Die Planimeter,

deren

Theorie, Praxis und Geschichte

für

Geometer, Forstleute, Geographen, Ingenieure, Mechaniker,
polytechnische und Real-Schulen und alle Behörden und Beamten,
welche mit der Technik und Doctrin der Planimetrie
zu thun haben

von

Christoph Trunk,
Ingenieur zu Eisenach.

Mit 15 Tafeln in Querfolio.

Halle,
Druck und Verlag von H. W. Schmidt.
1865.

Vorrede als Einleitung.

Wenn man sich sagt, dass ein beschäftigter Geometer jährlich die Grössen vieler Tausende von Berechnungsfiguren zu berechnen hat, dass diese Tausende einzelner Multiplicationen und Divisionen ein monotones, geistloses, einschläferndes und zeitraubendes Geschäft sind, dass aber dennoch der Geometer dabei stets aufmerksam sein und bleiben muss, weil, wenn auch die Karten das Maassgebende sind, dennoch die Thätigkeit des Geometers im Rechnen den Inhalt der Karten, die Ackergrössen, erst in Zahlen übersetzt, diese Zahlen aber den Anhaltspunkt für Veräusserung, Verpfändung, Besteuerung u. s. w. abgeben, also auf's Genaueste mit den Karten übereinstimmen sollen, so ist es erklärlich, dass schon viele Versuche gemacht wurden, das Geschäft der Flächenberechnung abzukürzen und vor Fehlern zu sichern. Die beste Erfindung zur Lösung dieser Frage hat der Ingenieur Johannes Oppikofer aus dem Thurgau in der Schweiz im Jahre 1826 gemacht.

Anmerkung. Baurath und Professor Dr. Bauernfeind in München hat nachgewiesen, dass schon im Jahre 1814 der königlich baierische Trigonometer Joh. Martin Hermann einen, dem Oppikoferschen ähnlichen Planimeter erfand. S. §. 63.

Es sind aber mehr als 30 Jahre verflossen, seitdem Oppikofer seinen Planimeter, eine Zierde der Erfindungen des 19ten Jahrhunderts, erfunden und es dadurch möglich gemacht hat, Flächen, welche eben sind, im Uebrigen aber von geraden oder regelmässig- oder unregelmässig-krummen Linien begrenzt sein können, lediglich dadurch scharf zu berechnen, dass man ihre Umfangs-

linien mit der Spitze eines an den Planimeter befestigten Stiftes überfährt, und dass der Geometer dadurch, ohne die Karten in Berechnungsfiguren zerlegen zu müssen und ohne Gefahr sich zu verrechnen, in wenigen Minuten die Grösse von eben so viel Flächen zu bestimmen vermag, als man mittels gewöhnlicher Flächenberechnung, bei Gefahr sich verrechnen zu können, in einer Stunde berechnen und die gewonnene Zeit anderen Berufsarbeiten, insonders der Controle der Arbeiten und dem Zeichnen der Kartendoubletten zuwenden kann. Gleichwohl ist das Instrument nur sehr wenig zur Anwendung gebracht worden.

Erst dann kann man sagen, der Planimeter ist im Gebrauch, wenn die Regierungen ihren Geometern dessen Gebrauch amtlich gestattet oder geboten haben und diese vom Instrumente Gebrauch machen. Der Gebrauch ist aber bedingt dadurch, dass

a) das Instrument nicht allein Zeitersparniss bei der Flächenberechnung, sondern durch seine Einrichtung auch mehr Schärfe und Sicherheit gegen unrichtige Flächenangaben gewährt, als man beim gewöhnlichen Flächenberechnen hat, dass

b) das Instrument von denen, welche es gebrauchen, auf Grund wissenschaftlicher Sätze vollständig erkannt und verstanden ist, damit sie mathematische Gewissheit über die Richtigkeit der Functionen des Instrumentes und hinsichtlich der Natur des Gangs und der Art des Gebrauchs des Instrumentes volle Klarheit erlangen, dass

c) das Instrument auch eingetrocknete oder ausgegangene Flächen misst und so berechnet, dass es volles Maass angiebt und dadurch die Procentmaassstäbe beseitigt, überhaupt aber die Flächen netto angiebt und dadurch alles Rechnen in Wegfall bringt, sofern nicht letzteres zu absolut richtigen Flächenangaben corrigirend angewendet wird.

Die Ursachen der bisherigen Vernachlässigung der Oppikofer'schen Erfindung sind

1) der Mangel vollständiger Kenntniss des Instrumentes und seines Gebrauchs und das daraus entstehende Misstrauen gegen das Instrument, sowie die dadurch veranlasste Unbeholfenheit im Gebrauche desselben. Die Ursache dieser, der Anwendung und Verbreitung des Instrumentes nachtheiligen, Umstände ist der Mangel einer elementaren Erklärung des Instrumentes.

Denn Viele, die das Instrument gebrauchen können, verstehen den höhern Calcül nicht, welcher, obwohl er die Richtigkeit der Functionen des Instrumentes nachweist, dennoch diese Functionen nicht anschaulich macht, während anschauliches Verständniss des Gangs des Planimeters beim Gebrauch desselben unerlässliche Bedingung der Führung ist. Sodann sind der allgemeineren Anwendung des Oppikofer'schen Planimeters hinderlich gewesen

2) Mängel in der bisherigen Einrichtung des Instrumentes, welche ungeachtet nachträglicher Correctionsberechnungen dennoch unrichtige Resultate veranlassten.

3) Endlich war Vielen die Anschaffung des Planimeters wegen zu hohen Ankaufspreises nicht möglich.

Diese Umstände und der Wunsch, die äusserst nützliche und für scharfe Flächenberechnung unentbehrliche Erfindung zur amtlichen Einführung ihres Gebrauchs zu befördern und dadurch die Staaten und ihre Beamten zum Genuss der aus dem Gebrauche des Instrumentes entspringenden Vortheile zu bringen, haben mich veranlasst,

zu 1) das Instrument und die Richtigkeit seiner Functionen elementargeometrisch zu erklären und zu beweisen, auch darzulegen, wie man, ohne Hülfe des höheren Calcüls, lediglich mit den Mitteln der niederen Analysis die Richtigkeit der Functionen des Planimeters im Messen und Berechnen aller ebenen Flächen, so vielgestaltig diese auch sein mögen, rechnerisch prüfen kann. Die Erklärung und den Beweis geben ganz einfach und auf Grund allbekannter geometrischer und trigonometrischer Lehrsätze wenige Paragraphen, die übrige Darlegung basirt auf dem Inhalte dieser Paragraphen und ist durch eine Anzahl Flächenberechnungen belegt, welche mit Zahlen den Gang des Planimeters in anschaulicher Weise verfolgen und für jede Figur dieselbe Flächengrösse geben, welche man als Product aus Grundlinie und Höhe erhält. Hierbei wird darauf aufmerksam gemacht, dass dieselbe Theorie, worauf der Faden- oder Haarplanimeter gestützt ist, in vollendeterer Weise beim Oppikofer'schen Planimeter zur Anwendung gebracht worden ist. Wir werden bald kennen lernen, wie der Planimeter die Feldmesskunst, nach dem schon vor mehr als 60 Jahren gemachten Vorschlag von Gauss,

aus der Niederung der Euklidischen Geometrie in die Sphäre der Cartesius'schen höheren Geometrie und aus der Ebene der gemeinen Arithmetik in die Regionen des Leipnitzischen und Newton'schen höhern Calcüls erhebt, wie der Planimeter die engherzige Flächenberechnung aus Dreiecken verlässt und die Flächengrössen in stetem Laufe mit Hülfe von Abscissen durch unendlich viele Ordinaten zusammenlegt. Hat hierbei der Geometer Kenntniss in der höheren Geometrie und im höheren Calcül, so ist seine Situation um so angenehmer, der Sache schadet es aber nichts, wenn er ohne diese Kenntniss ist; denn das Instrument vollführt die Rechnung und wird ohne diese Kenntniss verstanden.

Nur aus Mangel an anschaulicher Erkenntniss des Wesens des Instrumentes hat man den Glauben erweckt, als sei nicht allein das Verständniss, sondern auch die Erfindung und Berechnung des Planimeters lediglich auf Resultate der Differenzial- und Integral-Rechnung gestützt, man wird sich aber durch das Kennenlernen der elementaren Theorie überzeugen, dass die Mittel der Elementargeometrie, der ebenen Trigonometrie und der niederen Analytik ein durchsichtigeres Verständniss des Instrumentes geben, als der höhere Calcül, dass ferner die Erfindung des Planimeters nicht lediglich auf Oppikofer's Integralformel basirt ist und dass der höhere Calcül zur prüfenden Nachrechnung der (zur Bestimmung der Grösse ebener Flächen, welche durch gerade Linien begrenzt sind, erforderlichen) Bewegungsgrössen des Instrumentes nicht nöthig ist und zur prüfenden Nachrechnung dieser Bewegungsgrössen bei Ebenen, die von unregelmässigen, d. h. nicht dem Gesetze der Stetigkeit gehorchenden, Curven begrenzt sind, keine bessere Anwendung erlaubt, als die niedere Analytik. Es ist daher der höhere Calcül nur noch erforderlich zu den Nachrechnungen derjenigen Bewegungsgrössen, welche zur Bestimmung von Flächen dienen, die stetig-krumme Linien zur Umgrenzung haben. Man bedarf aber dieser Nachrechnung nicht, weil man die Richtigkeit des Princips, worauf das Instrument basirt, schon an denjenigen Flächen erkennt, welche von geraden Linien begrenzt sind, und nachgewiesen wird, dass das, was bei geraden Linien wahr ist, auch für krumme Linien Gültigkeit hat. Die genaue Kenntniss der

das Instrument beherrschenden Gesetze haben mich dahin geführt,

2) das Instrument wesentlich zu verändern, dadurch seine Mängel zu beseitigen und es mit einem Regulirapparate zu versehen, ohne welchen keiner der bekannten Planimeter richtige Flächenangaben macht, mit welchem es aber auch möglich ist, durch das Instrument diejenigen Flächen richtig zu bestimmen, welche auf solches Papier gezeichnet sind, das nach der Aufnahme eingetrocknet ist oder sich ausgedehnt hat, so dass das Instrument durch diese Eigenschaft einen, mittels gewöhnlicher Flächenberechnung gar nicht zu erreichenden sehr wesentlichen Nutzen gewährt und ohne alle Procent- oder Corrections-Berechnungen seine Flächenangaben correct und netto macht. Die grossen Vortheile, welche das von mir construirte Instrument gewährt, bestimmten mich,

3) die Errichtung einer Planimeter-Fabrik zu veranlassen, welche unter meiner Oberleitung genau arbeitende Instrumente für möglichst billige Preise durch geschickte Mechaniker anfertigen lässt.

Man hat bisher Planimeter auf Grund des rein mathematischen Theorems gebaut, man hat aber nicht untersucht, ob die Mittel, welche die Physik der Mechanik darreicht, die Möglichkeit gewähren, das Theorem praktisch zur Ausführung zu bringen. Solche Untersuchungen habe ich angestellt und mit den Resultaten derselben Experimente verbunden. Die Ergebnisse daraus haben die von mir ausgeführte Construction des Planimeters dictirt und haben dem Instrumente eine Präcision gegeben, welche man fast absolut nennen kann. Es ist gar nicht schwer einen Planimeter zu bauen, der nicht besser arbeitet, als die bisher von Anderen ausgeführten, aber es ist sehr schwer ein präcises Instrument zu construiren und auszuführen. Man wird davon vollständig überzeugt werden, wenn man die Gesetze der Physik und Mechanik und die daraus abgeleiteten Instructionen kennen gelernt hat, welche bei der Prüfung des Baues und bei der Behandlung und Führung des Instrumentes beachtet werden müssen, die man aber bisher vernachlässigt hat. Derjenige, welcher das Instrument gebrauchen will, muss über dessen Zuverlässigkeit Gewissheit haben, muss es justiren und führen können.

Deshalb war es nöthig, die mathematischen, physikalischen und mechanischen Lehrsätze mitzutheilen, woraus die Prüfung des Baues und Ganges des Instrumentes hervorging. Ausser diesen Gesetzen der Physik und Mechanik, welche diejenigen, die das Instrument gebrauchen, und die aufsehenden Beamten bei Prüfung des Instrumentes leiten, giebt es noch andere, welche aber blos die technische Ausführung des Baues betreffen und deshalb bloss der Planimeter-Fabrik mitgetheilt worden sind. Wenn aber künftig die Fabrik keinen ausschliesslichen Gebrauch mehr von diesen Regeln macht, so werden auch diese bereits ausgearbeiteten Regeln dem Druck übergeben. Jeder Besitzer eines Instrumentes solcher Art, wie sie bisher gebaut worden sind, befindet sich in Täuschung, wenn er glaubt, es arbeite sein Instrument präcis. Die Erbauer geben der Führung die Schuld der Schwankungen in den Angaben des Instrumentes; aber mit Unrecht, denn die Führungsfehler sind, wie man kennen lernen wird, sehr klein. Da Instrumente der älteren Art niemals Nettoangaben machen, so ist bei ihrer Anwendung eine corrigirende Procentberechnung erforderlich, deren Vornahme den Hauptzweck des Instrumentes, nämlich Zeitersparniss und Beseitigung von Rechnenfehlern, vernichtet, daneben aber die Instrument- und Führungs-Fehler unter diese Rechnung versteckt und den Arbeiter in eine Reihe von Täuschungen und Unrichtigkeiten verwickelt. Hat man mit einem solchen Planimeter eine Anzahl Flächen berechnet und berechnet mit einem Planimeter aus der Planimeter-Fabrik dieselben Flächen, so sind jene Täuschungen sofort entdeckt. Man wird die Gründe kennen lernen, warum das Flächenmessen mit einem präcisen Planimeter weit schärfer ist, als wenn man mit Zirkel und Maassstab misst, und man wird dieses durch Erfahrung bestätigt finden, aber selbst auch eine genaue revidirende Flächenberechnung mit Zirkel und Maassstab entdeckt die Täuschungen, welche unzuverlässige Instrumente veranlassen. Bei Anwendung des Planimeters hat man hinsichtlich der Sicherheit, der Präcision und des Zeitgewinns schon Vortheile vor dem Arbeiten mit Zirkel und Maassstab voraus, wenn man die einzelnen Grundstücke in den Karten umfährt und deren Summe addirt. Man kann aber weiter gehen und neben diesen Vortheilen noch eine Controle dadurch gewinnen, dass man erst eine grössere Fläche und dann deren Parzellen

umfährt, die Theile müssen die Summe der generellen Umfahrung stets wiedergeben: die generelle Umfahrung controlirt die specielle und gleichwohl mit grosser Zeitersparniss.

Sieht man aber vom Zeitgewinn ab und fordert grosse Schärfe der Arbeiten, so kann man mit der generellen und speciellen Umfahrung noch die im §. 49 No. XII und XIII beschriebene Correctionsberechnung verbinden.

Proben mit controlirender Umfahrung setzen jeden Besitzer eines Instrumentes in den Stand, den Grad der Präcision seines Instrumentes zu entdecken und sind die Feinde schlechter Instrumente.

Da eine Fläche von 152‴ par. Länge und 66‴ par. Höhe, also von circa 10,000 □‴ par. in wenigen Minuten umfahren ist und bei Flächen, welche nicht weniger als 66‴ Höhe haben, alle vorkommenden Führungs- und Instrumentfehler $\frac{1}{7}$ Flächenprocent nie übersteigen, so gewährt die generelle Umfahrung eine vorzügliche Controle der Flächenberechnung, die das rohe Hülfsmittel der Messungen mittels Zirkels und Maassstabs, ungeachtet wiederholter zeitraubender, auch die Karten verunstaltender Zerlegung der Flächen in Berechnungsfiguren, nicht gewährt. Im Felde misst der Geometer Winkel und Linien und bringt ihre Miniaturbilder auf die Karten. Von den Karten, welche gewöhnlich in einem sehr kleinen Maassstabe aufgetragen sind, greift er die Längenmaasse ab und berechnet danach die Ackerflächen. Soll hierbei dieselbe Genauigkeit des Messens eingehalten werden, wie sie im Felde statt hatte, so muss z. B. bei $\frac{1}{2000}$ theiliger Verjüngung 2000 mal genauer von der Karte abgemessen werden, als es im Felde geschah. Wir werden später bei Vergleichung der Resultate der Messungen mit Zirkel und Maassstab und mit dem Planimeter die Ursachen finden, aus welchen Zirkel und Maassstab gegenüber dem Planimeter, welcher bei grösseren Flächen den mikroskopischen Gegenstand von $\frac{1}{100}$ Längenlinie indicirt, im Nachtheile stehen und durchaus nicht die Mittel sind, um so feine Messungen ausführen zu können, wie man sie nunmehr fordern muss, wo man einen Planimeter zur Disposition hat. Dazu kömmt, dass der Geometer seine Flächenberechnungen mittels des Planimeters von angelernten Hülfsarbeitern,

wozu auch Frauenzimmer verwendbar sind, mit aller Sicherheit machen lassen kann, wenn er unter seiner Aufsicht und mit Controle arbeiten lässt. Denn er kann verlangen, dass der Hülfsarbeiter bei den generellen Umfahrungen die Fehlerprocentsätze der Haupttabelle im §. 48 nicht überschreitet und kann anordnen, dass der Arbeiter die nicht einmal scharf zugreifenden Höhen der generellen Flächen notirt, indem diese Höhen auf die betreffenden Reihen der Tabelle verweisen.

Mit der Anwendung des Planimeters in der Flächenberechnung thut die praktische Planimetrie in ihrer Kultur einen grossen Schritt vorwärts. Wer die bezeichneten Vortheile erwägt, die einfachen Gesetze der Mathematik und Physik begriffen hat, welche das Instrument lenken, die Mittel zur Anschaffung des Instrumentes aufzubringen vermag und es dennoch nicht anwendet, der ist scharfen Resultaten der Planimetrie abhold und chicanirt sich und seinen Gegenstand.

Können einzelne Geometer die Mittel zum alleinigen Ankauf des Planimeters nicht aufbringen, so ist ihnen zu rathen, dass drei bis vier Geometer ein Instrument gemeinschaftlich erwerben. Sie alle können damit, Einer nach dem Andern, ihre Winterarbeiten vollenden.

Das Instrument bringt dem gewissenhaften Geometer ausser der grossen Zeitersparniss Beruhigung und Vertrauen zu seinen Arbeiten, macht ihm aber auch als gebildetem Manne durch die pikanten Entwickelungen der einschlagenden mathematischen und physikalischen Theoreme Vergnügen. Schon das Paradoxon zieht an, womit sich das Instrument ankündigt, nämlich die Flächen berechnen durch Uebertahren der Umfangslinien, die sich doch zu einander ganz anders verhalten, als wie die Flächen. Dieses Paradoxon hat meine Aufmerksamkeit auf das Instrument hingelenkt und die schönen Gesetze, denen es gehorcht, haben mich zum Freunde desselben gemacht.

Das von mir geschriebene Buch, dessen Haupttheil schon im Jahre 1854 geschrieben und seitdem wiederholt umgearbeitet worden ist, ist das Resultat von zehnjährigen Forschungen, Arbeiten und Experimenten, denen ich den Lohn einer allgemeinen Anwendung des Planimeters wünsche. Es erscheint in drei Theilen, wovon der erste die Theorie enthält. Der zweite Theil ent-

hält die höchst interessante und nützliche Praxis. Der dritte Theil giebt die Geschichte und Beschreibung aller bisher bekannt gewordenen planimetrischen Instrumente, insbesondere auch des Oppikofer'schen und seiner Verbesserungen mit kurzen kritischen Bemerkungen. Diese Geschichte zeigt in einem vergleichenden Rückblick auf den Oppikofer'schen Planimeter in seiner Vollendung, wie er den, für die in Anwendung befindlichen kleinen Maassstäbe der Karten nothwendigen, hohen Standpunkt der ausführenden instrumentalen Planimetrie erreicht hat.

Was den Titel des Buches betrifft, so könnte man ihn, da er die Praxis aller Planimeter anzukündigen scheint, vorzüglich aber nur die Praxis des Oppikofer-Trunk'schen Planimeters behandelt, für zu allgemein halten. Es ist jedoch die Theorie, Praxis und Geschichte der Planimeter summarisch erwähnt und es ist derjenige Gegenstand mit der Theorie und Geschichte erschöpft, der keine praktische Anwendung mehr hat. Geschichtliche und kritische Behandlung aller bisher bekannt gewordenen Planimeter war aber nothwendig, um aus der Vergleichung zu finden, ob und dass der Oppikofer-Trunk'sche Planimeter, nach dem gegenwärtigen Stand der mathematischen und mechanischen Wissenschaften und nach dem gegenwärtigen Stand der exacten Planimetrie, unter allen planimetrischen Instrumenten das vollendetste sei.

Zur Nachricht für die Leser wird bemerkt, dass Diejenigen, welchen daran liegt, nur das Theorem des Instrumentes kennen zu lernen, mit der Lectüre der Einleitung und der §§. 1—12. einschliesslich schliessen können.

Diejenigen, welche den Planimeter führen, sich aber auf das Lesen des Nothwendigsten beschränken wollen, können die §§. 20 incl. bis 25 incl., 27, 28, 29, 37, 38, 52 einschliesslich bis 69 einschliesslich überspringen, obwohl zu empfehlen ist, dieses nicht zu thun.

Dem Buche ist ausser der Inhaltsanzeige ein Verzeichniss der gebrauchten mathematischen Zeichen und eine Anzeige der durch Patente gesicherten Planimeterfabrik zu Eisenach mit einem Zeugniss des Grossherzoglich-Sächsischen Finanzmini-

steriums über die vorzüglichen Leistungen des Trunk'schen Planimeters vorgedruckt.

Herrn Professor Dr. Grunert und Herrn Baurath Professor Dr. Bauernfeind danke ich für ihre sehr gefälligen literarischen Mittheilungen.

Eisenach, am 1. Juli 1865.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniss.

Vorrede als Einleitung S. III

Erster Theil.

Trunk's Theorie des Oppikofer'schen und Trunk'schen Planimeters
§. 1—29. S. 1—66.

Seite

§. 1. Zählung von Flächeneinheiten durch die Anzahl ihrer Grundlinien 1

§. 2. Verwandlung der geraden Grundlinien in kreisförmige Linien 2

§. 3. Maschine, welche die im §. 2. besprochenen Operationen ausführt 5

§. 4. Das Laufrädchen als mechanisches Mittel zur Zählung der Kreisbogenlängen 7

§. 5. Erklärung der Art und Weise, wie das Rädchen umgedreht wird. Normalradius 8

§. 6. Fälle, in welchen das Rädchen nicht gedreht werden kann. Radiale Verschiebung. Nullpunct 9

§. 7. Messungen mit dem Instrumente. Vergleichung der Formen und Grössen der Flächenfiguren in der Zeichnungsebene mit den Flächenfiguren, deren Umfangslinie das Rädchen mit seinem Berührungspuncte in die Scheibenebene zeichnet. Lauflinie 9

§. 8. Fortsetzung der Messungsoperationen 12

§. 9. Fortsetzung der Messungen. Der Planimeter addirt und subtrahirt und giebt Flächengrössen als Summen oder als Differenzen an. 14

§. 10. Nulllinie. Abscissen und Ordinaten in der Zeichnungsebene 15

§. 11. Messungen von Flächen, deren Umfangslinien gegen die Nulllinie geneigt sind. Mittlerer Radius, mittlerer Kreisbogen 16

§. 12. I. Ausmessung von Flächen, welche von Curven begrenzt sind. Berechnung der Flächen, welche Autographen an Wärmemessern, Kraftmessern u. s. w. schreiben 18

II. Berechnung der Flächen mit Hülfe des höhern Calcüls —

§. 13. Nullpunctslinie. Messungen diesseits und jenseits der Nullpunctslinie. 23

§. 14. Flächenmessungen von Dreiecken auf beiden Scheibenhälften 23

Seite

§. 15. Fortsetzung ähnlicher Messungen wie in §. 14. Orientirung hinsichtlich der Richtungen der Drehungen der Scheibe und der Trommel. Subtraction negativer Flächengrössen. Erklärung der Figg. 10, 11, 12 26

§. 16. Berechnung der Grösse der Bestandtheile des Planimeters 28

§. 17. Ueberblick über die möglichen Lagen des Schiebers *E* und der Axe des Rädchens 32

§. 18. Folgen davon, wenn man den Schieber *E* geneigt gegen $\backslash xx$ und $\backslash yy_0$ legt. Berechnung des Halbmessers des Rädchens für diesen Fall. Messungsoperation dazu 33

§. 19. Lage des Schiebers *E* rechtwinklig gegen *xx*. Lage der Welle des Rädchens eben so, aber seitlich von $\backslash yy_0$ und parallel zu $\backslash yy_0$. Bewegungsgrösse der Halbmesser, welche die Lauflinien beschreiben. Anomalradius. Reductradius. Bedeutung der Nullpunctslinie. Todter Kreis. Berechnung des Halbmessers des Rädchens für diesen Fall 36

§. 20. Messungs- und Berechnungs-Operation mit Beziehung auf das im §. 19. Entwickelte 39

§. 21. Lage des Schiebers *E* in $\backslash y_2y_3$ (Fig. 18), geneigt gegen $\backslash yy_0$, Welle des Rädchens parallel mit dem Schieber *E*, aber seitlich von $\backslash y_2y_3$. Messungs- und Berechnungs-Operation 42

§. 22. Lage des Schiebers *E* senkrecht zu $\backslash xx$, Axe des Rädchens geneigt gegen $\backslash yy_0$, Verschiebung des Rädchens auf $\backslash yy_0$, so dass es das Centrum *c* der Scheibe *S* passirt 44

§. 23. Lage des Schiebers *E* senkrecht gegen $\backslash xx$, Verschiebung des Rädchens auf $\backslash y_1y_2$, welche parallel zu $\backslash yy_0$ liegt, Axe des Rädchens geneigt gegen $\backslash y_1y_2$. Nullpunctslinie *zz* 45

§. 24. Lage des Schiebers *E* geneigt gegen $\backslash yy_0$ unter $\angle A$, Verschiebung des Rädchens in der geneigten $\backslash y_3y_4$, so dass es das Scheibencentrum passirt, geneigte Lage der Axe des Rädchens unter $\angle \alpha$ 48

§. 25. Lage des Schiebers *E* geneigt unter $\angle A$ gegen $\backslash yy_0$, Führung des Rädchens auf der geneigten $\backslash y_1y_2$, so dass es bei seiner Verschiebung nie das Centrum *c* der Scheibe passiren kann, Lage der Axe des Rädchens geneigt unter $\angle \alpha$ gegen $\backslash y_1y_2$ 50

§. 26. Nullzustand des Planimeters, müssiges Vorwärts- und Rückwärts-Rollen des Rädchens 54

§. 27. Einige graphische und rechnerische Messungen mit dem Instrumente 58

§. 28. Fortsetzung von Messungen und deren Berechnung. Geneigte Lage der Ordinaten *yy* gegen *xx* 61

§. 29. Zusammenstellung der Werthe für ϱ 65

Zweiter Theil.

Beschreibung, Bau und Handhabung von Trunk's Planimeter, gegründet auf dargelegten mathematischen, physikalischen u. mechanischen Gesetzen §. 30—51. S. 67—179.

		Seite
§. 30.	Regulirvorrichtung	67
§. 31.	Fortsetzung über Regulirvorrichtung	68
§. 32.	Fortsetzung über Regulirvorrichtung	69
§. 33.	Parallelismus der Ebenen der wesentlichen Maschinentheile des Instrumentes	74
§. 34.	Parallelismus der Scheibenebene mit der Zeichnungsebene und mit der Ebene des Schiebers *E*	74
§. 35.	Neigung der Axe des Rädchens gegen die richtig stehende Ebene der Scheibe *S*	76
§. 36.	Beschreibung von Trunk's Planimeter. Lage des Drahtes, Abwiegung der Belastung des Zapfens der Welle des Rädchens. Hülfsapparate	77
§. 37.	Form der Nuthen *gg* und g_1g_1 und der Räder *A* und *B*; theoretische Entwickelung der darauf Bezug habenden Rechnungsformeln	85
§. 38.	Berechnung der in der Maschine wirkenden Kräfte und Reibungen und der von ihr gegen die führenden Hände ausgeübten Widerstände. Apparat zur Regulirung der Schieberbewegung	88
§. 39.	Bestimmung der Lage der indifferenten Biegungsfläche im Drahte	97
§. 40.	Form des Umfanges des Laufrädchens und Bestimmung der Lage der Lauflinien in der Scheibe *S* und am Umfang des Rädchens. Anomalie im Umtrieb des Rädchens und deren Beseitigung	100
§. 41.	Bezug der Drehscheibe *S* mit Thierhaut	109
§. 42.	Apparat zur Drahtspannung und Abwiegung der letzteren	110
§. 43.	*a*. Tisch und Brücke, worauf man den Planimeter stellt	112
	b. Verschliessen des Planimeters	—
§. 44.	Parallelmaass	114
§. 45.	Apparat zum Schleifen des Rädchens	115
§. 46.	Apparat, womit man Linien auf die Scheibe *S* zeichnet	117
§. 47.	I. Kleinheit der Fehler, welche wegen mangelnden Parallelismus der Schienen und Schieber und wegen Unebenheiten der Karte, worauf der Führerrahmen verschoben wird, entstehen	118
	II. Ueber die Fehler, welche dadurch entstehen, dass der Draht nicht parallel zur Nuth *gg* liegt, sondern eine gebrochene Linie bildet	119
§. 48.	I. Ueber die Fehlergrösse bei Planimetermessungen. II. Von den Führungsfehlern, deren Berechnung und Kleinheit und deren Verhalten zu den Dimensionen der umfahrenen Flächenfiguren. Normalfigur	120

Seite

§. 49. Von den Instrumentfehlern *a*) erster Gattung, *b*) zweiter Gattung, *c*) Scheibenfehlern. Ihr Verhalten zu den gemessenen Flächen und deren Längen und Höhen. Correctionsberechnung für kleine Differenzen. Normalfigur. Beseitigung der Procentmaassstäbe durch Einstellung des Planimeters 127

§. 50. Instruction zur Behandlung und Justirung des Planimeters. Abwiegung der Drahtspannung, Abwiegung bei Feststellung der senkrechten Scheibenwelle, Abwiegung des Händedrucks gegen die Schieber 160

§. 51. Instruction zur Führung des Instrumentes 171

Dritter Theil.

Geschichte und Beschreibung der bis jetzt bekannten planimetrischen Instrumente. §. 52—69. S. 180—216.

Seite

§. 52. Einleitung 180

§. 53. Planimetertafeln aus Horn und Glas 180

§. 54. Oldendorps Planimeter, d. h. Faden- oder Haar-Planimeter 180

§. 55. Westfelds Planimeter 182

§. 56. Planimetrische Bestrebungen von Harkort, Posener und Alder 184

§. 57. Planimetrische Bestrebungen von Wagner, Schmidt, Horsky, Kraft und Gauss 184

§. 58. Oppikofer's Planimeter, um dessen Geschichte R. Wolf in Bern Verdienst hat 186

§. 59. Oppikofer-Ernst'scher Planimeter, um welchen sich die Academie der Wissenschaften zu Paris verdient gemacht hat 188

§. 60. Oppikofer-Wetli'scher Planimeter, um welchen sich die Academie der Wissenschaften zu Wien und Professor Stampfer Verdienste erworben haben 192

§. 61. Hansen's Aenderungen und Verbesserungen an dem Oppikofer'schen Instrumente, wobei sich durch wissenschaftliche Darlegungen der polytechnische Verein und Prof. Bauernfeind zu München Verdienste erworben haben 197

§. 62. Hansen's elementare analytische Theorie des Instruments, anschliessend an den Gang des höhern Calcüls 200

§. 63. Erfindung Joh. Martin Hermann's 202

§. 64. Dr. Barfuss's Besprechung des schon vom Professor Bauernfeind Gegebenen 204

§. 65. Keller und Fichtebauer 204

§. 66. John Sang's Planimeter 204

§. 67. Amsler's Polarplanimeter 206

§. 68. Decher's Polarplanimeter 211

§. 69. Bouniakovsky's Polarplanimeter 213

Mathematische Zeichen 216

Anzeige der Planimeterfabrik zu Eisenach

(s. §. 36. am Ende).

Preise:

80 Rthlr. — Gr. ein Trunk'scher Planimeter mit Zubehör an einem *Laufrädchen auf stählerner Welle*, an Schlüsseln, Knebeln, Schraubenziehern, Haken zum Drahtaufziehen, Winkel zum Richten der Welle des Rädchens, Parallelmaass, Apparaten und Pulvern zum Schleifen der Scheibe *S*, 6 Stücken cal brirten Drahtes, 2 Gewichtchen zum Abwiegen der Spannung der Feder *a* an der hohlen Welle *Q*, lackirtem Etui mit innerer Einrichtung, Schloss und Griff.

Beim Bestellen der Planimeter oder eines Rädchens ist auf einem dünnen Messingblechstreifen die Länge von 10 Ruthen des verjüngten Maassstabes, nach welchem die Maschine arbeiten soll, einzusenden.

Ausserdem liefert die Fabrik auch folgende *Hülfsapparate für die vorgesetzten Preise:*

3 Rthlr. — Gr. ein Laufrädchen von Gussstahl mit stählerner canelirter Welle. — Es ist dieser Preis besonders angesetzt, da sich Planimeterbesitzer Rädchen für verschiedene verjüngte, z. B. für $\frac{1}{1000}$ oder $\frac{1}{2000}$ etc. theilige, Maasstäbe zu bestellen pflegen.

1 Rthlr. 10 Gr. ein Tragring zur kleinen scharfen Lupe.

1 Rthlr. 10 Gr. eine kleine scharfe Lupe mit 2 Linsen.

— Rthlr. 15 Gr. ein Sehtrichter.

1 Rthlr. 10 Gr. ein Apparat mit Gewicht zum Drahtspannen.

1 Rthlr. 15 Gr. ein Zeichnenapparat, um Curven auf die Scheibe *S* zeichnen zu können.

— Rthlr. 15 Gr. eine Zeichnenscheibe von geschliffenem matten Glase.

3 Rthlr. — Gr. ein Schleifapparat zum Schleifen des Laufrädchens.

— Rthlr. 20 Gr. eine Vorrichtung zum Reguliren und Abwiegen der Schwere der Schieberbewegung. *Diese Vorrichtung* wird bei ihrem Gebrauche an den Schleifapparat angeschraubt.

1 Rthlr. 10 Gr. ein grosser Pappkasten zur Bedeckung des aufgestellten Planimeters.

— Rthlr. 20 Gr. Riegel und Schloss dazu, um den Planimeter verschliessen zu können.

Preise:

Lackirte Beschwerer der Karten von Blei mit Messinggriff und zwar

— Rthlr. 15 Gr. ein kleinerer (circa 1 Pfund).
— Rthlr. 25 Gr. ein grösserer (circa 2 Pfund).
1 Rthlr. — Gr. ein noch grösserer (circa 3 Pfund).
8 Rthlr. — Gr. ein dreibeiniger, 3′ langer, 2′ breiter getäfelter Tisch mit Stellschrauben an den Füssen.
1 Rthlr. — Gr. jeder Fuss der Länge mehr.

Sie werden über 6′ lang nicht gemacht.

4 Rthlr. 20 Gr. eine lackirte Brücke von Holz mit Boden von Eisen und mit hölzernen Stellschrauben, $2\frac{1}{2}$′ lang, 10″ breit.
1 Rthlr. 15 Gr. jeder Fuss der Länge mehr.

Ueber 9′ lang werden sie nicht gemacht. Wer Brücken über $5\frac{1}{2}$′ lang gebraucht, muss 2 Seitentische, worauf die Brücke ruht, und dazwischen einen Tisch, worauf die grosse Karte liegt, anwenden.

Die Fabrik liefert alle Maschinentheile einzeln für feste Preise, wenn die abgenutzten oder zerbrochenen Theile eingesendet werden.

Alle an die „Planimeterfabrik zu Eisenach“ gerichteten Briefe werden frankirt erbeten und die Sendungen erfolgen auf Gefahr der Besteller per Post oder Eisenbahn, letzteren Falles als Eilgut. Die Verpackung wird auf das Sorgfältigste bewirkt und werden dafür nur die Auslagen berechnet. Die Absendung grösserer Bestellungen erfolgt nach Einsendung von $\frac{1}{4}$ des Preises, der Restbetrag wird, wie alle Zahlungen, durch Nachnahme erhoben.

Schliesslich wird noch mitgetheilt, dass Herr Ingenieur Trunk sich bereit erklärt hat, legitimirten Beauftragten von Staatsregierungen die Handhabung, Justirung und Führung seines Planimeters unentgeltlich praktisch zu zeigen.

Zeugniss.

Dem Herrn Christoph Trunk zu Eisenach bezeugen wir hierdurch, dass der von demselben construirte, durch Urkunde vom 10. December 1856 patentirte Planimeter, wie solcher in der Fabrik zu Eisenach unter des Genannten Leitung gefertigt wird, bei den Grossherzoglichen Vermessungs- und Kataster- (Steuer-Revisions-) Behörden in Anwendung ist und gern und mit Vortheil gebraucht wird, weil derselbe in hohem Grade rasch und präcis arbeitet, bei geeigneter Anwendung und guter Führung insbesondere durch Gleichmässigkeit, Sicherheit und Zeitkürze seiner Nettoberechnung der kartirten Flächen sich in anerkennenswerther Weise auszeichnet.

Der Herr pp. Trunk hat in hier gehaltenen Vorträgen die interessante Theorie des Instrumentes lediglich mit Hülfe der Elemente der Geometrie und ebenen Trigonometrie dergestalt zu klarem Verständniss gebracht, dass man das mechanische Princip, auf dem der Gang der Maschine beruht, anschaulich erkennen, die Bewegungen der Maschine rechnerisch verfolgen, zugleich aber auch die Ueberzeugung gewinnen konnte, es werde jeder Geometer auch ohne Kenntniss des höheren Kalküls diese Theorie leicht erlernen und darin eben so wohl wie über den Gang und die Führung des Instrumentes geprüft werden können.

Wir nehmen hiernach an, dass durch die Verbreitung des Gebrauchs des Trunk'schen Planimeters dem Vermessungs- und Katasterwesen eine wesentliche Förderung seiner Messungs- und Rechnungs-Resultate, den betheiligten Beamten aber, insonderheit auch denjenigen Beamten, welche die Arbeiten der Geometer zu revidiren haben und denjenigen Geometern, welche in Angelegenheit der Grundstücks-Zusammenlegung arbeiten, bedeutende Erleichterung und Zeitersparniss in ihren Arbeiten gebracht werde, und stellen dieses Zeugniss um so bereitwilliger aus, als es dazu benutzt werden soll, die gedachte Erfindung gemeinnütziger zu machen.

Weimar, 10. Februar 1864.

Grossherzogliches Staats-Ministerium,
Departement der Finanzen.

(L. S.) **K. Bergfeld.**

Es wird gebeten, folgende Fehler vor dem Lesen des Buchs zu berichtigen:

S. 3 Z. 9 v. u. streiche das Wort „auf“
„ 11 „ 6 v. u. lies F statt T
„ 35 „ 9 v. o. — grösser, als $n.2r^2\pi\varphi$ grösser, wie etc. statt grösser als $n.2r^2\pi\varphi$, grösser wie etc.
„ 47 „ 10 v. u. — K_5R_I statt K_IR_I
„ 48 „ 12 v. u. — y_5 statt y_2 und c_2y_5 statt c_2y_2
„ 49 „ 1 v. u. — $\frac{400.\ cos\ \alpha}{r.\ cos\ A}$ statt $\frac{400.\ cos\ A}{r.\ cos\ A}$
„ 51 „ 4 v. u. — $\backslash xx$ statt $\backslash x_Ix_I$
„ 51 „ 5 v. o. — $= n.\ 2r^2\varphi\pi$ etc. statt $n.2r^2\varphi\pi$ etc.
„ 52 „ 10 v. o. — p statt q
„ 59 „ 19 v. u. — $= kR$ statt $= R$
„ 78 „ 2 v. o. — 38^b statt 36^b
„ 78 „ 14 v. o. — 40 statt 41
„ 81 „ 4 v. u. — Man statt Mat
„ 82 „ 8 v. o. — dieser Ständer statt dieser Ränder
„ 87 „ 1 u. 2 o. streiche einmal die Worte: und noch mit allen zwischen diesen Radien cv, c_4y.
„ 96 „ 15 v. o. lies $\backslash dv$ statt $\backslash dc$
„ — „ 16 v. o. — $\backslash dv$ statt $\backslash dc$
„ — „ 17 v. o. — $\backslash dv$ statt $\backslash dc$
„ — „ 10 v. u. — $\backslash vd$ statt $\backslash cd$
„ 97 „ 13 v. u. — gefunden statt gefungen
„ 98 „ 12 v. o. — $\smile b''_I$ statt $\smile a''_I$
„ — „ 13 v. o. — $h_Ic_Ic_2$ statt $h_Ic_Ic_2$
„ 105 „ 4 v. u. — $2\varrho\pi q_2(r-r_2)$ statt $2\varrho\pi q:(r-r_2)$
„ 107 „ 12 v. o. — der Axenstellung bald einen schmaleren, bald einen breiteren etc. statt der Axenstellung bald einen breiteren etc.
„ — „ 6 v. u. — wird auf beiden etc. statt wird zwar auf beiden etc.
„ 108 „ 18 v. u. — Radchen statt Rädchens
„ 109 „ 3 v. o. — 8.0,5 statt 8 0,5. 4
„ 118 „ 10 v. o. streiche einmal das Wort „und“
„ 123 „ 2 v. o. lies $1{,}25.4^2$ statt $1{,}25{,}4^2$
„ 145 „ 6 v. u. — abzuziehen, statt abzuziehen;
„ 153 „ 13 v. o. — 3043,15 statt 043,153
„ 163 „ 2 v. o. — XXII statt XII
„ 169 „ 11 v. o. — einem statt einer
„ — „ 12 v. o. — Buchse statt Buchse
„ 175 „ 12 v. u. — Fig. 71 statt II
„ 176 „ 2 v. u. — Fläche statt Oberfläche.

Theorie des Oppikofer'schen und Trunk'schen Planimeters.

§. 1.

Zählung von Flächeneinheiten durch die Anzahl ihrer Grundlinien.

Wenn in Fig. 1. Tab. I. das rechtwinkelige Parallelogramm $a_I\ b_n$ durch Perpendikel auf $\backslash\ a_I\ d_n$ in n gleich grosse Flächen (welche wir Flächeneinheiten, z.B. □‴ oder □R, nennen wollen) zerlegt sind, so ist, da die Höhe der Flächeneinheiten sich gleich bleibt, auch die Basis $a_I\ d_n$ in n gleich grosse Grundlinien dieser Flächen zerlegt. Es ist nicht nöthig, dass diese Flächeneinheiten Quadrate sind, sie können als Parallelogramme dargestellt werden, wie z.B. in den Figg. 1., 2., 3., 6. Tab. I. die gezeichneten einzelnen Parallelogramme. Setzen wir, es sei die Flächeneinheit eine Quadratruthe und die Höhe der Flächeneinheit $f = r$ (z. B. $\backslash\ a_I c$ in Fig. 3.), so ist die Grösse der Grundlinie der Flächeneinheit bestimmt, sie ist $= \frac{f}{r} = g$. Tragen wir mehrere solcher Längen von g hintereinander auf einen Stab, so ist dieser ein Maass für die Grundlinien, worauf g als Linieneinheit gelten kann. Man hat somit im Parallelogramm $a_I\ b_n\ n$ Flächeneinheiten, und in der Basis $a_I\ d_n\ n$ Grundlinien, welche diesen Flächeneinheiten angehören, und kann daher durch die Anzahl der Grundlinien die Anzahl der Flächeneinhei-

ten des Parallelogramms ausdrücken. Nun ist es aber möglich, jedes rechtwinkelige Parallelogramm in n Flächeneinheiten zu zerlegen, wodurch man gleichzeitig n Grundlinien der n Flächeneinheiten erhält. In Fig. 2. Tab. I. z. B. hat man $3 . 5 = 15$ Flächeneinheiten, aber auch 15 Grundlinien dieser Flächeneinheiten.

Die Fig. 3 Tab. I. ist, wie schon bemerkt, in Flächeneinheiten zerlegt. Wir wollen an der Flächeneinheit deren Höhe, $= \backslash c a_1$, mit r, und die Grundlinie $= \backslash a_I d_I$ mit g bezeichnen. Es ist dann die Grösse der Flächeneinheit $= \backslash a_I c . \backslash a_I d_I = gr$. Ist in der Fig. 3. die Anzahl der Grundlinien $= n . g$, so ist in der ganzen Fläche der Fig. 3. auch die Anzahl der Flächeneinheiten $= n . gr$. Dieser Satz ist es, worauf die Construction des (Oldendorp'schen) Faden- oder Haar-Planimeters, aber auch des Oppikofer'schen Planimeters beruht.

§. 2.

Verwandlung der geraden Grundlinien in kreisförmige Linien.

Die Linie $a_I d_I = g$ kann man in einen Kreisbogen $a_I m_I$ verwandeln. Beschreibt man den Bogen $a_I m_I$ mit Radius $ca_I = r$ und braucht man den $\angle \varphi$*), um die Länge $a_I d_I$ auf Bogen $a_I m_I$ zu tragen, so ist $\smile a_I m_I = \smile 2r \varphi \pi$ und wir haben bei dieser Anordnung statt $\backslash g$ den Bogen $2r \varphi \pi$.

Man stelle in Fig. 3. im Punkte c eine Welle, welche den Radius $ca_I = r$ hat, so auf, dass sie sich in c drehen kann. Man wickle um diese Welle einen sehr dünnen Faden und zwar so, dass sich derselbe bei Punkt a_I auf- und abwickelt, der übrige Theil des Fadens aber tangentiell an der Welle bei Punkt a_I in der Richtung $a_I d_4$ liegt. Hätte der Faden bei Punkt a_I eine Marke und man zöge denselben in gespannter Beschaffenheit so fort, dass die Marke aus Punkt a_I in den Punkt d_I zu stehen käme, so wäre die $\backslash a_I d_I$ von der Welle abgewickelt worden. Hätte sich dabei die Welle um den Winkel φ gedreht, so wäre, wenn man $\backslash ca_I = r$ setzt, $\backslash a_I d_I$ die rectificirte Länge von

*) Hier und im Folgendem ist als Winkeleinheit derjenige Winkel genommen, welcher sich durch eine ganze Umdrehung erzeugt.

$\smile 2r\varphi\pi = \setminus g$. Da nun die auf $\setminus g$ stehende Fläche $= gr$ ist, so ist sie auch, wenn man sich $\smile 2r\varphi\pi$ rectificirt denkt $= 2r\varphi\pi \,.\, r = 2r^2\varphi\pi =$ der Flächeneinheit.

Man bringe an die Welle in radialer Richtung einen Stab ca_n, woran ein Bleistift befindlich ist, so an, dass man den Bleistift am Stabe ca_n verschieben und successiv in die Punkte a_I, a_2 etc. einstellen kann.

I. Stellt man den Schreibstift in den Punkt a_I ein und man dreht die Welle um den $\angle\varphi$, so wickelt sich von der Welle der $\smile 2r\varphi\pi$ ab und es schreibt der Stift den $\smile 2r\varphi\pi = \smile a_I m_I = \setminus a_I d_I = \setminus g$.

Da $\smile 2r\varphi\pi = 1 \,.\, \smile 2r\varphi\pi$ ist und die Fläche $a_I b_I$ die Grösse $1 \,.\, 2r^2\varphi\pi$ hat, so hat man so oft eine Flächeneinheit, als wie oft man eine Grundlinie oder einen Bogen $2r\varphi\pi$ hat.

II. Stellt man den Schreibstift in den Punkt a_2 ein, und man zieht von der Welle den Faden $a_I d_I$ ab, so dreht sich die Welle um den $\angle\varphi$, es wickelt sich somit von der Welle der Bogen $2r\varphi\pi$ ab, der Schreibstift schreibt aber mit Radius $ca_2 = 2r$ den Bogen $2 \,.\, 2r\varphi\pi = \smile a_2 p_I = 2 \,.\, \smile a_I m_I = 2 \,.\, \setminus a_I d_I = \setminus a_I d_I + \setminus a_2 f_I$, weil nach der Voraussetzung $\setminus a_2 f_I = \setminus a_I d_I = \smile 2r\varphi\pi$ und $\setminus a_2 f_I$ die Basis des Parallelogramms $a_2 b_I$ ist. Während man also die Grundlinie des Parallelogramms $a_2 b_I$ von der Welle abwickelt, schreibt der Stift $2 \,.\, \setminus a_2 f_I = 2 \smile 2r\varphi\pi$. Da nun das Parallelogramm $a_2 b_I = 2r \,.\, 2r\varphi\pi$ ist, so werden durch die 2 Bogeneinheiten, wovon jede $= 2r\varphi\pi$ ist, ausgedrückt 2 Flächeneinheiten, wovon jede $= 2r^2\varphi\pi$ ist.

III. Wickeln wir die Fadenlänge $a_I d_3 = 3 \,.\, \setminus a_I d_I$ von der Welle ab, so dreht sich die Welle um $3 \,.\, \angle\varphi$. Steht hierbei der Schreibstift im Punkte a_I, so schreibt er bei Abwickelung von $3 \,.\, \setminus a_I d_I$ auf den Bogen $2r\pi \,.\, 3 \,.\, \varphi = 3 \,.\, \smile 2r\varphi\pi$. Das Parallelogramm $a_I b_3$ enthält die Fläche $3 \,.\, 2r^2\varphi\pi$. Dadurch, dass man die Grundlinie des Parallelogramms $a_I b_3$ von der Welle abwickelt, werden die 3 Flächeneinheiten durch 3 Bogen angedeutet. — Würden wir $4 \,.\, \setminus a_I d_I = \setminus a_I d_4$ abwickeln, so würden 4 Bogen 4 Flächeneinheiten anzeigen.

IV. Wickeln wir wiederum die Fadenlänge $a_I d_3 = \setminus a_2 f_3 = 3 \,.\, \setminus a_I d_I$ von der Welle ab, so dreht sich diese um $3 \angle\varphi$, und der Schreibstift, welchen wir in Punkt a_2 stel-

len, wird mit seinem Radius $ca_2 = 2r$ den Bogen $a_2\ p_3 = \smile 2 . 2r\pi . 3\varphi = 6 . 2r\varphi\pi = 6 \setminus a_I\ d_I = \setminus a_I\ d_3 + \setminus a_2\ f_3$ schreiben.*) Das Parallelogramm $a_2\ b_3$ enthält die Flächengrösse $6 . 2r^2\ \varphi\pi$. Dadurch, dass man die Länge der Grundlinie $a_2\ f_3$ von der Welle abwickelt, werden durch 6 Bogen 6 Flächeneinheiten ausgedrückt.

V. Stellt man den Schreibstift in Punkt $\frac{ca_I}{2}$ ein und zieht man den Faden $a_I\ d_I$ von der Welle ab, so dreht sich letztere um $\angle\ \varphi$ und es wird $\smile 2r\varphi\pi$ abgewickelt, der Schreibstift aber schreibt mit Radius $\frac{ca_I}{2} = \frac{r}{2}$ den Bogen $2 . \frac{r}{2} . \varphi\pi = \frac{\smile a_I m_I}{2} = \frac{\smile 2r\varphi\pi}{2} = \frac{1}{2} . 2r\varphi\pi$; es ist aber auch die Flächengrösse des Parallelogramms $\frac{ca_I}{2}\ b_I = \frac{\setminus ca_I}{2} . \setminus a_I\ d_I = \frac{r}{2} . 2r\varphi\pi = \frac{2r^2\varphi\pi}{2} = \frac{1}{2} . 2r^2\varphi\pi$. Es wird daher durch Zahl $\frac{1}{2}$ sowohl der beschriebene Bogen, als die Grösse des Parallelogramms $\frac{ca_I}{2}\ b_I$ ausgedrückt.

VI. Stellt man den Schreibstift in Punkt a_I ein und zieht man den Faden $\frac{a_I\ d_I}{2} = \setminus a_I\ d_{\frac{1}{2}}$ von der Welle ab, so dreht sich letztere um $\angle\ \frac{\varphi}{2}$ und es wird $\smile 2r\pi . \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} \smile 2r\varphi\pi = \frac{1}{2} \smile a_I\ m_I$ abgewickelt; es schreibt aber auch der Schreibstift den Bogen $2r\pi\ \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} . 2r\varphi\pi$. Da nun das Parallelogramm $\frac{a_I\ b_I}{2} = \setminus c\ a_I . \frac{\setminus a_I\ d_I}{2} = r . \frac{1}{2} . 2r\varphi\pi = \frac{1}{2} . 2r^2\varphi\pi$ ist, so wird auch in diesem Falle durch die Zahl $\frac{1}{2}$ sowohl die Bogengrösse, als die Flächengrösse des Parallelogramms $a_I\ b_{\frac{1}{2}}$ angedeutet.

VII. Das unter No. V. und No. VI. Vorgetragene hat Anwendung auf jede Bruchzahl von r oder φ, aber auch auf Fälle, wo Bruchzahlen von r und φ combinirt sind, ja selbst auf Fälle, wo r oder φ oder r und $\varphi = 0$ sind.

---

*) Hier sieht man deutlich, wie ein Apparat, welcher die beschriebene Einrichtung hat, alle parallele Basen der Flächeneinheiten zusammenrechnet, während man beim Haarplanimeter jedes Haar einzeln messen und addiren muss.

Hätte man z.B. $\frac{r}{4}$ und $\frac{\varphi}{3}$, so würde man die Welle nur um $\angle \frac{\varphi}{3}$ drehen und der Radius $\frac{r}{4}$ beschriebe dabei den $\smile 2.\frac{1}{4} r\pi.\frac{1}{3}\varphi = \frac{1}{4}.\frac{1}{3}.2r\varphi\pi = \frac{1}{12}.2r\varphi\pi$; das dadurch angedeutete Parallelogramm aber hätte die Flächengrösse $\frac{1}{3}.2r\varphi\pi.\frac{1}{4}r = \frac{1}{12}.2r\varphi\pi.r = \frac{1}{12}.2r^2\varphi\pi$.

Ist $r = 0$, so ist $r\varphi = 0\varphi = 0$.

Wenn $r = 0$ ist, so hat der Schreibstift keinen Abstand von c, er ruht auf c, wenn man auch die Welle sehr viele Male umdrehte.

Ist $\varphi = 0$, so ist $r.\varphi = r.0 = 0$.

Wenn $\varphi = 0$ ist, so liegt der Fall vor, dass die Welle nicht gedreht werden darf, weil, wenn man die Welle drehte, Winkelbewegung entstände, dieselbe also nicht mehr $= 0$ wäre. Dreht man aber die Welle nicht, so wickelt man keinen Bogen von ihr ab, und es kann der Schreibstift keinen Bogen schreiben, obgleich er den Abstand r von c hat.

Wenn $r = 0$ und $\varphi = 0$ ist, so dreht man die Welle nicht und es steht auch der Schreibstift im Punkte c.

VIII. Bezeichnet man die Coëfficienten von r, von denen wir $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 6$ bereits in Rechnung hatten, mit m, und die Coëfficienten von φ, von denen wir $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 6$ bereits in Rechnung hatten, mit μ, so drückt die Bogenzahl $mr.\mu\varphi = m\mu.2r\varphi\pi$ die Zahl der Flächeneinheiten $m\mu.2r\varphi\pi$ aus. Substituirt man für $m\mu$ den Werth n, so werden durch

$$n.2r\varphi\pi \text{ (Bogen)}$$

ausgedrückt

$$n.2r^2\varphi\pi \text{ (Flächeneinheiten)}$$

oder ganz allgemein drücken n Linien oder n Bogen n Flächeneinheiten eines jeden rechtwinkeligen Parallelogramms, welche Gestalt dieses auch habe, aus.

Setzt man für $m\mu$ den Werth n und es ist in $m\mu$ $m = 1$, so ist $\mu = n$; ist aber $\mu = 1$, so ist $m = n$.

§. 3.

Maschine, welche die im §. 2. besprochenen Operationen ausführt.

Wenn wir nach Massgabe der gefundenen Sätze eine Maschine construiren, deren eine Theil jedesmal den Bogen $n.2r\varphi\pi$

schreibt, wenn ein anderer Theil der Maschine die Basis einer rechteckigen Fläche, welche die Grösse $n.2r^2\varphi\pi$ hat, durchläuft, so ist diese Maschine ein Berechner rechteckiger Flächen.

Eine solche Maschine könnte folgende Einrichtung haben:

Wir nehmen eine horizontale oblonge Grundplatte *G* (Fig. 4. Tab. I.), bringen darauf einen Schieber *P* an, welcher sich in der Richtung der Länge der Grundplatte in einer Nuth der letzteren verschieben lässt. Auf dem Schieber *P* bringen wir senkrecht eine drehbare Welle *T* an, welche den Halbmesser $ca_I = r$ hat. Oben auf die Welle wird eine ebene kreisrunde Scheibe *S* so befestigt, dass die Welle senkrecht zur Ebene der Scheibe steht. Wenn sich die Welle dreht, so dreht sich die Scheibe mit. Um die Welle wird ein dünner Faden geschlagen und so auf das Instrument gezogen, dass er parallel zu den Längenrichtungen der Grundplatte und tangentiell an der Welle *T* liegt. Die Enden des Fadens werden an 2 Ständern *xx*, welche auf den Enden der Grundplatte aufgestellt sind, befestigt. Schiebt man nun den Schieber *P* zur Länge der Linie $a_I\ d_I = 2r\varphi\pi$ (Fig. 3. Tab. I.) fort, so schiebt sich auch die Welle *T* mit der Scheibe *S*, mithin auch das Centrum *c* der Welle, und gleichzeitig auch der Punkt a_I an der Welle fort, bei welchem der Berührungspunkt des tangentiell an der Welle liegenden Fadens ist und wo sich der Faden auf- und abwickelt. Da aber der Faden an seinen beiden Enden an der Grundplatte *G* bei *xx* befestigt ist, so wickelt sich durch das Fortschieben von der Welle die Fadenlänge $a_I\ d_I$ ab und setzt die Welle und mit ihr die Scheibe in Drehung.

Bringt man nun auf dem Schieber *P* noch einen anderen horizontalen Schieber *E* an, welcher seiner Längenrichtung nach gegen die Grundplatte *G* senkrecht liegt, und stellt auf diesen Schieber eine senkrechte Säule *D*, auf welcher ein horizontaler Arm *H* liegt, an dessen Ende ein senkrechter Bleistift befindlich ist, der mit seiner Spitze auf der Scheibe *S* steht; so kann man durch Stellung des Schiebers *E* die Bleistiftspitze in das Centrum *c* der Scheibe *S*, aber auch in jeden Abstandspunkt von *c* einstellen. Am vorderen Ende des Schiebers *E* befindet sich der spitzige Führstift *F*. Dieselben Bewegungen, welche mit dem Stifte *F* parallel dem Faden *xx* gemacht werden, theilen sich dem Schieber *P* und der Welle *T* mit, und dieselben Bewegun-

gen, welche mit dem Stifte F parallel dem Arme H gemacht werden, theilen sich dem Schreibstifte mit.

Würde man nun den Bleistift in c einstellen und den Führstift F und somit den Schieber P und die Welle T verschieben, so würde sich zwar die Welle und Scheibe drehen, der Stift würde aber keinen Bogen, sondern in c nur einen Punkt auf die Scheibe schreiben; würde man dagegen den Bleistift von c in den Abstand der $\backslash c a_I = r$ (Fig. 3.) bringen und dann den Schieber P mit Welle T zur Länge der $\backslash a_I d_I$ verschieben, so würde sich von der Welle T der Bogen $2r\varphi\pi$ abwickeln, wenn die Abwickelung der $\backslash a_I d_I$ die Drehung der Welle um den $\angle \varphi$ bewirkte.

Ebenso kann man alle im §. 2. unter No. II. bis VI. besprochenen und sonst noch jeden beliebigen Bogen von dieser Maschine zeichnen lassen.

Es ist nun noch nöthig ein Mittel zu finden, die Kreisbogen, welche die Maschine producirt, auf mechanischem Wege zu messen.

§. 4.

Das Laufrädchen als mechanisches Mittel zur Zählung der Kreisbogenlängen.

Die Lösung der zuletzt erwähnten Aufgabe ist nicht schwer. Man entferne den Arm H mit dem Schreibstifte und setze dagegen ein Rähmchen N (Fig. 5. Tab. I.) zwischen die Säulen D_1 D_2 ein. Das Rähmchen muss horizontal und parallel über der Scheibe S liegen. In dem Rähmchen liegt eine horizontale, drehbare Welle W. Diese Welle muss parallel zum Schieber E und parallel zu einem Durchmesser der Scheibe sein, die ebenfalls parallel zum Schieber E ist. Auf das Ende der Welle W wird ein dünnes kreisrundes Rädchen R so aufgesteckt, dass die Ebene des Rädchens senkrecht auf der Längenrichtung der Welle W und senkrecht auf der Scheibe S steht. Das Rädchen muss stets im Contact mit der Scheibe S sein. Das Gewicht des Rähmchens N und das Gewicht der Welle W drücken auf das Rädchen und erhalten es in fortwährender Berührung mit der Scheibe S. An das andere (vordere) Ende der Welle W wird ein Zeiger befestigt, hinter dem sich ein Zifferblatt befindet.

Das Rädchen vertritt die Stelle des Schreibstiftes, indem es die in der Scheibenebene laufenden Kreisbogen $n.2r\varphi\pi$ zwar nicht schreibt, aber abrollt und durch seine Welle den Zeiger in Umdrehung setzt. Auf das Zifferblatt bringt man eine Kreistheilung in solcher Weise an, dass der Zeiger jedesmal eine Einheit anzeigt, wenn das Rädchen diejenige Grundlinie abgerollt hat, welche die Basis einer Flächeneinheit ist. Werden n solcher Bogenlinientheile abgerollt, so zeigt der Zeiger auf die Zahl n.

Es ist somit das Rädchen R mit seinem Zeiger der Zähler der den Flächeneinheiten zugehörigen Grundlinien und somit auch der Zähler der Flächeneinheiten.

§. 5.

Erklärung der Art und Weise, wie das Rädchen umgedreht wird. **Normalradius.**

Nach unseren Voraussetzungen liegt die Welle W parallel zur Ebene der Scheibe S und parallel zu einem Durchmesser der Scheibe, welcher parallel zur Längenrichtung des Schiebers E liegt; das Rädchen R aber steht mit einem Punkte seiner Peripherie auf der Scheibe auf. Aus allen diesen Voraussetzungen folgt, dass sich das Rädchen mit seinem Berührungspunkte in einem Radius der Scheibe S nach der Längenrichtung dieses Radius schiebt, wenn man den Schieber E seiner Längenrichtung nach verschiebt. In welche Entfernung vom Scheibenmittelpunkte c man das Rädchen auch stellt, immer ist, wenn sich die Scheibe unter dem Rädchen fortbewegt, diejenige Linie, welche von c zum Berührungspunkte des Rädchens gezogen werden kann, der Radius, welcher in der Scheibenebene denjenigen Bogen beschreibt, welchen das Rädchen abrollt. Ziehen wir in die Scheibenebene im Berührungspunkte des Rädchens auf den erwähnten Radius rechtwinklig eine gerade Linie, so ist sie eine Tangente des Bogens, den der gedachte Radius beschreibt (Fig. 62. Tab. XII.). Zieht man vom Berührungspunkte in die Ebene des Rädchens eine auf der Scheibe senkrecht stehende Linie bis zum Mittelpunkte des Rädchens, so ist diese Linie ein Radius des Rädchens, auf welchem die gezogene Tangente ebenfalls senkrecht steht. Die Tangente liegt, da die Ebene des Räd-

chens senkrecht auf dem Radius der Scheibe steht, in der verlängerten Ebene des Rädchens; deshalb ist diese Tangente auch Tangente zur Peripherie des Rädchens.

Im Berührungspunkte des Rädchens und der Scheibe treibt daher der Scheibenradius das Rädchen in tangentieller Richtung, und das Rädchen nimmt diesen Trieb in der Richtung einer Tangente seines Radius auf.

Denjenigen Radius der Drehscheibe, dessen Tangente in der erweiterten Ebene des Laufrädchens liegt, nennen wir Normalradius.

§. 6.

Fälle, in welchen das Rädchen nicht gedreht werden kann. Radiale Verschiebung. **Nullpunkt.**

Verschiebt man das Rädchen in der Richtung des Scheibenradius, so wirkt die Reibung im Berührungspunkte senkrecht gegen die Ebene des Rädchens. In dieser Richtung kann es sich nicht um seine Axe drehen, es wird also durch Verschiebungen in der Richtung eines Scheibenradius, oder in der Längenrichtung der Welle *W* das Rädchen nicht gedreht, und desshalb macht auch der Zeiger bei solchen Verschiebungen am Zifferblatte keine Bewegung, steht also nach der Verschiebung noch bei der Ziffer des Zifferblattes, wo er vor der Verschiebung stand. Stellt man das Rädchen in den Mittelpunkt *c* der Scheibe ein und dreht die Scheibe, so wird das Rädchen, wie wir schon oben §. 2. No. VII. bemerkt haben, ebenfalls nicht getrieben, weil es in *c* keinen treibenden Scheibenradius giebt.

Weil das Rädchen im Punkte *c* Nulldrehung hat, so wollen wir diesen Punkt den Nullpunkt nennen.

§. 7.

Messungen mit dem Instrumente. Vergleichung der Formen und Grössen der Flächinfiguren in der Zeichnungsebene mit den Flächenfiguren, deren Umfangslinie das Rädchen mit seinem Berührungspunkte in die Scheibenebene zeichnet. **Lauflinie.**

Der Planimeter stellt alle Flächen in Form eines Flächenstreifens von *n* Grundlinien der Flächeneinheiten und von der Höhe *r* dar.

Um mit dem beschriebenen Instrumente Messungen von Flächen vornehmen zu können, haben wir an dem vorderen Theile des Schiebers E den Führstift F angebracht, der eine Spitze hat, welche man über die Umfangslinien der zu messenden Flächen führt.

Es sei in Fig. 6. Tab. I. der grosse Kreis die Scheibe S, der kleine Kreis die Welle oder Trommel T, xx der aufgespannte und um die Trommel sich windende Faden. Die Linie yy_0 stelle den Schieber E dar, die Linie xx deute die Richtung der Grundplatte G an. Die auf der Tischebene, worauf der Planimeter steht, liegenden Parallelogramme mn_I, mn_6, m_2n, mn_7 sollen gemessen werden, die Linien mn_5, m_In_6, m_2n_7, m_0n_0, pq liegen parallel zum Faden xx und zu $\backslash xx$. Die Linie cA sei $= r = \backslash mm_I = \backslash m_Im_2 = \backslash m_2p$ und $\backslash mn = \smile Ab = \smile 2r\varphi\pi$.

I. Stellt man den Führstift F in Punkt m und das Rädchen in Punkt c ein und führt F aus m nach m_I, so wird das Rädchen in der Richtung seiner Axe aus c nach A gezogen und dreht sich nicht; der auf 0 am Zifferblatt eingestellte Zeiger dreht sich daher auch nicht, bleibt also auf 0 stehen. Führt man nun F aus m_I nach n_I, so wird auch der Schieber P zur Länge von $\backslash m_In_I$ mit der Trommel T und der Scheibe S durch den Schieber E fortgeschoben, und es wickelt sich der $\smile bA = \smile 2r\varphi\pi$ von der Trommel ab. Es dreht sich daher die Trommel T und Scheibe S um $\angle\varphi$, und wird die Scheibenebene unter dem Rädchen R fortgeschoben. Das Rädchen rollt daher den $\smile 2r\varphi\pi$ ab und der Zeiger zeigt 1 an, weil 1 mal $\smile 2r\varphi\pi$ abgelaufen ist. (Siehe oben im §. 2. No. I.) Führt man F aus n_I nach n, so schiebt sich das Rädchen auf Radius bc nach c zurück, weil Punkt b in Punkt A getreten ist, und dreht sich nicht, weil es in der Richtung seiner Axe verschoben wurde; der Zeiger bleibt also auf 1 stehen. Führt man nunmehr T aus n nach m, so schiebt sich Schieber E mit Schieber P, mit der Trommel T und der Scheibe S zur Länge der $\backslash nm = \backslash m_In_I = \smile 2r\varphi\pi$ in der Richtung nm, und es wickelt sich $\smile bA = \smile 2r\varphi\pi$ wieder auf die Trommel T, welche dabei um $\angle\varphi$ zurückgedreht wird; das Rädchen aber dreht sich nicht, weil es auf Punkt c steht, wo der Scheibenradius $= 0$ ist und ein Radius 0 das Rädchen nicht treibt; es bleibt daher der Zeiger auf

1 stehen. Wir haben die Fläche $\backslash cA . \backslash m_I n_I = r . 2r\varphi\pi = 1 . 2r^2\varphi\pi$ umfahren, das Rädchen hat $1 . \smile 2r\varphi\pi$ abgelaufen und der Zeiger zeigt 1 an.

Hierbei ist das Rädchen über die Linie cA und cb geschoben worden und über den Bogen Ab gelaufen. Hätten wir an Stelle des Rädchens den Schreibstift eingesetzt gehabt, so hätte er den Sector Acb gezeichnet. Diese Erscheinung hat Manchen zu dem unrichtigen Schluss verleitet, als berechne das Instrument diejenigen Sectorenflächen, welche beim Umfahren der zu messenden Figuren in der Scheibenebene sich bilden. Berechnen wir die Fläche des Sectors und die Fläche des zugehörigen Parallelogramms $m_I n_I$, so ist die Fläche

des Sectors $= r^2\varphi . \pi$, aber die Fläche
des Parallelogramms $= \backslash cA . \backslash m_I n_I$
$= r . 2r\varphi\pi$
$= 2 . r^2\varphi . \pi.$

Es ist also das Parallelogramm mn_I doppelt so gross, als der Sector und es ist somit die Fläche des Sectors hinsichtlich der Form und Grösse eine andere, als die des umfahrenen Parallelogramms.

Stellen wir aber auf den Bogen $Ab = 2r\varphi\pi$, und zwar senkrecht auf die Scheibe S, die Fläche eines rechteckigen Parallelogramms von der Höhe r auf, so hat diese kreisförmig gebogene Fläche die Grösse $2r\varphi\pi . r = 2r^2\varphi\pi$. Es ist diese Fläche $2r^2\varphi\pi$ ein Stück Cylindermantel. Legen wir die Fläche dieses Stücks Cylindermantel in eine Ebene, so erhalten wir ein ebenes Rechteck von der Grösse und Form des Parallelogramms $mn_I = 2r^2\varphi\pi$.

Wir wollen die Bogen in der Scheibenebene, worauf das Rädchen rollt, die Lautlinie nennen.

Da alle Grundlinien der Flächeneinheiten einer Fläche auf der Scheibe S in Bogenlinien verwandelt werden, so können wir uns jede Fläche, die wir mit $\backslash$ umfahren, in einen Flächenstreifen verwandelt denken, dessen Grundlinie die Lauflinie $= n . 2r\varphi\pi$ und dessen Höhe $= r$, dessen Flächengrösse also $= n . 2r^2\varphi\pi$ ist. Hiermit sind wir auf unsere ursprüngliche Vorstellung in Fig. 1. und auf den dabei gültigen Satz, n Grundlinien drücken n Flächeneinheiten aus, zurückgekommen.

§. 8.

Fortsetzung der Messungsoperationen.

II. Stellen wir das Rädchen wieder in Punkt c (Fig. 6.), F in Punkt m und den Zeiger auf 0 ein, und führen F von m nach m_I, so schiebt sich das Rädchen radial aus c nach A und dreht sich nicht; der Zeiger bleibt auf 0 stehen. Führt man F aus m_I nach n_6, so wird auch der Schieber P mit Trommel und Scheibe zur Länge der Linie $m_I n_6$ durch den Schieber E fortgeschoben und es wickelt sich der Bogen $Ab_4 = 2r.3\varphi\pi = 3.\smile 2r\varphi\pi$ ab, und der Zeiger zeigt 3 an. Schiebt man F aus n_6 nach n_5, so dreht sich das Rädchen nicht, weil es radial auf $\backslash\, b_4 c$, welche in Linie Ac getreten ist, geschoben wird. Führt man nun F aus n_5 nach m zurück, so wickelt sich, weil $\backslash n_5 m = \backslash m_I n_6$, der Faden $2r\pi.3\varphi$ rückwärts ab, es dreht sich die Scheibe um 3 mal $\angle\,\varphi$ rückwärts, aber das Rädchen dreht sich nicht, weil es auf Punkt c steht; der Zeiger zeigt noch die Zahl 3, d. h. 3 Flächeneinheiten an.

Der Sector $Abb_3 b_4 c$ ist $= 3.r^2\varphi\pi$, das Parallelogramm $m_I n_5$ aber $= 3\,.\,2r^2\varphi\pi$, also doppelt so gross, als der Sector.

III. Stellen wir das Rädchen R wieder in Punkt c, F in Punkt m und den Zeiger auf 0 ein, und führen F von m nach m_2, so schiebt sich das Rädchen von c nach A_I ohne sich zu drehen, der Zeiger bleibt auf 0 stehen; führen wir F von m_2 nach n_2, so wickelt sich der Faden $bA = \smile 2r\varphi\pi$ von der Trommel ab, die Trommel und Scheibe S drehen sich um $\angle\,\varphi$ und der $\smile b_I A_I = 2.2r\varphi\pi$ läuft unter dem Rädchen hin, dieses rollt den Bogen $2.2r\varphi\pi$ ab und der Zeiger zeigt 2, weil $\smile 2r\varphi\pi$ zweimal abgelaufen ist. Punkt b_I steht in Punkt A_I; man führt F aus n_2 nach n zurück, dabei schiebt sich das Rädchen auf $\backslash b_I c$, welche jetzt in $\backslash A_I c$ liegt, zurück, wobei es sich nicht dreht; führt man F von n nach m, so dreht sich die Scheibe um $\angle\,\varphi$ rückwärts, das Rädchen dreht sich aber auf Punkt c nicht.

Hätte an Stelle des Rädchens ein Schreibstift gestanden, so hätte er den Sector $A_I c b_I$ gezeichnet.

Die Fläche des Sectors ist $= (2.r)^2\varphi\pi = 4r^2\varphi\pi$; die Fläche des Parallelogramms mn_2 ist $= (2r.)2r\varphi\pi = r.(2.2r\pi\varphi) = 4r^2\varphi\pi$. (Siehe oben §. 2. No. II.)

In diesem Falle ist die Fläche des Sectors = der Fläche des Parallelogramms mn_2, denn es ist die auf die Lauflinie $A_1 b_1$ (= $4r\varphi\pi$) und auf die Scheibenebene zur Höhe von r zu setzende Fläche = $r \,.\, 4r\varphi\pi = 4r^2\varphi\pi$.

IV. Wenn man die Fläche mn_1 mit F umfährt, so bilden sich die Lauflinien $A_1 b_1 b_5$ (= $2 \,.\, 2r \,.\, 2\varphi \,.\, \pi = 4 \,.\, 2r\varphi\pi$) und der Sector $A_1 b_1 b_5 c$. Die Fläche des Sectors ist = $(2r)^2 2\varphi\pi = 4 \,.\, 2r^2\varphi\pi$, die Fläche des Parallelogramms mn_1 aber ist = $r \,.\, 2 \,.\, 2r \,.\, 2\varphi\pi = 4 \,.\, 2r^2\varphi\pi$. Es sind beide Flächen, wie im vorigen Falle, einander gleich.

V. Umfährt man das Parallelogramm mq, so wird das Rädchen auf den Radien cA_2 und cb_2 geschoben und auf $\smile A_2 b_2$ abgerollt. Der Bogen $A_2 b_2$ ist = $2 \,.\, 3r \,.\, \varphi\pi$, die umfahrene Fläche aber ist = $\backslash mp \,.\, \backslash pq = 3r \,.\, 2r\varphi\pi = 3 \,.\, 2r^2\varphi\pi$. Der Zeiger muss daher, wenn das Rädchen den $\smile A_2 b_2$ abrollt, die 3 Einheiten dieses Bogens, und somit auch die 3 Einheiten der Fläche mq anzeigen.

Die Fläche des Sectors $A_2 cb_2$ ist = $(3 \,.\, r)^2\varphi\pi = 9 \,.\, r^2\varphi\pi$; das Parallelogramm mq aber hält nur $3r \,.\, 2r\varphi\pi = 6 \,.\, r^2\varphi\pi$ an Flächengrösse; abermals ein Beleg, dass die in die Scheibenebene vom Contactpunkt des Rädchens eingezeichneten Sectorflächen mit den in der Zeichnungsebene umfahrenen Flächen weder der Form, noch stets der Grösse nach gleich sind, gleichwohl aber das Instrument die Grösse der umfahrenen Flächen richtig anzeigt.

Der Oppikofer'sche Planimeter kündigt sich mit einem Paradoxon an, indem er durch Umfahren der Umfangslinien ebener Flächen die Grössen dieser Flächen berechnet, in der Geometrie aber bekannt ist, dass die Umfangslinien ebener Flächen zu einander in einem anderen Verhältnisse stehen, als die Flächen. Bei einer Quadratlinie hat man für die Fläche den Werth 1^2, bei 4 Quadratlinien hat die Fläche den Werth 2^2 und bei 9 Quadratlinien hat die Fläche den Werth 3^2, die Umfangslinie bei $1\square'''$ ist = 4, bei $4\square'''$ = 8, bei $9\square'''$ = 12. Es verhalten sich daher die Flächen wie 1 : 4 : 9, die Umfangslinien aber wie 4 : 8 : 12 oder wie 1 : 2 : 3, oder wie die Wurzeln aus den Flächen. Wir wissen nunmehr die Lösung, da der Planimeter nur die Grundlinien der Flächen abmisst, im Nullpunkte und bei radialen Verschiebungen aber das Rädchen nicht gedreht wird.

§. 9.

Fortsetzung der Messungen. Der Planimeter addirt und subtrahirt und giebt Flächengrössen als Summen oder als Differenzen an.

VI. Es ist in Fig. 6. Tab. I.

$$\square\, mq - \square\, mn_2 = \square\, m_2 q = \square\, mn_1$$

oder

$$\square 3.2r^2\varphi\pi - \square 2.2r^2\varphi\pi = \square 1.2r^2\varphi\pi.$$

Wir haben bereits erfahren, dass das Verschieben des Führstiftes F in den mit dem Schieber E parallel laufenden Linien, d. h. in den Radien der Scheibe S, ebensowenig eine Drehung des Rädchens hervorbringt, als das Umdrehen der Scheibe beim Stande des Rädchens in c, und dass daher nur das Abrollen der Laufbogen auf die Drehung des Rädchens wirkt. Die Verschiebungen des Rädchens auf den indifferenten Linien, und das Drehen des indifferenten Punktes c können daher bei Verfolgung des Ganges des Instrumentes ganz ausser Acht gelassen werden.

Stellen wir F in m, das Rädchen in c und den Zeiger auf 0 ein und führen F aus m nach p, so bleibt, wie wir bereits wissen, der Zeiger auf 0 stehen; führen wir F aus p nach q, so durchläuft das Rädchen 3 mal den einheitlichen Bogen $2r\varphi\pi$, also den Bogen $3.2r\varphi\pi = \smile A_2 b_2$, und der Zeiger steht auf 3; führen wir F aus q nach n_2, so bleibt der Zeiger auf 3 stehen, führen wir nun F aus n_2 nach m_2, so dreht sich die Trommel mit der Scheibe um $\angle\, \varphi$ und $\smile b_1 A_1 = 2 \smile 2r\varphi\pi$ rückwärts; das Rädchen mit dem Zeiger läuft auch rückwärts und der Zeiger ist, weil 2 mal der Bogen $2r\varphi\pi$ rückwärts abgelaufen ist, von 3, wo er stand, um 2 zurückgetreten, ist also auf 1 zu stehen gekommen.

Da wir die, die Grösse der Fläche mq bestimmende $\setminus pq$ positiv (vorwärts), aber die, die Grösse der Fläche mn_2 bestimmende $\setminus n_2 m_2$ negativ (rückwärts) überfahren haben, so hat das Instrument zuerst die Fläche mq positiv, dann die Fläche mn_2 negativ gemessen, hat das negative Maass von dem positiven abgezogen und giebt die Grösse der umfahrenen Fläche $m_2 q$ mittels des Zeigers in Folge einer Subtraction an.

§. 10.

Nulllinie, *Abscissen und Ordinaten in der Zeichnungsebene.*

VII. Steht das Rädchen in *c*, in dem Nullpunkte, so steht *F* in irgend einem Punkte in der Zeichnungsebene; führt man *F* ohne Verrückung des Schiebers *E*, und ohne Abschiebung des Rädchens von dem Punkte *c* fort, so zeichnet *F* eine gerade Linie, welche zum Faden (auf der Trommel) parallel liegt und welche wir Nulllinie nennen wollen. Diese in der Zeichnungsebene liegende Linie wird bei deren Ueberfahren in der Drehscheibe nie als Bogenlänge, sondern stets als Punkt (Nullpunkt) dargestellt, wie wir in Fig. 6. an den Sectoren gesehen haben. Legt man nun eine zu umfahrende Flächenzeichnung vor der Maschine nieder, so kann man aus allen Punkten der Umfangslinie der Zeichnung auf die von *F* gezeichnete gerade Linie (Nulllinie) rechtwinkelige Ordinaten ziehen. Die Länge einer jeden Ordinate ist gleich dem Abstande des Rädchens von *c*, bildet in der Scheibe einen Normalradius und bestimmt somit die Drehungsgrösse des Rädchens. Ist eine Ordinate = 0, so ist die Drehungsgrösse auch = 0 und es befindet sich das Rädchen im Nullpunkte, *F* aber in der Nulllinie. Diese Nulllinie ist daher als Abscisse anzusehen, da alle Ordinaten auf sie gestellt sind.

Zur Nulllinie ziehen wir in allen Fällen eine Parallele xx durch den Mittelpunkt der Scheibe und darauf senkrecht eine Linie yy_0 ebenfalls durch den Mittelpunkt der Scheibe. Diese zwei Linien xx und yy_0 sollen überall die Richtungen der Abscissen und Ordinaten vertreten (§. 7.).

Jede Fläche in der Zeichnungsebene kann man sich daher so denken, als bestehe sie aus unendlich vielen nebeneinander liegenden Ordinaten. Wenn man daher eine solche Fläche umfährt, so misst das Instrument die Länge jeder der unendlich vielen Ordinaten. Diese Thatsache giebt den Planimetermessungen, wie wir später sehen werden, einen grossen Vorzug vor jeder andern Art der Messungen.

VIII. Jede zur Nulllinie in der Zeichnungsebene liegende gerade Parallellinie wird in der Scheibe durch einen Kreisbogen ausgedrückt, wie wir bereits gesehen haben, und durch das Maass des Bogens wird die Grösse derjenigen Fläche ausgedrückt,

welche begrenzt ist durch die eben erwähnte Linie (die zur Nulllinie parallel liegt), durch 2 senkrecht auf diese Linie und auf die Nulllinie gestellte Ordinaten und durch das von den Ordinaten abgeschnittene Stück der Nulllinie (Abscissenlinie).

§. 11.

Messungen von Flächen, deren Umfangslinien gegen die Nulllinie geneigt sind. **Mittlerer Radius**, *mittlerer Kreisbogen.*

Bis hierher haben wir nur rechteckige Flächen in Betracht genommen, und zwar mit der Beschränkung, dass 2 Seiten mit der Nulllinie parallel liegen und die andern beiden Seiten senkrecht gegen die Nulllinie stehen. Nunmehr wollen wir aber sehen, was erfolgt, wenn wir mit F gerade Linien umfahren, die gegen die Nulllinie geneigt sind, z. B. in Fig. 6. Tab. I. die gerade $\backslash\, m_2 q$.

Wenn F in m_2 und das Rädchen in A_I sich bewegt, so wird im Punkte A_I ein sehr kleines Stück des Bogens $A_I b_I$ durch den Radius cA_I beschrieben; ebenso wird, wenn sich F im Punkte q und das Rädchen im Punkte b_2 bewegt, im Punkte q ein sehr kleines Stück des Bogens $A_2 b_2$ durch Radius cb_2 = Radius cA_2 beschrieben. Würde man den Radius $cA_I = \backslash\, m m_2$ successiv nach der Richtung der geraden $\backslash\, m_2 q$ bis zu $\backslash\, nq$ = Radius cb_2 oder cA_2 verlängern, und zwar dadurch, dass man die $\backslash\, m_2 q$ mit F überführe, so würde man

1) da man durch das Vorschreiten mit F aus Punkt m_2 bis q in der Richtung des Fadens $xx \parallel \backslash\, m_2 n_2 \parallel \backslash\, pq$, den Schieber E mit der Trommel und der Scheibe S zur Länge der $\backslash\, m_2 n_2$ oder der $\backslash\, pq = \backslash\, mn$ fortschiebt, die Fadenlänge $mn = 2r\varphi\pi$ abwickeln und die Scheibe um den $\angle\, \varphi$ drehen. Es würden dann aber auch

2) die Radien cA_I und cA_2 und alle zwischen ihnen denkbaren Radien zur Thätigkeit kommen und eine Curve $A_I d_3 b_2$ beschreiben, wenn an Stelle des Rädchens ein Schreibstift stände.

Setzt man aber statt des Schreibstiftes das Rädchen ein, so ist zu ermitteln, welchen Effect das Ziehen, bezüglich Rollen des Rädchens über die Curve $A_I d_3 b_2$ hat.

Ziehen wir gegen die Nulllinie mn senkrechte Ordinaten auf die gegen $\backslash\, mn$ geneigt liegende $\backslash\, m_2 q$, und zwar so, dass

zwischen den Ordinaten auf der Linie mn gleiche Zwischenräume liegen, so wächst, weil die Neigung von m_2 bis q geradling ist, jede nächste Ordinate gerade so viel, wie die vorhergehende. Es bilden daher diese Ordinaten eine arithmetische Reihe. Man kann ihre Zahl unendlich gross denken. Einer jeden solchen Ordinate entspricht ein zugehöriger Radius cA_I etc... bis cA_2.

Da man während der Zeit, in welcher man F über $\backslash\, m_2q$ führt, die Länge der $\backslash\, mn$ von der Welle abwickelt, die Linie mn aber nach unserer Voraussetzung in unendlich viele, gleichgrosse Theile getheilt ist, so wird mit jeder Abwickelung eines solchen Theilchens ein sich gleichbleibendes Bruchtheilchen des $\angle\, \varphi$ abgewickelt. Während sich das Bruchtheilchen des $\angle\, \varphi$ abwickelt, beschreibt der zugehörige Radius ein sehr kleines Stückchen Bogen in der Kurve $A_I\, d_3\, b_2$.

Dieses Stückchen Bogen ist aber kein Kreisbogenstückchen, indem sich der Radius während dessen, als er sich um seinen kleinen Winkel dreht, schon wieder verlängert. Es ist die Curve eine Spirale, bei welcher die radii vectores bei gleich grossen Winkelbewegungen gleichviel wachsen. Diese Gesetzmässigkeit der Curve passt aber für alle denkbare Neigungen von geraden Linien gegen die Nulllinie.

Lässt man die Curve $A_I\, d_3\, b_2$ unter dem Rädchen fortlaufen, indem man F aus m_2 nach q führt, so geschieht zweierlei:

a) Es wird das Rädchen in der Richtung seiner Axe in der Länge m_2p oder n_2q verschoben; diese Verschiebung bewirkt keine Drehung des Rädchens.

b) Es wird aber auch das Rädchen gleichzeitig von den radiis vectoribus cA_I etc. bis cA_2 in tangentieller Richtung fortgetrieben.

Wir haben oben schon bemerkt, dass die Reihe der radii vectores eine arithmetische Reihe ist. Ihr Mittelglied ist daher $= \frac{cA_I + cA_2}{2} = \frac{2r + 3r}{2} = 2{,}5.r = cA_0$. Für die Reihe der radii vectores, welche im $\angle\, \varphi$ wirken, kann man im $\angle\, \varphi$ den mittleren radius vector wirken lassen. Thut man dieses, so ist die Drehung, welche das Rädchen empfängt, $= 2{,}5.2r\varphi\pi =$ einem mittleren Kreisbogen und der diesem Kreisbogen zugehörige Halbmesser ist ein mittlerer Radius.

Würden wir F in m_0 einsetzen und nach n_0 führen, so würde in der Scheibe der $\smile\, A_0\, b_0 = 2{,}5.2r\varphi\pi$ unter dem

Rädchen hinlaufen, und es würde durch $\smile 2{,}5 . 2r\varphi\pi$ die Fläche $r . 2{,}5 . 2r\varphi\pi = 2{,}5 . 2r^2\varphi\pi = 2 . 2r^2\varphi\pi + 0{,}5 . 2r^2\varphi\pi$ angezeigt. Das $\square\, m_2\ n_0$ ist $= \frac{1}{2} \square\, m_2 q$; es ist aber auch $= \nabla\, m_2\ n_2 q = \frac{1}{2} \square\, m_2 q$. Es ist daher $\square\, mn_0 = \square\, mn_2 + \square\, m_2 n_0 = \square mn_2 + \nabla\ m_2\ n_2 q = 2 . 2r^2\varphi\pi + 0{,}5 . 2r^2\varphi\pi$.

Aus dem Vorgetragenen ergiebt sich, dass das Rädchen aus der mit den radiis vectoribus beschriebenen Spirale alle peripherischen (kreisförmigen) Längentheile der Kurve extrahirt und die in der Kurve enthaltenen radialen Längentheile negirt. Der Schreibstift aber zeichnet beiderlei Längentheile, nämlich die radialen und die peripherischen, extrahirt also nicht so, wie das Rädchen thut, die peripherischen Längentheile aus der Kurve. Die spiralförmigen Kurvenlängen sind der Anzahl der Grundlinieneinheiten nicht proportional, weil sie auch radiale Längentheile in sich enthalten. Sondert man diese aus der Länge der Kurve aus, so bleiben die peripherischen Längentheile übrig. Diese extrahirt aber das Rädchen und zählt sie mit seinem Zeiger am Zifferblatte. Bei Anwendung des höheren Calcüls bleibt die wesentlichste Eigenschaft des Rädchens, dass es peripherische Längentheile der Lauflinie extrahirt, verschwiegen und deshalb giebt der höhere Calcül, wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, keine anschauliche Klarheit über die Verrichtung des Instrumentes.

Diese Action des Extrahirens der kreisförmigen Längentheile aus den Kurven ist das Pikanteste am Instrumente, und hinsichtlich der Genauigkeit, womit es geschieht, bewundernswürdig.

Zu jeder gegen die Nulllinie geneigten geraden Linie lässt sich ein rechteckiges Parallelogramm construiren, wovon 2 Seiten parallel zur Nulllinie und die 2 anderen Seiten senkrecht gegen die Nulllinie stehen. Es ist dann diese geneigte Linie eine Diagonallinie dieses Parallelogramms. Ueberfährt man diese Diagonale mit F, so giebt der Planimeter die halbe Grösse des Parallelogramms an.

§. 12.

I. Ausmessung von Flächen, welche von Kurven begrenzt sind. Berechnung der Flächen, welche Autographen an Wärmemessern, Kraftmessern etc. schreiben. II. Berechnung der Flächen mit Hülfe des höheren Calcüls.

I. So oft wir mit F eine gerade Linie, welche aber nicht senkrecht gegen die Nulllinie stehen und nicht in der Nulllinie

liegen darf, überfahren, giebt uns das Rädchen und sein Zeiger eine Flächengrösse an. Die Grenzlinien dieser Fläche erhält man, wenn man auf die Nulllinie rechtwinkelige Ordinaten stellt, welche die Endpunkte der geraden Linie schneiden. Die gerade Linie mag dabei eine Lage gegen die Nulllinie haben, welche es sei. Ist die Linie eine geneigte, so schneidet sie die Nulllinie und es ist für den Schnittpunkt die Ordinate gleich 0; steht die Linie senkrecht gegen die Nulllinie, so ist sie selbst eine Ordinate und die Abscissenlänge (die Nulllinie ist Abscisse) = 0, und es ist keine Fläche, sondern nur eine Linie (Ordinate) vorhanden.

Wir wissen nun, dass der Oppikofer'sche Planimeter jede von geraden Linien begrenzte Ebene ausmessen, und dass man ihm dabei mit den Mitteln der elementaren Geometrie und ebenen Trigonometrie nachrechnen kann.

Da eine krumme Linie so angesehen werden kann, als bestehe sie aus einer unendlich grossen Anzahl sehr kleiner gerader, bezüglich geneigter Linien, so gilt das Gesetz, wonach der Planimeter geneigte Linien beherrscht, auch für jeden Punkt einer krummen Linie und somit für die krummen Linien selbst. Allein man kann dem Planimeter, wenn er Flächen misst, die von krummen Linien (Kurven) begrenzt sind, welche nach einem bekannten Gesetze construirt sind, nur mit Hülfe des höheren Calcüls nachrechnen.

Wo man aber keine regelmässigen Kurven hat, z. B. bei Krümmungen von Flüssen, bei Dynamometern, Gasspannungs-, Wärme- und dergleichen Metern, welche ihre Angaben mittels Autographen in Kurven machen, ist die mittlere Ordinate (der mittlere Radius) selbst mit Hülfe des höheren Calcüls nur schwer oder gar nicht zu ermitteln. Mit Hülfe des Planimeters kann man aber dennoch die vom Autographen umschriebene Fläche messen.

Dividirt man die vom Planimeter angegebene Flächengrösse durch die geradlinige Basis der Fläche, so erhält man eine mittlere Höhe (den mittleren Radius) und diese ist ein proportionaler Ausdruck der in der Beobachtungszeit vorhanden gewesenen Kraft oder Wärme etc.

II. Bei dem bisher Vorgetragenen sind wir mit unserer Anschauung und Flächenberechnung lediglich dem Gange gefolgt, wie ihn das Instrument einhält und wobei es seine Flächenan-

gaben dadurch macht, dass es die Flächeneinheit $2r^2\varphi\pi$ aus der Grundlinie $2r\varphi\pi$ und aus der Höhe r construirt und so viele Einheiten angiebt, als wie viele Flächeneinheiten in der umfahrenen Fläche enthalten sind, dass es n Grundlinien d. h. $n.2r\varphi\pi$ ausmisst und anzeigt und dadurch n Flächeneinheiten d. h. $n.2r^2\varphi\pi$ ausdrückt.

Zerlegt man die Grundlinie einer Fläche in sehr viele (m) Längentheile, so ist jeder Längentheil sehr klein $= \frac{1}{m}$. Wir können, dieses vorausgesetzt, nr als Höhe eines Flächenstreifens von der sehr kleinen Grundlinie $\frac{1}{m}.2r\varphi\pi$ denken. Stellen wir solche schmale Flächenstreifen, wovon jeder $= nr.\frac{1}{m}.2.r\varphi\pi = \frac{1}{m}.2nr^2\varphi\pi$ ist, m mal, d. h. sehr vielemal nebeneinander, so bilden sie die Fläche $m.\frac{1}{m}.2nr^2\varphi\pi = \frac{m}{m}.2nr^2\varphi\pi = 1.2nr^2\varphi\pi = n.2r^2\varphi\pi$. Wir dürfen die sehr schmalen Flächenstreifen, aus denen sich die gemessene Fläche zusammengesetzt, Ordinaten nennen und sehen dann, wie der Planimeter die Fläche durch Zusammenlegung sehr vieler Ordinaten berechnet. Durch diese Anschauung wird das freie mathematische Walten des Instrumentes klar zur Erkenntniss gebracht und diese Erkenntniss ist das Freundschaftsband zwischen dem Instrumente und Demjenigen, welcher letzteres in sich zum Verständniss gebracht hat.

Dieses Ergebniss werden wir später benutzen, wo wir die Grade der Genauigkeit der Messungen des Planimeters und der Messungen mit Zirkel und Massstab vergleichen werden.

Nach dieser Einleitung können wir auch den Gang verfolgen, den der höhere Calcül einhält. Bezeichnen wir mit

$n.r$ den Halbmesser der Lauflinie in der Scheibe, mit

r den Halbmesser der Trommel, mit

ϱ den Halbmesser des Rädchens, mit

φ den Drehungswinkel der Trommel und der Scheibe, mit

ν den Drehungswinkel des Rädchens (φ und ν in Bogenmaass), mit

x die Drahtlänge (Abscisse), welche beim Umfahren einer Fläche von der Trommel abgewickelt wird und somit die

Länge der umfahrenen Figur als einen vom Trommelradius r über den $\angle\ \varphi$ beschriebenen Kreisbogen darstellt, und es sei nr die Höhe der Flächenfigur, aber auch der Halbmesser der Lauflinie und es stehe nr senkrecht auf x.

In Fig. 6ª. Tab. I. seien das Rechteck $abcd$, das Dreieck abd, das Dreieck $abcd$ und zwar jedes für sich zu umfahren. Es seien $\backslash\ ab = x$ (Abscisse, Nulllinie), $\backslash\ bc$ und $\backslash\ ad = nr$ (Ordinaten).

Führt man den Führpunkt

1) von a nach b,

2) von b nach c, von d nach a, so dreht sich das Rädchen nicht, weil es

zu 1) auf dem Centrum der Scheibe steht und

zu 2) radial verschoben wird; es macht daher

3) nur Drehung, wenn der Führpunkt die $\backslash\ cd$ durchläuft. In der Scheibe wirkt der Radius nr auf Drehung des Rädchens. Nach diesen Voraussetzungen ist, wenn man $2.\pi$ ausser Acht lässt,

$$x = r\varphi \text{ und}$$
$$nr\varphi = \varrho\nu.$$

Hierbei ist $nr\varphi$ die Länge der in der Scheibenebene erzeugten Lauflinie und $\nu\varrho$ dieselbe Linienlänge um die Peripherie des Rädchens gewickelt. Aus $x = r\varphi$ folgt, dass $\varphi = \frac{x}{r}$. Ferner ist dann

$$nr.r\varphi = nr.x, \text{ folgl.}$$
$$nr.\varphi = \frac{nr.x}{r} = \varrho\nu \text{ und}$$
$$\varrho\nu.r = nr.x.$$

Weil $\varrho\nu = nr.\varphi$, so ist die Fläche des Rechtecks $ac = \varrho\nu.r = nr.x = nr.r\varphi = nr^2\varphi$, wie wir schon in anderer Weise gefunden haben. Hierbei ist für den in der Scheibe entstehenden Flächenwerth $\varrho\nu.r$ die Form der Fläche ein Flächenstreifen von der Höhe r und von der Grundlinienlänge $\varrho\nu$, während der Werth $nr.x = nr.r\varphi$ die Fläche in der Form darstellt, wie sie in der Zeichnungsebene ist, wo sie die Grundlinie $r\varphi$ und die Höhe nr hat.

4) Umfahren wir das Dreieck abd oder $abcd$, so ist nr veränderlich, bei dem Anfangspunkte $b = 0$ und für jeden fol-

genden Punkt der Abscisse wachsend, also $= 0 + y = y$, wenn wir y statt des veränderlichen nr setzen, und wir haben dann die Relation

$$\varrho \,.\, dv = nr \,.\, d\varphi = y \,.\, d\varphi.$$

Aus $dx = r \,.\, d\varphi$ folgt dann, dass $d\varphi = \frac{dx}{r}$. Es ist dann

$$\varrho dv = y \frac{dx}{r} \text{ und } \varrho v \,.\, r = \int y dx.$$

Nach den Regeln der Integralrechnung ist aber der Ausdruck $\int y dx$ ein Flächenausdruck, der in unseren Fällen des Δ *abd* und bezüglich das $\backsim$ *abed* darstellt, während durch $\varrho v \,.\, r$ ein Flächenstreifen ausgedrückt wird, der die Länge ϱv und die Breite r hat.

Läge in den Fällen unter No. 4. die Nulllinie nicht in $\backslash\, ab$, sondern in $\backslash\, a_I\, b_I$, so wäre nr für den Anfang $= b_I b = m = m + y$, wobei $y = 0$ wäre, und am Ende der Drehung $= (\backslash\, a_I a = \backslash\, b_I b = m) + y$, wobei $y = nr = \backslash\, ad$ wäre, die Abscisse x_I aber $= x$. Alsdann hätten wir

$$\varrho dv = (m + y)\, d\varphi = (m + y) \frac{dx}{r} \text{ und es wäre daher}$$

$$\varrho v r = m \,.\, x + \int y dx.$$

Hierbei wäre $m \,.\, x$ die Fläche ab_I und $\int y dx$ die Fläche *abd* oder *abed*.

Was in diesen Fällen von rechtwinkeligen Ordinaten gilt, würde auch mutatis mutandis von schiefwinkeligen Ordinaten gelten.

Wer tiefer in diese Rechnungsweise eingehen will, lese §. 60. dieses Buches und die Abhandlungen der Professoren Stampfer und Bauernfeind.

Durch die letzten Betrachtungen haben wir kennen gelernt, wie der Planimeter nach dem schon vor mehr als 60 Jahren gemachten Vorschlag von Gauss (siehe Lübsen, Elementargeometrie 2. Aufl. 1855, §. 203.), die Feldmesskunst aus der Niederung der Euklidischen Geometrie in die Sphäre der Cartesius'schen höheren Geometrie und aus der Ebéne der gemeinen Arithmetik in die Regionen des Leibnitz'schen und Newton'schen höheren Calcüls erhebt, wie der Planimeter die engherzige Flächenberechnung aus Dreiecken verlässt und die Flächengrössen im steten Laufe mit Hülfe von Abscissen durch unendlich viele

Ordinaten zusammenlegt, und dass der Planimeter dieses thut, ohne dass der Führer des Instrumentes Kenntnisse in höherer Geometrie und höherem Calcül zu haben braucht.

Auf Grund des zuletzt erwähnten Umstandes verlassen wir den Gang des höheren Calcüls, zumal da uns derselbe in unserer anschaulichen und zerlegenden Betrachtungsweise nicht führt, und gehen auf dem gleich Anfangs von uns eingeschlagenen Wege weiter.

§. 13.

Nullpunktslinie. *Messungen diesseits und jenseits der Nullpunkslinie.*

Ziehen wir in die Scheibe durch den Nullpunkt eine gerade Linie, welche senkrecht auf der Axe des Rädchens steht, so theilt diese Linie, welche wir, weil sie im Nullpunkte liegt, Null**punkts**linie nennen wollen, die Scheibe *S* in zwei Hälften.

Anmerkung. Das Charakteristische an der Nullpunktslinie ist, dass sie senkrecht auf der Axe des Rädchens steht, nicht aber, dass sie parallel zu *XX* liegt. Denn wir werden später sehen, dass sie auch geneigt gegen *XX* oder *xx* liegen kann. (Siehe Fig. 19. §. 22.)

Wenn im Vorhergehenden alle Operationen nur in der, der abzumessendeu Flächenzeichnung zugewendeten, Hälfte der Scheibe *S* vorgenommen wurden, so geschah dieses blos deswegen, um in die Betrachtungen des Wesentlichen keine Verwickelungen zu bringen. Es können aber alle bisher besprochenen Operationen auch auf der entgegengesetzten Seite der Scheibe vorgenommen werden. Dabei tritt sonst keine Aenderung ein, als dass das Rädchen, wenn es jenseits des Centrums der Scheibe *S* steht, linksum gedreht wird, während es bei derselben Richtung der Führung des Schiebers, auf der der Flächenzeichnung zugewendeten Hälfte der Scheibe *rechtsum gedreht wird* und umgekehrt.

§. 14.

Flächenmessungen von Dreiecken auf beiden Scheibenhälften.

In Fig. 7. Tab. II. ist $\backslash nq$ die Nulllinie, Punkt *c* der Nullpunkt. Die Trommel *T* hat zur Peripherie die Länge der Linie

nq. Schiebt man den Schieber E in der Richtnng der Linie qn zu $\frac{1}{12}$ der $\backslash\, nq$ fort, so dreht sich die Trommel T um $\frac{1}{12} \angle q| = \angle\, acb = \frac{1}{12} 2r\pi = \frac{1}{6} r\pi$, also um $\frac{1}{6}$ des Halbkreises. Schiebt man also den Schieber E von w nach $n = 6 . \frac{1}{6} r\pi = r\pi$ fort, so dreht man die Scheibe um $\angle\, 180^0$.

Die $\backslash\, mw$ ist $= \backslash\, nw = \backslash\, wq = \backslash\, wp$ und jede dieser Linien ist zu leichterer Herstellung der Construction der Figur in 6 gleiche Theile getheilt. Die $\backslash mn$ ist $= \backslash np, = \backslash pq, = \backslash\, qm$ und auch jede von diesen ist in 6 gleiche Theile getheilt. Die $\backslash\, mw$ ist auch $= \backslash\, ac = \backslash\, ca_I$. Die Peripherie der Drehscheibe S ist in 12 gleiche Theile getheilt; in die Theilpunkte sind aus c Radien gezogen. Der Radius ist in 6 gleiche Theile getheilt und durch diese sind concentrische Kreise gezogen.

Führt man nun F aus m nach I, so dreht sich die Scheibe S um den $\angle\, acb$ und das Rädchen rollt auf dem Bogen ab; geht F von I nach II, so dreht sich die Scheibe so viel, als der $\angle\, bcd$ beträgt, und während dessen rollt das Rädchen auf dem Bogen bd; gèht F von II nach III, so rollt das Rädchen auf Bogen df; geht F von III nach IV, so rollt das Rädchen durch den Bogen fg; geht F von IV nach V, so läuft das Rädchen auf $\smile gh$, und wenn F von V nach n geführt wird, so rollt das Rädchen auf $\smile hc$. Es ist somit in der Scheibe S das Rädchen R auf der Curve $abdfghc$ fortgeschoben und gerollt worden und es hat jetzt die Curve $abdfghc$ die Lage der Curve $a_I b_I d_I f_I g_I h_I c$. Jene Curve ist von allen radiis vectoribus, welche zwischen Null und zwischen $\backslash\, ca = n . r$ denkbar sind, unter gleichmässiger Abnahme der Radien beschrieben worden und es setzt sich diese Curve aus zwei Hauptrichtungen zusammen, nämlich aus der radialen ca oder cb etc. und aus der um c liegenden peripherischen. Indem das Rädchen auf dieser Curve fortgerollt ist, hat es durch die radiale Richtung keinen Anstoss zur Drehung erhalten, während die peripherische Richtung auf die Umdrehung des Rädchens hingewirkt hat. Da die Curve bei gleichmässiger Abnahme der Radien von der Grösse $n . r$ bis Null entstanden ist, so bildet die Reihe der Radien eine arithmetische Progression. Es ist daher der mittlere Radius $= \frac{0 + n . r}{2}$ $(= \backslash\, c3)$, so dass die Summe aller in der Curve enthaltenen peripherischen Längentheile dem mit dem Radius $c3$ beschriebenen

Halbkreis $3f\ 3_I$ gleich ist und diese Summe $= \frac{n.r}{2}\pi$ ist. Multiplicirt man letztere Summe mit r, so erhält man $\frac{nr^2\pi}{2}$ und es ist diese Fläche in der Hälfte des Quadrates $m_I mnw$, welche besteht aus $\Delta\ mnw$, enthalten.

Führt man F von n nach p, so läuft unter dem Rädchen R die Curve $ch_3g_3f_Id_3b_3a$ in umgekehrter Richtung hin. Es legt sich diese Curve in die Lage $ch_2g_2f_2d_2b_2a_I$ und es ist damit das $\Delta\ wnp$ gemessen, seiner Grösse entspricht die Länge des Halbkreises $3f\ 3_I$.

Für das $\Delta\ pwq$ läuft als Bahn des Rädchens die Curve $a_Ib_2d_2fg_2h_2c$, welche die Lage der Curve $ch_3g_3f_Id_3b_3a$ einnimmt, und es entspricht der Grösse dieses Dreiecks der Halbkreis 3_If3; für das $\Delta\ qwm$ endlich läuft die Curve $ch_Ig_Ifd_Ib_Ia_I$ in umgekehrter Richtung und legt sich in die Lage $chgfdba$, und der Grösse dieses Dreiecks entspricht der Halbkreis 3_If3.

Die Summe der peripherischen Längentheile aller dieser 4 Curven ist $=$ 4 mal dem Halbkreise $3f3_I = 4.\frac{nr\pi}{2} = 2nr\pi$, die Flächengrösse aller 4 Dreiecke, also des ganzen Quadrates $mnpq = r.2nr\pi = 2.nr^2\pi$. Es wird also die mittelst vieler radii vectores beschriebene Curve auf einen einfachen Kreisbogen und die Reihe der Radien zu einem mittleren Radius umgerechnet.

Ein Beispiel in Zahlen bestätigt die Richtigkeit des Vorgetragenen. Wäre z. B. der Halbmesser des Rädchens $= \varrho =$ 3,978‴, der Halbmesser der Trommel $= r = 4'''$, so wäre $r\pi$, dem wir oben die $\backslash nr$ gleichgesetzt haben, $= 4.3,141 =$ 12,564‴. Da wir $\backslash nw = \backslash mw = n.r$ gesetzt haben, so wäre auch $n.r = 12,564'''$, also $n = \frac{12,564}{(r=4)} = 3,141$.

In der Papierebene wäre hiernach die Fläche $m m_I n w =$ $12,564^2$ und die Fläche des Dreiecks $mnw = \frac{12,564^2}{2} =$ $\frac{m m_I n w}{2} = 78,927\ \square'''$. Der Werth der in der Curve $abdfghc$ enthaltenen peripherischen Längentheile ist $= \frac{nr}{2}\pi$ gefunden worden. Das Rädchen rollt mit seiner Peripherie die periphe-

rischen Längentheile $\frac{nr}{2}\pi = \frac{12{,}564}{2}.3{,}141 = 19{,}7349$ ab. Die Peripherie des Rädchens ist aber $= 2\pi\varrho$, es ist daher $\frac{\frac{nr}{2}\pi}{2\pi\varrho}$ der Quotient, welcher ausdrückt, wieviel Mal die Peripherie des Rädchens in den peripherischen Längentheilen der Curve *abdfghc* enthalten ist. Nun ist aber $\frac{\frac{nr}{2}\pi}{2\pi\varrho} = \frac{19{,}7349}{6{,}283.3{,}978} = \frac{19{,}7349}{24{,}994}$ $= 0{,}7895$. Es ist somit das Rädchen 0,7895 mal auf der Länge $\frac{nr}{2}.\pi = 19{,}7349$ abgelaufen. Da nun die Peripherie des Rädchens oder das ihr entsprechende Zifferblatt in 100 Theile, wovon jeder eine Quadratlinie ausdrückt, getheilt ist, so zeigt der Zeiger $0{,}7895 \times 100 = 78{,}92$ □‴ an, wieviel die Fläche *mnw* nach obiger Flächenberechnung bis auf eine kleine, aus Vernachlässigung von Decimalen herrührende, Differenz enthält.

§. 15.

Fortsetzung ähnlicher Messungen, wie in §. 14. *Orientirung hinsichtlich der Richtungen der Drehungen der Scheibe und der Trommel. Subtraction negativer Flächengrössen.*

Erklärung der Figg. 10., 11., 12.

1) Ganz ähnlich bilden sich für den Fall, wo die Basis grösser, als die Höhe des Dreiecks ist, die Spirale (Fig. 8. Tab. II.), wobei $\backslash\, nm$ als die doppelte Länge der Peripherie der Trommel angenommen worden ist; und für den Fall, wo die Höhe des Dreiecks grösser, als dessen Basis ist, die Spirale in Fig. 9. Tab. II., wobei $\backslash\, nw$ als der 4. Theil der Länge der Peripherie der Trommel angenommen worden ist. Die Zusammensetzung dieser Spiralen kann sich Jeder aus dem Inhalte des vorigen §. selbst erklären. Es entspricht nämlich in Fig. 8. Tab. II. die Grösse der Fläche *mnw* der doppelten Länge des Kreises $33_2 3_3 3$ und in Fig. 9. entspricht die Grösse der Fläche *mnw* der Länge des Viertelkreises $2dd_I$.

Wenn die Diagonalen *wn* Fig. 8., *mn* Fig. 9. nicht gerade Linien, sondern Curven sind, so tritt analog das wieder ein, was hierüber im §. 12. gesagt worden ist.

2) Zu einer übersichtlichen Erläuterung des Ganges des Instrumentes dienen auch noch die Figg. 10., 11., 12. Tab. II.

$S\,S_I$ sei die Drehscheibe, der kleine Kreis der Cylinder oder die Trommel T, XX der Draht, xx die Richtung, in welcher der Cylinder parallel mit dem Drahte vor- und rückwärts geführt wird, F der Führstift. Schiebt man mittelst F die Axe c des Cylinders T in der Richtung des Pfeiles a, und das Rädchen befindet sich auf der Hälfte S der in Fig. 10. durch $\backslash\, xx$ und in Fig. 11., 12. durch $\backslash\, zz$ diametral getheilten Drehscheibenfläche, so läuft das Rädchen und der an dessen Axe befestigte Zeiger vorwärts, giebt also positive Grössen; befindet sich aber bei derselben Richtung der Bewegung des Führstiftes F (siehe Pfeil g) das Rädchen R auf der Hälfte S_I der Drehscheibenfläche, so läuft das Rädchen und der Zeiger rückwärts, giebt also negative Grössen. Schiebt man mittels F die Axe c in der Richtung des Pfeiles b, wobei sich das Rädchen auf der Hälfte S der Scheibenfläche befindet, so läuft das Rädchen und der Zeiger ebenfalls rückwärts, giebt negative Grössen; befindet sich aber das Rädchen während seiner Bewegung in der Richtung des Pfeiles d auf der Fläche S_I der Drehscheibenfläche, so läuft es mit dem Zeiger vorwärts, giebt positive Grössen.

Anmerkung. Die Umstände, welche die $\backslash\, zz$ schief über die Scheibe legen (Fig. 11., 12.), werden später angegeben. (§. 18. 21.)

3) Wenn wir daher für die Figg. 13., 14. Tab. II. dem Instrumente diejenige Stellung zur Zeichnung geben, dass das Rädchen auf dem Mittelpunkte c der Drehscheibe steht, wenn F in den Flächen der Figg. 13., 14. ebenfalls auf c steht, und wir stellen dann F auf a ein, so zeigt der Zeiger die Flächengrössen

1) $+\,\Delta\, abc$, wenn man die Linie ab in der Richtung von a nach b überfährt,

2) $+\,\Delta\, bdc$, wenn man $\backslash\, bd$ in der Richtung von b nach d überfährt,

3) $-\,\square\, demc$, wenn man die $\backslash\, de$ in der Richtung von d nach e überfährt,

4) $+\,\square\, emck$, wenn man die $\backslash\, ek$ in der Richtung von e nach k überfährt. Man hat daher vom Zeiger angezeigt erhalten

$$-\,\square,\ demc,\ +\,\square,\ emck = -\,\Delta\, dek$$

und

$$- \square, \; demc, + \square, \; emck = - \square dek.$$

Vorher gab das Instrument $+ \Delta cbd$, zieht man davon ab $- \Delta dek$ oder $- \square dek$, so bleibt übrig die Fläche $+ cbdek$.

Das Instrument hat daher durch die vorgenommene Führung angegeben

$$+ \Delta abc + cbdekc.$$

Man sieht hier deutlich, wie das Instrument erst das Δcbd positiv giebt und davon das Δdek abzieht, ferner sieht man, wie der Planimeter die Flächen, die er misst, mit der Basis an die Nulllinie anlegt und alle Ordinaten senkrecht auf die Nulllinie stellt.

5) Die angegebenen Beispiele werden hinreichen, um den Gang des Instrumentes mit Klarheit überblicken und für andere Fälle das Ergebniss auffinden zu können. Für den praktischen Gebrauch des Instrumentes ist es unerlässlich nöthig, dass der Arbeiter in den Bewegungen des Planimeters orientirt ist.

§. 16.

Berechnung der Grösse der Bestandtheile des Planimeters.

Es ist nothwendig, dass man die Grösse der Scheibe, des Rädchens, der Trommel, die Länge des Schiebers und der Grundplatte, je nach der Anforderung, die man hinsichtlich des Umfangs des Instrumentes macht, bestimmen und berechnen kann. Wir wollen mit Berechnung der Grösse der Trommel T und des Rädchens R beginnen.

Wenn wir eine Fläche mit F umfahren, so hat diese nach dem Bisherigen die Grösse $n.2r^2\varphi\pi$ oder n Flächeneinheiten. Wir wissen, dass der Planimeter in seiner Scheibenebene von jeder Fläche, welche $= n.2r^2\varphi\pi$ ist, die Grundlinie $n.2r\varphi\pi$ dieser Fläche vom Rädchen R abrollen lässt, dass er also jede Fläche $n.2r^2\varphi\pi$ als einen Flächenstreifen darstellt, dessen Länge $= n.2r\varphi\pi$ und dessen Höhe $= r$ ist. Ist also $n.2r^2\varphi\pi$ die Fläche, so ist die Grundlinie davon $= \frac{n.2r^2\varphi\pi}{r}$. Hätte die Fläche $100\square'''$, so wäre die Grundlinie dieser $100\square''' = \frac{100\square'''}{r'''}$.

Diese Grundlinie läuft in der Scheibenebene unter dem Rädchen hin und wird von der Peripherie des Rädchens abgerollt. Verlangen wir nun, dass das Rädchen alsdann, wenn man eine Fläche

von $100\square'''$ umfahren hat, 360^0 durchlaufen hat, so ist die ganze Peripherie des Rädchens von der Länge der Grundlinie $\frac{100\square'''}{r}$, abgerollt worden, und der Zeiger an der Welle des Rädchens zeigt an dem Zifferblatte, wenn wir dessen Umfang in 100 Theile getheilt haben, 100 an. Setzen wir den Halbmesser des Rädchens $= \varrho$, so ist die Peripherie des Rädchens $= 2\pi\varrho$ und $= \frac{100\square'''}{r}$. Da nun aber $100\square'''$ ausgedrückt werden durch 100 Grundlinien oder schlechthin durch 100, so kann man für $100\square'''$ schlechthin 100 setzen. Es ist dann $2\pi\varrho = \frac{100}{r}$. Hiernach haben wir die Gleichung

$$\frac{n \cdot 2r^2\varphi\pi}{r} = \frac{100}{r} = 2\pi\varrho.$$

Daraus folgt, dass

$$2\pi\varrho r = 100$$

und daraus folgt

$$\text{I. } \varrho = \frac{100}{2\pi r} = \frac{\frac{100}{2\pi}}{r} = \frac{15{,}91596}{r}$$

$$\text{II. } r = \frac{100}{2\pi\varrho} = \frac{\frac{100}{2\pi}}{\varrho} = \frac{15{,}91596}{\varrho}$$

Setzen wir für r einen bestimmten Werth, so ist der Halbmesser des Rädchens auch bekannt.

Da aus der Gleichung $2\pi r\varrho = 100'''$ auch folgt, dass

$$r\varrho = \frac{100'''}{2\pi} = 15{,}91596''',$$

so ist, wenn man $r = \varrho$ setzen will, sowohl r als $\varrho = \sqrt{r\varrho} = \sqrt{\frac{100'''}{2\pi}} = \sqrt{15{,}91596'''} = 3{,}9898'''$.

Würde man einen Planimeter für Millimeter einrichten und das Zifferblatt in 400 Theile theilen, so wäre

$$\varrho = \frac{\frac{400}{2\pi}}{r} = \frac{63{,}6638^{mm}}{r},$$

$$r = \frac{\frac{400}{2\pi}}{\varrho} = \frac{63{,}6638^{mm}}{\varrho}$$

und für den Fall, dass $\varrho = r$ ist, $\varrho = r = \sqrt{63{,}6638^{mm}} = 7{,}97875^{mm}$. Wollte man die Fläche von $100\square'''$ beibehalten, aber statt in Linien in Millimetern berechnen, so wäre $\sqrt{100'''}$ paris $= 10'''$ par. $= 10 \,.\, 2{,}2558^{mm} = 22{,}558^{mm}$ und $22{,}558^2 = 508{,}86336\square^{mm} = 508{,}86336 \,.\, 1\square'''$. Die Zahl 508,86336 hätte man statt 100 in die Formel einzustellen. Wollte man dann $r = \varrho$ nehmen, so hätte man $r\varrho = \frac{508{,}863}{(2\pi = 6{,}283)} = 81$ und $\sqrt{81} = 9^{mm} = r = \varrho$.

Anmerkung: Die Berechnung von ϱ erleidet eine Modification durch die Dicke des Drahtes, welcher sich auf die Trommel aufwickelt, siehe §. 39.

Ferner watet das Rädchen in der Masse des Scheibenüberzugs und erleidet dadurch eine Verringerung seiner Drehung, indem der mittlere getriebene Halbmesser um etwas kleiner ist, als der Halbmesser des Rädchens. Die Fabrik hat darüber ihre Regel für die Berechnung der Grösse des Rädchens. Derjenige, welcher den Planimeter braucht, hilft dem richtigen Gang durch die Regulirvorrichtung nach, s. §. 30 f.

Hat man abwechselnd nach Karten zu arbeiten, welche nach verschiedenen Maassstäben aufgetragen sind, so ist es vortheilhaft, sich für jeden Maassstab ein besonderes Rädchen anfertigen zu lassen und nach Bedürfniss je das betreffende Rädchen einzulegen. Weichen die Maassstäbe nicht viel von einander ab, so lässt sich das Instrument auf die verschiedenen Maassstäbe (z. B. auf Procentmaassstäbe) ohne Anwendung mehrerer Rädchen mittels der Regulirvorrichtung einstellen, wovon später gehandelt werden wird (§. 32.). Ueber weitere Hülfsmittel vergleiche man §. 32. lit. *B* und *D*.

Wenn der zwischen die Ständer *XX* der Grundplatte *G* aufgespannte Faden die Länge *L* und der Durchmesser der Scheibe *S* die Grösse *D* hat, so ist *L.D* die Grösse der Fläche, welche man mit dem Führstifte *F* umfahren kann.

Schiebt man den Schieber *P* mit der daraufstehenden Welle und Trommel *T* entlang dem aufgespannten Faden, so dreht sich die Trommel mit der Welle und Scheibe *S* *q* mal um. Ist *r* der Halbmesser der Trommel, so ist $2\pi r$ ihr Umfang und $2\pi rq$ die Fadenlänge *L*, welche die Trommel abwickelt. Aus der Gleichung

$$L = 2\pi rq$$

folgt weiter, dass

$$q = \frac{L}{2\pi r} \text{ und } r = \frac{L}{2\pi q}.$$

Da r auch $= \frac{100}{2\pi\varrho}$, so ist auch

$$\frac{100}{2\pi\varrho} = \frac{L}{2\pi q}$$

und

$$100.q = L\varrho.$$

Daraus folgt

$$\varrho = \frac{100.q}{L}$$

$$q = \frac{L\varrho}{100}$$

$$L = \frac{100.q}{\varrho}$$

Nach dem Bisherigen ist

I. LD = der Fläche, welche man mit dem Instrumente umfahren kann,

II. $L = 2\pi rq = \frac{100.q}{\varrho}$

III. $q = \frac{L}{2\pi r} = \frac{L\varrho}{100}$

IV. $r = \frac{L}{2\pi q} = \frac{100}{2\pi\varrho}$

V. $\varrho = \frac{100.q}{L} = \frac{100}{2\pi r}$.

Man darf L nicht zu lang nehmen, weil sonst der Faden der Dehnbarkeit und dem Schwanken zuviel ausgesetzt ist, man darf aber auch die Scheibe S und deren Durchmesser nicht zu gross nehmen, weil sonst die Schwungkraft beim Drehen der Scheibe zu gross und das Verhältniss des Scheibenradius zum Trommelradius zu sehr different wird. Läuft das Rädchen auf einem grossen Kreise der Scheibe und es ist in der Centricität der Trommel oder im Drahte ein kleiner Fehler, so vergrössert sich dieser Fehler in dem Verhältnisse, wie der Radius des Laufkreises in der Scheibe grösser ist, als der Trommelradius. Aus diesem Grunde hat man daher die Scheiben nicht zu gross zu nehmen.

§. 17.

Ueberblick über die möglichen Lagen des Schiebers E und der Axe des Rädchens.

I. Wir haben bisher den Schieber *E* und die Axe *w* des Rädchens *R* rechtwinklig gegen die Schienen der Grundplatte *G* und gegen den aufgespannten Faden *XX* und somit auch gegen die Abscissenlinie *xx* gestellt, die Axe des Rädchens aber parallel zur Richtung des Schiebers *E* so gelegt, dass das Rädchen auf einem Durchmesser der Scheibe *S* verschoben wird. Diese Lage der Axe des Rädchens fällt in die Richtung der Ordinatenlinie yy_0, siehe die Figg. 6., 7., 8., 9.

Wir können aber auch

II. den Schieber *E* in geneigte Lage gegen die senkrecht auf *xx* stehende Ordinate yy_0, dabei aber die Axe *w* des Rädchens parallel zur Richtung des Schiebers, jedoch so legen, dass das Rädchen auf einem Durchmesser der Scheibe verschoben wird, s. *Fig.* 15. *Tab. II. Ferner kann man*

III. in den Fällen I. und II. die Axe *w* des Rädchens zwar parallel zur Richtung des Schiebers *E*, aber so legen, dass das Rädchen auf einer Sehne der Scheibe *S* verschoben wird, s. Figg. 16., 18. Tab. III. Endlich kann man

IV. in den vier unter No. I., II., III. erwähnten Fällen die Axe *w* des Rädchens geneigt gegen die Richtung des Schiebers *E* legen, s. Figg. 19., 20., 21.. Tab. III., 23., 24., 25. Tab. IV., 31., 32. Tab. VI.

Diese 8 Fälle enthalten alle möglichen Lagen des Schiebers *E* und der Welle *w* des Rädchens. Die Folgen dieser Lagen haben wir zu untersuchen, da man wissen muss, ob das Instrument bei jeder Richtung des oberen Schiebers und der Welle des Rädchens richtige Flächenangaben macht. Denn man kann nie behaupten, dass der Schieber und die Welle des Rädchens absolut diejenigen Richtungen haben, die man ihnen bei der Stellung der Theile des Instrumentes hat geben wollen. In den nachfolgenden Paragraphen ist nachgewiesen, dass das Instrument mit jeder Richtung des Schiebers und der Welle des Rädchens zur Flächenberechnung brauchbar ist, dass es aber bei jeder Veränderung der Richtung des Schiebers und der Welle des Räd-

chens die Flächenangaben quantitativ ändert. Deshalb sind für alle Fälle die Formeln für die Werthe von r und ϱ entwickelt.

§. 18.

Folgen davon, wenn man den Schieber E geneigt gegen \ xx und \ yy$_0$ legt. Berechnung des Halbmessers des Rädchens für diesen Fall. Messungsoperation dazu.

Wir wollen den im vorigen Paragraphen unter No. II. erwähnten Fall näher betrachten, er ist dargestellt in Fig. 15. Tab. II.

In dieser Fig. 15. ist der Schieber E gegen xx und yy_0 in der geneigten Lage $y_3c_2 \parallel \backslash\ kc_I$ und die Axe Rc_2 des Rädchens liegt in der Richtung des Schiebers E. Die Neigung des Schiebers E gegen yy_0 ist = dem constanten $\angle\ A$. Die Nullpunktslinie steht senkrecht gegen die Axe des Rädchens und liegt als $\backslash\ zz$ ebenfalls unter dem $\angle\ A$ geneigt gegen $\backslash\ xx$. Mit $\backslash\ xx$ liegt die Nulllinie der Zeichnungsebene parallel.

Schiebt man den Führstift F aus c_2 nach c_I, so wird das Rädchen in $\backslash\ Rk \mathbin{\#} \backslash\ c_2\ c_I$ verschoben, es langt also in $\backslash\ xx$, worin auch Punkt c liegt, an. Da nun aber der Schieber E und mit ihm das Rädchen nur in der Richtung c_2c verschiebbar ist, so durchläuft das Rädchen R den Weg $Rc \mathbin{\#} \backslash\ R_2k$ in der Richtung des Schiebers E, während F von c_2 nach c_I verschoben wird. Es wird daher der Schieber P mit der Trommel, mit der Scheibe, mit dem Schieber E und mit dem Rädchen seitlich verschoben, so dass $\backslash\ y_4c$ in $\backslash\ c_Ik$ und Punkt c in Punkt k zu liegen kömmt. Es wickelt sich dabei die Fadenlänge ck von der Trommel und es wird dadurch die Scheibe gedreht und das Rädchen läuft rückwärts. Diese Drehung kömmt aber nicht in Berechnung, da sie, wie wir sogleich sehen werden, durch eine gleichgrosse entgegengesetzte Drehung dem Erfolge nach wieder aufgehoben wird.

Führt man nun F von c_I nach y_5, so wickelt sich die Fadenlänge $c_I\ y_5$ von der Trommel und es wird die Scheibe gedreht, aber nicht das Rädchen, weil dieses auf dem Nullpunkte c steht. Führt man F auf $\backslash\ y_5\ y_6 \mathbin{\#} \backslash\ c_I\ c_2$ nach y_6, so zieht sich das Rädchen wieder aus k nach R_2, oder weil c in k steht, aus c nach R und somit aus k nach R. Es wird dadurch der Schieber P mit Zubehör aus R_2 nach R, also zur Länge der $\backslash\ R_2R \mathbin{\#} \backslash\ kc$ seitlich verschoben. Der Faden kc wickelt

sich wieder auf die Trommel und dreht diese mit der Scheibe, dabei läuft das Rädchen eben soviel vorwärts, als es beim Ueberfahren der \ c_2 c_I rückwärts lief.

Anmerkung. Bei jeder Schiefstellung des Schiebers E kömmt die seitliche Vor- und Rückschiebung des Schiebers P vor. Die daraus entstehenden Vor- und Rück-Drehungen der Scheibe und des Rädchens kommen aber, da sie sich stets wieder aufheben, nicht in Rechnung. Es ist diese Bewegung ohne Erfolg auf das Messungsresultat, daher eine müssige Bewegung. Diese müssige Bewegung ist nicht nachtheilig, ja sogar vortheilhaft. Verschiebt man nämlich das Rädchen in der Richtung seiner Axe, so soll es der Theorie nach keine Drehung erleiden. In der Praxis erleidet es aber kleine oscillirende Drehungen in Folge kleiner Unebenheiten der Drehscheibe. Dadurch entstehen kleine Fehler. Ist dagegen das Rädchen bei dieser Verschiebung einer stetigen Drehung ausgesetzt, welche von der bewegten Scheibe bewirkt wird, so findet ein Hin- und Herschwanken des Rädchens nicht statt und seine Angaben werden nicht fehlerhaft.

Führt man F aus y_6 nach c_2, so dreht sich die Trommel mit Scheibe gemäss der Fadenlänge $y_6 c_2$ und ein vom Halbmesser cR beschriebener Kreisbogen läuft unter dem Rädchen hin und dreht es vorwärts um. Diese Bogenlänge zeigt der Zeiger an.

Indem wir die Fläche $c_2 y_5$ mit F umfahren, ziehen wir in der Scheibe das Rädchen zur Länge der \ cR aus dem Nullpunkte c aus und es ist \ cR, welche wir $= nr$ setzen wollen, der Radius, welcher die Lauflinie beschreibt. Während wir in der Scheibe den Radius $cR = nr$ aus dem Nullpunkte c auszogen, haben wir in der Zeichnung der Fläche die \ $c_I c_2 = \ kR = \ cb = \ cR . \cos A = nr . \cos A$ von der Nulllinie herab überfahren.

Die Fläche in der Zeichnungsebene ist daher $= n.2r^2\pi\varphi . \cos A$, die vom Rädchen ausgedrückte Fläche aber ist $= n.2r^2\pi\varphi$. Da $\cos . A$ ein ächter Bruch ist, so ist die Fläche $n.2r^2\pi\varphi . \cos A$ kleiner, als die Fläche $n.2r^2\pi\varphi$. Setzen wir die Fläche $n.2r^2\pi\varphi . \cos A = 100\square'''$ und $n.2r^2\pi\varphi = x\square'''$, so ist nach der Proportion

$$n.2r^2\pi\varphi . \cos A : n.2r^2\pi\varphi = 100\square''' : x\square''',$$

$$x\square''' = \frac{100\square'''}{\cos A}.$$

Wir haben nunmehr die Proportion

$$n.2r^2\pi\varphi . \cos A : 100\square''' = n.2r^2\pi\varphi : \frac{100\square'''}{\cos A}.$$

Da beide Verhältnisse einander gleich sind, wir aber $n.2r^2\pi\varphi.\cos A = 100\square'''$ gesetzt haben, so muss auch $n.2r^2\pi\varphi = \frac{100\square'''}{\cos A}$ sein. Sodann ergiebt sich aus der Gleichung

$$n.2r^2\pi\varphi = \frac{100\square'''}{\cos A}$$

der Werth der Lauflinie

$$= n.2r\pi\varphi = \frac{100\square'''}{r.\cos A} = 2\pi\varrho;$$

$$\varrho = \frac{100}{2\pi r.\cos A}.$$

Der so berechnete Halbmesser des Rädchens ist in dem Verhältnisse grösser, als $n.2r^2\pi\varphi$, grösser wie $n.2r^2\pi\varphi.\cos A$ ist. Deshalb dreht sich das Rädchen in dem Verhältnisse weniger, wie $n.2r^2\pi\varphi.\cos.A$ kleiner, als $n.2r^2\pi\varphi$ ist.

Der ganze Vorgang in der diesseitigen Hälfte der Drehscheibe hat gleichmässig in der jenseitigen Scheibenhälfte statt.

Wir wollen nun dem in der beschriebenen Weise geordneten Instrumente eine Flächenmessung nachrechnen.

Bei dieser und allen folgenden Berechnungen sind Logarithmen nicht angewendet und die wirklichen für Radius 1 berechneten Längen der trigonometrischen Linien eingestellt worden. Wer Lust hat noch andere, als die gegebenen Berechnungen anzustellen, kann ja nach seinem Belieben mit Logarithmen rechnen. Es sei

$$nr = \backslash\, cR = 40^{mm}$$

$$r \text{ (der Trommelhalbmesser)} = 15^{mm}$$

$$\angle A = 36^0;\ \cos A = 0{,}809.$$

Die Basis des zu messenden rechtwinkligen Parallelogramms habe die Länge der halben Peripherie der Trommel, also

$$= 15^{mm}.3{,}1415 = 47{,}1^{mm}.$$

Es ist die Höhe des Parallelogramms

$$= nr.\cos A = 40.0{,}809 = 32{,}36^{mm},$$

folglich die Fläche des Parallelogramms

$$= 47{,}1^{mm}.32{,}36^{mm} = 762{,}075\square^{mm}.$$

Da $nr = 40^{mm}$, so ist der mittlere Radius $\frac{0+40}{2} = 20$. Es ist dann der mittlere Halbkreis oder die Lauflinie $= 20.3{,}141 = 62{,}82^{mm}$. Auf dieser Länge läuft die Peripherie des Rädchens ab. Haben wir ein Instrument, woran ein Umgang des Räd-

chens $400\square^{mm}$ anzeigt, so ist

$$\varrho = \frac{400}{2\pi r \cdot \cos A} \text{ und } 2\pi\varrho = \frac{400}{r \cdot \cos A} = \frac{400}{15.0{,}809} = 32{,}964^{mm}.$$

Es dreht sich daher das Rädchen während der Messung $\frac{62{,}82}{32{,}964}$ = 1,9055 mal herum. Da nun ein Umgang $400\square^{mm}$ anzeigt, so giebt der Zeiger $1{,}9055 . 400 = 762{,}20\square^{mm}$ an. Oben hatten wir $762{,}82\square^{mm}$ berechnet. Die kleine Differenz beruht auf vernachlässigten Decimalen.

§. 19.

Lage des Schiebers E rechtwinklig gegen xx. Lage der Welle des Rädchens ebenso, aber seitlich von $\backslash\, yy_0$ *und parallel zu* $\backslash\, yy_0$. *Bewegungsgrösse der Halbmesser, welche die Lauflinien beschreiben.* **Anomalradius. Reductradius.** *Bedeutung der* **Nullpunktslinie. Todter Kreis.** *Berechnung des Halbmessers des Rädchens für diesen Fall.*

Wir gehen nun zu den im §. 17. unter No. III. erwähnten zwei Fällen der Lage des Schiebers *E* und der Welle *w* des Rädchens über, in welchen die Welle *w* des Rädchens zwar parallel zum Schieber *E*, aber nicht über dem Centrum *c* der Scheibe *S*, sondern seitlich und parallel zur $\backslash\, yy_0$, Fig. 16. Tab. III., oder zur $\backslash\, y_3y_2$, Fig. 18., liegt.

a) Zunächst behandeln wir den in Fig. 16. dargestellten Fall.

Bewegt man $\backslash\, cR$ um das Centrum *c* der Scheibe, so beschreibt dieser Radius *cR* für Punkt *R* ein sehr kleines Kreisbogenstück. Dieses wirkt treibend auf das Rädchen in der Richtung der Tangente dieses Bogenstückes. Es wirkt also treibend die Tangente $Rd = \backslash\, cR . \operatorname{tg}\beta$. Da aber das Rädchen mit seiner Ebene nicht in der Richtung der $\backslash\, Rd$, sondern in der Richtung der $\backslash\, Rb = \backslash\, cR . \sin\beta$ liegt, so kann es sich nur in dieser Richtung drehen, derjenige Theil der Triebkraft *Rd*, welcher in die Richtung der Axe des Rädchens fällt, geht verloren.

Die von verschiedenen Halbmessern beschriebenen Bogen desselben Winkels verhalten sich wie die Halbmesser; es verhalten sich dann auch die zugehörigen trigonometrischen Linien wie die Halbmesser. Die Bogenlängen, welche verschiedene

Halbmesser in ein und demselben Winkel beschreiben, kann man als Lauflinien der beschreibenden Punkte der Halbmesser bezeichnen. Den trigonometrischen Linien sind für einen bestimmten Winkel die Bewegungsgrössen der beschreibenden Punkte im Halbmesser proportional.

Hat nun $\backslash\, cR$ für $\angle\, \beta$ im Punkte R die tangentielle Bewegungsgrösse Rd und die sinuelle Rb, so lässt sich ein anderer Radius bestimmen, für welchen die sinuelle Bewegungsgrösse des Radius cR tangentielle Bewegungsgrösse für $\angle\, \beta$ im Punkte R ist. Daraus folgt, dass ein solcher Radius in einer Linie liegen muss, welche im Bewegungspunkte R rechtwinklig an $\backslash\, Rb$ ansteht, also in unserem Falle in der Richtung der $\backslash\, c_3R$. Auf den Grund des oben Gesagten ergiebt sich die Länge x dieses gesuchten Radius aus der Proportion

$$\backslash\, Rd : \backslash\, Rb = \backslash\, cR \,.\, \mathrm{tg}\,\beta : \backslash cR \,.\, \sin\beta = \backslash\, cR : x;$$

$$x = \frac{(\backslash cR.)^2 \sin\beta}{\backslash cR \,.\, \mathrm{tg}\,\beta} = \backslash cR \,.\, \cos\,\beta.$$

Nun ist aber $\backslash cR \,.\, \cos\beta = \backslash\, cb \;\#\#\; \backslash\, c_3R$. Es ist daher $\backslash c_3R$ der gesuchte Halbmesser, welcher für $\angle\, \beta$ im Punkte R die tangentielle Bewegungsgrösse Rb und im Punkte c_3 seinen Drehpunkt hat.

Es ist beim Planimeter vorausgesetzte Regel, dass die treibenden Radien tangentiell auf den Umfang des Rädchens in der Richtung der Ebene des letzteren einwirken sollen. Wenn daher Radius cR, wie in unserem Falle, schief gegen die Kreisebene des Rädchens wirkt, so weicht er von der Regel ab. Deshalb haben wir denjenigen Radius, welcher nach der Regel treibend wirkt, Normalradius genannt (§. 5.), und wollen denjenigen Radius, welcher schief gegen die Ebene des Rädchens wirkt, Anomalradius nennen. Wenn wir für einen Anomalradius durch Reduction der Lage und Länge desselben einen Normalradius substituiren, wie wir soeben für Radius cR den Radius c_3R substituirt haben, so wollen wir den substituirten Normalradius mit der Benennung Reductradius bezeichnen.

Der Radius cR ist rücksichtlich seiner Lage und Länge veränderlich, es ist aber besser, wenn man bei der Berechnung der Functionen des Instrumentes einen Radius von constanter Lage und Länge hat. Bei Verschiebung des Rädchens auf einer Parallelen zur Mittellinie yy_0, es mag letztere senkrecht oder ge-

neigt gegen xx liegen, kann man den senkrechten Abstand cc_3 der beiden Parallelen von einander als constanten Halbmesser (nr) annehmen, wenn man anstatt mit $\angle\ \beta$ mit dem Complementwinkel γ operirt. Es ist dann $\backslash\ c_3R$ nicht mehr mit $\backslash\ cR.\cos\beta$, sondern mit $\backslash\ cc_3.\operatorname{tg}\gamma = nr.\operatorname{tg}\gamma$ zu bezeichnen. Ferner ist dann $\backslash\ cR = nr.\sec.\gamma$. Der $\angle\ \gamma$ ist, wie $\angle\ \beta$ veränderlich, folglich mit ihm $\operatorname{tg}\gamma$ und $\sec\gamma$, also auch $\backslash\ cR$. Je näher wir den Punkt R dem Punkte c_3 bringen, desto kleiner wird $\angle\ \gamma$ und desto kleiner werden $\backslash\ cR$ und $\backslash\ c_3R$. Steht das Rädchen im Punkte c_3, so ist $\sec\gamma = \backslash\ cc_3 = nr$ und $\operatorname{tg}\gamma = 0$, also der Reductradius für den Standpunkt des Rädchens in $c_3 = nr\operatorname{tg}\gamma = nr.0 = 0$, mithin nicht treibend. Es ist dieses natürlich, da der Radius cR, wenn er $= nr$ ist, senkrecht gegen die Ebene des Rädchens, also nicht treibend wirkt.

Langt also das Rädchen in der Nullpunktslinie an, worin Punkt c_3 liegt, so kann es nicht mehr gedreht werden. Wir lernen hier die Bedeutung der Nullpunktslinie kennen. Das Rädchen wird nämlich in dieser Linie nicht getrieben, obgleich es nicht im Punkte c steht. Es hat einen anderen Nullpunkt in dieser Linie, nämlich den Punkt c_3 gefunden. (S. §. 13.)

Schlagen wir mit Radius cc_3 einen Kreis, an welchem das Rädchen bei dessen Verschiebung in der Richtung einer auf $\backslash cc_3$ senkrecht stehenden und im Punkte c_3 streifenden Tangente vorbeigeht, so kann das Rädchen die Fläche dieses Kreises nie berühren. Diesen Kreis wollen wir aus dem angegebenen Grunde den todten Kreis nennen.

So oft man das Rädchen nicht auf dem Durchmesser der Scheibe, sondern auf einer Sehne der Scheibe verschiebt, so oft ist auch ein todter Kreis vorhanden, dessen Radius der senkrechte Abstand der überfahrenen Sehne vom Scheibencentrum (oder die $\backslash\ cc_3 = nr$) ist. (Siehe §. 21.) In diesem Kreise liegt aber der Nullpunkt nur dann, wenn die Axe des Rädchens die Richtung der Sehne hat, worauf es sich verschiebt.

Liegt die Axe des Rädchens gegen die Sehne, worauf es sich verschiebt, geneigt, so liegt der Nullpunkt ausserhalb des todten Kreises. (Siehe §. 13. 23.)

Gebraucht man den $\angle\ \gamma$, welchen man jenseits der Nullpunktslinie mit $\angle\ \gamma_I$ bezeichnen kann, so gesellt sich noch in gewissen Fällen ein $\angle\ \gamma_n$ hinzu, welcher diesseits oder jenseits

der Nullpunktslinie liegen und bis zur Grösse von $\angle\ \gamma$ oder $\angle\ \gamma_I$ wachsen kann. Die ganze $\backslash\ R_IR$ ist $= nr\ (\mathrm{tg}\,\gamma + \mathrm{tg}\,\gamma_I)$, die $\backslash\ c_3R$ ist $= nr\,\mathrm{tg}\,\gamma$, die $\backslash\ M_IR$ ist $= nr\ (\mathrm{tg}\,\gamma - \mathrm{tg}\,\gamma_n)$, die $\backslash\ M_2R$ ist $= nr\ (\mathrm{tg}\,\gamma + \mathrm{tg}\,\gamma_n)$, allgemein werden Theile der $\backslash\ R_IR$ durch den Werth $nr\ (\mathrm{tg}\,\gamma \mp \mathrm{tg}\,\gamma_n)$ ausgedrückt, wobei $\mathrm{tg}\,\gamma$ oder $\mathrm{tg}\,\gamma_n$ auch $= 0$ werden kann.

Alles, was wir auf der diesseits der Nullpunktslinie liegenden Scheibenhälfte gefunden haben, hat ebenmässig auch auf der jenseitigen Scheibenhälfte statt.

Ziehen wir in der Zeichnungsebene aus der Nulllinie die Länge $MR = nr\,\mathrm{tg}\,\gamma$ aus, so ziehen wir auch in der Scheibe aus der Nullpunktslinie dieselbe Länge aus, es ist daher in unserem Falle $\backslash\ nr\,\mathrm{tg}\,\gamma$ der tangentiell treibende Radius. Haben wir beim Umfahren einer Figur den Scheibendrehungswinkel φ, so läuft nicht der Bogen $2\,.\,\backslash\,cR\,.\,\varphi\pi$, sondern der Bogen $2nr\,.\,\mathrm{tg}\,\gamma\,.\,\pi\varphi = n\,\mathrm{tg}\,\gamma\,.\,2r\pi\varphi$ tangentiell unter dem Rädchen hin und deutet die Fläche $n\,\mathrm{tg}\,\gamma\,.\,2r^2\pi\varphi$ an; in der Zeichnungsebene aber construirt sich die Fläche

$$nr\,.\,\mathrm{tg}\,\gamma\,.\,2r\pi\varphi = n\,\mathrm{tg}\,\gamma\,.\,2r^2\pi\varphi.$$

Da die Auszugslänge in der Scheibe gleich der in der Zeichnungsebene ist, und diese Auszugslänge als Reductradius auf die Drehung des Rädchens tangentiell wirkt, so können wir

$$n\,\mathrm{tg}\,\gamma\,.\,2r^2\pi\varphi = 100\square'''$$

setzen. Dann ist

$$n\,\mathrm{tg}\,\gamma\,.\,2r\varphi\pi = \frac{100\square'''}{r} = 2\pi\varrho;$$

$$\varrho = \frac{100}{2\pi r}.$$

§. 20.

Messungs- und Berechnungsoperation mit Beziehung auf das im §. 19. Entwickelte.

Bei dem in Fig. 17. Tab. III. construirten Fall ist der Gang der Bewegung in S folgender:

Die in Fig. 17. dargestellte Kreisfläche ist die Scheibe S, das $\triangleright\ mnp$ aber ist die zu messende Fläche, das Rädchen schiebt sich auf $\backslash\ RR_I$ und die Axe des Rädchens liegt in der Richtung der $\backslash\ RR_I$. In der zu umfahrenden Fläche und in der Scheibe ist $\backslash\ nw = \backslash\ mw = \backslash\ wp = \backslash\ c_3R_I = \backslash\ c_3R =$

$= \angle cB = \angle ca_I = nr \operatorname{tg} \gamma$, und $\angle nw$ setzen wir der halben Peripherie der Trommel gleich. Die $\angle nw$ ist ebenso, wie $\angle mw$, wie $\angle wp$, wie $\angle c_3R$, $\angle c_3R_I$, $\angle cB$, $\angle ca_I$, wie der Halbkreis $R\ 1_2\ 2_2\ A$, und wie der Halbkreis $a_I\ 1_I\ 2_I\ B$, der Construction der Figuren wegen, in 3 gleiche Theile getheilt.

Man fügt zu $\angle Rc1_2$ den $\angle Rc1$, so dass man den $\angle Rcb$ erhält und trägt die $\angle c1$ auf $\angle cb$, man fügt zu $\angle Rc1_2$ den $\angle rc2$, so dass man $\angle bcd$ erhält, und trägt die $\angle c2$ auf $\angle cd$, man fügt zu $\angle Rc1_2$ den $\angle 2cc_3$, so dass man den $\angle dcf$ erhält und trägt $\angle cc_3$ auf $\angle cf$ und bildet die Curve $Rbdf$.

Zu den 180° von 3 mal $\angle Rc1_2$ ist $\angle Rcc_3$ in seinen 3 Abtheilungen hinzuaddirt worden, weil das Rädchen in der Sehne Rc_3 der Drehung der Scheibe entgegengeht, also Drehungszusatz giebt.

Steht das Rädchen im Punkte R und F im Punkte p und fährt man F aus p nach I, so schiebt sich und rollt das Rädchen im $\angle Rcb$ auf der Curve Rb, geht F von I nach II, so bewegt sich das Rädchen im $\angle bcd$ auf Curve bd, leitet man F von II nach n, so gelangt das Rädchen im $\angle dcf$ auf Curve df bis f. Während dieser Bewegung ist der Zeiger vorwärts gelaufen. Führt man nun F aus n nach m, so läuft die Scheibe wieder zurück und das Rädchen gelangt auf der Curve $fd_0b_0R_{III}$, welche sich aus den Winkeln $180^0 - \angle R_Icc_3$ zusammengesetzt hat, von f nach R_{III}, aber auch bei dieser Bewegung läuft der Zeiger vorwärts, weil die Scheibe jenseits der Nullpunktslinie bei ihrem Rücklauf das Rädchen vorwärts treibt. Da das Rädchen senkrecht auf $\angle Rc_3$ steht und die treibende Tangente des Radius cR schief gegen die Ebene des Rädchens wirkt, so schleift ein Theil der Curven $Rbdf$ und $fd_0b_0R_{III}$ unter dem Rädchen hin, ohne dass diese Längentheile der Curven Drehung des Rädchens bewirken. Wir haben an Fig. 16. kennen gelernt, dass alle Radien von der Länge cR bis zur Länge cc_3 nur soviel Drehung bewirken, als alle Radien von der Länge c_3R bis Länge 0 zu geben vermögen. Es ist nun aber $\angle c_3R = \angle ca_I$. Bringt man daher das Rädchen auf $\angle a_Ic$ und die Axe des Rädchens in die Richtung der $\angle a_Ic$ und umfährt nun das $\triangleright pnm$, so erhält man diejenige treibende Curve, welche die schleifenden Bestandtheile der Curven $Rbdf$ und $fd_0b_0R_{III}$ nicht mehr in sich haben.

Führt man nämlich nunmehr F aus p nach I, so bewegt sich das Rädchen im $\angle\ a_I c b_I$ auf der Curve $a_I b_I$ ($\backslash\ cb_I$ ist $=$ $\backslash\ c_3 1$), leitet man F aus I nach II, so geht das Rädchen im $\angle\ b_I c d_I$ auf der Curve $b_I d_I$ ($\backslash\ cd_I$ ist $=$ $\backslash\ c_3 2$), lenkt man F aus II nach n, so gelangt das Rädchen im $\angle\ d_I cB$ auf der Curve $d_I c$ nach c und die Curve $a_I b_I d_I c$ befindet sich in der Lage $Bb_0 c$, schiebt man endlich F aus n nach m, so dreht sich die Scheibe rückwärts und das Rädchen kömmt auf der Curve $cd_I b_I a_I$ nach a_I zurück. Bei allen diesen Bewegungen läuft der Zeiger vorwärts. Die Curven $cb_0 B$ und $cd_I b_I a_I$ enthalten blos noch radiale und peripherische Längentheile. Die peripherischen Längentheile der Curven $cb_0 B$ und $cd_I b_I a_I$ sowie der Curven $fd_0 b_0 R_{III}$ und $Rbdf$ giebt rein 2 mal $\smile\ ghk$, welcher mit Radius $\frac{ca_I}{2} = \backslash\ ck = \backslash\ cg$ als mittlerem Normalradius beschrieben ist. Die Zahl der Flächeneinheiten wird richtig gegeben durch die Linieneinheiten von $2 . \smile\ ghk$, da das Rädchen 2 mal über den Bogen hingelaufen ist.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens ergiebt sich aus den für dasselbe in dieser Schrift bereits entwickelten Gründen, sie bestätigt sich aber auch durch folgende Messung und Berechnung der Fläche pnm.

Im Dreieck pnm ist die Kathete $nw = 39^{mm}$, die Kathete $mw = wp = 37{,}75^{mm}$. Daher ist die Fläche des Dreiecks $pnm = \frac{2 . 37{,}75 . 39}{2} = 1472{,}25\square^{mm}$.

Die Kathete nw setzen wir als halbe Peripherie der Trommel, also $= r\pi$, mithin ist $r = \frac{39^{mm}}{(\pi = 3{,}14)} = 12{,}42^{mm}$. Der Werth von ϱ ist $= \frac{400^{mm}}{2\pi r} = \frac{400}{6{,}283 . 12{,}42} = 5{,}12^{mm}$, und die Peripherie des Rädchens ist $= 2\pi\varrho = 2 . 3{,}14 . 5{,}12^{mm} = 32{,}169^{mm}$. Es ist die $\backslash\ cc_3 = nr = 26^{mm}$, $\angle\ \gamma = 55^0\ 26'$, folglich $\mathrm{tg}\,\gamma = 1{,}45139$, $\backslash\ MR = \backslash\ ca_I = \backslash\ cc_3 . \mathrm{tg}\,\gamma = nr . \mathrm{tg}\,\gamma = 1{,}45139 . 26 = 37{,}736^{mm}$, der mittlere Halbmesser ck ist $= \frac{37{,}736}{2} = 18{,}868^{mm}$ und somit 2 mal die halbe Peripherie des damit zu beschreibenden Kreises $= 2 . \smile\ ghk = 2.3{,}14.18{,}868 = 118{,}49104^{mm}$. Da sich die Peripherie des Rädchens auf die-

sem Kreise abwälzt, so macht es während des Ablaufs des Bogens $118{,}491^{mm}$, $\frac{118{,}491}{32{,}169} = 3{,}683$ Umdrehungen und es giebt der Zeiger, da die Peripherie des Rädchens in 400 Theile (das Zifferblatt in 400 Theile) getheilt ist,

$$3{,}683 \,.\, 400 = 1473{,}2\square^{mm}$$

an, also bis auf eine kleine Differenz gerade soviel, als die unmittelbare Messung und Berechnung der Fläche *pnm* ergab. Diese kleine Differenz kann bei der Ungenauigkeit der Messung der Winkel und Linien und bei der Vernachlässigung von Decimalstellen die Richtigkeit des Verfahrens nicht in Zweifel setzen.

§. 21.

Lage des Schiebers E in $\diagdown\, y_2y_3$ *(Fig.* 18.*) geneigt gegen* $\diagdown\, yy_0$, *Welle des Rädchens parallel mit dem Schieber E, aber seitlich von* $\diagdown\, y_2y_3$. *Messungs- und Berechnungsoperation.*

Wir kommen nun auf den im §. 17. unter No. III. erwähnten 2. Fall.

b) In der Fig. 18. Tab. III. bildet die Lage y_2y_3 des Schiebers E zu $\diagdown\, yy_0$ den constanten Neigungswinkel $dcy_0 = \angle\, A$. Die Axe Rc_2 des Rädchens liegt $\parallel$ zu y_3y_2 in $\diagdown\, y_Ic_2$, bildet also mit $yy_0 \parallel \diagdown\, kR \parallel \diagdown\, k_Ic_3$ den gleichfalls constanten $\angle\, A = \angle\, A_I = \angle\, kRc_3 = \angle\, k_Ic_3R_I$.

Führt man F aus c_2 nach c_I, so schiebt sich das Rädchen aus R nach k in $\diagdown\, Rk$, der Schieber E aber schiebt sich parallel zu $\diagdown\, y_2y_3$ und die Axe des Rädchens mit letzterem auf $\diagdown\, Rc_3$ in den in der Nullpunktslinie zz liegenden Punkt c_3, so dass der Schieber P mit seinem Apparate aus c_3 nach k verschoben wird und c_3 in k liegt, sobald das Rädchen in c_3 angekommen ist.

Anmerkung. Wir haben im §. 19. die Bemerkung gemacht, dass dann in der Ebene der Scheibe S ein todter Kreis *entsteht, wenn sich das Rädchen auf einer* Sehne der Scheibe verschiebt, ferner, dass der senkrechte Abstand der Sehne vom Scheibencentrum der Halbmesser des todten Kreises ist, wenn die Axe des Rädchens in der Richtung der Sehne liegt. Diese Sätze haben auch da ihre Geltung, wo, wie in unserem Falle, die Sehne geneigt gegen yy_0 liegt. In unserer Fig. 18. muss daher c_3 der todte Punkt sein, da er der Schnittpunkt in der Sehne y_Ic_2 ist, wenn man auf y_Ic_2 aus c eine senkrechte Linie

zieht. Die Verlängerung dieser $\backslash\, cc_3$ ist dann die $\backslash\, zz$ oder die Nullpunktslinie. (§. 15., §. 19.)

Die Axe des Rädchens liegt nun über der $\backslash\, kc_I$ parallel mit dieser. Da $\backslash\, cb \parallel \backslash\, c_3R$ und $\backslash\, Rb \parallel \backslash\, cc_3$, $\angle\, A$ aber $= \angle\, c_3Rk$, so ist die Länge des Auszugs $= \backslash\, kR \parallel \backslash\, c_Ic_2 = \backslash\, c_2R.\cos A$. Schöbe man das Rädchen von c_3 bis R_I, so wäre der Auszug $= c_3k_I = \backslash\, c_3R_I.\cos A_I$. Die $\backslash\, c_3R$ und auch c_3R_I ist, (wenn man $cc_3 = nr$ setzt) $= nr\,\mathrm{tg}\,\gamma$, also $\backslash\, kR$ oder $\backslash\, c_3k_I = nr\,\mathrm{tg}\,\gamma.\cos A$. Zöge man die schiefe $\backslash\, M_IR = nr\,(\mathrm{tg}\,\gamma - \mathrm{tg}\,\gamma_n)$ aus, so würde man die senkrechte $\backslash\, k_2R = \backslash\, c_4c_2 = nr(\mathrm{tg}\,\gamma - \mathrm{tg}\,\gamma_n)\cos A$ ausziehen. Die $\backslash\, c_3R = nr\,\mathrm{tg}\,\gamma$ wirkt normal auf die Drehung des Rädchens.

Anmerkung. Es liegt in dieser Beziehung dasselbe, wie im Falle des §. 20. vor, nämlich $\mathrm{tg}\,\beta : \sin\beta = \backslash\, cR : \backslash cR.\cos\beta$. Nun ist aber $\backslash\, cR.\cos\beta = \backslash\, cb = \backslash\, c_3R = nr.\mathrm{tg}\,\gamma$.

Man erhält daher, wenn man F aus c_2 nach yy_6 führt, in der Scheibe den Laufbogen $2nr\,\mathrm{tg}\,\gamma.\pi\varphi = n\,\mathrm{tg}\,\gamma.2r\pi\varphi$ und dieser deutet die Fläche $n\,\mathrm{tg}\,\gamma.2r^2\pi\varphi$ an. In der Zeichnungsebene construirt sich dagegen die Fläche aus $\backslash\, c_Ic_2.\backslash c_2y_6$

$$= nr\,\mathrm{tg}\,\gamma.\cos A.2r\pi\varphi = n\,\mathrm{tg}\,\gamma\,\cos A.2r^2\pi\varphi.$$

Hält die Fläche in der Zeichnungsebene $100\square'''$, so haben wir nach der Proportion

$$n\,\mathrm{tg}\,\gamma.2r^2\pi\varphi.\cos A : n\,\mathrm{tg}\,\gamma.2r^2\pi\varphi = 100\square''' : x\square'''$$

für die Fläche, welche die Scheibe durch das Rädchen angiebt, den Werth

$$x\square''' = \frac{100\square'''}{\cos A}.$$

Wir haben nun so, wie im §. 18.

$$n\,\mathrm{tg}\,\gamma.2r\pi\varphi = \frac{100\square'''}{r.\cos A} = 2\pi\varrho;$$

$$\varrho = \frac{100}{2\pi r.\cos A}.$$

Wir wollen wieder das Dreieck mnp der Fig. 17. mit dem Instrumente in der Stellung der Fig. 18. messen.

Setzen wir die $\backslash\, nw = 39^{mm}$, die $\backslash\, mw = wp = nr\,\mathrm{tg}\,\gamma.\cos A = 37{,}75^{mm}$, so ist $39.37{,}75 = 1472{,}25\square^{mm}$ als Grösse des Dreiecks mnp gefunden. Die $\backslash\, nw$ setzen wir als rectificirte Länge des halben Umfangs der Trommel, also $= r\pi$. Es ist daher $r = \frac{39}{(\pi = 3{,}14)} = 12{,}42^{mm}$. Ist der constante

Neigungswinkel $A = 43^0\ 29'$, so ist $\cos A = 0{,}7255$. Der Werth von

$$\varrho \text{ ist } = \frac{400\square^{mm}}{6{,}283 . 12{,}42 . 0{,}7255} = 7{,}065$$

und die Peripherie des Rädchens $= 2\pi\varrho = 2 . 3{,}14 . 7{,}065 = 44{,}389^{mm}$. Es ist $\sphericalangle\ cc_3 = nr = 26^{mm}$ und $\sphericalangle\ c_3R = nr . \operatorname{tg}\gamma$. Winkel γ ist $= 63^0\ 27'$ und $\operatorname{tg}\gamma = 2{,}001$. Es ist daher $nr \operatorname{tg}\gamma = 26 . 2{,}001 = 52{,}026^{mm}$, der mittlere Normalhalbmesser $= \frac{52{,}026}{2} = 26{,}013$ und somit 2 mal die halbe Peripherie des damit zu beschreibenden Kreises $= 2 . 3{,}14 . 26{,}013 = 163{,}439$. Diesen Kreis läuft das Rädchen ab, es macht daher während des Ablaufs der Lauflinie $\frac{163{,}439}{44{,}389} = 3{,}682$ Umdrehungen. Da jede Umdrehung 400 anzeigt, so zeigt das Instrument $400 . 3{,}682 = 1472{,}8$ Flächeneinheiten an, wie oben bis auf eine kleine durch Vernachlässigung von Decimalen entstandene Differenz in der Zeichnungsebene berechnet wurde.

§. 22.

Lage des Schiebers E senkrecht zu $\sphericalangle\ xx$, Axe des Rädchens geneigt gegen $\sphericalangle\ yy_0$, Verschiebung des Rädchens auf $\sphericalangle\ yy_0$, so dass es das Centrum c der Scheibe S passirt.

Wir gehen nun auf die vier unter No. IV. des §. 17. erwähnten Fälle über, in welchen die Axe des Rädchens eine schiefe Richtung gegen die Richtung des Schiebers *E* hat.

a) Der erste und einfachste dieser Fälle ist der in Fig. 19. Tab. III. dargestellte. Der Schieber *E* steht senkrecht gegen $\sphericalangle\ xx$, die Axe des Rädchens $Rc_2 \parallel cc_I$ steht gegen yy_0 geneigt und bildet mit $\sphericalangle\ yy_0$ den constanten Neigungswinkel *a*.

Da die Axe ihre Lage nicht ändert, so kann sich das Rädchen, welches rechtwinklig darauf befestigt ist, nur in der Richtung $Rb = \sin a$ drehen, der treibende Radius $cR = nr$ giebt jedoch dem Rädchen schief gegen des letzteren Ebene den Drehungsanstoss in der Richtung der $\sphericalangle\ Rl = nr \operatorname{tg} a$. Daher ist auf Grund des im §. 19. Entwickelten

$$nr . \operatorname{tg} a : nr . \sin a = nr : x;$$

$$x = \frac{nr . \sin a}{\operatorname{tg} a} = nr . \cos a = \sphericalangle\ cb =$$

der Länge des normal treibenden Reductradius, welcher in \ cb liegt und mit nr veränderlich und im Punkte $c = 0$ ist.

Es wird in der Scheibe und in der Papierebene der Radius nr ausgezogen. Durch Bewegung des Führstiftes F von c_2 nach y_2 wird von der Trommel irgend eine Fadenlänge abgewickelt, in Folge davon aber vom Radius nr der Laufbogen $2nr\pi\varphi$ beschrieben. Obgleich das Rädchen in der Scheibe S auf diesem Bogen rollt, bezüglich schleift, so kann es vermöge seiner gegen \ cR gerichteten schiefen Stellung aus dem Bogen $2nr\pi\varphi$ doch nur soviel peripherische Längentheile zu seiner Umdrehung empfangen, als durch den Bogen $2nr\pi\varphi . \cos\ \alpha$ ausgedrückt werden. Es ist gerade so, als lief in der Scheibe nicht der Bogen $2nr\pi\varphi$, sondern nur der Bogen $2nr\pi\varphi . \cos\ \alpha$, dieser aber in tangentieller Richtung unter dem Rädchen hin.

Würde das Rädchen den ganzen Bogen $2nr\pi\varphi$ abrollen, so würde

$$\varrho = \frac{100}{2\pi r}$$

sein. Da es aber nur einen Bogen $2nr\pi\varphi . \cos\ \alpha$ abrollt, so haben wir die Proportion

$$2nr\pi\varphi : 2nr\pi\varphi . \cos\ \alpha = \frac{100}{2\pi r} : x;$$

$$(x = \varrho) = \frac{100 . \cos\ a}{2\pi r}.$$

Dadurch aber, dass wir ϱ von $\frac{100}{2\pi r}$ bis auf $\frac{100 . \cos\ a}{2\pi r}$ verkleinert haben, haben wir gleichzeitig im umgekehrten Verhältnisse seine Drehungsgrösse vermehrt, so dass es dennoch die grössere Fläche $2nr^2\pi\varphi$ anzeigt.

§. 23.

Lage des Schiebers E senkrecht gegen \ xx, Verschiebung des Rädchens auf \ y_1y_2, welche parallel zu \ yy_0 liegt, Axe des Rädchens geneigt gegen \ y_1y_2. **Nullpunktslinie** *zz.*

b) In diesem Paragraphen gehen wir zu den Fällen in Figg. 20., 21., 22. über.

Lässt man, wie in Fig. 20. Tab. III. dargestellt ist, das Rädchen in der \ $y_1y_2 \parallel$ \ yy_0 sich verschieben, legt aber

dessen Axe gegen \ yy_0 oder \ y_1y_2 schief, so wird $\angle\ y_2Rc_2 = \angle\ y_0cd$ als constanter Neigungswinkel a gebildet. Die \ cd ist zur Axe des Rädchens parallel und geht in ihrer Verlängerung durch Punkt c, es ist somit die rechtwinkelig gegen \ cd durch Punkt c gelegte \ zz die Nullpunktslinie,

Anmerkung. Die \ zz schneidet die \ R_1R, worin das Rädchen seine Verschiebung erleidet, im Nullpunkte M, in welchem das Rädchen keine Drehung erhält, weil, wenn es auf diesem Punkte steht, der Scheibenradius cM rechtwinkelig gegen die Kreisebene des Rädchens treibt. Wie auch das Rädchen verschoben wird und wie auch seine Axe liegt, stets ist die Nullpunktslinie diejenige Linie, welche senkrecht auf der Axe des Rädchens steht und in der Richtung der Ebene des Rädchens das Centrum c der Scheibe schneidet. Denn unter dieser Voraussetzung treibt die Linie cR rechtwinkelig gegen die Ebene des Rädchens und kann es nicht drehen. (S. §. 13., 19.)

Schiebt man das Rädchen aus dem in der Nullpunktslinie zz liegenden Nullpunkte M nach R, so erhält man in der durch \ zz abgetheilten unteren Hälfte der Scheibe S die \ MR als Auszugslänge sowohl in der Scheibe S, als in der Flächenzeichnung. Wenn wir die constante \ $cc_3 = nr$ setzen, so ist \ $MR = nr\ (\mathrm{tg}\,\gamma - \mathrm{tg}\,\gamma_n)$. Schiebt man aber das Rädchen aus M nach R_1, so ist die Auszugslänge $= \backslash MR_1 = nr\ (\mathrm{tg}\,\gamma_1 + \mathrm{tg}\,\gamma_n)$. Es ist daher, je nach dem Standpunkte des Rädchens und wenn man $\angle\gamma_1 = \angle\gamma$ setzt, die Auszugslänge allgemein $= nr\ (\mathrm{tg}\,\gamma \mp \mathrm{tg}\,\gamma_n)$.

Durch die Verschiebung des Rädchens aus M nach R wird zugleich auch Radius cR erzeugt. Die \ cR treibt gegen das Rädchen in der Richtung Rd, das Rädchen dreht sich aber nur in der Richtung Rb. Die Linie Rd ist $=$ \ $cR\,.\,\mathrm{tg}\,\beta$ und \ $Rb = \backslash\ cR\,.\sin\,\beta$. Wir haben daher nach der Entwickelung im §. 19. die Proportion

$$\mathrm{tg}\,\beta : \sin\,\beta = \backslash\ cR : x;$$

$$x = \backslash\ cR\,.\cos\,\beta = \backslash\ cb \,\#\, \backslash\ kR.$$

Die \ kR aber ist $= \backslash MR\,.\cos\,\alpha = nr\ (\mathrm{tg}\gamma - \mathrm{tg}\,\gamma_n)\cos\,\alpha$. Da nun der Auszug $= nr\ (\mathrm{tg}\,\gamma \mp \mathrm{tg}\,\gamma_n)$ ist, in der Scheibe aber nur der Reductradius $nr\ (\mathrm{tg}\,\gamma \mp \mathrm{tg}\,\gamma_n)\cos\,\alpha$ wirkt, so stellt sich die Fläche in der Papierebene durch den Ausdruck $n\,(\mathrm{tg}\,\gamma \mp \mathrm{tg}\,\gamma_n)\,2.r^2\pi\varphi$ dar, während der Trieb der Scheibe gegen das Rädchen nur eine Fläche $= n\,(\mathrm{tg}\,\gamma \mp \mathrm{tg}\,\gamma_n)\cos\,\alpha\,.\,2r^2\pi\varphi$ zum Ausdruck bringt.

Setzen wir nun die Fläche in der Papierebene $= 100\square'''$

so erhalten wir die Proportion:

$$n(\mathrm{tg}\,\gamma \mp \mathrm{tg}\,\gamma_n)\,2.r^2\pi\varphi : n(\mathrm{tg}\,\gamma \mp \mathrm{tg}\,\gamma_n)\cos\alpha.2r^2\pi\varphi = 100^{\square'''} : x^{\square'''};$$

$$x^{\square'''} = 100^{\square'''}.\cos\alpha.$$

Wir haben daher

$$n(\mathrm{tg}\,\gamma \mp \mathrm{tg}\,\gamma_n)\,2r\pi\varphi = \frac{100.\cos\alpha}{r} = 2\pi\varrho;$$

$$\varrho = \frac{100.\cos\alpha}{2\pi r}.$$

Anmerkung. Die Entfernung des Nullpunktes M von der Abscissenlinie xx ist in Fig. 20., 21., 22. $= c_3M$. In Fig. 20., 22. hat $\sphericalangle\ c_3M$ den Werth $nr\,\mathrm{tg}\,\gamma_n$, in Fig. 21. den Werth $nr\,\mathrm{tg}\,\gamma_I$.

Stellt man das Rädchen in Punkt M ein, so steht es in der zur Abscisse xx parallel gezogenen Nullpunktslinie x_0x_0, der Führpunkt F aber steht in der Zeichnungsebene in der Nullinie, welche ebenfalls parallel zur Abscissenlinie xx liegt.

Da sich in der Zeichnungsebene die Flächenfiguren an die Nulllinie anlegen, so können diese Flächenfiguren im Falle der Fig. 21. nur unterhalb der Nulllinie liegen.

Hierbei geben wir noch einige Bemerkungen über das Aufsuchen desjenigen Punktes, wo die grösste Drehung statt hat.

In dem Falle der Fig. 20. erhält das Rädchen im Punkte R_I der Scheibe die meiste Drehung, wozu folgende Erwägung den Grund liefert. Für Punkt N ist $\cos\beta = \cos 0^0 = 1$, also am grössten; es könnte daher scheinen, als müsse das Rädchen in dieser Stellung, worin alle Drehbewegung der Scheibe tangentiell auf die Peripherie des Rädchens einwirkt, eine grössere Drehung haben, als wenn es auf Punkt R_I steht, wo Radius cR_I schon wieder schief gegen die Ebene des Rädchens treibt. Es verhält sich die Sache aber anders, da die treibenden Radien über N hinaus noch wachsen und $\cos\beta_I = \sphericalangle\ k_IR_I >$ als $\cos 0^0 = \sphericalangle\ cN$ ist und grössere cosini mehr treiben, als kleinere.

Bei Fig. 21. ist für Punkt R_I $\angle\ \beta = 90^0$, also $\cos\beta = 0$, es bewirkt daher Radius cR_I keine Drehung; es ist gerade so, als stände das Rädchen im Punkte c. Dagegen hat das Rädchen im Punkte R derselben Fig. 21. die grösste Drehung durch $\sphericalangle\ kR$.

In Fig. 22. hat das Rädchen in R_I eine geringe Drehung durch Reductradius k_IR_I und im Punkte R die grösste Drehung durch Reductradius kR.

§. 24.

Lage des Schiebers E geneigt gegen \ yy_0 unter ∠ A, Verschiebung des Rädchens in der geneigten \ y_3y_4, so dass es das Scheibencentrum passirt, geneigte Lage der Axe des Rädchens unter ∠ α.

In Fig. 23. Tab. IV. bildet der Schieber *E*, welcher die Richtung der \ y_3y_4 hat, mit yy_0 den constanten Neigungswinkel $A = \angle Rcy_0 = \angle cRk$ und es schiebt sich das Rädchen *R* in \ y_3y_4, die Lage der Axe des Rädchens aber ist gegen \ y_3y_4 geneigt. Der Neigungswinkel der \ $Rc_2 \parallel$ \ *cd* gegen \ y_3y_4 ist = dem constanten $\angle \alpha = y_4Rc_2 = \angle Rcd$.

Führt man *F* aus c_2 nach c_I, so verschiebt sich das Rädchen aus *R* nach Punkt *c* und es entsteht Radius *cR*, während dessen aber drückt sich die Scheibe aus Punkt *c* seitwärts nach *k*. Der gegen \ *xx* senkrecht gerichtete Auszug $c_I c_2$ (= \ $cb_I \# \backslash kR$) ist = \ *cR*. cos *A*, und, wenn man \ $cR = n.r$ setzt, = *nr*. cos *A*. In *R* wirkt \ *cR* in der tangentiellen Richtung *Rd*, das Rädchen kann sich aber nur in der Richtung *Rb* drehen. Die \ *Rd* ist = \ *cR*. *tg* α und \ *Rb* = \ *cR*. sin α. Wir erhalten die Proportion

$$\text{tg}\,\alpha : \sin\alpha = \backslash\, cR : x;$$

$$x = \backslash\, cR.\cos\alpha = \backslash\, cb \# \backslash\, k_2R.$$

Der Radius *cR* wirkt also auf die Drehung des Rädchens gerade soviel, als wenn \ k_2R Radius wäre, sich um Punkt k_2 drehte und tangentiell auf das Rädchen einwirkte, und es ist \ k_2R der reducirte Normalradius, \ *cR* der Anomalradius.

Führt man *F* aus c_2 nach $y_2^{y_5}$, so wird die Fadenlänge $c_2y_2^{y_5}$ (= $2r\pi\varphi$) abgewickelt. Es ist daher die Fläche in der Papierebene

$$= nr.\cos A.2r\pi\varphi = n.2r^2\pi\varphi.\cos A.$$

In der Scheibe dagegen kommt die Flächengrösse

$$nr.\cos\alpha.2r\pi\varphi = n.2r^2\pi\varphi.\cos\alpha$$

zum Ausdruck.

Dieser Fall ist eine Combination der Fälle in Fig. 15. Tab. III., §. 18., und in Fig. 19. Tab. III., §. 22.

Setzen wir $n2r^2\pi\varphi.\cos A = 100\square'''$, so haben wir die Proportion

$$n.2r^2\pi\varphi.\cos A : n.2r^2\pi\varphi.\cos\alpha = 100\square''' : x.$$

Daraus ergiebt sich $x = \frac{100\square''' \cos \alpha}{\cos A}$. Da nun zwischen $n.2r^2\pi\varphi.\cos A$ und $n.2r^2\pi\varphi.\cos \alpha$ dasselbe Verhältniss besteht, wie zwischen $100\square'''$ und $\frac{100\square''' \cos \alpha}{\cos A}$ und da wir $n.2r^2\pi\varphi.\cos A = 100\square'''$ gesetzt haben, so muss auch $n.2r^2\varphi\pi \cos \alpha = \frac{100\square''' \cos \alpha}{\cos A}$ sein. Weil dem so ist, so hat man

$$n.2r^2\pi\varphi.\cos \alpha = \frac{100\square''' \cos \alpha}{\cos A};$$

$$n.2r\pi\varphi.\cos \alpha = \frac{100\square''' \cos \alpha}{r.\cos A} = 2\pi\varrho;$$

$$\varrho = \frac{100\square''' \cos \alpha}{2\pi r.\cos A}.$$

Die Scheibe wird durch \ zz, welche durch den Nullpunkt c gezogen ist, in 2 Hälften getheilt. Wir haben bis jetzt die Vorgänge auf der vorderen Hälfte der Scheibe verfolgt. Auf der hintern Hälfte hat derselbe Vorgang statt. Hier ist der Reductradius $cb_2 \fdg k_3 R_I = nr \cos \alpha$ und die Auszugslänge $cb_3 = nr \cos A$, wie diesseits der \ zz.

Eine Messung für diesen Fall hat folgendes Ergebniss:

Es sei

$$\angle A = 36^0;\ \cos A = 0{,}809$$
$$\angle \alpha = 27^0;\ \cos \alpha = 0{,}891$$
$$r = 12^{mm}$$
$$nr = 34^{mm}.$$

Der Auszug in der Papierebene ist $= nr \cos A = 34.0{,}809 = 27{,}506^{mm}$. Setzen wir die Drehung der Scheibe $= 180^0$, so ist die halbe Peripherie der Trommel $= r\pi = 12.3{,}14 = 37{,}692^{mm}$. Construiren wir ein Parallelogramm aus $nr.\cos A \times r\pi = 27{,}506^{mm}.37{,}692^{mm}$, so ist dessen Fläche $= 1036{,}7561\square^{mm}$.

Der Halbmesser in der Scheibe ist $= nr \cos \alpha = 34.0{,}891 = 30{,}294^{mm}$. Da der Drehungswinkel $= 180^0$, so ist der mit dem Halbmesser $nr.\cos \alpha$ beschriebene Kreisbogen $= 30{,}294.3{,}14 = 95{,}1534^{mm}$. Darauf wälzt während des Auszugs von $nr.\cos A$ und während des Ablaufs des $\angle 180^0$ das Rädchen ab. Die Peripherie des Rädchens ist $= 2\pi\varrho = \frac{400.\cos \alpha}{r.\cos A} = \frac{400.0{,}891}{12.0{,}809}$

$= 36{,}71^{mm}$. Es macht daher das Rädchen $\frac{95{,}1534}{36{,}71} = 2{,}592$ Umdrehungen. Da der Zeiger bei einer Umdrehung 400 zeigt, so zeigt er als Flächeneinheit $2{,}592 . 400 = 1036{,}8^{mm}$. Die Differenz von $1036{,}8 - 1036{,}7561 = 0{,}0439$ hat ihren Grund in vernachlässigten Decimalstellen.

§. 25.

Lage des Schiebers E geneigt unter $\angle A$ gegen $\backslash\, yy_0$, Führung des Rädchens auf der geneigten $\backslash\, y_I y_2$, so dass es bei seiner Verschiebung nie das Centrum c der Scheibe passiren kann, Lage der Axe des Rädchens geneigt unter $\angle \alpha$ gegen $\backslash\, y_I y_2$.

In den in Figg. 24., 25. Tab. IV. dargestellten Fällen hat der Schieber E die Richtung der Parallelen $y_I y_2 \parallel y_3 y_4$, welche gegen yy_0 die durch den constanten $\angle A$ bestimmte Neigung haben. In der $\backslash\, y_I y_2$ ($\parallel \backslash\, y_3 y_4$) schiebt sich das Rädchen, dessen Axe Rc_2 ($\parallel hc_I \parallel h_I c_6 \parallel kR \parallel k_I R_I \parallel cd \parallel cd_I$) die vom constanten $\angle\, y_2 R c_2 = \angle\, MR_I k_I = \angle\, \alpha$ bestimmte Neigung gegen $\backslash\, y_I y_2$ hat. Gegen den Radius cR oder cR_I hat die Axe des Rädchens die vom veränderlichen $\angle \beta$ ($= \angle dcR = \angle\, d_I c R_I$) bestimmte Neigung.

Führt man F aus c_2 nach c_I, so durchläuft F die $\backslash\, c_2 c_I$ ($\# Rh$) und es schiebt sich das Rädchen aus R nach M, dabei drückt sich, weil die Verschiebung in der Richtung Rh erfolgt, der Schieber E aber in der Richtung RM liegt, die Scheibe seitwärts, so dass Punkt M nach h gelangt. Stellt man F in c_5 ein und führt F aus c_5 nach c_4, so durchläuft F die $\backslash\, c_5 c_4 \# Mh_2$ und es schiebt sich das Rädchen aus M nach R_I, dabei drückt sich, weil die Verschiebung in der Richtung Mh_2 erfolgt, der Schieber E aber in der Richtung MR_I liegt, die Scheibe seitwärts, so dass Punkt R_I nach h_2 gelangt.

Für Punkt R hat man den treibenden Radius cR, für Punkt R_I aber ist der treibende Radius $= cR_I$. Radius cR treibt in der Richtung der Tangente $Rd = \backslash\, cR . \operatorname{tg}\beta$, das Rädchen kann aber nur in der Richtung $Rb = \backslash\, cR . \sin\beta$ umlaufen. Wir haben daher

$$\operatorname{tg}\beta : \sin\beta = \backslash\, cR : (x, \text{ dem Reductradius}).$$

Es ist

$$x = \backslash\ cR \,.\cos\beta = \backslash\ cb \parallel kR$$
$$= \backslash\ RM \,.\cos\alpha = \backslash\ cc_3\ (\mathrm{tg}\,\gamma \mp \mathrm{tg}\,\gamma_n)\ \cos\alpha$$
$$= nr\ (\mathrm{tg}\,\gamma \mp \mathrm{tg}\,\gamma_n)\ \cos\alpha$$

und sonach die in der Scheibe zum Ausdruck kommende Fläche

$$= n \,.\, 2r^2\varphi\pi\ (\mathrm{tg}\,\gamma \mp \mathrm{tg}\,\gamma_n)\ \cos\alpha.$$

Es ist die Grösse des mit yy_0 parallel laufenden Auszugs $= \backslash\ hR + (\backslash\ Mh_2 \parallel \backslash\ h_I h \parallel \backslash\ c_I c_6)$, so dass der ganze Auszug $= h_I R$ $(= c_2 c_I + c_I c_6 = c_2 c_6)$ ist, wenn man das Rädchen aus R_I bis R schiebt.

In den Figg. 24., 25. ist, weil $y_I y_2 \parallel y_3 y_4$ und $yy_0 \parallel hR \parallel Mh_2$, der $\angle\ MRh$ oder $\angle\ R_I M h_2 = \angle\ A$. Deshalb ist $\backslash\ hR$ oder $\backslash\ h_2 M$ oder der gegen $\backslash\ xx$ senkrecht gerichtete Auszug $= \backslash\ MR \,.\cos A$ oder $= \backslash\ R_I M \,.\cos A = nr(\mathrm{tg}\,\gamma \mp \mathrm{tg}\,\gamma_n)\cos A$.

In der Papierebene ist demnach die Fläche

$$= nr\ (\mathrm{tg}\,\gamma \mp \mathrm{tg}\,\gamma_n)\ \cos A \,.\, 2r\varphi\pi$$
$$= n \,.\, 2r^2\pi\varphi\ (\mathrm{tg}\,\gamma \mp \mathrm{tg}\,\gamma_n)\ \cos A.$$

Setzen wir die Fläche $n \,.\, 2r^2\pi\varphi\ (\mathrm{tg}\,\gamma \mp \mathrm{tg}\,\gamma_n)\ \cos A = 100\square'''$, so hat die Fläche $n \,.\, 2r^2\pi\varphi\ (\mathrm{tg}\,\gamma \mp \mathrm{tg}\,\gamma_n)\ \cos\alpha$ den Werth von $x\square'''$. Wir haben daher die Proportion

$$\cos A : \cos\alpha = 100\square''' : x\square''',$$

es ist daher

$$x = \frac{100\square''' \cos\alpha}{\cos A}$$

wie im Falle des §. 24. Es ist daher auch hier

$$\varrho = \frac{100\square''' \,.\cos\alpha}{2\pi r \,.\cos A}.$$

Der in der Nullpunktslinie zz liegende Punkt M ist der Nullpunkt, weil, wenn das Rädchen auf ihn zu stehen kommt, der treibende Radius cM senkrecht gegen die Ebene des Rädchens treibt und deshalb das Rädchen nicht zu drehen vermag. Zieht man durch Punkt M zum Drahte xx die parallele $\backslash\ x_0 x_0$, so ist letztere die mit der Nulllinie 00_I parallel liegende Nullpunktslinie. Schlägt man den todten Kreis aus c durch Punkt M, so ist letzterer derjenige Kreis, dessen Fläche vom Rädchen nicht berührt wird.

Wir wollen nun noch dem Instrumente seine Messung des Dreiecks mpn in Fig. 25. nachrechnen. Es ist $\backslash\ x_X x_X$ die durch xx das Centrum der Scheibe gehende und parallel zum Drahte laufende, für unseren Fall ganz unerhebliche Mittellinie der Scheibe. Die $\backslash\ zz$ ist die Nullpunktslinie.

Zur Berechnung sind gegeben:

$$\backslash\ cc_3 = nr\ 15{,}388^{mm}$$
$$\angle\ A = 25^0;\ \cos A = 0{,}9063$$
$$\angle\ \alpha = 33^0;\ \cos\alpha = 0{,}83867$$
$$\angle\ \gamma = \angle\ \gamma_I = 65^0;\ \mathrm{tg}\,\gamma = \mathrm{tg}\,\gamma_I = 2{,}1445$$
$$\angle\ \gamma_n = 33^0;\ \mathrm{tg}\,\gamma_n = 0{,}6494$$
$$\backslash\ wn = 40^{mm}.$$

Der $\angle$ der Trommeldrehung bei Ablauf des Drahtes wn ist $= 180^0$.

Wenn man F aus $\backslash\ q$ nach n führt, so wird der Draht $wn = 40^{mm}$ abgewickelt und es dreht sich die Trommel um 180^0. Es ist nun

$$\backslash\ wn : \backslash\ oq = \backslash\ wp : \backslash\ op = 180 : x^0;$$

$x^0 = \dfrac{\backslash\ op \,.\, 180}{\backslash\ wp}$ und der Drehwinkel für $\backslash\ qo_I$ ist $= 180^0 - \dfrac{\backslash\ op \,.\, 180}{\backslash\ wp}$. Um diese Drehung ausführen zu können, müssen wir erst die Länge von $\backslash\ wp$ und $\backslash\ op$ haben.

Nach unserer Voraussetzung ist $\dfrac{\backslash\ mp}{2} = \backslash\ wp$. Nun ist aber $\backslash\ mp = \backslash\ h_I R$, $h_I R$ aber ist $= nr\ (\mathrm{tg}\,\gamma + \mathrm{tg}\,\gamma_I)\ \cos A$

$$= 15{,}388^{mm}.2.2{,}1445.0{,}9063$$
$$= 59{,}815^{mm};$$

$$\frac{h_I R}{2} = \frac{\backslash\ mp}{2} = \backslash\ wp = \frac{59{,}815^{mm}}{2} = 29{,}908^{mm}.$$

$\backslash\ op$ ist $= \backslash\ hR = nr\ (\mathrm{tg}\,\gamma - \mathrm{tg}\,\gamma_n)\ \cos A$

$= 15{,}388^{mm}\ (2{,}1445 - 0{,}6494)\ 0{,}9063 = 20{,}835^{mm}$.

Hiernach ist

$$x^0 = \frac{\backslash\ op \,.\, 180^0}{wp} = \frac{20{,}835^{mm} \,.\, 180^0}{29{,}908} = 125^0{,}39$$

und $\angle$ für $\backslash\ qo_I = 180^0 - 125^0{,}39 = 54^0{,}61$.

Berechnen wir zuerst das $\Delta\ pnm$. Seine Fläche ist

$$\frac{\backslash\ pm \,.\, \backslash\ wn}{2} = \frac{59{,}815^{mm} \,.\, 40^m}{2} = 1196{,}3\square^{mm}.$$

Führen wir F aus p nach q, so giebt der Zeiger das $+\ \Delta\ opq$ an, führen wir F aus q nach n, so giebt der Zeiger das $-\ \Delta\ qo_I n$ an, führen wir F aus n nach m, so giebt der Zeiger das $+\ \square\ oo_I nm$ an, nun ist aber $+\ \Delta\ opq + \square\ oo_I nm - \Delta\ qo_I n = +\ \Delta\ pnm$.

Führen wir F aus p nach q, so wirkt der mittlere Reductradius $\frac{\backslash\, kR+o}{2} = \frac{\backslash\, kR}{2}$ während der Drehung der Scheibe um 125°,39 normal auf Drehung des Rädchens. Es ist $\frac{\backslash\, kR}{2}$

$$= \frac{nr\ (\mathrm{tg}\,\gamma - \mathrm{tg}\,\gamma_n)\ \cos\alpha}{2}$$

$$= \frac{15{,}388\ (2{,}1445 - 0{,}6494)\ 0{,}83867}{2}$$

$$= 9{,}650^{mm}$$

und die dazu gehörige Lauflinie

$$= +\ 9{,}65^{mm} . (2\pi = 6{,}283)\ \frac{125^{0},39}{360} = +\ 21{,}095.$$

Geht F aus q nach n, so wirkt der mittlere Radius $\frac{o + \backslash\, c_3 k_2}{2}$

$= \frac{\backslash\, c_3 k_2}{2} = \frac{nr\ (\mathrm{tg}\,\gamma_n)\ \cos\alpha}{2} = \frac{15{,}388^{mm} . 0{,}6494 . 0{,}83867}{2} =$ 4,189^{mm} im Drehungswinkel 54°,61 normal, aber negativ, auf das Rädchen. Wir erhalten daher die Lauflinie

$$-\ 4{,}189^{mm} . (2 . \pi = 6{,}283)\ \frac{54^{0},61}{360} = -\ 3{,}975^{mm}.$$

Geht nun F aus n nach m, so wirkt im Drehwinkel 180° der mittlere Radius

$$\backslash\, c_3 k_2 + \frac{(\backslash\, k_I R_I = nr . \mathrm{tg}\,\gamma_I . \cos\alpha)}{2}$$

$$= 8{,}378 + \frac{27{,}652}{2} = 22{,}204^{mm}$$

normal auf das Rädchen und es ist die Lauflinie

$$= +\ 22{,}204^{mm}\, 6{,}283\, \frac{180^{0}}{360^{0}} = +\ 69{,}743.$$

Wir haben daher die gesammte Lauflinie $= +21{,}095 + 69{,}743 - 3{,}975 = +86{,}863$. Diese Lauflinie rollt das Rädchen ab mit seiner Peripherie $2\pi\varrho = 2\pi . \frac{400 . \cos\alpha}{2\pi r . \cos A} = \frac{400 . \cos\alpha}{r . \cos A}$. Da $\backslash wn = r\pi = 40^{mm}$, so ist $r = \frac{40^{mm}}{(\pi = 3{,}1415)} = 12{,}734^{mm}$. Es ist daher

$$2\pi\varrho = \frac{400 . 0{,}839}{12{,}734 . 0{,}906} = 29{,}04^{mm}.$$

Daraus ergeben sich $\frac{86{,}863}{29{,}04} = 2{,}991$ Umdrehungen des Rädchens. Da nun 1 Umdrehung $400\square^{mm}$ anzeigt, so ist $2{,}921.400 = 1196{,}4\square^{mm}$. Oben aber hatten wir die Fläche *pnm* zu $1196{,}3\square^{mm}$ berechnet. Es besteht daher eine Differenz von $1196{,}4 - 1196{,}3 = 0{,}1\square^{mm}$, welche in vernachlässigten Decimalen beruht.

§. 26.

Der Nullzustand des Planimeters, müssiges Vor- und Rückwärts-Rollen des Rädchens.

Wir haben nun die Theorie des Instrumentes vollständig erörtert und für alle Lagen der Schieber *P* und *E* und der Welle des Rädchens Beispiele berechnet, welche die Richtigkeit des Theorems bestätigt haben. Bei mehreren Fällen hat aber in der Bewegung des Rädchens ein müssiges Vorwärts- und Rückwärts-Rollen des Rädchens statt gehabt, welches wir, wenn wir auch diese Bewegungen des Rädchens beachtet hätten, in Rechnung hätten bringen müssen. Da aber das Rückwärtsrollen immer gleich ist dem Vorwärtsrollen, so hat sich diese Bewegung immer aufgehoben und deshalb ist kein Fehler in unsere Rechnungen gekommen. Wir würden nur müssige Factoren berechnet und die Behandlung der berechneten Fälle verwickelter gemacht haben. Allein es gehört noch zur Theorie des Instrumentes, auch diese Bewegungen zu kennen. Deshalb wollen wir sie nachträglich erklären.

I. Es giebt Stellungen des Rädchens und der Axe desselben, bei welchen nach Umfahrung jeder beliebigen Fläche der Zeiger des Instrumentes Null anzeigt. Deshalb wollen wir diesen Zustand des Instrumentes den Nullzustand nennen.

a) Steht in Fig. 26. Tab. V. die Welle des Rädchens senkrecht gegen $\backslash\, yy_0$ und wird das Rädchen auf einem Scheibendurchmesser nach der Richtung der $\backslash\, yy_0$ verschoben, so rollt es beim Vorwärtsschieben des Schiebers *E* vorwärts, beim Rückwärtsschieben rückwärts. Es ist dann das Rädchen auf den Anfangspunkt der Bewegung zurückgebracht und der Zeiger steht wieder auf Null, wenn er beim Anfang der Bewegung auf Null stand.

b) Dreht man aber die Scheibe, so kann Radius cR das Rädchen nicht in Drehung bringen, weil er gegen die Ebene des Rädchens treibt. Es bleibt daher auch das Drehen der Scheibe ohne Erfolg und es befindet sich das Instrument in dem Nullzustande.

c) Dasselbe hat auch statt, wenn der Schieber die Richtung y_3y_4 Fig. 26. hat, das Rädchen in $\backslash\ y_3y_4$ rollt und die Axe des Rädchens gegen $\backslash\ y_3y_4$ rechtwinklig steht.

II. a) Wird in Fig. 27. Tab. V. der Schieber E in der Richtung der $\backslash\ y_1y_2 \parallel \backslash\ yy_0$ und mit ihm das Rädchen R, dessen Axe senkrecht gegen $\backslash\ y_1y_2$ liegt, auf $\backslash\ y_1y_2$ verschoben, so wird zwar das Rädchen gedreht, aber die Rückbewegung hebt die Vorbewegung wie im Falle I^a. wieder auf.

b) Dreht man bei dieser Stellung des Rädchens und seiner Axe die Scheibe S, so bewirkt, wenn das Rädchen auf irgend einem Punkte der $\backslash\ y_1y_2$ steht, der Radius cR die Drehung des Rädchens in der Richtung von $\operatorname{tg}\beta = \backslash\ Rd$. Die Bewegungsgrösse von $\operatorname{tg}\beta$ zerlegt sich in die Seitenbewegungen Rb und Re. Die Seitenbewegung Rb geht verloren, weil sie rechtwinklig gegen die Ebene des Rädchens gerichtet ist, die Seitenbewegung Re aber fällt in die Richtung der Ebene des Rädchens und wirkt auf Drehung desselben. Wenn $\backslash\ cR$ im Punkte R die tangentielle Bewegung $Rd = cR.\operatorname{tg}\beta$ ausübt, so fragt sichs, welche Lage und Länge hat eine andere Linie, welche im Punkte R die tangentielle Bewegung $Rb = \backslash\ cR.\sin\beta$ ausübt. Nach §. 19. ist

$$\operatorname{tg}\beta : \sin\beta = \backslash\ cR : x;$$

$$x = \backslash\ cR.\frac{\sin\beta}{\operatorname{tg}\beta} = \backslash\ cR.\cos.\beta.$$

Nun ist aber $\backslash\ cR.\cos\beta = \backslash\ cb = \backslash\ c_3R$. Also ist $\backslash\ c_3R$ der Radius, welcher in Punkt R tangentiell die Bewegung Rb ausübt. Diese Bewegung geht, wie schon bemerkt wurde, verloren, da sie rechtwinklig gegen die Ebene des Rädchens treibt. Die andere Seitenbewegung von $\backslash\ Rd$ war $\backslash\ Re$, welche auf Drehung des Rädchens wirkte. Die $\backslash\ Re$ ist $= \backslash\ bd$ und es ist

$$\backslash\ bd = \backslash\ cR.\operatorname{tg}\beta.\sin\beta = \backslash\ cR.\frac{\sin^2\beta}{\cos\beta}.$$

Suchen wir zu der Bewegung $Re = bd$ die Lage und Länge eines Halbmessers, welcher im Punkte R tangentiell die Bewegung Re ausübt, so haben wir ähnlich, wie vorhin

$$\operatorname{tg}\beta : (\diagdown\ bd = cR\,\frac{\sin^2\beta}{\cos\beta}) = cR : x;$$

$$x = \frac{cR\,\frac{\sin^2\beta}{\cos\beta}}{\operatorname{tg}\beta} = \diagdown\ cR\,.\sin\beta.$$

Nun ist aber $\diagdown\ cR\,.\sin\beta = \diagdown\ Rb = \diagdown\ cc_3$. Also ist $\diagdown\ cc_3$ der Radius, welcher im Punkte R tangentiell die Bewegung Re ausübt. Auf welchen Punkt der $\diagdown\ c_3e$ man das Rädchen stellt, immer bleibt $\diagdown\ cc_3$ der treibende Radius, da die $\diagdown\ yy_0$ und $\diagdown\ y_1y_2$ zu einander parallel sind. Da nun beim Umfahren einer Flächenfigur die Trommel und mit ihr die Drehscheibe um gleichgrosse Drahtlänge vorwärts und rückwärts gedreht wird, so heben sich auch die Vor- und Rückdrehungen des Rädchens auf, da sie gleichgross sind.

Die getroffene Anordnung der Stellung des Rädchens und seiner Axe hat daher die Wirkung des Instrumentes auf Null herabgebracht, es befindet sich daher das Instrument auch in diesem Falle im Nullzustande.

c) Dasselbe hat auch noch dann statt, wenn man die $\diagdown\ y_1y_2$ so wie in Fig. 30. schief, die Welle des Rädchens aber wieder senkrecht gegen $\diagdown\ y_1y_2$ legt.

d) In den Fällen der Fig. 26. sowohl, als der Fig. 27. findet also ein erfolgloses, müssiges Rollen des Rädchens statt.

III. Dieses müssige Rollen ist auch in folgenden Fällen vorhanden.

a) Legt man in Fig. 28. die Welle des Rädchens schief gegen $\diagdown\ yy_0$ oder $\diagdown\ cR$ und schiebt den Schieber E und das Rädchen auf $\diagdown\ cR$ ohne gleichzeitig die Scheibe zu drehen, so bewirkt die Reibung auf $\diagdown\ cR$ Drehung des Rädchens. Die resultirende $\diagdown\ cR$ zerlegt sich in $\diagdown\ b_2R \perp\!\!\!\perp \diagdown\ cb = \diagdown\ cR\,.\cos.\beta$ und in $\diagdown\ Rb = \diagdown\ cR\,.\sin\beta$. Die Drehbewegung $\diagdown\ cR\,.\sin\beta$ geht verloren, weil sich das Rädchen in der Richtung Rb seiner Welle nicht drehen kann. Die Drehbewegung $\diagdown\ cR\,.\cos\beta$ aber ist, da $\angle\ \beta$ constant ist dem Radius R proportional. Wenn bei der Vorwärtsbewegung der mittlere Radius $\frac{o + R}{2} = \frac{R}{2}$ wirkt, so wirkt dieser Radius auch bei der Rückwärtsbewegung. Es bleibt daher die Drehbewegung stets gleich gross, es mag das Rädchen auf irgend einer beliebigen Strecke der $\diagdown\ cy_0$ gescho-

ben werden. Daraus geht hervor, dass sich die Vor- und Rück-Drehungen des Rädchens bei dessen radialer Verschiebung gegenseitig aufheben.

b) Durch Drehung der Scheibe wird das Rädchen so in Bewegung gesetzt, wie dieses zu Fig. 19. §. 22. besprochen worden ist.

c) Dasselbe müssige Rollen des Rädchens hat auch statt, wenn der Schieber *E* gegen $\sphericalangle yy_0$ schief gelegt wird, wie $\sphericalangle y_3y_4$ in Fig. 26., und das Rädchen mit seiner Welle schief gegen $\sphericalangle y_3y_4$ liegt. Vergleiche hierzu auch Fig. 23. §. 24.

V. Ferner tritt der müssige Vor- und Rücklauf des schief liegenden Rädchens auch dann ein, wenn man das Rädchen in Fig. 29. auf der zu $\sphericalangle yy_0$ parallel liegenden $\sphericalangle y_1y_2$ verschiebt.

a) Verschiebt man z. B. das Rädchen aus *R* bis in den Nullpunkt *m*, so kömmt die Axe des Rädchens aus der Lage *kR* in die Lage *mb*, es verrückt sich das Rädchen seitlich um die Länge der $\sphericalangle mk \parallel \sphericalangle Rb$. In dieser Richtung, welche in die Ebene des Rädchens fällt, rollt das Rädchen die $\sphericalangle Rb = \sphericalangle mk$ ab, bei Rückverschiebung rollt es eben soviel wieder rückwärts.

Bei der Verschiebung des Rädchens *R* aus *R* nach *m* wird es aber auch um die Länge $\sphericalangle Rk$ in der Richtung $Rk \parallel bm$ verschoben. Diese Verschiebung ist senkrecht gegen die Ebene des Rädchens gerichtet und vermag dasselbe nicht umzudrehen.

b) Im Uebrigen macht das Rädchen, wenn man die Scheibe dreht, seine Bewegung in der zu Fig. 21. §. 23. besprochenen Weise.

VI. Ganz in ähnlicher Weise geht die müssige Rollbewegung des Rädchens bei dessen Stellung und Verschiebung in Fig. 30. vor sich.

Wird in diesem Falle die Scheibe gedreht, so macht das Rädchen neben dem müssigen Rollen noch die Bewegungen in der zu Fig. 24. §. 25. erklärten Weise.

VII. Eine andere müssige Bewegung der Scheibe und des Rädchens haben wir bereits im §. 18. besprochen. Sie hat aber ihren Grund in einer müssigen Vor- und Rück-Bewegung des Schiebers *P*, wenn der Schieber *E* schief liegt. Ihre Ursache ist daher eine ganz andere, als die Ursache der unter No. I. bis VI. des §. 26. besprochenen müssigen Bewegungen.

§. 27.

Einige graphische und rechnerische Messungen mit dem Instrumente.

Durch nähere Betrachtung der verschiedenen Executionen, mittels deren der Planimeter die ihm unterliegenden Gesetze vollzieht, wird das Wesen des Instrumentes vollständiger überschaut. Deshalb wollen wir zu einigen der besprochenen Fälle der Schieber- und Axen-Stellung graphische und rechnerische Messungen anstellen. Zunächst wollen wir zur Anschaulichmachung des zu Fig. 20. und 21. Vorgetragenen den dazu gehörigen Fall der Fig. 31. Tab. VI. behandeln.

Die Richtung des Schiebers E ist die der $\backslash\, RR_I \parallel \backslash\, y_0 y$, die Richtung der Axe des Rädchens ist unter dem constanten $\angle\, \alpha$ gegen $\backslash\, RR_I$ geneigt. Der Auszug des Rädchens (und des Führstiftes F) in Fig. 31. sei gleich lang nach beiden Seiten der $\backslash\, xx$, der Nullpunkt sei in R_I und es stehe der Führstift F in der Papierebene auf der $\backslash\, wn$, wenn das Rädchen in $\backslash\, xx$ steht. Auf $\backslash\, wn$ setzen wir die Entfernung $c_3 R_I$ ($= \backslash\, wm$) senkrecht aufwärts, die Entfernung $c_3 R$ aber senkrecht niederwärts, construiren das $\Delta\, pmn$ und ziehen durch Punkt m die Nulllinie omo_I parallel zu $\backslash\, wn$. Stellen wir den Führstift F in die Nulllinie omo_I ein, so steht das Rädchen im Nullpunkte M oder R_I, es bleibt daher der Führstift F beim Umfahren der Fig. pmn stets unterhalb der Nulllinie omo_I. Nach der Erklärung im §. 15. zu Fig. 11. zeigt daher der Zeiger positive Zahlen, wenn man F von p nach n führt, und negative Zahlen, wenn man F von n nach m führt. Die $\backslash\, zz$ ist die Nullpunktslinie. In Punkt R wird das Rädchen vom Reductradius kR, in Punkt c_3 vom Reductradius $k_3 c_3$ getrieben und für den Nullpunkt M oder R_I ist der Reductradius = Null, wenn der Führstift F auf $\backslash\, RR_I$ verschoben wird.

Für diesen Fall sind nach Anleitung im §. 20. die Lauflinien $Rafg$ und $gf_I a_I R_{III}$ construirt. Diese Curven enthalten peripherische, radiale und schleifende Längentheile. Führen wir nun F aus p nach n, so zeigt der Zeiger die Fläche $+ \bigtriangledown pno_I m$ an, führen wir aber F aus n nach m, so wird die Fläche $- \bigtriangledown no_I m$ vom Zeiger ausgedrückt. Man hat daher

$$(+ \bigtriangledown pno_I m - \bigtriangledown no_I m) = \triangleright pmn.$$

Wollen wir die schleifenden Längentheile entfernen, so leiten wir den Führstift F auf der $\backslash\ R_{II}c$, tragen den Reductradius kR auf $\backslash\ cR_{II}$ und den Reductradius k_3c_3 auf $\backslash\ cg_3$, so dass nun $\backslash\ xx$ die Nullpunktslinie ist und die Axe des Rädchens die Richtung der $\backslash\ R_{II}c$ hat. Für diesen Fall construiren sich nach §. 20. die Lauflinien $R_{II}a_2f_2g_2$ und $g_3f_3a_3c$. Diese Curven enthalten blos radiale und peripherische Längentheile, geben aber dieselbe Grösse an, wie die Curven $Rafg$ und $gf_Ia_IR_{III}$. Indem wir mit F von R_{II} nach $k_2 = cg_3$ gehen, läuft unter dem Rädchen die Curve $R_{II}a_2f_2g_3$ hin, es hat sich die Scheibe um 180^0 gedreht und Punkt g_3 steht in k_2. Führen wir nun F aus k_2 oder jetzt aus g_3 nach c, so dreht sich das Rädchen abermals um 180^0 und es läuft die Curve $g_3f_3a_3c$ unter dem Rädchen hin. Da in dem $\Delta\ p_In_Im_I$ die $\backslash\ p_Iw_I = \backslash\ R_{II}k_2$ und $\backslash\ w_Im_I = \backslash\ k_2c = \backslash\ g_2c$, so giebt der Planimeter in seiner jetzigen Stellung für das Dreieck $p_Im_In_I$ dieselbe Grösse an, die er in voriger Stellung für das Dreieck pmn angab.

Zur Erläuterung hierzu diene Folgendes:

Aus dem Vortrage in §. 23. und aus Fig. 21. wissen wir, dass für unseren Fall die Reductradien sind: für Punkt $R =$

$$\backslash\ R_IR \cdot \cos\alpha = nr \cdot (\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma_I)\cos\alpha = \not{K}$$

und für Punkt $c_3 = \backslash\ R_Ic_3 \cdot \cos\alpha = nr \cdot \operatorname{tg}\gamma \cdot \cos\alpha = \backslash\ cb_0 = \backslash\ kk_0 = \backslash\ k_3c_3$. Indem also die Curven $Rafg$ und $gf_Ia_IR_{III}$ unter dem Rädchen hinlaufen, wirken die Reductradien kR, kk_0 etc., welche stets die Richtung der Axe des Rädchens haben, normal auf die Drehung des Rädchens. Indem man die Auszugslänge von $\backslash\ R_IR$ nach und nach verkürzt, bis sie in Punkt $R_I = 0$ ist, verkürzen sich auch die Reductradien von $\backslash\ kR$, bis der Reductradius in Punkt $R_I = 0$ ist. Es ist also so, als erfolge der Auszug in der Richtung der Axe des Rädchens vor der Nullpunktslinie zz und von den Punkten k, k_3 etc. aus.

Wir können daher ohne eine Aenderung in die Drehungsgrösse des Rädchens zu bringen, die Reductradien kR etc. in Normalradien cR_{II} verwandeln, müssen aber, da $\backslash\ mp = \backslash\ R_IR$ zu $\backslash\ kR = \backslash\ cR_{II}$ sich verhält, wie Radius zu Cosinus, auch die zu messende Fläche pnm in eine Fläche verwandeln, welche ihre Breite $wn = w_In_I$ beibehält, aber statt der Höhe R_IR die Höhe $\backslash\ R_IR \cdot \cos\alpha = \backslash\ kR = \backslash\ cR_{II} = \backslash\ m_Ip_I$ erhält. Wenn wir nun die Figur $p_In_Im_I$ umfahren, so ist, weil wir die Axe des

Rädchens in die Richtung der $\backslash\, cR_{II}$ gebracht haben, die Schiefstellung der Axe des Rädchens gegen die treibenden Radien beseitigt, die Radien cR_{II} bis $c = 0$ wirken normal auf die Drehung des Rädchens und wir erhalten treibende Curven, in denen die Länge ausgeschieden ist, welche in den Curven $Rafg$ und $gf_1a_1R_{III}$ unter dem Rädchen hinwegschliff ohne es zu drehen.

Die beiden Curven $R_{II}a_2f_2g_3$ und $g_3f_3a_3c$ enthalten nur noch peripherische und radiale Längentheile. Wir wissen aus den früheren Vorträgen, dass die peripherischen Längentheile der Curve $R_{II}a_2f_2g_3$ mit allen Radien von $\backslash\, cR_{II}$ bis $\backslash\, c3_3$, also mit dem mittleren Radius $\frac{\backslash\, cR_{II} + \backslash\, c3_3}{2} = \backslash\, ck_1$ in die Curve gebracht worden sind. Ein halber Kreisbogen k_1g_1 mit $\backslash\, ck_1$ beschrieben enthält sie. Die peripherischen Längentheile in der Curve $g_3f_3a_3c$ sind mittels aller Radien von $\backslash\, c3_3$ bis 0 in dieselbe getragen worden. Ein halber Kreisbogen k_4g_4, welcher mit Radius $\frac{c3_3 + 0}{2} = \backslash\, ck_4$ beschrieben ist, enthält sie. Wir haben die mittleren Radien $+\frac{\backslash\, cR_{II}}{2} + \frac{\backslash\, c3_3}{2}$ und $-\frac{\backslash\, c3_3}{2}$, also einen mittleren Radius $+\frac{cR_{II}}{2} = \backslash\, ck_2$. Ein mit ihm beschriebener Kreis enthält die peripherischen Längentheile, deren Anzahl die Fläche $p_1n_1m_1$ und somit auch die Fläche pnm anzeigt. Unterwerfen wir unseren Fall der Berechnung und setzen $\backslash\, wn = \backslash\, w_1n_1 = 34{,}75^{mm}$. Wenn die Abwickelung des Fadens $34{,}75^{mm}$ eine Drehung der Trommel mit Scheibe von 180^0 bewirkt, so ist, weil $34{,}75^{mm} = r\pi$ ist, $r = \frac{34{,}75^{mm}}{(\pi = 3{,}1415)} = 11{,}0668^{mm}$. Ferner $\angle\, Rcc_3 = \angle\, R_1cc_3 = \angle\, \gamma = 49^0\,24'$ und $\operatorname{tg}\gamma = 1{,}1667$, endlich $\angle\, kRR_1 = \angle\, k_3c_3R_1 = \angle\, \alpha = 49^0\,50'$ und $\cos\alpha = 0{,}645$, $\backslash\, cc_3 = nr = 30^{mm}$.

Der Auszug in der Papierebene für $\triangleright\, pnm$ ist $= nr\,(\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma) = nr.2.\operatorname{tg}\gamma = 30.2.1{,}1667 = 70{,}002^{mm} = \backslash\, RR_1 = \backslash\, mp$. Es ist daher die Fläche des $\triangleright\, pnm = \frac{\backslash\, mp\,.\backslash\, wn}{2} = \frac{70{,}002.34{,}75}{2} = 1216{,}25\,\square^{mm}$

In der Scheibe haben wir schliesslich den Auszug $\backslash\, cR_{II}$

und den mittleren Radius $\frac{\backslash\, cR_{II}}{2} = \frac{\backslash\, kR}{2} = \backslash\, kk_0 = \backslash\, k_3c_3$ $= \frac{nr.2.\operatorname{tg}\gamma.\cos\alpha}{2} = \frac{70{,}002.0{,}645}{2} = 22{,}575^{mm}$. Multiplicirt man diesen Werth mit $\pi = 3{,}1415$, so erhält man die Länge des mittleren Kreisbogens $k_2g_2 = 70{,}919^{mm}$.

Der Halbmesser des Rädchens ist $= \varrho = \frac{400.\cos\alpha}{2\pi r} =$ $\frac{400.0{,}645}{2.3{,}1415.11{,}0668} = 3{,}71^{mm}$. Die Peripherie des Rädchens ist $= 2\pi\varrho = 6{,}283.3{,}71 = 23{,}31^{mm}$. Es läuft diese Peripherie des Rädchens auf dem Kreisbogen k_2g_2 ab. Es dreht sich daher das Rädchen $\frac{70{,}919}{23{,}31} = 3{,}042$ mal um. Da das Zifferblatt in 400 Theile getheilt ist, so zeigt der Zeiger $400.3{,}042 = 1216{,}8\square^{mm}$, also bis auf eine kleine Differenz soviel wie oben. Die Differenz hat ihren Grund in vernachlässigten Decimalstellen.

Wir haben bei unseren Operationen mit F die Linien mp und m_Ip_I noch nicht überfahren. Wird die $\backslash\, m_Ip_I$ aus c nach R_{II} überfahren, so dreht sich, wie wir längst wissen, das Rädchen nicht, wird aber die Linie m_Ip_I überfahren, so schiebt sich das Rädchen in seiner schiefen Stellung auf $\backslash\, R_IR$ herab und macht, wie wir in §. 26. No. V. gesehen haben, eine müssige Rückbewegung, die so gross ist, als rollte es über $\backslash\, R_Ik$. Diese Rückbewegung kommt nicht in Rechnung, weil bei der Vorbewegung des Rädchens von R nach R_I letzteres in entgegengesetzter Richtung ebensoviel rollte.

§. 28.

Fortsetzung von Messungen und deren Berechnung. Geneigte Lage der Ordinaten yy gegen xx.

Die Darstellung in diesem Paragraphen setzt das Verständniss des im §. 27. Vorgetragenen voraus.

Wir gehen nunmehr zu der verwickelteren Messung und Berechnung der Fig. 32. Tab. VI. über. Dieser Fall stützt sich auf die Instrumentstellung in Fig. 22. und auf das im §. 23. dazu Gesagte.

In der Papierebene ist in Fig. 32. das $\triangleright\, mnp$ zu messen.

Es ist $\backslash\ pm = \backslash\ RR_I$, $\backslash\ c_3R = \backslash\ pw$, $\backslash\ c_3R_I = \backslash\ wm$ und $\backslash\ wn$ sei so lang, als die halbe Peripherie der Trommel. Da die Axe des Rädchens gegen $\backslash\ yy_0$ und gegen $\backslash\ RR_I$ geneigt ist, so ist $\backslash\ zz$ die Nullpunktslinie und Punkt M der Nullpunkt. Auf $\backslash\ wo$ ist $\backslash\ c_3M$ als die Entfernung des Nullpunktes von $\backslash\ xx$ getragen und durch Punkt o die Nulllinie oo_I gezogen.

Führt man nun F von p nach n, so schiebt sich das Rädchen von R nach c_3 und die Scheibe S dreht sich um 180°. Unter dem Rädchen läuft im $\angle$ 180° + $\angle$ Rc_3 die Curve $Rafg$ hin, treibt es vorwärts und der Zeiger zeigt die Fläche $+\triangledown pno_Io$ an; führt man F von n nach o_{II}, so dreht sich die Scheibe um 114,75° rückwärts und unter dem Rädchen läuft im $\angle$ 144,75° — $\angle$ c_3cM die Curve gf_Ia_I hin, treibt das Rädchen rückwärts und der Zeiger zeigt die Fläche $-\triangledown no_Io_{II}$ an. Während nun F von o_{II} nach m geht, dreht sich die Scheibe zwar noch rückwärts, das Rädchen aber, weil es bei M die Nullpunktslinie zz passirt hat, wieder vorwärts und es läuft unter dem Rädchen im $\angle$ 65,25° — $\angle$ McR_I die Curve a_IR_{III} hin und es zeigt der Zeiger die Fläche $+ o_{II}mo$ an. Die graphische Construction der Curven $Rafg$ und $gf_Ia_IR_{III}$ ist aus dem im §. 20. und 27. Vorgetragenen und aus den in Fig. 32. eingezeichneten Hülfslinien von selbst verständlich.

Auf die nutzbare Drehung des Rädchens wirken die $\backslash\ kR$ und $\backslash\ k_3c_3$ als Reductradien, aber auch alle zwischen ihnen liegenden Reductradien normal und zwar positiv ein. Dagegen bewirken alle Reductradien k_3c_3 bis Null negative Drehung des Rädchens. Endlich bewirken die Reductradien Null bis k_5M positive Drehung des Rädchens.

Wir legen die Welle des Rädchens, wie wir im Falle des §. 27. thaten, in die $\backslash\ yy_0$ und tragen $\backslash\ kR$ auf $\backslash\ cR_{II}$, $\backslash\ k_3c_3$ auf $\backslash\ c3_3$ und construiren mittels der in Fig. 32. eingezeichneten Hülfslinien die Curve $R_{II}a_2f_2g_3$ in der Weise, wie sie im §. 20. und §. 27. befolgt wurde.

Da das Rädchen wegen seiner schiefen Stellung nicht den Halbmesser $\frac{100}{2\pi r}$, sondern den kleineren Halbmesser $\frac{100 \cdot \cos\alpha}{2\pi r}$ hat, so giebt es doch die Fläche pnm an, obgleich es schief liegt. Der Auszug in der Papierebene und Scheibe ist $= \backslash\ pm = \backslash\ RR_I$, allein in Ansehung des Reductradius ist der Auszug

in der Scheibe nur $= \angle\, kR$ diesseits der Nullpunktslinie und $= \angle\, k_5M = k_6k$ jenseits der Nullpunktslinie. Weil wir dem Instrumente eine solche Stellung gegeben haben, dass die Axe des Rädchens in $\angle\, yy_0$ liegt und die treibenden Radien normal wirken, während des Auszugs $kR + k_6k = \angle\, cR_{II} + \angle\, cg_5$, so müssen wir das diesem, nur noch statthabenden, Auszuge entsprechende $\triangleright\, p_In_Im_I$ construiren. In diesem $\triangleright$ ist $\angle\, w_In_I = \angle\, wn$, $\angle\, p_Iw_I = \angle\, Rk_0 = \angle\, R_{II}3_3$, $\angle\, w_Io_{III} = \angle\, c_3k_3 = \angle\, k_0k = 3_3c$, $\angle\, o_{III}m_I = \angle\, cg_5 = \angle\, Mk_5 = \angle\, kk_6$.

Führen wir nun F aus p_I nach n_I, so dreht sich die Scheibe um 180°, die Curve $R_{II}a_2f_2g_3$ läuft unter dem Rädchen hin und dreht es vorwärts.

Führen wir F aus n_I nach o_{IV}, so dreht sich die Scheibe um 114,75° und während dessen gelangt das Rädchen aus 3_3 nach c, es läuft unter dem Rädchen die Curve g_3f_3c hin und dreht es rückwärts. Die Curve g_3f_3c construirt sich in folgender Weise. Wir theilen den Halbkreis By_0 in 2 Theile von 114,75° und von 65,25°, den 114,75° haltenden Theil theilen wir wieder in 2 gleiche Theile von je 57,37°. Ferner theilen wir die $\angle\, 3_3c$ in 2 gleiche Theile. Wir tragen $\frac{\angle\, c3_3}{2} = \angle\, ck_2$ auf $\angle\, c,57{,}37$ und bestimmen dadurch den Punkt f_3 der Curve g_3f_3c und ziehen diese Curve. In c passirt das Rädchen den Nullpunkt. Indem wir nunmehr F aus o_{IV} nach m_I führen, läuft die Curve cf_4g_5 unter dem Rädchen hin und dreht es vorwärts. Die Curve cf_4g_5 construirt sich in folgender Weise. Wir theilen den Kreisbogentheil von 65,25° in 2 Theile von je 32,62°, tragen $\frac{\angle\, cg_5}{2} = \angle\, cg_4$ auf die verlängerte Linie 32,62° c auf cf_4 und bestimmen dadurch den Punkt f_4 der Curve cf_4g_5, welche wir ziehen. Die 3 Curven $+R_{II}a_2f_2g_3 - g_3f_3c, + cf_4g_5$ enthalten blos noch peripherische und radiale Längentheile. Die erste der drei Curven ist beschrieben mit allen Halbmessern von der Grösse der $\angle\, kR$ bis zur Grösse der $\angle\, kk_0$, folglich ist der mittlere Radius $= \frac{\angle\, kR + \angle\, kk_0}{2}$

$$= \frac{nr\,(\mathrm{tg}\,\gamma + \mathrm{tg}\,\gamma_n)\cos\,\alpha + nr\,\mathrm{tg}\,\gamma_n\,\cos\alpha}{2} = \frac{nr\,(\mathrm{tg}\,\gamma + 2.\mathrm{tg}\,\gamma_n)\cos\alpha}{2}.$$

Der mittlere Halbmesser von $\backslash\, kk_0$ bis 0 ist $= \frac{\backslash\, kk_0}{2} \cos\alpha = \frac{nr \operatorname{tg}\gamma_n \cos\alpha}{2}$. Der mittlere Halbmesser von $\backslash\, cg_5$ bis 0 ist $= \frac{nr(\operatorname{tg}\gamma_I - \operatorname{tg}\gamma_n)\cos\alpha}{2}$.

Es sei nun

$$\backslash\, wn = \backslash\, w_I n_I = 34^{mm} = r\pi, \text{ folgl.}$$

$$r = \frac{34^{mm}}{(\pi = 3{,}1415)} = 10{,}823^{mm}$$

$$nr = 20^{mm}$$

$$\angle\, \gamma = 50^0\ 23',\ \operatorname{tg}\gamma = 1{,}2081$$

$$\angle\, \gamma_I = 57^0\ 49',\ \operatorname{tg}\gamma_I = 1{,}5889$$

$$\angle\, \gamma_n = 45^0\ 22',\ \operatorname{tg}\gamma_n = 1{,}0129$$

$$\angle\, \alpha = 55^0\ 38',\ \cos\alpha = 0{,}5683, \text{ folglich}$$

$$\frac{nr(\operatorname{tg}\gamma + 2\operatorname{tg}\gamma_n)\cos\alpha}{2}.\pi =$$

$$\frac{20(1{,}2081 + 2.1{,}0129)\,0{,}5683}{2}.3{,}1415 = 57{,}734, \text{ ferner ist}$$

$$\frac{nr(\operatorname{tg}\gamma_n)\cos\alpha}{2} = \frac{20.1{,}0129.0{,}5683}{2} = 5{,}756,$$

endlich ist

$$\frac{nr(\operatorname{tg}\gamma_I - \operatorname{tg}\gamma_n)\cos\alpha}{2} = \frac{20(1{,}5889 - 1{,}0129)0{,}5683}{2} = 3{,}273.$$

Es muss nun der Werth — 5,756 mit dem Factor $2.3{,}1415.\frac{114{,}75^0}{360}$ in den Kreisbogen $k_2 g_2$ verwandelt werden. Nun ist $-5{,}756.2.3{,}1415.\frac{114{,}75}{360} = 11{,}5.$

Der Werth + 3,273 aber muss mit dem Factor $2.3{,}1415\ \frac{65{,}25}{360}$ in den Kreisbogen $k_4 g_4$ verwandelt werden. Es ist

$$3{,}273.2.3{,}1415.\frac{65{,}25}{360} = 3{,}711$$

und

$$57{,}734 - 11{,}5 + 3{,}711 = 49{,}945^{mm}.$$

Das Rädchen hat die Peripherie $2\pi\varrho$. Da $\varrho = \frac{400.\cos\alpha}{2\pi r} = \frac{400.0{,}5683}{6{,}283.10{,}823}$, so ist $2\pi\varrho = 6{,}283.\frac{400.0{,}5683}{6{,}283.10{,}823} =$

$\frac{400.0{,}5683}{10{,}823} = 21$. Wenn das Rädchen die Bogenlänge 49,945 mit seiner Peripherie 21 abrollt, so dreht es sich 2,378 mal um. Da nun das Zifferblatt 400 Theile hat, so zeigt der Zeiger $951{,}2\square^{mm}$.

Die $\backslash\ pm$ ist $= nr\,(\mathrm{tg}\gamma + \mathrm{tg}\gamma_I)$ und die Fläche $pnm = \frac{nr(\mathrm{tg}\gamma + \mathrm{tg}\gamma_I)\ \backslash\ von}{2} = \frac{20\,(1{,}2081+1{,}5889).34}{2} = 950{,}98\square^{mm}$, also bis auf eine sehr geringe Differenz gerade soviel, als das Instrument angegeben hat.

Wir haben bei unseren Betrachtungen der Gesetze des Planimeters alle Bewegungen und Lagen der Schieber und der Axe des Rädchens auf senkrechte Ordinaten yy bezogen, damit wir Einheit in die Lehre brachten. Es ist aber nicht ausgeschlossen, die Ordinaten yy geneigt gegen xx zu legen. Am bequemsten ist es alsdann, den Ordinaten diejenige Neigung zu geben, welche der Schieber E gegen xx hat, wie in den Fällen der §§. 18., 21., 24., 25. In der Instruction zur Führung des Instrumentes werden wir construirend davon Gebrauch machen.

§. 29.

Zusammenstellung der Werthe für ϱ.

Stellen wir die Resultate der behandelten Fälle der Lagen der Schieber und der Axe des Rädchens zusammen, so erhalten wir folgende tabellarische Uebersicht der Hauptfälle, welche sich, je nachdem die betreffenden Winkel kleiner oder grösser genommen werden, hinsichtlich des Erfolgs der mit dem Planimeter vorgenommenen Messungen modificiren:

Tabelle.

Fälle.	Fläche in der Scheibe.	Fläche in der Zeichnungsebene.	ϱ oder Halbmesser des Rädchens.
§§. 5., 16. Figg. 6., 7., 8. 9.	$n \cdot 2r^2\varphi\pi$	$n \cdot 2r^2\varphi\pi$	$\frac{100}{2\pi r}$
§. 19. Figg. 16., 17.	$n\,(\mathrm{tg}\,\gamma \mp \mathrm{tg}\,\gamma_n)\,2r^2\varphi\pi$	$n\,(\mathrm{tg}\,\gamma \mp \mathrm{tg}\,\gamma_n)\,2r^2\varphi\pi$	$\frac{100}{2\pi r}$
§. 22. Fig. 19.	$n \cdot \cos\alpha \cdot 2r^2\varphi\pi$	$n \cdot 2r^2\varphi\pi$	$\frac{100 \cdot \cos\alpha}{2\pi r}$
§§. 23., 27., 28., Figg. 20., 21., 22., 31., 32.	$n\,(\mathrm{tg}\,\gamma \mp \mathrm{tg}\,\gamma_n)\cos\alpha \cdot 2r^2\varphi\pi$	$n\,(\mathrm{tg}\,\gamma \mp \mathrm{tg}\,\gamma_n) \cdot 2r^2\varphi\pi$	$\frac{100 \cdot \cos\alpha}{2\pi r}$
§. 18. Fig. 15.	$n \cdot 2r^2\varphi\pi$	$n \cdot \cos A \cdot 2r^2\varphi\pi$	$\frac{100}{2\pi r \cdot \cos A}$
§. 21. Fig. 18.	$n\,(\mathrm{tg}\,\gamma \mp \mathrm{tg}\,\gamma_n) 2r^2\varphi\pi$	$n\,(\mathrm{tg}\,\gamma \mp \mathrm{tg}\,\gamma_n)\cos A \cdot 2r^2\varphi\pi$	$\frac{100}{2\pi r \cdot \cos A}$
§. 24. Fig 23.	$n \cdot \cos\alpha \cdot 2r^2\varphi\pi$	$n \cdot \cos A \cdot 2r^2\varphi\pi$	$\frac{100 \cdot \cos\alpha}{2\pi r \cdot \cos A}$
§. 25. Figg. 24., 25.	$n \cdot (\mathrm{tg}\,\gamma \mp \mathrm{tg}\,\gamma_n)\cos\alpha \cdot 2r^2\varphi\pi$	$n \cdot (\mathrm{tg}\,\gamma \mp \mathrm{tg}\,\gamma_n)\cos A \cdot 2r^2\varphi\pi$	$\frac{100 \cdot \cos\alpha}{2\pi r \cdot \cos A}$

Zweiter Theil

mit Tab. VII. bis XII.

Beschreibung, Bau und Handhabung von Trunk's Planimeter, gegründet auf dargelegten mathematischen, physikalischen und mechanischen Gesetzen.

§. 30.

Regulirvorrichtung.

Aus dem bisher Vorgetragenen ist ersichtlich, wie gross die Zahl der möglichen Veränderungen des Planimeters hinsichtlich der Angabe der Grössen der Flächen ist. und wie mit jeder, wenn auch kleinen Aenderung des Neigungswinkels des Schiebers E der Axe des Rädchens gegen die Hauptrichtungen xx oder yy, ferner wie mit jeder Aenderung der Grösse des Halbmessers der Trommel oder des Halbmessers des Rädchens das Instrument die Angaben der Flächengrössen ändert. Wird ein Draht von anderer Dicke eingespannt oder kommt ein neuer Bezug auf die Scheibe, der schärfer auf das Rädchen greift, oder wird der Umfang des Rädchens frisch rauh gemacht, oder es werden die Zapfen der Räder dichter gestellt und dadurch eine kleine Differenz in die Richtungen der Schieber P und E gebracht und dergleichen mehr, so treten Veränderungen in den Angaben der Flächengrössen ein. Da das Rädchen zur Angabe einer Fläche mehrere, oft viele, Umläufe macht, so multiplicirt sich der Erfolg der Veränderungen und es wird, wenn die ein-

getretenen Aenderungen an sich auch klein sind, die Unrichtigkeit in Anzeigung der Flächengrössen unleidlich. Deshalb ist es erforderlich, dass der Planimeter eine Einrichtung bekommt, die dessen Regulirung mittels Mikrometerschrauben möglich macht. Denn das bisher angewendete Mittel, durch Einlegung eines Drahtes von anderer Stärke Correctionen zu Wege zu bringen, ist umständlich und unsicher, das Ausrechnen eines Berichtigungsfactors (Fehlercoëfficienten) aber entzieht dem Instrumente theilweis dessen Werth, da seine Erschaffung Beseitigung des Rechnens bezweckt und das Ausrechnen der Fehlercoëfficienten öfterer wiederholt werden muss.

Der Planimeter ohne Regulirvorrichtung ist daher ein unbeholfenes rohes Instrument und einem Zirkel zu vergleichen, welcher eine bestimmte Oeffnung seiner Schenkel hat und für keine andere abzugreifende Distanz stellbar ist.

Ferner ist es unmöglich durch Abdrehen und Abschleifen des Rädchens dessen berechnete Grösse so genau herzustellen, dass das Instrument die Flächen vollständig richtig angiebt. Das Beizen des Rädchens mit Säure verdirbt die Kreisform und die Oberfläche.

Wenn die Flächeneinheit für irgend einen Maassstab festgestellt, dafür das Rädchen berechnet und gefertigt ist, so kann man mit einem Instrumente ohne Regulirvorrichtung keine Flächen messen, welchen ein anderer Maassstab zu Grunde liegt.

Hat man gezeichnete Flächen von Papier abzumessen, welches eingetrocknet ist, so kann man mit einem Planimeter, dem es an Regulirvorrichtung fehlt, diese Messung ohne Berechnung eines Fehlercoëfficienten nicht vornehmen, während man ein Instrument mit Regulirvorrichtung bei eingetrockneten Flächen auf volles Maass einstellen kann, wie dieses später gezeigt wird.

Das Mittel zur Regulirvorrichtung giebt der in Fig. 15. §. 18. dargestellte Fall der Neigungen des Schiebers *E* und der Lage der Axe des Rädchens *R*.

§. 31.

Fortsetzuug über Regulirvorrichtung.

Wenn man wie in Fig. 15. dargestellt ist, den Schieber *E* schief gegen *yy* stellt und die Axe des Rädchens in die Richtung dieses Schiebers und zwar parallel über einen Durchmesser

der Scheibe S legt, so steht die Ebene des Rädchens R tangentiell zu allen aus c auf die Scheibe S beschriebenen Kreisen. Es rollt somit das Rädchen auf der Scheibe S ebenso frei, als wenn der Schieber E und die Axe des Rädchens parallel mit yy eingestellt wären. Die schiefe Stellung des Schiebers E mit der Axe des Rädchens ist somit in dieser Beziehung ganz unschädlich. Jedoch ist erforderlich, dass der Neigungswinkel des Schiebers E gegen yy kleiner, als 45^0 ist, weil mittels dieses Schiebers der auf der Grundplatte G befindliche Schieber P entlang der Richtung xx seitwärts geführt wird, was nur so lange gut von Statten geht, als der $\angle A$ kleiner als 45^0 ist.

§. 32.

Fortsetzung über Regulirvorrichtung.

Giebt man dem Schieber E eine schiefe Stellung und trifft dabei Vorkehrung, dass man diese schiefe Stellung mittels Drehung einer Schraube vergrössern und vermindern kann, so ist damit die Beschaffung der Regulirvorrichtung erzielt.

Die Formel, mittels deren man in unserem Falle die Grösse ϱ des Halbmessers des Rädchens berechnet, ist (§. 18.):

$$\varrho = \frac{100}{2\pi r \,.\, \cos A} = \frac{\frac{100}{2\pi r}}{\cos A}.$$

Für einen anderen Fall sei

$$\varrho_I = \frac{\frac{100}{2\pi r}}{\cos A_I}.$$

Setzen wir $\frac{100}{2\pi r} = 1$, so ist

$$\varrho : \varrho_I = \frac{1}{\cos A} : \frac{1}{\cos . A_I};$$

$$\varrho : \varrho_I = \cos A_I : \cos A,$$

d. h. *es verhalten sich die Halbmesser der Rädchen umgekehrt wie die Cosini der Winkel A.* Hat man für irgend einen $\angle A$ den Halbmesser ϱ berechnet und man stellt einen $\angle A_I$ ein, welcher kleiner als $\angle A$ ist, so macht das Rädchen mehr Umdrehungen, als bei $\angle A$, stellt man aber einen $\angle A_I$ ein, welcher grösser als $\angle A$ ist, so macht das Rädchen weniger Umdrehungen, als bei $\angle A$.

Hat man daher ϱ für einen mittleren Winkel A berechnet und danach das Rädchen gefertigt, so kann man mittels Verringerung oder Vermehrung der Schiefstellung des Schiebers E den Winkel A kleiner oder grösser stellen. Dem kleineren Winkel entspricht ein grösserer, dem grösseren Winkel ein kleinerer Cosinus, dem grösseren Cosinus aber eine geringere und dem kleineren Cosinus eine stärkere Drehung des Rädchens und somit endlich dem kleineren Winkel eine kleinere und dem grösseren Winkel eine grössere Drehung des Rädchens.

Setzen wir den mittleren $\angle A = 25^0\ 51'$, so ist sein Cosinus $= 0{,}9$, setzen wir $\angle A_I = 35^0\ 6'$, so ist sein Cosinus $= 0{,}8181$, setzen wir $\angle A_2 = 0$, so ist sein Cosinus $= 1{,}0$. Setzen wir ferner die Fläche für $(\cos A = 0{,}9) = 100$, so ist sie, weil sich die Flächen umgekehrt wie die cosini verhalten, für $(\cos A_I = 0{,}8181)$ nach der Proportion

$$0{,}8181 : 0{,}9 = 100 : x, = 110,$$

und für $(\cos A_2 = 1{,}0)$ nach der Proportion

$$1{,}0 : 0{,}9 = 100 : x, = 90.$$

A. Wir haben daher

Winkel	Cosinus	Fläche
$\angle A_I = 35^0\ 6'$	0,8181	110
$\angle A = 25^0\ 51'$	0,9000	100
$\angle A_2 = 0^0$	1,0000	90.

Demnach kann man nach dieser Berechnung bis zu 10 $^0/_0$ aufwärts und 10 $^0/_0$ niederwärts reguliren.

B. Ein anderes Verhältniss der Art ist folgendes:

Winkel	Cosinus	Fläche
$\angle A_I = 33^0\ 24'$	0,8348	109
$\angle A = 24^0\ 29'$	0,9100	100
$\angle A_2 = 0^0$	1,0000	91.

Hierbei kann man bis zu 9 $^0/_0$ aufwärts und 9 $^0/_0$ abwärts reguliren.

Mehr als 9 bis 10 Procent auf und ab kann man nicht beireguliren, weil die Schiefstellung nicht gut weiter zu treiben ist. Ist man genöthigt noch mehr Procente beizustellen, so muss man zwar die schiefe Stellung des Schiebers E beibehalten, daneben aber auch noch die Welle des Rädchens schief gegen die Richtung des Schiebers legen (§. 24. und §. 50. No. XVI.) und nur die feinere Ausgleichung mit der Regulirvorrichtung be-

wirken. Oder man muss ein anderes Rädchen einlegen und auch alsdann die Ausgleichung mittels der Regulirvorrichtung machen.

Wollte man ein Rädchen machen, welches bei einer Umdrehung der Trommel nicht $100\square'''$, sondern $120\square'''$ angäbe, so wäre

$$2r^2\pi\varphi = 120\square'''; \; 2r\pi\varphi = \frac{120}{r} = 2\pi\varrho;$$

$$\varrho = \frac{120}{2\pi r}.$$

Wäre nun $r = 3{,}988'''$, so wäre

$$\varrho = \frac{120}{6{,}283 \,.\, 3{,}988} = 4{,}789'''.$$

Legten wir aber dabei noch das Cosinenverhältniss unter B ein, so wäre F für $\cos A$ oder für $0{,}91 = 120$ und

$$\varrho = \frac{120}{2\pi r \,.\, \cos A} = \frac{120}{6{,}283 \,.\, 3{,}988 \,.\, 0{,}91} = 5{,}263'''.$$

Ferner wäre

$$F : F_I = \cos A_I : \cos A = 0{,}8348 : 0{,}91$$
$$F : F_2 = \cos A_2 : \cos A = 1{,}0000 : 0{,}91.$$

Man hätte dann

$$F_I = \frac{120 \,.\, 0{,}91}{0{,}8348} = 130{,}8\square'''$$
$$F = \ . \ . \ . = 120{,}0\square'''$$
$$F_2 = \frac{120 \,.\, 0{,}91}{1{,}00} = 109{,}2\square'''$$

C. Ein drittes Verhältniss ist:

Winkel	Cosinus	Fläche
$\angle A_I = 34^0$	0,8290376	111,43
$\angle A = 22^0\ 30'$	0,9238795	100,00
$\angle A_2 = 0^0$	1,0000000	92,39.

Nimmt man zu diesem Verhältnisse C den Radius der Trommel $= 9^{mm}$ und fügt dazu $0{,}111^{mm}$ halbe Drahtdicke, so berechnet sich für das Rädchen ϱ auf $9{,}62^{mm}$. Es hat dann die Trommel den Diam. 18^{mm} und die Drahtdicke $\frac{0{,}222^{mm}}{18{,}222^{mm}}$, das Rädchen aber hat den Diam. $19{,}24^{mm}$. Die Formel ist:

$$\varrho = \frac{(508{,}86336\square^{mm} = 100\square''')}{2 \,.\, 3{,}1415 \,.\, 9{,}111 \,.\, 0{,}9239} = 9{,}62^{mm}.$$

Für das Verhältniss unter lit. A. berechnet sich der Halbmes-

ser des Rädchens auf $9{,}998^{mm}$, wenn man den Halbmesser der Trommel zu 9^{mm} nimmt.

Für das Verhältniss unter lit. B. berechnet sich für den Durchmesser der Trommel von 9^{mm} der Durchmesser des Rädchens zu $9{,}768^{mm}$.

D. Hat man den Planimeter in der beschriebenen Weise eingerichtet, so hat man mit dem Führstifte *F* die im §. 48. und im §. 49. No. XIV. bis XVIII., auch im §. 51. No. VII. beschriebene Normalfigur zu umfahren und mittels der Mikrometerschraube den Schieber *E* in eine solche Schiefstellung zu bringen, dass das Instrument die Grösse der Normalfigur netto angiebt.

Sind die Flächen auf eingegangenen oder ausgegangenen Karten zu messen, so hat man nach den Vorschriften im §. 49. No. XV., XVI., XVII. zu verfahren.

Weichen die Maassstäbe, nach deren einem die Normalfigur gezeichnet ist und nach deren anderem das Instrument die Flächengrösse angeben soll, in Folge verschiedener Längeneinheiten von einander ab, z. B. die Maassstäbe verschiedener Staaten, so kann man das Instrument nach der in diesem Paragraphen oder auch nach der in §. 24. und §. 50. No. XVI. gegebenen Anleitung auf den betreffenden Maassstab einstellen.

Ereignet es sich, dass man Flächen zu berechnen hat, welche nach einem Maassstabe aufgetragen sind, der eine andere Verjüngung hat, als der Maassstab, für welchen r und ϱ berechnet sind, dass z. B. r und ϱ für den $\frac{1}{2000}$ theiligen Maassstab berechnet, die zu messenden Flächen aber nach dem $\frac{1}{4000}$ theiligen Maassstab aufgetragen sind, und man hat keine Rädchen für die verschiedenen Maassstäbe, so muss man mittels Reductionsberechnung aushelfen. Für solche Fälle kann man abgekürzte Rechnungen wählen, z. B. in folgender Weise:

Maassstäbe	Flächen	Verhältnisse und Factoren
$\frac{1}{1000}$	$1000^2 = 100\,0000$	$\frac{100}{400} = 0{,}25 \ldots\ldots = \frac{1}{4}$.
$\frac{1}{1500}$	$1500^2 = 225\,0000$	$\frac{225}{400} = 0{,}5625$
		$= 0{,}5 + 0{,}0625$
		$= \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$
		$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}$
$\frac{1}{2000}$	$2000^2 = 400\,0000$	$\frac{400}{400} = 1{,}0000 \ldots\ldots = 1{,}0$
$\frac{1}{2500}$	$2500^2 = 625\,0000$	$\frac{625}{400} = 1{,}5625$
		$= 1 + 0{,}5 + 0{,}0625$
		$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}$
$\frac{1}{4000}$	$4000^2 = 1600\,0000$	$\frac{1600}{400} = 4{,}0000 \ldots\ldots = 4{,}0$
$\frac{1}{5000}$	$5000^2 = 2500\,0000$	$\frac{2500}{400} = 6{,}25 \ldots\ldots = 6 + \frac{1}{4}$.

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}}$$

Hätte man mit seinem für den $\frac{1}{2000}$ theiligen Maassstab eingerichteten Instrumente eine Fläche gemessen und die Flächengrösse $526\square^R$ erhalten, so betrüge die Fläche für den Maassstab von:

$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1500}$	$\frac{1}{2000}$	$\frac{1}{4000}$	$\frac{1}{5000}$
4) 526	2) 526	2) 526	526	526 (4
$131{,}5\square^R$	8) 263	8) 263	$2104\square^R$	3156 (6
	32,875	32,875		131,5
	$295{,}875\square^R$	$821{,}875\square^R$		$3287{,}5\square^R$

§. 33.

Parallelismus der Ebenen der wesentlichen Maschinentheile des Instrumentes.

Das Geleis in der Grundplatte *G* sowohl, als die Schieber *P* und *E* müssen parallel zur Papierebene stehen, denn wenn dieses nicht der Fall ist, so wird das Messungsresultat falsch. Wäre in Fig. 33. Tab. VI. die \ *ab* die Papierebene, die \ *ad* aber der Schieber *E*, so dass zwischen dem Papier und dem Schieber *E* ein $\angle \gamma$ entstände, so würde sich die Länge der Bewegung von *E* zu der in der Papierebene überfahrenen Linienlänge verhalten, wie Radius *ad* zu $\cos\gamma$, es würde alsdann am Zifferblatte eine grössere, als die abgemessene Linie oder Fläche markirt werden. Diese Differenz bleibt so lange in ein und demselben Verhältnisse, als $\angle \gamma$ nicht geändert wird. Hat man ein Instrument mit Regulirapparat, so lässt sich auch diese Differenz ausgleichen. Denn es verhalten sich für ein und denselben Winkel, im vorliegenden Falle für den $\angle \gamma$, die Cosini wie die Radien, und somit ist \ *ab* proportional mit \ *ad*, wird *ad* grösser, so wird es proportional auch *ab*. Wenngleich es sonach für ein Instrument mit Regulirvorrichtung unschädlich ist, dass *E* nicht genau parallel mit der Papierebene ist, so muss man doch eine solche Störung des Parallelismus deswegen sorglich vermeiden, weil beim Mangel des Parallelismus der Zeichnungsebene und der Ebene des Schiebers *E* im Führapparate Störungen (s. §. 47.) entstehen und weil sonst der unerlässlich nöthige Parallelismus des Schiebers *E* und der Ebene der Scheibe *S* nicht herzustellen ist.

§. 34.

Parallelismus der Scheibenebene mit der Zeichnungsebene und mit der Ebene des Schiebers E.

Es ist im vorhergehenden Paragraphen die Stellung der Schieber besprochen worden, und es wird hieran eine weitere Bemerkung in Beziehung auf die Ebene der Drehscheibe und auf die Axe des Rädchens *R* angereiht.

Die Ebene der Scheibe *S* muss ebenfalls parallel zur Zeichnungsebene und zur Ebene des Schiebers *E* liegen. Denn wäre

dieses nicht der Fall, so würde dadurch die Lage der Axe des Rädchens während der Bewegung des Schiebers *E* abwechselnd geändert und unrichtiges Messungsresultat veranlasst. Wäre in Fig. 34. Tab. VI. die \ *ab* die Papierebene oder auch die Ebene des Schiebers *E*, die \ *cd* stellte die Ebene der Scheibe *S* vor, worin *p* den Mittelpunkt der Scheibe andeutete und die Linien *fg* und *hk* stellten 2 Lagen der Axe des Rädchens dar, so ist sofort sichtbar, wenn die Punkte *t* die Standpunkte des Rädchens bezeichnen, dass durch die schiefe Lage der Ebene der Scheibe *S* die Axe des Rädchens bei jeder Verschiebung derselben veränderte schiefe Lagen annimmt und dass dadurch das Rädchen andere Punkte der Scheibe *S* berührt, als es nach Verhältniss seiner Verschiebung berühren sollte. Durch diesen Fehler des Instrumentes rollt dann das Rädchen in einem grösseren oder kleineren Kreise auf der Scheibe *S*, als sich gebührt, und der Zeiger zeigt eine grössere oder kleinere Fläche an, als mit dem Führpunkte umfahren wurde.

Bei der Justirung des Instrumentes hat man deshalb ganz besonders darauf zu sehen, dass die Ebene der Scheibe *S* mit der Ebene des Schiebers *E* streng parallel liegt. Die geringste Unrichtigkeit hierin erzeugt Fehler, die, wenn sie auch klein sind, vorzugsweise bei langen schmalen Ackerflächen sehr lästig werden. Legt man die Nulllinie in die Mitte einer ihrer Grösse nach bekannten und in 2 gleichgrosse Hälften getheilten Fläche und umfährt jede Hälfte, so giebt ein mit diesem Fehler behaftetes Instrument die eine Hälfte zu gross, die andere zu klein an. Legt man eine solche Fläche geneigt gegen die Nulllinie und es giebt das Instrument die Fläche zu klein an, wenn die Neigungswinkel links über und rechts unter der Nulllinie befindlich sind, so giebt es die Fläche im entgegengesetzen Falle zu gross an.

Diese Erscheinung erklärt sich dadurch, dass bei schiefer Lage der Scheibe *S* die im Umfang des Rädchens befindliche Lauflinie bald in der Mitte des Laufbändchens, bald diesseits, bald jenseits dieser Mitte zu liegen kommt, dass also die Lage der im Umfang des Rädchens befindlichen Lauflinie veränderlich ist und bewirkt, dass bei Verschiebung des Rädchens die Abstände dieser Lauflinie vom Nullpunkte andere werden, als die Abstände des Führpunktes von der Nulllinie.

§. 35.

Neigung der Axe des Rädchens gegen die richtig stehende Ebene der Scheibe S.

Liegt aber die Ebene der Scheibe *S* parallel zum Schieber *E*, dann bringt eine gegen die Ebene von *S* geneigte Lage der Axe des Rädchens keine unrichtigen Resultate in die Messung, wenn der Umfang des Rädchens kugelförmig ist. Diese Behauptung wird durch folgende Betrachtung der Sache begründet.

Wäre in Figg. 35., 36. Tab. VI. die Linie *ab* ein Profil der Ebene der Scheibe *S* und zugleich ein Durchmesser dieser Scheibe, stellten *R*, *R* das Rädchen in 2 Stellungen auf den Punkten *a* und *b* des Durchmessers *ab* der Scheibe dar, die Linien *Rp*, *Rp* die Axe des Rädchens, dd_I eine senkrecht durch den Mittelpunkt der Scheibe *S* gezogene Linie, so wird das Rädchen bei ein und derselben Entfernung vom Scheibencentrum *c* durch den Contact mit der parallel zur Zeichnungsebene liegenden Drehscheibe stets gleichviel gedreht, es mag seine Axe irgend welche Neigung gegen die Drehscheibe haben, sofern der Umfang des Rädchens Kugelform hat. Denn es bleibt dann der treibende Scheibenradius *ca* oder *cb* ein und derselbe, es ändert sich aber auch der Halbmesser *Ra* oder *Rb* des Rädchens nicht, da in der Kugel alle Radien gleich gross sind. Hat aber der Umfang des Rädchens eine andere, als Kugelform, so befinden sich in der Abrundung des Umfangs des Rädchens Kreise von verschiedenen Halbmessern. Von diesen Kreisen kömmt je nach Stellung oder Neigung des Rädchens irgend einer mit der Scheibe *S* in Berührung und wird durch die Drehung der Scheibe abgerollt. Es bewirkt dann ein kleinerer Umfangskreis mehr, ein grösserer weniger Drehungen des Rädchens. Jedoch bleibt sich die Drehungsgrösse so lange gleich, als man die Axenlage des Rädchens nicht ändert.

Aus Rücksicht auf Gleichmässigkeit in der Zapfenreibung und des besseren Ansehens ist es aber angemessen, die Axe des Rädchens parallel zur Scheibe zu stellen. Deshalb muss man dem Instrumente eine Vorrichtung (Parallelmaass) beigeben, wodurch man die Axe des Rädchens und die sonstigen Maschinentheile hinsichtlich ihres Parallelismus reguliren kann.

§. 36.

Beschreibung von Truck's Planimeter. Lage des Drahtes, Abwiegung der Belastung des Zapfens der Welle des Rädchens. Hülfsapparate.

Durch das Vorgetragene ist auf elementare Weise das Wesen des Planimeters und die geometrische Begründung seiner Theorie mitgetheilt und es sind die zur Berechnung der einzelnen Theile und der Resultate des Instrumentes erforderlichen Formeln gegeben worden, so dass nunmehr zur detaillirten Beschreibung des Planimeters nach der vom Verfasser dieses Buches erfundenen Bauart übergegangen werden kann.

In Fig. 37. Tab. VII. ist das Instrument central-perspectivisch dargestellt. Auch sind die einzelnen Theile in perspectivischen Detailzeichnungen abgebildet. Die gewählte Grösse der Zeichnung ist jedoch nicht maassgebend, sie kann nach Bedürfniss abgeändert und berechnet werden. Die in Fig. 4. und 5. Tab. I. dargestellte Bauart des Instrumentes ist zur Ausführung nicht geeignet und war nur zum Verständniss der Haupttheile des Instrumentes entworfen.

In Fig. 37. Tab. VII. ist G der metallene Grundrahmen mit 3 Füssen, wovon nur 2 sichtbar sind, der dritte befindet sich in der Mitte der hinteren Schiene des Grundrahmens G. Die vordere Schiene ff hat eine Nuth gg, deren Wände convex gerundet oder stumpfwinkelig eckig sind, Fig. 38^a, 38^b, Tab. IX., die hintere Schiene ss ist eben. Die Schienen ff, ss müssen absolut geradlinig und parallel sein.

Der Grundrahmen G kann nach Bedürfniss, jedoch in gegebenen Grenzen, kürzer oder länger angefertigt werden, Die Planimeterfabrik hält in dieser Beziehung eine Grenze ein, die sie aus Gründen nicht überschreitet. Die Grundplatte ist stark, damit sie mehr Steifheit hat und die oberen Maschinentheile trägt, ohne sich zu biegen, damit ferner auch das Instrument durch seine Schwere seinen Standpunkt während des Gebrauchs behauptet.

An Statt der in Figg. 4. und 5. Tab. I. dargestellten Schieberplatte P sind die Gestelle P und P_I Fig. 37. Tab. VII., Figg. 41., 44. Tab. VIII., Fig. 42. Tab. IX. vorhanden. Das Gestell P hat 3 Räder A, A_I, A_2. Die Räder A, A_I laufen mit ihren co-

nischen oder sphärisch gewölbten Umfängen in der Nuth *gg* Fig. 38ª., 36ᵇ. Tab. IX. und geben dadurch dem Gestelle *P* bei seiner Bewegung geradlinige Führung. Es kann auch die Nuth in die Räder und zwar in den angegebenen Formen eingedreht werden, alsdann ist die Schiene in den angegebenen Formen erhaben. Siehe die Fig. 39ª.,ᵇ,ᶜ Tab. IX., worin Querschnitte der Räder und Nuthen dargestellt sind. Das hintere Rad A_2 ist an seinem Umfang gewölbt, Fig. 39ᵈ. Tab. IX. Die Axen der Räder haben an den Enden convex gewölbte Vertiefungen, womit sie auf conischen Stahlspitzen laufen. Die Stahlspitzen sind die Enden von Schrauben *k*. Diese Schrauben liegen in Schraubenmuttern, welche in das Gestell eingeschnitten sind, und werden mit seitlichen Druckschrauben k_I festgestellt.

Das Gestell P_I Fig. 37. Tab. VII., 41., 44. Tab. VIII. 42. Tab. IX. hat ebenfalls 3 Räder B, B_I, B_2, welche nach oben gekehrt sind, so dass der Schieber *E* Fig. 37. Tab. VII., Fig. 46. Tab. X. mit seinen Schienen $f_I f_I$, $s_I s_I$ darauf rollt und in der Furche $g_I g_I$ auf den conischen Radumfängen der Räder B, B_I eben so geführt wird, wie das Gestell *P* durch die Räder *A*, A_I im Geleise *gg* geführt wird. Auch kann die Nuth in die Räder B, B_I eingedreht werden und die Schiene $f_I f_I$ erhaben sein. Die 2te Schiene $s_I s_I$ des Schiebers *E* ist eben und das dazu gehörige Rad B_2 an seinem Umfang gewölbt. Wenn man die Figg. 38., 39. Tab. IX. umkehrt, so liegen die Schienen über den Rädern, welche für diesen Fall mit B, B_I, B_2 bezeichnet sind.

Der vordere Theil des Schiebers *E* kann so, wie Fig. 37. angegeben ist, gestaltet sein. Für diese Form spricht die Leichtigkeit. Es ist aber besser der Schieber *E* so geformt, wie Fig. 46. Tab. X. theilweis in punktirten Linien zeigt. Für diese Form spricht grössere Steifheit und sichererer Gang des Planimeters.

Das Gestell P_I wird auf das Gestell *P* befestigt, jedoch so, dass es sich um das Centrum *c* drehen lässt, Fig. 42. Tab. IX. Diese Befestigung von P_I auf *P* geschieht mit Hülfe der Säule *Q*, Fig. 40. Tab. VIII., welche an ihrem Fusse einen Kragen und unmittelbar unter diesem einen starken, kreisrunden Zapfen hat, mit welchem die Säule in die kreisrunde Oeffnung von P_I und *P* eingesteckt wird. Von unten wird ein Ring *H*, Fig. 40. vorgelegt und mittels 3 Schrauben gegen die Säule angezogen. Dadurch werden die beiden Maschinentheile *P* und P_I zusammen-

gehalten, aber so, dass sie sich um c drehen. Die Säule ist mittels Keils zweier Druckschrauben γ_I, γ_I Fig. 42. Tab. IX. in dem Maschinentheil P_I befestigt, so dass sich nur der untere Zapfen der Säule mit dieser und mit dem Gestelle P_I in P dreht. Zur Sicherung gegen Schlottern drücken gegen den Zapfen in P zwei Druckschrauben $\eta\eta$, Fig. 41., welche Druckplättchen $\vartheta\vartheta$ haben. Die Säule Q ist durchbohrt. Innerhalb des Hohlraums der Säule dreht sich die Axe Φ, Fig. 40., der aus Schiefer oder matt geschliffenem Glas gefertigten Drehscheibe S. Diese Axe, welche senkrecht in der Maschine steht, berührt die inneren Wände der Säule nicht, im Capitäl der Säule sind aber zwei Schräubchen δ und ein Keil λ angebracht, gegen welchen eine Feder μ, die durch eine Schraube gespannt werden kann, drückt. Die Muttern, worin die Schräubchen δ liegen, sind zweitheilig und werden mittels anderer Schrauben zusammengepresst. Zwischen den drei Punkten δ, δ, λ dreht sich der obere Theil der senkrechten Welle. An das untere Ende der Welle Φ wird der Cylinder oder die Trommel T, Fig. 44. Tab. VIII., welche von Stahl ist, angeschoben und mittels einer Schraube von unten her auf ihren Zapfen so festgeklemmt, dass die Welle Φ jede Drehbewegung, welche die Trommel macht, mitmachen muss. Das untere Ende dieser Welle ist kugelförmig und steht in einem conischen Lager, welches sich in einem Bügel Ro, Fig. 44. befindet, der an P_I angeschraubt ist und am zweckmässigsten auf der linken Seite einen Arm von der punktirten Form hat. Das Zapfenloch ist in eine Schraube gebohrt, die man höher und tiefer schrauben kann. Oben auf der Welle Φ ist eine metallene Scheibe oder besser ein metallener sternförmiger Scheibenträger D, Fig. 44. befestigt. Auf die Scheibe D wird die Drehscheibe S angeschraubt. Schraubt man aber den sternförmigen Scheibenträger D an, so wird die Drehscheibe S blos aufgelegt, so dass man die Scheibe S zum Behuf des Beziehens mit präparirter Thierhaut oder beim Transport des Instrumentes abnehmen kann. Bei allen diesen Anordnungen ist darauf zu sehen, dass die Scheibe S parallel zum Geleis $g_I g_I$ des Schiebers E und parallel zu der Ebene liegt, worin sich das Geleis gg des Grundrahmens G befindet.

Mittels der Drehung, welche P_I auf P um c hat, kann man bewirken, dass die durch das Geleis $g_I g_I$ bestimmte Bewegungs-

richtung des Schiebers *E* gegen die durch das Geleis *gg* bestimmte Bewegungsrichtung des Gestells *P* und P_I in einen rechten oder jeden anderen Winkel eingestellt werden kann. Das Gestell *J* mit *O*, Fig. 37. Tab. VII., Fig. 45. Tab. X., wird auf irgend eine Stelle des Schlitzes *d* im Schieber *E*, Fig. 46. aufgestellt und angeschraubt. Dieses Gestell dreht sich um Punkt *d*, kann aber auch von *d* in dem gezeichneten Schlitz seitwärts verschoben werden. An dem Gestelle *JO*, Fig. 45. Tab. X. und Fig. 37. Tab. VII. sind die Arme *NN* mit ihrem Verbindungsstück *hh* so angebracht, dass sie sich um *mm* drehen. Mittels der Schraube π können die Arme *NN* gehoben und gesenkt werden. Bei *nn* wird das Zifferblatt mit dem Gehäuse des Zählerwerks (— bestehend aus einer Anzahl Getrieben und Zahnrädern mit Zeigern, welche letztere am Zifferblatte zu sehen sind —) und mit dem Rahmen *YY*, Fig. 47. Tab. X., Fig. 37. Tab. VII., worin an der Welle *ww* das Laufrädchen *R* und vor dem Zifferblatte der lange Zeiger umläuft, mittels der Schrauben *nk*, *nk* so gehalten, dass sich das Gehäuse mit dem Rahmen *YY* um die Spitzen *nn* drehen kann. Werden nun mittels der Schraube π die Arme *NN* gehoben oder gesenkt, so wird auch das Zählerwerksgehäuse gehoben oder gesenkt. Durch diese Einrichtung wird die Welle *w* parallel zur Scheibe *S* gestellt.

Das Rädchen *R* wird durch die Schwere seiner selbst und der Welle *w*, sowie durch das Gewichtchen ψ, welches aus mehreren Scheibchen von je 1 Quentchen besteht, die auf den Stift ψ_I aufgesteckt werden, stets auf die Scheibe *S* aufgedrückt, weil sich der Rahmen *YY* mit dem Zählerwerksgehäuse um die Spitzen *nn* dreht. Der Rahmen *YY* wird durch eine, mittels zweier Schrauben *v*, v_I spannbare Feder φ, Fig. 47., vom Zapfen der Welle *w* abbalançirt und dann erst mit etwa 3 bis 5 Quentchen belastet. Das Instrument gestattet demnach, der Axe des Rädchens alle diejenigen Lagen und Bewegungen geben zu können, welche wir §. 17. erwähnt haben.

Um die Drehung von P_I auf *P* bis in die feinsten Nüançen in die Gewalt desjenigen zu bringen, welcher mit dem Instrumente Messungen vornimmt, ist an *P* das Bogenstück *A* Fig. 44. Tab. VIII., in dessen Kreisumfang Schraubengänge eingeschnitten sind, angebracht. Am Gestelle P_I aber befindet sich die mit Σ bezeichnete Schraube ohne Ende, Fig. 44., welche von Stahl und

hart ist und dicht in den Schraubengängen von A liegt. Die Schraubenwelle dreht sich seitlich im Maschinentheile P_I in einem Kugelgelenke und wird mittels des ränderirten Knopfes Ω, Fig. 37., gedreht. Der Endzapfen ruht in einem Lager ξ, Fig 44., gegen welches eine starke Feder σ drückt, die mittels einer Druckschraube ϱ gespannt werden kann. Um die Grösse der Stellung abzulesen, ist auf A oder besser vorn auf dem Wagengestelle P ein Gradbogen mit Theilung und an P_I ein Zeiger ζ, Fig. 42., angebracht.

Die Axe des Rädchens wird aus Triebstahl angefertigt, damit sie leicht und dennoch steif ist. Auf den vorderen Wellenzapfen, welcher in einem in das Zifferblatt eingeschraubten Lager liegt, wird der Hauptzeiger gesteckt. Der hintere Zapfen der Axe w ist cylindrisch und hat einen knopfartigen Kragen am Ende der Axe, Fig. 49. Tab. XI., läuft in einem neben Fig. 47. Tab. X. vergrössert gezeichneten Lager p von Stahlblech. Der knopfartige Kragen wird zwischen dem Stahlblech und einer Mikrometerschraube q eingelegt; das Lager mit Mikrometerschraube q ist auf der Mitte des hinteren Querriegels des Rahmens YY angeschraubt und in der Richtung der Welle w verschiebbar. Unter dem Lager p ist ein Stift eingeschoben, welcher das Herausfallen des Wellenzapfens verhindert, wenn der Rahmen YY gehoben wird.

Das Rädchen R wird aus Stahl gefertigt, hat einen sphäroidischen Umfang und darauf feine Schliffstriche nach der Richtung der Welle w. Es läuft auf einem aus präparirter Thierhaut gefertigten Scheibenüberzug.

Der Draht, welcher um die Trommel T Fig. 44. geschlagen wird, um dadurch bei Verschiebung des Gestelles P die Scheibe S in drehende Bewegung zu bringen, ist auf das Metallstück u, Fig. 37., festgeklemmt, geht über die Rolle i, dann um die Trommel T, ferner über die Rolle t auf die Feder l, woran er befestigt ist. Die Feder l, welche sich in einem Charnier in dem an G angeschraubten Maschinentheil Eo dreht, wird mittels einer Schraube a gespannt und mittels einer zweiten Schraube a_I festgestellt. Man hat hierdurch ein leichtes Mittel den Draht in der nöthigen Spannung zu erhalten. Die Stahlfeder muss so stark sein, dass sie der Bewegung des Gestelles P nicht folgt. Sie giebt das Mittel, dass der Draht, wenn er sich

während der Arbeit ein wenig dehnt, in Spannung erhalten wird. Der Draht besteht aus federhartem Stahl, damit er sich durch das abwechselnde Biegen nicht streckt, liegt mit drei schraubenförmigen Windungen auf der Trommel und wird nach Maassgabe der Schraubenwindungen gegen den Horizont geneigt gelegt. Dadurch bleiben die Drahtwindungen während der Drehung geordnet. Die Schiefstellung erfolgt mittels Drehung der schraubenförmigen Ränder *i* und *t*. Die Füsse *C*, C_I dieser Ränder sind verschiebbar und werden nach den neben ihnen angebrachten Scalen gleichweit von der Nuth *gg* gestellt, bis der Draht tangentiell an der Trommel und parallel zu *gg* liegt. Dieser Parallelismus wird mit Hülfe zweier neben den Rollen *i* und *t* angeschraubten Scalen regulirt.

Zur Abwiegung der Spannung des Drahtes dient der Apparat *Aa* mit Waagschale oder Gewicht. Er dient auch als Griff zum Heben des Planimeters. An der entgegengesetzen rechten Seite des Planimeters wird ein zweiter Griff angebracht.

Die Räder und Getriebe des Zählerwerks sind so eingerichtet, dass sie 4 Zeiger bewegen, von denen der grosse die Einer und Zehner, der andere die Hunderte, der dritte die Tausende, der vierte die Zehntausende anzeigt. Liest man von den Zifferblättern ab die Zahlen

6 am Zifferblatte der Zehntausende
8 „ „ „ Tausende
4 „ „ „ Hunderte
33 „ „ „ Zehner und Einer,

so hält die gemessene Fläche 68433 Quadratruthen. Die Bruchtheile einer Quadratruthe werden, soweit sie nicht in der Theilung ausgedrückt sind, abgeschätzt. Zehntel schätzen sich leicht ab, da jeder Ruthentheil in der Theilung halbirt wird.

Alle Zeiger drehen sich beim Gang des Instrumentes nach ein und derselben Richtung, also alle entweder vorwärts oder alle rückwärts. Jeder der Zeiger besteht aus zwei federnden Hälften, welche in der Mitte der Zeiger eine Oeffnung haben, die auf die Zapfen der Wellen passt. Wenn man die Zeiger auf die Zapfen ihrer Wellen steckt, so klemmen sie sich zwar fest, bleiben jedoch drehbar, was nöthig ist, um sie beim Beginn jeder Messung auf Null zu stellen.

Statt des Führstiftes *F*, Fig. 4., ist ein Planglas *W*, Fig.

37., mit einem kleinen in die untere Ebene des Glases eingeschliffenen Punkte vorhanden, der von einem auch eingeschliffenen Ringchen umgeben ist, um den Punkt leicht zu finden. Punkt und Ringchen sind geschwärzt. Der Punkt wird auf den Umfangslinien der Flächenzeichnungen herumgeführt. Das Glas liegt in einem Rahmen, welcher mit Griffen, woran man mit beiden Händen über die Umfangslinien der Flächen fährt, versehen ist. Der Rahmen und das Glas liegen mit ihrer unteren Ebene auf der Zeichnung der zu umfahrenden Fläche. Unter den Rahmen ist dünnes Papier geleimt, so dass der Führpunkt nur um die Dicke dieses Papiers von den Linien der Zeichnung entfernt ist. Der Rahmen *V* dreht sich zwischen zwei Spitzen *bb*, Fig. 37., in einem Bügel *U*, der sich um einen Zapfen *z* drehen kann. Das Lagerstück *To* des Bügelzapfens ist abermals zwischen zwei Spitzen *xx* drehbar und der Halter *So* dieser zwei Spitzen *xx* ist an den Schieber *E* angeschraubt. Das Stück *So* ist an das Stück *M* Fig. 46. und dieses erst an den vordersten Knopf von *E* angeschraubt. Das Stück *So* kann seitlich, das Stück *M* aber um sein Centrum gedreht werden. Es kann das Stück *So* auch höher und tiefer gestellt werden. Alle diese Theile des Führapparates werden so regulirt, dass kein Wanken oder Schlottern statt hat. Durch die Einrichtung, dass sich der Rahmen mit Planglas zwischen den Spitzen *bb*, *xx* und um den Zapfen *z* drehen kann, ist Gelegenheit gegeben, dass der Rahmen mit Planglas Unebenheiten in der Zeichnungsebene nachgeben kann und Hindernisse in der Führung nicht eintreten.

Auf dem Rahmen des Planglases steht senkrecht in die Höhe eine lange Schraube *y*, Fig. 37., mit 2 Muttern. Auf die Schraube wird eine Lupe *K* gesteckt und mittels der Muttern in der dem Focus zugehörigen Entfernung vom Planglase festgeklemmt. Die Lupe ist gross, damit man gleichzeitig mit beiden Augen hineinsehen kann. Dadurch werden die Augen mehr geschont, als wenn man blos ein Auge braucht. Regulirt man das Instrument nach der Normalfigur, so kann man auch eine kleine sehr scharfe Lupe brauchen, wozu ein kleinerer Träger *K* dient.

Auf die lange Schraube *y* wird auch der halbkreisförmige Bügel K_2 Fig. 37ª. Tab. VII. aufgesteckt und eben so, wie die Lupe, mittels zweier Schraubenmuttern zwischen Lupe und Plan-

glas festgeschraubt. Die Stellung des Bügels ist so, dass die Oeffnung des Halbkreises dem Führer des Instrumentes zugewendet ist. An den beiden Enden des Halbkreises befinden sich die Klemmfedern *a*, *a*. Zwischen den Federn und Enden des Bügels ist ein schwarzes Pferdehaar *b* eingeklemmt und straff angezogen. Das Haar wird als Richtschnur gebraucht, um mit Zeitersparniss gewisse Linien der zu umfahrenden Flächenfiguren in die Nulllinie zu legen. Der Gebrauch dieses Apparates ist in der Instruction zur Führung des Instrumentes erklärt. §. 51.

Der Schieber *E* wird vermöge der Druckrollen ω, ω_1, ω_2, Figg. 42., 43., auf die Räder *B*, B_1, B_2 angedrückt. Mittels der Schrauben *e*, e_1 und der Federn ε, ε_1 lassen sich die Druckrollen nach Bedürfniss mehr oder weniger andrücken. Die Schrauben oo_1 halten die Träger der Federn an *Fo* fest. Auf die Druckrolle ω drückt ein Gewicht *Γ*, Fig. 42., welches auch die Maschine im Gleichgewicht erhält. Mittels der Schraube *r*, Fig. 42., wird die horizontale Lage des Gewichtes regulirt. Um die Vor- und Rückverschiebung des Schiebers *E* nach Verhältniss des Durchmessers der Scheibe zu begrenzen, sind die Pufferschrauben *f*, f_1, Fig. 46., vorhanden, welche am Ende der Bewegung an die Säule *Q* anstossen.

Das Instrument ist aus feinem broncirten Gusseisen verfertigt, weil dieses leichter und weniger biegsam ist, als Messing und zu grosse Schwere und Elasticität der Theile des Instrumentes zu vermeiden sind. Messingene Instrumente sind wegen der Biegsamkeit des Messings nicht brauchbar, wenn sie nicht plump gefertigt sind. Sind sie aber plump, so werden sie zu schwer und ihre Führung schwer und unsicher.

Durch verschiedene Hülfsapparate zur Hauptmaschine werden grössere Präcision und Zeitersparniss gewonnen. Deshalb wollen wir erwähnen, was die Planimeterfabrik in dieser Beziehung leistet:

Hülfsapparate zum Instrumente sind:

1) ein fein lackirter, inwendig grün ausgelegter Kasten, in welchen man das Instrument für den Transport einlegt und festschraubt. Der Kasten hat eine Handhabe, ist verschliessbar und wird als Bestandtheil des Instrumentes betrachtet.

2) einige Schraubenzieher. Knebel und Schlüssel werden als Bestandtheile des Instrumentes betrachtet.

3) einige Wellen *w* mit Rädchen *R* von verschiedener Grösse, die für verschiedene Maassstäbe, z. B. den $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{2000}$, $\frac{1}{4000}$ theiligen Maassstab berechnet sind, eine Welle mit einem Rädchen wird als Bestandtheil des Instrumentes gegeben.

4) ein Parallelmaass, §. 44., welches als Bestandtheil des Instrumentes gilt.

5) eine Schleifmaschine, §. 45.

6) ein Haken zum Aufziehen des Drahtes, §. 50. No. XII. Derselbe gilt als Bestandtheil des Instrumentes.

7) ein Sehtrichter, §. 49. No. XIV.

8) ein Tisch mit Brücke und verschliessbarem Deckkasten, §. 43.

9) ein Apparat mit Gewicht zum Drahtspannen, §. 42.

10) einige Gewichtchen zum Spannen der Feder an der Säule *Q*. §. 50. No. X.

11) ein Winkel zur Richtung der Welle des Rädchens §. 50. No. XVI. Derselbe wird als Bestandtheil des Instrumentes betrachtet.

12) ein Zeichenapparat, womit man das Centralringchen auf die Scheibe *S* zeichnet und auch zum Behuf des Studiums Curven auf die Scheibe zeichnen kann. §. 46.

13) ein Bügel zum Halten eines Haares, womit man in kürzester Zeit die Nulllinie findet. §. 36.

14) einige Scheiben mit präparirten Bezügen, eine Scheibe wird als Bestandtheil des Instrumentes geliefert.

15) calibrirte Stahldrähte.

16) Schleifmittel mit Schleifkolben zum Schleifen der Scheibenbezüge.

17) Verschiedene Beschwerer der Karten.

18) Apparat, um die Schwere der Schieberbewegung zu messen.

§. 37.

Form der Nuthen gg und g_1g_1 und der Räder A und B; theoretische Entwickelung der darauf Bezug habenden Rechnungsformeln.

I. Läuft ein Rad mit conischem Kranze auf 2 scharfen Kanten, wie die Durchschnittsfigur (Fig. 56. Tab. V.) zeigt, so

drücken die schiefen Flächen des Rades nach einiger Zeit des Gebrauchs kleine schiefe Flächen an die Kanten der Schienen, zwischen welchen, bezüglich auf welchen das Rad läuft, wie Fig. 57. Tab. 5. zeigt.

Man denke sich in Fig. 58. Tab. V. einen vom Gewichte P senkrecht herabgedrückten Keil cab, welcher sich an der Wand ac herabschieben kann, aber mit seiner schiefen Ebene bc an der Fläche d des Körpers mdn anliegt. Auf diese Fläche d drückt der Keil mit seinem Gewichte P in der Richtung der $\backslash\ hd$. Wenn die Fläche d senkrecht gegen die Ebene bc drückt, so ist sie in Ruhe, weil d weder nach b, noch nach c hin weichen kann. Wenn P aus h nach d gelangt, so hat der Keil abc die Lage $a_1 d_2 c_1$ eingenommen, es ist, weil $\backslash\ ac$ nicht nachgiebt, die Fläche bd an d vorbeigerutscht und hat dabei den Körper mdn in der Richtung $a_1 d$ aus seiner Lage in die Lage $m_1 d_2 n_1$ gedrückt. Es ist somit die Mittelkraft hd in die Seitenkräfte $gd = dd_2 \frac{\|}{\|} hb$ und $bd \frac{\|}{\|} hg$ zerlegt worden. In dem Parallelogramm $hbgd$ ist nun $\backslash\ hd = \sin tot = 1$, $\backslash\ hb = \sin \alpha$ und $\backslash\ bd = \cos \alpha$.

Da der Keil abc in der Richtung der $\backslash\ bd$ d. h. im Wege der Kraft entweicht, so wirft sich der ganze Effekt der Kraft auf die Richtung der $\backslash\ dg$, den Weg der Last, gegen den Körper mdn und es verhalten sich Kraft (P) und Last (Q) umgekehrt, wie ihre Wege. Es ist daher $P : Q = \sin \alpha : \cos \alpha$;

$$P \cos \alpha = Q . \sin \alpha;$$

$$Q = P . \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

II. Wenn ein Rad, wie in Fig. 58., entlang seiner Bahn mit schiefem Laufkranze läuft, so geschieht dieser Lauf nach dem Vorgetragenen

1) unter dem Drucke gd senkrecht gegen die schiefe Ebene. Da die Reibung stets als ein aliquoter Theil des Druckes dargestellt wird, so kömmt die Grösse dieses Druckes bei der Bestimmung der Reibungsgrösse in Betracht.

Ferner ist aber

2) der Lauf des Rades auf seiner Bahn theils rollend, theils schleifend (gleitend).

Würde in Fig. 59. Tab. V. die Rolle mit ihrem conischen Umfange vy auf der Schiene vy um ihre Axe ab laufen, so ge-

schieht dieses mit den Radien cv, c_4y ~~und noch mit allen zwischen diesen Radien cv, c_4y~~ und noch mit allen zwischen diesen Halbmessern der Rolle, also im Drehungserfolge mit dem mittleren Halbmesser $\frac{cv + c_4y}{2} = c_2w = r$. Die Rolle würde demnach auf einem Kreise vom mittleren Halbmesser r fortrollen. Dieser mit Radius r zu beschreibende Kreis ist grösser, als alle zwischen v und w, und kleiner, als alle zwischen w und y liegende Kreise. Deshalb ist die Bewegung der kleineren Kreise theilweis rollend, theilweis aber schleifend, weil die Rolle mit ihren zu kleinen Kreisen zurückbleibt, mit den grossen aber vorzueilen bestrebt ist, jedoch von dem rollenden und von dem kleineren schleifenden Kreise retardirt wird.

Die zu kleinen Kreise liegen zwischen den Radien cv und c_2w, ihr Mittel ist $\frac{cv + c_2w}{2} = c_1w_1$. Sie laufen, bezüglich schleifen mit dem vom Radius c_1w_1 zu beschreibenden Kreise.

Die zu grossen Kreise liegen zwischen den Radien c_2w und c_4y, ihr Mittel ist $\frac{c_2w + c_4y}{2} = c_3w_2$. Sie laufen, bezüglich schleifen mit dem vom Radius c_3w_2 zu beschreibenden Kreise. Die kleineren bleiben bei einer Umdrehung der Rolle um die Länge eines Kreises zurück, der als Halbmesser die Differenz zwischen Radius c_2w und c_1w_1, also die Länge v_1w hat. Die zu grossen Kreise wollen während einer Umdrehung der Rolle um die Länge eines Kreises voreilen, der mit dem Halbmesser $c_4y - c_2w = v_2w_2$ beschrieben ist. Wenn die Abstände zwischen den Parallelen cv, c_1w_1 etc. gleich sind, so ist Radius v_1w = Radius v_2w_2 und sind dann die beiden kleinen Kreishalbmesser einander gleich, nämlich $= r_1$. Während also die Rolle vom Radius r einen rollenden Umgang macht, findet zwar ein Schleifen zweier Kreise vom Radius v_1w und v_2w_2 statt, es kömmt aber nur einmal in Rechnung, da die Breite der Reibungsfläche nach den Reibungsgesetzen nicht in Rechnung kömmt. Das Schleifen vertheilt sich auf die Schienenlänge $2 . r . \pi$ und hat stets gleichzeitig neben dem Rollen statt. Hr. Hofrath Hansen hat scharfe Laufkanten in den Schienen angeordnet, wahrscheinlich um dadurch das Schleifen zu beseitigen. Theoretisch ist dieses richtig, aber nicht praktisch, denn nach kurzem Gebrauche des In-

strumentes sind die scharfen Kanten abgestumpft und Vertiefungen in die Rollen eingedrückt. Deshalb giebt man besser den Schienen gewölbte Kanten und den Rädern Conen, oder man macht die Schienen conisch und die Räder gewölbt. Die Wölbungen halten mehr Druck aus und beschädigen die Räder weniger. Würden sich die Räder auf der Wölbung eine Laufkante von 0,443 par. Linie Breite bilden, so würde der Radius der Schleifungskreise $\frac{1}{4}.0{,}443 = 0{,}11'''$ betragen und bei 1 maliger Umdrehung eines Rades die Schleifung eine Länge von $2.0{,}11'''.\pi$ von $0{,}69'''$ haben. Es kömmt noch hinzu, dass das Gewicht der Maschine nicht blos von den schleifenden, sondern auch von den rollenden Radien getragen wird. Man kann daher nur einen aliquoten Theil des Gewichtes der Maschine als Druck auf die schleifenden Theile in Rechnung bringen. Auch wird die Schleifung mittels Einwirkung des langen Hebels r auf die kurzen Hebel $v_1w = r_1$ und $v_2w_2 = r_1$ bewältigt.

§. 38.

Berechnung der in der Maschine wirkenden Kräfte und Reibungen und der von ihr gegen die führenden Hände ausgeübten Widerstände. Apparat zur Regulirung der Schieberbewegung.

I. Zu den angegebenen Berechnungen seien beispielsweise gegeben

4,75 ℔ Gewicht des unteren Schiebers mit Zubehör,
2,25 ℔ Gewicht des oberen Schiebers mit Zubehör.
7 ℔ in Summa.

8‴ pariser, Halbmesser der unteren Räder A,
6,5‴ par., Halbmesser der oberen Räder B,
0,11‴ par., Halbmesser des kleinen Reibungskreises vom Radius r_1,
20° der $\angle\ \alpha$,
$0{,}342 = \sin\alpha$,
$0{,}9397 = \cos\alpha$,
0,02 = dem Reibungscoëfficienten der rollenden Reibung, $= \mu$,
0,18 = dem Reibungscoëfficienten der schleifenden Reibung, $= \mu_1$.

II. Nach dem Vorgetragenen findet der Druck der conischen Räder in der Richtung gd auf die Schienen statt und ist

$= 2Q = 2P \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, da im Radkranze 2 Keile vorhanden sind und $1 . Q = P \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ war.

A. Die ganze Maschine läuft auf 3 Rädern, es hat also 1 Rad $\frac{1}{3} . 7 \text{ ℔} = 2{,}333 \text{ ℔}$ zu tragen. Das Gewicht von 2,333 ℔ ist also, da es auf 2 Keile im Radkranze wirkt, $= 2P$ und es ist

$$2P \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2{,}333 \text{ ℔} \frac{0{,}9397}{0{,}342} = 6{,}409 \text{ ℔}.$$

Wenn $2 . Q$ der Druck ist, μ oder μ_I den Reibungscoëfficienten bezeichnet, so ist nach den Formeln der Reibungsberechnung die Reibung

a) bei schleifender Reibung $= 2Q . \mu_I$,

b) bei rollender Reibung $= 2Q \frac{\mu}{r}$, wobei r der Halbmesser der Rolle ist.

Für unsere nächste Berechnung ist r an $A = 8'''$ par. und

$\frac{2Q . \mu}{r} = \frac{6{,}409 \text{ ℔} \; 0{,}02}{8'''} = 0{,}01602 \text{ ℔} = 0{,}4806$ Loth. Dieses 3mal genommen giebt 1,4418 Loth. Die rollende Reibung an den 3 Rädern A wird demnach durch das Gewicht von 1,4418 Loth überwunden.

B. Die Reibung in den Zapfen der Wellen der Räder A ist nicht stark. Setzen wir den Halbmesser eines Zapfens $= 0{,}25'''$ par. $= r_0$, so ist an ihm, da der Halbmesser des Rades $= 8'''$ und jedes Rad mit 2,333 ℔, also ein Zapfen mit $\frac{2{,}333}{2}$ $= \frac{P}{2}$ belastet ist, die Reibung an einem Zapfen

$= \frac{P}{2} . \frac{r_0}{r} \mu_I = \frac{2{,}333}{2} . \frac{0{,}25'''}{8'''} . 0{,}18 = 0{,}0065 = 0{,}195$ Loth.

Da nun aber 6 Zapfen vorhanden sind, so ist die gesammte Reibung

$= 6 . 0{,}195$ Loth $= 1{,}17$ Loth.

III. Was aber die schleifende Reibung betrifft, so ist diese an jedem der beiden conischen Räder A, $A_I = 2Q . \mu$. Während eines Umlaufs eines Rades, also während des Ablaufs der Peripherie $2r\pi$ des Rades findet diese Reibung nur auf der

Länge der Peripherie des kleinen Reibungskreises statt. Da der Halbmesser des kleinen Reibungskreises $= r_I$ gesetzt worden ist, so ist die Reibungslänge für einen Umlauf des Rades A oder $A_I = 2r_I\pi$. Es vertheilt sich daher diese Reibung auf den Umfang des grossen Rades und wir haben $2\pi r : 2\pi r_I = 2\,Q.\mu_I : x$;

$$x = \frac{r_I}{r} 2\,Q\mu_I$$

$$= \frac{0{,}11'''}{8'''} . 6{,}409 . 0{,}18$$

$$= 0{,}013.6{,}409.0{,}18 = 0{,}015\ \text{ℳ} = 0{,}45\ \text{Loth.}$$

Da diese Reibung an 2 Rädern statt hat, so ist sie 2 mal zu nehmen und

$$= 2.045 = 0{,}9\ \text{Loth.}$$

Es ist demnach auch die schleifende Reibung gering und haben die Räder und Schienen wenig davon zu leiden, besonders wenn man die Schienen mit Baumöl streicht.

IV. Drückt man mit einer gleichförmig beschleunigenden Kraft P, welche wir durch irgend ein Gewicht ausdrücken wollen, so dass die Masse die gleichförmige Endgeschwindigkeit p erlangt, so ist, wenn g die Endgeschwindigkeit beim freien Falle nach 1 Secunde ist,

$$P_I = \frac{p}{g} G,$$

(vergleiche Weissbachs Mechanik Bd. I. §. 66. edit. 3.). Es ist g = 30,2 par. Fuss oder 362,4‴ par. Denken wir uns unter G das Gewicht des ganzen unteren und oberen Schiebers mit allem Zubehör und Führapparat, sehen von Reibung ab, setzen G = 7 ℳ und nehmen an, dass man den Planimeter mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit von 4‴ par. in 1 Secunde führt, so ist

$$P_I = \frac{4'''}{30{,}2'\ \text{par.}} . 7\,\text{ℳ} = \frac{4'''}{4348{,}4'''} 7\,\text{ℳ} = 0{,}193\ \text{Loth.}$$

V. a) Giebt man dem Stahldrahte eine Spannung, die einem Gewichte von 10 Loth entspricht, so ist ein Druck von 0,35 Loth ausreichend, um den Widerstand der Drahtbiegung zu überwältigen.

b) Hierzu wollen wir ohne weitere Ausführung der Berechnung das Bewegungsmoment der Scheibe S, die Reibung an ihrer Welle und das Bewegungsmoment des Rädchens und die daran

statt habende Reibung mit dem berechneten Gewichte von 0,42 Loth fügen.

VI. Es setzt daher die Maschine, wenn man sie in der Richtung der Nuth *gg* mit einer Geschwindigkeit von 4‴ par. per Secunde bewegt, der führenden Hand einen Widerstand von

1,4418	Loth	(No. II. A., B.)
1,1700	„	
0,9000	„	(No. III.)
0,1930	„	(No. IV.)
0,3500	„	(No. V. a., b.)
0,4200	„	
4,4748	Loth	entgegen.

VII. In Ansehung des Schiebers *E* treten folgende Rechnungen hervor:

Das Gewicht *Γ* wiegt 27,5 Loth und es wirkt sein Schwerpunkt auf Hebelarme. Es hängt nämlich an dem einen Hebelarm von 19‴ Länge und wirkt mit dem anderen Hebelarm von 9‴ Länge auf *den Maschinentheil, worin die Rolle w liegt.* Wir haben daher die Proportion

$$9 : 19 = 27{,}5 \text{ Loth} : x \text{ Loth}.$$

Es ist daher

$$x = 58{,}05 \text{ Loth}.$$

Der Druck von 58,05 Loth wird von einem Punkte aufgefangen, welcher sich in dem Arme befindet, der an einer Seite angeschraubt ist und an der anderen Seite die Rolle trägt. Der belastete Punkt liegt 11‴ von der Druckrolle *ω* und 28‴ vom Anschraubepunkte ab. Der Gesammtdruck von 58,05 Loth auf die Gesammtlänge beider Hebelarme (11‴ + 28‴ = 39‴) vertheilt sich nach Verhältniss des Ganzen zum Theil und zwar umgekehrt, wie die Hebelarme. Wir haben daher

$$39''' : 28''' = 58{,}05 \text{ Loth} : x \text{ Loth}$$

und es ist

$$x = 41{,}68 \text{ Loth}.$$

Dieser Druck von 41,68 Loth gehört dem kurzen Hebelarme von 11‴ an und presst die Rolle *ω*.

VIII. Der Schieber *E* hat mit den an ihm hängenden und auf ihn befestigten Theilen, jedoch exclusive des Gewichtes *Γ* ein Gewicht von 2,25 ℳ. Dieses Gewicht ruht auf den 3 oberen Rädern. Es trägt daher jedes Rad $\frac{1}{3} . 2{,}25$ ℳ. = 0,75 ℳ.

IX. A. Das Rad B hat einen Halbmesser von 6,5‴ und der Keil seines Umfangs hat 20° im ∠ α. Es drückt in den beiden Richtungen gd und $g_I d_I$ (Fig. 58.) gegen die Schiene $g_I g_I$ mit einem Gesammtdrucke von

$$2P \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 0{,}75\,\text{ℓℓ}\ \frac{0{,}9397}{0{,}342} = 1{,}841\,\text{ℓℓ} = 2Q_I.$$

Es ist, da $r = 6{,}5‴$ par. ist, die rollende Reibung $2Q_I \frac{\mu}{r}$

$$= \frac{1{,}841\,\text{ℓℓ}\ 0{,}02}{6{,}5‴} = 0{,}0056\,\text{ℓℓ} = 0{,}168 \text{ Loth.}$$

B. Die Reibung in den Zapfen jedes der Räder B und B_I beträgt ähnlich wie bei II. B.

$$\frac{0{,}75}{2} \cdot \frac{0{,}25‴}{6{,}5‴}\ 0{,}18$$
$$= 0{,}0777 \text{ Loth.}$$

Da aber 4 Zapfen vorhanden sind, so ist die gesammte Reibung
$= 4 . 0{,}0777$ Loth $= 0{,}311$ Loth.

Das Rad B_2 ist mit $0{,}75\,\text{ℓℓ}$ 22,5 Loth und mit 41,68 Loth (siehe No. VII.), also zusammen mit $22{,}5 + 41{,}68 = 64{,}18$ Loth belastet. Hier beträgt daher die Reibung an einem Zapfen

$$\frac{64{,}18}{2} \cdot \frac{0{,}25}{6{,}5} . 0{,}18$$
$$= 0{,}222 \text{ Loth,}$$

mithin an zwei Zapfen
0,444 Loth.

Alle drei Räder B haben daher eine Reibung an ihren Zapfen von
$0{,}311 + 0{,}444 = 0{,}755$ Loth.

X. Das Rad B_I ist mit dem Drucke von $0{,}75\,\text{ℓℓ} = 22{,}5$ Loth und von dem Drucke des Gewichtes Γ, welcher 41,68 Loth beträgt, belastet. In diesem Falle ist daher $2P = 22{,}5 + 41{,}68 = 64{,}18$ Loth. Es ist daher

$$2P \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 64{,}18 \text{ Loth } \frac{0{,}9397}{0{,}342} = 157{,}562 \text{ Loth} = 2Q_2.$$

Die rollende Reibung ist daher

$$2Q_2 \frac{\mu}{r} = \frac{157{,}562 \text{ Loth } 0{,}02}{6{,}5‴} = 0{,}472 \text{ Loth.}$$

XI. Das Rad B_2 ist mit $0{,}75\,\text{ℓℓ}$ belastet. Die Last drückt senkrecht herab. Es ist daher die rollende Reibung

$$= P \frac{\mu}{r} = 0{,}75\,\text{ℓℓ}\ \frac{0{,}02}{6{,}5‴} = 0{,}068 \text{ Loth.}$$

XII. Die schleifende Reibung am Rade B ist

$$= 2Q_I \mu_I \frac{r_I}{r} = 1{,}841\,\mathcal{U} \,.\, 0{,}18 \,\frac{0{,}11'''}{6{,}5'''} = 0{,}168 \text{ Loth},$$

wie bei No. IX., weil zufällig $0{,}18 \,.\, 0{,}11 = 0{,}02$ ist.

XIII. Am Rade B_I ist die schleifende Reibung

$$= 157,\ 562 \text{ Loth } 0{,}18 \,\frac{0{.}11'''}{6{,}5'''} = 0{,}472,$$

wie bei No. X., weil auch hier $0{,}18 \,.\, 0{,}11 = 0{,}02$ ist.

XIV. Berechnen wir für den Schieber E und dessen Zubehör, im Gesammtgewichte von $2{,}25\,\mathcal{U}$, den Druck $P_I = \frac{p}{g} G$, welchen die bewegte Masse gegen die führende Hand bei einer Geschwindigkeit von $4'''$ par. per Secunde übt, so ist

$$\frac{p}{g} G = \frac{4'''}{4348{,}8'''} \,.\, 2{,}25\,\mathcal{U} = 0{,}06 \text{ Loth.}$$

XV. Die Rolle ω hat Wellenzapfen von $0{,}5'''$ Halbmesser und der Halbmesser der Rolle selbst ist $= 3{,}75'''$. Da der Druck vom Gewichte Γ auf die Rolle $= 41{,}68$ Loth ist, so ist, wenn man den Halbmesser des Wellenzapfens $= r_2$ und den Halbmesser der Rolle $= r_3$ das Gewicht von 41,68 Loth $= q$ setzt, die rollende Reibung der Rolle

$$1) = q \,.\, \frac{\mu}{r_3} = 41{,}68 \,\frac{0{,}02}{3{,}75'''} = 0{,}222 \text{ Loth}$$

2) Die schleifende Reibung aber

$$= q \,.\, \mu_I \,\frac{r_2}{r_3} = 41{,}68 \,.\, 018 \,\frac{0{,}5}{3{,}75} = 0{,}998 \text{ Loth.}$$

XVI. Der Reibungscoëfficient von Metall auf Leder ist $= 0{,}6$. Drückt nun das belastete Rädchen mit 0,8 Loth auf die Scheibe, so ist die Reibung des Rädchens beim Verschieben der Welle des Rädchens in der Richtung des Schiebers $= 0{,}8$ Loth. $0{,}6 = 0{,}4$ Loth.

XVII. Stellen wir nun die Widerstände zusammen, welche der Schieber E der führenden Hand entgegenstellt, so bestehen sie in

0,168	Loth	(No. IX. A. und B.)
0,755	„	
0,472	„	(No. X.)
0,068	„	(No. XI.)
1,463		

1,463 Uebertrag
0,068 Loth (No. XII.)
0,472 „ (No. XIII.)
0,060 „ (No. XIV.)
0,022 } „ (No. XV.)
0,998 }
0,400 „ (No. XVI.)
3,583 Loth.

XVIII. Die Widerstände am untern Schieber betrugen: 4,4748 Loth (No. VI.) und am oberen Schieber 3,5830 Loth (No. XVII.). Es schiebt sich daher der obere Schieber um 0,8918 Loth leichter als der untere. Nun sollen sich aber beide Schieber gleich leicht oder gleich schwer schieben, damit die Schieber bei diagonalen Bewegungen sanft gehen. Deshalb muss man den am Schieber *E* fehlenden Widerstand noch herbeibringen. Dieses kann man durch den Druck auf die Rollen ω_1, ω_2. Es muss also jede dieser Druckrollen an rollender und schleifender Reibung einen Widerstand von

$$\frac{0{,}8918}{2} \text{ Loth} = 0{,}4459 \text{ Loth}$$

leisten.

Da die Reibungswiderstände (R) von einer Rolle sind

$$= q\left(\frac{\mu}{r_3} + \mu_1 \frac{r_2}{r_3}\right) = R = 0{,}4459 \text{ Loth},$$

so ist

$$q = \frac{R}{\frac{\mu}{r_3} + \mu_1 \frac{r_2}{r_3}}$$

$$= \frac{0{,}4459}{\frac{0{,}02}{3{,}75} + 0{,}18\,\frac{0{,}5}{3{,}7}} = \frac{0{,}4459}{0{,}134}$$

$$= 15{,}376.$$

Dieser Druck von $2 . 15{,}376$ auf die Rollen ω_1, ω_2 zusammen wird dann auch auf die 3 Räder *B* ausgeübt und es müsste rückwärts in Ansehung der Reibung an diesen Rädern eine corrigirende Berechnung vorgenommen werden. Da aber der Druck gering ist, so fällt die Aenderung der Reibungsgrössen an den Rädern *B* klein aus und braucht nicht beachtet zu werden. Siehe aber auch unten No. XXII.

XIX. Es ist nun noch zu untersuchen, ob man bei der getroffenen Einrichtung des Instrumentes davor gesichert ist, dass sich die Schienen $f_I f_I$ und $s_I s_I$ des Schiebers E nicht von den Rädern B abheben, wenn man die Maschine am Führapparate in der Richtung der Nuth gg seitlich verschiebt. Der Führapparat ist an den vorderen Knopf des Schiebers E angeschraubt und hängt 40‴ par. lang herab. Der Knopf befindet sich in der Mitte des Schiebers. Zieht man durch die Mitte des Schiebers eine gerade Linie nach der Längenrichtung des Schiebers, so kann man diese Linie als eine horizontale Drehaxe ansehen, welche man mittels des 40‴ langen Hebels in Umdrehung bringen könnte. Hat der Schieber eine Breite von 22‴, so ist die halbe Breite = 11‴. Würde man nun diese halbe Breite als einen Hebel von 11‴ ansehen, welcher an der Drehaxe befestigt wäre, so würde, wenn man den Hebel von 40‴ Länge bewegte, sich auch der Hebel von 11‴ Länge bewegen. Nun drücken wir mit einem Gewichte von 4,4748 Loth an das untere Ende des Hebels von 40‴. Dieser Druck würde sich am Hebel von 11‴ geltend machen. Es verhalten sich aber die Druckkräfte umgekehrt, wie die Hebelarme. Wir haben daher die Proportion

$$11''' : 40''' = 4{,}4748 \text{ Loth} : x \text{ Loth}.$$

Es wäre daher

$$x = \frac{40 \cdot 4{,}4748}{11} = 16{,}27 \text{ Loth},$$

d.h. es müsste jede der Schienen $f_I f_I$ und $s_I s_I$ mit 16,27 Loth belastet sein, um nicht durch den Druck am Führapparate abgehoben zu werden.

Nun ist aber die Schiene $f_I f_I$ belastet mit

22,500 Loth	$(= \frac{1}{3} . 2\frac{1}{4})$ ℳ	über dem Rade B und B_2
30,752 „	Druck der Rollen ω_I, ω	
22,500 „	$(= \frac{1}{3} . 2\frac{1}{4}$ ℳ	über dem Rade B_I
41,680 „	Pressung durch das Gewicht Γ	
116,432 Loth.		

Die Schiene $s_I s_I$ trägt über dem Rade B_2 die Last von

22,500 Loth	$(= \frac{1}{3} . 2\frac{1}{4}$ ℳ$)$
15,376 „	Druck der Rolle ω_2
37,876 Loth	

Die Lasten auf den Schieber E sind daher weit grösser,

als die Druckkraft von 16,27 Loth und es kann der Schieber *E* *durch den Druck gegen den Führapparat nicht abgehoben* werden.

XX. Eine weitere Untersuchung hat sich damit zu beschäftigen, ob der Schieber *E* alsdann, (wenn eine der Kanten der Nuth $g_I g_I$ gegen die Schiefe des conischen Kranzes des Rades *B* drückt, um dadurch die ganze bewegliche Maschine in der Richtung der Nuth *gg* fortzuschieben,) auf der schiefen Ebene des Radkranzes hinaufgleiten und dadurch aus seiner Richtung gebracht werden kann.

Die Kante der Nuth $g_I g_I$ drückt mit dem bekannten senkrecht gegen die schiefe Linie *cb* des Radkranzes gerichteten Drucke von 4,4748 Loth horizontal und in der Richtung der Nuth *gg*, also schief gegen die schiefe Ebene *cb* des Radkranzes. Es sei Fig. 60. Tab. V. \ *dw* die horizontale Druckkraft gegen die schiefe \ ∢*dc*. Es zerlegt sich diese Mittelkraft *dw* in die Seitenkraft *du* ∦ *vw*, welche senkrecht gegen \ ∢*dc* steht und verloren geht, weil \ ∢*dc* nicht weicht, und in die Seitenkraft *vd*, nach deren Richtung die Druckkraft *dw* hingleiten kann. Die \ *dw* ist sin tot. = 1, die \ *vw* ist = \ *dw*.cos α, die \ *vd* = \ *dw*.sin α. Es ist nun

$$\backslash\, du : \backslash\, vd = 1 : \sin\alpha.$$

Setzen wir für \ *dw* = 1 die Druckkraft 2,4748 Loth, so ist

$$1 : \sin\alpha = 4{,}4748 : x;$$
$$x = 4{,}4748 \sin\alpha$$
$$= 4{,}4748 \,.\, 0{,}342$$
$$= 1{,}53 \text{ Loth},$$

d. h. es treibt eine Kraft von 1,53 Loth die Schiene $f_I f_I$ über dem Rade *B* auf der schiefen Linie in die Höhe. Wir wissen aber bereits, dass an dieser Stelle der Schieber $P = \frac{1}{3} . 2\frac{1}{4}\,\mathcal{U} = 0{,}75\,\mathcal{U}$ *senkrecht herabdrückt und in der Richtung der* \ ∢*dc* einen Druck von $P.\cos\alpha = 0{,}75\,\mathcal{U} \,.\, 0{,}9397 = 0{,}7\,\mathcal{U} = 21$ Loth ausübt. Es kann daher der aufsteigende Druck von 1,53 *Loth gegen den niederwärts gehenden Druck von 21 Loth* keine Bewegung hervorbringen. Es bleibt daher die Nuth $g_I g_I$ geschlossen auf dem Radkranze liegen. Noch mehr ist dieses natürlich bei dem Rade B_I und den Rädern *A* und A_I der Fall, weil diese noch viel mehr, als das Rad *B* belastet sind.

XXI. Die gegebenen Maasse in der Berechnung sind beispielsweise gesetzt. Denn es sollte nur gezeigt werden, wie das

Instrument der Berechnung aller seiner Theile unterworfen wird und wie im Bau durch Rechnung die vorgeschriebenen Ziele zu erreichen sind.

XXII. Da nach dem rechnerischen Resultat feststeht, dass der Schieber *E* auch ohne die Druckwellen ω_1, ω_2 in seiner Bahn liegen bleibt und diese Rollen nur den Zweck haben, den Schieber beim Fall eines unvorsichtigen Stosses in seiner Lage zu erhalten, aber auch mittels dieser Rollen den Gang des Schiebers *E* gleich schwer mit dem Gang des unteren Schiebers zu stimmen, so kann man letzteres, statt der in No. XVIII. behandelten Correction, durch Versuche erzielen. Man bringt nach Fig. 55. Tab. XI. an einem Ständer, der sich auf einem schweren Fusse befindet, eine leichte Rolle mit Nuth an, befestigt an den Führapparat, von dem man aber während dieser Operation den Bügel *U* mit Rahmen *V* abgenommen hat, einen Zwirnsfaden, legt ihn über die Rolle am Ständer, hängt an den Faden eine kleine Blechbüchse und wirft in dieselbe so lange Schroten, bis das Gewicht die Maschine in der Nuth *gg* fortzieht. Hierbei muss der Faden parallel mit der Nuth *gg* und horizontal liegen. Die horizontale Lage erbringt man dadurch, dass man die Rolle an ihrem Ständer an die erforderliche Stelle rückt und mittels Klemmschraube den Zapfen, worum sich die Rolle dreht, befestigt. Als Ständer mit Fuss kann man den Schleifapparat (§. 45.) benutzen.

Sobald man das Gewicht gefunden hat, welches den Wagen auf den Ständer *A* fortzurollen vermag, stellt man den Ständer mit Rolle so, dass der Faden die Richtung des Schiebers *E* bekömmt und richtet den Faden wieder horizontal. Ist das Gewicht zu schwer, d. h. ist der Gang des oberen Schiebers leichter, als der Gang des unteren Schiebers, so spannt man die Federn der Rollen ω_1, ω_2 mittels der Schrauben *e*, bis der Gang des Schiebers *E* dem Gewichte entsprechend ist.

§. 39.

Bestimmung der Lage der indifferenten Biegungsfläche im Drahte.

Zur Berechnung des Durchmessers des Rädchens *R* braucht man den Durchmesser der Trommel *T*. Nun legt sich aber der

Draht auf die Trommel und vergrössert dadurch den Durchmesser der auf der Trommel liegenden Drahtwindungen. Man muss daher wissen, wie viel diese Vergrösserung beträgt.

Legen wir um die Trommel T Fig. 61. Tab. XII. einen kreisrunden Draht, welcher die Querschnittsfläche vom Durchmesser ab hat, und lassen denselben durch das Gewicht Q fest anziehen, so wird er genöthigt, vermöge seiner Elasticität sich kreisförmig um die Trommel zu biegen. Wir stellen ein Stück des Drahtes vor seiner Biegung im geraden Zustande $adbe$ dar, tragen die Länge $ch = ad = be$ auf $\smile ch_I$ und ziehen durch Punkt h_I den Radius Ce_2d_2. Wir tragen ferner die Länge ad auf $\smile ad_I$ und die Länge be auf $\smile be_I$ und ziehen Linie $e_Ih_Id_I$. Wir haben dann die Dreiecke $h_Ie_Ie_2$ und $h_Id_Id_2$, welche näherungsweise einander gleich sind.

Weiter wollen wir uns denken, der Draht bestehe aus einer Anzahl sehr dünner Plättchen, die auf einander gelagert sind. Würden wir in das $\square\ ae$ viele Parallellinien zu $\backslash\ ad$ und in das Kreisflächenstück ad_2e_2b viele concentrische Bogenlinien ziehen, so würden diese Linien und Bogen die erwähnten Plättchen darstellen.

Wenn wir den Draht oder vielmehr die Plättchen, woraus er nach der Voraussetzung bestehen soll, um die Trommel aus der geraden in kreisförmige Lage bringen, so muss das Stück $adeb$ eine Gestalt annehmen, wie die von ad_2e_2b ist, weil es die Richtung des Radius Ce_2d_2 so bestimmt. Unter dieser Voraussetzung muss sich das Plättchen $ad = \smile ad_I$ bis zur Länge des $\smile ad_2$, also um $\smile d_Id_2$ ausdehnen. Dagegen muss sich das Plättchen $be = \smile be_I$ bis zur Bogenlänge be_2, also um $\smile e_Ie_2$ zusammendrücken. Alle zwischen diesen Plättchen ad und be liegenden Plättchen müssen sich ebenfalls je nach dem Orte ihrer Lage entweder dehnen oder zusammendrücken. Da sich diejenigen Plättchen, welche auf Seite der $\backslash\ ad$ liegen, ausdehnen und diejenigen, welche auf Seite der $\backslash\ be$ liegen, zusammendrücken, so muss es ein Plättchen geben, welches sich weder dehnt noch zusammenzieht, sondern sich nur kreisförmig biegt. Es ist der Ort der Lage dieses Plättchens zu suchen.

Nach den gemachten Voraussetzungen müssen die im $\square$ $adbe$ liegenden Plättchen nach ihrer Biegung das Ringflächenstück ad_2be_2 einnehmen.

Setzen wir den Halbmesser $Cb = r$ und den Halbmesser des Drahtes $= cb = r_I$, so ist $\backslash\ ba = 2.r_I$ und Radius $Ca = r + 2.r_I$. Es ist dann $\smile\ be_2 = r.\varphi$ und $\smile\ ad_2 = (r + 2.r_I).\varphi$. Suchen wir denjenigen Bogen, welcher weder verlängert noch verkürzt wird, so liegt er zwischen dem am meisten verlängerten $\smile (r+2r_I).\varphi$ und dem am meisten verkürzten $\smile r.\varphi$. Da alle Bogen wegen der kreisförmigen Biegung von den radialen g e r a d e n Linien ba und e_2d_2 begrenzt werden, so ist die Reihe der Längen aller zwischen $\smile(r+2r.)\varphi$ und $\smile r\varphi$ liegenden Bogen eine arithmetische Reihe und somit der *mittlere* Bogen $= \dfrac{(r + 2r_I)\varphi + r.\varphi}{2}$

$$= \frac{2r.\varphi + 2r_I\varphi}{2} = r\varphi + r_I\varphi = \varphi\,(r + r_I) = \smile ch_I = \backslash ch.$$

Nun ist aber $\backslash\ r + r_I = \backslash\ Cc$ und c ist der Mittelpunkt des Drahtes. Es liegt daher das Plättchen, welches sich weder dehnt noch zusammendrückt, in der Mitte des Drahtes. Mann kann sagen, die Lauflinie auf der Trommel liegt in der Mitte des Drahtes. Bei Berechnung des Halbmessers der Trommel muss man daher von der nach §. 16. gefundenen Grösse des Halbmessers die halbe Drahtdicke in Abzug bringen.

Diese Berechnung setzt voraus, dass der Draht bei der Biegung seine kreisförmige Querschnittsfläche behält, da dieses aber nicht der Fall ist, so ändert sich das gefundene Resultat hinsichtlich der Lage der Lauflinie im Drahte um Weniges, was aber bei der Kleinheit des Halbmessers des Drahtes nicht in Anschlag gebracht zu werden braucht. Man kann beim Messen der Drahtdicke und des Durchmessers der Trommel mehr fehlen, als die angedeutete Differenz austrägt.

Im Verlaufe dieser Abhandlung haben wir wahrgenommen, wie bedeutend die Form des Drahtes durch das Biegen und Strecken fortwährend geändert wird. Deshalb ist es nothwendig, dass der Draht federhart ist. Ist er von einem weichen Metall, von Kupfer oder Silber, so verändert er nach und nach seine cylindrische Form und wird ungleich dünner, wodurch Fehler in die Messungsresultate kommen. Stahldraht kann auch dünner als Kupfer- oder Silberdraht sein.

§. 40.

Form des Umfangs des Laufrädchens und Bestimmung der Lage der Lauflinien in der Scheibe S und am Umfang des Rädchens. Anomalie im Umtrieb des Rädchens und deren Beseitigung.

1. Wir haben bisher vorausgesetzt, dass alsdann, wenn die Axe des Rädchens in der Richtung eines Radius der Scheibe *S* liegt, derjenige Kreis der Scheibe, auf welchem das Rädchen abrollt, dieses in der Richtung seiner Tangente forttreibe und dass die Länge dieses Kreises, dividirt durch die Peripherie des Rädchens, die Zahl der Umdrehungen des Rädchens ausdrücke. Für die rein theoretische Betrachtung der Sache kann man sich hierbei um so mehr begnügen, als durch die berechneten Operationen die richtige Consequenz dieser Betrachtungsweise dargethan wurde. In Wirklichkeit verhält sich die Sache aber anders. Wenn wir voraussetzten, es treibe der vom Rädchen berührte Scheibenkreis das Rädchen in der Richtung der Tangente dieses Kreises, so setzten wir voraus, es berühre ein mathematischer Punkt der Peripherie des Rädchens einen mathematischen Punkt des treibenden Kreises. Da wir jedoch ein materiell vorhandenes Instrument behandeln, so leuchtet sofort ein, dass der Umfang des Rädchens keine mathematische Linie sein kann. Deshalb können sich aber auch Rädchen und Scheibe nicht in einem mathematischen Punkte berühren, da der Umfang des Rädchens ein kreisförmiger Reif von irgend einer Breite ist, selbst wenn man ihn messerartig scharf machte. Wenn nun der Umfang des Rädchens messerartig scharf ist, so drückt er sich vermöge der Schwere des Rädchens, der Welle und sonstiger Belastung auf die Scheibe auf und berührt die Ebene der Scheibe nicht in einem Punkte, sondern mit einem Stücke seiner Peripherie, also mit einer kleinen Linie, welche in verticaler Richtung kreisförmig gebogen, aber in der Richtung der Ebene der Scheibe gerade ist und somit eine kleine Sehne in denjenigen Kreisen bildet, welche in der Scheibe liegen und das Rädchen drehen, Fig. 62. Tab. XII. Daraus folgt, dass die Ebene des Rädchens die Scheibenkreise stets als Sehne berührt und dass diese gleich lang bleibende Sehne um so grösseren Winkeln angehört, je kleiner die Kreise der Scheibe werden, in welchen die Sehne liegt. Wäre nun die Sehne, womit das Rädchen die Scheiben-

ebene berührt, = wv = w_Iv_I Fig. 62., so würden in dem einen Falle die Radien cv, cR, cw und in dem anderen Falle die Radien cv_I, cR_I, cw_I treibend auf die Drehung des Rädchens einwirken. Hierin erblicken wir aber, dass wir nicht die Voraussetzung des tangentiellen Umtriebs der Peripherie des Rädchens, wie wir §. 5. behaupteten, sondern diejenigen Voraussetzungen vor uns liegen haben, die wir im §. 19. und in Fig. 16. behandelt haben. Es ist die Länge der erwähnten Sehne nicht über 1 Millimeter und somit die halbe Sehne nicht über $\frac{1}{2}$ Millimeter lang. Daraus folgt, dass der im §. 19. betrachtete $\angle\ \beta$ zum Verschwinden klein ist, wenn das Rädchen auf grossen Kreisen der Scheibe steht, und dass die Scheibenkreise, welche von langen Radien beschrieben werden, fast in tangentieller Richtung treibend auf das Rädchen wirken. Nähert sich aber das Rädchen mehr und mehr dem Centrum der Scheibe, so wächst $\angle\ \beta$ immer mehr und es treiben nun nicht mehr die Scheibenradien selbst, sondern die Cosini der Winkel β das Rädchen. Da die Cosini kleiner sind, als die Radien, so treiben sie das Rädchen weniger, als die Radien und es ist die Folge unvermeidlich, dass die Umdrehungen des Rädchens mit der Annäherung an den Mittelpunkt der Scheibe im Verhältniss zu seinen Umdrehungen auf grossen Scheibenkreisen zu klein werden. Jeder Planimeter, dessen Rädchen auf einer Ebene läuft, Polarplanimeter nicht ausgenommen, hat diesen für den Geometer unleidlichen und das Instrument unbrauchbar machenden Fehler, wenn das Rädchen an seinem Umfang zu dünn ist. Man hat bisher diesen Fehler des Instrumentes nicht sorglich vermieden.

Es fragt sich aber nun um Beseitigung dieses Fehlers. Um diese Frage zu lösen, müssen wir auf die Gesetze eingehen, nach welchen die materielle Drehscheibe ein materielles Rädchen in Umdrehung bringt.

Wir haben entdeckt, dass sich die Zahlen der Umdrehungen des Rädchens, wenn es auf grossen Scheibenkreisen abrollt, annähernd wie die Radien, und wenn es auf kleinen Kreisen abrollt, wie die Cosini der Winkel β verhalten. Soll dieser Fehler der Instrumente beseitigt werden, so müssen sich die Zahlen der Umdrehungen des Rädchens durchweg entweder wie die Radien oder wie die Cosini der Winkel β verhalten. Unsere Berechnungen der Functionen des Planimeters sind aber auf die Vor-

aussetzung gestützt, dass sich die Zahlen der Umdrehungen des Rädchens wie die Radien der treibenden Scheibenkreise verhalten. Wir müssen daher eine solche Einrichtung zu treffen suchen, dass sich die Zahlen der Umdrehungen des Rädchens nicht wie die Cosini der Winkel β, sondern wie die Radien der treibenden Scheibenkreise verhalten.

Da wir dem Umfang des Rädchens die bis auf Null schwindende Dünnheit einer mathematischen Linie nicht zu geben vermögen, der Umfang des Rädchens also immer eine Breite behält und somit in allen Fällen einen Cylinder darstellt, so wollen wir das Rädchen als Cylinder behandeln und sehen, nach welchen Gesetzen die Drehscheibe ein cylinderförmiges Rädchen in Umdrehung bringt.

II. Haben wir ein ebenes Band *mnop* Fig. 66. Tab. XII. und legen darauf den Cylinder *R* so, dass er mit der rechtwinklig gegen \ *op* und \ *mn* liegenden \ *cg* seines Cylindermantels das Band berührt, halten die zu \ *cg* parallel liegende Axe c_1c_3 an ihrem Orte fest und ziehen das Band *mp* in der Richtung *op* fort, so wird der Cylinder vermöge seines Contactes mit dem Band um seine Axe gedreht; zieht man die Bandfläche g_5g_3 *cg* so fort, dass \ g_5g_3 auf \ *cg* zu liegen kömmt, so wird eine gleichgrosse Fläche cgd_4g_4 am Cylindermantel abgerollt und es dreht sich der Cylinder zur Grösse des $\angle\ \varphi_1$ um.

III. Dieses vorausgeschickt, entfernen wir das Band *mnop*, stellen den Cylinder *R* Fig. 66. Tab. XII. auf die Scheibe *S* so, dass seine Axe c_1c_3 parallel zum Scheibenradius *cg*, der Cylinder aber auf \ *cg* liegt, erhalten die Axe c_1c_3 an ihren Ort und drehen die Scheibe *S* um ihre Axe c_1c_2. Die Scheibe *S* wirkt dann auf Umdrehung des Cylinders. Wir müssen untersuchen, nach welchen Gesetzen und in welcher Grösse die Umdrehung des Cylinders mittels der Scheibe *S* geschieht. Dazu wollen wir Folgendes vorausschicken:

Wickeln wir den Cylindermantel ab und strecken ihn zur ebenen Fläche *mnop* aus, und tragen die rectificirte Länge des $\smile\ gg_1$ auf \ gg_3 und auf \ cg_5 und ziehen \ cg_3, so erhalten wir das $\square\ cgg_3g_5$ und das $\Delta\ cgg_3$. Es ist

$$\text{Sector } cgg_1 = \setminus\ (cg)^2\pi\varphi,$$

$$\smile\ gg_1 = 2 \setminus cg \,.\, \pi\varphi,$$

$$\square\ cgg_3g_5 = 2 \,.\, \setminus cg \,.\, \pi\varphi \,.\, \setminus cg = 2 \setminus (cg)^2 \,.\, \pi\varphi,$$

$$\Delta\ cgg_3 = \frac{\square\ cgg_3g_5}{2} = \frac{2 \cdot \diagdown (cg)^2\pi\varphi}{2} = \diagdown\ (cg)^2\pi\varphi = \text{Sector}\ cgg_I.$$

Es ist somit $\Delta\ cgg_3 = \text{Sector}\ cgg_I$. Es sei Punkt k der Mittelpunkt in $\diagdown\ cg$, $\diagdown\ kd_3$ durch die Mitte der Fläche $mnop$, $\smile\ kg_2$ mit $\frac{1}{2} \diagdown\ cg = \diagdown\ ck$ gezogen und $\smile\ kdk_Ik_2$ um die Mitte des Cylindermantels geschlagen. Die $\diagdown\ cg_3$ schneidet $\diagdown kd_3 = \frac{1}{2} \diagdown\ gg_3 = \frac{1}{2} \smile\ gg_I = \smile\ kg_2$ ab. Es ist im $\Delta\ cgg_3$ die $\diagdown\ kd_3 = \diagdown\ g_6g_3 = \diagdown\ cg_7$, und $\diagdown\ g_7d_3 = \diagdown\ d_3g_6$, also $\Delta\ d_3g_6g_3 = \Delta\ cd_3g_7$. Hieraus folgt, dass

$$\Delta\ cgg_3 = \square\ cgg_7g_6.$$

Schlagen wir die Ebene $mnop$ mit den darauf gezeichneten $\Delta\ cgg_3$ und $\square\ cgg_7g_6$ um den Cylinder, so legt sich $\diagdown\ cd_3g_3$ in $\diagdown\ cdg_4$ und $\diagdown\ g_7g_6$ in $\diagdown\ d_Id_2$ und es ist dann $\Delta\ cgg_4 = \Delta\ cgg_3 = \text{Sector}\ cgg_I = \square\ cgd_Id_2$ und $\smile\ kd = \diagdown\ kd_3 = \smile\ kg_2$.

Wenn wir die Scheibe S zur Grösse des $\angle\ gcg_I = \angle\ \varphi$, also die Sectorfläche cgg_I fortdrehen, so fragt sichs, wie der Radius cg durch seine Fortbewegung im Sector gcg_I den Cylinder forttreibt. Die Fortbewegung des Cylinders geschieht mittels des Contactes bezüglich mittels Reibung des Radius cg am Cylinder. Der Druck des Cylinders auf die Scheibe S ist in jedem Punkte der $\diagdown\ cg$ ein und derselbe. Zögen wir das ebene Band $mnop$ unter dem Cylinder in der Richtung der $\diagdown\ op$ fort, so bewirkte die ebene Fläche $mnop$ mittels Reibung in jedem Punkte der $\diagdown\ cg$ gleich grossen Bewegungstrieb am Cylindermantel. Ziehen wir aber nicht das Band $mnop$ fort, sondern drehen die Scheibe S um $\angle\ gcg_I$ unter dem Cylinder hin, so muss folgerecht der Trieb an jedem Punkte der $\diagdown\ cg$ des Cylindermantels proportional sein den Grössen der, den betreffenden Punkten zugehörigen, Bogenstücke, also proportinal den zugehörigen Radien. Es wird also an Punkt g ein Antrieb, welcher proportional ist dem $\smile\ gg_I = \smile\ gg_4$, an Punkt k ein Antrieb, welcher proportional ist dem $\smile\ kg_2 = \smile\ kd$, an Punkt c ein Antrieb ausgeübt, welcher proportional ist einem Bogen, dessen Grösse = Null ist. Daraus folgt, dass die Summe aller Antriebe proportional ist der Sectorfläche gcg_I und dass somit auch am Cylindermantel eine Fläche fortbewegt werden wird, welche = der Sectorfläche gcg_I ist. Da aber alle fortbewegten Linien im Cylindermantel parallel zu $\diagdown\ cg$ zu $\diagdown\ c_Ic_3$ liegen, so kann an dem

Cylindermantel keine Sectorfläche, sondern die Fläche eines rechteckigen Parallelogramms fortbewegt werden, dessen Basis $\backslash\ cg$ ist und dessen noch unbekannte Höhen in den rectificirt zu denkenden Bogen cd_4 und gg_4 liegen.

Während $\backslash\ cg$ die Fläche cgd_2d reibt und forttreibt, schleift das Dreieck cdd_I des Cylindermantels hemmend auf der Scheibe, ohne von einem schleifenden Radius getrieben zu werden, gleichzeitig reibt und treibt aber $\backslash\ kg$ die Fläche des $\Delta\ dd_2g_4$ am Cylindermantel. Diese treibende Reibung im $\Delta\ dd_2g_4$ ist gleich der hemmenden Reibung im $\Delta\ cdd_I$. Es heben sich daher die Reibungen in den Dreiecken dd_2g_4 und cdd_I gegenseitig auf, wirken also nicht auf Fortbewegung des Cylinders. Dieser wird demnach nur fortbewegt durch die Reibung an der Fläche cgd_2d und zwar zur Länge des $\smile\ kd = \smile\ kg_2$.

Durch das Vorgetragene sind wir zu folgender Berechnung berechtigt. Am Centrum c der Scheibe S ist der Radius $= 0$, bei Punkt g ist der Radius $r = \backslash\ cg$. Es ist daher der mittlere Radius $= \frac{0 + r}{2} = \frac{r}{2} = \backslash\ ck = \backslash\ cg_2$ und somit der Repräsentant aller treibenden Radien, welche den Cylinder zur Umdrehung bringen. Der Kreis $kg_2 = \smile \frac{gg_I}{2}$ ist der treibende Kreis (die Lauflinie) in der Scheibe S, und der Kreis kd ist die Lautlinie im Cylinder.

IV. Stellen wir den Cylinder R auf eine Kreisscheibe S, Figg. 64. 65. Tab. XII., halten die Axe c_Ic_3 des Cylinders, welche einem Radius der Scheibe S parallel liegt, an ihrem Orte und drehen die Scheibe S um ihre Axe c_Ic. Durch den Contact des Cylinders R mit der Scheibe S in $\backslash\ ab$ wird der Cylinder um seine Axe gedreht. Es wirken in diesem Falle nach dem unter No. III. gefundenen Ergebniss auf die Drehung des Cylinders die Scheibenradien $ca = r_I$, $cb = r$ und alle zwischen r_I und r liegenden Radien der Scheibe S. Lassen wir das Wachsthum der Radien von r_I bis r in gleicher Zunahme geschehen, so ist der mittlere Radius $= \frac{r_I + r}{2} = r_2$. Es wirkt daher die Scheibe S so auf Drehung des Cylinders R, als wenn letzterer durch den Radius $\frac{r_I + r}{2}$ getrieben würde und es ist der Kreis k die Lauf-

linie in der Scheibe S, dagegen die Kreislinie $k_1 k k_2$ die Lauflinie im Cylinderrade.

V. Setzen wir für Fig. 66. den Halbmesser in der Scheibe $= \backslash\, cg = r$ und den Halbmesser des Cylinders $= \varrho$, so ist nach dem unter No. III. Vorgetragenen in der Lauflinie der Scheibe S der $\smile 2\frac{r}{2}\pi\varphi$ und in der Lauflinie des Cylinders der Bogen $2\varrho\pi\varphi_2$ abgelaufen. Da

$$\smile 2\,\frac{r}{2}\,\pi\varphi = \smile r\pi\varphi = \smile 2\varrho\pi\varphi_2 \text{ ist, so ist}$$

$$\varphi_2 = \frac{r\varphi}{2\varrho}.$$

VI. Aus dem unter No. III. und V. Vorgetragenen liegt vor, dass in der Scheibe S durch deren Umdrehung die Sectorfläche cgg_I an dem Cylindermantel hintreibt und eine gleich grosse Fläche im Cylindermantel, welche jedoch nicht das Δ cgg_3, sondern das Parallelogramm cgd_2d_I ist, fortbewegt. Die Fläche cgg_I ist $= r^2\pi\varphi$ und gleich der Fläche $cgd_Id_2 =$ Fläche cgg_3, welche die Grösse von $2\varrho\pi\varphi_2 .(r = \backslash\, cg)$ hat. Da

$$r^2\pi\varphi = 2\varrho\pi\varphi_2 \,.\, r,$$

so ist auch hierbei

$$\varphi_2 = \frac{r^2\pi\varphi}{2\varrho\pi r} = \frac{r\varphi}{2\varrho}.$$

In dem unter No. IV. erwähnten Falle kömmt in der Scheibe S die den Cylinder R drehende Ringfläche in Rechnung. Die Breite der Ringfläche ist $= r - r_I$. Diese Breite wird auf einer Kreisbogenlänge fortgeführt, welche der mittlere Radius $\frac{r + r_I}{2}$ über den $\angle\, \varphi$ beschreibt. Es ist daher die Ringfläche

$$= 2.\frac{r + r_I}{2}\pi \,.\, \varphi\,(r - r_I) = (r + r_I)\,\pi\varphi\,(r - r_I).$$

Denn es ist das $\square\ \alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$ = dem Trapeze $\alpha_I\beta_I\gamma_I\delta_I$ und dieses Trapez ist die rectificirte Ringfläche $\alpha\beta\gamma\delta$, welche demnach gleich ist dem Parallelogramm $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2 = (r+r_I)\pi\varphi(r-r_I)$ Fig. 64. Tab. XII. Die Breite des Cylinders ist $= r - r_I$ und die am Cylindermantel abgerollte Fläche ist $= 2\varrho\pi\varphi_2(r - r_I)$. Da

$$(r + r_I) \,.\, \pi\varphi\,(r - r_I) = 2\varrho\pi\varphi_2\,(r - r_I),$$

so ist

$$\varphi_2 = \frac{(r + r_I)\,\varphi}{2\varrho}.$$

Es ist hiermit die Drehungsgrösse des Rädchens mit Rücksicht auf die Breite seines cylindrischen Laufbandes bestimmt und es könnte nun scheinen, als müssten die im §. 16. ohne Rücksicht auf die Breite des Rädchens entwickelten Formeln für Auffindung der Grössen von ϱ und vom Trommelhalbmesser geändert werden. Es ist aber die Aenderung jener Formel nicht nöthig, da die Breite des Cylinders die Breite seines Laufbandes ist und ein gleichbreites Laufband in der Scheibe erzeugt, und da jedes Laufband, es mag breit oder schmal sein, die Drehungsgrösse der Scheibe und des Cylinders als die Länge mathematischer Linien (Lauflinien) darstellt, welche in der Mitte der Laufbänder liegen.

Da in der Gleichung

$$(r + r_I)\pi\varphi(r - r_I) = 2\varrho\pi\varphi_2(r - r_I)$$

die Flächen der Laufbänder dargestellt und die Breiten $r - r_I$ dieser Laufbänder einander gleich sind, so bleibt die Länge der Laufbänder ungeändert, es mögen die Breiten der Laufbänder gross oder klein sein. Setzt man z. B. $r - r_I = 1$ oder bringt $r - r_I$ ganz in Wegfall, so bleiben die Längen der Lauflinien

$$r + r_I\pi\varphi = 2\varrho\pi\varphi_2$$

unverändert übrig.

VII. Durch die in diesem Paragraphen angestellten Untersuchungen haben wir gefunden, dass die Lauflinie in einem cylindrischen Rädchen in der Mitte des cylindrischen Laufbändchens liegt und dass die Lauflinien am Rädchen und in der Scheibe als mathematische Linien gedacht werden müssen. Hiernach ist es nicht nöthig ein Laufrädchen mit scharfer Kante zu machen, um dadurch eine dünne Lauflinie zu erlangen. Wollte man ein Laufrädchen mit scharfer Kante machen, so müsste es so scharf sein, dass die Schärfe eine mathematische Linie repräsentirte, was aber nicht möglich ist. Wäre dieses möglich, so würde man allen Angriff der Drehscheibe auf das Rädchen verlieren und letzteres von der Scheibe nicht in Umdrehung gebracht werden.

VIII. Es liegen zwei Ursachen vor, welche erfordern, dass man die cylindrische Form des Laufbändchens in eine gewölbte Form umwandelt. Die eine ist die, dass ein cylindrisches Rädchen, wenn sein Umfang einen rauhen Schliff bekömmt, — was zur Vermeidung des Gleitens des Rädchens auf der Scheibe nö-

thig ist, — an seinen Rändern scharf und feilenartig wird und dadurch den Bezug der Scheibe mit seinem Rande schabt, auch Veranlassung zu ungleicher Drehung des Rädchens giebt. Wird der Schliff über einen gewölbten Umfang des Rädchens gegeben, so kommen die rauhen Kanten des Rädchens mit der Scheibe nicht in Berührung, weil sie einen Abstand von der Ebene der Scheibe haben.

Zweitens aber haben wir gesehen, dass die Welle des Rädchens zu gewissen Zwecken schief gegen die Richtung des Schiebers *E* gelegt wird. In diesen Fällen würde das cylindrische Laufbändchen schief auf dem entsprechenden Laufring in der Scheibe stehen und je nach der Schiefe der Axenstellung bald einen breiteren Laufring in der Scheibe bedingen. Im Haupterfolge würde dieses gleichgültig sein, allein eine zu breite Berührungsfläche zwischen Scheibe und Rädchen giebt Veranlassung zu kleinen Ungleichheiten in der Messung, weil mangelhafte Stellen in dem Scheibenbezuge bei grösseren Berührungsflächen mehr Einfluss auf die Drehung des Rädchens haben, besonders da die Scheibe auf ein schief stehendes Rädchen nur zum Theil rollende Triebkraft übt, zum Theil aber schleifend unter dem Rädchen hinstreicht. Gestaltet man das Laufband des Rädchens kugelzonenförmig, so steht es in allen Lagen der Axe mit einer gleich grossen Kugelfläche auf der Drehscheibe. Macht man aber die Rädchen kugelzonenförmig, so sind die Messungsresultate nicht genau genug, deshalb müssen die Rädchen Zonen aus anderen Sphäroiden sein. Die Planimeterfabrik hat hierzu ihre aus physikalischen und mathematischen Gesetzen abgeleitete Regel, die ich aber jetzt noch nicht veröffentlichen soll.

Uebrigens behalten die Gesetze, nach denen die Scheibe ein cylindrisches Laufbändchen in Drehung bringt, ihre Gültigkeit auch bei einem gewölbten Laufbändchen. Bei einem gewölbten Laufbändchen hat der stärkste Contact des Rädchens mit der Scheibe in der Mitte des Laufbändchens statt. Dieser Contact wird zwar auf beiden Seiten der Lauflinie im Laufbändchen stetig, aber symmetrisch schwächer, je mehr sich die Wölbung des Rädchens von der Scheibenebene abkrümmt und diese Symmetrie hält die Gültigkeit des für die Drehung eines cylindrischen Laufbändchens entwickelten Gesetzes aufrecht.

IX. a) Schliesslich erwähnen wir noch, dass ein cylindri-

drisches oder kugelzonenförmiges oder sphäroidisches Rädchen von merklicher Breite mit dem im Cylindermantel befindlichen Viereck *abdm* oder mit der sphärischen Kreisfläche *nq* oder mit der sphäroidischen Fläche $n_I q_I$ auf der Scheibe aufsteht, Fig. 62. Tab. XII., und dass diese Berührungsflächen von einer grösseren Anzahl Kreislinien des treibenden Ringes der Scheibe *S* gestrichen werden, als wenn das Rädchen eine dünne Laufkante hat, die wie Linien *ww*, $w_I v_I$ Fig. 62. auf der Scheibe stehen. Jeder von den mehreren unter dem Rädchen hinstreichenden Kreisen der Scheibenebene wirkt auf die Drehung des Rädchens, es mag dieses dem Centrum der Scheibe nahe oder davon entfernt stehen. Es ist, da die meisten dieser Kreislinien nahezu tangentiell gegen das Rädchen reiben und treiben, das Ziel erreicht, dass die Scheibe fast an allen Punkten ihres Contactes mit dem Rädchen letzteres tangentiell oder nahezu tangentiell treibt, so dass der unter No. I. dieses §. 40. dargestellte Uebelstand fast gänzlich beseitigt ist.

b) Der kleine Rest dieses Uebelstandes bewirkt aber immer noch ein, wenn auch sehr kleines, Zurückbleiben des Rädchens, sobald es sich dem Scheibencentrum mehr nähert. Denn es wirkt noch ein anderer Umstand darauf ein, dass die Scheibe das Rädchen in der Nähe des Mittelpunktes der Scheibe nicht so energisch dreht, als bei grösseren Abständen des Rädchens vom Scheibencentrum. Bei kleinen Halbmessern der Lauflinien nämlich treibt ein Theil derselben in der kleinen Fläche, womit das Rädchen die Scheibe berührt, gegen die Ebene des Rädchens, wie dieses die Pfeile *ab* in Fig. 62 [a]. Tab. XII. ersehen lassen.

Man muss daher, damit die Scheibe das Rädchen, selbst unter den ungünstigsten Verhältnissen, zu drehen vermag, die Widerstände im Zeigerwerke und an der Welle des Rädchens auf ein Minimum herabbringen. Die Instrumente der Planimeterfabrik bedürfen zur Drehung des Zeigerwerks nur einer Kraft von $\frac{1}{20}$ Quentchen an der Peripherie eines Rädchens von 6^{mm} Halbmesser und von $\frac{1}{30}$ Quentchen an der Peripherie eines Rädchens von 9^{mm} Halbmesser.

Nach angestellten Untersuchungen ist der Reibungscoëfficient zwischen Rädchen und Scheibe in minimo = 0,5. Hat das Rädchen mit halber Welle ein Gewicht von 4 Quentchen und

wird dasselbe noch ausserdem mit 4 Quentchen belastet, so greift die Scheibe das Rädchen im günstigsten Falle mit einer Kraft von $8 . 0{,}5 . \frac{1}{4}$ Quentchen an. Hiervon ist $\frac{1}{20}$ Quentchen der 80ste und $\frac{1}{30}$ Quentchen der 120te Theil.

c) Ausserdem aber ist dem Scheibenbezuge eine solche Beschaffenheit zu geben, dass er das Rädchen überall proportional den Halbmessern der Lauflinie treibt. Die Fabrik hat dafür ihre Regeln und liefert die Scheiben in der erforderlichen Beschaffenheit. Siehe hierüber Näheres im §. 41. No. III.

§. 41.

Bezug der Drehscheibe S mit Thierhaut.

I. Man hat bisher die Drehscheibe mit Papier bezogen. Wir haben viele Versuche in dieser Beziehung mit Metall, Holz, Glas, Stein, Faserstoffen und thierischer Haut angestellt. Von allen diesen Materien haben sich präparirtes Papier und noch besser präparirte thierische Haut bewährt. Papier an sich, es mag satinirt sein oder nicht, ist nicht brauchbar, wenn es nicht eigens zum Ueberzug präparirt ist. Selbst aber auch präparirtes Papier entspricht den Anforderungen nicht vollständig. Wir wenden daher präparirte Thierhaut an, wie sie die Planimeterfabrik liefert. Die Fabrik giebt fertige runde Scheiben aus, welche auf geschliffenen Glastafeln oder Schiefertafeln oder auf eiserne Tafeln aufgezogen sind und auf die am Instrumente angeschraubten Scheibenträger gelegt werden.

II. Von Zeit zu Zeit schleift man den Ueberzug. Dazu liefert die Fabrik die Schleifmittel, welche in Schleifkolben aus Kork und ausserdem aus Schleifpulvern bestehen. Ist eine Scheibe ganz oder theilweis zu glatt oder zu rauh geworden, so muss sie hergerichtet werden.

Man hebt die bezogene Scheibe von der Maschine ab, legt sie auf eine ebene Unterlage und schleift sie. Man schleift erst mit Pulver No. 2. mittels des Korks, indem man die Scheibe nach allen Richtungen und in runden Zügen reibt. Ist dieses eine Zeitlang geschehen, so nimmt man feine gesottene Rosshaare, macht ein Bäuschen von der Grösse eines kleinen Billardballes davon und reibt die Scheibe fleissig damit. Dann kehrt man mittels eines Borstenpinsels die Scheibe ab, reibt abermals

mit den Rosshaaren und stäubt wieder ab. Dieses wiederholt man mehreremal, bis beim Kehren kein Staub mehr wahrnehmbar ist.

Nun schleift man mit Schleifpulver No. 3. mittels des dazu gehörigen Schleifkorks. Man reinigt die Scheibe mittels Rosshaaren und Pinsel, wie soeben angegeben worden ist.

Hat der Scheibenbezug die erwünschte Feinheit noch nicht, so wiederholt man das Schleifen entweder mit Pulver 2. und 3. oder nur mit Pulver 3.

Die Mitte des Scheibenbezugs arbeitet sich früher glatt, als die übrigen Theile dieses Bezugs. Man braucht zuweilen nur mit den Rosshaaren die Scheibe, besonders deren Mitte zu reiben, man kann letztere aber auch mit Schleifpulver schleifen.

Alles Schleifen geschieht trocken und hat man die Schleifmittel vor Feuchtigkeit zu bewahren.

Ist der Scheibenbezug abgenutzt, so kann man die Scheibe in die Fabrik einsenden und neu beziehen lassen.

III. Das Schleifpulver No. 1. wird nicht verabfolgt, sondern nur von der Fabrik verbraucht, da es die Scheibe sehr angreift und in der Hand eines Unkundigen die Scheibe verdirbt, welche bei der Anfertigung so bereitet wird, dass sie das Rädchen proportional den Radien der Lauflinie treibt.

IV. Will man eine Papierscheibe zum Gebrauche für den Zeichnenapparat auf die Scheibe bringen, so schneidet man sich eine runde Papierscheibe mit etwa 6 Läppchen, welche über die Peripherie der Glasscheibe überragen. Man legt auf die untere Seite der Scheibe eine runde Scheibe von Papier und heftet dann die Läppchen mittels Klebmasse, die man aus der Fabrik bezieht, durch Umschlagen über den Scheibenrand auf die untergelegte Papierscheibe auf. Hierbei kann man sich einer besonderen nicht bezogenen Scheibe aus Glas, Schiefer oder Eisen bedienen. Beim Ankleben der Papierscheiben hebt man die Scheibe vom Instrumente ab.

§. 42.

Apparat zur Drahtspannung und Abwiegung der letzteren.

Da zu starke und zu schwache Spannung des Drahtes schädlich sind, so ist ein Nebenapparat construirt, mit dessen Hülfe man die Drahtspannung abwiegt.

Nach von uns angestellten Versuchen hat sich ergeben, dass ein Gewicht von 15 Loth nicht im Stande ist die Reibung zu überwinden, welche zwischen Trommeloberfläche und drei Drahtwindungen statt hat, wenn man den Draht mittels eines Gewichtes von 20 Loth spannt. Nun wird aber bei weitem weniger Triebkraft als 15 Loth am Umfange der Trommel erfordert, um die Drehscheibe und das Rädchen in Bewegung zu setzen. Es kann daher, wenn man den Draht mit einer Kraft von 20 Loth spannt, niemals ein Gleiten des Drahtes auf der Trommel statt haben.

Es ist aber noch ein anderer Umstand zu beachten. Wenn der Draht die Trommel stets gleichförmig drehen soll, so muss er an der Stelle, wo er von der Trommel ab- oder auf dieselbe auf-läuft, aus seiner kreisförmigen Gestalt unmittelbar in den geradlinigen (tangentiellen) Zustand übergehen. Dieses thut aber derjenige Draht, welchen die Fabrik liefert, bei der Spannung von einem Gewichte von $1\frac{1}{2}$ ℳ. Bei geringerer Spannung geht der Draht an der Stelle der Trommel, wo er von dieser ab- und auf dieselbe auf-läuft, in eine kleine Curve und dann erst in den geradlinigen Zustand über. Man sieht diese von der Peripherie der Trommel abgehenden Curven im Drahte, wenn man auf den Draht an der Trommel hinvisirt. Man muss diese Curven durch Spannung beseitigen. Dieses kann man erstens ohne Gewicht dadurch bewirken, dass man den Draht ins Visir nimmt und während dessen an der Schraube *a* die Feder so lange spannt, bis die Curven verschwinden. Wenn diese Spannung bewirkt ist, so stellt man die Schraube a_I bis zum Contact bei. Man kann aber auch zweitens die Spannung mittels des Gewichtes von $1\frac{1}{2}$ ℳ bewirken, was vorzuziehen ist, weil bei diesem Verfahren der Draht nicht überspannt wird.

Um dieses auszuführen macht man den in die Maschine eingespannten Draht ganz schlaff, indem man ihn aus der Klemme *u* um Etwas herauszieht. Dann hängt man einen Faden oder besser einen Draht an die Nadel der Feder *l* an, legt ihn horizontal bei der Trommel vorbei über die Rollen an *Aa* und hängt das Gewicht von $1\frac{1}{2}$ ℳ daran. Das Gewicht spannt den Draht und die Feder. Man schraubt die Schraube *a* so gegen die Widerlage *Eo*, dass die Feder *l* bei ihrer Biegung, die sie durch die Spannung erhält, nicht an den vorderen Theil des Maschinen-

theils *Eo* anstösst, aber nahe daran ist. Nachdem diese Spannung gegeben ist, schraubt man die Schraube bis zum Contact mit dem Theile *Eo* vor. Nun hängt man das Gewicht und den dazu gehörigen Draht aus, zieht den Draht, welcher als Triebdraht dienen soll, bei *w* so an, dass die Schraube *b* in Contact mit dem Theile *Eo* tritt und klemmt ihn in *u* fest. Jetzt zieht die Feder *l* mit $1\frac{1}{2}$ *ℓℓ* Kraft am Drahte.

§. 43.

a) Tisch und Brücke, worauf man den Planimeter stellt.
b) Verschliessen des Planimeters.

Zur Bequemlichkeit und Zeitersparniss dient es, wenn man den Planimeter nicht auf die Karten oder Messtische stellt, worauf die zu messenden Flächen gezeichnet sind, sondern wenn man einen besonderen Tisch hat, worauf das Instrument steht und zwar so, dass man, ohne das Instrument heben zu müssen, die Karten oder Messtische ohne Weiteres unter den Führapparat schieben kann. Diesen Zweck erreicht man durch folgende Einrichtung.

Man lässt eine Tafel von einer Länge und Breite fertigen, wie sie das Bedürfniss und die Haltbarkeit bestimmt. Die Platte der Tafel wird, wie die Messtische, aus Leistenwerk und Getäfel zusammengesetzt. Unter die Platte der Tafel wird eine Zarge von 6 Zoll Breite befestigt. An jede Ecke der vorderen Seite der Zarge wird ein Bein angebracht, ein drittes Bein befestigt man an der hinteren Seite der Zarge. Auf 3 Beinen steht die Tafel stets fest, damit sie nicht wankt. Damit sich die Zarge und Platte der Tafel auf der hinteren Seite, die nur 1 Bein in der Mitte hat, nicht krumm zieht, befestigt man an das hintere Bein und zwar unten in der Nähe des Fussbodens ein Eisen, welches in Neigung von 45° von seinem Befestigungspunkt zu beiden Seiten an die Zarge reicht und an diese fest angeschraubt ist. In die Beine der Tafel schraubt man unten Fussschrauben ein, um mittels dieser die Horizontalstellung zu bewirken.

Die Platte der Tafel und deren Getäfel zieht sich, weil der Stoff Holz ist, dennoch hier und da krumm. Deshalb muss man die obere Fläche der Tafel periodisch abrichten und ebnen lassen.

Entlang der hinteren Seite der Tafel wird eine hölzerne

Brücke mit eisernem Boden aufgestellt, welche an ihren beiden schmalen Seiten auf Fussschrauben steht, damit man den Zwischenraum zwischen dem Boden der Brücke und der Ebene der Tafel nach Bedürfniss kleiner und grösser machen kann. Der Brücke giebt man eine solche Länge, dass man die grössten Karten, die man hat, in diagonaler Ausdehnung der Karten unter die Brücke legen kann. Man kann solche Brücken bis zu einer Länge von 9 Fuss herstellen. Der Boden der Brücke ist aus eben gewalztem Eisenblech und ist an den hölzernen Rahmen angeschraubt. Die vordere Seite des Rahmens ist etwas weniger hoch, als die hintere Seite. Auf den schmalen Seiten der Brücke neigen sich die oberen Kanten der Rahmenstücke von hinten nach vorn herab. Die Rahmenstücke stehen auf hoher Kante, damit sie den Boden der Brücke tragen. Die ganze Brücke wird lackirt. Der Boden der Brücke ist inwendig geebnet. In diese Brücke, welche das Ansehen eines langen, flachen Kastens hat, wird der Planimeter gestellt. Für den gewöhnlichen Gebrauch steht der Planimeter in der Mitte der Brücke. Hat man aber Flächen zu messen, welche sich an den Rändern der Karten befinden, so schiebt man den Planimeter in der Brücke auf die betreffende Seite. Diese Vorrichtung ist ein dringendes Bedürfniss. Jeder Inhaber eines Planimeters hat sie verlangt und freut sich über die Zeitersparniss, die er dadurch gewinnt. Ausser der Zeitersparniss gewährt die Einrichtung Bequemlichkeit und verhindert, dass der Planimeter, wenn er justirt ist, durch das Abheben von Karten und durch das Aufstellen auf andere Karten in Unordnung kömmt. Ferner bleiben die Karten geschont, wenn man den Planimeter nicht darauf stellt. Die Karten, welche unter der Brücke liegen, werden durch Auflegen von Beschwerern fest an ihrem Platz erhalten.

Die vorderen und hinteren Kanten der Tafel des Tisches sind abgerundet und die vordere ist mit einer Leiste versehen, welche man einhängt, wenn die Karte über den vorderen Rand der Tafel herabhängt. Während der Arbeit schützt die Leiste die Karte vor Reibung, wenn der Arbeiter mit der Brust an die vordere Kante der Tafel drückt.

Da das Justiren des Instrumentes zeitraubend ist und jedes Drehen an einer Schraube des Instrumentes die Grösse des Messungsresultates ändert, so ist erforderlich, dass sich der In-

haber des Planimeters sichert, dass während des Nichtgebrauchs des Instrumentes keine Aenderung daran vorgenommen wird. Diese Sicherung erlangt man dadurch, dass man einen Kasten von Pappe oder Eisenblech anfertigen lässt, den man während des Nichtgebrauchs des Instrumentes auf dieses setzt und mittels Vorlegeschlosses anschliesst. Das Anschliessen geschieht dadurch, dass man in den Deckkasten und in die Brücke Löcher macht, durch diese einen Riegel steckt und in ein Loch am Ende des Riegels, der auf einer Seite einen Knopf hat und dadurch dessen Herausziehen hindert, ein Vorlegeschloss legt. Der Deckkasten bewahrt das Instrument auch vor Staub.

§. 44.

Parallelmaass.

Es ist oft erwähnt worden, dass die Ebene der Scheibe *S* parallel zu den Schienen *ff*, *ss* auf dem Grundrahmen *G* und zu den Schienen $f_I f_I$, $s_I s_I$ des Schiebers *E* und die Welle *w* des Rädchens *R* parallel zu der Ebene der Scheibe *S* liegen müssen. Um nun den Parallelismus der Schienen prüfen und den Parallelismus der Scheibe *S* und der Welle *w* herstellen zu können, bedarf man eines Instrumentes, welches wir das Parallelmaass nennen wollen. Es ist in Fig. 48. Tab. XI. abgebildet. Auf einem metallenen Fusse *a* steht senkrecht ein glatter stählerner Stab *b*. Auf diesem schiebt sich eine federnde Hülse *d*, woran sich in einem Charniere *g* ein Arm *m* auf- und niederwärts dreht.

Will man nun den Parallelismus der Schienen *ff*, *ss* prüfen, so stellt man das Parallelmaass auf die Ebene, worauf der Planimeter steht, schiebt den Schieber *d* herab und legt die Spitze des Armes *m* auf eine Stelle des Maschinentheils *P* auf und zwar vorn über den Rädern *A*, A_I. Man schiebt den Wagen *P* auf verschiedene Orte der Schiene *ff* und prüft, ob die Stelle, welche von der Spitze des Armes *m* berührt wird, stets dieselbe Entfernung von der Ebene hat, worauf der Planimeter steht. Ist dieses der Fall, so liegt die Schiene *ff* parallel zur Ebene, worauf das Instrument steht. In gleicher Weise prüft man mit einer Stelle am Wagen *P* über dem Rade A_2.

Ebenso wird der Parallelismus des Schiebers *E* geprüft.

Man schiebt den Schieber E ganz in die Maschine hinein, bis das Rädchen am hinteren Rande der Scheibe S steht, und legt die Spitze des am Stabe b herauf geschobenen Armes m auf den vordersten Theil des Schiebers E, fährt den Wagen P an verschiedene Stellen der Schiene ff und prüft, ob überall das Parallelmaass passt. Ist dieses der Fall, so zieht man den Schieber E ganz heraus bis das Rädchen am vorderen Rand der Scheibe S steht und prüft, ob das genommene Höhenmaass auch jetzt noch passend ist.

Der Parallelismus der Schienen ff, ss, $f_I f_I$, $s_I s_I$ wird in der Planimeterfabrik hergestellt und vom Geometer in der beschriebenen Weise nur geprüft. Hierbei wird bemerklich gemacht, dass die Schiene $f_I f_I$ mit der Schiene $s_I s_I$ nicht in einer zu ff parallel liegenden Ebene zu liegen braucht, es müssen nur die Schienen $f_I f_I$ und $s_I s_I$ und zwar jede für sich parallel zu der horizontalen Ebene liegen, in welcher sich ff befindet.

Mittels der Schräubchen δ, δ in der Säule Q wird die Scheibe S parallel zu ff und $f_I f_I$ gestellt. Man misst mit dem Parallelmaass die Höhe eines Punktes des Scheibenrandes und prüft damit, ob andere Punkte des Scheibenrandes dieselbe Höhe haben. Wenn dieses nicht der Fall ist, so wird an den Schräubchen δ, δ so lange geschraubt, bis der Parallelismus der Scheibe erlangt ist.

Ferner misst man mit dem Parallelmaass die Höhe des hinteren Theils der Welle w noch am Rädchen R, indem man den Schieber E herausgezogen hat. Nun schiebt man den Schieber E in die Maschine hinein und giebt der Welle w mittels der Schraube π eine solche Lage, dass das genommene Höhenmaass auch auf den vorderen Theil der Welle w passt.

§. 45.

Apparat zum Schleifen des Rädchens.

Wir haben schon im §. 40. erwähnt, dass das Rädchen R auf seinem Umfang feine Schliffstriche hat, welche mit der Welle w parallel laufen. In Fig. 49. Tab. XI. ist die Maschine abgebildet, womit dieser Schliff dem Umfang des Rädchens gegeben wird.

Auf die schwere metallene Grundplatte A sind zwei Ständer B, D aufgeschraubt. Der Ständer D behält stets seinen Ort,

wo er aufgeschraubt ist, der Ständer *B* aber hat in seinem Fusse einen Schlitz, worin sich eine Schraube befindet, womit er auf *A* festgeschraubt wird, wenn der Ständer mittels der beiden Schrauben *a*, *b* fest gegen die Wellen *E* und *F* angeschraubt ist. Die Wellen *E* und *F* sind cylindrisch und haben die Nasen *c*, *e*, welche entlang den Wellen *E* und *F* auf letzteren stehen. Die Welle *F* ist verdeckt, nur die Nase *e* ist sichtbar. Der Querschnitt der Wellen und Nasen ist mittels punktirter Linien angedeutet. Die Wellen *E* und *F* sind mittels zweier nicht sichtbarer Schrauben gegenüber den Schrauben *a* und *b* an den Ständer *D* angeschraubt. Auf die Stirnseiten der Wellen *E* und *F* sind die Zahnräder *G* und *K* auf Zapfen aufgesteckt und mittels der Standzapfen *d*, *g* gegen Drehung auf den Zapfen gesichert. Die Zahnräder erhalten durch ihren Eingriff in einander die Wellen *E* und *F* mit ihren Nasen *c* und *e* in ihrer Stellung, wenn man die Schrauben *a*, *b* fest angezogen hat. Man kann die Nasen *c* und *e* einander nähern oder von einander entfernen. An die Nasen *c* und *e* werden mittels der Schrauben *m*, *n*, *o*, *p*, wovon aber *o* und *p* nicht sichtbar sind, die Leisten *M*, *N* angeschraubt. Zwischen die Nasen *c*, *e* und die Leisten *M*, *N* wird auf die ganze Länge von *M* und *N* ein sehr dünnes Messing- oder Kupferblech eingeklemmt und zwar so, dass es in einem Bogen zwischen den Nasen *c*, *e* hängt. Ferner ist an *A* das Stück *P* angeschraubt, welches den Schlitz *q* hat. Will man nun dem Umfang des Rädchens seinen Schliff geben, so bestreicht man das Blech mit Oel und englisch Roth in der Weise, wie die Schraffirung *xx* angiebt. Sodann legt man die Welle *w* des Rädchens in den Schlitz *q*, das Rädchen selbst aber in die Wölbung des Bleches, fasst mit einer Hand das vordere Ende der Welle *w* und drückt mit einem Finger der anderen Hand auf das Rädchen und schiebt die Welle mit dem Rädchen, ohne die Welle zu drehen, mehreremal z. B. 6 mal hin und her. Dabei muss man aber die Welle heben und senken, damit der gewölbte Umfang des Rädchens überall Schliff bekömmt. Man muss den Nasen der Wellen *E*, *F* eine solche Lage geben, dass das Rädchen mit $\frac{1}{8}$ oder $\frac{1}{10}$ seiner Peripherie in der Blechwölbung liegt. Hat man 6 bis 8 mal hin- und hergezogen, so hebt man das Rädchen in die Höhe und wendet es um $\frac{1}{8}$ oder $\frac{1}{10}$ und

schleift es in dieser Lage. So fährt man fort bis das Rädchen rundum geschliffen ist.

§. 46.

Apparat, womit man Linien auf die Scheibe S zeichnet.

Will man auf die Scheibe *S* Papierscheiben auflegen und statt des Rädchens *R* einen Bleistift anbringen, um Studien über die Curven, welche der Bleistift auf die Scheibe zeichnet, zu machen, oder auf die Lederscheibe, welche das Rädchen in Umtrieb setzt, nahe ums Centrum ein kleines Ringchen zu zeichnen, so dient dazu der in Fig. 51. Tab. XI. gezeichnete Apparat. Für den Fall des Gebrauches dieses Apparates hebt man aus dem Gestelle *NN*, Figg. 37., 45., 47., das Zifferblatt mit Rahmen *YY* aus und stellt zwischen die Spitzen *nn* den in Fig. 51. dargestellten Apparat ein. Dieser Apparat hat bei *a* ein Charnier, um dem Arm *b* die erforderliche Richtung geben zu können. Der Zirkel *d* mit Bleifeder oder Reissfeder steht mit einem cylindrischen Zapfen in der Hülse *g*, welche mit der Schraube *h* auf den Zapfen festgeklemmt werden kann. Dadurch ist die Möglichkeit gegeben, dem Zirkel durch Drehen um seinen Zapfen die erforderliche Stellung geben zu können. In dem Schenkel *k* des Zirkels kann man über der Bleistifthülse oder Reissfeder auch noch ein Charnier anbringen, wie man es an Zirkeln gewöhnlich hat. Will man den kleinen Kreis auf die Scheibe zeichnen, in welchen man das Rädchen einschiebt, wenn man die Nulllinie der zu umfahrenden Flächenzeichnung unter den Führpunkt legen will, so legt man ein Stückchen Papier auf die Scheibe und giebt dem in Fig. 51. dargestellten Apparat eine solche Stellung, dass die Bleistiftspitze auf einem Punkte stehen bleibt, wenn man die Scheibe *S* dreht. Hat man so das Centrum der Scheibe *S* gefunden, so zieht man den Schieber *E* um die Länge des Halbmessers des kleinen Ringes aus, entfernt das Papier von der Scheibe und setzt diese in Umdrehung. Nun schreibt der Bleistift oder die Reissfeder den kleinen Kreis auf die Scheibe.

§. 47.

I. Kleinheit der Fehler, welche wegen mangelnden Parallelismus der Schienen und Schieber und wegen Unebenheiten der Karten, worauf der Führerrahmen verschoben wird, entstehen.

Da der Führapparat die Einrichtung hat, dass das Planglas mit dem Führpunkte auf der Karte aufliegt und in Folge von Unebenheiten in der Karte gehoben und gesenkt wird, da auch die Folgen einer Hebung und Senkung des Planglases eintreten, wenn sich der vorderste Theil des Schiebers *E* wegen etwa mangelnden Parallelismus der Schienen ff ~~und~~ und $f_I f_I$ senkt oder hebt, so müssen wir die Grösse der daraus entspringenden Messungsfehler untersuchen.

Wenn $\sphericalangle$ *ac* (= *r*) Fig. 52. Tab. XI. der horizontale Hebelarm der Maschinentheile *To*, *Z*, *U*, *V* Fig. 37. Tab. VII. vom Drehpunkte *x* bis zum Führpunkte im Planglase ist und sich der Führpunkt in Folge von Unebenheiten in der Karte oder in Folge des etwa mangelnden Parallelismus der Schienen hebt oder senkt, so wird sich, wenn die Hebung $= \sphericalangle\ bd = r.\sin\alpha$ ist, der Arm *ac* in horizontaler Richtung bis zur Länge $dc = r.\cos\alpha$ verkürzen. Die Verkürzung ist dann

$$= \sphericalangle\ ac - \sphericalangle\ dc = \sphericalangle\ ad$$
$$= r - r.\cos\alpha$$
$$= r\,(1 - \cos\alpha).$$

Die $\sphericalangle\ bd$ aber ist $= r.\sin\alpha$. Ist nun $r = 30$ pariser Linien und $\angle\ \alpha = 2^0$, so ist, weil $\sin 2^0 = 0{,}034899$, die Erhebung

$$= 30.0{,}034899 = 1{,}0469'''$$

die Verkürzung *ad* aber, welche auf den Auszug des Schiebers *E* influirt, $= r\,(1 - \cos\alpha)$

$$= 30\,(1 - 0{,}99939) = 0{,}00183'''.$$

Ist 1 par. Linie im verjüngten Feldmaassstab = 1 Rth., so ist nach Decimalfuss 1 Rth. = 100 Zoll, also $\frac{1}{100}''' = 1$ Zoll. Wenn daher die Verkürzung *ad* bei einer Hebung von 1 Rth. = 0,00183 Rth. ist, so ist die Verkürzung immer noch geringer als $\frac{1}{5}$ Zoll. Durch die getroffene Einrichtung des Führapparates ist man daher gegen üble Folgen des etwa mangelnden Parallelismus der Schienen und gegen nachtheilige Einflüsse der Unebenheiten in der Kartenfläche bis auf ein in der Messung

nicht wahrnehmbares Minimum gesichert, während eine sichere, stetige und leichte Führung gewährt wird.

II. Ueber die Fehler, welche dadurch entstehen, dass der Draht nicht parallel zur Nuth gg liegt, sondern eine gebrochene Linie bildet.

Der Draht muss auf den beiden Ständern *i* und *t* so liegen, dass er parallel zur Nuth *gg* läuft und als Tangente die Peripherie der Trommel *T* streift. Man muss deshalb die beiden Ständer *i*, *t* so placiren, dass dieser Anforderung genügt wird. Versieht man dieses, so bildet der Draht eine gebrochene Linie entweder so, dass die Trommel in einem hohlen stumpfen Winkel, wie Fig. 41ª. Tab. VIII. oder an der Ecke eines hohen stumpfen Winkels steht, wie Fig. 41ᵇ. Tab. VIII.

Hat die Trommel in Figg. 41ª., 41ᵇ. Tab. VIII. die Stellung *I*, so hat der Draht die Form $th_I h\, i$; hat die Trommel die Stellung *II*, so hat der Draht die Form $t\, k_I k\, i$.

Wenn in Fig. 41ª. die Trommel *T* aus der Stellung *I* in die Stellung *II* gebracht wird, so verwandelt sich $\backslash\ th$ in $\backslash\ tk$ und es legt sich während der Verschiebung der Trommel aus Punkt *h* nach Punkt *k* von der Linienlänge hh_I soviel von der Peripherie der Trommel ab, dass nur noch die Linienlänge kk_I auf der Trommel liegt; keine dieser letzterwähnten beiden Linienlängen wirkt aber auf Drehung der Trommel, es wirkt nur $(\backslash\ tk - \backslash\ kk_I) - (\backslash\ th - \backslash\ hh_I) = \backslash\ tk_I - \backslash\ th_I$ auf Drehung der Trommel.

Bringt man in Fig. 41ᵇ. die Trommel aus der Stellung *I* in die Stellung *II*, so wirkt ebenfalls nur $\backslash\ tk_I - \backslash\ th_I$ auf Drehung der Trommel.

Je mehr sich die Trommel der $\backslash\ a$ nähert, um so mehr wickelt sich solche Drahtlänge von der Trommel ab, welche letztere nicht in Umdrehung bringen kann; je mehr sich dagegen die Trommel der $\backslash\ a_I$ nähert, um so kleiner wird diejenige Drahtlänge, welche die Trommel nicht in Drehung zu bringen vermag.

Anders ausgedrückt ist die Drehung der Trommel

1) um so grösser, je mehr man die Trommel der $\backslash\ a_I$ nähert, und

2) um so kleiner, je mehr man die Trommel der \ *a* nahe bringt.

Daraus folgt, dass zu No. 1. die Maschine die Flächen zu gross und zu No. 2. zu klein angiebt. Dazu kömmt, dass die gebrochenen Linien *thi* und *tki* mit jeder Veränderung der Stellung der Trommel ihre Längen verändern und dadurch der Draht abwechselnd mehr oder weniger gespannt wird und Unrichtigkeiten in die Drehung der Trommel bringt.

Man muss daher den Draht absolut parallel zur Nuth *gg* und so legen, dass er als gerade Linie die Peripherie der Trommel streift.

§. 48.

Ueber die Fehlergrösse bei Planimetermessungen.

Wenn auch weder der Planimeter, noch dessen Führer Fehler bei den Messungen machen sollen, so ist es doch nicht absolut zu vermeiden, dass Fehler vorkommen und zwar Instrumentfehler, welche das Instrument veranlasst, und Führungsfehler, welche der Führer des Instrumentes verschuldet.

Die Grösse von beiderlei Fehlern muss man ermitteln.

I. Von den Führungsfehlern, deren Berechnung und Kleinheit und deren Verhalten zu den Dimensionen der umfahrenen Flächenfiguren. Normalfigur.

Würde der Geometer den Führpunkt so genau, wie ein Lineal führen, so würden keine Führungsfehler vorkommen. Da dieses aber nicht der Fall ist, so fragt es sich, wie gross die Führungsfehler der Wahrscheinlichkeit nach zu veranschlagen sind. Je genauer man die Umfangslinien der Flächen überfährt, um so kleiner erscheinen die Führungsfehler und umgekehrt um so grösser. Der Geometer ist veranlasst, um seine Arbeit bald zu vollenden, so rasch als möglich zu arbeiten, je schneller er aber die Figuren überfährt, um so grösser fallen die Führungsfehler aus, weil das Abweichen des Führungspunktes von den Linien grösser wird, sobald man eilt.

Verlangt man nun, dass der Geometer beim Gebrauche des Planimeters im Umfahren der Flächen mit dem Mittelpunkte des

Führpunktes von der Umfangslinie der Fläche nicht abkömmt, so ist die zugelassene Abweichung gleich der halben Breite der Umfangslinie der Fläche, und es ist dann, wenn man die Linienbreite mit a bezeichnet, die in Schlangenlinien vor sich gehende *Abweichung in maximo* $= \frac{a}{2}$ und *in minimo* $= 0$, also durchschnittlich $= \frac{0 + \frac{a}{2}}{2} = \frac{a}{4}$ und zwar entweder $+ \frac{a}{4}$ oder $- \frac{a}{4}$, wenn die Führung stets nach aussen oder stets nach innen von der Mitte der Umfangslinie der Fläche abschwankt. Es würde nun aber eine solche Führung eine über alle Maassen unachtsame sein, da sich mit Wahrscheinlichkeit annehmen lässt, dass die Führung auch nach der *entgegengesetzten Seite* abschwankt. Durch solches entgegengesetztes positives und negatives Abschwanken tritt aus Gründen der Wahrscheinlichkeit Compensation *der Führungsfehler bis auf einen sehr kleinen* Rest ein. Diesen kleinen Rest kann man bei gegebenen Daten durch Wahrscheinlichkeitsrechnung, aber auch empirisch ermitteln, wie *wir später sehen werden.* Um jedoch in aller Weise sicher zu gehen, wollen wir das auf $\frac{a}{4}$ bestimmte Maximum der Abschwankung nicht bis auf ein Minimum, sondern nur bis auf die Hälfte, nämlich auf $\mp \frac{a}{8}$ herabsetzen, so dass $\frac{a}{8}$ immer noch als Maximalfehler zu betrachten ist.

Die Grösse der Folgen der Abweichungen des Führpunktes von der Mitte der Linie steht nothwendig im Verhältniss der Länge der überfahrenen Umfangslinie der Fläche, weil durch die Schwankungen des Führpunktes auf der Umfangslinie die umfahrene Fläche in ihrer Form geändert wird, und weil die Anzahl der Schwankungen des Führpunktes auf der Umfangslinie und somit die Länge der Umfangslinie den Formveränderungen der umfahrenen Fläche, gemäss der supponirten Wahrscheinlichkeit, proportional ist. Es ist dieses um so mehr begründet, weil die Abschwankungen des Führpunktes von der Mitte der Umfangslinie auch ein gleichgrosses Abschwanken des Rädchens von der Lauflinie in der Scheibe zur Folge haben. Die Länge der Um-

fangslinie sei = l, dann ist der Führungsfehler = $\mp \frac{a}{8}.l$. Weil l eine Linienlänge und a eine darauf senkrecht stehende Breite ist, so ist die Grösse $\mp \frac{a}{8}.l = f$ eine Fläche und zwar ein Flächenausdruck für die Fehlergrösse.

Man kann annehmen, dass 10 Breiten derjenigen Linien, welche die Ackerflächen in den Flurkarten umziehen, die Länge von 1 pariser Linie betragen. Nimmt man daher a zu $\frac{1}{10}$ par. Linie an und stellt diesen Werth in die obige Formel ein, so hat man für f den Werth

$$\mp \frac{0{,}1'''}{8}.l = \mp 0{,}0125'''.l.$$

Bezeichnet man mit F die Fläche der zu umfahrenden Figur und man wünscht den Fehler in Procenten der zu messenden Fläche ausgedrückt zu erhalten, so hat man die Proportion

$$F\square''' : 100\square''' = 0{,}0125''' l''' : x.$$

Es ist dann

$$x = 100.0{,}0125 \frac{l}{F} = \mp 1{,}25 \frac{l}{F}.$$

Folgende Tabelle enthält, Behufs einer anschaulichen Uebersicht, Grössen von Führungsfehlern, welche nach der aufgestellten Formel für Quadrate berechnet sind. Die Tabelle schreitet bis zu Quadraten vor, deren Höhe 33''' par. ist, indem diese Länge als grösster Scheibenhalbmesser angenommen worden ist, so dass grössere Quadrate als von 2.33''' Höhe mit dem Planimeter nicht umfahren werden können.

Will man für quadratische Flächen für einen gegebenen Fehlerflächenprocentsatz die Länge der Seite des zugehörigen Quadrates suchen, so kann man dieses in folgender Weise bewerkstelligen. Wenn der gegebene Flächenprocentsatz durch m ausgedrückt wird, so ist

$$m = 1{,}25 \frac{l}{F}.$$

Da nun eine Seite des betreffenden Quadrates = $\frac{l}{4}$ und $F = \left(\frac{l}{4}\right)^2$ ist, so erhält man

$$m = \frac{1{,}25 l}{\left(\frac{l}{4}\right)^2} = \frac{1{,}25 . l . 4^2}{l^2} = \frac{1{,}25 . 4^2}{l}.$$

Hieraus ergiebt sich, dass

$$m \cdot l = 1{,}25 \cdot 4^2 = 1{,}25 \cdot 16$$

und dass

$$l = \frac{1{,}25 \cdot 16}{m}$$

und die Länge der Seite des Quadrates

$$= \frac{l}{4} = \frac{1{,}25 \cdot 4}{m}.$$

Nach dieser Formel sind die mit * bezeichneten Werthe in nachstehender Tabelle berechnet.

Tabelle

über die wahrscheinlichen Fehlerbeträge, welche bei planimetrischen Messungen von Quadraten aus mangelhafter Führung entstehen.

In pariser Linienlängen.			In pariser Quadratlinien.		
Basis b	Höhe h	Umfang l	Fläche der Figur F	Fläche der Fehler $f = 0{,}0125 \cdot l$	Fehler in Procenten von F $1{,}25 \frac{l}{F}$
1	1	4	1	0,05	5,000
1,25	1,25	5	1,563	0,0625	4,000*
1,66..	1,66..	6,66..	2,776	0,0833	3,000*
2	2	8	4	0,100	2,500
2,5	2,5	10	6,25	0,125	2,000*
3	3	12	9	0,15	1,666
4	4	16	16	0,20	1,250
5	5	20	25	0,25	1,000
5,55..	5,55	22,22..	30,86	0,278	0,900*
6	6	24	36	0,30	0,833
6,25	6,25	25	39,063	0,312	0,800*
7	7	28	49	0,35	0,714
7,143	7,143	28,572	51,022	0,357	0,700*
8	8	32	64	0,40	0,625
8,33..	8,33..	33,33..	69,439	0,416	0,600*
9	9	36	81	0,45	0,555
10	10	40	100	0,50	0,500
12,5	12,5	50	156,25	0,625	0,400*
16,66..	16,66..	66,66..	277,755	0,833	0,300*
20	20	80	400	1,00	0,250
25	25	100	625	1,25	0,200*
30	30	120	900	1,50	0,166
33	33	132	1089	1,65	0,151

Will man bei Messungen mit dem Planimeter Fehlerflächen nach den gegebenen Formeln berechnen, so ist bei quadratischen und oblongen Figuren über Länge und Höhe kein Zweifel. Bei Triangeln, Trapezen und vieleckigen Figuren bringt man die grösste Seite oder eine längste Durchschnittslinie als Grundlinie 2 mal, und die mittlere senkrechte Höhe 2 mal in Rechnung. Man erlangt jedoch dadurch nur annäherungsweise die Länge der Umfangslinie. Im Hinblick auf die Lauflinienlänge wird hierbei aber nicht gefehlt, weil beim Ueberfahren der Seiten eines Dreiecks oder der Seiten eines Vielecks die Zahl der kreisförmigen Bestandtheile der Lauflinie eben so gross ist, als wenn man ein Parallelogramm von der ganzen Länge und halben Höhe umfährt. Man braucht aber nicht die Länge aller Umfangslinien der umfahrenen Flächen in Rechnung zu bringen und kann die Höhen oder Breiten der Flächen vernachlässigen, weil man die langen Seiten der Flächen beim Umfahren annähernd parallel zur Nulllinie legt (§. 49. IV.) und weil die Breiten der Flächen im Verhältniss zur ganzen Umfangslinie der Flächen unbedeutend sind und deshalb ohne grossen Nachtheil vernachlässigt werden können, besonders da man die Längen der Flächen als Verhältnisszahlen von nur sehr kleinen Fehlern benutzt.

Bei kleinen Quadraten und bei langen Figuren, deren Höhe nicht gross ist, treten, wie wir gesehen haben, die Fehlerflächen verhältnissmässig stark auf. Es ist dieses nicht zu umgehen, das Gesetz und dessen Formel bringt es mit sich. Der Grund davon liegt darin, dass die in die Karten eingezeichneten Umfangslinien bei grossen und bei kleinen Figuren gleich breit und somit bei kleinen Figuren verhältnissmässig sehr breit sind.

Normalfigur.

Es wird jeder Geometer, je nachdem er mehr oder weniger präcis arbeitet, weniger oder mehr Fehlerprocente in seinen Messungen haben. Er muss sich deshalb durch Probemessungen prüfen.

Bei solchen Probemessungen bedient man sich angefertigter Normalfiguren (vergleiche §. 49. No. 14.), deren Grösse mittels sorgfältigster Nachmessungen mittels Zirkels und Maassstabs festgestellt und auf welche der Planimeter eingestellt ist. Solchen Normalfiguren giebt man Quadratform und eine Grösse von

wenigstens 1600$\square^R$ im zweitausendtheiligen Maassstabe. Man reisst sie auf feines, steifes, trockenes Papier auf, zieht die Linien breit, aber mit blasser Tusche und so, dass der äussere Rand der Linie die Grenze der Normalfigur bildet. Wenn die Linien mit blasser Tusche gezeichnet sind, so sieht man den darauf hingleitenden tiefschwarzen Führpunkt deutlicher. Nach dem Aufreissen stellt man die Flächengrösse der Normalfigur durch sorgfältigstes Nachmessen fest. Da das Papier ein- oder ausgehen kann, so muss man die Grösse der Normalfigur vor jedem Gebrauche durch Nachmessen prüfen. Ueber die Art und Weise, wie man die Normalfigur umfährt, ist §. 49. No. VIII. nachzulesen.

Man empfiehlt, um Planimetermessungen genau herzustellen, die Flächenfiguren 3 mal zu umfahren und den Durchschnitt als Messungsresultat zu nehmen, es ist aber zur Compensation ein dreimaliges Umfahren nicht ausreichend. Dagegen umfahren wir aus den im §. 34., §. 49. No. III. und No. IX. angegebenen Gründen jede Flächenfigur einmal vorwärts und einmal rückwärts.

In Rechnung kann man Führungsfehler bei den Messungen nicht bringen, da man nicht weiss, ob und ob positiv oder negativ gefehlt ist. Die von uns bewirkte Feststellung der Grössen der Führungsfehler ist daher nur deshalb geschehen, damit man, wenn in Messungen Fehler entdeckt werden, vergleichen kann, ob sie innerhalb der von uns gezogenen Grenzen bleiben.

Vergleichen wir die Vorgänge bei Messungen mit dem Planimeter und bei Messungen mit dem Zirkel und Maassstab, so treten folgende Momente auf.

Beim Ueberfahren einer begrenzten Ebene mit dem Planimeter wird, wie wir früher gesehen haben, eine unendlich grosse Anzahl von Ordinaten gemessen, welche neben einander stehend, die umfahrene Fläche bilden. Dabei compensiren sich, wie wir auch besprochen haben, Messungsfehler gegenseitig. Bei den Flächenberechnungen mittels Abgreifens der Längen der Base und Höhe der Flächen werden nur die Abcisse und nur Eine Ordinate der Flächenfiguren, und zwar meistentheils mit den Spitzen der schiefliegenden Zirkelschenkel gemessen. Die Fehler bei diesen zwei Linienmessungen werden durch Multiplication vermehrt, so dass hier von Compensation keine Rede ist, wie bei der Pla-

nimetermessung. Die Sehfehler an den glänzenden Zirkelspitzen und die schiefe Stellung der Zirkelschenkel müssen nothwendig Fehler veranlassen, die man bei dem kleinen Führpunkte, dessen Mitte das Augenmaass stets auf der Mitte der Breite der Fahrlinie hält, nicht findet. Wäre das Auge nicht scharf genug, so kann die Lupe über den Führpunkt aufgesetzt werden und läuft mit ihm. Beim Planimeter hat man stets nur einen Punkt im Auge festzuhalten, beim Abgreifen mit Zirkel gleichzeitig zwei und zwar oft weit auseinander stehende Punkte. Dass Ersteres leichter und sicherer ist, kann nicht angezweifelt werden.

Wer die Genauigkeit kennt, womit auf Messinstrumente z. B. Theodolitkreise, Theilungen gebracht werden, weiss, dass man bei seinen Theilungen nicht die Furchen, (welche man als Theilstriche in das Metall einreisst und mit schwarzem Kitte ausfüllt, wodurch schwarze Striche von merklicher Breite entstehen,) als Theillinien betrachtet, sondern nur einen Rand dieser Linien oder Furchen, welcher an dem Metalle hinläuft, und zwar immer denselben Rand, entweder den rechten oder den linken. Auf diese Weise ist die Grenze zwischen dem versilberten Metall und der schwarzen Ausfüllung des Theilstrichs eine Linie ohne Breite. Die Maassstäbe müssten in dieser Weise behandelt werden, wenn man genau abgreifen wollte; es lässt sich dieses aber nicht ausführen, deshalb lässt man die Furchen in den Maassstäben unausgefüllt und stellt die Zirkelspitzen in dieselben, damit sie Stand haben. Schnappt man mit den Zirkelspitzen in die Furchen ein, so nimmt man bei weit geöffnetem Zirkel die Breiten von 2 Theilrissen mit in den Zirkel und nimmt somit das Maass zu gross. Beim Einstechen mit dem Zirkel in das Papier wird abermals gefehlt.

Sind in den Flächenzeichnungen die Grenzlinien nicht genau in die Grenzpunkte gezogen, so fehlt man beim Abgreifen der Höhe der Flächenfiguren. Beim Fahren mit dem Planimeter sieht man gewöhnlich wenigstens 2 Grenzpunkte und wird gewahr, ob die Grenzlinien genau gezogen sind oder nicht. Wenn dieses nicht der Fall ist, so kann man gleich mit dem Führpunkte corrigendo den richtigen Weg gehen.

Ferner werden beim Gebrauche des Planimeters Rechnungsfehler vermieden.

Auch wird durch den Gebrauch des Instrumentes viele Zeit

erspart. Da man in kurzer Zeit grosse Flächen umfahren kann, so wird der Geometer immer erst grössere Flächen seiner Karten umfahren und dann die darin liegenden einzelnen Flächen messen. Die Summe der letzteren muss den Betrag wiedergeben, den man bei der Totalumfahrung erhielt. Solche Controle der Arbeit ist beim Messen mit Zirkel und Maassstab ohne grossen Zeitverlust nicht möglich.

Aus diesen Gründen muss man, wenn eine Planimetermessung mit einer Messung, die mittels Zirkels und Maassstabes gemacht ist, in Vergleichung gebracht wird, der ersteren den Vorzug geben, sofern der Planimeter gut justirt war und gewissenhaft gefahren wurde. Man kann bei genauer Führung mit einem gut justirten Instrumente bei Flächen von 1600□‴ eine noch fehlende Quadratlinie beistellen, wenn z.B. das Instrument nur 1599 anzeigte, aber 1600 anzeigen soll. Es ist nun

$\sqrt{1600} = 40{,}000000$ und
$\sqrt{1599} = 39{,}987498$, folglich die lineare Differenz $= 0{,}012502‴$.

Die Flächendifferenz ist $= 0{,}0625$ Flächenprocent, die Liniendifferenz $= 0{,}0312$ Linienprocent. Zeigt ein Instrument solche Schärfe, so ist dessen Zuverlässigkeit ausser allem Zweifel.

Man wird daher eine mit dem Planimeter vollführte Messung gut heissen, wenn daran entdeckte Fehler innerhalb der oben bestimmten Fehlergrenzen bleiben.

§. 49.

Von den Instrumentfehlern a) erster Gattung. b) zweiter Gattung. c) Scheibenfehlern. Ihr Verhalten zu den gemessenen Flächen und deren Längen und Höhen. Correctionsberechnung für kleine Differenzen. Normalfigur. Beseitigung der Procentmaassstäbe durch Einstellung des Planimeters.

Wir haben nun noch die Messungsfehler, welche das Instrument veranlasst, in nähere Betrachtung zu ziehen.

I. Man hat das Instrument zu prüfen, ob es Fehler veranlasst, und durch solche Prüfungen die Grösse etwa vorhandener Instrumentfehler zu ermitteln. Nimmt man zum Behuf solcher Ermittelung Probemessungen mit dem Instrumente vor, so dürfen dabei keine Führungsfehler vorkommen. Will man aber

Führungsfehler vermeiden, so muss man den Führungsapparat an Lineale hinführen. Die Bestimmung des Instrumentes ist, dass man die Umfangslinien der zu messenden Flächen mit dem Führpunkte überfährt. In Folge davon durchläuft das Rädchen n Grundlinien auf der Scheibe und zeigt dadurch n Flächeneinheiten an. Daraus folgt von selbst, dass man die Correctheit eines Instrumentes lediglich schon dadurch prüfen kann, dass man den Führpunkt des Instrumentes mit Hülfe eines Lineals auf einer Linie von beliebiger Länge und von beliebiger Lage gegen die Nulllinie hin- und zurückführt. Jede solche Linie A ist, wie wir aus der Theorie des Instrumentes wissen, eine Seite einer drei- oder viereckigen Fläche, deren Base in der Nulllinie liegt. Ist die Fläche ein Dreieck, so ist die Linie A Fig. 67. Tab. V. eine Seite, welche die Nulllinie schneidet. Eine Linie B aus dem Endpunkte der Linie A parallel zur Richtung des oberen Schiebers bis zur Nulllinie gezogen, ist die 2te Seite des Dreiecks. Das von $\setminus A$ und $\setminus B$ abgeschnittene Stück E der Nulllinie ist die 3te Seite des Dreiecks.

Wenn die Linie A die Nulllinie nicht schneidet, so ist die Fläche ein Viereck. Die eine Seite des Vierecks ist die $\setminus A$ Figg. 68., 69. Tab. V. Zieht man von den Endpunkten der $\setminus A$ Linien B und D, welche mit der Richtung des oberen Schiebers parallel laufen, bis an die Nulllinie, so sind die Linien B und D die 2te und 3te Seite des Vierecks. Die vierte Seite ist das von $\setminus B$ und $\setminus D$ abgeschnittene Stück E der Nulllinie.

Das Ueberfahren der Nulllinie bewirkt keine Drehung des Rädchens, weil dabei letzteres im Centrum der Scheibe steht; das Ueberfahren der Linien B und D bewirkt auch keine Drehung des Rädchens, weil es radial verschoben wird. Es wird daher bei solchen Dreiecken und Vierecken das Rädchen nur gedreht, wenn man die $\setminus A$ überfährt. Nun zeigen aber n Grundlinien der Flächeneinheit n Flächeneinheiten des betreffenden Drei- oder Vier-Ecks an. Indem man mehrere Linien A von verschiedenen Richtungen, Längen und Entfernungen von der Nulllinie umfährt, zeigt das Instrument die Flächengrössen der betreffenden Drei- und Vier-Ecke an. Vor Vornahme von Probefahrten auf verschiedenen Linien hat man das Instrument auf einen bestimmten Maassstab z. B. auf Pariser Quadratlinien einzustellen.

Zeigt das Instrument beim Vorwärtsführen n Einheiten an, so muss der Zeiger beim Rückführen von n auf Null zurückgehen, wenn das Instrument absolut correkt ist und wenn man den Führpunkt wieder scharf in den Anfangspunkt der überfahrenen Linie einsetzt. Keins von Beiden ist ganz zu erreichen, denn selbst der beste Mechanismus hat seine subtilen Fehler und ferner macht die geringste Bewegung des Führers über den Anfangspunkt hinaus oder das geringste Zurückbleiben davon merkliche Fehler. Schiebt man das Rädchen z. B. in einen Abstand von 20 Par. Linien vom Centrum der Scheibe und man fehlt in der dem Drahte parallelen Führung um die Länge des Durchmessers eines Loches, wie es die Copirnadel sticht, so erhält man schon einige Pariser Quadratlinien Differenz. — Wegen der Schwierigkeit der Führung auf einzelnen Linien ist es besser aus freier Hand Flächen zu umfahren, denn man kann hierbei mit Sicherheit zu scharfen Resultaten gelangen, wenn man so verfährt, wie unten No. VIII. angegeben ist.

Macht das Instrument Fehler, so zeigt es, wenn man eine Fläche einmal vorwärts und dann rückwärts umfahren hat, eine Differenz an, welche entweder positiv oder negativ ist. Zeigt der Zeiger beim Vorwärtsfahren die Fläche F und beim Rückwärtsfahren die Fläche F_1 an, so fragt es sich, welche Flächengrösse die richtige sei. Aus dem sogleich angegeben werdenden Wahrscheinlichkeitsgrunde liegt die wahre Flächengrösse F_2 in der Mitte zwischen F und F_1, und unter dieser Voraussetzung ist $F_2 = \frac{F + F_1}{2}$. Anderer Seits besteht zwischen F und F_1 die Flächendifferenz $F - F_1 = \pm f$. Daran sind ebenfalls beide Flächen F und F_1 betheiligt, so dass der wahrscheinliche Fehler $= \frac{F - F_1}{2} = \pm \frac{f}{2}$ ist.

Verfolgen wir die Bewegungen, welche die Theile des Instrumentes während der Führung machen, so kann man raisonniren, dass in der Maschine gegenüber den Angriffen, welche bei der Vorwärtsfahrt von der richtigen Lauflinie abdrängen, bei der Rückfahrt Angriffe vorhanden sein müssen, welche in der entgegengesetzten Weise von der rechten Bahn abdrängen. Macht daher das Instrument bei der Vorwärtsfahrt eine zu grosse Flächenangabe, so muss es bei der Rückfahrt eine zu kleine Flä-

chenangabe machen und umgekehrt. Dieser Umstand begründet unsere Wahrscheinlichkeitsrechnung, wonach

1) der Fehler $= \pm \frac{f}{2}$, und wonach

2) die Flächengrösse $= \frac{F + F_I}{2}$ ist.

Solche Wahrscheinlichkeit hat, wie wir wissen, auch bei den Führungsfehlern Gültigkeit und deshalb sind die Führungsfehler kein Hinderniss der vermittelnden Rechnung. Wenn wir daher eine Fläche vorwärts und dann rückwärts umfahren, dieses aber so, dass das Rädchen auf derselben Lauflinie und auf derselben Strecke seines Umfangs, auf der es vorwärts lief, zurückläuft, so erhalten wir eine Flächenangabe $\frac{F + F_I}{2}$, welche mit Instrumentfehlern nur noch wenig behaftet ist.

Bei Flächen, deren Lauflinie in der Scheibe mit einem Radius beschrieben worden, der kleiner als 6 Pariser Linien ist, tritt die Differenz $F - F_I$ verhältnissmässig stark auf und um so stärker, je kleiner dieser Radius ist. Wenn dagegen der Radius grösser als 6‴ ist, so belästigt die nun sehr klein auftretende Differenz nur noch sehr wenig.

So oft man die Flächenfigur in anderer Lage der letzteren umfährt, so oft kommen die Maschinentheile, insonders die Drehscheibe, in anderer Weise zum Angriff und in Folge davon verändern sich die Grössen von F und F_I, ihre Summe aber bleibt sich bis auf sehr unbedeutende Differenzen deswegen gleich, weil wegen des bestehenden Gegensatzes der erfolgenden Angriffe, F_I um soviel wächst oder abnimmt, als F abnimmt oder wächst. Daher ist $\frac{F + F_I}{2}$ unter allen Umständen bis auf sehr kleine Differenzen die wahre Grösse der umfahrenen Fläche.

Dazu gesellen sich aus gleichem Grunde alsdann Aenderungen in der Grösse der Flächenangaben, wenn man unter Beibehaltung ein und derselben Lage der zu umfahrenden Fläche den Anfangspunkt des Laufs des Zeigers ändert.

Obgleich alle diese Instrumentfehler sehr klein sind, so muss man sie doch so viel, als nur möglich unschädlich machen

und, um bemessen zu können, in wie weit man dieses erreicht habe, auch ihre Grösse ermitteln.

II. Instrumentfehler entstehen aus mancherlei Ursachen. Wer das Instrument gebraucht und die Fehlerquellen nicht kennt, ist unsicher in Erlangung zuverlässiger und genauer Messungsresultate, während umgekehrt derjenige, welcher die Ursachen der Instrumentfehler kennt, letztere zu beseitigen weiss und gute Messungen ausführt.

Zunächst treten Instrumentfehler auf in Folge schlechter Beschaffenheit des Rädchens, wenn sein Umfang zu glatt oder zu rauh, oder theilweis glatt, theilweis rauh ist. — Dieser Fehler kann nur durch Schleifen des Rädchens im Schleifapparate beseitigt werden. Man muss deshalb das Rädchen periodisch mittels sehr scharfer Lupe auf seinem Umfange betrachten. Die Manipulation des Schleifens wird später gelehrt.

III. Es entstehen ferner Fehler

1) in Folge zu geringer Spannung des Drahtes, so dass derselbe Kettenlinien bildet, wenn gleich auch die Biegungen des Drahtes sehr gering sind, oder so, dass der Draht an der Stelle, wo er von der Trommel abläuft, erst noch eine Curve bildet, ehe er in die gerade Richtung übergeht,

2) in Folge klemmenden oder schlotternden Ganges der Räder der Schieber,

3) in Folge zu geringer oder zu starker Spannung der Druckfedern auf dem oberen Schieber,

4) in Folge mangelnder Dichtstellung der Theile des Führapparates,

5) in Folge mangelnder Feststellung der Schraube ohne Ende, welche den oberen Schieber schief stellt.

IV. Ueber das Verhältniss der Grösse der unter No. III. angedeuteten Instrumentfehler zur Grösse der umfahrenen Flächen ist Folgendes zu sagen:

Entstehen im Planimeter in Folge der unter No. III. 1—5 erwähnten Mängel Instrumentfehler, welche wir Instrumentfehler erster Gattung nennen wollen, so beruhen diese Fehler darauf, dass die Laufllinie des Rädchens in Folge todten Ganges, welcher zur Richtung des Drahtes parallel ist, um ein weniges zu lang oder zu kurz ist, je nachdem der todte Gang beim Rücklauf oder beim Vorwärtslauf des Rädchens

statt hat. Es sind also diese Fehler kleine Längenfehler an der Lauflinie. So lange der Zustand des Instrumentes ein und derselbe bleibt, so lange bleibt die Ursache des aufgetretenen Längenfehlers constant, man mag grosse oder kleine Flächen umfahren. Diese constante Ursache bewirkt, dass der Längenfehler je nach Umständen positiv oder negativ als Lauflinie für einen kleinen Winkel φ_I auftritt. Es wirkt der Radiusvector auf zu grosse oder zu kleine Umdrehung des Rädchens, je nachdem der kleine $\angle\ \varphi_I$ dem $\angle\ \varphi$ zuwächst oder daran fehlt, so dass das Instrument eine zu grosse oder zu kleine Flächenangabe macht.

Ist die Länge einer Fläche, also auch der Drehungswinkel φ constant, es wechselt aber die Höhe, so ist bei gleich grossem $\angle\ \varphi_I$ der Fehler den Radiivectores proportional.

Nachstehende Probemessungen, wobei nur vorwärts umfahren worden ist, bestätigen dieses:

Instrumentfehler I. Gattung, bei Lockerstellung der Welle z im Führapparate (Tab. VII. Fig. 37.), durch todten Gang entlang der Richtung des Drahtes.

Grundlinien der gemessenen Flächen.	16	16	16	
Höhen der gemessenen Flächen.	8	16	24	
Berechnete Flächen.	128	256	384	
Vom Planimeter angegebene Flächen.	124,1	247,75	369,4	
Instrumentfehler I. Gattung.	3,9	8,25	15,6	27,75 = Summe der Instrumentfehler.
Verhältnisszahlen der Höhen der Flächen.	1	2	3	6 = Summe der Höhenverhältnisszahlen.
Durchschnittliche Instrumentfehler.	$1.\frac{27,75}{6}$ = 4,625	2.4,625 = 9,250	3.4,625 = 13,97	

Scharf tritt das Verhalten der Fehlergrössen zu den Höhen der umfahrenen Flächen nicht heraus, aber es ist die Proportionalität erkennbar.

Wenn auch der Fehler für ein und denselben Radiusvector und für ein und denselben $\angle\ \varphi_I$ gleich gross bleibt, so erscheint er aber dennoch um so kleiner im Verhältniss zur Grösse der ganzen Fläche, je länger die ganze Fläche ist, denn $\angle\ \varphi_I$ erscheint um so kleiner, je grösser $\angle\ \varphi$ ist. Bei Flächen von einerlei Höhe ist daher der Fehler der Länge der Fläche umgekehrt proportional. Ist $\angle\ \varphi_I$ constant, es sind aber Höhen und Längen der Flächen verschieden und wir drücken die Fehler durch f und f_I, die Höhen durch h und h_I, die Längen durch l und l_I aus, so ist

$$f : f_I = \frac{h}{l} : \frac{h_I}{l_I}.$$

Da sich, wie wir theilweis schon wissen und andern Theils bald erfahren werden, die Führungs- und alle Instrument-Fehler, mit Ausnahme des zuletzt besprochenen Fehlers, wie die Längen der gemessenen Flächen verhalten, so ist der zuletzt besprochene Instrumentfehler der unangenehmste von allen, weil er sich direct wie die Höhen und umgekehrt wie die Längen der gemessenen Flächen verhält. Allein sein Einfluss wird eines Theils durch gute Justirung des Instrumentes, andern Theils aber dadurch sehr abgeschwächt, dass man beim Umfahren der Flächen die grösste Länge der Flächenzeichnung parallel zum Drahte legt, wodurch die Flächen mittels ihrer kleinsten Höhen gemessen werden. Diesfalls treten nur kleine Fehler auf. Wir haben nämlich

$$f : f_I = \frac{h}{l} : \frac{h_I}{l_I}.$$

Wäre z. B. für f $10 = h$ und $30 = l$, für f_I $30 = h_I$ und $10 = l_I$, so hätte man $f : f_I = \frac{10}{30} : \frac{30}{10}$ oder $f : f_I = \frac{1}{3} : 3 = 1 : 9$. Man sieht daraus, wie nöthig es ist, die Flächenzeichnungen der Länge nach parallel zum Drahte zu legen.

V. Wird der hintere Zapfen der Welle des Rädchens in solcher Weise unexact gestellt, dass das Rädchen in der Richtung der Länge der Welle todten Gang hat, so entstehen im Planimeter

6) Fehler, welche eine Abweichung des Rädchens von der

Lauflinie zur Folge haben und welche wir Instrumentfehler zweiter Gattung nennen wollen. Es verlängert oder verkürzt sich nämlich der die Lauflinie beschreibende Radius zur Ungebühr. Dadurch wird die Lauflinie etwas zu lang oder zu kurz. So lange als die fehlerhafte Stellung ein und dieselbe bleibt, ist auch die Verlängerung oder Verkürzung des Radius der Lauflinie quantitativ ein und dieselbe. Bezeichnen wir den Radius der Lauflinie mit R, die Verlängerung oder Verkürzung aber mit $\mp r$, so wird die unrichtige Lauflinie vom Radius $R \mp r$ beschrieben. Bleibt $\mp r$ gleich gross, so bleibt auch, es mag R oder, was gleichviel ist, die Höhe der gemessenen Flächenfigur gross oder klein sein, der Fehler für ein und denselben Drehungswinkel φ der Scheibe immer gleich gross.

Anmerkung. Die Richtigkeit dieser Behauptung zeigt die Berechnung unter der nachfolgenden 1sten Reihe von Instrumentfehlern 2ter Gattung.

Hat man aber $n . \angle \varphi$, so wächst auch der Fehler n mal. Die Grösse von n mal $\angle \varphi$ ist abhängig von der Länge des von der Trommel abgewickelten Drahtes und dieser Drahtabwickelung ist näherungsweise die Länge der gemessenen Flächenfigur gleich. (§. 48.) Es verhalten sich daher bei ein und derselben Justirung des Instrumentes die Instrumentfehler zweiter Gattung wie die Längen der gemessenen Flächen. Nachstehende Probemessungen, wobei nur vorwärts (nicht auch rückwärts) umfahren worden ist, bestätigen dieses:

I. Reihe von

Instrumentfehlern II. Gattung bei Lockerstellung der Welle des Rädchens.

Grundlinien der gemessenen Flächen.	32	32	32	
Höhen der gemessenen Flächen.	5	10	15	
Berechnete Flächen.	160	320	480	
Vom Planimeter angegebene Flächen.	163	323	482,9	
Instrumentfehler II. Gattung.	3	3	2,9	8,9. Summe der Instrufehler.
Verhältnisszahlen der Längen der Flächen.	1	1	1	3. Summe der Längenverhältnisszahlen.
Durchnittliche Instrumentfehler.	$1 . \frac{8,9}{3} = 2,97$	$1 . 2,97 = 2,97$	$1 . 2,97 = 2,97$	

Die Nullinie lag in der Mitte der Flächenfiguren. Berechnung von $R + r$:

$$\frac{1}{3}\frac{6}{2}\frac{3}{} = 5,09375 = 5 + 0,09375$$
$$= R + r$$
$$\frac{3}{3}\frac{5}{2}\frac{3}{} = 10,09375 = 10 + 0,09375$$
$$= 2R + r$$
$$\frac{4}{3}\frac{8}{2}\frac{3}{} = 15,09375 = 15 + 0,09375$$
$$= 3R + r.$$

II. Reihe von

Instrumentfehlern II. Gattung bei Lockerstellung der Welle des Rädchens.

Grundlinien der gemessenen Flächen.	8	16	32	
Höhen der gemessenen Flächen.	6	6	6	
Berechnete Flächen.	48	96	192	
Vom Planimeter angegebene Flächen.	48,75	97,25	195,2	
Instrumentfehler II. Gattung.	0,75	1,25	3,2	5,2. Summe der Instrumentfehler.
Verhältnisszahlen der Längen der Flächen.	1	2	4	7. Summe der Längenverhältnisszahlen.
Durschnittliche Instrumentfehler.	$1 \cdot \frac{5,2}{7} = 0,74$	$2 \cdot 0,74 = 1,48$	$4 \cdot 0,74 = 2,96$	

Die Nulllinie lag in der Mitte der Flächen.

VI. Man bemühe sich, durch feines Justiren etwaige Instrumentfehler auf einen so geringen Betrag zu bringen, dass man sie unbeachtet lassen kann. Um zu erfahren, ob ihr Einfluss der Beachtung nicht werth ist, muss man durch Prüfung den durchschnittlichen Einfluss solcher Mängel auf das Messungsresultat ermitteln und diese Ermittelung periodisch wiederholen, um stets von dem Grade der Correctheit des Instrumentes Kenntniss zu haben und um abhelfen zu können.

VII. Ausser diesen Instrumentfehlern, welche wir rechnerisch verfolgt haben, giebt es aber noch andere, welche rechnerisch nicht verfolgt werden können, da ihre Ursachen unregelmässig sind. Dahin gehört

1) Ungleichheit des Drahtes, welcher in der Querschnittsfläche nicht überall gleich dick und auch nicht immer kreisrund

ist. Man muss daher calibrirten Draht aus der Planimeterfabrik beziehen; ferner gehören dahin

2) kurze Biegungen und Knicke im Drahte, welche ein dichtes Zusammenliegen der Drahtwindungen auf der Trommel hindern. Solchen fehlerhaften Draht muss man wegwerfen.

Ferner darf

3) die senkrechte Welle der Drehscheibe nicht zu stark, aber auch nicht zu wenig in ihrem oberen Lager eingeklemmt sein, weil sonst die Scheibe schwankt und die Lauflinien excentrisch werden.

4) Wenn man den Kragen am hinteren Zapfen des Rädchens zu fest einklemmt, oder wenn man das Lager dieses Zapfens mittels der Balancirfeder zu stark hebt und zu wenig belastet, entstehen ebenfalls Fehler in der Drehung des Rädchens.

5) Wenn man die hohle Säule, welche das obere Lager der Drehscheibe trägt, in ihrem Zapfen nicht dicht stellt, oder nach unten nicht fest anzieht, so kann sie ihren Standpunkt verrücken oder schwanken. Beides veranlasst excentrische Lauflinien.

6) Mangelnder Parallelismus der Scheibe mit den Schiebern veranlasst irregulāres Aufwinden des Drahtes auf die Trommel und Senken und Heben des Rädchens während der Führung.

Diese zuletzt genannten Mängel müssen durch feines Justiren absolut beseitigt werden.

VIII. Ferner entstehen Instrumentfehler durch die Wirkungen der §. 40. No. IX. besprochenen Ursachen. Diese Fehler machen sich unter der Voraussetzung, dass Führungsfehler und Zeichnungsfehler vermieden und alle bisher behandelten Instrumentfehler beseitigt sind, in folgender Weise wahrnehmbar, nämlich wenn man eine quadratische Flächenfigur parallel zum Drahte legt und umfährt, und dann so legt, dass die Seiten des Quadrates zu 45° gegen die Richtung des Drahtes geneigt sind, und das Quadrat auch in dieser Lage umfährt. Im letztern Falle giebt der Planimeter regelmässig eine kleinere Grösse an, als im ersten Falle.

Hierbei muss jedoch genau geführt werden, was bei Führung aus freier Hand dadurch geschieht, dass man den Umfang der Fläche vielemal, z. B. 10 oder 20 oder noch mehreremal, abwechselnd vorwärts und rückwärts, umfährt und aus der

Summe aller einzelnen Flächengrössenangaben das arithmetische Mittel nimmt, welches fehlerfrei ist.

Man legt die Normalfigur (§. 48.) zuerst so, dass zwei Seiten derselben parallel zum Drahte liegen und dass die Nulllinie die Mitte der Normalfigur schneidet. Nun führt man den Führpunkt aus freier Hand über die Umfangslinien der Normalfigur. Beim Anfang stellt man den Führpunkt in die Nulllinie ein. Dieses deswegen, weil sich das Rädchen, wenn der Führpunkt in der Nulllinie steht, nicht dreht, somit also sehr unbedeutende Fehler entstehen, wenn man nach Beendigung der Fahrt nicht genau in den Anfangspunkt wieder eintrifft. Diese Fahrt wird, wie schon bemerkt, vielemal vor- und rückwärts wiederholt und dann daraus das arithmetische Mittel genommen. Man regulirt die Schiefstellung des oberen Schiebers so, dass das Instrument beim Umfahren der Normalfigur die bekannte Flächengrösse der Normalfigur netto anzeigt. Dann wendet man die Figur um 45 Grade, so dass die Umfangslinien der Normalfigur in Neigung von 45 Graden gegen den Draht liegen. Jetzt liegt die Diagonale der Normalfigur in der Nulllinie. In dieser Lage umfährt man abermals die Normalfigur in der Nulllinie anfangend und zwar vielemal vor- und rückwärts, um dadurch das arithmetische Mittel auch dieser Flächenangaben zu finden. Es zeigt das Instrument beim Ueberfahren einer über Eck gegen den Draht liegenden Normalfigur von 40 par. Linien Länge und eben so grosser Höhe, also von 1600□‴ Fläche, leichtlich 0□‴ bis 5□‴ weniger, als wenn man die Normalfigur parallel zum Drahte legt und in dieser Lage umfährt.

Sobald man aber die Justirung präcisirt und einen guten egalisirten Scheibenüberzug aus präparirter Thierhaut hat, wie ihn die Planimeterfabrik liefert, so verschwindet auch diese Differenz fast ganz. Wir wollen beispielsweise annehmen, man habe durch Justirung die Differenz bis auf 2,5□‴ vermindert. Man hat dann nur noch eine Differenz von 0,156 Procent der Fläche. Denn

$$1600 : 2{,}5 = 100 : (x = 0{,}156).$$

Da die Umfangslinien der Ackerflächen, welche umfahren werden, alle möglichen Richtungen gegen den Draht haben, so ist es entsprechend, die aufgetretene Differenz auf beiderlei Lagen der Normalfigur zu vertheilen. Die halbe Differenz ist $= \frac{2{,}5}{2} =$

1,25□‴. Stellt man nun das Instrument so ein, dass es beim Umfahren der Normalfigur in der Parallellage 1601,25 und beim Umfahren in der Diagonallage 1598,75 anzeigt, so besteht für Flächen von 1600□‴ ohne Rücksicht auf die Lage der Figur nur noch eine Differenz von 1,25□‴ oder von 0,078 oder $\frac{1}{14}$ Procent.

IX. Durch Ungleichheiten der Fasern des Scheibenbezugs erleidet die Lauflinie in der Scheibe Abweichungen nach Innen und Aussen. Diese Abweichungen müssen bei einem Stoffe von gleichmässiger Textur in radialer Beziehung durchschnittlich gleich gross sein. Denkt man sich die Abweichungen von der Lauflinie einseitig, d. h. nach Aussen oder nach Innen und zwar als eine auf letztere gezeichnete Schlangenlinie, so ist die Grösse der kleinen Fläche zu bestimmen, um welche die vom Planimeter gemessene Hauptfläche durch die schlangenlinienförmigen Abweichungen geändert wird. Wäre, weil die Abweichung von der Lauflinie in Schlangenlinien vor sich geht, $\frac{r}{2}$ = der durchschnittlichen Verlängerung oder Verkürzung des Radius nr der Lauflinie, so wäre der verlängerte Bogen $= 2\pi\varphi\left(nr + \frac{r}{2}\right)$, der verkürzte Bogen aber $= 2\pi\varphi\left(nr - \frac{r}{2}\right)$ und die Grösse, um welche der Hauptbogen durch die Abweichungen geändert wird $= 2\pi\varphi\left(nr \mp \frac{r}{2}\right)$ $= 2\pi\varphi nr + 2\pi\varphi . \left(\mp \frac{r}{2}\right)$. Zieht man davon den correcten Bogen $2\pi\varphi nr$ ab, so hat man als Fehler den Bogen $2\pi\varphi . \left(\mp \frac{r}{2}\right)$. Es ist nun aber wahrscheinlich, dass die Abweichungen nicht einseitig, sondern auch nach der entgegengesetzten Seite erfolgen. Beiderlei Abweichungen bewirken gegen einander Compensation bis auf einen sehr kleinen Fehlerrest. Um einem Maximalfehler näher, als einem Minalfehler zu bleiben, wollen wir das Fehlermaximum $2\pi\varphi . \left(\mp \frac{r}{2}\right)$ nicht bis auf das Fehlerminimum, sondern nur um die Hälfte, also bis auf $2\pi\varphi . \left(\mp \frac{r}{4}\right)$ herabetzen.

Da diese Fehler durch die Fasern des Scheibenbezugs entstehen, so wollen wir sie Scheibenfehler nennen. Der Werth der kleinen Lauflinie $2\pi\varphi\frac{r}{4}$ ist der proportionale Ausdruck für die kleine Flächendifferenz. Bei gleich langen Flächen ist $2\pi\varphi$ eine constante Grösse, aber es ist auch $\frac{r}{4}$ eine constante Grösse. Da nr stets aus der Formel verschwindet, so behält die kleine Flächendifferenz stets dieselbe Grösse, es mag nr oder die Höhe der Flächenfigur gross oder klein sein. Wird aber die Länge der Flächenfigur grösser oder kleiner, so wird auch φ grösser oder kleiner und es fällt bei langen Flächen die Differenz grösser aus, als bei kurzen Flächen. Hiernach verhalten sich die Scheibenfehler, wie die Längen der gemessenen Flächen, also eben so, wie die Führungsfehler §. 48. und wie die Instrumentfehler II. Gattung, siehe oben §. 49. No. V.

Eine andere Art von Scheibenfehlern beruht darauf, dass ungeachtet der geschicktesten Manipulation die mit weichem Stoffe bezogene Scheibe nicht als absolute Ebene hergestellt werden kann, dass daher das Rädchen abwechselnd auf Scheibenstellen läuft, die gegen die Ebene des Schiebers E geneigt sind. Dieser Umstand ist mitwirkende Ursache davon, dass das Rädchen nach §. 34. und §. 49. No. II. von der richtigen Lauflinie abweicht, also unrichtige Flächenangabe macht und dass es bei der Rückfahrt eine andere Flächengrösse, als bei der Vorwärtsfahrt angiebt. Bei der Instruction zur Führung werden wir angeben, wie man in dieser Hinsicht Fehlern ausweicht.

X. Durch Ermittelung der Ursachen vorkommender Fehler ist der Führer des Instrumentes in die Herrschaft über das Instrument versetzt und durch die Kenntniss des Umstandes, dass die Summe aller Fehler, nämlich der Führungs- und der Instrumentfehler, bei gleich langen Flächen nahezu gleich gross ist, es mögen die Flächen hoch oder niedrig sein, so gestellt, dass er den quantitativen Betrag der Fehler seiner Führung und Justirung durch Probemessungen auffinden kann. Bei guter Führung und Justirung fällt die Grösse aller Fehler (der Führungs- und Instrumentfehler) stets noch kleiner aus, als die Procentsätze der Tabelle in §. 48. sind.

Will man mit Schärfe die Grösse der Fehler aufsuchen, so

umfährt man die betreffende Fläche v i e l e m a l (20 bis 50 mal) vor- und rückwärts und nimmt aus den Flächenangaben das arithmetische Mittel. Die dadurch erhaltene Angabe der Grösse der umfahrenen Fläche kann man vorläufig als das Resultat einer fehlerfreien Führung ansehen. Nunmehr suche man die Differenzen zwischen diesem arithmetischen Mittel und jeder einzelnen Flächenangabe, die der Planimeter gemacht hat, und nehme auch aus diesen Differenzen das arithmetische Mittel, welches als die durchschnittliche Fehlergrösse einer Umfahrung betrachtet werden kann. Hierdurch sind alle Fehler, sowohl Führungs- als Instrumentfehler, welche aus Schwankungen entstehen, ausgedrückt. Jetzt kann man nachträglich auch die Grösse desjenigen Fehlers bestimmen, welcher noch an der oben gefundenen Grösse der ganzen Fläche haften kann und den wir mit u bezeichnen wollen. Wäre die Anzahl der Umfahrungen $= n$ gewesen und der im arithmetischen Mittel gefundene Fehler $= m$, so ist $u = \frac{m}{\sqrt{n}}$.

Wir geben hierzu folgendes Beispiel:

Es sind uns 12 Grundstücke in einer Ebene gegeben, deren Umgrenzung in unregelmässiger Weise 12 Ecken hat. Eins der Grundstücke ist ein Dreieck, die übrigen sind Trapeze von verschiedenster Form. Die Grundstücke

No. 1, 2, 3, 4, 5 bilden die Fläche I
„ 6, 7, 8 „ „ „ II
„ 9, 10, 11, 12 „ „ „ III
} Totalfläche *A*.

Der Planimeter ergab folgende Flächengrössen bei je 10 maliger Umfahrung, wobei die mittleren Ergebnisse von je einer Umfahrung rechtsum und linksum verzeichnet sind:

Generellste Fläche *A*:

Umfahrung.	Mittel zwischen r. und l. Fahrt.	Differenz zwischen dem Durchschnitt und der einzelnen Fahrt.	
1 und 2	3044,50	0,88	
3 „ 4	3044,10	0,48	
5 „ 6	3043,45	0,17	
7 „ 8	3042,65	0,97	grösster Fehler =
9 „ 10	3043,40	0,22	$[\frac{1}{311}$ %
Durchschnitt:	3043,62	0,54	

Der noch anhaftende Fehler ist $= \frac{0,54}{\sqrt{5}} = \frac{0,54}{2,24} = 0,241$

Generelle Fläche No. I.:

Umfahrung.	Mittel zwischen r. und l. Fahrt.	Differenz zwischen dem Durchschnitt und der einzelnen Fahrt.	
1 und 2	1292,10	0,50	
3 „ 4	1291,70	0,90	grösster Fehler =
5 „ 6	1292,80	0,20	$\frac{1}{1\,4}$ %.
7 „ 8	1293,26	0,66	
9 „ 10	1293,15	0,55	
Durchschnitt:	1292,60	0,56	

Der noch anhaftende Fehler ist

$$= \frac{0,56}{2,24} = 0,250.$$

Generelle Fläche No. II.:

Umfahrung.	Mittel etc.	Differenz etc.	
1 und 2	701,65	1,06	
3 „ 4	703,20	0,49	grösster Fehler =
5 „ 6	702,60	0,11	$\frac{1}{1\,4}$ %.
7 „ 8	702,85	0,14	
9 „ 10	703,15	0,44	
Durchschnitt:	702,71	0,45	

Der noch anhaftende Fehler ist

$$= \frac{0,45}{2,24} = 0,200.$$

Generelle Fläche No. III.

Umfahrung.	Mittel etc.	Differenz etc.	
1 und 2	1049,40	0,30	
3 „ 4	1049,30	0,40	
5 „ 6	1049,85	0,15	
7 „ 8	1050,15	0,55	grösster Fehler =
9 „ 10	1049,70	0,00	$\frac{1}{1\,9}$ %.
Durchschnitt	1049,70	0,28	

Der noch anhaftende Fehler ist

$$= \frac{0,28}{2,24} = 0,125.$$

Specialfläche No. 1.:

Umfahrung.	Mittel etc.	Differenz etc.	
1 und 2	293,90	0,20	grösster Fehler =
3 „ 4	293,80	0,10	$\frac{1}{1\,5}$ %.
5 „ 6	293,50	0,20	
7 „ 8	293,60	0,10	
9 „ 10	293,90	0,20	
Durchschnitt:	293,70	0,16.	

Der noch anhaftende Fehler ist $= \frac{0,16}{2,24} = 0,071.$

Specialfläche No. 2.:

Umfahrung.	Mittel etc.	Differenz etc.	
1 und 2	172,60	0,21	
3 „ 4	172,75	0,36	
5 „ 6	173,12	0,73	grösster Fehler =
7 „ 8	172,50	0,11	$[\frac{5}{12}$ %.
9 „ 10	173,00	0,61	
Durchschnitt:	172,39	0,40.	

Der noch anhaftende Fehler ist

$= \frac{0,40}{2,24} = 0,134.$

Specialfläche No. 3.

Umfahrung.	Mittel etc.	Differenz etc.	
1 und 2	149,85	0,06	
3 „ 4	149,60	0,19	grösster Fehler =
5 „ 6	149,75	0,04	$[\frac{1}{8}$ %.
7 „ 8	149,80	0,01	
9 „ 10	149,95	0,16	
Durchschnitt:	149,79	0,09.	

Der noch anhaftende Fehler ist $= \frac{0,09}{2,24} = 0,040.$

Specialfläche No. 4.:

Umfahrung.	Mittel etc.	Differenz etc.	
1 und 2	320,87	0 00	
3 „ 4	320,95	0,08	
5 „ 6	320,80	0,07	
7 „ 8	320,60	0,27	
9 „ 10	321,15	0,28	grösster Fehler =
Durchschnitt:	320,87	0,14	$[\frac{1}{11}$ %.

Der noch anhaftende Fehler ist $= \frac{0,14}{2,24} = 0,062.$

Specialfläche No. 5.:

Umfahrung.	Mittel etc.	Differenz etc.	
1 und 2	355,90	0,34	
3 „ 4	355,65	0,09	
5 „ 6	355,75	0,19	
7 „ 8	354,90	0,66	grösster Fehler =
9 „ 10	355,63	0,07	$[\frac{1}{5}$ %.
Durchschnitt:	355,56	0,63	

Der noch anhaftende Fehler ist $= \frac{0,63}{2,24} = 0,062.$

Specialfläche No. 6.:

Umfahrung.	Mittel etc.	Differenz etc.	
1 und 2	195,32	0,04	
3 „ 4	195,30	0,02	
5 „ 6	195,00	0,28	grösster Fehler =
7 „ 8	195,30	0,02	$[\frac{1}{7}\ ^0/_0$.
9 „ 10	195,25	0,03	
Durchschnitt:	195,28	0,08	

Der noch anhaftende Fehler ist $= \frac{0,08}{2,24} = 0,035$.

Specialfläche No. 7.:

Umfahrung.	Mittel etc.	Differenz etc.	
1 und 2	241,35	0,21	
3 „ 4	241,35	0,21	
5 „ 6	241,40	0,16	
7 „ 8	241,55	0,01	
9 „ 10	242,15	0,59	grösster Fehler =
Durchschnitt:	241,56	0,29	$[\frac{1}{4}\ ^0/_0$.

Der noch anhaftende Fehler ist $= \frac{0,29}{2,24} = 0,13$.

Specialfläche No. 8.:

Umfahrung.	Mittel etc.	Differenz etc.	
1 und 2	265,30	0,10	
3 „ 4	265,00	0,20	
5 „ 6	265,00	0,20	
7 „ 8	265,90	0,70	grösster Fehler =
9 „ 10	264,80	0,40	$[\frac{1}{4}\ ^0/_0$.
Durchschnitt:	265,20	0,32	

Der noch anhaftende Fehler ist $= \frac{0,32}{2,24} = 0,143$.

Specialfläche No. 9.:

Umfahrung.	Mittel etc.	Differenz etc.	
1 und 2	244,00	0,17	
3 „ 4	244,20	0,03	
5 „ 6	244,35	0,18	grösster Fehler =
7 „ 8	244,30	0,13	$[\frac{1}{14}\ ^0/_0$.
9 „ 10	244,00	0,17	
Durchschnitt:	244,17	0,13	

Der noch anhaftende Fehler ist $= \frac{0,13}{2,24} = 0,058$.

Specialfläche No. 10.:

Umfahrung.	Mittel etc.	Differenz etc.	
1 und 2	345,25	0,16	
3 „ 4	344,60	0,49	grösster Fehler =
5 „ 6	345,40	0,31	$[\frac{1}{7}\ ^0/_0$.
7 „ 8	344,70	0,39	
9 „ 10	345,50	0,41	
Durchschnitt:	345,09	0,35	

Der noch anhaftende Fehler ist $= \frac{0,35}{2,24} = 0,156$.

Specialfläche No. 11.

Umfahrung.	Mittel etc.	Differenz etc.	
1 und 2	241,00	0,04	
3 „ 4	241,00	0,04	
5 „ 6	241,10	0,06	grösster Fehler =
7 „ 8	241,10	0,06	$[\frac{1}{41}\ ^0/_0$.
9 „ 10	241,00	0,04	
Durchschnitt:	241,04	0,05	

Der noch anhaftende Fehler ist $= \frac{0,05}{2,24} = 0,022$.

Specialfläche No. 12.:

Umfahrung.	Mittel etc.	Differenz etc.	
1 und 2	221,45	0,17	
3 „ 4	221,30	0,02	
5 „ 6	221,27	0,01	
7 „ 8	221,65	0,37	
9 „ 10	220,50	0,78	grösster Fehler =
Durchschnitt:	221,28	0,27	$[\frac{1}{3}\ ^0/_0$.

Der noch anhaftende Fehler ist $= \frac{0,27}{2,24} = 0,120$.

Vergleicht man das Ergebniss der generellen Umfahrung von No. I. mit der Summe der speciellen Umfahrungen von No. 1., 2., 3., 4., 5., so hat man

No. I. = 1292,60

No. 1.—5. = 1292,31.

Da der eine Betrag grösser, der andere kleiner ist, so hat man die vermuthlich noch anhaftenden Fehler abzuziehen, bezüglich hinzuzuaddiren. Wir brauchen aber in unserem Falle nur die Hälfte dieser Fehler in Rechnung zu bringen und erhalten dann:

No. I. = 1292,60

— 0,12

1292,48 und ferner

Uebertrag: 1292,48

293,70
+0,03
293,73

172,39
+0,06
172,45

149,79
—0,02
149,81

320,87
—0,03
320,90

355,56
—0,03
355,59

1292,48
0,00

Eine Vergleichung der generellen Umfahrung von No. II. mit dem Ergebniss der speciellen Umfahrungen von No. 6.—8. giebt

No. II. 702,71
No. 6.–8. 702,04.

Bringen wir die mit Wahrscheinlichkeit noch anhaftenden Fehler in Rechnung, so erhalten wir

No. II. = 702,71
—0,20
702,51 und ferner

195,28
+0,04
195,32

241,56
+0,13
241,69

265,20
+0,14
265,34

702,35
0,16 Differenz, welche nicht ausgeglichen ist.

Die generellen und speciellen Umfahrungen von No. III. und No. 9.—12. ergeben

No. III. 1049,70
No. 9.—12. 1051,58

Wir erhalten Behufs der Ausgleichung

No. III. = 1049,70
+ 0,13
1049,83 und ferner

244,170
—0,058
244,112

345,090
—0,156
344,934

241,040
—0,022
241,018

221,280
—0,120
221,160

1051,224
1,654 unausgeglichene Differenz.

Stellen wir die erhaltenen Flächengrössen zusammen, so haben wir

ohne Correctur:

No. I.	1292,60	No. 1.— 5.	1292,31
„ II.	702,71	„ 6.— 8.	702,04
„ III.	1049,70	„ 9.—12.	1051,58
	3045,01		3045,93

mit Correctur:

No. I.	1292,48	No. 1.— 5.	1292,48
„ II.	702,51	„ 6.— 8.	702,35
„ III.	1049,83	„ 9.—12.	1051,22
	3044,82		3046,05

Ueberall sind die Summen der Flächengrössen No. I.—III. und No. 1.—12. grösser, als die Flächengrösse bei der generellsten Umfahrung. Es ist daher zu

A = 3043,620 hinzuzufügen der noch anhaftende Fehler
0,241
3043,861.

Ungeachtet nur zehnmaligen Umfahrens hat man doch schon eine befriedigende Nähe an Gleichheit der Flächengrössen.

Hier soll noch bemerkt werden, dass, wenn man ein und dieselbe Fläche erst in einer und dann in einer anderen Lage sehr vielemal und zwar je gleichviel mal und zwar rechts und links umfährt und aus jeder der beiden Reihen von Umfahrungen den Durchschnitt sucht, die Differenz beider Durchschnitte die Grösse von constanten Instrumentfehlern ist, welche durch die Wiederholungen der Umfahrungen nicht zum Verschwinden gebracht werden konnten.

XI. Rechnet man unter Anwendung des Planimeters mit Ordinaten, deren Längen in pariser Linien ausgedrückt sind, so findet nach der Theorie die im §. 48. aufgestellte Tabelle Anwendung, d. h. bei Flächen, deren in der Columne *h* angegebene Höhen die über der Nulllinie stehenden Ordinaten sind, gelten die in der letzten Tabellencolumne (§. 48.) erwähnten Fehlergrenzen in Procenten der Flächengrössen. Diese theoretische Fehlergrenze wird von der Summe **aller** beim Gebrauch des Planimeters **auftretenden Fehler** nicht erreicht.

Die aufgefundene Fehlergrenze des Planimeters stützt sich auf wohlbegründete Theorie und Experimente, sie ist frei von Charlatanerie und Illusionen, sie giebt sich ehrlich zu erkennen und man kömmt in den Fällen, wo man mit Berechnungsfiguren zu operiren hat, mit dem Planimeter rascher und sicherer vorwärts, als mit den bisherigen Hülfsmitteln.

XII. Fussend darauf, dass die Grössen der Fehler unabhängig von der Höhe der gemessenen Flächen sind und sich nur wie die Längen der gemessenen Flächen verhalten, dabei aber nur grössere Längen merkliche Unterschiede in der Fehlergrösse zur Erscheinung bringen, kann man ein einfaches Correctionsverfahren zur Anwendung bringen, indem man

1) die Gesammtfläche der speciell umfahrenen Flächen generell umfährt, sodann

2) die Differenz zwischen dem Flächenbetrage der generellen Umfahrung und zwischen der Summe der speciellen Flächenbeträge sucht,

3) die Längen der Grundstücke mittels eines Maassstabes, dessen Einheiten gross, z. B. Zolle in natürlicher Grösse, sind

und wobei man Bruchtheile unter $\frac{1}{4}$ Zoll vernachlässigt, abmisst. Endlich dividirt man

4) die Flächendifferenz durch die Summe aller Flächenlängeneinheiten, wodurch man den durchschnittlichen Fehlerbetrag für jede Flächenlängeneinheit erhält. Je nachdem dieser Fehlerbetrag + oder — ist, wird er den Flächenbeträgen, sowohl dem generellen, als den speciellen, nach Verhältniss der zugehörigen Längeneinheiten hinzuaddirt oder davon abgezogen. Haben die correctionellen Zusätze zu den speciellen Flächen das Zeichen +, so muss der Zusatz zur generellen Fläche das Zeichen — erhalten und umgekehrt. Sind alle Grundstücke näherungsweise gleich lang, so dividirt man einfach mit der Zahl der Grundstücke in die Flächendifferenz. Hätte man z. B. eine Fläche von 896,9$\square^R$ generell umfahren, und es bestände dieselbe aus den gleichlangen Theilen

No. 1. 31,90$\square^R$
„ 2. 129,00 „
„ 3. 192,30 „
„ 4. 256,70 „
„ 5. 288,30 „
„ 6. 898,20 „

so wäre die Summe der speciellen Umfahrungen um 898,20 — 896,90 = 1,3$\square^R$ grösser, als die generelle Umfahrung und es wäre jede der 6 Umfahrungen durchschnittlich um $\frac{1,3}{6}$ =0,2166$\square^R$ fehlerhaft und zwar der Wahrscheinlichkeit nach die generelle Umfahrung um 0,217 zu klein und jede der 5 speciellen Umfahrungen um 0,216 bis 0,217 zu gross. Wir hätten daher

896,900
+0,217
897,117 generelle Umfahrung und an speciellen Umfahrungen:

31,900
—0,217
31,683

129,000
—0,217
128,783

Ueberträge 897,117 160,466

192,300
—0,217

192,083

256,700
—0,216

256,484

288,300
—0,216

288,084

897,117 wie oben bei der generellen Umfahrung.

Hätten wir in einem anderen Falle die generelle Umfahrung von $96\square^R$ und die speciellen Umfahrungen zweier Grundstücke, wovon das grössere doppelt so lang als das kleinere wäre, von

No. 1. $31{,}7\square^R$
„ 2. $64{,}0$ „
$95{,}7$ „

so wäre die Differenz $= 0{,}3\square^R$. Diese vertheilte sich, weil das ganze Grundstück auch die Länge $= 2$ hat, in $1+2+2=5$ Theile, wovon jeder $= \frac{0{,}3}{5} = 0{,}06\square^R$ wäre. Wir hätten daher

96,00
—0,12

95,88 generelle Umfahrung und

31,70
+0,06

31,76

64,00
+0,12

64,12

95,88 wie oben.

Zerfiele in einem dritten Falle das Grundstück $129{,}00\square^R$, welches 4 Längeneinheiten lang wäre, in 2 ungleiche Theile von 2 und 3 Längeneinheiten und die speciellen Umfahrungen gäben $42{,}9\square^R$ und $85{,}8\square^R$, also in Sa. $128{,}7\square^R$, so wäre die Differenz $129{,}00-128{,}7 = 0{,}3\square^R$. Diese hätte man auf $(2+3+4) = 9$ Längentheile zu vertheilen, so dass die Differenz für 1 Längen-

theil $\frac{0,3}{9} = 0,0333\square^R$ wäre. Demnach hätten wir

$$\begin{array}{r} 129,00\square^R \\ -0,13\ \text{„} \\ \hline 128,87\ \text{„ generelle Umfahrung und} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 42,90 \\ +0,07 \\ \hline 42,97 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 85,80 \\ +0,10 \\ \hline 85,90 \end{array}$$

128,87 wie oben.

XIII. Behandelte man eine ganze Karte in dieser Weise, indem man zuerst möglichst grosse Flächen, bei denen bekanntlich die Fehler wegen ihrer Kleinheit fast verschwinden, umführe und successiv in die Unterabtheilungen mit speciellen Umfahrungen und mit Correctionsberechnung überginge, so brächte man eine gerechtfertigte Uebereinstimmung des Betrags der generellen und der Summe der speciellen Umfahrungen in die Flächenberechnung. Da der Planimeter nur sehr kleine Differenzen auftreten lässt, die man unbeachtet lassen darf, und da die Correctionsberechnung viele Zeit kostet, so wird man davon nur in einzelnen Fällen, z. B. bei Grundstückstheilungen Gebrauch machen.

Das Verfahren der generellen und speciellen Umfahrungen dagegen lässt sich als Controle mit dem Planimeter in sehr kurzer Zeit ausführen, während beim Gebrauch von Zirkel und Maassstab ein generelles Berechnen allgemein gültig etwa nur auf dem von Gaus vorgezeichneten (s. §. 12. a. E) Wege mittels Ausmessung von Abscissen und Ordinaten möglich, aber sehr viele Mühe und Zeit kosten und dennoch nicht die Genauigkeit an sich tragen würde, welche der Planimeter gewährt. Daher würde man berechtigt sein, den Geometern die beschriebene Controle anzusinnen, wenn man ihnen den Gebrauch des Planimeters gestattete.

Die Sicherheit des Eigenthums, der Hypotheken und der Besteuerung will die Anwendung des Planimeters. Die Erlaubniss zum Gebrauch des Planimeters stellt aber diese Sicherheit in die Willkür der Geometer, während das Gebot der Anwendung des Instrumentes diese Sicherheit als Gewissheit giebt.

Strebsame und gewissenhafte Geometer werden die Geldausgabe für den Ankauf des Instrumentes nicht scheuen, mit Lust das Instrument und seine Handhabung studiren; Andere gehen nur befohlen vorwärts.

Zum Schluss über diesen Gegenstand wollen wir noch eine grössere Flächenberechnung mittels genereller und specieller Umfahrungen vornehmen, um daran

1) die mehrfachen Controlen,
2) die Präcision aus der Correctionsberechnung,
3) die Zeit der Umfahrungen kennen zu lernen.

Wir wollen aus den Fällen, in welchen wir die Umfahrungen der Compensation wegen 10 mal recapitulirten, je die ersten herausgreifen und daran die Berechnung knüpfen. Wir haben demnach

3044,50	□R	generellste Umfahrung	der Flächen	1—12.
1292,10	„	der Fläche	No.	I.
701,65	„	„	„	II.
1049,40	„	„	„	III.
293,90	„	„	„	1.
172,60	„	„	„	2.
149,85	„	„	„	3.
320,87	„	„	„	4.
355,90	„	„	„	5.
195,32	„	„	„	6.
241,35	„	„	„	7.
265,30	„	„	„	8.
244,00	„	„	„	9.
345,25	„	„	„	10.
241,00	„	„	„	11.
221,28	„	„	„	12.

Die Verhältnisszahlen der Längen sind:

8,40	bei	der	Fläche	A
5,60	„	„	„	I.
3,90	„	„	„	II.
5,75	„	„	„	III.
23,65				

Die speciellen Flächen haben folgende Längenverhältnisszahlen:

2,5 No. 1.	2,75 No. 6.	2,50 No. 9.
2,5 „ 2.	3,00 „ 7.	3,75 „ 10.
2,5 „ 3.	3,00 „ 8.	3,00 „ 11.
3,0 „ 4.		3,50 „ 12.
3,25 „ 5.		
13,75 No. I.	8,75 No. II.	12,75 No. III.

Wir haben aus der generellsten Umfahrung der Flächen No. 1.—12.:

3044,50□R und aus den Umfahrungen von
No. I. 1292,10□R
„ II. 701,65 „
„ III. 1049,40 „

3042,15
−043,153

1,35 Differenz.

Hiernach erscheinen die Flächenangaben rücksichtlich der 3044,50 zu gross und rücksichtlich der No. I.—III. zu klein. Es ist nun $23{,}65 : 1 = 1{,}35 : (x = 0{,}057)$, d. h. es beträgt die Differenz für eine Längeneinheit 0,057, mithin für

8,4 Längeneinheiten	0,057.8,4	= 0,479
5,6 „	0,057.5,6	= 0,319
3,9 „	0,057.3,9	= 0,222
5,75 „	0,057.5,75	= 0,328

und man erhält nun

3044,50
— 0,48
3044,020 und ferner

	1292,100
	+ 0,319
1292,419	
	701,650
	+ 0,222
701,872	
	1049,40
	+ 0,33
1049,730	

3044,021
0,001 unausgeglichene Differenz.

Auf diese Weise sind die Beträge der generellsten Umfahrung und der Umfahrungen von No. I., II., III. durch Correction nach Proportion der Längen der Flächen zur Uebereinstimmung

gebracht. Man hat hiernach

1292,419$\square^{R}$ für Fläche No. I., dagegen

293,90 für Fläche No. 1.
172,60 „ „ „ 2.
149,85 „ „ „ 3.
320,87 „ „ „ 4.
355,90 „ „ „ 5.

1293,120

0,701 Differenz. Diese Differenz ist in den speciellen Flächen zu suchen, da die Flächengrösse 1292,419 bereits correct ist. Wir haben daher

13,75 : 1 = 0,701 : (x = 0,051) und man erhält für

2,5 Längeneinheiten 0,051.2,5 = 0,128
3,0 „ 0,051.3,0 = 0,153
3,25 „ 0,051.3,25 = 0,166

Man hat sodann

1292,419 und ferner 293,900
—0,128
293,772
172,600
—0,128
172,472
149,850
—0,128
149,722
320,870
—0,153
320,717
355,900
—0,166
355,734

1292,417

0,002 Differenz.

Ferner haben wir für No. II. den correcten Betrag von 701,872, dagegen die speciellen Flächen

195,32
241,35
265,30

701,970

0,098 Differenz. Aehnlich wie zu I. haben wir hier

8,75 : 1 = 0,098 : (x = 0,011) und es geben

2,75 Längeneinheiten 0,011.2,75 = 0,030
3,0 „ 0,011.3,00 = 0,033.

Man hat nunmehr

701,872 und ferner 195,320
+0,030

195,350
241,350
+0,033

241,383
265,300
+0,033

265,333

702,066
0,184 Differenz.

Endlich haben wir für die Fläche III. den corrigirten Flächenbetrag

1049,730, dagegen die speciellen Flächen
244,00
345,25
241,00
221,28

1051,530
1,800 Differenz.

Man vertheilt diese Differenz nach der Proportion:

12,75 : 1 = 1,8 : (x = 0,141) und es geben

2,5 Längeneinheiten 0,164.2,5 = 0,352
3,75 „ 0,164.3,75= 0,528
3,0 „ 0,164.3,0 = 0,423
3,5 „ 0,164.3,5 = 0,494.

Man erhält

1049,730 und ferner 244,000
−0,352

243,648
345,250
−0,528

344,722
241,000
−0,423

240,577

1049,730 Uebertrag.
828,947
221,280
—0,494
220,786
1049,733
0,003 Differenz.

Stellen wir die Resultate zusammen, so haben wir

ohne Correction:

3044,50	1292,100	1293,120
	701,650	701,970
	1049,400	1051,830
	3043,150	3046,920

mit Correction:

3044,020	1292,419	1292,417
	701,872	702,066
	1049,730	1049,733
	3044,021	3044,216.

Man könnte nun darüber zweifelhaft sein, ob die Correcturen die Flächenangaben wirklich verbessern. Das Correctionsverfahren beruht auf der Gesetzmässigkeit des Verhaltens der Fehler zu den Längen der Flächen, es ist also ein wohlbegründetes Verfahren. Vergleichen wir die Resultate unserer Correction mit den Resultaten, welche uns die zahlreichen Wiederholungen der Umfahrungen lieferten und welche der Wahrheit sehr nahe liegen, so finden wir, dass die Flächengrössen, wie sie aus der Correction hervorgehen, den Flächengrössen, die aus Wiederholungen erzielt werden, der Mehrzahl nach näher stehen, als vorher, ehe man Correction anwendete.

Wenn nun auch die Erfahrung die Richtigkeit des Correctionsverfahrens bestätigt, so sehen wir doch bei der Vergleichung, dass die Durchschnitte aus je einer vor- und rückgängigen Umfahrung für gewöhnliche Fälle ausreichen.

Da übrigens die Correctionsrechnungen nur mit Hülfe der generellen Umfahrungen möglich sind, so leistet der Planimeter in den Fällen, wo man einer sehr scharfen Flächenberechnung bedarf, eine sonst nicht zu ersetzende Hülfe.

Was die Zeit betrifft, so wurden an solcher verbraucht:

4 Minuten zur generellen Umfahrung.

$3'$ Minuten zur Umfahrung von No. I.
$1\frac{1}{2}'$ „ „ „ „ „ II.
$2\frac{3}{4}'$ „ „ „ „ „ III.
$7\frac{1}{4}'$

$1\frac{1}{2}', \frac{3}{4}', \frac{1}{2}', 1', \frac{3}{4}', \frac{3}{4}', \frac{3}{4}', \frac{3}{4}', \frac{3}{4}', 1', \frac{3}{4}', 1'$ } $10\frac{1}{4}'$

zu No. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Zusammen $21\frac{1}{2}$ Minuten. Rechnet man dazu $21\frac{1}{2}$ Minuten für die Rückfahrten und 15 Minuten zur Legung der Zeichnung, so ist die Messung und Berechnung in nicht ganz einer Stunde gemacht. Dieser Zeitraum ist für das Arbeitsresultat ein kleiner.

Bisher hat man vorherrschend die Zeitersparniss als Vorzug des Planimeters erwähnt, wir aber haben die Sicherheit und Schärfe der Berechnung als wichtigere Vorzüge hervorgehoben.

Es empfiehlt sich daher für alle Fälle das controlirende Verfahren mit dem Planimeter und für einzelne Fälle scharfer Flächenberechnung auch die Correctionsberechnung.

XIV. Der Führpunkt liegt um die Dicke des unter den Führrahmen geleimten Papiers von den Linien der Normalfigur entfernt. Durch Verrückung des Auges beim Führen schwankt der Führpunkt von der Linie ab und die Führung wird fehlerhaft. Um dieses zu verhindern setzt man auf die Lupe einen Sehtrichter Fig. 50. Tab. XI. auf, welcher eine Ocularöffnung von $1'''$ hat. Die Ocularöffnung ist etwa 5 Zoll von der Normalfigur entfernt. Zieht man nun von zwei Punkten der Ocularöffnung, welche diametral gegenüber stehen, gerade Linien bis auf einen Punkt der Normalfigur, welcher senkrecht unter der Mitte der Ocularöffnung liegt, so hat man ein gleichschenkeliges Dreieck, dessen Basis der Durchmesser der Ocularöffnung ist. Zieht man von der unteren Fläche des Glases eine Linie, welche parallel zur Basis des Dreiecks läuft, so erhält man ein kleines Dreieck, welches dem grossen ähnlich ist. Was nun das Verhältniss beider Basen der zwei Dreiecke betrifft, so hat man folgende Proportion, wenn man den Abstand der Ocularöffnung 60 Linien von der Normalfigur und die Entfernung des Führpunktes von der Ebene der Normalfigur zu $0{,}1'''$ setzt,

$$60''' : 0{,}1''' = 1''' : (x = 0{,}0016'''..).$$

Hiernach ist, wenn sich das Auge um $1'''$ verrückt, der Sehfehler nur $\frac{16}{10000}'''$ gross. Mehr als $1'''$ kann sich aber das Auge

nicht verrücken, weil die Ocularöffnung nur 1‴ gross ist. Wenn man mit der Sehlinie zu nahe an den Rand der Ocularöffnung kommt, so wird das Bild des Führpunktes und der zu überfahrenden Linie trüb. Das Auge stellt sich daher, um klar zu sehen, instinktmässig von selbst dem Mittelpunkte der Ocularöffnung gegenüber und man kann annehmen, dass Sehfehler von etwa nur $\frac{1}{1000}$‴ vorkommen. Daraus entsteht bei Flächen von 1600□‴ ein Fehler von circa 0,08□‴. Es ist dieser Versuch angestellt worden, um die Grösse des auftretenden kleinen Fehlers zu bestimmen. Niemand wird mit Anwendung des Sehtrichters arbeiten und kann daher von der richtigen Sehlinie um einige pariser Linien abkommen, dadurch aber bei einer Fläche von 1600□‴ nur einen Fehler von einigen Zehntel Quadratlinien erhalten, welche aber noch durch Compensation in Folge der Schwankungen des Auges vermindert werden.

XV. Es ist noch zu erwähnen, dass durch Anwendung des Planimeters bei eingetrockneten oder ausgedehnten Karten das Messen mit Procentmaassstäben auf sehr einfache Weise ersetzt wird. Sind die Flächen ausgedehnt oder eingetrocknet, so hat man durch Nachmessen mittels Zirkels und Maassstabes zu ermitteln, wie gross die lineare Ausdehnung oder Einschrumpfung ist und durch Quadriren die Flächenausdehnung oder Flächenminderung zu bestimmen. Es wird dadurch die Flächendifferenz bekannt und damit kann man dann weiter operiren.

Fände man z. B., dass die lineare Verkürzung in der Richtung der Basis einer Fläche 1,5‴ auf 150‴ und in der Richtung der Höhe 0,75‴ auf 150‴ betrüge, so hätte man

$$(150—1{,}5) \,.\, (150—0{,}75)$$
$$= 148{,}5 \,.\, 149{,}25 = 22163{,}625\square‴.$$

Wäre aber keine Verkürzung eingetreten, so hätte man eine Fläche von $150^2 = 22500\square$. Es liegt somit eine Flächenminderung von 22500—22163,625 = 336,375□‴ vor. Aus der Proportion

$$22500 : 1 = 336{,}375 : (\alpha = 0{,}01495)$$

ergiebt sich, dass die Flächenverminderung für 1□‴

$$= 0{,}01495\square‴ \text{ ist.}$$

XVI. Hat man blos einzelne Flächenparzellen auf der eingetrockneten Karte zu messen, so misst man mit dem nach der Normalfigur regulirten Planimeter und bringt, weil er die Fläche

(F) zu klein angiebt, das Fehlende, nämlich $F.0{,}01495$ in Zurechnung, so dass man $F+(F.0{,}01495)$ erhält.

XVII. Hat man aber ganze Karten zu messen, so kann man den Planimeter für die eingetrocknete Karte auf netto einstellen, wodurch die Differenzberechnungen beseitigt werden. In unserem Falle würde man hierbei in folgender Weise verfahren.

Hält die Normalfigur nach vollem Maassstabe 1600□‴, so hält sie nach dem eingetrockneten Maassstabe der Karte

$$1600+(1600.0{,}01495\text{□}''' = 1623{,}92\text{□}'''.$$

Das nach der Normalfigur regulirte Instrument giebt aber beim Umfahren der Normalfigur nur 1600 an. Man muss daher das Instrument, um es der eingetrockneten Karte anzupassen, so reguliren, dass es beim Umfahren der Normalfigur von 1600□‴ nicht 1600, sondern 1623,92 anzeigt. So regulirt giebt der Planimeter beim Umfahren der eingeschrumpften Flächen die Flächengrössen nach vollem Maassstabe netto an.

XVIII. Sind die Karten nicht eingetrocknet, sondern ausgedehnt (ausgegangen), so verfährt man ganz so, wie angegeben worden, operirt aber mit dem Minuszeichen, wo man vorhin das Pluszeichen brauchte.

XIX. Die Abhandlungen über die Führungs- und Instrumentfehler enthalten eigentlich die Kritik über das Instrument und machen das Wesen des letzteren für den Gebrauch durchsichtig. Diese Kritik ist aber der Anwendung des Instrumentes günstig, denn

1) stellen sich die Führungsfehler als sehr kleine Grössen dar, ebenso sind

2) die Instrumentfehler der ersten und zweiten Gattung nach gehöriger Justirung des Instrumentes bis zum Verschwinden klein. Letzteres nimmt man wahr, wenn man durch Lokkerstellung gewisser Maschinentheile Instrumentfehler absichtlich veranlasst. Will man z. B. Instrumentfehler von den Grössen erzeugen, wie sie in den Tabellen verzeichnet sind, so bedarf es einer merklichen Lockerstellung der Maschinentheile. Sehr geringe Wankungen im Mechanismus veranlassen daher auch nur sehr unbedeutende Fehler.

Ferner sind

3) die unter der Benennung Scheibenfehler besprochenen Fehler höchst unbedeutend, so dass ihretwegen der Ge-

brauch und damit auch die Vortheile des Instrumentes an Schärfe, an Gleichmässigkeit und Zuverlässigkeit der Messungen, die Vortheile der Vermeidung alles Rechnens und der Zeitersparniss und dazu noch die Vortheile der controlirenden Messungen durch generelles Umfahren der gemessenen speciellen Grundflächen nicht verworfen zu werden brauchen. Was endlich

4) das im §. 40. unter No. VIII., IX. besprochene und aus der Art und Weise, wie die Scheibe das Rädchen umdreht, entspringende Zurückbleiben des Rädchens betrifft, so sind dort die Mittel zur Ausgleichung dieses Fehlers angegeben worden.

Durch die Kenntniss der Fehlerquellen und der Regeln der Justirung ist der Führer in den Stand gesetzt, das Instrument so zu reguliren, dass es stets einen präcisen und sichern Gang hat und die Fehler auf Minimalbeträge herabgebracht werden.

§. 50.

Instruction zur Behandlung und Justirung des Planimeters. Abwiegung der Drahtspannung, Abwiegung bei Feststellung der senkrechten Scheibenwelle, Abwiegung des Händedrucks gegen die Schieber.

I. Der Arbeitstisch, worauf man das Instrument stellt, muss ganz eben und horizontal sein. Hat man eine Brücke, so muss deren Boden horizontal liegen. Hat man keine Brücke, so stellt man zum Nothbehelf das Instrument auf die Karte, welche auf dem Tische liegt, oder auf die Messtischplatte, wenn die Karte darauf aufgespannt ist. Ist die Messtischplatte zu klein, so legt man eine zweite gleichdicke daneben. Beide Platten müssen eben und horizontal sein und weder Tisch, noch Messtischplatten, noch Brücke dürfen wanken. Man regulirt die Lage des Tisches und der Messtischplatten mittels kleiner Holzkeile, die man erforderlichen Falles unterschiebt. Es ist Jeder, welcher keine Brücke hat, wegen dieses drückenden Mangels zu beklagen.

Da die Schieber P und E auf Rädern rollen, so haben sie eine Neigung abwärts zu rollen, wenn die Schienen nicht horizontal liegen. Führt man unter solchen Umständen die Schieber mittels des Führapparates F, so ist die Führung bergab leichter, bergauf schwerer. Der Druck auf den Führapparat ist dann ungleich, ebenso die Drahtspannung. Die führenden Hände wanken leichter und Schwankungen, welche aus Elasticität des Me-

talles entstehen sind ungleich. Das Messungsresultat ist in Gefahr kleine Fehler in sich zu tragen.

II. Man revidire, ob alle Schrauben, mittels deren Maschinentheile zusammengeschraubt sind, fest angezogen sind.

III. Man gebe allen Zapfen mittels eines kleinen Haarpinsels gutes Bauмöl, jedoch so, dass das Oel nirgends fliesst oder abtropft. Die Nuthen gg, g_1g_1 werden ebenfalls mit Oel bestrichen.

IV. Die Säule Q wird in die Maschinentheile P_1P so eingestellt und mittels der am unteren Ende der Säule angebrachten 3 Schräubchen so angezogen, dass sie in P nicht festgeklemmt ist, sondern sich in dem in P befindlichen Zapfenloche drehen lässt ohne zu schlottern. Das Schlottern wird durch das Anziehen der beiden Druckschräubchen η, η verhindert. Im Maschinentheile P_1 muss der Säulenzapfen durch Anziehen der Schrauben $\gamma\gamma$ festgeklemmt werden. Die Säule Q muss so stehen, dass die Kimme, durch welche man den Oelpinsel zur Welle Φ einführt, nach hinten steht, wo sich das Gewicht Γ befindet.

V. Man stellt das Kugelgelenk der Welle Σ so fest, dass es nicht schlottert, sich aber gut dreht. Dann schraubt man die Schraube ϱ gegen die Feder σ, welche mittels des Lagers ξ die Schraube ohne Ende in die Schraubengänge am Bogenstück Δ eindrückt. Der Contact zwischen dem Bogenstück Δ und der Schraube ohne Ende muss so innig sein, dass kein todter Gang entsteht, wenn man die Schiefstellung des Schiebers E mittels Drehung der Welle Σ am Knopfe Ω regulirt.

VI. Man untersuche

a) ob die in der Hohlschiene der Grundplatte G laufenden 2 Räder A, A_1 des Wagens P mit ihren Ebenen an eine gerade Linie anschliessen. Zu dieser Prüfung braucht man ein schmales Lineal von Blech. Wo nöthig wird die Stellung regulirt mittels der Lagerschrauben k, nachdem man vorher die Druckschrauben k_1 gelüftet hat. Nach der Regulirung wird die Schraube k_1 wieder festgezogen.

b) Man stelle das dritte Rad A_2 auf die Mitte der hinteren glatten Schiene.

c) Man verfahre mit den Rädern B, B_1 ebenso, wie unter a) angegeben ist.

d) Das dritte Rad B_2 muss auf der Mitte der glatten Schiene des Schiebers E laufen.

e) Man stelle alle 6 Räder so, dass sie leicht laufen ohne zu schlottern. Das Wanken der Räder in ihren Lagern verursacht Fehler in den Messungen.

VII. Man stellt die Welle Φ mit Scheibenträger D in ihre in der Säule Q und im Bügel Ro befindlichen Lager, schiebt die Trommel T mit ihren 2 Scheiben, welche über und unter ihr liegen, von unten auf den Zapfen Φ und klemmt sie mit dem dazu dienlichen Schraubenmütterchen fest. Ein sanftes Anziehen dieses Mütterchens reicht aus. Die gewölbte Seite dieses Mütterchens wird gegen die untere Scheibe der Trommel angelegt. Die Trommel und die Welle Φ haben Marken. Diese Marken müssen sich berühren.

Mit der Schraube in Ro, worin die untere Spitze der Welle Φ läuft, wird diese Welle soweit gehoben oder gesenkt, dass die Mitte der Trommel T mit der Mitte der Rollen i und t in einer Horizontallinie liegt und der Scheibenträger D nicht an Q, aber auch die Trommel T nicht unten an P anstösst.

VIII. Man legt den Schieber E ohne den Führapparat F auf seine Räder B, B_1, B_2, schraubt mit Schraube o den Träger der Druckrollen ω, ω_1 an Fo an, legt das Gewicht Γ auf und regulirt die Druckrollen ω, ω_1

1) durch Horizontalstellung des auf die Rolle ω drückenden Gewichtes Γ mittels der Schraube r. Dabei wird die Schraube o nur soviel angezogen, dass der Maschinentheil, worin die Rolle ω liegt, nicht festgeklemmt ist, aber auch nicht seitlich wankt,

2) durch Spannung der auf die Druckrolle ω_1 drückenden Feder ε mittels der Schraube e,

3) durch Horizontalstellung und Festklemmung des Maschinentheils, welcher die Feder ε_1 der Druckrolle ω_2 trägt. Die Festklemmung wird mit Schraube o_1 bewirkt. Nun wird die Feder ε_1 mittels Schraube e_1 gespannt.

Die Spannung der Federn ε, ε_1 darf nur eine so geringe sein, dass sich der Schieber E von den Rädern B, B_1, B_2 nicht abhebt. Ein zu starker Druck erschwert die Verschiebung von E, veranlasst Minima von Biegungen in den Theilen des Führapparates F und dadurch kleine Fehler in den Messungen. Des-

halb muss man den Druck auf die Rollen ω_I, ω_2 in der Weise reguliren, wie dieses im §. 38. No. XII. angegeben ist. XXII

Die Zapfen der Druckrollen müssen immer Oel haben.

IX. Der Parallelismus der Nuth gg im Grundrahmen G und der Nuth $g_I g_I$ im Schieber E ist in der Fabrik hergestellt. Will man diesen Parallelismus prüfen, so fahre man den Wagen P an das eine Ende der Nuth gg und messe mit dem Parallelmesser die Höhe des Mittelpunktes auf der oberen Kante der vordersten Leiste des Wagens P. Alsdann fahre man den Wagen P an verschiedene andere Stellen der Nuth gg und prüfe, ob das genommene Höhenmaass überall passt.

Nunmehr schiebe man den oberen Schieber so weit zurück, als es geht, und messe mit dem Höhenmesser die Höhe der obersten Fläche der Schraube, womit das Stück M an E angeschraubt ist. Ist dieses geschehen, so ziehe man den Schieber E ganz heraus und untersuche, ob die erwähnte Schraubenfläche dieselbe Höhe behält.

Kleine Differenzen können ihre Ursache in Unebenheiten des Arbeitstisches haben, sie schaden so wenig, dass man sie nicht zu beachten braucht, indem die Einrichtung des Führapparates F gegen kleine Fehler schützt. Vergleiche das im §. 44. Vorgetragene.

X. Man legt nun die Scheibe S auf den Scheibenträger D auf und regulirt mit dem Parallelmesser, dessen Spitze man auf den Rand der Scheibe auflegt, den Parallelismus der Drehscheibenebene mit der Tischebene und mit der Ebene des Schiebers E (§. 34.) durch Stellung an den Schräubchen δ, δ im Capitäl der Säule Q. Ehe man an den Schräubchen δ, δ dreht, spannt man die Feder μ mit der dazu vorhandenen Schraube, wodurch sie gegen das Prisma λ und dieses gegen die Welle Φ drückt. Hat man den Parallelismus der Scheibe S erzielt, so regulirt man mittels der Schraube an der Feder μ die leichte Drehung der Scheibe, was man an ihrem freien Schwung bemerkt, in den man sie versetzt. Die Feder μ darf durchaus nicht zu viel und auch nicht zu wenig gespannt werden. Man denke sich, es sei vom Centrum der Scheibe nach der Richtung, wo sich die Feder μ befindet, ein Radius auf die Scheibe gezogen. Legt man am Ende dieses Radius auf den Rand der Scheibe S 2 Loth, so darf die Feder μ in Folge des Druckes dieses Gewichtchens

nicht nachgeben, legt man aber 3 Loth (Zollvereinsgewicht) auf, so muss sie nachgeben. Hiermit ist die Spannung der Feder μ abgewogen und spielt zwischen 2 und 3 Loth.

XI. Nun hat man die Ständer C, C_I mit den Drahtrollen i, t richtig zu stellen. Neben den Ständern C, C_I befinden sich Scalen mit Theilpunkten. *Zieht man über gleichnamige Theilpunkte dieser Scalen Faden, so liegen diese Faden parallel mit der Nuth gg. Man stelle die Ständer C, C_I so auf, dass die daran befestigten Zeiger auf den gleichvielsten Theilpunkt jeder der beiden Scalen liegen.* Man hält nun einen Draht gegen die Rollen i, t an, spannt ihn straff und sieht, welche Lage er gegen die Trommel hat. Der gerade gezogene Draht muss wie eine Tangente an der vorderen Seite der Trommel liegen. Ist dieses nicht der Fall, so muss man beide Ständer gleichviel vorrücken, bis der an i und t angehaltene straffe geradlinige Draht die Trommel als Tangente streift und dabei parallel zu gg liegt. (Siehe §. 47. No. II.)

XII. Es ist nun der Draht aufzuziehen. Man nimmt einen Draht, wie ihn die Fabrik zu den Maschinen liefert, welcher die Länge von u über i und t bis an die Feder l und von drei Trommelumfängen hat, macht an dem einen Ende des Drahtes eine Schlinge, wie man sie an Claviersaiten andreht, hält die Schlinge in der Hand und hängt an das andere Ende des Drahtes ein kleines Gewichtchen von einigen Lothen, damit der Draht gestreckt bleibt und sich nicht in Windungen zusammenrollt und sich nicht verschlingt. Man hängt nun den vom Gewichtchen angezogenen Draht mit der Schlinge in die Kimme β, Fig. 44., der unteren Scheibe der Trommel, legt den Draht auf diese Scheibe und dreht *die Trommel an der Scheibe S dreimal um. Dadurch legen sich 3 Drahtwindungen um die Trommel. Mit einer Hand hält man die Scheibe S an ihren Ort, mit der anderen Hand führt man* das Häkchen, Fig. 53. Tab. XI. in die Drahtschlinge, hebt sie aus dem Schlitze, in welchen sie eingehängt ist und zieht, indem man die Scheibe S in Drehung übergehen lässt, die Schlinge und mit ihr den Draht bis zur Feder l, wo man die an l befindliche Nadel in die Schlinge steckt. Jetzt fasst man das andere Ende des Drahtes, legt den Draht über i und klemmt das Ende des Drahtes, den man mit der Hand straff zieht, in u ein. Man muss vor dieser Operation die

Schrauben *a* und a_I in *l* zurückschrauben, damit *l* an dem Stücke *Eo* anliegt, wenn der Draht in *u* eingeklemmt ist. Nun spannt man mittels Drehens der Schraube *a* die Feder, wodurch der Draht straff gezogen wird. Man darf den Draht nur so anziehen, dass er eine gerade Linie bildet und die Windung auf der Trommel dicht anliegt. Wenn der Draht zu straff angezogen ist, so biegt er sich schwerer und die Führung wird belästigt, was Fehler in den Messungen verursacht. Ist der Draht schlaffer, als wir angegeben haben, so entstehen ebenfalls Fehler in den Messungen. Der Draht muss sich auf der Seite der Trommel, welche der Nuth *gg* zugewendet ist, auf- und abwickeln. Beim Aufwickeln des Drahtes auf die Trommel muss man darauf sehen, dass der Draht keine Knicke oder Knie bekömmt. Kurze Biegungen im Drahte verhindern, dass sich die Drahtwindungen regelrecht auf die Trommel legen, woraus Drehungs- und folglich Messungsfehler entstehen.

Der Draht muss in Beziehung auf waagrechte Lage so viel Neigung haben, als dieses die Steigung der schraubenartig auf der Trommel liegenden Drahtwindung erfordert.

Man nimmt nun einen dünnen und glatten Faden oder Draht oder schwarzes Pferdehaar in die Hände, legt den Faden auf die Schraubenrollen *i* und *t* in gleich grossen Abständen neben den aufgespannten Draht auf und sieht, ob der aufgespannte Draht mit dem angehaltenen Faden parallel bleibt, während man den Wagen mit der Trommel hin und her schiebt. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so dreht man die Rollen *i* und *t* so lange, bis der Draht in die gewünschte Lage gebracht ist. Durch das Drehen der Rollen *i* und *t* wird der Draht gehoben oder gesenkt, weil er in den auf die Rollen eingeschnittenen Schraubengängen liegt. Wollen bei dieser Regulirung die Windungen nicht geschlossen liegen bleiben, so ist, wenn man die richtige Neigung des Drahtes bereits gefunden hat, dieses ein Zeichen, dass die Welle *Q* noch nicht genau senkrecht steht. Man muss dann den Parallelismus der Scheibe *S* schärfer herstellen. Wenn der Draht gut regulirt ist, so müssen die Drahtwindungen möglichst in der Mitte der Trommelbreite liegen, sobald der Wagen *P* in der Mitte der Nuth *gg* steht. Beim Reguliren der Drahtwindung wird es zuweilen nöthig, dass man den Draht mittels einer starken Stricknadel während des Verschiebens des Wagens *P* nahe

an der Trommel auf- oder niederwärts drückt, damit die Windungen tiefer oder höher zu liegen kommen.

Ist die Drahtregulirung vollendet, so prüft man noch einmal, ob der Draht zu straff oder zu schlaff ist und bessert dieses durch Drehen der Schraube *a* in *l*, nach der im §. 42 gegebenen Vorschrift, sodann schraubt man die Schraube a_1 so tief ein, bis sie eben an *Eo* anliegt.

XIII. Ist dieses vollbracht, so schraubt man an den Kopf des Schiebers *E* das Stück *M*, daran das Stück *So*. Die Schrauben müssen sehr fest angezogen werden. Die Ebene von *So* muss annähernd parallel mit *gg* stehen. Verändert man die Schiefstellung von *E*, so muss man dann auch das Stück *M* mit dem Stücke *So* wieder parallel zu *gg* stellen. In dem Stücke *To* lagert der Bügel *U* mit der Welle *Z*. Diese Welle muss sich leicht drehen, darf aber nicht in ihren Lagern wanken, was man mittels der Schräubchen auf den Lagerdeckeln regulirt. Nun legt man das Stück *To* mit *U* zwischen die Spitzen *xx* in *So*. In den Bügel *U* legt man den Rahmen *V* mit Planglas *W* zwischen die Spitzen *b*. Alle diese Theile müssen sich auf ihren Zapfen leicht drehen, dürfen aber nicht im mindesten schlottern. Jedes Wanken in den Theilen des Führapparates verursacht Messungsfehler. Das Stück *So* wird so gestellt, dass der Bügel *U* mit Welle *Z* horizontal liegt. Die Griffe *bb* stehen mit ihren Ebenen senkrecht.

XIV. Am Bocke *JO*, den man auf *E* in der Nähe der Pufferschraube *f* über den Schlitz *d* anschraubt, stellt man die Spitzen *mm* dicht, damit sich die Arme *NN* um *mm* ohne Schlottern drehen.

Man hängt das Gestell *YY* mit dem Laufrädchen und Zählerwerk zwischen die Spitzen *nn* ein, sorgt dafür, dass dieses Gestell in seinen Spitzen *nn* nicht schlottert, aber auch nicht geklemmt ist. Man giebt der Welle *ww* die Richtung eines Durchmessers der Scheibe *S* und legt sie vorläufig nach dem Augenmasse annähernd parallel zur Richtung des Schiebers *E* über den erwähnten Scheibendurchmesser, so dass das auf die Scheibe *S* aufstehende Rädchen bei Verschiebung des Schiebers *E* annähernd das Centrum der Scheibe *S* passirt.

Jetzt hat man zunächst das Trägergestell *NN* des Zeigerwerks mittels der Schraube π so zu heben oder zu senken, dass

die Welle *ww* des Rädchens *R* mit dem Schieber *E* oder vielmehr mit der Hohlschiene $g_I g_I$ des Schiebers *E*, also auch mit der Ebene der Scheibe *S* parallel liegt.

Diesen Parallelismus der Welle *ww* prüft man dadurch, dass man die Spitze des Armes *m* des Parallelmasses auf die Welle nahe am Rädchen auflegt und dann das Gestell *NN* so senkt und hebt, dass das genommene Höhenmass auch auf die Welle nahe am Zählerwerke passt.

XV. Man hebt das Zeigewerk aus den Armen *NN* aus und legt dafür den Zeichnenapparat Fig. 51 zwischen die Spitzen *nn* so ein, dass der Zirkel mit seinem Bleistift oder seiner Reissfeder auf der Ebene der Scheibe *S* aufsteht und einen kleinen Ring um das Centrum der Scheibe in der §. 46 beschriebenen Weise zeichnet.

XVI. Zur Art und Weise, wie man der Welle *ww* verschiedene Lagen giebt, wird Folgendes bemerkt:

Zum Behuf der gewöhnlichen Messungen wird die Welle *ww* so gerichtet, dass sie über einem Durchmesser der Scheibe *S* und parallel zur Nuth $g_I g_I$ des Schiebers *E* liegt. Diese Stellung erlangt man auf folgendem Wege. Man arretirt den Wagen *P* durch Auflegen von Gewichten auf die Schiene *ff* gegen die Räder *A*, A_I, und überzieht eine nicht bezogene Glasscheibe in der im §. 41 no. IV. beschriebenen Weise mit Papier und legt diese Scheibe auf den Scheibenträger auf. Man bestimmt das Centrum der Scheibe auf dem Papier in der schon mitgetheilten Weise und schreibt mit dem Zeichnenapparate durch Ausziehen des Schiebers *E* einen Scheibendurchmesser auf das Papier. Man hebt nun den Zeichnenapparat aus und legt zwischen die Arme *NN* das Zählerwerk mit Rahmen *YY* und der Welle *ww* ein. Alles ohne den Wagen *P* zu verrücken. Man schraubt die Schraube am Bocke *JO*, welche diesen mit *E* verbindet, los und rückt den Bock *JO* so, dass die Welle *ww* über den gezogenen Durchmesser zu liegen kömmt, was man dadurch controlirt, dass man den Schlitz des Winkelmasses Fig. 54. Tab. XI. auf die Welle setzt und darauf sieht, dass die Mitte des Schlitzes des Winkelmasses überall auf dem gezogenen Scheibendurchmesser steht.

Will man die Welle des Rädchens gegen die Richtung $g_I g_I$ schief legen, es soll sich aber das Rädchen in einem Durch-

messer der Scheibe verschieben, so zieht man die schiefe Linie im gegebenen Winkel gegen den auf das aufgeklebte Papier gezogenen Scheibendurchmesser durch das Centrum der Scheibe und richtet die Welle *ww* durch Verschiebung des Bockes *JO* in *d* mit Hülfe des Winkelmasses Fig. 54 so, dass sie parallel zur schiefen Linie über dieser liegt, das Rädchen jedoch in dem zuerst gezogenen Scheibendurchmesser sich verschiebt.

Will man aber in der Scheibe einen todten Kreis haben und die Welle des Rädchens soll in einer parallelen Lage zu $g_I g_I$ liegen, so zieht man auf das auf die Scheibe aufgeheftete Papier gegen den zuerst gezogenen Scheibendurchmesser senkrecht einen anderen Scheibendurchmesser. Auf diesen trägt man vom Scheibencentrum aus den Halbmesser des todten Kreises auf, setzt die Bleistiftspitze des Zeichnenapparates in den Endpunkt dieses Halbmessers und zieht durch Verschiebung des Schiebers *E* eine Sehne, welche parallel zu dem zuerst gezogenen Scheibendurchmesser liegt und Tangente des todten Kreises ist. Man legt nun mit Hülfe des Winkelmasses Fig. 54 die Welle *ww* parallel zur Sehne und über Letztere.

Will man, dass sich das Rädchen auf dieser Sehne verschieben, die Welle *ww* aber schief gegen die Richtung der Nuth $g_I g_I$ liegen soll, so zieht man gegen die Sehne die schiefe Linie im gegebenen Winkel, richtet die Welle *ww* durch Verschiebung des Bockes *JO* in *d* mit Hülfe des Winkelmasses Fig. 54 so, dass sie parallel über der schiefen Linie liegt, das Rädchen aber in der gezogenen Sehne steht.

XVII. Es ist nun der Auszug des Schiebers *E* zu begrenzen. Dieses geschieht so, dass man den Schieber *E* so weit herauszieht, bis das Rädchen auf der Scheibe nahe an deren Rande steht, man schraubt die hintere Pufferschraube f_I so weit heraus, bis sie an die Säule *Q* anstösst. Dann schiebt man *E* in die Maschine so weit hinein, bis das Rädchen am hintern Rande der Scheibe steht. Man schraubt nun die vordere Pufferschraube heraus, bis sie an die Säule *Q* anstösst. Die Puffer begrenzen nun die Schieberbewegung.

Wenn man das Rädchen auf Sehnen verschiebt, so sind diese kürzer, als der Durchmesser der Scheibe. Man muss dann, um den Auszug zu verkürzen, die Pufferschrauben weiter herausschrauben.

XVIII. Der Knopf (Kragen) am hintern Zapfen der Welle *ww* muss so zwischen der Lagerplatte *p* und der Schraube *q* liegen, dass er der Welle *ww* keine Längenverschiebung gestattet, doch darf der eingelagerte Knopf nicht geklemmt sein. Prüfend schiebt man die Welle *ww* nach ihrer Längenrichtung sanft hin und her. Der Kragen tickt dabei an die Lager an. Man schraubt so lange an *q*, bis das Ticken nicht mehr hörbar und nicht mehr fühlbar ist. Das ganze Lager, worin der Zapfenknopf zwischen *p* und *q* liegt, ist auf dem hinteren Querriegel des Rahmens *YY* verschiebbar, um der Welle ihre richtige Lage geben zu können.

Der vordere Wellenzapfen läuft in einer in das Zifferblatt eingeschraubten Büchse.

XIX. Man hängt den Rahmen *Y* ohne Aufsetzen des Gewichtchens ψ in die Feder φ ein, hebt letztere mittels der Schraube *v* und drückt sie mittels der Schraube v_I hinten nieder, wodurch sie so gespannt wird, dass sie den Rahmen *Y* mit Welle *ww* und Rädchen *R* erhebt. Ist Letzteres geschehen, so mindert man die federnde Kraft durch Retourschrauben der Schraube v_I so lange, bis sich das Rädchen auf die Scheibe *S* aufgestellt hat und nicht mehr von der Feder getragen wird, so dass nur noch der Rahmen *Y* von der Feder in Schwebe erhalten wird. Das Lagerloch in der Stahlplatte *p* ist in verticaler Richtung etwas länglich, man kann daher den Rahmen *Y* ein wenig heben, ohne dass der unter diesem Zapfenloch vorgesteckte Riegel die Welle *ww* hebt. Hat sich daher das Rädchen bereits auf die Scheibe *S* gestellt, so vibrirt der Rahmen *Y* noch, wenn ihn die Feder trägt und man mit der Fingerspitze zart auf das Querstück des Rahmens hinter dem Rädchen tippt. Man schraube während des Vibrirens die Schraube v_I langsam retour, bis das Vibriren sehr gering ist und durch 1 Quentchen, welches man auf den Stift ψ_I steckt, gänzlich beseitigt ist. Man weiss nun, dass die Federkraft mit dem Gewichte des Rahmens *Y* im Gleichgewichte steht. Um nun den Rahmen unter geringem Druck in bleibendem Contacte mit dem Zapfen der Welle zu erhalten, werden auf den Stift ψ_I noch 3 bis 4 Quentchen (Zollgewicht) aufgesteckt. Man nimmt zuerst 3 Quentchen und prüft den Gang des Instrumentes durch eine Messung und versucht, ob die Resultate gleichmässig sind, wenn nicht, so nimmt man 4 Quentchen.

XX. Nun hat man noch den Zeiger ζ auf *o* im Gradbogen Δ einzustellen. Um dieses zu bewirken, zieht man auf ein Papier eine gerade Linie *a*, und zieht auf die Mitte dieser Linie rechtwinklig eine zweite gerade Linie *b*. Man legt nun die gerade Linie *a* nach Vorschrift in No. IX. des §. 51 in die Nullinie ein und schraubt an Schraube Σ so lange, bis der Führpunkt *F* auf *b* läuft, wenn man den Wagen *P* arretirt und den Schieber *E* ein- und ausschiebt. Hat man dieses erreicht, so rückt man den drehbaren Zeiger ζ auf *o* des ihm zugehörigen Gradbogens Δ. Dieser Gradbogen hat sein Centrum in der Säule *Q* und ist ein Theil einer Kreistheilung von 360°. Um das Centrum der Scheibe *Q* dreht sich auch das Lager P_1, worin auf den 3 Rollen *B* der Schieber *E* liegt, es dreht sich daher der Schieber *E* um das Centrum von *Q* und seine Drehung macht sich auf der Gradtheilung Δ durch Zeiger ζ bemerklich.

Berechnen wir nun nach §. 32 und §. 18 irgend eine Schiefstellung des Schiebers *E* durch Bestimmung eines $\angle A$, so kann man die Grösse des $\angle A$ am Gradbogen ablesen und den Zeiger ζ mittels der Schraube Σ darauf einstellen.

Wenn man übrigens sehr feine Verrückungen des Schiebers *E* vorzunehmen hat, z. B. für eine Fläche, die 1600 $\square^R$ gross sein soll, die aber das Instrument nur zu 1598,5 angiebt, die fehlenden 1,5 $\square^R$ beizustellen hat, so kann man die geringe Veränderung am Gradbogen Δ nicht ablesen. Man muss dann vielmehr den Schieber *E* ganz ausziehen, irgend eine Linie aus der unterliegenden Karte in der Richtung des Schiebers unter den Führpunkt *F* legen und nun an der Schraube Σ so drehen, dass sich der Führpunkt *F* ein wenig von der untergelegten Linie hinweg bewegt. Man merkt sich die Distanz, die man dem Führpunkte von der Linie gab und macht eine Probefahrt, welche angiebt, wie viel die Drehung geholfen hat. Hätte sie um 1 Ruthe geholfen, so fehlte noch $\frac{1}{2}$ Ruthe. Man giebt nun noch eine Drehung von der Hälfte der vorigen Distanz. Durch solche Interpolationen kömmt man zum Ziel. Mit dem Führpunkt kann man deshalb kleine Distanzen besser ablesen, weil er weit vom Drehpunkte in *Q* entfernt ist, wenn man den Schieber *E* bis an seinen Puffer herauszieht.

§. 51.

Instruction zur Führung des Instruments.

I. Ist das Instrument nach Inhalt des §. 50 justirt, so regulirt man die Höhe der Lupe so, dass das Auge den Führpunkt und die Linien der Flächenfigur deutlich sieht.

II. Man kann mit einer Umfahrung keine Fläche messen, die länger ist, als es die Verschiebung des unteren Wagens in der Nuth *gg* gestattet, und die höher ist, als es die Verschiebung des Rädchens auf der Scheibe erlaubt. Hiernach hat man die Flächen, welche man umfahren will, zu bemessen. Sind die zu umfahrenden Flächen-Dimensionen grösser, als die möglichen Verschiebungen, so hat man die Flächen nach Bedürfniss in zwei oder mehr Abtheilungen zu zerlegen. Als Theilungslinien benutzt man passend gelegene Grenzlinien von Grundstücken oder man zieht mit der Bleifeder Theilungslinien.

III. Wenn die Zeiger vorwärts laufen, so macht das Instrument positive Flächenangaben, wenn sie rückwärts laufen, so bringt es Flächengrössen in Abzug. Wenn daher das Instrument während der Umfahrung theils vorwärts, theils rückwärts geht, so ist die schliessliche Flächenangabe eine Differenz aus positiven und negativen Angaben.

Man suche die Flächenfiguren so zu legen, dass die Zeiger nur vorwärts laufen, also die Flächengrössen nicht als Differenzen angeben. Denn wenn die Zeiger so viel vorgelaufen sind, dass sie, um die Grösse der Fläche anzugeben, x Länge wieder rückwärts laufen müssen, so sind sie $2.x$ mehr gelaufen, als zur Angabe der Fläche nöthig war. Weil sich aber die Lauflinien wie die Flächen und die Fehler wie die Längen der Flächen verhalten, so vermehren zu lange Lauflinien etwaige Fehler. Dieser Umstand könnte verleiten, die kurzen Seiten einer Flächenbegrenzung parallel zum Drahte zu legen. Man hüte sich dieses zu thun, weil man dadurch in die Gefahr kömmt grössere Fehler zu erhalten, vergl. §. 49. No. IV., und weil man bei kurzen Längen und grossen Höhen der Flächen nicht mehr sagen kann, die Fehler verhalten sich wie die Längen der Flächen.

IV. So oft man eine Messung beginnt, rückt man die Zeiger auf 0. Misst man Flächen, welche 10000 □R. nicht erreichen, so braucht man den Zeiger der Zehntausende nicht zu

stellen. Halten die zu messenden Flächen unter 1000 □R, so braucht man auch den Zeiger der Tausende nicht zu stellen, ebenso nicht den Zeiger der Hunderte, wenn die Fläche 100 □R nicht hält.

Sind die Zeiger nicht scharf eingestellt gewesen, so kann es zweifelhaft bleiben, ob ein Zeiger eine Ziffer passirt hat oder nicht. Der Zeiger der nächst kleineren Einheiten löst jedoch den Zweifel. Wäre z. B. zweifelhaft, ob der Zeiger der Tausende die Ziffer 1 passirt habe oder nicht, so zeigt der Zeiger der Hunderte, ob volle Zehnhundert erreicht sind oder nicht. Wäre auch hier noch Zweifel, so zeigt der grosse Zeiger, ob volle Hundert erreicht sind.

V. Man führe den Führapparat nicht zu schnell, weil man bei zu schnellem Fahren leichtlich von der Mitte der Linie abkömmt und über die Ecken der Figuren hinausfährt, und weil man bei schnellem Fahren leichtlich stossweise anfängt und stossweise aufhört. Ueber eine Geschwindigkeit von 4 par. Linien per Secunde gehe man nicht. Zu langsames Fahren strengt an und veranlasst auch zum Wanken; langsamer, als 2 par. Linien per Secunde fahre man nicht. — Man muss langsam anfangen, stetig fortführen und langsam aufhören; man darf nicht zu oft anhalten und muss sich üben, dass man kurze Linien in einem Zuge, lange Linien mit möglichst wenigen Unterbrechungen überfährt. Wenn auch das Instrument aus Gusseisen verfertigt ist, weil dieses leichter und viel weniger elastisch, als Messing ist, so bleibt doch jedes Metall biegsam, was sich beim Uebergang aus der Ruhe zur Bewegung und aus der Bewegung zur Ruhe geltend macht, da hier die kleinsten Biegungen von Einfluss sind. Ein Nachgeben von $\frac{1}{100}$ par. Linie bringt bei 1600 □‴ schon 1 □‴ Ausfall. Es kömmt viel auf gute Führung an.

VI. Da die Maschinentheile selbst unter den günstigsten Umständen immer noch eine, wenn auch geringe Elasticität bei der Führung des Instrumentes wahrnehmen lassen, so muss man den Führapparat in solcher Weise behutsam fassen und lenken, dass aus der Elasticität der Maschinentheile keine Fehler entstehen.

Da, wie wir wissen, zur Verschiebung des Führapparates im maximo nur eine Kraft von 5 Loth erforderlich und das im §. 36 beschriebene Instrument gut berechnet und gebaut ist, so

sind die Biegungen der Maschinentheile bei behutsamer Behandlung so klein, dass sie unbeachtet bleiben können.

VII. Vor Beginn der Arbeit stellt man das Instrument nach der Anleitung in §. 49. No. XIV — XVIII. mit Hülfe der Normalfigur ein. Es ist schwierig eine genaue Normalfigur zu zeichnen. Die Linien derselben müssen sehr dünn gezogen sein und sie muss vor jedem Gebrauche wegen der Eintrocknung des Papiers geprüft werden. Die Eintrocknung muss in Rechnung gebracht und nach dieser Rechnung, wovon ein Beispiel in §. 49. No. XVII. gegeben ist, die Einstellung des Instrumentes ausgeführt werden. Man darf hierbei nicht vergessen, dass $\frac{1}{100}$ Längenruthe an 1600 $\square^R$ schon einen Ausfall von 1 $\square^R$ macht.

VIII. Man legt die Karte unter den Führapparat und sichert ihre Lage durch aufgelegte Beschwerer, die aber so liegen müssen, dass man bei der Fahrt mit dem Führer nicht daran stösst. Die Gewichte müssen schwer sein, damit der Führapparat nicht die Karte zugleich mit den Beschwerern verschiebt. Hierbei ist grosse Vorsicht nöthig, indem sich die Karte ganz unvermerkt und wie zauberhaft, ähnlich wie beim Tischrücken um ein Weniges zu verschieben pflegt und dadurch Fehler veranlasst, deren Quelle man in anderen Umständen zu suchen geneigt ist. Man schiebt den Wagen in die Mitte der Nuth *gg*, rückt den Schieber *E* so weit ein, dass das Rädchen in der Mitte des auf die Scheibe gezeichneten Ringchens steht, und schiebt nun die Flächenfigur so unter den Führapparat, dass der Führpunkt im Schwerpunkte der Fläche steht und der längste Durchmesser der Flächenfigur parallel zum Drahte oder der Nuth *gg* liegt, wie $\backslash ac$ in Fläche $abcb_2$ oder wie $\backslash cb_I$ in Fläche ab_Ibca Fig. 70. Tab. V. Dieser Durchmesser bildet die Nulllinie, an welche zu beiden Seiten die Ordinaten, welche das Instrument beim Führen abmisst und addirt, in der Richtung des Schiebers *E* anstehen. Steht der Schieber *E* rechtwinklig gegen die Nuth *gg* und gegen die Nulllinie, so stehen die Ordinaten auch rechtwinklig auf der Nulllinie; steht der Schieber schief, so stehen die Ordinaten parallel zu seiner Richtung, also eben so schief. Man wird bei dieser Gelegenheit das im §. 15 und in der Abhandlung über die Instrumentfehler unter No. I. Gesagte recapituliren. Jedoch sollen erläuterungsweise einige Fälle der Legung der Flächenfiguren durchgangen werden.

IX. Stellt man durch Verschiebung des Schiebers *E* das Rädchen auf das Centrum der Drehscheibe, thut die Hand vom Führapparate hinweg und fasst den unteren Wagen *P* an und verschiebt letzteren in der Richtung der Nuth *gg*, so läuft der Führpunkt *F* parallel zu *gg* und läuft in der Richtung einer geraden Linie, welche die Nulllinie ist. Bei dieser Bewegung dreht sich die Scheibe, aber nicht das Rädchen, weil es im Centrum der Scheibe steht. Dreht sich das Rädchen bei diesem Versuch, so steht es nicht genau im Centrum. Gewöhnlich schwankt der Zeiger, wenn das Rädchen im Centrum steht, ein wenig hin und her. Es rührt dieses von kleinen Unegalitäten in der Scheibenebene her.

Will man eine gezogene Linie oder ein Paar Punkte einer Flächenzeichnung in die Nulllinie legen, so bringt man das Rädchen in das Scheibencentrum, lässt die Hand vom Führapparate und rückt die Zeichnung unter dem Führapparate so, dass Punkt *F* auf der gezeichneten Linie oder durch die Punkte läuft, wenn man den Wagen *P* fasst und fortschiebt. —

Hat man viele einzelne Flächen zu umfahren, also vielemal irgend welche Linien dieser Flächen in die Nulllinie einzulegen, so bedient man sich zur Zeitersparniss des in §. 36 zu Fig. 37ª. Tab. VII. beschriebenen Apparates, indem man ihn auf die lange Lupenschraube steckt und mittels der dazu vorhandenen 2 Schrauben in solcher Stellung zwischen Lupe und Planglas festklemmt, dass die Oeffnung des halbkreisförmigen Apparates dem Führer des Instrumentes zugekehrt ist und die daran befindlichen Federn nach unten zu liegen kommen.

Zunächst hat man ein schwarzes Pferdehaar zwischen den bügelförmigen Apparat und seinen zwei Federchen einzuklemmen und straff anzuziehen, dann aber den Apparat in solche Entfernung unter der Lupe festzuschrauben, dass man beim Durchsehen durch die Lupe das Haar deutlich erblickt. Nun legt man in der beschriebenen Weise eine gerade Linie als Nulllinie unter den Führpunkt und rückt das Haar so, dass es bei der Stellung des Auges, die man beim Führen einhält, die Nulllinie nicht deckt, sondern in einiger Entfernung jenseits derselben mit ihr parallel liegt. Der Abstand des Haares von der Nulllinie und somit auch vom Führpunkte ist so gross zu nehmen, dass das Haar beim Führen das Auge nicht stört. Den Parallelismus con-

trolirt man dadurch, dass man dem Auge eine solche Stellung giebt, wobei das Haar die Nulllinie deckt, oder dass man ein Blatt Papier mit mehreren Parallellinien und zwar eine davon als Nulllinie unter das Planglas legt und dass dann das Haar eine der Parallellinien, die nicht Nulllinie ist, deckt.

Will man nun eine Linie einer zu umfahrenden Fläche in die Nulllinie legen, so schiebt man das Rädchen in das Centrum der Scheibe und legt die Linie unter den Führpunkt und parallel zum Haar.

X. Man fängt alle Führung in der Nulllinie an, weil, wenn der Führpunkt in der Nulllinie steht, das Rädchen im Nullpunkte steht und bei Drehung der Scheibe nicht läuft. Trifft man nach der Rückkehr in die Nulllinie nicht genau in den Anfangspunkt ein, so entsteht kein bemerkenswerther Fehler. Wenn man aber in Entfernungen von der Nulllinie die Fahrt anfängt und endigt, so macht man leichtlich Fehler von 1 bis 2 Ruthen durch nicht richtiges Eintreffen in den Anfangspunkt. Auch schadet die Elasticität der Metalltheile des Instrumentes weniger, wenn man in der Nulllinie anfängt und endigt.

XI. Dreiecke, welche nicht sehr hoch sind, legt man so, dass ihre längste Seite in einem Abstande von einigen pariser Linien von der Nulllinie liegt, wie z. B. die Dreiecke cbb_I, ab_Ic, ab_2c Fig. 70. Tab, V. In diesem Falle wird die Fläche des Dreiecks als Differenz angegeben.

XII. Wenn man die Basis eines Dreiecks in die Nulllinie legt, so arbeitet das Instrument ohne Angabe von Minusflächen, der Zeiger schreitet nur positiv vorwärts. Wenn man am Dreieck Fig. II. Tab. V. von dem Punkte *a* aus nach *b* fährt, so zeigt der Zeiger, wenn der Schieber senkrecht gegen \00, wie *be* steht, die Summe der rechtwinkligen Ordinaten im Dreiecke *abe* an; steht der Schieber schief, wie *bd*, so zeigt der Zeiger die Summe der schiefen Ordinaten im Dreiecke *abd* an. Geht der Führpunkt von *b* nach *c*, so zeigt der Zeiger ersteren Falles die Summe der rechtwinkligen Ordinaten im Dreiecke *ebc*, andern Falles aber die schiefen Ordinaten des Dreiecks *dbc* an. Fährt man in der Nulllinie von *c* nach *a*, so zeigt der Zeiger nichts an, weil sich das Rädchen nicht dreht. Man könnte dadurch auf den Gedanken kommen, in der Nullinie nicht zu fahren, sondern bei *c* zu endigen. Das wäre dann richtig, wenn das

Rädchen ebenso genau auf dem Scheibencentrum, wie der Führpunkt in der Nulllinie stände. Darüber ist man nicht sicher, weil man nur nach dem Augenmaasse einstellt. Würde das Rädchen um die kleine Distanz vom Scheibencentrum abstehen, wie $\backslash 00$ von $\backslash 0_I 0_I$, so läge die Basis *ca* nicht in der Nulllinie, sondern es wäre die wahre Nulllinie die $\backslash 0_I 0_I$ und das Instrument hätte beim Umfahren der Dreieckseiten *ab*, *bc* auch noch das an $\backslash ca$ liegende schmale Parallelogramm mit angegeben, indem dann die Ordinaten bis zur $\backslash 0_I 0_I$ gereicht hätten. Würde man bei solcher Bewandtniss nicht durch $\backslash ca$ gefahren sein, so wäre das Parallelogramm vom Planimeter mit angegeben. Fährt man jedoch in der $\backslash ca$ rückwärts, so wird das Parallelogramm negativ gemacht. In solchen Fällen zeigt der Zeiger sofort, ob der Führpunkt *F* in der Nulllinie geht oder nicht. Geht er darin, so bewegt sich der Zeiger nicht.

XIII. Da in der Nähe der Nulllinie der Trieb zur Drehung des Rädchens ohne Energie oder schlaff ist, so fahre man nicht in der Nulllinie. Der Mittelpunkt der Scheibe ist von allen Theilen der Scheibenebene am meisten strapazirt. Man muss daher zeitweilig mit einem Bäuschchen Rosshaare die Mitte der Scheibe reiben, und wenn dieses nicht ausreicht, mit feinem Schleifpulver nachschleifen.

XIV. Will man Dreiecke nicht mit ihrer Basis, sondern deren Schwerpunkt in die Nulllinie legen, wie Figg. 72, 73[a], [b]. Tab. V., so kömmt man wieder in die Unannehmlichkeit, dass das Instrument Minusflächen misst und subtrahirt. Geht in den Figg. 72, 73[a], [b]. der Führpunkt von *f* nach *b*, so wird das Dreieck *fbe*, geht er von *b* nach *h*, so wird das Dreieck *ebh*, durch das Fortschreiten von *h* nach *c* das Minusdreieck *hcg*, mittels der Fahrt von *c* nach *a* das Parallelogramm *adgc*, durch die Führung von *a* nach *f* das Minusdreieck *adf* vom Zeiger angedeutet.

Legt man das Dreieck mit der Mittellinie *cm* Fig. 73[a]. in die Nulllinie, so bekömmt man zwar bei *c* keine Minusfläche, dagegen eine desto grössere bei $\backslash am$. Man muss in jedem Falle nach der Form des Dreiecks oder jeder anderen Flächenfigur die günstigste Lage der Nulllinie suchen.

XV. Hat man die Oberfläche *abcdefgh*, Fig. 75. Tab. XII., zu messen und man legt die Nulllinie in $\backslash 00$, so wird die Fläche

abcda gemessen und vom Zeiger angegeben. Wenn man aber retour fährt durch *efgh*, so wird die Minusfläche *efghe* vom Zeiger angegeben. Legt man die Nulllinie in $\backslash 0_I 0_I$, so werden die Flächen *kbcpk*, *kpdefg* und *ghak* positiv, aber die Flächen $dp0_I$, und $a0_I k$ negativ angegeben. Am zweckmässigsten theilt man die Fläche durch eine Linie *mn* und umfährt jede Hälfte besonders. In der einen Hälfte kömmt dann die Nulllinie so zu liegen, wie $\backslash 0_2 0_2$, in der anderen wie $\backslash 0_3 0_3$, und es giebt keine Minusfläche.

Das in No. X. bis XV. incl. Vorgetragene ist Behufs der Orientirung des Führenden gesagt worden, es ist aber nicht nöthig, sich allzu ängstlich an diese Regeln zu binden. Würde man diese Regeln allzu ängstlich befolgen, so würde man viele Zeit verschwenden.

XVI. Wir wollen nun noch die Vorgänge bei fehlerhaften Führungen anschaulich verfolgen. Es stehe in Fig. 74. Tab. V. der Schieber *E* senkrecht gegen die Nulllinie $q0$ und man mache statt der richtigen Fahrt auf *ag* die fehlerhafte Fahrt auf *abcdefg*. Wenn der Führpunkt *F* von *a* nach *b* geht, so giebt der Zeiger die negative Fläche des $\Delta\, abm$ = No. 1 an, geht *F* von *b* nach *c*, so giebt der Zeiger die positive Fläche *ambc* = No. 2 an. Es ist aber No. 2 — No. 1 = $+\Delta\, abc$. Führt man *F* aus *c* nach *d*, so giebt der Zeiger die Fläche $acd0_I$ = No. 3 positiv an, geht *F* aus *d* nach *e*, so giebt der Zeiger die negative Fläche $aed0_I$ = No. 4 an. Es ist No. 4 — No. 3 = $-\Delta\, cde$. Leitet man *F* aus *e* nach *f*, so zeigt der Zeiger die Minusfläche *aef*0 = No. 5, geht *F* aus *f* nach *g*, so zeigt der Zeiger die positive Fläche *agf*0 = No. 6. Es ist No. 6 — No. 5 = $+\Delta\, efg$. Wir haben daher an Fehlern $+\Delta\, abc - \Delta\, cde + \Delta\, efg$.

Führen wir *F* aus *g* nach *h*, nach *i*, so giebt der Zeiger die Fläche *paghi* positiv an. Wir sollten aber die *gi* fahren und der Zeiger hätte dann das Parallelogramm *pagi* angegeben. Es ist die Fläche *pagi* — Fläche *paghi* = $\Delta\, ghi$. Da dieses Δ an *pagi* fehlt, so ist es negativ. — Wir sollten ferner *F* aus *i* nach *l* führen. Thäten wir dieses auf *il*, so zeigte der Zeiger die Fläche *qpil*; wir fahren aber aus *i* nach *k*, nach *l* und der Zeiger zeigt die Fläche *qpikl*. Nun ist Fläche *qpikl* — Fläche *qpil* = $\Delta\, ikl$. Dieses Dreieck ist überschüssig über die Fläche *qpil* vorhanden, also positiv. Wir haben daher an Fehlern auf der

$\backslash gl$ die Dreiecke $-ghi+ikl$. Beim Berechnen der Führungsfehler haben wir deren Grösse den Längen der zu umfahrenden Flächen proportional gesetzt. Man kann daher beim Fahren auf hohen senkrechten Linien Fehler erhalten und lege deshalb lange schmale Flächen mit ihren Längen parallel zum Drahte.

Zu der Differenz der Fehlerflächen $-ihg$ und $+ikl$ ist die Länge der $\backslash gl$ nach der Regel der proportionale Ausdruck.

XVII. Professor Stampfer hat vorgeschlagen, man solle, wenn man wissentlich einen Fehler durch Abweichen von der Grenzlinie gemacht hat, sofort einen ebenso grossen Fehler nach entgegengesetzter Richtung machen, dadurch werde der Fehler wieder ausgeglichen. Dieser Vorschlag ist nach dem unter No. XVI. Vorgetragenen richtig und führt zur näherungsweisen Ausgleichung.

XVIII. Wenn die Grenzlinien nicht genau in die Grenzpunkte gezogen sind, so führe man den Führpunkt F in der richtigen Richtung. Dabei benutzt man die unrichtig gezogene Linie als Directrix. Deshalb sehe man beim Beginn der Bewegung vorerst nach dem nächsten Grenzpunkt, um zu bemessen, ob man corrigirend fahren muss.

XIX. Der Geometer muss in den Bewegungen und Functionen des Instrumentes so orientirt sein, dass er, ohne den Zeiger zu sehen, stets weiss, ob letzterer vorwärts oder rückwärts, ob er schnell oder langsam geht, um darnach die Geschwindigkeit in der Führung accommodiren zu können.

XX. An einem justirten Instrumente darf man niemals die Drehscheibe mit der Hand drehen, oder man muss, wenn es geschieht, die Lage des Drahtes auf der Trommel dadurch wieder ordnen, dass man den Wagen P mittels des Führapparates entlang dem ganzen Drahte einigemal hin und her führt.

Beim Gang des Instrumentes schiebt man den Wagen P mittels des Schiebers fort. Dadurch setzt der Draht die Scheibe in Bewegung. Dazu gehört sehr wenig Kraft. Wenn man aber mit der Hand die Scheibe dreht, so zieht man dadurch mittels der Trommel und des darauf liegenden Drahtes den Wagen P fort. Diesen zu bewegen erfordert viel mehr Kraft, als zur Bewegung der Scheibe erforderlich ist. Durch diesen Kraftwechsel tritt eine Veränderung in der Lage des Drahtes auf der Trommel und in Folge dessen gewöhnlich auch in den Flächenangaben ein.

XXI. Wenn man das Instrument bei Auflegung einer Scheibe auf netto eingestellt hat und man besitzt mehrere Drehscheiben, so darf man für diese Stellung die Scheiben nicht wechseln, weil dadurch die Angaben des Instrumentes kleine Aenderungen erleiden können.

XXII. Regelmässig umfährt man die Flächenfiguren einmal vorwärts (d. h. dass der Zeiger vorwärts läuft), notirt den Stand der Zeiger, lässt sie unberührt stehen und umfährt die Figur dann rückwärts. Treffen die Zeiger in die Anfangspunkte ein, so hat der Rückgang dieselbe Grösse angegeben, als der Vorgang. In den meisten Fällen treffen aber die Zeiger nicht in die Anfangspunkte ein. Man hat daher entweder ein plus in Zugang oder ein minus in Abgang zu bringen und zwischen beiden Grössen die mittlere zu suchen. Auf kurzem Wege geschieht dieses so, dass man nach der Rückfahrt zu der Grösse, die das Vorwärtsfahren ermittelte, entweder das halbe plus addirt oder davon das halbe minus subtrahirt.

Will man sehr scharfe Resultate erlangen, so beobachtet man das, was §. 49. No. X., XII., XIII. mitgetheilt worden ist.

Dritter Theil

mit Tab. XIII. bis XV.

Geschichte und Beschreibung der bekannten planimetrischen Instrumente.

§. 52.

Um der Mühe überhoben zu sein, den Flächeninhalt ebener Flächenzeichnungen mittels Rechnung zu finden, sind schon viele Versuche gemacht worden, mit Hülfe gewisser Vorrichtungen den Flächeninhalt solcher Zeichnungen ohne Rechnungen oder doch nur mit abgekürztem Rechnungsverfahren zu ermitteln.

§. 53.

Planimetertafeln aus Horn und Glas.

In dieser Weise hat man eine, in kleine Quadrate von bestimmter Maassgrösse getheilte durchsichtige Tafel von Glas oder Horn angewendet, indem man die zu messende Flächenzeichnung mit dieser Tafel überdeckt und die Zahl der kleinen Quadrate zählt, welche von dem Umfange der Flächenzeichnung umschlossen werden.

§. 54.

Oldendorp's Planimeter (Fadenplanimeter, Haarplanimeter).

Es ist in der Geometrie bekannt, dass die Fläche eines Paralleltrapezes (*ahek* Fig. 76. Tab. XIII.) gleich der Fläche eines rechtwinkligen Parallelogramms (*cgdm*) ist, dessen Grundlinie gleich ist der Linie (*bf*), welche man durch die Mitte der Höhe des Paralleltrapezes parallel zu den beiden Parallelseiten dieses Trapezes zieht.

Setzt man die Höhe *dc* des Parallelogramms *cgdm* = 1, theilt die Grundlinie *dm* in eine Anzahl Theile, wovon jeder = *dc* = 1 ist, und errichtet auf jeden Theilpunkt eine senkrechte Linie, so erhält man im rechtwinkligen Parallelogramm Quadrate, deren Seite = 1 und deren Flächen = $1 \times 1 = 1^2$. Nennen wir die Seite des Quadrates eine Linieneinheit und das Quadrat selbst eine Flächeneinheit, so werden durch *n* Linieneinheiten der Grundlinie *dm*, welche gleich ist der \bf, *n* Flächeneinheiten des Parallelogramms *cgdm*, dessen Fläche gleich ist der Fläche des Paralleltrapezes *ahek*, ausgedrückt.

Zerlegt man daher eine ebene Flächenfigur in eine Anzahl Paralleltrapeze, welche sämmtlich die Höhe 1 haben, zieht in der Mitte der Höhe eines jeden Paralleltrapezes eine zu den parallelen Seiten des Trapezes parallellaufende Linie, so drückt die Summe aller Längeneinheiten der gezogenen Mittellinien die Summe aller in der Flächenfigur enthaltenen Flächeneinheiten aus.

Auf diesen Satz hin hat *Oldendorp* seinen *Planimeter* vorgeschlagen. Es besteht dieser Planimeter in einem Rahmen, in welchem Parallelfäden neben einander in gleichen Abständen von einander ausgespannt sind, Fig. 77. Tab. XIII. Ist jeder dieser Abstände = 1, z. B. 1 Ruthe des verjüngten Maassstabes, und man legt den Rahmen so auf eine ebene Flächenzeichnung, dass jeder der beiden letzteren — noch innerhalb der Fläche liegenden — Fäden um $\frac{1}{2}$ Ruthe von den äussersten Grenzpunkten der Flächenzeichnung absteht, so kann man die Längen der innerhalb der Fläche der Zeichnung liegenden und von den Umfangslinien der Fläche begrenzten Fäden messen. Die Summe der gefundenen Linieneinheiten ist alsdann gleich der Summe der in der Fläche vorhandenen Flächeneinheiten. Siehe Fig. 77. Tab. XIII., worin die punktirten Linien die Parallelen der Paralleltrapeze und die ausgezogenen Linien *ab*, *cd*, *ef* etc. die auszumessenden Mittellinien dieser Paralleltrapeze sind.

Oldendorp gebraucht zum Abgreifen der Fädenlängen einen Zirkel, welcher zwischen seinen Schenkeln einen gezahnten Bogen hat, der in ein Zahnrädchen greift, welches in Folge des Eingriffs beim Oeffnen des Zirkels umgedreht wird. Auf dem Rädchen befindet sich eine Theilung, welche die Grösse des Abstandes der Zirkelspitzen von einander anzeigen soll, Fig. 78. Tab. XIII.

Betrachtet man die beiden Schenkel des Zirkels als Schenkel eines Winkels, so ist der im Winkel liegende Bogen das Maass für die Winkelgrösse, dagegen bildet die von einer Zirkelspitze zur andern Zirkelspitze gedachte gerade Linie eine, dem Winkel zugehörige, Sehne. Nun wachsen aber die Sehnen nicht wie die Bogen. Ist daher die Theilung auf dem Rädchen nicht dem Wachsthum der Sehnen angepasst, so giebt das Rädchen unrichtige Sehnenlängen an. Diese Theilung passend zu machen ist aber bei der Kleinheit des Rädchens schwer ausführbar.

Nebenbei ist man auf wiederholtes Abgreifen mit den Zirkelspitzen und auf Rechnen verwiesen.

Von allen bisher bekannt gewordenen Planimetern hat der Haarplanimeter die meiste Anwendung gefunden. In vielen, aber nicht in allen Fällen kann man sich seiner mit Vortheil bedienen.

§. 55.

Westfeld's Planimeter.

Auf Grund desselben Satzes, dass n Linieneinheiten ausdrücken n Flächeneinheiten, construirte Westfeld einen anderen Planimeter. Westfeld führte folgenden Beweis:

Es seien in Fig. 79. Tab. XIII. die concentrischen Kreise a, b, xy gegeben, es werde Radius ca mit R, Radius cb mit r und Radius $cx = cy$ mit r', die $\backslash ab$ mit d, ferner die von dem Kreise a eingeschlossene Fläche mit F und die von dem Kreise b eingeschlossene Fläche mit F', endlich die Fläche des von den beiden Kreisen a und b eingeschlossenen Ringes mit f bezeichnet. Bekanntlich ist dann

$$F - F' = f.$$

Es ist aber

$$F = \pi R^2 \quad \text{und} \quad F' = \pi r^2, \quad \text{folglich}$$

$$f = \pi(R^2 - r^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{I.})$$

Setzt man für r den gleichgrossen Ausdruck $R - d$ und bringt diesen Werth in die Formel I., so ist

$$\begin{aligned} f &= \pi[R^2 - (R - d)^2] \\ &= \pi(R^2 - R^2 + 2Rd - d^2) \\ &= \pi(2Rd - d^2) \\ &= d\pi(2R - d) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{II.}) \end{aligned}$$

Es ist nun aber $2R - d = 2r'$. Man erhält daher, wenn man für $2R - d$ dessen Werth $2r'$ in II. einstellt,

$$f = d.2r'\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(III.)}$$

Setzt man nun $d = 1$, so ist die Länge des Kreises $2r'\pi$ der proportionale Ausdruck für die Fläche des Ringes, oder es drücken, wenn man für $2r'\pi . d$ den Werth $n.1$ setzt, n Längeneinheiten der mittleren Kreislinie xy n Flächeneinheiten des Kreisringes aus.

Für den Ringausschnitt *cgdm* in Fig. 80. Tab. XIII. würde sein

$$f = d.2r'\pi \frac{n^0}{360}$$

und annäherungsweise ist, wenn man den für Fig. 76. Tab. XIII. gültigen Satz hier anwendet, die Fläche $d.2r'\pi \frac{n^0}{360}$ gleich der Fläche *ahek* in Fig. 80. Tab. XIII, so dass, wenn man auch hier $\backslash dc = 1$ setzt, die Linie $2r'\pi \frac{n^0}{360}$ der Ausdruck für die Fläche $1.2r'\pi \frac{n^0}{360}$ wäre.

Westfeld gebraucht als Planimeter einen Zirkel, zwischen dessen Schenkeln sich ein Bogenstück mit gleich grossen Zähnen befindet, Fig. 81, 82, 83. Tab. XIII. Wenn man den Zirkel irgendwie weit öffnet, so fällt ein Sperrkegel k in einen der Zahnzwischenräume ein und fixirt dadurch die Oeffnungsweite der Zirkelschenkel. Die Zähne stehen in solcher Entfernung von einander, dass sich die Zirkelspitzen um je 1 Ruthe des verjüngten Maassstabes von einander entfernen, wenn man den Zirkel um je 1 Zahn öffnet. An dem einen Schenkel des Zirkels befindet sich eine Spitze, an dem andern ein Laufrädchen r mit Theilung nach Ruthengrössen und ausserdem ein zweites Rädchen R, dessen Theilung die Anzahl der Umdrehungen des Laufrädchens zählt. Ist nun die Oeffnung des Zirkels von der Zirkelspitze bis zur Peripherie des Laufrädchens $= r$ und man setzt in Fig. 80. Tab. XIII. die Zirkelspitze in M ein und beschreibt mit dem andern Schenkel den Bogen bf, so läuft das Rädchen die Länge dieses Bogens mit seiner Peripherie ab, die Theilung am Rädchen giebt diese Länge an und die abgelesene Zahl ist $= n$ Längeneinheiten, welche der Ausdruck für die in der Fläche *ahek* enthaltenen n Flächeneinheiten sind.

Wendet man diesen Zirkel als Planimeter an, so beruht die Anwendung darauf, dass man sich die zu messende Fläche,

anstatt der Oldendorp'schen geraden Parallellinien, mit concentrischen Kreisbögen, welche vom Rädchen durchlaufen und dadurch ihrer Länge nach bestimmt werden, durchzogen denken muss.

Gegen diesen Zirkel ist die Einwendung zu machen, dass sich das Laufrädchen bei verschiedenen Oeffnungen des Zirkels mit Peripherien seines seitlich abgerundeten Umfanges auf die Zeichnungsebene auflegt, welche ihrem Durchmesser und somit ihrer Länge nach von einander verschieden sind, vergl. Fig. 81 mit Fig. 83. Tab. XIII.

Viel Schwierigkeit hat das Einsetzen des Lauträdchens auf den Anfang und das Ende der Lauflinie.

Es ist noch anzuführen, dass Westfeld seinen Planimeter in einem Schriftchen beschrieben hat, welches den Titel führt:

Der Ringmesser von Westfeld. 1826. Göttingen bei Dietrich. Preis $2\frac{1}{2}$ Gr.

§. 56.

Planimetrische Bestrebungen von Harkort, Posener und Alder.

Die in der Inhaltsanzeige genannten Männer haben Beseitigung des messenden Zirkels durch Vorrichtungen bezweckt, welche Grundlinien und Höhen von Dreiecken und Vierecken angeben. Die Flächen werden aus diesen Factoren theilweise mit Hülfe von Multiplicationstafeln (— deren in Oesterreich in Anwendung sind —) berechnet.

Der Universalplanimeter von Harkort, Köln 1824.

Lehrbuch der praktischen Geometrie von Lemoch. In diesem Buche sind die Berechnungsapparate von Posener und Alder beschrieben.

§. 57.

Planimetrische Bestrebungen von Wagner, G. G. Schmidt, Horsky, Kraft und Gauss.

Die Planimeter von Wagner, G. G. Schmidt, Horsky und Kraft beseitigen ausser dem Zirkel auch die Multiplication der Factoren. Diese Instrumente messen jedoch auch nur Dreiecke und Trapeze und beruhen auf dem Satze, dass zwei Parallelogramme einander gleich sind, wenn sich ihre Grundlinien umgekehrt wie ihre Höhen verhalten und dass dasselbe auch bei

halben Parallelogrammen, nämlich bei Dreiecken der Fall ist. Denn in der von Wagner untergelegten Fig. 84, Tab. XIII. ist

$$ae : ab = ec : bd;$$
$$ae \,.\, bd = ab \,.\, ec;$$
$$\tfrac{1}{2}ae \,.\, bd = \tfrac{1}{2}ab \,.\, ec,$$

und in der von Schmidt gegebenen Fig. 85. Tab. XIII. ist

$$a_1e : ab = ec : bd;$$
$$a_1e \,.\, bd = bd \,.\, ec;$$
$$\tfrac{1}{2}a_1e \,.\, bd = \tfrac{1}{2}ab \,.\, ec.$$

Die beschränkte Art und Weise, in der von diesen Sätzen zu Herstellung der genannten Planimeter Gebrauch gemacht worden ist, haben diese Planimeter um so weniger allgemein in Gebrauch kommen lassen, als sich die Anwendung derselben auch auf mehre Arten modificirt je nach der Grösse der zu messenden Figur oder nach dem Verhältniss der beiden Factoren. Wir verweisen auf folgende Literatur hierüber:

Ueber den Gebrauch und die Einrichtung des vor Kurzem erfundenen Planimeters vom Prof. G. Wagner. Frankfurt 1821 bei Jäger.

Zugabe zu den Anfangsgründen der Mathematik vom Prof. G. G. Schmidt. Thl. I.

Abhandlung über den Planimeter von Horsky. 1840.

Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieurvereins 1850, worin ebenfalls der Horsky'sche Planimeter besprochen ist.

In der Flächenberechnung macht der von Gauss schon vor mehr als 60 Jahren gemachte Vorschlag Epoche, wonach man die Flächen *nicht mehr* aus Dreiecken, sondern aus Abscissen und Ordinaten berechnen und die dazu vorzunehmenden Messungen mittels zweier senkrecht gegeneinander stehender und sich an einander verschiebender getheilter Lineale bewirken soll.

Das Nähere hat hierüber Lübsen mitgetheilt in der

Elementargeometrie von H. B. Lübsen. Hamburg 1855, §. 203.

Dass ein Vorschlag von Gauss höherer Art sein würde, liess sich erwarten, aber der höhere Gedanke beseitigte nicht die Schwierigkeiten der Ausführung. In letzterer Beziehung war Oppikofer glücklicher, wie wir nunmehr im Folgenden erfahren.

§. 58.

Oppikofer's Planimeter, um dessen Geschichte R. Wolff in Bern Verdienst hat.

Der 1783 zu Unteroppikon bei Bussnang geborene, von 1816 ab bei der Juragewässercorrection und anderen technischen Arbeiten im Canton Bern beschäftigte und seit 1837 zum Strasseninspector des Cantons Thurgau beförderte Johannes Oppikofer hat im Jahre 1826 für das Princip, auf welches sich die Flächenmessung mittels der Flächenumschreibung gründet, die geeigneten *Differential- und Integralformeln aufgefunden* und hat mit Hülfe des Mechanikus Pfäffli einen darauf gestützten Planimeter construirt. Die Oesterreichische Regierung offerirte dem Oppikofer 4000 Schweizerfranken, wenn er das Instrument zur Prüfung abgebe und die Prüfung ein günstiges Resultat bringe. Oppikofer wollte jedoch nicht auf seine Gefahr und Kosten nach Wien reisen, so dass er mit der Oesterreichischen Regierung zu keinem Resultate kam. Im Jahre 1830 gab ihm jedoch die Bernerische Regierung in Anerkennung seiner Arbeiten und Opfer gegen Ablieferung eines, jetzt noch auf der Baudirection in Bern befindlichen, Planimeters eine Belohnung von 1600 fr.

R. Wolff in Bern, welcher Mittheilungen von Oppikofer erhalten hat, erklärt dieses Instrument in folgender Weise:

Denkt man sich in Tab. XIII. Fig. 86. einen Kegel so über einem Brette aufgestellt, dass einerseits seine obere Kante dem Brette parallel ist, und anderseits derselbe um seine Axe frei rotiren kann, — ferner eine auf dem Kegel aufliegende Rolle, deren in eine Spitze auslaufender Träger in der Coulisse I. des Brettes so verschoben werden kann, dass ihre Fläche zu der erwähnten Kante des Kegels beständig senkrecht steht, — endlich eine zu I. senkrechte Coulisse II. auf einem zweiten Brette, in der das ganze erste Brett beweglich ist, während eine in den Punkten *B* und *C* des zweiten Brettes befestigte Saite um einen cylindrischen Ansatz des Kegels geschlungen ist, — so ist vorerst klar, dass der Spitze durch die doppelte Bewegung in den Coulissen jede beliebige Stellung gegeben werden kann. Gesetzt, die Spitze werde zum Anfange so gestellt, dass sie mit dem Anfangspunkte *O* eines den beiden Coulissen parallelen Coordinatensystemes, auf welches eine zu bestimmende Fläche *OMP*

bezogen ist, zusammenfalle, so wird die Rolle eine bestimmte Entfernung a von der Spitze des Kegels haben. Wird die Spitze von O bis P verschoben, so gleitet die Rolle, ohne dass sich der Kegel bewegt, um $OP = x$ auf der Kante fort. Wie aber die Spitze von P nach M geführt wird, so bleibt die Rolle in der angenommenen Entfernung $(a + x)$ von der Spitze des Kegels, — dagegen wird durch die längs der Coulisse II. nothwendig gewordene Verschiebung in Folge der Reibung des Cylinders an der Saite und der Rolle an dem Kegel, die Rolle eine Drehung v erhalten. Diese Drehung wird einerseits $PM = y$, und anderseits der Distanz $(a + x)$ der Rolle vom Scheitel des Kegels proportional sein, so dass, wenn m eine constante Grösse bezeichnet,

$$v = my(a + x)$$

gesetzt werden kann. Geht endlich die Spitze von M nach O zurück, so tritt eine Drehung v_I der Rolle in entgegengesetztem Sinne ein und zwar ist sie, da während dieser Bewegung $(a + x)$ continuirlich bis auf a abnimmt,

$$v_I = \int m(a + x)\,dy = may + m\int x\,dy.$$

Bezeichnet man daher die schliessliche Ablesung an der Rolle oder vielmehr die Differenz ihres Standes bei der Zurückkunft nach O von dem Stande beim Ausgange von O mit A, so ist

$$\begin{aligned} A = v - v_I &= my(a + x) - may - m\int x\,dy \\ &= m(xy - \int x\,dy) \\ &= m\int y\,dx. \end{aligned}$$

Es ist daher die aus dem Umschreiben der Figur erhaltene Grösse A ihrer bekanntlich durch $\int y\,dx$ ausgedrückten Fläche proportional und es ist daher möglich, auf der Rolle oder auf einem Zifferblatte, dessen Zeiger durch ein Räderwerk mit der Rolle in Verbindung steht, eine Eintheilung anzubringen, die für eine gewisse Verjüngung des Maassstabes unmittelbar die Fläche der in derselben verzeichneten Figur in Folge einer einfachen Umschreibung ablesen lässt.

Oppikofer verband sich im Jahre 1833 mit dem Mechaniker Ernst in Paris, um dem Instrumente noch weitere Vervollkommnung und Verbreitung zu geben. Sie stellten den Preis für ein durch Ernst gefertigtes Instrument auf 400 fr., allein es wurden — weil der Preis noch zu hoch war und weil die Meisten, welche das Instrument gebrauchen konnten, demselben aus

Mangel an Einsicht in die Theorie des Instrumentes misstrauten — wenige bestellt.

Im Jahre 1836 bekam Oppikofer bei der Berner Industrieausstellung die goldene Verdienstmedaille für seinen Apparat.

Das Oppikofer'sche Instrument hat einen Kegel von circa 8^{cm} Durchmesser und 24^{cm} Höhe und die Axe des Kegels bildet mit dem Mantel desselben einen Winkel von $9\frac{1}{2}^0$. Man fand bei der Prüfung, dass man mit dem Instrumente in $\frac{1}{20}$ der Zeit eine Fläche misst, in welcher man sie berechnet und dass das Instrument bis auf $\frac{1}{1500}$ genau war.

Bemerkenswerth ist noch, dass Oppikofer, wie R. Wolff erzählt, einen Hülfsapparat erfunden hat, mit dem ihm der Planimeter jeden beliebigen Kegelschnitt zeichnet.

Diese Notizen sind entnommen einer Abhandlung in No. 213—215 der Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern unter der Ueberschrift:

R. Wolff Notizen zur Geschichte der Mathematik und Physik in der Schweiz. *XXII. Ueber den Oppikoferschen* Planimeter. 31. Mai 1851.

Abhandlung des Ingenieurs Johannes Wild in der 11. Uebersicht der Verhandlungen der technischen Gesellschaft in Zürich.

Prof. Joh. Aug. Grunert's Archiv der Mathematik und Physik. Theil 18. 1852. Seite 896.

Diesen geschichtlichen Notizen reihen wir das an, was in Folge der Verbindung Oppikofer's mit Ernst in Paris erfolgte.

§. 59.

Oppikofer-Ernst'scher Planimeter, um welchen sich die Academie der Wissenschaft und Industrie in Paris verdient gemacht hat.

Uebersetzung aus dem

Bulletin de la société d'encouragement pour l'industrie nationale. Paris 1841. pag. 402—405 (Quarantième année)

Beschreibung eines Instrumentes, das man Planimeter nennt und dazu dient, um die Ausdehnung der Oberflächen in bildlicher Weise (graphisch) zu ermitteln, construirt durch den Ingenieur der Mechanik Herrn Ernst, rue de Lille 11.

Dieses Instrument, dessen erste Idee man Herrn Oppikofer verdankt, ist mit einem besonderen Talent durch Herrn Ernst construirt worden, welcher im Jahre 1836 einen Theil des Preises für Leistungen im Gebiete der Mechanik erhalten hat, einen

Preis, den Herr v. Montyon bei der Academie der Wissenschaften gestiftet hat. Die Preisrichter der Ausstellung des Jahres 1839 erkannten Herrn Ernst eine silberne Medaille zu, sowohl für dieses Instrument, als für seine anderen geistreichen und wegen ihrer vollkommenen Ausführung merkwürdigen Zusammenstellungen. Der Planimeter, welcher auf Tab. XIII. Fig. 87. 88. im Grundriss und im Aufriss in der Ansicht von der Seite dargestellt ist, hat die Eigenthümlichkeit, durch mechanische Verfahrungsweise von äusserster Einfachheit und ohne Zerlegung der gezeichneten Figuren ebene Flächen, welche durch irgend welche geradlinige oder krummlinige Umrisse begrenzt sind, zu messen. Er ist vorzüglich brauchbar zur Ermittelung des Flächengehaltes einzelner Flächen und der Oberfläche von Erdmassen, welche man ausgraben oder aufwerfen will, mit einem Worte aller der Flächen, welche man zu messen hat.

Er besteht aus einem Kegel *a*, dessen Axe gegen die Ebene der Tafel geneigt ist, welche das Instrument trägt, und zwar mit der Einrichtung, dass sein oberer Rand parallel mit dieser Ebene ist. Dieser Kegel ist mit Spitzen zwischen den beiden auf eine Platte *b* befestigten Stützen gelagert und auf seine verlängerte Axe ist ein Rädchen *c* angebracht, welches gegen eine Schiene *dd* angedrückt ist, die parallel mit den Führern läuft, entlang deren die Platte *b* hingleiten kann. Es folgt aus dieser Anordnung, dass wenn man die Platte *b* in der Richtung der Schiene *dd* vor- oder rückwärts schiebt, das Rädchen und der Kegel sich drehen und eine Anzahl Drehungen hervorbringen, die proportional ist dem durchlaufenen Weg.

Ein Zähler, dessen Hauptbestandtheil ein Rädchen *e* ist, das senkrecht auf der oberen horizontalen Kante des Kegels steht und sich um eine parallel mit der erwähnten Kante des Kegels liegende Axe dreht, ist mit Spitzen in einem Bestandtheil des Schiebers *f* eingelegt, der sich mit der Platte *b* bewegt; dieser Theil lässt überdies eine senkrechte Bewegung gegen die Schiene *d* zu, in der Weise, dass sich das Rädchen nach Belieben der Spitze des Kegels nähern oder von ihr entfernen kann. Weil der Zähler durch sein eigenes Gewicht auf der Oberfläche des Kegels aufliegt, so begreift man, dass wenn dieser Kegel sich dreht, auch das Rädchen sich dreht; von nun an ist einleuchtend, dass die Zahl der Drehungen des Kegels gleich ist

1) der Länge des auf der Schiene *d* abgelaufenen Wegs,
2) der Entfernung des Rädchens von der Spitze des Kegels oder dem Product aus diesen zwei Grössen.

Bei dieser Anordnung wollen wir annehmen, dass, indem sich das Rädchen an der Spitze des Kegels befindet, eine Spitze *g*, die sich an dem Schieber *f* befindet, in die Linie *RS*, welche parallel mit dem Schieber *d* läuft, und insbesondere in den Punkt *R* fällt. Es ist einleuchtend, dass sich das Rädchen nicht dreht, wenn man die Platte *b* in solcher Weise verschiebt, dass dieser Punkt genau der Linie *PS* folgt, weil die Geschwindigkeit der Spitze des Kegels Null ist; wenn aber die Spitze *g* in den Punkt *M* und das Rädchen in einem Abstande $MR = NS$ vom Scheitel steht, und diese Spitze von *M* nach *N* geschoben wird, dann wird die Anzahl der Umdrehungen des Rädchens *e* proportional der Länge *RS*, welche gleich der Grundlinie des Rechtecks *MNRS* ist, und der Höhe *MR* dieses Rechtecks sein. Eben so wird, wenn die Spitze *g* die Linie *OP* durchläuft, die Grösse der Drehung des Rädchens proportional der Fläche des Rechtecks *ORSP* sein.

Allein beim Gebrauch des Instruments kann man das Rädchen nicht bis an die Spitze des Kegels schieben, und es muss dieses die Verfahrungsart, die Fläche des Rechtecks zu messen, ein wenig ändern. Nehmen wir z. B. an, es werde beabsichtigt, die Fläche des Rechtecks *OMNP* zu berechnen. Man bringt zuerst die Spitze *g* auf die Linie *MN*, um sich zu sichern, dass sie bei Verschiebung der Platte *b* der Bewegung ganz genau folgt. Man schiebt sodann das Instrument in der Weise fort, dass diese Spitze ihre Richtung von *M* nach *N* nimmt; das Rädchen des Zählers erzeugt sodann in einer bestimmten Zeit eine Drehungsgrösse, welche proportional ist der Fläche des Rechtecks *RMSN*; man zieht in einem Zuge den Schieber *ff* heraus, man bringt die Spitze *g* in den Punkt *P*, und man bringt die Platte *b* zurück in einer Weise, dass die Spitze *g* der Linie *PO* folgt. Bei dieser rückgängigen Bewegung dreht sich das Rädchen in umgekehrter Richtung und erzeugt eine Drehungsgrösse, die der Fläche des Rechtecks *OMNP* proportional ist.

Die Bewegung des Rädchens theilt sich mittels egalen Eingriffs den Zeigern der beiden Theilkreise *h* und *i* mit, wovon der eine die Einer, Zehner, Hunderter der Quadratmillimeter,

der andere aber die Tausender und Zehntausender der Quadratmillimeter anzeigt. -

Wir kommen nun auf ein Rechteck zu sprechen, das genau der Quadratur einer begrenzten Fläche entspricht, wie sie nach dem bei Dynamometern üblichen Styl durch eine gekrümmte wellenförmige Linie *op* dargestellt ist; jedes Element dieser Fläche *uvxy* kann als ein kleines Rechteck betrachtet werden, dessen Grundlinie *ux* ist und dessen Höhe die mittlere arithmetische zwischen *uv* und *xy* ist.

Um eine krumme Linie aufzunehmen oder die Quadratur einer Fläche *MNpo* zu ermitteln, verfährt man wie folgt:

Man befestigt das Blatt Papier unter die Grundplatte des Planimeters in solcher Weise, dass die Spitze *g* sehr nahe an diese Grundplatte angeschoben wird und genau der Linie *MN* von dem Nullpunkt des Beginnens an folgt, wenn man die Platte *b* in der Richtung von *M* nach *N* verschiebt. Ist dieses gemacht, dann bringt man mit der Hand die Zeiger der beiden Theilkreise auf Null zurück, setzt sanft das Rädchen auf den Kegel nieder und schiebt die Platte *b* in solcher Weise fort, dass die Spitze *g* der Richtung von *M* nach *N* folgt. Man zieht nachher den Schieber *f* heraus, um die Spitze *g* auf den Punkt *p* zu führen, folgt alsdann mit dieser Spitze mittels der doppelten Bewegung, die man ihr geben kann, genau allen Biegungen der krummen Linie, bis die Spitze *g* in *O* angekommen ist. Man liest an den zwei Theilkreisen die Zahl der Quadratmillimeter, welche in der Fläche, die man quadriren wollte, enthalten sind, ab und erhält, indem man mit der Länge der Grundlinie *MN*, welche in Millimetern ausgedrückt ist, in die Fläche dividirt, als Quotienten die mittlere Ordinate oder die Höhe des diese Fläche darstellenden Rechtecks und folgeweise den mittleren Erfolg des Unternehmens.

Die Genauigkeit der Operation, welche wir beschreiben, erfordert, dass das Rädchen bei der Verschiebung in seiner doppelten Bewegung niemals gleitet ohne zu rollen; denn wenn es anders wäre, so würde die Fläche, die durch die Theilkreise angezeigt wird, kleiner sein als die wirkliche Fläche: daher kömmt man darauf, an Stelle des Kegels von Metall einen Kegel von hartem und ganz trockenem Holze zu bringen, an welchem die Gleitungsreibung des Rädchens viel grösser ist, als an einem

Kegel von polirtem Metall. Die nach und nach gemachte Vergleichung der Höhe der Krümmungslinie, welche sehr starke (jähe) Einbiegungen hat und folgerecht dem Gebrauch des Instrumentes sehr ungünstig ist, und der Planimeter haben bewiesen, dass die Genauigkeit des letzteren Apparates so vollkommen war, als man sie nur wünschen kann.

Die Einführung eines Kegels von Holz statt eines Kegels von polirtem Metall beim Gebrauche des Planimeters ist das einzige Mittel gewesen, genaue Resultate mit diesem Instrumente unter den gewöhnlichen Verhältnissen zu erhalten. Es ist in der That für die Genauigkeit unerlässlich, dass das Rädchen nicht gleitet ohne zu rollen, oder dass die Gleitungsreibung stets grösser, als die Rollungsreibung ist. Es ist bei dem gewöhnlichen Verhältniss der Theile des Instrumentes der Widerstand gegen das Rollen, wie durch das Rädchen am Zähler ermittelt worden ist, so gross, dass die Gleitungsreibung dieses Rädchens, wenn es von Messing ist und an einem Kegel von Gusseisen oder von polirtem Stahl läuft, geringer als die Rollungsreibung ist; es folgt daraus, dass das Rädchen eine Strecke gleitet ohne zu rollen und dass daher die Drehungsgrösse, welche es erzeugt, nicht mehr der Fläche proportional ist, die man quadriren will. Der Unterschied ist in dem Maasse merklicher, in welchem die krumme Linie ihre Neigungen im Verhältniss zur Grundlinie oder zur Nulllinie zu gross giebt.

Der Societätscomite für mechanische Künste hat, indem er seinen Rechenschaftsbericht durch das Organ des *Herrn* v. Lambel *in der Sitzung vom* 10. März 1841 über das Resultat der Bewerbungen, welche sich auf die Construction der Dynamometer bezogen, gab, die Bekanntmachung des Planimeters des Herrn Ernst im Bülletin beschlossen.

Dingler's polytechnisches Journal Bd. 86. S. 33—36.

§. 60.

Oppikofer-Wetli'scher Planimeter, um welchen sich die Academie der Wissenschaften und Professor Stampfer in Wien Verdienste erworben haben.

Der Ingenieur Caspar Wetli in Zürich brachte den Oppikofer'schen Planimeter dadurch zu einem höhern Grad von Vollkommenheit, dass er am Kegel den Winkel zwischen der Axe und dem Kegelmantel, welchen Oppikofer zu $9\frac{1}{2}^0$ angenommen

hatte, bis zu 90° vergrösserte, dass er somit statt des Kegels eine kreisrunde Scheibe nahm.

Wetli sandte sein Instrument nach Wien, es wurde dort von der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften beurtheilt und Wetli nahm in Gesellschaft mit C. Starke, Werkweister am Wiener polytechnischen Institute, ein Patent auf die Verfertigung solcher Instrumente im Oesterreichischen Kaiserthume. Bei diesen Vorgängen hatte Professor Simon Stampfer zu Wien zu berichten und er trat zuerst mit einer wissenschaftlichen Erörterung über das Instrument öffentlich hervor.

Seine Abhandlung befindet sich in No. 7 der Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieur-Vereins von 1850; ferner in Dingler's polytechnischem Journal Bd. 116. pag. 424—443 vom Jahre 1850.

Das Instrument hat nach Wetli's Angaben folgende Einrichtung, siehe Tab. XIV. Fig. 89, 90.

In diesen Figg. ist das Instrument in $\frac{1}{3}$ seiner natürlichen Grösse dargestellt. AA_I ist die Grundplatte von Metall. Darauf befinden sich zwei Schienen ss und eine dritte $s_I s_I$, die Schiene $s_I s_I$ liegt in der Mitte der Platte unter der Welle bb_I. Auf diesen Schienen kann ein Dreifuss mittels der 3 Rollen $BB_I B_{II}$ hin und zurück geschoben werden. Auf der Mitte des Dreifusses steht eine hohle Säule, in dieser dreht sich die Axe der Scheibe DD_I.

GG_I ist eine prismatische Stange, die sich zwischen zwei Paar Rollen, welche mit dem Dreifusse in fester Verbindung stehen und in den Zeichnungen sichtbar sind, in einer zu den Schienen ss senkrechten Richtung verschiebbar ist.

Am Ende i dieser Stange befindet sich ein senkrechter Stift nach unten in eine Spitze auslaufend, welche auf einer untergelegten Zeichnung nach allen Richtungen beliebig herumgeführt werden kann.

Längs der Stange GG_I ist ein Silberdraht ee_I ausgespannt, der sich um die unter der Scheibe an deren Axe befestigten Walze (Trommel) h schlingt und beim Hin- und Herschieben der Stange GG_I die Scheibe in Umlauf setzt.

Ferner ist EE_I ein auf der Platte AA_I senkrecht stehender Ständer, mit welchem der Rahmen $aaaa$ mittels der Schraubenspitzen a_I wie ein Hebel verbunden ist. Dieser Rahmen trägt durch die Schraubenspitzen cc_I die Axe bb_I, an deren vorderem Ende

sich die Rolle d befindet. Der Rahmen sammt der Axe ruht am Ende c_I mittels des Rädchens d auf der Scheibe auf, wobei die Anordnung getroffen ist, dass die Axe bb_I die Verlängerung der Axe der Scheibe DD_I rechtwinklig schneidet, und sowohl zu den Schienen ss als auch zur Ebene der Scheibe DD_I parallel ist.

Bewegt man den Dreifuss BB_IB_2 mit der Scheibe DD_I unter dem Rädchen entlang der Schiene ss, so rutscht das Rädchen d auf einem Durchmesser der Scheibe DD_I ohne sich zu drehen, eine Verschiebung der Stange GG_I hingegen in der Richtung ihrer Länge dreht mittels des Silberdrahts die Scheibe, welche zugleich das Rädchen d durch Friction in Umlauf setzt. Die Scheibe besteht aus Messingblech oder aus einer geschliffenen Glastafel und ist zur Vermehrung der Reibung mit feinem gleichförmigen Papier überzogen.

Um die Axendrehung des Rädchens d zu messen, ist am Ständer EE_I ein eingetheilter Kreis befestigt und an der Axe bb_I ein Zeiger, ferner ist ein Zähler mittels Zahnräder ähnlich wie beim Oppikofer'schen Instrumente angebracht.

Durch eine besondere Vorrichtung lässt sich mittels einer Schraube die Berührung der Rolle d mit der Scheibe aufheben.

Prof. Stampfer stellte über das Instrument folgende Theorie und Berechnung auf:

Die gegenseitige Bewegung der Scheibe und des Rädchens d lässt sich als die von zwei Winkelrädern ansehen, wobei der Halbmesser des einen Rades stets veränderlich ist.

Sei der Halbmesser der Trommel h + Halbmesser des Drahtes $= r$, Halbmesser des Rädchens $= R$; Abstand des Berührungspunktes des Rädchens vom Centrum der Scheibe $= \varrho$, positiv bei der in der Figur angedeuteten Lage. Die zu messende Figur werde auf Coordinaten bezogen, welche zu den beiden Grundbewegungen des Apparates parallel sind, und zwar sollen die x zur Stange GG_I, die y zu den Schienen ss parallel seyn, und der Anfangspunkt der x und y mit jenem der Bewegung zusammenfallen. Nur die Bewegung in der Richtung x bringt eine Drehung der Scheibe hervor; ist dieser Drehungswinkel $= \varphi$, jener der Rolle $= v$ (φ und v in Bogenmaass), so ist

$$x = r \cdot \varphi$$

und $$R \cdot v = \varrho \cdot \varphi.$$

Diese letztere Gleichung gilt jedoch nur, wenn ϱ constant ist, allein ϱ ist veränderlich, daher haben wir die Relation:

$$Rdv = \varrho d\varphi.$$

Der allgemeine Werth von ϱ ist $= \varrho_0 + y$, wo ϱ_0 der Werth von ϱ für den Anfangspunkt 0; ferner ist aus der ersten Gleichung

$$d\varphi = \frac{dx}{r}, \text{ mithin } Rdv = (\varrho_0 + y)\frac{dx}{r},$$

woraus

$$Rrv = \varrho_0 x + \int y\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung drückt offenbar eine Fläche aus, die demnach, da Rr constant ist, der Winkelbewegung v proportional ist. Ist oM Fig. 20. Tab. IV. eine beliebige Curve, deren Gleichung $y = f(x)$, so ist für $om = x$, die Fläche $oMm = \int y\,dx$. Macht man $ao = \varrho_0$ und zieht am_I parallel zu om, so ist die Fläche $aoMm_I = \varrho_0 x + \int y\,dx = Rrv$, mithin die Bedeutung dieser Gleichung vollständig klar. Der Apparat kann daher als eine Integrationsmaschine für das Differential $f(x)dx$ angesehen werden, wenn die Curve $y = f(x)$ in einer Zeichnung gegeben ist.

Wir wollen nun (Tab. XIX. Fig. 91.) als zu berechnende Figur ein geradliniges Polygon von n Seiten annehmen; seine Endpunkte seien der Ordnung nach mit 0, 1, 2, 3 ..... $(n-1)$ bezeichnet; ϱ_0, ϱ_1, ϱ_2 u. s. w. seien die Werthe von ϱ, wenn sich der beschreibende Punkt i in 0, 1, 2 u. s. w. befindet. Ist der Winkel der ersten Seite mit der Abscissenaxe $= \alpha_1$, so ist

$$y = x \text{ tang } \alpha_1,$$

und nach (1), wenn das Integral von $x = 0$ bis $x = x_1$ genommen wird,

$$Rrv_1 = \varrho_0 x_1 + \tfrac{1}{2}x_1^2 \text{ tang } \alpha_1 = x_1(\varrho_0 + \tfrac{1}{2}y_1).$$

Denkt man sich jetzt den Punkt 1 als Ursprung, b 1 parallel zu am gezogen, und setzt $b1 = x'$, $b2 = y'$, so wird für die Bewegung von 1 bis 2 wie vorhin

$$Rrv_2 = x'(\varrho_1 + \tfrac{1}{2}y'),$$

$$\text{aber } x' = x_2 - x_1; \quad y' = y_2 - y_1,$$

$$\text{mithin } \quad Rrv_2 = (x_2 - x_1)[\varrho_1 + \tfrac{1}{2}(y_2 - y_1)],$$

$$\text{ebenso } \quad Rrv_3 = (x_3 - x_2)[\varrho_2 + \tfrac{1}{2}(y_3 - y_2)] \text{ u. s. w.}$$

Die letzte Seite, mit welcher die Spitze auf den Anfangspunkt zurückgekehrt, giebt

$$Rrv_n = (x_n - x_{n-1})[\varrho_{n-1} + \tfrac{1}{2}(y_n - y_{n-1})].$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= \varrho_0 + y_1 \\ \varrho_2 &= \varrho_0 + y_2 \quad \text{und überhaupt} \\ \varrho_m &= \varrho_0 + y_m , \end{aligned}$$

daher erhalten wir

$$\begin{aligned} Rr\Sigma v = {} & x_1 (\varrho_0 + \tfrac{1}{2} y_1) + \\ & + (x_2 - x_1) [\varrho_0 + \tfrac{1}{2} (y_1 + y_2)] \\ & + (x_3 - x_2) [\varrho_0 + \tfrac{1}{2} (y_2 + y_3)] \\ & \vdots \\ & + (x_n - x_{n-1}) [\varrho_0 + \tfrac{1}{2} (y_{n-1} + y_n)]. \end{aligned}$$

x_n, y_n sind die Coordinaten für den Anfangspunkt, mithin $= 0$; ferner ist der in ϱ_0 multiplicirte Theil

$$= \varrho_0 [x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) \ldots + (x_n - x_{n-1})],$$

wo der eingeklammerte Factor, mithin der ganze Ausdruck verschwindet. Es bleibt demnach, wenn wir jetzt $\Sigma v = V$ setzen und die ganze Gleichung mit 2 multipliciren,

$$\begin{aligned} 2RrV = 2F = {} & x_1 y_1 + (x_2 - x_1)(y_1 + y_2) + \\ & + (x_3 - x_2)(y_2 + y_3) + \ldots + \\ & + (x_n - x_{n-1})(y_{n-1} + y_n), \end{aligned}$$

ein bekannter Ausdruck für die doppelte Fläche eines Polygons, der sich auch in den folgenden transformiren lässt:

$$\begin{aligned} 2F = {} & y_1 (x_2 - x_0) + y_2 (x_3 - x_1) + y_3 (x_4 - x_2) + \ldots \\ & + y_{n-1} (x_n - x_{n-2}), \end{aligned}$$

wo x_0 und $x_n = 0$ und nur der Symmetrie wegen angesetzt sind.

Da ϱ_0 aus dem Ausdrucke für die Fläche verschwunden ist, so ist diese von der anfänglichen Lage des Rädchens d gegen den Mittelpunkt C der Scheibe DD_I unabhängig, und man kann diese Lage, die Stellung der Figur gegen den Apparat, sowie den Anfangspunkt irgendwo am Umfange derselben beliebig wählen.

Der gegebene Beweis erstreckt sich auch auf alle wie immer gestalteten krummlinigen Figuren, da jede solche als ein geradliniges Polygon von unendlicher Seitenzahl angesehen werden kann.

Die Grösse RrV, welche die Fläche der Figur angiebt, kann man sich als einen Kreisfactor denken, dessen Winkel, im Bogenmaass ausgedrückt, $= V$ und dessen Halbmesser $= R_I = \sqrt{Rr}$. Man kann dieses R_I den äquivalenten Halbmesser nennen.

In den §§. 7 und 8 haben wir durch vergleichende Messungen und Rechnungen nachgewiesen, dass der Planimeter die Flächengrössen nicht als Flächen von Sectoren angiebt, obwohl in einzelnen Fällen die gemessene Fläche gleiche Grösse wie der in der Scheibe gebildete Sector hat.

Die Anordnung wird so getroffen, dass V nicht Gradmaass, sondern unmittelbar Flächenmaass giebt.

Der Spielraum der beiden Grundbewegungen beträgt in der Richtung der Schienen 6, in der Richtung der Stange 8 Zoll. Die Dicke des Drahtes soll nicht über $\frac{1}{100}$ Zoll sein.

Die Genauigkeit des Instruments ist bis zu $\frac{1}{4000}$ erprobt worden.

Ferner hat Prof. Stampfer nachgewiesen, dass die Richtungen der Bewegung x und y nicht rechtwinklig zu sein brauchen, dass die Axe des Rädchens nicht parallel mit y und nicht parallel mit der Scheibe DD_I zu liegen braucht, sondern auch eine gegen diese Richtungen geneigte Lage haben kann, wenn nur die Berechnungen der Grössen der Maschinentheile nach der Axenstellung gemacht sind. Dieser letztere Theil der Abhandlung geht nicht in die Details, sondern beschränkt sich auf den Beweis der Behauptung der erwähnten Sätze im Allgemeinen.

Prof. Stampfer schliesst seine Abhandlung mit der Bemerkung:

Die schöne und sinnreiche Idee, welche diesem Instrumente zu Grunde liegt, und seine überraschende Eigenschaft, das allgemeine Integral $\int f(x)\,dx$ in aller Strenge mechanisch darzustellen, was selbst die Mathematik in unendlich vielen Fällen nur näherungsweise vermag, wird gewiss den Beifall des mathematischen Publikums erhalten.

§. 61.

Hansen's Aenderungen und Verbesserungen an dem Oppikofer-Wetli'schen Instrumente, wobei sich durch wissenschaftliche Darlegungen der polytechnische Verein und Professor Bauernfeind in München Verdienste erworben haben.

Es sind nun über 30 Jahre verflossen, seitdem Oppikofer den Planimeter erfunden hat, gleichwohl ist das Instrument so wenig zur Anwendung gekommen, dass man in Beziehung auf

die Masse der im Leben vorkommenden Flächenberechnungen sagen kann, der Planimeter ist fast noch gar nicht in Anwendung.

Deshalb kann es zu den Verdiensten um die Sache gerechnet werden, wenn, nachdem pp. Stampfer die Bahn gebrochen hat, auch andere Männer vermöge ihrer amtlichen Stellung die Einführung des Instrumentes fördern. Dahin gehört Hofrath Hansen in Gotha, der auch Verbesserungen des Wetli'schen Planimeters gemacht hat.

Ein anerkennenswerthes Verdienst um die Verbreitung des Gebrauchs des Instrumentes hat sich auch Prof. Dr. Bauernfeind in München dadurch erworben, dass er seine geschichtliche und theoretische Abhandlung über den Planimeter aus der Zeitschrift des polytechnischen Vereins für Baiern in eine besondere Broschüre hat drucken lassen. Darin ist die Zeichnung des Tab. XIV. Fig. 92. ersichtlichen Wetli-Hansen'schen Planimeters nebst Beschreibung gegeben. Danach ist AA_IA_{II} die Grundplatte, welche theilweis ausgefenstert ist. Sie kann mittels der drei Fussschrauben BBB horizontal gestellt werden. Die Fussschrauben stehen auf Holzfüssen cc. Die Platte A ist 30^{cm} lang, 10^{cm} bezüglich 15^{cm} breit, 1,2^{cm} dick. In die Seite AA der Grundplatte ist die Nuth aaa eingerissen und die obere Fläche der Platte ist genau eben gerichtet.

Die mit 6 Fenstern versehene, 0,8^{cm} dicke Platte D trägt 6 Laufrollen EEE_I, $E_{II}E_{II}E_{III}$ und mittels des Verbindungsstückes H und der Feder FFF_I drei Druckrollen eee_I. Die Rollen EE laufen mit keilförmigen Kränzen auf den scharfen Kanten der Nuth aaa, die Rolle E_I läuft mit cylinderförmigem Umfang auf der Ebene A_{II}. Auf diesen 3 Rollen kann die Platte D in der Richtung der Nuth aaa rück- und vorwärts geschoben werden. Der 42^{cm} lange und 0,7^{cm} dicke Schieber GGG_I ruht mit den Rändern einer Nuth, welche der mit aaa bezeichneten ähnlich ist, auf den keilförmigen Rändern der Rollen $E_{II}E_{II}$ und mit einer ebenen Bahn auf der Rolle E_{III}, so dass man diesen Schieber auf diesen Rollen in der Richtung seiner Länge vor- und rückwärts schieben kann. Die Druckrollen eee_I halten ihn in sanfter Pressung auf den Rollen $E_{II}E_{II}$ und E_{III}. An den Theilen kk_I ist ein Silberdraht ausgespannt, welcher die Stärke der Drahtnummer 25 haben soll. Auf der Platte D steht eine

hohle Säule, in dieser dreht sich die Axe der Scheibe *S*, welche 10,5^{cm} Durchmesser und 3^{mm} Dicke hat, mit der Trommel *T*, welche 20,34^{mm} Durchmesser hat. Um die Trommel *T* ist der Silberdraht einmal geschlungen. Schiebt man den Schieber *G* und somit den Draht, dann dreht sich die Trommel mit der Scheibe *S* um ihre Axe. Auf die Scheibe ist Papier aufgeklebt.

Auf die Platte *A* sind die Träger *QQ* befestigt. Zwischen den Schraubenspitzen dd_I ist die Axe *U*, woran die Rahmenstücke *uuu* befestigt sind, gehalten. An der Axe *U* ist auch der Arm befestigt, welcher das Gewicht *g* trägt, mittels welchem man den Rahmen *uuu* balanciren kann. Dieser Rahmen kann mittels des Hebels *h* und des Schräubchens *l* gehoben und gesenkt werden. In diesem Rahmen liegt die Welle *w* mit dem Rädchen *R*. Dreht sich die Scheibe *S*, so setzt sie das Rädchen *R* mittels Reibung in drehende Bewegung. An der einen Seite der Welle befindet sich das Zifferblatt mit Zählerwerk und Zeiger, an der andern Seite läuft die Axe der Welle in einem Lager von der Form Λ. Mittels der Schräubchen *c* und c_I kann die Welle *w* so fixirt werden, dass sie in ihren Lagern keine Bewegung nach ihrer Längenrichtung machen kann. Das am unteren Rande des Zifferblattes angeschraubte Stück *p* ist der Träger der Schraube c_I. Die Stücken *L, M, O, P* stellen den an *G* befestigten Führungsapparat vor. *P* ist ein eingefasstes Gläschen mit einem in der Mitte eingerissenen kleinen Ring, dessen Mitte man über die Umfangslinien der zu messenden Figur am Hebel *O* führt. *Z* ist eine Lupe, um sie als Vergrösserungsglas bei der Arbeit zu gebrauchen.

Das, was Prof. Stampfer über die Theorie des Instrumentes gesagt hat, wiederholt Prof. Bauernfeind unter einigen Modificationen der Rechnungsoperation, fügt aber noch eine Formel für die Grösse des Halbmessers des Rädchens bei, die in dem Fall, dass die Richtung *x* gegen die Richtung *y* rechtwinklig steht, und die Axe *w* des Rädchens parallel zur Nuth *aaa* liegt, mit der von uns im §. 15 gefundenen übereinstimmt, in dem Falle aber, dass *x* gegen *y* und die Axe *w* gegen *aaa* schiefwinklig stehen, mit den von uns in den §§. 24—30 gefundenen nicht übereintrifft, was seinen Grund darin hat, dass Prof. Bauernfeind ebensowenig wie Prof. Stampfer die Resultate dieser Stellungen der Axe erschöpfend verfolgt hat.

Prof. Bauernfeind hat mit dem Instrumente verschiedene Messungen vorgenommen und hat diese Messungen in verschiedenen Fällen bis auf $\frac{1}{1430}$, $\frac{1}{4226}$, $\frac{1}{7647}$, $\frac{1}{9545}$, $\frac{1}{13113}$, $\frac{1}{\infty}$ genau gefunden.

Hinsichtlich der Zeitersparniss, welche man durch Anwendung dieses Instrumentes macht, hat pp. Bauernfeind dargelegt, dass eine Anzahl einzelner Flächen, deren Berechnung 4 Stunden 33 Minuten erforderte, mit dem Instrumente in 20 Minuten gemessen wurden, dass die Berechnung der Totalfläche aller dieser Parcellen 2 Stunden 40 Minuten erforderte, während die Messung mit dem Instrumente in 3 Minuten ausgeführt wurde, dass man also die Parcellenmessung in $\frac{1}{14}$ und die Totalmessung in $\frac{1}{53}$ der zur Berechnung erforderlichen Zeit ausführte.

Er deutet, wie theilweis auch schon Prof. Stampfer gethan hat, an, dass das Instrument seine Anwendung für Flächenberechnungen in der Landvermessung, im Bauwesen und in der Physik und zwar bei Letzterer zur Messung der von Autographen an Beobachtungsinstrumenten beschriebenen Flächen findet.

Die Planimeter von Ernst, Wetli und Hansen, von Prof. Dr. C. M. Bauernfeind. Mit 1 Tafel Abbildungen. München 1853. Joh. Palm's Hofbuchhandlung.

§. 62.

Hansen's elementare analytische Theorie, anschliessend an den Gang des höhern Calcüls.

In einem Anhange zu dieser Broschüre wird noch folgender vom Hofrath Hansen gegebene elementare, aber nur für gewisse Fälle gültige, Beweis des Satzes mitgetheilt, dass die Fläche irgend einer gegebenen Figur durch den Planimeter bestimmt wird, wenn man deren Umfangslinie mit dem Führer des Instrumentes umfährt. Dieser Beweis setzt aber voraus, dass man sich von dem Satze überzeugt habe:

dass der Planimeter die Fläche eines Parallelogramms, dessen Seiten den Bewegungen der beiden Schlitten parallel sind, giebt, wenn man dasselbe rechtsläufig umfährt;

und diese Ueberzeugung erlangt man durch folgende Betrachtung:

Stellt *abcd* Tab. XIV. Fig. 93 ein Parallelogramm vor, dessen Seiten den Schlittenbewegungen parallel sind,

bezeichnet

x die Länge der dem Drahte und der Richtung des Schiebers G parallelen Seite ab,

y die der Bewegung des Schlittens D parallele Seite ad,

α den Winkel der Seiten ab, ad und der Bewegungsrichtungen,

r_0 den Abstand des Berührungspunktes des Rädchens R vom Mittelpunkt der Drehscheibe S, wenn der Führer auf a steht,

r den Halbmesser der Trommel T vom Centrum bis in die Mitte der Drahtdicke,

r_I den Halbmesser des Rädchens R,

φ den Drehungswinkel der Trommel und Scheibe im Bogenmaass,

v den Drehungswinkel des Rädchens in demselben Maasse,

so wird, wenn der Führer von a aus in b angekommen ist $x = r\varphi$, und da sich während dieser Bewegung der Abstand r_0 nicht ändert, $r_0\varphi = r_I v$ oder, was dasselbe ist, so wird sein

$$r_0 x = r r_I v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I.)$$

Geht der Führer von b nach c, so erfolgt keine Abwickelung des Drahtes, folglich auch keine Drehung der beiden Scheiben, aber es ändert sich der Abstand r_0 in $r_0 \mp y$ um. In c ist die Ablesung der in b gleich. Bewegt man jetzt den Führer von c nach d, so entsteht eine der vorigen entgegengesetzte aber gleiche Drehung der grossen Scheibe, welche durch

$$-x = -r\varphi$$

ausgedrückt ist; und auf dem Rädchen wickelt sich ein Bogen von der Länge $(r_0 \mp y)\varphi = r_I v_I$ ab, welcher der Lage nach dem vorigen $r_I v$ entgegengesetzt ist. Es ergiebt sich somit die zweite Gleichung

$$-(r_0 \mp y)x = -r r_I v_I. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II.)$$

Fährt man schliesslich von d nach a, so erfolgt wie von b nach c keine Drehung, der Abstand $r_0 \mp y$ wird jedoch wie im Anfange $= r_0$. Die Ablesung in a ist der in d gleich und entspricht dem Bogenunterschiede $v - v_I$. Dieser Unterschied zeigt aber die Fläche des Parallelogramms $abcd$ an; denn man hat

$$r_0 x + [-(r_0 \mp y)x] = r r_I v + [-r r_I v_I] = \mp yx$$
$$= r r_I (v - v_I). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (III.)$$

und wenn man diese Gleichung mit $\sin\alpha$ multiplicirt,

$$\mp yx \sin\alpha = r r_I (v - v_I) \sin\alpha \quad . \quad . \quad . \quad (IV.)$$

Es ist aber $yx \sin\alpha$ der Flächenraum von $abcd$ und $r r_I \sin\alpha$

eine constante Grösse; folglich jener Flächenraum der algebraischen Summe der Drehungen v und v_1 des Rädchens R proportional, was zu beweisen war.

Sind die Bewegungen der beiden Schieber D und G rechtwinklig, folglich der $\angle \alpha = 90^0$ und $\sin \alpha = 1$, so nimmt die Gleichung (IV.) den Ausdruck der Gleichung (III.) an und $y.x$ stellt jetzt ein Rechteck vor.

§. 63.

Erfindung Joh. Martin Hermann's.

Dingler's polytechnisches *Journal* Bd. CXXXVII. S. 81 u. f. giebt folgende interessante Notizen zur Geschichte der Planimeter:

Im Juni des Jahres 1855 erhielt Herr Baurath und Professor Bauernfeind vom Bezirksgeometer Kunig in Straubing mehre Bruchstücke von alten Manuscripten und Zeichnungen, welche in Verbindung mit einer Entschliessung der Königl. Baierischen Katastercommission in München den vollständigen Beweis liefern, dass der Königl. Baiersche Trigonometer Johann Martin Hermann schon im Jahre 1814 den Grundgedanken zu einem, dem Oppikofer'schen Planimeter ähnlichen Instrumente gehabt und dem Herrn Steuerrath Lämmle mitgetheilt hatte. Letzterer verfolgte gemeinschaftlich mit Hermann die Erfindung weiter, es wurden Mittheilungen darüber an den Mechaniker Sammet, an den Geodäten Joseph Miller, den Salinenrath v. Reichenbach, den Astronomen Soldner, die k. b. Katastercommission zu München gemacht und Modelle angefertigt.

In einem Concepte mit der Ueberschrift: „Beschreibung einer Maschine zum Abnehmen des Flächeninhaltes aller geometrischen Figuren durch blosses Herumführen eines Stiftes auf ihren Gränzlinien", drückt sich J. M. Hermann wie folgt aus:

Der Flächeninhalt zweier Dreiecke oder Parallelogramme, welche eine und dieselbe Grundlinie haben, steht im geraden Verhältnisse zu ihren Höhen. Denkt man sich nun einen Kreis, dessen Peripherie gleich einer solchen gemeinschaftlichen Grundlinie ist, und diesen Kreis mit etwas Anderem so in Verbindung, dass, wenn man mit Letzterem längs dieser Linie hinfährt, er sich gerade einmal um seine Achse dreht, wenn die Höhe der Figur $= 1$ ist; denkt man sich ferner, dass, wenn die Höhe der

Figur = 2 ist, sich der Kreis vermittelst seiner Verbindung, während längs der Grundlinie hingefahren wird, zweimal um seine Achse drehe; denkt man sich endlich, dass die Revolutionen des Kreises, wie die Zahlen der Höhen zunehmen, und würde die Zahl dieser Revolutionen an irgend etwas bemerkt werden können, so hätte man mit einem so verbundenen Kreise eine Art mechanischen Flächenmessers. Wollte man nun ohne Zahlenrechnung den Inhalt geometrischer Figuren durch eine Maschine finden, so dürfte blos die Art aufgesucht werden, wie die Kreisrevolutionen in dem obigen Verhältnisse bewirkt werden könnten, und die Maschine wäre erfunden.

So dachte ich im Herbste des Jahres 1814 und kam nach angestrengtem Nachdenken auf folgende Idee:

Der vorgenannte Kreis ist ein ungezahntes Rädchen, das sich an einer Welle um seine Axe drehen lässt. Dieses Rädchen wird mittels einer Feder mit seinem Rande an eine Seitenlinie eines Kegels angedrückt, welche Seitenlinie des Kegels aber parallel mit der Welle des Rädchens sein muss. Der Kegel ist um seine Achse drehbar und setzt, wenn er gedreht wird, das an ihn gedrückte Rädchen ebenfalls um seine Achse in Bewegung, und er wird während der Bewegung von dem Rädchen in einem Kreise auf seiner Seitenfläche berührt, dessen Ebene parallel mit der Ebene seiner Basis ist. Gesetzt nun, das Rädchen berühre den Kegel an jener Stelle, wo der Kreis, den es auf seiner Oberfläche beschreibt, ebenso gross ist, als das Rädchen selbst, so wird zu einem ganzen Umlauf des Rädchens auch ein ganzer Umlauf des Kegels erfordert; rücke ich aber das Rädchen noch einmal so weit von der Spitze des Kegels gegen seine Basis, so wird es dort, wenn der Kegel einmal um seine Achse bewegt worden ist, sich in dieser Zeit zweimal um die seinige bewegt haben, weil die Peripherie des Kegels jetzt doppelt so lang ist als die des Rädchens.

Es habe jetzt der Kegel auf seiner Basis einen concentrischen Cylinder, dessen Durchmesser gleich dem Durchmesser des Rädchens ist, befestigt, welcher, wenn der Kegel um seine Achse gedreht wird, an einem geraden Lineale sich fortrollt; die Welle des Rädchens behalte während des Fortrollens des Kegels immer dieselbe Lage gegen des letzteren Achse, und könne längs der Seite des Kegels mittels eines Keils hin- und hergelassen wer-

den; ferner sei irgend eine Vorrichtung angebracht, welche die ganzen Umläufe des Rädchens sowohl als die Theile des Umlaufs anzeige: so wird diese Vorrichtung die Verhältnisse des Flächeninhaltes aller auf einer und derselben Grundlinie stehenden Rechtecke anzugeben im Stande sein."

Es ist keinem Zweifel unterworfen, dass die so eben von Hermann beschriebene Maschine der Oppikofer-Ernst'schen fast gleich ist und dass somit Hermann früherer, Oppikofer späterer Erfinder eines und desselben Planimeters waren. Würde nachgewiesen werden können, dass die Hermann'sche Idee dem Oppikofer, der 1826 als Erfinder auftrat, auf irgend einem Wege mitgetheilt worden wäre, so wäre Hermann der einzige Erfinder.

§. 64.

Dr. Barfuss' Besprechung des schon vom Professor Bauernfeind Gegebenen.

In dem Handbuche der höheren und niederen Messkunde von Dr. Fr. W. Barfuss, 3. Aufl. Weimar 1854 bei Vogt, ist Seite 375—391 nach Bauernfeind's Zeichnungen und Beschreibungen der Wetli-Hansen'sche Planimeter dargestellt. Die mittels der Differential- und Integralrechnung gegebenen Formeln stimmen im Resultate mit den von Prof. Stampfer und Prof. Bauernfeind gegebenen überein.

§. 65.

Keller und Fichtebauer.

Professor Bauernfeind erwähnt an der citirten Stelle S. 87 auch noch, dass Keller in Rom und Fichtebauer in Fürth Planimeter construirt hätten. Das Princip und die Einrichtung der so eben erwähnten Planimeter ist uns jedoch nicht bekannt geworden; deshalb können wir keine Mittheilung davon machen.

§. 66.

John Sang's Planimeter.

Im Civil Enginer and Architect's Journal, Sept. 1851. S. 505*) ist der Planimeter des John Sang beschrieben und bildlich dar-

*) übersetzt in Dingler's polytechnischem Journal Bd. CXXII. S. 420—422.

gestellt. Diese Darstellung giebt unsere Tab. XIV. Fig. 94 wieder. Es ist Folgendes darüber gesagt:

Das Instrument eignet sich zum Gebrauch für Geometer, Ingenieure, ferner für solche, welche die physische Geographie, die Geologie und Statistik zum Gegenstand ihres Studiums machen.

Die Platte *D* ist theilweis durchbrochen. Darauf lagert in den Zapfen *yy* die Welle *ww*. An beiden Enden der Welle befinden sich die Rollen AA_I, welche durch die Platte *D* gehen und auf dem Tische, auf welchen man den Apparat setzt, rollen. Die Welle *w* trägt mit den Zapfen *yy* die Platte *D*, so dass, wenn die Rollen *AA* laufen, die Platte *D* mitgenommen wird ohne auf dem Tische aufzustreichen. Auf der Welle *w* befindet sich auch noch der Kegel *cc*, welcher mit der Welle rotirt. Beide Kanten von *D* sind prismatisch geformt, auf den beiden Prismen laufen die Rollen *BBBB*, welche mit entsprechender Nuth versehen und an das Gestell *dddd* angebracht sind. Die Platte *D* trägt durch die Rollen *B* das Gestell *d*. Wenn man mittels der Handhabe *H* den Stift *P* fortführt, so nimmt dieser das Gestell *d* und dieses die Platte *D* und diese die Rollen *A* mit dem Kegel *c* mit. Wenn man eine Flächenzeichnung auf den Tisch legt und darauf das Instrument setzt, so kann man mit *P* alle Umrisse der Flächenzeichnung überfahren, weil man eines Theils *P* parallel mit *yy* und andern Theils in der, rechtwinklig gegen *yy* gerichteten Richtung des Laufs der cylindrischen Rollen *A* bewegen kann. In dem Gestelle *d* ist zwischen 2 Spitzen der Rahmen *mmmm* mit dem Gewichte *G* angebracht. Zwischen den Armen *mm*, *mm* dieses Rahmens steht in Spitzen das getheilte Rädchen *J*. Ferner ruht zwischen 2 Spitzen im Rahmen *m* der Rahmen *hh*. Zwischen den Armen des Rahmens *h* liegt in Spitzen das getheilte Rädchen *k*. *L* ist eine Lupe, um mit ihr die Theilung und die daran angebrachten Nonien zu betrachten. Das Rädchen *J* ruht vermöge der Schwere des Gewichtes *G* auf dem Kegel, so dass es sich dreht, wenn sich der Kegel dreht. Das Rädchen *k* aber ruht nicht auf dem Kegel, sondern auf der Welle des Rädchens *J*. Dreht sich nun diese Welle, so setzt sie mittels Reibung das Rädchen *k* in langsame Umdrehung, wenn sich das Rädchen *J* 5mal umgedreht hat, so hat sich das Rädchen *k* erst einmal umgedreht. Der Theilkreis *k* giebt ganze Quadratzolle bis zur Zahl 100 an, der Theilkreis *J* aber giebt

bis zu 20 Quadratzollen die Flächen an, jeder Zoll ist an dem Rädchen J in $\frac{1}{10}$ getheilt und mittels des Nonius kann man $\frac{1}{100}$ ablesen.

Wenn man das Instrument gebraucht, so stellt man die Theilkreise auf 0 und überfährt den Umriss der Flächenzeichnung mit dem Führstifte, dann liest man die Grösse der Fläche an den Theilkreisen ab. Der Theilkreis k giebt die ganzen Quadratzolle und der Theilkreis J die Bruchtheile an. Das Instrument misst jede Figur, deren Dimensionen $4\frac{1}{2}$ Zoll in der Breite und 22 Zoll in der Länge nicht übersteigen.

Die rotirende Bewegung der Theilkreise ist proportional der Auf- und Niederbewegung des Ziehstiftes auf dem Papier multiplicirt mit dem rechten und linken Abstande des Kreises von der Spitze des Kegels. Wenn daher der Ziehstift den vollständigen Umfang der Figur beschreibt, so stellt die Rotation des Theilkreises die algebraische Summe der Producte der Ordinaten sämmtlicher Punkte im Umfange multiplicirt mit dem Zuwachs ihrer Coordinaten (Abscissen) d. h. den Flächeninhalt des eingeschlossenen Raums dar.

Vorliegendes Instrument ist das erste, welches aus den Händen des Erfinders hervorgegangen ist, dennoch verrichtet es seine Arbeit sehr genau, obwohl der Flächeninhalt eines Dreiecks und Vierecks durch gewöhnliche Messung und Berechnung ein wenig genauer, als durch das Instrument gegeben wird. Unregelmässige und krummlinige Figuren kann man aber mittels des Instrumentes genauer als mittels gewöhnlichen Messens und Berechnens ausmessen.

Wir unseres Theils müssen an der Brauchbarkeit dieses Instrumentes zweifeln, indem die grossen Laufrollen schwerlich Stand gegen den Seitendruck halten, welcher durch den Führstift ausgeübt wird.

§. 67.

Amsler's Polarplanimeter.

Professor Jacob Amsler in Schaffhausen hat in neuester Zeit einen Polarplanimeter construirt, worüber Beschreibung und Zeichnung mit Erklärung und Beweis in Dingler's polytechnischem Journal Bd. CXL. Seite 322 u. f., auch bei Bock und Sohn zu Schaffhausen 1856 eine Broschüre erschienen ist. Darin ist

die Theorie des Instrumentes mit Hülfe des höheren Calcüls gegeben. Das Lesen der Schrift ist zu empfehlen. Herr Prof. Amsler und Decher sind über den Gegenstand in Streit gerathen. Wer dessen Inhalt wissen will, hat in Dingler's polyt. Journal die Aufsätze Bd. CXL. S. 32 f., S. 321 f., Bd. CXLI. S. 29 f., S. 326 f., S. 330 f. nachzulesen.

Die Theorie des Amsler'schen Planimeters geben wir eben so, wie die des Oppikofer'schen in elementarer Weise. Ehe wir sie geben, wollen wir erst den *Planimeter beschreiben.*

In Fig. 95. Tab. XV. hat der Arm ck bei Punkt c eine dünne Spitze, welche in die Ebene der Flächenzeichnung eingestochen wird. Um diese Spitze kann sich der Arm ck wie ein Radius um das Centrum c drehen Bei Punkt k ist ein Hebel b_Ig so angebracht, dass sich dieser Hebel in seiner Mitte um den Punkt k drehen kann, es bilden dann die beiden Hälften des Hebels b_Ig zwei Radien kb_I und kg. Bei Punkt b_I befindet sich der Führstift F, bei Punkt g ein Laufrädchen, woran sich eine Theilung und eine Vorrichtung befindet, mittels deren man die Grösse der Umdrehung des Laufrädchens ablesen kann. Alle drei Hebelarme oder Radien ck, b_Ik, gk liegen horizontal und parallel zur Zeichnungsebene und ruhen auf der Spitze c, auf dem Führstift F bei b_I und auf dem Laufrädchen bei g. Führt man nun F auf der Umfangslinie einer Flächenzeichnung fort, so drehen sich während dessen die Hebelarme ck und b_Ig um ihre Drehpunkte c und k, das Laufrädchen aber läuft abwechselnd bald vor, bald rückwärts. Das Product aus der am Rädchen abgelesenen positiven Drehungsgrösse in die Länge des Hebels b_Ig ist der Ausdruck für die Grösse der mit F umfahrenen Fläche, wenn $\backslash ck = \backslash b_Ik = \backslash gk$ ist.

Dass diese Angabe und Rechnung richtig ist, ergiebt sich aus Folgendem:

In Fig. 96 ist $\backslash ck$ der eine, $\backslash b_Ig$ der andere Hebel und die $\backslash de_I$, $\backslash ed_I$, $\backslash bg_I$ und $\backslash ch$ deuten verschiedene Lagen des Hebels b_Ig an, ck_I ist eine veränderte Lage des Hebels ck.

Würde man mit F die Fläche $e_Ib_Id_Ig_Ie_I$ umfahren, so würde das Rädchen auf den Linien $dgebd$ fortgerollt bezüglich fortgeschleift. Würde man umgekehrt mit F die Fläche $dgebd$ umfahren, so würde das Rädchen auf den Linien $e_Ib_Id_Ig_Ie_I$ fortgerollt, bezüglich fortgeschleift.

Ist $\backslash cb_I = \backslash cd_I$, $\backslash ca_I = \backslash cm_I = \backslash ce_I = \backslash cg_I$ und $\angle g_I ce_I = \angle m_I ca_I$, folglich $\smile g_I m_I = \smile e_I a_I$ und $\backslash a_I b_I = \backslash m_I d_I$, und ist $\smile e_I b_I = \smile g_I d_I$, folglich $\Delta m_I d_I g_I = \Delta a_I b_I e_I$, so ist $\square a_I b_I d_I g_I - \Delta m_I d_I g_I = \square a_I b_I d_I m_I$ und $\square a_I b_I d_I g_I - \Delta a_I b_I e_I = \square e_I b_I d_I g_I$ und somit $\square e_I b_I d_I g_I = \square a_I b_I d_I m_I$. Aus denselben Gründen ist auch $\square ebdg = \square abdm$.

Es ist nun aber $\square a_I b_I d_I m_I = \bigtriangledown cb_I d_I - \bigtriangledown ca_I m_I$ und es ist $\bigtriangledown cb_I d_I = (\backslash cb_I)^2 \varphi$ *) und $\bigtriangledown ca_I m_I = (\backslash ca_I)^2 \varphi$, also

$$\square a_I b_I d_I m_I = (\backslash cb_I)^2 \varphi - (ca_I)^2 \varphi$$
$$= \varphi [(\backslash cb_I)^2 - (\backslash ca_I)^2].$$

Ferner ist jedoch, wenn man $\backslash bg_I$, $\backslash e_I d$, $\backslash gb_I$, $\backslash d_I e = r$ setzt, $\backslash cb_I = r . \sin\beta$ und $\backslash ca_I = \backslash ce_I = r . \sin\beta_I$, also

$$\varphi [(\backslash cb_I)^2 - (\backslash ca_I)^2] = \varphi [(r^2 . \sin^2\beta) - (r^2 . \sin^2\beta_I)]$$
$$= r^2 \varphi (\sin^2\beta - \sin^2\beta_I).$$

Da aber $\sin^2\beta = r^2 - \cos^2\beta$ und $\sin^2\beta_I = r^2 - \cos^2\beta_I$, so ist

$$\sin^2\beta - \sin^2\beta_I = r^2 - \cos^2\beta - (r^2 - \cos^2\beta_I)$$
$$= r^2 - \cos^2\beta - r^2 + \cos^2\beta_I$$
$$= \cos^2\beta_I - \cos^2\beta,$$

also $r^2\varphi(\sin^2\beta - \sin^2\beta_I) = \square a_I b_I d_I m_I = \square e_I b_I d_I g_I$
$= r^2\varphi(\cos^2\beta_I - \cos^2\beta)$.

Den Ausdruck $r^2\varphi(\cos^2\beta_I - \cos^2\beta)$ findet man auch in folgender Weise: Es ist nämlich $\backslash cd = \backslash ch . \cos\beta_I = r . \cos\beta_I$ und $\smile db = r . \cos\beta_I \varphi$, folglich $\bigtriangledown cdb = (r . \cos\beta_I)^2 \varphi = r^2\varphi . \cos^2\beta_I$ und $\backslash ca = \backslash cm = \backslash cg = \backslash ch . \cos\beta = r . \cos\beta$ und $\smile ma = r . \cos\beta . \varphi$, folglich $\bigtriangledown cma = (r . \cos\beta)^2 \varphi = r^2\varphi . \cos^2\beta$, also $\bigtriangledown cdb - \bigtriangledown cma = \square abdm = r^2\varphi . \cos^2\beta_I - r^2\varphi\cos^2\beta = r^2\varphi(\cos^2\beta_I - \cos^2\beta)$.

Es ist somit

$$r^2\varphi(\cos^2\beta_I - \cos^2\beta) = \square a_I b_I d_I m_I = \square abdm$$
$$= \square e_I b_I d_I g_I \text{ und } = \square ebdg.$$

Es ist $\smile db_2 = r\cos\beta_I . \angle\beta_I$ wie seine Tangente $dh = r . \cos\beta_I \operatorname{tg}\beta_I$. Indem aber die Ebene des Rädchens, dessen Axe $\backslash kd$ ist, im Punkte d die Richtung dq hat, die treibende Kraft dh des treibenden Radius cd aber auf $\backslash dk$ und $\backslash dq$ wirkt, so

---

*) Eigentlich müsste man sagen: $\bigtriangledown cb_I d_I = (\backslash cb_I)^2 \varphi\pi$. Da aber π constant ist und es sich nur um Proportionalitäten handelt, so kann man π unbeachtet lassen.

zerfällt die virtuelle Geschwindigkeit des Punktes d in die zwei Grössen hq und dq, und indem ferner $\backslash dq$ die Grösse des Rollens des Rädchens und $\backslash hq$ die Grösse des blossen Schleifens (ohne Rollung) des Rädchens repräsentiren, aber $\backslash dq = \backslash dh.\cos\beta_I = r.\cos\beta_I \operatorname{tg}\beta_I \cos\beta_I = r.\cos^2\beta_I \operatorname{tg}\beta_I$ ist, so läuft die Peripherie des Rädchens nicht den ganzen Bogen $r.\cos\beta_I.\angle\beta_I$, sondern nur einen verhältnissmässigen Theil ($= x$) davon ab. Wir haben dafür folgende Proportion

$$r.\cos\beta_I \operatorname{tg}\beta_I : r.\cos^2\beta_I \operatorname{tg}\beta_I = r\cos\beta_I \angle\beta_I : x;$$

$$x = \frac{r^2\cos^3\beta_I \operatorname{tg}\beta_I \angle\beta_I}{r\cos\beta_I \operatorname{tg}\beta_I} = r\cos^2\beta_I \angle\beta_I.$$

Dieser Werth von $x = r\cos^2\beta_I\angle\beta_I$ ist eine Bogenlänge, welche das Rädchen mit seiner Peripherie abläuft, und $r\cos^2\beta_I$ ist der Werth des zugehörigen Radius, nämlich desjenigen Radius, welcher vorhanden sein müsste, wenn der Bogen $r.\cos^2\beta_I\angle\beta_I$ concentrisch mit Bogen $r.\cos\beta_I\angle\beta_I$ läge, so dass das Rädchen auf jenem Bogen $r\cos^2\beta_I\angle\beta_I$ abrollte. Man kann daher im Werthe $r\cos^2\beta_I\angle\beta_I$, weil $r\cos^2\beta_I$ als ein Radius anzusehen ist, für $\angle\beta_I$ auch einen anderen Winkel, z. B. $\angle\varphi$ substituiren. In diesem Falle wäre der Werth der Kreisbogenlänge $= r\cos^2\beta_I\varphi$.

In gleicher Weise entwickelt sich für den Radius $r\cos^2\beta$ und $\angle\varphi$ die Bogenlänge $r\cos^2\beta\varphi$. Nimmt man letztere Bogenlänge als rückläufig an, so ist sie $-r\cos^2\beta.\varphi$. Man hat dann überhaupt an positiver und negativer Bogenlänge

$$r\cos^2\beta_I\varphi - r\cos^2\beta\varphi = r\varphi(\cos^2\beta_I - \cos^2\beta).$$

Es ist $r^2\varphi(\cos^2\beta_I - \cos^2\beta)$ der Werthsausdruck der Fläche $e_Ib_Id_Ig_I$, welche wir mit f bezeichnen wollen. Nimmt man nun statt $\angle\varphi$ einen anderen Winkel z. B. $\angle 2.\varphi$, so würde der Ausdruck $2.r^2\varphi(\cos^2\beta_I - \cos^2\beta)$ der Werth einer anderen Fläche sein, welche wir mit F bezeichnen wollen. Es ist alsdann

$$\begin{aligned} f:F &= r^2\varphi(\cos^2\beta_I - \cos^2\beta) : 2r^2\varphi(\cos^2\beta_I - \cos^2\beta) \\ &= r\varphi(\cos^2\beta_I - \cos^2\beta) : 2r\varphi(\cos^2\beta_I - \cos^2\beta) \\ &= r^2\varphi : 2r^2\varphi = r\varphi : 2r\varphi \end{aligned}$$

d. h. mit anderen Worten, es verhalten sich

n Flächeneinheiten : $2n$ Flächeneinheiten
$= n$ Linieneinheiten : $2n$ Linieneinheiten,

und hiernach giebt das Amsler'sche Instrument ebenso, wie das Oppikofer'sche, ebenso viel Linieneinheiten an, als Flächeneinheiten vorhanden sind. Wir haben, um einen elementaren Beweis für die Richtigkeit der Resultate des Amsler'schen Planimeters zu liefern, die Umfangslinien der zu messenden Fläche aus Kreisbogenstücken gebildet. Es lässt sich ebenso, wie für den Planimeter nach Oppikofer's Princip, die Gültigkeit obiger Gleichung auch für die Fälle nachweisen, in welchen die Umfangslinien der zu messenden Flächen gerade Linien oder andere, als Kreisbogen sind, allein ein solcher Nachweis ist nicht unsere Aufgabe, da wir des Instrumentes nur geschichtlich gedenken wollten.

Das Amsler'sche Instrument ist dadurch unsicher, dass das Rädchen auf der unegalen Zeichnungsebene abrollt, während es auf einer eigens dazu präparirten Ebene abrollen sollte, wie nach Wetli's Princip.

Beim Instrumente nach Oppikofer's Princip zeigt ein langer Zeiger an einem grossen Zifferblatte die Flächengrössen in grossen Theilintervallen, am Amsler'schen Instrumente soll die Peripherie des nur 9‴ im Durchmesser haltenden Laufrädchens zum Gebrauch für Geometer in 200 Theile getheilt und davon sollen mittels eines Nonius noch Zehntel, also Zweitausendstel abgelesen werden, was ohne Lupe nicht möglich und in allen Fällen durch Theilfehler, Sehfehler und Zeitverlust erschwert ist. Dazu kömmt, dass das Rädchen am Amsler'schen Instrumente bald da, bald dort, abwechselnd in einem für das Ablesen ungünstigen Lichte steht.

Beim Planimeter nach Oppikofer geschieht die Führung des Führstiftes nach allen Richtungen mit einer sich gleich bleibenden Leichtigkeit, am Amsler'schen Instrumente nehmen die Hebelarme verschiedenartige, theilweis sehr ungünstige Stellungen ein, so dass das Führen des Führstiftes bald leichter, bald schwerer ist. Ferner kann man mit der Spitze des Führstiftes nicht diejenige Präcision erreichen, welche der in Glas eingeschliffene Führpunkt gewährt. Auch veranlasst das Einstecken und das Drehen der centrirenden Nadel durch Ausreiben des Loches, worin sich die Nadel dreht, Schwankungen und Fehler.

Mit dem Planimeter nach Oppikofer's Erfindung werden die Flächenzeichnungen nach parallel neben einander liegenden geradlinigen Regionen gemessen, mit Amsler's Planimeter hat man abgerundete Begrenzungen des Gebietes, welches man mit dem Instrumente beherrscht. Dadurch wird häufiger Fortstellung des Amsler'schen Planimeters nöthig, als bei dem nach Oppikofer's Princip construirten Instrumente.

Aus allen diesen Umständen ergiebt sich, dass der Amsler'sche Planimeter *hinsichtlich seiner praktischen Bedeutung* keine Vergleichung mit dem nach Oppikofer's Princip erbauten Planimeter aushält und für Geometer unbrauchbar ist, obgleich der Amsler'sche Gedanke neu, wissenschaftlich interessant ist und dem Erfinder Ehre macht. So angenehm auch die wissenschaftliche Unterhaltung mit dem Amsler'schen Princip ist, so darf man sich dadurch aber nicht verleiten lassen, in die Praxis der Feldmesskunst ein Instrument aufzunehmen, das einem vollkommneren weit nachsteht. Die *Wohlfeilheit* und *Einfachheit* des Amsler'schen Planimeters allein können nicht maassgebend sein, da die Vereinfachung der Maschinen überhaupt nie auf Kosten *ihrer sicheren Leistung* geschehen darf. Zu Messungen, wobei es auf grosse Genauigkeit nicht ankömmt, kann man das Instrument wegen seiner Einfachheit und Wohlfeilheit anwenden.

§. 68.

Decher's Polarplanimeter.

In Dingler's polytechnischem Journal Band 136. S. 168 f. f. hat Herr Prof. G. Decher die Beschreibung, Zeichnung und Berechnung eines von ihm erdachten Polarplanimeters gegeben. Er behauptet, dass der Wetli'sche und Hansen'sche Planimeter in Folge des Gebrauchs einen todten Gang erhalten würden und dass er deshalb zur Construction eines Polarplanimeters übergegangen sei. Da sich alle Drehpunkte und Schieber am Hansen'schen Instrumente dicht stellen lassen, wenn sie durch den Gebrauch locker oder wankend werden, so war das Decher'sche Bedenken grundlos. Wäre es aber gegründet gewesen, so wäre es dann auch gegen den Decher'schen Planimeter zu stellen, da letzterer zwei vertikale und vier horizontale Drehaxen und einen

Schieber hat. Wir verweisen auf die Beschreibungen und Zeichnungen im *Dingler'schen Journal*. *Für diejenigen*, welche der Gegenstand interessirt und welche dort Nachlese halten, bemerken wir Folgendes:

Prof. Decher befestigt sein Instrument in der Mitte einer kreisrunden geschliffenen Glastafel und legt diese auf die auszumessende Flächenzeichnung. Entweder muss diese Glastafel beträchtlich gross sein, was das Instrument zerbrechlich macht, oder es beschränkt eine kleine Glasfläche das Feld, über welches die Maschine herrscht. Die Glastafel soll durchsichtig, muss also polirt sein und ist nicht geeignet diejenige Reibung zu erzeugen, welche zur Umdrehung der darauf laufenden Rolle nöthig ist.

Wenn Prof. Decher bei Handhabung seines Planimeters in Fig. 97. Tab. XV. den Führstift f entlang der Linie ff' führt, so *soll die Rolle* R *auf der Glasscheibe die Linie* RR' mit ihrer Peripherie ablaufen. Dieses thut sie aber nicht. Im Punkte R' hat die Ebene der Rolle zur Linie RR' die Neigung des Winkels $aR'b$, im Punkte R aber die Neigung O. Nach dem Ergebniss unserer Untersuchungen über die Drehbewegungen des Laufrädchens wissen wir, dass, wenn r der Radius der Rolle ist, die Drehungsgrösse der Rolle in der Stellung R sich wie r, und in der Stellung R' wie $r.\cos\angle aR'b = r.\cos\angle R'cR$ verhält. Da sonach die Ebene der Rolle nicht in der Richtung der Linie RR' bleibt, so giebt ihre Umdrehung nicht die Länge dieser Linie an. Es gehen aus diesem Grunde in den Decher'schen Planimeter andere Linienlängen über, als wie sie in der Flächenzeichnung vorhanden sind, während es zum Oppikofer'schen Principe gehört, dass das Instrument die Längen der Umfangslinien der Flächenzeichnung in sich aufnimmt.

Prof. Decher setzt voraus, dass *stets die* von der Rolle R abgelaufene Linie proportional sei der Linie, entlang welcher der Führstift geht, dass in unserem Falle RR' proportional sei der Linie ff', Fig. 97. Tab. XV. Dieses ist jedoch nicht der Fall, weil beim Decher'schen Instrumente die radiale Differenz Rf und $R'f'$ constant, also RR' nicht parallel zu ff' ist und dadurch die Winkel $R'Rc$ und $f'fc$ different und variabel werden.

Der Draht am Wetli-Hansen'schen Instrumente sichert, weil er die Trommel umspannt, die richtige Drehung der Drehscheibe mehr, als der blosse Contact der Drehscheibe mit einer Rolle.

Prof. Decher lässt die Bewegung des ersten Zeigers, welcher wenigstens Zehntel einer Quadratruthe angeben muss, durch kleine Winkelräder übertragen. Durch den Spielraum in den Zähnen dieser Räder werden leichtlich Fehler von 10 Quadratruthen entstehen.

§. 69.

Bouniakovsky's Polarplanimeter.

Professor Decher hat die Güte gehabt, uns in Dingler's polytechnischem Journale Bd. CXL. S. 27 f. aus dem Bulletin physico-mathématique de l'Académie de St. Pétersbourg T. XIV. No. 10 folgende Mittheilung machen:

Bouniakovsky las am 22. Aug. 1855 in der Sitzung der Akademie zu Petersburg über einen von ihm erfundenen Planimeter und zeigte dabei zwei ausgeführte Exemplare desselben vor. Die Beschreibung davon ist folgende:

Denken wir uns, wie bei einem Pantographen, 4 gleich lange unbiegsame gerade Linien zu einem veränderlichen Rhombus *ABCD* Tab. XV. Fig. 98 verbunden, d. h. so, dass diese Geraden in ihren Verbindungspunkten um parallele, zur Ebene der Figur senkrechte Achsen beweglich sind, und dass die Drehungsachse in *C* vertical befestigt ist, so wird der gegenüberliegende Punkt *A* ohne Zwang der Begrenzungslinie irgend einer Figur in einer darunter liegenden horizontalen Ebene folgen können, und die Diagonale *CA* den veränderlichen Fahrstrahl eines Polarcoordinaten-Systems vorstellen, das seinen Pol in *C* hat. Auf den Rhombus *ABCD* stütze sich ferner ein zweites System, welches aus 3, ebenfalls gleich langen unbiegsamen Geraden, *CE*, *EF*, *EG*, gebildet ist, und zwar so, dass diese die vertikale Achse *E* gemeinschaftlich haben, dass der Endpunkt *C* von *EC* um die feste Achse *C* beweglich ist und die Endpunkte *F* und *G* der beiden anderen Geraden der Bedingung unterworfen sind, auf den Seiten *CD* und *CB* des Rhombus zu gleiten. Endlich sei mit diesen Geraden *EF* und *EG* die Achse *H* eines vertikal ste-

henden Kreises *aa* in der Weise verbunden, dass diese Achse bei jeder Veränderung des Rhombus mit der Verlängerung der Geraden *CE* oder mit der Diagonale des Rhombus zusammenfällt und die Ebene des Kreises durch die Punkte *F* und *G* geht, sein Mittelpunkt *H* also in dem Durchschnitt der Geraden *FG* und *CA* liegt; berührt nun dieser Kreis eine feste horizontale Ebene, so wird er sich offenbar auf derselben abwälzen, wenn sich *CA* um *C* dreht, aber in Bezug auf seine Achse unbewegt bleiben, wenn sich der Punkt *A* in einer durch den Pol *C* gehenden Geraden bewegt, und wenn der Punkt *A* den Umfang der Figur *AMN* oder *APQ* beschrieben hat, so ist der dieser Bewegung entsprechende Drehungswinkel des Kreises *aa* der Oberfläche der umschriebenen Figur proportional.

Um das Rädchen *aa* in der oben bemerkten Lage zu erhalten, nämlich so, dass seine Ebene durch die Punkte *F* und *G* geht und zu *CE* senkrecht ist, und dass seine Diagonale *CA* bleibt, beziehungsweise in einer durch *CA* gelegten verticalen Ebene, ist an dem Instrumente die Schiene *FG*, welche die Achse des Rädchens *aa* trägt, durch ein unveränderliches gleichschenkliges Dreieck *bcd* mit einem prismatischen Schieber *cf* verbunden, welcher auf *FG* senkrecht steht und in einem Schlitze der Schiene *CE* in der Richtung *CE* gleiten kann.

Hieran ist dann die Erklärung und der Beweis der Theorie des Instrumentes mit Hülfe des höheren Calculs geknüpft. Wir unseres Theils wollen aber diese Theorie wieder in elementarer Weise entwickeln:

Es sei Tab. XV. Fig. 99. $\backslash CB = \backslash BA = \backslash CB_I = \backslash B_I A_I$, dann ist

$$\backslash CA = \backslash CB \,.\, 2\cos\beta = R$$
$$\backslash CA_I = \backslash CB_I \,.\, 2\cos\beta_I = R_I.$$

Hiernach ist

$$\smile \mathfrak{A}A = R\varphi \quad \text{und} \quad \smile \mathfrak{A}_I A_I = R_I\varphi$$
$$\triangle \mathfrak{A}CA = R^2\varphi \quad \text{und} \quad \triangle \mathfrak{A}_I CA_I = R_I{}^2\varphi.$$

Es folgt hieraus, dass die Fläche

$$\mathfrak{A}AA_I\mathfrak{A}_I = R^2\varphi - R_I{}^2\varphi = \varphi(R^2 - R_I{}^2).$$

Für einen anderen Winkel, z. B. den $\angle 2.\varphi$, erhält man den Flächenwerth

$$2.\varphi(R^2 - R_I{}^2).$$

Andererseits sei

$$\backslash CE = \backslash EG = EG_I.$$

Unter dieser Voraussetzung ist

$$\backslash CG = \backslash CE.2\cos\beta,$$
$$\backslash CG_I = \backslash CE.2\cos\beta_I$$

und

$$\backslash CH = \backslash CE.2\cos\beta.\cos\beta$$
$$= \backslash CE.2\cos^2\beta = \mathfrak{r},$$
$$\backslash CH_I = \backslash CE.2\cos^2\beta_I = \mathfrak{r}_I.$$

Ferner ist sodann

$$\smile \mathfrak{H}H = \mathfrak{r}.\varphi \quad \text{und} \quad \smile \mathfrak{H}_I H_I = \mathfrak{r}_I\varphi$$

und

$$\triangle \mathfrak{H}CH = \mathfrak{r}^2\varphi \quad \text{und} \quad \triangle \mathfrak{H}_I CH_I = \mathfrak{r}_I{}^2\varphi.$$

Endlich ist die Fläche

$$\mathfrak{H}HH_I\mathfrak{H}_I = \varphi(\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{r}^2{}_I).$$

Für einen anderen Winkel, z. B. für den $\angle 2.\varphi$, erhält man den Flächenwerth

$$2\varphi(\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{r}_I{}^2).$$

Man hat daher

$$\varphi(R^2 - R^2{}_I) : 2\varphi(R^2 - R^2{}_I) = \varphi(\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{r}_I{}^2) : 2\varphi(\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{r}^2{}_I).$$

Bezeichnet man den Werth von $(\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{r}_I{}^2)$ mit r und denkt sich darunter einen Radius, so hat man

$$\varphi(R^2 - R_I{}^2) : 2.\varphi(R^2 - R_I{}^2) = r\varphi : 2.r\varphi$$

d. h. mit anderem Ausdrucke, es verhalten sich

n Flächeneinheiten : $2.n$ Flächeneinheiten
$= n$ Linieneinheiten : $2.n$ Linieneinheiten.

Wir haben somit dasselbe Resultat, wie beim Amsler'schen Polarplanimeter. Es lässt sich die Allgemeingültigkeit der Formel auch für die Fälle nachweisen, in welchen die Umfangslinien der zu messenden Flächen gerade Linien oder andere Curven, als Kreislinien sind. Da wir aber des Planimeters nur geschichtlich erwähnen, so genügt der gegebene Nachweis der Richtigkeit der Theorie des Instrumentes.

Gegen die Brauchbarkeit dieses Planimeters sind im Allgemeinen alle diejenigen Einwendungen zu machen, welche gegen den Amsler'schen gemacht worden sind, er hat aber ausserdem noch den Nachtheil, dass er viel complicirter ist, als der Ams-

ler'sche und einen kleineren Umfang als dieser hat. Zur praktischen Ausführung können wir das Instrument nicht empfehlen, ebenso nicht eine vom Prof. Decher an der angezogenen Stelle vorgeschlagene Einrichtung des Instrumentes, weil stets die gegen das Amsler'sche Instrument gemachten Erinnerungen ihre Geltung haben würden.

Mathematische Zeichen.

\ gerade Linie.
⌣ Bogen.
⌒ Bogen oder gerade Linien.
∠ Winkel.
> grösser als.
< kleiner als.
△ Dreieck.
▽ Sector.
◗ Halbkreisfläche.
□ Quadrat.
▱ Parallelogramm.
⏢ Trapeze.
∥ parallel.
= gleich.
⋕ parallel und gleich.
∓ plus oder minus.
cm Centimeter.
mm Millimeter.

Fig. 4. § 3.

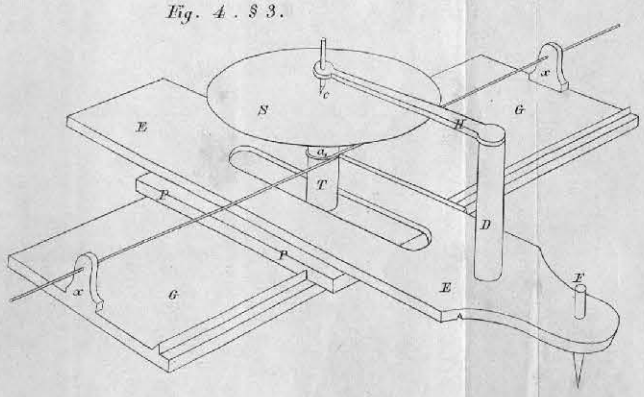


Fig. 3. § 1.2.

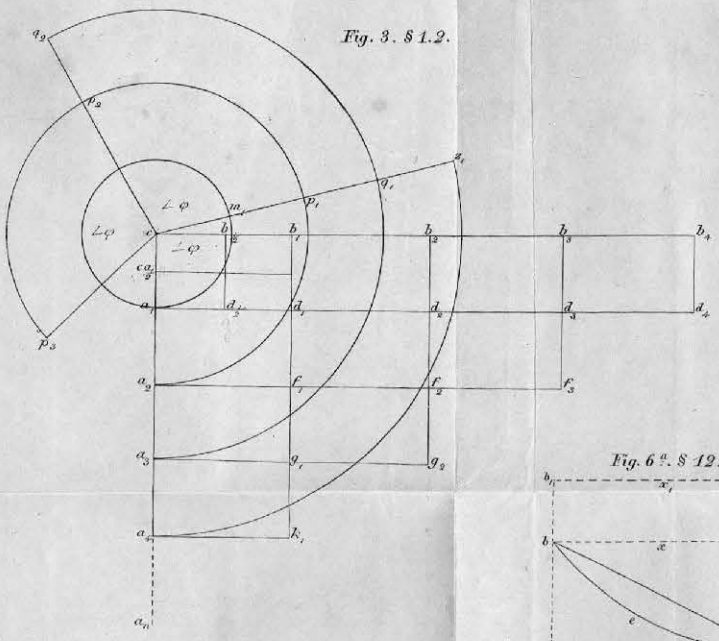


Fig. 6. § 7.

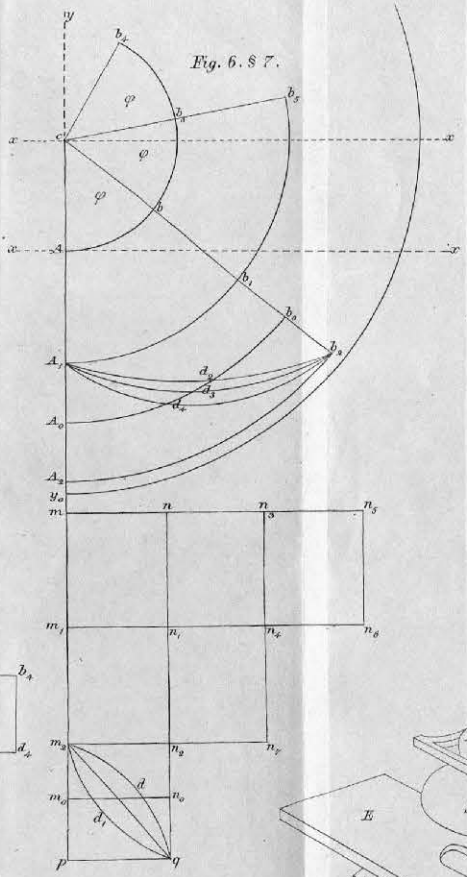


Fig. 1.

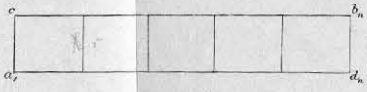


Fig. 2. § 1.

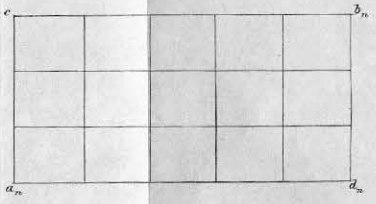


Fig. 5. § 4.

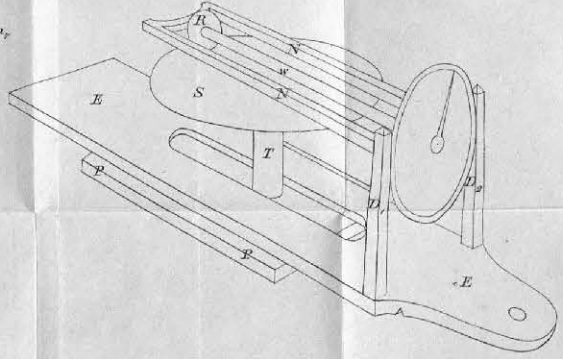
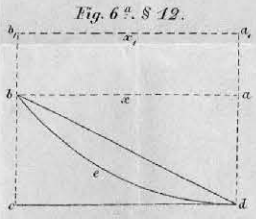


Fig. 6a. § 12.



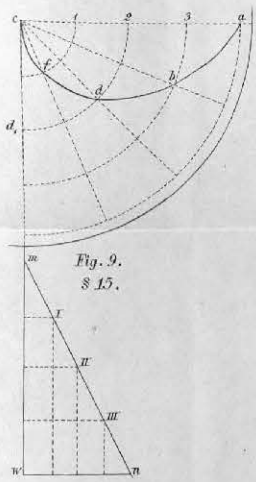


Fig. 9. § 15.

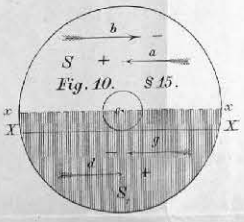


Fig. 10. § 15.

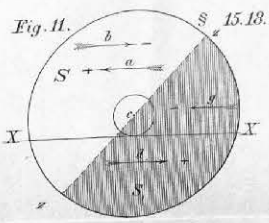


Fig. 11. § 15.18.21.

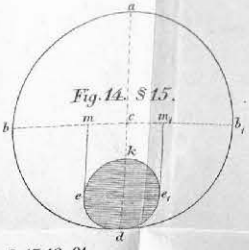


Fig. 14. § 15.

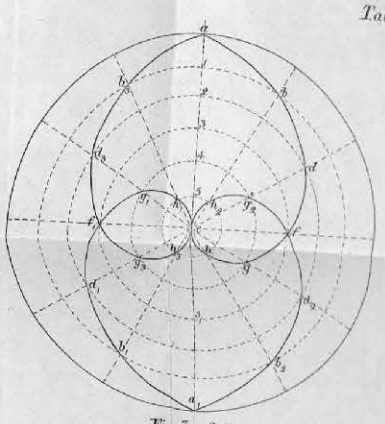


Fig. 7. § 14.

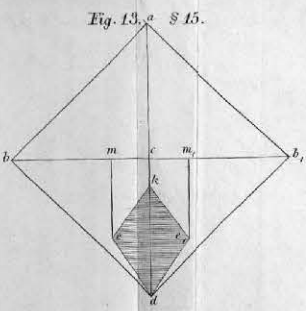


Fig. 13. § 15.

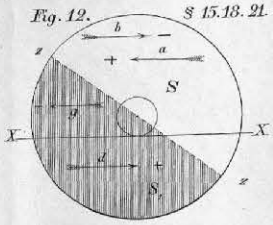
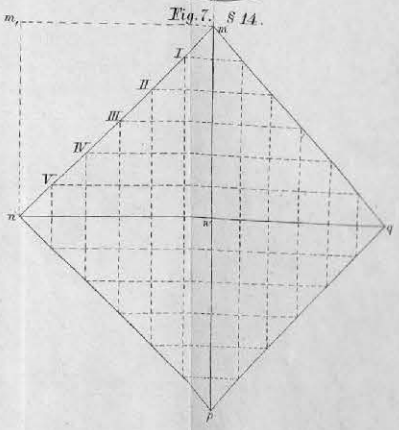


Fig. 12. § 15.18.21.



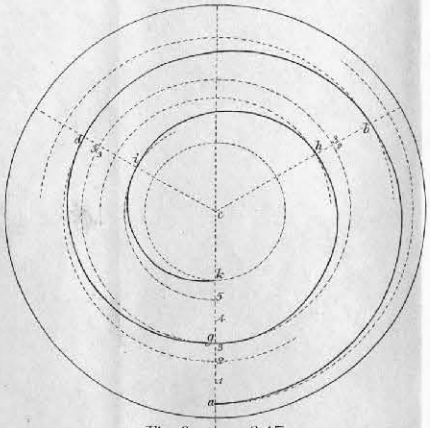


Fig. 8. § 15.

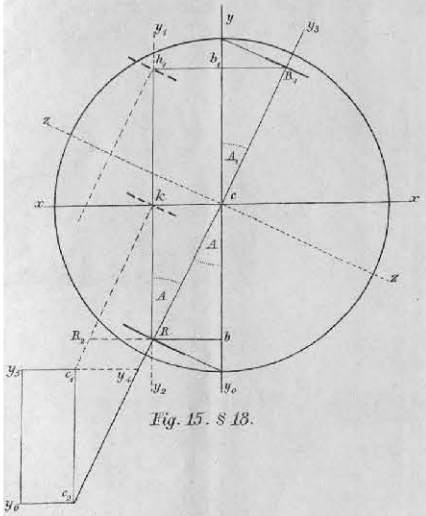
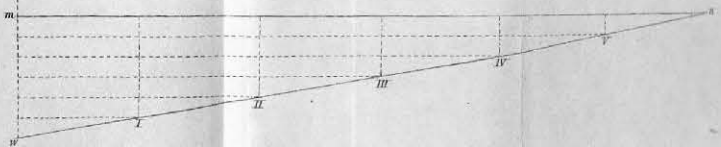


Fig. 15. § 18.



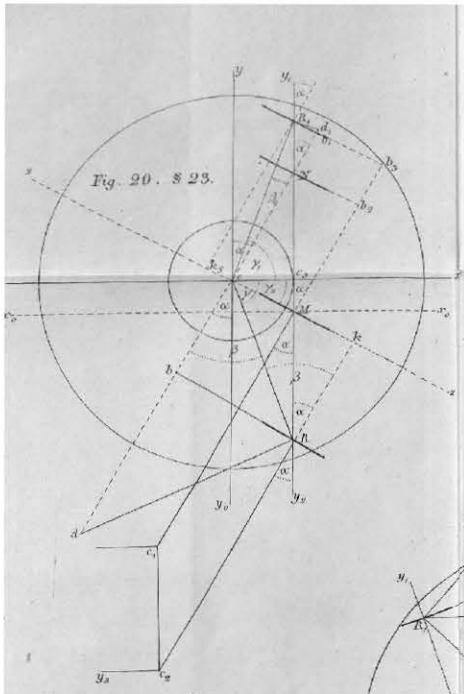


Fig. 20. § 23.

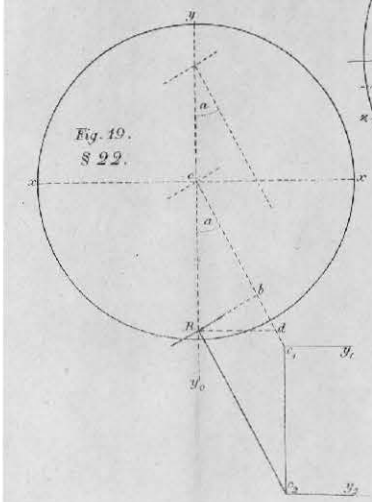


Fig. 19.
§ 22.

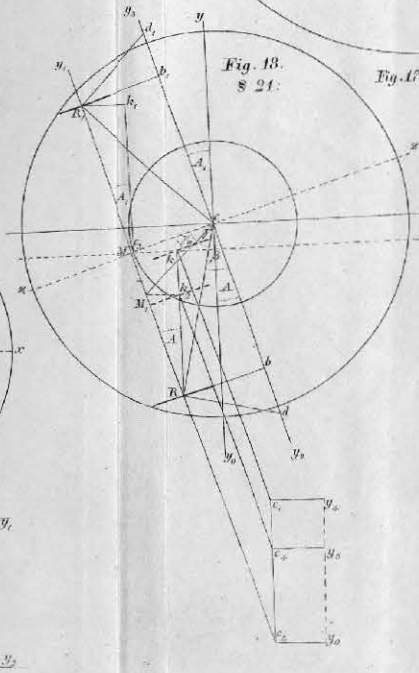


Fig. 18.
§ 21.

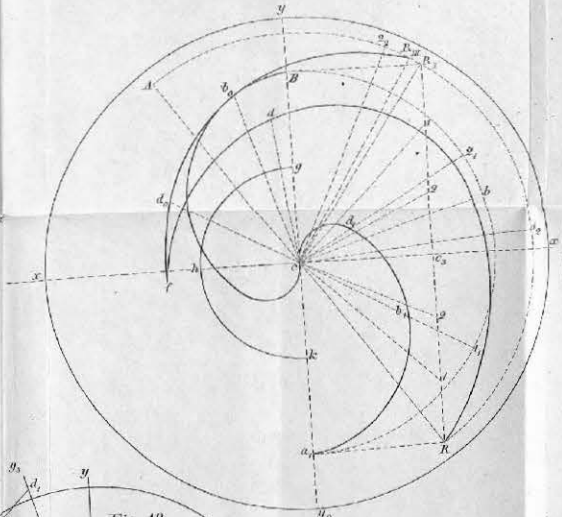


Fig. 17. § 20.

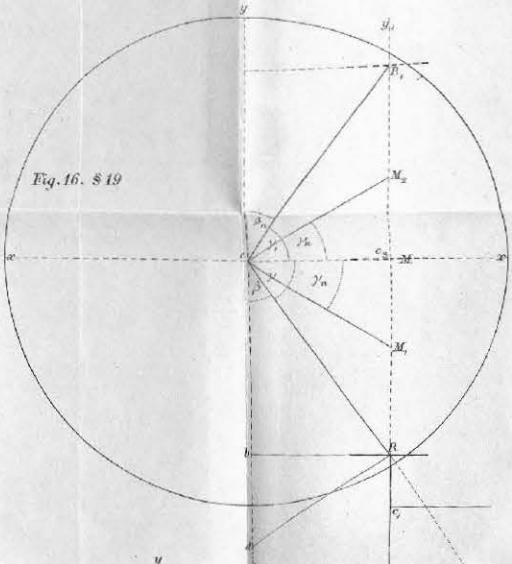


Fig. 16. § 19

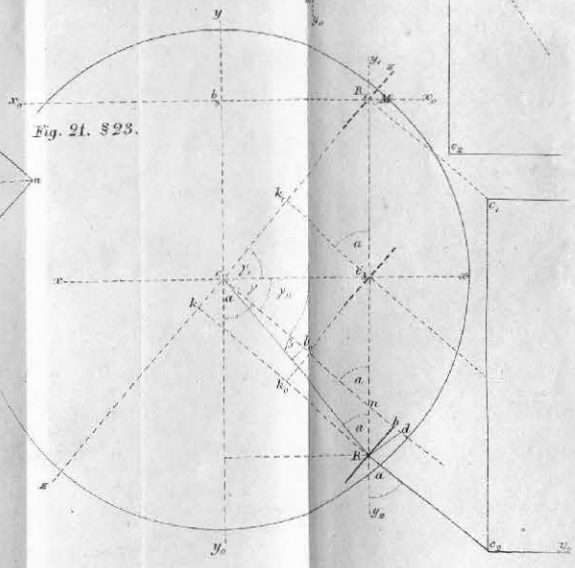


Fig. 21. § 23.

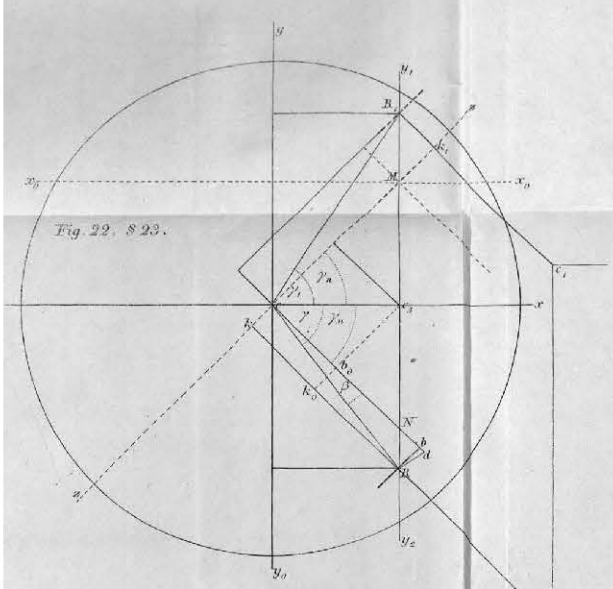


Fig. 22. § 23.

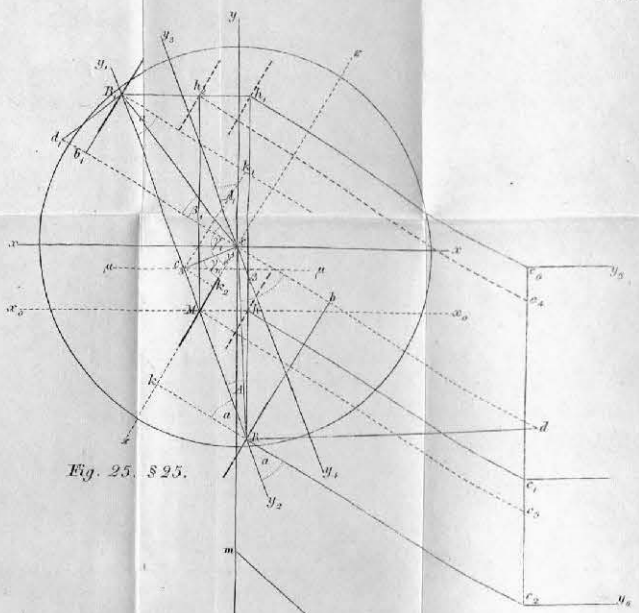


Fig. 25. § 25.

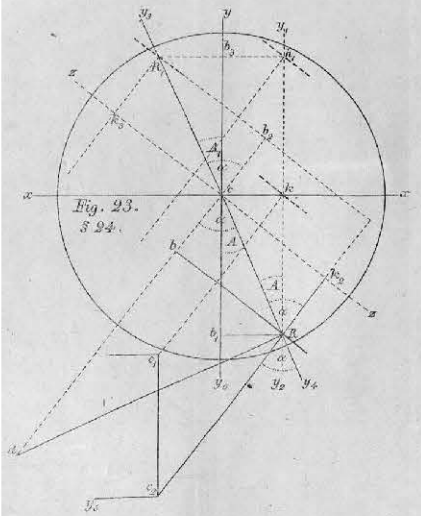


Fig. 23.
§ 24.

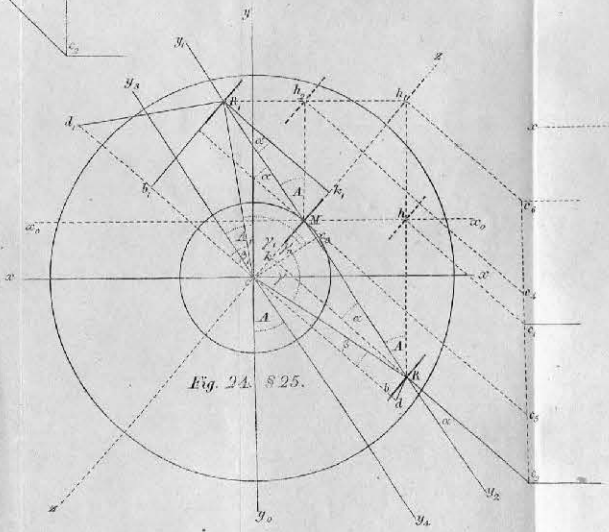


Fig. 24. § 25.

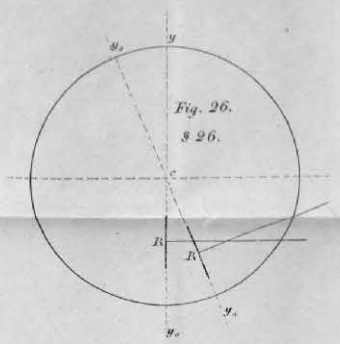


Fig. 26.
§ 26.

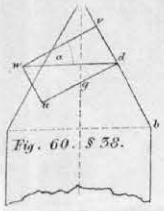


Fig. 60. § 38.

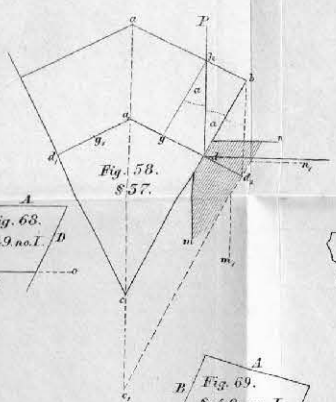


Fig. 58.
§ 37.

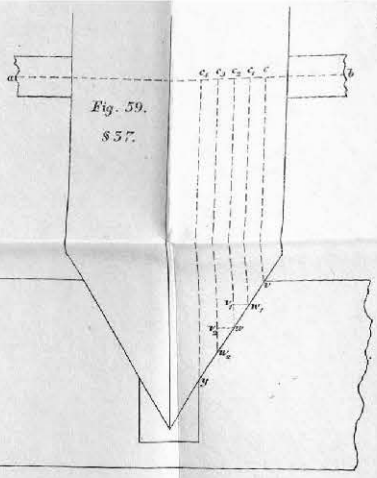


Fig. 59.
§ 37.

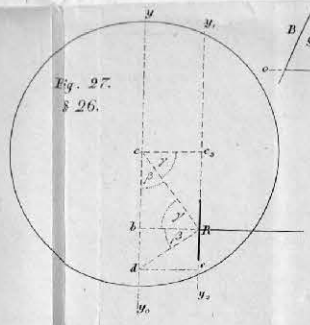


Fig. 27.
§ 26.

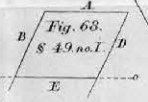


Fig. 68.
§ 49 no. I.

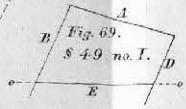


Fig. 69.
§ 49 no. I.

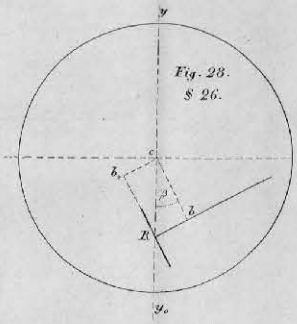


Fig. 28.
§ 26.

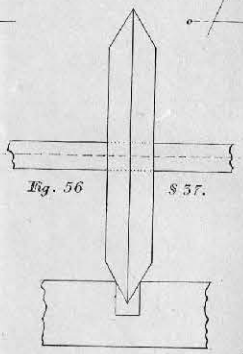


Fig. 56 § 37.

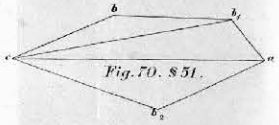


Fig. 70. § 51.

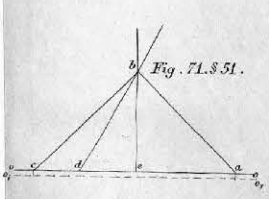


Fig. 71. § 51.

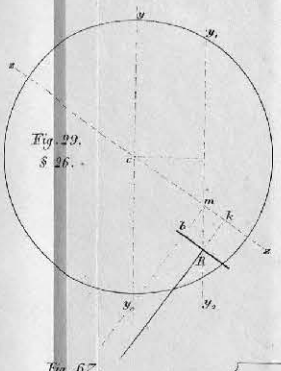


Fig. 29.
§ 26.

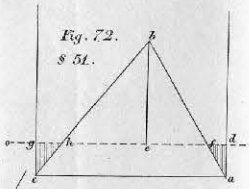


Fig. 72.
§ 51.

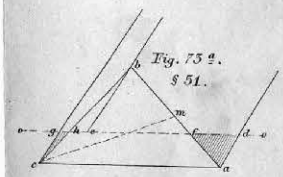


Fig. 73 a.
§ 51.

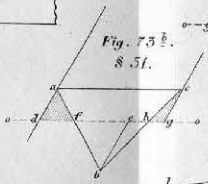


Fig. 73 b.
§ 51.

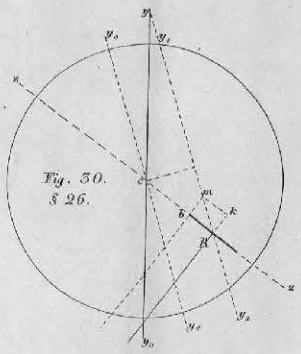


Fig. 30.
§ 26.

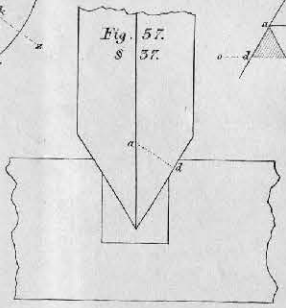


Fig. 57.
§ 37.

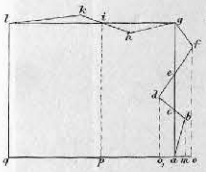


Fig. 74. § 51.

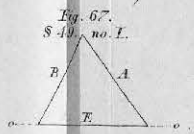
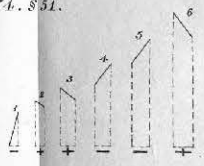


Fig. 67.
§ 49 no. I.



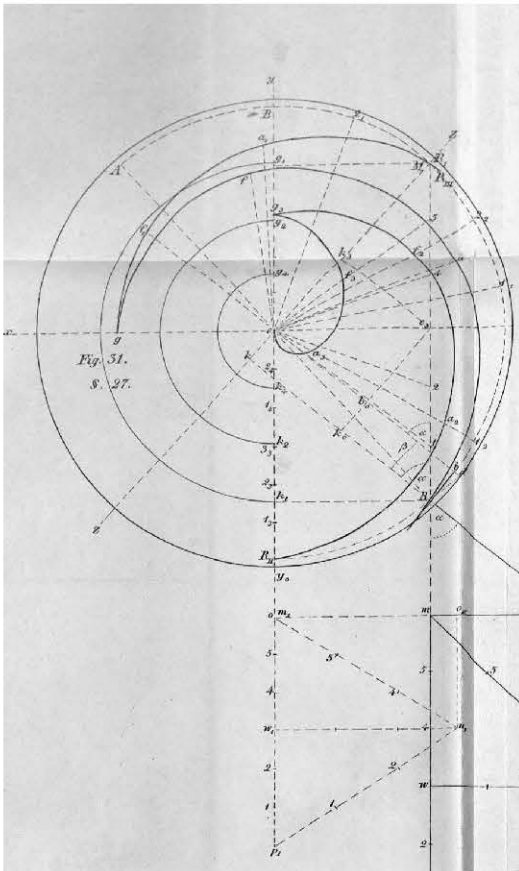


Fig. 31.
§. 27.

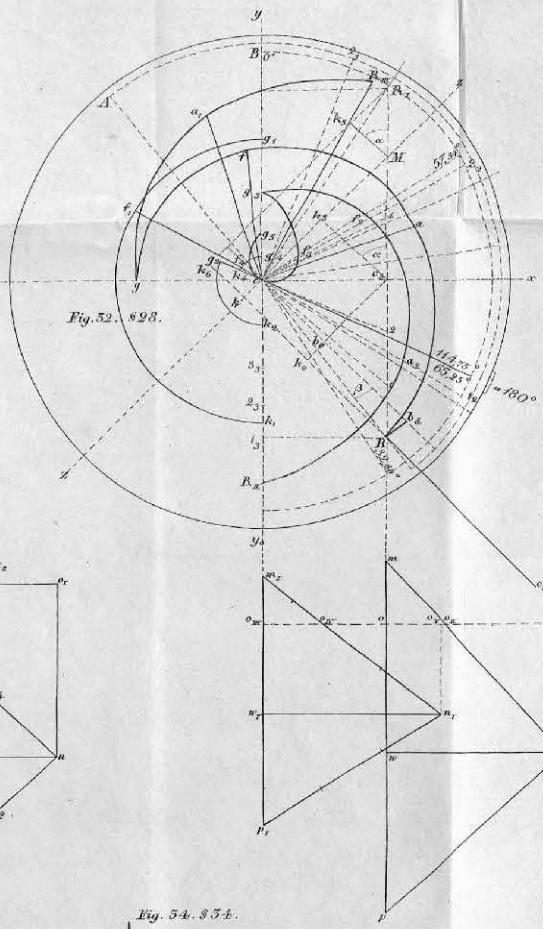


Fig. 32. §28.

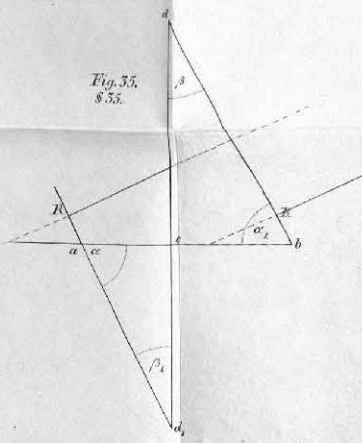


Fig. 35.
§. 35.

Fig. 33. §33.

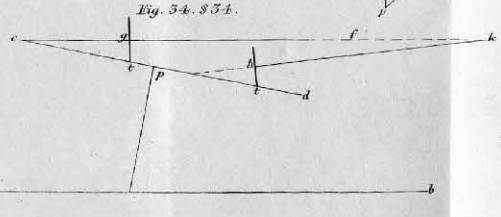


Fig. 34. §34.

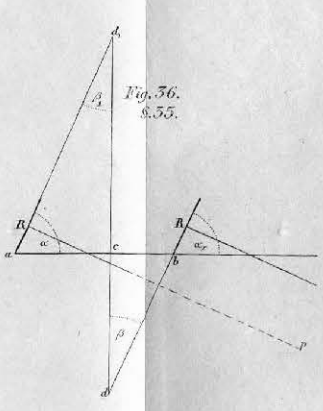
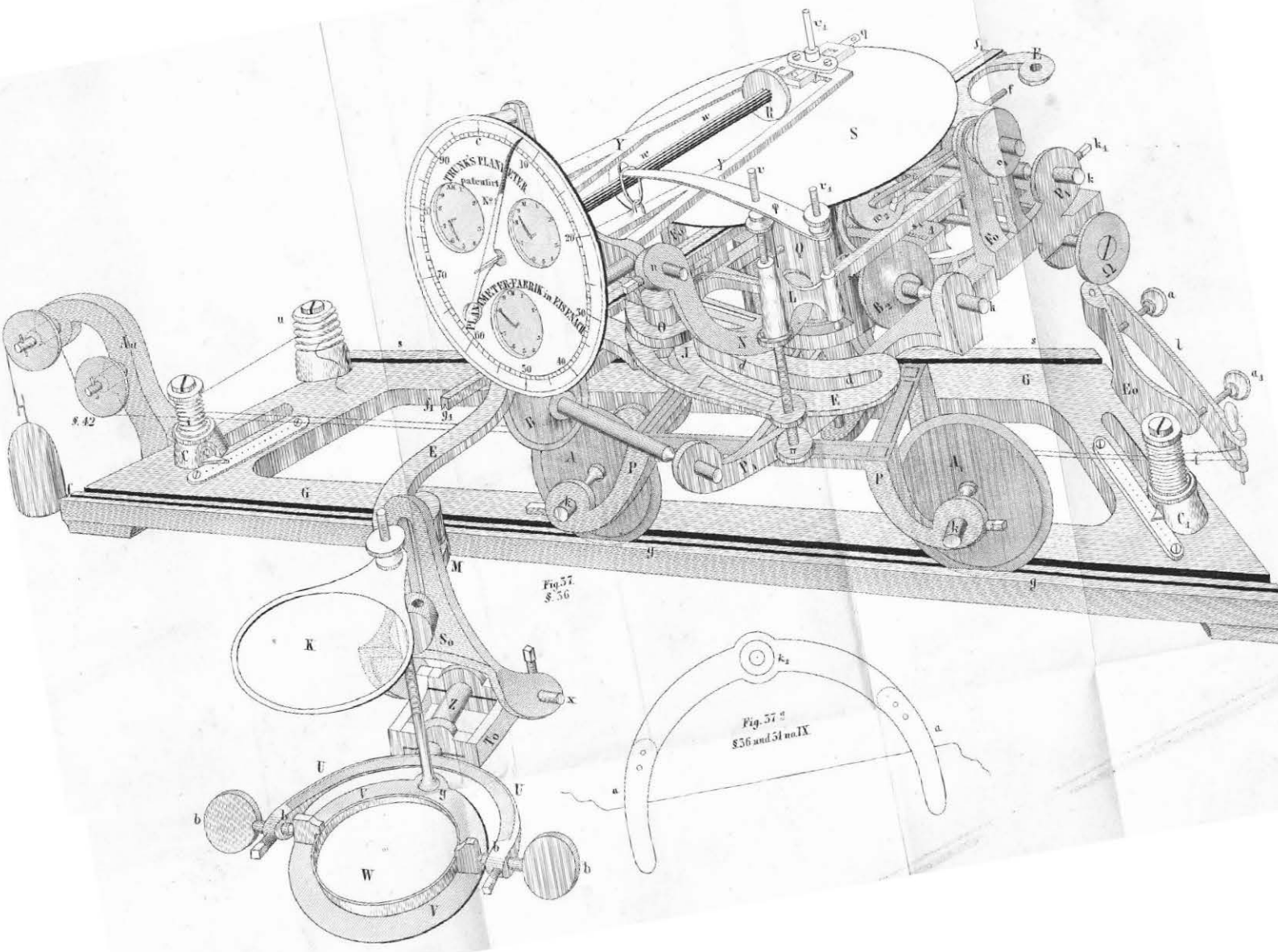


Fig. 36.
§. 35.


THUNK'S PLANIMETER
patentirt
PLANIMETER-FABRIK in EISENACH
§. 42
Fig. 37.
§. 36
Fig. 37 a
§. 36 und 51 no. IX

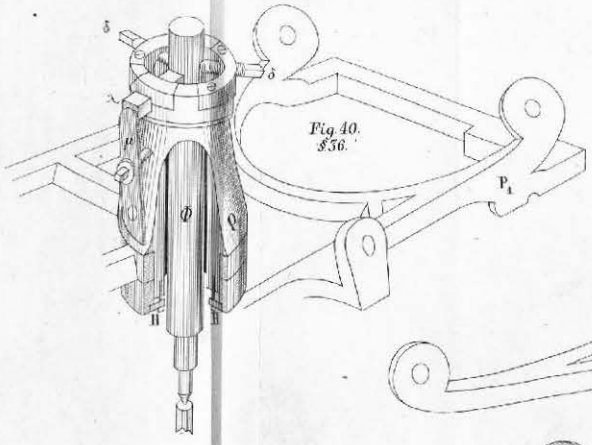


Fig. 40.
§ 36.

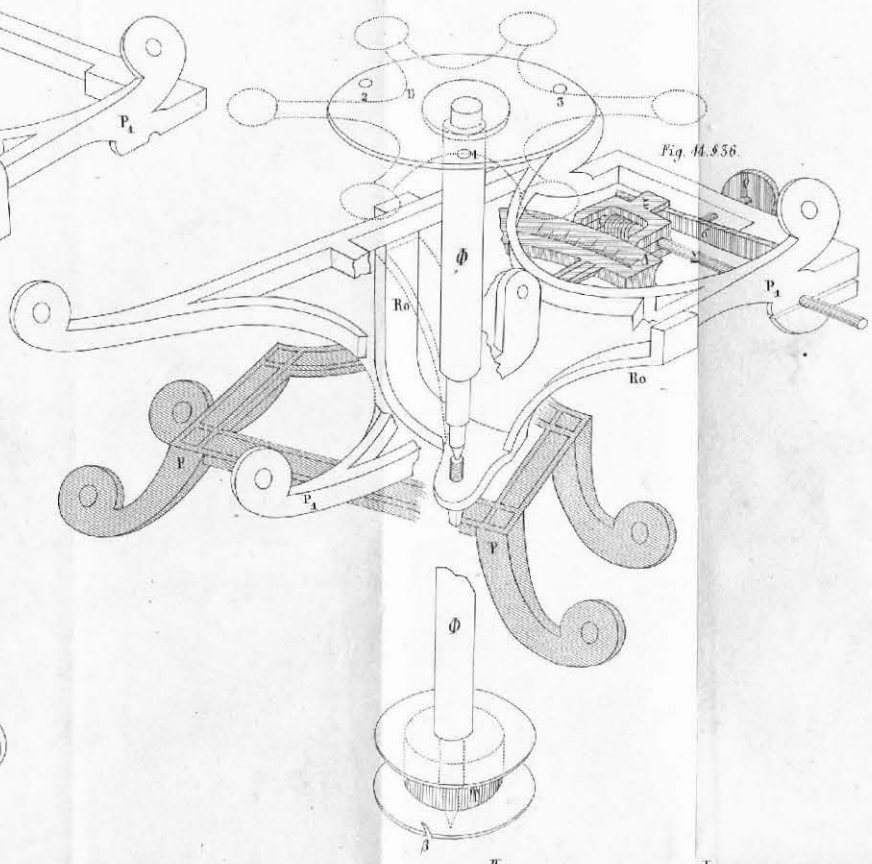


Fig. 41. § 36.

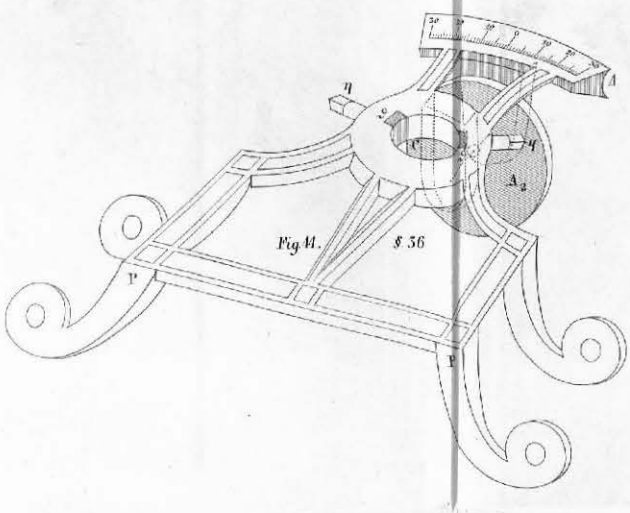


Fig. 41. § 36.

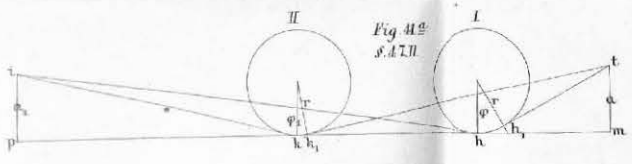


Fig. 41 a
§. 47. II.

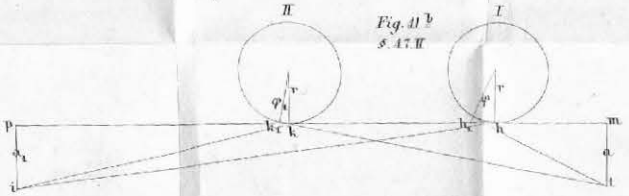
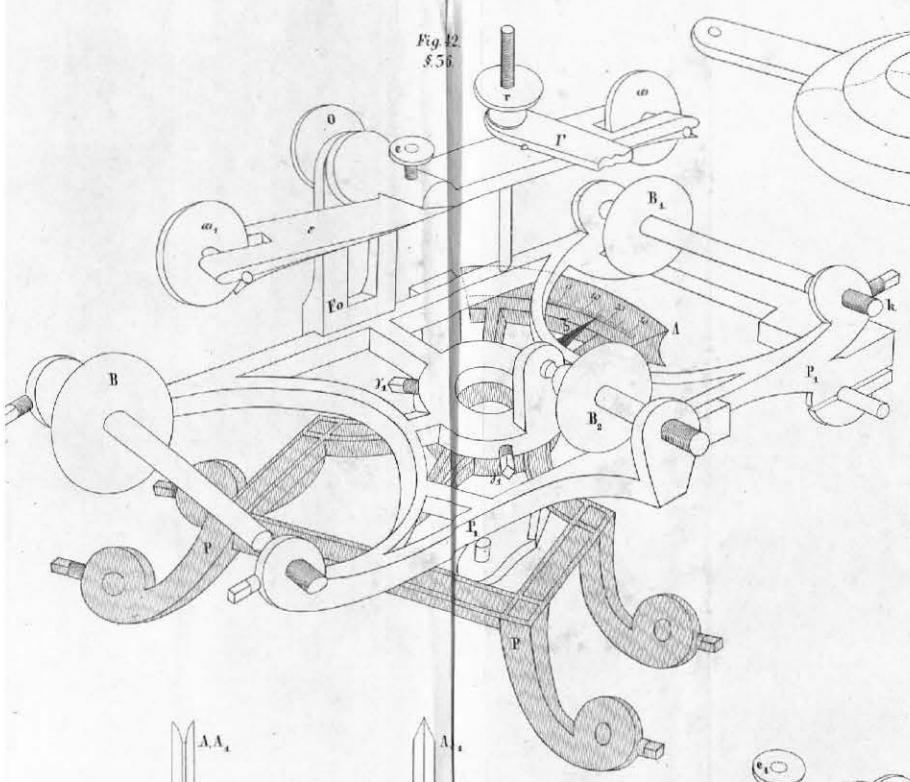
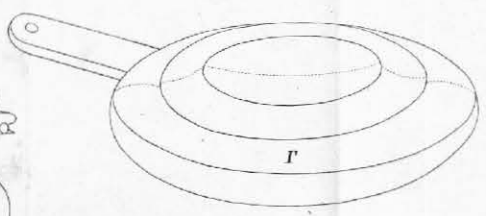


Fig. 41 b
§. 47. II.

Fig. 42. §. 56.





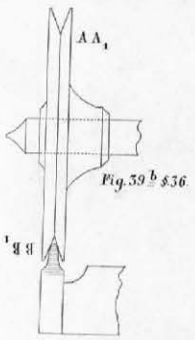


Fig. 39 b §. 56.

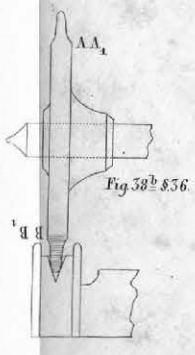


Fig. 38 b §. 56.

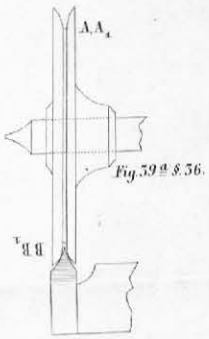


Fig. 39 a §. 56.

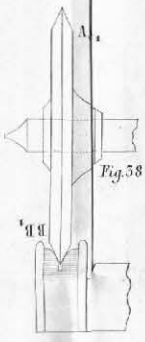


Fig. 38 a §. 56.

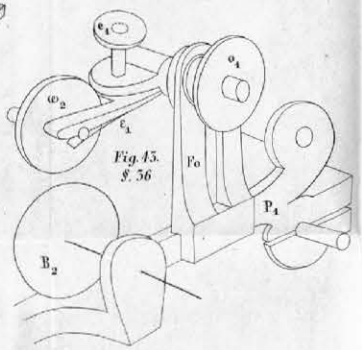


Fig. 45. §. 56.

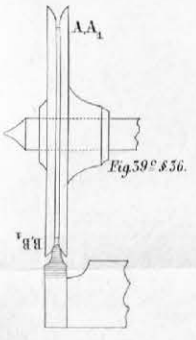


Fig. 39 c §. 56.

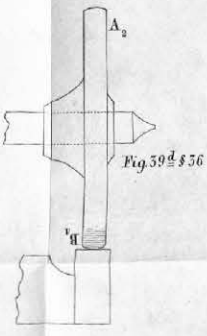


Fig. 39 d §. 56.

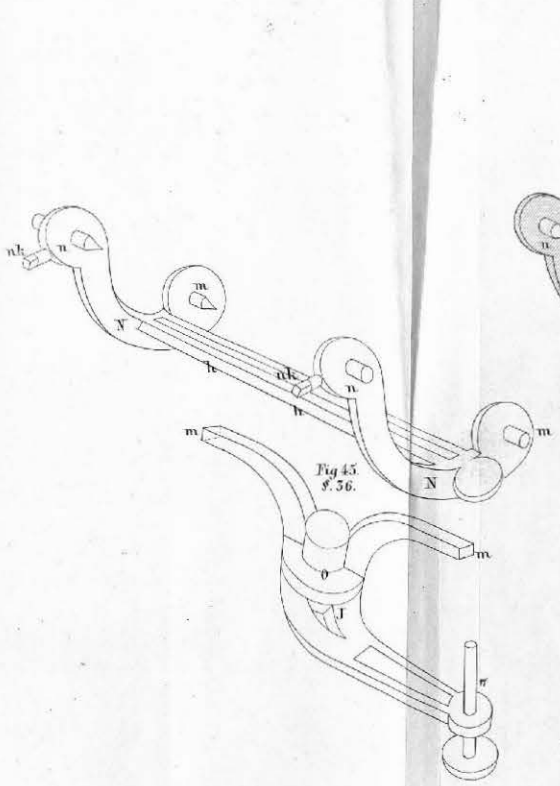


Fig. 45. §. 56.

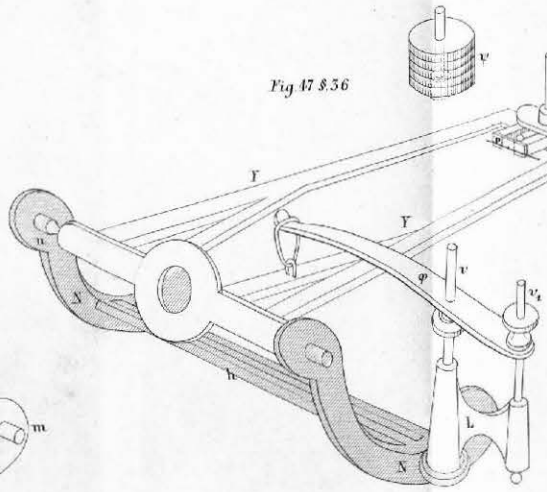
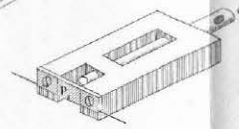


Fig. 47 §. 56



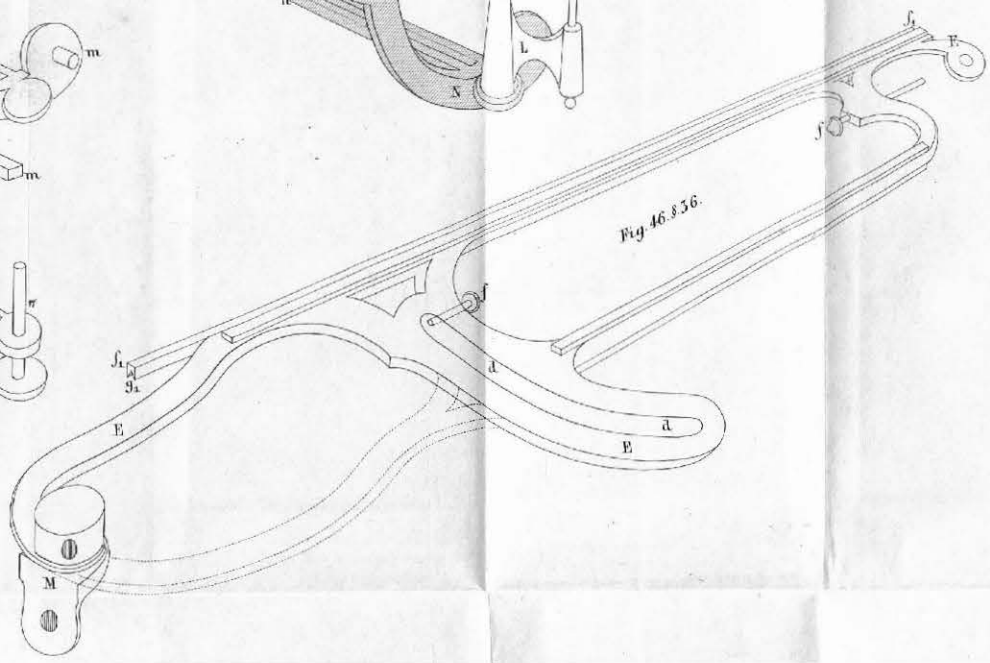


Fig. 46. §. 56.

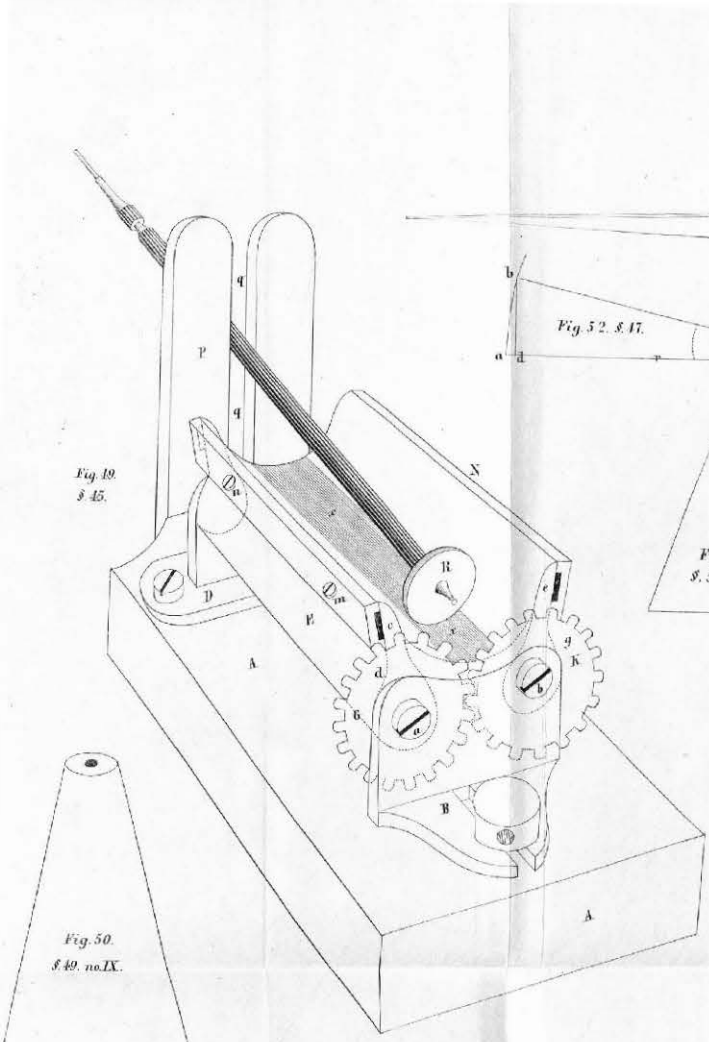


Fig. 49.
§ 45.

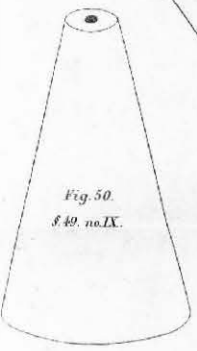


Fig. 50.
§ 49. no. IX.

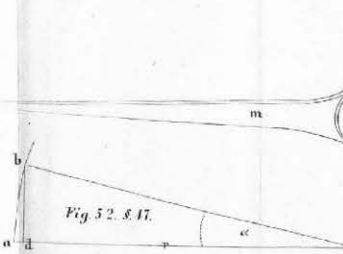


Fig. 52. § 47.

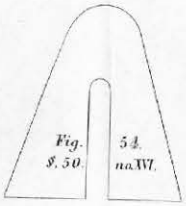


Fig. 54.
§. 50. no. XVI.

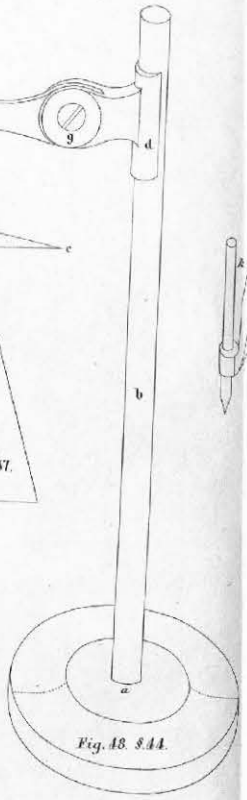


Fig. 48. § 44.

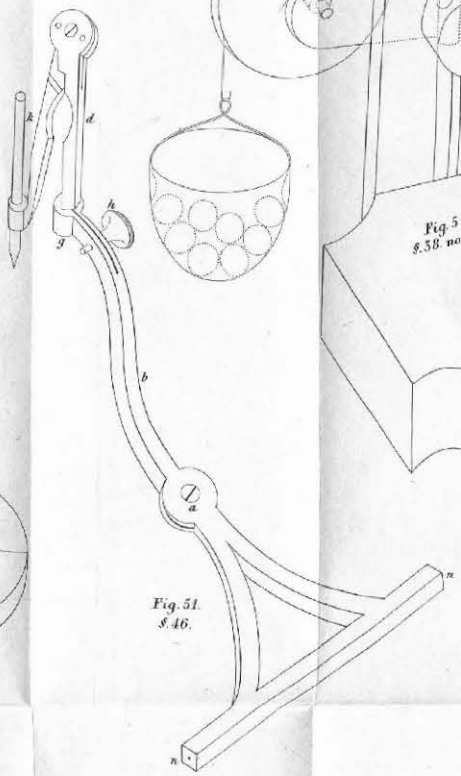


Fig. 51.
§ 46.

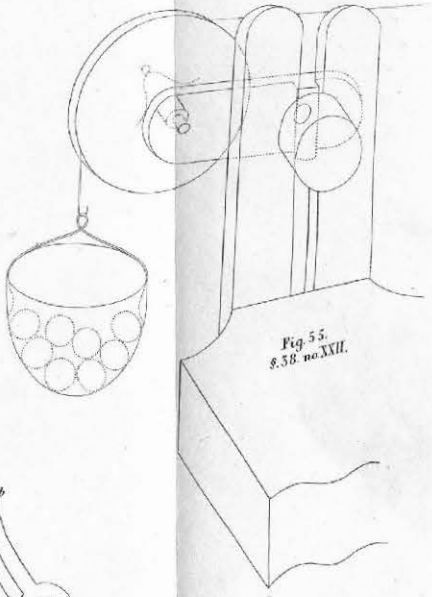


Fig. 55.
§ 58. no. XXII.

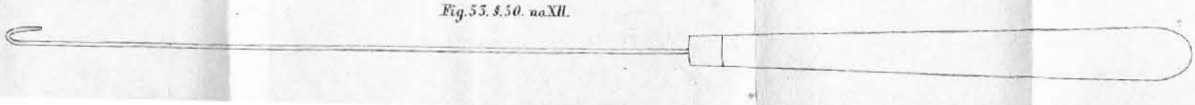


Fig. 53. § 50. no. XII.

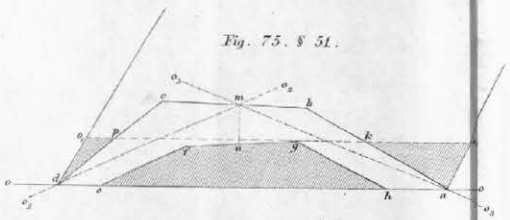


Fig. 75. § 51.

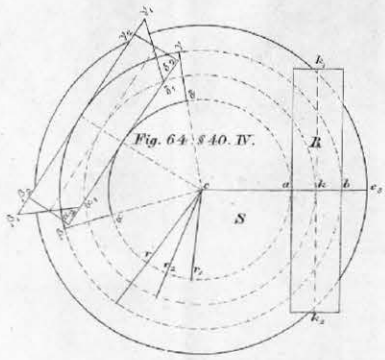


Fig. 64. § 40. IV.

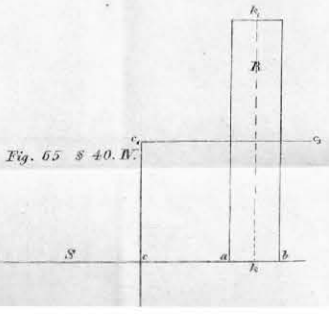


Fig. 65. § 40. IV.

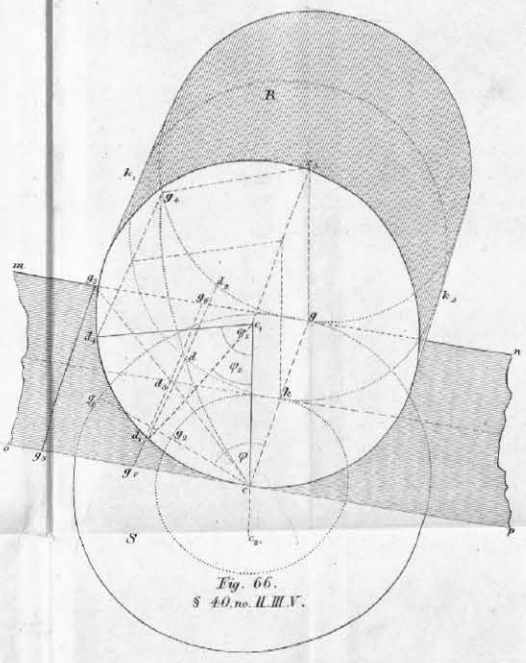


Fig. 66.
§ 40. no. II. III. V.

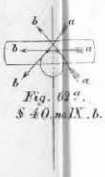


Fig. 62a.
§ 40. no. IX. b.

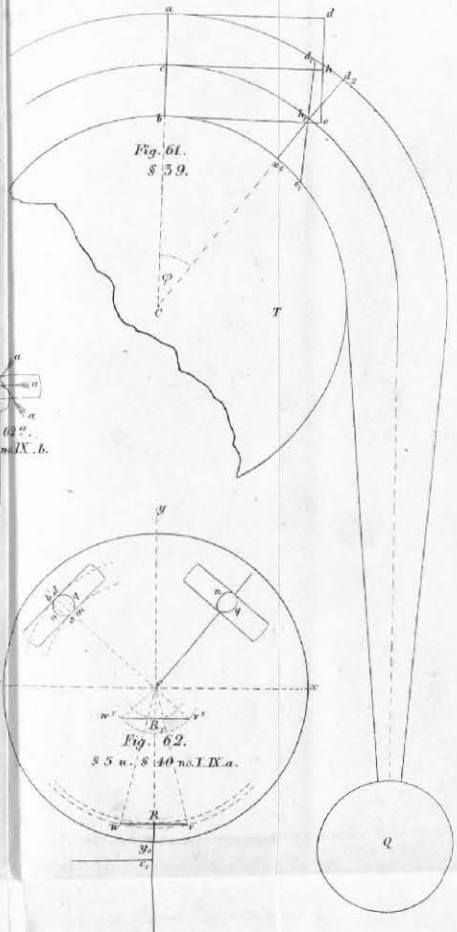


Fig. 61.
§ 39.

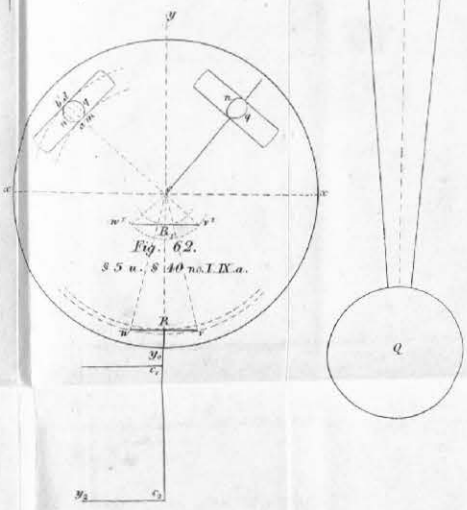


Fig. 62.
§ 5 u., § 40. no. I. IX. a.

Tab. XIII.

Fig. 76. § 54.

Fig. 77. § 54.

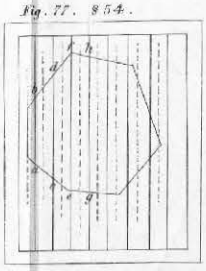
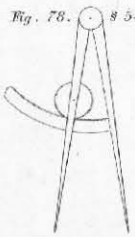
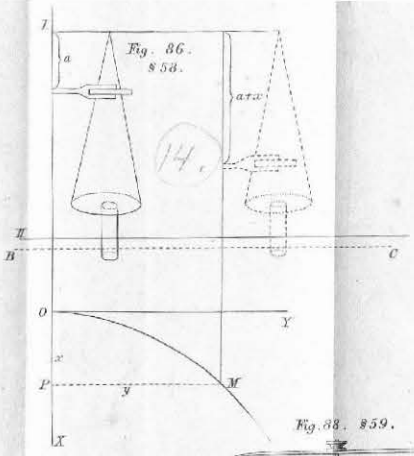


Fig. 78. § 54.





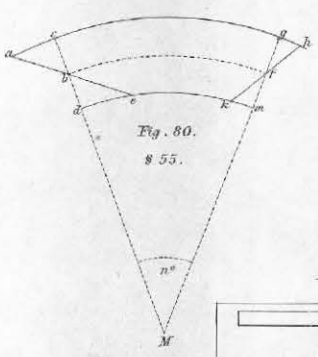


Fig. 88. § 59.

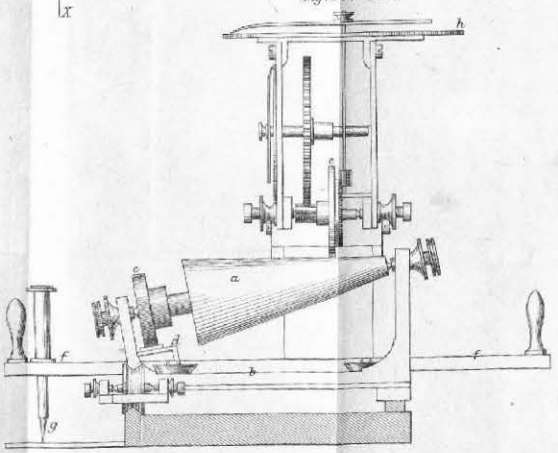
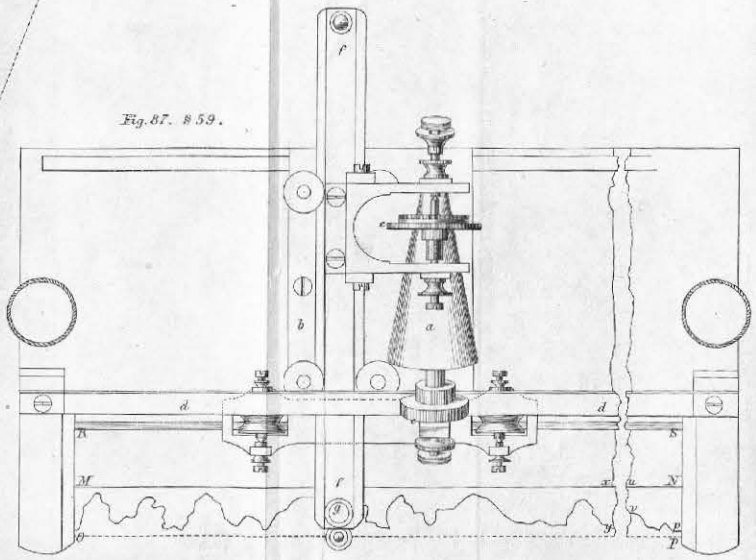


Fig. 87. § 59.



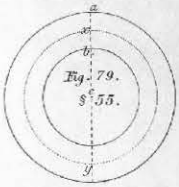


Fig. 81.
§ 55.

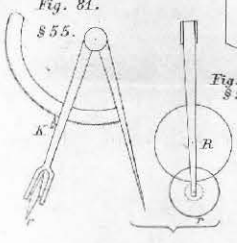


Fig. 82.
§ 55.

Fig. 83. § 55.

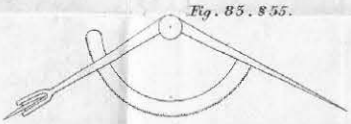


Fig. 84. § 57.

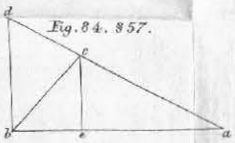


Fig. 85. § 58.

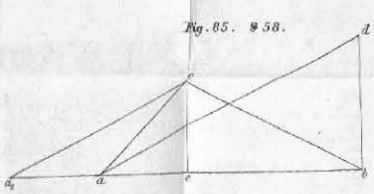


Fig. 89. § 60.

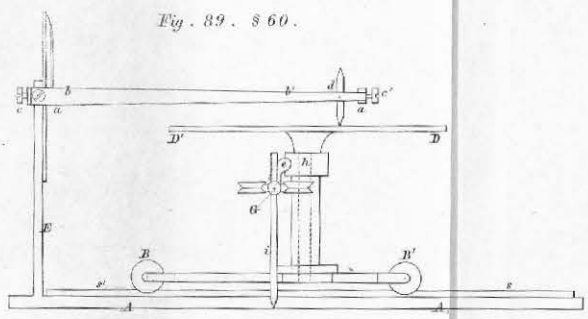
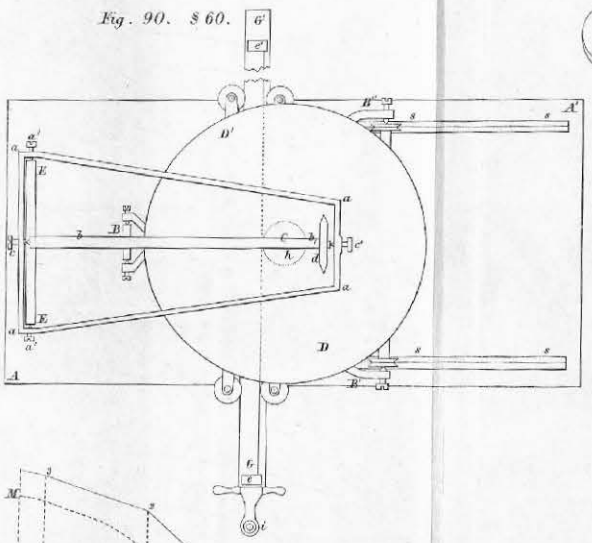


Fig. 90. § 60.



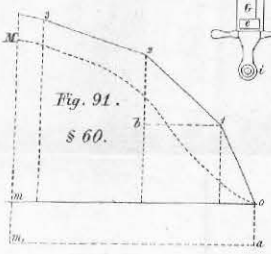


Fig. 91.
§ 60.

Fig. 95.
§ 62.

Fig. 92. § 61.

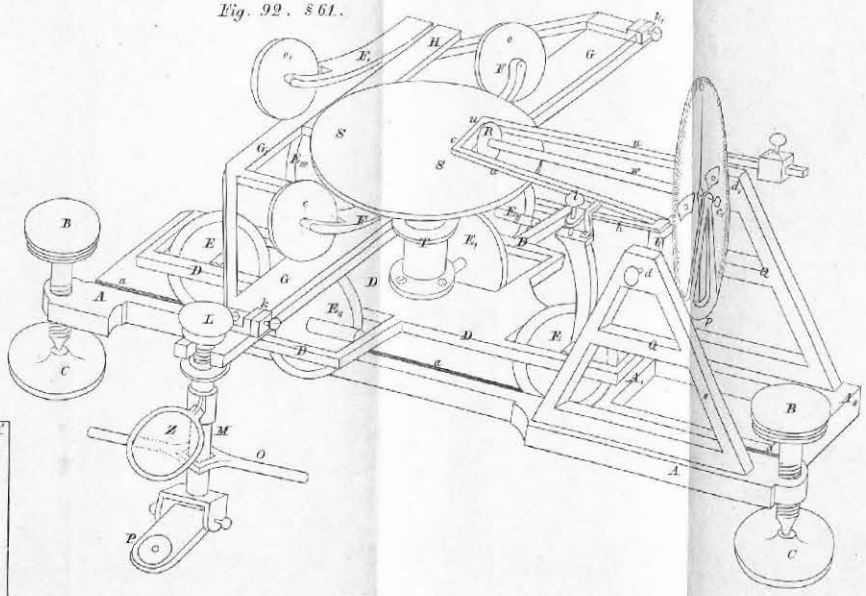


Fig. 94. § 66.

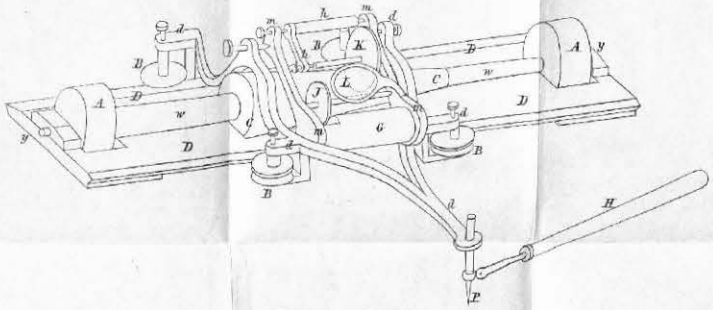


Fig. 95 § 67.

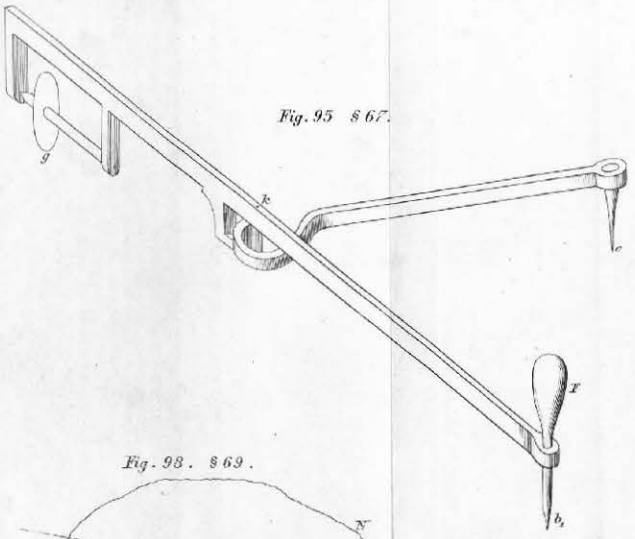


Fig. 96. § 67.

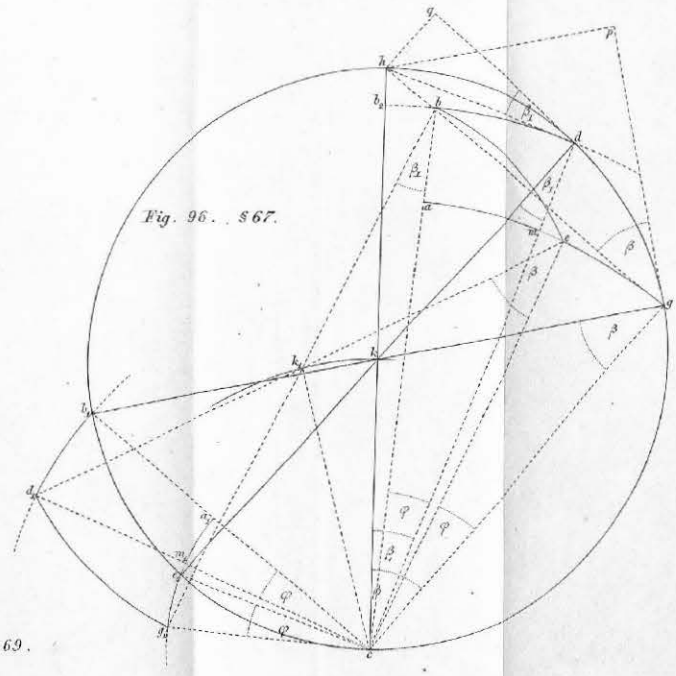


Fig. 98. § 69.

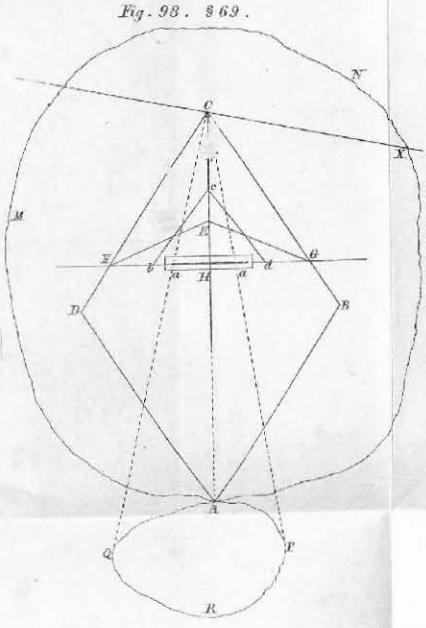


Fig. 99. § 69.

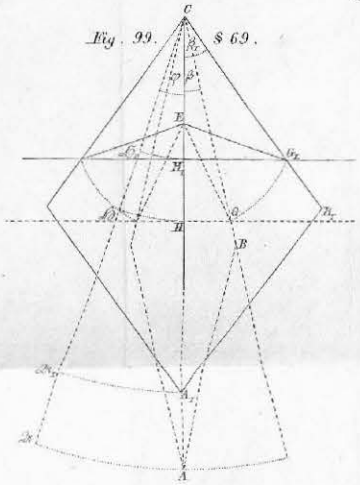
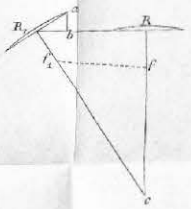



Fig. 97. § 68.