



Lehrstuhl für Regelungstechnik



Technische Universität München

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Lehrstuhl für Regelungstechnik

Adaptive Trajektorienfolgeregelung für Quadropter basierend auf der \mathcal{L}_1 -adaptiven Regelungstheorie

Paul Sebastian De Monte

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der
Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktor-Ingenieurs
genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Horst Baier
Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Boris Lohmann
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Florian Holzapfel

Die Dissertation wurde am 12.06.2014 bei der Technischen Universität München
eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 13.11.2014 angenommen.

*Für meine Frau Lena,
meine Eltern Ingrid und Paul
und meine Schwester Lorenza.*

Vorwort

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Regelungstechnik der Technischen Universität München von September 2011 bis Oktober 2014. Mein Betreuer und Doktorvater Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Boris Lohmann, dem mein erster und besonderer Dank zukommt, vertraute mir in dieser Zeit das AiF/ZIM-Forschungsprojekt „MultiVideoKopter“ an, ein Kooperationsprojekt mit der Firma Ascending Technologies GmbH und dem Lehrstuhl für Flugsystemdynamik der Technischen Universität München. Dieses Projekt gab mir den fachlich Ansporn sowie den finanziellen Rahmen, um die vorliegende Arbeit zu verfassen.

Entscheidend für das Gelingen dieser Arbeit waren einerseits die konstruktiven Rahmenbedingungen, die ich am Lehrstuhl in dieser Zeit vorfand. Dazu gehörte eine stets freundliche und wohlwollende Atmosphäre, Förderung in Seminaren und Workshops und wertvolle fachliche Diskussionen. Ich danke Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Boris Lohmann und meinen ehemaligen Kollegen dafür sehr herzlich.

Ebenso danke ich meinen Projektkollegen Thomas Raffler und Michael Achtelik für die wertvolle und stets sehr angenehme Zusammenarbeit. Sowohl für das Zweitgutachten, als auch für seine Unterstützung und sein Interesse an meiner Arbeit in der Entstehungsphase, danke ich Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Florian Holzapfel. Insbesondere danke ich ihm für den Kontakt an die Nanyang Technological University in Singapur, an der ich meine theoretische Arbeit experimentell verifizieren konnte. An dieser Stelle auch ein besonderer Danke an Prof. Tiauw Hiong Go, Weihua Zhao, Soon Hooi Chiew und Jian Wang für ihre Unterstützung und die sehr angenehme Gastfreundschaft in Singapur.

Ebenso entscheidend für das Gelingen dieser Arbeit, war der Rückhalt und die Liebe meiner Frau Lena und meiner Eltern Ingrid und Paul, wofür ich ihnen sehr dankbar bin.

Traunreut, Januar 2015
Paul Sebastian De Monte

Kurzfassung

Diese Arbeit stellt eine adaptive Backsteppingregelung zur Trajektorienfolge für die Position und das Heading eines Quadropters vor. Der Regelalgorithmus ist dafür entwickelt, schnelle Flugmanöver zu realisieren und alle Modellunsicherheiten sowie eine Vielzahl an Störungen zu kompensieren. Dazu greift der Entwurf einen Ansatz der \mathcal{L}_1 -adaptiven Regelung für nichtlineare und zeitvariante Referenzsysteme auf, passt ihn an das Backsteppingschema an und modifiziert ihn, so dass die nominale Regelung von der Adaption entkoppelt. Es werden zwei Nachweise geführt und verglichen, welche die Beschränktheit aller Systemsignale zeigen. Simulationen und Experimente verifizieren den vorgestellten Ansatz und veranschaulichen dessen hohe Leistungsfähigkeit.

Abstract

This thesis presents an adaptive backstepping controller for the position and heading trajectory tracking of a quadrotor. The controller is designed to enable tracking of fast trajectories and to compensate for all model uncertainties as well as for a wide range of disturbances. The design adopts and modifies the \mathcal{L}_1 adaptive control approach for nonlinear and time-varying reference systems to fit into the backstepping design and to decouple the nominal controller from the adaptation. Two different methods are derived and compared that verify the boundedness of all control signals. Simulations and experimental tests verify the presented controller and demonstrate its high performance.

Inhaltsverzeichnis

Notation	III
1. Einleitung	1
1.1. Anwendungen für Quadrocopter	2
1.2. Anforderungen an ein Trajektorienfolgeproblem	3
1.3. Beschreibung der Dynamik eines VTOLs	3
1.4. Stand der Technik	5
1.4.1. Trajektorienfolgeregelung für die Position und das Heading eines VTOLs	5
1.4.2. Weiterentwicklung der Regelungsansätze	8
1.4.3. Entwicklung auf dem Gebiet der adaptiven Regelung	14
1.5. Ziel und Beitrag der Arbeit	17
1.6. Gliederung der Arbeit	22
1.7. Eigene Publikationen	22
2. Modellbildung	25
2.1. Eigenschaften von Quadrocoptern	25
2.2. Gewählte Modellierungstiefe und Modellannahmen	26
2.3. Mathematisches Modell	28
2.3.1. Translatorische Dynamik	28
2.3.2. Parametrierung des Gesamtschubvektors	29
2.3.3. Rotatorische Dynamik	30
2.3.4. Definition des Headings	30
2.4. Zustandsraummodell	34
3. Regelungssynthese	35
3.1. Regelungskonzept	35
3.2. Herleitung des Stellgesetzes	37
3.3. Formulierung des Fehlersystems	45
3.4. Definition des Zustandsschätzers	47
3.5. Definition des Adaptionsgesetzes	48
4. Analyse des geschlossenen Regelkreises	51
4.1. Mengendefinitionen	51
4.2. Voraussetzungen	52
4.3. Analyse eines Referenzsystems	56
4.3.1. Analyse im Frequenzbereich	57
4.3.2. Analyse im Zeitbereich	59

4.4.	Analyse des geschlossenen Regelkreises	61
4.4.1.	Analyse im Frequenzbereich	61
4.4.2.	Analyse im Zeitbereich	64
4.5.	Numerische Auswertung und Vergleich beider Methoden	68
4.5.1.	Analyse im Frequenzbereich	68
4.5.2.	Analyse im Zeitbereich	70
4.5.3.	Vergleich beider Vorgehensweisen	73
5.	Verifikation anhand von Simulationen	75
5.1.	Simulation mit niederfrequenten Störungen ohne Messrauschen	77
5.2.	Simulation mit höherfrequenten Störungen und Messrauschen	82
5.3.	Auswirkung einer Filterauslegung mit höherer Ordnung	87
6.	Verifikation anhand von Experimenten	91
6.1.	Ergebnisse für ein Punkt-zu-Punkt Manöver (Trajektorie C)	93
6.2.	Ergebnisse für ein spiralförmiges Manöver (Trajektorie D)	97
7.	Zusammenfassung und Ausblick	103
7.1.	Ergebnisse der Arbeit	103
7.2.	Weitere Forschung	104
A.	Funktionseigenschaften	107
A.1.	Eigenschaften der Matrixfunktion ${}_n\mathbf{M}$	107
A.2.	Die Zustände als Funktionen der Folgefehler	109
A.3.	Zeitableitungen der Fehlerzustände	110
A.4.	Eigenschaften von wichtigen Ableitungen	110
A.5.	Eigenschaften der Funktionen σ_{kl} und $\dot{\sigma}_{kl}$	113
A.6.	Eigenschaften der Funktion \mathbf{f}	123
B.	Beweise	127
B.1.	Beweis von Lemma 2	127
B.2.	Beweis von Lemma 4	127
B.3.	Beweis von Theorem 1	129
B.4.	Hilfssatz	130
B.5.	Beweis von Lemma 3	131
B.6.	Beweis von Theorem 2	132
C.	Weitere Simulationsergebnisse	135
	Symbolverzeichnis	143

Notation

Vektoren und Matrizen

Fett gedruckte Symbole kennzeichnen einen Vektor bzw. eine Matrix, wobei Vektoren klein geschrieben werden und Matrizen groß. Beispiele sind \mathbf{b} und \mathbf{A} .

Koordinatensysteme

Ein Vektor \mathbf{x} , dargestellt in einem Koordinatensystem bezeichnet als I -System, wird geschrieben als ${}_I\mathbf{x}$. Zur besseren Übersicht wird bei häufig auftretenden Vektoren auf diesen Index verzichtet.

Zeit- und Frequenzbereich

Für Signale im Zeitbereich wird aus Gründen der Übersichtlichkeit auf das Argument t verzichtet. Zur eindeutigen Unterscheidbarkeit wird das Argument s im Frequenzbereich explizit verwendet. $\mathfrak{L}[(.)]$ bezeichnet die Laplace-Transformation in den Frequenzbereich und $\mathfrak{L}^{-1}[(.)]$ die Rücktransformation in den Zeitbereich.

Euklidische Norm

Die Darstellung $\|(\cdot)\|$ bezeichnet die Euklidische Norm.

Hochstellungen

Die Darstellung $\hat{(\cdot)}$ bezeichnet einen Schätzwert und $\tilde{(\cdot)}$ den dazugehörigen Schätzfehler, der definiert ist als $\tilde{a} := \hat{a} - a$. Die Darstellung $(\cdot)'$ wird aus Gründen der Übersichtlichkeit dazu benutzt, einen transponierten Vektor bzw. eine transponierte Matrix zu kennzeichnen ($(\cdot)' = (\cdot)^T$).

Funktionen

Eine Funktion $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ mit $x \in \mathbb{X}$ und $y \in \mathbb{Y}$ wird in dieser Arbeit entweder mit Argument als $f(x)$ oder ohne Argument als f geschrieben. Eine Verkettung von Funktionen, beispielsweise $(f \circ g)(z) = f(g(z))$ mit $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$, $z \in \mathbb{Z}$, wird für eine bessere Übersicht durch eine Vertauschung der Argumente, im Beispiel als $f(z)$, dargestellt.

1. Einleitung

Der technische Fortschritt auf dem Gebiet des Leichtbaus, der Motorentechnik und der Elektronik ermöglicht es heutzutage, elektrisch betriebene, unbemannte Flugobjekte (Unmanned Aerial Vehicles, kurz UAV) zu realisieren und kostengünstig am Markt anzubieten. Durch den leichten Aufbau und die in Relation starke Motorisierung, sind diese Systeme sehr wendig und agil. Zudem ist der Betrieb eines elektrischen UAV im Vergleich zur bemannten Luftfahrt um ein Vielfaches günstiger. Daher sind diese Systeme flexibel einsetzbar und deren Anwendung reicht von Überwachung, Fernerkundung sowie Fernwartung und Inspektion über Luftfoto- und filmographie hin zur Verwendung als Modellbausatz und Spielzeug für Hobbypiloten.

Neben Starrflüglern eignen sich hierzu insbesondere Senkrechtstarter bzw. Drehflügler, oft als Vertical Takeoff and Landing Vehicles kurz VTOL bezeichnet, da diese die Vorteile des Langsamflugs, Schwebeflugs und senkrechten Startens und Landens mit sich bringen, was für die bereits erwähnten Anwendungen besonders nützlich ist. Der *Quadrokopter* aus der Gruppe der Multikopter, zu sehen in Abbildung 1.1, ist neben Modellhubschraubern der bedeutendste Vertreter dieser Art von elektrisch betriebenen VTOL UAV.



Abbildung 1.1.: Quadrokopter "Hummingbird" der Ascending Technologies GmbH.¹

Ein Vorteil liegt bei diesem System in seiner robusten und kostengünstigen Bauweise. Im Vergleich zu Hubschraubern, deren Rotoren durch aufwändige Verstellmechanismen verkippt werden müssen, sind beim Quadrokopter alle vier Rotoren direkt auf bürstenlose Gleichstrommotoren montiert, deren Achsen senkrecht auf dem Rahmen fixiert sind. Somit müssen keine weiteren beweglichen Teile verbaut werden, was zu geringen Kosten und hoher Zuverlässigkeit führt. Dadurch entsteht jedoch auch ein Nachteil hinsichtlich der Steuerung und Manövrierfähigkeit, denn die Richtung des Vorschubs eines Quadrokopters steht durch diese Bauweise stets senkrecht auf dessen Rahmen. Somit entscheidet die aktuelle Fluglage, die Verkipfung des Rahmens im Raum, in welche Raumrichtung der Vorschub wirksam ist. Um ein gewisses

¹Internetadresse: <http://www.asctec.de/>

1. Einleitung

Ziel anzufliegen, muss der Quadrokofter zunächst durch Verkippung in eine entsprechend Fluglage gebracht werden. Es können daher nicht alle 6 Freiheitsgrade eines Quadrokofters, diese sind 3 translatorische und 3 rotatorische Freiheitsgrade, unabhängig voneinander eingestellt werden: Der Quadrokofter ist folglich unteraktuiert und dessen Stabilisierung stellt in Kombination mit seiner hohen Dynamik eine herausfordernde Aufgabe für die Regelungstechnik dar. Dies wird durch eine im letzten Jahrzehnt entstandene Fülle an Publikationen auf diesem Gebiet deutlich.

1.1. Anwendungen für Quadrokofter

Je nach Anwendungsfall werden Quadrokofter mit unterschiedlichem Grad an Autonomie betrieben: Im Fall des Modellflugs möchte der Hobbypilot meist noch möglichst viel von Hand steuern. Daher bedient er sich oft nur einer regelungstechnischen Stabilisierung einer Sollfluglage, welche über eine Fernsteuerung vorgegeben wird, und regelt den Vorschub manuell. Für hochdynamische Flüge von Hand, wird eventuell auch auf diese Unterstützung verzichtet und stattdessen eine gewünschte Drehrate des Quadrokofterrahmens vorgegeben und eingeregelt. Für eine direkte Vorgabe der Drehmomente und einen dadurch vollständigen Verzicht auf regelungstechnische Unterstützung, hat auch ein sehr geübter Hobbypilot kein ausreichend gutes Reaktionsvermögen. Für eher ungeübte Hobbypiloten gibt es dagegen bei kommerziell erhältlichen Systemen zusätzlich zur Stabilisierung der Fluglage auch die Möglichkeit eine gewünschte Flughöhe oder Steigrate regelungstechnisch stabilisieren zu lassen. Dadurch muss sich der Hobbypilot nur noch auf die Bewegung in der horizontalen Ebene konzentrieren. Eine weitere Möglichkeit mit noch mehr Autonomie, welche gerne im Bereich der Luftfotographie eingesetzt wird, ist das autonome Anfliegen und Einhalten einer gewünschten GPS-Position. Der Luftfotograf muss sich somit nicht um die Stabilisierung des UAVs kümmern. Zusätzlich zur Position kann er auch einen gewünschten Kurswinkel, der oft mit dem englischen Begriff Heading bezeichnet wird, vorgeben. Für Luftfilmographie und Anwendungen in der Fernerkundung und Überwachung ist es oft zusätzlich von Interesse, welche Flugbahn auf dem Weg zum Ziel realisiert und wie schnell und mit welchem Verlauf des Headings diese abgeflogen wird. Je nachdem ob der exakte zeitliche Verlauf von Bedeutung ist oder nicht, kann diese Anwendung regelungstechnisch als ein Pfad- oder Trajektorienfolgeproblem behandelt werden. In diesem meist noch wissenschaftlichen Anwendungsfall übernimmt der Mensch nur mehr die Rolle des Pfad- bzw. Trajektorienplaners und das geregelte UAV realisiert die Vorgaben autonom mithilfe eines Pfad- oder Trajektorienfolgereglers. Ebenso Gegenstand aktueller Forschung ist eine Anwendung in der der Mensch nur noch ein Missionsziel definiert und ein oder mehrere UAVs im Schwarm ihre Flugbahn und deren zeitlichen Verlauf selbst planen und mithilfe eines Pfad- oder Trajektorienfolgereglers umsetzen.

1.2. Anforderungen an ein Trajektorienfolgeproblem

Diese Arbeit greift einen der beiden letztgenannten Anwendungsfälle mit hoher Autonomie auf Seiten des UAVs auf, in dem der zeitliche Verlauf der Flugbahn von Bedeutung ist und der Mensch nur noch die Aufgabe der Trajektorienplanung übernimmt. Für diese Anwendung ergeben sich die folgenden zwei Fragestellungen:

1. Wie ist die Trajektorie zu wählen, damit diese physikalisch realisierbar und zugleich zweckmäßig für die vorliegende Anwendung ist?
2. Wenn eine zweckmäßige und realisierbare Trajektorie gefunden wurde, welcher Trajektorienfolgeregler kann diese Trajektorie am besten umsetzen?

Damit eine Trajektorie realisierbar ist, muss diese einerseits aufgrund der Physik des Quadropters hinreichend glatt sein – im Allgemeinen muss die Trajektorie für die Position vierfach stetig differenzierbar sein – und andererseits einen an die Leistungsfähigkeit der Motoren angepassten Zeitverlauf aufweisen. Ob eine Trajektorie zweckmäßig ist, liegt an der jeweiligen Zielsetzung der Anwendung. Es gibt beispielsweise Ansätze, mit welchen eine möglichst schnelle und hochdynamische Trajektorie generiert werden kann, siehe beispielsweise [39, 81], aber auch die Erstellung einer möglichst energieeffizienten Trajektorie oder einer Trajektorie mit der geringsten zurückzulegenden Flugstrecke ist denkbar.

In dieser Arbeit wird die zweite der oben aufgelisteten Fragestellung behandelt und somit angenommen, dass bereits eine zweckmäßige und realisierbare Trajektorie generiert wurde. Ein hierfür entwickelter Trajektorienfolgeregler sollte möglichst viele Trajektorien, darunter hochdynamische und auch unkonventionelle Manöver wie Loopings, realisieren können. Dabei stellt sich die übliche regelungstechnische Forderung nach einer schnell und schwingungsarm abklingenden Regelabweichung. Beides lässt sich als die Forderung nach einer möglichst hohen *Performanz* zusammenfassen. Ebenso entscheidend für die Güte einer Trajektorienfolgeregelung ist die Qualität und Zuverlässigkeit mit der die Trajektorie realisiert wird, wenn Störungen wie ausfallende Komponenten oder Windturbulenzen auftreten oder sich Unsicherheiten im Regelungsentwurf auf das Flugverhalten auswirken. Daher sollte ein Trajektorienfolgeregler den Einfluss von möglichst vielen Unsicherheiten und Störungen kompensieren können, was der Anforderung nach einer möglichst hohen *Robustheit* gleichkommt. Die Forschung der vergangenen Jahre hat sich intensiv mit der ersten Forderung nach einer möglichst hohen Performanz beschäftigt und diese scheint heute weitestgehend erfüllt zu sein. Aktuelle Arbeiten greifen daher zunehmend die zusätzliche Forderung nach einer möglichst hohen Robustheit auf. Bevor aber näher auf die Details hierzu eingegangen wird, soll zunächst eine kurze Einführung in die Dynamik von VTOLs erfolgen.

1.3. Beschreibung der Dynamik eines VTOLs

Die grundlegende Dynamik eines VTOLs kann ohne Einbeziehung von äußeren Störungen und hochdynamischen Effekten, wie beispielsweise Strukturdynamik, durch

1. Einleitung

folgende Gleichungen beschrieben werden:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}, \quad (1.1a)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}_t(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\theta}, T, \boldsymbol{\tau}), \quad (1.1b)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{f}_\theta(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}), \quad (1.1c)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{f}_\omega(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau}). \quad (1.1d)$$

Dabei wird das Flugobjekt als ein Starrkörper mit 6 Freiheitsgraden behandelt, dessen Position und Geschwindigkeit in einem kartesischen Koordinatensystem mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ bezeichnet ist. Die Beschreibung der Fluglage bzw. der räumlichen Ausrichtung erfolgt über den Zustand $\boldsymbol{\theta}$. Dieser kann beispielsweise über die Rotationsmatrix, einem Quaternion oder durch Eulerwinkel parametrisiert sein, für Details hierzu siehe beispielsweise [15, 111]. $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ ist die Rotationsgeschwindigkeit des Körpers und bildet zusammen mit den zuvor erwähnten Größen $\boldsymbol{\theta}$, \mathbf{v} und \mathbf{x} den Flugzustand. \mathbf{f}_t , \mathbf{f}_θ und \mathbf{f}_ω sind nichtlineare Funktionen der Zustände und der Systemeingänge, welche durch den Vorschub $T \in \mathbb{R}$ und das Drehmoment $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^3$ gegeben sind. Der Vorschub und das Drehmoment werden je nach Art des VTOLs über unterschiedliche Antriebe realisiert: Beispielsweise mit einem Haupt- und Heckrotor und deren Rotorblattverstellung am Helikopter, einem Treibwerk und dessen Ausrichtung am Ducted Fan VTOL oder über mehrere Rotoren mit einstellbaren Drehzahldifferenzen am Multikopter. Um die entsprechenden Vorgaben für die jeweiligen Aktoren aus dem gewünschten Vorschub und Drehmoment zu berechnen, gibt es je nach Bauart des VTOLs einen eindeutigen und meist umkehrbaren mathematischen Zusammenhang. Bei Vernachlässigung der Aktuatordynamik ist dieser durch eine statische Funktion darstellbar.

Die Dynamik, beschrieben durch Gleichung (1.1a) und (1.1b), wird meist als *translatorische Dynamik* oder *Positionsdynamik* bezeichnet, welche durch den Vorschub T und durch zwei der drei Freiheitsgrade des Lageparameters $\boldsymbol{\theta}$ beeinflusst werden kann. Diese zwei Freiheitsgrade der Lage ermöglichen eine Verkippung der Schubrichtung im Raum, wohingegen der dritte Freiheitsgrad eine Verdrehung des Körpers um die Schubrichtung herum zulässt, welche keinen Einfluss auf die Positionsdynamik hat. Daher ist es möglich diesen dritten Freiheitsgrad unabhängig von der Positionsdynamik zu regeln. Je nach Art der gewählten Lageparametrierung, ergeben sich hierfür unterschiedliche Möglichkeiten: Bei der Verwendung von Eulerwinkeln bietet sich eine Regelung des *Gierwinkels*, im Englischen als *Yaw Angle* bezeichnet, an, um diesen Freiheitsgrad auszunutzen. Bei Quaternionen bzw. der Drehmatrix gibt es andere Ansätze, dazu mehr in Abschnitt 1.4.2. Grundsätzlich wird dieser weitere Freiheitsgrad in dieser Arbeit unabhängig von der jeweiligen Beschreibungsform als *Heading* bezeichnet.

Die Dynamik beschrieben durch Gleichung (1.1c) und (1.1d) wird oft als *rotatorische Dynamik* oder *Lagedynamik* bezeichnet, welche über das Drehmoment $\boldsymbol{\tau}$ steuerbar ist. Die direkte Wirkung des Drehmoments $\boldsymbol{\tau}$ auf die translatorische Dynamik, wie in Gl. (1.1b) gegeben, ist nicht bei jedem VTOL vorhanden. Fehlt diese Kopplung, wie beispielsweise bei einem Quadropter, weist (1.1) eine untere Dreiecksstruktur auf, im Englischen als *Strict-Feedback Form* oder *Lower Triangular Form* bezeichnet, und ermöglicht die Anwendung von Kakadenregelungen [101] und Backstepping [60].

1.4. Stand der Technik

Dieser Abschnitt beschreibt den aktuellen Stand der Forschung zur Trajektorienfolgeregelung für die Position und das Heading eines VTOLs. Es sei angemerkt, dass der folgende Überblick aufgrund der Fülle an Arbeiten auf diesem Gebiet keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben kann. Es werden jedoch die wichtigsten Entwicklungsschritte auf diesem Gebiet bis zum heutigen Stand dargestellt:

1.4.1. Trajektorienfolgeregelung für die Position und das Heading eines VTOLs

Bevor die erste Trajektorienfolgeregelung für VTOLs erschien, beschäftigte sich die Forschung in diesem Bereich mit *linearen und teils robusten Regelungen* für die Stabilisierung des Schwebezustands an bemannten Senkrechtstartern und Hubschraubern, siehe Hyde und Glover [46], Weilenmann et al. [110] und Bendotti und Morris [6]. Man erkannte, dass die Einzugsbereiche dieser Regelungen für hochdynamische Flugmanöver nicht ausreichen und suchte nach Methoden den nutzbaren Flugraum zu erweitern. Ein Ansatz dazu war das *Gainscheduling* [68], mithilfe dessen La Civita et al. [61] den Flugbereich für einen Modellhubschrauber erweitern und dadurch schnellere Flugmanöver ermöglichen könnte. Die erste Trajektorienfolgeregelung zu diesem Zweck stellt Hauser et al. [38] für ein planares VTOL vor und nutzt dafür eine *Ein-Ausgangs-Linearisierung* [50]. Ein entscheidendes Kriterium für das Gelingen dieser Ein-Ausgangs-Linearisierung war die Vernachlässigung der am Hubschrauber und weiteren VTOLs auftretenden kleinen Volumenkräfte:

Problem der kleinen Volumenkräfte

Wie in Abschnitt 1.3 bereits erwähnt, gibt es eine Reihe von VTOLs, beispielsweise Hubschrauber und Mantelpropeller (Ducted Fan) VTOLs, bei welchen sich das gewünschte Drehmoment nicht entkoppelt von der Schubkraft erzeugen lässt. Dadurch wirkt das erzeugte Drehmoment direkt in die translatorische Dynamik ein. Die Ursache dafür liegt in der Art des Antriebs und dessen Wirkung wird als kleine Volumenkraft, im Englischen als *Small Bodyforce* bezeichnet. Da diese Eigenschaft die Dynamik der betroffenen VTOLs nicht-minimalphasig macht, ist die Regelung dieser Systeme besonders herausfordernd und hat aus diesem Grund eine Vielzahl von Veröffentlichungen hervorgebracht. Da der Einfluss dieser Kopplung laut Hauser et al. [38] jedoch gering ist, war einer der ersten Ansätze diese zunächst zu vernachlässigen. Dadurch erhielt die modellierte Dynamik eine untere Dreiecksstruktur und wurde minimalphasig, so dass ein flacher Ausgang angegeben werden konnte und eine Ein-Ausgangs-Linearisierung zum gewünschten Ziel führte. Viele weitere Arbeiten folgten dem von Hauser et al. vorgeschlagenem Ansatz, siehe [56], [102], [57] und [31]. Es wurden aber auch zahlreiche Ansätze entwickelt, mit dem Hintergrund die Nichtminimalphasigkeit am VTOL explizit zu berücksichtigen bzw. die kleinen Volumenkräfte elegant in den Regelungsentwurf miteinzubeziehen. Da dieser Aspekt jedoch für den Regelungsentwurf am Quadropter nicht von Interesse ist – der Quadropter ist von dieser Kopplung nicht betroffen, wird dies hier nicht weiter ausgeführt. Bedeutende Arbeiten in diese Richtung sind [79, 86, 78].

1. Einleitung

Es folgt ein nach Methoden sortierter Überblick über Ansätze explizit für den Quadrokopter als auch solche VTOLs, welche durch eine Vernachlässigung der kleinen Volumenkräfte die gleiche Modellstruktur wie der Quadrokopter aufweisen:

Ein-Ausgangs-Linearisierungen

Die erste Trajektorienfolgeregelung für die Position in allen drei Dimensionen und für das Heading eines VTOLs wird von Koo und Sastry [56] am Hubschrauber vorgestellt. In diesem Beitrag wird, analog zur Arbeit von Hauser et al. [38] für ein planares VTOL, eine Ein-Ausgangs-Linearisierung durchgeführt und dafür die Strecke bezüglich des Schubeingangs T zweifach dynamisch erweitert. Die Lage wird über Eulerwinkel parametrisiert und das Heading dementsprechend über den Gierwinkel φ beschrieben. Das erweiterte System lässt sich mit der Nomenklatur von (1.1) darstellen als

$$\begin{bmatrix} \overset{(4)}{\mathbf{x}} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}, T, \dot{T}) \begin{bmatrix} \ddot{T} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

Durch die Streckenerweiterung gelingt eine exakte Ein-Ausgangs-Linearisierung für das dynamisch erweiterte System mit einer vierfach stetig differenzierbaren Trajektorie für die Position und einer zweifach stetig differenzierbaren Trajektorie für das Heading. Diese Anforderungen an die Trajektorien sind systeminhärent und unabhängig vom gewählten Regelungsansatz. Ebenso systeminhärent ist die Forderung, dass der Vorschub stets ungleich Null sein muss, da sonst das Trajektorienfolgeproblem unlösbar ist. Dies zeigt sich in (1.2) dadurch, dass \mathbf{G} bei $T = 0$ singulär wird. In der Arbeit von Koo und Sastry [56] wird zusätzlich gefordert, dass die Rahmenverkipfung stets kleiner 90° ist. Diese Einschränkung existiert in der Form nur durch die Lageparametrierung mit Eulerwinkeln, da diese bei 90° Verkipfung eine Singularität aufweisen [15]. Das Auftreten dieser Singularität sowie der Singularität bei $T = 0$ wird von Koo und Sastry nicht aktiv verhindert, sondern muss durch eine vorausschauende und mit Sicherheiten behaftete Trajektorienwahl umgangen werden. Mistler et al. [83] wendet dieses Vorgehen etwas später in vergleichbarer Weise am Quadrokopter an. Weitere Ein-Ausgangs-Linearisierungen am Quadrokopter werden in [24, 65] angewandt und dabei die Strecke ebenso dynamisch erweitert. Ohne dynamische Erweiterung gelingt nur eine *quasi-statische Ein-Ausgangs-Linearisierung* [99], wie von Buhl et al. [10] und Fritsch et al. [32] gezeigt wurde. Dieser Ansatz erzeugt jedoch eine Singularität bei einer Verkipfung von 90° unabhängig von der Lageparametrierung.

In den Arbeiten [56, 102, 65] wird erwähnt, dass eine Ein-Ausgangs-Linearisierung Defizite bezüglich Modellunsicherheiten und Störungen aufweist. Eine Regelung basierend auf Lyapunovfunktionen wäre nach Ansicht einiger Autoren eine sinnvolle und robustere Alternative. Der Grund dafür ist, dass ein solcher Ansatz im Gegensatz zur Ein-Ausgangs-Linearisierung nicht zwangsläufig alle stabilisierenden Nichtlinearitäten tilgt und das System dazu zwingt, sich linear zu verhalten. Diese Meinung deckt sich mit der gängigen Ansicht vieler namhafter Autoren auf dem Gebiet der nichtlinearen Regelung, siehe beispielsweise Sepulchre et al. [101], Krstic et al. [60] und Slotine und Li [103].

Kaskadenregelungen

Ein Regelungsverfahren das besonders gut zu Systemen in unterer Dreiecksstruktur passt, ist die Kaskadenregelung. Hamel et al. [37] stellt erstmals einen kaskadierten Ansatz zur Trajektorienfolge für die Position und das Heading eines Quadropters vor. Dabei werden drei Kaskaden bestehend aus der geregelten translatorischen und rotatorischen Dynamik sowie der geregelten Dynamik für die Aktuatoren gebildet. Dies ist eine der wenigen Arbeiten, welche die Dynamik der Motoren berücksichtigen. Häufig wird diese als vernachlässigbar schnell angenommen und dementsprechend oft nur zwei Kaskaden gebildet, beispielsweise [66, 95]. Eine Unterteilung der rotatorischen Dynamik in eine weitere Kaskade für den kinematischen und eine für den kinetischen Teil ist ebenso denkbar, wird jedoch selten durchgeführt, um die Anzahl der Kaskaden und die mit jeder Kaskade verbundene Zeitskalentrennung zu reduzieren [101]. Die Herleitung des Regelgesetzes erfolgt in den meisten Ansätzen dieser Art mithilfe von Lyapunovfunktionen, die zunächst für jede Kaskade einzeln aufgestellt und danach zu einer Lyapunovfunktion für das Gesamtsystem vereint werden. In der Arbeit von Hamel et al. kommt innerhalb der ersten beiden Kaskaden jeweils Backstepping zur Anwendung. Die Lyapunovfunktionen dieser ersten beiden Kaskaden wird mit einer weiteren Lyapunovfunktion für die dritte Kaskade vereint. Mithilfe der Gesamtfunktion kann für das Trajektorienfolgeproblem asymptotische Stabilität nachgewiesen werden. Dafür sind gewisse Bedingungen an die Anfangswerte und an die Reglerverstärkungen zu erfüllen, zudem muss eine Ober- und eine Untergrenze für den Sollschieb existieren und der Lagefehler muss kleiner 180° sein. Die zu realisierenden Stellgrößen werden in dieser Arbeit wie auch in anderen Arbeiten direkt an die Aktuatoren kommandiert. Eine dynamische Erweiterung ist für die Anwendung einer Kaskadenregelung generell nicht notwendig und bringt keine Vorteile. Weitere Kaskadenregelungen zur Trajektorienfolge sind beispielsweise [57, 35, 53, 94, 33].

Ein Nachteil der Kaskadenregelung ist ein vergleichsweise umständlicher Weg um Stabilität nachzuweisen. Sepulchre et al. [101] behandelt zwar dieses Thema ausführlich, trotzdem zeigt sich die Überprüfung der Bedingungen für Stabilität am VTOL um einiges schwieriger als bei anderen nichtlinearen Regelungsverfahren. Im Gegenzug erhält man bei der Kaskadenregelung zusätzliche Freiheitsgrade, die geschickt ausgenutzt werden können. So zeigt Wood und Cazzolato [113] eine kaskadierte Positionsregelung für ein planares VTOL, welche die Kopplung der beiden Kaskaden aus der Positions- und Lagedynamik minimiert und somit eine schnellere Konvergenz trotz geringem Stellaufwand ermöglicht. Einen Ansatz mit vergleichbarer Motivation für die räumliche Trajektorienfolge eines Quadropters, in dem diese zusätzlichen Freiheitsgrade dargestellt und geschickt ausgenutzt werden, stellt Falconi et al. [28] vor.

Backstepping

Das Backstepping passt ebenso so gut wie die Kaskadenregelung zum VTOL, bringt jedoch den Vorteil eines konstruktiven Stabilitätsnachweises mit sich [60]. Zwar nutzen einige Autoren das Backstepping, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, in jeder Kaskade einer Kaskadenregelung, darunter [37, 35, 95], wenden dies aber nicht auf das Gesamtsystem an, wodurch der konstruktive Stabilitätsnachweis verloren geht. Der erste Ansatz zur Trajektorienfolge, der das Backstepping auf das Gesamtsy-

1. Einleitung

stem anwendet, wurde von Frazzoli et al. [31] für die Position und das Heading eines Hubschraubers vorgestellt. Mithilfe einer konstruierten Lyapunovfunktion für den gesamten Regelkreis kann asymptotisch stabiles Folgeverhalten nachgewiesen werden. Die Autoren nutzen eine Lagebeschreibung mithilfe der Drehmatrix, welche sämtliche Singularitäten vermeidet und global eindeutig ist [15], wodurch sich keine Einschränkungen bezüglich der Fluglage ergeben. Das erste in diesem Sinne vollständige Backstepping für einen Quadrocopter wird von Madani und Benallegue [74] präsentiert. Auch hier wird asymptotisch stabiles Folgeverhalten für die Position und das Heading nachgewiesen und bis auf die systeminhärenten und parametrierungsbedingten Einschränkungen – die Autoren verwenden Eulerwinkel als Lageparameter – fordert der Ansatz keine zusätzlichen Bedingungen. Die meisten auf dem Backstepping basierenden Arbeiten nutzen eine dynamische Streckenerweiterung für den Vorschub, da diese das Vorgehen erheblich erleichtert. Cabecinhas et al. [12] gelingt es ein statisches Backstepping zu realisieren, indem der zu stellende Schubbetrag durch das Skalarprodukt aus dem Soll- und dem Ist-Schubvektor berechnet wird. Dadurch entsteht allerdings eine Singularität bei einem Winkelfehler von 90° .

Ein Nachteil des Backsteppings am VTOL ist die Berechnung der für das Stellgesetz notwendigen analytischen Ableitungen. Dies liegt daran, dass je nach Streckenmodell vier bis fünf Backsteppingschritte notwendig sind und die abzuleitenden Terme sehr lang und kompliziert werden können. Die Autoren Madani und Benallegue [73] erwähnen diese Problematik erstmals und verwenden für ihre praktischen Versuche notgedrungen numerische Ableitungen. In einer späteren Arbeit schlagen die Autoren einen Schätzalgorithmus zur ersatzweisen Generierung der analytischen Ableitungen vor [75]. Wood [112] stellt in seiner Arbeit ein approximatives Backstepping vor, durch das eine analytische Berechnung der Ableitungen umgangen werden kann. Farrell et al. [30] entwickelt schließlich zu diesem Zweck ein *Command Filtered Backstepping*. Hier dienen in jedem Backsteppingschritt eingefügte Tiefpassfilter dazu, die Ableitungen im niedrigeren Frequenzbereich approximativ nachzubilden. Dennoch berechnen einige Autoren diese Ableitungen analytisch. Beispiele hierfür sind [97, 18, 91].

Sliding Mode Control

Ein weiteres eher selten angewandtes Regelungsverfahren für die Trajektorienfolge ist *Sliding Mode Control* [108]. Xu und Ozguner [114] wenden dieses Verfahren am Quadrocopter an, mit der Motivation die Robustheit des Verfahrens bzgl. Modellunsicherheiten und Störungen am Quadrocopter auszunutzen. Das Problem des Chatterings, das beim Sliding Mode Control durch ein Schalten entlang des Sliding Modes entsteht, wird durch eine glatte Approximation der Signumfunktion verhindert. Simulationsergebnisse weisen ein robustes und praxistaugliches Verhalten nach. Weitere robuste Folgeregler werden in [84, 64, 67] vorgestellt.

1.4.2. Weiterentwicklung der Regelungsansätze

Die Hauptmotivation für die Autoren der bisher näher beschriebenen und früheren Arbeiten auf diesem Gebiet war hauptsächlich der nominale Regelungsentwurf selbst. Durch die intensive Forschung und einer Vielzahl an entstandenen Arbeiten auf die-

sem Gebiet, scheint diese Fragestellung mittlerweile hinreichend gut beantwortet zu sein. Nachfolgende und aktuellere Arbeiten haben daher zunehmend das Ziel, die vorhandenen Ansätze durch Feinheiten in der Parametrierung oder einer besonders geschickten und performanten sowie robusten Wahl des Stellgesetzes weiter zu verbessern. Nachfolgend sind diese Weiterentwicklungen beschrieben, wobei ein Großteil der Erweiterungen dazu dient, den Einfluss von unsicheren Systemparametern und Störungen zu kompensieren. Als Beispiele werden nicht nur Ansätze zur Trajektorienfolge, sondern auch Sollwertregelungen für die Position und das Heading herangezogen.

Integration von Sättigungsfunktionen

Durch eine Integration von Sättigungsfunktionen, wie von Teel [107] für ein planares VTOL angeregt, lassen sich die im Stellgesetz verarbeiteten Regelabweichungen und somit Zustands- bzw. Stellgrößenverläufe beschränken. Von Guenard et al. [35] wird diese Methode bei einem Trajektorienfolgeregler für die Geschwindigkeit eines Quadropters genutzt, um die Verkipfung des Rahmens nachweislich innerhalb eines angebbaren Kegels zu halten. Somit können durch die Lageparametrierung existierende Singularitäten im Betrieb umgangen werden. In der Arbeit von Cabecinhas et al. [12], wird mit dieser Erweiterung der im Regler verarbeitete Positions- und Geschwindigkeitsfehler beschränkt, so dass eine obere Schranke für den kommandierten Vorschub existiert. Eine untere Schranke für den Schubbetrag kann Wood [112] für eine Sollwertregelung der Position am planaren VTOL angeben. Dadurch verhindert Wood einen Nulldurchgang der Schubkraft und die damit verbundene Singularität. Weitere Arbeiten mit dieser Erweiterung sind [29, 116, 94, 33].

Parametrierung und Regelung des Headings

Zur Beschreibung und Regelung des Headings bietet sich bei der Verwendung von Eulerwinkeln intuitiv der Gierwinkel und somit eine Gierwinkelregelung an. Aufgrund der bereits bei 90° Fehlstellung auftretenden Singularität, versuchen immer mehr Autoren Eulerwinkel als Lageparameter zu vermeiden. Bei der Verwendung von Quaternionen oder einer Parametrierung mit Drehmatrizen, kann das Heading auf verschiedenen Arten beschrieben und geregelt werden und es stellt sich die Frage, welche davon besonders vorteilhaft ist:

Von Lee et al. [66] wird aus der Sollschrubrichtung und einer Sollvorgabe für eine zweite körperfeste Koordinatenachse eine vollständige Wunschlage für den Flugkörper bestimmt und eingeregelt. Der Freiheitsgrad dieser zweiten körperfesten Koordinatenachse ist somit indirekt als das Heading definiert. Bei dieser Definition muss allerdings sichergestellt werden, dass beide Wunschrichtungen stets linear unabhängig sind. Wählt man die Sollvorgabe für die zweite körperfeste Koordinatenachse horizontal zum Boden, muss gewährleistet sein, dass der Sollschrub stets in der oberen Halbkugel verbleibt.

Einen weiteren Ansatz bei dem ein Hubschrauber stets in Richtung der horizontalen Fluggeschwindigkeit ausgerichtet werden soll, stellt Olfati-Saber [87] vor. Hier wird aus der Sollschrubrichtung und der Richtung der aktuellen Geschwindigkeit eine

1. Einleitung

Wunschlage derart erstellt und eingeregelt, so dass der aktuelle Geschwindigkeitsvektor immer in der Ebene liegt, die von der Sollschubrichtung und einer weiteren körperfesten Koordinatenachse aufgespannt wird. Hier muss ebenfalls sichergestellt werden, dass die vektorielle Sollschubrichtung und der Geschwindigkeitsvektor stets linear unabhängig sind. Im Fall des Schwebeflugs ist der Geschwindigkeitsvektor undefiniert, was entsprechend behandelt werden muss. Cunha et al. [18] integriert einen vergleichbaren Ansatz in die Regelung für einen Quadrocopter.

Eine Lageparametrierung, welche sich besonders vorteilhaft für die Regelung des Headings erweist, wird von Buhl et al. [10] und Fritsch et al. [32] vorgestellt. Die Autoren definierten eine passend zum VTOL gewählte zweigeteilte Drehreihenfolge und parametrieren diese mit zwei Quaternionen. Die erste Drehung beschreibt dabei die Verkipfung des Schubvektors im Raum und umfasst zwei Freiheitsgrade. Die zweite Drehung beschreibt die Verdrehung des Flugkörpers um den Schubvektor herum und umfasst somit exakt den Freiheitsgrad, der keinen Einfluss auf die Positionsdynamik hat, siehe Abschnitt 1.3. Bei den zuvor angeführten Ansätzen ist das Heading stark von der Sollschubrichtung abhängig. Daher können bei diesen Ansätzen Änderungen in der Sollschubrichtung zu schnellen Änderungen des Headings führen und bei entsprechender Regelung dieses Freiheitsgrads in anspruchsvollen Stellgrößenverläufen resultieren. Bei dem zweigeteilten Ansatz von Buhl et al. ist jedoch der Verlauf der zweiten Drehung, sprich der Verlauf des Headings, weitestgehend unabhängig von Änderungen der Schub- bzw. Sollschubrichtung und führt zu milden Anforderungen an die Stellgrößen, auch bei aggressivem Flugverhalten bzgl. der Position. Dafür ist die geometrische Anschaulichkeit dieser Definition nicht so transparent, fällt jedoch für kleine Verkipfungen mit der des Gierwinkels zusammen. Ein entscheidender Vorteil gegenüber anderen Parametrierungen ist zudem, dass erst bei einer Verdrehung von 180° eine Singularität auftritt.

Ausgangsregelungen

Die meisten Regelungsentwürfe für VTOLs benutzen den vollständigen Zustandsvektor im Stellgesetz. Dies ist bei Flugzeugen durchaus legitim, denn durch die vielseitige und oft redundante Sensorik lässt sich der Flugzustand gut rekonstruieren. Dabei werden Position, Geschwindigkeit, Drehbeschleunigungen sowie die Erdanziehung meist direkt mit Sensoren gemessen. Zusätzlich kann eine Magnetfeldmessung der Erde genutzt werden um die gesamte Fluglage, welche nicht direkt messbar ist, mithilfe einer Beobachterstruktur zu schätzen. Für den Stabilitätsnachweis wird die Dynamik des Beobachters bisher nur selten berücksichtigt. Daher ist ein Entwicklungstrend in den letzten Jahren, eine Ausgangsregelung zu realisieren, bei welcher entweder auf die Beobachtung der Fluglage durch geschickte Wahl der Regelung verzichtet wird [96], oder diese explizit in den Stabilitätsnachweis aufgenommen wird [100].

Modellbasierte Kompensation von aerodynamischen Effekten

Eine Berücksichtigung der Aerodynamik im Regelungsentwurf für VTOLs wurde bisher oft vermieden, vermutlich aufgrund der ohnehin hohen Komplexität der Regelungsaufgabe. Da diese Effekte durchaus erheblichen Einfluss auf das Flugverhalten

haben können, siehe beispielsweise [9, 44], lohnt es sich diese für eine präzise und hochdynamische Flugregelung zu berücksichtigen. Einige Arbeiten verfolgen zu diesem Zweck eine modellbasierte Strategie:

Wood [112] entwickelt erstmals eine Folgeregelung für die Position eines VTOLs basierend auf dem Backstepping, für welche aerodynamische Effekte modelliert und kompensiert werden können. Um die nötigen Ableitungen für das Backstepping trotz des komplexeren Streckenmodells zu generieren, stellt Wood zwei Ansätze vor: Einerseits einen Ansatz ähnlich dem des Command Filtered Backsteppings, bei dem die Ableitungen im niedrigen Frequenzbereich numerisch bestimmt werden, andererseits einen Ansatz, der die Aerodynamik approximativ beschreibt und dadurch das Entstehen von komplexen und nicht handhabbaren Ausdrücken vermeidet. Huang et al. [44] untersucht und berücksichtigt ebenfalls den Einfluss von aerodynamischen Effekten in einem Ansatz zur Trajektorienfolge am Quadropter. Die Autoren schlagen eine modellbasierte Kompensationsstrategie vor und zeigen die effektive Kompensation der betrachteten Störeffekte im realen Flugversuch.

Adaptive Kompensation von allgemeinen Unsicherheiten und Störungen

Eine weitaus häufiger genutzte Methode um aerodynamische Effekte und auch den Einfluss von allgemeinen Unsicherheiten in der Modellierung sowie Störungen zu kompensieren, ist die adaptive Regelung: Die erste adaptive Regelung für VTOLs wurde von Mahony und Hamel [77] für einen Modellhubschrauber vorgestellt, in welcher der Einfluss des Untergrunds bei Start und Landung adaptiv kompensiert wird. Die Arbeit nutzt ein unsicheres Modell für diesen aerodynamischen Effekt, dessen unsichere Parameter über ein *Adaptive Backstepping with Tuning Functions* [59] geschätzt werden. Mahony und Hamel regen eine weitere Entwicklung in diese Richtung an, da diese Effekte für eine präzise Regelungen nicht vernachlässigbar seien. Weitere adaptive Regelungsansätze für VTOLs lassen sich nach dem zu kompensierenden Effekt folgendermaßen gliedern:

- **Kompensation von konstanten Störungen:** Einige Arbeiten nutzen die Methoden der adaptiven Regelung um konstante äußere Einflüsse, wie beispielsweise den Einfluss von konstantem Wind, zu kompensieren. Pflimlin et al. [92] wendet für eine Positionsregelung am Ducted Fan VTOL zu diesem Zweck ebenfalls ein *Adaptive Backstepping with Tuning Functions* an. Diese Methode erweitert die klassische Lyapunovfunktion des Backsteppings um einen positiv definiten Term, bestehend aus der Differenz der tatsächlichen Störung und deren Schätzung. Damit lässt sich eine Vorschrift zur Schätzung der Störung sowie ein Regelgesetz herleiten, das einen asymptotisch abklingenden Regelfehler sicherstellt. Pflimlin et al. [92] verifiziert den Ansatz mithilfe von realitätsnahen Simulationen und beabsichtigt, eine Erweiterung für ein robusteres Verhalten zu entwickeln. Weitere Arbeiten mit vergleichbaren adaptiven Erweiterungen sind beispielsweise [13, 18, 95].
- **Kompensation von parametrischen Modellunsicherheiten:** Andere Arbeiten beschäftigen sich mit der Kompensation von unsicheren Streckenparametern. Huang et al. [45] nutzt ein *Adaptive Backstepping* [59] zur Kompen-

1. Einleitung

sation einer unsicheren Masse für eine Trajektorienfolgeregelung am Quadrocopter. Die Autoren integrieren einen robustifizierenden Mechanismus, bekannt unter dem Begriff *Parameter Projection* [48], welcher den Schätzwert für die Masse innerhalb einer gewissen Zahlenmenge hält und somit eine Nullstelle der Schätzung und die damit verbundene Singularität im Regelgesetz verhindert. Es wird prinzipiell ein asymptotisch abklingender Folgefehler nachgewiesen, dabei bleibt jedoch ungeklärt, auf welche Weise die Ableitungen für das Backstepping berechnet werden und ob der Nachweis auch bei aktiv werdender Parameter Projection gilt, da diese nicht stetig differenzierbar ist. Einen vergleichbaren Ansatz für einen Modellhubschrauber stellen Bing und Wei [8] vor. Hier werden die Ableitungen der Reglersignale mittels eines Differenzierers bestimmt. Der Projektionsoperator ist jedoch ebenfalls nur stetig.

Eine Einschränkung bei der alleinigen Kompensation von parametrischen Modellunsicherheiten ist, dass die Modellstruktur als exakt bekannt angesehen werden muss. Zudem setzen die meisten der existierenden adaptiven Methoden voraus, dass der zu schätzende Parameter linear in einen bekannten funktionalen Ausdruck eingehen muss, was im Englischen als *linear-in-the-parameters Uncertainties* bezeichnet wird und die Menge der kompensierbaren Parameterunsicherheiten weiter einschränkt, siehe [59, 48, 85]. Daher erscheint die folgende Zielsetzung flexibler und praxisrelevanter zu sein:

- **Kompensation von unstrukturierten Modellunsicherheiten:** Ein erweitertes *Model Reference Adaptive Control* [85] zur Kompensation von Modellunsicherheiten, deren Struktur nicht genauer bekannt sein muss, präsentieren Johnson und Kannan [51] für eine Trajektorienfolgeregelung am autonomen Helikopter. Die Positions- und Lagedynamik werden in kaskadierter Form unter Vernachlässigung deren Kopplung mithilfe einer Ein-Ausgangs-Linearisierung geregelt und dabei Sollwertverläufe realisiert, die durch ein Referenzmodell erzeugt werden. Ein neuronales Netz, ein Single Hidden Layer (SHL) Perceptron [70], schätzt die Modellunsicherheiten und Störungen, die zu einer Abweichung der realen Strecke gegenüber dem Referenzmodell führen. Unabhängig von der Struktur der Unsicherheiten, wird deren Schätzung mit steigender Neuronenanzahl immer genauer, jedoch nie nachweislich exakt. Ist eine obere Schranke für den zu schätzenden Term bekannt und sind gewisse Bedingungen an die Lerngeschwindigkeit des neuronalen Netzes erfüllt, kann für den Regelkreis *Uniform Ultimate Boundedness* gezeigt werden, was im Unterschied zur *Uniform Boundedness* definiert ist als:

Definition 1. [54, Def.4.6] Die Lösungen des Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad (1.3)$$

wobei $\mathbf{f} : [0, \infty) \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stückweise stetig in t und lokal Lipschitz-stetig in \mathbf{x} auf $[0, \infty) \times \mathbb{D}$ ist und $\mathbb{D} \in \mathbb{R}^n$ den Ursprung enthält, werden als **Uniformly Bounded (UB)** bezeichnet, wenn eine Konstante c unabhängig von der Anfangszeit $t_0 \geq 0$ existiert und für jedes $a \in (0, c)$ ein $b = b(a) > 0$ ebenfalls

unabhängig von der Anfangszeit t_0 existiert, so dass gilt

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| \leq a \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| \leq b, \quad \forall t \geq t_0. \quad (1.4)$$

Existieren die Konstanten b und c unabhängig von $t_0 \geq 0$ und existiert für jedes $a \in (0, c)$ eine Zeit $T = T(a, b) \geq 0$ unabhängig von t_0 , so dass gilt

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| \leq a \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| \leq b, \quad \forall t \geq t_0 + T, \quad (1.5)$$

werden die Lösungen von (1.3) als **Uniformly Ultimately Bounded (UUB)** mit der Schranke b bezeichnet.

Diese Systemeigenschaften garantieren zwar nicht die asymptotische Konvergenz der Zustände gegen Null, der Ansatz von Johnson und Kannan deckt jedoch wesentlich mehr Modellunsicherheiten ab und ist dadurch realitätsnaher als die zuvor diskutierten Ansätze, welche die asymptotische Konvergenz der Fehlerzustände nachweisen. Mithilfe von Experimenten, für welche das Hub-schraubermodell um den Schwebeflug linearisiert und sämtliche Nichtlinearitäten und Unsicherheiten geschätzt werden, verifizieren die Autoren ihre Regelung.

Madani und Benallegue [76] nutzen ebenfalls ein neuronales Netz, ein Multi-layer Perceptron, um Modellunsicherheiten mit unbekannter Struktur für eine Trajektorienfolge am Quadropter zu kompensieren. Die Autoren kombinieren das neuronale Netz mit einem *Backstepping*, wodurch keine strukturbedingten Kopplungen zwischen Positions- und Lagedynamik geschätzt und ausgeglichen werden müssen, da diese bereits vom nominalen Regler getilgt werden. Unsicherheiten, welche als Eingangsverstärkung wirken, dies sind die Masse, die Massenträgheit und unsichere Größen im Antrieb, kann der Ansatz jedoch nicht kompensieren. Unter der Bedingung, dass die virtuellen Stellgrößen, die Fluggeschwindigkeit und die Drehrate, sowie die Einzelschübe der Rotoren beschränkt sind, kann mit ausreichend schneller Adaptionsgeschwindigkeit *Uniform Ultimate Boundedness* für den geschlossenen Regelkreis nachgewiesen werden. Dabei ist jedoch sehr fraglich, ob die gestellten Bedingungen ohne weiteres überprüft bzw. sichergestellt werden können. Der Ansatz wird anhand von Simulationen verifiziert.

Wie in diesem Abschnitt beschrieben, existieren mittlerweile einige Ansätze für VTOLs um parametrische, sowie auch unstrukturierte Unsicherheiten und konstante äußere Störungen zu kompensieren. Hierfür wurden oft klassische adaptive Ansätze verwendet, die auf dem *Certainty Equivalence Principle* aufbauen [48]. Bei diesem Prinzip, dem die meisten adaptiven Regelungen angehören, wird der Regler für den nicht-adaptiven Fall entwickelt; die unbekannt Parameter des Reglers (direkte Verfahren) oder der Strecke (indirekte Verfahren) werden durch einen Parameterschätzer, dem Adaptionsgesetz, geschätzt und im Regler derart verwendet als wären es die tatsächlich richtigen Werte. Ein oft zur adaptiven Folgeregelung angewandte Methode dieser Art ist das *Model Reference Adaptive Control* (kurz MRAC) [85]. Ebenso verwenden einige Arbeiten für VTOLs, aufgrund der unteren Dreiecksform der Strecke,

1. Einleitung

das *Adaptive Backstepping* [59], was auf dem Certainty Equivalence Principle aufbaut, diesem jedoch nicht mehr exakt entspricht, da der Regler durch die Integration eines Adaptionsgesetzes im Zuge des Backsteppings verändert wird.

Dass jedoch derartige adaptive Regelungen ohne Modifikationen sensibel gegenüber Modellabweichungen, nicht modellierter Dynamik, externen Störungen und Messrauschen sind und leicht an die Stabilitätsgrenze gelangen, ist mittlerweile bekannt [98, 48, 59] und hat die Entwicklung von robusten adaptiven Regelungsverfahren motiviert. Ebenso ist bekannt, dass herkömmliche auf dem Certainty Equivalence Principle aufbauende Adaptionsverfahren nicht nur Defizite bzgl. der Robustheit sondern auch schlechtes Einschwingverhalten, sprich lange Einschwingvorgänge mit großen Überschwingern, aufweisen [115, 20, 105]. Daher wird auf dem Gebiet der adaptiven Regelung seit einigen Jahren intensiv daran gearbeitet, diese Nachteile durch Erweiterungen und Neuentwicklung zu beseitigen, was nachfolgend kurz dargestellt werden soll:

1.4.3. Entwicklung auf dem Gebiet der adaptiven Regelung

Eine Motivation zur Entwicklung von verbesserten, robusten adaptiven Regelungsverfahren und einen Einblick in die damit verbundenen Herausforderungen und Problemstellungen gibt Anderson in [4, 3] sowie Ioannou und Sun [48]. Ein bedeutendes Defizit herkömmlicher adaptiver Regelungen ist die Notwendigkeit eines hinreichend hohen Informationsgehalts der anregenden Signale (Notwendigkeit von *Persistent Excitation* [48]). Denn ohne ausreichendem Informationsgehalt, kann ein Drift des Schätzwertes und in dessen Folge plötzlich eintretende, große Signalschwankungen (*Bursting* [2, 4]) sowie plötzliche Instabilität auftreten. Es wurden einige Erweiterungen entwickelt die das Problem zwar nicht strukturell beheben, dieses jedoch im Betrieb teils auf Kosten der Performanz unterdrücken. Dazu zählt das Konzept der *Deathzone*, des *Leakage* und der *Parameter Projection* [103, 48, 85], welche Abhilfe schaffen indem sie einen übermäßigen Drift der Schätzwerte im Betrieb verhindern. Das Robustheitsdefizit gegenüber nicht-modellierter Dynamik und externen Störungen wurden mit einer *Dynamic Normalization* [49, 58, 93] adressiert. Diese verlangsamt im Grunde den Adaptionsmechanismus wenn die Schätzwerte übermäßig anwachsen.

Diese Maßnahmen verbessern jedoch nicht des Einschwingverhalten [48]. Diesbezüglich fand folgende Entwicklungen statt: Datta und Ioannou [20] entwickelten ein *Modified MRAC*, bei welchem der adaptive Regleranteil des MRACs unverändert übernommen wird und eine weitere nicht adaptive Rückführung für besseres Einschwingverhalten sorgt. Wie später gezeigt wurde [19], resultiert diese Verbesserung wie auch bei weiteren Ansätzen dieser Art [106, 48] aus einem nicht-adaptiven High-Gain Regelanteil. Lavretsky [62] entwickelte ein *Combined/Composite MRAC* kurz CMRAC, ähnlich dem von Slotine und Li [103] etwa zeitgleich vorgeschlagenen Composite MRAC, das zusätzlich zum Folgefehler auch den Schätzfehler als Informationsquelle nutzt und dadurch eine schnellere Parameterkonvergenz erreicht. Ein vergleichbarer Ansatz wurde ebenso von Duarte und Narendra [25] vorgeschlagen. Für das *Adaptive Backstepping with Tuning Functions* kann bereits eine bessere Performanz gegenüber dem nichtadaptiven Backstepping nachgewiesen werden [60]. Wie beim nichtadaptiven Backstepping besteht aber auch bei der adaptiven Variante der

bereits im vorherigen Abschnitt diskutierte Nachteil, dass die Berechnung der Ableitungen bei größeren Systemen sehr umfangreich und komplex werden. Um dies zu umgehen, entwickelte Dong et al. [23] ein *Adaptive Command Filtered Backstepping*, basierend auf der nicht-adaptiven Variante von Farrell et al. [30]. Mit zunehmender Filtergeschwindigkeit kann hiermit ebenso eine zunehmend genaue Approximation der Ableitungen erreicht werden. Eine weitere Entwicklung für ein besseres Einschwingverhalten ist eine Abwandlung des MRACs, welche von Lavretsky et al. [63] unter dem Begriff *Predictor-Based MRAC* kurz PMRAC vorgestellt wurde. Dieser Ansatz nutzt den Schätzfehler anstatt dem Folgefehler als Triebfeder der Adaption. Die Parameterschätzung erfolgt hier durch einen Zustandsschätzer, der im Gegensatz zu einem Zustandsbeobachter, den zukünftigen Zustand basierend auf der jetzigen Zustandsänderung schätzt. Dieser Schätzer kann eine Vielzahl an Unsicherheiten der Strecke sowie auch *nonlinear-in-the-parameters* Unsicherheiten darstellen, bei welchen der unbekannte Parameter nichtlinear in einen bekannten funktionalen Ausdruck eingeht. Ebenso wirkt sich dieser erhöhte Informationsgehalt im Schätzsignal positiv auf die Robustheit aus. Die \mathcal{L}_1 -adaptive Regelung [42] nutzt ebenfalls einen Zustandsschätzer und kann als Erweiterung des PMRACs angesehen werden. Dieser Ansatz kann ebenso eine Vielzahl von Unsicherheiten, nicht modellierter Dynamik und externen Störungen aber auch Totzeiten und Aktuatorlimitierungen abdecken. Der entscheidende Unterschied zum PMRAC ist ein zusätzlich eingefügter Tiefpassfilter, der für eine Entkopplung der Adaptionodynamik von der Folgedynamik sorgt. Dadurch kann die Adaptionodynamik sehr schnell gestaltet werden, was zu zügig abklingenden und geringen Schätzfehlern führt, ohne dass die Robustheit des Folgeregelkreis negativ beeinflusst wird. Wie beim PMRAC gilt auch hier, dass kleine Schätzfehler zu kleinen Folgefehlern führen, wodurch dieser Ansatz sowohl *robust als auch performant* ist [55]. Der Kompromiss aus Robustheit und Performanz wird über die Architektur der Regelung zudem transparent und kann über die Schnelligkeit des eingefügten Filters gesteuert werden. Mit zahlreichen Anwendungen im Luftfahrtbereich, z.B. [14, 22, 69, 34, 52], scheint dieser Ansatz eine Lücke zwischen den bisher verfügbaren theoretischen adaptiven Regelungsverfahren und den Anforderungen einer praktischen Anwendung, gerade im Bereich der Luftfahrt, zu schließen [80], [90].

Anwendung aktueller verbesserter adaptiver Verfahren am VTOL

Nur vereinzelt finden die im vorhergehenden Abschnitt beschriebenen, verbesserten adaptiven Verfahren Anwendung im Bereich der Regelung von VTOLs. Zu diesen gehört die Arbeit von Dydek et al. [27], in der das *Combined/Composite MRAC* für eine Trajektorienfolge am Quadrokopter angewandt wird. Das CMRAC wird in kaskadierter Form mit einer linearen LQ-Regelung verwendet, welche beide für ein um den Schwebeflug linearisiertes Modell der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_p\mathbf{\Lambda}\mathbf{u} \quad (1.6)$$

entworfen sind. Mit dem Ansatz lassen sich Unsicherheiten in der Systemmatrix \mathbf{A} sowie in der Eingangsmatrix \mathbf{B} kompensieren. Die Unsicherheiten in der Eingangsmatrix müssen sich dafür in eine bekannte Matrix \mathbf{B}_p beliebiger Struktur und eine unbekannte positiv definite Matrix $\mathbf{\Lambda}$ aufteilen lassen. Welche physikalischen Parameter des Quadrokopters hiermit abgedeckt sind, bleibt in der Arbeit offen. Für den

1. Einleitung

Ansatz kann asymptotisches Folgeverhalten nachgewiesen werden, hierfür wird auf den in der Literatur [62] angegebenen Beweis verwiesen. Da das CMRAC zwar eine verbesserte Performanz aufweist, aber ebenso wie das MRAC Defizite hinsichtlich der Robustheit hat, integriert Dydek eine Deathzone sowie eine Parameter Projection. Praktische Versuche, durchgeführt in der Nähe des Linearisierungspunkts, zeigen, dass das CMRAC gegenüber dem MRAC eine bessere Performance aufweist und einem Rotorschaden erfolgreich ausgleichen kann.

Ein weiteres verbessertes adaptives Verfahren namens *Concurrent Learning* [16] wird von Chowdhary und Johnson [17] zur Trajektorienfolge am Helikopter angewandt. Dieser Ansatz erweitert die von Johnson und Kannan [51] entwickelte adaptive Regelung zur Kompensation von unstrukturierten Unsicherheiten, siehe Abschnitt 1.4.2, so dass die Konvergenz der Schätzparameter und somit das Einschwingverhalten verbessert wird. Hierfür werden zusätzlich zu der Information aktueller Signale auch Informationen vergangener Signale genutzt, um die Parameterkonvergenz über einen längeren Zeitraum hinweg konsistent zu halten. Somit wird eine lokale Parametrierung und die Notwendigkeit von Persistent Excitation vermieden. Es können sämtliche zustandsabhängige Unsicherheiten behandelt werden, wenn hinreichend viele Neuronen verwendet werden und eine obere Schranke für die idealen Gewichtungsfaktoren der Neuronen bekannt ist. Es sind jedoch keine äußeren zeitveränderlichen Störungen über diesen Ansatz kompensierbar. Die nominale Regelung wird ebenfalls aus der Arbeit von Johnson und Kannan [51] übernommen, welche die Positions- und Lagedynamik weitestgehend unabhängig voneinander behandelt. Die Abweichungen, welche durch die vernachlässigte Kopplung der beiden Dynamiken entstehen, müssen daher von der Adaption kompensiert werden. Dies könnte durch einen vollständig nichtlinearen Regelungsansatz vermieden werden. Die Autoren weisen für den geschlossenen Regelkreis *Uniform Ultimate Boundedness* nach und verifizieren den Ansatz mithilfe von Experimenten.

Eine Variante der \mathcal{L}_1 -adaptiven Regelung zur Ausgangsregelung wird von Michini und How [82] am Quadropter angewandt. Die Adaption wird mit einer kaskadierten Sollwertregelung für die Position ohne Vorsteuerung für die innere Geschwindigkeitsregelung kombiniert, für welche alle Freiheitsgrade entkoppelt voneinander behandelt werden und das System nahe der schwebenden Ruhelage betrachtet wird. Die Regelung wird nicht modellbasiert, sondern anhand von experimentell bestimmten Übertragungsfunktionen entworfen. Experimente zeigen ein verbessertes Verhalten bei simulierten Totzeiten und Rotorschäden.

Guerreiro et al. [36] verwendet die \mathcal{L}_1 -adaptive Regelung für linear zeitvariante Systeme [42] zur adaptiven Folgeregelung für die Geschwindigkeit am Helikopter. Dazu wird das Modell entlang der gewünschten Trajektorie linearisiert. Die zu kompensierenden Unsicherheiten und Störungen aber auch alle zeitvarianten Anteile des linearisierten Systems müssen für diesen Ansatz im Bildraum der Eingangsmatrix liegen. Die Struktur der Eingangsmatrix muss folglich bekannt sein, es kann jedoch ein unsicherer skalarer Vorfaktor kompensiert werden. Welche physikalischen Parameter mit diesen Voraussetzung kompensierbar sind und welche Trajektorien trotz dieser Einschränkungen umgesetzt werden können, bleibt in der Arbeit offen. Die Autoren weisen für den geschlossenen Regelkreis *Uniform Boundedness* nach und zeigen in Simulationen eine gute Kompensation von größeren Parameterunsicherheiten und Störungen.

1.5. Ziel und Beitrag der Arbeit

Wie in den vorangehenden Abschnitten erläutert, sind die Anforderungen an eine Trajektorienfolgeregulation für VTOLs einerseits eine *hohe Performanz*, um hochdynamische Flugmanöver und schnelle Einschwingvorgänge zu realisieren, und andererseits eine *hohe Robustheit*, um trotz des Einflusses von zahlreichen Störquellen und Unsicherheiten in der Modellierung, ein stabiles und performantes Flugverhalten sicherzustellen.

Die Forschung der letzten Jahrzehnte hat zahlreiche Ansätze hervorgebracht, um eine hochdynamische Trajektorienfolge für die Position und das Heading eines VTOLs zu realisieren. Dazu gehören Regelungen, welche das nichtlineare Verhalten eines VTOLs vollständig berücksichtigen und im besten Fall derart vorsteuern, dass nur noch Modellabweichungen vom Regler kompensiert werden müssen. Aber auch Regelungen, welche möglichst wenig parametrierungsbedingte Singularitäten mit sich bringen und somit große Winkelverläufe für hochdynamische Flüge zulassen, gehören zum derzeitigen Stand der Technik.

Aufgrund der speziellen Streckenstruktur von Quadroptern (untere Dreiecksform) haben sich kaskadierte bzw. auf dem Backstepping basierende Regelungen als besonders geeignet erwiesen, da sie ein transparentes systematisches Entwurfsschema und im Gegensatz zu anderen Methoden, wie der Ein-Ausgangs-Linearisierung, eine leichte Erweiterbarkeit mit Sättigungsfunktionen und adaptiven Komponenten ermöglichen.

Die Forderung nach einer möglichst hohen Performanz ist durch den derzeitigen Stand der Technik größtenteils abgedeckt, weshalb sich die Forschung in den letzten Jahren vermehrt der zusätzlichen Forderung nach einer hohen Robustheit widmet. Ansätze für eine verbesserte Robustheit sollen eine schnelle Trajektorienfolge mit präzisiertem Flugverhalten trotz Modellunsicherheiten und Störungen ermöglichen. Neben robusten Regelungsmethoden wurden hierfür weitaus häufiger Methoden der adaptiven Regelung verfolgt und angewandt, welche den Einfluss von Störquellen aktiv kompensieren können. Trotz der bemerkenswerten Fortschritte auf diesem Gebiet, gibt es den Bedarf die existierenden Ansätze weiter zu verbessern:

Verbesserungspotential der adaptiven Regelung am VTOL

Wie bereits im vorhergehenden Kapitel detailliert beschrieben, wurden bisher hauptsächlich herkömmliche adaptive Methoden am VTOL angewandt, welche restriktive Annahmen an die Modellstruktur und an die Art der Störung stellen. So können häufig benutzte Methoden, darunter das MRAC [85] sowie das Adaptiv Backstepping [59], nur sogenannte „linear-in-the-parameters“ Unsicherheiten und konstante Störungen kompensieren. Dies deckt jedoch bei weitem nicht alle in der Praxis auftretenden Unsicherheiten und Störungen ab. Vereinfachungen und Ungenauigkeiten in der Modellierung verursachen beispielsweise auch unsichere Funktionsverläufe, welche nicht über unsichere Parameter erfasst werden können. Ebenso sind zeitveränderliche Störungen wie Windböen am VTOL sehr wahrscheinlich. Daher ist die Aussagekraft der theoretischen Stabilitätsnachweise dieser Verfahren hinsichtlich einer praktischen Anwendung eher gering. Erschwerend kommt hinzu, dass sich diese Ansätze sensibel gegenüber zusätzlichen und nicht über den Ansatz abgedeckten Unsicherheiten

1. Einleitung

ten verhalten und nur durch spezielle Modifikationen (Deathzone, e -Modification, σ -Modification [103, 48, 85]) praxistauglich gemacht werden können. Zudem haben herkömmliche adaptive Verfahren, wie das MRAC, Defizite bzgl. der Performanz, welche sich in langen und oszillierenden Einschwingvorgängen widerspiegeln [115, 20, 105]. Verbesserte adaptive Regelungsverfahren, welche diese Nachteile beseitigen, haben bereits vereinzelt ihre Anwendung im Bereich der Regelung von VTOLs gefunden. Diese ersten Anwendungen [17, 36, 82, 27], für Details siehe Abschnitt 1.4.3, beinhalten jedoch einerseits restriktive Voraussetzungen und andererseits starke Vereinfachungen im Regelungsentwurf, welche dazu führen, dass nur ein Teil der auftretenden Modellunsicherheiten und Störungen kompensiert werden können und hochperformante Flugmanöver jenseits des Schwebeflugs nicht optimal unterstützt werden. Es ist daher noch keine Anwendung am VTOL bekannt, bei der ein verbessertes aktuelles adaptives Regelungsverfahren mit einem hochperformanten Trajektorienfolger kombiniert wurde, so dass schnelle Trajektorien in weiten Bereichen des Zustandsraums trotz zahlreicher Modellunsicherheiten und zeitveränderliche Störungen präzise realisiert werden können.

Schwierigkeiten und Hindernisse

Der Grund weshalb eine derartige Kombination bisher noch nicht entwickelt wurde mag darin liegen, dass sich eine hochperformante nichtlineare Regelung am VTOL nicht ohne weiteres durch eine adaptive Regelung erweitern lässt. Insbesondere dann nicht, wenn möglichst viele Unsicherheiten und Störungen abgedeckt werden sollen und ein bei hochdynamischen Flügen zwangsläufig nichtlineares und zeitvariantes Folgeverhalten bestmöglich unterstützt werden soll:

Viele adaptive Verfahren sehen nur die Kompensation von sogenannten *Matched Uncertainties* [59] vor, bei welchen die Unsicherheiten im Bildraum der Eingangverstärkung liegen und somit direkt vom Aktuator getilgt werden können. Für ein unteraktuiertes System reicht dies nicht aus, um Unsicherheiten in allen Systemgleichungen kompensieren zu können. Eine Erweiterung auf *Unmatched Uncertainties*, bei welchen ein höherer Differenzgrad zwischen Systemeingang und Unsicherheiten bestehen darf, schafft diesbezüglich Abhilfe, schränkt jedoch den Kreis der verwendbaren Verfahren ein [59]. Hinzu kommt, dass die meisten adaptiven Verfahren ein lineares Referenzverhalten fordern [85, 5], was mit dem Ziel einer hochperformanten Regelung am VTOL nicht sinnvoll ist, da eine Trajektorienfolge am VTOL systembedingt zu nichtlinearem und zeitvariantem Verhalten führt. Ein Verfahren, das sowohl Unsicherheiten in jeder Gleichung des Modells behandeln und gleichzeitig ein nichtlineares, zeitvariantes Systemverhalten unterstützen kann, ist das *Adaptive Backstepping* [59]. Dieses kann jedoch nur linear-in-the-parameters Uncertainties kompensieren und ist nur mit speziellen Erweiterungen robust und somit praxistauglich. Daher besteht die Herausforderung der Aufgabe darin, ein adaptives Regelungsverfahren, das möglichst viele Unsicherheiten behandelt und sich sowohl robuster als auch performanter im Vergleich zu herkömmlichen Verfahren zeigt, in eine Struktur wie die des Adaptive Backstepping zu überführen. Die dabei im Zuge des Backstepping entstehenden komplexen und schwer handhabbaren Ableitungen stellen ein zusätzliches Hindernis dar. Dies kann jedoch vermieden werden, wenn eine Strategie ähnlich der des Adaptive Backstepping with Tuning Functions [59] oder des Command Filtered Backstepping [30] verfolgt wird.

Vorteile der \mathcal{L}_1 -adaptiven Regelung

Für die Entscheidung, welches der aktuellen und verbesserten adaptiven Verfahren sich am besten eignet, die diskutierten Anforderungen zu erfüllen, kann die \mathcal{L}_1 -adaptive Regelung [42] mit folgenden Argumenten überzeugen:

1. Die \mathcal{L}_1 -adaptive Regelung kann eine Vielzahl an unterschiedlichen Unsicherheiten und Störungen behandeln. Darunter sind lineare sowie nichtlineare Parameterunsicherheiten, unsichere Funktionsverläufe, zeitveränderliche äußere Störungen, nichtmodellerte Dynamik, Totzeiten und Aktuatorlimitierungen.
2. Die Robustheit und die Performanz des Ansatzes sind intensiv untersucht und durch viele Beispiele und Anwendungen bestätigt worden, wodurch das Verfahren einen vergleichsweise hohen Reifegrad besitzt.
3. Der Kompromiss zwischen Robustheit und Performanz, dem alle adaptiven Verfahren unterliegen, ist bei keinem anderen Verfahren derart transparent und leicht einstellbar.
4. Die \mathcal{L}_1 -adaptive Regelung hält eine äußerst einfaches und praktisches Adaptionsgesetz bereit, das ohne die Forderung nach Persistent Excitation auskommt und im Vergleich zu gradientenbasierten Adaptionsgesetzen keine eigene Dynamik und keine weiteren Anpassungen wie beispielsweise einen Projection Operator [48] benötigt um praxistauglich zu werden.
5. Bei der Überführung des Ansatzes in eine Struktur ähnlich die des Adaptive Backstepping, kann ein von der \mathcal{L}_1 -adaptiven Regelung vorgesehener Tiefpassfilter gleichzeitig als ein Command Filter agieren, wodurch sich automatisch der Vorteil des Command Filtered Backstepping [23] ergibt und somit die Berechnung von langen und komplexen Ableitungen bzw. die Verwendung von Differenzierern umgangen werden kann.
6. Das Verfahren ist seit einigen Jahren durch zahlreiche erfolgreiche Anwendungen im Luftfahrtsektor bekannt [14, 22, 69, 34, 52] und hat seine Praxistauglichkeit bereits bewiesen.

Dennoch besteht auch bei der \mathcal{L}_1 -adaptiven Regelung im Hinblick auf die Zielstellung dieser Arbeit die Schwierigkeiten, dass dieses Verfahren grundsätzlich für lineare Systeme entwickelt wurde. Daher fordern auch entsprechende Erweiterungen für mehrdimensionale nichtlineare Systeme, darunter auch solche in unterer Dreiecksform, ein lineares zeitinvariantes Referenzverhalten [42]. Eine Erweiterung der Theorie, bei welcher ein nichtlineares, zeitvariantes Referenzverhalten realisiert werden kann, wurde bisher nur für Systeme mit skalarem Eingang (SIMO) entwickelt [109].

Unter der Voraussetzung, dass eine Erweiterung dieser Theorie auf mehrdimensionale Systeme (MIMO) gelingt, erscheint die Kombination der \mathcal{L}_1 -adaptiven Regelung mit einem hochperformanten Folgeregler nicht nur die strukturell vorteilhafteste, sondern auch die praktikabelste zu sein und soll daher in dieser Arbeit verfolgt werden.

Beitrag der Arbeit

In dieser Arbeit wird ein hochperformanter Trajektorienfolgeregler für die Position und das Heading eines Quadropters entwickelt und mit der leistungsfähigen \mathcal{L}_1 -adaptiven Regelung kombiniert. Dadurch erhält das geregelte System nicht nur eine hohe Dynamik, um schnelle Flugmanöver zu absolvieren, sondern auch die nötige Robustheit, um mit einer Vielzahl von Unsicherheiten und Störungen umzugehen. Folgende Eigenschaften und Vorzüge sind dabei von besonderer Bedeutung und machen in ihrer Kombination den Unterschied zu bisher verfügbaren Regelungsansätzen aus:

- **Global gültige und eindeutige Lageparametrierung, weitestgehend frei von Singularitäten** - Für das Streckenmodell des Quadropters wird in dieser Arbeit eine Lageparametrierung mit Drehmatrizen und eine Headingdefinition nach Buhl et al. [10] gewählt. Dadurch kann die Fluglage global eindeutig und weitestgehend frei von Singularitäten beschrieben werden.
- **Berücksichtigung aller Nichtlinearitäten des Systems** - Die Trajektorienfolgeregelung wird basierend auf dem Backstepping entworfen, da dieses Verfahren besonders gut zur Streckenstruktur von VTOLs passt, zudem alle Nichtlinearitäten des Systems berücksichtigen kann und global gültig ist. Da es das Ziel ist, die \mathcal{L}_1 -adaptive Regelung in die Struktur des Adaptive Backsteppings zu bringen, bietet es sich auch aus diesem Grund an, den nominalen (baseline) Regler basierend auf dem Backstepping zu entwickeln. Darüber hinaus bietet das Backstepping ein konstruktives Vorgehen, das sich gerade für die Kombination mit der \mathcal{L}_1 -adaptiven Regelung als sehr vorteilhaft erweist.
- **Adaptive Kompensation aller Parameterunsicherheiten und zeitvarianter Störungen** - Die \mathcal{L}_1 -adaptive Regelung wird mit dem nominalen Backsteppingregler derart verzahnt, so dass Unsicherheiten sowohl in der translatorischen als auch in der rotatorischen Dynamik sowie im Antrieb kompensiert werden können. Der Ansatz versucht möglichst alle denkbaren Unsicherheiten zu erfassen und deckt daher alle modellierten Parameterunsicherheiten und zeitvarianten Störungen ab. Eine detaillierte Behandlung von nichtmodellierter Dynamik, Totzeit und Aktuatorlimitierung übersteigt jedoch den Rahmen dieser Arbeit. Da aber diese Unsicherheiten mit der Theorie der \mathcal{L}_1 -adaptiven Regelung abgedeckt werden können, siehe [42, 71], erscheint eine erweiterte theoretische Behandlung dieser Unsicherheiten bei diesem Ansatz durchaus möglich. Für die praktische Anwendung wird man daher von einer gewissen Robustheit des Ansatzes gegenüber diesen zusätzlichen Unsicherheiten ausgehen können.
- **Einfach umzusetzendes, robustes und schnelles Adaptionsgesetz** - Als Adaptionsgesetz wird das statische Piecewise-Constant Adaptation Law [42], kurz PCAL, verwendet, da es durch seine einfache Umsetzbarkeit und Robustheit aber auch durch seine Schnelligkeit für eine praktische Anwendung sehr vorteilhaft ist.

- **Trennung des nominalen Reglers von der Adaption: Realisierung einer für die Praxis vorteilhaften Baseline-Error-Struktur** - Die Standardstruktur der \mathcal{L}_1 -adaptiven Regelung, aber auch die des Command Filtered Backstepping, sieht vor, alle Ableitungen durch Tiefpassfilter zu schätzen und somit alle Reglersignale zu filtern. In dieser Arbeit werden jedoch die nominalen Reglersignale des Backstepping von den Reglersignalen der Adaption getrennt und nur letztere durch Tiefpassfilter gefiltert, was zu einer sogenannten Baseline-Error-Struktur führt. Dieser Schritt ist aus folgendem Grund für die Praxis sehr wichtig: Für hochdynamische Flugmanöver müssen die Zeitkonstanten der Filter bei Verwendung der Standardstruktur sehr klein gewählt werden, was zu einer hohen Rauschverstärkung führt. In ersten praktischen Versuchen hat sich gezeigt, dass diese Rauschverstärkung bei hinreichend schneller Filtereinstellung nicht hinnehmbar ist und eine Erhöhung der Filterzeitkonstanten zwar zu ruhigerem Verhalten führt, die dadurch verlangsamte Filterdynamik jedoch keine schnellen Manöver zulässt. Durch die Trennung der Signale und durch die Realisierung einer Baseline-Error-Struktur, wird dieses Problem umgangen. Dadurch müssen jedoch die Ableitungen des nominalen Backstepping analytisch berechnet werden. Die Schätzung der Ableitungen der Adaptionodynamik wird dabei durch die Tiefpassfilter übernommen, welche dafür um einige Größenordnungen langsamer eingestellt werden können, ohne dass Einbußen in der Performanz hingenommen werden müssen. Ein Nachweis für die Beschränktheit der Systemsignale wird für eine derartige Aufteilung (Baseline-Error-Struktur) von der bestehenden Theorie der \mathcal{L}_1 -adaptiven Regelung nur bei *exakt bekannten* Eingangsparametern unterstützt, da damit beide Regler Teile, sprich die Adaption und die nominale Regelung, entkoppelbar sind. Um unsichere Eingangsparameter abdecken zu können, wird in dieser Arbeit die existierende Beweisführung erweitert und zwei Beschränktheitsnachweise für eine Baseline-Error-Struktur trotz unsicherer Eingangsparameter geführt.
- **Nachgewiesene Beschränktheit aller Systemsignale** - Für die Beschränktheit aller Signale des geschlossenen Regelkreises werden zwei Nachweise erbracht, welche unterschiedliche Beweistechniken anwenden und sich in den gestellten Annahmen und in den theoretisch abgesicherten Flugbereichen unterscheiden. Der erste Nachweis basiert auf der für die \mathcal{L}_1 -adaptive Regelung üblichen Beweisführung im Frequenzbereich und stellt geringe Anforderungen an das Vorwissen über die Beschaffenheit der Unsicherheiten, behandelt jedoch den nichtlinearen, zeitvarianten Anteil der Dynamik, der für eine hochdynamische Trajektorienfolge notwendig ist, als Störung. Da dies eine konservative Behandlung der nichtlinearen Terme ist, führt dies zu einem konservativ abgesicherten Flugraum. Als Alternative dazu wird in einem zweiten Nachweis die Modifikation der \mathcal{L}_1 -adaptiven Regelung für nichtlineare Referenzsysteme von Wang und Hovakimyan [109] für eine Anwendbarkeit auf MIMO-Systeme erweitert. Mit dieser Erweiterung kann ein nichtlineares, zeitvariantes Referenzverhalten ohne Einschränkung behandelt und ein größerer Flugraum theoretisch abgesichert werden. Bei dieser zweiten Beweisführung, durchgeführt im Zeitbereich, entstehen jedoch restriktivere Annahmen an die theoretisch behandelbaren zeitvarianten Störungen.

1. Einleitung

→ **Anhand von Simulationen und praktischen Versuchen verifiziert** - Im Rahmen von simulativen Untersuchungen wurde die Robustheit und Performanz des entwickelten Ansatzes mithilfe von verschiedenartigen Unsicherheiten und Störungen getestet. Dabei konnten die Grenzen des Ansatzes aufgezeigt und die Ergebnisse mit den theoretischen Aussagen hinsichtlich der Beschränktheit der Systemsignale verglichen werden. Anhand von Laborversuchen wurde die Umsetzbarkeit und die Leistungsfähigkeit des Ansatzes in der Praxis überprüft und dabei bewusst auf eine Modellidentifikation verzichtet.

1.6. Gliederung der Arbeit

Die Arbeit gliedert sich wie folgt:

Kapitel 2 beschreibt das für den Regelungsentwurf verwendete Streckenmodell. Dabei werden die zugrundeliegenden Modellannahmen, die Beschaffenheit der berücksichtigten Unsicherheiten und die Besonderheiten der Lageparametrierung diskutiert.

In *Kapitel 3* erfolgt die Reglersynthese, in der das Backstepping mit der \mathcal{L}_1 -adaptiven Regelung kombiniert wird, so dass eine Baseline-Error-Struktur entsteht und trotzdem alle modellierten Unsicherheiten und Störungen kompensiert werden können.

Die Analyse des geregelten Gesamtsystems erfolgt in *Kapitel 4*. Es werden zwei Methoden zur Analyse vorgestellt, welche die Beschränktheit aller Systemsignale nachweisen. Die erste Methode arbeitet im Frequenzbereich und stellt milde Anforderungen an das Vorwissen über die Störungen. Dafür erbringt sie eine eher konservative Abschätzung der Systemeigenschaften. Die zweite Methode arbeitet im Zeitbereich und stellt restriktivere Anforderungen an das Vorwissen über die Störungen, kann jedoch eine verbesserte Abschätzung der Systemeigenschaften erbringen.

In *Kapitel 5* wird der Ansatz anhand von Simulationen verifiziert. Schnelle Flugmanöver kombiniert mit zahlreichen Parameterunsicherheiten und Störungen fordern die Performanz und Robustheit des Ansatzes heraus und zeigen dessen Grenzen auf. Ebenso werden beiden Analysemethoden numerisch ausgewertet und verglichen.

Die tatsächlich reale Leistungsfähigkeit des Ansatzes wurde in Experimenten untersucht. *Kapitel 6* zeigt die Ergebnisse von Testflügen durchgeführt an einem Prüfstand für UAVs, für welche keine Modellidentifikation vorgenommen wurde.

Die Arbeit schließt mit *Kapitel 7*, in dem die Ergebnisse resümiert und mögliche Themen für die weitere Forschung vorgeschlagen werden.

1.7. Eigene Publikationen

Im Rahmen dieser Arbeit sind folgende weitere Veröffentlichungen entstanden, welche Teilaspekte und Zwischenergebnisse des hier publizierten Reglungsansatzes vorstellen:

1. DE MONTE, P.; LOHMANN, B.: Position trajectory tracking of a quadrotor based on \mathcal{L}_1 adaptive control. In: *at - Automatisierungstechnik* 62 (2014), Nr. 3, S. 188-202
2. DE MONTE, P.; LOHMANN, B.: Position trajectory tracking of a quadrotor helicopter based on \mathcal{L}_1 adaptive control. In: *Proceedings of the European Control Conference, 2013*
3. DE MONTE, P.; LOHMANN, B.: Trajectory tracking control for a quadrotor helicopter based on backstepping using a decoupling quaternion parametrization. In: *Proceedings of the IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation, 2013*
4. FRITSCH, O.; DE MONTE, P.; BUHL, M.; LOHMANN, B.: Quasi-static feedback linearization for the translational dynamics of a quadrotor helicopter. In: *Proceedings of the American Control Conference, 2012*

2. Modellbildung

In diesem Kapitel werden zunächst die Eigenschaften eines Quadropters näher dargestellt. Danach wird das für den Regelungsentwurf entwickelte Streckenmodell präsentiert und die dafür gewählte Modellierungstiefe und die Modellannahmen diskutiert.

2.1. Eigenschaften von Quadroptern

Quadropters besitzen ein mittig angeordnetes Gehäuse und einen symmetrischen und kreuzförmigen Rahmen, siehe Abbildung 2.1. Im Gehäuse sind die Sensorik, Recheneinheit und Stromversorgung untergebracht und an den Enden des kreuzförmigen Rahmens sind vier Rotoren mit parallel verlaufenden Drehachsen montiert. Diese symmetrische Anordnung sorgt für einen zentrisch liegenden Schwerpunkt und für ausgeglichene Trägheitsmomente. Die Summe der vier Einzelschübe der Rotoren er-



Abbildung 2.1.: Quadropters "Hummingbird" der Ascending Technologies GmbH mit dargelegter Drehrichtung der Rotoren.

geben einen Gesamtschub, der stets senkrecht auf den Rahmen wirkt. Über den Betrag des Gesamtschubs und durch eine gezielte Verkippung des Rahmens, kann eine gewünschte Beschleunigung im Raum erzielt werden. Für die Verkippung des Rahmens sorgt ein Drehmoment, das sich durch unterschiedliche Einzelschübe der Rotoren erzeugen lässt.

Zusätzlich wirkt an jedem Rotor ein durch Luftwiderstand erzeugtes Reibmoment entgegen der jeweiligen Drehrichtung. Da die jeweils gegenüberliegenden Rotoren die gleiche Drehrichtung aufweisen und das eine Paar entgegengesetzt zum anderen Paar rotiert, kann die Summe der Reibmomente gezielt über den Drehzahlunterschied der Paare eingestellt und eine gewünschte Verdrehung des Quadropters um die Hochachse realisiert werden.

Der für ein gewünschtes Manöver notwendige Gesamtschub- und Momentenverlauf muss folglich durch die vier Einzelschübe erzeugt werden, zu deren Einstellung

in den meisten Systemen unterlagerte Motordrehzahlregler vorsehen sind. Die Anforderungen an den Gesamtschub und an das Moment müssen daher in geforderte Rotordrehzahlen übersetzt und dem Motordrehzahlregler kommandiert werden.

Wird ein Quadrocopter von Hand mit einer Fernsteuerung geflogen, kommandiert der Pilot in den meisten Fällen den Gesamtschub und eine gewünschte Fluglage. Ein Lageregler stellt in diesem Fall die erforderlichen Momente für die Einstellung der gewünschten Fluglage. Im autonomen Betrieb wird zu dem auch der Gesamtschub vom Positions- bzw. Trajektorienfolgeregler vorgegeben.

2.2. Gewählte Modellierungstiefe und Modellannahmen

Das für den Regelungsentwurf verwendete und im Folgenden beschriebene Modell soll die wesentlichen dynamischen Effekte eines Quadrocopters beinhalten, den Regelungsentwurf jedoch nicht durch unnötige Komplexität erschweren. Daher orientiert sich das in dieser Arbeit genutzte Modell an einer in der Literatur für die Regelung von VTOLs üblichen Modellierungstiefe. Als Beispiele seien [38, 56, 95, 83, 66, 11] genannt.

Bezugssysteme

Es bietet sich an, ein körperfestes Koordinatensystem zu verwenden, das in der Mitte des Rahmens liegt und an der kreuzförmigen Struktur orientiert ist. Dies ist in Abbildung 2.2 mit einem körperfesten Koordinatensystem B , kurz B -System, zu sehen. Die Beschreibung der Fluglage und Position des Quadrocopters im Raum erfolgt in Bezug auf ein inertiales Koordinatensystem, kurz I -System, dessen Iz -Achse Richtung Erdmittelpunkt, dessen Ix -Achse nach Norden und dessen Iy -Achse nach Osten zeigt, in der Luftfahrt oft als *North-East-Down System* bezeichnet.

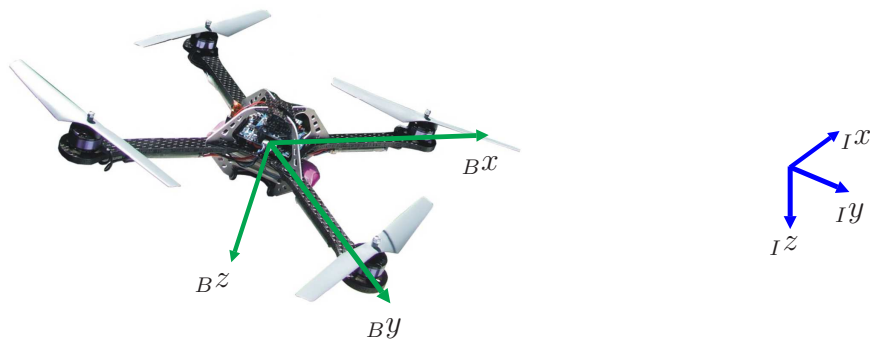


Abbildung 2.2.: Quadrocopter mit körperfestem B -System $\{Bx, By, Bz\}$ und inertialem I -System $\{Ix, Iy, Iz\}$.

Trägheiten, Kräfte und Momente

Die meisten Arbeiten sowie auch diese behandeln den Quadrocopter als Starrkörper und nehmen an, dass dessen Schwerpunkt im Ursprung des körperfesten Koordinatensystems liegt und der Massenträgheitstensor durch die symmetrische Geometrie nur

auf der Diagonalen besetzt ist. Bezüglich der Einzelschübe der Rotoren wird in den meisten Arbeiten ein proportionaler Zusammenhang zwischen der Rotordrehzahl und dem erzeugten Schub angenommen, wodurch sich folgender Zusammenhang ergibt:

$$f_i = k_T n_i^2, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}. \quad (2.1)$$

Dabei bezeichnet f_i den jeweilige Einzelschub, k_T die Proportionalitätskonstante und n_i die jeweilige Rotordrehzahl. Die Konstante k_T ist hauptsächlich durch die Propellerform und die Propellersteifigkeit definiert. Das Giermoment um die Hochachse eines Rotors, verursacht durch Luftreibung, wird ebenso proportional zur Rotordrehzahl bzw. proportional zum jeweiligen Einzelschub angenommen, so dass

$$\tau_{z,i} = k_m f_i, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad (2.2)$$

gilt, wobei $\tau_{z,i}$ das jeweilige Giermoment und k_m wiederum die Proportionalitätskonstante bezeichnet. Der gyroskopische Effekt der rotierenden Propeller wird häufig vernachlässigt, da dieser einen eher geringen Einfluss auf die Dynamik des Quadropters hat. Dies liegt daran, dass sich die entstehenden Kippmomente durch die gegenläufigen Propeller größtenteils ausgleichen und die Drehzahlunterschiede im Verhältnis zur rotierenden Masse eher gering sind. Mithilfe des Hebelarms r , der zwischen jedem Rotor und dem Schwerpunkt als identisch lang angesetzt wird, und den zuvor definierten Konstanten, können der Gesamtschub T und die drei Komponenten des Drehmomentenvektors $\boldsymbol{\tau} = [\tau_x \ \tau_y \ \tau_z]'$ beschrieben werden als

$$\begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -r & 0 & r \\ r & 0 & -r & 0 \\ -k_m & k_m & -k_m & k_m \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Rotordynamik

Um die zu kommandierenden Rotordrehzahlen für einen gewünschten Schub und Momentenverlauf zu berechnen, wird (2.1) und (2.3) häufig invertiert und die Dynamik der Rotoren vernachlässigt. Man nimmt somit an, dass die kommandierten Soll Drehzahlen unmittelbar die berechneten Einzelschübe ergeben. Nur wenige zeitlich sehr frühe Arbeiten, beispielsweise [77, 37, 74], berücksichtigen die Rotordynamik explizit und betonen dessen Notwendigkeit. Der Grund warum sich jedoch eine Vernachlässigung der Dynamik bis heute weitestgehend durchgesetzt hat, mag einerseits daran liegen, dass die Dynamik der verwendeten Motoren heutzutage sehr hoch ist. Andererseits müssen für eine explizite Berücksichtigung dieser Dynamik, die Rotordrehzahlen bzw. als Alternative die Motorströme gemessen oder geschätzt werden. Ob eine hinreichend gute und vor allem schnelle Messung bzw. Schätzung diesbezüglich gelingt, so dass sich eine Berücksichtigung in einer verbesserten Performanz widerspiegelt, ist jedoch auch bei den heutzutage verfügbaren Systemen fraglich. Daher wird die Rotordynamik auch in dieser Arbeit vernachlässigt.

Unsicherheiten

Da es ein Ziel der Arbeit ist, möglichst viele Modellunsicherheiten mithilfe der Regelung zu kompensieren, wird die modellierte Dynamik generell als unsicher betrachtet.

2. Modellbildung

Zudem sind zusätzliche Störeingänge vorgesehen, um den Effekt von vernachlässigter, nicht modellierter Dynamik, welche einen vergleichsweise geringen Einfluss haben sollte, sowie die Wirkung von äußeren Störungen zu erfassen.

Stellgrößen

Da die Umrechnung der gewünschten Schubkraft T und die des Momentenvektors $\boldsymbol{\tau}$ in die dafür nötigen Rotordrehzahlen durch Invertierung von (2.3) bekannt ist, kann äquivalent zu den Rotordrehzahlen auch die Schubkraft und die Komponenten des Momentenvektors als Stellgrößen für den Regelungsentwurf genutzt werden. Um die Unsicherheiten in (2.3) trotz dieser Wahl der Stellgrößen kompensieren zu können, werden unsichere Eingangverstärkungen für die Schubkraft und den Komponenten des Momentenvektors eingeführt.

2.3. Mathematisches Modell

Die zuvor beschriebenen Modellannahmen führen zu dem folgenden mathematischen Modell. An dieser Stelle sei auf den einleitenden Abschnitt 1.3 verwiesen, in welchen die grundlegende Struktur der Dynamik von VTOLs allgemein dargestellt ist und deshalb hier nur noch kurz in ein paar Sätzen wiederholt wird: Die Gleichungen von VTOLs weisen eine kaskadierte Form auf, auch als untere Dreiecksform bezeichnet, wobei die translatorische Dynamik, beschrieben durch den Impulssatz, beeinflussbar ist durch die Richtung und den Betrag des Gesamtschubs. Die Richtung des Gesamtschubs ist durch die Orientierung des Rahmens im Raum gegeben und diese lässt sich wiederum über die rotatorische Dynamik, beschrieben durch den Drallsatz, verändern. Es bietet sich dabei an, die translatorische Dynamik im I -System und die rotatorische Dynamik im B -System zu beschreiben. Zusätzlich zur Position und zur Richtung des Gesamtschubs, ist durch das Heading ein weiterer Freiheitsgrad des Quadropters gegeben. Dieser Freiheitsgrad ist als Orientierung des Rahmens um die Schubrichtung herum zu interpretieren.

2.3.1. Translatorische Dynamik

Die translatorische Dynamik, oft auch als Positionsdynamik bezeichnet, wird beschrieben über den Impulssatz, dargestellt im I -System, und ist gegeben durch

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} , \quad (2.4)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}_v + g \mathbf{1} \mathbf{e}_z + \kappa_v \mathbf{t} + \boldsymbol{\zeta}_v , \quad (2.5)$$

wobei $\mathbf{x} = {}_I \mathbf{x} = [x \ y \ z]' \in \mathbb{R}^3$ und $\mathbf{v} = {}_I \mathbf{v} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]' \in \mathbb{R}^3$ die Position und die Geschwindigkeit im Raum beschreiben, g die Gravitationskonstante und $\mathbf{1} \mathbf{e}_z = [0 \ 0 \ 1]'$ ein Einheitsvektor in Richtung der ${}_I z$ -Achse dargestellt im I -System ist. $\mathbf{t} = {}_I \mathbf{t} = T \mathbf{t}_e \in \mathbb{R}^3$ ist der Gesamtschubvektor im I -System mit dem Gesamtschub $T = \|\mathbf{t}\|$ und der Schubrichtung $\mathbf{t}_e = {}_I \mathbf{t}_e$. Die Unsicherheit in der Aktuierung wird in der unsicheren Eingangverstärkung κ_v erfasst. Die Funktion $\mathbf{f}_v = {}_I \mathbf{f}_v(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ deckt unsichere zustandsabhängige aerodynamische Effekte ab, deren Struktur nicht näher bekannt, jedoch mindestens einfach stetig differenzierbar sein soll. Der zusätzliche Eingang

$\zeta_v = {}_I\zeta_v(t)$ erfasst unbekannte zeitvariante Störungen, welche mindestens stetig und für alle Zeit begrenzt sein sollen.

2.3.2. Parametrierung des Gesamtschubvektors

Der Gesamtschubvektors $\mathbf{t} = T\mathbf{t}_e$ lässt sich mithilfe der Drehmatrix $\mathbf{R}_{IB} \in SO(3)$, welche einen Vektor aus dem B -System in das I -System transformiert, und einem Einheitsvektor ${}_B\mathbf{e}_z$ entlang der Bz -Achse darstellen als

$$\mathbf{t} = -T\mathbf{R}_{IB}{}_B\mathbf{e}_z. \quad (2.6)$$

Die Drehmatrix, verwendet als Lageparameter, ist zwar eine hochgradig redundante Beschreibungsform – $\mathbf{R}_{IB}{}_B\mathbf{e}_z$ beschreibt in diesem Fall nur zwei tatsächliche Freiheitsgrade – ist jedoch global eindeutig und frei von Singularitäten, siehe [111, 15], und soll daher in dieser Arbeit zur Anwendung kommen. Die zeitliche Änderung der Rotationsmatrix \mathbf{R}_{IB} lautet

$$\dot{\mathbf{R}}_{IB} = \mathbf{R}_{IB}\underline{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{R}_{IB} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

wobei $\underline{\boldsymbol{\omega}} = {}_B\underline{\boldsymbol{\omega}} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^\top \in \mathbb{R}^3$ der Vektor der Drehgeschwindigkeiten des Quadropters ist, dargestellt im B -System. Die Abbildung $\underline{\cdot} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{S}$ transformiert einen Vektor aus dem \mathbb{R}^3 in den Raum der schiefsymmetrischen Matrizen $\mathbb{S} := \{S \in \mathbb{R}^{3 \times 3} | S = -S^\top\}$ so dass $\underline{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ gilt. Die zeitliche Änderung des Gesamtschubvektors ergibt sich durch Differentiation von (2.6) und lautet mit (2.7)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{t}} &= -\dot{T}\mathbf{R}_{IB}{}_B\mathbf{e}_z - T\dot{\mathbf{R}}_{IB}\underline{\boldsymbol{\omega}}{}_B\mathbf{e}_z = -\dot{T}\mathbf{R}_{IB}{}_B\mathbf{e}_z + T\mathbf{R}_{IB}{}_B\underline{\boldsymbol{\omega}}_z\boldsymbol{\omega} \\ &= \mathbf{R}_{IB} [T{}_B\underline{\boldsymbol{\omega}}_{z12} \quad -{}_B\mathbf{e}_z] [\omega_x \ \omega_y \ \dot{T}]^\top =: \mathbf{M}(\mathbf{R}_{IB}, T) \mathbf{w}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

worin die Matrixfunktion \mathbf{M} definiert ist, $\mathbf{w} := [\omega_x \ \omega_y \ \dot{T}]^\top$ gilt, ${}_B\underline{\boldsymbol{\omega}}_{z12}$ die ersten beiden Spalten von ${}_B\underline{\boldsymbol{\omega}}_z$ sind und für die dritte Spalte ${}_B\underline{\boldsymbol{\omega}}_{z3} = [0 \ 0 \ 0]^\top$ gilt. In (2.8) ist ersichtlich, dass sich $\dot{\mathbf{t}}$ einerseits über eine Veränderung des Betrags von \dot{T} und andererseits über die ersten beiden Komponenten der Drehrate $\boldsymbol{\omega}$, definiert als $\boldsymbol{\omega}_{xy} = [\omega_x \ \omega_y]^\top$, beeinflussen und im Zuge des Backstepping gezielt ausnutzen lässt.

Für die Analyse des geschlossenen Regelkreises ist es vorteilhaft die Größenordnungen innerhalb des Ausdrucks (2.8) anzugleichen, indem die Drehraten ω_x, ω_y und die Schubänderung \dot{T} wie folgt normiert werden:

$${}_n\omega_x := \hat{\kappa}_v^{-1} \omega_x, \quad (2.9)$$

$${}_n\omega_y := \hat{\kappa}_v^{-1} \omega_y, \quad (2.10)$$

$${}_n\dot{T} := \hat{g}^{-1} \dot{T}. \quad (2.11)$$

$\hat{\kappa}_v$ und \hat{g} sind darin Schätzwerte für κ_v und g aus (2.5). Damit erhält man für Gleichung (2.8)

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{R}_{IB} [\hat{\kappa}_v T {}_B\underline{\boldsymbol{\omega}}_{z12} \quad -\hat{g} {}_B\mathbf{e}_z] [{}_n\omega_x \quad {}_n\omega_y \quad {}_n\dot{T}]^\top =: {}_n\mathbf{M}(\mathbf{R}_{IB}, T) {}_n\mathbf{w}, \quad (2.12)$$

mit der Definition der Matrixfunktion ${}_n\mathbf{M}$ und der normierten Größe ${}_n\mathbf{w} = [{}_n\omega_x \quad {}_n\omega_y \quad {}_n\dot{T}]^\top$.

2.3.3. Rotatorische Dynamik

Die rotatorische Dynamik, auch als Lagedynamik bezeichnet, wird beschrieben durch den Drallsatz. Dieser lautet dargestellt im B -System

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{f}_\omega + \mathbf{K}_\omega \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\zeta}_\omega . \quad (2.13)$$

Darin ist $\dot{\boldsymbol{\omega}} = {}_B\dot{\boldsymbol{\omega}} = [\dot{\omega}_x \ \dot{\omega}_y \ \dot{\omega}_z]$ die absolute zeitliche Änderung der Drehraten und $\mathbf{f}_\omega = {}_B\mathbf{f}_\omega(\mathbf{s})$ eine unsichere zustandsabhängige Funktion, welche den Beitrag der Coriolisbeschleunigung und zustandsabhängige aerodynamische Effekte abdeckt. Der Zustandsvektor \mathbf{s} wird in Abschnitt 2.4 definiert. Die Struktur von \mathbf{f}_ω muss nicht näher bekannt, jedoch mindestens einfach stetig differenzierbar. Mithilfe der drei Komponenten des Momentenvektors $\boldsymbol{\tau} = {}_B\boldsymbol{\tau} = [\tau_x \ \tau_y \ \tau_z]'$, kann die zeitliche Änderung der Drehraten beeinflusst werden. Die Unsicherheiten im Antrieb sowie in der Umrechnung (2.1) und (2.3) sind über die Eingangsverstärkung $\mathbf{K}_\omega \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ abgedeckt. Der zusätzliche Eingang $\boldsymbol{\zeta}_\omega = {}_B\boldsymbol{\zeta}_\omega(t)$ ermöglicht die Erfassung einer unbekannt und zeitvarianten Störung, welche mindestens stetig und für alle Zeit begrenzte sein sollen.

2.3.4. Definition des Headings

Der im vorherigen Abschnitt definierte Einheitsvektor $\mathbf{t}_e = -\mathbf{R}_{IB} {}_B\mathbf{e}_z$ beschreibt nur zwei der drei Drehfreiheitsgrade eines Starrkörpers im Raum. Der dritte Freiheitsgrad ist durch die Drehung des Quadropters um den Schubvektor herum gegeben und wird als Heading bezeichnet. Im Abschnitt 1.4.2 wurden bereits mehrere Möglichkeiten diesen Freiheitsgrad mathematisch zu beschreiben sowie deren Vor- und Nachteile diskutiert. Die Beschreibungsform mithilfe von zwei Quaternionen von Buhl et al. [10] hat den entscheidenden Vorteil, dass nur eine Singularität bei 180° Verdrehung existiert, wohingegen bei alternativen Parametrierungen, siehe Abschnitt 1.4.2, bereits bei Fehlstellungen von 90° Singularitäten auftreten. Zudem ist diese Headingdefinition weitestgehend unabhängig von Änderungen der Schub- bzw. Sollschrubrichtung, was im Gegensatz zu anderen Definitionen zu ruhigeren Stellverläufen führt. Daher soll diese Parametrierung genutzt werden, um den verbleibenden Freiheitsgrad in dieser Arbeit zu beschreiben.

Bevor auf die Details dieser Headingdefinition eingegangen wird, erfolgt ein kurze Einführung in die Lageparametrierung mit Quaternionen, siehe auch [111]:

Lageparametrierung mithilfe eines Quaternionen

Mittels eines Einheitsquaternionen $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^4$, $\|\mathbf{q}\| = 1$, darstellbar als

$$\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]' = \left[\mathbf{a}' \sin \frac{\alpha}{2} \ \cos \frac{\alpha}{2} \right]' , \quad (2.14)$$

lässt sich die Rotation von einem Koordinatensystem I in ein Koordinatensystem B parametrieren. Dabei beinhalten die vier Einträge des Quaternionen die Information über den Drehwinkel α und die Drehachse $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ der Rotation. Für die Transformation eines Vektors ${}_B\mathbf{x}$, gegeben im B -System, in das I -System, angebar als

${}^I\mathbf{x} = \mathbf{R}_{IB} {}^B\mathbf{x}$, lautet die Drehmatrix, beschrieben durch das Quaternion \mathbf{q} :

$$\mathbf{R}_{IB} = \mathbf{R}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q_4^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_3q_4) & 2(q_1q_3 + q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 + q_3q_4) & q_4^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 - q_2q_4) & 2(q_2q_3 + q_1q_4) & q_4^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Die Ableitung von \mathbf{q} nach der Zeit ist gegeben durch

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \\ q_3 & q_4 & -q_1 & q_2 \\ -q_2 & q_1 & q_4 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} =: \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

wobei $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]'$ die Winkelgeschwindigkeit des B -Systems gegenüber dem I -Systems angegeben im B -System ist. Handelt es sich beim I -System um ein inertiales Koordinatensystem, ist $\boldsymbol{\omega}$ die absolute Winkelgeschwindigkeit des B -Systems.

Zweigteile Lageparametrierung mithilfe von zwei Quaternionen

Die Besonderheit der Headingdefinition von Buhl et al., ist eine zweigeteilte Beschreibung der Rotation vom I -System in das B -System mithilfe von zwei Quaternionen. Dabei beschreibt ein erstes Quaternion \mathbf{q}_{xy} die Drehung vom I -System in ein Zwischensystem A , kurz A -System. Ein zweites Quaternion \mathbf{q}_z beschreibt die verbleibende Drehung vom A -System in das B -System. Die gesamte Drehung wird durch das Quaternion \mathbf{q} beschrieben, das durch folgende Verkettung definiert ist:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_{xy} \circ \mathbf{q}_z = \mathbf{Q}(\mathbf{q}_{xy}) \cdot \mathbf{q}_z. \quad (2.17)$$

Das A -System ist gegenüber dem B -System derart gewählt, so dass die z -Achsen beider Systeme fluchten, siehe Abbildung 2.3. Dadurch beschreibt die Drehung vom

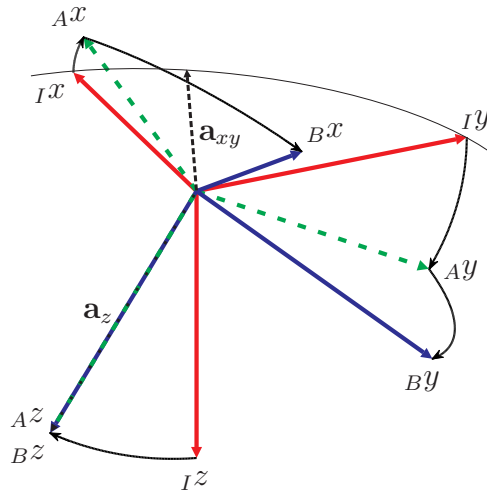


Abbildung 2.3.: Darstellung der Rotation vom inertialen I -System über das A -System in das körperfeste B -System. \mathbf{a}_{xy} beschreibt die Drehachse der ersten Rotation und \mathbf{a}_z die Drehachse der zweiten Rotation. (Als Vorlage diente Bild 2 aus [10])

2. Modellbildung

I -System ins A -System die Verkippung der körperfesten z -Achse und somit die Verkippung des Schubvektors \mathbf{t} . Diese Rotation kann durch eine Drehung um die Achse \mathbf{a}_{xy} dargestellt werden, welche in der inertialen xy -Ebene liegt. Daher hat \mathbf{q}_{xy} einen Nulleintrag an der dritten Position und lautet

$$\mathbf{q}_{xy} = [q_x \quad q_y \quad 0 \quad q_p]' . \quad (2.18)$$

Da \mathbf{q}_{xy} ein Einheitsquaternion ist, gilt $q_p^2 + q_x^2 + q_y^2 = 1$ und zeigt, dass \mathbf{q}_{xy} zwei Freiheitsgrade besitzt. Diese beiden Freiheitsgrade sind äquivalent zu den Freiheitsgraden beschrieben durch $\mathbf{R}_{IB} \mathbf{e}_z$ in (2.6). Die verbleibende Drehung vom A -System in das B -System findet um die körperfeste z -Achse statt, weshalb \mathbf{q}_z folgende Struktur

$$\mathbf{q}_z = [0 \quad 0 \quad q_z \quad q_w]' \quad (2.19)$$

aufweist. Für \mathbf{q}_z gilt $q_w^2 + q_z^2 = 1$ und zeigt, dass \mathbf{q}_z nur einen Freiheitsgrad hat. *Dieser Freiheitsgrad ist definiert als das Heading*. Mithilfe von (2.17) lässt sich \mathbf{q} mit \mathbf{q}_{xy} und \mathbf{q}_z schreiben als

$$\mathbf{q} = [q_w q_x + q_z q_y \quad q_w q_y - q_z q_x \quad q_z q_p \quad q_w q_p]' . \quad (2.20)$$

Um eine vollständige Drehung, definiert durch \mathbf{q} , durch die beiden Quaternionen \mathbf{q}_{xy} und \mathbf{q}_z zu beschreiben und somit das Heading aus dieser Drehung zu extrahieren, können die Einträge von \mathbf{q}_{xy} gewählt werden, so dass

$$q_p = \sqrt{q_3^2 + q_4^2} , \quad (2.21)$$

$$q_x = \frac{q_4}{\sqrt{q_3^2 + q_4^2}} \cdot q_1 - \frac{q_3}{\sqrt{q_3^2 + q_4^2}} \cdot q_2 , \quad (2.22)$$

$$q_y = \frac{q_4}{\sqrt{q_3^2 + q_4^2}} \cdot q_2 + \frac{q_3}{\sqrt{q_3^2 + q_4^2}} \cdot q_1 \quad (2.23)$$

gilt. Mit dieser Wahl sind die Elemente von \mathbf{q}_z gegeben durch

$$q_w = \sqrt{\frac{q_4^2}{q_3^2 + q_4^2}} , \quad q_z = \overline{\text{sgn}}(q_3 \cdot q_4) \cdot \sqrt{\frac{q_3^2}{q_3^2 + q_4^2}} , \quad (2.24)$$

worin $\overline{\text{sgn}}(0) = +1$ eine modifizierten Signumfunktion ist.

Anmerkung 1. Mit (2.21) und (2.24) gilt $q_p \geq 0$ und $q_w \geq 0$. Durch diese Wahl wird der Nachteil der Zweideutigkeit in beiden Quaternionen beseitigt und es lässt sich ein Regelgesetz formulieren, das unerwünschte Drehungen durch große Winkel, bekannt als das *Unwinding Phenomenon* [7], verhindert. Das \mathbf{q}_{xy} Quaternionen besitzt mit dieser Definition genau dann einen kontinuierlichen Verlauf wenn $q_p > 0$ gilt. Dies ist erfüllt solange der Quadropter nicht vollständig auf den Kopf gedreht ist bzw. der Schubvektor nicht in die inertialen z -Richtung zeigt. Eine für die Praxis relevante Vorgabe des Headings ist ohnehin nur nahe der aufrechten Flugstellung gegeben. Zudem unterscheidet sich diese Headingdefinition bei großen Verkippungen stark von der in der Luftfahrt üblichen Definition des Yaw- bzw. Gierwinkels. Daher erscheint

eine Deaktivierung der Zerlegung (2.23) und (2.24) zur Vermeidung der Singularität bei sehr großen Verkippungen nahe $q_p = 0$ als durchführbar und wenig einschränkend. Das \mathbf{q}_z Quaternion weist durch die gewählte Zerlegung eine Unstetigkeit im Verlauf auf, welche als Sprung im später definierten Winkel φ , siehe (2.29), von $-\pi$ auf π interpretierbar ist. In Kapitel 4 wird gezeigt, dass sowohl die Singularität bei $q_p = 0$ als auch die Unstetigkeit bei $\varphi = \pi$ durch die Erfüllung entsprechender Bedingungen vermeidbar sind und somit keinen Einfluss auf das Verhalten der in dieser Arbeit vorgestellten Regelung haben.

Für die Verwendung dieser Headingdefinition im Regelungsentwurf, werden zudem folgende Zusammenhänge benötigt:

Kinematik des \mathbf{q}_{xy} Quaternions

Die Zeitableitung von \mathbf{q}_{xy} ist nach (2.16) gegeben durch

$$\dot{\mathbf{q}}_{xy} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}(\mathbf{q}_{xy}) \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

mit $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ als absolute Winkelgeschwindigkeit des A -Systems angegeben im A -System. Mit der Tatsache, dass die dritte Komponente von \mathbf{q}_{xy} konstant gleich Null ist lässt sich die dritte Komponente von $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ als

$$\tilde{\omega}_z = \frac{q_y \tilde{\omega}_x - q_x \tilde{\omega}_y}{q_p} \quad (2.26)$$

schreiben. (2.26) eingesetzt in (2.25) liefert

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_x \\ \dot{q}_y \end{bmatrix} = \frac{1}{q_p} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - q_x^2 & -q_x q_y \\ -q_x q_y & 1 - q_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_x \\ \tilde{\omega}_y \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Da die z -Achse des A -Systems identisch ist mit der z -Achse des B -Systems, sind die xy -Komponenten der Winkelgeschwindigkeit beider Systeme gleich. Daher repräsentierten $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{xy} = [\tilde{\omega}_x \ \tilde{\omega}_y]'$ und $\boldsymbol{\omega}_{xy} = [\omega_x \ \omega_y]'$ die gleiche Winkelgeschwindigkeit, sind jedoch in unterschiedlichen Systemen angegeben und $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{xy}$ kann mit $\boldsymbol{\omega}_{xy}$ geschrieben werden als

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{xy} = \begin{bmatrix} q_w^2 - q_z^2 & -2q_z q_w \\ 2q_z q_w & q_w^2 - q_z^2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{xy} = \mathbf{R}_s(\mathbf{q}_z) \boldsymbol{\omega}_{xy}. \quad (2.28)$$

$\mathbf{R}_s(\mathbf{q}_z)$ ist dabei die entsprechende nordwestliche Untermatrix von $\mathbf{R}(\mathbf{q}_z)$.

Parametrierung des Headings - Kinematik des \mathbf{q}_z Quaternions

Es bietet sich an den Freiheitsgrad des Quaternions \mathbf{q}_z , definiert als das Heading, mithilfe eines Winkels φ zu beschreiben. Mit der Definition

$$\varphi = 2 \arcsin q_z \quad (2.29)$$

ist φ der Drehwinkel zwischen dem A -System und dem B -System. Dies folgt aus der Definition (2.14). Für dessen Zeitableitung gilt $\dot{\varphi} = \omega_z - \tilde{\omega}_z$. Mit (2.26) und (2.28) erhält man

$$\tilde{\omega}_z = \frac{1}{q_p} [q_y \quad -q_x] \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{xy} = \mathbf{l}(\mathbf{q}_{xy})' \mathbf{R}_s(\mathbf{q}_z) \boldsymbol{\omega}_{xy} \quad (2.30)$$

2. Modellbildung

und damit lässt sich die Zeitableitung $\dot{\varphi}$ schreiben als

$$\dot{\varphi} = \omega_z - \mathbf{l}(\mathbf{q}_{xy})' \mathbf{R}_s(\mathbf{q}_z) \boldsymbol{\omega}_{xy}. \quad (2.31)$$

In (2.31) ist zu erkennen, dass das Heading bzw. der Winkel φ mithilfe von ω_z direkt beeinflusst werden kann.

2.4. Zustandsraummodell

Die Modellbildung in diesem Kapitel führt auf folgendes Zustandsraummodell. Für die reine Positionstrajektorienfolge folgt aus (2.4), (2.5), (2.6), (2.7) und (2.13)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}, \quad (2.32a)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}_v + g_I \mathbf{e}_z - \kappa_v T \mathbf{R}_{IB} \mathbf{e}_z + \boldsymbol{\zeta}_v, \quad (2.32b)$$

$$\dot{\mathbf{R}}_{IB} = \mathbf{R}_{IB} \boldsymbol{\omega}, \quad (2.32c)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{f}_\omega + \mathbf{K}_\omega \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\zeta}_\omega, \quad (2.32d)$$

wobei $\mathbf{s} = [\mathbf{x}' \ \mathbf{v}' \ \mathbf{r}'_1 \ \mathbf{r}'_2 \ \mathbf{r}'_3 \ \boldsymbol{\omega}']'$ als Zustandsvektor definiert werden kann, wenn $\mathbf{r}_i, i \in \{1, 2, 3\}$ die Spalten von \mathbf{R}_{IB} beschreiben. Die Systemeingänge für dieses Modell sind T und $\boldsymbol{\tau}$, wie bereits in (2.3) in Bezug auf die realen Systemeingänge, die vier Drehzahlen der Rotoren, definiert. Der Regelungsentwurf in dieser Arbeit nutzt eine dynamische Streckenerweiterung für den Eingang T , so dass T und \dot{T} weitere Zustände und

$$\ddot{T} = u_T \quad (2.33)$$

der neue Eingang des erweiterten Systems wird. Zudem soll mit dem Ansatz in dieser Arbeit zusätzlich zur einer Positionstrajektorie auch eine Headingtrajektorie eingeregelt werden. Daher bietet es sich an, den Schubvektor \mathbf{t} und den Winkel φ anstatt \mathbf{R}_{IB} als Zustände zu verwenden, was zusammen mit der in (2.12) eingeführten Normierung zu folgendem System der Ordnung $n = 14$ führt

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}, \quad (2.34a)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}_v + g_I \mathbf{e}_z + \kappa_v \mathbf{t} + \boldsymbol{\zeta}_v, \quad (2.34b)$$

$$\dot{\mathbf{t}} = {}_n \mathbf{M}(\mathbf{t}, \varphi) \mathbf{t}, \quad (2.34c)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{f}_\omega + \mathbf{K}_\omega \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\zeta}_\omega, \quad (2.34d)$$

$$\ddot{T} = u_T. \quad (2.34e)$$

Wie ${}_n \mathbf{M}$ als Funktion von $\mathbf{t} = T \mathbf{t}_e$ und φ geschrieben werden kann, zeigt Anhang A.1. Die Gleichungen in (2.34) sind zudem mit (2.25), (2.28), (2.29), (2.30) und (2.31) zu ergänzen, was aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht explizit angegeben werden soll. Der Zustandsvektor \mathbf{s}_{ext} für dieses erweiterte System lautet schließlich

$$\mathbf{s}_{\text{ext}} = [\mathbf{x}' \ \mathbf{v}' \ \mathbf{t}' \ \varphi \ \dot{T} \ \boldsymbol{\omega}']'. \quad (2.35)$$

3. Regelungssynthese

Dieses Kapitel stellt die Reglersynthese vor, in der ein Trajektorienfolgeregler basierend auf dem Backstepping entworfen und mit der \mathcal{L}_1 -adaptiven Regelung kombiniert wird. Das erste Unterkapitel geht zunächst auf das Konzept der Regelung, die Besonderheiten und die Reglerstruktur ein. Danach erfolgt die Entwicklung des Backsteppingreglers. Im dritten Teil des Kapitels werden die zur Adaption benötigten Komponenten, darunter ein Zustandsschätzer und das Adaptionsgesetz, definiert.

3.1. Regelungskonzept

Wie bereits in Kapitel 1.5 erläutert, eignet sich das Backstepping einerseits besonders gut für nichtlineare Systeme in unterer Dreieckstruktur und ermöglicht die Entwicklung eines hochperformanten Trajektorienfolgereglers, andererseits begünstigt es auch die Integration der \mathcal{L}_1 -adaptiven Regelung. Die \mathcal{L}_1 -adaptive Regelung wiederum ist als performante und besonders robuste adaptive Regelungsmethode bekannt. Dies liegt daran, dass Unsicherheiten und Störungen bewusst nicht in allen Frequenzbereichen kompensiert werden. Gerade herkömmliche adaptive Ansätze wie das MRAC [85] sowie das adaptive Backstepping [59] haben implizit den Anspruch, Unsicherheiten in allen Frequenzbereichen zu tilgen. Dies ist bedingt durch die Aktuatorik physikalisch unmöglich und führt dazu, dass die Schnelligkeit der Parameterschätzung reduziert werden muss, damit hochfrequente Störungen nicht in hochfrequenten und destabilisierenden Stellsignalen resultieren [4]. Die \mathcal{L}_1 -adaptive Regelung entkoppelt die Adaptionodynamik von der Regelschleife und erreicht dadurch eine schnelle und genaue Schätzung der Unsicherheiten im niedrigeren Frequenzbereich [42]. Die hochfrequenten Anteile der Unsicherheiten werden mithilfe eines Tiefpassfilters, in dieser Arbeit als \mathcal{L}_1 -Filter bezeichnet, getilgt und somit nicht im Stellgesetz verarbeitet. Somit haben hochfrequente Störungen trotz schneller Parameterschätzung keine destabilisierende Wirkung. Die Dynamik des \mathcal{L}_1 -Filters ist dabei ein entscheidender Parameter, um die wirksame Bandbreite der Adaption einzustellen und den Kompromiss zwischen Robustheit und Performanz gezielt zu beeinflussen.

Für die Integration der \mathcal{L}_1 -adaptiven Regelung in das Backstepping, wird im Folgenden ein Vorgehen ähnlich zu dem des Adaptive Backsteppings verfolgt [59]. Dabei wird die translatorische Dynamik mit zwei Backsteppingschritten behandelt, in die ein erster adaptiver Regelanteil zur Kompensation von Unsicherheiten eingebunden ist. Für die rotatorische Dynamik werden ebenfalls zwei Backsteppingschritte durchgeführt und ein zweiter adaptiver Regelanteil hinzugefügt. Dabei wäre es denkbar, alle Ableitungen der virtuellen Stellgrößen mithilfe der \mathcal{L}_1 -Filter zu bestimmen, was dem Konzept des Adaptive Command Filtered Backsteppings [23] entspräche und die Berechnung von aufwändigen und komplexen Termen erübrigen würde. Wie jedoch

3. Regelungssynthese

schon in Kapitel 1.5 erwähnt, reicht diese Vorgehen nicht aus um ein schnelles und gleichzeitig ruhiges Flugverhalten zu erhalten. Für schnelle Flugmanöver ist eine hohe Filterdynamik der \mathcal{L}_1 -Filter gefordert, um die Ableitungen mit hinreichend geringer Verzögerung bereit zu stellen. Eine hohe Filterdynamik führt jedoch zu nicht hinnehmbarer Rauschverstärkung, was zu unruhigem Flugverhalten führt. Daher wird in dieser Arbeit der nominelle Folgeregler von der Adaption getrennt und die nominellen Ableitungen analytisch berechnet sowie die Ableitungen der adaptiven Anteile über die \mathcal{L}_1 -Filter approximiert.

Ein Strukturbild des Regelkreises, in dem die Trennung der beiden Teile deutlich wird, zeigt Abbildung 3.1. Darin sind die beiden adaptiven Regleranteile vektoriell zu einem Adaptionsteil zusammengefasst. Darüber hinaus sind folgende Zusammenhänge dargestellt: Als Sollvorgabe für die Regelung dient eine Positionstrajektorie und eine Headingtrajektorie, was aus Gründen der besseren Übersicht mit der Sollposition $\mathbf{x}_T = \mathbf{x}_T(t)$ und dem Sollwinkel $\varphi_T = \varphi_T(t)$ angedeutet ist. Der nominale Folgeregler berechnet aus den Messwerten $\mathbf{s}_m = [\mathbf{s}'_{\text{ext}} \ \dot{\mathbf{v}}']'$ und der Größe \mathbf{t}_d das nominale Stell-signal $\boldsymbol{\sigma}_n$, die Stellgröße u_T und einen Folgefehler \mathbf{z} . Dabei sind \mathbf{s}_{ext} die Zustände der erweiterten Strecke aus (2.35), $\dot{\mathbf{v}}$ eine Messung der Beschleunigungen, welche ebenfalls für die Regelung verwendet wird, und \mathbf{t}_d ein Sollwert für den Schubvektor \mathbf{t} . Das Stell-signal $\boldsymbol{\sigma}_n := [\boldsymbol{\sigma}'_{vn} \ \boldsymbol{\sigma}'_{\omega n}]'$ beinhaltet eine nominale Sollbeschleunigung $\boldsymbol{\sigma}_{vn}$ und eine nominale Soll-drehratenänderung $\boldsymbol{\sigma}_{\omega n}$, welche von den Aktuatoren erzeugt werden sollen.

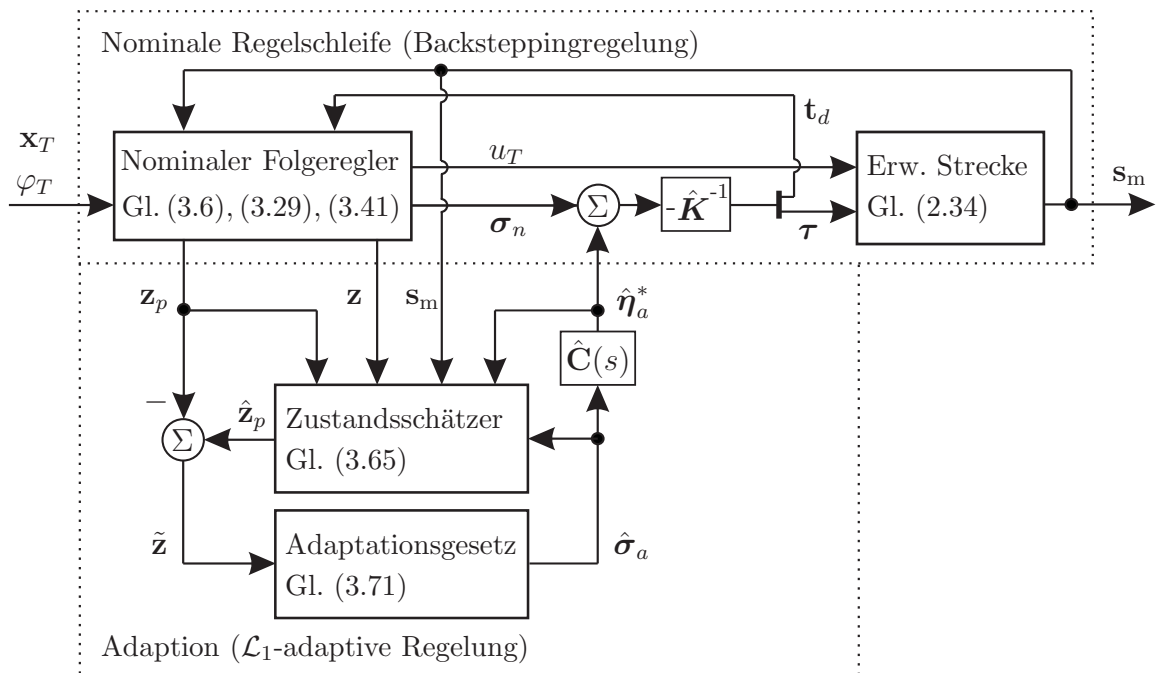


Abbildung 3.1.: Darstellung des geschlossenen Regelkreises, in der die Trennung der nominalen Regelschleife von der Adaption sowie die wichtigsten Komponenten mit Verweisen auf die jeweiligen Gleichungen gezeigt sind.

Der Vektor \mathbf{z}_p ist ein Teil der Folgefehlerzustände \mathbf{z} , für welchen Schätzwerte $\hat{\mathbf{z}}_p$ von einem Zustandsschätzer berechnet werden. Der Schätzfehler $\tilde{\mathbf{z}}_p = \hat{\mathbf{z}}_p - \mathbf{z}_p$ wird anschließend im Adaptionsgesetz verarbeitet, um ein Schätzsignal $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_a := [\boldsymbol{\sigma}'_{va} \ \boldsymbol{\sigma}'_{\omega a}]'$ zu berechnen, das den Einfluss der Unsicherheiten sowohl in der translatorischen

Dynamik ($\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{va}$) als auch in der rotatorischen Dynamik ($\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\omega a}$) beinhaltet. Wie zuvor erwähnt, ist ein Grundsatz der \mathcal{L}_1 -adaptiven Regelung, eine schnelle Adaption zu realisieren, wodurch $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_a$ auch hochfrequente Störanteile beinhalten kann. Da diese nicht gestellt werden können, tilgt der nominale \mathcal{L}_1 -Filter $\hat{\mathbf{C}}(s)$ die hohen Frequenzanteile und erzeugt das Kompensationssignal $\hat{\boldsymbol{\eta}}_a^* = \mathcal{L}^{-1}[\hat{\mathbf{C}}(s)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_a(s)]$, das zu der nominalen Sollbeschleunigung sowie zu der nominalen Solldrehratenänderung addiert wird. Die Summe aus beidem wird mithilfe der geschätzten Eingangsverstärkungen $\hat{\mathbf{K}} := \text{diag}(\hat{\kappa}_v \mathbf{I}_{3 \times 3}, \hat{\mathbf{K}}_\omega)$ in den Sollschubvektor \mathbf{t}_d und in die Stellmomente $\boldsymbol{\tau}$ umgerechnet.

Da der Quadrocopter unteraktuiert ist, kann der geforderte Schubvektor \mathbf{t}_d im Allgemeinen erst durch eine Verkippung des Rahmens und nicht direkt realisiert werden. Daher muss diese Größe zurückgeführt werden und in die Berechnung der gewünschten Solldrehratenänderung $\boldsymbol{\sigma}_{\omega n}$ sowie der gewünschten Schubbetragsänderung u_T einfließen. \mathbf{t}_d ist folglich ein virtuelles Stellsignal des nominalen Backsteppingsreglers (für den zweiten Backsteppingschritt) und die durch diese Rückführung entstehende Schleife ist Teil des nominalen Folgereglers.

Wird $\hat{\mathbf{C}}(s) = \mathbf{0}$ gesetzt und somit der adaptive Regelanteil deaktiviert, entspricht die Regelschleife einer klassischen Backsteppingregelung zur Trajektorienfolge mit vollständig analytisch berechnetem Stellgesetz. Ohne die Trennung der Adaption von der nominalen Regelung wäre dies nicht möglich, denn das Signal $\boldsymbol{\sigma}_n$ würde nicht existieren und dessen Informationsgehalt müsste durch die Adaption erzeugt und von $\hat{\mathbf{C}}(s)$ gefiltert werden. Dies entspräche einer klassischen Anwendung der \mathcal{L}_1 -adaptiven Regelung [21, 42], welche hier bewusst umgangen werden soll, um eine niedrige Bandbreite von $\hat{\mathbf{C}}(s)$ und gleichzeitig eine hohe Flugdynamik zu ermöglichen.

Im Folgenden wird das Stellgesetz hergeleitet, die Definition des Zustandsschätzers sowie die des Adaptionsgesetzes erfolgt in den darauffolgenden Abschnitten.

3.2. Herleitung des Stellgesetzes

1. Schritt des Backstepping

Im ersten Backsteppingschritt wird ein virtuelles Stellgesetz für den ersten Teil der translatorischen Dynamik, gegeben in (2.34a), entwickelt. Dies soll den Unterschied zwischen der aktuellen Position \mathbf{x} und der Sollposition der Trajektorie \mathbf{x}_T , definiert als Positionsfolgefehler $\mathbf{z}_x = \mathbf{x} - \mathbf{x}_T$, abbauen. Eine möglicher Kandidat für eine Lyapunovfunktion und dessen Ableitung ist

$$V_x = \frac{1}{2} \mathbf{z}'_x \mathbf{z}_x \quad \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \quad \dot{V}_x = \mathbf{z}'_x (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{x}}_T). \quad (3.1)$$

Damit die Ableitung \dot{V}_x außerhalb der angestrebten Stelle $\mathbf{z}_x = 0$ stets negativ ist, bietet sich folgende Sollgeschwindigkeit als virtuelles Stellgesetz an:

$$\mathbf{v}_d = \dot{\mathbf{x}}_T + \mathbf{A}_x \mathbf{z}_x, \quad (3.2)$$

wobei $\mathbf{A}_x < 0$ gewählt wird. Die resultierende Fehlerdynamik lautet

$$\dot{\mathbf{z}}_x = \mathbf{v} - \dot{\mathbf{x}}_T = \mathbf{A}_x \mathbf{z}_x + \mathbf{z}_v, \quad (3.3)$$

mit dem Geschwindigkeitsfehler $\mathbf{z}_v = \mathbf{v} - \mathbf{v}_d = \mathbf{v} - \dot{\mathbf{x}}_T - \mathbf{A}_x \mathbf{z}_x$.

2. Schritt des Backstepping

Um im nächsten Backsteppingschritt auch den Geschwindigkeitsfehler \mathbf{z}_v abzubauen, wird V_x erweitert, so dass gilt

$$V_v = V_x + \frac{1}{2}\mathbf{z}'_v\mathbf{z}_v \quad \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \quad \dot{V}_v = \mathbf{z}'_x\mathbf{A}_x\mathbf{z}_x + \mathbf{z}'_v(\mathbf{z}_x + \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}_d). \quad (3.4)$$

Darin kann $\dot{\mathbf{v}}$ durch den Gesamtschubvektor \mathbf{t} beeinflusst werden, siehe (2.34b). Daher bietet sich ein virtuelles Stellgesetz für den Gesamtschubvektor bezeichnet als \mathbf{t}_d an. Um alle Unsicherheiten und Störungen in (2.34b) kompensieren zu können, wird die Fehlerdynamik für \mathbf{z}_v wie folgt dargestellt:

$$\dot{\mathbf{z}}_v = \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}_d = \mathbf{A}_v\mathbf{z}_v - \mathbf{z}_x + \hat{\kappa}_v^2\mathbf{z}_t + \kappa_v\mathbf{t}_d + \boldsymbol{\sigma}_{vn} + \boldsymbol{\sigma}_{va}. \quad (3.5)$$

Dabei wird \mathbf{A}_v negativ definit gewählt und $\mathbf{z}_t := \hat{\kappa}_v^{-1}(\mathbf{t} - \mathbf{t}_d)$ als eine normierte vektorielle Abweichung im Gesamtschub mit $\hat{\kappa}_v$ als eine Schätzung für κ_v definiert.

Anmerkung 2. Der Unterschied zwischen dem gewünschten und dem tatsächlichen Schubvektor, $\mathbf{t} - \mathbf{t}_d$, wird mit $\hat{\kappa}_v^{-1}$ skaliert um \mathbf{z}_t an die Größenordnung der anderen Fehlerzustände anzugleichen. Für die in Kapitel 4 durchgeführten Abschätzungen ist diese Normierung vorteilhaft.

Die Größe $\boldsymbol{\sigma}_{vn}$ in (3.5) ist die erste Komponente des nominalen Stellgesetzes $\boldsymbol{\sigma}_n$, siehe Abschnitt 3.1, und enthält alle bekannten Signale sowie Schätzwerte für unbekannte Signale und lautet

$$\boldsymbol{\sigma}_{vn} = \hat{\mathbf{f}}_v + \hat{g}_I\mathbf{e}_z - \dot{\mathbf{v}}_d - \mathbf{A}_v\mathbf{z}_v + \mathbf{z}_x. \quad (3.6)$$

Dabei ist $\hat{\mathbf{f}}_v = \hat{\mathbf{D}}\mathbf{v}$ eine Schätzung für \mathbf{f}_v und die konstante Matrix $\hat{\mathbf{D}} < 0$ beschreibt lineare Dämpfungskoeffizienten. Alle unbekanntes Signale, also Störungen und Schätzfehler, sind in

$$\boldsymbol{\sigma}_{va} = -\tilde{\mathbf{f}}_v - \tilde{g}_I\mathbf{e}_z + \zeta_v - \tilde{\kappa}_v\hat{\kappa}_v\mathbf{z}_t \quad (3.7)$$

enthalten, mit $\tilde{\kappa}_v = \hat{\kappa}_v - \kappa_v$.

Anmerkung 3. Das unbekanntes Signal $\boldsymbol{\sigma}_{va}$ wird von der Adaption geschätzt und die Schätzung wird mit $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{va}$ bezeichnet. Ein nicht adaptives Backstepping würde nur den Term $\boldsymbol{\sigma}_{vn}$ berücksichtigen und $\boldsymbol{\sigma}_{va} = 0$ annehmen. Durch die Aufteilung in $\boldsymbol{\sigma}_{vn}$ und $\boldsymbol{\sigma}_{va}$ kann in dieser Arbeit eine Entkopplung der Adaptionstruktur von der nominalen Regelung erreicht werden, was wie bereits erwähnt für die praktische Realisierung der Regelung besonders wichtig ist.

Gemäß der Aufteilung in $\boldsymbol{\sigma}_{vn}$ und $\boldsymbol{\sigma}_{va}$ wird der Sollschub \mathbf{t}_d ebenfalls aufgeteilt in

$$\mathbf{t}_d = \mathbf{t}_{da} + \mathbf{t}_{dn}. \quad (3.8)$$

Für beide Anteile würden die folgenden, jedoch nicht erfüllbaren Sollvorgaben

$$\mathbf{t}_{dn} = -\kappa_v^{-1}\boldsymbol{\sigma}_{vn}, \quad \mathbf{t}_{da} = -\kappa_v^{-1}\boldsymbol{\sigma}_{va} \quad (3.9)$$

dazu führen, dass \dot{V}_v in (3.4) außerhalb der Stelle $\mathbf{z}_x = \mathbf{z}_v = 0$ negativ wird. Da jedoch nur die Schätzungen $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{va}$ und $\hat{\kappa}_v$ bekannt sind und es das Konzept der \mathcal{L}_1 -adaptiven Regelung ist, Unsicherheiten nur in einem gewissen Frequenzbereich zu kompensieren, werden folgende erfüllbare Sollvorgaben gemacht:

$$\mathbf{t}_{dn} = -\hat{\kappa}_v^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{vn}, \quad \mathbf{t}_{da}(s) = -\hat{\kappa}_v^{-1} \hat{\mathbf{C}}_v(s) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{va}(s). \quad (3.10)$$

Der Filter $\hat{\mathbf{C}}_v(s)$ ist der nominale \mathcal{L}_1 -Filter der translatorischen Dynamik und wird als ein exponentiell stabiler Tiefpassfilter mit stationärer Übertragung von $\hat{\mathbf{C}}_v(0) = \mathbf{I}_{3 \times 3}$ ausgelegt, dessen Anfangswerte zu Null gesetzt werden. Die Bandbreite des Filters ist ein freier Regelparameter, auf den später genauer eingegangen wird. Das Signal $\boldsymbol{\sigma}_{vn}$ sowie $\hat{\kappa}_v^{-1}$ sind exakt bekannt und $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{va}$ ist die bekannte Schätzung für $\boldsymbol{\sigma}_{va}$. Daher können beide Schubanteile wie in (3.10) gegeben im Regler implementiert werden.

Für die nächsten Schritte werden beide Schubanteile in einer Schreibweise benötigt, welche die tatsächliche Eingangsverstärkung κ_v und den Schätzfehler $\tilde{\kappa}_v = \hat{\kappa}_v - \kappa_v$ benutzt und mit (3.10) jeweils lautet

$$\mathbf{t}_{dn} = -\hat{\kappa}_v^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{vn} = -\kappa_v^{-1} (\boldsymbol{\sigma}_{vn} - (\hat{\kappa}_v - \kappa_v) \hat{\kappa}_v^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{vn}) = -\kappa_v^{-1} (\boldsymbol{\sigma}_{vn} + \tilde{\kappa}_v \mathbf{t}_{dn}) =: -\kappa_v^{-1} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{vn} \quad (3.11)$$

und

$$\mathbf{t}_{da}(s) = -\hat{\kappa}_v^{-1} \hat{\mathbf{C}}_v(s) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{va}(s) = -\kappa_v^{-1} (\hat{\mathbf{C}}_v(s) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{va}(s) + \tilde{\kappa}_v \mathbf{t}_{da}(s)) =: -\kappa_v^{-1} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}(s). \quad (3.12)$$

Die darin definierten Größen, $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{vn}$ und $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}$, beschreiben die tatsächlichen durch \mathbf{t}_{dn} und \mathbf{t}_{da} erzeugten Beschleunigungen.

Anmerkung 4. Für die Analyse der Systemeigenschaften werden zwei Darstellungsformen für den Schubanteil \mathbf{t}_{da} benötigt. Die erste Darstellungsform in (3.12) enthält den bekannten nominalen \mathcal{L}_1 -Filter $\hat{\mathbf{C}}_v(s)$, der tatsächlich in der Regelung implementiert wird. In der zweiten Darstellungsform wird ein nicht exakt bekannter Tiefpassfilter $\mathbf{C}_v(s)$ definiert, welcher für die Analyse des Regelkreises von höherer Bedeutung ist, denn innerhalb dessen Bandbreite ist die Adaption tatsächlich wirksam.

Eine zweite ebenfalls benötigte Darstellungsform für den Schubanteil \mathbf{t}_{da} ergibt sich durch die folgende, für die \mathcal{L}_1 -adaptive Regelung übliche, implizite Schreibweise

$$\mathbf{t}_{da}(s) = -d_v(s) (\hat{\kappa}_v \mathbf{t}_{da}(s) + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{va}(s)). \quad (3.13)$$

Darin ist $d_v(s)$ eine skalare Übertragungsfunktion und (3.13) lässt sich umformen zu

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{da}(s) &= -d_v(s) (\kappa_v \mathbf{t}_{da}(s) + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{va}(s) + \tilde{\kappa}_v \mathbf{t}_{da}(s)) \\ &= -\kappa_v^{-1} \mathbf{C}_v(s) [\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{va}(s) + \tilde{\kappa}_v \mathbf{t}_{da}(s)] = -\kappa_v^{-1} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}(s). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Über die implizite Schreibweise in (3.13), erhält man für beide Tiefpassfilter, mit dessen Anfangswerten gleich Null,

$$\hat{\mathbf{C}}_v(s) = \hat{\kappa}_v d_v(s) (1 + d_v(s) \hat{\kappa}_v)^{-1} \mathbf{I}_{3 \times 3}, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{C}_v(s) = \kappa_v d_v(s) (1 + d_v(s) \kappa_v)^{-1} \mathbf{I}_{3 \times 3}. \quad (3.16)$$

3. Regelungssynthese

Ebenso wie $\hat{\mathbf{C}}_v(s)$, muss auch $\mathbf{C}_v(s)$ exponentiell stabil sein und $\mathbf{C}_v(0) = \mathbf{I}_{3 \times 3}$ gelten. Beide Filter müssen zudem eine Ordnung von mindestens drei besitzen. Um dies sicherzustellen wird die Funktion $d_v(s)$ entsprechend gewählt. Durch die Filterordnung von drei gelingt es, vorausgesetzt das Eingangssignal ist stückweise stetig, differenzierbare Signale für $\dot{\mathbf{t}}_{da}$ und $\ddot{\mathbf{t}}_{da}$ zu erzeugen, welche im weiteren Verlauf benötigt werden.

Das virtuelle Stellgesetz für den Schubvektor lässt sich mit (3.10) darstellen als

$$\mathbf{t}_d = -\kappa_v^{-1} \hat{\boldsymbol{\eta}}_v = -\hat{\kappa}_v^{-1} \left(\mathcal{L}^{-1}[\hat{\mathbf{C}}_v(s) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{va}(s)] + \boldsymbol{\sigma}_{vn} \right), \quad (3.17)$$

wobei $\hat{\boldsymbol{\eta}}_v := \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va} + \hat{\boldsymbol{\eta}}_{vn}$ gilt. Gleichung (3.17) eingesetzt in (3.5) mit der Definition $\boldsymbol{\sigma}_v := \boldsymbol{\sigma}_{va} + \boldsymbol{\sigma}_{vn}$ ergibt folgenden Fehlerdynamik für \mathbf{z}_v

$$\dot{\mathbf{z}}_v = \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}_d = \mathbf{A}_v \mathbf{z}_v - \mathbf{z}_x + \hat{\kappa}_v^2 \mathbf{z}_t + \boldsymbol{\sigma}_v - \hat{\boldsymbol{\eta}}_v \quad (3.18)$$

und die Ableitung von (3.4) lautet somit

$$\dot{V}_v = \mathbf{z}'_x \mathbf{A}_x \mathbf{z}_x + \mathbf{z}'_v \mathbf{A}_v \mathbf{z}_v + \mathbf{z}'_v (\boldsymbol{\sigma}_v - \hat{\boldsymbol{\eta}}_v). \quad (3.19)$$

Der Term, $\mathbf{z}'_v (\boldsymbol{\sigma}_v - \hat{\boldsymbol{\eta}}_v)$, ist nicht gesichert negativ außerhalb der Stelle $\mathbf{z}_x = \mathbf{z}_v = 0$, da er den verbleibenden Schätzfehler bzw. die hochfrequenten Anteile enthält, die bewusst nicht getilgt werden. Dieser wird im weiteren Verlauf des Backstepping unverändert mitgezogen und in Kapitel 4 im Rahmen der Analyse der Systemeigenschaften näher untersucht.

3. Schritt des Backstepping

Das Ziel im nächsten Schritt ist es, zusätzlich zu \mathbf{z}_x und \mathbf{z}_v auch die Abweichung des Schubvektors \mathbf{z}_t abzubauen. Deshalb wird V_v aus (3.4) wie folgt erweitert

$$V_t = V_v + \frac{1}{2} \mathbf{z}'_t \mathbf{z}_t \quad \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \quad \dot{V}_t = \mathbf{z}'_x \mathbf{A}_x \mathbf{z}_x + \mathbf{z}'_v \mathbf{A}_v \mathbf{z}_v + \mathbf{z}'_t (\hat{\kappa}_v^2 \mathbf{z}_v + \hat{\kappa}_v^{-1} (\dot{\mathbf{t}} - \dot{\mathbf{t}}_d)) + \mathbf{z}'_v (\boldsymbol{\sigma}_v - \hat{\boldsymbol{\eta}}_v). \quad (3.20)$$

Aus (2.34c) geht hervor, dass $\dot{\mathbf{t}}$ durch eine Veränderung von $\boldsymbol{\omega}_{xy}$ und \dot{T} und somit durch die normierte Größe ${}_n \mathbf{w}$ beeinflusst werden kann. Daher wird das folgende virtuelle Stellgesetz verwendet

$${}_n \mathbf{w}_d = {}_n \mathbf{M}^{-1} \left(\dot{\mathbf{t}}_d + \hat{\kappa}_v \mathbf{A}_t \mathbf{z}_t - \hat{\kappa}_v^3 \mathbf{z}_v \right), \quad (3.21)$$

worin $\mathbf{A}_t < 0$ gilt.

Anmerkung 5. Da in der Abbildung: ${}_n \mathbf{M}^{-1} = [-\hat{\kappa}_v^{-1} T^{-1} {}_B \mathbf{e}_{z12} \quad -\hat{g}^{-1} {}_B \mathbf{e}_z] \mathbf{R}_{BI}$, der inverse Schubbetrag enthalten ist, siehe (2.12), muss dafür gesorgt werden, dass stets $T \geq T_{\min} > 0$ gilt. Dies ist eine allgemein bekannte und systeminhärente Hürde, die alle Positionsfolgeregelungen am VTOL umgehen müssen. In dieser Arbeit wird vorausgesetzt, dass die Solltrajektorie für die Position hinreichend glatt, d.h. $\mathbf{x}_T \in C^4$, und begrenzt ist, so dass mit moderaten Folgefehlern gilt: $T_{\max} \geq T \geq T_{\min} > 0$.

Die Größe $\hat{\mathbf{t}}_d$ in (3.21) ist eine Schätzung für die tatsächlich benötigte Sollschubänderung $\dot{\mathbf{t}}_d$ und lautet

$$\hat{\mathbf{t}}_d = -\hat{\kappa}_v^{-1} \left(\mathcal{L}^{-1} [s \hat{\mathbf{C}}_v(s) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{va}(s)] + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{vn} \right), \quad (3.22)$$

wobei $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{vn}$ wiederum eine Schätzung für $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{vn}$ ist. Durch Ableitung von Gleichung (3.6) und Einsetzen der Gleichung (3.3) bzw. der Ableitung von (3.2) erhält man

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{vn} = & (\hat{\mathbf{D}}\mathbf{A}_x\mathbf{A}_x + 2\mathbf{A}_x - \mathbf{A}_x\mathbf{A}_x\mathbf{A}_x - \hat{\mathbf{D}} + \mathbf{A}_v)\mathbf{z}_x + (\hat{\mathbf{D}} - \mathbf{A}_v - \mathbf{A}_x)\hat{\kappa}_v^2\mathbf{z}_t + \hat{\mathbf{D}}\ddot{\mathbf{x}}_T - \ddot{\mathbf{x}}_T \\ & + (\hat{\mathbf{D}}\mathbf{A}_x + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{A}_v + \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{A}_x\mathbf{A}_x - \mathbf{A}_v\mathbf{A}_v + \mathbf{A}_x\mathbf{A}_v)\mathbf{z}_v \\ & + (\hat{\mathbf{D}} - \mathbf{A}_v - \mathbf{A}_x)(\boldsymbol{\sigma}_{va} + \boldsymbol{\sigma}_{vn} + \kappa_v\mathbf{t}_d). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Darin ist der exakte Wert für κ_v nicht bestimmbar und $\boldsymbol{\sigma}_{va}$ wäre nur durch Verwendung der Beschleunigungsmessung berechenbar, $\boldsymbol{\sigma}_{va} = \dot{\mathbf{v}} - \boldsymbol{\sigma}_{vn}$, was jedoch im nächsten Schritt zu Problemen führen würde. Daher kann $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{vn}$ nicht exakt angegeben werden. Die Schätzung $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{vn}$ nutzt daher den gefilterten Schätzwert $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{va}$ sowie $\hat{\kappa}_v$ und lautet

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{vn} = & (\hat{\mathbf{D}}\mathbf{A}_x\mathbf{A}_x + 2\mathbf{A}_x - \mathbf{A}_x\mathbf{A}_x\mathbf{A}_x - \hat{\mathbf{D}} + \mathbf{A}_v)\mathbf{z}_x + (\hat{\mathbf{D}} - \mathbf{A}_v - \mathbf{A}_x)\hat{\kappa}_v^2\mathbf{z}_t + \hat{\mathbf{D}}\ddot{\mathbf{x}}_T - \ddot{\mathbf{x}}_T \\ & + (\hat{\mathbf{D}}\mathbf{A}_x + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{A}_v + \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{A}_x\mathbf{A}_x - \mathbf{A}_v\mathbf{A}_v + \mathbf{A}_x\mathbf{A}_v)\mathbf{z}_v \\ & + (\hat{\mathbf{D}} - \mathbf{A}_v - \mathbf{A}_x)(\mathcal{L}^{-1}[\hat{\mathbf{C}}_v(s)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{va}(s)] + \boldsymbol{\sigma}_{vn} + \hat{\kappa}_v\mathbf{t}_d). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Mit der Definition $\mathbf{K}_e := \hat{\mathbf{D}} - \mathbf{A}_v - \mathbf{A}_x$ lässt sich der hiermit entstehende Schätzfehler $\Delta\hat{\mathbf{t}}_d$ angeben als

$$\Delta\hat{\mathbf{t}}_d := \hat{\mathbf{t}}_d - \mathbf{t}_d = -\hat{\kappa}_v^{-1}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{vn} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{vn}) = \hat{\kappa}_v^{-1}\mathbf{K}_e(\boldsymbol{\sigma}_v - \hat{\boldsymbol{\eta}}_v). \quad (3.25)$$

Mit (2.12), (3.21) und der Definition der Fehlergröße

$$\mathbf{z}_r := {}_n\mathbf{w} - {}_n\mathbf{w}_d, \quad (3.26)$$

stellt sich die Fehlerdynamik für \mathbf{z}_t folgendermaßen dar

$$\dot{\mathbf{z}}_t = \hat{\kappa}_v^{-1}(\dot{\mathbf{t}} - \dot{\mathbf{t}}_d) = \mathbf{A}_t\mathbf{z}_t + \hat{\kappa}_v^{-1}{}_n\mathbf{M}\mathbf{z}_r - \hat{\kappa}_v^2\mathbf{z}_v + \hat{\kappa}_v^{-1}\Delta\hat{\mathbf{t}}_d. \quad (3.27)$$

Anmerkung 6. Die Ableitung $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{vn}$ könnte analytisch exakt bestimmt werden, wenn anstatt der Schätzung $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{vn}$, die zur Verfügung stehende Beschleunigungsmessung $\dot{\mathbf{v}}$ genutzt und Gleichung (3.5) nach $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{vn}$ aufgelöst wird. Verwendet man jedoch in diesem Schritt die exakte Ableitung $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{vn}$, entsteht der Nachteil, dass die im weiteren Vorgehen benötigte zweite Ableitung $\ddot{\boldsymbol{\sigma}}_{vn}$ nicht mehr exakt bestimmbar ist. Auch diese könnte geschätzt werden, nur würde der entstehende Schätzfehler im darauffolgenden Backsteppingschritt nichtlinear in die Systemdynamik einwirken. Dies hätte zur Folge, dass die in dieser Arbeit vorgestellte Analyse der Systemeigenschaften unmöglich wäre, welche einen linearen Eingriff der Unsicherheiten in die Fehlerdynamik voraussetzt. Durch die Verwendung der Schätzung $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{vn}$ kann jedoch die zweite Zeitableitung der Schätzung $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{vn}$ exakt bestimmt werden. Somit ermöglicht diese, bewusst einen Schritt früher als notwendig gemachte Approximation, das weitere Vorgehen und ist ein entscheidender Schritt um die Signale der Adaption sauber von der nominalen Regelung zu trennen.

4. Schritt des Backstepping

Im letzten Schritt soll zusätzlich der Fehler \mathbf{z}_r abgebaut werden. Hierfür wird V_t erweitert, so dass gilt

$$V_r = V_t + \frac{1}{2} \mathbf{z}'_r \mathbf{z}_r \quad \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \quad \dot{V}_r = \mathbf{z}'_x \mathbf{A}_x \mathbf{z}_x + \mathbf{z}'_v \mathbf{A}_v \mathbf{z}_v + \mathbf{z}'_t \mathbf{A}_t \mathbf{z}_t + \mathbf{z}'_v (\boldsymbol{\sigma}_v - \hat{\boldsymbol{\eta}}_v) \\ + \mathbf{z}'_t \hat{\kappa}_v^{-1} \Delta \hat{\mathbf{t}}_d + \mathbf{z}'_r (\hat{\kappa}_v^{-1} {}_n \mathbf{M}' \mathbf{z}_t + {}_n \dot{\mathbf{w}} - {}_n \dot{\mathbf{w}}_d). \quad (3.28)$$

Damit der letzte Summand von \dot{V}_r negativ definit wird, bietet sich die folgende Sollwertvorgabe an. Da ${}_n \dot{\mathbf{w}} = [{}_n \dot{\boldsymbol{\omega}}'_{xy} \quad {}_n \ddot{T}]'$ gilt, siehe (2.12), wird einerseits mittels ${}_n \ddot{T}$ ein Sollwert für die Stellgröße $u_T = \hat{g} {}_n \ddot{T}$ festgelegt und andererseits eine virtuelle Variable ${}_n \dot{\boldsymbol{\omega}}_{xy}$ definiert, welche mithilfe der Stellmomente $\boldsymbol{\tau}$ eingestellt werden soll, so dass ${}_n \dot{\boldsymbol{\omega}}_{xy} \stackrel{!}{=} {}_n \dot{\boldsymbol{\omega}}_{xy}$ gilt. Diese Sollwertvorgabe lautet:

$$[{}_n \dot{\boldsymbol{\omega}}'_{xy} \quad {}_n \ddot{T}]' = {}_n \dot{\mathbf{w}}_d + \mathbf{A}_r \mathbf{z}_r - \hat{\kappa}_v^{-1} {}_n \mathbf{M}' \mathbf{z}_t. \quad (3.29)$$

Darin gilt $\mathbf{A}_r < 0$ und ${}_n \dot{\mathbf{w}}_d = {}_n \dot{\mathbf{M}}^{-1} {}_n \mathbf{M} {}_n \dot{\mathbf{w}}_d + {}_n \mathbf{M}^{-1} (\hat{\dot{\mathbf{t}}}_d + \hat{\kappa}_v \mathbf{A}_t \dot{\mathbf{z}}_t - \hat{\kappa}_v^3 \dot{\mathbf{z}}_v)$. Die Ableitung $\dot{\mathbf{z}}_t$ erhält man aus (3.27) mit exakter Bestimmung von $\Delta \hat{\mathbf{t}}_d$, wofür die Beschleunigungsmessung $\dot{\mathbf{v}}$ ausgenutzt wird. Die Ableitung $\dot{\mathbf{z}}_v$ berechnet sich ebenso durch Ausnutzung der Beschleunigungsmessung wie folgt: $\dot{\mathbf{z}}_v = \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{x}}_T - \mathbf{A}_x \mathbf{z}_x$. Mit diesen beiden Ableitungen lässt sich die exakte Zeitableitung von $\hat{\mathbf{t}}_d$ aus (3.22) angeben:

$$\hat{\dot{\mathbf{t}}}_d(s) = -\hat{\kappa}_v^{-1} (\mathcal{L}^{-1}[s^2 \hat{\mathbf{C}}_v(s) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{va}(s)] + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{vn}). \quad (3.30)$$

Dafür folgt aus (3.24)

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{vn} = (\hat{\mathbf{D}} \mathbf{A}_x \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_x - \mathbf{A}_x \mathbf{A}_x \mathbf{A}_x - \mathbf{K}_e) (\mathbf{A}_x \mathbf{z}_x + \mathbf{z}_v) + \mathbf{K}_e \hat{\kappa}_v^2 \dot{\mathbf{z}}_t \\ + \hat{\mathbf{D}} \ddot{\mathbf{x}}_T - \ddot{\mathbf{x}}_T + \mathbf{K}_e (\mathcal{L}^{-1}[s \hat{\mathbf{C}}_v(s) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{va}(s)] + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{vn} + \hat{\kappa}_v \hat{\mathbf{t}}_d), \quad (3.31)$$

wobei die Tatsache ausgenutzt wurde, dass $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{vn} + \hat{\kappa}_v \dot{\mathbf{t}}_d = \hat{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}_{vn} + \hat{\kappa}_v \hat{\dot{\mathbf{t}}}_d$ gilt, siehe (3.25). Der Ausdruck ${}_n \dot{\mathbf{M}}^{-1} {}_n \mathbf{M}$ lässt sich darstellen als, siehe (2.12),

$${}_n \dot{\mathbf{M}}^{-1} {}_n \mathbf{M} = -\text{diag} \left(\frac{\dot{T}}{T}, \frac{\dot{T}}{T}, 0 \right) \\ - [\hat{\kappa}_v^{-1} T^{-1} \quad {}_B \mathbf{e}_{z12} \quad {}_B \mathbf{e}_z \hat{g}^{-1}] \mathbf{R}_{BI} \underline{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{R}_{IB} [\hat{\kappa}_v T \quad {}_B \mathbf{e}_{z12} \quad -{}_B \mathbf{e}_z \hat{g}]. \quad (3.32)$$

Integration des Heading

An dieser Stelle soll das Heading miteinbezogen werden, mit dem Ziel, den Unterschied zwischen der Solltrajektorie φ_T und dem Winkel φ abzubauen. Es bietet sich an, die beiden Winkel φ und φ_T auf den Winkelbereich $[-\pi, \pi[$ zu beschränken. Für den Fall, dass φ_T oder φ einen Sprung zwischen $\pm\pi$ erfährt, sollte eine Drehung durch den größeren Winkel vermeiden werden. Dies kann mit einer Projektion des Folgefehlers auf den Winkelbereich $[-\pi, \pi[$ geschehen, wofür der Folgefehler wie folgt zu definieren

ist: $z_\varphi = \text{mod}(\varphi - \varphi_T + \pi, 2\pi) - \pi$, mit $\text{mod}(x, y)$ als die Modulo Funktion. Um diesen Fehler abzubauen wird folgender Kandidat für eine Lyapunovfunktion gewählt:

$$V_\varphi = \frac{1}{2} z_\varphi^2 \quad \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \quad \dot{V}_\varphi = z_\varphi(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_T). \quad (3.33)$$

Mit (2.31) kann das folgende virtuelle Stellgesetz für die Drehrate in z -Richtung

$$\omega_{zd} = \dot{\varphi}_T + a_\varphi z_\varphi + \mathbf{I}' \mathbf{R}_s \boldsymbol{\omega}_{xy} \quad (3.34)$$

definiert werden, wobei $a_\varphi < 0$ gewählt wird. Mit dem Fehler $z_{\omega z} := \hat{\kappa}_v^{-1}(\omega_z - \omega_{zd})$ erhält man für \dot{V}_φ

$$\dot{V}_\varphi = a_\varphi z_\varphi^2 + z_\varphi \hat{\kappa}_v z_{\omega z} \quad (3.35)$$

und die resultierende Fehlerdynamik lautet

$$\dot{z}_\varphi = a_\varphi z_\varphi + \hat{\kappa}_v z_{\omega z}. \quad (3.36)$$

Anmerkung 7. Um zu zeigen, dass sich das System problemlos durch die Sprungstelle in z_φ bei $\pm\pi$ bewegen kann, bietet es sich an die Fehlerdynamik aus Gleichung (3.36) näher zu analysieren: Die Sprungstelle tritt auf wenn sich z_φ auf dem Rand von $[-\pi, \pi[$ befindet und \dot{z}_φ aus der Menge $[-\pi, \pi[$ hinaus zeigt. Mit (3.34) lässt sich (3.36) schreiben als $\dot{z}_\varphi = \omega_z - \dot{\varphi}_T - \mathbf{I}' \mathbf{R}_s \boldsymbol{\omega}_{xy}$. Dies zeigt, dass \dot{z}_φ nicht vom Sprung in z_φ betroffen ist. Somit wird sich das System nach einem Sprung in z_φ von der Sprungstelle wegbewegen und nicht für immer dort verweilen.

Um weiterhin den Fehler $z_{\omega z}$ abzubauen, wird V_φ aus (3.33) wie folgt erweitert:

$$V_{\omega z} = V_\varphi + \frac{1}{2} z_{\omega z}^2 \quad \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \quad \dot{V}_{\omega z} = a_\varphi z_\varphi^2 + z_{\omega z}(\hat{\kappa}_v z_\varphi + \hat{\kappa}_v^{-1}(\dot{\omega}_z - \dot{\omega}_{zd})). \quad (3.37)$$

Dies führt zu folgendem virtuellem Stellgesetz bzw. der Forderung

$$\dot{\omega}_z \stackrel{!}{=} \hat{\omega}_z := \dot{\omega}_{zd} + \hat{\kappa}_v a_{\omega z} z_{\omega z} - \hat{\kappa}_v^2 z_\varphi, \quad (3.38)$$

welche durch die Stellmomente $\boldsymbol{\tau}$ realisiert werden soll. Dabei ist $\hat{\omega}_z$ eine Hilfsvariable und $a_{\omega z} < 0$. Der Wert $\dot{\omega}_{zd}$ stellt sich durch Ableiten von (2.30) wie folgt dar:

$$\dot{\omega}_{zd} = \ddot{\varphi}_T + a_\varphi \dot{z}_\varphi + (\mathbf{I}' \dot{\mathbf{R}}_s + \mathbf{I}' \dot{\mathbf{R}}_s) \boldsymbol{\omega}_{xy} + \mathbf{I}' \mathbf{R}_s \dot{\boldsymbol{\omega}}_{xy}. \quad (3.39)$$

Da $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{xy}$ sowohl Unsicherheiten enthält als auch eine Funktion der Stellmomente $\boldsymbol{\tau}$ ist, siehe (2.34d), wird der Ausdruck $\mathbf{I}' \mathbf{R}_s \dot{\boldsymbol{\omega}}_{xy}$ als unsicher angenommen und von der Adaption geschätzt. Dies umgeht einen sonst entstehenden algebraischen Zusammenhang für die Stellmomente, der mit unsicheren Parametern behaftet wäre und nicht exakt aufgelöst werden könnte.

Zusammenführung von Position und Heading

Um die bisher entwickelten virtuellen Stellgesetze aus (3.29) und (3.38) zusammenzuführen, bietet es sich an, die Forderung $\dot{\omega}_z \stackrel{!}{=} \hat{\omega}_z$ und ${}_n \dot{\boldsymbol{\omega}}_{xy} \stackrel{!}{=} {}_n \hat{\boldsymbol{\omega}}_{xy}$ mit der Umrechnung $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{xy} = \hat{\kappa}_v {}_n \hat{\boldsymbol{\omega}}_{xy}$ zu $\boldsymbol{\omega} \stackrel{!}{=} \hat{\boldsymbol{\omega}} = [\hat{\boldsymbol{\omega}}'_{xy} \hat{\omega}_z]'$ zusammenzufassen. Um diese Forderung

3. Regelungssynthese

schließlich zu erfüllen, wird die rotatorische Dynamik aus (2.34d) analog zu (3.5) geschrieben als

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \stackrel{!}{=} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{K}_\omega \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\sigma}_{\omega n} + \boldsymbol{\sigma}_{\omega a}. \quad (3.40)$$

Dabei sind die bekannten Signale in $\boldsymbol{\sigma}_{\omega n}$ und alle Schätzfehler und Störungen in $\boldsymbol{\sigma}_{\omega a}$ enthalten, welche somit lauten:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\omega n} = \hat{\mathbf{f}}_\omega - \dot{\boldsymbol{\omega}}_n, \quad \boldsymbol{\sigma}_{\omega a} = -\tilde{\mathbf{f}}_\omega + \boldsymbol{\zeta}_\omega - \dot{\boldsymbol{\omega}}_a. \quad (3.41)$$

Darin ist $\hat{\mathbf{f}}_\omega = \hat{\mathbf{J}}^{-1}(\hat{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega})$ eine Schätzung für den Coriolis-term. Da der Ausdruck $\mathbf{l}'\mathbf{R}_s\dot{\boldsymbol{\omega}}_{xy}$ in $\dot{\boldsymbol{\omega}}_z$ von der Adaption geschätzt werden soll, wurde $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ in einen bekannten Teil $\dot{\boldsymbol{\omega}}_n$ und einen unsicheren, zu schätzenden Teil $\dot{\boldsymbol{\omega}}_a = [00\mathbf{l}'\mathbf{R}_s\dot{\boldsymbol{\omega}}_{xy}]'$ aufgeteilt. Analog zur Definition des Sollschubs in (3.8), werden auch die Komponenten des Moments in zwei Anteile geteilt, so dass gilt

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_n + \boldsymbol{\tau}_a. \quad (3.42)$$

Die Anteile sind vergleichbar zu \mathbf{t}_a und \mathbf{t}_n in (3.11) und (3.12) gewählt, so dass gilt

$$\boldsymbol{\tau}_n = -\hat{\mathbf{K}}_\omega^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{\omega n} = -\mathbf{K}_\omega^{-1}(\boldsymbol{\sigma}_{\omega n} + \tilde{\mathbf{K}}_\omega \boldsymbol{\tau}_n) =: -\mathbf{K}_\omega^{-1} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega n}, \quad (3.43)$$

$$\boldsymbol{\tau}_a(s) = -\hat{\mathbf{K}}_\omega^{-1} \hat{\mathbf{C}}_\omega(s) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\omega a}(s) = -\mathbf{K}_\omega^{-1}(\hat{\mathbf{C}}_\omega(s) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\omega a}(s) + \tilde{\mathbf{K}}_\omega \boldsymbol{\tau}_a(s)) =: -\mathbf{K}_\omega^{-1} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}(s). \quad (3.44)$$

Die darin definierten Größen, $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega n}$ und $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}$, beschreiben die durch $\boldsymbol{\tau}_n$ und $\boldsymbol{\tau}_a$ erzeugten Drehbeschleunigungen. Der Anteil $\boldsymbol{\tau}_a$ kann auch durch die folgende, für die \mathcal{L}_1 -adaptive Regelung übliche, implizite Schreibweise

$$\boldsymbol{\tau}_a(s) = -\mathbf{D}_\omega(s)(\mathbf{K}_\omega \boldsymbol{\tau}_a(s) + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\omega a}(s)) \quad (3.45)$$

dargestellt werden. $\mathbf{D}_\omega(s)$ ist eine Übertragungsfunktion, welche analog zu $d_v(s)$ in (3.13) als Parameter genutzt wird, um die gewünschten Eigenschaften von $\hat{\mathbf{C}}_\omega(s)$ einzustellen. Gleichung (3.45) lässt sich umschreiben zu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_a(s) &= -\mathbf{D}_\omega(s)(\mathbf{K}_\omega \boldsymbol{\tau}_a(s) + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\omega a}(s) + \tilde{\mathbf{K}}_\omega \boldsymbol{\tau}_a(s)) = -\mathbf{K}_\omega^{-1} \mathbf{C}_\omega(s) \left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\omega a}(s) + \tilde{\mathbf{K}}_\omega \boldsymbol{\tau}_a(s) \right) \\ &= -\mathbf{K}_\omega^{-1} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}(s). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Die Filter $\hat{\mathbf{C}}_\omega(s)$ und $\mathbf{C}_\omega(s)$ sind gegeben durch

$$\hat{\mathbf{C}}_\omega(s) = \hat{\mathbf{K}}_\omega(\mathbf{I}_{3 \times 3} + \mathbf{D}_\omega(s)\hat{\mathbf{K}}_\omega)^{-1}\mathbf{D}_\omega(s), \quad (3.47)$$

$$\mathbf{C}_\omega(s) = \mathbf{K}_\omega(\mathbf{I}_{3 \times 3} + \mathbf{D}_\omega(s)\mathbf{K}_\omega)^{-1}\mathbf{D}_\omega(s), \quad (3.48)$$

wobei die Anfangswerte der beiden Filter zu Null gesetzt sind. Die Funktion $\mathbf{D}_\omega(s)$ ist derart zu wählen, dass $\hat{\mathbf{C}}_\omega(s)$ und $\mathbf{C}_\omega(s)$ exponentiell stabile Tiefpassfilter von mindestens erster Ordnung mit stationärer Übertragung gleich $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ sind. Die Bandbreite der Filter sind ebenso wie die Bandbreite von $\hat{\mathbf{C}}_v(s)$ und $\mathbf{C}_v(s)$ freie Reglerparameter. Die Filterordnung von mindestens eins sorgt dafür, vorausgesetzt der Filtereingang

ist stückweise stetig, dass $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}$ und somit auch $\boldsymbol{\tau}_a$ Lipschitz-stetige Funktionen sind. Diese Eigenschaft wird für die Analyse der Systemeigenschaften benötigt.

Der Momentenvektor stellt sich mit $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega} = \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a} + \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega n}$, (3.43) und (3.44) folgendermaßen dar

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{K}_{\omega}^{-1} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega} = -\hat{\mathbf{K}}_{\omega}^{-1} \left(\mathcal{L}^{-1}[\hat{\mathbf{C}}_{\omega}(s) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\omega a}(s)] + \boldsymbol{\sigma}_{\omega n} \right). \quad (3.49)$$

Mit (3.49), der Definition $\boldsymbol{\sigma}_{\omega} := \boldsymbol{\sigma}_{\omega a} + \boldsymbol{\sigma}_{\omega n}$ und den Umrechnungen $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{xy} = \hat{\kappa}_v n \dot{\boldsymbol{\omega}}_{xy}$ und $\dot{\boldsymbol{\omega}}'_{xy} = \hat{\kappa}_v n \dot{\boldsymbol{\omega}}'_{xy}$ kann (3.40) geschrieben werden als

$$[{}_n \dot{\boldsymbol{\omega}}'_{xy} \quad \dot{\omega}_z]' = [{}_n \dot{\boldsymbol{\omega}}'_{xy} \quad \dot{\omega}_z]' + \text{diag}(\hat{\kappa}_v^{-1}, \hat{\kappa}_v^{-1}, 1)(\boldsymbol{\sigma}_{\omega} - \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega}). \quad (3.50)$$

Durch Ableiten von (3.26) und Einsetzen von (3.29), sowie mit den ersten beiden Zeilen von (3.50) erhält man

$$\dot{\mathbf{z}}_r = \mathbf{A}_r \mathbf{z}_r - \hat{\kappa}_v^{-1} n \mathbf{M}' \mathbf{z}_t + \text{diag}(\hat{\kappa}_v^{-1}, \hat{\kappa}_v^{-1}, 0)(\boldsymbol{\sigma}_{\omega} - \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega}). \quad (3.51)$$

Mit $\dot{z}_{\omega z} = \hat{\kappa}_v^{-1}(\dot{\omega}_z - \dot{\omega}_{zd})$ und (3.38), sowie der dritten Zeile von (3.50) folgt

$$\dot{z}_{\omega z} = a_{\omega z} z_{\omega z} - \hat{\kappa}_v z_{\varphi} + [0 \ 0 \ \hat{\kappa}_v^{-1}](\boldsymbol{\sigma}_{\omega} - \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega}). \quad (3.52)$$

Mit (3.29) und (3.49) sind die Stellgrößen u_T und $\boldsymbol{\tau}$ definiert und das Backstepping abgeschlossen. Auf welche Weise die Schätzungen $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_a = [\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_{va} \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_{\omega a}]'$ berechnet werden, folgt in Abschnitt 3.4 und 3.5. Zuvor wird ein Kandidat für eine Lyapunovfunktion für das Gesamtsystem definiert und das Fehlersystem für den geschlossenen Regelkreis formuliert, mithilfe dessen in Kapitel 4 die Eigenschaften der Regelung untersucht wird.

3.3. Formulierung des Fehlersystems

Kandidat für eine Lyapunovfunktion

Ein Kandidat für eine Lyapunovfunktion für das gesamte System kann durch Addition von (3.28) und (3.37) gewonnen werden und lautet

$$V := V_r + V_{\omega z} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \dot{V} = \mathbf{z}' \mathbf{A}_V \mathbf{z} + \mathbf{z}' \mathbf{B}_v (\boldsymbol{\sigma}_v - \hat{\boldsymbol{\eta}}_v) + \mathbf{z}' \mathbf{B}_{\omega} (\boldsymbol{\sigma}_{\omega} - \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega}), \quad (3.53)$$

mit $\mathbf{z}' := [\mathbf{z}'_x, \mathbf{z}'_v, \mathbf{z}'_t, \mathbf{z}'_r, z_{\varphi}, z_{\omega z}]'$ und

$$\mathbf{A}_V := \text{diag}(\mathbf{A}_x, \mathbf{A}_v, \mathbf{A}_t, \mathbf{A}_r, a_{\varphi}, a_{\omega z}), \quad (3.54)$$

$$\mathbf{B}'_v := [\mathbf{0}_{3 \times 3} \quad \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad \hat{\kappa}_v^{-2} \mathbf{K}_e \quad \mathbf{0}_{3 \times 3} \quad \mathbf{0}_{3 \times 2}]', \quad (3.55)$$

$$\mathbf{B}'_{\omega} := \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \text{diag}(\hat{\kappa}_v^{-1}, \hat{\kappa}_v^{-1}, 0) \end{array} \right] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \hat{\kappa}_v^{-1} \end{bmatrix}'. \quad (3.56)$$

Die Struktur von \mathbf{B}_v und \mathbf{B}_{ω} folgt aus (3.19), (3.28), (3.25), (3.51) und (3.52). Für eine übersichtlichere Darstellung im weiteren Verlauf der Arbeit, wird die Ableitung von V aus (3.53) mit $\mathbf{B} := [\mathbf{B}_v \ \mathbf{B}_{\omega}]$ umgestellt, so dass

$$\dot{V} = \mathbf{z}' \mathbf{A}_V \mathbf{z} + \mathbf{z}' \mathbf{B} (\boldsymbol{\sigma}_a - \hat{\boldsymbol{\eta}}_a + \boldsymbol{\sigma}_n - \hat{\boldsymbol{\eta}}_n), \quad (3.57)$$

3. Regelungssynthese

wobei aus (3.14) und (3.46) folgt

$$\begin{aligned}
\sigma_a(s) - \hat{\eta}_a(s) &:= \begin{bmatrix} \sigma_{va}(s) \\ \sigma_{\omega a}(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{\eta}_{va}(s) \\ \hat{\eta}_{\omega a}(s) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_{va}(s) \\ \sigma_{\omega a}(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{C}_v(s) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{C}_\omega(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{va}(s) \\ \hat{\sigma}_{\omega a}(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\kappa}_v \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \tilde{\mathbf{K}}_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{da}(s) \\ \boldsymbol{\tau}_a(s) \end{bmatrix} \\
&= \boldsymbol{\sigma}_a(s) - \mathbf{C}(s)[\hat{\boldsymbol{\sigma}}_a(s) - \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{K}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\eta}}_a(s)].
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Dabei wurde definiert: $\hat{\boldsymbol{\eta}}_a = [\hat{\eta}'_{va} \ \hat{\eta}'_{\omega a}]'$, $\mathbf{C}(s) := \text{diag}(\mathbf{C}_v(s), \mathbf{C}_\omega(s))$ und $\mathbf{K} := \text{diag}(\kappa_v \mathbf{I}_{3 \times 3}, \mathbf{K}_\omega)$. Mit (3.12) und (3.44) kann (3.58) auch dargestellt werden als

$$\boldsymbol{\sigma}_a(s) - \hat{\boldsymbol{\eta}}_a(s) = \boldsymbol{\sigma}_a(s) - \hat{\mathbf{C}}(s)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_a(s) + \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{K}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\eta}}_a(s). \tag{3.59}$$

Ebenso gilt mit (3.11) und (3.43)

$$\boldsymbol{\sigma}_n - \hat{\boldsymbol{\eta}}_n := \begin{bmatrix} \sigma_{vn} \\ \sigma_{\omega n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{\eta}_{vn} \\ \hat{\eta}_{\omega n} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \tilde{\kappa}_v \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \tilde{\mathbf{K}}_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{dn} \\ \boldsymbol{\tau}_n \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{K}}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_n \tag{3.60}$$

worin $\hat{\boldsymbol{\eta}}_n = [\hat{\eta}'_{vn} \ \hat{\eta}'_{\omega n}]'$ gilt. Folglich kann (3.57) geschrieben werden als

$$\dot{V} = \mathbf{z}'\mathbf{A}_V\mathbf{z} + \mathbf{z}'\mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}_a - \hat{\boldsymbol{\eta}}_a + \tilde{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{K}}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_n). \tag{3.61}$$

Würden alle Unsicherheiten im gesamten Frequenzbereich kompensiert werden, d.h. es würde $\boldsymbol{\sigma}_a = \hat{\boldsymbol{\eta}}_a$ und $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{0}$ gelten, dann ließe sich Gleichung (3.61) schreiben als $\dot{V} = \mathbf{z}'\mathbf{A}_V\mathbf{z}$. Da $\mathbf{A}_V < 0$ gilt, wäre somit asymptotische Stabilität des geschlossenen Regelkreis nachgewiesen. Da dieser Ansatz jedoch nur Unsicherheiten in einem gewissen Frequenzbereich kompensiert, genauer innerhalb der Bandbreite von $\mathbf{C}(s)$, verbleibt ein gewisser Anteil der Unsicherheiten und wirkt weiterhin auf das System ein. Dieser Anteil lautet: $\boldsymbol{\sigma}_a - \hat{\boldsymbol{\eta}}_a + \tilde{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{K}}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_n$. Um trotzdem eine Aussage über das Verhalten des geschlossenen Regelkreis zu erhalten, werden in Kapitel 4 zwei Analysemethoden vorgestellt, für welche die folgende Fehlerdynamik benötigt wird:

Fehlerdynamik

Die Fehlerdynamik des geschlossenen Regelkreises kann mit (3.3), (3.18), (3.27), (3.36), (3.38), (3.51) und (3.52) zusammenfasst werden zu

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_x\mathbf{z}_x + \mathbf{z}_v \\ -\mathbf{z}_x + \mathbf{A}_v\mathbf{z}_v + \hat{\kappa}_v^2\mathbf{z}_t \\ -\hat{\kappa}_v^2\mathbf{z}_v + \mathbf{A}_t\mathbf{z}_t + \hat{\kappa}_v^{-1}{}_n\mathbf{M}\mathbf{z}_r \\ -\hat{\kappa}_v^{-1}{}_n\mathbf{M}'\mathbf{z}_t + \mathbf{A}_r\mathbf{z}_r \\ a_\varphi z_\varphi + \hat{\kappa}_v z_{\omega z} \\ -\hat{\kappa}_v z_\varphi + a_{\omega z} z_{\omega z} \end{bmatrix} + \mathbf{B} \left(\boldsymbol{\sigma}_a - \hat{\boldsymbol{\eta}}_a + \tilde{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{K}}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_n \right) \tag{3.62}$$

$$=: \mathbf{f}(t, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}) + \mathbf{B} \left(\boldsymbol{\sigma}_a - \hat{\boldsymbol{\eta}}_a + \tilde{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{K}}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_n \right). \tag{3.63}$$

Der Grund warum die nichtlineare und zeitvariante Funktion $\mathbf{f}(t, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va})$ auch die Argumente t und $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}$ besitzt, liegt an der Tatsache, dass ${}_n\mathbf{M}$ eine Funktion von \mathbf{t}_d und φ ist und einerseits beide Argumente von der Zeit abhängig sind und andererseits

die Funktion \mathbf{t}_d wiederum von dem Signal $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}$ abhängt, was zu ${}_n\mathbf{M} = {}_n\mathbf{M}(\mathbf{t}_d, \varphi) = {}_n\mathbf{M}(t, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va})$ führt, siehe (3.17) und Anhang A.1 für mehr Details.

Alternativ kann (3.62) auch geschrieben werden als

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_x & \mathbf{z}_v & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ -\mathbf{z}_x & \mathbf{A}_v & \hat{\kappa}_v^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\hat{\kappa}_v^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{A}_t & \hat{\kappa}_v^{-1} \mathbf{M}_H & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\hat{\kappa}_v^{-1} \mathbf{M}'_H & \mathbf{A}_{re} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & a_\varphi & \hat{\kappa}_v \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & -\hat{\kappa}_v & a_{\omega z} \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \hat{\kappa}_v^{-1} \mathbf{M}_\Delta \mathbf{z}_r \\ -\hat{\kappa}_v^{-1} \mathbf{M}'_\Delta \mathbf{z}_t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

$$+ \mathbf{B} \left(\boldsymbol{\sigma}_a - \hat{\boldsymbol{\eta}}_a + \tilde{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{K}}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_n \right) =: \mathbf{A} \mathbf{z} + \mathbf{f}_\Delta(t, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}) + \mathbf{B} \left(\boldsymbol{\sigma}_a - \hat{\boldsymbol{\eta}}_a + \tilde{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{K}}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_n \right),$$

wobei ${}_n\mathbf{M} = \mathbf{M}_H + \mathbf{M}_\Delta$ gilt und \mathbf{M}_H eine konstante Matrix ist, welche ${}_n\mathbf{M}$ im stationären Schwebeflug entspricht. Somit gilt $\mathbf{M}_\Delta \approx \mathbf{0}_{3 \times 3}$ im stationären Schwebeflug und bei Manövern nahe dieser Ruhelage.

3.4. Definition des Zustandsschätzers

Der Zustandsschätzer basiert auf dem Teil der Fehlerdynamik (3.62), auf den die unsicheren Anteile $\boldsymbol{\sigma}_a = [\boldsymbol{\sigma}'_{va} \boldsymbol{\sigma}'_{\omega a}]'$ direkt einwirken. Dieser Teil ist gegeben durch die Dynamik für den Zustand \mathbf{z}_v aus (3.18), für den Zustand $z_{\omega z}$ aus (3.52) und durch die Dynamik für die ersten beiden Komponenten von \mathbf{z}_r , bezeichnet als $\mathbf{z}_{r12} \in \mathbb{R}^2$, gegeben in (3.51). Somit lautet der Zustandsschätzer

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_P = \begin{bmatrix} -\mathbf{z}_x + \mathbf{A}_v \hat{\mathbf{z}}_v + \hat{\kappa}_v^2 \mathbf{z}_t \\ -\hat{\kappa}_v^{-1} {}_n\mathbf{M}'_{12} \mathbf{z}_t + \mathbf{A}_{r12} \hat{\mathbf{z}}_{r12} + \mathbf{A}_{r3} z_{r3} \\ -\hat{\kappa}_v z_\varphi + a_{\omega z} \hat{z}_{\omega z} \end{bmatrix} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_a - \mathcal{L}^{-1}[\hat{\mathbf{C}}(s) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_a(s)]$$

$$=: \mathbf{f}_P(t, \hat{\mathbf{z}}_P, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}) + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_a - \mathcal{L}^{-1}[\hat{\mathbf{C}}(s) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_a(s)], \quad (3.65)$$

wobei $\hat{\mathbf{z}}_P := [\hat{\mathbf{z}}'_v, \hat{\mathbf{z}}'_{r12}, \hat{z}_{\omega z}]'$ die Zustände des Schätzers sind und mit ${}_n\mathbf{M}_{12} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$, $\mathbf{A}_{r12} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\mathbf{A}_{r3} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ die entsprechenden Untermatrizen von ${}_n\mathbf{M}'$ und \mathbf{A}_r bezeichnet sind. Die Zustände der nicht im Zustandsschätzer berücksichtigten Dynamik, welche jedoch im berücksichtigten Teil der Dynamik enthalten sind – diese sind \mathbf{z}_x , \mathbf{z}_t , z_{r3} und z_φ – können durch die entsprechenden Messwerte ersetzt werden. Anstatt der Unsicherheiten $\boldsymbol{\sigma}_a$ in (3.62), wird für den Zustandsschätzer die Schätzung $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_a$ verwendet.

Der Schätzfehler des Zustandsschätzers wird definiert als $\tilde{\mathbf{z}} := \hat{\mathbf{z}}_P - \mathbf{z}_P$ mit $\mathbf{z}_P := [\mathbf{z}'_v, \mathbf{z}'_{r12}, z_{\omega z}]'$. Um die Dynamik für diesen Schätzfehler anzugeben, wird zunächst der Teil für \mathbf{z}_P aus (3.62) mit (3.59) umgeschrieben, so dass

$$\dot{\mathbf{z}}_P = \mathbf{f}_P(t, \mathbf{z}_P, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}) + \boldsymbol{\sigma}_a - \mathcal{L}^{-1}[\hat{\mathbf{C}}_a(s) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_a(s)] + \tilde{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\eta}}_a + \tilde{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{K}}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_n. \quad (3.66)$$

Durch Subtraktion der Dynamik (3.66) von (3.65) erhält man

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = \mathbf{A}_e \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_a - \tilde{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\eta}}_a - \tilde{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{K}}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_n, \quad (3.67)$$

3. Regelungssynthese

wobei $\mathbf{A}_e = \text{diag}(\mathbf{A}_v, \mathbf{A}_{r12}, a_{\omega z})$ gilt. Die Anfangswerte des Zustandsschätzers werden gesetzt, so dass gilt

$$\hat{\mathbf{z}}_P(t=0) = \mathbf{z}_P(t=0) \quad \rightarrow \quad \tilde{\mathbf{z}}(t=0) = \mathbf{0}. \quad (3.68)$$

Die ersten drei Zeilen aus (3.67) können mit (3.14) im Frequenzbereich geschrieben werden als

$$[s\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{A}_v \quad \mathbf{0}_{3 \times 3}] \tilde{\mathbf{z}}(s) =: \mathbf{H}_{ev}^{-1}(s) \tilde{\mathbf{z}}(s) = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{va}(s) + \tilde{\kappa}_v \mathbf{t}_{da}(s) - \tilde{\kappa}_v \hat{\kappa}_v^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{vn}(s), \quad (3.69)$$

worin $\mathbf{H}_{ev}^{-1}(s) \tilde{\mathbf{z}}(s)$ die anregenden Anteile der translatorischen Dynamik beschreibt. Ebenso lassen sich die unteren drei Zeilen von (3.67) schreiben als

$$\left[\mathbf{0}_{3 \times 3} \quad s\mathbf{I}_{3 \times 3} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{r12} & \mathbf{I}_{2 \times 1} \\ \mathbf{I}_{1 \times 2} & a_{\omega z} \end{bmatrix} \right] \tilde{\mathbf{z}}(s) =: \mathbf{H}_{e\omega}^{-1}(s) \tilde{\mathbf{z}}(s) = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\omega a}(s) + \tilde{\mathbf{K}} \boldsymbol{\tau}_a(s) + \tilde{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{K}}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{\omega n}(s), \quad (3.70)$$

worin $\mathbf{H}_{e\omega}^{-1}(s) \tilde{\mathbf{z}}(s)$ die anregenden Anteile der rotatorischen Dynamik beschreibt. Die Reglerverstärkungen in $\mathbf{A}_e = \text{diag}(\mathbf{A}_v, \mathbf{A}_{r12}, a_{\omega z})$ sind so zu wählen, dass beide Übertragungsfunktionen \mathbf{H}_{ev} und $\mathbf{H}_{e\omega}$ keine Nullstellen in der rechten komplexen Halbebene aufweisen.

3.5. Definition des Adaptionsgesetzes

Für die Schätzung der Unsicherheiten $\boldsymbol{\sigma}_a$ wird in dieser Arbeit das Piecewise-Constant Adaptation Law (PCAL) verwendet [55, 43]. Die \mathcal{L}_1 -adaptive Regelung ermöglicht zwar auch die Anwendung eines gradientenbasierten Adaptionsgesetzes [42], ein Vorteil des PCAL ist jedoch, dass es keine eigene Dynamik besitzt und nur durch eine Matrix-Vektor-Multiplikation realisierbar ist. Die Adaptionsgeschwindigkeit ist zudem direkt von der Schrittweite der Recheneinheit abhängig und kann bei ausreichender Rechenleistung beliebig schnell sein.

Angewandt auf die bisher entwickelte Reglerstruktur, stellt sich das PCAL wie folgt dar. Der Schätzwert $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_a$ wird für jeden Zeitschritt aufs neue aus dem Schätzfehler $\tilde{\mathbf{z}}$ berechnet und bis zur nächsten Berechnung im nächsten Zeitschritt konstant gehalten. Die Rechenvorschrift dazu lautet:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_a = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_a(iT_s), \quad t \in [iT_s, (i+1)T_s), \quad (3.71a)$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_a(iT_s) = -\Phi^{-1}(T_s) \boldsymbol{\mu}(iT_s), \quad (3.71b)$$

mit $i \in \mathbb{N}_0$ und der Schrittweite T_s , wobei mit \mathbf{A}_e aus (3.67) gilt

$$\Phi(T_s) = \mathbf{A}_e^{-1} (\mathbf{e}^{\mathbf{A}_e T_s} - \mathbf{I}), \quad (3.71c)$$

$$\boldsymbol{\mu}(iT_s) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}_e T_s} \tilde{\mathbf{z}}(iT_s). \quad (3.71d)$$

Die Idee des Adaptionsgesetzes ist es, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_a$ derart zu wählen, dass der Schätzfehler $\tilde{\mathbf{z}}$ in erster Näherung innerhalb eines Zeitschritts zu Null wird. Dazu wird für den Zeitraum eines Zeitschritts angenommen, dass $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(iT_s) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(iT_s)$ und somit $\boldsymbol{\sigma}(iT_s) = \mathbf{0}$

unverändert gilt. Ebenso wird der Einfluss der unsicheren Eingangverstärkung $\tilde{\mathbf{K}}$ vernachlässigt. Mit diesen Annahmen erhält man für (3.67)

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = \mathbf{A}_e \tilde{\mathbf{z}} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_a, \quad (3.72)$$

womit der Schätzfehler zum Zeitpunkt $(i+1)T_s$ angegeben werden kann als

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{z}}((i+1)T_s) &= e^{\mathbf{A}_e T_s} \tilde{\mathbf{z}}(iT_s) + \int_{iT_s}^{(i+1)T_s} e^{\mathbf{A}_e((i+1)T_s - \tau)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_a(iT_s) d\tau \\ &= e^{\mathbf{A}_e T_s} \tilde{\mathbf{z}}(iT_s) + \mathbf{A}_e^{-1} (e^{\mathbf{A}_e T_s} - \mathbf{I}) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_a(iT_s). \end{aligned} \quad (3.73)$$

$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(iT_s)$ aus (3.71b) eingesetzt in (3.73) ergibt $\tilde{\mathbf{z}}((i+1)T_s) = \mathbf{0}$. Da die hierfür getroffenen Annahmen nicht der Realität entsprechen, bleibt ein restlicher Schätzfehler erhalten, für den gezeigt werden kann, dass er mit abnehmender Schrittweite T_s beliebig klein wird. Mit ausreichend hoher Rechenkapazität kann folglich der Schätzfehler beliebig klein gemacht werden, siehe Bedingung 2 und Anmerkung 20 auf Seite 63 sowie Lemma 3.3.1 in [42] für mehr Details.

In diesem Kapitel wurde die Reglersynthese für den adaptiven Trajektorienfolge-regler gezeigt. Alle zur Implementierung des Regler notwendigen Rechenvorschriften wurden in diese Kapitel definiert. Einige Teile, darunter die Formulierung des Fehler-systems, wurden bereits in Vorbereitung auf des folgende Kapitel angegeben, in dem zwei Methoden vorgestellt werden, um das Verhalten des geschlossenen Regelkreises zu analysieren.

4. Analyse des geschlossenen Regelkreises

Dieses Kapitel stellt zwei Methoden vor, um die Eigenschaften des geschlossenen Regelkreises zu analysieren und die Beschränktheit aller Systemsignale nachzuweisen. Die erste Methode arbeitet im Frequenzbereich und nutzt das für die \mathcal{L}_1 -adaptive Regelung übliche Vorgehen [42], welches Werkzeuge zur Analyse von linearen zeitinvarianten Systemen anwendet. Dafür wird der nichtlineare und zeitvariable Anteil der Dynamik als äußere Störung betrachtet. Dies führt zwar zu einer konservativen Abschätzung der Systemeigenschaften, dafür stellt jedoch dieses Vorgehen nur geringe Anforderungen an das Vorwissen über die wirksamen Unsicherheiten und Störungen. Die zweite Methode arbeitet im Zeitbereich, orientiert sich an dem Vorgehen aus [109] und bedient sich Werkzeugen für die Analyse nichtlinearer Systeme. Dieses Vorgehen führt zu einer weniger konservativen Abschätzung der Systemeigenschaften, stellt jedoch etwas mehr Ansprüche an das Vorwissen über die wirksamen Unsicherheiten und Störungen.

Im Folgenden werden zunächst für beide Methoden benötigte Definitionen gemacht und Voraussetzungen definiert, anhand dieser Aussagen bzgl. des Systemverhaltens getroffen werden können. Danach wird ein Referenzsystem formuliert, das dem in Kapitel 3 entwickelten Regelsystem entspricht, jedoch eine perfekte Schätzung der Unsicherheiten annimmt. Die Analyse der Eigenschaften dieses Referenzsystems ist die Basis für die Untersuchung des tatsächlichen Systemverhaltens. Dieses lässt sich dann über den zusätzlichen Einfluss des Schätzfehlers analysieren.

4.1. Mengendefinitionen

Für die Analyse der Regelung werden folgende Mengendefinitionen benötigt:

Menge \mathcal{Z}_{ref} : Eine Konstante ρ_{ref} sei definiert, so dass

$$\rho_{\text{ref}} := \|\bar{\mathbf{z}}_0\| + \epsilon \quad (4.1)$$

gilt, wobei $\|\bar{\mathbf{z}}_0\|$ eine frei zu wählende obere Schranke für die Anfangswerte der Fehlerdynamik (3.62) ist, so dass $\|\mathbf{z}(t=0)\| \leq \|\bar{\mathbf{z}}_0\|$ erfüllt werden kann. Der Wert ϵ ist ebenso eine frei zu wählende Konstante, dessen Wahl eine gewisse Anforderung an ein noch zu definierendes Referenzsystem stellt, so dass dessen Zustände \mathbf{z}_{ref} mit $\|\mathbf{z}_{\text{ref}}(t=0)\| \leq \|\mathbf{z}_0\|$ für alle Zeit Elemente der Menge

$$\mathcal{Z}_{\text{ref}} := \{\mathbf{z}_{\text{ref}} \in \mathbb{R}^{14} \mid \|\mathbf{z}_{\text{ref}}\| \leq \rho_{\text{ref}}\} \quad (4.2)$$

sind.

4. Analyse des geschlossenen Regelkreises

Menge \mathcal{Z} : Eine weitere Konstante ρ sei definiert, so dass

$$\rho := \rho_{\text{ref}} + \gamma \quad (4.3)$$

gilt, wobei γ eine ebenso frei zu wählende Konstante ist. Die Wahl der Konstante γ stellt eine gewisse Anforderung an den geschlossenen Regelkreis, so dass die Zustände des geschlossenen Regelkreises \mathbf{z} mit $\|\mathbf{z}(t=0)\| \leq \|\bar{\mathbf{z}}_0\|$ für alle Zeit Elemente der Menge

$$\mathcal{Z} := \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{14} \mid \|\mathbf{z}\| \leq \rho\} \quad (4.4)$$

sind.

Menge \mathcal{G} : Eine weitere Konstante $\bar{\gamma}_0$ sei definiert, so dass

$$0 < \bar{\gamma}_0 \leq \frac{\gamma(1 - c_1)}{c_0} \quad (4.5)$$

gilt, wobei c_0 und c_1 im späteren Verlauf definiert werden. Die Wahl der Konstante $\bar{\gamma}_0$ stellt eine gewisse Anforderung an die Güte der Adaption, so dass der Schätzfehler $\tilde{\mathbf{z}}$ für alle Zeit Element der Menge

$$\mathcal{G} := \{\tilde{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^6 \mid \|\tilde{\mathbf{z}}\| \leq \bar{\gamma}_0\} \quad (4.6)$$

ist.

4.2. Voraussetzungen

Um mithilfe der in dieser Arbeit vorgeschlagenen Methoden die Eigenschaften des geschlossenen Regelkreises zu analysieren, sind folgende Voraussetzungen notwendig. Zunächst wird auf einige besondere Voraussetzungen und Eigenschaften im Detail eingegangen. Anschließend werden alle notwendigen Voraussetzungen aufgelistet:

Notwendige Struktur der Eingangsverstärkungen: Für die Eingangsverstärkungen des nominalen Systems gilt $\hat{\mathbf{K}} = \text{diag}(\hat{\kappa}_v \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3}, \hat{\mathbf{K}}_\omega)$, mit $\hat{\kappa}_v = \hat{m}^{-1}$ und $\hat{\mathbf{K}}_\omega = \hat{\mathbf{J}}^{-1}$. Die Masse m und die Massenträgheit \mathbf{J} sind stets positive Werte und physikalisch nach unten begrenzt. Daher ist \mathbf{K} regulär und $\text{sgn}(\kappa_{ii}) = +1$ sowie $\hat{\kappa}_{ij} = 0$ mit $i \neq j$. Es ist folglich sinnvoll anzunehmen, dass eine

Menge \mathcal{K} existiert, so dass folgende obere Schranken

$$\max_{\mathbf{K} \in \mathcal{K}} \{\|\mathbf{K}^{-1}\|\} \leq B_\kappa, \quad \max_{\mathbf{K} \in \mathcal{K}} \{\|\tilde{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{K}}^{-1}\|\} \leq B_{\tilde{\kappa}}, \quad (4.7)$$

$$\max_{\mathbf{K} \in \mathcal{K}} \{\|\kappa_v^{-1}\|\} \leq B_\kappa^v, \quad \max_{\mathbf{K} \in \mathcal{K}} \{\|\tilde{\kappa}_v \hat{\kappa}_v^{-1}\|\} \leq B_{\tilde{\kappa}}^v, \quad (4.8)$$

$$\max_{\mathbf{K} \in \mathcal{K}} \{\|\mathbf{K}_\omega^{-1}\|\} \leq B_\kappa^\omega, \quad \max_{\mathbf{K} \in \mathcal{K}} \{\|\tilde{\mathbf{K}}_\omega \hat{\mathbf{K}}_\omega^{-1}\|\} \leq B_{\tilde{\kappa}}^\omega, \quad (4.9)$$

angebbar sind.

Eigenschaften der Funktionen σ_{va} , σ_{vn} und $\hat{\eta}_{va}$: Da die Funktionen σ_{vn} und σ_{va} aus (3.6) und (3.7) stetige Funktionen von ζ_v , $\dot{\mathbf{x}}_T$, $\ddot{\mathbf{x}}_T$, \mathbf{z}_x , \mathbf{z}_v und \mathbf{z}_t sind, siehe hierzu Abschnitt A.5 für mehr Details, können für diese Funktionen unter den Annahmen, dass $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ für ein beliebig langes Zeitintervall $t \in [0, t_f]$ gilt und ζ_v , $\dot{\mathbf{x}}_T$ und $\ddot{\mathbf{x}}_T$ für dieses Zeitintervall beschränkt sind, folgende Schranken gefunden werden

$$\|\sigma_{va}\| \leq B_{\sigma}^{va}, \quad \|\sigma_{vn}\| \leq B_{\sigma}^{vn}, \quad \forall t \in [0, t_f]. \quad (4.10)$$

Für Details zur Berechnung dieser Schranken siehe ebenfalls Abschnitt A.5. Mit (3.14), (3.69) und $\tilde{\sigma}_{va} = \hat{\sigma}_{va} - \sigma_{va}$ lässt sich schreiben

$$\hat{\eta}_{va}(s) = \mathbf{C}_v(s)[\sigma_{va}(s) + \mathbf{H}_{ev}^{-1}(s)\tilde{\mathbf{z}}(s) + \tilde{\kappa}_v \hat{\kappa}_v^{-1} \sigma_{vn}(s)]. \quad (4.11)$$

Mit den oben getroffenen Annahmen, sowie der zusätzlichen Annahme $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathcal{G}, \forall t \in [0, t_f]$ und den Schranken aus (4.8) und (4.10) gilt

$$\|\hat{\eta}_{va}\| \leq B_C^v(B_{\sigma}^{va} + B_{\tilde{\kappa}}^v B_{\sigma}^{vn}) + B_{\text{Che}}^v \bar{\gamma}_0 =: \rho_{\eta}^{va}, \quad \forall t \in [0, t_f], \quad (4.12)$$

mit $B_C^v \geq \|\mathbf{C}_v(s)\|_{\mathcal{L}_1}$ und $B_{\text{Che}}^v \geq \|\mathbf{C}_v(s)\mathbf{H}_{ev}^{-1}(s)\|_{\mathcal{L}_1}$, siehe Lemma 1.

Lemma 1. Für ein MIMO LTI System gegeben durch

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{u}(s), \quad (4.13)$$

mit Übertragungsfunktion $\mathbf{G}(s) \in \mathbb{R}^{l \times m}$ und Impulsantwort $\mathbf{I}(t) \in \mathbb{R}^{l \times m}$, sei die \mathcal{L}_1 Norm definiert als

$$\|\mathbf{G}(s)\|_{\mathcal{L}_1} := \int_0^{\infty} \|\mathbf{I}(t)\| dt < \infty, \quad (4.14)$$

wobei $\|\mathbf{I}(t)\|$ die induzierte euklidische Norm von $\mathbf{I}(t)$ beschreibt [54, 5.1]. Angenommen es gilt $\mathbf{I}(t) \in \mathcal{L}_1 \rightarrow \|\mathbf{G}(s)\|_{\mathcal{L}_1} < \infty$ und der Systemeingang $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ erfüllt die Bedingung $\|\mathbf{u}(t)\| \leq B_u, \forall t \in [0, t_f]$, dann folgt für den Systemausgang $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^l$:

$$\|\mathbf{y}(t)\| \leq \|\mathbf{G}(s)\|_{\mathcal{L}_1} B_u, \quad \forall t \in [0, t_f]. \quad (4.15)$$

Beweis. Für den Systemausgang $\mathbf{y}(t)$ gilt mit dem Systemeingang $\mathbf{u}(t)$ für $t \in [0, t_f]$

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^{t_f} \mathbf{I}(t - \xi)\mathbf{u}(\xi)d\xi. \quad (4.16)$$

Das führt zu

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}(t)\| &\leq \int_0^{t_f} \|\mathbf{I}(t - \xi)\| \|\mathbf{u}(\xi)\| d\xi \\ &\leq \sup_{0 \leq \xi \leq t_f} \|\mathbf{u}(\xi)\| \int_0^{t_f} \|\mathbf{I}(t - \xi)\| d\xi \end{aligned} \quad (4.17)$$

und mit $\mathbf{I}(t) \in \mathcal{L}_1 \rightarrow \|\mathbf{G}(s)\|_{\mathcal{L}_1} < \infty$ und $\|\mathbf{u}(t)\| \leq B_u, \forall t \in [0, t_f]$ folgt

$$\|\mathbf{y}(t)\| \leq \|\mathbf{G}(s)\|_{\mathcal{L}_1} B_u, \quad \forall t \in [0, t_f]. \quad (4.18)$$

□

Zusammenfassung der notwendigen Voraussetzungen: Für die Anwendung der im folgenden vorgeschlagenen Methoden zur Analyse der Regelung wird grundsätzlich vorausgesetzt, dass

- V1: die gewünschte Position der Trajektorie \mathbf{x}_T und das gewünschte Heading der Trajektorie φ_T hinreichend glatt gewählt sind, so dass $\mathbf{x}_T \in C^4$ und $\varphi_T \in C^2$ gilt und \mathbf{x}_T bis zu dessen vierter Zeitableitung sowie φ_T bis $\ddot{\varphi}_T$ für alle Zeit geschränkt sind,
- V2: die Funktionen $\mathbf{f}_v = \mathbf{f}_v(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ und $\mathbf{f}_\omega = \mathbf{f}_\omega(\mathbf{s})$ aus (2.5) und (2.13) stetig differenzierbar in ihren Argumenten sind und die Störungen $\boldsymbol{\zeta}_v = \boldsymbol{\zeta}_v(t)$ und $\boldsymbol{\zeta}_\omega = \boldsymbol{\zeta}_\omega(t)$ aus (2.5) und (2.13) stetig und für alle Zeit begrenzt sind,
- V3: die Menge \mathcal{K} für die Eingangsverstärkung \mathbf{K} existiert und die Schranken (4.7) bis (4.9) angebbbar sind,
- V4: die Funktionen $d_v(s)$ und $\mathbf{D}_\omega(s)$ aus (3.15) und (3.47) so gewählt sind, dass $\mathbf{C}_v(s)$ und $\hat{\mathbf{C}}_v(s)$ Tiefpassfilter dritter Ordnung, $\mathbf{C}_\omega(s)$ und $\hat{\mathbf{C}}_\omega(s)$ Tiefpassfilter erster Ordnung und alle vier eine stationäre Übertragung gleich $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ aufweisen, zudem alle vier Tiefpassfilter und $s\hat{\mathbf{C}}_v(s)$, $s^2\hat{\mathbf{C}}_v(s) \forall \mathbf{K} \in \mathcal{K}$ exponentiell stabil mit Zählergrad $<$ Nennergrad sind und deren Anfangswerte initial zu Null gesetzt sind,
- V5: der Wert ρ aus (4.1) kleiner π gewählt ist, da mit der Annahme $\|\mathbf{z}_{\text{ref}}\| < \|\mathbf{z}\| \leq \rho < \pi, \forall t \geq 0$ folgt, dass $z_\varphi < \pi, \forall t \geq 0$ und somit ein Sprung bei $z_\varphi = \pm\pi$ sowohl für das noch zu definierende Referenzsystem in (4.29) sowie für den geschlossenen Regelkreis ausgeschlossen werden kann, siehe Anmerkung 7 auf S. 43,
- V6: der Verlauf der gewünschten Positionstrajektorie in ${}_I z$ -Richtung so gewählt ist, dass mit den Annahmen $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$, $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathcal{G}$ und $\mathbf{K} \in \mathcal{K}$ für ein beliebig langes Zeitintervall $t \in [0, t_f]$ und der Erfüllung von V1 gilt

$$t_{e3,\max} := \frac{\hat{\kappa}_v \rho + \hat{\kappa}_v^{-1} (B_{\boldsymbol{\sigma}z}^{vn} - 2\hat{g}) + B_{\kappa}^v \rho_{\eta}^{va}}{\hat{\kappa}_v \rho + \hat{\kappa}_v^{-1} B_{\boldsymbol{\sigma}}^{vn} + B_{\kappa}^v \rho_{\eta}^{va}} \stackrel{!}{<} 0, \quad \forall t \in [0, t_f], \quad (4.19)$$

wobei $B_{\boldsymbol{\sigma}z}^{vn}$ eine Schranke für die dritte Komponente von $\boldsymbol{\sigma}_{vn}$ analog zu $B_{\boldsymbol{\sigma}}^{vn}$ aus (4.10) ist und $t_{e3,\max}$ einen Maximalwert für die dritte Komponente von $\mathbf{t}_e = [t_{e1} \ t_{e2} \ t_{e3}]'$ definiert in Abschnitt 2.3.1 beschreibt. Mit dieser Voraussetzung ist sichergestellt, dass stets ein negativer Schubanteil in ${}_I z$ -Richtung entgegengesetzt der Schwerkraft $-\mathbf{t}$ ist stets in Richtung \mathbf{t}_e orientiert, siehe (2.6) – vorhanden ist und somit für die dritte Komponente von $\mathbf{t} = [t_1 \ t_2 \ t_3]'$ gilt: $t_3 \leq t_{3,\max} < 0$. Daraus folgt $T = \|\mathbf{t}\| > 0$ und $q_p > 0$ für das gesamte Zeitintervall $t \in [0, t_f]$, siehe hierzu auch Anmerkung 1 auf S. 32, Anmerkung 5 auf S. 40 und Anmerkung 8 auf S. 55. Zusätzlich wird vorausgesetzt, dass mit $t_{e3,\max}$ aus (4.19) und mit $B_C^\omega \geq \|\mathbf{C}_\omega(s)\|_{\mathcal{L}_1}$ gilt

$$B_C^\omega < \sqrt{\frac{1 - t_{e3,\max}}{1 + t_{e3,\max}}}. \quad (4.20)$$

Diese Voraussetzung ist notwendig um die Beschränktheit des Headings zu gewährleisten, für mehr Details hierzu siehe Anhang A.5.

Weitere Voraussetzungen: Die bisher angeführten Voraussetzungen V1 bis V6 ermöglichen die Durchführung der ersten Analyse im Frequenzbereich. Für die zweite Analyse im Zeitbereich wird zusätzlich zu V1 bis V6 vorausgesetzt, dass

- V7: die gewünschte Position der Trajektorie \mathbf{x}_T und das gewünschte Heading der Trajektorie φ_T hinreichend glatt gewählt sind, so dass $\mathbf{x}_T \in C^5$ und $\varphi_T \in C^3$ gilt und \mathbf{x}_T bis zu dessen fünfter Zeitableitung sowie φ_T bis $\ddot{\varphi}_T$ für alle Zeit geschränkt sind,
- V8: die Zeitableitungen von $\mathbf{f}_v = \mathbf{f}_v(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ und $\mathbf{f}_\omega = \mathbf{f}_\omega(\mathbf{s})$ aus (2.5) und (2.13), d.h. $\dot{\mathbf{f}}_v$ und $\dot{\mathbf{f}}_\omega$, stetig differenzierbar in ihren Argumenten sind und die Zeitableitungen von ζ_v und ζ_ω aus (2.5) und (2.13), d.h. $\dot{\zeta}_v$ und $\dot{\zeta}_\omega$, stetig und für alle Zeit begrenzt sind,
- V9: die Funktionen $d_v(s)$ und $\mathbf{D}_\omega(s)$ aus (3.15) und (3.47) so gewählt sind, dass $\mathbf{C}_v(s)$ und $\hat{\mathbf{C}}_v(s)$ Tiefpassfilter vierter Ordnung, $\mathbf{C}_\omega(s)$ und $\hat{\mathbf{C}}_\omega(s)$ Tiefpassfilter zweiter Ordnung und alle vier eine stationäre Übertragung gleich $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ aufweisen. Zudem müssen diese vier Tiefpassfilter und zusätzlich $s\hat{\mathbf{C}}_v(s)$, $s^2\hat{\mathbf{C}}_v(s)$, $s^3\hat{\mathbf{C}}_v(s)$ und $s\hat{\mathbf{C}}_\omega(s) \forall \mathbf{K} \in \mathcal{K}$ exponentiell stabil mit Zählergrad $<$ Nennergrad sein, woraus folgt, dass $\mathfrak{G}_v(s) := s^{-1}(\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{C}_v(s))$ und $\mathfrak{G}_\omega(s) := s^{-1}(\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{C}_\omega(s))$ exponentiell stabil mit Zählergrad $<$ Nennergrad sind. Ebenso müssen die Anfangswerte der aufgeführten Filter initial zu Null gesetzt sein.

Anmerkung 8. Um sicherzustellen, dass $q_p > 0$ und $T = \|\mathbf{t}\| > 0$ für ein beliebiges Zeitintervall $t \in [0, t_f]$ gilt, genügt es zu fordern, dass

$$t_{e3} \leq \max_{t_e \in [0, t_f]} \frac{t_3}{\|\mathbf{t}\|} < 0, \quad (4.21)$$

worin t_3 die dritte Komponente von \mathbf{t} bezeichnet, siehe auch Anhang A.4. Mit den Annahmen in V6 und dem Zusammenhang

$$\mathbf{t} = \hat{\kappa}_v \mathbf{z}_t + \mathbf{t}_d = \hat{\kappa}_v \mathbf{z}_t - \hat{\kappa}_v^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{vn} - \kappa_v^{-1} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \quad (4.22)$$

der mit $\mathbf{z}_t = \hat{\kappa}_v^{-1}(\mathbf{t} - \mathbf{t}_d)$ aus (3.8), (3.11) und (3.12) folgt, ist der Schubbetrag $\|\mathbf{t}\|$ für $t \in [0, t_f]$ folgendermaßen nach oben hin begrenzt

$$\|\mathbf{t}\| \leq \hat{\kappa}_v \rho + \hat{\kappa}_v^{-1} B_\sigma^{vn} + B_\kappa^v \rho_\eta^{va}. \quad (4.23)$$

Zudem gilt $t_3 < 0$ und $\|\mathbf{t}\| > 0$ für $t \in [0, t_f]$ nur, wenn

$$t_3 = \hat{\kappa}_v \mathbf{z}_t(3) - \hat{\kappa}_v^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{vn}(3) - \kappa_v^{-1} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}(3) < 0, \quad \forall t \in [0, t_f]. \quad (4.24)$$

Da im stationären Schwebeflug $\boldsymbol{\sigma}_{vn}(3) = \hat{g}$ gilt, siehe (3.6), muss der von der Gewichtskraft bereinigte Schubanteil in z -Richtung kleiner sein als die Gewichtskraft selbst und somit gelten

$$t_3 + \hat{\kappa}_v^{-1} \hat{g} = \hat{\kappa}_v \mathbf{z}_t(3) - \hat{\kappa}_v^{-1} (\boldsymbol{\sigma}_{vn}(3) - \hat{g}) - \kappa_v^{-1} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}(3) < \hat{\kappa}_v^{-1} \hat{g}, \quad \forall t \in [0, t_f], \quad (4.25)$$

4. Analyse des geschlossenen Regelkreises

wobei die linke Seite für $t \in [0, t_f]$ durch

$$t_3 + \hat{\kappa}_v^{-1} \hat{g} < \hat{\kappa}_v^{-1} \rho + \hat{\kappa}_v^{-1} (B_{\sigma z}^{vn} - \hat{g}) + B_{\kappa}^v \rho_{\eta}^{va} \quad (4.26)$$

nach oben hin begrenzt ist und somit folgt

$$t_3 < \hat{\kappa}_v \rho + \hat{\kappa}_v^{-1} (B_{\sigma z}^{vn} - 2\hat{g}) + B_{\kappa}^v \rho_{\eta}^{va} \stackrel{!}{<} 0, \quad \forall t \in [0, t_f]. \quad (4.27)$$

(4.23) und (4.27) eingesetzt in (4.21) ergibt die Bedingung (4.19).

4.3. Analyse eines Referenzsystems

Beide in dieser Arbeit vorgestellten Methoden zur Systemanalyse nutzen die Eigenschaften eines Referenzsystems als Basis für die Untersuchung des tatsächlichen Systemverhaltens. Dieses im Folgenden definierte Referenzsystem beschreibt die Fehlerdynamik (3.62) mit perfektem Adaptionsverhalten innerhalb des gewünschten Frequenzbereichs. Für dieses System werden ein hinreichendes Kriterium für Beschränktheit der Systemsignale hergeleitet. Zusammen mit einer Schranke für den maximalen Adaptionsfehler kann im Anschluss ein hinreichendes Kriterium für die Beschränktheit der Systemsignale des tatsächlichen Systems angegeben werden.

Die Struktur des Referenzsystems leitet sich aus (3.62) mit dem bestmöglichen Adaptionsergebnis, d.h. $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$, ab und mit (3.67) und $\hat{\sigma}_{a,\text{ref}} = \sigma_{a,\text{ref}} + \tilde{\sigma}_{a,\text{ref}}$ gilt folglich

$$\hat{\sigma}_{a,\text{ref}} = \sigma_{a,\text{ref}} + \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{K}^{-1} \eta_{a,\text{ref}} + \tilde{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{K}}^{-1} \sigma_{n,\text{ref}}. \quad (4.28)$$

Somit hat das Referenzsystem die Struktur

$$\dot{\mathbf{z}}_{\text{ref}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}_{\text{ref}}, \boldsymbol{\eta}_{va,\text{ref}}) + \mathbf{B}(\sigma_{a,\text{ref}} - \eta_{a,\text{ref}} + \tilde{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{K}}^{-1} \sigma_{n,\text{ref}}) \quad (4.29)$$

$$= \mathbf{A} \mathbf{z}_{\text{ref}} + \mathbf{f}_{\Delta,\text{ref}}(t, \mathbf{z}_{\text{ref}}, \boldsymbol{\eta}_{va,\text{ref}}) + \mathbf{B}(\sigma_{a,\text{ref}} - \eta_{a,\text{ref}} + \tilde{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{K}}^{-1} \sigma_{n,\text{ref}}), \quad (4.30)$$

mit $\mathbf{z}_{\text{ref}}(0) = \mathbf{z}(0)$ und

$$\eta_{a,\text{ref}}(s) = \mathbf{C}(s)(\sigma_{a,\text{ref}}(s) + \tilde{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{K}}^{-1} \sigma_{n,\text{ref}}), \quad (4.31)$$

wobei (4.31) mit (4.28) aus (3.58) folgt.

Anmerkung 9. Setzt man (4.31) in (4.29) oder (4.30) ein, ist zu erkennen, dass die vorgeschlagene Adaptionsstruktur in dem für die Kompensation vorgesehenen Frequenzbereich, $\mathbf{C}(s) \approx \mathbf{I}_{6 \times 6}$, in der Lage ist, den Einfluss der unsicheren Eingangsverstärkung \mathbf{K} vollständig zu kompensieren, und dies obwohl der nominale Regler vom Adaptions- teil getrennt wurde.

Anmerkung 10. In diesem und den darauffolgenden Kapiteln wird eine Schreibweise mithilfe der Indizes $k \in \{v, \omega\}$ und $l \in \{a, n\}$ gewählt, um diverse Signale, beispielsweise alle vier Größen σ_{va} , σ_{vn} , $\sigma_{\omega a}$ und $\sigma_{\omega n}$ kurz mit σ_{kl} zu bezeichnen. Ebenso werden beispielsweise die Filter $\mathbf{C}_v(s)$ und $\mathbf{C}_\omega(s)$ mit $\mathbf{C}_k(s)$, $k \in \{v, \omega\}$ bezeichnet. Auch diverse Schranken werden mithilfe dieser Darstellung kompakt dargestellt, so beschreibt beispielsweise B_{σ}^{kl} , $k \in \{v, \omega\}$ $l \in \{a, n\}$ alle vier Schranken B_{σ}^{va} , B_{σ}^{vn} , $B_{\sigma}^{\omega a}$ und $B_{\sigma}^{\omega n}$. Siehe hierzu auch das Symbolverzeichnis auf Seite 143.

Eigenschaften von $\sigma_{kl,\text{ref}}$ und $\eta_{ka,\text{ref}}$, $k \in \{v, \omega\}$, $l \in \{a, n\}$: Alle vier Funktionen $\sigma_{kl,\text{ref}}$ des Referenzsystems, welche sich durch Auswertung von (3.6), (3.7) und (3.41) mit (4.31) ergeben, sind Funktionen der gewünschten Trajektorien \mathbf{x}_T und φ_T , der Fehlerzustände \mathbf{z}_{ref} , der Störeingänge ζ_v und ζ_ω und mit $k = \omega$ auch von der Größe $\eta_{va,\text{ref}}$. Durch die Voraussetzungen V1 bis V6 aus Abschnitt 4.2 ist sichergestellt, dass die Funktionen $\sigma_{kl,\text{ref}}$ stetig differenzierbar in den genannten Argumenten sind. Siehe Anhang A für eine detaillierte Darstellung dieser Zusammenhänge. Mit diesen Eigenschaften und der Annahme $\mathbf{z}_{\text{ref}} \in \mathcal{Z}_{\text{ref}}$ für ein beliebig langes Zeitintervall $t \in [0, t_f]$, können die Schranken B_{σ}^{kl} mit $k \in \{v, \omega\}$, $l \in \{a, n\}$ angegeben werden, so dass

$$\|\sigma_{kl,\text{ref}}\| \leq B_{\sigma}^{kl}, \quad \forall t \in [0, t_f]. \quad (4.32)$$

Ebenso können Schranken für die folgenden Anfangswerte angegeben werden:

$$\|\sigma_{kl,\text{ref}}|_{t=0}\| \leq B_{\sigma_i}^{kl}, \quad (4.33)$$

und da $\sigma_{kl,\text{ref}}|_{t=0} = \sigma_{kl}|_{t=0}$ gilt, sind dies auch Schranken für den Anfangswert der Funktionen σ_{kl} . Aus (4.31) mit $k \in \{v, \omega\}$ folgt

$$\eta_{ka,\text{ref}}(s) = \mathbf{C}_k(s)[\sigma_{ka,\text{ref}}(s) + \tilde{\mathbf{K}}_k \hat{\mathbf{K}}_k^{-1} \sigma_{kn,\text{ref}}(s)] \quad (4.34)$$

und mit den oben getroffenen Annahmen, Lemma 1, (4.32) und $B_C^\omega \geq \|\mathbf{C}_\omega(s)\|_{\mathcal{L}_1}$ gilt

$$\|\eta_{ka,\text{ref}}\| \leq B_C^k (B_{\sigma_r}^{ka} + B_{\tilde{\kappa}}^k B_{\sigma_r}^{kn}) =: \rho_{\eta}^{ka}, \quad \forall t \in [0, t_f]. \quad (4.35)$$

Anmerkung 11. Da $\rho > \rho_{\text{ref}}$ und somit $B_{\sigma_z}^{vn} > B_{\sigma_{zr}}^{vn}$ und $\rho_{\eta}^{va} > \rho_{\eta_r}^{va}$ gilt, siehe (4.3), wobei $B_{\sigma_{zr}}^{vn}$ eine Schranke für die z -Komponente von $\sigma_{vn,\text{ref}}$ ist, überträgt sich das Resultat von V6 ($q_p > 0$ und $\|\mathbf{t}\| > 0$) auf die entsprechenden Größen des Referenzsystems in (4.29).

4.3.1. Analyse im Frequenzbereich

Die Eigenschaften des Referenzsystems können anhand der ersten Methode wie folgt analysiert werden:

Eigenschaften der Funktion $\mathbf{f}_{\Delta,\text{ref}}$: Die Funktion $\mathbf{f}_{\Delta,\text{ref}}$ des Referenzmodells (4.30), welche sich durch Auswertung von (3.64) mit (4.31) ergibt, ist eine Funktionen der gewünschten Trajektorien \mathbf{x}_T und φ_T , der Fehlerzuständen \mathbf{z}_{ref} und der Größe $\eta_{va,\text{ref}}$. Durch die Voraussetzungen V1 bis V6 aus Abschnitt 4.2 ist sichergestellt, dass $\mathbf{f}_{\Delta,\text{ref}}$ eine stetig differenzierbare Funktion in den genannten Argumenten ist. Siehe Anhang A.6 für eine detaillierte Darstellung dieser Zusammenhänge. Somit kann mit der Annahme $\mathbf{z}_{\text{ref}} \in \mathcal{Z}_{\text{ref}}$ für ein beliebig langes Zeitintervall $t \in [0, t_f]$, eine Schranke $B_{\mathbf{f}_{\Delta r}}$ angegeben werden, so dass

$$\|\mathbf{f}_{\Delta,\text{ref}}\| \leq B_{\mathbf{f}_{\Delta r}}, \quad \forall t \in [0, t_f]. \quad (4.36)$$

4. Analyse des geschlossenen Regelkreises

Eigenschaften der homogenen Lösung: Sei $\mathbf{z}_{\text{in}}(t)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\mathbf{z}}_{\text{ref}} = \mathbf{A} \mathbf{z}_{\text{ref}}, \quad \mathbf{z}_{\text{ref}}(t=0) = \mathbf{z}_0, \quad (4.37)$$

mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{14 \times 14}$ aus (3.64), dann gilt

$$\mathbf{z}_{\text{in}} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{z}_0 = \int_0^t \mathbf{F}(\tau) d\tau \mathbf{z}_0, \quad (4.38)$$

wobei die zur Funktion $\mathbf{F}(t)$ gehörende Übertragungsfunktion im Frequenzbereich

$$\mathbf{H}_{\text{in}}(s) = s(s\mathbf{I}_{14 \times 14} - \mathbf{A})^{-1} \quad (4.39)$$

lautet und somit \mathbf{z}_{in} für alle Zeit beschränkt ist durch

$$\|\mathbf{z}_{\text{in}}\| \leq \|s(s\mathbf{I}_{14 \times 14} - \mathbf{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}_1} \|\mathbf{z}_0\|, \quad (4.40)$$

siehe Lemma 1. Mit diesen Eigenschaften kann folgende Aussage getroffen werden:

Lemma 2. *Angenommen V1 bis V6 aus Abschnitt 4.2 sind erfüllt und die Übertragungsfunktionen $d_v(s)$ und $\mathbf{D}_\omega(s)$ sind zudem so gewählt, dass für das Referenzsystem aus (4.30) gilt*

$$\rho_{\text{ref}} > \|\mathbf{H}(s)\|_{\mathcal{L}_1} B_{\mathbf{f}_{\Delta r}} + \sum_{k=v}^{\omega} \|\mathbf{G}_k(s)\|_{\mathcal{L}_1} (B_{\sigma r}^{ka} + B_{\tilde{\kappa}}^k B_{\sigma r}^{kn}) + \|s\mathbf{H}(s)\|_{\mathcal{L}_1} \|\bar{\mathbf{z}}_0\|, \quad (4.41)$$

mit $k \in \{v, \omega\}$, $\mathbf{G}_k := \mathbf{H}(s)\mathbf{B}_k(\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{C}_k(s))$ und $\mathbf{H}(s) = (s\mathbf{I}_{14 \times 14} - \mathbf{A})^{-1}$, wobei \mathbf{B}_k aus (3.55) und (3.56) stammen und \mathbf{A} aus (3.64), dann sind die Lösungen von (4.30) Uniformly Bounded, siehe Definition 1 auf Seite 12, und mit $\|\mathbf{z}_{\text{ref}}(t=0)\| \leq \|\bar{\mathbf{z}}_0\|$ gilt

$$\|\mathbf{z}_{\text{ref}}\| < \rho_{\text{ref}} \iff \mathbf{z}_{\text{ref}} \in \text{Int}(\mathcal{Z}_{\text{ref}}), \quad \forall t \geq 0. \quad (4.42)$$

Ebenso gilt dann $\forall t \geq 0$ für den Schubvektor des Referenzsystems \mathbf{t}_{ref} und für die kommandierten Drehmomente $\boldsymbol{\tau}_{\text{ref}}$:

$$\|\mathbf{t}_{\text{ref}}\| < \hat{\kappa}_v \rho_{\text{ref}} + \hat{\kappa}_v^{-1} B_{\sigma r}^{vn} + B_{\kappa}^v \rho_{\eta r}^{va} =: \rho_{\mathbf{t}_{\text{ref}}}, \quad (4.43)$$

$$\|\mathbf{t}_{\text{ref}}\| > \hat{\kappa}_v \rho_{\text{ref}} + \hat{\kappa}_v^{-1} (2\hat{g} - B_{\sigma r}^{vn}) + B_{\kappa}^v \rho_{\eta r}^{va}, \quad (4.44)$$

$$\|\boldsymbol{\tau}_{\text{ref}}\| < B_{\tilde{\kappa}}^\omega B_{\sigma r}^{\omega n} + B_{\kappa}^\omega \rho_{\eta r}^{\omega a} =: \rho_{\boldsymbol{\tau}_{\text{ref}}}, \quad (4.45)$$

mit $B_{\tilde{\kappa}}^\omega = \|\hat{\mathbf{K}}_\omega^{-1}\|$. Der Beweis ist im Anhang B.1 gegeben.

Anmerkung 12. *Um die Bedingung (4.41) für ein gegebenes $\bar{\mathbf{z}}_0$ und ρ_{ref} zu erfüllen, kann mit $d_v(s)$ und $\mathbf{D}_\omega(s)$ die Bandbreite von $\mathbf{C}_k(s)$, $k \in \{v, \omega\}$ erhöht oder verringert werden. Eine Erhöhung, d.h. $\mathbf{C}_k(s) \rightarrow \mathbf{I}_{3 \times 3}$, führt zu einer schnelleren Dynamik von $\mathbf{G}_k(s)$ und verringert den Wert von $\|\mathbf{G}_k(s)\|_{\mathcal{L}_1}$. Ebenso können die Eigenwerte in \mathbf{A} aus (3.64) mithilfe der Reglerverstärkungen in \mathbf{A}_V aus (3.54) erhöht werden, um die Werte von $\|\mathbf{H}(s)\|_{\mathcal{L}_1}$ und $\|\mathbf{G}_k(s)\|_{\mathcal{L}_1}$ zu verringern [42].*

Anmerkung 13. Für diese Aussage von Lemma 2 wird die attraktive Wirkung des linearen Anteils der Dynamik gegeben durch $\mathbf{A}\mathbf{z}$ ausgenutzt. Der nichtlineare Anteil $\mathbf{f}_{\Delta,\text{ref}}$ wird als destabilisierend aufgefasst, was zu einer konservativen Abschätzung führt, da auch der nichtlineare Anteil attraktive Wirkung haben kann.

Anmerkung 14. Die Stellgröße für die erweiterte Strecke $u_{T,\text{ref}}$, welche sich aus (3.29) ausgewertet mit (4.31) ergibt, ist mit der Erfüllung von V1 bis V6 aus Abschnitt 4.2 eine stetig differenzierbare Funktion der gewünschten Trajektorien \mathbf{x}_T und φ_T , der Fehlerzustände \mathbf{z}_{ref} , der Störeingänge ζ_v und ζ_ω sowie der Zeitverläufe der Kompensationsgrößen $\boldsymbol{\eta}_{va,\text{ref}}$, $\boldsymbol{\eta}_{\omega a,\text{ref}}$, siehe (A.29) für mehr Details hierzu. Somit folgt aus (4.42), dass $u_{T,\text{ref}}$ für alle Zeit beschränkt ist.

4.3.2. Analyse im Zeitbereich

Die Eigenschaften des Referenzsystems können alternativ auch anhand der zweiten Methode wie folgt analysiert werden:

Eigenschaften von $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{kl,\text{ref}}$, $k \in \{v, \omega\}$, $l \in \{a, n\}$: Alle vier Zeitableitungen der Funktionen $\boldsymbol{\sigma}_{kl,\text{ref}}$ sind Funktionen der gewünschten Trajektorien \mathbf{x}_T und φ_T bis zu deren fünften bzw. dritten Zeitableitung, der Fehlerzuständen \mathbf{z}_{ref} , der Störeingänge ζ_v und ζ_ω , deren Zeitableitungen $\dot{\zeta}_v$ und $\dot{\zeta}_\omega$ und der Größen $\boldsymbol{\eta}_{va,\text{ref}}$ und $\boldsymbol{\eta}_{\omega a,\text{ref}}$. Sind die Voraussetzungen V1 bis V9 aus Abschnitt 4.2 erfüllt, ist sichergestellt, dass die Funktionen $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{kl,\text{ref}}$ stetig differenzierbar in den angegebenen Argumenten sind. Siehe Anhang A für eine detaillierte Darstellung dieser Zusammenhänge. Mit diesen Eigenschaften und der Annahme $\mathbf{z}_{\text{ref}} \in \mathcal{Z}_{\text{ref}}$ für ein beliebig langes Zeitintervall $t \in [0, t_f]$, können die Schranken $B_{\boldsymbol{\sigma}}^{kl}$ mit $k \in \{v, \omega\}$, $l \in \{a, n\}$ angegeben werden, so dass

$$\|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{kl,\text{ref}}\| \leq B_{\boldsymbol{\sigma}}^{kl}, \quad \forall t \in [0, t_f]. \quad (4.46)$$

Lemma 3. Angenommen V1 bis V9 aus Abschnitt 4.2 sind erfüllt und $d_v(s)$ und $\mathbf{D}_\omega(s)$ sind zudem so gewählt, dass für das Referenzsystem aus (4.29) gilt

$$\rho_{\text{ref}} > \sqrt{\|\bar{\mathbf{z}}_0\|^2 + 2r (\|\boldsymbol{\mathfrak{G}}_v(s)\|_{\mathcal{L}_1}, \|\boldsymbol{\mathfrak{G}}_\omega(s)\|_{\mathcal{L}_1})}, \quad \text{mit} \quad (4.47)$$

$$r(\|\boldsymbol{\mathfrak{G}}_v(s)\|_{\mathcal{L}_1}, \|\boldsymbol{\mathfrak{G}}_\omega(s)\|_{\mathcal{L}_1}) = \quad (4.48)$$

$$\frac{\rho_{\text{ref}}}{2\sigma_m} \sum_{k=v}^{\omega} \|\mathbf{B}_k\| \|\boldsymbol{\mathfrak{G}}_k(s)\|_{\mathcal{L}_1} (B_{\boldsymbol{\sigma}}^{ka} + B_{\tilde{\kappa}}^k B_{\boldsymbol{\sigma}}^{kn} + B_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}^{ka} + B_{\tilde{\kappa}}^k B_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}^{kn}),$$

wobei $k \in \{v, \omega\}$, $\boldsymbol{\mathfrak{G}}_k(s) := s^{-1}(\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{C}_k(s))$ gilt, \mathbf{B}_k aus (3.55) und (3.56) stammen und σ_m der kleinste Singulärwert von \mathbf{A}_V aus (3.54) ist, dann sind die Lösungen von (4.29) Uniformly Bounded, siehe Definition 1 auf Seite 12, und mit $\|\mathbf{z}_{\text{ref}}(t=0)\| \leq \|\bar{\mathbf{z}}_0\|$ gilt

$$\|\mathbf{z}_{\text{ref}}\| < \rho_{\text{ref}} \iff \mathbf{z}_{\text{ref}} \in \text{Int}(\mathcal{Z}_{\text{ref}}), \quad \forall t \geq 0. \quad (4.49)$$

4. Analyse des geschlossenen Regelkreises

Die Lösungen von (4.29) sind dann zudem *Uniformly Ultimately Bounded* mit der beliebig zu wählenden Zeit T und der Schranke $\varepsilon(T)$ definiert als

$$\varepsilon(T) = \sqrt{e^{-2\sigma_m T} \|\bar{\mathbf{z}}_0\|^2 + 2r(\|\mathfrak{G}_v(s)\|_{\mathcal{L}_1}, \|\mathfrak{G}_\omega(s)\|_{\mathcal{L}_1})}, \quad (4.50)$$

so dass mit $\|\mathbf{z}_{\text{ref}}(t=0)\| \leq \|\bar{\mathbf{z}}_0\|$ gilt

$$\|\mathbf{z}_{\text{ref}}\| \leq \varepsilon(T), \quad \forall t \geq T. \quad (4.51)$$

Ebenso gilt $\forall t \geq 0$ für den Schubvektor des Referenzsystems \mathbf{t}_{ref} und für die kommandierten Drehmomente $\boldsymbol{\tau}_{\text{ref}}$:

$$\|\mathbf{t}_{\text{ref}}\| < \hat{\kappa}_v \rho_{\text{ref}} + \hat{\kappa}_v^{-1} B_{\sigma r}^{vn} + B_{\kappa}^v \rho_{\eta r}^{va} =: \rho_{\mathbf{t}_{\text{ref}}}, \quad (4.52)$$

$$\|\mathbf{t}_{\text{ref}}\| > \hat{\kappa}_v \rho_{\text{ref}} + \hat{\kappa}_v^{-1} (2\hat{g} - B_{\sigma z r}^{vn}) + B_{\kappa}^v \rho_{\eta r}^{va}, \quad (4.53)$$

$$\|\boldsymbol{\tau}_{\text{ref}}\| < B_{\hat{\kappa}}^\omega B_{\sigma r}^{\omega n} + B_{\kappa}^\omega \rho_{\eta r}^{\omega a} =: \rho_{\boldsymbol{\tau}_{\text{ref}}}, \quad (4.54)$$

mit $B_{\hat{\kappa}}^\omega = \|\hat{\mathbf{K}}_\omega^{-1}\|$. Der Beweis ist im Anhang B.5 gegeben.

Anmerkung 15. Das Resultat in (4.51) zeigt, dass mit $\|\mathbf{z}_{\text{ref}}(t=0)\| \leq \|\bar{\mathbf{z}}_0\|$ eine attraktive Menge

$$\mathcal{Z}_{\text{ref},\varepsilon} := \left\{ \mathbf{z}_{\text{ref}} \in \mathbb{R}^{13} \mid \|\mathbf{z}_{\text{ref}}\| \leq \sqrt{2r(\|\mathfrak{G}_v(s)\|_{\mathcal{L}_1}, \|\mathfrak{G}_\omega(s)\|_{\mathcal{L}_1})} \right\} \quad (4.55)$$

für den Fehlerzustand \mathbf{z}_{ref} existiert, welche mit $\lim_{T \rightarrow \infty} \varepsilon(T)$ aus (4.51) folgt.

Anmerkung 16. Die Beweisführung für Lemma 3 nutzt im Gegensatz zu der von Lemma 2 auch die attraktive Eigenschaft der nichtlinearen Anteile der Referenzdynamik aus. Dadurch ist diese Abschätzung weniger konservativ, durch die zusätzlichen Voraussetzungen V7 bis V9 jedoch etwas restriktiver.

Anmerkung 17. Um die Bedingung (4.47) für ein gegebenes $\bar{\mathbf{z}}_0$ und ρ_{ref} zu erfüllen, kann mit $d_v(s)$ und $\mathbf{D}_\omega(s)$ die Bandbreite von $\mathbf{C}_k(s)$, $k \in \{v, \omega\}$ erhöht oder verringert werden. Eine Erhöhung, d.h. $\mathbf{C}_k(s) \rightarrow \mathbf{I}_{3 \times 3}$, führt zu einer schnelleren Dynamik von $\mathfrak{G}_k(s)$ und verringert den Wert von $\|\mathfrak{G}_k(s)\|_{\mathcal{L}_1}$. Um diesen Zusammenhang zu veranschaulichen, kann der skalare Fall $C(s) = \Omega(s + \Omega)^{-1}$ betrachtet werden, bei dem $\|\mathfrak{G}(s)\|_{\mathcal{L}_1} \leq \|(s + \Omega)^{-1}\|_{\mathcal{L}_1} = \Omega^{-1}$ gilt, siehe auch [42, Lemma 2.1.5]. Zusätzlich können die Reglerverstärkungen in \mathbf{A}_V erhöht werden, um einen größeren Wert für σ_m zu erzielen. Andererseits kann auch ein größerer Wert für ρ_{ref} gewählt und eine geringere Bandbreite für $\mathbf{C}_k(s)$ sowie geringere Reglerverstärkungen in \mathbf{A}_V realisiert werden. Letzteres führt zu einer geringeren Performanz jedoch zu höherer Robustheit im Vergleich zu Ersterem.

Anmerkung 18. Ebenso wie in Anmerkung 14 für das Resultat von Lemma 2 beschrieben, führt das Resultat von Lemma 3 auch zur Beschränktheit von $u_{T,\text{ref}}$.

4.4. Analyse des geschlossenen Regelkreises

Basierend auf den Aussagen über das im vorherigen Abschnitt analysierten Referenzsystems kann im Folgenden durch eine Abschätzung des Fehlers, der durch die Adaptionsdynamik verursacht wird, das Verhalten des geschlossenen Regelkreises analysiert werden. Dabei kommen wiederum beide Analysemethoden im Frequenzbereich und im Zeitbereich zum Einsatz.

Eigenschaften der Funktionen σ_{kl} und $\hat{\eta}_{ka}$ mit $k \in \{v, \omega\}$, $l \in \{a, n\}$: Alle vier Funktionen σ_{kl} des geschlossenen Regelkreises (3.62), gegeben durch (3.6), (3.7), (3.41) sind ebenso wie $\sigma_{kl,\text{ref}}$ Funktionen der gewünschten Trajektorien $\mathbf{x}_T \in C^5$ und $\varphi_T \in C^3$, der Fehlerzustände \mathbf{z} , der Störeingänge ζ_v und ζ_ω sowie für $k = \omega$ auch Funktionen der Größen $\hat{\eta}_{va}$ und $\hat{\eta}_{\omega a}$. Durch die Argumente $\hat{\eta}_{va}$ und $\hat{\eta}_{\omega a}$ sowie deren Zeitableitungen, ist $\sigma_{\omega l}$ auch vom Schätzfehler $\tilde{\mathbf{z}}$ abhängig, siehe hierzu Anhang A. Mit V1 bis V6 aus Abschnitt 4.2 ist jedoch sichergestellt, dass alle vier Funktionen stetig differenzierbar in den angegebenen Argumenten und mit der Annahme $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ und $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathcal{G}$ für ein beliebig langes Zeitintervall $t \in [0, t_f]$ beschränkt sind. Daher können für die Funktionen selbst, sowie auch für die Differenzen $\sigma_{kl} - \sigma_{kl,\text{ref}}$, mit den Konstanten $L_{\sigma\gamma}^{kl}$, $L_{\sigma\tilde{\gamma}_0}^{kl}$ sowie mit den Werten B_{σ}^{kl} und γ definiert in (4.3), Schranken angegeben werden, so dass $\forall t \in [0, t_f]$

$$\|\sigma_{kl}\| \leq B_{\sigma}^{kl}, \quad (4.56)$$

$$\|\sigma_{kl} - \sigma_{kl,\text{ref}}\| \leq L_{\sigma\gamma}^{kl} \gamma + L_{\sigma\tilde{\gamma}_0}^{kl} \tilde{\gamma}_0, \quad (4.57)$$

wobei $L_{\sigma\tilde{\gamma}_0}^{vl} = 0$. Hierfür wurde die Tatsache ausgenutzt, dass mit diesen Annahmen ebenso $\hat{\eta}_{ka}$ und die Differenzen $\eta_{ka,e} := \hat{\eta}_{ka} - \eta_{ka,\text{ref}}$ mit $k \in \{v, \omega\}$ für das Zeitintervall $t \in [0, t_f]$ beschränkt sind. Denn mit (4.11) sowie mit (3.46), (3.70) und (4.34) folgt

$$\hat{\eta}_{ka}(s) = \mathbf{C}_k(s)[\sigma_{ka}(s) + \mathbf{H}_{ek}^{-1}(s)\tilde{\mathbf{z}}(s) + \tilde{\mathbf{K}}_k \hat{\mathbf{K}}_k^{-1} \sigma_{kn}(s)], \quad (4.58)$$

$$\eta_{ka,e}(s) = \mathbf{C}_k(s)[\sigma_{ka}(s) - \sigma_{ka,\text{ref}}(s) + \mathbf{H}_{ek}^{-1}(s)\tilde{\mathbf{z}}(s) + \tilde{\mathbf{K}}_k \hat{\mathbf{K}}_k^{-1} (\sigma_{kn}(s) - \sigma_{kn,\text{ref}}(s))] \quad (4.59)$$

und mit den getroffenen Annahmen und $B_{\text{CHE}}^{\omega} \geq \|\mathbf{C}_{\omega}(s)\mathbf{H}_{e\omega}^{-1}(s)\|_{\mathcal{L}_1}$ gilt $\forall t \in [0, t_f]$

$$\|\hat{\eta}_{ka}\| \leq B_C^k (B_{\sigma}^{ka} + B_{\tilde{\kappa}}^k B_{\sigma}^{kn}) + B_{\text{CHE}}^k \tilde{\gamma}_0 =: \rho_{\eta}^{ka}, \quad (4.60)$$

$$\|\eta_{ka,e}\| \leq B_C^k (L_{\sigma\gamma}^{ka} + B_{\tilde{\kappa}}^k L_{\sigma\gamma}^{kn}) \gamma + (B_C^k (L_{\sigma\tilde{\gamma}_0}^{ka} + B_{\tilde{\kappa}}^k L_{\sigma\tilde{\gamma}_0}^{kn}) + B_{\text{CHE}}^k) \tilde{\gamma}_0 =: L_{\eta\gamma}^{ka} \gamma + L_{\eta\tilde{\gamma}_0}^{ka} \tilde{\gamma}_0 =: \gamma_{\eta}^{ka}. \quad (4.61)$$

Für Details zur Berechnung dieser Schranken siehe Anhang A.5.

4.4.1. Analyse im Frequenzbereich

Eigenschaften der Funktion \mathbf{f}_{Δ} : Die Funktion \mathbf{f}_{Δ} des geschlossenen Regelkreises (3.64) ist eine Funktionen der gewünschten Trajektorien \mathbf{x}_T und φ_T , der Fehlerzustände \mathbf{z} und der Kompensationsgröße $\hat{\eta}_{va}$. Durch die Voraussetzungen V1 bis V6 aus Abschnitt 4.2 ist sichergestellt, dass \mathbf{f}_{Δ} eine stetig differenzierbare Funktion in

4. Analyse des geschlossenen Regelkreises

den angegebenen Argumenten ist. Siehe Anhang A.6 für eine detaillierte Darstellung dieser Zusammenhänge. Somit kann mit der Annahme $\mathbf{z}_{\text{ref}} \in \mathcal{Z}_{\text{ref}}$, $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ und $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathcal{G}$ für ein beliebig langes Zeitintervall $t \in [0, t_f]$, eine Schranke $B_{\mathbf{f}_\Delta}$ und mit den Konstanten $L_{\mathbf{f}_{\Delta\gamma}}$ und $L_{\mathbf{f}_{\Delta\bar{\gamma}_0}}$ eine Abschätzung der Differenz $\mathbf{f}_\Delta - \mathbf{f}_{\Delta,\text{ref}}$ angegeben werden, so dass $\forall t \in [0, t_f]$

$$\|\mathbf{f}_\Delta\| \leq B_{\mathbf{f}_\Delta}, \quad (4.62)$$

$$\|\mathbf{f}_\Delta - \mathbf{f}_{\Delta,\text{ref}}\| \leq L_{\mathbf{f}_{\Delta\gamma}}\gamma + L_{\mathbf{f}_{\Delta\bar{\gamma}_0}}\bar{\gamma}_0. \quad (4.63)$$

Mit diesen Eigenschaften kann formuliert werden:

Hinreichende Bedingungen für die Beschränktheit der Systemsignale

Zusätzlich zu den Voraussetzungen V1 bis V6 aus Abschnitt 4.2, sind die folgenden zwei hinreichenden Bedingungen für die Beschränktheit der Systemsignale zu erfüllen. Für die Auswertung der Bedingungen wird angenommen, dass $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ und $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathcal{G}$ für ein beliebig langes Zeitintervall $t \in [0, t_f]$ gilt – was es jedoch noch zu zeigen gilt – und somit die in den vorhergehenden Abschnitten definierten Schranken im Zeitintervall $t \in [0, t_f]$ existieren.

Bedingung 1: Mit den bisher definierten Schranken muss gelten

$$c_1 := \|\mathbf{H}(s)\|_{\mathcal{L}_1} L_{\mathbf{f}_{\Delta\gamma}} + \sum_{k=v}^{\omega} \|\mathbf{G}_k(s)\|_{\mathcal{L}_1} (L_{\sigma_\gamma}^{ka} + B_{\bar{\kappa}}^k L_{\sigma_\gamma}^{kn}) \stackrel{!}{<} 1, \quad (4.64)$$

mit $L_{\mathbf{f}_{\Delta\gamma}}$, $L_{\sigma_\gamma}^{ka}$ und $L_{\sigma_\gamma}^{kn}$ aus (4.62) und (4.57). Diese Bedingung stellt sicher, dass der möglicherweise destabilisierende Einfluss der Unsicherheiten langsamer mit dem Fehler \mathbf{e} anwachsen als der Einfluss der attraktiven Anteile. Daher sorgt diese Bedingung für eine positiv-invariante Menge, welche den Gleichgewichtspunkt $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ enthält. Mit der Definition von c_1 in (4.64) und mit

$$c_0 := \|\mathbf{H}(s)\|_{\mathcal{L}_1} L_{\mathbf{f}_{\Delta\bar{\gamma}_0}} + \sum_{k=v}^{\omega} \|\mathbf{G}_k(s)\|_{\mathcal{L}_1} (L_{\sigma_{\bar{\gamma}_0}}^{ka} + B_{\bar{\kappa}}^k L_{\sigma_{\bar{\gamma}_0}}^{kn}) - \|\mathbf{H}(s)\mathbf{B}\mathbf{C}(s)\mathbf{H}_e^{-1}(s)\|_{\mathcal{L}_1}, \quad (4.65)$$

wobei $\mathbf{H}_e = (s\mathbf{I}_{6 \times 6} - \mathbf{A}_e)^{-1}$ gilt, ist die obere Schranke für $\bar{\gamma}_0$ aus (4.5) auswertbar.

Anmerkung 19. Die obere Schranke für $\bar{\gamma}_0$ aus (4.5) ist zwar von $\bar{\gamma}_0$ abhängig, der Wert der oberen Schranke verschwindet jedoch nicht mit $\bar{\gamma}_0 \rightarrow 0$. Dies liegt daran, dass die Werte c_0 und c_1 mit $\bar{\gamma}_0 \rightarrow 0$ zwar kleiner werden, jedoch nach unten beschränkt sind durch

$$\lim_{\bar{\gamma}_0 \rightarrow 0} c_1 =: \underline{c}_1 = \|\mathbf{H}(s)\|_{\mathcal{L}_1} \underline{L}_{\mathbf{f}_{\Delta\gamma}} + \sum_{k=v}^{\omega} \|\mathbf{G}_k(s)\|_{\mathcal{L}_1} (\underline{L}_{\sigma_\gamma}^{ka} + B_{\bar{\kappa}}^k \underline{L}_{\sigma_\gamma}^{kn}) \quad (4.66)$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{\gamma}_0 \rightarrow 0} c_0 =: \underline{c}_0 = & \|\mathbf{H}(s)\|_{\mathcal{L}_1} \underline{L}_{\mathbf{f}_{\Delta\bar{\gamma}_0}} + \sum_{k=v}^{\omega} \|\mathbf{G}_k(s)\|_{\mathcal{L}_1} (\underline{L}_{\sigma_{\bar{\gamma}_0}}^{ka} + B_{\bar{\kappa}}^k \underline{L}_{\sigma_{\bar{\gamma}_0}}^{kn}) \\ & - \|\mathbf{H}(s)\mathbf{B}\mathbf{C}(s)\mathbf{H}_e^{-1}(s)\|_{\mathcal{L}_1}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Die Werte $\underline{L}_{\mathbf{f}\Delta\gamma}$, $\underline{L}_{\mathbf{f}\Delta\bar{\gamma}_0}$, $\underline{L}_{\sigma\gamma}^{kl}$ und $\underline{L}_{\sigma\bar{\gamma}_0}^{kl}$ mit $k \in \{v, \omega\}$, $l \in \{a, n\}$ lassen sich analog zu den Werten aus (4.63) und (4.57) berechnen, wenn das Vorgehen für die Berechnung, gezeigt im Anhang A.5, mit $\bar{\gamma}_0 = 0$ durchgeführt wird. Somit ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\lim_{\bar{\gamma}_0 \rightarrow 0} \frac{\gamma(1 - c_1)}{c_0} = \frac{\gamma(1 - \underline{c}_1)}{\underline{c}_0} > \frac{\gamma(1 - c_1)}{\underline{c}_0} > 0. \quad (4.68)$$

Somit wird klar, dass $\bar{\gamma}_0$ stets hinreichend klein gewählt werden kann.

Bedingung 2: Die Abtastzeit T_s der Adaption, definiert in Abschnitt 3.5, muss klein genug gewählt werden um

$$\gamma_0(T_s) < \bar{\gamma}_0 \quad (4.69)$$

zu erfüllen. Dabei gilt

$$\gamma_0(T_s) := (\bar{\alpha}_1(T_s) + \bar{\alpha}_2(T_s))\kappa_1(T_s) \Delta_1 + \bar{\alpha}_3 \Delta_1 \quad (4.70)$$

mit

$$\alpha_1(t) := \|e^{\mathbf{A}_e t}\|, \quad (4.71a)$$

$$\alpha_2(t) := \int_0^t \|e^{\mathbf{A}_e(t-\tau)\Phi^{-1}(T_s)e^{\mathbf{A}_e T_s}}\| d\tau, \quad (4.71b)$$

$$\alpha_3(t) := \int_0^t \|e^{\mathbf{A}_e(t-\tau)}\| d\tau, \quad (4.71c)$$

$$\bar{\alpha}_i(T_s) := \max_{t \in [0, T_s]} \alpha_i \quad \text{mit } i \in \{1, 2, 3\}, \quad (4.72)$$

$$\kappa_1(T_s) := \int_0^{T_s} \|e^{\mathbf{A}_e(T_s-\tau)}\| d\tau, \quad (4.73)$$

$$\Delta_1 := \max_{\mathbf{K} \in \mathcal{K}} \{\tilde{\mathbf{K}}\} \rho_u + B_{\sigma}^{va} + B_{\sigma}^{\omega a}, \quad (4.74)$$

worin \mathbf{A}_e und $\Phi^{-1}(T_s)$ aus (3.67) und (3.71c) stammen und ρ_u definiert sind mit $B_{\hat{\kappa}}^{\omega} = \|\hat{\mathbf{K}}_{\omega}^{-1}\|$ als

$$\rho_u := \sqrt{\rho_{\mathbf{t}}^2 + \rho_{\tau}^2}, \quad \text{mit} \quad (4.75)$$

$$\rho_{\mathbf{t}} := \hat{\kappa}_v^{-1} B_{\sigma}^{vn} + B_{\kappa}^v \rho_{\eta}^{va}, \quad (4.76)$$

$$\rho_{\tau} := B_{\hat{\kappa}}^{\omega} B_{\sigma}^{\omega n} + B_{\kappa}^{\omega} \rho_{\eta}^{\omega a}. \quad (4.77)$$

Anmerkung 20. Die Definition von $\gamma_0(T_s)$ in (4.70) ist ein Sonderfall der in [42, Kap. 3.3] gegebenen Definition. Daher kann mit Lemma 3.3.1 aus [42] nachvollzogen werden, dass $\lim_{T_s \rightarrow 0} \gamma_0(T_s) = 0$ gilt und somit T_s stets hinreichend klein gewählt werden kann.

Mit dieser Bedingung lässt sich ähnlich zu Lemma 3.3.3 aus [42] zeigen:

4. Analyse des geschlossenen Regelkreises

Lemma 4. *Sind V1 bis V6 aus Abschnitt 4.2 und die Bedingung (4.69) erfüllt und gilt $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ für ein gewisses Zeitintervall $[0, \tau]$, dann folgt*

$$\|\tilde{\mathbf{z}}\| < \bar{\gamma}_0 \iff \tilde{\mathbf{z}} \in \text{Int}(\mathcal{G}), \quad \forall t \in [0, \tau]. \quad (4.78)$$

Der Beweis ist in Anhang B.2 gegeben.

Bisher wurde stets angenommen, das $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ und $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathcal{G}$ für ein gewisses Zeitintervall gilt. Dies wurde jedoch bisher nicht sichergestellt und ist daher Gegenstand des folgenden Theorems und Hauptergebnisses dieser Analyse:

Theorem 1. *Sind V1 bis V6 aus Abschnitt 4.2, die Bedingung (4.41) für das Referenzsystem (4.30) und die Bedingungen (4.64) und (4.69) für den geschlossenen Regelkreis (3.64) erfüllt, dann sind die Lösungen von (3.64) Uniformly Bounded, siehe Definition 1 auf Seite 12, und mit $\|\mathbf{z}(t=0)\| \leq \|\tilde{\mathbf{z}}_0\|$ gilt*

$$\|\mathbf{z}\| < \rho \iff \mathbf{z} \in \text{Int}(\mathcal{Z}), \quad \forall t \geq 0. \quad (4.79)$$

Ebenso gilt dann $\forall t \geq 0$ für den Schubvektor \mathbf{t} und die Stellmomente $\boldsymbol{\tau}$, sowie für den Schätzfehler $\tilde{\mathbf{z}}$ und für $\mathbf{e} := \mathbf{z} - \mathbf{z}_{\text{ref}}$:

$$\|\mathbf{t}\| < \hat{\kappa}_v \rho + \rho_{\mathbf{t}}, \quad (4.80)$$

$$\|\mathbf{t}\| > \hat{\kappa}_v \rho + \hat{\kappa}_v^{-1} (2\hat{g} - B_{\sigma z}^{vn}) + B_{\kappa}^v \rho_{\eta}^{va}, \quad (4.81)$$

$$\|\boldsymbol{\tau}\| < \rho_{\boldsymbol{\tau}}, \quad (4.82)$$

$$\|\tilde{\mathbf{z}}\| < \bar{\gamma}_0 \iff \tilde{\mathbf{z}} \in \text{Int}(\mathcal{G}), \quad (4.83)$$

$$\|\mathbf{e}\| < \gamma. \quad (4.84)$$

Der Beweis ist im Anhang B.6 gegeben.

Anmerkung 21. *Analog zur Anmerkung 14, impliziert das Resultat von Theorem 1 die Beschränktheit der Stellgröße der erweiterten Strecke u_T . Siehe Anhang A.4 für mehr Details hierzu.*

Alternativ kann die Analyse des geschlossenen Regelkreises auch auf folgendem Weg geschehen:

4.4.2. Analyse im Zeitbereich

Eigenschaften der Funktionen $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{kl}$ mit $k \in \{v, \omega\}$, $l \in \{a, n\}$: Alle vier Funktionen des geschlossenen Regelkreises (3.62), gegeben durch die Zeitableitungen von (3.7), (3.6) und (3.41), sind ebenso wie $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{kl, \text{ref}}$ Funktionen der gewünschten Trajektorien \mathbf{x}_T und φ_T bis zu deren fünften bzw. dritten Zeitableitung, der Fehlerzuständen \mathbf{z} , der Störeingänge $\boldsymbol{\zeta}_v$ und $\boldsymbol{\zeta}_\omega$, deren Zeitableitungen $\dot{\boldsymbol{\zeta}}_v$ und $\dot{\boldsymbol{\zeta}}_\omega$ sowie der Zeitverläufe von $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}$ und $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}$. Durch die Argumente $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}$ und $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}$ sowie deren Zeitableitungen, ist $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{kl}$ auch vom Schätzfehler $\tilde{\mathbf{z}}$ abhängig, siehe hierzu Anhang A.5. Mit V1 bis V9 aus Abschnitt 4.2 ist jedoch sichergestellt, dass alle vier Funktionen stetig differenzierbar in den angegebenen Argumenten und mit der Annahme $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ und $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathcal{G}$ für ein beliebig langes Zeitintervall $t \in [0, t_f]$ beschränkt sind. Daher gilt für die Funktionen

selbst, sowie auch für die Differenzen $\dot{\sigma}_{kl} - \dot{\sigma}_{kl,\text{ref}}$, mit den Konstanten $L_{\dot{\sigma}\gamma}^{kl}$ und $L_{\dot{\sigma}\bar{\gamma}_0}^{kl}$, mit den Schranken $B_{\dot{\sigma}}^{kl}$ und mit γ definiert in (4.3), $\forall t \in [0, t_f]$

$$\|\dot{\sigma}_{kl}\| \leq B_{\dot{\sigma}}^{kl}, \quad (4.85)$$

$$\|\dot{\sigma}_{kl} - \dot{\sigma}_{kl,\text{ref}}\| \leq L_{\dot{\sigma}\gamma}^{kl}\gamma + L_{\dot{\sigma}\bar{\gamma}_0}^{kl}\bar{\gamma}_0. \quad (4.86)$$

Eigenschaften der Funktion $\mathbf{f}(t, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va})$: Auch die Funktion $\mathbf{f}(t, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va})$ aus (3.62) ist eine Funktion der gewünschten Trajektorie \mathbf{x}_T bis zu deren zweiten Zeitableitung, der gewünschten Trajektorie φ_T , der Fehlerzustände \mathbf{z} und der Größe $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}$, siehe hierzu Anhang A.6. Mit V1 bis V9 aus Abschnitt 4.2 ist sichergestellt, dass \mathbf{f} in diesen Argumenten beliebig oft stetig differenzierbar ist. Um die Argumente \mathbf{z} und $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}$ in einen Vektor mit Komponenten gleicher Größenordnung zu schreiben, wird $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}$ normiert und damit an die Größenordnung von \mathbf{z} angeglichen, so dass gilt

$${}_n\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va} := n_{\eta}^{va}\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}. \quad (4.87)$$

Hiermit lässt sich schreiben: $\mathbf{f}(t, \mathbf{z}_{\eta}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}, {}_n\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va})$ mit $\mathbf{z}_{\eta} = [\mathbf{z}', {}_n\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}']'$. Gilt $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$, $\mathbf{z}_{\text{ref}} \in \mathcal{Z}_{\text{ref}}$ und $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathcal{G}$ für ein beliebig langes Zeitintervall $t \in [0, t_f]$, existiert eine Konstante $L_{\partial\mathbf{f}}$, derart dass

$$\|\mathbf{Df}(t, \mathbf{z}_{\eta}) - \mathbf{Df}(t, \mathbf{z}_{\eta,\text{ref}})\| \leq L_{\partial\mathbf{f}} \|\mathbf{z}_{\eta} - \mathbf{z}_{\eta,\text{ref}}\|, \quad \forall t \in [0, t_f], \quad (4.88)$$

wobei $\mathbf{z}_{\eta,\text{ref}} := [\mathbf{z}'_{\text{ref}}, n_{\eta}^{va}\boldsymbol{\eta}'_{va,\text{ref}}]'$ und

$$\mathbf{Df} := \frac{\partial\mathbf{f}(t, \mathbf{z}_{\eta})}{\partial\mathbf{z}_{\eta}} \quad (4.89)$$

der Teil der Jacobimatrix von \mathbf{f} passend zu \mathbf{z}_{η} ist, siehe hierzu auch Lemma 5 auf S. 113. Siehe zudem Anhang A.6 für die Berechnung dieser Konstante.

Mit diesen Eigenschaften kann formuliert werden:

Hinreichende Bedingungen für die Beschränktheit der Systemsignale

Zusätzlich zu den Voraussetzungen V1 bis V9 aus Abschnitt 4.2, sind die folgenden zwei hinreichenden Bedingungen und zudem Bedingung (4.69) aus dem vorherigen Abschnitt für die Beschränktheit der Systemsignale zu erfüllen. Für die Auswertung der Bedingungen wird angenommen, dass $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ und $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathcal{G}$ für ein beliebig langes Zeitintervall $t \in [0, t_f]$ gilt – was es jedoch noch zu zeigen gilt – und somit die in den vorhergehenden Abschnitten definierten Schranken im Zeitintervall $t \in [0, t_f]$ existieren.

Bedingung 1: Sei $k(t)$ definiert als

$$k(t) := 2L_{\partial\mathbf{f}}(\gamma + n_{\eta}^{va}\gamma_{\eta}^{va}) + L_{\partial\mathbf{f}}(\varepsilon(t) + n_{\eta}^{va}\rho_{\eta r}^{va}), \quad (4.90)$$

mit

$$\varepsilon(t) := \sqrt{e^{-2\sigma_m t} \|\bar{\mathbf{z}}_0\|^2 + 2r(\|\mathfrak{G}_v(s)\|_{\mathcal{L}_1}, \|\mathfrak{G}_\omega(s)\|_{\mathcal{L}_1})}, \quad (4.91)$$

4. Analyse des geschlossenen Regelkreises

wobei n_η^{va} , γ_η^{va} und $\rho_{\eta r}^{va}$ aus (4.87), (4.61) und (4.35) stammen. Dann muss zu dem frei zu wählenden Zeitpunkt $t = T$ gelten:

$$\sigma_m > k(T), \quad (4.92)$$

worin mit σ_m der kleinste Singulärwert von \mathbf{A}_V aus (3.54) bezeichnet ist. Diese Bedingung limitiert den Unterschied zwischen dem Funktionsverlauf von \mathbf{f} des geschlossenen Regelkreises aus (3.62) und dem Funktionsverlauf von \mathbf{f}_{ref} des Referenzsystems aus (4.29). Dadurch kann der Kandidat für eine Lyapunovfunktion aus (3.53) zur Analyse der Fehlerdynamik für $\mathbf{e} := \mathbf{z} - \mathbf{z}_{\text{ref}}$, welche man durch Subtraktion von (4.29) von (3.62) erhält, herangezogen werden. Sind beide Systeme linear, gilt $\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{z}$ und $\mathbf{f}_{\text{ref}} = \mathbf{A}\mathbf{z}_{\text{ref}}$ und somit $L_{\partial \mathbf{f}} = 0$, wodurch diese Bedingung auf triviale Weise erfüllt ist, siehe auch [109].

Bedingung 2: Weiterhin muss gelten:

$$c_1 := \frac{2\xi}{|\bar{\lambda}|} (\bar{k} n_\eta^{va} L_{\eta r}^{va} + \sum_{k=v}^{\omega} \|\mathbf{B}_k\| \|\mathfrak{G}_k(s)\|_{\mathcal{L}_1} (L_{\sigma \gamma}^{ka} + B_{\bar{k}}^k L_{\sigma \gamma}^{kn})) \stackrel{!}{<} 1, \quad (4.93)$$

mit n_η^{va} , $L_{\eta r}^{va}$, $L_{\sigma \gamma}^{ka}$ und $L_{\sigma \gamma}^{kn}$ aus (4.87), (4.60) und (4.86) sowie mit $\xi := \exp(2L_{\partial \mathbf{f}} \rho_{\text{ref}} T)$, $\bar{\lambda} := -2(\sigma_m + k(T))$ und $\bar{k} = k(0)$. Diese Bedingung stellt in vergleichbarer Weise zur Bedingung (4.64) sicher, dass der möglicherweise destabilisierende Einfluss der Unsicherheiten langsamer mit dem Fehler \mathbf{e} anwächst als der Einfluss der attraktiven Anteile. Daher sorgt diese Bedingung für eine attraktive Menge, welche den Punkt $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ enthält. Mit der Definition von c_1 in (4.93) und mit

$$c_0 := \frac{2\xi}{|\bar{\lambda}|} (\|\mathbf{B}\| B_{\text{CHe}} + \bar{k} n_\eta^{va} B_C^v B_{\text{CHe}}^v), \quad (4.94)$$

wobei $B_{\text{CHe}} \geq \|\mathbf{C}(s)\mathbf{H}_e^{-1}(s)\|_{\mathcal{L}_1}$ gilt, ist die obere Schranke für $\bar{\gamma}_0$ aus (4.5) auswertbar.

Anmerkung 22. Die obere Schranke für $\bar{\gamma}_0$ aus (4.5) ist zwar von $\bar{\gamma}_0$ abhängig, der Wert der oberen Schranke verschwindet jedoch nicht mit $\bar{\gamma}_0 \rightarrow 0$. Dies liegt daran, dass die Werte c_0 und c_1 mit $\bar{\gamma}_0 \rightarrow 0$ kleiner werden, jedoch nach unten beschränkt sind durch

$$\lim_{\bar{\gamma}_0 \rightarrow 0} c_0 =: \underline{c}_0 = \frac{2\xi}{|\bar{\lambda}|} (\|\mathbf{B}\| B_{\text{CHe}} + \bar{k} n_\eta^{va} B_C^v B_{\text{CHe}}^v) \quad (4.95)$$

und

$$\lim_{\bar{\gamma}_0 \rightarrow 0} c_1 =: \underline{c}_1 = \frac{2\xi}{|\bar{\lambda}|} (\bar{k} n_\eta^{va} L_{\eta r}^{va} + \sum_{k=v}^{\omega} \|\mathbf{B}_k\| \|\mathfrak{G}_k(s)\|_{\mathcal{L}_1} (\underline{L}_{\sigma \gamma}^{ka} + B_{\bar{k}}^k \underline{L}_{\sigma \gamma}^{kn})). \quad (4.96)$$

Der Wert \underline{k} ergibt sich als unterer Grenzwert von \bar{k} und ist gegeben durch

$$\lim_{\bar{\gamma}_0 \rightarrow 0} \bar{k} =: \underline{k} = 2\underline{L}_{\partial \mathbf{f}}(\gamma + n_\eta^{va} L_{\eta r}^{va} \gamma) + \underline{L}_{\partial \mathbf{f}}(\varepsilon(0) + n_\eta^{va} \rho_{\eta r}^{va}). \quad (4.97)$$

Die Werte $\underline{L}_{\partial f}$ und $\underline{L}_{\sigma\gamma}^{kl}$ mit $k \in \{v, \omega\}$, $l \in \{a, n\}$ lassen sich analog zu den Werten aus (4.88) und (4.86) berechnen, wenn das Vorgehen für die Berechnung, gezeigt in Anhang A.5 und A.6, mit $\|\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}\| \leq B_C^v(B_{\sigma}^{va} + B_{\kappa}^v B_{\sigma}^{vn})$ anstatt mit $\|\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}\| \leq \gamma_{\eta}^{va} = B_C^v(B_{\sigma}^{va} + B_{\kappa}^v B_{\sigma}^{vn}) + B_{CHe}^v \bar{\gamma}_0$ durchgeführt wird. Somit ergibt sich folgender Zusammenhang

$$\lim_{\bar{\gamma}_0 \rightarrow 0} \frac{\gamma(1 - c_1)}{c_0} = \frac{\gamma(1 - \underline{c}_1)}{\underline{c}_0} > \frac{\gamma(1 - c_1)}{\underline{c}_0} > 0, \quad (4.98)$$

und es wird klar, dass $\bar{\gamma}_0$ stets hinreichend klein gewählt werden kann.

Anmerkung 23. Die Bedingung in (4.69) muss ebenfalls für diese Analyse erfüllt werden, damit Lemma 4 anwendbar ist. Die Zusammenhänge in (4.70) bis (4.77) gelten dabei unverändert.

Bisher wurde stets angenommen, dass $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ und $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathcal{G}$ für ein gewisses Zeitintervall gilt. Dies wurde jedoch bisher nicht sichergestellt und ist daher Gegenstand des folgenden Theorems und Hauptergebnisses dieser Analyse:

Theorem 2. Sind V1 bis V9 aus Abschnitt 4.2 erfüllt und gilt die Bedingung (4.47) für das Referenzsystem (4.29) sowie die Bedingungen (4.92), (4.93) und (4.69) für den geschlossenen Regelkreis (3.62), dann sind die Lösungen von (3.62) Uniformly Bounded, siehe Definition 1 auf Seite 12, und mit $\|\mathbf{z}(t=0)\| \leq \|\bar{\mathbf{z}}_0\|$ gilt

$$\|\mathbf{z}\| < \rho \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{z} \in \text{Int}(\mathcal{Z}), \quad \forall t \geq 0. \quad (4.99)$$

Die Lösungen von (3.62) sind dann zudem Uniformly Ultimately Bounded mit der beliebig zu wählenden Zeit T und der Schranke $\varepsilon(T) + \gamma$, so dass mit $\|\mathbf{z}(t=0)\| \leq \|\bar{\mathbf{z}}_0\|$ gilt

$$\|\mathbf{z}\| \leq \varepsilon(T) + \gamma, \quad \forall t \geq T. \quad (4.100)$$

Ebenso gilt dann $\forall t \geq 0$ für den Schubvektor \mathbf{t} und die Stellmomente $\boldsymbol{\tau}$, sowie für den Schätzfehler $\tilde{\mathbf{z}}$ und für $\mathbf{e} := \mathbf{z} - \mathbf{z}_{\text{ref}}$:

$$\|\mathbf{t}\| < \hat{\kappa}_v \rho + \rho_{\mathbf{t}}, \quad (4.101)$$

$$\|\mathbf{t}\| > \hat{\kappa}_v \rho + \hat{\kappa}_v^{-1}(2\hat{g} - B_{\sigma z}^{vn}) + B_{\kappa}^v \rho_{\eta}^{va}, \quad (4.102)$$

$$\|\boldsymbol{\tau}\| < \rho_{\boldsymbol{\tau}}, \quad (4.103)$$

$$\|\tilde{\mathbf{z}}\| < \bar{\gamma}_0 \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{z}} \in \text{Int}(\mathcal{G}), \quad (4.104)$$

$$\|\mathbf{e}\| < \gamma. \quad (4.105)$$

Der Beweis ist im Anhang B.6 zu finden.

Anmerkung 24. Das Resultat in (4.100) zeigt, dass mit $\|\mathbf{z}(t=0)\| \leq \|\bar{\mathbf{z}}_0\|$ eine attraktive Menge

$$\mathcal{Z}_{\varepsilon} := \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{13} \mid \|\mathbf{z}\| \leq \sqrt{2r(\|\mathfrak{G}_v(s)\|_{\mathcal{L}_1}, \|\mathfrak{G}_\omega(s)\|_{\mathcal{L}_1})} + \gamma \right\} \quad (4.106)$$

für den Fehlerzustand \mathbf{z} existiert, welche mit $\lim_{T \rightarrow \infty} \varepsilon(T)$ aus (4.100) folgt.

Anmerkung 25. Analog zur Anmerkung 14, impliziert das Resultat von Theorem 2 die Beschränktheit der Stellgröße der erweiterten Strecke u_T . Siehe Anhang A.4 für mehr Details hierzu.

4.5. Numerische Auswertung und Vergleich beider Methoden

In diesem Abschnitt sollen die beiden zuvor beschriebenen Methoden zur Analyse des Systemverhaltens numerisch ausgewertet und verglichen werden.

4.5.1. Analyse im Frequenzbereich

Für die Analyse im Frequenzbereich wird für die Solltrajektorien einerseits hinreichende Differenzierbarkeit, d.h. $\mathbf{x}_T \in C^4$ und $\varphi_T \in C^2$, vorausgesetzt und andererseits folgende Beschränkungen vorgeben, um damit die Erfüllung von V1 in Abschnitt 4.2 sicherzustellen:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_T\| \leq 2.4, \quad \|\dot{\mathbf{x}}_T\| \leq 0.12, \quad \|\ddot{\mathbf{x}}_T\| \leq 0.018, \quad \|\dddot{\mathbf{x}}_T\| \leq 0.011, \quad \|\mathbf{x}''''_T\| \leq 0.005, \\ |\varphi_T| \leq 1.0, \quad |\dot{\varphi}_T| \leq 0.076, \quad |\ddot{\varphi}_T| \leq 0.036. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Diese und alle weiteren Werte in diesem Abschnitt sind in SI-Einheiten gegeben. Die Reglerverstärkungen in (3.54) werden gewählt, so dass gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_x = -12 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3}, \quad \mathbf{A}_v = -12 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3}, \quad \mathbf{A}_t = -15 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3}, \quad \mathbf{A}_r = -15 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3}, \\ a_\varphi = -12, \quad a_{\omega z} = -15. \end{aligned} \quad (4.108)$$

Die Übertragungsfunktionen aus (3.13) und (3.45) sind mit

$$d_v(s) = \frac{6.23 \cdot 10^8}{s(s^2 + 3110s + 3.22 \cdot 10^6)}, \quad \mathbf{D}_\omega(s) = \text{diag}(1.57, 1.57, 2.51) \cdot \frac{1}{s} \quad (4.109)$$

eingestellt und sorgen für die Erfüllung von V4 aus Abschnitt 4.2. Es werden die folgenden nominalen Parameterwerte gewählt

$$\hat{m} = 0.56, \quad \hat{g} = 9.8, \quad \hat{\kappa}_v = 1.8, \quad \|\hat{\mathbf{J}}\| = 0.004, \quad \|\hat{\mathbf{D}}\| = 0.8, \quad \|\hat{\mathbf{K}}_\omega\| = 400 \quad (4.110)$$

und die folgenden prozentualen Abweichungen als Parameterunsicherheiten betrachtet:

$$\begin{aligned} m = \hat{m} \pm 0.2\%, \quad g = \hat{g} \pm 0.1\%, \quad \kappa_v = \hat{\kappa}_v \pm 0.1\%, \quad (4.111) \\ \|\mathbf{J}\| = \|\hat{\mathbf{J}}\| \pm 1\%, \quad \|\mathbf{D}\| = \|\hat{\mathbf{D}}\| \pm 1\%, \quad \|\mathbf{K}_\omega\| = \|\hat{\mathbf{K}}_\omega\| \pm 1\%. \end{aligned}$$

Dabei wurden $\mathbf{f}_v = \mathbf{D}\mathbf{v}$ und $\mathbf{f}_\omega = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega})$ gewählt. Für die Störungen in (2.34b) und (2.34d) wird angenommen, dass diese stetig sind, d.h. $\boldsymbol{\zeta}_v \in C^0$ und $\boldsymbol{\zeta}_\omega \in C^0$, und folgende Beschränkungen gelten:

$$\|\boldsymbol{\zeta}_v\| \leq 3.8 \cdot 10^{-3}, \quad \|\boldsymbol{\zeta}_\omega\| \leq 7.4 \cdot 10^{-3}, \quad (4.112)$$

wodurch V2 aus Abschnitt 4.2 erfüllt ist. Die Einstellung der \mathcal{L}_1 -Filter aus (4.109) führt mit den in (4.111) gegebenen Werten auf

$$\hat{\mathbf{C}}_v(s) = \frac{1.12 \cdot 10^9}{(s + 1005)(s + 1050)(s + 1060)} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3}, \quad \hat{\mathbf{C}}_\omega(s) = \frac{630}{s + 630} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3}. \quad (4.113)$$

Die Eigenwerte von $\mathbf{C}_v(s)$ und $\mathbf{C}_\omega(s)$ liegen bei den Unsicherheiten in (4.111) in den Bereichen

$$\operatorname{Re}(\lambda_i(\mathbf{C}_v(s))) \in [-1555, -930], \quad i \in [1, 2, 3], \quad \operatorname{Re}(\lambda(\mathbf{C}_\omega(s))) \in [-635, -622]. \quad (4.114)$$

Durch die Wahl

$$\|\bar{\mathbf{z}}_0\| = 0.001, \quad \rho_{\text{ref}} = 0.02, \quad \rho = \rho_{\text{ref}} + 1.0 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma = 1.0 \cdot 10^{-4} \quad (4.115)$$

sind die Mengen \mathcal{Z}_{ref} , \mathcal{Z} und \mathcal{G} in (4.2), (4.4) und (4.6) definiert. Mit den bisher angegebenen Werten sowie den Annahmen $\mathbf{z}_{\text{ref}} \in \mathcal{Z}_{\text{ref}}$, $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ und $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathcal{G}$ für ein beliebig langes Zeitintervall $t \in [0, t_f]$, lassen sich die Schranken

$$\begin{aligned} B_{\sigma_i}^{va} &= 0.010, & B_{\sigma_r}^{va} &= 0.016, & B_{\sigma}^{va} &= 0.017, & L_{\sigma_\gamma}^{va} &= 0.10, & L_{\sigma_{\tilde{\gamma}_0}}^{va} &= 0, \\ B_{\sigma_i}^{vn} &= 9.9, & B_{\sigma_r}^{vn} &= 12.7, & B_{\sigma}^{vn} &= 12.6, & L_{\sigma_\gamma}^{vn} &= 128, & L_{\sigma_{\tilde{\gamma}_0}}^{vn} &= 0, \\ \rho_{\eta r}^{va} &= 0.050, & \rho_{\eta}^{va} &= 0.051, & \gamma_{\eta}^{va} &= 3.9 \cdot 10^{-5}, & L_{\eta r}^{va} &= 0.39, & L_{\eta_{\tilde{\gamma}_0}}^{va} &= 0.14, \end{aligned} \quad (4.116)$$

sowie $B_{\sigma_z r}^{vn} = 12.9$ und $B_{\sigma_z}^{vn} = 13$ für das Zeitintervall $t \in [0, t_f]$ analytisch berechnen, siehe Anhang A.5. Alle im weiteren Verlauf des Abschnitts gemachten Aussagen gelten, falls nicht explizit gekennzeichnet, stets für dieses Zeitintervall $[0, t_f]$. Mit den Schranken aus (4.116) erhält man für die Bedingung (4.19):

$$t_{e3, \max} = -0.54 < 0 \quad (4.117)$$

und ebenso für die Bedingung (4.20)

$$B_C^\omega = 1.7 < 1.82 = \sqrt{\frac{1 - t_{e3, \max}}{1 + t_{e3, \max}}}. \quad (4.118)$$

Somit sind V1 bis V6 aus Abschnitt 4.2 und alle hinreichenden Voraussetzungen erfüllt, damit mit $\mathbf{z}_{\text{ref}} \in \mathcal{Z}_{\text{ref}}$, $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ und $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathcal{G}$ folgende Schranken existieren:

$$\begin{aligned} B_{\sigma_i}^{\omega a} &= 0.020 & B_{\sigma_r}^{\omega a} &= 0.0331 & B_{\sigma}^{\omega a} &= 0.0332 & L_{\sigma_\gamma}^{\omega a} &= 0.20 & L_{\sigma_{\tilde{\gamma}_0}}^{\omega a} &= 0.073 \\ B_{\sigma_i}^{\omega n} &= 20 & B_{\sigma_r}^{\omega n} &= 25.3 & B_{\sigma}^{\omega n} &= 25.4 & L_{\sigma_\gamma}^{\omega n} &= 256 & L_{\sigma_{\tilde{\gamma}_0}}^{\omega n} &= 93.5 \\ \rho_{\eta r}^{\omega a} &= 0.50 & \rho_{\eta}^{\omega a} &= 0.51 & B_{\mathbf{f}_{\Delta r}} &= 0.14 & L_{\mathbf{f}_{\Delta \gamma}} &= 2.8 & L_{\mathbf{f}_{\Delta \tilde{\gamma}_0}} &= 2.1. \end{aligned} \quad (4.119)$$

Die Zahlenwerte dieser Schranken lassen sich nicht mehr analytisch bestimmen, da für die Berechnung dieser Werte umfangreiche Optimierungsprobleme zu lösen sind, siehe hierzu Anhang A.5. Für die Werte $B_{\mathbf{f}_{\Delta r}}$, $L_{\mathbf{f}_{\Delta \gamma}}$ und $L_{\mathbf{f}_{\Delta \tilde{\gamma}_0}}$ können numerische Optimierung durchgeführt und somit die oben angegebenden Anhaltswerte gewonnen werden. Für die restlichen Schranken in (4.119) ist eine numerische Optimierungen aufgrund der hohen Anzahl an Variablen und der hohen Komplexität der Ausdrücke wenig sinnvoll. Daher wurden die Werte geschätzt und dabei eine maximale Drehbeschleunigung von 25 rad/s^2 angenommen, was bei den in (4.107) gegebenen Sollwerten und den in (4.111) angegeben Unsicherheiten eher konservativ erscheint. Die Zahlenverhältnisse dieser Schranken zueinander wurden vergleichbar zu den Schranken in (4.116) gewählt.

Aussage über das Referenzsystem

Mit den Schranken in (4.116) und (4.119), den Werten in (4.115), den Reglerparametern in (4.108), den Filtereinstellungen in (4.109), den Unsicherheiten in (4.111) und (4.112), sowie mit $B_{\kappa}^v = 0.001$, $B_{\kappa}^{\omega} = 0.01$ erhält man $\|\mathbf{G}_v\|_{\mathcal{L}_1} \leq 0.067$, $\|\mathbf{G}_{\omega}\|_{\mathcal{L}_1} \leq 0.0029$, $\|\mathbf{H}(s)\|_{\mathcal{L}_1} = 0.35$, $\|s\mathbf{H}(s)\|_{\mathcal{L}_1} = 4.7$ und für die Bedingung (4.41):

$$\rho_{\text{ref}} = 0.020 > 0.014 . \quad (4.120)$$

Daher gilt mit Lemma 2 für das Referenzsystem $\forall t \geq 0$:

$$\|\mathbf{z}_{\text{ref}}\| < 0.020 = \rho_{\text{ref}} , \quad (4.121)$$

$$4.0 < \|\mathbf{t}_{\text{ref}}\| < 7.2 = \rho_{\text{tref}} , \quad (4.122)$$

$$\|\boldsymbol{\tau}_{\text{ref}}\| < 0.065 = \rho_{\boldsymbol{\tau}\text{ref}} . \quad (4.123)$$

Aussage über den geschlossenen Regelkreis

Weiterhin erhält man für (4.64) und (4.65): $c_1 = 0.998 < 1$ und $c_0 = 0.80$. Mit einer Schrittweite von $T_s = 10^{-7}$ lautet die Bedingung (4.69):

$$8.1 \cdot 10^{-8} = \gamma_0(T_s) < \bar{\gamma}_0 \leq \frac{\gamma(1 - c_1)}{c_0} = 2.5 \cdot 10^{-7} . \quad (4.124)$$

Somit sind alle Bedingungen für Theorem 1 erfüllt und es gilt $\forall t \geq 0$:

$$\|\mathbf{z}\| < \rho_{\text{ref}} + 1.0 \cdot 10^{-4} , \quad (4.125)$$

$$4.0 + 5 \cdot 10^{-3} < \|\mathbf{t}\| < \rho_{\text{tref}} + 7.0 \cdot 10^{-3} , \quad (4.126)$$

$$\|\boldsymbol{\tau}\| < \rho_{\boldsymbol{\tau}\text{ref}} + 7.0 \cdot 10^{-5} . \quad (4.127)$$

4.5.2. Analyse im Zeitbereich

Für die Analyse im Zeitbereich sollen die gleichen Unsicherheiten, gegeben in (4.111) und (4.112), und die gleiche Adaptionsgeschwindigkeit, gegeben durch $T_s = 10^{-7}$, wie zuvor angesetzt werden, um eine gute Vergleichbarkeit zu erhalten. Für die Störungen wird zusätzlich angenommen, dass diese stetig differenzierbar sind, d.h. $\zeta_v \in C^1$ und $\zeta_{\omega} \in C^1$, und folgende Beschränkungen gelten

$$\|\dot{\zeta}_v\| \leq 1.0 \cdot 10^{-5} , \quad \|\dot{\zeta}_{\omega}\| \leq 3.0 \cdot 10^{-5} , \quad (4.128)$$

wodurch V8 in Abschnitt 4.2 erfüllt wird. Für die Solltrajektorien wird vorausgesetzt, dass $\mathbf{x}_T \in C^5$ und $\varphi_T \in C^3$ und folgende Beschränkungen gelten, damit die Erfüllung von V7 sichergestellt ist:

$$\|\mathbf{x}_T\| \leq 2.4 , \quad \|\dot{\mathbf{x}}_T\| \leq 1.6 , \quad \|\ddot{\mathbf{x}}_T\| \leq 1.8 , \quad \|\dddot{\mathbf{x}}_T\| \leq 3.0 , \quad \|\ddddot{\mathbf{x}}_T\| \leq 5.1 , \quad (4.129)$$

$$\stackrel{(5)}{\|\mathbf{x}_T\|} \leq 8.9 , \quad |\varphi_T| \leq 1.0 , \quad |\dot{\varphi}_T| \leq 0.6 , \quad |\ddot{\varphi}_T| \leq 0.8 , \quad |\dddot{\varphi}_T| \leq 1.6 .$$

Für diese Beschränkungen können deutlich höhere Werte als zuvor in (4.107) angesetzt werden und gleichzeitig können deutlich geringere Reglerverstärkungen gewählt werden, so dass gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_x &= -2.0 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} , & \mathbf{A}_v &= -2.0 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} , & \mathbf{A}_t &= -2.5 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} , & \mathbf{A}_r &= -2.5 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} , \\ a_{\varphi} &= -2.0 , & a_{\omega z} &= -2.5 . \end{aligned} \quad (4.130)$$

Die Übertragungsfunktionen $d_v(s)$ und $\mathbf{D}_\omega(s)$ werden folgendermaßen eingestellt

$$d_v(s) = \frac{19 \cdot 10^9}{s(s+864)(s^2+864s+3.68 \cdot 10^5)}, \quad \mathbf{D}_\omega(s) = \text{diag}(1.0, 1.0, 1.6) \cdot \frac{384}{s(s+785)}, \quad (4.131)$$

und erfüllen V9 aus Abschnitt 4.2 mit den in (4.111) gegebenen Unsicherheiten. Beide \mathcal{L}_1 -Filter lauten

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{C}}_v(s) &= \frac{3.40 \cdot 10^{10}}{(s+377)(s+408)(s+440)(s+503)} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3}, \\ \hat{\mathbf{C}}_\omega(s) &= \frac{1.54 \cdot 10^5}{(s+385)(s+400)} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3}. \end{aligned} \quad (4.132)$$

Die Eigenwerte von $\mathbf{C}_v(s)$ und $\mathbf{C}_\omega(s)$ liegen bei den in (4.111) gegebenen Unsicherheiten in den Bereichen

$$\lambda_i(\mathbf{C}_v) \in [-864, -343], i \in [1, 2, 3, 4], \quad \lambda_j(\mathbf{C}_\omega) \in [-785, -351], j \in [1, 2]. \quad (4.133)$$

Durch die Wahl

$$\|\bar{\mathbf{z}}_0\| = 0.05, \quad \rho_{\text{ref}} = 0.06, \quad \rho = \rho_{\text{ref}} + 1.0 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma = 1.0 \cdot 10^{-4}, \quad (4.134)$$

welche deutlich höhere initiale Abweichungen als in (4.115) berücksichtigt, sind die Mengen \mathcal{Z}_{ref} , \mathcal{Z} und \mathcal{G} in (4.2), (4.4) und (4.6) definiert. Mit der Annahme $\mathbf{z}_{\text{ref}} \in \mathcal{Z}_{\text{ref}}$, $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ und $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathcal{G}$ für ein beliebig langes Zeitintervall $t \in [0, t_f]$, lassen sich die Schranken

$$\begin{aligned} B_{\sigma_i}^{va} &= 0.011, & B_{\sigma_r}^{va} &= 0.0276, & B_{\sigma}^{va} &= 0.0277, & L_{\sigma_\gamma}^{va} &= 0.021, & L_{\sigma_{\tilde{\gamma}_0}}^{va} &= 0, \\ B_{\sigma_i}^{vn} &= 9.9, & B_{\sigma_r}^{vn} &= 13.9, & B_{\sigma}^{vn} &= 14, & L_{\sigma_\gamma}^{vn} &= 2.6, & L_{\sigma_{\tilde{\gamma}_0}}^{vn} &= 0, \\ \rho_{\eta_r}^{va} &= 0.0720, & \rho_{\eta}^{va} &= 0.0721, & \gamma_{\eta}^{va} &= 5.0 \cdot 10^{-6}, & L_{\eta_r}^{va} &= 0.041, & L_{\eta_{\tilde{r}_0}}^{va} &= 0.86, \end{aligned} \quad (4.135)$$

sowie $B_{\sigma_{zr}}^{vn} = 11.59$ und $B_{\sigma_z}^{vn} = 11.60$ für das Zeitintervall $t \in [0, t_f]$ vergleichbar zu (4.116) analytisch berechnen, siehe Anhang A.5. Alle weiteren Aussagen in diesem Abschnitt gelten stets für dieses Zeitintervall $t \in [0, t_f]$. Mit den Schranken aus (4.135) erhält man für die Bedingung (4.19):

$$t_{e3, \max} = -0.54 < 0 \quad (4.136)$$

und ebenso für die Bedingung (4.20)

$$B_C^\omega = 1.7 < 1.82 = \sqrt{\frac{1 - t_{e3, \max}}{1 + t_{e3, \max}}}. \quad (4.137)$$

Somit sind V1 bis V9 aus Abschnitt 4.2 und alle hinreichenden Voraussetzungen erfüllt, so dass mit $\mathbf{z}_{\text{ref}} \in \mathcal{Z}_{\text{ref}}$, $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ und $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathcal{G}$ folgende Schranken existieren:

$$\begin{aligned} B_{\sigma_i}^{\omega a} &= 0.022, & B_{\sigma_r}^{\omega a} &= 0.0553, & B_{\sigma}^{\omega a} &= 0.0554, & L_{\sigma_\gamma}^{\omega a} &= 0.042, & L_{\sigma_{\tilde{\gamma}_0}}^{\omega a} &= 0.89, \\ B_{\sigma_i}^{\omega n} &= 20, & B_{\sigma_r}^{\omega n} &= 27.9, & B_{\sigma}^{\omega n} &= 28.0, & L_{\sigma_\gamma}^{\omega n} &= 5.2, & L_{\sigma_{\tilde{\gamma}_0}}^{\omega n} &= 108.6, \\ \rho_{\eta_r}^{\omega a} &= 0.59, & \rho_{\eta}^{\omega a} &= 0.59, & L_{\partial \mathbf{f}} &= 16 \end{aligned} \quad (4.138)$$

4. Analyse des geschlossenen Regelkreises

und

$$\begin{aligned}
 B_{\dot{\sigma}r}^{va} &= 0.020, & B_{\dot{\sigma}r}^{vn} &= 6.4, & B_{\dot{\sigma}r}^{\omega a} &= 0.040, & B_{\dot{\sigma}r}^{\omega n} &= 13, \\
 L_{\dot{\sigma}\gamma}^{va} &= 0.076, & L_{\dot{\sigma}\gamma}^{vn} &= 9.1, & L_{\dot{\sigma}\gamma}^{\omega a} &= 0.15, & L_{\dot{\sigma}\gamma}^{\omega n} &= 18, \\
 L_{\dot{\sigma}\bar{\gamma}_0}^{va} &= 0.87, & L_{\dot{\sigma}\bar{\gamma}_0}^{vn} &= 3.4, & L_{\dot{\sigma}\bar{\gamma}_0}^{\omega a} &= 1.7, & L_{\dot{\sigma}\bar{\gamma}_0}^{\omega n} &= 6.9.
 \end{aligned} \tag{4.139}$$

Die Zahlenwerte der Schranken $B_{\dot{\sigma}r}^{va}$, $L_{\dot{\sigma}\gamma}^{va}$ und $L_{\dot{\sigma}\bar{\gamma}_0}^{va}$ lassen sich analytisch bestimmen, siehe Anhang A.5. Alle weiteren Schranken in (4.138) und (4.139) können nicht mehr analytisch bestimmt werden, da für die Berechnung dieser Werte umfangreiche Optimierungsprobleme zu lösen sind. Für die Schranken $L_{\partial\mathbf{f}}$, $B_{\dot{\sigma}r}^{va}$, $L_{\dot{\sigma}\gamma}^{va}$ und $L_{\dot{\sigma}\bar{\gamma}_0}^{va}$ können numerische Optimierungen durchgeführt und somit die oben angegebenden Anhaltswerte gewonnen werden. Für die restlichen Schranken in (4.138) und (4.139) ist eine numerische Optimierung aufgrund der hohen Anzahl an Variablen und der hohen Komplexität der Ausdrücke wenig sinnvoll. Daher wurden die Werte ebenso wie die Schranken für die erste Methode in (4.119) geschätzt und dabei eine maximale Drehbeschleunigung von 28 rad/s² angenommen. Die Zahlenverhältnisse dieser Schranken zueinander wurden vergleichbar zu den Schranken in (4.135) gewählt.

Aussage über das Referenzsystem

Mit den Schranken in (4.135), (4.138) und (4.139), den Werten in (4.134), den Reglerparametern in (4.130) und Unsicherheiten in (4.111) und (4.128), sowie mit $B_{\tilde{\kappa}}^v = 0.001$, $B_{\tilde{\kappa}}^\omega = 0.01$, $\|\mathbf{B}_v\| = 1.28$, $\|\mathbf{B}_\omega\| = 0.56$, $\sigma_m = 2.0$, $\|\mathfrak{G}_v\|_{\mathcal{L}_1} \leq 0.016$ und $\|\mathfrak{G}_\omega\|_{\mathcal{L}_1} \leq 0.0089$ erhält man für die Bedingung (4.47):

$$\rho_{\text{ref}} = 0.060 > 0.051. \tag{4.140}$$

Daher gilt mit Lemma 3 für das Referenzsystem $\forall t \geq 0$:

$$\|\mathbf{z}_{\text{ref}}\| < 0.060 = \rho_{\text{ref}}, \tag{4.141}$$

$$4.6 < \|\mathbf{t}_{\text{ref}}\| < 8.0 = \rho_{\text{tref}}, \tag{4.142}$$

$$\|\boldsymbol{\tau}_{\text{ref}}\| < 0.072 = \rho_{\boldsymbol{\tau}\text{ref}}. \tag{4.143}$$

Weiterhin ist sichergestellt, dass der Zustand \mathbf{z}_{ref} gegen die Menge

$$\{\mathbf{z}_{\text{ref}} \in \mathbb{R}^{13} \mid \|\mathbf{z}_{\text{ref}}\| \leq 0.0094\} \tag{4.144}$$

strebt, was mit $r = 4.4 \cdot 10^{-5}$ aus (4.55) folgt.

Aussage über den geschlossenen Regelkreis

Weiterhin erhält man mit den Schranken in (4.135) und (4.138) sowie mit $T = 0.5$ und $n_\eta^{va} = 0.3$ für die Bedingung (4.92)

$$\sigma_m = 2.0 > 0.69 = k(T). \tag{4.145}$$

Weiterhin gilt für die Bedingung (4.93): $c_1 = 0.037 < 1$ und mit $c_0 = 5.1$ aus (4.94) und der Schrittweite $T_s = 10^{-7}$ folgt für Bedingung (4.69):

$$9.0 \cdot 10^{-7} = \gamma_0(T_s) < \bar{\gamma}_0 \leq \frac{\gamma(1 - c_1)}{c_0} = 1.9 \cdot 10^{-5}. \tag{4.146}$$

Somit sind alle Bedingungen für Theorem 2 erfüllt und es gilt $\forall t \geq 0$:

$$\|\mathbf{z}\| < \rho_{\text{ref}} + 1.0 \cdot 10^{-4}, \quad (4.147)$$

$$4.6 + 4 \cdot 10^{-5} < \|\mathbf{t}\| < \rho_{\text{tref}} + 3.0 \cdot 10^{-4}, \quad (4.148)$$

$$\|\boldsymbol{\tau}\| < \rho_{\boldsymbol{\tau}\text{ref}} + 1.0 \cdot 10^{-6}. \quad (4.149)$$

Ebenso strebt der Zustand \mathbf{z} nachweislich gegen die Menge

$$\{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{13} \mid \|\mathbf{z}\| \leq 0.0095\}, \quad (4.150)$$

welche sich mit $r = 4.4 \cdot 10^{-5}$ und dem Wert für γ in (4.134) aus (4.106) ergibt.

4.5.3. Vergleich beider Vorgehensweisen

Die Analyse im Zeitbereich fordert, dass die Störungen $\zeta_v(t)$ und $\zeta_\omega(t)$ einfach und die Solltrajektorien \mathbf{x}_T und φ_T um eine weitere Ordnung stetig differenzierbar sind, und ist daher restriktiver als die Analyse im Frequenzbereich. Dafür können bei vergleichbaren Unsicherheiten und mit identischen Adaptionsgeschwindigkeit deutlich schnellere Trajektorien und gleichzeitig deutlich geringere Reglerverstärkungen verwendet werden. Ebenso kann die Bandbreite der \mathcal{L}_1 -Filter auf etwa ein Drittel reduziert und größere Anfangswerte und größere zulässige Abweichungen vorgegeben werden. Obwohl durch diese Veränderungen eine Vergrößerung der attraktiven Umgebung plausibel wäre, kann durch das Resultat in (4.100) und (4.106) eine kleinere attraktive Umgebung um $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ gefunden werden. Dies zeigt, dass die Analyse im Zeitbereich eine deutlich präzisere Aussage ermöglicht.

Der Grund dafür ist, dass die Analyse im Zeitbereich einerseits eine Trennung der homogenen von der partikulären Lösung erreicht und andererseits die attraktive Wirkung der nichtlinearen Anteile der Dynamik berücksichtigt. Die Analyse im Frequenzbereich kann dagegen nur die attraktive Wirkung des linearen Anteils berücksichtigen, wodurch dieser deutlich dominanter, sprich größere Reglerverstärkungen in (3.54) gewählt werden müssen, siehe auch (3.64). Ebenso müssen langsamere Trajektorien und kleinere Anfangswerte angesetzt werden, welche näher an der Ruhelage liegen und somit für ein annähernd lineares Systemverhalten sorgen.

Für beide Methoden müssen jedoch vergleichsweise kleine Unsicherheiten und kleine Regelabweichungen angesetzt werden, um die geforderten Bedingungen zu erfüllen. Zudem führen diese theoretischen Analysen zu geforderten Adaptionsgeschwindigkeiten, welche jenseits der technischen Realisierbarkeit liegen. Dies liegt daran, dass die verwendeten Abschätzungen auf Normen basieren und daher die Struktur der Dynamik nicht berücksichtigen, was zu einer konservativen Abschätzung führt. Dies bestätigen insbesondere die im folgenden Kapitel gezeigten Simulationsergebnisse, für welche weitaus größere Unsicherheiten und realisierbare Adaptionsgeschwindigkeiten verwendet wurden.

5. Verifikation anhand von Simulationen

Dieses Kapitel zeigt eine Verifikation der vorgestellten Regelung anhand von Simulationen und weist die gewünschte Funktionalität der Regelung, ein robustes und präzises Folgeverhalten, trotz zahlreicher Modellunsicherheiten und Störungen nach. Hierfür wurde das in Kapitel 2 vorgestellte Streckenmodell, sprich die Gleichungen (2.32), implementiert sowie der in Kapitel 3 beschriebene Regelungsentwurf mit dynamischer Erweiterung der Strecke durchgeführt. Die in Gleichung (2.1), (2.2) und (2.3) gegebenen Zusammenhänge für die Aktuatoren wurden zusätzlich im Simulationsmodell berücksichtigt. Die zur Simulation verwendeten Trajektorien, Streckenparameter und Reglereinstellungen sind im Folgenden beschrieben:

Trajektorien

Die Funktionalität der Regelung wurde mithilfe von zwei unterschiedlichen Trajektorien verifiziert, welche in Abbildung 5.1 dargestellt sind. Die Trajektorie A sieht ein Punkt-zu-Punkt Manöver in allen vier Freiheitsgraden vor und testet das Ver-

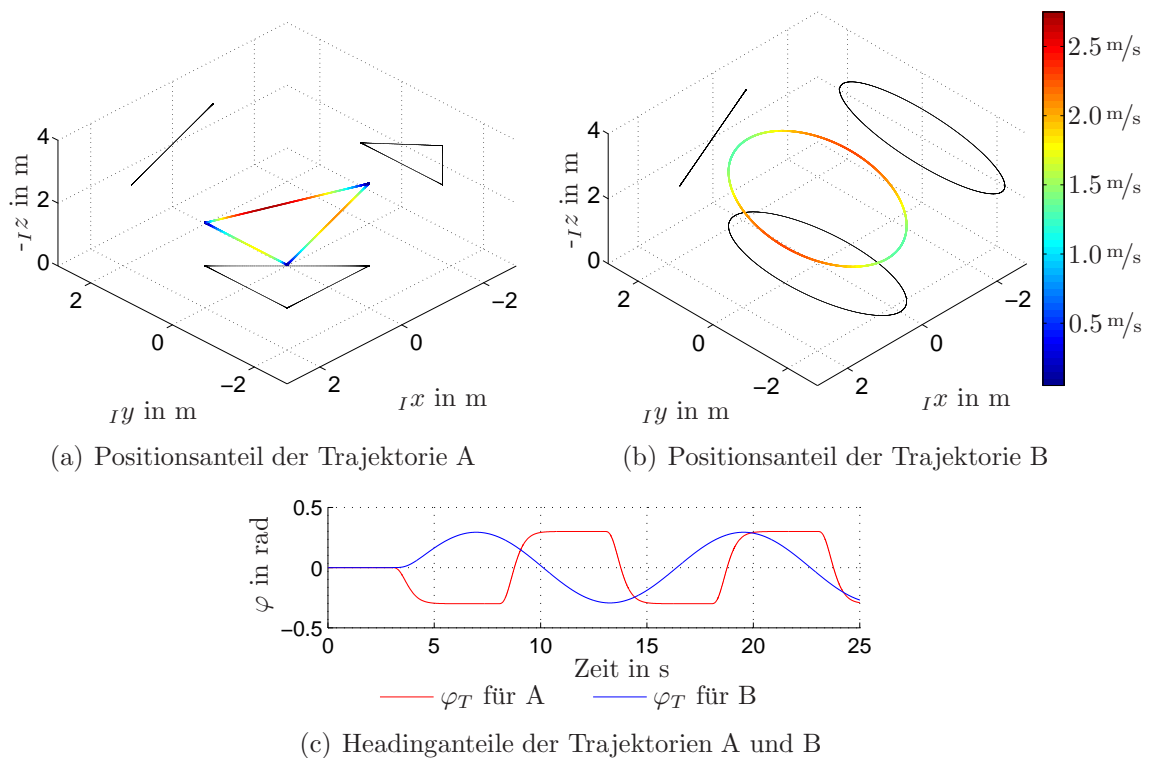


Abbildung 5.1.: Darstellung der verwendeten Trajektorien

5. Verifikation anhand von Simulationen

halten bei Beschleunigungs- und Bremsvorgängen sowie Schwebeflugphasen, siehe Abbildung 5.1(a) und 5.1(c). Die Trajektorie B umfasst ein ovalförmiges Manöver bezüglich der Position und einen sinusförmigen Sollverlauf des Headings, siehe Abbildung 5.1(b) und 5.1(c). Diese Trajektorie testet das Folgeverhalten bei nahezu gleichmäßig schneller Bewegung. Beide Trajektorien halten folgende Schranken ein

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_T\| &\leq 3.1, & \|\dot{\mathbf{x}}_T\| &\leq 2.7, & \|\ddot{\mathbf{x}}_T\| &\leq 5.1, & \|\ddot{\mathbf{x}}_T\| &\leq 20, & \|\ddot{\mathbf{x}}_T\| &\leq 262, & (5.1) \\ & \stackrel{(5)}{\|\mathbf{x}_T\|} & \leq 2570, & |\varphi_T| & \leq 0.3, & |\dot{\varphi}_T| & \leq 0.6, & |\ddot{\varphi}_T| & \leq 2.6, & |\ddot{\varphi}_T| & \leq 18. \end{aligned}$$

Diese sowie alle weiteren Angaben in diesem Kapitel sind in SI-Einheiten gegeben.

Streckenparameter und Unsicherheiten

Um die Leistungsfähigkeit der Adaption zu testen, wurden vergleichsweise hohe Parameterunsicherheiten mit Abweichungen von bis zu 10% der Nominalwerte verwendet. Für das Streckenmodell in (2.32) sind $\mathbf{f}_v = \mathbf{D}\mathbf{v}$ und $\mathbf{f}_\omega = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega})$ gewählt, sowie folgende nominale Streckenparameter angesetzt worden

$$\begin{aligned} \hat{m} &= 0.56, & \hat{g} &= 9.8, & \hat{\mathbf{J}} &= \text{diag}(2.5, 2.5, 4.0) \cdot 10^{-3}, & \hat{\mathbf{D}} &= -0.8 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3}, & (5.2) \\ \hat{\kappa}_v &= \hat{m}^{-1}, & \hat{\mathbf{K}}_\omega &= \hat{\mathbf{J}}^{-1}. \end{aligned}$$

Des weiteren kamen für den Antrieb, gegeben in (2.1), (2.2) und (2.3), folgende Werte zum Einsatz

$$\hat{k}_{T_i} = 5.6, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad \hat{k}_m = 0.016, \quad r = 0.17. \quad (5.3)$$

Für diese Streckenparameter wurden folgende Unsicherheiten angenommen

$$\begin{aligned} m &\in [0.50_2, 0.62_1], & g &\in [8.80_2, 10.76_1], & \kappa_v &\in [1.62_1, 1.93_2], & (5.4) \\ \|\mathbf{K}_\omega\| &\in [528_2, 618_1], & \|\mathbf{D}\| &\in [0.72_1, 0.88_2], & \|\mathbf{J}\| &\in [3.60 \cdot 10^{-3}_1, 4.40 \cdot 10^{-3}_2], \\ k_{T_1} &\in [5.04_1, 6.16_2], & k_{T_2} &\in [5.04_2, 5.60_1], & k_{T_3} &\in [4.48_2, 6.72_1], \\ k_{T_4} &\in [5.04_1, 6.16_2], & k_m &\in [0.014_1, 0.018_2]. \end{aligned}$$

Dabei sind Werte am Rand der jeweiligen Bereiche in der Simulation verwendet und mit diesen zwei gegensätzliche *Streckenkonfigurationen* gebildet worden, welche möglichst ungünstige Wertepaarungen für das Flugverhalten ergaben. Diese sind in (5.4) mit den Indizes 1 und 2 für die jeweilige Streckenkonfigurationen 1 und 2 gekennzeichnet.

Reglereinstellung und Adaptionsgeschwindigkeit

Die Reglerverstärkungen wurden wie folgt gewählt

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_x &= -2.0 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3}, & \mathbf{A}_v &= -4.0 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3}, & \mathbf{A}_t &= -2.5 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3}, & \mathbf{A}_r &= -3.8 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3}, \\ a_\varphi &= -2.0, & a_{\omega z} &= -3.8. & & & & (5.5) \end{aligned}$$

Die Schrittweite des Adaptionsgesetzes und somit die Geschwindigkeit der Adaption wurde mit $T_s = 10^{-2}$ angesetzt.

Im Folgenden zeigt zunächst ein idealisierter Testfall die grundlegende Funktion des Ansatzes bei Störungen im niedrigeren Frequenzbereich ohne Messrauschen. Dazu wurde eine hochperformante Auslegung verwendet, deren Defizite hinsichtlich der Robustheit bereits sichtbar wurden. Anschließend zeigt ein praxisnaher Testfall die Leistungsfähigkeit des Ansatzes bei Messrauschen und größeren Störungen im gesamten Frequenzbereich. Dazu musste die Auslegung robuster gestaltet und ein geringer Verlust an Performanz hingenommen werden.

5.1. Simulation mit niederfrequenten Störungen ohne Messrauschen

Störungen

Für den idealisierten Testfall wurden folgende Funktionen für $\zeta_v(t)$ implementiert

$$\zeta_{v1} = \begin{pmatrix} 2 - \sin t + 0.5 \cos 5t + 0.2 \sin 10t \\ 3 \\ 1 - \cos 5t \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

$$\zeta_{v2} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 - \sin t - 0.5 \sin 5t - 0.2 \cos 10t \\ -1 - \sin t \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Die Funktion in (5.6) ist für die erste Streckenkonfiguration in (5.4) und die Funktion in (5.7) entsprechend für die zweite Streckenkonfiguration verwendet worden. Für die Störung $\zeta_\omega(t)$ wurden jeweils folgende Funktionen verwendet

$$\zeta_{\omega1} = \begin{pmatrix} 2 - 2 \cos 3t \\ 2 - 3 \cos 3t + 0.8 \sin 5t + 0.1 \sin 10t \\ 2 \sin 5t - 2 \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

$$\zeta_{\omega2} = \begin{pmatrix} -2 \\ \cos t - 2 \\ 2 - \cos t \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Diese Funktionen sowie deren Zeitableitungen sind beschränkt durch

$$\|\zeta_{vi}\| \leq 5.2, \quad \|\zeta_{\omega i}\| \leq 7.1, \quad (5.10)$$

$$\|\dot{\zeta}_{vi}\| \leq 7.4, \quad \|\dot{\zeta}_{\omega i}\| \leq 18, \quad (5.11)$$

mit $i \in \{1, 2\}$.

Filtereinstellung

Dieser Testfall wurde mit einer Filterauslegung durchgeführt, welche V4 aus Abschnitt 4.2 erfüllt und eine Filterordnung von drei für $\mathbf{C}_v(s)$ und eins für $\mathbf{C}_\omega(s)$ realisiert. Dafür wurden die Übertragungsfunktionen $d_v(s)$ und $\mathbf{D}_\omega(s)$ folgendermaßen eingestellt

$$d_v(s) = \frac{8.55 \cdot 10^6}{s(s^2 + 746s + 1.85 \cdot 10^5)}, \quad \mathbf{D}_\omega(s) = \text{diag}(1, 1, 1.6) \frac{1}{6.37s}, \quad (5.12)$$

5. Verifikation anhand von Simulationen

welche mit den Werten in (5.2) zu den nominalen \mathcal{L}_1 -Filtern

$$\hat{\mathbf{C}}_v(s) = \frac{1.53 \cdot 10^7}{(s + 226)(s + 249)(s + 271)} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3}, \quad \hat{\mathbf{C}}_\omega(s) = \frac{62.8}{s + 62.8} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (5.13)$$

führen. Für die Eigenwerte der Filter $\mathbf{C}_v(s)$ und $\mathbf{C}_\omega(s)$ gilt für beide Streckenkonfigurationen

$$\lambda_i(\mathbf{C}_v) \in [-373, -136], i \in [1, 2, 3, 4], \quad \lambda_j(\mathbf{C}_\omega) \in [-77, -50], j \in [1, 2]. \quad (5.14)$$

Mit dieser Einstellung liegen die Bandbreiten beider Filter deutlich niedriger als bei der Einstellung in Abschnitt 4.5. Welche Auswirkung eine Filterauslegung für V9, folglich eine Filterordnung von vier für $\mathbf{C}_v(s)$ und zwei für $\mathbf{C}_\omega(s)$, im Vergleich dazu auf das Folgeverhalten hat, wird in Abschnitt 5.3 gezeigt.

Simulationsergebnisse

Das Folgeverhalten wurde für beide in Abbildung 5.1 dargestellten Trajektorien jeweils mit der Streckenkonfiguration 1 und 2 simuliert. Als Regeltakt sind 1 kHz

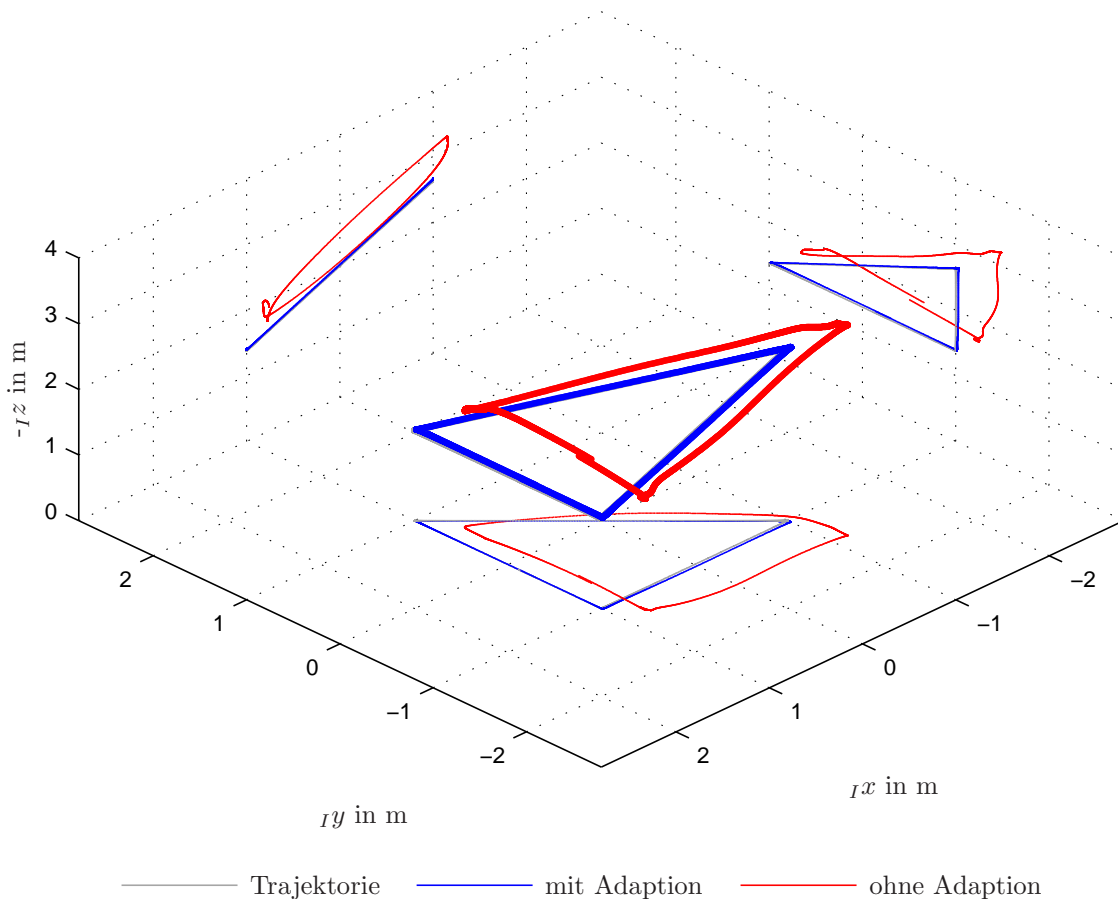


Abbildung 5.2.: Räumliche Darstellung der Simulationsergebnisse bezüglich der Position für die Trajektorie A und den Testfall mit niederfrequenten Störungen ohne Messrauschen. Dargestellt ist das Folgeverhalten im Simulationszeitraum von 6 s bis 12.5 s.

5.1. Simulation mit niederfrequenten Störungen ohne Messrauschen

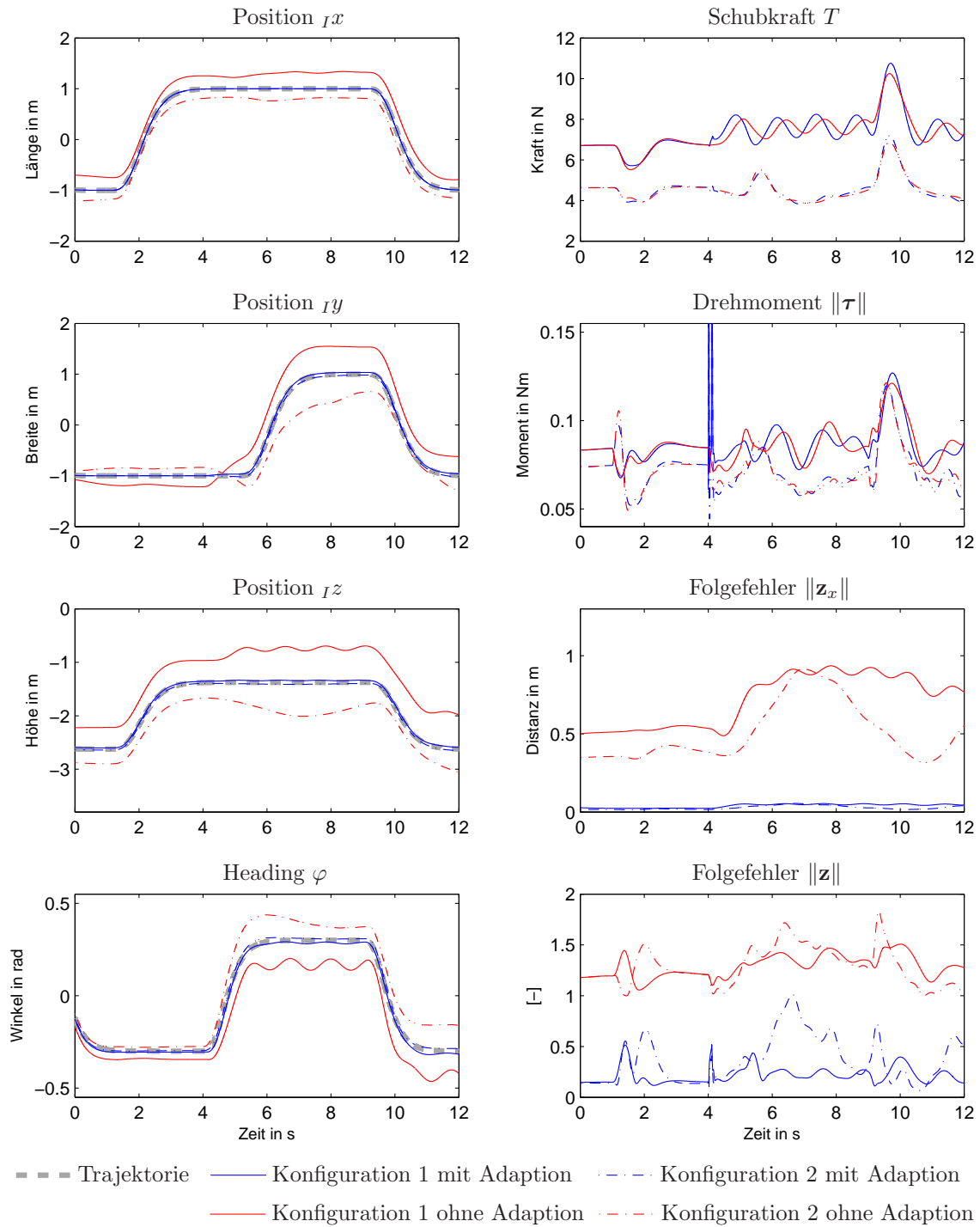


Abbildung 5.3.: Darstellung der Simulationsergebnisse über der Zeit für die Trajektorie A und den Testfall mit niederfrequenten Störungen ohne Messrauschen.

verwendet worden. Bei beiden Trajektorien erfolgte zunächst eine Flugphase ohne Störung und erst ab dem Zeitpunkt $t = 4\text{ s}$ wurden die Störungen ζ_v und ζ_w eingeschaltet. Um die Leistung der Adaption ersichtlich zu machen, wurden beide Tra-

5. Verifikation anhand von Simulationen

jektoren zum Vergleich sowohl mit dem vorgestellten adaptiven Regler als auch mit einer nicht-adaptiven Reglervariante simuliert. Diese nicht-adaptive Variante weist exakt die gleiche Struktur wie die adaptive Variante auf, jedoch gilt $\hat{\sigma}_v = \hat{\sigma}_\omega = \mathbf{0}$, womit die Adaption deaktiviert ist.

Die Ergebnisse für die Trajektorie A sind in Abbildung 5.2 bis 5.5 dargestellt. Für die Trajektorie B sind die Ergebnisse aus Platzgründen in Abbildung C.2 bis C.4 im Anhand der Arbeit gegeben. Im Verlauf der nicht-adaptiven Reglervariante, siehe Abbildung 5.3 und C.2 zeigen sich jeweils große Abweichungen vom Sollwertverlauf aufgrund der hohen Modellunsicherheiten und der starken Störungen. Dies wird auch in den Abbildungen 5.2 und C.1 deutlich, worin das Folgeverhalten bezüglich der Position räumlich dargestellt ist. Der adaptive Regler ist in der Lage die eingebrachten Störungen und Modellunsicherheiten für beide Streckenkonfigurationen effektiv auszugleichen und ein präzises Folgeverhalten sicherzustellen. Die Einwirkung der Störung ist hier im Verlauf der Position und des Headings kaum zu sehen. Dies zeigt sich auch im Verlauf der Fehlerzustände \mathbf{z}_x und \mathbf{z} , welche für die adaptive Regelung wesentlich kleinere Werte annehmen. Um der Trajektorie zu folgen und gleichzeitig die eingebrachten Störungen auszugleichen, werden dem Quadropter kurzfristige Verkippungen von etwa 50° bei beiden Trajektorien abverlangt. Dies zeigt, dass die Zustandsverläufe weit von der Ruhelage entfernt sind und von einem hohen Einfluss der nichtlinearen Anteile auszugehen ist.

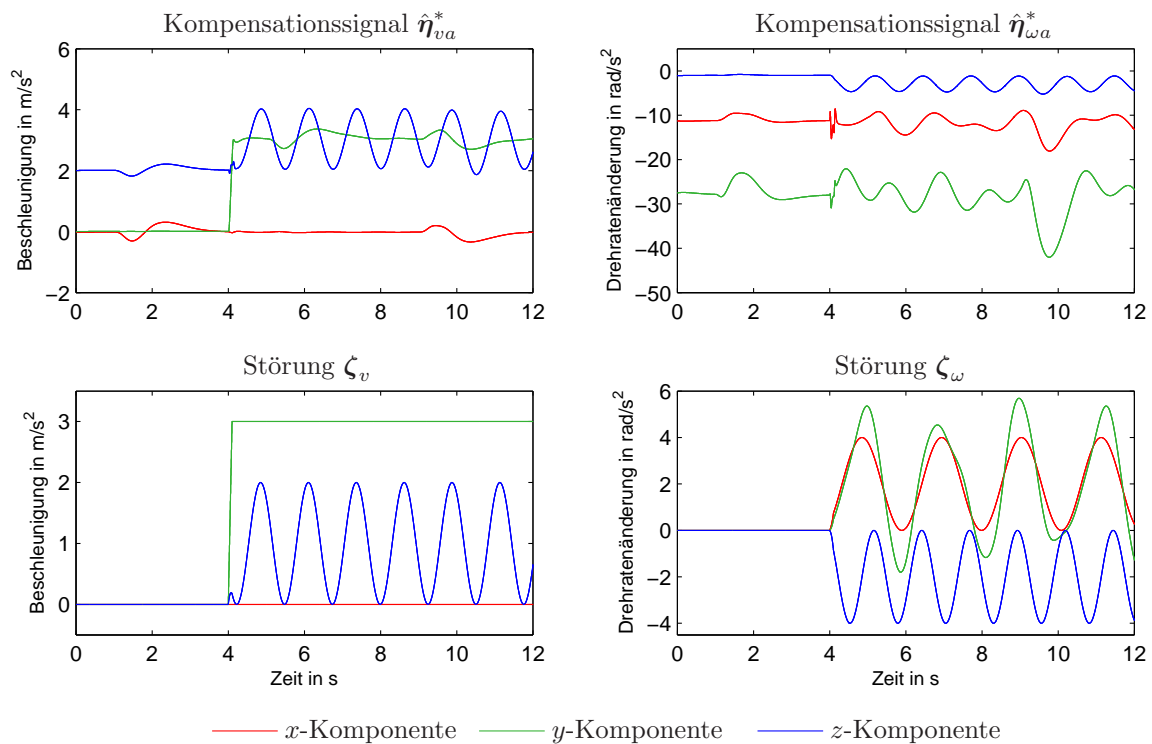


Abbildung 5.4.: Darstellung der eingebrachten Störungen sowie der Signale zur Kompensation der Unsicherheiten für die erste Streckenkonfiguration.

Der Grund für diese hohe Adaptionsleistung liegt darin, dass die eingebrachten Störungen innerhalb der Bandbreiten der \mathcal{L}_1 -Filter liegen und somit sehr gut durch die

5.1. Simulation mit niederfrequenten Störungen ohne Messrauschen

Kompensationssignale $\hat{\eta}_{va}^* = \mathfrak{L}^{-1}[\hat{C}_v(s)\hat{\sigma}_{va}(s)]$ und $\hat{\eta}_{\omega a}^* = \mathfrak{L}^{-1}[\hat{C}_\omega(s)\hat{\sigma}_{\omega a}(s)]$ dargestellt werden können. Die Zeitverläufe dieser beiden Größen sind in den Abbildungen 5.4 und C.3 zusammen mit den eingebrachten Störungen ζ_v und ζ_ω für die erste Streckenkonfiguration zu sehen. In der Zeitphase vor Eintritt der Störung ($t < 4$ s) sorgen die Kompensationssignale dafür, dass die von den Modellunsicherheiten verursachten Fehlbeschleunigung ausgeglichen werden. Hierbei ist zu erkennen, dass die Anteile von $\hat{\eta}_{va}^*$ in x- und y-Richtung zu Null abklingen, wenn keine Beschleunigung in die entsprechende Richtung auftritt. Der Anteil in die z-Richtung kompensiert dagegen zu jeder Zeit den Unterschied zwischen der angenommenen und tatsächlichen Erdbeschleunigung. Die Größe $\hat{\eta}_{\omega a}^*$ kompensiert in der Phase vor Eintritt der Störung hauptsächlich diejenigen Drehbeschleunigungen, welche durch die Unsicherheiten im Antrieb verursacht wurden. Zum Eintritt der Störung sieht man deutlich wie beide Kompensationssignale dem Verlauf der Störung schnell und präzise folgen und diese somit effektiv kompensieren.

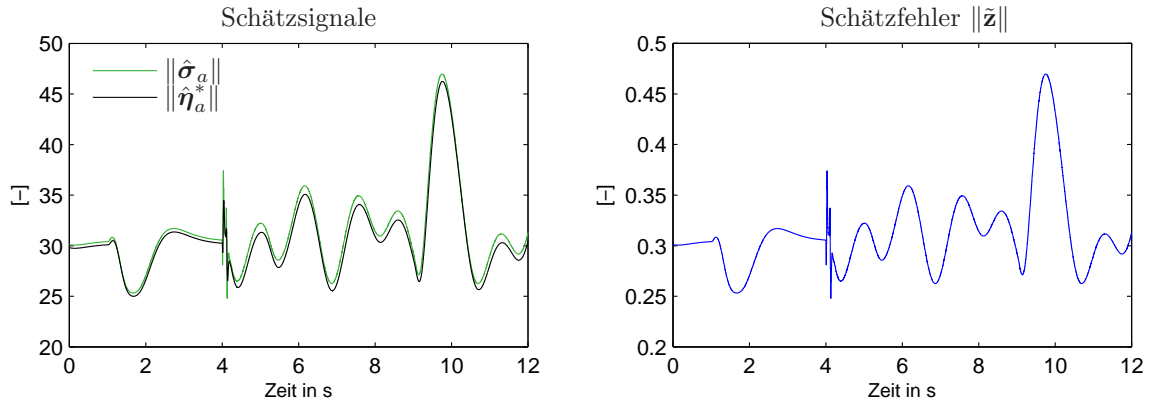


Abbildung 5.5.: Zeitlicher Verlauf der Beträge der Schätzsignale und des Schätzfehlers für die erste Streckenkonfiguration.

In Abbildung 5.5 sind die Beträge der Schätzsignale für die erste Streckenkonfiguration dargestellt und es wird darin deutlich, dass das Kompensationssignal $\hat{\eta}_a^*$ einen nahezu identischen Verlauf zur Schätzgröße $\hat{\sigma}_a$ aufweist. Dies zeigt, dass die Filterbandbreiten der \mathcal{L}_1 -Filter derart hoch eingestellt wurden, so dass nahezu alle Frequenzanteile in $\hat{\sigma}_a$ die \mathcal{L}_1 -Filter passieren. Somit enthält $\hat{\eta}_a^*$ alle Informationen, welche durch die Zustandsschätzung erzeugt werden, und leitet diese an die Aktuatoren weiter. Um die Performanz der Adaption weiter zu steigern, kann folglich nur noch die Adaptionsschrittweite verringert werden. Mit der gewählten Adaptiongeschwindigkeit von $T_s = 0.01$ s ist die Reaktion des Zustandsschätzers jedoch bereits sehr schnell. Dies zeigt sich an der nahezu sprunghaften Veränderung der Schätzsignale bei Eintritt der Störung, welche ebenso in einem schnell ansteigendem Drehmoment zur Kompensation der eintretenden Störung resultiert, siehe Abbildung 5.3. Eine Verringerung der Adaptionsschrittweite würde diesen Anstieg weiter verschärfen und möglicherweise zur Destabilisierung des Systems führen.

Dies zeigt, dass die hier gewählte Auslegung bereits den Kompromiss aus Performanz und Robustheit zugunsten der Performanz ausreizt. Diese Auslegung lässt

sich mit zusätzlichen höherfrequenten Störungen und Messrauschen nicht mehr stabil realisieren. Für eine praktische Anwendung empfiehlt sich daher eine robustere Auslegung, welche dadurch zustande bekommt, dass die Bandbreite der \mathcal{L}_1 -Filter reduziert und somit derart sprunghaften Schätzsignale hinreichend gut gefiltert werden. Diese Auslegung soll im folgenden Abschnitt gezeigt werden.

5.2. Simulation mit höherfrequenten Störungen und Messrauschen

Für diesen Testfall wurden die gleichen Trajektorien, Parameterunsicherheiten und Reglerparameter sowie die gleiche Adaptionsgeschwindigkeit wie zuvor verwendet. Die Unterschiede zu den im vorherigen Abschnitt gezeigten Simulationen sind die eingebrachten Störungen und eine Filterauslegung mit geringerer Bandbreite. Beide wurden wie folgt gewählt:

Störungen und Messrauschen

Für $\zeta_v(t)$ wurden, wiederum für beide Streckenkonfigurationen mit den Indizes 1 und 2 gekennzeichnet, die Funktionen

$$\zeta_{v1} = \begin{pmatrix} 2 - \sin t + 0.5 \cos 20t + 0.2 \sin 25t \\ 3 \\ 2 - \cos 20t \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

$$\zeta_{v2} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 - \sin t - 0.5 \sin 25t - 0.2 \cos 30t \\ -2 - \sin t \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

implementiert, sowie für $\zeta_\omega(t)$ die Funktionen

$$\zeta_{\omega1} = \begin{pmatrix} 2 - 2 \cos 3t \\ 2 - 3 \cos 3t + 0.8 \sin 25t + 0.1 \sin 30t \\ 2 \sin 25t - 2 \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

$$\zeta_{\omega2} = \begin{pmatrix} -2 \\ \cos t - 2 \\ 2 - \cos t \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Diese Funktionen enthalten bis zu dreifach höhere Frequenzanteile als die zuvor eingebrachten Störungen und sind zusammen mit ihrer Zeitableitung beschränkt durch

$$\|\zeta_v\| \leq 5.6, \quad \|\zeta_\omega\| \leq 7.1, \quad (5.19)$$

$$\|\dot{\zeta}_v\| \leq 25.6, \quad \|\dot{\zeta}_\omega\| \leq 60. \quad (5.20)$$

Zusätzlich wurden die im Regelgesetz verwendeten Signale mit Messrauschen versehen, welches mithilfe von Messungen an einem Quadropter der Fa. Ascending

Technologies GmbH abgeglichenen wurde. Dies ist wie folgt gewählt worden:

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + 0.1 \cdot \int_0^t r(t)dt \cdot \mathbf{I}_{3 \times 1}, \quad (5.21)$$

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + 0.4 \cdot \int_0^t r(t)dt \cdot \mathbf{I}_{3 \times 1}, \quad (5.22)$$

$$\mathbf{R}_{IB} = \bar{\mathbf{R}}_{IB} + 0.05 \cdot \int_0^t r(t)dt \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3}, \quad (5.23)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \bar{\boldsymbol{\omega}} + 0.03 \cdot r(t) \cdot \mathbf{I}_{3 \times 1}, \quad (5.24)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \bar{\dot{\mathbf{v}}} + 0.08 \cdot r(t) \cdot \mathbf{I}_{3 \times 1}. \quad (5.25)$$

Darin sind die mit $\bar{\cdot}$ gekennzeichneten Signale diejenigen ohne Messrauschen und $r(t)$ ein gleichverteilter Rauschprozess zwischen den Werten -1 und 1 . Da in der Praxis nur die Signale $\boldsymbol{\omega}$ und $\dot{\mathbf{v}}$ direkt gemessen werden können und alle weiteren mittels Beobachtung geschätzt werden, ergibt eine Integration des Rauschprozesses für die verbleibenden Signale ein realistisches Abbild.

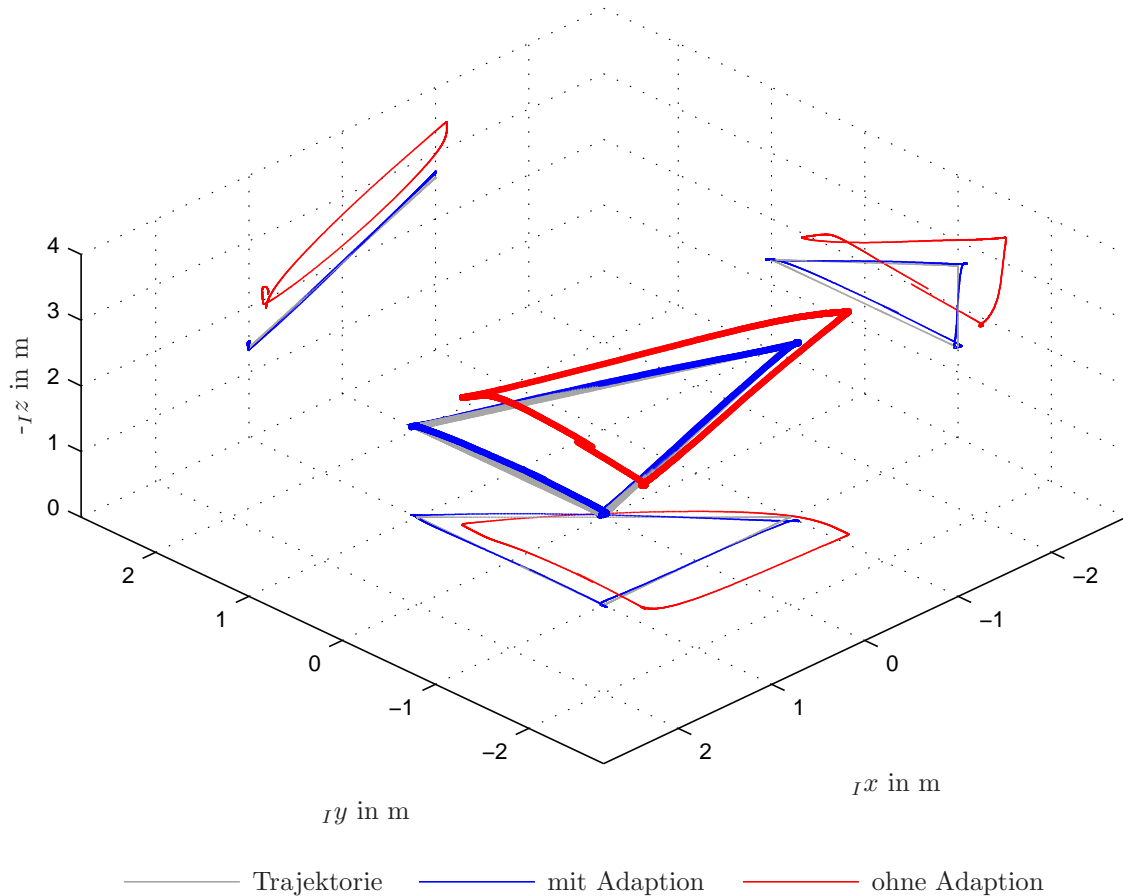


Abbildung 5.6.: Räumliche Darstellung der Simulationsergebnisse bezüglich der Position für die Trajektorie A und den Testfall mit höherfrequenten Störungen und Messrauschen. Dargestellt ist das Folgeverhalten im Simulationszeitraum von 6 s bis 18.5 s.

Filtereinstellung

Für diesen Testfall wurde ebenfalls eine Filterauslegung gewählt, welche V4 aus Abschnitt 4.2 erfüllt, jedoch zu einer niedrigeren Bandbreite der \mathcal{L}_1 -Filter führt, um ein robustes und praxistauglicheres Systemverhalten zu testen. Die Übertragungsfunktionen $d_v(s)$ und $\mathbf{D}_\omega(s)$ wurden daher folgendermaßen eingestellt

$$d_v(s) = \frac{422}{s(s^2 + 27.4s + 249)}, \quad \mathbf{D}_\omega(s) = \text{diag}(1, 1, 1.6) \cdot \frac{1}{364s}, \quad (5.26)$$

was zu den Filtern

$$\hat{\mathbf{C}}_v(s) = \frac{752}{(s + 8.29)(s + 9.12)(s + 9.95)} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3}, \quad \hat{\mathbf{C}}_\omega(s) = \frac{1.10}{s + 1.10} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (5.27)$$

führt. Für die Eigenwerte der Filter $\mathbf{C}_v(s)$ und $\mathbf{C}_\omega(s)$ gilt für beide Streckenkonfigurationen

$$\lambda_i(\mathbf{C}_v) \in [-14, -5.0], i \in [1, 2, 3, 4], \quad \lambda_j(\mathbf{C}_\omega) \in [-1.3, -0.90], j \in [1, 2]. \quad (5.28)$$

Die Bandbreiten der zuvor in Abschnitt 5.1 gewählten Filter waren um den Faktor 30 für $\hat{\mathbf{C}}_v(s)$ bzw. 60 für $\hat{\mathbf{C}}_\omega(s)$ höher.

Simulationsergebnisse

Das Folgeverhalten wurde mit diesen veränderten Einstellungen und Störungen für beide in Abbildung 5.1 dargestellten Trajektorien jeweils mit der Streckenkonfiguration 1 und 2 simuliert. Als Regeltakt wurden wie zuvor 1 kHz verwendet. Ebenso ist zunächst eine Flugphase ohne Störung und für die Zeit $t \geq 4$ s eine Flugphase mit Störung simuliert worden. Das Messrauschen war zu jeder Zeit aktiv.

Die Simulationsergebnisse sind in Abbildung 5.6 bis 5.9 für die Trajektorie A und aus Platzgründen in Abbildung C.5 bis C.8 im Anhang der Arbeit für die Trajektorie B gegeben. Auch bei diesem Test sind für die nicht-adaptive Variante deutliche Abweichungen von der Solltrajektorie aufgrund der Unsicherheiten und Störungen zu erkennen, siehe Abbildung 5.6 und 5.7 bzw. C.1 und C.6. Durch die reduzierten Filterbandbreiten zeigen sich nun auch kurzzeitig Abweichungen bei Verwendung der adaptiven Regelung. Besonders fällt dies am Einschwingvorgang in der iy - und iz -Komponente der Position nach Eintritt der Störung zum Zeitpunkt $t = 4$ s auf. Dieser Vorgang war im Testfall zuvor aufgrund der schnellen Filterdynamik kaum sichtbar und ist nun ebenso im Verlauf der Fehlerzustände \mathbf{z}_x und \mathbf{z} zu erkennen. Abgesehen von dieser kurzfristigen Überhöhung nimmt der Regelfehler \mathbf{z}_x einen vergleichbaren Verlauf mit etwa den gleichen Werten als im Testfall zuvor und weist keine hochfrequenten Anteile auf. Diese haben einen deutlich höheren Einfluss auf die Fehlerzustände der Lagedynamik, was im Betrag des Regelfehlers $\|\mathbf{z}\|$, aber auch im Verlauf des Stellmoments deutlich wird. Diese höherfrequenten Anteile treten sowohl bei der adaptiven als auch bei der nicht-adaptiven Reglervariante auf, was zeigt, dass diese Frequenzanteile jenseits der Bandbreite der \mathcal{L}_1 -Filter liegen und somit nicht von der Adaption kompensiert werden.

In Abbildung 5.8 sind die eingebrachten Störungen und der Verlauf der Kompensationsgrößen $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}^*$ und $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}^*$ für die erste Streckenkonfiguration zu sehen. Hier wird deutlich, dass die hochfrequenten Anteile der Störung von den \mathcal{L}_1 -Filtern getilgt werden

5.2. Simulation mit höherfrequenten Störungen und Messrauschen

und nur noch ansatzweise in den Kompensationssignalen enthalten sind. Die niederfrequenten Störanteile sind jedoch in den Signalen $\hat{\eta}_{va}^*$ und $\hat{\eta}_{\omega a}^*$ erkennbar. Der Verlauf der Schätzsignale und des Schätzfehlers sind in Abbildung 5.9 dargestellt. Da die Ad-

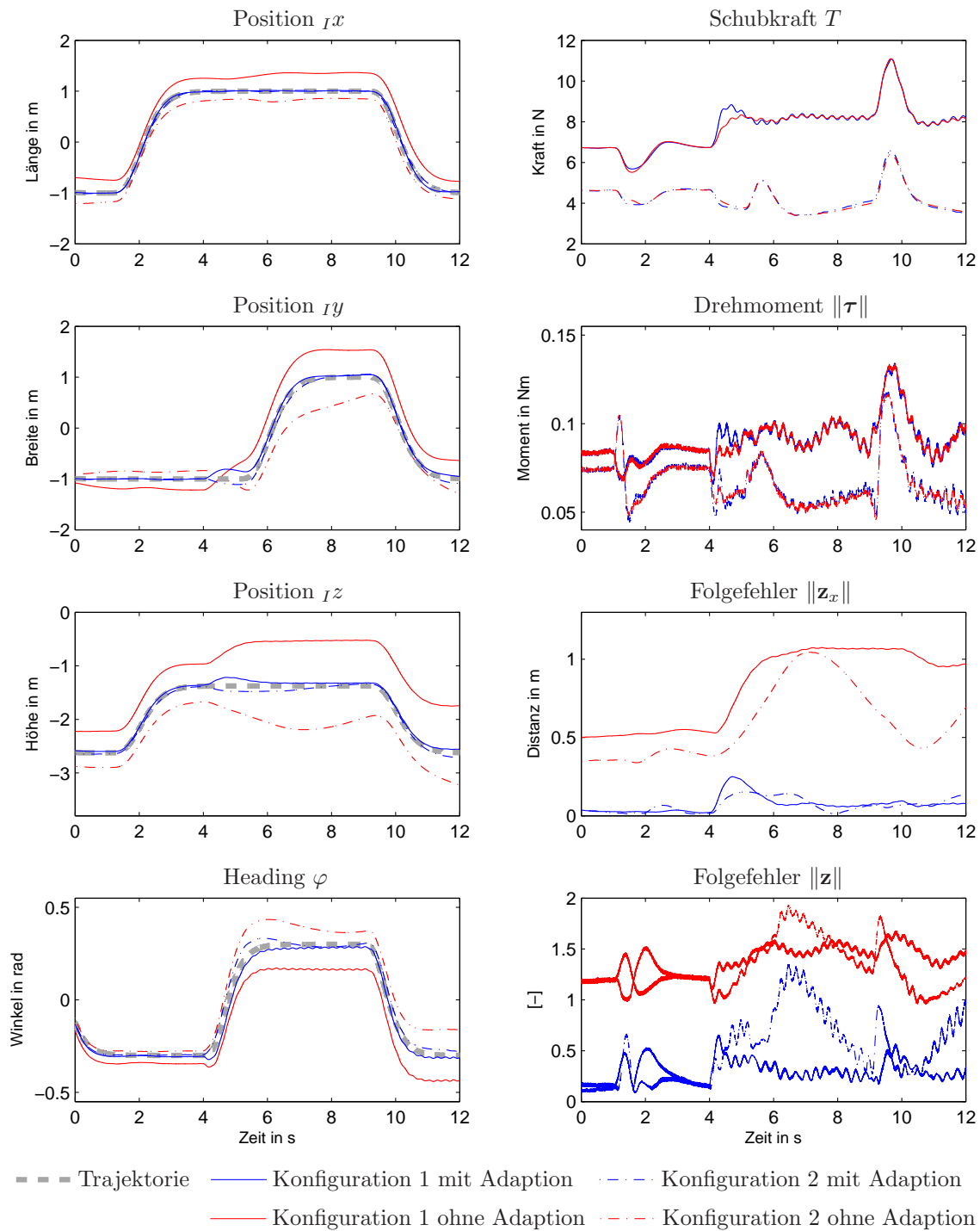


Abbildung 5.7.: Darstellung der Simulationsergebnisse über der Zeit für die Trajektorie A und für den Testfall mit höherfrequenten Störungen und Messrauschen.

5. Verifikation anhand von Simulationen

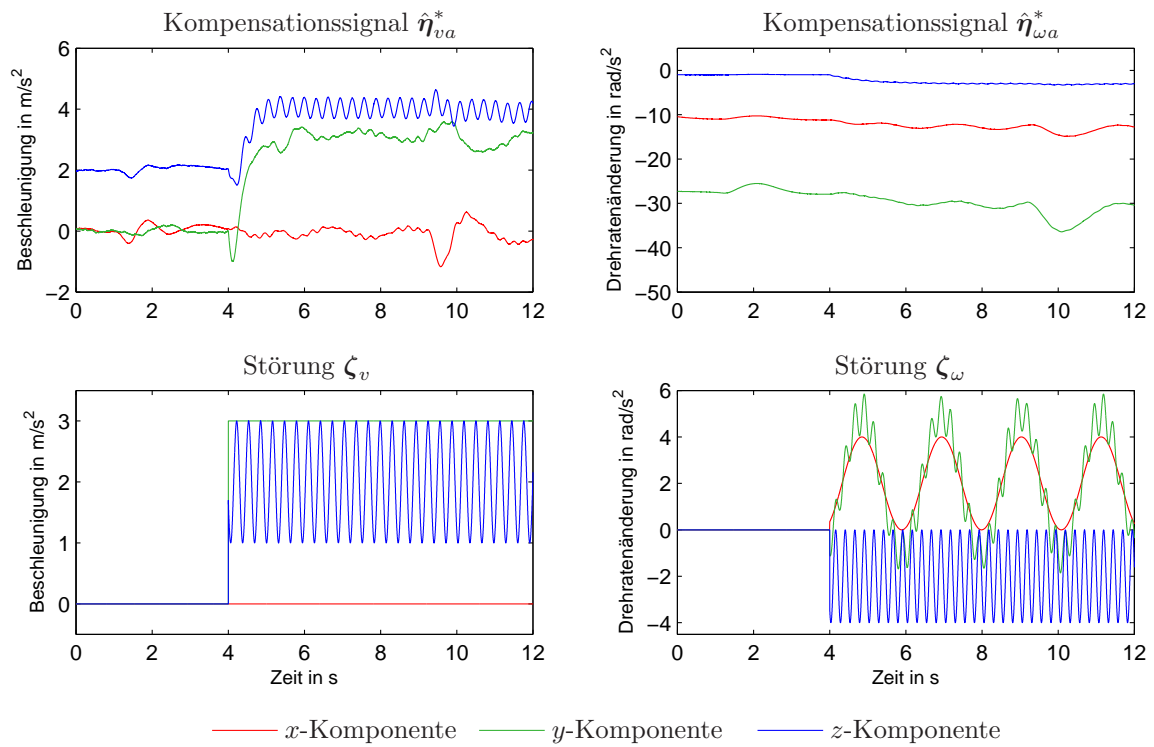


Abbildung 5.8.: Darstellung der eingebrachten Störungen sowie der Signale zur Kompensation der Unsicherheiten für die erste Streckenkonfiguration.

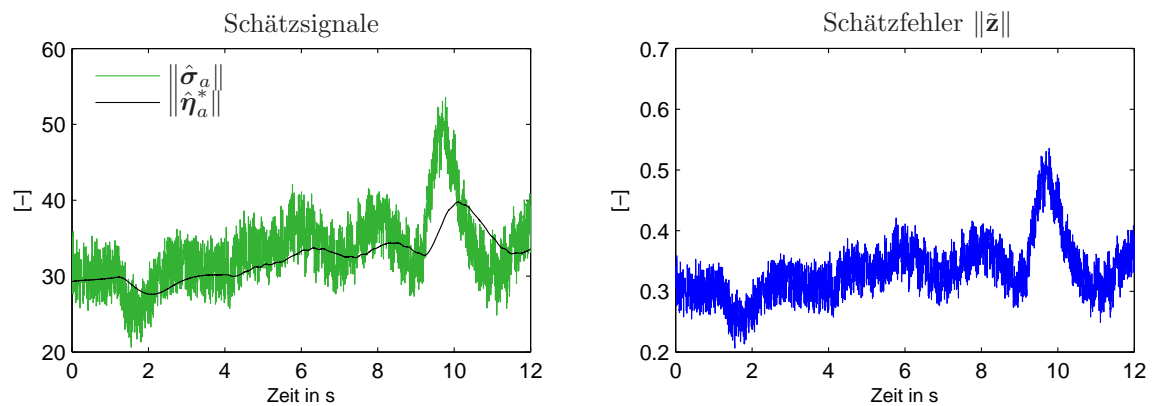


Abbildung 5.9.: Zeitlicher Verlauf der Beträge der Schätzsignale und des Schätzfehlers für die erste Streckenkonfiguration.

ptionsgeschwindigkeit wie zuvor gewählt wurde, ist die Reaktionsgeschwindigkeit des Zustandsschätzers gleichbleibend schnell und dessen Reaktion auf die hochfrequenten Anregungen entsprechend groß. Diese Reaktion würde zusammen mit der vorherigen Filtereinstellung zu instabilem Verhalten führen. Hier wurden die Filterbandbreiten jedoch hinreichend gering gewählt, so dass das Kompensationssignal $\hat{\eta}_a^*$ kaum noch hochfrequente Anteile enthält. Dadurch ist der Verlauf der Stellgrößen gerade bei Eintritt der Störung deutlich ruhiger.

Aufgrund des annähernd gleichen Verlaufs des Folgefehlers, abgesehen vom kurzzeitigen Einschwingvorgang zum Eintritt der Störung, und dem wesentlich robusterem Verhalten gegenüber hochfrequenten Anregungen empfiehlt sich die hier getestete Filtereinstellung mit niedrigerer Bandbreite für eine praktische Anwendung.

5.3. Auswirkung einer Filterauslegung mit höherer Ordnung

Beide zuvor gezeigten Untersuchungen wurden mit einer Filterauslegung durchgeführt, welche die Voraussetzung V4 in Abschnitt 4.2 erfüllt und Filterordnungen von drei für $C_v(s)$ und eins für $C_\omega(s)$ realisiert. Welche Auswirkung eine Filterauslegung mit höherer Filterordnung auf das Folgeverhalten hat, wird in diesem Abschnitt gezeigt. Dazu wurde eine Filterauslegung gewählt, welche V9 in Abschnitt 4.2 erfüllt und Filterordnungen von vier für $C_v(s)$ und zwei für $C_\omega(s)$ realisiert. Diese Auslegung wurde mit beiden Streckenkonfigurationen und der in Abbildung 5.1 gezeigten Trajektorie A simuliert und mit den Ergebnissen der zuvor gewählten Auslegung aus Abschnitt 5.2 verglichen.

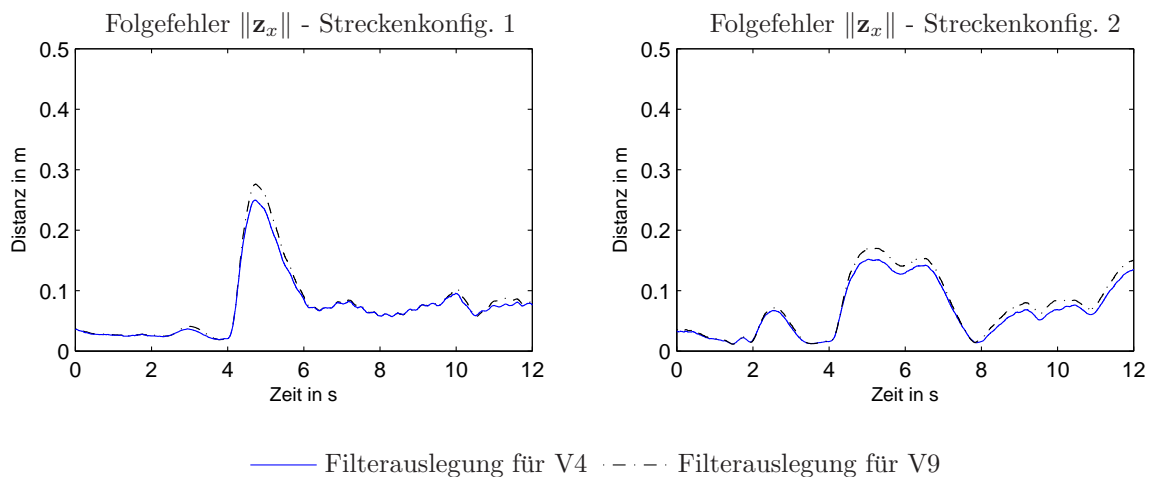


Abbildung 5.10.: Verlauf des Folgefehlers $\|\mathbf{z}_x\|$ für eine Filterauslegung mit höherer und niedriger Filterordnung für die Trajektorie A und beiden Streckenkonfigurationen.

Um eine gute Vergleichbarkeit zu erhalten, wurden die Funktionen $d_v(s)$ und $\mathbf{D}_\omega(s)$ für Filterauslegung mit höherer Ordnung so gewählt, dass sich identische Bandbreiten zu den Filtern in (5.27) ergeben. Dies sind 4.6 rad/s für $\hat{C}_v(s)$ und 1.1 rad/s für $\hat{C}_\omega(s)$. Die Funktionen $d_v(s)$ und $\mathbf{D}_\omega(s)$ lauten dafür:

$$d_v(s) = \frac{7382}{s(s + 21.5)(s^2 + 21.5s + 230)}, \quad \mathbf{D}_\omega(s) = \text{diag}(1, 1, 1.6) \cdot \frac{1}{133s(s + 3.47)} \quad (5.29)$$

5. Verifikation anhand von Simulationen

und führen zu den Filtern

$$\hat{\mathbf{C}}_v(s) = \frac{1.32 \cdot 10^4}{(s + 9.36)(s + 10.3)(s + 11.2)(s + 12.2)} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (5.30)$$

$$\hat{\mathbf{C}}_\omega(s) = \frac{3.0}{(s + 1.7)(s + 1.8)} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3}. \quad (5.31)$$

Für die Eigenwerte der Filter $\mathbf{C}_v(s)$ und $\mathbf{C}_\omega(s)$ gilt für beide Streckenkonfigurationen

$$\lambda_i(\mathbf{C}_v) \in [-22, -4.8], i \in [1, 2, 3, 4], \quad \lambda_j(\mathbf{C}_\omega) \in [-3.5, -0.90], j \in [1, 2]. \quad (5.32)$$

Für die Simulation wurden die Reglerverstärkungen, die Adaptionsgeschwindigkeit, das Messrauschen und die Störungen beibehalten. Die Simulationsergebnisse zeigen, dass sich beide Reglervarianten sehr ähnlich verhalten. Die wesentlichen Unterschiede sind in Abbildungen 5.10 und 5.11 dargestellt. Im Verlauf des Folgefehlers \mathbf{z}_x zeigen sich etwas höhere Abweichungen für die Reglervariante mit höherer Filterordnung. Diese Abweichungen treten besonders dann auf, wenn es zu einer sprunghaften Veränderung der Schätzsignale kommt. Diese sind in Abbildung 5.11 zu sehen. Der Verlauf von $\hat{\sigma}_a$ ist für beide Varianten nahezu identisch und daher nur einmal dargestellt. Der Verlauf der Kompensationssignale $\hat{\eta}_a^*$ weist für die Filterauslegung höherer Ordnung einen sichtbaren Phasenverzug auf, welcher durch die höhere Filterordnung bedingt ist. Dieser Verzug führt zu den in Abbildung 5.10 sichtbaren Abweichungen und zeigt, dass sich eine höhere Filterordnung nachteilig auf das Systemverhalten auswirkt. Daher empfiehlt sich eine Auslegung mit niedriger Filterordnung für eine praktische Anwendung.

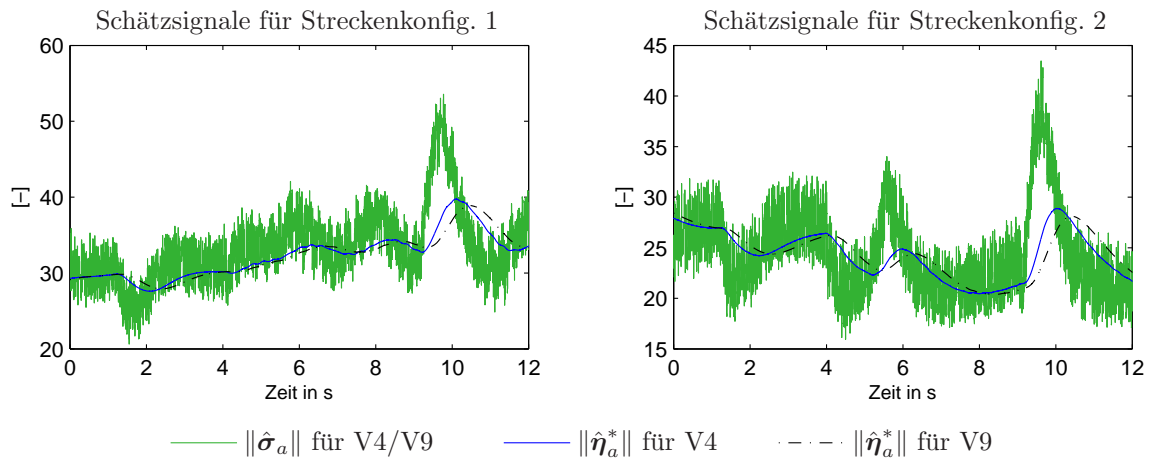


Abbildung 5.11.: Verlauf der Schätz- und Kompensationssignale für eine Filterauslegung mit höherer und niedriger Filterordnung für die Trajektorie A und beiden Streckenkonfigurationen.

In diesem Kapitel wurde gezeigt, dass die vorgeschlagene adaptive Regelung mit großen Unsicherheiten und Störungen umgehen und diese auch bei großen Kippwinkelverläufen effektiv kompensieren kann. Im Unterschied zum ersten Testfall mit niederfrequenten Störungen, bei welchem die Filterdynamik relativ schnell und die Performanz sehr hoch eingestellt werden konnte, war bei dem Testfall mit hochfrequenten Störungen und Messrauschen eine Reduzierung der Filterbandbreite notwendig,

5.3. Auswirkung einer Filterauslegung mit höherer Ordnung

um ein stabiles Verhalten zu erzielen. Dies führte zu einem geringfügig schlechterem Folgeverhalten, dafür jedoch zu mehr Robustheit. Hier zeigte sich der klassische Kompromiss zwischen Robustheit und Performanz, der sich durch eine Veränderung der Filterbandbreite transparent behandeln lässt. Es hat sich zudem gezeigt, dass für die \mathcal{L}_1 -Filter eine niedrige Filterordnung vorteilhaft ist, da diese einen geringeren Phasenverzug mit sich bringt.

6. Verifikation anhand von Experimenten

In diesem Kapitel wird eine Verifikation der vorgestellten Regelung anhand von Experimenten gezeigt. Diese sind mit einem Quadrokopter „Hummingbird“ der Firma Ascending Technologies GmbH¹, siehe Abbildung 6.1, in einem Messlabor der Nanyang Technological University² in Singapur durchgeführt worden. Das Messlabor war dazu mit einem Kamerasystem der Firma Vicon³ ausgestattet, das eine inertielle Messung der Position und der Fluglage bei einem Flugraum von $4\text{ m} \times 6\text{ m} \times 2\text{ m}$ ($B \times T \times H$) ermöglichte. Die gemessene Position und der vom Kamerasystem errechnete Gierwinkel wurde über eine Funkverbindung mit 50 Hz auf den Quadrokopter übertragen. Zusammen mit den Messwerten der Beschleunigungs- und der Drehbeschleunigungssensoren, welche auf dem Quadrokopter verbaut waren, wurden diese



Abbildung 6.1.: Quadrokopter „Hummingbird“ der Firma Ascending Technologies GmbH¹, bestückt mit reflektierenden Markierungspunkten, welche die Erkennung durch das Kamerasystem ermöglichen.

¹<http://www.asctec.de>

²<http://www.ntu.edu.sg>

³<http://www.vicon.com>

6. Verifikation anhand von Experimenten

Messwerte mithilfe einer Datenfusion verarbeitet und somit alle für die Regelung benötigten Signale bereitgestellt. Der Regelalgorithmus ist auf einem ARM Cortex-A8 Prozessor mit einem Regeltakt von 1 kHz ausgeführt worden. Die dazu benötigte Rechenleistung lag bei 20% der verfügbaren Kapazität.

Verwendete Trajektorien

Die verwendeten Trajektorien sind in Abbildung 6.2 gezeigt. Die Trajektorie C besteht aus Punkt-zu-Punkt Manövern in allen vier Freiheitsgraden und sollte des Verhalten bei Beschleunigungs- und Bremsvorgängen sowie Schwebeflugphasen testen, siehe Abbildung 6.2(a) und 6.2(c). Um diesem Sollverlauf zu folgen, sind kurzzeitige Kippwinkel von 27° gefordert. Die Trajektorie D besteht aus einem spiralförmigen Manöver bezüglich der Position und einen sinusförmigen Sollverlauf für das Heading, siehe Abbildung 6.2(b) und 6.2(c). Diese Trajektorie wurde verwendet, um das Folgeverhalten bei nahezu gleichmäßig schneller Bewegung in allen vier Freiheitsgraden zu testen. Die dabei geforderte Verkippung des Quadroptes beträgt bis zu 18° . Beide Trajektorien halten folgende Schranken ein:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_T\| \leq 3.1, \quad \|\dot{\mathbf{x}}_T\| \leq 2.7, \quad \|\ddot{\mathbf{x}}_T\| \leq 4.1, \quad \|\ddot{\mathbf{x}}_T\| \leq 14, \quad \|\ddot{\mathbf{x}}_T\| \leq 260, \quad (6.1) \\ \|\mathbf{x}_T\| \leq 2500, \quad |\varphi_T| \leq 0.3, \quad |\dot{\varphi}_T| \leq 0.6, \quad |\ddot{\varphi}_T| \leq 2.6, \quad |\ddot{\varphi}_T| \leq 18. \end{aligned}$$

Diese sowie alle weiteren Angaben in diesem Kapitel sind in SI-Einheiten gegeben.

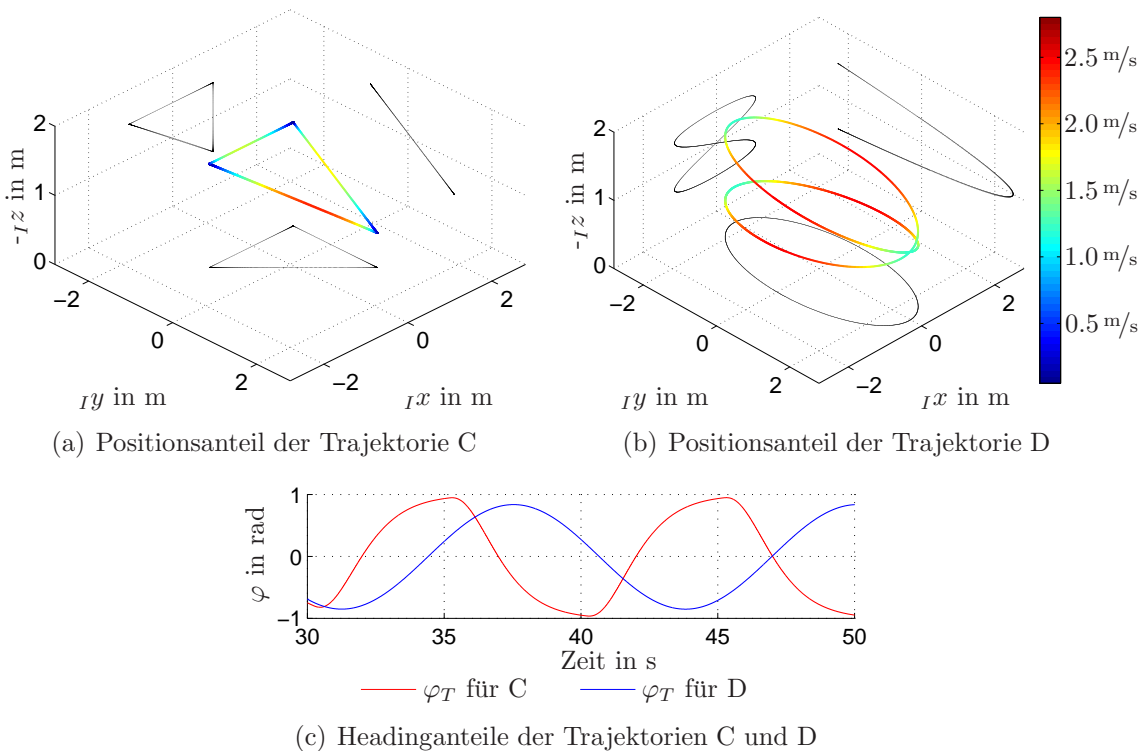


Abbildung 6.2.: Darstellung der vorgegebenen Trajektorien

Angenommene Streckenparameter

Um die Leistungsfähigkeit der adaptiven Regelung zu zeigen, wurde keine Streckenidentifikation durchgeführt und ersatzweise folgende Annahmen getroffen. Für das Streckenmodell in (2.32) wurde einerseits $\mathbf{f}_v = \mathbf{D}\mathbf{v}$ und $\mathbf{f}_\omega = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega})$ gewählt und andererseits angesetzt:

$$\begin{aligned} \hat{m} &= 0.56, & \hat{g} &= 9.8, & \hat{\mathbf{J}} &= \text{diag}(5.0, 5.0, 8.0) \cdot 10^{-3}, & \hat{\mathbf{D}} &= -0.1 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3}, & (6.2) \\ \hat{k}_v &= \hat{m}^{-1}, & \hat{\mathbf{K}}_\omega &= \hat{\mathbf{J}}^{-1}. \end{aligned}$$

Des Weiteren kamen für den Antrieb, gegeben in (2.1), (2.2) und (2.3), folgende Werte zum Einsatz

$$\hat{k}_{Ti} = 5.6, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad \hat{k}_m = 0.016, \quad r = 0.17. \quad (6.3)$$

Diese Werte sind weitestgehend identisch mit den nominalen Werten für die Simulationsuntersuchungen in Kapitel 5 und entsprechen erfahrungsgemäß den zu erwartenden Parametern.

Regelparameter

Die Verstärkungen des Regelgesetzes wurden wie folgt gewählt

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_x &= -2.0 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3}, & \mathbf{A}_v &= -4.0 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3}, & \mathbf{A}_t &= -2.5 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3}, & \mathbf{A}_r &= -3.8 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3}, \\ a_\varphi &= -2.0, & a_{\omega z} &= -3.8 \end{aligned} \quad (6.4)$$

und entsprechen ebenfalls den Werten, welche für die Simulationsuntersuchungen in Kapitel 5 verwendet wurden.

Mit diesen Einstellungen wurde das Folgerverhalten bei beiden Trajektorien getestet. Um die Auswirkung verschiedener Adaptionsschrittweiten und Filterbandbreiten der \mathcal{L}_1 -Filter auf das Flugverhalten zu zeigen, sind diesbezüglich unterschiedliche Einstellungen für die beiden Versuche gewählt worden. Im Folgenden werden zunächst die Ergebnisse für die Trajektorie C gezeigt, für welche eine geringe Adaptionsschrittweite bei moderaten Filterbandbreiten gewählt wurde. Anschließend sind die Ergebnisse für die Trajektorie D dargestellt, für welche die Adaptionsschrittweite erhöht und die Filterbandbreite etwas verringert wurde.

6.1. Ergebnisse für ein Punkt-zu-Punkt Manöver (Trajektorie C)

Für die Trajektorie C, siehe Abbildung 6.2, ist eine Adaptionsschrittweite von $T_s = 10^{-2}$ verwendet worden. Die Testflüge sind jeweils mit der vorgestellten adaptiven Regelung und mit einer nicht-adaptiven Reglervariante durchgeführt worden, um die Leistungsfähigkeit der Adaption zu veranschaulichen. Die nicht-adaptive Variante besaß eine identische Struktur und eine identische Parametrierung, jedoch galt $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_v = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_\omega = \mathbf{0}$, womit die Adaption deaktiviert war. Die \mathcal{L}_1 -Filter für die adaptive Reglervariante wurden für dieses Experiment mit einer etwas höheren Bandbreite als

6. Verifikation anhand von Experimenten

zuvor in Kapitel 5.2 eingestellt, da mit weniger starken Störungen gerechnet wurde. Die Funktionen $d_v(s)$ und $\mathbf{D}_\omega(s)$ sind wie folgt gewählt worden

$$d_v(s) = \frac{2258}{s(s^2 + 48s + 764)}, \quad \mathbf{D}_\omega(s) = \text{diag}(1, 1, 1.6) \cdot \frac{1}{66.7s} \quad (6.5)$$

und führten zu den Filtern

$$\hat{\mathbf{C}}_v(s) = \frac{4032}{(s + 18)(s + 16)(s + 14)} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3}, \quad \hat{\mathbf{C}}_\omega(s) = \frac{6.0}{s + 6.0} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3}. \quad (6.6)$$

Diese weisen eine Bandbreite von etwa 8.0 rad/s für $\mathbf{C}_v(s)$ und 6.0 rad/s für $\hat{\mathbf{C}}_\omega(s)$ auf.

Die Ergebnisse dieses Versuchs sind in Abbildung 6.3 bis 6.6 dargestellt. Für die nicht-adaptive Reglervariante sind deutliche Abweichungen bezüglich der Position aufgrund der Unsicherheiten und Störungen zu erkennen, siehe Abbildung 6.3 und 6.4. Ebenso wird für die nicht-adaptive Variante eine Wechselwirkung zwischen den Positionskomponenten zum Zeitpunkt $t = 40$ s sichtbar, an dem eine Bewegung entlang

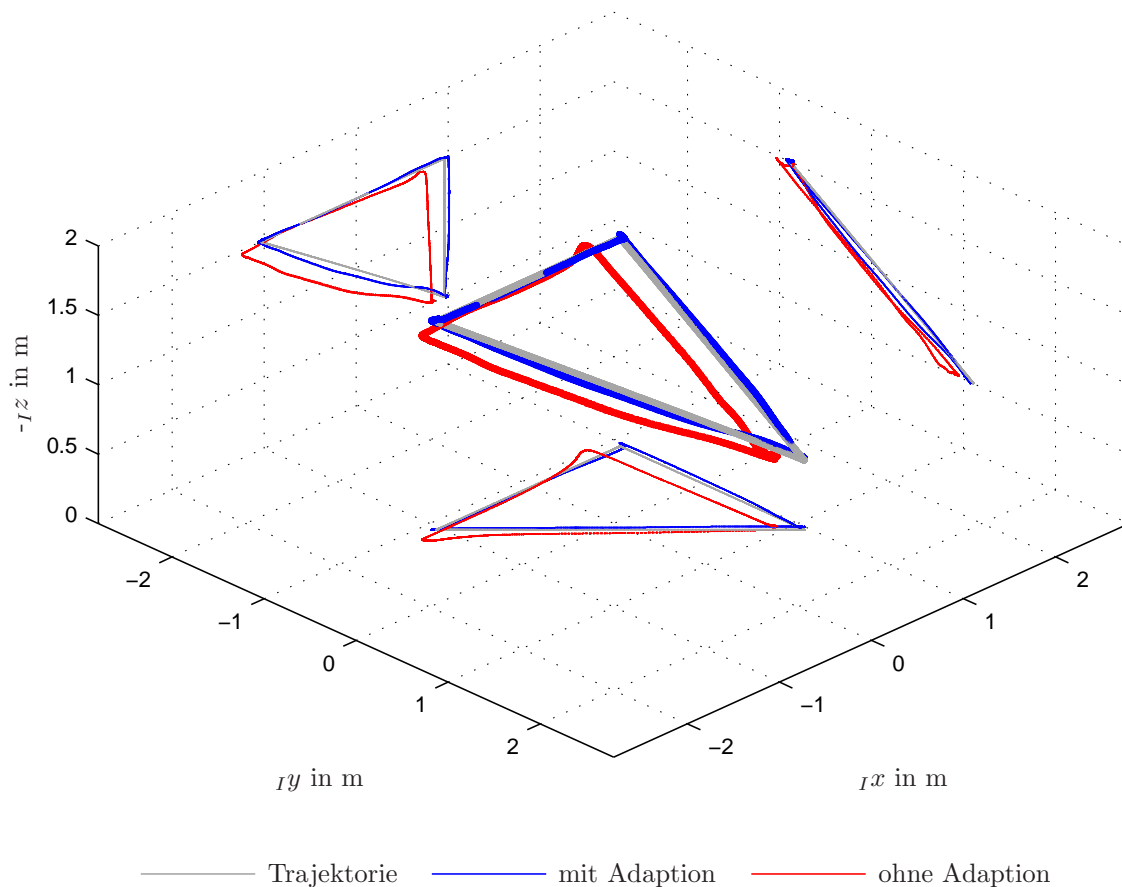


Abbildung 6.3.: Räumliche Darstellung der Versuchsergebnisse bezüglich der Position für die Trajektorie C. Dargestellt ist das Folgeverhalten im Zeitraum von 35 s bis 47 s, siehe Abbildung 6.4.

6.1. Ergebnisse für ein Punkt-zu-Punkt Manöver (Trajektorie C)

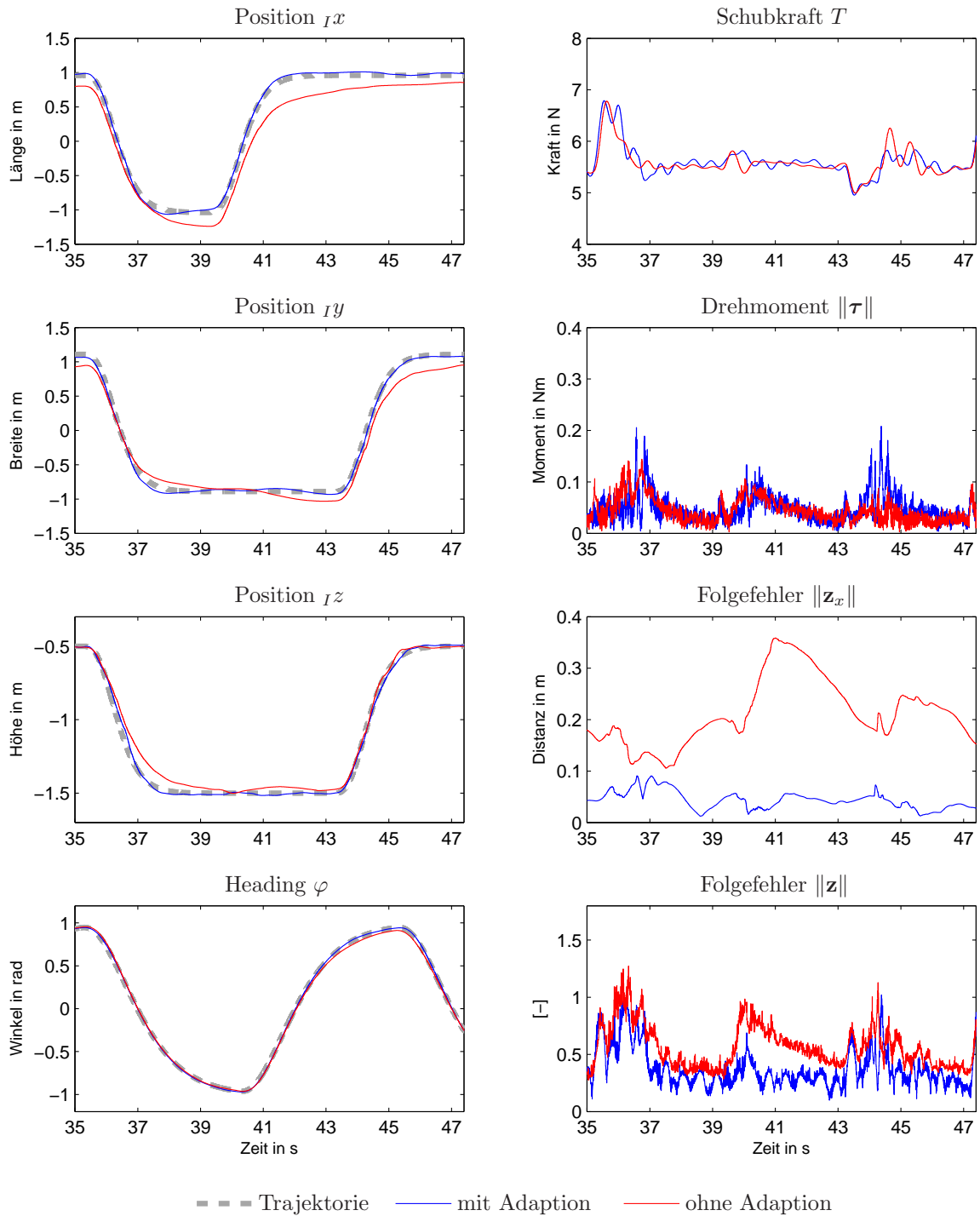


Abbildung 6.4.: Darstellung der Versuchsergebnisse über der Zeit für die Trajektorie C.

der ${}_I x$ -Achse erfolgte. Die adaptive Regelung zeigt hingegen ein präzises Folgeverhalten mit deutlich geringeren Abweichungen und kann die Wechselwirkung zwischen den Positionskomponenten effektiv ausgleichen, was ebenfalls im Verlauf des Folgefehlers \mathbf{z}_x in Abbildung 6.4 deutlich wird. Dieses gute Folgeverhalten betrifft auch

6. Verifikation anhand von Experimenten

den Verlauf des Headings, für den jedoch die nicht-adaptive Reglervariante ebenfalls ein gutes Resultat erzielen konnte.

Im Verlauf der Schubkraft T sind für beide Varianten regelmäßige Schwankungen mit etwa 2 Hz sichtbar, welche für die adaptive Regelung etwas stärker ausfallen und auf die Kompensation einer Störung mit dieser Frequenz hindeuten. Im Verlauf des Moments sowie im Verlauf des Folgefehlers \mathbf{z} werden mit aktiver Adaption zudem die höherfrequenten Anteile etwas deutlicher, was auf eine erhöhte Verstärkung von Messrauschen zurückzuführen ist.

Die Kompensationssignale $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}^* = \mathcal{L}^{-1}[\hat{\mathbf{C}}_v(s)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{va}(s)]$ und $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}^* = \mathcal{L}^{-1}[\hat{\mathbf{C}}_\omega(s)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\omega a}(s)]$, welche zu diesen Unterschieden in den Stellgrößen führten, sind in Abbildung 6.5 dargestellt. Hier zeigt sich der Einfluss verschiedener Unsicherheiten und Störungen. In Beschleunigungs- und Bremsphasen (zur Zeit 36 s, 40 s und 44 s) ist eine deutliche Veränderung in den Komponenten von $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}^*$ ersichtlich, welche auf eine zu geringe Tilgung der Strömungskräfte in \mathbf{f}_v von Seiten der nominalen Regelung hinweisen. Dies steht im Einklang mit der in Abbildung 6.4 sichtbaren Abweichung der nicht-adaptiven Regelung, welche in Beschleunigungs- und Bremsphasen stets etwas in Verzug gerät. Zudem ist in den Komponenten von $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}^*$ auch die Kompensation von überwiegend gleichmäßig wirkenden Störungen zu sehen, was sich in konstanten Abweichungen von der Nulllage in Phasen ohne Bewegung bzgl. der Position (zur Zeit 38 s und 42 s) zeigt.

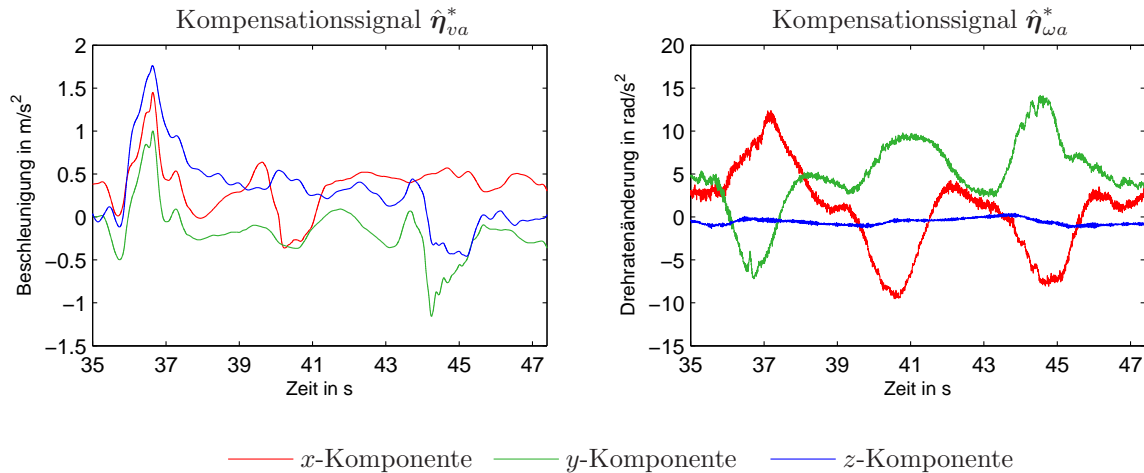


Abbildung 6.5.: Darstellung der Signale zur Kompensation der Unsicherheiten für die Trajektorie C.

Ein ähnliches Bild ergibt sich für das Signal $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}^*$ in Abbildung 6.5, dessen Komponenten in x - und y -Richtung ebenso deutliche Schwankungen zu den Zeiten 36 s, 40 s und 44 s aufweisen. Diese gehen mit der Verkipfung des Quadropters einher und lassen auf eine zu gering kommandierte Drehbeschleunigung von Seiten der nominalen Regelung schließen. Diese Komponenten besitzen auch eine konstante Abweichung von der Nulllage und kompensieren damit eine überwiegend gleichmäßig wirkende Störung in der Lagedynamik. In z -Richtung waren nur geringe Störungen wirksam, wodurch die nicht-adaptive Regelung ebenfalls ein gutes Folgeverhalten bezüglich des Headings erzielen konnte. Im Verlauf von $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}^*$ fällt im Vergleich zu dem von $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}^*$ ein

6.2. Ergebnisse für ein spiralförmiges Manöver (Trajektorie D)

hochfrequenter Anteil auf, der durch Messrauschen verursacht wird und Ursache des im Momentenverlauf sowie im Verlauf des Folgefehlers \mathbf{z} sichtbar starken Signalrauschens ist, siehe Abbildung 6.4.

In Abbildung 6.6 sind die Schätzsignale sowie der Schätzfehler dargestellt und hier wird ersichtlich, dass das Messrauschen bei der gewählten Adaptionsschrittweite einen starken Einfluss auf die Schätzsignale und den Schätzfehler hat und sich dieser Einfluss bei der gewählten Filterbandbreite ebenfalls im Signal $\hat{\boldsymbol{\eta}}_a^*$ bemerkbar macht. Dies lässt auf eine etwas zu hoch eingestellte Bandbreite der \mathcal{L}_1 -Filter schließen. Daher wurde für den im Folgenden gezeigten Versuch eine sowohl geringere Schrittweite für die Adaption als auch eine geringere Bandbreite gewählt, um einerseits einen geringeren Rauschanteil im Schätzsignale zu erhalten und andererseits den Einfluss auf die Kompensationsgröße zu reduzieren.

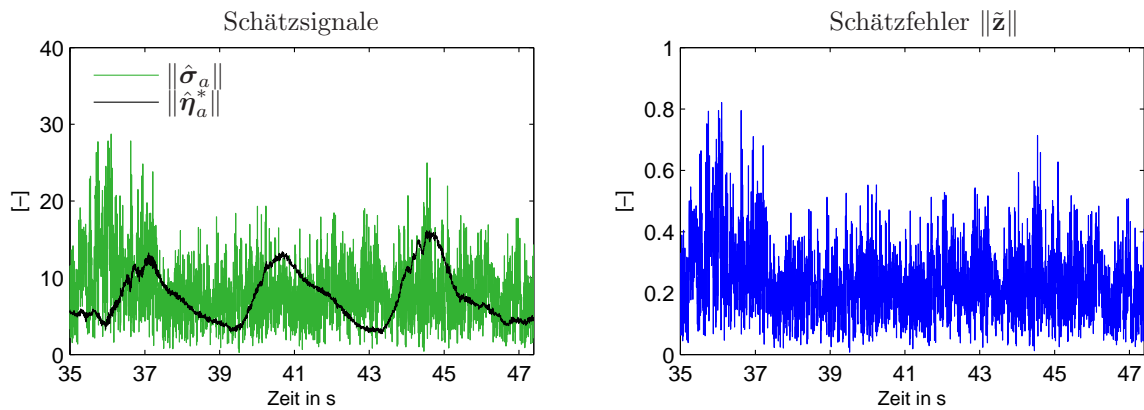


Abbildung 6.6.: Zeitlicher Verlauf der Beträge der Schätzsignale und des Schätzfehlers für die Trajektorie C.

6.2. Ergebnisse für ein spiralförmiges Manöver (Trajektorie D)

Für die Trajektorie D, siehe Abbildung 6.2(b), wurde die Adaptionsschrittweite des zuvor beschriebenen Versuchs auf ein Viertel reduziert und somit $T_s = 0.025\text{ s}$ verwendet. Die Bandbreiten der \mathcal{L}_1 -Filter wurden für dieses Experiment ebenso etwas reduziert und die Funktionen $d_v(s)$ und $\mathbf{D}_\omega(s)$ wie folgt gewählt:

$$d_v(s) = \frac{940.8}{s(s^2 + 36s + 428)}, \quad \mathbf{D}_\omega(s) = \text{diag}(1, 1, 1.6) \cdot \frac{1}{80s}, \quad (6.7)$$

was zu den Filtern

$$\hat{\mathbf{C}}_v(s) = \frac{4032}{(s + 18)(s + 16)(s + 14)} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3}, \quad \hat{\mathbf{C}}_\omega(s) = \frac{5.0}{s + 5.0} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (6.8)$$

mit den Bandbreiten von etwa 6.0 rad/s für $\hat{\mathbf{C}}_v(s)$ und 5.0 rad/s für $\hat{\mathbf{C}}_\omega(s)$ führte.

6. Verifikation anhand von Experimenten

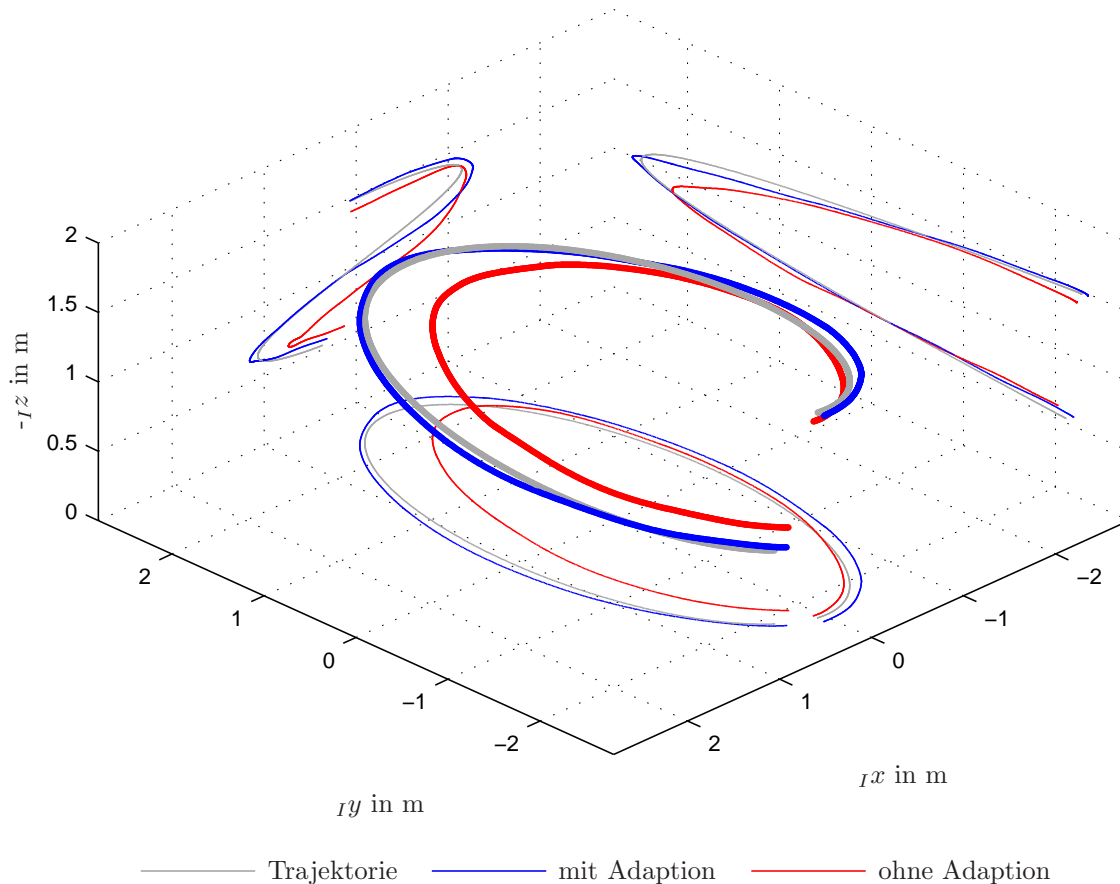


Abbildung 6.7.: Räumliche Darstellung der Versuchsergebnisse bezüglich der Position für Trajektorie D. Dargestellt ist das Folgeverhalten im Zeitraum von 43 s bis 49 s, siehe Abbildung 6.8.

Die Ergebnisse dieses Versuchs sind in Abbildung 6.7 bis 6.10 dargestellt. Für die nicht-adaptive Regelung zeigen sich auch bei diesem Experiment deutliche Abweichungen vom Sollwertverlauf der Position. Dies wird besonders in Abbildung 6.7 deutlich, in der das Folgeverhalten räumlich dargestellt ist. Die adaptive Regelung erzielt im Gegensatz dazu ein präzises Folgeverhalten mit geringen Abweichungen, was auch im Verlauf der Folgefehler in Abbildung 6.8 erkennbar ist. Dem Sollverlauf des Headings könnten wiederum beide Reglervarianten gut folgen. Durch die reduzierte Filterbandbreite der \mathcal{L}_1 -Filter und der erhöhten Adaptionsschrittweite ergab sich folglich keine nennenswerte Verschlechterung des Folgeverhaltens.

Im Verlauf der Schubkraft T ist für beide Reglervarianten erneut der Einfluss einer Störung mit etwa 2 Hz sichtbar. Dieser fällt im Vergleich zum zuvor gezeigten Versuch in Abbildung 6.4 etwas geringer aus, was einerseits auf die vorgegebene Trajektorie und andererseits bezüglich der adaptiven Regelung auf die verringerte Filterbandbreite zurückzuführen ist. Im Verlauf des kommandierten Drehmoments und des Folgefehlers \mathbf{z} machte sich auch bei diesem Versuch ein Einfluss von hochfrequenten Störungen bemerkbar. Dieser war jedoch für beide Varianten gleich, was zeigt, dass die Adaption keine Verstärkung von hochfrequenten Störanteilen verursachte. Dies bestätigt ebenso der Verlauf des Signals $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}^*$ in Abbildung 6.9, welcher durch die verringerte Filterbandbreite keine hochfrequenten Anteile mehr enthält.

6.2. Ergebnisse für ein spiralförmiges Manöver (Trajektorie D)

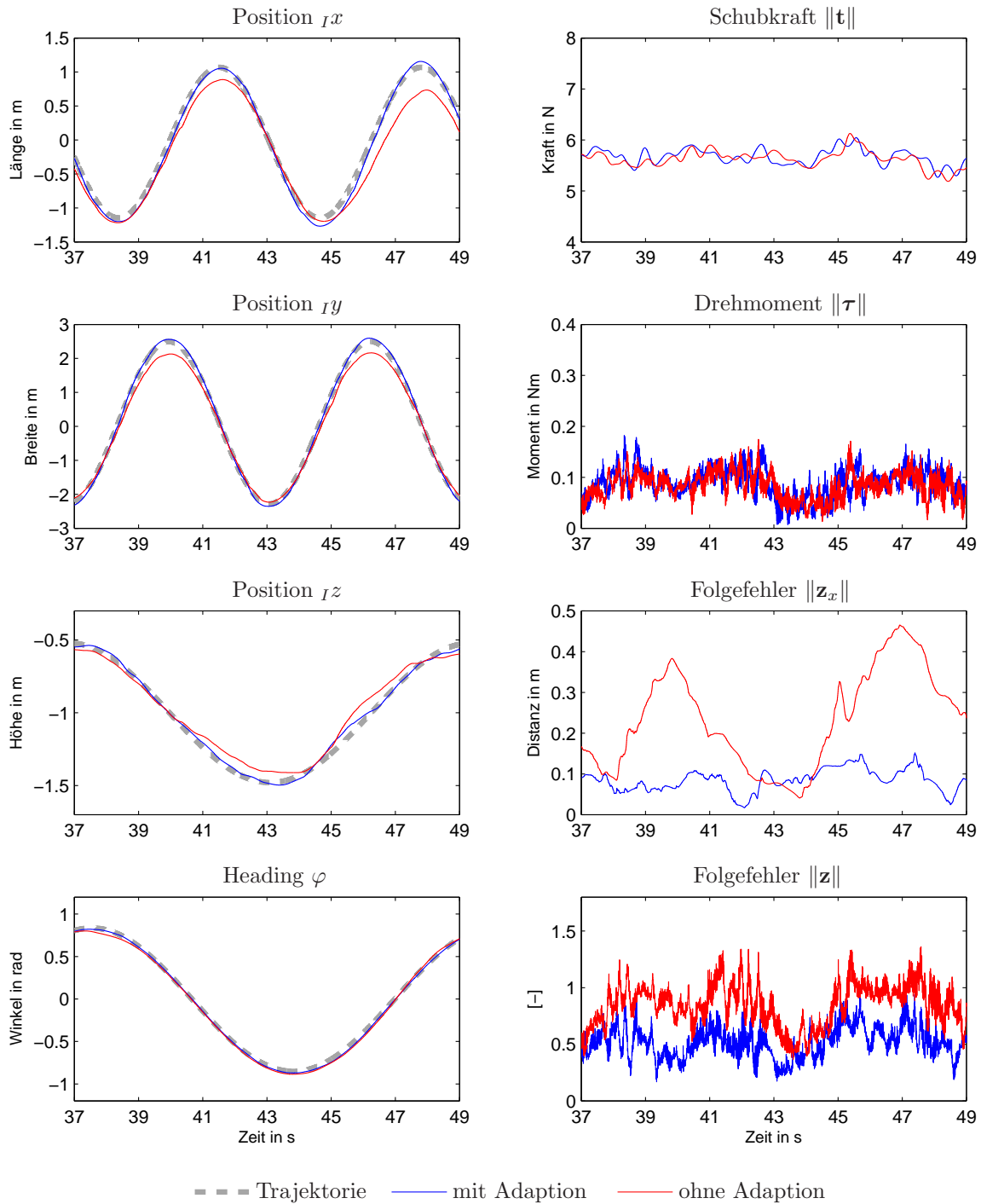


Abbildung 6.8.: Darstellung der Versuchsergebnisse über der Zeit für die Trajektorie D.

Die niederfrequenten Anteile im Signal $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}^*$ gehen wie im zuvor beschriebenen Versuch mit den Verkippungen des Quadropters einher und gleichen eine zu geringe Drehbeschleunigung des nicht-adaptiven Systems aus, vergleiche Abbildung 6.5. Die z -Komponente ist keinen nennenswerten Störungen ausgesetzt, was das gute Ergebnis

6. Verifikation anhand von Experimenten

der nicht-adaptiven Variante bezüglich des Headings erklärt. Im Verlauf der Komponenten von $\hat{\eta}_{va}^*$ ist ebenfalls deutlich zu erkennen, wie der adaptive Regler eine zu geringe Sollbeschleunigung ausgleicht und dafür sorgt, dass die ohne Ausgleich zu tief und zu weit nach innen verschobene Flugbahn ihr Soll erfüllt, siehe Abbildung 6.7.

Abbildung 6.10 zeigt den Verlauf der Schätzsignale. Hier wird ersichtlich, dass durch die reduzierte Adaptionsschrittweite ein wesentlich geringerer Rauschanteil im Schätzsignal $\hat{\sigma}_a$ und im Schätzfehler \bar{z} vorhanden war, vergleiche Abbildung 6.6. Dadurch sowie auch durch die etwas verringerte Bandbreite der \mathcal{L}_1 -Filter, konnte der Einfluss des Messrauschens minimiert werden ohne nennenswerte Einbußen in der Adaptionleistung hinnehmen zu müssen.

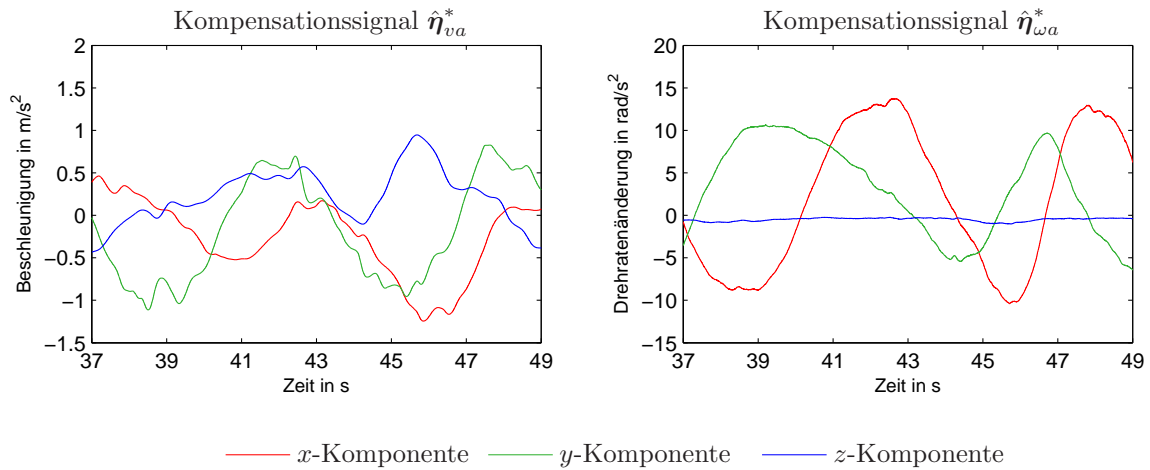


Abbildung 6.9.: Darstellung der Signale zur Kompensation der Unsicherheiten für die Trajektorie D.

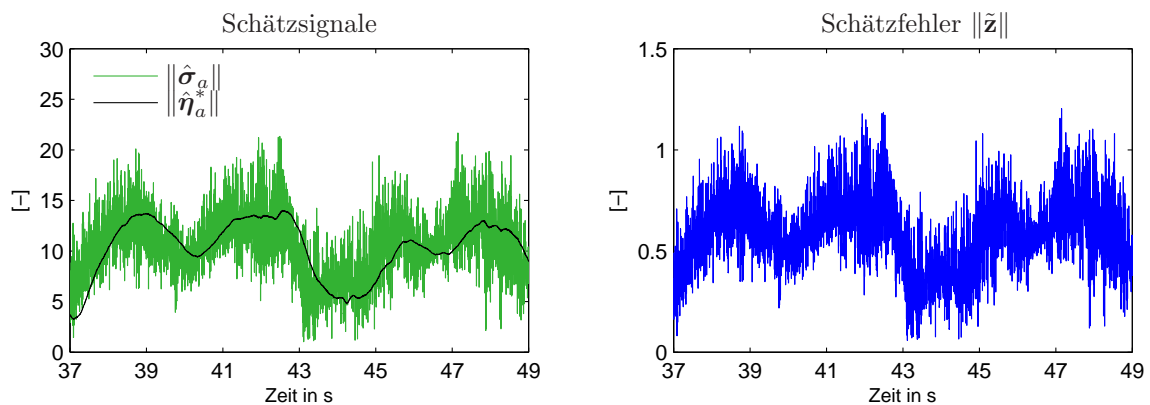


Abbildung 6.10.: Zeitlicher Verlauf der Beträge der Schätzsignale und des Schätzfehlers für die Trajektorie D.

Die in diesem Kapitel gezeigten Experimente haben die gewünschte Funktion der Regelung verifiziert und nachgewiesen, dass durch den adaptiven Regelanteil eine deutliche Verbesserung des Folgeverhaltens realisiert werden kann. Ebenso wurde die

Auswirkung der Adaptionsschrittweite und der Filterbandbreiten der \mathcal{L}_1 -Filter auf das Folgeverhalten gezeigt und somit ein Einblick in die praktischen Aspekte der Reglereinstellung gegeben. Die Versuche haben diesbezüglich gezeigt, dass eine geringe Adaptionsschrittweite eine Verstärkung von hochfrequenten Störungen verursacht und zu verrauschten Schätzsignalen führt. Durch hinreichend geringe Bandbreiten der \mathcal{L}_1 -Filter kann dieser Rauschanteil zwar getilgt werden, was jedoch auch die Performanz der Adaption durch die verringerte Bandbreite schmälert. Die Versuche haben gezeigt, dass der tatsächlich vom Regler nutzbare Informationsgehalt im Schätzsignal auch mit geringeren Schrittweiten erreicht werden kann. Dies bestätigt das ebenso gute Folgeverhalten des zweiten Versuchs, bei welchem eine vierfach größere Adaptionsschrittweite verwendet wurde. Es empfiehlt sich daher, wie hier dargestellt, eine etwas höhere Adaptionsschrittweite zu wählen, wodurch die Verstärkung der hochfrequenten Störungen verringert wird und dadurch keine Reduktion der Bandbreite für die \mathcal{L}_1 -Filter nötig ist.

7. Zusammenfassung und Ausblick

7.1. Ergebnisse der Arbeit

In dieser Arbeit wurde eine nichtlineare adaptive Regelung zur Trajektorienfolge für die Position und das Heading eines Quadropters vorgestellt. Die Zielsetzung für diesen Ansatz war ein möglichst präzises Folgeverhalten trotz zahlreicher Unsicherheiten und Störungen auch bei hochdynamischen Manövern mit großen Kippwinkeln zu ermöglichen. Dafür wurde das Backstepping, als nichtlineares und besonders für Systeme in unterer Dreiecksform geeignetes Regelungsverfahren, mit der \mathcal{L}_1 -adaptiven Regelung kombiniert. Die Entscheidung fiel auf die \mathcal{L}_1 -adaptive Regelung, da sich diese durch die Möglichkeit auszeichnet, zahlreiche Unsicherheiten und Störungen zu kompensieren und einen robusten sowie auch performanten Regelungsentwurf zu ermöglichen, wodurch sich ein hoher praktischer Nutzen ergibt. Für die Kombination der beiden Verfahren musste die Theorie der \mathcal{L}_1 -adaptiven Regelung für nichtlineare zeitvariante Systeme erweitert und an den Quadropters angepasst werden. Dadurch konnte ein Regelsystem geschaffen werden, das nachweislich alle Parameterunsicherheiten und eine Vielzahl an Störungen kompensieren kann und gleichzeitig die nichtlineare Systemeigenschaft ausnutzt, um hochdynamische Manöver mit großen Kippwinkelverläufen zu ermöglichen.

Der entwickelte Ansatz realisiert darüber hinaus eine Trennung der nominalen Regelung von der Adaption, welche für die praktische Umsetzbarkeit erforderlich ist, da sie \mathcal{L}_1 -Filter mit geringer Bandbreite und gleichzeitig eine hohe Flugdynamik ermöglicht. Durch eine Modifikation des Referenzverhaltens und einer entsprechend angepassten Beweisführung, konnten trotz dieser Trennung, bekannt als Baseline-Error-Struktur, alle Parameterunsicherheiten und insbesondere unsichere Eingangverstärkungen abgedeckt werden. Die Beschränktheit aller Systemsignale konnte mithilfe von zwei unterschiedlichen Nachweisen gezeigt werden. Ein Nachweis nutzt herkömmliche lineare Methoden im Frequenzbereich und kann mit geringen Anforderungen an das Vorwissen über die Unsicherheiten die Beschränktheit der Signale nachweisen. Der zweite Nachweis nutzt Methoden im Zeitbereich und ist im Gegensatz mit etwas höheren Anforderungen an das Vorwissen über die wirkenden Störungen in der Lage, den nichtlinearen Charakter der Strecke auszunutzen und eine präzisere Aussage über den Einzugsbereich zu machen. Die numerische Auswertung beider Nachweise anhand eines rechnerischen Beispiels hat ergeben, dass die gestellten Bedingungen für hinreichend große Adaptionsgeschwindigkeiten erfüllt werden, die damit abgedeckten Unsicherheiten jedoch zu gering und die notwendige Adaptionsgeschwindigkeit zu hoch für eine praktischen Anwendung sind. Dies liegt an der Verwendung von Normen in der Beweisführung, welche die Struktur der Dynamik missachten und zu einer konservativen Abschätzung führen.

Anhand von Simulationen wurde gezeigt, dass der entwickelte Ansatz bei realisierbaren Adaptionsgeschwindigkeiten große Unsicherheiten und Störungen kompensieren und ein präzises Folgeverhalten erzielen kann. Dabei wurde veranschaulicht, wie mit dieser Regelung der Kompromiss aus Robustheit und Performanz transparent behandelt werden kann. Mithilfe praktischer Versuche konnte das gewünschte Regelverhalten verifiziert und ein präzises Folgeverhalten bei Trajektorien mit größeren Kippwinkelverläufen nachgewiesen werden. Die durchgeführten Experimente zeigten, wie der Entwurf durch geschickte Wahl der Adaptionsgeschwindigkeit und der Filterbandbreiten verbessert werden kann.

Abschließend sei erwähnt, dass dieser Ansatz ohne weitere Anpassung auch für andere VTOLs anwendbar ist, wenn diese eine Streckenstruktur in unterer Dreiecksform aufweisen, siehe Abschnitt 1.3.

7.2. Weitere Forschung

Folgende Themen werden für die weitere Forschung vorgeschlagen:

Behandlung von Totzeiten und Aktuatorlimitierungen

Die Theorie der \mathcal{L}_1 -adaptiven Regelung erlaubt es auch Totzeiten und Aktuatorlimitierungen zu behandeln, siehe [42, 71]. Gerade bei einer Anwendung am Quadropter sind auch diese Aspekte von Interesse, waren jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr zu berücksichtigen. Daher wird eine diesbezügliche Analyse für die weitere Forschung angeregt.

Nutzung des erweiterten Piecewise-Constant Adaptation Law

Inzwischen ist eine erweiterte Version des hier genutzten Piecewise-Constant Adaptation Law publiziert worden [72], welche eine höhere Performanz bei gleicher Adaptionsschrittweite verspricht und auch für diese Anwendung gewinnbringend sein könnte. Für eine weitere Entwicklung wird daher die Integration dieses Adaptionsgesetzes empfohlen.

Entwicklung eines adaptiven Backsteppings ohne dynamische Erweiterung

Bisher ist keine Anwendung des Backsteppings am Quadropter bekannt, die keine dynamische Erweiterung der Strecke benötigt und gleichzeitig Fehlstellungen in der Lage größer gleich 90° abdecken kann. Da der Verzicht auf eine dynamische Erweiterung diverse Vorteile hätte, einerseits eine Dynamik geringerer Ordnung in z -Richtung und andererseits die Einsparung von zwei Integratoren im Regelalgorithmus, wird eine weitere Entwicklung diesbezüglich vorgeschlagen.

Untersuchung einer Übertragbarkeit der aktuellen Erkenntnisse zur \mathcal{L}_1 -adaptiven Regelung auf diese Arbeit

In den letzten Jahren gab es eine rege Diskussion über den Ansatz der \mathcal{L}_1 -adaptiven Regelung. Kritiker, darunter namhafte Autoren im Bereich der adaptiven Regelung, stellen die wissenschaftliche Berechtigung des Verfahrens in Frage, siehe Ioannou et al. [47], Ortega und Panteley [88], [89]. Entsprechende Antworten mit entkräftigenden Argumenten sind in Hovakimyan [41] und in Souanef und Fichter [104] zu finden.

Diese kritische Fachdiskussion hat bereits zu der Erkenntnis geführt, dass sich im Fall einer linearen Ausgangsregelung eine äquivalente PI-Regelung zur \mathcal{L}_1 -adaptiven Regelung finden lässt, siehe van Heusden und Dumont [40]. Ortega und Panteley [88] sind der Ansicht, dass dies auch für den allgemeinen Fall einer linearen Regelung gilt, wenn ein Grenzübergang mit einer unendlich schnell werdenden Adaptionsgeschwindigkeit durchgeführt wird. Dies hätte zur Folge, dass der Adaptionsmechanismus überflüssig wird und eingespart werden kann. Aus Sicht des Autors dieser Arbeit ist dies jedoch auch als maximale Leistungsfähigkeit des Ansatzes interpretierbar, welche durch den \mathcal{L}_1 -Filter begrenzt ist und ihren Grenzwert in der äquivalenten PI-Regelung findet. Mit geringerer Adaptionsgeschwindigkeit wird diese volle Leistung nicht abgefragt und führt vermutlich zu mehr Robustheitsreserven, was im Einklang mit den Ergebnissen dieser Arbeit stehen würde.

Unbestreitbar sind jedoch die guten praktischen Ergebnisse, welche sich mit diesem Ansatz erzielen lassen, siehe Pettersson et al. [90]. Daher wäre die Berechnung eines äquivalenten PI-Reglers und die Einsparung des Adaptionsmechanismus aus praktischer Sicht durchaus von Vorteil. Die grundsätzliche Idee der \mathcal{L}_1 -adaptiven Regelung, nur Unsicherheiten in einem niederfrequenten Bereich zu tilgen, würde in diesem Fall bestehen bleiben und daher könnte dieses Verfahren als Entwurfsvorschrift für einen sehr performanten und robusten PI-Regler gelten.

Bisher ist nicht bekannt, ob sich diese Erkenntnisse auch auf den nichtlinearen Fall und somit auf diese Arbeit übertragen lassen. Daher könnte eine diesbezügliche Untersuchung durchaus lohnenswert sein und zu einer weiteren Verbesserung des Ansatzes führen.

A. Funktionseigenschaften

A.1. Eigenschaften der Matrixfunktion ${}_n\mathbf{M}$

Die Matrixfunktion ${}_n\mathbf{M} = \mathbf{R}_{IB} [\hat{\kappa}_v T_B \underline{\mathbf{e}}_{z12} - \hat{g}_B \mathbf{e}_z]$ definiert in (2.12) ist eine Funktion der Drehmatrix \mathbf{R}_{IB} sowie des Schubbetrags T . Da die Drehmatrix \mathbf{R}_{IB} über die Information der Schubrichtung \mathbf{t}_e und des Blickwinkels φ eindeutig bestimmt ist, kann ${}_n\mathbf{M}$ auch als Funktion von $(T, \mathbf{t}_e, \varphi)$ bzw. von (\mathbf{t}, φ) und somit als Funktion der Fehlerzustände \mathbf{z} geschrieben werden, was im Folgenden gezeigt ist. Zunächst muss hierfür die Drehmatrix \mathbf{R}_{IB} mit den gewünschten Argumenten $(T, \mathbf{t}_e, \varphi)$ bzw. (\mathbf{t}, φ) parametrisiert werden. Es bietet sich an die Zerlegung des Quaternions \mathbf{q} aus (2.17) zu nutzen, mit welcher es möglich ist die Richtung des Schubvektors \mathbf{t} allein durch das Quaternion \mathbf{q}_{xy} zu beschreiben. Der Schubvektor im I -System ist parametrisiert durch das \mathbf{q}_{xy} -Quaternion gegeben durch

$$\mathbf{t} = \mathbf{R}_{IA}(\mathbf{q}_{xy}) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -T \end{bmatrix} = \mathbf{t}_e T = \begin{bmatrix} -2q_y q_p \\ 2q_x q_p \\ 1 - 2q_p^2 \end{bmatrix} T, \quad (\text{A.1})$$

mit dem Schub T und der Rotationsmatrix $\mathbf{R}_{IA}(\mathbf{q}_{xy})$ vom A -System in das I -System. Zudem erhält man aus (2.12) mit (2.15) ausgewertet für \mathbf{q}_{xy} und \mathbf{q}_z

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{t}} &= {}_n\mathbf{M} \begin{bmatrix} {}_n\boldsymbol{\omega}_{xy} \\ {}_n\dot{T} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{IB} [\hat{\kappa}_v T_B \underline{\mathbf{e}}_{z12} - \hat{g}_B \mathbf{e}_z] \begin{bmatrix} {}_n\boldsymbol{\omega}_{xy} \\ {}_n\dot{T} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{R}_{IA}(\mathbf{q}_{xy}) \mathbf{R}_{AB}(\mathbf{q}_z) [\hat{\kappa}_v T_B \underline{\mathbf{e}}_{z12} - \hat{g}_B \mathbf{e}_z] \begin{bmatrix} {}_n\boldsymbol{\omega}_{xy} \\ {}_n\dot{T} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - 2q_y^2 & 2q_x q_y & 2q_p q_y \\ 2q_x q_y & 1 - 2q_x^2 & -2q_p q_x \\ -2q_y q_p & 2q_x q_p & 2q_p^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_w^2 - q_z^2 & -2q_z q_w & 0 \\ 2q_z q_w & q_w^2 - q_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\hat{\kappa}_v T & 0 \\ \hat{\kappa}_v T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_n\boldsymbol{\omega}_{xy} \\ {}_n\dot{T} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Der Zusammenhang $\mathbf{t}_e = [-2q_y q_p \ 2q_x q_p \ 1 - 2q_p^2]'$ aus (A.1) führt einerseits zu

$$q_p = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - t_{e3}}, \quad q_x = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{t_{e2}}{\sqrt{1 - t_{e3}}}, \quad q_y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{t_{e1}}{\sqrt{1 - t_{e3}}}, \quad (\text{A.3})$$

wobei $\mathbf{t}_e = [t_{e1} \ t_{e2} \ t_{e3}]'$, und andererseits mit $\mathbf{t}_e = T^{-1} \mathbf{t} = \|\mathbf{t}\|^{-1} \mathbf{t}$ zu

$$q_p = \frac{1}{\sqrt{2 \|\mathbf{t}\|}} \sqrt{\|\mathbf{t}\| - t_3}, \quad q_x = \frac{1}{\sqrt{2 \|\mathbf{t}\|}} \frac{t_2}{\sqrt{\|\mathbf{t}\| - t_3}}, \quad q_y = -\frac{1}{\sqrt{2 \|\mathbf{t}\|}} \frac{t_1}{\sqrt{\|\mathbf{t}\| - t_3}}, \quad (\text{A.4})$$

A. Funktionseigenschaften

wobei $\mathbf{t} = [t_1 \ t_2 \ t_3]'$. Somit kann die Drehmatrix \mathbf{R}_{IA} durch den Schubvektor \mathbf{t} dargestellt werden. Für die Drehmatrix \mathbf{R}_{AB} kann der Zusammenhang $q_w^2 - q_z^2 = \cos(\varphi)$ und $2q_z q_w = \sin(\varphi)$ aus (2.19) mit (2.14) genutzt werden, womit gilt:

$$\dot{\mathbf{t}} = {}_n\mathbf{M}(\mathbf{t}, \varphi) \begin{bmatrix} {}_n\boldsymbol{\omega}^{xy} \\ {}_n\dot{T} \end{bmatrix} = [{}_n\mathbf{M}_1(\mathbf{t}, \varphi) \ {}_n\mathbf{M}_2(\mathbf{t}, \varphi) \ {}_n\mathbf{M}_3(\mathbf{t})] \begin{bmatrix} {}_n\boldsymbol{\omega}^{xy} \\ {}_n\dot{T} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

mit

$${}_n\mathbf{M}_1(\mathbf{t}, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\hat{\kappa}_v (t_1^2 \sin(\varphi) - t_1 t_2 \cos(\varphi))}{\|\mathbf{t}\| - t_3} - \|\mathbf{t}\| \hat{\kappa}_v \sin(\varphi) \\ \|\mathbf{t}\| \hat{\kappa}_v \cos(\varphi) - \frac{\hat{\kappa}_v (t_2^2 \cos(\varphi) - t_1 t_2 \sin(\varphi))}{\|\mathbf{t}\| - t_3} \\ \hat{\kappa}_v (t_2 \cos(\varphi) - t_1 \sin(\varphi)) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

$${}_n\mathbf{M}_2(\mathbf{t}, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\hat{\kappa}_v (\cos(\varphi) t_1^2 + t_2 \sin(\varphi) t_1)}{\|\mathbf{t}\| - t_3} - \|\mathbf{t}\| \hat{\kappa}_v \cos(\varphi) \\ \frac{\hat{\kappa}_v (\sin(\varphi) t_2^2 + t_1 \cos(\varphi) t_2)}{\|\mathbf{t}\| - t_3} - \|\mathbf{t}\| \hat{\kappa}_v \sin(\varphi) \\ -\hat{\kappa}_v (t_1 \cos(\varphi) + t_2 \sin(\varphi)) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

$${}_n\mathbf{M}_3(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} \frac{t_1 \hat{g}}{\|\mathbf{t}\|} \\ \frac{T_2 \hat{g}}{\|\mathbf{t}\|} \\ \frac{t_3 \hat{g}}{\|\mathbf{t}\|} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Mit $\mathbf{t} = \hat{\kappa}_v \mathbf{z}_t + \mathbf{t}_d = \hat{\kappa}_v \mathbf{z}_t - \hat{\kappa}_v^{-1} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va} - \hat{\kappa}_v^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{vn}$ aus (4.22) und $\varphi = z_\varphi + \varphi_T$ kann ${}_n\mathbf{M}$ mit $\boldsymbol{\sigma}_{vn} = \boldsymbol{\sigma}_{vn}(\dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v)$, siehe (A.61), als Funktion folgender Argumente geschrieben werden:

$${}_n\mathbf{M} = {}_n\mathbf{M}(\dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \varphi_T, \mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v, \mathbf{z}_t, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, z_\varphi). \quad (\text{A.9})$$

Mit V1 bis V6 aus Abschnitt 4.2 ist ${}_n\mathbf{M}$ bezüglich dieser Argumente beliebig oft stetig differenzierbar. Die inverse Abbildung kann analog als Funktion mit folgenden Argumenten geschrieben werden

$$\begin{aligned} {}_n\mathbf{M}^{-1} &= [-\hat{\kappa}_v^{-1} T^{-1} {}_B\mathbf{e}_{z12} \quad -\hat{g}^{-1} {}_B\mathbf{e}_z] \mathbf{R}_{BI} \\ &= {}_n\mathbf{M}^{-1}(\dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \varphi_T, \mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v, \mathbf{z}_t, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, z_\varphi), \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

und ist mit V1 bis V6 aus Abschnitt 4.2 bezüglich dieser Argumente ebenfalls beliebig oft stetig differenzierbar. Ebenso gilt

$$\begin{aligned} {}_n\dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{R}_{IB} \boldsymbol{\omega} [\hat{\kappa}_v \dot{T} {}_B\mathbf{e}_{z12} \quad -\hat{g} {}_B\mathbf{e}_z] + \mathbf{R}_{IB} [\hat{\kappa}_v \dot{T} {}_B\mathbf{e}_{z12} \quad -\hat{g} {}_B\mathbf{e}_{z3}] \\ &= {}_n\dot{\mathbf{M}}(\dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \varphi_T, \dot{\varphi}_T, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

und

$$\begin{aligned} {}_n\dot{\mathbf{M}}^{-1} &= [\hat{\kappa}_v^{-1} \dot{T} T^{-2} {}_B\mathbf{e}_{z12} \quad -\hat{g}^{-1} {}_B\mathbf{e}_{z3}] \mathbf{R}_{BI} - [\hat{\kappa}_v^{-1} T^{-1} {}_B\mathbf{e}_{z12} \quad \hat{g}^{-1} {}_B\mathbf{e}_z] \mathbf{R}_{BI} \boldsymbol{\omega} \\ &= {}_n\dot{\mathbf{M}}^{-1}(\dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \varphi_T, \dot{\varphi}_T, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Beide Funktionen sind mit V1 bis V6 beliebig oft stetig differenzierbar bzgl. der angegebenen Argumente, da $\boldsymbol{\omega}$ und $\dot{T} = \hat{g} {}_n\dot{T}$, siehe (A.19), beliebig oft stetig differenzierbar in diesen Argumenten sind.

Ebenso gilt (A.13)

$$\begin{aligned} {}_n\ddot{\mathbf{M}}^{-1} &= [\hat{\kappa}_v^{-1}(\ddot{T}T^{-2} - 2\dot{T}T^{-3})_B \mathbf{e}_{z12} - \hat{g}^{-1} {}_B\mathbf{e}_{z3}] \mathbf{R}_{BI} + [\hat{\kappa}_v^{-1} \dot{T}T^{-2} {}_B\mathbf{e}_{z12} - \hat{g}^{-1} {}_B\mathbf{e}_{z3}] \mathbf{R}_{BI} \underline{\boldsymbol{\omega}} \\ &\quad - [\hat{\kappa}_v^{-1} T^{-1} {}_B\mathbf{e}_{z12} \quad \hat{g}^{-1} {}_B\mathbf{e}_z] (\mathbf{R}_{BI} \underline{\dot{\boldsymbol{\omega}}} + \mathbf{R}_{BI} \underline{\boldsymbol{\omega}} \underline{\boldsymbol{\omega}}) \\ &= {}_n\ddot{\mathbf{M}}^{-1} (\dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\ddot{\mathbf{x}}}_T, \varphi_T, \dot{\varphi}_T, \ddot{\varphi}_T, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}) \end{aligned}$$

und ist ebenfalls mit V1 bis V6 beliebig oft stetig differenzierbar bzgl. der angegebenen Argumente, da $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ und $\dot{T} = \hat{g}_n \ddot{T}$, siehe (A.29), beliebig oft stetig differenzierbar in diesen Argumenten sind.

A.2. Die Zustände als Funktionen der Folgefehler

Die Zustände der erweiterten Strecke aus (2.35):

$$\mathbf{s}_{\text{ext}} = [\mathbf{x}' \quad \mathbf{v}' \quad \mathbf{t}' \quad \varphi \quad \dot{T} \quad \boldsymbol{\omega}']' \quad (\text{A.14})$$

können mit dem Folgefehler \mathbf{z} , der Trajektorien \mathbf{x}_T und φ_T sowie deren Ableitungen und den virtuellen Stellgesetzen aus Kapitel 3 als Funktionen folgender Argumente geschrieben werden. Dabei gilt

$$\mathbf{x} = \mathbf{z}_x + \mathbf{x}_T = \mathbf{x}(\mathbf{x}_T, \mathbf{z}_x) \quad (\text{A.15})$$

und mit (3.2) folgt

$$\mathbf{v} = \mathbf{z}_v + \mathbf{v}_d = \mathbf{z}_v + \dot{\mathbf{x}}_T + \mathbf{A}_x \mathbf{z}_x = \mathbf{v}(\dot{\mathbf{x}}_T, \mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v). \quad (\text{A.16})$$

Mit (3.8), (3.11), (3.12) und (A.61) gilt (A.17)

$$\mathbf{t} = \hat{\kappa}_v \mathbf{z}_t + \mathbf{t}_d = \hat{\kappa}_v \mathbf{z}_t - \hat{\kappa}_v^{-1} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va} - \hat{\kappa}_v^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{vn}(\dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v) = \mathbf{t}(\dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v, \mathbf{z}_t, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va})$$

und ebenso für $-\pi \leq z_\varphi < \pi$

$$\varphi = z_\varphi + \varphi_T = \varphi(\varphi_T, z_\varphi). \quad (\text{A.18})$$

Mit (2.12), (A.39) und (A.10) folgt

$$\begin{aligned} {}_n\mathbf{w} &= [\hat{\kappa}_v^{-1} \boldsymbol{\omega}'_{xy} \quad \hat{g}^{-1} \dot{T}]' = \mathbf{z}_r + {}_n\mathbf{w}_d = \mathbf{z}_r + {}_n\mathbf{M}^{-1} (\hat{\mathbf{t}}_d + \hat{\kappa}_v \mathbf{A}_t \mathbf{z}_t - \hat{\kappa}_v^3 \mathbf{z}_v) \\ &= {}_n\mathbf{w}(\dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\ddot{\mathbf{x}}}_T, \varphi_T, \mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v, \mathbf{z}_t, \mathbf{z}_r, z_\varphi, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}), \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

und mit (3.34), (A.42) und (A.45) gilt ebenfalls

$$\begin{aligned} \omega_z &= \hat{\kappa}_v z_{\omega z} + \omega_{zd} = \hat{\kappa}_v z_{\omega z} + \dot{\varphi}_T + a_\varphi z_\varphi + \mathbf{I}' \mathbf{R}_s \omega_{xy} \\ &= \omega_z(\dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\ddot{\mathbf{x}}}_T, \varphi_T, \dot{\varphi}_T, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}). \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Zusammengefasst lässt sich der Zustand \mathbf{s}_{ext} als eine Funktion mit den folgenden Argumenten schreiben

$$\mathbf{s}_{\text{ext}} = \mathbf{s}_{\text{ext}}(\dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\ddot{\mathbf{x}}}_T, \varphi_T, \dot{\varphi}_T, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}). \quad (\text{A.21})$$

Sind V1 bis V6 aus Abschnitt 4.2 erfüllt, ist diese Funktion in den angegebenen Argumenten beliebig oft stetig differenzierbar.

A.3. Zeitableitungen der Fehlerzustände

Die Zeitableitungen der Fehlerzustände können als Funktionen folgender Argumente geschrieben werden. Mit (3.3) gilt

$$\dot{\mathbf{z}}_x = \mathbf{A}_x \mathbf{z}_x + \mathbf{z}_v = \dot{\mathbf{z}}_x(\mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v) \quad (\text{A.22})$$

und mit (3.18), (A.61) und (A.85) folgt

$$\dot{\mathbf{z}}_v = \mathbf{A}_v \mathbf{z}_v - \mathbf{z}_x + \hat{\kappa}_v \hat{\kappa}_v \mathbf{z}_t + \tilde{\kappa}_v \hat{\kappa}_v^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{vn} + \boldsymbol{\sigma}_{va} - \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va} = \dot{\mathbf{z}}_v(\boldsymbol{\zeta}_v, \dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v, \mathbf{z}_t, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}). \quad (\text{A.23})$$

Mit (3.27), (A.48) und (A.9) gilt

$$\dot{\mathbf{z}}_t = \mathbf{A}_t \mathbf{z}_t + {}_n \mathbf{M} \mathbf{z}_r - \hat{\kappa}_v \hat{\kappa}_v \mathbf{z}_v + \Delta \dot{\mathbf{t}}_d = \dot{\mathbf{z}}_t(\boldsymbol{\zeta}_v, \dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v, \mathbf{z}_t, \mathbf{z}_r, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}) \quad (\text{A.24})$$

und mit (3.36)

$$\dot{z}_\varphi = a_\varphi z_\varphi + \hat{\kappa}_v z_{\omega z} = \dot{z}_\varphi(z_\varphi, z_{\omega z}). \quad (\text{A.25})$$

Ebenfalls gilt mit (3.51), (A.133), (A.93) und (A.5)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_r &= \mathbf{A}_r \mathbf{z}_r - \hat{\kappa}_v^{-1} {}_n \mathbf{M}' \mathbf{z}_t + \text{diag}(\hat{\kappa}_v^{-1}, \hat{\kappa}_v^{-1}, 0) (\tilde{\mathbf{K}}_\omega \hat{\mathbf{K}}_\omega^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{\omega n} + \boldsymbol{\sigma}_{\omega a} - \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}) \\ &= \dot{\mathbf{z}}_r(\boldsymbol{\zeta}_v, \boldsymbol{\zeta}_\omega, \dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\ddot{\mathbf{x}}}_T, \ddot{\ddot{\mathbf{x}}}_T, \varphi_T, \dot{\varphi}_T, \ddot{\varphi}_T, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}), \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

und mit (3.52), (A.133) und (A.93)

$$\begin{aligned} \dot{z}_{\omega z} &= a_{\omega z} z_{\omega z} - \hat{\kappa}_v z_\varphi + [0 \ 0 \ \hat{\kappa}_v^{-1}]' (\tilde{\mathbf{K}}_\omega \hat{\mathbf{K}}_\omega^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{\omega n} + \boldsymbol{\sigma}_{\omega a} - \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}) \\ &= \dot{z}_{\omega z}(\boldsymbol{\zeta}_v, \boldsymbol{\zeta}_\omega, \dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\ddot{\mathbf{x}}}_T, \ddot{\ddot{\mathbf{x}}}_T, \varphi_T, \dot{\varphi}_T, \ddot{\varphi}_T, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}). \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Sind V1 bis V6 aus Abschnitt 4.2 erfüllt, sind diese Funktionen beliebig oft stetig differenzierbar in den angegebenen Argumenten.

A.4. Eigenschaften von wichtigen Ableitungen

Einfache Zeitableitungen von ${}_n \dot{\mathbf{t}}_d$ und ${}_n \dot{\mathbf{t}}_v$

Mit (A.26), (A.12), (A.39), (A.40), (A.24) und (A.23) eingesetzt in die Zeitableitung von (3.21)

$$\begin{aligned} {}_n \dot{\mathbf{t}}_d &= {}_n \dot{\mathbf{M}}^{-1} (\hat{\mathbf{t}}_d + \hat{\kappa}_v \mathbf{A}_t \mathbf{z}_t - \hat{\kappa}_v^3 \mathbf{z}_v) + {}_n \mathbf{M}^{-1} (\hat{\mathbf{t}}_d + \hat{\kappa}_v \mathbf{A}_t \dot{\mathbf{z}}_t - \hat{\kappa}_v^3 \dot{\mathbf{z}}_v) \\ &= {}_n \dot{\mathbf{t}}_d(\boldsymbol{\zeta}_v, \dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\ddot{\mathbf{x}}}_T, \ddot{\ddot{\mathbf{x}}}_T, \varphi_T, \dot{\varphi}_T, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}), \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

folgt

$$\begin{aligned} {}_n \dot{\mathbf{t}}_v &= [{}_n \ddot{\boldsymbol{\omega}}'_{xy} \quad {}_n \ddot{\mathbf{T}}']' = [\hat{\kappa}_v^{-1} \dot{\boldsymbol{\omega}}'_{xy} \quad \hat{g}^{-1} \ddot{\mathbf{T}}']' = \dot{\mathbf{z}}_r + {}_n \dot{\mathbf{t}}_d \\ &= {}_n \dot{\mathbf{t}}_v(\boldsymbol{\zeta}_v, \boldsymbol{\zeta}_\omega, \dot{\mathbf{x}}_T, \dots, \ddot{\ddot{\mathbf{x}}}_T, \varphi_T, \dot{\varphi}_T, \ddot{\varphi}_T, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}). \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Für die Stellgröße der erweiterten Strecke gilt $u_T = {}_n\ddot{T}$ und daher ist u_T eine Funktion der hier angegebenen Argumente und mit V1 bis V6 aus Abschnitt 4.2 beliebig oft stetig differenzierbar in diesen Argumenten.

Einfache Zeitableitung $\dot{\omega}_z$

Mit (A.25), (A.42), (A.43), (A.45), (A.46) und (A.29) eingesetzt in die Zeitableitung von (3.34)

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_{zd} &= \ddot{\varphi}_T + a_\varphi \dot{z}_\varphi + (\dot{\mathbf{I}}\mathbf{R}_s + \mathbf{I}'\dot{\mathbf{R}}_s)\boldsymbol{\omega}_{xy} + \mathbf{I}'\mathbf{R}_s\dot{\boldsymbol{\omega}}_{xy} \\ &= \dot{\omega}_{zd}(\zeta_v, \zeta_\omega, \dot{\mathbf{x}}_T, \dots, \ddot{\mathbf{x}}_T, \varphi_T, \dot{\varphi}_T, \ddot{\varphi}_T, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}),\end{aligned}\quad (\text{A.30})$$

folgt

$$\dot{\omega}_z = \hat{\kappa}_v z_{\omega z} + \dot{\omega}_{zd} = \dot{\omega}_z(\zeta_v, \zeta_\omega, \dot{\mathbf{x}}_T, \dots, \ddot{\mathbf{x}}_T, \varphi_T, \dot{\varphi}_T, \ddot{\varphi}_T, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}) \quad (\text{A.31})$$

und ist mit V1 bis V6 aus Abschnitt 4.2 beliebig oft stetig differenzierbar in diesen Argumenten.

Zweifache Zeitableitungen

Mit (A.5), (A.11), (A.24), (A.74) und (A.83) eingesetzt in die Zeitableitung von (A.26)

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{z}}_r &= \mathbf{A}_r \dot{\mathbf{z}}_r - \hat{\kappa}_v^{-1} {}_n\dot{\mathbf{M}}' \mathbf{z}_t - \hat{\kappa}_v^{-1} {}_n\mathbf{M}' \dot{\mathbf{z}}_t + \text{diag}(\hat{\kappa}_v^{-1}, \hat{\kappa}_v^{-1}, 0)(\tilde{\mathbf{K}}_\omega \hat{\mathbf{K}}_\omega^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\omega n} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\omega a} - \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{\omega a}) \\ &= \ddot{\mathbf{z}}_r(\zeta_v, \dot{\zeta}_v, \zeta_\omega, \dot{\zeta}_\omega, \dot{\mathbf{x}}_T, \dots, \overset{(5)}{\ddot{\mathbf{x}}_T}, \varphi_T, \dots, \ddot{\varphi}_T, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \dots, \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}, \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{\omega a})\end{aligned}\quad (\text{A.32})$$

und mit (A.13), (A.39), (A.12), (A.40), (A.24), (A.23), (A.10) und (A.41) eingesetzt in die Zeitableitung von (A.28)

$$\begin{aligned}{}_n\ddot{\mathbf{v}}_d &= {}_n\ddot{\mathbf{M}}^{-1}(\hat{\mathbf{t}}_d + \hat{\kappa}_v \mathbf{A}_t \mathbf{z}_t - \hat{\kappa}_v^3 \mathbf{z}_v) + 2{}_n\dot{\mathbf{M}}^{-1}(\hat{\mathbf{t}}_d + \hat{\kappa}_v \mathbf{A}_t \dot{\mathbf{z}}_t - \hat{\kappa}_v^3 \dot{\mathbf{z}}_v) \\ &\quad + {}_n\mathbf{M}^{-1}(\dot{\hat{\mathbf{t}}}_d + \hat{\kappa}_v \mathbf{A}_t \dot{\mathbf{z}}_t - \hat{\kappa}_v^3 \dot{\mathbf{z}}_v) \\ &= {}_n\ddot{\mathbf{v}}_d(\zeta_v, \dot{\zeta}_v, \zeta_\omega, \dot{\zeta}_\omega, \dot{\mathbf{x}}_T, \dots, \overset{(5)}{\ddot{\mathbf{x}}_T}, \varphi_T, \dot{\varphi}_T, \ddot{\varphi}_T, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}),\end{aligned}\quad (\text{A.33})$$

wobei mit (A.26), (A.5), (A.11), (A.23) und (A.49) für die Zeitableitung von (A.24) gilt

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{z}}_t &= \mathbf{A}_t \dot{\mathbf{z}}_t + \hat{\kappa}_v^{-1} {}_n\mathbf{M} \dot{\mathbf{z}}_r + \hat{\kappa}_v^{-1} {}_n\dot{\mathbf{M}} \mathbf{z}_r - \hat{\kappa}_v^2 \dot{\mathbf{z}}_v + \hat{\kappa}_v^{-1} \Delta \ddot{\mathbf{t}}_d \\ &= \ddot{\mathbf{z}}_t(\zeta_v, \dot{\zeta}_v, \zeta_\omega, \dot{\zeta}_\omega, \dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \varphi_T, \dot{\varphi}_T, \ddot{\varphi}_T, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}),\end{aligned}\quad (\text{A.34})$$

und ebenso mit (A.22), (A.24), (A.74) und (A.83) für (A.23)

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{z}}_v &= \mathbf{A}_v \dot{\mathbf{z}}_v - \dot{\mathbf{z}}_x + \hat{\kappa}_v^2 \dot{\mathbf{z}}_t + \tilde{\kappa}_v \hat{\kappa}_v^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{vn}(\zeta_v, \dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v, \mathbf{z}_t, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}) \\ &\quad + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{va}(\zeta_v, \dot{\zeta}_v, \dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v, \mathbf{z}_t, \mathbf{z}_r, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}) - \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va} \\ &= \ddot{\mathbf{z}}_v(\zeta_v, \dot{\zeta}_v, \dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v, \mathbf{z}_t, \mathbf{z}_r, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}),\end{aligned}\quad (\text{A.35})$$

folgt für die Zeitableitung von (A.29)

$$\begin{aligned}{}_n\ddot{\mathbf{v}} &= \ddot{\mathbf{z}}_r + {}_n\ddot{\mathbf{v}}_d \\ &= {}_n\ddot{\mathbf{v}}(\zeta_v, \dot{\zeta}_v, \zeta_\omega, \dot{\zeta}_\omega, \dot{\mathbf{x}}_T, \dots, \overset{(5)}{\ddot{\mathbf{x}}_T}, \varphi_T, \dots, \ddot{\varphi}_T, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \dots, \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}, \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{\omega a})\end{aligned}\quad (\text{A.36})$$

A. Funktionseigenschaften

und ist mit V1 bis V9 aus Abschnitt 4.2 beliebig oft stetig differenzierbar in diesen Argumenten.

Zweifache Zeitableitung $\ddot{\omega}_z$

Mit (A.27), (A.42) bis (A.44), (A.45) bis (A.47), (A.19), (A.29) und (A.36) eingesetzt in die Zeitableitung von (A.30)

$$\begin{aligned}\ddot{\omega}_{zd} &= \ddot{\varphi}_T + a_\varphi \ddot{\varphi} + (\dot{\mathbf{l}}\mathbf{R}_s + \mathbf{l}'\dot{\mathbf{R}}_s)\dot{\omega}_{xy} + (\ddot{\mathbf{l}}\mathbf{R}_s + 2\dot{\mathbf{l}}'\dot{\mathbf{R}}_s + \mathbf{l}''\ddot{\mathbf{R}}_s)\omega_{xy} + \mathbf{l}'\mathbf{R}_s\ddot{\omega}_{xy} \quad (\text{A.37}) \\ &= \ddot{\omega}_{zd}(\zeta_v, \dot{\zeta}_v, \zeta_\omega, \dot{\zeta}_\omega, \dot{\mathbf{x}}_T, \dots, \overset{(5)}{\ddot{\mathbf{x}}}_T, \varphi_T, \dots, \ddot{\varphi}_T, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \dots, \overset{\cdot\cdot\cdot}{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}, \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{\omega a})\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}\ddot{\omega}_z &= \hat{\kappa}_v \dot{\zeta}_{\omega z} + \ddot{\omega}_{zd} \quad (\text{A.38}) \\ &= \ddot{\omega}_z(\zeta_v, \dot{\zeta}_v, \zeta_\omega, \dot{\zeta}_\omega, \dot{\mathbf{x}}_T, \dots, \overset{(5)}{\ddot{\mathbf{x}}}_T, \varphi_T, \dots, \ddot{\varphi}_T, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \dots, \overset{\cdot\cdot\cdot}{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}, \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{\omega a})\end{aligned}$$

und ist mit V1 bis V9 aus Abschnitt 4.2 beliebig oft stetig differenzierbar in diesen Argumenten.

Zeitableitungen $\hat{\mathbf{t}}_d$, $\dot{\hat{\mathbf{t}}}_d$ und $\ddot{\hat{\mathbf{t}}}_d$

Auch die geschätzte Zeitableitung des Sollschubvektors $\hat{\mathbf{t}}_d$ sowie dessen Zeitableitungen sind mit V1 bis V6 aus Abschnitt 4.2 beliebig oft stetig differenzierbare Funktionen in den folgenden Argumenten. Mit (3.22) und (3.12) folgt

$$\hat{\mathbf{t}}_d = -\hat{\kappa}_v^{-1} \left(\mathcal{L}^{-1}[s\hat{\mathbf{C}}_v(s)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{va}(s)] + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{vn} \right) = \hat{\mathbf{t}}_d(\ddot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v, \mathbf{z}_t, \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}) \quad (\text{A.39})$$

und mit (3.31) und (A.24) gilt

$$\dot{\hat{\mathbf{t}}}_d = -\hat{\kappa}_v^{-1} \left(\mathcal{L}^{-1}[s^2\hat{\mathbf{C}}_v(s)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{va}(s)] + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{vn} \right) = \dot{\hat{\mathbf{t}}}_d(\zeta_v, \dot{\mathbf{x}}_T, \dots, \overset{\cdot\cdot\cdot}{\ddot{\mathbf{x}}}_T, \mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v, \mathbf{z}_t, \mathbf{z}_r, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \overset{\cdot\cdot\cdot}{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}), \quad (\text{A.40})$$

was mit (A.22), (A.23) und (A.34) zu

$$\begin{aligned}\ddot{\hat{\mathbf{t}}}_d &= -\hat{\kappa}_v^{-1} \left(\mathcal{L}^{-1}[s^3\hat{\mathbf{C}}_v(s)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{va}(s)] + \frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{vn} \right), \\ &= \ddot{\hat{\mathbf{t}}}_d(\zeta_v, \dot{\zeta}_v, \zeta_\omega, \dot{\mathbf{x}}_T, \dots, \overset{(5)}{\ddot{\mathbf{x}}}_T, \varphi_T, \dot{\varphi}_T, \ddot{\varphi}_T, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \overset{\cdot\cdot\cdot}{\ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}}, \overset{\cdot\cdot\cdot}{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}) \quad (\text{A.41})\end{aligned}$$

führt. $\ddot{\hat{\mathbf{t}}}_d$ ist mit V1 bis V9 aus Abschnitt 4.2 beliebig oft stetig differenzierbar in den angegebenen Argumenten.

Funktion $\mathbf{l}(\mathbf{q}_{xy})$

Mit (A.4) lässt sich $\mathbf{l}(\mathbf{q}_{xy})$ aus (2.30) wie folgt schreiben

$$\mathbf{l} = \frac{1}{q_p} [q_y \quad -q_x] = \mathbf{l}(\mathbf{t}) = \left[-\frac{t_1}{\|\mathbf{t}\| - t_3} \quad -\frac{t_2}{\|\mathbf{t}\| - t_3} \right] = \mathbf{l}(\dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v, \mathbf{z}_t, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}) \quad (\text{A.42})$$

und mit der Ableitung von (A.17), (A.24) und (A.74) folgt

$$\dot{\mathbf{l}} = \dot{\mathbf{l}}(\mathbf{t}, \dot{\mathbf{t}}) = \dot{\mathbf{l}}(\dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \overset{\cdot\cdot\cdot}{\ddot{\mathbf{x}}}_T, \varphi_T, \mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v, \mathbf{z}_t, \mathbf{z}_r, z_\varphi, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}) \quad (\text{A.43})$$

und mit der Ableitung von (A.22), (A.23), (A.35) und (A.34)

$$\ddot{\mathbf{I}} = \ddot{\mathbf{I}}(\mathbf{t}, \dot{\mathbf{t}}, \ddot{\mathbf{t}}) = \ddot{\mathbf{I}}(\zeta_v, \zeta_\omega, \dot{\mathbf{x}}_T, \dots, \ddot{\mathbf{x}}_T, \varphi_T, \dot{\varphi}_T, \ddot{\varphi}_T, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}). \quad (\text{A.44})$$

Mit V1 bis V6 aus Abschnitt 4.2 sind auch diese Funktionen beliebig oft stetig differenzierbar in den angegebenen Argumenten.

Rotationmatrix \mathbf{R}_s

\mathbf{R}_s aus (2.28) und deren Zeitableitungen lassen sich mit (A.18) als beliebig oft stetig differenzierbare Funktionen bzgl. der folgenden Argumente schreiben. Mit (A.18), der Zeitableitung von (A.18) mit (A.25) und der Zeitableitung von (A.25) mit (A.27) folgt

$$\mathbf{R}_s = \mathbf{R}_s(\varphi) = \mathbf{R}_s(\varphi_T, z_\varphi), \quad (\text{A.45})$$

$$\dot{\mathbf{R}}_s = \dot{\mathbf{R}}_s(\varphi, \dot{\varphi}) = \dot{\mathbf{R}}_s(\varphi_T, \dot{\varphi}_T, z_\varphi, z_{\omega z}), \quad (\text{A.46})$$

$$\ddot{\mathbf{R}}_s = \ddot{\mathbf{R}}_s(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) = \ddot{\mathbf{R}}_s(\zeta_v, \zeta_\omega, \dot{\mathbf{x}}_T, \dots, \ddot{\mathbf{x}}_T, \varphi_T, \dot{\varphi}_T, \ddot{\varphi}_T, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}). \quad (\text{A.47})$$

Schätzfehler $\Delta \dot{\mathbf{t}}_d$

$\Delta \dot{\mathbf{t}}_d$ aus (3.25) und dessen Zeitableitungen lassen sich mit (A.67) und (A.61) sowie (A.83) und (A.74) als Funktionen der folgenden Argumente schreiben. Mit (A.61), (A.67), (A.74) und (A.83) gilt

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{t}}_d &= \hat{\kappa}_v^{-1} \mathbf{K}_e(\tilde{\kappa}_v \hat{\kappa}_v^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{vn}(\dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v) + \boldsymbol{\sigma}_{va}(\zeta_v, \dot{\mathbf{x}}_T, \mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v, \mathbf{z}_t) - \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}) \\ &= \Delta \dot{\mathbf{t}}_d(\zeta_v, \dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v, \mathbf{z}_t, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}), \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{\mathbf{t}}_d &= \hat{\kappa}_v^{-1} \mathbf{K}_e(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{va} + \tilde{\kappa}_v \hat{\kappa}_v^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{vn} + \kappa_v \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}) \\ &= \Delta \ddot{\mathbf{t}}_d(\zeta_v, \dot{\zeta}_v, \dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v, \mathbf{z}_t, \mathbf{z}_r, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}). \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Mit V1 bis V6 aus Abschnitt 4.2 ist $\Delta \dot{\mathbf{t}}_d$ und mit V1 bis V9 auch $\Delta \ddot{\mathbf{t}}_d$ beliebig oft stetig differenzierbar in den angegebenen Argumenten.

A.5. Eigenschaften der Funktionen σ_{kl} und $\dot{\sigma}_{kl}$

In diesem Abschnitt wird auf die Berechnung der Schranken aus (4.10), (4.32), (4.33), (4.56), (4.57), (4.85), (4.86) näher eingegangen. Für die Bestimmung dieser Schranken, wird Gebrauch von folgendem Lemma gemacht:

Lemma 5. *Angenommen die vektorielle Funktion $\mathbf{f} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist eine stetig differenzierbare Funktion auf \mathcal{D} , wobei \mathcal{D} offen ist und $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ gilt, dann nimmt diese Funktion auf der abgeschlossenen Menge $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$ ein Maximum an. Gilt $\mathbf{a} := [\mathbf{z}'_1, \dots, \mathbf{z}'_i, \mathbf{z}'_{i+1}, \dots, \mathbf{z}'_k, \mathbf{x}'_T] \in \mathcal{S}$, $i \in [1, 2, \dots, k]$, wobei $\mathbf{x}_T = \mathbf{x}_T(t)$ als Funktion der Zeit geschrieben werden kann, lässt sich das Maximum der Funktion \mathbf{f} auf \mathcal{S} abschätzen durch*

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{a})\| \leq \max_{t \geq 0} \|\mathbf{f}|_{\mathbf{z}_i=0}\| + \sum_{i=1}^k \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{S}} \left\| \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{z}_i} \right\| \|\mathbf{z}_i\|. \quad (\text{A.50})$$

A. Funktionseigenschaften

Ebenso kann eine Differenz zweier Funktionswerte von \mathbf{f} , ausgewertet an zwei verschiedenen Punkten $\mathbf{a}_1 := [\mathbf{z}'_{11}, \dots, \mathbf{z}'_{i1}, \mathbf{z}'_{(i+1)1}, \dots, \mathbf{z}'_{k1}, \mathbf{x}'_T]' \in \mathcal{S}$ und $\mathbf{a}_2 := [\mathbf{z}'_{12}, \dots, \mathbf{z}'_{i2}, \mathbf{z}'_{(i+1)2}, \dots, \mathbf{z}'_{k2}, \mathbf{x}'_T]' \in \mathcal{S}$ abgeschätzt werden durch

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{a}_2) - \mathbf{f}(\mathbf{a}_1)\| \leq \sum_{i=1}^k \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{S}} \left\| \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{z}_i} \right\| \|\mathbf{z}_{i2} - \mathbf{z}_{i1}\|. \quad (\text{A.51})$$

Beweis. Der Mittelwertsatz für vektorielle Funktionen mehrerer Variablen, siehe beispielsweise [1], besagt, dass eine stetig differenzierbare Funktion $\mathbf{f}: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ und offen, mit $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, $\mathbf{x} + \mathbf{h} \in \mathcal{D}$, $0 \leq \lambda \leq 1$ geschrieben werden kann als

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \left(\int_0^1 \mathbf{Df}(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{h}) d\lambda \right) \mathbf{h}, \quad (\text{A.52})$$

wobei \mathbf{Df} die Jacobimatrix von \mathbf{f} ist und somit gilt

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq \sup_{\lambda} \|\mathbf{Df}(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{h})\| \|\mathbf{h}\|. \quad (\text{A.53})$$

Weiterhin gilt mit der abgeschlossenen Menge $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$,

$\mathbf{a}_z = [\mathbf{z}'_1, \dots, \mathbf{z}'_i, \mathbf{z}'_{i+1}, \dots, \mathbf{z}'_k, \mathbf{0}']' \in \mathcal{S}$, $i \in [1, 2, \dots, k]$, $\mathbf{a}_x = [\mathbf{0}', \dots, \mathbf{0}', \mathbf{x}'_T]' \in \mathcal{S}$, $\mathbf{a}_z + \mathbf{a}_x = \mathbf{a} \in \mathcal{S}$ und $0 \leq \lambda \leq 1$

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}_x) + \left(\int_0^1 \mathbf{Df}(\mathbf{a}_x + \lambda \mathbf{a}_z) d\lambda \right) \mathbf{a}_z \quad (\text{A.54})$$

$$= \mathbf{f}(\mathbf{a}_x) + \sum_{i=1}^k \left(\int_0^1 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}_i}(\mathbf{a}_x + \lambda \mathbf{a}_z) d\lambda \right) \mathbf{z}_i. \quad (\text{A.55})$$

Die Werte $\mathbf{f}(\mathbf{a}_x)$ und $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}_i}(\mathbf{a}_x + \lambda \mathbf{a}_z)$ nehmen über der abgeschlossenen Menge \mathcal{S} ein Maximum an und daher folgt

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{a})\| \leq \max_{\mathbf{a}_x \in \mathcal{S}} \|\mathbf{f}(\mathbf{a}_x)\| + \sum_{i=1}^k \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{S}} \left\| \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{z}_i} \right\| \|\mathbf{z}_i\|. \quad (\text{A.56})$$

Ist zudem $\mathbf{x}_T = \mathbf{x}_T(t)$ eine Funktion der Zeit, dann gilt

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{a})\| \leq \max_{t \geq 0} \|\mathbf{f}|_{\mathbf{z}_i=0}\| + \sum_{i=1}^k \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{S}} \left\| \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{z}_i} \right\| \|\mathbf{z}_i\|, \quad (\text{A.57})$$

wodurch die Aussage in (A.50) gezeigt ist.

Weiterhin gilt mit $\mathbf{a}_1 = [\mathbf{z}'_{11}, \dots, \mathbf{z}'_{i1}, \mathbf{z}'_{(i+1)1}, \dots, \mathbf{z}'_{k1}, \mathbf{0}] \in \mathcal{S}$, $i \in [1, 2, \dots, k]$, $\Delta \mathbf{a} = [\mathbf{z}'_{12} - \mathbf{z}'_{11}, \dots, \mathbf{z}'_{i2} - \mathbf{z}'_{i1}, \mathbf{z}'_{(i+1)2} - \mathbf{z}'_{(i+1)1}, \dots, \mathbf{z}'_{k2} - \mathbf{z}'_{k1}, \mathbf{0}] \in \mathcal{S}$, $\mathbf{a}_1 + \Delta \mathbf{a} =: \mathbf{a}_2 \in \mathcal{S}$ und $0 \leq \lambda \leq 1$

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}_2) - \mathbf{f}(\mathbf{a}_1) = \left(\int_0^1 \mathbf{Df}(\mathbf{a}_1 + \lambda \Delta \mathbf{a}) d\lambda \right) \Delta \mathbf{a} \quad (\text{A.58})$$

$$= \sum_{i=1}^k \left(\int_0^1 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}_i}(\mathbf{a}_1 + \lambda \Delta \mathbf{a}) d\lambda \right) (\mathbf{z}_{i2} - \mathbf{z}_{i1}). \quad (\text{A.59})$$

Da die Werte $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}_i}(\mathbf{a}_1 + \lambda \Delta \mathbf{a})$ über der abgeschlossenen Menge \mathcal{S} jeweils Maxima annehmen, folgt

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{a}_2) - \mathbf{f}(\mathbf{a}_1)\| \leq \sum_{i=1}^k \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{S}} \left\| \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{z}_i} \right\| \|(\mathbf{z}_{i2} - \mathbf{z}_{i1})\|, \quad (\text{A.60})$$

wodurch die Aussage in (A.51) gezeigt ist. \square

Eigenschaften der Funktion σ_{vn}

Die Funktion σ_{vn} aus (3.6) lässt sich mit (3.2) und (3.3) schreiben als

$$\begin{aligned} \sigma_{vn}(t, \mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v) &= \sigma_{vn}(\dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v) \\ &= (\hat{\mathbf{D}}\mathbf{A}_x + \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{A}_x \mathbf{A}_x) \mathbf{z}_x + (\hat{\mathbf{D}} - \mathbf{A}_v - \mathbf{A}_x) \mathbf{z}_v + \hat{\mathbf{D}} \dot{\mathbf{x}}_T - \ddot{\mathbf{x}}_T + \hat{g}_I \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

σ_{vn} ist beliebig oft stetig differenzierbar in den angegebenen Argumenten und für ein beliebig langes Zeitintervall $t \in [0, t_f]$ begrenzt, wenn V1 aus Abschnitt 4.2 erfüllt ist und in diesem Zeitintervall $t \in [0, t_f]$, $\mathbf{z}_{\text{ref}} \in \mathcal{Z}_{\text{ref}}$ und $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ gilt. Daher können mit Lemma 5 die Werte B_{σ}^{vn} , $B_{\sigma_i}^{vn}$, B_{σ}^{vn} und $L_{\sigma_\gamma}^{vn}$ aus (4.32), (4.33), (4.56) und (4.57) gewählt werden, so dass gilt

$$L_{\sigma_\gamma}^{vn} = \left\| \left[\hat{\mathbf{D}}\mathbf{A}_x + \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{A}_x \mathbf{A}_x \quad \hat{\mathbf{D}} - \mathbf{A}_v - \mathbf{A}_x \right] \right\|, \quad (\text{A.62})$$

$$\max_{t \geq 0} \|\sigma_{vn}|_{\mathbf{z}=0}\| \leq B_{\sigma_0}^{vn} = \max_{t \geq 0} \left\| \hat{\mathbf{D}} \dot{\mathbf{x}}_T \right\| + \max_{t \geq 0} \|\ddot{\mathbf{x}}_T\| + \|\hat{g}\|, \quad (\text{A.63})$$

$$B_{\sigma_i}^{vn} = L_{\sigma_\gamma}^{vn} \|\bar{\mathbf{z}}_0\| + \left\| \hat{\mathbf{D}} \dot{\mathbf{x}}_T(0) \right\| + \|\ddot{\mathbf{x}}_T(0)\| + \|\hat{g}\|, \quad (\text{A.64})$$

$$B_{\sigma_r}^{vn} = L_{\sigma_\gamma}^{vn} \rho_{\text{ref}} + B_{\sigma_0}^{vn}, \quad (\text{A.65})$$

$$B_{\sigma}^{vn} = L_{\sigma_\gamma}^{vn} \rho + B_{\sigma_0}^{vn}. \quad (\text{A.66})$$

Eigenschaften der Funktion σ_{va}

Die Funktion σ_{va} aus (3.7), gegeben durch

$$\sigma_{va} = -\tilde{\mathbf{f}}_v - \tilde{g}_I \mathbf{e}_z + \zeta_v - \tilde{k}_v \hat{k}_v \mathbf{z}_t, \quad (\text{A.67})$$

lässt sich mit $\tilde{\mathbf{f}}_v = \tilde{\mathbf{f}}_v(\mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v, \dot{\mathbf{x}}_T)$, siehe (A.16), als Funktion mit folgenden Argumenten schreiben:

$$\sigma_{va} = \sigma_{va}(\zeta_v, \dot{\mathbf{x}}_T, \mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v, \mathbf{z}_t) = \sigma_{va}(t, \mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v, \mathbf{z}_t). \quad (\text{A.68})$$

σ_{va} ist mit V1, V2 und V3 aus Abschnitt 4.2 beliebig oft stetig differenzierbar in den angegebenen Argumenten. Gilt $\mathbf{z}_{\text{ref}} \in \mathcal{Z}_{\text{ref}}$ und $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ für ein beliebig langes Zeitintervall $t \in [0, t_f]$, dann ist σ_{va} in diesem Zeitintervall begrenzt und die Schranken $B_{\sigma_i}^{va}$, $B_{\sigma_r}^{va}$, B_{σ}^{va} und L_{σ}^{va} aus (4.32), (4.33), (4.56) und (4.57) können mit Lemma 5 unter

A. Funktionseigenschaften

Verwendung einer Schätzung für $\tilde{\mathbf{f}}_v(\mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v, \dot{\mathbf{x}}_T)$, \tilde{g} , ζ_v und \mathcal{K} gewählt werden, so dass gilt

$$L_{\sigma_\gamma}^{va} = \max_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}, t \geq 0} \left\| \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}_v}{\partial \mathbf{z}} \right\| + B_{\hat{\kappa}}^v \hat{\kappa}_v \hat{\kappa}_v, \quad (\text{A.69})$$

$$\max_{t \geq 0} \|\sigma_{va}|_{\mathbf{z}=0}\| \leq B_{\sigma 0}^{va} = \max_{t \geq 0} \|\tilde{\mathbf{f}}_v|_{\mathbf{z}=0}\| + \|\tilde{g}\| + \max_{t \geq 0} \|\zeta_v\|, \quad (\text{A.70})$$

$$B_{\sigma_i}^{va} = L_{\sigma_\gamma}^{va} \|\bar{\mathbf{z}}_0\| + \|\tilde{g}\| + \|\zeta_v(0)\|, \quad (\text{A.71})$$

$$B_{\sigma_r}^{va} = L_{\sigma_\gamma}^{va} \rho_{\text{ref}} + B_{\sigma 0}^{va}, \quad (\text{A.72})$$

$$B_{\sigma}^{va} = L_{\sigma_\gamma}^{va} \rho + B_{\sigma 0}^{va}. \quad (\text{A.73})$$

Eigenschaften der Funktion $\dot{\sigma}_{vn}$

Die Funktion $\dot{\sigma}_{vn}$ aus (3.23), gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{vn} = & (\hat{\mathbf{D}}\mathbf{A}_x\mathbf{A}_x + 2\mathbf{A}_x - \mathbf{A}_x\mathbf{A}_x\mathbf{A}_x - \hat{\mathbf{D}} + \mathbf{A}_v)\mathbf{z}_x + \mathbf{K}_e \hat{\kappa}_v^2 \mathbf{z}_t + \hat{\mathbf{D}}\ddot{\mathbf{x}}_T - \ddot{\mathbf{x}}_T \quad (\text{A.74}) \\ & + (\hat{\mathbf{D}}\mathbf{A}_x + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{A}_v + \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{A}_x\mathbf{A}_x - \mathbf{A}_v\mathbf{A}_v + \mathbf{A}_x\mathbf{A}_v)\mathbf{z}_v + \mathbf{K}_e(\hat{\kappa}_v \hat{\kappa}_v^{-1} \sigma_{vn} + \sigma_{va} - \hat{\eta}_{va}), \end{aligned}$$

lässt sich mit den Zusammenhängen aus (A.61) und (A.68) als Funktion mit folgenden Argumenten schreiben:

$$\dot{\sigma}_{vn} = \dot{\sigma}_{vn}(\zeta_v, \dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v, \mathbf{z}_t, \hat{\eta}_{va}) = \dot{\sigma}_{vn}(t, \mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v, \mathbf{z}_t, \hat{\eta}_{va}). \quad (\text{A.75})$$

$\dot{\sigma}_{vn}$ ist mit V1 bis V4 aus Abschnitt 4.2 beliebig oft stetig differenzierbar in den angegebenen Argumenten. Gilt $\mathbf{z}_{\text{ref}} \in \mathcal{Z}_{\text{ref}}$, $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ und $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathcal{G}$ für ein beliebig langes Zeitintervall $t \in [0, t_f]$, dann ist $\dot{\sigma}_{vn}$ in diesem Zeitintervall begrenzt und die Schranken $B_{\dot{\sigma}}^{vn}$, $B_{\dot{\sigma}}^{vn}$, $L_{\dot{\sigma}_\gamma}^{vn}$ und $L_{\dot{\sigma}_{\gamma 0}}^{vn}$ aus (4.32), (4.85) und (4.86) können mit Lemma 5 wie folgt gewählt werden. Zunächst gilt

$$L_{\dot{\sigma}_z}^{vn} = \left\| \left[\begin{array}{c} \hat{\mathbf{D}}\mathbf{A}_x\mathbf{A}_x + 2\mathbf{A}_x - \mathbf{A}_x\mathbf{A}_x\mathbf{A}_x - \hat{\mathbf{D}} + \mathbf{A}_v \\ \hat{\mathbf{D}}\mathbf{A}_x + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{A}_v + \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{A}_x\mathbf{A}_x - \mathbf{A}_v\mathbf{A}_v + \mathbf{A}_x\mathbf{A}_v \\ (\hat{\mathbf{D}} - \mathbf{A}_v - \mathbf{A}_x)\hat{\kappa}_v^2 \end{array} \right]' \right\| + \|\mathbf{K}_e\| (B_{\hat{\kappa}}^v L_{\sigma_\gamma}^{vn} + L_{\sigma_\gamma}^{va}), \quad (\text{A.76})$$

$$L_{\dot{\sigma}_\eta}^{vn} = \|\mathbf{K}_e\|, \quad (\text{A.77})$$

$$\max_{t \geq 0, \mathbf{K} \in \mathcal{K}} \|\dot{\sigma}_{va}|_{\mathbf{z}=\hat{\eta}_{va}=0}\| \leq B_{\sigma 0}^{va} = \max_{t \geq 0} \|\hat{\mathbf{D}}\ddot{\mathbf{x}}_T\| + \max_{t \geq 0} \|\ddot{\mathbf{x}}_T\| + \|\mathbf{K}_e\| (B_{\hat{\kappa}}^v B_{\sigma 0}^{vn} + B_{\sigma 0}^{va}), \quad (\text{A.78})$$

$$B_{\dot{\sigma}_r}^{vn} = L_{\dot{\sigma}_z}^{vn} \rho_{\text{ref}} + L_{\dot{\sigma}_\eta}^{vn} \rho_{\eta_r}^{va} + B_{\sigma 0}^{va}, \quad (\text{A.79})$$

$$B_{\dot{\sigma}}^{vn} = L_{\dot{\sigma}_z}^{vn} \rho + L_{\dot{\sigma}_\eta}^{vn} \rho_\eta^{va} + B_{\sigma 0}^{va}, \quad (\text{A.80})$$

wobei $\rho_{\eta_r}^{va}$ und ρ_η^{va} aus (4.35) und (4.12) stammen. Damit und mit der Schranke γ_η^{va} für $\eta_{va,e} = \hat{\eta}_{va} - \eta_{va,\text{ref}}$ aus (4.61), kann mit Lemma 5 auf die Differenz $\dot{\sigma}_{vn} - \dot{\sigma}_{vn,\text{ref}}$ abgeschätzt werden, so dass gilt

$$\|\dot{\sigma}_{vn} - \dot{\sigma}_{vn,\text{ref}}\| \leq L_{\dot{\sigma}_z}^{vn} \gamma + L_{\dot{\sigma}_\eta}^{vn} \gamma_\eta^{va} \quad (\text{A.81})$$

$$= (L_{\dot{\sigma}_z}^{vn} + L_{\dot{\sigma}_\eta}^{vn} L_{\eta_\gamma}^{va}) \gamma + L_{\dot{\sigma}_\eta}^{vn} L_{\eta_{\gamma 0}}^{va} \bar{\gamma}_0 =: L_{\dot{\sigma}_\gamma}^{vn} \gamma + L_{\dot{\sigma}_{\gamma 0}}^{vn} \bar{\gamma}_0. \quad (\text{A.82})$$

Eigenschaften der Funktion $\dot{\sigma}_{va}$

Die Funktion $\dot{\sigma}_{va}$ ist gegeben durch die Zeitableitung von (3.7) und lautet mit (3.25) und (3.27)

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{va} = & -\dot{\mathbf{f}}_v + \dot{\boldsymbol{\zeta}}_v - \tilde{\kappa}_v \hat{\kappa}_v \mathbf{A}_t \mathbf{z}_t - \tilde{\kappa}_{vn} \mathbf{M} \mathbf{z}_r + \tilde{\kappa}_v \hat{\kappa}_v^3 \mathbf{z}_v \\ & - \tilde{\kappa}_v \hat{\kappa}_v^{-1} (\hat{\mathbf{D}} - \mathbf{A}_v - \mathbf{A}_x) (\tilde{\kappa}_v \hat{\kappa}_v^{-1} \sigma_{vn} + \sigma_{va} - \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}). \end{aligned} \quad (\text{A.83})$$

Mit den Zusammenhängen aus (A.9), (A.61), (A.67) und sowie mit

$$\dot{\mathbf{f}} = \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v, \mathbf{x}_T, \dot{\mathbf{z}}_x, \dot{\mathbf{z}}_v, \dot{\mathbf{x}}_T) = \dot{\mathbf{f}}_v(\boldsymbol{\zeta}_v, \dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v, \mathbf{z}_t, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}), \quad (\text{A.84})$$

siehe hierfür (A.22), (A.23), (A.24), kann $\dot{\sigma}_{va}$ als Funktion mit folgenden Argumenten geschrieben werden:

$$\dot{\sigma}_{va} = \dot{\sigma}_{va}(\boldsymbol{\zeta}_v, \dot{\boldsymbol{\zeta}}_v, \dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \varphi_T, \mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v, \mathbf{z}_t, z_\varphi, \mathbf{z}_r, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}) = \dot{\sigma}_{va}(t, \mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v, \mathbf{z}_t, z_\varphi, \mathbf{z}_r, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}). \quad (\text{A.85})$$

Mit V1 bis V9 aus Abschnitt 4.2 ist $\dot{\sigma}_{va}$ beliebig oft stetig differenzierbar in den angegebenen Argumenten. Gilt $\mathbf{z}_{\text{ref}} \in \mathcal{Z}_{\text{ref}}$, $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ und $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathcal{G}$ für ein beliebig langes Zeitintervall $t \in [0, t_f]$, dann ist $\dot{\sigma}_{va}$ in diesem Zeitintervall begrenzt und die Schranken $B_{\dot{\sigma}_r}^{va}$, $B_{\dot{\sigma}}^{va}$, $L_{\dot{\sigma}_\gamma}^{va}$ und $L_{\dot{\sigma}_{\gamma_0}}^{va}$ aus (4.32), (4.85) und (4.86) können mit Lemma 5 und mit $B_{\dot{\sigma}}^{vn}$, $B_{\dot{\sigma}}^{va}$, $L_{\dot{\sigma}_\gamma}^{vn}$ und $L_{\dot{\sigma}_\gamma}^{va}$ sowie mit einer Schätzung für $\dot{\mathbf{f}}_v$, $\dot{\boldsymbol{\zeta}}_v$ und der Menge \mathcal{K} folgendermaßen gewählt werden. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} L_{\dot{\sigma}_z}^{va} = & \max_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}, \|\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}\| \leq \rho_{\eta}^{va}, t \geq 0} \left\| \frac{\partial \dot{\mathbf{f}}_v}{\partial \mathbf{z}} \right\| \\ & + \max_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}, \|\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}\| \leq \rho_{\eta}^{va}, t \geq 0, \mathbf{K} \in \mathcal{K}} \left\| \tilde{\kappa}_v \left[\frac{\partial_n \mathbf{M} \mathbf{z}_r}{\partial \mathbf{z}_x} \quad \frac{\partial_n \mathbf{M} \mathbf{z}_r}{\partial \mathbf{z}_v} - \hat{\kappa}_v^3 \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad \hat{\kappa}_v \mathbf{A}_t + \frac{\partial_n \mathbf{M} \mathbf{z}_r}{\partial \mathbf{z}_t} \quad n \mathbf{M} \quad \frac{\partial_n \mathbf{M} \mathbf{z}_r}{\partial z_\varphi} \right] \right\| \\ & + (B_{\tilde{\kappa}}^v B_{\tilde{\kappa}}^v L_{\dot{\sigma}_\gamma}^{vn} + B_{\tilde{\kappa}}^v L_{\dot{\sigma}_\gamma}^{va}) \left\| \hat{\mathbf{D}} - \mathbf{A}_v - \mathbf{A}_x \right\|, \end{aligned} \quad (\text{A.86})$$

$$\begin{aligned} L_{\dot{\sigma}_\eta}^{va} = & \max_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}, \|\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}\| \leq \rho_{\eta}^{va}, t \geq 0} \left\| \frac{\partial \dot{\mathbf{f}}_v}{\partial \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}} \right\| + B_{\tilde{\kappa}}^v \left\| \hat{\mathbf{D}} - \mathbf{A}_v - \mathbf{A}_x \right\| \\ & + \max_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}, \|\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}\| \leq \rho_{\eta}^{va}, t \geq 0, \mathbf{K} \in \mathcal{K}} \left\| \tilde{\kappa}_v \frac{\partial_n \mathbf{M} \mathbf{z}_r}{\partial \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}} \right\|, \end{aligned} \quad (\text{A.87})$$

$$B_{\dot{\sigma}_0}^{va} = \max_{t \geq 0} \left\| \dot{\mathbf{f}}_v|_{\mathbf{z}=\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}=0} \right\| + \max_{t \geq 0} \left\| \dot{\boldsymbol{\zeta}}_v \right\| + (B_{\tilde{\kappa}}^v B_{\tilde{\kappa}}^v B_{\dot{\sigma}_0}^{vn} + B_{\tilde{\kappa}}^v B_{\dot{\sigma}_0}^{va}) \left\| \hat{\mathbf{D}} - \mathbf{A}_v - \mathbf{A}_x \right\|, \quad (\text{A.88})$$

$$B_{\dot{\sigma}_r}^{va} = L_{\dot{\sigma}_z}^{va} \rho_{\text{ref}} + L_{\dot{\sigma}_\eta}^{va} \rho_{\eta r}^{va} + B_{\dot{\sigma}_0}^{va}, \quad (\text{A.89})$$

$$B_{\dot{\sigma}}^{va} = L_{\dot{\sigma}_z}^{va} \rho + L_{\dot{\sigma}_\eta}^{va} \rho_{\eta}^{va} + B_{\dot{\sigma}_0}^{va}, \quad (\text{A.90})$$

wobei $\rho_{\eta r}^{va}$ und ρ_{η}^{va} aus (4.35) und (4.12) stammen. Mit diesen Schranken und mit der Schranke γ_{η}^{va} für $\boldsymbol{\eta}_{va,e} = \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va} - \boldsymbol{\eta}_{va,\text{ref}}$ aus (4.61), kann mit Lemma 5 die Differenz $\dot{\sigma}_{va} - \dot{\sigma}_{va,\text{ref}}$ abgeschätzt werden, so dass gilt:

$$\left\| \dot{\sigma}_{va} - \dot{\sigma}_{va,\text{ref}} \right\| \leq L_{\dot{\sigma}_z}^{va} \gamma + L_{\dot{\sigma}_\eta}^{va} \gamma_{\eta}^{va} \quad (\text{A.91})$$

$$= (L_{\dot{\sigma}_z}^{va} + L_{\dot{\sigma}_\eta}^{va} L_{\eta_\gamma}^{va}) \gamma + L_{\dot{\sigma}_\eta}^{va} L_{\eta_{\gamma_0}}^{va} \bar{\gamma}_0 =: L_{\dot{\sigma}_\gamma}^{va} \gamma + L_{\dot{\sigma}_{\gamma_0}}^{va} \bar{\gamma}_0. \quad (\text{A.92})$$

Eigenschaften der Funktion $\sigma_{\omega n}$

Die Funktion $\sigma_{\omega n}$ aus (3.41) ist mit der Definition von ${}_n\boldsymbol{\omega}_{xy} = \hat{\kappa}_v^{-1}\boldsymbol{\omega}_{xy}$ aus (2.12) und mit (3.29), (3.38) gegeben durch

$$\boldsymbol{\sigma}_{\omega n} = \hat{\mathbf{J}}^{-1}(\hat{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}) - \left[\begin{array}{c} \hat{\kappa}_v({}_n\dot{\boldsymbol{\omega}}_{xyd} + \mathbf{I}_{2 \times 3}(\mathbf{A}_r \mathbf{z}_r - \hat{\kappa}_v^{-1} {}_n\mathbf{M}' \mathbf{z}_t)) \\ \ddot{\varphi}_T + a_{\varphi} \dot{z}_{\varphi} + (\dot{\mathbf{I}}\mathbf{R}_s + \dot{\mathbf{I}}\dot{\mathbf{R}}_s)\boldsymbol{\omega}_{xy} + \hat{\kappa}_v a_{\omega z} z_{\omega z} - \hat{\kappa}_v^2 z_{\varphi} \end{array} \right] \quad (\text{A.93})$$

und lässt sich mit den Zusammenhängen aus (A.28), (A.5), (A.25), (A.42), (A.43), (A.45), (A.46), (A.19) und (A.20) als Funktion folgender Argumente schreiben:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\omega n} = \boldsymbol{\sigma}_{\omega n}(\boldsymbol{\zeta}_v, \dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \varphi_T, \dot{\varphi}_T, \ddot{\varphi}_T, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}). \quad (\text{A.94})$$

Mit V1 bis V6 aus Abschnitt 4.2 ist $\boldsymbol{\sigma}_{\omega n}$ beliebig oft stetig differenzierbar in den angegebenen Argumenten, da mit V1 bis V6 alle zu substituierenden Funktionen beliebig oft stetig differenzierbar in den angegebenen Argumenten sind. Gilt $\mathbf{z}_{\text{ref}} \in \mathcal{Z}_{\text{ref}}$, $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ und $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathcal{G}$ für ein beliebig langes Zeitintervall $t \in [0, t_f]$, dann ist $\boldsymbol{\sigma}_{\omega n}$ in diesem Zeitintervall begrenzt und die Schranken $B_{\sigma}^{\omega n}$, $B_{\sigma}^{\omega n}$, $B_{\sigma}^{\omega n}$, $L_{\sigma}^{\omega n}$ und $L_{\sigma}^{\omega n}$ aus (4.32), (4.33), (4.56) und (4.57) können mit Lemma 5 folgendermaßen gewählt werden. Hierzu werden Schranken für $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}$, $\dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}$, $\ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}$, $\boldsymbol{\eta}_{va,\text{ref}}$, $\dot{\boldsymbol{\eta}}_{va,\text{ref}}$, $\ddot{\boldsymbol{\eta}}_{va,\text{ref}}$ benötigt, welche einerseits für $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}$ und $\boldsymbol{\eta}_{va,\text{ref}}$ durch ρ_{η}^{va} und $\rho_{\eta r}^{va}$ aus (4.12) und (4.35) gegeben sind und andererseits aus den entsprechenden Zeitableitungen von (4.58) und (4.34) gewonnen werden können. Für diese gilt mit den oben getroffenen Annahmen $\forall t \in [0, t_f]$

$$\left\| \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va} \right\| \leq B_{sC}^v (B_{\sigma}^{va} + B_{\tilde{\kappa}}^v B_{\sigma}^{vn}) + B_{s\text{Che}}^v \bar{\gamma}_0 =: \rho_{\hat{\eta}}^{va}, \quad (\text{A.95})$$

$$\left\| \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va} \right\| \leq B_{s^2C}^v (B_{\sigma}^{va} + B_{\tilde{\kappa}}^v B_{\sigma}^{vn}) + B_{s^2\text{Che}}^v \bar{\gamma}_0 =: \rho_{\ddot{\eta}}^{va}, \quad (\text{A.96})$$

$$\left\| \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va} \right\| \leq B_{s^3C}^v (B_{\sigma}^{va} + B_{\tilde{\kappa}}^v B_{\sigma}^{vn}) + B_{s^3\text{Che}}^v \bar{\gamma}_0 =: \rho_{\ddot{\eta}}^{va}, \quad (\text{A.97})$$

mit

$$B_{sC}^v \geq \|s\mathbf{C}_v(s)\|_{\mathcal{L}_1}, \quad B_{s\text{Che}}^v \geq \|s\mathbf{C}_v(s)\mathbf{H}_{ev}^{-1}(s)\|_{\mathcal{L}_1}, \quad (\text{A.98})$$

$$B_{s^2C}^v \geq \|s^2\mathbf{C}_v(s)\|_{\mathcal{L}_1}, \quad B_{s^2\text{Che}}^v \geq \|s^2\mathbf{C}_v(s)\mathbf{H}_{ev}^{-1}(s)\|_{\mathcal{L}_1}, \quad (\text{A.99})$$

$$B_{s^3C}^v \geq \|s^3\mathbf{C}_v(s)\|_{\mathcal{L}_1}, \quad B_{s^3\text{Che}}^v \geq \|s^3\mathbf{C}_v(s)\mathbf{H}_{ev}^{-1}(s)\|_{\mathcal{L}_1}. \quad (\text{A.100})$$

Ebenso gilt mit den oben getroffenen Annahmen $\forall t \in [0, t_f]$

$$\left\| \dot{\boldsymbol{\eta}}_{va,\text{ref}} \right\| \leq B_{sC}^v (B_{\sigma}^{va} + B_{\tilde{\kappa}}^v B_{\sigma}^{vn}) =: \rho_{\dot{\eta}r}^{va}, \quad (\text{A.101})$$

$$\left\| \ddot{\boldsymbol{\eta}}_{va,\text{ref}} \right\| \leq B_{s^2C}^v (B_{\sigma}^{va} + B_{\tilde{\kappa}}^v B_{\sigma}^{vn}) =: \rho_{\ddot{\eta}r}^{va}, \quad (\text{A.102})$$

$$\left\| \ddot{\boldsymbol{\eta}}_{va,\text{ref}} \right\| \leq B_{s^3C}^v (B_{\sigma}^{va} + B_{\tilde{\kappa}}^v B_{\sigma}^{vn}) =: \rho_{\ddot{\eta}r}^{va}. \quad (\text{A.103})$$

Mit diesen Schranken und mit $\text{arg} := \{\mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \mathbf{K}, t\}$ und

$\mathcal{S} := \mathcal{Z} \times \{\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va} \mid \|\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}\| \leq \rho_{\eta}^{va}\} \times \{\dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va} \mid \|\dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}\| \leq \rho_{\dot{\eta}}^{va}\} \times \{\ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va} \mid \|\ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}\| \leq \rho_{\ddot{\eta}}^{va}\} \times \mathcal{K} \times \mathbb{R}_0^+$ gilt

$$L_{\sigma_{\mathbf{z}}}^{\omega n} = \max_{arg \in S} \left\| \frac{\partial \sigma_{\omega n}}{\partial \mathbf{z}} \right\|, L_{\sigma_{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega n} = \max_{arg \in S} \left\| \frac{\partial \sigma_{\omega n}}{\partial \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}} \right\|, L_{\sigma_{\dot{\boldsymbol{\eta}}}}^{\omega n} = \max_{arg \in S} \left\| \frac{\partial \sigma_{\omega n}}{\partial \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}} \right\|, L_{\sigma_{\ddot{\boldsymbol{\eta}}}}^{\omega n} = \max_{arg \in S} \left\| \frac{\partial \sigma_{\omega n}}{\partial \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}} \right\|, \quad (\text{A.104})$$

$$B_{\sigma_{\mathbf{0}}}^{\omega n} = \max_{t \geq 0, \mathbf{K} \in \mathcal{K}} \left\| \sigma_{\omega n} |_{\mathbf{z}=\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}=\dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}=\ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}=\mathbf{0}} \right\|, \quad (\text{A.105})$$

$$B_{\sigma_{\mathbf{i}}}^{\omega n} = \max_{\mathbf{K} \in \mathcal{K}} \left\| \sigma_{\omega n} |_{t=0, \mathbf{z}=\bar{\mathbf{z}}_0, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}=\dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}=\ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}=\mathbf{0}} \right\|, \quad (\text{A.106})$$

$$B_{\sigma_{\mathbf{r}}}^{\omega n} = L_{\sigma_{\mathbf{z}}}^{\omega n} \rho_r + L_{\sigma_{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega n} \rho_{\eta r}^{va} + L_{\sigma_{\dot{\boldsymbol{\eta}}}}^{\omega n} \rho_{\dot{\eta} r}^{va} + L_{\sigma_{\ddot{\boldsymbol{\eta}}}}^{\omega n} \rho_{\ddot{\eta} r}^{va} + B_{\sigma_{\mathbf{0}}}^{\omega n}, \quad (\text{A.107})$$

$$B_{\sigma_{\boldsymbol{\rho}}}^{\omega n} = L_{\sigma_{\mathbf{z}}}^{\omega n} \rho + L_{\sigma_{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega n} \rho_{\eta}^{va} + L_{\sigma_{\dot{\boldsymbol{\eta}}}}^{\omega n} \rho_{\dot{\eta}}^{va} + L_{\sigma_{\ddot{\boldsymbol{\eta}}}}^{\omega n} \rho_{\ddot{\eta}}^{va} + B_{\sigma_{\mathbf{0}}}^{\omega n}. \quad (\text{A.108})$$

Die Differenz $\sigma_{\omega n} - \sigma_{\omega n, \text{ref}}$ kann mit Lemma 5 und mit den oben getroffenen Annahmen und angegebenen Schranken, der Schranke γ_{η}^{va} für $\boldsymbol{\eta}_{va,e} = \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va} - \boldsymbol{\eta}_{va, \text{ref}}$ aus (4.61) und zusätzlich mit Schranken für $\dot{\boldsymbol{\eta}}_{va,e}$ und $\ddot{\boldsymbol{\eta}}_{va,e}$ folgendermaßen abgeschätzt werden. Die Schranken für $\dot{\boldsymbol{\eta}}_{va,e}$ und $\ddot{\boldsymbol{\eta}}_{va,e}$ können mit den entsprechenden Zeitableitungen von $\boldsymbol{\eta}_{va,e}$ aus (4.59) gewonnen werden, so dass gilt $\forall t \in [0, t_f]$

$$\left\| \dot{\boldsymbol{\eta}}_{va,e} \right\| \leq B_{sC}^v (L_{\sigma_{\boldsymbol{\eta}}}^{va} + B_{\tilde{\kappa}}^v L_{\sigma_{\boldsymbol{\eta}}}^{vn}) \gamma + B_{s\text{Che}}^v \bar{\gamma}_0 =: L_{\dot{\boldsymbol{\eta}}\gamma}^{va} \gamma + L_{\dot{\boldsymbol{\eta}}\bar{\gamma}_0}^{va} \bar{\gamma}_0 =: \gamma_{\dot{\boldsymbol{\eta}}}^{va}, \quad (\text{A.109})$$

$$\left\| \ddot{\boldsymbol{\eta}}_{va,e} \right\| \leq B_{s^2C}^v (L_{\sigma_{\boldsymbol{\eta}}}^{va} + B_{\tilde{\kappa}}^v L_{\sigma_{\boldsymbol{\eta}}}^{vn}) \gamma + B_{s^2\text{Che}}^v \bar{\gamma}_0 =: L_{\ddot{\boldsymbol{\eta}}\gamma}^{va} \gamma + L_{\ddot{\boldsymbol{\eta}}\bar{\gamma}_0}^{va} \bar{\gamma}_0 =: \gamma_{\ddot{\boldsymbol{\eta}}}^{va}, \quad (\text{A.110})$$

$$\left\| \ddot{\boldsymbol{\eta}}_{va,e} \right\| \leq B_{s^3C}^v (L_{\sigma_{\boldsymbol{\eta}}}^{va} + B_{\tilde{\kappa}}^v L_{\sigma_{\boldsymbol{\eta}}}^{vn}) \gamma + B_{s^3\text{Che}}^v \bar{\gamma}_0 =: L_{\ddot{\boldsymbol{\eta}}\gamma}^{va} \gamma + L_{\ddot{\boldsymbol{\eta}}\bar{\gamma}_0}^{va} \bar{\gamma}_0 =: \gamma_{\ddot{\boldsymbol{\eta}}}^{va}. \quad (\text{A.111})$$

Mit diesen Schranken folgt $\forall t \in [0, t_f]$

$$\begin{aligned} \left\| \sigma_{\omega n} - \sigma_{\omega n, \text{ref}} \right\| &\leq L_{\sigma_{\mathbf{z}}}^{\omega n} \gamma + L_{\sigma_{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega n} \gamma^{va} + L_{\sigma_{\dot{\boldsymbol{\eta}}}}^{\omega n} \gamma_{\dot{\eta}}^{va} + L_{\sigma_{\ddot{\boldsymbol{\eta}}}}^{\omega n} \gamma_{\ddot{\eta}}^{va} \\ &= (L_{\sigma_{\mathbf{z}}}^{\omega n} + L_{\sigma_{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega n} L_{\eta\gamma}^{va} + L_{\sigma_{\dot{\boldsymbol{\eta}}}}^{\omega n} L_{\dot{\eta}\gamma}^{va} + L_{\sigma_{\ddot{\boldsymbol{\eta}}}}^{\omega n} L_{\ddot{\eta}\gamma}^{va}) \gamma + (L_{\sigma_{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega n} L_{\eta\bar{\gamma}_0}^{va} + L_{\sigma_{\dot{\boldsymbol{\eta}}}}^{\omega n} L_{\dot{\eta}\bar{\gamma}_0}^{va} + L_{\sigma_{\ddot{\boldsymbol{\eta}}}}^{\omega n} L_{\ddot{\eta}\bar{\gamma}_0}^{va}) \bar{\gamma}_0 \\ &=: L_{\sigma_{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega n} \gamma + L_{\sigma_{\bar{\gamma}_0}}^{\omega n} \bar{\gamma}_0. \end{aligned} \quad (\text{A.112})$$

Eigenschaften der Funktion $\sigma_{\omega a}$

Die Funktion $\sigma_{\omega a}$ aus (3.41) ist mit der Definition von ${}^n \boldsymbol{\omega}_{xy} = \hat{\kappa}_v^{-1} \boldsymbol{\omega}_{xy}$ aus (2.12) gegeben durch

$$\sigma_{\omega a} = -\tilde{\mathbf{f}}_{\omega} + \boldsymbol{\zeta}_{\omega} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \mathbf{R}_s \hat{\kappa}_v {}^n \dot{\boldsymbol{\omega}}_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{A.113})$$

und lässt sich mit dem Zusammenhang aus (A.29), (A.42) und (A.45) sowie mit

$$\tilde{\mathbf{f}}_{\omega} = \tilde{\mathbf{f}}_{\omega}(\mathbf{x}_{T\varphi}) = \tilde{\mathbf{f}}_{\omega}(\dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\ddot{\mathbf{x}}}_T, \varphi_T, \dot{\varphi}_T, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}), \quad (\text{A.114})$$

siehe hierzu (A.21), als Funktion mit folgenden Argumenten schreiben:

$$\sigma_{\omega a} = \sigma_{\omega a}(\boldsymbol{\zeta}_v, \boldsymbol{\zeta}_{\omega}, \dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\ddot{\mathbf{x}}}_T, \ddot{\ddot{\ddot{\mathbf{x}}}}_T, \varphi_T, \dot{\varphi}_T, \ddot{\varphi}_T, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \hat{\boldsymbol{\omega}}_a). \quad (\text{A.115})$$

Mit V1 bis V6 aus Abschnitt 4.2 ist $\sigma_{\omega a}$ beliebig oft stetig differenzierbar in den angegebenen Argumenten, da mit V1 bis V6 alle zu substituierenden Funktionen beliebig oft stetig differenzierbar in den angegebenen Argumenten sind. Gilt $\mathbf{z}_{\text{ref}} \in$

A. Funktionseigenschaften

\mathcal{Z}_{ref} , $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ und $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathcal{G}$ für ein beliebig langes Zeitintervall $t \in [0, t_f]$, dann ist $\boldsymbol{\sigma}_{\omega a}$ in diesem Zeitintervall begrenzt und die Schranken $B_{\boldsymbol{\sigma}_i}^{\omega a}$, $B_{\boldsymbol{\sigma}_r}^{\omega a}$, $B_{\boldsymbol{\sigma}}^{\omega a}$, $L_{\boldsymbol{\sigma}_\eta}^{\omega a}$ und $L_{\boldsymbol{\sigma}_{\eta_0}}^{\omega a}$ aus (4.32), (4.33), (4.56) und (4.57) können mit Lemma 5 folgendermaßen gewählt werden. Mit einer Schätzung von $\tilde{\mathbf{f}}_\omega$ und $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_\omega$ sowie mit $\text{arg} = \{\mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}, \mathbf{K}, t\}$ und $\mathcal{S} = \mathcal{Z} \times \{\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va} \mid \|\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}\| \leq \rho_\eta^{va}\} \times \{\dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va} \mid \|\dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}\| \leq \rho_{\dot{\eta}}^{va}\} \times \{\ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va} \mid \|\ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}\| \leq \rho_{\ddot{\eta}}^{va}\} \times \{\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a} \mid \|\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}\| \leq \rho_\eta^{\omega a}\} \times \mathcal{K} \times \mathbb{R}_0^+$, wobei ρ_η^{va} , $\rho_{\dot{\eta}}^{va}$, $\rho_{\ddot{\eta}}^{va}$ und $\rho_\eta^{\omega a}$ aus (4.60), (A.95) und (A.96) stammen, gilt

$$L_{\boldsymbol{\sigma}_z}^{\omega a} = \max_{\text{arg} \in \mathcal{S}} \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\omega a}}{\partial \mathbf{z}} \right\|, L_{\boldsymbol{\sigma}_\eta}^{\omega a} = \max_{\text{arg} \in \mathcal{S}} \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\omega a}}{\partial \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}} \right\|, L_{\boldsymbol{\sigma}_{\dot{\eta}}}^{\omega a} = \max_{\text{arg} \in \mathcal{S}} \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\omega a}}{\partial \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}} \right\|, L_{\boldsymbol{\sigma}_{\ddot{\eta}}}^{\omega a} = \max_{\text{arg} \in \mathcal{S}} \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\omega a}}{\partial \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}} \right\|, \quad (\text{A.116})$$

$$\begin{aligned} L_{\boldsymbol{\sigma}_{\eta_\omega}}^{\omega a} &= \max_{\text{arg} \in \mathcal{S}} \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\omega a}}{\partial \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}} \right\| = \max_{\text{arg} \in \mathcal{S}} \left\| \frac{1}{q_p} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ q_y \cos(\varphi) - q_x \sin(\varphi) & -q_x \cos(\varphi) - q_y \sin(\varphi) & 0 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \max_{\mathbf{q}_{xy}} \left\{ \frac{1}{q_p} \sqrt{q_x^2 + q_y^2} \right\} = \max_{t_{e3}} \left\{ \sqrt{\frac{1+t_{e3}}{1-t_{e3}}} \right\} = \sqrt{\frac{1+t_{e3,\max}}{1-t_{e3,\max}}}, \end{aligned} \quad (\text{A.117})$$

mit $t_{e3,\max}$ definiert in (4.19). Weiterhin gilt

$$B_{\boldsymbol{\sigma}_0}^{\omega a} = \max_{t \geq 0, \mathbf{K} \in \mathcal{K}} \left\| \boldsymbol{\sigma}_{\omega a} \Big|_{\mathbf{z}=\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}=\dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}=\ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}=\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}=\mathbf{0}} \right\|, \quad (\text{A.118})$$

$$B_{\boldsymbol{\sigma}_i}^{\omega a} = \max_{\mathbf{K} \in \mathcal{K}} \left\| \boldsymbol{\sigma}_{\omega n} \Big|_{\mathbf{z}=\tilde{\mathbf{z}}_0, t=0, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}=\dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}=\ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}=\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}=\mathbf{0}} \right\|. \quad (\text{A.119})$$

Ebenso gilt mit $\rho_{\eta r}^{va}$, $\rho_{\dot{\eta} r}^{va}$, $\rho_{\ddot{\eta} r}^{va}$ und $\rho_{\eta r}^{\omega a}$ aus (4.35), (A.101) und (A.102)

$$\begin{aligned} B_{\boldsymbol{\sigma}_r}^{\omega a} &= L_{\boldsymbol{\sigma}_z}^{\omega a} \rho_{\text{ref}} + L_{\boldsymbol{\sigma}_\eta}^{\omega a} \rho_{\eta r}^{va} + L_{\boldsymbol{\sigma}_{\dot{\eta}}}^{\omega a} \rho_{\dot{\eta} r}^{va} + L_{\boldsymbol{\sigma}_{\ddot{\eta}}}^{\omega a} \rho_{\ddot{\eta} r}^{va} + L_{\boldsymbol{\sigma}_{\eta_\omega}}^{\omega a} \rho_{\eta r}^{\omega a} + B_{\boldsymbol{\sigma}_0}^{\omega n} \\ &= L_{\boldsymbol{\sigma}_z}^{\omega a} \rho_{\text{ref}} + L_{\boldsymbol{\sigma}_\eta}^{\omega a} \rho_{\eta r}^{va} + L_{\boldsymbol{\sigma}_{\dot{\eta}}}^{\omega a} \rho_{\dot{\eta} r}^{va} + L_{\boldsymbol{\sigma}_{\ddot{\eta}}}^{\omega a} \rho_{\ddot{\eta} r}^{va} + L_{\boldsymbol{\sigma}_{\eta_\omega}}^{\omega a} (B_C^\omega (B_{\boldsymbol{\sigma}_r}^{\omega a} + B_{\tilde{\kappa}}^\omega B_{\boldsymbol{\sigma}_r}^{\omega n})) + B_{\boldsymbol{\sigma}_0}^{\omega n}, \end{aligned} \quad (\text{A.120})$$

worin $B_{\boldsymbol{\sigma}_r}^{\omega a}$ implizit definiert ist. Explizit gilt

$$B_{\boldsymbol{\sigma}_r}^{\omega a} = (1 - L_{\boldsymbol{\sigma}_{\eta_\omega}}^{\omega a} B_C^\omega)^{-1} (L_{\boldsymbol{\sigma}_z}^{\omega a} \rho_{\text{ref}} + L_{\boldsymbol{\sigma}_\eta}^{\omega a} \rho_{\eta r}^{va} + L_{\boldsymbol{\sigma}_{\dot{\eta}}}^{\omega a} \rho_{\dot{\eta} r}^{va} + L_{\boldsymbol{\sigma}_{\ddot{\eta}}}^{\omega a} \rho_{\ddot{\eta} r}^{va} + L_{\boldsymbol{\sigma}_{\eta_\omega}}^{\omega a} B_C^\omega B_{\tilde{\kappa}}^\omega B_{\boldsymbol{\sigma}_r}^{\omega n} + B_{\boldsymbol{\sigma}_0}^{\omega n}) \quad (\text{A.121})$$

und mit der Voraussetzung V6 aus Abschnitt 4.2 gilt $L_{\boldsymbol{\sigma}_{\eta_\omega}}^{\omega a} B_C^\omega < 1$, da mit (A.117), (4.19), (4.20) und (A.3) folgt

$$L_{\boldsymbol{\sigma}_{\eta_\omega}}^{\omega a} B_C^\omega = \sqrt{\frac{1+t_{e3,\max}}{1-t_{e3,\max}}} B_C^\omega < \sqrt{\frac{1+t_{e3,\max}}{1-t_{e3,\max}}} \sqrt{\frac{1-t_{e3,\max}}{1+t_{e3,\max}}} = 1. \quad (\text{A.122})$$

Somit kann auch $B_{\boldsymbol{\sigma}_r}^{\omega a}$ explizit angegeben werden und lautet mit ρ_η^{va} , $\rho_{\dot{\eta}}^{va}$, $\rho_{\ddot{\eta}}^{va}$ und $\rho_\eta^{\omega a}$ aus (4.60), (A.95) und (A.96):

$$\begin{aligned} B_{\boldsymbol{\sigma}_r}^{\omega a} &= (1 - L_{\boldsymbol{\sigma}_{\eta_\omega}}^{\omega a} B_C^\omega)^{-1} \cdot \\ &\quad \left(L_{\boldsymbol{\sigma}_z}^{\omega a} \rho + L_{\boldsymbol{\sigma}_\eta}^{\omega a} \rho_\eta^{va} + L_{\boldsymbol{\sigma}_{\dot{\eta}}}^{\omega a} \rho_{\dot{\eta}}^{va} + L_{\boldsymbol{\sigma}_{\ddot{\eta}}}^{\omega a} \rho_{\ddot{\eta}}^{va} + L_{\boldsymbol{\sigma}_{\eta_\omega}}^{\omega a} (B_C^\omega B_{\tilde{\kappa}}^\omega B_{\boldsymbol{\sigma}_r}^{\omega n} + B_{\text{Che}}^\omega \tilde{\gamma}_0) + B_{\boldsymbol{\sigma}_0}^{\omega n} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.123})$$

Die Differenz $\sigma_{\omega a} - \sigma_{\omega a, \text{ref}}$ kann mit Lemma 5 und mit den oben getroffenen Annahmen und angegebenen Schranken, der Schranke $\gamma_{\eta}^{\omega a}$ für $\eta_{\omega a, e} = \hat{\eta}_{\omega a} - \eta_{\omega a, \text{ref}}$ aus (4.61) und zusätzlich mit den Schranken γ_{η}^{va} , $\gamma_{\dot{\eta}}^{va}$, $\gamma_{\ddot{\eta}}^{va}$ aus (4.61), (A.109) und (A.110) abgeschätzt werden, so dass gilt $\forall t \in [0, t_f]$

$$\begin{aligned} \|\sigma_{\omega a} - \sigma_{\omega a, \text{ref}}\| &\leq L_{\sigma \mathbf{z}}^{\omega a} \gamma + L_{\sigma \boldsymbol{\eta}}^{\omega a} \gamma_{\eta}^{va} + L_{\sigma \dot{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega a} \gamma_{\dot{\eta}}^{va} + L_{\sigma \ddot{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega a} \gamma_{\ddot{\eta}}^{va} + L_{\sigma \boldsymbol{\eta}_{\omega}}^{\omega a} \gamma_{\eta}^{\omega a} \\ &= (L_{\sigma \mathbf{z}}^{\omega a} + L_{\sigma \boldsymbol{\eta}}^{\omega a} L_{\boldsymbol{\eta} \gamma}^{va} + L_{\sigma \dot{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega a} L_{\dot{\boldsymbol{\eta}} \gamma}^{va} + L_{\sigma \ddot{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega a} L_{\ddot{\boldsymbol{\eta}} \gamma}^{va} + L_{\sigma \boldsymbol{\eta}_{\omega}}^{\omega a} L_{\boldsymbol{\eta} \gamma}^{\omega a}) \gamma + \\ &\quad (L_{\sigma \boldsymbol{\eta}}^{\omega a} L_{\boldsymbol{\eta} \bar{\gamma}_0}^{va} + L_{\sigma \dot{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega a} L_{\dot{\boldsymbol{\eta}} \bar{\gamma}_0}^{va} + L_{\sigma \ddot{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega a} L_{\ddot{\boldsymbol{\eta}} \bar{\gamma}_0}^{va} + L_{\sigma \boldsymbol{\eta}_{\omega}}^{\omega a} L_{\boldsymbol{\eta} \bar{\gamma}_0}^{\omega a}) \bar{\gamma}_0 \\ &=: L_{\sigma \gamma}^{\omega a} \gamma + L_{\sigma \bar{\gamma}_0}^{\omega a} \bar{\gamma}_0. \end{aligned} \quad (\text{A.124})$$

Eigenschaften der Funktion $\dot{\sigma}_{\omega n}$

Die Funktion $\dot{\sigma}_{\omega n}$ ist gegeben durch die Zeitableitung von (A.93) und lautet mit der Definition von ${}_n \boldsymbol{\omega}_{xy} = \hat{\kappa}_v^{-1} \boldsymbol{\omega}_{xy}$ aus (2.12)

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{\omega n} &= \hat{\mathbf{J}}^{-1} (\hat{\mathbf{J}} \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \hat{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}) \\ &\quad - \left[\begin{array}{c} \hat{\kappa}_v ({}_n \ddot{\boldsymbol{\omega}}_{xyd} + \mathbf{I}_{2 \times 3} (\mathbf{A}_r \dot{\mathbf{z}}_r - \hat{\kappa}_v^{-1} {}_n \dot{\mathbf{M}}' \mathbf{z}_t - \hat{\kappa}_v^{-1} {}_n \mathbf{M}' \dot{\mathbf{z}}_t)) \\ \ddot{\varphi}_T + a_{\varphi} \ddot{z}_{\varphi} + (\dot{\mathbf{I}} \mathbf{R}_s + \mathbf{I} \mathbf{R}_s) \hat{\kappa}_{vn} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{xy} + (\ddot{\mathbf{I}} \mathbf{R}_s + 2 \dot{\mathbf{I}} \mathbf{R}_s + \mathbf{I} \ddot{\mathbf{R}}_s) \hat{\kappa}_{vn} \boldsymbol{\omega}_{xy} + \hat{\kappa}_v a_{\omega z} \dot{z}_{\omega z} - \hat{\kappa}_v^2 \dot{z}_{\varphi} \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.125})$$

Mit (A.33), (A.29), (A.19), (A.26), (A.5), (A.11), (A.24), (A.25), (A.27), (A.42) bis (A.44), (A.45) bis (A.47) lasst sich (A.125) als Funktion mit folgenden Argumenten schreiben:

$$\dot{\sigma}_{\omega n} = \dot{\sigma}_{\omega n}(\zeta_v, \dot{\zeta}_v, \zeta_{\omega}, \dot{\mathbf{x}}_T, \dots, \mathbf{x}_T, \varphi_T, \dots, \ddot{\varphi}_T, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}). \quad (\text{A.126})$$

$\dot{\sigma}_{\omega n}$ ist mit V1 bis V9 aus Abschnitt 4.2 beliebig oft stetig differenzierbar in den angegebenen Argumenten, da mit V1 bis V9 alle zu substituierenden Funktionen beliebig oft stetig differenzierbar in den angegebenen Argumenten sind. Gilt $\mathbf{z}_{\text{ref}} \in \mathcal{Z}_{\text{ref}}$, $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ und $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathcal{G}$ für ein beliebig langes Zeitintervall $t \in [0, t_f]$, dann ist $\dot{\sigma}_{\omega n}$ in diesem Zeitintervall begrenzt und die Schranken $B_{\dot{\sigma}}^{\omega n}$, $B_{\dot{\sigma}}^{\omega n}$, $L_{\dot{\sigma}}^{\omega n}$ und $L_{\dot{\sigma}}^{\omega n}$ aus (4.32), (4.85) und (4.86) können mit Lemma 5 wie folgt gewählt werden. Mit $\arg = \{\mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}, \mathbf{K}, t\}$ und $\mathcal{S} = \mathcal{Z} \times \{\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va} \mid \|\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}\| \leq \rho_{\eta}^{va}\} \times \{\dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va} \mid \|\dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}\| \leq \rho_{\dot{\eta}}^{va}\} \times \{\ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va} \mid \|\ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}\| \leq \rho_{\ddot{\eta}}^{va}\} \times \{\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a} \mid \|\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}\| \leq \rho_{\eta}^{\omega a}\} \times \mathcal{K} \times \mathbb{R}^+$, wobei ρ_{η}^{va} , $\rho_{\dot{\eta}}^{va}$, $\rho_{\ddot{\eta}}^{va}$, $\rho_{\eta}^{\omega a}$ und $\rho_{\eta}^{\omega a}$ aus (4.60), (A.95), (A.96) und (A.97) stammen, gilt

$$L_{\dot{\sigma} \mathbf{z}}^{\omega n} = \max_{\arg \in \mathcal{S}} \left\| \frac{\partial \dot{\sigma}_{\omega n}}{\partial \mathbf{z}} \right\|, L_{\dot{\sigma} \boldsymbol{\eta}}^{\omega n} = \max_{\arg \in \mathcal{S}} \left\| \frac{\partial \dot{\sigma}_{\omega n}}{\partial \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}} \right\|, L_{\dot{\sigma} \dot{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega n} = \max_{\arg \in \mathcal{S}} \left\| \frac{\partial \dot{\sigma}_{\omega n}}{\partial \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}} \right\|, L_{\dot{\sigma} \ddot{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega n} = \max_{\arg \in \mathcal{S}} \left\| \frac{\partial \dot{\sigma}_{\omega n}}{\partial \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}} \right\|, \quad (\text{A.127})$$

$$L_{\dot{\sigma} \ddot{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega n} = \max_{\arg \in \mathcal{S}} \left\| \frac{\partial \dot{\sigma}_{\omega n}}{\partial \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}} \right\|, L_{\dot{\sigma} \boldsymbol{\eta}_{\omega}}^{\omega n} = \max_{\arg \in \mathcal{S}} \left\| \frac{\partial \dot{\sigma}_{\omega n}}{\partial \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}} \right\|, \quad (\text{A.128})$$

$$B_{\dot{\sigma} \mathbf{0}}^{\omega n} = \max_{t \geq 0, \mathbf{K} \in \mathcal{K}} \left\| \dot{\sigma}_{\omega n} \Big|_{\mathbf{z} = \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va} = \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va} = \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va} = \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a} = \mathbf{0}} \right\|, \quad (\text{A.129})$$

$$B_{\dot{\sigma} \mathbf{r}}^{\omega n} = L_{\dot{\sigma} \mathbf{z}}^{\omega n} \rho_{\text{ref}} + L_{\dot{\sigma} \boldsymbol{\eta}}^{\omega n} \rho_{\boldsymbol{\eta} r}^{va} + L_{\dot{\sigma} \dot{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega n} \rho_{\dot{\boldsymbol{\eta}} r}^{va} + L_{\dot{\sigma} \ddot{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega n} \rho_{\ddot{\boldsymbol{\eta}} r}^{va} + L_{\dot{\sigma} \boldsymbol{\eta}_{\omega}}^{\omega n} \rho_{\boldsymbol{\eta} r}^{\omega a} + B_{\dot{\sigma} \mathbf{0}}^{\omega n}, \quad (\text{A.130})$$

$$B_{\dot{\sigma}}^{\omega n} = L_{\dot{\sigma} \mathbf{z}}^{\omega n} \rho + L_{\dot{\sigma} \boldsymbol{\eta}}^{\omega n} \rho_{\boldsymbol{\eta}}^{va} + L_{\dot{\sigma} \dot{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega n} \rho_{\dot{\boldsymbol{\eta}}}^{va} + L_{\dot{\sigma} \ddot{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega n} \rho_{\ddot{\boldsymbol{\eta}}}^{va} + L_{\dot{\sigma} \boldsymbol{\eta}_{\omega}}^{\omega n} \rho_{\boldsymbol{\eta}}^{\omega a} + B_{\dot{\sigma} \mathbf{0}}^{\omega n} \quad (\text{A.131})$$

A. Funktionseigenschaften

mit $\rho_{\eta r}^{va}$, $\rho_{\dot{\eta} r}^{va}$, $\rho_{\ddot{\eta} r}^{va}$, $\rho_{\dot{\eta} r}^{va}$ und $\rho_{\eta r}^{\omega a}$ aus (4.35), (A.101), (A.102) und (A.103).

Die Differenz $\dot{\sigma}_{\omega n} - \dot{\sigma}_{\omega n, \text{ref}}$ kann mit Lemma 5 und mit den oben getroffenen Annahmen und angegebenen Schranken sowie der Schranke $\gamma_{\eta}^{\omega a}$ für $\eta_{\omega a, e} = \hat{\eta}_{va} - \eta_{\omega a, \text{ref}}$ aus (4.61) folgendermaßen abgeschätzt werden, so dass gilt $\forall t \in [0, t_f]$

$$\begin{aligned} \|\dot{\sigma}_{\omega n} - \dot{\sigma}_{\omega n, \text{ref}}\| &\leq L_{\dot{\sigma}z}^{\omega n} \gamma + L_{\dot{\sigma}\eta}^{\omega n} \gamma_{\eta}^{va} + L_{\dot{\sigma}\dot{\eta}}^{\omega n} \gamma_{\dot{\eta}}^{va} + L_{\dot{\sigma}\ddot{\eta}}^{\omega n} \gamma_{\ddot{\eta}}^{va} + L_{\dot{\sigma}\dot{\eta}}^{\omega n} \gamma_{\dot{\eta}}^{va} + L_{\dot{\sigma}\eta_{\omega}}^{\omega n} \gamma_{\eta}^{\omega a} \quad (\text{A.132}) \\ &= (L_{\dot{\sigma}z}^{\omega n} + L_{\dot{\sigma}\eta}^{\omega n} L_{\eta\gamma}^{va} + L_{\dot{\sigma}\dot{\eta}}^{\omega n} L_{\dot{\eta}\gamma}^{va} + L_{\dot{\sigma}\ddot{\eta}}^{\omega n} L_{\ddot{\eta}\gamma}^{va} + L_{\dot{\sigma}\dot{\eta}}^{\omega n} L_{\dot{\eta}\gamma}^{va} + L_{\dot{\sigma}\eta_{\omega}}^{\omega n} L_{\eta\gamma}^{\omega a}) \gamma \\ &\quad + (L_{\dot{\sigma}\eta}^{\omega n} L_{\eta\bar{\gamma}_0}^{va} + L_{\dot{\sigma}\dot{\eta}}^{\omega n} L_{\dot{\eta}\bar{\gamma}_0}^{va} + L_{\dot{\sigma}\ddot{\eta}}^{\omega n} L_{\ddot{\eta}\bar{\gamma}_0}^{va} + L_{\dot{\sigma}\dot{\eta}}^{\omega n} L_{\dot{\eta}\bar{\gamma}_0}^{va} + L_{\dot{\sigma}\eta_{\omega}}^{\omega n} L_{\eta\bar{\gamma}_0}^{\omega a}) \bar{\gamma}_0 \\ &=: L_{\dot{\sigma}\gamma}^{\omega n} \gamma + L_{\dot{\sigma}\bar{\gamma}_0}^{\omega n} \bar{\gamma}_0. \end{aligned}$$

Eigenschaften der Funktion $\dot{\sigma}_{\omega a}$

Die Funktion $\dot{\sigma}_{\omega a}$ ist gegeben durch die Zeitableitung von (A.113) und lautet mit der Definition von ${}_n\omega_{xy} = \hat{\kappa}_v^{-1} \omega_{xy}$ aus (2.12)

$$\dot{\sigma}_{\omega a} = -\dot{\mathbf{f}}_{\omega} + \dot{\zeta}_{\omega} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ (\mathbf{I} \mathbf{R}_s + \mathbf{I} \dot{\mathbf{R}}_s) \hat{\kappa}_{vn} \dot{\omega}_{xy} + \mathbf{I} \mathbf{R}_s \hat{\kappa}_{vn} \ddot{\omega}_{xy} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.133})$$

Mit (A.42), (A.43), (A.45), (A.46), (A.29) und (A.36) sowie mit

$$\dot{\mathbf{f}}_{\omega} = \dot{\mathbf{f}}_{\omega}(\zeta_v, \zeta_{\omega}, \dot{\mathbf{x}}_T, \dots, \ddot{\mathbf{x}}_T, \varphi_T, \dot{\varphi}_T, \ddot{\varphi}_T, \mathbf{z}, \hat{\eta}_{va}, \dot{\eta}_{va}, \ddot{\eta}_{va}, \hat{\eta}_{\omega a}), \quad (\text{A.134})$$

was aus der Zeitableitung von (A.15) bis (A.20) mit (A.22) bis (A.27) und (A.74), (A.12), (A.43) und (A.46) folgt, kann $\dot{\sigma}_{\omega a}$ als Funktion mit den folgenden Argumenten geschrieben werden:

$$\dot{\sigma}_{\omega a} = \dot{\sigma}_{\omega a}(\zeta_v, \zeta_v, \zeta_{\omega}, \dot{\zeta}_{\omega}, \dot{\mathbf{x}}_T, \dots, \overset{(5)}{\ddot{\mathbf{x}}_T}, \varphi_T, \dots, \ddot{\varphi}_T, \mathbf{z}, \hat{\eta}_{va}, \dot{\eta}_{va}, \ddot{\eta}_{va}, \overset{\dots}{\ddot{\eta}}_{va}, \hat{\eta}_{\omega a}, \dot{\eta}_{\omega a}). \quad (\text{A.135})$$

$\dot{\sigma}_{\omega a}$ ist mit V1 bis V9 aus Abschnitt 4.2 beliebig oft stetig differenzierbar in den angegebenen Argumenten, da mit V1 bis V9 alle zu substituierenden Funktionen beliebig oft stetig differenzierbar in den angegebenen Argumenten sind. Gilt $\mathbf{z}_{\text{ref}} \in \mathcal{Z}_{\text{ref}}$, $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ und $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathcal{G}$ für ein beliebig langes Zeitintervall $t \in [0, t_f]$, dann ist $\dot{\sigma}_{\omega a}$ in diesem Zeitintervall begrenzt und die Schranken $B_{\dot{\sigma}r}^{\omega a}$, $B_{\dot{\sigma}}^{\omega a}$, $L_{\dot{\sigma}\gamma}^{\omega a}$ und $L_{\dot{\sigma}\bar{\gamma}_0}^{\omega a}$ aus (4.32), (4.85) und (4.86) können mit Lemma 5 wie folgt gewählt werden. Hierzu wird zusätzlich zu den bisherigen Schranken in den vorangegangenen Abschnitten, Schranken für $\hat{\eta}_{\omega a}$, $\dot{\eta}_{\omega a, \text{ref}}$ und $\dot{\eta}_{\omega a, e} = \dot{\eta}_{\omega a, e} - \dot{\eta}_{\omega a, \text{ref}}$ benötigt. Diese können durch die Zeitableitung von (4.58), (4.34) und (4.59) gewonnen werden und lauten mit den oben getroffenen Annahmen $\forall t \in [0, t_f]$

$$\|\dot{\eta}_{\omega a, \text{ref}}\| \leq B_{sC}^{\omega} (B_{\dot{\sigma}r}^{\omega a} + B_{\dot{\kappa}}^{\omega} B_{\dot{\sigma}r}^{\omega n}) =: \rho_{\dot{\eta}r}^{\omega a}, \quad (\text{A.136})$$

$$\|\dot{\eta}_{\omega a}\| \leq B_{sC}^{\omega} (B_{\dot{\sigma}}^{\omega a} + B_{\dot{\kappa}}^{\omega} B_{\dot{\sigma}}^{\omega n}) + B_{s\text{Che}}^{\omega} \bar{\gamma}_0 =: \rho_{\dot{\eta}}^{\omega a}, \quad (\text{A.137})$$

$$\|\dot{\eta}_{\omega a, e}\| \leq B_{sC}^{\omega} (L_{\dot{\sigma}z}^{\omega a} + B_{\dot{\kappa}}^{\omega} L_{\dot{\sigma}z}^{\omega n}) \gamma + B_{s\text{Che}}^{\omega} \bar{\gamma}_0 =: \gamma_{\dot{\eta}}^{\omega a}, \quad (\text{A.138})$$

mit $B_{sC}^{\omega} \geq \|s\mathbf{C}_{\omega}(s)\|_{\mathcal{L}_1}$ und $B_{s\text{Che}}^{\omega} \geq \|s\mathbf{C}_{\omega}(s)\mathbf{H}_{e\omega}^{-1}(s)\|_{\mathcal{L}_1}$. Mit diesen Schranken, einer Schätzung von $\dot{\mathbf{f}}_{\omega}$, $\dot{\zeta}_{\omega}$ und mit $\arg = \{\mathbf{z}, \hat{\eta}_{va}, \dot{\eta}_{va}, \ddot{\eta}_{va}, \overset{\dots}{\ddot{\eta}}_{va}, \hat{\eta}_{\omega a}, \dot{\eta}_{\omega a}, \mathbf{K}, t\}$ und $\mathcal{S} =$

$\mathcal{Z} \times \{\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va} | \|\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}\| \leq \rho_{\eta}^{va}\} \times \{\dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va} | \|\dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}\| \leq \rho_{\dot{\eta}}^{va}\} \times \{\ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va} | \|\ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}\| \leq \rho_{\ddot{\eta}}^{va}\} \times \{\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a} | \|\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}\| \leq \rho_{\eta}^{\omega a}\} \times \{\dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{\omega a} | \|\dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{\omega a}\| \leq \rho_{\dot{\eta}}^{\omega a}\} \times \mathcal{K} \times \mathbb{R}_0^+$ gilt

$$L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{z}}^{\omega a} = \max_{arg \in \mathcal{S}} \left\| \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\omega a}}{\partial \mathbf{z}} \right\|, L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\eta}}^{\omega a} = \max_{arg \in \mathcal{S}} \left\| \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\omega a}}{\partial \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}} \right\|, L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\dot{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega a} = \max_{arg \in \mathcal{S}} \left\| \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\omega a}}{\partial \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}} \right\|, L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\ddot{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega a} = \max_{arg \in \mathcal{S}} \left\| \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\omega a}}{\partial \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}} \right\|, \quad (\text{A.139})$$

$$L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\ddot{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega a} = \max_{arg \in \mathcal{S}} \left\| \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\omega a}}{\partial \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}} \right\|, L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\eta}_{\omega}}^{\omega a} = \max_{arg \in \mathcal{S}} \left\| \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\omega a}}{\partial \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}} \right\|, L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\dot{\boldsymbol{\eta}}_{\omega}}^{\omega a} = \max_{arg \in \mathcal{S}} \left\| \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\omega a}}{\partial \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{\omega a}} \right\|, \quad (\text{A.140})$$

$$B_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{0}}^{\omega a} = \max_{t \geq 0, \mathbf{K} \in \mathcal{K}} \left\| \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\omega a} |_{\mathbf{z}=\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}=\dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}=\ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{va}=\dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{\omega a}=\dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{\omega a}=\mathbf{0}} \right\|, \quad (\text{A.141})$$

$$B_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{r}}^{\omega a} = L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{z}}^{\omega a} \rho_{\text{ref}} + L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\eta}}^{\omega a} \rho_{\eta}^{va} + L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\dot{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega a} \rho_{\dot{\eta}}^{va} + L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\ddot{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega a} \rho_{\ddot{\eta}}^{va} + L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\dot{\boldsymbol{\eta}}_{\omega}}^{\omega a} \rho_{\dot{\eta}}^{va} + L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\eta}_{\omega}}^{\omega a} \rho_{\eta}^{\omega a} + L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\dot{\boldsymbol{\eta}}_{\omega}}^{\omega a} \rho_{\dot{\eta}}^{\omega a} + B_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{0}}^{\omega a}, \quad (\text{A.142})$$

$$B_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{r}}^{\omega a} = L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{z}}^{\omega a} \rho + L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\eta}}^{\omega a} \rho_{\eta}^{va} + L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\dot{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega a} \rho_{\dot{\eta}}^{va} + L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\ddot{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega a} \rho_{\ddot{\eta}}^{va} + L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\dot{\boldsymbol{\eta}}_{\omega}}^{\omega a} \rho_{\dot{\eta}}^{va} + L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\eta}_{\omega}}^{\omega a} \rho_{\eta}^{\omega a} + L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\dot{\boldsymbol{\eta}}_{\omega}}^{\omega a} \rho_{\dot{\eta}}^{\omega a} + B_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{0}}^{\omega a} \quad (\text{A.143})$$

mit ρ_{η}^{va} , $\rho_{\dot{\eta}}^{va}$, $\rho_{\ddot{\eta}}^{va}$, $\rho_{\eta}^{\omega a}$ und $\rho_{\dot{\eta}}^{\omega a}$ aus (4.60), (A.95), (A.96), (A.97) und (A.137) und mit $\rho_{\eta r}^{va}$, $\rho_{\dot{\eta} r}^{va}$, $\rho_{\ddot{\eta} r}^{va}$, $\rho_{\eta r}^{\omega a}$ und $\rho_{\dot{\eta} r}^{\omega a}$ aus (4.35), (A.101), (A.102), (A.103) und (A.136).

Die Differenz $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\omega a} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\omega a, \text{ref}}$ kann mit den oben getroffenen Annahmen mit Lemma 5 und den angegebenen Schranken folgendermaßen abgeschätzt werden, so dass gilt $\forall t \in [0, t_f]$

$$\begin{aligned} \|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\omega a} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\omega a, \text{ref}}\| &\leq L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{z}}^{\omega a} \gamma + L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\eta}}^{\omega a} \gamma_{\eta}^{va} + L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\dot{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega a} \gamma_{\dot{\eta}}^{va} + L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\ddot{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega a} \gamma_{\ddot{\eta}}^{va} + L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\dot{\boldsymbol{\eta}}_{\omega}}^{\omega a} \gamma_{\dot{\eta}}^{va} + L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\eta}_{\omega}}^{\omega a} \gamma_{\eta}^{\omega a} + L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\dot{\boldsymbol{\eta}}_{\omega}}^{\omega a} \gamma_{\dot{\eta}}^{\omega a} \\ &= (L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{z}}^{\omega a} + L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\eta}}^{\omega a} L_{\eta\gamma}^{va} + L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\dot{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega a} L_{\dot{\eta}\gamma}^{va} + L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\ddot{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega a} L_{\ddot{\eta}\gamma}^{va} + L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\dot{\boldsymbol{\eta}}_{\omega}}^{\omega a} L_{\dot{\eta}\gamma}^{va} + L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\eta}_{\omega}}^{\omega a} L_{\eta\gamma}^{\omega a} + L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\dot{\boldsymbol{\eta}}_{\omega}}^{\omega a} L_{\dot{\eta}\gamma}^{\omega a}) \gamma \\ &\quad + (L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\eta}}^{\omega a} L_{\eta\bar{\gamma}_0}^{va} + L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\dot{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega a} L_{\dot{\eta}\bar{\gamma}_0}^{va} + L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\ddot{\boldsymbol{\eta}}}^{\omega a} L_{\ddot{\eta}\bar{\gamma}_0}^{va} + L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\dot{\boldsymbol{\eta}}_{\omega}}^{\omega a} L_{\dot{\eta}\bar{\gamma}_0}^{va} + L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\eta}_{\omega}}^{\omega a} L_{\eta\bar{\gamma}_0}^{\omega a} + L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\dot{\boldsymbol{\eta}}_{\omega}}^{\omega a} L_{\dot{\eta}\bar{\gamma}_0}^{\omega a}) \bar{\gamma}_0 \\ &=: L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\gamma}^{\omega a} \gamma + L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\bar{\gamma}_0}^{\omega a} \bar{\gamma}_0. \end{aligned} \quad (\text{A.144})$$

A.6. Eigenschaften der Funktion \mathbf{f}

Die Funktion \mathbf{f} definiert in (3.62) lässt sich mit dem Zusammenhang aus (A.9) als Funktion der folgenden Argumente schreiben

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \varphi_T, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}) \quad (\text{A.145})$$

und ist mit V1 bis V6 aus Abschnitt 4.2 beliebig oft stetig differenzierbar bzgl. der angegebenen Argumente. Mit $\mathbf{z}_{\eta} := [\mathbf{z}', \hat{\boldsymbol{\eta}}'_{va}]'$ besitzt $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \varphi_T, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va})$

A. Funktionseigenschaften

folgenden Anteil der Jacobimatrix bzgl. \mathbf{z}_η

$$\mathbf{Df}(t, \mathbf{z}_\eta) := \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{z}_\eta)}{\partial \mathbf{z}_\eta} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}_\eta} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_x \mathbf{z}_x + \mathbf{z}_v \\ -\mathbf{z}_x + \mathbf{A}_v \mathbf{z}_v + \hat{\kappa}_v^2 \mathbf{z}_t \\ -\hat{\kappa}_v^2 \mathbf{z}_v + \mathbf{A}_t \mathbf{z}_t + \hat{\kappa}_v^{-1} \mathbf{M} \mathbf{z}_r \\ -\hat{\kappa}_v^{-1} \mathbf{M}' \mathbf{z}_t + \mathbf{A}_r \mathbf{z}_r \\ a_\varphi z_\varphi + \hat{\kappa}_v z_{\omega z} \\ -\hat{\kappa}_v z_\varphi + a_{\omega z} z_{\omega z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{z}_\eta} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_{14}}{\partial \mathbf{z}_\eta} \end{bmatrix} = \quad (\text{A.146})$$

$$\hat{\kappa}_v^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\kappa}_v \mathbf{A}_x & \hat{\kappa}_v \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\hat{\kappa}_v \mathbf{I}_{3 \times 3} & \hat{\kappa}_v \mathbf{A}_v & \hat{\kappa}_v^3 \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial_n \mathbf{M} \mathbf{z}_r}{\partial \mathbf{z}_x} & -\hat{\kappa}_v^3 \mathbf{I}_{3 \times 3} + \frac{\partial_n \mathbf{M} \mathbf{z}_r}{\partial \mathbf{z}_v} & \hat{\kappa}_v \mathbf{A}_t + \frac{\partial_n \mathbf{M} \mathbf{z}_r}{\partial \mathbf{z}_t} & \mathbf{M} & \frac{\partial_n \mathbf{M} \mathbf{z}_r}{\partial z_\varphi} & \mathbf{0} & \frac{\partial_n \mathbf{M} \mathbf{z}_r}{\partial \hat{\eta}_{va}} \\ -\frac{\partial_n \mathbf{M}' \mathbf{z}_t}{\partial \mathbf{z}_x} & -\frac{\partial_n \mathbf{M}' \mathbf{z}_t}{\partial \mathbf{z}_v} & -\frac{\partial_n \mathbf{M}' \mathbf{z}_t}{\partial \mathbf{z}_t} & \hat{\kappa}_v \mathbf{A}_r & -\frac{\partial_n \mathbf{M}' \mathbf{z}_t}{\partial z_\varphi} & \mathbf{0} & -\frac{\partial_n \mathbf{M}' \mathbf{z}_t}{\partial \hat{\eta}_{va}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\kappa}_v a_\varphi & \hat{\kappa}_v^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\hat{\kappa}_v^2 & \hat{\kappa}_v a_{\omega z} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Da die vektoriellen Funktionen $\partial \mathbf{f}_i := \left(\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{z}_\eta} \right)'$, $i \in \{1, 2, \dots, 14\}$ mit V1 bis V6 aus Abschnitt 4.2 beliebig oft stetig differenzierbar sind, gilt mit $\mathbf{e}_\eta = \mathbf{z}_\eta - \mathbf{z}_{\eta, \text{ref}}$, $\mathbf{z}_{\eta, \text{ref}} := [\mathbf{z}'_{\text{ref}}, \boldsymbol{\eta}'_{va, \text{ref}}]'$ und $0 \leq \lambda \leq 1$

$$\partial \mathbf{f}_i(t, \mathbf{z}_\eta) - \partial \mathbf{f}_i(t, \mathbf{z}_{\eta, \text{ref}}) = \left(\int_0^1 \mathbf{D} \partial \mathbf{f}_i(t, \lambda \mathbf{e}) d\lambda \right) \mathbf{e}, \quad (\text{A.147})$$

mit

$$\mathbf{D} \partial \mathbf{f}_i := \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}_\eta} \left(\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{z}_\eta} \right)', \quad (\text{A.148})$$

siehe hierzu auch Lemma 5 auf S. 113. Gilt $\mathbf{z}_{\text{ref}} \in \mathcal{Z}_{\text{ref}}$, $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ und $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathcal{G}$ für ein beliebig langes Zeitintervall $t \in [0, t_f]$, folgt $\lambda \mathbf{e} \in \mathcal{Z}$ und $\|\lambda \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va, e}\| \leq \rho_\eta^{va} \forall t \in [0, t_f]$. Somit gilt mit $\text{arg} := \{\mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \mathbf{K}, t\}$ und $\mathcal{S} := \mathcal{Z} \times \{\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va} \mid \|\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}\| \leq \rho_\eta^{va}\} \times \mathcal{K} \times \mathbb{R}_0^+$ für $t \in [0, t_f]$

$$\|\partial \mathbf{f}_i(t, \mathbf{z}_\eta) - \partial \mathbf{f}_i(t, \mathbf{z}_{\eta, \text{ref}})\| \leq \max_{\text{arg} \in \mathcal{S}} \|\mathbf{D} \partial \mathbf{f}_i(\text{arg})\| \|\mathbf{e}_\eta\| =: L_{\partial \mathbf{f}_i} \|\mathbf{z}_\eta - \mathbf{z}_{\eta, \text{ref}}\|. \quad (\text{A.149})$$

Somit kann auch eine Schranke für $\mathbf{Df}(t, \mathbf{z}_\eta) - \mathbf{Df}(t, \mathbf{z}_{\eta, \text{ref}})$ gefunden werden, so dass mit den oben getroffenen Annahmen $\forall t \in [0, t_f]$ gilt

$$\|\mathbf{Df}(t, \mathbf{z}_\eta) - \mathbf{Df}(t, \mathbf{z}_{\eta, \text{ref}})\| \leq L_{\partial \mathbf{f}} \|\mathbf{z}_\eta - \mathbf{z}_{\eta, \text{ref}}\| \quad (\text{A.150})$$

wobei

$$L_{\partial \mathbf{f}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{14} L_{\partial \mathbf{f}_i}^2}. \quad (\text{A.151})$$

Eigenschaften der Funktion $\Delta \mathbf{f}$

In diesem Abschnitt wird die Abschätzung der Funktion

$$\Delta \mathbf{f} := \mathbf{f}(t, \mathbf{z}_\eta) - \mathbf{f}(t, \mathbf{z}_{\eta, \text{ref}}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{e}_\eta) \quad (\text{A.152})$$

detailliert gezeigt. Zunächst gilt mit $0 \leq \lambda_1 \leq 1$,

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{z}_\eta) - \mathbf{f}(t, \mathbf{z}_{\eta, \text{ref}}) = \left(\int_0^1 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}_\eta}(\mathbf{z}_{\eta, \text{ref}} + \lambda_1 \mathbf{e}_\eta) d\lambda_1 \right) \mathbf{e}_\eta, \quad (\text{A.153})$$

und mit der Tatsache dass $\mathbf{f}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, folgt mit $0 \leq \lambda_2 \leq 1$,

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{e}_\eta) = \left(\int_0^1 \frac{\partial \mathbf{f}(t, \cdot)}{\partial \mathbf{z}_\eta}(\lambda_2 \mathbf{e}_\eta) d\lambda_2 \right) \mathbf{e}_\eta, \quad (\text{A.154})$$

siehe hierzu auch Lemma 5 auf S. 113. Damit gilt für die Funktion $\Delta \mathbf{f}$

$$\Delta \mathbf{f} = \left(\int_0^1 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}_\eta}(t, \mathbf{z}_{\eta, \text{ref}} + \lambda_1 \mathbf{e}_\eta) d\lambda_1 \right) \mathbf{e}_\eta - \left(\int_0^1 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}_\eta}(t, \lambda_2 \mathbf{e}_\eta) d\lambda_2 \right) \mathbf{e}_\eta, \quad (\text{A.155})$$

wobei

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}_\eta}(t, \cdot) = \begin{bmatrix} \partial \mathbf{f}_1(t, \cdot)' \\ \vdots \\ \partial \mathbf{f}_{14}(t, \cdot)' \end{bmatrix}. \quad (\text{A.156})$$

Analog zu (A.147) gilt mit $0 \leq \lambda_2 \leq 1$

$$\partial \mathbf{f}_i(t, \lambda_1 \mathbf{e}_\eta + \mathbf{z}_{\eta, \text{ref}}) = \left(\int_0^1 \mathbf{D} \partial \mathbf{f}_i(t, \lambda_2(\lambda_1 \mathbf{e}_\eta + \mathbf{z}_{\eta, \text{ref}})) d\lambda_2 \right) \lambda_1 \mathbf{e}_\eta + \partial \mathbf{f}_i(t, \mathbf{z}_{\eta, \text{ref}}), \quad (\text{A.157})$$

und mit $0 \leq \lambda_3 \leq 1$

$$\partial \mathbf{f}_i(t, \mathbf{z}_{\eta, \text{ref}}) = \left(\int_0^1 \mathbf{D} \partial \mathbf{f}_i(t, \lambda_3 \mathbf{z}_{\eta, \text{ref}}) d\lambda_3 \right) \mathbf{z}_{\eta, \text{ref}} + \partial \mathbf{f}_i(t, \mathbf{0}), \quad (\text{A.158})$$

und mit $0 \leq \lambda_4 \leq 1$

$$\partial \mathbf{f}_i(t, \lambda_2 \mathbf{e}_\eta) = \left(\int_0^1 \mathbf{D} \partial \mathbf{f}_i(t, \lambda_4 \lambda_2 \mathbf{e}_\eta) d\lambda_4 \right) \lambda_2 \mathbf{e}_\eta + \partial \mathbf{f}_i(t, \mathbf{0}). \quad (\text{A.159})$$

Daraus folgt

$$\Delta \mathbf{f}_i = \left(\int_0^1 \partial \mathbf{f}_i(t, \mathbf{z}_{\eta, \text{ref}} + \lambda_1 \mathbf{e}_\eta)' d\lambda_1 \right) \mathbf{e}_\eta - \left(\int_0^1 \partial \mathbf{f}_1(t, \lambda_2 \mathbf{e}_\eta)' d\lambda_2 \right) \mathbf{e}_\eta \quad (\text{A.160})$$

$$= \left(\int_0^1 \lambda_1 \mathbf{e}'_\eta \left(\int_0^1 \mathbf{D} \partial \mathbf{f}_i(t, \lambda_2(\lambda_1 \mathbf{e}_\eta + \mathbf{z}_{\eta, \text{ref}}))' d\lambda_2 \right) d\lambda_1 \right) \mathbf{e}_\eta \quad (\text{A.161})$$

$$+ \left(\int_0^1 \mathbf{z}'_{\eta, \text{ref}} \left(\int_0^1 \mathbf{D} \partial \mathbf{f}_i(t, \lambda_3 \mathbf{z}_{\eta, \text{ref}})' d\lambda_3 \right) d\lambda_1 \right) \mathbf{e}_\eta \quad (\text{A.162})$$

$$- \left(\int_0^1 \lambda_2 \mathbf{e}'_\eta \left(\int_0^1 \mathbf{D} \partial \mathbf{f}_i(t, \lambda_4 \lambda_2 \mathbf{e}_\eta)' d\lambda_4 \right) d\lambda_2 \right) \mathbf{e}_\eta. \quad (\text{A.163})$$

Gilt $\mathbf{z}_{\text{ref}} \in \mathcal{Z}_{\text{ref}}$, $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ und $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathcal{G}$ für ein beliebig langes Zeitintervall $t \in [0, t_f]$ und sind V1 bis V6 aus Abschnitt 4.2 erfüllt, folgt $\lambda_2(\lambda_1 \mathbf{e} + \mathbf{z}_{\text{ref}}) \in \mathcal{Z}$, $\lambda_3 \mathbf{z}_{\text{ref}} \in \mathcal{Z}$, $\lambda_4 \lambda_2 \mathbf{e} \in \mathcal{Z}$,

A. Funktionseigenschaften

$\|\lambda_2(\lambda_1 \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va,e} + \boldsymbol{\eta}_{va,\text{ref}})\| \leq \rho_\eta^{va}$, $\|\lambda_3 \boldsymbol{\eta}_{va,\text{ref}}\| \leq \rho_\eta^{va}$, $\|\lambda_4 \lambda_2 \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va,e}\| \leq \rho_\eta^{va} \forall t \in [0, t_f]$. Somit gilt mit $\text{arg} := \{\mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \mathbf{K}, t\}$ und $\mathcal{S} := \mathcal{Z} \times \{\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va} \mid \|\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}\| \leq \rho_\eta^{va}\} \times \mathcal{K} \times \mathbb{R}_0^+$ für $t \in [0, t_f]$

$$\|\Delta \mathbf{f}_i\| \leq 2 \max_{\text{arg} \in \mathcal{S}} \|\mathbf{D} \partial \mathbf{f}_i(\text{arg})\| \|\mathbf{e}_\eta\|^2 + \max_{\text{arg} \in \mathcal{S}} \|\mathbf{D} \partial \mathbf{f}_i(\text{arg})\| \|\mathbf{z}_{\eta,\text{ref}}\| \|\mathbf{e}_\eta\| \quad (\text{A.164})$$

$$= L_{\partial \mathbf{f}_i} (2 \|\mathbf{e}_\eta\| + \|\mathbf{z}_{\eta,\text{ref}}\|) \|\mathbf{e}_\eta\|. \quad (\text{A.165})$$

Daraus folgt

$$\|\Delta \mathbf{f}\| \leq L_{\partial \mathbf{f}} (2 \|\mathbf{e}_\eta\| + \|\mathbf{z}_{\eta,\text{ref}}\|) \|\mathbf{e}_\eta\| \quad (\text{A.166})$$

mit

$$L_{\partial \mathbf{f}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{14} L_{\partial \mathbf{f}_i}^2}. \quad (\text{A.167})$$

Eigenschaften der Funktion \mathbf{f}_Δ

Die Funktion \mathbf{f}_Δ aus (3.64) gegeben durch

$$\mathbf{f}_\Delta = [\mathbf{0}_{3 \times 1} \quad \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad \hat{\kappa}_v^{-1} \mathbf{M}_\Delta \mathbf{z}_r \quad -\hat{\kappa}_v^{-1} \mathbf{M}'_\Delta \mathbf{z}_t \quad 0 \quad 0]'. \quad (\text{A.168})$$

lässt sich mit $\mathbf{M}_\Delta := {}_n \mathbf{M} - \mathbf{M}_H$, wobei

$$\mathbf{M}_H = \hat{g} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.169})$$

und dem Zusammenhang für ${}_n \mathbf{M}$ aus (A.5), als Funktion der folgenden Argumente schreiben

$$\mathbf{f}_\Delta = \mathbf{f}_\Delta(\dot{\mathbf{x}}_T, \ddot{\mathbf{x}}_T, \varphi_T, \mathbf{z}_x, \mathbf{z}_v, \mathbf{z}_t, \mathbf{z}_r, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, z_\varphi). \quad (\text{A.170})$$

Mit V1 bis V6 aus Abschnitt 4.2 ist \mathbf{f}_Δ bezüglich dieser Argumente beliebig oft stetig differenzierbar und mit der Annahme $\mathbf{z}_{\text{ref}} \in \mathcal{Z}_{\text{ref}}$, $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ und $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathcal{G}$ für ein beliebig langes Zeitintervall $t \in [0, t_f]$, können mit Lemma 5 für dieses Zeitintervall folgende Schranken gewählt werden. Mit $\text{arg} := \{\mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}, \mathbf{K}, t\}$ und $\mathcal{S} := \mathcal{Z} \times \{\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va} \mid \|\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}\| \leq \rho_\eta^{va}\} \times \mathcal{K} \times \mathbb{R}_0^+$ und der Tatsache $\mathbf{f}_\Delta|_{\mathbf{z}=\mathbf{0}} = \mathbf{0}$ gilt $\forall t \in [0, t_f]$

$$L_{\mathbf{f}_\Delta \mathbf{z}} = \max_{\text{arg} \in \mathcal{S}} \left\| \frac{\partial \mathbf{f}_\Delta}{\partial \mathbf{z}} \right\|, \quad L_{\mathbf{f}_\Delta \eta} = \max_{\text{arg} \in \mathcal{S}} \left\| \frac{\partial \mathbf{f}_\Delta}{\partial \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}} \right\|, \quad (\text{A.171})$$

$$B_{\mathbf{f}_\Delta r} = L_{\mathbf{f}_\Delta \mathbf{z}} \rho_{\text{ref}} + L_{\mathbf{f}_\Delta \eta} \rho_{\eta r}^{va}, \quad (\text{A.172})$$

$$B_{\mathbf{f}_\Delta} = L_{\mathbf{f}_\Delta \mathbf{z}} \rho + L_{\mathbf{f}_\Delta \eta} \rho_\eta^{va}, \quad (\text{A.173})$$

mit $\rho_{\eta r}^{va}$ und ρ_η^{va} aus (4.35) und (4.60).

Damit kann die Differenz $\mathbf{f}_\Delta - \mathbf{f}_{\Delta,\text{ref}}$ mit den oben getroffenen Annahmen abgeschätzt werden, so dass $\forall t \in [0, t_f]$ gilt

$$\|\mathbf{f}_\Delta - \mathbf{f}_{\Delta,\text{ref}}\| \leq L_{\mathbf{f}_\Delta \mathbf{z}} \gamma + L_{\mathbf{f}_\Delta \eta} \gamma_\eta^{va} \quad (\text{A.174})$$

$$= (L_{\mathbf{f}_\Delta \mathbf{z}} + L_{\mathbf{f}_\Delta \eta} L_{\eta \gamma}^{va}) \gamma + (L_{\mathbf{f}_\Delta \eta} + L_{\mathbf{f}_\Delta \eta} L_{\eta \tilde{\gamma}_0}^{va}) \tilde{\gamma}_0 \quad (\text{A.175})$$

$$=: L_{\mathbf{f}_\Delta \gamma} \gamma + L_{\mathbf{f}_\Delta \tilde{\gamma}_0} \tilde{\gamma}_0 \quad (\text{A.176})$$

wobei γ_η^{va} aus (4.61) stammt.

B. Beweise

B.1. Beweis von Lemma 2

Folgender Beweis basiert auf der üblichen Beweisführung für die \mathcal{L}_1 -adaptive Regelung, siehe [42]:

Beweis. Angenommen die Schranke (4.42) würde nicht existieren, V1 bis V6 aus Abschnitt 4.2 und $\|\mathbf{z}_{\text{ref}}(t=0)\| \leq \|\bar{\mathbf{z}}_0\|$ sind jedoch erfüllt, dann würde es eine Zeit $\tau^* < \infty$ geben, so dass $\|\mathbf{z}_{\text{ref}}\| < \rho_{\text{ref}}, \forall t \in [0, \tau^*[$ und $\|\mathbf{z}_{\text{ref}}(\tau^*)\| = \rho_{\text{ref}}$, da $\|\mathbf{z}_{\text{ref}}(t=0)\| < \rho_{\text{ref}}$ gilt und der Zeitverlauf \mathbf{z}_{ref} stetig ist. Dies impliziert, dass $\|\mathbf{z}_{\text{ref}}\| \leq \rho_{\text{ref}}, \forall t \in [0, \tau^*]$. Daher existieren die Schranken $\|\mathbf{f}_{\Delta, \text{ref}}\| \leq B_{\mathbf{f}_{\Delta r}}, \|\boldsymbol{\sigma}_{kl, \text{ref}}\| \leq B_{\boldsymbol{\sigma}r}^{kl}$ mit $k \in \{v, \omega\}, l \in \{a, n\}$ aus (4.36) und (4.32) für dieses Zeitintervall $t \in [0, \tau^*]$. Die Transformation von (3.64) in den Frequenzbereich lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{\text{ref}}(s) &= \mathbf{H}(s)\mathcal{L}[\mathbf{f}_{\Delta, \text{ref}}] + \sum_{k=v}^{\omega} \mathbf{H}(s)\mathbf{B}_k(\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{C}_k(s))\mathcal{L}[\boldsymbol{\sigma}_{ka, \text{ref}} + \tilde{\mathbf{K}}_k \hat{\mathbf{K}}_k^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{kn, \text{ref}}] + \mathbf{z}_{\text{in}}(s) \\ &= \mathbf{H}(s)\mathcal{L}[\mathbf{f}_{\Delta, \text{ref}}] + \sum_{k=v}^{\omega} \mathbf{G}_k(s)\mathcal{L}[\boldsymbol{\sigma}_{ka, \text{ref}} + \tilde{\mathbf{K}}_k \hat{\mathbf{K}}_k^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{kn, \text{ref}}] + \mathbf{z}_{\text{in}}(s), \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

wobei der Ausdruck $\mathbf{z}_{\text{in}}(s)$ die Laplace-Transformierte von \mathbf{z}_{in} aus (4.38) ist. Damit gilt für das Zeitintervall $t \in [0, \tau^*]$

$$\|\mathbf{z}_{\text{ref}}\| \leq \|\mathbf{H}(s)\|_{\mathcal{L}_1} B_{\mathbf{f}_{\Delta r}} + \sum_{k=v}^{\omega} \|\mathbf{G}_k(s)\|_{\mathcal{L}_1} (B_{\boldsymbol{\sigma}r}^{ka} + B_{\tilde{\mathbf{K}}_k}^k B_{\boldsymbol{\sigma}r}^{kn}) + \|s\mathbf{H}(s)\|_{\mathcal{L}_1} \|\bar{\mathbf{z}}_0\|. \quad (\text{B.2})$$

Mit der Bedingung (4.41), erhält man

$$\|\mathbf{z}_{\text{ref}}\| < \rho_{\text{ref}}, \quad \forall t \in [0, \tau^*], \quad (\text{B.3})$$

was der Annahme $\|\mathbf{z}_{\text{ref}}(\tau^*)\| = \rho_{\text{ref}}$ widerspricht und (4.42) beweist. Mit diesem Resultat folgt (4.43) aus (4.22) mit (4.32) und (4.35). (4.44) folgt aus (4.27) und die Schranke (4.45) folgt aus (3.43) und (3.44) mit (4.32) und (4.35). \square

B.2. Beweis von Lemma 4

Folgender Beweis basiert auf dem Beweis für Lemma 3.3.3 aus [42]:

Beweis. Angenommen die Schranke (4.78) würde nicht für das Zeitintervall $[0, \tau]$ existieren, V1 bis V6 aus Abschnitt 4.2 sind jedoch erfüllt, dann würde es eine Zeit

B. Beweise

$\tau^* \leq \tau$ geben, so dass $\|\tilde{\mathbf{z}}\| < \bar{\gamma}_0, \forall t \in [0, \tau^*[$ und $\|\tilde{\mathbf{z}}(\tau^*)\| = \bar{\gamma}_0$, da $\|\tilde{\mathbf{z}}(0)\| = 0$ gilt und der Zeitverlauf $\tilde{\mathbf{z}}$ stetig ist. Dies impliziert, dass $\|\tilde{\mathbf{z}}\| \leq \bar{\gamma}_0 \rightarrow \tilde{\mathbf{z}} \in \mathcal{G}, \forall t \in [0, \tau^*]$. Gilt zudem $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ für $t \in [0, \tau]$ und somit auch für $t \in [0, \tau^*]$, existieren die Schranken $\|\sigma_{kl}\| \leq B_{\sigma}^{ka}$ mit $k \in \{v, \omega\}$ aus (4.56) für $t \in [0, \tau^*]$ und ebenso folgt mit $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}, \forall t \in [0, \tau^*]$ und $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathcal{G}, \forall t \in [0, \tau^*]$ aus (4.60), (4.7) und (4.56), dass

$$\mathbf{u} := -\mathbf{K}^{-1}\hat{\eta}_a - \hat{\mathbf{K}}^{-1}\sigma_n \quad (\text{B.4})$$

für $t \in [0, \tau^*]$ beschränkt ist durch $\|\mathbf{u}\| \leq \rho_u$, mit ρ_u gegeben in (4.75). Es folgt aus (3.67) mit (B.4) und $i \in \mathbb{R}_0^+$, dass gilt

$$\tilde{\mathbf{z}}(iT_s + t) = e^{\mathbf{A}e t} \tilde{\mathbf{z}}(iT_s) + \int_0^t e^{\mathbf{A}e(t-\nu)} \hat{\sigma}_a(iT_s) d\nu + \int_0^t e^{\mathbf{A}e(t-\nu)} \left(\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{u}(iT_s + \nu) - \sigma_a(iT_s + \nu) \right) d\nu. \quad (\text{B.5})$$

Mit den Definitionen

$$\varsigma_1(iT_s + t) := e^{\mathbf{A}e t} \tilde{\mathbf{z}}(iT_s) + \int_0^t e^{\mathbf{A}e(t-\nu)} \hat{\sigma}_a(iT_s) d\nu, \quad (\text{B.6})$$

$$\varsigma_1(iT_s + t) := \int_0^t e^{\mathbf{A}e(t-\nu)} \left(\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{u}(iT_s + \nu) - \sigma_a(iT_s + \nu) \right) d\nu \quad (\text{B.7})$$

wird zunächst im Folgenden gezeigt, dass

$$\|\tilde{\mathbf{z}}(iT_s)\| \leq \kappa_1(T_s) \Delta_1, \quad \forall iT_s \leq \tau^* \quad (\text{B.8})$$

mit $\kappa_1(T_s)$ und Δ_1 aus (4.73) und (4.74) gilt.

Da $\tilde{\mathbf{z}}(0) = 0$ ist, gilt $\|\tilde{\mathbf{z}}(0)\| < \kappa_1(T_s) \Delta_1$. Man betrachte nun das Zeitintervall $[jT_s, (j+1)T_s]$ mit $j \in \mathbb{R}_0^+$ und $(j+1)T_s < \tau^*$. Der Schätzfehler zum Zeitpunkt $(j+1)T_s$ ist gegeben durch

$$\tilde{\mathbf{z}}((j+1)T_s) = \varsigma_1((j+1)T_s) + \varsigma_2((j+1)T_s), \quad (\text{B.9})$$

mit

$$\varsigma_1((j+1)T_s) := e^{\mathbf{A}e T_s} \tilde{\mathbf{z}}(jT_s) + \int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}e(T_s-\nu)} \hat{\sigma}_a(jT_s) d\nu, \quad (\text{B.10})$$

$$\varsigma_1((j+1)T_s) := \int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}e(T_s-\nu)} \left(\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{u}(jT_s + \nu) - \sigma_a(jT_s + \nu) \right) d\nu. \quad (\text{B.11})$$

Mit dem Adaptionsgesetz (3.71b) eingesetzt in (B.10), siehe auch (3.73), erhält man $\varsigma_1((j+1)T_s) = 0$ und es folgt $\tilde{\mathbf{z}}((j+1)T_s) = \varsigma_2((j+1)T_s)$. Da die Schranken $B_{\sigma}^{va}, B_{\sigma}^{\omega a}$ und $\|\mathbf{u}\| \leq \rho_u$ für das Zeitintervall $[0, \tau^*]$ gelten, impliziert die Definition von $\kappa_1(T_s)$ und Δ_1 in (4.73) und (4.74), dass gilt

$$\|\tilde{\mathbf{z}}((j+1)T_s)\| \leq \kappa_1(T_s) \Delta_1, \quad (\text{B.12})$$

wodurch die Schranke (B.8) für beliebige $(j+1)T_s \leq \tau^*$ und somit für alle $iT_s \leq \tau^*$ gilt.

Da (B.5) für alle $iT_s + t \leq \tau^*$, mit $t \in [0, T_s]$, gilt, implizieren die Schranken B_{σ}^{va} , $B_{\sigma}^{\omega a}$ und $\|\mathbf{u}\| \leq \rho_u$ mit den Definitionen von $\Delta_1(T_s)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ und $\alpha_3(t)$ in (4.74) und (4.71), dass gilt

$$\|\tilde{\mathbf{z}}(iT_s + t)\| \leq \alpha_1(t) \|\tilde{\mathbf{z}}(iT_s)\| + \alpha_2(t) \|\tilde{\mathbf{z}}(iT_s)\| + \alpha_3(t)\Delta_1. \quad (\text{B.13})$$

Für alle Zeiten $t \leq \tau^*$ führt die Schranke (B.8) und die Definition von $\bar{\alpha}_1(T_s)$, $\bar{\alpha}_2(T_s)$ und $\bar{\alpha}_3(T_s)$ in (4.72) zu

$$\|\tilde{\mathbf{z}}\| \leq (\bar{\alpha}_1(T_s) + \bar{\alpha}_2(T_s))\kappa_1(T_s)\Delta_1 + \bar{\alpha}_3(T_s)\Delta_1. \quad (\text{B.14})$$

Weil die rechte Seite in (B.14) gleich der Definition von $\gamma_0(T_s)$ aus (4.70) ist, gilt $\|\tilde{\mathbf{z}}\| \leq \gamma_0(T_s)$ für das Zeitintervall $[0, \tau^*]$ und mit der Bedingung 3 aus (4.69) folgt

$$\|\tilde{\mathbf{z}}\| < \bar{\gamma}_0, \quad \forall t \in [0, \tau^*], \quad (\text{B.15})$$

was der Annahme $\|\tilde{\mathbf{z}}(\tau^*)\| = \bar{\gamma}_0$ widerspricht und da $\tau^* \leq \tau$ gilt, beweist dieser Widerspruch das Resultat von Lemma 4 in (4.78). \square

B.3. Beweis von Theorem 1

Folgender Beweis basiert auf der üblichen Beweisführung für die \mathcal{L}_1 -adaptive Regelung, siehe [42]:

Beweis. Angenommen die Schranke (4.84) würde nicht existieren, V1 bis V6 aus Abschnitt 4.2 sind jedoch erfüllt, dann würde es eine Zeit $\tau < \infty$ geben, so dass $\|\mathbf{e}\| < \gamma, \forall t \in [0, \tau]$ und $\|\mathbf{e}(\tau)\| = \gamma$, da $\|\mathbf{e}(0)\| = 0$ gilt und der Zeitverlauf \mathbf{e} stetig ist. Dies impliziert, dass $\|\mathbf{e}\| \leq \gamma, \forall t \in [0, \tau]$. Ist zudem Bedingung (4.41) für das Referenzmodell in (4.29) erfüllt, gilt $\forall t \geq 0, \|\mathbf{z}_{\text{ref}}\| < \rho_{\text{ref}}$ und es folgt, dass $\forall t \in [0, \tau]$

$$\|\mathbf{z}\| < \rho_{\text{ref}} + \gamma = \rho \quad \rightarrow \quad \mathbf{z} \in \text{Int}(\mathcal{Z}). \quad (\text{B.16})$$

Um zu zeigen, dass dieses Resultat für alle Zeit $t \geq 0$ gilt, wird im Folgenden die Differenz von (3.64) und (4.30) analysiert, welche mit $\mathbf{e} = \mathbf{z} - \mathbf{z}_{\text{ref}}$ im Frequenzbereich lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(s) = \mathbf{z}(s) - \mathbf{z}_{\text{ref}}(s) = & \mathbf{H}(s)\mathcal{L}[\mathbf{f}_{\Delta} - \mathbf{f}_{\Delta, \text{ref}}] + \sum_{k=v}^{\omega} \mathbf{G}_k(s)\mathcal{L}[\sigma_{ka} - \sigma_{ka, \text{ref}} + \\ & + \tilde{\mathbf{K}}_k \hat{\mathbf{K}}_k^{-1}(\sigma_{kn} - \sigma_{kn, \text{ref}})] - \mathbf{H}(s)\mathbf{B}\mathbf{C}(s)(\tilde{\sigma}_a(s) - \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{K}^{-1}\hat{\eta}_a(s) - \tilde{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{K}}^{-1}\sigma_n(s)), \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

da $\mathbf{H}(s) = (s\mathbf{I}_{14 \times 14} - \mathbf{A})^{-1}$ und \mathbf{z}_{in} aus (4.40) für beide Systeme identisch sind. Die Dynamik des Schätzfehlers aus (3.67) liefert hierfür

$$\mathbf{C}(s) \left(\tilde{\sigma}(s) - \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{K}^{-1}\hat{\eta}_a(s) - \tilde{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{K}}^{-1}\sigma_n(s) \right) = \mathbf{C}(s)(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_e)\tilde{\mathbf{z}}(s) = \mathbf{C}(s)\mathbf{H}_e^{-1}(s)\tilde{\mathbf{z}}(s). \quad (\text{B.18})$$

B. Beweise

Da im Zeitintervall $t \in [0, \tau]$, $\mathbf{z}_{\text{ref}} \in \text{Int}(\mathcal{Z}_{\text{ref}})$ und per Annahme $\mathbf{z} \in \text{Int}(\mathcal{Z})$ gilt, folgt mit Lemma 4, dass $\tilde{\mathbf{z}} \in \text{Int}(\mathcal{G})$ und somit die Schranken (4.56), (4.57), (4.62) und (4.63) für $t \in [0, \tau]$ existieren. Damit folgt aus (B.17) $\forall t \in [0, \tau]$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}\| &\leq \|\mathbf{H}(s)\|_{\mathcal{L}_1} (L_{\mathbf{f}_{\Delta\gamma}}\gamma + L_{\mathbf{f}_{\Delta\bar{\gamma}_0}}\bar{\gamma}_0) + \sum_{k=v}^{\omega} \|\mathbf{G}_k(s)\|_{\mathcal{L}_1} ((L_{\sigma_\gamma}^{ka}\gamma + L_{\sigma_{\bar{\gamma}_0}}^{ka}\bar{\gamma}_0) + B_{\bar{\kappa}}^k(L_{\sigma_\gamma}^{kn}\gamma + L_{\sigma_{\bar{\gamma}_0}}^{kn}\bar{\gamma}_0)) \\ &\quad - \|\mathbf{H}(s)\mathbf{BC}(s)\mathbf{H}_e(s)^{-1}\|_{\mathcal{L}_1}\bar{\gamma}_0 \tag{B.19} \\ &= \left(\|\mathbf{H}(s)\|_{\mathcal{L}_1}L_{\mathbf{f}_{\Delta\gamma}} + \sum_{k=v}^{\omega} \|\mathbf{G}_k(s)\|_{\mathcal{L}_1}(L_{\sigma_\gamma}^{ka} + B_{\bar{\kappa}}^kL_{\sigma_\gamma}^{kn}) \right) \gamma \\ &\quad + \left(\|\mathbf{H}(s)\|_{\mathcal{L}_1}L_{\mathbf{f}_{\Delta\bar{\gamma}_0}} + \sum_{k=v}^{\omega} \|\mathbf{G}_k(s)\|_{\mathcal{L}_1}(L_{\sigma_{\bar{\gamma}_0}}^{ka} + B_{\bar{\kappa}}^kL_{\sigma_{\bar{\gamma}_0}}^{kn}) - \|\mathbf{H}(s)\mathbf{BC}(s)\mathbf{H}_e(s)^{-1}\|_{\mathcal{L}_1} \right) \bar{\gamma}_0. \end{aligned}$$

Mit der Definition von c_0 und c_1 in (4.64) und (4.65) und der Schranke für $\bar{\gamma}_0$ aus (4.5) folgt

$$\|\mathbf{e}\| \leq c_0\bar{\gamma}_0 + c_1\gamma = c_0\frac{\gamma(1-c_1)}{c_0} + c_1\gamma < \gamma, \tag{B.20}$$

was der Annahme $\|\mathbf{e}(\tau)\| = \gamma$ widerspricht und dadurch die Existenz der Schranke aus (4.84) beweist. Aus (B.16) folgt damit die Existenz der Schranke (4.79), was wiederum ermöglicht Lemma 4 mit beliebig langem Zeitintervall anzuwenden, was somit die Schranke (4.83) beweist. Die Existenz der Schranke (4.80) folgt aus (4.22) mit (4.56) und (4.60). (4.81) folgt aus (4.27) und die Schranke (4.82) folgt aus (3.43) und (3.44) mit (4.56) und (4.12). \square

B.4. Hilfssatz

Lemma 6. *Sind V1 bis V9 aus Abschnitt 4.2 erfüllt und gilt $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ und $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathcal{G}$ für ein beliebig langes Zeitintervall $t \in [0, t_f]$, dann gilt für das folgende nicht-autonome System mit $\lambda < 0$*

$$\dot{x} = \lambda x + \mathbf{z}'[\mathbf{B}_v\mathbf{B}_\omega] [\boldsymbol{\chi}'_v\boldsymbol{\chi}'_\omega]', \quad x(t=0) = 0, \tag{B.21}$$

$$\boldsymbol{\chi}_k(s) = (\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{C}_k(s))\boldsymbol{\sigma}_{kl}(s), \quad k \in \{v, \omega\}, \quad l \in \{a, n\}, \tag{B.22}$$

dass der Zustand x für das Zeitintervall $t \in [0, t_f]$ beschränkt ist und mit

$$\|x(t)\| \leq \frac{\rho}{|\lambda|} \sum_{k=v}^{\omega} \|\mathbf{B}_k\| \|\boldsymbol{\mathfrak{G}}_k(s)\|_{\mathcal{L}_1} (B_{\sigma_i}^{kl} + B_{\sigma}^{kl}) \tag{B.23}$$

abgeschätzt werden kann, wobei $\boldsymbol{\mathfrak{G}}_k(s) = s^{-1}(\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{C}_k(s))$ gilt.

Beweis. Die Größe $\boldsymbol{\chi}_k$ kann im Frequenzbereich als Ausgang des folgenden Systems geschrieben werden

$$\boldsymbol{\chi}_k(s) = \boldsymbol{\mathfrak{G}}_k(s)[s\boldsymbol{\sigma}_{kl}(s) - \boldsymbol{\sigma}_{kl}|_{t=0} + \boldsymbol{\sigma}_{kl}|_{t=0}] = \boldsymbol{\mathfrak{G}}_k(s)[\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{kl}(s) + \boldsymbol{\sigma}_{kl}|_{t=0}]. \tag{B.24}$$

Vorausgesetzt V1 bis V9 aus Abschnitt 4.2 sind erfüllt und $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$, $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathcal{G}$ gilt für ein gewisses Intervall $t \in [0, t_f]$, dann ist $\mathfrak{G}_k(s) = s^{-1}(\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{C}_k(s))$ ein exponentiell stabiler Tiefpassfilter mit Zählergrad $<$ Nennergrad und die Schranken (4.33) und (4.85) existieren für dieses Zeitintervall $t \in [0, t_f]$, so dass folgende Abschätzung mit Lemma 1 gilt

$$\|\boldsymbol{\chi}_k\| \leq \|\mathfrak{G}_k(s)\|_{\mathcal{L}_1}(B_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}^{kl} + B_{\boldsymbol{\sigma}_i}^{kl}), \quad \forall t \in [0, \tau]. \quad (\text{B.25})$$

Weiterhin gilt mit dieser Abschätzung für $t \in [0, t_f]$

$$\|x(t)\| \leq \int_0^t e^{\lambda(t-\nu)} \|\mathbf{z}(\nu)\| \sum_{k=\nu}^{\omega} \|\mathbf{B}_k\| \|\boldsymbol{\chi}_k(\nu)\| d\nu \quad (\text{B.26})$$

$$\begin{aligned} &\leq \rho \int_0^t e^{\lambda(t-\nu)} d\nu \sum_{k=\nu}^{\omega} \|\mathbf{B}_k\| \|\mathfrak{G}_k(s)\|_{\mathcal{L}_1}(B_{\boldsymbol{\sigma}_i}^{kl} + B_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}^{kl}) \\ &\leq \frac{\rho}{|\lambda|} \sum_{k=v}^{\omega} \|\mathbf{B}_k\| \|\mathfrak{G}_k(s)\|_{\mathcal{L}_1}(B_{\boldsymbol{\sigma}_i}^{kl} + B_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}^{kl}), \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

was die Aussage von Lemma 6 beweist. \square

Anmerkung 26. Lemma 6 kann so wie hier dargestellt sowohl mit dem Fehlerzustand \mathbf{z} und den Funktionen $\boldsymbol{\sigma}_{kl}$ des geschlossenen Regelkreis (3.62) als auch mit \mathbf{z}_{ref} und $\boldsymbol{\sigma}_{kl,\text{ref}}$ das Referenzsystem (4.29) formuliert werden. Für Letzteres muss ebenso V1 bis V9 aus Abschnitt 4.2 gelten, jedoch nur $\mathbf{z}_{\text{ref}} \in \mathcal{Z}_{\text{ref}}$ für $t \in [0, t_f]$ erfüllt sein. Das Resultat für das Referenzsystem ist identisch zu (B.23) mit ρ und $B_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}^{kl}$ ersetzt durch ρ_{ref} und $B_{\dot{\boldsymbol{\sigma}_r}}^{kl}$.

B.5. Beweis von Lemma 3

Folgender Beweis orientiert sich an der Vorgehensweise in [109]:

Beweis. Angenommen die Schranke (4.49) würde nicht existieren, V1 bis V9 aus Abschnitt 4.2 und $\|\mathbf{z}_{\text{ref}}(t=0)\| \leq \|\bar{\mathbf{z}}_0\|$ sind jedoch erfüllt, dann würde es eine Zeit $\tau^* < \infty$ geben, so dass $\|\mathbf{z}_{\text{ref}}\| < \rho_{\text{ref}}, \forall t \in [0, \tau^*[$ und $\|\mathbf{z}_{\text{ref}}(\tau^*)\| = \rho_{\text{ref}}$, da $\|\mathbf{z}_{\text{ref}}(t=0)\| < \rho_{\text{ref}}$ gilt und der Zeitverlauf \mathbf{z}_{ref} stetig ist. Dies impliziert, dass $\|\mathbf{z}_{\text{ref}}\| \leq \rho_{\text{ref}}, \forall t \in [0, \tau^*]$. Daher existieren die Schranken $\|\boldsymbol{\sigma}_{kl,\text{ref}}\| \leq B_{\boldsymbol{\sigma}_r}^{kl}$ und $\|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{kl,\text{ref}}\| \leq B_{\dot{\boldsymbol{\sigma}_r}}^{kl}$ mit $k \in \{v, \omega\}$, $l \in \{a, n\}$ aus (4.32) für das Zeitintervall $t \in [0, \tau^*]$. Mit dieser Tatsache kann der Kandidat für eine Lyapunovfunktion aus (3.53) auf das Referenzsystem (4.29) angewandt werden, so dass $V_{\text{ref}} = V(\mathbf{z}_{\text{ref}}) = 1/2 \mathbf{z}'_{\text{ref}} \mathbf{z}_{\text{ref}}$ gilt und für dessen Ableitung, mit σ_m als der kleinste Singulärwert von \mathbf{A}_V aus (3.54), folgt

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\text{ref}} &\leq -\sigma_m \|\mathbf{z}_{\text{ref}}\|^2 + \mathbf{z}'_{\text{ref}} \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}_{a,\text{ref}} - \boldsymbol{\eta}_{a,\text{ref}} + \tilde{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{K}}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{n,\text{ref}}) \\ &= -2\sigma_m V_{\text{ref}} + \mathbf{z}'_{\text{ref}} \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}_{a,\text{ref}} - \boldsymbol{\eta}_{a,\text{ref}} + \tilde{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{K}}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{n,\text{ref}}). \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Im Folgenden werden alle Aussagen für den Zeitraum $t \in [0, \tau^*]$ gemacht. Mit (B.28) erhält man

$$V_{\text{ref}} \leq \phi(t) \cdot V_{\text{ref}}(\mathbf{z}_{\text{ref}}(t=0)) + V_r, \quad (\text{B.29})$$

B. Beweise

wobei $\phi(t) := e^{-2\sigma_m t}$ und

$$V_r := \int_0^t \phi(t-\tau) \mathbf{z}'_{\text{ref}} \mathbf{B} (\boldsymbol{\sigma}_{a,\text{ref}} - \boldsymbol{\eta}_{a,\text{ref}} + \tilde{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{K}}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{n,\text{ref}}) d\tau.$$

Mit (4.31) kann V_r als die Lösung der folgenden Dynamik angegeben werden

$$\begin{aligned} \dot{V}_r &= -2\sigma_m V_r + \mathbf{z}'_{\text{ref}} [\mathbf{B}_v \mathbf{B}_\omega] [\boldsymbol{\chi}'_v \boldsymbol{\chi}'_\omega]', \quad V_r(0) = 0, \\ \boldsymbol{\chi}_k(s) &= (\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{C}_k(s)) \mathfrak{L} [\boldsymbol{\sigma}_{ka,\text{ref}} + \tilde{\mathbf{K}}_k \hat{\mathbf{K}}_k^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{kn,\text{ref}}], \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

wobei $k \in \{v, \omega\}$. Mit Lemma 6 und der Definition von $r(\|\boldsymbol{\mathfrak{G}}_v(s)\|_{\mathcal{L}_1}, \|\boldsymbol{\mathfrak{G}}_\omega(s)\|_{\mathcal{L}_1})$ aus (4.48), erhält man $\|V_r\| \leq r(\|\boldsymbol{\mathfrak{G}}_v(s)\|_{\mathcal{L}_1}, \|\boldsymbol{\mathfrak{G}}_\omega(s)\|_{\mathcal{L}_1})$ und

$$V_{\text{ref}} \leq e^{-2\sigma_m t} V_{\text{ref}}(\mathbf{z}_{\text{ref}}(0)) + r(\|\boldsymbol{\mathfrak{G}}_v(s)\|_{\mathcal{L}_1}, \|\boldsymbol{\mathfrak{G}}_\omega(s)\|_{\mathcal{L}_1}). \quad (\text{B.31})$$

\mathbf{z}_{ref} ist demnach beschränkt durch

$$\|\mathbf{z}_{\text{ref}}\| \leq \sqrt{e^{-2\sigma_m t} \|\bar{\mathbf{z}}_0\|^2 + 2r(\|\boldsymbol{\mathfrak{G}}_v(s)\|_{\mathcal{L}_1}, \|\boldsymbol{\mathfrak{G}}_\omega(s)\|_{\mathcal{L}_1})} \quad (\text{B.32})$$

und mit Bedingung (4.47) gilt

$$\|\mathbf{z}_{\text{ref}}\| < \rho_{\text{ref}}, \quad (\text{B.33})$$

was der Annahme $\|\mathbf{z}_{\text{ref}}(\tau^*)\| = \rho_{\text{ref}}$ widerspricht und (4.49) beweist. Ebenso gilt

$$\|\mathbf{z}_{\text{ref}}\| \leq \sqrt{e^{-2\sigma_m T} \|\bar{\mathbf{z}}_0\|^2 + 2r(\|\boldsymbol{\mathfrak{G}}_v(s)\|_{\mathcal{L}_1}, \|\boldsymbol{\mathfrak{G}}_\omega(s)\|_{\mathcal{L}_1})} = \varepsilon(T), \quad \forall t \geq t_0 + T, \quad (\text{B.34})$$

was die Aussage in (4.51) beweist. Mit diesem Resultat folgt (4.52) aus (4.22) mit (4.32) und (4.35). (4.53) folgt aus (4.27) und die Schranke (4.54) folgt aus (3.43) und (3.44) mit (4.32) und (4.35). \square

B.6. Beweis von Theorem 2

Folgender Beweis orientiert sich an der Vorgehensweise in [109]:

Beweis. Angenommen die Schranke (4.105) würde nicht existieren und V1 bis V9 aus Abschnitt 4.2 sind erfüllt, dann würde es eine Zeit $\tau < \infty$ geben, so dass $\|\mathbf{e}\| < \gamma, \forall t \in [0, \tau[$ und $\|\mathbf{e}(\tau)\| = \gamma$, da $\|\mathbf{e}(0)\| = 0$ gilt und der Zeitverlauf \mathbf{e} stetig ist. Dies impliziert, dass $\|\mathbf{e}\| \leq \gamma, \forall t \in [0, \tau]$. Ist zudem Bedingung (4.47) für das Referenzmodell in (4.29) erfüllt, gilt $\forall t \geq 0, \|\mathbf{z}_{\text{ref}}\| < \rho_{\text{ref}}$ und es folgt, dass $\forall t \in [0, \tau]$

$$\|\mathbf{z}\| < \rho_{\text{ref}} + \gamma = \rho \quad \rightarrow \quad \mathbf{z} \in \text{Int}(\mathcal{Z}). \quad (\text{B.35})$$

Um zu zeigen, dass dieses Resultat für alle Zeit $t \geq 0$ gilt, wird im Folgenden die Differenz von (3.62) und (4.29) analysiert, welche mit $\mathbf{e}_\eta = \mathbf{z}_\eta - \mathbf{z}_{\eta,\text{ref}} = [\mathbf{e}', n\boldsymbol{\eta}_{va,e}']'$, wobei $\mathbf{z}_\eta := [\mathbf{z}', n\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}']'$ und $\mathbf{z}_{\eta,\text{ref}} := [\mathbf{z}'_{\text{ref}}, n\boldsymbol{\eta}_{va,\text{ref}}']'$, lautet

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{e}_\eta) + \Delta \mathbf{f}(t, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{z}_{\eta,\text{ref}}) + \mathbf{B}(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3), \quad (\text{B.36})$$

worin

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{f}(t, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{z}_{\eta, \text{ref}}) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{z}_{\eta, \text{ref}} + \mathbf{e}_\eta) - \mathbf{f}(t, \mathbf{z}_{\eta, \text{ref}}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{e}_\eta), \\ \phi_1(s) &= -\mathbf{C}(s) \left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_a(s) - \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{K}^{-1} \hat{\boldsymbol{\eta}}_a(s) - \tilde{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{K}}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_n(s) \right), \\ \phi_2(s) &= (\mathbf{I}_{6 \times 6} - \mathbf{C}(s)) \tilde{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{K}}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}_n(s) - \boldsymbol{\sigma}_{n, \text{ref}}(s)), \\ \phi_3(s) &= (\mathbf{I}_{6 \times 6} - \mathbf{C}(s)) (\boldsymbol{\sigma}_a(s) - \boldsymbol{\sigma}_{a, \text{ref}}(s)).\end{aligned}$$

Die Dynamik des Schätzfehlers aus (3.67) liefert (B.37)

$$\mathbf{C}(s) \left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(s) - \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{K}^{-1} \hat{\boldsymbol{\eta}}_a(s) - \tilde{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{K}}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_n(s) \right) = \mathbf{C}(s) (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_e) \tilde{\mathbf{z}}(s) = \mathbf{C}(s) \mathbf{H}_e^{-1}(s) \tilde{\mathbf{z}}(s)$$

und da $\mathbf{f}(t, \mathbf{z}_\eta = \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ gilt und \mathbf{f} stetig differenzierbar ist, kann $\Delta \mathbf{f}(t, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{z}_{\eta, \text{ref}})$ mithilfe des Mittelwertsatzes, siehe Lemma 5 auf S. 113, geschrieben werden als

$$\Delta \mathbf{f} = \left(\int_0^1 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}_\eta}(t, \lambda_1 \mathbf{e}_\eta + \mathbf{z}_{\eta, \text{ref}}) d\lambda_1 - \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}_\eta}(t, \lambda_2 \mathbf{e}_\eta) d\lambda_2 \right) \mathbf{e}_\eta, \quad (\text{B.38})$$

mit $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $i \in \{0, 1\}$.

Im Folgenden werden alle Aussagen für das Zeitintervall $t \in [0, \tau]$ gemacht. Da in diesem $\mathbf{z}_{\text{ref}} \in \text{Int}(\mathcal{Z}_{\text{ref}})$ und per Annahme $\mathbf{z} \in \text{Int}(\mathcal{Z})$ gilt, folgt mit Lemma 4 auf Seite 64, dass $\tilde{\mathbf{z}} \in \text{Int}(\mathcal{G})$ und somit die Schranken (4.56) - (4.86) und (4.88) existieren. Mit (B.38) und diesen Schranken erhält man

$$\|\Delta \mathbf{f}\| \leq 2L_{\partial \mathbf{f}} \|\mathbf{e}_\eta\|^2 + L_{\partial \mathbf{f}} \|\mathbf{z}_{\eta, \text{ref}}\| \|\mathbf{e}_\eta\| < k(t) (\|\mathbf{e}\| + \|n\boldsymbol{\eta}_{va, e}\|), \quad (\text{B.39})$$

wobei $k(t)$ in (4.90) definiert ist und die Herleitung dieser Schranke in Abschnitt A.6 detailliert gezeigt ist. Im nächsten Schritt wird der Kandidat für eine Lyapunovfunktion aus (3.53) auf das Fehlersystem in (B.36) angewandt ($V_e = V(\mathbf{e}) = 1/2 \mathbf{e}'\mathbf{e}$) und dessen Ableitung mit $\bar{k} = k(0)$ folgendermaßen abgeschätzt:

$$\begin{aligned}\dot{V}_e &\leq -2\sigma_m V_e + \mathbf{e}'(\Delta \mathbf{f} + \mathbf{B}(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)) \\ &\leq -2(\sigma_m - k(t))V_e + \gamma (\bar{k} \|n\boldsymbol{\eta}_{va, e}\| + \|\mathbf{B}\| B_{\text{Che}} \bar{\gamma}_0) + \mathbf{e}'\mathbf{B}(\phi_2 + \phi_3).\end{aligned}$$

Da $\mathbf{e}(0) = 0$ gilt, kann geschrieben werden

$$\begin{aligned}V_e &\leq \int_0^t \varphi(t, \nu) (\gamma (\bar{k} \|n\boldsymbol{\eta}_{va, e}\| + \|\mathbf{B}\| B_{\text{Che}} \bar{\gamma}_0) + \mathbf{e}'\mathbf{B}(\phi_2 + \phi_3)) d\nu, \\ \text{mit } \varphi(t, \nu) &:= \exp \left(-2\sigma_m(t - \nu) + 2 \int_\nu^t k(\lambda) d\lambda \right).\end{aligned}$$

Der Ausdruck $\varphi(t, \nu)$ ist nach oben hin beschränkt durch

$$\begin{aligned}\varphi(t, \nu) &< \exp \left(-2\sigma_m(t - \nu) + 2L_{\partial \mathbf{f}}(2\gamma + 2n_\eta^{va} \gamma_u^{va} + n_\eta^{va} \rho_{ur}^{va})(t - \nu) + 2L_{\partial \mathbf{f}} \int_\nu^t \|\mathbf{z}_{\text{ref}}\| d\nu \right) \\ &< \exp \left(-2\sigma_m(t - \nu) + 2L_{\partial \mathbf{f}} (2\gamma + 2n_\eta^{va} \gamma_u^{va} + n_\eta^{va} \rho_{ur}^{va})(t - \nu) + 2L_{\partial \mathbf{f}} \varepsilon(T)(t - \nu) + 2L_{\partial \mathbf{f}} \rho_{\text{ref}} T \right) \\ &= \exp \left(-2\sigma_m(t - \nu) + 2k(T)(t - \nu) + 2L_{\partial \mathbf{f}} \rho_{\text{ref}} T \right) \\ &= \xi \exp(\bar{\lambda}(t - \nu)),\end{aligned}$$

B. Beweise

mit $\varepsilon(t)$, $\bar{\lambda}$ und ξ definiert in (4.91) und (4.93). Ist die Bedingung (4.92) erfüllt, gilt $\sigma_m > k(T)$ und

$$V_e < \frac{\xi\gamma}{|\lambda|} (\|\mathbf{B}\| B_{\text{CHe}}\bar{\gamma}_0 + \bar{k} \|\mathbf{n}\boldsymbol{\eta}_{va,e}\|) + \xi \underbrace{\int_0^t e^{\bar{\lambda}(t-\nu)} \mathbf{e}'\mathbf{B}(\boldsymbol{\phi}_2 + \boldsymbol{\phi}_3) d\nu}_{V_n}. \quad (\text{B.40})$$

Der Ausdruck V_n in (B.40) ist die Lösung von

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= \bar{\lambda} V_n + \mathbf{e}'[\mathbf{B}_v\mathbf{B}_\omega] [\boldsymbol{\chi}'_v\boldsymbol{\chi}'_\omega]', \quad V_n(0) = 0, \\ \boldsymbol{\chi}_k(s) &= (\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{C}_k(s))(\boldsymbol{\mathcal{L}}[\boldsymbol{\sigma}_{ka} - \boldsymbol{\sigma}_{ka,\text{ref}} + \tilde{\mathbf{K}}_k \hat{\mathbf{K}}_k^{-1}(\boldsymbol{\sigma}_{kn} - \boldsymbol{\sigma}_{kn,\text{ref}})]), \quad k \in \{v, \omega\}. \end{aligned}$$

Mit Lemma 6 und der Tatsache dass $\|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{kl} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{kl,\text{ref}}\| \leq L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\gamma}^{kl}\gamma + L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\bar{\gamma}_0}^{kl}\bar{\gamma}_0$ aus (4.85) und $\boldsymbol{\sigma}_{kl}|_{t=0} = \boldsymbol{\sigma}_{kl,\text{ref}}|_{t=0}$, erhält man

$$\begin{aligned} \|V_n\| &\leq r_e := \frac{\gamma^2}{|\lambda|} \sum_{k=v}^{\omega} \|\mathbf{B}_k\| \|\boldsymbol{\mathcal{G}}_k(s)\|_{\mathcal{L}_1} (L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\gamma}^{ka} + B_{\tilde{k}}^k L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\gamma}^{kn}) \\ &\quad + \frac{\gamma\bar{\gamma}_0}{|\lambda|} \sum_{k=v}^{\omega} \|\mathbf{B}_k\| \|\boldsymbol{\mathcal{G}}_k(s)\|_{\mathcal{L}_1} (L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\bar{\gamma}_0}^{ka} + B_{\tilde{k}}^k L_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\bar{\gamma}_0}^{kn}). \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

Ungleichung (B.41) eingesetzt in (B.40) zusammen mit der Schranke (4.61) ergibt

$$V_e < \frac{\xi\gamma\bar{\gamma}_0}{|\lambda|} (\|\mathbf{B}\| B_{\text{CHe}} + \bar{k}n_\eta^{va} L_{\bar{\boldsymbol{\eta}}_0}^{va}) + \frac{\xi\gamma^2}{|\lambda|} \bar{k}n_\eta^{va} L_{\boldsymbol{\eta}}^{va} + \xi r_e = \frac{1}{2}c_0\gamma\bar{\gamma}_0 + \frac{1}{2}c_1\gamma^2, \quad (\text{B.42})$$

wobei c_0 und c_1 in (4.94) und (4.93) definiert sind. Mit der oberen Schranke für $\bar{\gamma}_0$ aus (4.5) folgt

$$V_e < \frac{1}{2}\gamma^2 \quad \rightarrow \quad \|\mathbf{e}\| < \gamma, \quad \forall t \in [0, \tau], \quad (\text{B.43})$$

was der Annahme $\|\mathbf{e}(\tau)\| = \gamma$ widerspricht und dadurch die Existenz der Schranke aus (4.105) beweist. Aus (B.35) folgt damit die Existenz der Schranken (4.99) und (4.100), was wiederum ermöglicht Lemma 4 mit beliebig langem Zeitintervall anzuwenden und somit die Schranke (4.104) beweist. Die Existenz der Schranke (4.101) folgt aus (4.22) mit (4.56) und (4.60). (4.102) folgt aus (4.27) und die Schranke (4.103) folgt aus (3.43) und (3.44) mit (4.56) und (4.12). \square

C. Weitere Simulationsergebnisse

Nachfolgend sind weitere Simulationsergebnisse für Kapitel 5 gezeigt, welche aus Platzgründen in den Anhang verschoben wurden.

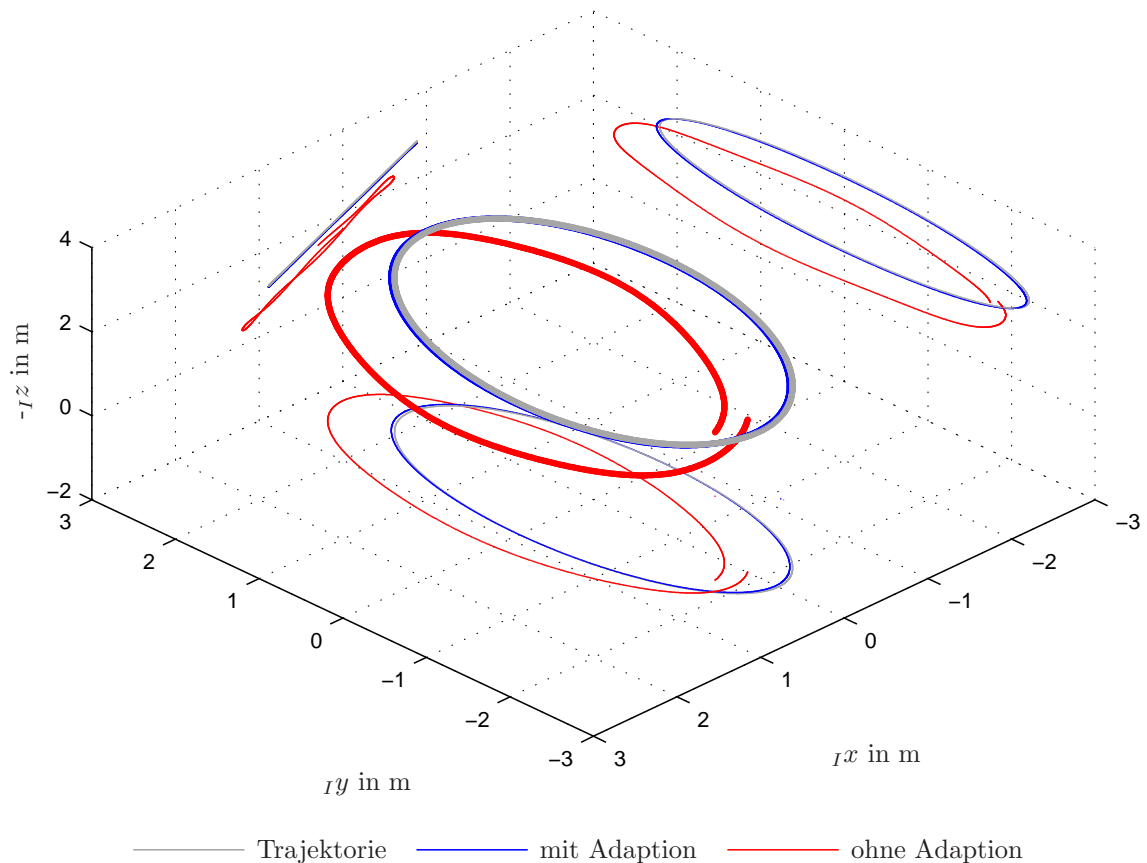


Abbildung C.1.: Räumliche Darstellung der Simulationsergebnisse bezüglich der Position für die Trajektorie B und für den Testfall mit niederfrequenten Störungen ohne Messrauschen. Dargestellt ist das Folgeverhalten im Simulationszeitraum von 10 s bis 16.5 s.

C. Weitere Simulationsergebnisse

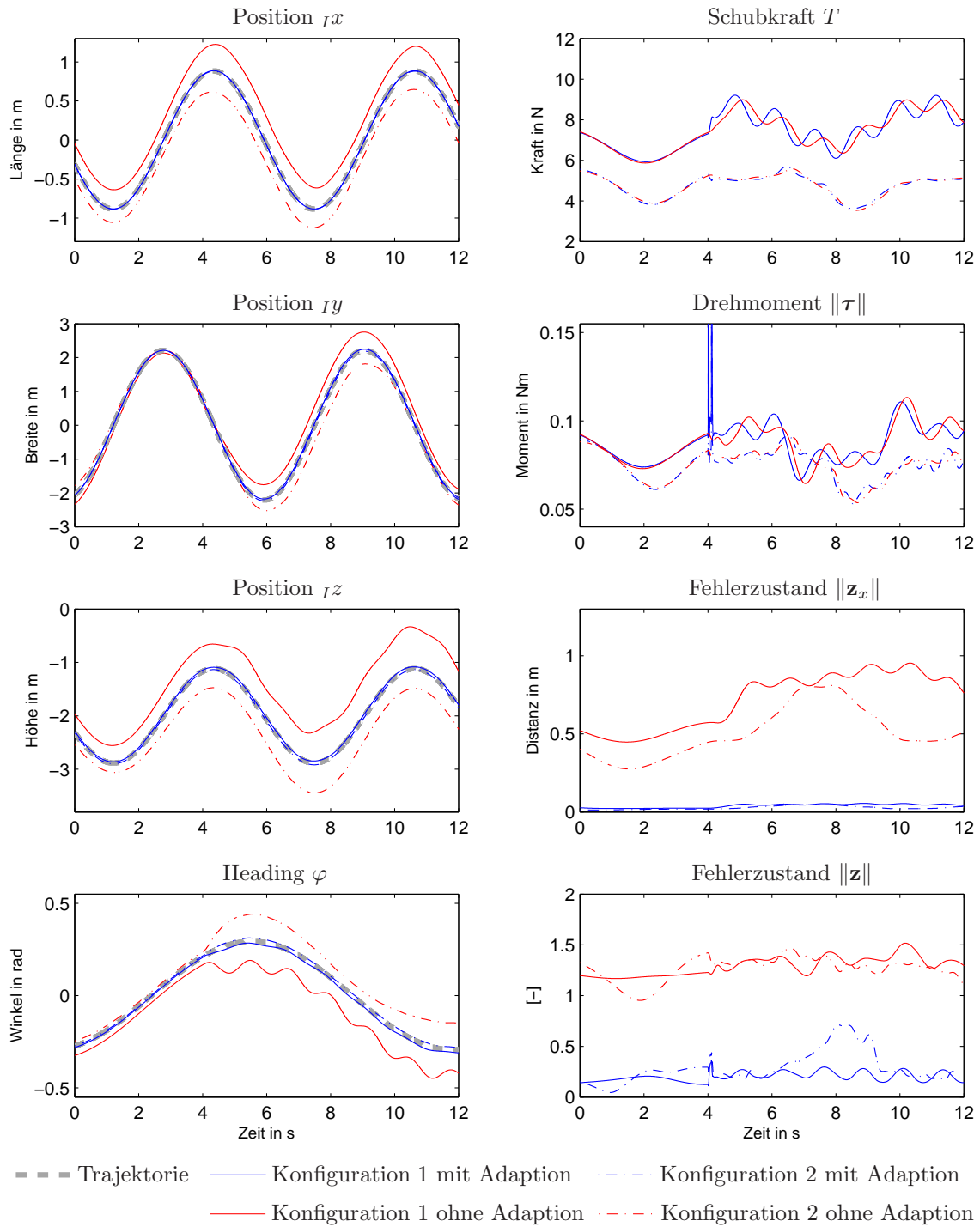


Abbildung C.2.: Darstellung der Simulationsergebnisse über der Zeit für die Trajektorie B und für den Testfall mit niederfrequenten Störungen ohne Messrauschen.

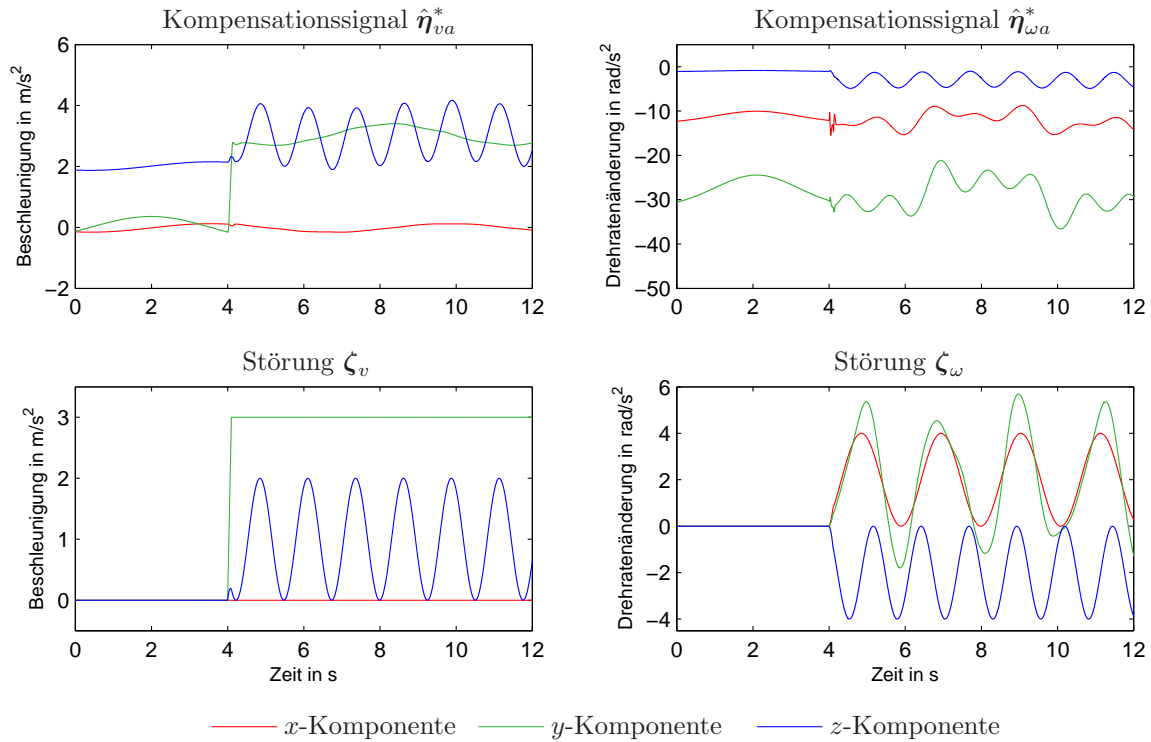


Abbildung C.3.: Darstellung der eingebrachten Störungen sowie der Signale zur Kompensation der Unsicherheiten für die Trajektorie B und für den Testfall mit niederfrequenten Störungen ohne Messrauschen. Dargestellt ist der Verlauf für die erste Streckenkonfiguration.

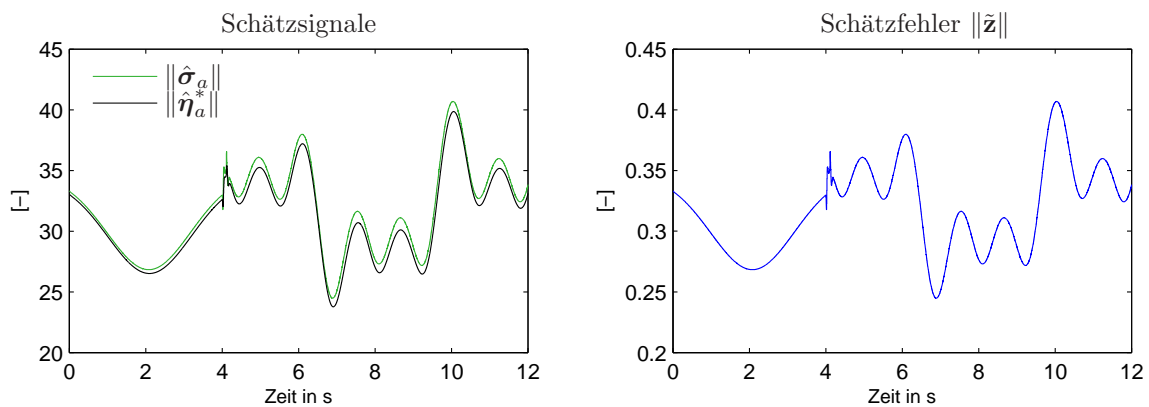


Abbildung C.4.: Zeitlicher Verlauf der Beträge der Schätzsignale und des Schätzfehlers für die Trajektorie B und für den Testfall mit niederfrequenten Störungen ohne Messrauschen. Dargestellt ist der Verlauf für die erste Streckenkonfiguration.

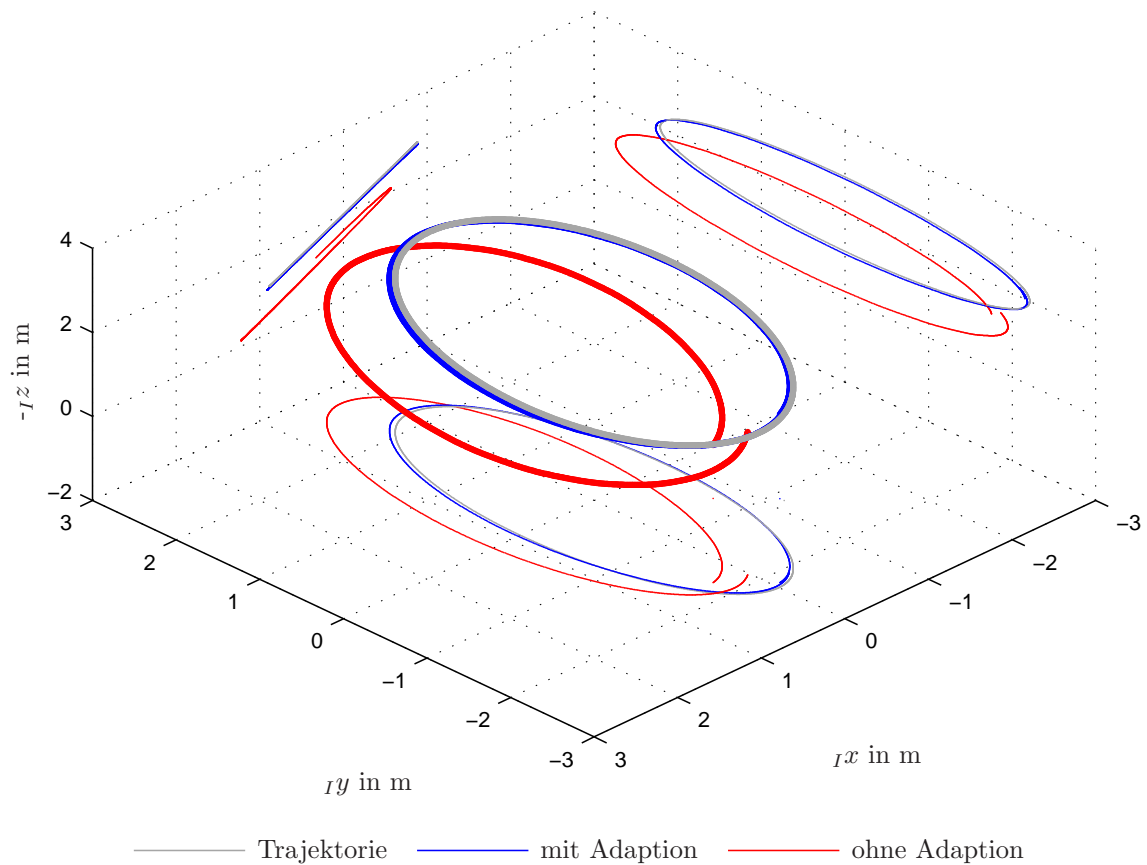


Abbildung C.5.: Räumliche Darstellung der Simulationsergebnisse bezüglich der Position für die Trajektorie B und für den Testfall mit höherfrequenten Störungen und Messrauschen. Dargestellt ist das Folgeverhalten im Simulationszeitraum von 10 s bis 22 s.

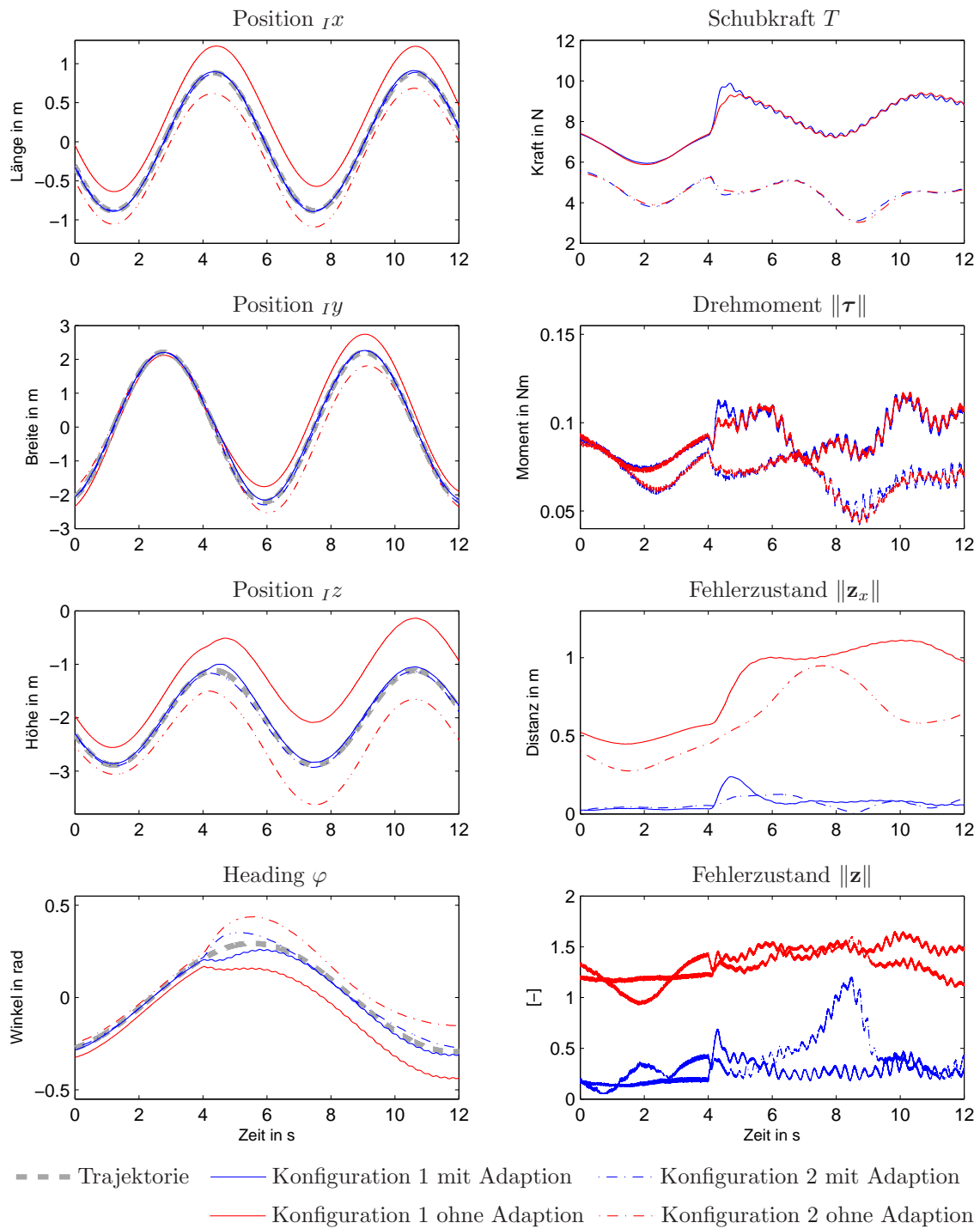


Abbildung C.6.: Darstellung der Simulationsergebnisse über der Zeit für die Trajektorie B und für den Testfall mit höherfrequenten Störungen und Messrauschen.

C. Weitere Simulationsergebnisse

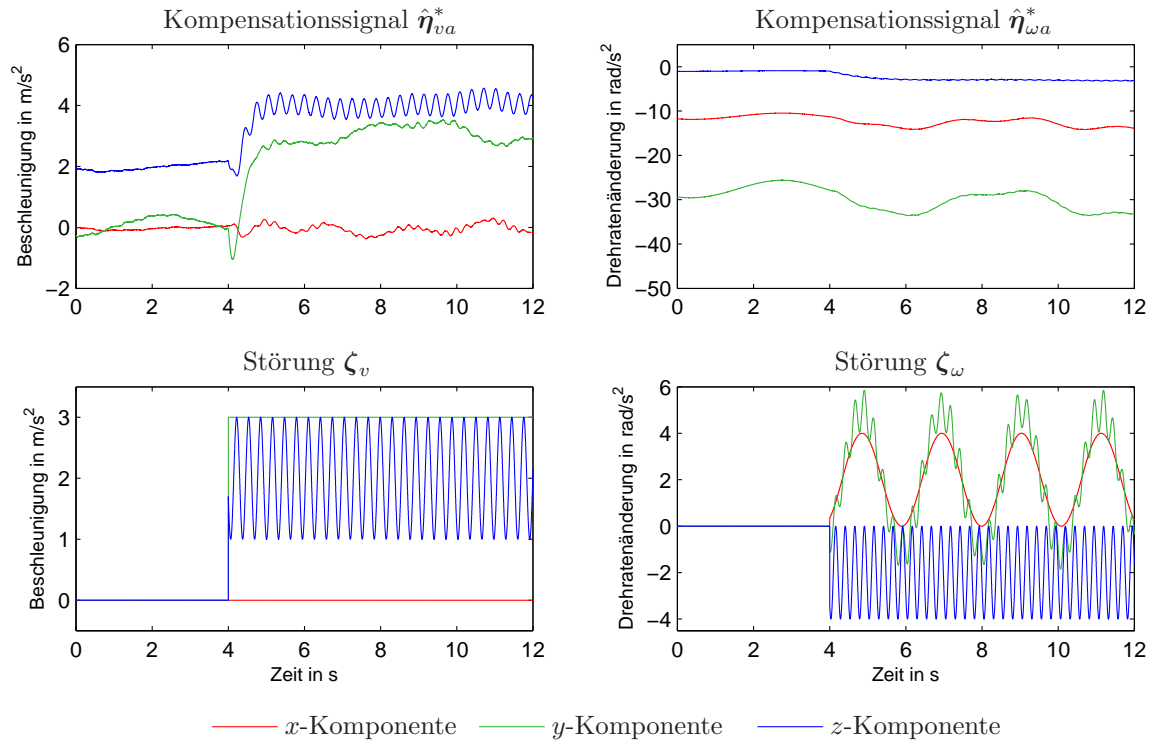


Abbildung C.7.: Darstellung der eingebrachten Störungen sowie der Signale zur Kompensation der Unsicherheiten für die Trajektorie B und für den Testfall mit höherfrequenten Störungen und Messrauschen. Dargestellt ist der Verlauf für die erste Streckenkonfiguration.

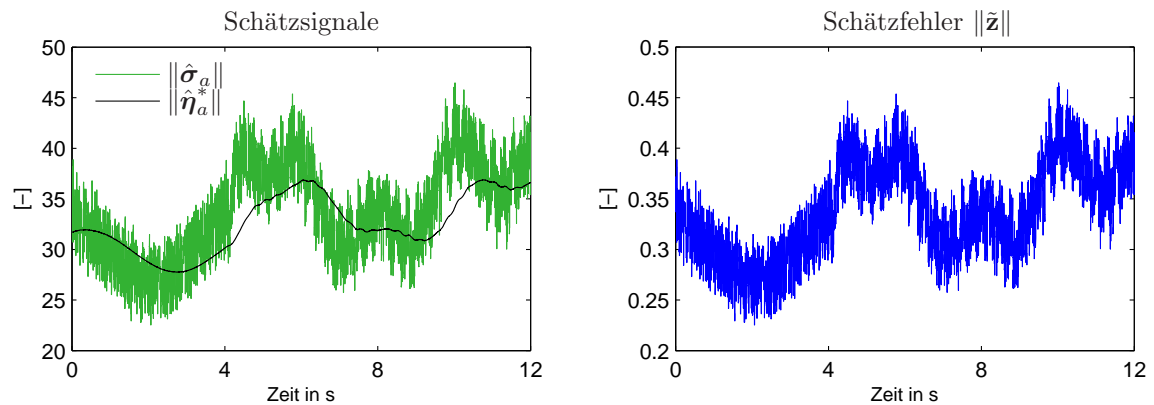


Abbildung C.8.: Zeitlicher Verlauf der Beträge der Schätzsignale und des Schätzfehlers für die Trajektorie B und für den Testfall mit höherfrequenten Störungen und Messrauschen. Dargestellt ist der Verlauf für die erste Streckenkonfiguration.

Symbolverzeichnis

\mathbf{x}	Absolute Position des Quadropters dargestellt im inertialen Koordinatensystem (I -System), $\mathbf{x} = {}_I\mathbf{x} = [x \ y \ z]' \in \mathbb{R}^3$.
\mathbf{v}	Absolute Geschwindigkeit des Quadropters dargestellt im inertialen Koordinatensystem (I -System), $\mathbf{v} = {}_I\mathbf{v} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]' \in \mathbb{R}^3$.
\mathbf{t}	Schubvektor des Quadropters dargestellt im inertialen Koordinatensystem (I -System), $\mathbf{t} = {}_I\mathbf{t} = [t_1 \ t_2 \ t_3]' \in \mathbb{R}^3$.
\mathbf{t}_e	Richtung des Schubvektors, als Einheitsvektor dargestellt im inertialen Koordinatensystem (I -System), $\mathbf{t}_e = {}_I\mathbf{t}_e = [t_{e1} \ t_{e2} \ t_{e3}]' \in \mathbb{R}^3$.
$\boldsymbol{\omega}$	Absolute Drehgeschwindigkeiten des Quadropters dargestellt im körperfesten Koordinatensystem (B -System), $\boldsymbol{\omega} = {}_B\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]' \in \mathbb{R}^3$.
$\boldsymbol{\omega}_{xy}$	Vektor bestehend aus den ersten beiden Komponenten der absoluten Drehgeschwindigkeit des Quadropters dargestellt im körperfesten Koordinatensystem (B -System), $\boldsymbol{\omega}_{xy} = [\omega_x \ \omega_y]' \in \mathbb{R}^2$.
ω_z	Dritte Komponente der absoluten Drehgeschwindigkeit des Quadropters dargestellt im körperfesten Koordinatensystem (B -System).
\mathbf{w}	Vektor bestehend aus den ersten beiden Komponenten der Drehgeschwindigkeit und der zeitlichen Änderung des Schubbetrags, $\mathbf{w} = [\omega_x \ \omega_y \ \dot{T}]'$.
${}_n\mathbf{w}$	Normierte Version des Vektors \mathbf{w} , ${}_n\mathbf{w} = [{}_n\omega_x \ {}_n\omega_y \ {}_n\dot{T}]'$.
φ	Winkelparameter zur Beschreibung des Headings.
\mathbf{s}	Zustandsvektor des Quadropters.
\mathbf{s}_{ext}	Zustandsvektor des erweiterten Streckenmodells.
\mathbf{x}_T	Position \mathbf{x} der Positionstrajektorie.
φ_T	Winkel φ der Headingtrajektorie.
\mathbf{v}_d	Virtuelles Stellgesetz für die Geschwindigkeit \mathbf{v} .
\mathbf{t}_d	Virtuelles Stellgesetz für den Schubvektor \mathbf{t} .
\mathbf{t}_{da}	Adaptiver Anteil des virtuellen Stellgesetzes für den Schubvektor \mathbf{t} .
\mathbf{t}_{dn}	Nominaler Anteil des virtuellen Stellgesetzes für den Schubvektor \mathbf{t} .
${}_n\mathbf{w}_d$	Virtuelles Stellgesetz für die normierte Größe ${}_n\mathbf{w}$.
ω_{zd}	Virtuelles Stellgesetz für die Größe ω_z .
$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{xy}$	Virtuelles Stellgesetz für die Größe $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{xy}$.
${}_n\dot{\boldsymbol{\omega}}_{xy}$	Normiertes virtuelles Stellgesetz für die Größe $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{xy}$.
$\dot{\omega}_z$	Virtuelles Stellgesetz für die Größe $\dot{\omega}_z$.
T	Schubbetrag $T = \ \mathbf{t}\ $.

\dot{T}	Zeitliche Änderung des Schubbetrags T .
${}_n\dot{T}$	Normierte zeitliche Änderung des Schubbetrags T .
\ddot{T}	Zweifache Zeitableitung des Schubbetrags T .
$\boldsymbol{\tau}$	Momentenvektor $\boldsymbol{\tau} = {}_B\boldsymbol{\tau} = [\tau_x \tau_y \tau_z]'$.
$\boldsymbol{\tau}_n$	Nominaler Anteil des Momentenvektors $\boldsymbol{\tau}$.
$\boldsymbol{\tau}_a$	Adaptiver Anteil des Momentenvektors $\boldsymbol{\tau}$.
u_T	Stellgröße für den Schubbetrag.
\mathbf{z}_x	Folgefehler in der Position definiert als $\mathbf{z}_x := \mathbf{x} - \mathbf{x}_T$.
\mathbf{z}_v	Folgefehler in der Geschwindigkeit definiert als $\mathbf{z}_v = \mathbf{v} - \mathbf{v}_d$.
\mathbf{z}_t	Normierte vektorielle Abweichung im Gesamtschub definiert als $\mathbf{z}_t := \hat{\kappa}_v^{-1}(\mathbf{t} - \mathbf{t}_d)$.
\mathbf{z}_r	Folgefehler bezüglich der ersten beiden Komponenten der normierten Drehrate sowie der zweiten Schubänderung definiert als $\mathbf{z}_r := {}_n\boldsymbol{\omega} - {}_n\boldsymbol{\omega}_d$.
\mathbf{z}_{r12}	Bezeichnung der ersten beiden Komponenten von \mathbf{z}_r .
z_φ	Folgefehler im Heading definiert als $z_\varphi = \varphi - \varphi_T$.
$z_{\omega z}$	Normierter Folgefehler in der Drehrate in z -Richtung definiert als $z_{\omega z} := \hat{\kappa}_v^{-1}(\omega_z - \omega_{zd})$.
\mathbf{z}_p	Teilmenge der Folgefehlerzustände \mathbf{z} , für welche der Zustandsschätzers Schätzwerte $\hat{\mathbf{z}}_p$ berechnet, was zu dem Schätzfehler $\tilde{\mathbf{z}}_p = \hat{\mathbf{z}}_p - \mathbf{z}_p$ führt.
$\hat{\mathbf{z}}_p$	Zustände des Zustandsschätzers definiert als $\hat{\mathbf{z}}_p := [\hat{z}'_v, \hat{z}'_{r12}, \hat{z}'_{\omega z}]'$.
\mathbf{z}_η	Signal definiert als $\mathbf{z}_\eta = [\mathbf{z}', {}_n\hat{\boldsymbol{\eta}}'_{va}]'$.
\mathbf{z}	Gesamter vektorieller Folgefehler definiert als $\mathbf{z}' = [\mathbf{z}'_x, \mathbf{z}'_v, \mathbf{z}'_T, \mathbf{z}'_{re}, z_\varphi, z_{\omega z}]'$.
$\boldsymbol{\zeta}_v$	Zeitvariante Störung der translatorischen Dynamik $\boldsymbol{\zeta}_v = {}_I\boldsymbol{\zeta}_v(t)$, dargestellt im inertialen Koordinatensystem (I -System).
$\boldsymbol{\zeta}_\omega$	Zeitvariante Störung der rotatorischen Dynamik $\boldsymbol{\zeta}_\omega = {}_B\boldsymbol{\zeta}_v(t)$, dargestellt im körperfesten Koordinatensystem (B -System).
\mathbf{f}_v	Funktion von unsicheren zeitabhängigen aerodynamischen Effekten der translatorischen Dynamik $\mathbf{f}_v = {}_I\mathbf{f}_v(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, dargestellt im inertialen Koordinatensystem (I -System).
\mathbf{f}_ω	Funktion von unsicheren zeitabhängigen aerodynamischen Effekten der rotatorischen Dynamik $\mathbf{f}_\omega = {}_B\mathbf{f}_\omega(\mathbf{s})$, dargestellt im körperfesten Koordinatensystem (B -System).
\mathbf{f}	Nichtlineare und zeitvariante Funktion der Fehlerdynamik, $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va})$.
\mathbf{f}_P	Nichtlineare und zeitvariante Funktion der Dynamik des Zustandsschätzers, $\mathbf{f}_P = \mathbf{f}(t, \hat{\mathbf{z}}_P\mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{va})$.
\mathbf{f}_Δ	Nichtlineare und zeitvariante Funktion, welche die Abweichung von \mathbf{f} zu $\mathbf{A}\mathbf{z}$ beschreibt, $\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{f}_\Delta$.
\mathbf{M}	Matrixfunktion der Drehmatrix \mathbf{R}_{IB} und des Schubbetrags $\mathbf{M}(\mathbf{R}_{IB}, T)$.

${}_n\mathbf{M}$	Normierte Version der Matrixfunktion \mathbf{M} .
\mathbf{M}_H	Konstante Matrix, welche ${}_n\mathbf{M}$ im stationären Schwebeflug beschreibt.
\mathbf{M}_Δ	Matrixfunktion, welche die Abweichung zwischen ${}_n\mathbf{M}$ und \mathbf{M}_H beschreibt, ${}_n\mathbf{M} = \mathbf{M}_H + \mathbf{M}_\Delta$.
V	Kandidat für eine Lyapunovfunktion für den geschlossenen Regelkreis.
$\mathbf{H}_{ev}^{-1}(s)$	Inverse Übertragungsfunktion der Fehlerdynamik bzgl. der translatorischen Anteile der Dynamik.
$\mathbf{H}_{e\omega}^{-1}(s)$	Inverse Übertragungsfunktion der Fehlerdynamik bzgl. der rotatorischen Anteile der Dynamik.
${}_I\mathbf{e}_z$	Einheitsvektor im \mathbb{R}^3 in Richtung der ${}_I z$ -Achse dargestellt im inertialen Koordinatensystem (I -System).
${}_B\mathbf{e}_z$	Einheitsvektor im \mathbb{R}^3 in Richtung der ${}_B z$ -Achse dargestellt im inertialen Koordinatensystem (B -System).
\mathbf{R}_{IB}	Drehmatrix welche einen Vektor aus dem B -System in das I -System transformiert.
\mathbf{A}_x	Negativ definite Parametermatrix zur Verstärkung von \mathbf{z}_x im virtuellen Stellgesetz \mathbf{v}_d .
\mathbf{A}_v	Negativ definite Parametermatrix zur Verstärkung von \mathbf{z}_v im virtuellen Stellgesetz \mathbf{t}_d .
\mathbf{A}_t	Negativ definite Parametermatrix zur Verstärkung von \mathbf{z}_t im virtuellen Stellgesetz ${}_n\mathbf{w}_d$.
\mathbf{A}_r	Negativ definite Parametermatrix zur Verstärkung von \mathbf{z}_r im virtuellen Stellgesetz $[{}_n\overset{\circ}{\omega}'_{xy} \quad {}_n\ddot{T}]'$.
\mathbf{A}_V	Negativ definite Parametermatrix, welche alle Parameter der virtuellen Stellgesetze vereint, $\mathbf{A}_V := \text{diag}(\mathbf{A}_x, \mathbf{A}_v, \mathbf{A}_t, \mathbf{A}_r, a_\varphi, a_{\omega z})$.
a_φ	Negativer Parameter zur Verstärkung von z_φ im virtuellen Stellgesetz ω_{zd} .
\mathbf{K}_e	Parametermatrix, definiert als $\mathbf{K} = \hat{\mathbf{D}} - \mathbf{A}_v - \mathbf{A}_x$.
\mathbf{R}_s	Nordwestliche Untermatrix der Drehmatrix \mathbf{R}_{AB} vom körperfesten Koordinatensystem in das Zwischensystem mit der Dimension $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.
\mathbf{l}	Vektor zur Berechnung der Drehrate um die z -Achse des Zwischensystems.
\mathbf{B}_v	Eingangsmatrix für die Schätzfehler in den translatorischen Teil der Fehlerdynamik.
\mathbf{B}_ω	Eingangsmatrix für die Schätzfehler in den rotatorischen Teil der Fehlerdynamik.
\mathbf{B}	Eingangsmatrix für die Schätzfehler in die Fehlerdynamik, zusammengesetzt aus $\mathbf{B} := [\mathbf{B}_v \quad \mathbf{B}_\omega]$.
g	Ortsfaktor (Erdbeschleunigung).

$\hat{\mathbf{D}}$	Geschätzte lineare Dämpfungskoeffizientenmatrix für die Schätzung $\hat{\mathbf{f}}_v = \hat{\mathbf{D}}\mathbf{v}$.
κ_v	Unsichere Eingangsverstärkung für den Schubvektor \mathbf{t} .
\mathbf{K}_ω	Unsichere Eingangsmatrix für den Momentenvektor $\boldsymbol{\tau}$.
\mathbf{J}	Trägheitstensor des Quadropters gegeben im körperfesten Koordinatensystem (B -System).
m	Masse des Quadropters.
\mathcal{Z}_{ref}	Kompakte Menge, der die Zustände des Referenzsystems angehören, definiert als $\mathcal{Z}_{\text{ref}} := \{\mathbf{z}_{\text{ref}} \in \mathbb{R}^{13} \mid \ \mathbf{z}_{\text{ref}}\ \leq \rho_{\text{ref}}\}$.
\mathcal{Z}	Kompakte Menge, der die Zustände des geschlossenen Regelkreises angehören, definiert als $\mathcal{Z} := \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{13} \mid \ \mathbf{z}\ \leq \rho\}$.
\mathcal{G}	Kompakte Menge, der die Zustände der Fehlerdynamik angehören, definiert als $\mathcal{G} := \{\tilde{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^6 \mid \ \tilde{\mathbf{z}}\ \leq \bar{\gamma}_0\}$.
$\Delta \hat{\mathbf{t}}_d$	Schätzfehler definiert als $\Delta \hat{\mathbf{t}}_d := \hat{\mathbf{t}}_d - \mathbf{t}_d$.
$\hat{\mathbf{t}}_d$	Schätzung der Sollschubänderung \mathbf{t}_d .
$\tilde{\mathbf{z}}$	Schätzfehler des Zustandsschätzers definiert als $\tilde{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}}_P - \mathbf{z}_P$.
$\mathbf{C}(s)$	Gesamter \mathcal{L}_1 -Filter bestehend aus den \mathcal{L}_1 -Filtern der translatorischen und rotatorischen Dynamik, $\mathbf{C}(s) = \text{diag}(\mathbf{C}_v(s), \mathbf{C}_\omega(s))$.
$\mathbf{C}_v(s)$	\mathcal{L}_1 -Filter der translatorischen Dynamik.
$\mathbf{C}_\omega(s)$	\mathcal{L}_1 -Filter der rotatorischen Dynamik.
$\hat{\mathbf{C}}(s)$	Gesamter nominaler \mathcal{L}_1 -Filter bestehend aus den nominalen \mathcal{L}_1 -Filtern der translatorischen und rotatorischen Dynamik, $\hat{\mathbf{C}}(s) = \text{diag}(\hat{\mathbf{C}}_v(s), \hat{\mathbf{C}}_\omega(s))$.
$\hat{\mathbf{C}}_v(s)$	Nominaler \mathcal{L}_1 -Filter der translatorischen Dynamik.
$\hat{\mathbf{C}}_\omega(s)$	Nominaler \mathcal{L}_1 -Filter der rotatorischen Dynamik.
$\boldsymbol{\sigma}_v$	Signal das die bekannten und unbekanntes Beschleunigungen enthält, $\boldsymbol{\sigma}_v = \boldsymbol{\sigma}_{va} + \boldsymbol{\sigma}_{vn}$.
$\boldsymbol{\sigma}_{va}$	Durch Unsicherheiten und Störungen verursachte unbekanntes Beschleunigung.
$\boldsymbol{\sigma}_{vn}$	Vom der Regelung realisierte nominale Sollbeschleunigung.
$\boldsymbol{\sigma}_\omega$	Signal das die bekannten und unbekanntes Drehratenänderung enthält, $\boldsymbol{\sigma}_\omega = \boldsymbol{\sigma}_{\omega a} + \boldsymbol{\sigma}_{\omega n}$.
$\boldsymbol{\sigma}_{\omega a}$	Durch Unsicherheiten und Störungen verursachte unbekanntes Drehratenänderung.
$\boldsymbol{\sigma}_{\omega n}$	Von der Regelung realisierte nominale Drehratenänderung.
$\boldsymbol{\sigma}_a$	Signal das die durch Unsicherheiten und Störungen verursachten unbekanntes Beschleunigungen und Drehratenänderungen enthält, $\boldsymbol{\sigma}_a = [\boldsymbol{\sigma}'_{va} \boldsymbol{\sigma}'_{\omega a}]'$.
$\boldsymbol{\sigma}_n$	Signal das die bekannten von der Regelung realisierten nominalen Beschleunigungen und Drehratenänderungen enthält, $\boldsymbol{\sigma}_n = [\boldsymbol{\sigma}'_{vn} \boldsymbol{\sigma}'_{\omega n}]'$.

$\hat{\sigma}_a$	Schätzsignal generiert von der Adaption, das den Einfluss der Unsicherheiten beinhaltet und besteht aus $\hat{\sigma}_a = [\hat{\sigma}'_{va} \hat{\sigma}'_{\omega a}]'$.
$\hat{\sigma}_{va}$	Schätzsignal generiert von der Adaption, das den Einfluss der Unsicherheiten in der translatorischen Dynamik enthält.
$\hat{\sigma}_{\omega a}$	Schätzsignal generiert von der Adaption, das den Einfluss der Unsicherheiten in der rotatorischen Dynamik enthält.
$\hat{\eta}_v$	Beschleunigung welche durch \mathbf{t}_d erzeugt werden soll.
$\hat{\eta}_{va}$	Beschleunigung zur Kompensation von Unsicherheiten und Störungen in der translatorischen Dynamik welche durch \mathbf{t}_{da} erzeugt werden soll.
$\hat{\eta}_{vn}$	Beschleunigung welche durch \mathbf{t}_{dn} erzeugt werden soll.
$\hat{\eta}_\omega$	Drehbeschleunigung welche durch \mathbf{t}_d erzeugt wird.
$\hat{\eta}_{\omega a}$	Drehbeschleunigung zur Kompensation von Unsicherheiten und Störungen in der rotatorischen Dynamik welche durch $\boldsymbol{\tau}_a$ erzeugt wird.
$\hat{\eta}_{\omega n}$	Drehbeschleunigung welche durch $\boldsymbol{\tau}_n$ erzeugt wird.
$\hat{\eta}_a$	Beschleunigung zur Kompensation von Unsicherheiten und Störungen in der translatorischen und rotatorischen Dynamik, bestehend aus $\hat{\eta}_a = [\hat{\eta}'_{va} \hat{\eta}'_{\omega a}]'$.
$\hat{\eta}_n$	Signal das die durch \mathbf{t}_n und $\boldsymbol{\tau}_n$ erzeugte Dreh-/Beschleunigungen beschreibt, $\hat{\eta}_n = [\hat{\eta}'_{vn} \hat{\eta}'_{\omega n}]'$.
${}_n\hat{\eta}_{va}$	Normierte Variante des Signals $\hat{\eta}_{va}$, definiert als ${}_n\hat{\eta}_{va} := n_{\eta}^{va}\hat{\eta}_{va}$.
n_{η}^{va}	Normierungsfaktor für das Signal ${}_n\hat{\eta}_{va} := n_{\eta}^{va}\hat{\eta}_{va}$.
$\boldsymbol{\eta}_{ka,e}$	Signale definiert als die Differenz von: $\boldsymbol{\eta}_{ka,e} := \hat{\boldsymbol{\eta}}_{ka} - \boldsymbol{\eta}_{ka,\text{ref}}$ mit dem Index $k \in \{v, \omega\}$.
$\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}^*$	Kompensationssignal für Unsicherheiten und Störungen in der translatorischen Dynamik. Es gilt $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}^* = \mathcal{L}^{-1}[\hat{\mathbf{C}}_v(s)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{va}(s)]$.
$\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}^*$	Kompensationssignal für Unsicherheiten und Störungen in der rotatorischen Dynamik. Es gilt $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}^* = \mathcal{L}^{-1}[\hat{\mathbf{C}}_\omega(s)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\omega a}(s)]$.
$\hat{\boldsymbol{\eta}}_a^*$	Kompensationssignal, das die beiden Signale $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}^*$ und $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}^*$ vektoriell zusammenfasst. Es gilt $\hat{\boldsymbol{\eta}}_a^* = [\hat{\boldsymbol{\eta}}_{va}^* \ \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\omega a}^*]'$.
ρ_{ref}	Schranke für die Zustände des Referenzsystems, derart dass $\ \mathbf{z}_{\text{ref}}\ \leq \rho_{\text{ref}}$.
ρ	Schranke für die Zustände des geschlossenen Regelkreises, derart dass $\ \mathbf{z}\ \leq \rho$.
ϵ	Konstante Größe für die Definition der Schranke ρ_{ref} , derart dass $\rho_{\text{ref}} := \ \bar{\mathbf{z}}_0\ + \epsilon$.
γ	Konstante Größe für die Definition der Schranke ρ , derart dass $\rho := \rho_{\text{ref}} + \gamma$.
$\bar{\gamma}_0$	Schranke für die Zustände der Fehlerdynamik, derart dass $\ \bar{\mathbf{z}}\ \leq \bar{\gamma}_0$.
$\rho_{\boldsymbol{\eta}}^{ka}$	Schranken für die Signale $\boldsymbol{\eta}_{ka,\text{ref}}$.
$\rho_{\boldsymbol{\eta}}^{ka}$	Schranken für die Größen $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{ka}$ mit dem Index $k \in \{v, \omega\}$.
$\gamma_{\boldsymbol{\eta}}^{ka}$	Schranken für die Größen $\boldsymbol{\eta}_{ka,e} := \hat{\boldsymbol{\eta}}_{ka} - \boldsymbol{\eta}_{ka,\text{ref}}$ mit dem Index $k \in \{v, \omega\}$.

ρ_τ	Schranke für das Stellmoment τ .
ρ_t	Schranke für das virtuelle Stellgesetz des Schubvektors \mathbf{t}_d .
B_κ	Schranke für die Eingangsverstärkung \mathbf{K}^{-1} .
B_κ^v	Schranke für die Eingangsverstärkung κ_v^{-1} .
B_κ^ω	Schranke für die Eingangsverstärkung \mathbf{K}_ω^{-1} .
$B_{\tilde{\kappa}}$	Schranke für den Ausdruck $\tilde{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{K}}^{-1}$.
$B_{\tilde{\kappa}}^v$	Schranke für den Ausdruck $\tilde{\kappa}_v\hat{\kappa}_v^{-1}$.
$B_{\tilde{\kappa}}^\omega$	Schranke für den Ausdruck $\tilde{\mathbf{K}}_\omega\hat{\mathbf{K}}_\omega^{-1}$.
B_C^v	Schranke für die \mathcal{L}_1 -Norm des Filters $\mathbf{C}_v(s)$, derart dass $B_C^v \geq \ \mathbf{C}_v(s)\ _{\mathcal{L}_1}$.
B_{CHe}^v	Schranke für die \mathcal{L}_1 -Norm des Filters $\mathbf{C}_v(s)\mathbf{H}_{ev}^{-1}(s)$, derart dass $B_{\text{CHe}}^v \geq \ \mathbf{C}_v(s)\mathbf{H}_{ev}^{-1}(s)\ _{\mathcal{L}_1}$.
B_{CHe}^ω	Schranke für die \mathcal{L}_1 -Norm des Filters $\mathbf{C}_\omega(s)\mathbf{H}_{e\omega}^{-1}(s)$, derart dass $B_{\text{CHe}}^\omega \geq \ \mathbf{C}_\omega(s)\mathbf{H}_{e\omega}^{-1}(s)\ _{\mathcal{L}_1}$.
$B_{\mathbf{f}\Delta r}$	Schranke für die Funktion $\mathbf{f}_{\Delta,\text{ref}}$.
$B_{\mathbf{f}\Delta}$	Schranke für die Funktion \mathbf{f}_Δ .
$B_{\sigma_i}^{kl}$	Schranken für die Anfangswerte der Signale $\sigma_{kl,\text{ref}}$ und σ_{kl} mit $k \in \{v, \omega\}$ und $l \in \{a, n\}$.
$B_{\sigma_r}^{kl}$	Schranken für die Signale $\sigma_{kl,\text{ref}}$ mit $k \in \{v, \omega\}$ und $l \in \{a, n\}$.
$B_{\sigma_r}^{kl}$	Schranken für die Signale $\dot{\sigma}_{kl,\text{ref}}$ mit $k \in \{v, \omega\}$ und $l \in \{a, n\}$.
B_{σ}^{kl}	Schranken für die Signale σ_{kl} mit $k \in \{v, \omega\}$ und $l \in \{a, n\}$.
$B_{\dot{\sigma}}^{kl}$	Schranken für die Signale $\dot{\sigma}_{kl}$ mit $k \in \{v, \omega\}$ und $l \in \{a, n\}$.
$L_{\mathbf{f}\Delta\gamma}$	Konstante zur Abschätzung des Signals \mathbf{f}_Δ .
$L_{\mathbf{f}\Delta\tilde{\gamma}_0}$	Konstante zur Abschätzung des Signals \mathbf{f}_Δ .
$L_{\eta\gamma}^{ka}$	Konstanten zur Abschätzung der Signale $\eta_{ka,e}$.
$L_{\eta\tilde{\gamma}_0}^{ka}$	Konstanten zur Abschätzung der Signale $\eta_{ka,e}$.
$L_{\sigma\gamma}^{kl}$	Konstanten zur Abschätzung der Signale σ_{kl} .
$L_{\sigma\tilde{\gamma}_0}^{kl}$	Konstanten zur Abschätzung der Signale σ_{kl} .
$L_{\dot{\sigma}\tilde{\gamma}_0}^{kl}$	Konstanten zur Abschätzung der Signale $\dot{\sigma}_{kl}$.
$L_{\dot{\sigma}\gamma}^{kl}$	Konstanten zur Abschätzung der Signale $\dot{\sigma}_{kl}$.

Literaturverzeichnis

- [1] AMANN, H.; ESCHER, J.: *Analysis II*. Birkhäuser Verlag, 2006
- [2] ANDERSON, B. D. O.: Adaptive systems, lack of persistency of excitation and bursting phenomena. In: *Automatica* 21 (1985), Nr. 3, S. 247 – 258
- [3] ANDERSON, B. D. O.: Failures of adaptive control theory and their resolution. In: *Communications in Information & Systems* 05 (2005), Nr. 1, S. 1–20
- [4] ANDERSON, B. D. O.; DEGHANI, A.: Challenges of adaptive control - past, permanent and future. In: *Annual reviews in control* 32 (2008), Nr. 2, S. 123 – 135
- [5] ASTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B.: *Adaptive control*. Dover Publications, Inc., 2008
- [6] BENDOTTI, P.; MORRIS, J. C.: Robust hover control for a model helicopter. In: *Proceedings of the American Control Conference*, 1995
- [7] BHAT, S. P.; BERNSTEIN, D. S.: A topological obstruction to continuous global stabilization of rotational motion and the unwinding phenomenon. In: *Systems & Control Letters* 39 (2000), Nr. 1, S. 63–70
- [8] BING, Z.; WEI, H.: Adaptive backstepping control for a miniature autonomous helicopter. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, 2011
- [9] BRISTEAU, P.; MARTIN, P.; SALAÜN, E. ; PETIT, N.: The role of propeller aerodynamics in the model of a quadrotor uav. In: *Proceedings of the European Control Conference*, 2009
- [10] BUHL, M.; FRITSCH, O. ; LOHMANN, B.: Exakte Ein-/Ausgangslinearisierung für die translatorische Dynamik eines Quadropters. In: *at - Automatisierungstechnik* 59 (2011), Nr. 6, S. 374–381
- [11] CABECINHAS, D.; BRAS, S.; SILVESTRE, C.; OLIVEIRA, P. ; CUNHA, R.: Integrated solution to quadrotor stabilization and attitude estimation using a pan and tilt camera. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 2012
- [12] CABECINHAS, D.; CUNHA, R. ; SILVESTRE, C.: Saturated output feedback control of a quadrotor aircraft. In: *Proceedings of the American Control Conference*, 2012

- [13] CABECINHAS, D.; CUNHA, R. ; SILVESTRE, C.: Experimental validation of a nonlinear quadrotor controller with wind disturbance rejection. In: *Proceedings of the European Control Conference*, 2013
- [14] CAO, C.; HOVAKIMYAN, N.; KAMINER, I.; PATEL, V. V. ; DOBROKHODOV, V.: Stabilization of cascaded systems via \mathcal{L}_1 adaptive controller with application to a UAV path following problem and flight test results. In: *Proceedings of the American Control Conference*, 2007
- [15] CHATURVEDI, N. A.; SANYAL, A. K. ; MCCLAMROCH, N. H.: Rigid body attitude control. In: *IEEE Control Systems Magazine* 31 (2011), Nr. 3, S. 30 – 51
- [16] CHOWDHARY, G.: *Concurrent learning for convergence in adaptive control without persistency of excitation*, Georgia Institute of Technology - Daniel Guggenheim School of Aerospace Engineering, Diss., 2010
- [17] CHOWDHARY, G.; JOHNSON, E.: Theory and flight test validation of long term learning adaptive flight controller. In: *Journal Of Guidance, Control, and Dynamics* 34 (2011), Nr. 2, S. 592 – 607
- [18] CUNHA, R.; CABECINHAS, D. ; SILVESTRE, C.: Nonlinear trajectory tracking control of a quadrotor vehicle. In: *Proceedings of the European Control Conference*, 2009
- [19] DATTA, A.; HO, M.-T.: On modifying model reference adaptive control schemes for performance improvement. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 39 (1994), Nr. 9, S. 1977–1980
- [20] DATTA, A.; IOANNOU, P. A.: Performance analysis and improvement in model reference adaptive control. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 39 (1994), Nr. 12, S. 2370 –2387
- [21] DE MONTE, P.; LOHMANN, B.: Position trajectory tracking of a quadrotor helicopter based on \mathcal{L}_1 adaptive control. In: *Proceedings of the European Control Conference*, 2013
- [22] DOBROKHODOV, V.; KITSIOS, I.; KAMINER, I.; JONES, K.; XARGAY, E.; HOVAKIMYAN, N.; CAO, C.; LIZARRAGA, M. ; GREGORY, I.: Flight validation of metrics driven \mathcal{L}_1 adaptive control. In: *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, 2008
- [23] DONG, W.; FARRELL, J. A.; POLYCARPOU, M. M.; DJAPIC, V. ; SHARMA, M.: Command filtered adaptive backstepping. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 20 (2012), Nr. 3, S. 566–580
- [24] DRIESSEN, B.; ROBIN, A.: A globally convergent tracking controller for the X4 flyer rotor craft for reference trajectories with positive thrust. In: *Robotica* 22 (2004), Nr. 04, S. 375–388

- [25] DUARTE, M. A.; NARENDRA, K. S.: Combined direct and indirect approach to adaptive control. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 34 (1989), Nr. 10, S. 1071–1075
- [26] DYDEK, Z.: *Adaptive control of unmanned aerial systems*, Massachusetts Institute of Technology, Diss., 2010
- [27] DYDEK, Z. T.; ANNASWAMY, A. M. ; LAVRETSKY, E.: Adaptive control of quadrotor UAVs: A design trade study with flight evaluations. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 21 (2013), Nr. 4, S. 1400–1406
- [28] FALCONI, G.; FRITSCH, O. ; LOHMANN, B.: Admissible thrust control laws for quadrotor position tracking. In: *Proceedings of the American Control Conference*, 2013
- [29] FANTONI, I.; ZAVALA, A. ; LOZANO, R.: Global stabilization of a PVTOL aircraft with bounded thrust. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 2002
- [30] FARRELL, J. A.; POLYCARPOU, M.; SHARMA, M. ; DONG, W.: Command filtered backstepping. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 54 (2009), Nr. 6, S. 1391 – 1395
- [31] FRAZZOLI, E.; DAHLEH, M. ; FERON, E.: Trajectory tracking control design for autonomous helicopters using a backstepping algorithm. In: *Proceedings of the American Control Conference*, 2000
- [32] FRITSCH, O.; DE MONTE, P.; BUHL, M. ; LOHMANN, B.: Quasi-static feedback linearization for the translational dynamics of a quadrotor helicopter. In: *Proceedings of the American Control Conference*, 2012
- [33] FRITSCH, O.; TROMBA, D. ; LOHMANN, B.: Cascaded energy based trajectory tracking control of a quadrotor. In: *at - Automatisierungstechnik* 62 (2014), Nr. 6, S. 408–422
- [34] GREGORY, I.; XARGAY, E.; CAO, C. ; HOVAKIMYAN, N.: Flight test of an \mathcal{L}_1 adaptive controller on the NASA AirSTAR flight test vehicle. In: *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, 2010
- [35] GUENARD, N.; HAMEL, T. ; MOREAU, V.: Dynamic modeling and intuitive control strategy for an "X4-Flyer". In: *Proceedings of the International Conference on Control and Automation*, 2005
- [36] GUERREIRO, B. J.; SILVESTRE, C.; CUNHA, R.; CAO, C. ; HOVAKIMYAN, N.: \mathcal{L}_1 adaptive control for autonomous rotorcraft. In: *Proceedings of the American Control Conference*, 2009
- [37] HAMEL, T.; MAHONY, R.; LOZANO, R. ; OSTROWSKI, J.: Dynamic modelling and configuration stabilization for an X4-Flyer. In: *Proceedings of the 15th IFAC World Congress*, 2002

- [38] HAUSER, J.; SASTRY, S. ; MEYER, G.: Nonlinear control design for slightly non-minimum phase systems: Application to V/STOL aircraft. In: *Automatica* 28 (1992), Nr. 4, S. 665–679
- [39] HEHN, M.; D’ANDREA, R.: Quadrocopter trajectory generation and control. In: *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, 2011
- [40] HEUSDEN, K. van; DUMONT, G.: Analysis of \mathcal{L}_1 adaptive output feedback control; equivalent LTI controllers. In: *Proceedings of the 16th IFAC Symposium on System Identification*, 2012
- [41] HOVAKIMYAN, N.: \mathcal{L}_1 adaptive control / Department of Mechanical Science and Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, Illinois 61801, USA. 2013. – Forschungsbericht
- [42] HOVAKIMYAN, N.; CAO, C.; SMITH, R. C. (Hrsg.): *\mathcal{L}_1 adaptive control theory: guaranteed robustness with fast adaptation*. SIAM - Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010
- [43] HOVAKIMYAN, N.; CAO, C.; KHARISOV, E.; XARGAY, E. ; GREGORY, I. M.: \mathcal{L}_1 adaptive control for safety-critical systems. In: *IEEE Control Systems Magazine* 31 (2011), Nr. 5, S. 54 –104
- [44] HUANG, H.; HOFFMANN, G. M.; WASLANDER, S. L. ; TOMLIN, C. J.: Aerodynamics and control of autonomous quadrotor helicopters in aggressive maneuvering. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2009
- [45] HUANG, M.; XIAN, B.; DIAO, C.; YANG, K. ; FENG, Y.: Adaptive tracking control of underactuated quadrotor unmanned aerial vehicles via backstepping. In: *Proceedings of the American Control Conference*, 2010
- [46] HYDE, R. A.; GLOVER, K.: The application of scheduled H_∞ controllers to a VSTOL aircraft. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 38 (1993), Nr. 7, S. 1021–1039
- [47] IOANNOU, P. A.; JAFARI, S.; RUDD, L.; ANNASWAMY, A. M.; ORTEGAY, R. ; NARENDRAYY, K. S.: \mathcal{L}_1 adaptive control: stability and robustness properties and misperceptions. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* (eingereicht)
- [48] IOANNOU, P. A.; SUN, J.: *Robust adaptive control*. Prentice Hall, 1996
- [49] IOANNOU, P. A.; TSAKALIS, K. S.: A robust direct adaptive controller. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 31 (1986), Nr. 11, S. 1033–1043
- [50] ISIDORI, A.: *Nonlinear control systems*. 3-rd. Springer-Verlag, Berlin, 1996
- [51] JOHNSON, E. N.; KANNAN, S. K.: Adaptive trajectory control for autonomous helicopters. In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 28 (2005), Nr. 3, S. 524 – 538

- [52] KAMINER, I.; PASCOAL, A.; XARGAY, E.; HOVAKIMYAN, N.; CAO, C. ; DOBROKHODOV, V.: Path following for small unmanned aerial vehicles using \mathcal{L}_1 adaptive augmentation of commercial autopilots. In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 33 (2010), Nr. 2, S. 550–564
- [53] KENDOUL, F.; FANTONI, I. ; LOZANO, R.: Asymptotic stability of hierarchical inner-outer loop-based flight controllers. In: *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, 2008
- [54] KHALIL, H. K.: *Nonlinear systems*. 3-rd. Prentice Hall, New York, 2002
- [55] KHARISOV, E.; HOVAKIMYAN, N. ; ÅSTRÖM, K.: Comparison of several adaptive controllers according to their robustness metrics. In: *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, 2010
- [56] KOO, T. J.; SASTRY, S.: Output tracking control design of a helicopter model based on approximate linearization. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 1998
- [57] KOO, T. J.; SASTRY, S.: Differential flatness based full authority helicopter control design. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 1999
- [58] KREISSELMEIER, G.; ANDERSON, B. D. O.: Robust model reference adaptive control. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 31 (1986), Nr. 2, S. 127–133
- [59] KRSTIC, M.; KANELLAKOPOULOS, I. ; KOKOTOVIC, P.: *Nonlinear and adaptive control design*. John Wiley & Sons, Inc., 1995
- [60] KRSTIC, M.; KOKOTOVIC, P. V. ; KANELLAKOPOULOS, I.: Transient-performance improvement with a new class of adaptive controllers. In: *Systems & Control Letters* 21 (1993), Nr. 6, S. 451 – 461
- [61] LA CIVITA, M.; PAPAGEORGIOU, G.; MESSNER, W. C. ; KANADE, T.: Design and flight testing of a gain-scheduled H_∞ ; loop shaping controller for wide-envelope flight of a robotic helicopter. In: *Proceedings of the American Control Conference*, 2003
- [62] LAVRETSKY, E.: Combined/composite model reference adaptive control. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 54 (2009), Nr. 11, S. 2692–2697
- [63] LAVRETSKY, E.; GADIANT, R. ; GREGORY, I. M.: Predictor-based model reference adaptive control. In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 33 (2010), Nr. 4, S. 1195–1201
- [64] LEE, D.; BURG, T.; DAWSON, D. M.; SHU, D.; XIAN, B. ; TATLICIOGLU, E.: Robust tracking control of an underactuated quadrotor aerial-robot based on a parametric uncertain model. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, 2009

- [65] LEE, D.; KIM, H. J. ; SASTRY, S.: Feedback linearization vs. adaptive sliding mode control for a quadrotor helicopter. In: *International Journal of Control, Automation, and Systems* 7 (2009), Nr. 3, S. 419–428
- [66] LEE, T.; LEOK, M. ; MCCLAMROCH, N. H.: Geometric tracking control of a quadrotor UAVs on SE(3). In: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 2010
- [67] LEE, T.; LEOK, M. ; MCCLAMROCH, N. H.: Nonlinear robust tracking control of a quadrotor UAV on SE(3). In: *Proceedings of the American Control Conference*, 2012
- [68] LEITH, D. J.; LEITHEAD, W. E.: Survey of gain-scheduling analysis and design. In: *International Journal of Control* 73 (2000), Nr. 11, S. 1001–1025
- [69] LEMAN, T.; XARGAY, E.; DULLERUD, G.; HOVAKIMYAN, N. ; WENDEL, T.: \mathcal{L}_1 adaptive control augmentation system for the X-48B aircraft. In: *Inproceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, 2009
- [70] LEWIS, F.: Nonlinear network structures for feedback control. In: *Asian Journal of Control* 1 (1999), Nr. 4, S. 205–228
- [71] LI, D.; HOVAKIMYAN, N.: Positive invariant set for \mathcal{L}_1 adaptive controller in the presence of input saturation. In: *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* 27 (2012), Nr. 11, S. 1012 – 1030
- [72] LI, Z.; HOVAKIMYAN, N.: \mathcal{L}_1 adaptive controller for MIMO systems with unmatched uncertainties using modified piecewise constant adaptation law. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 2012
- [73] MADANI, T.; BENALLEGUE, A.: Backstepping control for a quadrotor helicopter. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2006
- [74] MADANI, T.; BENALLEGUE, A.: Control of a Quadrotor Mini-Helicopter via Full State Backstepping Technique. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 2006
- [75] MADANI, T.; BENALLEGUE, A.: Backstepping control with exact 2-sliding mode estimation for a quadrotor unmanned aerial vehicle. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2007
- [76] MADANI, T.; BENALLEGUE, A.: Adaptive control via backstepping technique and neural networks of a quadrotor helicopter. In: *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, 2008
- [77] MAHONY, R.; HAMEL, T.: Adaptive compensation of aerodynamic effects during takeoff and landing manoeuvres for a scale model autonomous helicopter. In: *European Journal of Control* 7 (2001), Nr. 1, S. 1–15

- [78] MAHONY, R.; LOZANO, R.: (Almost) exact path tracking control for an autonomous helicopter in hover manoeuvres. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2000
- [79] MARTIN, P.; DEVASIA, S. ; PADEN, B.: A different look at output tracking: control of a VTOL aircraft. In: *Automatica* 32 (1996), Nr. 1, S. 101 – 107
- [80] MATSUTANI, M.; ANNASWAMY, A.; GIBSON, T. ; LAVRETSKY, E.: Trustable autonomous systems using adaptive control. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, 2011
- [81] MELLINGER, D.; KUMAR, V.: Minimum snap trajectory generation and control for quadrotors. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2011
- [82] MICHINI, B.; HOW, J. P.: \mathcal{L}_1 adaptive control for indoor autonomous vehicles: design process and flight testing. In: *Proceeding of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, 2009
- [83] MISTLER, V.; BENALLEGUE, A. ; M’SIRDI, N.: Exact linearization and noninteracting control of a 4 rotors helicopter via dynamic feedback. In: *Proceedings of the IEEE International Workshop on Robot and Human Interactive Communication*, 2001
- [84] MOKHTARI, A.; BENALLEGUE, A. ; DAACHI, B.: Robust feedback linearization and GH_∞ controller for a quadrotor unmanned aerial vehicle. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2005
- [85] NARENDRA, K. S.; ANNASWAMY, A. M.: *Stable adaptive systems*. Dover Publications, 2005
- [86] OLFATI-SABER, R.: *Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles*, Massachusetts Institute of Technology, Diss., February 2001
- [87] OLFATI-SABER, R.: Global configuration stabilization for the VTOL aircraft with strong input coupling. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 47 (2002), Nr. 11, S. 1949–1952
- [88] ORTEGA, R.; PANTELEY, E.: Adaptation is unnecessary in \mathcal{L}_1 adaptive control / Laboratoire des Signaux et Systemes, CNRS-Supelec, Plateau du Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette, France. 2013. – Forschungsbericht
- [89] ORTEGA, R.; PANTELEY, E.: Comments on \mathcal{L}_1 adaptive control: stabilization mechanism, existing conditions for stability and performance limitations / Laboratoire des Signaux et Systemes, CNRS-Supelec, Plateau du Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette, France. 2013. – Forschungsbericht

- [90] PETTERSSON, A.; ASTROM, K.; ROBERTSSON, A. ; JOHANSSON, R.: Analysis of linear \mathcal{L}_1 adaptive control architectures for aerospace applications. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 2012
- [91] PFLIMLIN, J.; SOUERES, P. ; HAMEL, T.: Hovering flight stabilization in wind gusts for ducted fan UAV. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 2004
- [92] PFLIMLIN, J. M.; SOUERES, P. ; HAMEL, T.: Position control of a ducted fan VTOL UAV in crosswind. In: *International Journal of Control* 80 (2007), Nr. 5, S. 666–683
- [93] PRALY, L.: Robust model reference adaptive controllers. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 1984
- [94] RAPTIS, I.; VALAVANIS, K. ; MORENO, W.: A novel nonlinear backstepping controller design for helicopters using the rotation matrix. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 19 (2011), Nr. 2, S. 465–473
- [95] ROBERTS, A.; TAYEBI, A.: Adaptive position tracking of VTOL UAVs. In: *IEEE Transactions on Robotics* 27 (2011), Nr. 1, S. 129 –142
- [96] ROBERTS, A.; TAYEBI, A.: Position control of VTOL UAVs using IMU and GPS measurements. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, 2011
- [97] ROBERTS, A.; TAYEBI, A.: Position control of VTOL UAVs using inertial vector measurements. In: *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, 2011
- [98] ROHRS, C.; VALAVANI, L.; ATHANS, M. ; STEIN, G.: Robustness of continuous-time adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 30 (1985), Nr. 9, S. 881–889
- [99] RUDOLPH, J.; DELALEAU, E.: Some examples and remarks on quasi-static feedback of generalized states. In: *Automatica* 34 (1998), Nr. 8, S. 993–999
- [100] SCHMIDT, G. S.; MICHALOWSKY, S.; EBENBAUER, C. ; ALLGOWER, F.: Global output regulation for the rotational dynamics of a rigid body. In: *at - Automatisierungstechnik* 61 (2013), Nr. 8, S. 567 – 582
- [101] SEPULCHRE, R.; JANKOVIC, M. ; KOKOTOVIC, P.: *Constructive nonlinear control*. Springer, 1997
- [102] SHIM, H.; KOO, T. J.; HOFFMANN, F. ; SASTRY, S.: A comprehensive study of control design for an autonomous helicopter. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 1998
- [103] SLOTINE, J.; LI, W.: *Applied nonlinear control*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1991

- [104] SOUANEF, T.; FICHTER, W.: Correspondence comments on \mathcal{L}_1 stability condition. In: *International Journal of Control* (eingereicht)
- [105] SUN, J.: A modified model reference adaptive control scheme for improved transient performance. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 38 (1993), Nr. 8, S. 1255–1259
- [106] SUN, J.; OLBROT, A. ; POLIS, M.: Robust stabilization and robust performance using model reference control and modeling error compensation. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 39 (1994), Nr. 3, S. 630–635
- [107] TEEL, A. R.: Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls. In: *Systems & Control Letters* 18 (1992), Nr. 3, S. 165–171
- [108] UTKIN, V. I.; DICKINSON, B. W. (Hrsg.): *Sliding modes in control and optimization*. Springer-Verlag (Berlin and New York), 1992
- [109] WANG, X.; HOVAKIMYAN, N.: \mathcal{L}_1 adaptive controller for nonlinear time-varying reference systems. In: *Systems & Control Letters* 61 (2012), Nr. 4, S. 455–463
- [110] WEILENMANN, M.; CHRISTEN, U. ; GEERING, H.: Robust helicopter position control at hover. In: *Proceedings of the American Control Conference, 1994*
- [111] WERTZ, J.: *Spacecraft attitude determination and control*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 2002
- [112] WOOD, R.: *Lyapunov-based control strategies for the global control of symmetric VTOL UAVs*, The University of Adelaide - Australia, Diss., 2007
- [113] WOOD, R.; CAZZOLATO, B.: An alternative nonlinear control law for the global stabilization of the PVTOL vehicle. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 52 (2007), Nr. 7, S. 1282–1287
- [114] XU, R.; OZGUNER, U.: Sliding mode control of a quadrotor helicopter. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, 2006*
- [115] YDSTIE, B.: Transient performance and robustness of direct adaptive control. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 37 (1992), Nr. 8, S. 1091–1105
- [116] ZAVALA-RIO, A.; FANTONI, I. ; LOZANO, R.: Global stabilization of a PVTOL aircraft model with bounded inputs. In: *International Journal of Control* 76 (2003), Nr. 18, S. 1833–1844