

Technische Universität München

ZENTRUM MATHEMATIK

**Der asymmetrische COGARCH:
Seine Definition, Approximation und
Schätzung**

Masterarbeit

von

Kathrin Mayr

Themenstellerin: Prof. Dr. Claudia Klüppelberg

Betreuerin: Dr. Anita Behme

Abgabetermin: 31. März 2013

Hiermit erkläre ich, Kathrin Mayr, dass ich die Masterarbeit selbstständig angefertigt und nur die angegebenen Quellen verwendet habe.

München, den 31. März 2013

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei Frau Prof. Dr. Claudia Klüppelberg für die interessante Themenstellung bedanken. Mein besonderer Dank geht an Frau Dr. Anita Behme für die Betreuung meiner Masterarbeit. Die Gespräche mit ihr haben stets zum besseren Verständnis, sowie zu neuen Ideen beigetragen. Ein großer Dank gilt auch meiner Familie und meinen Freunden für ihre Unterstützung. Vor allem meinen Eltern danke ich dafür, dass sie mir dieses Studium ermöglicht und mich stets in meinem Vorhaben bestärkt haben. Außerdem möchte ich mich sehr bei meinem Freund Patrick, für seine Geduld, die er in letzter Zeit für mich aufgebracht hat, bedanken.

Abstract

In 2004, Klüppelberg, Lindner and Maller introduced the so-called COGARCH model as a continuous time version of the discrete time GARCH(1,1) model, based on a single background driving Lévy process. In this thesis we consider an extension of the COGARCH, the continuous time asymmetric power ARCH(1,1) model, and suggest the continuous time GJR GARCH(1,1) model as a continuous time analogue to the discrete time GJR GARCH. Besides considering important properties of the COGARCH model we investigate Markovian, stationarity, moment and mixing properties of the continuous time APARCH(1,1) model and in particular of the continuous time GJR GARCH(1,1) model. Based on the compound Poisson and Variance Gamma process the continuous time GJR GARCH(1,1) process is simulated and we study its properties in detail. For practical implementation, continuous time models must be discretized onto a discrete grid over a finite time interval. In this thesis we introduce a discrete approximation procedure of the continuous time GJR GARCH model. We show that the discrete time GJR GARCH approximating sequence, after appropriate rescaling, converges to the continuous time GJR GARCH model in probability, in the Skorokhod metric, as the discrete approximating grid grows finer. Furthermore we give an estimation method for the parameters of the continuous time GJR GARCH model.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Mathematische Grundlagen	4
2.1	Stochastische Prozesse	4
2.2	Lévyprozesse	6
2.3	Stochastische Integration	10
3	Symmetrische Modelle	12
3.1	Das ARCH-Modell und Erweiterungen	12
3.2	Das COGARCH-Modell	13
3.2.1	Definition des COGARCH-Modells	13
3.2.2	Momente des Volatilitätsprozesses	15
3.2.3	Momente des integrierten COGARCH	17
4	Asymmetrische Modelle	19
4.1	Zeitdiskrete Modelle	19
4.1.1	Definition des zeitdiskreten APARCH-Modells	19
4.1.2	Spezialfälle des zeitdiskreten APARCH-Modells	20
4.2	Zeitstetige Modelle	21
4.2.1	Definition des zeitstetigen APARCH	21
4.2.2	Momente des Volatilitätsprozesses	27
4.2.3	Momente des zeitstetigen APARCH	35
4.2.4	Mischungseigenschaften	43
5	Beispiele	49
5.1	Momente des zugrundeliegenden Lévyprozesses	49
5.1.1	Zusammengesetzter Poissonprozess	49
5.1.2	Varianz-Gamma-Prozess	50
5.2	Laplace-Exponenten $\Psi(1)$ und $\Psi(2)$	51
5.2.1	Zusammengesetzter Poissonprozess	52
5.2.2	Varianz-Gamma-Prozess	53
6	Approximation des zeitstetigen GJR GARCH	55
6.1	Mathematische Grundlagen	55
6.2	Approximation des zeitstetigen GJR GARCH	56
6.3	Beweis zu Satz 6.6	60
7	Schätzmethode für den zeitstetigen GJR GARCH	78

8 Simulationen	81
8.1 Zusammengesetzter Poissonprozess	81
8.2 Varianz-Gamma-Prozess	86

Kapitel 1

Einleitung

Modelle mit generalisierter autoregressiver bedingter Heteroskedastie sind besonders in der Finanzmathematik und den Wirtschaftswissenschaften von großer Bedeutung. Die Volatilität eines Preisprozesses, welche das Schwankungsverhalten von Finanzzeitreihen beschreibt, wird in diesen Modellen in Abhängigkeit von vorangegangenen Prozesswerten bestimmt. Solche Modelle bieten die Möglichkeit empirische Charakteristika von Finanzzeitreihen wie Volatilitätscluster und Leptokurtosis abzubilden. Mit Volatilitätscluster bezeichnet man die Eigenschaft, dass Finanzzeitreihen Phasen hoher und niedriger Volatilität aufweisen. Für Leptokurtosis wird häufig auch der englische Begriff *heavy-tailed* verwendet. Dies beschreibt Verteilungen, die in den Enden mehr Masse als die Normalverteilung haben. Die wohl bekanntesten zeitdiskreten Modelle zur Analyse von Finanzzeitreihen sind das ARCH (autoregressive conditionally heteroscedastic) Modell von Engle [10] und das GARCH (generalized ARCH) Modell von Bollerslev [4].

Da heutzutage die meisten Finanzzeitreihen zeitstetig sind, wurden zahlreiche unterschiedliche Versuche unternommen, um einen zeitstetigen Prozess zu definieren, der die Eigenschaften des zeitdiskreten GARCH-Prozesses beibehält. Bei der Erweiterung des zeitdiskreten GARCH-Modells durch eine Diffusionsapproximation von Nelson in [26] werden zwei unabhängige Brownsche Bewegungen verwendet. Dieser Ansatz führt zu einem Modell mit stochastischer Volatilität (SV-Modell). In diesen Modellen ist die Volatilität nicht von vorangegangenen Beobachtungen abhängig, sondern wird von latenten Variablen bestimmt. Im zeitdiskreten GARCH-Modell jedoch treten Sprünge auf und es besitzt nur eine Quelle von Unsicherheit. Es gibt eine Modifikation von Nelsons Diffusionsapproximation, die in Verteilung gegen einen Prozess konvergiert, der nur von einer einzigen Brownschen Bewegung abhängt. Jedoch hat Corradi in [7] gezeigt, dass diese Modifikation zu einem Grenzwert führt, der deterministische Volatilität besitzt. Desweiteren hat [34] gezeigt, dass das GARCH-Modell und sein zeitstetiger Diffusionsgrenzwert statistisch nicht äquivalent sind.

Das zeitstetige SV-Modell von Barndorff-Nielsen und Shephard in [28] beschreibt die Volatilität durch einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess, der von einem Lévyprozess getrieben wird. Um den Preisprozess zu bestimmen, wird eine unabhängige Brownsche Bewegung als treibender Noise-Prozess benutzt. Dieses Modell erlaubt die Modellierung von Sprüngen, jedoch ist es durch zwei unabhängige stochastische Prozesse bestimmt.

Klüppelberg, Linder und Maller stellten in [19] einen neuen Ansatz vor, um eine zeitstetige Version des GARCH-Modells zu erhalten. Es wird als COGARCH(1,1)-Modell bezeichnet, abgeleitet von continuous time GARCH-Modell. Im Gegensatz zum Ansatz von Nelson, welcher auf einer Diffusionsapproximation basiert, ist der Ansatz in [19] direkt aus dem zeitdiskreten GARCH-Modell motiviert und hängt nur von einem treibenden Lévyprozess ab. Als Noise-

Prozess ersetzen die Inkremente des Lévyprozesses die Innovationen des zeitdiskreten GARCH-Prozesses. Dadurch erhält man eine zeitstetige Version des zeitdiskreten GARCH-Prozesses. In [17] wurde gezeigt, dass der COGARCH(1,1)-Prozess tatsächlich als Grenzwert in Verteilung der zeitdiskreten GARCH(1,1)-Prozesse erhalten werden kann. Dadurch kann in [24] gezeigt werden, dass man den zeitstetigen GJR GARCH als Grenzwert einer eingebetteten Folge von zeitdiskreten GJR GARCH-Reihen erhält.

Obwohl GARCH-Modelle einige der wichtigen empirischen Charakteristika von Finanzzeitreihen wie Sprünge, Volatilitätscluster und Leptokurtosis abbilden, zeigen empirische Beobachtungen, dass außerdem Asymmetrie in den Daten auftritt. Dies wird häufig als Leverage Effekt bezeichnet. Darunter versteht man, dass die Volatilität aufgrund von fallenden Preisen im Allgemeinen stärker steigt als bei einem betragsmäßig gleich hohen Preisanstieg. Jedoch kann diese durchaus wichtige empirische Eigenschaft nicht durch ein klassisches GARCH-Modell erfasst werden, da dieses eine symmetrische Verteilung besitzt. Es wurden bereits zahlreiche zeitdiskrete Modelle entwickelt, die die Asymmetrie der Daten berücksichtigen. Nelson stellt in [27] das sogenannte exponentielle GARCH-Modell vor. Für dieses zeitdiskrete Modell wurde in [16] eine zeitstetige Version, das zeitstetige exponentielle GARCH-Modell (ECOGARCH), definiert und einige wichtige Verteilungseigenschaften gezeigt.

Eine andere Erweiterung des zeitdiskreten GARCH-Modells ist das Asymmetric Power ARCH-Modell (APARCH) aus [8]. In der Literatur wird dieses Modell auch als Asymmetric Power GARCH bezeichnet, in dieser Arbeit jedoch wird die ursprüngliche Bezeichnung aus [8] verwendet. Das APARCH-Modell enthält viele asymmetrische Modelle wie das GJR GARCH-Modell aus [13] und das Threshold GARCH-Modell aus [30, 35]. Lee beschreibt in [21, 22] eine zeitstetige Version des zeitdiskreten APARCH-Modells und gibt einige wichtige Eigenschaften des zeitstetigen APARCH(1,1)-Modells an.

Ziel und Aufbau der Arbeit

Das Ziel der Arbeit ist, eine Approximation an einen asymmetrischen COGARCH zu formulieren und eine Methode zur Schätzung der Parameter des asymmetrischen COGARCH-Modells zu entwickeln. Dazu wird das zeitstetige APARCH(1,1)-Modell aus [21, 22] betrachtet und es wird das darin enthaltene GJR GARCH-Modell gewählt, um eine Approximation und ein Schätzverfahren anzugeben. Der zeitstetige GJR GARCH(1,1)-Prozess wird nach der Methode aus [19] als zeitstetige Version des zeitdiskreten GJR GARCH hergeleitet. Außerdem wird gezeigt, wie man den zeitstetigen GJR GARCH als Grenzwert einer eingebetteten Folge von zeitdiskreten GJR GARCH-Reihen erhält. Diese eingebettete Folge von zeitdiskreten GJR GARCH-Prozessen konvergiert in Wahrscheinlichkeit in der Skorokhod Metrik gegen den zeitstetigen Prozess, wenn das zeitdiskrete Approximationsnetz feiner wird. Die Diskretisierung des zeitstetigen GJR GARCH-Prozesses wird schließlich für die Implementierung des Schätzverfahrens verwendet. Die Parameter des zeitstetigen GJR GARCH(1,1)-Modells werden dabei durch eine Pseudo-Maximum-Likelihood-Methode geschätzt.

Die folgende Arbeit ist wie folgt strukturiert. Kapitel 2 ist eine Zusammenfassung von Definitionen und Resultaten, die für diese Arbeit relevant sind. In Abschnitt 2.2 wird eine kurze Einführung in die Theorie der Lévyprozesse gegeben und der zusammengesetzte Poissonprozess und Varianz-Gamma-Prozess werden definiert. Außerdem werden Begriffe aus der stochastischen Integration bezüglich Lévyprozessen erläutert. In Kapitel 3 werden symmetrische Modelle betrachtet. Zunächst wird das ARCH-Modell von Engle [10] und dessen Erweiterung, das GARCH-Modell von Bollerslev [4] vorgestellt. Ausgehend vom zeitdiskreten GARCH(1,1)-Prozess wird der COGARCH-Prozess aus [19] hergeleitet und einige Eigenschaften wie Momente

und Stationarität formuliert. Im 4. Kapitel werden asymmetrische Modelle behandelt. Es wird zunächst das zeitdiskrete APARCH-Modell aus [8] definiert. Anschließend wird gezeigt, dass andere Modelle wie etwa das GJR GARCH-Modell aus [13] im zeitdiskreten APARCH-Modell enthalten sind. Darauf aufbauend wird das zeitstetige APARCH(1,1)-Modell aus [21, 22] als eine zeitstetige Version aus dem zeitdiskreten APARCH(1,1)-Modell hergeleitet. Desweiteren werden wichtige Charakteristika des Modells wie Momente, Stationarität und Mischungseigenschaften formuliert und die dazu in [21, 22] angegebenen Beweisskizzen ausgearbeitet. In Kapitel 5 werden die Eigenschaften des zeitstetigen APARCH(1,1)-Modells am Beispiel des zeitstetigen GJR GARCH(1,1)-Modells und des COGARCH(1,1)-Modells ausführlich untersucht. In Kapitel 6 wird der zeitstetige GJR GARCH(1,1)-Prozess nach der Methode aus [19] aus dem zeitdiskreten GJR GARCH(1,1)-Prozess aus [13] hergeleitet. Die Hauptaussage des Kapitels, dass die eingebettete Folge von zeitdiskreten GJR GARCH-Prozessen in Wahrscheinlichkeit in der Skorokhod Metrik gegen den zeitstetigen GJR GARCH-Prozess konvergiert, wird durch mehrere Teilschritte bewiesen. Zunächst werden die Approximationsverfahren für den zugrundeliegenden Lévyprozess, den Volatilitätsprozess und zeitstetigen GJR GARCH-Prozess behandelt und schließlich die besagte Konvergenz gezeigt. Basierend auf der Diskretisierung des zeitstetigen GJR GARCH-Prozesses wird in Kapitel 7 eine Pseudo-Maximum-Likelihood-Methode zur Schätzung der Parameter des zeitstetigen GJR GARCH(1,1)-Modells entwickelt. Abschließend wird in Kapitel 8 der zeitstetige GJR GARCH(1,1)-Prozess simuliert.

Kapitel 2

Mathematische Grundlagen

Im ersten Teil dieses Kapitels werden einige grundlegende Begriffe zu stochastischen Prozessen und damit verbundenen Themen definiert. Anschließend wird eine kurze Einführung in die Theorie der Lévyprozesse und der stochastischen Integration bezüglich dieser gegeben. Dabei beschränkt sich der Kurzüberblick auf die für diese Arbeit relevanten Resultate. Diese sind hauptsächlich aus [1], [18] und [29] entnommen.

Es wird angenommen, dass alle stochastischen Größen auf einem vollständigen, filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ mit einer rechtsstetigen Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ definiert sind, so dass \mathcal{F}_0 jede P -Nullmenge auf \mathcal{F} enthält. Man sagt, dass in diesem Fall der vollständige, filtrierte Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ die üblichen Bedingungen erfüllt. Falls eine Zufallsvariable X messbar bezüglich \mathcal{F}_t ist, schreibt man $X \in \mathcal{F}_t$.

In dieser Arbeit werden folgende Notationen verwendet. Die Abkürzung f.s. bedeutet fast sicher. Konvergenz in Wahrscheinlichkeit wird geschrieben als \xrightarrow{P} und die Konvergenz in Verteilung als \xrightarrow{D} . Gleichheit in Verteilung wird mit $\stackrel{D}{=}$ bezeichnet. Sei (S, \mathcal{F}) ein messbarer Raum. Dann wird die Indikatorfunktion der Menge $A \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{1}_{\{A\}}$ bezeichnet und für $x \in S$ durch

$$\mathbb{1}_{\{A\}}(x) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Die Borel σ -Algebra von \mathbb{R} wird mit $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ bezeichnet.

2.1 Stochastische Prozesse

Mit T wird die Indexmenge eines stochastischen Prozesses bezeichnet.

Definition 2.1 (Stochastischer Prozess). *Ein stochastischer Prozess X auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ ist eine Familie von (reellwertigen) Zufallsvariablen $(X_t)_{t \in T}$ die auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) definiert sind. Der stochastische Prozess X wird adaptiert genannt, falls $X_t \in \mathcal{F}_t$, d.h. X_t ist bezüglich \mathcal{F}_t messbar für alle $t \in T$. Die Funktionen $(X \cdot (\omega))_{\omega \in \Omega}$ werden Realisierungen oder Pfade des Prozesses X genannt.*

Definition 2.2. *Ein stochastischer Prozess heißt càdlàg (continue à droite, limites à gauche), falls die Pfade $t \rightarrow X_t(\omega)$ f.s. für $t \in T$ rechtsstetig sind und endliche linksseitigen Grenzwerte existieren.*

Definition 2.3 (Stopzeit). *Eine Zufallsvariable $\tau: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ ist eine Stopzeit, falls $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, für jedes $t \in [0, \infty]$ gilt.*

Definition 2.4 (Autokovarianzfunktion). Sei $(X_t)_{t \in T}$ ein stochastischer Prozess, so dass $\text{Var}(X_t) < \infty$ für alle $t \in T$ gilt. Dann wird die Funktion

$$\text{Cov}(X_s, X_t) = E[(X_s - E[X_s])(X_t - E[X_t])], \quad s, t \in T,$$

Autokovarianzfunktion des Prozesses $(X_t)_{t \in T}$ genannt.

Definition 2.5 (Schwache Stationarität). Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in T}$ heißt schwach stationär, falls

$$(i) \quad E[|X_t|^2] < \infty \quad \forall t \in T,$$

$$(ii) \quad E[X_t] = \mu \quad \forall t \in T,$$

$$(iii) \quad \gamma_X(s, t) = \gamma_X(s + h, t + h) \quad \forall s, t, h \in T.$$

Definition 2.6 (Strikte Stationarität). Der Prozess (X_t) heißt strikt stationär, falls seine endlichdimensionalen Verteilungen invariant gegenüber einer Zeitverschiebung sind, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ und $h > 0$ sind $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ und $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h})$ identisch verteilt.

Definition 2.7 (Weißes Rauschen). Ein Prozess $(X_t)_{t \in T}$ heißt weißes Rauschen (white noise), falls für eine endliche Konstante $\sigma^2 > 0$ gilt

$$(i) \quad E[X_t] = 0, \quad \forall t \in T,$$

$$(ii) \quad E[X_t X_s] = 0 \quad \forall s \neq t, \text{ d.h. } X_t \text{ und } X_s \text{ sind unkorreliert,}$$

$$(iii) \quad E[X_t^2] = \sigma^2, \quad \forall t \in T.$$

Definition 2.8. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $T \subset \mathbb{R}$. Sei $X = (X_t)_{t \in T}$ ein reellwertiger, adaptierter stochastischer Prozess mit $E[|X_t|] < \infty$ für jedes $t \in T$. Der Prozess X heißt (bezüglich \mathbb{F}) ein

$$(i) \quad \text{Martingal, falls } E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s \text{ für alle } s, t \in T \text{ mit } t > s,$$

$$(ii) \quad \text{Submartingal, falls } E[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s \text{ für alle } s, t \in T \text{ mit } t > s,$$

$$(iii) \quad \text{Supermartingal, falls } E[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s \text{ für alle } s, t \in T \text{ mit } t > s.$$

Somit ist für Martingale $t \mapsto E[X_t]$ konstant, für Submartingale monoton wachsend und für Supermartingale monoton fallend.

Definition 2.9 (Markovprozess). Sei \mathcal{S} ein reellwertiger Zustandsraum. Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in T}$ heißt Markovprozess, genau dann, wenn für alle $t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1}$, $t_i \in T$ und $x_0, \dots, x_{n+1} \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ die Markoveigenschaft

$$P(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_0} = x_0) = P(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_n} = x_n). \quad (2.1)$$

erfüllt ist. Falls die rechte Seite der Gleichung (2.1) nur vom Zeitabstand $t_{n+1} - t_n$ abhängt, jedoch nicht von t_n , dann wird der Markovprozess homogen genannt.

Definition 2.10. Ein Markovprozess $(X_t)_{t \in T}$ auf einem reellwertigen Zustandsraum \mathcal{S} erfüllt die starke Markoveigenschaft, falls für jede Stoppzeit τ mit $P(\tau < \infty) = 1$, $s \geq 0$,

$$P(X_{\tau+s} \in A | X_\tau = x, X_t, t < \tau) = P_x(X_s \in A)$$

für alle $A \in \mathcal{F}$ gilt.

Definition 2.11 (Charakteristische Funktion). Die charakteristische Funktion $\varphi_\mu(z)$ eines Wahrscheinlichkeitsmaßes μ ist definiert durch

$$\varphi_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{izx} \mu(dx), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Satz 2.12 (Laplace-Transformation). Ein endliches Maß μ auf $[0, \infty)$ ist eindeutig bestimmt durch Angabe der Laplace-Transformierten

$$\mathcal{L}_\mu(\lambda) := \int_{[0, \infty)} e^{-\lambda x} \mu(dx) \quad \text{für } \lambda \geq 0.$$

2.2 Lévyprozesse

Bei der Herleitung einer zeitstetigen Version aus dem zeitdiskreten GARCH-Prozess spielen Lévyprozesse eine bedeutende Rolle, da die Innovationen des zeitdiskreten GARCH-Modells durch die Inkremente eines Lévyprozesses ersetzt werden. Deshalb soll an dieser Stelle eine kurze Einführung in die Theorie der Lévyprozesse gegeben werden. Die Resultate aus diesem Abschnitt basieren hauptsächlich auf [1].

Definition 2.13 (Lévyprozess). Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum, der die üblichen Bedingungen erfüllt. Ein adaptierter Prozess $L = (L_t)_{t \geq 0}$ mit $L_0 = 0$ f.s. ist ein Lévyprozess, falls folgende Bedingungen gelten.

- (i) Der Prozess L hat unabhängige Zuwächse, d.h. $L_t - L_s$ ist unabhängig von \mathcal{F}_s , $0 \leq s < t < \infty$.
- (ii) Der Prozess L hat stationäre Zuwächse, d.h. $L_t - L_s$ besitzt die gleiche Verteilung wie L_{t-s} , $0 \leq s < t < \infty$.
- (iii) Der Prozess L ist stetig in Wahrscheinlichkeit, d.h. es gilt $\lim_{s \rightarrow t} P(|L_t - L_s| > \epsilon) = 0$ für alle $t \geq 0$ und $\epsilon > 0$.

Beispiele für Lévyprozesse sind die Brownsche Bewegung, der Poissonprozess und der zusammengesetzte Poissonprozess. Da diese in dieser Arbeit noch häufiger Verwendung finden, werden sie in den folgenden Beispielen beschrieben.

Beispiel 2.14 (Standard-Brownsche Bewegung). [1, Beispiel 1.3.8] Eine Standard-Brownsche Bewegung auf \mathbb{R} ist ein Lévyprozess $B = (B_t)_{t \geq 0}$ für den

(i) $B_t \sim N(0, t)$ für jedes $t \geq 0$ und

(ii) B besitzt stetige Pfade

gelten.

Beispiel 2.15 (Poissonprozess). [1, Beispiel 1.3.9] Ein Poissonprozess mit Rate $c > 0$ ist ein Lévyprozess $N = (N_t)_{t \geq 0}$, mit Werten in \mathbb{N}_0 , wobei jedes $N_t \sim \pi(ct)$, mit Poissonverteilung $\pi(\cdot)$, so dass

$$P(N_t = n) = \frac{(ct)^n}{n!} e^{-ct}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Die Pfade von N sind auf endlichen Intervallen stückweise konstant mit Sprüngen der Sprunghöhe 1 zu den zufälligen Zeitpunkten $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wobei $T_0 := 0$ und $T_n := \inf\{t \geq 0; N_t = n\}$ gesetzt werden.

Beispiel 2.16 (Zusammengesetzter Poissonprozess). [1, Beispiel 1.3.10] Sei $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängig identisch verteilten Zufallsvariablen, mit Werten in \mathbb{R} . Weiter sei $(N_t)_{t \geq 0}$ ein Poissonprozess mit Rate $c > 0$, der unabhängig von allen Z_n ist. Dann ist ein zusammengesetzter Poissonprozess $L = (L_t)_{t \geq 0}$ definiert durch

$$L_t = \sum_{i=1}^{N_t} Z_i, \quad t \geq 0.$$

Im Gegensatz zum Poissonprozess besitzt der zusammengesetzte Poissonprozess Sprünge von zufälliger Sprunghöhe.

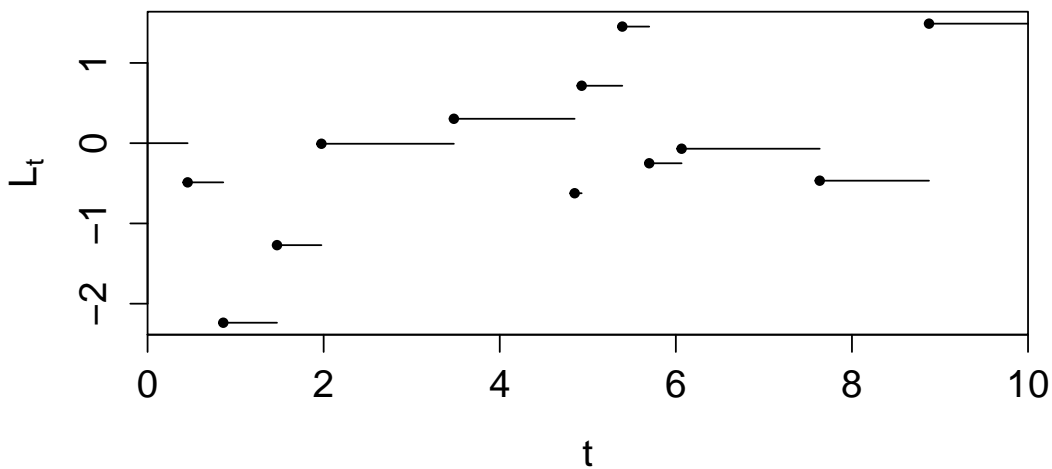


Abbildung 2.1: Simulierter Pfad eines zusammengesetzten Poissonprozesses mit Rate $c = 1$ und standardnormalverteilten Sprüngen Z_i auf dem Zeitintervall $[0, 10]$.

Ein weiteres Beispiel für einen Lévyprozess ist der Varianz-Gamma-Prozess aus [23, Abschnitt 2].

Beispiel 2.17 (Varianz-Gamma-Prozess). Der Varianz-Gamma-Prozess kann durch eine zeitverschobene Brownsche Bewegung mit Drift definiert werden. Die Zeitänderung der Brownschen Bewegung wird bezüglich eines Gammaprozesses $(G_t)_{t \geq 0}$ mit den Parametern $a, b > 0$ durchgeführt, so dass jedes $G_t \sim \Gamma(at, b)$ gammaverteilt ist mit der Dichte

$$f_{G_t}(x) = \frac{b^{at}}{\Gamma(at)} x^{at-1} e^{-bx}, \quad (2.2)$$

für $x \geq 0$, wobei $\Gamma(\cdot)$ die Gammafunktion bezeichnet. Dann erhält man den Varianz-Gamma-Prozess $(V_t)_{t \geq 0}$ mit den Parametern $\theta_V \in \mathbb{R}$, $\sigma_V > 0$ und $\kappa_V > 0$ durch

$$V_t = \theta_V G_t + \sigma_V B_{G_t}, \quad (2.3)$$

wobei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung ist und $(G_t)_{t \geq 0}$ ein Gammaprozess mit Parametern $a = 1/\kappa_V$ und $b = 1/\kappa_V$.

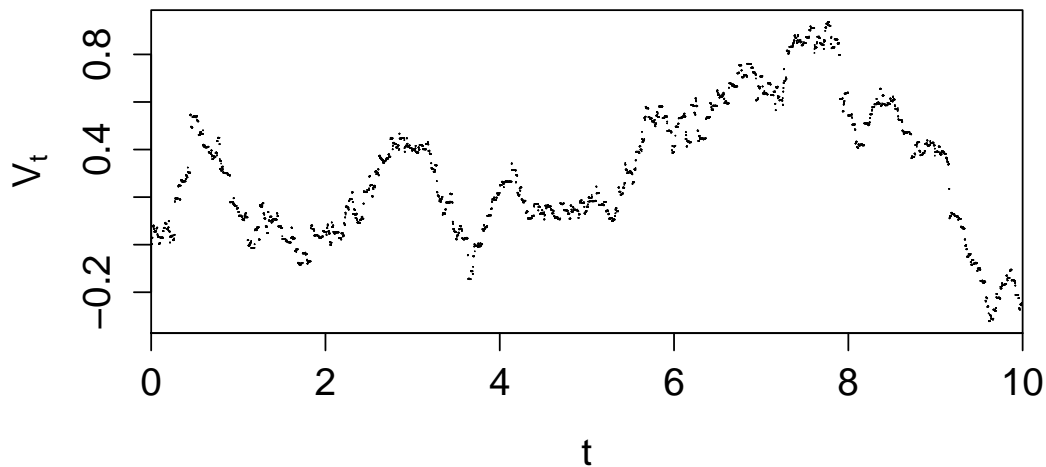


Abbildung 2.2: Simulierter Pfad eines Varianz-Gamma-Prozesses mit Parametern $\theta_V = -0.03$, $\sigma_V = 0.3$ und $\kappa_V = 0.05$ auf dem Zeitintervall $[0, 10]$

Lévyprozesse sind eng mit unendlich teilbaren Verteilungen verbunden.

Definition 2.18 (Unendliche Teilbarkeit). Sei $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf \mathbb{R} . Ein Maß $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ heißt unendlich teilbar, falls es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Maß $\mu_n \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft $\mu_n^{*n} = \mu$ gibt. Analog nennt man eine charakteristische Funktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf \mathbb{R} (CFW) φ unendlich teilbar, falls es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine CFW φ_n gibt mit $\varphi = \varphi_n^n$. Eine reellwertige Zufallsvariable X heißt unendlich teilbar, falls es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen $Y_1^{(n)}, \dots, Y_n^{(n)}$ gibt mit $X \stackrel{D}{=} Y_1^{(n)} + \dots + Y_n^{(n)}$.

Nach [1, Proposition 1.2.6] sind alle drei Begriffe der unendlichen Teilbarkeit äquivalent. Beispiele für unendlich teilbare Verteilungen sind Normal-, Poisson- und Exponentialverteilung. Hingegen sind Gleichverteilung und Binomialverteilung nicht unendlich teilbar.

Falls L ein Lévyprozess ist, dann ist die Verteilung von L_t unendlich teilbar für jedes $t \geq 0$, da für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$L_t = L_{t/n} + (L_{2t/n} - L_{t/n}) + \dots + (L_t - L_{(n-1)t/n}),$$

wobei die Zufallsvariablen $Y_k^{(n)} = L_{kt/n} - L_{(k-1)t/n}$ aufgrund der Stationarität und der Unabhängigkeit der Zuwächse von Lévyprozessen identisch verteilt und unabhängig sind.

Nach [32, Satz 8.1] kann die charakteristische Funktion jeder unendlich teilbaren Verteilung in der sogenannten Lévy-Khintchine Formel geschrieben werden. Dies gilt insbesondere auch für Lévyprozesse.

Satz 2.19 (Lévy-Khintchine Formel). Sei $(L_t)_{t \geq 0}$ ein reellwertigen Lévyprozess. Dann existiert ein eindeutiges Tripel $(\tau_L^2, \nu_L, \gamma_L)$, das sogenannte charakteristische Tripel, bestehend aus

einer Konstanten $\tau_L^2 > 0$, einem Maß ν_L auf \mathbb{R} , das

$$\nu_L(\{0\}) = 0 \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} \min(|x|^2, 1) \nu_L(dx) < \infty \quad (2.4)$$

erfüllt und einer Konstanten $\gamma_L \in \mathbb{R}$, so dass

$$E[e^{iuL_t}] = e^{-t\psi_L(u)}, \quad (2.5)$$

wobei

$$\psi_L(u) = \frac{\tau_L^2}{2} u^2 - iu\gamma_L + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{iux} + iux\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}) \nu_L(dx) \quad (2.6)$$

der charakteristische Exponent von L ist.

Hat man umgekehrt ein Tripel $(\tau_L^2, \nu_L, \gamma_L)$ gegeben, das aus der Konstanten $\tau_L^2 > 0$, einem Maß ν_L auf \mathbb{R} , das (2.4) erfüllt und einer Konstanten $\gamma_L \in \mathbb{R}$ besteht, dann existiert ein reellwertiger Lévyprozess, so dass (2.5) und (2.6) erfüllt sind. D.h. durch das charakteristische Tripel ist die Verteilung von L eindeutig bestimmt.

Definition 2.20 (Drift). Falls $\int_{\mathbb{R}} \min(1, |x|) \nu_L(dx) < \infty$, dann wird $\gamma_{L,0} = \gamma_L - \int_{[-1,1]} x \nu_L(dx)$ Drift von L genannt.

Definition 2.21 (Sprung). Der Sprung eines càdlàg Lévyprozesses $(L_t)_{t \geq 0}$ zum Zeitpunkt $t \geq 0$ ist definiert als $\Delta L_t = L_t - L_{t-}$, wobei L_{t-} der linksseitige Grenzwert des Pfades von L zum Zeitpunkt $t \geq 0$ ist. Man setzt $L_{0-} := 0$.

Als nächstes soll die Lévy-Itô-Zerlegung aus [1] angegeben werden. Dazu sind aber zunächst noch einige Notationen zu erklären. Man kann ein Maß definieren, das die Sprünge von L , die eine bestimmte Sprunghöhe haben, zählt. Sei $0 \leq t < \infty$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ dann definiert man das Maß

$$N_L(t, A) = \#\{0 \leq s < t; \Delta L_s \in A\} = \sum_{0 \leq s < t} \mathbf{1}_A(\Delta L_s). \quad (2.7)$$

Nach [1, Kapitel 2.3.1] ist das Maß N_L ein Poisson-Zufallsmaß. Daraus folgt insbesondere:

- (i) Für jedes $t > 0$, $\omega \in \Omega$ ist $N_L(t, \cdot)(\omega)$ ein Zählmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.
- (ii) Für jedes A , das von Null weg beschränkt ist, stellt $(N_L(t, A), t \geq 0)$ einen Poissonprozess mit Rate $E[N_L(1, A)]$ dar. Man sagt, dass $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ von Null weg beschränkt ist, falls $0 \notin \bar{A}$.

Die Rate des Poissonprozesses $(N_L(t, A), t \geq 0)$ mit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ ist die erwartete Anzahl an Sprüngen mit Sprunghöhe in A pro Zeiteinheit und definiert nach [29, Satz I.35] ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, für das

$$\nu_L(A) = E[N_L(1, A)] = E \left[\sum_{0 < t \leq 1} \mathbf{1}_A(\Delta L_t) \right]$$

gilt. Das Maß ν_L wird Lévymaß von L genannt und ist dasselbe Maß wie in Satz 2.19.

Weiter sei für jedes $t \geq 0$ und A von Null weg beschränkt ein zusammengesetztes Poisson-Zufallsmaß definiert durch

$$\tilde{N}_L(t, A) = N_L(t, A) - t\nu_L(A).$$

Mithilfe von [29, Satz I.36], der die Integration bezüglich eines Poisson-Zufallsmaßes beschreibt, kann man nun die Lévy-Itô-Zerlegung angeben.

Definition 2.22 (Lévy-Itô-Zerlegung). Falls L ein Lévyprozess ist, dann existiert eine Konstante $\gamma_L \in \mathbb{R}$, eine Brownsche Bewegung B mit Varianz τ_L^2 und ein unabhängiges Poisson-Zufallsmaß N_L auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass für alle $t \geq 0$

$$L_t = \gamma_L t + B_t + \int_{\{|x| < 1\}} x \tilde{N}_L(t, dx) + \int_{\{|x| \geq 1\}} x N_L(t, dx) \quad (2.8)$$

gilt, wobei $\gamma_L = E \left[L_1 - \int_{\{|x| \geq 1\}} x N_L(1, dx) \right]$ ist. Dabei entsprechen die Konstanten γ_L und τ_L^2 denen des charakteristischen Tripels.

Definition 2.23 (spektral-negativ). Ein Lévyprozess heißt spektral-negativ, wenn er keine positiven Sprünge besitzt, d.h. wenn das Lévymaß ν_L Träger in $(-\infty, 0)$ hat.

Zur Berechnung von Ausdrücken mit Lévyprozessen ist die Kompensationsformel aus [2] ein nützliches Hilfsmittel.

Satz 2.24 (Kompensationsformel). Sei L ein Lévyprozess mit Sprüngen, die Werte in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ annehmen, und $H \in \mathcal{P}_2(T, \mathbb{R} - \{0\})$. Dann gilt

$$E \left[\sum_{0 \leq u \leq T} H(u, \Delta L_u) \right] = E \left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} H(u, x) \nu_L(dx) du \right]. \quad (2.9)$$

2.3 Stochastische Integration

Definition 2.25. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum, der die üblichen Bedingungen erfüllt. Ein stochastischer Prozess X heißt Semimartingal bzgl. der Filtration \mathbb{F} , falls man den Prozess als Summe $X_t = X_0 + M_t + A_t$ schreiben kann, wobei

- (i) M ein lokales Martingal ist, d.h. M ist adaptiert, càdlàg und es existiert eine Folge von monoton wachsenden Stoppzeiten $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\tau_n \rightarrow \infty$ f.s., wenn $n \rightarrow \infty$, so dass der gestoppte Prozess $(M_{t \wedge \tau_n} \mathbf{1}_{\tau_n > 0})_{t \geq 0}$ ein gleichmäßig integrierbares Martingal für jedes n ist.
- (ii) A ein adaptierter, càdlàg Prozess ist, der Pfade von endlicher Variation auf kompakten Intervallen besitzt und in 0 startet.

Nun wird die quadratische Variation für Semimartingale definiert.

Definition 2.26. Seien X und Y zwei Semimartingale. Der quadratische Variationsprozess $[X, X] = ([X, X]_t)_{t \geq 0}$ von X ist definiert durch

$$[X, X] := X^2 - 2 \int X_- dX,$$

wobei $X_{0-} = 0$ gilt. Die quadratische Kovariation von X und Y ist gegeben durch

$$[X, Y] := XY - \int X_- dY - \int Y_- dX,$$

wobei $X_{0-} = 0$ und $Y_{0-} = 0$ gelten. Die Abbildung $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ ist bilinear und symmetrisch. Somit gilt die folgende Polarisations-Identität

$$[X, Y] = \frac{1}{2} ([X + Y, X + Y] - [X, X] - [Y, Y]).$$

Definition 2.27 (quadratisch reiner Sprungprozess). Für ein Semimartingal X ist der pfadweise stetige Anteil $[X, X]^c$ von $[X, X]$ durch

$$\begin{aligned} [X, X]_t &= [X, X]_t^c + X_0^2 + \sum_{0 < s \leq t} (\Delta X_s)^2 \\ &= [X, X]_t^c + \sum_{0 < s \leq t} (\Delta X_s)^2 \end{aligned}$$

definiert. Ist $[X, X]^c = 0$, so heißt das Semimartingal X quadratisch reiner Sprungprozess.

Kapitel 3

Symmetrische Modelle

Modelle mit autoregressiver bedingter Heteroskedastie, sogenannte ARCH-Modelle und ihre Weiterentwicklungen sind in der Literatur weitverbreitet und besonders in den Wirtschaftswissenschaften wird ihnen große Beachtung geschenkt. Eine wichtige Eigenschaft dieser Modelle ist die bedingte Volatilität, d.h. die Volatilität bedingt auf die Vergangenheit. Im ersten Teil dieses Kapitels sollen diese Modelle beschrieben werden und im zweiten Teil wird das COGARCH-Modell (continuous time GARCH-Modell) aus [19] behandelt.

3.1 Das ARCH-Modell und Erweiterungen

Robert F. Engle stellte in seinem Paper [10] das ARCH-Modell erstmals vor und behandelte in einer Vielzahl von nachfolgenden Veröffentlichungen ausführlich dessen Eigenschaften. Dafür erhielt er im Jahr 2003 zusammen mit Clive W.J. Granger den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften. Das Modell wurde entwickelt um typische Eigenschaften von log-Return Daten $X_t = \log S_t - \log S_{t-1}$ von Aktienkursen, Wechselkursen, Zinssätzen, etc., bezeichnet durch S_t , zu beschreiben. In [10] wird ein zeitdiskreter Prozess $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Form

$$Y_n = \varepsilon_n \sigma_n \tag{3.1}$$

$$\sigma_n^2 = \theta + \sum_{i=1}^q \alpha_i Y_{n-i}^2 \tag{3.2}$$

als linearer ARCH-Prozess der Ordnung q , kurz ARCH(q), definiert. Die Zufallsvariable σ_n ist die positive Quadratwurzel von σ_n^2 und $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge von nicht degenerierten, unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen $(\varepsilon_n \stackrel{D}{=} \varepsilon)$ mit $P(\varepsilon = 0) = 0$. Die Parameter q , θ und α_i erfüllen $q \in \mathbb{N}$, $\theta > 0$, $\alpha_i \geq 0$ für $i = 1, \dots, q-1$ und $\alpha_q > 0$.

Eine der zahlreichen Erweiterungen des ARCH-Modells ist das sogenannte Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (GARCH) Modell von [4]. Ein GARCH(p, q)-Prozess ist definiert durch:

$$Y_n = \varepsilon_n \sigma_n \tag{3.3}$$

$$\sigma_n^2 = \theta + \sum_{i=1}^q \alpha_i Y_{n-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{n-j}^2 \tag{3.4}$$

Wie beim ARCH-Modell ist die Zufallsvariable σ_n die positive Quadratwurzel von σ_n^2 und $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge von nicht degenerierten, unabhängig und identisch verteilten Zufallsva-

riablen $(\varepsilon_n \stackrel{D}{=} \varepsilon)$ mit $P(\varepsilon = 0) = 0$. Die Parameter des GARCH-Modells erfüllen $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, $\theta > 0$, $\alpha_i \geq 0$ für $i = 1, \dots, q-1$, $\alpha_q > 0$, $\beta_j \geq 0$ für $j = 1, \dots, p-1$ und $\beta_p > 0$.

3.2 Das COGARCH-Modell

Die Versuche, das GARCH-Modell durch immer kleiner werdende Schrittweiten zeitstetig zu machen, führen zu unterschiedlichen Ergebnissen. Ein kurzer Überblick zu den unterschiedlichen Ansätzen findet sich in der Einleitung. Der Ansatz in [19] ist direkt aus dem zeitdiskreten GARCH-Modell motiviert. In diesem sogenannten COGARCH-Modell, das die Eigenschaften des zeitdiskreten GARCH-Modell beibehält, wird die Idee eines einzelnen Noise-Prozesses aufgenommen. Im Folgenden wird das COGARCH-Modell beschrieben und einige Verteilungseigenschaften werden hergeleitet. Die Beweise zu den folgenden Sätzen findet man in [19].

3.2.1 Definition des COGARCH-Modells

Setzt man in (3.4) $p = 1$ und $q = 1$, so erhält man den zeitdiskreten GARCH(1,1)-Prozess

$$Y_n = \varepsilon_n \sigma_n \quad \text{mit} \quad \sigma_n^2 = \theta + \alpha Y_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.5)$$

wobei $\theta > 0$, $\alpha \geq 0$ und $\beta \geq 0$. Ausgehend von (3.5) ergibt sich rekursiv für $n \in \mathbb{N}$

$$\sigma_n^2 = \theta + (\beta + \alpha \varepsilon_{n-1}^2) \sigma_{n-1}^2 \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} &= \theta + (\beta + \alpha \varepsilon_{n-1}^2) (\theta + (\beta + \alpha \varepsilon_{n-2}^2) \sigma_{n-2}^2) \\ &= \theta + \theta (\beta + \alpha \varepsilon_{n-1}^2) + (\beta + \alpha \varepsilon_{n-1}^2) (\beta + \alpha \varepsilon_{n-2}^2) \sigma_{n-2}^2 \\ &= \dots \end{aligned}$$

$$= \theta \sum_{i=0}^{n-1} \prod_{j=i+1}^{n-1} (\beta + \alpha \varepsilon_j^2) + \sigma_0^2 \prod_{j=0}^{n-1} (\beta + \alpha \varepsilon_j^2) \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} &= \theta \int_0^n \exp \left(\sum_{j=\lfloor s \rfloor + 1}^{n-1} \log (\beta + \alpha \varepsilon_j^2) \right) ds + \sigma_0^2 \exp \left(\sum_{j=0}^{n-1} \log (\beta + \alpha \varepsilon_j^2) \right) \\ &= \theta \int_0^n \exp \left(\sum_{j=\lfloor s \rfloor + 1}^{n-1} \left(\log \beta + \log \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} \varepsilon_j^2 \right) \right) \right) ds \\ &\quad + \sigma_0^2 \exp \left(\sum_{j=0}^{n-1} \left(\log \beta + \log \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} \varepsilon_j^2 \right) \right) \right) \\ &= \theta \int_0^n \exp \left((n - \lfloor s \rfloor) \log \beta + \sum_{j=\lfloor s \rfloor + 1}^{n-1} \left(\log \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} \varepsilon_j^2 \right) \right) \right) ds \\ &\quad + \sigma_0^2 \exp \left(\sum_{j=0}^{n-1} \left(\log \beta + \log \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} \varepsilon_j^2 \right) \right) \right) \quad (3.8) \end{aligned}$$

Um eine zeitstetige Version des zeitdiskreten GARCH-Prozesses zu erhalten, ersetzt man die Innovationen ε_j durch die Inkremente eines Lévyprozesses. Sei daher $(L_t)_{t \geq 0}$ ein càdlàg Lévyprozess mit Sprüngen $\Delta L_t = L_t - L_{t-}$, $t \geq 0$, und einem Lévymaß $\nu_L \neq 0$.

Hinsichtlich Gleichung (3.8) definiert man den càdlàg Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ durch

$$X_t = -t \log \beta - \sum_{0 < s \leq t} \log \left(1 + \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) (\Delta L_s)^2 \right), \quad t \geq 0, \quad (3.9)$$

wobei $0 < \beta < 1$, $\alpha \geq 0$. Mit $\theta > 0$ und einer endlichen Zufallsvariable σ_0 , die unabhängig von $(L_t)_{t \geq 0}$ ist, wird der linksseitig stetige Volatilitätsprozess $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$ analog zu (3.8) definiert durch

$$\sigma_t^2 = \left(\theta \int_0^t e^{X_s} ds + \sigma_0^2 \right) e^{-X_t}, \quad t \geq 0. \quad (3.10)$$

Der integrierte COGARCH-Prozess $(G_t)_{t \geq 0}$ ist ein càdlàg Prozess, definiert durch

$$dG_t = \sigma_t dL_t, \quad t \geq 0, \quad G_0 = 0, \quad (3.11)$$

und springt zu den gleichen Zeiten wie L mit Sprunghöhe $\Delta G_t = \sigma_t \Delta L_t$, $t \geq 0$. In diesem Fall nehmen die Sprünge ΔL_t die Funktion der Innovationen ε_n im zeitdiskreten GARCH Modell ein. Für den zeitstetigen COGARCH lässt sich eine stochastische Differentialgleichung formulieren.

Proposition 3.1. [19, Proposition 3.2] Der Prozess $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$ definiert in (3.10) erfüllt die stochastische Differentialgleichung

$$d\sigma_{t+}^2 = \theta dt + \sigma_t^2 e^{X_t} d(e^{-X_t}), \quad t > 0, \quad (3.12)$$

und besitzt die Repräsentation

$$\sigma_t^2 = \sigma_0^2 + \theta t + \log \beta \int_0^t \sigma_s^2 ds + \frac{\alpha}{\beta} \sum_{0 < s < t} \sigma_s^2 (\Delta L_s)^2, \quad t \geq 0. \quad (3.13)$$

Im Folgenden wird gezeigt, dass $(G_t)_{t \geq 0}$ und $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$ im zeitstetigen Fall GARCH-ähnliches Verhalten aufweisen. Mit Gleichung (3.6) kann man zeigen, dass der zeitdiskrete GARCH(1,1)

$$\sigma_{n+1}^2 - \sigma_n^2 = \theta - (1 - \beta)\sigma_n^2 + \alpha \sigma_n^2 \varepsilon_n^2, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

erfüllt und Aufsummieren ergibt

$$\sigma_n^2 = \sigma_0^2 + \theta n - (1 - \beta) \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i^2 + \alpha \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i^2 \varepsilon_i^2, \quad (3.14)$$

analog zu (3.13). Die Analogie zwischen den Gleichungen (3.13) und (3.14) ist nicht exakt, da die Parametrisierung leicht unterschiedlich ist: $(1 - \beta)$ wird in der zeitstetigen Version durch $-\log \beta$ ersetzt.

Ziel ist es Stationaritätsbedingungen zu formulieren. Im Hinblick darauf lässt sich folgende Stabilitätsaussage angeben.

Satz 3.2. [19, Theorem 3.1] Sei

$$\int_{\mathbb{R}} \log \left(1 + \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) y^2 \right) \nu_L(dy) < -\log \beta. \quad (3.15)$$

Dann folgt $\sigma_t^2 \xrightarrow{D} \sigma_\infty^2$ für $t \rightarrow \infty$, wobei σ_∞ eine endliche Zufallsvariable ist, für die gilt

$$\sigma_\infty^2 \stackrel{D}{=} \theta \int_0^\infty e^{-X_t} dt.$$

Falls (3.15) nicht gilt, dann folgt $\sigma_t^2 \xrightarrow{P} \infty$ für $t \rightarrow \infty$.

Bemerkung 3.3. (i) Der Wert $\alpha = 0$ ist in (3.9) zulässig. In diesem Fall ist $X_t = -t \log \beta$, $t \geq 0$, ($0 < \beta < 1$), und mit (3.10) erhält man die triviale Lösung

$$\sigma_t^2 = \frac{\theta(1 - \beta^t)}{-\log \beta} + \sigma_0^2 \beta^t, \quad t \geq 0.$$

Mit (3.7) und $\alpha = 0$ ergibt sich für den zeitdiskreten GARCH-Prozess

$$\sigma_n^2 = \theta \sum_{i=0}^{n-1} \beta^{n-1-i} + \sigma_0^2 \beta^n = \frac{\theta(1 - \beta^n)}{1 - \beta} + \sigma_0^2 \beta^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

was wiederum die Übereinstimmung zwischen dem zeitdiskreten und zeitstetigen Fall zeigt.

(ii) In den Gleichungen (3.9) - (3.15) wird $\beta > 0$ vorausgesetzt, deshalb enthält der COGARCH keinen zeitstetigen ARCH als Unterklasse. Um den ARCH Fall mit $\beta = 0$ zu erfassen, sollte man (3.9) folgendermaßen definieren

$$X_t = -t \log \alpha - \sum_{0 < s \leq t} \log(\Delta L_s)^2 \mathbf{1}_{\{\Delta L_s \neq 0\}}, \quad t \geq 0.$$

Dies ist jedoch nur dann ein wohl definierter Lévyprozess, falls L ein zusammengesetzter Poissonprozess ist.

Die nächste Aussage ist, dass $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$ ein Markovprozess und außerdem strikt stationär ist, falls der Prozess mit $\sigma_0^2 \stackrel{D}{=} \sigma_\infty^2$ gestartet wird.

Satz 3.4. [19, Theorem 3.2] Der Volatilitätsprozess $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$, wie in (3.10) gegeben, ist ein zeithomogener Markovprozess. Falls die Grenzvariable σ_∞^2 in Satz 3.2 existiert und $\sigma_0^2 \stackrel{D}{=} \sigma_\infty^2$, unabhängig von $(L_t)_{t \geq 0}$, dann ist $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$ strikt stationär.

Für den Prozess $G_t = \int_0^t \sigma_s dL_s$, $t \geq 0$, gilt für jedes $0 \leq y < t$,

$$G_t = G_y + \int_{y+}^t \sigma_s dL_s, \quad t \geq 0.$$

In diesem Fall hängt $(\sigma_s)_{y < s \leq t}$ von der Vergangenheit bis zum Zeitpunkt y nur durch σ_y ab und der Integrator ist unabhängig von der Vergangenheit. Somit erhält man von Satz 3.4:

Korollar 3.5. [19, Korollar 3.1] Der bivariate Prozess $(\sigma_t, G_t)_{t \geq 0}$ besitzt die Markoveigenschaft. Falls $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$ die strikt stationäre Version des Prozesses mit $\sigma_0^2 \stackrel{D}{=} \sigma_\infty^2$ ist, dann ist $(G_t)_{t \geq 0}$ ein Prozess mit stationären Zuwächsen.

3.2.2 Momente des Volatilitätsprozesses

Im Folgenden werden die Momente und die Autokorrelationsfunktion des Volatilitätsprozesses $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$ wie in [19] angegeben. Aus Gleichung (3.10) geht hervor, dass Momente von $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$ mit gewissen exponentiellen Momenten von $(X_t)_{t \geq 0}$ zusammenhängen. Diese Beziehung wird durch das folgende Lemma genauer beschrieben.

Lemma 3.6. [19, Lemma 4.1] Im Folgenden gelte stets $c > 0$.

- (a) Sei $\alpha > 0$. Für die Laplace-Transformierte von X_t an der Stelle c gilt $E[e^{-cX_t}] < \infty$ für ein $t > 0$, oder äquivalent für alle $t > 0$, genau dann, wenn $E[L_1^{2c}] < \infty$.
- (b) Wenn $E[e^{-cX_1}] < \infty$ gilt, definiere $\Psi(c)$ als $\Psi(c) = \Psi_X(c) = \log E[e^{-cX_1}]$. Dann folgt $|\Psi(c)| < \infty$, $E[e^{-cX_t}] = e^{t\Psi(c)}$ und

$$\Psi(c) = c \log \beta + \int_{\mathbb{R}} \left(\left(1 + \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) y^2 \right)^c - 1 \right) \nu_L(dy). \quad (3.16)$$

- (c) Falls $E[L_1^2] < \infty$ und $\Psi(1) < 0$, dann ist (3.15) erfüllt und σ_t^2 konvergiert in Verteilung gegen eine endliche Zufallsvariable.
- (d) Falls $\Psi(c) < 0$ für ein $c > 0$, dann gilt $\Psi(d) < 0$ für alle $0 < d < c$.

Das nächste Resultat liefert die ersten beiden Momente und die Autokovarianzfunktion von $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$ in Abhängigkeit der Funktion Ψ und zeigt insbesondere, dass die Autokovarianzfunktion mit wachsendem Zeitabstand exponentiell abfällt.

Proposition 3.7. [19, Proposition 4.1] Sei $\alpha > 0$, $t > 0$, $h \geq 0$. Dann gilt

- (a) $E[\sigma_t^2] < \infty$ genau dann, wenn $E[L_1^2] < \infty$ und $E[\sigma_0^2] < \infty$. In diesem Fall gilt

$$E[\sigma_t^2] = \frac{\theta}{-\Psi(1)} + \left(E[\sigma_0^2] + \frac{\theta}{\Psi(1)} \right) e^{t\Psi(1)}, \quad (3.17)$$

wobei für $\Psi(1) = 0$ die rechte Seite als ihr Grenzwert für $\Psi(1) \rightarrow 0$ interpretiert werden muss, d.h. $E[\sigma_t^2] = \theta t + E[\sigma_0^2]$.

- (b) $E[\sigma_t^4] < \infty$ genau dann, wenn $E[L_1^4] < \infty$ und $E[\sigma_0^4] < \infty$. Falls dies erfüllt ist, gilt

$$\begin{aligned} E[\sigma_t^4] &= \frac{2\theta^2}{\Psi(1)\Psi(2)} + \frac{2\theta^2}{\Psi(2) - \Psi(1)} \left(\frac{e^{t\Psi(2)}}{\Psi(2)} - \frac{e^{t\Psi(1)}}{\Psi(1)} \right) \\ &\quad + 2\theta E[\sigma_0^2] \left(\frac{e^{t\Psi(2)} - e^{t\Psi(1)}}{\Psi(2) - \Psi(1)} \right) + E[\sigma_0^4] e^{t\Psi(2)}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\text{Cov}(\sigma_t^2, \sigma_{t+h}^2) = \text{Var}(\sigma_t^2) e^{h\Psi(1)}. \quad (3.19)$$

Die folgende Proposition gilt für die stationäre Version des Volatilitätsprozesses. Aus Satz 3.4 geht hervor, dass $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$ dies für $\sigma_0^2 \stackrel{D}{=} \sigma_\infty^2$ erfüllt, wobei σ_∞^2 die Grenzvariable aus Satz 3.2 darstellt.

Proposition 3.8. [19, Proposition 4.2] Sei $\alpha > 0$. Für das k -te Moment von σ_∞^2 gilt $E[\sigma_\infty^{2k}] < \infty$ genau dann, wenn $E[L_1^{2k}] < \infty$ und $\Psi(k) < 0$, $k \in \mathbb{N}$. In diesem Fall gilt

$$E[\sigma_\infty^{2k}] = k! \theta^k \prod_{l=1}^k \frac{1}{-\Psi(l)}. \quad (3.20)$$

Daraus ergibt sich der Erwartungswert und das zweite Moment für σ_∞^2 . Außerdem wird die Autokovarianzfunktion des stationären Prozesses $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$ angegeben.

Korollar 3.9. [19, Korollar 4.1] Falls $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$ der stationäre Prozess mit $\sigma_0^2 \stackrel{D}{=} \sigma_\infty^2$ ist, dann gilt

$$E[\sigma_\infty^2] = \frac{\theta}{-\Psi(1)}, \quad (3.21)$$

$$E[\sigma_\infty^4] = \frac{2\theta^2}{\Psi(1)\Psi(2)}, \quad (3.22)$$

$$\text{Cov}(\sigma_t^2, \sigma_{t+h}^2) = \theta^2 \left(\frac{2}{\Psi(1)\Psi(2)} - \frac{1}{\Psi^2(1)} \right) e^{h\Psi(1)}, \quad t, h \geq 0, \quad (3.23)$$

vorausgesetzt, dass $E[L_1^{2k}] < \infty$ und $\Psi(k) < 0$, mit $k = 1$ für (3.21) und $k = 2$ für (3.22), (3.23).

Das Ziel ist, die Funktion Ψ in Abhängigkeit des treibenden Lévyprozesses $(L_t)_{t \geq 0}$ darzustellen. Für die Existenz von Momenten von σ_∞^2 erhält man folgende Bedingungen.

Satz 3.10. [19, Theorem 4.1] Sei $k \in \mathbb{N}$, $0 < \beta < 1$, $\alpha \geq 0$. Dann existiert die Grenzvariable σ_∞^2 und $E[\sigma_\infty^{2k}] < \infty$, genau dann, wenn

$$\left(\frac{1}{k}\right) \int_{\mathbb{R}} \left(\left(1 + \frac{\alpha}{\beta} y^2\right)^k - 1 \right) \nu_L(dy) < -\log \beta. \quad (3.24)$$

Man stellt fest, dass das zeitstetige GARCH-Modell, wie bereits das zeitdiskrete Modell, heavy-tailed ist. Dies folgt daraus, dass der Volatilitätsprozess niemals alle Momente besitzt.

Proposition 3.11. [19, Proposition 4.3] Sei $k \in \mathbb{N}$, $0 < \beta < 1$, $\alpha \geq 0$. Dann gilt

- (a) Für jeden Lévyprozess $(L_t)_{t \geq 0}$ mit Lévymaß ungleich Null, so dass $\int_{\mathbb{R}} \log(1 + y^2) \nu_L(dy) < \infty$, existieren Parameter $\beta, \alpha \in (0, 1)$, für die σ_∞^2 existiert, aber $E[\sigma_\infty^2] = \infty$.
- (b) Für jeden Lévyprozess $(L_t)_{t \geq 0}$ mit $E[L_1^{2k}] < \infty$ und jedes $\beta \in (0, 1)$ existiert ein $\alpha_\beta > 0$, so dass die Grenzvariable σ_∞^2 existiert mit $E[\sigma_\infty^{2k}] < \infty$ für jedes Parameterpaar (β, α) , so dass $0 \leq \alpha \leq \alpha_\beta$ gilt.
- (c) Sei $k \in \mathbb{N}$, $0 < \beta < 1$, $\alpha > 0$. Dann gibt es keinen Lévyprozess $(L_t)_{t \geq 0}$ mit Lévymaß ungleich Null, für den alle Momente von σ_∞^2 existieren. Insbesondere existiert die Laplace-Transformierte von σ_∞^2 nicht für negative Argumente.

3.2.3 Momente des integrierten COGARCH

Aus der Definition des integrierten COGARCH-Prozesses in Gleichung (3.11) folgt, dass für jeden festen Zeitpunkt t alle Momente von ΔG_t Null sind. Es ist jedoch sinnvoll Momente für die Zuwächse von G auf beliebigen Zeitintervallen zu betrachten. Die Zuwächse von G bezeichnet man mit $G_t^{(r)}$ und definiert für $r > 0$

$$G_t^{(r)} := G_{t+r} - G_t = \int_{t+}^{t+r} \sigma_s ds, \quad t \geq 0.$$

Dann kann man für die Momente folgende Aussage treffen.

Satz 3.12. [19, Proposition 5.1] Sei $(L_t)_{t \geq 0}$ ein quadratisch reiner Sprungprozess, d.h. $\tau_L^2 = 0$ in (2.6), mit $E[L_1^2] < \infty$, $E[L_1] = 0$ und $\Psi(1) < 0$. Desweiteren sei $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$ der stationäre Volatilitätsprozess mit $\sigma_\infty^2 \stackrel{D}{=} \sigma_0^2$. Dann gilt für jedes $t \geq 0$ und $h \geq r > 0$,

$$\begin{aligned} E[G_t^{(r)}] &= 0, \\ E\left[\left(G_t^{(r)}\right)^2\right] &= \frac{\theta r}{-\Psi(1)} E[L_1^2], \\ \text{Cov}\left(G_t^{(r)}, G_{t+h}^{(r)}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Sei ferner $E[L_1^4] < \infty$ und $\Psi(2) < 0$. Dann gilt

$$\text{Cov}\left(\left(G_t^{(r)}\right)^2, \left(G_{t+h}^{(r)}\right)^2\right) = \left(\frac{e^{-r\Psi(1)} - 1}{-\Psi(1)}\right) E[L_1^2] \text{Cov}(G_r^2, \sigma_r^2) e^{h\Psi(1)}. \quad (3.25)$$

Dabei ist

$$\text{Cov}(G_t^2, \sigma_t^2) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \text{Var}(\sigma_0^2) \left(1 - e^{t\Psi(1)} - \log \beta \left(\frac{1 - e^{t\Psi(1)}}{-\Psi(1)}\right)\right). \quad (3.26)$$

Falls $\alpha > 0$, $E[L_1^8] < \infty$, $\Psi(4) < 0$, $\int_{[-1,1]} |x| \nu_L(dx) < 0$ und $\int_{\mathbb{R}} x^3 \nu_L(dx) = 0$, dann ist die rechte Seite von (3.25) strikt positiv.

Kapitel 4

Asymmetrische Modelle

4.1 Zeitdiskrete Modelle

Das GARCH-Modell bildet viele der wichtigen Charakteristika von Finanzzeitreihen ab, wie Volatilitätscluster und Leptokurtosis. Jedoch kann es den Leverage Effekt nicht modellieren, da es eine symmetrische Verteilung besitzt. Dies ist ein Widerspruch zu empirischen Studien am Aktienmarkt, die zeigen, dass die Volatilität aufgrund von fallenden Preisen im Allgemeinen stärker steigt als bei einem betragsmäßig gleich hohen Preisanstieg. Um dieses Problem zu lösen, wurden viele Erweiterungen des GARCH Modells vorgeschlagen, unter anderem das exponentielle GARCH (EGARCH) Modell in [27], das sogenannte GJR Modell in [13] und das Threshold GARCH Modell in [30] und [35]. Ein weiteres Modell, das Asymmetric Power ARCH (APARCH) Modell, wurde in [8] vorgestellt. Dieses soll im Folgenden genauer betrachtet werden, da es viele asymmetrische Modelle wie den GJR GARCH und den Threshold GARCH sowie das symmetrische GARCH Modell als Spezialfall enthält.

4.1.1 Definition des zeitdiskreten APARCH-Modells

Das Asymmetric Power ARCH Modell (APARCH) ist ein sehr allgemeines Modell und ist nachfolgend wie in [8, Abschnitt 6] definiert.

Definition 4.1 (Asymmetric Power ARCH). Sei $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen, so dass $E[\varepsilon_n] = 0$ und $\text{Var}(\varepsilon_n) = 1$. Der Prozess $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Asymmetric Power ARCH(p, q), (APARCH(p, q)) falls er eine Gleichung der Form

$$Y_n = \varepsilon_n \sigma_n \quad (4.1)$$

$$\sigma_n^\delta = \theta + \sum_{i=1}^q \alpha_i h(Y_{n-i}) + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{n-j}^\delta \quad (4.2)$$

erfüllt, wobei $h(x) = (|x| - \gamma x)^\delta$, $\theta > 0$, $\delta > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$ und $|\gamma_i| < 1$.

Bemerkung 4.2. Die Funktion $h(x) = (|x| - \gamma x)^\delta$ aus Definition 4.1 ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\delta > 0$ strikt positiv, da $|x| > \gamma x$ durch die Parameterbedingung $|\gamma| < 1$ gilt.

Für den APARCH(1,1)-Prozess lässt sich nach [21] ein Stabilitätskriterium formulieren.

Satz 4.3. [21, Satz 2.1] Angenommen es ist

$$E |\log(\beta + \alpha h(\varepsilon_1))| < \infty, \quad E \log(\beta + \alpha h(\varepsilon_1)) < 0, \quad (4.3)$$

wobei $h(x) = (|x| - \gamma x)^\delta$. Dann gilt $Y_n \xrightarrow{D} Y$ und $\sigma_n \xrightarrow{D} \sigma$ wenn $n \rightarrow \infty$ für endliche Zufallsvariablen Y und σ .

4.1.2 Spezialfälle des zeitdiskreten APARCH-Modells

Das APARCH-Modell aus (4.1), (4.2) mit der Funktion $h(x) = (|x| - \gamma x)^\delta$ beinhaltet die meisten symmetrischen und asymmetrischen ARCH-Modelle wie im Folgenden gezeigt wird (siehe auch [8]).

GARCH ($\delta = 2, \gamma_i = 0$)

Wählt man in (4.1), (4.2) die Parameter $\delta = 2$ und $\gamma_i = 0$ für $i = 1, \dots, q$, so erhält man den zeitdiskreten GARCH-Prozess mit $h(x) = x^2$ von [4], der bereits in Gleichung (3.4) beschrieben wurde.

Threshold GARCH ($\delta = 1$)

Wird in (4.1), (4.2) der Parameter $\delta = 1$ gesetzt, so erhält man durch die Funktion $h(x) = (|x| - \gamma x)$ den Prozess

$$\begin{aligned} \sigma_n^1 &= \theta + \sum_{i=1}^q \alpha_i (|Y_{n-i}| - \gamma_i Y_{n-i}) + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{n-j} \\ &= \theta + \sum_{i=1}^q \alpha_i (1 - \gamma_i) Y_{n-i} \mathbb{1}_{\{Y_{n-i} > 0\}} - \sum_{i=1}^q \alpha_i (1 + \gamma_i) Y_{n-i} \mathbb{1}_{\{Y_{n-i} < 0\}} + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{n-j}. \end{aligned}$$

Definiert man nun

$$\begin{aligned} \alpha_i^+ &= \alpha_i (1 - \gamma_i), \\ \gamma_i^- &= \alpha_i (1 + \gamma_i), \end{aligned}$$

dann ist dies der sogenannte Threshold GARCH aus [30] und [35]

$$\sigma_n = \theta + \sum_{i=1}^q \alpha_i^+ Y_{n-i} \mathbb{1}_{\{Y_{n-i} > 0\}} - \sum_{i=1}^q \gamma_i^- Y_{n-i} \mathbb{1}_{\{Y_{n-i} < 0\}} + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{n-j}.$$

GJR GARCH ($\delta = 2$)

Wenn man in (4.1), (4.2) den Parameter $\delta = 2$ wählt, ergibt sich $h(x) = (|x| - \gamma x)^2$ und man erhält den GJR GARCH aus [13], der nach den Autoren Glosten, Jagannathan und Runkle benannt ist. Zur Herleitung dieses Resultats nimmt man eine Fallunterscheidung vor. Sei $0 \leq \gamma_i < 1$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= \theta + \sum_{i=1}^q \alpha_i (|Y_{n-i}| - \gamma_i Y_{n-i})^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{n-j}^2 \\ &= \theta + \sum_{i=1}^q \alpha_i (1 - \gamma_i)^2 Y_{n-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{n-j}^2 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \{(1 + \gamma_i)^2 - (1 - \gamma_i)^2\} \mathbb{1}_{\{Y_{n-i} < 0\}} Y_{n-i}^2 \end{aligned}$$

$$= \theta + \sum_{i=1}^q \alpha_i (1 - \gamma_i)^2 Y_{n-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{n-j}^2 + \sum_{i=1}^q 4\alpha_i \gamma_i \mathbf{1}_{\{Y_{n-i} < 0\}} Y_{n-i}^2$$

Definiert man nun

$$\begin{aligned} \alpha_i^* &= \alpha_i (1 - \gamma_i)^2, \\ \gamma_i^* &= 4\alpha_i \gamma_i, \end{aligned}$$

dann erhält man das GJR Modell

$$\sigma_n^2 = \theta + \sum_{i=1}^q \alpha_i^* Y_{n-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{n-j}^2 + \sum_{i=1}^q \gamma_i^* \mathbf{1}_{\{Y_{n-i} < 0\}} Y_{n-i}^2.$$

Falls $-1 < \gamma_i < 0$, so ergibt sich

$$\sigma_n^2 = \theta + \sum_{i=1}^q \alpha_i (1 + \gamma_i)^2 Y_{n-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{n-j}^2 - \sum_{i=1}^q 4\alpha_i \gamma_i \mathbf{1}_{\{Y_{n-i} > 0\}} Y_{n-i}^2.$$

Definiert man nun

$$\begin{aligned} \alpha_i^* &= \alpha_i (1 + \gamma_i)^2, \\ \gamma_i^* &= -4\alpha_i \gamma_i, \end{aligned}$$

dann erhält man das GJR Modell

$$\sigma_n^2 = \theta + \sum_{i=1}^q \alpha_i^* Y_{n-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{n-j}^2 + \sum_{i=1}^q \gamma_i^* \mathbf{1}_{\{Y_{n-i} > 0\}} Y_{n-i}^2.$$

4.2 Zeitstetige Modelle

Das zeitdiskrete APARCH-Modell kann nach der Methode aus [19] in ein zeitstetiges Modell überführt werden. Dies wurde in [21, 22] gezeigt und einige Eigenschaften des Modells behandelt. In diesem Kapitel soll nun das zeitstetige APARCH(1,1)-Modell vorgestellt werden und Momente, Stationaritäts- und Mischungeigenschaften des Modells betrachtet werden. Die Beweise zu den folgenden Sätzen sind denen aus [19] und [22] nachempfunden.

4.2.1 Definition des zeitstetigen APARCH

Setzt man im zeitdiskreten APARCH(p,q)-Prozess (siehe (4.1) und (4.2)) die Parameter $p = q = 1$, so erhält man den zeitdiskreten APARCH(1,1)-Prozess

$$Y_n = \varepsilon_n \sigma_n, \quad \sigma_n^\delta = \theta + \alpha (|Y_{n-1}| - \gamma Y_{n-1})^\delta + \beta \sigma_{n-1}^\delta, \quad (4.4)$$

wobei $h(x) = (|x| - \gamma x)^\delta$, $\theta > 0$, $\delta > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ und $|\gamma| < 1$ gelten. Nun sollen, wie im GARCH-Fall die Innovationen des zeitdiskreten APARCH durch Inkremente eines Lévyprozesses ersetzt werden. Dazu wird zunächst der Volatilitätsprozess des zeitdiskreten APARCH so umgeformt, dass er nur von Innovationen abhängt. Man erhält aus (4.4)

$$\sigma_n^\delta = \theta + \alpha (|Y_{n-1}| - \gamma Y_{n-1})^\delta + \beta \sigma_{n-1}^\delta$$

$$\begin{aligned}
 &= \theta + \alpha (|\varepsilon_{n-1}\sigma_{n-1}| - \gamma\varepsilon_{n-1}\sigma_{n-1})^\delta + \beta\sigma_{n-1}^\delta \\
 &= \theta + \alpha (|\varepsilon_{n-1}| - \gamma\varepsilon_{n-1})^\delta \sigma_{n-1}^\delta + \beta\sigma_{n-1}^\delta \\
 &= \theta + (\alpha h(\varepsilon_{n-1}) + \beta) \sigma_{n-1}^\delta.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Durch Iteration von (4.5) erhält man

$$\sigma_n^\delta = \theta + (\beta + \alpha h(\varepsilon_{n-1})) \sigma_{n-1}^\delta \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
 &= \theta + (\beta + \alpha h(\varepsilon_{n-1})) \left(\theta + (\beta + \alpha h(\varepsilon_{n-2})) \sigma_{n-2}^\delta \right) \\
 &= \theta + \theta (\beta + \alpha h(\varepsilon_{n-1})) + (\beta + \alpha h(\varepsilon_{n-1})) (\beta + \alpha h(\varepsilon_{n-2})) \sigma_{n-2}^\delta \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

$$= \theta \sum_{i=0}^{n-1} \prod_{j=i+1}^{n-1} (\beta + \alpha h(\varepsilon_j)) + \sigma_0^\delta \prod_{j=0}^{n-1} (\beta + \alpha h(\varepsilon_j)) \tag{4.7}$$

$$= \theta \int_0^n \exp \left(\sum_{j=\lfloor s \rfloor + 1}^{n-1} \log (\beta + \alpha h(\varepsilon_j)) \right) ds + \sigma_0^\delta \exp \left(\sum_{j=0}^{n-1} \log (\beta + \alpha h(\varepsilon_j)) \right) \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
 &= \theta \int_0^n \exp \left(\sum_{j=\lfloor s \rfloor + 1}^{n-1} \left(\log \beta + \log \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} h(\varepsilon_j) \right) \right) \right) ds \\
 &\quad + \sigma_0^\delta \exp \left(\sum_{j=0}^{n-1} \left(\log \beta + \log \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} h(\varepsilon_j) \right) \right) \right) \\
 &= \theta \int_0^n \exp \left((n - \lfloor s \rfloor) \log \beta + \sum_{j=\lfloor s \rfloor + 1}^{n-1} \left(\log \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} h(\varepsilon_j) \right) \right) \right) ds \\
 &\quad + \sigma_0^\delta \exp \left(\sum_{j=0}^{n-1} \left(\log \beta + \log \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} h(\varepsilon_j) \right) \right) \right)
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Wie im klassischen COGARCH-Fall werden auch hier die Innovationen ε_j durch die Inkremente eines Lévyprozesses ersetzt, um eine zeitstetige Version des zeitdiskreten GARCH-Modells zu erhalten. Sei daher L ein Lévyprozess mit Lévymaß $\nu_L \neq 0$. Man definiert einen càdlàg Prozess hinsichtlich (4.9) als

$$X_t = -t \log \beta - \sum_{0 < s \leq t} \log \left(1 + \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) h(\Delta L_s) \right), \quad t \geq 0, \tag{4.10}$$

wobei $\theta > 0$, $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$, $|\gamma| < 1$, $\delta > 0$ und $h(x) = (|x| - \gamma x)^\delta$ gilt. Analog zu (4.9) wird auch hier eine linksstetige Version des Volatilitätsprozesses definiert,

$$\sigma_t^\delta = \left(\theta \int_0^t e^{X_s} ds + \sigma_0^\delta \right) e^{-X_{t-}}, \quad t \geq 0, \tag{4.11}$$

wobei σ_0^δ eine positive endliche Zufallsvariable ist, die unabhängig von $(L_t)_{t \geq 0}$ ist. Man definiert den integrierten zeitstetigen APARCH(1,1)-Prozess $(G_t)_{t \geq 0}$ als einen càdlàg Prozess, der Folgendes erfüllt

$$dG_t = \sigma_t dL_t, \quad t \geq 0, \quad G_0 = 0. \tag{4.12}$$

Der Prozess G springt zu den gleichen Zeiten wie L mit Sprunghöhe $\Delta G_t = \sigma_t \Delta L_t$, $t \geq 0$. In diesem zeitstetigen Fall nehmen die Sprünge ΔL_t die Funktion der Innovationen ε_n im zeitdiskreten APARCH Modell ein. Im Folgenden wird gezeigt, dass $(G_t)_{t \geq 0}$ und $(\sigma_t^\delta)_{t \geq 0}$ im zeitstetigen Fall APARCH-ähnliches Verhalten aufweisen.

Man beginnt zunächst mit der Betrachtung des Prozesses $(X_t)_{t \geq 0}$ aus (4.10), dieser besitzt nach [19, Proposition 3.1] und [22] eine spezielle Form.

Proposition 4.4. *Man nimmt $E[|L_1|^\delta] < \infty$ an. Dann ist der Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ ein spektral-negativer Lévyprozess von beschränkter Variation mit Drift $\gamma_{X,0} = -\log \beta = \eta > 0$, Gauss-Komponente $\tau_X^2 = 0$ und dem Lévymaß ν_X , das durch*

$$\nu_X([0, \infty)) = 0$$

und

$$\nu_X((-\infty, -x]) = \nu_L\left(\left\{y \in \mathbb{R} : h(y) \geq \frac{\beta}{\alpha}(e^x - 1)\right\}\right), \quad x > 0,$$

gegeben ist.

Beweis. Der Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ ist aufgrund seiner Definition in (4.10) ein Lévyprozess und besitzt keine positiven Sprünge, da

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-} = \sum_{0 < s < t} \log\left(1 + \frac{\alpha}{\beta} h(\Delta L_s)\right) - \sum_{0 < s \leq t} \log\left(1 + \frac{\alpha}{\beta} h(\Delta L_s)\right) < 0$$

gilt. Somit ist $(X_t)_{t \geq 0}$ nach Definition 2.23 ein spektral-negativer Lévyprozess und somit gilt $\nu_X([0, \infty)) = 0$. Das Lévymaß von $(X_t)_{t \geq 0}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \nu_X((-\infty, -x]) &= E \sum_{0 < s \leq 1} \mathbf{1}_{\{-\log(1 + \frac{\alpha}{\beta} h(\Delta L_s)) \leq -x\}} \\ &= E \sum_{0 < s \leq 1} \mathbf{1}_{\{h(\Delta L_s) \geq (e^x - 1) \frac{\beta}{\alpha}\}} \\ &= \nu_L\left(\left\{y : h(y) \geq \frac{\beta}{\alpha}(e^x - 1)\right\}\right), \quad x > 0. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass das Maß ν_X unter der Transformation

$$T: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, 0]; \quad x \mapsto -\log\left(1 + \frac{\alpha}{\beta} h(x)\right) \quad (4.13)$$

das Bildmaß von ν_L ist. Somit gilt

$$\int_{[-1,1]} |x| \nu_X(dx) = \int_{\{y: h(y) \leq \frac{\beta}{\alpha}(e-1)\}} \log\left(1 + \frac{\alpha}{\beta} h(y)\right) \nu_L(dy) < \infty,$$

wenn $\int_{\mathbb{R}} h(y) \nu_L(dy) < \infty$, was äquivalent zu $E[|L_1|^\delta] < \infty$ ist. Dadurch ist $(X_t)_{t \geq 0}$ mit [32, Satz 21.9 und Satz 19.3] ein Lévyprozess von beschränkter Variation mit charakteristischer Funktion

$$E[e^{iuX_t}] = \exp\left(-itu \log \beta + t \int_{(-\infty, 0)} (e^{iux} - 1) \nu_X(dx)\right), \quad u \in \mathbb{R},$$

mit $\gamma_{X,0} = -\log \beta$ und $\tau_X^2 = 0$. □

Für den zeitstetigen APARCH-Prozess kann eine stochastische Differentialgleichung angegeben werden.

Satz 4.5. Der Prozess $(\sigma_t^\delta)_{t \geq 0}$ erfüllt die stochastische Differentialgleichung

$$d\sigma_{t+}^\delta = \theta dt + \sigma_t^\delta e^{X_t} d(e^{-X_t}), \quad t > 0, \quad (4.14)$$

und besitzt die Repräsentation

$$\sigma_t^\delta = \sigma_0^\delta + \theta t + \log \beta \int_0^t \sigma_s^\delta ds + \frac{\alpha}{\beta} \sum_{0 < s < t} \sigma_s^\delta h(\Delta L_s), \quad t \geq 0. \quad (4.15)$$

Beweis. Setze $K_t := t \log \beta$, $S_t := \prod_{0 < s \leq t} \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} h(\Delta L_s)\right)$ und $f(k, s) := e^k s$. Dann wendet man Itô's Formel [29, Satz 33] an, um aus (4.10) zu erhalten

$$\begin{aligned} e^{-X_t} &= e^{t \log \beta + \sum_{0 < s \leq t} \log \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} h(\Delta L_s)\right)} \\ &= e^{K_t} S_t \\ &= f(K_t, S_t) \\ &= f(K_0, S_0) + \int_{0+}^t e^{K_s} S_s dK_s + \int_{0+}^t e^{K_s} dS_s \\ &\quad + \sum_{0 < s \leq t} \{e^{-X_s} - e^{-X_{s-}} - e^{K_s} S_s \Delta K_s - e^{K_s} \Delta S_s\} \\ &= 1 + \log \beta \int_0^t e^{-X_s} ds + \frac{\alpha}{\beta} \sum_{0 < s \leq t} e^{-X_{s-}} h(\Delta L_s), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Partielle Integration führt zu

$$\begin{aligned} &e^{-X_t} \int_0^t e^{X_s} ds \\ &= \int_{0+}^t e^{-X_{s-}} d \left(\int_0^s e^{X_y} dy \right) + \int_{0+}^t \left(\int_0^s e^{X_y} dy \right) d(e^{-X_s}) + \left[e^{-X_s}, \int_0^s e^{X_y} dy \right]_t \\ &= \int_{0+}^t e^{-X_{s-}} e^{X_{s-}} ds + \int_{0+}^t \left(\int_0^s e^{X_y} dy \right) d(e^{-X_s}) \\ &= t + \int_{0+}^t \left(\int_0^s e^{X_y} dy \right) d(e^{-X_s}), \end{aligned}$$

da für die quadratische Kovarianz gilt

$$\begin{aligned} \left[e^{-X_s}, \int_0^s e^{X_y} dy \right]_t &= \left[\log \beta \int_0^s e^{-X_s} ds, \int_0^s e^{X_y} dy \right]_t \\ &= \int_0^t d[s \log \beta, s] = 0 \end{aligned}$$

und deshalb gilt

$$d \left(e^{-X_t} \int_0^t e^{X_s} ds \right) = dt + \left(\int_0^t e^{X_s} ds \right) d(e^{-X_t}). \quad (4.17)$$

Kombiniert man (4.11) und (4.17) so erhält man die stochastische Differentialgleichung (4.14)

$$\begin{aligned}
 d\sigma_{t+}^{\delta} &= \theta d\left(e^{-X_t} \int_0^t e^{X_s} ds\right) + \sigma_0^{\delta} d(e^{-X_t}) \\
 &= \theta dt + \left(\theta \int_0^t e^{X_s} ds + \sigma_0^{\delta}\right) d(e^{-X_t}) \\
 &= \theta dt + \sigma_t^{\delta} e^{X_t} d(e^{-X_t}).
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Nun verwendet man (4.16) und (4.18) um zu erhalten, dass

$$\begin{aligned}
 \sigma_t^{\delta} &= \sigma_0^{\delta} + \theta t + \int_{0+}^t \sigma_s^{\delta} e^{X_s} d(e^{-X_s}) \\
 &= \sigma_0^{\delta} + \theta t + \int_{0+}^t \sigma_s^{\delta} e^{X_s} d\left(\log \beta \int_{0+}^s e^{-X_u} du\right) \\
 &\quad + \int_{0+}^t \sigma_s^{\delta} e^{X_s} d\left(\frac{\alpha}{\beta} \sum_{0 < u \leq s} e^{-X_u} h(\Delta L_u)\right) \\
 &= \sigma_0^{\delta} + \theta t + \log \beta \int_0^t \sigma_s^{\delta} ds + \frac{\alpha}{\beta} \sum_{0 < s < t} \sigma_s^{\delta} h(\Delta L_s),
 \end{aligned}$$

was den Beweis vervollständigt. \square

Im Hinblick auf Stationaritätskriterien, kann man nach [19, Satz 4.6] auch hier ein Stabilitätskriterium für den Volatilitätsprozess $(\sigma_t^{\delta})_{t \geq 0}$ des zeitstetigen APARCH formulieren und die Grenzvariable σ_{∞}^{δ} definieren.

Satz 4.6. *Sei*

$$\int_{\mathbb{R}} \log\left(1 + \frac{\alpha}{\beta} h(y)\right) \nu_L(dy) < -\log \beta. \tag{4.19}$$

Dann folgt $\sigma_t^{\delta} \xrightarrow{D} \sigma_{\infty}^{\delta}$ für $t \rightarrow \infty$, wobei σ_{∞}^{δ} eine endliche Zufallsvariable ist, für die gilt

$$\sigma_{\infty}^{\delta} \stackrel{D}{=} \theta \int_0^{\infty} e^{-X_t} dt. \tag{4.20}$$

Falls (4.19) nicht gilt, dann folgt $\sigma_t^{\delta} \xrightarrow{P} \infty$ für $t \rightarrow \infty$.

Beweis. Nach [11] konvergiert $\int_0^{\infty} e^{-X_s} ds$ fast sicher gegen eine endliche Zufallsvariable, falls $X_t \rightarrow \infty$ f.s., anderenfalls gilt $\sigma_t^{\delta} \xrightarrow{P} \infty$, falls $t \rightarrow \infty$. Durch das Dualitätslemma für Lévyprozesse aus [2, Lemma II.1.2] gilt

$$e^{-X_t} \int_0^t e^{X_s} ds = \int_0^t e^{X_s - X_t} ds = \int_0^t e^{X_{(t-s)} - X_t} ds \stackrel{D}{=} \int_0^t e^{-X_s} ds, \quad t \geq 0.$$

Deshalb reicht es zu zeigen, dass (4.19) äquivalent ist zu $X_t \rightarrow \infty$ fast sicher, falls $t \rightarrow \infty$. Da nach Proposition 4.4 $\nu_X([0, \infty)) = 0$ gilt, existiert $E[X_1]$ immer, wobei möglicherweise der Wert $-\infty$ angenommen wird. Durch das starke Gesetz der Großen Zahlen (siehe [32], Satz 36.5 und Satz 36.6) konvergiert X_t/t fast sicher gegen $E[X_1]$, wenn $t \rightarrow \infty$ gilt. Weiter kann man mit [32, Satz 36.7] zeigen, falls $E[X_1] \leq 0$ gilt, dann konvergiert $X_t \rightarrow -\infty$ fast sicher oder $(X_t)_{t \geq 0}$ oszilliert. Somit muss man zeigen, dass $E[X_1] > 0$ genau dann wenn (4.19) erfüllt ist. Mithilfe

der charakteristischen Funktion $\varphi_{X_1}(u) = \exp\left(-iu \log \beta + \int_{(-\infty,0)} (e^{iux} - 1) \nu_X(dx)\right)$ von X_1 lässt sich $E[X_1]$ berechnen. Man erhält die Ableitung der charakteristischen Funktion

$$\varphi'_X(u) = \exp\left(-iu \log \beta + \int_{(-\infty,0)} (e^{iux} - 1) \nu_X(dx)\right) \left(-i \log \beta + \int_{(-\infty,0)} ix e^{iux} \nu_X(dx)\right)$$

und somit gilt

$$E[X_1] = \frac{\varphi'_{X_1}(0)}{i} = -\log \beta + \int_{(-\infty,0)} x \nu_X(dx) = -\log \beta - \int_{\mathbb{R}} \log\left(1 + \frac{\alpha}{\beta} h(y)\right) \nu_L(dy).$$

Daraus ergibt sich, dass (4.19) erfüllt ist, genau dann wenn $E[X_1] > 0$ gilt. \square

Als nächstes kann man wie in [19, Satz 3.2] und [22] das folgende Resultat angeben.

Satz 4.7. *Die beiden Prozesse $(\sigma_t^\delta)_{t \geq 0}$ und $(\sigma_t^\delta, G_t)_{t \geq 0}$ sind zeithomogene Markovprozesse. Falls $\sigma_0^\delta \stackrel{D}{=} \sigma_\infty^\delta$ und σ_0^δ unabhängig von $(L_t)_{t \geq 0}$ ist, dann ist σ_t^δ strikt stationär und $(G_t)_{t \geq 0}$ ist ein Prozess mit stationären Inkrementen.*

Beweis. Sei $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ die durch $(\sigma_t^\delta)_{t \geq 0}$ generierte Filtration. Für $0 \leq y < t$ gilt

$$\begin{aligned} \sigma_t^\delta &= \left(\theta \int_0^t e^{X_s} ds + \sigma_0^\delta\right) e^{-X_t} \\ &= \sigma_y^\delta A_{y,t} + B_{y,t} \end{aligned} \tag{4.21}$$

wobei

$$A_{y,t} := e^{-(X_t - X_{y-})} \quad \text{und} \quad B_{y,t} := \theta \int_y^t e^{(X_s - X_{y-})} ds e^{-(X_t - X_{y-})}$$

unabhängig von \mathcal{F}_y sind. Dies bedeutet, dass σ_t^δ , bedingt auf \mathcal{F}_y , nur von σ_y^δ abhängt. Dadurch folgt, dass $(\sigma_t^\delta)_{t \geq 0}$ ein Markovprozess ist.

Sei $D[0, \infty)$ der Raum der càdlàg Funktionen auf $[0, \infty)$ und man definiere $g_{y,t} : D[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (e^{-(x_t - x_{y-})}, \theta \int_y^t e^{-(x_t - x_s)} ds)$. Da $(X_t)_{t \geq 0}$ ein Lévyprozess ist, gilt $(X_s)_{s \geq 0} \stackrel{D}{=} (X_{s+h} - X_h)_{s \geq 0}$ für jedes $h > 0$. Desweiteren gilt $(A_{y,t}, B_{y,t}) = g_{y,t}((X_s)_{s \geq 0})$ und $(A_{y+h,t+h}, B_{y+h,t+h}) = g_{y,t}((X_{s+h} - X_h)_{s \geq 0})$. Dies zeigt, dass die gemeinsame Verteilung von $(A_{y,t}, B_{y,t})$ nur von $t - y$ abhängt. Durch die Unabhängigkeit von σ_y^2 und $(A_{y,t}, B_{y,t})$ sind die Übergangsfunktionen somit zeithomogen.

Nun bleibt noch zu zeigen, dass $\sigma_t^\delta \stackrel{D}{=} \sigma_\infty^\delta$ für alle $t > 0$ gilt, unter der Voraussetzung, dass $\sigma_0^\delta \stackrel{D}{=} \sigma_\infty^\delta$ gilt. Um die Verteilung von

$$\sigma_{t+}^\delta = \theta \int_0^t e^{X_{s-} - X_t} ds + e^{-X_t} \sigma_0^\delta$$

zu berechnen, ist $\sigma_0^\delta := \theta \int_0^\infty e^{-(X_{s+t} - X_t)} ds$ eine geeignete Darstellung, da σ_0^δ unabhängig von $(L_s)_{0 \leq s \leq t}$ ist und die gleiche Verteilung wie σ_∞^δ besitzt. Dann ergibt sich mit dem Dualitätslemma für Lévyprozesse aus [2, Lemma II.1.2]

$$\sigma_{t+}^\delta = \theta \int_0^t e^{(X_{(t-s)-} - X_t)} ds + e^{(X_{(t-t)-} - X_t)} \theta \int_0^\infty e^{-(X_{s+t} - X_t)} ds$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{D}{=} \theta \int_0^t e^{-X_s} ds + e^{-X_t} \theta \int_0^\infty e^{-(X_s+t-X_t)} ds \\
&= \theta \int_0^t e^{-X_s} ds + \theta \int_t^\infty e^{-X_s} ds \\
&\stackrel{D}{=} \sigma_\infty^\delta
\end{aligned}$$

Da σ_t^δ fast sicher an keinem festen Punkt eine Unstetigkeit besitzt, gilt $\sigma_{t+}^\delta = \sigma_t^\delta$ fast sicher und somit folgt $\sigma_t^\delta \stackrel{D}{=} \sigma_\infty^\delta$ für alle $t > 0$. Für den Prozess $G_t = \int_0^t \sigma_s dL_s$, $t \geq 0$, gilt für jedes $0 \leq y < t$,

$$G_t = G_y + \int_{y+}^t \sigma_s dL_s, \quad t \geq 0.$$

In diesem Fall hängt $(\sigma_s)_{y < s \leq t}$ von der Vergangenheit bis zum Zeitpunkt y nur durch σ_y ab und der Integrator ist unabhängig von der Vergangenheit. Durch diese Darstellung folgt, dass (σ, G) ein Markovprozess ist. \square

4.2.2 Momente des Volatilitätsprozesses

In diesem Abschnitt sollen die Momente und die Autokorrelationsfunktion des Volatilitätsprozesses $(\sigma_t^\delta)_{t \geq 0}$ nach dem Vorbild von [19] formuliert werden. Aus der Gleichung (4.11) geht hervor, dass Momente von $(\sigma_t^\delta)_{t \geq 0}$ mit gewissen exponentiellen Momenten von $(X_t)_{t \geq 0}$ zusammenhängen. Diese Beziehung wird durch das folgende Lemma und die Proposition danach genauer beschrieben.

Lemma 4.8. *Im Folgenden gelte stets $c > 0$.*

- (a) *Sei $\alpha > 0$. Für die Laplace-Transformierte von X_t an der Stelle c gilt $E[e^{-cX_t}] < \infty$ für ein $t > 0$, oder äquivalent für alle $t > 0$, genau dann, wenn $E[|L_1|^{\delta c}] < \infty$.*
- (b) *Wenn $E[e^{-cX_1}] < \infty$ gilt, definiere $\Psi(c)$ als $\Psi(c) = \Psi_X(c) = \log E[e^{-cX_1}]$. Dann folgt $|\Psi(c)| < \infty$, $E[e^{-cX_t}] = e^{t\Psi(c)}$ und*

$$\Psi(c) = c \log \beta + \int_{\mathbb{R}} \left(\left(1 + \frac{\alpha}{\beta} h(y) \right)^c - 1 \right) \nu_L(dy), \quad (4.22)$$

wobei $\Psi(c)$ der Laplace-Exponent der Laplace-Transformation $E[e^{-cX_t}] = e^{t\Psi(c)}$ des Hilfsprozesses X aus (4.10) ist.

- (c) *Falls $E[|L_1|^\delta] < \infty$ und $\Psi(1) < 0$, dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}} \log \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} h(y) \right) \nu_L(dy) < -\log \beta, \quad (4.23)$$

und $\sigma_t^\delta \xrightarrow{D} \sigma_\infty^\delta$ wenn $t \rightarrow \infty$ für eine endliche Zufallsvariable σ_∞^δ , die $\sigma_\infty^\delta \stackrel{D}{=} \theta \int_0^\infty e^{-X_t} dt$ erfüllt.

- (d) *Falls $\Psi(c) < 0$ für ein $c > 0$, dann gilt $\Psi(d) < 0$ für alle $0 < d < c$.*

Beweis. (a) Nach [32, Satz 25.17] ist die Laplace-Transformierte $E[e^{-cX_t}]$ endlich für ein beliebiges und somit für alle $t \geq 0$ genau dann wenn $\int_{\{|x|>1\}} e^{-cx} \nu_X(dx)$ endlich ist. Für dieses Integral erhält man mit der Transformation (4.13)

$$\begin{aligned} \int_{\{|x|>1\}} e^{-cx} \nu_X(dx) &= \int_{(-\infty, -1)} e^{-cx} \nu_X(dx) \\ &= \int_{\{y:h(y)>\frac{\beta}{\alpha}(e-1)\}} e^{-c(-\log(1+\frac{\alpha}{\beta}h(y)))} \nu_L(dy) \\ &= \int_{\{y:h(y)>\frac{\beta}{\alpha}(e-1)\}} \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}h(y)\right)^c \nu_L(dy) \end{aligned}$$

Somit folgt mit [32, Satz 25.3], dass $E[L_1^{\delta c}] < \infty$ gilt.

(b) Mit [32, Satz 25.17] folgt, dass $\int_{\{|x|\geq 1\}} e^{-cx} \nu_X(dx)$ endlich ist, wenn die Laplace-Transformierte $E[e^{-cX_1}] < \infty$ erfüllt. Somit gilt

$$E[e^{-cX_t}] = \exp\left(ct \log \beta + t \int_{(-\infty, 0)} (e^{-cx} - 1) \nu_X(dx)\right) = e^{t\Psi(c)}$$

und daraus ergibt sich für den Exponenten

$$\begin{aligned} \Psi(c) &= c \log \beta + \int_{(-\infty, 0)} (e^{-cx} - 1) \nu_X(dx) \\ &= c \log \beta + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-c(-\log(1+\frac{\alpha}{\beta}h(y)))} - 1\right) \nu_L(dy) \\ &= c \log \beta + \int_{\mathbb{R}} \left(\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}h(y)\right)^c - 1\right) \nu_L(dy). \end{aligned}$$

(c) Mit (4.22) kann man

$$\Psi(1) = \log \beta + \int_{\mathbb{R}} \left(\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}h(y)\right) - 1\right) \nu_L(dy) = \log \beta + \int_{\mathbb{R}} \frac{\alpha}{\beta}h(y) \nu_L(dy)$$

berechnen. Daraus sieht man, dass die Bedingung $\Psi(1) < 0$ äquivalent zu $\frac{\alpha}{\beta} \int_{\mathbb{R}} h(y) \nu_L(dy) < -\log \beta$ ist. Mit der Abschätzung $\log(1 + |x|) \leq |x|$ erhält man

$$\int_{\mathbb{R}} \log\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}h(y)\right) \nu_L(dy) < \int_{\mathbb{R}} \frac{\alpha}{\beta}h(y) \nu_L(dy) < -\log \beta.$$

(d) Sei $\Psi(c) < 0$. Aus Teil (a) und (b) erhält man, dass $\Psi(d)$ für $0 < d \leq c$ definiert ist. Mit (4.22) folgt dann, dass $\Psi(d) < 0$ gilt, genau dann wenn

$$\frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}} \left(\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}h(y)\right)^d - 1\right) \nu_L(dy) < -\log \beta$$

gilt. Die Funktion $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; d \mapsto (1/d)((1 + (\alpha/\beta)h(y))^d - 1)$ ist monoton wachsend für jedes feste y und somit folgt die Behauptung. □

Wie in [19, Proposition 4.1] kann man auch für den zeitstetigen APARCH die ersten beiden Momente und die Autokovarianzfunktion des Volatilitätsprozesses $(\sigma_t^\delta)_{t \geq 0}$ in Abhängigkeit von Ψ angeben.

Proposition 4.9. *Sei $\alpha > 0$, $t > 0$, $h \geq 0$. Dann gilt*

(i) $E[\sigma_t^\delta] < \infty$ genau dann, wenn $E[|L_1|^\delta] < \infty$ und $E[\sigma_0^\delta] < \infty$. In diesem Fall gilt

$$E[\sigma_t^\delta] = \frac{\theta}{-\Psi(1)} + \left(E[\sigma_0^\delta] + \frac{\theta}{\Psi(1)} \right) e^{t\Psi(1)}, \quad (4.24)$$

wobei für $\Psi(1) = 0$ die rechte Seite als ihr Grenzwert für $\Psi(1) \rightarrow 0$ interpretiert werden muss, d.h. $E[\sigma_t^\delta] = \theta t + E[\sigma_0^\delta]$.

(ii) $E[\sigma_t^{2\delta}] < \infty$ genau dann, wenn $E[|L_1|^{2\delta}] < \infty$ und $E[\sigma_0^{2\delta}] < \infty$. Falls dies erfüllt ist, gilt

$$\begin{aligned} E[\sigma_t^{2\delta}] &= \frac{2\theta^2}{\Psi(1)\Psi(2)} + \frac{2\theta^2}{\Psi(2) - \Psi(1)} \left(\frac{e^{t\Psi(2)}}{\Psi(2)} - \frac{e^{t\Psi(1)}}{\Psi(1)} \right) \\ &\quad + 2\theta E[\sigma_0^\delta] \left(\frac{e^{t\Psi(2)} - e^{t\Psi(1)}}{\Psi(2) - \Psi(1)} \right) + E[\sigma_0^{2\delta}] e^{t\Psi(2)}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\text{Cov}(\sigma_t^\delta, \sigma_{t+h}^\delta) = \text{Var}(\sigma_t^\delta) e^{h\Psi(1)}. \quad (4.26)$$

Beweis. (i) Zunächst soll $E[\sigma_t^\delta]$ berechnet werden. Benutzt man den Satz von Fubini und die Tatsache, dass σ_0^δ unabhängig von allen anderen Größen ist, erhält man mit der Gleichung (4.11) und Lemma 4.8, dass

$$E[\sigma_t^\delta] = \theta E \left[\int_0^t e^{X_s - X_t} ds \right] + E[\sigma_0^\delta] E[e^{-X_t}] = \theta \int_0^t E[e^{-X_s}] ds + E[\sigma_0^\delta] E[e^{-X_t}]$$

endlich ist genau dann wenn $E[|L_1|^\delta] < \infty$ und $E[\sigma_0^\delta] < \infty$. Dann folgt (4.24) aus

$$E[\sigma_t^\delta] = \theta \int_0^t e^{s\Psi(1)} ds + E[\sigma_0^\delta] e^{t\Psi(1)}.$$

(ii) Es wird angenommen, dass $E[|L_1|^{2\delta}] < \infty$ und $E[\sigma_0^{2\delta}] < \infty$. Dann wird $E[\sigma_t^{2\delta}]$ wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} E[\sigma_t^{2\delta}] &= \theta^2 E \left[\left(\int_0^t e^{X_s - X_t} ds \right)^2 \right] + 2\theta E[\sigma_0^\delta] E \left[\int_0^t e^{X_s - 2X_t} ds \right] + E[\sigma_0^{2\delta}] E[e^{-2X_t}] \\ &=: \theta^2 E[I_1] + 2\theta E[\sigma_0^\delta] E[I_2] + E[\sigma_0^{2\delta}] e^{t\Psi(2)} \end{aligned}$$

Benutzt man die Stationarität der Inkremente von $(X_t)_{t \geq 0}$, so erhält man

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^t e^{X_s - X_t} ds \right)^2 \stackrel{D}{=} \left(\int_0^t e^{-X_s} ds \right)^2 \\ &= \int_0^t \int_0^t e^{-X_s} e^{-X_u} du ds = 2 \int_0^t \int_0^s e^{-(X_s - X_u)} e^{-2X_u} du ds. \end{aligned}$$

Durch die Unabhängigkeit der Inkremente von $(X_t)_{t \geq 0}$ und Lemma 4.8(b) folgt schließlich

$$\begin{aligned}
E[I_1] &= E \left[\left(\int_0^t e^{X_s - X_t} ds \right)^2 \right] \\
&= 2 \int_0^t \int_0^s \left(E \left[e^{-(X_s - X_u)} \right] \right) \left(E \left[e^{-2X_u} \right] \right) dud s \\
&= 2 \int_0^t \int_0^s e^{(s-u)\Psi(1)} e^{u\Psi(2)} dud s \\
&= \frac{2}{\Psi(1)\Psi(2)} + \frac{2}{\Psi(2) - \Psi(1)} \left(\frac{e^{t\Psi(2)}}{\Psi(2)} - \frac{e^{t\Psi(1)}}{\Psi(1)} \right).
\end{aligned}$$

Wiederum durch die Unabhängigkeit der Inkremente von $(X_t)_{t \geq 0}$ und Lemma 4.8(b) erhält man für das zweite Integral

$$\begin{aligned}
E[I_2] &= E \left[\int_0^t e^{X_s - 2X_t} ds \right] = E \left[\int_0^t e^{-2(X_t - X_s)} e^{-X_s} ds \right] \\
&= \int_0^t e^{(t-s)\Psi(2)} e^{s\Psi(1)} ds = \frac{e^{t\Psi(2)} - e^{t\Psi(1)}}{\Psi(2) - \Psi(1)}.
\end{aligned}$$

Fügt man nun die Terme zusammen, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
E \left[\sigma_t^{2\delta} \right] &= \theta^2 E[I_1] + 2\theta E \left[\sigma_0^\delta \right] E[I_2] + E \left[\sigma_0^{2\delta} \right] e^{t\Psi(2)} \\
&= \frac{2\theta^2}{\Psi(1)\Psi(2)} + \frac{2\theta^2}{\Psi(2) - \Psi(1)} \left(\frac{e^{t\Psi(2)}}{\Psi(2)} - \frac{e^{t\Psi(1)}}{\Psi(1)} \right) \\
&\quad + 2\theta E \left[\sigma_0^\delta \right] \left(\frac{e^{t\Psi(2)} - e^{t\Psi(1)}}{\Psi(2) - \Psi(1)} \right) + E \left[\sigma_0^{2\delta} \right] e^{t\Psi(2)},
\end{aligned}$$

was (4.25) entspricht. Außerdem erkennt man mithilfe von Lemma 4.8, dass $E \left[\sigma_t^{2\delta} \right] < \infty$ genau dann, wenn $E \left[|L_1|^{2\delta} \right] < \infty$ und $E \left[\sigma_0^{2\delta} \right] < \infty$.

Im Folgenden sei $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ die durch $(\sigma_t^\delta)_{t \geq 0}$ generierte Filtration. Dann folgt durch (4.21) und (4.24), dass

$$\begin{aligned}
E \left[\sigma_{t+h}^\delta | \mathcal{F}_t \right] &= E \left[\sigma_t^\delta A_{t,t+h} + B_{t,t+h} | \mathcal{F}_t \right] \\
&= \sigma_t^\delta E \left[e^{-(X_{t+h} - X_t)} \right] + E \left[\theta \int_t^{t+h} e^{(X_s - X_{t-})} ds e^{-(X_{t+h} - X_{t-})} \right] \\
&= \sigma_t^\delta E \left[e^{-X_h} \right] + E \left[\theta \int_t^{t+h} e^{-(X_s - X_{t-})} ds \right] \\
&= \sigma_t^\delta E \left[e^{-X_h} \right] + \theta \int_0^h E \left[e^{-X_s} \right] ds \\
&= \sigma_t^\delta e^{h\Psi(1)} + \theta \int_0^h e^{s\Psi(1)} ds \\
&= \left(\sigma_t^\delta - E \left[\sigma_0^\delta \right] \right) e^{h\Psi(1)} + E \left[\sigma_h^\delta \right].
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Dann gilt für $h \geq 0$

$$\begin{aligned}
E \left[\sigma_{t+h}^\delta \sigma_t^\delta \right] &= E \left[E \left[\sigma_{t+h}^\delta \sigma_t^\delta | \mathcal{F}_t \right] \right] \\
&= E \left[\sigma_t^\delta \left(\left(\sigma_t^\delta - E \left[\sigma_0^\delta \right] \right) e^{h\Psi(1)} + E \left[\sigma_h^\delta \right] \right) \right] \\
&= \left(E \left[\sigma_t^{2\delta} \right] - E \left[\sigma_t^\delta \right] E \left[\sigma_0^\delta \right] \right) e^{h\Psi(1)} + E \left[\sigma_t^\delta \right] E \left[\sigma_h^\delta \right]. \tag{4.28}
\end{aligned}$$

Mit (4.24) gilt

$$\begin{aligned}
&E \left[\sigma_t^\delta \right] E \left[\sigma_h^\delta \right] - E \left[\sigma_t^\delta \right] E \left[\sigma_{t+h}^\delta \right] \\
&= E \left[\sigma_t^\delta \right] \left(\frac{\theta}{-\Psi(1)} + \left(E \left[\sigma_0^\delta \right] + \frac{\theta}{\Psi(1)} \right) e^{h\Psi(1)} \right) \\
&\quad - E \left[\sigma_t^\delta \right] \left(\frac{\theta}{-\Psi(1)} + \left(E \left[\sigma_0^\delta \right] + \frac{\theta}{\Psi(1)} \right) e^{(t+h)\Psi(1)} \right) \\
&= E \left[\sigma_t^\delta \right] \frac{\theta}{-\Psi(1)} + E \left[\sigma_t^\delta \right] \left(E \left[\sigma_0^\delta \right] + \frac{\theta}{\Psi(1)} \right) e^{h\Psi(1)} \\
&\quad - E \left[\sigma_t^\delta \right] \frac{\theta}{-\Psi(1)} + E \left[\sigma_t^\delta \right] \left(E \left[\sigma_0^\delta \right] + \frac{\theta}{\Psi(1)} \right) e^{(t+h)\Psi(1)} \\
&E \left[\sigma_t^\delta \right] E \left[\sigma_0^\delta \right] e^{h\Psi(1)} \\
&\quad - E \left[\sigma_t^\delta \right] \left(\frac{\theta}{-\Psi(1)} + \left(E \left[\sigma_0^\delta \right] + \frac{\theta}{\Psi(1)} \right) e^{t\Psi(1)} \right) e^{h\Psi(1)} \\
&= \left(E \left[\sigma_t^\delta \right] E \left[\sigma_0^\delta \right] - \left(E \left[\sigma_t^\delta \right] \right)^2 \right) e^{h\Psi(1)}.
\end{aligned}$$

Nun kann man die Kovarianz

$$\begin{aligned}
\text{Cov} \left(\sigma_t^\delta, \sigma_{t+h}^\delta \right) &= E \left[\left(\sigma_t^\delta - E \left[\sigma_t^\delta \right] \right) \left(\sigma_{t+h}^\delta - E \left[\sigma_{t+h}^\delta \right] \right) \right] \\
&= E \left[\sigma_t^\delta \sigma_{t+h}^\delta \right] - E \left[\sigma_t^\delta \right] E \left[\sigma_{t+h}^\delta \right] \\
&= \left(E \left[\sigma_t^{2\delta} \right] - E \left[\sigma_t^\delta \right] E \left[\sigma_0^\delta \right] \right) e^{h\Psi(1)} + E \left[\sigma_t^\delta \right] E \left[\sigma_h^\delta \right] - E \left[\sigma_t^\delta \right] E \left[\sigma_{t+h}^\delta \right] \\
&= \left(E \left[\sigma_t^{2\delta} \right] - E \left[\sigma_t^\delta \right] E \left[\sigma_0^\delta \right] \right) e^{h\Psi(1)} \\
&\quad + \left(E \left[\sigma_t^\delta \right] E \left[\sigma_0^\delta \right] - \left(E \left[\sigma_t^\delta \right] \right)^2 \right) e^{h\Psi(1)} \\
&= \left(E \left[\sigma_t^{2\delta} \right] - \left(E \left[\sigma_t^\delta \right] \right)^2 \right) e^{h\Psi(1)}
\end{aligned}$$

berechnen. □

Die folgende Proposition nach [19, Proposition 4.2] gilt für die stationäre Version des Volatilitätsprozesses.

Proposition 4.10. *Sei $\alpha > 0$. Für das k -te Moment von σ_∞^δ gilt $E \left[\sigma_\infty^{\delta k} \right] < \infty$ genau dann, wenn $E \left[|L_1|^{\delta k} \right] < \infty$ und $\Psi(k) < 0$, $k \in \mathbb{N}$. In diesem Fall gilt*

$$E \left[\sigma_\infty^{\delta k} \right] = k! \theta^k \prod_{l=1}^k \frac{1}{-\Psi(l)}. \tag{4.29}$$

Beweis. Verwendet man den Satz von Fubini, die Unabhängigkeits- und die Stationaritätseigenschaft der Inkremente von $(X_t)_{t \geq 0}$, so erhält man mit (4.20) für $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
& E \left[\sigma_\infty^{\delta k} \right] \\
&= \theta^k E \left[\left(\int_0^\infty e^{-X_t} dt \right)^k \right] \\
&= \theta^k E \left[\int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-X_{t_1}} \dots e^{-X_{t_k}} dt_k \dots dt_1 \right] \\
&= k! \theta^k E \left[\int_0^\infty \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{k-1}} e^{-X_{t_1}} \dots e^{-X_{t_k}} dt_k \dots dt_1 \right] \\
&= k! \theta^k E \left[\int_0^\infty \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{k-1}} e^{-(X_{t_1}-X_{t_2})} e^{-2(X_{t_2}-X_{t_3})} \dots e^{-(k-1)(X_{t_{k-1}}-X_{t_k})} e^{-kX_{t_k}} dt_k \dots dt_1 \right] \\
&= k! \theta^k \int_0^\infty \dots \int_0^{t_{k-1}} E \left[e^{-(X_{t_1}-X_{t_2})} \right] \dots E \left[e^{-(k-1)(X_{t_{k-1}}-X_{t_k})} \right] E \left[e^{-kX_{t_k}} \right] dt_k \dots dt_1 \\
&= k! \theta^k \int_0^\infty \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{k-1}} e^{(t_1-t_2)\Psi(1)} e^{(t_2-t_3)\Psi(2)} \dots e^{(t_{k-1}-t_k)\Psi(k-1)} e^{t_k\Psi(k)} dt_k \dots dt_1 \\
&= k! \theta^k \int_0^\infty \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{k-1}} e^{t_1\Psi(1)} e^{t_2(\Psi(2)-\Psi(1))} \dots e^{t_k(\Psi(k)-\Psi(k-1))} dt_k \dots dt_1 \\
&= k! \theta^k \prod_{l=1}^k \frac{1}{-\Psi(l)},
\end{aligned}$$

vorausgesetzt, dass $\Psi(1), \dots, \Psi(k)$ definiert und negativ sind. Die letzte Gleichheit erhält man durch Induktion. Für $k = 1$ ist die Behauptung

$$\int_0^\infty e^{t_1\Psi(1)} dt_1 = \frac{1}{-\Psi(1)}$$

erfüllt. Nun nimmt man an, dass für k

$$\int_0^\infty \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{k-1}} e^{t_1\Psi(1)} e^{t_2(\Psi(2)-\Psi(1))} \dots e^{t_k(\Psi(k)-\Psi(k-1))} dt_k \dots dt_1 = \prod_{l=1}^k \frac{1}{-\Psi(l)}$$

gilt. Dann folgt für den Induktionsschritt

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{k-1}} \int_0^{t_k} e^{t_1\Psi(1)} e^{t_2(\Psi(2)-\Psi(1))} \dots e^{t_k(\Psi(k)-\Psi(k-1))} e^{t_{k+1}(\Psi(k+1)-\Psi(k))} dt_{k+1} dt_k \dots dt_1 \\
&= \int_0^\infty \dots \int_0^{t_{k-1}} \left[e^{t_1\Psi(1)} e^{t_2(\Psi(2)-\Psi(1))} \dots e^{t_{k+1}(\Psi(k+1)-\Psi(k))} \frac{1}{\Psi(k+1) - \Psi(k)} \right]_0^{t_k} dt_k \dots dt_1 \\
&= \frac{1}{\Psi(k+1) - \Psi(k)} \left(\int_0^\infty \dots \int_0^{t_{k-1}} e^{t_1\Psi(1)} \dots e^{t_k(\Psi(k+1)-\Psi(k-1))} dt_k \dots dt_1 \right. \\
&\quad \left. - \int_0^\infty \dots \int_0^{t_{k-1}} e^{t_1\Psi(1)} \dots e^{t_k(\Psi(k)-\Psi(k-1))} dt_k \dots dt_1 \right) \\
&= \frac{1}{\Psi(k+1) - \Psi(k)} \left(\frac{1}{-\Psi(k+1)} \prod_{l=1}^{k-1} \frac{1}{-\Psi(l)} - \prod_{l=1}^k \frac{1}{-\Psi(l)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-\Psi(k) + \Psi(k+1)}{\Psi(k+1) - \Psi(k)} \prod_{l=1}^{k+1} \frac{1}{-\Psi(l)} \\
 &= \prod_{l=1}^{k+1} \frac{1}{-\Psi(l)}.
 \end{aligned}$$

Falls $j \in \{1, \dots, k\}$ der erste Index ist für den $\Psi(j) \geq 0$ oder $E[e^{-jX_1}] = \infty$ gilt, dann erhält man aus der obigen Berechnung, dass $E[\sigma_\infty^{\delta j}] = \infty$ gilt. Da aus $E[\sigma_\infty^{\delta k}] < \infty$ folgt, dass $E[\sigma_\infty^{\delta j}] < \infty$ für $j < k$ gilt, erhält man aus Lemma 4.8, dass $E[\sigma_\infty^{\delta k}] < \infty$ genau dann erfüllt ist, wenn $\Psi(k)$ definiert ist, d.h. $E[|L_1|^{\delta k}] < \infty$, und negativ ist. \square

Daraus ergibt sich der Erwartungswert und das zweite Moment für σ_∞^δ . Außerdem kann nun die Autokovarianzfunktion des stationären Prozesses $(\sigma_t^\delta)_{t \geq 0}$ wie in [19, Korollar 4.1] angegeben werden.

Korollar 4.11. Falls $(\sigma_t^\delta)_{t \geq 0}$ der stationäre Prozess mit $\sigma_0^\delta \stackrel{D}{=} \sigma_\infty^\delta$ ist, dann gilt

$$E[\sigma_\infty^\delta] = \frac{\theta}{-\Psi(1)}, \quad (4.30)$$

$$E[\sigma_\infty^{2\delta}] = \frac{2\theta^2}{\Psi(1)\Psi(2)}, \quad (4.31)$$

$$\text{Cov}(\sigma_t^\delta, \sigma_{t+h}^\delta) = \theta^2 \left(\frac{2}{\Psi(1)\Psi(2)} - \frac{1}{\Psi^2(1)} \right) e^{h\Psi(1)}, \quad t, h \geq 0, \quad (4.32)$$

vorausgesetzt, dass $E[|L_1|^{\delta k}] < \infty$ und $\Psi(k) < 0$, mit $k = 1$ für (4.30) und $k = 2$ für (4.31), (4.32).

Beweis. (4.30) und (4.31) folgen direkt aus der Berechnung von (4.29) für $\alpha > 0$. (4.32) folgt durch das Einsetzen von (4.30) und (4.31) in (4.26). \square

Das Ziel ist, die Funktion Ψ in Abhängigkeit des treibenden Lévyprozesses $(L_t)_{t \geq 0}$ darzustellen. Für die Existenz von Momenten von σ_∞^δ erhält man nach [19, Theorem 4.1] folgende Bedingungen.

Satz 4.12. Sei $k \in \mathbb{N}$, $0 < \beta < 1$, $\alpha \geq 0$. Dann existiert die Grenzvariable σ_∞^δ und hat endliches k -tes Moment, d.h. $E[\sigma_\infty^{\delta k}] < \infty$, genau dann, wenn

$$\left(\frac{1}{k}\right) \int_{\mathbb{R}} \left(\left(1 + \frac{\alpha}{\beta} h(y)\right)^k - 1 \right) \nu_L(dy) < -\log \beta. \quad (4.33)$$

Beweis. Mit Lemma 4.8 erhält man, dass $E[|L_1|^{\delta k}] < \infty$ und $\Psi(k) < 0$ die Bedingungen $E[|L_1|^\delta] < \infty$ und $\Psi(1) < 0$ implizieren. Dadurch ist (4.23) in Lemma 4.8 (c) erfüllt und die Grenzvariable σ_∞^δ existiert. Laut Proposition 4.10 gilt $E[\sigma_\infty^{\delta k}] < \infty$ genau dann, wenn die beiden Bedingungen $E[|L_1|^{\delta k}] < \infty$ und $\Psi(k) < 0$ erfüllt sind. Mit Lemma 4.8 (a) folgt aus $E[|L_1|^{\delta k}] < \infty$, dass $\Psi(k)$ definiert ist und somit erhält man mit (4.22) und der Bedingung $\Psi(k) < 0$

$$\Psi(k) = k \log \beta + \int_{\mathbb{R}} \left(\left(1 + \frac{\alpha}{\beta} h(y)\right)^k - 1 \right) \nu_L(dy) < 0.$$

Dies ist jedoch nichts anderes als (4.33). \square

Man stellt fest, dass das zeitstetige APARCH-Modell, wie bereits das zeitdiskrete Modell, heavy-tailed ist. Dies folgt daraus, dass der Volatilitätsprozess niemals alle Momente besitzt.

Proposition 4.13. *Sei $k \in \mathbb{N}$, $0 < \beta < 1$, $\alpha \geq 0$. Dann gilt*

- (i) *Für jeden Lévyprozess $(L_t)_{t \geq 0}$ mit Lévymaß ungleich Null, so dass $\int_{\mathbb{R}} \log(1+h(y))\nu_L(dy) < \infty$, existieren Parameter $\beta, \alpha \in (0, 1)$, für die σ_{∞}^{δ} existiert, aber $E[\sigma_{\infty}^{\delta}] = \infty$.*
- (ii) *Für jeden Lévyprozess $(L_t)_{t \geq 0}$ mit $E[|L_1|^{\delta k}] < \infty$ und jedes $\beta \in (0, 1)$ existiert ein $\alpha_{\beta} > 0$, so dass die Grenzvariable σ_{∞}^{δ} existiert mit $E[\sigma_{\infty}^{\delta k}] < \infty$ für jedes Parameterpaar (β, α) , so dass $0 \leq \alpha \leq \alpha_{\beta}$ gilt.*
- (iii) *Sei $k \in \mathbb{N}$, $0 < \beta < 1$, $\alpha > 0$. Dann gibt es keinen Lévyprozess $(L_t)_{t \geq 0}$ mit Lévymaß ungleich Null, für den alle Momente von σ_{∞}^{δ} existieren. Insbesondere existiert die Laplace-Transformierte von σ_{∞}^{δ} nicht für negative Argumente.*

Beweis. (i) Man definiert die beiden Parameter $\beta_0 := \exp(-\int_{\mathbb{R}} \log(1+h(y))\nu_L(dy))$ und $\beta_1 := \exp(-\int_{\mathbb{R}} h(y)\nu_L(dy))$. Dann gilt $0 \leq \beta_1 < \beta_0 < 1$ und für jedes $\alpha = \beta \in (\beta_1, \beta_0)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \log\left(1 + \frac{\beta}{\beta} h(y)\right) \nu_L(dy) = \int_{\mathbb{R}} \log(1+h(y)) \nu_L(dy) = -\log \beta_0 < -\log \beta,$$

wodurch (4.23) erfüllt ist, d.h. σ_{∞}^{δ} existiert. Jedoch ist (4.33) nicht erfüllt, da

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\left(1 + \frac{\beta}{\beta} h(y)\right) - 1 \right) \nu_L(dy) = \int_{\mathbb{R}} h(y) \nu_L(dy) = -\log \beta_1 > -\log \beta.$$

Somit gilt $E[\sigma_{\infty}^{\delta}] = \infty$.

- (ii) Sei $\beta \in (0, 1)$ fest. Da $E[|L_1|^{\delta k}] < \infty$ gilt, ist $(\frac{1}{k}) \int_{\mathbb{R}} \left(\left(1 + \frac{\alpha}{\beta} h(y)\right)^k - 1 \right) \nu_L(dy) < \infty$ für jedes $\alpha > 0$ und die linke Seite von (4.33) konvergiert gegen 0, falls $\alpha \rightarrow 0$. Damit die Bedingung (4.33) erfüllt ist und somit die Grenzvariable σ_{∞}^{δ} existiert mit $E[\sigma_{\infty}^{\delta k}] < \infty$, muss man α_{β} nur klein genug wählen.

- (iii) Sei $\zeta > 0$, so dass $q := \nu_L(\{y: |y| \geq \zeta\}) > 0$ gilt. Dann folgt für $k \in \mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\left(1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) h(y)\right)^k - 1 \right) \nu_L(dy) \geq q \left(\left(1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) h(\zeta)\right)^k - 1 \right).$$

Wenn alle Momente von σ_{∞}^{δ} existieren würden, würde für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\left(1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) h(\zeta)\right)^k - 1 < k \left(\frac{-\log \beta}{q}\right)$$

gelten. Dies ist jedoch ein Widerspruch und so hat man gezeigt, dass es keinen Lévyprozess $(L_t)_{t \geq 0}$ mit Lévymaß ungleich Null gibt, für den alle Momente von σ_{∞}^{δ} existieren. \square

4.2.3 Momente des zeitstetigen APARCH

In diesem Abschnitt sollen die Momente für den zeitstetigen APARCH angegeben werden. Jedoch ist nicht bekannt, wie die Momente für beliebiges $\delta > 0$ berechnet werden können. Um die quadratische Variation bei der stochastischen Integration anwenden zu können, beschränkt man sich in diesem Abschnitt auf Modelle mit $\delta = 2$. Für diesen Fall sollen nun die Momente berechnet werden.

Man hat den integrierten APARCH Prozess definiert, so dass er $dG_t = \sigma_t dL_t$ für $t > 0$ erfüllt. Das bedeutet, dass die beiden Prozesse G und L zu denselben Zeitpunkten springen und G die Sprunghöhe $\Delta G_t = \sigma_t \Delta L_t$ besitzt. Aus der Definition des integrierten APARCH-Prozesses folgt, dass für jeden festen Zeitpunkt t alle Momente von ΔG_t Null sind. Es ist jedoch sinnvoll Momente für die Zuwächse von G auf beliebigen Zeitintervallen zu betrachten. Die Zuwächse von G bezeichnet man mit $G_t^{(r)}$ und definiert

$$G_t^{(r)} := G_{t+r} - G_t = \int_{t+}^{t+r} \sigma_s ds, \quad t \geq 0.$$

Dann kann man für die Momente folgende Aussage treffen.

Satz 4.14. *Sei $(L_t)_{t \geq 0}$ ein quadratisch reiner Sprungprozess, d.h. $\tau_L^2 = 0$ in (2.6), mit $E[L_1^2] < \infty$ und $E[L_1] = 0$. Für den Laplace-Exponenten aus (4.22) gelte $\Psi(1) < 0$. Desweiteren sei $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$ der Volatilitätsprozess aus (4.15) mit $\sigma_\infty^2 \stackrel{D}{=} \sigma_0^2$. Dann gilt für jedes $t \geq 0$ und $h \geq r > 0$,*

$$E[G_t^{(r)}] = 0, \quad (4.34)$$

$$E\left[\left(G_t^{(r)}\right)^2\right] = \frac{\theta r}{-\Psi(1)} E[L_1^2], \quad (4.35)$$

$$\text{Cov}\left(G_t^{(r)}, G_{t+h}^{(r)}\right) = 0. \quad (4.36)$$

Sei ferner $E[L_1^4] < \infty$ und $\Psi(2) < 0$. Dann gilt

$$\text{Cov}\left(\left(G_t^{(r)}\right)^2, \left(G_{t+h}^{(r)}\right)^2\right) = \left(\frac{e^{-r\Psi(1)} - 1}{-\Psi(1)}\right) E[L_1^2] \text{Cov}(G_r^2, \sigma_r^2) e^{h\Psi(1)}. \quad (4.37)$$

Dabei ist

$$\text{Cov}(G_t^2, \sigma_t^2) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \text{Var}(\sigma_0^2) \left(1 - e^{t\Psi(1)} - \log \beta \left(\frac{1 - e^{t\Psi(1)}}{-\Psi(1)}\right)\right). \quad (4.38)$$

Für den COGARCH(1,1)-Prozess und den GJR GARCH(1,1)-Prozess ist die rechte Seite von (4.37) strikt positiv, falls $\alpha > 0$, $E[|L_1|^8] < \infty$, $\Psi(4) < 0$, $\int_{[-1,1]} |x| \nu_L(dx) < 0$ und $\int_{\mathbb{R}} x^3 \nu_L(dx) = 0$.

Beweis. Der Lévyprozess $(L_t)_{t \geq 0}$ ist ein quadratisch integrierbares Martingal, da $E[L_1] = 0$ und $E[L_t^2] = \text{Var}(L_t) = t \text{Var}(L_1) = t E[L_1^2] < \infty$ für $t \geq 0$ gelten. Da $(L_t)_{t \geq 0}$ außerdem ein quadratisch reiner Sprungprozess ist, ist sein quadratischer Variationsprozess nach Definition 2.27 gegeben durch

$$[L]_t = \sum_{0 < s \leq t} (\Delta L_s)^2, \quad t \geq 0. \quad (4.39)$$

Nach Satz 4.7 ist der Volatilitätsprozess $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$ strikt stationär und $(G_t)_{t \geq 0}$ besitzt stationäre Inkremente, d.h. die Zuwächse $(G_t^{(r)})_{t \geq 0}$ sind strikt stationär. Durch die strikte Stationarität von $(G_t^{(r)})_{t \geq 0}$ und die Martingaleigenschaft von $(L_t)_{t \geq 0}$ erhält man

$$E [G_t^{(r)}] = E [G_0^{(r)}] = E [G_r] = E \left[\int_0^r \sigma_s dL_s \right] = E [L_1] \int_0^r E [\sigma_s] ds = 0,$$

was (4.34) zeigt. Mit partieller Integration und der Itô-Isometrie erhält man

$$E [G_r^2] = E \left[2 \int_0^r G_{s-} \sigma_s dL_s \right] + E [[G]_r] = E \left[\int_0^r \sigma_s^2 d[L]_s \right] = E \left[\sum_{0 < s \leq r} \sigma_s^2 (\Delta L_s)^2 \right].$$

Nun kann die Kompensationsformel aus [2, S. 7] angewendet werden und mit der Gleichung $\int_{\mathbb{R}} x^2 \nu_L(dx) = \text{Var}(L_1) = E [L_1^2]$ und der strikten Stationarität der $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$ ergibt sich mit (4.30)

$$\begin{aligned} E [G_r^2] &= E \left[\sum_{0 < s \leq r} \sigma_s^2 (\Delta L_s)^2 \right] = E \left[\int_0^r \int_{\mathbb{R}} \sigma_s^2 x^2 \nu_L(dx) ds \right] \\ &= E \left[\int_0^r \sigma_s^2 ds \int_{\mathbb{R}} x^2 \nu_L(dx) \right] \\ &= \text{Var}(L_1) E \left[\int_0^r \sigma_s^2 ds \right] \\ &= E [L_1^2] \int_0^r E [\sigma_s^2] ds \\ &= E [L_1^2] E [\sigma_\infty^2] r \\ &= \frac{\theta r}{-\Psi(1)} E [L_1^2]. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass G_r quadratisch integrierbar ist und durch die strikte Stationarität von $(G_t^{(r)})_{t \geq 0}$ folgt die Aussage (4.35), da

$$E \left[(G_t^{(r)})^2 \right] = E \left[(G_0^{(r)})^2 \right] = E \left[(G_r - G_0)^2 \right] = E [G_r^2]$$

gilt. Aus der Itô-Isometrie für quadratisch integrierbare Martingale als Integrator (siehe [31, Abschnitt IV.27]) folgt, dass

$$E \left[G_t^{(r)} G_{t+h}^{(r)} \right] = E \left[\int_0^{t+h+r} \sigma_s^2 \mathbf{1}_{(t,t+r]}(s) \mathbf{1}_{(t+h,t+h+r]}(s) d[L]_s \right] = 0$$

für $h \geq r$ gilt. Damit kann man (4.36) folgern, da

$$\text{Cov} \left(G_t^{(r)}, G_{t+h}^{(r)} \right) = E \left[G_t^{(r)} G_{t+h}^{(r)} \right] - E \left[G_t^{(r)} \right] E \left[G_{t+h}^{(r)} \right]$$

gilt.

Für den Beweis von Gleichung (4.37) nimmt man zusätzlich $E[L_1^4] < \infty$ und $\Psi(2) < 0$ an. Mit E_r sei die bedingte Erwartung gegeben \mathcal{F}_r bezeichnet, wobei \mathcal{F}_r die durch $(\sigma_s^2)_{0 \leq s \leq r}$ generierte Filtration ist. Partielle Integration und die Kompensationsformel führen zu

$$\begin{aligned}
E_r \left[\left(G_h^{(r)} \right)^2 \right] &= E_r \left[2 \int_{h+}^{h+r} G_s - dG_s + [G]_{h+r} - [G]_h \right] \\
&= E_r \left[2 \int_{h+}^{h+r} G_s - \sigma_s dL_s \right] + E_r \left[\int_h^{h+r} \sigma_s^2 d[L]_s \right] \\
&= 0 + E_r \left[\sum_{h < s \leq h+r} \sigma_s^2 (\Delta L_s)^2 \right] \\
&= E_r \left[\int_h^{h+r} (\sigma_s^2) ds \int_{\mathbb{R}} x^2 \nu_L(dx) \right] \\
&= E[L_1^2] \int_h^{h+r} E_r[\sigma_r^2] ds \\
&\stackrel{(4.27)}{=} E[L_1^2] \int_h^{h+r} \left[(\sigma_r^2 - E[\sigma_0^2]) e^{(s-r)\Psi(1)} + E[\sigma_{s-r}^2] \right] ds \tag{4.40}
\end{aligned}$$

$$= (\sigma_r^2 - E[\sigma_0^2]) E[L_1^2] \int_0^r e^{-s\Psi(1)} ds e^{h\Psi(1)} + E[\sigma_0^2] E[L_1^2] r. \tag{4.41}$$

Außerdem berechnet man

$$\begin{aligned}
E \left[\left(G_0^{(r)} \right)^2 \left(G_h^{(r)} \right)^2 \right] &= E \left[E_r \left[(G_r - G_0)^2 \left(G_h^{(r)} \right)^2 \right] \right] \\
&= E \left[G_r^2 E_r \left[\left(G_h^{(r)} \right)^2 \right] \right] \\
&\stackrel{(4.41)}{=} E \left[G_r^2 (\sigma_r^2 - E[\sigma_0^2]) E[L_1^2] \int_0^r e^{-s\Psi(1)} ds e^{h\Psi(1)} + G_r^2 E[\sigma_0^2] E[L_1^2] r \right] \\
&= E[G_r^2 \sigma_r^2 - G_r^2 E[\sigma_0^2]] E[L_1^2] e^{h\Psi(1)} \left(\frac{e^{-r\Psi(1)} - 1}{-\Psi(1)} \right) \\
&\quad + E[G_r^2] E[\sigma_0^2] E[L_1^2] r. \tag{4.42}
\end{aligned}$$

Somit lässt sich nun die Kovarianz

$$\begin{aligned}
\text{Cov} \left(G_r^2, \left(G_h^{(r)} \right)^2 \right) &= E \left[G_r^2 \left(G_h^{(r)} \right)^2 \right] - E[G_r^2] E \left[\left(G_h^{(r)} \right)^2 \right] \\
&\stackrel{(4.42)}{=} E[G_r^2 \sigma_r^2 - G_r^2 E[\sigma_0^2]] E[L_1^2] e^{h\Psi(1)} \left(\frac{e^{-r\Psi(1)} - 1}{-\Psi(1)} \right) \\
&\quad + E[G_r^2] E[\sigma_0^2] E[L_1^2] r - E[G_r^2] E \left[\left(G_h^{(r)} \right)^2 \right] \\
&\stackrel{(4.30)}{=} \left(\frac{e^{-r\Psi(1)} - 1}{-\Psi(1)} \right) E[L_1^2] \text{Cov} \left(G_r^2, \sigma_r^2 \right) e^{h\Psi(1)} \\
&\quad + E[G_r^2] \left(\frac{\theta r}{-\Psi(1)} E[L_1^2] - E \left[\left(G_h^{(r)} \right)^2 \right] \right)
\end{aligned}$$

berechnen. Durch die Gleichung (4.35) und die strikte Stationarität von $(G_t^{(r)})_{t \geq 0}$ erhält man nun (4.37).

Um zu zeigen, dass die rechte Seite der Gleichung (4.37) strikt positiv ist, wird zusätzlich angenommen, dass $E[L_1^8] < \infty$, $\Psi(4) < 0$, $\int_{[-1,1]} |x| \nu_L(dx) < \infty$ und $\int_{\mathbb{R}} x^3 \nu_L(dx) = 0$ gelten. Nun will man zeigen, dass $\text{Cov}(G_t^2, \sigma_t^2) = E[G_t^2 \sigma_t^2] - E[G_t^2] E[\sigma_t^2] > 0$. Dazu berechnet man zunächst $E[G_t^2 \sigma_t^2]$. Da die beiden Prozesse G und L zu denselben Zeitpunkten springen und $\Delta G_t = \sigma_t \Delta L_t$ gilt, folgt mit partieller Integration und (4.39)

$$G_t^2 = [G]_t + 2 \int_0^t G_{s-} dG_s = \sum_{0 < s \leq t} (\Delta G_s)^2 + 2 \int_0^t G_{s-} dG_s = \sum_{0 < s \leq t} \sigma_s^2 (\Delta L_s)^2 + 2 \int_0^t G_{s-} \sigma_s dL_s.$$

Durch Umstellen erhält man aus dieser Gleichung $\sum_{0 < s \leq t} \sigma_s^2 (\Delta L_s)^2 = G_t^2 - 2 \int_0^t G_{s-} \sigma_s dL_s$, was man in Gleichung (4.15) einsetzt um

$$\frac{\alpha}{\beta} G_t^2 = \sigma_{t+}^2 - \theta t - \log \beta \int_0^t \sigma_s^2 ds - \sigma_0^2 + 2 \frac{\alpha}{\beta} \int_0^t G_{s-} \sigma_s dL_s. \quad (4.43)$$

zu erhalten. Nun multipliziert man (4.43) mit σ_t^2 und betrachtet davon den Erwartungswert

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} E[\sigma_t^2 G_t^2] &= E[\sigma_t^2 \sigma_t^2] - \theta t E[\sigma_t^2] - \log \beta E\left[\sigma_t^2 \int_0^t \sigma_s^2 ds\right] \\ &\quad - E[\sigma_t^2 \sigma_0^2] + 2 \frac{\alpha}{\beta} E\left[\sigma_t^2 \int_0^t G_{s-} \sigma_s dL_s\right] \\ &=: D + F + \log \beta H + J + 2 \frac{\alpha}{\beta} K. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Zunächst betrachtet man den Term K der Gleichung (4.44), diesen kann man mit (4.21) schreiben als

$$\sigma_t^2 \int_0^t G_{s-} \sigma_s dL_s = \int_{0+}^t G_{s-} \sigma_s (\sigma_s^2 A_{s,t} + B_{s,t}) dL_s. \quad (4.45)$$

Nun setzt man

$$A_{s,t} = e^{X_s - X_t} \quad \text{und} \quad B_{s,t} = \theta \int_s^t e^{X_u - X_t} du$$

aus Gleichung (4.21) in Gleichung (4.45) ein und somit gilt

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 \int_0^t G_{s-} \sigma_s dL_s &= \int_{0+}^t G_{s-} \sigma_s \left(\sigma_s^2 e^{X_s - X_t} + \theta \int_s^t e^{X_u - X_t} du \right) dL_s \\ &= e^{-X_t} \int_{0+}^t G_{s-} \sigma_s^3 e^{X_s} dL_s + \int_{0+}^t G_{s-} \sigma_s \left(\theta \int_s^t e^{X_u - X_t} du \right) dL_s. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Setze $I_t := \int_{0+}^t G_{s-} \sigma_s^3 e^{X_s} dL_s$. Um zu zeigen, dass der erste Term auf der rechten Seite von (4.46) Erwartung 0 hat, reicht es $E[e^{-X_t} I_t]$ zu betrachten, da X_t fast sicher an keinem festen Punkt eine Unstetigkeit besitzt. Mit partieller Integration gilt

$$e^{-X_t} I_t = \int_{0+}^t e^{-X_s} dI_s + \int_{0+}^t I_s d(e^{-X_s}) + C_t, \quad (4.47)$$

wobei $C_t = [e^{-X}, I]_t$ die quadratische Kovariation bezeichnet. Für den ersten Term der rechten Seite von Gleichung (4.47) folgt mit der Definition des Integrals I_t

$$\int_{0+}^t e^{-X_s} dI_s = \int_{0+}^t e^{-X_s} d \int_{0+}^s G_{u-} \sigma_u^3 e^{X_u} dL_u = \int_{0+}^t e^{-X_s} G_{s-} \sigma_s^3 e^{X_s} dL_s = \int_{0+}^t G_{s-} \sigma_s^3 dL_s.$$

Somit erhält man die Erwartung

$$E \left[\int_{0+}^t e^{-X_s} dI_s \right] = E \left[\int_{0+}^t G_{s-} \sigma_s^3 dL_s \right] = E[L_1] \int_{0+}^t E[G_{s-} \sigma_s^3] ds = 0.$$

Man kann zeigen, dass

$$\begin{aligned} e^{t\Psi(1)} d \left(e^{-X_t - t\Psi(1)} - 1 \right) + e^{-X_t} \Psi(1) dt \\ &= e^{t\Psi(1)} \left(d(e^{-X_t}) e^{-t\Psi(1)} - \Psi(1) e^{-X_t} e^{-t\Psi(1)} dt \right) + e^{-X_t} \Psi(1) dt \\ &= d(e^{-X_t}) - \Psi(1) e^{-X_t} dt + e^{-X_t} \Psi(1) dt \\ &= d(e^{-X_t}) \end{aligned}$$

gilt und damit folgt für den zweiten Term der rechten Seite von Gleichung (4.47)

$$\begin{aligned} \int_{0+}^t I_{s-} d(e^{-X_s}) &= \int_{0+}^t I_{s-} \left(e^{s\Psi(1)} d \left(e^{-X_s - s\Psi(1)} - 1 \right) + e^{-X_s} \Psi(1) ds \right) \\ &= \int_{0+}^t I_{s-} e^{s\Psi(1)} d \left(e^{-X_s - s\Psi(1)} - 1 \right) + \Psi(1) \int_{0+}^t I_{s-} e^{-X_s} ds. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Sei $R_t := e^{-X_t - t\Psi(1)} - 1$. Da $(X_t)_{t \geq 0}$ ein Lévyprozess ist und für die Laplace-Transformierte die Gleichung $E[e^{-cX_t}] = e^{t\Psi(1)}$ gilt, lässt sich zeigen, dass R_t für $0 \leq s \leq t$ die Martingaleigenschaft

$$\begin{aligned} E \left[e^{-X_t - t\Psi(1)} - 1 | \mathcal{F}_s \right] &= E \left[e^{-X_t - t\Psi(1)} | \mathcal{F}_s \right] - E[1 | \mathcal{F}_s] \\ &= E \left[e^{-(X_t - X_s) - (t-s)\Psi(1)} e^{-X_s - s\Psi(1)} | \mathcal{F}_s \right] - 1 \\ &= e^{-X_s - s\Psi(1)} e^{-(t-s)\Psi(1)} E \left[e^{-(X_t - X_s)} \right] - 1 \\ &= e^{-X_s - s\Psi(1)} e^{-(t-s)\Psi(1)} E[e^{-X_{t-s}}] - 1 \\ &= e^{-X_s - s\Psi(1)} e^{-(t-s)\Psi(1)} e^{(t-s)\Psi(1)} - 1 \\ &= e^{-X_s - s\Psi(1)} - 1 \end{aligned}$$

erfüllt. Desweiteren gilt mit Lemma 4.8(b)

$$\begin{aligned} E[|R_t|] &= E \left[|e^{-X_t - t\Psi(1)} - 1| \right] \leq E \left[|e^{-X_t - t\Psi(1)}| \right] + 1 \\ &= e^{-t\Psi(1)} E[e^{-X_t}] + 1 = e^{-t\Psi(1)} e^{t\Psi(1)} + 1 \\ &= 2 < \infty \end{aligned}$$

und somit hat man gezeigt, dass R_t ein Martingal mit $E[R_t] = 0$ ist. Betrachtet man nun den Erwartungswert von (4.48), so gilt

$$E \left[\int_{0+}^t I_{s-} d(e^{-X_s}) \right] = E \left[\int_{0+}^t I_{s-} e^{s\Psi(1)} dR_s \right] + \Psi(1) E \left[\int_{0+}^t I_{s-} e^{-X_s} ds \right].$$

In [19] wird aus der Tatsache, dass R_t ein lokal quadratintegrierbares Martingal mit $E[R_t] = 0$ ist, für den Erwartungswert von (4.48)

$$\begin{aligned} E \left[\int_{0+}^t I_{s-} d(e^{-X_s}) \right] &= E \left[\int_{0+}^t I_{s-} e^{s\Psi(1)} dR_s \right] + \Psi(1) E \left[\int_{0+}^t I_{s-} e^{-X_s} ds \right] \\ &= \Psi(1) \int_{0+}^t E [I_{s-} e^{-X_s}] ds \end{aligned}$$

geschlussfolgert. Zuletzt betrachtet man noch die quadratische Kovariation C_t aus Gleichung (4.47). Da L_t ein quadratisch reiner Sprungprozess ist, gilt nach [29, Satz II.23], Gleichung (4.16) und der Definition des Integrals I_t

$$\begin{aligned} \Delta C_t &= (\Delta e^{-X_t}) (\Delta I_t) \\ &= (e^{-X_t} - e^{-X_{t-}}) (I_t - I_{t-}) \\ &= \frac{\alpha}{\beta} e^{-X_{t-}} (\Delta L_t)^2 G_{t-} \sigma_t^3 e^{X_{t-}} (\Delta L_t) \\ &= \frac{\alpha}{\beta} G_{t-} \sigma_t^3 (\Delta L_t)^3. \end{aligned}$$

Sei $M_t := \sum_{0 \leq s \leq t} (\Delta L_s)^3$, dann folgt mit [29, Satz II.28]

$$C_t = \sum_{0 \leq s \leq t} (\Delta e^{-X_s}) (\Delta I_s) = \frac{\alpha}{\beta} \sum_{0 \leq s \leq t} G_{s-} \sigma_s^3 (\Delta L_s)^3 = \frac{\alpha}{\beta} \int_{0+}^t G_{s-} \sigma_s^3 dM_s.$$

Mithilfe der Kompensationsformel und der Annahme $\int_{\mathbb{R}} x^3 \nu_L(dx) = 0$ kann man zeigen, dass

$$E[M_t] = E \left[\sum_{0 \leq s \leq t} (\Delta L_s)^3 \right] = E \left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}} x^3 \nu_L(dx) ds \right] = 0. \quad (4.49)$$

Aufgrund der Unabhängigkeit der Inkremente von L und (4.49) lässt sich zeigen, dass M_t für $0 \leq r \leq t$ die Martingaleigenschaft

$$E[M_t | \mathcal{F}_r] = E[M_t - M_r + M_r | \mathcal{F}_r] = E[M_t - M_r + M_r | \mathcal{F}_r] = E \left[\sum_{r < s \leq t} (\Delta L_s)^3 \right] + M_r = M_r$$

erfüllt. Weiter gilt

$$E[|M_t|] = E \left[\left| \sum_{0 \leq s \leq t} (\Delta L_s)^3 \right| \right] \leq E \left[\sum_{0 \leq s \leq t} |(\Delta L_s)^3| \right] < \infty,$$

da aufgrund der Annahme $\int_{[-1,1]} |x| \nu_L(dx) < \infty$ der Lévyprozess $(L_t)_{t \geq 0}$ nach [32, Satz 21.9] von beschränkter Variation ist. Dadurch hat man gezeigt, dass M_t ein Martingal mit $E[M_t] = 0$ ist. Da M_t einen Lévyprozess darstellt erhält man

$$E[C_t] = \frac{\alpha}{\beta} E \left[\int_{0+}^t G_{s-} \sigma_s^3 dM_s \right] = \frac{\alpha}{\beta} E[M_1] \int_{0+}^t E[G_{s-} \sigma_s^3] ds = 0.$$

Zusammengefasst ergibt sich somit für die Erwartung der Gleichung (4.47)

$$E[e^{-X_t} I_t] = \Psi(1) \int_0^t E[e^{-X_s} I_s] ds,$$

dies impliziert jedoch $E[e^{-X_t} I_t] = 0$.

Den zweiten Term auf der rechten Seite von Gleichung (4.46) kann man schreiben als

$$\begin{aligned} & \int_{0+}^t G_{s-} \sigma_s \left(\theta \int_s^t e^{X_u - X_{t-}} du \right) dL_s \\ &= \theta \left(\int_0^t e^{X_u - X_{t-}} du \right) \left(\int_{0+}^t G_{s-} \sigma_s dL_s \right) - \theta \int_{0+}^t G_{s-} \sigma_s \left(\int_{0+}^s e^{X_u - X_{t-}} du \right) dL_s. \end{aligned}$$

Wendet man nun partielle Integration an, so erhält man

$$\begin{aligned} & \theta \left(\int_0^t e^{X_u - X_{t-}} du \right) \left(\int_{0+}^t G_{s-} \sigma_s dL_s \right) - \theta \int_{0+}^t G_{s-} \sigma_s \left(\int_{0+}^s e^{X_u - X_{t-}} du \right) dL_s \\ &= \theta \int_0^t \left(\int_{0+}^s G_{u-} \sigma_u dL_u \right) e^{X_s - X_{t-}} ds + \theta \tilde{C}_t, \end{aligned} \quad (4.50)$$

wobei \tilde{C}_t die quadratische Kovariation von $\int_0^t e^{X_u - X_{t-}} du$ und $\int_{0+}^t G_{s-} \sigma_s dL_s$ bezeichnet. Nach [29, Satz II.23] und Gleichung (4.16) gilt

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{C}_t &= \left(\Delta(e^{-X_t} \int_0^t e^{X_u} du) \right) (G_{t-} \sigma_t \Delta L_t) \\ &= \frac{\alpha}{\beta} e^{-X_{t-}} (\Delta L_t)^2 \left(\int_0^t e^{X_u} du \right) G_{t-} \sigma_t \Delta L_t \\ &= \frac{\alpha}{\beta} e^{-X_{t-}} \left(\int_0^t e^{X_u} du \right) G_{t-} \sigma_t (\Delta L_t)^3. \end{aligned}$$

Mit [29, Satz II.28] folgt

$$\begin{aligned} \tilde{C}_t &= \sum_{0 \leq s \leq t} \left(\Delta(e^{-X_s} \int_0^s e^{X_u} du) \right) (G_{s-} \sigma_s \Delta L_s) \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \sum_{0 \leq s \leq t} e^{-X_{s-}} \left(\int_0^s e^{X_u} du \right) G_{s-} \sigma_s (\Delta L_s)^3 \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \int_{0+}^t e^{-X_{s-}} \left(\int_0^s e^{X_u} du \right) G_{s-} \sigma_s dM_s. \end{aligned}$$

Damit erhält man für die Erwartung von \tilde{C}_t

$$\begin{aligned} E[\tilde{C}_t] &= \frac{\alpha}{\beta} E \left[\int_{0+}^t e^{-X_{s-}} \left(\int_0^s e^{X_u} du \right) G_{s-} \sigma_s dM_s \right] \\ &= \frac{\alpha}{\beta} E[M_1] \int_{0+}^t E \left[e^{-X_{s-}} \left(\int_0^s e^{X_u} du \right) G_{s-} \sigma_s \right] ds \\ &= 0. \end{aligned}$$

Somit besitzt die Gleichung (4.50) die Erwartung 0. Aus diesen Berechnungen ergibt sich, dass für den Term K aus (4.44) $K = 0$ folgt.

Um Term H aus (4.44) zu berechnen, verwendet man (4.28) und die strikte Stationarität von $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$, d.h. $E[\sigma_t^2] = E[\sigma_0^2]$ um

$$E[\sigma_t^2 \sigma_s^2] = (E[\sigma_s^4] - E[\sigma_s^2] E[\sigma_0^2]) e^{(t-s)\Psi(1)} + E[\sigma_s^2] E[\sigma_{t-s}^2]$$

$$\begin{aligned}
&= (E[\sigma_0^4] - E[\sigma_0^2] E[\sigma_0^2]) e^{(t-s)\Psi(1)} + E[\sigma_0^2] E[\sigma_0^2] \\
&= \text{Var}(\sigma_0^2) e^{(t-s)\Psi(1)} + (E[\sigma_0^2])^2
\end{aligned} \tag{4.51}$$

zu zeigen. Setzt man $s = 0$ in (4.51), so gilt $E[\sigma_t^2 \sigma_0^2] = \text{Var}(\sigma_0^2) e^{t\Psi(1)} + (E[\sigma_0^2])^2$, wodurch man zusammen mit (4.44) und der strikten Stationarität von $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\beta} E[G_t^2 \sigma_t^2] &= E[(\sigma_0^2)^2] - \theta t E[\sigma_0^2] - \log \beta \int_0^t (\text{Var}(\sigma_0^2) e^{(t-s)\Psi(1)} + (E[\sigma_0^2])^2) ds - E[\sigma_t^2 \sigma_0^2] \\
&= E[(\sigma_0^2)^2] - \theta t E[\sigma_0^2] - \log \beta \text{Var}(\sigma_0^2) e^{t\Psi(1)} \int_0^t e^{-s\Psi(1)} ds \\
&\quad - (E[\sigma_0^2])^2 \log \beta \int_0^t 1 ds - \text{Var}(\sigma_0^2) e^{t\Psi(1)} - (E[\sigma_0^2])^2 \\
&= E[(\sigma_0^2)^2] - (E[\sigma_0^2])^2 - \text{Var}(\sigma_0^2) e^{t\Psi(1)} - \theta t E[\sigma_0^2] \\
&\quad - \log \beta \text{Var}(\sigma_0^2) \left(\frac{1 - e^{t\Psi(1)}}{-\Psi(1)} \right) - t \log \beta (E[\sigma_0^2])^2 \\
&= \text{Var}(\sigma_0^2) (1 - e^{t\Psi(1)}) - \theta t E[\sigma_0^2] - \log \beta \text{Var}(\sigma_0^2) \left(\frac{1 - e^{t\Psi(1)}}{-\Psi(1)} \right) - t \log \beta (E[\sigma_0^2])^2
\end{aligned}$$

folgt. Durch die Bedingung $\int_{\mathbb{R}} x^3 \nu_L(dx) = 0$ betrachtet man nur symmetrische Verteilungen der Sprungverteilung des zugrundeliegenden Lévyprozesses und somit gilt $\int_{\mathbb{R}} |y| y \nu_L(dy) = 0$. Für den zeitstetigen GJR GARCH(1,1)-Prozess mit $h(y) = (|y| - \gamma y)^2$ gilt mithilfe von (4.22)

$$\begin{aligned}
\Psi(1) &= \log \beta + \int_{\mathbb{R}} \left(\left(1 + \frac{\alpha}{\beta} h(y) \right) - 1 \right) \nu_L(dy) \\
&= \log \beta + \frac{\alpha}{\beta} \int_{\mathbb{R}} (|y| - \gamma y)^2 \nu_L(dy) \\
&= \log \beta + \frac{\alpha}{\beta} \int_{\mathbb{R}} (|y|^2 - 2\gamma |y|y + \gamma^2 y^2) \nu_L(dy) \\
&= \log \beta + \frac{\alpha}{\beta} \left((1 + \gamma^2) \int_{\mathbb{R}} y^2 \nu_L(dy) - 2\gamma \int_{\mathbb{R}} |y|y \nu_L(dy) \right) \\
&= \log \beta + \frac{\alpha}{\beta} (1 + \gamma^2) E[L_1^2].
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Zusammen mit (4.52), (4.35) und (4.30) folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\beta} E[G_t^2] E[\sigma_t^2] &= \frac{\alpha}{\beta} E[(G_0^{(t)})^2] E[\sigma_t^2] \\
&= \frac{\alpha}{\beta} \frac{\theta t}{-\Psi(1)} E[L_1^2] E[\sigma_0^2] \\
&= \frac{(\Psi(1) - \log \beta) \theta t E[\sigma_0^2]}{-\Psi(1)(1 + \gamma^2)} \\
&= -\frac{\theta t E[\sigma_0^2]}{1 + \gamma^2} - \frac{\theta t \log \beta E[\sigma_0^2]}{-\Psi(1)(1 + \gamma^2)} \\
&= -\frac{\theta t E[\sigma_0^2]}{1 + \gamma^2} - \frac{t \log \beta (E[\sigma_0^2])^2}{1 + \gamma^2}.
\end{aligned}$$

Dadurch gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{\alpha}{\beta} \text{Cov}(G_t^2, \sigma_t^2) &= \frac{\alpha}{\beta} E[G_t^2 \sigma_t^2] - \frac{\alpha}{\beta} E[G_t^2] E[\sigma_t^2] \\
 &= \text{Var}(\sigma_0^2) \left(1 - e^{t\Psi(1)}\right) - \theta t E[\sigma_0^2] - \log \beta \text{Var}(\sigma_0^2) \left(\frac{1 - e^{t\Psi(1)}}{-\Psi(1)}\right) \\
 &\quad - t \log \beta (E[\sigma_0^2])^2 + \frac{\theta t E[\sigma_0^2]}{1 + \gamma^2} + \frac{t \log \beta (E[\sigma_0^2])^2}{1 + \gamma^2} \\
 &= \text{Var}(\sigma_0^2) \left(1 - e^{t\Psi(1)} - \log \beta \left(\frac{1 - e^{t\Psi(1)}}{-\Psi(1)}\right)\right) \\
 &\quad + \left(\frac{1}{1 + \gamma^2} - 1\right) t E[\sigma_0^2] (\theta - \log \beta E[\sigma_0^2]) \\
 &= \text{Var}(\sigma_0^2) \left(1 - e^{t\Psi(1)} - \log \beta \left(\frac{1 - e^{t\Psi(1)}}{-\Psi(1)}\right)\right) \\
 &\quad + \left(\frac{1}{1 + \gamma^2} - 1\right) t \frac{\theta}{-\Psi(1)} \left(\theta - \log \beta \frac{\theta}{-\Psi(1)}\right) > 0,
 \end{aligned}$$

da $\Psi(1) < 0 < -\log \beta$, $0 < \beta < 1$, $\theta > 0$ und $0 < \gamma < 1$ angenommen wird. Somit folgt, dass (4.37) für den zeitstetigen GJR GARCH(1,1)-Prozess strikt positiv ist. Die Aussage ist auch für den COGARCH(1,1)-Prozess erfüllt, dazu setzt man $\gamma = 0$. \square

4.2.4 Mischungseigenschaften

Dieses Kapitel wird mit einer Mischungseigenschaft für den zeitstetigen APARCH-Prozess beendet. Es wird gezeigt, dass der Volatilitätsprozess $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$ V-gleichmäßig ergodisch und somit exponentiell β -mischend ist. Bevor diese Aussage formuliert und bewiesen werden kann, sind noch einige Begriffe einzuführen.

Unterschiedliche Mischungseigenschaften sind in [5] zusammengefasst. In diesem Abschnitt wird der Begriff exponentiell β -mischend gebraucht. Dieser ist nach [5] wie folgt definiert.

Definition 4.15 (α -mischend, β -mischend). *Sei $(Z_s)_{s \geq 0}$ ein stationärer Prozess. Man definiert $\mathcal{G}_{[0,u]}^Z := \sigma(Z_s : s \in [0, u])$ und $\mathcal{G}_{[u+t, \infty)}^Z := \sigma(Z_s : s \geq u + t)$. Dann heißt $(Z_s)_{s \geq 0}$ α -mischend, falls*

$$\alpha(t) := \sup_{A \in \mathcal{G}_{[0,u]}^Z, B \in \mathcal{G}_{[u+t, \infty)}^Z} \{|P(A \cap B) - P(A)P(B)|\} \rightarrow 0, \quad \text{wenn } t \rightarrow \infty$$

und $(Z_s)_{s \geq 0}$ heißt β -mischend, falls

$$\beta(t) := \sup_{\substack{A_i \in \mathcal{G}_{[0,u]}^Z, A_i \cap A_j = \emptyset \\ B_i \in \mathcal{G}_{[u+t, \infty)}^Z, B_i \cap B_j = \emptyset \\ \cup_{i=1}^I A_i = \cup_{j=1}^J B_j = \Omega}} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J |P(A_i \cap B_j) - P(A_i)P(B_j)| \right\} \rightarrow 0, \quad \text{wenn } t \rightarrow \infty.$$

Man nennt $(Z_s)_{s \geq 0}$ exponentiell β -mischend, falls $\beta(t) \leq K e^{-at}$ für Konstanten $K > 0$, $a > 0$ und für alle $t \geq 0$.

Nach [5, Seite 112] gilt die Ungleichung $2\alpha(t) \leq \beta(t)$ und somit folgt α -mischend aus β -mischend.

Im Folgenden bezeichnet $(\Phi_t)_{t \geq 0}$ einen zeitstetigen Markovprozess mit Zustandsraum X und Übergangswahrscheinlichkeiten $P^t(x, A) = P(\Phi_t \in A | \Phi_0 = x)$, $x \in X$, $A \in \mathcal{B}(X)$, wobei $\mathcal{B}(X)$ die Borel σ -Algebra von X bezeichnet. Außerdem bezeichnet $E_x[\Phi_t]$ den bedingten Erwartungswert von Φ_t , gegeben $\Phi_0 = x$. Nun werden einige Eigenschaften zeitstetiger Markovprozesse, die für den späteren Beweis benötigt werden, definiert. Die nachfolgenden Definitionen sind aus [9] entnommen.

Definition 4.16 (V-gleichmäßig ergodisch). Ein Markovprozess $(\Phi_t)_{t \geq 0}$ heißt V-gleichmäßig ergodisch, wobei $V \geq 1$ eine messbare Funktion auf X ist, wenn ein eindeutiges invariantes Maß π für $P^t(\cdot, \cdot)$ existiert, so dass

$$\|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_V \leq V(x)\kappa\rho^t, \quad t \geq 0, \quad x \in X \quad (4.53)$$

für Konstanten $\kappa < \infty$, $0 < \rho < 1$. Hier ist $\|\cdot\|_V$ für jedes vorzeichenbehaftete Maß μ durch $\|\mu\|_V = \sup_{|g| \leq V} |\int g(y)\mu(dy)|$ definiert.

Nun kann die Hauptaussage dieses Abschnitts formuliert werden.

Satz 4.17. Sei $E[|L_1|^\delta] < \infty$ und $\Psi(1) < 0$. Dann ist $(\sigma_t^\delta)_{t \geq 0}$ V-gleichmäßig ergodisch und exponentiell β -mischend.

Definition 4.18 (φ -irreduzibel). Für jedes σ -endliche Maß φ wird der Prozess $(\Phi_t)_{t \geq 0}$ φ -irreduzibel genannt, falls für $B \in \mathcal{B}(X)$ und für alle $x \in X$

$$\varphi(B) > 0 \Rightarrow E_x \left[\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{\Phi_t \in B\}} dt \right] > 0,$$

gilt.

Definition 4.19 (aperiodisch). Die Menge aller messbaren Teilmengen $A \subset X$, die $\varphi(A) > 0$ erfüllen, wird mit $\mathcal{B}^+(X)$ bezeichnet. Ein φ -irreduzibler Markovprozess $(\Phi_t)_{t \geq 0}$ heißt aperiodisch, falls für $C \in \mathcal{B}^+(X)$ ein T existiert, so dass $P^t(x, C) > 0$ für alle $t \geq T$ und $x \in C$.

Definition 4.20 (petite Menge). Eine nichtleere Menge $C \in \mathcal{B}(X)$ heißt petite, falls ein nichttriviales Maß ν_a auf \mathcal{B} und eine Wahrscheinlichkeitsverteilung a auf $(0, \infty)$ die Bedingung

$$K_a(x, \cdot) \geq \nu_a(\cdot), \quad x \in C$$

erfüllen, wobei $K_a(x, A) := \int_{\mathbb{R}} P^t(x, A)a(dt)$, $x \in X$, $A \in \mathcal{B}(X)$ der stochastische Kern der Übergangswahrscheinlichkeiten von X ist.

Definition 4.21 (erweiterter Erzeuger). Durch $D(\mathcal{A})$ wird die Menge aller Funktionen $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet, für die eine messbare Funktion $U : X \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, so dass für jedes $x \in X$, $t > 0$,

$$E_x[V(\Phi_t)] = V(x) + E_x \left[\int_0^t U(\Phi_s) ds \right], \quad (4.54)$$

$$\int_0^t E_x[|U(\Phi_s)|] ds < \infty. \quad (4.55)$$

Man schreibt $\mathcal{A}V := U$ und nennt \mathcal{A} den erweiterten Erzeuger des Prozesses $(\Phi_t)_{t \geq 0}$.

Außerdem wird noch der Begriff der Selbstzerlegbarkeit benötigt.

Definition 4.22 (selbstzerlegbar). Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathbb{R} und Z eine reellwertige Zufallsvariable. Das Wahrscheinlichkeitsmaß μ heißt selbstzerlegbar, falls für jedes $b > 1$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ_b auf \mathbb{R} existiert, so dass

$$\varphi_\mu(z) = \varphi_\mu(b^{-1}z)\varphi_{\mu_b}(z)$$

gilt. Eine Zufallsvariable Z heißt selbstzerlegbar, falls für jedes $b > 1$ eine Zufallsvariable Y_b , die unabhängig von Z ist, existiert, so dass

$$Z \stackrel{D}{=} b^{-1}Z + Y_b$$

erfüllt ist.

Die V -gleichmäßige Ergodizität von $(\sigma_t^\delta)_{t \geq 0}$ wird mithilfe des folgenden Satzes (siehe [9, Satz 5.2]) zur V -gleichmäßigen Ergodizität eines zeitstetigen Markovprozesses gezeigt.

Satz 4.23. Sei $(\Phi_t)_{t \geq 0}$ ein φ -irreduzibler, aperiodischer Markovprozess. Wenn für Konstanten $b > 0$ und $c > 0$, eine petite Menge C aus $\mathcal{B}(X)$ und eine messbare Funktion $V : X \rightarrow [1, \infty)$ die Bedingung

$$AV \leq -cV + b\mathbf{1}_C \tag{4.56}$$

gilt, dann ist $(\Phi_t)_{t \geq 0}$ V -gleichmäßig ergodisch.

Satz 4.24 (Schwache Fellereigenschaft). Ein Prozess $(Y_t)_{t \geq 0}$ erfüllt die schwache Fellereigenschaft, falls für jede beschränkte stetige Funktion g

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \Rightarrow E_{x_n} [g(X_t)] \rightarrow E_x [g(X_t)]$$

gilt.

Beweis von Satz 4.17. Mit den Annahmen $E [|L_1|^\delta] < \infty$ und $\Psi(1) < 0$ erhält man aus Lemma 4.8(c), dass $\sigma_t^\delta \xrightarrow{D} \sigma_\infty^\delta = \theta \int_0^\infty e^{-X_t} dt$ für $t \rightarrow \infty$ und falls $\sigma_0^\delta \stackrel{D}{=} \sigma_\infty^\delta$ unabhängig von $(L_t)_{t \geq 0}$ angenommen wird, ist $(\sigma_t^\delta)_{t \geq 0}$ nach Satz 4.7 strikt stationär. Wendet man die strikte Markoveigenschaft zum ersten Übergangszeitpunkt $T_x := \inf\{t \geq 0 : X_t > x\} = \inf\{t \geq 0 : X_t = x\}$ (da X_t nach Proposition 4.4 spektral-negativ ist) an, erhält man

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty e^{-X_t} dt \\ &= \int_0^{T_x} e^{-X_t} dt + \int_{T_x}^\infty e^{-X_t} dt \\ &= \int_0^{T_x} e^{-X_t} dt + e^{-x} \int_{T_x}^\infty e^{-(X_t - X_{T_x})} dt \\ &= \int_0^{T_x} e^{-X_t} dt + e^{-x} I' \end{aligned}$$

wobei I' die gleiche Verteilung wie I besitzt und unabhängig von $\int_0^{T_x} e^{-X_t} dt$ ist. Somit ist I laut Definition 4.22 eine selbstzerlegbare Zufallsvariable und nach [32, Satz 53.1] ist ihre Verteilung unimodal, d.h. I besitzt eine Dichte. Damit ist $\sigma_\infty^\delta = \theta I$ selbstzerlegbar und besitzt

eine Dichte. Im Folgenden bezeichnet π die Verteilung von σ_∞^δ und $P^t(x, A) = P(\sigma_t^\delta \in A | \sigma_0^\delta = x)$ die Übergangswahrscheinlichkeiten von $(\sigma_t^\delta)_{t \geq 0}$ für $x \in \mathbb{R}, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Daher gilt

$$P^t(x, A) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \pi(A), \quad \forall x \in \mathbb{R}, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Dies impliziert, dass $(\sigma_t^\delta)_{t \geq 0}$ π -irreduzibel und aperiodisch ist. Außerdem erfüllt der Volatilitätsprozess $(\sigma_t^\delta)_{t \geq 0}$ die schwache Fellereigenschaft (siehe Satz 4.24), da für jedes $x_n \rightarrow x$, $n \rightarrow \infty$ und für jede beschränkte stetige Funktion g durch den Lebesgue'schen Konvergenzsatz $E_{x_n}[g(\sigma_t^\delta)] \rightarrow E_x[g(\sigma_t^\delta)]$ folgt. Da σ_t^δ laut [22] eine π -irreduzible Fellerkette darstellt, deren Träger nichtleer ist, ist laut [25, Satz 6.0.1] jede kompakte Menge petite.

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass eine Funktion $V \geq 1$ existiert, die $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$ und $V \in D(\mathcal{A})$ erfüllt, so dass die Bedingung (4.56) aus Satz 4.23 gilt. Dabei ist \mathcal{A} der erweiterte Erzeuger von σ_t^δ .

Nach [17, Satz 3.5] ist \mathcal{A} gegeben durch

$$\mathcal{A}f(y) = (\theta + y \log \beta) f'(y) + \int_{\mathbb{R}} \left[f\left(y + y \frac{\alpha}{\beta} h(x)\right) - f(y) \right] \nu_L(dx), \quad (4.57)$$

wobei $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist.

Sei $0 < p < \beta < 1$ und sei V eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf \mathbb{R} , so dass $V(y) = |y|^p + 1$ auf $|y| \geq 1$, $V(y) > 1$ für alle y und V, V', V'' beschränkt sind auf $|y| < 1$. Dann gilt für $|y| \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}V(y) &= (\theta + y \log \beta) V'(y) + \int_{\mathbb{R}} \left[V\left(y + y \frac{\alpha}{\beta} h(x)\right) - V(y) \right] \nu_L(dx) \\ &= (\theta + y \log \beta) (\operatorname{sgn} y) p |y|^{p-1} + \int_{\mathbb{R}} \left[\left| y + y \frac{\alpha}{\beta} h(x) \right|^p + 1 - |y|^p - 1 \right] \nu_L(dx) \\ &= (\theta + y \log \beta) (\operatorname{sgn} y) p |y|^{p-1} + |y|^p \int_{\mathbb{R}} \left(\left| 1 + \frac{\alpha}{\beta} h(x) \right|^p - 1 \right) \nu_L(dx). \end{aligned}$$

Durch die Annahme $\Psi(1) < 0$ folgt aus Lemma 4.8 (d), dass $\Psi(p) < 0$ für $0 < p < 1$ gilt und

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\left(1 + \frac{\alpha}{\beta} h(y) \right)^p - 1 \right) \nu_L(dy) < -p \log \beta - c_1,$$

für eine kleine Konstante $c_1 > 0$. Dadurch erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathcal{A}V(y) &\leq (\theta + y \log \beta) (\operatorname{sgn} y) p |y|^{p-1} - (p \log \beta + c_1) |y|^p \\ &= \theta p (\operatorname{sgn} y) |y|^{p-1} + y \log \beta (\operatorname{sgn} y) p |y|^{p-1} - p \log \beta |y|^p - c_1 |y|^p \\ &= \theta p (\operatorname{sgn} y) |y|^{p-1} - c_1 |y|^p \\ &\leq -c_2 |y|^p + d_2, \quad |y| > k > 1 \end{aligned} \quad (4.58)$$

für positive Konstanten c_2, d_2 und k . Aufgrund der Ungleichung (4.58) kann man Konstanten $b > 0, c > 0$ und $k^* > 0$ so wählen, dass die Bedingung

$$\mathcal{A}V(y) \leq -cV(y) + b \mathbf{1}_{\{|y| \leq k^*\}} \quad (4.59)$$

erfüllt ist. Um den Beweis zu vervollständigen, bleibt noch zu zeigen, dass $V \in D(\mathcal{A})$. Es gibt Konstanten $c_3 > 0$ und $d_3 > 0$, so dass die Ungleichung

$$\mathcal{A}V(y) \leq c_3 V(y) + d_3, \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad (4.60)$$

erfüllt ist. Itô's Formel für Semimartingale aus [29, Satz II.32] impliziert

$$\begin{aligned} V(\sigma_t^\delta) &= V(\sigma_0^\delta) + \int_{0+}^t V'(\sigma_{s-}^\delta) d\sigma_s^\delta + \frac{1}{2} \int_{0+}^t V''(\sigma_{s-}^\delta) d[\sigma^\delta, \sigma^\delta]_s^c \\ &\quad + \sum_{0 < s \leq t} \left(V(\sigma_s^\delta) - V(\sigma_{s-}^\delta) - V'(\sigma_{s-}^\delta) \Delta\sigma_s^\delta \right). \end{aligned}$$

Sei $\tau_n = \inf\{t : \sigma_t^\delta \geq n\}$. Dann gilt mit Gleichung (4.15)

$$\begin{aligned} V(\sigma_{t \wedge \tau_n}^\delta) &= V(\sigma_0^\delta) + \int_{0+}^{t \wedge \tau_n} V'(\sigma_{s-}^\delta) d\sigma_s^\delta + \frac{1}{2} \int_{0+}^{t \wedge \tau_n} V''(\sigma_{s-}^\delta) d[\sigma^\delta, \sigma^\delta]_s^c \\ &\quad + \sum_{0 < s \leq t \wedge \tau_n} \left(V(\sigma_s^\delta) - V(\sigma_{s-}^\delta) - V'(\sigma_{s-}^\delta) \Delta\sigma_s^\delta \right) \\ &= V(\sigma_0^\delta) + \int_{0+}^{t \wedge \tau_n} V'(\sigma_{s-}^\delta) \left(\theta ds + \log \beta \sigma_{s-}^\delta ds + \frac{\alpha}{\beta} \sigma_{s-}^\delta h(\Delta L_s) \right) \\ &\quad + \sum_{0 < s \leq t \wedge \tau_n} \left(V(\sigma_s^\delta) - V(\sigma_{s-}^\delta) - V'(\sigma_{s-}^\delta) \Delta\sigma_s^\delta \right) \\ &= V(\sigma_0^\delta) + \int_{0+}^{t \wedge \tau_n} V'(\sigma_{s-}^\delta) \left(\theta + \log \beta \sigma_{s-}^\delta \right) ds + \sum_{0 < s \leq t \wedge \tau_n} V'(\sigma_{s-}^\delta) \frac{\alpha}{\beta} \sigma_{s-}^\delta h(\Delta L_s) \\ &\quad + \sum_{0 < s \leq t \wedge \tau_n} \left(V(\sigma_{s-}^\delta - \Delta\sigma_s^\delta) - V(\sigma_{s-}^\delta) - V'(\sigma_{s-}^\delta) \frac{\alpha}{\beta} \sigma_{s-}^\delta h(\Delta L_s) \right) \\ &= V(\sigma_0^\delta) + \int_{0+}^{t \wedge \tau_n} V'(\sigma_{s-}^\delta) \left(\theta + \sigma_{s-}^\delta \log \beta \right) ds \\ &\quad + \sum_{0 < s \leq t \wedge \tau_n} \left(V(\sigma_{s-}^\delta - \frac{\alpha}{\beta} \sigma_{s-}^\delta h(\Delta L_s)) - V(\sigma_{s-}^\delta) \right). \end{aligned} \tag{4.61}$$

Betrachtet man den Erwartungswert von (4.61), so folgt mit der Kompensationsformel, der Gleichung (4.57) und der Ungleichung (4.60)

$$\begin{aligned} E_y \left[V(\sigma_{t \wedge \tau_n}^\delta) \right] &= E_y \left[V(\sigma_0^\delta) \right] + E_y \left[\int_{0+}^{t \wedge \tau_n} V'(\sigma_{s-}^\delta) \left(\theta + \sigma_{s-}^\delta \log \beta \right) ds \right] \\ &\quad + E_y \left[\sum_{0 < s \leq t \wedge \tau_n} \left(V(\sigma_{s-}^\delta - \frac{\alpha}{\beta} \sigma_{s-}^\delta h(\Delta L_s)) - V(\sigma_{s-}^\delta) \right) \right] \\ &= V(y) + E_y \left[\int_{0+}^{t \wedge \tau_n} V'(\sigma_{s-}^\delta) \left(\theta + \sigma_{s-}^\delta \log \beta \right) ds \right] \\ &\quad + E_y \left[\int_{0+}^{t \wedge \tau_n} \int_{\mathbb{R}} \left(V(\sigma_{s-}^\delta - \frac{\alpha}{\beta} \sigma_{s-}^\delta h(x)) - V(\sigma_{s-}^\delta) \right) \nu_L(dx) ds \right] \\ &= V(y) + E_y \left[\int_0^{t \wedge \tau_n} \mathcal{A}V(\sigma_s^\delta) ds \right] \end{aligned} \tag{4.62}$$

$$\leq V(y) + c_3 \int_0^{t \wedge \tau_n} \left[E_y(V(\sigma_s^\delta)) + \frac{d_3}{c_3} \right] ds. \tag{4.63}$$

Nun addiert man auf beiden Seiten der Ungleichung (4.63) die Konstante $\frac{d_3}{c_3}$ um die Gronwall-

Ungleichung [1, Proposition 6.1.4] anwenden zu können. Dann erhält man die Ungleichung

$$E_y \left[V \left(\sigma_{t \wedge \tau_n}^\delta \right) \right] \leq \left(V(y) + \frac{d_3}{c_3} \right) e^{c_3 t}. \quad (4.64)$$

Aufgrund der Definition $V(y) = |y|^p + 1$ und $p < 1$, kann man $\varepsilon > 0$ so wählen, dass $p^* = p(1 + \varepsilon) < 1$ und

$$(V(y))^{1+\varepsilon} = (|y|^p + 1)^{1+\varepsilon} \leq 2^{p^*} \left(|y|^{p^*} + 1 \right), \quad |y| > 1$$

gilt. Mit dieser Abschätzung und Ungleichung (4.64) folgt

$$E_y \left[\left(V \left(\sigma_{t \wedge \tau_n}^\delta \right) \right)^{1+\varepsilon} \right] \leq 2^{p^*} E_y \left[\left| \sigma_{t \wedge \tau_n}^\delta \right|^{p^*} + 1 \right] \leq \left(|y|^{p^*} + 1 + \frac{d_3^*}{c_3^*} \right) e^{c_3^* t} \quad (4.65)$$

für $c_3^* > 0$ und $d_3^* > 0$. Nach [3, Seite 31] gilt mit Bedingung (4.65), dass $V \left(\sigma_{t \wedge \tau_n}^\delta \right)$ gleichmäßig integrierbar ist und mit [3, Satz 3.5] folgt

$$E_y \left[V \left(\sigma_{t \wedge \tau_n}^\delta \right) \right] \rightarrow E_y \left[V \left(\sigma_t^\delta \right) \right] < \infty, \quad (4.66)$$

wenn $n \rightarrow \infty$. Mit dem Lebesgue'schen Konvergenzsatz und den Ungleichungen (4.60) und (4.64) gilt

$$E_y \left[\int_0^{t \wedge \tau_n} \mathcal{A}V \left(\sigma_s^\delta \right) ds \right] \rightarrow E_y \left[\int_0^t \mathcal{A}V \left(\sigma_s^\delta \right) ds \right]. \quad (4.67)$$

Aus (4.62), (4.66) und (4.67) folgen schließlich (4.54) und (4.55), welche die Bedingungen sind, damit $V \in D(\mathcal{A})$. Somit sind alle Voraussetzungen des Satzes 4.23 erfüllt und mit (4.56) hat man gezeigt, dass $(\sigma_t^\delta)_{t \geq 0}$ V-gleichmäßig ergodisch ist. Nach [9, Abschnitt 3] ist die exponentielle Konvergenz (4.53) äquivalent zur exponentiell β -Mischungseigenschaft. \square

Kapitel 5

Beispiele

In den Abschnitten 4.2.2 und 4.2.3 wurden einige Eigenschaften wie Momente und die Autokovariationsfunktion des zeitstetigen APARCH(1,1)-Modells betrachtet. Man stellt fest, dass diese Ergebnisse vom Laplace-Exponenten $\Psi(c)$ aus (4.22) sowie von den Momenten des zugrundeliegenden Lévyprozesses $(L_t)_{t \geq 0}$ abhängen. Im Folgenden sollen nun diese Größen am Beispiel des zeitstetigen GJR GARCH(1,1)-Modells und des COGARCH(1,1)-Modells berechnet werden. Für den treibenden Lévyprozess L wird ein zusammengesetzter Poissonprozess (siehe Beispiel 2.16) und ein Varianz-Gamma-Prozess (siehe Beispiel 2.17) gewählt.

5.1 Momente des zugrundeliegenden Lévyprozesses

Im Folgenden werden die ersten beiden Momente des zusammengesetzten Poissonprozesses und des Varianz-Gamma-Prozesses bestimmt.

5.1.1 Zusammengesetzter Poissonprozess

Die charakteristische Funktion ist für die Bestimmung von Momenten von großem Nutzen, da diese die folgende Eigenschaft besitzt.

Proposition 5.1. [6, Proposition 2.4] Falls Y eine Zufallsvariable ist mit $E[|Y|^n] < \infty$, dann ist $\varphi_Y(u)$ bei $u = 0$ n -mal stetig differenzierbar und es gilt

$$E[Y^k] = \frac{1}{i^k} \frac{\partial^k \varphi_Y}{\partial u^k}(0), \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Die charakteristische Funktion eines zusammengesetzten Poissonprozesses $(L_t)_{t \geq 0}$ ist durch die folgende Proposition gegeben.

Proposition 5.2. [6, Proposition 3.4] Sei $(L_t)_{t \geq 0}$ ein zusammengesetzter Poissonprozess mit Rate c und Sprungverteilung F_X einer Zufallsvariable X . Dann ist die charakteristische Funktion von L_t gegeben durch

$$\varphi_{L_t}(u) = E[e^{iuL_t}] = \exp\left(ct \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1) F_X(dx)\right) = \exp(ct(\varphi_X(u) - 1)), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Somit gilt für die Ableitungen der charakteristischen Funktion eines zusammengesetzten Poissonprozesses

$$\varphi'_{L_t}(u) = \exp(ct(\varphi_X(u) - 1)) ct \varphi'_X(u) = \varphi_{L_t}(u) ct \varphi'_X(u),$$

$$\begin{aligned}\varphi''_{L_t}(u) &= (\varphi_{L_t}(u)ct\varphi'_X(u))' = \varphi'_{L_t}(u)ct\varphi'_X(u) + \varphi_{L_t}(u)ct\varphi''_X(u) \\ &= ct \left(\varphi_{L_t}(u)ct(\varphi'_X(u))^2 + \varphi_{L_t}(u)\varphi''_X(u) \right).\end{aligned}$$

Mit Proposition 5.1 erhält man für die ersten beiden Momente des zusammengesetzten Poissonprozesses L

$$E[L_t] = \frac{1}{i}\varphi'_{L_t}(0) = \frac{1}{i}\varphi_{L_t}(0)ct\varphi'_X(0) = \frac{1}{i}ctiE[X] = ctE[X], \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned}E[L_t^2] &= \frac{1}{i^2}\varphi''_{L_t}(0) = -ct \left(\varphi_{L_t}(0)ct(\varphi'_X(0))^2 + \varphi_{L_t}(0)\varphi''_X(0) \right) \\ &= -ct \left(ct(iE[X])^2 + i^2E[X^2] \right) \\ &= (ct)^2E[X]^2 + ctE[X^2].\end{aligned} \quad (5.2)$$

Die Momente von L hängen von den Momenten der Zufallsvariable X ab. Diese kann man ebenfalls mithilfe der charakteristischen Funktion berechnen.

5.1.2 Varianz-Gamma-Prozess

Nun sollen die ersten beiden Momente des Varianz-Gamma-Prozesses L (siehe Beispiel 2.17) bestimmt werden. Laut [23, Gleichung A4] ist die Varianz-Gamma-Zufallsvariable L_t , bedingt auf Zeitänderung g bezüglich des Gammaprozesses, über ein Intervall der Länge t normalverteilt mit Erwartung $\theta_V g$ und Varianz $\sigma_V \sqrt{g}$. Deshalb kann man

$$L_t = \theta_V g + \sigma_V \sqrt{g} z \quad (5.3)$$

schreiben, wobei z eine standardnormalverteilte Zufallsvariable darstellt, die unabhängig von der Zufallsvariable g ist. Es gilt außerdem $E[g] = t$ und $\text{Var}(g) = \kappa_V t$. Damit ergibt sich nun für das erste Moment des Varianz-Gamma Prozesses L

$$E[L_t] = \theta_V E[g] + \sigma_V E[\sqrt{g}]E[z] = \theta_V t. \quad (5.4)$$

Mit (5.3) gilt

$$(L_t - E[L_t])^2 = \theta_V^2 g^2 - 2\theta_V^2 t g + 2\theta_V \sigma_V g \sqrt{g} z + \theta_V^2 t^2 - 2\theta_V \sigma_V t \sqrt{g} z + \sigma_V^2 g z^2$$

und somit erhält man die Varianz

$$\begin{aligned}\text{Var}(L_t) &= E \left[(L_t - E[L_t])^2 \right] \\ &= \theta_V^2 E[g^2] - 2\theta_V^2 t E[g] + 2\theta_V \sigma_V E[g\sqrt{g}]E[z] + \theta_V^2 t^2 - 2\theta_V \sigma_V t E[\sqrt{g}]E[z] + \sigma_V^2 E[g]E[z^2] \\ &= \theta_V^2 (\kappa_V t + t^2) - 2\theta_V^2 t^2 + \theta_V^2 t^2 + \sigma_V^2 t \\ &= \theta_V^2 \kappa_V t + \sigma_V^2 t.\end{aligned} \quad (5.5)$$

Mithilfe von (5.5) und (5.4) erhält man das zweite Moment des Varianz-Gamma-Prozesses L

$$E[L_t^2] = \text{Var}(L_t) + E[L_t]^2 = \theta_V^2 \kappa_V t + \sigma_V^2 t + \theta_V t.$$

5.2 Laplace-Exponenten $\Psi(1)$ und $\Psi(2)$

In diesem Abschnitt soll nun der Laplace-Exponenten $\Psi(c)$ aus (4.22) am Beispiel des zeitstetigen GJR GARCH(1,1)-Modells und des COGARCH(1,1)-Modells konkret bestimmt werden. Um den zeitstetigen GJR GARCH(1,1)-Prozess aus dem zeitstetigen APARCH(1,1)-Prozess zu erhalten setzt man in (4.10) und (4.10) den Parameter $\delta = 2$. Somit gilt $h(x) = (|x| - \gamma x)^2$. Diese Funktion wird für die Berechnung des Laplace-Exponenten $\Psi(c)$ benötigt. Mithilfe von Lemma 4.8 kann man $\Psi(1)$ und $\Psi(2)$ berechnen. Dazu benötigt man

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} h(x) \nu_L(dx) &= \int_{\mathbb{R}} (|x| - \gamma x)^2 \nu_L(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |x|^2 - 2\gamma|x|x + \gamma^2 x^2 \nu_L(dx) \\ &= (1 + \gamma^2) \int_{\mathbb{R}} x^2 \nu_L(dx) - 2\gamma \int_{\mathbb{R}} |x|x \nu_L(dx) \end{aligned} \quad (5.6)$$

und

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} h^2(x) \nu_L(dx) &= \int_{\mathbb{R}} (|x| - \gamma x)^4 \nu_L(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (|x|^4 - 4\gamma|x|^3x + 6\gamma^2|x|^2x^2 - 4\gamma^3|x|x^3 + \gamma^4x^4) \nu_L(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} ((1 + 6\gamma^2 + \gamma^4) x^4 - (4\gamma + 4\gamma^3) x^3|x|) \nu_L(dx) \\ &= (1 + 6\gamma^2 + \gamma^4) \int_{\mathbb{R}} x^4 \nu_L(dx) - (4\gamma + 4\gamma^3) \int_{\mathbb{R}} x^3|x| \nu_L(dx). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Mit Gleichung (4.22) und (5.6) erhält man

$$\begin{aligned} \Psi(1) &= \log \beta + \int_{\mathbb{R}} \left(\left(1 + \frac{\alpha}{\beta} h(x) \right) - 1 \right) \nu_L(dx) \\ &= \log \beta + \frac{\alpha}{\beta} \int_{\mathbb{R}} (|x| - \gamma x)^2 \nu_L(dx) \\ &= \log \beta + \frac{\alpha}{\beta} \left((1 + \gamma^2) \int_{\mathbb{R}} x^2 \nu_L(dx) - 2\gamma \int_{\mathbb{R}} |x|x \nu_L(dx) \right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Den Laplace-Exponenten $\Psi(2)$ berechnet man mithilfe von (4.22), (5.6) und (5.7). Es gilt

$$\begin{aligned} \Psi(2) &= 2 \log \beta + \int_{\mathbb{R}} \left(\left(1 + \frac{\alpha}{\beta} h(x) \right)^2 - 1 \right) \nu_L(dx) \\ &= 2 \log \beta + \int_{\mathbb{R}} \left(1 + 2\frac{\alpha}{\beta} h(x) + \frac{\alpha^2}{\beta^2} h^2(x) - 1 \right) \nu_L(dx) \\ &= 2 \log \beta + 2\frac{\alpha}{\beta} \int_{\mathbb{R}} (|x| - \gamma x)^2 \nu_L(dx) + \frac{\alpha^2}{\beta^2} \int_{\mathbb{R}} (|x| - \gamma x)^4 \nu_L(dx) \\ &= 2 \log \beta + 2\frac{\alpha}{\beta} \left((1 + \gamma^2) \int_{\mathbb{R}} x^2 \nu_L(dx) - 2\gamma \int_{\mathbb{R}} |x|x \nu_L(dx) \right) \\ &\quad + \frac{\alpha^2}{\beta^2} \left((1 + 6\gamma^2 + \gamma^4) \int_{\mathbb{R}} x^4 \nu_L(dx) - (4\gamma + 4\gamma^3) \int_{\mathbb{R}} x^3|x| \nu_L(dx) \right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Um $\Psi(1)$ und $\Psi(2)$ für den zeitstetigen GJR GARCH konkret bestimmen zu können beschränkt man sich auf symmetrische Verteilungen der Sprungverteilung von L . Sei G_X eine symmetrische Verteilung, dann erhält man durch die Substitution $y = -x$ im zweiten Summanden

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |x| x G_X(dx) &= \int_0^{\infty} x^2 G_X(dx) - \int_{-\infty}^0 x^2 G_X(dx) \\
&= \int_0^{\infty} x^2 G_X(dx) + \int_0^{\infty} y^2 G_X(-dy) \\
&= \int_0^{\infty} x^2 G_X(dx) - \int_0^{\infty} x^2 G_X(dx) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Durch dieselbe Substitution folgt

$$\int_{\mathbb{R}} x^3 |x| G_X(dx) = 0. \tag{5.11}$$

Als nächstes betrachtet man bestimmte Lévyprozesse und berechnet die Laplace-Exponenten in diesen konkreten Fällen.

5.2.1 Zusammengesetzter Poissonprozess

Nun wählt man als treibenden Lévyprozess einen zusammengesetzten Poissonprozess $(L_t)_{t \geq 0}$ mit Rate c und Sprungverteilung F_X . Um $\Psi(1)$ und $\Psi(2)$ für den zeitstetigen GJR GARCH ausrechnen zu können beschränkt man sich auf symmetrische Sprungverteilungen. Falls F_X eine symmetrische Sprungverteilung ist, gilt nach (5.10) und (5.11)

$$\int_{\mathbb{R}} |x| x F_X(dx) = 0 \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} |x| x^3 F_X(dx) = 0. \tag{5.12}$$

Mit Gleichung (5.8) und der Symmetrie-Eigenschaft (5.12) erhält man für den zusammengesetzten Poissonprozess

$$\begin{aligned}
\Psi(1) &= \log \beta + \frac{\alpha}{\beta} \left((1 + \gamma^2) \int_{\mathbb{R}} x^2 \nu_L(dx) - 2\gamma \int_{\mathbb{R}} |x| x \nu_L(dx) \right) \\
&= \log \beta + \frac{\alpha}{\beta} c (1 + \gamma^2) \int_{\mathbb{R}} x^2 F_X(dx) \\
&= \log \beta + \frac{\alpha}{\beta} c (1 + \gamma^2) E[X^2].
\end{aligned}$$

Mit (5.9) und (5.12) kann man

$$\begin{aligned}
\Psi(2) &= 2 \log \beta + 2 \frac{\alpha}{\beta} \left((1 + \gamma^2) \int_{\mathbb{R}} x^2 \nu_L(dx) - 2\gamma \int_{\mathbb{R}} |x| x \nu_L(dx) \right) \\
&\quad + \frac{\alpha^2}{\beta^2} \left((1 + 6\gamma^2 + \gamma^4) \int_{\mathbb{R}} x^4 \nu_L(dx) - (4\gamma + 4\gamma^3) \int_{\mathbb{R}} x^3 |x| \nu_L(dx) \right) \\
&= 2 \log \beta + 2 \frac{\alpha}{\beta} c (1 + \gamma^2) \int_{\mathbb{R}} x^2 F_X(dx) + \frac{\alpha^2}{\beta^2} c (1 + 6\gamma^2 + \gamma^4) \int_{\mathbb{R}} x^4 F_X(dx) \\
&= 2 \log \beta + 2 \frac{\alpha}{\beta} c (1 + \gamma^2) E[X^2] + \frac{\alpha^2}{\beta^2} c (1 + 6\gamma^2 + \gamma^4) E[X^4]
\end{aligned}$$

berechnen.

Die Laplace-Exponenten für den COGARCH erhält man, indem man den Parameter $\gamma = 0$ setzt. Somit folgt für den COGARCH(1,1)-Prozess mit treibendem zusammengesetzten Poissonprozess

$$\Psi(1) = \log \beta + \frac{\alpha}{\beta} cE [X^2]$$

und

$$\Psi(2) = 2 \log \beta + 2 \frac{\alpha}{\beta} cE [X^2] + \frac{\alpha^2}{\beta^2} cE [X^4].$$

Man sieht, dass $\Psi(1)$ und $\Psi(2)$ im Falle eines treibenden zusammengesetzten Poissonprozesses von den Momenten der Zufallsvariable X abhängen, wobei X die Sprungverteilung F_X besitzt.

5.2.2 Varianz-Gamma-Prozess

Als treibenden Lévyprozess betrachtet man im Folgenden einen Varianz-Gamma-Prozess $(L_t)_{t \geq 0}$ (siehe Beispiel 2.17). Auch hier beschränkt man sich auf den symmetrischen Fall, um die Laplace-Exponenten $\Psi(1)$ und $\Psi(2)$ angeben zu können. Wenn man den Parameter $\theta_V = 0$ setzt erhält man laut [23, Gleichung 14] ein symmetrisches Lévymaß um Null und somit einen symmetrischen Varianz-Gamma-Prozess. Das Lévymaß eines symmetrischen Varianz-Gamma-Prozesses L hat die Lebesgue-dichte

$$\nu_L(dx) = \frac{1}{\kappa_V |x|} \exp\left(-\frac{\sqrt{2/\kappa_V}}{\sigma_V} |x|\right) dx, \quad x \neq 0$$

und aufgrund der Symmetrie gilt mit (5.10) und (5.11)

$$\int_{\mathbb{R}} |x| x \nu_L(dx) = 0 \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} |x| x^3 \nu_L(dx) = 0. \quad (5.13)$$

Für die Berechnung von $\Psi(1)$ und $\Psi(2)$ benötigt man

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} x^4 \nu_L(dx) &= \int_{\mathbb{R}} x^4 \frac{1}{\kappa_V |x|} \exp\left(-\frac{\sqrt{2/\kappa_V}}{\sigma_V} |x|\right) dx \\ &= \frac{1}{\kappa_V} \int_{\mathbb{R}} |x|^3 \exp\left(-\frac{\sqrt{2/\kappa_V}}{\sigma_V} |x|\right) dx \\ &= \frac{2}{\kappa_V} \int_0^\infty x^3 \exp\left(-\frac{\sqrt{2/\kappa_V}}{\sigma_V} x\right) dx \\ &= \frac{2}{\kappa_V} \frac{3!}{\left(\frac{\sqrt{2/\kappa_V}}{\sigma_V}\right)^4} \\ &= 3\sigma_V^4 \kappa_V \end{aligned} \quad (5.14)$$

und die Varianz $\text{Var}(L_1)$ des symmetrischen Varianz-Gamma-Prozesses L . Setzt man $\theta_V = 0$ und $t = 1$ in Gleichung (5.5) so folgt

$$\text{Var}(L_1) = \sigma_V^2. \quad (5.15)$$

Nun folgt mithilfe von Gleichung (5.8), der Symmetrie-Eigenschaft (5.13) und (5.15) für den Laplace-Exponenten $\Psi(1)$ eines symmetrischen Varianz-Gamma-Prozesses

$$\begin{aligned}\Psi(1) &= \log \beta + \frac{\alpha}{\beta} \left((1 + \gamma^2) \int_{\mathbb{R}} x^2 \nu_L(dx) - 2\gamma \int_{\mathbb{R}} |x| x \nu_L(dx) \right) \\ &= \log \beta + \frac{\alpha}{\beta} (1 + \gamma^2) \text{Var}(L_1) \\ &= \log \beta + \frac{\alpha}{\beta} (1 + \gamma^2) \sigma_V^2.\end{aligned}$$

Außerdem erhält man durch (5.9), (5.13), (5.15) und (5.14)

$$\begin{aligned}\Psi(2) &= 2 \log \beta + 2 \frac{\alpha}{\beta} \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 \nu_L(dx) - 2\gamma \int_{\mathbb{R}} |x| x \nu_L(dx) + \gamma^2 \int_{\mathbb{R}} x^2 \nu_L(dx) \right) \\ &\quad + \frac{\alpha^2}{\beta^2} \left((1 + 6\gamma^2 + \gamma^4) \int_{\mathbb{R}} x^4 \nu_L(dx) - (4\gamma + 4\gamma^3) \int_{\mathbb{R}} x^3 |x| \nu_L(dx) \right) \\ &= 2 \log \beta + 2 \frac{\alpha}{\beta} (1 + \gamma^2) \int_{\mathbb{R}} x^2 \nu_L(dx) + \frac{\alpha^2}{\beta^2} (1 + 6\gamma^2 + \gamma^4) \int_{\mathbb{R}} x^4 \nu_L(dx) \\ &= 2 \log \beta + 2 \frac{\alpha}{\beta} (1 + \gamma^2) \sigma_V^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2} (1 + 6\gamma^2 + \gamma^4) 3\sigma_V^4 \kappa_V.\end{aligned}$$

Die Laplace-Exponenten für den COGARCH erhält man, indem man den Parameter $\gamma = 0$ setzt. Somit folgt für den COGARCH(1,1)-Prozess mit treibendem Varianz-Gamma-Prozess

$$\Psi(1) = \log \beta + \frac{\alpha}{\beta} \sigma_V^2$$

und

$$\Psi(2) = 2 \log \beta + 2 \frac{\alpha}{\beta} \sigma_V^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2} 3\sigma_V^4 \kappa_V.$$

Kapitel 6

Approximation des zeitstetigen GJR GARCH

In diesem Kapitel sollen Approximationen an einen zeitstetigen asymmetrischen COGARCH betrachtet werden. Maller et al. [24] stellen eine Approximation des COGARCH durch eine eingebettete Folge von zeitdiskreten GARCH-Prozessen vor, die gegen das zeitstetige Modell konvergieren. Mit dieser Methode aus [24] soll nun gezeigt werden wie man den zeitstetigen GJR GARCH als Grenzwert einer eingebetteten Folge von zeitdiskreten GJR GARCH-Reihen erhält. Die zeitdiskreten Prozesse konvergieren in Wahrscheinlichkeit in der Skorokhod Metrik gegen den zeitstetigen Prozess.

6.1 Mathematische Grundlagen

Zunächst werden an dieser Stelle noch einige Begriffe erklärt und mathematisches Handwerkszeug aufgeführt, das später für den Konvergenzbeweis verwendet wird. Die Definitionen und Resultate sind hauptsächlich aus [18] und [29] entnommen.

Satz 6.1 (Markov'sche Ungleichung). *Sei X eine Zufallsvariable und $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ monoton wachsend. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$ mit $f(\varepsilon) > 0$ die Markov'sche Ungleichung*

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E[f(|X|)]}{f(\varepsilon)}.$$

Im Spezialfall $f(x) = x^2$ erhält man $P(|X| \geq \varepsilon) \leq \varepsilon^{-2} E[X^2]$.

Sei $I \subset \mathbb{N}_0$. Die nächste Aussage, die sogenannte Doob'sche Ungleichung, erlaubt es, für ein Martingal $X = (X_n)_{n \in I}$ Wahrscheinlichkeiten der Form $P(\sup_{s \leq t} |X_s| \geq \lambda)$ für $\lambda > 0$ nach oben abzuschätzen. Man schreibt für $n \in \mathbb{N}$

$$X_n^* = \sup \{X_k : k \leq n\} \quad \text{und} \quad |X|_n^* = \sup \{|X_k| : k \leq n\}.$$

Satz 6.2 (Doob'sche L^p -Ungleichung). *Sei X ein Martingal oder ein positives Submartingal und $n \in I$, wobei $I \subset \mathbb{N}_0$ die Indermenge von X bezeichnet.*

(i) *Für jedes $p \geq 1$ und $\lambda > 0$ gilt*

$$\lambda^p P(|X|_n^* \geq \lambda) \leq E[|X_n|^p].$$

(ii) Für jedes $p > 1$ gilt

$$E[|X_n|^p] \leq E[(|X_n^*|)^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|X_n|^p].$$

Falls X ein Martingal mit $X_\infty \in L^2$ ist, dann ist $|X|$ ein positives Submartingal. Insbesondere gilt für $p = 2$ die sogenannte quadratische Maximalungleichung von Doob

$$E[(X^*)^2] \leq 4E[X_\infty^2].$$

Definition 6.3. Eine Folge $(H^n)_{n \geq 1}$ von Prozessen konvergiert gegen den Prozess H gleichmäßig auf kompakten Mengen nach Wahrscheinlichkeit (uniformly on compacts in probability - kurz: *ucp*), falls für alle $t > 0$

$$\sup_{0 \leq s \leq t} |H_s^n - H_s| \xrightarrow{P} 0.$$

Definition 6.4. Sei θ eine endliche Folge von Stoppzeiten mit

$$0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_k < \infty.$$

Die Folge θ heißt zufällige Partition. Man sagt, dass eine Folge (θ_n) von zufälligen Partitionen

$$\theta_n: \tau_0^n \leq \tau_1^n \leq \dots \leq \tau_{k_n}^n$$

gegen die Identität konvergiert, falls

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq 0} \tau_k^n = \infty$ f.s., und

(ii) $\|\theta_n\| = \sup_{k \geq 0} |\tau_{k+1}^n - \tau_k^n| \rightarrow 0$ f.s.

Es soll gezeigt werden, dass die Prozesse in der Skorokhod Metrik konvergieren. Die Skorokhod Metrik ist wie in [12] definiert.

Definition 6.5 (Skorokhod J_1 Distanz). Sei $\mathbb{D}^d[0, T]$ der Raum der càdlàg \mathbb{R}^d -wertigen stochastischen Prozesse auf $[0, T]$. Weiter seien U und V zwei \mathbb{R}^d -wertige stochastische Prozesse aus $\mathbb{D}^d[0, T]$. Die Skorokhod J_1 Distanz zwischen U und V ist definiert durch

$$\rho(U, V) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \|U_t - V_{\lambda(t)}\| + \sup_{0 \leq t \leq T} |\lambda(t) - t| \right\}, \quad (6.1)$$

wobei Λ die Menge der streng monoton wachsenden stetigen Funktionen mit $\lambda(0) = 0$ und $\lambda(T) = T$ darstellt.

6.2 Approximation des zeitstetigen GJR GARCH

Zunächst wird die Herleitung des zeitstetigen GJR GARCH-Prozesses aus dem zeitdiskreten GJR GARCH, nach der Methode aus [19], gezeigt. Im Folgenden sei $L = (L(t))_{t \geq 0}$ ein reellwertiger Lévyprozess auf dem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ mit charakteristischem Tripel $(\gamma, 0, \nu)$, d.h. L ist ein reiner Sprungprozess. Außerdem wird angenommen, dass der Lévyprozess $E[L(1)] = 0$ und $E[L^2(1)] = 1$ erfüllt.

Das zeitdiskrete APARCH(1,1)-Modell aus Definition 4.1 beinhaltet laut [8] das zeitdiskrete

GJR GARCH(1,1)-Modell. Um dies zu zeigen, setzt man die Parameter $p = q = 1$, $\delta = 2$, $\theta = a > 0$, $\alpha = b > 0$, $\beta = c \in (0, 1)$ und $\gamma = d \in (0, 1)$. Damit folgt aus Gleichung (4.2)

$$\begin{aligned}\sigma_i^2 &= a + b(|Y_{i-1}| - dY_{i-1})^2 + c\sigma_{i-1}^2 \\ &= a + b(|\varepsilon_{i-1}\sigma_{i-1}| - d\varepsilon_{i-1}\sigma_{i-1})^2 + c\sigma_{i-1}^2 \\ &= a + b\varepsilon_{i-1}^2\sigma_{i-1}^2 - 2bd|\varepsilon_{i-1}\sigma_{i-1}|\varepsilon_{i-1}\sigma_{i-1} + bd^2\varepsilon_{i-1}^2\sigma_{i-1}^2 + c\sigma_{i-1}^2 \\ &= a + b(1-d)^2\varepsilon_{i-1}^2\sigma_{i-1}^2\mathbb{1}_{\{\varepsilon_{i-1} \geq 0\}} + b(1+d)^2\varepsilon_{i-1}^2\sigma_{i-1}^2\mathbb{1}_{\{\varepsilon_{i-1} < 0\}} + c\sigma_{i-1}^2.\end{aligned}$$

Somit erhält man mit $b^* = b(1-d)^2 > 0$ und $d^* = b(1+d)^2 > 0$ den zeitdiskreten GJR GARCH-Prozess

$$\sigma_i^2 = a + b^*\varepsilon_{i-1}^2\sigma_{i-1}^2\mathbb{1}_{\{\varepsilon_{i-1} \geq 0\}} + d^*\varepsilon_{i-1}^2\sigma_{i-1}^2\mathbb{1}_{\{\varepsilon_{i-1} < 0\}} + c\sigma_{i-1}^2. \quad (6.2)$$

Aus dieser Darstellung erhält man nach dem Ansatz von [19] eine stetige Version des Volatilitätsprozesses. Dazu betrachte

$$\begin{aligned}\sigma_i^2 &= a + b^*\varepsilon_{i-1}^2\sigma_{i-1}^2\mathbb{1}_{\{\varepsilon_{i-1} \geq 0\}} + d^*\varepsilon_{i-1}^2\sigma_{i-1}^2\mathbb{1}_{\{\varepsilon_{i-1} < 0\}} + c\sigma_{i-1}^2 \\ &= a + (c + (b^*\mathbb{1}_{\{\varepsilon_{i-1} \geq 0\}} + d^*\mathbb{1}_{\{\varepsilon_{i-1} < 0\}})\varepsilon_{i-1}^2)\sigma_{i-1}^2 \\ &= a + (c + (b^*\mathbb{1}_{\{\varepsilon_{i-1} \geq 0\}} + d^*\mathbb{1}_{\{\varepsilon_{i-1} < 0\}})\varepsilon_{i-1}^2) \\ &\quad \times (a + (c + (b^*\mathbb{1}_{\{\varepsilon_{i-2} \geq 0\}} + d^*\mathbb{1}_{\{\varepsilon_{i-2} < 0\}})\varepsilon_{i-2}^2))\sigma_{i-2}^2 \\ &= a + a(c + (b^*\mathbb{1}_{\{\varepsilon_{i-1} \geq 0\}} + d^*\mathbb{1}_{\{\varepsilon_{i-1} < 0\}})\varepsilon_{i-1}^2) \\ &\quad + (c + (b^*\mathbb{1}_{\{\varepsilon_{i-1} \geq 0\}} + d^*\mathbb{1}_{\{\varepsilon_{i-1} < 0\}})\varepsilon_{i-1}^2)(c + (b^*\mathbb{1}_{\{\varepsilon_{i-2} \geq 0\}} + d^*\mathbb{1}_{\{\varepsilon_{i-2} < 0\}})\varepsilon_{i-2}^2)\sigma_{i-2}^2 \\ &= \dots \\ &= a \sum_{j=0}^{i-1} \prod_{k=j+1}^{i-1} (c + (b^*\mathbb{1}_{\{\varepsilon_k \geq 0\}} + d^*\mathbb{1}_{\{\varepsilon_k < 0\}})\varepsilon_k^2) + \sigma_0^2 \prod_{k=0}^{i-1} (c + (b^*\mathbb{1}_{\{\varepsilon_k \geq 0\}} + d^*\mathbb{1}_{\{\varepsilon_k < 0\}})\varepsilon_k^2) \\ &= a \int_0^i \exp \left(\sum_{k=\lfloor s \rfloor + 1}^{i-1} \log (c + (b^*\mathbb{1}_{\{\varepsilon_k \geq 0\}} + d^*\mathbb{1}_{\{\varepsilon_k < 0\}})\varepsilon_k^2) \right) ds \\ &\quad + \sigma_0^2 \exp \left(\sum_{k=0}^{i-1} \log (c + (b^*\mathbb{1}_{\{\varepsilon_k \geq 0\}} + d^*\mathbb{1}_{\{\varepsilon_k < 0\}})\varepsilon_k^2) \right) \quad (6.3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= a \int_0^i \exp \left(\sum_{k=\lfloor s \rfloor + 1}^{i-1} \left(\log c + \log \left(1 + \frac{b^*\mathbb{1}_{\{\varepsilon_k \geq 0\}} + d^*\mathbb{1}_{\{\varepsilon_k < 0\}}}{c} \varepsilon_k^2 \right) \right) \right) ds \\ &\quad + \sigma_0^2 \exp \left(\sum_{k=0}^{i-1} \left(\log c + \log \left(1 + \frac{b^*\mathbb{1}_{\{\varepsilon_k \geq 0\}} + d^*\mathbb{1}_{\{\varepsilon_k < 0\}}}{c} \varepsilon_k^2 \right) \right) \right) \\ &= a \int_0^i \exp \left((i - \lfloor s \rfloor) \log c + \sum_{k=\lfloor s \rfloor + 1}^{i-1} \left(\log \left(1 + \frac{b^*\mathbb{1}_{\{\varepsilon_k \geq 0\}} + d^*\mathbb{1}_{\{\varepsilon_k < 0\}}}{c} \varepsilon_k^2 \right) \right) \right) ds \\ &\quad + \sigma_0^2 \exp \left(\sum_{k=0}^{i-1} \left(\log c + \log \left(1 + \frac{b^*\mathbb{1}_{\{\varepsilon_k \geq 0\}} + d^*\mathbb{1}_{\{\varepsilon_k < 0\}}}{c} \varepsilon_k^2 \right) \right) \right) \quad (6.4)\end{aligned}$$

Der Ausdruck ist wohldefiniert, da $c + (b^* \mathbf{1}_{\{\varepsilon_k \geq 0\}} + d^* \mathbf{1}_{\{\varepsilon_k < 0\}}) \varepsilon_k^2 > 0$ in (6.3) gilt. Man definiert den Prozess $X = (X(t))_{t \geq 0}$

$$X(t) = -t \log c - \sum_{0 \leq s \leq t} \log \left(1 + \frac{(b^* \mathbf{1}_{\{\Delta L(s) \geq 0\}} + d^* \mathbf{1}_{\{\Delta L(s) < 0\}})}{c} (\Delta L(s))^2 \right).$$

Durch die Parameterwahl $c = e^{-\eta}$, $b = \varphi e^{-\eta}$, $\varphi > 0$ und $d = \gamma \in (0, 1)$ gilt $b^* = b(1 - d)^2 = \varphi e^{-\eta} (1 - \gamma)^2$ und $d^* = b(1 + d)^2 = \varphi e^{-\eta} (1 + \gamma)^2$. Somit kann man

$$X(t) = \eta t - \sum_{0 \leq s \leq t} \log \left(1 + [(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\Delta L(s) \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\Delta L(s) < 0\}}] \varphi (\Delta L(s))^2 \right) \quad (6.5)$$

schreiben. Nun lässt sich der Volatilitätsprozess $\sigma^2 = (\sigma^2(t))_{t \geq 0}$ definieren als

$$\sigma^2(t) = \left(\theta \int_0^t e^{X(s)} ds + \sigma^2(0) \right) e^{-X(t)}, \quad t \geq 0, \quad (6.6)$$

vergleiche dazu (6.3) und setze $a = \theta$. Der integrierte zeitstetige GJR GARCH-Prozess $G = (G(t))_{t \geq 0}$ ist definiert durch

$$G(t) = \int_0^t \sigma(s-) dL(s), \quad t \geq 0. \quad (6.7)$$

Im Folgenden soll ausgehend vom zeitstetigen GJR GARCH(1,1)-Prozess G eine Familie von zeitdiskreten GJR GARCH(1,1)-Prozessen $G_n = (G_n(t))_{t \geq 0}$, $n = 1, 2, \dots$ definiert werden, die den zeitstetigen Prozess G approximiert. Nach einer geeigneten Reskalierung um die zeitdiskreten und zeitstetigen Parameter anzupassen, wird die Konvergenz der zeitdiskreten Prozesse G_n gegen den zeitstetigen Prozess G nach Wahrscheinlichkeit in der Skorokhod Metrik gezeigt.

Für die Diskretisierung auf dem endlichen Intervall $[0, T]$, $T > 0$, betrachtet man eine deterministische Folge $(N_n)_{n \geq 1}$, die $\lim_{n \rightarrow \infty} N_n = \infty$ und $0 = t_0(n) < t_1(n) < \dots < t_{N_n}(n) = T$ erfüllt. Für jedes $n = 1, 2, \dots$ wird das kompakte Intervall $[0, T]$ also in N_n Teilintervalle der Länge $\Delta t_i(n) := t_i(n) - t_{i-1}(n)$, für $i = 1, 2, \dots, N_n$, zerlegt. Man nimmt an, dass $\Delta t(n) := \max_{i=1, \dots, N_n} \Delta t_i(n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gilt und für jedes $n = 1, 2, \dots$ wird ein zeitdiskreter Prozess $(G_{i,n})_{i=1, \dots, N_n}$ definiert, der

$$G_{i,n} = G_{i-1,n} + \sigma_{i-1,n} \sqrt{\Delta t_i(n)} \varepsilon_{i,n}, \quad i = 1, 2, \dots, N_n, \quad (6.8)$$

erfüllt, wobei $G_{0,n} = G(0) = 0$ gilt. Die Volatilität $\sigma_{i,n}^2$ kann für $i = 1, 2, \dots, N_n$ durch die Rekursion

$$\begin{aligned} \sigma_{i,n}^2 &= \theta \Delta t_i(n) \\ &+ \left(1 + \left[(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{i-1,n} \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{i-1,n} < 0\}} \right] \varphi \Delta t_i(n) \varepsilon_{i-1,n}^2 \right) e^{-\eta \Delta t_i(n)} \sigma_{i-1,n}^2 \end{aligned} \quad (6.9)$$

dargestellt werden. Die Gleichungen (6.8) und (6.9) beschreiben eine GJR GARCH(1,1)-artige Rekursion. Wählt man für alle Zeitabstände eine identische Länge, so dass $\Delta t_i(n) = \Delta t(n)$, $i = 1, 2, \dots, N_n$ gilt, dann ist nach einer Reskalierung durch $\Delta t(n)$ und einer geeigneten Reparametrisierung (6.9) äquivalent zu (6.2). Für diese Reparametrisierung der Parameter $(\theta, \varphi, \eta, \gamma)$ nach (a, b^*, c, d^*) wählt man wie zuvor $a = \theta$, $b^* = b(1 - d)^2 = \varphi e^{-\eta} (1 - \gamma)^2$, $c = e^{-\eta}$ und $d^* = b(1 + d)^2 = \varphi e^{-\eta} (1 + \gamma)^2$.

Die Innovationen $(\varepsilon_{i,n})_{i=1,\dots,N_n}$, für $n = 1, 2, \dots$ approximieren den Lévyprozess durch eine Näherung der ersten Sprünge, was im Folgenden näher erklärt wird. Dazu verwendet man eine strikt positive Folge reeller Zahlen $1 \geq m_n \downarrow 0$, die $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta t(n) \bar{\nu}^2(m_n) = 0$ erfüllt, wobei $\bar{\nu}(x) = \int_{|y|>x} \nu(dy)$ der Tail von ν ist. Eine solche Folge existiert, da für jedes Lévymaß $\lim_{x \downarrow 0} x^2 \bar{\nu}(x) = 0$ gilt. Seien $\Delta L(t) = L(t) - L(t-)$, für $t > 0$, die Sprünge des Lévyprozesses, wobei $\Delta L(0) = 0$ gilt. Man setzt $n \geq 1$ fest und definiert die Stoppzeiten $\tau_{i,n}$ durch

$$\tau_{i,n} = \inf \{t \in [t_{i-1}(n), t_i(n)) : |\Delta L(t)| > m_n\}, \quad i = 1, 2, \dots, N_n. \quad (6.10)$$

D.h. mit $\tau_{i,n}$ wird der Zeitpunkt des ersten Sprungs von L im i -ten Intervall bezeichnet, dessen Höhe m_n übertrifft. Falls der Lévyprozess in einem Intervall $(t_{i-1}(n), t_i(n)]$ keine Sprünge besitzt, die m_n übersteigen, so setzt man für die Stoppzeit $\tau_{i,n} = +\infty$. Für den zeitstetigen GJR GARCH-Prozess ist von Bedeutung, ob der zugrunde liegende Lévyprozess $L(t)$ nach oben oder nach unten springt, da durch die Asymmetrie des Modells positive und negative Sprünge unterschiedlich gewichtet werden. Deshalb genügt es nicht, wie für die Stoppzeiten $\tau_{i,n}$, nur den Betrag der Sprunghöhe $|\Delta L(t)|$ zu betrachten. Man muss zusätzlich noch beachten, ob der Sprung positiv oder negativ ist.

Durch die starke Markoveigenschaft, ist $(\mathbb{1}_{\{\tau_{i,n} < \infty\}} \Delta L(\tau_{i,n}))_{i=1,\dots,N_n}$ für jedes $n = 1, 2, \dots$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen. Die Sprünge des Lévyprozesses $L(t)$ bis zum Zeitpunkt $t \geq 0$, deren Sprunghöhe m_n übertreffen, kann man durch das Integral $\int_{|x| \geq m_n} x N_L(t, dx)$ bezüglich des Poisson-Zufallsmaßes N_L , das in (2.7) definiert wurde, ausdrücken. Der Prozess $\left(\int_{|x| \geq m_n} x N_L(t, dx)\right)_{t \geq 0}$ ist laut [20, Lemma 2.8] ein zusammengesetzter Poissonprozess mit Rate $\bar{\nu}(m_n)$ und Sprungverteilung $\bar{\nu}(m_n)^{-1} \nu(dx) \mathbb{1}_{\{|x| > m_n\}}$. Da die Zeiten zwischen den Sprüngen exponentialverteilt sind, ist die Verteilung der Zufallsvariablen $(\mathbb{1}_{\{\tau_{i,n} < \infty\}} \Delta L(\tau_{i,n}))_{i=1,\dots,N_n}$ für jedes $n = 1, 2, \dots$ durch

$$\frac{\nu(dx) \mathbb{1}_{\{|x| > m_n\}}}{\bar{\nu}(m_n)} \left(1 - e^{-\Delta t_i(n) \bar{\nu}(m_n)}\right), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad i = 1, 2, \dots, N_n, \quad (6.11)$$

gegeben und hat bei 0 die Masse $e^{-\Delta t_i(n) \bar{\nu}(m_n)}$. Diese Zufallsvariablen besitzen endliche Erwartungswerte $\mu_i(n)$ und endliche Varianzen $\xi_i^2(n)$, da $E[L^2(1)]$ endlich ist. Die Folge der Innovationen $(\varepsilon_{i,n})_{i=1,\dots,N_n}$ sei definiert durch

$$\varepsilon_{i,n} = \frac{\mathbb{1}_{\{\tau_{i,n} < \infty\}} \Delta L(\tau_{i,n}) - \mu_i(n)}{\xi_i(n)}, \quad i = 1, 2, \dots, N_n. \quad (6.12)$$

Im Folgenden wird angenommen, dass $\mu_i(n) = 0$ gilt. Also gilt

$$\varepsilon_{i,n} = \frac{\mathbb{1}_{\{\tau_{i,n} < \infty\}} \Delta L(\tau_{i,n})}{\xi_i(n)}, \quad i = 1, 2, \dots, N_n. \quad (6.13)$$

Für jedes $n = 1, 2, \dots$, sind die Innovationen $\varepsilon_{i,n}$ paarweise unabhängig mit $E[\varepsilon_{i,n}] = 0$ und $\text{Var}(\varepsilon_{i,n}) = 1$. In Gleichung (6.9) wird $\sigma_{0,n}^2 = \sigma^2(0)$ unabhängig von $\varepsilon_{i,n}$ gesetzt.

Man bettet die zeitdiskreten Prozesse $G_{\cdot,n}$ und $\sigma_{\cdot,n}^2$ in die zeitstetigen Versionen G_n und σ_n^2 ein, die definiert sind durch

$$G_n(t) := G_{i,n} \quad \text{und} \quad \sigma_n^2(t) := \sigma_{i,n}^2, \quad t \in [t_{i-1}(n), t_i(n)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6.14)$$

wobei $G_n(0) = 0$ gilt. Die Prozesse G_n und σ_n sind aus $\mathbb{D}[0, T]$, dem Raum der reellwertigen, càdlàg stochastischen Prozesse auf $[0, T]$. Nun kann man die Konvergenz der zeitdiskreten Prozesse gegen den zeitstetigen Prozess formulieren.

Satz 6.6. *Seien die Prozesse (G, σ^2) wie in (6.7) und (6.6) definiert. Weiter seien $(G_n, \sigma_n^2)_{n \geq 1}$ wie in (6.14) gegeben. Dann konvergiert die Skorokhod Distanz zwischen den Prozessen (G, σ^2) und den diskretisierten, stückweise konstanten Prozessen $(G_n, \sigma_n^2)_{n \geq 1}$ in Wahrscheinlichkeit gegen 0, wenn $n \rightarrow \infty$, d.h.*

$$\rho((G_n, \sigma_n^2), (G, \sigma^2)) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (6.15)$$

Somit gilt auch, dass die Skorokhod Distanz auf $\mathbb{D}[0, T] \times \mathbb{D}[0, T]$ in Verteilung gegen 0 konvergiert.

6.3 Beweis zu Satz 6.6

Der folgende Beweis wird in mehrere Teilschritte zerlegt. In den Teilen (i)-(iii) werden die Approximationsverfahren für den Lévyprozess $L(t)$, den Volatilitätsprozess $\sigma^2(t)$ und den zeitstetigen GJR GARCH-Prozess $G(t)$ behandelt. Schließlich wird im Teil (iv) die Konvergenz aus Satz 6.6 gezeigt. Um die Aussage des Satzes 6.6 beweisen zu können, benötigt man noch einige Vorüberlegungen und eine Konvergenzaussage, die in einer Proposition formuliert wird.

Die pfadweise Konstruktion, die verwendet wird, basiert auf einer „erster Sprung“ Approximation an einen Lévyprozess eingeführt durch [33]. Diese Idee soll nun für das hier vorliegende Problem formuliert werden. Sei $Z = \{Z(t) : t \geq 0\}$ ein Lévyprozess mit charakteristischem Tripel $(\gamma^Z, 0, \nu^Z)$. Man betrachtet den Lévyprozess Z auf dem kompakten Intervall $[0, T]$. Dieses Intervall unterteilt man in N_n Teilintervalle der Länge $\Delta t_i(n) := t_i(n) - t_{i-1}(n)$ für $i = 1, 2, \dots, N_n$. Dabei müssen die einzelnen Teilintervalle nicht von gleicher Länge sein. Die Unterteilung $0 = t_0(n) < t_1(n) < \dots < t_{N_n}(n) = T$ ist eine deterministische Partition des Intervalls $[0, T]$ und $(N_n)_{n \geq 1}$ ist eine Folge von ganzen Zahlen, wobei $\lim_{n \rightarrow \infty} N_n = \infty$ gilt. Es wird angenommen, dass die Länge des größten Teilintervalls $\Delta t(n) := \max_{i=1, \dots, N_n} \Delta t_i(n)$ gegen 0 konvergiert falls $n \rightarrow \infty$. Sei $(m_n^Z)_{n \geq 1}$ eine positive Folge, so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n^Z = 0$ gilt und man definiert die Stoppzeiten

$$\tau_{i,n}^Z = \inf \{t \in [t_{i-1}(n), t_i(n)] : |\Delta Z(t)| > m_n^Z\} \quad \text{für } i = 1, \dots, N_n, \quad (6.16)$$

wobei $\Delta Z(t) := Z(t) - Z(t-)$ die Sprünge des Lévyprozess Z darstellen. Der „erste Sprung Prozess“ $(\bar{Z}_n(t) : 0 \leq t \leq T)$ wird definiert durch

$$\bar{Z}_n(t) = \sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{1}_{\{\tau_{i,n}^Z \leq t\}} \Delta Z(\tau_{i,n}^Z) + t \left(\gamma^Z - \int_{m_n^Z \leq |z| \leq 1} z \nu^Z(dz) \right) \quad \text{für } 0 \leq t \leq T. \quad (6.17)$$

Die folgende Proposition zeigt, dass die Prozesse \bar{Z}_n gleichmäßig für $t \in [0, T]$ in Wahrscheinlichkeit gegen den Lévyprozess Z konvergieren, wenn $n \rightarrow \infty$ und vorausgesetzt wird, dass $\Delta t(n)$ und die Folge m_n^Z mit einer geeigneten Konvergenzrate gegen 0 konvergieren.

Proposition 6.7. [24, Proposition 5.1] *Angenommen es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\Delta t(n)} \bar{\nu}^Z(m_n^Z) = 0$. Dann gilt*

(i)

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\bar{Z}_n(t) - Z(t)| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \text{wenn } n \rightarrow \infty. \quad (6.18)$$

Falls zusätzlich $E[|Z(1)|] < \infty$ und $E[Z(1)] = 0$ gilt, kann man in (6.17) den Term $\gamma^Z - \int_{m_n^Z \leq |z| \leq 1} z \nu^Z(dz)$ durch $-\int_{|z| > m_n^Z} z \nu^Z(dz)$ ersetzen und (6.18) gilt weiterhin. Falls ferner $E[(Z(1))^2] < \infty$ gilt, so gilt die Konvergenz in (6.18) in \mathcal{L}_2 , d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{Z}_n(t) - Z(t)\|_2 = 0$.

(ii) Falls der Lévyprozess Z von endlicher Variation ist mit der Sprungkomponente $Z^d(t) := \sum_{0 < s \leq t} \Delta Z(s)$, dann gilt

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \sum_{i=1}^{N_n} \mathbb{1}_{\{\tau_{i,n}^Z \leq t\}} \Delta Z(\tau_{i,n}^Z) - Z^d(t) \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \text{wenn } n \rightarrow \infty. \quad (6.19)$$

Beweis zu Satz 6.6. (i) Approximationsverfahren für den Lévyprozess $L(t)$

Sei $\tau_{i,n}$ wie in (6.10) und $\varepsilon_{i,n}$ wie in (6.13) definiert. Es wird $\tau_{i,n}^* = \tau_{i,n} \wedge t_i(n)$ gesetzt und man definiert den Zählprozess

$$N_n(t) := \#\{i \in \mathbb{N} : \tau_{i,n}^* \leq t\}, \quad 0 < t \leq T, \quad (6.20)$$

wobei $N_n(0) = 0$ gilt. Der Zählprozess $N_n(t)$ steigt um den Betrag 1 in jedem Teilintervall $(t_{i-1}(n), t_i(n)]$, für $i = 1, 2, \dots, n$ entweder zum Zeitpunkt $\tau_{i,n}$, an dem der Prozess L die Sprunghöhe m_n im Intervall zum ersten Mal übertrifft, oder zum Zeitpunkt $t_i(n)$, falls kein solcher Sprung existiert. Es gilt $N_n(t_{N_n(T)}(n)) = N_n(T) = N_n$. In Abbildung 6.1 ist der Zählprozess $N_n(t)$ zu den Sprüngen eines simulierten Pfades eines zusammengesetzten Poissonprozesses $L(t)$ dargestellt.

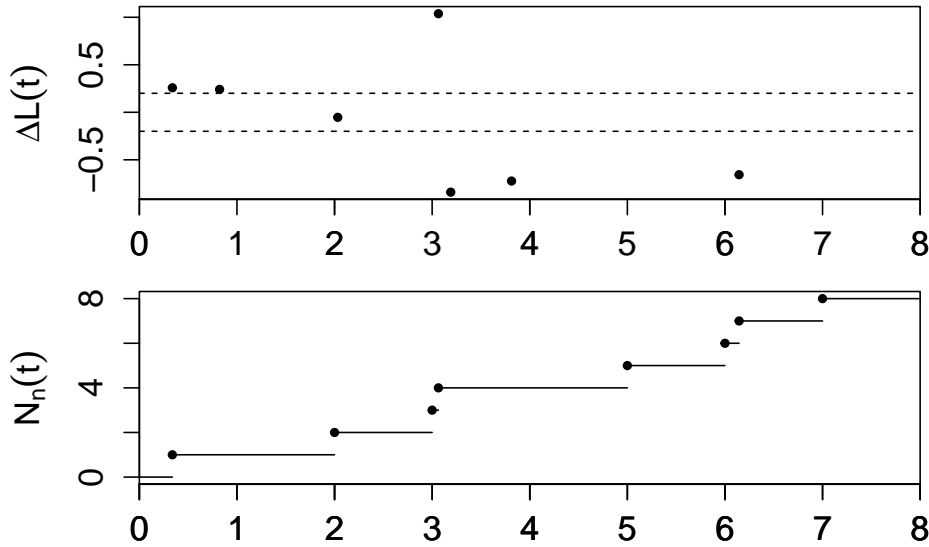


Abbildung 6.1: oben: Sprünge $\Delta L(t)$ eines simulierten zusammengesetzten Poissonprozesses $L(t)$ und Sprunghöhe $m_n = 0.2$, dargestellt durch die gestrichelten Linien; unten: Zählprozess $N_n(t)$ für die Sprunghöhe $m_n = 0.2$ und Teilintervalle $(t_{i-1}(n), t_i(n)]$ mit $t_0 = 0$ und Intervalllänge $\Delta t(n) = 1$

Man definiert den Prozess \tilde{L}_n durch

$$\tilde{L}_n(t) := \sum_{i=1}^{N_n(t)} \sqrt{\Delta t_i(n)} \varepsilon_{i,n}, \quad 0 \leq t \leq T, n = 1, 2, \dots \quad (6.21)$$

und desweiteren benötigt man die Folge der Prozesse

$$\bar{L}_n(t) = \sum_{i=1}^{N_n(t)} \mathbb{1}_{\{\tau_{i,n} < \infty\}} \Delta L(\tau_{i,n}) - t \int_{|x| > m_n} x \nu(dx) \quad (6.22)$$

auf die man die Proposition 6.7 anwenden kann, um zu zeigen, dass der Prozess \bar{L} eine Approximation der Form (6.17) an den Lévyprozess L ist. Setzt man $Z(t) = L(t)$ und $m_n^Z = m_n$, so erhält man mit (6.16)

$$\tau_{i,n}^Z = \inf\{t \in [t_{i-1}(n), t_i(n)]: |\Delta L(t)| > m_n\} = \tau_{i,n}.$$

Der Prozess \bar{L} aus (6.22) ist von der Form (6.17), da

$$\sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{1}_{\{\tau_{i,n}^Z \leq t\}} \Delta Z(\tau_{i,n}^Z) = \sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{1}_{\{\tau_{i,n} \leq t\}} \Delta L(\tau_{i,n}) = \sum_{i=1}^{N_n(t)} \mathbf{1}_{\{\tau_{i,n} < \infty\}} \Delta L(\tau_{i,n}) \quad (6.23)$$

gilt und der Drift $\gamma^Z - \int_{m_n^Z \leq |z| \leq 1} z \nu^Z(dz)$ aus (6.17), wie in Proposition 6.7 beschrieben, durch den Term $-\int_{|z| > m_n^Z} z \nu^Z(dz) = -\int_{|x| > m_n} x \nu(dx)$ ersetzt werden kann. Da der Lévyprozess L von beschränkter Variation ist, gilt $E[|L(1)|] < \infty$. Zusammen mit der Annahme $E[L(1)] = 0$ sind die Bedingungen von Proposition 6.7(i) erfüllt und somit konvergiert \bar{L}_n gleichmäßig auf $[0, T]$ in Wahrscheinlichkeit gegen L , d.h.

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\bar{L}_n(t) - L(t)| \xrightarrow{P} 0, \quad \text{wenn } n \rightarrow \infty. \quad (6.24)$$

Um zu zeigen, dass \tilde{L}_n gleichmäßig auf dem Intervall $[0, T]$ in Wahrscheinlichkeit gegen L konvergiert, genügt es zu zeigen, dass die Distanz von \tilde{L}_n zu \bar{L}_n gleichmäßig konvergiert. Dazu schreibt man den Prozess \bar{L} mithilfe von (6.13) in Abhängigkeit der Innovationen $\varepsilon_{i,n}$

$$\begin{aligned} \bar{L}_n(t) &= \sum_{i=1}^{N_n(t)} \mathbf{1}_{\{\tau_{i,n} < \infty\}} \Delta L(\tau_{i,n}) - t \int_{|x| > m_n} x \nu(dx) \\ &= \sum_{i=1}^{N_n(t)} \varepsilon_{i,n} \xi_i(n) - t \int_{|x| > m_n} x \nu(dx). \end{aligned} \quad (6.25)$$

Mithilfe von Gleichung (6.11) kann man die Varianz der Zufallsvariable $\mathbf{1}_{\{\tau_{i,n} < \infty\}} \Delta L(\tau_{i,n})$ berechnen. Man erhält

$$\begin{aligned} \xi_i^2(n) &= \text{Var} \left(\mathbf{1}_{\{\tau_{i,n} < \infty\}} \Delta L(\tau_{i,n}) \right) = E \left[\left(\mathbf{1}_{\{\tau_{i,n} < \infty\}} \Delta L(\tau_{i,n}) \right)^2 \right] \\ &= \frac{1 - e^{-\Delta t_i(n) \bar{\nu}(m_n)}}{\bar{\nu}(m_n)} \int_{\{|x| > m_n\}} x^2 \nu(dx). \end{aligned}$$

Da $\Delta t_i(n) \bar{\nu}(m_n) \geq 0$ gilt, kann man mit der Abschätzung $1 - e^{-x} \leq x$ für $x \geq 0$ das asymptotische Verhalten von $\xi_i^2(n)$, wenn $n \rightarrow \infty$, beschreiben. Es folgt

$$\begin{aligned} \left| \frac{\xi_i^2(n)}{\Delta t_i(n)} - 1 \right| &= \left| \frac{1 - e^{-\Delta t_i(n) \bar{\nu}(m_n)}}{\bar{\nu}(m_n) \Delta t_i(n)} \int_{\{|x| > m_n\}} x^2 \nu(dx) - 1 \right| \\ &\leq \left| \frac{\Delta t_i(n) \bar{\nu}(m_n)}{\bar{\nu}(m_n) \Delta t_i(n)} \int_{\{|x| > m_n\}} x^2 \nu(dx) - 1 \right| \\ &= \left| \int_{\{|x| > m_n\}} x^2 \nu(dx) - 1 \right| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

da m_n eine Folge reeller Zahlen ist, die $1 \geq m_n \downarrow 0$ erfüllt, und $\int_{\mathbb{R}} x^2 \nu(dx) = \text{Var}(L(1)) = 1$ gilt. Somit gilt für das asymptotische Verhalten von $\xi_i^2(n)$, wenn $n \rightarrow \infty$

$$\max_{i=1, \dots, N_n} \left| \frac{\xi_i^2(n)}{\Delta t_i(n)} - 1 \right| \rightarrow 0. \quad (6.26)$$

Für die Differenz der beiden Prozesse aus (6.21) und (6.25) gilt

$$\tilde{L}_n(t) - \bar{L}_n(t) = \sum_{i=1}^{N_n(t)} (\sqrt{\Delta t_i(n)} - \xi_i(n)) \varepsilon_{i,n} + t \int_{|x| > m_n} x \nu(dx). \quad (6.27)$$

Die unabhängigen Innovationen $(\varepsilon_{i,n})_{i=1, \dots, N_n}$ aus (6.13) sind so konstruiert, dass $E[\varepsilon_{i,n}] = 0$ und $\text{Var}(\varepsilon_{i,n}) = 1$ gilt. Für die Varianz des ersten Terms auf der rechten Seite von Gleichung (6.27) gilt mit $\sum_{i=1}^{N_n(t)} \Delta t_i(n) \leq T$ und (6.26)

$$\begin{aligned} & \text{Var} \left(\sum_{i=1}^{N_n(t)} (\sqrt{\Delta t_i(n)} - \xi_i(n)) \varepsilon_{i,n} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \text{Var} \left(\sum_{i=1}^k (\sqrt{\Delta t_i(n)} - \xi_i(n)) \varepsilon_{i,n} \right) P(N_n(t) = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^k \text{Var} \left((\sqrt{\Delta t_i(n)} - \xi_i(n)) \varepsilon_{i,n} \right) P(N_n(t) = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^k \left| \sqrt{\Delta t_i(n)} - \xi_i(n) \right|^2 \text{Var}(\varepsilon_{i,n}) P(N_n(t) = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^k \left| \sqrt{\Delta t_i(n)} - \xi_i(n) \right|^2 P(N_n(t) = k) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^k \Delta t_i(n) \max_{j=1, \dots, k} \left| \frac{\xi_j(n)}{\sqrt{\Delta t_j(n)}} - 1 \right|^2 P(N_n(t) = k) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^k \Delta t_i(n) \max_{j=1, \dots, N_n} \left| \frac{\xi_j(n)}{\sqrt{\Delta t_j(n)}} - 1 \right|^2 P(N_n(t) = k) \\ &= \max_{j=1, \dots, N_n} \left| \frac{\xi_j(n)}{\sqrt{\Delta t_j(n)}} - 1 \right|^2 \sum_{k=0}^{\infty} P(N_n(t) = k) \sum_{i=1}^k \Delta t_i(n) \\ &\leq T \max_{j=1, \dots, N_n} \left| \frac{\xi_j(n)}{\sqrt{\Delta t_j(n)}} - 1 \right|^2 \sum_{k=0}^{\infty} P(N_n(t) = k) \\ &= T \max_{j=1, \dots, N_n} \left| \frac{\xi_j(n)}{\sqrt{\Delta t_j(n)}} - 1 \right|^2 \\ &\leq T \max_{j=1, \dots, N_n} \left| \frac{\xi_j^2(n)}{\Delta t_j(n)} - 1 \right| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
 E \left[\sum_{i=1}^{N_n(t)} \left(\sqrt{\Delta t_i(n)} - \xi_i(n) \right) \varepsilon_{i,n} \right] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} E \left[\sum_{i=1}^k \left(\sqrt{\Delta t_i(n)} - \xi_i(n) \right) \varepsilon_{i,n} \right] P(N_n(t) = k) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^k \left(\sqrt{\Delta t_i(n)} - \xi_i(n) \right) E[\varepsilon_{i,n}] P(N_n(t) = k) = 0. \quad (6.29)
 \end{aligned}$$

Aus (6.28) und (6.29) folgt, dass die Summe $\sum_{i=1}^{N_n(t)} \left(\sqrt{\Delta t_i(n)} - \xi_i(n) \right) \varepsilon_{i,n}$ gleichmäßig auf $[0, T]$ in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert. Da m_n eine Folge reeller Zahlen ist, die $1 \geq m_n \downarrow 0$ erfüllt, konvergiert der zweite Term $t \int_{|x|>m_n} x \nu(dx)$ aus (6.27) gegen $t \int_{\mathbb{R}} x \nu(dx)$, wenn $n \rightarrow \infty$. Mit $\int_{\mathbb{R}} x \nu(dx) = E[L(1)] = 0$ folgt

$$t \int_{|x|>m_n} x \nu(dx) \rightarrow 0, \quad \text{wenn } n \rightarrow \infty.$$

Insgesamt gilt somit für die Differenz (6.27)

$$\begin{aligned}
 \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \tilde{L}_n(t) - \bar{L}_n(t) \right| &= \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \sum_{i=1}^{N_n(t)} \left(\sqrt{\Delta t_i(n)} - \xi_i(n) \right) \varepsilon_{i,n} + t \int_{|x|>m_n} x \nu(dx) \right| \\
 &= \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \sum_{i=1}^{N_n(t)} \left(\sqrt{\Delta t_i(n)} - \xi_i(n) \right) \varepsilon_{i,n} \right| + \left| t \int_{|x|>m_n} x \nu(dx) \right| \\
 &\xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (6.30)
 \end{aligned}$$

Wendet man nun die Dreiecksungleichung an, so gilt

$$\begin{aligned}
 \sup_{0 \leq t \leq T} \left| L(t) - \tilde{L}_n(t) \right| &= \sup_{0 \leq t \leq T} \left| L(t) - \bar{L}_n(t) + \bar{L}_n(t) - \tilde{L}_n(t) \right| \\
 &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} \left| L(t) - \bar{L}_n(t) \right| + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \bar{L}_n(t) - \tilde{L}_n(t) \right|.
 \end{aligned}$$

Daraus kann man mit Gleichung (6.30) und (6.24)

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| L(t) - \tilde{L}_n(t) \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (6.31)$$

folgern.

(ii) Approximationsverfahren für den Volatilitätsprozess $\sigma^2(t)$

Der Volatilitätsprozess σ_n^2 ist mithilfe der GJR GARCH(1,1)-Gleichung (6.9) konstruiert. Die Gleichung (6.9) ist laut [14, Gleichung (1.2)] eine Iteration der Form

$$R_{i+1} := Q_{i+1} + M_{i+1} R_i, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

und somit gilt nach [14]

$$R_i = \sum_{j=1}^i Q_j \prod_{k=j+1}^i M_k + R_0 \prod_{j=1}^i M_j. \quad (6.32)$$

Mithilfe von Gleichung (6.32) erhält man hier, wenn man $R_i = \sigma_{i,n}^2$, $Q_j = \theta \Delta t_j(n)$ und $M_k = e^{-\eta \Delta t_k(n)} \left(1 + \left[(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{k,n} \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{k,n} < 0\}} \right] \varphi \Delta t_k(n) \varepsilon_{k,n}^2 \right)$ setzt, die explizite Repräsentation

$$\begin{aligned} \sigma_{i,n}^2 &= \theta \sum_{j=1}^i \Delta t_j(n) \prod_{k=j+1}^i e^{-\eta \Delta t_k(n)} \left(1 + \left[(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{k,n} \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{k,n} < 0\}} \right] \varphi \Delta t_k(n) \varepsilon_{k,n}^2 \right) \\ &\quad + \sigma_{0,n}^2 \prod_{j=1}^i e^{-\eta \Delta t_j(n)} \left(1 + \left[(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{j,n} \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{j,n} < 0\}} \right] \varphi \Delta t_j(n) \varepsilon_{j,n}^2 \right), \end{aligned} \quad (6.33)$$

für $i = 0, 1, \dots, N_n$. Man definiert für $n = 1, 2, \dots$ einen zeitdiskreten Prozess

$$X_{i,n} = \eta t_i(n) - \sum_{j=1}^i \log \left(1 + \left[(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{j,n} \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{j,n} < 0\}} \right] \varphi \Delta t_j(n) \varepsilon_{j,n}^2 \right), \quad (6.34)$$

und dessen zeitstetige Entsprechung für $0 \leq t \leq T$ wird durch Interpolation definiert als

$$\begin{aligned} \tilde{X}_n(t) &:= X_{N_n(t),n} \\ &= \eta t_{N_n(t)}(n) - \sum_{i=1}^{N_n(t)} \log \left(1 + \left[(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{i,n} \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{i,n} < 0\}} \right] \varphi \Delta t_i(n) \varepsilon_{i,n}^2 \right). \end{aligned} \quad (6.36)$$

Dabei ist $N_n(t)$ der Zählprozess aus (6.20), so dass $\tilde{X}_n(\tau_{i,n}^*) = X_{N_n(\tau_{i,n}^*),n} = X_{i,n}$ gilt. Um die Konvergenzaussage aus der Proposition 6.7 anwenden zu können, definiert man sich für $0 \leq t \leq T$ den Hilfsprozess

$$\begin{aligned} \bar{X}_n(t) &= \eta t_{N_n(t)}(n) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{N_n(t)} \log \left(1 + \left[(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\Delta L(\tau_{i,n}) \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\Delta L(\tau_{i,n}) < 0\}} \right] \varphi \mathbf{1}_{\{\tau_{i,n} < \infty\}} (\Delta L(\tau_{i,n}))^2 \right). \end{aligned} \quad (6.37)$$

Zu beachten ist dabei, dass die Indikatorfunktionen $\mathbf{1}_{\{\varepsilon_{i,n} \geq 0\}}$ und $\mathbf{1}_{\{\Delta L(\tau_{i,n}) \geq 0\}}$ zu allen Zeitpunkten t , wobei $0 \leq t \leq T$ gilt, die gleichen Werte annehmen. Dies ist wegen der Definition von $\varepsilon_{i,n}$, siehe (6.13), und aufgrund der Annahme, dass $\mu_i(n) = 0$ ist, erfüllt. Das Gleiche gilt natürlich für die Indikatorfunktionen $\mathbf{1}_{\{\varepsilon_{i,n} < 0\}}$ und $\mathbf{1}_{\{\Delta L(\tau_{i,n}) < 0\}}$. Um die Abweichung von \tilde{X}_n zu \bar{X} zu zeigen, verwendet man folgende Abschätzung

$$\log(1 + x) - \log(1 + y) = \log \frac{1 + x}{1 + y} \leq \frac{1 + x}{1 + y} - 1 = \frac{x - y}{1 + y} \leq x - y,$$

wobei $x \geq 0$ und $y \geq 0$. Da $\left[(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{i,n} \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{i,n} < 0\}} \right] \varphi \Delta t_i(n) \varepsilon_{i,n}^2 \geq 0$ und auch $\left[(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\Delta L(\tau_{i,n}) \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\Delta L(\tau_{i,n}) < 0\}} \right] \varphi \mathbf{1}_{\{\tau_{i,n} < \infty\}} (\Delta L(\tau_{i,n}))^2 \geq 0$ ist, gilt

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{\log \left(1 + \left[(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{i,n} \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{i,n} < 0\}} \right] \varphi \Delta t_i(n) \varepsilon_{i,n}^2 \right)}{\left[(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{i,n} \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{i,n} < 0\}} \right] \varphi} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\log \left(1 + \left[(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\Delta L(\tau_{i,n}) \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\Delta L(\tau_{i,n}) < 0\}} \right] \varphi \mathbf{1}_{\{\tau_{i,n} < \infty\}} (\Delta L(\tau_{i,n}))^2 \right)}{\left[(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{i,n} \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{i,n} < 0\}} \right] \varphi} \right| \\
 & \leq \left| \frac{\left[(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{i,n} \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{i,n} < 0\}} \right] \varphi \Delta t_i(n) \varepsilon_{i,n}^2}{\left[(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{i,n} \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{i,n} < 0\}} \right] \varphi} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\left[(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\Delta L(\tau_{i,n}) \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\Delta L(\tau_{i,n}) < 0\}} \right] \varphi \mathbf{1}_{\{\tau_{i,n} < \infty\}} (\Delta L(\tau_{i,n}))^2}{\left[(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{i,n} \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{i,n} < 0\}} \right] \varphi} \right| \\
 & = \left| \Delta t_i(n) \varepsilon_{i,n}^2 - \mathbf{1}_{\{\tau_{i,n} < \infty\}} (\Delta L(\tau_{i,n}))^2 \right| \\
 & = \left| \Delta t_i(n) \varepsilon_{i,n}^2 - (\varepsilon_{i,n} \xi_i(n))^2 \right| \\
 & = \left| (\Delta t_i(n) - \xi_i^2(n)) \varepsilon_{i,n}^2 \right|. \tag{6.38}
 \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass die rechte Seite von (6.38), wenn sie über $1 \leq i \leq N_n(t)$ aufsummiert wird, gleichmäßig auf $[0, T]$ in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert, da für das asymptotische Verhalten von $\xi_i^2(n)$, wie in Teil(i) des Beweises (siehe (6.26)) gezeigt wurde, $\max_{i=1, \dots, N_n} \left| \frac{\xi_i^2(n)}{\Delta t_i(n)} - 1 \right| \rightarrow 0$ gilt, falls $n \rightarrow \infty$. Ferner erhält man

$$\begin{aligned}
 E \left[\sum_{i=1}^{N_n(t)} |(\Delta t_i(n) - \xi_i^2(n)) \varepsilon_{i,n}^2| \right] &= \sum_{k=0}^{\infty} E \left[\sum_{i=1}^k |(\Delta t_i(n) - \xi_i^2(n)) \varepsilon_{i,n}^2| \mathbf{1}_{\{N_n(t)=k\}} \right] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^k |\Delta t_i(n) - \xi_i^2(n)| E [\varepsilon_{i,n}^2 \mathbf{1}_{\{N_n(t)=k\}}] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^k |\Delta t_i(n) - \xi_i^2(n)| E [\varepsilon_{i,n}^2] P(N_n(t) = k) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^k \Delta t_i(n) \left| \frac{\xi_i^2(n)}{\Delta t_i(n)} - 1 \right| P(N_n(t) = k) \\
 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^k \Delta t_i(n) \max_{j=1, \dots, k} \left| \frac{\xi_j^2(n)}{\Delta t_j(n)} - 1 \right| P(N_n(t) = k) \\
 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^k \Delta t_i(n) \max_{j=1, \dots, N_n} \left| \frac{\xi_j^2(n)}{\Delta t_j(n)} - 1 \right| P(N_n(t) = k) \\
 &= \max_{j=1, \dots, N_n} \left| \frac{\xi_j^2(n)}{\Delta t_j(n)} - 1 \right| \sum_{k=0}^{\infty} P(N_n(t) = k) \sum_{i=1}^k \Delta t_i(n)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq T \max_{j=1,\dots,N_n} \left| \frac{\xi_j^2(n)}{\Delta t_j(n)} - 1 \right| \sum_{k=0}^{\infty} P(N_n(t) = k) \\
 &= T \max_{j=1,\dots,N_n} \left| \frac{\xi_j^2(n)}{\Delta t_j(n)} - 1 \right|.
 \end{aligned}$$

Sei $C := \left[(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{i,n} \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{i,n} < 0\}} \right] \varphi$, dann gilt mit der Abschätzung (6.38) und der Konvergenz von $\sum_{i=1}^{N_n(t)} \left| (\Delta t_i(n) - \xi_i^2(n)) \varepsilon_{i,n}^2 \right|$ gegen 0

$$\begin{aligned}
 &\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \bar{X}_n(t) - \tilde{X}_n(t) \right| \\
 &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \eta t_{N_n(t)}(n) - \eta t_{N_n(t)}(n) \right| \\
 &\quad + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \sum_{i=1}^{N_n(t)} \log \left(1 + \left[(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{i,n} \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{i,n} < 0\}} \right] \varphi \Delta t_i(n) \varepsilon_{i,n}^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{i=1}^{N_n(t)} \log \left(1 + \left[(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\Delta L(\tau_{i,n}) \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\Delta L(\tau_{i,n}) < 0\}} \right] \varphi \mathbf{1}_{\{\tau_{i,n} < \infty\}} (\Delta L(\tau_{i,n}))^2 \right) \right| \\
 &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{i=1}^{N_n(t)} \left| \log \left(1 + \left[(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{i,n} \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{i,n} < 0\}} \right] \varphi \Delta t_i(n) \varepsilon_{i,n}^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. - \log \left(1 + \left[(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\Delta L(\tau_{i,n}) \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\Delta L(\tau_{i,n}) < 0\}} \right] \varphi \mathbf{1}_{\{\tau_{i,n} < \infty\}} (\Delta L(\tau_{i,n}))^2 \right) \right| \\
 &\leq C \sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{i=1}^{N_n(t)} \left| (\Delta t_i(n) - \xi_i^2(n)) \varepsilon_{i,n}^2 \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad n \rightarrow \infty. \tag{6.39}
 \end{aligned}$$

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass der Prozess \bar{X} aus (6.37) eine Approximation der Form (6.17) an den Prozess X ist, der in Gleichung (6.5) definiert wurde. Setzt man $Z(t) = X(t)$ und $m_n^Z = \log \left(1 + \left[(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\Delta L(s) \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\Delta L(s) < 0\}} \right] \varphi m_n^2 \right)$, wobei m_n eine strikt positive Folge reeller Zahlen $1 \geq m_n \downarrow 0$ ist, so erhält man mit (6.16)

$$\begin{aligned}
 \tau_{i,n}^Z &= \inf \{ t \in [t_{i-1}(n), t_i(n)) : \\
 &\quad | \Delta X(t) | > \log \left(1 + \left[(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\Delta L(s) \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\Delta L(s) < 0\}} \right] \varphi m_n^2 \right) \} \\
 &= \inf \{ t \in [t_{i-1}(n), t_i(n)) : | \Delta L(t) | > m_n \} \\
 &= \tau_{i,n}.
 \end{aligned}$$

Der Prozess \bar{X} aus (6.37) ist von der Form (6.17), da X den Drift $\gamma^Z - \int_{m_n^Z \leq |z| \leq 1} z \nu^Z(dz) = \gamma^X - \int_{m_n^X \leq |x| \leq 1} x \nu^X(dx) = \eta$ besitzt (siehe Proposition 4.4) und

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{1}_{\{\tau_{i,n}^Z \leq t\}} \Delta Z(\tau_{i,n}^Z) \\
 &= \sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{1}_{\{\tau_{i,n} \leq t\}} \Delta X(\tau_{i,n})
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{N_n(t)} \log \left(1 + \left[(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\Delta L(\tau_{i,n}) \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\Delta L(\tau_{i,n}) < 0\}} \right] \varphi \mathbf{1}_{\{\tau_{i,n} < \infty\}} (\Delta L(\tau_{i,n}))^2 \right)$$

gilt. Da der Lévyprozess X von endlicher Variation ist und $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{N_n(t)}(n) = t$ gilt, ergibt sich mit Teil (ii) der Proposition 6.7

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} |X(t) - \bar{X}_n(t)| \\ & \leq \sup_{0 \leq t \leq T} |\eta t - \eta t_{N_n(t)}(n)| \\ & \quad + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| - \sum_{0 \leq s \leq t} \log \left(1 + \left[(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\Delta L(s) \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\Delta L(s) < 0\}} \right] \varphi (\Delta L(s))^2 \right) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^{N_n(t)} \log \left(1 + \left[(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\Delta L(\tau_{i,n}) \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\Delta L(\tau_{i,n}) < 0\}} \right] \varphi \mathbf{1}_{\{\tau_{i,n} < \infty\}} (\Delta L(\tau_{i,n}))^2 \right) \right| \\ & = \sup_{0 \leq t \leq T} |\eta t - \eta t_{N_n(t)}(n)| + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{1}_{\{\tau_{i,n} \leq t\}} \Delta X(\tau_{i,n}) - X^d(t) \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (6.40) \end{aligned}$$

wobei $X^d(t) := \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta X(s)$ die Sprungkomponente des Prozesses X darstellt, für die hier $X^d(t) = \sum_{0 \leq s \leq t} \log \left(1 + \left[(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\Delta L(s) \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\Delta L(s) < 0\}} \right] \varphi (\Delta L(s))^2 \right)$ gilt. Mithilfe der Dreiecksungleichung erhält man

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} |X(t) - \tilde{X}_n(t)| &= \sup_{0 \leq t \leq T} |X(t) - \bar{X}_n(t) + \bar{X}_n(t) - \tilde{X}_n(t)| \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - \bar{X}_n(t)| + \sup_{0 \leq t \leq T} |\bar{X}_n(t) - \tilde{X}_n(t)|. \end{aligned}$$

Daraus kann man mit Gleichung (6.39) und (6.40)

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t) - \tilde{X}_n(t)| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (6.41)$$

folgern.

Nun kann man zeigen, dass sich die interpolierte Version von σ_n^2 dem Volatilitätsprozess $\sigma^2(t)$ annähert. Mit Gleichung (6.34) erhält man

$$\begin{aligned} e^{-X_{i,n}} &= e^{-\eta t_i(n) + \sum_{j=1}^i \log \left(1 + \left[(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{j,n} \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{j,n} < 0\}} \right] \varphi \Delta t_j(n) \varepsilon_{j,n}^2 \right)} \\ &= e^{-\eta t_i(n)} \prod_{j=1}^i \left(1 + \left[(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{j,n} \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{j,n} < 0\}} \right] \varphi \Delta t_j(n) \varepsilon_{j,n}^2 \right) \\ &= \prod_{j=1}^i e^{-\eta t_j(n)} \left(1 + \left[(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{j,n} \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{j,n} < 0\}} \right] \varphi \Delta t_j(n) \varepsilon_{j,n}^2 \right). \end{aligned}$$

Substituiert man dies in Gleichung (6.33) kommt man zu

$$\sigma_{i,n}^2 = \theta e^{-X_{i,n}} \sum_{j=1}^i \Delta t_j(n) e^{X_{j,n}} + \sigma^2(0) e^{-X_{i,n}}. \quad (6.42)$$

Man definiert den stückweise konstanten Prozess

$$\tilde{\sigma}_n^2(t) := \theta e^{-\tilde{X}_n(t)} \sum_{i=1}^{N_n(t)} e^{\tilde{X}_n(\tau_{i,n}^*)} \Delta t_i(n) + \sigma^2(0) e^{-\tilde{X}_n(t)}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (6.43)$$

Nun konvergiert $e^{-\tilde{X}_n}$ wegen (6.41) gleichmäßig auf $[0, T]$ gegen e^{-X} nach Wahrscheinlichkeit. Abgesehen von möglicherweise dem letzten Intervall, für das $i = N_n(t)$ gilt, ist $\tilde{X}_n(\tau_{i,n}^*) = \tilde{X}_n(t_i(n))$, da \tilde{X}_n nur zu den Zeitpunkten $t = \tau_{i,n}^*$ den Wert ändern kann und ansonsten konstant ist. Somit gilt

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \sum_{i=1}^{N_n(t)} \Delta t_i(n) \left(e^{\tilde{X}_n(\tau_{i,n}^*)} - e^{\tilde{X}_n(t_i(n))} \right) \right| \\ &= \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \Delta t_{N_n(t)}(n) \left(e^{\tilde{X}_n(\tau_{N_n(t),n}^*)} - e^{\tilde{X}_n(t_{N_n(t)}(n))} \right) \right| \\ &\leq 2\Delta t(n) \sup_{0 \leq t \leq T} e^{\tilde{X}_n(t)} \\ &\leq 2e^{\eta T} \Delta t(n) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

da der Prozess $\tilde{X}_n(t)$ nach oben durch ηT beschränkt ist. Nun schätzt man ab

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \sum_{i=1}^{N_n(t)} \Delta t_i(n) \left(e^{X(t_i(n))} - e^{\tilde{X}_n(t_i(n))} \right) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{N_n(T)} \Delta t_i(n) e^{X(t_i(n))} \left| 1 - e^{\tilde{X}_n(t_i(n)) - X(t_i(n))} \right| \\ &\leq T e^{\eta T} \sup_{0 \leq s \leq T} \left| 1 - e^{\tilde{X}_n(s) - X(s)} \right|. \end{aligned}$$

Mit (6.41) konvergiert der letzte Ausdruck in Wahrscheinlichkeit gegen 0. Schließlich konvergiert nach [29, Satz II.2.1] der Ausdruck $\sum_{i=1}^{N_n(t)} e^{X(t_i(n))} \Delta t_i(n)$ gleichmäßig auf $[0, T]$ gegen das Integral $\int_0^t e^{X(s)} ds$ nach Wahrscheinlichkeit. Somit erhält man

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \sum_{i=1}^{N_n(t)} e^{\tilde{X}_n(\tau_{i,n}^*)} \Delta t_i(n) - \int_0^t e^{X(s)} ds \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Mithilfe der Gleichungen (6.6) und (6.43) folgert man daraus nun, dass

$$\tilde{\sigma}_n^2(t) \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta e^{-X(t)} \int_0^t e^{X(s)} ds + \sigma^2(0) e^{-X(t)} = \sigma^2(t), \quad (6.44)$$

gleichmäßig für $0 \leq t \leq T$.

(iii) Approximationsverfahren für den zeitstetigen GJR GARCH-Prozess $G(t)$

Man definiert eine GJR GARCH-Folge \tilde{G}_n und zeigt die Konvergenz dieser Folge gegen den zeitstetigen GJR GARCH-Prozess G . Für die Folge $G_{i,n}$ aus (6.8) erhält man durch Iteration

$$G_{i,n} = G_{i-1,n} + \sigma_{i-1,n} \sqrt{\Delta t_i(n)} \varepsilon_{i,n}$$

$$= \sum_{j=1}^i \sigma_{j-1,n} \sqrt{\Delta t_j(n)} \varepsilon_{j,n}, \quad i = 1, \dots, N_n,$$

wobei $\varepsilon_{j,n}$ die Gleichung (6.13) und $\sigma_{j,n}^2$ die Gleichung (6.33) erfüllt. Man interpoliert den zeitdiskreten Prozess $G_{i,n}$ um eine zeitstetige Version

$$\tilde{G}_n(t) = \sum_{i=1}^{N_n(t)} \sigma_{i-1,n} \sqrt{\Delta t_i(n)} \varepsilon_{i,n}, \quad 0 \leq t \leq T \quad (6.45)$$

zu erhalten. Sei $\tilde{\sigma}_n$ wie in der Gleichung (6.43) definiert dann erhält man mit \tilde{L}_n aus (6.21)

$$\tilde{G}_n(t) = \sum_{i=1}^{N_n(t)} \tilde{\sigma}_n(\tau_{i-1,n}^*) \sqrt{\Delta t_i(n)} \varepsilon_{i,n} = \int_0^t \tilde{\sigma}_n(s-) d\tilde{L}_n(s), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Durch diese Darstellung liegt es nahe, dass $\tilde{G}_n(t) \xrightarrow{\mathbb{P}} G(t) = \int_0^t \sigma(s-) dL(s)$ gleichmäßig für $t \in [0, T]$ konvergiert. Diese Behauptung soll im Folgenden gezeigt werden. Man definiert $D\tilde{L}_n(\tau_{i,n}^*) := \tilde{L}_n(\tau_{i,n}^*) - \tilde{L}_n(\tau_{i-1,n}^*)$ und $DL(\tau_{i,n}^*) := L(\tau_{i,n}^*) - L(\tau_{i-1,n}^*)$ für $i = 1, 2, \dots, N_n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} D\tilde{L}_n(\tau_{i,n}^*) &= \tilde{L}_n(\tau_{i,n}^*) - \tilde{L}_n(\tau_{i-1,n}^*) \\ &= \sum_{j=1}^{N_n(\tau_{i,n}^*)} \sqrt{\Delta t_j(n)} \varepsilon_{j,n} - \sum_{j=1}^{N_n(\tau_{i-1,n}^*)} \sqrt{\Delta t_j(n)} \varepsilon_{j,n} \\ &= \sum_{j=N_n(\tau_{i-1,n}^*)+1}^{N_n(\tau_{i,n}^*)} \sqrt{\Delta t_j(n)} \varepsilon_{j,n} \\ &= \sum_{j=i-1+1}^i \sqrt{\Delta t_j(n)} \varepsilon_{j,n} \\ &= \sqrt{\Delta t_i(n)} \varepsilon_{i,n} \end{aligned}$$

und damit lässt sich der Prozess \tilde{G}_n schreiben als

$$\begin{aligned} \tilde{G}_n(t) &= \sum_{i=1}^{N_n(t)} \tilde{\sigma}_n(\tau_{i-1,n}^*) \sqrt{\Delta t_i(n)} \varepsilon_{i,n} \\ &= \sum_{i=1}^{N_n(t)} [\tilde{\sigma}_n(\tau_{i-1,n}^*) - \sigma(\tau_{i-1,n}^*)] \sqrt{\Delta t_i(n)} \varepsilon_{i,n} + \sum_{i=1}^{N_n(t)} \sigma(\tau_{i-1,n}^*) \sqrt{\Delta t_i(n)} \varepsilon_{i,n} \\ &= \sum_{i=1}^{N_n(t)} [\tilde{\sigma}_n(\tau_{i-1,n}^*) - \sigma(\tau_{i-1,n}^*)] \sqrt{\Delta t_i(n)} \varepsilon_{i,n} + \sum_{i=1}^{N_n(t)} \sigma(\tau_{i-1,n}^*) D\tilde{L}_n(\tau_{i,n}^*) \\ &= \sum_{i=1}^{N_n(t)} [\tilde{\sigma}_n(\tau_{i-1,n}^*) - \sigma(\tau_{i-1,n}^*)] \sqrt{\Delta t_i(n)} \varepsilon_{i,n} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_n(t)} \sigma(\tau_{i-1,n}^*) \left(D\tilde{L}_n(\tau_{i,n}^*) - DL(\tau_{i,n}^*) \right) + \sum_{i=1}^{N_n(t)} \sigma(\tau_{i-1,n}^*) DL(\tau_{i,n}^*). \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck kann abgekürzt geschrieben werden als

$$\tilde{G}_n(t) =: M_{N_n(t),n} + Q_{N_n(t),n} + R_{N_n(t),n}, \quad (6.46)$$

wobei

$$M_{i,n} := \sum_{k=1}^i [\tilde{\sigma}_n(\tau_{k-1,n}^*) - \sigma(\tau_{k-1,n}^*)] \sqrt{\Delta t_k(n)} \varepsilon_{k,n} = \sum_{k=1}^i a_{k-1,n} \sqrt{\Delta t_k(n)} \varepsilon_{k,n}$$

und

$$Q_{i,n} := \sum_{k=1}^i \sigma(\tau_{k-1,n}^*) \left(D\tilde{L}_n(\tau_{k,n}^*) - DL(\tau_{k,n}^*) \right) = \sum_{k=1}^i \sigma(\tau_{k-1,n}^*) D_{k,n}$$

gilt. Nun soll die Vermutung von oben, dass \tilde{G}_t gegen $G(t)$ konvergiert gezeigt werden. Dazu werden die einzelnen Summanden der Gleichung (6.46) betrachtet. Man zeigt, dass der Term $M_{i,n}$ gleichmäßig asymptotisch vernachlässigbar ist. Dies soll mit der Markov'schen und der Doob'schen Ungleichung gezeigt werden. Jedoch besitzt $\tilde{\sigma}_n^2(t)$ unter den gegebenen Bedingungen nicht notwendigerweise einen endlichen Erwartungswert. Deshalb benötigt man ein Abbruchkriterium. Für $v > 0$ und $C > 0$ erhält man mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P \left(\max_{i=0,\dots,N_n} |M_{i,n}| > v \right) &\leq P \left(\max_{i=0,\dots,N_n} |M_{i,n}| > v, \sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{\sigma}_n(t) - \sigma(t)| \leq C \right) \\ &\quad + P \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{\sigma}_n(t) - \sigma(t)| > C \right). \end{aligned}$$

Der zweite Term auf der rechten Seite konvergiert wegen (6.44) gegen 0, wenn $n \rightarrow \infty$. Der erste Term auf der rechten Seite ist beschränkt durch die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P \left(\max_{i=0,\dots,N_n} \left| \sum_{k=1}^i a_{k-1,n} \mathbb{1}_{\{|a_{k-1,n}| \leq C\}} \sqrt{\Delta t_k(n)} \varepsilon_{k,n} \right| > v \right) = P \left(\max_{i=0,\dots,N_n} |M_{i,n}^C| > v \right),$$

wobei man $M_{i,n}^C := \sum_{k=1}^i a_{k-1,n} \mathbb{1}_{\{|a_{k-1,n}| \leq C\}} \sqrt{\Delta t_k(n)} \varepsilon_{k,n}$ definiert. Um die Doob'sche Ungleichung anwenden zu können, muss $M_{i,n}^C$ ein Martingal sein. Deshalb soll als nächstes gezeigt werden, dass $(M_{i,n}^C)_{i=0,\dots,N_n}$ für jedes $n \geq 1$ ein Martingal bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_{\tau_{i,n}^*})_{i=0,\dots,N_n}$ ist. Da die $\varepsilon_{k,n}$ unabhängig sind mit $E[\varepsilon_{k,n}] = 0$ und $E \left[a_{k-1,n} \mathbb{1}_{\{|a_{k-1,n}| \leq C\}} \right] < C < \infty$ für $k = 1, \dots, i$ und $\varepsilon_{k,n}$ unabhängig von $a_{k-1,n}$ ist, gilt

$$\begin{aligned} E \left[M_{i,n}^C \right] &= E \left[\sum_{k=1}^i a_{k-1,n} \mathbb{1}_{\{|a_{k-1,n}| \leq C\}} \sqrt{\Delta t_k(n)} \varepsilon_{k,n} \right] \\ &= \sum_{k=1}^i E \left[a_{k-1,n} \mathbb{1}_{\{|a_{k-1,n}| \leq C\}} \sqrt{\Delta t_k(n)} \varepsilon_{k,n} \right] \\ &= \sum_{k=1}^i E \left[a_{k-1,n} \mathbb{1}_{\{|a_{k-1,n}| \leq C\}} \right] \sqrt{\Delta t_k(n)} E[\varepsilon_{k,n}] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Damit lässt sich für $0 \leq j < i$ die Martingaleigenschaft

$$\begin{aligned} E[M_{i,n}^C | \mathcal{F}_{\tau_{j,n}^*}] &= E[M_{j,n}^C + (M_{i,n}^C - M_{j,n}^C) | \mathcal{F}_{\tau_{j,n}^*}] \\ &= E[M_{j,n}^C | \mathcal{F}_{\tau_{j,n}^*}] + E[M_{i,n}^C - M_{j,n}^C | \mathcal{F}_{\tau_{j,n}^*}] \\ &= M_{j,n}^C + E[M_{i,n}^C - M_{j,n}^C] \\ &= M_{j,n}^C \end{aligned}$$

zeigen, da $M_{j,n}^C$ messbar bezüglich $\mathcal{F}_{\tau_{j,n}^*}$ ist und $M_{i,n}^C - M_{j,n}^C$ unabhängig von $\mathcal{F}_{\tau_{j,n}^*}$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} E[|M_{i,n}^C|] &= E\left[\left|\sum_{k=1}^i a_{k-1,n} \mathbf{1}_{\{|a_{k-1,n}| \leq C\}} \sqrt{\Delta t_k(n)} \varepsilon_{k,n}\right|\right] \\ &\leq \sum_{k=1}^i E\left[\left|a_{k-1,n} \mathbf{1}_{\{|a_{k-1,n}| \leq C\}} \sqrt{\Delta t_k(n)} \varepsilon_{k,n}\right|\right] \\ &\leq i \max_{1 \leq k \leq i} \left\{ E\left[\left|a_{k-1,n} \mathbf{1}_{\{|a_{k-1,n}| \leq C\}} \sqrt{\Delta t_k(n)} \varepsilon_{k,n}\right|\right] \right\} \\ &= i \max_{1 \leq k \leq i} \left\{ E\left[|a_{k-1,n}| \mathbf{1}_{\{|a_{k-1,n}| \leq C\}}\right] \sqrt{\Delta t_k(n)} E[|\varepsilon_{k,n}|] \right\} \\ &\leq i \max_{1 \leq k \leq i} \{C \sqrt{\Delta t_k(n)} E[|\varepsilon_{k,n}|]\} < \infty. \end{aligned}$$

Es gilt $E[\varepsilon_{k,n}^2] = \text{Var}(\varepsilon_{k,n}) = 1$ für $k = 1, \dots, N_n$ und $\sum_{k=1}^{N_n} \Delta t_k \leq T$. Nutzt man dies zusammen mit der Markov'sche Ungleichung aus Satz 6.1 und der quadratischen Maximalgleichung von Doob aus Satz 6.2 so erhält man

$$\begin{aligned} P\left(\max_{i=1, \dots, N_n} |M_{i,n}^C| > v\right) &\leq \frac{1}{v^2} E\left[\max_{i=1, \dots, N_n} (M_{i,n}^C)^2\right] \\ &\leq \frac{4}{v^2} E\left[(M_{N_n,n}^C)^2\right] \\ &= \frac{4}{v^2} E\left[\sum_{k=1}^{N_n} a_{k-1,n}^2 \mathbf{1}_{\{|a_{k-1,n}| \leq C\}} \Delta t_k(n) \varepsilon_{k,n}^2\right] \\ &= \frac{4}{v^2} \sum_{k=1}^{N_n} E\left[a_{k-1,n}^2 \mathbf{1}_{\{|a_{k-1,n}| \leq C\}}\right] \Delta t_k(n) E[\varepsilon_{k,n}^2] \\ &\leq \frac{4T}{v^2} E\left[\min\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{\sigma}_n(t) - \sigma(t)|^2, C^2\right)\right]. \quad (6.47) \end{aligned}$$

Durch die Konvergenz in (6.44) und den Lebesgue'schen Konvergenzsatz konvergiert (6.47) in Wahrscheinlichkeit gegen 0. Somit gilt $\max_{i=1, \dots, N_n} M_{i,n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, wenn $n \rightarrow \infty$.

Als nächstes wird $Q_{i,n}$ betrachtet. Für (6.6) erhält man mit der monotonen Konvergenz

$$E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \sigma^2(t)\right] = \sup_{0 \leq t \leq T} E[\sigma^2(t)]$$

und schließlich ergibt sich mit $E[\sigma^2(t)] = \frac{\theta}{-\Psi(1)} + E[\sigma^2(0)]e^{t\Psi(1)}$ aus Proposition 4.9 folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \sigma^2(t) \right] &= \sup_{0 \leq t \leq T} E[\sigma^2(t)] \\ &\leq \frac{\theta}{-\Psi(1)} + (E[\sigma^2(0)]) e^{T\Psi(1)} \\ &=: C^*. \end{aligned}$$

Als Nächstes soll gezeigt werden, dass $(Q_{i,n})_{i=0,\dots,N_n}$ ein Martingal bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_{\tau_{i,n}^*})_{i=0,\dots,N_n}$ ist, da diese Eigenschaft benötigt wird, um die Doob'sche Ungleichung anwenden zu können. Dazu sind einige Vorüberlegungen zu treffen. Für die Prozesse L und \tilde{L}_n gilt

$$E \left[\tilde{L}_n(\tau_{k,n}^*) \right] = E \left[\sum_{i=1}^{N_n(\tau_{k,n}^*)} \sqrt{\Delta t_i(n)} \varepsilon_{i,n} \right] = E \left[\sum_{i=1}^k \sqrt{\Delta t_i(n)} \varepsilon_{i,n} \right] = \sum_{i=1}^k \sqrt{\Delta t_i(n)} E[\varepsilon_{i,n}] = 0$$

und

$$\begin{aligned} E[L(\tau_{k,n}^*)] &= E[E[L(\tau_{k,n}^*) | \mathcal{F}_{\tau_{0,n}^*}]] = E[L(\tau_{0,n}^*) + (\tau_{k,n}^* - \tau_{0,n}^*)E[L(1)]] \\ &= E[L(0)] + \tau_{k,n}^* E[0] = 0, \end{aligned}$$

wobei $E[\varepsilon_{k,n}] = 0$, $\tau_{0,n}^* = 0$, $L(0) = 0$ und $E[L(1)] = 0$ zuvor getroffene Annahmen sind. Mit diesen Erwartungswerten erhält man

$$\begin{aligned} E[D_{k,n}] &= E[D\tilde{L}_n(\tau_{k,n}^*) - DL(\tau_{k,n}^*)] \\ &= E[\tilde{L}_n(\tau_{k,n}^*) - \tilde{L}_n(\tau_{k-1,n}^*) - L(\tau_{k,n}^*) + L(\tau_{k-1,n}^*)] \\ &= E[\tilde{L}_n(\tau_{k,n}^*)] - E[\tilde{L}_n(\tau_{k-1,n}^*)] - E[L(\tau_{k,n}^*)] + E[L(\tau_{k-1,n}^*)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aufgrund der Unabhängigkeit der Inkremente von L und da $E[\sigma(\tau_{k-1,n}^*)] < \infty$ gilt, was nach Proposition 4.9 aus $E[L^2(1)] = 1 < \infty$ und $E[\sigma^2(0)] < \infty$ folgt, ergibt sich

$$E[Q_{i,n}] = E \left[\sum_{k=1}^i \sigma(\tau_{k-1,n}^*) D_{k,n} \right] = \sum_{k=1}^i E[\sigma(\tau_{k-1,n}^*) D_{k,n}] = \sum_{k=1}^i E[\sigma(\tau_{k-1,n}^*)] E[D_{k,n}] = 0.$$

Mithilfe dieser Berechnungen kann man nun zeigen, dass $Q_{i,n}$ für $0 \leq j < i$ die Martingaleigenschaft

$$\begin{aligned} E[Q_{i,n} | \mathcal{F}_{\tau_{j,n}^*}] &= E[Q_{j,n} + (Q_{i,n} - Q_{j,n}) | \mathcal{F}_{\tau_{j,n}^*}] \\ &= E[Q_{j,n} | \mathcal{F}_{\tau_{j,n}^*}] + E[Q_{i,n} - Q_{j,n} | \mathcal{F}_{\tau_{j,n}^*}] \\ &= Q_{j,n} + E[Q_{i,n} - Q_{j,n}] \\ &= Q_{j,n} \end{aligned}$$

erfüllt, da $Q_{j,n}$ messbar bezüglich $\mathcal{F}_{\tau_{j,n}^*}$ ist und $Q_{i,n} - Q_{j,n}$ unabhängig von $\mathcal{F}_{\tau_{j,n}^*}$. Weiter gilt

$$E[|Q_{i,n}|] = E \left[\left| \sum_{k=1}^i \sigma(\tau_{k-1,n}^*) D_{k,n} \right| \right]$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \sum_{k=1}^i E[|\sigma(\tau_{k-1,n}^*)D_{k,n}|] \\
 &= \sum_{k=1}^i E[|\sigma(\tau_{k-1,n}^*)|]E[|D_{k,n}|] \\
 &= \sum_{k=1}^i E[\sigma(\tau_{k-1,n}^*)]E[|D\tilde{L}_n(\tau_{k,n}^*) - DL(\tau_{k,n}^*)|] \\
 &\leq \sum_{k=1}^i E[\sigma(\tau_{k-1,n}^*)] \left(E[|D\tilde{L}_n(\tau_{k,n}^*)|] + E[|DL(\tau_{k,n}^*)|] \right) \\
 &= \sum_{k=1}^i E[\sigma(\tau_{k-1,n}^*)] \left(E[|\sqrt{\Delta t_k(n)}\varepsilon_{k,n}|] + E[|L(\tau_{k,n}^*) - L(\tau_{k-1,n}^*)|] \right) \\
 &\leq \sum_{k=1}^i E[\sigma(\tau_{k-1,n}^*)] \left(\sqrt{\Delta t_k(n)}E[|\varepsilon_{k,n}|] + E[|L(\tau_{k,n}^*)|] + E[|L(\tau_{k-1,n}^*)|] \right) < \infty.
 \end{aligned}$$

Zusammen mit der Markov'sche Ungleichung aus Satz 6.1 und der quadratische Maximalungleichung von Doob aus Satz 6.2 erhält man

$$\begin{aligned}
 P\left(\max_{i=1,\dots,N_n} |Q_{i,n}| > v\right) &\leq \frac{1}{v^2} \text{Var}\left(\max_{i=1,\dots,N_n} Q_{i,n}\right) \\
 &\leq \frac{1}{v^2} E\left[\max_{i=1,\dots,N_n} \left(\sum_{k=1}^i \sigma(\tau_{k-1,n}^*)D_{k,n}\right)^2\right] \\
 &\leq \frac{4}{v^2} E\left[\left(\sum_{i=1}^{N_n} \sigma(\tau_{i-1,n}^*)D_{i,n}\right)^2\right] \\
 &= \frac{4}{v^2} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{N_n} \sigma(\tau_{i-1,n}^*)D_{i,n}\right) \\
 &= \frac{4}{v^2} \sum_{i=1}^{N_n} \text{Var}(\sigma(\tau_{i-1,n}^*)D_{i,n}) \\
 &= \frac{4}{v^2} \sum_{i=1}^{N_n} E[\sigma^2(\tau_{i-1,n}^*)]E[D_{i,n}^2].
 \end{aligned}$$

Dies kann man nach oben abschätzen durch die Schranke

$$\begin{aligned}
 \frac{4}{v^2} E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \sigma^2(t)\right] \sum_{i=1}^{N_n} E[D_{i,n}^2] &= \frac{4}{v^2} E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \sigma^2(t)\right] \sum_{i=1}^{N_n} \text{Var}(D_{i,n}) \\
 &\leq \frac{4C^*}{v^2} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{N_n} D_{i,n}\right) \\
 &= \frac{4C^*}{v^2} \text{Var}(\tilde{L}_n(\tau_{N_n,n}^*) - L(\tau_{N_n,n}^*)) \\
 &\leq \frac{4C^*}{v^2} \sup_{0 \leq t \leq T} E[|\tilde{L}_n(t) - L(t)|^2], \tag{6.48}
 \end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{N_n} D_{i,n} &= \sum_{i=1}^{N_n} D\tilde{L}_n(\tau_{i,n}^*) - DL(\tau_{i,n}^*) \\
 &= \sum_{i=1}^{N_n} \tilde{L}_n(\tau_{i,n}^*) - \tilde{L}_n(\tau_{i-1,n}^*) - L(\tau_{i,n}^*) + L(\tau_{i-1,n}^*) \\
 &= -\tilde{L}_n(\tau_{0,n}^*) + L(\tau_{0,n}^*) + \tilde{L}_n(\tau_{N_n,n}^*) - L(\tau_{N_n,n}^*) \\
 &= \tilde{L}_n(\tau_{N_n,n}^*) - L(\tau_{N_n,n}^*)
 \end{aligned}$$

gilt. Bleibt noch zu zeigen, dass der Ausdruck $\sup_{0 \leq t \leq T} E[|\tilde{L}_n(t) - L(t)|^2]$ aus (6.48) gegen 0 konvergiert. Dazu betrachtet man folgende Umformung

$$\begin{aligned}
 &\sup_{0 \leq t \leq T} E[|\tilde{L}_n(t) - L(t)|^2] \\
 &= \sup_{0 \leq t \leq T} E[|\tilde{L}_n(t) - \bar{L}_n(t) + \bar{L}_n(t) - L(t)|^2] \\
 &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} E[|\tilde{L}_n(t) - \bar{L}_n(t)|^2 + 2|\tilde{L}_n(t) - \bar{L}_n(t)||\bar{L}_n(t) - L(t)| + |\bar{L}_n(t) - L(t)|^2] \\
 &= \sup_{0 \leq t \leq T} E[|\tilde{L}_n(t) - \bar{L}_n(t)|^2] + 2 \sup_{0 \leq t \leq T} E[|\tilde{L}_n(t) - \bar{L}_n(t)||\bar{L}_n(t) - L(t)|] \\
 &\quad + \sup_{0 \leq t \leq T} E[|\bar{L}_n(t) - L(t)|^2].
 \end{aligned}$$

Aus (6.28) erhält man $\sup_{0 \leq t \leq T} E[|\tilde{L}_n(t) - \bar{L}_n(t)|^2] \rightarrow 0$, wenn $n \rightarrow \infty$ und aus Proposition 6.7 folgt $\sup_{0 \leq t \leq T} E[|\bar{L}_n(t) - L(t)|^2] \rightarrow 0$, wenn $n \rightarrow \infty$. Insgesamt hat man nun gezeigt, dass der zweite Summand der Gleichung (6.46) gegen 0 konvergiert.

Der dritte Summand $R_{N_n(t),n}$ der Gleichung (6.46) ist ein diskretes stochastisches Integral mit zufälliger Partition $(\tau_{i,n}^*)_{i=0,\dots,N_n}$, wobei die Gitterweite der Partition durch $2\Delta t(n)$ beschränkt ist und somit f.s. gegen 0 konvergiert. Deswegen kann man [29, Satz II.2.1] anwenden, um zu zeigen, dass dieser Ausdruck gleichmäßig auf $[0, T]$ gegen das stochastische Integral $\int_0^\cdot \sigma(s-)dL(s)$ nach Wahrscheinlichkeit konvergiert. So gilt schließlich

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{G}_n(t) - G(t)| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad \text{wenn } n \rightarrow \infty. \quad (6.49)$$

(iv) Konvergenz der Skorokhod Distanz

Um den Beweis zu vervollständigen, ist noch die Konvergenz von (G_n, σ_n^2) gegen (G, σ^2) in der Skorokhod Distanz zu zeigen. Dazu muss zunächst ein Zusammenhang zwischen den Prozessen $\tilde{\sigma}_n^2(t)$ und $\tilde{G}_n(t)$ und den Prozessen $\sigma_n^2(t)$ und $G_n(t)$ aus (6.14) hergestellt werden. Da die Prozesse $\tilde{\sigma}_n^2(t)$ und $\tilde{G}_n(t)$ nach Definition stückweise konstante Prozesse sind, sind sie zwischen den Zeitpunkten $\tau_{i,n}^* = \tau_{i,n} \wedge t_i(n)$, für $n \geq 1$, zu denen Sprünge stattfinden, konstant. Somit kann man für die Zeitpunkte $t_i(n)$ der Intervallgrenzen schreiben

$$\sigma_n^2(t_i(n)) = \tilde{\sigma}_n^2(\tau_{i,n}^*) \quad \text{und} \quad G_n(t_i(n)) = \tilde{G}_n(\tau_{i,n}^*).$$

Die beiden Prozesse $\tilde{\sigma}_n^2$ und \tilde{G}_n springen zu den gleichen Zeitpunkten und höchstens einmal in jedem Intervall $(t_{i-1}(n), t_i(n)]$ für $i = 1, \dots, N_n$. Somit kann die Funktion der

Zeitänderung $\lambda(t)$, die man für die Skorokhod Distanz benötigt, pfadweise wie folgt angegeben werden. Man definiert die Funktion $\lambda(t)$ auf dem Netz $(t_i(n))_{i=1,\dots,N_n-1}$

$$\lambda_n(t_i(n); \omega) = \tau_{i,n}^*(\omega) = \tau_{i,n}(\omega) \wedge t_i(n) \quad \text{für } i = 1, \dots, N_n - 1,$$

wobei $\lambda_n(0; \omega) = 0 = t_0(n)$ und $\lambda_n(T; \omega) = T = t_{N_n}(n)$ gilt. Um diese Definition zu veranschaulichen wird in Abbildung 6.3 die Funktion der Zeitänderung $\lambda_n(t_i(n))$ auf dem Netz $(t_i(n))_{i=1,\dots,N_n-1} = 0, 1, \dots, 7$ für den simulierten Pfad des Prozesses \tilde{G} aus Abbildung 6.2 abgebildet. Um die beiden Abbildung besser vergleichen zu können sind in Abbildung 6.3 die Achsen vertauscht. Nun interpoliert man stückweise linear zwischen den Netzpunkten

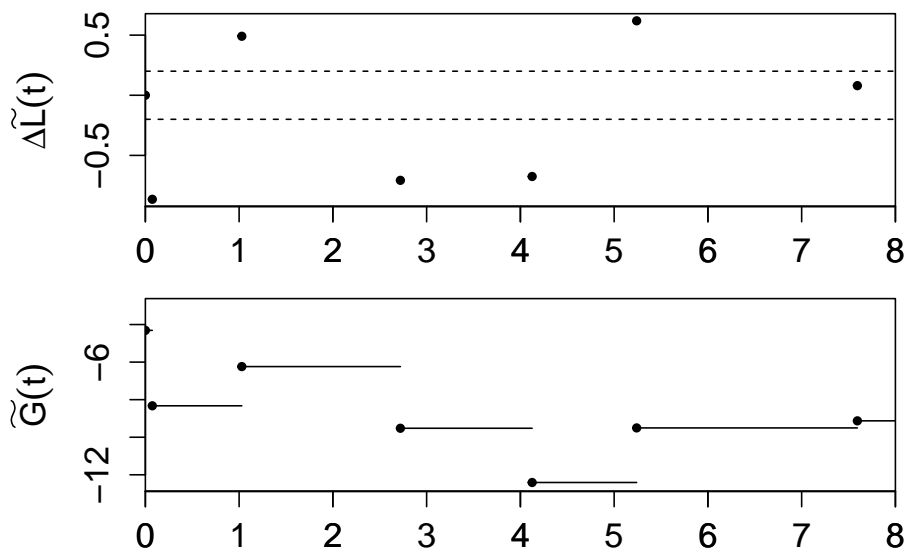


Abbildung 6.2: Sprünge $\Delta\tilde{L}(t)$ des Prozesses $\tilde{L}(t)$ und der zugehörige integrierte Prozess $\tilde{G}(t)$

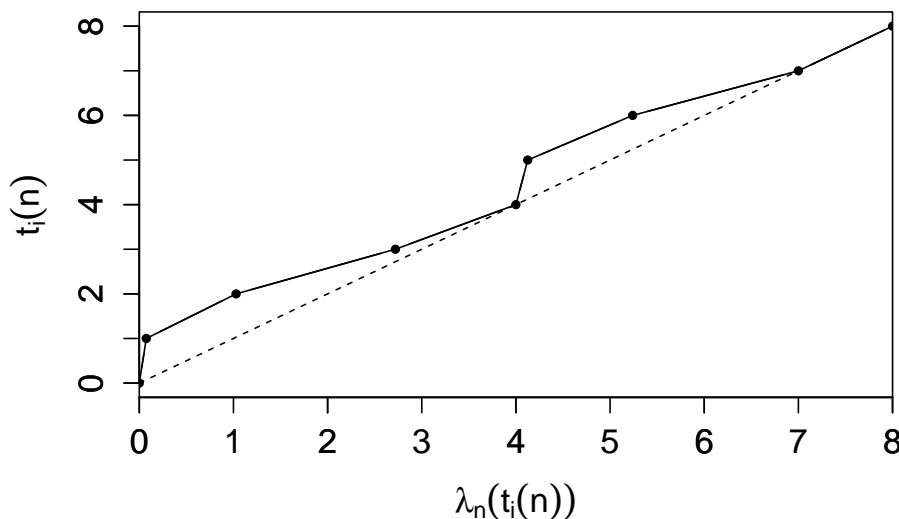


Abbildung 6.3: Funktion $\lambda_n(t_i(n))$ auf dem Netz $(t_i(n))_{i=1,\dots,N_n-1} = 0, 1, \dots, 7$

$(t_i(n))_{i=1, \dots, N_n-1}$ und erhält damit eine Funktion $\lambda_n(\cdot; \omega)$ aus Λ . Durch diese Konstruktion gilt

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\lambda_n(t; \omega) - t| \leq \Delta t(n).$$

Durch die Festlegung $\lambda_n(T; \omega) = T$ zum Endpunkt des kompakten Intervalls $[0, T]$, die für die Funktion $\lambda \in \Lambda$ gefordert wird, werden alle Sprünge im letzten Teilintervall $(t_{N_n-1}, T]$ ignoriert. Aber die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A_n = \{\tau_{N_n, n} \leq T\}$ ist durch $\Delta t_{N_n(n)} \bar{\nu}(m_n) = o(\sqrt{\Delta t(n)}) \rightarrow 0$, wenn $n \rightarrow \infty$, beschränkt. Hier verwendet man Landau's Notation $f = o(g)$ für $\lim \frac{f}{g} = 0$. Somit ist diese Einschränkung asymptotisch vernachlässigbar.

Aufgrund der Definition von $\lambda_n(\cdot; \omega)$ kann man auf A_n^C , bei pfadweiser Betrachtung

$$\sigma_n^2(t) = \tilde{\sigma}_n^2(\lambda_n(t)) \quad \text{und} \quad G_n(t) = \tilde{G}_n(\lambda_n(t)) \quad \text{für } 0 \leq t \leq T$$

schreiben. Dies impliziert

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} |\sigma_n^2(t) - \sigma^2(\lambda_n(t))| &= \sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{\sigma}_n^2(\lambda_n(t)) - \sigma^2(\lambda_n(t))| \\ &= \sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{\sigma}_n^2(t) - \sigma^2(t)| \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} |G_n(t) - G(\lambda_n(t))| &= \sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{G}_n(\lambda_n(t)) - G(\lambda_n(t))| \\ &= \sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{G}_n(t) - G(t)|. \end{aligned}$$

Somit kann man die Skorokhod Distanz durch

$$\rho((G_n, \sigma_n), (G, \sigma^2)) \leq \sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{G}_n(t) - G(t)| + \sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{\sigma}_n^2(t) - \sigma^2(t)| + \Delta t(n)$$

beschränken. Dieser Ausdruck konvergiert gegen 0 in Wahrscheinlichkeit durch (6.44) und (6.49). Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Kapitel 7

Schätzmethode für den zeitstetigen GJR GARCH

Im Folgenden soll eine Methode zur Schätzung der Parameter $(\theta, \eta, \varphi, \gamma)$ des zeitstetigen GJR GARCH(1,1)-Modells formuliert werden. Dabei wird wie in [24, Kapitel 3] vorgegangen, wo ein Schätzverfahren für den COGARCH(1,1) angegeben wird.

Angenommen man hat Beobachtungen $G(t_i)$ zu den Zeitpunkte $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ des integrierten zeitstetigen GJR GARCH, der in (6.7) definiert wurde. Weiter nimmt man an, dass der integrierte zeitstetige GJR GARCH-Prozess $(G(t))_{t \geq 0}$ stationär ist und die Zeitpunkte $\{t_i\}$ fest, d.h. nichtzufällig, sind. Durch $Y_i := G(t_i) - G(t_{i-1})$ werden die beobachteten Returns von G definiert und man setzt $\Delta t_i := t_i - t_{i-1}$. Dann gilt mit (6.7)

$$Y_i = G(t_i) - G(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma(s-) dL(s), \quad (7.1)$$

wobei $L = (L(t))_{t \geq 0}$ ein Lévyprozess mit $E[L(1)] = 0$ und $E[L^2(1)] = 1$ sei. Ausgehend von den beobachteten Returns Y_1, Y_2, \dots, Y_N sollen nun durch eine Pseudo-Maximum-Likelihood-Methode, die im Folgenden mit PML abgekürzt wird, die Parameter $(\theta, \eta, \varphi, \gamma)$ geschätzt werden. Die Returns Y_i sind bedingt unabhängig von Y_{i-1}, Y_{i-2}, \dots , gegeben $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$, da $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$ nach Satz 4.7 ein Markovprozess ist. Mithilfe von (4.34) kann man die bedingte Erwartung von Y_i

$$E[Y_i | \mathcal{F}_{t_{i-1}}] = E[Y_i] = E[G(t_i) - G(t_{i-1})] = 0$$

berechnen. Um die bedingte Varianz von Y_i zu erhalten, nutzt man Gleichung (4.40)

$$\begin{aligned} E[Y_i^2 | \mathcal{F}_{t_{i-1}}] &= E[L^2(1)] \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left((\sigma^2(t_{i-1}) - E[\sigma^2(0)]) e^{(s-t_{i-1})\Psi(1)} + E[\sigma^2(s - t_{i-1})] \right) ds \\ &= (\sigma^2(t_{i-1}) - E[\sigma^2(0)]) \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{(s-t_{i-1})\Psi(1)} ds + \int_{t_{i-1}}^{t_i} E[\sigma^2(s - t_{i-1})] ds \\ &= (\sigma^2(t_{i-1}) - E[\sigma^2(0)]) e^{-t_{i-1}\Psi(1)} \left[\frac{1}{\Psi(1)} e^{s\Psi(1)} \right]_{t_{i-1}}^{t_i} + E[\sigma^2(0)] [s]_{t_{i-1}}^{t_i} \\ &= (\sigma^2(t_{i-1}) - E[\sigma^2(0)]) e^{-t_{i-1}\Psi(1)} \left(\frac{1}{\Psi(1)} e^{t_i\Psi(1)} - \frac{1}{\Psi(1)} e^{t_{i-1}\Psi(1)} \right) + E[\sigma^2(0)] \Delta t_i \\ &= (\sigma^2(t_{i-1}) - E[\sigma^2(0)]) \frac{1}{\Psi(1)} \left(e^{\Delta t_i \Psi(1)} - 1 \right) + E[\sigma^2(0)] \Delta t_i. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Nun muss noch $\Psi(1)$ in Abhängigkeit der Parameter berechnet werden. Für den zeitstetigen GJR GARCH mit $h(x) = (|x| - \gamma x)^2$ gilt nach Lemma 4.8 mit den Parametern $\log \beta = -\eta$ $\frac{\alpha}{\beta} = \varphi$

$$\Psi(c) = -c\eta + \int_{\mathbb{R}} ((1 + \varphi(|y| - \gamma y)^2)^c - 1) \nu_L(dy). \quad (7.3)$$

Um $\Psi(1)$ für den zeitstetigen GJR GARCH konkret bestimmen zu können beschränkt man sich auf symmetrische Verteilungen der Sprungverteilung des zugrundeliegenden Lévyprozesses. Somit gilt dann $\int_{\mathbb{R}} |y|y\nu_L(dy) = 0$. Dies wurde ausführlich in Kapitel 5.2 begründet. Mit der Annahme $\int_{\mathbb{R}} y^2\nu_L(dy) = E[L^2(1)] = 1$ und der Symmetrie-Annahme folgt

$$\begin{aligned} \Psi(1) &= -\eta + \int_{\mathbb{R}} ((1 + \varphi(|y| - \gamma y)^2) - 1) \nu_L(dy) \\ &= -\eta + \varphi \int_{\mathbb{R}} (|y| - \gamma y)^2 \nu_L(dy) \\ &= -\eta + \varphi \int_{\mathbb{R}} (|y|^2 - 2\gamma|y|y + \gamma^2 y^2) \nu_L(dy) \\ &= -\eta + \varphi \left((1 + \gamma^2) \int_{\mathbb{R}} y^2 \nu_L(dy) - 2\gamma \int_{\mathbb{R}} |y|y \nu_L(dy) \right) \\ &= -\eta + \varphi(1 + \gamma^2). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Setzt man (7.4) in Gleichung (7.2) ein, so erhält man für die bedingte Varianz von Y_i , die man im Folgenden mit ρ_i^2 bezeichnet

$$\begin{aligned} \rho_i^2 &:= E[Y_i^2 | \mathcal{F}_{t_{i-1}}] \\ &= (\sigma^2(t_{i-1}) - E[\sigma^2(0)]) \frac{1}{\Psi(1)} (e^{\Delta t_i \Psi(1)} - 1) + E[\sigma^2(0)] \Delta t_i \\ &= (\sigma^2(t_{i-1}) - E[\sigma^2(0)]) \frac{1}{-\eta + \varphi(1 + \gamma^2)} (e^{\Delta t_i (-\eta + \varphi(1 + \gamma^2))} - 1) + E[\sigma^2(0)] \Delta t_i. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Um Stationarität beizubehalten setzt man $E[\sigma^2(0)] = \frac{\theta}{-\Psi(1)} = \frac{\theta}{\eta - \varphi(1 + \gamma^2)}$, wobei $\eta > \varphi$ gelte. Für die PML Methode wird angenommen, dass die beobachteten Returns Y_i bedingt $N(0, \rho_i^2)$ sind. Mit $f(Y_i) = \frac{1}{\rho_i \sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{Y_i}{\rho_i}\right)^2}$ erhält man die Pseudo-log-Likelihood Funktion für die beobachteten Returns Y_1, Y_2, \dots, Y_N

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_N &= \mathcal{L}_N(\theta, \varphi, \eta, \gamma) = \log \left(\prod_{i=1}^N \frac{1}{\rho_i \sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{Y_i}{\rho_i}\right)^2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \log \left(\frac{1}{\rho_i \sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{Y_i}{\rho_i}\right)^2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \log \left(\frac{1}{\rho_i \sqrt{2\Pi}} \right) + \sum_{i=1}^N \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{Y_i}{\rho_i}\right)^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \log(1) - \sum_{i=1}^N \log(\rho_i \sqrt{2\Pi}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{Y_i^2}{\rho_i^2}\right) \\ &= -\sum_{i=1}^N \log(\rho_i) - \sum_{i=1}^N \log(\sqrt{2\Pi}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{Y_i^2}{\rho_i^2}\right) \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \log(\rho_i^2) - \frac{N}{2} \log(2\Pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{Y_i^2}{\rho_i^2} \right) \quad (7.6)$$

mit ρ_i^2 aus (7.5). Für die Implementierung dieser Schätzmethode benötigt man in der Pseudolog-Likelihood Funktion (7.6) eine berechenbare Größe für ρ_i^2 . Um diese zu erhalten wird der zeitstetige Volatilitätsprozess $\sigma^2(t_{i-1})$ aus (6.6) wie in Satz 6.6 diskretisiert. Das Vorgehen der Diskretisierung aus Satz 6.6 wurde in Abschnitt 6.2 ausführlich beschrieben. Aus (6.9) erhält man für $\sigma^2(t_{i-1})$ mithilfe von $\Delta t_i \varepsilon_{i-1}^2 \sigma_{i-1}^2 = (G_i - G_{i-1})^2 = Y_i^2$ die Darstellung

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= \theta \Delta t_i + (1 + [(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{i-1} \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{i-1} < 0\}}] \varphi \Delta t_i \varepsilon_{i-1}^2) e^{-\eta \Delta t_i} \sigma_{i-1}^2 \\ &= \theta \Delta t_i + e^{-\eta \Delta t_i} \sigma_{i-1}^2 + [(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{i-1} \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{i-1} < 0\}}] \varphi e^{-\eta \Delta t_i} \Delta t_i \varepsilon_{i-1}^2 \sigma_{i-1}^2 \\ &= \theta \Delta t_i + e^{-\eta \Delta t_i} \sigma_{i-1}^2 + [(1 - \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{i-1} \geq 0\}} + (1 + \gamma)^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{i-1} < 0\}}] \varphi e^{-\eta \Delta t_i} Y_i^2. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Nachdem man $\sigma^2(t_{i-1})$ in (7.5) durch die berechenbare Größe σ_{i-1}^2 aus (7.7) ersetzt hat und die daraus resultierende Modifikation von ρ_i^2 in Gleichung (7.6) eingesetzt hat, kann man die Rekursion aus (7.7) programmieren. Als Startwert für $\sigma^2(0)$ wählt man den Wert $E[\sigma^2(0)] = \frac{\theta}{-\Psi(1)} = \frac{\theta}{\eta - \varphi(1 + \gamma^2)}$. Dann kann die Funktion $\mathcal{L}_N = \mathcal{L}_N(\theta, \varphi, \eta, \gamma)$ aus (7.6) maximiert werden um PML-Schätzer für die Parameter $(\theta, \varphi, \eta, \gamma)$ des zeitstetigen GJR GARCH(1,1)-Modells zu erhalten.

Dieses Schätzverfahren für die Parameter des zeitstetigen GJR GARCH(1,1)-Modells wurde in Zusammenarbeit mit Marlit Granzer programmiert und ist im R-Paket *cogarch*, das im Rahmen ihrer Masterarbeit [15] entstanden ist, enthalten. In dieser Arbeit wird die Theorie des Verfahrens beschrieben. Für die Dokumentation des Programms, die genaue Beschreibung des Vorgehens bei der Implementierung sowie die Anwendung des Verfahrens wird auf [15] verwiesen.

Kapitel 8

Simulationen

Im Folgenden wird das zeitstetige GJR GARCH(1,1)-Modell, das in Abschnitt 6.2 aus dem zeitdiskreten GJR GARCH hergeleitet wurde, betrachtet. Das zeitstetige GJR GARCH(1,1)-Modell ist durch die Gleichungen (6.5), (6.6) und (6.7) definiert. Für die Parameter gelten die Bedingungen $\theta > 0$, $\eta > 0$, $\varphi > 0$ und $\gamma \in (0, 1)$. Durch die Wahl des Parameters γ wird die Asymmetrie des zeitstetigen GJR GARCH(1,1)-Prozesses beeinflusst. Je größer man den Parameter γ wählt, desto stärker werden negativen Sprünge des zugrundeliegenden Lévyprozesses im Vergleich zu positiven Sprüngen gleicher Höhe gewichtet. Somit haben negative Sprünge des treibenden Lévyprozesses größeren Einfluss auf die Volatilität des zeitstetigen GJR GARCH-Modells als positive Sprünge gleicher Höhe. Dies wird häufig als Leverage Effekt bezeichnet. Setzt man den Parameter $\gamma = 0$, so werden positive und negative Sprünge gleicher Höhe des zugrundeliegenden Lévyprozesses gleich stark gewichtet. Somit erhält man ein symmetrisches Modell. Aus den Gleichungen (6.5), (6.6) und (6.7) folgt, dass man für $\gamma = 0$ das klassische COGARCH(1,1)-Modell erhält.

Im Folgenden soll der integrierte zeitstetige GJR GARCH(1,1)-Prozess basierend auf einem zusammengesetzten Poissonprozess und einem Varianz-Gamma-Prozess simuliert werden. Die Simulationsprogramme für den zeitstetigen GJR GARCH(1,1)-Prozess wurden in Zusammenarbeit mit Marlit Granzer geschrieben. Sie sind im R-Paket *cogarch*, das im Rahmen der Masterarbeit [15] entstanden ist, enthalten. Für eine genaue Beschreibung der Simulationsprogramme wird auf [15] verwiesen.

8.1 Zusammengesetzter Poissonprozess

Auf der Basis eines zusammengesetzten Poissonprozesses $(L_t)_{0 \leq t \leq 5000}$ mit Rate $c = 1$ und standardnormalverteilten Sprüngen wird der integrierte zeitstetige GJR GARCH(1,1)-Prozess $(G_t)_{0 \leq t \leq 5000}$ simuliert. Als Parameter werden $\theta = 0.02$, $\eta = 0.062$ und $\varphi = 0.047$ gewählt. Für den Parameter γ werden unterschiedliche Werte $\gamma \in \{0, 0.2, 0.3, 0.4\}$ gewählt, um zu zeigen, welchen Einfluss γ auf das zeitstetige GJR GARCH(1,1)-Modell hat. Die Zufallsvariable σ_0^2 wird auf $\frac{\theta}{\eta} = 0.32258$ gesetzt. Abbildung 8.1 zeigt den simulierten zusammengesetzten Poissonprozess $(\tilde{L}_t)_{t \geq 0}$ mit Rate $c = 1$ und standardnormalverteilten Sprüngen für $0 \leq t \leq 5000$ und seine zugehörigen Sprünge $\Delta L(t)$. Dieser simulierte Prozess liegt allen weiteren Simulationen zugrunde. In Abbildung 8.2 ist der simulierte Volatilitätsprozess $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$ für die unterschiedlichen γ -Werte $\gamma \in \{0, 0.2, 0.3, 0.4\}$ zu sehen. Im ersten Bild der Abbildung 8.2 ist der Volatilitätsprozess des COGARCH(1,1)-Modells zu sehen. In den drei unteren Bildern ist der Leverage Effekt zu erkennen, d.h. negative Sprünge des simulierten zusammengesetzten Pois-

sonprozess beeinflussen die Volatilität stärker als positive Sprünge gleicher Höhe. Durch die gleiche Achsenskalierung ist leicht zu sehen, dass dieser Effekt umso stärker ausgeprägt ist, je größer man γ wählt. Abbildung 8.3 zeigt den simulierten zeitstetige GJR GARCH(1,1)-Prozesse $(G_t)_{t \geq 0}$ für $\gamma \in \{0, 0.2, 0.3, 0.4\}$. Man kann erkennen, dass die Prozesse G dem treibenden zusammengesetzten Poissonprozess L aus Abbildung 8.1 ähnlich sehen. Jedoch treten immer wieder Bereiche auf, in denen sich G über- bzw. unterproportional im Vergleich zu L entwickelt. Auch hier ist die unterschiedliche Gewichtung von negativen und positiven Sprüngen zu erkennen. Je größer man γ wählt, desto größer ist die Ausprägung der Asymmetrie. In Abbildung 8.4 wird schließlich noch der durch Differenzenbildung entstandene Prozess $G_t^{(1)} = G_{t+1} - G_t$ für $\gamma \in \{0, 0.2, 0.3, 0.4\}$ gezeigt. Hier ist wiederum durch die gleiche Achsenskalierung gut zu sehen, dass die Volatilitätscluster umso stärker ausgeprägt sind, je größer man γ wählt. In den drei unteren Bildern in Abbildung 8.4 kann man im Vergleich zum ersten Bild, in dem der Prozess $G_t^{(1)}$ des COGARCH(1,1)-Prozesses dargestellt ist, die stärkere Gewichtung der negativen Sprünge im Vergleich zu positiven Sprüngen gleicher Höhe erkennen.

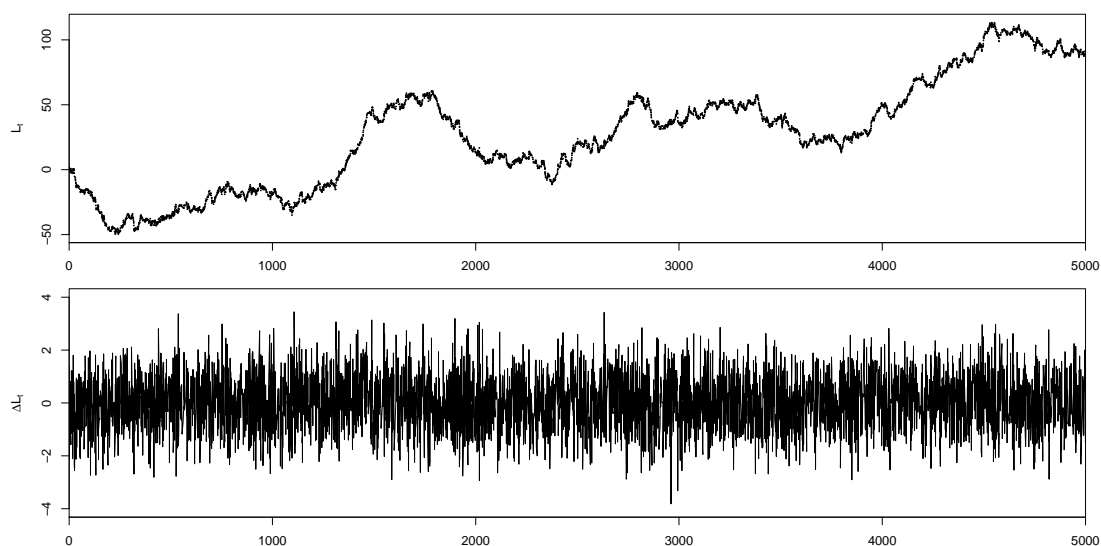


Abbildung 8.1: Simulierter zusammengesetzter Poissonprozess $(L_t)_{t \geq 0}$ mit Rate $c = 1$ und standardnormalverteilten Sprüngen (oben) und zugehörige Sprünge ΔL_t (unten) für $0 \leq t \leq 5000$

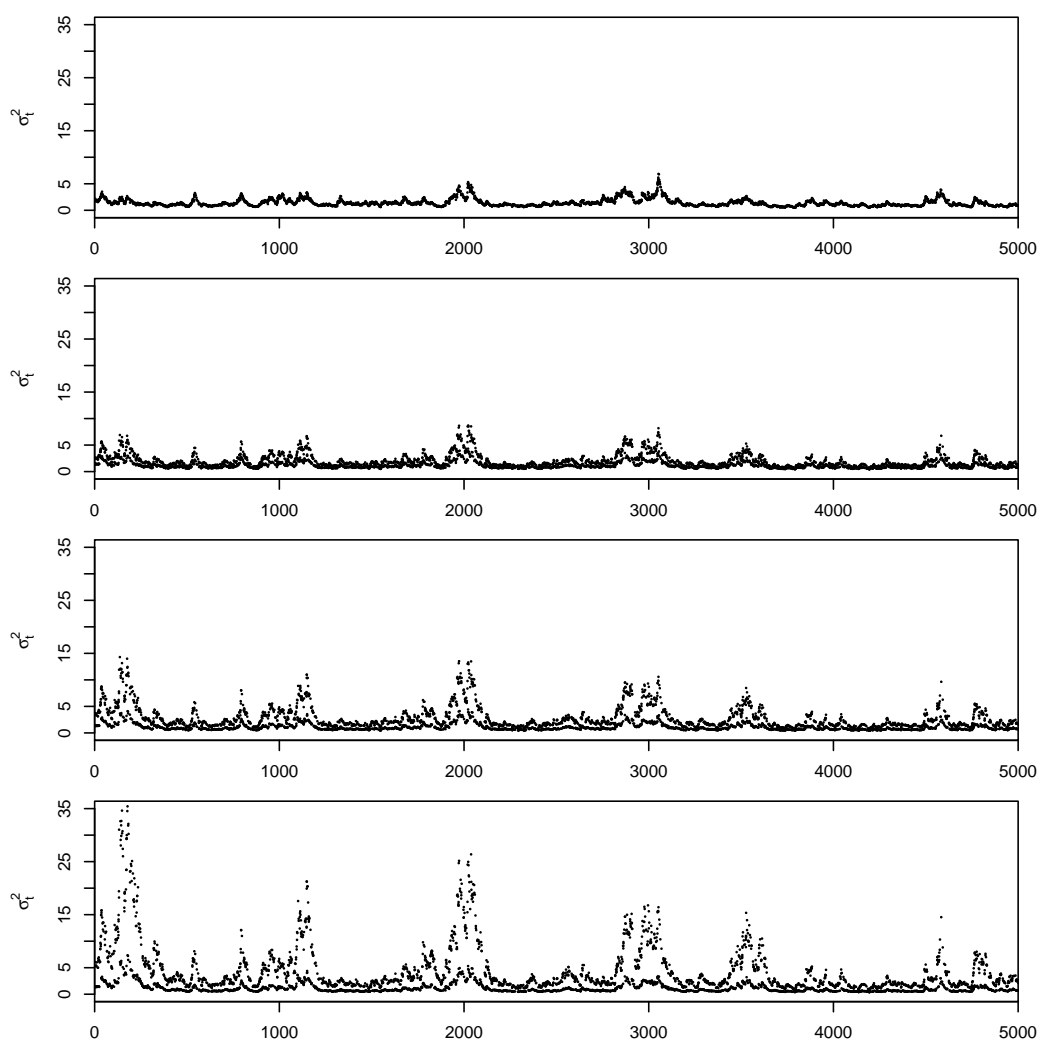


Abbildung 8.2: Simulierte Volatilitätsprozesse $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$ mit Parametern $\gamma = 0$ (erste Abb.), $\gamma = 0.2$ (zweite Abb.), $\gamma = 0.3$ (dritte Abb.) und $\gamma = 0.4$ (vierte Abb.) für $0 \leq t \leq 5000$

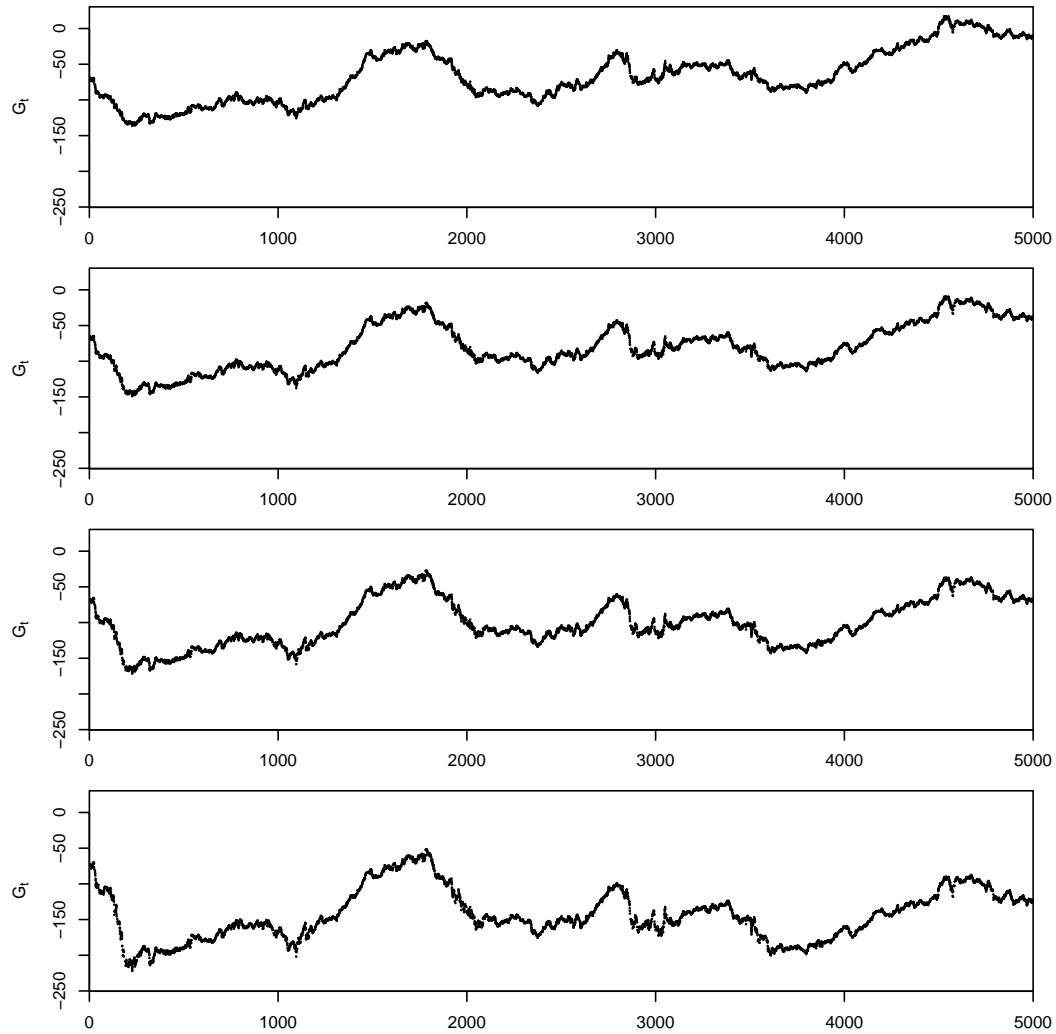


Abbildung 8.3: Simulierte zeitstetige GJR GARCH(1,1)-Prozesse $(G_t)_{t \geq 0}$ mit Parametern $\gamma = 0$ (erste Abb.), $\gamma = 0.2$ (zweite Abb.), $\gamma = 0.3$ (dritte Abb.) und $\gamma = 0.4$ (vierte Abb.) für $0 \leq t \leq 5000$

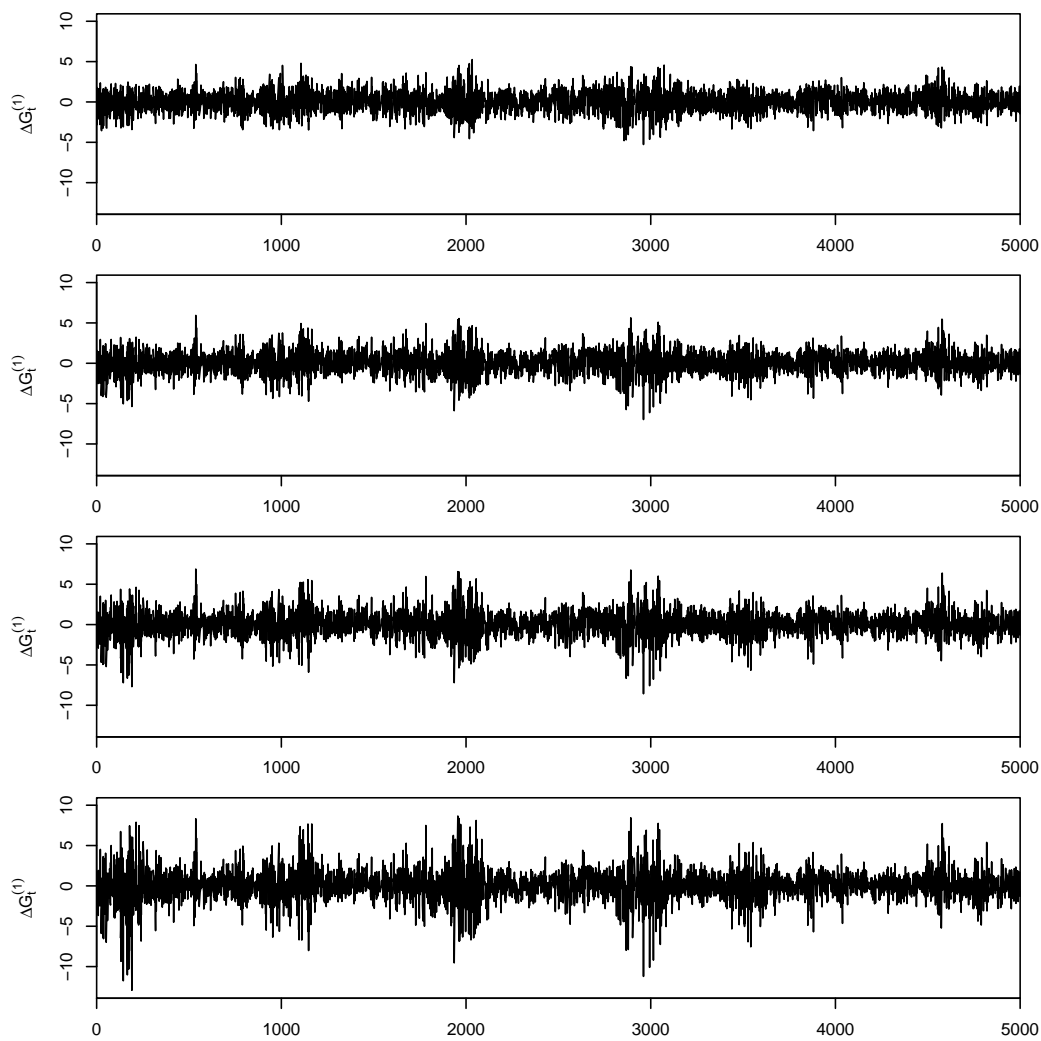


Abbildung 8.4: Durch Differenzenbildung entstandene Prozesse $G_t^{(1)} = G_{t+1} - G_t$ mit Parametern $\gamma = 0$ (erste Abb.), $\gamma = 0.2$ (zweite Abb.), $\gamma = 0.3$ (dritte Abb.) und $\gamma = 0.4$ (vierte Abb.) für $0 \leq t \leq 5000$

8.2 Varianz-Gamma-Prozess

Basierend auf einem Varianz-Gamma-Prozess $(L_t)_{0 \leq t \leq 5000}$ mit den Parametern $\theta_V = 0$, $\sigma_V = 0.8$ und $\kappa_V = 0.5$ wird der integrierte zeitstetigen GJR GARCH(1,1)-Prozesse simuliert. Als Parameter werden $\theta = 0.06$, $\eta = 0.053$ und $\varphi = 0.038$ gewählt. Auch in diesem Fall werden für γ unterschiedliche Werte $\gamma \in \{0, 0.2, 0.4, 0.5\}$ gewählt, um zu zeigen, welchen Einfluss γ auf das zeitstetige GJR GARCH(1,1)-Modell hat. Die Zufallsvariable σ_0^2 wurde auf $\frac{\theta}{\eta} = 1.13208$ gesetzt. Abbildung 8.5 zeigt den simulierten Varianz-Gamma-Prozess $(L_t)_{t \geq 0}$ sowie dessen Sprünge $\Delta L(t)$ für $0 \leq t \leq 5000$. Dieser simulierte Prozess liegt allen weiteren Simulationen zugrunde. In Abbildung 8.6 sieht man den simulierten Volatilitätsprozess $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$ für $\gamma \in \{0, 0.2, 0.4, 0.5\}$. Im ersten Bild von Abbildung 8.6 ist der Volatilitätsprozess $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$ des COGARCH(1,1)-Modells dargestellt. In den drei unteren Bildern kann man auch in diesem Fall den sogenannten Leverage Effekt erkennen, da negative Sprünge des simulierten Varianz-Gamma-Prozesses L die Volatilität stärker als positive Sprünge gleicher Höhe beeinflussen. Durch die gleiche Achsenskalierung sieht man, dass dieser Effekt umso stärker ausgeprägt ist, je größer man γ wählt. Abbildung 8.7 zeigt den simulierten zeitstetige GJR GARCH(1,1)-Prozesse $(G_t)_{t \geq 0}$ für $\gamma \in \{0, 0.2, 0.4, 0.5\}$. Die Prozesse G sehen dem treibenden Varianz-Gamma-Prozess L aus Abbildung 8.5 ähnlich. Jedoch treten immer wieder Bereiche auf, in denen sich G über- bzw. unterproportional im Vergleich zu L verhält. Je größer man γ wählt, desto größer ist der Einfluss der negativen Sprünge im Vergleich zu positiven Sprüngen gleicher Höhe des Varianz-Gamma-Prozesses L . In Abbildung 8.8 wird schließlich noch der durch Differenzenbildung entstandene Prozess $G_t^{(1)} = G_{t+1} - G_t$ für $\gamma \in \{0, 0.2, 0.4, 0.5\}$ abgebildet. Hier ist durch die gleiche Achsenskalierung leicht zu sehen, dass die Volatilitätscluster eine umso stärkere Ausprägung haben, je größer man γ wählt. In den drei unteren Bildern in Abbildung 8.8 kann man im Vergleich zum ersten Bild, in dem der Prozess $G_t^{(1)}$ des COGARCH(1,1)-Prozesses dargestellt ist, die stärkere Gewichtung der negativen Sprünge im Vergleich zu positiven Sprüngen gleicher Höhe erkennen.

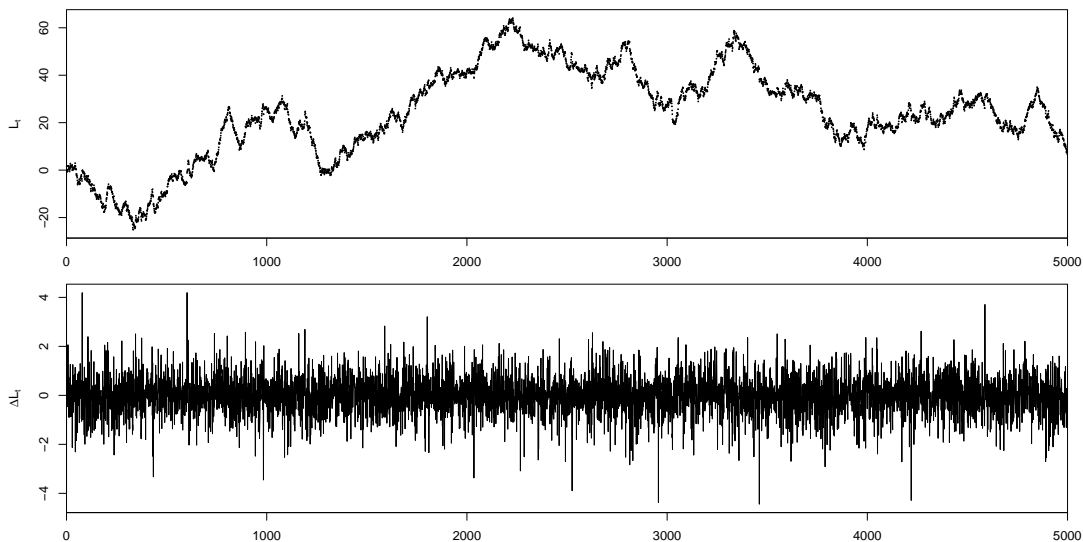


Abbildung 8.5: Simulierter Varianz-Gamma-Prozess $(L_t)_{t \geq 0}$ mit den Parametern $\theta_V = 0$, $\sigma_V = 0.8$ und $\kappa_V = 0.5$ (oben) und zugehörige Sprünge ΔL_t (unten) für $0 \leq t \leq 5000$

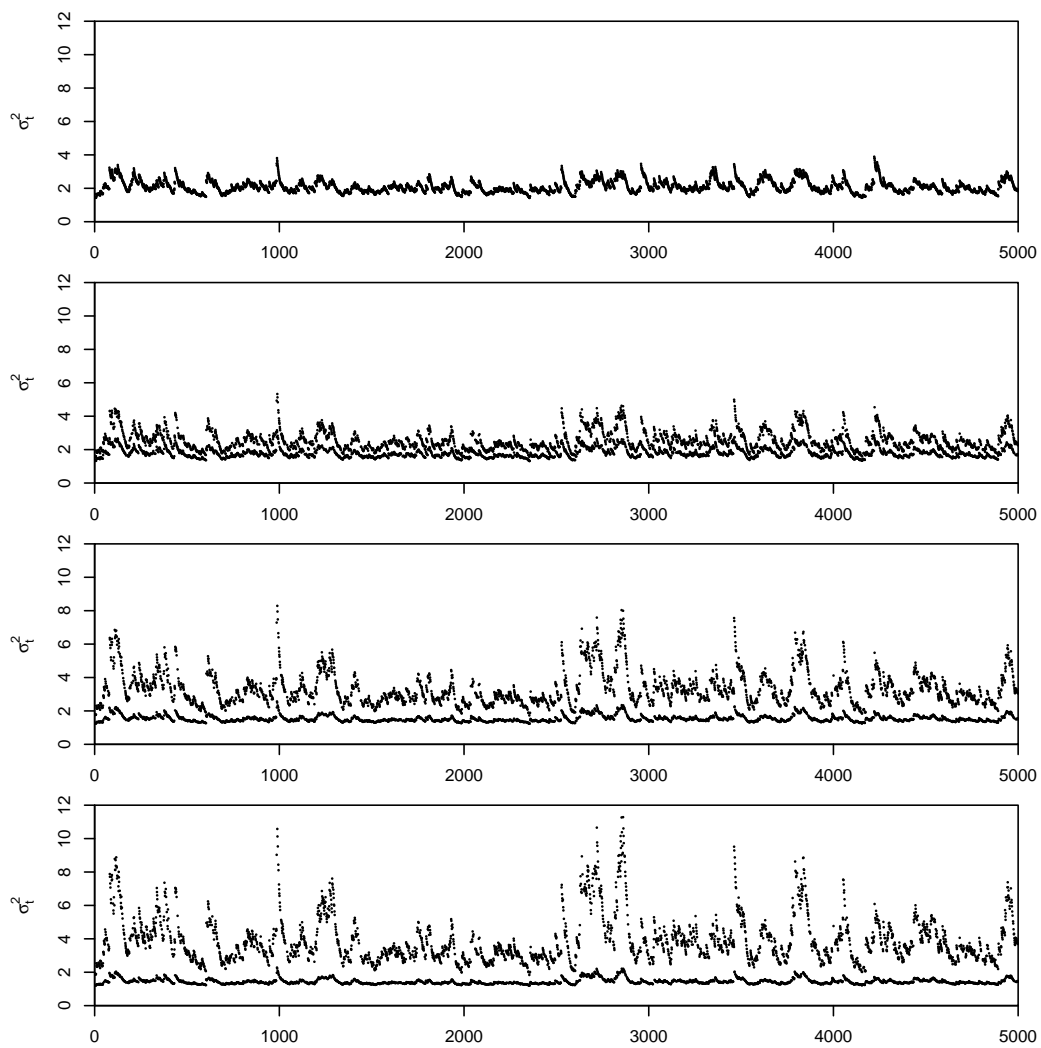


Abbildung 8.6: Simulierte Volatilitätsprozesse $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$ mit Parametern $\gamma = 0$ (erste Abb.), $\gamma = 0.2$ (zweite Abb.), $\gamma = 0.4$ (dritte Abb.) und $\gamma = 0.5$ (vierte Abb.) für $0 \leq t \leq 5000$

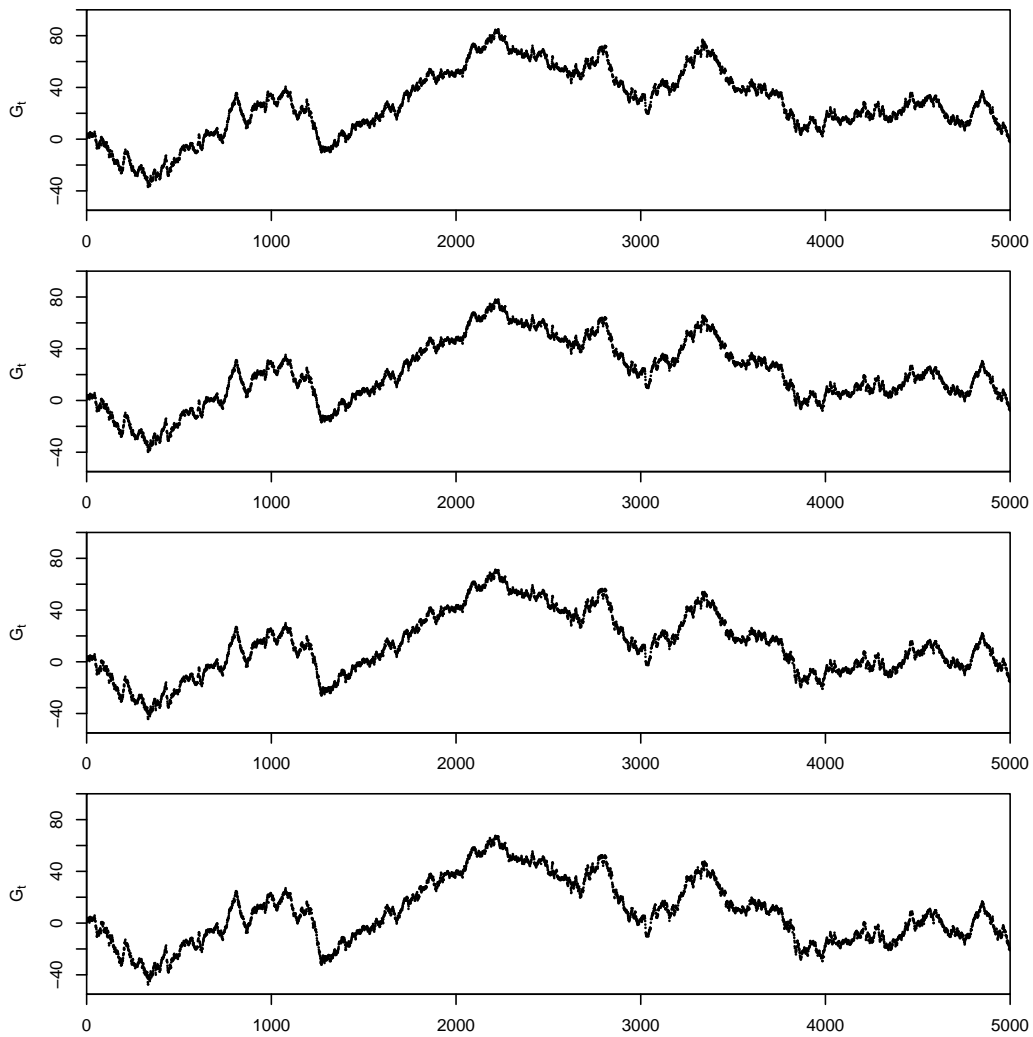


Abbildung 8.7: Simulierte zeitstetige GJR GARCH(1,1)-Prozesse $(G_t)_{t \geq 0}$ mit Parametern $\gamma = 0$ (erste Abb.), $\gamma = 0.2$ (zweite Abb.), $\gamma = 0.4$ (dritte Abb.) und $\gamma = 0.5$ (vierte Abb.) für $0 \leq t \leq 5000$

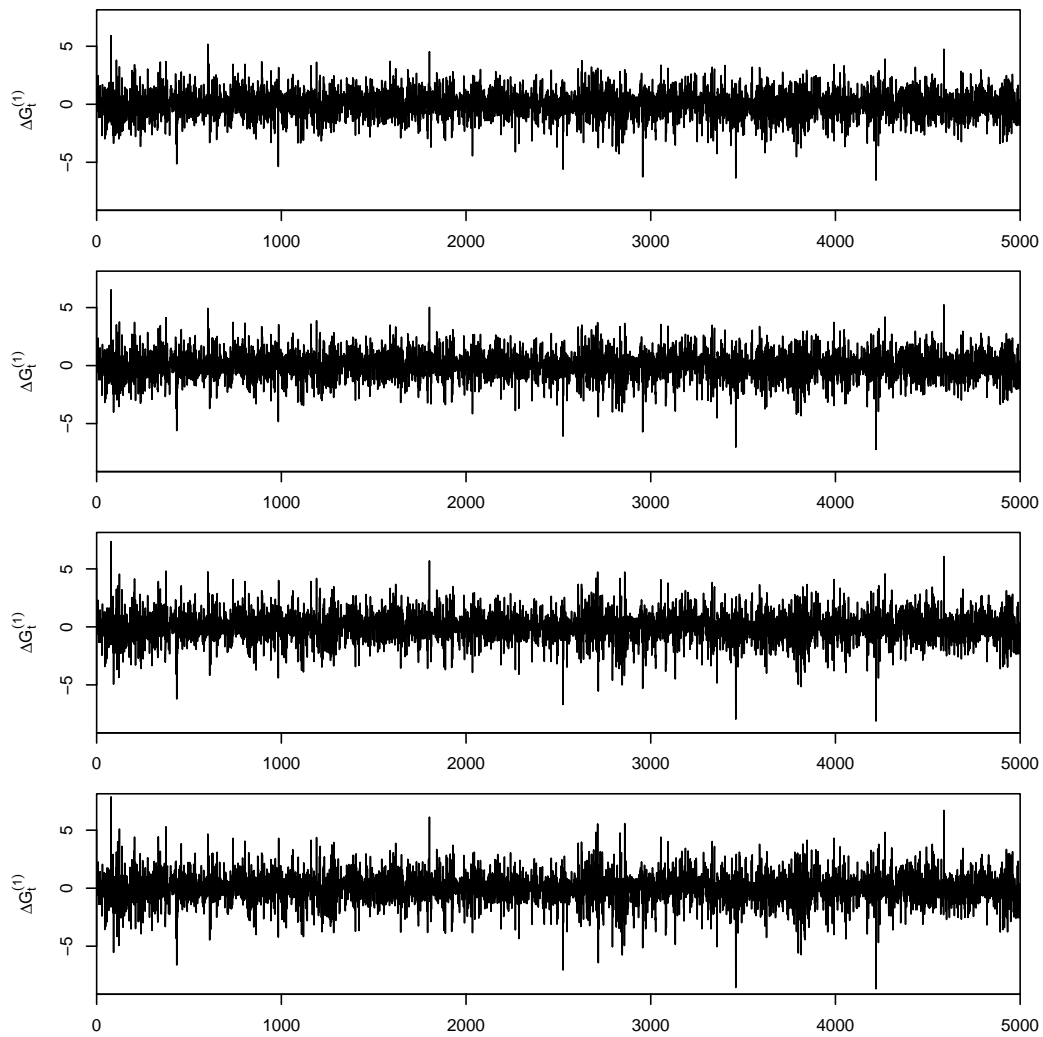


Abbildung 8.8: Durch Differenzenbildung entstandene Prozesse $G_t^{(1)} = G_{t+1} - G_t$ mit Parametern $\gamma = 0$ (erste Abb.), $\gamma = 0.2$ (zweite Abb.), $\gamma = 0.4$ (dritte Abb.) und $\gamma = 0.5$ (vierte Abb.) für $0 \leq t \leq 5000$

Literaturverzeichnis

- [1] D. Applebaum. *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge University Press, 2009.
- [2] J. Bertoin. *Lévy processes*. Cambridge University Press, 1996.
- [3] P. Billingsley. *Convergence of Probability Measures*. Wiley, 1999.
- [4] T. Bollerslev. Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*, 31:307–327, 1986.
- [5] R. Bradley. Basic properties of strong mixing conditions. A survey and some open questions. *Probability Surveys*, 2:107–144, 2005.
- [6] R. Cont and P. Tankov. *Financial Modelling with Jump Processes*. Chapman and Hall / CRC Press London, 2004.
- [7] V. Corradi. Reconsidering the continuous time limit of the GARCH(1,1) process. *Journal of Econometrics*, 96:145–153, 2000.
- [8] Z. Ding, C. Granger, and R. Engle. A long memory property of stock returns and a new model. *Journal of Empirical Finance*, 1:83–106, 1993.
- [9] D. Down, S. Meyn, and R. Tweedie. Exponential and uniform ergodicity of Markov processes. *The Annals of Probability*, 23(4):1671–1691, 1995.
- [10] R. F. Engle. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50:987–1007, 1982.
- [11] K. Erickson and R. Maller. Generalised Ornstein-Uhlenbeck processes and the convergence of Lévy integrals. Erschienen in *Séminaire de Probabilités (Lecture Notes Mathematics)*. Springer-Verlag Berlin, 2004.
- [12] I. I. Gihman and A. V. Skorokhod. *The Theory of Stochastic Processes*. Springer-Verlag New York, 1975.
- [13] L. Glosten, R. Jagannathan, and D. Runkle. On the relation between expected return on stocks. *Journal of Finance*, 48:1779–1801, 1993.
- [14] C. Goldie and R. Maller. Stability of perpetuities. *The Annals of Probability*, 28:1195–1218, 2000.
- [15] M. Granzer. Estimation of COGARCH models with implementation in R, 2013.
- [16] S. Haug and C. Czado. An exponential continuous time GARCH process. *Journal of Applied Probability*, 44:960–976, 2007.

- [17] K. J. and B. Vesenmayer. COGARCH as a continuous time limit of GARCH(1,1). *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 119:74–98, 2009.
- [18] A. Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer-Verlag Berlin, 2006.
- [19] C. Klüppelberg, A. Lindner, and R. Maller. A continuous time GARCH process driven by a Lévy process: Stationarity and second order behaviour. *Journal of Applied Probability*, 41(3):601–622, 2004.
- [20] A. Kyprianou. *Introductory Lectures on Fluctuations of Lévy Processes with Applications*. Springer-Verlag Berlin, 2006.
- [21] O. Lee. A continuous time asymmetric power GARCH process driven by a Lévy process. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, 21(6):1311–1317, 2010.
- [22] O. Lee. V-uniform ergodicity of a continuous time asymmetric power GARCH(1,1) model. *Statistics and Probability Letters*, 82:812–817, 2012.
- [23] D. Madan, P. Carr, and E. Chang. The Variance Gamma process and option pricing. *European Finance Review*, 2:79–105, 1998.
- [24] R. Maller, G. Müller, and A. Szimayer. GARCH modelling in continuous time for irregularly spaced time series data. *Bernoulli*, 14(2):519–542, 2008.
- [25] S. Meyn and T. Richard. *Markov Chains and Stochastic Stability*. Springer Verlag, 1993.
- [26] D. Nelson. ARCH models as diffusion approximations. *Journal of Econometrics*, 45:7–38, 1990.
- [27] D. Nelson. Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach. *Econometrica*, 59:347–370, 1991.
- [28] B.-N. O. and N. Shephard. Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 63(2): 167–241, 2001.
- [29] P. E. Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer-Verlag Berlin, 2004.
- [30] R. Rabemananjara and J. Zakoian. Threshold Arch Models and asymmetries in volatility. *Journal of Applied Econometrics*, 8(1):31–49, 1993.
- [31] L. Rogers and D. Williams. *Diffusions, Markov Processes and Martingals, Vol.2, Itô Calculus*. Cambridge University Press, 2000.
- [32] K. Sato. *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge University Press, 1999.
- [33] A. Szimayer and R. Maller. Finite approximation schemes for Lévy processes, and their application to optimal stopping problems. *Stochastic Processes and their Applications*, 117: 1422–1447, 2007.
- [34] Y. Wang. Asymptotic nonequivalence of GARCH models and diffusions. *The Annals of Statistics*, 30(3):754–783, 2002.

- [35] J. Zakoian. Threshold heteroskedastic models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18(5):931–955, 1994.