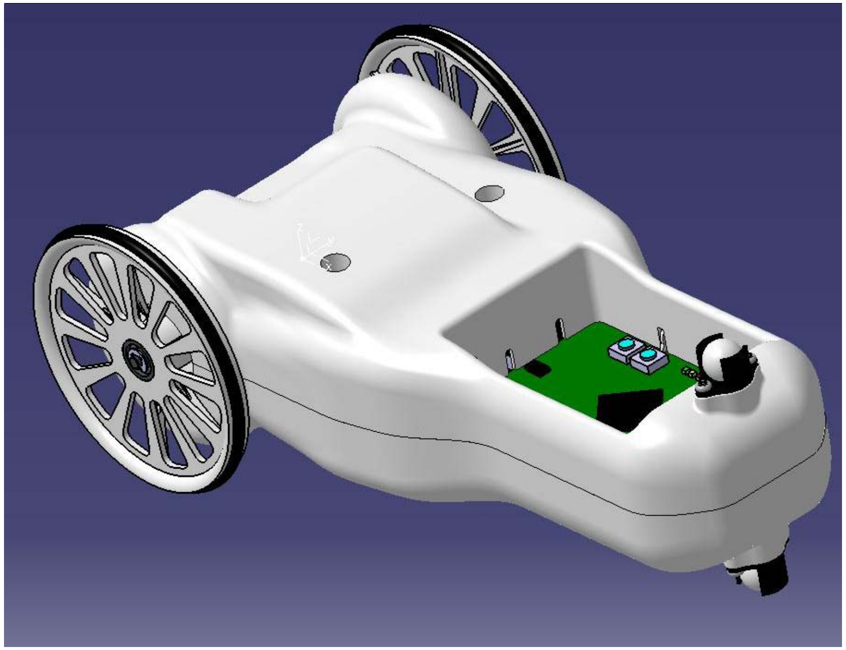
Lehrstuhl für Regelungstechnik

Technische Universität München

Passivitätsbasierte Positions- und Geschwindigkeitsregelung eines Segway-Systems



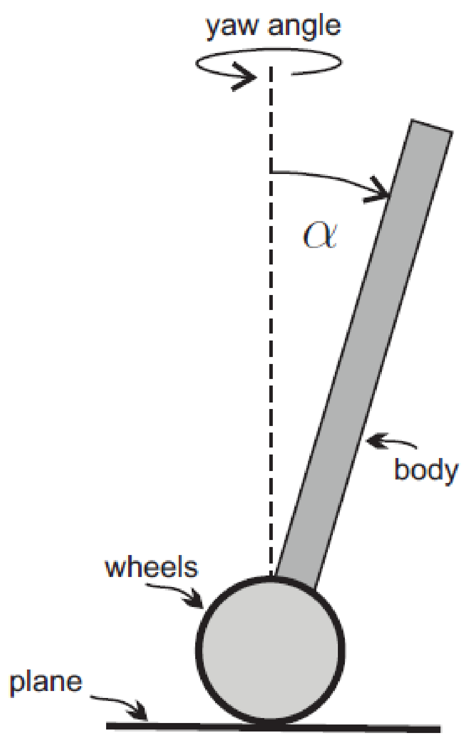
S. Delgado, P. Kotyczka

GMA Workshop, Anif

23.09.2014

Das WIP (Wheeled Inverted Pendulum)

Schwierigkeiten



1. Das System ist unteraktuiert: Es gibt mehr Freiheitsgrade als Eingangsgrößen
2. Das System ist instabil. Die instabile Ruhelage muss durch die Regelung stabilisiert werden
3. Das System unterliegt sogenannten nichtholonomen Zwangsbedingungen. Die notwendige Bedingung für die Existenz eines stetigen differenzierbaren ($\mathcal{C}^1$), asymptotisch stabilisierenden Reglers ist verletzt (Brockett). Ein stetig differenzierbarer Lageregler existiert demnach nicht!

Inhalt

1. Modellbildung (nichtholonome Systeme, Segway)
2. Vereinfachtes Modell für die Regelung und neue Lagekoordinaten
3. Passivitätsbasierter Regelungsansatz (Lage)
4. Erweiterung auf Geschwindigkeitsebene
5. Simulationen
6. Zusammenfassung und Ausblick

Nichtholonome mechanische Systeme

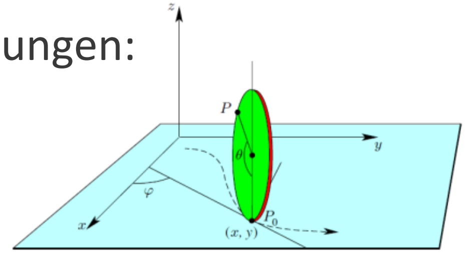
Nichtholonome Zwangsbedingungen

Diese schränken die Art der Bewegung - momentane Geschwindigkeitsrichtung -, nicht aber den Zustandsraum ein!

p Zwangsbedingungen:

$$A^T(q)\dot{q} = 0$$

$$A(q) \in \mathbb{R}^{n \times p}$$



Lagrange d'Alembert Gleichung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)^T = A(q)\lambda + \bar{\tau}$$

$$\bar{M}(q)\ddot{q} + \bar{C}(q,\dot{q})\dot{q} + \nabla_q V = A(q)\lambda + \bar{\tau}$$

Zwangskräfte leisten keine Arbeit!

$$F = A(q)\lambda \quad \Rightarrow \quad F^T\dot{q} = \lambda^T A^T(q)\dot{q} = 0$$

Bewegungsgleichungen im reduzierten Geschwindigkeitsraum

Zulässige Geschwindigkeiten: $\dot{q} = S(q)\nu, \quad S(q) \in \mathbb{R}^{n \times (n-p)}, \quad A^T(q)S(q) = 0$

$$\ddot{q} = S(q)\dot{\nu} + \dot{S}(q)\nu$$

$$\dot{q} = S(q)\nu$$

$$\bar{M}(q)\ddot{q} + \bar{C}(q,\dot{q})\dot{q} + \nabla_q V = A(q)\lambda + \bar{\tau}$$

Nichtholonome mechanische Systeme

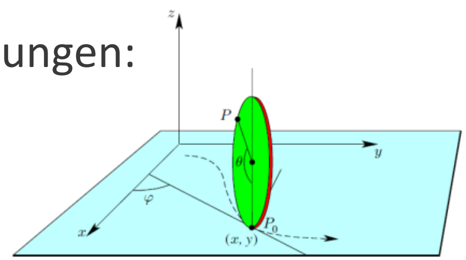
Nichtholonome Zwangsbedingungen

Diese schränken die Art der Bewegung - momentane Geschwindigkeitsrichtung -, nicht aber den Zustandsraum ein!

p Zwangsbedingungen:

$$A^T(q)\dot{q} = 0$$

$$A(q) \in \mathbb{R}^{n \times p}$$



Lagrange d'Alembert Gleichung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)^T = A(q)\lambda + \bar{\tau}$$

$$\bar{M}(q)\ddot{q} + \bar{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \nabla_q V = A(q)\lambda + \bar{\tau}$$

Zwangskräfte leisten keine Arbeit!

$$F = A(q)\lambda \quad \Rightarrow \quad F^T\dot{q} = \lambda^T A^T(q)\dot{q} = 0$$

Bewegungsgleichungen im reduzierten Geschwindigkeitsraum

Zulässige Geschwindigkeiten: $\dot{q} = S(q)\nu, \quad S(q) \in \mathbb{R}^{n \times (n-p)}, \quad A^T(q)S(q) = 0$

$$S^T\bar{M}S\dot{\nu} + S^T\left[\bar{C}(q, S\nu)S + \bar{M}\dot{S}\right]\nu + S^T\nabla_q V = S^T\bar{\tau}$$

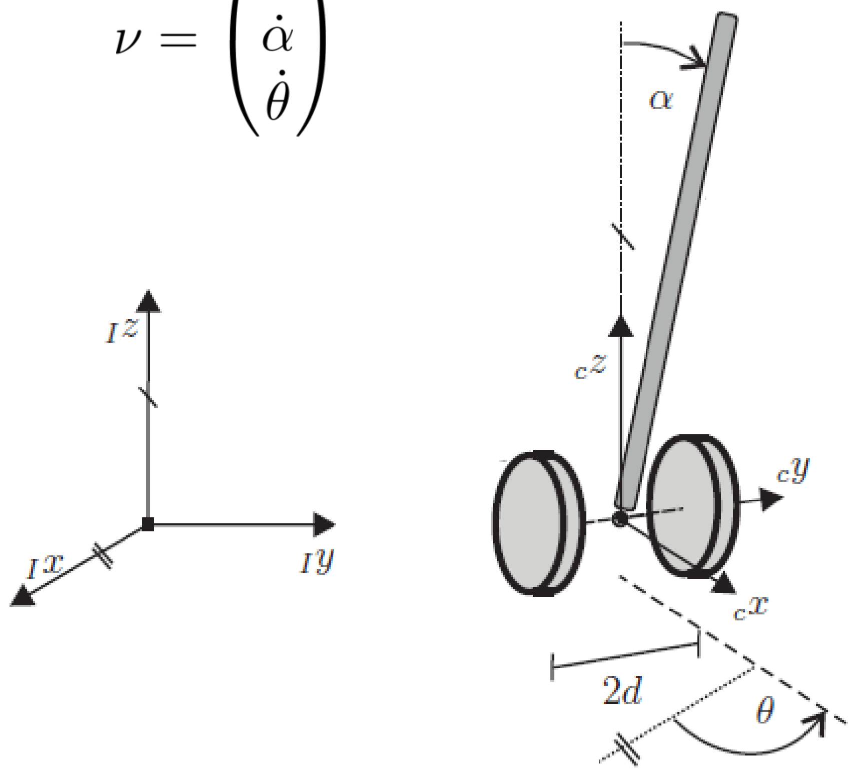
$$M\dot{\nu} + C(q, \nu)\nu + S^T\nabla_q V = \tau + J\nu \qquad J = -J^T$$

$$\dot{q} = S(q)\nu$$

Mathematisches Modell

Konfigurationsraum $(x, y, \theta, \alpha, \phi_1, \phi_2) \in Q(= \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$

$$\nu = \begin{pmatrix} v \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$



$$\dot{q} = S(q)\nu = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/r & 0 & d/r \\ 1/r & 0 & -d/r \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$M\dot{\nu} + (C - J)\nu + S^T \nabla_q V = \tau$$

$$\dot{q} = S(q)\nu$$

Neue Lagekoordinaten

Bewegungsgleichungen

$$M\dot{\nu} + (C - J)\nu + S^T \nabla_q V = \tau$$
$$\dot{x} = v \cos\theta$$
$$\dot{y} = v \sin\theta$$

Dadurch, dass

$$M(q) = M(\alpha),$$
$$C(q,\nu) = C(\alpha,\nu),$$
$$V(q) = V(\alpha)$$

Definiere die neuen Koordinaten

$$\xi = \begin{pmatrix} \int v dt \\ \alpha \\ \theta \end{pmatrix}$$, sodass

$$M\dot{\nu} + (C - J)\nu + \nabla_\xi V = \tau$$
$$\dot{\xi} = \nu$$
$$\dot{x} = v \cos\theta$$
$$\dot{y} = v \sin\theta$$

Explizites Modell:

$$M = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \sin\alpha & 0 \\ c_2 \sin\alpha & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & I_\theta(q) \end{bmatrix}$$

$$C - J = \begin{bmatrix} 0 & -c_2 s(\alpha)\dot{\alpha} & -c_2 s(\alpha)\dot{\theta} \\ 0 & 0 & -c_4 s(\alpha) c(\alpha)\dot{\theta} \\ c_2 s(\alpha)\dot{\theta} & c_4 s(\alpha) c(\alpha)\dot{\theta} & c_4 s(\alpha) c(\alpha)\dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

$$S^T \nabla_q V = \begin{pmatrix} 0 \\ -c_5 \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}(\tau_1 + \tau_2) \\ -\tau_1 - \tau_2 \\ \frac{d}{r}(\tau_2 - \tau_1) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 + \tau_2 \\ \frac{d}{r}(\tau_2 - \tau_1) \end{pmatrix}$$

Neue Lagekoordinaten

Bewegungsgleichungen

$$M\dot{\nu} + (C - J)\nu + S^T \nabla_q V = \tau$$
$$\dot{x} = v\,\cos\theta$$
$$\dot{y} = v\,\sin\theta$$

Dadurch, dass

$$M(q) = M(\alpha),$$
$$C(q,\nu) = C(\alpha,\nu),$$
$$V(q) = V(\alpha)$$

Definiere die neuen Koordinaten

$$\xi = \begin{pmatrix} \int v dt \\ \alpha \\ \theta \end{pmatrix}$$, sodass

$$M\dot{\nu} + (C - J)\nu + \nabla_\xi V = Gu$$
$$\dot{\xi} = \nu$$
$$\dot{x} = v\,\cos\theta$$
$$\dot{y} = v\,\sin\theta$$

Explizites Modell:

$$M = \begin{bmatrix} c_1 & c_2\sin\alpha & 0 \\ c_2\sin\alpha & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & I_\theta(q) \end{bmatrix}$$

$$C - J = \begin{bmatrix} 0 & -c_2 s(\alpha)\dot{\alpha} & -c_2 s(\alpha)\dot{\theta} \\ 0 & 0 & -c_4 s(\alpha)c(\alpha)\dot{\theta} \\ c_2 s(\alpha)\dot{\theta} & c_4 s(\alpha)c(\alpha)\dot{\theta} & c_4 s(\alpha)c(\alpha)\dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

$$\nabla_\xi V = \begin{pmatrix} 0 \\ -c_5\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Gu = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Neue Lagekoordinaten

Bewegungsgleichungen

$$M\dot{\nu} + (C - J)\nu + \nabla_\xi V = Gu$$
$$\dot{\xi} = \nu$$
$$\dot{x} = v \cos\theta$$
$$\dot{y} = v \sin\theta$$

Brockett's Bedingung wird nicht mehr verletzt. Zwar kann keine Ruhelage q^* durch einen stetig differenzierbaren Regler ($\mathcal{C}^1$) stabilisiert werden, in neuen Koordinaten ist es sehr wohl möglich, mit einem kontinuierlichen Regler, eine Ruhelage ξ^* zu stabilisieren.

Anmerkung: die dritte Gleichung (θ) kann mit einer geeigneten Wahl von u_2 entkoppelt werden.

Explizites Modell:

$$M = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \sin\alpha & 0 \\ c_2 \sin\alpha & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & I_\theta(q) \end{bmatrix}$$

$$C - J = \begin{bmatrix} 0 & -c_2 s(\alpha)\dot{\alpha} & -c_2 s(\alpha)\dot{\theta} \\ 0 & 0 & -c_4 s(\alpha)c(\alpha)\dot{\theta} \\ c_2 s(\alpha)\dot{\theta} & c_4 s(\alpha)c(\alpha)\dot{\theta} & c_4 s(\alpha)c(\alpha)\dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

$$\nabla_\xi V = \begin{pmatrix} 0 \\ -c_5 \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Gu = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Passivitätsbasierte Stabilisierung mechanischer Systeme

Regelungsansatz

$$M\dot{\nu} + (C - J)\nu + \nabla_\xi V = Gu$$

Finde einen Eingang u , sodass das geregelte System darstellbar ist als:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_c}{\partial \nu}\right)^T - \left(\frac{\partial L_c}{\partial \xi}\right)^T = (J_c - R_c)\nu$$

$$L_c = \frac{1}{2}\nu^T M_c \nu - V_c$$

$$\Rightarrow M_c\dot{\nu} + C_c\nu + \nabla_\xi V_c = (J_c - R_c)\nu$$

Stabilität

Die Ljapunowfunktion

$$H_c = \frac{1}{2}\nu^T M_c \nu + V_c$$

besitzt ein Minimum bei $(0,\ 0)$

$$0 = \operatorname{argmin}\ V_c(\xi)$$

$$M_c(\xi) > 0$$

$$\Rightarrow \quad \dot{H}_c = -\nu^T R_c \nu$$

Geregeltes System ist stabil, falls $R_c(\xi) \geq 0$.

„Matching“

$$M\dot{\nu} + (C - J)\nu + \nabla_\xi V = Gu$$

$$\dot{\nu} = -M_c^{-1}\nabla_\xi V_c + M_c^{-1}(J_c - R_c - C_c)\nu$$

$$\Rightarrow \quad -MM_c^{-1}\nabla_\xi V_c + MM_c^{-1}(J_c - R_c - C_c)\nu + (C - J)\nu + \nabla_\xi V = Gu$$

Bestimmungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} G^T \\ G_\perp \end{bmatrix} \quad -MM_c^{-1}\nabla_\xi V_c + MM_c^{-1}(J_c - R_c - C_c)\nu + (C - J)\nu + \nabla_\xi V = Gu$$

Kinetische Energie $MM_c^{-1}(J_c - C_c)\nu + (C - J)\nu = Gu_{ke}$

$$\Rightarrow \quad G^T\left(MM_c^{-1}(J_c - C_c) + (C - J)\right)\nu = G^T G u_{ke}$$

$$\boxed{G_\perp\left(MM_c^{-1}(J_c - C_c) + (C - J)\right)\nu = 0}$$

Potentielle Energie $-MM_c^{-1}\nabla_\xi V_c + \nabla_\xi V = Gw_{pe}$

$$\Rightarrow \quad G^T\left(MM_c^{-1}\nabla_\xi V_c - \nabla_\xi V\right) = G^T G u_{pe}$$

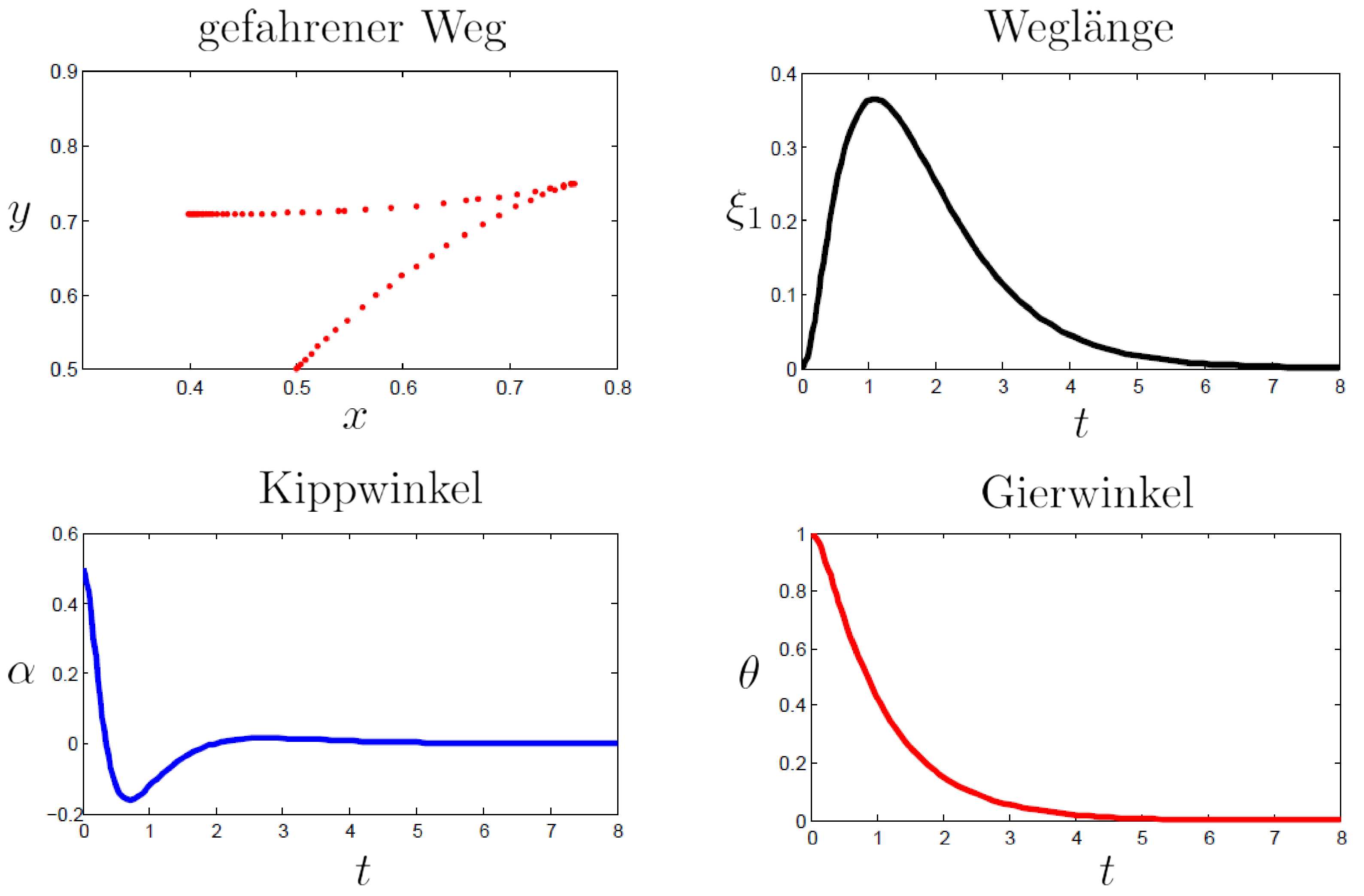
$$\boxed{G_\perp\left(MM_c^{-1}\nabla_\xi V_c - \nabla_\xi V\right) = 0}$$

Dissipation $-MM_c^{-1}R_c\nu = Gu_{di}$

$$\Rightarrow \quad -G^T MM_c^{-1}R_c\nu = G^T G u_{di}$$

$$\boxed{G_\perp MM_c^{-1}R_c\nu = 0}$$

Simulation “Lage”-Regelung



PB Geschwindigkeitsregelung mechanischer Systeme

Regelungsansatz

Betrachte die Ljapunowfunktion

$$E_c = \frac{1}{2}\nu_e^T M_c \nu_e + V_c(\xi_e)$$

$$\nu_e = \nu - \nu^*, \qquad \xi_e = \xi - \xi^*$$

E_c besitzt ein Minimum bei $(\xi^*,\ \nu^*)$.

$$\Rightarrow \quad \nabla_\xi V_c|_{\xi^*} = 0$$

Man nehme an, die BGL seien

$$M_c\dot{\nu} + C_c\nu_e + \nabla_\xi V_c = (J_c - R_c)\nu_e$$

Stabilität

$$\dot{E}_c = -\nu_e^T R_c \nu_e + \nabla_\xi^T V_c \nu^*$$

Für Stabilität:

$$R_c(\xi) \geq 0$$

$$\nabla_\xi^T V_c \nu^* = 0$$

$$\nu_i^* \neq 0 \Rightarrow \xi_i^* = \xi_i$$

$$\nu_e = \nu - \nu^* = \begin{pmatrix} v - v^* \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} - \dot{\theta}^* \end{pmatrix}$$

„Matching“

$$M\dot{\nu} + (C - J)\nu + \nabla_\xi V = Gu$$

$$\dot{\nu} = -M_c^{-1}\nabla_\xi V_c + M_c^{-1}(J_c - R_c - C_c)\nu_e$$

$$\Rightarrow \quad -MM_c^{-1}\nabla_\xi V_c + MM_c^{-1}(J_c - R_c - C_c)\nu_e + (C - J)\nu + \nabla_\xi V = Gu$$

Bestimmungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} G^T \\ G_\perp \end{bmatrix} \quad -MM_c^{-1}\nabla_\xi V_c + MM_c^{-1}(J_c - R_c - C_c)\nu_e + (C-J)\nu + \nabla_\xi V = Gu$$

Kinetische Energie $\quad MM_c^{-1}(J_c - C_c)\nu_e + (C-J)\nu = Gu_{ke}$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} G^T\left(MM_c^{-1}(J_c - C_c) + (C-J)\right)\nu_e + G^T(C-J)\nu^* = G^T G u_{ke} \\ \boxed{G_\perp\left(MM_c^{-1}(J_c - C_c) + (C-J)\right)\nu_e} + \boxed{G_\perp(C-J)\nu^*} = 0 \end{array}$$

$$\boxed{G_\perp(C-J)\nu^* = f(\alpha)\dot{\theta}\dot{\theta}^* \sin\alpha = 0}$$

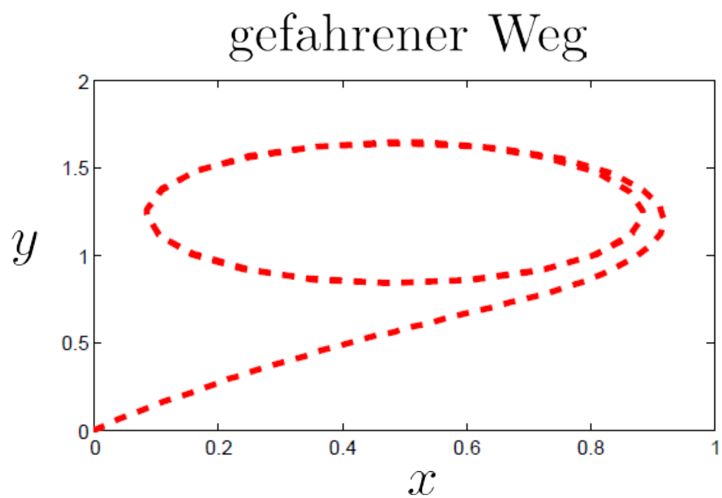
Potentielle Energie $\quad -MM_c^{-1}\nabla_\xi V_c + \nabla_\xi V = Gu_{pe}$

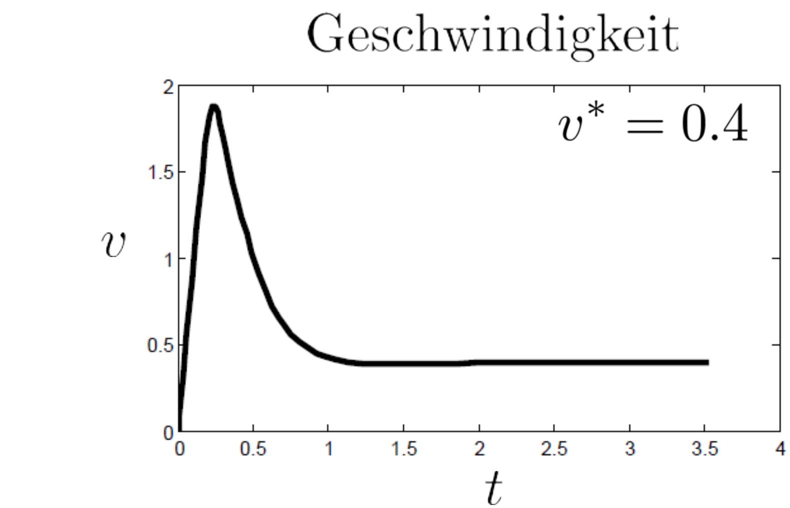
$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} G^T\left(MM_c^{-1}\nabla_\xi V_c - \nabla_\xi V\right) = G^T G u_{pe} \\ \boxed{G_\perp\left(MM_c^{-1}\nabla_\xi V_c - \nabla_\xi V\right) = 0} \end{array}$$

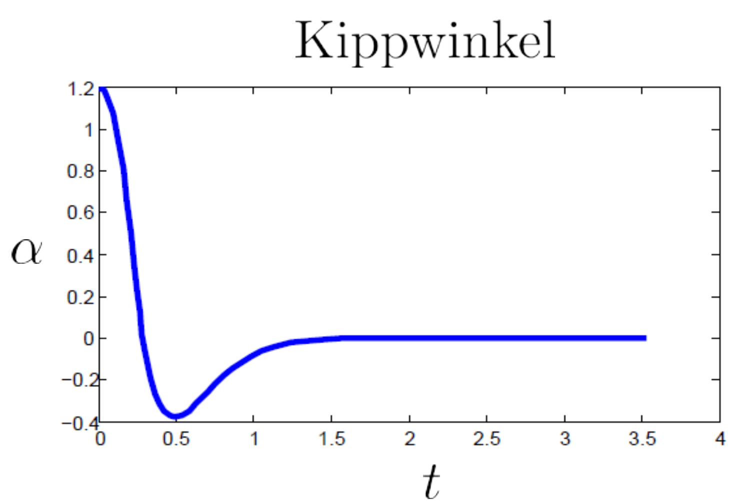
Dissipation $\quad -MM_c^{-1}R_c\nu_e = Gu_{di}$

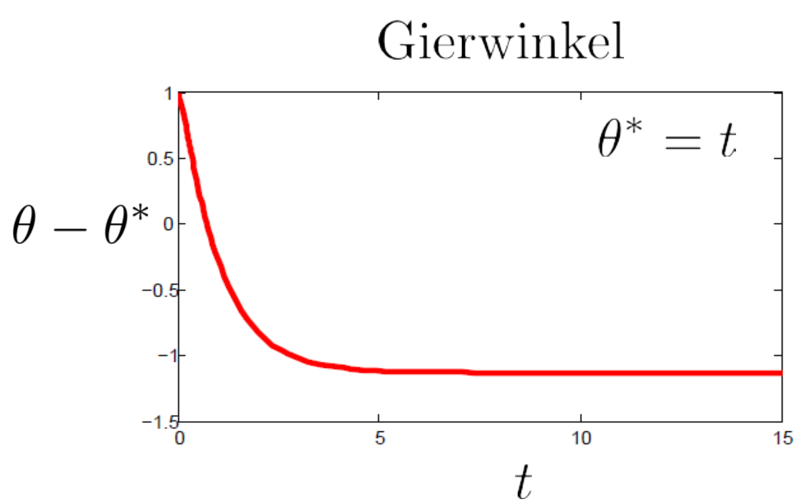
$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} -G^T MM_c^{-1}R_c\nu_e = G^T G u_{di} \\ \boxed{G_\perp MM_c^{-1}R_c\nu_e = 0} \end{array}$$

Simulation Geschwindigkeitsregelung









Fazit

Zusammenfassung

1. Passivitätsbasierter, konstruktiver Regelungsentwurf für ein Segway Modell (Lage: zeitliches Integral der möglichen Geschwindigkeiten)
2. Erweiterung auf Geschwindigkeitsebene
3. Parametrierung mittels Zuweisung lokal linearer Dynamik

Ausblick

1. Experimentelle Validierung
2. Trajektorienplanung zur Stabilisierung eines Punktes im Zustandsraum

Referenzen

- Bloch, A. M.: Nonholonomic Mechanics and Control. Springer, 2003

- Blankenstein, G. et. al.: The matching conditions of controlled Lagrangians and IDA-PBC. Int. Journal of Control, 75(9): 645-665, 2002.

- Grasser, F. et. al.: JOE: a mobile, inverted pendulum. IEEE Trans. Industrial Electronics, 49(1), 107-114, 2002.

- Li, Z. et. al.: Advanced Control of Wheeled Inverted Pendulum Systems. Springer, 2012.

- Brockett, R.W.: Asymptotic Stability and Feedback Stabilization, Differential Geometric Control Theory, 1983, pp. 181-191.