

Entwurf vernetzter ereignisbasierter Regelungssysteme mit Kommunikationsbeschränkungen

Design of event-triggered control for networked systems with communication constraints

Adam Molin, Sandra Hirche, Technische Universität München

Der Betrieb komplexer, verteilter Regelungssysteme erfordert eine effiziente Nutzung vorhandener Ressourcen. Kürzlich erzielte Ergebnisse zeigen wesentliche Vorteile einer ereignisbasierten Regelung verglichen mit herkömmlichen Entwurfsmethoden mit periodischer Abtastung, wenn die Kommunikationsbandbreite, der Energieverbrauch oder die Rechenleistung beschränkt sind. Dieser Beitrag beschäftigt sich mit dem Entwurf ereignisbasierter Regelungen mehrerer heterogener Teilsysteme, deren Rückführschleifen über ein gemeinsames Kommunikationssystem verkoppelt sind. Mittels Zustandsaggregation wird eine dezentrale ereignisbasierte Regelungsstruktur entworfen und Stabilitätsbedingungen hergeleitet, unter welchen das Gesamtsystem stochastisch stabil ist. Unter diesen Stabilitätsbedingungen lässt sich zeigen, dass der vorgeschlagene Regelungsentwurf asymptotisch optimal mit zunehmender Anzahl an Teilsystemen ist.

The design of complex, distributed control systems urges an efficient usage of available resources, such as communication, energy and computation. Recent results indicate substantial benefits of event-based control compared to conventional designs, when these resources are sparse. This paper considers multiple entities of heterogeneous control systems whose feedback loops are coupled through a common communication medium. A state aggregation technique is used to develop a decentralized event-triggering scheme. Stability conditions are derived that guarantee stochastic stability of the aggregate system. Under these conditions, it is shown that the design approach is asymptotically optimal as the number of subsystems increases.

Schlagwörter: Ereignisbasierte Abtastsysteme, vernetzte Regelungssysteme, stochastische optimale Regelung.

Keywords: event-triggered sampling, networked control systems, stochastic optimal control

1 Einleitung

Die Forschung an vernetzten Regelungssystemen hat sich in den letzten Jahren zu einem sehr aktiven Forschungsfeld etabliert. Neben Energieverteilungsnetzen, Verkehrsleitsysteme und Gebäudeautomatisierung zählen Multirobotersysteme zu den potentialen Anwendungsszenarien [1, 2, 3, 4]. Die Hauptcharakteristik solcher Systeme ist die geographische Verteilung der Systemkomponenten und die Kommunikation über ein gemeinsames digitales Kommunikationsnetz, um komplexe

Regelungsaufgaben zu lösen. Dies erfordert eine effiziente Nutzung der Kommunikationsressourcen für den Datenaustausch. Die Beschränkung von Energieverbrauch, Rechenleistung oder Kommunikationsbandbreite in solchen Systemen hat die Untersuchung alternativer Abtaststrategien angeregt, die über eine konventionelle periodische Abtastung hinausgehen, wie zum Beispiel in [5, 7, 28, 29, 30, 31]. Diese Arbeiten zeigen, dass sich mittels ereignisbasierter Abtastung die mittlere Abtastrate gegenüber periodischen Abtastsystemen drastisch reduzieren lässt, ohne dabei die Regelgüte merklich zu

beeinflussen.

Während sich die Mehrheit der Ergebnisse ausschließlich auf einschleifige Regelungssysteme bezieht, ist der Regelungsentwurf mehrerer über ein gemeinsames Kommunikationsmedium geschlossene Regelkreise größtenteils unerforscht. Ausnahmen stellen hierbei die Arbeiten in [6, 11, 12, 13] dar, die ereignisbasierte Regelungsstrategien in mehrschleifigen identischen Systemen mit Kommunikationseinschränkungen analysieren. Abhängig vom verwendeten Kommunikationsmodell werden unterschiedliche Schlussfolgerungen gezogen. Unter Benutzung eines Mehrfachzugriffsverfahrens mit Prioritäts- oder randomisierter Arbitrierung wird in [6, 11] gezeigt, dass ereignisbasierte Schedulingstrategien verglichen mit zeitgesteuerten Schedulingstrategien zu einer erheblichen Verbesserung der Regelgüte führen können. Im Gegensatz zu diesen Ergebnissen wurde in [12, 13] gezeigt, dass zeitgesteuerte Scheduler besser geeignet sind als ereignisbasierte Zugriffsstrategien, wenn das ALOHA-Kommunikationsprotokoll verwendet wird. Im Fokus der vorangehenden Beiträge steht die Analyse ereignisbasierter Regelungsstrategien. Die Regelungsstrecken der Teilsysteme sind identisch und werden als gesteuerte Integratorsysteme mit additivem weißen Rauschen modelliert. Der Regler setzt bei erfolgreicher Übertragung den Zustand auf Null zurück. Der Entwurfsparameter ist lediglich mit der Wahl der Ereignisschwelle gegeben, die bei Über- bzw. Unterschreiten durch den Zustand ein Ereignis auslöst. Der systematische Entwurf ereignisbasierter Regelungssysteme für mehrschleifige heterogene Systeme über ein gemeinsames Kommunikationssystem kann daher als immer noch weitgehend offene wissenschaftliche Fragestellung betrachtet werden und wird hier adressiert. In diesem Beitrag wird ein System als *heterogen* bezeichnet, wenn dessen Teilsysteme, welche als linear angenommen werden, unterschiedliche dynamische Eigenschaften besitzen. N verschiedenartige Teilsysteme, modelliert als stochastische lineare zeitdiskrete Systeme, tauschen Informationen über ein gemeinsames ressourcenbeschränktes Kommunikationsnetz aus. Der Scheduler eines Teilsystems entscheidet in jedem Zeitschritt, ob eine aktuelle Zustandsmessung zum Aktuatorknoten gesendet werden soll. Der Entwurf des ereignisbasierten Reglers wird als stochastisches Optimierungsproblem mit einem langfristigen Durchschnittskostenkriterium formuliert. Die Kosten setzen sich aus der Summe der quadratischen Regelungskosten der einzelnen Teilsysteme zusammen. Im Gegensatz zu zeitgesteuerten Schedulingverfahren, die die Teilsysteme komplett voneinander entkoppeln, ist die Analyse und Synthese von ereignisbasierten Schedulingern wesentlich dadurch erschwert, dass das komplexe Verhalten des Kommunikationsnetzes, das maßgeblich von der Auslegung des Schedulers abhängt, berücksichtigt werden muss. Um dieser Herausforderung zu begegnen, schlägt dieser Beitrag eine approximative Formulierung des Optimierungsproblems vor, welche den Einbezug des komplexen Ver-

haltens des Kommunikationsnetzes umgeht. Dabei wird das Kommunikationsnetz als deterministisch betrachtet und jedem Teilsystem eine maximale durchschnittliche Übertragungsrates zugewiesen. Mit Hilfe der Approximation lassen sich Teile des Optimierungsproblems entkoppeln. Die Optimierung zerfällt in ein lokales optimales Regelungsproblem, das mit dynamischer Programmierung gelöst werden kann, und ein globales Ressourcenallokationsproblem, welches ein konvexes Optimierungsproblem ist. Es werden Bedingungen hergeleitet, unter welchen stochastische Stabilität im Sinne eines beschränkten Moments zweiter Ordnung gegeben ist. Unter diesen Bedingungen ist es möglich zu zeigen, dass die vorgeschlagene Approximation, asymptotisch optimal mit zunehmender Anzahl an Teilsystemen ist. Numerische Simulationen bestätigen zudem, dass schon bei einer moderaten Anzahl an Teilsystemen, die Regelgüte des vorgeschlagenen ereignisbasierten Ansatzes nur wenig von der optimalen Lösung abweicht. Die wesentlichen theoretischen Beiträge dieses Artikels lassen sich wie folgt zusammenfassen: (i) Approximative Formulierung des Optimierungsproblems, (ii) Entwicklung einer systematischen Entwurfsmethode für eine dezentrale ereignisbasierte Regelung in einem vernetzten heterogenen Regelungssystem, (iii) Herleitung einfach prüfbarer Stabilitätsbedingungen.

Der Beitrag ist wie folgt gegliedert. Im Abschnitt 2 wird das betrachtete Systemmodell beschrieben und die Problemstellung definiert. Der Entwurf der ereignisbasierten Regelung und die Herleitung dessen Eigenschaften werden im Abschnitt 3 behandelt. Im Abschnitt 4 wird durch numerische Simulation die Effizienz des dezentralen ereignisbasierten Reglers mit zeitgesteuerten und zentralisierten Ansätzen verglichen. Abschnitt 5 diskutiert verschiedene Aspekte der entwickelten Entwurfsmethode in Hinblick auf numerische Komplexität, Robustheit und Implementierbarkeit.

Notation. In diesem Artikel bezeichnet A^T die transponierte Matrix A und $\text{tr}[A]$ den Spur-Operator. Die Euklidische Vektornorm und die von ihr induzierte Matrixnorm wird als $\|\cdot\|_2$ bezeichnet. Die endliche Sequenz eines Zeitsignals x_k , $k \geq 0$, bis zum Zeitpunkt K wird durch X_K beschrieben, d.h. $X_K = [x_0, \dots, x_K]$. Die Variable P bezeichnet das Wahrscheinlichkeitsmaß über dem abstrakten Ergebnisraum Ω . Der Ausdruck F , P -f.s. beschreibt, dass das Ereignis F fast sicher bzgl. von P auftritt, also $P[F] = 1$ gilt. Der Erwartungswert wird bezeichnet als $E[\cdot]$ und der bedingte Erwartungswert wird bezeichnet als $E[\cdot|\cdot]$. Die Relation $x \sim \mathcal{N}(0, C)$ bezeichnet eine middlewertfreie Gaußverteilte Zufallsvariable mit Kovarianzmatrix C . Der Ausdruck $\mathbb{1}_{\{\cdot\}}$ bezeichnet die Indikatorfunktion.

2 Systemmodell und Problemstellung

Bild 1 zeigt die Struktur des vernetzten Regelungssystems. Sie besteht aus N unabhängigen Teilsystemen, deren Rückkopplungsschleifen über ein gemeinsames Kommunikationsnetz geschlossen sind. Das i -te Teilsystem besteht aus einer Regelstrecke \mathcal{P}_i , einem Regler \mathcal{C}_i , der aktuatorseitig implementiert ist, und einem Sensor \mathcal{S}_i . Die Regelstrecke \mathcal{P}_i wird durch folgende zeitinvariante Differenzgleichung beschrieben.

$$x_{k+1}^i = A_i x_k^i + B_i u_k^i + w_k^i \quad (1)$$

mit $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times d_i}$. Die Zustandsvariable x_k^i und der Steuerungseingang u_k^i nehmen Werte in \mathbb{R}^{n_i} bzw. in \mathbb{R}^{d_i} an. Der Rauschprozess w_k^i nimmt zu jedem Zeitpunkt k Werte in \mathbb{R}^{n_i} an und ist unabhängig und identisch verteilt mit $w_k^i \sim \mathcal{N}(0, C_i)$. Der Anfangszustand x_0^i , $i \in \{1, \dots, N\}$ ist eine Zufallsvariable mit einer zum Mittelwert symmetrischen Verteilung und hat ein endliches Moment zweiter Ordnung. Die Statistiken der Zufallsvariablen sind sowohl am Regler als auch am Sensor bekannt.

Zu jedem Zeitpunkt k entscheidet der am Sensor \mathcal{S}_i gelegene Scheduler, ob versucht werden soll den aktuellen Zustand des Teilsystems i über das Kommunikationsnetz zum Regler \mathcal{C}_i zu senden. Aufgrund der Bandbreitenbeschränkungen des Kommunikationsnetzes ist die Anzahl der Übertragungen während eines Zeitschrittes auf N_{slot} begrenzt.

Falls zu einem Zeitpunkt mehr Anfragen für eine Datenübertragung auftreten, schaltet sich ein Arbitrierungsmechanismus ein und wählt zufällig N_{slot} Teilsysteme aus, denen gestattet wird Daten zu übertragen. Die übrigen Anfragen werden geblockt. Der Scheduler wird instantan von einer Blockierung informiert. Der Arbitrierungsmechanismus verwendet keine Priorisierung der Teilsysteme, d.h. er wählt die Teilsysteme mit gleicher Wahrscheinlichkeit aus. Die Anfrage für eine Übertragung des i -ten Teilsystems wird durch die Variable δ_k^i wie folgt repräsentiert.

$$\delta_k^i = \begin{cases} 1 & \text{Anfrage zur Übertragung} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der randomisierte Arbitrierer wird durch die Zufallsvariable q_k^i repräsentiert und ist definiert als

$$q_k^i = \begin{cases} 1 & \text{gewähre Übertragung} \\ 0 & \text{blockiere Übertragung} \end{cases}$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $[q_k^1, \dots, q_k^N]$ bedingt auf den Scheduleranfragen δ_k^i , $i \in \{1, \dots, N\}$ ist zeitinvariant und hat folgende Eigenschaft

$$\mathbb{P}[q_k^i = 1 | \delta_k^i, i \in \{1, \dots, N\}] = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^N \delta_k^i \leq N_{\text{slot}} \\ \frac{N_{\text{slot}}}{\sum_{i=1}^N \delta_k^i} & \text{sonst} \end{cases} \quad (2)$$

für Teilsystem i mit $\delta_k^i = 1$ und

$$q_k^1 + \dots + q_k^N = N_{\text{slot}}, \quad \text{P-f. s.}$$

falls $\delta^1 + \dots + \delta_k^N \geq N_{\text{slot}}$.

Die empfangenen Daten am Regler \mathcal{C}_i zum Zeitpunkt k , bezeichnet mit z_k^i , können durch die vorher beschriebenen definierten Variablen beschrieben werden.

$$z_k^i = \begin{cases} x_k^i & \delta_k^i = 1 \wedge q_k^i = 1 \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases} \quad (3)$$

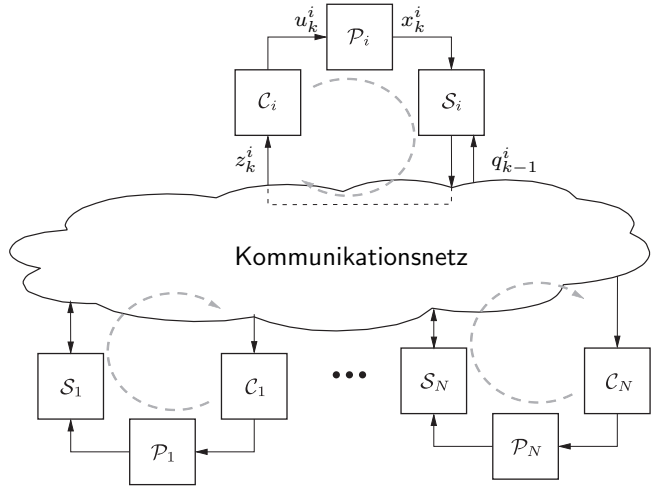


Bild 1: Systemmodell des vernetzten Regelungssystems mit N Regelkreisen, die über ein gemeinsames Kommunikationsnetz geschlossen sind, mit Regelstrecke $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_N$, Sensoren $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_N$ und Reglern $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_N$.

Jedes Teilsystem i , $i \in \{1, \dots, N\}$, besitzt eine individuelle Kostenfunktion J_i , welche als langfristige Durchschnittskosten durch

$$J_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{T-1} x_k^{i,T} Q_i^x x_k^i + u_k^{i,T} Q_i^u u_k^i \right] \quad (4)$$

gegeben ist. Die Gewichtungsmatrix Q_i^x ist positiv definit und Q_i^u ist positiv semidefinit. Es wird angenommen, dass (A_i, B_i) stabilisierbar ist und dass das Paar $(A_i, Q_i^{\frac{1}{2}})$ mit $Q_i^x = (Q_i^{\frac{1}{2}})^T Q_i^{\frac{1}{2}}$ detektierbar ist.

Ziel des Regelungs- und Schedulerentwurfs ist es die Gesamtkosten V zu minimieren. Sie bestehen aus den durchschnittlichen individuellen Kosten J_i , d.h.

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N J_i. \quad (5)$$

Das Regelgesetz $\gamma^i = \{\gamma_0^i, \gamma_1^i, \dots\}$, welches das Verhalten des Regler \mathcal{C}_i des i -ten Teilsystems widerspiegelt, wird durch die Abbildungen γ_k^i , $k \in \{0, 1, \dots\}$, beschrieben. Erlaubte Gesetze sind messbare, kausale Abbildungen vorhandener Beobachtungen, d.h.

$$u_k^i = \gamma_k^i(Z_k^i).$$

Die Menge der zugelassenen Regelgesetze wird mit der Menge Γ bezeichnet. Das Gesetz des Schedulers ist durch die Sequenz $\pi^i = \{\pi_1^i, \pi_2^i, \dots\}$ gegeben. Die Abbildung π_k^i ist definiert als

$$\delta_k^i = \pi_k^i(X_k^i, Q_{k-1}^i),$$

wobei π_k^i messbar bzgl. X_k^i, Q_{k-1}^i ist. Die Menge der zulässigen Schedulergesetze wird mit der Menge Π^{ET} bezeichnet. Scheduler aus Π^{ET} verwenden ausschließlich lokale Informationen X_k^i, Q_{k-1}^i , um zu bestimmen ob eine Anfrage zur Datenübertragung gestellt werden soll. Zeitgesteuerte Schedulergesetze können hierfür als Spezialfall betrachtet werden, bei der die Abbildung π_k^i zu jedem Zeitpunkt k unabhängig von der Beobachtung X_k^i, Q_{k-1}^i ist.

Damit kann die Menge der zulässigen zeitgesteuerten Schedulergesetze Π^{TT} als eine Teilmenge von Π^{ET} angesehen werden. Lässt man auf der anderen Seite zu, dass die Entscheidungen der Scheduler von allen Beobachtungen $\{X_k^1, Q_{k-1}^1, \dots, X_k^N, Q_{k-1}^N\}$ abhängen dürfen, ergibt sich eine zentralisierte Schedulerstruktur. Wird Π^{CEN} als die zugehörige Menge der zugelassenen zentralisierten Scheduler definiert, sieht man, dass dezentrale ereignisbasierte Scheduler in Π^{CEN} enthalten sind. Damit erhalten wir folgenden Zusammenhang zwischen den drei verschiedenen Schedulerarchitekturen.

$$\Pi^{\text{TT}} \subset \Pi^{\text{ET}} \subset \Pi^{\text{CEN}}.$$

Dies impliziert, dass die Kosten V des optimalen dezentralen ereignisbasierten Scheduler aus Π^{ET} durch die Kosten des optimalen zentralisierten Schedulers von unten beschränkt sind, bzw. durch die minimalen Kosten des optimalen zeitgesteuerten Schedulers von oben beschränkt sind. Im Folgenden beschränkt sich der Entwurf des Schedulers π^i und der Reglers γ^i auf die dezentrale Struktur, d.h. das zugehörige Optimierungsproblem lautet

$$\inf_{\substack{\gamma^i \in \Gamma \\ \pi^i \in \Pi^{\text{ET}} \\ i \in \{1, \dots, N\}}} V. \quad (6)$$

3 Entwurfsmethode der ereignisbasierten Regelung

Im Folgenden wird ein Entwurfsverfahren zur Berechnung eines dezentralen ereignisbasierten Regelgesetzes entwickelt und analysiert. Dieser Abschnitt teilt sich vier Unterabschnitte. Im Unterabschnitt 3.1 wird eine Approximation des ursprünglichen Optimierungsproblems formuliert, dessen Lösung im Unterabschnitt 3.2 diskutiert wird. Stabilitätsbedingungen unter Verwendung des approximativen Entwurfsansatzes werden im darauffolgenden Unterabschnitt hergeleitet und im letzten Unterabschnitt werden asymptotische Optimalitätseigenschaften des vorgestellten Ansatzes adressiert.

3.1 Approximativer Entwurfsansatz

Obwohl die Kopplung der Teilsysteme ausschließlich durch die Ressourcenbeschränkung im Kommunikationsnetz verursacht wird, stellt die Bestimmung der optimalen ereignisbasierten Regelungen, die das Optimierungsproblem in (6) lösen, ein schweres Optimierungsproblem dar. Der Grund dafür ist in zweiter Linie, die Tatsache, dass die Anzahl der Teilsysteme groß sein kann, sondern ist in erster Linie durch die verteilte Informationsstruktur gegeben. In [20] wird gezeigt, dass optimale stochastische Regelungsprobleme mit verteilter Informationsstruktur im Allgemeinen schwierig zu lösen sind, selbst wenn die Dynamik des Systems linear und quadratische Kosten betrachtet werden. In dem vorliegenden Optimierungsproblem kommt hinzu, dass der Einfluss der Ressourcenbeschränkung auf die Regelgüte schwierig abzuschätzen ist. Im Gegensatz zu zeitgesteuerten Schedulerstrukturen lässt sich bei einer dezentralen ereignisbasierten Schedulerstruktur im Allgemeinen nicht vorab bestimmen, ob eine Übertragungsanfrage gebilligt wird oder nicht. Trotz des zusätzlichen Nichtdeterminismus durch das Kommunikationsnetz lässt sich eine signifikante Verbesserung der Regelgüte mit einem ereignisbasierten Ansatz erzielen, wie in Abschnitt 4 gezeigt wird.

Um dennoch einen systematischen Ansatz zur Bestimmung einer ereignisbasierten Regelung zu finden, die auf eine Minimierung von V abzielt, wird folgende Approximation eingeführt. Dabei wird die harte Nebenbedingung, dass maximal N_{slot} Übertragungen pro Zeitschritt zugelassen sind, abgeschwächt und es wird lediglich gefordert, dass im Mittel N_{slot} Übertragungen stattfinden. Hierfür wird die durchschnittliche Übertragungsrate des i -ten Teilsystems definiert als

$$r_i = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{T-1} \delta_k^i \right].$$

Damit ergibt sich eine mittlere Ratenbeschränkung von

$$\sum_{i=1}^N r_i \leq N_{\text{slot}}.$$

Mit obiger Ratenbeschränkung lässt sich das approximative Optimierungsproblems als zweistufiges Optimierungsproblem auffassen. Beide Stufen sind über die mittlere Übertragungsrate gekoppelt. Weist man jedem Teilsystem i eine obere Schranke \bar{r}_i für die mittlere Übertragungsrate zu, dann erhält man in einer ersten Stufe folgendes Optimierungsproblem

$$J_i^*(\bar{r}_i) = \inf_{\substack{\gamma^i \in \Gamma \\ \pi^i \in \Pi^{\text{ET}} \\ r_i \leq \bar{r}_i}} J_i(\gamma^i, \pi^i) \quad (7)$$

wobei der Zustand x_k der Dynamik gegeben durch (1) folgt und angenommen wird, dass im Gegensatz zu (3)

jede Schedulieranfrage für eine Übertragung gewährt wird, d.h.

$$z_k^i = \begin{cases} x_k^i & \delta_k^i = 1 \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

Hier sieht man, dass obiges Optimierungsproblem für ein gegebenes \bar{r}_i lokal in jedem Teilsystem gelöst werden kann. In der zweiten Stufe wird die optimale mittlere Übertragungsrate bestimmt durch

$$\bar{V}^* = \inf_{\substack{\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N \\ \sum_{i=1}^N r_i \leq N_{\text{slot}}}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N J_i^*(\bar{r}_i) \quad (8)$$

Das zweistufige Optimierungsproblem bestehend aus (7) und (8) besitzt eine hierarchische Struktur. Die Abbildung J_i^* aus (7) und dessen zugehörige optimale Gesetze γ^i und π^i werden zunächst separat in jedem Teilsystem berechnet. Die koordinierende Einheit in der zweiten Stufe bestimmt dann mit Hilfe der Funktionen J_i^* aller Teilsysteme die optimale Ratenverteilung und weist jedem Teilsystem eine Übertragungsrate \bar{r}_i zu.

3.2 Strukturelle Eigenschaft der approximativen Lösung

Das in (8) formulierte lokale Optimierungsproblem hat immer noch eine verteilte Informationsstruktur, da sich die Beobachtungen an Regler und Sensor unterscheiden können. Damit lassen sich auch hier keine konventionellen Lösungsmethoden anwenden. Dafür haben bestehende Arbeiten zeigen können, dass die optimale Lösung von (8) gewisse strukturelle Eigenschaften besitzt [16, 17, 15, 14]. Diese strukturellen Eigenschaften erlauben eine effiziente Berechnung des optimalen ereignisbasierten Reglers. Das nachfolgende Theorem gibt Aufschluss über die Form des optimalen Regelgesetzes $\gamma^{i,*}$.

Theorem 1 (Sicherheitsäquivalenz von $\gamma^{i,*}$, [16])

Sei (A_i, B_i) stabilisierbar und $(A_i, Q_i^{\frac{1}{2}})$ detektierbar ist. Dann ist die Form des optimalen Regelgesetzes $\gamma^{i,*}$ für Optimierungsproblem (7), gegeben durch

$$u_k^i = \gamma_k^{i,*}(Z_k^i) = -L_i \mathbb{E}[x_k^i | Z_k^i], \quad (9)$$

wobei L_i mittels der algebraischen Ricattigleichung berechnet wird, d.h.

$$\begin{aligned} L_i &= (B_i^\top P_i B_i + Q_i^u)^{-1} B_i^\top P_i A_i, \\ P_i &= A_i^\top (P_i - P_i B_i (B_i^\top P_i B_i + Q_i^u)^{-1} B_i^\top P_i) A_i + Q_i^x. \end{aligned}$$

□

Als sicherheitsäquivalent bezeichnet man optimale Regler, wenn deren Struktur aus der Lösung des deterministischen Optimierungsproblems unter Substitution der

Rauschvariablen durch ihre Mittelwerte resultiert, wobei der Zustand x_k^i durch die Schätzung $\mathbb{E}[x_k^i | Z_k^i]$ ersetzt wird. Theorem 1 ermöglicht eine Reihe weiterer Vereinfachungen. Berücksichtigt man, dass die Verteilungen der Rauschvariablen symmetrisch sind, lässt sich für den Fall dynamischer Systeme erster Ordnung zeigen, dass das optimale Schedulergesetz $\pi^{i,*}$ durch eine symmetrische Schwellwertfunktion des Schätzfehlers gegeben ist, [15]. Im Folgenden wird auch für den mehrdimensionalen Fall angenommen, dass das optimale Schedulergesetz $\pi^{i,*}$ symmetrisch ist. Bezieht man sich auf die Arbeiten in [32], in denen eine verwandte Problemstellung analysiert wird, so ist diese Annahme auch zutreffend, falls Kostenfunktion und Transitionskernel radial symmetrisch und abnehmend. In diesem Fall lässt sich die Umordnungs-Ungleichung von Riesz auch für mehrdimensionale Systeme anwenden, um zu zeigen dass symmetrische Gesetze optimal sind. Im Allgemeinen liegt auch hier der Fall vor, dass Kostenfunktion und Transitionskernel radial abnehmend sind, jedoch kann allgemein nur angenommen werden, dass die Kostenfunktion und der Transitionskernel symmetrisch – nicht aber radial symmetrisch – sind. Dies ist ein stichhaltiges Indiz dafür, dass die Annahme auch für mehrdimensionale Systeme zutrifft. Es fehlt aber ein rigoroser Beweis dafür.

Aus der Symmetrie-Eigenschaft lässt sich schließen, dass der optimale Schätzer wie folgt gegeben ist

$$\mathbb{E}[x_k^i | Z_k^i] = \begin{cases} z_k^i & z_k^i \in R^{n_i} \\ (A_i - B_i L_i) \mathbb{E}[x_{k-1}^i | Z_k^i] & z_k^i = \emptyset \end{cases} \quad (10)$$

mit $\mathbb{E}[x_0 | Z_0^i] = 0$ für $z_0^i = \emptyset$. Definiert man den Schätzfehler e_k^i als

$$e_k^i = x_k^i - \mathbb{E}[x_k^i | Z_{k-1}^i],$$

lässt sich die Bestimmung des optimalen Schedulergesetzes als Markov-Entscheidungsprozess mit Nebenbedingung [22] auffassen. Der Markov-Zustand $e_k \in \mathbb{R}^{n_i}$ folgt dabei der zeitinvarianten Differenzgleichung

$$e_{k+1}^i = g_i(e_k^i, \delta_k^i, w_k^i) = (1 - \delta_k^i) A_i e_k^i + w_k^i \quad (11)$$

mit Anfangsbedingung $e_0^i = x_0^i - \mathbb{E}[x_0^i]$. Wenn das optimale Regelgesetz $\gamma^{i,*}$ aus Theorem 1 in die Kosten J_i substituiert wird, erhält man folgendes stochastisches Optimierungsproblem

$$\inf_{\substack{\pi^i \in \Pi^M \\ r_i \leq \bar{r}_i}} J_i^S \quad (12)$$

mit

$$J_i^S = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{T-1} (1 - \delta_k^i) e_k^{i,\top} Q_i^e e_k^i \right],$$

wobei $Q_i^e = L_i^\top (Q_i^u + B_i^\top P_i B_i) L_i$. Die Menge Π^M bezeichnet die Menge der Markov-Gesetze und ist definiert als die Menge der messbaren Abbildungen des

Schätzfehlers $e_k^i \in \mathbb{R}^{n_i}$ nach $\{0, 1\}$ für alle $k \geq 0$. Nach Einsetzen des optimalen Regelgesetzes $\gamma^{i,*}$ und des optimalen Schätzers gegeben durch (10), besteht folgender Zusammenhang zu dem ursprünglichen Optimierungsproblem (7)

$$J_i(\gamma^{i,*}, \cdot) = J_i^S(\cdot) + \text{tr}[P_i C_i].$$

Der Ausdruck $\text{tr}[P_i C_i]$ ist konstant und kann dadurch vernachlässigt werden. Um die Analyse des Optimierungsproblem in (12) zu vereinfachen, wird folgende technische Annahme eingeführt.

Annahme 1 *Der i -te Scheduler stellt immer eine Anfrage an das Kommunikationsnetz, d.h. $\pi_k^i(e_k^i) = 1$, wenn $\|e_k^i\|_2 > M_i$ für ein beliebig großes M_i . \square*

Annahme 1 stellt in der Praxis keine besondere Einschränkung dar, da M_i für jedes Teilsystem beliebig groß gewählt werden kann. Zum Einen folgt aus dieser Annahme, dass die laufenden Kosten $(1 - \delta_k^i) e_k^{i,T} Q_i^e e_k^i$ beschränkt sind. Zum Anderen wird in [14] gezeigt, dass die Markov-Kette resultierend aus einem beliebigen Gesetz aus Π^M ergodisch unter der Annahme 1 ist.

Der Markov-Entscheidungsprozess mit Nebenbedingung aus (12) unter Annahme 1 wird nachfolgend durch die Lagrange-Methode in ein Markov-Entscheidungsprozess ohne Nebenbedingung formuliert.

$$\inf_{\pi^i \in \Pi^M} J_i^S + \lambda r_i. \quad (13)$$

Dabei ist die Gewichtung λ nichtnegativ und kann als Lagrange-Multiplikator des Markov-Entscheidungsprozess mit Nebenbedingung aus (12) angesehen werden [22]. Die Menge Π^M wurde bereits in Optimierungsproblem (12) eingeführt. Wählt man ein festes λ , so kann (13) mittels Werteiteration [25] gelöst werden. Aufgrund der Beschränktheit der laufenden Kosten und der Ergodizität der Markov-Kette unter Annahme 1 ist garantiert, dass die Werteiteration zur optimalen Lösung konvergiert. Anstelle der genauen Bestimmung wird obiges Optimierungsproblem im Folgenden als Skalarisierung [24] des zugehörigen multikriteriellen Optimierungsproblems mit Kostenvektor $[J_i^S, r_i]$ angesehen. Für jedes $\lambda \in [0, \infty)$ wird ein Pareto-optimaler Punkt in der J_i^S - r_i -Ebene erhalten. Es ist einfach zu sehen, dass die Koordinaten der Pareto-optimalen Punkte $[J_i^{S,*}, r_i^*]$ monoton in λ sind, d.h. $J_i^{S,*}$ ist monoton steigend in λ und r_i^* ist monoton fallend in λ . Zudem erhält man aus der Stetigkeit der optimalen Wertefunktion in λ , die aus Kapitel 3.5 in [23] folgt, und der absoluten Stetigkeit der stationären Verteilung der π^i -kontrollierten Markov-Kette, dass $[J_i^{S,*}, r_i^*]$ stetig in λ ist. Damit erhalten wir durch den Skalarisierungsansatz in (13) die gewünschte Funktion $J_i^*(\bar{r}_i)$, die sich aus der Menge der Pareto-optimalen Punkte ergibt. Diese ist konvex und monoton fallend in \bar{r}_i . Dadurch wird das globale Optimierungsproblem in Stufe 2 definiert durch

(8) zu einem konvexen Optimierungsproblem. Dieses Ressourcenallokationsproblem ist ein gängiges Problem bei der Optimierung von Kommunikationsnetzen, für welches effiziente Lösungsalgorithmen existieren [27].

Bild 2 fasst die Funktionsweise des vorgeschlagenen ereignisbasierten Regelungssystems innerhalb eines Teilsystems zusammen. Der Regler besteht aus Schätzer $E[x_k^i | Z_k^i]$ gegeben durch (10) und der linearen Reglerverstärkung L_i gegeben in Theorem 1. Am Scheduler ist eine Kopie des Schätzers $E[x_k^i | Z_{k-1}^i]$ implementiert, wobei das aktuelle Signal z_k^i noch nicht zur Verfügung steht. Dabei rekonstruiert der Funktionsblock \mathcal{T}_i das am Regler empfangene Signal z_{k-1}^i . Aus der Differenz zwischen Zustand x_k^i und Schätzung $E[x_k^i | Z_{k-1}^i]$ ergibt sich der Schätzfehler e_k^i , welcher anhand der optimalen Indikatorfunktion $\pi^{i,*}$ entscheidet, ob eine Anfrage zur Übertragung des aktuellen Zustandes über das Kommunikationsnetz gestellt werden soll.

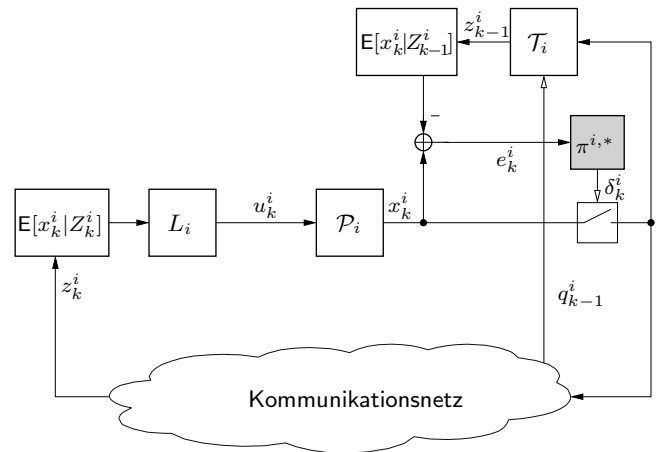


Bild 2: Struktur des dezentralen ereignisbasierten Regelungssystems für Teilsystem i . Funktionsblock \mathcal{T}_i rekonstruiert das am Regler empfangene Signal z_{k-1}^i .

3.3 Stochastische Stabilität

Der entwickelte Entwurfsansatz im vorangegangenen Unterabschnitt ignoriert, dass in jedem Zeitschritt maximal N_{slot} Übertragungen gestattet werden. Damit ist zunächst nicht gewährleistet, ob das Gesamtsystem mit der tatsächlichen Kommunikationsbeschränkung unter Verwendung der approximativen Entwurfsmethode stochastisch stabil ist. In diesem Artikel wird eine Markov-Kette als *stochastisch stabil* bezeichnet, wenn sie ergodisch ist und die stationäre Verteilung ein endliches Moment zweiter Ordnung besitzt. Eine Markov-Kette ist *ergodisch*, wenn eine eindeutige stationäre Verteilung existiert, zu der die Markov-Kette für $k \rightarrow \infty$ für jeden beliebigen Anfangszustand konvergiert. Das folgende Theorem gibt eine Stabilitätsbedingung, welche stochastische Stabilität für das Gesamtsystem garantiert.

Theorem 2 Sei das Regelgesetz $\gamma^{i,*}$ gegeben durch (9) und sei $\pi^{i,*} \in \Gamma^M$ das Schedulergesetz, wobei Annahme 1 erfüllt ist. Wenn die Bedingung

$$\frac{N_{\text{slot}}}{N} > 1 - \frac{1}{\|A_i\|_2^2} \quad (14)$$

für alle $i \in \{1, \dots, N\}$ gilt, dann ist die Markov-Kette, die das Gesamtsystem beschreibt, ergodisch und die stationäre Verteilung hat ein endliches Moment zweiter Ordnung. \square

Beweis Die Zusammenfassung der Zustandsrealisierungen der Teilsysteme $i \in \{1, \dots, N\}$ mit den Zustandsgrößen $[x_k^i, e_k^i]$ definiert im Folgenden den Markov-Zustand des Gesamtsystems unter Verwendung von $\gamma^{i,*}$ und $\pi^{i,*}$ als Regler-, bzw. Schedulergesetz. Die Dynamik des Schätzfehlers e_k^i , welche in (11) beschrieben ist, muss erweitert werden, um auftretende Blockierungen durch das Kommunikationsnetz miteinzubeziehen. Dadurch erhält man die Differenzgleichung

$$e_{k+1}^i = (1 - q_k^i \pi^{i,*}(e_k^i)) A_i e_k^i + w_k^i \quad (15)$$

mit Anfangsbedingung $e_0^i = x_0^i - \mathbb{E}[x_0^i]$ und einer bedingten Verteilung von q_k^i definiert durch (2). Schreibt man das Zustandsdynamik um, dann erhält man

$$x_{k+1}^i = (A_i - B_i L_i) x_k^i + (1 - q_k^i \pi^{i,*}(e_k^i)) B_i L_i e_k^i + w_k^i. \quad (16)$$

Es kann aus (15) und (16) beobachtet werden, dass die Dynamik in jedem Teilsystem eine Dreiecksstruktur besitzt, d.h. der Zustand x_k^i hat keinen Einfluss auf den Schätzfehler e_k^i . Ferner kann die Dynamik in (16) als eine stabiles lineares mit additivem Rauschen $(1 - q_k^i \pi^{i,*}(e_k^i)) B_i L_i e_k^i + w_k^i$ betrachtet werden. Wenn man zeigen kann, dass der Prozess e_k^i ergodisch mit endlichem Moment zweiter Ordnung ist, dann folgt daraus, dass x_k^i ergodisch mit einem endlichen Moment ist. Folglich wird das asymptotische Verhalten der Markov-Kette $\zeta_k = [e_k^1, \dots, e_k^N]$, welches durch (11) beschrieben wird, analysiert. Die Stabilitätsanalyse basiert auf Driftbedingungen aus [26]. Der Drift-Operator Δ ist definiert als

$$\Delta h(\zeta_k) = \mathbb{E}[h(\zeta_{k+1}) | \zeta_k] - h(\zeta_k), \quad \zeta_k \in \mathbb{R}^{n_1 + \dots + n_N}.$$

wobei $h(\zeta_k)$ eine Abbildung von $\mathbb{R}^{n_1 + \dots + n_N}$ nach \mathbb{R} .

Betrachtet wird folgende Funktion

$$h(\zeta_k) = \sup_{i \in \{0, \dots, N\}} \|e_k^i\|_2^2. \quad (17)$$

Es stellt sich sofort heraus, dass der Drift von $h(\zeta_k)$ in (17) innerhalb jeder beliebig gewählten kompakten Menge beschränkt ist. Wir definieren folgende kompakte Menge $\mathcal{M} = \{\zeta = [e^1, \dots, e^N] \in \mathbb{R}^{n_1 + \dots + n_N} \mid \|e^i\|_2 \leq M_i, i \in \{1, \dots, N\}\}$. Aufgrund von Annahme 1 ist die

Systemgleichung des i -ten Teilsystems außerhalb der Menge \mathcal{M} gegeben durch

$$e_{k+1}^i = (1 - q_k^i) A_i e_k^i + w_k^i.$$

Aufgrund der absoluten Stetigkeit der Verteilung von w_k^i ist die Markov-Kette ψ -irreduzibel und aperiodisch, lässt sich folgende Driftbedingung aus [26] verwenden, um Ergodizität mit endlichem Moment zweiter Ordnung zu erhalten.

$$\Delta h(\zeta_k) \leq -\epsilon h(\zeta_k), \quad \zeta_k \in \mathbb{R}^{n_1 + \dots + n_N} \setminus \mathcal{O}, \quad (18)$$

wobei $\epsilon > 0$ und $\mathcal{O} \supset \mathcal{M}$ kompakt ist.

Wegen der statistischen Unabhängigkeit von w_k^i , q_k^i und e_k^i für $\|e_k^i\|_2 > M_i$ und $w_k^i \sim \mathcal{N}(0, C_i)$ ergibt sich für den Drift folgender Ausdruck.

$$\Delta h(\zeta_k) = \mathbb{E}[1 - q_k^i] \|A_i e_k^i\|_2^2 + \text{tr}[C_i] - \|e_k^i\|_2^2,$$

wobei das Supremum ohne Beschränkung der Allgemeinheit durch das i -te Teilsystem angenommen wird.

Der Ausdruck $\mathbb{E}[1 - q_k^i]$ beschreibt die durchschnittliche Blockierungswahrscheinlichkeit und ist wegen (2) mit $1 - \frac{N_{\text{slot}}}{N}$ von oben beschränkt. Damit ist der Drift beschränkt durch

$$\Delta h(\zeta_k) \leq ((1 - \frac{N_{\text{slot}}}{N}) \|A_i\|_2^2 - 1) h(\zeta_k) + \text{tr}[C_i].$$

Die Bedingung in (18) gewährleistet, dass sich ein geeignetes ϵ und eine geeignete kompakte Menge \mathcal{O} finden lassen, so dass die Driftbedingung in (18) für alle $\zeta \notin \mathcal{O}$ erfüllt ist. \square

3.4 Asymptotische Optimalität

Im Mittelpunkt dieses Abschnitts steht die Analyse des in Unterabschnitt 3.1 vorgeschlagenen approximativen Entwurfsansatzes, wenn die Anzahl N der Teilsysteme groß ist. Eine Entwurfsmethode wird als *asymptotisch optimal* bezeichnet, wenn die Kosten der Lösung durch eine ausreichend große Anzahl an Teilsystemen beliebig nahe an die optimalen Kosten gelangen. Die relevanten Systemparameter eines Teilsystems i werden in dem 4-Tupel $\mathcal{K}_i = \{A_i, B_i, Q_i^x, Q_i^u\}$ zusammengefasst, wobei im Folgenden angenommen wird, dass C_i durch die Einheitsmatrix gegeben ist. Um die Regelgüte zwischen den Gesamtsystemen bei wachsendem N vergleichen zu können, wird das Kommunikationssystem so mitskaliert, dass das Verhältnis N_{slot}/N konstant bleibt. Es wird zudem angenommen, dass es eine endliche Anzahl \bar{N} an Teilsystemklassen gibt, d.h. $\mathcal{K}_i \in \{\mathcal{K}^1, \dots, \mathcal{K}^{\bar{N}}\}$. Die Anzahl der Teilsysteme in einer Teilsystemklasse wird mit steigendem N so skaliert, dass dessen Verhältnis untereinander konstant bleibt. Diese Annahme impliziert, dass es genügt lediglich Teilsysteme einer Untersystemklasse \mathcal{K}^j mit einer festen Slotzuweisung der Größe $N_{\text{slot}}^j \leq N_{\text{slot}}$ separat zu betrachten. Das nachfolgende Theorem gibt eine Aussage über

die Optimalitätseigenschaften der vorgeschlagenen Entwurfsmethode in Unterabschnitt 3.1.

Theorem 3 Wenn Annahme 1 und die Stabilitätsbedingung in (14) erfüllt sind, dann ist die Lösung des zweistufigen approximativen Optimierungsproblem bestehend aus (7) und (8) asymptotisch optimal in Bezug auf das Optimierungsproblem (6).

Beweis Zunächst ist festzuhalten, dass die optimalen Kosten \bar{V}^* in (8) eine untere Schranke der Kosten des ursprünglichen Optimierungsproblems ist. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die harte Ratenbeschränkung in Optimierungsproblem (8) durch eine durchschnittliche Ratenbeschränkung ersetzt wird. Im Folgenden wird gezeigt, dass die Abweichung von den optimalen Kosten \bar{V}^* aufgrund der tatsächlichen harten Ratenbegrenzung beliebig klein für ausreichend großes N wird. Wie bereits angedeutet, genügt es sich auf ein System mit identischen Teilsystemen einer Untersystemklasse zu beziehen. Aus der Konvexität der Abbildung $J_i^*(\bar{r}_i)$ in (7) folgt, dass jedem einzelnen Teilsystem die gleiche Übertragungsraten zugeteilt wird. Daraus ergibt sich eine Rate von $r_i = N_{\text{slot}}/N$ für jedes Teilsystem i . Als nächstes lässt sich beobachten, dass das Ereignis der Anfrage eines Teilsystems für eine Übertragung bezogen auf die letzte erfolgreiche Übertragung als Erneuerungsprozess angesehen werden kann. Dieser Prozess ist identisch mit einem System ohne harte Ratenbegrenzung, da auftretende Blockierungen ausgeblendet werden. Aus Theorem 2 folgt mit Annahme 1 und Bedingung (14), dass die resultierende Markov-Kette, die das Gesamtverhalten beschreibt, ergodisch ist. D.h. es existiert eine eindeutige stationäre Verteilung des Markov-Zustandes. Dies impliziert ferner, dass der Erneuerungsprozess aperiodisch und rekurrent ist und damit

$$r_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{P}[\delta_k^i = 1 | \text{letzte Übertragung erfolgreich}].$$

Aus dem Gesetz der großen Zahlen ergibt sich daraus für $N \rightarrow \infty$ und $k \rightarrow \infty$ bei konstantem Verhältnis $r_i = N_{\text{slot}}/N$, dass die Summe der Zugriffe zu

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_k^i = r_i.$$

Das heißt im Limit gibt es genau N_{slot} Anfragen. Damit treten keine Blockierungen auf und die optimalen Kosten konvergieren zu \bar{V}^* aus (8). Dies impliziert, dass die Entwurfsmethode gegeben durch (7) und (8) asymptotisch optimal ist. \square

4 Numerische Simulationen

In diesem Abschnitt wird der vorgeschlagene ereignisbasierte Ansatz evaluiert und mit dem optimalen zeitgesteuerten und zentralisierten Ansätzen verglichen. Um

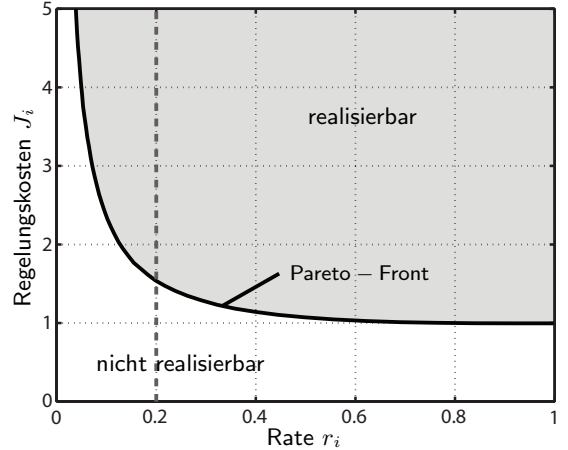


Bild 3: Pareto Front eines Teilsystems mit Systemparametern $\mathcal{K} = (1, 1, 1, 0)$. Die vertikale gestrichelte Linie deutet die Ratenbeschränkung $r_i \leq N_{\text{slot}}/N = 0,2$ an.

die Darstellung zu vereinfachen, werden nachfolgende ausschließlich skalare Systeme betrachtet.

Zunächst wird ein vernetztes Regelungssystem identischer Teilsysteme mit Systemparametern $\mathcal{K}_i = \mathcal{K} = (1, 1, 1, 0)$ betrachtet. Die Anzahl der Teilsysteme N wird im Folgenden variabel gehalten, wobei das Verhältnis N_{slot}/N konstant bei 0,2 bleibt.

Bild 3 zeigt die Front der realisierbaren Pareto-optimalen Kostenvektoren $[J_i, r_i]$ für ein Teilsystem mit Parametern \mathcal{K} . Für identische Teilsysteme vereinfacht sich die globale Ressourcenallokation aus Stufe 2 erheblich, da jedem Teilsystem die gleiche Ratenbeschränkung $r_i \leq 0,2$ zugewiesen wird. Unter dieser Ratenbeschränkung ergibt sich der optimale Betriebspunkt bei $[J_i^*, r_i^*] = [1, 54, 0, 2]$. Dieser wird erreicht durch das optimale Regelgesetz aus (9) mit $L_i = 1$ und dem ereignisbasierten Schedulergesetz $\delta_k^i = \mathbf{1}_{\{|e_k^i| > 1,7\}}$.

Bild 4 vergleicht die drei Klassen der Zugriffsverfahren - das Zeitmultiplexverfahren, das zentralisierte Multiplexverfahren und das dezentrale ereignisbasierte Multiplexverfahren - miteinander. Es ist leicht zu zeigen, dass der optimale Regler im zeitgesteuerten und im zentralisierten Fall mit dem Regler aus (9) übereinstimmt. Die Regelungskosten für verschiedene $N \in \{5, 25, 100, 250, 500\}$ sind mittels Monte Carlo Simulationen mit einem Horizont von $T = 10000$ bestimmt worden. Für den Fall identischer Teilsysteme werden beim zeitgesteuerten Scheduler Übertragungsslots sukzessiv zugewiesen. D.h. die Übertragungen eines Teilsystems erfolgen periodisch mit Übertragungsperiode N/N_{slot} . Das optimale zentralisierte Zugriffsverfahren besitzt eine einfache analytische Lösung, wenn die Teilsysteme skalar und identisch sind. In diesem Spezialfall gewährt der zentralisierte Scheduler den N_{slot} Teilsystemen mit den größten $|e_k^i|$ eine Übertragung zu tätigen.

Verglichen mit dem zeitgesteuerten Fall ergeben sich mit dem ereignisbasierten Regelungssystem signifikant ge-

ringere Kosten, welche sich zudem mit hoher Konvergenzrate für $N \rightarrow \infty$ den optimalen Kosten der zentralisierten Lösung nähern. Bereits für $N = 100$, ist die Kostendifferenz zur optimalen zentralisierten Lösung kleiner als 10%.

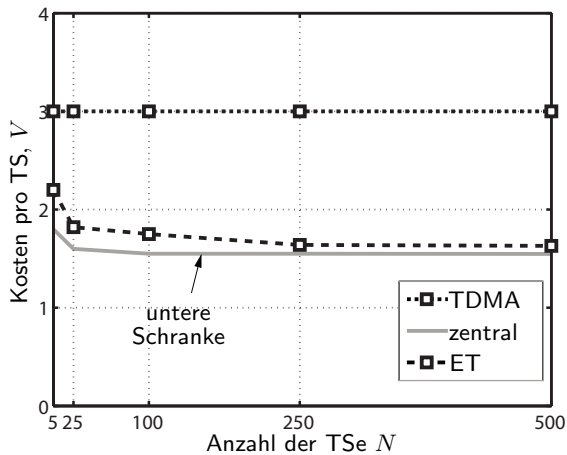


Bild 4: Vergleich der Zugriffsverfahren mittels Zeitmultiplex (TDMA), zentralisiertem Multiplex (zentral) und dezentralisiertem ereignisbasiertem Multiplex (ET) für ein vernetztes Regelungssystem mit N identischen Teilsystemen (TS'e) und Systemparametern $\mathcal{K} = (1, 1, 1, 0)$ und $N_{\text{slot}}/N = 0, 2$.

Als nächstes wird ein System mit zwei unterschiedlichen Teilsystemklassen betrachtet. Die Systemparameter eines Teilsystems sind entweder durch $\mathcal{K}^1 = (1, 25, 1, 1, 0)$ oder durch $\mathcal{K}^2 = (0, 75, 1, 1, 0)$ gegeben. Es wird angenommen, dass beide Klassen zu gleich großer Menge auftreten. Das Kommunikationsnetz skaliert mit der Anzahl der Teilsysteme und hat ein Verhältnis von $N_{\text{slot}}/N = 0, 5$. Es kann beobachtet werden, dass die Stabilitätsbedingung gegeben durch (14) in Theorem 2 für das vorliegende System erfüllt sind.

Nachdem man in Stufe 1 des approximativen Optimierungsproblems die Pareto Fronten, welche in Bild 5 für Teilsysteme mit \mathcal{K}^1 und \mathcal{K}^2 dargestellt sind, erhält, ergibt sich aus dem Ressourcenallokationsproblem in Stufe 2 eine optimale Ratenzuweisung von $[r_1^*, r_2^*] = [0, 6, 0, 4]$. Die optimale Regelungsverstärkung ist gegeben durch $L_i = A_i$ für jedes Teilsystem und das Schedulergesetz ist eine Schwellwertstrategie mit $\delta_k^1 = \mathbb{1}_{\{|e_k^1| > 0,5\}}$ für Teilsysteme mit \mathcal{K}_1 und $\delta_k^2 = \mathbb{1}_{\{|e_k^2| > 0,95\}}$ für Teilsysteme mit \mathcal{K}_2 .

Die Regelungskosten, dargestellt in Bild 6 für verschiedene $N \in \{2, 10, 50, 100, 250, 500\}$, sind wiederum mittels Monte Carlo Simulationen mit einem Horizont von $T = 10000$ berechnet worden.

Die Bestimmung des optimalen zeitgesteuerten Schedulers wurde durch eine kombinatorische Suche über alle Kombinationen an Übertragungsabläufen durchgeführt. Um die numerische Komplexität zu begrenzen, beschränkt sich die Suche über periodische Zugriffe

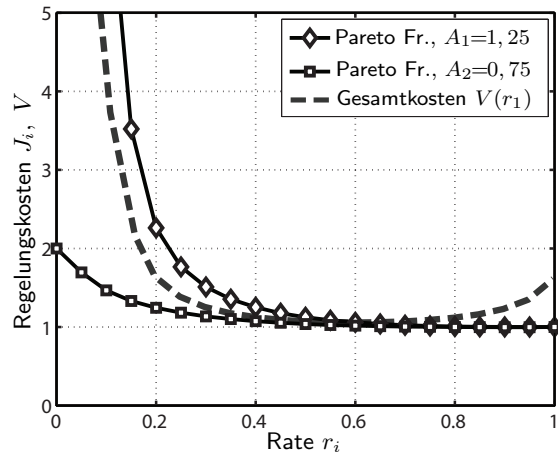


Bild 5: Durchgezogene Linien: Pareto Front zweier Teilsysteme mit Systemparametern \mathcal{K}^1 und \mathcal{K}^2 . Gestrichelte Linie: Gesamtkosten $V(r_1) = \frac{1}{2}(J_1(r_1) + J_2(r_2))$ mit Nebenbedingung $\frac{1}{N}(r_1 + r_2) \leq 0, 5$. Die optimale übertragungsrate ist gegeben durch $[r_1, r_2] = [0, 6, 0, 4]$ mit $V = 1, 07$ ohne Berücksichtigung von Blockierungen.

von Teilsystemen \mathcal{K}_2 . Dabei ergibt sich folgendes Zugriffsschema $[\delta_0^1, \delta_1^1, \delta_2^1, \dots] = [1, 1, 0, \dots]$ für Teilsysteme mit \mathcal{K}^1 und $[\delta_0^2, \delta_1^2, \delta_2^2, \dots] = [0, 0, 1, \dots]$ für Teilsysteme mit einer Abtastperiode von 3. Im heterogenen Fall ist eine Berechnung des zentralisierten Schedulers aufgrund der hohen Dimension des Zustandsraumes nicht durchführbar. Deshalb wird in diesem Fall lediglich eine untere Schranke angegeben. Diese Schranke ist durch $V = 1$ gegeben, wenn man annimmt es gäbe keine Kommunikationsbeschränkungen. Bild 6 zeigt, dass sich die ereignisbasierte Lösung der unteren Schranke nähert mit einer Kostendifferenz von weniger als 10% für $N \geq 100$. Für eine beliebige Anzahl an Teilsystemen wird das zeitgesteuerte Übertragungsschema vom ereignisbasierten Ansatz übertroffen.

5 Diskussion

Im Folgenden wird auf einzelne Aspekte des vorgeschlagenen Entwurfsmechanismus des dezentralen ereignisbasierten Regelungssystems eingegangen. Zunächst wird die numerische Komplexität des Verfahrens adressiert. Bei der Berechnung der Pareto-Front in Stufe 1 der Entwurfsmethode werden für mehrere Werte von λ Wertiterationen in jedem Teilsystem durchgeführt. Die Wertiteration kann bei einer geringen Zustandsdimension verwendet werden. Bei Systemen höherer Ordnung existieren approximative Methoden [19], die mit Hilfe von semidefiniter Programmierung gelöst werden können. Die Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung für das optimale Regelgesetz (9) kann in polynomieller Zeit berechnet werden und stellt dahingegen keine numerischen Probleme dar. Zudem sollte angemerkt werden, dass die Bestimmung der Pareto-Front offline für jedes

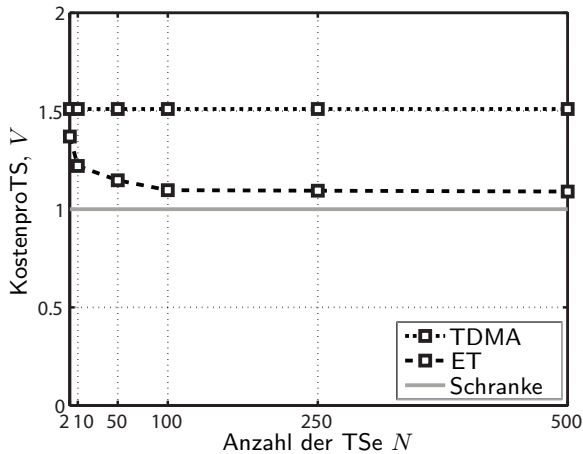


Bild 6: Vergleich der Zugriffsverfahren mittels Zeitmultiplex (TDMA) und dezentralisiertem ereignisbasiertem Multiplex (ET) für ein heterogenes vernetztes Regelungssystem mit N Teilsystemen (TS'e) zweier Konfigurationen \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 und $N_{\text{slot}}/N = 0, 5$.

Teilsystem durchgeführt werden kann ohne die Systemparameter des Kommunikationsnetzes berücksichtigen zu müssen. Die Implementierung des ereignisbasierten Schedulers im Sensorknoten erfolgt, dann in der Transportschicht des Kommunikationsprotokolls. Die Lösung des globalen Ressourcenallokationsproblem mit N Entwurfsparametern in Stufe 2 ist ein konvexes Optimierungsproblem, für welches effiziente Gradientenverfahren existieren. Somit lässt sich dieses Optimierungsproblem auch für große N lösen.

Die Stabilitätsbedingung in Theorem 2 kann für jedes Teilsystem separat geprüft werden und stellt keine Bedingungen an das Schedulerverhalten der anderen Teilsysteme. Dies impliziert, dass stochastische Stabilität selbst dann gewährleistet ist, wenn andere Teilsysteme permanent Anfragen für eine Übertragung stellen.

Aus den numerischen Simulationen lässt sich beobachten, dass die Regelgüte des ereignisbasierten Ansatzes stets besser als die des zeitgesteuerten Zugriffsschemas ist. Das trifft sogar bei einer geringen Anzahl an Teilsystemen zu, obwohl Optimalität des ereignisbasierten Zugriffsverfahrens nur asymptotisch für eine große Anzahl an Teilsystemen gewährleistet ist.

Im Gegensatz zum zentralisierten und zeitgesteuerten Zugriffsverfahren bietet der vorgeschlagene Ansatz eine erheblich bessere Flexibilität in Bezug auf Veränderungen zur Laufzeit. Werden neue Teilsysteme in das bestehende System hinzugeschaltet oder vorhandene Teilsysteme abgeschaltet, muss lediglich die Optimierungsaufgabe in Stufe 2 noch einmal gelöst werden, um die Übertragungsraten anzupassen.

Hinsichtlich der Implementierbarkeit gibt es diverse Möglichkeiten den vorgeschlagenen Ansatz in existierende Kommunikationsnetze für Regelungssysteme, wie CAN oder Flexray, zu integrieren. Dabei ist der wesentliche Schritt die Emulation des randomisierten Arbitrie-

rungsmechanismus. Dies kann durch randomisierte Prioritäten implementiert innerhalb der Teilsysteme bewerkstelligt werden.

6 Zusammenfassung

Dieser Artikel zeigt, dass dezentrale ereignisbasierte Regelungsstrukturen einen äußerst erfolgversprechenden Ansatz beim Entwurf in vernetzten Regelungssystemen darstellen. Die vorgeschlagene Methode schafft es einen Kompromiss zwischen Komplexität und Regelgüte herzustellen, bei dem das ursprüngliche Optimierungsproblem durch einen zweistufigen Ansatz approximiert wird. Die geringere Präzision des Systemverlaufs und die komplexe Wechselwirkung zwischen Kommunikation und Regelung durch den ereignisbasierten Ansatz wird dabei in Kauf genommen, um die Regelgüte, die Robustheit und die Flexibilität erheblich zu verbessern und dabei gleichzeitig Stabilität des Gesamtsystems gewährleisten zu können.

Literatur

- [1] J. Baillieul and P. Antsaklis, "Control and communication challenges in networked real-time systems," *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, pp. 9–28, Jan. 2007.
- [2] P. Varaiya, F. Wu, and J. Bialek, "Smart operation of smart grid: Risk-limiting dispatch," *Proceedings of the IEEE*, vol. 99, pp. 40–57, Jan. 2011.
- [3] C. Canudas De Wit, "Best-effort Highway Traffic Congestion Control via Variable Speed Limits," in *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (IEEE CDC-ECC 2011)*, (Orlando, Florida, United States), p. s/n, Dec. 2011.
- [4] E. Callaway, P. Gorday, L. Hester, J. Gutierrez, M. Naeve, B. Heile, and V. Bahl, "Home networking with ieee 802.15. 4: a developing standard for low-rate wireless personal area networks," *Communications Magazine, IEEE*, vol. 40, no. 8, pp. 70–77, 2002.
- [5] K. Åström and B. Bernhardsson, "Comparison of Riemann and Lebesgue sampling for first order stochastic systems," in *Proc. 41th IEEE Conference on Decision and Control (CDC'02)*, 2002.
- [6] T. Henningson and A. Cervin, "Scheduling of event-triggered controllers on a shared network," in *Proc. 47th IEEE Conference on Decision and Control*, (Cancun, Mexico), 2008.
- [7] J. Lunze and D. Lehmann, "A state-feedback approach to event-based control," *Automatica*, vol. 46, no. 1, pp. 211–215, 2010.
- [8] D. V. Dimarogonas and K. H. Johansson, "Event-triggered cooperative control," in *Proc. European Control Conf. (ECC'09)*, 2009.
- [9] P. Wan and M. D. Lemmon, "Distributed network utility maximization using event-triggered barrier methods," in *Proc. European Control Conf. (ECC)*, (Budapest, Hungary), Aug. 2009.
- [10] P. Tabuada, "Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 52, no. 9, pp. 1680–1685, 2007.
- [11] A. Cervin and T. Henningson, "A simple model for the interference between event-based control loops using a shared medium," in *Proc. 49th IEEE Conference on Decision and Control*, (Atlanta, USA), 2010.

- [12] R. Blind and F. Allgöwer, “Analysis of networked event-based control with a shared communication medium: Part I - Pure ALOHA,” in *IFAC World Congress*, 2011.
- [13] R. Blind and F. Allgöwer, “Analysis of networked event-based control with a shared communication medium: Part II - Slotted ALOHA,” in *IFAC World Congress*, 2011.
- [14] Y. Xu and J. Hespanha, “Optimal communication logics in networked control systems,” *Decision and Control, 2004. CDC. 43rd IEEE Conference on*, vol. 4, pp. 3527–3532 Vol.4, Dec. 2004.
- [15] G. Lipsa and N. Martins, “Optimal state estimation in the presence of communication costs and packet drops,” in *Communication, Control, and Computing, 2009. 47th Annual Allerton Conference on*, 2009.
- [16] A. Molin and S. Hirche, “On LQG joint optimal scheduling and control under communication constraints,” in *Proc. 48th IEEE Conference on Decision and Control*, 2009.
- [17] A. Molin and S. Hirche, “Order reduction in optimal event-triggered control design for linear stochastic systems,” in *American Control Conference (ACC'11)*, 2011.
- [18] A. Molin and S. Hirche, “Structural characterization of optimal event-based controllers for linear stochastic systems,” in *Proc. 49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC'10)*, 2010.
- [19] R. Cogill, “Event-based control using quadratic approximate value functions,” in *Proc. 48th IEEE Conference on Decision and Control*, 2009.
- [20] H. S. Witsenhausen, “A counterexample in stochastic optimum control,” *SIAM Journal on Control*, vol. 6, no. 1, pp. 131–147, 1968.
- [21] L. Schenato, B. Sinopoli, M. Franceschetti, K. Poolla, and S. Sastry, “Foundations of control and estimation over lossy networks,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 163–187, 2007.
- [22] E. Altman, *Constrained Markov decision processes*. Chapman and Hall/CRC, 1999.
- [23] O., Hernández-Lerma, *Adaptive Markov control processes*. Springer New York, 1989.
- [24] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex optimization*. Cambridge Univ. Press, 2004.
- [25] D. P. Bertsekas, *Dynamic programming and optimal control. Vol. I*. 3rd ed., Athena Scientific, Belmont, MA, 2005.
- [26] S. Meyn and R. Tweedie, *Markov chains and stochastic stability*. Springer London et al., 1996.
- [27] S. Shakkottai and R. Srikant, “Network optimization and control,” *Foundations and Trends in Networking*, vol. 2, no. 3, pp. 271–379, 2007.
- [28] A. Cervin and T. Henningsson, “Scheduling of event-triggered controllers on a shared network,” in *Decision and Control, 2008, Proceedings of the 47th IEEE Conference on*, Dec. 2009, pp. 3601–3606.
- [29] D. V. Dimarogonas and K. H. Johansson, “Event-triggered control for multi-agent systems,” in *Decision and Control, 2009, Proceedings of the 48th IEEE Conference on*, Dec. 2010, pp. 7131–7136.
- [30] P. Wan and M. Lemmon, “An event-triggered distributed primal-dual algorithm for network utility maximization,” in *Decision and Control, 2009, Proceedings of the 48th IEEE Conference on*, Dec. 2009, pp. 5863–5868.
- [31] P. Tabuada, “Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 52, no. 9, pp. 1680–1685, 2007.
- [32] B. Hajek, K. Mitzel, and S. Yang, “Paging and registration in cellular networks: Jointly optimal policies and an iterative algorithm,” *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 54, no. 2, pp. 608–622, 2008.