



# RISIKO MANAGER

17-18 . 2014

[ KREDITRISIKO ] [ MARKTRISIKO ] [ LIQUIDITÄTSRISIKO ] [ OPRISK ] [ ERM ] [ REGULIERUNG ]



## Inhalt

- 1, 8 Statistische Eigenschaften und historische Parameterschätzung
- 3 Standpunkt, Kurz & Bündig
- 15 Buchbesprechung
- 16 Vereinheitlichte Definitionen und Vorlagen für Refinanzierungspläne von Kreditinstituten
- 20 Das sogenannte „operative Risiko“
- 25 Taktische „low eVaR“-Allokation
- 32 Impressum
- 32 Personalien
- 34 Produkte & Unternehmen

[WWW.RISIKO-MANAGER.COM](http://WWW.RISIKO-MANAGER.COM)

## Risikomanagement mit Sprungprozessen (Teil 2)

# Statistische Eigenschaften und historische Parameterschätzung

Im vorangegangenen Beitrag unserer Serie „Risikomanagement mit Sprungprozessen“ (vgl. RISIKO MANAGER 15/2014) führten wir Lévy-Prozesse formal ein, diskutierten erste statistische Eigenschaften und lernten verschiedene Beispiele kennen. Als Motivation diente uns dabei die Modellierung von Aktienkursen; insbesondere legten wir großen Wert auf mögliche Sprünge und höhere Randwahrscheinlichkeiten gegenüber Modellen, die einer Normalverteilungsannahme unterliegen. Nun wollen wir weitere statistische Eigenschaften von Aktienkursen (bzw. den daraus abgeleiteten Renditen) diskutieren und diese mit den entsprechenden theoretischen Eigenschaften von Lévy-Prozessen vergleichen.

Für die konkrete Anwendung von Lévy-Modellen ist selbstverständlich auch die Frage der Parameterwahl elementar – hierzu diskutieren wir mögliche Schätzverfahren basierend auf beobachteten Zeitreihen. In diesem Kapitel betrach-

ten wir als Modell für die Entwicklung einer Aktie (oder eines Aktienindex) stets ein sogenanntes *exponentielles Lévy-Modell*. Der Aktienkurs nimmt somit die Form  $S(t) = S(0)\exp(X(t))$ ,  $t \geq 0$ , an.

Fortsetzung auf Seite 8

Anzeige



[www.pco-ag.de](http://www.pco-ag.de)



## Könner gesucht

Dr. Peter & Company AG sucht Consultants/Senior Consultants

Fortsetzung von Seite 1

wobei der Exponent  $X$  ein Lévy-Prozess ist und mit  $S(0)$  der Ausgangswert der Aktie bezeichnet wird. Statistische Eigenschaften solcher Modelle, insbesondere die Verteilung der daraus abgeleiteten Renditen und der sogenannten realisierten Varianz, möchten wir mit tatsächlich beobachteten Größen an Aktienmärkten vergleichen. Exemplarisch werden wir uns dabei auf zwei parametrische Familien konzentrieren. Das sind zum einen *generalisierte hyperbolische Verteilungen* (GH) [vgl. Barndorff-Nielsen 1977], und zum anderen *Sprung-Diffusionen* [vgl. Merton 1976 sowie Kou 2002]. Diese Übersicht orientiert sich an vielen Stellen am überaus lesenswerten Artikel [vgl. Cont 2001], welcher eine sehr detaillierte Analyse statistischer Eigenschaften von Aktienmärkten beinhaltet.

### Empirische Eigenschaften von Aktienrenditen

Preise unterschiedlicher Aktien werden nicht notwendigerweise von denselben Nachrichten, Ereignissen oder Informationen beeinflusst. Daher wäre es *a priori* nicht ausgeschlossen, dass unterschiedliche Aktienzeitreihen (oder unterschiedliche Aktienmärkte) auch komplett unterschiedlichen statistischen Gesetzen gehorchen. Aus vielen empirischen Studien über Aktienrenditen hat sich allerdings eine Reihe von Gemeinsamkeiten herauskristallisiert, welche als *stilisierte statistische Eigenschaften* bezeichnet wird. Viele dieser Eigenschaften findet man auch in Zeitreihen ganz anderer Märkte (Rohstoffpreise, Wechselkurse, etc.). Die nun folgende Terminologie orientiert sich an der Einteilung in [vgl. Cont 2001]. Zunächst definieren wir die Zeitreihe der Aktien-Renditen über Perioden der einheitlichen Länge  $\Delta t$ , wobei  $\Delta t$  in unserer Untersuchung als ein Handelstag interpretiert wird, vgl. ► **Gleichung 01**.

► Gleichung 01

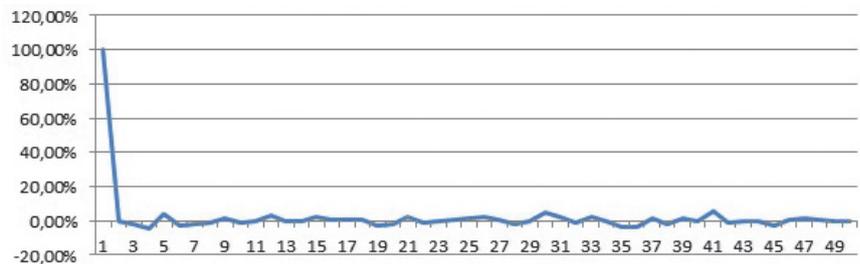
$$r(t, \Delta t) = \log(S(t + \Delta t)/S(t)) = X(t + \Delta t) - X(t).$$

► Gleichung 02

$$C(\tau) = \text{corr}(r(t, \Delta t), r(t + \tau, \Delta t)), \quad \tau \geq 0,$$

### Empirische Autokorrelationsfunktion $C(\tau)$ von täglichen DAX-Renditen

► Abb. 01



**Keine (nennenswerte) Autokorrelation:** Die (empirische) Autokorrelation der Renditen ist definiert gemäß ► **Gleichung 02**, wobei  $\text{corr}(\cdot)$  die (empirische) Korrelation bezeichnet.

Anschaulich wird damit die lineare Abhängigkeit der um  $\tau$  Perioden verschobenen Renditen gemessen. In fast allen liquiden Aktienmärkten kann eine signifikante Autokorrelation nicht nachgewiesen werden. ► **Abb. 01** illustriert dies am Beispiel von täglichen DAX-Renditen. Wir beobachten ein schnelles Streben der Funktion  $C(\tau)$  gegen Null. Heuristisch gesprochen bedeutet dies, dass ein hoher Verlust (bzw. Gewinn) am heutigen Tag nicht mit einem hohen Verlust (bzw. Gewinn) an einem der folgenden Tage in einen linearen Zusammenhang gebracht werden kann. Eine detaillierte Studie zu diesem Phänomen findet der interessierte Leser in [vgl. Fama 1971] und [vgl. Pagan 1996]. Nicht verwechseln sollte man diese Beobachtung aber mit stochastisch unabhängigen Renditen: Eine Korrelation von Null impliziert nämlich nicht Unabhängigkeit, wie wir später am Beispiel der Volatilitätsklumpen sehen werden. In einem exponentiellen Lévy-Modell sind die modellierten Renditen aber sogar stochastisch unabhängig, also insbesondere unkorreliert, was aus den stochastisch unabhängigen Inkrementen des Lévy-Prozesses  $X$  folgt. Daraus wiederum folgt, dass die theoretische Autokorrelationsfunktion ei-

nes exponentiellen Lévy-Modells ab  $\tau \geq 1$  konstant Null ist.

**Schwere Ränder der Renditeverteilung:** Die empirische Verteilung von Aktienrenditen hat für typische Aktien schwere Ränder, das heißt eine Normalverteilungsannahme würde die Wahrscheinlichkeit großer Ausschläge (jedweder Richtung) unterschätzen. Dies wird illustriert in ► **Abb. 04**. Ein geeignetes Lévy-Modell ist dagegen in der Lage, dieser Beobachtung zu genügen. Wir müssen lediglich darauf achten, Sprünge in unserem Lévy-Prozess mit entsprechend schweren Rändern zuzulassen. Vertiefen wir daher die Fragestellung, wie gut spezielle Familien von Lévy-Prozessen in der Lage sind, empirische Renditeverteilungen zu beschreiben. Dazu definieren wir die Verteilungsfunktion der Renditen  $F_{\Delta t}(u) = \mathbb{P}(r(t, \Delta t) \leq u)$  über einen Zeitraum der Länge  $\Delta t$ . Durch Differentiation  $f_{\Delta t} = F'_{\Delta t}$  kann daraus die Dichte bestimmt werden (falls vorhanden). Im Risikomanagement hat die Verteilungsfunktion der Renditen eine fundamentale Bedeutung, da die Quantile der Verlustverteilung einer Aktie gerade die Definition des Value at Risk (VaR) für dieses Wertpapier darstellen, genauer  $\text{VaR}_\alpha(L) = \inf \{l \in \mathbb{R}; \mathbb{P}(L > l) \leq 1 - \alpha\}$ , wobei wir als Verlust z. B. die negative Rendite  $L = -r(t, \Delta t)$  bezeichnen. Alternativ können natürlich auch absolute Verluste der Aktie betrachtet werden, aber auch diese lassen sich leicht auf Renditen zurückführen. Da wir beim VaR typischerweise an den Rändern der Verlustverteilung interessiert sind, soll unser Modell gerade diese Ränder möglichst realistisch beschreiben und ihnen insbesondere genügend Wahrscheinlichkeitsmasse zuordnen. Ist dies nicht gegeben, so besteht die Gefahr, den VaR zu unterschätzen und sich somit in trügerischer Sicherheit zu wiegen. Doch wie kann diese Intuition von „genü-

► Gleichung 03

$$\kappa(\Delta t) = \frac{E[(r(t, \Delta t) - E[r(t, \Delta t)])^4]}{\sigma^4(\Delta t)} - 3,$$

► Gleichung 04

$$\gamma_1(\Delta t) = E\left[\left(\frac{r(t, \Delta t) - E[r(t, \Delta t)]}{\sigma(\Delta t)}\right)^3\right],$$

gend Masse in den Rändern der Verteilung“ präzisiert und quantifiziert werden? Dafür wird gerne die (Exzess-) Kurtosis als Maßzahl angeführt, welche formal definiert ist als ► **Gleichung 03**, wobei  $\sigma^2(\Delta t)$  die Varianz der Renditen bezeichnet.

Erinnern wir uns an dieser Stelle kurz an den ersten Teil dieser Serie zurück, um zu bemerken, dass für Lévy-Prozesse solche Momente mittels der Cumulant-Funktion elegant berechnet werden können. Für die üblichen parametrischen Familien an Lévy-Prozessen ist diese Größe demnach als Funktion der Modellparameter gegeben. Ausgehend von der Normalverteilung, deren Dichte bekanntlich sehr schnell an den Rändern abfällt, genauer gesagt wie die Funktion  $c \cdot \exp(-x^2)$ , und welche unabhängig von den Parametern immer eine (Exzess-)Kurtosis von  $\kappa = 0$  besitzt, können wir nun die empirische Kurtosis anhand beobachteter Renditen bestimmen und mit dem Wert für die Normalverteilung vergleichen. In unserem Beispiel erhalten wir für die DAX-Renditezeitreihe einen Wert von 4,823 – was deutlich über dem Wert der Normalverteilung liegt – und uns Verteilungen mit mehr Wahrscheinlichkeitsmasse in den Rändern nahelegt.

**Asymmetrie von Gewinnen und Verlusten:** Betrachtet man ausschließlich sehr große Veränderungen einer Aktie, so kann beobachtet werden, dass große Verluste häufiger auftreten als große Gewinne; dagegen sind kleine Gewinne häufiger als kleine Verluste. Diese Asymmetrie kann nicht mit symmetrischen Verteilungen (wie der Normalverteilung) beschrieben werden, wohl aber mit verschiedenen Lévy-Prozessen. Die Schiefe einer Verteilung ist formal definiert gemäß ► **Gleichung 04**, wobei  $\sigma(\Delta t)$  die Standardabweichung der Renditen bezeichnet.

Im Falle der Normalverteilung übersetzt sich die Achsensymmetrie zum Mittelwert in eine Schiefe von  $\gamma_1(\Delta t) = 0$ . Auch dies

widerspricht empirisch ermittelten Schiefen für Aktienrenditen. Diese können sowohl negativ als auch positiv sein, in unserem Beispiel ermitteln wir einen Wert von 10.77 %.

Fassen wir noch einmal zusammen: Die Verteilung von Aktienrenditen kann typischerweise beschrieben werden als nicht-normalverteilt, eingipflig (das heißt die Dichte besitzt einen „Buckel“ um das Zentrum der Verteilung, wie in ► **Abb. 04** gut zu erkennen), linksschief und mit einer größeren Kurtosis als die der Normalverteilung. Um diesen Anforderungen gerecht zu werden, ist eine flexible Verteilung gesucht, bei welcher die Parameter idealerweise gut interpretierbare Rollen einnehmen, beispielsweise (a) ein Lageparameter, welcher das Zentrum der Verteilung beschreibt, (b) ein Skalierungsparameter, welcher die Streckung/Stauchung der Verteilung bestimmt, (c) ein Parameter, der das Abklingen der Ränder und damit die Kurtosis beeinflusst sowie (d) ein Parameter, der die Asymmetrie/Schiefe steuert. Die im folgenden Abschnitt beschriebene NIG-Verteilung erfüllt all diese Anforderungen.

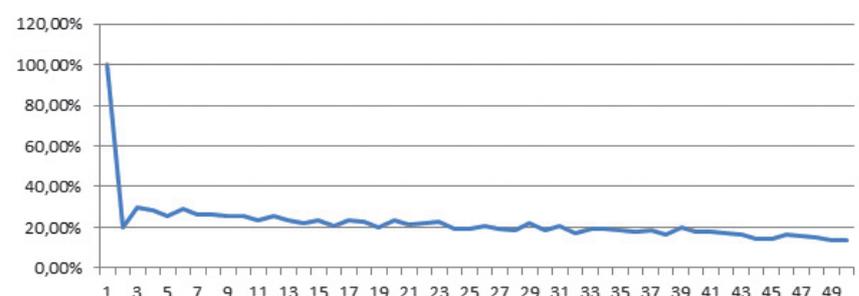
**Leverage-Effekt:** Unter dieser Beobachtung versteht man, dass Perioden mit hohen Schwankungen häufig gerade auch Perioden mit fallenden Aktienkursen dar-

stellen. Ökonomische Erklärungen für diese Beobachtung gibt es einige, nicht zuletzt wird durch Herdenverhalten in Verlustperioden eine Abwärtsspirale in Gang gesetzt. Dies wird beispielsweise durch Panikverkäufe oder gebrochene Limits, die automatisch weitere Verkäufe nach sich ziehen, ausgelöst. Um den Leverage-Effekt zu modellieren, ist aber ein stochastisches Modell für die Volatilität selbst notwendig. Ein einfaches Lévy-Modell ist nicht in der Lage, diesen Effekt nachzubilden. In späteren Kapiteln dieser Serie werden wir daher auch auf Modelle außerhalb der Lévy-Prozessklasse (beispielsweise das Barndorff-Nielsen-Shephard Modell [vgl. Barndorff-Nielsen/Shephard 2001]) stoßen, die in der Lage sind, solch einen Leverage-Effekt zu erklären.

**Volatilitätsklumpen:** Beobachten wir heute eine große Änderung in einer Aktie, so haben wir für morgen eine erhöhte Wahrscheinlichkeit dafür, erneut eine große Veränderung (ungeachtet der Richtung) zu sehen. Dies greift die obige Bemerkung zur *Autokorrelation* auf, da wir zwar unkorrelierte Renditen im Zeitverlauf sehen, diese aber nicht stochastisch unabhängig voneinander sind. So ist beispielsweise die empirische Autokorrelationsfunktion der Absolutbeträge  $|r(t, \Delta t)|$  oder deren Quadrate  $r(t, \Delta t)^2$  signifikant von Null verschieden und strebt nur langsam in  $\tau$  gegen Null, siehe dazu ► **Abb. 02**. Anschaulich bedeutet dies, dass wir mit Perioden hoher und Perioden geringer Volatilität zu rechnen haben, eine Beobachtung, die nicht konform ist mit dem Black-Scholes-Modell und dessen bekanntlich konstanter Volatilität. Ein einfaches exponentielles Lévy-Modell, wie eingangs beschrieben, ist dazu aber auch nicht in der Lage, da die Inkremente des Lévy-Prozesses  $X$  stochastisch unabhängig und stationär sind. Denkbar ist aber eine Erweiterung mit

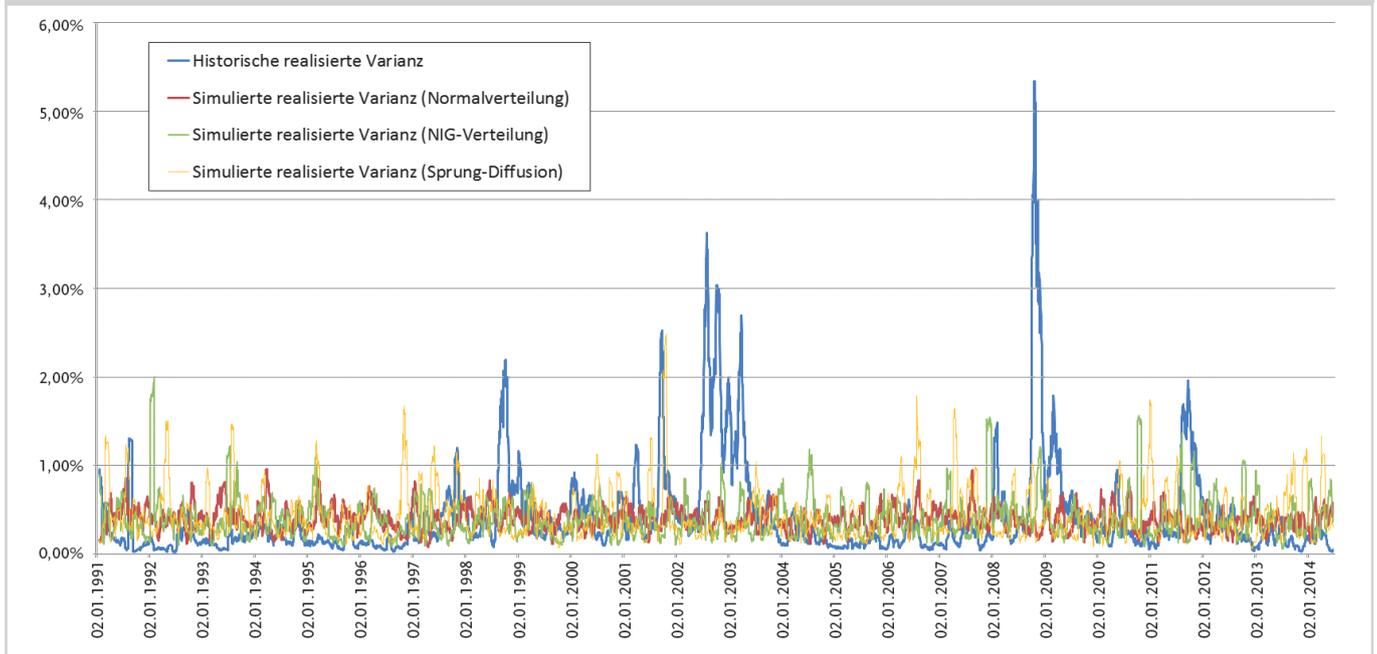
**Empirische Autokorrelationsfunktion C( $\tau$ ) von Beträgen täglicher DAX-Renditen**

► Abb. 02



**Realisierte Varianzen der DAX-Renditen, der geschätzten NIG-Verteilung, des geschätzten Sprung-Diffusionsmodells und der geschätzten Normalverteilung**

▶ Abb. 03



einem stochastischen Vorfaktor  $\sigma$ , vor der Brown'schen Bewegung einer Sprung-Diffusion.

**Langsames Abklingen der empirischen Autokorrelation absoluter Veränderungen:** Obige Beobachtung zu Volatilitätsklumpen wird häufig noch etwas präzisiert. Betrachtet man die empirische Autokorrelationsfunktion der Absolutbeträge (oder der Quadrate) der Aktienrenditen genauer, so fällt diese in etwa wie  $C(\tau) \sim A/\tau^\beta$  gegen Null ab, wobei  $\beta \in [0.2, 0.4]$ . Dies wird in [Muzy et al. (2000)] untersucht und in ▶ **Abb. 02** für den DAX illustriert.

**Realisierte Varianz:** Aus beobachteten Renditen lassen sich diverse Kennzahlen für die Marktfluktuation ableiten. Eine sehr interessante Größe, sowohl aus ökonomischer als auch aus mathematischer Sicht, ist die realisierte Varianz, die auch als Basis zur Berechnung von Volatilitätsindizes und Vola-Swaps benötigt wird. Hat man Renditen  $\{r(t, \Delta t), t = 0, \Delta t, \dots, N\Delta t\}$  für  $N$  aufeinanderfolgende Zeitabschnitte der Länge  $\Delta t$  (meist Tage) gegeben, so ist die realisierte Varianz bezüglich der Zeitpunkte  $(0, \dots, T = N\Delta t)$  definiert durch

**▶ Gleichung 05.**

Diese Kenngröße misst also die kumulierte Fluktuation über einen vorgegebenen Zeitraum und spiegelt damit wider, wie unruhig sich der Markt innerhalb dieser Zeit verhalten hat. In ▶ **Abb. 03** ist die realisierte Varianz der DAX-Ren-

**▶ Gleichung 05**

$$v(T, \Delta t) = \sum_{t=0}^{N-1} r(t, \Delta t)^2.$$

diten für ein rollierendes Zeitfenster von 20 Tagen abgetragen. Im Vergleich dazu sind die realisierten Varianzen von typischen Pfaden von drei beispielhaften Lévy-Modellen angegeben, welche in den nächsten Abschnitten genauer betrachtet werden. Man kann leicht erkennen, dass die NIG-Verteilung und das Sprung-Diffusionsmodell zwar die starken Ausreißer besser modellieren können. Allerdings ist keines der betrachteten Modelle in der Lage, die Volatilitätsklumpen zu erklären. Dies hängt mit der Tatsache zusammen, dass wir uns hier nur zeithomogene Lévy-Prozesse angeschaut haben. In einem späteren Artikel werden wir jedoch auf zeitinhomogene Modelle stoßen, die solche Volatilitätsklumpen beschreiben können.

**Die generalisierte hyperbolische Verteilung**

Eine sehr flexible parametrische Familie, welche gut an empirische Renditen anpassbar ist, ist die *generalisierte hyperbolische*

(GH) Verteilung. Historisch ist zu dieser Familie anzumerken, dass sie schon 1977 in Barndorff-Nielsen [vgl. Barndorff-Nielsen 1977] verwendet wurde, wenn auch in einem komplett anderen Kontext, nämlich dem Modellieren der Größe von Sandkörnern. Aus mathematischer Sicht ist diese Familie überaus reichhaltig, sie enthält etwa als Spezialfall (beziehungsweise Grenzfall) die *hyperbolische Verteilung* [vgl. Eberlein et al. 1998], die *normal-inverse Gauß'sche Verteilung* (NIG), die *Student-t-Verteilung* [vgl. Kon 1984], die *Variance-Gamma-Verteilung* und die *Normalverteilung*. Auch sind die mathematischen Eigenschaften der GH-Verteilung sehr gut untersucht, der interessierte Leser sei diesbezüglich auf Barndorff/Blæsild [vgl. Barndorff/Blæsild 1981] verwiesen. Im finanzmathematischen Kontext wurde diese Verteilungsklasse in Eberlein/Keller [vgl. Eberlein/Keller 1995] und Eberlein et al. [vgl. Eberlein et al. 1998] als Modell für Inkremente von Aktienzeitreihen vorgeschlagen. Wir starten daher als Vorbereitung für die kommenden Abschnitte mit einem kurzen Exkurs zur GH-Verteilung und deren für Finanzanwendungen relevante Unterklassen.

**Die generalisierte hyperbolische Verteilung:** Die GH-Verteilung kann mittels ihrer Dichte eingeführt werden, welche gegeben ist durch die funktionale Form in ▶ **Gleichung 06.**

► Gleichung o6

$$f_{GH}(x) = a(\lambda, \alpha, \beta, \delta)(\delta^2 + (x - \mu)^2)^{(\lambda - \frac{1}{2})/2} K_{\lambda - \frac{1}{2}} \left\{ \alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} \right\} \exp\{\beta(x - \mu)\},$$

wobei  $K_\lambda(\cdot)$  die modifizierte Bessel Funktion ist und wir als Abkürzung nutzen:

$$a(\lambda, \alpha, \beta, \delta) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\lambda/2}}{\sqrt{2\pi} \alpha^{\lambda - 1/2} \delta^\lambda K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}.$$

Die Parameter der GH-Verteilung unterliegen dabei gewissen Beschränkungen, die wir später in der Parameterschätzung als Nebenbedingung formulieren und somit berücksichtigen müssen. Es ist zu beachten, dass die folgenden Bedingungen für  $\mu \in \mathbb{R}$  erfüllt sind:

- (i)  $\delta \geq 0, |\beta| < \alpha$  wenn  $\lambda > 0$ ,
- (ii)  $\delta > 0, |\beta| < \alpha$  wenn  $\lambda = 0$ ,
- (iii)  $\delta > 0, |\beta| \leq \alpha$  wenn  $\lambda < 0$ .

Die Parameter  $\mu$  und  $\delta$  beschreiben die Lage und Skalierung der GH-Verteilung, wohingegen  $\beta$  die Schiefe steuert. Mit den Abkürzungen

$\zeta = \delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ ,  $\xi = (1 + \zeta)^{-1/2}$ ,  $\bar{\alpha} = \alpha \delta$  lässt sich zeigen, dass mit steigendem  $\xi$  und fallendem  $\zeta$  oder  $\bar{\alpha}$  die Kurtosis der Verteilung ansteigt, was die Parameter etwas leichter zu interpretieren macht.

Wie eingangs erwähnt, sind verschiedene bekannte Verteilungen als Spezialfall in der GH-Familie enthalten. Für  $\lambda=1$  erhalten wir beispielsweise die hyperbolische Verteilung und für  $\lambda=-1/2$  die NIG-Verteilung (mehr dazu in Teil 1 unserer Reihe). Die Student-t Verteilung lässt sich als Spezialfall für  $\lambda < 0$  und  $\alpha = \beta = \mu = 0$  interpretieren. Ebenso lässt sich die Normalverteilung als Grenzwert gewinnen, hierzu müssen  $\delta \rightarrow \infty$  und  $\delta/\alpha \rightarrow \sigma^2$  streben.

## Statistische Schätzmethoden

**Maximum-Likelihood-Methode:** Nun wenden wir uns statistischen Schätzmethoden für die Parameter eines Lévy-Modells zu. Als empirischer Datensatz liegt uns die Kursentwicklung einer Aktie oder eines Aktienindex vor, beobachtet beispielsweise auf täglicher Basis. Mit diesem Datensatz als Input wollen wir nun die Parameterschätzung beginnen. Im Lévy-Kontext ist insbesondere die sogenannte *Maximum-Likelihood-Methode* angenehm, da die stochastisch unabhängigen und stationären Inkremente eines Lévy-Prozesses gut zu den Annahmen hinter dieser Methode

passen. Eine gute Übersicht zu dieser (und anderer) Schätzmethode(n) findet der Leser in Cont/Tankov [vgl. Cont, Tankov 2003].

Wir nehmen an, dass der Aktienkurs – und damit auch dessen Exponent  $X$  – in gleichmäßigen Perioden beobachtet wird, und definieren die Inkremente des Exponenten als Beobachtungen  $x(i) = X(i) - X(i-1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Wenn  $X$  ein Lévy-Prozess ist, so sind die Beobachtungen  $x(i)$  stochastisch unabhängig, was gleichzeitig auch eine zentrale Voraussetzung für die Maximum-Likelihood-Methode ist. Nun nehmen wir weiter an, dass die Verteilung dieser Inkremente eine Dichte  $f(x, \theta)$  besitzt, in deren Notation  $\theta$  den Parameter(vektor) der Verteilung beschreibt. Die Philosophie hinter der Maximum-Likelihood-Methode ist, basierend auf den gegebenen Beobachtungen die Parameter  $\theta$  der Verteilung „bestmöglich“ zu wählen. Wir setzen also die beobachteten Werte in die Dichtefunktion ein und betrachten die sogenannte *Log-Likelihood-Funktion* gemäß ► Gleichung o7 in Funktion in  $\theta$ .

Diese Funktion wird nun über dem erlaubten Parameterraum maximiert und die maximierende Stelle  $\hat{\theta}$  wird als *Maximum-Likelihood-Schätzer* bezeichnet.

**Maximum-Likelihood Schätzung für die NIG-Verteilung:** Wir nehmen nun also an, die beobachteten täglichen DAX-Renditen

$x(i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , seien unabhängig und NIG-verteilt. Diese Beobachtungen setzen wir zunächst in die Log-Likelihood-Funktion der allgemeineren GH-Verteilung ein (vgl.

► Gleichung o8) und fixieren dann  $\lambda = -1/2$ , um von der GH-Verteilung in die NIG-Unterklasse zu gelangen.

Nun optimieren wir diese Funktion über dem erlaubten Parameterraum. Numerisch ist die Maximum-Likelihood-Optimierung nicht trivial, da wir es bei komplexeren Lévy-Modellen mit einem mehrdimensionalen Parameterraum zu tun haben. In solch einem Fall ist ein globales Optimum nicht immer leicht zu identifizieren. Es besteht die Gefahr, dass der Optimierer in einem lokalen Maximum hängen bleibt. Mit den durch die Likelihood-Maximierung gewonnenen Parametern können wir die geschätzte Dichte für tägliche DAX-Renditen visualisieren, das Ergebnis ist in ► Abb. o4 zu sehen. Zum Vergleich enthalten sind in dieser Abbildung auch das empirische Histogramm der realisierten DAX-Renditen sowie die geschätzte Normalverteilung. Der Vollstän-

► Gleichung o7

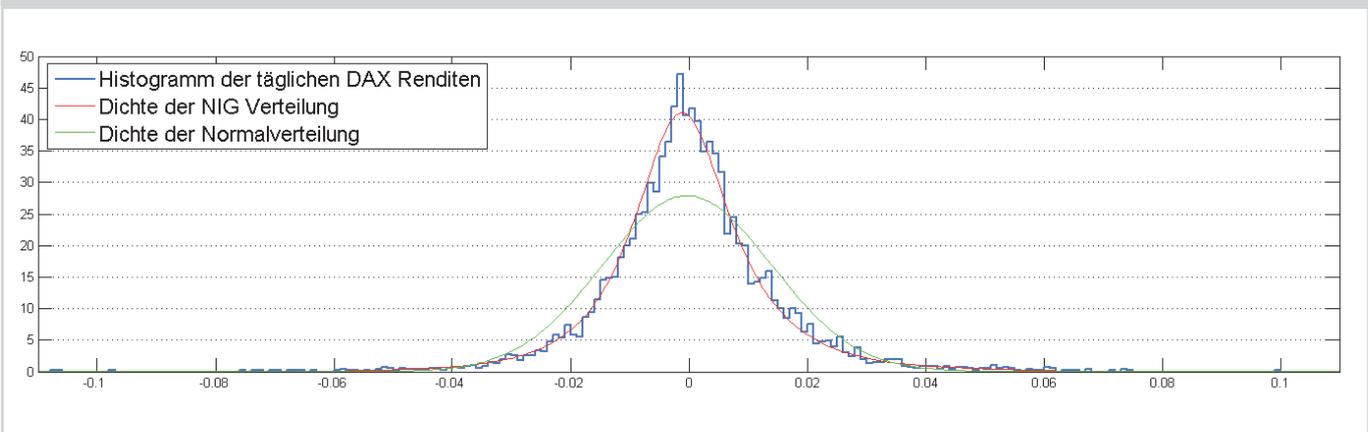
$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \log f(x(i), \theta)$$

► Gleichung o8

$$l = n \log a(\lambda, \alpha, \beta, \delta) + \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{4}\right) \sum_{i=1}^n \log(\delta^2 + (x(i) - \mu)^2) + \sum_{i=1}^n \left[ \log K_{\lambda - \frac{1}{2}} \left( \alpha \sqrt{\delta^2 + (x(i) - \mu)^2} \right) + \beta(x(i) - \mu) \right],$$

### Geschätzte NIG-Verteilung und Normalverteilung – verglichen mit empirischen DAX-Renditen. Die Schätzung erfolgte mittels Maximum-Likelihood.

▶ Abb. 04



digkeit halber geben wir noch die Maximum-Likelihood-Parameter an, diese sind für die NIG-Verteilung  $\alpha=54,179$ ,  $\beta=5$ ,  $\mu=0,0014$ ,  $\delta=0,0143$  und für die Normalverteilung (in der üblichen Parametrisierung)  $\mu=0,0003$ ,  $\sigma=0,0143$ .

▶ **Abb. 04** lässt erkennen, wie gut die NIG-Verteilung sich an empirische DAX-Renditen anpassen lässt. Es steht außer Frage, dass sowohl das Zentrum der Verteilung als auch die Ränder besser getroffen werden als von einer Normalverteilung. Die Annahme, dass die beobachteten Renditen tatsächlich unabhängig und identisch verteilt sind, trifft zwar in der Lévy-Prozesswelt zu. In der Realität dagegen beobachten wir (wie schon eingangs bemerkt) durchaus Phasen unterschiedlicher Marktaktivität (was „identisch verteilt“ relativiert) und Abhängigkeiten im Zeitverlauf (was „unabhängig“ in Frage stellt). Diese leichte Verletzung der Annahmen in der Maximum-Likelihood-Theorie wird in der Regel aber akzeptiert.

**Schätzen von Sprung-Diffusionen:** Im Vergleich zur Maximum-Likelihood-Methode diskutiert [vgl. Ait-Sahalia 2004] einen pragmatischen Ansatz zur Parameterschätzung von Sprung-Diffusionen. Wie im vorangegangenen Beitrag dieser Artikelserie beschrieben (vgl. RISIKO MANAGER 15/2014), werden Sprung-Diffusionen mit zeithomogenen Parametern von einer Brown'schen Bewegung und einem Compound-Poisson-Prozess getrieben und bilden eine sehr beliebte Unterklasse der Lévy-Prozesse, wenn es darum geht, Aktienkurse zu modellieren. Wenn wir nun realisierte Renditen beobachten, so können diese durch die Brown'sche Bewegung, aber auch durch einen Sprung er-

zeugt worden sein. Die Idee des folgenden Algorithmus basiert auf einer Trennung von Diffusion und Sprüngen. Hierbei werden die Renditen nach einer einfachen Regel entweder der Brown'schen Bewegung oder dem Sprungprozess zugeordnet.

#### Algorithmus: Schätzen von Sprung-Diffusionen mittels Renditenzerlegung

- 1) Berechne die empirische Standardabweichung und das empirische Mittel der Renditen aus der gegebenen Renditezeitreihe.
- 2) Interpretiere alle Renditen, die vom empirischen Mittel mehr als drei Standardabweichungen entfernt sind, als Sprung und fahre mit allen übrigen Renditen fort.
- 3) Wiederhole Schritt 1) und 2) mit den gefilterten Renditen bis in Schritt 2) keine neuen Sprünge mehr identifiziert werden.
- 4) Schätze nun die Parameter des Sprung-Diffusionsmodell folgendermaßen:
  - a) *Sprungintensität:* Teile die Anzahl der identifizierten Sprünge durch die Anzahl der Renditen.
  - b) *Sprunghöhenverteilung:* Nimm eine einfache parametrische Verteilung an und schätze anhand der empirischen Sprunghöhenverteilung die Verteilungsparameter.
  - c) *Volatilität und Drift der Diffusion:* Berechne aus den gefilterten Renditen, nach Schritt 3), das empirische Mittel und die empirische Standardabweichung.

Die Regel zur Identifizierung der Sprünge ist gewissermaßen beliebig und kann natürlich variiert werden. Drei Standardabweichungen, wie bei uns gewählt, ist aller-

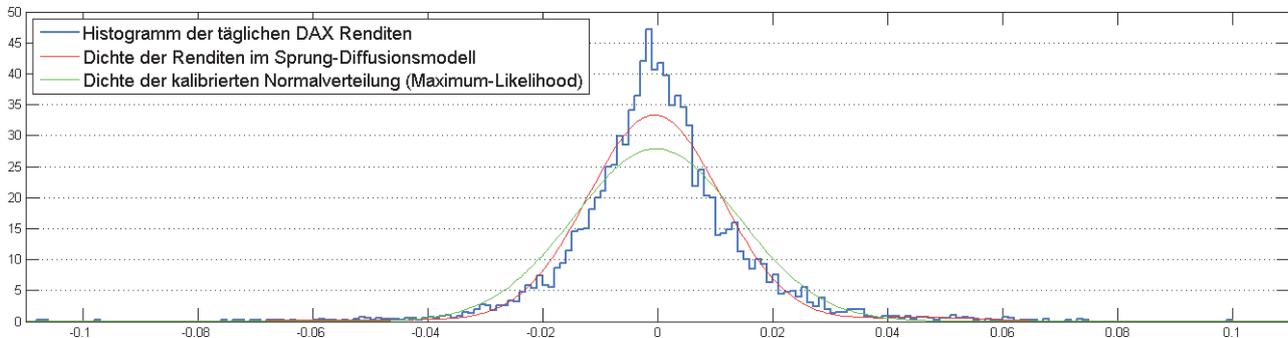
dings ein Wert, mit dem gute praktische Erfahrungen gemacht wurden, siehe dazu auch die Arbeit von Ait-Sahalia [vgl. Ait-Sahalia 2004]. Mit einer Änderung dieser Regel beeinflusst man die durchschnittliche Anzahl der Sprünge, und somit sollte dies je nach Anwendung überlegt gewählt werden. Die Tatsache, dass wir die als Aktienkurs angenommene Sprung-Diffusion nicht in stetiger Zeit beobachten, führt bei diesem Verfahren zu den folgenden Fehlerquellen: Ein sehr kleiner Sprung wird nicht als solcher identifiziert, wir unterschätzen demnach die Sprungintensität. Dagegen kann eine unüblich große Bewegung der Brown'schen Bewegung fälschlicherweise als Sprung markiert werden, mit dem umgekehrten Effekt auf die geschätzte Sprungintensität. Nun schauen wir uns die Methode anhand eines Beispiels an.

#### Beispiel: Schätzen von Sprung-Diffusionen mittels Renditenzerlegung

Gegeben ist die gleiche Zeitreihe von täglichen DAX-Renditen wie im obigen Beispiel. Im ersten Durchlauf von Schritt 1) und 2) werden 102 Sprünge erkannt, in den nächsten sieben Durchläufen noch weitere 79 Sprünge. Erneute Wiederholungen liefern keine neuen Sprünge, sodass nach acht Durchläufen insgesamt 181 Sprünge identifiziert werden. Als Sprunghöhenverteilung nehmen wir jeweils für positive und negative Sprünge eine eigene Normalverteilung an. Diese besitzen unterschiedliche Parameter. Die Ergebnisse aus Schritt 4) sehen dann wie folgt aus:

- a) *Sprungintensität:* Bei insgesamt 5955 Tagesrenditen und etwa 253 Handelstagen pro Jahr, 111 positiven Sprüngen und 70 negativen Sprüngen erhalten wir eine auf Jahressicht nor-

### Geschätzte Verteilung der Renditen im Sprung-Diffusionsmodell – verglichen mit empirischen DAX-Renditen und der geschätzten Normalverteilung mittels Maximum-Likelihood.



mierte Sprungintensität von 4,72 für die positiven Sprünge und 2,98 für die negativen Sprünge. Das bedeutet anschaulich, dass wir in einem Jahr etwa fünf positive und drei negative Sprünge erwarten.

**Sprunghöhenverteilung:** Die positiven Sprünge sind im Mittel 4,7 Prozent groß und haben eine Standardabweichung von 1,1 Prozent; die negativen Sprünge sind im Mittel –5,1 Prozent groß und haben eine Standardabweichung von 1,6 Prozent.

**Volatilität und Drift der Diffusion:** Die Volatilität der gefilterten Renditen beläuft sich auf 1,2 Prozent bei einem Mittelwert von –0,06.

► **Abb. 05** zeigt die Verteilung der täglichen Renditen des Sprung-Diffusionsmodells mit den geschätzten Parametern aus dem obigen Beispiel. Man kann gut erkennen, dass die tatsächliche Verteilung der DAX-Renditen deutlich besser approximiert werden kann als in einem klassischen Black-Scholes-Modell. □

### Fazit und Ausblick

Der Exkurs brachte uns verschiedene statistische Eigenschaften von Aktienrenditen näher. Wir sahen, wie flexibel geeignete Klassen von Lévy-Prozessen sind, wenn es darum geht, Aktienrenditen über eine gegebene Zeitperiode zu modellieren. Wir bemerkten aber auch, dass die stochastisch unabhängigen Inkremente eines Lévy-Prozesses nicht zur empirischen Beobachtung von Volatilitätsklumpen passen. Allgemeiner gesprochen, Abhängigkeiten im Zeitverlauf können durch Lévy-Prozesse nicht direkt modelliert werden. Neben diesen sta-

tistischen Betrachtungen widmeten wir uns auch der Frage, wie aus gegebenen (diskretisierten) Zeitreihen die Parameter eines Lévy-Modells geschätzt werden können. Dafür betrachteten wir die Maximum-Likelihood-Methode sowie eine Methode für Sprung-Diffusionen, bei welcher „Sprünge“ von „Volatilität“ durch ein heuristisches Verfahren getrennt werden. In den kommenden Kapiteln werden wir, neben etwas Theorie zum Lévy-Maß, vor allem praktische Fragestellungen wie das numerische Bewerten von Aktienoptionen in exponentiellen Lévy-Märkten sowie effiziente Simulationsalgorithmen für Lévy-Prozesse erörtern.

### Quellenverzeichnis sowie weiterführende Literaturhinweise:

- Aït-Sahalia, Y. (2004):** *Disentangling diffusion from jumps*, *Journal of Financial Economics*, Volume 74, pp. 487-528.
- Barndorff-Nielsen, O. E. (1977):** *Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size*. *Proceedings of the Royal Society London A*, 353, pp. 401-419.
- Barndorff-Nielsen, O. E./Blæsild, P. (1981):** *Hyperbolic distributions and ramifications: Contributions to theory and application*. In C. Taillie, G. Patil, and B. Baldessari (Eds.) *Statistical Distributions in Scientific Work*, Volume 4, pp. 19-44. Dordrecht: Reidel.
- Barndorff-Nielsen, O. E./Shephard, N. (2001):** *Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics*. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 63:167–241.
- Cont, R. (2001):** *Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues*, *Quantitative Finance*, 1(2), pp. 223-236.
- Cont, R./Tankov, P. (2003):** *Financial Modelling with Jump Processes*. Chapman and Hall/CRC Press.
- Eberlein, E./Keller, U. (1995):** *Hyperbolic distributions in finance*. *Bernoulli* 1, pp. 281-299.

**Eberlein, E./Prause, K. (1998):** *The generalized hyperbolic model: financial derivatives and risk measures*. FDM Preprint 56, University of Freiburg.

**Eberlein, E./Keller, U./Prause, K. (1998):** *New insights into smile, mispricing and value at risk: the hyperbolic model*. *Journal of Business*, 71, pp 371-405.

**Fama, E. F. (1971):** *Efficient capital markets: a review of theory and empirical work*. *Journal of Finance*, 25, pp. 383-417.

**Kon, S. (1984):** *Models of stock returns: a comparison*. *Journal of Finance*, 39(1), pp. 147-165.

**Kou, S.G. (2002):** *A jump-diffusion model for option pricing*. *Management Science* 48, pp. 1086-1101.

**Merton, R. (1976):** *Option pricing when underlying stock returns are discontinuous*, *J. Financial Economics*, 3, pp. 125-144.

**Muzy, J. F./Delour, J./Bacry, E. (2000):** *Modelling fluctuations of financial time series: from cascade process to stochastic volatility model*. *European Physical Journal B at press*, 17(3), pp. 537-548.

**Pagan A. (1996):** *The econometrics of financial markets*. *Journal of Empirical Finance*, 3, pp 15-102.

### Die Autoren:

**Dr. Asma Khedher, Prof. Dr. Matthias Scherer** und **Thorsten Schulz** sind Wissenschaftler am Lehrstuhl für Finanzmathematik der Technischen Universität München. Sie sind Autoren zahlreicher Fachpublikationen in den Gebieten Finanz- und Versicherungsmathematik, Risikomanagement und Stochastik. Im Rahmen des KPMG Center of Excellence in Risk Management widmen sie sich aktuellen Fragestellungen des modernen Risikomanagements.

**Wir bedanken uns herzlich bei der KPMG AG für das Sponsoring des KPMG Center of Excellence in Risk Management an der Technischen Universität München, über welches die Stellen von Asma Khedher und Thorsten Schulz teilfinanziert werden.**