

Passivitätsbasierte Regelung schaltender nichtlinearer Systeme

Passivity-Based Control of Switched Nonlinear Systems

Tobias Kloiber, Paul Kotyczka, Technische Universität München

Zusammenfassung Es wird eine konstruktive Reglerentwurfsmethode für schaltende nichtlineare steuerungssaffine Systeme vorgestellt, die dem geschlossenen Regelkreis eine schaltende Port-Hamiltonsche Struktur mit gemeinsamer Energiefunktion zuweist und so (asymptotische) Stabilität der Ruhelage erzielt. Die Methode generiert alle schaltenden Zustandsrückführungen, welche die Strecke unter beliebigem Schalten asymptotisch stabilisieren. Für eine spezielle Systemklasse wird ein systematisches Vorgehen für den Reglerentwurf präsentiert. Dabei wird ein neues Ergebnis zur Matrixgleichung $\mathbf{AX} + \mathbf{X}^T \mathbf{A}^T = \mathbf{Q}$ vorgestellt. ▶▶▶ **Summary** A new construc-

tive controller design methodology for switched nonlinear input affine systems is presented which achieves (asymptotic) stabilization of a desired equilibrium point by assigning a switched port-controlled Hamiltonian structure with common energy function to the closed-loop system. The proposed method generates all switching state feedback laws that asymptotically stabilize the system under arbitrary switching. For a special class of systems a systematic procedure for the controller design is proposed. In this context, a new result on the matrix equation $\mathbf{AX} + \mathbf{X}^T \mathbf{A}^T = \mathbf{Q}$ is presented.

Schlagwörter Schaltende Systeme, passivitätsbasierte Regelung, nichtlineare Regelung ▶▶▶ **Keywords** Switched systems, passivity-based control, nonlinear control

1 Einleitung

In den letzten Jahrzehnten hat die Klasse der schaltenden Systeme große Aufmerksamkeit erfahren. Einer der Hauptgründe hierfür ist, dass zahlreiche technische Systeme schaltender Natur sind, z. B. hydraulische Systeme [10], chemische Prozesse [18] oder Anwendungen aus dem Automobilbereich [21]. Während sich zahlreiche Beiträge mit der Stabilitätsanalyse schaltender Systeme beschäftigen (siehe z. B. [13] für einen Überblick), existieren nur wenige Ergebnisse zum Reglerentwurf. Dieser wird dadurch erschwert, dass schaltende Systeme instabiles Verhalten aufweisen können, selbst wenn alle Teilsysteme asymptotisch stabil sind. Daher reicht es nicht aus, jedes Teilsystem für sich zu stabilisieren.

In den meisten Beiträgen wird ausschließlich die Reglersynthese für schaltende *lineare* Systeme behandelt, siehe z. B. [6; 27]. Zur Stabilisierung schaltender *nichtlinearer* Systeme unter beliebigem Schalten existieren

hingegen nur wenige Ergebnisse. In [25] wird ein Ansatz vorgestellt, der auf einer gemeinsamen *Control-Ljapunow-Funktion* für zwei Teilsysteme basiert. Allerdings existieren keine systematischen Verfahren, um für ein allgemeines schaltendes nichtlineares System eine solche Funktion zu bestimmen. In [26] wird die *Backstepping*-Technik auf die Klasse der schaltenden Systeme in *Strict-Feedback*-Form übertragen, um in systematischer Weise ein Regelgesetz sowie eine zugehörige *gemeinsame Ljapunow-Funktion* zu konstruieren. Die Reglersynthese für schaltende Systeme in *Feedforward*-Form, basierend auf der *Integrator-Forwarding*-Technik, wird in [14] vorgestellt. In [4] wird die Stabilisierung einer weiteren speziellen Systemklasse untersucht, bei der sämtliche Teilsysteme in verallgemeinerter *Byrnes-Isidori-Normalform* vorliegen. Die Einschränkung auf diese speziellen Klassen von Systemen ist jedoch relativ restriktiv. Darüber hinaus besteht selbst für lineare schaltende Systeme weiter

Bedarf an *transparenten analytischen* Reglerentwurfsmethoden, da viele der existierenden Ansätze auf der Lösung linearer Matrix-Ungleichungen basieren [27].

Interconnection and Damping Assignment Passivity Based Control (IDA-PBC) [19; 20] ist eine Reglerentwurfsmethodik für nichtlineare Systeme, welche dem geschlossenen Regelkreis mittels Zustandsrückführung *Port-Hamiltonsche* Struktur zuweist. In [8] ist der IDA-PBC-Ansatz für die Regelung impulsiver Port-Hamilton-Systeme adaptiert worden. In [11] wird die Methode herangezogen, um eine schaltende Reglerstruktur für eine nicht-schaltende Strecke zu entwerfen.

In diesem Beitrag wird eine *analytische und konstruktive* Reglerentwurfsmethode für schaltende nichtlineare steuerungsauffine Systeme, die *beliebigen* Schaltvorgängen unterliegen, präsentiert. Dazu wird die Klasse der *schaltenden Port-Hamilton* (SPH) Systeme eingeführt, deren Stabilität auch in [28] unter gewissen Voraussetzungen betrachtet wird. Motiviert durch die Eigenschaften von SPH-Systemen wird die IDA-PBC-Methode auf die Klasse der schaltenden Systeme erweitert, um dem geschlossenen Regelkreis SPH-Struktur mit einer *gemeinsamen Energiefunktion* zuzuweisen und auf diese Weise (asymptotische) Stabilität zu erzielen. Wie beim konventionellen IDA-PBC wird zunächst die Struktur der gewünschten Struktur- und Dämpfungsmatrizen festgelegt. Anschließend muss die Menge der Energiefunktionen, welche dem geschlossenen Regelkreis zugewiesen werden können, aus einem System linearer partieller Differentialgleichungen (PDgln) bestimmt werden. Allerdings ist es häufig schwierig, für *alle* Subsysteme zulässige Struktur- und Dämpfungsmatrizen zu finden, so dass zum einen diese PDgln lösbar sind und zum anderen auch noch ausreichend Freiheitsgrade für die Formung der Energiefunktion zur Verfügung stehen. Deshalb wird für eine Klasse von Systemen eine systematische Vorgehensweise für die Wahl dieser Matrizen sowie den anschließenden Reglerentwurf vorgestellt. In diesem Zusammenhang wird ein neues Ergebnis zur Matrixgleichung $\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{Q}$ präsentiert.

Der Beitrag gliedert sich wie folgt: In Abschnitt 2 wird die Klasse der SPH-Systeme eingeführt. Abschnitt 3 stellt die Reglerentwurfsmethode in allgemeiner Form dar. In Abschnitt 4 wird für eine spezielle Klasse von schaltenden Systemen eine systematische Vorgehensweise für den Reglerentwurf vorgestellt. Die Methodik wird in Abschnitt 5 anhand eines numerischen Beispiels veranschaulicht.

Notation. \mathbf{M}^{-T} und \mathbf{M}^{-*} sind die transponierte Inverse bzw. die hermitesche Inverse einer Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. $\mathbf{M} = [m_{ik}]$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $k \in \{1, \dots, m\}$ ist eine $n \times m$ -dimensionale Matrix mit den Einträgen m_{ik} und $\mathbf{M} = \text{diag}\{m_{11}, \dots, m_{nn}\}$ eine $n \times n$ -dimensionale Diagonalmatrix. Für Blockmatrizen wird dieselbe Notation verwendet. Die Moore-Penrose-Pseudoinverse von \mathbf{M} wird mit \mathbf{M}^\dagger bezeichnet und $|\mathbf{x}|$ ist die Euklidische

Vektor-Norm. Mit $\dim \Delta$ wird die Dimension einer Distribution Δ bezeichnet und \mathcal{C}^k ist die Menge von k -mal stetig differenzierbaren Funktionen. Falls nicht explizit anders angegeben, sind alle Aussagen *lokal* gültig und es wird angenommen, dass alle Funktionen hinreichend glatt sind. Die Definitionen der verwendeten Stabilitätsbegriffe sind z. B. in [17] nachzulesen.

2 Schaltende Port-Hamilton-Systeme

In diesem Abschnitt wird die Klasse der schaltenden Port-Hamilton (SPH) Systeme als Verallgemeinerung der Port-Hamilton (PH) Systeme (siehe z. B. [19; 20]) eingeführt und ihre Stabilitätseigenschaften werden diskutiert. Ein SPH-System besitzt die Form

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{J}_\sigma(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_\sigma(\mathbf{x})] \nabla H_\sigma(\mathbf{x}) + \mathbf{G}_\sigma(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad (1a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}_\sigma^T(\mathbf{x}) \nabla H_\sigma(\mathbf{x}) \quad (1b)$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, der Stellgröße $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ und dem kollokierten Ausgang $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Dabei wird der Einfachheit halber angenommen, dass alle Teilsysteme die gleiche Anzahl von Ein- und Ausgängen besitzen. Für alle $p \in \mathcal{P} = \{1, \dots, N\}$ sind die *Strukturmatrizen* $\mathbf{J}_p(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ schief-symmetrisch $\mathbf{J}_p^T(\mathbf{x}) = -\mathbf{J}_p(\mathbf{x})$, die *Dämpfungsmatrizen* $\mathbf{R}_p(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv semidefinit $\mathbf{R}_p^T(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_p(\mathbf{x}) \geq 0$ und für die Eingangsmatrizen $\mathbf{G}_p(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ gilt $\text{Rang } \mathbf{G}_p(\mathbf{x}) = m$. Für die *Energiefunktionen* $H_p(\mathbf{x})$ wird im Folgenden angenommen, dass sie ein gemeinsames striktes lokales Minimum in \mathbf{x}^* besitzen, d. h. es existiert eine offene Umgebung $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ von \mathbf{x}^* , so dass

$$H_p(\mathbf{x}) > H_p(\mathbf{x}^*) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{x}^*\} \quad (2)$$

für alle $p \in \mathcal{P}$ gilt. Das stückweise konstante *Schaltsignal* $\sigma(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{P}$ spezifiziert das jeweils aktive Teilsystem und besitzt eine endliche Anzahl von Unstetigkeiten in jedem endlichen Zeitintervall.

Aufgrund der PH-Struktur gilt

$$\dot{H}_p(\mathbf{x}) = -(\nabla H_p(\mathbf{x}))^T \mathbf{R}_p(\mathbf{x}) \nabla H_p(\mathbf{x}) + \mathbf{y}^T \mathbf{u} \leq \mathbf{y}^T \mathbf{u} \quad (3)$$

für alle $p \in \mathcal{P}$, d. h. jedes Teilsystem für sich ist passiv. Mit $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ geht aus Gleichung (3) hervor, dass $H_p(\mathbf{x})$ eine Ljapunow-Funktion für das einzelne Teilsystem ist. Leider folgt daraus nicht, dass \mathbf{x}^* für beliebige $\sigma(t)$ eine stabile Ruhelage des gesamten schaltenden Systems ist (siehe z. B. [3] für Gegenbeispiele). Jedoch können die Energiefunktionen $H_p(\mathbf{x})$ verwendet werden, um mit Hilfe der *Multiple-Ljapunow-Funktion-Methode* [3] Stabilität für eine Familie von zulässigen Schaltsignalen nachzuweisen.

Beschränkt man sich allerdings auf SPH-Systeme mit gemeinsamer Energiefunktion $H_p(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x}) \forall p \in \mathcal{P}$, dann ist das gesamte schaltende System (1) passiv mit der Speicherfunktion $H(\mathbf{x})$ und es kann folgende Stabilitätsaussage formuliert werden:

Satz 1. Die Ruhelage \mathbf{x}^* des Systems (1) mit $H_p(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x}) \forall p \in \mathcal{P}$ und $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ist gleichmäßig stabil für beliebige

Schaltsignale. Wenn $R_p(\mathbf{x}) > 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega$ für alle $p \in \mathcal{P}$ gilt, so ist \mathbf{x}^* gleichmäßig asymptotisch stabil. Wenn (2) und $R_p(\mathbf{x}) > 0 \forall p \in \mathcal{P}$ global erfüllt sind und zusätzlich $H(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ für $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*| \rightarrow \infty$ gilt, dann ist \mathbf{x}^* global gleichmäßig asymptotisch stabil.

Stabilität folgt dabei aus der Tatsache, dass $H(\mathbf{x})$ eine gemeinsame Ljapunow-Funktion für alle Teilsysteme ist. Wenn $R_p(\mathbf{x}) > 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega$ für alle $p \in \mathcal{P}$ gilt, nimmt innerhalb Ω die Energie $H(\mathbf{x})$ entlang der Trajektorien aller Teilsysteme streng monoton ab (vgl. (3)), woraus gleichmäßige asymptotische Stabilität folgt. Falls $R_p(\mathbf{x}) \geq 0$ für ein oder mehrere p gilt, ist möglicherweise nur $\dot{H}(\mathbf{x}) \leq 0$ für $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{x}^*\}$ erfüllt. Für diesen Fall existieren in der Literatur LaSalle-ähnliche Stabilitätskriterien für schaltende Systeme, um asymptotische Stabilität nachzuweisen (siehe z. B. [17] und die enthaltenen Quellen).

Anmerkung 1. Wenn $R_p(\mathbf{x}) > 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega$ für alle $p \in \mathcal{P}$ gilt, ist eine Abschätzung des Einzugsbereiches durch den zusammenhängenden Teil Ω_c der Menge $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | H(\mathbf{x}) < c\}$ gegeben, welcher \mathbf{x}^* enthält. Dabei ist c der größte Wert, für den Ω_c sowohl beschränkt als auch in Ω enthalten ist und keine kritischen Punkte von $H(\mathbf{x})$ enthält außer \mathbf{x}^* .

3 Reglerentwurf

Motiviert durch die Stabilitätseigenschaften von SPH-Systemen mit gemeinsamer Energiefunktion, wird in diesem Abschnitt eine konstruktive Methode für den Entwurf schaltender statischer Zustandsrückführungen $\mathbf{u} = \beta_\sigma(\mathbf{x})$ vorgestellt, die ein schaltendes nichtlineares steuerungsaffines System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_\sigma(\mathbf{x}) + \mathbf{G}_\sigma(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \sigma(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{P} \quad (4)$$

mit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ und $\text{Rang } \mathbf{G}_p(\mathbf{x}) = m$ in ein SPH-System mit gemeinsamer Energiefunktion überführen. Dabei seien $\mathbf{f}_p(\mathbf{x})$ und die Spalten der Matrizen $\mathbf{G}_p(\mathbf{x})$ für alle $p \in \mathcal{P}$ lokal Lipschitz-stetige Vektorfelder. Es wird folgende Annahme getroffen¹:

Annahme 1. Das Schaltsignal $\sigma(t)$ sei nicht a priori bekannt, aber sein aktueller Wert steht dem Regler zu jedem Zeitpunkt zur Verfügung.

Der folgende Satz präsentiert die Methode in allgemeiner Form. Eine systematische Vorgehensweise für den Reglerentwurf wird in Abschnitt 4 für eine spezielle Systemklasse vorgestellt.

Satz 2. Es seien Matrizen $\mathbf{G}_p^\perp(\mathbf{x})$, $\mathbf{J}_p(\mathbf{x}) = -\mathbf{J}_p^T(\mathbf{x})$, $\mathbf{R}_p(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_p^T(\mathbf{x}) \geq 0$ und eine Funktion $H(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, welche für alle $p \in \mathcal{P}$ das System von linearen partiellen Differentialgleichungen

$$\mathbf{G}_p^\perp(\mathbf{x}) [\mathbf{J}_p(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_p(\mathbf{x})] \nabla H(\mathbf{x}) = \mathbf{G}_p^\perp(\mathbf{x}) \mathbf{f}_p(\mathbf{x}) \quad (5)$$

erfüllen, wobei $\mathbf{G}_p^\perp(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{(n-m) \times n}$ ein Linksannihilator von $\mathbf{G}_p(\mathbf{x})$ (d. h. $\mathbf{G}_p^\perp(\mathbf{x})\mathbf{G}_p(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$) vollen Ranges sei.

¹ In einigen Fällen wird es möglich sein, die Parameter beim Reglerentwurf so zu wählen, dass $\beta_p(\mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x}) \forall p \in \mathcal{P}$ gilt. Dann kann diese Annahme fallen gelassen werden.

Darüber hinaus gelte (2) für die gewünschte Ruhelage $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$. Dann überführt das schaltende Regelgesetz $\mathbf{u} = \beta_\sigma(\mathbf{x})$ mit

$$\beta_\sigma(\mathbf{x}) = [\mathbf{G}_\sigma^T(\mathbf{x})\mathbf{G}_\sigma(\mathbf{x})]^{-1} \mathbf{G}_\sigma^T(\mathbf{x}) \times \{[\mathbf{J}_\sigma(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_\sigma(\mathbf{x})] \nabla H(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_\sigma(\mathbf{x})\} \quad (6)$$

das System (4) in die Form

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{J}_\sigma(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_\sigma(\mathbf{x})] \nabla H(\mathbf{x}) \quad (7)$$

und \mathbf{x}^* ist eine stabile Ruhelage.

Beweis. Analog zum Beweis von Proposition 1 in [19] erhält man durch Gleichsetzen der rechten Seiten von (4), mit $\mathbf{u} = \beta_p(\mathbf{x})$, und (7) den Satz von Bestimmungsgleichungen

$$\mathbf{f}_p(\mathbf{x}) + \mathbf{G}_p(\mathbf{x})\beta_p(\mathbf{x}) = [\mathbf{J}_p(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_p(\mathbf{x})] \nabla H(\mathbf{x}), \quad (8)$$

$p \in \mathcal{P}$. Multipliziert man (8) für alle $p \in \mathcal{P}$ mit $\mathbf{G}_p^\perp(\mathbf{x})$, ergeben sich die Restriktionsgleichungen (5). Das Regelgesetz (6) erhält man durch Auflösen von (8) nach $\beta_p(\mathbf{x})$ mit Hilfe der Pseudoinversen von $\mathbf{G}_p(\mathbf{x})$. Stabilität folgt unmittelbar aus Satz 1. \square

Wird, wie auch beim konventionellen IDA-PBC üblich, die Struktur der Entwurfsmatrizen $\mathbf{F}_p(\mathbf{x}) := \mathbf{J}_p(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_p(\mathbf{x})$ festgelegt, muss die Menge zulässiger (gemeinsamer) Energiefunktionen, welche dem geschlossenen Regelkreis zugewiesen werden können, aus (5) bestimmt werden. Die Lösbarkeit von (5) vorausgesetzt, besitzen die Lösungen die Gestalt

$$H(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}) + \Phi(\xi(\mathbf{x})). \quad (9)$$

Sie setzen sich zusammen aus einer partikulären Lösung $\Psi(\mathbf{x})$ und einer homogenen Lösung $\Phi(\xi(\mathbf{x}))$, wobei $\xi(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ der Vektor charakteristischer Koordinaten ist. Als charakteristische Koordinaten werden die unabhängigen Lösungen des zugehörigen Systems homogener linearer partieller Differentialgleichungen (PDgln) $\mathbf{G}_p^\perp(\mathbf{x})\mathbf{F}_p(\mathbf{x})\nabla \xi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, $p \in \mathcal{P}$ bezeichnet. Da auch jede Funktion von $\xi(\mathbf{x})$ eine Lösung dieses homogenen PDgl-Systems ist, kann $\Phi(\xi(\mathbf{x}))$ in (9) beliebig gewählt werden und enthält folglich Entwurfsfreiheit für die Reglerauslegung. Im Zuge dieser muss $\Phi(\xi(\mathbf{x}))$ dann so festgelegt werden, dass (2) erfüllt ist. Ein hinreichendes Kriterium dafür ist

$$\frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^*} = \mathbf{0}^T, \quad \frac{\partial^2 H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \Big|_{\mathbf{x}^*} > 0. \quad (10)$$

Eine zentrale Frage ist die nach der Lösbarkeit des PDgl-Systems (5), welches in der Form

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^\perp(\mathbf{x})\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathbf{G}_N^\perp(\mathbf{x})\mathbf{F}_N(\mathbf{x}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{N(n-m) \times n}} \nabla H(\mathbf{x}) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^\perp(\mathbf{x})\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathbf{G}_N^\perp(\mathbf{x})\mathbf{f}_N(\mathbf{x}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{N(n-m)}} \quad (11)$$

dargestellt werden kann. In [5], [22] wird eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit eines solchen PDgl-Systems formuliert²:

Satz 3. *Es seien die involutiven Abschlüsse $\bar{\Delta}_W, \bar{\Delta}_{W,s}$ der Distributionen*

$$\Delta_W = \text{span}\{\mathbf{W}^T(\mathbf{x})\}, \Delta_{W,s} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{W}^T(\mathbf{x}) \\ \mathbf{s}^T(\mathbf{x}) \end{bmatrix}\right\} \quad (12)$$

regulär. Das PDgl-System (11) ist genau dann lösbar, wenn gilt

$$\dim \bar{\Delta}_W = \dim \bar{\Delta}_{W,s}. \quad (13)$$

Offensichtlich ist für die Lösbarkeit von (11) notwendig, dass $\mathbf{s}(\mathbf{x}) \in \text{Bild}(\mathbf{W}(\mathbf{x}))$ erfüllt ist, oder äquivalent, dass $\dim \Delta_W = \dim \Delta_{W,s} = r \leq n$ gilt. Aufgrund der Regularität der beiden Distributionen existieren dann Indizes $k_i, i \in \{1, \dots, r\}$, so dass (11) äquivalent ist zu

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{w}_{k_1}^T(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{k_r}^T(\mathbf{x}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}(\mathbf{x}): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{r \times n}} \nabla H(\mathbf{x}) = \underbrace{\begin{bmatrix} s_{k_1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ s_{k_r}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}(\mathbf{x}): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^r}, \quad (14)$$

wobei mit $\mathbf{w}_i^T(\mathbf{x})$ die Zeilen von $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ und mit $s_i(\mathbf{x})$ die Einträge von $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ bezeichnet sind. Ist (11) lösbar, existieren l charakteristische Koordinaten $\xi_i(\mathbf{x})$, wenn die homogene PDgl $\mathbf{W}(\mathbf{x})\nabla\xi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ l unabhängige nicht-triviale Lösungen besitzt. Nach dem Satz von Frobenius (siehe z. B. [15]) ist $l = n - \dim \bar{\Delta}_W$ bzw. $l = n - \dim \bar{\Delta}_{W,s}$.

Wie die konventionelle IDA-PBC-Methode für nicht-schaltende Systeme besitzt auch die hier vorgestellte Verallgemeinerung die Eigenschaft, alle schaltenden statischen Zustandsrückführungen, durch die das System (4) gleichmäßig asymptotisch stabilisiert wird, zu generieren (*universal stabilizing property*).

Lemma 1. *Gegeben sei die endliche Familie von C^1 -stetigen Vektorfeldern $\{\mathbf{f}_p(\mathbf{x}), p \in \mathcal{P}\}$. Besitzt das schaltende System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_\sigma(\mathbf{x})$ für beliebige Schaltsignale $\sigma(t)$ eine gleichmäßig asymptotisch stabile Ruhelage \mathbf{x}^* , dann existieren eine C^∞ Funktion $H(\mathbf{x})$ und matrixwertige C^0 Funktionen $\mathbf{J}_p(\mathbf{x}) = -\mathbf{J}_p^T(\mathbf{x})$ und $\mathbf{R}_p(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_p^T(\mathbf{x}) \geq 0$, so dass für alle $p \in \mathcal{P}$ gilt*

$$\mathbf{f}_p(\mathbf{x}) = [\mathbf{J}_p(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_p(\mathbf{x})] \nabla H(\mathbf{x}). \quad (15)$$

Beweis. Aus dem Ljapunow-Umkehrsatz für schaltende Systeme in [16] folgt, dass eine Umgebung Ω von \mathbf{x}^* existiert, so dass alle Teilsysteme eine gemeinsame C^∞ Ljapunow-Funktion $H(\mathbf{x})$ mit einem strikten lokalen Minimum in \mathbf{x}^* und $(\partial H(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x})\mathbf{f}_p(\mathbf{x}) < 0$ für alle $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{x}^*\}$ und alle $p \in \mathcal{P}$ besitzen. Der Rest des Beweises folgt aus der Anwendung des Beweises von Lemma 1 in [20] auf jedes einzelne Teilsystem. \square

² In [5] ist die Bedingung für $\mathbf{W}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{q \times n}$ und $\mathbf{s}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ mit $q < n$ formuliert. Diese Voraussetzung ist allerdings nicht notwendig.

Als unmittelbare Konsequenz aus diesem Lemma ergibt sich folgender Satz:

Satz 4. *Gegeben sei das schaltende System (4), wobei $\mathbf{f}_p(\mathbf{x})$ und die Spalten von $\mathbf{G}_p(\mathbf{x})$ C^1 -stetige Vektorfelder seien. Existieren C^1 -stetige Funktionen $\beta_p(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, p \in \mathcal{P}$, so dass das geregelte System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_\sigma(\mathbf{x}) + \mathbf{G}_\sigma(\mathbf{x})\beta_\sigma(\mathbf{x})$ für beliebige Schaltsignale $\sigma(t)$ eine gleichmäßig asymptotisch stabile Ruhelage \mathbf{x}^* besitzt, dann existieren Matrizen $\mathbf{G}_p^\perp(\mathbf{x}), \mathbf{J}_p(\mathbf{x}), \mathbf{R}_p(\mathbf{x}), p \in \mathcal{P}$ und eine Funktion $H(\mathbf{x})$, welche die Bedingungen von Satz 2 erfüllen.*

4 Eine spezielle Klasse von Systemen

In diesem Abschnitt wird für eine Klasse schaltender Systeme ein systematisches Vorgehen zur Wahl der Entwurfsmatrizen $\mathbf{F}_p(\mathbf{x})$ präsentiert.

4.1 Problemformulierung

Es werden schaltende Systeme der Form

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}^\alpha \\ \dot{\mathbf{x}}^\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_\sigma^\alpha(\mathbf{x}) \\ \mathbf{f}_\sigma^\nu(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_\sigma^\alpha(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (16)$$

mit $\mathbf{x}^\alpha \in \mathbb{R}^m, \mathbf{x}^\nu \in \mathbb{R}^{n-m}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ betrachtet, die aus zwei Teilsystemen bestehen, d. h. $\mathcal{P} = \{1, 2\}$. Ein schaltendes System (4) mit $\mathcal{P} = \{1, 2\}$, welches nicht in dieser Form vorliegt, kann genau dann durch eine Koordinatentransformation in diese Gestalt überführt werden, wenn $\Delta_{G,p} = \text{span}\{\mathbf{G}_p(\mathbf{x})\}, p \in \{1, 2\}$ reguläre involutive Distributionen der Dimension m sind, für die $\Delta_{G,1} = \Delta_{G,2}$ gilt. Andernfalls kann die Form (16) mit $\mathbf{G}_p^\alpha = \mathbf{I}_m$ erzeugt werden, indem man beide Teilsysteme mit $x_{n+1} = u_1, \dots, x_{n+m} = u_m$ und $\dot{x}_{n+1} = v_1, \dots, \dot{x}_{n+m} = v_m$ dynamisch erweitert.

Partitioniert man die Entwurfsmatrizen entsprechend (16) in Submatrizen $\mathbf{F}_p^\alpha(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{F}_p^\nu(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{(n-m) \times n}$, erhält man die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_p^\alpha(\mathbf{x}) \\ \mathbf{F}_p^\nu(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \nabla H(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_p^\alpha(\mathbf{x}) \\ \mathbf{f}_p^\nu(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_p^\alpha(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \beta_p(\mathbf{x}), \quad (17)$$

$p \in \{1, 2\}$. Mit den einfachsten Linksannihilatoren $\mathbf{G}_p^\perp = [\mathbf{0} \ \mathbf{I}]$ lauten die Restriktionsgleichungen (5)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^\nu(\mathbf{x}) \\ \mathbf{F}_2^\nu(\mathbf{x}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}(\mathbf{x})} \nabla H(\mathbf{x}) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^\nu(\mathbf{x}) \\ \mathbf{f}_2^\nu(\mathbf{x}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}(\mathbf{x})}. \quad (18)$$

Die Matrizen $\mathbf{F}_p^\nu(\mathbf{x})$ sind so zu wählen, dass die von ihren Zeilen aufgespannten Distributionen $\Delta_{F,p} = \text{span}\{(\mathbf{F}_p^\nu(\mathbf{x}))^T\}$ in einer Umgebung der gewünschten Ruhelage \mathbf{x}^* die konstante Dimension $n-m$ besitzen. Dies ist notwendig, damit $\text{Rang } \mathbf{F}_p(\mathbf{x}) = n$ in einer Umgebung von \mathbf{x}^* gilt. Wenn die Entwurfsmatrizen $\mathbf{F}_p(\mathbf{x})$ Rangabfall aufweisen, kann das geregelte System Ruhelagen besitzen, die keine Extrema der Energiefunktion sind. Im Falle konstanter Entwurfsmatrizen ist $\text{Rang } \mathbf{F}_p = n$ sogar notwendig dafür, dass \mathbf{x}^* eine isolierte Ruhelage des geregelten Systems ist.

Aus dieser Forderung folgt wegen $\Delta_{F,p} \subseteq \Delta_W$, dass $\dim \bar{\Delta}_W \geq \dim \Delta_W \geq \dim \Delta_{F,p} = n-m$ gilt. Damit erhält man für die Anzahl der verfügbaren charakteristischen Koordinaten $l = n - \dim \bar{\Delta}_W \leq m$. Im Sinne maximaler Entwurfsfreiheit wäre es wünschenswert, dass (18) mit der maximalen Zahl charakteristischer Koordinaten $l = m$ lösbar ist. Dazu ist nach dem Satz von Frobenius und Satz 3 erforderlich, dass $\dim \bar{\Delta}_{W,s} = \dim \bar{\Delta}_W = n-m$. Zusammen mit $\dim \Delta_{F,p} = n-m$ folgt die Forderung $\bar{\Delta}_W = \Delta_W = \text{span}\{(\mathbf{F}_1^v(\mathbf{x}))^T\} = \text{span}\{(\mathbf{F}_2^v(\mathbf{x}))^T\}$ und $\bar{\Delta}_{W,s} = \Delta_{W,s} = \text{span}\{[\mathbf{F}_1^v(\mathbf{x}), \mathbf{f}_1^v(\mathbf{x})]^T\} = \text{span}\{[\mathbf{F}_2^v(\mathbf{x}), \mathbf{f}_2^v(\mathbf{x})]^T\}$. Demnach muss eine reguläre Matrix $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ existieren, so dass $[\mathbf{F}_2^v(\mathbf{x}), \mathbf{f}_2^v(\mathbf{x})] = \mathbf{C}(\mathbf{x})[\mathbf{F}_1^v(\mathbf{x}), \mathbf{f}_1^v(\mathbf{x})]$ gilt. Während $\mathbf{F}_2^v(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x})\mathbf{F}_1^v(\mathbf{x})$ durch die Wahl der Entwurfsparameter sichergestellt werden kann, sind die $\mathbf{f}_p^v(\mathbf{x})$ durch die Systemdynamik (16) gegeben. Daher wird für die betrachteten Systeme folgende Annahme formuliert.

Annahme 2. *Es existiert eine Funktion $\mathbf{C}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ mit $\text{Rang}(\mathbf{C}(\mathbf{x})) = n-m$ in einer Umgebung von \mathbf{x}^* , so dass $\mathbf{f}_2^v(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x})\mathbf{f}_1^v(\mathbf{x})$ gilt. Eigenwerte von $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ mit nichtpositivem Realteil besitzen gleiche algebraische und geometrische Vielfachheit.*

Aus dem ersten Teil der Annahme folgt bei entsprechender Wahl der Matrizen $\mathbf{F}_p^v(\mathbf{x})$, dass (18) äquivalent zu

$$\mathbf{F}_p^v(\mathbf{x})\nabla H(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_p^v(\mathbf{x}) \quad (19)$$

mit $p = 1$ oder $p = 2$ ist. Beim zweiten Teil handelt es sich um eine technische Annahme, die im Beweis von Satz 7 verwendet wird.

4.2 Definitheit der Dämpfungsmatrizen

Damit das zu entwerfende Regelgesetz das System (16) in SPH-Form überführt, ist die positive Semidefinitheit der beiden Dämpfungsmatrizen erforderlich, d. h.

$$\mathbf{R}_p(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} [\mathbf{F}_p(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_p^T(\mathbf{x})] \geq 0, \quad p \in \{1, 2\}. \quad (20)$$

Im Folgenden wird daher untersucht, wann Entwurfsmatrizen $\mathbf{F}_1(\mathbf{x}), \mathbf{F}_2(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{F}_2^v(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x})\mathbf{F}_1^v(\mathbf{x})$ existieren, so dass beide Dämpfungsmatrizen positiv definit sind. Falls nur positive Semidefinitheit möglich ist, soll geklärt werden, wie viele positive Eigenwerte den beiden Matrizen zugewiesen werden können. Dazu werden zunächst die Entwurfsmatrizen gemäß

$$\mathbf{F}_p(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_p^A(\mathbf{x}) & \mathbf{F}_p^B(\mathbf{x}) \\ \mathbf{F}_p^C(\mathbf{x}) & \mathbf{F}_p^D(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad p \in \{1, 2\} \quad (21)$$

partitioniert mit $\mathbf{F}_p^D(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$. Es gilt $\mathbf{F}_p^A(\mathbf{x}) = [\mathbf{F}_p^A(\mathbf{x}), \mathbf{F}_p^B(\mathbf{x})]$ und $\mathbf{F}_p^v(\mathbf{x}) = [\mathbf{F}_p^C(\mathbf{x}), \mathbf{F}_p^D(\mathbf{x})]$. Dann kann folgendes Lemma formuliert werden:

Lemma 2. *Es sei $\mathbf{F}_2^v(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x})\mathbf{F}_1^v(\mathbf{x})$. Für ein gegebenes $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ können $\mathbf{R}_1(\mathbf{x})$ und $\mathbf{R}_2(\mathbf{x})$ genau dann gleichzeitig positiv semidefinit (definit) gewählt werden, wenn*

$$\mathbf{F}_1^D(\mathbf{x}) + (\mathbf{F}_1^D(\mathbf{x}))^T \leq 0 (< 0), \quad (22)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{x})\mathbf{F}_1^D(\mathbf{x}) + (\mathbf{F}_1^D(\mathbf{x}))^T \mathbf{C}^T(\mathbf{x}) \leq 0 (< 0). \quad (23)$$

Beweis. Mit (21) und $\mathbf{F}_2^C(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x})\mathbf{F}_1^C(\mathbf{x})$ sowie $\mathbf{F}_2^D(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x})\mathbf{F}_1^D(\mathbf{x})$ folgt

$$\mathbf{R}_1 = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^A + (\mathbf{F}_1^A)^T & \mathbf{F}_1^B + (\mathbf{F}_1^B)^T \\ \mathbf{F}_1^C + (\mathbf{F}_1^C)^T & \mathbf{F}_1^D + (\mathbf{F}_1^D)^T \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$\mathbf{R}_2 = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_2^A + (\mathbf{F}_2^A)^T & \mathbf{F}_2^B + (\mathbf{F}_2^B)^T & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C}\mathbf{F}_1^C + (\mathbf{F}_2^C)^T & \mathbf{C}\mathbf{F}_1^D + (\mathbf{F}_2^D)^T & \mathbf{C}^T \end{bmatrix}, \quad (25)$$

wobei die \mathbf{x} -Argumente weggelassen worden sind. Angenommen, es seien $\mathbf{R}_1(\mathbf{x}) \geq (> 0)$ und $\mathbf{R}_2(\mathbf{x}) \geq (> 0)$. Dann folgen (22) und (23) mit Proposition 16.1 und Theorem 16.1 in [7], was die Notwendigkeit der Bedingungen zeigt. Zum Beweis, dass sie auch hinreichend sind, sei darauf hingewiesen, dass die Matrizen $\mathbf{F}_p^A = [\mathbf{F}_p^A, \mathbf{F}_p^B]$, $p \in \{1, 2\}$ unabhängig voneinander vorgegeben werden können. Wählt man z. B. $\mathbf{F}_p^A = \text{diag}\{\alpha_{ii,p}\}$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $p \in \{1, 2\}$ mit $\alpha_{ii,p} < 0$, und $\mathbf{F}_1^B(\mathbf{x}) = -(\mathbf{F}_1^C(\mathbf{x}))^T$ sowie $\mathbf{F}_2^B(\mathbf{x}) = -(\mathbf{F}_1^C(\mathbf{x}))^T \mathbf{C}^T(\mathbf{x})$, so erhält man

$$\mathbf{R}_1 = \text{diag} \left\{ \mathbf{R}_1^A, -\frac{1}{2} (\mathbf{F}_1^D + (\mathbf{F}_1^D)^T) \right\}, \quad (26)$$

$$\mathbf{R}_2 = \text{diag} \left\{ \mathbf{R}_2^A, -\frac{1}{2} (\mathbf{C}\mathbf{F}_1^D + (\mathbf{F}_1^D)^T \mathbf{C}^T) \right\} \quad (27)$$

mit $\mathbf{R}_p^A = -\text{diag}\{\alpha_{ii,p}\}$. Wenn (22), (23) erfüllt sind, ist offensichtlich $\mathbf{R}_1(\mathbf{x}) \geq 0 (> 0)$ und $\mathbf{R}_2(\mathbf{x}) \geq 0 (> 0)$. \square

Im Folgenden sei mit $i_+(\mathbf{A})$, $i_-(\mathbf{A})$ und $i_0(\mathbf{A})$ die Anzahl der Eigenwerte einer Matrix \mathbf{A} in der rechten komplexen Halbebene, in der linken komplexen Halbebene und auf der imaginären Achse bezeichnet. Analog seien $i_+^r(\mathbf{A})$, $i_-^r(\mathbf{A})$ und $i_0^r(\mathbf{A})$ für reelle Eigenwerte definiert.

Lemma 3. *Es sei $\mathbf{R}^A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\mathbf{R}^B \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$, $\mathbf{R}^D \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ und*

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^A & \mathbf{R}^B \\ (\mathbf{R}^B)^T & \mathbf{R}^D \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Wenn $\mathbf{R} \geq 0$ und $\mathbf{R}^D \geq 0$, dann ist

$$\max_{\mathbf{R}^A, \mathbf{R}^B} i_+(\mathbf{R}) = m + i_+(\mathbf{R}^D). \quad (29)$$

Beweis. Siehe Anhang A.1. \square

Um positive Semidefinitheit beider Dämpfungsmatrizen zu gewährleisten, muss $\mathbf{F}_1^D(\mathbf{x})$ gemäß Lemma 2 die Matrixungleichungen (22) und (23) erfüllen. Letztere lässt sich mit $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = -\mathbf{F}_1^D(\mathbf{x})$ äquivalent als Gleichung

$$\mathbf{C}(\mathbf{x})\mathbf{X}(\mathbf{x}) + \mathbf{X}^T(\mathbf{x})\mathbf{C}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \quad (30)$$

mit (beliebiger) Matrix $\mathbf{Q}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \geq 0$ formulieren.

4.3 Die Gleichung $\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{Q}$

Die Gleichung

$$\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{Q} \quad (31)$$

ist in mehreren Veröffentlichungen untersucht worden, z. B. in [24]. Es seien $\mathbf{A}, \mathbf{X}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$. Der

folgende Satz beschreibt die Lösbarkeit sowie die Struktur der Lösung (siehe [24]).

Satz 5. (a) Die Matrixgleichung (31) ist genau dann lösbar, wenn $\mathbf{E}_A \mathbf{Q} \mathbf{E}_A = \mathbf{0}$ gilt, wobei $\mathbf{E}_A = \mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger$ der orthogonale Projektor auf den Kern von \mathbf{A} ist. Die Lösung $\mathbf{X} = \mathbf{X}^p + \mathbf{X}^h$ setzt sich aus einem partikulären Anteil \mathbf{X}^p und der Lösung \mathbf{X}^h der zugehörigen homogenen Matrixgleichung (d. h. $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$) zusammen.

(b) Es sei $\mathbf{Q} \geq \mathbf{0}$. Dann ist (31) genau dann lösbar, wenn $\text{Bild}(\mathbf{Q}) \subseteq \text{Bild}(\mathbf{A})$ gilt.

(c) Wenn \mathbf{A} regulär ist, gilt $\mathbf{X}^h = \mathbf{U} \mathbf{A}^T$ mit einer beliebigen Matrix $\mathbf{U} = -\mathbf{U}^T$.

Soweit den Autoren bekannt, existieren keine Ergebnisse zur Definitheit des symmetrischen Anteils $\frac{1}{2}(\mathbf{X} + \mathbf{X}^T)$ der Lösung. Es kann folgender Satz formuliert werden.

Satz 6. Gegeben sei Gleichung (31) mit $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq \mathbf{0}$. Die algebraische und geometrische Vielfachheit nichtpositiver Eigenwerte von \mathbf{A} sei gleich. Es existieren genau dann Lösungen \mathbf{X} mit $\mathbf{X} + \mathbf{X}^T \geq \mathbf{0}$, wenn alle Linkseigenvektoren von \mathbf{A} zu reellen nichtpositiven Eigenwerten in $\text{Kern}(\mathbf{Q})$ liegen. Dann gilt

$$\max_{\mathbf{x}^h, \mathbf{Q}} i_+(\mathbf{X} + \mathbf{X}^T) = n - i_-(\mathbf{A}). \quad (32)$$

Insbesondere gilt für alle \mathbf{Q} , deren Kern genau von diesen Linkseigenvektoren aufgespannt wird

$$\max_{\mathbf{x}^h} i_+(\mathbf{X} + \mathbf{X}^T) = n - i_-(\mathbf{A}). \quad (33)$$

Beweis. Siehe Anhang A.2. □

Anmerkung 2. Die Annahme in Satz 6, dass die algebraische und geometrische Vielfachheit nichtpositiver Eigenwerte von \mathbf{A} gleich sei, ist technischer Natur und dient dazu, den Beweis zu vereinfachen.

Im Zusammenhang mit der Wahl geeigneter Entwurfsmatrizen für den Reglerentwurf folgt damit:

Satz 7. Für ein gegebenes $\mathbf{C}(\mathbf{x})$, welches Annahme 2 erfüllt, existieren Matrizen $\mathbf{F}_1(\mathbf{x})$ und $\mathbf{F}_2(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{F}_2^v(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) \mathbf{F}_1^v(\mathbf{x})$, so dass $\mathbf{R}_1(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$ und $\mathbf{R}_2(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$ und es gilt

$$\max i_+(\mathbf{R}_p(\mathbf{x})) = n - i_-(\mathbf{C}(\mathbf{x})), \quad p \in \{1, 2\}. \quad (34)$$

Beweis. Im Weiteren sei $\mathbf{X}(\mathbf{x}) := -\mathbf{F}_1^D(\mathbf{x})$. Aus Lemma 2 ist bekannt, dass $\mathbf{R}_p(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$, $p \in \{1, 2\}$ genau dann möglich ist, wenn $\mathbf{X}(\mathbf{x}) + \mathbf{X}^T(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$ und

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) \mathbf{X}(\mathbf{x}) + \mathbf{X}^T(\mathbf{x}) \mathbf{C}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \quad (35)$$

für ein $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$ erfüllt ist. Solche Matrizen existieren immer, z. B. $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Mit $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = -\mathbf{F}_1^D(\mathbf{x})$ und (25), (35) erkennt man, dass $\mathbf{R}_2^D(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}[\mathbf{C}(\mathbf{x}) \mathbf{X}(\mathbf{x}) + \mathbf{X}^T(\mathbf{x}) \mathbf{C}^T(\mathbf{x})] = \frac{1}{2} \mathbf{Q}(\mathbf{x})$ gilt. Demnach folgt aus Satz 6, dass eine Lösung $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ von (35) mit $\mathbf{X}(\mathbf{x}) + \mathbf{X}^T(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$ genau dann existiert, wenn die Linkseigenvektoren von $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ zu reellen nichtpositiven Eigenwerten in $\text{Kern}(\mathbf{R}_2^D(\mathbf{x}))$ enthalten sind. Gemäß Annahme 2 besitzt $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ vollen Rang

und folglich keine Eigenwerte in Null. Demnach gilt $\max i_+(\mathbf{R}_2^D(\mathbf{x})) = (n-m) - i_-(\mathbf{C}(\mathbf{x}))$. Außerdem geht aus Satz 6 hervor, dass für $\mathbf{R}_1^D(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{X}(\mathbf{x}) + \mathbf{X}^T(\mathbf{x}))$ ebenfalls $\max i_+(\mathbf{R}_1^D(\mathbf{x})) = (n-m) - i_-(\mathbf{C}(\mathbf{x}))$ gilt. Da $\mathbf{R}_p^A(\mathbf{x})$ und $\mathbf{R}_p^B(\mathbf{x})$, $p \in \{1, 2\}$ mit $\mathbf{F}_p^v(\mathbf{x})$ unabhängig voneinander vorgegeben werden können (siehe (24), (25)), folgt die Behauptung aus Lemma 3. □

Korollar 1. Für ein gegebenes $\mathbf{C}(\mathbf{x})$, welches Annahme 2 erfüllt, existieren genau dann Matrizen $\mathbf{F}_1(\mathbf{x})$ und $\mathbf{F}_2(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{F}_2^v(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) \mathbf{F}_1^v(\mathbf{x})$, so dass sowohl $\mathbf{R}_1(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$ als auch $\mathbf{R}_2(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$ gilt, wenn $i_-(\mathbf{C}(\mathbf{x})) = 0$.

Anmerkung 3. Satz 7 bzw. Korollar 1 basieren auf der punktweisen Anwendung von Satz 6 und treffen demnach keine Aussage über die Glattheit von $\mathbf{R}_p(\mathbf{x})$, $p \in \{1, 2\}$. Um für $\mathbf{C}(\mathbf{x}), \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^\infty$ in einer Umgebung D von \mathbf{x}^* die Existenz glatter Funktionen $\mathbf{R}_p(\mathbf{x})$, welche (34) erfüllen, sicherzustellen, können z. B. folgende hinreichenden Bedingungen formuliert werden.

1. Für $\mathbf{x} \in D$ sind die Eigenwerte von $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ reell und einfach, d. h. $\lambda_1(\mathbf{x}) < \dots < \lambda_{n-m}(\mathbf{x})$. Dann sind die Eigenwerte $\lambda_i(\mathbf{x})$ und Eigenvektoren $\mathbf{v}_i(\mathbf{x})$ von $\mathbf{C}^T(\mathbf{x})$ glatte Funktionen von \mathbf{x} [9], so dass die im Beweis zu Satz 6 verwendete Eigenzerlegung eine glatte Operation ist.
2. Für $\mathbf{x} \in D$ sind die Realteile aller Eigenwerte von $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ positiv. Dann besitzt (30) eine eindeutige symmetrische Lösung $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}^T(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$, die glatt von den Matrizen \mathbf{C} und \mathbf{Q} abhängt.

4.4 Konstruktion der Entwurfsmatrizen

Um geeignete Entwurfsmatrizen $\mathbf{F}_p(\mathbf{x})$, $p \in \{1, 2\}$ zu erhalten, für die $\mathbf{R}_p(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$, $p \in \{1, 2\}$ gilt, ist eine Menge von Matrizen $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = -\mathbf{F}_1^D(\mathbf{x})$ zu bestimmen, die $\mathbf{X}(\mathbf{x}) + \mathbf{X}^T(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$ sowie (30) für eine positiv semidefinite Matrix $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ erfüllen. Unter den gegebenen Voraussetzungen besitzt (30) für jedes $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$ unendlich viele Lösungen der Form $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}^p(\mathbf{x}) + \mathbf{X}^h(\mathbf{x})$ mit einer partikulären Lösung $\mathbf{X}^p(\mathbf{x})$ und der Lösung

$$\mathbf{X}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{U}(\mathbf{x}) \mathbf{C}^T(\mathbf{x}) \quad (36)$$

der zugehörigen homogenen Gleichung $\mathbf{C}(\mathbf{x}) \mathbf{X}(\mathbf{x}) + \mathbf{X}^T(\mathbf{x}) \mathbf{C}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, wobei $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = -\mathbf{U}^T(\mathbf{x})$ beliebig ist (siehe Satz 5). Darüber hinaus existieren unendlich viele Matrizen $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$.

Es ist bekannt, dass eine Matrix \mathbf{Q} genau dann positiv semidefinit ist, wenn sie sich als $\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T \mathbf{T}$ mit einer oberen Dreiecksmatrix \mathbf{T} darstellen lässt³ [2]. Für den weiteren Verlauf werden die Matrizen $\mathbf{T}_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ und $\mathbf{Q}_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ wie folgt definiert:

$$\mathbf{T}_{ij} = [t_{kl}], \quad t_{kl} = \begin{cases} 1, & k = i \wedge l = j \wedge k \leq l \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

$$\mathbf{Q}_{ij} = \mathbf{T}_{ij} + \mathbf{T}_{ij}^T.$$

³ Für den Fall $\mathbf{Q} > \mathbf{0}$ ist \mathbf{T} der Cholesky-Faktor. Er ist eindeutig und regulär.

Dann kann jede obere Dreiecksmatrix $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ in der Form

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n-m} \sum_{j=i}^{n-m} k_{ij}(\mathbf{x}) \mathbf{T}_{ij} \quad (37)$$

dargestellt werden mit (lokal) reellwertigen Funktionen $k_{ij}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Folglich ist durch

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) &= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n-m} \sum_{j=i}^{n-m} k_{ij}(\mathbf{x}) \mathbf{T}_{ij} \right)^T}_{\mathbf{T}^T(\mathbf{x})} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n-m} \sum_{j=i}^{n-m} k_{ij}(\mathbf{x}) \mathbf{T}_{ij} \right)}_{\mathbf{T}(\mathbf{x})} \\ &= \sum_{i=1}^{n-m} \sum_{j=i}^{n-m} \sum_{k=1}^i k_{ki}(\mathbf{x}) k_{kj}(\mathbf{x}) \mathbf{Q}_{ij} \end{aligned} \quad (38)$$

eine Menge von positiv (semi-)definiten Matrizen $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ gegeben.

Nun sei $\mathbf{X}_{ij}^p(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ eine partikuläre Lösung von (30) für $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}_{ij}$. Da $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ gemäß Annahme 2 vollen Rang besitzt, ist die Lösbarkeit nach Satz 5 (a) sichergestellt. Wegen der Linearität der Matrixgleichung (30) beschreibt dann

$$\mathbf{X}^p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n-m} \sum_{j=i}^{n-m} \sum_{k=1}^i k_{ki}(\mathbf{x}) k_{kj}(\mathbf{x}) \mathbf{X}_{ij}^p(\mathbf{x}) \quad (39)$$

eine Menge von partikulären Lösungen von (30) für alle Matrizen in (38). Durch Addition der homogenen Lösung (36) erhält man schließlich eine Menge von Matrizen, für die $\mathbf{C}(\mathbf{x})\mathbf{X}(\mathbf{x}) + \mathbf{X}^T(\mathbf{x})\mathbf{C}^T(\mathbf{x}) \geq 0$ gilt, als

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n-m} \sum_{j=i}^{n-m} \sum_{k=1}^i k_{ki}(\mathbf{x}) k_{kj}(\mathbf{x}) \mathbf{X}_{ij}^p(\mathbf{x})}_{\mathbf{X}^p(\mathbf{x})} + \underbrace{\mathbf{U}(\mathbf{x})\mathbf{C}^T(\mathbf{x})}_{\mathbf{X}^h(\mathbf{x})}. \quad (40)$$

Leider kann im Allgemeinen jedoch keine Aussage über die Definitheit der symmetrischen Anteile der Lösungen (39) und (40) getroffen werden. Um $\mathbf{X}(\mathbf{x}) + \mathbf{X}^T(\mathbf{x}) \geq 0$ zu gewährleisten, ist es notwendig, Bedingungen an die Funktionen $k_{ij}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ bzw. deren Parameter zu formulieren, z. B. mit Hilfe des *Sylvester-Kriteriums*. Im Folgenden werden verschiedene Eigenwertkonfigurationen von $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ diskutiert.

Wenn man $\mathbf{X}_{ij}^p(\mathbf{x}) = (\mathbf{X}_{ij}^p(\mathbf{x}))^T$ wählt, so erfüllt jede der partikulären Lösungen (39) eine *Ljapunow-Gleichung*

$$\mathbf{C}(\mathbf{x})\mathbf{X}^p(\mathbf{x}) + \mathbf{X}^p(\mathbf{x})\mathbf{C}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \geq 0. \quad (41)$$

Diese Wahl ist immer möglich, wenn für die Eigenwerte von $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ gilt $\lambda_i + \lambda_j^* \neq 0 \forall i, j$, da (41) dann eine eindeutige symmetrische Lösung besitzt [1]. Wenn nun das Paar $[\mathbf{C}(\mathbf{x}), \mathbf{Q}(\mathbf{x})]$ punktweise steuerbar im linearen Sinne ist, folgt aus Theorem 6.19 in [1], dass $i_{\pm}(\mathbf{X}^p(\mathbf{x})) = i_{\pm}(\mathbf{C}(\mathbf{x}))$. Für den Fall, dass alle Eigenwerte von $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ in der rechten komplexen Halbebene liegen, gilt also $\mathbf{X}^p(\mathbf{x}) = (\mathbf{X}^p(\mathbf{x}))^T > 0$. Über $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ kann man

im Allgemeinen nur aussagen, dass $\mathbf{X}(\mathbf{x}) + \mathbf{X}^T(\mathbf{x}) \geq 0$ für hinreichend kleine $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ gilt, außer $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ kann so gewählt werden, dass $\mathbf{X}^h(\mathbf{x}) + (\mathbf{X}^h(\mathbf{x}))^T \geq 0$ ist. Für den Fall, dass $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ nur komplexe Polpaare mit negativem Realteil besitzt, folgt entsprechend $\mathbf{X}^p(\mathbf{x}) = (\mathbf{X}^p(\mathbf{x}))^T < 0$. Da positive Definitheit von $\mathbf{X}(\mathbf{x}) + \mathbf{X}^T(\mathbf{x})$ gemäß Satz 6 möglich ist, kann diese allein durch eine geeignete Wahl von $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ erreicht werden, die sicherstellt dass $\mathbf{X}^h(\mathbf{x}) + (\mathbf{X}^h(\mathbf{x}))^T > 0$ hinreichend groß ist.

Für $i_{-}(\mathbf{C}(\mathbf{x})) = 0$ kann $\mathbf{X}(\mathbf{x}) + \mathbf{X}^T(\mathbf{x}) \geq 0$ gemäß Satz 6 unabhängig von den $k_{ij}(\mathbf{x})$ in (38) bzw. (39) immer durch entsprechende Wahl von $\mathbf{X}^h(\mathbf{x})$ erreicht werden. Besitzt $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ allerdings reelle negative Eigenwerte, müssen die $k_{ij}(\mathbf{x})$ so gewählt werden, dass die Linkseigenvektoren zu diesen Eigenwerten in $\text{Kern}(\mathbf{Q}(\mathbf{x}))$ enthalten sind. In diesem Fall ist es einfacher, die Gleichung (30) zunächst in die Form

$$\mathbf{D}^*(\mathbf{x})\hat{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{X}}^*(\mathbf{x})\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}) \quad (42)$$

mit $\hat{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}^*(\mathbf{x})\mathbf{X}(\mathbf{x})\mathbf{V}(\mathbf{x})$, $\hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}^*(\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{V}(\mathbf{x})$ zu transformieren (vgl. den Beweis von Satz 6). Dabei werden die Spalten von $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ von den Eigen- bzw. Hauptvektoren von $\mathbf{C}^T(\mathbf{x})$ gebildet und $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ ist eine Jordan-Matrix. Bei geeigneter Wahl von $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ kann eine Partitionierung $\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \text{diag}\{\mathbf{D}_{11}(\mathbf{x}), \mathbf{D}_{22}(\mathbf{x})\}$ gewählt werden, so dass $i_{-}(\mathbf{D}_{11}(\mathbf{x})) = 0$ gilt und $\mathbf{D}_{22}(\mathbf{x})$ die reellen negativen Eigenwerte von $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ enthält. Die Matrizen $\hat{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = [\hat{\mathbf{X}}_{ik}(\mathbf{x})]$, $\hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}) = [\hat{\mathbf{Q}}_{ik}(\mathbf{x})]$, $i, k \in \{1, 2\}$ werden entsprechend partitioniert. Mit $\hat{\mathbf{X}}_{ik} = \mathbf{0}$, $\hat{\mathbf{Q}}_{ik} = \mathbf{0}$ außer für $i = k = 1$ reduziert sich (42) dann auf $\mathbf{D}_{11}^*(\mathbf{x})\hat{\mathbf{X}}_{11}(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{X}}_{11}^*(\mathbf{x})\mathbf{D}_{11}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{Q}}_{11}(\mathbf{x})$. Nachdem für diese Gleichung gemäß (40) eine Menge von Lösungen $\hat{\mathbf{X}}_{11}(\mathbf{x})$ mit $\hat{\mathbf{X}}_{11}(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{X}}_{11}^T(\mathbf{x}) \geq 0$ konstruiert worden ist, erhält man aus $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}^*(\mathbf{x})\hat{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{x})$ eine Menge von Lösungen zu (30) mit $\mathbf{X}(\mathbf{x}) + \mathbf{X}^T(\mathbf{x}) \geq 0$.

Wenn eine Menge geeigneter Matrizen $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ bestimmt worden ist, wählt man $\mathbf{F}_1^v(\mathbf{x}) = [\mathbf{F}_1^c(\mathbf{x}), -\mathbf{X}(\mathbf{x})]$. In [12] ist der Entwurfsprozess eines (einzelnen) IDA-PBC Reglers in mehrere Schritte gegliedert worden. Basierend darauf wird im Folgenden eine systematische Prozedur für die Bestimmung der Regelgesetze $\beta_1(\mathbf{x})$ und $\beta_2(\mathbf{x})$ vorgestellt.

4.5 Systematisches Vorgehen

Im *ersten Schritt* muss die Struktur der Funktionen $\mathbf{F}_1^c(\mathbf{x})$, $k_{ij}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ so gewählt werden, dass die Restriktionsgleichungen (19) gemäß Satz 3 lösbar sind. Dies ist besonders einfach, wenn die Struktur der Funktionen so gewählt werden kann, dass eine der beiden Matrizen $\mathbf{F}_1^v(\mathbf{x})$, $\mathbf{F}_2^v(\mathbf{x})$ konstant wird. In diesem Fall sind die Restriktionsgleichungen genau dann lösbar, wenn

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}_{k,i}^v(\mathbf{x}) \mathbf{v}_{k,j} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}_{k,j}^v(\mathbf{x}) \mathbf{v}_{k,i} = 0 \quad (43)$$

für alle $i, j = 1, \dots, n-m$ gilt, wobei $k \in \{1, 2\}$ der Index der konstanten Entwurfsmatrix und $\mathbf{v}_{k,i}$ die i -te Spalte

von $(\mathbf{F}_k^v)^T$ ist [12]. Basierend auf (43) ergeben sich Bedingungen an die (konstanten) Einträge von \mathbf{F}_k^v .

Im zweiten Schritt werden Anforderungen an $\mathbf{F}_1(\mathbf{x})$ und $\mathbf{F}_2(\mathbf{x})$ formuliert, um $\mathbf{R}_p(\mathbf{x}) \geq 0$, $p \in \{1, 2\}$ zu gewährleisten. Dazu werden zunächst Bedingungen abgeleitet, so dass $\mathbf{R}_1^D(\mathbf{x}) = \mathbf{X}(\mathbf{x}) + \mathbf{X}^T(\mathbf{x}) \geq 0$ erfüllt ist (siehe obige Diskussion). Positive Semidefinitheit von $\mathbf{R}_2^D(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ ist per Konstruktion gegeben. Im Anschluss werden Bedingungen an $\mathbf{F}_1^C(\mathbf{x})$, $\mathbf{F}_1^\alpha(\mathbf{x})$ und $\mathbf{F}_2^\alpha(\mathbf{x})$ formuliert, um die positive Semidefinitheit der Dämpfungsmatrizen zu gewährleisten. Dies kann anhand des folgenden Satzes geschehen.

Satz 8. [7] Wenn $\mathbf{R}_p^D > 0$ ist, dann ist $\mathbf{R}_p > 0$ genau dann, wenn gilt

$$\mathbf{R}_p^A - \mathbf{R}_p^B (\mathbf{R}_p^D)^{-1} (\mathbf{R}_p^B)^T > 0. \quad (44)$$

Wenn $\mathbf{R}_p^D \geq 0$ ist, dann ist $\mathbf{R}_p \geq 0$ genau dann, wenn gilt

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_p^D (\mathbf{R}_p^D)^\dagger \right) (\mathbf{R}_p^B)^T = \mathbf{0}, \quad (45a)$$

$$\mathbf{R}_p^A - \mathbf{R}_p^B (\mathbf{R}_p^D)^\dagger (\mathbf{R}_p^B)^T \geq 0. \quad (45b)$$

Die Bedingung (44) erlaubt es, die positive Definitheit der $n \times n$ -dimensionalen Matrix \mathbf{R} nachzuweisen, indem man die positive Definitheit einer kleineren $m \times m$ dimensionalen Matrix überprüft. Im Falle positiver Semidefinitheit tritt zusätzlich (45a) hinzu. Es handelt sich hierbei allerdings um eine Gleichungsbedingung, die weitaus einfacher zu handhaben ist als Ungleichungsbedingungen, wie man sie beispielsweise mittels des Sylvester-Kriteriums erhält. Es sei angemerkt, dass durch die Wahl der Matrizen $\mathbf{F}_p^\alpha(\mathbf{x})$, die im Beweis zu Lemma 2 getroffen worden ist, sämtliche Bedingungen von Satz 8 erfüllt werden.

Im dritten Schritt wird (19) für $p = 1$ oder $p = 2$ gelöst, um die Menge der (gemeinsamen) Energiefunktionen $H(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}) + \Phi(\xi(\mathbf{x}))$ zu bestimmen, die dem geschlossenen Regelkreis zugewiesen werden können. Die Parameter in $\mathbf{F}_1^v(\mathbf{x})$ und die Funktion $\Phi(\xi(\mathbf{x}))$ werden so festgelegt, dass die Bedingungen (10) erfüllt sind. Die Parameter in $\mathbf{F}_1^\alpha(\mathbf{x})$ und $\mathbf{F}_2^\alpha(\mathbf{x})$ sowie die übrigen Freiheitsgrade in $\mathbf{F}_1^v(\mathbf{x})$ werden verwendet, um die Reglerperformance zu optimieren oder die Größe des gemäß Anmerkung 1 abgeschätzten Einzugsbereiches zu vergrößern.

Anmerkung 4. Aufgrund der großen Anzahl von Parametern in den Entwurfsmatrizen sowie in der homogenen Lösung $\Phi(\xi(\mathbf{x}))$ ist es meist schwierig geeignete Parameterwerte zu bestimmen. In [12] wird die Methode der Zuweisung lokal linearer Dynamik vorgestellt, die eine systematische und transparente Wahl der Parameter eines (nicht-schaltenden) IDA-PBC-Reglers ermöglicht. Im folgenden Beispiel wird diese Methodik herangezogen, um eine geeignete Parametrierung für $\beta_1(\mathbf{x})$ zu ermitteln. Die Grundidee hierbei ist, die Linearisierung des geregelten Sys-

tems mit lokal linearer Wunschkodynamik – spezifiziert durch eine Hurwitz Matrix \mathbf{A}_d – zu vergleichen:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{F}(\mathbf{x}) \nabla H(\mathbf{x})) \Big|_{\mathbf{x}^*} \stackrel{!}{=} \mathbf{A}_d. \quad (46)$$

In [12] wird aus dieser Forderung ein (in der Regel unterbestimmtes) lineares Gleichungssystem für die Entwurfparameter abgeleitet. Falls diese Gleichungen erfüllt sind und die Parameter in $H(\mathbf{x})$ so gewählt werden, dass die erste Bedingung in (10) gilt, dann impliziert $\mathbf{R}(\mathbf{x}^*) \geq 0$ die zweite Bedingung in (10). Damit kann relativ einfach gewährleistet werden, dass $H(\mathbf{x})$ in \mathbf{x}^* ein striktes lokales Minimum besitzt.

5 Numerisches Beispiel

Um das Vorgehen für den Reglerentwurf zu veranschaulichen, wird das Beispiel-System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_\sigma(\mathbf{x}) + \mathbf{G}_\sigma(\mathbf{x})u \quad (47)$$

mit

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -x_1 x_3^2 + 4x_2 \\ 3x_1 \\ 5x_2 - 7x_3^3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -x_2 x_3 - x_1 \\ 3x_1 \\ 9x_1 + 5x_2 - 7x_3^3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_1(\mathbf{x}) = [1 + x_1^2 \quad 0 \quad 0]^T, \quad \mathbf{G}_2(\mathbf{x}) = [3 + x_3 \quad 0 \quad 0]^T$$

betrachtet. Das System ist in der Form (16) gegeben und es gilt

$$\mathbf{f}_2^v(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{f}_1^v(\mathbf{x}). \quad (48)$$

Folglich liegen beide Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 1$ von \mathbf{C} in der rechten komplexen Halbebene. Löst man (30) mit $\mathbf{X}_{ij}^p(\mathbf{x}) = (\mathbf{X}_{ij}^p(\mathbf{x}))^T$ bzw. (41) für die rechten Seiten \mathbf{Q}_{11} , \mathbf{Q}_{12} , \mathbf{Q}_{22} , erhält man die Matrizen

$$\mathbf{X}_{11}^p = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 3 & 9 \\ -\frac{4}{4} & \frac{4}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_{22}^p = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_{12}^p = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Die schief-symmetrische Matrix in (36) wird konstant gewählt und es folgt

$$\mathbf{X}^h = \begin{bmatrix} 0 & \rho \\ -\rho & 0 \end{bmatrix} \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 0 & \rho \\ -\rho & -3\rho \end{bmatrix}. \quad (50)$$

Damit kann gemäß (40) eine Menge von Lösungen der Gleichung (30) angegeben werden als

$$\mathbf{X} = k_{11}^2 \mathbf{X}_{11}^p + (k_{22}^2 + k_{12}^2) \mathbf{X}_{22}^p + k_{12} k_{11} \mathbf{X}_{12}^p + \mathbf{X}^h, \quad (51)$$

wobei k_{11}, k_{22}, k_{12} konstant gewählt worden sind. Um positive Definitheit von $\mathbf{X}(\mathbf{x}) + \mathbf{X}^T(\mathbf{x})$ zu gewährleisten, können mittels Sylvester-Kriterium die Bedingungen $k_{11} \neq 0$ und

$$24\rho < 9k_{11}^2 + 4k_{22}^2 \quad (52)$$

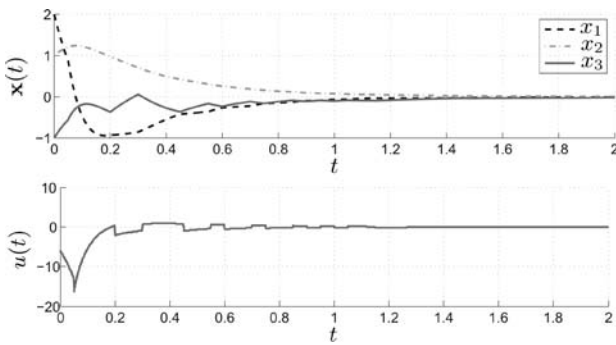


Bild 1 Zeitverläufe der Zustände des geregelten schaltenden Systems für $\mathbf{x}(0) = [2, 1, -1]^T$ und ein zufälliges Schaltsignal (oben) sowie zugehöriger Verlauf der Stellgröße (unten).

abgeleitet werden. Indem man $\mathbf{F}_1^v = [\mathbf{F}_1^C, -\mathbf{X}]$ mit einer konstanten Matrix $\mathbf{F}_1^C = [v_{1,1} \ v_{2,1}]^T$ wählt, erhält man schließlich eine Menge von geeigneten Matrizen \mathbf{F}_1^v .

Da \mathbf{F}_1^v konstant ist, kann (43) zur Überprüfung der Lösbarkeit herangezogen werden und es folgt

$$3v_{2,1} + \frac{5}{2}k_{11}^2 + 21x_3^2 \left(\frac{3}{4}k_{11}^2 - \frac{1}{2}k_{12}k_{11} - \rho \right) \stackrel{!}{=} 0, \quad (53)$$

was mit $v_{2,1} = -\frac{5}{6}k_{11}^2$ und $\rho = \frac{3}{4}k_{11}^2 - \frac{1}{2}k_{12}k_{11}$ gilt.

Um $\mathbf{R}_p > 0, p \in \{1, 2\}$ zu erreichen, wird $\mathbf{F}_p^B = -(\mathbf{F}_p^C)^T, p \in \{1, 2\}$ gewählt, so dass die beiden Dämpfungsmatrizen in der Form (26), (27) vorliegen. Es ist dann $\mathbf{R}_1 > 0$, wenn $\mathbf{F}_1^A = \alpha_{11,1} < 0$ und $\mathbf{X}(\mathbf{x}) + \mathbf{X}^T(\mathbf{x}) > 0$ gilt. Für letzteres folgt mit der oben getroffenen Wahl für ρ aus (52) die Bedingung

$$-4k_{22}^2 + 9k_{11}^2 - 12k_{12}k_{11} < 0. \quad (54)$$

Für positive Definitheit von \mathbf{R}_2 muss entsprechend $\mathbf{F}_2^A = \alpha_{11,2} < 0$ und $\mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{X}^T\mathbf{C}^T = \mathbf{Q} > 0$ sein. Letzteres ist per Konstruktion erfüllt, wenn $k_{11}, k_{22} \neq 0$ gilt.

Da $\Delta_{F,1}$ von den konstanten Zeilen der Matrix \mathbf{F}_1^v aufgespannt wird, kann leicht eine Lösung von (19) bestimmt werden, indem man $\Delta_{F,1}$ *begradigt*⁴ (engl. *straightening out*, siehe z. B. [15]). Eine entsprechende lineare Koordinatentransformation ist durch $\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ mit $\mathbf{T} = [(\mathbf{F}_1^v)^T \ \mathbf{t}_3]^{-1}$ gegeben, wobei $\mathbf{t}_3 = \left[\frac{1}{k_{11}^2(k_{22}^2 + k_{12}^2)} \ 0 \ 0 \right]^T$ ist. Dann ist z_3 eine charakteristische Koordinate und es wird $\Phi(z_3) = \mu_2 z_3^2$ gewählt.

Zur Wahl der Parameterwerte wird die Zuweisung lokal linearer Dynamik auf das erste Teilsystem angewandt, wobei $\mathbf{A}_{d,1}$ drei Eigenwerte in -3 besitzt. Aus dem zugehörigen linearen Gleichungssystem folgen Abhängigkeiten der Form $\alpha_{11,1} = \alpha_{11,1}(k_{11}, k_{12}, k_{22}), v_{11,1} = v_{11,1}(k_{11}, k_{12}, k_{22}), \mu_2 = \mu_2(k_{11}, k_{12}, k_{22})$. Der Parameter k_{12} wird der Einfachheit halber zu -1 festgelegt. Die verbleibenden Freiheitsgrade $\alpha_{11,2}, k_{11}$ und k_{22} werden so gewählt, dass die Linearisierung des zweiten

⁴ Wenn eine Koordinatentransformation $\mathbf{z} = \mathbf{t}(\mathbf{x})$ eine Distribution Δ mit konstanter Dimension s begradigt, dann ist die transformierte Distribution in \mathbf{z} -Koordinaten durch $\Delta = \text{span}\left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_s} \right\}$ gegeben.

Teilsystems im geschlossenen Regelkreis die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = -0,91, \lambda_{2,2} = -7,9$ und $\lambda_{3,2} = -12,9$ besitzt. In Bild 1 sind die Zeitverläufe $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ des geregelten Systems sowie die Stellgröße $u(t)$ für den Anfangszustand $\mathbf{x}(0) = [2, 1, -1]^T$ und ein zufälliges Schaltsignal dargestellt.

6 Zusammenfassung

In diesem Beitrag ist eine konstruktive Reglerentwurfsmethode für schaltende nichtlineare steuerungsaffine Systeme vorgestellt worden, die für beliebige Schaltsignale (asymptotische) Stabilität erzielt. Dazu ist die Klasse der SPH-Systeme eingeführt und die IDA-PBC-Methode entsprechend erweitert worden. Es ist gezeigt worden, dass die vorgestellte Methode alle schaltenden (stückweise C^1 -stetigen) Zustandsrückführungen generiert, für die der geschlossene Regelkreis eine gleichmäßig asymptotisch stabile Ruhelage besitzt. Für eine spezielle Klasse von schaltenden Systemen ist eine systematische Vorgehensweise für die Wahl der Struktur- und Dämpfungsmatrizen sowie für den anschließenden Reglerentwurf präsentiert worden.

A Anhang

A.1 Beweis von Lemma 3

Aus Theorem 2.3 in [23] ist bekannt, dass

$$i_{\pm}(\mathbf{R}) = i_{\pm}(\mathbf{R}^A) + i_{\pm} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_R^A \mathbf{R}^B \\ (\mathbf{R}^B)^T \mathbf{E}_R^A & \mathbf{S}_R^A \end{bmatrix} \quad (55)$$

gilt, wobei $\mathbf{S}_R^A = \mathbf{R}^D - (\mathbf{R}^B)^T (\mathbf{R}^A)^{\dagger} \mathbf{R}^B$ das Schurkomplement von \mathbf{R}^A und $\mathbf{E}_R^A = \mathbf{I} - \mathbf{R}^A (\mathbf{R}^A)^{\dagger}$ den orthogonalen Projektor auf Kern(\mathbf{R}^A) bezeichnet. Mit Theorem 16.1 in [7] folgt aus $\mathbf{R} \geq 0$, dass $\mathbf{R}^A \geq 0, \mathbf{E}_R^A \mathbf{R}^B = \mathbf{0}$ und $\mathbf{S}_R^A \geq 0$ gilt. Da aus $\mathbf{R}^A \geq 0$ folgt, dass $(\mathbf{R}^A)^{\dagger} \geq 0$ ist, ist klar, dass $i_{+}(\mathbf{S}_R^A) \leq i_{+}(\mathbf{R}^D)$. Folglich gilt $i_{+}(\mathbf{R}) = i_{+}(\mathbf{R}^A) + i_{+}(\mathbf{S}_R^A) \leq i_{+}(\mathbf{R}^A) + i_{+}(\mathbf{R}^D)$. Dass das Maximum tatsächlich angenommen werden kann, folgt mit $\mathbf{R}^B = \mathbf{0}$ aus (55).

A.2 Beweis von Satz 6

Zunächst sei angenommen, dass eine Matrix \mathbf{X}_0 mit $\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_0^T \geq 0$ gegeben ist, welche

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_0^T \mathbf{A}^T = \mathbf{Q} \geq 0 \quad (56)$$

erfüllt. Es seien \mathbf{v}_i die Linkseigenvektoren von \mathbf{A} , d. h. $\mathbf{v}_i^* \mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{v}_i^*, 1 \leq i \leq n$. Multipliziert man (56) von links mit \mathbf{v}_i^* und von rechts mit \mathbf{v}_i erhält man für reelle Eigenwerte, d. h. $\lambda_i = \lambda_i^*$,

$$\lambda_i \mathbf{v}_i^* (\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_0^T) \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^* \mathbf{Q} \mathbf{v}_i \geq 0. \quad (57)$$

Wegen $\mathbf{v}_i^* (\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_0^T) \mathbf{v}_i \geq 0$ und $\mathbf{v}_i^* \mathbf{Q} \mathbf{v}_i \geq 0$ muss für reelle Eigenwerte $\lambda_i < 0$ gelten, dass $\mathbf{v}_i \in \text{Kern}(\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_0^T)$ und für reelle Eigenwerte $\lambda_i \leq 0$, dass $\mathbf{v}_i \in \text{Kern}(\mathbf{Q})$. Es folgt unmittelbar, dass $\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_0^T \geq 0$ nicht mehr als $n - i_{-}(\mathbf{A})$ positive Eigenwerte besitzen kann.

Im Folgenden wird gezeigt, dass für jedes \mathbf{Q} , dessen Kern von den Linkseigenvektoren von \mathbf{A} zu reellen

nichtpositiven Eigenwerten aufgespannt wird, eine Lösung existiert, welche (32) erfüllt. Zunächst sei darauf hingewiesen, dass unter den formulierten Bedingungen $\text{Bild}(\mathbf{Q}) \subseteq \text{Bild}(\mathbf{A})$ gilt und dementsprechend (31) gemäß Satz 5 lösbar ist.

Es seien die Spalten der Matrix \mathbf{V} die Eigen- bzw. Hauptvektoren von \mathbf{A}^T . Gleichung (31) kann in die Form

$$\mathbf{D}^* \hat{\mathbf{X}} + \hat{\mathbf{X}}^* \mathbf{D} = \hat{\mathbf{Q}} \quad (58)$$

transformiert werden mit $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{V}^* \mathbf{X} \mathbf{V}$ und $\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{V}^* \mathbf{Q} \mathbf{V}$. Die Matrix \mathbf{D} ist eine Jordan-Matrix, die gemäß $\mathbf{D} = \text{diag}\{\mathbf{D}_{11}, \mathbf{D}_{22}, \mathbf{D}_{33}, \mathbf{D}_{44}\}$ partitioniert sei, wobei $\mathbf{D}_{11} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1}$ alle Eigenwerte in der rechten komplexen Halbebene enthält, $\mathbf{D}_{22} \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_2}$ alle komplexen Eigenwerte mit nichtpositivem Realteil, $\mathbf{D}_{33} \in \mathbb{C}^{n_3 \times n_3}$ die Null-Eigenwerte und $\mathbf{D}_{44} \in \mathbb{C}^{n_4 \times n_4}$ die reellen negativen Eigenwerte. Durch eine entsprechende Anordnung der Spalten von \mathbf{V} kann diese Form immer erreicht werden. Nachdem $\hat{\mathbf{X}}$ und $\hat{\mathbf{Q}}$ entsprechend in Blöcke partitioniert worden sind, d. h.

$$\hat{\mathbf{X}} = [\hat{\mathbf{X}}_{ik}], \quad i, k \in \{1, \dots, 4\}, \quad \hat{\mathbf{X}}_{ik} \in \mathbb{C}^{n_i \times n_k}, \quad (59)$$

$$\hat{\mathbf{Q}} = [\hat{\mathbf{Q}}_{ik}], \quad i, k \in \{1, \dots, 4\}, \quad \hat{\mathbf{Q}}_{ik} \in \mathbb{C}^{n_i \times n_k}, \quad (60)$$

und unter Berücksichtigung der Tatsache, dass beide Seiten von (58) hermitesch sind, kann die Gleichung in 10 Matrixgleichungen

$$\mathbf{D}_{ii}^* \hat{\mathbf{X}}_{ik} + \hat{\mathbf{X}}_{ki}^* \mathbf{D}_{kk} = \hat{\mathbf{Q}}_{ik}, \quad i \in \{1, \dots, 4\}, \quad k \in \{i, \dots, 4\}. \quad (61)$$

aufgespalten werden. Im Folgenden sei $\hat{\mathbf{X}}_{[1,l]} = [\hat{\mathbf{X}}_{ik}]$, $i, k \in \{1, \dots, l\}$. Für $i = k = 1$ und mit der Wahl $\hat{\mathbf{X}}_{11} = \hat{\mathbf{X}}_{11}^*$ erhält man aus (61) eine Ljapunow-Gleichung, die wegen $i_+(\mathbf{D}_{11}) = n_1$ und $\hat{\mathbf{Q}}_{11} > 0$ eine eindeutige Lösung $\hat{\mathbf{X}}_{11} = \hat{\mathbf{X}}_{11}^T > 0$ besitzt. Für $i = k = 2$ zeigt sich, dass die Diagonalelemente von $\hat{\mathbf{X}}_{22} + \hat{\mathbf{X}}_{22}^*$ beliebig positiv gewählt werden können und zwar unabhängig von den übrigen Einträgen in $\hat{\mathbf{X}}_{[1,2]} + \hat{\mathbf{X}}_{[1,2]}^*$. Für $i = k = 3$ ist (61) trivial erfüllt, da unter den gegebenen Voraussetzungen $\hat{\mathbf{Q}}_{33} = \mathbf{D}_{33} = \mathbf{0}$ gilt. Folglich kann $\hat{\mathbf{X}}_{33}$ so gewählt werden, dass $\hat{\mathbf{X}}_{33} + \hat{\mathbf{X}}_{33}^* > 0$. Für $k = 3$, $i \in \{1, 2\}$ vereinfacht sich (61) zu $\mathbf{D}_{ii}^* \hat{\mathbf{X}}_{i3} = \mathbf{0}$. Da \mathbf{D}_{ii} für $i \in \{1, 2\}$ vollen Rang besitzt, muss $\hat{\mathbf{X}}_{i3} = \mathbf{0}$ sein, während $\hat{\mathbf{X}}_{3i}$ beliebig gewählt werden kann. Zusammenfassend zeigt sich, dass unter den gegebenen Voraussetzungen $\hat{\mathbf{X}}_{[1,3]} + \hat{\mathbf{X}}_{[1,3]}^* > 0$ immer möglich ist. Nun wählt man $\hat{\mathbf{X}}_{i4} = \hat{\mathbf{X}}_{4i}^* = \mathbf{0}$. Damit ist wegen $\hat{\mathbf{Q}}_{i4} = \mathbf{0}$ Gleichung (61) für $k = 4$, $i \in \{1, \dots, 4\}$ erfüllt. Außerdem ist $\hat{\mathbf{X}} + \hat{\mathbf{X}}^*$ eine positiv semidefinite Matrix mit $n_4 = i^-(\mathbf{A})$ Eigenwerten in Null und $n - n_4 = n - i^-(\mathbf{A})$ positiven Eigenwerten. Folglich ist $\mathbf{X} = \mathbf{V}^* \hat{\mathbf{X}} \mathbf{V}^{-1}$ eine reellwertige Lösung von (31) so, dass $\mathbf{X} + \mathbf{X}^T \geq 0$ eine Anzahl von $i^-(\mathbf{A})$ Null-Eigenwerten und $n - i^-(\mathbf{A})$ positiven Eigenwerten besitzt. Es sei angemerkt, dass, um aus $\hat{\mathbf{X}}$ eine reellwertige Lösung $\mathbf{X} = \mathbf{V}^* \hat{\mathbf{X}} \mathbf{V}^{-1}$ zu erhalten, die spezielle Struktur der Matrizen $\hat{\mathbf{X}}_{12}$, $\hat{\mathbf{X}}_{22}$ und $\hat{\mathbf{X}}_{21}$ berücksich-

tigt werden muss, die sich aufgrund der Tatsache ergibt, dass \mathbf{X} eine reellwertige Matrix ist und die Linkseigenvektoren zu komplexen Eigenwerten in konjugiert komplexen Paaren auftreten.

Danksagung

Die Autoren danken Heiko Panzer für die fruchtbaren Diskussionen und wertvollen Anregungen, Prof. Boris Lohmann für seine Unterstützung und der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) für die finanzielle Förderung. Darüber hinaus möchten die Autoren den beiden Gutachtern für ihre wertvollen Kommentare danken.

Literatur

- [1] A. C. Antoulas: *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*. SIAM, 2005.
- [2] R. Bhatia: *Positive Definite Matrices*. Princeton University Press, 2007.
- [3] M. S. Branicky: Multiple Lyapunov Functions and Other Analysis Tools for Switched and Hybrid Systems. In: *IEEE Trans. Autom. Control* 43(4), 475–482 (1998).
- [4] D. Cheng, G. Feng, Z. Xi: Stabilization of a class of switched nonlinear systems. In: *IET Control Theory Appl.* 4(1), 53–61 (2006).
- [5] D. Cheng, A. Astolfi, R. Ortega: On feedback equivalence to port controlled Hamiltonian systems. In: *Systems Control Lett.* 54(9), 911–917 (2005).
- [6] J. Daafouz, P. Riedinger, C. Lung: Stability Analysis and Control Synthesis for Switched Systems: A Switched Lyapunov Function approach. In: *IEEE Trans. Autom. Control* 47(11), 1883–1887 (2002).
- [7] J. Gallier: *Geometric Methods and Applications: For Computer Science and Applications*. Springer, 2011.
- [8] W. M. Haddad, S. G. Nersesov, V. Chellaboina: Energy-based control for hybrid port-controlled Hamiltonian systems. In: *Automatica* 39(8), 1425–1435 (2003).
- [9] H. T. Jongen, J. Sprekels: The Index-k-Stabilizing Differential Equation. In: *OR Spektrum* 2(4), 223–225 (1981).
- [10] W. Kemmetmüller, F. Fuchshumer, A. Kugi: Nonlinear pressure control of self-supplied variable displacement axial piston pumps. In: *Control Engineering Practice* 18(1), 84–93 (2010).
- [11] T. Kloiber, P. Kotyczka: Passivity-Based Design of Switching Controllers for Nonlinear Systems. In: *Proc. American Control Conf.* 2012.
- [12] P. Kotyczka: *Transparente Dynamikvorgabe bei der nichtlinearen passivitätsbasierten Zustandsregelung*, Technische Universität München, Diss., 2010.
- [13] D. Liberzon: *Switching in Systems and Control*. Birkhäuser, 2003.
- [14] L. Long, J. Zhao: Global stabilization for a class of switched nonlinear feedforward systems. In: *Systems Control Lett.* 60(9), 734–738 (2011).
- [15] J. Lévine: *Analysis and Control of Nonlinear Systems*. Springer, 2009.
- [16] J. L. Mancilla-Aguilar, R. A. García: A converse Lyapunov theorem for nonlinear switched systems. In: *Systems Control Lett.* 41(1), 67–71 (2000).
- [17] J. L. Mancilla-Aguilar, R. A. García: An extension of LaSalle's invariance principle for switched systems. In: *Systems Control Lett.* 55(5), 376–384 (2006).
- [18] P. Mhaskar, N. H. El-Farra, P. D. Christofides: Predictive Control of Switched Nonlinear Systems With Scheduled Mode Transitions. In: *IEEE Trans. Autom. Control* 50(11), 1670–1680 (2005).

- [19] R. Ortega, E. Garcia-Canseco: Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control: A Survey. In: *Eur. J. Control* 10(5), 432–450 (2004).
- [20] R. Ortega, A. van der Schaft, B. Maschke, G. Escobar: Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled Hamiltonian systems. In: *Automatica* 38(4), 585–596 (2002).
- [21] S. Solmaz, R. Shorten, K. Wulff, F.Ó Cairbre: A design methodology for switched discrete time linear systems with applications to automotive roll dynamics control. In: *Automatica* 44(9), 2358–2363 (2008).
- [22] P. Tabuada, G.J. Pappas: From Nonlinear to Hamiltonian via Feedback. In: *IEEE Trans. Autom. Control* 48(8), 1439–1442 (2003).
- [23] Y. Tian: Equalities and inequalities for inertias of Hermitian matrices with applications. In: *Linear Algebra Appl.* 433(1), 263–296 (2010).
- [24] Y. Tian, Y. Liu: Extremal Ranks of Some Symmetric Matrix Expressions with Applications. In: *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 28(3), 890–905 (2006).
- [25] J.L. Wu: Feedback Stabilization for Multiinput Switched Nonlinear Systems: Two Subsystems Case. In: *IEEE Trans. Autom. Control* 53(4), 1037–1042 (2008).
- [26] J.L. Wu: Stabilizing controllers design for switched nonlinear systems in strict-feedback form. In: *Automatica* 45(4), 1092–1096 (2009).
- [27] K. Wulff, F. Wirth, R. Shorten: A control design method for a class of switched linear systems. In: *Automatica* 45(11), 2592–2596 (2009).
- [28] L. Zhu: Passivity and Stability of Switched Hamiltonian Systems. In: *Proc. of the 2010 International Conference on Computer Application and System Modeling* Bd. 5, V5-103–V5-107 (2010).

Manuskripteingang: 23. Februar 2012



Dipl.-Ing. Tobias Kloiber ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Regelungstechnik (Prof. B. Lohmann), Technische Universität München. Hauptarbeitsgebiete: Nichtlineare Regelung, schaltende Systeme

Adresse: siehe unten,
E-Mail: tobias.kloiber@tum.de



Dr.-Ing. Paul Kotyczka ist Akademischer Rat am Lehrstuhl für Regelungstechnik (Prof. B. Lohmann), Technische Universität München und leitet die Arbeitsgruppe „Energiebasierte Regelung“. Hauptarbeitsgebiete: Nichtlineare Regelung, (unteraktuierte) mechanische Systeme

Adresse: Lehrstuhl für Regelungstechnik, Technische Universität München, Fakultät Maschinenwesen, Boltzmannstr. 15, 85748 Garching,
E-Mail: kotyczka@tum.de



Oldenbourg
Verlag

Ein Wissenschaftsverlag der
Oldenbourg Gruppe

Ein Handbuch für den Einsatz von MATLAB® und Simulink® in der Signalverarbeitung



Josef Hoffmann, Franz Quint
Signalverarbeitung mit MATLAB® und Simulink®
Anwendungsorientierte Simulationen

2. Auflage 2012
XII, 395 Seiten
broschiert
ISBN 978-3-486-70887-5
€ 44,80

Das Buch behandelt grundlegende Themen der Signalverarbeitung mit Schwerpunkt auf der Implementierung der Algorithmen in MATLAB® und Simulink®. Dazu gehören die Entwicklung analoger und digitaler Filter mit klassischen und speziellen Entwurfsverfahren, die Multiraten-Signalverarbeitung mit Filterbänken, Polyphasenfiltern, CIC- und IFIR-Filtern sowie adaptive Filter. Neu aufgenommen wurden die Fractional-Delay-Filter und ihre Realisierung als so genannte Farrow-Filter.

Mit den MATLAB®-Programmierwerkzeugen können die behandelten Themen mit anwendungsnahen Simulationen, die über die üblichen analytisch lösbaren Beispiele hinausgehen, veranschaulicht werden. Der Leser kann so die Verfahren aus unterschiedlichen Blickwinkeln untersuchen und den eigenen Lernprozess effektiv und interessant gestalten.



Prof. Dr. Ing. Josef Hoffmann war Professor an der Hochschule Karlsruhe – Technik und Wirtschaft und hat dort das Fachgebiet Digitale Kommunikationstechnik vertreten. Er unterrichtet weiter als Lehrbeauftragter und setzt intensiv die MATLAB®-Werkzeuge ein.



Prof. Dr. Ing. Franz Quint unterrichtet an der Fakultät für Elektro- und Informationstechnik der Hochschule Karlsruhe – Technik und Wirtschaft Digitale Nachrichtenübertragung, Signalverarbeitung sowie Informationstheorie und Codierung.

Bestellen Sie in Ihrer Fachbuchhandlung
oder direkt bei uns: Tel: +4989 45051-248
Fax: +4989 45051-333 | orders@oldenbourg.de

www.oldenbourg-verlag.de