

Lyapunov-Funktionen-basiertes Führungsfilter

Lyapunov Function based Set Point Generator

Michael Buhl, Boris Lohmann, TU München

Zusammenfassung Der Beitrag beschreibt ein Lyapunov-Funktionen-basiertes Führungsfilter für lineare Strecken mit Stellgrößenbegrenzung. Ziel des Filters ist es, die Abhängigkeit zwischen der zu stabilisierenden Ruhelage und der Größe des mit Lyapunov-Funktionen nachweisbaren Einzugsbereichs zu überwinden. Hierdurch kann erreicht werden, dass für alle Ruhelagen im System der gleiche Einzugsbereich nachgewiesen werden kann. Dieser umfasst die Vereinigungsmenge aller Abschätzungen ohne Führungsfilter.

▶▶▶ Summary This paper presents a Lyapunov function based method for generating set points for linear systems with input saturation. Aim of the method is to overcome the dependency between the place of the equilibrium point and the size of its approximated domain of attraction shown by Lyapunov functions. As a result all equilibrium points of a system share the same approximation for their domain of attraction, which is formed by the set union of all former approximations without the set point generator.

Schlagwörter Stellgrößenbegrenzungen, Einzugsbereiche, Ruhelagen, Zustandsrückführung ▶▶▶ **Keywords** Input saturation, domain of attraction, equilibrium points, state feedback

1 Einleitung

In dieser Arbeit sollen Systeme mit begrenzter Stellgröße der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \operatorname{sat}(u) \quad (1)$$

mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und der Sättigungsfunktion

$$\operatorname{sat}(u) = \begin{cases} -u_{\max} & \text{für } u \leq -u_{\max} \\ u & \text{für } -u_{\max} < u < u_{\max} \\ u_{\max} & \text{für } u \geq u_{\max} \end{cases}$$

betrachtet werden. Um eine sinnvolle Aufgabenstellung zu erhalten, wird vorausgesetzt, dass das Paar (\mathbf{A}, \mathbf{b}) stabilisierbar ist. Für viele Anwendungen besteht die Aufgabe der Regelung darin, einen Anfangszustand möglichst schnell in eine bestimmte Ruhelage (\mathbf{x}_z, u_z) mit

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{x}_z + \mathbf{b} \operatorname{sat}(u_z) \quad (2)$$

zu überführen. Aufgrund der Stellgrößenbegrenzung ist dies oftmals mit einer linearen Rückführung der Form

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} \quad (3)$$

nicht für den gesamten Zustandsraum möglich.

Die Gesamtheit aller Punkte im Zustandsraum, für welche dies mit einer gegebenen Regelung möglich ist, wird als Einzugsbereich der Ruhelage bezeichnet [3]. Die exakte Bestimmung dieses Bereichs ist wegen der nichtlinearen Sättigungsfunktion in (1) meistens nur numerisch möglich. Neben dem beträchtlichen Aufwand bei einer numerischen Bestimmung des Einzugsbereichs hat diese auch den Nachteil, dass der gefundene Bereich nicht in einer kompakten Weise beschrieben werden kann.

Anstatt den Einzugsbereich exakt zu bestimmen, versuchen viele Arbeiten deshalb mit Hilfe der direkten Methode von Lyapunov eine möglichst gute Abschätzung des Einzugsbereichs zu erhalten. Beispielfhaft können hier die Arbeiten [5; 7] oder [1] genannt werden. Die

Hauptschwierigkeit bei diesem Vorgehen liegt in der Bestimmung einer günstigen Lyapunov-Funktion.

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, dass, falls eine geeignete Lyapunov-Funktion gefunden wurde, mit dieser auch ein Führungfilter für die Überführung des Systems in eine Ruhelage ausgelegt werden kann. Dieses Führungfilter zeichnet sich im Wesentlichen durch zwei Eigenschaften aus:

- Durch die Verwendung des Führungfilters gilt für jede Ruhelage des Systems (1) die gleiche Abschätzung für den Einzugsbereich. Diese entspricht der *Vereinigungsmenge* aus den Abschätzungen *aller* Ruhelagen des Systems.
- Für den Entwurf des Führungfilters sind an die Lyapunov-Funktion keine zusätzlichen Anforderungen zu stellen. Existiert also eine Abschätzung für den Einzugsbereich, so kann mit der entsprechenden Lyapunov-Funktion das Führungfilter ausgelegt werden. Eine Bestimmung weiterer Parameter ist nicht nötig.

Obwohl prinzipiell jede Regelung um das Führungfilter ergänzt werden kann, wird in diesem Artikel speziell auf den in [2] vorgestellten Reglerentwurf Bezug genommen. Dieser eignet sich besonders gut, da sein Entwurf bereits mit der Bestimmung einer Lyapunov-Funktion verbunden ist.

2 Abschätzung von Einzugsbereichen mit Lyapunov-Funktionen

2.1 Theorie

Aufgrund der nichtlinearen Sättigungsfunktion in der Systemdynamik (1) liefert die Betrachtung der Eigenwerte des geschlossenen Systems $\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T$ nicht für alle Punkte im Zustandsraum eine Aussage bezüglich ihrer Stabilität gegenüber der Ruhelage $(\mathbf{0}, 0)$. Mit Hilfe der direkten Methode von Lyapunov kann ein Bereich \mathbb{S} im Zustandsraum als asymptotisch stabil bzw. als Teil des Einzugsbereichs der Ruhelage $(\mathbf{0}, 0)$ nachgewiesen werden, falls die folgenden Punkte erfüllt sind (siehe z. B. [3]):

- Es existiert eine stetige, positiv definite Funktion $V(\mathbf{x})$.
- Die Ableitung \dot{V} ist im Bereich \mathbb{S} negativ definit.
- Der Bereich \mathbb{S} , welcher die Ruhelage enthält, wird durch eine Niveaumenge von $V(\mathbf{x})$ beschränkt.

Das Auffinden einer günstigen Lyapunov-Funktion $V(\mathbf{x})$ sowie die Bestimmung von η bilden die wesentlichen Schwierigkeiten beim Auffinden eines möglichst großen Bereichs \mathbb{S} .

2.2 Lyapunov-Funktionen-basierter Regler

Das Auffinden von \mathbb{S} wird erleichtert, wenn die Bestimmung einer günstigen Lyapunov-Funktion Bestandteil des Reglerentwurfs ist. Dies ist bei der Reglerauslegung nach [2] der Fall, welche deshalb im Folgenden kurz skizziert wird.

Ausgangspunkt der Auslegung ist die Forderung, dass für das geschlossene System eine quadratische Lyapunov-

Funktion $V = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ existiert, welche in den ungesättigten Bereichen des Zustandsraums (dort wo $\text{sat}(u) = u$ gilt) in exponentieller Weise abnimmt

$$\dot{V} = -\alpha V. \tag{4}$$

Diese Forderung führt auf das Regelgesetz

$$u = -\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{x}.$$

Die Matrix \mathbf{P} ist dabei die symmetrische, positiv-semidefinite Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung

$$\left(\mathbf{A} + \frac{\alpha}{2} \mathbf{I}\right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\mathbf{A} + \frac{\alpha}{2} \mathbf{I}\right) - 2\mathbf{P}\mathbf{b}\mathbf{b}^T \mathbf{P} = \mathbf{0}.$$

Der einzige Parameter dieser Regelung ist α . Über diesen wird entsprechend (4) die Abklingrate der Lyapunov-Funktion und somit die Schnelligkeit der Regelung vorgegeben.

Aufgrund der Stellgrößenbegrenzung kann die in (4) geforderte Abnahme von V nicht für alle Punkte im Zustandsraum erreicht werden. In [2] wird jedoch gezeigt, dass innerhalb des Bereichs $\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$

$$\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} < \eta\}$$

$$\eta = \frac{4\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{b}}{(2\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{b} - \alpha)^2} u_{max}^2$$

immer $\dot{V} < 0$ gilt. Laut den Kriterien in Abschnitt 2.1 stellt der elliptische Bereich $\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ somit eine Abschätzung des Einzugsbereichs dar.

Soll anstelle der Ruhelage $(\mathbf{0}, 0)$ eine beliebige Ruhelage (\mathbf{x}_z, u_z) stabilisiert werden, ergeben sich folgende Änderungen:

$$u = u_z - \mathbf{b}^T \mathbf{P}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_z) \tag{5}$$

$$\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta) = \{\mathbf{x} \mid (\mathbf{x} - \mathbf{x}_z)^T \mathbf{P}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_z) < \eta(u_z)\} \tag{6}$$

$$\eta(u_z) = \frac{4\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{b}}{(2\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{b} - \alpha)^2} (u_{max} - |u_z|)^2. \tag{7}$$

Mit Hilfe der Regelung (5) wird nun die Ruhelage \mathbf{x}_z mit der gleichen Dynamik wie zuvor der Ursprung stabilisiert. Wie in (6) zu sehen, behält der Bereich \mathbb{S} seine Form bei, nur sein Zentrum wird in die Ruhelage \mathbf{x}_z verschoben.

Sobald nun jedoch $u_z \neq 0$ ist und sich dadurch die Amplitude der Stellgröße, welche für die Regelung zur Verfügung steht, verringert, wird entsprechend (7) auch die Größe von \mathbb{S} kleiner. Eine solche Abhängigkeit zwischen der Abschätzung des Einzugsbereichs und der Amplitude der Stellgröße ist typisch für Ansätze mit quadratischen Lyapunov-Funktionen.

2.3 Beispiel

Um die in Abschnitt 2.2 beschriebene Verkleinerung des Bereichs \mathbb{S} zu veranschaulichen, soll der dort vorgestellte Regler auf das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{sat}(u) \tag{8}$$

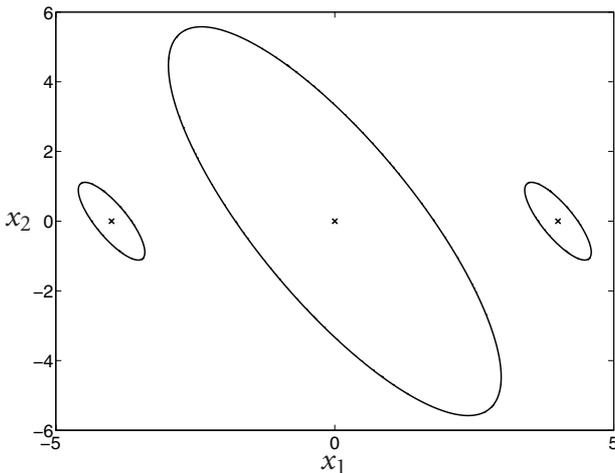


Bild 1 Bereiche \mathbb{S} für die Ruhelagen $(0,0)$ und $([\pm 4 \ 0]^T, \mp 4)$.

mit $u_{max} = 5$ angewandt werden. Wählt man den Parameter α zu 3, so ergeben sich für die Ruhelagen $(0,0)$ bzw. $([\pm 4 \ 0]^T, \mp 4)$ die in Bild 1 gezeigten Abschätzungen \mathbb{S} . Folgende Punkte sind hier gut zu erkennen:

- Die Bereiche \mathbb{S} für die Ruhelagen $([\pm 4 \ 0]^T, \mp 4)$ sind deutlich kleiner als der Bereich \mathbb{S} um die Ruhelage $(0,0)$.
- Auf Basis dieser Abschätzungen ist eine stabile Überführung des Systems von einer Ruhelage in eine der beiden anderen nicht möglich.

3 Lyapunov-Funktionen-basiertes Führungfilter

3.1 Motivation

Im vorhergehenden Abschnitt wurde kurz darauf eingegangen, wie mit Hilfe von Lyapunov-Funktionen der Einzugsbereich einer Ruhelage abgeschätzt werden kann. Anhand eines einfachen Beispiels wurden die damit verbundenen Probleme verdeutlicht:

- Die Bereiche \mathbb{S} verschiedener Ruhelagen sind verschieden groß.
- Die Bereiche \mathbb{S} verschiedener Ruhelagen enthalten sich oftmals nicht gegenseitig.

Wie die folgende Überlegung zeigt, ist es mit einer geeigneten Regelung jedoch möglich, diese beiden Nachteile zu überwinden:

Ähnlich wie bei linearen Systemen ist auch für das System (1) die Menge aller Ruhelagen (\mathbf{x}_r, u_r) gegeben durch:

$$\mathbf{x}_r = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \text{sat}(u_r). \tag{9}$$

Ist \mathbf{A} nicht invertierbar bzw. ist $\det(\mathbf{A}) = 0$, so liegen die Ruhelagen des System im Nullraum von \mathbf{A} . In beiden Fällen stellt jeder Punkt auf der Verbindungsgeraden zwischen zwei Ruhelagen ebenfalls eine Ruhelage dar.

Sieht man von den (praktisch nicht interessierenden) Ruhelagen ab, bei denen die gesamte Stellamplitude zum Halten der Ruhelage benötigt wird, so besitzt jede Ruhe-

lage im System (1) einen Einzugsbereich. Dieser hat eine nicht verschwindende Ausdehnung in jede Richtung des Zustandsraums, also auch in die Richtung der benachbarten Ruhelagen. Folglich ist eine stabile Überführung des Systems von einer Ruhelage in eine benachbarte Ruhelage immer möglich.

Da ferner, wie oben beschrieben, alle Ruhelagen des Systems (1) miteinander verbunden sind, kann auf diese Weise eine stabile Überführung zwischen jeder beliebigen Ruhelage erreicht werden. Dieser Gedanke ist die Grundlage für das Lyapunov-Funktionen-basierte Führungfilter, das im Folgenden näher ausgeführt wird.

3.2 Ansatz

Um eine stabile Überführung des Systems in eine Zielruhelage \mathbf{x}_z zu erreichen, deren Bereich $\mathbb{S}(\mathbf{x}_z)$ den aktuellen Zustand nicht beinhaltet, bestimmt das Führungfilter eine Referenz-Ruhelage (\mathbf{x}_r, u_r) . Diese wird so ausgewählt, dass

- der aktuelle Zustand \mathbf{x} im nachweisbaren Einzugsbereich der Ruhelage (\mathbf{x}_r, u_r) liegt, $\mathbf{x} \in \mathbb{S}(\mathbf{x}_r)$;
- die Referenz-Ruhelage möglichst nahe an der gewünschten Zielruhelage \mathbf{x}_z liegt.

Aufgabe des Reglers im System ist nun nicht mehr die Stabilisierung der Zielruhelage, sondern der Referenz-Ruhelage. Ein Blockschaltbild der Regelung mit Führungfilter ist in Bild 2 gezeigt.

Voraussetzung für die Bestimmung der aktuellen Referenz-Ruhelage ist eine Lyapunov-Funktion V_r , mit welcher nachgewiesen werden kann, dass sich der aktuelle Zustand \mathbf{x} im Einzugsbereich mindestens einer Ruhelage des Systems befindet. Ist eine Ruhelage (\mathbf{x}_a, u_a) gefunden, für die gilt

$$V_r((\mathbf{x} - \mathbf{x}_a)) < \eta(u_a),$$

dann liegt die gesuchte Referenz-Ruhelage (\mathbf{x}_r, u_r) auf der Verbindung zwischen \mathbf{x}_a und \mathbf{x}_z :

$$\mathbf{x}_r = \mathbf{x}_a + c(\mathbf{x}_z - \mathbf{x}_a) \tag{10}$$

$$u_r = u_a + c(u_z - u_a). \tag{11}$$

Damit \mathbf{x}_r möglichst nahe bei \mathbf{x}_z liegt, muss der aktuelle Zustand \mathbf{x} genau auf dem Rand von $\mathbb{S}(\mathbf{x}_r)$ liegen. Hierzu muss gelten:

$$V_r((\mathbf{x} - \mathbf{x}_r)) = \eta(u_r). \tag{12}$$

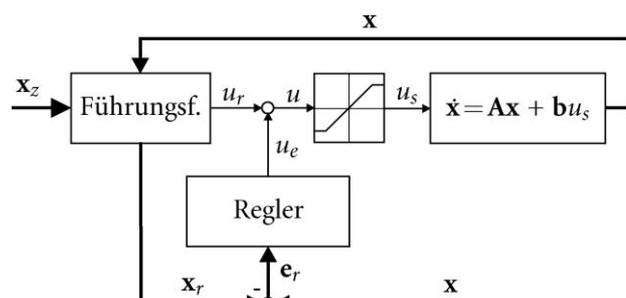


Bild 2 Blockschaltbild von Regelung mit Führungfilter.

Setzt man (10) und (11) in (12) ein, ergibt sich hieraus eine Gleichung zur Bestimmung von c .

Im Falle einer quadratischen Lyapunov-Funktion, wie in Abschnitt 2.2 beispielhaft beschrieben, wird aus (12):

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r)^T \mathbf{P}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) = \frac{4\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{b}}{(2\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{b} - \alpha)^2} (u_{max} - |u_r|)^2.$$

Durch Einsetzen von (10) und (11) erhält man daraus eine quadratische Gleichung in c . Von den beiden Lösungen ist der größte Wert im Intervall $[0; 1]$ der gesuchte. Im Anhang dieser Arbeit ist für diesen Fall beispielhaft beschrieben, wie die Ruhelagen (\mathbf{x}_a, u_a) gefunden werden können.

3.3 Stabilität

Im Vergleich mit den sonst üblichen Führungsfiltern fällt bei der Betrachtung von Bild 2 auf, dass der Zustand \mathbf{x} an das Führungsfilter übergeben wird. Dadurch befindet sich das Führungsfilter tatsächlich *im Regelkreis* und nicht, wie der Name vermuten lassen würde, *davor*. Die Konvergenz der Referenz-Ruhelage gegen die Zielruhelage ist deshalb nicht mehr a priori sichergestellt. Stattdessen muss neben dem Regelfehler $\mathbf{e}_r = \mathbf{x} - \mathbf{x}_r$ nun auch die Abweichung $\mathbf{e}_f = \mathbf{x}_r - \mathbf{x}_z$, welche entsprechend als Führungsfehler bezeichnet werden kann, in die Stabilitätsuntersuchung mit eingeschlossen werden.

Voraussetzung für den Einsatz des Führungsfilters ist die Existenz einer Lyapunov-Funktion $V_r(\mathbf{e}_r)$ für das geregelte System *ohne* Führungsfilter, mit welcher der Einzugsbereich jeder Ruhelage abgeschätzt werden kann. Den Rand dieser Abschätzung muss eine Niveaufläche von $V_r(\mathbf{e}_r)$ bilden, wobei der Wert η dieser Fläche, wie auch bei der in Abschnitt 2.2 gezeigten Reglerauslegung in (7) beschrieben, eine Funktion der zu stabilisierenden Ruhelage sein kann:

$$\eta = \eta(u_r) = \eta_0 f(u_r) \tag{13}$$

mit

$$\eta_0 = \frac{4\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{b}}{(2\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{b} - \alpha)^2} \tag{14}$$

$$f(u_r) = (u_{max} - |u_r|)^2. \tag{15}$$

Um nun die Stabilität des Systems *mit* Führungsfilter zu zeigen, betrachtet man die Lyapunov-Funktion

$$V(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_f) = \frac{1}{f(u_r)} V_r(\mathbf{e}_r) + \underbrace{\mathbf{e}_f^T \mathbf{e}_f}_{V_f}. \tag{16}$$

Für die Bestimmung der zeitlichen Ableitung von V sind nun die folgenden zwei Fälle zu berücksichtigen.

1. Die Referenz-Ruhelage \mathbf{x}_r hat noch nicht die Zielruhelage \mathbf{x}_z erreicht. Entsprechend Abschnitt 3.2 wird in diesem Fall die Referenz-Ruhelage \mathbf{x}_r so bestimmt, dass \mathbf{x} genau auf dem Rand von $\mathbb{S}(\mathbf{x}_r)$ liegt. Folglich gilt $V_r(\mathbf{e}_r) = \eta_0 f(u_r)$, wodurch der erste Term in (16) konstant zu η_0 wird. Für die Ableitung von V ist in dieser Phase deshalb nur der mit V_f bezeichnete zweite Term von Bedeutung. Solange \mathbf{x}_r nicht \mathbf{x}_z erreicht hat, wird

\mathbf{x}_r kontinuierlich in Richtung \mathbf{x}_z verschoben, sodass der Term V_f kontinuierlich abnimmt. In der ersten Phase ergibt sich somit

$$\dot{V} = \dot{V}_f = \frac{d}{dt}(\mathbf{e}_f^T \mathbf{e}_f) < 0.$$

Dass \mathbf{x}_r kontinuierlich in Richtung \mathbf{x}_z verschoben wird, kann durch den sich ergebenden Widerspruch bei der Annahme des Gegenteils gezeigt werden:

Falls \mathbf{x}_r nicht verschoben würde, würde \mathbf{x} sich auf \mathbf{x}_r zubewegen, da $\mathbf{x} \in \mathbb{S}(\mathbf{x}_r)$ gilt. In diesem Falle wäre aber \mathbf{x} nicht mehr auf dem Rand von $\mathbb{S}(\mathbf{x}_r)$, wie bei der Bestimmung von \mathbf{x}_r gefordert.

2. Sobald \mathbf{x}_r die Zielruhelage \mathbf{x}_z erreicht hat, ist $\mathbf{e}_f = \mathbf{0}$. Folglich ist ab dann nur noch der erste Term für \dot{V} von Bedeutung. Dieser unterscheidet sich nur um den Faktor $1/f(u_r)$, welcher für $u_r = u_z$ konstant ist, von der Lyapunov-Funktion V_r . Da \mathbf{x} nun im gesicherten Einzugsbereich von \mathbf{x}_z angekommen ist, muss gelten $\dot{V}_r < 0$, woraus auch $\dot{V} = 1/f(u_z)\dot{V}_r < 0$ folgt.

Insgesamt ergibt sich somit für \dot{V} :

$$\dot{V} = \begin{cases} \dot{V}_f < 0, & \text{wenn } \mathbf{x}_r \neq \mathbf{x}_z \\ \frac{1}{f(u_z)} \dot{V}_r < 0, & \text{wenn } \mathbf{x}_r = \mathbf{x}_z \end{cases} < 0,$$

womit die Stabilität des Systems mit Führungsfilter gezeigt ist.

3.4 Beispiel

Als Beispiel für die Anwendung des vorgeschlagenen Führungsfilters soll das System (8) mit dem in Abschnitt 2.2 vorgestellten Regler dienen. Dieses zeichnet sich dadurch aus,

- dass wegen des instabilen Eigenwerts bei +1 kein global asymptotisch stabilisierender Regler gefunden werden kann;
- dass die Abschätzungen $\mathbb{S}(\mathbf{x}_r)$ der Einzugsbereiche in ihrer Größe variieren und aufgrund der geringen Sys-

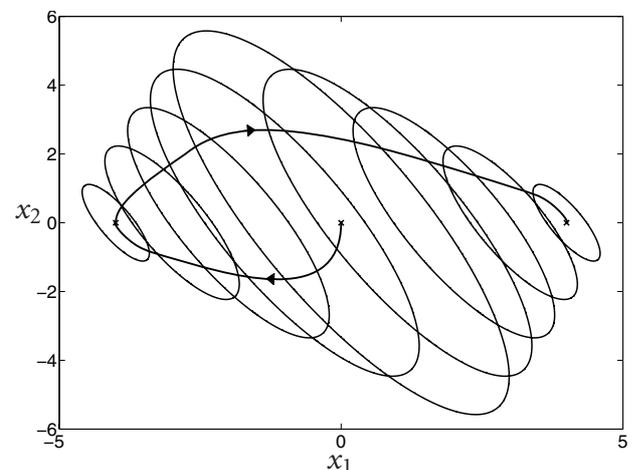
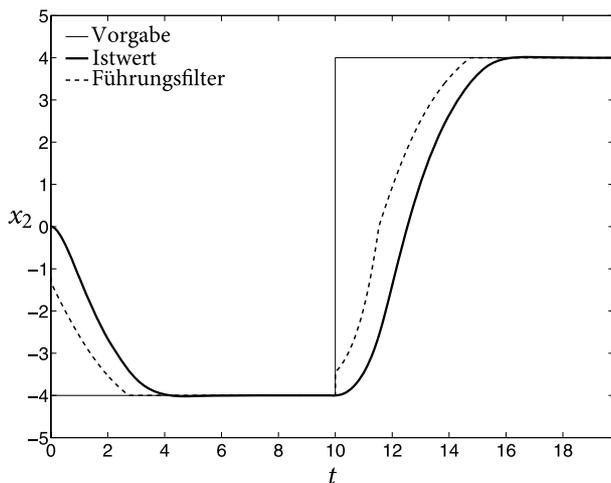
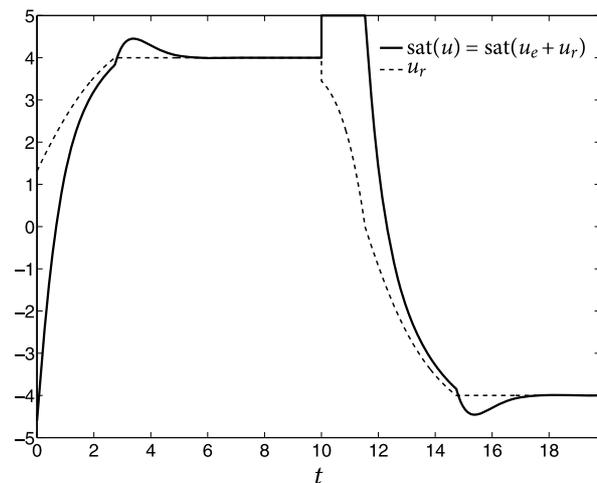


Bild 3 Trajektorie mit ausgewählten $\mathbb{S}(\mathbf{x}_r)$.

a) x_1 **Bild 4** x_1 und u beim Wechsel der Ruhelagen.b) u

temordnung noch gut graphisch dargestellt werden können.

Ziel der Regelung mit Führungfilter sei nun die Überführung des Systems von der Ruhelage $(0,0)$ in die Ruhelage $([-4 \ 0]^T, 4)$ und von dort in die Ruhelage $([4 \ 0]^T, -4)$. Eine solche Aufgabe ist allein mit dem Regler nach Abschnitt 2.3 (wie dort schon diskutiert) nicht möglich, jedoch ohne weiteres durch Hinzunahme des Führungfilters. Die sich ergebenden Verläufe für den Zustand x_1 und die Stellgröße u sind in Bild 4 dargestellt. In Bild 3 ist außerdem die Trajektorie des Systems zusammen mit den Bereichen $\mathbb{S}(\mathbf{x}_r)$ einiger beispielhaft ausgewählter Referenz-Ruhelagen gezeigt. Der Parameter α für den Regler wurde wie in Abschnitt 2.3 zu 3 gewählt. Falls eine Regelung mit variablem α um das Filter ergänzt werden soll, erfolgt die Bestimmung der Referenz-Ruhelage mit Hilfe des kleinsten α Wertes. Eine Variation bzw. Vergrößerung von α (wie in [2] beschrieben) erfolgt erst, wenn die Referenz-Ruhelage mit der Zielruhelage übereinstimmt.

Dynamik der Überführung

Durch die Erweiterung des ursprünglichen Reglers um das Führungfilters verändert sich bei Bedarf zeitweise die zu stabilisierende Ruhelage. Die Dynamik der Stabilisierung wird jedoch weiterhin ausschließlich über die Auslegung der ursprünglichen Regelung festgelegt. Im Falle des in [2] beschriebenen α -Reglers kann für Bereiche im Zustandsraum asymptotische Stabilität auch dann nachgewiesen werden, wenn $|u| > u_{max}$ ist. Die teilweise vollständige Ausnutzung der Stellgröße, wie in Bild 4 zu sehen, ist also durch den verwendeten Regler bedingt und wird *nicht* durch das Führungfilter hervorgerufen.

4 Zusammenfassung und Ausblick

Das in diesem Artikel vorgestellte Lyapunov-Funktionen-basierte Führungfilter zielt auf die Überführung des Systemzustands in eine weit entfernte Ruhelage ab. Die

wesentliche Voraussetzung hierfür ist eine Lyapunov-Funktion, mit welcher gezeigt werden kann, dass sich der aktuelle Zustand im Einzugsbereich einer beliebigen anderen Ruhelage des Systems befindet. Auf diese Weise erreicht man, dass für jede Ruhelage die gleiche Abschätzung für den Einzugsbereich gilt. Diese umfasst die Vereinigungsmenge aller Abschätzungen ohne Führungfilter. Abgesehen von der Lyapunov-Funktion zur Abschätzung der Einzugsbereiche benötigt das Führungfilter keine weitere Parametrierung.

Die Dynamik der Überführung wird ausschließlich durch die ursprüngliche Regelung vorgegeben.

Die dem Führungfilter zu Grunde liegende Idee, nämlich die Auswahl von stabilisierbaren Referenz-Ruhelagen, welche kontinuierlich in Richtung der Zielruhelage verschoben werden, ist prinzipiell auch auf Systeme mit mehreren Eingängen übertragbar. Anders als bei Systemen mit einem Eingang, bei denen die Bestimmung einer Referenz-Ruhelage eine eindeutige Aufgabe darstellt (siehe Anhang), existieren bei Systemen mit mehreren Eingängen unter Umständen beliebig viele mögliche Referenz-Ruhelagen. Die Auswahl einer günstigen Referenz-Ruhelage erfordert dann eine zusätzliche Vorgabe des Anwenders.

Der vorgestellte Ansatz eignet sich auch zur Berechnung reiner Steuerungen, z. B. falls bei stabilen Strecken mit geringen Störungen auf die Rückführung der Zustandsvariablen verzichtet werden soll. In diesem Fall kann die Anordnung nach Bild 2 im Rechner simuliert und das sich ergebende $u(t)$ auf die Strecke aufgeschaltet werden.

5 Anhang

Bestimmung der Ruhelage (\mathbf{x}_a, u_a)

In diesem Abschnitt wird beschrieben, wie die in Abschnitt 3.2 benötigte Ruhelage (\mathbf{x}_a, u_a) im Falle einer quadratischen Lyapunov-Funktion $V_r = \mathbf{e}_r^T \mathbf{P} \mathbf{e}_r$ gefunden werden kann. Um für möglichst viele Punkte \mathbf{x} eine solche

Ruhelage finden zu können, bietet es sich an, für (\mathbf{x}_a, u_a) die Ruhelage zu suchen, welche dem aktuellen Zustand im Bezug auf den Bereich $\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ am nächsten ist. Unter der Bezeichnung „am nächsten“ soll dabei das Minimum der Funktion

$$a(\mathbf{x}_a, u_a) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_a)^T \mathbf{P} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_a) - \eta_0 (u_{\max} - |u_a|)^2 \quad (17)$$

mit η_0 entsprechend (14) verstanden werden. Die Lösung dieses Problems hängt nun davon ab, ob \mathbf{A} Eigenwerte im Ursprung hat oder nicht.

A hat mindestens einen Eigenwert im Ursprung

Aufgrund des Steuerbarkeitskriteriums nach Hautus existiert dann genau ein Eigenvektor \mathbf{n} zum Eigenwert Null (Stabilisierbarkeit des Systems angenommen). Aus dem Hautus-Kriteriums folgt ferner, dass \mathbf{b} nicht durch die Spalten von \mathbf{A} aufgespannt werden kann. Die Bedingung $\mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{x}_a + \mathbf{b}u_a$ kann also nur mit $u_a = 0$ und $\mathbf{x}_a = \mathbf{z}\mathbf{n}$ erfüllt werden. Setzt man die in (17) ein und sucht das Minimum durch Differentiation nach z , so erhält man

$$z = \frac{\mathbf{n}^T \mathbf{P} \mathbf{x}}{\mathbf{n}^T \mathbf{P} \mathbf{n}} \Rightarrow \mathbf{x}_a = \frac{\mathbf{n}^T \mathbf{P} \mathbf{x}}{\mathbf{n}^T \mathbf{P} \mathbf{n}} \mathbf{n}. \quad (18)$$

A hat keinen Eigenwert im Ursprung

In diesem Fall haben die Ruhelagen die Form $(u_a \mathbf{r}, u_a)$ mit $\mathbf{r} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$. Setzt man dies in (17) ein, ergibt sich:

$$a(u_a) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} - 2u_a \mathbf{r}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + u_a^2 \mathbf{r}^T \mathbf{P} \mathbf{r} - \dots \\ \dots \eta_0 (u_{\max}^2 - 2u_{\max} |u_a| + u_a^2). \quad (19)$$

Falls $\mathbf{r}^T \mathbf{P} \mathbf{r} > \eta_0$ ist, stellt (19) eine nach oben geöffnete Parabel dar. Aufgrund des Betrags in (19) ergeben sich zwei Möglichkeiten für den Scheitel bzw. das Minimum:

$$u_{a+} = \frac{\mathbf{r}^T \mathbf{P} \mathbf{x} - u_{\max} \eta_0}{\mathbf{r}^T \mathbf{P} \mathbf{r} - \eta_0} \quad u_{a-} = \frac{\mathbf{r}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + u_{\max} \eta_0}{\mathbf{r}^T \mathbf{P} \mathbf{r} - \eta_0}$$

Die gesuchte Lösung ist nun

- $u_a = u_{a+}$, falls $u_{a+} > 0$;
- $u_a = u_{a-}$, falls $u_{a-} < 0$;
- $u_a = 0$ sonst.

Falls $\mathbf{r}^T \mathbf{P} \mathbf{r} < \eta_0$ ist, stellt (19) eine nach unten geöffnete Parabel dar. Das Minimum muss dann an den Rändern $u_a = \pm u_{\max}$ oder $u_a = 0$ auftreten. Damit ferner $\mathbf{x} \in \mathbb{S}(\mathbf{x}_a)$ gilt, muss außerdem $a(u_a) < 0$ sein. Anhand von (17)

kann man leicht erkennen, dass dies für $u_a = \pm u_{\max}$ nicht möglich sein kann. An der Stelle $u_a = 0$ ist dies genau dann möglich, wenn $\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} - \eta_0 u_{\max}^2 < 0$ ist. Nur in diesem Fall existiert eine Lösung, nämlich $\mathbf{x}_a = \mathbf{0}$, $u_a = 0$. Ist $\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} - \eta_0 u_{\max}^2 > 0$ und gilt ferner $\mathbf{r}^T \mathbf{P} \mathbf{r} < \eta_0$ kann keine Ruhelage (\mathbf{x}_a, u_a) gefunden werden.

Literatur

- [1] T. Alamo; A. Cepeda; D. Limon, *Improved computation of ellipsoidal invariant sets for saturated control systems*, Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control and the European Control Conference, Spain, 2005.
- [2] M. Buhl; P. Joos; B. Lohmann, *Sättigende weiche strukturvariable Regelung*, at – Automatisierungstechnik, 56 (2008), Heft 6, S. 316–323.
- [3] O. Föllinger, *Nichtlineare Regelungen 2*, R. Oldenburg, 1993.
- [4] O. Föllinger, *Regelungstechnik*, Hüthig, 1994.
- [5] T. Hu; Z. Lin, *Control Systems with Actuator saturation*, Birkhäuser, 2001.
- [6] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice-Hall, 3.
- [7] C. Pittet; S. Tarbouriech; C. Burgat, *Stability regions for linear systems with saturating controls via circle and Popov criteria*, Proceedings of the 36th Conference on Decision and Control, December 1997.

Manuskripteingang: 18. November 2008



Dr.-Ing. Michael Buhl arbeitet am Lehrstuhl für Regelungstechnik im Bereich nichtlineare Regelungen. Hauptarbeitsgebiete: strukturvariable Regelungen.

Adresse: Lehrstuhl für Regelungstechnik, Technische Universität München, Fakultät Maschinenwesen, Boltzmannstr. 15, D-85748 Garching bei München, Fax: +49-(0)89-289-15653, E-Mail: buhl@tum.de



Prof. Dr.-Ing. habil. Boris Lohmann ist Leiter des Lehrstuhls für Regelungstechnik der Fakultät Maschinenwesen der TU München. Hauptarbeitsgebiete: Modellreduktion, nichtlineare, robuste und optimale Regelung, aktive Schwingungsdämpfung, industrielle Anwendungen.

Adresse: Lehrstuhl für Regelungstechnik, Technische Universität München, Fakultät Maschinenwesen, Boltzmannstr. 15, D-85748 Garching bei München, Fax: +49-(0)89-289-15653, E-Mail: lohmann@tum.de



Theoretische Grundlagen kontinuierlicher und dis- kreter Signale und Systeme



Uwe Kiencke
Holger Jäkel
Signale und Systeme
4., korrigierte Auflage 2008
XI, 411 S. | Broschur
€ 29,80
ISBN 978-3-486-58734-0

»Signale und Systeme« wendet sich als kompaktes und gleichzeitig verständliches Lehrbuch nicht nur an Studenten der Fachrichtung Elektrotechnik, sondern auch an Ingenieure und Naturwissenschaftler, die einen Einblick in dieses Gebiet gewinnen wollen.

Nach einer Einführung in die Funktionalanalysis werden zuerst Untersuchungsmethoden von Signalen und dann Eigenschaften, Darstellung, Untersuchung und Entwurf von Systemen sowohl für kontinuierliche als auch für diskrete Zeitänderungen vorgestellt.

Im umfangreichen Anhang findet sich ein Vergleich aller Transformationen für zeitkontinuierliche und zeitdiskrete Signale sowie Tabellen mit Eigenschaften, Rechenregeln und Korrespondenzen der Fourier-, Laplace- und z-Transformation.

Oldenbourg



150 Jahre
Wissen für die Zukunft
Oldenbourg Verlag

Bestellen Sie in Ihrer Fachbuchhandlung oder direkt bei uns:
Tel: 089/45051-248, Fax: 089/45051-333, verkauf@oldenbourg.de



Die modernen Methoden der Signalverarbeitung



Uwe Kiencke,
Michael Schwarz,
Thomas Weickert
Signalverarbeitung
Zeit-Frequenz-Analyse
und Schätzverfahren

2008
430 S. | Broschur

€ 29,80
ISBN 978-3-486-58668-8

In den letzten Jahren hat sich gerade die Zeit-Frequenz-Analyse mit der Signaldarstellung in Frames, der Kurzzeit-Fourier-Transformation, der Wavelet-Transformation und der Wigner-Ville-Verteilung zu einem der wichtigsten Gebiete in der Signalverarbeitung entwickelt.

In diesem Buch werden diese Methoden ausführlich und mit dem nötigen mathematischen Hintergrund dargestellt. Der zweite Teil des Buches widmet sich den Schätzverfahren. Hierzu werden die Begriffe der Schätztheorie einleitend vorgestellt und in eigenständigen Kapiteln die Verfahren der Parameterschätzung und der Zustandsschätzung ausführlich beschrieben.

Die vielen Beispiele aus verschiedensten aktuellen Anwendungen machen dieses Buch so anschaulich.

Oldenbourg

Bestellen Sie in Ihrer Fachbuchhandlung oder direkt bei uns:
Tel: 089/45051-248 · Fax: 089/45051-333 · verkauf@oldenbourg.de
www.oldenbourg.de