x}} \frac{M_{LGKx} Fz q |_{F_{LGKy} 0}}{F_{LGKz} F_{LGKy} 0} \right| = \left| \frac{\partial}{\partial \varphi_{G0x}} \frac{\sum_i b_i l_i^4}{\sum_i c_i l_i^2} \right| \\
 &= \left| \frac{\left( \sum_i 2b_i l_i^2 \frac{\partial l_i^2}{\partial \varphi_{G0x}} \right) \left( \sum_i c_i l_i^2 \right) - \left( \sum_i b_i l_i^4 \right) \left( \sum_i c_i \frac{\partial l_i^2}{\partial \varphi_{G0x}} \right)}{\left( \sum_i c_i l_i^2 \right)^2} \right| \\
 &\leq \frac{b_{max} c_{max}}{c_{min}^2} \left| \frac{2 \left( \sum_i l_i^2 \frac{\partial l_i^2}{\partial \varphi_{G0x}} \right) \left( \sum_i l_i^2 \right) + \left( \sum_i l_i^4 \right) \left( \sum_i \frac{\partial l_i^2}{\partial \varphi_{G0x}} \right)}{\left( \sum_i l_i^2 \right)^2} \right| \\
 &\leq \frac{b_{max} c_{max} L_{max}}{c_{min}^2} \cdot \frac{2 \left( \sum_i l_i^2 \right) \left( \sum_i l_i^2 \right) + n_{LS} \sum_i l_i^4}{\left( \sum_i l_i^2 \right)^2} = \frac{b_{max} c_{max} L_{max}}{c_{min}^2} \left( 2 + \frac{n_{LS} \sum_i l_i^4}{\sum_i l_i^4 + 2 \sum_{i \neq j} l_i^2 l_j^2} \right) \\
 &\leq \frac{b_{max} c_{max} L_{max}}{c_{min}^2} (2 + n_{LS})
 \end{aligned}$$

womit

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial M_{LGKx Fz q} |_{F_{LGKy0}}}{\partial \varphi_{G0x}} \right| &\leq F_{LGKz} |F_{LGKy0}| \frac{b_{max} c_{max} L_{max}}{c_{min}^2} (2 + n_{LS}) \\ &= a_3 F_{LGKz} |F_{LGKy0}| \end{aligned}$$

folgt. Viel einfacher ergibt sich der Anteil der Änderung des *Latsch-Sturzmoments* (4.34) aus der reinen Querverschiebung  $\Delta y_{LGK}$  in 4.28 zu

$$\frac{\partial M_{LGKx Fz \Delta y_{LGK}} |_{F_{LGKy0}}}{\partial \varphi_{G0x}} = n_{LKy} F_{LGKy0} \frac{\partial}{\partial \varphi_{G0x}} \sum_{i,j} F_{z ij} = n_{LKy} F_{LGKy0} \frac{\partial}{\partial \varphi_{G0x}} F_{LGKz0} = 0$$

Da nun in 4.24 und 4.28  $\Delta x_{LGK} = p = 0$  gilt ( $M_{LGKz} = 0$ , s.o.), erhält man für die Änderung des gesamten *Latsch-Sturzmoments* nach 4.34

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\partial M_{LGKx} |_{F_{LGKy0}}}{\partial \varphi_{G0x}} \right| \\ &= \left| \frac{\partial M_{LGKx Fz} |_{F_{LGKy0}=0}}{\partial \varphi_{G0x}} + \frac{\partial M_{LGKx Fz q} |_{F_{LGKy0}}}{\partial \varphi_{G0x}} + \frac{\partial M_{LGKx Fz \Delta y_{LGK}} |_{F_{LGKy0}}}{\partial \varphi_{G0x}} \right| \\ &\leq (a_1 + a_3 |F_{LGKy0}|) F_{LGKz} \end{aligned}$$

Wie schon gezeigt sind die Komponenten von  $\frac{\partial (r_{G0} - r_{K0})}{\partial \varphi_{G0x}}$  für hinreichend kleine Werte von  $|\varphi_{G0x}|$  konstant beschränkt. Für  $\varphi_{G0z} = 0$  (s.o.) ist  $A_{K0} = I_3$  konstant, und es gilt nach 4.35 für die Änderung des vom *Latsch* in den *Reifengürtel* eingepprägten *Sturzmoments* durch die konstanten Werte  $F_{LGKy0}$  und  $F_{LGKz}$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial M_{LG0x}}{\partial \varphi_{G0x}} \right| &\leq a_4 |F_{LGKy0}| + a_5 F_{LGKz} + \left| \frac{\partial M_{LGKx} |_{F_{LGKy0}}}{\partial \varphi_{G0x}} \right| \\ &\leq a_4 |F_{LGKy0}| + a_6 F_{LGKz} + a_3 |F_{LGKy0}| F_{LGKz} \end{aligned}$$

mit unter festliegender Parametrierung konstanten Werten  $a_3$ ,  $a_4$  und  $a_6$ .

Über  $M_{LGKy} = M_{LGKz} = F_{LGKx} = 0$ ,  $A_{K0} = I_3$  und damit  $(r_{G0} - r_{K0})_1 = 0$  erhält man in 4.35  $(M_{LG0})_{2..3} = 0$ , womit sich *stationär* auch  $(M_{FG0})_{2..3} = 0$  ergibt. Mit  $\varphi_{G0z} = 0$  und  $\dot{\varphi}_{0y} = 0$  liefert 4.42 die Gleichung

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi_{G0x} & -\sin \varphi_{G0x} \\ \sin \varphi_{G0x} & \cos \varphi_{G0x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{GF \text{ rot ax}} R_{const 1,3} \\ c_{GF \text{ rot rad}} R_{const 2,1} \end{pmatrix} = (M_{FG0})_{2..3} = 0$$



womit  $R_{const\ 1,3} = R_{const\ 2,1} = 0$  folgt. Nach 4.41 gilt also  $(\varphi_{FG\ lin})_{2..3} = 0$ . Dann vereinfacht sich der exakte Zusammenhang zwischen *linearisiertem* Drehwinkel und  $\varphi_{G0x}$  zu  $(\varphi_{FG\ lin})_1 = -\sin \varphi_{G0x}$ , und man erhält wieder mit  $\varphi_{G0z} = \dot{\varphi}_{0y} = 0$  aus 4.42 und 4.41 für das von der Felge in den *Reifengürtel* eingeprägte *Sturzmoment*

$$M_{FG0x} = -c_{GF\ rot\ rad} \sin \varphi_{G0x}$$

Über 4.10 erhält man so für die Änderung des resultierenden *Sturzmoments* auf den *Reifengürtel*

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{G0x}}{\partial \varphi_{G0x}} &= \frac{\partial M_{FG0x}}{\partial \varphi_{G0x}} + \frac{\partial M_{LG0x}}{\partial \varphi_{G0x}} \leq \frac{\partial M_{FG0x}}{\partial \varphi_{G0x}} + \left| \frac{\partial M_{LG0x}}{\partial \varphi_{G0x}} \right| \\ &\leq -c_{GF\ rot\ rad} \cos \varphi_{G0x} + a_4 |F_{LGK_{y0}}| + a_6 F_{LGK_z} + a_3 |F_{LGK_{y0}}| F_{LGK_z} \end{aligned}$$

Für  $F_{LGK_z} = 0$  existieren im *Latsch* keine horizontalen Kräfte mehr und es gilt  $F_{LGK_{y0}} = 0$ . Beim *kontinuierlichen* Übergang von  $F_{LGK_z} > 0$  zu  $F_{LGK_z} = 0$ , erfolgt auch eine *kontinuierliche* Veränderung von  $|F_{LGK_{y0}}| > 0$  zu  $|F_{LGK_{y0}}| = 0$ . Also existiert ein  $F_{LGK_z0} > 0$ , so dass für  $F_{LGK_z} \leq F_{LGK_z0}$  und hinreichend kleines  $|\varphi_{G0x}|$

$$\frac{\partial M_{G0x}}{\partial \varphi_{G0x}} < 0$$

gilt,  $M_{G0x}$  also *streng monoton* in  $\varphi_{G0x}$  fällt. *Stationär* gilt  $M_{G0x} = 0$ , was so nur für ein  $\varphi_{G0x0}$  erfüllt ist. Damit ist gezeigt, dass sich unter den beschriebenen Voraussetzungen für ein hinreichend kleines  $F_{LGK_z}$  ein eindeutiger *Sturzwinkel*  $\varphi_{G0x}$  des *Reifengürtels* einstellt. Beide Resultate dieses Abschnitts zusammengefasst stellt sich unter den Bedingungen von Abschnitt 4.2.7 für hinreichend kleines  $F_{LGK_z}$  und festgelegtes  $F_{FH_{y0}}$  eingeschränkt auf hinreichend kleine Werte  $|\varphi_{G0x}|$  ein eindeutiger *Sturzwinkel*  $\varphi_{G0x}$  und *Gürtellenkwinkel* von  $\varphi_{G0z} = 0$  ein.

## C.16 Längskraftänderung eines Laufstreifens durch Änderung des Kraftpotenzials

Um Aussagen zur Eindeutigkeit des Zusammenhangs zwischen *Latschlängsnachgiebigkeit*, *Haftreibbeiwerten* und resultierenden Längskräften treffen zu können, muss der Einfluss einer Änderung des *Haft-* bzw. *Gleitpotenzials* auf die Längskraft  $F_{x\ i\ ges}$  eines *Laufstreifens*  $i$  analysiert werden. Betrachtet werden sollen in diesem und den folgenden Abschnitten ausschließlich positive Werte für den *Umfangsschlupf*  $\lambda$ , wobei sich die Ergebnisse einfach auf negative Werte von  $\lambda$  übertragen lassen. Abbildung C.17 zeigt die Veränderung beider Kraftpotenziale als Übergang von den grauen zu den schwarzen

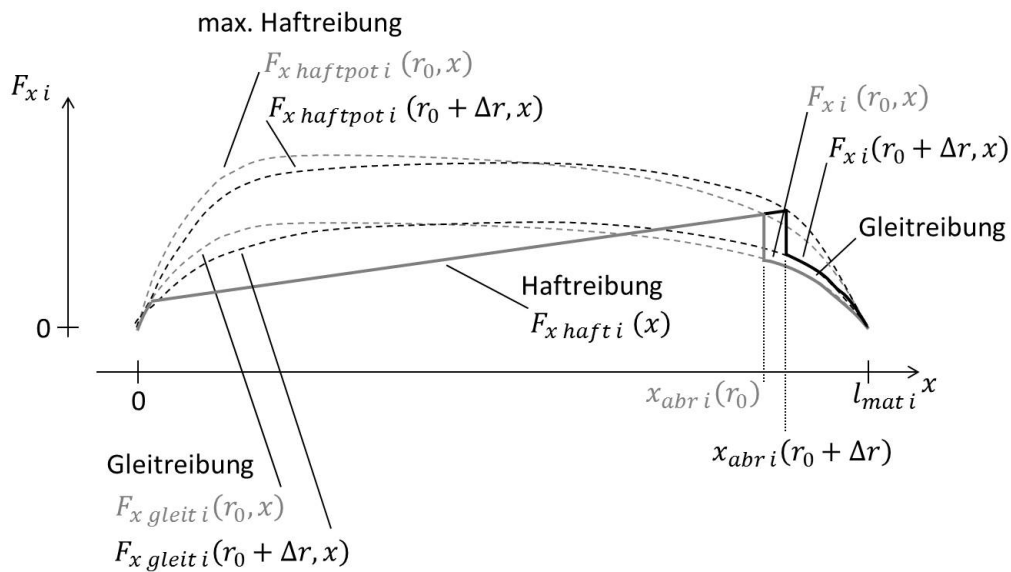


Abbildung C.17: Änderung der Längskraft durch Änderung des Kraftpotenzials

Kurven für einen *Laufstreifen*. Auch die Auswirkung der Potenzialänderung auf die lokal resultierenden Längskräfte ist dort zu erkennen, wobei sofort auffällt, dass sich erst ab der vorderen *Haftabrisseposition*  $x_{abr\ i}$  Änderungen für die lokalen Kräfte ergeben. Beschreibt man Änderungen der *Laufstreifen*-Größen über die Variable  $r$ , folgt damit für die Änderung der Gesamtkraft eines *Laufstreifens*

$$F_{x\ i\ ges}(r_0 + \Delta r) - F_{x\ i\ ges}(r_0) = \int_{x_{abr\ i}(r_0)}^{x_{abr\ i}(r_0 + \Delta r)} F_{x\ haft\ i}(x) dx + \left[ \int_{x_{abr\ i}(r)}^{l_{mat\ i}} F_{x\ gleit\ i}(r, x) dx \right]_{r=r_0}^{r=r_0 + \Delta r} \quad (C.76)$$

Bei einer Vergrößerung von  $x_{abr\ i}$  durch  $\Delta r$ , wie in Abbildung C.17 dargestellt, beschreibt das Integral in den Grenzen von  $x_{abr\ i}(r_0)$  bis  $x_{abr\ i}(r_0 + \Delta r)$  den gesamten Kraftanteil über der hinzukommenden Strecke an *Haftreibung* und der Differenzterm zwischen  $r = r_0$  und  $r = r_0 + \Delta r$  den Kraftunterschied zwischen der gesamten *Gleitreibung* für  $r_0$  (gebogene dicke graue Kurve) und der gesamten *Gleitreibung* für  $r_0 + \Delta r$  (gebogene dicke schwarze Kurve). Durch die damit verbundene umgekehrte Richtung der Integration von  $x_{abr\ i}(r_0)$  bis  $x_{abr\ i}(r_0 + \Delta r)$  gilt C.76 auch für negatives  $\Delta r$ . Grundsätzlich wird eine konstante Länge  $l_{mat\ i}$  vorausgesetzt, die ohne auftretende Querkräfte ausschließlich von  $F_{FH_z}$  und der Form der *Gürtelringschale* abhängt, sich bei konstanter Vertikalkraft  $F_{FH_z}$  unter der hier betrachteten Variation von  $\hat{\mu}_{haft\ 1}$ ,  $\hat{\mu}_{haft\ 2}$  und  $n_{LKx}$  also nicht verändert. Bereits in Abschnitt C.2 wurden die sich abhängig vom *Umfangsschlupf*  $\lambda$  und den *Reibpotenzialkurven* einstellenden lokalen Kräfte in einem *Laufstreifen* analysiert.

Demnach wächst die lokale *Haftkraft* mit der Steigung

$$m_{F_{x \text{ haft}}} = c_{\text{scher}} \frac{\lambda}{\lambda + 1} \quad (\text{C.77})$$

über dem Abstand  $x$  zum vorderen Ende des *Laufstreifens*. Die Linie  $F_{x \text{ haft } i}(x)$  der *Haftkraft* schneidet die *Haftpotenzialkurve*  $F_{x \text{ haftpot } i}(r, x)$  an der Position  $x_{\text{abr } i}(r)$ , von der ab *Gleitreibung* vorliegt, und die lokale Längskraft  $F_{x i}(r, x)$  der *Gleitpotenzialkurve*  $F_{x \text{ gleit } i}(r, x)$  entspricht. Es gilt also

$$F_{x \text{ haft } i}(x_{\text{abr } i}(r)) = F_{x \text{ haftpot } i}(r, x_{\text{abr } i}(r)) \quad (\text{C.78})$$

und mit  $\frac{\partial F_{x i \text{ haft}}}{\partial x} = m_{F_{x \text{ haft}}}$  sowie C.77 um  $r = r_0$  differenziert nach  $r$

$$\begin{aligned} & c_{\text{scher}} \frac{\lambda}{\lambda + 1} \left. \frac{\partial x_{\text{abr } i}}{\partial r} \right|_{r=r_0} \\ &= \left. \frac{\partial F_{x \text{ haftpot } i}}{\partial r} \right|_{r=r_0, x=x_{\text{abr } i}(r_0)} + \left. \frac{\partial F_{x \text{ haftpot } i}}{\partial x} \right|_{r=r_0, x=x_{\text{abr } i}(r_0)} \left. \frac{\partial x_{\text{abr } i}}{\partial r} \right|_{r=r_0} \end{aligned}$$

Aufgelöst erhält man

$$\left. \frac{\partial x_{\text{abr } i}}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \frac{\left. \frac{\partial F_{x \text{ haftpot } i}}{\partial r} \right|_{r=r_0, x=x_{\text{abr } i}(r_0)}}{c_{\text{scher}} \frac{\lambda}{\lambda + 1} - \left. \frac{\partial F_{x \text{ haftpot } i}}{\partial x} \right|_{r=r_0, x=x_{\text{abr } i}(r_0)}} \quad (\text{C.79})$$

C.77 und C.78 ermöglichen als lokale Darstellung der Kraft aus *Haftreibung* um den *Haftabrisspunkt*

$$F_{x \text{ haft } i}(x) = F_{x \text{ haftpot } i}(r_0, x_{\text{abr } i}(r_0)) + c_{\text{scher}} \frac{\lambda}{\lambda + 1} (x - x_{\text{abr } i}(r_0))$$

So ergibt sich zusammen mit C.76 für die Änderung der Längskraft  $F_{x i \text{ ges}}$  eines *Laufstreifens* nun in differenzierter Form

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial F_{x i \text{ ges}}}{\partial r} \right|_{r=r_0} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial r} \int_{x_{\text{abr } i}(r_0)}^{x_{\text{abr } i}(r)} F_{x \text{ haftpot } i}(r_0, x_{\text{abr } i}(r_0)) + c_{\text{scher}} \frac{\lambda}{\lambda + 1} (x - x_{\text{abr } i}(r_0)) dx \right) \Big|_{r=r_0} \\ &+ \left( \frac{\partial}{\partial r} \int_{x_{\text{abr } i}(r)}^{l_{\text{mat } i}} F_{x \text{ gleit } i}(r, x) dx \right) \Big|_{r=r_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{\partial}{\partial r} \left[ F_{x \text{ haftpot } i}(r_0, x_{abr i}(r_0)) x + \frac{c_{scher}}{2} \frac{\lambda}{\lambda + 1} (x - x_{abr i}(r_0))^2 \right]_{x_{abr i}(r_0)}^{x_{abr i}(r)} \right) \Big|_{r=r_0} \\
&+ \left( \frac{\partial}{\partial r} \left[ \int F_{x \text{ gleit } i}(r, x) dx \right]_{x_{abr i}(r)}^{l_{mat i}} \right) \Big|_{r=r_0} \\
&= \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( F_{x \text{ haftpot } i}(r_0, x_{abr i}(r_0)) (x_{abr i}(r) - x_{abr i}(r_0)) \right) \right) \Big|_{r=r_0} \\
&+ \frac{c_{scher}}{2} \frac{\lambda}{\lambda + 1} \left( \frac{\partial}{\partial r} (x_{abr i}(r) - x_{abr i}(r_0))^2 \right) \Big|_{r=r_0} \\
&+ \left[ \int \frac{\partial}{\partial r} F_{x \text{ gleit } i}(r, x) \Big|_{r=r_0} dx \right]_{x_{abr i}(r_0)}^{l_{mat i}} + \left( \left[ \frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \int F_{x \text{ gleit } i}(r, x) dx \right]_{x_{abr i}(r)}^{l_{mat i}} \right) \Big|_{r=r_0} \\
&= F_{x \text{ haftpot } i}(r_0, x_{abr i}(r_0)) \frac{\partial x_{abr i}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} + \left[ \int \frac{\partial}{\partial r} F_{x \text{ gleit } i}(r, x) \Big|_{r=r_0} dx \right]_{x_{abr i}(r_0)}^{l_{mat i}} \\
&- F_{x \text{ gleit } i}(r_0, x_{abr i}(r_0)) \frac{\partial x_{abr i}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \\
&= \left( F_{x \text{ haftpot } i}(r_0, x_{abr i}(r_0)) - F_{x \text{ gleit } i}(r_0, x_{abr i}(r_0)) \right) \frac{\partial x_{abr i}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \\
&+ \left[ \int \frac{\partial}{\partial r} F_{x \text{ gleit } i}(r, x) \Big|_{r=r_0} dx \right]_{x_{abr i}(r_0)}^{l_{mat i}}
\end{aligned}$$

Mit C.79 folgt schließlich

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F_{x i \text{ ges}}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \\
&= \frac{\left( F_{x \text{ haftpot } i}(r_0, x_{abr i}(r_0)) - F_{x \text{ gleit } i}(r_0, x_{abr i}(r_0)) \right) \frac{\partial F_{x \text{ haftpot } i}}{\partial r} \Big|_{r=r_0, x=x_{abr i}(r_0)}}{c_{scher} \frac{\lambda}{\lambda + 1} - \frac{\partial F_{x \text{ haftpot } i}}{\partial x} \Big|_{r=r_0, x=x_{abr i}(r_0)}} \\
&+ \left[ \int \frac{\partial}{\partial r} F_{x \text{ gleit } i}(r, x) \Big|_{r=r_0} dx \right]_{x_{abr i}(r_0)}^{l_{mat i}}
\end{aligned} \tag{C.80}$$

## C.17 Abschätzung des zweiten Summanden der Längskraftänderung

Die in Abschnitt C.16 noch mit  $r$  abstrakt beschriebene Änderung des lokalen Kraftpotenzials soll nun konkret auf Änderungen der *Haftreibbeiwerte* in der Form  $\mu_{haft\ 0bar}$ ,  $\mu_{haft\ p_{max}}$  bzw. der *Latschlängsnachgiebigkeit*  $n_{LKx}$  zurückgeführt werden. So sind dann auch Aussagen über die Abhängigkeit der *Zielgrößen*  $Z_{\tau\ 8}$  von den Parametern  $P_8$  möglich. Zur Erleichterung der Analyse empfiehlt sich jedoch, nicht die tatsächlichen *Zielgrößen* zu betrachten, sondern eine Modellalternative mit festgehaltenem Wert für die *Zustandsgröße*

$$F_{Lx\ PT1} = F_{Lx\ PT1\ 0} \quad (C.81)$$

und abgesehen hiervon identischen Modellgleichungen. Dies vereinfacht die Zusammenhänge deutlich, die sich anschließend auch auf die originalen *Zielgrößen*  $Z_{\tau\ 8}$  übertragen lassen. Damit soll nun der Anteil des zweiten Summanden

$$s_{2\ i}(r_0) = \left[ \int \frac{\partial}{\partial r} F_{x\ gleit\ i}(r, x) \Big|_{r=r_0} dx \right]_{x_{abr\ i}(r_0)}^{l_{mat\ i}} \quad (C.82)$$

aus C.80 an der Änderung der Längskraft  $F_{x\ i\ ges}$  durch Änderung von  $n_{LKx}$ ,  $\mu_{haft\ 0bar}$ ,  $\mu_{haft\ p_{max}}$  direkt abgeschätzt werden. Generell werden in diesem und den folgenden Abschnitten Schranken mit den Indexbezeichnungen *min* bzw. *max* gekennzeichnet, wenn sie exakte Abschätzungen darstellen, und mit *us* bzw. *os*, sofern die Grenzen nicht notwendigerweise exakt sind. Zur Abschätzung von C.82 hilft die aufgeteilte Darstellung des Kraftpotenzials nach 4.24, 4.32, 4.25, 4.30 und 4.102 übertragen in *kontinuierliche* Darstellung über  $x$

$$\begin{aligned} F_{x\ haft\ pot\ i}(x) &= l_{RKE} b_{RKE} p_i(x) \left( \mu_{haft\ 0bar} + \frac{p_i(x)}{p_{max}} (\mu_{haft\ p_{max}} - \mu_{haft\ 0bar}) \right) \\ F_{x\ gleit\ i}(x) &= l_{RKE} b_{RKE} p_i(x) \left( \mu_{gleit\ 0bar} + \frac{p_i(x)}{p_{max}} (\mu_{gleit\ p_{max}} - \mu_{gleit\ 0bar}) \right) \\ p_i(x) &= \left( a + b \left( \frac{l_{mat\ i}}{2} - x \right) \right) p_{ans\ i} \left( \frac{l_{mat\ i}}{2} - x \right) \end{aligned} \quad (C.83)$$

mit  $p_{ans\ i}(x_{REK\ j_0}) = p_{ans\ ij_0}$  und  $l_{RKE} \rightarrow 0$

Soll  $r$  ausschließlich eine *lineare* Änderung von  $n_{LKx}$  beschreiben, kann diese o.E. als

$$\frac{\partial n_{LKx}}{\partial r} = c \in \mathbb{R}^+ \quad \frac{\partial \mu_{haft\ 0bar}}{\partial r} = \frac{\partial \mu_{haft\ p_{max}}}{\partial r} = 0 \quad (C.84)$$

definiert werden, und es folgt mit 4.28 und C.81, dass sich  $\Delta x_{LGK}$  *monoton* in  $r$  ändert, sowie mit 4.22, dass  $\frac{\partial M_{LGKy}}{\partial r} = 0$  ( $r_{G0} - r_{K0}$  hängt ohne Querkräfte ausschließlich vom

festgelegten Wert  $F_{FH_z}$  ab, s. 4.15, 4.10, Abschn. 4.2.1 zu  $\varphi_{G0x} = 0$ ). Für  $l_{RKE} \rightarrow 0$  gilt nach 4.24  $p_{ansi}(x_{REK_j}) = p_{ansi}(-x_{REK_j})$ . Außerdem kann für jedes  $x_{REK_{j_1}}$  ein  $x_{REK_{j_2}}$  mit  $x_{REK_{j_1}} = -x_{REK_{j_2}}$  vorausgesetzt werden. Da die übrigen Größen zur Berechnung von  $a$  in 4.24 nicht von  $\Delta x_{LGK}$  beeinflusst werden ( $l_{mat_i}$ ,  $e_l$ ,  $e_q$ ,  $p_{ans_{ij}}$  durch *konstantes*  $F_{LGK_z}$  und  $f_G$  *konstant*), folgt über  $\sum_{i,j} x_{REK_j} p_{ans_{ij}} = 0$ , dass  $\frac{\partial a}{\partial r} = 0$ . Genauso sieht man in 4.24, dass sich  $b$  *monoton* in  $r$  ändert. In der Berechnung von  $p_i(x)$  aus C.83 wiederum ändert sich ausschließlich  $b$  mit  $r$ , und es folgt, dass sich  $p_i(x)$  für festes  $x$  *monoton* in  $r$  ändert und dies in der vorderen und hinteren Hälfte des *Laufstreifens* in jeweils entgegengesetzte Richtung:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial p_i(x_1)}{\partial r} \right|_{r=r_1} \cdot \left. \frac{\partial p_i(x_1)}{\partial r} \right|_{r=r_2} &\geq 0 & \frac{\partial p_i(x_1)}{\partial r} \cdot \frac{\partial p_i(x_2)}{\partial r} &\leq 0 \\ \frac{\partial p_i(x_1)}{\partial r} \cdot \frac{\partial p_i(x_2)}{\partial r} &\geq 0 & & \\ (x_1 - \frac{l_{mat_i}}{2})(x_2 - \frac{l_{mat_i}}{2}) &\geq 0 & (x_1 - \frac{l_{mat_i}}{2})(x_2 - \frac{l_{mat_i}}{2}) &\leq 0 \end{aligned} \quad (C.85)$$

Nach den Voraussetzungen 4.103 aus Abschnitt 4.2.8 an die *Reibbeiwerte wachsen*  $F_{x\ haftpot\ i}$  und  $F_{x\ gleit\ i}$  *streng monoton* mit dem lokalen Druck  $p_i$ . Also ändern sich auch  $F_{x\ haftpot\ i}$  und  $F_{x\ gleit\ i}$  für festes  $x$  *monoton* in  $r$  ebenso in der vorderen und hinteren Hälfte des *Laufstreifens* in jeweils entgegengesetzte Richtung:

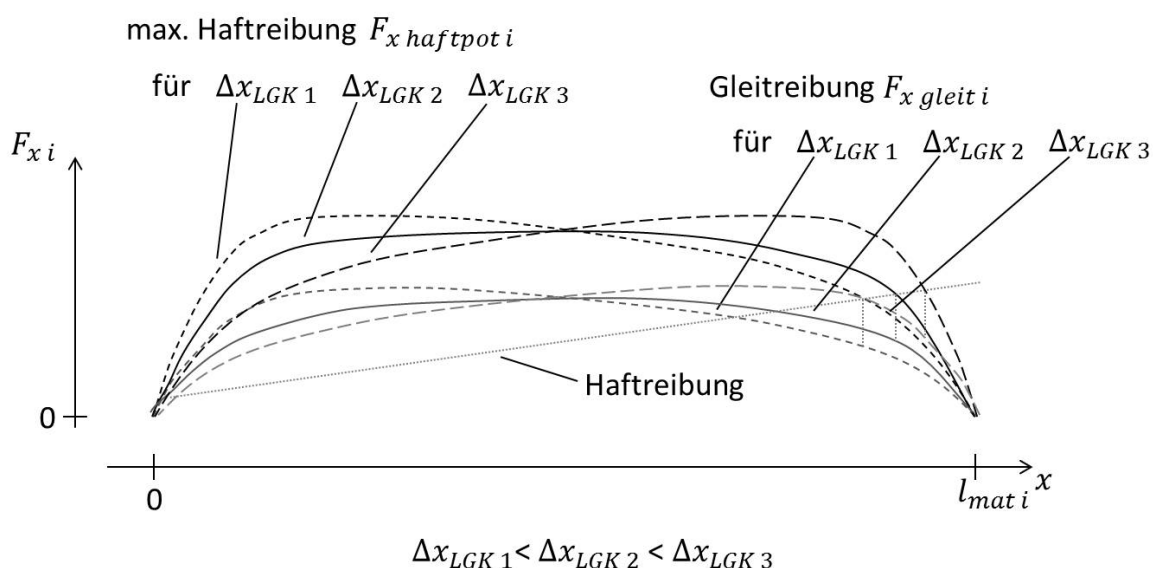
$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{x\ haftpot\ i}(x_1)}{\partial r} \cdot \frac{\partial F_{x\ haftpot\ i}(x_2)}{\partial r} &\geq 0 & \frac{\partial F_{x\ haftpot\ i}(x_1)}{\partial r} \cdot \frac{\partial F_{x\ haftpot\ i}(x_2)}{\partial r} &\leq 0 \\ \frac{\partial F_{x\ gleit\ i}(x_1)}{\partial r} \cdot \frac{\partial F_{x\ gleit\ i}(x_2)}{\partial r} &\geq 0 & \frac{\partial F_{x\ gleit\ i}(x_1)}{\partial r} \cdot \frac{\partial F_{x\ gleit\ i}(x_2)}{\partial r} &\leq 0 \\ (x_1 - \frac{l_{mat_i}}{2})(x_2 - \frac{l_{mat_i}}{2}) &\geq 0 & (x_1 - \frac{l_{mat_i}}{2})(x_2 - \frac{l_{mat_i}}{2}) &\leq 0 \end{aligned} \quad (C.86)$$

Abbildung C.18 veranschaulicht diese Eigenschaft, wobei auffällt, dass für  $x_0 = \frac{l_{mat_i}}{2}$

$$\frac{\partial F_{x\ haftpot\ i}(x_0)}{\partial r} = 0 \quad (C.87)$$

gilt. Damit folgt für Schnittpunkte  $x_{abr_i}$  der *Haftauslenkungsgerade* mit der *Haftpotenzialkurve* (s. Abschn. C.16), dass sie unabhängig von  $r$  kleiner oder größer als  $\frac{l_{mat_i}}{2}$  sind. Zusammen mit C.86 kann man so auch auf eine entgegengesetzte Veränderung von  $x_{abr_i}$  in  $r$  in der linken und rechten *Laufstreifen*-Hälfte schließen, und es gilt, dass sich auch  $x_{abr_i}$  *monoton* in  $r$  ändert bzw.

$$\frac{\partial F_{x\ haftpot\ i}(x_{abr_i}(r_0))}{\partial r} \cdot \frac{\partial x_{abr_i}}{\partial r} \geq 0 \quad \frac{\partial F_{x\ gleit\ i}(x_{abr_i}(r_0))}{\partial r} \cdot \frac{\partial x_{abr_i}}{\partial r} \geq 0 \quad (C.88)$$


 Abbildung C.18: Auswirkungen durch Änderung der *Latschlängsnachgiebigkeit*  $n_{LKx}$ 

Die inklusive für  $x_{abr i}$  getroffenen Schlussfolgerungen gelten allerdings nur vorausgesetzt,  $x_{abr i}$  ändert sich wie im Modell C.78, C.79 ausschließlich *stetig differenzierbar* mit  $r$ . Eine Verkleinerung des *Haftpotenzials* bspw. in der vorderen *Latsch*-Hälfte kann jedoch auch zu einer sprunghaften Verkleinerung von  $x_{abr i}$  führen, da die *Haftauslenkungsgerade* dann vorne an einem weiteren Punkt geschnitten wird, der den weiter hinten liegenden Schnittpunkt übergangslos ersetzt. In der Modellierung mit einer endlichen Anzahl  $n_{LS}$  von *Laufstreifen* führt dies zu einer *unstetigen* Abhängigkeit der Modell-Ausgänge von  $n_{LKx}$ ,  $\mu_{haft 0bar}$  und  $\mu_{haft pmax}$ , die sich nicht durch reale, mechanische Vorgänge begründet. Als modelltechnisches Artefakt soll dieser Fall hier nicht berücksichtigt werden. Praktisch lässt sich dieser Schritt dadurch rechtfertigen, dass der Effekt in identifikationsrelevanten Betriebssituationen ausschließlich für sehr kleine *Laufstreifen*-Längen  $l_{mat i}$  auftritt, die keinen großen Einfluss auf die Modell-Ausgänge besitzen. Durch eine zusätzliche, hier jedoch nicht vorgenommene Einschränkung von  $n_{LKx min}$  und  $n_{LKx max}$  (s. 4.99) kann für das *Haftpotenzial* über  $x$  generell ein mechanisch ohnehin zweifelhafter *Wendepunkt* (s. Erläuterung zu C.103) vermieden werden. Nur *Haftpotenzial*-Kurven mit *Wendepunkt* können den beschriebenen Vorgang auslösen.

Die Änderung des Kraftpotenzials in  $r$  verhält sich grundsätzlich *monoton* in  $r$ . In

$$\frac{\partial F_{x gleit i}(x)}{\partial r} = l_{RKE} b_{RKE} \frac{\partial p_i(x)}{\partial r} \left( \mu_{gleit 0bar} + 2 \frac{p_i(x)}{p_{max}} (\mu_{gleit pmax} - \mu_{gleit 0bar}) \right) \quad (C.89)$$

ist  $\frac{\partial p_i(x)}{\partial r}$  wegen C.84, 4.28 und 4.24 in  $r$  konstant (s.o.). Die Voraussetzungen 4.103 an die *Reibbeiwerte* garantieren das *streng monotone Wachstum* von  $F_{x \text{ gleit } i}(x)$  in  $p_i(x)$ , woraus sich für  $\frac{\partial p_i(x)}{\partial r} \neq 0$  bzw. mit C.83 gleichbedeutend für  $\frac{\partial F_{x \text{ gleit } i}(x)}{\partial r} \neq 0$

$$\frac{\partial F_{x \text{ gleit } i}(x)}{\partial r} \cdot \frac{\partial p_i(x)}{\partial r} > 0 \quad (\text{C.90})$$

ergibt. Der geklammerte Ausdruck in C.89 ist für  $\frac{\partial F_{x \text{ gleit } i}(x)}{\partial r} \neq 0$  damit positiv und, da  $\mu_{\text{gleit } p_{\max}} \leq \mu_{\text{gleit } 0_{\text{bar}}}$ , fällt dessen Betrag und damit der Betrag von  $\frac{\partial F_{x \text{ gleit } i}(x)}{\partial r}$  dann *monoton* mit steigendem  $p_i(x)$ . Insgesamt gilt mit C.90 für sämtliche Werte von  $\frac{\partial F_{x \text{ gleit } i}(x)}{\partial r}$

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} \left| \frac{\partial F_{x \text{ gleit } i}(x)}{\partial r} \right| \right) \cdot \frac{\partial F_{x \text{ gleit } i}(x)}{\partial r} \leq 0 \quad (\text{C.91})$$

Auf dieser Basis kann nun das Verhalten von  $s_{2i}(r_0)$  selbst beschrieben werden, wobei eine Fallunterscheidung in  $x_{abr i}(r_0) \leq \frac{l_{mat i}}{2}$  und  $x_{abr i}(r_0) > \frac{l_{mat i}}{2}$  hilft. Für den Fall  $x_{abr i}(r_0) > \frac{l_{mat i}}{2}$  folgt mit C.91, C.86 und C.88

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} \left| \frac{\partial F_{x \text{ gleit } i}(x)}{\partial r} \right| \right) \cdot \frac{\partial x_{abr i}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \leq 0 \quad \text{für } (x - \frac{l_{mat i}}{2})(x_{abr i}(r_0) - \frac{l_{mat i}}{2}) \geq 0 \quad (\text{C.92})$$

Da sich  $F_{x \text{ gleit } i}(x)$  nach C.86 in einer *Laufstreifen*-Hälfte über  $x$  in  $r$  in dieselbe Richtung verändert, gilt

$$|s_{2i}(r_0)| = \left[ \int \left| \frac{\partial}{\partial r} F_{x \text{ gleit } i}(r, x) \right|_{r=r_0} \Big| dx \right]_{x_{abr i}(r_0)}^{l_{mat i}} \quad (\text{C.93})$$

wobei nach C.92 der *Integrand* und die untere *Integrationsgrenze* die resultierende Größe mit variiertem  $r_0$  in dieselbe Richtung verändern, also sich letztlich  $s_{2i}$  *monoton* in  $r_0$  ändert.

Im Fall  $x_{abr i}(r_0) \leq \frac{l_{mat i}}{2}$  hilft die in beide *Laufstreifen*-Hälften aufgeteilte Darstellung. Das in einer *Laufstreifen*-Hälfte gleiche und in verschiedenen Hälften umgekehrte Vorzeichen von  $\frac{\partial F_{x \text{ gleit } i}(r, x)}{\partial r}$  (C.86) erlaubt die Betragsdarstellung

$$|s_{2i}(r_0)| = \left| \left[ \int \left| \frac{\partial}{\partial r} F_{x \text{ gleit } i}(r, x) \right|_{r=r_0} \Big| dx \right]_{x_{abr i}(r_0)}^{\frac{l_{mat i}}{2}} - \left[ \int \left| \frac{\partial}{\partial r} F_{x \text{ gleit } i}(r, x) \right|_{r=r_0} \Big| dx \right]_{\frac{l_{mat i}}{2}}^{l_{mat i}} \right| \quad (\text{C.94})$$

Auch hier folgt mit C.91, C.86 und C.88 Gleichung C.92 und damit die *monotone* Änderung des ersten Summanden in  $r_0$ . Basierend auf denselben Resultaten erhält man



unter alternativer Anwendung von C.86 für  $x_{abr i}(r_0)$  und  $x$  in verschiedenen *Laufstreifen*-Hälften analog zu C.92

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} \left| \frac{\partial F_{x \text{ gleit } i}(x)}{\partial r} \right| \right) \cdot \frac{\partial x_{abr i}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \geq 0 \quad \text{für } x_{abr i}(r_0) \leq \frac{l_{mat i}}{2} \leq x \quad (\text{C.95})$$

Da eine Verkleinerung von  $\frac{\partial x_{abr i}}{\partial r} \Big|_{r=r_0}$  bei Änderung von  $r_0$  mit einer Vergrößerung des ersten Summanden in C.94 gekoppelt ist, folgt mit C.95 die parallele Verkleinerung des subtrahierten Terms in C.94. Insgesamt erhält man bei Veränderung von  $r_0$  gleichgerichtete Effekte der beiden Teilterme auf  $|s_{2 i}|$  und damit, dass sich auch hier  $s_{2 i}$  *monoton* mit  $r_0$  bewegt. D.h. beide Fälle zusammengefasst, dass sich  $s_{2 i}$  grundsätzlich *monoton* in  $n_{LKx}$  ändert.

Ändert sich mit  $r$  wie in C.84 beschrieben ausschließlich  $n_{LKx}$ , hängt  $s_{2 i}(r_0)$  auch von den *konstanten* Werten der *Haftreibbeiwerte*  $\mu_{haft 0bar 0}$  und  $\mu_{haft p_{max} 0}$  ab. Neben der Untersuchung, wie sich verschiedene Werte von  $r_0$  also  $n_{LKx}$  auf  $s_{2 i}$  auswirken, wenn  $r$  eine Änderung in  $n_{LKx}$  selbst beschreibt, muss zur vollständigen Abschätzung von  $s_{2 i}$  in  $P_8^*$  also auch analysiert werden, wie verschiedene *Haftreibbeiwerte*  $s_{2 i}$  bei Änderungen von  $n_{LKx}$  durch  $r$  beeinflussen. In C.83 sieht man, dass  $F_{x \text{ haftpot } i}(x)$  *monoton* in  $\mu_{haft 0bar 0}$  und  $\mu_{haft p_{max} 0}$  *steigt* ( $p_i(x) \leq p_{max}$ ). Gleichung C.79 ermöglicht es, die Auswirkungen der Änderung auf  $x_{abr i}$  direkt zu bestimmen, wobei dazu jedoch  $r$  an dieser Stelle statt eine Änderung von  $n_{LKx}$  die Änderung der *Haftreibbeiwerte* ausdrücken muss. Mit  $r$  ausgedrückt fließt diese Änderung in C.79 nur in den Zähler der rechten Seite ein, was durch den als positiv vorausgesetzten Nenner (s.o. zu *unstetigen* Sprüngen von  $x_{abr i}$ ) zeigt, dass auch  $x_{abr i}$  *monoton* in  $\mu_{haft 0bar 0}$  und  $\mu_{haft p_{max} 0}$  *steigt*. Die *Haftreibbeiwerte* beeinflussen nach C.82 und C.83  $s_{2 i}(r_0)$  (wieder mit der Änderung von  $n_{LKx}$  durch  $r$ ) ausschließlich über  $x_{abr i}(r_0)$ , weshalb Änderungen durch diese auch einfacher in  $x_{abr i}(r_0)$  beschrieben werden können. Für den Fall  $x_{abr i}(r_0) \geq \frac{l_{mat i}}{2}$  lässt sich der Einfluss direkt mit C.82 analysieren. Da sich hier mit  $x_{abr i}(r_0)$  nur die untere Integrationsgrenze ändert, und sich mit C.86 ein *konstantes* Vorzeichen von  $\frac{\partial}{\partial r} F_{x \text{ gleit } i}(r, x) \Big|_{r=r_0}$  über dem Integrationsintervall in einer *Laufstreifenhälfte* ergibt, folgt, dass sich  $s_{2 i}(r_0)$  für  $\frac{l_{mat i}}{2} \leq x_{abr i}(r_0) \leq l_{mat i}$  *monoton* in  $x_{abr i}(r_0)$  ändert. Im Fall  $x_{abr i}(r_0) \leq \frac{l_{mat i}}{2}$  hilft die aufgeteilte Darstellung

$$s_{2 i}(r_0) = \left[ \int \frac{\partial}{\partial r} F_{x \text{ gleit } i}(r, x) \Big|_{r=r_0} dx \right]_{x_{abr i}(r_0)}^{\frac{l_{mat i}}{2}} + \left[ \int \frac{\partial}{\partial r} F_{x \text{ gleit } i}(r, x) \Big|_{r=r_0} dx \right]_{\frac{l_{mat i}}{2}}^{l_{mat i}}$$

Aus C.86 sieht man, dass  $\frac{\partial}{\partial r} F_{x \text{ gleit } i}(r, x) \Big|_{r=r_0}$  im ersten Summand das *konstante* umgekehrte Vorzeichen besitzt wie im zweiten Summand. Damit folgt letztlich, dass sich

$s_{2i}(r_0)$  in  $x_{abri}(r_0)$  bis  $\frac{l_{mat\ i}}{2}$  *monoton* ändert, und für weiter steigende Werte von  $x_{abri}(r_0)$  *monoton* in die entgegengesetzte Richtung verändert.

Die unabhängigen *Monotonie*-Resultate für  $s_{2i}$  in  $r_0$  und  $x_{abri}(r_0)$  übertragen auf  $n_{LKx}$ ,  $\mu_{haft\ 0bar}$  und  $\mu_{haft\ pmax}$  ergibt für die Abschätzung von  $s_{2i}$

$$\begin{aligned}
 s_{2i\ min} &= \min(I_{s_{2i}}) \leq s_{2i}|_{n_{LKx}, \mu_{haft\ 0bar}, \mu_{haft\ pmax}} \leq s_{2i\ max} = \max(I_{s_{2i}}) \quad \text{mit C.84,} \\
 n_{LKx\ min} &\leq n_{LKx} \leq n_{LKx\ max}, \quad \mu_{haft\ 0bar\ min} \leq \mu_{haft\ 0bar} \leq \mu_{haft\ 0bar\ max}, \\
 \mu_{haft\ pmax\ min} &\leq \mu_{haft\ pmax} \leq \mu_{haft\ pmax\ max}, \\
 I_{s_{2i}} &= \left\{ s_{2i}|_{n_{LKx\ min}, \mu_{haft\ 0bar\ min}, \mu_{haft\ pmax\ min}}, s_{2i}|_{n_{LKx\ min}, \mu_{haft\ 0bar\ max}, \mu_{haft\ pmax\ max}}, \right. \\
 &\quad \left. s_{2i}|_{n_{LKx\ max}, \mu_{haft\ 0bar\ min}, \mu_{haft\ pmax\ min}}, s_{2i}|_{n_{LKx\ max}, \mu_{haft\ 0bar\ max}, \mu_{haft\ pmax\ max}} \right\} \\
 &\cup \left\{ s_{2i}|_{n_{LKx\ min}, x_{abri}=\frac{l_{mat\ i}}{2}}, s_{2i}|_{n_{LKx\ max}, x_{abri}=\frac{l_{mat\ i}}{2}} \middle| b_{s_{2i}} \right\} \\
 b_{s_{2i}} &\Leftrightarrow \left( x_{abri}|_{n_{LKx\ min}, \mu_{haft\ 0bar\ min}, \mu_{haft\ pmax\ min}} \right. \\
 &\quad \left. \leq \frac{l_{mat\ i}}{2} \leq x_{abri}|_{n_{LKx\ min}, \mu_{haft\ 0bar\ max}, \mu_{haft\ pmax\ max}} \right)
 \end{aligned} \tag{C.96}$$

Wie oben beschrieben müssen zusätzlich zu den Extremwerten der *Haftreibbewerte* noch Situationen mit  $x_{abri} = \frac{l_{mat\ i}}{2}$  berücksichtigt werden, jedoch nur wenn diese auch existieren, da der Einfluss der *Haftreibbewerte* auf  $s_{2i}$  andernfalls ausschließlich *monoton* ist. Wenn Wertbelegungen aus  $P_8^*$  existieren mit  $x_{abri} = \frac{l_{mat\ i}}{2}$ , erhält man aus der Folgerung nach C.87, dass sie unabhängig vom Wert  $n_{LKx}$  existieren. Ob sie berücksichtigt werden müssen und dürfen, kann also mit einem beliebigen Wert für  $n_{LKx}$  entschieden werden, indem wie in  $b_{s_{2i}}$  überprüft wird, ob  $\frac{l_{mat\ i}}{2}$  unter den extremen *Haftreibbewerten*, in denen  $x_{abri}$  *monoton steigt* (s.o.), eingeschlossen wird.

Neben  $n_{LKx}$  besteht aus  $P_8$  auch noch die Möglichkeit, mit  $r$  die Werte von  $\mu_{haft\ 0bar}$  bzw.  $\mu_{haft\ pmax}$  zu verändern.  $r$  kann ausschließlich die Veränderung von  $\mu_{haft\ 0bar}$

$$\frac{\partial n_{LKx}}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial \mu_{haft\ 0bar}}{\partial r} = c \in \mathbb{R}^+ \quad \frac{\partial \mu_{haft\ pmax}}{\partial r} = 0 \tag{C.97}$$

bzw. die von  $\mu_{haft\ pmax}$

$$\frac{\partial n_{LKx}}{\partial r} = \frac{\partial \mu_{haft\ 0bar}}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial \mu_{haft\ pmax}}{\partial r} = c \in \mathbb{R}^+ \tag{C.98}$$

beschreiben. Nicht nur vom Wert  $\mu_{haft\ 0bar\ 0}$  bzw.  $\mu_{haft\ pmax\ 0}$ , sondern von der Änderung dieser Werte sind ausschließlich Terme mit Differenziation nach  $r$ . In C.82 hängt der

nach  $r$  differenzierte Term jedoch überhaupt nicht von  $\mu_{haft\ 0bar}$  bzw.  $\mu_{haft\ pmax}$  ab (s.a. Begr. zu C.106). Damit gilt einfach

$$s_{2\ i} = 0 \quad \text{mit C.97 bzw. C.98} \quad (\text{C.99})$$

## C.18 Abschätzung des ersten Summanden der Längskraftänderung

Analog Abschnitt C.17 soll hier der erste Summand

$$s_{1\ i} = \frac{\left( F_{x\ haftpot\ i}(r_0, x_{abr\ i}(r_0)) - F_{x\ gleit\ i}(r_0, x_{abr\ i}(r_0)) \right) \frac{\partial F_{x\ haftpot\ i}}{\partial r} \Big|_{r=r_0, x=x_{abr\ i}(r_0)}}{c_{scher} \frac{\lambda}{\lambda + 1} - \frac{\partial F_{x\ haftpot\ i}}{\partial x} \Big|_{r=r_0, x=x_{abr\ i}(r_0)}} \quad (\text{C.100})$$

von C.80 innerhalb vorgegebener Intervalle von  $n_{LKx}$ ,  $\mu_{haft\ 0bar}$  und  $\mu_{haft\ pmax}$  abgeschätzt werden. Mit  $r$  wird auch hier wahlweise die Änderung der Parameter aus  $P_8$  beschrieben. Für die spätere Anwendung ist hier nur der Effekt einer gemeinsamen Änderung der *Haftreibbeiwerte* relevant, weshalb insgesamt nur C.84 und

$$\frac{\partial n_{LKx}}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial \mu_{haft\ 0bar}}{\partial r} = \frac{\partial \mu_{haft\ pmax}}{\partial r} = c \in \mathbb{R}^+ \quad (\text{C.101})$$

als Parameter-Variationen durch  $r$  wiedergegeben werden. Die Auswirkungen einer Veränderung der Parameter gemäß C.101 auf den Verlauf der *Haft-* und *Gleitkraft* über  $x$  zeigt Abbildung C.19. Die Teilterme von  $s_{1\ i}$  nehmen Extremwerte für unterschiedliche Werte von  $n_{LKx}$ ,  $\mu_{haft\ 0bar}$  und  $\mu_{haft\ pmax}$  an, sind also nur getrennt einfach abschätzbar. Daher soll eine separate Abschätzung der variablen Terme

$$s_{11\ i} = F_{x\ haftpot\ i}(r_0, x_{abr\ i}(r_0)) - F_{x\ gleit\ i}(r_0, x_{abr\ i}(r_0))$$

$$s_{12\ i} = \frac{\partial F_{x\ haftpot\ i}}{\partial r} \Big|_{r=r_0, x=x_{abr\ i}(r_0)} \quad s_{13\ i} = \frac{\partial F_{x\ haftpot\ i}}{\partial x} \Big|_{r=r_0, x=x_{abr\ i}(r_0)}$$

erfolgen. Bei der Analyse von  $s_{11\ i}$  hilft die Eigenschaft, dass  $x_{abr\ i}(r_0)$  sich für festliegende *Haftreibbeiwerte* *monoton* in  $n_{LKx0}$  ändert (s. Erläuterung zu C.88, wobei  $r$  dort die Änderung in  $n_{LKx0}$  beschreibt). In  $\mu_{haft\ 0bar\ 0}$  und  $\mu_{haft\ pmax\ 0}$  *steigt*  $x_{abr\ i}(r_0)$  *monoton* (s. Erläuterung nach C.95). Unter extremen Parameterwerten nimmt  $x_{abr\ i}(r_0)$  also

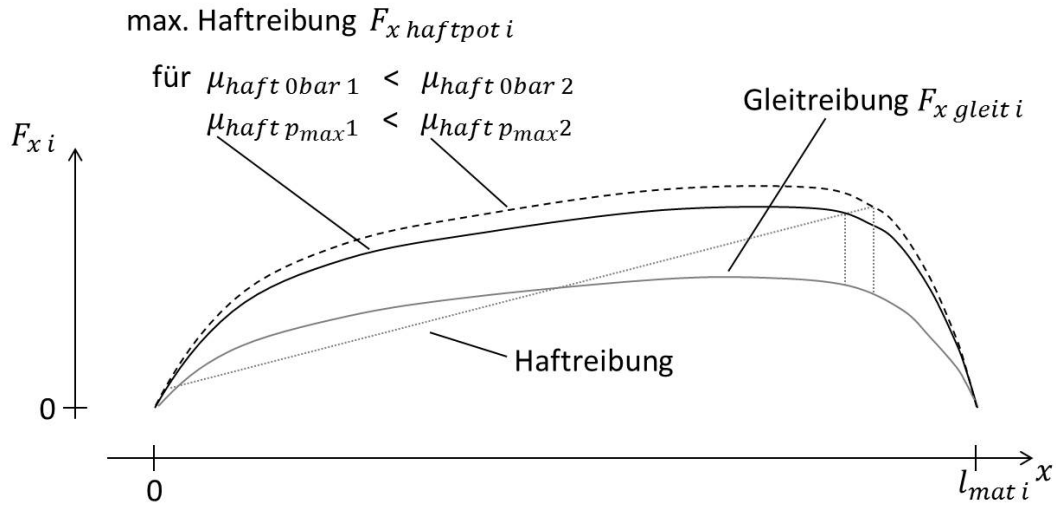


Abbildung C.19: Auswirkungen durch Änderung der *Haftreibbeiwerte*  $\mu_{haft\ 0\ bar}$ ,  $\mu_{haft\ p\ max}$

mindestens so extreme Werte an wie unter inneren, und es gilt

$$x_{abr\ i\ min} = \min(I_{x_{abr\ i}}) \leq x_{abr\ i}(r_0) \leq x_{abr\ i\ max} = \max(I_{x_{abr\ i}})$$

$$I_{x_{abr\ i}} = \left\{ \begin{array}{l} x_{abr\ i} \Big|_{n_{LKx\ min}, \mu_{haft\ 0\ bar\ min}, \mu_{haft\ p\ max\ min}}, \\ x_{abr\ i} \Big|_{n_{LKx\ min}, \mu_{haft\ 0\ bar\ max}, \mu_{haft\ p\ max\ max}}, \\ x_{abr\ i} \Big|_{n_{LKx\ max}, \mu_{haft\ 0\ bar\ min}, \mu_{haft\ p\ max\ min}}, \\ x_{abr\ i} \Big|_{n_{LKx\ max}, \mu_{haft\ 0\ bar\ max}, \mu_{haft\ p\ max\ max}} \end{array} \right\}$$

Innerhalb eines *Laufstreifens* weist der Druckverlauf ein eindeutiges Maximum in Längsrichtung auf. Dessen Auswirkung sieht man bspw. in Abbildung C.19. Zur analytischen Bestätigung ist zunächst die Nullstellengleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( a + b \left( \frac{l_{mat\ i}}{2} - x \right) \right) \left( 1 - \left| \frac{2 \left( \frac{l_{mat\ i}}{2} - x \right)}{l_{mat\ i}} \right|^{e_l} \right) \left( 1 - \left| \frac{2 y_{REK\ i}}{B_R} \right|^{e_q} \right) l_{mat\ i} \\ &= \left( -b + a e_l \left( \frac{2}{l_{mat\ i}} \right)^{e_l} \operatorname{sgn} \left( \frac{l_{mat\ i}}{2} - x \right) \left| \frac{l_{mat\ i}}{2} - x \right|^{e_l - 1} \right. \\ &\quad \left. + b (e_l + 1) \left( \frac{2}{l_{mat\ i}} \right)^{e_l} \left| \frac{l_{mat\ i}}{2} - x \right|^{e_l} \right) \cdot \left( 1 - \left| \frac{2 y_{REK\ i}}{B_R} \right|^{e_q} \right) l_{mat\ i} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{C.102}$$

der differenzierten Darstellung in  $x$  von 4.24 erforderlich. Die nochmalige Differenziation nach  $x$  und anschließende Division mit  $\left| \frac{l_{mat\ i}}{2} - x \right|^{e_l - 2}$  bzw. konstanten Faktoren führt

zur Gleichung

$$\begin{aligned}
 & 1/\left( \left( 1 - \left| \frac{2y_{REK} i}{B_R} \right|^{e_q} \right) l_{mat\ i} \left| \frac{l_{mat\ i}}{2} - x \right|^{e_l - 2} e_l \left( \frac{2}{l_{mat\ i}} \right)^{e_l} \right) \frac{\partial^2 p_i}{\partial x^2} \\
 & = -a(e_l - 1) - b(e_l + 1) \left( \frac{l_{mat\ i}}{2} - x \right) = 0
 \end{aligned} \tag{C.103}$$

Diese Gleichung ist *linear* in  $x$ , hat also maximal eine Lösung. Da die Lösungen der Gleichung die Zahl der *Wendepunkte* von  $p_i$  in  $x$  beschreibt, hat  $p_i$  maximal einen *Wendepunkt* und damit maximal zwei innere *Extrempunkte* in  $x$ . Außerdem gilt  $p_i(0) = p_i(l_{mat\ i}) = 0$ , weshalb, existieren zwei innere *Extrempunkte*, ein Wert  $p_i$  im relevanten Bereich  $< 0$  sein muss, was der Definition gültiger *Druckwerte* widerspricht. Es existiert also genau ein *Maximum* von  $p_i$  im gültigen Bereich über  $x$ . Der Fall  $x = \frac{l_{mat\ i}}{2}$  muss wegen der Division durch  $\left| \frac{l_{mat\ i}}{2} - x \right|^{e_l - 2}$  und diesem Term selbst separat betrachtet werden. Dabei hilft,  $p_i(x)$  als  $p_i(x) = p_i|_{b=0}(x) + p_i|_{a=0}(x)$  zu beschreiben.  $p_i|_{b=0}(x)$  ist nämlich *achsensymmetrisch* und  $p_i|_{a=0}(x)$  *punktsymmetrisch* im Punkt  $x = \frac{l_{mat\ i}}{2}$  (s. C.102). Da die zweite Ableitung einer um die Symmetriestelle nicht konstanten *achsensymmetrischen* Funktion  $\neq 0$  und die einer *punktsymmetrischen* Funktion am Symmetriepunkt  $= 0$  ist, ist die zweite Ableitung der Summe an der gemeinsamen Symmetriestelle  $\neq 0$ , und es liegt kein *Wendepunkt* vor. Also ändert auch die Berücksichtigung der Stelle  $x = \frac{l_{mat\ i}}{2}$  nichts an der maximal möglichen Zahl der *Wendepunkte*.

Die Nullstellengleichung C.102 ist nicht einfach *analytisch* lösbar. Daher muss  $x_{p_{max}}$  über ein *1-dimensionales numerisches* Verfahren bestimmt werden, das bei den gegebenen Voraussetzungen *effizient* ist. Mit nur einer inneren Extremstelle von  $p_i$  in  $x$  erhält man die Extremwerte von  $p_i$  über einem Intervall  $[x_1, x_2]$  für  $x_1, x_2$  oder, falls  $x_1 \leq x_{p_{max}} \leq x_2$ , für  $x_{p_{max}}$ . Da sich  $p_i$  abhängig von  $x$  auch noch *monoton* in  $n_{LKx}$  ändert (s. Begr. zu C.85), jedoch unabhängig von den *Haftreibbeiwerten* ist (s. Begr. zu C.107), und damit das Maximum von  $p_i$  in  $x$  und  $n_{LKx}$  für einen Extremwert von  $n_{LKx}$  angenommen wird, lässt sich  $p_i|_{r=r_0, x=x_{abr\ i}(r_0)}$  abschätzen mit

$$\begin{aligned}
 p_{abr\ i\ us} & = \min(I_{p_{abr\ i}}) \leq p_i|_{r=r_0, x=x_{abr\ i}(r_0)} \leq p_{abr\ i\ os} = \max(I_{p_{abr\ i}}) \\
 I_{p_{abr\ i}} & = \left\{ p_i|_{n_{LKx\ min}, x=x_{abr\ i\ min}}, p_i|_{n_{LKx\ min}, x=x_{abr\ i\ max}} \right\} \\
 & \cup \left\{ p_i|_{n_{LKx\ max}, x=x_{abr\ i\ min}}, p_i|_{n_{LKx\ max}, x=x_{abr\ i\ max}} \right\} \\
 & \cup \left\{ p_i|_{n_{LKx\ min}, x=x_{p_{max}}|_{n_{LKx\ min}}} \left| \begin{array}{l} x_{abr\ i\ min} \leq x_{p_{max}}|_{n_{LKx\ min}} \leq x_{abr\ i\ max} \end{array} \right. \right\} \\
 & \cup \left\{ p_i|_{n_{LKx\ max}, x=x_{p_{max}}|_{n_{LKx\ max}}} \left| \begin{array}{l} x_{abr\ i\ min} \leq x_{p_{max}}|_{n_{LKx\ max}} \leq x_{abr\ i\ max} \end{array} \right. \right\} \\
 \text{mit } \frac{\partial p_i|_{n_{LKx}}}{\partial x} \Big|_{x=x_{p_{max}}|_{n_{LKx}}} & = 0
 \end{aligned}$$

Die unabhängige Betrachtung von  $n_{LKx}$  und  $x_{abr i}$  vergrößert die Abschätzung, die jedoch basierend auf exakt abgeschätzten Größen für unbegrenzt kleine Intervalle der einzelnen Parameter beliebig genau wird.

Mit C.83 erhält man für  $s_{11 i}$  unter der Voraussetzung  $\mu_{haft p_{max}} - \mu_{gleit p_{max}} \neq \mu_{haft 0bar} - \mu_{gleit 0bar}$  die Darstellung

$$s_{11 i} = -\frac{l_{RKE} b_{RKE} (\mu_{haft 0bar} - \mu_{gleit 0bar})}{q} p_i|_{r=r_0, x=x_{abr i}(r_0)} (p_i|_{r=r_0, x=x_{abr i}(r_0)} - q)$$

$$q = p_{max} / \left( 1 - \frac{\mu_{haft p_{max}} - \mu_{gleit p_{max}}}{\mu_{haft 0bar} - \mu_{gleit 0bar}} \right) \quad (C.104)$$

Die Größe  $p_i|_{r=r_0, x=x_{abr i}(r_0)}$  selbst hängt von  $\mu_{haft 0bar}$  und  $\mu_{haft p_{max}}$  ab. Eine gröbere Abschätzung von  $s_{11 i}$  ist jedoch auch bei unabhängiger Wahl der Werte möglich. Dann ist  $F_{x_{gleit i}}$  unabhängig von  $\mu_{haft 0bar}$  und  $\mu_{haft p_{max}}$ , und  $s_{11 i}$  wächst mit  $F_{x_{haft pot i}}$  *monoton* in  $\mu_{haft 0bar}$  und  $\mu_{haft p_{max}}$  (s. C.83 ( $p_i \leq p_{max}$ )). Für festgelegte Werte  $\mu_{haft 0bar 0}$  und  $\mu_{haft p_{max} 0}$  hängt  $s_{11 i}$  nach C.104 *parabelförmig* von  $p_i|_{r=r_0, x=x_{abr i}(r_0)}$  ab mit *Scheitelposition*

$$p_{s i}(\mu_{haft 0bar 0}, \mu_{haft p_{max} 0}) = \frac{q}{2}$$

Für  $\mu_{haft p_{max}} - \mu_{gleit p_{max}} = \mu_{haft 0bar} - \mu_{gleit 0bar}$  ist die Abhängigkeit *linear* (s. C.83). Insgesamt lässt sich  $s_{11 i}$  damit zwar nicht exakt abschätzen, aber durch eine gute *untere* und *obere Schranke* eingrenzen, die sich durch die ebenso konvergierende Abschätzung der einflussnehmenden Größen bei beliebiger Verkleinerung der Parameterintervalle von  $P_8$  einander unbegrenzt nähern.

$$s_{11 i us} = \min(I_{s_{11 i}}) \leq s_{11 i} \leq s_{11 i os} = \max(I_{s_{11 i}})$$

$$I_{s_{11 i}} = \left\{ \begin{array}{l} s_{11 i}|_{\mu_{haft 0bar min}, \mu_{haft p_{max} min}, p_{abr i us}}, s_{11 i}|_{\mu_{haft 0bar min}, \mu_{haft p_{max} min}, p_{abr i os}}, \\ s_{11 i}|_{\mu_{haft 0bar max}, \mu_{haft p_{max} max}, p_{abr i us}}, s_{11 i}|_{\mu_{haft 0bar max}, \mu_{haft p_{max} max}, p_{abr i os}} \end{array} \right\}$$

$$\cup \left\{ \begin{array}{l} s_{11 i}|_{\mu_{haft 0bar min}, \mu_{haft p_{max} min}, p_{s i}(\mu_{haft 0bar min}, \mu_{haft p_{max} min})} \Big| \\ (p_{abr i us} \leq p_{s i}(\mu_{haft 0bar min}, \mu_{haft p_{max} min}) \leq p_{abr i os}) \\ \wedge (\mu_{haft p_{max} min} - \mu_{gleit p_{max} 0} \neq \mu_{haft 0bar min} - \mu_{gleit 0bar 0}) \end{array} \right\}$$

$$\cup \left\{ \begin{array}{l} s_{11 i}|_{\mu_{haft 0bar max}, \mu_{haft p_{max} max}, p_{s i}(\mu_{haft 0bar max}, \mu_{haft p_{max} max})} \Big| \\ (p_{abr i us} \leq p_{s i}(\mu_{haft 0bar max}, \mu_{haft p_{max} max}) \leq p_{abr i os}) \\ \wedge (\mu_{haft p_{max} max} - \mu_{gleit p_{max} 0} \neq \mu_{haft 0bar max} - \mu_{gleit 0bar 0}) \end{array} \right\}$$

Auch bei  $s_{12i}$  ist eine exakte Abschätzung nur schwer möglich. Grund hierfür sind mehrere sich bei Änderung von  $\mu_{haft\ 0bar}$ ,  $\mu_{haft\ pmax}$  und  $n_{LKx}$  gegenläufig verhaltende Faktoren. Zuerst soll der Fall C.84 betrachtet werden, für den  $r$  ausschließlich eine Änderung von  $n_{LKx}$  beschreibt. Dafür erhält man analog zu C.89

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial F_{x\ haftpot\ i}(x)}{\partial r} \right|_{r=r_0, x=x_{abr\ i}(r_0)} \\ &= l_{RKE} b_{RKE} \left. \frac{\partial p_i}{\partial r} \right|_{r=r_0, x=x_{abr\ i}(r_0)} \cdot \left( \mu_{haft\ 0bar} + 2 \frac{p_i|_{r=r_0, x=x_{abr\ i}(r_0)}}{p_{max}} (\mu_{haft\ pmax} - \mu_{haft\ 0bar}) \right) \end{aligned} \quad (C.105)$$

Hier hängen  $\left. \frac{\partial p_i}{\partial r} \right|_{r=r_0, x=x_{abr\ i}(r_0)}$ ,  $p_i|_{r=r_0, x=x_{abr\ i}(r_0)}$ ,  $\mu_{haft\ 0bar}$  und  $\mu_{haft\ pmax}$  eigentlich voneinander ab, werden jedoch nun unabhängig voneinander betrachtet. Da sich für *konstantes*  $x$  mit  $r$  von den  $\left. \frac{\partial p_i}{\partial r} \right|_{r=r_0, x=x_{abr\ i}(r_0)}$  beeinflussenden Größen ausschließlich  $b$  mit  $\frac{\partial b}{\partial r} = d \in \mathbb{R}$  ändert (s. Abschn. C.17 zu C.85), gilt analog C.102

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial p_i}{\partial r} \right|_{r=r_0, x=x_{abr\ i}(r_0)} \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left( a + b \left( \frac{l_{mat\ i}}{2} - x_{abr\ i}(r_0) \right) \right) \\ & \quad \cdot \left( 1 - \left| \frac{2 \left( \frac{l_{mat\ i}}{2} - x_{abr\ i}(r_0) \right)}{l_{mat\ i}} \right|^{e_l} \right) \left( 1 - \left| \frac{2y_{REK\ i}}{B_R} \right|^{e_q} \right) l_{mat\ i} \Big|_{r=r_0} \\ &= d \cdot \left( \frac{l_{mat\ i}}{2} - x_{abr\ i}(r_0) \right) \left( 1 - \left| \frac{2 \left( \frac{l_{mat\ i}}{2} - x_{abr\ i}(r_0) \right)}{l_{mat\ i}} \right|^{e_l} \right) \left( 1 - \left| \frac{2y_{REK\ i}}{B_R} \right|^{e_q} \right) l_{mat\ i} \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Werte  $x_{abr\ i}(r_0)$  für minimales bzw. maximales  $\left. \frac{\partial p_i}{\partial r} \right|_{r=r_0, x=x_{abr\ i}(r_0)}$  ist die Gleichung

$$\begin{aligned} & 1 / \left( d \cdot \left( 1 - \left| \frac{2y_{REK\ i}}{B_R} \right|^{e_q} \right) l_{mat\ i} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_{abr\ i}(r_0)} \left( \left. \frac{\partial p_i}{\partial r} \right|_{r=r_0, x=x_{abr\ i}(r_0)} \right) \\ &= -1 + (e_l + 1) \left( \frac{2}{l_{mat\ i}} \right)^{e_l} \left| \frac{l_{mat\ i}}{2} - x_{abr\ i}(r_0) \right|^{e_l} = 0 \end{aligned}$$

zu lösen mit dem Ergebnis

$$x_{abr\ i} \partial p_{extr} / \partial r_{1/2} = \frac{l_{mat\ i}}{2} \left( 1 \pm (e_l + 1)^{-\frac{1}{e_l}} \right)$$

$n_{LKx_0}$  beeinflusst den Wert von  $\left. \frac{\partial p_i}{\partial r} \right|_{r=r_0, x=x_{abr\ i}(r_0)}$  selbst nicht (s.o. zu konstantem Einfluss  $d$ ) und die *Haftreibbeiwerte* ausschließlich über  $x_{abr\ i}(r_0)$  (keine Auswirkung auf  $M_{LGKy}$ ,  $\Delta x_{LGK}$ ,  $a$ ,

$b$  durch konstantes  $F_{Lx PT10}, F_{LGKz}$ ). Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial r} \Big|_{x_{abri\min}} &= \min(I_{\partial p_i/\partial r}) \leq \frac{\partial p_i}{\partial r} \Big|_{r=r_0, x=x_{abri(r_0)}} \leq \frac{\partial p_i}{\partial r} \Big|_{x_{abri\max}} = \max(I_{\partial p_i/\partial r}) \\ I_{\partial p_i/\partial r} &= \left\{ \frac{\partial p_i}{\partial r} \Big|_{x=x_{abri\min}}, \frac{\partial p_i}{\partial r} \Big|_{x=x_{abri\max}} \right\} \\ &\cup \left\{ \frac{\partial p_i}{\partial r} \Big|_{x=x_{abri\partial p_{extr}/\partial r 1}} \mid x_{abri\min} \leq x_{abri\partial p_{extr}/\partial r 1} \leq x_{abri\max} \right\} \\ &\cup \left\{ \frac{\partial p_i}{\partial r} \Big|_{x=x_{abri\partial p_{extr}/\partial r 2}} \mid x_{abri\min} \leq x_{abri\partial p_{extr}/\partial r 2} \leq x_{abri\max} \right\} \end{aligned} \quad (C.106)$$

Die Voraussetzungen 4.103 an die *Reibbeiwerte* garantieren das *streng monotone Wachstum* von  $F_{xhafti}(x)$  in  $p_i(x)$ , womit sich ( $r$  als beliebige Variation mit  $\frac{\partial p_i}{\partial r} \Big|_{r=r_0, x=x_{abri(r_0)}} > 0$  interpretiert) der geklammerte Faktor des äußeren Produkts von C.105 als *positiv* erweist.  $\frac{\partial p_i}{\partial r} \Big|_{r=r_0, x=x_{abri(r_0)}}$  ändert möglicherweise sein Vorzeichen bedingt durch verschiedene Belegungen der *Haftreibbeiwerte* und damit  $x_{abri}(r_0)$  in unterschiedlichen *Laufstreifenhälften*. Bei voneinander unabhängiger Betrachtung der Einflussgrößen kann  $\frac{\partial p_i}{\partial r} \Big|_{r=r_0, x=x_{abri(r_0)}}$  aber in C.105 als *konstant* betrachtet werden, während die übrigen

Größen variiert werden. Man sieht direkt, dass  $\left| \frac{\partial F_{xhaftpot i}(x)}{\partial r} \Big|_{r=r_0, x=x_{abri(r_0)}} \right|$  *monoton* in  $\mu_{haft p_{max}}$  und  $\left| \frac{\partial p_i}{\partial r} \Big|_{r=r_0, x=x_{abri(r_0)}} \right|$  *wächst* bzw. in  $p_i \Big|_{r=r_0, x=x_{abri(r_0)}}$  *fällt* ( $\mu_{haft p_{max}} \leq \mu_{haft 0bar}$ ).  $\frac{\partial F_{xhaftpot i}(x)}{\partial r} \Big|_{r=r_0, x=x_{abri(r_0)}}$  *fällt* oder *wächst* abhängig vom Wert ( $\leq$  oder  $> \frac{p_{max}}{2}$ ) von  $p_i \Big|_{r=r_0, x=x_{abri(r_0)}}$  *monoton* in  $\mu_{haft 0bar}$ . In jedem Fall folgt als Abschätzung, die basierend auf ebenso konvergierenden Schranken für unbegrenzt kleine Intervalle der einzelnen Parameter beliebig genau wird,

$$\begin{aligned} s_{12i\ us\ 1} &= \min(I_{\partial F_{xhaftpot i}/\partial r}) \leq s_{12i} \leq s_{12i\ os\ 1} = \max(I_{\partial F_{xhaftpot i}/\partial r}) \quad \text{mit C.84} \\ I_{\partial F_{xhaftpot i}/\partial r} &= \left\{ \partial F_{xhaftpot i} \left( \frac{\partial p_i}{\partial r} \Big|_{x_{abri\min}}, p_{abri\ os}, \mu_{haft 0bar\ min}, \mu_{haft p_{max}\ min} \right), \right. \\ &\quad \partial F_{xhaftpot i} \left( \frac{\partial p_i}{\partial r} \Big|_{x_{abri\min}}, p_{abri\ os}, \mu_{haft 0bar\ max}, \mu_{haft p_{max}\ min} \right), \\ &\quad \left. \partial F_{xhaftpot i} \left( \frac{\partial p_i}{\partial r} \Big|_{x_{abri\min}}, p_{abri\ us}, \mu_{haft 0bar\ min}, \mu_{haft p_{max}\ max} \right), \right\} \end{aligned}$$



$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial F_{x \text{ haftpot } i}}{\partial r} \Big|_{x_{abr i \min}}, p_{abr i us}, \mu_{haft 0bar \max}, \mu_{haft p_{max} \max}, \\ & \frac{\partial F_{x \text{ haftpot } i}}{\partial r} \Big|_{x_{abr i \max}}, p_{abr i os}, \mu_{haft 0bar \min}, \mu_{haft p_{max} \min}, \\ & \frac{\partial F_{x \text{ haftpot } i}}{\partial r} \Big|_{x_{abr i \max}}, p_{abr i os}, \mu_{haft 0bar \max}, \mu_{haft p_{max} \min}, \\ & \frac{\partial F_{x \text{ haftpot } i}}{\partial r} \Big|_{x_{abr i \max}}, p_{abr i us}, \mu_{haft 0bar \min}, \mu_{haft p_{max} \max}, \\ & \frac{\partial F_{x \text{ haftpot } i}}{\partial r} \Big|_{x_{abr i \max}}, p_{abr i us}, \mu_{haft 0bar \max}, \mu_{haft p_{max} \max} \end{aligned} \right\}$$

mit  $\partial F_{x \text{ haftpot } i}(\partial p_i, p_i, \mu_{haft 0bar}, \mu_{haft p_{max}})$

$$= l_{RKE} b_{RKE} \cdot \partial p_i \cdot \left( \mu_{haft 0bar} + 2 \frac{p_i}{p_{max}} (\mu_{haft p_{max}} - \mu_{haft 0bar}) \right)$$

Beschreibt  $r$  gemäß C.101 die parallele Änderung der *Haftreibbeiwerte*, lässt sich, da  $p_i(x)$  selbst nicht von diesen abhängt (keine Auswirkung auf  $M_{LGK y}$ ,  $\Delta x_{LGK}$ ,  $a$ ,  $b$  durch konstantes  $F_{Lx PT10}$ ,  $F_{LGK z}$ ), und  $x$  festliegt, die Auswirkung auf  $s_{12 i}$  mit Hilfe von C.83 angeben als

$$\frac{\partial F_{x \text{ haftpot } i}(x)}{\partial r} \Big|_{r=r_0, x=x_{abr i}(r_0)} = l_{RKE} b_{RKE} \cdot c \cdot p_i \Big|_{r=r_0, x=x_{abr i}(r_0)} \quad (\text{C.107})$$

Der Term *wächst monoton* in  $p_i \Big|_{r=r_0, x=x_{abr i}(r_0)}$ . Damit folgt die auf Basis selbst konvergierender Abschätzungen mit unbegrenzt kleinen Intervallen der einzelnen Parameter beliebig genaue Abschätzung

$$s_{12 i us 2} \leq s_{12 i} \leq s_{12 i os 2} \text{ mit C.101}$$

$$s_{12 i us 2} = l_{RKE} b_{RKE} \cdot c \cdot p_{abr i us} \quad s_{12 i os 2} = l_{RKE} b_{RKE} \cdot c \cdot p_{abr i os}$$

Auch  $s_{13 i}$  kann analog C.89 dargestellt werden als

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F_{x \text{ haftpot } i}}{\partial x} \Big|_{r=r_0, x=x_{abr i}(r_0)} \\ & = l_{RKE} b_{RKE} \frac{\partial p_i}{\partial x} \Big|_{r=r_0, x=x_{abr i}(r_0)} \cdot \left( \mu_{haft 0bar} + 2 \frac{p_i \Big|_{r=r_0, x=x_{abr i}(r_0)}}{p_{max}} (\mu_{haft p_{max}} - \mu_{haft 0bar}) \right) \end{aligned} \quad (\text{C.108})$$

Wie bei den Termen  $s_{11 i}$  und  $s_{12 i}$  verhalten sich die Einflussgrößen teilweise gegenläufig, eine exakte Abschätzung ist so nur schwer möglich, und es sollen die Schranken

von  $s_{13i}$  aus den unabhängig voneinander bestimmten Abschätzungen der Einflussgrößen gewonnen werden. Das Gleiche gilt auch für den Teilterm  $\left. \frac{\partial p_i}{\partial x} \right|_{r=r_0, x=x_{abri}(r_0)}$  selbst, dessen Einflussgrößen demnach ebenso separat abgeschätzt werden müssen. Aus der Erläuterung zu C.102 geht hervor, dass  $p_i$  für festgelegten Parameter  $n_{LKx}$  und damit festliegendes  $b$  über  $x$  im gültigen Bereich maximal einen *Wendepunkt* besitzt. Damit hat der Steigungsverlauf  $\frac{\partial p_i}{\partial x}$  über  $x$  auch maximal einen inneren *Extremwert*. Dieser *Extremwert* kann im Randbereich des *Laustreifens* für große Werte von  $|b|$  auftreten, wobei der Rand der Druckkurve über  $x$  dann unrealistisch *konkav* statt *konvex* geformt ist. Nach C.103 liegt dieser *Extremwert* der Drucksteigung für festliegendes  $n_{LKx}$  sowie

$$(b \neq 0) \wedge \left( -\frac{l_{mati}}{2} \leq \frac{a(e_l - 1)}{b(e_l + 1)} \leq +\frac{l_{mati}}{2} \right)$$

an der Position

$$x_{abri \partial p_{extr}/\partial x} = \frac{l_{mati}}{2} + \frac{a(e_l - 1)}{b(e_l + 1)}$$

Da sich gemäß Abschnitt C.17 in C.102 ausschließlich  $b$  *monoton* mit  $n_{LKx}$  ändert (s. Begr. zu C.85), folgt, dass für festliegendes  $x_0$  sich  $\left. \frac{\partial p_i}{\partial x} \right|_{x=x_0}$  *monoton* in  $n_{LKx}$  ändert.

Die *Haftreibbeiwerte*  $\mu_{haft 0bar}$  und  $\mu_{haft p_{max}}$  beeinflussen  $\left. \frac{\partial p_i}{\partial x} \right|_{x=x_0}$  durch die hier fehlende *Rückkopplung* von  $F_{LGKx}$  gar nicht (s.a. Begr. zu C.107).  $\left. \frac{\partial p_i}{\partial x} \right|_{x=x_0}$  hat wie gezeigt nur einen inneren *Extrempunkt*, womit letztlich die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial p_i}{\partial x} \right|_{x_{abrius}} &= \min \left( I_{\partial p_i/\partial x} \right) \leq \left. \frac{\partial p_i}{\partial x} \right|_{r=r_0, x=x_{abri}(r_0)} \leq \left. \frac{\partial p_i}{\partial x} \right|_{x_{abrios}} = \max \left( I_{\partial p_i/\partial x} \right) \\ I_{\partial p_i/\partial x} &= \left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{\partial p_i}{\partial x} \right|_{n_{LKx}=n_{LKx \min}, x=x_{abri \min}}, \left. \frac{\partial p_i}{\partial x} \right|_{n_{LKx}=n_{LKx \min}, x=x_{abri \max}}, \\ \left. \frac{\partial p_i}{\partial x} \right|_{n_{LKx}=n_{LKx \max}, x=x_{abri \min}}, \left. \frac{\partial p_i}{\partial x} \right|_{n_{LKx}=n_{LKx \max}, x=x_{abri \max}} \end{array} \right\} \\ &\cup \left\{ \left. \frac{\partial p_i}{\partial x} \right|_{n_{LKx}=n_{LKx \min}, x=x_{abri \partial p_{extr}/\partial x} \Big|_{n_{LKx}=n_{LKx \min}}} \mid (b|_{n_{LKx}=n_{LKx \min}} \neq 0) \right. \\ &\quad \left. \wedge \left( x_{abri \min} \leq x_{abri \partial p_{extr}/\partial x} \Big|_{n_{LKx}=n_{LKx \min}} \leq x_{abri \max} \right) \right\} \\ &\cup \left\{ \left. \frac{\partial p_i}{\partial x} \right|_{n_{LKx}=n_{LKx \max}, x=x_{abri \partial p_{extr}/\partial x} \Big|_{n_{LKx}=n_{LKx \max}}} \mid (b|_{n_{LKx}=n_{LKx \max}} \neq 0) \right. \\ &\quad \left. \wedge \left( x_{abri \min} \leq x_{abri \partial p_{extr}/\partial x} \Big|_{n_{LKx}=n_{LKx \max}} \leq x_{abri \max} \right) \right\} \end{aligned}$$

folgt, die aus den gleichen Gründen wie bei den bisherigen Abschätzungen mit unbegrenzt kleinen Intervallen der einzelnen Parameter beliebig genau wird.

Wie für C.105 im auf C.106 folgenden Text gezeigt ist der geklammerte Faktor des äußeren Produkts auch in C.108 *positiv, wächst monoton* mit  $\mu_{haft p_{max}}$ , *fällt monoton* in  $p_i$ , ändert sich in von  $p_i \leq \frac{p_{max}}{2}$  und  $p_i > \frac{p_{max}}{2}$  abhängiger Richtung *monoton* in  $\mu_{haft 0bar}$ , und nimmt daher für Extremwerte der Einflussgrößen mindestens so extreme Werte an wie für innere. Da  $\left. \frac{\partial p_i}{\partial x} \right|_{r=r_0, x=x_{abr i}(r_0)}$  außerdem abhängig von  $\mu_{haft 0bar}$ ,  $\mu_{haft p_{max}}$  und  $n_{LKx}$  *positive* und *negative* Werte annehmen kann, wird  $s_{13 i}$  wie folgt abgeschätzt

$$s_{13 i us} = \min \left( I_{\partial F_x haftpot i / \partial x} \right) \leq s_{13 i} \leq s_{13 i os} = \max \left( I_{\partial F_x haftpot i / \partial x} \right)$$

$$I_{\partial F_x haftpot i / \partial x} = \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \frac{\partial p_i}{\partial x} \Big|_{x_{abr i us}} \cdot \min(I_f), \quad \frac{\partial p_i}{\partial x} \Big|_{x_{abr i us}} \cdot \max(I_f), \\ \frac{\partial p_i}{\partial x} \Big|_{x_{abr i os}} \cdot \min(I_f), \quad \frac{\partial p_i}{\partial x} \Big|_{x_{abr i os}} \cdot \max(I_f) \end{array} \right\}$$

$$I_f = \left\{ \begin{array}{l} \mu_{haft 0bar min} + 2 \frac{p_{abr i os}}{p_{max}} (\mu_{haft p_{max} min} - \mu_{haft 0bar min}), \\ \mu_{haft 0bar max} + 2 \frac{p_{abr i os}}{p_{max}} (\mu_{haft p_{max} min} - \mu_{haft 0bar max}), \\ \mu_{haft 0bar min} + 2 \frac{p_{abr i us}}{p_{max}} (\mu_{haft p_{max} max} - \mu_{haft 0bar min}), \\ \mu_{haft 0bar max} + 2 \frac{p_{abr i us}}{p_{max}} (\mu_{haft p_{max} max} - \mu_{haft 0bar max}) \end{array} \right\}$$

wobei auch diese Abschätzung auf Basis beliebig genauer Schranken für unbegrenzt kleine Intervalle der einzelnen Parameter beliebig genau wird.

Auf dieser Grundlage lässt sich nun auch die Abschätzung für  $s_{1 i}$  angeben. Da der Punkt  $x_{abr i}$  als Stelle definiert ist, an der mit steigendem  $x$  die *schlupfbedingte Haftkraft* größer wird als das *Haftpotenzial*, ist der Nenner von C.100 grundsätzlich *positiv* (s. C.77). Auf die mit Spielraum abgeschätzten Werte  $s_{13 i us}$  und  $s_{13 i os}$  kann diese Aussage jedoch nicht ausgeweitet werden. Daher müssen für den Fall von Werten  $\leq 0$  des abgeschätzten Nenners in die Abschätzung von  $s_{1 i}$  die Werte  $-\infty$  und  $+\infty$  integriert werden, die wiedergeben, dass die berechneten Teilschätzungen keine genauere Gesamtschätzung zulassen.  $s_{11 i}$  ist nach den Voraussetzungen an die *Reibbeiwerte* immer *positiv*. Für die Bedeutung von  $r$  gemäß C.84 kann  $s_{12 i}$  das Vorzeichen abhängig von  $\mu_{haft 0bar}$  bzw.  $\mu_{haft p_{max}}$  wechseln, für die Interpretation von  $r$  nach C.101 sieht man mit C.107 einfach,

dass  $s_{12i}$  grundsätzlich *positiv* ist. Also erhält man für die Abschätzung von  $s_{1i}$

$$s_{1i\text{us}1} = \min(I_{s_{1i1}}) \leq s_{1i} \leq s_{1i\text{os}1} = \max(I_{s_{1i1}}) \text{ mit C.84}$$

$$I_{s_{1i1}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{s_{11i\text{us}} \cdot s_{12i\text{us}1}}{\lambda}, \frac{s_{11i\text{us}} \cdot s_{12i\text{os}1}}{\lambda} \left| s_{13i\text{us}} \leq c_{\text{scher}} \frac{\lambda}{\lambda+1} \right. \\ c_{\text{scher}} \frac{\lambda}{\lambda+1} - s_{13i\text{us}} \quad c_{\text{scher}} \frac{\lambda}{\lambda+1} - s_{13i\text{us}} \end{array} \right\} \\ \cup \left\{ \begin{array}{l} \frac{s_{11i\text{os}} \cdot s_{12i\text{us}1}}{\lambda}, \frac{s_{11i\text{os}} \cdot s_{12i\text{os}1}}{\lambda} \left| s_{13i\text{os}} \leq c_{\text{scher}} \frac{\lambda}{\lambda+1} \right. \\ c_{\text{scher}} \frac{\lambda}{\lambda+1} - s_{13i\text{os}} \quad c_{\text{scher}} \frac{\lambda}{\lambda+1} - s_{13i\text{os}} \end{array} \right\} \\ \cup \left\{ \text{sgn}(s_{12i\text{us}1}) \cdot \infty, \text{sgn}(s_{12i\text{os}1}) \cdot \infty \left| s_{13i\text{os}} > c_{\text{scher}} \frac{\lambda}{\lambda+1} \right. \right\}$$

bzw.

$$s_{1i\text{us}2} = \min(I_{s_{1i2}}) \leq s_{1i} \leq s_{1i\text{os}2} = \max(I_{s_{1i2}}) \text{ mit C.101}$$

$$I_{s_{1i2}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{s_{11i\text{us}} \cdot s_{12i\text{us}2}}{\lambda} \left| s_{13i\text{us}} \leq c_{\text{scher}} \frac{\lambda}{\lambda+1} \right. \\ c_{\text{scher}} \frac{\lambda}{\lambda+1} - s_{13i\text{us}} \end{array} \right\} \\ \cup \left\{ \begin{array}{l} \frac{s_{11i\text{os}} \cdot s_{12i\text{os}2}}{\lambda} \left| s_{13i\text{os}} \leq c_{\text{scher}} \frac{\lambda}{\lambda+1} \right. \\ c_{\text{scher}} \frac{\lambda}{\lambda+1} - s_{13i\text{os}} \end{array} \right\} \\ \cup \left\{ \infty \left| s_{13i\text{os}} > c_{\text{scher}} \frac{\lambda}{\lambda+1} \right. \right\}$$

## C.19 Abschätzung der Latsch-Gesamtlängskraft

Um später auch Abschätzungen ohne *konstant* gehaltenen Wert von  $F_{LxPT1}$  zu ermöglichen, muss der Wert der resultierenden Kraft  $F_{LGKx}$  ebenso abgeschätzt werden. Dann können nämlich auch Schranken für  $F_{LxPT1}$  unter Berücksichtigung der ersten Gleichung in 4.27 selbst angegeben werden, dies aber natürlich nur, wenn die Abschätzung von  $F_{LxPT1}$  auch unter Berücksichtigung der ersten Gleichung in 4.27 gilt. Zunächst wird  $F_{LGKx}$  jedoch auch hier für *konstant* erzwungenes  $F_{LxPT1}$  ohne Berücksichtigung der ersten Gleichung in 4.27 abgeschätzt.

Nach Gleichung C.83 wächst  $F_{x\text{haftpot}i}(x)$  für  $0 < x < l_{\text{mat}i}$  *streng monoton* in  $\mu_{\text{haft}0\text{bar}}$  und  $\mu_{\text{haft}p_{\text{max}}}$  ( $p_i(x) < p_{\text{max}}$ ), und mit den Voraussetzungen 4.103 an die *Haftreibbeiwerte* gilt  $F_{x\text{haftpot}i}(x) > F_{x\text{gleit}i}(x)$ . So lässt sich in Abbildung C.19 leicht nachvollziehen,

dass sich für wachsende *Haftreibbeiwerte* die *Haftabrissposition*  $x_{abri}$  und sich damit die insgesamt integrierte Längskraft  $F_{x\ i\ ges}$  des *i. Laufstreifens* bei lokal gleichbleibender *Gleitreibungskraft streng monoton* vergrößert. Das Verhalten von  $F_{x\ i\ ges}$  in Abhängigkeit von  $n_{LKx}$  ist genauso regelmäßig, dies allerdings nur unter der Voraussetzung, dass  $x_{abri}$ , das nach Abschnitt C.17 bei ausschließlicher Änderung von  $n_{LKx}$  die *Laufstreifen-Hälften* nicht wechselt (s. Begr. nach C.87), in der hinteren *Laufstreifen-Hälfte* liegt. Aus C.85, wo  $r$  die Änderung von  $n_{LKx}$  beschreibt, lässt sich mit den Voraussetzungen 4.103, dass  $F_{x\ haftpot\ i}(x)$  und  $F_{x\ gleit\ i}(x)$  in  $p_i(x)$  *monoton wachsen*, erkennen, dass sich  $F_{x\ haftpot\ i}(x)$  und  $F_{x\ gleit\ i}(x)$  für  $x \geq \frac{l_{mat\ i}}{2}$  mit wachsendem  $n_{LKx}$  *monoton* in die gleiche Richtung verändern. Dann verändert sich wie in Abbildung C.18 leicht zu sehen auch  $x_{abri}$  in dieselbe Richtung, und es folgt, dass sich  $F_{x\ i\ ges}$  für  $x_{abri} \geq \frac{l_{mat\ i}}{2}$  mit wachsendem  $n_{LKx}$  *monoton* verändert. Für  $x_{abri} < \frac{l_{mat\ i}}{2}$  wirkt sich die Änderung von  $n_{LKx}$  komplizierter auf  $F_{x\ i\ ges}$  aus. Mit C.86 sieht man, dass sich die Kraftpotenziale mit variiertem  $n_{LKx}$  in der vorderen und hinteren *Latsch-Hälfte* in entgegengesetzte Richtung verändern und damit  $F_{x\ i\ ges}$  gegenläufig beeinflussen. Betrachtet man die beiden *Laufstreifen-Hälften* jedoch getrennt, verändern sich deren Gesamt-Längskräfte allerdings jeweils *monoton* mit wachsendem  $n_{LKx}$ . Denn in der hinteren *Laufstreifen-Hälfte* verändert sich die ausschließlich relevante Kraft  $F_{x\ gleit\ i}$  *monoton* in  $n_{LKx}$  und in der vorderen Hälfte  $x_{abri}$ ,  $F_{x\ haftpot\ i}$  und  $F_{x\ gleit\ i}$  in eine gemeinsame Richtung. Auch im Fall  $x_{abri} \geq \frac{l_{mat\ i}}{2}$  können die Kräfte der einzelnen *Laufstreifen-Hälften* getrennt abgeschätzt werden. Dadurch verschlechtert sich auch die Qualität der Abschätzung nicht. Da für jede innere Wertbelegung Extremwerte existieren mit extremeren Werten der jeweiligen Anteile, erhält man so folgende Schranken für die *Laufstreifen-Gesamtlängskraft*, die auf Basis exakt beschränkter Parameterwerte für unbegrenzt kleine Intervalle der einzelnen Parameter beliebig genau werden

$$F_{x\ i\ ges\ F_{Lx\ PT10\ us}} \leq F_{x\ i\ ges}|_{F_{Lx\ PT10}} \leq F_{x\ i\ ges\ F_{Lx\ PT10\ os}}$$

$$F_{x\ i\ ges\ F_{Lx\ PT10\ us}} = S_{F_{x\ i\ v\ min}} + S_{F_{x\ i\ h\ min}}, \quad F_{x\ i\ ges\ F_{Lx\ PT10\ os}} = S_{F_{x\ i\ v\ max}} + S_{F_{x\ i\ h\ max}}$$

$$S_{F_{x\ i\ v\ min}} = \min \left( \left\{ \int_0^{\frac{l_{mat\ i}}{2}} F_{x\ i}(x) |_{n_{LKx\ min}, \mu_{haft\ 0bar\ min}, \mu_{haft\ pmax\ min}} dx, \right. \right. \\ \left. \left. \int_0^{\frac{l_{mat\ i}}{2}} F_{x\ i}(x) |_{n_{LKx\ max}, \mu_{haft\ 0bar\ min}, \mu_{haft\ pmax\ min}} dx \right\} \right)$$

$$S_{F_{x\ i\ v\ max}} = \max \left( \left\{ \int_0^{\frac{l_{mat\ i}}{2}} F_{x\ i}(x) |_{n_{LKx\ min}, \mu_{haft\ 0bar\ max}, \mu_{haft\ pmax\ max}} dx, \right. \right. \\ \left. \left. \int_0^{\frac{l_{mat\ i}}{2}} F_{x\ i}(x) |_{n_{LKx\ max}, \mu_{haft\ 0bar\ max}, \mu_{haft\ pmax\ max}} dx \right\} \right)$$

$$s_{F_x i h min} = \min \left( \left\{ \int_{\frac{l_{mat i}}{2}}^{l_{mat i}} F_{x i}(x) \Big|_{n_{LKx min}, \mu_{haft 0bar min}, \mu_{haft pmax min}} dx, \right. \right. \\ \left. \left. \int_{\frac{l_{mat i}}{2}}^{l_{mat i}} F_{x i}(x) \Big|_{n_{LKx max}, \mu_{haft 0bar min}, \mu_{haft pmax min}} dx \right\} \right)$$

$$s_{F_x i h max} = \max \left( \left\{ \int_{\frac{l_{mat i}}{2}}^{l_{mat i}} F_{x i}(x) \Big|_{n_{LKx min}, \mu_{haft 0bar max}, \mu_{haft pmax max}} dx, \right. \right. \\ \left. \left. \int_{\frac{l_{mat i}}{2}}^{l_{mat i}} F_{x i}(x) \Big|_{n_{LKx max}, \mu_{haft 0bar max}, \mu_{haft pmax max}} dx \right\} \right)$$

Und übertragen auf die Gesamtlängskraft des *Latschs* mit *konstantem* Wert  $F_{Lx PT1 0}$  erhält man die für unbegrenzt kleine Intervalle der einzelnen Parameter beliebig genaue Abschätzung

$$F_{x F_{Lx PT1 0} us} \leq F_{LGKx} \Big|_{F_{Lx PT1 0}} \leq F_{x F_{Lx PT1 0} os}$$

$$F_{x F_{Lx PT1 0} us} = \sum_{i=1}^{n_{LS}} F_{x i ges F_{Lx PT1 0} us}, \quad F_{x F_{Lx PT1 0} os} = \sum_{i=1}^{n_{LS}} F_{x i ges F_{Lx PT1 0} os}$$

Um letztlich auch die *Latschlängskraft* für die gegebene Parametermenge inklusive berücksichtigter erster Gleichung in 4.27 über die Schranken abschätzen zu können, die ohne Erfüllung der Gleichungsbedingung bestimmt wurden, müssen in diesen auch verschiedene Werte von  $F_{Lx PT1 0}$  berücksichtigt werden. Ersetzt man im Teilterm

$$M_{LGKy} + \Delta x_{LGK} F_{LGKz}$$

von 4.24  $M_{LGKy}$  mit 4.22 und  $\Delta x_{LGK}$  mit 4.28, erhält man mit

$$T = F_{Lx PT1} (n_{LKx} \cdot F_{LGKz} - R_{dyn} + \|r_{G0} - r_{K0}\|) \quad (C.109)$$

den Term, über den das gesamte Restmodell von  $n_{LKx}$  und  $F_{Lx PT1}$  abhängt. Da der Einfluss von  $\Delta x_{LGK}$  auf  $x_{REK def j}$  nämlich genauso wie  $A_{K0}$  selbst *stationär* konstant ist, hängt 4.30 nicht davon ab. Weiter gilt unter  $\delta = \alpha = \varepsilon_W = 0$  nach Abschnitt 4.2.2  $F_{y ij} = 0$ , womit 4.34 unabhängig von  $x_{REK def j}$  ist. Außerdem wird  $r_{G0} - r_{K0}$  durch das *konstante*  $F_{LGKz}$  bestimmt, hängt also nicht von  $n_{LKx}$ ,  $\mu_{haft 0bar}$  und  $\mu_{haft pmax}$  ab. Daher muss eine Abschätzung der Auswirkung verschiedener festgelegter Werte  $n_{LKx min} \leq n_{LKx} \leq n_{LKx max}$  bzw.  $F_{Lx PT1 min} \leq F_{Lx PT1} \leq F_{Lx PT1 max}$  zwar für  $T$  sämtliche damit mögliche Werte berücksichtigen, nicht aber für die einzelnen variablen Einflussgrößen  $n_{LKx}$  und  $F_{Lx PT1}$ . Für  $T$  gelten die exakten Schranken

$$T_{min} = \min(I_T) \leq T \leq T_{max} = \max(I_T)$$

$$I_T = \left\{ \begin{array}{l} T|_{n_{LKx min}, F_{Lx PT1 min}}, \quad T|_{n_{LKx min}, F_{Lx PT1 max}}, \\ T|_{n_{LKx max}, F_{Lx PT1 min}}, \quad T|_{n_{LKx max}, F_{Lx PT1 max}} \end{array} \right\}$$

und es kommt eine Abschätzung von  $F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}}$  für

$$[n_{LKx min}, n_{LKx max}] \times [F_{Lx PT1 min}, F_{Lx PT1 max}] \quad (C.110)$$

einer Abschätzung für

$$[n'_{LKx min}, n'_{LKx max}] \times \{F_{Lx PT1 0}\} \quad (C.111)$$

mit

$$n'_{LKx min} = \min(I'_{n'_{LKx}}), \quad n'_{LKx max} = \max(I'_{n'_{LKx}})$$

$$I'_{n'_{LKx}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{F_{LGKz}} \cdot \left( \frac{T_{min}}{F_{Lx PT1 0}} + R_{dyn} - \|r_{G0} - r_{K0}\| \right), \\ \frac{1}{F_{LGKz}} \cdot \left( \frac{T_{max}}{F_{Lx PT1 0}} + R_{dyn} - \|r_{G0} - r_{K0}\| \right) \end{array} \right\}$$

gleich. Die Parametergrenzen  $n'_{LKx min}$  und  $n'_{LKx max}$  können nach dieser Transformation in Extremfällen auch *negative* Werte annehmen, was der mechanischen Definition der *Latschlängsnachgiebigkeit* widerspricht. Für die Abschätzungsverfahren zu den Eigenschaften von  $Z_{\tau 8}$  ist dies jedoch kein Problem, da sie an keiner Stelle *positive* Werte von  $n_{LKx}$  voraussetzen. Bei den durchaus vorausgesetzten Eigenschaften 4.100 und 4.103 verhält es sich so, dass sie nach wie vor zutreffen, da sie an Stelle von  $n_{LKx}$  in  $T$  ausgedrückt werden können, und für  $T$  die gleiche Wertemenge wie im Fall ohne Transformation erzielt wird. Also gilt

$$F_{x F_{Lx PT1 const us}} \leq F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}} \leq F_{x F_{Lx PT1 const os}}$$

$$\text{für } n_{LKx min} \leq n_{LKx} \leq n_{LKx max}, \quad F_{Lx PT1 min} \leq F_{Lx PT1 const} \leq F_{Lx PT1 max}$$

$$F_{x F_{Lx PT1 const us}} = F_{x F_{Lx PT1 0 us}}, \quad F_{x F_{Lx PT1 const os}} = F_{x F_{Lx PT1 0 os}}$$

$$\text{mit } \text{sgn}(F_{Lx PT1 0}) = \text{sgn}(F_{Lx PT1 min}) = \text{sgn}(F_{Lx PT1 max})$$

$$\text{und } F_{x F_{Lx PT1 0 us}}, F_{x F_{Lx PT1 0 os}} \text{ für } n'_{LKx min} \leq n_{LKx} \leq n'_{LKx max}$$

Anders als die Menge der in Kombination zu betrachtenden Parameter sind die relevanten Werte für  $F_{Lx PT1}$  selbst Resultat der Abschätzung und nicht vorweg gegeben. Für eine gegebene Menge an Parameterkombinationen von  $n_{LKx}$ ,  $\mu_{haft 0bar}$  und  $\mu_{haft pmax}$  ist ein Intervall  $[F_{LGKx us}, F_{LGKx os}]$  eine gültige Abschätzung von  $F_{LGKx}$  unter Berücksichtigung der ersten Gleichung in 4.27, wenn es die Schranken der Abschätzung von  $F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}}$ , also ohne Berücksichtigung der ersten Gleichung in 4.27, für die gleiche Parametermenge und Werte  $F_{Lx PT1 0}$  aus  $[F_{LGKx us}, F_{LGKx os}]$  überdeckt. Abbildung C.20 veranschaulicht diesen Zusammenhang. Die Betrachtung erfolgt hier zunächst nur für positive Werte des *Umfangsschlupfs*  $\lambda$  und damit auch von  $F_{LGKx}$  und  $F_{Lx PT1}$ , lässt

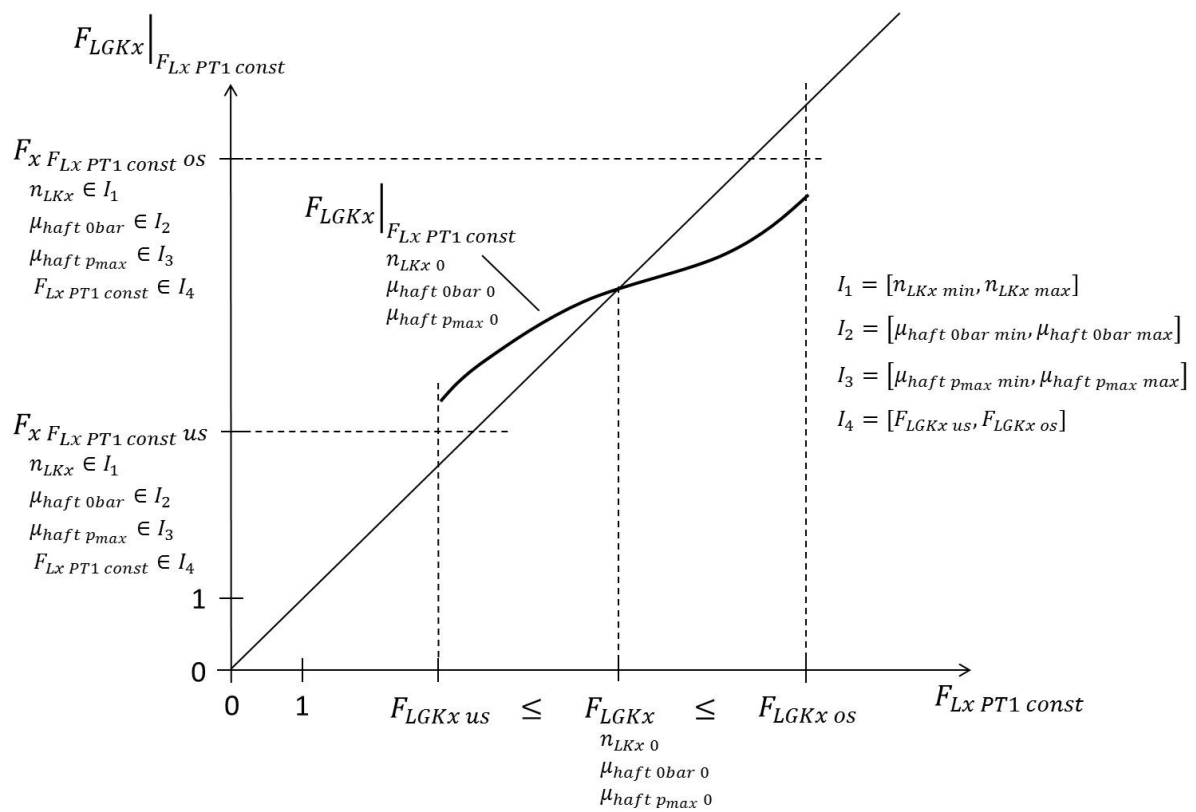


Abbildung C.20: Gültiges Abschätzungsintervall für  $F_{LGKx}$  mit berücksichtigter erster Gleichung in 4.27 abgebildet durch Abschätzung mit ausgeblendeter erster Gleichung in 4.27



sich aber einfach auf negative Werte und entsprechende Berücksichtigung in den Abschätzungen übertragen. Gilt

$$[F_{x F_{Lx PT1 const us}}, F_{x F_{Lx PT1 const os}}] \subseteq [F_{LGKx us}, F_{LGKx os}] \quad (C.112)$$

für  $F_{LGKx us} = F_{Lx PT1 min} \leq F_{Lx PT1 const} \leq F_{Lx PT1 max} = F_{LGKx os}$ , folgt für eine Parametrierung  $n_{LKx 0}$ ,  $\mu_{haft 0bar 0}$ ,  $\mu_{haft pmax 0}$

$$\begin{aligned} F_{LGKx} \Big|_{F_{Lx PT1 const} = F_{LGKx us}} &\geq F_{x F_{Lx PT1 const us}} \geq F_{LGKx us} \\ F_{LGKx} \Big|_{F_{Lx PT1 const} = F_{LGKx os}} &\leq F_{x F_{Lx PT1 const os}} \leq F_{LGKx os} \end{aligned}$$

Für die *Stationär*-Lösung unter Berücksichtigung der ersten Gleichung in 4.27 gilt

$$g(F_{LGKx 0}) = F_{LGKx} \Big|_{F_{Lx PT1 const} = F_{LGKx 0}} - F_{LGKx 0} = 0 \quad (C.113)$$

Das bedeutet für die Schranken  $F_{LGKx us}$  und  $F_{LGKx os}$

$$g(F_{LGKx us}) \geq 0 \geq g(F_{LGKx os})$$

$g$  ist *stetig* in  $F_{LGKx}$ , woraus mit dem *Zwischenwertsatz von Bolzano* (s. bspw. [41]) folgt, dass  $F_{LGKx 0} \in [F_{LGKx us}, F_{LGKx os}]$  mit  $g(F_{LGKx 0}) = 0$  existiert.  $F_{LGKx 0}$  ist also der *stationäre* Wert von  $F_{LGKx}$  unter Berücksichtigung der ersten Gleichung in 4.27 für  $n_{LKx 0}$ ,  $\mu_{haft 0bar 0}$ ,  $\mu_{haft pmax 0}$  und wird, was zu zeigen war, durch die Schranken  $F_{LGKx us}$  und  $F_{LGKx os}$  abgeschätzt.

Unabhängig von der Bestimmung der Schranken  $F_{LGKx us}$  und  $F_{LGKx os}$  lässt sich analog zu Abschnitt C.15 an dieser Stelle sinnvoll analysieren, ob unter den Bedingungen  $B_8$  überhaupt ein eindeutiger *Stationärzustand* resultiert. Es gilt durch die ausbleibenden Längsauslenkungen der *Reibkontakt-Elemente* auch unter einem erzwungenen Wert  $F_{Lx PT1} \neq 0$  nach Abschnitt C.2  $F_{LGKx} \Big|_{F_{Lx PT1 const}, \lambda=0} = 0$  und damit

$$\left. \frac{\partial F_{LGKx} \Big|_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial F_{Lx PT1}} \right|_{\lambda=0} = 0$$

Für hinreichend kleines  $|\lambda| > 0$  folgt damit aus Gründen der *Stetigkeit*

$$0 < \left| \frac{\partial F_{LGKx} \Big|_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial F_{Lx PT1}} \right|_{\lambda} \leq c_{\partial F_{LGKx}} < 1 \quad (C.114)$$

Können sich unter denselben Ausgangsbedingungen zwei verschiedene *Stationärzustände* mit den verschiedenen resultierenden Längskräften  $F_{LGKx 1}$  und  $F_{LGKx 2}$  einstellen, gilt für diese  $g(F_{LGKx 1}) = g(F_{LGKx 2}) = 0$  und damit

$$F_{LGKx} \Big|_{F_{Lx PT1 const} = F_{LGKx 2}} - F_{LGKx} \Big|_{F_{Lx PT1 const} = F_{LGKx 1}} = F_{LGKx 2} - F_{LGKx 1}$$

Die linke Seite in Integraldarstellung erhält man daraus

$$\int_{F_{LGKx1}}^{F_{LGKx2}} \frac{\partial F_{LGKx} |_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial F_{Lx PT1}} \Big|_{\lambda} dF_{Lx PT1} = F_{LGKx2} - F_{LGKx1}$$

und mit C.114

$$F_{LGKx2} - F_{LGKx1} > F_{LGKx2} - F_{LGKx1}$$

was zum Widerspruch führt. Ist  $|\lambda|$  nicht zu groß, besitzt ein resultierender *Stationärzustand* also einen eindeutigen Wert  $F_{LGKx0}$ . Um zu entscheiden, ob ein Wert  $|\lambda_0| > 0$  nach C.114 hinreichend klein ist, müsste die Berechnung weiterer Schranken analog  $\frac{\partial F_{LGKx} |_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial n_{LKx us}}$  und  $\frac{\partial F_{LGKx} |_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial n_{LKx os}}$  aus Abschnitt C.20 definiert werden. Da die Abschätzung von  $F_{Lx PT1 const}$  selbst schon auf dieser Information aufbaut (s.u.), wäre für  $F_{LGKx us}$  und  $F_{LGKx os}$  allerdings die grobe Beschränkung  $F_{LGKx || os}$  aus der Begründung zu 4.99 anzuwenden, wodurch hier jedoch anders als beim Einfluss von  $n_{LKx}$  mit keinen zu großen Einschränkungen zu rechnen ist. Trotz der Möglichkeit, auch C.114 zu verifizieren, wird im Umfang dieser Arbeit darauf verzichtet und nicht auf weitere Details dazu eingegangen.

Dass ein Intervall  $[F_{LGKx us}, F_{LGKx os}]$  mit C.112 grundsätzlich existiert, ist mit den generellen Schranken an  $F_{LGKx}$ , wie sie bspw. in der Begründung zu 4.99 beschrieben sind, zu sehen, da die Abschätzung von  $F_{x ges} |_{F_{Lx PT1 0}}$  durch die unabhängige Betrachtung zweier real möglicher Teilkräfte maximal doppelt so groß werden kann. Um die Abschätzungsergebnisse zum Erfolg zu bringen, muss das Intervall  $[F_{LGKx us}, F_{LGKx os}]$  allerdings kleinstmöglich sein. Im Folgenden wird nun zunächst von der Existenz dieses kleinstmöglichen Intervalls ausgegangen, die mit der anschließenden Konstruktion des Intervalls dann auch nachgewiesen wird. Bildet man basierend auf zwei Werten  $F_{LGKx u1} \leq F_{LGKx o1}$  mit

$$F_{LGKx u1}, F_{LGKx o1} \in [F_{LGKx us}, F_{LGKx os}]$$

die Folge

$$F_{LGKx u j+1} = \min \left( I_{F_{LGKx u o j+1}} \right), \quad F_{LGKx o j+1} = \max \left( I_{F_{LGKx u o j+1}} \right)$$

$$I_{F_{LGKx u o j+1}} = \left\{ F_{LGKx u j}, \operatorname{sgn}(F_{LGKx}) \cdot F_{x F_{Lx PT1 const us}}, \right. \\ \left. F_{LGKx o j}, \operatorname{sgn}(F_{LGKx}) \cdot F_{x F_{Lx PT1 const os}} \right\}$$

$$\text{mit } F_{LGKx u j} = F_{Lx PT1 min} \leq F_{Lx PT1 const} \leq F_{Lx PT1 max} = F_{LGKx o j}, \quad j \geq 1$$

für die das Vorzeichen der resultierenden *Latsch*-Längskraft zusätzlich eingeführt werden muss, da die sonstigen Abschätzungen alle vorzeichenfrei sind, gilt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} F_{LGKx u j} = F_{LGKx us}, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} F_{LGKx o j} = F_{LGKx os}$$

Man sieht dies wie folgt: Es gilt

$$F_{LGKxuj}, F_{LGKxoj} \in [F_{LGKxus}, F_{LGKxos}]$$

da, falls dies für einen kleinsten Wert  $j_0$  nicht zutrifft, aus der Bildung der Folgeelemente für  $j_0$  folgt, dass  $F_{LGKxus}$  und  $F_{LGKxos}$  die Voraussetzung C.112 nicht erfüllen. Das Variationsintervall in der Abschätzung C.112 ist nämlich eine *Übermenge* des bei der Bildung der  $j_0$ . Folgeelemente zugrunde liegenden Variationsintervalls. Weiter gilt durch die *Minimierung* bzw. *Maximierung*

$$F_{LGKxuj+1} \leq F_{LGKxuj}, \quad F_{LGKxoj+1} \geq F_{LGKxoj}$$

Insgesamt *fällt* die eine bzw. *steigt* die andere der beiden *Intervallgrenzen* also *monoton* und *beschränkt*. Damit konvergieren beide Grenzen gegen ein Intervall, das C.112 erfüllt. Ist das *Grenzwertintervall* nicht  $[F_{LGKxus}, F_{LGKxos}]$ , trifft die Voraussetzung, dass  $[F_{LGKxus}, F_{LGKxos}]$  das kleinste Intervall dieser Art ist, nicht zu. Es folgt also die zu zeigende Eigenschaft. Als *Startwerte* der *Iteration* werden zwei Längskraftwerte gewählt, die selbst im betrachteten Parameterraum entstehen und daher im resultierenden Intervall enthalten sein müssen, wie bspw.

$$F_{LGKxu1} = \min(I_{F_{LGKxu01}}) \quad F_{LGKxo1} = \max(I_{F_{LGKxo01}})$$

$$I_{F_{LGKxu01}} = \left\{ \begin{array}{l} F_{LGKx}|_{n_{LKx} \min, \mu_{haft0bar} \min, \mu_{haftpmax} \min} , \\ F_{LGKx}|_{n_{LKx} \min, \mu_{haft0bar} \max, \mu_{haftpmax} \max} , \\ F_{LGKx}|_{n_{LKx} \max, \mu_{haft0bar} \min, \mu_{haftpmax} \min} , \\ F_{LGKx}|_{n_{LKx} \max, \mu_{haft0bar} \max, \mu_{haftpmax} \max} \end{array} \right\}$$

Bei abbrechender Berechnung der Folge ergibt sich, da die *Intervallfolge* von innen gegen das gesuchte Intervall *konvergiert*, theoretisch betrachtet allerdings ein Intervall, das die Bedingung C.112 selbst nicht exakt erfüllt. Zur Abhilfe kann für jeden Indexwert  $j$  das zugehörige Intervall betrachtet, in beide Richtungen um einen Wert  $\delta_j$  proportional zur Intervallgröße vergrößert, und überprüft werden, ob dieses Intervall Bedingung C.112 erfüllt. Dann wäre innerhalb der *Toleranz* des zuletzt verwendeten Werts  $\delta_j$  das Intervall  $[F_{LGKxus}, F_{LGKxos}]$  bestimmt. Bei größeren variierten Teilmengen von  $P_g^*$  ist anders als bei beliebig kleinen (s.u.) nicht klar, ob dieses Erfolgskriterium grundsätzlich funktioniert, und es müssen zusätzliche Abbruchbedingungen eingeführt werden, die einerseits beliebig genaue Abschätzungen für immer kleinere Intervalle der einzelnen Parameter und andererseits einen erfolglosen Abbruch für größere Teilmengen ermöglichen. Damit ergibt sich folgende Berechnung von  $F_{LGKxus}$  und  $F_{LGKxos}$

$$\begin{aligned}
 F_{LGKx\ us} &= \begin{cases} F_{LGKx\ u\ j_0} & \text{für } j_0 < n_{it\ max} \\ -\infty & \text{sonst} \end{cases}, \quad F_{LGKx\ os} = \begin{cases} F_{LGKx\ o\ j_0} & \text{für } j_0 < n_{it\ max} \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases} \\
 j_0 &= \min \left( \left\{ |j| \mid \left\{ \text{sgn}(F_{LGKx}) \cdot F_{x\ F_{Lx\ PT1\ const\ us}}, \text{sgn}(F_{LGKx}) \cdot F_{x\ F_{Lx\ PT1\ const\ os}} \right\} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \subset [F_{LGKx\ u\ j} - \delta_j, F_{LGKx\ o\ j} + \delta_j] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \text{für } F_{LGKx\ u\ j} - \delta_j \leq F_{Lx\ PT1\ const} \leq F_{LGKx\ o\ j} + \delta_j \right\} \cup \{n_{it\ max}\} \right) \\
 \delta_j &= d_1 \cdot (F_{LGKx\ o\ j} - F_{LGKx\ u\ j}), \quad n_{it\ max} = \frac{d_2}{\Delta p_8}, \quad d_1, d_2 > 0 \\
 \Delta p_8 &= \max \left( n_{LKx\ max} - n_{LKx\ min}, \mu_{haft\ 0bar\ max} - \mu_{haft\ 0bar\ min}, \right. \\
 &\quad \left. \mu_{haft\ p_{max}\ max} - \mu_{haft\ p_{max}\ min} \right)
 \end{aligned}$$

Dass die Iteration die notwendigen Resultate liefert, sieht man wie folgt. Mit Bedingung C.114 zur Garantie eines eindeutigen *Stationärzustands* sowie C.113 gilt für festliegende Parameterwerte und

$$c_{\partial F_{LGKx}}^{-1} > \frac{F_{LGKx} - F_{Lx\ PT1\ min}}{F_{Lx\ PT1\ max} - F_{LGKx}} > c_{\partial F_{LGKx}}$$

dass

$$\begin{aligned}
 &\max_{F_{Lx\ PT1\ min} \leq F_{Lx\ PT1} \leq F_{Lx\ PT1\ max}} F_{LGKx} |_{F_{Lx\ PT1\ const}} \\
 &\leq F_{LGKx} + \max \left( \int_{F_{Lx\ PT1\ min}}^{F_{LGKx}} \left| \frac{\partial F_{LGKx} |_{F_{Lx\ PT1\ const}}}{\partial F_{Lx\ PT1}} \right| dF_{Lx\ PT1}, \right. \\
 &\quad \left. \int_{F_{LGKx}}^{F_{Lx\ PT1\ max}} \left| \frac{\partial F_{LGKx} |_{F_{Lx\ PT1\ const}}}{\partial F_{Lx\ PT1}} \right| dF_{Lx\ PT1} \right) \\
 &\leq \max(F_{LGKx} + c_{\partial F_{LGKx}}(F_{LGKx} - F_{Lx\ PT1\ min}), F_{LGKx} + c_{\partial F_{LGKx}}(F_{Lx\ PT1\ max} - F_{LGKx})) \\
 &< \max(F_{LGKx} + F_{Lx\ PT1\ max} - F_{LGKx}, F_{Lx\ PT1\ max}) = F_{Lx\ PT1\ max}
 \end{aligned}$$

sowie analog

$$\min_{F_{Lx\ PT1\ min} \leq F_{Lx\ PT1} \leq F_{Lx\ PT1\ max}} F_{LGKx} |_{F_{Lx\ PT1\ const}} > F_{Lx\ PT1\ min}$$

Gilt für die Parameterbelegungen aus einer Teilmenge  $A \subseteq P_8^*$

$$c_{\partial F_{LGKx}}^{-1} > \frac{\min/\max_{P_8^V \in A} F_{LGKx} - F_{Lx\ PT1\ min}}{F_{Lx\ PT1\ max} - \min/\max_{P_8^V \in A} F_{LGKx}} > c_{\partial F_{LGKx}}$$

überträgt sich die Eigenschaft auf

$$F_{Lx PT1 min} < \min_{P_8^V \in A} / \max_{P_8^V \in A} F_{LGKx} |_{F_{Lx PT1 const}} < F_{Lx PT1 max} \quad (C.115)$$

$$F_{Lx PT1 min} \leq F_{Lx PT1} \leq F_{Lx PT1 max}$$

Es existieren also für unbegrenzt kleine Intervalle der einzelnen Parameter beliebig kleine Intervalle  $[F_{Lx PT1 min}, F_{Lx PT1 max}]$ , die C.112 mit einer exakten Abschätzung anstatt einer groben Abschätzung  $[F_{LGKx us}, F_{LGKx os}]$  erfüllen. Für das vergrößerte Intervall  $[F_{Lx PT1 min} - \delta_j, F_{Lx PT1 max} + \delta_j]$  gilt mit C.114 und C.115

$$\begin{aligned} & \max_{P_8^V \in A} F_{LGKx} |_{F_{Lx PT1 const}} \\ & F_{Lx PT1 min} - \delta_j \leq F_{Lx PT1} \leq F_{Lx PT1 max} + \delta_j \\ & \leq F_{Lx PT1 max} + \max \left( - \int_{F_{Lx PT1 min}}^{F_{Lx PT1 min} - \delta_j} \left| \frac{\partial F_{LGKx} |_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial F_{Lx PT1}} \right| dF_{Lx PT1}, \right. \\ & \quad \left. \int_{F_{Lx PT1 max}}^{F_{Lx PT1 max} + \delta_j} \left| \frac{\partial F_{LGKx} |_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial F_{Lx PT1}} \right| dF_{Lx PT1} \right) \\ & \leq F_{Lx PT1 max} + c_{\partial F_{LGKx}} \delta_j < F_{Lx PT1 max} + \delta_j \end{aligned}$$

Der Zusammenhang für  $F_{Lx PT1 min}$  folgt analog, und es gilt

$$F_{Lx PT1 min} - \delta_j < \min_{P_8^V \in A} / \max_{P_8^V \in A} < F_{Lx PT1 max} + \delta_j \quad (C.116)$$

$$F_{Lx PT1 min} - \delta_j \leq F_{Lx PT1} \leq F_{Lx PT1 max} + \delta_j$$

Unter konkreten Werten  $\mu_{haft 0bar 0}$ ,  $\mu_{haft pmax 0}$ ,  $n_{LKx 0}$  und  $F_{Lx PT1 0}$  sind die Schranken  $F_{x F_{Lx PT1 const us}}$  und  $F_{x F_{Lx PT1 const os}}$  exakt. C.116 trifft auch in diesem Fall für beliebiges  $\delta_j > 0$  zu. Sind die Teilintervalle von  $A = [\mu_{haft 0bar min}, \mu_{haft 0bar max}] \times [\mu_{haft pmax min}, \mu_{haft pmax max}] \times [n_{LKx min}, n_{LKx max}]$  und  $F_{Lx PT1 max} - F_{Lx PT1 min}$  hinreichend klein, bleibt auch für die grobe statt der exakten Abschätzung die Ungleichung C.116 erhalten, und es gilt

$$\begin{aligned} & [F_{x F_{Lx PT1 const us}}, F_{x F_{Lx PT1 const os}}] |_{F_{Lx PT1 min} - \delta_j, F_{Lx PT1 max} + \delta_j} \\ & \subset [F_{Lx PT1 min} - \delta_j, F_{Lx PT1 max} + \delta_j] \end{aligned} \quad (C.117)$$

Für konkrete Parameterwerte sind die kleinsten Lösungsintervalle des Iterationsverfahrens unter exakter und grober Abschätzung identisch, weshalb für hinreichend kleine Intervalle der einzelnen Parameter C.117 durch die echten Teilmengen nach wie vor die Teilmengenrelationen für größere Intervalle in der Umgebung des kleinsten Lösungsintervalls der groben Abschätzung beschreibt. Das kleinste Lösungsintervall entsteht nämlich bei

Vergrößerung der Menge  $A$  kontinuierlich aus dem exakten unter konkreten Parameterwerten. Dann gilt C.117 auch für das erweiterte Intervall  $[F_{LGKxuj} - \delta_j, F_{LGKxoj} + \delta_j]$  bei hinreichender Konvergenz von  $[F_{LGKxuj}, F_{LGKxoj}]$  gegen das Lösungsintervall, und die Iteration bricht erfolgreich ab. Damit wird klar, dass für unbegrenzt kleine Intervalle der einzelnen Parameter mit den ebenso nahe beieinander liegenden Startwerten  $F_{LGKxu1}$  und  $F_{LGKxo1}$  beliebig genaue Abschätzungen  $F_{LGKxus}$  und  $F_{LGKxos}$  resultieren.

## C.20 Abschätzung der rückkopplungsfreien Längskraftänderung des Latschs

Mit den Ergebnissen aus den Abschnitten C.17 und C.18 kann die Längskraftänderung eines *Laustreifens* durch Änderung der Parameter  $\mu_{haft0bar}$ ,  $\mu_{haftpmax}$  und  $n_{LKx}$  insgesamt abgeschätzt werden. Dabei wird auch hier zunächst wieder das Verhalten unter ausgeblendeter erster Gleichung in 4.27 und erzwungenem *konstantem* Wert für  $F_{LxPT1}$  betrachtet. Zur Bildung der entsprechenden Schranken für den Gesamt-*Laufstreifen* ist außerdem eine Aufsummierung der Schranken zu den einzelnen *Laufstreifen* erforderlich. Man erhält damit für

$$F_{LxPT1} = F_{LxPT10}, \quad n_{LKx\min} \leq n_{LKx} \leq n_{LKx\max},$$

$$\mu_{haft0bar\min} \leq \mu_{haft0bar} \leq \mu_{haft0bar\max}, \quad \mu_{haftpmax\min} \leq \mu_{haftpmax} \leq \mu_{haftpmax\max}$$

die Abschätzung

$$\frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{LxPT10}}}{\partial n_{LKx}}_{us} \leq \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{LxPT10}}}{\partial n_{LKx}} \leq \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{LxPT10}}}{\partial n_{LKx}}_{os}$$

$$\frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{LxPT10}}}{\partial n_{LKx}}_{us} = \sum_{i=1}^{n_{LS}} (s_{1ius1} + s_{2imin}),$$

$$\frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{LxPT10}}}{\partial n_{LKx}}_{os} = \sum_{i=1}^{n_{LS}} (s_{1ios1} + s_{2imax}) \quad \text{mit } c = 1 \text{ in C.84}$$

Im Fall der Differenziation nach  $\mu_{haft0bar}$  und  $\mu_{haftpmax}$  ist ein direktes Aufsummieren der bereits vorhandenen Schranken nicht möglich, da diese sich auf eine parallele Variation der *Haftreibbeiwerte* beziehen. Der Haupteffekt innerhalb eines *Laufstreifens* bei der Veränderung eines der *Haftreibbeiwerte* ist die Verschiebung des *Haftabrisspunkts*, die letztlich nur von der Änderung des *Haftpotenzials* an der Abrissstelle abhängt. Ob die Änderung des *Haftpotenzials* für den Druck an der *Haftabrissstelle* durch die Änderung eines der *Haftreibbeiwerte* oder durch deren parallele Variation zustande kommt,

bewirkt innerhalb des *Laufstreifens* keinen Unterschied. Auch *analytisch* bestätigt sich diese Eigenschaft einfach in Gleichung C.80 mit C.79 (eine Änderung (in  $r$ ) beeinflusst ausschl.  $\left. \frac{\partial F_{x\text{haftpot } i}}{\partial r} \right|_{r_0, x_{abr\ i}(r_0)}$ , s.a. C.83, Begr. zu C.107). Aus C.83 oder 4.32 ergibt sich die Änderung für den *Haftreibbeiwert* zum relevanten Druck am *Haftabrisspunkt* aus der Änderung der einzelnen *Haftreibbeiwerte*

$$\frac{\partial \mu(0, p_i(x_{abr\ i}(r_0)))}{\partial (\mu_{haft\ 0bar} \quad \mu_{haft\ p_{max}})} = \left( \frac{p_{max} - p_i(x_{abr\ i}(r_0))}{p_{max}} \quad \frac{p_i(x_{abr\ i}(r_0))}{p_{max}} \right) \quad (\text{C.118})$$

Für die Äquivalenz bei Änderung eines der *Haftreibbeiwerte* und deren paralleler Veränderung gilt

$$\frac{\partial F_{x\ i\ ges}|_{F_{Lx\ PT1\ 0}}}{\partial \mu_{haft\ 0bar}} = \frac{\partial F_{x\ i\ ges}|_{F_{Lx\ PT1\ 0}}}{\partial r} \quad \text{mit C.101 und } c = \frac{p_{max} - p_i(x_{abr\ i}(r_0))}{p_{max}}$$

$$\frac{\partial F_{x\ i\ ges}|_{F_{Lx\ PT1\ 0}}}{\partial \mu_{haft\ p_{max}}} = \frac{\partial F_{x\ i\ ges}|_{F_{Lx\ PT1\ 0}}}{\partial r} \quad \text{mit C.101 und } c = \frac{p_i(x_{abr\ i}(r_0))}{p_{max}}$$

Nach C.101 folgt außerdem

$$\left. \frac{\partial F_{x\ i\ ges}|_{F_{Lx\ PT1\ 0}}}{\partial r} \right|_{c=c_0} = c_0 \cdot \left( \frac{\partial F_{x\ i\ ges}|_{F_{Lx\ PT1\ 0}}}{\partial \mu_{haft\ 0bar}} + \frac{\partial F_{x\ i\ ges}|_{F_{Lx\ PT1\ 0}}}{\partial \mu_{haft\ p_{max}}} \right)$$

$$= c_0 \cdot \left. \frac{\partial F_{x\ i\ ges}|_{F_{Lx\ PT1\ 0}}}{\partial r} \right|_{c=1}$$

Es gilt damit

$$\frac{\partial F_{x\ i\ ges}|_{F_{Lx\ PT1\ 0}}}{\partial \mu_{haft\ 0bar}} = \frac{p_{max} - p_i(x_{abr\ i}(r_0))}{p_{max}} \cdot \frac{\partial F_{x\ i\ ges}|_{F_{Lx\ PT1\ 0}}}{\partial r} \quad \text{mit C.101 und } c = 1$$

$$\frac{\partial F_{x\ i\ ges}|_{F_{Lx\ PT1\ 0}}}{\partial \mu_{haft\ p_{max}}} = \frac{p_i(x_{abr\ i}(r_0))}{p_{max}} \cdot \frac{\partial F_{x\ i\ ges}|_{F_{Lx\ PT1\ 0}}}{\partial r} \quad \text{mit C.101 und } c = 1$$

Weiter *wächst*  $F_{x\ i\ ges}$  nach Abschnitt C.19 *monoton* in den *Haftreibbeiwerten*, was hier

$$\frac{\partial F_{x\ i\ ges}|_{F_{Lx\ PT1\ 0}}}{\partial r} \geq 0$$

bedeutet. Mit den Schranken  $p_{abr\ i\ us}$  und  $p_{abr\ i\ os}$  für  $p_i(x_{abr\ i}(r_0))$  aus Abschnitt C.18 ist es nun möglich, die folgende Abschätzung der Längskraftänderung eines *Laufstreifens* in  $\mu_{haft\ 0bar}$  und  $\mu_{haft\ p_{max}}$  anzugeben

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \frac{\partial F_{x i ges}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial \mu_{haft 0bar}}_{us} \leq \frac{\partial F_{x i ges}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial \mu_{haft 0bar}} \leq \frac{\partial F_{x i ges}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial \mu_{haft 0bar}}_{os} \\
 0 &\leq \frac{\partial F_{x i ges}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial \mu_{haft pmax}}_{us} \leq \frac{\partial F_{x i ges}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial \mu_{haft pmax}} \leq \frac{\partial F_{x i ges}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial \mu_{haft pmax}}_{os} \\
 \frac{\partial F_{x i ges}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial \mu_{haft 0bar}}_{us} &= \frac{p_{max} - p_{abri os}}{p_{max}} \cdot S_{1 i us 2} \\
 \frac{\partial F_{x i ges}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial \mu_{haft 0bar}}_{os} &= \frac{p_{max} - p_{abri us}}{p_{max}} \cdot S_{1 i os 2} \\
 \frac{\partial F_{x i ges}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial \mu_{haft pmax}}_{us} &= \frac{p_{abri us}}{p_{max}} \cdot S_{1 i us 2}, \quad \frac{\partial F_{x i ges}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial \mu_{haft pmax}}_{os} = \frac{p_{abri os}}{p_{max}} \cdot S_{1 i os 2}
 \end{aligned}$$

mit  $c = 1$  in C.101

Auf dieser Basis kann die *Latsch*-Gesamtlängskraftänderung unter ausgeblendeter erster Gleichung in 4.27 nun wie für  $n_{LKx}$  auch für  $\mu_{haft 0bar}$  und  $\mu_{haft pmax}$  bestimmt werden. Man erhält also für

$$\begin{aligned}
 F_{Lx PT1} &= F_{Lx PT1 0}, & n_{LKx min} &\leq n_{LKx} \leq n_{LKx max}, \\
 \mu_{haft 0bar min} &\leq \mu_{haft 0bar} \leq \mu_{haft 0bar max}, & \mu_{haft pmax min} &\leq \mu_{haft pmax} \leq \mu_{haft pmax max}
 \end{aligned}$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial \mu_{haft 0bar}}_{us} \leq \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial \mu_{haft 0bar}} \leq \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial \mu_{haft 0bar}}_{os} \\
 0 &\leq \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial \mu_{haft pmax}}_{us} \leq \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial \mu_{haft pmax}} \leq \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial \mu_{haft pmax}}_{os} \\
 \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial \mu_{haft 0bar}}_{us} &= \sum_{i=1}^{n_{LS}} \frac{\partial F_{x i ges}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial \mu_{haft 0bar}}_{us}, \\
 \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial \mu_{haft 0bar}}_{os} &= \sum_{i=1}^{n_{LS}} \frac{\partial F_{x i ges}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial \mu_{haft 0bar}}_{os} \\
 \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial \mu_{haft pmax}}_{us} &= \sum_{i=1}^{n_{LS}} \frac{\partial F_{x i ges}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial \mu_{haft pmax}}_{us}, \\
 \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial \mu_{haft pmax}}_{os} &= \sum_{i=1}^{n_{LS}} \frac{\partial F_{x i ges}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial \mu_{haft pmax}}_{os}
 \end{aligned}$$



Basierend auf beliebig genauen Abschätzungen werden damit auch die Schranken für die Änderung von  $F_{LGKx}|_{F_{LxPT10}}$  in  $n_{LKx}$ ,  $\mu_{haft0bar}$  und  $\mu_{haftpmax}$  mit unbegrenzt kleinen Intervallen der einzelnen Parameter beliebig genau.

Für verschiedene Werte von  $n_{LKx}$ ,  $\mu_{haft0bar}$  und  $\mu_{haftpmax}$  ergeben sich *stationär* jedoch auch unterschiedliche Werte für  $F_{LxPT1}$ , wenn die erste Gleichung von 4.27 nicht mit festgelegtem Wert  $F_{LxPT10}$  ausgeblendet wird. Hier soll  $F_{LxPT1}$  nach wie vor bei gleichzeitiger Aufgabe der ersten Gleichung in 4.27 unter Veränderung der Parameter (s. Abschn. C.17) *konstant* erzwungen werden. Dabei sollen jedoch verschiedene *konstante* Werte  $F_{LxPT1const}$  berücksichtigt werden. Von  $F_{LxPT1}$  und  $n_{LKx}$  hängt das gesamte Restmodell nach Abschnitt C.19 ausschließlich über den Term  $T$  (s. C.109) ab. Wie in Abschnitt C.19 begründet lässt sich über die *transformierten* Intervallgrenzen C.111 des Parameterraums C.110 eine Abschätzung der Größen auch für variiertes  $F_{LxPT1const}$  auf Basis der Terme für *konstantes*  $F_{LxPT10}$  formulieren. Um bei der *Transformation* das Vorzeichen der Änderung  $\frac{\partial T}{\partial n_{LKx}}$  und damit, da  $n_{LKx}$  das Restmodell nur über  $T$  beeinflusst, das Vorzeichen sämtlicher Änderungen in  $n_{LKx}$  zu erhalten, muss für den Längskraft-Referenzwert allerdings

$$\text{sgn}(F_{LxPT10}) = \text{sgn}(F_{LGKx})$$

gelten. Mit dieser *Transformation* erhält man zwar die gleiche Wertemenge für den Term  $T$  wie mit der Originalkombination C.110 der Parameter, die Werte zum differenzierten Term

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n_{LKx}} \right|_{F_{LxPT1}} = F_{LxPT1} \cdot F_{LGKz}$$

über den in undifferenzierter Form das Restmodell ausschließlich von  $n_{LKx}$  abhängt, weichen jedoch mit  $F_{LxPT10}$  und  $[F_{LxPT1min}, F_{LxPT1max}]$  voneinander ab. Für nach  $n_{LKx}$  bzw. nach  $r$  mit C.84 differenzierte Größen  $f$ , die wie in diesem Abschnitt nur über  $T$  von  $n_{LKx}$  und  $F_{LxPT1}$  abhängen, gilt

$$\left. \frac{\partial f(T)}{\partial n_{LKx}} \right|_{F_{LxPT1}, n_{LKx}} = \frac{F_{LxPT1}}{F_{LxPT10}} \cdot \left. \frac{\partial f(T)}{\partial n_{LKx}} \right|_{F_{LxPT10}, n'_{LKx}}$$

$$\text{mit } F_{LxPT1min} \leq F_{LxPT1} \leq F_{LxPT1max}, \quad n_{LKxmin} \leq n_{LKx} \leq n_{LKxmax},$$

$$n'_{LKxmin} \leq n'_{LKx} \leq n'_{LKxmax}, \quad T|_{F_{LxPT1}, n_{LKx}} = T|_{F_{LxPT10}, n'_{LKx}}$$

wobei die Voraussetzungen C.111 und C.110 garantieren, dass die Nebenbedingungen eingehalten werden können. Bei unabhängiger Abschätzung der Änderung von  $f$  und dem Korrekturfaktor kann der gemeinsame Einfluss durch  $F_{LxPT1}$  ignoriert werden. In die Schranken der entsprechenden Differenziationsgröße muss also lediglich noch die zusätzliche Abschätzung des Faktors  $\frac{F_{LxPT1}}{F_{LxPT10}}$  einfließen. Eine Eingrenzung der im *Stationärfall*

identischen Größen  $F_{LGKx}$  und  $F_{Lx PT1}$  wird in Abschnitt C.19 ausführlich hergeleitet. Und so kommt man nun für die Änderung der *Latsch*-Längskraft in den Parametern  $n_{LKx}$ ,  $\mu_{haft 0bar}$  und  $\mu_{haft pmax}$  unter der eingegrenzten, erzwungenen Rückkopplungskraft für

$$n_{LKx min} \leq n_{LKx} \leq n_{LKx max},$$

$$\mu_{haft 0bar min} \leq \mu_{haft 0bar} \leq \mu_{haft 0bar max}, \quad \mu_{haft pmax min} \leq \mu_{haft pmax} \leq \mu_{haft pmax max}$$

zu den Schranken

$$\frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial n_{LKx}}_{us} \leq \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial n_{LKx}} \leq \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial n_{LKx}}_{os}$$

$$\frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial n_{LKx}}_{us} = \min \left( I_{\partial F_x|_{F_{Lx const}}} \right)$$

$$\frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial n_{LKx}}_{os} = \max \left( I_{\partial F_x|_{F_{Lx const}}} \right)$$

$$I_{\partial F_x|_{F_{Lx const}}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{F_{LGKx us}}{F_{Lx PT1 0}} \cdot \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial n_{LKx}}_{us}, \frac{F_{LGKx us}}{F_{Lx PT1 0}} \cdot \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial n_{LKx}}_{os}, \\ \frac{F_{LGKx os}}{F_{Lx PT1 0}} \cdot \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial n_{LKx}}_{us}, \frac{F_{LGKx os}}{F_{Lx PT1 0}} \cdot \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial n_{LKx}}_{os} \end{array} \right\}$$

$$\frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial n_{LKx}}_{us/os} \text{ für } F_{Lx PT1 min} = F_{LGKx us}, F_{Lx PT1 max} = F_{LGKx os},$$

$$n'_{LKx min} \leq n_{LKx} \leq n'_{LKx max}, \quad \text{sgn}(F_{Lx PT1 0}) = \text{sgn}(F_{LGKx})$$

$$F_{LGKx us}, F_{LGKx os} \text{ für } n_{LKx min} \leq n_{LKx} \leq n_{LKx max}$$

bzw.

$$0 \leq \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial \mu_{haft 0bar}}_{us} \leq \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial \mu_{haft 0bar}} \leq \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial \mu_{haft 0bar}}_{os}$$

$$0 \leq \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial \mu_{haft pmax}}_{us} \leq \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial \mu_{haft pmax}} \leq \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial \mu_{haft pmax}}_{os}$$

$$\frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial \mu_{haft 0bar}}_{us} = \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial \mu_{haft 0bar}}_{us},$$

$$\frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial \mu_{haft 0bar}}_{os} = \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial \mu_{haft 0bar}}_{os}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial \mu_{haft pmax}} \Big|_{us} &= \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial \mu_{haft pmax}} \Big|_{us}, \\ \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial \mu_{haft pmax}} \Big|_{os} &= \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial \mu_{haft pmax}} \Big|_{os}, \\ \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 0}}}{\partial \mu_{haft 0bar/pmax}} \Big|_{us/os} &\text{ für } F_{Lx PT1 min} = F_{LGKx us}, F_{Lx PT1 max} = F_{LGKx os}, \\ &n'_{LKx min} \leq n_{LKx} \leq n'_{LKx max}, \text{sgn}(F_{Lx PT1 0}) = \text{sgn}(F_{LGKx}) \\ &F_{LGKx us}, F_{LGKx os} \text{ für } n_{LKx min} \leq n_{LKx} \leq n_{LKx max} \end{aligned}$$

Auch diese Abschätzung wird für beliebig kleine Intervalle der einzelnen Parameter basierend auf unbegrenzt genauen Schranken beliebig exakt.

## C.21 Änderung der Latsch-Längskraft $F_{LGKx}$ bei Rückkopplung

Die Abschätzungen der *Laufstreifen*-Längskraft-Änderung in den Abschnitten C.17, C.18 und C.20 gelten für dabei *konstant* erzwungene *rückgekoppelte Latsch*-Längskraft  $F_{Lx PT1 0}$  unter Aufgabe der ersten Gleichung in 4.27. Um damit auch Aussagen über die im unveränderten Modell resultierenden Änderungen  $\frac{\partial F_{LGKx}}{\partial r}$  der Längskraft treffen zu können, muss zunächst die Reaktion von  $\frac{\partial F_{LGKx}}{\partial r}$  auf Änderungen  $\frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1}=F_{Lx PT1 0}}}{\partial r}$  bei konstant gehaltener *Rückkopplung* untersucht werden.

Gleichung C.113 zur *Stationärbedingung* bringt beide Größen zunächst in undifferenzierter Form in Verbindung

$$F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}=F_{LGKx}|_r, r} - F_{LGKx}|_r = 0$$

Durch Differenziation erhält man auch die Beziehung zwischen den Änderungstermen in  $r$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial F_{Lx PT1}} \Big|_{F_{LGKx}|_{r_0}, r_0} \cdot \frac{\partial F_{LGKx}}{\partial r} \Big|_{r_0} + \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial r} \Big|_{F_{LGKx}|_{r_0}, r_0} \\ &- \frac{\partial F_{LGKx}}{\partial r} \Big|_{r_0} = 0 \end{aligned}$$

und es ergibt sich aufgelöst

$$\left. \frac{\partial F_{LGKx}}{\partial r} \right|_{r_0} = \frac{\left. \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial r} \right|_{F_{LGKx}|_{r_0}, r_0}}{1 - \left. \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial F_{Lx PT1}} \right|_{F_{LGKx}|_{r_0}, r_0}}$$

Mit der Voraussetzung C.114 zur Garantie eindeutiger *Stationärzustände* sieht man, dass der Nenner *positiv* ist. Dann lässt sich die Änderung von  $F_{LGKx}$  in  $r$  darstellen als

$$\left. \frac{\partial F_{LGKx}}{\partial r} \right|_{r=r_0} = d|_{r=r_0} \cdot \left. \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1}=F_{LGKx}|_{r=r_0}}{\partial r} \right|_{r=r_0}, \quad d > 0$$

Da  $F_{LGKx}|_{r=r_0}$  und  $F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1}=F_{LGKx}|_{r=r_0}, r=r_0}$  als identische Werte (s.o.) auch gleiche Vorzeichen besitzen, gilt so auch

$$\left. \frac{\partial |F_{LGKx}|}{\partial r} \right|_{r=r_0} = d|_{r=r_0} \cdot \left. \frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1}=F_{LGKx}|_{r=r_0}}{\partial r} \right|_{r=r_0}, \quad d > 0 \quad (C.119)$$

## C.22 Abschätzung der Voraussetzungen zur Invertierbarkeit von $Z_{\tau 8}$

Hier sollen nun die endgültig für die *Inversion* der *Zielgrößen*  $Z_{\tau 8}$  relevanten Eigenschaften abgeschätzt werden. Dabei handelt es sich um die Vorzeichen der *Funktional-Determinanten* von  $(Z_{\tau 8})_{1,2}|_{n_{LKx}=n_{LKx0}}$ ,  $(Z_{\tau 8})_{1,3}|_{n_{LKx}=n_{LKx0}}$  und  $(Z_{\tau 8})_{2,3}|_{n_{LKx}=n_{LKx0}}$  sowie die Vorzeichen von  $\frac{\partial (Z_{\tau 8})_1}{\partial n_{LKx}}$ ,  $\frac{\partial (Z_{\tau 8})_2}{\partial n_{LKx}}$  und  $\frac{\partial (Z_{\tau 8})_3}{\partial n_{LKx}}$ . In Modellgrößen ausgedrückt erhält man unter Ausnutzung, dass im *stationären* Fall ohne resultierende *Latsch-Querkräfte* und *-Vertikalmomente*

$$F_{FHx} = F_{LGKx}$$

gilt (s. Abschn. 4.2.2), und mit jeder Vertikalkraft  $(F_{FH})_{3j}$  eine *konstante* Kraft  $F_{LGKzj}$  verbunden ist

$$\left| \frac{\partial (Z_{\tau 8})_{j,k}|_{n_{LKx}=n_{LKx0}}}{\partial (\mu_{haft 0bar} \quad \mu_{haft pmax})} \right| = \frac{\frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{LGKzj}, \lambda_j}}{\partial \mu_{haft 0bar}} \cdot \frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{LGKzk}, \lambda_k}}{\partial \mu_{haft pmax}}}{\frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{LGKzj}, \lambda_j}}{\partial \mu_{haft pmax}} \cdot \frac{\partial |F_{LGKx}|_{F_{LGKzk}, \lambda_k}}{\partial \mu_{haft 0bar}}}$$

bzw.

$$\frac{\partial (Z_{\tau 8})_j}{\partial n_{LKx}} = \frac{\partial \left| F_{LGKx} \Big|_{F_{LGKz j}, \lambda_j} \right|}{\partial n_{LKx}}$$

In Abschnitt C.21 wird die Beziehung zwischen der *Latsch*-Längskraft  $F_{LGKx}$  mit und  $F_{LGKx} \Big|_{F_{Lx PT1} = F_{Lx PT1 0}}$  ohne Rückkopplung der *Latsch*-Längskraft durch die erste Gleichung von 4.27 hergeleitet. Über das Ergebnis C.119 erhält man mit *positiven* Werten  $d_{r_0, F_{LGKz j}}$  und  $d_{r_0, F_{LGKz k}}$

$$\begin{aligned} D_{1 j, k} &= \frac{1}{d_{r_0, F_{LGKz j}} \cdot d_{r_0, F_{LGKz k}}} \cdot \left| \frac{\partial (Z_{\tau 8})_{j, k} \Big|_{n_{LKx} = n_{LKx 0}}}{\partial (\mu_{haft 0bar} \quad \mu_{haft pmax})} \right| = \\ &= \frac{\frac{\partial \left| F_{LGKx} \Big|_{F_{LGKz j}, F_{Lx PT1} = F_{LGKx} \Big|_{r_0, F_{LGKz j}}} \right|}{\partial \mu_{haft 0bar}} \cdot \frac{\partial \left| F_{LGKx} \Big|_{F_{LGKz k}, F_{Lx PT1} = F_{LGKx} \Big|_{r_0, F_{LGKz k}}} \right|}{\partial \mu_{haft pmax}}}{\frac{\partial \left| F_{LGKx} \Big|_{F_{LGKz j}, F_{Lx PT1} = F_{LGKx} \Big|_{r_0, F_{LGKz j}}} \right|}{\partial \mu_{haft pmax}} \cdot \frac{\partial \left| F_{LGKx} \Big|_{F_{LGKz k}, F_{Lx PT1} = F_{LGKx} \Big|_{r_0, F_{LGKz k}}} \right|}{\partial \mu_{haft 0bar}}} \end{aligned} \quad (C.120)$$

bzw.

$$D_{2 j} = \frac{1}{d_{r_0, F_{LGKz j}}} \cdot \frac{\partial (Z_{\tau 8})_j}{\partial n_{LKx}} = \frac{\partial \left| F_{LGKx} \Big|_{F_{LGKz j}, F_{Lx PT1} = F_{LGKx} \Big|_{r_0, F_{LGKz j}}} \right|}{\partial n_{LKx}} \quad (C.121)$$

wobei  $r_0$  in den entsprechenden Teiltermen gemäß C.84 bzw. C.101 *konstante* Parameter  $n_{LKx 0}$ ,  $\mu_{haft 0bar 0}$ ,  $\mu_{haft pmax 0}$  bedeutet, und hier auf die Angabe von  $\lambda_j$  bzw.  $\lambda_k$  jeweils verzichtet wird.

Die Ergebnisse aus Abschnitt C.20 ermöglichen, die Terme  $D_{1 j, k}$  und  $D_{2 j}$  abzuschätzen. Dabei muss der jeweils zugrunde liegende *Umfangsschlupf*  $\lambda$  auf den entsprechenden Absolutwert verändert werden, um die auf *positive* Werte des *Umfangsschlupfs* eingeschränkte Betrachtung in den Abschnitten C.16 bis C.20 zu berücksichtigen. Da die dort berechneten Schranken ohne *Rückkopplung* der durch die Wertbelegung der Parameter resultierenden *Latsch*-Längskraft  $F_{LGKx}$ , also für aufgetrennte Gleichung 4.27 und separat ggf. *negativ* vorgegebene Werte für  $F_{Lx PT1}$  erfolgen, kann im Fall *negativer* Werte des *Umfangsschlupfs*  $\lambda$  das Vorzeichen der resultierenden Abschätzung einer Kraft bzw. Kraftänderung einfach umgekehrt werden. Die Abläufe im *Latsch* bei erzwungenem gleichem Wert für  $F_{Lx PT1}$  sind nämlich für *positive* Werte  $\lambda^*$  und *negative* Werte  $\lambda$  *symmetrisch*, sofern die Beträge der jeweiligen lokalen *Haftauslenkung* (s. 4.70)

übereinstimmen

$$\frac{\lambda^*}{\lambda^* + 1} = -\frac{\lambda}{\lambda + 1}$$

Aufgelöst gilt

$$\lambda^* = -\frac{1}{2 + 1/\lambda}$$

was die *negativen* Werte des *Umfangsschlupfs* aus Gründen der hier verwendeten *Schlupf*-Definition (s. 4.36) auf  $(-\frac{1}{2}, 0)$  beschränkt, dadurch aber kein reales Problem darstellt. Angewandt auf den Fall hier ist die Umkehrung des Vorzeichens in den resultierenden Schranken gar nicht erforderlich, da ohnehin nur die *Absolutwerte* von  $F_{LGKx}$  betrachtet werden. Zur korrekten Berücksichtigung der in den Abschnitten C.16 bis C.20 vorgegebenen Werte für  $F_{Lx PT1}$  ist jedoch die Vorzeichen-Information zu  $\lambda$  bzw.  $F_{LGKx}$  erforderlich. Durch die nach Abschnitt C.20 nicht *negativen* Werte der Grenzen zur Änderung in den *Haftreibbeiwerten* können nun folgende Schranken angegeben werden

$$D_{1j,k us} \leq D_{1j,k} \leq D_{1j,k os}$$

$$D_{1j,k us} = \begin{aligned} & \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial \mu_{haft 0bar}} \Big|_{us}^{F_{LGKz}=F_{LGKz j}, \lambda=\lambda'_j, \text{sgn}(F_{LGKx})=\text{sgn}(\lambda_j)} \\ & \cdot \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial \mu_{haft pmax}} \Big|_{us}^{F_{LGKz}=F_{LGKz k}, \lambda=\lambda'_k, \text{sgn}(F_{LGKx})=\text{sgn}(\lambda_k)} \\ & - \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial \mu_{haft pmax}} \Big|_{os}^{F_{LGKz}=F_{LGKz j}, \lambda=\lambda'_j, \text{sgn}(F_{LGKx})=\text{sgn}(\lambda_j)} \\ & \cdot \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial \mu_{haft 0bar}} \Big|_{os}^{F_{LGKz}=F_{LGKz k}, \lambda=\lambda'_k, \text{sgn}(F_{LGKx})=\text{sgn}(\lambda_k)} \end{aligned}$$

$$D_{1j,k os} = \begin{aligned} & \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial \mu_{haft 0bar}} \Big|_{os}^{F_{LGKz}=F_{LGKz j}, \lambda=\lambda'_j, \text{sgn}(F_{LGKx})=\text{sgn}(\lambda_j)} \\ & \cdot \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial \mu_{haft pmax}} \Big|_{os}^{F_{LGKz}=F_{LGKz k}, \lambda=\lambda'_k, \text{sgn}(F_{LGKx})=\text{sgn}(\lambda_k)} \\ & - \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial \mu_{haft pmax}} \Big|_{us}^{F_{LGKz}=F_{LGKz j}, \lambda=\lambda'_j, \text{sgn}(F_{LGKx})=\text{sgn}(\lambda_j)} \\ & \cdot \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial \mu_{haft 0bar}} \Big|_{us}^{F_{LGKz}=F_{LGKz k}, \lambda=\lambda'_k, \text{sgn}(F_{LGKx})=\text{sgn}(\lambda_k)} \end{aligned}$$

$$\lambda'_j = \max\left(\lambda_j, -\frac{1}{2 + 1/\lambda_j}\right), \quad \lambda'_k = \max\left(\lambda_k, -\frac{1}{2 + 1/\lambda_k}\right), \quad \lambda_{j/k} > -\frac{1}{2}$$

Genauso kann auch  $D_{2j}$  abgeschätzt werden

$$D_{2j us} \leq D_{2j} \leq D_{2j os}$$

$$D_{2j us} = \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial n_{LKx}} \Bigg|_{F_{LGKz}=F_{LGKz j}, \lambda=\lambda'_j, \text{sgn}(F_{LGKx})=\text{sgn}(\lambda_j)}^{us}$$

$$D_{2j os} = \frac{\partial F_{LGKx}|_{F_{Lx PT1 const}}}{\partial n_{LKx}} \Bigg|_{F_{LGKz}=F_{LGKz j}, \lambda=\lambda'_j, \text{sgn}(F_{LGKx})=\text{sgn}(\lambda_j)}^{os}$$

Auch die Schranken  $D_{1j,k us}$ ,  $D_{1j,k os}$ ,  $D_{2j us}$  und  $D_{2j os}$  werden basierend auf beliebig genauen Abschätzungen für unbegrenzt kleine Intervalle der einzelnen Parameter beliebig genau.

Für die letztlich interessierende Abschätzung der Vorzeichen zur *Zielgrößen*-Änderung in den *Haftreibbeiwerten* bzw. in  $n_{LKx}$  erhält man durch die *positiven* Faktoren  $d_{r_0, F_{LGKz j}}$  und  $d_{r_0, F_{LGKz k}}$  in C.120 bzw. C.121

$$\left( \forall n_{LKx min} \leq n_{LKx} \leq n_{LKx max} \quad \forall \mu_{haft 0bar min} \leq \mu_{haft 0bar} \leq \mu_{haft 0bar max} \right.$$

$$\left. \forall \mu_{haft pmax min} \leq \mu_{haft pmax} \leq \mu_{haft pmax max} : \left| \frac{\partial (Z_{\tau 8})_{j,k}|_{n_{LKx}=n_{LKx 0}}}{\partial (\mu_{haft 0bar} \quad \mu_{haft pmax})} \right| < 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow (D_{1j,k os} < 0)$$

$$\left( \forall n_{LKx min} \leq n_{LKx} \leq n_{LKx max} \quad \forall \mu_{haft 0bar min} \leq \mu_{haft 0bar} \leq \mu_{haft 0bar max} \right.$$

$$\left. \forall \mu_{haft pmax min} \leq \mu_{haft pmax} \leq \mu_{haft pmax max} : \left| \frac{\partial (Z_{\tau 8})_{j,k}|_{n_{LKx}=n_{LKx 0}}}{\partial (\mu_{haft 0bar} \quad \mu_{haft pmax})} \right| > 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow (D_{1j,k us} > 0)$$

$D_{1j,k us}, D_{1j,k os}$  für  $n_{LKx min} \leq n_{LKx} \leq n_{LKx max}$ ,

$\mu_{haft 0bar min} \leq \mu_{haft 0bar} \leq \mu_{haft 0bar max}, \mu_{haft pmax min} \leq \mu_{haft pmax} \leq \mu_{haft pmax max}$

und

$$\left( \begin{array}{l} \forall n_{LKx \min} \leq n_{LKx} \leq n_{LKx \max} \quad \forall \mu_{haft 0bar \min} \leq \mu_{haft 0bar} \leq \mu_{haft 0bar \max} \\ \forall \mu_{haft p_{max} \min} \leq \mu_{haft p_{max}} \leq \mu_{haft p_{max} \max} : \frac{\partial (Z_{\tau 8})_j}{\partial n_{LKx}} < 0 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow (D_{2j os} < 0)$$

$$\left( \begin{array}{l} \forall n_{LKx \min} \leq n_{LKx} \leq n_{LKx \max} \quad \forall \mu_{haft 0bar \min} \leq \mu_{haft 0bar} \leq \mu_{haft 0bar \max} \\ \forall \mu_{haft p_{max} \min} \leq \mu_{haft p_{max}} \leq \mu_{haft p_{max} \max} : \frac{\partial (Z_{\tau 8})_j}{\partial n_{LKx}} > 0 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow (D_{2j us} > 0)$$

$D_{2j us}, D_{2j os}$  für  $n_{LKx \min} \leq n_{LKx} \leq n_{LKx \max}$ ,

$\mu_{haft 0bar \min} \leq \mu_{haft 0bar} \leq \mu_{haft 0bar \max}, \mu_{haft p_{max} \min} \leq \mu_{haft p_{max}} \leq \mu_{haft p_{max} \max}$

Gelten für die Kenngrößen Ungleichungen der Form

$$\left| \frac{\partial (Z_{\tau 8})_{j,k} \Big|_{n_{LKx}=n_{LKx 0}}}{\partial (\mu_{haft 0bar} \quad \mu_{haft p_{max}})} \right| \leq -k \text{ oder } \geq k \text{ bzw. } \frac{\partial (Z_{\tau 8})_j}{\partial n_{LKx}} \leq -k \text{ oder } \geq k \text{ mit } k > 0$$

sind so durch die beliebig genauen Schranken auch die Vorzeicheneigenschaften dieser Kenngrößen für hinreichend kleine Intervalle der einzelnen Parameter nachweisbar.

## C.23 Verfahren zur Abschätzung der konvergenzrelevanten Eigenschaften von $Z_{\tau 8}$

Zum Nachweis der durch die *Sequentielle Parameteridentifikation* an eine gewählte Ausprägung der *Zielgrößen*  $Z_{\tau 8}$  gestellten Anforderungen im gesamten relevanten Parameterraum von  $n_{LKx}$ ,  $\mu_{haft 0bar}$  und  $\mu_{haft p_{max}}$  soll ein approximatives Abschätz-Verfahren eingesetzt werden. Für die verfügbare *Einzel*-Abschätzung der Eigenschaften gilt Folgendes:

Eine *Einzel*-Abschätzung erfolgt für eine Parameterkombination

$$[n_{LKx \min}, n_{LKx \max}] \times [\mu_{haft 0bar \min}, \mu_{haft 0bar \max}] \times [\mu_{haft p_{max} \min}, \mu_{haft p_{max} \max}]$$

Die *Einzel*-Abschätzung gelingt nicht grundsätzlich



Unter einem hinreichend kleinen Wert  $\varepsilon > 0$  mit  $\varepsilon \geq \max \left( \left\{ n_{LKx \max} - n_{LKx \min}, \mu_{haft \ 0bar \ max} - \mu_{haft \ 0bar \ min}, \mu_{haft \ p_{max} \ max} - \mu_{haft \ p_{max} \ min} \right\} \right)$  gelingt die Abschätzung, sofern die abzuschätzende Eigenschaft zutrifft

Der letzte Punkt begründet sich darin, dass für sämtliche Teilabschätzungen bis zu den Gesamtschranken der Abschätzung aus den Abschnitten C.17 bis C.22 unter  $\varepsilon = 0$  jeweils die obere und entsprechend untere Schranke aufeinanderliegen (s. dort). Da grundsätzlich Eigenschaften der Form  $E \leq -k < 0$  bzw.  $E \geq k > 0$  abgeschätzt werden sollen, wobei die Beziehungen im interessierenden Fall für *Gesamt*- und *Einzel*-Abschätzungen zutreffen, und  $E$  in den Parametern  $n_{LKx}$ ,  $\mu_{haft \ 0bar}$  und  $\mu_{haft \ p_{max}}$  stetig ist, existiert ein für den gesamten abzuschätzenden Parameterraum gültiger Wert  $\varepsilon > 0$  mit den Eigenschaften des dritten Punkts. Unter den drei beschriebenen Voraussetzungen eignet sich am besten eine Vorgehensweise, die aus *Einzel*-Abschätzungen bedarfsweise verfeinerter Aufteilungen des Parameterraums eine gelingende *Gesamt*-Abschätzung konstruiert. Denn in Teilräumen des abzuschätzenden Gesamtraums kann ein größerer Wert  $\varepsilon$  vorliegen, der eine gröbere Abschätzung erlaubt. Eine misslingende Abschätzung eines Teil-Parameterraums macht allerdings eine Aufteilung des Teilraums in kleinere Teilräume nötig. Durch den dritten Punkt zur *Einzel*-Abschätzung muss dies mit endlichem Aufwand letztlich zu einer gelingenden *Gesamt*-Abschätzung führen, vorausgesetzt die abzuschätzende Eigenschaft liegt auch vor. Der Berechnungsaufwand soll jedoch von vornherein beschränkt werden, indem die Zahl der bisher nötigen *Einzel*-Abschätzungen erfasst und die Berechnung beim Überschreiten einer Schwelle  $n_{absch \ max}$  erfolglos abgebrochen wird. Bei der Auslegung der *Zielgrößen*  $Z_{\tau_8}$  ist es mit geringem Aufwand möglich, eine Lösung zu finden, die in jedem Fall die geforderten Eigenschaften erfüllt. Das Abschätz-Verfahren ist überhaupt nur erforderlich, um in den *Zielgrößen* einfacher realisierbare Betriebspunkte der Messung mit höherer *Sensitivität* der *Zielgrößen* in den zu bestimmenden Parametern zu ermöglichen. Für diese erfordert der Nachweis der Eigenschaften unter Umständen eine größere Anzahl von Unterteilungen des Parameterraums. Übersteigt der Aufwand für den Nachweis jedoch das festgelegte Maß, sollen, anstatt den Aufwand für den Nachweis zu erhöhen, vorzugsweise die *Zielgrößen* in Richtung der Auslegung verändert werden, von der von vornherein bekannt ist, dass sie die notwendigen Eigenschaften aufweist. Da nicht klar ist, ob die Eigenschaft überhaupt für eine vorliegende Auslegung von  $Z_{\tau_8}$  zutrifft, ist ohnehin ein Abbruchkriterium für die Abschätzung erforderlich. Gelingt keiner der Verifikationsversuche zu den notwendigen Eigenschaften, muss letztlich die Auslegung gewählt werden, die die Eigenschaften in offensichtlicher Form erfüllt. Der *rekursive* Anteil des Algorithmus ergibt sich mit den 4

verschiedenen Abschätzungen

$$B_D = \begin{cases} D_{1j, kos} < 0 \\ D_{1j, kus} > 0 \\ D_{2jos} < 0 \\ D_{2jus} > 0 \end{cases}$$

gesteuert über die Zahl  $n_{absch\ max}$  der noch möglichen und den Wert  $n_{absch\ B_D}$  der zur Abschätzung eines Teil-Parameterraums durchgeführten Anzahl von Abschätzungen zu

**Funktion**  $n_{absch\ B_D}$  ( $n_{LKx\ min}$ ,  $n_{LKx\ max}$ ,  $\mu_{haft\ Obar\ min}$ ,  $\mu_{haft\ Obar\ max}$ ,  
 $\mu_{haft\ p_{max}\ min}$ ,  $\mu_{haft\ p_{max}\ max}$ ,  $n_{absch\ max}$ )

**if**  $B_D$  für  $n_{LKx\ min} \leq n_{LKx} \leq n_{LKx\ max}$ ,  
 $\mu_{haft\ Obar\ min} \leq \mu_{haft\ Obar} \leq \mu_{haft\ Obar\ max}$ ,  
 $\mu_{haft\ p_{max}\ min} \leq \mu_{haft\ p_{max}} \leq \mu_{haft\ p_{max}\ max}$

**return** 1

$n_{absch} = 1$ ,  $n_{LKx\ med} = \frac{1}{2}(n_{LKx\ max} + n_{LKx\ min})$   
 $\mu_{haft\ Obar\ med} = \frac{1}{2}(\mu_{haft\ Obar\ max} + \mu_{haft\ Obar\ min})$   
 $\mu_{haft\ p_{max}\ med} = \frac{1}{2}(\mu_{haft\ p_{max}\ max} + \mu_{haft\ p_{max}\ min})$

**if**  $n_{absch} + 8 > n_{absch\ max}$  **return**  $n_{absch\ max} + 1$   
 $n_{absch} = n_{absch} + n_{absch\ B_D}$  ( $n_{LKx\ min}$ ,  $n_{LKx\ med}$ ,  $\mu_{haft\ Obar\ min}$ ,  $\mu_{haft\ Obar\ med}$ ,  
 $\mu_{haft\ p_{max}\ min}$ ,  $\mu_{haft\ p_{max}\ med}$ ,  $n_{absch\ max} - n_{absch}$ )

**if**  $n_{absch} + 7 > n_{absch\ max}$  **return**  $n_{absch\ max} + 1$   
 $n_{absch} = n_{absch} + n_{absch\ B_D}$  ( $n_{LKx\ min}$ ,  $n_{LKx\ med}$ ,  $\mu_{haft\ Obar\ min}$ ,  $\mu_{haft\ Obar\ med}$ ,  
 $\mu_{haft\ p_{max}\ med}$ ,  $\mu_{haft\ p_{max}\ max}$ ,  $n_{absch\ max} - n_{absch}$ )

**if**  $n_{absch} + 6 > n_{absch\ max}$  **return**  $n_{absch\ max} + 1$   
 $n_{absch} = n_{absch} + n_{absch\ B_D}$  ( $n_{LKx\ min}$ ,  $n_{LKx\ med}$ ,  $\mu_{haft\ Obar\ med}$ ,  $\mu_{haft\ Obar\ max}$ ,  
 $\mu_{haft\ p_{max}\ min}$ ,  $\mu_{haft\ p_{max}\ med}$ ,  $n_{absch\ max} - n_{absch}$ )

**if**  $n_{absch} + 5 > n_{absch\ max}$  **return**  $n_{absch\ max} + 1$   
 $n_{absch} = n_{absch} + n_{absch\ B_D}$  ( $n_{LKx\ min}$ ,  $n_{LKx\ med}$ ,  $\mu_{haft\ Obar\ med}$ ,  $\mu_{haft\ Obar\ max}$ ,  
 $\mu_{haft\ p_{max}\ med}$ ,  $\mu_{haft\ p_{max}\ max}$ ,  $n_{absch\ max} - n_{absch}$ )

**if**  $n_{absch} + 4 > n_{absch\ max}$  **return**  $n_{absch\ max} + 1$   
 $n_{absch} = n_{absch} + n_{absch\ B_D}$  ( $n_{LKx\ med}$ ,  $n_{LKx\ max}$ ,  $\mu_{haft\ Obar\ min}$ ,  $\mu_{haft\ Obar\ med}$ ,  
 $\mu_{haft\ p_{max}\ min}$ ,  $\mu_{haft\ p_{max}\ med}$ ,  $n_{absch\ max} - n_{absch}$ )

**if**  $n_{absch} + 3 > n_{absch\ max}$  **return**  $n_{absch\ max} + 1$

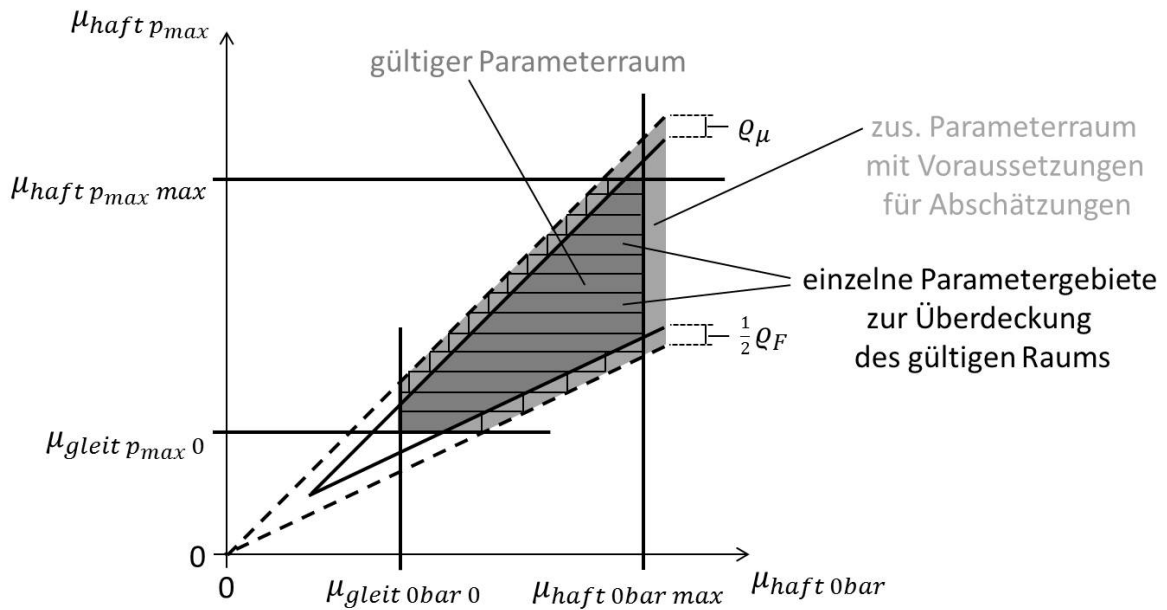


Abbildung C.21: Überdeckung des gültigen Raums der *Haftreibbeiwerte* mit Rechtecken im Gebiet der Abschätz-Voraussetzungen

```

n_{absch} = n_{absch} + n_{absch_{BD}} \left( n_{LKx_{med}}, n_{LKx_{max}}, \mu_{haft0bar_{min}}, \mu_{haft0bar_{med}}, \right.
\left. \mu_{haftp_{max}_{med}}, \mu_{haftp_{max}_{max}}, n_{absch_{max}} - n_{absch} \right)
if n_{absch} + 2 > n_{absch_{max}} return n_{absch_{max}} + 1
n_{absch} = n_{absch} + n_{absch_{BD}} \left( n_{LKx_{med}}, n_{LKx_{max}}, \mu_{haft0bar_{med}}, \mu_{haft0bar_{max}}, \right.
\left. \mu_{haftp_{max}_{min}}, \mu_{haftp_{max}_{med}}, n_{absch_{max}} - n_{absch} \right)
if n_{absch} + 1 > n_{absch_{max}} return n_{absch_{max}} + 1
n_{absch} = n_{absch} + n_{absch_{BD}} \left( n_{LKx_{med}}, n_{LKx_{max}}, \mu_{haft0bar_{med}}, \mu_{haft0bar_{max}}, \right.
\left. \mu_{haftp_{max}_{med}}, \mu_{haftp_{max}_{max}}, n_{absch_{max}} - n_{absch} \right)
if n_{absch} + 0 > n_{absch_{max}} return n_{absch_{max}} + 1
else return n_{absch}
    
```

Der Parameterraum einer *Einzel*-Abschätzung ist *quaderförmig* und bezogen auf die *Haftreibbeiwerte* allein *rechteckig*. Für die in Abschnitt 4.2.8 beschriebene Menge gültiger Parameterkombinationen gilt dies nach 4.103 ff. in Bezug auf  $\mu_{haft0bar}$  und  $\mu_{haftp_{max}}$  nicht. Abbildung C.21 zeigt das Gebiet der für alle Werte von  $n_{LKx}$  gültigen *Haftreibbeiwert*-Kombinationen in dunkelgrauer Farbe (zur Bed. in  $Q_F$  s. 4.104). Ein *rechteckiges* Parametergebiet würde entweder Teile des gültigen Parameterraums nicht überdecken

oder auch ungültige Parameterkombinationen enthalten. Die Abschätzungen der Eigenschaften von  $Z_{\tau 8}$  nutzen die Voraussetzungen zu den gültigen Parameterkombinationen, weshalb eine Abschätzung über einem Gebiet mit ungültigen Wertkombinationen nicht ohne Weiteres möglich ist. Von der *Mindestdegression*  $\varrho_\mu$  der *Haftreibbeiwerte* und der *Mindestprogression*  $\varrho_F$  der *Reibkräfte* über dem Druck nutzen die Abschätzungen nur die Eigenschaft

$$\varrho_\mu, \varrho_F \geq 0$$

wobei für gültige Parameterkombinationen

$$\varrho_\mu, \varrho_F > 0$$

gefordert wird. Damit können die Abschätzungen zu den Eigenschaften von  $Z_{\tau 8}$  zusätzlich auch auf das hellgrau in Abbildung C.21 eingezeichnete Gebiet angewandt werden, dessen horizontale Streifen so eine Dicke  $h_R > 0$  besitzen. D.h. es ist nun möglich, das dunkelgraue Gebiet der gültigen Parameter-Kombinationen mit Rechtecken vollständig zu überdecken, die selbst ganz im dunkel- oder hellgrauen Gebiet liegen, und so die Voraussetzungen für die Abschätzungen erfüllen. Eine Übereinanderschichtung von Rechtecken wie in Abbildung C.21 gezeigt erlaubt eine maximale Rechteckhöhe von

$$h_R = \min\left(\varrho_\mu, \frac{1}{2}\varrho_F\right)$$

womit sich die Zahl aufzuwendender Rechtecke mit dem größtmöglichen Wert des Parameters  $\mu_{haft p_{max}}$

$$\mu_{haft p_{max} maxpos} = \min(\mu_{haft 0bar max} - \varrho_\mu, \mu_{haft p_{max} max})$$

zu

$$n_R = \left\lceil \frac{\mu_{haft p_{max} maxpos} - \mu_{gleit p_{max} 0}}{h_R} \right\rceil$$

ergibt. Klar wird hierdurch, dass der Abschätzungsaufwand u.A. durch kleine Werte  $\varrho_\mu$  und  $\varrho_F$  beliebig erhöht werden kann. Eine möglichst geringe Breite der Rechtecke zur Überdeckung des Raums gültiger *Haftreibbeiwerte* erreicht man, wenn, sofern möglich, die Ecken links unten auf der um  $\varrho_\mu$  und die Ecken rechts oben auf der um  $\frac{1}{2}\varrho_F$  verschobenen Geraden liegen. So können folgende Begrenzungen für  $1 \leq i \leq n_R$  definiert werden

$$\begin{aligned} \mu_{haft p_{max} min i} &= \mu_{gleit p_{max} 0} + (i - 1) \cdot h_R, \\ \mu_{haft p_{max} max i} &= \min(\mu_{haft p_{max} maxpos}, \mu_{gleit p_{max} 0} + i \cdot h_R) \\ \mu_{haft 0bar min i} &= \max(\mu_{gleit 0bar 0}, \mu_{haft p_{max} min i} + \varrho_\mu), \\ \mu_{haft 0bar max i} &= \min(\mu_{haft 0bar max}, 2 \cdot \mu_{haft p_{max} max i} - \varrho_F) \end{aligned}$$

Auf dieser Grundlage kann die Abschätzung der *Zielgrößen*-Eigenschaften im gesamten gültigen Parameterraum wie folgt definiert werden

**Funktion**  $AbschErf_{B_D}$   $\left( n_{LKx\ min}, n_{LKx\ max}, \mu_{gleit\ 0bar\ 0}, \mu_{haft\ 0bar\ max}, \mu_{gleit\ p_{max}\ 0}, \mu_{haft\ p_{max}\ max} \right)$

$n_{absch} = 0$

**for**  $i = 1$  **to**  $n_R$

$n_{absch} = n_{absch} + n_{absch\ B_D} \left( n_{LKx\ min}, n_{LKx\ max}, \mu_{haft\ 0bar\ min\ i}, \mu_{haft\ 0bar\ max\ i}, \mu_{haft\ p_{max}\ min\ i}, \mu_{haft\ p_{max}\ max\ i}, n_{absch\ max} - n_{absch} \right)$

**if**  $n_{absch} + n_R - i > n_{absch\ max}$  **return** FALSE

**return** TRUE

Dass durch  $AbschErf_{B_D}$  im erfolgreichen Fall abhängig von  $B_D$  die damit jeweils bezeichnete Vorzeichen-Eigenschaft von  $\left| \frac{\partial (Z_{\tau 8})_{j,k}}{\partial (\mu_{haft\ 0bar} \quad \mu_{haft\ p_{max}})} \Big|_{n_{LKx}=n_{LKx\ 0}} \right|$  bzw.  $\frac{\partial (Z_{\tau 8})_j}{\partial n_{LKx}}$  auch tatsächlich verifiziert wird, ist inklusive der Definition der Bezeichnungen für die abgeschätzten Eigenschaften Gegenstand von Abschnitt C.22.

## C.24 Abschätzungen zu $p_{d\partial 0}$ und den Haftabrisppunkten

Dieser Abschnitt liefert einen Beweis zu 4.113, beschränkt sich dabei jedoch auf den Fall  $\lambda > 0$ , der einfach auch auf  $\lambda < 0$  übertragen werden kann. Hält man die resultierende Latsch-Längskraft auf dem *konstanten* Wert  $F_{LGKx\ 0}$ , entspricht sie *stationär* der Kraft

$$F_{LGKx\ 0} = F_{LGKx\ F_{Lx\ PT1\ const}} \Big|_{F_{Lx\ PT1}=F_{LGKx\ 0}}$$

die sich bei Festlegung von  $F_{Lx\ PT1}$  und Ausblendung der ersten Gleichung in 4.27 ergibt. Die Veränderung der *Haftreibbeiwerte* in der Definition von  $p_{d\partial 0}$  (s. 4.112) geschieht genau unter der Nebenbedingung eines *konstanten* Werts  $F_{LGKx\ 0}$  (die *Stetigkeit* der Veränderung lässt diesen Schluss trotz Betragsbildung zu). In dieser Situation bleibt auch  $F_{Lx\ PT1}$  *konstant*, und es gilt nach Abschnitt C.20 (s. Begr. vor C.118) für eine solche Änderung der *Haftreibbeiwerte* durch die Variationsgröße  $r$

$$\frac{F_{LGKx\ 0}}{\partial r} = 0 = \sum_{i=1}^{n_{LS}} \frac{\partial F_{xi\ ges}}{\partial r} \Big|_{\mu_{haft}(\cdot, \cdot) \text{ für } p \in U_\varepsilon(p_i(x_{abri}(r_0))), r \in U_\varepsilon(r_0)} \quad (C.122)$$

mit  $\mu_{haft}(p, r) = \mu(0, p) \Big|_{\mu_{haft\ 0bar}|_r, \mu_{haft\ p_{max}}|_r}$

wobei  $\varepsilon$  ein beliebig kleiner Wert  $> 0$  ist, und  $\frac{\partial F_{xi\ ges}}{\partial r}$  ausschließlich über den in der Bedingung angegebenen  $p$ - und  $r$ -Ausschnitt von den *Haftreibbeiwerten* abhängt.

In C.80 erkennt man, dass  $F_{x\ i\ ges}$  *streng monoton* in  $F_{x\ i\ haftpot}|_{r=r_0, x=x_{abr\ i}(r_0)}$  *steigt* (r hier als Änderung von  $F_{x\ i\ haftpot}$  für  $r = r_0$ ,  $x = x_{abr\ i}(r_0)$  selbst interpretiert, Nenner für hinreichend kleines  $\lambda$  positiv, lokales *Haftpotenzial* mit 4.103 immer größer als *Gleitreibung*). Für festgelegte Werte  $p = p_i(x_{abr\ i}(r_0))$  und  $x = x_{abr\ i}(r_0)$  *steigt* nach 4.30 und 4.25  $F_{x\ i\ haftpot}|_{r=r_0, x=x_{abr\ i}(r_0)}$  selbst *streng monoton* in  $\mu_{haft}|_{p=p_i(x_{abr\ i}(r_0)), r=r_0}$ . Gilt nun für den durch das hinreichend kleine  $\lambda > 0$  existierenden Index  $i$  mit  $x_{abr\ i} > 0$

$$\left. \frac{\partial F_{x\ i\ ges}}{\partial r} \right|_{\mu_{haft}(\cdot, \cdot) \text{ für } p \in U_\varepsilon(p_i(x_{abr\ i}(r_0))), r \in U_\varepsilon(r_0)} = 0$$

folgt so und, da  $\varepsilon$  beliebig klein  $> 0$  gewählt werden kann, aus zusätzlichen Gründen der *Stetigkeit*

$$\left. \frac{\partial \mu_{haft}}{\partial r} \right|_{p=p_i(x_{abr\ i}(r_0)), r=r_0} = 0$$

und es ergibt sich gemäß Definition von  $p_d$  damit  $p_{d\ \partial 0} = p_i(x_{abr\ i}(r_0))$ , was Aussage 4.113 bestätigt. Andernfalls muss wegen C.122 ein Index  $j$  existieren mit

$$\left. \frac{\partial F_{x\ i\ ges}}{\partial r} \right|_{\mu_{haft}(\cdot, \cdot) \text{ für } p \in U_\varepsilon(p_i(x_{abr\ i}(r_0))), r \in U_\varepsilon(r_0)} \cdot \left. \frac{\partial F_{x\ j\ ges}}{\partial r} \right|_{\mu_{haft}(\cdot, \cdot) \text{ für } p \in U_\varepsilon(p_j(x_{abr\ j}(r_0))), r \in U_\varepsilon(r_0)} = d < 0$$

Dann folgt, da  $d$  unabhängig von  $\varepsilon$  ist, und  $\varepsilon$  beliebig klein  $> 0$  gewählt werden kann, wieder aus Gründen der *Stetigkeit* und zusätzlich über die *streng monotone* Änderung von  $F_{x\ i/j\ ges}$  in  $\mu_{haft}|_{p=p_{i/j}(x_{abr\ i/j}(r_0)), r=r_0}$

$$\left. \frac{\partial \mu_{haft}}{\partial r} \right|_{p=p_i(x_{abr\ i}(r_0)), r=r_0} \cdot \left. \frac{\partial \mu_{haft}}{\partial r} \right|_{p=p_j(x_{abr\ j}(r_0)), r=r_0} < 0$$

Damit muss  $p_{d\ \partial 0}$  wie im linken Diagramm von Abbildung 4.66 zwischen  $p_i(x_{abr\ i}(r_0))$  und  $p_j(x_{abr\ j}(r_0))$  liegen, was ebenfalls Aussage 4.113 bestätigt.

## C.25 Eindeutiger Einfluss von $n_{LKx}$ auf $|F_{LGKx}|$

Bei festgelegtem  $F_{FHz0}$  soll zur Richtungssteuerung der  $n_{LKx}$ -abhängigen *Zielgrößen*-Änderung das Vorzeichen von  $\lambda_0$  als

$$\text{sgn}(\lambda_0) = \text{sgn}_{\text{soll}} \left( \frac{\partial |F_{LGKx}|_{\lambda_0, F_{FHz0}}}{\partial n_{LKx}} \right) \quad (\text{C.123})$$

gewählt werden. Aus der Begründung zu 4.115 geht hervor, dass  $a$  in 4.24 nicht von  $F_{LxPT1}$  abhängt. Der Term

$$a + b x_{REKj} \quad (C.124)$$

nimmt in der vorderen *Latsch*-Hälfte, also für  $x_{REKj} \geq 0$  für minimales  $b$  den kleinsten Wert an. Unter Verwendung von 4.22 und 4.28 erhält man

$$\begin{aligned} T &= M_{LGKy} + \Delta x_{LGK} F_{LGKz} = (n_{LKx} \cdot F_{LGKz} - c_0) F_{LxPT1} + d_0 \\ c_0 &= R_{dyn} - \|r_{G0} - r_{K0}\| \\ d_0 &= -k_{roll} F_{LGKz} \max(-1, \min(R_{dyn} \dot{\varphi}_{G0y}, 1)) \end{aligned}$$

wobei  $c_0$  und  $d_0$  wie die sie festlegenden Größen unabhängig von  $F_{LxPT1}$  sind ( $\|r_{G0} - r_{K0}\|$  liegt durch  $F_{LGKz}$ , also  $F_{FHz0}$  fest). Für  $n_{LKx min} \leq n_{LKx} \leq n_{LKx max}$  und  $|F_{LxPT1}| \leq F_{LGKx || os}$  (s. 4.99) gilt also

$$\begin{aligned} T|_{F_{FHz0}} &\leq T_{max} = \max(I_T) \\ I_T &= \left\{ \begin{array}{l} T|_{F_{FHz0}, n_{LKx min}, F_{LxPT1}=0}, T|_{F_{FHz0}, n_{LKx min}, F_{LxPT1}=\text{sgn}(\lambda_0) \cdot F_{LGKx || os}}, \\ T|_{F_{FHz0}, n_{LKx max}, F_{LxPT1}=0}, T|_{F_{FHz0}, n_{LKx max}, F_{LxPT1}=\text{sgn}(\lambda_0) \cdot F_{LGKx || os}} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Bei *kontinuierlicher* Darstellung des *Laufstreifen*-Zustands (s. Erl. zu C.83) erhält man mit 4.24

$$b = - \frac{T}{l_{RKE} b_{RKE} \cdot \sum_{i,j} x_{REKj}^2 p_{ansij}} \quad (C.125)$$

Die Bedingungen 4.99 an  $n_{LKx}$  garantieren mit  $F_{LGKx || os}$  unter denselben Voraussetzungen wie in der Abschätzung von  $T$  Eigenschaft 4.100, woraus

$$b|_{F_{FHz0}} \geq b_{min} = b|_{F_{FHz0}, T=T_{max}}$$

und für  $x_{REKj} > 0$

$$(a + b x_{REKj})|_{F_{FHz0}} \geq a|_{F_{FHz0}} + b_{min} x_{REKj} > 0 \quad (C.126)$$

folgt. Dieses Resultat kann man mit 4.24, da  $p_{ansij}$  für  $0 < x < l_{mat i}$  *positiv* ist, auf die *Bodendruckverteilung* insgesamt übertragen, und man erhält in der Koordinaten-Darstellung des Abstands zum *Laufstreifen*-Beginn für  $0 < x < \frac{l_{mat i}}{2}$

$$p_i(x)|_{F_{FHz0}} \geq p_{i min v}(x) = \left( a|_{F_{FHz0}} + b_{min} \cdot \left( \frac{l_{mat i}}{2} - x \right) \right) \cdot p_{ans i}(x) > 0$$

Die Bedingungen 4.103 an die *Reibbeiwerte* garantieren das *streng monotone* Wachstum des *Haftpotenzials* in  $p$ , und C.83 dessen *streng monotones* Wachstum in den *Haftreibbeiwerten* ( $p_i(x) \leq p_{max}$ ). Außerdem hängt das *Haftpotenzial* nach C.83 von keinen

weiteren Größen ab, und es gilt damit für  $\mu_{haft\ 0bar\ min} = \mu_{gleit\ 0bar\ 0} > 0$ ,  $\mu_{haft\ pmax\ min} = \mu_{gleit\ pmax\ 0} > 0$  und  $0 < x < \frac{l_{mat\ i}}{2}$

$$F_{x\ haftpot\ i}(x)|_{F_{FHz\ 0}} \geq F_{x\ haftpot\ i\ min\ v}(x) = F_{x\ haftpot\ i}(x)|_{F_{FHz\ 0}, p_i(x)=p_{i\ min\ v}(x)} > 0$$

$$\begin{aligned} & \mu_{haft\ 0bar} = \mu_{haft\ 0bar\ min} \\ & \mu_{haft\ pmax} = \mu_{haft\ pmax\ min} \end{aligned} \quad (C.127)$$

Auch die Anfangssteigung von  $F_{x\ haftpot\ i\ min\ v}$  kann abgeschätzt werden. Zunächst erhält man wegen  $p_{ans\ i}(0) = 0$ ,  $\frac{\partial p_{ans\ i}}{\partial x}\Big|_{x=0} > 0$  und C.126

$$\frac{\partial p_{i\ min\ v}(x)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \left( a|_{F_{FHz\ 0}} + b_{min} \cdot \left( \frac{l_{mat\ i}}{2} - x \right) \right) \cdot \frac{\partial p_{ans\ i}}{\partial x}\Big|_{x=0} > 0$$

Wählt man in C.108 für  $x_{abr\ i}$  den Wert 0, ergibt sich durch  $p_i(0) = 0$  für  $l_{mat\ i} > 0$

$$\frac{\partial F_{x\ haftpot\ i\ min\ v}}{\partial x}\Big|_{x=0} > 0$$

Damit gilt für ein  $\varepsilon_i > 0$  und  $0 < x \leq \varepsilon_i$

$$\frac{F_{x\ haftpot\ i\ min\ v}(x)}{x} \geq c_{i0} > 0, \quad c_{i0} \text{ konstant}$$

Im Fall größerer Werte von  $x$  folgt analog mit C.127 für  $x \in [\varepsilon_i, \frac{l_{mat\ i}}{2}]$  und  $l_{mat\ i} > 0$

$$\frac{F_{x\ haftpot\ i\ min\ v}(x)}{x} > 0$$

und, da  $[\varepsilon_i, \frac{l_{mat\ i}}{2}]$  kompakt ist,

$$\min_{\varepsilon_i \leq x \leq \frac{l_{mat\ i}}{2}} \frac{F_{x\ haftpot\ i\ min\ v}(x)}{x} = d_{i0} > 0$$

So kann insgesamt die Steigung

$$m_{\leq\ haftpot\ v} = \min(\{c_{i0}, d_{i0} | (1 \leq i \leq n_{LS}) \wedge (l_{mat\ i} > 0)\}) > 0$$

definiert werden, für die

$$\left( 0 < x \leq \frac{l_{mat\ i}}{2} \right) \Rightarrow \left( m_{\leq\ haftpot\ v} \cdot x \leq F_{x\ haftpot\ i}(x)|_{F_{FHz\ 0}} \right)$$



gilt. Wählt man  $\lambda_0$  so, dass es

$$\left| \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + 1} \right| < m_{\leq \text{haftpot } v} \quad (\text{C.128})$$

erfüllt, bedeutet dies, dass die *Haftauslenkungsgerade* unter  $F_{FH_z0}$  für sämtliche Parameterwerte aus  $P_8^*$  in jedem *Laufstreifen* innerhalb der vorderen Hälfte unterhalb der *Haftpotenzial-Kurve* verläuft, und damit sämtliche *Haftabrisspunkte* in der hinteren *Laufstreifenhälfte* liegen (s. Abschn. C.16)

$$x_{abr\ i} \Big|_{F_{FH_z0}, \lambda_0} > \frac{l_{mat\ i}}{2} \quad (\text{C.129})$$

Für vorgegebenes  $F_{Lx\ PT10}$  erhält man unter  $F_{FH_z0}$  und  $\lambda_0$  ( $\|r_{G0} - r_{K0}\|$  liegt hierdurch fest)

$$\text{sgn} \left( \frac{\partial T}{\partial n_{LKx}} \right) = \text{sgn} (F_{LGKz} F_{Lx\ PT10}) = \text{sgn} (F_{Lx\ PT10}) = \text{sgn} (\lambda_0)$$

was sich nach C.125 (auch  $p_{ans\ ij}$  liegt mit  $F_{FH_z0}$  fest) auf

$$\text{sgn} \left( \frac{\partial b}{\partial n_{LKx}} \right) = -\text{sgn} \left( \frac{\partial T}{\partial n_{LKx}} \right) = -\text{sgn} (\lambda_0)$$

überträgt. Nach Abschnitt C.17 ändert sich  $a$  und  $p_{ans\ i} > 0$  ohnehin nicht mit  $n_{LKx}$  (jeweils durch  $F_{FH_z0}$  festgelegt), und man sieht in C.83, dass für  $\frac{l_{mat\ i}}{2} < x < l_{mat\ i}$

$$\text{sgn} \left( \frac{\partial p_i(x)}{\partial n_{LKx}} \right) = \text{sgn} \left( -\frac{\partial b}{\partial n_{LKx}} \right) = \text{sgn} (\lambda_0)$$

Mit Bedingung 4.103 steigt das *Reibpotenzial streng monoton* in  $p$ , womit sich nach C.83

$$\left( \frac{l_{mat\ i}}{2} < x < l_{mat\ i} \right) \Rightarrow \left( \text{sgn} \left( \frac{\partial F_{x\ haftpot\ i}(x)}{\partial n_{LKx}} \right) = \text{sgn} \left( \frac{\partial F_{x\ gleit\ i}(x)}{\partial n_{LKx}} \right) = \text{sgn} (\lambda_0) \right) \quad (\text{C.130})$$

ergibt. Unter  $F_{FH_z0}$  und  $\lambda_0$  ist die *Haftauslenkung* kleiner als die Anfangssteigung des *Haftpotenzials* (s.o.), weshalb die *Haftauslenkungsgerade* die *Haftpotenzial-Kurve* wie in Abbildung C.17 in jedem *Laufstreifen* von unten kommend schneidet. Damit ist  $\frac{\partial F_{x\ haftpot\ i}}{\partial x}$  an der Stelle  $x_{abr\ i}$  kleiner als die Steigung der *Haftauslenkung* und der Nenner in C.80 *positiv*. Da außerdem generell  $F_{x\ haftpot\ i}(x) > F_{x\ gleit\ i}(x)$  gilt, folgt so mit C.129, C.130 und C.80

$$\text{sgn} \left( \frac{\partial |F_{x\ i\ ges}|}{\partial n_{LKx}} \Big|_{F_{FH_z0}, \lambda_0} \right) = \text{sgn} (\lambda_0)$$

Da C.80 nur für *positive* Werte  $\lambda$  und  $F_{x\ i\ ges}$  hergeleitet wurde, und im Fall *negativer* Werte  $\lambda$  und  $F_{x\ i\ ges}$  sich auch die Änderung (symmetrisch) entgegengesetzt verhält, kann die Betragsbildung beide Fälle integrieren. In sämtlichen *Laufstreifen* besitzen die resultierenden Längskräfte dasselbe Vorzeichen, weshalb sich die Effekte zur Änderung im Gesamt-*Latsch* aufsummieren lassen. Über Ergebnis C.119 angewandt mit C.84, womit sich die Änderungsrichtung vom Fall mit festgehaltenem  $F_{Lx\ PT1}$  auf den mit freiem  $F_{Lx\ PT1}$  überträgt, erhält man

$$\operatorname{sgn} \left( \left. \frac{\partial |F_{LGKx}|}{\partial n_{LKx}} \right|_{F_{FH_z 0}, \lambda_0} \right) = \operatorname{sgn}(\lambda_0)$$

Hiermit bestätigt sich nun die am Anfang getroffene Wahl C.123 des Vorzeichens von  $\lambda_0$  zum Zweck der Steuerung der Änderungsrichtung von  $|F_{LGKx}|$  in  $n_{LKx}$ .

## C.26 Zielgrößenänderung abhängig von $p_d \partial 0$

Abhängig vom Wert des in Abschnitt 4.2.8 definierten Druckpunkts  $p_d \partial 0$  zu einer *Zielgröße*  $|F_{LGKx}|_{\lambda_0, F_{FH_z 0}}$  kombiniert mit einer Parameterbelegung  $n_{LKx 0}$ ,  $\mu_{haft\ 0bar 0}$ ,  $\mu_{haft\ p_{max} 0}$  kann die Änderungsrichtung der *Zielgröße* bei einer Bewegung allein der *Haftreibbeiwerte* beschrieben werden. Eine Änderung

$$\frac{\partial \mu_{haft\ 0bar}}{\partial r}, \quad \frac{\partial \mu_{haft\ p_{max}}}{\partial r}$$

der *Haftreibbeiwerte* kann nach Definition 4.110 immer auch als Drehung  $d$  und Verschiebung  $s_{p_0}$  im Druckpunkt  $p_0$  dargestellt werden. Mit  $p_0 = p_d \partial 0$  erhält man die spezielle Beschreibung der *Haftreibbeiwert*-Änderung in  $p_d \partial 0$

$$d = d_0, \quad s_{p_0} = s_{p_0 0}, \quad p_0 = p_d \partial 0|_{\lambda_0, F_{FH_z 0}}$$

Durch den *linearen* Zusammenhang 4.110 zwischen  $d$ ,  $s_{p_0}$  und den *Haftreibbeiwert*-Änderungen gilt

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mu_{haft\ 0bar}}{\partial r} \right|_{\substack{d=d_0, s_{p_0}=s_{p_0 0} \\ p_0=p_d \partial 0}} &= \left. \frac{\partial \mu_{haft\ 0bar}}{\partial r} \right|_{\substack{d=d_0, s_{p_0}=0 \\ p_0=p_d \partial 0}} + \left. \frac{\partial \mu_{haft\ 0bar}}{\partial r} \right|_{\substack{d=0, s_{p_0}=s_{p_0 0} \\ p_0=p_d \partial 0}} \\ \left. \frac{\partial \mu_{haft\ p_{max}}}{\partial r} \right|_{\substack{d=d_0, s_{p_0}=s_{p_0 0} \\ p_0=p_d \partial 0}} &= \left. \frac{\partial \mu_{haft\ p_{max}}}{\partial r} \right|_{\substack{d=d_0, s_{p_0}=0 \\ p_0=p_d \partial 0}} + \left. \frac{\partial \mu_{haft\ p_{max}}}{\partial r} \right|_{\substack{d=0, s_{p_0}=s_{p_0 0} \\ p_0=p_d \partial 0}} \end{aligned}$$

und damit auch

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial \left| F_{LGKx} \right|_{\lambda_0, F_{FH_z 0}}}{\partial r} \right|_{d=d_0, s_{p_0}=s_{p_0 0}, p_0=p_d \partial 0} \\ &= \left. \frac{\partial \left| F_{LGKx} \right|_{\lambda_0, F_{FH_z 0}}}{\partial r} \right|_{d=d_0, s_{p_0}=0, p_0=p_d \partial 0} + \left. \frac{\partial \left| F_{LGKx} \right|_{\lambda_0, F_{FH_z 0}}}{\partial r} \right|_{d=0, s_{p_0}=s_{p_0 0}, p_0=p_d \partial 0} \end{aligned}$$

Aus der Definition von  $p_d \partial 0$  in 4.112 und der von  $p_d$  ( $s_{p_d} = 0$ ) folgt durch die Darstellung der *Haftreibbeiwertänderung* im Druckpunkt  $p_0 = p_d \partial 0$

$$\left. \frac{\partial \left| F_{LGKx} \right|_{\lambda_0, F_{FH_z 0}}}{\partial r} \right|_{d=d_0, s_{p_0}=0, p_0=p_d \partial 0} = 0$$

und so auch

$$\left. \frac{\partial \left| F_{LGKx} \right|_{\lambda_0, F_{FH_z 0}}}{\partial r} \right|_{d=d_0, s_{p_0}=s_{p_0 0}, p_0=p_d \partial 0} = \left. \frac{\partial \left| F_{LGKx} \right|_{\lambda_0, F_{FH_z 0}}}{\partial r} \right|_{d=0, s_{p_0}=s_{p_0 0}, p_0=p_d \partial 0}$$

Mit  $d = 0$  und  $s_{p_0} = s_{p_0 0}$  gilt nach 4.110 für die Änderung der *Haftreibbeiwerte*

$$\frac{\partial \mu_{haft 0bar}}{\partial r} = \frac{\partial \mu_{haft p_{max}}}{\partial r} = s_{p_0 0}$$

womit bei den Eigenschaften 4.125, sofern  $(\lambda_0, F_{FH_z 0}) = (\lambda_{1/2/3}, F_{FH_z 1/2/3})$  gilt

$$\operatorname{sgn} \left( \left. \frac{\partial \left| F_{LGKx} \right|_{\lambda_0, F_{FH_z 0}}}{\partial r} \right|_{d=d_0, s_{p_0}=s_{p_0 0}, p_0=p_d \partial 0} \right) = \operatorname{sgn}(s_{p_0 0}) \quad (\text{C.131})$$

folgt.

## C.27 Verschwindende Zeitableitungen bei Felgenvertikalbewegung nach $B_9$

In der mit *Funktional-Bedingung*  $B_9$  definierten Anregung verschwinden trotz der *instantanen* Abwärtsbewegung der Felge zum Zeitpunkt  $t_0$  (s. Abschn. 4.2.9) die Zeitableitungen einiger Größen bis zu einer bestimmten Ordnung. Zum Nachweis muss hier

allerdings erstmal noch vorausgesetzt werden, dass korrespondierende Zeitableitungen anderer Größen zu  $t_0$  0 sind. Der sich so ergebende Zusammenhang 4.142 kann über die *induktive* Folgerung

$$\begin{aligned}
 & \left( \left( \forall 0 \leq i \leq i_1 - 1 : \frac{\partial^i F_{FGGy}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = \frac{\partial^i (M_{FGG})_{1,3}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = \frac{\partial^i (M_{FG0})_{1,3}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. = \frac{\partial^i (M_{G0})_{1,3}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = 0 \right) \right. \\
 & \wedge \left( \forall 0 \leq i \leq i_1 : \frac{\partial^i F_{LGKy}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = \frac{\partial^i (M_{LGK})_{1,3}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = \frac{\partial^i (A_{G0})_{12,21,23,32}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} \right. \\
 & \quad \left. = \frac{\partial^i (A_{F0})_{12,21,23,32}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = \frac{\partial^i (\Omega_{G0})_{12,21,23,32}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} \right. \\
 & \quad \left. = \frac{\partial^i (\Omega_{F0})_{12,21,23,32}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = \frac{\partial^i (\Omega_{G0}^{-1})_{12,21,23,32}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = 0 \right) \\
 & \wedge \left( \forall 0 \leq i \leq i_1 + 1 : \frac{\partial^i r_{G0y}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} - \frac{\partial^i r_{F0y}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = \frac{\partial^i (\varphi_{G0})_{1,3}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = \frac{\partial^i (\varphi_{F0})_{1,3}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = 0 \right) \\
 \Rightarrow & \left( \left( \frac{\partial^{i_1} F_{FGGy}}{\partial t^{i_1}} \Big|_{t_0} = \frac{\partial^{i_1} (M_{FGG})_{1,3}}{\partial t^{i_1}} \Big|_{t_0} = \frac{\partial^{i_1} (M_{FG0})_{1,3}}{\partial t^{i_1}} \Big|_{t_0} = \frac{\partial^{i_1} (M_{G0})_{1,3}}{\partial t^{i_1}} \Big|_{t_0} = 0 \right) \right. \\
 & \wedge \left( \frac{\partial^{i_1+1} (A_{G0})_{12,21,23,32}}{\partial t^{i_1+1}} \Big|_{t_0} = \frac{\partial^{i_1+1} (A_{F0})_{12,21,23,32}}{\partial t^{i_1+1}} \Big|_{t_0} = \frac{\partial^{i_1+1} (\Omega_{G0})_{12,21,23,32}}{\partial t^{i_1+1}} \Big|_{t_0} \right. \\
 & \quad \left. = \frac{\partial^{i_1+1} (\Omega_{F0})_{12,21,23,32}}{\partial t^{i_1+1}} \Big|_{t_0} = \frac{\partial^{i_1+1} (\Omega_{G0}^{-1})_{12,21,23,32}}{\partial t^{i_1+1}} \Big|_{t_0} = 0 \right) \\
 & \wedge \left( \frac{\partial^{i_1+2} r_{G0y}}{\partial t^{i_1+2}} \Big|_{t_0} - \frac{\partial^{i_1+2} r_{F0y}}{\partial t^{i_1+2}} \Big|_{t_0} = \frac{\partial^{i_1+2} (\varphi_{G0})_{1,3}}{\partial t^{i_1+2}} \Big|_{t_0} = 0 \right) \Big) \\
 & \hspace{20em} (C.132)
 \end{aligned}$$

begründet werden.

Mit  $\frac{\partial^i (\varphi_{G0})_{1,3}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = 0$  für  $0 \leq i \leq i_1 + 1$  verschwinden bei Bildung der  $(i_1 + 1)$ . Ableitung des Produkts in Definition 18 sämtliche Summanden außer dem, in dem die Drehmatrizen um  $x$  und  $z$  in der 0. und die um  $y$  in der  $(i_1 + 1)$ . Zeitableitung erscheinen (alle Summanden  $\neq 0$  in den symbolischen Ableitungen der  $x/z$ -Matrizen werden mit

Ableitungen von  $\varphi_{G0x/z}$  multipliziert), und man erhält

$$\left. \frac{\partial^{i_1+1} (A_{G0})_{12,21,23,32}}{\partial t^{i_1+1}} \right|_{t_0} = 0 \quad (\text{C.133})$$

Analog ergibt sich mit  $\left. \frac{\partial^i (\varphi_{F0})_{1,3}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = 0$  für  $0 \leq i \leq i_1 + 1$  und Definition 17

$$\left. \frac{\partial^{i_1+1} (A_{F0})_{12,21,23,32}}{\partial t^{i_1+1}} \right|_{t_0} = 0 \quad (\text{C.134})$$

$r_{FG}$  berechnet sich nach 4.2 als Produkt, das mehrfach abgeleitet in die Form

$$\frac{\partial^{i_1} r_{FG}}{\partial t^{i_1}} = \sum_{0 \leq a_{1j_1}, a_{2k_1} \leq i_1} b_{jk_1} \frac{\partial^{a_{1j_1}}}{\partial t^{a_{1j_1}}} A_{G0}^T \frac{\partial^{a_{2k_1}}}{\partial t^{a_{2k_1}}} (r_{F0} - r_{G0}), \quad a_{1j_1}, a_{2k_1} \in \mathbb{N}_0, b_{jk_1} \in \mathbb{R} \quad (\text{C.135})$$

bzw.  $\frac{\partial^{i_1+1} r_{FG}}{\partial t^{i_1+1}} = \sum_{0 \leq a_{1j_2}, a_{2k_2} \leq i_1+1} b_{jk_2} \frac{\partial^{a_{1j_2}}}{\partial t^{a_{1j_2}}} A_{G0}^T \frac{\partial^{a_{2k_2}}}{\partial t^{a_{2k_2}}} (r_{F0} - r_{G0}), \quad a_{1j_2}, a_{2k_2} \in \mathbb{N}_0, b_{jk_2} \in \mathbb{R}$ , übergeht. Mit

$$\left. \frac{\partial^i r_{G0y}}{\partial t^i} \right|_{t_0} - \left. \frac{\partial^i r_{F0y}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial^i (A_{G0})_{12,21,23,32}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = 0$$

für  $0 \leq i \leq i_1 + 1$  folgt so

$$\left. \frac{\partial^{i_1} r_{FGy}}{\partial t^{i_1}} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial^{i_1+1} r_{FGy}}{\partial t^{i_1+1}} \right|_{t_0} = 0 \quad (\text{C.136})$$

Genauso kann nach 4.3 eine höhere Zeitableitung von  $A_{FG}$  dargestellt werden als

$$\frac{\partial^p A_{FG}}{\partial t^p} = \sum_{0 \leq a_{1j_3}, a_{2k_3} \leq p} b_{jk_3} \frac{\partial^{a_{1j_3}}}{\partial t^{a_{1j_3}}} A_{G0}^T \frac{\partial^{a_{2k_3}}}{\partial t^{a_{2k_3}}} A_{F0}, \quad a_{1j_3}, a_{2k_3} \in \mathbb{N}_0, b_{jk_3} \in \mathbb{R}$$

und man erhält aus  $\left. \frac{\partial^q (A_{G0})_{12,21,23,32}}{\partial t^q} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial^q (A_{F0})_{12,21,23,32}}{\partial t^q} \right|_{t_0} = 0$  für  $0 \leq q \leq i_1 + 1$  (Induktionsvoraussetzung, C.133 und C.134) die sich bei Multiplikation und Addition erhaltende Eigenschaft

$$\left. \frac{\partial^p (A_{FG})_{12,21,23,32}}{\partial t^p} \right|_{t_0} = 0 \quad \text{für } 0 \leq p \leq i_1 + 1 \quad (\text{C.137})$$

Hieraus ergibt sich mit 4.4 direkt

$$\left. \frac{\partial^{i_1} (\varphi_{FG \text{ lin}})_{1,3}}{\partial t^{i_1}} \right|_{t_0} = 0 \quad (\text{C.138})$$

In 4.11 lässt sich wegen  $i_1 \geq 0$  die  $(i_1 + 1)$ . Zeitableitung der Komponenten  $(\Omega_{F0})_{12,21,23,32}$  und  $(\Omega_{G0})_{12,21,23,32}$  darstellen als

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{i_1+1} (\Omega_{F/G0})_{12}}{\partial t^{i_1+1}} &= \sum_{1 \leq a_{1 F/G j 4} \leq i_1+1} \left( \frac{\partial^{a_{1 F/G j 4}}}{\partial t^{a_{1 F/G j 4}}} \varphi_{F/G0z} \right) h_{1 F/G j 4} \\ &+ \sum_{1 \leq a_{2 F/G j 4} \leq i_1+1} \left( \frac{\partial^{a_{2 F/G j 4}}}{\partial t^{a_{2 F/G j 4}}} \varphi_{F/G0x} \right) h_{2 F/G j 4} \\ \frac{\partial^{i_1+1} (\Omega_{F/G0})_{21}}{\partial t^{i_1+1}} &= \sum_{1 \leq a_{j F/G 5} \leq i_1+1} \left( \frac{\partial^{a_{j F/G 5}}}{\partial t^{a_{j F/G 5}}} \varphi_{F/G0z} \right) h_{j F/G 5}, \quad \frac{\partial^{i_1+1} (\Omega_{F/G0})_{23}}{\partial t^{i_1+1}} = 0, \\ \frac{\partial^{i_1+1} (\Omega_{F/G0})_{32}}{\partial t^{i_1+1}} &= \sum_{1 \leq a_{j F/G 6} \leq i_1+1} \left( \frac{\partial^{a_{j F/G 6}}}{\partial t^{a_{j F/G 6}}} \varphi_{F/G0x} \right) h_{j F/G 6} \end{aligned}$$

mit  $a_{1 F/G j 4}, a_{2 F/G j 4}, a_{j F/G 5}, a_{j F/G 6} \in \mathbb{N}$  und beschränkte Zeitfunktionen  $h_{1 F/G j 4}, h_{2 F/G j 4}, h_{j F/G 5}$  und  $h_{j F/G 6}$ . Also folgt über  $\left. \frac{\partial^i (\varphi_{G0})_{1,3}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial^i (\varphi_{F0})_{1,3}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = 0$  für  $0 \leq i \leq i_1 + 1$  auch

$$\left. \frac{\partial^{i_1+1} (\Omega_{F0})_{12,21,23,32}}{\partial t^{i_1+1}} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial^{i_1+1} (\Omega_{G0})_{12,21,23,32}}{\partial t^{i_1+1}} \right|_{t_0} = 0 \quad (\text{C.139})$$

Ebenso gilt nach 4.5, 4.4 und C.137 für die linearisierte Winkelgeschwindigkeit der Felge im *Gürtelsystem*

$$\left. \frac{\partial^{i_1} (\omega_{FG \text{ lin}})_{1,3}}{\partial t^{i_1}} \right|_{t_0} = 0 \quad (\text{C.140})$$

erhält. Durch C.136 folgt mit 4.6 direkt

$$\left. \frac{\partial^{i_1} F_{FGGy}}{\partial t^{i_1}} \right|_{t_0} = 0 \quad (\text{C.141})$$

und durch C.138 bzw. C.140 mit 4.7

$$\left. \frac{\partial^{i_1} (M_{FGG})_{1,3}}{\partial t^{i_1}} \right|_{t_0} = 0 \quad (\text{C.142})$$

Bildet man auch für 4.8 die Zeitableitung über die *Produktregel* ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{i_1} F_{FG0}}{\partial t^{i_1}} &= \sum_{0 \leq a_{1j8}, a_{2k8} \leq i_1} b_{jk8} \frac{\partial^{a_{1j8}}}{\partial t^{a_{1j8}}} A_{G0} \frac{\partial^{a_{2k8}}}{\partial t^{a_{2k8}}} F_{FGG}, \quad a_{1j8}, a_{2k8} \in \mathbb{N}_0, b_{jk8} \in \mathbb{R}, \text{ und} \\ \frac{\partial^{i_1} M_{FG0}}{\partial t^{i_1}} &= \sum_{0 \leq a_{1j9}, a_{2k9} \leq i_1} b_{jk9} \frac{\partial^{a_{1j9}}}{\partial t^{a_{1j9}}} A_{G0} \frac{\partial^{a_{2k9}}}{\partial t^{a_{2k9}}} M_{FGG}, \quad a_{1j9}, a_{2k9} \in \mathbb{N}_0, b_{jk9} \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Über  $\left. \frac{\partial^i F_{FGGy}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial^i (M_{FGG})_{1,3}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = 0$  für  $0 \leq i \leq i_1 - 1$ , C.141, C.142 und  $\left. \frac{\partial^i (A_{G0})_{12,21,23,32}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = 0$  für  $0 \leq i \leq i_1$  folgt so

$$\left. \frac{\partial^{i_1} F_{FG0y}}{\partial t^{i_1}} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial^{i_1} (M_{FG0})_{1,3}}{\partial t^{i_1}} \right|_{t_0} = 0 \quad (\text{C.143})$$

Nach 4.35 lässt sich auch die Darstellung

$$\frac{\partial^i F_{LG0}}{\partial t^i} = \sum_{0 \leq a_{1j10}, a_{2k10} \leq i} b_{jk10} \frac{\partial^{a_{1j10}}}{\partial t^{a_{1j10}}} A_{K0} \frac{\partial^{a_{2k10}}}{\partial t^{a_{2k10}}} F_{LGK}, \quad a_{1j10}, a_{2k10} \in \mathbb{N}_0, b_{jk10} \in \mathbb{R} \quad (\text{C.144})$$

angeben, und nach Definition 20 und 4.12 gilt mit  $\left. \frac{\partial^i (A_{G0})_{12,21,23,32}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = 0$  für  $0 \leq i \leq i_1$  auf ebenem Boden

$$A_{K0}|_{t_0} = I_3 \quad \left. \frac{\partial^i A_{K0}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq i_1 \quad (\text{C.145})$$

(0. bis  $i_1$ . Ableitung von  $A_{G0}$  bildet  $x_0$ - $z_0$ -Ebene in sich selbst ab, und damit verschwindet 1. bis  $i_1$ . Ableitung von  $x_{K0}$ ). Über  $\left. \frac{\partial^i F_{LGKy}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = 0$  für  $0 \leq i \leq i_1$  erhält man so auch

$$\left. \frac{\partial^i F_{LG0y}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = 0 \quad \text{für } 0 \leq i \leq i_1 \quad (\text{C.146})$$

Für die Komponenten

$$((r_{G0} - r_{K0}) \times F_{LG0})_{1/3} = (r_{G0} - r_{K0})_{2/1} (F_{LG0})_{3/2} - (r_{G0} - r_{K0})_{3/2} (F_{LG0})_{2/1}$$

in 4.35 gilt

$$\begin{aligned}& \frac{\partial^i (r_{G0} - r_{K0})_{2/1/3/2} (F_{LG0})_{3/2/2/1}}{\partial t^i} \\ &= \sum_{0 \leq a_{1j11}, a_{2k11} \leq i} b_{jk11} \frac{\partial^{a_{1j11}}}{\partial t^{a_{1j11}}} (r_{G0} - r_{K0})_{2/1/3/2} \frac{\partial^{a_{2k11}}}{\partial t^{a_{2k11}}} (F_{LG0})_{3/2/2/1},\end{aligned} \quad (\text{C.147})$$

$a_{1j\ 11}, a_{2k\ 11} \in \mathbb{N}_0, b_{jk\ 11} \in \mathbb{R}$ . Nach Definition 20 ergibt sich mit  $\left. \frac{\partial^i (\varphi_{G0})_{1,3}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = 0$  für  $0 \leq i \leq i_1$  auch  $\left. \frac{\partial^i r_{G0y}}{\partial t^i} \right|_{t_0} - \left. \frac{\partial^i r_{K0y}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = 0$  für  $0 \leq i \leq i_1$  und es folgt über C.146 so

$$\left. \frac{\partial^{i_1} ((r_{G0} - r_{K0}) \times F_{LG0})_{1,3}}{\partial t^{i_1}} \right|_{t_0} = 0 \quad (\text{C.148})$$

Außerdem gilt  $\frac{\partial^{i_1} A_{K0} M_{LGK}}{\partial t^{i_1}} = \sum_{0 \leq a_{1j\ 12}, a_{2k\ 12} \leq i_1} b_{jk\ 12} \frac{\partial^{a_{1j\ 12}}}{\partial t^{a_{1j\ 12}}} A_{K0} \frac{\partial^{a_{2k\ 12}}}{\partial t^{a_{2k\ 12}}} M_{LGK}$ ,  $a_{1j\ 12}, a_{2k\ 12} \in \mathbb{N}_0, b_{jk\ 12} \in \mathbb{R}$ , was mit C.145 und  $\left. \frac{\partial^i (M_{LGK})_{1,3}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = 0$  für  $0 \leq i \leq i_1$  zu

$$\left. \frac{\partial^{i_1} (A_{K0} M_{LGK})_{1,3}}{\partial t^{i_1}} \right|_{t_0} = 0$$

und C.148 sowie 4.35 zu

$$\left. \frac{\partial^{i_1} (M_{LG0})_{1/3}}{\partial t^{i_1}} \right|_{t_0} = 0 \quad (\text{C.149})$$

führt. Dann erhält man über C.143, C.146, C.149 und 4.10 weiter

$$\left. \frac{\partial^{i_1} F_{G0y}}{\partial t^{i_1}} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial^{i_1} (M_{G0})_{1,3}}{\partial t^{i_1}} \right|_{t_0} = 0 \quad (\text{C.150})$$

Um Eigenschaften der Zeitableitungen von  $\varphi_{G0}$  begründen zu können, muss die Zeitintegration des *Reifengürtel*-Zustands mitbetrachtet werden. Eine Voraussetzung hierfür sind die Eigenschaften von  $\Omega_{G0}^{-1}$ , das nach 4.11 zunächst explizit als

$$\Omega_{G0}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{G0z} & \sin \varphi_{G0z} & 0 \\ -\frac{\sin \varphi_{G0z}}{\cos \varphi_{G0x}} & \frac{\cos \varphi_{G0z}}{\cos \varphi_{G0x}} & 0 \\ \frac{\sin \varphi_{G0x} \cdot \sin \varphi_{G0z}}{\cos \varphi_{G0x}} & -\frac{\sin \varphi_{G0x} \cdot \cos \varphi_{G0z}}{\cos \varphi_{G0x}} & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.151})$$



dargestellt werden kann. Damit gilt für die Komponenten u.A. durch die *Quotientenregel* der Ableitung ( $i_1 \geq 0$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{i_1+1} \left( \Omega_{G_0}^{-1} \right)_{12}}{\partial t^{i_1+1}} &= \sum_{1 \leq a_j{}_{13} \leq i_1+1} \left( \frac{\partial^{a_j{}_{13}}}{\partial t^{a_j{}_{13}}} \varphi_{G_0 z} \right) h_{j 13}, & \frac{\partial^{i_1+1} \left( \Omega_{G_0}^{-1} \right)_{23}}{\partial t^{i_1+1}} &= 0 \\ \frac{\partial^{i_1+1} \left( \Omega_{G_0}^{-1} \right)_{21}}{\partial t^{i_1+1}} &= \sum_{1 \leq a_1{}_{j 14} \leq i_1+1} \left( \frac{\partial^{a_1{}_{j 14}}}{\partial t^{a_1{}_{j 14}}} \varphi_{G_0 z} \right) h_{1 j 14} + \sum_{1 \leq a_2{}_{j 14} \leq i_1+1} \left( \frac{\partial^{a_2{}_{j 14}}}{\partial t^{a_2{}_{j 14}}} \varphi_{G_0 x} \right) h_{2 j 14} \\ \frac{\partial^{i_1+1} \left( \Omega_{G_0}^{-1} \right)_{32}}{\partial t^{i_1+1}} &= \sum_{1 \leq a_1{}_{j 15} \leq i_1+1} \left( \frac{\partial^{a_1{}_{j 15}}}{\partial t^{a_1{}_{j 15}}} \varphi_{G_0 z} \right) h_{1 j 15} + \sum_{1 \leq a_2{}_{j 15} \leq i_1+1} \left( \frac{\partial^{a_2{}_{j 15}}}{\partial t^{a_2{}_{j 15}}} \varphi_{G_0 x} \right) h_{2 j 15} \end{aligned}$$

mit  $a_j{}_{13}, a_1{}_{j 14}, a_2{}_{j 14}, a_1{}_{j 15}, a_2{}_{j 15} \in \mathbb{N}$  und Zeitfunktionen  $h_{j 13}, h_{1 j 14}, h_{2 j 14}, h_{1 j 15}$  und  $h_{2 j 15}$ , die wegen  $\varphi_{G_0 x}|_{t_0} = \varphi_{G_0 z}|_{t_0} = 0$  in einer Umgebung von  $t = t_0$  beschränkt definiert sind. So folgt durch  $\left. \frac{\partial^i \varphi_{G_0 x}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial^i \varphi_{G_0 z}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = 0$  für  $0 \leq i \leq i_1 + 1$  auch

$$\left. \frac{\partial^{i_1+1} \left( \Omega_{G_0}^{-1} \right)_{12,21,23,32}}{\partial t^{i_1+1}} \right|_{t_0} = 0 \quad (\text{C.152})$$

Für die Zeitableitungen der Integration von  $\varphi_{G_0}$  liefert die *Produktregel* nach 4.11

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{i_1+2} \varphi_{G_0}}{\partial t^{i_1+2}} &= \sum_{\substack{0 \leq a_1{}_{1j 16}, a_1{}_{2k 16}, \\ a_1{}_{3l 16}, a_1{}_{4m 16} \leq i_1}} b_{1 jklm 16} \frac{\partial^{a_1{}_{1j 16}} \Omega_{G_0}^{-1}}{\partial t^{a_1{}_{1j 16}}} \frac{\partial^{a_1{}_{2k 16}} A_{G_0}}{\partial t^{a_1{}_{2k 16}}} J_{GG}^{-1} \frac{\partial^{a_1{}_{3l 16}} A_{G_0}^T}{\partial t^{a_1{}_{3l 16}}} \frac{\partial^{a_1{}_{4m 16}} M_{G_0}}{\partial t^{a_1{}_{4m 16}}} \\ + \sum_{\substack{0 \leq a_2{}_{1j 16}, a_2{}_{2k 16}, \\ a_2{}_{3l 16} \leq i_1 \\ 0 \leq a_2{}_{4m 16}, a_2{}_{5n 16}, \\ a_2{}_{6o 16}, a_2{}_{7p 16} \leq i_1+1}} b_{2 jklmnop 16} &\frac{\partial^{a_2{}_{1j 16}} \Omega_{G_0}^{-1}}{\partial t^{a_2{}_{1j 16}}} \frac{\partial^{a_2{}_{2k 16}} A_{G_0}}{\partial t^{a_2{}_{2k 16}}} J_{GG}^{-1} \frac{\partial^{a_2{}_{3l 16}} A_{G_0}^T}{\partial t^{a_2{}_{3l 16}}} \\ &\cdot \frac{\partial^{a_2{}_{4m 16}} A_{G_0}}{\partial t^{a_2{}_{4m 16}}} J_{GG} \frac{\partial^{a_2{}_{5n 16}} A_{G_0}^T}{\partial t^{a_2{}_{5n 16}}} \frac{\partial^{a_2{}_{6o 16}} \Omega_{G_0}}{\partial t^{a_2{}_{6o 16}}} \frac{\partial^{a_2{}_{7p 16}} \varphi_{G_0}}{\partial t^{a_2{}_{7p 16}}} \end{aligned}$$

mit  $a_1{}_{1j 16}, a_1{}_{2k 16}, a_1{}_{3l 16}, a_1{}_{4m 16}, a_2{}_{1j 16}, a_2{}_{2k 16}, a_2{}_{3l 16}, a_2{}_{4m 16}, a_2{}_{5n 16}, a_2{}_{6o 16}, a_2{}_{7p 16} \in \mathbb{N}_0$ ,  $b_{1 jklm 16}, b_{2 jklmnop 16} \in \mathbb{R}$ . In diesem Fall folgt mit  $\left. \frac{\partial^i (M_{G_0})_{1,3}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = 0$  für  $0 \leq$

$$i \leq i_1 - 1, \quad \left. \frac{\partial^i (\Omega_{G0}^{-1})_{12,21,23,32}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial^i (\Omega_{G0})_{12,21,23,32}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial^i (A_{G0})_{12,21,23,32}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = 0 \text{ für}$$

$$0 \leq i \leq i_1, \quad \left. \frac{\partial^i (\varphi_{G0})_{1,3}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = 0 \text{ für } 0 \leq i \leq i_1 + 1, \text{ C.150, C.133 und C.139}$$

$$\left. \frac{\partial^{i_1+2} (\varphi_{G0})_{1,3}}{\partial t^{i_1+2}} \right|_{t_0} = 0$$

Direkt aus 4.11 sieht man mit C.150

$$\left. \frac{\partial^{i_1+2} r_{G0y}}{\partial t^{i_1+2}} \right|_{t_0} = 0$$

Da nach  $B_9$  die Anregungsgrößen  $v_B$ ,  $\delta$  und  $\alpha$  konstant bleiben, gilt mit 4.36 und  $i_1 \geq 0$  auch  $\left. \frac{\partial^{i_1+2} r_{F0y}}{\partial t^{i_1+2}} \right|_{t_0} = 0$ , und man erhält

$$\left. \frac{\partial^{i_1+2} r_{G0y}}{\partial t^{i_1+2}} \right|_{t_0} - \left. \frac{\partial^{i_1+2} r_{F0y}}{\partial t^{i_1+2}} \right|_{t_0} = 0$$

womit C.132 insgesamt gezeigt ist.

Um mit Hilfe von C.132 Zusammenhang 4.142 begründen zu können, muss die Voraussetzung in C.132 für einen kleinsten Wert von  $i_1$ , für den die gesamte Folgerung möglich ist, also für  $i_1 = 0$  gezeigt werden. Mit Ausnahme der auch in 4.142 vorausgesetzten Eigenschaften zu  $F_{LGKy}$  und  $(M_{LGK})_{1,3}$  sowie denen zu  $(\varphi_{F0})_{1,3}$  folgen sämtliche Eigenschaften in C.132 für schrittweise wachsendes  $i_1$ . Aus  $B_9$  erhält man wegen  $\varepsilon_W = \delta = 0$  mit 4.36  $\left. \frac{\partial^i (\varphi_{F0})_{1,3}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = 0$  für  $i \geq 0$ . In Kombination mit 4.134 ergibt sich

$$\left. \frac{\partial^i r_{G0y}}{\partial t^i} \right|_{t_0} - \left. \frac{\partial^i r_{F0y}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial^i (\varphi_{G0})_{1,3}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial^i (\varphi_{F0})_{1,3}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = 0 \quad \text{für } 0 \leq i \leq 1$$

Mit  $(\varphi_{G0})_{1,3}|_{t_0} = (\varphi_{F0})_{1,3}|_{t_0} = 0$ , Definition 18, Definition 17, 4.11 und C.151 folgt noch

$$\begin{aligned} (A_{G0})_{12,21,23,32}|_{t_0} &= (A_{F0})_{12,21,23,32}|_{t_0} = (\Omega_{G0})_{12,21,23,32}|_{t_0} = (\Omega_{F0})_{12,21,23,32}|_{t_0} \\ &= \left. (\Omega_{G0}^{-1})_{12,21,23,32} \right|_{t_0} = 0 \end{aligned}$$

Damit ist nun gezeigt, dass unter der Voraussetzung  $\left. \frac{\partial^i F_{LGKy}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial^i (M_{LGK})_{1,3}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = 0$  für  $0 \leq i \leq i_0$  C.132 für  $i_1 = 0$  und durch die sich schrittweise ergebenden Folgerungen nacheinander für jeweils um 1 vergrößertes  $i_1 \leq i_0$  gilt. So wird letztlich auch 4.142 insgesamt bestätigt.

## C.28 Höhere Zeitableitungen von Lage und Orientierung des Reifengürtels

Um die  $(i_1 + 3)$ . und  $(i_1 + 4)$ . Zeitableitung von  $r_{G0}$  und  $\varphi_{G0}$  als unabhängig von  $c_{GF\text{ quer}}$  nachzuweisen, soll eine abstrahierte Darstellung des Reifenmodells angewandt werden. Als *integrierbares* Modell mit den am Anfang von Abschnitt 4.1.5 aufgelisteten unabhängigen Modellzuständen lässt es sich in *Zustandsraumdarstellung* mit einer Differenzialgleichung erster Ordnung überführen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \dot{r}_{G0} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{F_{FG0}}{m_G} + f_2(z, \dot{r}_{G0}) \\ f_3(z, \dot{r}_{G0}, u) \end{bmatrix} \quad (\text{C.153})$$

mit  $F_{FG0} = f_1(z, \dot{r}_{G0}, u, c_{GF\text{ quer}})$ ,  $f_2, f_3$  unabhängig von  $c_{GF\text{ quer}}$ ,

$z$  Modellzustände außer  $\dot{r}_{G0}$ ,  $u = [r_{F0}^T, \varphi_{F0}^T, \dot{r}_{F0}^T, \dot{\varphi}_{F0}^T]^T$

$c_{GF\text{ quer}}$  tritt in den originalen Modellgleichungen ausschließlich in 4.6 auf, weshalb diese mit 4.2 und 4.8 links abhängig von  $c_{GF\text{ quer}}$  zu  $f_1$  zusammengefasst ist. Die aus 4.6 folgende Größe  $F_{FGG}$  kommt nur noch in Gleichung 4.8 links vor, weshalb die Zusammenfassung der Modellgleichungen außer 4.6, 4.2, 4.8 links und 4.11 oben in  $f_2$  und  $f_3$  unabhängig von  $c_{GF\text{ quer}}$  ist. Der Zustandsvektor ist aufgeteilt in die *inertial translatorische* Geschwindigkeit  $\dot{r}_{G0}$  des *Reifengürtels* und die übrigen Modellzustände  $z$ . Damit ergibt sich auch eine Aufteilung der Zustandsdifferenzialgleichung, deren Komponenten für  $\dot{r}_{G0}$  man aus 4.11 und 4.10 erhält, indem der Term  $\frac{F_{LG0}}{m_G} - (0, 0, g)^T$  zurückgeführt auf die Modellzustände durch  $f_2$  ersetzt wird. Die algebraischen Berechnungen der Modellgleichungen basieren nur in den Termen 4.2 bis 4.11 auf Größen der Modell-Anregung  $u$ , weshalb  $F_{LG0}$  und damit  $f_2$  zwar indirekt über die Modellzustände, aber nicht direkt von  $u$  abhängt.  $f_3$  fasst die Modell-Differenzialgleichung für die übrigen Zustände  $z$  auf Basis der Zustands- und Anregungsgrößen selbst zusammen.

Mit 4.131 gilt für den *Stationärzustand* vor  $t_0$  nach 4.2  $r_{FGy}|_{t_0-\varepsilon} = 0$ , und mit 4.6 und 4.8, dass  $F_{FG0}|_{t_0-\varepsilon}$  unabhängig von  $c_{GF\text{ quer}}$  ist. Nach C.153 sind dann alle Modellzustände im *Stationärzustand* für  $t = t_0 - \varepsilon$  unabhängig von  $c_{GF\text{ quer}}$ . Da sich nach Abschnitt 4.2.9 zum Zeitpunkt  $t_0$  zunächst nur die rechtsseitige Anregung  $u$  in C.153 ändert, beeinflusst diese linksseitig möglicherweise die erste Zeitableitung der Modellzustände *unstetig*, jedoch die Modellzustände selbst *stetig*. Im Zeitpunkt  $t_0$  besteht unmittelbar also keine Wirkung auf die Modellzustände durch  $u|_{t_0}$ , und auch

$$\dot{r}_{G0}|_{t_0} \text{ und } z|_{t_0} \text{ sind unabhängig von } c_{GF\text{ quer}} \quad (\text{C.154})$$

Die Modell-Anregung nach  $B_9$  ist generell unabhängig von  $c_{GF\ quer}$  definiert, und

$$\frac{\partial^i u}{\partial t^i} \text{ ist für } i \geq 0 \text{ unabhängig von } c_{GF\ quer} \quad (\text{C.155})$$

Für die Zeitableitungen von  $\dot{r}_{G0}$  und  $z$  erhält man aus C.153 die Darstellung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^i \dot{r}_{G0}}{\partial t^i} &= \frac{1}{m_G} \cdot \frac{\partial^{i-1} F_{FG0}}{\partial t^{i-1}} \\ &+ \sum_j b_{j1} \cdot \prod_{1 \leq k \leq 2n_{LS}n_{RES}+12} \left( \frac{\partial}{\partial (z)_k} \right)^{a_{1jk1}} \cdot \prod_{1 \leq k \leq 3} \left( \frac{\partial}{\partial (\dot{r}_{G0})_k} \right)^{a_{2jk1}} f_2 \\ &\cdot \prod_{1 \leq k \leq 2n_{LS}n_{RES}+12} \left( \frac{\partial^{a_{3jk1}} (z)_k}{\partial t^{a_{3jk1}}} \right)^{c_{1jk1}} \cdot \prod_{1 \leq k \leq 3} \left( \frac{\partial^{a_{4jk1}} (\dot{r}_{G0})_k}{\partial t^{a_{4jk1}}} \right)^{c_{2jk1}} \\ \frac{\partial^i (z)_k}{\partial t^i} &= \sum_j b_{j2} \cdot \prod_{1 \leq k \leq 2n_{LS}n_{RES}+12} \left( \frac{\partial}{\partial (z)_k} \right)^{a_{1jk2}} \cdot \prod_{1 \leq k \leq 3} \left( \frac{\partial}{\partial (\dot{r}_{G0})_k} \right)^{a_{2jk2}} \\ &\cdot \prod_{1 \leq k \leq 12} \left( \frac{\partial}{\partial (u)_k} \right)^{a_{3jk2}} f_3 \cdot \prod_{1 \leq k \leq 2n_{LS}n_{RES}+12} \left( \frac{\partial^{a_{4jk2}} (z)_k}{\partial t^{a_{4jk2}}} \right)^{c_{1jk2}} \\ &\cdot \prod_{1 \leq k \leq 3} \left( \frac{\partial^{a_{5jk2}} (\dot{r}_{G0})_k}{\partial t^{a_{5jk2}}} \right)^{c_{2jk2}} \cdot \prod_{1 \leq k \leq 12} \left( \frac{\partial^{a_{6jk2}} (u)_k}{\partial t^{a_{6jk2}}} \right)^{c_{3jk2}} \\ i \geq 1, j \in \mathbb{N}, i-1 &\geq a_{1jk1}, a_{2jk1}, a_{3jk1}, a_{4jk1}, a_{1jk2}, a_{2jk2}, a_{3jk2}, a_{4jk2}, a_{5jk2}, \\ a_{6jk2}, c_{1jk1}, c_{2jk1}, c_{1jk2}, c_{2jk2}, c_{3jk2} &\in \mathbb{N}_0 \end{aligned} \quad (\text{C.156})$$

Nach 4.6 und 4.8 gilt

$$f_1 = A_{G0} \cdot (C_{TFG} r_{FG} + D_{TFG} \dot{r}_{FG})$$

und damit für die definierte Funktion  $f_{1\partial i}$

$$\begin{aligned} f_{1\partial i} \left( \frac{\partial^0 z}{\partial t^0}, \dots, \frac{\partial^i z}{\partial t^i}, \frac{\partial^0 \dot{r}_{G0}}{\partial t^0}, \dots, \frac{\partial^i \dot{r}_{G0}}{\partial t^i}, \frac{\partial^0 u}{\partial t^0}, \dots, \frac{\partial^i u}{\partial t^i}, c_{GF\ quer} \right) &= \frac{\partial^i f_1(z, \dot{r}_{G0}, u, c_{GF\ quer})}{\partial t^i} \\ &= \sum_{0 \leq a_{1j3}, a_{2k3} \leq i} b_{jk3} \frac{\partial^{a_{1j3}}}{\partial t^{a_{1j3}}} A_{G0} \cdot C_{TFG} \frac{\partial^{a_{2k3}}}{\partial t^{a_{2k3}}} r_{FG} + g \\ a_{1j3}, a_{2k3} \in \mathbb{N}_0, b_{jk3} \in \mathbb{R}, g &\text{ Zeitfunktion (unabhängig von } C_{TFG}) \end{aligned}$$

Da  $c_{GF\ quer}$  in den Modellgleichungen ausschließlich in  $C_{TFG}$  auftritt, folgt mit 4.173, dass  $\frac{\partial^i f_1}{\partial t^i}$  zum Zeitpunkt  $t_0$  für  $0 \leq i \leq i_1 + 2$  in der Funktionsdarstellung über den

Argumenten  $\frac{\partial^i z}{\partial t^i}$ ,  $\frac{\partial^i \dot{r}_{FG}}{\partial t^i}$  und  $\frac{\partial^i u}{\partial t^i}$  unabhängig von  $c_{GF\ quer}$  ist. Es gilt also

$$\begin{aligned} & f_{1\ \partial i} \left( \frac{\partial^0 z}{\partial t^0} \Big|_{t_0}, \dots, \frac{\partial^i z}{\partial t^i} \Big|_{t_0}, \frac{\partial^0 \dot{r}_{G0}}{\partial t^0} \Big|_{t_0}, \dots, \frac{\partial^i \dot{r}_{G0}}{\partial t^i} \Big|_{t_0}, \frac{\partial^0 u}{\partial t^0} \Big|_{t_0}, \dots, \frac{\partial^i u}{\partial t^i} \Big|_{t_0}, c_{GF\ quer} \right) \\ &= f_{1\ \partial i} \left( \frac{\partial^0 z}{\partial t^0} \Big|_{t_0}, \dots, \frac{\partial^i z}{\partial t^i} \Big|_{t_0}, \frac{\partial^0 \dot{r}_{G0}}{\partial t^0} \Big|_{t_0}, \dots, \frac{\partial^i \dot{r}_{G0}}{\partial t^i} \Big|_{t_0}, \frac{\partial^0 u}{\partial t^0} \Big|_{t_0}, \dots, \frac{\partial^i u}{\partial t^i} \Big|_{t_0}, 0 \right) \\ & \text{für } 0 \leq i \leq i_1 + 2 \end{aligned}$$

Laut C.153 gilt

$$\frac{\partial^i F_{FG0}}{\partial t^i} = f_{1\ \partial i} \left( \frac{\partial^0 z}{\partial t^0}, \dots, \frac{\partial^i z}{\partial t^i}, \frac{\partial^0 \dot{r}_{G0}}{\partial t^0}, \dots, \frac{\partial^i \dot{r}_{G0}}{\partial t^i}, \frac{\partial^0 u}{\partial t^0}, \dots, \frac{\partial^i u}{\partial t^i}, c_{GF\ quer} \right)$$

und so auch

$$\begin{aligned} \frac{\partial^i F_{FG0}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} &= f_{1\ \partial i} \left( \frac{\partial^0 z}{\partial t^0} \Big|_{t_0}, \dots, \frac{\partial^i z}{\partial t^i} \Big|_{t_0}, \frac{\partial^0 \dot{r}_{G0}}{\partial t^0} \Big|_{t_0}, \dots, \frac{\partial^i \dot{r}_{G0}}{\partial t^i} \Big|_{t_0}, \frac{\partial^0 u}{\partial t^0} \Big|_{t_0}, \dots, \frac{\partial^i u}{\partial t^i} \Big|_{t_0}, 0 \right) \\ & \text{für } 0 \leq i \leq i_1 + 2 \end{aligned} \tag{C.157}$$

C.156 und C.157 zusammengenommen definieren nun die erste bis zur  $(i_1 + 3)$ . Ableitung von  $z$  und  $\dot{r}_{G0}$  zum Zeitpunkt  $t_0$  vollständig *rekursiv* aus Ableitungen jeweils kleinerer Ordnung von  $z$ ,  $\dot{r}_{G0}$  und  $u$ . Wie bereits gezeigt ist die Definition der rechten Seiten von C.156 und C.157 über den Ableitungen von  $z$ ,  $\dot{r}_{G0}$  und  $u$  als Argumenten unabhängig von  $c_{GF\ quer}$ . Sind die Größen  $\frac{\partial^i z}{\partial t^i} \Big|_{t_0}$ ,  $\frac{\partial^i \dot{r}_{G0}}{\partial t^i} \Big|_{t_0}$  und  $\frac{\partial^i u}{\partial t^i} \Big|_{t_0}$  für  $0 \leq i \leq i_0$  unabhängig von  $c_{GF\ quer}$ , so sind es damit auch  $\frac{\partial^{i_0+1} z}{\partial t^{i_0+1}} \Big|_{t_0}$  und  $\frac{\partial^{i_0+1} \dot{r}_{G0}}{\partial t^{i_0+1}} \Big|_{t_0}$ . Mit C.154 und C.155 folgt also über C.156 und C.157 *induktiv*, dass  $\frac{\partial^i z}{\partial t^i} \Big|_{t_0}$  und  $\frac{\partial^i \dot{r}_{G0}}{\partial t^i} \Big|_{t_0}$  für  $0 \leq i \leq i_1 + 3$  unabhängig von  $c_{GF\ quer}$  sind. Nach den am Anfang von Abschnitt 4.1.5 aufgelisteten Modellzuständen sind auch  $r_{G0}$ ,  $\varphi_{G0}$  und  $\dot{\varphi}_{G0}$  ein Teil von  $z$ , und man erhält u.A.

$$\frac{\partial^i r_{G0}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} \text{ und } \frac{\partial^i \varphi_{G0}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} \text{ sind für } 0 \leq i \leq i_1 + 4 \text{ unabhängig von } c_{GF\ quer} \tag{C.158}$$

## C.29 Zusatzeffekte der Reifengürtelbewegung abhängig von Reifendrehung

Der Nachweis einer für sämtliche Parametrierungen einheitlichen Stimulationsrichtung für  $c_{GF\ quer}$  unter  $B_9$  erfordert, dass mit Hilfe eines hinreichend großen Werts  $\dot{\varphi}_{G0y}$  der

Einfluss der gewichtsbedingten vertikalen Verschiebung des *Reifengürtels* gegenüber der Felge zum Zeitpunkt  $t_0$  minimiert wird. Um zu zeigen, dass dies für den entsprechenden Wert von  $\dot{\varphi}_{G0y}$  zutrifft, müssen im Folgenden einige Eigenschaften der Lage und Bewegung des *Reifengürtels* noch zusätzlich geklärt werden. Mit 4.153 und 4.34 sieht man einmal, dass

$$M_{LGKz}|_{t_0+\varepsilon} = \left( x_{REK def j_0} F_y \left[ \frac{n_{LS}}{2} \right]_{j_0} - y_{REK def \left[ \frac{n_{LS}}{2} \right]_{j_0}} F_x \left[ \frac{n_{LS}}{2} \right]_{j_0} \right) \Big|_{t_0+\varepsilon}$$

Also gilt für  $t = t_0 + \varepsilon$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{i_1+1} M_{LGKz}}{\partial t^{i_1+1}} = & - \sum_{0 \leq a_{1j_1}, a_{2k_1} \leq i_1+1} b_{jk_1} \frac{\partial^{a_{1j_1}}}{\partial t^{a_{1j_1}}} y_{REK def \left[ \frac{n_{LS}}{2} \right]_{j_0}} \frac{\partial^{a_{2k_1}}}{\partial t^{a_{2k_1}}} F_x \left[ \frac{n_{LS}}{2} \right]_{j_0} \\ & + x_{REK def j_0} \frac{\partial^{i_1+1}}{\partial t^{i_1+1}} F_y \left[ \frac{n_{LS}}{2} \right]_{j_0} \\ & + \sum_{\substack{1 \leq a_{1j_2} \leq i_1+1 \\ 0 \leq a_{2k_2} \leq i_1}} b_{jk_2} \frac{\partial^{a_{1j_2}}}{\partial t^{a_{1j_2}}} x_{REK def j_0} \frac{\partial^{a_{2k_2}}}{\partial t^{a_{2k_2}}} F_y \left[ \frac{n_{LS}}{2} \right]_{j_0} \\ & a_{1j_1}, a_{2k_1}, a_{1j_2}, a_{2k_2} \in \mathbb{N}_0, b_{jk_1}, b_{jk_2} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Durch 4.166, 4.154 und 4.155 folgt damit

$$\left. \frac{\partial^{i_1+1} M_{LGKz}}{\partial t^{i_1+1}} \right|_{t_0} = 0 \quad (\text{C.159})$$

Mit 4.167 gilt  $\left. \frac{\partial^i (\varphi_{G0})_{1,3}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = 0$  für  $0 \leq i \leq i_1 + 1$  und damit nach Definition 20 auch

$$\left. \frac{\partial^i (r_{G0} - r_{K0})_{1..2}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = 0 \text{ für } 0 \leq i \leq i_1 + 1 \quad (\text{C.160})$$

In Darstellung C.147 bedeutet das für die dritte Komponente des *Latsch-Kraft-Hebels* zum *Reifengürtel*-Moment

$$\left. \frac{\partial^{i_1+1} ((r_{G0} - r_{K0}) \times F_{LG0})_3}{\partial t^{i_1+1}} \right|_{t_0} = 0 \quad (\text{C.161})$$

Die höhere Zeitableitung des *inertialen Latsch*-Moments kann als

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{i_1+1} A_{K0} M_{LGK}}{\partial t^{i_1+1}} = & A_{K0} \frac{\partial^{i_1+1} M_{LGK}}{\partial t^{i_1+1}} + \sum_{\substack{1 \leq a_{1j_3} \leq i_1+1 \\ 0 \leq a_{2k_3} \leq i_1}} b_{jk_3} \frac{\partial^{a_{1j_3}}}{\partial t^{a_{1j_3}}} A_{K0} \frac{\partial^{a_{2k_3}}}{\partial t^{a_{2k_3}}} M_{LGK} \\ & a_{1j_3}, a_{2k_3} \in \mathbb{N}_0, b_{jk_3} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

dargestellt werden. Über 4.169 folgt damit

$$\left. \frac{\partial^{i_1+1} A_{K0} M_{LGK}}{\partial t^{i_1+1}} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial^{i_1+1} M_{LGK}}{\partial t^{i_1+1}} \right|_{t_0}$$

was nach 4.35 zusammen mit C.161 und C.159

$$\left. \frac{\partial^{i_1+1} M_{LG0z}}{\partial t^{i_1+1}} \right|_{t_0} = 0 \quad (\text{C.162})$$

bedeutet. Aus  $\left. \frac{\partial^i (\varphi_{F0})_{1,3}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = 0$  für  $i \geq 0$  erhält man mit Definition 17  $\left. \frac{\partial^i (A_{F0})_{12,21,23,32}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = 0$  für  $i \geq 0$ . Zusammen mit 4.167 und 4.168 kann wie in Abschnitt C.27 von Gleichung C.135 bis Gleichung C.143 statt für  $i_1$  *induktiv* für  $0 \leq i \leq i_1 + 1$  gefolgert werden, und es ergibt sich auch hier

$$\left. \frac{\partial^i (M_{FG0})_{1,3}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = 0 \quad \text{für } 0 \leq i \leq i_1 + 1 \quad (\text{C.163})$$

4.10 angewandt mit C.162 und C.163 folgt für das resultierende *Rückstellmoment* auf den *Reifengürtel*

$$\left. \frac{\partial^{i_1+1} M_{G0z}}{\partial t^{i_1+1}} \right|_{t_0} = 0 \quad (\text{C.164})$$

Die Auswirkungen der Zeitableitung des Moments auf die Zeitableitung der Bewegung des *Reifengürtels* lässt sich am besten mit folgender Darstellung von 4.11 analysieren

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{i_1+3} \varphi_{G0}}{\partial t^{i_1+3}} &= \Omega_{G0}^{-1} A_{G0} J_{GG}^{-1} A_{G0}^T \frac{\partial^{i_1+1} M_{G0}}{\partial t^{i_1+1}} \\ &+ \sum_{\substack{0 \leq a_1 1j 4, a_1 2k 4, a_1 3l 4 \leq i_1+1 \\ 0 \leq a_1 4m 4 \leq i_1}} b_1 jklm 4 \frac{\partial^{a_1 1j 4} \Omega_{G0}^{-1}}{\partial t^{a_1 1j 4}} \frac{\partial^{a_1 2k 4} A_{G0}}{\partial t^{a_1 2k 4}} J_{GG}^{-1} \frac{\partial^{a_1 3l 4} A_{G0}^T}{\partial t^{a_1 3l 4}} \frac{\partial^{a_1 4m 4} M_{G0}}{\partial t^{a_1 4m 4}} \\ &+ \sum_{\substack{0 \leq a_2 1j 4, a_2 2k 4, \\ a_2 3l 4 \leq i_1+1 \\ 0 \leq a_2 4m 4, a_2 5n 4, \\ a_2 6o 4, a_2 7p 4 \leq i_1+2}} b_2 jklmnop 4 \frac{\partial^{a_2 1j 4} \Omega_{G0}^{-1}}{\partial t^{a_2 1j 4}} \frac{\partial^{a_2 2k 4} A_{G0}}{\partial t^{a_2 2k 4}} J_{GG}^{-1} \frac{\partial^{a_2 3l 4} A_{G0}^T}{\partial t^{a_2 3l 4}} \\ &\cdot \frac{\partial^{a_2 4m 4} A_{G0}}{\partial t^{a_2 4m 4}} J_{GG} \frac{\partial^{a_2 5n 4} A_{G0}^T}{\partial t^{a_2 5n 4}} \frac{\partial^{a_2 6o 4} \Omega_{G0}}{\partial t^{a_2 6o 4}} \frac{\partial^{a_2 7p 4} \varphi_{G0}}{\partial t^{a_2 7p 4}} \end{aligned} \quad (\text{C.165})$$

mit  $a_{11j4}, a_{12k4}, a_{13l4}, a_{14m4}, a_{21j4}, a_{22k4}, a_{23l4}, a_{24m4}, a_{25n4}, a_{26o4}, a_{27p4} \in \mathbb{N}_0$ ,  $b_{1jklm4}, b_{2jklmnop4} \in \mathbb{R}$ . Über 4.166, 4.156 und 4.142 kann wie in Abschnitt C.27 (s. C.133, C.139, C.152)

$$\left. \frac{\partial^i (\Omega_{G0})_{12,21,23,32}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial^i (\Omega_{G0}^{-1})_{12,21,23,32}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial^i (A_{G0})_{12,21,23,32}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial^i (\varphi_{G0})_{1,3}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = 0$$

für  $0 \leq i \leq i_1 + 2$  und (s. C.150 mit C.163 für C.143)  $\left. \frac{\partial^i (M_{G0})_{1,3}}{\partial t^i} \right|_{t_0} = 0$  für  $0 \leq i \leq i_1$  gefolgert werden. Damit folgt für den zweiten und dritten Summand in C.165, dass unter  $t = t_0$  die jeweils erste und dritte Komponente den Wert 0 annimmt. Mit  $(\varphi_{G0})_{1,3}|_{t_0} = 0$  gilt außerdem  $\Omega_{G0}^{-1}|_{t_0} = \Omega_{G0}|_{t_0} = I_3$ ,  $(A_{G0} J_{GG}^{-1} A_{G0}^T)|_{t_0} = J_{GG}^{-1}$ , was die Umformung des ersten Summands in C.165 für  $t = t_0$  zu  $J_{GG}^{-1} \left. \frac{\partial^{i+1} M_{G0}}{\partial t^{i+1}} \right|_{t_0}$  ermöglicht. Insgesamt bedeutet das

$$\left. \frac{\partial^{i+3} (\varphi_{G0})_{1,3}}{\partial t^{i+3}} \right|_{t_0} = \frac{1}{J_{G\text{rad}}} \cdot \left. \frac{\partial^{i+1} (M_{G0})_{1,3}}{\partial t^{i+1}} \right|_{t_0} \quad (\text{C.166})$$

Im Folgenden soll nun die Abhängigkeit des Modellverhaltens für  $t = t_0$  von verschiedenen Werten der anregenden *Bahngeschwindigkeit*  $v_{B0}$  untersucht werden. Nach 4.145 ist die resultierende *inertiale* Kraft  $F_{G0}|_{t_0}$  auf den *Reifengürtel* unabhängig von  $v_{B0}$ . Auf Basis der als konstant 0 hergeleiteten Größen zur Begründung von 4.148 beginnend bei 4.145 ergibt sich über 4.11, 4.13 und 4.14  $\left. \ddot{f}_G \right|_{t_0} = -\frac{1}{m_G} F_{G0z}|_{t_0}$ . Zusammen mit 4.149 ist dann  $\left. \dot{F}_{LGKz} \right|_{t_0}$  als kleinste Ordnung der Größe verschieden von 0 unabhängig von  $v_{B0}$ . Da für  $t_0 + \varepsilon$  nur ein mittig liegendes *Reibkontakt-Element* betrachtet werden muss, ist ausschließlich Ergebnis 4.150 ausschlaggebend, nicht jedoch ein evt. von  $v_{B0}$  abhängender Verlauf der *Laufstreifenlängen*. Denn mit 4.23 folgt so für den lokalen Bodendruck

$$p_{\lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0} = \frac{F_{LGKz}|_{t_0}}{l_{RKE} b_{RKE}} \quad \dot{p}_{\lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0} = \frac{\dot{F}_{LGKz}|_{t_0}}{l_{RKE} b_{RKE}} \quad (\text{C.167})$$

und für  $t = t_0$  ist auch die kleinste Ordnung der Größe  $p_{\lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0}$  verschieden von 0 unabhängig von  $v_{B0}$ . Für die Relativgeschwindigkeit in Querrichtung des *Reibkontakt-Elements* zur Straße erhält man mit 4.160 und 4.158

$$u_{y \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0} = -v_{B0} \tan \alpha_0 \quad (\text{C.168})$$

was nach 4.30

$$u_{\lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0} \geq v_{B0} \tan \alpha_0$$



bedeutet. In 4.32 gilt also für hinreichend großes  $v_{B0}$ , dass  $v > \Delta v$  und es folgt durch ausbleibende zusätzliche Einflüsse, dass die kleinste Ordnung von  $\mu \left( u_{\lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0}, p_{\lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \right)$  verschieden von 0 genauso wie für  $p_{\lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0}$  zum Zeitpunkt  $t_0$  unabhängig von  $v_{B0}$  ist. Mit 4.25 und 4.30 ist dann auch die kleinste Ordnung von  $F_{reib \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0}$  verschieden von 0 unabhängig von  $v_B$  (s. 4.152,  $\dot{F}_{reib \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0} = \mu_{gleit 0bar} \cdot \dot{F}_{LGKz} \Big|_{t_0}$  aus 4.149, C.167). Zur Längsgeschwindigkeit des *Reibkontakt-Elements* erhält man mit 4.17 zunächst

$$\dot{x}_{REK j_0} \Big|_{t_0} = -R_{dyn} \dot{\varphi}_{G0y}$$

und *stationär* über 4.134, 4.36 sowie  $B_9$

$$\dot{x}_{REK j_0} \Big|_{t_0} = -v_{B0}$$

Mit 4.28 und 4.140 ergibt sich weiter

$$\dot{x}_{REK def j_0} \Big|_{t_0} = -v_{B0}$$

und es folgt über 4.137 und 4.157

$$v_{0Kx \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0} = 0$$

sowie mit 4.30 und 4.159

$$u_x \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0 \Big|_{t_0} = 0 \tag{C.169}$$

C.168, C.169 und 4.30 ergeben

$$\frac{u_x \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0}{u \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0} = 0 \quad \frac{u_y \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0}{u \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0} \Big|_{t_0} = -1$$

und Gleichung 4.165 zeigt nun, da zu  $t = t_0$  die kleinste Ordnung von  $F_{reib \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0}$  verschieden von 0 unabhängig von  $v_{B0}$  ist, dass zu  $t = t_0$  genauso die kleinste Ordnung  $(i_1+1)$  verschieden von 0 von  $(F_x \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0, F_y \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0)$  unabhängig von  $v_{B0}$  ist. In Gleichung 4.34 sieht man mit 4.166 und 4.154, dass

$$\frac{\partial^{i_1+1} M_{LGKx}}{\partial t^{i_1+1}} \Big|_{t_0} = 0 \tag{C.170}$$

gilt, bzw. mit 4.153 und 4.34, dass wie  $(F_x \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0, F_y \lceil \frac{n_{LS}}{2} \rceil j_0)$  auch  $\frac{\partial^{i_1+1} (F_{LGK})_{1..2}}{\partial t^{i_1+1}} \Big|_{t_0}$  als kleinste Ordnung der Größe verschieden von 0 zum Zeitpunkt  $t_0$  unabhängig von  $v_{B0}$  ist. Gleichung C.144 zeigt mit 4.169 und 4.167, dass

$$\frac{\partial^i F_{LG0y}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = 0 \text{ für } 0 \leq i \leq i_1 \tag{C.171}$$

gilt. Weiter sieht man mit 4.169 in 4.170, dass

$$\left. \frac{\partial^{i_1+1} F_{LG0}}{\partial t^{i_1+1}} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial^{i_1+1} F_{LGK}}{\partial t^{i_1+1}} \right|_{t_0}$$

und damit, dass auch  $\left. \frac{\partial^{i_1+1} (F_{LG0})_{1..2}}{\partial t^{i_1+1}} \right|_{t_0}$  unabhängig von  $v_{B0}$  ist. Die Zeitableitung der ersten Komponente des Hebels der *Latsch*-Kraft zum *Reifengürtel*-Moment lässt sich als

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial^{i_1+1} ((r_{G0} - r_{K0}) \times F_{LG0})_1}{\partial t^{i_1+1}} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial^{i_1+1} (r_{G0} - r_{K0})_2 F_{LG0z} - (r_{G0} - r_{K0})_3 F_{LG0y}}{\partial t^{i_1+1}} \right|_{t_0} \\ & = \left. \frac{\partial^{i_1+1} (r_{G0} - r_{K0})_2 F_{LG0z}}{\partial t^{i_1+1}} - (r_{G0} - r_{K0})_3 \frac{\partial^{i_1+1} F_{LG0y}}{\partial t^{i_1+1}} \right|_{t_0} \\ & \quad - \sum_{\substack{0 \leq a_{1j} \leq i_1+1 \\ 0 \leq a_{2k} \leq i_1}} b_{jk} \frac{\partial^{a_{1j}}}{\partial t^{a_{1j}}} (r_{G0} - r_{K0})_3 \frac{\partial^{a_{2k}}}{\partial t^{a_{2k}}} F_{LG0y}, \quad a_{1j}, a_{2k} \in \mathbb{N}_0, b_{jk} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

darstellen, und es folgt mit C.160 und C.171

$$\left. \frac{\partial^{i_1+1} ((r_{G0} - r_{K0}) \times F_{LG0})_1}{\partial t^{i_1+1}} \right|_{t_0} = - (r_{G0} - r_{K0})_3 \Big|_{t_0} \left. \frac{\partial^{i_1+1} F_{LG0y}}{\partial t^{i_1+1}} \right|_{t_0}$$

Über 4.35 erhält man so mit 4.169 und C.170 für das vom *Latsch* in den *Reifengürtel* eingeprägte *Sturzmoment*

$$\left. \frac{\partial^{i_1+1} M_{LG0x}}{\partial t^{i_1+1}} \right|_{t_0} = (r_{G0} - r_{K0})_3 \Big|_{t_0} \left. \frac{\partial^{i_1+1} F_{LG0y}}{\partial t^{i_1+1}} \right|_{t_0}$$

Da  $r_{G0z}|_{t_0}$  mit 4.139 und  $\left. \frac{\partial^{i_1+1} (F_{LG0})_{1..2}}{\partial t^{i_1+1}} \right|_{t_0}$  wie schon gezeigt unabhängig von  $v_{B0}$  ist,

und hier auf ebenem Boden grundsätzlich  $r_{K0z} = 0$  gilt, ist  $\left. \frac{\partial^{i_1+1} M_{LG0x}}{\partial t^{i_1+1}} \right|_{t_0}$  also auch unabhängig von  $v_{B0}$ . Nach 4.10 folgt so mit C.163, dass genauso die Zeitableitung des resultierenden vom *Latsch* in den *Reifengürtel* eingepprägten *Sturzmoments*  $\left. \frac{\partial^{i_1+1} M_{G0x}}{\partial t^{i_1+1}} \right|_{t_0}$

unabhängig von  $v_{B0}$  ist. Mit C.166 überträgt sich diese Eigenschaft und auch die durch C.164 nachgewiesene Unabhängigkeit des resultierenden Vertikalmoments auf die Orientierung des *Reifengürtels*, und auch

$$\left. \frac{\partial^{i_1+3} (\varphi_{G0})_{1,3}}{\partial t^{i_1+3}} \right|_{t_0} \text{ ist unabhängig von } v_{B0} \tag{C.172}$$

Durch 4.11, 4.10, 4.174 und die Unabhängigkeit der Größe  $\left. \frac{\partial^{i_1+1} (F_{LG0})_{1..2}}{\partial t^{i_1+1}} \right|_{t_0}$  von  $v_{B0}$  folgt dies ebenso für die Querbewegung des *Reifengürtels*, und  $\left. \frac{\partial^{i_1+3} r_{G0y}}{\partial t^{i_1+3}} \right|_{t_0}$  ist unabhängig von  $v_{B0}$ . Laut  $B_9$  ist  $\alpha$  und damit auch  $v_B$  für  $t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t$  konstant, womit nach 4.36

$$\left. \frac{\partial^{i_1+3} (r_{F0})_{1..2}}{\partial t^{i_1+3}} \right|_{t_0} = 0 \quad (\text{C.173})$$

folgt ( $i_1 \geq 0$ ), und auch

$$\left. \frac{\partial^{i_1+3} (r_{F0} - r_{G0})_2}{\partial t^{i_1+3}} \right|_{t_0} \text{ ist unabhängig von } v_{B0} \quad (\text{C.174})$$

Mit 4.134 und  $(\varphi_{F0})_{1,3} = 0$  gilt nach Definition 18 für die mittlere Zeile von  $A_{G0}^T$ , dass  $\left( A_{G0}^T \right)_{21,22,23} \Big|_{t_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , und man erhält zusammen mit C.174

$$\left( A_{G0}^T \Big|_{t_0} \cdot \left. \frac{\partial^{i_1+3} (r_{F0} - r_{G0})}{\partial t^{i_1+3}} \right|_{t_0} \right)_2 = \left. \frac{\partial^{i_1+3} (r_{F0y} - r_{G0y})}{\partial t^{i_1+3}} \right|_{t_0} \text{ ist unabhängig von } v_{B0} \quad (\text{C.175})$$

Nun soll nach den ausbleibenden unerwünschten Zusatzeffekten untersucht werden, ob es mit einer Vergrößerung von  $v_{B0}$  möglich ist, den vertikalen Abstand von *Reifengürtel* und Felge zum Zeitpunkt  $t_0$  zu verkleinern. Für die in Abschnitt 4.1.7 definierten Größen gilt mit 4.131

$$R_{Gx} \Big|_{t_0-\varepsilon} = R_{Gz} \Big|_{t_0-\varepsilon} = I_3$$

und, da für  $t = t_0 - \varepsilon$  ein *Stationärzustand* ( $F_{G0} \Big|_{t_0-\varepsilon} = 0$ ) und mit 4.131  $F_{LGK} \Big|_{t_0-\varepsilon} = 0$  sowie nach 4.35  $F_{LG0} \Big|_{t_0-\varepsilon} = 0$  vorliegt, mit 4.10

$$F_{FG0} \Big|_{t_0-\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_G \cdot g \end{pmatrix}$$

Dann lautet Gleichung 4.39 zur *stationären* Verschiebung und Koppelkraft zwischen *Reifengürtel* und Felge eingeschränkt auf die erste und dritte Komponente

$$\begin{pmatrix} 0 \\ m_G \cdot g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{GF \text{ rad}} & -d_{GF \text{ rad}} \dot{\varphi}_{F0y} \Big|_{t_0-\varepsilon} \\ d_{GF \text{ rad}} \dot{\varphi}_{F0y} \Big|_{t_0-\varepsilon} & c_{GF \text{ rad}} \end{pmatrix} \cdot (r_{F0} - r_{G0})_{1,3} \Big|_{t_0-\varepsilon}$$

Aufgelöst erhält man

$$(r_{F0} - r_{G0})_{1,3} \Big|_{t_0-\varepsilon} = \frac{m_G \cdot g \cdot c_{GF \text{ rad}}}{c_{GF \text{ rad}}^2 + d_{GF \text{ rad}}^2 \cdot \dot{\varphi}_{F0y}^2 \Big|_{t_0-\varepsilon}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{d_{GF \text{ rad}}}{c_{GF \text{ rad}}} \dot{\varphi}_{F0y} \Big|_{t_0-\varepsilon} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ausgedrückt in  $v_{B0}$  gilt mit  $B_9$  und 4.36

$$(r_{F0} - r_{G0})_{1,3} \Big|_{t_0 - \varepsilon} = \frac{m_G \cdot g \cdot c_{GF \text{ rad}} R_{dyn}^2}{c_{GF \text{ rad}}^2 R_{dyn}^2 + d_{GF \text{ rad}}^2 \cdot v_{B0}^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{d_{GF \text{ rad}} \cdot v_{B0}}{c_{GF \text{ rad}} R_{dyn}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nach 4.144 kann das Ergebnis auf den Zeitpunkt  $t_0$  übertragen werden, und man erhält

$$(r_{F0} - r_{G0})_{1,3} \Big|_{t_0} = \frac{m_G \cdot g \cdot c_{GF \text{ rad}} R_{dyn}^2}{c_{GF \text{ rad}}^2 R_{dyn}^2 + d_{GF \text{ rad}}^2 \cdot v_{B0}^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{d_{GF \text{ rad}} \cdot v_{B0}}{c_{GF \text{ rad}} R_{dyn}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Grenzübergang in  $v_{B0}$  liefert so bei den übrigen davon unabhängigen Parametern

$$\lim_{v_{B0} \rightarrow \infty} (r_{F0} - r_{G0})_{1,3} \Big|_{t_0} = 0 \quad (\text{C.176})$$

Um die relevanten Auswirkungen einer Veränderung von  $v_{B0}$  weiter einkreisen zu können, muss auch  $\frac{\partial^{i_1+3} A_{G0}}{\partial t^{i_1+3}}$  näher betrachtet werden. Es gilt nach Definition 18

$$A_{G0} = A_{G0z} A_{G0x} A_{G0y}$$

mit  $A_{G0x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{G0x} & -\sin \varphi_{G0x} \\ 0 & \sin \varphi_{G0x} & \cos \varphi_{G0x} \end{pmatrix}$ ,  $A_{G0y} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{G0y} & 0 & \sin \varphi_{G0y} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_{G0y} & 0 & \cos \varphi_{G0y} \end{pmatrix}$ ,

$$A_{G0z} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{G0z} & -\sin \varphi_{G0z} & 0 \\ \sin \varphi_{G0z} & \cos \varphi_{G0z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.177})$$

und damit für die Zeitableitung von  $A_{G0}^T$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{i_1+3} A_{G0}^T}{\partial t^{i_1+3}} &= \frac{\partial^{i_1+3} A_{G0y}^T}{\partial t^{i_1+3}} \cdot A_{G0x}^T A_{G0z}^T + A_{G0y}^T \cdot \frac{\partial^{i_1+3} A_{G0x}^T}{\partial t^{i_1+3}} \cdot A_{G0z}^T + A_{G0y}^T A_{G0x}^T \cdot \frac{\partial^{i_1+3} A_{G0z}^T}{\partial t^{i_1+3}} \\ &+ \sum_{\substack{0 \leq a_{1j6}, a_{2k6}, a_{3l6} \leq i_1+2 \\ a_{2k6} + a_{3l6} > 0}} b_{jkl6} \frac{\partial^{a_{1j6}}}{\partial t^{a_{1j6}}} A_{G0y}^T \frac{\partial^{a_{2k6}}}{\partial t^{a_{2k6}}} A_{G0x}^T \frac{\partial^{a_{3l6}}}{\partial t^{a_{3l6}}} A_{G0z}^T \end{aligned}$$

mit  $a_{1j6}, a_{2k6}, a_{3l6} \in \mathbb{N}_0$ ,  $b_{jkl6} \in \mathbb{R}$ . Nach 4.167 gilt

$$A_{G0x} \Big|_{t_0} = A_{G0z} \Big|_{t_0} = I_3 \text{ und } \frac{\partial^i A_{G0x}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = \frac{\partial^i A_{G0z}}{\partial t^i} \Big|_{t_0} = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq i_1 + 2 \quad (\text{C.178})$$

sowie  $i_1 \geq 0$  und damit  $\left. \frac{\partial^{i_1+3} (A_{G0y}^T)_{21,22,23}}{\partial t^{i_1+3}} \right|_{t_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . So erhält man

$$\begin{aligned} & \left( \left. \frac{\partial^{i_1+3} A_{G0}^T}{\partial t^{i_1+3}} \right|_{t_0} \cdot (r_{F0} - r_{G0})|_{t_0} \right)_2 \\ &= \left( A_{G0y}^T|_{t_0} \cdot \left( \left. \frac{\partial^{i_1+3} A_{G0x}^T}{\partial t^{i_1+3}} \right|_{t_0} + \left. \frac{\partial^{i_1+3} A_{G0z}^T}{\partial t^{i_1+3}} \right|_{t_0} \right) \cdot (r_{F0} - r_{G0})|_{t_0} \right)_2 \end{aligned}$$

Aus 4.134 und C.176 folgt

$$\lim_{v_{B0} \rightarrow \infty} (r_{F0} - r_{G0})|_{t_0} = 0$$

Die Multiplikation mit  $A_{G0y}^T|_{t_0}$  verändert, da  $A_{G0y}|_{t_0}$  *orthogonal* ist, die Norm des Vektors nicht, und  $\left. \frac{\partial^{i_1+3} A_{G0x}^T}{\partial t^{i_1+3}} \right|_{t_0}$  sowie  $\left. \frac{\partial^{i_1+3} A_{G0z}^T}{\partial t^{i_1+3}} \right|_{t_0}$  ändern sich nach 4.167 und C.172 nicht mit  $v_{B0}$ . Also gilt auch

$$\lim_{v_{B0} \rightarrow \infty} \left( \left. \frac{\partial^{i_1+3} A_{G0}^T}{\partial t^{i_1+3}} \right|_{t_0} \cdot (r_{F0} - r_{G0})|_{t_0} \right)_2 = 0 \quad (\text{C.179})$$



# Literaturverzeichnis

- [1] Götz Alefeld / Jürgen Herzberger, *Introduction to Interval Computations*, Academic Press, 1983
- [2] Walter Alt, *Nichtlineare Optimierung - Eine Einführung in Theorie, Verfahren und Anwendungen - 2. Auflage*, vieweg, 2011
- [3] Hoai An / Le Thi / Pascal Bouvry / Pham D. Tao, *Modelling, Computation and Optimization in Information Systems and Management Sciences*, Springer-Verlag, 2008
- [4] Dieter Ammon, *Modellbildung und Systementwicklung in der Fahrzeugdynamik*, B. G. Teubner, 1997
- [5] Dieter Ammon / Michael Gipser / Jochen Rauh / Jürgen Wimmer, *High Performance System Dynamics Simulation of the Entire System Tire-Suspension-Steering-Vehicle*, in: *Vehicle System Dynamics* 27 (1997), Swets & Zeitlinger, 1997
- [6] Dieter Ammon / Rolf Gnadler / Günther Mäcke / Hans-Joachim Unrau, *Ermittlung der Reibwerte von Gummistollen zur genauen Parametrierung von Reifenmodellen*, in: *ATZ* 07/2004, VDI Verlag
- [7] Klaus Augsburg / H. Brunner / Maik Jeschor / Jens Schmalzer, *Neues Prüffeld Reifen- und Fahrwerkstechnik am IVK der TU Dresden*, in: *ATZ* 10/1999, VDI Verlag
- [8] A. Avramidis / G. Zioutas, *Locally and globally robust Penalized Trimmed Squares regression*, in: *Simulation Modelling Practice and Theory*, Volume 19, Issue 1, Elsevier, 2011
- [9] R. J. Beerends / H. G. ter Morsche / J. C. van den Berg / E. M. van de Vrie, *Fourier and Laplace Transforms*, Cambridge University Press, 2003
- [10] Holger Behrens, *Nichtlineare Modellierung und Identifikation hydrodynamischer Kupplungen mit allgemeinen diskreten Modellansätzen*, Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, 1997

- [11] Hans Benker, *Wirtschaftsmathematik - Problemlösungen mit Excel*, vieweg, 2007
- [12] E. Blum / W. Oettli, *Mathematische Optimierung*, Springer-Verlag, 1975
- [13] Friedrich Böhm, *Zur Mechanik des Luftreifens*, Habilitationsschrift Universität Stuttgart, 1966
- [14] Friedrich Böhm / Marian Swierczek / Gyula Csaki, *Hochfrequente Rolldynamik des Gürtelreifens - das Kreisringmodell und seine Erweiterung*, VDI Verlag, 1989
- [15] Karl Heinz Borgwardt, *Optimierung, Operations Research, Spieltheorie*, Birkhäuser Verlag, 2001
- [16] L. E. J. Brouwer / H. Freudenthal, *Collected Works 2 - Geometry, Analysis, Topology and Mechanics*, North Holland Publishing Company, 1976
- [17] Hans-Joachim Bungartz / Stefan Zimmer / Martin Buchholz / Dirk Pflüger, *Modellbildung und Simulation*, Springer-Verlag, 2013
- [18] Edmund M. Clarke / Orna Grumberg / Doron A. Peled, *Model Checking*, The MIT Press, 1999
- [19] Gyula Csaki, *Kontinuumstheoretische Berechnung eines bewegten, mehrschichtigen Reifenmodells in Abhängigkeit von der Temperatur*, in: VDI-Berichte 916, 1991
- [20] Horst Czichos / Karl-Heinz Habig, *Tribologie-Handbuch*, Vieweg+Teubner, 2010
- [21] Shantanu Das, *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*, Springer-Verlag, 2008
- [22] Ulrich Eichhorn, *Reibwert zwischen Reifen und Fahrbahn - Einflußgrößen und Erkennung*, VDI Verlag, 1992
- [23] M. Eichler, *A Ride Comfort Tyre Model for Vibration Analysis in full Vehicle Simulations*, in: Tyre Models for Vehicle Dynamic Analysis, Swets & Zeitlinger B.V., 1996
- [24] L. Eriksson / E. Johansson / N. Kettaneh-Wold / C. Wikström / S. Wold, *Design of Experiments - Principles and Applications*, Umetrics, 2008
- [25] Ludwig Fahrmeir / Alfred Hamerle / Gerhard Tutz, *Multivariate Statistische Verfahren*, de Gruyter, 1996
- [26] Kuiyuan Feng, *Statische Berechnung des Gürtelreifens unter besonderer Berücksichtigung der kordverstärkten Lagen*, VDI Verlag, 1995



- [27] Ernst Fiala, *Seitenkräfte am rollenden Luftreifen*, in: VDI-Zeitschrift 96, 1954
- [28] James E. Gentle, *Elements of Computational Statistics*, Springer-Verlag, 2002
- [29] Fouad Giri / Er-Wei Bai, *Block-oriented Nonlinear System Identification*, Springer-Verlag, 2010
- [30] Leo Liberti / Nelson Maculan, *Global Optimization - From Theory to Implementation*, Springer-Verlag, 2006
- [31] Arnold Neumaier, *Complete Search in Continuous Global Optimization and Constraint Satisfaction*, in: Acta Numerica 2004 (A. Iserles, ed.), Cambridge University Press, 2004
- [32] Flemming Nielson / Hanne R. Nielson / Chris Hankin, *Principles of Program Analysis*, Springer-Verlag, 2005
- [33] Michael Gipser, *BRIT Version 2.0 - Dokumentation*, internes Dokument der Daimler AG, 1994
- [34] Michael Gipser, *DNS-Tire - ein dynamisches, räumliches, nichtlineares Reifenmodell*, in: VDI-Berichte 650, VDI Verlag, 1987
- [35] Rolf Gnadler / Heinrich Huinink / Michael Frey / Reinhard Mundl / Jürgen Sommer / Hans-Joachim Unrau / Burkhard Wies, *Kraftschlussmessungen auf Schnee mit dem Reifen-Innentrommel-Prüfstand*, in: ATZ 03/2005, VDI Verlag
- [36] Alfred Göpfert / Thomas Riedrich / Christiane Tammer, *Angewandte Funktionalanalysis*, Vieweg + Teubner, 2009
- [37] K. A. Grosch, *The Speed and Temperature Dependence of Rubber Friction and its Bearing on the Skid Resistance of Tires*, in: The Physics of Tire Traction, Theory and Experiment, Plenum Press, 1974
- [38] Lars Grüne / Oliver Junge, *Gewöhnliche Differentialgleichungen: Eine Einführung aus der Perspektive der dynamischen Systeme*, Springer-Verlag, 2008
- [39] Eldon Hansen / G. William Walster, *Global Optimization Using Interval Analysis*, Marcel Dekker, 2004
- [40] Bernd Heißing / Metin Ersoy / Stefan Gies, *Fahrwerkhandbuch*, Springer Vieweg, 2013
- [41] Harro Heuser, *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*, Vieweg + Teubner, 2009

- [42] Harro Heuser, *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*, Teubner, 2002
- [43] Nicholas J. Higham, *Functions of Matrices - Theory and Computation*, siam, 2008
- [44] Highway Tire Forum Steering Committee der Society of Automotive Engineers, *SAE J2047 - Tire Performance Technology*, Society of Automotive Engineers, 1998
- [45] Klaus Höllig, *Grundlagen der Numerik*, MathText, 1998
- [46] Reinhard Hofer, *Untersuchung zur Fahrsicherheit von Personenkraftwagen bei Radlastschwankungen mit besonderer Berücksichtigung des Reifenverhaltens*, 1996
- [47] Reiner Horst / Hoang Tuy, *Global Optimization - Deterministic Approaches*, Springer-Verlag, 1995
- [48] International Standard Organization, *ISO 8855 - Road Vehicles - Vehicle Dynamics and road-holding ability - Vocabulary*, International Standard Organization, 2011
- [49] Rolf Isermann, *Identifikation dynamischer Systeme 1*, Springer-Verlag, 1992
- [50] Rolf Isermann, *Identifikation dynamischer Systeme 2*, Springer-Verlag, 1992
- [51] Klaus Jänich, *Topologie*, Springer, 1996
- [52] Luc Jaulin / Michel Kieffer / Olivier Didrit / Eric Walter, *Applied Interval Analysis*, Springer-Verlag, 2001
- [53] Johannes Jahn, *Introduction to the Theory of Nonlinear Optimization*, Springer-Verlag, 1994
- [54] Reza N. Jazar, *Vehicle Dynamics: Theory and Application*, Springer-Verlag, 2009
- [55] Stephan H. Köhne / Dr. Jürgen Sommer, *Messung der mechanischen und physikalischen Zusammenhänge in der Bodenaufstandsfläche von Reifen*, in: ATZ 04/2000, VDI Verlag
- [56] Jozsef Kövecses / Saeed Ebrahimi, *Parameter Analysis and Normalization for the Dynamics and Design of Multibody Systems*, in: Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, Volume 4, Issue 3, ASME, 2009
- [57] Willi Kortüm / Peter Lugner, *Systemdynamik und Regelung von Fahrzeugen*, Springer-Verlag, 2012
- [58] W. J. Krzanowski, *Principles of Multivariate Analysis - A User's Perspective*, Oxford University Press, 2000

- [59] Günter Leister, *Fahrzeugreifen und Fahrwerkentwicklung*, Vieweg+Teubner, 2009
- [60] Ping Li / Hua-Liang Wei / Stephen A. Billings / Michael A. Balikhin / Richard Boynton, *Nonlinear Model Identification From Multiple Data Sets Using an Orthogonal Forward Search Algorithm*, in: Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, Volume 8, Issue 4, ASME, 2013
- [61] Lennart Ljung, *System Identification - Theory for the User*, Prentice Hall, 1999
- [62] Wolfgang Lück, *Algebraische Topologie - Homologie und Mannigfaltigkeiten*, vieweg, 2005
- [63] Guillaume Mercere / Laurent Bako, *Parameterization and identification of multivariable state-space systems: A canonical approach*, in: Automatica, Volume 47, Issue 8, Elsevier, 2011
- [64] Martin Meywerk, *CAE-Methoden in der Fahrzeugtechnik*, Springer-Verlag, 2007
- [65] Mario Milanese / John Norton / Helene Piet-Lahanier / Eric Walter, *Bounding Approaches to System Identification*, Springer-Verlag, 1996
- [66] Werner G. Müller, *Collecting Spatial Data*, Springer-Verlag, 2007
- [67] O. Nelles, *Nonlinear System Identification*, Springer-Verlag, 2001
- [68] A. S. Nemirovsky / D. B. Yudin, *Problem Complexity and Method Efficiency in Optimization*, Wiley, 1983
- [69] Normenausschuss Kraftfahrzeuge des Deutschen Instituts für Normung e.V., *DIN 70000 - Fahrzeugdynamik und Fahrverhalten*, Beuth Verlag, 1994
- [70] Normenausschuss Kraftfahrzeuge des Deutschen Instituts für Normung e.V., *DIN 70020-5 - Kraftfahrzeugbau - Reifen und Räder*, Beuth Verlag, 1986
- [71] C. Novara / T. Vincent / K. Hsu / M. Milanese / K. Poolla, *Parametric identification of structured nonlinear systems*, in: Automatica, Volume 47, Issue 4, Elsevier, 2011
- [72] Marcus Nüssle / Rolf Gnadler, *Messeinrichtung zur Bestimmung von Reifenkennlinien im Fahrbetrieb*, in: ATZ 07/2001, VDI Verlag
- [73] Hans Pacejka, *Tire and Vehicle Dynamics*, Elsevier, 2012
- [74] R. Panneerselvam, *Design and Analysis of Algorithms*, PHI, 2007

- [75] J. Rauh, *Fahrdynamik-Simulation mit CASCaDE*, in: VDI Berichte 816, VDI Verlag, 1990
- [76] Jochen Rauh, *Virtual Development of Ride and Handling Characteristics for Advanced Passenger Cars*, in: Vehicle System Dynamics 40 (2003), Swets & Zeitlinger, 2003
- [77] Jörnßen Reimpell / Peter Sponagel, *Fahrwektechnik: Reifen und Räder*, Vogel, 1988
- [78] K. Rüdiger Reischuk, *Komplexitätstheorie - Band I: Grundlagen*, Teubner, 1999
- [79] Jörg Rothe, *Complexity Theory and Cryptology*, Springer-Verlag, 2005
- [80] Alexander Schmid / Stefan Föröchl, *Vom realen zum virtuellen Reifen - Reifenmodellparametrierung*, in: ATZ 03/2009, VDI Verlag
- [81] Thomas B. Schön / Adrian Wills / Brett Ninness, *System identification of nonlinear state-space models*, in: Automatica, Volume 47, Issue 1, Elsevier, 2011
- [82] Detlef H. Schulze, *Instationäre Modelle des Luftreifens als Bindungselemente in Mehrkörpersystemen für fahrdynamische Untersuchungen*, VDI Verlag, 1987
- [83] René G. Schwarz, *Identifikation mechanischer Mehrkörpersysteme*, VDI Verlag, 1980
- [84] G. A. F. Seber, *Linear Regression Analysis*, Wiley, 1977
- [85] G. A. F. Seber / C. J. Wild, *Nonlinear Regression*, Wiley, 1989
- [86] Hebertt Sira-Ramirez / Carlos G. Rodriguez / John C. Romero / Alberto L. Jua-rez, *Algebraic Identification and Estimation Methods in Feedback Control Systems*, Wiley, 2014
- [87] Torsten Söderström, *Identification of stochastic linear systems in presence of input noise*, Automatica 17, 1981
- [88] William M. Spears, *Evolutionary Algorithms - The Role of Mutation and Recombination*, Springer-Verlag, 2000
- [89] P. Spellucci, *Numerische Verfahren der nichtlinearen Optimierung*, Birkhäuser, 1993
- [90] George Staus / Lorenz Biegler / B. Erik Ydstie, *Global optimization for identification*, in: Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control 1997, Volume 3, IEEE, 1997
- [91] Walter Stortelder, *Parameter Estimation in Nonlinear Dynamical Systems*, CWI,

1998

- [92] Horst Stumpf, *Handbuch der Reifentechnik*, SpringerTechnik, 1997
- [93] Helge Toutenburg, *Versuchsplanung und Modellwahl*, Physica-Verlag, 1994
- [94] Hans-Joachim Unrau, *Der Einfluss der Fahrbahnoberflächenkrümmung auf den Rollwiderstand, die Cornering Stiffness und die Aligning Stiffness von Pkw-Reifen*, KIT Scientific Publishing, 2013
- [95] H.-J. Unrau / J. Zamow, *TYDEX-Format - Description and Reference Manual - Release 1.3*, 1997
- [96] Klaus W. Wagner, *Einführung in die Theoretische Informatik - Grundlagen und Modelle*, Springer-Verlag, 1994
- [97] Yong Qiang Wang, *Ein Simulationsmodell zum dynamischen Schräglauferverhalten von Kraftfahrzeugreifen bei beliebigen Felgenbewegungen*, VDI Verlag, 1993
- [98] Karsten Weicker, *Evolutionäre Algorithmen*, Teubner, 2007
- [99] Thomas Winkelmann, *Nichtlineare Werkstoffgesetze zur Berechnung von Automobilreifen*, Institut für Statistik Universität Hannover, 1997
- [100] Hoang Tuy, *Monotonic Optimization: Problems and Solution Approaches*, in: SIAM Journal on Optimization, Volume 11, Issue 2, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000
- [101] Chandrika P. Vyasarayani / Thomas Uchida / John McPhee, *Nonlinear Parameter Identification in Multibody Systems Using Homotopy Continuation*, in: Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, Volume 7, Issue 1, ASME, 2012
- [102] Chandrika P. Vyasarayani / Thomas Uchida / John McPhee, *Parameter Identification in Multibody Systems Using Lie Series Solutions and Symbolic Computation*, in: Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, Volume 6, Issue 4, ASME, 2011
- [103] Zhibin Yan / Caiyun Chen, *Use Hausdorff metric to analyze convergence of parameter estimation in system identification*, in: Automatica, Volume 50, Issue 8, Elsevier, 2014
- [104] W. O. Yandell, *The Relation between the Stress Saturation of Sliding Rubber and the Load Dependence of Road Tyre Friction*, in: The Physics of Tire Traction, Theory and Experiment, Plenum Press, 1974

- [105] Rongqian Zhang, *Identifikation physikalischer Systemparameter nichtlinearer kontinuierlicher Mehrgrößensysteme*, VDI Verlag, 1989